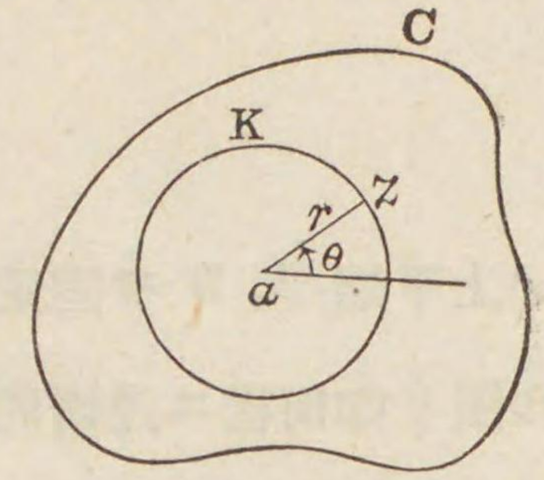
$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(K)} f(z)dz.$$

吾人ハ今後ノ研究ノ便宜上

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)} f(z)dz$$

ヲ稱シテ函數 $f(z)$ ノ $z=a$ ニ於ケル留數トナヅクベシ。之ヲ A ニテ表セバ



第五十三圖

$$\int_{(C)} f(z)dz = 2\pi i\mathrm{A}$$

トナル。

注意. 上ノ定義ニ於テ K ノ内部ニハ a ヨリ他ニ不正則點ナキコトガ必要ナリ。コノ條件サヘ滿足セラルレバ K ノ形ハ必ズシモ圓ナルヲ要セザルコト明カナリ。

又 a ガ正則點ナル場合ニモ同一ノ定義ニテ留數トイフ語ノ用キルコトアリ, ソノ値ハ勿論0ナリ。

留數ノ値ヲ決定スルコトハ一般ニ必ズシモ容易ナラザレドモ, 之ニ關シテ次ノ定理アリ。

定理 2. $z\to a$ ナルトキ $(z-a)f(z)$ ガ有限確定ナル極限値ヲ有スルトキハ, 其値ガ卽チ $z=a$ ニ於ケル函數 $f(z)$ ノ留數ナリ。

何トナレバ, 今求ムル留數ヲ A トスレバ

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(K)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}(z-a)f(z)\frac{dz}{z-a}.$$

ココニ於テ

$$z-a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ト置ケバ, K 上ニ於テハ r ハ常數ニシテ θ ノミガ變數ナリ。依ツテ

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{r(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = id\theta,$$

故ニ

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z-a)f(z)d\theta. \qquad (5)$$

今 $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = m$

トシ, $(z-a)f(z) = m+\Delta$ (6)

ト置ケバ, 任意ノ正數 ε ニ對シ r ヲ適當ニ小ナラシムレバ K 上ニテ常ニ $|\Delta|<\varepsilon$ ナラシメ得ルコト明カナリ。

(6) ヲ (5) ニ代入スレバ

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta d\theta$$

$$= m + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta d\theta.$$

故ニ $|\mathrm{A}-m| < \frac{1}{2\pi}.\varepsilon.2\pi = \varepsilon.$

ココニ ε ハ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得ル正數ナルニヨリ, 結局

$$\mathrm{A} = m$$

ナラザル可カラズ。

例. 函數 $\frac{1}{z}$ ハ $z=0$ ニ於テノミ不正則ニシテ, $\lim_{z\to 0} z\frac{1}{z} = 1$ ナリ。故ニ單位圓ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトレバ

$$\int \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$ (168 頁ノ例)

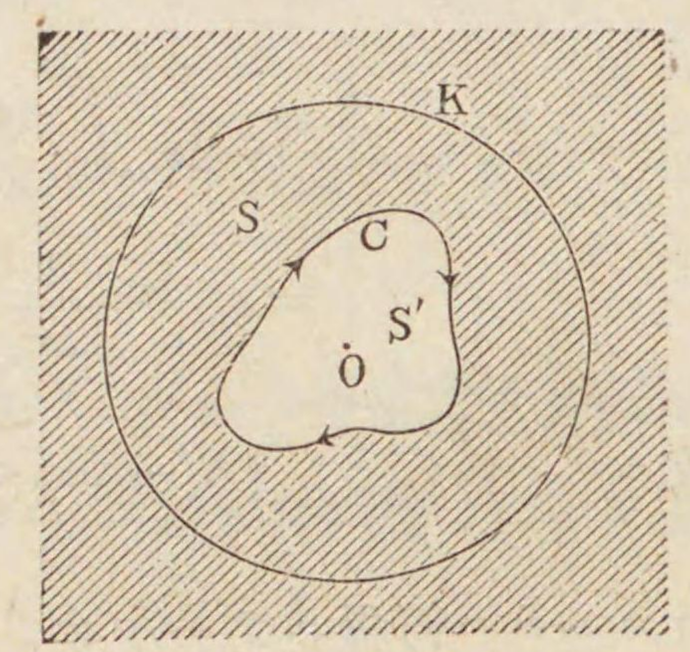
注意. 定理 2 ハ極限値 m ガ存在スル場合ニ $\mathrm{A}=m$ ナルコトヲ述ベタルダケニシテ, m ガ存在セザル場合ニツイテハ何等ノ斷定ヲモ與ヘザルナリ。

例ヘバ
$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{z^2}=\infty$$
ニシテ m ナル値ハ存在セザレドモ, 單位圓ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトレバ
$$\int\frac{dz}{z^2}=0 \qquad (\text{第 31 節例題 (1)})$$
トナルガ故ニ, 實ハ $\mathrm{A}=0$ ナルベキナリ。

系. ***$f(z)$ ガ S ノ内部ニ n 個ダケノ不正則點ヲ有スルモノトシ, 其各ニ於ケル留數ヲ夫夫 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots\cdots, \mathrm{A}_n$ トスレバ,***
$$\int_{(\mathrm{C})} f(z)dz=2\pi i(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\cdots\cdots+\mathrm{A}_n).$$

次ニ面分 S ガ無限遠點ヲ含ム場合ニツイテ考フベシ。

今例ヘバ單一閉曲線 C ノ外部ヲ S, 内部ヲ S′ トスレバ, S ノ回リヲ正又ハ負ノ方向ニ一周スルトイフコトハ, S′ ノ回リヲ負又ハ正ノ方向ニ一周スルコトニ他ナラズ。故ニモシ今考フル函數ガ S′ ニ於テモ定義セラレ其狀況ガ既知ナルトキハ S ヲ一周スル積分ハ常ニ有限面分 S′ ヲ一周スル積分ト考ヘ直シテ上記ノ諸定理ヲ利用スルコトヲ得。然レドモ今吾人ハ S′ ヲ使用スルコトナク直接ニ S ニツイテ考究セントス。



第五十四圖

S ハ點 ∞ ヲ含ム。然レドモ吾人ハ未ダ函數 $f(z)$ ガ點 ∞ ニ於テ正則ナルヤ否ヤヲ識別スル定義ヲ有セザルガ故ニ, 點 ∞ ダケハ暫ク除外シ其他ハ S ノ内部到ル所ニ於テ $f(z)$ ガ正則ナリト假定スベシ。此場合ニ S ノ回リヲ正ノ方向ニ一周スル積分

$$\int_{(-\mathrm{C})} f(z)dz$$
ノ値如何。

先ヅ原點ヲ中心トシ, C ヲ全部其内ニ含ム如キ十分大ナル圓 K ヲ畫キタリトシ, C ト K トノ間ニ挾マレタル面分ヲ考フレバ, 之ニツイテハ定理 1 ガ適用セラレ
$$\int_{(-\mathrm{C})} f(z)dz+\int_{(\mathrm{K})} f(z)dz=0,$$
故ニ
$$\int_{(-\mathrm{C})} f(z)dz=\int_{(-\mathrm{K})} f(z)dz.$$

ココニ於テ吾人ハ
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\mathrm{K})} f(z)dz$$
ナルモノヲ稱シテ函數 $f(z)$ ノ點 ∞ ニ於ケル **留數** ト名ヅク。(此定義ニ於テ K ノ外部ニテハ點 ∞ ノ他ハスベテ正則ナルコトガ必要ナリ。) 之ヲ B ニテ表セバ, 今考フル所ノ積分ノ値ハ $2\pi i\mathrm{B}$ トナル。

定理 3. ***$z\to\infty$ ナルトキ $zf(z)$ ガ有限確定ナル極限値ヲ有スルトキハ, 其符號ヲ變ジタルモノガ即チ點 ∞ ニ於ケル函數 $f(z)$ ノ留數ナリ。***

證明ハ定理 2 ニ於ケルト同樣ナレバ略ス。

系. ***$f(z)$ ガ S ノ内部ニ點 ∞ 以外ニ n 個ダケノ不正則點ヲ有スルモノトシ, 其各ニ於ケル留數ヲ夫夫 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots\cdots, \mathrm{A}_n$***

トシ，又點 ∞ ニ於ケル留數ヲ B トスレバ,

$$\int_{(-C)} f(z)dz = 2\pi i(A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n + B).$$

注意. 點 ∞ ガ函數 $f(z)$ ノ正則點ナルヤ否ヤヲ識別スルコトハ第 53 節ニ論ズベシ。然レドモ假令ソレニヨリテ點 ∞ ガ正則點ナリトセラルル場合ニテモ B ハ必ズシモ 0 ニ等シカラズ。

例. 單位圓 C ノ外部ヲ S トシ, S ヲ左手ニ見ル如キ方向ニ C ヲ一周スル積分路ヲトルトキ

$$I = \int_{(-C)} \frac{z}{(2z+1)(z-2)} dz$$

ノ値ヲ求ム。

單位圓ノ外部ニアル不正則點ハ $z = 2$ ニシテ其所ニ於ケル留數ハ

$$\lim_{z \to 2} (z-2) \frac{z}{(2z+1)(z-2)} = \frac{2}{5}.$$

マタ點 ∞ ニ於ケル留數ハ

$$-\lim_{z \to \infty} z \frac{z}{(2z+1)(z-2)} = -\frac{1}{2}.$$

故ニ求ムル積分ノ値ハ

$$I = 2\pi i\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{5}.$$

此例ニ於テハ被積分函數ハ單位圓ノ內部 S' ニ於テ唯一ツノ不正則點 $z = -\frac{1}{2}$ ヲ有スルノミニシテ, ソノ留數ハ

$$\lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{z}{(2z+1)(z-2)} = \frac{1}{10}.$$

故ニ I ヲ求ムルニ S ノ代リニ S' ニツイテ考フレバ,

$$I = -\int_{(C)} \frac{z}{(2z+1)(z-2)} dz = -2\pi i \frac{1}{10} = -\frac{\pi i}{5}.$$

例題 1. 正則函數ノ導函數ガ連續ナルコトヲ假定シ, 前節ノ定理 3 ヲ用キテ Cauchy ノ定理ヲ證明セヨ。

例題 2. 原點ヲ中心トシ 1 ヨリ大ナル半徑ヲ有スル圓周ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトルトキ, 次ノ積分ノ値ヲ求ム。

$$\int \frac{dz}{z^2 + z + 1}.$$

例題 3. 四點 $(\pm 1 \pm i)$ ヲ頂點トスル正方形ノ周圍ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトルトキ, 積分

$$\int \frac{\sin z}{z} dz \qquad 及ビ \qquad \int \frac{\cos z}{z} dz$$

ノ値ヲ求ム。

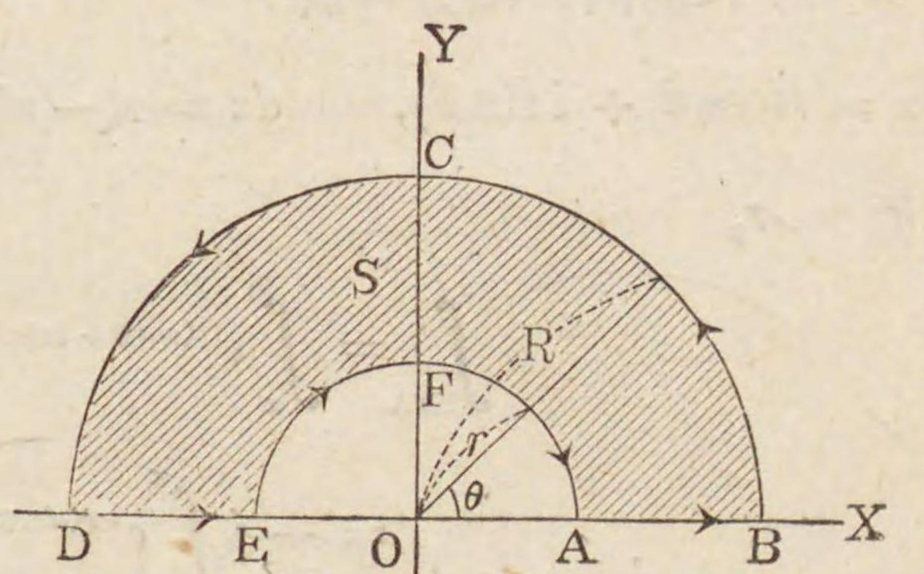
34. 實積分ノ計算

積分學ニテ知レル如ク或函數ノ不定積分ガ求メ難キ場合ニテモ之ニ特別ナル上下端ヲ附シタル定積分ハ求メ得ルコトアリ, 又或ハ不定積分ヲ求メ得ルモ其計算頗ル難澁ナルコトアリ。本節ニ於テハ斯クノ如キ定積分ノ難問ニシテ複素積分ノ應用ニヨリテ之ヲ解決シ得ル二三ノ例ヲ示サントス。

例 1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

先ヅ $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$

ト置キ, 第五十五圖ノ如ク實軸上ノ二ツノ線分及ビ二ツノ半圓周ニヨリテ圍マレタル面分 ABCDEFA ヲ S ト名ヅクレバ, $f(z)$ ハ S ノ



第五十五圖

周圍及ビ內部ニ於テ明カニ正則ナリ。依ツテ S ノ周圍ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトレバ,

$$\int \frac{e^{iz}}{z}dz = 0,$$

即チ

$$\int_{\mathrm{AB}}+\int_{\mathrm{BCD}}+\int_{\mathrm{DE}}+\int_{\mathrm{EFA}}=0 \qquad (1)$$

ナラザル可カラズ。

今 $\mathrm{OA}=r$, $\mathrm{OB}=\mathrm{R}$ トシテ, (1) ノ左邊ニ於ケル第一ト第三トノ積分ヲ合スレバ, (此兩積分ニテハ z ハ實數値ヲトルヲ以テ $z=x$ ト書キ直シテ)

$$\int_{\mathrm{AB}}+\int_{\mathrm{DE}}=\int_r^{\mathrm{R}}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{-\mathrm{R}}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$=\int_r^{\mathrm{R}}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx$$

$$=2i\int_r^{\mathrm{R}}\frac{\sin x}{x}dx. \qquad (2)$$

マタ (1) ノ第四ノ積分ニ於テ

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta), \qquad dz=r(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta=izd\theta$$

ト置ケバ,

$$\int_{\mathrm{EFA}}=\int_\pi^0 e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}id\theta$$

$$=-i\int_0^\pi e^{-r(\sin\theta-i\cos\theta)}d\theta.$$

然ルニ $\lim\limits_{r\to 0} e^{-r(\sin\theta-i\cos\theta)}=1$

ニシテ, 今 $e^{-r(\sin\theta-i\cos\theta)}=1+\Delta$

ト置ケバ, 任意ノ正數 ε ニ對シテ r ヲ十分小ナラシムレバ θ

ノ如何ニ關ラズ常ニ $|\Delta|<\varepsilon$ ナラシメ得ルコトハ容易ニ證明セラル。故ニ

$$\int_{\mathrm{EFA}}=-i\int_0^\pi d\theta-i\int_0^\pi\Delta d\theta$$

ニシテ, ココニ

$$\left|\int_0^\pi\Delta d\theta\right|<\varepsilon\pi$$

ナリ。依ツテ次ノ結果ヲ得,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\mathrm{EFA}}=-i\pi. \qquad (3)$$

最後ニ (1) ノ第二ノ積分ニ於テモ

$$z=\mathrm{R}(\cos\theta+i\sin\theta), \qquad dz=izd\theta$$

ト置ケバ,

$$\int_{\mathrm{BCD}}=\int_0^\pi e^{i\mathrm{R}(\cos\theta+i\sin\theta)}id\theta$$

$$=i\int_0^\pi e^{-\mathrm{R}\sin\theta}.\,e^{i\mathrm{R}\cos\theta}d\theta.$$

ココニ $|e^{i\mathrm{R}\cos\theta}|=1$

ナルガ故ニ

$$\left|\int_{\mathrm{BCD}}\right|\leqq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\mathrm{R}\sin\theta}d\theta.$$

然ルニ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキハ,

$$\sin\theta>\frac{2\theta}{\pi} \qquad (4)$$

ナルヲ以テ,*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

此結果ハ $R\to\infty$ ナルトキ 0 ニ收斂ス。故ニ

$$\lim_{R\to\infty}\int_{BCD} = 0. \qquad (5)$$

(1), (2), (3), (5) ニヨリテ直チニ次ノ關係ヲ得。

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx - i\pi = 0,$$

從ツテ

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

注意 1. 與ヘラレタル實積分ヲ求ムルタメニ如何ナル複素積分ヲ考フ可キカトイフコトハ練習ニヨリテ自得セザル可カラズ。然レドモ其著想ハ實積分ヲ直接ニ考フルヨリハ概シテ平易ナリ。

注意 2. ナホ以下ノ例ニヨリテモ明カナル如ク此種ノ問題ニ使用セラルル技巧ハ大同小異ニシテ,殊ニ (4) ノ不等式ハ屢利用セラルルモノナリ。

例 2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}, \qquad a>0.$

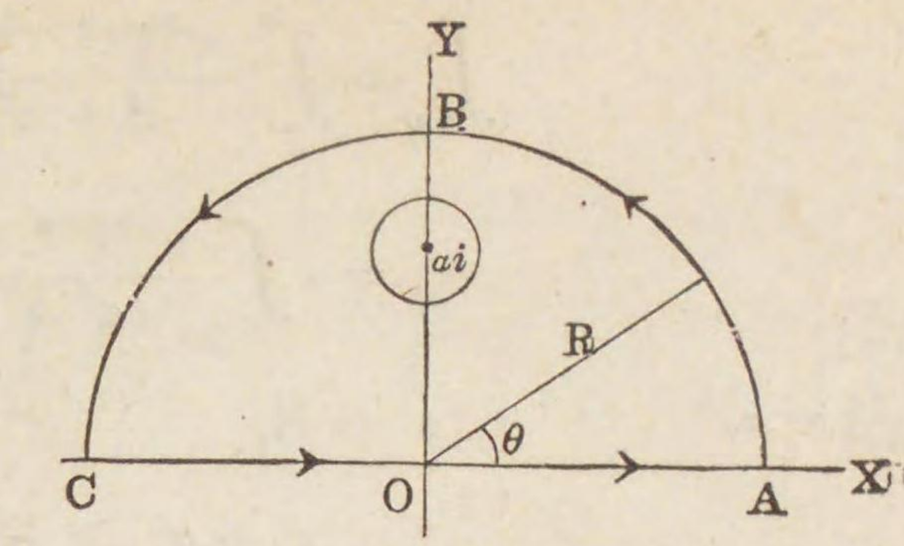
先ヅ

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}, \qquad a>0$$

---

* $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = F(\theta)$ トスレバ, $F(0)=1$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$ ニシテ,且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキハ $F'(\theta)<0$ ナリ。故ニ $F(\theta) > \dfrac{2}{\pi}$. 之ヨリ (4) ヲ得。

ト置キ,之ヲ第五十六圖ノ如キ a ヨリ大ナル半徑 R ヲ有スル半圓ノ全周ニ沿ウテ積分スベシ。



第五十六圖

$f(z)$ ハ此半圓ノ內部ニ唯一ツノ不正則點 ai ヲ有シ,ソノ留數ハ

$$\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = \frac{e^{-a}}{2ai}$$

ナリ。故ニ

$$\int \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i\frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

$-x=t$
$dx=dt$

或ハ此左邊ヲ書キ直セバ,

$$\int_{OA} + \int_{ABC} + \int_{CO} = \frac{\pi e^{-a}}{a}. \qquad (6)$$

$-\int_0^{-R}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$

$\int_0^R \frac{e^{-it}}{t^2+a^2}dt$

コノ第一ト第三トノ積分ヲ變形スレバ,

$$\int_{OA} + \int_{CO} = \int_0^R \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx + \int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$$

$$= \int_0^R \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{x^2+a^2}dx$$

$-t=x$
$t=R$

$$= 2\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx. \qquad (7)$$

$-\int_0^{-R}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$

又第二ノ積分ニ於テ

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$-x=t$

$+\int_0^R \frac{e^{-it}}{t^2+a^2}dt$

ト置ケバ

$$\int_{\mathrm{ABC}} = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\mathrm{R}(\cos\theta + i\sin\theta)}}{z^2 + a^2} izd\theta$$

$$= i\int_0^{\pi} \frac{e^{-\mathrm{R}\sin\theta}\cdot e^{i\mathrm{R}\cos\theta}}{z^2 + a^2} zd\theta.$$

然ルニ $|z| = \mathrm{R}, \qquad |e^{i\mathrm{R}\cos\theta}| = 1,$

$$|z^2 + a^2| \geqq \mathrm{R}^2 - a^2$$

ナルガ故ニ,

$$\left|\int_{\mathrm{ABC}}\right| \leqq \frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{R}\sin\theta}d\theta.$$

依ツテ例 1 ニ於ケルト同様ニシテ

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{\mathrm{ABC}} = 0 \tag{8}$$

ナルコトヲ證明シ得。

(6), (7), (8) ヨリ直チニ所題ノ結果ヲ得。

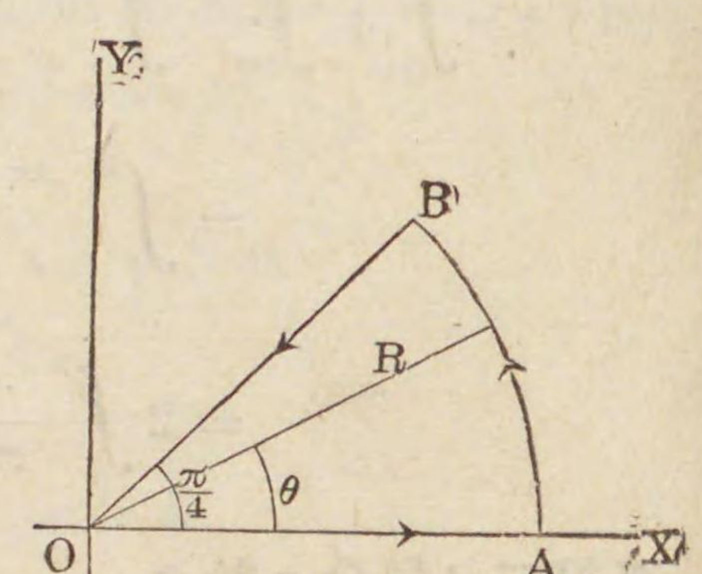
例 3. $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin(x^2)dx = \int_0^{\infty}\cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

(之ヲ **Fresnel ノ積分** トイフ。)

函數 e^{-z^2} ハ第五十七圖ノ如キ扇形ノ周圍及ビ内部ニ不正則點ヲ有セズ。依ツテ之ヲ積分スレバ

$$\int_{\mathrm{OA}} + \int_{\mathrm{AB}} + \int_{\mathrm{BO}} = 0. \tag{9}$$

サテ OA = R トスレバ, 第一ノ積分ハ



第五十七圖

$$\int_{\mathrm{OA}} = \int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}dx$$

ナルガ故ニ,

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{\mathrm{OA}} = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.^{*} \tag{10}$$

マタ第二ノ積分ニ於テ

$$z = \mathrm{R}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ト置ケバ,

$$\int_{\mathrm{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} izd\theta$$

$$= i\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\theta}\cdot e^{-i\mathrm{R}^2\sin 2\theta} zd\theta.$$

故ニ

$$\left|\int_{\mathrm{AB}}\right| \leqq \mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\theta}d\theta.$$

ココニ於テ $2\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ ナル置換ヲ行ヒ, 前例ノ方法ニ倣ヘバ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{R}^2\sin\phi}d\phi < \frac{\pi}{4\mathrm{R}^2}(1 - e^{-\mathrm{R}^2}).$$

故ニ

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{\mathrm{AB}} = 0. \tag{11}$$

最後ニ第三ノ積分ニ於テハ, z ハ OB 上ノ變數ナルヲ以テ, $|z| = x$ ト置ケバ x ハ實數ニシテ,

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}x, \qquad z^2 = ix^2.$$

* 本章ノ問題 19 ヲ見ヨ。

故ニ

$$\int_{BO} = \int_{R}^{0} e^{-tx^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}dx$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_{0}^{R}\{\cos(x^2) - i\sin(x^2)\}dx.$$

ココニ於テ R→∞ トシ, (9), (10), (11) ト綜合スレバ,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^\infty \cos(x^2)dx - i\int_0^\infty \sin(x^2)dx\right\} = 0.$$

之ヨリ

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx - i\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

ヲ得。兩邊ノ實部及ビ虚部ヲ夫夫比較スレバ所題ノ結果ヲ得。

例題 1. m, a ガ任意ノ正數ナルトキ

$$\lim_{R\to\infty}\int \frac{e^{imz}}{z^a}dz = 0$$

ナルコトヲ證明セヨ, 但シ積分路ハ第五十六圖ノ ABC ノ如キ半圓周ナリトス。

例題 2. $\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x}dx$ 及ビ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ ノ値ヲ求メヨ。

例題 3. 例 3 ニ於テ扇形ノ角ヲ一般ニ $\alpha\left(\leqq \frac{\pi}{4}\right)$ トシ, 依ツテ次ノ結果ヲ證明セヨ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\alpha}\cos(x^2\sin 2\alpha)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\alpha,$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\alpha}\sin(x^2\sin 2\alpha)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\alpha.$$

例題 4. $a > 0$ トシテ, $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$ ヲ證明セヨ。

35. 正則函數ノ積分表示

定理 1. 函數 $f(z)$ ガ z 平面上ノ有限面分 S ノ周圍及ビ內部ヲ通ジテ連續ニシテ且ソノ內部ニ於テハ到ル所正則ナルトキ, S ノ內部ノ一點 a ニ於ケル $f(z)$ ノ値ハ

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (1)$$

ニヨリテ與ヘラル。但シ C ハ S ノ全周ニシテ, z ハ之ヲ正ノ方向ニ一周スルモノトス。

コレ卽チ正則函數ノ値ヲ積分ノ形ニ表シタルモノニシテ, 之ヲ Cauchy ノ**積分表示** トイフ。

此定理ノ眞ナルコトハ第 33 節ノ所論ヨリシテ直チニ證明セラル。何トナレバ假定ニヨリ $f(z)$ ハ S ニ於テ正則ナルガ故ニ, (1) ノ右邊ニ於ケル被積分函數ハ S ノ內部ニ不正則點ヲ有ストスルモ其ハ分母ヲ 0 ナラシムル z ノ値卽チ a ヨリ他ニアルベカラズ。然ルニ其留數ヲ考フレバ

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a} = f(a).$$

故ニ

$$\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a).$$

之ヨリ直チニ (1) ヲ得。

注意. S ハ單一連結ナルモノト限ラズ。S ガ重複連結ナルトキハ C ハ S ノ周圍ヲナススベテノ曲線ヲ總稱スルモノト考フベシ。

ココニ吾人ハ (1) ナル表示式ガ含蓄スル內容ヲ玩味セザル可

カラズ。蓋シ (1) ノ右邊ニ於ケル積分ノ値ヲ決定センニハ單ニ C ナル曲線上ニ於ケル $f(z)$ ノ値ノミヲ知ラバ足レリ，S ノ內部ニ於ケル $f(z)$ ノ値ヲ知ル必要ハ毫モコレ無シ。然ルニ此積分ヲ遂行シテ得ル所ノモノハ S ノ內部ニ於ケル $f(z)$ ノ値 $f(a)$ ニ等シ。之ニ依ツテ見レバ正則函數ナルモノハ一ツノ閉曲線ノ上ノ各點ニ於ケル函數ノ値ガ定マレバ其內部ノスベテノ點ニ於ケル値モ亦之ニ從ツテ當然定マルモノナリ。コレ寔ニ驚歎ニ値スベキ一性質ニシテ，一ツノ函數ガ正則ナル變域內ノ各點ニ於ケル數値ノ間ニハ秋毫ノ變改ヲモ許サザル整然タル調和ノ存在スルコトヲ示スモノナリ。

試ミニ任意ノ實函數 $F(x, y)$ ヲトリテ見ヨ。假令之ヲ微分可能ナリトスルモ，或ハ其導函數ガ更ニ連續ナリトスルモ，xy 面上ノ一ツノ閉曲線ノ上ノ値ガ定マリタルノミニテハ其內部ニ於ケル值ハ定マラザルベシ。

注意. 上ニ述ベタルコトハ實際ニ正則函數ガ存在スルトキニハ C ノ上ノ値ノミニヨリテ S ニ於ケル値ガスベテ定マルコトヲ言ヘルニ過ギズ。C ノ上ノ値ヲ吾人ガ全然任意ニ與フルトキ常ニ之ヲ其値トシテ有スル正則函數ヲ作リ得トイフニハアラズ。

例ヘバ單位圓 C ノ周圍ノ上ノ一點 ζ ニテハ常ニ $\frac{1}{\zeta}$ ナル値ヲ有シ，單位圓ノ內部ニテハ到ル所正則ナル函數 $f(z)$ ヲ作ラントスルニ，其函數ガ單位圓內ノ一點 z ニ於テ有スベキ値ハ (1) ニヨレバ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta -}$$

$$= \frac{1}{2\pi i z}\left\{\int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta}\right\}$$

ナラザル可カラズ。然ルニ此括弧內ノ二ツノ積分ハ何レモ $2\pi i$ ニ等シ。依ツテ

$$f(z) = 0$$

トナリ，單位圓周上ニテモ 0 ナル値ヲトルコトトナル。故ニ結局求ムル如キ正則函數ハ存在セザルナリ。$\left(f(z) = \frac{1}{z}\right.$ トスレバ單位圓ノ內部ニ $z = 0$ ナル不正則點アリ，題意ニ適セズ。)

次ニ定理 1 ヨリ誘導セラルル二三ノ結果ヲ擧ゲン。

先ヅ　　$f(z) = u + iv, \quad f(a) = u_0 + iv_0$

トシ，積分路 C ハ點 a ヲ中心トスル半徑 r ナル圓周ナリトシ，

$$z - a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ト置ケバ，(1) ニヨリ

$$u_0 + iv_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{u + iv}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} r(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u + iv)d\theta.$$

兩邊ノ實部ト虛部トヲ夫夫比較スレバ

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ud\theta, \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} vd\theta. \qquad (2)$$

依ツテ次ノ系ヲ得。

系 1. 一點ニ於ケル正則函數ノ値ノ實部及ビ虛部ハ各其點ヲ中心トスル任意ノ圓周上ニ於ケル其値ノ平均値ニ等シ。

從ツテ正則函數ノ實部及ビ虛部ハ極大値及ビ極小値ヲ有セズ。

更ニ絕對値ニ關シテ次ノ系アリ。

系 2. 正則函數ノ絕對値ハ極大値ヲ有セズ。

何トナレバ，今 $|f(z)|$ ガ $z=a$ ニ於テ極大値ヲトリタリトシ，a ヲ中心トシ半徑 r ヲ以テ畫ケル圓周ヲ C トスレバ，

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

故ニ

$$|f(a)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}|f(z)|.\left|\frac{dz}{z-a}\right|.$$

然ルニ假定ニヨリ，r ヲ適當ニトレバ C 上ニテハ

$$|f(z)|\leqq|f(a)|$$

ニシテ少クモ C ノ一部ニ於テ不等號ガ必ズ成立スル樣ニスルコトヲ得，又

$$z-a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ト置ケバ，

$$\left|\frac{dz}{z-a}\right|=|d\theta|.$$

故ニ

$$|f(a)|<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a)|d\theta=|f(a)|,$$

コレ不合理ナリ。

系 3. $f(z)$ ガ一ツノ閉面分ニ於テ正則ナラバ，$|f(z)|$ ハソノ周上ニテ最大値ヲトル。

系 4. 正則函數ノ絕對値ハ零以外ノ極小値ヲ有セズ。

ソノ函數ノ逆數ヲ考フレバ系 2 ヨリ容易ニ之ヲ結論セラル。

定理 2. 函數 $f(z)$ ガ無限遠點ヲ除キタル數平面上到ル所正則ニシテ且其絕對値ガ一定ノ正數ヲ越エザルトキハ，$f(z)$ ハ實ハ一ノ常數ナリ。

(之ヲ Liouville ノ定理 トイフ。)

ココニ無限遠點ヲ除キタルハ該點ニ於テ $f(z)$ ガ正則ナルヤ否ヤヲ判別スベキ定義ヲ未ダ知ラザレバナリ，ナホ之ニ就イテハ第 53 節ニ於テ補足スル所アルベシ。

今 z ノ任意ノ値ヲトリ，$2|z|<\mathrm{R}$ ナル如キ半徑 R ヲ以テ原點ヲ中心トスル圓 C ヲ畫ケバ定理 1 ニヨリ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta.$$

故ニ

$$f(z)-f(0)=\frac{z}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta.$$

ココニ於テ　$\zeta=\mathrm{R}(\cos\theta+i\sin\theta)$

ト置ケバ，

$$f(z)-f(0)=\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\theta.$$

然ルニ假定ニヨリ　$|f(\zeta)|\leqq\mathrm{M}$

ナル一定ノ正數 M アリ。又

$$|\zeta-z|\geqq|\zeta|-|z|=\mathrm{R}-|z|>\frac{\mathrm{R}}{2}.$$

故ニ

$$|f(z)-f(0)| < \frac{|z|}{2\pi}\frac{2M}{R}2\pi = \frac{2M|z|}{R}.$$

此右邊ハ R ヲ大ナラシムレバ何程ニテモ小サクナルモノナリ。故ニ

$$f(z) = f(0)$$

ニシテ, 卽チ $f(z)$ ハ常數ナラザル可カラズ。

Liouville ノ定理ヲ應用スレバ有名ナル **代數學ノ基本定理 (Gauss ノ定理)** ヲ證明スルコトヲ得, 卽チ次ノ如シ。

定理 3. **$c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ ヲ任意ノ複素數トシ, ココニ $c_0 \neq 0$, $n \geqq 1$ トスレバ, 方程式**

$$f(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} + \cdots\cdots + c_n = 0 \qquad (3)$$

ハ複素數ノ範圍內ニ於テ少クモ一ツノ根ヲ有ス。

今假リニ (3) ガ一ツモ根ヲ有セズトスレバ, 任意ノ有限値 a ニ對シテ

$$\lim_{z\to a} f(z) \neq 0$$

ナリ。何トナレバ若シ此極限値ガ 0 ナラバ, $f(z)$ ハ連續函數ナルニヨリ, $f(a) = 0$ トナリ (3) ハ根ヲ有スレバナリ。又一方ニ於テ

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \neq 0$$

ナルコトモ容易ニ證明セラル。

故ニ今 $\dfrac{1}{f(z)}$ ナル函數ヲ考フレバ, 恰度定理 2 ノ條件ヲ具備スルヲ見ルベシ。依ツテ $\dfrac{1}{f(z)}$ ハ常數, 從ツテ $f(z)$ モ亦常數ナ

ラザル可カラズ。然レドモ $c_0 \neq 0$, $n \geqq 1$ ナルトキ $f(z)$ ガ常數ニアラザルコトハ明カナリ。故ニ (3) ハ少クモ一ツノ根ヲ有セザル可カラズ。

例題 1. 實函數 $u = F(x, y)$ ガ或變域ニ於テ微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ヲ滿足セシムルトキハ, u ハ其變域內ニ於テ極大及ビ極小トナラザルコトヲ證明セヨ。

例題 2. e^z ハ z ノアラユル有限値ニ對シテ正則ニシテ且有限ナル値ヲ有ス。然ラバ Liouville ノ定理ニヨリテ e^z ハ常數ナリトイヒ得ルカ。

36. 不定積分

定理. **函數 $f(z)$ ガ z 平面上ノ面分 S ニ於テ連續ニシテ, 且 S ノ內部ニ任意ノ二點 z_0, Z ヲトルトキ積分**

$$I = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz$$

ガ積分路ノ形ニ無關係ナル一定ノ値ヲ有スルトキハ, I ハ Z ノ一價正則函數ニシテ, ソノ導函數ハ $f(Z)$ ニ等シ。

I ハトニカク Z ノ函數ニシテ一價ナルコトハ假定ニヨリテ明カナリ, 依ツテ之ヲ F(Z) ト書クコトトス, 卽チ

$$F(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz. \qquad (1)$$

之ガ Z ノ正則函數ナルコトヲ次ニ證明セントス。

S ノ內部ニ於テ Z ノ近傍ニ Z + h ヲトレバ,

$$F(Z+h)=\int_{z_0}^{Z+h} f(z)dz. \qquad (2)$$

ココニ假定ニヨリ此積分ノ値ハ積分路ノ形ニハ無關係ナルニヨリ，今便宜上 z_0 ヨリ Z マデハ (1) ト (2) トハ同ジ路ヲトルモノトシ，(2) ニ於テ Z ヨリ $Z+h$ マデハ此兩點ヲ結ブ線分ニ沿ヒテ進ムモノト考フベシ。然ルトキハ

$$F(Z+h)=F(Z)+\int_{Z}^{Z+h} f(z)dz$$

$$=F(Z)+\int_{Z}^{Z+h}\{f(Z)+f(z)-f(Z)\}dz$$

$$=F(Z)+f(Z)\int_{Z}^{Z+h}dz+\int_{Z}^{Z+h}\{f(z)-f(Z)\}dz,$$

故ニ

$$F(Z+h)-F(Z)-f(Z)h=\int_{Z}^{Z+h}\{f(z)-f(Z)\}dz.$$

假定ニヨリ $f(z)$ ハ連續ナルニヨリ，$|h|$ ヲ十分小ナラシムレバ任意ノ正數 ε ニ對シテ

$$|f(z)-f(Z)|<\varepsilon$$

ナラシムルコトヲ得。從ツテ

$$|F(Z+h)-F(Z)-f(Z)h|<\varepsilon|h|$$

トナリ，ココニ $h\to 0$ ナラシムレバ，

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(Z+h)-F(Z)}{h}=f(Z).$$

故ニ F(Z) ハ Z ノ正則函數ニシテ，ソノ導函數ハ $f(Z)$ ニ等シ。

特ニ S ガ單一連結ニシテ，$f(z)$ ガ S ニ於テ正則ナルトキハ本定理ノ假定ニ於ケル條件ハ確カニ滿足セシメラル（第33節定理1系4)。依ツテ次ノ系ヲ得。

系 1. 函數 $f(z)$ ガ單一連結ナル面分 S ニ於テ正則ナルトキハ，S ノ内部ニ上下端ヲ有スル積分

$$F(Z)=\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$$

ハ Z ノ一價正則函數ニシテ，$F'(Z)=f(Z)$ ナリ。

系 2. 單一連結ナル面分 S ニ於テ正則ナル函數ハ常ニ一ノ一價正則函數ノ導函數ト考フルコトヲ得。

サテ以上ノ各場合ニ於テ積分ノ上端ヲ變數 z ニテ表セバ

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz \qquad (3)$$

ニシテ，ココニ $F'(z)=f(z)$ ナリ。但シ $F(z)$ ハ z_0 ニモ關係スルコト勿論ナレドモ，z_0 ヲ他ノ値例ヘバ z_1 トスルコトガ $F(z)$ ニ及ボス影響ハ單ニ一ノ常數ヲ增減スルニ過ギズ，何トナレバ

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz-\int_{z_1}^{z} f(z)dz=\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

$$=F(z_1)-F(z_0)$$

ニシテ此右邊ハ z ニ無關係ナレバナリ。

一般ニ $F'(z)=f(z)$ ナル如キ正則函數 $F(z)$ ハ無數ニ多クアレドモ，ソレラハ相互ニ常數ダケノ差ヲ有スルニ過ギザルモノ

ナリ。何トナレバ，今二ツノ正則函數 $F_1(z)$, $F_2(z)$ アリテ，

$$F_1'(z)=f(z), \qquad F_2'(z)=f(z)$$

ナリトスレバ

$$\frac{d}{dz}\{F_1(z)-F_2(z)\}=0.$$

故ニ今

$$F_1(z)-F_2(z)=u+iv$$

ト置ケバ，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

ナラザル可カラズ。故ニ u 及ビ v ハ常數，卽チ $F_1(z)$ ト $F_2(z)$ トノ差ハ常數ナリ。

之ニヨリテ見レバ，導函數ガ $f(z)$ トナル如キ正則函數ハスベテ (3) ニヨリテ與ヘラルルモノナリ。

其一ツヲ $F(z)$ トスレバ，一般ニ

$$\int_a^b f(z)dz=F(b)-F(a)=\Big[F(z)\Big]_a^b$$

ナルコトハ第31節ニ示セル所ノ如シ。コノ a, b ヲ省略シテ

$$\int f(z)dz=F(z)$$

ト記スコトアリ，之ヲ稱シテ $f(z)$ ノ **不定積分** トイフ。

例題 1

$$I=\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$$

ニ於テ I ヲ z_0 ノ函數ト考ヘテ本節ノ所論ヲ反復セヨ。

例題 2. 次ノ微分方程式ニ適合スル最一般ナル正則函數ヲ求メヨ。

$$(1)\quad \frac{dw}{dz}=c, \qquad (2)\quad \frac{dw}{dz}=w,$$

但シ c ハ常數トス。

37. 正則函數ノ導函數

定理 1. 函數 $f(z)$ ガ z 平面上ノ有限ナル正則曲線（閉曲線ト限ラズ）C ノ上ニ於テ連續ニシテ，a ガ C ノ上ニアラザル一點ナルトキ，積分

$$F(a)=\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-a}dz \tag{1}$$

ハ a ノ正則函數ニシテ，其導函數ハ

$$F'(a)=\int_{(C)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz \tag{2}$$

ニヨリテ與ヘラル。

今 a ノ近傍ニ C ノ上ニアラザル一點 $a+h$ ヲトレバ，(1) ニヨリ

$$F(a+h)=\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-a-h}dz.$$

從ツテ

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=\int_{(C)}\frac{f(z)}{h}\left(\frac{1}{z-a-h}-\frac{1}{z-a}\right)dz$$

$$=\int_{(C)}\frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)}dz. \tag{3}$$

ココニ於テ

$$\frac{1}{(z-a-h)(z-a)}=\frac{1}{(z-a)^2}+\Delta$$

ト置ケバ，

$$\Delta=\frac{h}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

ナルヲ以テ, a 及ビ $a+h$ ヨリ C ニ至ル最短距離ヲ ρ トスレバ

$$|\Delta| \leqq \frac{|h|}{\rho^3}$$

ナルコト明カナリ。*

扨 (3) ヲ書キ直セバ

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \int_{(C)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz + \int_{(C)} f(z)\Delta dz$$

トナリ, ココニ C 上ニ於ケル $|f(z)|$ ノ最大値ヲ M トスレバ,

$$\left|\int_{(C)} f(z)\Delta dz\right| \leqq \frac{Ml|h|}{\rho^3}$$

ナリ, 但シ l ハ C ノ長サトス。

故ニ

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \int_{(C)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz.$$

之ニヨリテ $F(a)$ ノ正則ナルコトヲ知ルト同時ニ (2) ヲ證明シ得タリ。

同様ノ論法ヲ進ムレバ $F''(a)$ ヲ計算スルコトヲ得ベシ。即チ (2) ヨリシテ

$$\frac{F'(a+h)-F'(a)}{h} = \int_{(C)} \frac{f(z)}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}\right\}dz.$$

ココニ於テ

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}\right\} = \frac{2}{(z-a)^3}+\Delta$$

* 後ニ $h\to 0$ ナラシムルガ故ニ, 結局 ρ ハ a ヨリ C ニ至ル最短距離トナル。

ト置ケバ,

$$\Delta = \frac{3(z-a)h-2h^2}{(z-a-h)^2(z-a)^3}$$

ニシテ, ρ ヲ前ト同ジ意味ニ用キレバ

$$|\Delta| \leqq \frac{3|h|}{\rho^4}+\frac{2|h|^2}{\rho^5}$$

ナルコトヲ證明シ得。之ヨリ前ノ如クニシテ

$$F''(a) = 2\int\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

ヲ得。ナホ一般ニハ數學的歸納法ニヨリテ

系.
$$F^{(n)}(a) = n!\int_{(C)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

ナルコトヲ證明シ得。

然ルニ一般ニ $F^{(n)}(a)$ ガ存在スルコトハ $F^{(n-1)}(a)$ ノ正則ナルコトヲ示スモノナルガ故ニ, 結局 (1) ニヨリテ定義セラレタル函數 $F(a)$ ハ啻ニ其自身ガ正則ナルノミナラズ, 其逐次導函數ガスベテ正則ナルモノナリ。

サテ函數 $f(z)$ ガ正則ナル變域内ニ於テ之ニ屬スル點ノミヲ内部ニ有スル樣ニ任意ノ單一閉曲線 C ヲ畫ケバ, ソノ内部ニ於ケル函數ノ値ヲ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

ナル形ニ表示シ得ルコトハ既ニ之ヲ知レリ (第 35 節定理 1)。之ニ對シテ今得タル結論ヲ適用スレバ直チニ次ノ定理ヲ得ベシ。

定理 2. 正則函數ノ導函數ハ同ジ變域ニ於テ矢張一ノ正則函數ナリ。從ツテ正則函數ハスベテ正則ナル逐次導函數ヲ有ス。(之ヲ Goursat **ノ定理**トイフ。)

原函數ヲ $f(z)$ トスレバ，其逐次導函數ハ次ノ式ニヨリテ與ヘラル。

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

但シ ζ ハ積分變數ニシテ C ノ上ヲ正ノ方向ニ一周スルモノトス。

之ニ依ツテ見レバ複素函數ニ於テハ單ニ第一次導函數ノ存在ダケヲ假定スレバ其導函數ノ連續性ノ如キハ當然ノ結果トシテ誘導セラルルモノナリ。

注意. 實函數ニ於テハ假令第一次導函數ガ存在スルコトヲ知ルモソレダケニテハ其導函數ノ連續性等ニツキテ何等ノ斷定ヲモ下シ得ズ。

定理 3. 函數 $f(z)$ ガ z 平面上ノ面分 S ニ於テ連續ニシテ，且 S ニ屬スル點ノミヲ內部ニ含ム任意ノ閉曲線 C ニ沿ウテ一周スル積分路ニ對シテ常ニ

$$\int_{(C)} f(z)dz=0$$

ナルトキハ，$f(z)$ ハ S ノ內部ニ於テ到ル所正則ナリ。

之ヲ Morera **ノ定理**トイフ，第33節ニ述ベタル Cauchy ノ定理ノ逆ニ相當スルモノナリ。其證明次ノ如シ。

S ノ內部ニ任意ノ二點 z_0, z ヲトレバ，假定ニヨリ，積分

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z)$$

ノ値ハ S 內ニ於ケル積分路ノ連續的變形ニハ無關係ナル筈ナリ。依ツテ前節ノ定理ニヨリ，$F(z)$ ハ z ノ正則函數ニシテ

$$F'(z)=f(z)$$

ナル關係アリ。然ラバ $f(z)$ ハ正則函數 $F(z)$ ノ導函數ナルガ故ニ，Goursat ノ定理ニヨリ，其自身モ亦正則ナラザル可カラズ。

系. z 平面上ノ一面分ノ周圍及ビ內部ヲ通ジテ連續ナル函數 $f(z)$ ガ其內部ニ於テ正則ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ，其面分ニ屬スル點ノミヲ內部ニ含ム任意ノ閉曲線ヲ積分路トスルトキ常ニ

$$\int f(z)dz=0$$

ナルコトナリ。

例題. 定理 1 ノ系ニ於テ $n=3$ ナル場合ヲ證明セヨ。

第五章ノ問題

1. 線積分ニ關シテ次ノ諸性質ヲ證明セヨ。

(1)
$$\int_{\mathrm{A(C)B}} = -\int_{\mathrm{B(-C)A}},$$

但シ被積分函數ハ兩邊同一ナリトス。

(2)
$$\int_{\mathrm{AA_1}} + \int_{\mathrm{A_1B}} = \int_{\mathrm{AB}},$$

但シ被積分函數ハ各項同一ニシテ，積分路ハスベテ同一ノ曲線 C ニ沿ウテ取ルモノトシ，$\mathrm{A}, \mathrm{A_1}, \mathrm{B}$ ハ C 上ノ三點トス。

(3)
$$\int_{(\mathrm{C})}(\mathrm{P_1}dx + \mathrm{Q_1}dy) + \int_{(\mathrm{C})}(\mathrm{P_2}dx + \mathrm{Q_2}dy) = \int_{(\mathrm{C})}\{(\mathrm{P_1} + \mathrm{P_2})dx + (\mathrm{Q_1} + \mathrm{Q_2})dy\}.$$

(4)
$$\int_{(\mathrm{C})}(h\mathrm{P}dx + k\mathrm{Q}dy) = h\int_{(\mathrm{C})}\mathrm{P}dx + k\int_{(\mathrm{C})}\mathrm{Q}dy,$$

但シ h, k ハ常數トス。

(5)
$$\left|\int_{(\mathrm{C})}(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy)\right| \leqq \mathrm{M}(\mathrm{X} - x_0) + \mathrm{N}(\mathrm{Y} - y_0),$$

但シ C ハ單調ニ上昇スル曲線，(X, Y), (x_0, y_0) ハソノ上下端ニシテ M, N ハ其間ニ於ケル $|\mathrm{P}|$, $|\mathrm{Q}|$ ノ最大値ナリトス。

2. P, Q ガ x, y ノ實函數ニシテ連續ナル偏導函數ヲ有スルトキ，線積分

$$\int(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy)$$

ノ値ガ上下端ノミニヨリテ定マリ，積分路ノ形ニ無關係ナルタメニ P Q ノ間ニ存在スベキ必要ニシテ且十分ナル條件如何。

3. 原點ヲ中心トシ半徑 a ヲ以テ畫キタル圓ノ實軸ヨリ上ニアル半圓周ヲ積分路トスルトキ，複素積分

$$\int_{-a}^{a}\frac{dz}{z^2+1}, \qquad (0 < a < 1 \quad \text{又ハ} \quad a > 1)$$

ヲ實積分ニ直シテ其値ヲ計算セヨ。

4. 次ノ積分ノ値ヲ求ム　但シ積分路ハスベテ直線トス。

(1) $\displaystyle\int_{1-i}^{3+2i}(2z^2 - 5z + 6)dz,$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1+i} z^2 \sin z\,dz,$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{i}\frac{z}{z+1}dz,$　　(4) $\displaystyle\int_{-1}^{i}\frac{dz}{z^2+z-2}.$

5. 原點ヲ中心トスル種種ノ圓周ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトリテ，次ノ積分ノ値ヲ求メヨ。

(1) $\displaystyle\int\frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)}dz,$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}.$

6. 函數 $f(z)$ ガ面分 S ノ内部ニ唯一ツノ不正則點 a ヲ有スルモ，

$$(z-a)^n f(z) = \varphi(z) \qquad (n\ \text{ハ正ノ整數})$$

ト置クトキ $\varphi(z)$ ガ a ニ於テ正則ナラバ，S ニ於テ a ノ回リヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトルトキ，

$$\int f(z)dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. 次ノ積分ノ値ヲ求ム，但シ何レモ原點ヲ中心トシ 1 ヨリ大ナル半徑ヲ有スル圓周ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトルモノトスベシ。

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz,$　　(2) $\displaystyle\int\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$

8. 一ノ閉面分ニ於テ $f(z)$ ガ正則ニシテ且 0 トナラザルトキハ，$|f(z)|$ ハソノ周上ニテ最小値ヲトルコトヲ證明セヨ。

9. 函數 $f(z)$ ガ單一閉曲線 C ノ周圍及ビ内部ヲ通ジテ連續ニシテ且其内部ニ於テ正則ナルトキ，其内部ノ一點ヲ a トシ，a ヨリ C ニ至ル最短距離ヲ ρ，又 C ノ長サヲ l トシ，C 上ニ於ケル $|f(z)|$ ノ最大値ヲ M トスレバ，次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

$$|f(a)| \leqq \frac{\mathrm{M}l}{2\pi\rho}, \qquad |f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!\,\mathrm{M}l}{2\pi\rho^{n+1}}, \qquad = 1, 2, \cdots\cdots$$

10. 前題ニ於テ特ニ C ヲ圓周，a ヲ其中心トシテ，次ノ關係ヲ誘導セヨ。

$$|f(a)| \leqq \mathrm{M}, \qquad |f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!\,\mathrm{M}}{\rho^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

11. 前題ノ結果ヲ利用シ, Liouville ノ定理 (第 35 節定理 2) ヲ證明セヨ。

12. 函數 $f(z)$ ガ z 平面上任意ノ有限面分ニ於テ正則ニシテ且 $|f(z)|$ ガ一定數 M ヲ越エザルトキ, a, b ヲ任意ノ二數トシテ

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \varphi(z)$$

ト置ケバ, $\varphi(z)$ ノ $z=\infty$ ニ於ケル留數ガ 0 ナルコトヲ證明シ, 依ツテ原點ヲ中心トシ十分大ナル半徑ヲ有スル圓周ヲ積分路トスレバ

$$\int \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0$$

ナルコトヲ示シ, 之ヨリ

$$f(a) = f(b)$$

ヲ誘導シ, 之ニ依ツテマタ Liouville ノ定理ヲ證明セヨ。

13. 函數 $F(z, \zeta)$ ハ z 及ビ ζ ガ夫夫ノ平面上ニ於ケル面分 A 及ビ A′ ニアルトキ正則ナリトシ, 又曲線 C ハ A ノ内部ニアリトスレバ,

$$\varphi(\zeta) = \int_{(C)} F(z, \zeta) dz$$

ハ ζ ノ函數トシテ A′ ニ於テ正則ニシテ, 且

$$\varphi'(\zeta) = \int_{(C)} \frac{\partial}{\partial \zeta} F(z, \zeta) dz$$

ナルコトヲ證明セヨ。

14. 前題ニ於テ A′ ノ内部ニアル一ノ曲線ヲ C′ トスレバ,

$$\int_{(C')} \left\{ \int_{(C)} F(z, \zeta) dz \right\} d\zeta = \int_{(C)} \left\{ \int_{(C')} F(z, \zeta) d\zeta \right\} dz$$

ナルコトヲ證明セヨ。

15. 函數 $f(z)$ ガ $|z|$ ノ十分大ナルトキ連續ニシテ, 且

$$\lim_{z \to \infty} z f(z) = K \qquad (K \text{ ハ常數})$$

ナルトキ, 原點ヲ中心トシ半徑 R ヲ以テ弧 AB ヲ畫キ, A 及ビ B ノ偏角ヲ夫夫 θ_1 及ビ θ_2 トスレバ

$$\lim_{R \to \infty} \int_{AB} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) K$$

ナルコトヲ證明セヨ。

16. 前題ノ結果ハ $z \to \infty$, $R \to \infty$ ノ代リニ夫夫 $z \to 0$, $R \to 0$ トスルモ猶眞ナルコトヲ證明セヨ。

17. 函數 $f(z)$ ハ $|z|$ ノ十分大ナルトキ連續ニシテ且

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

ナルトキ, 原點ヲ中心トシ R ナル半徑ヲ以テ畫キタル圓ノ實軸ヨリ上ニアル半圓周ヲ C トスレバ,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{(C)} e^{miz} f(z) dz = 0$$

ナルコトヲ證明セヨ, 但シ $m > 0$ トス。

18. 複素積分ヲ應用シテ次ノ實積分ヲ計算セヨ, 但シ a, m 等ハ正ノ實數トス。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1 + x^2 + x^4} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^4 + a^4} dx$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x + 1} dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2} dx$　　(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1 + x + x^2} dx$

19. 被積分函數ヲ

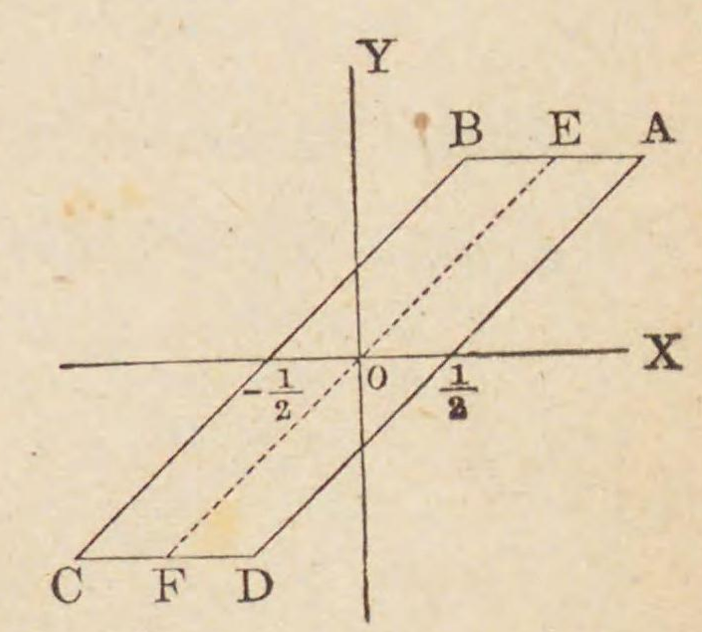
$$\frac{e^{2\pi i z^2}}{e^{2\pi i z} - 1}$$

トシ, 之ヲ四直線

$$y = \pm N \qquad (N > 0),$$

$$y = x \pm \frac{1}{2}$$

ニヨリテ作ラルル平行四邊形 ABCD (第五十八圖) ノ邊 AB, BC, CD, DA ニ沿ヒテ積分セルモノヲ夫夫 I_1, I_2, I_3, I_4 トスルトキ, 次ノ各項ヲ證明セヨ。



第五十八圖

(1) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 1$,

(2) $\displaystyle\lim_{N \to \infty} I_1 = 0$,　　$\displaystyle\lim_{N \to \infty} I_3 = 0$,

(3) $$\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_4 = \int_{\mathrm{CB}} e^{2\pi i z^2}(e^{2\pi i z} + 1)dz$$

$$= \int_{\mathrm{CB}} e^{2\pi i\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-\frac{\pi i}{2}} dz + \int_{\mathrm{CB}} e^{2\pi i z^2} dz,$$

(4) $$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_{\mathrm{BCFEB}} e^{2\pi i z^2} dz = 0,$$

從ツテ

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_{\mathrm{CB}} e^{2\pi i z^2} dz = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_{\mathrm{FE}} e^{2\pi i z^2} dz,$$

(5) $$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} (\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_4) = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_{\mathrm{FE}} e^{2\pi i z^2}(1 - i)dz = 1,$$

(6) 以上ノ結果ニヨリ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

第六章

無限級數

38. 複素級數

各項ガスベテ實數ナル級數ヲ **實級數** トイヒ，一般ニ複素數ヲ項トスル級數ヲ **複素級數** トイフ。今吾人ハ實級數ニ關スルコトハスベテ既知ナルモノトシ，ココニハ複素級數ニツイテ論ゼントス，但シ實級數ノ性質ヨリ容易ニ推定セラルル如キ簡單ナル事項ハ一切省略スベシ。

複素數 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots$ ヲ項トスル級數ニ於テ

$$\lim_{n\to\infty} (z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n) = \mathrm{S} \tag{1}$$

ナル有限確定ノ極限値ガ存在スルトキハ，其級數ハ **收斂** ナリトイヒ，S ヲ其級數ノ **和** ト稱ス。級數ガ收斂ナラザルトキハ之ヲ **發散** ナリトイフ。

モシ一般ニ

$$z_k = x_k + iy_k, \qquad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

ト置クトキハ，(1) ノ左邊ヲ書キ直シテ

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n) + i \lim_{n\to\infty} (y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n)$$

トスルコトヲ得。故ニ複素級數

$$z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n+\cdots\cdots \qquad (2)$$

ガ收斂ナルコトハ二ツノ實級數

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots \quad 及ビ \quad y_1+y_2+\cdots+y_n+\cdots \qquad (3)$$

ガ夫夫收斂ナルコトト同一ナリ。コレラノ實級數ノ和ヲ X 及ビ Y トスレバ

$$\mathrm{S}=\mathrm{X}+i\mathrm{Y}$$

ナルコト明カナリ。

複素級數ノ各項ノ絕對値ヲ項トスル級數ヲ稱シテ原ノ級數ノ**絕對値級數**トイフ。

級數 (2) ノ絕對値級數ガ收斂ナルトキハ，(3) ナル二ツノ實級數ノ絕對値級數モ亦收斂ナルコトハ容易ニ證明セラル．依ツテ (3) ナル二ツノ級數ハ收斂ナリ，從ツテマタ (2) モ收斂ナラザル可カラズ。卽チ複素級數ノ絕對値級數ガ收斂ナルトキハ原ノ級數ハ當然收斂ナリ，此場合ニ原級數ハ **絕對收斂** ナリト稱ス。

絕對收斂ナラザル收斂級數ノコトヲ半收斂級數トイフコトアリ。

絕對收斂級數ニ關スル次ノ定理ハ重要ナリ。

定理 1. 絕對收斂級數ハ其項ノ順序ヲ任意ニ變ズルモ常ニ絕對收斂ニシテ，其和ハ一定ナリ。

何トナレバ，絕對値級數ハ正項實級數ナルガ故ニ，之ガ收斂ナルトキハ其項ノ順序ヲ變ズルモ亦收斂ナリ。之ニヨリテ直チニ本定理ノ前半ヲ得。マタ原級數ガ絕對收斂ナルトキハ，各項ノ實部又ハ虛部ノミヨリナル級數モ亦夫夫絕對收斂ニシテ，從

ツテ實級數ニ關スル定理ニヨリ，其項ノ順序ヲ變ズルモ常ニ各一定ナル和ヲ有ス。之ニヨリテ本定理ノ後半ヲ得。

定理 2. 二ツノ絕對收斂級數

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots, \qquad (4)$$

$$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n+\cdots\cdots \qquad (5)$$

ノ和ヲ夫夫 A, B トスレバ，級數

$$\left.\begin{array}{l} a_1b_1 \\ +a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1 \\ +a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1 \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (6)$$

モ亦絕對收斂ニシテ，其和ヲ C トスレバ

$$\mathrm{C}=\mathrm{AB}$$

ナリ。

但シココニイフ級數 (6) ノ作リ方ハ下圖ニヨリテ曉ルベシ。

$$\begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots\cdots & a_1b_n & \cdots\cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots\cdots & a_2b_n & \cdots\cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots\cdots & a_3b_n & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots\cdots & a_nb_n & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

扨此定理ヲ證明スルタメニ，今一般ニ

$$|a_k|=\alpha_k, \qquad |b_k|=\beta_k, \qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

ト置キ，且

$$\mathrm{A}_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_k,$$

$$\mathrm{B}_k = \beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_k$$

トシ，マタ上記ノ級數 (6) ノ絕對值級數ノ k 項ノ和ヲ

$$\mathrm{C}_k = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 + \cdots\cdots$$

トス。

然ルトキハ，k ニ對シテ

$$n^2 \leqq k < (n+1)^2$$

ナル如キ自然數 n ヲトルトキハ，明カニ

$$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \leqq \mathrm{C}_k < \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$$

ナル關係アリ。故ニ

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{C}_k = (\lim_{n\to\infty}\mathrm{A}_n)(\lim_{n\to\infty}\mathrm{B}_n),$$

而シテ假定ニヨリ此右邊ハ有限確定ナリ。之ニ依ツテ級數 (6) ノ絕對收斂ナルコトヲ證明シ得タリ。而シテ之ト同時ニ (6) ノ絕對值級數ノ和ハ (4) 及ビ (5) ノ絕對值級數ノ積ニ等シキコトヲ知ルベシ。

サテ一般ニ收斂級數ニ於テ，項ノ順序ヲ變ゼズシテ其若干項ヅツヲ加ヘタル和ヲ項トスル級數ヲ作ルトキハ，後者モ亦收斂ニシテ前者ト同一ノ和ヲ有ス。(其證明ハ容易ナレバ略ス。) 依ツテ今 (6) ノ和ヲ考フルニハ，之ヲ

$$(a_1b_1) + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + \cdots\cdots$$
$$\cdots + (a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + \cdots + a_nb_1) + \cdots\cdots$$

ノ如ク括弧ニ入レ，各括弧內ノ式ヲ夫夫一項トスル級數ノ和ヲ考フレバヨシ。然ルトキハ此新級數ノ n 項ノ和ハ明カニ

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

ニ等シ。故ニ無限級數 (6) ノ和ハ (4) 及ビ (5) ノ和ノ積ニ等シ。

系. C ハ次ノ如クニモ書カル，

$$\mathrm{C} = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots\cdots$$

例題 1. 本節ノ (3) ナル二ツノ實級數ガ共ニ絕對收斂ナルトキハ，(2) モ亦絕對收斂ナルコトヲ證明セヨ。

例題 2. 項ノ順序ヲ任意ニ變ズルモ常ニ收斂ナル複素級數ハ絕對收斂ナルコトヲ證明セヨ。

例題 3. 半收斂ナル實級數ニ於テハ其項ノ順序ヲ適當ニ變ズレバ任意ノ和ヲ有セシムルコトヲ得。複素級數ニ於テハ如何。

例題 4. 複素級數

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\cdots + z_n + \cdots\cdots$$

ガ收斂ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ，任意ノ正數 ε ニ對シテ適當ナル一數 n_0 ヲトレバ，$n \geqq n_0$ ナル限リ p ノ如何ニ關ラズ常ニ

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots\cdots + z_{n+p}| < \varepsilon, \qquad p = 1, 2, \cdots\cdots$$

ナルコトナリ。之ヲ證明セヨ。

39. 函數項ノ級數

本節ニ於テハ z ヲ一ツノ複素變數トシ，各項ガ夫夫 z ノ函數ナル級數

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots + f_n(z) + \cdots\cdots \qquad (1)$$

ニツイテ論ゼントス。

z 平面上ニ於テ，$f_1(z)$, $f_2(z)$, $\cdots\cdots$ ガ夫夫一定ノ值ヲ有シ且其

値ニ對シテ級數 (1) ガ收斂ナル如キスベテノ點 z ノ集合ヲ稱シテ級數 (1) ノ **收斂域** トイフ。

例ヘバ級數

$$1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n + \cdots\cdots$$

ノ收斂域ハ $|z| < 1$ ナル開面分ニシテ, 又

$$1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n^2} + \cdots\cdots$$

ノ收斂域ハ $|z| \leqq 1$ ナル閉面分ナリ。

又例ヘバ

$$1 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z^2 - \frac{1}{z}\right) + z^3 + \cdots\cdots + z^n + \cdots\cdots$$

ナル級數ノ收斂域ハ $0 < |z| < 1$ ナル二重連結ノ開面分ナリ。

z ニ收斂域內ノ任意ノ値ヲ與フルトキ, 級數 (1) ノ和ハ z ノ函數ナレバ, 之ヲ $F(z)$ ニテ表スベシ。

今收斂域內ノ z ノ一ツノ値ニ對シテ

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots + f_n(z),$$

$$R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots\cdots,$$

$$F(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

ト置クトキハ, 任意ノ正數 ε ニ對シテ適當ナル一數 n_0 ヲ定ムレバ, $n \geqq n_0$ ナルスベテノ n ニツイテ常ニ

$$|R_n(z)| < \varepsilon \qquad (2)$$

トスルコトヲ得。斯クノ如キ n_0 ノ値ニハ下界アルコト明カナルガ, 今ソノトリ得ベキ最小ノ整數値ヲ n_0 ナリトス。然ルトキハ一定ノ ε ニ對スル n_0 ナルモノハ一般ニ z ノ値ニヨリテ夫夫相異ルベシ。コレ級數 (1) ガ收斂域內ノ各點ニ於テ收斂スル

緩急ノ度ヲ異ニスルガ故ニシテ, n_0 ガ小ナル程ソノ點ニ於テ (1) ガ速カニ收斂シ, 之ニ反シテ n_0 ガ大ナル程遲ク收斂スルモノナリ。故ニモシ收斂域ノ全部又ハ一部ノ變域ヲトルトキ, ソノ各點ニ對スル n_0 ガ一定ノ上界ヲ有スルナラバ, 其變域內ニ於テハ (1) ノ收斂ニ多少ノ遲速アルモトニカク一樣ニ或程度以上ノ速サニテ收斂スルモノナルヲ知ルベシ (換言スレバソノ中ニハ (1) ヲシテ無限ニ遲ク收斂セシムル如キ z ノ値ヲ含マザルナリ, ナホ次ノ例ヲ見ヨ)。カクノ如キ場合ニハ, 級數 (1) ハ其變域ニテ「一樣ニ收斂」ナリト稱セラル。吾人ハ以上ノ考察ニヨリ次ノ定義ヲ設ク。

級數 (1) ニ關シテ z ノ或變域 A アリ; 今任意ノ正數 ε ニ對シテ z ニ無關係ナル一數 n_0 ヲ適當ニトリ $n \geqq n_0$ ナラシムレバ, A ニ屬スルスベテノ z ニツイテ常ニ (2) ガ成立スルトキハ, 級數 (1) ハ變域 A ニ於テ **一樣收斂** ナリト稱ス。

A ハ必ズシモ級數 (1) ノ收斂域ノ全部ニハアラズ。

例ヘバ級數

$$1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n + \cdots\cdots$$

ニ於テハ, $|z| < 1$ ナルトキ

$$R_n(z) = z^n + z^{n+1} + \cdots\cdots = \frac{z^n}{1 - z}$$

ナリ。故ニ今正數 ε ニ對シテ $|R_n(z)| < \varepsilon$ ナラシメンニハ

$$n > \frac{\log(\varepsilon|1 - z|)}{\log|z|} \qquad (\log|z| < 0 \text{ ナルコトニ注意})$$

ナル樣ニ n ヲ定メザル可カラズ。然ルニ此不等式ノ右邊ハ $|z| \to 1$ ナルトキ何程ニテモ大トナルヲ以テ. 如何ニ大ナル n_0 ヲトルモ $n \geqq n_0$ ナルトキ常ニ $|R_n(z)| < \varepsilon$

ガ成立ストイフヲ得ズ。

故ニ原級數ハ $|z|<1$ ニ於テ收斂ナレドモ一樣收斂ニハアラズ。

然レドモ若シ原點ヲ中心トシ 1 ヨリ小ナル半徑 k ヲ以テ圓ヲ畫ケバ，其圓ノ周圍及ビ内部ニ於テハ上記ノ級數ハ一樣收斂ナリ。

何トナレバ其圓ニ於テハ $|z|\leqq k$ ナルガ故ニ，

$$|R_n(z)|\leqq\frac{k^n}{1-k}$$

ナリ。故ニ n_0 ヲ適當ニ大ナラシムレバ，$n\geqq n_0$ ナル限リ z ノ如何ニ關ラズ常ニ $|R_n(z)|<\varepsilon$ ナラシメ得ルコト明カナリ。

z ノ或變域 B ニ於テ各項ノ函數ニツイテ夫夫

$$|f_k(z)|\leqq M_k,\qquad k=1,2,\cdots,n,\cdots\cdots$$

ナル如キ正數 M_k ガ存在シ，且

$$M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n+\cdots\cdots \tag{3}$$

ガ收斂ナラバ，級數

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots+f_n(z)+\cdots\cdots \tag{4}$$

ハ勿論 B ニ於テ收斂ニシテ，特ニ此場合ニハ **最大收斂** ナリト稱セラル。

或變域ニ於テ最大收斂ナル級數ハ同シ變域ニ於テ絶對收斂ニシテ且一樣收斂ナリ。（之ヲ Weierstrass ノ定理 トイフコトアリ。）

絶對收斂ナルコトハ證明ヲ要セズシテ明カナリ。

次ニ假定ニヨリ (3) ハ收斂ナルヲ以テ，任意ノ正數 ε ニ對シテ n ヲ或値以上ニ大ナラシムレバ常ニ

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k<\varepsilon$$

ナラシメ得。故ニ

$$|R_n(z)|\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(z)|\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k<\varepsilon.$$

之ニヨリテ級數 (4) ノ一樣收斂ナルコトヲ知ル。

例題 1. 第 n 項ガ $(z^{n-1}-z^n)$ ナル無限級數ノ收斂域ヲ定メヨ。

例題 2. 前題ノ級數ハ其收斂域ノ全部ニ於テハ一樣收斂ニアラザルコトヲ證明セヨ。

例題 3. 級數 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$ ガ z 平面上ノ面分 A ニ於テ一樣收斂ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ，任意ノ正數 ε ニ對シ A ニ於ケルスベテノ z ニツイテ

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon,\qquad p=1,2,3,\cdots\cdots$$

ナラシムル如キ一定ノ（z ニ無關係ナル）正ノ整數 n ヲ定メ得ルコトナリ。之ヲ證明セヨ。

40. 一樣收斂級數

一樣收斂ナル級數ハ種種ノ特性ヲ有ス。次ニ之ヲ叙述センニ，記述ヲ簡單ナラシムルタメ以下ノ諸定理ヲ通ジテ常ニ級數

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots+f_n(z)+\cdots\cdots$$ $=F(z)$

ハ面分 A ニ於テ一樣收斂ナリトシ，其和ヲ $F(z)$ ニテ表スコトトシ，ナホ又

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots+f_n(z),$$

$$R_n(z)=f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots\cdots$$

ト置キ，從ツテ

$$F(z)=S_n(z)+R_n(z)$$

ナリトスベシ。

定理 1. $f_k(z)\,(k=1,2,\cdots)$ ガスベテ A ニ於テ z ノ連續函數ナルトキハ, F(z) モ亦 A ニ於テ z ノ連續函數ナリ。

何トナレバ, 一樣收斂ノ定義ニヨリ, n ヲ或値以上ニ大ナリトスレバ常ニ

$$|R_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|R_n(z+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

ナラザル可カラズ。($z+h$ ハ A 内ニアルモノトス。)

今カクノ如キ n ヲトリタリトスルニ, $S_n(z)$ ハ連續函數ノ有限個數ノ和ナルヲ以テ矢張連續函數ナリ, 故ニ任意ノ正數 ε ニ對シテ $|h|$ ヲ十分小ナラシムレバ

$$|S_n(z+h)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

ナラシムルコトヲ得。

然ルトキハ

$$\begin{aligned}|F(z+h)-F(z)|&=|S_n(z+h)+R_n(z+h)-S_n(z)-R_n(z)|\\&\leqq|S_n(z+h)-S_n(z)|+|R_n(z+h)|+|R_n(z)|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

故ニ F(z) ハ z ノ連續函數ナリ。

定理 2. A 内ニ任意ノ有限曲線 C ヲトルトキ, 少クモ C ニ沿ウテ $f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ ガスベテ連續ナラバ,

$$\int_{(C)}F(z)dz=\int_{(C)}f_1(z)dz+\int_{(C)}f_2(z)dz+\cdots\cdots$$
$$+\int_{(C)}f_n(z)dz+\cdots\cdots$$

換言スレバ, **一樣收斂級數ノ和ヲ積分スルニハ, 之ヲ項別ニ積分スレバヨシ。**

定理 1 ニヨリ F(z), $S_n(z)$, $R_n(z)$ ハ C 上ニテスベテ z ノ連續函數ナリ。故ニ

$$\int_{(C)}F(z)dz=\int_{(C)}S_n(z)dz+\int_{(C)}R_n(z)dz.$$

此右邊ニ於ケル第一ノ積分ニ於テ $S_n(z)$ ハ有限項數ノ級數ノ和ナルヲ以テ, 之ヲ積分スルニハ項別ニ積分スレバヨシ。又第二ノ積分ニ於テハ, 任意ノ正數 ε ニ對シテ n ヲ或値以上ニ大ナラシムレバ, 假定ニヨリ

$$|R_n(z)|<\varepsilon.$$

故ニ C ノ長サヲ l トスレバ,

$$\left|\int_{(C)}R_n(z)dz\right|<\varepsilon l.$$

依ツテ結局

$$\left|\int_{(C)}F(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_{(C)}f_k(z)dz\right|<\varepsilon l$$

ニシテ, ココニ n ヲ大ナラシムレバ右邊ハ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得ルモノナリ。故ニ

$$\int_{(C)} F(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{(C)} f_k(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(C)} f_k(z)dz.$$

之ニヨリテ本定理ヲ得。

定理 3. **$f_k(z)$ ($k=1,2,\cdots$) ガスベテ A ニ於テ z ノ正則函數ナルトキハ, $F(z)$ モ亦 A ニ於テ z ノ正則函數ナリ。**

何トナレバ, 先ヅ $F(z)$ ガ z ノ連續函數ナルコトハ定理 1 ニヨリテ明カナリ。次ニ A ニ屬スル點ノミヲ内部ニ含ム任意ノ閉曲線 C ヲトリ之ヲ積分路トスレバ, 定理 2 ニヨリ,

$$\int_{(C)} F(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(C)} f_k(z)dz.$$

然ルニ $f_k(z)$ ハ正則ナルニヨリ,

$$\int_{(C)} f_k(z)dz = 0.$$

故ニ

$$\int_{(C)} F(z)dz = 0$$

ナリ。依ツテ Morera ノ定理ニヨリ, $F(z)$ ハ A ニ於テ z ノ正則函數ナリ。

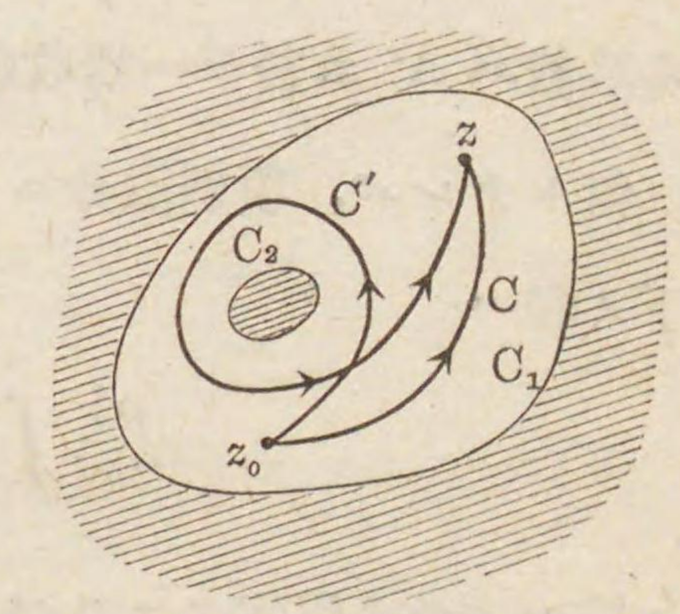
定理 4. **A ガ單一連結ナル有限面分ニシテ, $f_k(z)$ ($k=1,2,\cdots$) ガスベテ A ニ於テ z ノ正則函數ナルトキ, 定理 2 ニ於ケル積分ノ下端ヲ一定數トシ上端ヲ變數トスレバ, 項別積分ニヨリテ得タル級數ハマタ A ニ於テ一樣收斂ナリ。**

何トナレバ, 項別積分ニヨリテ得タル級數ノ第 $(n+1)$ 項以下ノ和ハ

$$\int_{(C)} R_n(z)dz$$

ニ等シク, 其絕對値ハ εl ヨリ小ナリ。扨 $R_n(z)$ ハ A ニ於テ正則ナルヲ以テ, 此積分ノ値ヲ變ゼズシテ C ノ形ヲ變ズルコトヲ得。故ニ今 C ヲシテ上下端ノ間ノ A 內ニ於ケル成ル可ク短カキ路ヲトラシムル樣ニシタリトスレバ, 單一連結ナル有限面分 A ニ於テハ l ノ値ハ上界ヲ有ス。故ニ εl ハ, n ヲ十分大ナラシムレバ, z ノ如何ニ關ラズ任意ノ小ナル正數ヨリモ小ナラシメ得ルモノナリ。之ニヨリテ今考フル級數ノ一樣收斂ナルコトヲ知ル。

注意. A ガ重複連結ナルトキハ各項ノ積分ノ上下端ガ定マルトモ積分路 C ノ取リ方ニヨリテ一般ニハ無數ニ多クノ値ヲ生ズベク, 從ツテ項別積分ニヨリテ得ル級數ハ一ノ多價函數ヲ表スベシ。其場合ニハ C ノ形ノ種類ヲ限レバ (例ヘバ C_1, C_2 ナル二ツノ閉曲線ニヨリテ圍マレタル二重連結ナル A ニ於テハ, ソノ中ニテ z_0 ヨリ z マデ C_2 ノ回リヲ回ラズニ行ク路ノミヲ考フルカ, 又ハ C_2 ノ回リヲ一回ダケ正ノ方向ニ回ルモノノミヲ考フルカ, 等ノ如クニ C ノ形ヲ限レバ) 項別積分ニヨリテ得ル級數ハ丁度多價函數ノ一分枝ダケヲ表スベク, 之ニ對シテ本定理ノ結果ガ成立ス。



第五十九圖

若シ A ガ重複連結ニテモ各項ノ積分ガ積分路ニ無關係ナラバ, 本定理ノ結論ハ勿論成立ス。

定理 5. $f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ **ガスベテ面分 A ニ於テ正則ナルトキ, A ニ屬スル任意ノ內點ヲ a トスレバ,**

$$\mathrm{F}^{(p)}(a)=f_1{}^{(p)}(a)+f_2{}^{(p)}(a)+\cdots+f_n{}^{(p)}(a)+\cdots\cdots,$$

$$p=1,2,\cdots.$$

何トナレバ, 面分 A ニ於テ a ヲ過ラズシテ之ヲ包圍スル單一閉曲線 C ヲ作リ, 其上ノ一點ヲ z トスレバ,

$$\frac{\mathrm{F}(z)}{(z-a)^{p+1}}=\frac{f_1(z)}{(z-a)^{p+1}}+\frac{f_2(z)}{(z-a)^{p+1}}+\cdots+\frac{f_n(z)}{(z-a)^{p+1}}+\cdots$$

ニシテ, 曲線 C ノ上ノミヲ z ノ變域トスレバ此右邊ノ級數ハ一樣收斂ナルコト明カナリ。ココニ於テ C ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトリテ此兩邊ヲ積分シ, 且 $\dfrac{p!}{2\pi i}$ ヲ乘ズレバ, 直チニ本定理ヲ得。(第 37 節)

定理 6. **A ノ內點ノミヨリナル閉面分ヲ A′ トシ, 定理 5 ニ於ケル a ヲ A′ ニ於ケル變數トスレバ, 項別微分ニヨリテ得タル級數ハ A′ ニ於テ一樣收斂ナリ。**

何トナレバ, 項別微分ニヨリテ得タル級數ノ第 $(n+1)$ 項以下ノ和ハ

$$\frac{p!}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})}\frac{\mathrm{R}_n(z)}{(z-a)^{p+1}}dz \qquad (1)$$

ニ等シ。サテ假定ニヨリ A′ ハ A ノ內點ノミヨリナル閉面分ナルガ故ニ, A′ ノ周圍ヨリ外部ニナホ A ノ部分アリ。依ツテ, 今 A 內ニ於テ A′ ノ點ヲスベテ內部ニ含ミ且之ト共通點ヲ有セザ

ル如キ閉曲線ヲ作ルコトヲ得ベシ。カクノ如キ曲線ヲ C トシ, C ノ長サヲ l トシ, A′ ノ周圍ト C トノ間ノ最短距離ヲ ρ トスレバ, (1) ノ絕對値ハ a ノ如何ニ關ラズ明カニ

$$\frac{p!}{2\pi}\frac{\varepsilon l}{\rho^{p+1}}$$

ヨリ小ナリ。之ニヨリテ容易ニ本定理ヲ得ベシ。

41. 羃級數

函數項ノ級數ノ特別ナル場合トシテ, 前節ノ記號ニ於テ

$$f_k(z)=c_{k-1}z^{k-1}, \qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

ト置キタルモノヲ z ノ **羃級數** ト稱ス, 但シ c_{k-1} ハ常數トス。之ガ收斂ナルトキ其和ヲ $f(z)$ ニテ表セバ

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n+\cdots\cdots \qquad [\mathrm{I}]$$

此右邊ノ羃級數ハ簡單ナル置換ニヨリテ次ノ如クニ變形スルコトヲ得。

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots\cdots, \qquad [\mathrm{II}]$$

$$c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots\cdots, \qquad [\mathrm{III}]$$

$$c_0+\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{(z-a)^n}+\cdots\cdots. \qquad [\mathrm{IV}]$$

本節ニ於テハ [I] ニ就イテ其性質ヲ論ズベシ, 其結果ヲ [II], [III], [IV] ノ場合ニ敷衍スルコトハ極メテ容易ナレバ之ヲ省略ス。

定理 1. 冪級數 [I] ニ於テ, $z=a$ ナルトキスベテノ n ニツイテ

$$|c_n a^n| \leqq G$$

ナル如キ一定ノ正數 G ガ存在スルナラバ, [I] ハ $|z|<|a|$ ナル全變域ニ於テ絶對收斂ナリ。

何トナレバ

$$|c_n z^n| = |c_n| \cdot |z^n| \leqq \frac{G}{|a^n|}|z^n| = G\left|\frac{z}{a}\right|^n.$$

故ニ原級數ノ絶對値級數ノ各項ハ夫夫

$$G + G\left|\frac{z}{a}\right| + G\left|\frac{z}{a}\right|^2 + \cdots\cdots + G\left|\frac{z}{a}\right|^n + \cdots\cdots$$

ノ各項ヨリ大ナラズ。然ルニ $|z|<|a|$ ナルトキハ後者ハ收斂ナリ。故ニ其場合ニハ原級數ハ絶對收斂ナリ。

例.
$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots\cdots$$

ナル冪級數ニ於テ, $z=1$ トスルトキハ常ニ

$$\left|\frac{z^n}{n}\right| \leqq 1$$

ナリ。故ニ此級數ハ $|z|<1$ ナルトキ, 即チ單位圓ノ内部ニ於テ, 絶對收斂ナリ。

系 1. 冪級數 [I] ガ $z=a$ ナルトキ收斂ナラバ, $|z|<|a|$ ナルトキハ常ニ絶對收斂ナリ。

系 2. 冪級數 [I] ガ $z=a$ ナルトキ發散ナラバ, $|z|>|a|$ ナルトキハ常ニ發散ナリ。

コレラノ結果ニヨリテ見レバ, 吾人ハ任意ノ冪級數 [I] ニ對シテ常ニ原點ヲ中心トスル適當ナル圓ヲ作リ, 其圓ノ内部ニテ

ハ絶對收斂, 外部ニテハ發散ナル樣ニスルコトヲ得ベシ。此圓ヲ稱シテ其冪級數ノ **收斂圓** トイヒ, 其半徑ヲ **收斂半徑** トイフ。

注意. 收斂圓ノ周上ニ於テハ收斂發散ニ關シテ一般的ノ斷言ヲ下スコト能ハズ。冪級數ノ收斂域ハ收斂圓ノ内部ノミナルコトモアリ, 又ソノ周ノ一部又ハ全部ヲ含ムコトモアリ。

例. 次ノ三ツノ冪級數ハ何レモ單位圓ヲ收斂圓トシテ有ス。

$$1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n + \cdots\cdots \qquad (1)$$

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots\cdots \qquad (2)$$

$$1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n^2} + \cdots\cdots \qquad (3)$$

然レドモ單位圓ノ周上ニ於テハ, (1) ハ發散, (3) ハ絶對收斂ニシテ, (2) ハ $z=1$ ニ於テハ發散, 其他ニ於テハ半收斂ナリ。

收斂圓ハ特別ノ場合トシテ消滅スルコトアリ, 或ハ無限遠點ダケヲ除キタル全平面トナルコトアリ。

例ヘバ
$$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \cdots\cdots + n!z^n + \cdots\cdots$$

ハ $z=0$ ナルトキニノミ收斂ニシテ, 又

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

ハ z ノスベテノ有限値ニ對シテ收斂ナリ。即チ前者ノ收斂圓周ハ原點ニシテ, 後者ノハ無限遠點ナリ。

任意ニ與ヘラレタル冪級數ノ收斂半徑ヲ決定スル一ツノ方法トシテ次ニ擧グル Cauchy-Hadamard ノ定理 アリ。

定理 2. 冪級數 [I] ノ係數ニヨリテ定マル數列

$$|c_1|, |\sqrt{c_2}|, |\sqrt[3]{c_3}|, \cdots\cdots, |\sqrt[n]{c_n}|, \cdots\cdots$$

ノ上限ヲ λ トスレバ, [I] ノ收斂半徑ハ $\frac{1}{\lambda}$ ニ等シ。

但シ $\lambda=\infty$ ナルトキハ收斂圓ハ原點トナリ，又 $\lambda=0$ ナルトキハ收斂圓ハ點 ∞ ヲ除キタル全平面トナルモノトス。

本定理ヲ證明スルタメニ，先ヅ $\lambda \neq 0, \infty$ トシテ，$|z|<\frac{1}{\lambda}$ ナルトキニハ冪級數 [I] ガ收斂ナルコトヲ示スベシ。今カクノ如キ z ニ對シテ

$$|z|<\frac{1}{\lambda_2}<\frac{1}{\lambda_1}<\frac{1}{\lambda}$$

ナル如キ二數 λ_1, λ_2 ヲトリタリトスレバ，$\lambda<\lambda_1<\lambda_2$ ナリ。故ニ假定ニヨリ，n ガ或値以上トナルトキハ

$$|\sqrt[n]{c_n}|<\lambda_1 \qquad 即チ \qquad |c_n|<\lambda_1^n$$

トナル。從ツテ

$$|c_nz^n|<\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n, \quad 但シ \quad 0<\frac{\lambda_1}{\lambda_2}<1.$$

故ニ [I] ノ絕對値級數ノ各項ハ n ガ或値以上ナル所ニテハ常ニ收斂等比級數

$$1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n+\cdots\cdots$$

ノ之ニ相當スル項ヨリモ小ナリ。之ニ依ツテ [I] ハ絕對收斂ナルコトヲ知ル。

次ニ $|z|>\frac{1}{\lambda}$ ナルトキニ [I] ガ發散ナルコトヲ示サントス。ココニマタ

$$|z|>\frac{1}{\lambda_1}>\frac{1}{\lambda_2}>\frac{1}{\lambda}$$

ナル二數 λ_1, λ_2 ヲトルトキハ，假定ニヨリ

$$|\sqrt[n]{c_n}|>\lambda_1$$

ナル如キ n ハ無數ニ多クアルベシ。從ツテ

$$|c_nz^n|>\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n, \qquad 但シ \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}>1$$

ナル n モマタ無數ニ多クアリ。故ニ此場合ニハ $n\to\infty$ ナルトキ $c_nz^n\to 0$ トナラズ。從ツテ [I] ハ發散ナリ。

以上ニヨリテ本定理ノ一般ノ場合ハ證明セラレタリ。特別ノ場合トシテ $\lambda=0$ ナルトキハ，任意ノ正數 ε ニ對シテ，n ガ十分大ナルトキハ常ニ

$$|\sqrt[n]{c_n}|<\varepsilon \qquad 從ツテ \qquad |c_nz^n|\leqq|\varepsilon z|^n$$

トナル。依ツテコノ ε ヲ常ニ $\varepsilon|z|<1$ ナル樣ニトレバ，[I] ハ任意ノ z ニ對シテ絕對收斂ナルコトヲ知ルベシ。

又 $\lambda=\infty$ ナルトキハ，任意ノ正數 M ニ對シテ

$$|\sqrt[n]{c_n}|>\mathrm{M} \qquad 從ツテ \qquad |c_nz^n|\geqq|\mathrm{M}z|^n$$

ナル如キ n ハ無數ニ多クアリ。依ツテ $z=0$ ナラザル限リ M ヲ常ニ $\mathrm{M}|z|>1$ ナル樣ニトレバ，[I] ハ 0 以外ノ任意ノ z ニ對シテ發散ナルコトヲ知ルベシ。

($z=0$ ナルトキハ勿論收斂ナリ。)

系. $n\to\infty$ **ナルトキ** $|\sqrt[n]{a_n}|$ **ガ確定セル極限値** λ **ヲ有スルナラバ,** $\frac{1}{\lambda}$ **ガ收斂半徑ナリ。**

例 1. 冪級數

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\cdots$$

ノ收斂圓ヲ決定センガタメニ，數列

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad n=1, 2, 3, \cdots\cdots$$

ヲ考フルニ，其極限値ハ 0 ナルコトガ證明セラル。* 故ニ此場合ニハ全平面（點 ∞ ヲ除ク）ガ收斂圓ナリ。

例 2. 冪級數

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots\cdots$$

ノ收斂圓ヲ決定センガタメニ，數列

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \qquad n=1, 2, 3, \cdots\cdots$$

ヲ考フベシ。今 x ヲ連續ナル實變數トスレバ，函數 $\sqrt[x]{x}$ ハ $x=e$ ナルトキニ極大トナリ，$x>e$ ナルトキハ單調ニ減少シ，且

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$$

ナリ。依ツテ上記ノ數列ハ 1 ナル極限値ヲ有ス。故ニ求ムル收斂圓ハ單位圓ナリ。

今 [I] ノ收斂圓ノ半徑ヲ R トシ，$0<R'<R$ ナル一數 R' ヲトリタリトスレバ，

$$c_0+c_1R'+c_2R'^2+\cdots\cdots+c_nR'^n+\cdots\cdots$$

ハ絕對收斂ナリ。而シテ原點ヲ中心トシ，R' ナル半徑ヲ以テ畫

* M ヲ如何程大ナル正數トスルモ，n ヲ更ニ十分大ナラシムレバ

$$n!>M^n$$

ナル樣ニスルコトヲ得。從ツテ

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{M}$$

トナル。之ニ依ツテ今考フル所ノ極限値ハ 0 ナルコトヲ知ル。

キタル圓ノ周圍又ハ內部ニ任意ノ値 z ヲトレバ $|z|\leqq R'$ ナルヲ以テ，此圓ヲ變域トスレバ級數 [I] ハ最大收斂ナリ，從ツテ前節ニ述ベタル如ク一樣收斂ナリ。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 3. 冪級數ハ其收斂圓ト同心ニシテ之ヨリモ小ナル半徑ヲ有スル圓ノ周圍及ビ內部ニ於テ一樣收斂ナリ。

從ツテ收斂圓ノ內部ニ含マルル任意ノ閉面分ニ於テ一樣收斂ナルコトヲ知ルベシ。

注意. R' ハ R ヨリ小サクサヘアレバ何程之ニ近クトモ可ナリ。然レドモ收斂圓自身ヲ變域トシテハ一般ニ一樣收斂ナリトハイフヲ得ズ，例ヘバ第 225 頁ニ擧ゲタル例

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\cdots$$

ヲ見ヨ。

一樣收斂性ノ結果トシテ前節ノ定理ニヨリ直チニ次ノ諸性質ヲ得。

定理 4. 冪級數ハ其收斂圓ノ內部ニ於テ一ノ正則函數ヲ表ス。

定理 5. 冪級數ノ和ヲ其收斂圓ノ內部ニ於テ微分又ハ積分スルニハ，之ヲ項別ニ夫夫微分又ハ積分シテ可ナリ。

定理 6. 冪級數ノ項別微分又ハ項別積分ニヨリテ得ル級數ハ原級數ノ收斂圓內ニ含マルル任意ノ閉面分ニ於テ一樣收斂ナリ。

例題 1. 冪級數ガ其收斂圓周上ノ一點ニ於テ絕對收斂ナルトキハ，同圓周上及ビ其內部ニテ絕對且一樣收斂ナルコトヲ證明セヨ。

例題 2. 冪級數ガ其收斂圓周上ノ一點ニ於テ半收斂又ハ發散ナルトキハ，同圓周

上ノ何レノ點ニ於テモ絕對收斂ナルコトナキヲ證明セヨ。

例題 3. [II], [III], [IV] ナル級數ニツイテ其收斂域ヲ決定スル法如何。

例題 4. 次ノ各級數ノ收斂域ヲ求メヨ。

(1) $1+z+2z^2+3z^3+\cdots\cdots+nz^n+\cdots\cdots$

(2) $1+4z+9z^2+16z^2+\cdots\cdots+(n+1)^2z^n+\cdots\cdots$

(3) $1-\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{3^2}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{z^n}{n^2}+\cdots\cdots$

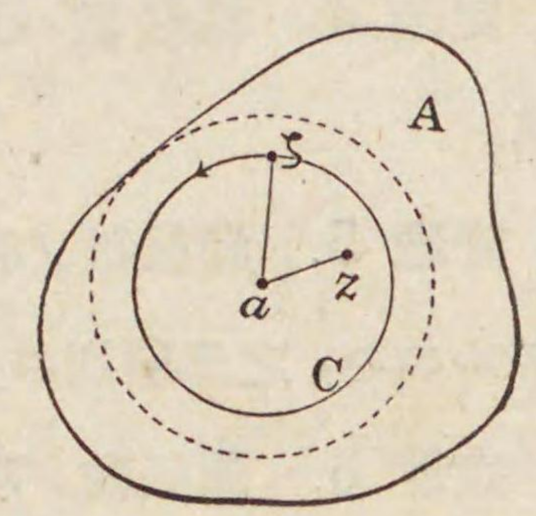
(4) $1+(z-1)+2!(z-1)^2+\cdots\cdots+n!(z-1)^n+\cdots\cdots$

(5) $1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3z^2}+\frac{1}{4z^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)z^n}+\cdots\cdots$

(6) $1+\frac{1}{z+1}+\frac{4}{(z+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{(z+1)^n}+\cdots\cdots$

42. Taylor ノ展開

冪級數ガ其收斂圓內ニ於テ一ノ正則函數ヲ表スコトハ既ニ之ヲ知レリ。然ラバ逆ニ任意ノ正則函數ハ必ズ冪級數ヲ以テ表シ得ベキカ。吾人ハ本節ニ於テ此問題ヲ考究セントス。



第六十圖

今函數 $f(z)$ ヲ z 平面上ノ面分 A ニ於テ正則ナルモノトシ, A 內ノ一點 a ヲ中心トシ A ノ內部ニ於テ一ツノ圓 C ヲ畫キ, z ヲ其圓內ノ任意ノ一數, ζ ヲ其圓周上ノ變數トスレバ, Cauchy ノ積分表示ニヨリ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (1)$$

然ルニ假定ニヨリ

$$|z-a|<|\zeta-a|$$

ナルヲ以テ,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots \qquad (2)$$

級數 (2) ガ C ナル圓周上ノ變數 ζ ニ關シテ一樣收斂ナルコトハ容易ニ證明セラル。依ツテ之ヲ (1) ニ代入シ, 項別積分ヲ行ヘバ次式ヲ得。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta+\frac{z-a}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta$$

$$+\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}d\zeta+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\cdots$$

此右邊ニ於ケル第一項ハ $f(a)$ ニ等シク, 一般ニ第 $(n+1)$ 項ハ

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

ニ等シ。故ニ

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2$$

$$+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots\cdots \qquad (3)$$

之ヲ **Taylor ノ展開式** ト稱シ, a ヲ此展開ノ **中心** トイヒ, 又コノ右邊ノ級數ヲ **Taylor ノ級數** トイフ。此展開式ハ z ガ圓 C ノ內部ニアル限リ成立スルモノナリ (周上ニアル場合ニハ上ノ證明ハ成立セズ)。然ルニ圓 C ハ $f(z)$ ガ正則ナル面分 A 內

ニサヘアレバ何程大ナラシムルモ差支ナキニヨリ，結局 a ヲ中心トシ A ノ周上ニテ a ニ最近キ點ヲ過ル圓ヲ畫ケバ，(3) ハ其內ニテ成立スルモノナリ。

此結果ト前節ノ定理 4 トヲ綜合シテ考フレバ，a ヲ中心トスルトキノ $f(z)$ ノ展開式（卽チ $z-a$ ノ羃級數）ノ收斂半徑ハ，a ヨリ之ニ最近キ A ノ周上ノ一點マデノ距離ヨリモ小ナラザルコトヲ知ルベシ。兩者ノ關係ニツイテハナホ後ニ詳論スベシ。

a ヲ中心トスル $f(z)$ ノ展開式（卽チ $f(z)$ ヲ $(z-a)$ ノ羃級數トシテ表ス式）ガ唯一通リニ限ルコトハ次ノ如クニ證明セラル。

今モシ

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots\cdots \qquad (4)$$

トスレバ $f(a)=c_0$ ニシテ，又前節ノ定理 5 ニヨリ a ノ近傍ニ於テハ

$$f^{(n)}(a)=n!c_n, \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

ナリ。然ラバ卽チ (4) ハ (3) ニ他ナラズ，故ニ (3) 以外ニハ a ヲ中心トスル展開式ナシ。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理．一定點ヲ中心トスル一ノ正則函數ノ展開式ハ唯一通リニ限ル。

系 1．$z-a$ ノ羃級數ハスベテ Taylor ノ級數ナリ。

何トナレバ，任意ニ與ヘラレタル $z-a$ ノ羃級數ハ其收斂圓內ニ於テ一ノ正則函數ヲ表スベク，而シテ其函數ヲ a ヲ中心トシテ展開スレバ矢張モトノ級數ヲ得ベケレバナリ。

特ニ $f(z)$ ガ原點ニ於テ正則ナルトキハ，(3) ニ於テ $a=0$ ト置クコトヲ得。然ルトキハ

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots\cdots$$

之ヲ **Maclaurin ノ展開式** ト稱シ，コノ右邊ノ級數ヲ **Maclaurin ノ級數** トイフ。

系 2．z ノ羃級數ハスベテ Maclaurin ノ級數ナリ。

今

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n+\cdots\cdots \qquad (5)$$

ノ收斂圓ト同心ニシテ其內部ニ畫ケル任意ノ圓ヲ K，其半徑ヲ r トシ，又其周上ニ於ケル $|f(z)|$ ノ最大値ヲ M トスレバ，

$$|c_n|=\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{(K)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right|$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{M}}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{\mathrm{M}}{r^n}. \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (6)$$

又第 35 節定理 1 系 3 ニヨレバ，圓 K ノ中心ニ於ケル $|f(z)|$ ノ値卽チ $|c_0|$ ハ勿論 M ヨリモ小ナリ。依ツテ (6) ノ結果ハ $n=0$ ナル場合ニモ成立スルモノナリ。

故ニ (5) ノ右邊ト等比級數

$$\frac{\mathrm{M}}{1-\dfrac{z}{r}}=\mathrm{M}+\frac{\mathrm{M}}{r}z+\frac{\mathrm{M}}{r^2}z^2+\cdots+\frac{\mathrm{M}}{r^n}z^n+\cdots\cdots \qquad (7)$$

トヲ比較スレバ，同ジ番號ノ項ノ絕對値ハ常ニ前者ノ方ガ大ナラズ。

カクノ如キ性質ヲ言ヒ表スタメニ，(7) ヲ (5) ノ **優級數** ト稱ス。第 41 節定理 1 及ビ 2 ノ中ニモ優級數ヲ用キタリ。

吾人ハ此性質ヲ利用シテ再ビ Liouville ノ定理ヲ證明スルコ

トヲ得ベシ。即チ今函數 $f(z)$ ガ有限平面上到ル所正則ニシテ且 $|f(z)| \leqq \mathrm{G}$ ナル一定數 G アリトシ, $f(z)$ ノ展開式ヲ (5) ナリトスレバ, ココニ

$$|c_n| \leqq \frac{\mathrm{G}}{r^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

ナリ。而シテ r ハ何程ニテモ大ナラシメ得レドモ, c_n 及ビ G ハ之ニハ無關係ナル一定數ナリ。故ニ c_n ハ實ハ 0 ナラザル可カラズ。依ツテ

$$f(z) = c_0.$$

即チ $f(z)$ ハ常數ナリ。

例題 1. (5) ノ兩邊ヲ z^{n+1} ニテ割リ, 之ヲ圓 K ノ周上ニ積分スルコトニヨリテ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{K})} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

ナルコトヲ證明セヨ。

例題 2. $f(z)$ 及ビ $f'(z)$ ヲ各獨立ニ Maclaurin ノ級數ニ展開シ 依ツテ一般ニ冪級數ヲ微分スルニハ項別ニ微分シテ可ナルコトヲ推論セヨ。

例題 3.

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n \mathrm{R}_n(z)$$

ト置クトキハ,

$$\mathrm{R}_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^n(\zeta - z)}$$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ C ハ a ヲ中心トシ z ヲ含ム圓トス。

43. 一致ノ定理

吾人ハ函數 $f(z)$ ガ面分 A ニ於テ正則ナルトキハ, A 內ノ任意ノ一點 a ヲ中心トシテ之ヲ Taylor ノ級數ニ展開シ得ルコトヲ知レリ。今ソノ級數ヲ表スニ $\mathrm{P}(z-a)$ ナル記號ヲ用キルベシ。サテ a ノ取リ方ニヨリテ同一ノ函數 $f(z)$ ヲ種種ノ冪級數ニ展開シ得ベク, 而シテソレラノ級數ハ各自ノ展開ノ中心ヲ中心トシ A 內ニ畫キ得ル最大ノ圓內ニテ $f(z)$ ヲ表示スベシ。

例ヘバ

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \tag{1}$$

ナルトキハ, $z = 1$ ナル一點ヲ除キタル全有限平面ヲ A トスルコトヲ得。ココニ於テ,

$a = 0$ トスレバ

$$\mathrm{P}(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots\cdots, \tag{2}$$

$a = \dfrac{i}{2}$ トスレバ

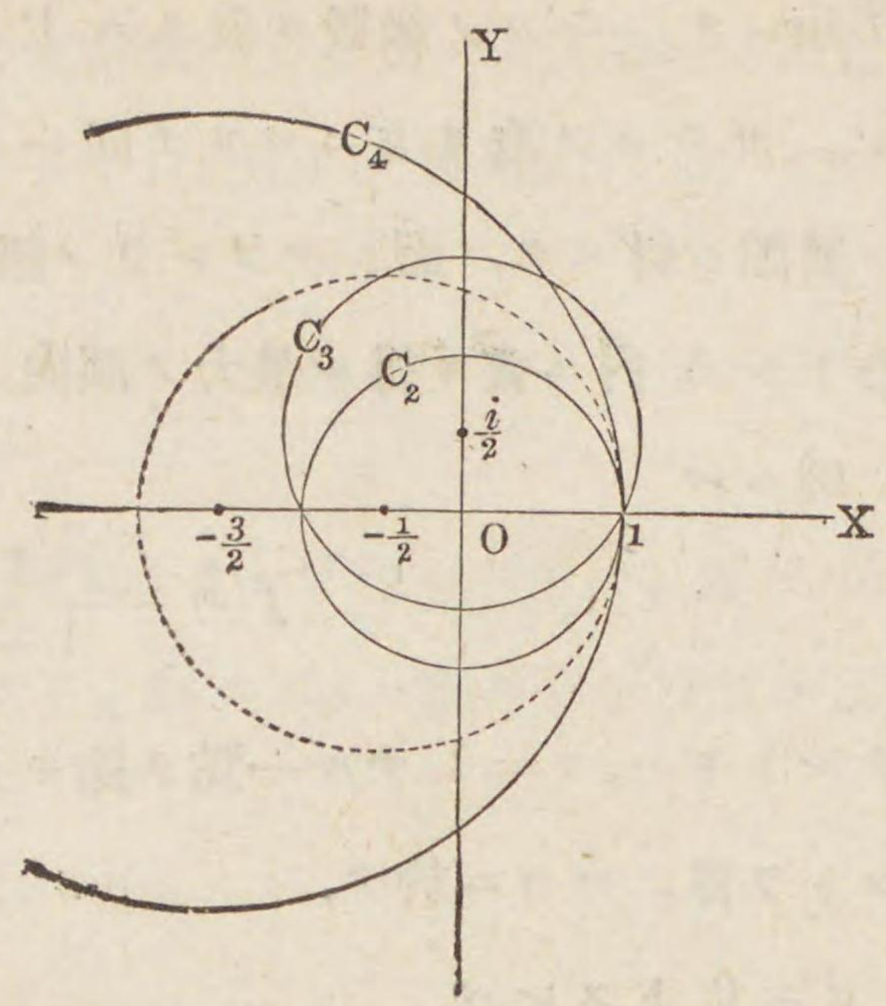
$$\mathrm{P}\left(z - \frac{i}{2}\right) = \frac{2}{2-i} + \frac{4}{3-4i}\left(z - \frac{i}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{2-i}\right)^{n+1}\left(z - \frac{i}{2}\right)^n + \cdots\cdots, \tag{3}$$

$a = -\dfrac{3}{2}$ トスレバ

$$\mathrm{P}\left(z + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5} + \frac{4}{25}\left(z + \frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\left(z + \frac{3}{2}\right)^n + \cdots\cdots \tag{4}$$

等ニシテ, コレラノ級數ハ夫夫ノ a ヲ中心トシ點 1 ヲ過ル圓 $\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$ (第六十一圖) ノ內部ニ於テ函數 (1) ヲ表示スルモノ

ナリ。



第六十一圖

サテ (2), (3), (4) ナル級數ハ何レモ (1) ヲ展開スルコトニヨリテ容易ニ作ラルルモノナレドモ，今假リニ (2) ノミガ與ヘラレタリトシ，之ガ (1) ナル函數ヲ表示スルコトヲ知ラズトスルモ，(2) ヨリ直接ニ (3) ヲ誘導スルコトモ可能ナリ。ソノ理由次ノ如シ。

抑 a ヲ中心トスル $f(z)$ ノ展開式ヲ作ルニハ點 a ニ於ケル $f(z)$ ノ値及ビ其スベテノ逐次微係數ノ値ノミヲ知ラバ足レリ。故ニ今モシ $z=\frac{i}{2}$ ニ於ケル $f(z)$ 及ビ其スベテノ逐次微係數ノ値ヲ知ラバ，之ニヨリテ (3) ナル展開式ヲ作ルコトヲ得ベキナリ。然ルニ $\frac{i}{2}$ ナル點ハ圓 C_2 ノ內ニアルヲ以テ，ココニ於ケル $f(z), f'(z), \cdots\cdots$ 等ノ値ハスベテ (2) ニヨリテ計算スルコトヲ得，卽チ

$$\left.\begin{aligned}
&f\left(\frac{i}{2}\right)=1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{i}{2}\right)^n+\cdots,\\
&f'\left(\frac{i}{2}\right)=1+2\left(\frac{i}{2}\right)+3\left(\frac{i}{2}\right)^2+\cdots+(n+1)\left(\frac{i}{2}\right)^n+\cdots,\\
&f''\left(\frac{i}{2}\right)=1.2+2.3\left(\frac{i}{2}\right)+3.4\left(\frac{i}{2}\right)^2\\
&\qquad+\cdots+(n+1)(n+2)\left(\frac{i}{2}\right)^n+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ノ如シ。コレラノ數値ヲ

$$f\left(\frac{i}{2}\right)+f'\left(\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{i}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2+\cdots\cdots$$

ニ代入スレバ (3) ヲ得ベシ。

注意. (2) ナル級數ノ和ガ $\frac{1}{1-z}$ ナルコトヲ知ラズトスレバ，(5) ノ各級數ノ和ヲ簡單ナル形ニマトムルコト能ハザルベキモ，コレラノ和ヲ簡單ナル形ニ書キ得ルト否トニ關ラズ，理論上 $f\left(\frac{i}{2}\right), f'\left(\frac{i}{2}\right), \cdots\cdots$ 等ノ數値ハ (5) ニヨリテ決定セラルルモノナルニヨリ，從ツテ (3) モ亦理論上決定セラルトイヒテ可ナリ。

之ニヨリテ見レバ，一般ニ一ツノ圓內ニテ函數 $f(z)$ ヲ表ス展開式ヲ知ルトキハ，ソノ圓內ノ任意ノ點ヲ中心トスル第二ノ展開式ヲ作ルコトハ理論上常ニ可能ナリ。

次ニ (2) ヨリ (4) ヲ誘導スルコトヲ考フベシ。

(4) ノ展開ノ中心ハ圓 C_2 ノ內ニアラズ，然レドモ先ヅ圓 C_2 ノ內ニ例ヘバ $-\frac{1}{2}$ ノ如キ點ヲトリ之ヲ中心トスル展開式 $P\left(z+\frac{1}{2}\right)$ ヲ作レバ之ニ相當スル圓ハ第六十一圖ニ點線ヲ以テ示セル如キモノトナルヲ以テ，點 $-\frac{3}{2}$ ハ確カニ其內ニ含マルベシ。ココニ於テ吾人ハ更ニ $P\left(z+\frac{1}{2}\right)$ ヲ利用シテ所要ノ

$\mathrm{P}\left(z+\dfrac{3}{2}\right)$ ノ係數ヲ決定スルコトヲ得。

斯クノ如ク中間ニ補助ノ展開ヲ挿入スルコトトスレバ，$f(z)$ ガ正則ナル連結域內ニ於テ任意ノ一點 a ヲ中心トスル展開式ヨリ他ノ任意ノ一點 b ヲ中心トスル展開式ヲ誘導スルコトハ常ニ可能ナリ。何トナレバ，先ヅ二點 a, b ヲ A 內ニ於ケル一ツノ曲線 L ニヨリテ連結シ，L 上ノ點ト A ノ周圍ノ上ノ點トノ間ノ最短距離ヲ δ トシ，今 L 上ニ點 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ $(a_0=a, a_n=b)$ ヲ取リ，一般ニ $|a_{k+1}-a_k|$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ ヲシテ何レモ δ ヨリ小ナラシメタリトセバ，a_{k+1} ハ確カニ $\mathrm{P}(z-a_k)$ ニ相當スル圓內ニアルベシ。依ツテ a ヨリ發シテ順次ニ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 等ヲ中心トスル展開式ヲ作リユケバ終ニハ $\mathrm{P}(z-b)$ ヲ得ベキナリ。

之ニヨリテ吾人ハ一般ニ一ツノ面分內ニテ正則ナル函數ノ一ツノ展開式ガ與ヘラルルトキハソレニヨリテ其面分內ノスベテノ點ニ於ケル展開式ガ悉ク決定セラルルモノナルコトヲ知ル。換言スレバ，其面分內ニ於ケル函數ノ全性質ハ實ニ最初ノ一ツノ展開式ノ中ニ潛在スルモノナリトイフヲ得ベシ。サレバ若シ**ニツノ函數ガ同一ノ面分內ニテ共ニ正則ニシテ且「其內ノ一點ニ於テ同一ノ展開式ヲ有スルトキハ」，兩函數ハ其面分內ニテ到ル所相一致セザル可カラズ。**

然ルニ其同一ノ展開式ナルモノハ其中心ニ於ケル函數值及ビ逐次微係數ニヨリテ決定セラルルモノナルガ故ニ，上ノ定理ニ

於ケル括弧「」內ノ條件ヲ

「其內ノ一點ニ於テ夫夫相一致セル函數值及ビ逐次微係數ヲ有スルトキハ」ト換言スルコトヲ得。

或ハ更ニ之ヲ改メテ

「其面分內ノ一ツノ曲線（如何ニ短クトモ可ナリ）ニ沿ヒテ相一致スルトキハ」

トスルモ可ナリ。何トナレバ，正則ナル函數ノ逐次微係數ノ值ヲ求ムルニハ任意ノ一方向ニツイテノミ考フレバ足ルヲ以テ，今與ヘラレタル曲線ニ沿ヒテノ逐次微係數ヲ考フレバ，兩函數ニ於テ常ニ同一ノ值ヲ得ベケレバナリ。

更ニ一步ヲ進ムレバ，兩函數ガ必ズシモ一ノ線ニ沿ヒテ相一致セザルモ

「其面分內ニ集積點ヲ有スル如キ點集合ノ各點ニ於テ常ニ相一致スルトキハ」

トスルコトヲ得。何トナレバ，今兩函數ノ差ヲ $f(z)$ トスレバ，假定ニヨリ $f(z)$ ノ零點* ハ其面分內ニ集積點ヲ有スベシ，之ヲ a トス。a ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ヲ

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots\cdots,\quad c_n\neq 0,\ n\geqq 0$$

ナリト假定シ，ココニ於テ更ニ

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-a)^n}=c_n+c_{n+1}(z-a)+\cdots\cdots$$

* $f(z)=0$ トナル如キ點 z ヲ函數 $f(z)$ ノ零點ト稱ス。

ナル函數ヲ考フレバ，明カニ

$$g(a) = c_n \neq 0$$

ナリ。然ルニ一方ニ於テ，$f(z)$ ノ零點ヲ傳リテ考フレバ

$$g(a) = \lim_{z \to a} g(z) = 0$$

トモ考ヘラル。故ニ $c_n \neq 0$ ナル假定ハ保持スベカラズ。從ツテ $f(z)$ ハ恒等的ニ 0 ニ等シ，即チ兩函數ハ相一致スルモノナリ。

ココニ於テ更ニ Bolzano-Weierstrass ノ定理（第 8 節定理 1）ヲ想起スレバ，次ノ定理ヲ得。

二ツノ函數ガ同一ノ閉面分ニ於テ正則ニシテ，且其閉面分內ノ無數ニ多クノ點ニ於テ相一致スルトキハ，兩函數ハ同面分內ニテ全然相一致スルモノナリ。

之ヲ **一致ノ定理** トイフ。之ヨリ直チニ次ノ系ヲ得。

函數 $f(z)$ ガ一ノ閉面分ニ於テ正則ニシテ且其閉面分內ニ無數ニ多クノ零點ヲ有スルトキハ，$f(z)$ ハ實ハ常數 0 ナリ。

注意 1. 本節ノ研究ニヨリ 正則ナル複素函數ニシテ實軸上ニ於テ例ヘバ $\sin x$ ト一致スルモノハ第 20 節ニ定義セル $\sin z$ ニ限ルコトヲ知ルベシ。其他スベテ從來既知ノ初等函數ニツイテモ同樣ノコトガイハル。

注意 2. v ガ任意ノ實常數，u ガ實變數ナルトキ，

$$\sin(u+v) \quad 及ビ \quad \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

ハ相一致ス。故ニ u ヲ複素變數トスルモ亦兩者相等シ。ココニ於テ更ニ v ヲ實變數ト見ルコトヲ得ルヲ以テ，從ツテ又之ヲ複素變數トスルモ兩者相等シカルベシ。從ツテ結局，實變數ノ場合ニ於ケル正弦ノ加法定理ハ複素變數ノ場合ニモ其儘成立スルコトヲ知ル。同樣ニシテ，實變數ニツイテ證明セラレタル種種ノ公式ヲ複素變數ノ場合ニ擴張スルコトヲ得。

例題 1. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ニ於テ，$\mathrm{P}(z)$ ヨリ $\mathrm{P}(z-2)$ ヲ誘導スル一ツノ方法ヲ舉ゲヨ。

例題 2. 一致ノ定理ニ於テ閉面分ノ代リニ開面分トスレバ此定理ハ必ズシモ成立セズ，何故ナルカ。

例題 3. $\sin\dfrac{1}{1-z}$ ハ單位圓內ニ於テ正則ニシテ且無數ニ多クノ零點ヲ有スレドモ恒等的ニ 0 ニハ等シカラズ，コノコトハ一致ノ定理ノ系ト矛盾セザルカ。

44. 無限乘積

無限數列ノ各項ヲ $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\cdots$ トスルトキ，コレラヲ積ノ形ニ結合セル

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 z_2 \cdots\cdots z_n \cdots\cdots \qquad (1)$$

ヲ **無限乘積** トイフ。

今最初ノ n 項ノ積ヲ

$$p_n = z_1 z_2 \cdots\cdots z_n$$

トスルトキ，一般ニハ

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \mathrm{P}$$

ナル極限值ノ存在スルコトモアリ，セザルコトモアリ。然レドモ前者ノ場合ヲ以テ直チニ (1) ヲ收斂ナリト定義スルトキハ後ノ研究ニ於テ種種ノ不便ヲ來スガ故ニ，吾人ハ (1) ガ次ノ二條件ヲ滿足セシムルトキニ始メテ之ヲ收斂ナリト稱スルコトトスベシ。

(I) m ヲ十分大ナル正ノ整數トスレバ

$$z_{m+1}, \; z_{m+2}, \; \cdots\cdots$$

ハ何レモ 0 ナラズ。

(II) $$p_{m,k}=z_{m+1}z_{m+2}\cdots\cdots z_{m+k}$$

ト置クトキハ

$$\lim_{k\to\infty}p_{m,k}=\mathrm{P}$$

ナル有限確定ニシテ 0 ナラザル極限値ガ存在ス。

以上ノ條件ヲ具備スルトキ, (1) ハ **收斂** ニシテ

$$z_1z_2\cdots\cdots z_m\,\mathrm{P}$$

ナル **積** ヲ有ストイフ。

收斂ナラザル無限乘積 ($\mathrm{P}=0$ ナル場合ヲ含ム) ヲ **發散** ナリトイフ。

例 1. $$\frac{3}{4}\,\frac{8}{9}\cdots\cdots\frac{n^2-1}{n^2}\cdots\cdots$$

ニ於テハ

$$p_{0,k}=\frac{1.3}{2.2}\,\frac{2.4}{3.3}\cdots\cdots\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\,\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\,\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{k+1}{k}\,\frac{k}{k+1}\right)\frac{k+2}{k+1}=\frac{1}{2}\,\frac{k+2}{k+1}$$

故ニ $$\lim_{k\to\infty}p_{0,k}=\frac{1}{2}.$$

依ツテ原無限乘積ハ收斂ニシテ, ソノ積ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。

例 2. $$\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}\cdots\cdots$$

ニ於テハ $$p_{0,k}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\cdots\cdots\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}.$$

故ニ $$\lim_{k\to\infty}p_{0,k}=0.$$

依ツテ原無限級數ハ發散ナリ。

無限乘積ニ於テ其中ニ 0 ナル項ヲ無數ニ多ク有スルトキハ上記ノ (I) ナル條件ニ適合セズ從ツテ常ニ發散ナルヲ以テ, 今後カクノ如キモノハ考ヘザルコトトス。マタ 0 ナル項ヲ有限個數ダケ含ム場合ニハ (I) ニイフ如キ m ヲトリテ

$$\mathrm{R}_m=z_{m+1}z_{m+2}\cdots\cdots$$

ナル無限乘積ヲ考フレバ, 原乘積ノ收斂發散ハ常ニ R_m ノソレト相伴フ。依ツテ吾人ハ以下ノ諸定理ニ於テハ何レノ項モ 0 ナラザル如キ無限乘積ノミヲ考フルコトトス, 換言スレバ $m=0$ ト考フルコトトスベシ。

定理 1. (1) ガ收斂ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ, 無限級數

$$\log z_1+\log z_2+\cdots\cdots+\log z_n+\cdots\cdots \qquad (2)$$

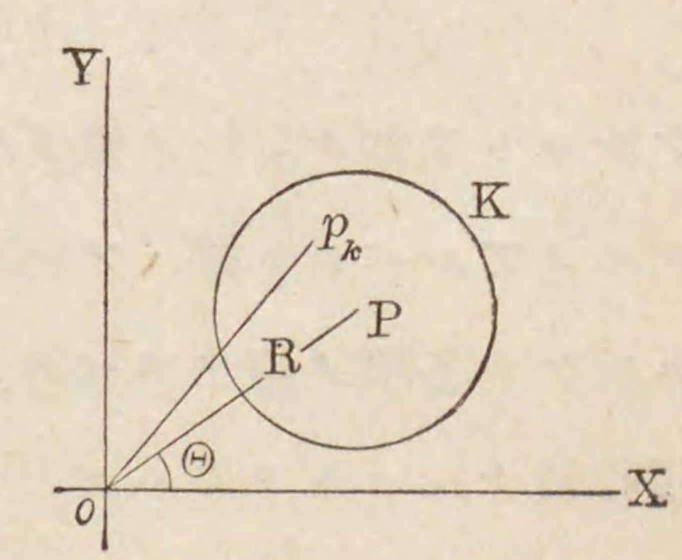
ガ收斂ナルコトナリ。但シココニ對數ノ値トシテハ

$$|\mathfrak{J}(\log z_n)|\leqq\pi,\qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

ナル値ノミヲトルモノトス。

先ヅ必要條件ナルコトヲ證明スベシ。

(1) ガ收斂ナリトスレバ p_k (卽チ $p_{0,k}$) ハ 0 ナラザル極限値 P ニ限リナク接近スルニヨリ, 今數平面上ニテ點 P ヲ中心トシ原點ニ達セザル半徑ヲ以テ圓 K ヲ畫ケバ, k ガ或値以上ナルトキハ p_k ハスベテ圓 K ノ内部ニアルベシ。ココニ於テ P 及ビ p_k ノ極座標ヲ夫夫 (R,Θ) 及ビ (r_k,θ_k) トスレバ, θ_k ハ



第六十二圖

$$|\theta_k - \Theta| < \frac{\pi}{\quad} \qquad (3)$$

ナル關係ヲ滿足スルモノト考フルコトヲ得。

今假リニ p_k ヲ圓 K 內ノ任意ノ動點トスルモ，θ_k ノ値ヲ上記ノ如キ範圍ニ制限スレバ，

$$\log p_k = \log_e r_k + i\theta_k$$

ハ p_k ノ一價連續函數ナリ。從ツテ

$$\lim_{k\to\infty} \log p_k = \log \mathrm{P}.$$

依ツテ今 $\log z_1$, $\log z_2$, …… 等ヲ常ニ

$$\log z_1 + \log z_2 + \cdots + \log z_k = \log p_k = \log_e r_k + i\theta_k \qquad (4)$$

ナル樣ニトルコトトスレバ，$k\to\infty$ ナルトキ無限級數 (2) ハ $\log \mathrm{P}$ ナル極限値ニ收斂スルコト明カナリ。而シテ (4) ニ適合スル如クニ $\log z_k$ ノ値ヲトルトスレバ，

$$\Im(\log z_k) = \Im(\log p_k) - \Im(\log p_{k-1})$$
$$= \theta_k - \theta_{k-1}.$$

依ツテ k ガ或値以上ニ大ナルトキハ，(3) ニヨリテ

$$|\Im(\log z_k)| < \pi$$

ナルコトヲ知ル。k ノ値ガ小ナルトキハ此關係ヲ滿足セシメザルモノアルベシト雖，ソレラハ有限個數ニ過ギザルヲ以テ，(2) ニ於ケル各項ノ値ヲスベテ上記ノ如クニトルトスルモ，(2) ハ矢張收斂ナルコトヲ失ハズ。

次ニ十分條件ナルコトヲ證明スベシ。

(2) ガ收斂ナリトシ，ソノ和ヲ S トスレバ，

$$\lim_{n\to\infty} \log p_n = \mathrm{S}.$$

依ツテ指數函數ノ連續性ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} (\exp \log p_n) = e^{\mathrm{S}}.$$

然ルニ　$\exp \log p_n = \exp \log(z_1 z_2 \cdots z_n) = z_1 z_2 \cdots z_n$

ナルヲ以テ，結局

$$\lim_{n\to\infty} (z_1 z_2 \quad z_n) = e^{\mathrm{S}}.$$

之ニ依ツテ (1) ノ收斂ナルコトヲ知ルト同時ニ，ソノ積ガ e^{S} ニ等シキコトヲ知リ得タリ。

系.　(1) ガ收斂ナルトキハ

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

コノコトハ收斂ノ定義ヨリモ直チニ出ヅレドモ，又 (2) ノ收斂ナルコトヨリモ出ヅ。蓋シ (2) ガ收斂ナラバ

$$\lim_{n\to\infty} \log z_n = 0$$

ナレバナリ。

サレバ今無限乘積ヲ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\cdots\cdots \qquad (5)$$

ナル形ニ書クトキハ，之ガ收斂ナラバ必ズヤ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ナラザル可カラズ。

今 (5) ノ a_n ヲ $|a_n|$ トシタル乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|) \tag{5'}$$

ナルモノヲ作レバ，次ノ關係アリ。

定理 2. (5′) ガ收斂ナラバ (5) モ亦收斂ナリ。

モシ (5) ガ收斂ナラバ，任意ノ k ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})=1$$

ナルコトハ收斂ノ定義ヨリシテ明カナリ。從ツテ任意ノ正數 ε ニ對シテ n ヲ或程度以上ニ大ナラシムレバ，常ニ

$$\left|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1\right|<\varepsilon \tag{6}$$

ナラシムルコトヲ得ベシ。又逆ニ之ガ可能ナラバ (5) ガ收斂ナルコトモ容易ニ證明セラル。(第 30 節例題 2, 第 38 節例題 4 等ヲ參照セヨ。)

今假定ニヨリ (5′) ガ收斂ナルヲ以テ，上述ノ理ニヨリ

$$\left|(1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1\right|<\varepsilon \tag{6'}$$

ガ成立スベシ。然ルニ一般ニ

$$\left|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1\right|$$
$$\leqq(1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1$$

ナルコトハ兩邊ノ掛ケ算ヲ實行スレバ明カナリ。從ツテ (6′) ヨリ直チニ (6) ヲ得。卽チ (5) ノ收斂ナルコトヲ知ル。

(5′) ガ收斂ナルトキ，(5) ハ **絕對收斂** ナリトイフ。

定理 3. (5) ガ絕對收斂ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ，無限級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{7}$$

ガ絕對收斂ナルコトナリ。

何トナレバ，log ノ値ヲ定理 1 ニ於ケル如クニトレバ一般ニ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

ナルコトハ容易ニ證明セラル。故ニ (7) ノ絕對值級數ト

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+|a_n|) \tag{8}$$

トノ中何レカ一方ガ收斂ナラバ他方モ亦然リ (第六章ノ問題1)。之ニヨリテ直チニ本定理ヲ得。

定理 4. 絕對收斂乘積ハ其項ノ順序ヲ任意ニ變ズルモ常ニ絕對收斂ニシテ，其積ハ一定ナリ。

何トナレバ，前定理ニヨリ (5) ノ絕對收斂ナルコトハ (7) ノソレト相伴フ。然ルニ吾人ハ級數ニ就イテハ絕對收斂ナルトキ其項ノ順序ヲ任意ニ變ジテ可ナルコトヲ既ニ知レリ。從ツテマタ (5) ニ於テモ其項ノ順序ヲ任意ニ變ズルトキ常ニ絕對收斂ナラザル可カラズ。

然ルトキハ定理 1 ニヨリ，級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ モ亦其項ノ順序ヲ任意ニ變ズルトキ常ニ收斂ナリ，從ツテ其ハ絕對收斂ニシテ，

其和ハ常ニ一定ナリ。之ヲ S トスレバ (5) ノ積ハ項ノ順序如何ニ關ラズ常ニ e^{S} ニシテ (定理 1 後半), コレマター定ナリ。

例. 例 1 ニ擧ゲタル無限級數ハ

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2}=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

ナル形ヲ有シ, 而シテココニ級數

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

ハ明カニ絶對收斂ナリ。依ツテ原級數ハ絶對收斂ニシテ, ソノ項ノ順序ヲ變ズルモ常ニ積ハ $\frac{1}{2}$ ナルベシ。

次ニハ函數項ノ無限乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)\,f_2(z)\cdots\cdots \tag{9}$$

ニ就イテ考フベシ。

先ヅ (9) ニ關シテ **收斂域** ヲ定義スルコトハ級數ノ場合 (第 39 節) ト同様ナレバココニハ省略ス。今

$$R_n=f_{n+1}(z)\,f_{n+2}(z)\cdots\cdots$$

ト置クトキ, 任意ノ正數 ε ニ對シテ適當ナル一數 n_0 ヲトレバ, $n \geqq n_0$ ナル限リ, 收斂域ノ全部又ハ一部ニ於ケルスベテノ z ニツイテ

$$|R_n-1|<\varepsilon$$

ナル關係ガ成立スルナラバ, (7) ハ其部分ニ於テ **一様收斂** ナリトイフ。

定理 5. (9) ガ或變域ニ於テ一様收斂ナルタメニ必要ニシテ

且十分ナル條件ハ, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log f_n(z) \tag{10}$$

ガ同變域ニ於テ一様收斂ナルコトナリ。但シ log ノ意味ハ定理 1 ニ於ケルガ如シトス。

先ヅ必要條件ナルコトヲ證明センニ, 今 n ヲ適當ニ大ナラシムルトキ

$$|R_n-1|<\varepsilon<1 \tag{11}$$

ナル關係ガ成立セリトスレバ,

$$|R_n|<1+\varepsilon$$

ナリ。從ツテ

$$\log_e|R_n|<\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}+\cdots\cdots$$

故ニ

$$<\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

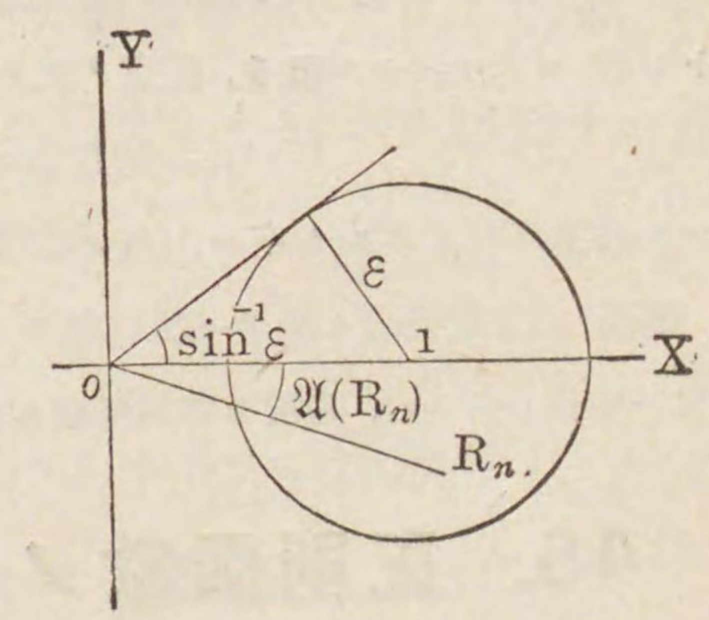
又第六十三圖ニヨリテ

$$|\mathfrak{A}(R_n)|<\arcsin\varepsilon$$

ナルコトモ明カナリ。依ツテ

$$\left|\log R_n\right|\leqq\log_e|R_n|+|\mathfrak{A}(R_n)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+\arcsin\varepsilon.$$



第六十三圖

故ニ任意ノ正數 δ ニ對シテ, 十分小ナル ε ヲ, 從ツテ又十分大ナル n_0 ヲトレバ, $n \geqq n_0$ ナル限リ常ニ

$$|\log \mathrm{R}_n| < \delta \tag{12}$$

ナラシメ得ベシ。コレ卽チ (10) ガ一様收斂ナルコトヲ示スモノナリ。

次ニ十分條件ナルコトヲ證明スルタメニ，今 (12) ガ成立セリトスレバ，

$$\mathrm{R}_n = e^{\log \mathrm{R}_n} = 1 + \log \mathrm{R}_n + \frac{(\log \mathrm{R}_n)^2}{2} + \cdots\cdots,$$

從ッテ　$$|\mathrm{R}_n - 1| < \delta + \frac{\delta^2}{2} + \ldots = e^{\delta} - 1.$$

故ニ n ヲ十分大ナラシメ，從ッテ δ ヲ十分小ナラシムレバ (11) ノ成立スルコトヲ知ルベシ。

例題 1. 次ノ無限乘積ハ收斂ナルカ，收斂ナラバ其積ヲ求メヨ。

$$(1)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}, \qquad (2)\ \prod_{n=2}^{\infty}\left\{1 - \frac{2}{n(n+1)}\right\}.$$

例題 2. 前題ノ無限乘積ハ絕對收斂ナルカ。

例題 3. 函數項ノ無限乘積 (9) ニ於テ，任意ノ正數 ε ニ對シ適當ナル一數 n_0 ヲトレバ，$n \geqq n_0$ ナル限リ，任意ノ正ノ整數 k 及ビ或變域內ノ任意ノ z ニツイテ常ニ

$$|f_{n+1}(z)f_{n+2}(z)\cdots\cdots f_{n+k}(z) - 1| < \varepsilon$$

ナル關係ガ成立スルトキハ，(9) ハ其變域ニ於テ一様收斂ナルコトヲ證明セヨ。

例題 4. 或變域ニ於テ一様收斂ナル無限乘積ノ各項ガスベテ其變域ニ於テ連續 (又ハ正則) ナラバ，其積モ亦同變域ニ於テ連續 (又ハ正則) ナルコトヲ證明セヨ。

45. 正則函數ノ正規族

今第 39 節ノ記號ヲ襲用シ，

$$\mathrm{S}_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots + f_n(z)$$

ト置クトキハ，無限級數

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots\cdots$$

ノ研究ハ畢竟

$$\mathrm{S}_1(z),\ \mathrm{S}_2(z),\ \cdots\cdots,\ \mathrm{S}_n(z),\ \cdots\cdots$$

ナル無限函數列ノ研究ニ歸ス。同様ノ考ニヨリ，無限乘積ノ研究モ亦無限函數列ノ研究中ニ包含セシメラルベシ。依ッテ吾人ハココニ本章ヲ終ルニ臨ミ，無限函數列ニ關スル一二ノ重要ナル定理ヲ述ベントス。但シ以下 S ノ代リニ矢張 f ト書クコトトシ，今考フル函數列ヲ

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \cdots\cdots,\quad f_n(z),\ \cdots\cdots \tag{1}$$

トスベシ。

先ヅ必要ナル二三ノ用語ヲ定義シ置クベシ。

一ノ面分 A 內ノスベテノ點 z ニ對シテ

$$|f_n(z)| < \mathrm{M} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル如キ一定數 (卽チ n ニモ z ニモ無關係ナル) M ヲ定メ得ルトキハ，函數列 (1) ハ A ニ於テ **一様ニ有界** ナリト稱ス。

面分 A ノ各點 z ニ於テ，任意ノ正數 ε ニ對シテ適當ナル整數 n_0 ヲ定ムレバ，$n \geqq n_0$ ナルトキ常ニ

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

ナラシメ得ル如キ函數 $f(z)$ ガ存在スルトキハ，函數列 (1) ハ A ニ於テ **收斂** ナリトイヒ，$f(z)$ ヲソノ **極限函數** トイフ。

上記ノ n_0 ハ一般ニハ z ニ關係スベシ。モシ A 內ニ於ケル z ノ如何ニ關ラズ一定ナル n_0 ヲ定メ得ルトキハ，(1) ハ A ニ於テ **一様收斂** ナリトイフ。

函數列 (1) ガ一樣收斂ナルコトハ，無限級數

$$f_1(z)+\{f_2(z)-f_1(z)\}+\{f_3(z)-f_2(z)\}+\cdots\cdots$$

ガ一樣收斂ナルコトニ他ナラズ。依ツテ第 40 節ノ定理 1 乃至 6 ヲ直チニ一樣收斂ナル無限函數列ノ場合ニ擴張スルコトヲ得ベシ。例ヘバ，(1) ガ A ニ於テ一樣收斂ニシテ其各函數ガスベテ A ニ於テ正則ナラバ，(1) ノ極限函數モ亦 A ニ於テ正則ナリ。其他モ之ニ準ズ。

扨ココニ於テ吾人ハ無限函數列

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \cdots\cdots,\quad f_n(z),\cdots\cdots$$

ガ次ノ條件ヲ滿足セシムルモノト假定スベシ。

［I］ $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ ハスベテ一ツノ有限面分 A ニ於テ正則ナリ。

［II］ 此函數列ハ A ニ於テ一樣ニ有界ナリ。

斯クノ如キ函數列ハ次ニ述ブル如キ性質ヲ有ス。

(I) A ノ內部ニ閉面分 B ヲトリ，A ト B トノ周圍ノ間ノ最短距離ヲ d トス。B 內ニ任意ノ一點 z_1 ヲトリ，之ヲ中心トシテ半徑 d ナル圓 C ヲ畫ケバ，C ハ全部 A 內ニアリ。今 B 內ニ z_1 ヨリノ距離ガ $\dfrac{d}{2}$ ヨリモ小ナル如キ一點 z_2 ヲトレバ，

$$|f_n(z_2)-f_n(z_1)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z_2}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{(C)}\frac{(z_2-z_1)f_n(\zeta)}{(\zeta-z_2)(\zeta-z_1)}d\zeta\right|,$$

但シ ζ ハ C 上ノ動點ニシテ，從ツテ積分路ノ長サハ $2\pi d$ ナリトス。マタ假定ニヨリ適當ナル正數 M ヲトレバ

$$|f_n(\zeta)|<M,$$

$$|\zeta-z_2|>\frac{d}{2},\qquad |\zeta-z_1|=d$$

ナルヲ以テ，

$$|f_n(z_2)-f_n(z_1)|<\frac{2M}{d}|z_2-z_1|.$$

故ニモシ任意ノ正數 ε ニ對シテ $\dfrac{\varepsilon d}{2M}=\delta$ ト置ケバ，

$$|z_2-z_1|<\delta$$

ナル限リ常ニ

$$|f_n(z_2)-f_n(z_1)|<\varepsilon$$

トナル。ココニ δ ハ B 內ニ於ケル z_1 ノ位置ニモ又 n ノ値ニモ無關係ナリ。此性質ヲ稱シテ函數列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ B ニ於テ **同等ニ連續** ナリトイフ。

(II) 今 A 內ニ於テ x, y ガ共ニ有理數ナル如キ點 $z=x+iy$ ノミノ集合ヲ考フルニ，其ハ勿論稠密ニシテ而モ可附番ナリ (第一章ノ問題 8)。依ツテ之ヲ番號ノ順ニ $z_1, z_2, \cdots\cdots$ トス。ココニ於テ

$$f_n(z_1),\qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

ナル値ヲ考フルニ，其ハ假定ニヨリ有界ナルヲ以テ，少クモ一ツノ集積點ヲ有スベシ。今其中ヨリ唯一ツノ集積點ニ收斂スル如キ値ノミヲ取リ出シタリトシ，ソノ n ノ値ヲ

$$n = a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$$

トス。サテ次ニハ

$$f_n(z_2), \qquad n = a_1, a_2, \cdots\cdots$$

ナル値ヲ考フレバ，矢張有界ナルヲ以テ少クモ一ツノ集積點ヲ有スベシ。依ツテ再ソノ中ヨリ唯一ツノ集積點ニ收斂スル如キ値ノミヲ取リ出シタリトシ，ソノ n ノ値ヲ

$$n = b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$$

トス。同様ノコトヲ逐次ニ $z_3, \cdots\cdots$ 等ノスベテノ點ニツイテモ行ヒ，

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

等ノ n ノ値ヲ選定シタリトスレバ，ココニ第二列以下ノ各列ノ數ハ何レモソレヨリ上ニアル列中ニソノ一部分トシテ含マルルモノナリ。

サテココニ於テ新タニ

$$f_n(z), \qquad n = a_1, b_2, c_3, \cdots\cdots$$

ナル函數列ヲ考フレバ，其ハ明カニ

$$f_n(z), \qquad n = a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$$

ノ一部分ニシテ且無限ナルヲ以テ $z = z_1$ ニ於テ有限確定ナル

極限値ヲ有ス。又 $n = a_1$ ヲ除ケバ，ソレヨリ後ハ

$$f_n(z), \qquad n = b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$$

ノ一部分トモ考ヘラルルニヨリ，$z = z_2$ ニ於テモ有限確定ナル極限値ヲ有ス。ナホ同理ニヨリ $n = a_1, a_2$ ヲ除ケバ，ソレヨリ後ハ

$$f_n(z), \qquad n = c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$$

ノ一部分ナルヲ以テ，$z = z_3$ ニ於テモマタ極限値ヲ有スベシ。次第ニ斯クノ如ク考フレバ，結局今考フル所ノ函數列ハ $z_1, z_2, \cdots\cdots$ 等ノスベテノ點ニ於テ收斂ナルコトガ知ラル。一般ニソノ z_k ニ於ケル極限値ヲ表スニ $\sigma(z_k)$ ナル記號ヲ用ヰルコトトスベシ。

(III) 吾人ハ更ニ進ンデ函數列

$$f_n(z), \qquad n = a_1, b_2, c_3, \cdots\cdots$$

ガ x, y 共ニ有理數ナル如キ點 z_n ノミニ限ラズ，B 内ノ任意ノ點 z ニ於テモ亦收斂ナルコトヲ證明セントス。

(I) ニ述ベタル所ニヨリ，任意ノ正數 ε ニ對シテ

$$|z - z_k| < \frac{\varepsilon d}{2M}$$

ナル様ニ z, z_k ヲトレバ，常ニ

$$|f_n(z) - f_n(z_k)| < \varepsilon$$

ナリ。而シテ z_k ハ稠密ナル點集合ヲナスガ故ニ，任意ノ z ニ對シテ斯クノ如キ z_k ヲ取ルコトハ常ニ可能ナリ。

然ルニマタ (II) ニヨリ，n ガ十分大ナルトキハ

$$|\sigma(z_k) - f_n(z_k)| < \varepsilon$$

トナルベキ筈ナリ。依ツテ以上ヲ綜合スレバ,

$$|\sigma(z_k) - f_n(z)| < 2\varepsilon$$

ヲ得。コノコトハ n ガ或ル値以上ナルトキ常ニ成立スルモノナルガ故ニ, 今 p ヲ任意ノ自然數トスレバ,

$$|\sigma(z_k) - f_{n+p}(z)| < 2\varepsilon.$$

從ツテ

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < 4\varepsilon.$$

コレ卽チ $f_n(z)$ ガ收斂ナルコトヲ示スモノナリ。(第 30 節例題 2.)

(IV) 前條ニ於テ收斂ナルコトヲ證明セル函數列

$$f_n(z), \qquad n = a_1, b_2, c_3, \cdots\cdots$$

ハ實ハ B ニ於テ一樣收斂ナリ。

何トナレバ, 今 B 内ノ任意ノ一點ヲ中心トシテ十分小ナル定半徑 (中心ノ位置ニ無關係) ノ圓ヲ畫ケバ, ソノ圓内ニテハ

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < 4\varepsilon$$

ナルコト既ニ證明セル如シ。サレバ今モシ

$$\lim_{p\to\infty} f_{n+p}(z) = \sigma(z)$$

トスルトキハ,

$$|\sigma(z) - f_n(z)| \leqq 4\varepsilon$$

ナルコト明カナリ。

コノコトハ n ヲ或ル値以上ニ大ナラシムレバ上記ノ圓内ニ於ケル任意ノ z ニツイテ成立スルモノナルガ, 閉面分 B ハ斯クノ如キ圓ノ有限個數ヲ以テ全ク蔽ハルルニヨリ, 結局 n ヲソレラノ各圓ニツイテ考ヘタル夫夫ノ最低限度ノ何レヨリモ大ナル樣ニトレバ, B 内ノ任意ノ z ニツイテ常ニ

$$|\sigma(z) - f_n(z)| \leqq 4\varepsilon$$

ガ成立スベシ。コレ卽チ $f_n(z)$ ガ B ニ於テ一樣收斂ナルコトヲ示スモノナリ。

從ツテ $\sigma(z)$ ハ B ニ於テ正則ナリ。

以上 (I) 乃至 (IV) ノ理論ヲ綜合スレバ, 次ノ定理ヲ得ベシ。

定理 1.　面分 A ニ於ケル正則函數ノ一列

$$\boldsymbol{f_n(z), \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots}$$

ガ A ニ於テ一樣ニ有界ニシテ, 又ソノ内ノ一點 a ニ於ケル $f_n(a)$ ナル値ノ集積點ノ一ツヲ c トスレバ, 其函數列中ヨリ適當ナル新ラシキ函數列ヲ選出スレバ, 次ノ二性質ヲ有セシメ得。

(i)　新函數列ハ a ヲ含ム任意ノ閉面分 B ニ於テ一樣收斂ニシテ, 從ツテソノ極限函數ハ正則ナリ。

(ii)　ソノ極限函數ヲ $\sigma(z)$ トスレバ, $\sigma(a) = c$ ナリ。

一般ニ, 面分 A ニ於テ正則ナル無數ニ多クノ函數ノ集合 (必ズシモ可附番ナルヲ要セズ) アリトシ, 其中ヨリ如何樣ニ一ノ函數列 (S) ヲ取出スモ, 更ニ (S) 中ヨリ適當ニ新函數列 (S$'$) ヲ選出スレバ, (S$'$) ヲシテ A ニ含マルルアラユル閉面分ニ於テ常ニ一樣收斂ナラシムルコトヲ得ルナラバ, 最初ノ函數ノ集合ハ

A ニ於テ **正規族** ヲ形成スト稱セラル。*

然ルトキハ次ノ定理アリ。

定理 2. 面分 A ニ於テ一樣ニ有界ナル正則函數ノ集合ハ A ニ於テ正規族ヲ形成ス。

之ヲ證明スルニハ, 與ヘラレタル正則函數ノ集合中ヨリ任意ノ函數列 (S) ヲ取出シタルトキ, 更ニ (S) 中ヨリ適當ニ函數列 (S′) ヲ選出スレバ, (S′) ハ A ニ含マルルアラユル閉面分ニ於テ常ニ一樣收斂ナルコトヲ示セバヨシ。

(S) ハソレ自身矢張 (I), (II) ノ條件ヲ滿足スルガ故ニ, 定理 1 ニヨリ, A ニ含マルル一ツノ閉面分 B ニ於テ一樣收斂ナル如キ新函數列 (S′) ガ確カニ (S) 中ニ含マルベシ。而シテココニ B ハ全ク任意ナルヲ以テ, 今 A ノ内部ニアリテソノ周圍ガ限リナク A ノ周圍ニ接近スル如キ閉面分ノ一列 $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\dots$ ヲ考ヘ (例ヘバ A ニ屬スル點ニシテ A ノ周圍ヨリ $\dfrac{1}{n}$ 以上ノ距離ニアルモノノ集合ヲ B_n トスルガ如シ), 先ヅ B_1 ニ於テ一樣收斂ナル如キ函數列ヲ (S) 中ヨリ取出シ, 之ヲ (S_1) トス。(S_1) ハマタ A ニ於テ一樣ニ有界ナルヲ以テ, 更ニソノ中ヨリ B_2 ニ於テ一樣收斂ナル如キ函數列ヲ取出シ得ベシ, 之ヲ (S_2) トス。以下次第ニ斯クノ如ク, 一般ニ (S_{n-1}) 中ヨリ B_n ニ於テ一樣收斂ナル函數列ヲ取出シ, 之ヲ (S_n) トス。今コレラノ各函數列ニ屬スル函數ヲ次ノ如ク命名ス。

* 正規族ナル語ハ更ニ廣キ意味ニモ用キラル, 本章ノ問題 31 ヲ見ヨ。

$$
\begin{array}{c|l}
(S_1) & f_{1,1},\ f_{1,2},\ \dots,\ f_{1,n},\ \dots\dots \\
(S_2) & f_{2,1},\ f_{2,2},\ \dots,\ f_{2,n},\ \dots\dots \\
\vdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(S_n) & f_{n,1},\ f_{n,2},\ \dots,\ f_{n,n},\ \dots\dots \\
\vdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

ココニ於テ更ニ

$$f_{1,1},\ f_{2,2},\ \dots,\ f_{n,n},\ \dots\dots \qquad (2)$$

ナル函數列ヲ作レバ, コレ即チ A ニ含マルル任意ノ閉面分 A′ ニ於テ一樣收斂ナルベシ。何トナレバ, 十分大ナル n ノ値ヲトレバ B_n ハ必ズ A′ ヲ含ムベク, 而シテ (2) ノ $f_{n,n}$ 以下ノ部分ハ實ハ (S_n) ノ一部ニ過ギザルヲ以テ, (2) ハ B_n ニ於テ, 從ツテマタ A′ ニ於テ, 一樣收斂ナラザル可カラズ。

注意. 本定理ハ正規族ヲ鑑識スル重要ナル定理ナリ。コノ逆ニツイテハ本章ノ問題 32 ヲ見ヨ。

吾人ハ更ニ進ンデ函數列 (1) ガ前記ノ [I], [II] ノ他ニ更ニ

[III] A ノ内部ニ集積點ヲ有スル無數ニ多クノ點ニ於テ收斂ナリ。

トノ假定ヲ追加スベシ。然ルトキハ次ノ定理ヲ得。

定理 3. [I], [II], [III] ノ性質ヲ具備スル函數列ハ A 内ニ取リタル任意ノ閉面分ニ於テ一樣收斂ニシテ, 從ツテ其極限函數ハ A ニ於ケル一ノ正則函數ナリ。

(之ヲ **Vitali ノ定理** トイフ。)

今函數列 (1) ガ上記ノ性質ヲ具備スルモノトシ, B 内ノ一點 α ニ於テ收斂ナラズトセヨ。然レドモ假定ニヨリ $f_n(\alpha)$ ナル値

ハ有界ナル集合ヲ作ルニヨリ，トニカク集積點ヲ有スベク，若シ $f_n(z)$ ガ $z=\alpha$ ニ於テ收斂ナラズト假定スルナラバ，$f_n(\alpha)$ ノ集積點ハ少クモ二ツ相異ルモノガ存在セザル可カラズ。ソノ二ツヲ α, β トス。然ルトキハ定理1ニヨリ，$f_n(z)$ ナル函數列中ヨリ適當ニ二ツノ新ラシキ函數列ヲ選出スレバ，ソノ極限タル函數ヲシテ共ニ B ニ於テ正則ナラシメ得，而シテ之ヲ夫夫 $\sigma(z)$, $\tau(z)$ トスレバ

$$\sigma(\alpha)=\alpha, \qquad \tau(\alpha)=\beta \qquad (\alpha \neq \beta)$$

ナラシメ得ベキナリ。

然ルニ假定ニヨリ原函數列ハ B 內ノ無數ニ多クノ點ニ於テ收斂ナルヲ以テ，$f_n(z)$ ノ極限タル $\sigma(z)$ 及ビ $\tau(z)$ ハソレラノ無數ニ多クノ點ニ於テ夫夫相等シキ値ヲトラザル可カラズ。而シテ此兩函數ハ共ニ正則ナルヲ以テ，一致ノ定理ニヨリ，B 內ノ到ル所ニ於テ $\sigma(z)=\tau(z)$ ニシテ，從ツテマタ $\alpha=\beta$ ナラザル可カラズ。コレ $\alpha \neq \beta$ ナリトセル假定ニ反ス。

故ニ $f_n(z)$ ハ B 內ニ於テ到ル所收斂ナリ。然ルトキハ (IV) ノ論法ニヨリ更ニソノ一樣收斂ナルコトガ證明セラルベク，依ツテ本定理ノ成立スルヲ見ルベシ。

系. **面分 A ニ於テ正規族ヲ形成スル正則函數ノ一列ガ，A ノ內部ニ集積點ヲ有スル無數ニ多クノ點ニ於テ收斂ナルトキハ，其函數列ハ A ニ含マルル任意ノ閉面分ニ於テ常ニ一樣收斂ナリ。從ツテ其極限函數ハ A ニ於テ正則ナリ。**

例題 1. 函數項ノ級數ガ面分 A ニ於テ最大收斂ニシテ且ソノ各項ガ正則ナルトキハ，其和ハ A ニ於ケル正則函數ナルコトヲ Vitali ノ定理ヨリ誘導セヨ。

例題 2. 複素變數 z 及ビ實變數 t ノ函數 $f(z,t)$ アリ，z ガ面分 A 內ニアリ又 t ガ $0<a\leqq t\leqq b$ ナル區間ニアルトキ，次ノ條件ヲ滿足セシムルモノトス。

(1) $f(z,t)$ ハ z ノ正則函數ナリ。

(2) $|f(z,t)|<\mathrm{M}$ ナル一定數 M アリ。

(3) z ノ各ノ値ニ對シテ積分 $\int_a^b f(z,t)\,dt$ ガ存在ス。

ココニ於テ a, b ノ間ノ n 等分點ヲ $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ トシ，

$$\mathrm{F}_n(z)=\frac{b-a}{n}\Big\{f(z,a)+f(z,a_1)+\cdots+f(z,a_{n-1})\Big\}, \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

ト置ケバ，$\mathrm{F}_n(z)$ ノ作ル函數列ニハ Vitali ノ定理ガ適用セラレ，從ツテ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{F}_n(z)=\int_a^b f(z,t)\,dt$$

ハ A ニ於テ z ノ正則函數ナルコトヲ證明セヨ。

第六章ノ問題

1 二ツノ級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ アリ，前者ガ絶對收斂ニシテ且

$$\left|\frac{v_n}{u_n}\right| < \mathrm{M}, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ナル如キ一定數 M ガ存在スルトキハ，後者モ亦絶對收斂ナルコトヲ證明セヨ。

2. 正項級數 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots\cdots$ ニ於テ，

(i) $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$　ナラバ收斂，

(ii) $\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$　ナラバ發散

ナルコトヲ證明セヨ。* (之ヲ **Cauchy-D'Alembert ノ判定法** トイフ。)

3. 前問ニ於テ $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ナルトキハ何等ノ斷定ヲ得ズ。ソノ場合ニハ

(i) $\underline{\lim}\, n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$　ナラバ收斂，

(ii) $\overline{\lim}\, n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$　ナラバ發散

ナルコトヲ證明セヨ。(之ヲ **Raabe ノ判定法** トイフ。)

4. 次ノ級數ノ收斂發散ヲ吟味セヨ。

$$1 + \frac{1+a}{1+b} + \frac{(1+a)(2+a)}{(1+b)(2+b)} + \cdots\cdots, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

5. 冪級數

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\cdots + c_n z^n + \cdots\cdots$$

ニ於テ，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \mu$$

ナル有限確定値ガ存在スルトキハ，原級數ノ收斂半徑ハ $\dfrac{1}{\mu}$ ナルコトヲ證明セヨ。

6. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ガ一樣收斂ナル變域ニ屬スル數 a ニツイテ

* $\overline{\lim}$ ハ上限，$\underline{\lim}$ ハ下限ヲ示ス記號ナリ。

$$\lim_{z\to a} f_n(z) = a_n, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ナル有限確定値ガ存在スルトキハ，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ハ收斂ニシテ，ソノ和ヲ A トスレバ

$$\lim_{z\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right\} = \mathrm{A}$$

ナルコト (略言スレバ，一樣收斂級數ノ和ノ極限値ヲ求ムルニハ項別ニ極限値ヲ求ムレバヨシ) ヲ證明セヨ。

7. 連續函數ヲ項トスル無限級數

$$\mathrm{F}(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots + f_n(z) + \cdots\cdots$$

ガ收斂ニシテ，ソノ第 $(n+1)$ 項以下ノ總和ヲ $\mathrm{R}_n(z)$ トスルトキ，收斂域内ノ一數 a ニツイテ

$$\lim_{n\to\infty}\{\lim_{z\to a} \mathrm{R}_n(z)\} = 0$$

ナラバ，F(z) ハ $z = a$ ニ於テ連續ナルコトヲ證明セヨ。

8. 次ノ級數ノ收斂域ヲ決定セヨ。

(1) $\sin z + \dfrac{1}{2}\sin^2 z + \dfrac{1}{3}\sin^3 z + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n}\sin^n z + \cdots\cdots,$

(2) $z^2 + \dfrac{z^2}{1+z^2} + \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2} + \cdots\cdots + \dfrac{z^2}{(1+z^2)^n} + \cdots\cdots.$

9. a ガ常數ニシテ $w = a + z\sin w$ ナルトキ，次ノ展開式ヲ證明セヨ。

$$w = a + z\sin a + \frac{z^2}{2!}\frac{d\sin^2 a}{da} + \frac{z^3}{3!}\frac{d^2\sin^3 a}{da^2} + \cdots\cdots.$$

注意. 本題ノ假設ノ方程式ヲ **Kepler ノ方程式** トイフ。天文學ニ於テ重要ナリ。

10. 函數 $f(z)$ ガ正則ニシテ且 $f''(z) \neq 0$ ナル點ニ於テ

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z + \theta h)$$

ト置クトキ，θ ガ h ノ冪級數ニ展開セラルルモノトシテ，ソノ最初ノ若干項ヲ計算セヨ。

11. $f(z) = e^z$ 及ビ $\sin z$ ナル場合ニツイテ，前問ノ展開式ヲ求メヨ。

12. 二ツノ有限ナル實數列 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_p$ 及ビ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$ アリ，前者ニツイテハ

$$v_1 \geqq v_2 \geqq \cdots\cdots \geqq v_p \geqq 0$$

ナル關係アリ，又後者ニ於テ一般ニ

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots, p$$

ト置クトキ，$S_1, S_2, \cdots\cdots, S_p$ ノ上下端ヲ夫夫 H 及ビ h トスレバ

$$hv_1 \leqq \sum_{n=1}^{p} a_n v_n \leqq Hv_1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

注意. $|S_n|$ ノ上端ヲ K トスレバ，

$$\left|\sum_{n=1}^{p} a_n v_n\right| \leqq Kv_1$$

ナルコトハ之ヨリ直チニ出ヅ。

13. 二ツノ複素數列 $v_1, v_2, \cdots\cdots$ 及ビ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ アリ，ココニ級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1})$ ハ絶對收斂ニシテ，

$$\lim_{n\to\infty} |v_n| = \lambda, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}| + \lambda = V$$

ナリトシ，又 $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ノ上端ヲ H トスレバ，

$$\left|\sum_{n=1}^{p} a_n v_n\right| \leqq HV$$

ナルコトヲ證明セヨ。

14. 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ收斂ニシテ且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1})$ ガ絶對收斂ナルトキハ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ ハ收斂ナルコトヲ證明セヨ。

15. 函數項ノ級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ ガ或變域ニ於テ一樣收斂ニシテ，又同變域ニ於テ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|v_n(z) - v_{n+1}(z)\right|$ 及ビ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|v_n(z)\right|$ ガ z ノ如何ニ關ラズ一定數 K ヲ越エザルトキハ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z)\, v_n(z)$ ハ同變域ニ於テ一樣收斂ナルコトヲ證明セヨ。

16. 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ノ收斂半徑ガ 1 ニシテ，且此級數ハ $z = 1$ ナルトキニモ收斂ナルモノトスレバ，此級數ハ

$$|1 - z| \leqq K(1 - |z|)$$

ナル面分ニ於テ一樣收斂ナルコトヲ證明セヨ，但シ K ハ 1 ヨリ大ナル任意ノ常數トス。

此面分ヲ圍ム曲線ヲ追跡セヨ。

17. 冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ノ收斂半徑ガ 1 ニシテ，且此級數ハ $z = 1$ ナルトキニモ收斂ニシテ A ナル和ヲ有ストスレバ，z ガ收斂圓內ニテ圓周ニ切セザル任意ノ正則曲線ニ沿ヒテ $z = 1$ ナル點ニ接近スルトキ

$$\lim_{z\to 1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) = A$$

ナルコトヲ證明セヨ。

(之ヲ **Abel ノ定理** トイフ。但シ Abel ノ原定理ハ z ガ原點ヨリ實軸ニ沿ヒテ 1 ナル點ニ近ヅク場合ノミヲ考ヘタルモノニシテ，上記ノ擴張法ハ Picard ノ考案ニヨルモノナリ。)

18. 次ノ形ノ級數ヲ **Dirichlet ノ級數** トイフ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \qquad (a_n \text{ ハ常數}),$$

但シココニ $n^z = e^{z \log n}$ ニシテ，$\log n$ ハ實數値ノミヲトルモノトス。*

此級數ガ z ノ一ツノ値 z_0 ニテ收斂ナルトキハ，

$$\Re(z) > \Re(z_0)$$

ナル如キスベテノ z ニテモ亦收斂ナルコトヲ示シ，依ツテ適當ナル實數 λ ヲトレバ，原級數ハ

$$\Re(z) > \lambda \qquad \text{ナルトキ收斂,}$$
$$\Re(z) < \lambda \qquad \text{ナルトキ發散}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

(斯クノ如キ λ ヲ Dirichlet ノ級數ノ **收斂實部** トイフ。原級數ガ常ニ收斂ナルトキハ $\lambda = -\infty$ ト考フベク，常ニ發散ナルトキハ $\lambda = +\infty$ ト考フベシ。)

19. 前題ノ如キ λ ニ對シテ，$\lambda' > \lambda$ ナル λ' ヲトレバ，

* 更ニ一般ニ $\sum \dfrac{a_n}{p_n{}^z}$ 又ハ $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ (但シ $p_n \to +\infty$, $\lambda_n \to +\infty$) ノ如キモノヲモ Dirichlet ノ級數トイフ。

$$\Re(z) \geqq \lambda'$$

ナル半平面内ノ任意ノ閉面分ニ於テ Dirichlet ノ級數ハ一樣收斂ナルコト，從ツテ該級數ハ

$$\Re(z) > \lambda$$

ニ於テ一ノ正則函數ヲ表スコトヲ證明セヨ。

20. 與ヘラレタル Dirichlet ノ級數ニ對シ適當ナル實數 l ヲトレバ，$\Re(z) > l$ ナルトキハ絶對收斂，$\Re(z) < l$ ナルトキハ然ラザルコトヲ證明セヨ。(或場合ニハ $l = \pm\infty$ ト考フベキコトハ問題 18 ト同ジ。)

21. 問題 18 ノ λ ト前問ノ l トノ間ニハ

$$\lambda \leqq l \leqq \lambda + 1$$

ナル關係アルコトヲ證明セヨ。

22. 次ノ各級數ニツイテ前問ノ λ 及ビ l ヲ決定セヨ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^z}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^z}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$

注意. (3) ノ和ハ **Riemann ノ ζ 函數** ト稱セラル，解析的整數論ニ於テ重要ナル函數ナリ。

23. 二重無限數列

$$a_{m,n}, \qquad m, n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

ニ於テ，ソノスベテノ絶對値ヲ或順序ニテ加ヘタル和ガ有限確定ナル極限値ヲ有スルトキハ，$a_{m,n}$ 自身ノ總和モ亦一ノ極限値 S ヲ有ス。而シテ此場合ニハ級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n} \qquad \cdots\cdots$$

ハ各絶對收斂ニシテ，其和ヲ夫夫 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ トスレバ，級數

$$A_1 + A_2 + \cdots\cdots$$

モ亦絶對收斂ナルコト，マタ其和ハ S ニ等シキコトヲ證明セヨ。

注意. 此場合ニ **二重級數** $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ ハ **絶對收斂** ナリト稱セラル。

24. $z = a$ ノ近傍ニ於テ

$$f_n(z) = c_{n,0} + c_{n,1}(z-a) + c_{n,2}(z-a)^2 + \cdots\cdots, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

ガ何レモ收斂ニシテ，且同ジ變域ニ於テ

$$F(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots$$

ガ一樣收斂ナルトキハ，

$$c_{0,m} + c_{1,m} + c_{2,m} + \cdots\cdots, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

ハ收斂ニシテ，其和ヲ A_m トスレバ，

$$F(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

ナル展開式ガ成立スルコトヲ證明セヨ。(**Weierstrass ノ定理**)

25. 原點ヲ中心トシ 1 ヨリ小ナル半徑ヲ有スル圓内ニテ次ノ級數ハ絶對且一樣收斂ナルコトヲ證明シ，之ヲ z ノ羃級數ニ書キ直セ。

$$\frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{1-z^n} + \cdots\cdots.$$

注意. 之ヲ **Lambert ノ級數** トイフ，解析的整數論ニ於テ使用セラル。

26. p ガ $2, 3, 5, 7, \cdots\cdots$ 等スベテノ素數ノ値ノミヲトルトキ，無限乘積

$$\prod \frac{1}{1-p^{-z}}, \qquad \Re(z) > 1$$

ノ收斂ナルコトヲ示シ，其積ハ Riemann ノ ζ 函數 (問題 22)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \qquad \Re(z) > 1$$

ト相等シキコトヲ證明セヨ。

27. 次ノ式ヲ證明セヨ。

(1) $\displaystyle\zeta(z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^z}$,　　(2) $\displaystyle\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$.

但シ $\tau(n)$ ハ n ノスベテノ約數ノ個數ヲ表シ，又 $\mu(n)$ ハ **Möbius ノ函數** ト稱セラルルモノニシテ $\mu(1) = 1$ トシ，一般ニ

n ガ一ノ素數ノ平方ニテ整除セラルルトキハ　　$\mu(n) = 0$,

n ガ相異ル k 個ノ素數ノ積ニ等シキトキハ　　$\mu(n) = (-1)^k$

ナルモノトス。

28. 次ノ式ヲ證明セヨ。

（1） $$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}, \qquad |z|<1,$$

（2） $$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)}=-1.$$

29. 函數項ノ級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

ガ變域 A ＝於テ最大收斂ナルトキハ，無限乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1+f_n(z)\right\}$$

ハ A ＝於テ絕對且一樣收斂ナルコトヲ證明セヨ。

30. 函數 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ閉面分 A ＝於テ正則＝シテ，且級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

ガ A ノ周圍ノ上＝於テ一樣收斂ナルトキハ，此級數ハ A ノ內部＝取レル任意ノ閉面分＝於テ常＝一樣收斂ナルコトヲ證明セヨ。

31. 面分 A ＝於ケル正則函數ノ正規族ノ定義（第 45 節）ヲ次ノ如ク＝擴張ス。

（1） A ＝於テ正則ナル函數例

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots\cdots,\ f_n(z),\ \cdots\cdots$$

＝於テ任意ノ正數 M ＝對シ適當ナル n_0 ヲトレバ，$n\geqq n_0$ ナル限リ $\mathcal{A}$ 內＝於ケルスベテノ z ＝ツイテ常＝

$$|f_n(z)|>\mathrm{M}$$

ガ成立スルトキハ，該函數列ハ **一樣＝ ∞ ＝收斂ス** ト稱シ，今後正規族ノ定義中＝アル「一樣收斂」ナル語ハ此種ノモノヲモ含ム廣義ノ意＝解スベシ。

（2） 正則函數ノ集合ガ一點 P ＝於テ正規族ヲ形成ストイフハ P ノ十分小ナル近傍＝於テ正規族ヲ形成スル意ナリトス。

ココ＝於テ次ノ定理ヲ證明セヨ。

一ノ面分＝於テ正則ナル函數ノ集合ガソノ各點＝於テ正規族ヲ形成スルトキハ，ソノ全面分＝於テモ亦正規族ヲ形成ス。（コノ逆ハ明カ＝眞ナリ。）

32. 面分 A ＝於テ正則ナル函數ノ集合ガ正規族ヲ形成シ，且 A 內ノ或一點＝於テ絕對値ガ有界ナルトキハ，モトノ集合ハ A ＝含マルル任意ノ閉面分＝於テ一樣＝有界ナルコトヲ證明セヨ。

33. 前問ト同ジ假定ノ下＝，ソノ函數ノ集合ハ A ＝含マルル任意ノ閉面分＝於テ同等＝連續ナルコトヲ證明セヨ。

34. 有限面分 A ＝於テ正則ナル函數ノ集合ガ同等＝連續＝シテ，且 A 內ノ或一點＝於テ絕對値ガ有界ナルトキハ，モトノ集合ハ A ＝於テ正規族ヲ形成スルコトヲ證明セヨ。

35. 一ノ面分 A ＝於テ正則ナル函數列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ一樣收斂＝シテ其極限函數ガ $\mathrm{F}(z)$ ナルトキ，モシ各函數 $f_n(z)$ ガ何レモ A ＝於テ a ナル値ヲトラザルトキハ，$\mathrm{F}(z)$ モ亦 a ナル値ヲトラザルカ，然ラザレバ恒等的＝ $\mathrm{F}(z)=a$ ナルコトヲ證明セヨ。

36. 面分 A ＝於テ正則ナル函數ノ集合アリ，コレラノ各＝ヨリテ生ズル A ノ寫像ノ何レトモ相交ラザル如キ一ツノ面分ガ存在スルトキハ，モトノ集合ハ A ＝於テ正規族ヲ形成スルコトヲ證明セヨ。

第七章

解析函數

46. 解析接續

吾人ハ第 43 節ニ於テ函數 $f(z)$ ガ

$$f(z)=\frac{1}{1-z} \tag{1}$$

ナル式ニヨリテ定義セラレタル場合ヲ例ニトリテソノ展開式タル同節ノ (2), (3), (4) 等ガ相互ニ誘導シ得ベキモノナルコトヲ論ジタリ。

今モシ立脚地ヲ轉ジテ

$$f(z)=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n+\cdots\cdots \tag{2}$$

ヲ以テ函數 $f(z)$ ノ定義トセバ，如何ナル結果ヲ生ズルカヲ考究セントス。

此場合ニ於テモ (2) ヨリ

$$\mathrm{P}\left(z-\frac{i}{2}\right) \tag{3}$$

ヲ誘導シ得ルコトハ前ノ如ク，而シテ (3) ノ收斂圓ガ C_3 ナルコトモ容易ニ證明セラル。然レドモ $f(z)$ ハ (2) ニヨリテ定義セラレタルモノナルガ故ニ單位圓ノ外部ニ於ケル $f(z)$ ノ數値ナルモノハ未ダ全然定義セラレズ。從ッテ (3) ナル級數ハ圓

C_3 ノ內ニテ圓 C_2 ノ內部ニアル部分ニ於テハ確カニ原函數 $f(z)$ ヲ表スモノナレドモ，其他ノ部分ニ於テハ一個ノ新函數ヲ表スモノト考ヘザル可カラズ，之ヲ假リニ $\varphi(z)$ ト名ヅクベシ。然ルニ (3) ハ圓 C_3 ノ內部ニ於テ到ル所正則ナル一ツノ函數ヲ表スモノナルガ故ニ，新函數 $\varphi(z)$ ナルモノハ C_3 ノ內部ニ入レル C_2 ノ周ニ沿ヒテ原函數 $f(z)$ ト圓滑ニ接續スルモノニシテ，其接續ニ際シテ何等ノ不正則性ヲ呈スルコトナシ。サレバ若シ兩者ヲ合シテ一トセバ，C_2 及ビ C_3 ノ內部ヲ通ジテ一個ノ正則函數ヲ成スベク其間ニ何等補綴ノ痕跡ヲ殘サザルベシ。依ッテ吾人ハ $\varphi(z)$ ヲ稱シテ $f(z)$ ノ **解析接續** ト呼ビ，之ニヨリテ函數 $f(z)$ ハ最初ニ定義セラレタル變域 C_2 ヲ越エテ **解析的ニ*** 接續セラレタリト稱スベシ。或ハ $\varphi(z)$ ノ代リニ (3) 自身ヲ直チニ (2) ノ解析接續トモ稱ス。

更ニマタ第 43 節ノ (4) ニツイテ考フルニ，此ハ (2) ヨリ其解析接續トシテ直接ニハ誘導セラレザレドモ，(3) ヲ仲介トシテ間接ニハ誘導セラルルモノナリ。斯クノ如キ場合ニモ，矢張 (4) ヲ (2) ノ解析接續トイフコトアリ。

之ニ依リテ第 43 節ノ前半ニ得タル結果ヲ次ノ如クニ述ブルコトヲ得。

「函數 $f(z)$ ガ一ツノ面分 A ニ於テ正則ナルトキハ，A 內ノ各點ヲ中心トスル $f(z)$ ノ展開式ハスベテ其中ノ一ツヨリ直接

*「正則的ニ」トイフト同意味ナリ。

又ハ間接ノ解析接續トシテ誘導セラルルモノナリ。」

サテ一般ニ函數 $f(z)$ ガ面分 A ニ於テ正則ナルトキ，A 内ノ一點 a ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式 $P(z-a)$ ノ收斂半徑ハ a ヨリ A ノ周ニ至ル最短距離ヨリモ小ナラズ (第 42 節)。若シソノ收斂半徑ガ前記ノ最短距離ヨリモ大ナルトキハ，A ノ外部ニ出デタル其收斂圓ノ部分ニ於テ $P(z-a)$ ハ $f(z)$ ノ解析接續トナル。故ニ最初ノ函數 $f(z)$ ガ A ノ外部ニ於テ正則ナラザルトキ又ハ全然定義セラレザルトキト雖，$P(z-a)$ ヲ用キルコトニヨリテ原定義ヲ修正又ハ補足スルコトトスレバ，之ニ依ツテ $f(z)$ ノ正則ナル變域ヲ A 以外ニ擴張シ得ベシ。A 内ノ各點ヲ中心トシ夫夫 $f(z)$ ノ展開式ヲ作リテ同様ノ擴張ヲナシ，更ニマタ擴張セラレタル變域内ノ各點ヲ中心トシテ同様ノ手續ヲ繰リ返スト考ヘ，結局ソレ以上ノ擴張ヲ許サザル正則變域ヲ定メ得タルトキハ，ココニ $f(z)$ ハ **解析的ニ完成** セラレタリト稱ス。

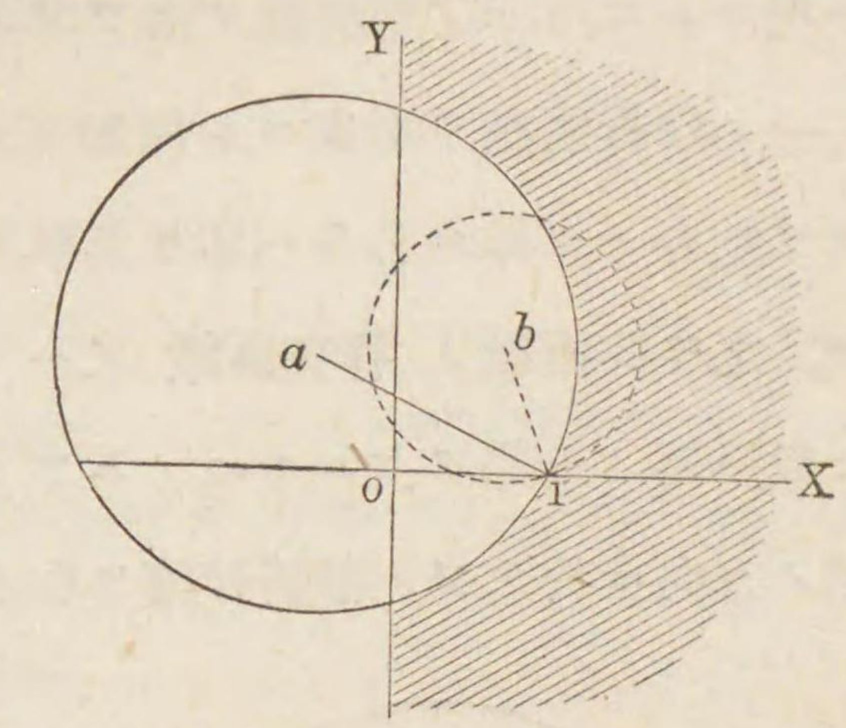
例ヘバ次ノ如キ $z=x+yi$ ノ函數 $f(z)$ アリトスベシ。

$$x \leqq 0 \text{ ナルトキハ，} \quad f(z)=\frac{1}{1-z} \tag{4}$$

$$x>0 \text{ ナルトキハ，} \quad f(z)=\frac{1}{1-yi} \tag{5}$$

然ルトキハ $f(z)$ ハ點 ∞ ヲ除クノ他ハ全平面ニ於テ連續ニシテ，$x<0$ ナル半平面ニテハ正則，$x \geqq 0$ ナル半平面ニテハ不正則ナリ。ココニ於テ今 $x<0$ ナル半平面内ニ一點 a ヲトリ，(4) ヲ用キテ $P(z-a)$ ヲ作レバ，之ハ a ヲ中心トシ點 1 ヲ過ル圓内ニテ正則ナル函數ヲ表ス。依ツテ (5) ナル定義ノ一部ヲ $P(z-a)$ ニ改ムレバ，圖ニ於テ陰影ヲ施サザル部分ノ如キ變域ニテ正則ナル一ノ函數ヲ得。其

正則變域内ニ更ニ一點 (例ヘバ b) ヲトリテ $P(z-b)$ ヲ作リ之ヲ新定義トシテ更ニ (5) ノ一部ヲ改ムレバ一層大ナル正則變域ヲ得 次第ニ斯クシテ正則變域ヲ擴張スレバ，極限ニ於テ (5) ハ全ク變改セラレテ (4) 及ビソノ解析接續ノミニテ定義セラルル函數ヲ得ベク，ソノ正則變域ハ $z=1$ ナル一點ヲ除キタル殘リノ全平面トナルベシ。(點 ∞ ノコトハ後ニ讓ル。) ココニ到ツテ最初ノ函數 $f(z)$ ハ解析的ニ完成セラレタルモノトス。(コノ完成セラレタル函數ハ即チ全平面ニ於ケル $\dfrac{1}{1-z}$ ニ他ナラズ)。



第六十四圖

47. 解析函數

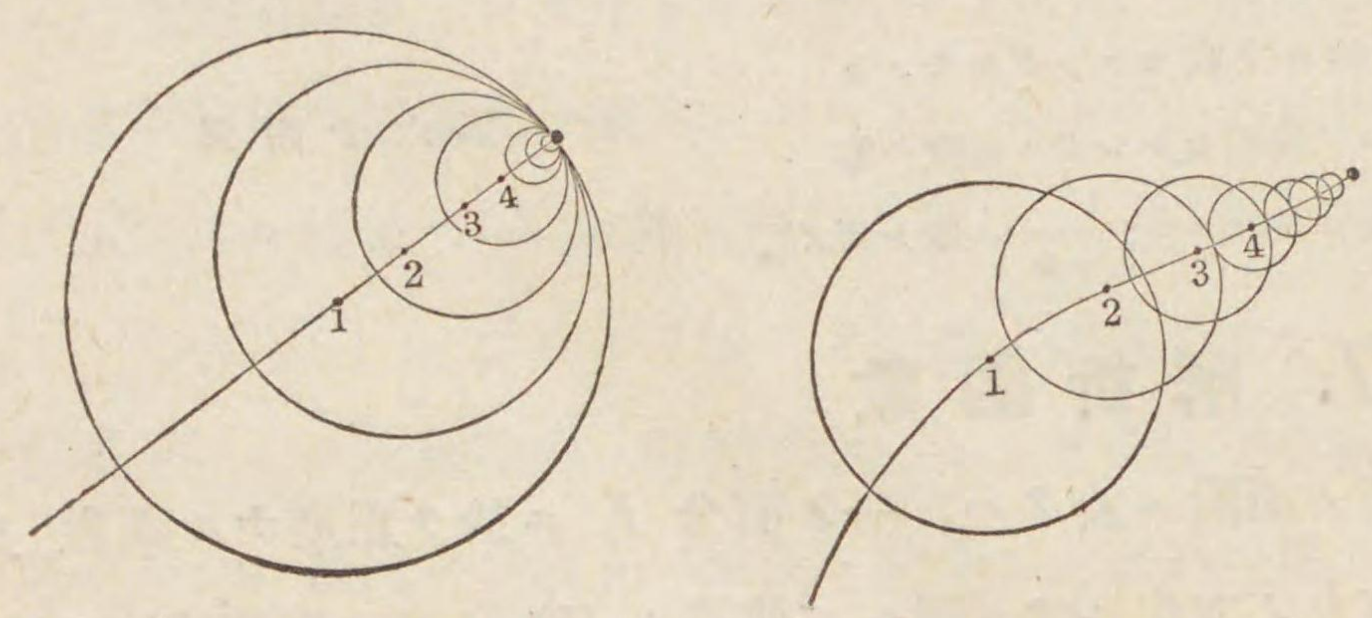
前節ノ所論ニ於テハ，一ノ面分 A ニ於テ正則ナル函數 $f(z)$ ガ何等カノ方法ニテ (例ヘバ前節ノ (1) ノ如ク有理式ニテ表シテ) 定義セラレタルモノトシテ之ヲ解析的ニ完成スルコトヲ考ヘタリ。然ルニ A ニ於ケル $f(z)$ ナルモノハ實ハ A 内ノ任意ノ一點例ヘバ a ヲ中心トセルソノ展開式 $P(z-a)$ ヨリ生ズル直接又ハ間接ノ解析接續ニヨリテ定メラルルモノナルガ故ニ，$f(z)$ ヲ解析的ニ完成スルハ畢竟ソノ一ツノ展開式タル $P(z-a)$ ヲ解析的ニ完成スルト結果ニ於テ同一ナリ。

ココニ於テ吾人ハ次ノ如キ定義ヲ設ク。

一ノ冪級數ヲ解析的ニ完成シテ得ル函數ヲ稱シテ **解析函數** トイフ。

此場合ニ最初ノ冪級數及ビソノ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ現ルルスベテノ冪級數ノ各ヲ其解析函數ノ **原素** トイフ。

一ノ解析函數ヲ形成スル原素タルスベテノ級數ノ收斂圓ノ內部ヲ綜合シテ得ル面分ハ卽チ其解析函數ノ正則ナル全變域ニシテ，之ヲ其函數ノ **存在區域** 又ハ **領域** ト稱ス。領域ハ必ズシモ數平面ノ全部ヲ占ムルモノニアラズ，例ヘバ一ノ原素ヨリ任意ノ方向ニ於テソノ解析接續ヲ作リ行クトキ逐次ニ生ズル新原



1, 2, 3,…… ハ逐次ノ中心，右上ノ黑點ハ特異點ヲ示ス。

第 六 十 五 圖

素ノ收斂半徑ガ次第ニ減少シ或ル一點ノ何程近クマデモ領域ニ編入シ得レドモ其點自身ハ領域ニ屬セザルコトアルベシ。斯クノ如ク領域ノ限界ヲナス不正則點ヲ稱シテ其解析函數ノ **特異點** トイヒ，特異點全部ノ集合ヲ其函數ノ **自然限界** トイフ，蓋シコレ吾人ガ任意ニ劃セル限界ニ非ズシテ其函數ノ本性トシテ最早ソノ埒外ニ解析接續ノ作成ヲ許サザル自然ノ限界ナレバナリ。

初等函數ニ於テハ自然限界ハ有限又ハ無限個ノ孤立點ヨリナルヲ常トスレドモ，高等超越函數ニ於テハ一ノ線ヲナスモノアリ，次ニ其一例ヲ示ス。

今解析函數 $f(z)$ ノ一ツノ原素ヲ

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots\cdots + z^{2^n} + \cdots\cdots \tag{6}$$

トスルニ，其收斂圓ハ明カニ單位圓ナリ。サレバ $f(z)$ ナル函數ハ單位圓ノ內部ニ於テハ正則ナリ。然レドモ單位圓ノ周上ニ於テハ實ニ無數ニ多クノ不正則點ガ到ル所稠密ニ存在スルモノナリ，其證明次ノ如シ。

先ヅ m, n ヲ正ノ整數トシ，單位圓周上ニ

$$e^{\frac{m\pi i}{2^n}} \quad \left(卽チ\quad \cos\frac{m\pi}{2^n} + i\sin\frac{m\pi}{2^n}\right) \tag{7}$$

ナル一點ヲトリ，z ガ原點ヨリ一ノ半徑ニ沿ヒテ此點ニ近ヅキ來ルモノト考フベシ。之ニ對スル $f(z)$ ノ値ノ變化ヲ考フルニハ，(6) ニ於テ

$$z = re^{\frac{m\pi i}{2^n}} \tag{8}$$

ト置キ，ココニ r ガ實數ニシテ 0 ヨリ 1 ニ向ッテ增大スルモノトスレバ可ナリ。然ルニ (8) ヲ (6) ニ代入スレバ，

$$f(z) = re^{\frac{m\pi i}{2^n}} + r^2 e^{\frac{m\pi i}{2^{n-1}}} + \cdots\cdots + r^{2^{n-1}} e^{\frac{m\pi i}{2}}$$
$$+ (-1)^m r^{2^n} + r^{2^{n+1}} + \cdots\cdots$$

トナル，何トナレバ

$$e^{m\pi i} = (-1)^m, \qquad e^{2m\pi i} = \cdots\cdots = 1$$

ナレバナリ。サレバココニ於テ $r \to 1$ トスレバ明カニ $f(z) \to \infty$ トナル。之ニ依ッテ見レバ (7) ハ $f(z)$ ノ不正則點ナリ。然ルニ m, n ハ任意ノ正ノ整數ナルガ故ニ，(7) ノ如キ不正則點ハ單位圓周上ニ於テ到ル所ニ稠密ニ存在スベシ。サレバ單位圓內ノ何レノ點ヲ中心トシテ $f(z)$ ヲ展開スルモ，其得ル所ノ冪級數ノ收斂圓ハ單位圓ノ外部ニ出ヅルコト能ハズ。單位圓ノ周ハ卽チ此函數ノ自然限界ナリ。

定理 1.　一ノ冪級數 $P(z-a)$ ヲ完成シテ得ル解析函數ハ唯一ツニ限ル。

コレ一致ノ定理ヨリ直チニ出ヅル結果ナリ。

又冪級數 $P(z-a)$ ヲ完成シテ得ル解析函數ヲ $f(z)$ ニテ表セバ，次ノ定理アリ。

定理 2.　$P(z-a)$ ノ收斂圓周上ニハ $f(z)$ ノ特異點ガ少クモ一ツ存在ス。

蓋シ $P(z-a)$ ノ收斂圓周上ノスベテノ點ニ於テ $f(z)$ ガ正則ナルコトハ有リ得ベカラズ，何トナレバ其場合ニハ該圓ノ半徑ヲナホ少シク大ナラシムルモ其圓內ニテ冪級數ガ收斂性ヲ失ハザルコトトナリ，收斂圓ノ定義ニ悖レバナリ。依ツテ $P(z-a)$ ノ收斂圓ハ $f(z)$ ノ特異點ヲ少クモ一ツハ過ラザル可カラズ。

注意。 冪級數ガ其收斂圓周上ノスベテノ點ニ於テ收斂ナル場合ト雖，ソノ級數ニヨリテ表サルル原函數ハ該圓周上ニ少クモ一ツ不正則點ヲ有スルモノナリ。例ヘバ

$$f(z)=\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}+\cdots\cdots$$

ノ收斂圓ハ單位圓ニシテ其周上ニテ到ル所收斂ナレドモ，

$$f'(z)=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n}+\cdots\cdots$$

ナルガ故ニ，z ガ實軸ニ沿ヒテ $z\to(1-0)$ ナルトキ $f'(z)\to\infty$ トナリ，從ツテ $f(z)$ ハ $z=1$ ニ於テ正則ナラザルヲ見ルベシ。

系.　$P(z-a)$ ノ收斂半徑ハ a ヨリ $f(z)$ ノ自然限界ニ至ル最短距離ニ等シ。

定理 3.　$P(z-a)$ ノ收斂半徑ハ a ノ連續函數ナリ。

今 $P(z-a)$ ノ收斂圓ヲ K トスレバ，前定理ニヨリ K ノ周上ニハ少クモ一ツ $f(z)$ ノ特異點アリ。サテ中心ヲ a ヨリソノ圓內ノ一點 b ニ變ジタリトスルニ，b ニ最近キ $f(z)$ ノ特異點トシテ考ヘ得ベキ點ハ，最近キ場合ニハ K ニ於テ a, b ヲ過ル直徑ノ b ニ近キ端ニシテ，又最遠キ場合ニハ同ジ直徑ノ b ニ遠キ端ナリ。依ツテ中心ガ a, b ナルトキノ收斂半徑ヲ夫夫 r_a, r_b トスレバ，次ノ不等式ガ成立ス。

$$r_a-|b-a|\leqq r_b\leqq r_a+|b-a|.$$

之ヨリ
$$|r_b-r_a|\leqq|b-a|$$

ヲ得。故ニ $|b-a|$ ヲ十分小ナラシムルコトニヨリテ $|r_b-r_a|$ ハ何程ニテモ小ナラシメ得ベシ。故ニ r_a ハ a ノ連續函數ナリ。

終リニ臨ミ，解析函數ノ概念ニツキ注意スベキ若干ノ點ヲ述ベントス。

(I) 解析函數トイフハ，「四則其他ノ算法ニヨリテ解析的ニ定義セラルル函數」トイフ概念トハ必ズシモ一致セズ。例ヘバ

$$F(z)=\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\frac{z^4}{1-z^8}+\cdots\cdots$$

ナル函數 $F(z)$ ハ「解析的ニ定義セラレタル函數」ニハ相違ナケレドモ一ツノ完全ナル「解析函數」ニハアラズ。何トナレバ，

$$|z|<1 \quad \text{ナルトキハ,} \quad F(z)=\frac{z}{1-z},$$

$$|z|>1 \quad \text{ナルトキハ,} \quad F(z)=\frac{1}{1-z}$$

ナルガ故ニ,* $F(z)$ ハ二ツノ解析函數

$$\frac{z}{1-z} \quad 及ビ \quad \frac{1}{1-z}$$

ノ各一部ヅツヲ表示スルモノニシテ，兩者ノ接合線タル單位圓ノ周上ニハ $F(z)$ 自身ノ不連續點ヲ稠密ニ有スルモノナリ。

(II) 「正則函數」トイフトキハ「吾人ガ豫メ指定シタル或變域（開面分）ニ於テ正則ナル函數」トイフ意味ニシテ，實ニ「正則」トイフハ其函數ノ局所的性質ニ過ギズ，同一ノ函數ニテモ或所ニテハ正則，或所ニテハ不正則ナルコトアルベシ。之ニ反シテ「解析函數」トイフハ上記ノ定義ニ從ツテ完成セラルルモノニシテ，固有ノ領域ヲ有シ其領域内ニテハ到ル所正則ナルモノナリ。故ニ，假リニ解析函數ヲ其領域ノ一局部ニ於テノミ截リ取リテ考ヘ，又ハ相接スル領域ヲ有スル二ツノ解析函數ヲ接合シテ一ノ函數ヲ定義スルトモ，其等ハ何レモ一個ノ解析函數ナリトハイフ可カラズ。

(III) 解析函數ノ定義ハ冪級數ヲ基礎トシテ與ヘラレタレドモ，其函數ヲ表示スルニハ必ズシモ常ニ冪級數ノミヲ用キルヲ要セズ。例ヘバ $\dfrac{1}{1-z}$ モ亦一個ノ解析函數ヲ表ス．何トナレバ先ヅ之ヲ (2) ノ如クニ展開シ，其アラユル解析接續ヲ作レバ，之ニヨリテ該函數ノ全體ヲ表示シ得レバナリ。

(IV) 上ニ述ベタル解析函數ノ定義ニ於ケル冪級數ハスベテ有限ノ所ニ中心ヲ有スルモノトス。サレバ點 ∞ ヲ中心トスル如キモノハ未ダ原素トシテ認メズ，之ニ關シテハ更ニ第 53 節ニ於テ補足スベシ。

(V) 解析函數 $f(z)$ ノ一ツノ原素 $P(z-a)$ ヨリ出發シテ他ノ一點 b ヲ中心トスル原素ヲ求メントスルニ，若シ a ヨリ b ニ至ル徑路如何ニ關ラズ常ニ同一ノ

---

* $|z|>1$ ナルトキハ，次ノ級數ハ收斂ナリ。

$$S(z)=\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1-z^4}+\frac{1}{1-z^8}+\cdots\cdots$$

依ツテ $$S(z)+F(z)=\frac{1+z}{1-z^2}+\frac{1+z^2}{1-z^4}+\frac{1+z^4}{1-z^8}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1-z}+S(z).$$

故ニ $F(z)=\dfrac{1}{1-z}$ ヲ得。又 $|z|<1$ ナルトキハ $\dfrac{1}{z}=z'$ トシテ考フベシ。

$P(z-b)$ ヲ得ルトキハ，$f(z)$ ヲ稱シテ **一價函數** トイフ。若シ之ニ反シテ其徑路ニヨリテ相異ル $P(z-b)$ ヲ得ル場合ニハ，$f(z)$ ヲ **多價函數** トイフ。(之ニツイテハ第九章ニ論ズベシ)

$f(z)$ ガソノ領域全部ヲ通ジテハ上記ノ如キ一價ノ性質ヲ具ヘザル場合ニテモ，若シ或ル限ラレタル面分内ニテ斯クノ如キ性質ヲ有スルトキハ，$f(z)$ ヲ其面分内ニテ一價ナリト稱ス。本書上卷ニ於テ論ズル函數ノ多クハ其考フル所ノ面分内ニテ一價ナルモノトス。

例題 1 次ノ各函數ハ解析函數ナルコトヲ證明シ，且ソノ領域ヲ決定セヨ。

(1) $\dfrac{1}{z}$　　(2) 有理整函數　　(3) $\sin z$

例題 2. $f_1(z)$ 及ビ $f_2(z)$ ハ夫夫 A_1 及ビ A_2 ナル領域ヲ有スル解析函數ナリトス。然ラバ $f_1(z)+f_2(z)$ ハ常ニ一ツノ解析函數ヲ表スカ。

例題 3. 無限級數

$$z+z^{2!}+z^{3!}+\cdots\cdots+z^{n!}+\cdots\cdots$$

ヲ一原素トスル解析函數ハ單位圓ノ周ヲ自然限界トシテ有スルコトヲ證明セヨ。

48. 原素ニ關スル定理

前節ニ述ベタル解析函數ノ定義ヲ更ニ改良センガタメニ，次ニ先ヅ原素ニ關スル二三ノ考察ヲ試ミントス。

一ノ原素 $P(z-a)$ ノ收斂圓ノ半徑ヲ r_a トシ，其圓内ノ一點 b ヲ中心トシテ作レル解析接續 $P(z-b)$ ノ收斂半徑ヲ r_b トス。然ルトキハ前節ノ定理 3 ニヨリ，r_a ハ a ノ連續函數ナルガ故ニ，ε ヲ十分小ナル正數トスレバ，$|a-b|<\varepsilon$ ナルトキ

$$|r_a-r_b|<\frac{r_a}{2} \quad 卽チ \quad \frac{r_a}{2}<r_b$$

ナラシムルコトヲ得。依ツテ今 $|a-b|$ ヲシテ ε 及ビ $\dfrac{r_a}{2}$ ノ

何レヨリモ小ナラシムル様ニ b ヲトレバ確カニ

$$|a-b|<r_b$$

トナルベシ。換言スレバ，b ヲ十分 a ニ近クトレバ，a ハ $P(z-b)$ ノ收斂圓内ニアリ。從ツテ其場合ニハ $P(z-a)$ ハマタ $P(z-b)$ ノ解析接續ナルコト明カナリ。斯クノ如キ關係ヲ有スル二ツノ原素ヲ稱シテ**相互ニ隣接**セリトイハン。

定理 1. **$P(z-a)$ トソノ一ツノ直接ナル解析接續 $P(z-b)$ トガ相互ニ隣接セザル場合ニテモ，有限個數ノ點 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヲ適當ニトレバ，**

$$P(z-a),\quad P(z-a_1),\quad P(z-a_2),\quad \cdots\cdots,$$
$$P(z-a_n),\quad P(z-b)$$

ノ中ノ何レノ相隣ル二ツヲ取ルモ相互ニ隣接セル様ニスルコトヲ得。

先ヅ a ト b トヲ結ブ線分ヲ作リ，ソノ上ニ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，ヲトルモノト考フベシ。今中心 a ガ線分 ab 上ヲ移動スルトキハ半徑 r_a ハ a ノ連續函數ナルガ故ニ，一ノ最小値ヲトルベシ，之ヲ r_0 トス。依ツテ今スベテノ $|a_{k+1}-a_k|$ ヲ r_0 ヨリモ小ナル様ニサヘスレバ本定理ノ主張ハ成立スベク，ココニ $|a_{k+1}-a_k|$ ハ無限小ナルヲ要セザルヲ以テ，點 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ハ有限個數ニテ足ルコト明カナリ。

定理 2. **$P(z-a)$ ヨリ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ $P(z-k)$ ヲ導キ得ルナラバ，逆ニマタ $P(z-k)$ ヨリ $P(z-a)$ ヲ導クコトヲ得。**

$P(z-a)$ ヨリ $P(z-k)$ ヲ導クトキ逐次ノ中心トセル點ヲ $a, b, c, \cdots\cdots, k$ トス。若シ $P(z-a), P(z-b)$ ガ相互ニ隣接セザルトキハ，線分 ab 上ニ前定理ニ言ヘル如キ點 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヲトルベシ。其他ノ線分 $bc, \cdots\cdots$ 等ニツイテモ若シ必要アラバ同様ノ點ヲトルモノトス。然ルトキハ

$$P(z-a),\ P(z-a_1),\ P(z-a_2),\ \cdots\cdots,\ P(z-a_n),$$
$$P(z-b),\ \cdots\cdots,\ P(z-k)$$

ハ其中ノ何レノ相隣ル二ツヲトルモ常ニ相互ニ隣接セルモノナルヲ以テ，$P(z-k)$ ヨリ出發シテ逆ニ $P(z-a)$ ヲ導クコトヲ得ベシ。

定理 3. **$P(z-a)$ ヨリ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ $P(z-b)$ 及ビ $P(z-c)$ ヲ得ルナラバ，$P(z-b)$ ヨリ $P(z-c)$ ヲ導クコトヲ得。**

何トナレバ前定理ニヨリ $P(z-b)$ ヨリ逆ニ $P(z-a)$ ヲ得，依ツテ $P(z-b)$ ヨリ $P(z-a)$ ヲ通シテ $P(z-c)$ ヲ導キ得ルコト明カナリ。

サテ以上ノ考究ニヨリテ見レバ一ノ冪級數ヨリ出發シテ一ノ解析函數ヲ完成シタルトキハ，ソノ任意ノ一原素ヨリ他ノ任意ノ一原素ヲ導クコトハ常ニ可能ナリ。サレバ一ノ解析函數ヲ完成スルニハソノ何レノ一原素ヲ取リテ出發點トスルモ可ナリ。

之ニ依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 4. 解析函數ハソノ任意ノ一原素ニヨリテ決定セラル。

ココニ於テ吾人ハ前節ニ述ベタル解析函數ノ定義ヲ次ノ如クニ改ムルコトヲ得。

何レノ二ツヲ取ルモ相互ニ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ導カルル如キ冪級數ノ全集合ニヨリテ表示セラルル函數ヲ一ノ解析函數トイフ。

故ニ冪級數ノ集合ガ一ノ解析函數ヲ定義スルタメニハ次ノ二條件ヲ具備スルコトガ必要ニシテ且十分ナリ。

(i) 之ニ屬スル任意ノ一原素ヨリ他ノ任意ノ一原素ヲ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ導キ得ルコト。

(ii) 之ニ屬スル任意ノ一原素ヨリ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ導カルルモノハスベテ其集合ニ屬スルコト。

ココニ (i) ニ關シテ次ノ定理アリ。

定理 5. 一ノ解析函數ニ屬スル任意ノ二ツノ原素ヲ $P(z-a)$ 及ビ $P(z-b)$ トスルトキハ, $P(z-a)$ ヨリ有限個數ノ解析接續ヲ逐次ニ作ルコトニヨリテ必ズ $P(z-b)$ ヲ導クコトヲ得。

此定理ノ眞ナルコトハ第 43 節ノ所論ニヨリテ明カナリ。

定理 6. $P(z-a)$ ヨリ $P(z-b)$ ヲ導クニ要シタル逐次ノ解析接續ノ中心ヲ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ トスレバ, 夫夫コレニ十分近キ $a'_1, a'_2, \cdots\cdots, a'_n$ ナル點ヲ中心トスルモ亦 $P(z-a)$ ヨリ $P(z-a)$ ヲ導クコトヲ得。

之ヲ證明センニハ, 先ヅ $P(z-a)$ ヨリ $P(z-a_1)$ ヲ經テ $P(z-a_2)$ ヲ得ルトキ, a_1 ニ十分近ク a_1' ヲトレバ, $P(z-a_1')$ ヲ仲介トシテモ亦 $P(z-a)$ ヨリ $P(z-a_2)$ ヲ導キ得ルコトヲ示セバ足レリ, 何トナレバ同樣ノ論法ヲ繰リ返スコトニヨリテ結局 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヲ $a_1', a_2', \cdots\cdots, a_n'$ ニテ置換シ得レバナリ。

$P(z-a_1)$ ノ收斂半徑ヲ r トスレバ, 假定ニヨリ

$$|a_2-a_1|<r$$

ナリ, 依ツテ今 $r-|a_2-a_1|=2\varepsilon$ ト置ケバ $\varepsilon>0$ ナリ。

前節ノ定理ニヨリ r ハ a_1 ノ連續函數ナルガ故ニ, a_1 ニ近ク a_1' ヲトリ $P(z-a'_1)$ ノ收斂半徑ヲ r' トスレバ, δ ヲ適當ニトリテ

$$|a_1-a_1'|<\delta$$

ナラシムルコトニヨリテ

$$|r-r'|<\varepsilon$$

ナラシムルコトヲ得ベシ。

ココニ於テ同時ニ

$$|a_1-a'_1|<\delta \quad 且 \quad |a_1-a'_1|<\varepsilon \qquad (1)$$

ナル樣ニ a_1' ヲトレバ,

$$|a_2-a_1'| \leqq |a_2-a_1|+|a_1-a_1'|$$
$$<|a_2-a_1|+\varepsilon=r-\varepsilon<r'.$$

故ニ $P(z-a)$ ノ收斂圓内ニテ (1) ナル條件ニ適スル樣ニ a_1' ヲトレバ，a_2 ハ確カニ $P(z-a_1')$ ノ收斂圓内ニアリ。從ツテ $P(z-a'_1)$ ヲ仲介トシテ $P(z-a)$ ヨリ $P(z-a_2)$ ヲ導クコトヲ得ベシ。

49. 存在定理

或條件ニ適合スル解析函數ノ存在ヲ證明スルニハ，先ヅ形式的ニ其條件ヲ滿足セシムル冪級數ヲ作リ，其收斂半徑ガ零ナラザルコトヲ示シ，然ル後コレヨリ導カルルスベテノ解析接續モ亦同ジ條件ヲ滿足セシムルコトヲ證明スレバ可ナリ。次ニ其簡單ナル一例トシテ解析函數ノ逆函數ハマタ一ノ解析函數ナルコトヲ示サントス。陰函數ノ存在，微分方程式ノ解ノ存在等ニモ同樣ノ方法ガ適用セラルルモノナリ。

今 $w=f(z)$ ヲ常數ナラザル一ノ解析函數トシ，$f(z)$ ハ $z=a$ ニ於テ正則ニシテ且

$$f(a)=b, \qquad f'(a) \neq 0 \qquad (1)$$

ナルモノト假定ス，但シ $f(z)$ ガ多價函數ナルトキハソノ何レカ一ツノ分枝ニ於テ (1) ガ成立スルモノトス。

然ルトキハ，a ノ十分小ナル近傍ニ於テハ常ニ $f'(z) \neq 0$ ナリ。依ツテ第 29 節ニ證明セル如ク，z 平面上ノ點 a ノ十分小ナル近傍ハ w 平面上ノ點 b ノ近傍ニ一對一ニ且連續的ニ寫像セラレ，其範圍ニ於テ z ハマタ w ノ正則函數ナリ。

a ヲ中心トセル $f(z)$ 卽チ w ノ展開式ヲ

$$w=b+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots\cdots,$$

$$a_1=f'(a) \neq 0$$

トシ，b ヲ中心トセル z ノ展開式ヲ

$$z=a+b_1(w-b)+b_2(w-b)^2+\cdots\cdots+b_n(w-b)^n+\cdots\cdots$$

トス。以下記號ヲ簡單ナラシムルタメニ $z-a$, $w-b$ ノコトヲ夫夫單ニ z, w ト書クベシ，換言スレバ今考フル點 a, b ヲ夫夫 z 平面及ビ w 平面ノ原點ニアリト考ヘテ論ズベシ，蓋シ之ニヨツテ毫モ本問題ノ一般性ヲ失フコトナケレバナリ。然ルトキハ上ノ二式ハ次ノ如クニナル。

$$w=a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots, \qquad (2)$$

$$z=b_1w+b_2w^2+\cdots\cdots+b_nw^n+\cdots\cdots. \qquad (3)$$

(3) ヲ (2) ノ右邊ニ代入シ，兩邊ニ於ケル w ノ同ジ冪ノ係數ヲ比較スレバ，次ノ聯立方程式ヲ得。

$$1=a_1b_1,$$

$$0=a_1b_2+a_2b_1^2,$$

$$0=a_1b_3+2a_2b_1b_2+a_3b_1^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=a_1b_n+2a_2b_1b_{n-1}+\cdots\cdots+a_nb_1^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

假定ニヨリ $a_1 \neq 0$ ナルヲ以テ，

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{1}{a_1}a_2b_1^2, \\ b_3 &= -\frac{1}{a_1}(2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= -\frac{1}{a_1}(2a_2b_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_1^n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

之ニ依ツテ逐次ニ $b_1, b_2, \ldots\ldots$ 等ヲ決定シ得ベク，從ツテ (3) ナル級數ハ確定ス。ココニ注意スベキハ (4) ノ各式ノ右邊ニアル括弧內ノ式ハスベテ $a_1, a_2, \ldots\ldots$ 及ビ $b_1, b_2, \ldots\ldots$ ヨリ加法及ビ乘法ノミニテ作ラルルコトナリ。

前ニ述ベタル如ク，今考フル $w=0$ ノ近傍ニテハ z ハ w ノ正則函數ナルガ故ニ，斯クシテ決定セラレタル級數 (3) ハ當然 $w=0$ ノ近傍ニ於テ收斂ナルベシ。實際吾人ハ次ノ方法ニヨリテ其收斂半徑ノ下界ヲ算出スルコトヲ得。

(2) ノ收斂圓內ニ於テ，原點ヲ中心トシテ半徑 r ナル圓ヲ畫キタリトシ，ソノ周上ニ於ケル $|w|$ ノ最大値ヲ M トスレバ，

$$|a_n| \leqq \frac{M}{r^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

ナル關係アリ。(第 42 節)

今 $|a_1| = \alpha$ トシ

$$w = \alpha z - \frac{M}{r^2}z^2 - \frac{M}{r^3}z^3 - \cdots\cdots - \frac{M}{r^n}z^n - \cdots\cdots \quad (5)$$

ナル級數ヲ考フレバ，此 w ハ $z=0$ ノ近傍ニ於テ z ノ正則函數ナリ。之ヲ $w=\mathrm{F}(z)$ トス。然ルトキハ

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}'(0) = \alpha \neq 0$$

ナルガ故ニ，z ハマタ $w=0$ ノ近傍ニ於テ w ノ正則函數ナリ。依ツテ其展開式ヲ

$$z = \beta_1 w + \beta_2 u^2 + \cdots\cdots + \beta_n w^n + \cdots\cdots \quad (6)$$

トス。(2) ヨリ (3) ヲ決定シタルト全ク同樣ノ手續ニヨリテ (5) ヨリ (6) ヲ決定スルコトヲ得ベク，前ノ (4) ニ相當スルモノトシテ次ノ式ヲ得ベシ。

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\alpha}, \\ \beta_2 &= \frac{1}{\alpha}\frac{M}{r^2}\beta_1^2, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\alpha}\left(2\frac{M}{r^2}\beta_1\beta_2 + \frac{M}{r^3}\beta_1^3\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n &= \frac{1}{\alpha}\left(2\frac{M}{r^2}\beta_1\beta_{n-1} + \cdots\cdots + \frac{M}{r^n}\beta_1^n\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(4) ト (7) トヲ比較スレバ直チニ

$$|\beta_1| = |b_1|, \qquad |\beta_n| \geqq |b_n|, \qquad n = 2, 3, \ldots\ldots$$

ナルコトヲ知ル。卽チ (6) ハ (3) ノ優級數ナリ。故ニ (6) ガ或圓內ニテ絕對收斂ナラバ (3) モ亦然ルベシ。

サテ (5) ナル級數ノ第二項以下ハ等比級數ナルガ故ニ，(5)

ハ實ハ

$$w = \alpha z - \frac{Mz^2}{r(r-z)}$$

ニ他ナラズ。之ヲ書キ直セバ次ノ如シ,

$$(M + \alpha r)z^2 - r(\alpha r + w)z + r^2 w = 0. \qquad (8)$$

(8) ハ z ニ關スル二次方程式ナリ。之ヲ解ケバ

$$z = \frac{r(\alpha r + w) - r\sqrt{D}}{2(M + \alpha r)},$$

但シ

$$D = (\alpha r + w)^2 - 4(M + \alpha r)w$$
$$= w^2 - 2(2M + \alpha r)w + \alpha^2 r^2$$

ニシテ, 又 $\sqrt{D}$ ノ値トシテハ $w = 0$ ナルトキ $z = 0$ ナラシムル如キ符號ヲトルモノトス。$D = 0$ ト置キテ得ル w ノ二ツノ値ヲ ξ, η トスレバ $\xi\eta = \alpha^2 r^2 > 0$, 故ニ ξ, η ハ何レモ 0 ニ等シカラズ。依ツテマタ

$$D = \alpha^2 r^2 \left(1 - \frac{w}{\xi}\right)\left(1 - \frac{w}{\eta}\right)$$

ト書クコトヲ得。然ルトキハ

$$z = \frac{r}{2(M + \alpha r)}\left\{(\alpha r + w) - \alpha r\left(1 - \frac{w}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{w}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

トナル。依ツテ $|w|$ ガ $|\xi|$ 及ビ $|\eta|$ ノ何レヨリモ小ナルトキハ二項定理ニヨリ z ヲ w ノ冪級數ニ展開スルコトヲ得ベシ。

サテ z ガ w ノ冪級數ニ展開セラルトセバ其展開式ハ卽チ (6) ニ他ナラズ (第 42 節定理 2)。之ニ依ツテ (6), 從ツテマタ (3)

ハ $|w|$ ガ上記ノ如キ範圍內ニアルトキ絕對收斂ナルコトヲ知ルベシ。

注意 1. (6) ガ收斂ナラザルモ (3) ハ收斂ナルコト有リ得ベキニヨリ, 上記ノ $|\xi|$ 又ハ $|\eta|$ 等ハ必ズシモ (3) ノ收斂半徑ニアラズ, 單ニソノ下界ナリトイフニ過ギズ。

注意 2. D ノ係數ハ M 及ビ αr ノミニ關係ス。故ニ ξ, η 卽チ (3) ノ收斂半徑ノ下界ハ M 及ビ αr ノミニヨリテ定メラルルモノナリ。

以上ノ方法ニヨリテ (2) ナル原素ヨリ作ラルル (3) ヲ稱シテ假リニ (2) ノ逆原素ト呼バン。然ルトキハ (2) ハマタ (3) ノ逆原素ナルコト明カナリ。

今解析函數 $w = f(z)$ ニ於テ (1) ノ如キスベテノ點 a ヲ中心トスル原素 $P(z-a)$ ノ逆原素 $P(w-b)$ ノ全集合ヲ W トスレバ, W ハ一ノ解析函數ヲ作ルコトヲ證明セントス。

先ヅ W ニ屬スル任意ノ二原素ヲ $P(w-b)$, $P(w-b')$ トシ, 之ヲ夫夫 $P(z-a)$, $P(z-a')$ ノ逆原素ナリトスベシ。然ルトキハ後ノ二者ハ共ニ一ノ解析函數 $w = f(z)$ ノ原素ナルヲ以テ, $f(z)$ ノ領域內ニ於テ a ト a' トヲ結ブ適當ナル連續曲線 C ニ沿ヒテ解析接續ヲ作リユケバ $P(z-a)$ ヨリ $P(z-a')$ ヲ導キ得ベキナリ。而シテ其途中ニテ若シ C ガ $f'(z) = 0$ ナル點ヲ過ルナラバ吾人ハ前節ノ定理 6 ニヨリ C ヲ少シク變形シテ其點ヲ避ケシメ得ルニヨリ, 最初ヨリ C ハ $f'(z) \neq 0$ ナル如キ點ノミヨリナルト考ヘテ可ナリ。ココニ於テ C 上ノ各點ニ對應スル w 平面上ノ點ヲ考フレバ, b ト b' トヲ結ブ一ノ連續曲

線 K ヲ得ベク, C 上ノ各點ヲ中心トスル原素ノ逆原素ヲ作レバ, コレ卽チ K ニ沿ヒテ $P(w-b)$ ヨリ $P(w-b')$ ヲ導ク逐次ノ解析接續ニ他ナラザルヲ見ルベシ。之ニ依ツテ W ニ屬スル任意ノ二原素ハ何レモ相互ニ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ導カルルコトヲ知ル。

次ニ $P(w-b)$ ヨリ一ノ連續曲線 K ニ沿ヒテ直接又ハ間接ノ解析接續トシテ導カルル任意ノ一原素ヲ $P(w-b')$ トスベシ。K 上ノ各點ヲ中心トスル解析接續ノ逆原素ヲ考フレバ, z 平面上ニ於テ K ニ對應スル連續曲線 C 及ビ其上ノ各點ヲ中心トスル原素ヲ得ベク, コレ卽チ $P(z-a)$ ヨリ出發シテ C ニ沿ヒテ逐次ニ作ラルル解析接續ニ他ナラザルベシ。サレバ K ノ終點 b' ニ對應スル C ノ終點ヲ a' トスレバ, a' ハ $P(z-a)$ ヲ一原素トスル解析函數 $f(z)$ ノ領域內ニアリ, 且 $P(w-b')$ ハ $f(z)$ ノ一原素タル $P(z-a')$ ノ逆原素ニ他ナラズ。之ニ依ツテ $P(w-b)$ ヨリ解析接續トシテ導カルル原素ハスベテ皆 W ニ屬スルコトヲ知ル。

以上ノ結果ニヨリ W ハ一ノ解析函數ヲ作ルコトヲ知ルベシ。其函數ヲ $f(z)$ ノ **逆函數** ト稱ス。依ツテ次ノ定理アリ。

一ノ解析函數ノ逆函數ハマタ一ノ解析函數ナリ。

例題　$w=e^z$ ノ逆函數ヲ $z=\log w$ ナリト定義スレバ, 其一ツノ原素ハ

$$\log w=(w-1)-\frac{(w-1)^2}{2}+\frac{(w-1)^3}{3}-\cdots\cdots$$

ニヨリテ與ヘラル。此例ニ就イテ本節ノ理論ヲ反復セヨ。

50. 廣義ノ解析接續

上來吾人ハ冪級數ヲ用ヰテ解析接續ナルモノヲ考ヘタリ, 今之ヲ一般ノ數式ニツイテ擴張スレバ次ノ如シ。

$P(z)$ 及ビ $Q(z)$ ナル式ガ夫夫面分 A 及ビ B ニ於テ各正則ナル函數ヲ表シ, ココニ

(i)　A, B ハ共通ナル部分及ビ共通ナラザル部分ヲ有シ,

(ii)　其共通ナル部分ニ於テハ常ニ

$$P(z)=Q(z)$$

ナリトス。然ルトキハ $P(z)$ 及ビ $Q(z)$ ノ一方ヲ他方ノ **解析接續** ト稱ス。

マタ $P(z)$ ト $Q(z)$ トガ直接ニハ上記ノ關係ヲ有セザルモ, 中間ニ他ノ函數ヲ插入スルトキソレラノ逐次ノ間ニ上記ノ關係ガ成立スル場合ニハ, 矢張 $P(z)$ 及ビ $Q(z)$ ハ相互ニ (間接ノ) 解析接續ナリト稱ス。

斯ク考フレバ一般ニ解析接續ヲ作ルニハ必ズシモ冪級數ノ變形ニ依ルヲ要セザルコトトナル。然レドモ解析接續ノ定義ヲ斯クノ如ク廣義ニスルモ之ニヨリテ完成セラルル函數ハ畢竟冪級數ヲ以テ完成セラルルモノニ他ナラズ, 解析函數ノ自然限界ヲ越ユルコトハ依然トシテ不可能ナリ, 何トナレバ若シ函數ガ何等カノ方法ニヨリテ正則ニ接續シ得ルナラバ必ズヤ冪級數ヲ以テ其各部ヲ表示シ得ベキ筈ナレバナリ。

廣義ノ解析接續ノ一例ヲ次ニ示ス。

今 $\Gamma(z)$ ナル函數ヲ次ノ積分ニヨリテ定義シタリトス,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \tag{1}$$

但シ積分路ハ實軸ノ正ノ部分ナリトス。然ルトキハ此積分ガ $\Re(z) > 0$ ナル變域ニ於テ有限確定値ヲ有スルコトハ容易ニ證明セラル, 且之ガ z ノ正則函數ヲ表スコトモ次ノ如クニ證明セラル。

先ヅ
$$\int_a^b t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad 0 < a < b$$

ナル積分ヲ考フレバ, 之ハ任意ノ有限面分 A ニ於テ z ノ正則函數ナリ。(第五章ノ問題 13, 第 45 節例題 2.)

又
$$\left|\int_a^b t^{z-1}e^{-t}dt\right| < \int_0^\infty |t^{z-1}e^{-t}|\, dt$$
$$= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x = \Re(z) > 0$$

ナルヲ以テ, $x > 0$ ナル半平面内ニ A ヲトルトスレバ, 上記ノ積分ハ a, b ノ種種ノ値ニ對シテ A ニ於テ一様ニ有界ナルコトヲ知ル。依ツテ今

$$S_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ト置ケバ, $S_n(z)$ ノ作ル函數列ニハ Vitali ノ定理ガ適用セラレ, 從ツテ

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \Gamma(z)$$

ハ A ニ於テ z ノ正則函數ナリ。而シテココニ A ハ $x > 0$ ナル半平面内ノ任意ノ有限面分ナルヲ以テ, 結局 $\Gamma(z)$ ハ該半平面ニ於テ正則ナルコトヲ知ルベシ。

扨テ (1) ニ部分積分法ヲ行ヘバ容易ニ

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$

ナル關係ノ存在スルコトガ知ラル。而シテ此左邊ハ $\Re(z) > -1$ ナルトキニ正則ナル函數ヲ表ス。從ツテ吾人ハ $\Gamma(z)$ ナル函數ノ定義ヲ擴張シ, $\Re(z)$ ガ負ニテモ -1 ヨリ大ナルトキハ (2) ニヨリテ其値ヲ定ムルコトトスベシ。

同樣ノコトヲ繰リ返シ行ヘバ, 一般ニ

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots\cdots(z+n-1)}$$

ニヨリテ, z ガ 0 又ハ負ノ整數ナル場合ヲ除クノ他, 常ニ $\Gamma(z)$ ノ値ヲ決定スルコトヲ得ベシ。

上ノ定義ニ於ケル (i), (ii) ナル條件ヲ更ニ緩和シテ次ノ如クスルコトヲ得。

P(z), Q(z) ガ夫夫開面分 A, B ニ於テ正則ニシテ, ココニ A, B ハ一ツノ線 L ニ於テ相接續スルノミニシテ共通ナル部分ヲ有セザル場合ト雖, ソノ L ノ上ニテ P(z) 及ビ Q(z) ガ共通ノ値ヲ有シ且 A, L, B ヲ通ジテ兩函數ガ連續ナルトキハ, 兩式 P(z), Q(z) ハ各他ノ解析接續ナリ。

之ヲ Painleve ノ**定理**トイフ。其證明次ノ如シ。

今 $f(z)$ ナル函數ヲ次ノ如クニ定義スベシ。

z ガ A 内ニアルトキハ　$f(z) = P(z)$,

z ガ B 内ニアルトキハ　$f(z) = Q(z)$,

z ガ L 上ニアルトキハ　$f(z) = P(z) = Q(z)$.

然ルトキハ一ノ閉曲線 C ガ全ク A 内又ハ B 内ニアルトキハ, Cauchy ノ定理ニヨリ

$$\int_{(C)} f(z)dz = 0$$

ナルコト明カナリ。モシ C ガ A, B ノ兩方ニ跨レルトキハ, C ト L トノ交點ヲ E, F トセヨ。(交點ガ二ツヨリ多キ場合, 又ハ C ト L トガ一部分相合スル場合等モアレドモ, 之ニ對スル

修正ハ容易ナルヲ以テココニハ交點ガ唯二ツナル場合ノミヲ考フベシ。) E, F ニヨリテ分タレタル C ノ部分ノ中, A 内ニアル方ヲ C_1 トシ, B 内ニアル方ヲ C_2 トスレバ

$$\int f(z)dz = \int_{E(C_1)F(L)E} f(z)dz + \int_{E(L)F(C_2)E} f(z)dz$$

$$= \int_{E(C_1)F(L)E} P(z)dz + \int_{E(L)F(C_2)E} Q(z)dz$$

$$= 0.$$

サレバ結局 C ハ A, B, L ヲ通ジタル開面分内ノ任意ノ閉曲線ナリトスルモ, 之ニ沿ヒテ一周セル $f(z)$ ノ積分ハ常ニ 0 ニ等シ。而シテ假定ニヨリ $f(z)$ ハ其面分内ニテ連續ナリ。故ニ Morera ノ定理 (第 37 節) ニヨリ $f(z)$ ハ L 上ニ於テモ亦正則ナラザル可カラズ。之ニ依リテ本定理ハ證明セラレタリ。

此定理ノ應用トシテ次ノ重要ナル結果ヲ得。

今 z 平面上ノ開面分 A ニ於テ函數 $w=f(z)$ ガ正則ニシテ, w 平面上ニ於ケル A ノ寫像ヲ B トス, 而シテココニ A 及ビ B ハ共ニ實軸ノ全部又ハ一部ヲソノ境界線トシテ有シ, z 及ビ w ノ値ハ其實軸上ニ於テ連續的ニ相對應スルモノトス。即チ

$$z = x + yi, \qquad w = u + vi$$

トスレバ, $u=f(x)$ ニシテ u ハ x ノ連續函數ナリトス。

然ルトキハ, z 及ビ w ノ共軛數ヲ夫夫

$$\bar{z} = x - yi, \qquad \bar{w} = u - vi$$

トスレバ, $\bar{w} = f(\bar{z})$ ナリ。其證明次ノ如シ。

今 A 及ビ B ヲ夫夫 x 軸及ビ w 軸ニ關シテ對稱ノ位置ニ移シタル面分ヲ $\bar{A}$ 及ビ $\bar{B}$ トシ, $\bar{A}$ 内ノ一點 $\bar{z}$ ニハ A 内ノ一點 z ヲ對應セシメ, z ニハマタ B 内ノ一點 $w=f(z)$ ヲ對應セシメ, 更ニ其 w ニハ $\bar{B}$ 内ノ一點 $\bar{w}$ ヲ對應セシムベシ。ココニ於テ $\bar{w}$ ヲ $\bar{z}$ ノ函數ト考フレバ, 其ハ $\bar{A}$ ナル變域ニ於テ (z 軸ノ上マデ含ミテ) 連續ナリ, 此函數ヲ $\bar{w} = \varphi(\bar{z})$ トス。然ルトキハ $\varphi(\bar{z})$ ハマタ $\bar{A}$ ニ於テ正則ナリ。何トナレバ此場合ノ C. R. 方程式ハ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial(-y)}, \qquad \frac{\partial u}{\partial(-y)} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x}$$

ニシテ, 之ヲ書キ直セバ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

トナル, 然ルニ假定ニヨリ w ハ z ノ正則函數ナルガ故ニ, コノ最後ノ二式ハ確カニ成立スルモノナリ。

特ニ $\bar{z}$ ガ實軸上ニアルトキハ $\bar{w}$ モ亦實軸上ニアリ, 即チ其場合ニハ $\bar{w} = \varphi(\bar{z})$ ハ $u = \varphi(x)$ トナル。然ルニ假定ニヨレバ實軸上ニ於テハ $u = f(x)$ ナリ。依ツテ $\varphi(z)$ ト $f(x)$ トハ相一致セザル可カラズ。

之ニ依ツテ見レバ $f(z)$ ト $\varphi(\bar{z})$ トハ夫夫 A 及ビ $\bar{A}$ ニ於テ正則ニシテ且兩面分ノ境界タル x 軸上ニテハ同一ノ値ヲ有シテ連續的ニ相接續スルモノナリ。故ニ Painlevé ノ定理ニヨリ,

$\varphi(z)$ ハ $f(z)$ ノ解析接續ニシテ，從ツテ $\varphi(\bar{z})$ ノコトヲ $f(\bar{z})$ ト書クコトヲ得。

以上ノ結果ニヨリ次ノ定理ヲ得。

一價解析函數 $w=f(z)$ ニヨリテ z 平面上ノ實軸（又ハ其一部）ガ w 平面上ノ實軸（又ハ其一部）ニ寫像セラルルトキハ，前者ニ對シテ互ニ鏡像ナル任意ノ二點ハ後者ニ對シテ矢張互ニ鏡像ナル二點ニ寫像セラル。

之ヲ **鏡像ノ原理** トイフ，第 13 節ニ於テ一次函數ニ就イテ證明セルモノノ擴張ナリ。然レドモ之ニテハ實軸以外ノ直線又ハ曲線ニ關シテモ同樣ノ原理ガ成立スルヤ否ヤ明カナラズ。コレヲ考フルタメニ，先ヅ鏡像トイフ語ヲ更ニ廣義ニ用キルコトトシ，「一ノ曲線ニ關シテ互ニ **鏡像** ナル二點」トイフモノヲ次ノ如クニ定義ス。

今 z 平面上ニ於ケル一ノ曲線 C ヲ表スニ

$$z=\varphi(t)$$

ヲ以テシ，ココニ t ハ實變數ナレドモ，φ ナル函數ハ t ノ代リニ複素變數ヲ代入スルモ少クモ t ノ實軸ノ近傍ニテハ意味ヲ有シ一價正則ナルモノトス。ココニ於テ τ 及ビ $\bar{\tau}$ ヲ互ニ共軛ナル複素數トスルトキ，

$$z=\varphi(\tau) \quad \text{及ビ} \quad \bar{z}=\varphi(\bar{\tau})$$

ナル如キ二點ノコトヲ C ニ關シテ互ニ鏡像ナリト稱ス。

此定義ハ第 13 節ニ述ベタル如キ直線及ビ圓ニ關スル鏡像ノ定義ヲ其中ニ包含ス

ルモノナリ，次ニ之ヲ驗證スベシ。

先ヅ C ガ直線ナル場合ニ，其方程式ヲ

$$z=at+b \qquad (a, b \text{ ハ一般ニ複素常數})$$

トスレバ此直線ガ實軸トナス角ハ $\mathfrak{A}(a)$ ニ等シ。ココニ於テ

$$z=a\tau+b, \qquad \bar{z}=a\bar{\tau}+b$$

トスレバ，

$$\mathfrak{A}(z-\bar{z})=\mathfrak{A}(a)+\mathfrak{A}(\tau-\bar{\tau})=\mathfrak{A}(a)\pm\frac{\pi}{2}.$$

依ツテ二點 $z, \bar{z}$ ヲ結ブ直線ハ C ニ垂直ナリ。

次ニ
$$\frac{z+\bar{z}}{2}=2a\,\mathfrak{R}(\tau)+b,$$

コノ右邊ハ $at+b$ ノ $t=2\mathfrak{R}(\tau)$ ナル實數ヲ代入セルモノニ他ナラズ，故ニ z 及ビ $\bar{z}$ ノ中點 $\frac{z+\bar{z}}{2}$ ハ C 上ニアリ。之ニ依ツテ二點 $z, \bar{z}$ ハ直線 C ニ關シテ對稱ノ位置ニアルコトヲ知ル。

次ニハ C ガ圓ナル場合ヲ考ヘ，其方程式ヲ

$$z=c+a(\cos t+i\sin t)=c+ae^{it}, \qquad a>0$$

トスベシ。ココニ於テ

$$\tau=\alpha+\beta i, \qquad \bar{\tau}=\alpha-\beta i$$

ヲ t ニ代入スレバ次ノ如キ互ニ鏡像ナル二點ヲ得。

$$z=c+ae^{-\beta}e^{i\alpha}; \qquad \bar{z}=c+ae^{\beta}e^{i\alpha}.$$

コノ二點ハ圓 C ニ關シテ相反ナル位置ニアルコト明カナリ，

注意 1. τ ヲ複素數トスルトキ $\varphi(\tau)$ ガ正則函數ナルコトハ一般ニハ或ル限ラレタル變域內ニ於テノミ成立スルコトナルベキガ故ニ，任意ノ曲線 C ニ關シテハ其兩側ノ少許ノ部分ニ於テノミ互ニ鏡像ナル二點ヲトリ得ルモノト考フベキナリ。

特ニ C ガ直線又ハ圓ナル場合ニハ上ニ證明セル如ク任意ノ點ニ對シテ常ニ其鏡像ヲ見出シ得。

注意 2. 同一ノ曲線ヲ表示スルニ，媒介變數 t ノ採リ方ニヨリテ φ ナル函數ハ種種ニ變ズベシト雖，上ノ定義ニヨリテ一度互ニ鏡像トナレル二點ハ C ノ表示式ノ如何ニ關ラズ常ニ鏡像ナリ。何トナレバ，例ヘバ t ノ代リニ他ノ變數 s ノ或函數ヲ代入シタリトスルモ，s ニ互ニ共軛ナル數値ヲ與フルトキハ之ニ對スル t モ亦上記ノ鏡像ノ原理ニヨリテ互ニ共軛ナル値ヲトル可ケレバナリ。

サテ廣義ノ鏡像ガ斯クノ如ク定義セラルレバ之ニ依ッテ吾人ハ次ノ一般ナル定理ヲ陳述スルコトヲ得。

一價解析函數 $w=f(z)$ ニヨリテ, z 平面上ノ曲線 C ガ w 平面上ノ曲線 L ニ寫像セラルルトキハ, C ニ關シテ互ニ鏡像ナル二點ハ L ニ關シテ矢張互ニ鏡像ナル二點ニ寫像セラル。

何トナレバ, 今 C ノ方程式ヲ $z=\varphi(t)$ トスレバ, L ノ方程式ハ $w=f\{\varphi(t)\}$ ニシテ, C ニ關シテ互ニ鏡像ナル二點

$$z=\varphi(\tau), \qquad \bar{z}=\varphi(\bar{\tau})$$

ノ寫像ハ

$$w=f\{\varphi(\tau)\}, \qquad \bar{w}=f\{\varphi(\bar{\tau})\}$$

トナルベシ。斯クノ如キ二點 w, $\bar{w}$ ハ曲線 L ニ關シテ互ニ鏡像ナルコト明カナリ。

例題 1. 函數 $f(z)$ ガ面分 A ニ於テ連續ニシテ, 且 A 内ニ於テ一ツノ曲線 L 上ノ點ヲ除クノ他ハ到ル所正則ナリトセバ, $f(z)$ ハ L 上ニ於テモ亦正則ナラザル可カラザルコトヲ證明セヨ。(**Riemann ノ定理**)

例題 2. 楕圓 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ニ關シテ互ニ鏡像ナル二點ノ座標ヲ計算セヨ。

第七章ノ問題

1. $$f(z)=1+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

ガ $z=0$ ノ近傍ニ於テ收斂ナルトキ,

$$\frac{1}{f(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots$$

ト置キテ $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots$ 等ヲ決定シ, 且此級數ガ $z=0$ ノ近傍ニ於テ收斂ナルコトヲ優級數ヲ用キテ證明セヨ。

2. 共通點ヲ有セザル二ツノ面分 A_1, A_2 アリ, 其周圍ヲ夫夫 C_1, C_2 トス。今二ツノ函數 $f_1(z)$, $f_2(z)$ ガ夫夫 A_1, A_2 ノ内部及ビ周圍ニ於テ連續ニシテ且内部ニ於テハ正則ナリトセバ,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)}\frac{f_1(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_2)}\frac{f_2(t)}{t-z}dt$$

ハ如何ナル函數ヲ表スカ。

3. $f(z)$ 及ビ $g(z)$ ハ若干ノ點ヲ除クノ他全數平面上ニテ定義セラレタル函數ナリトス。今

$$\varphi(z)=\frac{z}{z^2-1}+\frac{z^2}{z^4-1}+\frac{z^4}{z^8-1}+\cdots\cdots$$

ナリトセバ,

$$\frac{1}{z-1}\{zg(z)-f(z)\}+\{f(z)-g(z)\}\varphi(z)$$

ハ如何ナル函數ヲ表スカ。

4. 函數 $W=f(z, w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n)$ ハ $z, w_1, w_2, \cdots\cdots$ ガ夫夫面分 $A, B_1, B_2, \cdots\cdots$ 内ニアルトキ各變數ニツイテ正則ナリトス。今 A 内ノ一點 a ノ近傍ニ於テ冪級數

$$P_1(z-a), \qquad P_2(z-a), \qquad \cdots\cdots$$

ノトル値ガ夫夫面分 $B_1, B_2, \cdots\cdots$ 内ニ含マレ, 且之ヲ夫夫 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ ニ代入スルトキ $W=0$ トナルモノトスレバ, コレラノ冪級數ノ解析接續ヲ代入スルモ, ソノトル値ガナホ $B_1, B_2, \cdots\cdots$ 内ニアル限リハ, 矢張 $W=0$ ヲ滿足セシムベキコトヲ證明セヨ。

5. 第 49 節ノ所論ニナラヒ，次ノ定理ヲ證明セヨ。

今 $$F(z, w) = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2 + \cdots\cdots = 0$$

ナル關係式アリ，ココニ

$$A_h(z) = a_{h,0} + a_{h,1}z + a_{h,2}z^2 + \cdots\cdots, \qquad h = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

ニシテ，

$$|a_{h,k}| < M, \qquad h, k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

ナル一定ノ正數 M ガ存在シ，且

$$F(0, 0) = a_{0,0} = 0, \qquad F_w(0, 0) = a_{1,0} \neq 0$$

ナルトキハ，$F(z, w) = 0$ ニヨリテ定メラルル陰函數 $w = f(z)$ ハ $z = 0$ ノ近傍ニ於テ

$$w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots\cdots$$

ナル展開式ヲ有シソノ收斂半徑ハ 0 ナラズ。

6. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

ニ於テ x, y ハ共ニ複素變數ニシテ，右邊ハ

$$F(x, y) = a_{0,0} + (a_{1,0}x + a_{0,1}y) + (a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2) + \cdots\cdots$$

ナル冪級數ニ展開セラルルモノトシ，且

$$|a_{m,n}| < M, \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

ナル一定ノ正數 M ガ存在スルモノト假定ス。然ルトキハ此微分方程式ニ適合スル x ノ函數ニシテ $x = 0$ ナルトキ $y = 0$ トナリ，且原點ノ近傍ニテ正則ナルモノガ存在スルコトヲ證明セヨ。

7. 二ツノ級數

$$g(z) = 1 - \frac{1}{2!}z^2 - \frac{2}{3!}z^3 - \cdots\cdots - \frac{n-1}{n!}z^n - \cdots\cdots,$$

$$h(z) = 1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n + \cdots\cdots$$

ノ收斂半徑ハ夫夫 ∞ 及ビ 1 ナリ。然ラバ單位圓ノ內部ニ於テ

$$f(z) = g(z)h(z)$$

トシテ定義セラレタル函數 $f(z)$ ニ對シ單位圓ノ外部ニソノ解析接續ヲ求メ得ルカ。

8. 收斂半徑ガ 1 ナル冪級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

アリ，ソノスベテノ係數ガ正ノ實數ニシテ且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ガ發散ナラバ，z ガ實軸ニ沿ヒテ $z \to (1-0)$ ナルトキ

$$\lim f(z) = \infty$$

ナルコトヲ證明セヨ。

9. 前問ノ結果ヲ利用シテ，函數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

ハ其收斂圓周ヲ自然限界トスルモノナルコトヲ證明セヨ。

10. 次ノ函數ヲ z ノ冪級數ニ展開セヨ。

$$(1-z)\sin\left(\log\frac{1}{1-z}\right).$$

又ソノ展開式ノ收斂圓ハ單位圓ニシテ，且其周上ノ到ル所ニ於テ絕對收斂ナルコトヲ證明セヨ。

11. 收斂半徑ガ 1 ナル冪級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

アリ，ココニ

$$z = \frac{\zeta}{1-\zeta}$$

ト置キテ之ヲ ζ ノ冪級數ニ書キ直ストキハ，ζ^n ノ係數如何。

又後者ノ收斂半徑ヲ r トスレバ，

$$\frac{1}{2} \leqq r \leqq \infty$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. 原點ノ近傍ニ於テ正則ニシテ，且

$$f(2z) = 2f(z)f'(z)$$

ナル關係ヲ滿足セシムル函數 $f(z)$ ハ數平面上點 ∞ 以外ノ任意ノ部分ニ解析接續ヲ作リ得ルコトヲ證明セヨ。

又原點ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ノ一般項ノ係數ヲ計算セヨ。

13. $\Re(z) > 0$ ナル半平面ニ於テ正則ニシテ，且

$$f(z+1) = zf(z)$$

ナル關係ヲ滿足セシムル函數 $f(z)$ ハ數平面上點 $0, -1, -2, \cdots\cdots$ 及ビ ∞ 以外ノ任意ノ部分ニ解析接續ヲ作リ得ルコトヲ證明セヨ。

又一般ニ $-k$ (k ハ自然數) ナル點ニ於ケル $f(z)$ ノ留數ヲ計算セヨ。

14. 收斂半徑ガ 1 ナル冪級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

アリ，ソノ係數ハスベテ正ノ實數ナリトス。今 $\frac{1}{2}$ ナル點ヲ中心トシテ $f(z)$ ヲ展開シタル式ヲ

$$P\left(z - \frac{1}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(z - \frac{1}{2}\right)^m$$

トスレバ，

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} a_{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ニシテ，ココニ $P\left(z - \frac{1}{2}\right)$ ニ於テ $z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \alpha$ $(\alpha > 0)$ ト置ケバ右邊ガ收斂ナラザルコトヲ示シ，依ツテ $z = 1$ ナル點ハ $f(z)$ ヲ原素トスル解析函數ノ特異點ナルコトヲ證明セヨ。

15. 次ノ冪級數ハ何レモ收斂圓以外ニ解析接續ヲ作リ得ザルコトヲ證明セヨ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{g_1 g_2 \cdots\cdots g_n}$, 但シ $g_1, g_2, \cdots\cdots$ ハ 1 ヨリ大ナル任意ノ自然數トス，

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n+2}}{(2^n+1)(2^n+2)}$.

注意. (2) ハ收斂圓周上ノ到ル所ニテ絕對收斂ナリ。

16. 次ノ函數ハ單位圓ノ周ヲ自然限界トスルコトヲ證明セヨ。

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

第八章

特異點

51. 一價解析函數ノ特異點

本節ニ於テハ一價解析函數ノ特異點ヲ分類シ，且一二ノ重要ナル定理ヲ證明セントス。サレバ以下單ニ函數ト稱スルハ特ニ然ラザルコトヲ明言セザル限リ常ニ一價解析函數ノ意ナリトス。特異點ノ定義ハ既ニ第 47 節ニ述ベタル如シ。卽チ a ガ $f(z)$ ノ特異點ナルトキハ，先ヅ他ノ正則點例ヘバ b ヲ中心トスル $f(z)$ ノ展開式ヲ作リ，b ト a トヲ結ブ線上ニ其中心ヲ移動セシメツツ逐次ニ冪級數ノ解析接續ヲ求ムルトキ，其中心ハ限リナク a ニ接近シ得レドモ之ト同時ニ冪級數ノ收斂半徑ハ限リナク小トナリ，a ヲ收斂圓ノ內部ニ入ラシムルコトハ竟ニ不可能ナルモノナリ。

今函數 $f(z)$ ニ於テ a ヲ一ツノ特異點トシ，a ヲ中心トシテ十分小ナル圓ヲ作ルトキ其內部ニ於テ a 以外ニハ此函數ノ特異點ガ存在セザル場合ニハ，a ヲ **孤立特異點** トイフ。之ニ反シテ a ノ任意ノ近傍ニ此函數ノ他ノ特異點ガ常ニ無數ニ多ク存在スルトキハ，a ヲ **集積特異點** トイフ。

例ヘバ $z = 0$ ハ函數 $\frac{1}{z}$ ノ孤立特異點ナリ。又函數 $\mathrm{cosec}\,\frac{1}{z}$ ニ於テハ原點

ハ勿論特異點ナルガ, z ヲ實軸ニ沿ヒテ原點ニ近ヅクルトキ原點ノ任意ノ近傍ニ於テ無數ニ多クノ特異點ノ存在スルヲ見ルガ故ニ, $z=0$ ハ此函數ノ集積特異點ナリ。

函數ノ自然限界ガ線ヲナストキハ, 其線上ノ點ハスベテ集積特異點ナリ。

今函級 $f(z)$ ガ一點 a ヲ中心トスル圓 C ノ内部及ビ周圍ニ於テ, a 自身ヲ除クノ他ハ到ル所正則ニシテ, 且

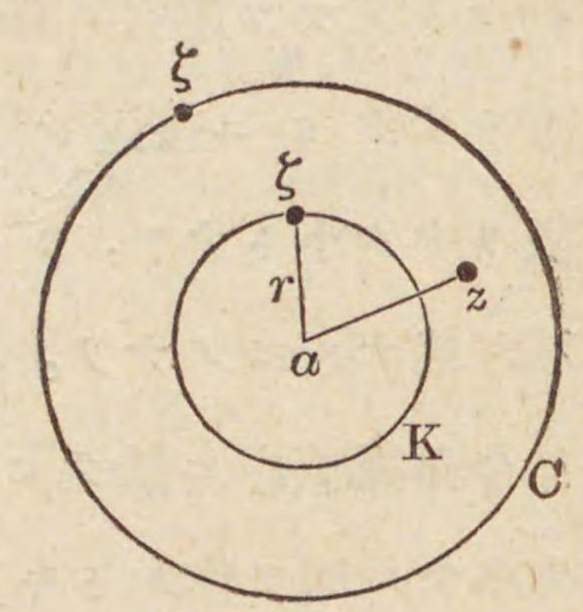
$$|f(z)| < \mathrm{M}$$

ナル如キ一定ノ正數 M ガ存在スルモノト假定スベシ。

然ルトキハ, a ヲ中心トシ C ヨリモ小ナル圓 K ヲ畫キ, 其半徑ヲ r トスレバ, 兩圓周ニ夾マレタル環狀ノ面分ニ於テハ函數 $f(z)$ ハ次ノ式ニヨリテ表示セラル。(第 35 節)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{K})}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

但シ ζ ハ C 及ビ K ノ周上ニ於ケル動點ナリトス。



第六十六圖

扨上式ノ右邊ニアル第二ノ積分ニ於テハ, 其積分路ノ長サハ $2\pi r$ ニシテ, 又

$$|\zeta - z| \geqq |z-a| - |\zeta - a| = |z-a| - r$$

ナルヲ以テ,

$$\left|\int_{(\mathrm{K})}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right| < \frac{\mathrm{M}.2\pi r}{|z-a|-r}$$

ナリ。此右邊ハ r ト共ニ無限小トナル。故ニ結局圓 C ノ内部

ニ於テハ, $z=a$ ナラザル限リ常ニ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

ナル表示式ヲ得。

然ルニ此右邊ナル積分ハ之ヲ z ノ函數ト考フレバ C ノ内部ニ於テ ($z=a$ ヲモ含ミテ) 常ニ正則ナルモノナリ (第 37 節)。然ラバ C ノ一部ニ於テ之ト一致スル解析函數 $f(z)$ ハ C ノ全部ニ於テマタ之ト一致セザル可カラズ (一致ノ定理)。依ツテ $f(z)$ ハ $z=a$ ニ於テモ正則ニシテ, 今

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \mathrm{A}$$

ト置ケバ, 確カニ

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z) = \mathrm{A}$$

ナルザル可カラズ。之ニヨリテ次ノ定理ヲ得。

定理 1. 一價解析函數 $f(z)$ ガ $z=a$ ノ近傍ニ於テ a 自身ヲ除クノ他正則ニシテ, 且 $|f(z)| < \mathrm{M}$ ナル一定ノ正數 M ガ存在スルトキハ, $f(z)$ ハ $z=a$ ニ於テモ亦正則ナリ。

之ヲ Riemann ノ定理 トイフ。

以上ノ證明ニヨリテ見レバ, $f(z)$ ガ解析函數ナラザル場合ト雖 $z=a$ ニ於テ孤立特異點ヲ有シ且其近傍ニ於テ (a 自身ヲ除キテ) $|f(z)|$ ガ有界ナルトキハ

$$\lim_{z \to a} f(z) = \mathrm{A}$$

ナル極限値ガ存在スルコトヲ知ル。依ツテ吾人ハ其點ニ於ケル函數ノ値ヲ A ト定ムルコトニヨリテ該特異點ヲ除去スルコトヲ得ベシ。之ヲ稱シテ此種ノ特異點ハ **除去可能** ナリトイフ。

注意. 解析函數ハ其定義ヨリ明カナル如ク解析接續ニヨリテ完成セラレタル函數ナルガ故ニ，除去可能ノ特異點ハ既ニ最初ヨリ除去セラレ居ルモノナリ。

例.
$$f(z)=\frac{1-z^2}{1-z}$$
ハ $z=1$ ニ於テハ定義セラレズ。然レドモ其近傍ニ於テハ正則ニシテ且 $|f(z)|$ ハ有界ナリ，而シテ
$$\lim_{z\to1}\frac{1-z^2}{1-z}=2$$
ナルガ故ニ，今新タニ $f(1)=2$ ナル値ヲ與フレバ此函數ハ $z=1$ ニ於テモ亦正則トナル。故ニ $z=1$ ハ除去可能ノ特異點ナリ。

一價解析函數 $f(z)$ ノ孤立特異點 a ニ於テ，$z\to a$ ナルトキ $\lim f(z)$ ガ有限確定ナルコトハ有リ得ベカラズ。何トナレバ其場合ニハ a ノ近傍ニ於テ $|f(z)|$ ハ有界トナルガ故ニ，定理 1 ニヨリ，$f(z)$ ハ a ニ於テ正則トナルベケレバナリ。モシ此極限ガ有限ナラズシテ
$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty$$
ナルトキハ，點 a ヲ函數 $f(z)$ ノ **極** トイフ。

例ヘバ $z=0$ ハ函數 $\frac{1}{z}$ ノ極ナリ。

モシマタ此極限ガ不確定ナル場合（卽チ有限確定ニモアラズ，又 ∞ トモ確定セザル場合）ニハ，點 a ヲ $f(z)$ ノ **眞性特異點** トイフ。

集積特異點ハスベテ之ヲ眞性特異點ト稱スルヲ常トス。依ツ

テ一價解析函數ノ特異點ハ次ノ如クニ分類セラル。

$$\text{特異點}\begin{cases}\text{孤立}\begin{cases}\text{確定}\begin{cases}\text{(有限……正則點)}\\ \text{無限大…}\textbf{極}\end{cases}\\ \text{不確定…}\end{cases}\\ \text{集積 …………}\end{cases}\quad\cdots\cdots\textbf{眞性特異點}$$

（但シ確定，不確定トイフハ $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ ノコトナリトス。）

定理 2. 函數 $f(z)$ ガ $z=a$ ニ於テ

(1) 正則ニシテ零トナラザルトキ，

(2) 正則ニシテ零トナルトキ，

(3) 極ヲ有スルトキ，

(4) 眞性特異點ヲ有スルトキ，

其各ニ從ツテ，$\frac{1}{f(z)}$ ハ $z=a$ ニ於テ夫夫

(1) 正則ニシテ零トナラズ，

(2) 極ヲ有ス，

(3) 正則ニシテ零トナル，

(4) 眞性特異點ヲ有ス。

本定理ハ各特異點ノ定義及ビ定理 1 ヨリ直チニ出ヅ。

眞性特異點ノ近傍ニ於ケル函數ノ狀態ハ蓋シ多種多樣ニシテ之ヲ一概ニ論ズ可カラズト雖，特ニ其孤立セルモノニ關シテハ有名ナル Casorati-Weierstrass **ノ定理** アリ。卽チ

定理 3. 函數ガ孤立セル眞性特異點ヲ有スルトキハ，其任

意ノ近傍ニ於テ函數ハ任意ノ値ニ限リナク接近シ得。

今 $f(z)$ ガ $z=a$ ニ於テ孤立眞性特異點ヲ有スルモノトシ, C ヲ任意ノ一數トスレバ, 任意ノ正數 ε 及ビ δ ニ對シ, 同時ニ

$$0<|z-a|<\varepsilon, \qquad |f(z)-\mathrm{C}|<\delta$$

ナラシムル如キ z ガ常ニ存在スルコトヲ證明セントス。

便宜上 ε ヲ十分小ナリトシ, 點 a ノ ε 近傍ニハ a 以外ノ特異點ガ存在セザルモノト考ヘ, モシ其範圍内ノスベテノ z ニツイテ常ニ $|f(z)-\mathrm{C}| \geqq \delta$ ナリトセバ, ココニ

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-\mathrm{C}}$$

ト置クベシ。然ルトキハ

$$0<|z-a|<\varepsilon \quad ナルトキ \quad |g(z)| \leqq \frac{1}{\delta}$$

ナルヲ以テ, 定理 1 ニヨリ $g(z)$ ハ $z=a$ ニ於テ正則ナリ。依ツテ $g(a) \neq 0$ ナルカ $g(a)=0$ ナルカニ從ツテ, 原函數

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}+\mathrm{C}$$

ハ定理 2 ニヨリ $z=a$ ニ於テ正則ナルカ又ハ極ヲ有スベク, 何レニシテモ眞性特異點ヲ有スルコトナシ。コレ假定ニ反ス。故ニ點 a ノ ε 近傍ニハ必ズ $|f(z)-\mathrm{C}|<\delta$ ナル如キ z ガ存在セザル可カラズ。

例ヘバ $$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$$

ナル函數ハ $z=0$ ニ於テ孤立セル眞性特異點ヲ有ス。今 0 ナラザル任意ノ一數

$$a=r(\cos\theta+i\sin\theta), \qquad r \neq 0$$

ヲトレバ, $f(z)=a$ ナラシムル z ノ値ハ

$$\frac{1}{\log_e r+i(\theta+2n\pi)} \qquad (n \text{ ハ整數})$$

ニシテコレラハ原點ニ集積スルコト明カナリ。故ニ $a \neq 0$ ナル限リ, a ハ如何ナル値ニテモ, 原點ノ任意ノ近傍ニ $f(z)=a$ ナル z ガ必ズ存在ス。

$f(z)=0$ ナル如キ z ノ値ハ存在セズ。然レドモ定理 3 ニヨレバ, 原點ノ任意ノ近傍ニテ $f(z)\to 0$ ナルコトモ起ラザル可カラズ。如何ニモ, z ガ實軸ノ負ノ部分ニ沿ヒテ 0 ニ接近スルトキハ確カニ $f(z)\to 0$ トナルベシ。

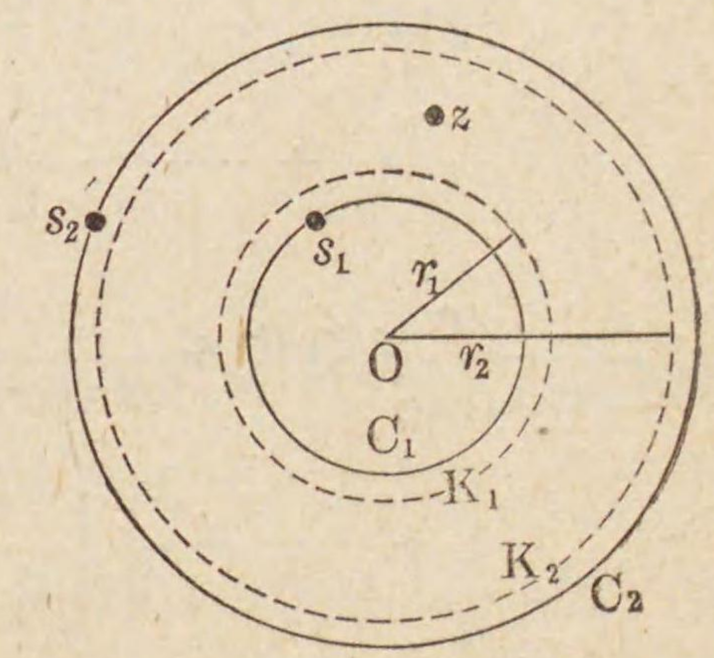
52. Laurent ノ展開

函數 $f(z)$ ガ一ツヨリ多クノ特異點ヲ有スルトキ, ソノ中ノ二ツヲ s_1, s_2 トシ, ココニ $|s_1|<|s_2|$ ト考ヘ, 又原點 O ヲ中心トシ夫夫 s_1, s_2 ヲ過ル二ツノ同心圓ヲ $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ トス。C_1 及ビ C_2 ノ間ニ挾マレタル環狀ノ閉面分ヲ A ト名ヅケ, 函數 $f(z)$ ハ A 内ニ於テハ最早特異點ヲ有セザルモノト假定ス。

今 A 内ノ任意ノ一點ヲ z トシ, $f(z)$ ナル値ヲ積分表示ニヨリテ表サンニハ次ノ如クスベシ。先ヅ

$$|s_1|<r_1<|z|<r_2<|s_2|$$

ナル如キ二數 r_1, r_2 ヲトリ, 原點ヲ中心トシ夫夫 r_1 及ビ r_2 ナル半徑ヲ有スル同心圓 K_1 及ビ K_2 ヲ畫ケバ, 此兩圓ニヨリテ圍マルル閉面分ハ明カニ z ヲ其内點トシテ有シ, 且函數 $f(z)$ ハ該閉面分



第六十七圖

ニ於テ正則ナリ。依ツテ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

ニシテ，ココニ右邊ニ於ケル ζ ハ上記ノ閉面分ノ全周ヲ正ノ方向ニ一周スル積分路ヲトルモノトス。故ニ此式ヲ書キ直セバ次ノ如シ，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (1)$$

サテ ζ ガ圓 K_2 ノ上ニアルトキハ $|\zeta|>|z|$ ナルヲ以テ，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\frac{z^2}{\zeta^3}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}+\cdots\cdots,$$

又 ζ ガ圓 K_1 ノ上ニアルトキハ $|\zeta|<|z|$ ナルヲ以テ，

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z}+\frac{\zeta}{z^2}+\frac{\zeta^2}{z^3}+\cdots\cdots+\frac{\zeta^{n-1}}{z^n}+\cdots\cdots$$

ナリ。コレラヲ (1) ニ代入スレバ次ノ結果ヲ得，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta+\frac{z}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(z)}{\zeta^2}d\zeta+\frac{z^2}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^3}d\zeta$$
$$+\cdots\cdots+\frac{z^n}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2\pi i.z}\int_{(K_1)}f(\zeta)d\zeta+\frac{1}{2\pi i.z^2}\int_{(K_1)}f(\zeta)\zeta d\zeta+\frac{1}{2\pi i.z^3}\int_{(K_1)}f(\zeta)\zeta^2 d\zeta$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2\pi i.z^n}\int_{(M_1)}f(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta+\cdots\cdots$$

依ツテ一般ニ

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,\quad c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_1)}f(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta \qquad (2)$$

ト置ケバ

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n+\cdots\cdots$$
$$+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots\cdots \qquad (3)$$

ナル式ヲ得。之ヲ **Laurent ノ展開式** トイヒ，右邊ノ級數ヲ **Laurent ノ級數** トイフ。(2) ナル二ツノ式ヲマトメテ，m ノ正負ニ關ラズ，

$$c_m=\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)\zeta^{-m-1}d\zeta \qquad (4)$$

トスルコトヲ得。而シテココニ積分路ハ圓 K_1, K_2 又ハ其間ヲ匝レル任意ノ閉曲線トシテ可ナリ，何トナレバ此場合ノ被積分函數ハ二圓 K_1 及ビ K_2 ニヨリテ圍マルル閉面分ニ於テ正則ナルガ故ニ，其間ノ何レノ閉曲線ヲ積分路トスルモ積分ノ値ハ同一ナレバナリ。(4) ナル係數ヲ用キテ (3) ヲ

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_mz^m \qquad (5)$$

ト略記スルコトヲ得。

此級數ガ C_1, C_2 ノ間ニ畫ケル任意ノ閉面分ニ於テ一樣收斂ナルコトハ第 41 節定理 3 ヨリ直チニ出ヅ。

以上スベテ簡單ノタメニ原點ヲ中心トシテ論ジタレドモ，任意ノ一點 a ヲ中心トスルモ理論ハ全ク同一ナリ。卽チ其場合

ノ Laurent ノ展開式ハ

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m \qquad (5')$$

ニシテ，ココニ

$$c_m=\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)(\zeta-a)^{-m-1}d\zeta \qquad (4')$$

ナリトス。

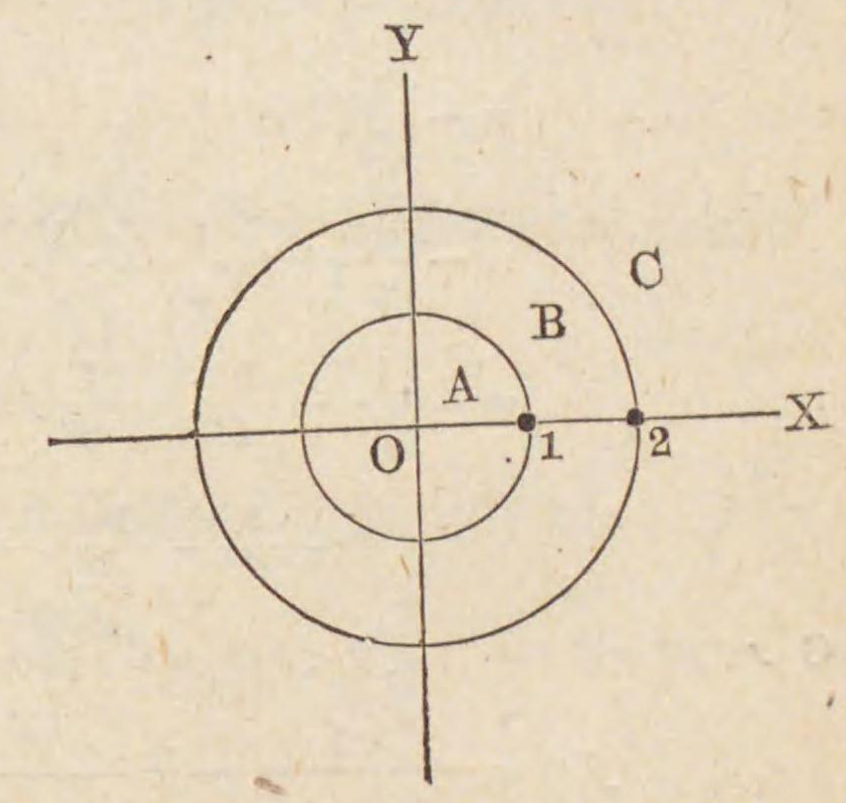
斯クノ如キ展開ガ唯一通リニ限ルコトハ容易ニ證明セラル。何トナレバ，若シ (5) 又ハ (5') ナル式ガ成立シタリトシ，其兩邊ニ z^{-m-1} 又ハ $(z-a)^{-m-1}$ ヲ乘ジテ積分スレバ係數 c_m ガ唯一通リニ定マリ，而シテ其値ハ (4) 又ハ (4') ニヨリテ與ヘラルルモノニ他ナラザレバナリ。

Laurent ノ展開ニ於テ其特別ノ場合トシテ最初ノ圓 C_1 ガ一點ニ收縮スルトキハ，孤立特異點ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ヲ得。又上來ノ理論ニ於テハ $f(z)$ ガ A ニ於テ正則ナルコトダケガ必要ニシテ，圓 C_1 及ビ C_2 ノ上ニ特異點ノ存在スルコトハ必要ニアラズ。故ニ特別ノ場合トシテ圓 C_2 ノ內部ニ一ツモ特異點ナシトスレバ，吾人ハ圓 C_1 ヲ消滅セシメ，圓 C_2 ノ內部全體ヲ A トスルコトヲ得。而シテ此場合ニ (1) ノ右邊ニ於ケル第二ノ積分ハ 0 トナルヲ以テ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n+\cdots\cdots$$

トナル。コレ卽チ Maclaurin ノ展開式ニ他ナラズ（一般ニ a ヲ中心トスレバ Taylor ノ展開式ヲ得）。

之ニ依ツテ見レバ，Laurent ノ展開ハ Taylor ノ展開ヨリモ更ニ一般ナルモノニシテ，正則點ハ勿論，孤立特異點ヲモソノ展開ノ中心トシテ用キルコトヲ得ルモノナリ。サレバ若シ函數 $f(z)$ ノ特異點ガスベテ孤立セル如キ場合ニハ任意ノ一點ヲ中心トシ各特異點ヲソレゾレ過ル同心圓ヲ畫キテ數平面ヲ幾ツカノ環狀ノ部分ニ分割スレバ，ソノ各部分ノ內部ニ於テ夫夫適當ナル Laurent ノ展開式ヲ以テ $f(z)$ ヲ表示スルコトヲ得ベシ。



第五十八圖

例. $$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

ナル函數ハ 1 及ビ 2 ナル二點ヲ極トシテ有ス。今原點ヲ中心トシ半徑 1 及ビ 2 ナル同心圓ヲ畫キテ數平面ヲ三ツノ部分ニ分チ，內部ノ圓ヲ A トシ，之ヲ圍ム環狀ノ部分ヲ順次ニ B 及ビ C トス。

A ノ內部ニ於テハ $|z|<1<2$ ナルヲ以テ，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$
$$=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n+\cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots\cdots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\cdots\cdots$$

B ノ内部ニ於テハ $1<|z|<2$ ナルヲ以テ,

$$f(z)=-\frac{1}{2\left(1-\dfrac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{z^{n-1}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2-\cdots\cdots-\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots\cdots-\frac{1}{z^n}-\cdots\cdots$$

C ノ内部ニ於テハ $1<2<|z|$ ナルヲ以テ,

$$f(z)=\frac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{2^{n-1}}{z^{n-1}}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{z^{n-1}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\cdots\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots\cdots$$

例題 1. 本節ノ例ニ示セル函數 $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ ノ種種ノ展開式ニ於ケル係數ヲ求ムルニ公式 (4) ヲ使用セバ如何。

例題 2. 點 1 ヲ中心トシテ前例ノ函數ヲ展開セヨ。

例題 3. 公式 (4) ニ於テ, 原點ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ヲ積分路トシ, 其上ニ於ケル $|f(\zeta)|$ ノ最大値ヲ M トスレバ

$$|c_m|\leqq\frac{\mathrm{M}}{r^m}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

53. 無限遠點ニ於ケル性質

吾人ハ今マデ或函數ガ一點ニ於テ或ハ正則ナリトイヒ或ハ特異點ヲ有ストイフニ際シ其點ノ位置ハ常ニ有限ナルモノト假定シ來レリ, 即チ無限遠點 ∞ ニ於ケル函數ノ狀態ニ關シテハ未ダ何等ノ定義ヲ下サザリキ。依ツテ今茲ニ次ノ定義ヲ設ケテ此缺陷ヲ補ハントス, 曰ク

函數 $f(z)$ ニ於テ $z=\dfrac{1}{w}$ ナル置換ヲ行ヒテ得ル w ノ函數ヲ

$$\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$$

トシ, $\varphi(w)$ ノ $w=0$ ニ於ケル狀態ヲ以テ原函數 $f(z)$ ノ無限遠點 ∞ ニ於ケル狀態ナリト定ム。

之ニヨリテ直チニ次ノ結果ヲ得。

(I) $\varphi(w)$ ガ $w=0$ ノ近傍 ($w=0$ 自身ヲ除ク) ニ於テ正則ニシテ且

$$\lim_{w\to 0}\varphi(w)=a$$

ナル有限確定値ガ存在スルトキハ, $\varphi(w)$ ハ $w=0$ ニ於テモ正則ニシテ

$$\varphi(0)=a$$

ナリ。依ツテ此場合ニハ $f(z)$ ハ $z=\infty$ ニ於テ正則ナリトシ, 且其函數値ヲ

$$f(\infty)=a$$

ナリトスベシ。

例. $f(z)=\dfrac{1}{z}$ ナルトキハ,

$$\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{\dfrac{1}{w}}.$$

$w=0$ ヲ除クノ他ハ ($w=0$ ノ近傍ニテモ) 此右邊ハ w ニ等シ。依ツテ

$$\lim_{w\to 0}\varphi(w)=0.$$

故ニ函數 $\dfrac{1}{z}$ ハ $z=\infty$ ニ於テ正則ニシテ其値ハ 0 ナリトス。

(II) $\varphi(w)$ ガ $w=0$ ノ近傍 ($w=0$ 自身ヲ除ク) ニ於テ正則ニシテ且

$$\lim_{w\to 0}\varphi(w)=\infty$$

ナルトキハ, $\varphi(w)$ ハ $w=0$ ニ於テ極ヲ有ス。依ツテ此場合ニハ $f(z)$ ハ $z=\infty$ ニ於テ極ヲ有スルモノトス。

例. $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ ナルトキハ,

$$\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w}+\frac{1}{\dfrac{1}{w}}=\frac{1}{w}+w, \qquad (w\neq 0),$$

依ツテ

$$\lim_{w\to 0}\varphi(w)=\infty.$$

故ニ函數 $z+\dfrac{1}{z}$ ハ $z=\infty$ ニ於テ極ヲ有ス。

(III) $\varphi(w)$ ノ特異點ガ $w=0$ ニ集積スルトキ, 又ハ然ラザルモ

$$\lim_{w\to 0}\varphi(w)$$

ガ不確定ナルトキハ, $\varphi(w)$ ハ $w=0$ ニ於テ眞性特異點ヲ有ス。依ツテ此場合ニハ $f(z)$ ハ $z=\infty$ ニ於テ眞性特異點ヲ有スルモノトス。

例. $\sin z$ ハ $z=\infty$ ニ於テ眞性特異點ヲ有ス, 何トナレバ

$$\lim_{w\to 0}\sin\frac{1}{w}$$

ハ不確定ナレバナリ。

(IV) $f(z)$ ガ點 ∞ ヲ除クノ他到ル所正則ニシテ且一定數 M ニ對シテ $|f(z)|<\mathrm{M}$ ナルトキハ, $\varphi(w)$ ハ $w=0$ ヲ除クノ他到ル所正則ニシテ且 $|\varphi(w)|<\mathrm{M}$ ナリ。故ニ $\varphi(w)$ ハ $w=0$ ニ於テモ正則ニシテ, 從ツテマタ $f(z)$ ハ $z=\infty$ ニ於テ正則ナラザル可カラズ。逆ニ $f(z)$ ガ點 ∞ ヲモ含ミテ到ル所ニテ正則ナラバ, 一定數 M ヲ適當ニトレバ常ニ $|f(z)|<\mathrm{M}$ ナラシメ得ルコト明カナリ。依ツテ吾人ハ第 35 節ニ述ベタル Liouville ノ定理ヲ次ノ如クニ言ヒ換フルコトヲ得。

解析函數 $f(z)$ ガ數平面上 (無限遠點ヲモ入レテ) 到ル所正則ナラバ, $f(z)$ ハ實ハ一ノ常數ナリ。

更ニ之ヲ換言スレバ,

常數ニアラザル解析函數ハ少クモ一ツノ特異點ヲ有ス

トイフコトヲ得。

(V) $\varphi(w)$ ガ $w=0$ ニ於テ正則ナルカ又ハ孤立特異點ヲ有スルトキハ, $\varphi(w)$ ハ次ノ如ク Maclaurin 又ハ Laurent ノ級數ニ展開セラル。

$$\varphi(w)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m w^m, \qquad c_m=\frac{1}{2\pi i}\int\varphi(\zeta)\zeta^{-m-1}d\zeta.$$

サレバ $f(z)$ ガ $z=\infty$ ニ於テ正則ナルカ又ハ孤立特異點ヲ有

スルトキハ，點 ∞ ノ近傍ニ於テ次ノ展開式ガ成立スベシ。

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^{-m}.$$

之ヲ稱シテ點 ∞ ヲ中心トセルトキノ $f(z)$ ノ展開式トイフ。此場合ニ右邊ノ級數ヲ示スニハ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ ナル記號ヲ用キルベシ。此級數ノ收斂域ハ點 ∞ ヲ中心トシ之ニ最近キ不正則點（點 ∞ ヲ除ク）ヲ過ル圓ノ内部ナリ，卽チ換言スレバ原點ヲ中心トシ之ニ最遠キ不正則點（點 ∞ ヲ除ク）ヲ過ル圓ノ外部ナリ。

例． 函數 $f(z) = \frac{z}{1+z}$ ハ $z=\infty$ ニ於テ正則ナリ。而シテ $|w|<1$ ナルトキハ

$$\varphi(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{w}} = \frac{1}{1+w}$$

$$= 1 - w + w^2 - \cdots\cdots + (-1)^n w^n + \cdots\cdots,$$

故ニ點 ∞ ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ハ

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{z^n} + \cdots\cdots$$

此展開式ハ單位圓ノ外部ニ於テ到ル所ニ通用ス。

注意． 第33節ニ於テ點 ∞ ハ必ズシモ或函數ノ特異點ニアラザルモ 0 ナラザル留數ヲ有シ得ルコトヲ知レリ。又今述ベタル如ク函數ノ展開ニ於テモ點 ∞ ヲ中心トスルモノハ特殊ノ形ヲ有シ，點 ∞ ハ $\mathrm{P}(z-a)$ ノ解析接續ニヨリテ其收斂圓內ニ收容スルコト一般ニ不可能ナルモノナリ。サレバ概シテ點 ∞ ハ何レノ函數ニ對シテモ恰カモ特異點ナルカノ如キ注意ヲ以テ取扱フベキコトヲ忘ル可カラズ。

例題 1． 次ノ各函數ノ點 ∞ ニ於ケル狀態ヲ論ゼヨ，

$$e^{\frac{1}{z}}, \qquad z\cos\frac{1}{z}, \qquad \operatorname{cosec}\frac{1}{z}.$$

例題 2． 點 ∞ ヲ中心トシテ $\frac{1}{z^2-3z+2}$ ヲ展開セヨ。

例題 3． 函數 $\frac{z^2}{1-z}$ ノスベテノ特異點ヲ求メ，ソノ各ヲ中心トセル展開式ヲ作レ。

$z^2 = (1-z-1)^2$

$\frac{(1-z)^2 - 2(1-z) + 1}{1-z} = (1-z) - 2 + \frac{1}{1-z}$

54. 極ニ關スル定理

函數 $f(z)$ ガ有限ナル一點 a ニ於テ孤立特異點ヲ有スルトキ，a ヲ中心トセルソノ展開式ヲ

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots\cdots$$

トス。コノ中ニテ第一行ニ記セル部分ハ $z=a$ ニ於テモ正則ナレドモ，第二行ニ記セル分數項ノ部分ハ $z \to a$ ナルトキニ各項ガ何レモ無限大トナル。卽チ $f(z)$ ノ a ニ於ケル特異性ハ專ラ後者ノ部分ニ起因スルモノナリ。依ツテ

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots\cdots \tag{1}$$

ヲ稱シテ此 **展開式ノ主部** トイフ。

同樣ノ理由ニヨリ，點 ∞ ヲ中心トセル展開式

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

$$+ c_{-1}z + c_{-2}z^2 + \cdots\cdots$$

ニ於テハ，

$$c_{-1}z + c_{-2}z^2 + \cdots\cdots \tag{2}$$

ヲ稱シテ其展開式ノ **主部** トイフ。

主部ノ項數ニ關シテ次ノ定理アリ。

定理 1. 孤立特異點ガ極ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ，其點ヲ中心トセル展開式ノ主部ノ項數ガ有限ナルコトナリ。

先ヅ (1) ニ就イテ考フルニ，若シソノ項數ガ有限ニシテ例ヘバ n ナリトスレバ，之ヲマトメテ

$$\frac{c_{-1}(z-a)^{n-1}+c_{-2}(z-a)^{n-2}+\cdots\cdots+c_{-n}}{(z-a)^n},\quad c_{-n}\neq 0$$

トスルコトヲ得。ココニ於テ $z\to a$ ナルトキノ極限値ヲ考フレバ，分子ハ c_{-n} ニシテ分母ハ 0 ナリ。依ツテ主部全體ノ極限値ハ ∞ トナリ，點 a ハ $f(z)$ ノ極ナルコトヲ知ル。

(2) ニ就イテモ之ヲ

$$\left(\frac{c_{-1}}{z^{n-1}}+\frac{c_{-2}}{z^{n-2}}+\cdots\cdots+c_{-n}\right)z^n,\qquad c_{-n}\neq 0$$

ナル形ニ書ケバ，$z\to\infty$ ナルトキ此式ノ極限値ガ ∞ ナルコト明カニシテ，從ツテ點 ∞ ガ $f(z)$ ノ極ナルコトヲ知ルベシ。

次ニハ逆ニ極ニ於テ主部ノ項數ガ有限ナルコトヲ證明スベシ。今有限ナル一點 a ガ $f(z)$ ノ極ナリトシ，

$$\mathrm{F}(z)=\frac{1}{f(z)}$$

ト置ケバ，第 51 節 定理 2 ニヨリ $\mathrm{F}(z)$ ハ a ニ於テ正則ニシテ，且

$$\mathrm{F}(a)=0$$

ナリ。依ツテ a ヲ中心トシテ $\mathrm{F}(z)$ ヲ次ノ如キ形ノ Taylor ノ

級數ニ展開スルコトヲ得。

$$\mathrm{F}(z)=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+\cdots\cdots,\quad m\geqq 1,\quad c_m\neq 0.$$

從ツテ

$$f(z)=\frac{1}{\mathrm{F}(z)}=\frac{1}{(z-a)^m\{c_m+c_{m+1}(z-a)+\cdots\cdots\}}$$

トナル。ココニ於テ

$$\frac{1}{c_m+c_{m+1}(z-a)+\cdots\cdots}=\gamma_0+\gamma_1(z-a)+\cdots\cdots,\qquad \gamma_0\neq 0$$

トスレバ (第七章ノ問題 1)，

$$f(z)=\frac{\gamma_0}{(z-a)^m}+\frac{\gamma_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{\gamma_{m-1}}{z-a}$$
$$+\gamma_m+\gamma_{m+1}(z-a)+\gamma_{m+2}(z-a)^2+\cdots\cdots\quad (3)$$

ナル展開式ヲ得。コレニ依ツテ見レバ其主部ノ項數ハ m ニシテ明カニ有限ナリ。

點 ∞ ガ極ナル場合ニツイテモ同様ニ證明セラル。タダ其場合ニハ $f(z)$ ノ展開式ガ

$$(z)=\gamma_0 z^m+\gamma_1 z^{m+1}+\cdots\cdots+\gamma_{m-1}z$$
$$+\gamma_m+\frac{\gamma_{m+1}}{z}+\frac{\gamma_{m+2}}{z^2}+\cdots\cdots\quad (4)$$

ナル形トナリテ現ルベシ。

本定理ヨリ直チニ次ノ二件ヲ推知シ得ベシ。

系 1. 孤立特異點ガ眞性特異點ナルタメニ必要ニシテ且十

分ナル條件ハ，其點ヲ中心トセル展開式ノ主部ノ項數ガ無限ナルコトナリ。

系 2. **函數 $f(z)$ ガ有限ナル一點 a ニ於テ極ヲ有スルトキハ，適當ナル正ノ整數 m ヲトレバ**

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$$

ヲシテ 0 ニモ ∞ ニモアラザル確定値ヲ有セシムルコトヲ得。

若シ點 ∞ ニ於テ極ヲ有スルトキハ，

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{z^m}$$

ニツイテ同樣ノコトガ成立ス。

斯クノ如キ數 m ノコトヲ其極ノ **位數** ト稱ス。而シテ $f(z)$ ガ點 a ヲ m 位ノ極トシテ有スルトキ，ソノコトヲ「$f(z)$ ハ點 a ニ於テ **m 位ニ無限大トナル**」トモイフ。

之ニ倣ヒテ，$f(z)$ ガ點 a ニ於テ 0 トナル場合ニモ，若シ

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{(z-a)^m} \qquad (a \neq \infty \text{ ナルトキ})$$

又ハ

$$\lim_{z\to\infty} z^m f(z) \qquad (a = \infty \text{ ナルトキ})$$

ガ 0 ニモ ∞ ニモアラザル確定値ヲ有スルトキハ「a ハ $f(z)$ ノ **m 位ノ零點** ナリ」又ハ「$f(z)$ ハ a ニ於テ **m 位ニ零トナル**」トイフ。此場合ニハ $f(z)$ ヲ

$$f(z) = (z-a)^m\varphi(z) \qquad (a \neq \infty \text{ ナルトキ})$$

又ハ
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^m} \qquad (a = \infty \text{ ナルトキ})$$

ナル形ニ書クコトヲ得，但シ $\varphi(z)$ ハ a ニ於テ正則ニシテ且 $\varphi(a) \neq 0$ ナリトス。

更ニ一般ニ，$f(z)$ ガ點 a ニ於テ b ナル値ヲトルトキ，若シ $f(z)-b$ ガ其點ニ於テ m 位ニ零トナルナラバ，「$f(z)$ ハ a ニ於テ **m 位ニ b トナル**」又ハ「$f(z)$ ハ a ニ於テ b ナル値ヲ **m 回トル**」トイフ。$\varphi(z)$ ヲ前ト同ジ意味ニ用キレバ，此場合ニハ

$$f(z) = b + (z-a)^m\varphi(z) \qquad (a \neq \infty \text{ ナルトキ})$$

又ハ
$$f(z) = b + \frac{\varphi(z)}{z^m} \qquad (a = \infty \text{ ナルトキ})$$

ト書クコトヲ得。

例.
$$f(z) = \frac{(z-1)^2(z-2)}{3z^2-2z+1}$$

ニ於テ分母ヲ因數ニ分解スレバ

$$3\left(z-\frac{1+i\sqrt{2}}{3}\right)\left(z-\frac{1-i\sqrt{2}}{3}\right)$$

トナル。故ニ $f(z)$ ハ $z = \dfrac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$ ニ於テ夫夫 1 位ノ極ヲ有ス。ナホ又 z ニ關シテ分子ハ三次，分母ハ二次ナルヲ以テ，$z=\infty$ ニ於テモ 1 位ノ極ヲ有ス。

次ニ $f(z)$ ノ零點ヲ考フレバ，其ハ明カニ 1 及ビ 2 ニシテ，前者ハ 2 位，後者ハ 1 位ナリ。

又試ミニ $f(z) = -2$ ナラシムル如キ z ヲ求ムレバ，

$$(z)+2 = \frac{(z-1)^2(z-2)+2(3z^2-2z+1)}{3z^2-2z+1}$$

$$= \frac{z(z+1)^2}{3z^2-2z+1} = 0.$$

故ニ $f(z)$ ハ $z=0$ ニ於テ 1 位ニ -2 トナリ　又 $z=-1$ ニ於テ 2 位ニ -2 トナル。

點 a ガ函數 $f(z)$ ノ正則點又ハ孤立特異點ナルトキ，之ヲ圍ミテ其内部ニ a 以外ニハ特異點ヲ含マザル如キ單一閉曲線 C ヲ畫クトキ，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)dz$$

ナル値ヲ稱シテ點 a ニ於ケル $f(z)$ ノ留數トイフコトハ既ニ之ヲ知レリ（第 33 節）。今 a ヲ有限ナル點ト考ヘ，之ヲ中心トセル $f(z)$ ノ Laurent ノ展開式ヲ

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots\cdots$$

トシ，又一般ニ

$$\int_{(C)} (z-a)^m dz = 0, \qquad m \neq -1,$$

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

ナルコトニ注意スレバ，直チニ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)dz = c_{-1}$$

ナルコトヲ知ルベシ。

若シマタ a ガ無限遠點ナル場合ニハ，$f(z)$ ノ展開式ヲ

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

$$+ c_{-1}z + c_{-2}z^2 + \cdots\cdots$$

トシ，又此場合ニハ C ヲ一周スル向キガ前ノ場合ト反對ナルコトニ注意スレバ，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-C)} f(z)dz = -c_1$$

ヲ得。依ツテ次ノ定理アリ。

定理 2．函數 $f(z)$ ノ有限ナル一點 a ニ於ケル留數ハ，a ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ニ於ケル $(z-a)^{-1}$ ノ係數ニ等シ。

函數 $f(z)$ ノ無限遠點ニ於ケル留數ハ，無限遠點ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ニ於ケル z^{-1} ノ係數ノ符號ヲ變ジタルモノニ等シ。

例．　$f(z) = \dfrac{(z-1)^2(z-2)}{3z^2-2z+1}$

ノ無限遠點ニ於ケル留數ヲ求メンガタメニ先ヅ點 ∞ ヲ中心トシテ之ヲ展開スレバ

$$f(z) = \frac{z}{3}\left(1-\frac{1}{z}\right)^2\left(1-\frac{2}{z}\right)\left(1-\frac{2}{3z}+\frac{1}{3z^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}z - \frac{10}{9} + \frac{22}{27}\frac{1}{z} + \frac{20}{81}\frac{1}{z^2} - \cdots\cdots$$

依ツテ定理 2 ニヨリ，求ムル留數ハ $\dfrac{22}{27}$ ナリ。

注意． 第 33 節定理 3 ヲ此例ニ應用セントスレバ，

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \infty$$

トナリテ，留數ヲ求ムル能ハズ。

次ニハ定理 2 ヲ應用シテ $f(z)$ ノ對數導函數 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ノ留數ニ就イテ研究スベシ。

今 a ヲ有限ナル一點トシ，a ニ於テ $f(z)$ ガ正則ニシテ且零ニアラズトスレバ，$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ モ亦 a ニ於テ正則ニシテ，從ツテソノ留數ハ 0 ナルコト明カナリ。

モシマタ a ガ $f(z)$ ノ m 位ノ零點ナルトキハ，

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z) \tag{5}$$

ト置ケバ，$\varphi(z)$ ハ a ニ於テ正則ニシテ且 $\varphi(z)\neq 0$ ナリ。依ツテ

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m(z-a)^{m-1}\varphi(z)+(z-a)^m\varphi'(z)}{(z-a)^m\varphi(z)}$$

$$=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{6}$$

ニシテ，ココニ $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ ハ a ニ於テ正則ナリ。故ニ $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ハ a ニ於テ，一位ノ極ヲ有シ，ソノ留數ハ m ナリ。

a ガ $f(z)$ ノ m 位ノ極ナル場合ハ (5) ニ於テ m ノ符號ヲ變ズルダケノ相違ニ過ギズ。故ニ $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ハ a ニ於テ矢張リ一位ノ極ヲ有スベク，ソノ留數ハ $-m$ ナリ。

以上ノ結果ヲ表示スレバ次ノ如シ。

$f(z)$		$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$	其留數
正則	零ナラズ	正則	0
正則	m 位ノ零點	一位ノ極	m
	m 位ノ極	一位ノ極	$-m$

點 a ノ代リニ無限遠點ヲトリテ上ト同様ノ研究ヲナセバ，次ノ結果ヲ得。

$f(z)$		$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$	其留數
正則	零ナラズ	正則	0
正則	m 位ノ零點	正則	m
	m 位ノ極	正則	$-m$

此第一ノ場合ヲ證明スルニハ，先ヅ點 ∞ ヲ中心トスル $f(z)$ ノ展開式ヲ

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots\cdots,\qquad c_0\neq 0$$

トスレバ，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-\dfrac{c_1}{z^2}-\dfrac{2c_2}{z^3}-\cdots\cdots}{c_0+\dfrac{c_1}{z}+\dfrac{c_2}{z^2}+\cdots\cdots}$$

$$=-\frac{c_1}{c_0z^2}+\frac{c_1^2-2c_0c_2}{c_0^2z^3}+\cdots\cdots$$

之ニ依ツテ $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ハ $z=\infty$ ニ於テ正則ニシテ，ソノ留數ハ

0 ナルコトヲ知ル。次ニ第二及ビ第三ノ場合ニ就イテハ, (5) ノ代リニ

$$f(z) = z^{-m}\varphi(z) \qquad (m \gtrless 0)$$

ヲ, 從ツテ (6) ノ代リニ

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

ヲ用キレバ, 容易ニ證明セラル。

以上ノ研究ニヨリ次ノ定理ヲ得。

定理 3. 數平面上ニテ一ツ又ハ幾ツカノ單一閉曲線 C ニヨリテ圍マルル面分ヲ G トシ, 函數 $f(z)$ ニツイテ次ノ諸件ヲ假定ス。

(i) C 上ニテ $f(z)$ 及ビ $f'(z)$ ハ連續ニシテ, 且 $f(z) \neq 0$ ナリトス。

(ii) G 内ニ於ケル $f(z)$ ノ零點ヲ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ トシ, ソノ位數ヲ夫夫 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ トス。

(iii) G 内ニ於ケル $f(z)$ ノ極ヲ $b_1, b_2, \cdots\cdots$ トシ, ソノ位數ヲ夫夫 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$ トス。

(iv) G 内ニ於テ $f(z)$ ハ極以外ノ特異點ヲ有セザルモノトス。

以上ノ假定ガ成立スルトキハ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots) - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots).$$

之ヲ證明センニ, 先ヅ (i) ニヨリテ

$$\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

ナル積分ハ確カニ存在スベク, 而シテ其値ハ G 内ニ於ケル $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ノスベテノ極及ビ無限遠點 (モシ G 内ニアラバ) ノ留數ノ和ノ $2\pi i$ 倍ニ等シ。然ルニ其留數ハ假定 (ii), (iii) ニヨリ前記ノ二ツノ表ヲ參照シテ計算スレバ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots - \beta_1 - \beta_2 - \cdots\cdots \tag{7}$$

トナルコト明カナリ。之ニ依ツテ直チニ本定理ヲ得。

此定理ニ關シナホ注意スベキハ G 内ニ於ケル $f(z)$ ノ極及ビ零點ノ數ハ各有限ナルコトナリ。蓋シ, 若シ $f(z)$ ガ G 内ニ於テ無數ニ多クノ極ヲ有スルナラバ其集積點タル眞性特異點ガ G ノ内部又ハ C 上ニ存在セザル可カラズ, コレ明カニ (i) 及ビ (iv) ニ反ス。又 $\dfrac{1}{f(z)}$ モ (i) 及ビ (iv) ト同樣ノ條件ヲ滿足スルコトハ容易ニ證明セラルルニヨリ, $\dfrac{1}{f(z)}$ ノ極卽チ $f(z)$ ノ零點モ亦 G 内ニ無數ニ多ク存在スルコトナシ, 之ニ依ツテ極及ビ零點ハ共ニ有限個數ダケ存在スルコト, 從ツテ (7) ハ無限級數ニアラザルコトヲ知ルベシ。

若シ G 内ニ於ケル $f(z)$ ノ零點及ビ極ヲ各ソノ位數ダケヅツ重複シテ數ヘタル個數ヲ夫夫 A 及ビ B トスレバ,

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots, \qquad B = \beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots$$

ナリ。依ツテ定理 3 ノ結果ヲ次ノ如クニモ陳述セラル。

系 1.
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = A - B,$$

即チ **左邊ノ式ノ値ハ G 内ニ於ケル $f(z)$ ノ零點ノ個數ヨリ極ノ個數ヲ減ジタル差ニ等シ。**

系 2. 特ニ $f(z)$ ガ G 内ニ於テ到ル所正則ナルトキハ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = A,$$

即チ換言スレバ, **左邊ノ式ノ値ハ方程式 $f(z)=0$ ノ G 内ニ於ケル根ノ個數ニ等シ。**

前ニ擧ゲタル (6) ノ兩邊ニ z ヲ乘ズレバ,

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{mz}{z-a} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$
$$= \frac{ma}{z-a} + m + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

之ニ依ツテ直チニ次ノ結果ヲ推知スベシ。

	$f(z)$	$z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$	其留數
正則	零ナラズ	正則	0
正則	m 位ノ零點	一位ノ極	ma
	m 位ノ極	一位ノ極	$-ma$

定理 4. 定理 3 ニ於テ, G ヲ有限ナル面分トスレバ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots\cdots) - (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots\cdots).$$

系. 特ニ $f(z)$ ガ G 内ニ於テ到ル所正則ナルトキハ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots\cdots$$

即チ換言スレバ, **左邊ノ式ノ値ハ方程式 $f(z)=0$ ノ G 内ニ於ケルスベテノ根ノ和ニ等シ。**

注意. 定理 3 ニ於テハ G ハ無限ニテモ可ナレドモ, 定理 4 ニ於テハ有限ニ限ル。

例題 1. 函數 $f(z)$ ノ有限ナル孤立特異點 a ガ極ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ,

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$$

ヲシテ 0 ニモ ∞ ニモアラザル確定セル値ヲ有セシムル如キ正ノ整數 m ガ存在スルコトナリ。之ヲ證明セヨ。

例題 2. 函數 $\dfrac{(2z-1)^2}{z^3(1-z)}$ ノ各ノ極ヲ中心トセル展開式ノ主部及ビ其極ニ於ケル留數ヲ求メヨ。

例題 3. 定理 4 ノ假定ガ成立スルトキ, 任意ノ正ノ整數 k ニツイテ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum \alpha a^k - \sum \beta b^k$$

ナルコトヲ證明セヨ。

55. 有理函數

有理函數ノ一般ナル形ヲ

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

トシ, ココニ N(z) 及ビ D(z) ハ各 z ノ有理整式ニシテ且公約

數ヲ有セザルモノトス。然ルトキハ $f(z)$ ノ特異點ハ無限遠點又ハ $D(z)$ ノ零點ヨリ他ニ有リ得ザルコトハ容易ニ證明セラル。

サテ無限遠點ガ $f(z)$ ノ特異點トナルハ $N(z)$ ガ $D(z)$ ヨリモ高次ナル場合ニ限リ，且其場合ニハ必ズ極トナルコト明カナリ。又若シ $D(z)$ ガ a ナル零點ヲ有スルモノトシ，ソノ位數ヲ m トスレバ，

$$D(z)=(z-a)^m\varphi(z)$$

ト置キ，ココニ $\varphi(z)$ ハ a ニ於テ正則ニシテ且 $\varphi(a)\neq 0$ ナラシムルコトヲ得。又假定ニヨリ $N(a)\neq 0$ ナリ。從ツテ

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\lim_{z\to a}\frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

ハ 0 ニモ ∞ ニモアラザル確定値ヲ有ス。故ニ a ハ $f(z)$ ノ m 位ノ極ナリ。

之ニ依ツテ見レバ有理函數ナルモノハ極ヨリ他ノ特異點ヲ有セザルコトヲ知ルベシ。從ツテマタソレラノ極ハ有限個數ダケ存在スルニ過ギザルコトモ容易ニ推知セラル。何トナレバ，若シ無數ニ多クノ極アルトキハ，ソノ集積點トシテ必ズヤ少クモ一ツノ眞性特異點ヲ生ズ可ケレバナリ。

特別ノ場合トシテ，有理整函數ニ於テハ無限遠點ノミヲ極トシテ有ス。又函數ガ常數ニ歸著スルトキハ全然極ヲ有セズ。

以上ヲマトメテ次ノ定理ヲ得。

定理 1. (I) 有理函數ハ數平面ノ全部ヲ通ジテ極以外ノ特異點ヲ有セズ。(ソノ極ノ個數ハ有限ナリ。)

(II) 有理整函數ハ無限遠點ニ於テノミ極ヲ有シ，ソノ他ニテハ到ル所正則ナリ。

(III) 常數ハ數平面ノ全部ヲ通ジテ正則ナリ。

サテ一ツノ有理函數 $f(z)$ ノ極ハ斯クノ如ク有限個數ダケ存在スルニ過ギザルガ故ニ，吾人ハ數平面上ニ於テソノ何レノ極ヲモ過ラズ又無限遠點ヲモ過ラザル如キ單一閉曲線 C ナルモノヲ畫クコトヲ得ベシ。今 C ニヨリテ圍マレタル有限面分內ニアルスベテノ極ノ留數ノ和ヲ A トシ，ソレ以外ノスベテノ極及ビ無限遠點ノ留數ノ和ヲ B トスレバ，

$$\int_{(C)}f(z)dz=2\pi i.A,\quad \int_{(-C)}f(z)dz=2\pi i.B.$$

從ツテ之ヨリ $A+B=0$ ナルコトヲ知ルベシ。卽チ

定理 2. 一ツノ有理函數ノスベテノ極及ビ無限遠點ニ於ケル留數ノ和ハ 0 ニ等シ。

今有理函數 $f(z)$ (恒等的ニ零ニ等シキ場合ヲ除ク) ノスベテノ零點ノ位數ヲ夫夫 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ トシ，又スベテノ極ノ位數ヲ夫夫 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$ トスレバ，前節ノ表ニヨリ，函數 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ノスベテノ極及ビ無限遠點ニ於ケル留數ハ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ 及ビ $-\beta_1, -\beta_2, \cdots\cdots$ ナリ。然ルニ $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ハ矢張一ツノ有理函數ナルヲ以テ，之ニ定理 2 ヲ適用スレバ

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots)-(\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots)=0$$

ナル結果ヲ得。即チ

定理 3. 一ツノ有理函數(恒等的ニ零ニハ等シカラザル)ノ零點ノ位數ノ和ト極ノ位數ノ和トハ相等シ。

若シ零點及ビ極ヲ各ソノ位數ダケニ重複シテ數フルコトトスレバ，次ノ如クニ換言セラル。

系 1. 一ツノ有理函數ノ零點ノ數ト極ノ數トハ相等シ。

特別ノ場合トシテ n 次ノ有理整函數ヲトレバ，其極ハ無限遠點ニノミアリ，ソノ位數ハ n ナリ。從ツテ其函數ノ零點ヲ各ソノ位數ダケニ重複シテ數フレバ，全體ニテ n 個ダケ有ルベキ筈ナリ。故ニ

系 2. n 次ノ代數方程式ハ丁度 n 個ダケノ根ヲ有ス。

コレ即チ代數學ノ基本定理ナリ。(第 35 節定理 3.)

系 3. 常數ニアラザル一ツノ有理函數ハ任意ノ値ヲ常ニ同ジ回數ダケヅツ取ル。

何トナレバ，$f(z)$ ヲ常數ニアラザル有理函數，c ヲ任意ノ常數トスレバ，$f(z)-c$ ノ極ハスベテ $f(z)$ ノ極ト一致シ，從ツテソノ個數ハ c ノ如何ニ關ラズ一定ナリ。依ツテ系 1 ニヨリ $f(z)-c$ ノ零點ノ個數モ亦其同ジ一定數ナラザル可カラズ。即チ c ノ如何ニ關ラズ $f(z)=c$ ナル如キ z ノ値ハ常ニ同數ダケアリ。

例ヘバ有理函數

$$f(z)=\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}$$

ニツイテ上ノ諸定理ヲ驗スレバ次ノ如シ。

$f(z)$ ハ唯二ツノ極 1 及ビ -2 ヲ有シ，前者ハ二位，後者ハ一位ナリ。又 $f(z)$ ノ留數ヲ求ムレバ，

$z=1$ ニ於テハ 留數 $\frac{4}{9}$,

$z=-2$ ニ於テハ 留數 $\frac{5}{9}$,

而シテ $z=\infty$ (極ニアラズ) ニ於テハ留數 -1 ナリ。コレラノ留數ノ和ハ

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-1=0$$

トナル。

次ニ $f(z)=0$ ト置ケバ $z=i,\quad -i,\quad \infty,$

$f(z)=\infty$ ト置ケバ $z=1,\quad 1,\quad -2,$

一般ニ $f(z)=k$ ト置ケバ，之ニ對スル z ノ値ハ方程式

$$z^2+1=k(z-1)^2(z+2)$$

ノ根ニシテ，即チ常ニ三ツノ値アリ。

最後ニ吾人ハ定理 1 ニ述ベタルコトガ有理函數，有理整函數及ビ常數ノ一性質タルニ止マラズシテ實ニ其各ノ特徴タルコトヲ證明セントス。

定理 4. (I) 數平面ノ全部ヲ通ジテ正則ナル函數ハ實ハ常數ナリ。

(II) 無限遠點ニ於テノミ極ヲ有シ，ソノ他ニテハ到ル所正則ナル函數ハ有理整函數ナリ。

(III) 數平面ノ全部ヲ通ジテ極以外ノ特異點ヲ有セザル函數ハ有理函數ナリ。

以上ノ中 (I) ハ第 35 節及ビ第 42 節ニ證明セル Liouville ノ定理ニ他ナラズ。(第 53 節 (IV)參照)

(II) ヲ證明センニハ，先ヅ今考フル所ノ函數 $f(z)$ ノ無限遠點ヲ中心トセル展開式ノ主部ヲ

$$\mathrm{H}(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 z$$

トシ，ココニ $\qquad \mathrm{F}(z) = f(z) - \mathrm{H}(z)$

ナル新函數ヲ考フベシ。$f(z)$ ハ假定ニヨリ點 ∞ 以外ニ於テハ正則ナリ，又 $\mathrm{H}(z)$ ハ有理整函數ナルガ故ニ矢張點 ∞ 以外ニ於テハ正則ナリ，從ツテ $\mathrm{F}(z)$ モ亦然リ。然ラバ點 ∞ ニ於テハ如何トイフニ，點 ∞ ヲ中心トセル $f(z)$ ノ展開式ヨリ其主部 $\mathrm{H}(z)$ ダケヲ引キ去リタル殘リノ正則ナル部分ガ卽チ $\mathrm{F}(z)$ ノ展開式ニ他ナラズ，從ツテ $\mathrm{F}(z)$ ハ點 ∞ ニ於テモ亦正則ナリ。サレバ結局 $\mathrm{F}(z)$ ハ數平面上到ル所ニテ正則ナル函數ナリ。依ツテ (I) ニヨリ $\mathrm{F}(z)$ ハ常數ナラザル可カラズ。之ヲ a_0 トスレバ，

$$f(z) - \mathrm{H}(z) = a_0$$

從ツテ $\qquad f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 z + a_0.$

故ニ $f(z)$ ハ有理整函數ナリ。

(III) ハ (II) ト全ク同樣ノ論法ニヨリテ證明セラル。蓋シ $f(z)$ ガ極以外ノ特異點ヲ有セズトスレバ，定理 1 ノ前ニ述ベタル如クソノ極ノ個數ハ有限ナリ。茲ニ於テソレラノ各ノ極ヲ中心トセル展開式ノ主部ヲ夫夫 $\mathrm{H}_1(z),\ \mathrm{H}_2(z),\ \cdots\cdots,\ \mathrm{H}_n(z)$ トシ，今

$$\mathrm{F}(z) = f(z) - \mathrm{H}_1(z) - \mathrm{H}_2(z) - \cdots\cdots - \mathrm{H}_n(z)$$

ナル新函數ヲ考フベシ。$\mathrm{F}(z)$ ハ $f(z)$ ノ極以外ノ點ニ於テハ勿論正則ナルガ，ナホ又極ニ於テモ $f(z)$ ヲ無限大ナラシムベキ主部ガ引キ去ラレアルヲ以テ $\mathrm{F}(z)$ ハ矢張正則ナリ。從ツテ (I) ニヨリ $\mathrm{F}(z)$ ハ常數ナリ。之ヲ c トスレバ，

$$f(z) = \mathrm{H}_1(z) + \mathrm{H}_2(z) + \cdots\cdots + \mathrm{H}_n(z) + c$$

トナル，故ニ $f(z)$ ハ有理函數ナリ。

注意. 本定理ハ函數ノ特異性ヲ以テ有理函數，有理整函數及ビ常數ヲ定義セルモノニ他ナラズ。斯クノ如キ定義ノ方法ハ函數論ニ於ケル常套手段ニシテ，之ヲ第 18 節ニ述ベタル如キ數式ヲ以テセル外形的ノ定義ニ比スレバ其函數ノ內面的特質ヲ洞察セシムル點ニ於テ遙カニ優秀ナルヲ見ルベシ。

有理函數ノ表示式

有理函數 $f(z)$ ノ表示式トシテ普通用キラルルモノニ次ノ二種アリ。

(I) 因數分解式

$f(z)$ ノ極ヲ	$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_n,$
ソノ位數ヲ夫夫	$\alpha_1, \alpha_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \alpha_n,$
又其零點ヲ	$b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ b_m,$
ソノ位數ヲ夫夫	$\beta_1, \beta_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \beta_m$ トスレバ，

$$f(z) = c\,\frac{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\cdots\cdots(z-b_m)^{\beta_m}}{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(z-a_n)^{\alpha_n}} \quad (c\ ハ常數)$$

ナリ。ココニ，若シ a 及ビ b ガスベテ有限ナルトキハ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_m$$

ナルコトヲ要ス。

若シ或ル a 又ハ b ガ ∞ ナルトキハ，之ニ對應スル $(z-a)$ 又ハ $(z-b)$ ナル因數ヲ除クベシ。

(II)　部分分數式

$f(z)$ ノ極ヲ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ トシ，極 a_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ニ於ケル展開式ノ主部ヲ

$$\mathrm{H}_k(z) = \frac{b_{k,1}}{z-a_k} + \frac{b_{k,2}}{(z-a_k)^2} + \cdots\cdots + \frac{b_{k,\alpha_k}}{(z-a_k)^{\alpha_k}}$$

トスレバ，

$$f(z) = \mathrm{H}_1(z) + \mathrm{H}_2(z) + \cdots\cdots + \mathrm{H}_n(z) + c \quad (c\ ハ常數)$$

ナリ。若シ ∞ ガ極ナルトキハ，之ニ對スル $\mathrm{H}_k(z)$ トシテ，

$$b_1 z + b_2 z^2 + \cdots\cdots + b_\alpha z^\alpha$$

ヲ用キルベシ。

例題. 次ノ各組ノ條件ニ適合スル函數 $f(z)$ ヲ式ニテ表セ。

(1)　$z = \pm 1$ ニ於テ各一位ノ極ヲ有シ，

$z = \pm i$ ニ於テ各一位ノ零點ヲ有シ，

其他ニハ特異點ヲ有セズ

且 $f(\infty) = 1$.

(2)　$z = i$ ニ於テ一位ノ極ヲ有シ，其留數ハ -1，

$z = \infty$ 及ビ $z = -1$ ニ於テ極ヲ有シ，ソノ展開式ノ主部ハ夫夫

$$z + z^2 \quad 及ビ \quad \frac{2}{z+1} - \frac{\cdots}{(z+1)^2},$$

其他ニハ特異點ヲ有セズ，

且 $f(0) = i$.

56. Mittag-Leffler ノ定理

前節ニ於テ吾人ハ有理函數ニツイテ其極トナルベキ有限個數ノ點及ビ其各點ニ於ケル展開式ノ主部ヲ與フルトキハ，之ニヨリテ函數ノ形ガ定マルコトヲ見タリ。(嚴密ニイヘバ函數ノ形ガ定マルトイフモ唯一通リニハアラズ，之ニ附加スベキ常數ダケハ不定ナリ。)

玆ニ於テ次ニ起ル問題ハ，若シ無數ニ多クノ極及ビ之ニ夫夫對應スル展開式ノ主部タルベキ式ヲ與フルトキ，之ニ適合スル函數 (有理函數ニハ非ズ) ガ存在スルヤ否ヤニアリ。

有理函數ニ於ケル部分分數式ノ方法ハ此場合ニハ一般ニ適用セラレズ。例ヘバ $z = n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ニ於テ一位ノ極ヲ有シ，ソノ各極ニ於ケル展開式ノ主部ガ夫夫 $\dfrac{1}{z-n}$ ナル如キ函數 $f(z)$ ヲ作ラントシテ

$$(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} + c \qquad (c\ ハ常數)$$

ト置クモ，此右邊ノ級數ハ收斂ナラザルガ故ニ，之ニヨリテ $f(z)$ ハ定メラレズ。

然レドモ之ヲ以テ直チニ此種ノ問題ハ常ニ不能ナリトハ斷定スベカラズ。吾人ハ次ノ定理ニヨリ或條件ノ下ニハ其ノ可能ナルコトヲ知ルナリ。之ヲ **Mittag-Leffler ノ定理** トイフ。

定理.　無限遠點ニ於テノミ集積スル無數ニ多クノ點*

* 當然可附番ナリ。(第一章ノ問題 16 ノ擴張)

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots,\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

及ビ之ニ夫夫對應シテ $\dfrac{1}{z-a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ ノ有理整式ニシテ常數項ヲ有セザルモノ

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\ \mathrm{P}_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right),\ \cdots\cdots,\ \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),\ \cdots\cdots$$

ガ任意ニ與ヘラレタリトス。然ルトキハ z ノ函數ニシテ, a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)$ ニ於テ夫夫 $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{z-a_n}\right)$ ヲ展開式ノ主部トスル如キ極ヲ有シ, ソノ他ニ於テハ無限遠點ヲ除クノ他到ル所正則ナル如キ函數ガ常ニ存在ス。

之ヲ證明スルニ, 今便宜上假リニ

$$0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots\cdots \leqq |a_n| \leqq \cdots\cdots$$

ト考フベシ

サテ $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{z-a_n}\right)$ ハ a_n 以外ノ點ニ於テハ到ル所正則ナルヲ以テ, 今 $z=0$ ヲ中心トシ點 a_n ヲ過ル圓ノ內部ニ於テ之ヲ展開スレバ

$$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = c_{n,0} + c_{n,1}z + c_{n,2}z^2 + \cdots\cdots$$

ナル級數ヲ得。而シテ,

$$|z| \leqq \frac{1}{2}|a_n| \tag{1}$$

ナル圓內ニ於テハ此級數ハ一樣收斂ナリ (第 41 節定理 3)。依

ツテ十分大ナル (n ニハ關係スレドモ, z ニハ無關係ナル) 數 N ヲトリテ

$$\mathrm{G}_n(z) = c_{n,0} + c_{n,1}z + \cdots\cdots + c_{n,\mathrm{N}}z^{\mathrm{N}}$$

ト置ケバ, (1) ナル變域內ノ任意ノ z ニ對シテ常ニ

$$\left|\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \mathrm{G}_n(z)\right| < \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

ナラシムルコトヲ得ベシ。

n ノスベテノ値ニ對シテ夫夫カクノ如キ $\mathrm{G}_n(z)$ ヲ決定シ,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \mathrm{G}_n(z)\right\} \tag{3}$$

ト置ケバ, $f(z)$ ハ卽チ本定理ニ於テ存在ヲ主張スル所ノ函數ノ一ツナリトス。

先ヅ $f(z)$ ガ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ノ何レヲモ含マザル任意ノ有限變域 G ニ於テ常ニ正則ナルコトヲ證明センニ, n ナル數ヲ十分大ナラシムレバ (1) ナル圓ヲシテ G ヲソノ內部ニ含マシムルコトヲ得ベク, 從ツテ G 內ノ任意ノ z ニツイテ

$$|z| \leqq \frac{1}{2}|a_n| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+1}| \leqq \cdots\cdots,$$

從ツテ (2) ニヨリ

$$|\mathrm{P}_n - \mathrm{G}_n| < \frac{1}{2^n},\quad |\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{G}_{n+1}| < \frac{1}{2^{n+1}},\ \cdots\cdots$$

ナラシムルコトヲ得ベシ。然ルトキハ無限級數

$$(P_n - G_n) + (P_{n+1} - G_{n+1}) + \cdots\cdots$$

ハ G ニ於テ最大收斂，從ツテマター様收斂ナリ。而シテ其各項ハ G ニ於テ z ノ正則函數ナルガ故ニ，其和モ亦然ルベシ。サレバ之ニ有限項數ノ

$$(P_1 - G_1) + (P_2 - G_2) + \cdots\cdots + (P_{n-1} - G_{n-1})$$

ヲ加ヘテ得ル $f(z)$ モ亦 G ニ於テ正則ナラザル可カラズ。

次ニ點 $a_k\ (k = 1, 2, \cdots\cdots)$ ニ於ケル $f(z)$ ノ狀態ヲ吟味センニ，今 n ヲ十分大ナラシメ，(1) ノ內部ニ a_k ガ含マルル樣ニナリタリトシ，

$$f(z) = P_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \cdots\cdots P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + R_n(z)$$

ト置クベシ。$R_n(z)$ ハ上ニ證明セル如ク圓 (1) ノ內部ニアルスベテノ z ニツイテ正則ナリ。サレバ $z \to a_k$ ナルトキヲ考フレバ，上式ノ右邊ニ於テ $P_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ ノミガ無限大トナリ，其他ノ項ハ皆有限ニシテ正則ナリ。依ツテ $f(z)$ ハ a_k ニ於テ極ヲ有シ，ソノ展開式ノ主部ハ $P_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ ナルコトヲ知ル。

以上本定理ノ證明ニ於テ $0 < |a_1|$ ナルコトヲ假定シタレドモ，モシ $a_1 = 0$ ナラバ，(3) ノ代リニ

$$f(z) = P_1\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - G_n(z)\right\}$$

トスレバ可ナルコト明カナリ。

注意 1. G ナル有理整式ハ畢竟 P_n ノ特異性ヲ損ゼズシテ(3) ノ右邊ヲ一樣收斂ナラシムルタメニ附加セルモノナレバ，此目的ニ應ズルモノナラバ必ズシモ上ノ證明中ニ用キタル如キ G ニ限ルニ非ズ。次節ニ其實例アリ。

注意 2. 本定理ニイフ如キ函數 $f(z)$ ハ唯一通リニ定マルニハアラズ。例ヘバ其一ツニ任意ノ常數ヲ加フレバ他ノ一ツヲ得ベシ。一般ニスベテ同一ノ a 及ビ P ヲ有スル二ツノ函數ヲ $f_1(z)$ 及ビ $f_2(z)$ トスレバ，其差 $f_1(z) - f_2(z)$ ナルモノハ唯無限遠點ニ於テノミ特異點ヲ有シ得ル函數ナリ。此種ノ函數ヲ一般ニ **整函數** ト稱ス，之ニツキテハ更ニ第 58 節ニ論ズベシ。

サテ上ニ述ベタル定理ニ於テ，$a_1, a_2, \cdots\cdots$ ナル點ハ點 ∞ ニ於テノミ集積スルモノト假定セリ。然レドモ吾人ハ簡單ナル一次變換ニヨリテ此集積點ヲ任意ノ有限ナル一點ニ直スコトヲ得ルガ故ニ，實ハ該定理ニ於テハ a ノ集積點ガ唯一ツナルコトダケヲ假定セバ足レリ。

然ルニ其後 Mittag-Leffler ハ更ニ之ヲ擴張シテ次ノ定理ヲ得タリ。

數平面上ニ無數ニ多クノ孤立セル點 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ アリ，ソノ集積點ヲ $c_1, c_2, \cdots\cdots$ トシ，* 又各ノ $a_n (n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ニ對應シテ夫夫 $\frac{1}{z - a_n}$ ノ有理整式ニシテ常數項ヲ有セザルモノ

$$P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ガ與ヘラレタリトス。然ルトキハ數平面上 a 及ビ c ナル點以外ニ於テハ到ル所正則ニシテ，且 a_n ニ於テハ極ヲ有シ其展開式ノ主部ガ P_n ナル如キ函數必ズアリ。

此定理ヲ證明スルニ當リ a 及ビ c ハスベテ有限ナリト假定

* a ノ集合ハ當然可附番ナリ (第一章ノ問題 17)，然レドモ c ノ集合ハ必ズシモ可附番ナルヲ要セズ。

シテ可ナリ(必要アラバ適當ナル一次變換ヲ行フト考フベシ)。サテ其證明ノ骨子ハ前ト全ク同樣ニシテ,ツマリ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-G_n(z)\right\} \qquad (4)$$

ヲシテ a 及ビ c ヲ含マザル任意ノ閉面分內ニテ一樣收斂ナラシムル如キ G_n ヲ決定シ得ルコトヲ示スニアリ。ソレガタメニハ,先ヅ a_n ニ最近キ一ツノ c ヲトリ,之ヲ c_N トシ,

$$|a_n - c_N| = h_n$$

ト置ク。ココニ $n \to \infty$ ナルトキハ,明カニ $h_n \to 0$ ナリ。サテ點 c_N ヲ中心トシ,半徑 h_n ナル圓ノ外部ニ於テ P_n ヲ展開スレバ

$$P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = c_{n,0} + \frac{c_{n,1}}{z-c_N} + \frac{c_{n,2}}{(z-c_N)^2} + \cdots\cdots \qquad (5)$$

ナル級數ヲ得,コノ右邊ハ c_N ヲ中心トシ h_n ヨリモ大ナル半徑ヲ有スル圓ノ外部ニテ一樣收斂ナリ。サレバ今假リニ

$$H_n = 2h_n$$

ナル半徑ノ圓 K_n ヲ畫キタリトシ,(5) ノ右邊ノ十分多クノ項ノ和ヲ $G_n(z)$ トスレバ,K_n ノ外部ノ任意ノ點ニ對シテ(同ジ n ヲ用キテ)

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-G_n(z)\right| < \frac{1}{2^n}$$

ナラシムルコトヲ得。

而シテココニ $n \to \infty$ ナルトキ $H_n \to 0$ ナルヲ以テ,a 及ビ

c ヲ含マザル任意ノ閉面分ガ與ヘラレタルトキ,n ヲ十分大ナラシムルコトニヨリテ,圓 K_n ヲ全クソノ閉面分ノ外部ニ在ラシムルコトヲ得。

然ルトキハ (4) ガ卽チ今存在ヲ證明セルトスル一ツノ函數ニ他ナラザルヲ知ルベシ。

57. 三角函數

$\sin z$ 及ビ $\cos z$ ハ共ニ有限ナル特異點ヲ有セザルガ故ニ,各一ツノ冪級數ヲ以テ(無限遠點ヲ除クノ他ハ)數平面上ノ全部ニ於ケル其函數値ヲ表スコトヲ得。之ニ反シテ $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ ハ何レモ無數ニ多クノ極ヲ有スルガ故ニ,唯一ツノ冪級數ヲ以テハ數平面上ノ全部ニ於ケル函數値ヲ表スコト能ハズ。サレバ吾人ハ Mittag-Leffler ノ定理ヲ應用シテ,所謂部分分數式ノ展開ヲ求メント欲ス。

先ヅ $\cot z$ ナル函數ヲ考フベシ。此函數ハ

$$z = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

ニ於テ各一位ノ極ヲ有シ,其極ニ於ケル展開式ノ主部ガ $P_n = \dfrac{1}{z-n\pi}$ ナルコトハ容易ニ計算セラル。之ニ對シテ前節ニ所謂 $G_n(z)$ ヲ求メンガタメニ,先ヅ $n \neq 0$ トシテ此主部ヲ z ノ冪級數ニ展開スレバ

$$\frac{1}{z-n\pi} = -\frac{1}{n\pi} - \frac{z}{(n\pi)^2} - \frac{z^2}{(n\pi)^3} - \cdots\cdots$$

ヲ得。今試ミニ其第一項ノミヲトリテ G_n トスレバ

$$P_n - G_n = \frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi} = \frac{z}{n\pi(z-n\pi)}.$$

故ニ原點ヲ中心トシ半徑 $\sqrt{n\pi}$ ナル圓ヲ C_n トスレバ，其内部及ビ周圍ニ於テハ

$$|P_n - G_n| \leqq \frac{1}{n\pi(\sqrt{n\pi}-1)}.$$

而シテ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi(\sqrt{n\pi}-1)}$$

ナル級數ハ明カニ收斂ナルガ故ニ，前節ノ證明法ハ其儘此所ニ適用セラレ，從ツテ容易ニ次ノ結果ヲ得。

$$\cot z = \frac{1}{z} + {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}'\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) + \varphi(z),$$

但シ $\varphi(z)$ ハ一ノ整函數ニシテ，又 $\sum$ ノ肩ニ $'$ ヲ附セルハ $n = -\infty$ ヨリ ∞ ニ至ル中ニテ $n = 0$ ダケヲ除クコトヲ表スモノトス。

此兩邊ヲ z ニ關シテ微分スレバ，

$$\operatorname{cosec}^2 z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2} - \varphi'(z)$$

トナル。今簡單ノタメニ

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2} \qquad (1)$$

ト置クベシ。然ルトキハ $\operatorname{cosec}^2 z - f(z)$ ハ $-\varphi'(z)$ ニ等シキガ故ニ，$z = \infty$ 以外ニ於テハ常ニ正則ナリ。

次ニ $z = \infty$ ニ於ケル狀態ヲ考ヘンニ，先ヅ $f(z)$ ガ $\operatorname{cosec}^2 z$ ト同ジク π ナル週期ヲ有スルコトニ注目スベシ，蓋シ (1) ニ於テ z ニ代フルニ $z+\pi$ ヲ以テスルモ其右邊ノ和ハ不變ナレバナリ。ココニ於テ今 z ノ變域ヲ

$$z = x + yi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

ノ如クニ限定シ，コノ變域內ニ於テ $z \to \infty$ (卽チ $|y| \to \infty$) ナラシメテ見ルベシ。此變域內ニテ $|y| \geqq 1$ ナル任意ノ閉面分ニ於テ (1) ノ右邊ガ一樣收斂ナルコトハ第 39 節ノ末段ニヨリテ容易ニ證明セラル。* 依ツテ今コノ級數ノ最初ノ n 項ノ和ヲ $S_n(z)$，ソノ後ノ剩餘ヲ $R_n(z)$ トスレバ，n ガ或値ヨリ大ナルトキハ任意ノ正數 ε ニ對シテ z ノ如何ニ關ハラズ

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ナラシムルコトヲ得。而シテ又 $|y|$ ヲ十分大ナラシムレバ

$$|S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ナラシメ得ルコト明カナリ。之ヨリ

$$|f(z)| < \varepsilon$$

ヲ得。之ニ依ツテ $|y| \to \infty$ ナルトキノ $f(z)$ ノ極限値ハ 0 ナルコトヲ知ルベシ。

---

* $$\left|\frac{1}{(z-n\pi)^2}\right| = \frac{1}{(x-n\pi)^2 + y^2} < \frac{1}{\left(|n| - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + 1}$$

ナルコトニ注意スベシ。

一方ニ於テ $\operatorname{cosec}^2 z$ モ亦 $|y|\to\infty$ ナルトキ 0 ナル極限値ヲ有スルコトハ容易ニ證明セラル。(第 24 節例 2 參照)。從ツテ結局

$$\lim_{|y|\to\infty}\left\{\operatorname{cosec}^2 z - f(z)\right\} = 0 \tag{3}$$

ナル結果ヲ得。

z ガ (2) ナル範圍ヲ越エテ ∞ ニ進ム場合ト雖, 上記ノ函數ガ π ナル週期ヲ有スルコトヨリシテ常ニ之ヲ (2) ナル範圍內ニ引キ直シテ考フルコトヲ得ルガ故ニ, 一般ニ $|y|\to\infty$ ナル限リ常ニ (3) ノ結果ハ成立ス。

次ニ $|y|$ ガ有限ニシテ $z\to\infty$ ナル場合, 卽チ z ガ實軸ノ方向ニ於テ ∞ ニ進ム場合ニモ之ヲ常ニ (2) ノ範圍內ニ引キ直シテ考フレバ, $\operatorname{cosec}^2 z - f(z)$ ノ値ハトニカク有限ナルコト明カナリ。

依ツテ第 53 節ノ定義ニヨリ, $\operatorname{cosec}^2 z - f(z)$ ハ $z=\infty$ ニ於テモ正則ニシテ, 從ツテ同節 (IV) 及ビ上記ノ (3) ニヨリ實ハ常數 0 ナルコトヲ知ル。之ニ依ツテ次ノ結果ヲ得。

$$\operatorname{cosec}^2 z = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}. \tag{4}$$

マタ之ヲ書キ直シテ次ノ如クスルコトヲ得,

$$\operatorname{cosec}^2 z - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(z-n\pi)^2}. \tag{5}$$

ココニ於テ $z=0$ ヨリ任意ノ z ノ値マデ, $n\pi$ ナル點ヲ過ラザル如キ曲線ニ沿ヒテ (5) ノ兩邊ヲ積分スレバ (第 40 節定理 2),

$$\int_0^z\left(\operatorname{cosec}^2 z - \frac{1}{z^2}\right)dz = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right).$$

此左邊ノ積分ガ

$$-\cot z + \frac{1}{z}$$

ニ等シキコトハ容易ニ計算セラル。從ツテ

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)$$

ヲ得。或ハ更ニ書キ直シテ次ノ如クスルモ可ナリ。

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}.$$

コレヨリ $\tan z$ ノ部分分數式展開ヲ求メンニハ, (6) ニ於テ

$$\tan z = \cot\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

ナル關係ヲ利用スベシ。卽チ

$$\tan z = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z-n\pi}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z+n\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{2n+1}{2}\pi - z} - \frac{1}{\frac{2n-1}{2}\pi + z}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{2n-1}{2}\pi - z} - \frac{1}{\frac{2n-1}{2}\pi + z}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{\frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2 - z^2}.$$

又 $\operatorname{cosec} z$ ノ展開ヲ求メンニハ,

$$\operatorname{cosec} z = \cot\frac{z}{2} - \cot z$$

ナル關係ヲ利用スベシ。卽チ，先ヅ (6) ヨリ

$$\cot\frac{z}{2} = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z - 2n\pi} + \frac{2}{z + 2n\pi}\right),$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - 2n\pi} + \frac{1}{z + 2n\pi}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - (2n-1)\pi} + \frac{1}{z + (2n-1)\pi}\right)$$

ヲ得，之ヲ邊邊相減ジテ

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - 2n\pi} + \frac{1}{z + 2n\pi}\right)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - (2n-1)\pi} + \frac{1}{z + (2n-1)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right) \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

更ニ (7) ニ於テ

$$\sec z = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

ナル關係ヲ利用スレバ，次ノ結果ヲ得。

$$\sec z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{2n-1}{2}\pi - z} + \frac{1}{\frac{2n-1}{2}\pi + z}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)\pi}{\frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2 - z^2}.$$

次ニ吾人ハ以上ノ諸結果ノ應用トシテ，後章ニ於テ使用スベキ二三ノ重要ナル公式ヲ誘導セントス。

(5) ニヨリ，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(z - n\pi)^2} = \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{z^2 - \sin^2 z}{z^2 \sin^2 z}$$

$$= \frac{z^2 - \left(z - \frac{z^3}{6} + \cdots\right)^2}{z^2\left(z - \frac{z^3}{6} + \cdots\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{z^2}{15} + \cdots\cdots$$

ココニ於テ $z = 0$ ト置ケバ次ノ結果ヲ得,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

又兩邊ヲ二度微分シテ後 $z=0$ ト置ケバ,

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

ナホ幾多ノ同様ナル結果ヲ得ルコト容易ナリ。

次ニ $\cot z$ ノ展開式ヨリ

$$\cot z-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)$$

ヲ得。コノ兩邊ヲ 0 ヨリ z マデ積分スレバ,

$$\Big[\log\sin z-\log z\Big]_0^z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\log(z-n\pi)-\log(-n\pi)+\frac{z}{n\pi}\right\}.$$

之ヨリ次ノ結果ヲ得。

$$\log\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\log\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)+\frac{z}{n\pi}\right\},$$

從ツテ

$$\sin z=z\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\right\}.$$

或ハ次ノ如クニモ書キ直サル,

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-\frac{z}{n\pi}}\right\}$$
$$=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

例題 1. 本節ノ (6) ニ於テ

$$\tan z=\cot z-2\cot 2z$$

ナル關係ヲ利用シ, 依ツテ $\tan z$ ノ展開式ヲ求メヨ。

例題 2. 次ノ式ヲ證明セヨ,

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\frac{2z}{1-z^2}-\frac{2z}{2^2-z^2}+\frac{2z}{3^2-z^2}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}}=4\left\{\frac{1}{1-z^2}-\frac{3}{3^2-z^2}+\frac{5}{5^2-z^2}-\cdots\cdots\right\}.$$

例題 3. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ,

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots+\frac{1}{n^6}+\cdots\cdots$$

例題 4. $\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right\}$ ヲ證明セヨ。

58. 超越整函數

數平面上無限遠點ヲ除クノ他到ル所正則ナル函數ヲ總稱シテ一般ニ **整函數** トイフ。既ニ熟知セル有理整函數ハ其ノ一種ナリ。マタ前二節ニ於テモ斯クノ如キ函數ノ出現ヲ見タリ。依ツテ本節ニ於テハ之ニ就イテ少シク考究セント欲ス。

整函數ノ特異點ハ (有リトスルモ) 唯一個ノ點 ∞ ニ限ル, 從ツテ其ハ孤立特異點ナリ。之ニ依ツテ吾人ハ整函數ヲ次ノ三種ニ區別シ得ベシ。

(1) 點 ∞ ニ於テモ正則ナル整函數 ——— コレ實ハ常數ナリ。

(2) 點 ∞ ニ於テ極ヲ有スル整函數 ——— コレ卽チ有理整函數ナリ。

(3) 點 ∞ ニ於テ眞性特異點ヲ有スル整函數 ——— コレヲ **超越整函數** トイフ, 例ヘバ e^z, $\sin z$ 等ノ如シ。

第六章ノ理論ヲ回顧スレバ，整函數ガ次ノ性質ヲ有スルコトハ容易ニ承認セラルベシ。

整函數ハ有限ナル任意ノ一點ヲ中心トシテ常ニ Taylor ノ級數ニ展開セラル。而シテ其收斂半徑ハ無限大ナリ。

整函數ヲ微分又ハ積分スレバ矢張一ツノ整函數ヲ得。

マタ常數零ニアラザル整函數ノ零點ハ有限ノ點ニ集積スルコトナシ。

何トナレバ若シ零點ガ有限ノ點ニ集積スルトキハ，一致ノ定理ニヨリ，其整函數ハ恒等的ニ零トナルベケレバナリ。

故ニ整函數ノ零點ハスベテ孤立ス。從ツテソレラノ零點ハ可附番ナリ。(第一章ノ問題 17)

有理整函數ト超越整函數トハ多クノ類似點ヲ有ス。次ニ其一ツヲ示サン。

任意ニ指定セラレタル有限値 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ニ於テ夫夫 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 位ノ零點ヲ有シ，其他ニハ零點ヲ有セザル如キ有理整函數アリ。卽チ次ノ如シ。

$$f(z) = c(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\cdots\cdots(z-a_n)^{m_n}. \qquad (c\ \text{ハ常數})$$

超越整函數ニ就イテモ之ト相類似セル次ノ定理アリ。

無限遠點ニ於テノミ集積スル點 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ ニ於テ夫夫 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n, \cdots\cdots$ 位ノ零點ヲ有シ，其他ニハ零點ヲ有セザル如キ超越整函數アリ。

ココニ a_n ハ何レモ 0 ニアラズト考フルモ問題ノ本性ニ毫

モ影響スル所ナキヲ以テ，今斯ク假定シテ先ヅ Mittag-Leffler ノ定理ニヨリ，各 a_n ニ於テ展開式ノ主部ガ夫夫 $\dfrac{m_n}{z-a_n}$ ナル如キ極ヲ有スル函數

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{m_n}{z-a_n} - G_n(z)\right\} \qquad (1)$$

ヲ作ルベシ。而シテ

$$F(z) = e^{\int_0^z f(z)dz} \qquad (2)$$

ナル函數 $F(z)$ ヲ作レバ，コレ卽チ所要ノモノナリ。

何トナレバ，$f(z)$ ハ各 a_n 以外ノ點ニ於テハ明カニ正則ナリ，從ツテソレノ積分ノ指數函數タル $F(z)$ モ亦正則ニシテ且 0 トナルコトナシ。又 $z=a_n$ ノ近傍ニテハ

$$f(z) = \frac{m_n}{z-a_n} + P(z-a_n)$$

ナルヲ以テ，

$$F(z) = e^{m_n \log(z-a_n) + Q(z)} = (z-a_n)^{m_n} e^{Q(z)}, \qquad (3)$$

但シ $P(z-a_n)$ ハ $z-a_n$ ノ冪級數，マタ $Q(z)$ ハ之ヲ積分シテ得ル函數ナリトス。而シテ (3) ニヨレバ，$F(z)$ ハ a_n ニ於テ m_n 位ノ零點ヲ有スルモノナリ。之ニヨリテ本定理ハ證明セラレタリ。

(1) ヲ積分スレバ

$$\int_0^z f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{m_n \log(z-a_n) - m_n \log(-a_n) + H_n(z)\right\},$$

ココニ $H_n(z)$ ハ有理整函數ナリ。之ニ依ツテ (2) ヲ書キ直セバ

$$\mathrm{F}(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n} e^{\mathrm{H}_n(z)}\right\}$$

ヲ得，コレ卽チ有理整函數ノ場合ノ因數分解式ニ相當スルモノナリ。

注意。 F(z) ノ代リニ單ニ

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

トシテハ一般ニ收斂セズ，收斂セシムルタメニハ $e^{\mathrm{H}n(z)}$ ノ如キ因數ノ必要ナルコトニ注意スベシ。（前節ノ終ニ得タル $\sin z$ ヲ表ス無限乘積ヲ見ヨ。）

Mittag-Leffler ノ定理ヲ擴張セルト同様ニ今得タル定理ヲ次ノ如クニ擴張スルコトヲ得。

數平面上ニ無數ニ多クノ孤立セル點 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ アリ，ソノ集積點ヲ $c_1, c_2, \cdots\cdots$ トシ，又各ノ $a_n (n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ニ對應シテ夫夫 m_n ナル自然數ガ與ヘラレタリトス。然ルトキハ數平面上 c ナル點以外ニ於テハ到ル所正則ニシテ，且 a_n ニ於テハ m_n 位ノ零點ヲ有シ，其他ニハ零點ヲ有セザル如キ函數必ズアリ。

a 及ビ c ハスベテ有限ナリト假定シ 353 頁ノ定理ニ於テ

$$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) = \frac{m_n}{z - a_n}$$

ト置キ，354 頁ノ (4) ニ相當スル函數

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{m_n}{z - a_n} - \mathrm{G}_n(z)\right\}$$

ヲ作リ，ココニ於テ

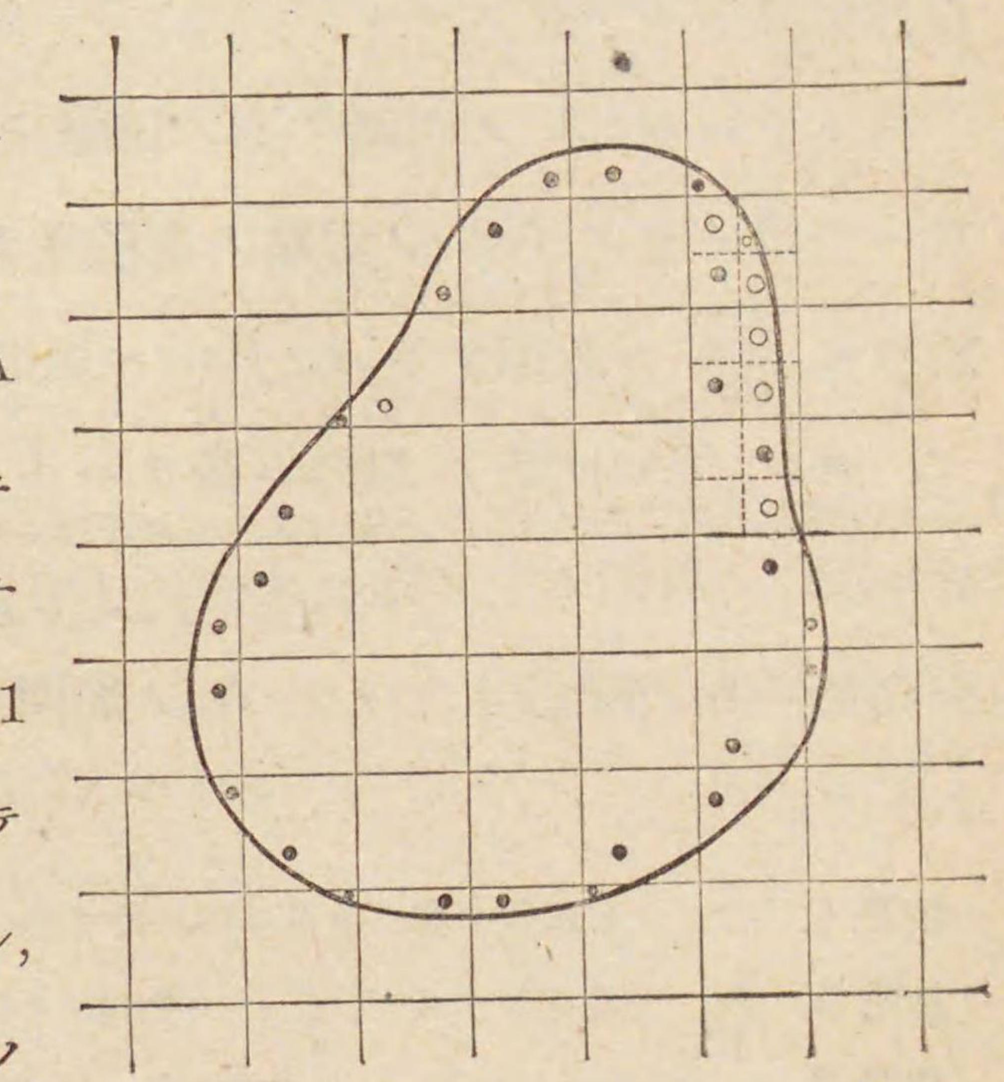
$$\mathrm{F}(z) = e^{\int_{\infty}^{z} f(z)dz}$$

トスレバ，F(z) ハ卽チ本定理ニイフ所ノ函數ノ一ツデアリ。

注意。 本定理ハ超越整函數ニ關スル定理ノ擴張ナレドモ，ココニ得タル F(z) ハ最早一般ニハ超越整函數ニアラズ。

吾人ハ最後ニコノ定理ノ應用トシテ，數平面上ニ任意ノ面分ガ與ヘラレタルトキ，其内部ニ於テハ正則ニシテ其周圍ヲ自然限界トシテ有スル如キ解析函數ガ常ニ存在スルコトヲ證明セントス。(**Weierstrass ノ定理**)。

與ヘラレタル面分ヲ A トシ，A ハ有限ナルモノト假定スベシ，若シ無限ナルトキハ先ヅ適當ナル一次變換ニヨリテ之ヲ有限ナルモノニ直シ，然ル後之ヲ A トス。ココニ於テ兩軸ニ夫夫平行ニシテ間隔 1 ナル平行線ヲ引キ，一邊 1 ナル正方形ノ格子ヲ以テ數平面ヲ蔽ヒタリトシ，其正方形ノ中ニテ A ノ界點及ビ内點ヲ含ムモノノミヲ選出シ，其各正方形ニツイテ一個ヅツソレニ屬スル A ノ内點ヲトリ，コレヲ



第六十九圖

黑點 ● ハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$,

白圈 ○ ハ $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots$ ノ一部ヲ示ス。

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ トスベシ。次ニ間隔 $\dfrac{1}{2}$ ナル平行線ヲ以テ前ノ各正方形ヲ四等分シ，ソノ小正方形ノ中ニテマタ前ノ如ク A ノ界點及ビ内點ヲ含ムモノノミヲ選出シ，ソレニ屬スル A ノ内點ヲトリ，之ヲ $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots$ トスベシ。同様ノ手續ヲ無限ニ繰リ返セバ可附番ナル點 a ノ集合ヲ得，而シテ A ノ界點ハスベテ a ノ集積點トナル。

ココニ於テ前定理ニヨリ，上記ノ點 a ニ於テ零點ヲ有シソノ集積點以外ニ於テハ零ナラズシテ正則ナル函數 $f(z)$ ヲ作レバ，$f(z)$ ハ A ノ内部ニ於テ明カニ正則ニシテ，且 A ノ周圍ヲ自然限界トシテ有スベシ。

何トナレバ，A ノ周圍ノ上ノ任意ノ一點ヲトリテ考フルニ，其ハ上述ノ如ク $f(z)$ ノ零點ノ集積點ナルヲ以テ，若シ其點ニ於テモ $f(z)$ ガ正則ナラバ，$f(z)$ ハ恒等的ニ 0 ナラザル可カラズ，コレ $f(z)$ ガ點 a 以外ニ於テハ 0 ナラズトノ假定ニ反ス。故ニ A ノ周圍ノ上ノ點ハスベテ $f(z)$ ノ特異點ニシテ，從ツテ此函數ハ解析接續ニヨリテ A ノ周圍ヲ越ユルコトヲ得ザルモノナリ。

例題 1. 二ツノ整函數ノ和，差及ビ積ハ各マタ一ツノ整函數ナルコトヲ示セ。

例題 2. $f(z)$ ガ整函數ナラバ，$\dfrac{1}{f(z)}$ ハ如何ナル特異點ヲ有スルカ。

例題 3. $z=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ ニ於テ各一位ノ零點ヲ有スル超越整函數ヲ作レ。

第八章ノ問題

1. $\tan z$ ノスベテノ特異點ヲ擧ゲ，之ヲ極及ビ眞性特異點ニ分類シ，極ニツイテハ其位數ヲ求メヨ。

2. 單一閉曲線 C ニヨリテ圍マレタル開面分ノ内部ニ於テ正則ニシテ且無數ニ多クノ零點ヲ有スル函數ハ，恒等的ニ零ナルカ，然ラザレバ C ノ上ニ眞性特異點ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

3. 原點ヲ中心トシ，次ノ函數ヲ種種ノ變域ニ於テ Laurent ノ級數ニ展開セヨ，

$$\frac{z+3}{z^3-z^2-2z}.$$

4. $|z|>1$ ナルトキ函數 $e^{\frac{1}{1-z}}$ ヲ表示スル $\dfrac{1}{z}$ ノ冪級數ヲ作レ。

5. $z=\infty$ ニ於ケル次ノ各函數ノ狀態ヲ吟味セヨ。

(1)　$e^{\frac{1}{z}}$　　(2)　$\dfrac{1}{e^z}$

(3)　$\dfrac{e^z}{z^2+1}$　　(4)　$\sin z+\cos z$

6. $f(z)$ ガ點 ∞ ヲ極トシテ有スルトキ，其位數ガ 1 ヨリ大ナル場合ニ限リテ $f'(z)$ モ亦點 ∞ ヲ極トシテ有スルコトヲ證明セヨ。

7. 曲線 C ニヨリテ圍マレタル面分ヲ A トシ，A ハ點 ∞ ヲソノ内點トシテ有スルモノトス。今函數 $f(z)$ ガ A ノ内部ニ於テ正則ニシテ，又 C 上ニ於テハ連續ナリトスレバ，A 内ノ任意ノ一點ニ對シテ

$$f(z)-f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ ζ ハ A ノ内部ヲ左方ニ見ル如ク C ノ上ヲ一周スルモノトス。

8. 一價解析函數ノ第 r 次ノ導函數ハ $(r-1)$ 位ヨリ低キ位數ノ極ヲ有セザルコトヲ證明セヨ。

9. 二ツノ函數 $f(z)$ 及ビ $g(z)$ ガ $z=a$ ニ於テ夫夫 m 位及ビ n 位ノ極ヲ有スルトキ，

$$f(z)\pm g(z), \qquad f(z)g(z), \qquad \frac{f(z)}{g(z)}$$

ハ $z=a$ ニ於テ如何ナル狀態ヲ呈スルカ。

10. $f(z)$ ガ有限ナル一點 $z=a$ ニ於テ m 位ノ零點ヲ有スルトキ，同ジ點ニ於テ

$$F_1(z)=\int_a^z f(z)dz$$

ハ如何。又 $f(z)$ ガ $z=a$ ニ於テ m 位ノ極ヲ有シ且ソノ留數ガ 0 ナルトキ，同ジ點ニ於テ

$$F_2(z)=\int_{z_0}^z f(z)dz$$

ハ如何，但シ z_0 ハ $f(z)$ ノ正則點トス。

11. $z^2 f(z)$ ガ $z=\infty$ ニ於テ正則ナルトキハ，點 ∞ ノ回リヲ之ニ十分近ク一周スル積分路ニ對シテ

$$\int f(z)dz=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. 函數 $\dfrac{z}{(z-a)(z-b)^2}$ ノ $z=b$ ニ於ケル留數ヲ求メヨ。

13. 函數 e^z ノ $z=0$ 及ビ $z=\infty$ ニ於ケル各留數ヲ求メヨ。

14. 函數

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}z^n}{1+z}$$

ノ $z=0$ 及ビ $z=\infty$ ニ於ケル留數ヲ夫夫 A 及ビ B トスレバ，

$$A=(-1)^{n+1}\frac{1}{e}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\quad+(-1)^n\frac{1}{2!},$$

$$A+B+(-1)^n\frac{1}{e}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

15. 留數ヲ利用シテ次ノ實積分ヲ計算セヨ。

(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^4+a^4)^3}$

16. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}dx$　ヲ求メヨ。

17. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n}\pi.$$

18. 次ノ積分ノ値ヲ求メヨ。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x^3}dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x\sin ax}{x^3}dx$

19. 眞性特異點ヲ有セザル一價解析函數ハ何カ。又常數ニアラザル一價解析函數ニシテ數平面上ニ一ツモ零點ヲ有セザルモノハ少クモ一ツノ眞性特異點ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

20. $z=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$ ニ於テ各一位ノ極ヲ有シ，且ソノ留數ガスベテ 1 ナル如キ一ツノ函數ハ

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$$

ニヨリテ與ヘラルルコトヲ證明セヨ。

21. 無限遠點ニ於テノミ集積スル點ノ集合 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ アリ。ココニ

$$0<|a_1|\leqq|a_2|\leqq\cdots\cdots$$

ニシテ，一ツノ正ノ整數 n ニ對シテ無限級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^n}$$

ガ收斂ナリトス。然ルトキハ a_k ニ於テ展開式ノ主部ガ

$$\frac{1}{(z-a_k)^{\lambda}} \qquad (\lambda\ ハ正ノ整數)$$

ナル如キ極ヲ有シ，ソノ他ノ有限ノ點ニ於テハ正則ナル如キ一ノ函數 $f(z)$ ハ次ノ如クニシテ作ラルルコトヲ示セ。

(1)　$\lambda\geqq n$　ナルトキハ，

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a_k)^n}.$$

(2)　$\lambda<n$　ナルトキハ，先ヅ

$$\mathrm{F}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-a_k)^n}$$

ナルモノヲ作レバ，此函數ハ何レノ a ヲモ含マザル任意ノ有限閉面分 A ニ於テ一樣收斂ナリ。A ノ内部ニテ之ヲ積分シタル結果ヲ

$$\int_{z_0}^{z} \mathrm{F}_n(z)dz = -\frac{1}{n-1}\mathrm{F}_{n-1}(z) \quad (z_0 \text{ ハ A 内ノ任意ノ定點})$$

トスレバ，$\mathrm{F}_{n-1}(z)$ ハ $\lambda = n-1$ ナル場合ノ所求ノ函數ナリ。

更ニ之ヲ積分シテ

$$\int_{z_0}^{z} \mathrm{F}_{n-1}(z)dz = -\frac{1}{n-2}\mathrm{F}_{n-2}(z)$$

トスレバ，$\mathrm{F}_{n-2}(2)$ ハ $\lambda = n-2$ ナル場合ノ所求ノ函數ナリ。

同樣ノ手段ヲ繰リ返セバ，一般ニハ

$$\begin{aligned} f(z) = \mathrm{F}_\lambda(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ & \frac{1}{(z-a_k)^\lambda} - \frac{1}{(z_0-a_k)^\lambda} + \frac{\lambda}{1}\frac{z-z_0}{(z_0-a_k)^{\lambda+1}} \\ & - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}\frac{(z-z_0)^2}{(z_0-a_k)^{\lambda+2}} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{3!}\frac{(z-z_0)^3}{(z_0-a_k)^{\lambda+3}} \\ & - \cdots\cdots + (-1)^{n-\lambda}\frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(n-2)}{(n-\lambda-1)!}\frac{(z-z_0)^{n-\lambda-1}}{(z_0-a_k)^{n-1}} \Big\}. \end{aligned}$$

注意. 此場合ニ於テ第 56 節ノ $\mathrm{G}_k(z)$ ニ相當スルモノハ $\dfrac{1}{(z-a_k)^\lambda}$ ノ展開式（z_0 ヲ中心トセル）ノ最初ノ $(n-\lambda)$ 項ヲ取リタルモノニ他ナラズ。

22. 前問ニ於テ $\mathrm{F}_\lambda(z)$ トシテ次ノ函數ヲ用ヰ得ルコトヲ示セ。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ & \frac{1}{(z-a_k)^\lambda} - \frac{1}{(-a_k)^\lambda}\Big[1 + \frac{\lambda}{1}\frac{z}{a_k} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 \\ & + \cdots\cdots + \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots\cdots(n-2)}{(n-\lambda-1)!}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{n-\lambda-1}\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

23. 超越整函數ハソノスベテノ零點及ビ其位數ヲ指定スレバ $e^{\mathrm{H}(z)}$ ナル形ノ因數ヲ除クノ他ハ全ク決定セラルルコトヲ證明セヨ。但シココニ $\mathrm{H}(z)$ ハ一ツノ整函數ナリ。

24. 一ノ函數ガ或面分ニ於テ極以外ノ特異點ヲ有セザルトキハ之ヲ稱シテ該函數ハ其面分ニ於テ **有理型** ナリトイフ。

無限遠點以外ニ於テ有理型ナル函數ハ二ツノ整函數ノ商トシテ表サルルコトヲ證明セヨ。

25. 無限遠點ニ於テノミ集積スル點 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ ニ於テ夫夫 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots$ ナル値ヲトル如キ超越整函數ハ常ニ存在スルコトヲ證明セヨ。

26. 任意ノ整函數 $f(z)$ ニ對シテ

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^n = f(z)$$

ナル如キ第二ノ整函數 $g(z)$ ガ常ニ存在スルコトヲ證明セヨ。

27. $$\frac{e^z}{z^2-1} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+1} + \mathrm{F}(z)$$

ナル關係ヲ滿足セシムル常數 c_1, c_2, ノ値及ビ整函數 $\mathrm{F}(z)$ ノ $z=0$ ヲ中心トセル展開式ヲ求メヨ。

28. 函數 $f(z)$ ハ常數ニアラザルモノトシ，0 及ビ ∞ 以外ニハ特異點ヲ有セズシテ常ニ

$$f(z) = -zf(az), \qquad 0 < |a| < 1$$

ナル關係ヲ滿足セシムルモノトス。原點ヲ中心トシテ $f(z)$ ヲ Laurent ノ級數ニ展開セヨ。

29. 次ノ式ニヨリテ定義セラルル超越整函數 $f(z)$ アリ

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}.$$

若シココニ

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a \neq 0, \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = b$$

ナリトセバ，

$$f\left(z+\frac{1}{2}\right) = ae^{\frac{bz}{a}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n-\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{z}{n-\frac{1}{2}}}\right\}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

30. 擴張セラレタル Mittag-Leffler ノ定理ニ於テ $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{z-a_n}\right) = \dfrac{m_n}{z-a_n}$

トスルトキ，之ニ對スル一ツノ $G_n(z)$ ハ

$$G_n(z)=\frac{m_n}{z-c_N}\left\{1+\frac{a_n-c_N}{z-c_N}+\left(\frac{a_n-c_N}{z-c_N}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{a_n-c_N}{z-c_N}\right)^\nu\right\}$$

(ν ハ n ニヨリテ定マル或ル自然數）ニヨリテ與ヘラルルコトヲ示シ，依ツテ 367 頁ニ所謂 $F(z)$ ハ次ノ如クニ作ラルルコトヲ證明セヨ。

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{a_n-c_N}{z-c_N}\right)^{m_n}e^{g_n(z)}\right\},$$

但シ

$$g_n(z)=m_n\left\{\frac{a_n-c_N}{z-c_N}+\frac{1}{2}\left(\frac{a_n-c_N}{z-c_N}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{\nu}\left(\frac{a_n-c_N}{z-c_N}\right)^\nu\right\}.$$

31. 函數 $f(z)$ ガ 2π ナル週期ヲ有スルトキ，$z(=x+yi$ 平面上ニ於テ先ヅ二直線 $x=\pm\pi$ ニヨリテ夾マルル帶狀ノ面分ヲトリ，* 次ニ更ニ二直線 $y=h_1$, $y=h_2$ ニヨリテ之ヲ截リテ矩形ヲ作リ，ソノ周圍及ビ内部ニハ $f(z)$ ノ特異點ナキモノト假定ス。ココニ於テ $t=e^{iz}$ ト置キテ $f(z)$ ヲ t ノ函數ト考フレバ t 平面上ノ二ツノ同心圓ニテ圍マレタル面分ニテ正則ナルコトヲ示シ，依ツテ之ヲ Laurent ノ級數ニ展開シ，更ニモトノ變數 z ニ戻セバ次ノ展開式ヲ得ルコトヲ證明セヨ。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

但シココニ

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int f(z)dz,$$

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int f(z)\cos nz\,dz,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int f(z)\sin nz\,dz\end{aligned}\right\}\quad(n>0)$$

ニシテ，積分路ハ矩形ノ邊 $x=-\pi$ 上ノ一點ヨリ邊 $x=\pi$ 上ノ對應點ニ至ル任意ノ曲線ナリトス。

32. 一般ニ函數 $f(z)$ ガ ω ナル週期ヲ有スルトキハ，次ノ展開式アルコトヲ證明セヨ。

* カクノ如キ面分ヲ **週期帶** トイフ。函數 $f(z)$ ノ一ノ週期帶内ニ於ケル狀態ヲ知レバ，之ニヨツテ全平面ニ於ケル狀態ヲ知ルコトヲ得ベシ。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{\omega}z+b_n\sin\frac{2n\pi}{\omega}z\right)$$

但シココニ

$$a_0=\frac{1}{\omega}\int f(z)dz,$$

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\omega}\int f(z)\cos\frac{2n\pi}{\omega}z\,dz,\\ b_n&=\frac{2}{\omega}\int f(z)\sin\frac{2n\pi}{\omega}z\,dz\end{aligned}\right\}\quad(n>0)$$

ニシテ，積分路ハ一ノ週期帶ヲ夾ム二直線上ノ適當ナル二點ヲ結ブ曲線トス。

注意. 前問及ビ本問ノ展開式ヲ **Fourier ノ級數** トイフ。

33. 問題 31 ノ展開式ヲ

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nz+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin nz$$

ノ如クニ書キ直シ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ h_1 ト h_2 トガ相反スル符號ヲ有シテ十分 0 ニ近キコトナルヲ證明セヨ。

著　者　　竹内端三
發行者　東京都麴町區四番町八番地ノ一　野口健吉
印刷者　東京都牛込區市谷加賀町一丁目十二番地　小坂孟
日本出版會會員番號 112509
出版會承認 い 230138


著作者ノ印


發行元ノ印

增訂改版　函數論　上卷

定價 ㊝ 金四圓

發行元　東京都麴町區四番町八番地ノ一　電話九段(33){二〇一〇 二〇二五}　振替口座東京百七番　合名會社 裳華房
印刷所　東京都牛込區市谷加賀町一丁目　大日本印刷株式會社
製本所　東京都神田區錦町三丁目十九番地　牧製本所
配給所　東京都神田區淡路町二丁目九番地　日本出版配給會社

大正十五年四月三日　創刊印刷	大正十五年四月七日　創刊發行
大正十五年七月五日　第二版發行	昭和二年四月一日　修正第三版發行
昭和五年二月廿五日　修正第四版發行	
昭和七年二月十日　增訂改版第五版印刷	昭和七年二月十五日　增訂改版第五版發行
昭和十一年十一月五日　增訂改版第六版發行	昭和十三年九月十日　增訂改版第七版發行
昭和十五年五月廿五日　增訂改版第八版發行	昭和十六年三月十日　增訂改版第九版發行
昭和十六年九月十五日　增訂改版第十版發行	昭和十七年八月二十日　增訂改版第十一版發行
昭和十八年二月二十日　增訂改版第十二版發行	

昭和十九年一月二十日　增訂改版第十三版發行（2,000部發行）