Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 41

Übungsaufgaben

AUFGABE 41.1. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2\,.$$

AUFGABE 41.2. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 5 \text{ und } y'(0) = 6\,.$$

AUFGABE 41.3. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -cy$$

mit $c > 0$.

AUFGABE 41.4. Finde alle Lösungen der in Beispiel 41.2 betrachteten Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g$$

mit Hilfe von Satz 32.10.

AUFGABE 41.5. Zeige, dass die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = 0$$

einen n-dimensionalen reellen Vektorraum bilden.

In der Vorlesung wurde nur besprochen, wie eine eindimensionale Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung führt. Diese Übersetzung gibt es auch höherdimensional.

Aufgabe 41.6. Es sei ein Differentialgleichungssystem

$$y_1^{(n)} = h_1\Big(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)}\Big), \ldots,$$

$$y_m^{(n)} = h_m\Big(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)}\Big)$$

der Ordnung n in m Variablen gegeben. Zeige, dass man dieses System analog zur Vorgehensweise in Lemma 41.4 in ein äquivalentes System erster Ordnung in mn Variablen übersetzen kann.

Aufgabe 41.7. Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, das in jedem Punkt in Richtung des Ursprungs wirkt und damit eine Beschleunigung erzeugt, die proportional zur Entfernung sein soll (also ein harmonisches Pendel in der Ebene). Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen $u = x'$ und $v = y'$ führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -cx, \\ y' &= v, \\ v' &= -cy. \end{aligned}$$

Dabei sind die beiden ersten Gleichungen unabhängig von den beiden letzten Gleichungen, und zwar handelt es sich jeweils um das in Aufgabe 41.3 besprochene System. Somit sind die Lösungen gleich

$$x(t) = \alpha \cos \sqrt{c}t + \beta \sin \sqrt{c}t$$

und

$$y(t) = \gamma \cos \sqrt{c}t + \delta \sin \sqrt{c}t.$$

Man überlege sich, wie die Anfangsbedingungen (x_0, u_0, y_0, v_0) mit den Lösungsparametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zusammenhängen und welche Bahnen die Lösungskurven beschreiben. Wann ist es ein Kreis, eine Ellipse, ein Strahl, eine Spirale?

Aufgabe 41.8. Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, d.h. im Ursprungspunkt $(0, 0)$ ist das Gravitationszentrum (ein Stern), das eine auf dieses Zentrum gerichtete Kraftwirkung und damit eine Beschleunigung erzeugt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen geteilt durch das Quadrat des Abstandes. Das Gravitationszentrum wird als unbeweglich angenommen, und es wird die Wirkungsweise auf einen (verglichen mit der Masse des Zentrums) kleinen Probekörper untersucht. Da in die Beschleunigung des Probekörpers dessen Masse auch proportional eingeht, ist diese für den Bewegungsprozess irrelevant. Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums und der Gravitationskonstanten abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen $u = x'$ und $v = y'$ führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}^3} x, \\ y' &= v, \\ v' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}^3} y. \end{aligned}$$

(1) Wir betrachten kreisförmige Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ r \sin at \end{pmatrix}$$

mit $a, r \in \mathbb{R}_+$. Welche Beziehung muss zwischen c, a, r bestehen (drittes Keplersches Gesetz)?

(2) Wir betrachten elliptische Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ s \sin at \end{pmatrix}$$

mit $a, r, s \in \mathbb{R}_+$. Welche Beziehung muss zwischen c, a, r, s bestehen?

(3) Finde Lösungen, die auf einem Strahl zum Zentrum verlaufen.

Aufgabe 41.9. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Bestimme zur Schrittweite $s = \frac{1}{k}$ die approximierenden Punkte P_n gemäß dem Polygonzugverfahren. Bestimme insbesondere P_k. Was passiert mit P_k für $k \to \infty$?

Aufgabe 41.10.*

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 41.7 zu einem Startzeitpunkt t_0, einem Startpunkt $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und einer vorgegebenen Schrittweite $s > 0$ die approximierenden Punkte P_n berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte P_n für

(1) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{10},\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10.$
(2) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{100},\ n = 100.$
(3) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{1000},\ n = 1000.$
(4) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1,001 \\ 0,999 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{1000},\ n = 1000.$
(5) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1,01 \\ 0,99 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{1000},\ n = 1000.$
(6) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{1000},\ n = 1000.$
(7) $t_0 = -3,\ P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{10},\ n = 100.$
(8) $t_0 = 0,\ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ s = \frac{1}{1000},\ n = 1000.$

()

Aufgabe 41.11. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 41.12.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = ty + 1 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

Aufgabe 41.13. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^3 - y - 4t + 2t^2 \text{ mit } y(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.14. (1) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -\sin y$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(2) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -y$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(3) Vergleiche die Lösungen zu (1) und (2).

Für die beiden folgenden Aufgaben verwende man die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \pm \ldots .$$

Für den inhaltlichen Hintergrund siehe Beispiel Anhang 1.5 bzw. Beispiel Anhang 1.6.

Aufgabe 41.15.*

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$x'' = \frac{-2gx - 4x(x')^2}{1+4x^2}$$

mit $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$ bis zur Ordnung 4. Dabei ist g eine Konstante.

Aufgabe 41.16. Löse das Anfangswertproblem

$$x'' = -gx\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}x'^2.$$

mit $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$ durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 4.

Aufgabe 41.17.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = 3yy' + y^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.18. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} xt^2 - y^2t \\ xy \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.19. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} t^3 - yt^2 \\ tx^2y - \sinh t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.20. (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite $s = \frac{1}{2}$ die Näherungspunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle $t = \pi/2$.

Aufgabe 41.21. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + t^2 y - 5ty^2 + 3t^3 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.22. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = y + (y')^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.23. (4 Punkte)

Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y'' .$$

Aufgabe 41.24. (6 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} x^2 t - xyt + y^3 - yt^3 \\ x^3 - xy^2 + \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Abbildungsverzeichnis