科学通讯／交通大学科学学院．— V.1,no.1
[1935,4]～V.3,no.2(民国26年[1937]5月)=总
1～18．—上海:交通大学出版委员会[发行者],
[1935]～民国26年[1937].
;26cm.
月刊．—本刊又名:科学院科学通讯．—有部分
英文内容.

*　　　　*　　　　*

本刊共摄制1卷,16毫米,缩率1:20.原件藏北京图书馆.北京图书馆摄制.母片藏全国图书馆文献缩微复制中心(北京).原件有污迹.

本刊片卷摄制目录:

V.1,no.2～V.3,no.2　(1935,5～1937,5)

科學通訊

黎照寰

第二期

中華民國二十四年五月　　上海交通大學科學學院編輯

科學通訊

第二期　目　錄

談　言

無理數論究竟要不要（續）

顧　澄

(D) (1 1.4, 1.41, 1.414)與1.414何異

難者曰。1.414 固不足表 $\sqrt{2}$ 之全體。但敍列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

仍是 1.414 之變相，其處仍只能開一位得一項，無法知其全體。此種掩耳盜鈴以半斤代八兩之法有何好處，必勞Cantor先生費如許氣力作此規則敍列表無理數，實數論真所不解。

答，敍列之好處，在其一個極限（本文所謂敍列指有理數所成之規則敍列，且指其極限不為有理數者否則臨時說明之）。但用1.414 斷不出其極限，想不到其極限，更想不到其極限必有一個且只有一個，一用敍列即易想到其極限，並易證明其極限必有一個且只有一個。倘但以敍列 (1) 表 $\sqrt{2}$ 而不連帶說明 (1) 有一

---

* 此極限Russell頗反對，見其所著數理哲學中。本處不便作比較討論。嚴格論之，即照Cantor之說，亦必先定凡規則敍列為實數，再下其次序（即 <, =, >）及四則等之定義後方能證明 $\alpha=(a_1 a_2 \ldots)$ 為無理數及 a_n 為有理數時此 $(a_1 a_2 \ldots)$ 之極限為 α，此處所云不過為便利而已。

※ 定無理數之法甚多，已見本談開始時所言。以下但就敍列說明者，一則於篇幅，二則以其為初學所易知，且於應用為最便耳。

極限及只有一極限,則(1)與1.414確是半斤八兩毫無好處。既連帶說明敍列之極限,則好處立生,蓋既知敍列必有一極限及只有一極限,則從敍列(1)可知 $\sqrt{2}$ 必有一確定之値,在數軸上必有一確定之位置,不若以前但用1.414時因不能知其全體而渺茫難定矣。詳言之雖(1)與1.414同是寫不出 $\sqrt{2}$ 之全體,同有 。但不知(1)有極限之前1.414之 處終是不可究詰。既知(1)有極限則(1)之 處雖不知其全體而已有歸宿,同時1.414之 處亦因之有歸宿。故敍列之極限既明之後,儘可以1.414為(1)之簡號,此時二者眞可視為半斤八兩,二而實一。若於已明敍列之極限後,不思未明其極限之前,而用種種說法強謂 Contor 先生白費氣力,則不佞亦不願再答矣。

(E) 何不逕以敍列之極限為無理數

難者曰。敍列(1)之好處既在其極限,且其極限既卽是 $\sqrt{2}$ 何不逕云(1)之極限是 $\sqrt{2}$。何必云(1卽是 $\sqrt{2}$,故作疑陣故神其辭,令人難解。

答,不云(1)是 $\sqrt{2}$ 而云(1)之極限是 $\sqrt{2}$ 本無不可但如

$$1,\ 1\tfrac{1}{2}\ 1\tfrac{1}{3},\ 1\tfrac{1}{4},\ 1\frac{1}{n} \qquad (2)$$

之敍列其極限在有理數中覓得出卽是1,與其用(2)表1;不如逕云(2)之極限為1.無如

$$1,\ 1.4,\ 1.414, \qquad (1)$$

之極限在有理數中覓不得,無法以有理數表之。故(1)之極限為何物只能以(1)表之(有同極限之敍甚多,皆可以之表同極限,此處暫不談)。離去此(1),則(1)之極限無所附麗,無從明白。與其先寫出1,再言(1)之極限是 $\sqrt{2}$;不如逕言(1)卽是 $\sqrt{2}$ 較為直捷。倘表一切無理數之敍列皆與(2)相類,其極限皆在有理數中,儘可以其極限表

無理數無如凡表無理數之敍列其極限皆不在有理數中(否則卽無無理數矣)故只能以敍列之本身表敍列之極限因此縱欲以敍列之極限表無理數,亦仍只能以敍列之本身表無理數(不過先知敍列有極限,則,以敍列表無理數之作用較易明白); 此非故作疑陣,不得已耳。

(F) 何必用無窮個有理數表一個無理數

難者曰, 分數之記號用兩自然數及一畫如$\frac{3}{5}$,負數只須再加一負號如$-\frac{3}{5}$,至於-5之類只須一自然數及一負號,皆極簡單易明。今敍列 ($a_1, a_2, a_3,$) 中有無窮個有理數,以此表無理數何等麻煩,何等費解。且以一個無窮敍列表一無理數已經不便之極,再來一個「凡同極限的敍列所成之一組敍列爲一無理數」(此一組敍列中有無窮個敍列;一個無窮不夠,還來無窮個無窮), 玄之又玄,令人更難索解,這又何必?

答, 如$\sqrt{2}$及log之類,記號雖簡,但實際不過代表「2之平方根」及「5之對數」兩語。僅憑此兩記號不能顯出其值之大小。如欲以有理數爲原料作一可以顯出其值之記號,則非用無窮個有理數不可。蓋於有窮個有理數施有理運算(卽加,減,乘,除)之結果仍爲有理數,故不得不以無窮個有理數表無理數。此不但 Cantor 之敍列如此,卽 Dedekind 之分截$(A|B)$,表面上雖僅A,B兩字,而實則每字中含無窮個有理數;Knopp之節套$(X_n\ Y_n)$亦然以他種方法定無理數亦無不如此。

至以無窮個同極限敍列爲一無理數,正如以無窮個等值分數。

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},$$

視爲一分數,亦無足異;蓋就嚴格之定義論,

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \qquad \text{(I)}$$

雖是 $\sqrt{2}$ 但

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \qquad \text{(II)}$$

$$1.4+\tfrac{1}{2},\ 1.41+\tfrac{1}{3},\ 1.414+\tfrac{1}{4},\ 1.1442+\frac{1}{5}, \qquad \text{(II)}$$

等亦皆是 $\sqrt{2}$。不能云(I)是 $\sqrt{2}$ 而(II),III), 等不是 $\sqrt{2}$,故只能云一組相等(即同極限)敍列爲一無理數。但爲便利計,亦不妨云一敍列是一無理數,凡與之相等之一切敍列皆是此無理數,例如云(I)是 $\sqrt{2}$,凡與(I)相等之(II),(III), 皆是 $\sqrt{2}$,

至於一種記號麻煩不麻煩,費解不費解,全視用之久不久慣不慣。試一縣想古代之人,當其只知自然數而尚未知分數負數之時驟語以分數負數之作用及其記號爲 $\frac{a}{b}$, $-a$ (a,b 皆爲自然數) 恐其對此茫然,認爲麻煩與費解,或視現在初讀無理數論者爲尤甚。須知 $\frac{a}{b}$ 與 $(a_1, a_2, a_3 \ \ )$ 在表面上雖有繁簡之不同,而其爲數之記號則一。如問何必以 $(a_1, a_2, a_3 \ \ )$ 表無理數與問何必以 $\frac{a}{b}$ 表分數何異。明乎此,則以上云云更無足怪矣。

(G)　以敍列表無理數有益無損

難者曰。以(1, 1.4, 1.41,)顯 $\sqrt{2}$ 之值,固無異以 .5 顯 $\frac{1}{2}$ 之值。但

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6}, \qquad (\alpha)$$

等之大小次序,一見 2, 3, 5, 6, 即知,

$$\log 2,\ \log 3,\ \log 5,\ \log 6, \qquad (\beta)$$

等亦然,甚至

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5}, \qquad (\gamma)$$

亦只須將其化爲

$$\sqrt[12]{64},\ \sqrt[12]{81},\ \sqrt[12]{125} \qquad (\varrho)$$

亦一望而知其大小次序,何必用敍列顯其大小次序,自討苦吃。

答, 專就(α)或(β)或(γ)論誠然如此,試問 $\sqrt{2}$, $\log_e 1.113$ $\log_1 259$,

三數是否能一望其 2, 4.113, 259 而知其大小次序,(α)或(β)不過如同分母之分數故極易知其大小次序,(γ)已如異分母之分數須化後始易知其大小次序。但無理數之種類甚多,若混合在一起,欲分別其大小次序,仍非各作其敍列不可。如云尋常計算可利用開方對數表等,分別其大小次序,則作敍列亦可利用開方對數表等,並不吃虧。卽就寫法之便否而論,以前已經說過,無理數論眞能明白之後儘可以 1.414… 爲(1,1.4,1.41,…)之簡號,故在形式記算中 $\sqrt{a}$, $\log a$, 等雖寫時簡便,但一遇 a 爲數目例如變爲 $\sqrt{2}$, $\log_e 4.113$ 則欲比較其大小,做敍列仍免不了,故以敍列表無理數實有益無損。

(H) 究竟以敍列表無理數還是以敍列爲無理數

難者曰。忽言以敍列表無理數忽言以敍列爲無理數究竟是表是爲?

答, 既可表卽可爲,例如 1, 2, 3, 既可視作表自然數之記號,亦可名之爲自然數,不但如此,例如 (1, 1.4, 1.41, …)既可決定 $\sqrt{2}$ 之位置,卽可視爲 $\sqrt{2}$ 之定義,既爲 $\sqrt{2}$ 之定義卽可視之爲 $\sqrt{2}$,上言敍列表無理數者,不過因人腦中已有無理數如 $\sqrt{2}$ $\log 5$ 之類,用一表字使人易明敍列之作用而已,實則儘可謂敍列爲無理數。本談係談言體例不作嚴格之論調,此類之事如欲知其詳,須先明數之觀念。本刊下期專載中有 Knopp 無窮級數之理論應用第一編專講實數論(無理數論包括在內)於數之觀念略有所述,*雖其中以節套爲無理數而不以敍列爲無理數而數之觀念則一。本談以敍列爲無理數不過因敍列便於運用且爲解初學誤會起見便於說明而已。至於無理數之定法(卽下其定義之法), 則各家不一。Knopp 之實數論亦僅是一家之論,如欲作稍進之研究

*第三期稿多,預算限於篇幅排不下,第四期必能排出。

可先讀Hobson實數函數論第一冊第一編, Pierpont實數函數論第一冊前三編, Knopp無窮級數之理數及應用前二編,再讀Russell數理哲學前七編。於是再詳細比較討論之,本談至此已嫌太長,暫告結束,俟後再談。

前期本篇正誤

	誤	正
3頁 6行	數函論	函數論
7行	分錢	分綫
9行	interals	intervals
4頁 15行	高拆	高等解析
6行	無理論	無理數論
8行	進行一切	進論一切
16行	無理數已	無理數論已
6頁 12行	$ab>\text{I}\frac{3}{2}\pi$	$ab>1+\frac{3}{2}\pi$
23行	便計耳	便利計耳

教　材

二正項級數之比較之幾個法則（續）

范　會　國

4. 設一級數 Σu_n,其中普通項 u_n 恆為正數,並設當 n 無窮增大時,比率 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 由小於 1 而趨近於 1. 試再取別一正項級數 Σv_n 以與級數 Σu_n 比較,並設比率 $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ 亦趨近於 1. 在許多情形中,求級數 Σu_n 之收發性之最簡捷之道,乃先作由下式所決定之差數 b_n

$$b_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

其次研求當 n 相當增大時,b_n 之號為如何,再次研求級數 Σb_n 之收發性。

a) 若由某項起,差數 b_n 為正,及級數 Σv_n 為收斂,則級數 Σu_n 亦為收斂。

證因由假設 $b_n>0$, 故 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$ 因之,依數理學中之一尋常法則,可知級數 Σu_n 亦為收斂。

b) 若由某項起,差數 b_n 為負,及級數 Σv_n 為發散,則級數 Σu_n 亦為發散。

證因由假設 $b_n<0$, 故 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n}$ 因之,依數理學中之一尋常法則,可知級數 Σu_n 亦為發散。

c) 若級數 Σb_n 為絕對收斂,則二級數 Σu_n 及 Σv_n 之收發性相

同.

證命

$$w_n = \frac{u_n}{v_n},$$

則有

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{v_n}{v_{n+1}} : \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{1+b_n\frac{v_{n+1}}{v_n}}$$

在第3節中所用之β_n此處為

$$\beta_n = b_n\frac{v_{n+1}}{v_n};$$

因由假設,比率$\frac{v_{n+1}}{v_n}$趨近於1, β_n及b_n為兩個同價之量,故級數$\Sigma\beta_n$與級數Σb_n同為絕對收斂.由是故依第3節之法則II,可知當n無窮增大時,w_n趨近於異於零之一有限極限,而二級數Σu_n及Σv_n之收發性乃為相同。

7. 由於應用以上結果,可以證明下之定理

設Σu_n為一正項級數,若相連二項之比率$\frac{u_n}{u_{n+1}}$在n為無窮大之鄰近可以展為一有限展開式,其形狀為$1+\frac{k}{n}+\frac{\lambda}{n^p}$,(其中k表一常數$>0$, $p>1$, λ於n無窮增大時為一有限值),則此級數之收發性與級數$\Sigma\frac{1}{n^k}$者同。

證命

$$v_n = \frac{1}{n^k}$$

及取級數$\Sigma v_n = \Sigma\frac{1}{k^k}$以與級數$\Sigma u_n$比較,再作差數

$$b_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

由於假設,在n爲無窮大之鄰近,比率$\frac{u_n}{u_{n+1}}$之有限展開式之起頭二項爲$1+\frac{k}{n}$,他方面,比率$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$之有限展開式之起頭二項亦爲$1+\frac{k}{n}$,是故於n無窮大時,$b_n$爲$\frac{1}{n}$之一無窮小,其級(order)大於$\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$。因此,故級數Σb_n爲收斂,及其各項俱爲同號,因之,依第4節之c),可知兩級數Σu_n及Σv_n之收發性相同。

若要應用上之定理,顯然只須

α) 證明比率$\frac{u_n}{u_{n+1}}$於n無窮增大時是否趨近於1,

β) 求出$\frac{u_n}{u_{n+1}}$之有限展開式至於第二項,

例設有一正項級數,其相連二項之比$\frac{u_n}{u_{n+1}}$爲正整變數n之一有理分數,試求此級數之收斂條件。

若比率$\frac{u_n}{u_{n+1}}$趨近於異於1之一極限,此處不加以討論,茲設

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots+l}{n^p+a'n^{p-1}+\cdots+l'}$$

命

$$n=\frac{1}{x},$$

則有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1+ax+\cdots+lx^p}{1+a'x+\cdots+l'x^p},$$

當x趨近於零時,此函數$\frac{u_n}{u_{n+1}}$趨近於1,及在$x=0$之鄰近,可展爲任意多項之有限展開式茲可求出此展開式,不過只須至第二項則足矣,其結果爲

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+(a-a')x+\varepsilon x$$

其中ε趨近於零,當x趨近於零。

若$a-a'<0$,則當n相當大時,$\frac{u_n}{u_{n+1}}$小於1,即$\frac{u_{n+1}}{u_n}$大於1,而級數Σu_n爲發散.

若$a-a'\geqq 0$,則在n爲無窮大之鄰近,$\frac{u_n}{u_{n+1}}$之有限展開式之起頭二項爲$1+\frac{a-a'}{n}$,而級數Σu_n之收發性與級數$\Sigma\frac{1}{n^{a-a'}}$者同,是故若$a-a'>1$,則級數Σu_n爲收斂,若$a-a'\leqq 1$,則級數Σu_n爲發散。

由上所述,可得一定理如次

設有一級數Σu_n,其相連二項之比爲

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^p+an^{p-1}+\quad+l}{n^p+a'n^{p-1}+\quad+l'}$$

若要此級數爲收斂,其必要及充分之條件爲$a>a'+1$。

此定理爲gauss定理,其證法頗多,此處之證法,似頗精確,而又不甚繁難也。

6. 茲再應用以上結果以證明Raabe及Duhamel定理,此定理是

設有一正項級數Σu_n,其相連二項之比$\frac{u_{n+1}}{u_n}$由小於1而趨近於1,即

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n},$$

其中α_n恆爲正數。若由某項起,$n\alpha_n$恆大於一固定數$k>1$($n\alpha_n>k>1$),則此級數Σu_n爲收斂,若由某項起,$n\alpha_n$恆小於1,($n\alpha_n<1$),則此級數Σu_n爲發散。

α) 設於n相當大時,無等式$n\alpha_n>k>1$得到滿足。

試取一級數Σv_n,其頭項爲v_1,其相連二項之比爲

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

並以此級數與級數 Σu_n 比較。

因

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=1+\frac{k}{n}$$

故依第5節所述,此級數 Σv_n 之收發性與級數 $\Sigma\frac{1}{n^k}$ 之收發性相同,因之,此級數爲收斂。但是,由於假定,差數

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{n\alpha_n-k}{n}$$

爲正,故有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

而級數 Σu_n 亦爲收斂。

β) 設,於 n 相當大時,無等式 $na_n<1$ 得到滿足。

命

$$v_n=\frac{1}{n},$$

及以發散級數 $\Sigma v_n=\Sigma\frac{1}{n}$ 與級數 Σu_n 比較。此處之差數 b_n 爲

$$b_n=\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{v_n}{v_{n+r}}=\frac{n\alpha_n-1}{n}$$

依假定,此差數爲負,故有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

因之,級數 Σu_n 亦爲發散。

若 $n\alpha_n$ 趨近於1,而恒小於1,則級數 Σn_n 仍爲發散,是故爲要補充上之定理只須假設 $n\alpha_n$ 趨近於1,而不恒小於1。在此情形中,吾人可取調和級數 $\Sigma\frac{1}{n}$ 爲級數 Σv_n,而應用下之法則:

若級數 $\Sigma b_n=\Sigma\left(\alpha_n-\frac{1}{n}\right)$ 爲絕對收斂,則級數 Σu_n 爲發散。(此法

，則不過第4節之法則c)之一特別情形耳)。

論方程式 $x^{2^n}-1=0$ 之原根(續)

武崇林

§3, 方程式(1)之N個根,因其絕對值均等于1,故表其根之各點,俱位於單位圓上,又因相隣二根 ϱ_n^m, ϱ_n^{m+1} 之距離爲

$$|\varrho_n^m-\varrho_n^{m+1}|=|\varrho_n^m|\cdot|1-\varrho_n|=|1-\varrho_n|$$

與m無關,故任何相隣二根之距離相等。因 $\varrho_n^0=1$, $\varrho_n=x_n+iy_n$, $y_n>0$ 且 x_n 爲最大,亦且决無 $\varrho_n^{m+1}=\varrho_n^{m-1}$ 者,故亦易見依(3)之次序,其各根之角漸次增大。不啻唯是,順依(3)之次序,則圓周恰經過一次,而並未重複其任何一段。蓋因如謂不然,或則必有一 ϱ_n^K, $1\leqq K\leqq N-1$, 與 $\varrho_n^0=1$ 重合,此前此見其爲不可能或則必有一 ϱ_n^K 位於 $\varrho_n^0=1$,及 ϱ_n 之間,如是則(1)將有一根 ϱ_n^K 其實數部大於 ϱ_n 之實數部此前亦見其爲不可能,既

$$|\varrho_n^0-\varrho_n^{N-1}|=|1-\varrho_n|,$$

故知經過圓周一次之語確乎不謬。凡此所言,吾人並未採用根 ϱ_n 之形如(2)者之性質而所得結果,當提醒吾人,此所得之 ϱ_n 實即(2)之 ϱ_n 也。

就幾何言之,$|1-\varrho_n|$ 乃單位圓內正 2^n 多邊形一邊之長度,茲已可見。在n漸次增大無限時,$|1-\varrho_n|$ 自應漸次減小至零,亦當如吾人之所期待者。如欲純以解析方法證實此事,吾人且研究以下之關係。由(8),

$$(9)\qquad |1-\varrho_n|=\sqrt{(1-x_n)^2+y_n^2}=\sqrt{2(1-x_n)}=2y_{n+1},\qquad (\text{因 } x_n^2+y_n^2=1)$$

是以

$$2^n|1-\varrho_n|=2^{n+1}y_{n+1}。$$

茲證明極限

$$\lim_{n\to\infty} 2^n|1-\varrho_n|=\lim_{n\to\infty} 2^n y_n$$

確存在,因

(10)　$$2x_{n+1}y_{n+1}=2\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x_n)\tfrac{1}{2}(1-x_n)}=\sqrt{1-x_n^2}=y_n,$$

故以 $x_{n+1}<1$ 故,而

$$2y_{n+1}>y_n.$$

是以

(11)　$$2^{n+1}y_{n+1}>2^n y_n>\cdots>2^3y_3=4\sqrt{2},\qquad (n>3)。$$

在另一方面,

$$y_{n+1}<\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}=\frac{2x_{n+1}y_{n+1}}{2x^2_{n+1}}=\frac{y_n}{1+x_n}$$

$$=\frac{x_n}{1+x_n}\cdot\frac{y_n}{x_n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{y_n}{x_n},\qquad (由(8)及(10))$$

因而

(12)　$$2^{n+1}y_{n+1}<2^{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}<2^n\frac{y_n}{x_n}<\cdots<2^3\frac{y_3}{x_3}=8,\qquad (由(7_1))。$$

所以由(11),知數序

(13)　$$2^n y_n\qquad (n=3,4,5\cdots\cdots)$$

為獨增由(12),知數序之任何項均小於8,故由極限論,知

$$\lim_{n\to\infty} 2^n|1-\varrho_n|=\lim_{n\to\infty} 2^n y_n=c$$

存在,其c為大於 $4\sqrt{2}$ 而小於8之一數

因由(12)

$$|1-\varrho_n|=2y_{n+1}<\frac{8}{2^n},$$

自然見

$$\lim_{n\to\infty}|1-\varrho^n|=0,$$

如吾人之所欲示者也。

再者由(9)

$$\lim_{n\to\infty} 2^{2n+1}(1-x_n)=c^2,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(1-x_n)=0。$$

今

$$\varrho_n-1=(x_n-1)+y_n i,$$

因得

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(\varrho_n-1)=\lim_{n\to\infty} 2^n(x_n-1)+i\lim_{n\to\infty} 2^n y_n,$$

再用適所得之結果,即有

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(\varrho_n-1)=ci。$$

若一複元函數f(z)在|z|=r之圓內及圓上為綿續則如於圓周上取 $N=2^n$ 個等距離點, f(z) 在此N點上數值之算術平均,當 $n\to\infty$ 時,應用上之結果,可證其有一極限值,稱作f(z)在|z|=r圓上之中值。在以冪級數為基礎而作複元函數理論之研究時,此事有時須得其應用也。 (完)

正誤. 上期第16頁第十一行, $x^n-1=0$ 應為 $x^N-1=0$ 之誤;第18頁第六行 $\sqrt{x_k+iy_{k+1}}$,應為 $\sqrt{x_k+iy_k}$ 之誤;第19頁第十四行"若 2^λ $0\leq n\leq n-1$",應為"若 2^λ, $0\leq\lambda\leq n-1$"之誤。

光之頻率與波長

許國保

光波之主要區別,厥在光之頻率(Frequency)及光之波長(wave length)。例如紅光線與綠光線不同因其頻率及波長不同之故也。普通教本中述及光線之不同,往往以波長區別之。例如談及人目可見之光線則曰其波長之範圍約在0.4μ及0.8μ之間(μ為千分之一密厘米突)而對於波長之定義或不加以詳明之註解,此實易於引起誤會者也。

光之波長 λ 與頻率 ν 有相互之關係。設光在某種介質(medium)之中其前進速度為 v 則

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

而光在不同之介質中其速度恆不同。光在眞空之速度為 $c = 3 \times 10^{10}$ cm/sec.,設某介質之絕對折射率(即對於眞空之折射率 Absolute index of refraction)為 n 則光在此介質中之速度為

$$v = \frac{c}{n},$$

是以光在此介質中之波長為

$$\lambda = \frac{c}{n\nu}$$

由此公式觀之則同一頻率之光在各種介質之中(n不同)其波長不同,反之同一波長之光在各種介質之中其頻率不同。如是則光之根本性質,究以頻率定之乎,抑以波長定之乎?此問題在識者固不值一解而在初學者或有疑問焉,爰作此篇以說明之。

欲解答此問題,當推究光之來源。若依電子學說,則光之源在電子之振動。設電子之振動頻率為 v, 則其所發出之光之頻率亦為 v, 以後此光無論射入何種介質中其頻率必仍為 v。若依量子學說,則光之源在原子或分子所發出之光子 (photon) 設每光子之能 (energy) 為 hv (h 則 Planck 之量子,等於 6.45×10^{-27} erg.sec) 則此光之頻率為 v,以後此光無論射入何種介質中,其頻率必仍為 v. 由是言之,無論根據何種學說,在光之源僅有頻率,而無波長可言。光之有波長乃由於光射入介質後有一定速率乃有波長耳。光之頻率僅係於光之源而與光所在之介質無關,但光之波長則既係於光之源而又與光所在之介質有關。夫介質雖與光有密切之關係,究非光之本身。是則光之根本區別在於頻率而不在波長不辯而自明矣。

鈉 (Sodium) 之原子發出黃色之光,其頻率為每秒 5.1×10^{14} 次 ($v=5.1\times10^{14}$), 其在真空中之波長為

$$\lambda=\frac{c}{v}=\frac{3\times10^{10}}{5.1\times10^{14}}=0.589\ \mu,$$

水之絕對折射率 n 約為 4/3, 玻璃之絕對折射率 n 約為 1.5, 因之此光線在水中之波長將為

$$\lambda=\frac{c}{nv}=0.589\times\frac{3}{4}=0.442\ \mu,$$

而其在玻璃中之波長將為

$$\lambda=\frac{c}{nv}=0.589-1.5=0.393\ \mu.$$

若光之色果以波長決定之,則此鈉光線在真空中為黃色在

水中將爲藍色,在玻璃中且爲紫色矣。實際則不然,此光線固無論在何種介質中均爲黃色,蓋其頻率固在任何介質中均相同也。是光之色係於光之頻率而不係於波長。

關於確定光之色是否與介質有關係之試驗,尙未見之記載。其原因或以此等實驗不易爲之。蓋此實驗不能以儀器爲之而必得以人目爲之,因儀器雖能量波長或頻率而不能辨顏色也。欲辨光之顏色是否與介質有關,要在置人目於介質之中。使人在玻璃中觀光線固屬不可能之事,在水中觀光線或屬可能。但猶有一層人目中受光線之神經繫於網膜(retina),網膜在牟子中,牟子中有一種液體此液體亦爲一種一定之介質。網膜常在此介質之中,雖吾人能移目於各種介質中而仍不能置網膜於他種介質也。是則此種實驗或爲終不可能者。雖然吾人不妨以耳旁證之。耳之能辨音調之高低,全在鼓膜之振動。外來之聲音入耳則耳之鼓膜振動,其振動之頻率與聲波振動之頻率同。鼓膜之振動傳之神經乃辨音調。是以聲學上音調之高低常以頻率表明之,如 C 調, D 調, E 調等。音叉之調常註以頻率之數如 C 調爲 256, 未聞以波長表明之也。蓋亦以音調之區別全在頻率而不在波長。聲波之長在氣體,流體或固體之介質中固大不相同也。如是則網膜之所以能感光之色當亦以感受光波振動之頻率而然。總之無論光之色是否全係於頻率(此問題尙無關於物理之大旨,蓋色者尙有人之感覺在焉物理之旨當超乎人也)而光之根本區別在頻率,不在波長,固無疑義矣。然而物理學上常以波長規定人目所能見光之範圍何也,蓋其所謂波長乃指光在眞空中之波長也眞空中之波長

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

$c=3\times10^{10}$ 爲固定數，是以眞空中之波長全視頻率而定，固可以之代替頻率也。聲學上所以不能用波長而必得用頻率，因眞空中無聲故也。但在光學上用波長而不加以在眞空中之註解，亦易引起誤會，固不如用頻率之爲直截也。

Clebsch 氏級數之改正

高揚芝

設 $f=a_x^m b_y^n$ 爲 (x_1x_2)，(y_1y_2) 兩組變數之齊次式，用符號方法 (Symbolic method) 所表示者，式中

$m+n$ 表方次

a_x 表 $a_1x_1+a_2x_2$

b_y 表 $b_1y_1+b_2y_2$

今爲便於立論計，假定 $n\leqq m$，按 Clebsch 氏之理論，f 等於以下級數

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}}\frac{(x\ y)^k}{(n-k)!}D_{xy}^{n-k}\left\{(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}\right\}\cdots\cdots \quad (1)$$

式中 D_{xy} 表 $y_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+y_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$

(xy) 表 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}$ 表 (x_1x_2) 之齊次式用符號法所表示者。

$D_{xy}^{n-k}\left\{(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k}\right\}$ 表上式之 $(n-k)$ 級極式。

(1) 式卽爲 Clebsch 氏級數(見 Turnbull 之 Theory of Determinant, Matrices, and Invariants.)

今設 $m=1$, $n=1$, 則 $f=a_x b_y$, 如用公式(1)求其等式則

$$f=D_{xy}a_x b_x+\frac{(xy)(ab)}{2} \cdots\cdots (2)$$

再設 $m=3$ $n=2$ 則 $f=a_x^3\ b_x^2$, 如用公式(1)求其等式則

$$f=\frac{1}{2}D_{xy}^2\ a_x^3\ b_x^2+\frac{6}{5}(xy)D_{xy}(ab)\ a_x^2\ b_x+\frac{1}{2}(xy)^2(ab)^2 a_x \cdots\cdots (3)$$

不用公式,將以上兩例實際演算如下:

$$D_{xy}a_x b_x=a_x b_y+b_x a_y \cdots\cdots (4)$$

$$a_x b_y-a_x b_y=0 \cdots\cdots (5)$$

$$a_x b_y-a_y b_x=(ab)(xy) \cdots\cdots (6)$$

(5)+(6) $2a_x b_y-(a_x b_y+a_y b_x)=(ab)(xy) \cdots\cdots (7)$

由(4)及(7)得

$$a_x b_y=\frac{1}{2}D_{xy}a_x b_x+\frac{1}{2}(ab)(xy) \cdots\cdots (8)$$

(8)與(2)不適合。

又 $D_{xy}^2\ a_x^3\ b_x^2=6\ a_x\ b_x^2\ a_y^2+12\ a_x^2 b_x a_y b_y+2\ a_x^3\ b_y^2 \cdots\cdots (9)$

$$2\ a_x^3\ b_y^2-2a_x^3\ b_y^2=0 \cdots\cdots (10)$$

$$12(a_x^3\ b_y^2-a_x^2 b_x a_y b_y)=12\ a_x^2\ b_y(xy)(ab) \cdots\cdots (11)$$

$$6(a_x^3\ b_y^2-a_x\ b_x^2\ a_y^2)=6\ a_x^2 b_y(ab)(xy)+6a_x b_x a_y(ab)(xy) \quad (12)$$

(10)+(11)+(12) $20a_x^3 b_y^2-D_{xy}^2 a_x^3 b_x^2=18a_x^2\ b_y(ab)(xy)+6a_x b_x a_y(ab)(xy) \cdots (13)$

依同法又可算得

$$a_x^2 b_y=\frac{1}{3}D_{xy}a_x^2 b_x+\frac{2}{3}a_x(ab)(xy) \cdots\cdots (14)$$

$$a_x b_x a_y = \frac{1}{3} D_{xy} a_x^2 b_x - \frac{1}{3} a_x (ab)(xy) \quad \cdots\cdots \quad (15)$$

將(14),(15)之等值代入(13)中得

$$a_x^3 b_y^2 = \frac{1}{20} D_{xy}^2 a_x^3 b_x^2 + \frac{2}{5}(xy) D_{xy} a_x^2 b_x + \frac{1}{2}(xy)^2 (ab)^2 a_x \quad (16)$$

(16)與(3)亦不適合。由此兩例,可驗明 Turnbull 書所載 Clebsch 氏級數確為錯誤。今特將 $a_x^m b_y^n$ 之等式重新推演之,俾得正確之公式。

因 $$D_{xy} a_x^m b_x^n = a_x^m D_{xy} b_x^n + b_x^n D_{xy} a_x^m$$

$$D_{xy}^2 a_x^m b_x^n = a_x^m D_{xy}^2 b_x^n + 2 D_{xy} a_x^m D_{xy} b_x^n + b_x^n D_{xy}^2 a_x^m$$

$$D_{xy}^3 a_x^m b_x^n = a_x^m D_{xy}^3 b_x^n + 3 D_{xy} a_x^m D_{xy}^2 b_x^n + 3 D_{xy}^2 a_x^m D_{xy} b_x^n + b_x^n D_{xy}^3 a_x^m$$

用數學歸納法甚易證明下式:

$$D_{xy}^k a_x^m b_x^n = a_x^m D_{xy}^k b_x^n + \binom{k}{1} D_{xy} a_x^m D_{xy}^{n-1} b_x^n + \binom{k}{2} D_{xy}^2 a_x^m D_{xy}^{n-2} b_x^n$$

$$+ \cdots\cdots + \binom{k}{k} D_{xy}^k a_x^m D_{xy}^{n-k} b_x^n .$$

故 $$D_{xy}^n a_x^m b_x^n = a_x^m D_{xy}^n b_x^n + \binom{n}{1} D_{xy} a_x^m D_{xy}^{n-1} b_x^n + \binom{n}{2} D_{xy}^2 a_x^m D_{xy}^{n-2} b_x^n$$

$$+ \cdots\cdots + \binom{n}{n} b_x^n D_{xy}^n a_x^m \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

今 $$D_{xy}^k b_x^n = n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1) b_x^{n-k} b_y^k \qquad k = 1, 2, \cdots n$$

$$D_{xy}^j a_x^m = m(m-1)\cdots(m-j+1) a_x^{m-j} a_y^j \qquad j = 1, 2, \cdots n.$$

故(17)可寫為

$$D_{xy}^n a_x^m b_x^n = n!\Big[\binom{m}{0}\binom{n}{0} a_x^m b_y^n + \binom{n}{1}\binom{m}{1} a_x^{m-1} b_y^{n-1} a_y b_x + \binom{n}{2}\binom{m}{2} a_x^{m-2} b_y^{n-2} a_y^2 b_x^2$$

$$+\cdots\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{k}a_x^{m-k}b_y^{n-k}a_y^k b_x^k+\cdots\cdots$$

$$+\binom{n}{n}\binom{m}{n}a_x^{m-n}b_x^n a_y^n\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

但 $a_x^{m-1}b_y^{n-1}b_x a_y=a_x^m b_y^n-a_x^{m-1}b_y^{n-1}(ab)(xy)$

$$a_x^{m-2}b_y^{n-2}b_x^2a_y^2=a_x^m b_y^n-2a_x^{m-1}b_y^{n-1}(ab)(xy)+a_x^{m-2}b_y^{n-2}(ab)^2(xy)^2$$

$$a_x^{m-3}b_y^{n-3}b_x^3a_y^3=a_x^m b_y^n-3a_x^{m-1}b_y^{n-1}(ab)(xy)+3a_x^{m-2}b^{n-2}(ab)^2(xy)^2$$

$$-a_x^{m-3}b_y^{n-3}(ab)^3(xy)^3$$

用數學歸納法甚易證明下式:

$$a_x^{m-k}b_y^{n-k}b_x^k a_y^k=\binom{k}{0}a_x^m b_y^n+(-1)\binom{k}{1}a_x^{m-1}b_y^{n-1}(ab)(xy)+(-1)^2$$

$$\binom{k}{2}a_x^{m-2}b_y^{n-2}(ab)^2(xy)^2$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^r\binom{k}{r}a_x^{m-r}b_y^{n-r}(ab)^r(xy)^r+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^k\binom{k}{k}a_x^{m-k}b_y^{n-k}(ab)^k(xy)^k\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

將(18)中之各項,按(15)式代入則得

$$\frac{D_{xy}^n a_x^m b_x^n}{n!}=\Big[\binom{m}{0}\binom{n}{0}\binom{0}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}\binom{1}{0}+\binom{m}{2}\binom{n}{3}\binom{2}{0}$$

$$+\cdots\cdots+\binom{m}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{0}\Big]a_x^m b_y^n$$

$$+(-1)\Big[\binom{m}{1}\binom{n}{1}\binom{1}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}\binom{2}{1}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}\binom{3}{1}$$

$$+\cdots+\binom{m}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{1}\Big]a_x^{m-1}b_x^{n-1}(ab)(xy)$$

$$+(-1)^2\Big[\binom{m}{2}\binom{n}{2}\binom{2}{2}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}\binom{3}{2}+\binom{m}{4}\binom{n}{4}\binom{4}{2}$$

$$+ \cdots\cdots + \binom{m}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{2}\Big]a_x^{m-2}b_y^{n-2}(ab)^2(xy)^2$$

$$+ \cdots\cdots + (-1)^k\Big[\binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{k}{k} + \binom{m}{k+1}\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k}$$

$$+ \cdots\cdots + \binom{m}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{k}\Big]a_x^{m-k}b_y^{n-k}(ab)^k(xy)^k$$

$$+ \cdots\cdots + (-1)n\Big[\binom{m}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{n}\Big]a_x^{m-n}(ab)^n(xy)^n \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

（未完）

叢錄

陶磁器（續）

湯明奇

成分

為使讀者獲得一般陶瓷器成分之觀念起見,今列表於後:

	英國陶器	美國陶器	歐洲硬火瓷	軟瓷	食具用瓷	骨瓷
高陵土	43	38.2	50	19	38.5	30
陶土	18	13.1		15.5	6.0	
長石		13.4	25	30.0	16.0	
角石	15					26
燧石(石英)	24	35.3	25	35.5	38.0	
碳酸鈣					1.5	
骨灰						44.0

從上數字可知陶瓷器原料組成之範圍甚廣,蓋依所需要之產品及燒煉程序而定。

陶瓷之配製

按製造步驟而言,通常製陶者所取得之高陵土,均已在礦田經過洗淨處理;而陶土則仍為天然狀態;燧石或石英必預為磨碎;各種原料按一定比例權其輕重,攪合於水中使攙雜成懸濁體。此可以備有輪翼之攪拌槽為之,或用一轉動球磨,其中有無數燧石

球發生磨研作用。然後以金屬篩或綢布細篩過濾,以分離較粗大之雜質。復使液體流過串聯電磁石左近而吸去其中鐵屑。以大容器貯存之,自此可以唧筒汲起至濾壓機內,其作用在排擠懸濁體內之水分使黏土成一圓餅狀。泥餅或黏土片更須穿過一類似臘腸碾磨機之機器,受轉刀之割切壓榨,加以捏搓。然後再強令自細管中流出而成連續軟泥圓柱體。此之謂「捏土工」。黏土圓柱截成適當長短以備後用。

歐洲業陶者並不依上述方法配製原料。惟以可轉動之平板,其上排有連列圓轅,擠搓陶土,如此可啓發可塑性至最大程度。混合物若僅有少量或全無陶土者須安放於潮濕窖中數週,如有大量陶土,則可不必有此種處理。

作模與造形

製造坯模之方法有三:即篩陶法,壓榨法及鑄形法是也。篩陶一詞係指造形車床之機械動作,其上裝載有適當之石膏模型。車床下部為轉動模,上部設置外形鋼模,固定於其上下之橫杆上,俗名為拖曳棒。在造形之先,取定量黏土塊,置於潮潤之燒石膏上,以平面大槌擊打而成泥餅。泥餅拋入轉動模內,以水濕其外面。拖曳棒自高落下,泥餅上部之外形乃成。例如製碟盤時,轉動模塑成裏面,而外形鋼模修整其凸面杯碗之類則恰反於是。

壓榨法為以棒擊適當大小之泥片,然後擲入燒石膏模型中,製作物之內面因擠壓形成。外形用小工具手工修成。大盤,橢圓淺盆皆以此法造成。

鑄形法較簡便但需時較多,用於不能以篩陶法製作之形體。其步驟即先加矽酸或炭酸蘇打於素地中,因此製成沉重但保有流動性之懸濁體。此方法包有一難能可貴之化學作用。蓋用上述

化學劑產生之懸濁體,其水分須僅稍多於可塑性黏土之水,而其流動性則恰足以傾注也。其中原理大概因鹼鹽可使黏土分散爲小粒,所需要之狀態爲一定點不可稍過.化學劑之多寡視所用黏土性質而定,約在 0,15 至 0,4% 之間。當鑄形時將懸濁物注入燒石膏模內,有一部份水爲原模吸收,黏土殼片附着於原模內面。多餘水須卽時傾出。當黏土收縮時,其本體自與原模鬆離。用此等方法造成之坯模須加以烘乾,並修整完善。

焙燒

已曬乾坯模放入火泥箱又名「焙箱」內。焙箱運載至窰內堆成高柱體。第一次之焙燒通稱爲初燒。(bisque burn) 如燒陶器,窰火之溫度至1270°C已可;如爲瓷器,溫度須達 1330°C。製陶者常將此時溫度昇高超過鎔釉之溫度,或者適反於是,總之坯模及鎔釉之溫度多常在 1400° C. 以上。

當焙煉時,化學作用與物理變化連續發生。黏土中之水分最先完全驅出。窰火溫度漸高後,長石漸鎔而顯示其溶化作用。黏土分解爲一種新的矽酸化合物,名硅礬土 (mullite),其成份爲(3Al,O3 2SiO$_2$。最初此化合物爲無定形,後漸結晶爲針狀。耐火瓷含此等晶狀物甚多。石英之溶解程度與溫度俱進。同時坯模漸形收縮,表面細孔亦趨減少,因之終成爲密實而無吸收性之物體。瓷器本體的結構中,含有未分解黏土,及已分解之無定形與結晶體硅礬土(Mullite),此外有自鎔解長石與溶化石英所生之玻璃,以及較粗未溶之石英粒。透光程度與玻璃質之多寡成正比例。 (未完)

製革叢談(續)

陳同素

(4) **革服**　以2.5磅石蜡加於25加侖Naphtha (不用肥皂)在乾洗機中洗濯10分鐘,滾轉使冷約20分鐘,懸於烘室內。

又,以石蜡Naphtha液刷衣服全部,尤宜注意於難去之汚點,用Alcoholic Benzine肥皂洗時亦然。在清純Naphtha中洗濯5分鐘,旋轉3分鐘;浸於石蜡Naphtha液內5分鐘,滾轉使冷約20分鐘,懸於烘室內。

(5) **白手套**　置1¼吋直徑之楡木球適量於網袋(20″×30″)內,加許多手套使滿但須鬆弛而縛住之。乃將袋置於乾洗機(圓筒直徑不得過30吋)。筒中盛Naphtha液(其中溶1磅Benzine肥皂)。洗5分鐘,濾清以除去表面汚穢,再以1夸脫肥皂與50加侖Naphtha之液體加入筒中。洗1刻鐘,濾清,於石蜡Naphtah液中洗5分鐘,旋轉3分鐘,然後將每只手套吹空後於烘室中蒸乾餘剩之Naphtha (溫度不得超過110°F)

(6) **有色手套**　裝楡木球於網袋中然後盛滿手套而縛住之。置乾洗機中。筒內盛石蜡Naphtha液(溶入1磅Benzine肥皂)洗1刻鐘,濾清。於石蜡Naphtha液內洗5分鐘,旋轉3分鐘,吹空手套,烘乾餘剩之Naphtha於一不銹之筒內。

此法優點在於不損品質,故可用於精美織物,且Naphtha一物可以除蠹,石蜡一物用以恢復油脂,蓋乾洗時油膩被除甚多;復能回復毛皮或革之美觀,有時石蜡成薄膜附着毛面能使毛頭光彩益佳,而用量並不多,故無臭無色,毫無妨礙也。

鉻鞣絨革之製法

此種絨革以小牛皮或羊皮製之爲最宜,鉻鞣法與製箱皮相同。此後掛起24時,於是推開漸乾之。以1.5～2%之硼砂液刷上以中和之。在60°C,以200%之水在水鼓中轉動約15～20分鐘以熱之。然後上油。(以10瓩馬賽利肥皂溶於600克之硼砂及16竔水中,加2瓩牛仔脚油,待冷至35°C加2瓩蛋黃,攪拌至冷)乾後,調入木屑而以肉面在細輪上摩擦,此後乃染色焉。

鹽皮法

牛於未殺之前先行洗沐,及殺死之後,剝皮宜保持其清潔,毋使玷污血泥,在6時以內即行鹽皮。所用食鹽含鐵質不得過0.01%,而硫酸鈣不得過1%。水份不得過2%。並可和入4～5%之碱灰。鹽量用皮重之40～50%。　(完)

爆炸物 (續)

郭德福譯

無烟火藥之發明

1865年倏爾兹Schultze首先發明無煙火藥,彼用木質之球粒經硝化後,復浸入硝酸鋇與硝酸鉀之中。伏爾克曼Volkmann在五年後,用醚及酒精之混合液,使硝化之木材,一部變成膠質,燃燒時更能連續不斷,此種藉溶劑使硝化纖維成爲膠質之方法,可認爲已創設近代無煙火藥工業之基礎。當時並有相似之藥物,名E. C.藥粉者,於1882年,發現於英國,亦爲硝化棉一部轉成膠質物後,和

以硝酸鋇與硝酸鉀之混合物,爲獵人及射擊運動者常應用。

首用於軍事上之無煙火藥,名B藥粒,爲法國工程家菲雷Vieille)所發明,後爲法政府所採用。製造時用酒精及醚使硝化棉成團狀再展開成片,於是割條而乾之即成。

二年後諾貝爾Nobel在1888年製巴力斯他(Ballistite),係用膠狀之溶性弱硝化棉與硝化甘油混合而成,同年英政府發明科達(Cordite),係用膠狀之不溶性強硝化棉與硝化甘油及丙酮所混合而成。自菲雷之B藥粒,諾貝爾之巴力斯他,及英政府之科達發明以後,世界上各政府皆經許多試驗而選用之。

無煙火藥之用於來福槍者,分二類爲硝化甘油火藥Nitroglycerine powders,包含硝化甘油與硝化纖維。二爲硝化纖維火藥(Nitrocellulose powders),祇含有硝化纖維者。此兩種火藥,均壓成膠狀物體,有時和以穩定劑,割切成條狀,繩狀,或管狀,後再切成適宜之長度。

無烟火藥之穩定性

最初硝化纖維不知精製與穩定之法,故無煙火藥之穩定性極弱,後有穩定劑之發現,能與自硝化纖維分解而得之物質起作用,阻止藥物全部分化速度之增加。穩定劑之種類甚多,如尿素戊醇等皆是。二苯胺Diphenylamine之穩定能力極大,故現常採用之,用量祇0.5%—1.5%即夠。至科達之製造,則需用5%之礦脂(粗製凡士林)。

美政府之無烟火藥

美國當大戰時,所製之無煙火藥,總量較任何國家爲多。1900年後,經精密研究後,始爲陸海軍所採用,其成分爲硝化纖維內加0.5%之二苯胺爲穩定劑其硝化纖維中氮之含量,爲百分之12.5

至 12,7% 加入醚二份與酒精一份之混合液中,則 95% 以上能溶解。

硝化纖維之種類

硝化纖維爲纖維素之經硝酸與硫酸混合液處理後而得者。普通稱爲火棉,殊不確切。其實火棉單指纖維素之經强烈硝化,含氮至13–13.4%,在醚與酒精之混合液中,不甚溶解者而言。至溶性硝化棉,則全能溶於醚與酒精混合液中。軍用者,含氮量達 11.9–12.8%。凡硝化纖維之用作軍用藥者,工廠中通稱爲『岬落』"Pyro"。

棉之精煉

製造之先,須取棉精煉之。通常原料,爲棉實去棉後所剩留之短棉取下時附着有油脂,碎殼與葉片等皆應先行除去。精煉時,卽以之攪拌於直立之鍋中,注入鹼液,加壓烹煮,後倒入洗滌漕以去殘鹼,再入漂白液中,而後以清水洗淨之。此清洗之棉,經壓轉機,以去一部之水份,於是放入彈棉機,以碎裂其纖維。當硝化之時,棉之水份,不能過 1.5–2%。水份愈少愈佳。

棉之硝化

棉硝化之法甚多,美國現最通行者,爲每卅六磅棉用1500磅之硫酸與硝酸混合液。放入機械攪拌器中卅分鐘。酸之最初溫度爲三十至卅五度,但硝化時,溫度稍增高,硝化時間足夠後移入高速度旋轉之離心分離器中約四分鐘,盡力析出所含之酸液。此時大概每磅硝化纖維,卽含有一磅之酸,再傾入滿儲冷水之浴池中清洗。後再汲至沸水盆中,煮四十至五十小時是所謂初煮,其目的在起水祈作用,分解不安定之酯類(Esters),煮完後再轉入搗漿機,使其在水中碎裂成細分狀態搗至適當程度後,再放入化漿桶之備有攪拌器者,於此中再煮十二時,惟須換水數次,完畢後以冷水

清洗十次,每次洗時,須攪拌而讓其沉積。凡此完密之蒸煮,打漿與清洗,所以除去不穩定之產物,與細少之殘酸最後此潔淨之硝化纖維,乃放入離心器中,以除去65 70%之水分。

無烟火藥之製造

在製造之先,硝化纖維須藉酒精,除去水份。普通以潮濕之"泮落",(乾量四十五磅),加入水力壓機,用每平方吋250磅之低壓,壓成塊狀。於是用酒精約五十磅,亦藉水壓機壓下。當其經過硝化棉時,即被吸收而將水擠出。最後施用高壓將多量之酒精壓出,剩留之量,只及硝化棉重量約三分之一。此項大塊,即送入碎塊機中,使分裂成小片。更轉入混合機中灌入適量之醚使乾量每百磅之硝化棉約含酒精33⅓磅,醚66⅔磅。若用二苯胺作穩定劑者,可先溶入醚中,此混合機,須備有鹽水冷却器,以免溶解劑因蒸發而致耗失,混合後經三十分鐘,即可見粉狀之膠質物。

此膠質物即打入初步製塊機,用三千磅之壓力,使形成柱狀體。後可裝入最後壓榨機經模型成條,更經割切機,成各種大小不同之粒狀,視槍之口徑而定。

溶劑之收回與藥物之乾燥

藥粒於是移入溶劑收回箱中。內具熱管與冷凝管。須經四日至八日後,始得取出但此時藥粒內,溶劑含量仍多,不能即用應再放入乾燥室中,溫度約攝氏五十五度,此乾燥法普通名為空氣乾燥,常須五十至一百日。

歐戰時代藥粒之乾燥,常用熱水處理,可減縮時間,僅需六日至廿五日之間。在此法中,當一部溶劑收回後,藥粒即放入五十五度之熱水中。經過適當之時期,將水洩出,而表面所有之水份,可放入空氣乾燥室中或打入熱空氣以除去之。（未完）

書評

化學參考書選輯 (續)

陳同素譯

B.中學教科書

11. **化學初步** A First Book in Chemistry. Brandburg, R,H D. Appleton and Co, New york City, 1928, 674 pp., \$ 1.80。

凡化學之各綱目~~無不論及,尤~~注重於化學之關於工業農業,家庭及個人者,照片圖版以及各種問題,方程式,溫習,撮要均甚多,食品營養化學討論尤爲詳盡。

12. **化學大綱** First Principles of Chemistry. Brownlee, R.B., Fuller, R.W., Hancock, W. J, Sohon, M.D., and Whitsit, J. E Allyn and Bacon, Boston, 1931, 777 pp., \$ 1.80。

本書內容特點: 化學原理之注重,電子及原子序數之先行提出而用以解釋化學上之各種應用問題,金屬之分組討論,豐富之練習,新式之試驗,甚多之附圖,照片,三色版等。

13. **高中化學** High School Chemistry. Bruce, G. H. World Book Co, Yonkers-on-Hudson, New york, rev. ed. 1933 550 pp., \$ 1.68。

本書優點如左: 文字均用簡短分段,物理及化學性質均以

表格列之,章首排列題目,習題繁多。前數章中用文字方程式電子學說於原子價,方程式,及氧化還原等論題中屢次提及之。

14. 近代化學 Modern Chemistry Dull, C E Henry Holt & Co, new york City, 1931, 776 pp., $ 1.80。

本書編印整潔並附明瞭圖解甚多,講述化學先進之努力與成功,習題豐富,用簡單方法教授化學方程式,章首彙列教材,章末附有簡明結論。

15. 化學基礎 The Elements of Chemistry Foster, Wm. D. Van Nostrand Co., New york City, 2 nd ed, 1932, 673 pp, $ 3.00。

本書取材新穎,文字醒豁,插圖優美,材料亦較僅供高中學生習讀之教本為豐富,補充教材如練習,問題及參觀等均甚多,為教師學生良好之參考書也。

16. 化學初階 Introductory Chemistry Gordon, Neil E. World Book Co., Yonkers-on-Hudson, New york, 1927, 608 pp, $ 2.20。

按照美國化學會所規定高中最低標準而編輯前編為化學基本智識,後編 300 頁為補充材料。補充讀物之參考每於篇段之末插入之。

17. 化學精華 Elements of Chemistry Holmes, H N and mattern, L W The macmillan Co, New york City, 1927, 519 pp., $ 1.80。

本書材料去其瑣細而擷其精華,順事物自然之關係以連結之,且多有趣之應用,下列諸章尤見優越,膠體,燃料,氣體定律,設計工作之商討,及精選之參考材料等。

18. **今日化學**　Chemistry for To-day Mepherson, Wm, Henderson, Wm. E, and Fowler, G W Ginn and Co., Boston, 1930, 588 pp, $ 1.80。

每章之末附有事實問題繼以理論問題及添加材料。內容頗新如製氯之Vorce電池,用釩之氧化物作硫酸之觸媒,碳化鎢(Carboloy)各種新鋼等。有少數習題解釋詳盡,附錄中列入通俗化學書目。

19. **化學實驗**　Laboratory Exercise Brownlee, R.B, and others, Loseleaf, Allyn and Bacon, Boston, 1931 182 pp, $ 1.00。

該書爲著者所編"化學大綱"之並行本舉凡教科材料中所應有之實驗胥包羅之。

20. **化學實驗**　A Laboratory manual of Chemistry. Holmes H N, and Mattern, L. W The macmillan Co, New york City, 1928, 157 pp., $ 1.00。

該書爲著者所編教科書之並行本,對於膠體及其相關材料最有價值。

21. **化學實驗指南**　Chemistry Workbook and Laboraoty Guide. Mc Gill. M V. and Brandburg, G M Lyons and Carnahan, New york City, 1931, 252 pp, $ 1.00。

(includes a separate booklet of tests on all units)

集中於學生個別實驗之訓練,堪作參考之用,隨意節取,並不妨礙,實習材料極爲豐富。

22. **教授測驗**　Instructional Tests for high schools and Colleseg Glenn, E R and Welton, L. E. World Book co, yon-

kers-on-Hudson,New york, 1930, 76 pp., 36 Cents, Teachers manual 16 Cents, Key 16 Cents.

指明學生學習之困難與差誤,并供迅速檢討學生進步之用,包含36個測驗不拘順序且甚簡捷可於上課時內筆答及修改之,測驗方法如下選擇,比較,正負,補充,簡明答語,術語問題等,每一測驗包括是種項目一組,關於測驗之評閱亦有所指示。

C. 化學計算

23. **化學計算** Chemical Calculations. Jaffe, B. world Book Co, Yonkers-on-Hudson, New york, 1926, 192 pp., $ 1.22。

大學或高中學生之簡易計算,習題之排列分門別類同時又按其功課順序由淺入深,可與任何新版普通化學教本參酌應用,其材料分爲分類習題,大學一年生習題,課題。

24. **化學題解** First Problems in Chemistry Meyer, M D. C. Heath and Co, Boston, 1925, 312 dp, $ 1.60。

學生之優良參考書,詳解初等化學所遇見之特別學名,理論,原則及計算方法等包含 800 個習題及問題。 (完)

專　載

近代幾何學之導引

續

Graustein原著　　顧澄逹指

附理(Corollary)A. 若方程式之個數少於n,則此系常有0,0,0⋯0外之解。

附理B 若方程式之個數等於n,則在(及惟在)其係數之行列式爲0時此系有0,0,0⋯0外之解[在(及惟在),即「在係數之行列爲0時,必有0,0,0⋯0外之解,及惟在係數之行列式爲0時,方有0,0,0⋯0外之解」之意,此乃以兩語縮爲一語之省文法,讀者宜注意,以下仿此,不再加註]。

附理C 若方程式之個數等於或大於n,則在(及惟在)r<n時此系有0,0,0⋯0外之解。

[以上三附理乃承定理2而言,其中所謂方程式皆指齊一次方程式,所謂n皆指元之個數,原文如此,因其意易明,無須改爲嚴密之辭句,反致冗長難讀,讀者幸勿以辭害意,凡以下遇此類情形,讀者可自思得之,不再加附註]。

例　題

1. 解方程式系

$$2x_1+3x_2+6x_3=0,\quad 3x_1-6x_2+2x_3=0,$$

先求其一特解,再寫出其通解。

2. 求方程式系

$$3x_1+2x_2-2x_3=0,\quad 2x_1+3x_2-x_3=0,\quad 8x_1+7x_3-5x_3=0$$

之一切解。

3. 就 $n=2$ 時證明定理 2 之附理 B.

4. 就方程式系

$$a_1x_1+a_2x_2=0,\quad b_1x_1+b_2x_2=0,\quad c_1x_1+c_2x_2=0$$

證明定理 2 之附理 C。

5. 就四元方程式之齊一次方程式系作完全之研究,再就 $n=4$ 時,證明定理 2 之附理 B.

6. 求方程式系

$$x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\quad x_1+2x_2+x_3-2x_4=0$$

之一切解。

7. 凡 n 元之齊一次方程式式系,在(及惟在)其品數小於 n 時有 0,0,0…0 外之解,試證之。

3. 比例(Proportionality) 一次相倚(Linear Dependence)

此「雙數」(number pair)與彼「雙數」成比例之尋常定義為彼此須互為倍數。例如 2,4 及 3,6 兩雙數,照此定義能成比例[2,4 皆 $\frac{3}{2}$ 倍之,得 3,6, 3,6 皆 $\frac{2}{3}$ 倍之,得 2,4]。但如 2,4 及 0,0 兩雙數,則照此定義不能成比例,蓋第二雙固為第一雙之倍數,而第一雙則不能為第二雙之倍數也。[2,4 可各以 0 乘之而得 0,0,而 0,0 則無法可以他數乘之而得 2,4]。故為便利起見,可推廣此定義,使此種型式之兩雙數[卽類於 2,4,0,0 者],亦可成為比例;其推廣之法為兩雙中只須有一雙為他雙之倍數已足,詳言之,卽兩雙中至少有一雙為他雙之倍數,此兩雙卽可謂之成比例是也。

今述此推廣之定義如下。

定義 1　凡兩雙數 a_1, a_2 及 b_1, b_2，若能有不全爲 0 之兩數 k, l，能使

$$(1)\qquad ka_1+lb_1=0,\qquad ka_2+lb_2=0,$$

則謂之此兩雙數成比例[k, l 不全爲 0，卽其中至少須有一個不爲 0；有一個不爲 0，則他一個爲 0 不爲 0 均可]。

此定義旣只須 k, l 兩數中，至少有一數不爲 0，此定義所需者爲「至少有一雙數爲他雙數之倍數」明矣。*

此推廣定義之重要利益極易說明，無論照新定義或舊定義，若 a_1, a_2 及 b_1, b_2 成比例，其行列式 $|ab|$ 固皆等于 0；但專照舊定義，則其逆**(converse)卽不眞確，例如 2,4 及 0,0，其行列式 $\begin{vmatrix}2&0\end{vmatrix}$ 雖等於 0 而照舊定義仍不能成比例。若專用此新定義，則此逆立變爲眞確矣。

定理 1　凡兩雙數爲 a_1, a_2 及 b_1, b_2，則在(及惟在)其列行式 $|ab|=0$ 時能成比例(照推廣之定義言)

從定義 1 可知在 k, l 爲元之方程式(1)有 0,0 外之解時 a_1, a_2，及 b_1, b_2 能成比例，亦惟此方程式(1)有 0,0 外之解時，a_1, a_2 及 b_1, b_2 方能成比例。又凡兩元之兩齊次一次方程式，在(及惟在)其係數之行列式爲 0 時，有 0,0 外之解，故此定理卽可由此證明。

此比例之定義可推廣至 n 個數爲一組之兩組數，例如 $n=3$，得定義如下

定理 2　設兩個三數組(number triples)[三個數爲一組

*原註　例如 $k\neq 0$，則(1)可寫作 $a_1=mb_1\quad a_2=mb_2$，此 $m=-l/k$

**逆卽「反果爲因」而倒言之之意，在此處上有「a_1, a_2 及 b_1, b_2 成比例(因)，其行列式 $|a_1b_2|$ 等於 0(果)」之語，其逆卽「行列式 $|a_1b_2|$ 等於 0 則 a_1, a_2 及成比例」。凡定理中之因，謂之定理之假設；定理中之果，謂之定理之終結，又原定理爲「若 a 爲 b，則 c 爲 d」，則其逆定理爲「若 c 爲 d 則 a 爲 b」，原定理與逆定理並提時原定理亦稱「直接定理」。

者謂之三數組]爲

(2)　　$a_1,\ a_2,\ a_3,$

　　$b_1,\ b_2,\ b_3,$

則在(及惟在)有不全爲0之兩數k,l能使

(3)　　$ka_1+lb_1=o,\quad ka_2+lb_2=o,\quad ka_3+lb_3=o,$

時謂之此(2)之兩個三數組成比例。*

換句話說,卽在(及惟在)兩元三方程式之齊次一次方程式系(3)有0,0外之解時,謂之此(2)之兩個三數組成比例。又「有此0,0外之解」之必充條件爲「此方程式系之品數小於二」,參觀2款定理2之附理C,故

定理2　設兩個三數組爲a_1,a_2,a_3,及b_1,b_2,b_3,則在(及惟在)

(4)　　$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=o,\quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=o,\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=o,$

時,卽在(及惟在)其矩陣之品數小於2時,兩個三數組成比例。

一次相倚(Linear dependence)　兩組數成比例爲兩組數互相倚之一種特型[互相倚者,有相互之關係也],其諸方程式[例如(3)]表示此種相倚者皆爲一次,故謂之一次相倚,而當其應用於兩組數時,其意實與「成比例」相同。

今再推廣一次相倚之意思,而將其應用於三個三數組如下。

定義3　設三個三數組爲

*此定義之原文似一定理,故略改之使成定義語氣。又「及惟在」三字乃遷就原文而設,照定義論此三字無必要,可以删去。

$$
(5) \qquad \begin{array}{ccc} a_1, & a_2, & a_3, \\ b_2, & b_2, & b_3, \\ c_1, & c_2, & c_3, \end{array}
$$

則在(及惟在)有不全爲0之三數k, l, m能使

$$
(6) \qquad \begin{array}{l} ka_1+lb_1+mc_1=o, \\ ka_2+lb_2+mc_2=o, \\ ka_3+lb_3+mc_3=o, \end{array}
$$

時,謂之此(5)之三個三數組爲一次相倚。

此(6)之三方程式在(及惟在)$|abc|=o$時有0,0,0外之解。故

定理 3 凡三個三數組,在(及惟在)其行列式爲0時,爲一次相倚,亦卽在(及惟在)其矩陣之品數小於三時爲一次相倚。

此處之k,l,m或以前之k,l皆謂之**相倚常數**(constant of dependence). 此種相倚常數,往往可視察得之,並常可由「表示一次相倚之方程式系」求得之,求得之法卽解此方程式系是也。

上已言明,兩個三數組,在(及惟在)其矩陣之品數小於二時,爲一次相倚,三個三數組,在(及惟在)其矩陣之品數小於三時,爲一次相倚。今再推廣之,得通例如下。

定理 4 m個三數組爲一次相倚之必充條件爲其矩陣之品數小於m.

因無論幾個三數組之矩陣,其行數皆爲三,故其品數必不能大於三,且因此可知當$m>3$時,其品數常小於m。故此定理實已含有「三個以上之三數組常爲一次相倚」之理。

茲就$m=4$時證明此理,餘可類推。在(5)之三個三數組外,再加

第四個三數組 d_1, d_2, d_3，則從定義，在（及惟在）有不全爲 0 之四數 A,B,C,D 能使

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&Aa_1+Bb_1+Cc_1+Dd_1=o\\
&Aa_2+Bb_2+Cc_2+Dd_2=o\\
&Aa_3+Bb_3+Cc_3+Dd_3=o
\end{aligned}
$$

時，此 $a_1,a_2\,a_3,\ b_1,b_2\,b_3,\ c_1,c_2,c_3,\ d_1,d_2,d_3$ 爲一次相倚。此三方程式有四元，必常有 0,0,0,0 外之解，參觀 2 款定理 2 之附理 A，故四個三數組常爲一次相倚。

同理，可知五個或五個以上之三數組皆常爲一次相倚。但此可以他法證明之。例如有五個三數組，其四個如前，第五個爲 l_1,l_2,l_3。其前四個已經知其爲一次相倚而必有不全爲 0 之四數 A,B,C,D 能適於(7)矣，故必有不全爲 o 之 A,B,C,D,E 能適於三方程式

$$
8)\qquad Aa_i+Bb_i+Cc_i+Dd_i+Ee_i=o,\quad (i=1,2,3)
$$

蓋只須令 A,B,C,D 仍爲能滿足（7）之值，及令 E 等於 0，則此 A,B,C,D,E 自能滿足（8）之三方程式也。[此(8)表三個方程式之法須注意。即 $i=1$ 時爲第一式，$i=2$ 時爲第二式，$i=3$ 時爲第三式。右邊之 $(i=1,2,3)$ 即示此(8)表此三式之意]。

公例　以上之結果，可推廣至 n 個數爲一組之 m 組數，此種推廣之法頗簡單易明，可逕述一定理如下。

定理 5　m 個 n 數組（n 個數爲一組者謂之 n 數組）爲一次相倚之必充條件爲其矩陣之品數小於 m。其特例，若 $m>n$，則此 m 個 n 數組常爲一次相倚，若 $m=n$，則此 m 個 n 數組在（及惟在）其行列式爲 0 時爲一次相倚。

[原書於定義 3 後，未下 m 個三數組爲一次相倚之定義，而逕

占定定理 4，未下 m 個 n 數組爲一次相倚之定義而逕言定理 5，意在此種定義讀者可從定義 3 推知也。惟爲讀者易明計，究以補一定義如下爲宜。

定義 設 m 個 n 數組爲

$$
(9)\qquad
\begin{array}{ll}
a_1',\ a_2',\ a_3',\ \ a'_n, & \text{第一組} \\
a_1'',\ a_2'',\ a_3'',\ \ a''_n, & \text{第二組} \\
a_1'''\ a_2'''\ a_3''\ \ a'''_n, & \text{第三組} \\
 & \\
a_1^{(m)},\ a_2^{(m)}\ a_3^{(m)},\ \cdots a_n^{(m)}, & \text{第 } m \text{ 組}
\end{array}
$$

則在(及惟在)有「不全爲 0 之 m 個數 $k_1,k_2,k_3,\ \ k_m$」能使 n 個方程式

$$
(10)\qquad
\begin{array}{l}
k_1a_1'+k_2a_1''+k_3a_1'''+\quad +k_ma_1^{(m)}=o, \\
k_1a_2'+k_2a_2''+k_3a_2'''+\quad +k_ma_2^{(m)}=o, \\
k_1a_3'+k_2a_3''+k_3a_3'''+\quad +k_ma_3^{(m)}=o, \\
\cdots\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\
k_1a_n\ +k_2a_n''+k_3a_n'''+\quad +k_ma_n^{(m)}=o,
\end{array}
$$

成立時，謂之此(9)爲一次相倚。

此(10)中 n 個方程式，可以一簡式

$$k_1a_i'+k_2a_i''+k_3a_i'''+\quad +k_ma_i^{(m)}=o,\quad (i=1,2,3,\ \ n)$$

表之，又(9)中 m 個 n 數組，亦可以一簡式

$$a_1^{(j)},a_2^{(j)},a_3^{(j)},\quad a_n^{(j)}\qquad\qquad (j=1,2,3,\ \ m)$$

表之，此種簡式表法，於計算上頗便利，讀者可預先熟練之。]

例 題

1.* 證明三數組 5,14,4; 2,−1,1, 3,4,2 爲一次相倚。並求其相倚

常數之諸値。

2. 作四個四數組爲一次相倚之定義並證明「四個四數組爲一次相倚之必充條件」爲「其行列式爲0」。

3. 四數組1,2,3,4, 2,1,3, 4,1,2,5是否爲一次相倚

4. 證明定理5.[因上既補一定義,故此題中删去一語]

5. 在m個n數組中,如有q個爲一次相倚,則此m個亦必爲一次相倚試證明之。此q爲小於m之任意數。

6. 在m個n數組中,若有一個其中各數皆爲0,則此m個必爲一次相倚試證明之。

§ 4 一次連合(Lenear conbination) 若有k,l兩數能合於

(1) $$c_1=ka_1+lb_1,\quad c_2=ka_2+lb_2,\quad c_3=ka_3+lb_3,$$

則三數組c_1,c_2,c_3謂之兩個三數組a_1,a_2,a_3及b_1,b_2,b_3之一次連合.

公例,若有$A,B,\cdots G$諸數能合於方程式

(2) $$h_i=Aa_i+Bb_i+\cdots+Gg_i,\quad (i=1,2,\cdots n)$$

則此n數組$h_1,h_2,\cdots h_n$謂之諸n數組$a_1,a_2\cdots a_n,b_1,b_2\cdots b_n,\cdots,g_1,g_2\cdots g_n$之一次連合。

一次連合與一次相倚有密切之關係,例如(1)可寫作下之形式

$$ka_1+lb_1-c_1=o,\quad ka_2+lb_2-c_2=o,\quad ka_3+lb_3-c_3=o$$

從此可知三個三數組a_1,a_2,a_3, b_1,b_2,b_3, $c_1c_2c_3$爲一次相倚。又(2)可作爲表示「諸n數組$a_1,a_2\cdots a_n$, $b_1,b_2\cdots b_n,\cdots,g_1,g_2\cdots g_n$及$h_1,h_2\cdots h_n$爲一次相倚」之解釋。

定理1 若一個「數組」爲m個「數組」之一次連合,則此$m+1$個「數組」爲一次相倚[「數組」即諸數所成之一組;如三

數組,四數組, 皆可謂之數組]

~~此定理之逆亦爲眞確,~~卽

定理 2 若若干個「數組」爲一次相倚,則其中至少有一個「數組」爲其他諸「數組」之一次連合。

例如就 3 款之(7)言之,此(7)表四個三數組 a_1,a_2,a_3, $b_1\,b_2,b_3$, c_1,c_2,c_3, d_1,d_2,d_3 之一次相倚。其四個相倚常數 A,B,C,D 中至少有一個不爲 0。設 $D\neq 0$, 則(7)之三方程式可就 d_1,d_2,d_3 解之,而得三數組 d_1,d_2,d_3 爲他三個三數組 $a_1a_2a_3$, b_1,b_2,b_3, c_1,c_2,c_3 之一次連合。

例 題

1. 證

$$\begin{vmatrix} a_1 & 3a_1-c_1 & c_1 \\ a_2 & 3a_2-c_2 & c_2 \\ a_3 & 3a_3-c_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

2. 若行列式之一行(或列)爲兩個或兩個以上之他行(或他列)之一次連合,則此行列式爲 0, 試證之

3. 若行列式中各行(或各列)之原素之和爲 0, 則此行列式爲 0; 試證之。

5 齊一次方程式 結論(Conclusion)

定理 1 若 $r_1,r_2,\cdots r_n$ 及 $s_1,s_2,\cdots s_n$ 爲「n 元 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 之齊一次方程式系」之兩解,則

(a) $kr_1,\quad kr_2,\quad \cdots\quad kr_n$

(b) $r_1+s_1,\quad r_2+s_2,\quad \cdots\quad r_n+s_n$

亦皆爲此方程式系之解,(a)中之 k 爲任意常數.

此定理之證明頗易,讀者可自爲之。從此可知若 $r_1,r_2,\cdots r_n$ 及 $s_1,$

$s_2, \cdots s_n$ 爲解,則 $kr_1, kr_2, \cdots kr_n$ 及 $ls_1, ls_2, \cdots ls_n$ 亦皆爲解,且因此可知

$$(c)\qquad kr_1+ls_1,\ kr_2+ls_2,\ \cdots kr_n+ls_n$$

亦爲一解,同理若 $t_1, t_2, \cdots t_n$ 爲第三解,則

$$(d)\qquad kr_1+ls_1+mt_1,\ kr_2+ls_2+mt_2,\ \cdots\ kr_n+ls_n+mt_n$$

亦爲一解.

解(c)爲兩特解之一次連合,解(d)爲三特解之一次連合。通例

凡若干解之一次連合亦爲一解

[以上所謂「解」皆指「n 元 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 齊一次方程式系」之「解」而言,原文因承上文而言,其意易明,故作簡語。此種情形以下甚多不再詳註。讀者可自得之,幸勿以爲疎漏]

以上云云,再借 2 款關於方程式系

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=o$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=o$$

所得之結果說明之。

當 $r=o$ 時,此方程系之通解

$$x_1=k,\quad x_2=l,\quad x_3=m,$$

亦可寫作

$$x_1=k(1)+l(0)+m(0),$$
$$x_2=k(0)+l(1)+m(0),$$
$$x_3=k(0)+l(0)+m(1),$$

之形式,由是此通解爲三特解 1,0,0, 0,1,0, 0,0,1, 之任意一次連合 (abitrary linear combination)。此宜注意者,**此三特解不爲一次相倚。**

當 $r=1$ 時,此方程式系之通解

$$x_1=-a_2k-a_3l,\quad x_2=ka_1\quad x_3=la_1,\quad a_1\neq o$$

可寫作

$$x_1=k(-a_2)+l(-a_3),\quad x_2=k(a_1)+l(o),\quad x_3=k(o)+l(a_1)$$

之形式，而此為兩特解 $-a_2, a_1, o$ 及 $-a_3, o, a_1$ 之任意一次連合，又此兩特解亦不為一次相倚。

當 $r=2$ 時，此方程式系之通解

$$x_1=k|a_2b_3|,\quad x_2=k|a_3b_1|,\quad x_3=k|a_1b_2|$$

為特解 $|a_2b_3|, |a_3b_1|, |a_1b_2|$ 之一次連合(倍數)。

從以上之結果，可知

定理 2　若「n 元之齊一次方程式系」之品數為 r，則此方程式之各解可寫作 $n-r$ 個一次獨立解(linearly independent solutions)之一次結合。[「一次獨立」即「不一次相倚」之意]。

上舉各例中，以一組特解之一次連合表通解時，雖所舉諸特解皆為一組一次獨立解之特例，實則此定理 2 對於任意 $n-r$ 個一次獨立解無不真確。

例　題

1. 就 $n=3$ 證明定理 1.

2. 方程式系

$$x_1-x_2+x_3+x_4=o,\quad x_1+x_2+5x_3-3x_4=o,\quad 3x_1-x_2+7x_3-x_4=o$$

之品數為 2. 求此方程式系之通解，並證明此通解可作為兩個一次獨立特解之任意一次連合。

6. **行列式及其餘因數**　讀者可再回想行列式論中所謂行列式 Δ 中一原素 m 之子式(Minor)M，此 M 即在 Δ 中除去含有 m 之一行一列後所成之小行列式。讀者亦必能憶及若 m 在第 i 列

及第 j 行中,則積

(1)　　　　$(-1)^{i+j}mM$

必爲 Δ 中含 m 之項之全體所組成;及由一列(或一行)上一切原素作成與(1)同型之積時,此諸積之和必與 Δ 相等。

以(1)中 mM 旁之符號 $(-1)^{i+j}$ 直接附於子式 M 之左而作成 $(-1)^{i+j}M$,並名之曰餘因數(Cofactor),頗有便利。

定義　原素 m 之餘因數 M' 爲 m 之子式之附有符號者,即

$$M'=(-1)^{i+j}M。$$

如是則「一原素 m 與其餘因素 M' 之積 mM'」爲「Δ 中含有 m 之一切項」所組成。

定理 1　凡行列式之一列(或一行)上諸原素以其餘因數乘之,所得諸積之和與此行列式相等。

定理 2　若一行列式之一列(或一行)上各原素以「他一列(或他一行)上相應各原素之餘因數」乘之,則所得諸積之和爲 0。

本篇中所言諸事,其較詳之討論,讀者可參觀 Bocher 氏 Introduction to Higher Algebra. II, III, IV 各編。

[原文因假定讀者已略知行列式論,故此 6 款所言,不加證明,但備讀者之回想而已。又本篇所論諸事,不過備以下各編之應用,故但就以下各編所需要者言之,而不詳舉一切]

例題

1. 設一行列式之各原素以其餘因數代入之,所得之新行列式謂之原行列式之附屬行列式(adjoint)。若 Δ 爲 n 階行列式,Δ'

爲其附屬行列式,則

(a)　若 $n=2$, 則 $\Delta'=\Delta$, (b) 若 $n=3$, 則 $\Delta'=\Delta^2$,

試證之又在通例,Δ' 之值如何?

2　若 M 爲 n 階行列式 Δ 中一原素 m 之餘因數,及 μ 爲 Δ 之附屬行列式中 M 之餘因數,則

$$\mu=\Delta^{n-2}m。$$

就(a) $n=2$ 時,(b) $n=3$ 時實驗此定理。

3. 凡一行列式,其中「關於其主對角線爲對稱之各兩原素」彼此相等,則此行列式謂之**對稱**行列式。[例如

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & y & d & f \\ b & d & z & e \\ c & f & e & w \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 1 & b & 4 & 5 \\ 2 & 4 & c & 6 \\ 3 & 5 & 6 & d \end{vmatrix},$$

皆爲對稱行列式]

若行列式爲對稱,則其附屬行列式亦爲對稱。

就 $n=3$ 時實驗此定理。

4. 凡一行列式,其主對角線上之原素皆爲 0,其關於主對角線爲對稱之各兩原素皆此爲彼之負數,則此行列式謂之**斜對稱**(Skewsymmetric)行列式。

凡奇數階之斜對稱行列式常爲 0。

就 $n=3$ 時實驗此定理。

5　凡兩 n 階行列式之積,可以一他 n 階行列式表之。此「他 n 階行中第 i 列及第 j 行之公有原素」爲「第一行列式中第 i 列及第二行列式中第 j 行上之相應原

素之積」之知。

此定理就 $n=2$ 卽

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1 & a_1\alpha_2+a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\beta_1 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

實驗之。

本刊廣告價目表

等級	地位	全頁價目	半頁價目
甲	底封面外頁	伍拾元	[illegible]
乙	底面裏頁及封面裏頁	三十五元	二十元
丙	封面裏頁底面裏頁之對面	二十五元	十五元
丁	普通	二十元	十二元

一、乙丙丁四分之一頁按照半頁價目六折計算
二、廣告概用白紙黑字如用彩印色紙價目另議
三、廣告如用銅鋅版由本刊代辦照收製版費
四、連登多期價目從廉請逕函本校出版處經理組接洽

科學學院科學通訊投稿簡章

一、投稿不拘文言白話凡中英德法文均所歡迎
二、談言教材叢錄書評消息均以科學爲範圍
三、投寄之稿如係翻譯請附寄原本否則須將原文題目著者姓名出版日期及地點詳細開示
四、投寄之稿務望繕寫清楚並加新式標點凡外國文稿件並請打印之如有插圖附表必須製版者請用墨色
五、來稿請註明姓名住址以便通訊并加蓋印章俾於發給稿費時核對之
六、投寄之稿無論登載與否概不退還但預有聲明並備足回寄郵資者不在此限
七、投寄之稿經本刊揭載後每篇酌致酬金若本刊尚未揭載已先在他處發表者恕不致酬
八、投寄之稿經本刊揭載後版權即爲本校出版委員會所有但有另行約定者不在此限
九、投寄之稿本院委員會有酌量增刪之權如投稿人不願有何增刪則應於投稿時聲明
十、投寄之稿應逕寄上海徐家滙交通大學科學學院科學通訊編輯委員會

中華民國二十四年五月出版

科學學院科學通訊

第二期

編輯者　交通大學科學學院
發行者　交通大學出版委員會　上海徐家滙
印刷者　上海中國科學公司
代售處
上海　世界出版社　上海雜誌公司
　　　作者書社　現代書局
　　　黎明書局　蘇新書社
南京　正中書局
天津　志恆書店　大公報社代辦部
漢口　光華書局
安慶　世界書局
武昌　學生書店　新光書店
廣州　廣州圖書消費合作社
雲南　雲南文化書店

本刊價目

每册大洋二角　全年八册
預訂壹元四角　國外另加郵費

科學學院科學通訊編輯委員會

裘維裕（科學院院長兼物理系主任）　徐名材（化學系主任）　胡敦復（數學系主任）　顧澄（總編輯）　范會國（數）　武崇林（數）　周銘（理）　胡剛復（理）　時昭涵（化）　丁嗣賢（化）