范　　氏

高等代數學題解

范　氏

高等代數學題解

青　年　科　學　社

范氏高等代數學題解

定價國幣

外埠酌加寄費

編演者　青年科學社

發行者　青年科學社

經售處　新亞書店
上海河南路一五九號

各埠各大書局均有經售

中華民國三十七年九月十二版

例　言

范氏高等代數學一書，說理明顯便於學習，故各中學多用以爲教本．惟高等代數學之算理較爲深奧，課本內所附習題，在初學者自行演算時，每有艱於索解，不能全部應付自如．本社應學者之需要特輯是編，以備課餘自習時之參考．

本書題解，坊間早有數種出見，然檢其內容，無不訛誤百出，弊害殊非淺鮮．本題解編演者，憑其教授范氏高等代數學十餘年之經驗逐題演算，準確不誤，其精到實遠非坊間同樣之題解書所能及，至於排校精良，尤其餘事而已．

爲讀原本書者翻檢時便利起見，本書每一習題下附注英文原本之頁數

范氏高等代數學題解

習　題　I

1. $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 之次數就 x, y, z 言各若何？就 y 及 z 者言又若何？就 $x, y,$ 及 z 三者言又若何？

［解］ $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 式中，關於 x 爲 7 次，關於 y 爲 4 次，於 z 爲 8 次；關於 y 與 z 爲 10 次；關於 x, y, z 爲 17 次。

2. $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 之次數若何？

［解］ $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 爲 7 次式。

3. 已與 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$，如用 § 277 之記法，則 $n, a_0, a_1, \cdots$ 之值若何？

［解］ 以 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$ 與 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n$ 比較得

$$n=7,\ a_0=3,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-4,$$
$$a_4=1,\ a_5=0,\ a_6=0,\ a_7=-12.$$

4. 若 $f(x)=2x^3-x^2+3$，試求 $f(0), f(-1), f(3), f(8)$.

［解］ $f(0)=2(0)^3-(0)^2+3=3.$

$f(-1)=2(-1)^3-(-1)^2+3=-2-1+3=0.$

$f(3)=2\times3^3-3^2+3=54-9+3=48.$

$f(8)=2\times8^3-8^2\times3=1024-64+3=963.$

5. 若 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$，試求 $f(0), f(-2), f(6)$.

［解］ $f(0)=(0^2-3\times0+2)/(2\times0+5)=2/5.$

$f(-2)=\{(-2)^2-3(-2)+2\}/\{2(-2)+5\}$

$=\{4+6+2\}/\{-4+5\}=12.$

$f(6)=(6^2-3\times6+2)/(2\times6+5)$

$=(36-18+2)/(12+5)=20/17.$

6. 若 $f(x)=x+\sqrt{x}+3$, 試求 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$.

[解] $f(1)=1+\sqrt{1}+3=1+1+3=5.$

$f(4)=4+\sqrt{4}+3=4+2+3=9.$

$f(5)=5+\sqrt{5}+3=8+\sqrt{5}.$

7. 若 $f(x)=2x+3$, 則 $f(x-2)$ 若何? $f(x^2+1)$ 若何?

[解] $f(x-2)=2(x-2)+3=2x-4+3=2x-1.$

$f(x^2+1)=2(x^2+1)+3=2x^2+2+3=2x^2+5.$

8. 若 $f(x, y)=x^3+x-y+8$, 試求下列各值:

$f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(1, 1)$, $f(-2, -3)$.

[解] $f(0, 0)=0^3+0-0+8=8.$

$f(1, 0)=1^3+1-0+8=1+1-0+8=10.$

$f(0, 1)=0^3+0-1+8=0+0-1+8=7.$

$f(1, 1)=1^3+1-1+8=1+1-1+8=9.$

$f(-2, -3)=(-2)^3+(-2)-(-3)+8=-8-2+3+8=1.$

習 題 II 第 97 頁

1. 加 $4ax^2y$, $-6ax^2y$, $5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$.

[解] $4ax^2y+(-6ax^2y)+5bx^2y+(-3bx^2y)$

$=4ax^2y-6ax^2y+5bx^2y-3bx^2y$

$=-2ax^2y+2bx^2y=2x^2y(b-a).$

2. 加 $7a^2+2a-b^2$, $3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$.

[解] $(7a^2+2a-b^2)+(3a+b^2-2a^2)+(b^2-4a-4a^2)$

$=7a^2+2a-b^2+3a+b^2-2a^2+b^2-4a-4a^2=a^2+a+b^2.$

3. 加 $3x^2-5x+6$, x^2+2x-8, 及 $-4x^2+3x-7$.

［解］ $(3x^2-5x+6)+(x^2+2x-8)+(-4x^2+3x-7)$

$=3x^2-5x+6+x^2+2x-8-4x^2+3x-7=-9.$

4. 加 $4a^3+a^2b-5b^3$, $\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b$, $\frac{1}{3}a^3+10b^3$, 及 $6b^3-15ab^2$ $4a^2b-10a^3$.

［解］ $(4a^3+a^2b-5b^3)+(\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b)+(\frac{1}{3}a^3+10b^3)$

$+(6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3)$

$=(4+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-10)a^3+(1-1-4)a^2b+(-6-15)ab^2$

$+(-5+10+6)b^3=-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3.$

5. 由 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.

［解］ $(3a+b-c)-(4a-2b+6c)=3a+b-c-4a+2b-6c$

$=-a+3b-7c.$

6. 由 x^3+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7$.

［解］ $(x^3+6x^2+5)-(2x^2-5x+7)=x^3+6x^2+5-2x^2+5x-7$

$=x^3+4x^2+5x-2.$

7. a^3+5a^2b 須加何式始能得 a^3+b^3?

［解］ 設 p 爲所求式,則 $(a^3+5a^2b)+p=a^3+b^3$.

$\therefore p=(a^3+b^3)-(a^3+5a^2b)=a^3+b^3-a^3-5a^2b=b(b^2-5a^2).$

8. 由 $x^3+y^3-6x+5y$ 減下二式之和:

$$-2x^2-6x+7y-8,\ x^3+2x^2-5y+9.$$

［解］ $(x^3+y^3-6x+5y)-\{(-2x^2-6x+7y-8)+(x^3+2x^2-5y+9)\}$

$=x^3+y^3-6x+5y-\{x^3-6x+2y+1\}$

$=x^3+y^3-6x+5y-x^3+6x-2y-1=y^3+3y-1.$

9. 簡化 $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$.

［解］ $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$

$=-a-b-a-2a+b-6a+24b=-10a+24b.$

10 簡化 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.

［解］ $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$

$=6x-4x-[2x-(3x+5x+7-1)+3]+8$

$=6x-4x-2x+(3x+5x+7-1)-3+8$

$=6x-4x-2x+3x+5x+7-1-3+8$

$=8x+11.$

或 $6x-\{4x+[2x-(3x+5x+7-1)+3]-8\}$

$=6x-\{4x+[2x-(8x+6)+3]-8\}$

$=6x-\{4x+[-6x-3]-8\}$

$=6x-\{-2x-11\}=6x+2x+11=8x+11.$

11. 簡化 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.

[解] $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$

$=2a-[4a-c+\{3a-4b+c-b-3c\}-6c]$

$=2a-[4a-c+3a-4b+c-b-3c-6c]$

$=2a-4a+c-3a+4b-c+b+3c+6c=-5a+5b+9c.$

或 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$

$=2a-[4a-c+\{3a-5b-2c\}-6c]$

$=2a-[7a-5b-9c]=-5a+5b+9c.$

12. 由 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.

[解] $z-[3x+(y+5z)]-[x-(3y+2z)]$

$=z-3x-y-5z-x+3y+2z=2y-4x-2z.$

13. x^2+8x+5 須加於何式始能得 x^3-7?

[解] 設 p 爲所求被加式，則 $p+(x^2+8x+5)=x^3-7.$

$\therefore p=x^3-7-(x^2+8x+5)=x^3-7-x^2-8x-5$

$=x^3-x^2-8x-12.$

14. x^4-9x^2+3y 須加於何式始能得 y^2+x-7?

[解] 設 p 爲所求被加式，則 $p+(x^4-9x^2+3y)=y^2+x-7.$

$\therefore p=y^2+x-7-(x^4-9x^2+3y)=y^2+x-7-x^4+9x^2-3y$

$=y^2-3y-x^4+9x^2+x-7.$

習 題 III 第106頁

1. 以 $2x^2-3x+1$ 乘 $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$.

[解]

$$\begin{array}{r}
3-\ 2-1+\ 7-\ 6+\ 5\phantom{{}+5} \\
2-\ 3+1\phantom{{}+\ 7-\ 6+\ 5+5} \\
\hline
6-\ 4-2+14-12+10\phantom{{}+5} \\
-\ 9+6+\ 3-21+18-15 \\
3-\ 2-\ 1+\ 7-\ 6+5 \\
\hline
6-13+7+15-34+35-21+5
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 5 次及 2 次式,故其乘積爲 7 次式.

∴ 所求積爲 $6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5$.

2. 以 $3x^2-ax-2a^2$ 乘 $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$.

[解]

$$\begin{array}{r}
5-\ 3+\ 2+1\phantom{{}-2} \\
3-\ 1-\ 2\phantom{{}+1-2} \\
\hline
15-\ 9+\ 6+3\phantom{{}-2} \\
-\ 5+\ 3-2-1 \\
-10+6-4-2 \\
\hline
15-14-\ 1+7-5-2
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 a, x 之齊次 3 次及 2 次式,故其乘積爲 5 次齊次式.

∴ 所求積爲 $15x^5-14ax^4-a^2x^3+7a^3x^2-5a^4x-2a^5$.

3. 以 $x+y$ 乘 $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.

[解]

$$\begin{array}{r}
1-1+1-1+1-1\phantom{{}-1} \\
1+1\phantom{{}+1-1+1-1-1} \\
\hline
1-1+1-1+1-1\phantom{{}-1} \\
1-1+1-1+1-1 \\
\hline
1+0+0+0+0+0-1
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 x, y 之齊次 5 次及 1 次式,故其乘積爲 6 次齊次式.

∴ 所求積爲 x^6-y^6.

4. 以 $2x^3-3x+5$ 乘 $3x^3-2x^2+7$.

[解]

$$\begin{array}{r}
3-2+0+\ 7\phantom{{}-10-21+35} \\
2+0-3+\ 5\phantom{{}-10-21+35} \\
\hline
6-4+0+14\phantom{{}-10-21+35} \\
-9+\ 6+\ 0-21\phantom{{}+35} \\
15-10+\ 0+35 \\
\hline
6-4-9+35-10-21+35
\end{array}$$

被乘式及乘式均為 3 次式，故其乘積為 6 次式．

∴ 所求積為 $6x^6-4x^5-9x^4+35x^3-10x^2-21x+35$．

5. 以 $4x-5y$ 乘 $7x-2y$，用視察法演算．

［解］ $(7x-2y)(4x-5y)=28x^2-43xy+10y^2$．

6. 以 $b+x$ 乘 $a^2-ax+bx-x^2$．

［解］

$$\begin{array}{llll}
a^2 & -(a-b) & -1 & \\
b & +1 & & \\
\hline
a^2b & -(a-b)b & -b & \\
 & +a^2 & -(a-b) & -1 \\
\hline
a^2b & +(a^2-ab+b^2) & -a & -1
\end{array}$$

被乘式及乘式各為 x 之 2 次及 1 次式，故其乘積為 x 之 3 次式．

∴ 所求積為 $a^2b+(a^2-ab+b^2)x-ax^2-x^3$．

7. 以 $3+x^2-x$ 乘 $x^4-2x+5x^2-x^3$．

［解］

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & -1 & +5 & -2 & & \\
1 & -1 & +3 & & & \\
\hline
1 & -1 & +5 & -2 & & \\
 & -1 & +1 & -5 & +2 & \\
 & & 3 & -3 & +15 & -6 \\
\hline
1 & -2 & +9 & -10 & +17 & -6
\end{array}$$

被乘式及乘式各為 4 次及 2 次式，故其乘積為 6 次式．

∴ 所求積為 $x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$．

8. 以 $x^{n-2}-x^{n-3}$ 乘 $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$．

［解］

$$\begin{array}{rrrrr}
2 & +0 & -3 & +5 & \\
1 & -1 & & & \\
\hline
2 & +0 & -3 & +5 & \\
 & -2 & +0 & +3 & -5 \\
\hline
2 & -2 & -3 & +8 & -5
\end{array}$$

被乘式及乘式各為 n 及 $n-2$ 次式，故其乘積為 $2n-2$ 次式．

∴ 所求積為 $2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+8x^{2n-5}-5x^{2n-6}$．

9. 以 $a^2+ab-3b^2$ 乘 $a^2-ab+3b^2$．

［解］ $(a^2-ab+3b^2)(a^2+ab-3b^2)=a^4-(ab-3b^2)^2$

$=a^4-(a^2b^2-6ab^3+9b^4)=a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$．

10. 以 $x-3y+2z$ 乘 $x+3y-2z$．

[解]　$(x+3y-2z)(x-3y+2z)=x^2-(3y-2z)^2$

$=x^2-(9y^2-12yz+4z^2)=x^2-9y^2+12yz-4z^2.$

11.　以 $x-y-1$ 乘 $x^2+xy+y^2+x-y+1$.

[解]　$(x^2+xy+y^2+x-y+1)(x-y-1)$

$=[(x^2+xy+y^2)+(x-y)+1][(x-y)-1]$

$=(x^2+xy+y^2)(x-y)-(x^2+xy+y^2)+(x-y)^2-1$

$=x^3-y^3-x^2-xy-y^2+x^2-2xy+y^2-1$

$=x^3-y^3-3xy-1.$

12.　以 $a+b-c$ 乘 $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$.

[解]　$(a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab)(a+b-c)$

$=[a(a-b+c)+(b^2+bc+c^2)][a+(b-c)]$

$=a[a^2-(b-c)^2]+a(b^2+bc+c^2)+(b^2+bc+c^2)(b-c)$

$=a^3-ab^2+2abc-ac^2+ab^2+abc+ac^2+b^3-c^3$

$=a^3+b^3-c^3+3abc.$

13.　以 $x-4y+6$ 乘 $3x-2y+5$.

[解]　$(3x-2y+5)(x-4y+6)$

$=3x^2-(3\times4+2\times1)xy+8y^2+(3\times6+5\times1)x$

$-(2\times6+5\times4)y+30$

$=3x^2-14xy+8y^2+23x-32y+30.$

14.　以 $2x+y-8z$ 乘 $x+7y-3z$.

[解]　$(x+7y-3z)(2x+y-8z)$

$=2x^2+(1+14)xy+7y^2-(6+8)xz-(3+56)yz+24z^2$

$=2x^2+15xy+7y^2-14xz-59yz+24z^2.$

15.　求積 $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$.

[解]　$(b+x)(b-x)(b^2+x^2)=(b^2-x^2)(b^2+x^2)=b^4-x^4.$

16.　求積 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

[解]　$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

$=[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x](x^4-x^2+1)$

$$=[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=[(x^4+1)+x^2][(x^4+1)-x^2]=(x^4+1)^2-x^4$$
$$=x^8+2x^4+1-x^4=x^8+x^4+1.$$

17 求積 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.

［解］ $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$
$$=[(y+z)^2-x^2][x^2-(y-z)^2]$$
$$=(y^2+2yz+z^2-x^2)(x^2-y^2+2yz-z^2)$$
$$=[2yz+(y^2+z^2-x^2)][2yz-(y^2+z^2-x^2)]$$
$$=4y^2z^2-(y^2+z^2-x^2)^2$$
$$=4y^2z^2-(y^4+z^4+x^4+2y^2z^2-2x^2y^2-2z^2x^2)$$
$$=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4.$$

18. 作 x^2+x+1 之開首四次乘冪之係數表。

［解］ x^2+x+1 之係數為 $1+1+1$, 其前四冪之係數可用下法求之。

$$\begin{array}{l}
1+1+1 \cdots\cdots\cdots\cdots x^2+x+1\text{之係數}\\
\underline{1+1+1}\,(\times\\
1+1+1\\
\quad 1+1+1\\
\qquad \underline{1+1+1}\,(+\\
1+2+3+2+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (x^2+x+1)^2\text{之係數}\\
\quad 1+2+3+2+1\\
\qquad \underline{1+2+3+2+1}\,(+\\
1+3+6+7+6+3+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (x^2+x+1)^3\text{之係數}\\
\quad 1+3+6+7+6+3+1\\
\qquad \underline{1+3+6+7+6+3+1}\,(+\\
1+4+10+16+19+16+10+4+1 \cdots (x^2+x+1)^4\text{之係數}
\end{array}$$

19. 續繼作 $a+b$ 之各次乘冪之係數表，至其十次冪為止。

［解］ 依 §312 之方法，得：

$1+1$, $1+2+1$, $1+3+3+1$, $1+4+5+4+1$, $1+5+10+10+5+1$, $1+6+15+20+15+6+1$, $1+7+21+35+35+21+7+1$, $1+8+28+56+70+56+28+8+1$, $1+9+36+84+126+126+84+36$

$+9+1$, $1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1$.

20. 求 $(4x-3y)^2$ 及 $(4x-3y)^3$.

［解］ $(4x-3y)^2=(4x)^2+2(4x)(-3y)+(-3y)^2$

$=16x^2-24xy+9y^2$.

$(4x-3y)^3=(4x)^3+3(4x)^2(-3y)+3(4x)(-3y)^2+(-3y)^3$

$=64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.

21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$.

［解］ $(x+2y+3z-4u)^2=[(x+2y)+(3z-4u)]^2$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)(3z-4u)+(3z-4u)^2$

$=x^2+4xy+4y^2+6xz+12yz-8xu-16yu+9z^2-24zu+16u^2$.

22. 求 $(x+2y+3z)^3$ 及 $(x+2y-3z)^3$.

［解］ $(x+2y+3z)^3=[(x+2y)+3z]^3$

$=(x+2y)^3+3(x+2y)^2(3z)+3(x+2y)(3z)^2+(3z)^3$

$=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3+3(x^2+4xy+4y^2)(3z)$

$+3(x+2y)(9z^2)+27z^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3+9x^2z+36xyz+36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2+27z^3$.

$(x+2y-3z)^3=[(x+2y)-3z]^3$

$=(x+2y)^3-3(x+2y)^2(3z)+3(x+2y)(3z)^2-(3z)^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-9x^2z-36xyz-36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2-27z^3$.

23. 以 $(a-2b)^2$ 乘 $(a+2b)^2$.

［解］ $(a+2b)^2(a-2b)^2=\{a^2-4b^2\}^2=a^4-8a^2b^2+16b^4$.

24. 求下積中 x^{29} 及 x^{15} 之係數：$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots\cdots+a_{26}x+a_{27})$ $(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots\cdots+b_{18}x+b_{19})$.

［解］ 此乘積之次數爲 $27+19=46$，而與項之次數之差爲 $46-29=17$.

故 x^{20} 之係數爲 $a_0b_{17}+a_1b_{16}+\cdots\cdots+a_{16}b_1+a_{17}b_0$.

同理 $46-15=31$ 及 $31-19=12$.

故 x^{15} 之係數爲 $a_{12}b_{19}+a_{13}b_{18}+\cdots\cdots+a_{27}b_4$.

25. 求下積中 x^6, x^8, 及 x^4 之係數: $(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8)$.

[解] x^6 之係數爲 $2(-8)+3(-3)+4\times2+(-7)(-1)+2\times3+(-5)0=-16-9+8+7+6+0=-4$.

x^8 之係數爲 $0(-8)+0\times3+2\times2+(-3)(-1)+4\times0+(-7)3+2\times0+(-5)0=0+0+4+3+0-21+0+0=-14$.

x^4 之係數爲 $4(-8)+(-7)3+0\times2+2(-1)+(-5)\times0=-32-21+0-2+0=-55$.

26. 證明下列各恆等式:

1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.

4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$.

[解] 1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$

$$=(x+y)^3+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)+z^3-x^3-y^3-z^3$$
$$=3xy(x+y)+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)$$
$$=3(x+y)[xy+z(x+y)+z^2]$$
$$=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$

$$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2$$
$$=(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$$

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=a^2x^2+b^2y^2-b^2x^2-a^2y^2$

$$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2-b^2x^2-2abxy-a^2y^2$$
$$=(ax+by)^2-(bx+ay)^2.$$

4. $(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$

$=a^3+3a^2(b+c)+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc.$

27. 簡化下列各乘冪：

$(2a^2x^3y^7)^5$, $(-x^5y^8z^9)^7$, $(a^2b^mc^3)^{2n}$, $(a^mb^nc^{2n})^n$.

［解］ $(2a^2x^3y^7)^5=32a^{10}x^{15}y^{35}$.

$(-x^5y^8z^9)^7=-x^{35}y^{56}z^{63}$.

$(a^2b^mc^3)^{2n}=a^{4n}b^{2mn}c^{6n}$.

$(a^mb^nc^{2n})^n=a^{mn}b^{n^2}c^{2n^2}$.

28. 簡化下列各積：

$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5$, $(-2^2xy^4)^3(ax^5y^{11})^2$.

［解］ $(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5=(-ab^2c^3)(a^6b^2)(-a^5c^{15})=a^{12}b^4c^{18}$.

$(-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2=(-8x^6y^{12})(a^2x^{10}y^{22})=-8a^2x^{16}y^{34}$.

習　題　IV　　第 110 頁

1. 以 $10ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^2$.

［解］ $15a^3bc^2/10ab^2c^2=3a^2/2b$.

2. 以 $-100ax^7z^9$ 除 $75x^2y^4z^{10}$.

［解］ $75x^2y^4z^{10}/-100ax^7z^9=-3y^4z/4ax^5$.

3. 以 $28x^my^{m+n}$ 除 $-35x^{2m}y^n$.

［解］ $-35x^{2m}y^n/28x^my^{m+n}=-5x^m/4y^m$.

4 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.

［解］ $-54\{(ab^2)^2c\}^5/-18\{a(b^2c)^2\}^3$

$=-54a^{10}b^{20}c^5/-18a^3b^{12}c^6=3a^7b^8/c$.

5. 以 x^2-y^2 除 x^2y-xy^2.

［解］ $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2}=\dfrac{xy(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{xy}{x+y}$.

6. 以 $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ 除 $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.

[解] $\dfrac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^4)}$

$=(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

7. 簡化 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}$

[解] $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}=\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{-(a-b)(b-c)^2[-(c-a)^3]}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$.

8. 簡化 $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$.

[解] $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^3c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}=-6abc+5a^2c^3-4a^3b^2c^4$.

9. 簡化 $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.

[解] $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$

$=\dfrac{(x-y)^2[3(x-y)^2-2(x-y)+5]}{(x-y)^2}=3(x-y)^2-2(x-y)+5$.

10. 簡化 $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div 6bc$.

[解] $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div 6bc$

$=4a^7\times 9a^2b^6c^4\div a^2b^2c^2\div 6bc=6a^7b^3c$.

11. 下式 (1) 依所示之順序演算，(2) 先去括號，以簡化之.

$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}$.

[解] $a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}=a^7\div\{a^5\div a^3\times a^2\}$

$=a^7\div a^4=a^3$.

或 $a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}$

$=a^7\div\{a^5\div a^4\times a^2\div a\times a^3\times a\div a^2\}$

$=a^7\div a^5\times a^4\div a^2\times a\div a^3\div a\times a^2=a^3$.

12. $2a(x^2y^3)^2$ 須乘何式始能得 $-4a^2(x^3y^2)^2$?

[解] $\dfrac{-4a^2(x^3y^2)^2}{2a(x^2y^3)^2}=\dfrac{-4a^2x^6y^4}{2ax^4y^6}=-\dfrac{2ax^2}{y^2}.$

習 題 V

第 119 頁

解下列各方程式:

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x).$

[解] 原式去括弧,

$$15-7+5x=2x+5-3x,$$

整理

$$8+5x=5-x,$$

$$6x=-3,$$

$$\therefore\ x=-\tfrac{1}{2}.$$

2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16.$

[解] 原式去括弧,

$$x^2+3x-4x^2+20x=15x-3x^2-16,$$

整理

$$-3x^2+23x=15x-3x^2-16,$$

$$8x=-16,$$

$$\therefore\ x=-2.$$

3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0.$

[解] 原式去括弧,

$$x^2+3x+2-x^2-7x-12=0,$$

整理

$$-4x=10,$$

$$\therefore\ x=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}.$$

4. $x=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{8}+\dfrac{x}{16}.$

[解] 移項, $x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{8}-\dfrac{x}{16}=1,$

整理

$$\frac{x}{16}=1,$$

$$\therefore\ x=16.$$

5. $x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2.$

［解］ 去括弧，

$$x-2[x-3x-12-5]=3\{2x-[x-8x+32]\}-2,$$

$$x-2x+6x+24+10=6x-3x+24x-96-2,$$

整理 $$22x=132,$$

$$\therefore\ x=6.$$

6. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1.$

［解］ 去括弧，

$$2\{3[20x-4-8]-20\}-7=1,$$

$$2\{60x-36-20\}-7=1,$$

$$120x-112-7=1,$$

整理 $$120x=120.$$

$$\therefore\ x=1.$$

7. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1.$

［解］ 去括弧，

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{20}x-\frac{1}{4}-6\right]+4\right\}=1,$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{60}x-\frac{1}{12}-2+4\right\}=1,$$

$$\frac{1}{120}x-\frac{1}{24}+1=1,$$

整理 $$\frac{1}{120}x=\frac{1}{24}.$$

$$\therefore\ x=5.$$

8. $3-\frac{5-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}.$

［解］ 原式可化爲

$$\frac{15-5+2x}{5}=\frac{40-4+7x+5x+10}{10},$$

去分母， $30-10+4x=40-4+7x+5x+10,$

整理 $8x=-26,$

$$\therefore\ x=-\frac{13}{4}.$$

9. $\dfrac{3x-1}{3}+3=-\dfrac{x-4}{6}+\dfrac{3x+5}{4}-2\dfrac{1}{2}.$

［解］ 原式可化爲 $\dfrac{3x-1+9}{3}=\dfrac{-2x+8+9x+15-30}{12},$

去分母， $12x+32=7x-7,$

整理 $5x=-39,$

$$\therefore\ x=-\frac{39}{5}.$$

10. $\dfrac{5x-0.4}{0.3}+\dfrac{1.3x-0.05}{2}=\dfrac{13.95-8x}{1.2}.$

［解］ 通分 $\dfrac{10x-0.8+0.39x-.015}{0.6}=\dfrac{13.95-8x}{1.2},$

去分母， $20x-1.6+0.78x-0.03=13.95-8x,$

整理 $28.78x=15.58,$

$$\therefore\ x=\frac{1558}{2878}=\frac{779}{1439}.$$

11. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c).$

［解］ 去括弧， $3cx-5a+b-2c=6b-a-3bx-2c,$

整理 $3cx+3bx=5b+4a.$

$$\therefore\ x=\frac{4a+5b}{3(b+c)}.$$

12. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x.$

［解］ 去括弧，

$ab-ac-bx+cx+bc-ab-cx+ax+ac-bc-ax+bx=1-x,$

整理 $1-x=0,$

$$\therefore\ x=1.$$

13. $\dfrac{x+1}{a+1}+\dfrac{x}{a}=2$, 用視察法.

[解] 以 $x=a$ 代入原式卽可適合，故 $x=a$ 爲原方程式之根.

14. $\dfrac{x+1}{a+b}+\dfrac{x-1}{a-b}=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$.

[解] 原方程式去分母，

$$(x+1)(a-b)+(x-1)(a+b)=2a,$$

去括弧，
$$ax+a-bx-b+ax-a+bx-b=2a,$$

整理
$$2ax-2b=2a,$$

$$\therefore\ x=\frac{a+b}{a}.$$

15. $\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)x=\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}-2x$,

[解] 通分
$$\left(\frac{m^2+n^2}{mn}\right)x=\frac{m^2-n^2}{mn}-\frac{2mnx}{mn},$$

移項整理
$$x\left(\frac{m^2+n^2+2mn}{mn}\right)=\frac{m^2-n^2}{mn},$$

$$x(m+n)^2=(m+n)(m-n),$$

$$\therefore\ x=\frac{m-n}{m+n}.$$

16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

[解] 原方程式與下列四方程式同根.

$$2x-1=0,\ 3x-1=0,\ 4x+1=0,\ 5x+2=0.$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{5}.$$

17. $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$.

[解] 移項，分解因式

$$(x^2-x)(2x-5-x-9)=0,$$

$$x(x-1)(x-14)=0,$$

$$\therefore\ x=0,\ 1,\ 14.$$

18. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16.$

[解] 將原方程式,展開

$$x^3+6x^2+12x+8-x^3+6x^2-12x+8=32x+16,$$

化簡 $$12x^2-32x=0,$$

$$x(12x-32)=0,$$

$$\therefore\ x=0,\ 2\tfrac{2}{3}.$$

19. $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2.$

[解] 去括弧, $(ax+bx-c)^2=(ax-bx+c)^2,$

移項 $$(ax+bx-c)^2-(ax-bx+c)^2=0,$$

分解因式,

$$[(ax+bx-c)+(ax-bx+c)][(ax+bx-c)-(ax-bx+c)]=0,$$

即 $$2ax(2bx-2c)=0,$$

$$\therefore\ 4ax(bx-c)=0,$$

$$\therefore\ x=0,\ \frac{c}{b}.$$

20. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0.$

[解] 原式可化為

$$(x-1)^4-(x-1)^2(x-3)^2=0,$$

分解因式, $(x-1)^2[(x-1)^2-(x-3)^2]=0,$

$$(x-1)^2(x^2-2x+1-x^2+6x-9)=0,\ 即\ (x-1)^2(4x-8)=0.$$

$$\therefore\ (x-1)^2=0,\ 4x-8=0,$$

$$\therefore\ x=1,\ 1,\ 2.$$

習 題 VI　　第 120 頁

1. 有二位之數,其數字和為 14. 若將數字易位,則得較原數多 18 之數,原數若何.

[解] 設 x 為十位數字,則個位數字為 $14-x$,原數為 $10x+(14-x)$,其易位數為 $10(14-x)+x$.

依題意得方程式

$$10x+(14-x)=10(14-x)+x-18,$$

整理 $$10x+14-x=140-10x+x-18,$$

$$18x=108,\quad \therefore\ x=6,\quad 14-x=8.$$

[答] 原數爲 68.

2. 156 須以何數除之始能得商 11 而餘 2?

[解] 設 x 爲所求數,則 $\dfrac{156}{x}=11+\dfrac{2}{x}$,

去分母 $$156=11x+2,\quad \therefore\ x=\frac{154}{11}=14.$$

[答] 所求數爲 14.

3. 有兩數,其差爲 298, 若以小數除大數,商及餘皆爲 12. 兩數若何?

[解] 設 x 爲小數,則 $x+298$ 爲大數,

故得方程式 $$\frac{x+298}{x}=12+\frac{12}{x},$$

去分母 $$x+298=12x+12,\ 即\ 11x=286.$$

$$\therefore\ x=\frac{286}{11}=26,\quad x+298=26+298=324.$$

[答] 小數爲 26, 大數爲 324.

4. 有二位之數,其十位數字爲個位數字之二倍. 十位數字加 1 而個位數字加 5 所得之數,三倍於易位數中十位數字減 1 而個位數字減 5 所得之數. 此數若何?

[解] 設 x 爲個位數字,則 $2x$ 爲十位數字,

依題意得方程式

$$10(1+2x)+(5+x)=3[10(x-1)+(2x-5)].$$

去括弧整理 $$10+20x+5+x=30x-30+6x-15,$$

$$即\ 15x=60,\quad \therefore\ x=4,\quad 2x=8.$$

[答] 原數爲 84.

5. 有一數，減 2 後乘 4，等於乘 2 後加較此數少 1 之數之半。此數若何？

［解］ 設 x 爲所求數，則依題意得方程式

$$4(x-2)=2x+\tfrac{1}{2}(x-1).$$

去括弧，整理 $\quad 8x-16=4x+x-1,$

即 $\quad 3x=15, \quad \therefore\ x=5.$

［答］ 所求數爲 5.

6. 父年今爲子年之四倍。自今 20 年後，若父子尙存，則父年爲子年之二倍。父子今各幾歲？又自今幾年後父年爲子年之三倍？

［解］ 設 x 爲子現年，則 $4x$ 爲父現年，依題意得

$$4x+20=2(x+20),\ \text{即}\ 4x+20=2x+40.$$

$$\therefore\ x=10, \quad 4x=40.$$

［答］ 父現年 40 歲，子現年 10 歲.

又 $40+x=3(10+x)$，解之，得 $x=5$，即 5 年後父年爲子年之三倍。

7. 有一水槽，其第一管能於 3 小時中注滿之，其第二管能於 2 小時中排盡之，其第三管則能於 4 小時中排盡之，若於水滿時同開三管，則幾時可以排盡？

［解］ 設經 x 時後槽水方能洩盡，則每小時可洩一槽之 $\dfrac{1}{x}$，而因第一管可注入一槽之 $\frac{1}{3}$，第二第三管各可洩一槽之 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{4}$ 故得方程式

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}, \quad \therefore\ 5x=12.$$

$$\therefore\ x=\frac{12}{5}=2.4\ \text{時}.$$

［答］ 二時二十四分鐘洩盡。

8. 一事 A 及 B 協力作之，10 日可成；但僅七日而 A 病，B 又獨作 5 日乃成。如兩人皆獨作之，各幾日可成？

［解］ 設 x 爲 A 獨作所需之日數；y 爲 B 獨作所需之日數 則 A, B

每日各作全工程之 $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{y}$.

依題意得方程式
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\quad\cdots\cdots(1)$$
$$7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{5}{y}=1\quad\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) 兩式聯立,以 (1) 代入 (2) 得 $\frac{7}{10}+\frac{5}{y}=1$.

$$\therefore\ \frac{5}{y}=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}.\quad \therefore\ y=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}\text{ 日}.$$

以 y 之值代入 (1) $\quad \frac{1}{x}+\frac{3}{50}=\frac{1}{10},\quad \therefore\ x=25$ 日.

[答] A 獨作需 25 日, B 獨作需 $16\frac{2}{3}$ 日,始能完工.

9. 在八時與九時之間,時計之兩針何時重合?何時成一直線?

[解] 設 x 及 y 各爲長短針相重及相反成一直線時之分數,則 $\frac{x}{12}$ 及 $\frac{y}{12}$ 爲短針在該時間內所行之分數,

$$\therefore\ x=40+\frac{x}{12}\ (1)\ 及\ y=40+\frac{y}{12}-30\ (2).$$

從 (1) $\quad \frac{11}{12}x=40,\quad \therefore\ x=\frac{480}{11}=43\frac{7}{11}$ 分.

從 (2) $\quad \frac{11}{12}y=10,\quad \therefore\ y=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$ 分.

[答] 二針相重時爲 8 時 $43\frac{7}{11}$ 分,相反成直線時爲 8 時 $10\frac{10}{11}$ 分.

10. 四時後幾時時計之兩針成一直角?

[解] 設 x 爲分針所行之分數,則 $\frac{x}{12}$ 爲時針所行之分數.

$$\therefore\ x=20+\frac{x}{12}-15.\ 即\ \frac{11}{12}x=5.$$

$$\therefore\ x=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}\text{分}.$$

[答] 四時 $5\frac{5}{11}$ 分二針成直角。

11. 有一不準確之時計，其時針分針兩次之重合，中隔 66 分之時間。此時計之誤差若何 (每小時幾秒)?

[解] 設 x 爲時針與分針連續相重二次間之正確分數。

則
$$x=60+\frac{x}{12},\ \text{即}\ \frac{11}{12}x=60.$$

$$\therefore\ x=65\ \text{分}\ 27\ \text{秒}.$$

[答] 每小時之錯誤爲 $\dfrac{(66'-65'27'')60'}{65'27''}=30$ 秒.

12. A, B, C, D 四人，分金 1300 圓。B 所得 $\frac{2}{3}$ 倍於 A, C 所得 $\frac{2}{3}$ 倍於 B, D 所得 $\frac{2}{3}$ 倍於 C, 各得幾何?

[解] 設 A 得 x 圓, 則 B 得 $\frac{2}{3}x$ 圓, C 得 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x$ 即 $\frac{4}{9}x$ 圓,同時 D 得 $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}x$ 即 $\frac{8}{27}x$ 圓.依題意得方程式

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}x=1300.$$

去分母,整理

$$x=540,\quad \therefore\ \frac{2}{3}x=360,\ \frac{4}{9}x=240,\ \frac{8}{27}x=160.$$

[答] A 得 540 圓, B 得 360 圓, C 得 240 圓, D 得 160 圓.

13. 某人以財產之 $\frac{1}{2}$ 又 1000 圓分與長子,所餘之 $\frac{1}{2}$ 又 1000 圓分與次子,再餘之 $\frac{1}{2}$ 又 1000 圓分與幼子.若仍餘 3500 圓,則此人財產總數若何?

[解] 設 x 爲財產總數。

$$\left(\frac{x}{2}+1000\right)+\left[\frac{x-(\frac{x}{2}+1000)}{2}+1000\right]$$
$$+\left[\frac{x-\left\{\left(\frac{x}{2}+1000\right)+\left[\frac{x-(\frac{x}{2}+1000)}{2}+1000\right]\right\}}{2}+1000\right]$$
$$+3500=x,$$

$$\therefore\ x=42000\ 圓.$$

［答］ 財產總數爲 42000 圓.

14. 有一正方形，如每邊各增 2 尺，其面積增大 100 平方尺，此正方形之面積若何？

［解］ 設正方形之邊長爲 x 尺，

則 $$x^2+100=(x+2)^2=x^2+4x+4$$

$$\therefore\ x=24\ 尺,\quad x^2=576\ 平方尺.$$

［答］ 面積爲 576 平方尺.

15. 有一旗杆，不知其高，但知杆頂所繫之索較杆長 2 尺，如引之則下端及地之處距杆足 18 尺，旗杆之高若何？

［解］ 設杆長爲 x 尺，則繩長爲 $(x+2)$ 尺.

$$\therefore\ (x+2)^2=x^2+\overline{18}^2,\qquad \therefore\ x=80\ 尺.$$

［答］ 杆長 80 尺.

16. 錢袋中，半圓銀幣之枚數爲一圓銀幣枚數之二倍，一角銀幣之枚數則爲其三倍，如三種銀幣之總金額爲 11.50 圓，三種銀幣各幾枚？

［解］ 設袋中有一圓幣 x 枚，則半圓幣有 $2x$ 枚，一角幣有 $3x$ 枚，依題意得方程式 $x+0.5(2x)+0.1(3x)=11.5$.

$$\therefore\ x=5.$$

［答］ 袋中有一圓者 5 枚，半圓者 10 枚，一角者 15 枚.

17. 某人投資共 5000 圓，一部分利率 6%，又一部分利率 4%，而全部投資之平均利率則爲 $5\frac{1}{2}$% 兩種利率之投資各幾何？

［解］ 設利率 6% 之存款爲 x 圓. 則利率 4% 之存款爲 $5000-x$ 圓.

$$\frac{6}{100}x+\frac{4}{100}(5000-x)=\frac{5.5}{100}\times 5000,$$

$$\therefore\ x=3750\ 圓,\qquad 5000-x=1250\ 圓.$$

[答] 利率 4% 之存款爲 1250 圓，6% 之存款爲 3750 圓.

18. 每磅價 2 角及 3 角之兩種咖啡，須以何種比混合，始能得每磅價 2 角 6 分者?

[解] 設 $x:1$ 爲所求之比.

$$20x+30=26(1+x),$$

$$\therefore\ x=\tfrac{2}{3}.$$

[答] 二種咖啡以 2 : 3 混合始成每磅價 2 角 6 分.

19. 有一磅合金，含二分銀三分銅.欲得含三分銀七分銅之合金，須加入銅幾何?

[解] 設每磅合金內須加入銅 x 磅，

則 $$\frac{3}{5}+x=\frac{7(x+1)}{3+7},\ \text{卽}\ 6+10x=7x+7.$$

$$\therefore\ 3x=1,\qquad \therefore\ x=\tfrac{1}{3}.$$

[答] 每磅合金內須加入銅 $\frac{1}{3}$ 磅.

20. 一加侖之液體，加一定量之水後，含酒精 30%；如所加之水二倍於今,則含酒精 20%. 每次各加水幾何? 又原液體所含酒精之百分率若何?

[解] 設初次所加之水量爲 x 加侖，則此液體所含酒精應爲 $\frac{30}{100}(x+1)$ 加侖.若加水 $2x$ 加侖,則所含酒精應爲 $\frac{20}{100}(2x+1)$ 加侖，

但酒精重量不變， $$\therefore\ \frac{30}{100}(x+1)=\frac{20}{100}(2x+1).$$

化簡 $$30x+30=40x+20,$$

$$\therefore\ x=1,\quad 2x=2.$$

$$\frac{30}{100}(x+1)=\frac{30}{100}(1+1)=60\%.$$

[答] 第一次加水一加侖，第二次加水二加侖，酒精在原液體中佔 60%.

21. 一列車以每小時45哩之速率於午前10時由費城向澤稷出發，又一列車以每小時50哩之速率於午前10時30分由澤稷向費城出發，假定澤稷與費城相距90哩，何時兩列車相會，又相會處至澤稷之距離若何？

［解］ 設x爲二車相遇時距澤稷城之哩數，則$90-x$爲距費城之哩數。而$\frac{90-x}{45}$及$\frac{x}{50}$各爲二列車自出發至相遇所行之時數，故得方程式

$$\frac{90-x}{45}=\frac{x}{50}+\frac{1}{2}.$$

化簡 $900-10x=9x+225,\quad \therefore x=35\frac{10}{19}$ 哩.

$$\frac{x}{50}=\frac{1}{50}\times 35\frac{10}{19}=\frac{675}{19}\times\frac{1}{50}=\frac{27}{38}.$$

$\therefore$ 相遇時間爲 $10\frac{1}{2}+\frac{27}{38}=\frac{21}{2}+\frac{27}{38}=11\frac{2}{38}=11\frac{1}{19}.$

［答］ 二車在$11\frac{1}{19}$時卽11時$12\frac{12}{19}$分相遇，其相遇地點距澤稷城$35\frac{10}{19}$哩。

22. 若兩列車於前題中所述之時間出發，而會於距澤稷及費城等遠之處，又若較慢之列車速率$\frac{3}{5}$倍於較快之列車，則兩列車之速率各若何，又何時相會？

［解］ 設快車之速率爲每時x哩，則慢車之速率爲每時$\frac{3}{5}x$哩，故得方程式

$$\frac{45}{\frac{3}{5}x}=\frac{45}{x}+\frac{1}{2}.$$

化簡 $45\times\frac{5}{3x}=\frac{45}{x}+\frac{1}{2}$，卽 $90\times 5=270+3x.$

$$\therefore x=60,\quad \tfrac{3}{5}x=36,$$

且 $\frac{45}{x}+\frac{1}{2}+10=\frac{45}{60}+\frac{1}{2}+10=\frac{75}{60}+10=11\frac{15}{60}$ 時 $=$ 11時15分。

［答］ 快車之速率爲每時60哩；慢車每時36哩；二車相遇之時間爲11時15分。

23. 兔先行 50 步，狐追之．兔行 5 步時狐能行 4 步，但狐之 2 步等於兔之 3 步．兔再行幾步狐始追及？

［解］ 設 x 為兔被狐追及以前所行之步數，則兔行 x 步時狐行 $\frac{4}{5}x$ 步，再設兔每步之距離為 a，則狐每步之距離為 $\frac{3}{2}a$.

依題意得方程式 $$a(x+50)=\tfrac{4}{5}x\cdot\tfrac{3}{2}a.$$

化簡 $$5x+250=6x,\quad \therefore\ x=250.$$

［答］ 兔再行 250 步時被狐追及．

24. 若 19 兩之金於水中秤之重 18 兩，而 10 兩之銀於水中秤之重 9 兩，則金銀之某種合金 387 兩於水中秤之重 351 兩者，中有金銀各幾兩？

［解］ 設合金內含金 x 兩，則含銀應為 $387-x$ 兩．

依題意，金在水中，其重失去 $\dfrac{x}{19}$ 兩，銀在水中失去 $\dfrac{387-x}{10}$ 兩，

故得方程式 $$\frac{x}{19}+\frac{387-x}{10}=387-351.$$

化簡 $$10x+19(387-x)=190\times36,$$

$$\therefore\ x=57,\qquad 387-x=330.$$

［答］ 合金中含金 57 兩，含銀 330 兩．

25. 某人持金若干作旅行，每日用去晨起時所有之 $\frac{1}{2}$ 又 2 圓，三日而金盡．最初持金幾何？

［解］ 設此人有金 x 圓，則

$$x=\left(\frac{x}{2}+2\right)+\left\{\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2\right\}+\left\{\frac{x-\left[\left(\frac{x}{2}+2\right)+\left(\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2\right)\right]}{2}+2\right\}$$

$$\therefore\ x=28\ \text{圓}.$$

［答］ 此人原有金 28 圓．

26. 有一角錐，底為正方形，側面諸三角形之高各等於底之一邊．若所述之邊及高各增 3 寸，則角錐之全面積應增 117 平方寸．角錐之全面積若何？

［解］ 設側面三角形底邊及高之長爲 x 寸，即角錐之面積爲 $4\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^2$.

$$4\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^2+117=4\left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]+(x+3)^2.$$

$$\therefore\ x=5\ \text{寸}.$$

$$4\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^2=75\ \text{平方寸}.$$

［答］ 角錐之全面積爲 75 平方寸.

27. 有二位之數，其數字和爲 a. 如將數字易位，則得較原數多 b 之數，原數若何？證明欲得適合問題之解，必須 $9a \geqq b$ 且 $9a+b$ 及 $9a-b$ 皆能爲 18 所整除.

［解］ 設 x 爲個位數字，$a-x$ 爲十位數字，則原數爲 $10(a-x)+x$，易位數爲 $10x+(a-x)$.

$$\therefore\ 10(a-x)+x=10x+(a-x)-b$$

$$\therefore\ x=\frac{9a+b}{18},\ a-x=\frac{9a-b}{18}.\ \text{（答）}$$

因數字必須爲正整數，故 $9a$ 須 $\geqq b$，且 $9a+b$ 及 $9a-b$ 必須被 18 除盡.

28. A 及 B 現今各爲 a 歲及 b 歲，能有 A 年爲 B 年 c 倍之時否？又若然，則在何時？

將結果就 a, b, c 之各種值討論之，如 § 354.

［解］ 設 x 年後 A 年能爲 B 年之 c 倍，

則 $$a+x=c(b+x)=cb+cx.$$

$$\therefore\ x(c-1)=a-bc, \quad \therefore\ x=\frac{a-bc}{c-1}.$$

1. 若 $c>1$，而 $a<bc$ 或 $c<1$ 而 $a>bc$，則 $x<0$.

即 x 年前 A 年爲 B 年之 c 倍.

2. 若 $c>1$，而 $a>bc$ 或 $c<1$ 而 $a<bc$，則 $x>0$.

即 x 年後 A 年爲 B 年之 c 倍.

3. 若 $c\neq 1$，而 $a=bc$，則 $x=0$.

即現時 A 年爲 B 年之 c 倍。

4. 若 $c=1$，而 $a\neq b$ 則 $x=\dfrac{a-bc}{0}$.

即無論何時 A 年不能爲 B 年之 c 倍。

5. 若 $c=1$，而 $a=b$，則 $x=\dfrac{0}{0}$,

即無論何時 A 年均爲 B 年之 c 倍。

習題 VII 第 134 頁

就 x 及 y 解下列方程組：

1. $\begin{cases} x+y=62 \cdots\cdots(1) \\ x-y=12 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] (1)+(2)，得 $2x=74$,

$$\therefore\ x=37.$$

$$\therefore\ y=62-x=25.$$

2. $\begin{cases} 6x-5y=25 \cdots\cdots(1) \\ 4x-3y=19 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] (1)×2 $12x-10y=50 \cdots\cdots(3)$

(2)×3 $12x-\ \ 9y=57 \cdots\cdots(4)$

(4)−(3), $y=7$.

$$\therefore\ x=\frac{19+3y}{4}=10.$$

3. $\begin{cases} 45x-13y=161 \cdots\cdots(1) \\ 18x+11y=32 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] (1)×2 $90x-26y=322 \cdots\cdots(3)$

(2)×5 $90x+55y=160 \cdots\cdots(4)$

(3)−(4), $-81y=162$,

$$\therefore\ y=-2.$$

$$\therefore\ x=\frac{32-11y}{18}=3.$$

4. $\begin{cases} x-3=7-x \cdots\cdots(1) \\ 8x-3y-61=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 式，　$2x=10,\quad \therefore\ x=5.$

代入 (2) 式，　$40-3y-61=0,$

$$3y=-21,\quad \therefore\ y=-7.$$

5. $\begin{cases} 12x=9-10y \cdots\cdots(1) \\ 8y=7-9x \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 式，　$x=\frac{9-10y}{12}.$

代入 (2) 式，　$8y=7-9\times\frac{9-10y}{12}=\frac{28-27+30y}{4},$

$$32y=1+30y,$$

$$2y=1,\quad \therefore\ y=\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\ x=\frac{9-10y}{12}=\frac{1}{3}.$$

6. $\begin{cases} 2y-3x=0 \cdots\cdots(1) \\ 5x-3y-2=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 式，　$y=\frac{3x}{2},$

代入 (2) 式，　$5x-3\times\frac{3x}{2}=2,$

$$\therefore\ x=4.$$

$$\therefore\ y=\frac{3x}{2}=6.$$

7. $\begin{cases} x/0.3+5y=3\frac{1}{2} \cdots\cdots(1) \\ 5x+3y=1.65 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] (1)×1.5 得　$5x+7.5y=5.25 \cdots\cdots(3)$

(3)－(2)，　$4.5y=3.6,$

$$\therefore\ y=0.8.$$

從 (2) 式，
$$x=\frac{1.65-3y}{5}=-0.15.$$

8. $\begin{cases}2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \cdots\cdots (1)\\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \cdots\cdots (2)\end{cases}$

[解] 從 (1) 式， $4x+6y=6x-9y+10,$

$$2x-15y=-10 \cdots\cdots (3)$$

從 (2) 式， $4x-3y=24y-8x+3,$

$$4x-9y=1 \cdots\cdots (4)$$

$(3)\times 2-(4)$， $-21y=-21,\quad \therefore\ y=1.$

以 y 之值代入 (3)， $2x=15y-10=5,\quad \therefore\ x=\frac{5}{2}.$

9. $\begin{cases}(x+2)(y+1)=(x-5)(y-1) \cdots\cdots (1)\\ x(4+y)=-y(8-x) \cdots\cdots (2)\end{cases}$

[解] 從 (1) 式，$xy+2y+x+2=xy-5y-x+5,$

$$2x+7y=3 \cdots\cdots (3)$$

從 (2) 式， $4x+xy=-8y+xy,$

$$x=-2y \cdots\cdots (4)$$

代入 (3) 式， $-4y+7y=3,$

$$3y=3,\quad \therefore\ y=1.$$

$$\therefore\ x=-2y=-2.$$

10. $\begin{cases}ax+by=a^2+2a+b^2 \cdots\cdots (1)\\ bx+ay=a^2+2b+b^2 \cdots\cdots (2)\end{cases}$

[解] $(1)-(2)$， $ax-bx+by-ay=2(a-b),$

$$(a-b)(x-y)=2(a-b),$$

$$x-y=2,$$

$$x=2+y \cdots\cdots (3)$$

以 (3) 代入 (1) 式， $a(2+y)+by=a^2+2a+b^2,$

卽 $2a+y(a+b)=a^2+2a+b^2,$

$$\therefore\ y=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

$$\therefore\ x=2+y=2+\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

11. $\begin{cases} ax+by=c \quad \cdots\cdots(1) \\ px=qy \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (2) 式，$x=\dfrac{qy}{p}$,

代入 (1) 式，$a\left(\dfrac{qy}{p}\right)+by=c$,

$$aqy+bpy=pc,$$

$$\therefore\ y=\frac{pc}{aq+bp}.$$

$$\therefore\ x=\frac{qy}{p}=\frac{qc}{aq+bp}.$$

12. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) \quad \cdots\cdots(1) \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2) \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] $(1)-(2)$, $-2bx+2by=-4b^2$,

$$x-y=2b \quad \cdots\cdots(3)$$

$(1)+(2)$, $2ax+2ay=4a^2$,

$$x+y=2a \quad \cdots\cdots(4)$$

$(3)+(4)$, $2x=2a+2b$,

$$\therefore\ x=a+b.$$

$$\therefore\ y=x-2b=a-b.$$

13. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=5 \quad \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=7 \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 式，$2x+2y+3y-3x=30 \quad \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，$9x+2x+2y=126 \quad \cdots\cdots(4)$

從 (3) 式, $5y-x=30$ ……(5)

從 (4) 式, $11x+2y=126$ ……(6)

(5)×11 $55y-11x=330$ ……(7)

(6)+(7), $57y=456$,

$\therefore\ y=8.$

$\therefore\ x=5y-30=10.$

14. $\begin{cases}\dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6} & \cdots\cdots(1)\\ 5x-2y+6=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

[解] 從 (1) 式, $3x-3y-2x-4y+10=3y-9-2y-4x+10.$

$5x-8y+9=0$ ……(3)

(2)−(3), $6y-3=0.$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}.$

$\therefore\ x=\dfrac{-6+2y}{5}=-1.$

15. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c} & \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c'} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

[解] $(1)\times\dfrac{1}{b'}$ $\dfrac{x}{ab'}+\dfrac{y}{bb'}=\dfrac{1}{b'c}$ ……(3)

$(2)\times\dfrac{1}{b}$ $\dfrac{x}{a'b}-\dfrac{y}{bb'}=\dfrac{1}{bc'}$ ……(4)

(3)+(4), $x\left[\dfrac{a'b+ab'}{aa'bb'}\right]=\dfrac{bc'+b'c}{bb'cc'}.$

$\therefore\ x=\dfrac{(bc'+b'c)aa'}{(a'b+ab')cc'}.$

$(1)\times\dfrac{1}{a'}$ $\dfrac{x}{aa'}+\dfrac{y}{a'b}=\dfrac{1}{a'c}$ ……(5)

$(2)\times\dfrac{1}{a}$ $\dfrac{x}{aa'}-\dfrac{y}{ab'}=\dfrac{1}{ac'}$ ……(6)

(5) − (6), $$y\left[\frac{ab'+a'b}{aa'bb'}\right]=\frac{ac'-a'c}{aa'cc'}.$$

$$\therefore\ y=\frac{(ac'-a'c)bb'}{(ab'+a'b)cc'}.$$

16 $$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x\cdots\cdots(1)\\[2mm] \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

[解] (1) − (2), $$\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]x-\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]y=x-y.$$

$$(x-y)\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]=x-y.$$

$$(x-y)\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-1\right]=0.$$

$$\therefore\ (x-y)=0.$$

$$x=y\cdots\cdots(3)$$

代入 (1) 式, $$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1+x$$

$$x\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right]=1,$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{\dfrac{a+b-ab}{ab}}=\frac{ab}{a+b-ab}.$$

從 (3) 式, $$y=\frac{ab}{a+b-ab}.$$

17. 試證下二方程式爲矛盾方程式。

$$\begin{cases}1\tfrac{1}{2}x-2\tfrac{1}{2}y=10\cdots\cdots(1)\\ 6x-10y=15\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

[解] 從 (1) 式, $$3x-5y=20\cdots\cdots(3)$$

(3) × 2 $$6x-10y=40\cdots\cdots(4)$$

(4)−(2), 得 $$0=25.$$

因 $0\neq25$, (不合理), 故原二方程式無公解, 即原二方程式爲矛盾。

18. 於題 15 中指定 a, b, c, a', b', c' 之值, 使方程式成爲 (1) 矛盾方程式, (2) 相依方程式。

[解] (1) 設 a, b, c, a', b', c' 爲 2, 6, 5, 1, −3, 4 各數,

則二式爲 $$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=\frac{1}{5} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=\frac{1}{4} \quad\cdots\cdots(2)$$

(2)×$\frac{1}{2}$ $$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=\frac{1}{8} \quad\cdots\cdots(3)$$

(1)−(3) $$0=\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{8}.$$

但 $0=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$ 爲不合理, 故二方程式矛盾。

(2) 設 a, b, c, a', b', c' 爲 2, 6, 10, 1, −3, 5 各數,

則二式爲 $$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=\frac{1}{10} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=\frac{1}{5} \quad\cdots\cdots(2)$$

(2)×$\frac{1}{2}$ $$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=\frac{1}{10} \quad\cdots\cdots(3)$$

(1)−(3) $$0=0.$$

故二方程式爲相依。

習題 VIII 第 136 頁

解下列各方程組:

1. $$\begin{cases}\dfrac{7}{2x}+\dfrac{1}{3y}=0 & \cdots\cdots(1)\\[2mm] \dfrac{3}{x}+\dfrac{14}{y}+3=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

[解] (1)×42 $$\frac{147}{x}+\frac{14}{y}=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

(3)－(2)，
$$\frac{144}{x}-3=0,$$
$$\therefore\ x=\frac{144}{3}=48.$$

從 (1) 式，
$$21y+2x=0,$$
$$\therefore\ y=-\frac{2x}{21}=-\frac{32}{7}.$$

2. $$\begin{cases}10x+\dfrac{6}{y}=5 \cdots\cdots (1)\\ 15x+\dfrac{10}{y}=8 \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

[解] (1)×3
$$30x+\frac{18}{y}=15 \cdots\cdots (3)$$

(2)×2
$$30x+\frac{20}{y}=16 \cdots\cdots (4)$$

(4)－(3)，
$$\therefore\ \frac{2}{y}=1,$$
$$\therefore\ y=2.$$

代入 (1) 式，
$$10x+3=5,$$
$$\therefore\ x=\frac{5-3}{10}=\frac{1}{5}.$$

3. $$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\dfrac{2(3-y)}{x}+\dfrac{3}{2} \cdots\cdots (1)\\ \dfrac{y+3}{x}=\dfrac{3y-5}{x}+1 \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

[解] 從 (1) 式，
$$2y=12-4y+3x.$$
$$2y-x=4 \cdots\cdots (3)$$

從 (2) 式，
$$y+3=3y-5+x.$$
$$2y+x=8 \cdots\cdots (4)$$

(4)－(3)，
$$2x=4.$$
$$\therefore\ x=2.$$

(4)+(3), $4y=12.$

$\therefore\ y=3.$

4. $\begin{cases} xy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (x+2y-1)(3x-y+2)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 得 $x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

及 $y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

從 (2) 得 $x+2y-1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

及 $3x-y+2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

以 (3) 及 (5) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

以 (3) 及 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array}\right\}$

以 (4) 及 (5) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right\}$

以 (4) 及 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3} \\ y=0 \end{array}\right\}$

5. $\begin{cases} xy-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-8y+5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 得 $y(x-1)=0$ 卽 $y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

及 $x-1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以 (3) 與 (2) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3} \\ y=0 \end{array}\right\}$

以 (4) 與 (2) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right\}$

6. $\begin{cases} x(x-y)(x+y)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+2y-5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 得 $x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$x-y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$$x+y=0 \cdots\cdots(5)$$

以 (3) 與 (2) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{5}{2} \end{array}\right\}$

以 (4) 與 (2) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{array}\right\}$

以 (5) 與 (2) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=-5 \\ y=5 \end{array}\right\}$

7. $\begin{cases} (x-1)(y-2)=0 \cdots\cdots(1) \\ (x-2)(y-3)=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 得 $x-1=0 \cdots\cdots(3)$

$y-2=0 \cdots\cdots(4)$

從 (2) 得 $x-2=0 \cdots\cdots(5)$

$y-3=0 \cdots\cdots(6)$

以 (3) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right\}$

以 (4) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}\right\}$

8. $\begin{cases} y^2=(x-1)^2 \cdots\cdots(1) \\ 2x+3y-7=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) $y=\pm(x-1)$ 即 $x-y-1=0 \cdots\cdots(3)$

$x+y-1=0 \cdots\cdots(4)$

以 (2) 與 (3) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$

以 (2) 與 (4) 聯立得 $\left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y=5 \end{array}\right\}$

9. $\begin{cases} (2x+y)^2=(x-3y+5)^2 \cdots\cdots(1) \\ (x+y)^2=1 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) $2x+y=\pm(x-3y+5)$ 即 $x+4y-5=0 \cdots\cdots(3)$

$$3x-2y+5=0\cdots\cdots(4)$$

從 (2) $x+y=\pm1$ 卽 $x+y-1=0\cdots\cdots(5)$

$$x+y+1=0\cdots\cdots(6)$$

以 (3) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=-\tfrac{1}{3}\\ y&=\tfrac{4}{3}\end{aligned}\right\}$

以 (3) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=-3\\ y&=2\end{aligned}\right\}$

以 (4) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=-\tfrac{3}{5}\\ y&=\tfrac{8}{5}\end{aligned}\right\}$

以 (4) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=-\tfrac{7}{5}\\ y&=\tfrac{2}{5}\end{aligned}\right\}$

10. $\begin{cases}(x-5y+8)(x+3y+5)=0\cdots\cdots(1)\\ (2x+y+5)(5x+2y-14)=0\cdots\cdots(2)\end{cases}$

[解] 從 (1) 得 $x-5y+8=0\cdots\cdots(3)$

$$x+3y+5=0\cdots\cdots(4)$$

從 (2) 得 $2x+y+5=0\cdots\cdots(5)$

$$5x+2y-14=0\cdots\cdots(6)$$

以 (3) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=-3\\ y&=1\end{aligned}\right\}$

以 (3) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=2\\ y&=2\end{aligned}\right\}$

以 (4) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=-2\\ y&=-1\end{aligned}\right\}$

以 (4) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{aligned}x&=4\\ y&=-3\end{aligned}\right\}$

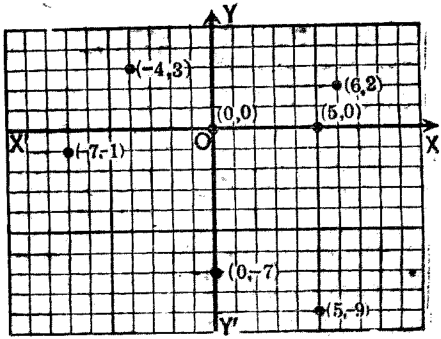
習 題 IX

第 143 頁

1. 作 x 及 y 下列各組値之圖象。

$(0,0)$, $(5,0)$, $(0,-7)$, $(6,2)$, $(-7,-1)$, $(-4,3)$, $(5,-9)$.

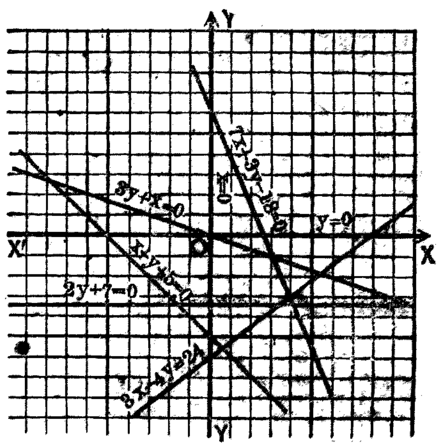
[解] 如圖，每格爲一單位。



2. 求下列各方程式之圖象。

$$x=0,\ y=0,\ 2y+7=0,\ 3y+x=0,\ x+y+5=0,$$
$$7x+3y-18=0,\ 3x-4y=24.$$

[解] 如圖，每格爲一單位。



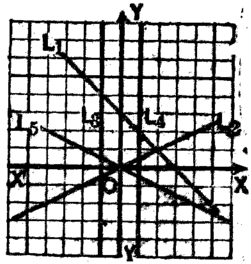
3. 求下列各方程式之圖象。

$$xy=0,\ (x+y-3)(x-2y)=0,\ x^2-1=0,\ x^2=4y^2,\ x^2+y^2=0.$$

[解] 1. $xy=0$ 與下二式同値，

$$x=0,\ y=0.$$

其圖爲 y 軸及 x 軸。



2. $(x+y-3)(x-2y)=0$ 與下二式同値，

$$x+y-3=0,\ x-2y=0.$$

其圖爲 L_1 及 L_2.

3. $x^2-1=0$ 與下二式同値，

$$x+1=0,\quad x-1=0\ .$$

其圖爲 L_3 及 L_4.

4. $x^2=4y^2$ 與下二式同値， $x+2y=0,\ x-2y=0.$

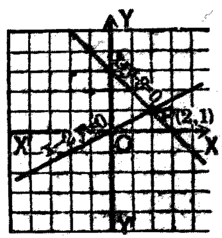
其圖爲 L_5 及 L_2.

5. $x^2+y^2=0$ 之圖象爲原點 O.

4. 用圖示法求下二方程組之解，幷用代數方法驗算。

(1) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3y+2x+19=0, \\ 2y-3x+4=0. \end{cases}$

[解] (1) 作原二方程式之二直線如圖，其交點爲 $P(2,\ 1)$.



再以原二方程式聯立得 $x=2,\ y=1.$

(2) 作原二方程式之二直線如圖，其交點爲

$$Q(-2,\ -5),$$

再以原二方程式聯立

$$\begin{cases} 3y+2x+19=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2y-3x+\ 4\ =0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

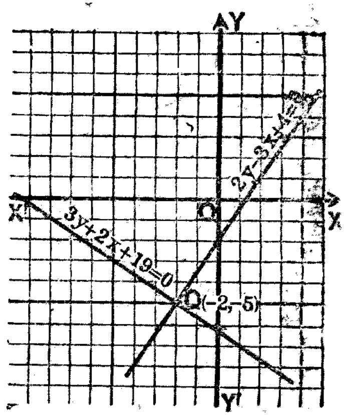
(1)×3 $\qquad 9y+6x+57=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×2 $\qquad 4y-6x+8=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)+(4), $\qquad 13y=-65,$

$$\therefore\ y=-5.$$

$$\therefore\ x=\frac{2y+4}{3}=-2.$$



5. 下二方程組用同法處理。

(1) $\begin{cases}(x-4y+6)(x+3y+6)=0,\\(3x+2y-10)(2x-y+5)=0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(y-x-2)x=0,\\(y-x+2)y=0.\end{cases}$

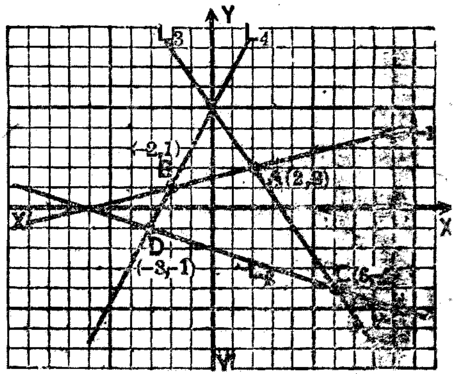
[解] (1) $(x-4y+6)(x+3y+6)=0$

爲兩直線：

$$L_1: x-4y+6=0,$$

及 $$L_2: x+3y+6=0.$$

$(3x+2y-10)(2x-y+5)=0$



爲兩直線：

$$L_3: 3x+2y-10=0,$$

及 $L_4: 2x-y+5=0.$

L_1, L_3 交於 $A(2, 2)$,

L_1, L_4 交於 $B(-2, 1)$,

L_2, L_3 交於 $C(6, -4)$,

L_2, L_4 交於 $D(-3, -1)$.

再以原二方程式聯立

$$(x-4y+6)(x+3y+6)=0\cdots\cdots(1)$$

$$(3x+2y-10)(2x-y+5)=0\cdots\cdots(2)$$

(1) 與下二式同値 $$x-4y+6=0\cdots\cdots(3)$$

$$x+3y+6=0\cdots\cdots(4)$$

(2) 與下二式同値 $$3x+2y-10=0\cdots\cdots(5)$$

$$2x-y+5=0\cdots\cdots(6)$$

以 (3) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=2\end{array}\right\}$

以 (3) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=1\end{array}\right\}$

以 (4) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=-4\end{array}\right\}$

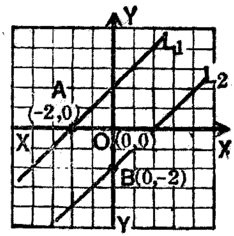
以 (4) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-1\end{array}\right\}$

(2) $(y-x-2)x=0$ 爲兩直線 L_1：$y-x-2=0$

及 y 軸：$x=0$，

$(y-x+2)y=0$ 爲兩直線 L_2：$y-x+2=0$

及 x 軸：$y=0$，



L_1 及 x 軸交於 $A(-2, 0)$，

L_2 及 y 軸交於 $B(0, -2)$，

x 軸及 y 軸交於 $O(0, 0)$，

L_1 及 L_2 無交點。

再以原二方程式聯立 $(y-x-2)x=0$ ……………… (1)

$(y-x+2)y=0$ ……………… (2)

(1) 與下二式同值 $y-x-2=0$ ……………… (3)

$x=0$ ……………… (4)

(2) 與下二式同值 $y-x+2=0$ ……………… (5)

$y=0$ ……………… (6)

以 (3) 與 (5) 聯立無解〔因 (3) 與 (5) 爲相依方程式〕。

以 (3) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=0\end{array}\right\}$

以 (4) 與 (5) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=-2\end{array}\right\}$

以 (4) 與 (6) 聯立得 $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$

6. 求下二方程式之圖象。

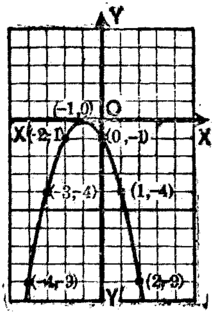
$$y=-(x+1)^2,\quad y=x^3.$$

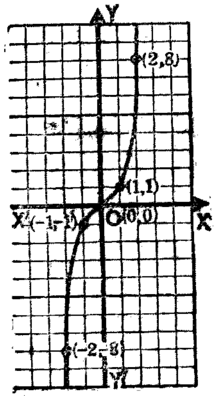
[解] (1) $y=-(x+1)^2$,

命 $x=0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4.$

則 $y=-1,\ -4,\ -9,\ 0,\ -1,\ -4,\ -9.$

以各組 x, y 之值作點,經過各點聯一曲線,此曲線全部均在 x 軸下面.





(2) $y=x^3$.

命 $x=0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2.$

則 $y=0,\ 1,\ 8,\ -1,\ -8.$

以各組 x, y 之值作點,經過各點聯一曲線,此曲線即爲所求之圖象.

習 題 X 第 147 頁

解下列各方程式:

1. $\begin{cases} x+y=11 \cdots\cdots (1) \\ y+z=13 \cdots\cdots (2) \\ z+x=12 \cdots\cdots (3) \end{cases}$

[解] (1)+(2)+(3), $2(x+y+z)=36.$

$$x+y+z=18 \cdots\cdots (4)$$

$$\begin{aligned}
&(4)-(2),\text{ 得} && \left.\begin{aligned} x&=5\\ y&=6\\ z&=7\end{aligned}\right\}\\
&(4)-(3),\text{ 得} && \\
&(4)-(1),\text{ 得} &&
\end{aligned}$$

2. $\begin{cases} x+y+z=1 \cdots\cdots(1)\\ x+2y+3z=4 \cdots\cdots(2)\\ x+3y+7z=13 \cdots\cdots(3)\end{cases}$

［解］ (2)－(1), $\quad y+2z=3 \cdots\cdots(4)$

(3)－(2), $\quad y+4z=9 \cdots\cdots(5)$

(5)－(4), $\quad 2z=6.$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ z&=3\\ y&=3-2z=-3\\ x&=1-y-z=1\end{aligned}\right\}$$

代入 (4) 式, $y=3-2z=-3$

代入 (1) 式, $x=1-y-z=1$

3. $\begin{cases} x+2y-3z=3 \cdots\cdots(1)\\ 3x-5y+7z=19 \cdots\cdots(2)\\ 5x-8y-11z=-13 \cdots\cdots(3)\end{cases}$

［解］ 從 (1) 式, $\quad x=3-2y+3z.$

代入 (2) 及 (3) 式, $\quad 16z-11y=10 \cdots\cdots(4)$

$\quad 4z-18y=-28 \cdots\cdots(5)$

(5)×4 $\quad 16z-72y=-112 \cdots\cdots(6)$

(4)－(6), $\quad 61y=122.$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ y&=2\\ 4z-36&=-28\\ \therefore\ z&=\tfrac{8}{4}=2\\ x&=5\end{aligned}\right\}$$

代入 (5) 式, $4z-36=-28$

代入 (1) 式, $x=5$

4. $\begin{cases} 5x-2y=-33 \cdots\cdots(1)\\ x+y-7z=13 \cdots\cdots(2)\\ x+3y=-10 \cdots\cdots(3)\end{cases}$

［解］ (3)×5 $\quad 5x+15y=-50 \cdots\cdots(4)$

(4) − (1), $17y=-17.$

$\therefore\ y=-1.$

代入 (3) 式, $x=-10-3y=-7.$

代入 (2) 式, $z=-3.$

5. $\begin{cases} x+2y-4z=11 \quad\cdots\cdots(1)\\ 2x-3y=0 \quad\cdots\cdots(2)\\ y-4z=0 \quad\cdots\cdots(3)\end{cases}$

[解] 從 (3) 式, $y=4z \quad\cdots\cdots(4)$

代入 (2) 式, $x=6z \quad\cdots\cdots(5)$

代入 (1) 式, $6z+8z-4z=11.$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ z&=\frac{11}{10}\\ y&=4z=\frac{22}{5}\\ x&=6z=\frac{33}{5}\end{aligned}\right\}$$

代入 (4) 式, 代入 (5) 式 (as above).

6. $\begin{cases} 3x-5=2(x-2) \quad\cdots\cdots(1)\\ (x+1)(y-1)=(x+2)(y-2)+5 \quad\cdots\cdots(2)\\ 2x+3y+z=6 \quad\cdots\cdots(3)\end{cases}$

[解] 從 (1) 式,得 $x=1.$

代入 (2) 式, $2y-2=3y-6+5.$

$\therefore\ y=-1.$

代入 (3) 式, $2-3+z=6.$

$\therefore\ z=7.$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9 \quad\cdots\cdots(1)\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5 \quad\cdots\cdots(2)\\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4 \quad\cdots\cdots(3)\end{cases}$

[解] $\frac{(1)-(2)}{2}$, $$\frac{1}{y}-\frac{5}{z}=2\cdots\cdots(4)$$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{3}$, $$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=6\cdots\cdots(5)$$

(5)−(4), $$\frac{4}{z}=4.$$

$$\therefore\ z=1.$$

代入 (5) 式, $$\frac{1}{y}-1=6.$$

$$\therefore\ y=\tfrac{1}{7}.$$

代入 (2) 式, $$\frac{1}{x}-7+4=5.$$

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{8}.$$

8. $$\begin{cases} y+z+u=4\cdots\cdots(1)\\ x+z+u=3\cdots\cdots(2)\\ x+y+u=1\cdots\cdots(3)\\ x+y+z=10\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

[解] 四式相加,得 $x+y+z+u=6\cdots\cdots(5)$

$$\left.\begin{array}{ll}(5)-(1), & x=2.\\ (5)-(2), & y=3.\\ (5)-(3), & z=5.\\ (5)-(4), & u=-4.\end{array}\right\}$$

9. $$\begin{cases} 4x-3z+u=9\cdots\cdots(1)\\ 5y+z-4u=17\cdots\cdots(2)\\ 3y+u=12\cdots\cdots(3)\\ x+2y+3u=8\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

[解] 從 (3) 式, $u=12-3y\cdots\cdots(5)$

代入 (4) 式, $x=8-2y-3(12-3y)=7y-28\cdots\cdots(6)$

代入 (2) 式, $z=17-5y+4(12-3y)=65-17y\cdots\cdots(7)$

代入 (1) 式，　$4(7y-28)-3(65-17y)+12-3y=9\cdots\cdots(8)$

$$76y-295=9.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ & y=4.\\ \therefore\ & u=12-12=0.\\ \therefore\ & x=28-28=0.\\ \therefore\ & z=65-68=-3.\end{aligned}\right\}$$

10. $\begin{cases}cx+by=l \cdots\cdots(1)\\ by+az=m \cdots\cdots(2)\\ az+cx=n \cdots\cdots(3)\end{cases}$

[解]　三式相加，　$cx+by+az=\dfrac{l+m+n}{2}\cdots\cdots(4)$

$$\left.\begin{aligned}&(4)-(2),\quad x=\frac{l-m+n}{2c}.\\ &(4)-(3),\quad y=\frac{l+m-n}{2b}.\\ &(4)-(1),\quad z=\frac{-l+m+n}{2a}.\end{aligned}\right\}$$

11. $\begin{cases}lx=my=nz \cdots\cdots(1)\\ ax+by+cz=d \cdots\cdots(2)\end{cases}$

[解]　從 (1) 式，　$y=\dfrac{lx}{m},\qquad z=\dfrac{lx}{n}.$

代入 (2) 式，　$ax+b\dfrac{lx}{m}+c\dfrac{lx}{n}=d.$

$$x(amn+bln+clm)=mnd,$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ & x=\frac{mnd}{amn+bln+clm}.\\ \therefore\ & y=\frac{l}{m}x=\frac{lnd}{amn+bln+clm}.\\ \therefore\ & z=\frac{l}{n}x=\frac{lmd}{amn+bln+clm}.\end{aligned}\right\}$$

12 $\begin{cases} 2x=3y=6z & \cdots\cdots(1) \\ (x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 從 (1) 式， $x=3z,\ y=2z$ ……(3)

(2) 與下二式同值 $x+2y+z-16=0$ ……(4)

$3x-2y+20=0$ ……(5)

從 (3), (4) 得 $\left.\begin{matrix} z=2. \\ x=6. \\ y=4. \end{matrix}\right\}$

從 (3), (5) 得 $\left.\begin{matrix} z=-4. \\ x=-12. \\ y=-8. \end{matrix}\right\}$

13. $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots(1) \\ y-z=-5 & \cdots\cdots(2) \\ z-x=2 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

[解] 將 (1) 移項，命 $A=x-y-3=0.$

將 (2) 移項，命 $B=y-z+5=0.$

將 (3) 移項，命 $C=z-x-2=0.$

則 $A+B+C\equiv 0$, 卽 $A\equiv -B-C.$

故原三方程式中有一個爲附庸．從第 394 節解釋知原三方程式有無限組公解。

14. $\begin{cases} 3x-8y+7z=10 & \cdots\cdots(1) \\ 2x+5y-3z=12 & \cdots\cdots(2) \\ 16x+9y-z=80 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

[解] 將 (1), (2), (3) 三式移項，命

$$A=3x-8y+7z-10=0,$$

$$B=2x+5y-3z-12=0,$$

$$C=16x+9y-z-80=0,$$

$$\therefore\ 5B+2A=16x+9y-z-80=C.$$

故原三方程式中有一個爲附庸．從第 394 節解釋知原三方程式有無限組公解。

習 題 XI 第150頁

1. 三數之和爲 20, 而 (1) 第一數加第二數之二倍再加第三數之三倍等於 44, (2) 第一第二兩數之和之二倍減第三數之四倍等於 −14, 求此三數。

[解] 設 x, y, z 爲三數，則得方程式

$$\begin{cases} x+y+z=20 & \cdots\cdots(1) \\ x+2y+3z=44 & \cdots\cdots(2) \\ 2(x+y)-4z=-14 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(3)÷2, $x+y-2z=-7 \cdots\cdots(4)$

(1)−(4), $3z=27, \quad \therefore z=9.$

(2)−(1), $y+2z=24.$

$\therefore y=6.$

代入 (1) 式, $x=5.$

[答] 三數爲 5, 6, 9.

2. 三數之和爲 51, 如以第二數除第一數，商爲 2 而餘爲 5; 如以第三數除第二數，則商爲 3 而餘爲 2, 各數若何?

[解] 設 x, y, z 爲三數，則得方程式

$$\begin{cases} x+y+z=51 & \cdots\cdots(1) \\ x=2y+5 & \cdots\cdots(2) \\ y=3z+2 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(3) 代入 (2) 式, $x=2(3z+2)+5=6z+9 \cdots\cdots(4)$

(3) 及 (4) 代入 (1) 式; $6z+9+3z+2+z=51,$

$\therefore z=4.$

代入 (3) 式, $y=3z+2=14.$

代入 (4) 式, $x=33.$

[答] 三數爲 33, 14, 4.

3. 求適合下二條件之二位之數: (1) 十位數字之二倍加個位數字

之三倍等於 37，(2) 如將數字易位則得較原數少 9 之數。

［解］ 設 x 為十位數字，y 為個位數字。

則
$$\begin{cases}2x+3y=37 \cdots\cdots(1)\\ 10y+x=10x+y-9\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式，
$$x-y=1\cdots\cdots(3)$$

(3)×2
$$2x-2y=2\cdots\cdots(4)$$

(1)−(4)，
$$5y=35,$$
$$\therefore\ y=7.$$
$$\therefore\ x=1+y=8.$$

［答］ 此數為 87.

4. A 負債 5000 圓，B 負債 3000 圓，A 除己所有外如得 B 所有之 $\frac{2}{3}$ 足以償債，而 B 以己所有及 $\frac{1}{2}$ 倍 A 所有償債尚少 100 圓，求各有金幾何？

［解］ 設 A 有金 x 圓，B 有金 y 圓，

則
$$\begin{cases}x+\frac{2}{3}y=5000\cdots\cdots(1)\\ y+\frac{1}{2}x+100=3000\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)×$\frac{3}{2}$
$$\frac{3}{2}x+y=7500\cdots\cdots(3)$$

(3)−(2)，
$$x=4600\text{ 圓.}$$

代入 (2) 式，
$$y=600\text{ 圓.}$$

［答］ A 有金 4600 圓，B 有金 600 圓.

5. A 與 B 共有 p 圓；B 與 C，q 圓；C 與 A，r 圓.求 A,B,C 三人之財產. p,q,r 須適合若何之條件始能得適合問題之解？

［解］ 設 x,y,z 各為 A,B,C 財產之圓數，

則
$$\begin{cases}x+y=p\cdots\cdots(1)\\ y+z=q\cdots\cdots(2)\\ x+z=r\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

三式相加，
$$x+y+z=\frac{1}{2}(p+q+r)\cdots\cdots(4)$$

(4)−(2)，
$$x=\frac{1}{2}(p+r-q).$$

(4)－(3),　　$y=\frac{1}{2}(p+q-r)$.

(4)－(1),　　$z=\frac{1}{2}(q+r-p)$.

[答]　A, B, C 所有之財產各爲 $\frac{1}{2}(p+r-q)$ 圓，$\frac{1}{2}(p+q-r)$ 圓，$\frac{1}{2}(q+r-p)$ 圓.此題結果須 $p+r>q$, $p+q>r$ 及 $q+r>p$ 時方爲合理.

6.　本金若干以單利貸出，二年後本利和 2556.05 圓，四年後本利和 2767.10 圓.本金及利率各若何?

[解]　設本金爲 x 圓，利率爲 y,

則
$$\begin{cases} x+2xy=2556.05 \cdots\cdots(1) \\ x+4xy=2767.10 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2)－(1),　　$2xy=211.05 \cdots\cdots(3)$

(1)－(3),　　$x=2345$ 圓.

代入 (3) 式，　　$y=4\frac{1}{2}\%$.

[答]　本金爲 2345 圓，利率爲 $4\frac{1}{2}\%$.

7.　某人投資於照額面價格之 4 釐債票及市價 110% 之 5 釐債票，投資之進益爲 650 圓.如 4 釐債票市價 80%，五釐債票市價 110%，則可較前多得 100 圓，共投資幾何?

[解]　設 x, y 各爲二種股票之圓數，則 $x+y$ 爲此人投資之總數.因第一種股票爲平價，故其賣價與額面相同，卽爲 100 圓，在 x 圓中可買股票 $\frac{x}{100}$ 張，而每張利息爲 $100\cdot\frac{4}{100}$ 卽 4 圓，故第一種股票之利息爲 $\frac{4x}{100}$ 圓.又第二種股票賣價爲 110 圓其額面仍爲 100 圓，在 y 圓中可買股票 $\frac{y}{110}$ 張，而每張利息爲 $100\cdot\frac{5}{100}$ 卽 5 圓.故第二種股票之利息爲 $\frac{5y}{110}$ 圓.

依題意得方程式　　$\frac{4}{100}x+\frac{5}{110}y=650 \cdots\cdots(1)$

同理可得第二方程式　　$\frac{4}{80}x+\frac{5}{110}y=650+100 \cdots\cdots(2)$

(2)－(1)　　$\frac{x}{20}-\frac{x}{25}=100$,　$\therefore x=10000$ 圓.

以 x 之值代入 (1) 得 $y=5500$ 圓。

故此人投資共爲 $10000+5500=15500$ 圓。

[答] 總共投資 15500 圓.

8. 若一矩形之長及廣各增 6 吋,則長變爲廣之 $\frac{3}{2}$ 倍,而矩形之面積增 84 平方吋.求矩形之原面積.

[解] 設矩形長寬各爲 x 吋及 y 吋,

依題意得方程式 $\begin{cases}(x+6)=\frac{3}{2}(y+6) \cdots\cdots(1)\\(x+6)(y+6)=xy+84\cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式, $2x-3y=6\cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $x+y=8\cdots\cdots(4)$

(4)×2−(3), $5y=10.$

$\therefore\ y=2$ 吋.

$\therefore\ x=8-y=6$ 吋。

[答] 長方形之面積爲 $xy=12$ 平方吋.

9. A 以金與 B, 金額與 B 原有者等; B 又以金與 A, 金額與 A 所餘者等; A 復以金與 B, 金額亦與 B 所餘者等.今 A 有 16 圓 B 有 24 圓.各人原有金幾何?

[解] 設 x 爲 A 原有圓數, y 爲 B 原有圓數.

$$\begin{cases}x-y+(x-y)-[y+y-(x-y)]=16 \cdots\cdots(1)\\y+y-(x-y)+[y+y-(x-y)]=24 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)+(2), $x+y=16+24=40.$

代入 (1) 式, $8y=104,$

$\therefore\ y=13$ 圓.

$\therefore\ x=27$ 圓。

[答] A 有銀 27 圓, B 有銀 13 圓.

10. A 與 B 合作一事, $5\frac{1}{7}$ 日可成; A 與 C 合作之, $4\frac{4}{5}$ 日可成.三人共作 2 日而 A 去, B 與 C 又作 $1\frac{9}{17}$ 日乃成.如三人皆獨作之,各幾日可成?

[解]　設 x, y, z 各爲 A, B, C 獨作所需之日數，

則
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5\frac{1}{7}}=\frac{7}{36}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4\frac{4}{5}}=\frac{5}{24}\cdots\cdots(2)$$

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+1\frac{9}{17}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1\quad\cdots\cdots(3)$$

(3)－(1)－(2)　$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{26}{17}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1-\frac{7}{36}-\frac{5}{24}=\frac{43}{72}.$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{17}{72}\quad\cdots\cdots(4)$$

$\dfrac{(1)+(2)+(4)}{2}$　$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{23}{72}\quad\cdots\cdots(5)$$

(5)－(1)，　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{9}{72}=\dfrac{1}{8}$，　$\therefore\ z=8$ 日。

(5)－(2)，　$\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{72}=\dfrac{1}{9}$，　$\therefore\ y=9$ 日。

(5)－(4)，　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{72}=\dfrac{1}{12}$，　$\therefore\ x=12$ 日。

[答]　A 獨作 12 日可成；B, 9 日可成；C, 8 日可成。

11.　兩點各以一定之速率沿 150 尺長之圓周而運動．運動之方向相反時，每 5 秒相會一次，方向相同時每 25 秒相會一次．各點之速率若何？

[解]　設兩點之速率各爲每秒 x, y 尺

則
$$\begin{cases}5x+5y=150\cdots\cdots(1)\\25x-25y=150\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，　$x+y=30\quad\cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　$x-y=6\cdots\cdots(4)$

(3)＋(4)，　$2x=36.$

$\therefore\ x=18$ 尺。

代入 (4) 式，　　$y=12$ 尺。

［答］ 一點之速率爲每秒 18 尺，另一點爲每秒 12 尺。

12. 有長 240 碼及 200 碼之二列貨車，如相向而行，兩車於 25 秒中交過；如同向而行，快車於 $3\frac{3}{4}$ 分中越過慢車。各車之速率每小時幾哩？

［解］ 設 x, y 各爲快車，慢車每小時所行之哩數。

則
$$\begin{cases}\dfrac{25}{3600}(x+y)=\dfrac{240+200}{1760}\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{\frac{15}{4}}{60}(x-y)=\dfrac{240+200}{1760}\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，　　$x+y=36\cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　　$x-y=4\cdots\cdots(4)$

(3)+(4)，　　$x=20$ 哩。

(3)−(4)，　　$y=16$ 哩。

［答］ 快車之速率每小時 20 哩，慢車之速率每小時 16 哩。

13. A, B 兩汽船往復於相距 200 哩之 C, D 二城之間。A 能較 B 遲 1 小時由 C 城出發，而於 2 小時中追及 B，到 D 城後停泊 4 小時，歸途中於距 D 城 10 哩處與 B 相會。A 及 B 之速率各若何？

［解］ 設 x 爲 A 船每小時所行哩數，y 爲 B 船每小時所行哩數，

則
$$\begin{cases}2x=3y\cdots\cdots(1)\\[1ex]\dfrac{200+10}{x}+4=\dfrac{200-10}{y}-1\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，　　$$\frac{210}{x}=\frac{140}{y}\cdots\cdots(3)$$

(2)−(3)，　　$$4=\frac{190-140}{y}-1.$$

$\therefore\ y=10$ 哩。

代入 (1) 式，　　$x=\frac{3}{2}y=15$ 哩。

［答］ A 每小時行 15 哩，B 每小時行 10 哩。

14. A 於半哩競走中勝 B 20 碼而勝 C 30 碼，則 B 勝 C 幾碼？

［解］ 設 x 為 B 勝 C 之碼數，因半哩＝880 碼，

$$\therefore \frac{880-20}{880-30}=B, C \text{ 在同時間內所行距離之比}=\frac{880}{880-x}.$$

簡約 $$\frac{86}{85}=\frac{880}{880-x}, \qquad \therefore x=10\frac{10}{43} \text{ 碼}.$$

［答］ B 勝 C $10\frac{10}{43}$ 碼.

15. A 與 B 作 440 碼競走兩次。第一次 A 讓 B 先行 20 碼而勝 2 秒，第二次 A 讓 B 先行 4 秒而勝 6 碼. A 及 B 之速率若何？

［解］ 設 A 每秒之速率為 x 碼，B 每秒之速率為 y 碼，

則 $$\begin{cases}\dfrac{440}{x}=\dfrac{440-20}{y}-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{440}{x}=\dfrac{440-6}{y}-4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)－(2)， $$\frac{420}{y}-\frac{434}{y}+2=0,$$

$$\therefore y=7 \text{ 碼}.$$

代入 (1) 式， $$x=\frac{440}{58}=7\frac{17}{29} \text{ 碼}.$$

［答］ A 之速率為每秒 $7\frac{17}{29}$ 碼，B 之速率為每秒 7 碼.

16. 兩旅客共有行李 500 磅。因重量超過免費限額，一人納費 1.25 圓，又一人納費 1.75 圓，如行李屬於一人，則此人應納費 4 圓。每人可免費攜帶行李之重量為幾何？

［解］ 設每人免費攜帶行李之重量為 x 磅，

則 $$\frac{1.25+1.75}{500-2x}=\frac{4}{500-x},$$

$$2000-8x=1500-3x,$$

$$5x=500.$$

$$\therefore\ x=100\text{ 磅。}$$

［答］ 每人免費攜帶之行李爲 100 磅。

17. 已與三種合金，其成分如下：A，金 5 分（依重量）銀 2 分鉛 1 分；B，金 2 分銀 5 分鉛 1 分；C，金 3 分銀 1 分鉛 4 分。今欲得含等量（依重量）之金銀鉛之合金 9 噸，則由 A, B, C 須各取幾噸以鎔成？

［解］ 設由 A, B, C 合金中各取 x, y, z 噸鎔合，

則
$$\frac{5}{8}x+\frac{2}{8}y+\frac{3}{8}z=3 \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{2}{8}x+\frac{5}{8}y+\frac{1}{8}z=3 \cdots\cdots (2)$$

$$\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{4}{8}z=3 \cdots\cdots (3)$$

$(3)\times 2-(1)$，
$$5z-3x=24,$$
或
$$x=\tfrac{1}{3}(5z-24) \cdots\cdots (4)$$
$(3)\times 2-(2)$，
$$7z-3y=24,$$
或
$$y=\tfrac{1}{3}(7z-24) \cdots\cdots (5)$$

以 (4) 與 (5) 代入 (3)，
$$24z=120, \qquad \therefore\ z=5.$$

以 z 值代入 (4) 與 (5)，
$$\therefore\ x=\tfrac{1}{3}, \qquad y=11/3.$$

［答］ A, B, C 中應各取 $\frac{1}{3}, \frac{11}{3}$, 5 噸鎔合而成 9 噸之混合金。

18. A 及 B 爲銀與銅之合金。A 5 分 B 3 分所成之合金含銀 52%. A 5 分 B 11 分所成之合金含銀 42%. A 及 B 含銀之百分比各若何？

［解］ 設 x, y 爲 A 與 B 含銀之百分率，

則
$$\frac{5}{8}x+\frac{3}{8}y=\frac{52}{100} \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{5}{16}x+\frac{11}{16}y=\frac{42}{100} \cdots\cdots (2)$$

$(2)\times 2-(1)$,　　$8y=\dfrac{256}{100}$,　　$\therefore\ y=\dfrac{32}{100}$.

以 y 之値代入 (1) 得　　$x=\dfrac{64}{100}$.

［答］ A, B 各含銀 64% 及 32 %.

19. 射手在 500 碼外打靶,發射後 $2\frac{2}{5}$ 秒聞中靶之聲.離靶 600 碼而與射手相距 210 碼之觀者,則於聞鎗聲後 $2\frac{1}{10}$ 秒始聞中靶之聲.假定聲浪及彈丸之速度皆始終不變者,試求速度各幾何?

［解］ 設音之速度每秒 x 碼,彈之速度每秒 y 碼,

則
$$\begin{cases}\dfrac{500}{x}+\dfrac{500}{y}=2\dfrac{2}{5} & \cdots\cdots(1)\\[2mm] \dfrac{500}{y}+\dfrac{600}{x}-\dfrac{210}{x}=2\dfrac{1}{10} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)-(2)$,
$$\frac{110}{x}=\frac{3}{10}.$$

$$\therefore\ x=366\tfrac{2}{3}\text{ 碼}=1100\text{ 呎}.$$

代入 (1) 式,　　$y=482\dfrac{26}{57}$ 碼 $=1447\dfrac{7}{19}$ 呎.

［答］ 音與子彈之速度各爲每秒 1100 呎及 $1447\dfrac{7}{19}$ 呎.

20. 水槽有二注水管 A, B 及一排水管 C. 如於水滿槽時齊開三管,3 小時可排盡;如祇開 A, C 兩管,1 小時可排盡;如祇開 B, C 兩管,45 分可排盡,如 A 每分注水較 B 多 100 嗧,則水槽之容量若何,又各管每分通過水流幾嗧?

［解］ 設 $x, x-100, y$ 爲每分鐘過 A, B, C 三管水量之嗧數;z 爲槽之容量,

則
$$z+3\times 60\{x+(x-100)-y\}=0\cdots\cdots(1)$$
$$z+60(x-y)=0\cdots\cdots(2)$$
$$z+45\{(x-100)-y\}=0\cdots\cdots(3)$$

$(1)-(3)$,　　$7x-3y-300=0\cdots\cdots(4)$

(2)−(3),　　　　　$x-y+300=0$ ……………………………(5)

(4)−(5)×3,　　$4x-1200=0$,　　$\therefore\ x=300$ 嗧.

$\therefore\ x-100=200$ 嗧.　　$y=600$ 嗧.　　$z=1800$ 嗧.

[答]　A 管之水量為 300 嗧; B 為 200 嗧; C 為 600 嗧, 槽之容量為 18000 嗧.

習　題　XII　　　第 154 頁

1.　以 $x-2$ 之多項式表 $3x^3-x^2+2x-5$.

[解]　設 $3x^3-x^2+2x-5=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$, 其中 a, b, c, d 為待定係數.

右式 $=ax^3-(6a-b)x^2+(12a-4b+c)x-(8a-4b+2c-d)$. 與原式比較係數得

$$a=3,$$
$$6a-b=1,\qquad \therefore\ b=17.$$
$$12a-4b+c=2,\qquad \therefore\ c=34.$$
$$8a-4b+2c-d=5,\qquad \therefore\ d=19.$$

故 $3x^3-x^2+2x-5=3(x-2)^3+17(x-2)^2+34(x-2)+19$.

2.　以 $2x+3$ 之多項式表 $4x^2+8x+7$.

[解]　設 $4x^2+8x+7=a(2x+3)^2+b(2x+3)+c$

$$=4ax^2+(12a+2b)x+(9a+3b+c).$$

a, b, c, 為待定係數.

比較兩方係數得　$4a=4$,　　$\therefore\ a=1$.

$$12a+2b=8,\qquad \therefore\ b=-2.$$
$$9a+3b+c=7,\qquad \therefore\ c=4.$$

故　　$4x^2+8x+7=(2x+3)^2-2(2x+3)+4$.

3.　求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 俾

$$f(-1)=11,\quad f(1)=-5,\quad f(5)=6.$$

[解]　$\because\ f(-1)=a(-1)^2+b(-1)+c=11$,

$\therefore\ a-b+c=11$ ……………………………(1)

$$f(1)=a(1)^2+b(1)+c=-5,$$

$$\therefore\ a+b+c=-5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$f(5)=a(5)^2+b(5)+c=6,$$

$$\therefore\ 25a+5b+c=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) 聯立得 $a=\dfrac{43}{24}$, $b=-8$, $c=\dfrac{29}{24}$.

$$\therefore\ f(x)=\frac{43}{24}x^2-8x+\frac{29}{24}.$$

4. 求 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 俾

$$f(0)=5,\quad f(-1)=1,\quad f(1)=9,\quad f(2)=31.$$

[解] $\because\ f(0)=a(0)^3+b(0)^2+c(0)+d=5,$

$$\therefore\ d=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$f(-1)=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+d=1,$$

$$\therefore\ -a+b-c+d=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$f(1)=a(1)^3+b(1)^2+c(1)+d=9,$$

$$\therefore\ a+b+c+d=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$f(2)=a(2)^3+b(2)^2+c(2)+d=31,$$

$$\therefore\ 8a+4b+2c+d=31 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(1), (2), (3), (4) 聯立 $\therefore\ a=3,\ b=0,\ c=1,\ d=5.$

$$\therefore\ f(x)=3x^3+x+5.$$

5. 求 $f(x, y)=ax+by+c$ 俾

$$f(0, 0)=4,\quad f(4, 4)=0,\quad f(1, 0)=6.$$

[解] $\because\ f(0, 0)=a(0)+b(0)+c=4,$

$$\therefore\ c=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$f(4, 4)=a(4)+b(4)+c=0,$$

$$\therefore\ 4a+4b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$f(1, 0)=a(1)+b(0)+c=6,$$

$$\therefore\ a+c=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) 聯立 $\quad \therefore\ a=2,\ b=-3,\ c=4.$

$$\therefore\ f(x, y)=2x-3y+4.$$

6. 求一次方程式 $ax+by+1=0$, 設已知其二解爲 $x=3, y=1$ 及 $x=4, y=-1$.

［解］ 因 $x=3\ \ y=1$ 爲一組解答,代入原式必能適合,

$$\therefore\ 3a+b+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又因 $x=4,\ y=-1$ 亦爲一組解答,代入原式亦必能適合,

$$\therefore\ 4a-b+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) 二式聯立得 $\quad a=-\frac{2}{7},\ \ b=-\frac{1}{7}.$

$\therefore$ 所求之方程式爲 $-\frac{2}{7}x-\frac{1}{7}y+1=0.$ 卽 $2x+y-7=0.$

7. 能求得一方程式 $ax+by+c=0$ 使有 $x=3, y=1;\ x=4, y=-1;$ $=1, y=1$ 三解否?

［解］ 以 $x=3, y=1;\ x=4,\ y=-1;\ x=1,\ y=1$ 代入原方程式得

$$3a+b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$4a-b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a+b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) − (3), $\qquad 2a=0.$

$$\therefore\ a=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2) − (3), $\qquad 3a-2b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

以 (4) 代入 (5) 式, $\qquad -2b=0.$

$$\therefore\ b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

以 (4) 與 (6) 代入 (3) 式, $\qquad c=0.$

故此簡單方程式不能求得.

8. 求以 (2, 3), (−4, 5) 兩點所決定之直線爲圖象之一次方程式.

［解］ 設直線方程式爲 $\quad x+by+c=0.$

則因 (2, 3), (−4, 5) 在直線上,其坐標必能適合於方程式.

$$\therefore\ 2+3b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-4+5b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\ b=3,\quad c=-11.$$

故所求直線方程式爲 $x+3y-11=0$.

9. 求定 c 之值俾 $3x+y+c=0$ 之圖象能過點 $(-2, 3)$.

［解］ 因直線 $3x+y+c=0$ 經過 $(-2, 3)$,

$$\therefore\ -6+3+c=0. \qquad \therefore\ c=3.$$

10. 求兩一次方程式 $ax+by+1=0$ (1) 及 $a'x+b'y+1=0$ (2), 設已知兩者皆爲 $x=2, y=3$ 所適合. (1) 又爲 $x=7, y=5$ 所適合, (2) 又爲 $x=3, y=7$ 所適合.

作此二方程式之圖象.

(A) 由 $x=2,\ y=3$, 得 $2a+3b+1=0$ ……………………(1)

$x=7,\ y=5$, 得 $7a+5b+1=0$ ……………………(2)

從 (1) 及 (2), 得 $a=\dfrac{2}{11},\quad b=-\dfrac{5}{11}$.

(B) 由 $x=2, y=3$, 得 $2a'+3b'+1=0$ ……………………(3)

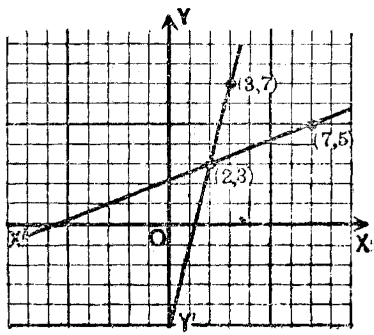
$x=3, y=7$, 得 $3a'+7b'+1=0$ ……………………(4)

從 (3) 及 (4), 得 $a'=-\frac{4}{5},\quad b'=\frac{1}{5}$.

［答］ 所求二直線方程式爲 $\dfrac{2}{11}x-\dfrac{5}{11}y+1=0$, 及 $-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}y+1=0$

即 $2x-5y+11=0$, 及 $4x-y-5=0$.

其圖形如下.



11. 設方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$, 設已知其根爲 -2, 1 及 3.

[解] 以所設根代入方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 得

$$-8+4b-2c+d=0 \cdots\cdots(1)$$

$$1+b+c+d=0 \cdots\cdots(2)$$

$$27+9b+3c+d=0 \cdots\cdots(3)$$

(2)$-$(1), $\quad 9-3b+3c=0 \cdots\cdots(4)$

(3)$-$(2), $\quad 26+8b+2c=0 \cdots\cdots(5)$

(4)$\times 2-$(5)$\times 3$ $\quad 30b=-60,$

$$\therefore\ b=-2.$$

代入 (4) 式, $\quad c=-5.$

代入 (2) 式, $\quad d=6.$

[答] 所求方程式爲 $x^3-2x^2-5x+6=0$.

12. 求一呈 $x^2+bxy+cx+dy=0$ 形式之方程式,俾有 $x=1$, $y=0$; $x=2$, $y=1$; $x=-2$, $y=1$ 三解.

[解] 以所設解答代入方程式 $x^2+bxy+cx+dy=0$ 得

$$1+c=0, \qquad \therefore\ c=-1.$$

$$4+2b+2c+d=0 \cdots\cdots(1)$$

$$4-2b-2c+d=0 \cdots\cdots(2)$$

(1)$+$(2), $\quad 2d=-8,$

$$\therefore\ d=-4.$$

以 d 之值代入 (1) 式, $4+2b-2-4=0$.

$$\therefore\ b=1.$$

[答] 所求之方程式爲 $x^2+xy-x-4y=0$.

13. 化 $3x+2y-3$ 爲

$$a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$$

之形式,其中 a, b, c 表常數.

[解] 設 $3x+2y-3=a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$

$$=(a+2b+c)x+(a-b+2c)y-(a-2b+3c).$$

比較係數　　$a+2b+c=3$ ……(1)

$a-b+2c=2$ ……(2)

$a-2b+3c=3$ ……(3)

$(1)+(3)\div 2$,　　$a+2c=3$ ……(4)

$(3)-(2)\times 2$　　$-a-c=-1$ ……(5)

$(4)+(5)$,　　$c=2$.

代入 (4) 式,　　$a=-1$.

代入 (1) 式,　　$b=1$.

[答]　$3x+2y-3=-(x+y-1)+(2x-y+2)+2(x+2y-3)$.

習　題　XIII　　第 165 頁

1. 依 § 401 之法并用分離係數法以 $3x^2+x-6$ 除 $6x^4-7x^3-3x^2+24x-20$.

[解]

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6-7 & -3 & +24 & -20 & & 3+1-6 \\
6+2 & -12 & & & & \overline{2-3+4} \\
\hline
-9 & +9 & +24 & -20 & & \\
-9 & -3 & +18 & & & \\
\cline{1-4}
 & 12 & +6 & -20 & & \\
 & 12 & +4 & -24 & & \\
\cline{2-4}
 & & 2 & +4 & &
\end{array}
$$

[答]　商 $Q=2x^2-3x+4$, 餘數 $R=2x+4$.

2. 又以 x^2+2x-7 除 $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$.

[解]

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3-2 & -32 & +66 & -35 & & 1+2-7 \\
3+6 & -21 & & & & \overline{3-8+5} \\
\hline
-8 & -11 & +66 & -35 & & \\
-8 & -16 & +56 & & & \\
\cline{1-4}
 & 5 & +10 & -35 & & \\
 & 5 & +10 & -35 & & \\
\cline{2-4}
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

[答]　商 $Q=3x^2-8x+5$, 餘數 $R=0$.

3. 又以 x^2-2x+4 除 $2x^5-5x^4+13x^3-15x^2+22x$.

［解］

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -5 & +13 & -15 & +22 & +0 & 1-2+4 \\
2 & -4 & +8 & & & & \overline{2-1+3-5} \\
\hline
 & -1 & +5 & -15 & & & \\
 & -1 & +2 & -4 & & & \\
\hline
 & & 3 & -11 & +22 & & \\
 & & 3 & -6 & +12 & & \\
\hline
 & & & -5 & +10 & +0 & \\
 & & & -5 & +10 & -20 & \\
\hline
 & & & & & 20 &
\end{array}$$

［答］ 商 $Q=2x^3-x^2+3x-5$, 餘數 $R=20$.

4. 又以 x^3-x+5 除 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7$.

［解］

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
4 & +0 & -3 & +19 & +2 & +4 & -4 & +7 & 1+0-1+5 \\
4 & +0 & -4 & +20 & & & & & \overline{4+0+1-1+3} \\
\hline
 & & 1 & -1 & +2 & +4 & & & \\
 & & 1 & +0 & -1 & +5 & & & \\
\hline
 & & & -1 & +3 & -1 & -4 & & \\
 & & & -1 & +0 & +1 & -5 & & \\
\hline
 & & & & 3 & -2 & +1 & +7 & \\
 & & & & 3 & +0 & -3 & +15 & \\
\hline
 & & & & & -2 & +4 & -8 &
\end{array}$$

［答］ 商 $Q=4x^4+x^2-x+3$, 餘數 $R=-2x^2+4x-8$.

5. 用待定係數法 (§ 404) 以 x^2-3x+2 除 $2x^3-3x^2+x-5$

［解］ 設 $Q=c_0x+c_1$ 及 $R=d_0x+d_1$

$$2x^3-3x^2+x-5\equiv(c_0x+c_1)(x^2-3x+2)+d_0x+d_1$$

$$\equiv c_0x^3\begin{array}{r|r|r|}-3c_0 & x^2+2c_0 & x+2c_1 \\ +\ c_1 & -3c_1 & +\ d_1 \\ & +\ d_0 & \end{array}$$

比較係數 $\therefore\ c_0=2.$

$$-3c_0+c_1=-3,\qquad \therefore\ c_1=3.$$

$$2c_0-3c_1+d_0=1,\qquad \therefore\ d_0=6.$$

$$2c_1+d_1=-5,\qquad \therefore\ d_1=-11.$$

［答］ $Q=2x+3$, $R=6x-11$.

6. 又以 x^3-3x+2 除 $2x^5-3x^4+x^2-5$.

[解] 設 $Q=c_0x^2+c_1x+c_2$, $R=d_0x^2+d_1x+d_2$.

$$2x^5-3x^4+x^2-5\equiv(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^3-3x+2)+d_0x^2+d_1x+d_2$$

$$\equiv c_0x^5+c_1x^4+\left.\begin{matrix}c_2\\-3c_0\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}2c_0\\-3c_1\\+d_0\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}2c_1\\-3c_2\\+d_1\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}2c_2\\+d_2\end{matrix}\right|$$

比較係數， $\therefore\ c_0=2,\quad c_1=-3.$

$$-3c_0+c_2=0,\qquad \therefore\ c_2=6.$$

$$2c_0-3c_1+d_0=1,\qquad \therefore\ d_0=-12.$$

$$2c_1-3c_2+d_1=0,\qquad \therefore\ d_1=24.$$

$$2c_2+d_2=-5,\qquad \therefore\ d_2=-17.$$

[答] $Q=2x^2-3x+6$, $R=-12x^2+24x-17$.

7. 已與 $A=3x^3-5x^2-7x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$, 求化 A 爲 $A\equiv QB+R$ 之形式，其中 R 之次數較 B 低.幷書出 A/B 之對應式.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
3-5-7+12 & 3+1-5 \\
\underline{3+1-5} & \overline{1-2} \\
-6-2+12 & \\
\underline{-6-2+10} & \\
2 &
\end{array}$$

[答] $3x^3-5x^2-7x+12\equiv(x-2)(3x^2+x-5)+2$,

若化爲 $\dfrac{A}{B}$ 之形式，則 $\dfrac{3x^3-5x^2-7x+12}{3x^2+x-5}=(x-2)+\dfrac{2}{3x^2+x-5}$.

8. 求定 a 及 b 之值俾 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 得爲 x^2-2x+1 所整除.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
x^4+ax^3+x^2+bx+1 & x^2-2x+1 \\
\underline{x^4-2x^3+x^2} & \overline{x^2+(a+2)x+2(a+2)} \\
(a+2)x^3+\quad 0 \quad +bx \quad +1 & \\
\underline{(a+2)x^3-2(a+2)x^2+(a+2)x} & \\
2(a+2)x^2+(b-a-2)x\quad +1 & \\
\underline{2(a+2)x^2-4(a+2)x+2(a+2)} & \\
(3a+b+6)x-(2a+3) &
\end{array}$$

若 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 能被 x^2-2x+1 除盡，則餘數應等於 0.

$$\therefore\ 3a+b+6=0,\quad 2a+3=0.$$

［答］ $a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{3}{2}.$

9. a 及 b 須有若何之值，$(x^4+2x^3+3x^2+ax+b)/(x^2+3x+5)$ 始得化爲整式？

［解］

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3+3x^2+ax+b & x^2+3x+5 \\
\underline{x^4+3x^3+5x^2\qquad\quad} & \overline{x^2-x+1} \\
-x^3-2x^2+ax & \\
\underline{-x^3-3x^2-5x} & \\
x^2+(a+5)x+b & \\
\underline{x^2+\qquad 3x+5} & \\
(a+2)x+(b-5) &
\end{array}$$

如原式能化成正整式，則上式應能除盡，即餘數須爲 0.

$$\therefore\ a+2=0,\quad b-5=0.$$

［答］ $a=-2,\ b=5.$

10. 以 x^2+x+1 除 $x^6+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2)$

［解］ 被除式可化爲 $x^6+x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+1.$

$$\begin{array}{r|l}
1+1+2+1+2+1+1 & 1+1+1 \\
\underline{1+1+1\qquad\qquad\qquad} & \overline{1+0+1+0+1} \\
1+1+2\qquad\quad & \\
\underline{1+1+1\qquad\quad} & \\
1+1+1 & \\
\underline{1+1+1} & \\
0 &
\end{array}$$

［答］ $Q=x^4+x^2+1,\ R=0.$

11. 以 $x+3y-4$ 除 $2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12.$

［解］

$$\begin{array}{r|l}
2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12 & x+3y-4 \\
\underline{2x^2+6xy\qquad\quad -8x\qquad\qquad\quad} & \overline{2x-y+3} \\
-xy-3y^2+3x+13y-12 & \\
\underline{-xy-3y^2\qquad\quad +4y\qquad} & \\
3x+9y-12 & \\
\underline{3x+9y-12} & \\
0 &
\end{array}$$

［答］ $Q=2x-y+3,\ R=0.$

12. 以 $2a+b-3c$ 除 $2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$.

[解]
$$\begin{array}{r|l}
2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc & 2a+b-3c \\ \cline{2-2}
2a^2+ab-3ac & a-b+2c \\ \cline{1-1}
-b^2-6c^2-2ab+4ac+5bc & \\
-b^2-2ab+3bc & \\ \cline{1-1}
-6c^2+4ac+2bc & \\
-6c^2+4ac+2bc & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

[答] $Q=a-b+2c,\ R=0$.

13. 以 $ab+bc+ca$ 除 $a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+abc$.

[解]
$$\begin{array}{r|l}
a^2b+a^2c+b^2c+b^2a-c^2a-bc^2+abc & ab+bc+ca \\ \cline{2-2}
a^2b+a^2c+abc & a+b-c \\ \cline{1-1}
b^2c+b^2a-c^2a-bc^2 & \\
b^2c+b^2a+abc & \\ \cline{1-1}
-c^2a-bc^2-abc & \\
-c^2a-bc^2-abc & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

[答] $Q=a+b-c,\ R=0$.

14. 以 x^2-3x+4 除 $x^4+(a-3)x^3+(4-a)x^2-2ax+8a$.

[解]
$$\begin{array}{r|l}
x^4+ax^3-3x^3+4x^2-ax^2-2ax+8a & x^2-3x+4 \\ \cline{2-2}
x^4-3x^3+4x^2 & x^2+ax+2a \\ \cline{1-1}
ax^3-ax^2-2ax+8a & \\
ax^3-3ax^2+4ax & \\ \cline{1-1}
2ax^2-6ax+8a & \\
2ax^2-6ax+8a & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

[答] $Q=x^2+ax+2a,\ R=0$.

15. 用分離係數法以 $2x-3y$ 除 $8x^3-27y^3$.

[解]
$$\begin{array}{r|l}
8+0+0-27 & 2-3 \\ \cline{2-2}
8-12 & 4+6+9 \\ \cline{1-1}
12+0-27 & \\
12-18 & \\ \cline{1-1}
18-27 & \\
18-27 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

[答] $Q=4x^2+6xy+9y^2,\ R=0$.

16.　又以 $x-y$ 除 $x^4-4xy^3+3y^4$.

[解]

$$
\begin{array}{l|l}
1+0+0-4+3 & 1-1 \\ \cline{2-2}
1-1 & 1+1+1-3 \\ \cline{1-1}
\quad 1+0-4+3 & \\
\quad 1-1 & \\ \cline{1-1}
\qquad 1-4+3 & \\
\qquad 1-1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -3+3 & \\
\qquad\quad -3+3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

[答]　$Q=x^3+x^2y+xy^2-3y^3$, $R=0$.

17.　又以 $2a^2-ab+b^2$ 除 $6a^5+a^4b-a^3b^2+11a^2b^3-5ab^4+4b^5$.

[解]

$$
\begin{array}{l|l}
6+1-1+11-5+4 & 2-1+1 \\ \cline{2-2}
6-3+3 & 3+2-1+4 \\ \cline{1-1}
\quad 4-4+11-5+4 & \\
\quad 4-2+\ 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad -2+\ 9-5+4 & \\
\qquad -2+\ 1-1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 8-4+4 & \\
\qquad\qquad 8-4+4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

[答]　$Q=3a^3+2a^2b-ab^2+4b^3$, $R=0$.

18.　被除式為 $2x^3+xy^2+y^3$ 而除式為 $2x+y$, 選定 (一) x 為排列之文字, (二) y 為排列之文字, 求 Q 及 R.

[解]　(1) 以 x 之降冪序排列.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+\quad 0+xy^2+y^3 & 2x+y \\ \cline{2-2}
2x^3+x^2y & x^2-\dfrac{xy}{2}+\dfrac{3y^2}{4} \\ \cline{1-1}
\quad -x^2y+xy^2+y^3 & \\
\quad -x^2y-\dfrac{xy^2}{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad \dfrac{3xy^2}{2}+y^3 & \\
\qquad\quad \dfrac{3xy^2}{2}+\frac{3}{4}y^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad \frac{1}{4}y^3 &
\end{array}
$$

[答]　$Q=x^2-\dfrac{xy}{2}+\dfrac{3y^2}{4}$; $R=\dfrac{1}{4}y^3$.

(2) 以 y 之降冪序排列。

$$
\begin{array}{r|l}
y^3+y^2x+0+2x^3 & y+2x \\
\underline{y^3+2y^2x} & \overline{y^2-yx+2x^2} \\
-y^2x+0+2x^3 & \\
\underline{-y^2x-2yx^2} & \\
2yx^2+2x^3 & \\
\underline{2yx^2+4x^3} & \\
-2x^3 &
\end{array}
$$

[答] $Q=y^2-yx+2x^2$, $R=-2x^3$.

19. 將被除式及除式依 x 之升冪排列，求除至三項之商及餘式，被除式爲 $1-3x+5x^2$ 而除式爲 $1+x+3x^2$.

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
1-3x+5x^2 & 1+x+3x^2 \\
\underline{1+x+3x^2} & \overline{1-4x+6x^2} \\
-4x+2x^2 & \\
\underline{-4x-4x^2-12x^3} & \\
6x^2+12x^3 & \\
\underline{6x^2+6x^3+18x^4} & \\
6x^3-18x^4 &
\end{array}
$$

[答] $Q=1-4x+6x^2$, $R=6x^3-18x^4$.

20. 同上，但被除式爲 $1+x+3x^2$ 而除式爲 $1-3x+5x^2$.

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
1+x+3x^2 & 1-3x+5x^2 \\
\underline{1-3x+5x^2} & \overline{1+4x+10x^2} \\
4x-2x^2 & \\
\underline{4x-12x^2+0x^3} & \\
10x^2-20x^3 & \\
\underline{10x^2-30x^3+50x^4} & \\
10x^3-50x^4 &
\end{array}
$$

[答] $Q=1+4x+10x^2$, $R=10x^3-50x^4$.

21. 用待定係數法 (§ 408) 求商 $1/(1-2x)$ 至四項。

[解] 設 $\dfrac{1}{1-2x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$

$$1=(1-2x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots)$$

$$
\begin{array}{rl|rl|rl|l}
=a_0+ & a_1 & x+ & a_2 & x^2+ & a_3 & x^3+\cdots\cdots \\
 & -2a_0 & & -2a_1 & & -2a_2 &
\end{array}
$$

比較係數得 $a_0=1.$

$$a_1-2a_0=0,\qquad \therefore\ a_1=2.$$
$$a_2-2a_1=0,\qquad \therefore\ a_2=4.$$
$$a_3-2a_2=0,\qquad \therefore\ a_3=8.$$

〔答〕 $\dfrac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots.$

22. 又求商 $(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$ 至四項.

〔解〕 設 $\dfrac{2+3x+4x^2}{1-x+2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$

$$2+3x+4x^2=a_0+\left.\begin{array}{r}a_1\\-a_0\\ \\ \end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}a_2\\-a_1\\+2a_0\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}a_3\\-a_2\\+2a_1\end{array}\right|x^3+\cdots\cdots$$

比較係數得 $a_0=2.$

$$a_1-a_0=3,\qquad \therefore\ a_1=5.$$
$$a_2-a_1+2a_0=4,\qquad \therefore\ a_2=5.$$
$$a_3-a_2+2a_1=0,\qquad \therefore\ a_3=-5.$$

〔答〕 $\dfrac{2+3x+4x^2}{1-x+2x^2}=2+5x+5x^2-5x^3+\cdots\cdots.$

習題 XIV 第173頁

1. 用綜合除法以 $x-4$ 除 $x^4-3x^3-x^2-11x-4.$

〔解〕
$$\begin{array}{r|l}1-3-1-11-4 & \underline{4}\\ 4+4+12+4 & \\ \hline 1+1+3+\ 1,\ 0 & \end{array}$$

〔答〕 $Q=x^3+x^2+3x+1,\ R=0.$

2 又以 $x-3$ 除 $5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3.$

〔解〕
$$\begin{array}{r|l}5-\ 6-\ 8+\ 7+\ \ 6+\ \ 3 & \underline{3}\\ 15+27+57+192+594 & \\ \hline 5+\ 9+19+64+198,\ 597 & \end{array}$$

〔答〕 $Q=5x^4+9x^3+19x^2+64x+198,\ R=597.$

3. 又以 $x+2$ 除 $3x^4+x^2-1$.

[解]

$$\begin{array}{l|l} 3+0+1+0-1 & -2 \\ \quad -6+12-26+52 & \\ \hline 3-6+13-26,\ 51 & \end{array}$$

[答] $Q=3x^3-6x^2+13x-26,\ R=51.$

4. 又以 $3x+1$ 除 $3x^3+16x^2-13x-6$.

[解]

$$\begin{array}{r|l} 3+16-13-6 & -\frac{1}{3} \\ -1-5+6 & \\ \hline 3\ |\ 3+15-18,\ 0 & \\ 1+5-6, & \end{array}$$

[答] $Q=x^2+5x-6,\ R=0.$

5. 又以 $3x-1$ 除 $3x^3-6x^2+x+2$.

[解]

$$\begin{array}{r|l} 3-6+1+2 & \frac{1}{3} \\ 1-\frac{5}{3}-\frac{2}{9} & \\ \hline 3\ |\ 3-5-\frac{2}{3},\ \frac{16}{9} & \\ 1-\frac{5}{3}-\frac{2}{9}, & \end{array}$$

[答] $Q=x^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{9},\ R=\dfrac{16}{9}.$

6. 又以 $x-a$ 除 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$.

[解]

$$\begin{array}{l|l} 1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc & a \\ \quad\ a \qquad -(ab+ac) \qquad +abc & \\ \hline 1-\quad (b+c)+\qquad bc,\quad 0 & \end{array}$$

[答] $Q=x^2-(b+c)x+bc,\ R=0.$

7. 又以 $x-2y$ 除 $2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$.

[解]

$$\begin{array}{r|l} 2-1-7+7-10 & 2 \\ 4+6-2+10 & \\ \hline 2+3-1+5,\quad 0 & \end{array}$$

[答] $Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3,\ R=0.$

8. 已與 $f(x)=2x^3-5x+3$. 用 § 414 之法，求

$$f(1),\ f(2),\ f(5),\ f(-1),\ f(-3),\ f(-6).$$

[解] (1)　　$f(1)=2-5+3=0.$

(2) $$f(2)=16-10+3=9.$$

(3)
$$\begin{array}{r|l} 2+\ 0-\ 5+\ \ 3 & 5 \\ 10+50+225 & \\ \hline 2+10+45,\ \ 228 & \end{array}$$

$$\therefore\ f(5)=228.$$

(4) $$f(-1)=-2+5+3=6.$$

(5) $$f(-3)=-54+15+3=-36.$$

(6)
$$\begin{array}{r|l} 2+\ 0-\ 5+\ \ 3 & -6 \\ -12+72\ -402 & \\ \hline 2-12+67,-399 & \end{array}$$

$$\therefore\ f(-6)=-399.$$

9. 應用餘式定理,試定 m 俾 $x^5+mx^2-20x+6$ 得爲 $x-3$ 所整除.

[解]
$$\begin{array}{r|l} 1+m\qquad -20\qquad +\qquad 6 & 3 \\ 3\qquad +(9+3m)\ \ +(9m-33) & \\ \hline 1+(m+3)+(3m-11),\ \ (9m-27) & \end{array}$$

若能除盡,則餘數 $$9m-27=0,$$

$$\therefore\ m=3.$$

10. 同上,試定 l 及 m 俾 $2x^3-x^2+lx+m$ 得爲 $(x+2)(x-4)$ 所整除.

[解]
$$\begin{array}{r|l} 2-1+\ \ l+m & -2 \\ -4+\ 10-(2l+20) & \\ \hline 2-5+(10+l),\ (m-2l-\ 20)=R & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2-1+\ \ l+m & 4 \\ 8+\ 28+(4l+112) & \\ \hline 2+7+(l+28),\ (m+4l+112)=R & \end{array}$$

因原式能被 $(x+2)(x-4)$ 除盡則餘數應等於 0,

$$\therefore\ m-2l-20=0,\ m+4l+112=0.$$

即 $$m-2l=20 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$m+4l=-112 \quad\cdots\cdots(2)$$

(2)−(1), $$6l=-132.$$

$$\therefore\ l=-22.$$

$$\therefore\ m=-24.$$

11. 應用 §416，證明 $3bm+am-2an-6bn$ 得為 $m-2n$ 及 $a+3b$ 所整除。

［解］ 以 $2n$ 代 m 於已知方程式中，得

$$3b(2n)+a(2n)-2an-6bn=0,$$

故原式必能被 $m-2n$ 除盡。

同理於原式中以 $-3b$ 代 a，則原式亦等於零，故亦能被 $a+3b$ 除盡，§416.

12. 由 §§416, 417 證明 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 得為 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 所整除。

［解］ 以 b 代 a 於已知方程式，得

$$b(b-c)^3+b(c-b)^3+c(b-b)^3=b(b-c)^3-b(b-c)^3+0=0,$$

故此已知方程式必能被 $(a-b)$ 除盡。

同理，原式亦能被 $(b-c)$, $(c-a)$ 除盡。

故 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 能被 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡，§417.

13. 求 x 之三次整函數，當 $x=1, 4, -2$ 時其值為 0，$x=2$ 時其值為 -16.

［解］ 因 $x=1, 4, -2$ 時，所求函數為 0，故所求函數有 $(x-1)(x-4)(x+2)$ 之因式。

再所求函數為 x 之三次整函數故除 $(x-1)(x-4)(x+2)$ 之因式外不能再有含 x 之因式。

故所求 x 之三次整函數為 $f(x)=a_0(x-1)(x-4)(x+2)$ 其中 a_0 為待定係數。

又因 $x=2$ 時，函數之值為 -16.

$$\therefore\ -16=a_0(2-1)(2-4)(2+2)$$

$$-16=a_0(-8)$$

$$\therefore\ a_0=2.$$

$$\therefore\quad f(x)=2(x-1)(x-4)(x+2)$$
$$=2x^3-6x^2-42x+16.$$

14. 求 x 之三次整函數，當 $x=2, 3$ 時其值爲 0，$x=0$ 時其值爲 6，$x=1$ 時其值爲 12.

[解] 依題中所設條件，所求函數可設爲

$$f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3).$$

因 $x=0$ 時函數爲 6，$x=1$ 時函數爲 12.

$$\therefore\quad 6=(0\times a_0+a_1)(0-2)(0-3)$$
$$12=(a_0+a_1)(1-2)(1-3)$$
$$\therefore\ a_1=1,\quad a_0=5.$$
$$\therefore\quad f(x)=(5x+1)(x-2)(x-3)$$
$$=5x^3-24x^2+25x+6.$$

15. 試證 $2x^3-ax+1$ 及 x^3+5x+2 對於四個 x 值不能有相等之值.

[解] 如以上二式有 x 之四値使其相等，則其相當係數必相等，然 $2x^3-ax+1$ 若化爲 $x^3-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}$ 與 x^3+5x+2 比較，常數項不能相同，故知 x 不能有四值可使原二式相等.

習 題 XV 第 176 頁

1. 用 § 422 之法以 x^2+1 表 x^4+x^3-1.

[解]

$$\begin{array}{r|c|l}
1+\ \ +0+0-1 & 1+0+1 & \\
\underline{1+0+1\qquad\quad} & \underline{1+1-1} & 1+0+1 \\
1-1+0-1 & \underline{1+0+1} & 1\quad\therefore\ Q_1=1 \\
\underline{1+0+1\quad\ } & 1-2 & \therefore\ R_1=x-2 \\
-1-1-1 & & \\
\underline{-1-0-1} & & \\
-1\quad\therefore\ R=-x. & &
\end{array}$$

[答] $x^4+x^3-1\equiv(x^2+1)^2+(x-2)(x^2+1)-x.$

2. 又以 $2x^2+1$ 表 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$.

[解]

$$\begin{array}{l|l|l}
4+2+4+1+6 & 2+0+1 & \\
4+0+2 & 2+1+1 & 2+0+1 \\
\quad 2+2+1+6 & 2+0+1 & 1 \qquad \therefore Q_1=1 \\
\quad 2+0+1 & \quad 1 \qquad \therefore R_1=x & \\
\qquad 2+0+6 & & \\
\qquad 2+0+1 & & \\
\qquad\qquad 5 \qquad \therefore R=5. & &
\end{array}$$

[答] $4x^4+2x^3+4x^2+x+6\equiv(2x^2+1)^2+x(2x^2+1)+5.$

3. 又以 x^3-x^2+x+3 表 $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6$.

[解]

$$\begin{array}{l|l|l}
2-3+2+5+0-1+0+6 & 1-1+1+3 & \\
2-2+2+6 & 2-1-1-1+3 & 1-1+1+3 \\
\quad -1+0-1+0 & 2-2+2+6 & 2+1 \qquad \therefore Q_1=2x+1 \\
\quad -1+1-1-3 & \quad 1-3-7+3 & \\
\qquad -1+0+3-1 & \quad 1-1+1+3 & \\
\qquad -1+1-1-3 & \qquad -2-8+0 \qquad \therefore R_1=-2x^2-8x. & \\
\qquad\quad -1+4+2+0 & & \\
\qquad\quad -1+1-1-3 & & \\
\qquad\qquad\quad 3+3+3+6 & & \\
\qquad\qquad\quad 3-3+3+9 & & \\
\qquad\qquad\qquad 6+0-3 \qquad \therefore R=6x^2-3. & &
\end{array}$$

[答] $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6$

$\equiv(2x+1)(x^3-x^2+x+3)^2-(2x^2+8x)(x^3-x^2+x+3)+(6x^2-3).$

4. 又以 x^2+xy+y^2 表 $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$.

[解]

$$\begin{array}{l|l|l}
1+0+1+1+0+1 & 1+1+1 & \\
1+1+1 & 1-1+1+1 & 1+1+1 \\
\quad -1+0+1 & 1+1+1 & 1-2 \qquad \therefore Q_1=x-2y \\
\quad -1-1-1 & \quad -2+0+1 & \\
\qquad 1+2+0 & \quad -2-2-2 & \\
\qquad 1+1+1 & \qquad 2+3 \qquad \therefore R_1=2xy^3+3y^3 & \\
\qquad\quad 1-1+1 & \qquad\qquad\qquad\qquad =y^2(2x+3y). & \\
\qquad\quad 1+1+1 & & \\
\qquad\quad -2 \qquad \therefore R=-2xy^4. & &
\end{array}$$

[答] $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$

$\equiv(x-2y)(x^2+xy+y^2)^2+y^2(2x+3y)(x^2+xy+y^2)-2xy^4.$

5. 用 § 423 之法以 $x-3$ 表 $2x^3-8x^2+x+6$.

[解]

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2- & 8+ & 1+ & 6 & \underline{3} \\
 & 6- & 6- & 15 & \\
\hline
2- & 2- & 5- & 9 & \quad\therefore R=-9 \\
 & 6+ & 12 & & \\
\cline{1-3}
2+ & 4+ & 7 & & \quad\therefore R_1=7 \\
 & 6 & & & \\
\cline{1-2}
2+ & 10 & & & \quad\therefore R_2=10,\ Q_2=2.
\end{array}
$$

[答] $2x^3-8x^2+x+6\equiv 2(x-3)^3+10(x-3)^2+7(x-3)-9.$

6. 又以 $x+2$ 表 $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7$.

[解]

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1+ & 3- & 6+ & 2- & 3+ & 7 & \underline{-2} \\
 & -2- & 2+ & 16- & 36+ & 78 & \\
\hline
1+ & 1- & 8+ & 18- & 39+ & 85 & \quad\therefore R=85 \\
 & -2+ & 2+ & 12- & 60 & & \\
\cline{1-5}
1- & 1- & 6+ & 30- & 99 & & \quad\therefore R_1=-99 \\
 & -2+ & 6+ & 0 & & & \\
\cline{1-4}
1- & 3+ & 0+ & 30 & & & \quad\therefore R_2=30 \\
 & -2+ & 10 & & & & \\
\cline{1-3}
1- & 5+ & 10 & & & & \quad\therefore R_3=10 \\
 & -2 & & & & & \\
\cline{1-2}
1- & 7 & & & & & \quad\therefore R_4=-7,\ Q_4=1.
\end{array}
$$

[答] $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7\equiv(x+2)^5-7(x+2)^4+10(x+2)^3$
$+30(x+2)^2-99(x+2)+85.$

7. 又以 $x+3$ 表 x^3+9x^2+27x.

[解]

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1+ & 9+ & 27+ & 0 & \underline{-3} \\
 & -3- & 18- & 27 & \\
\hline
1+ & 6+ & 9- & 27 & \quad\therefore R=-27 \\
 & -3- & 9 & & \\
\cline{1-3}
1+ & 3+ & 0 & & \quad\therefore R_1=0. \\
 & -3 & & & \\
\cline{1-2}
1+ & 0 & & & \quad\therefore R_2=0,\ Q_2=1.
\end{array}
$$

[答] $x^3+9x^2+27x=(x+3)^3-27.$

8. 又以 $x+1$ 表 x^3+3x^2+x-1.

[解]

$$\begin{array}{l}
1+3+1-1\ \underline{|-1}\\
\underline{\quad -1-2+1}\\
1+2-1+0 \qquad \therefore R=0\\
\underline{\quad -1-1}\\
1+1-2 \qquad \therefore R_1=-2\\
\underline{\quad -1}\\
1+0 \qquad \therefore R_2=0,\ Q_2=1.
\end{array}$$

[答]　$x^3+3x^2+x-1\equiv(x+1)^3-2(x+1)$.

習　題　XVI　　　　第 180 頁

分解下列各式之因式.

1.　[解]　$6x^4y^5z^2-12x^2y^4z+8x^2y^3=2x^2y^3(3x^2z^2-6yz+4)$.

2.　[解]　$2n^2+(n-3)n=2n^2+n^2-3n=3n^2-3n=3n(n-1)$.

3.　[解]　$ab-a+b-1=a(b-1)+(b-1)=(a+1)(b-1)$.

4.　[解]　$mx-nx-mn+n^2=x(m-n)-n(m-n)=(x-n)(m-n)$.

5.　[解]　$3xy-2x-12y+8=x(3y-2)-4(3y-2)=(x-4)(3y-2)$.

6.　[解]　$10xy+5y^2+6x+3y=5y(2x+y)+3(2x+y)$
$=(5y+3)(2x+y)$.

7.　[解]　$x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2=x^2y^2(x-y)+2xy(x-y)$
$=(x^2y^2+2xy)(x-y)=xy(xy+2)(x-y)$.

8.　[解]　$x^4+x^3+x^2+x=x^2(x^2+1)+x(x^2+1)$
$=(x^2+x)(x^2+1)=x(x+1)(x^2+1)$.

9.　[解]　$ac+bd-(bc+ad)=c(a-b)-d(a-b)=(c-d)(a-b)$.

10.　[解]　$a^2c-abd-abc+a^2d=a^2(c+d)-ab(c+d)$
$=(a^2-ab)(c+d)=a(a-b)(c+d)$.

11.　[解]　$ad+ce+bd+ae+cd+be=d(a+b+c)+e(a+b+c)$
$=(d+e)(a+b+c)$.

12.　[解]　$a^2+cd-ab-bd+ac+ad=a(a-b+c)+d(a-b+c)$
$=(a+d)(a-b+c)$.

習題 XVII 第 184 頁

分解下列各式之因式.

1. [解] $4x^3y-20x^2y^2+25xy^3=xy(4x^2-20xy+25y^2)$

$=xy(2x-5y)^2$.

2. [解] $28tx^2-63ty^2=7t(4x^2-9y^2)=7t(2x+3y)(2x-3y)$

3. [解] $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$

$=(x-2y)^2+2[3z(x-2y)]+(3z)^2=(x-2y+3z)^2$.

4. [解] $(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$

$=(7a^2+2b^2+2a^2+7b^2)(7a^2+2b^2-2a^2-7b^2)$

$=9(a^2+b^2)5(a+b)(a-b)$

$=45(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

5. [解] $(7x^2+4x-3)^2-(x^2+4x+3)^2$

$=(7x^2+4x-3+x^2+4x+3)(7x^2+4x-3-x^2-4x-3)$

$=8x(x+1)6(x+1)(x-1)=48x(x+1)^2(x-1)$.

6. [解] $4(1-b^2-ab)-a^2=4-4b^2-4ab-a^2$

$=4-(2b+a)^2=(2+2b+a)(2-2b-a)$.

7. [解] $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

8. [解] $a^4-6a^2b^2+b^4=a^4-2a^2b^2+b^4-4a^2b^2$

$=(a^2-b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2)$.

9. [解] $a^4+4a^2+16=a^4+8a^2+16-4a^2$

$=(a^2+4)^2-(2a)^2=(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$.

10. [解] $9x^4+15x^2y^2+16y^4=9x^4+24x^2y^2+16y^4-9x^2y^2$

$=(3x^2+4y^2)^2-(3xy)^2$

$=(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy+4y^2)$.

11. [解] $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$

$=[(a+b)^2-(c-d)^2][-(a-b)^2+(c+d)^2]$

$=(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b).$

12. [解] $576x^6y^3-9y^{15}=9y^3(64x^6-y^{12})$

$=9y^3(8x^3-y^6)(8x^3+y^6)$

$=9y^3(2x-y^2)(2x+y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4).$

13. [解] $x^9-y^9=(x^3-y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6).$

14. [解] $x^{12}-y^{12}=(x^6-y^6)(x^6+y^6)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$

15. [解] $x^{10}+y^{10}=(x^2)^5+(y^2)^5$

$=(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8).$

16. [解] $x^5-32=x^5-2^5=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16).$

17. [解] $x^7+y^{14}=x^7+(y^2)^7$

$=(x+y^2)(x^6-x^5y^2+x^4y^4-x^3y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12}).$

習 題 XVIII 第 185 頁

分解下列各式之因式。

1. [解] $x^4-x^3+x-1=x^3(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^3+1)$

$=(x-1)(x+1)(x^2-x+1).$

2. [解] $x^5-x^3-8x^2+8=x^3(x^2-1)-8(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^3-8)=(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4).$

3. [解] $x^4-2x^3+2x-1=(x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^2-2x+1)=(x+1)(x-1)^3.$

4. [解] $x^3-7x^2-4x+28=x(x^2-4)-7(x^2-4)$

$=(x-7)(x^2-4)=(x-7)(x+2)(x-2).$

5. [解] $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6=x^4(x^2-y^2)-y^4(x^2-y^2)$

$=(x^4-y^4)(x^2-y^2)$

$=(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)^2.$

6. [解] $x^3+2x^2+3x+2=x^3+2x^2+x+2x+2$

$=x(x+1)^2+2(x+1)=(x+1)(x^2+x+2).$

7. [解] $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$

$=(x^5+x^4+x^3)+(x^4+2x^3+x^2)+(2x^2+2x)+1$

$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1$

$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)^2$

$=(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)[x^2(x+1)+(x+1)]$

$=(x^2+x+1)(x^2+1)(x+1).$

8. [解] $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$

$=(x^4+4x^3+4x^2)+(6x^2+12x)+9$

$=(x^2+2x)^2+6(x^2+2x)+9=(x^2+2x+3)^2.$

習 題 XIX

第 190 頁

分解下列各式之因式.

1. [解] $x^2-14x+48=(x-6)(x-8).$

2. [解] $x^2-21x-120=x^2-21x+\frac{441}{4}-\frac{921}{4}$

$$=\left(x-\frac{21}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{921}}{2}\right)^2$$

$$=\left[x-\frac{21}{2}-\frac{\sqrt{921}}{2}\right]\left[x-\frac{21}{2}+\frac{\sqrt{921}}{2}\right]$$

$=[x-(21+\sqrt{921})/2][x-(21-\sqrt{921})/2].$

3. [解] $5x^2-53x-22=(x-11)(5x+2).$

4. [解] $16x^2+64x+63=(4x+7)(4x+9).$

5. [解] $54x^2-21x+2=(6x-1)(9x-2).$

6. [解] $12x^2+20xy-8y^2=4(3x^2+5xy-2y^2)$

$=4(3x-y)(x+2y).$

7. [解] $x^4-13x^2+36=(x^2-9)(x^2-4)$

$=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2).$

8. [解] $x^3y-3x^2y^2-18xy^3=xy(x^2-3xy-18y^2)$

$=xy(x+3y)(x-6y).$

9. [解] $x^2-3x+3=x^2-3x+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=[x-(3+\sqrt{3}i)/2][x-(3-\sqrt{3}i)/2].$

10. [解] $3x^2+2x-3=3(x^2+\frac{2}{3}x-1)$

$=3\left[x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}-\dfrac{10}{9}\right]=3\left[\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^2\right]$

$=3\left[x+\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right]\left[x+\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right]$

$=3[x+(1+\sqrt{10})/3][x+(1-\sqrt{10})/3].$

11. [解] $x^2-4xy-2y^2=x^2-4xy+4y^2-4y^2-2y^2$

$=(x-2y)^2-6y^2=[x-(2+\sqrt{6})y][x-(2-\sqrt{6})y].$

12. [解] $x^2-6ax-9b^2-18ab=x^2-(3b)^2-6a(x+3b)$

$=(x+3b)(x-3b)-6a(x+3b)$

$=(x+3b)(x-6a-3b).$

13. [解] $abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$

$=abx^2-(a^2+b^2)x-[(a+b)(a-b)]$

$=(ax+\overline{a-b})(bx-\overline{a+b})$

$=(ax+a-b)(bx-a-b).$

14. [解] $x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx$

$=x^2(1+c)+dx(1+c)+b(d+x)=(1+c)x(x+d)+b(x+d)$

$=(x+d)[x(1+c)+b]=(x+d)(cx+x+b).$

15. [解] 設 $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$

$\equiv(x-5y+l)(x-3y+m)$

$\equiv x^2-8xy+mx+15y^2-5my+lx-3ly+lm$

$\equiv x^2-8xy+15y^2+(m+l)x-(5m+3l)y+lm.$

比較係數 $m+l=2,\quad 5m+3l=4,\quad lm=-3.$

$$\therefore\ l=3,\quad m=-1.$$

[答] $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3=(x-5y+3)(x-3y-1)$.

16. [解] 設 $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$

$$\equiv(x+2y+lz)(x+y+mz)$$

$$\equiv x^2+3xy+2y^2+(l+m)xz+(l+2m)yz+lmz^2.$$

比較係數 $l+m=3,\ l+2m=5,\ lm=2.$

$$\therefore\ m=2,\quad l=1.$$

[答] $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2=(x+2y+z)(x+y+2z)$.

習 題 XX 第 194 頁

分解下列各式之因式.

1. x^3-7x+6.

[解]

$$\begin{array}{l|l}
1+0-7+6 & \underline{1} \\
\quad\ \ 1+1-6 & \\
\hline
1+1-6,\ \ 0 & \underline{2} \\
\quad\ \ 2+6 & \\
\hline
1+3,\ \ 0 &
\end{array}$$

[答] $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$.

2 $x^3+6x^2+11x+6$

[解]

$$\begin{array}{l|l}
1+6+11+6 & \underline{-2} \\
\ \ -2-\ \ 8-6 & \\
\hline
1+4+\ \ 3,\ \ 0 & \underline{-3} \\
\ \ -3-\ \ 3 & \\
\hline
1+1,\ \ \ 0 &
\end{array}$$

[答] $x^3+6x^2+11x+6=(x+2)(x+3)(x+1)$.

3. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

[解]

$$\begin{array}{l|l}
1-10+35-50+24 & \underline{1} \\
\quad\ \ 1-\ \ 9+26-24 & \\
\hline
1-\ \ 9+26-24,\ \ \ 0 & \underline{2} \\
\quad\ \ 2-14+24 & \\
\hline
1-\ \ 7+12,\ \ \ 0 & \underline{3} \\
\quad\ \ 3-12 & \\
\hline
1-\ \ 4,\ \ \ 0 &
\end{array}$$

[答] $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

4. $x^4-2x^2+3x-2.$

[解]

$$\begin{array}{l|l}
1+0-2+3-2 & \underline{1} \\
\quad 1+1-1+2 & \\
\hline
1+1-1+2,\ 0 & \underline{-2} \\
\quad -2+2-2 & \\
\hline
1-1+1,\ 0 &
\end{array}$$

[答] $x^4-2x^2+3x-2=(x-1)(x+2)(x^2-x+1).$

5. $6x^3-13x^2-14x-3.$

[解]

$$\begin{array}{rl|l}
& 6-13-14-3 & \underline{3} \\
& \quad +18+15+3 & \\
\hline
& 6+\ 5+\ 1,\ 0 & \underline{-\tfrac{1}{2}} \\
& \quad -\ 3-\ 1 & \\
\hline
2 & \underline{6+\ 2,}\quad 0 & \\
& 3+\ 1 &
\end{array}$$

[答] $6x^3-13x^2-14x-3=(x-3)(2x+1)(3x+1).$

6. $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3.$

[解]

$$\begin{array}{rl|l}
& 2-5-2+2 & \underline{\tfrac{1}{2}} \\
& \quad +1-2-2 & \\
\hline
2 & \underline{2-4-4,}\ 0 & \\
& 1-2-2 &
\end{array}$$

[答] $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3=(2x-y)(x^2-2xy-2y^2)$

$=(2x-y)[x-(1+\sqrt{3})y][x-(1-\sqrt{3})y].$

7. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5.$

[解]

$$\begin{array}{l|l}
2-1-9+13-5 & \underline{1} \\
\quad 2+1-\ 8+5 & \\
\hline
2+1-8+\ 5,\ 0 & \underline{1} \\
\quad 2+3-\ 5 & \\
\hline
2+3-5,\quad 0 & \underline{1} \\
\quad 2+5 & \\
\hline
2+5,\ 0 &
\end{array}$$

[答] $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=(x-1)^3(2x+5).$

8. $4x^6-41x^4+46x^2-9$.

［解］

$$\begin{array}{l}
4+0-41+0+46+0-9 \mid -1 \\
\quad -4+4+37-37-9+9 \\
\hline
4-4-37+37+9-9,\ 0 \mid 1 \\
\quad 4+0-37+0+9 \\
\hline
4+0-37+0+9,\ 0 \mid -3 \\
\quad -12+36+3-9 \\
\hline
4-12-1+3,\ 0 \mid 3 \\
\quad 12+0-3 \\
\hline
4+0-1,\ 0 \mid -1/2 \\
\quad -2+1 \\
2 \mid 4-2,\ 0 \\
\hline
2-1
\end{array}$$

［答］ $4x^6-41x^4+46x^2-9=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.

9. $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$.

［解］

$$\begin{array}{l}
6+19+22+23+16+4 \mid -2 \\
\quad -12-4-16-14-4 \\
\hline
6+7+8+7+2,\ 0 \mid -1/2 \\
\quad -3-2-3-2 \\
\hline
2 \mid 6+4+6+4,\ 0 \\
\hline
3+2+3+2 \mid -2/3 \\
\quad -2+0-2 \\
\hline
3 \mid 3+0+3,\ 0 \\
\hline
1+0+1
\end{array}$$

［答］ $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4=(x+2)(2x+1)(3x+2)(x^2+1)$.

10. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$.

［解］

$$\begin{array}{l}
5-7-8-1+7+8-4 \mid -1 \\
\quad -5+12-4+5-12+4 \\
\hline
5-12+4-5+12-4,\ 0 \mid 1 \\
\quad 5-7-3-8+4 \\
\hline
5-7-3-8+4,\ 0 \mid 2 \\
\quad 10+6+6-4 \\
\hline
5+3+3-2,\ 0 \mid 2/5 \\
\quad 2+2+2 \\
\hline
5 \mid 5+5+5,\ 0 \\
\hline
1+1+1
\end{array}$$

［答］ $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$

$=(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$.

解下列各方程式：

11. ［解］ $x^2-4x-12=0$

分解因式 $(x+2)(x-6)=0.$

［答］ $x=-2,\ 6.$

12. ［解］ $6x^2-7x+2=0.$

分解因式 $(3x-2)(2x-1)=0.$

［答］ $x=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}.$

13. ［解］ $x^2-5x=14.$

移項，分解因式 $(x-7)(x+2)=0.$

［答］ $x=7,\ -2.$

14. ［解］ $x^2+6x=2.$

移項，配平方 $x^2+6x+9-11=0$，卽 $(x+3)^2-11=0.$

分解因式 $(x+3+\sqrt{11})(x+3-\sqrt{11})=0.$

［答］ $x=-3-\sqrt{11},\ -3+\sqrt{11}.$

15. ［解］ $x^3-9x^2+26x=24.$

移項 $x^3-9x^2+26x-24=0,$

分解因式
$$\begin{array}{l|l} 1-9+26-24 & 2 \\ \quad +2-14+24 & \\ \hline 1-7+12,\quad 0 & 3 \\ \quad +3-12 & \\ \hline 1-4,\quad 0 & \end{array}$$

$$(x-2)(x-3)(x-4)=0.$$

［答］ $x=2,\ 3,\ 4.$

16. ［解］ $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0.$

分解因式
$$\begin{array}{l|l} 1+2-4-2+3 & 1 \\ \quad +1+3-1-3 & \\ \hline 1+3-1-3,\quad 0 & 1 \\ \quad +1+4+3 & \\ \hline 1+4+3,\quad 0 & -1 \\ \quad -1-3 & \\ \hline 1+3,\quad 0 & \end{array}$$

$$(x-1)^2(x+1)(x+3)=0.$$

［答］ $x=1,\ 1,\ -1,\ -3.$

17. [解] $x^3-1=0.$

分解因式 $$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

而 $x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

[答] $x=1,\ -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$

18 [解] $10x^3-9x^2-3x+2=0.$

分解因式
$$\begin{array}{r|l}
10-\ 9-3+2 & \underline{1} \\
+10+1-2 & \\
\hline
10+\ 1-2,\ \ 0 & \underline{-\tfrac{1}{2}} \\
-\ 5+2 & \\
2\ \boxed{10-\ 4,\ \ 0} & \\
5-\ 2 &
\end{array}$$

$$(x-1)(2x+1)(5x-2)=0.$$

[答] $x=1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{5}.$

習 題 XXI **第 195 頁**

1. [解] $6xy+15x-4y-10=3x(2y+5)-2(2y+5)$
$=(3x-2)(2y+5).$

2. [解] $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2=ab(ac-bd)-cd(ac-bd)$
$=(ab-cd)(ac-bd).$

3. [解] $a^3(a-b)+b^3(b-a)=a^3(a-b)-b^3(a-b)$
$=(a-b)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$

4. [解] $a^5-81ab^4=a(a^4-81b^4)=a(a^2-9b^2)(a^2+9b^2)$
$=a(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2).$

5. [解] $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4=ab(a^3-ab^2+a^2b-b^3)$
$=ab(a+b)(a^2-b^2)=ab(a-b)(a+b)^2.$

6. [解] $3abx^2-6axy+bxy-2y^2=3ax(bx-2y)+y(bx-2y)$
$=(3ax+y)(bx-2y).$

7. [解] $3x^6-192y^6=3(x^6-64y^6)=3(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$
$=3(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2).$

8. [解] $(x^2+x)^3-8=(x^2+x-2)[(x^2+x)^2+2(x^2+x)+4]$
$=(x-1)(x+2)(x^4+2x^3+3x^2+2x+4).$

9. [解] $64x^6y^3-y^{15}=y^3(64x^6-y^{12})=y^3(8x^3+y^6)(8x^3-y^6)$
$=y^3(2x+y^2)(4x^2-2xy^2+y^4)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4).$

10. [解] $x^2-(a-b)x-ab=(x-a)(x+b).$

11. [解] $x^{2n}-3x^n-18=(x^n-6)(x^n+3).$

12. [解] $x-x^2+42=42+x-x^2=(7-x)(6+x).$

13. [解] $3x^4+3x^3-24x-24=3x^3(x+1)-24(x+1)$
$=3(x+1)(x^3-8)=3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4).$

14. [解] $x^5-9x^3+8x^2-72=x^3(x^2-9)+8(x^2-9)$
$=(x^3+8)(x^2-9)=(x+2)(x^2-2x+4)(x+3)(x-3).$

15. [解] $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2$
$=(x^2+2xc+c^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=(x+c)^2-(a+b)^2$
$=(x+c+a+b)(x+c-a-b).$

16. [解] $x^2(x^2-20)+64=x^4-20x^2+64$
$=(x^2-16)(x^2-4)$
$=(x+4)(x-4)(x+2)(x-2).$

17. [解] $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6=(a-b)^2-5(a-b)+6$
$=(a-b-3)(a-b-2).$

18. [解] $x^4-10x^2y^2+9y^4=(x^2-y^2)(x^2-9y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x+3y)(x-3y).$

19. [解] $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y$
$=(2x+y)(3x-5y)-2(2x+y)=(3x-5y-2)(2x+y).$

20. [解] $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=(x^2-a^2)(x^2-b^2)$
$=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b).$

21. [解] $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2$

$=(2xz+2uy+x^2-y^2+z^2-u^2)(2xz+2uy-x^2+y^2-z^2+u^2)$

$=[(x+z)^2-(y-u)^2][-(x-z)^2+(y+u)^2]$

$=(x+y+z-u)(x-y+z+u)(x+y-z+u)(-x+y+z+u).$

22. [解] $14x^2+19x-3=(2x+3)(7x-1).$

23. [解] $1+19y-66y^2=(1-3y)(1+22y).$

24. [解] $xy^3+55x^2y^2+204x^3y=xy(y^2+55xy+204x^2)$

$=xy(y+4x)(y+51x).$

25. [解] $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4=(a^2-9b^2c^2)^2$

$=(a+3bc)^2(a-3bc)^2.$

26. [解] $(x^2-7x)^2+6x^2-42x=(x^2-7x)^2+6(x^2-7x)$

$=x(x-7)(x^2-7x+6)=x(x-7)(x-6)(x-1).$

27. [解] $8(x+y)^3-27(x-y)^3$

$=[2(x+y)-3(x-y)][4(x+y)^2+6(x+y)(x-y)+9(x-y)^2]$

$=(5y-x)(7y^2-10xy+19x^2).$

28. [解] $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3=x^4-2x^3y-y^4+2xy^3$

$=(x^4-y^4)-2xy(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)-2xy(x^2-y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2-2xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)^3.$

29. [解] $x^2+a^2-bx-ab+2ax=(x+a)^2-b(x+a)$

$=(x+a-b)(x+a).$

30. [解] $x^5-y^5-(x-y)^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

$-(x-y)(x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4)$

$=(x-y)(5x^3y-5x^2y^2+5xy^3)$

$=5xy(x-y)(x^2-xy+y^2).$

31. [解] $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

$=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+(x-1)$

$$=(x-1)(x^4-2x^2+1)=(x-1)(x^2-1)^2$$
$$=(x+1)^2(x-1)^3.$$

32 [解] $b^4+b^2+1=b^4+2b^2+1-b^2=(b^2+1)^2-b^2$
$$=(b^2+b+1)(b^2-b+1).$$

33. [解] 設 $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5=(x+3y+l)(2x+y+m)$
$$=2x^2+7xy+3y^2+(2l+m)x+(l+3m)y+lm.$$

比較係數得 $2l+m=9,\quad l+3m=2,\quad lm=-5.$
$$\therefore\ m=-1,\quad l=5.$$

[答] $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5=(x+3y+5)(2x+y-1).$

34. [解] $a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2$
$$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2).$$

35. [解] 設 $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2$
$$=(x-2y+lz)(x+y+mz)$$
$$=x^2-xy-2y^2+(m+l)xz-(2m-l)yz+lmz^2.$$

比較係數 $m+l=4,\ 2m-l=5,\ lm=3.$
$$\therefore\ m=3,\quad l=1.$$

[答] $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2=(x-2y+z)(x+y+3z).$

36. [解] $4a^4+3a^2b^2+9b^4=4a^4+12a^2b^2+9b^4-9a^2b^2$
$$=(2a^2+3b^2)^2-(3ab)^2$$
$$=(2a^2+3ab+3b^2)(2a^2-3ab+3b^2).$$

37. [解] $x^2-8ax-40ab-25b^2=x^2-25b^2-8ax-40ab$
$$=(x+5b)(x-5b)-8a(x+5b)$$
$$=(x+5b)(x-8a-5b).$$

38. [解] $x^8+x^4+1=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$$

39. [解] $(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2$
$$=[(x^2+2x-1)+(x^2-2x+1)][(x^2+2x-1)-(x^2-2x+1)]$$
$$=2x^2(4x-2)=4x^2(2x-1).$$

40. [解] $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$

$=(ax+by-bx-ay)(ax+by+bx+ay)$

$=[a(x-y)-b(x-y)][a(x+y)+b(x+y)]$

$=(a-b)(x-y)(a+b)(x+y).$

41. [解] $x^3-ax^2-b^2x+ab^2=x(x^2-b^2)-a(x^2-b^2)$

$=(x-a)(x+b)(x-b).$

42. [解] $x^4+bx^3-a^3x-a^3b=x(x^3-a^3)+b(x^3-a^3)$

$=(x+b)(x-a)(x^2+ax+a^2).$

43. [解] $a^2-9b^2+12bc-4c^2=a^2-(9b^2-12bc+4c^2)$

$=a^2-(3b-2c)^2=(a+3b-2c)(a-3b+2c).$

44. [解] $8a^3+12a^2+6a+1=(2a)^3+3(2a)^2+3(2a)+1=(2a+1)^3.$

45. [解] $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=(x^4-2x^3+x^2)+(2x^2-2x)+1$

$=(x^2-x)^2+2(x^2-x)+1=(x^2-x+1)^2.$

46. [解] $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)=(x^2+y^2)(a^2+b^2).$

47. [解] $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$

$=4x^4(x+1)-37x^2(x+1)+9(x+1)$

$=(x+1)(4x^4-37x^2+9)$

$=(x+1)(4x^2-1)(x^2-9)$

$=(x+1)(2x+1)(2x-1)(x+3)(x-3).$

48. [解] $x^4-4x+3.$

用綜合除法分解因式

$$\begin{array}{r|l} 1+0+0-4+3 & \underline{1} \\ 1+1+1-3 & \\ \hline 1+1+1-3,\ \ 0 & \underline{1} \\ 1+2+3 & \\ \hline 1+2+3,\ \ 0 & \end{array}$$

[答] $x^4-4x+3=(x-1)^2(x^2+2x+3).$

49. [解] $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2=x^2+5ax+(3a+b)(2a-b)$

$=(x+3a+b)(x+2a-b).$

50. [解] $15x^3+29x^2-8x-12$

$=15x^3+30x^2-x^2-2x-6x-12$

$=15x^2(x+2)-x(x+2)-6(x+2)$

$=(x+2)(15x^2-x-6)=(x+2)(3x-2)(5x+3).$

51. [解] $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc=abcx^2+a^2b^2x+c^2x+abc$

$=abx(cx+ab)+c(cx+ab)=(cx+ab)(abx+c).$

52. [解] $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3.$

用綜合除法分解因式

$$\begin{array}{l|l}
2-1-5-2 & -1 \\
\quad -2+3+2 & \\ \hline
2-3-2,\ \ 0 & 2 \\
\quad +4+2 & \\ \hline
2+1,\ \ 0 &
\end{array}$$

[答] $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3=(x+a)(x-2a)(2x+a)$

53. [解] $(a-b)x^2+2ax+(a+b)=(x+1)[(a-b)x+(a+b)].$

54. [解] $x^{15}-y^{15}=(x^5)^3-(y^5)^3=(x^5-y^5)(x^{10}+x^5y^5+y^{10})$

$=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x^2+xy+y^2)$

$\times(x^8-x^7y+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8$

55. [解] $x^4-6x^3+7x^2+6x-8.$

用綜合除法分解因式

$$\begin{array}{l|l}
1-6+7+6-8 & 1 \\
\quad\ \ 1-5+2+8 & \\ \hline
1-5+2+8,\ \ 0 & -1 \\
\quad -1+6-8 & \\ \hline
1-6+8,\ \ 0 & 2 \\
\quad\ \ 2-8 & \\ \hline
1-4,\ \ 0 &
\end{array}$$

[答] $x^4-6x^3+7x^2+6x-8=(x-1)(x+1)(x-2)(x-4).$

56. [解] $4x^3-3x-1$.

用綜合除法分解因式

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 4+ & 0- & 3- & 1 & \underline{1} \\
 & & 4+ & 4+ & 1 & \\
\hline
 & 4+ & 4+ & 1, & 0 & \underline{-\frac{1}{2}} \\
 & & -2- & 1 & & \\
\cline{2-5}
2 & 4+ & 2, & 0 & & \\
\cline{2-3}
 & 2+ & 1 & & &
\end{array}
$$

[答] $4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2$.

57. [解] $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$.

用綜合除法分解因式

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & 3- & 10- & 8- & 3+ & 10+ & 8 & \underline{1} \\
 & & 3- & 7- & 15- & 18- & 8 & \\
\hline
 & 3- & 7- & 15- & 18- & 8, & 0 & \underline{4} \\
 & & 12+ & 20+ & 20+ & 8 & & \\
\hline
 & 3+ & 5+ & 5+ & 2, & 0 & & \underline{-\frac{2}{3}} \\
 & & -2- & 2- & 2 & & & \\
\cline{2-5}
3 & 3+ & 3+ & 3, & 0 & & & \\
\cline{2-4}
 & 1+ & 1+ & 1 & & & &
\end{array}
$$

[答] $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$

$=(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)$.

58. [解] $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$.

用綜合除法分解因式

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5+ & 24- & 15- & 118+ & 24 & \underline{2} \\
 & 10+ & 68+ & 106- & 24 & \\
\hline
5+ & 34+ & 53- & 12, & 0 & \underline{-3} \\
 & -15- & 57+ & 12 & & \\
\hline
5+ & 19- & 4, & 0 & & \underline{-4} \\
 & -20+ & 4 & & & \\
\cline{1-3}
5- & 1, & 0 & & &
\end{array}
$$

[答] $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24=(x-2)(x+3)(x+4)(5x-1)$.

59. [解] $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$

$=ac(ab+c+d)-d(ab+c+d)$

$=(ac-d)(ab+c+d)$.

60. [解] $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

$$=(x^4-2x^2y^2+y^4)-(2x^2z^2-2y^2z^2)+z^4-4y^2z^2$$

$$=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$$

$$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$$

$$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz).$$

$$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$$

$$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z).$$

習　題　XXII　　第204頁

求下列各式之H. C. F.

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^2z^5$ 及 $x^4y^4z^4u$.

[解] H. C. F. $=x^3yz^3$.

2. [解] $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$ 及 a^3b-ab^3.

$$a^3b-ab^3=ab(a+b)(a-b)$$

$$\therefore\ \text{H. C. F.}=(a+b)(a-b).$$

3. [解] y^4+y^2+1 及 y^2-y+1.

$$y^4+y^2+1=(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

$$\therefore\ \text{H. C. F.}=y^2-y+1$$

4. [解] a^2-1, a^2+2a+1 及 a^3+1.

$$a^2-1=(a+1)(a-1)$$

$$a^2+2a+1=(a+1)^2$$

$$a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$$

$$\therefore\ \text{H. C. F.}=a+1.$$

5. [解] x^3-1 及 x^3+ax^2-ax-1.

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+ax^2-ax-1=(x-1)[x^2+(a+1)x+1]$$

$$\therefore\ \text{H. C. F.}=x-1.$$

6. [解] x^4-y^4, x^6+y^6 及 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$
$$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$
$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x^2+y^2)(x+y)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=x^2+y^2.$$

7. [解] x^2+5x+6, x^2+x-2 及 $x^2-14x-32$.

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$
$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$
$$x^2-14x-32=(x+2)(x-16)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=x+2.$$

8. [解] $(x-1)(x-2)$ 及 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.

$$5x^4-15x^3+8x^2+6x-4=(x-1)(x-2)(5x^2-2)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=(x-1)(x-2).$$

9. [解] x^3-1 及 x^3-4x^2-4x-5.

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^3-4x^2-4x-5=(x-5)(x^2+x+1)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=x^2+x+1.$$

10. [解] $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 及 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.

$$(x^2-1)^2(x+1)^2=(x+1)^4(x-1)^2$$
$$(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)=(x+1)^3(x+3)(x-7)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=(x+1)^3.$$

11. [解] $(x-1)^2(x-2)^2$ 及 $(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$.

$$(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)^2(2x^2-x+3)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=(x-1)(x-2)^2.$$

12. [解] $2x^3-3x^2-11x+6$ 及 $4x^3+3x^2-9x+2$.

$$2x^3-3x^2-11x+6=(x+2)(2x^2-7x+3)$$
$$4x^3+3x^2-9x+2=(x+2)(4x^2-5x+1)$$
$$\therefore\ \text{H. C. F.}=x+2.$$

13. [解] x^3-2x^2-2x-3 及 $2x^3+x^2+x-1$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 1-2-2-3 & 2+1+1-1 & 2 \\
 & 1+1+1 & 2-4-4-6 & \\
\cline{2-3}
-3 & -3-3-3 & 5+5+5 & \\
 & -3-3-3 & 1+1+1 & \\
\cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=x^2+x+1$.

14. [解] $3x^3+2x^2-19x+6$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & 3+2-19+6 & 2+1-13+6 & 2 \\
3 & 6+4-38+12 & 2+2-12 & \\
\cline{3-3}
 & 6+3-39+18 & -1-1+6 & -1 \\
\cline{2-2}
 & 1+1-6 & -1-1+6 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=x^2+x-6$.

15. [解] $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 及 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1-2 & 1-1-3+1+2 & 2+3-1-3-1 & 2 \\
 & 1+1-1-1 & 2-2-6+2+4 & \\
\cline{2-3}
 & -2-2+2+2 & 5+5-5-5 & \\
 & -2-2+2+2 & 1+1-1-1 & \\
\cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=x^3+x^2-x-1$.

16. [解] $3x^3-13x^2+23x-21$ 及 $6x^3+x^2-44x+21$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1-1 & 3-13+23-21 & 6+1-44+21 & 2 \\
 & 3-10+7 & 6-26+46-42 & \\
\cline{2-3}
 & -3+16-21 & 27-90+63 & \\
 & -3+10-7 & 3-10+7 & 1-1 \\
\cline{2-2}
 & 6-14 & 3-7 & \\
\cline{3-3}
 & 3-7 & -3+7 & \\
 & & -3+7 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=3x-7$.

17. [解] $3x^3+8x^2-4x-15$ 及 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & 3+8-4-15 & 6+10-3-2+5 & 2-2 \\
1 & 21+56-28-105 & 6+16-8-30 & \\
 & 21+20-25 & \hline -6+5+28+5 & \\
 & \hline 36-3-105 & -6-16+8+30 & \\
4 & 84-7-245 & \hline 21+20-25 & 7-5 \\
 & 84+80-100 & 21+35 & \\
 & \hline -87-145 & \hline -15-25 & \\
 & 3+5 & -15-25 & \\
 & & \hline 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=3x+5$.

18. [解] $6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 及 $6x^5+7x^4+3x^3+7x^2-3x$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1-1 & 6+7-9-7+3 & 6+7+3+7-3 & 1 \\
 & 6+7-3 & 6+7-9-7+3 & \\
 & \hline -6-7+3 & \hline 12+14-6 & \\
 & -6-7+3 & 6+7-3 & \\
 & \hline 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=6x^3+7x^2-3x=x(6x^2+7x-3)$.

19. [解] $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 及 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 6-3+7+1-3 & 2+3+7+3+9 & \\
 & 6+9+21+9+27 & 6+9+21+9+27 & 1 \\
 & \hline -12-14-8-30 & 6+7+4+15 & \\
3+5 & 6+7+4+15 & \hline 2+17-6+27 & \\
 & 6-3+9 & 6+51-18+81 & 1 \\
 & \hline 10-5+15 & 6+7+4+15 & \\
 & 10-5+15 & \hline 44-22+66 & \\
 & \hline 0 & 2-1+3 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=2x^2-x+3$.

20. [解] $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 及 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & 6-4-11-3-3-1 & 4+2-18+3-5 & 2 \\
3 & 12-8-22-6-6-2 & 4-8+2-2 & \\
 & 12+6-54+9-15 & \hline 10-20+5-5 & 5 \\
 & \hline -14+32-15+9-2 & 10-20+5-5 & \\
7 & 28-64+30-18+4 & \hline 0 & \\
 & 28+14-126+21-35 & & \\
 & \hline -78+156-39+39 & & \\
 & 2-4+1-1 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=2x^3-4x^2+x-1$.

21. [解] $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 及 $5x^4-3x^2-8x-3$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
5 & 5-0-3-8-3 & 1-0-1-4-3-2 & \\
 & 5+30+0+25 & 5-0-5-20-15-10 & 1 \\
\cline{2-3}
 & -30-33-33-3 & 5-0-3-8-3 & \\
\cline{3-3}
10 & 10+11+11+1 & -2-12-12-10 & \\
 & 10+60+60+50 & 1+6+6+5 & 1+5 \\
\cline{2-2}
 & -49-49-49 & 1+1+1 & \\
\cline{3-3}
 & 1+1+1 & 5+5+5 & \\
 & & 5+5+5 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=x^2+x+1$.

22. [解] $3x^3-x^2-12x+4,\ x^3-2x^2-5x+6$ 及 $7x^3+19x^2+8x-4$.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 3-1-12+4 & 1-2-5+6 & \\
 & 3-6-15+18 & 5-10-25+30 & 1 \\
5-7 & 5+3-14 & 5+3-14 & \\
\cline{3-3}
 & 5+10 & -13-11+30 & \\
\cline{2-2}
 & -7-14 & -65-55+150 & -13 \\
 & -7-14 & -65-39+182 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & -16-32 & \\
 & & 1+2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
1+2 & 7+19+8-4 & 7 \\
 & 7+14 & \\
\cline{2-2}
 & 5+8 & 5 \\
 & 5+10 & \\
\cline{2-2}
 & -2-4 & -2 \\
 & -2-4 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F. $=x+2$.

23. [解] $x^3+ax^2-3x-3a,\ x^3-x^2-3x+3$ 及 x^3+x^2-3x-3.

$x^3+ax^2-3x-3a=x(x^2-3)+a(x^2-3)=(x+a)(x^2-3)$

$x^3-x^2-3x+3=x(x^2-3)-(x^2-3)=(x-1)(x^2-3)$

$x^3+x^2-3x-3=x(x^2-3)+(x^2-3)=(x+1)(x^2-3)$

$\therefore$ H. C. F. $=x^2-3$.

24. ［解］ $7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 及 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.

-1	$7-6-18+4$	$14-19-32+28$	2
	$7-4-20$	$14-12-36+8$	
	$-2+2+4$	$-7+4+20$	-7
$1+1$	$1-1-2$	$-7+7+14$	
	$1-2$	$-3+6$	
	$1-2$	$1-2$	
	$1-2$		
	0		

$\therefore$ H. C. F. $=xy-2y^2=y(x-2y)$.

25. ［解］ $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 及 $(x-1)(x+3)(12x^3+x^2+x-1)$.

$x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)=x(x-1)(x+3)(x^2+x+1)$

$\therefore$ H. C. F. $=(x-1)(x+3)$.

26 ［解］ $4x^3-8x^2-3x+9$ 及 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

$4x^3-8x^2-3x+9=(x+1)(2x-3)^2$

$(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)=(x+1)(2x-3)(2x-3)(x-2)$

$=(x+1)(2x-3)^2(x-2)$.

$\therefore$ H. C. F. $=(x+1)(2x-3)^2$.

習 題 XXIII　　第 207 頁

求下列各式之 L. C. M.

1. ［解］ $3x-1,\ 9x^2-1$ 及 $9x^2+1$.

$\therefore$ L. C. M. $=(9x^2-1)(9x^2+1)$.

2. ［解］ $(a+b)(a^5-b^5)$ 及 $(a-b)(a^5+b^5)$.

$(a+b)(a^5-b^5)=(a+b)(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$(a-b)(a^5+b^5)=(a-b)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

$\therefore$ L. C. M. $=(a^5-b^5)(a^5+b^5)$.

3. ［解］ $a^3+a^2+a,\ a^5-a^3$ 及 a^6-a^3.

$a^3+a^2+a=a(a^2+a+1)$.

$$a^5-a^3=a^3(a^2-1)=a^3(a+1)(a-1)$$
$$a^6-a^3=a^3(a^3-1)=a^3(a-1)(a^2+a+1)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=a^3(a^3-1)(a+1).$$

4. [解] $(x^3-y^3)(x-y)^3$, $(x^4-y^4)(x-y)^2$ 及 $(x^2-y^2)^2$.

$$(x^3-y^3)(x-y)^3=(x-y)^4(x^2+xy+y^2)$$
$$(x^4-y^4)(x-y)^2=(x^2+y^2)(x-y)^3(x+y)$$
$$(x^2-y^2)^2=(x-y)^2(x+y)^2$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(x-y)^4(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2).$$

5. [解] x^2-3x+2, x^2-5x+6 及 x^2-4x+3.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$
$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(x-1)(x-2)(x-3).$$

6. [解] $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$ 及 $z^2-(x+y)^2$.

$$x^2-(y+z)^2=(x+y+z)(x-y-z)$$
$$y^2-(z+x)^2=(y+z+x)(y-z-x)$$
$$z^2-(x+y)^2=(z+x+y)(z-x-y)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z).$$

7. [解] $2x^2+3xy-9y^2$, $3x^2+8xy-3y^2$ 及 $6x^2-11xy+3y^2$.

$$2x^2+3xy-9y^2=(2x-3y)(x+3y)$$
$$3x^2+8xy-3y^2=(3x-y)(x+3y)$$
$$6x^2-11xy+3y^2=(2x-3y)(3x-y)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(2x-3y)(x+3y)(3x-y).$$

8. [解] x^3+x^2+x+1 及 x^3-x^2+x-1.

$$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x^2+1)(x+1)$$
$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x^2+1)(x-1)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

9. [解] $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$ 及 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.

$$2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y=a^2(2x+3y)+xy(2x+3y)$$
$$=(a^2+xy)(2x+3y)$$
$$(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x=2x^2y-3a^2y+2a^2x-3xy^2$$
$$=xy(2x-3y)+a^2(2x-3y)=(a^2+xy)(2x-3y).$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y).$$

10. [解] $8x^3-18xy^2$, $8x^3+8x^2y-6xy^2$ 及 $8x^2-2xy-15y^2$.

$$8x^3-18xy^2=2x(4x^2-9y^2)=2x(2x+3y)(2x-3y)$$
$$8x^3+8x^2y-6xy^2=2x(4x^2+4xy-3y^2)$$
$$=2x(2x-y)(2x+3y)$$
$$8x^2-2xy-15y^2=(2x-3y)(4x+5y)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=x(2x+3y)(2x-3y)(2x-y)(4x+5y).$$

11. [解] x^3+y^3, x^3-y^3 及 $x^4+x^2y^2+y^4$.

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(x^3+y^3)(x^3-y^3).$$

12. [解] x^6-1, $3x^3-5x^2-3x+5$ 及 x^4-1.

$$x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$$
$$3x^3-5x^2-3x+5=3x(x^2-1)-5(x^2-1)$$
$$=(3x-5)(x^2-1)$$
$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x^2+1)(x-1)(x+1)$$
$$\therefore\ \text{L. C. M.}=(x^2-1)(x^4+x^2+1)(3x-5)(x^2+1).$$

13. [解] $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ 及 $6x^2+5x-6$.

$$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)(4x^2-6x+9).$$
$$16x^4+36x^2+81=16x^4+72x^2+81-36x^2$$
$$=(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9).$$

$6x^2+5x-6=(2x+3)(3x-2)$

$\therefore$ L. C. M. $=(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(3x-2)$.

14. [解] x^2-4a^2, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$ 及 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.

$x^2-4a^2=(x-2a)(x+2a)$

$x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3=x^2(x+2a)+4a^2(x+2a)$

$=(x^2+4a^2)(x+2a)$

$x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3=x^2(x-2a)+4a^2(x-2a)$

$=(x^2+4a^2)(x-2a)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2)$

15. [解] x^2+2x, $x^2+bx+2x+2b$ 及 $x^3+ax^2-b^2x-ab^2$.

$x^2+2x=x(x+2)$

$x^2+bx+2x+2b=x(x+b)+2(x+b)=(x+2)(x+b)$

$x^3+ax^2-b^2x-ab^2=x^2(x+a)-b^2(x+a)$

$=(x^2-b^2)(x+a)=(x-b)(x+b)(x+a)$

$\therefore$ L. C. M. $=x(x+2)(x+b)(x-b)(x+a)$

16. [解] $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$ 及 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$.

$(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)=(x+2)(x+3)(x+1)(2x-5)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$

17. [解] $(x^3-8)(27x^3+1)$ 及 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$.

$(x^3-8)(27x^3+1)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)$

$(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$

$=(2x+1)(x^2+2x+4)(x-2)(x^2+x+1)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)$

$\times(2x+1)(x^2+x+1)$.

18. [解] $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 1-6+11-6 & 2-\ \ 7+\ \ 7-\ \ 2 & 2 \\
 & 1-3+\ \ 2 & 2-12+22-12 & \\
\cline{2-3}
-3 & -3+\ \ 9-6 & 5-15+10 & \\
 & -3+\ \ 9-6 & 1-\ \ 3+\ \ 2 & \\
\cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}$$

故此二式之 H. C. F. 爲 x^2-3x+2.

$\therefore$ 二式之 L C M. 爲 $(x^3-6x^2+11x-6)(2x^3-7x^2+7x-2)$

$\div(x^2-3x+2)=2x^4-13x^3+28x^2-23x+6.$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1-7 & 2-13+28-\ \ 23+\ \ 6 & 2+1-13+6 & 1+3 \\
 & 2+\ \ 1-13+\ \ \ \ 6 & 2-5+\ \ 2 & \\
\cline{2-3}
 & -14+41-\ \ 29+\ \ 6 & 6-15+6 & \\
 & -14-\ \ 7+\ \ 91-42 & 6-15+6 & \\
\cline{2-3}
 & 48-120+48 & 0 & \\
 & 2-\ \ \ \ 5+\ \ 2 & &
\end{array}$$

[答] 此三式之 L C. M. 爲

$(2x^4-13x^3+28x^2-23x+6)(2x^3+x^2-13x+6)\div(2x^2-5x+2)$

$=2x^5-7x^4-11x^3+61x^2-63x+18$

$=(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(2x-1).$

19. [解] x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$ 及 $2x^4+x^3+7x^2$

$+3x+3.$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
-1 & 1+0+5+4+5 & 2-1+10+4+\ \ 5 & 2 \\
 & 1+0+4+5 & 2+0+10+8+10 & \\
\cline{2-3}
 & 1-1+5 & -1+\ \ 0-4-\ \ 5 & -1 \\
 & & -1+\ \ 1-5 & \\
\cline{3-3}
 & & -\ \ 1+1-\ \ 5 & -1 \\
 & & -\ \ 1+1-\ \ 5 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

故 (1), (2) 二式之 H. C F. 爲 x^2-x+5.

$\therefore$ 二式之 L. C. M. 爲 $(x^4+5x^2+4x+5)(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)$

$\div(x^2-x+5)=(x^2+x+1)(2x^4-x^3+10x^2+4x+5).$

$-1-2$	$2+1+\ \ 7+3+3$	$2-1+10+4+5$	1
	$2-3-\ \ 1-2$	$2+1+\ \ 7+3+3$	
	$4+\ \ 8+5+3$	$-2+\ \ 3+1+2$	-1
	$4-\ \ 6-2-4$	$-2-\ \ 1-1$	
	$14+7+7$	$4+2+2$	2
	$2+1+1$	$4+2+2$	
		0	

故 (2), (3) 式之 L. C. M. 爲 $(x^2+3)(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)$.

［答］　此三式之 L. C. M. 爲

$(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)(x^2+x+1)(x^2+3)$.

20.　［解］　$2x^4-x^3+2x^2+3x-2$,　$2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$　及 $x^4+3x^3+x^2+5x+6$.

1	$2-1+2+3-2$	$2+3-4+13-6$	1
	$2-3+5-2$	$2-1+2+\ \ 3-2$	
1	$2-3+5-2$	$4-6+10-4$	
	$2-3+5-2$	$2-3+\ \ 5-2$	
	0		

故 (1), (2) 式之 L. C. M. 爲 $(x+1)(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$.

2	$2+3-4+13-\ \ 6$	$1+3+1+5+6$	1
	$2+6+2+10+12$	$1+2-1+6$	
	$-3-6+\ \ 3-18$	$1+2-1+6$	1
	$1+2-\ \ 1+\ \ 6$	$1+2-1+6$	
		0	

故 (2), (3) 式之 L. C. M. 爲 $(x+1)(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$.

［答］　此三式之 L. C. M. 爲 $(x+1)(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$.

習　題　XXIV　　　　第 215 頁

化下列各分式爲最低項：

1.　［解］　$\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}=\dfrac{x^3y^3(x^2-4y^2)}{x^2y^2(x-2y)}=\dfrac{x^3y^3(x-2y)(x+2y)}{x^2y^2(x-2y)}$

$=xy(x+2y)$.

2.　［解］　$\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}=\dfrac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

3. [解] $$\frac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}=\frac{(x-7)(x+3)}{(x+9)(x-7)}=\frac{x+3}{x+9}.$$

4. [解] $$\frac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}=\frac{(3x+1)(x-3)}{(3x+1)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}.$$

5. [解] $$\frac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}=\frac{3(x-3b)^2}{2(x-3b)(x+3b)}=\frac{3(x-3b)}{2(x+3b)}.$$

6. [解] $$\frac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}=\frac{(5x+a)(x+a)}{(5x-3a)(x+a)}=\frac{5x+a}{5x-3a}.$$

7. [解] $$\frac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}=\frac{(x-5)^2(x+5)(x-3)}{(x-3)(x+3)(x-2)(x-5)}$$
$$=\frac{(x-5)(x+5)}{(x+3)(x-2)}.$$

8. [解] $$\frac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}=\frac{(5x-7)(3x-5)}{(5x-7)(2x-3)}=\frac{3x-5}{2x-3}.$$

9. [解] $$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$$
$$=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}=\frac{1}{x^2-y^2}.$$

10. [解] $$\frac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}=\frac{(x+z)^2-y^2}{(x+y)^2-z^2}$$
$$=\frac{(x-y+z)(x+y+z)}{(x+y-z)(x+y+z)}=\frac{x-y+z}{x+y-z}.$$

11. [解] $$\frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}=\frac{1+2xy+x^2y^2-x^2-2xy-y^2}{1-x^2}.$$
$$=\frac{(1-y^2)(1-x^2)}{1-x^2}=1-y^2.$$

12. [解] $$\frac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}=\frac{m(2x-y)-6n(2x-y)}{3m(2x-y)-n(2x-y)}$$
$$=\frac{(m-6n)(2x-y)}{(3m-n)(2x-y)}=\frac{m-6n}{3m-n}.$$

13. [解] $$\frac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}=\frac{(x+1)(2x^2+5x-12)}{(x+1)(2x^2+x-15)}$$
$$=\frac{2x^2+5x-12}{2x^2+x-15}.$$

14. [解] $$\frac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}=\frac{(x-1)(x^2-7x+12)}{(2x+1)(x^2-7x+12)}=\frac{x-1}{2x+1}.$$

15. [解] $$\frac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}=\frac{(x^2+4)(x^2+x+1)}{2(x^2+6)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x^2+4}{2(x^2+6)}.$$

16. [解] $$\frac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}=\frac{(x-3)(x^2+x+2)}{(x^2+2x+4)(x^2+x+2)}$$
$$=\frac{x-3}{x^2+2x+4}.$$

17. [解] $$\frac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}=\frac{(x^2+2bx+c^2)(x^2-2bx+c^2)}{(x^2+2bx+c^2)(x^2+2bx-c^2)}$$
$$=\frac{x^2-2bx+c^2}{x^2+2bx-c^2}.$$

19. [解] $$\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

於分子中令 $a=b$, 得 $(b-c)^3+(c-b)^3$ 即 0. 故知分子中有 $a-b$ 之因式. 同樣 $b-c$, $c-a$ 亦爲分子之因式, 故此式之分子可有 $(a-b)(b-c)\times(c-a)$ 之因式.

分子爲齊次三次式而 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 亦爲三次式, 故分子中除 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 外不能再有其他含有 a, b, c 之因式, 故可假定 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\equiv k(a-b)(b-c)(c-a)$. 其中 k 爲常數. 兩方比較係數得 $k=3$.

$$\therefore\quad \frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c+a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=3.$$

習　題　XXV　　第 222 頁

簡化下列各式：

1. ［解］ $$\frac{1}{2a-3b}+\frac{1}{2a+3b}-\frac{6b}{4a^2-9b^2}=\frac{2a+3b+2a-3b-6b}{(2a-3b)(2a+3b)}$$
$$=\frac{2(2a-3b)}{(2a-3b)(2a+3b)}=\frac{2}{2a+3b}.$$

2. ［解］ $$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^3+1}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2-x+1)+(x^2-x+1)+(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x^3+1)(x-1)}.$$

3. ［解］ $$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-4x+3}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{(x-3)+(x-1)+(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{(x-1)(x-3)}.$$

4. ［解］ $$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}+\frac{x+2}{(x-2)(x-3)}+\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-3)+(x+2)(x-1)+(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{x^2-2x-3+x^2+x-2+x^2+x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

5. [解] $\dfrac{1}{x+b}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}$

$$=\frac{(x-b)(x^2-c^2)-(x^2-b^2)(x-c)+(x+b)(x^2-c^2)-(x+c)(x^2-b^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$$

$$=\frac{2b^2x-2c^2x}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}=\frac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}.$$

6. [解] $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0.$$

7. [解] $\dfrac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$

$$=\frac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}-\frac{zx(y+a)}{(x-y)(y-z)}+\frac{xy(z+a)}{(x-z)(y-z)}$$

$$=\frac{yz(x+a)(y-z)-zx(y+a)(x-z)+xy(z+a)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$=\frac{a\{z^2(x-y)+y^2(x-z)+x^2(y-z)\}}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$=\frac{a(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=a.$$

8. [解] $x+\dfrac{1}{3-2x}-\dfrac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\dfrac{2x+6}{4x^2+6x+9}$

$$=x-\frac{1}{2x-3}-\frac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$$

$$=x-\frac{1}{2x-3}-\frac{8x^4-33x}{(2x-3)(4x^2+6x+9)}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$$

$$=\frac{x(2x-3)(4x^2+6x+9)-(4x^2+6x+9)-(8x^4-33x)-(2x-3)(2x+6)}{(2x-3)(4x^2+6x+9)}$$

$$=-\frac{8x^2+6x-9}{8x^3-27}.$$

9. ［解］ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2$

$-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$

$=x^2+2+\frac{1}{x^2}+y^2+2+\frac{1}{y^2}+x^2y^2+2+\frac{1}{x^2y^2}-x^2y^2-y^2$

$-x^2-1-1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2y^2}=4.$

10. ［解］ $\frac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\frac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\frac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$

$=\frac{(a+b-c)[(a+b)^2+(a+b)c+c^2]}{a+b-c}$

$+\frac{(b+c-a)[(b+c)^2+(b+c)a+a^2]}{b+c-a}$

$+\frac{(c+a-b)[(c+a)^2+(c+a)b+b^2]}{c+a-b}$

$=a^2+2ab+b^2+ac+bc+c^2+b^2+2bc+c^2+ab+ac+a^2$

$+c^2+2ca+a^2+cb+ab+b^2$

$=3a^2+3b^2+3c^2+4ab+4bc+4ca.$

11. ［解］ $\frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\frac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$

$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2-x-3)}-\frac{(3x+1)(x-5)}{(3x+1)(x^2-x-3)}$

$=\frac{(x+2-x+5)}{x^2-x-3}=\frac{7}{x^2-x-3}.$

12. ［解］ $\frac{1}{x^4-4x^2-x+2}+\frac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}$

$+\frac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$

$=\frac{1}{(x+1)(x-2)(x^2+x-1)}+\frac{1}{(x-2)(2x-1)(x^2+x-1)}$

$$+\frac{1}{(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)}$$

$$=\frac{2x-1+x+1+x-2}{(x+1)(x-2)(x^2+x-1)(2x-1)}$$

$$=\frac{2(2x-1)}{(x+1)(x-2)(x^2+x-1)(2x-1)}=\frac{2}{x^4-4x^2-x+2}.$$

13. ［解］ $a^4-\frac{1}{a^4}\div a-\frac{1}{a}=\frac{a^8-1}{a^4}\times\frac{a}{a^2-1}$

$$=\frac{(a^2-1)(a^6+a^4+a^2+1)a}{a^4(a^2-1)}=\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3}.$$

14. ［解］ $\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)(a^4+a^3)=\frac{1-a+a^2}{a^3}\times a^3(a+1)=a^3+1.$

15. ［解］ $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\times\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$

$$=\frac{(x-3)(x-2)}{(x+4)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x+4)}{(x-3)(x-5)}\times\frac{(x-5)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\frac{(x+1)}{(x-1)}.$$

16. ［解］ $\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$

$$=\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{4x-6}{2x(x+1)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\left\{1-\frac{2x^2+4x-8}{2x(x+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{-2x+8}{2x(x+1)}=\frac{4x-6}{2x(x+1)}=\frac{2x-3}{x(x+1)}.$$

17. ［解］ $\frac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\frac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}=\frac{x(a+x)}{2b-cx}\cdot\frac{x^2(2b-cx)}{(a+x)^2}=\frac{x^3}{a+x}.$

18. ［解］ $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\frac{x-y+z}{x-y-z}$

$$=(x+y-z)(x-y+z)\cdot\frac{x-y-z}{x-y+z}$$

$$=(x+y-z)(x-y-z)=x^2-y^2+z^2-2xz.$$

19. [解] $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

$$=\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)-a^3-b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2+a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2ab(a+b)\cdot 2(a^2+ab+b^2)}{(a^3-b^3)(a+b)(a-b)}=\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{4ab}{(a-b)^2}.$$

20. [解] $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}=\dfrac{\dfrac{y+z-x}{x(y+z)}}{\dfrac{y+z+x}{x(y+z)}}\div\dfrac{\dfrac{x+z-y}{y(x+z)}}{\dfrac{x+z+y}{y(x+z)}}$

$$=\frac{y+z-x}{y+z+x}\cdot\frac{x+z+y}{x+z-y}=\frac{y+z-x}{x+z-y}.$$

21. [解] $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{ab}}{\dfrac{a^2-b^2}{ab}}\div\dfrac{\dfrac{b^4-a^4}{a^4b^4}}{\dfrac{b^2+2ab+a^2}{a^2b^2}}$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\div\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{a^2b^2(b^2+2ab+a^2)}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a+b)(a-b)(a+b)(-a+b)}=-\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}.$$

22. [解] $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}=\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}}}=\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+1}}$

$$=\frac{x-2}{x-\dfrac{2x^2-6x+2+x^2-2x}{x^2-3x+1}}=\frac{x-2}{\dfrac{x^3-3x^2+x-3x^2+8x-2}{x^2-3x+1}}$$

$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{(x-2)(x^2-4x+1)}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}.$$

23. [解] $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}=x+\cfrac{1}{x+\cfrac{x}{x^2+1}}=x+\dfrac{x^2+1}{x^3+2x}$

$$=\frac{x^4+2x^2+x^2+1}{x^3+2x}=\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}.$$

習題 XXVI　　第230頁

指定下列各式適當之值:

1. [解] $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{1}{2}.$

2. [解] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x^2+x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-2}{x^2+x-1}=-3.$$

3. [解] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}=\infty.$

4. [解] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^2}{(x-a)(x-b)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x-b}=0.$

5. [解] $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x-2)(x+2)(x+1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)}=-\frac{5}{4}.$$

6. [解] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}=\infty.$

7. [解] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{2+\dfrac{6}{x}-\dfrac{7}{x^2}}=\dfrac{3}{2},$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\dfrac{1}{x^2}}{1}=\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^4+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+x^3-10x^2-5}{x^5-6x^4+x-6}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{10}{x^3}-\frac{5}{x^5}}{1-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{6}{x^5}}=2.$$

8. [解] $\lim\limits_{x\to 3}\left[\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x-2}{x(x-3)}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-2(x-3)}{x(x^2-9)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2}{x(x+3)}=-\frac{2}{18}=-\frac{1}{9}.$$

9. [解] $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x(x-1)}\right]=\frac{3}{0}=\infty.$

10. [解] $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+\frac{x+1}{x-2}}{x^2+\frac{x-1}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{x^2(x-2)+(x+1)}{x-2}}{\frac{x^2(x-2)+(x-1)}{x-2}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x+1}{x^3-2x^2+x-1}=3.$$

11. [解] $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}}{\frac{3x+1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x-x^2+x}{x^2-1}}{\frac{3x+1}{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x}{3x^3+x^2-3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

習 題 XXVII

第 235 頁

就 x 解下列各方程式:

1. $\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0.$

［解］　去分母 $12x^2-30x-2x+5-12x^2+21x-8x+14=0.$

整理　　　　$19x=19.$　　$\therefore\quad x=1.$

$x=1$ 時，分母不等於 0，故爲原方程式之根。

2. $\dfrac{6x}{5x-1}+\dfrac{8}{3-15x}=\dfrac{1}{6}.$

［解］　原方程式可化爲 $\dfrac{6x}{5x-1}+\dfrac{8}{3(1-5x)}=\dfrac{1}{6}.$

去分母，整理　　　　$36x-16=5x-1.$

$$31x=15.\qquad\therefore\quad x=\frac{15}{31}.$$

以 $x=\dfrac{15}{31}$ 代入分母，不爲 0，故爲原方程式之根。

3. $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x^2-6x+8}.$

［解］　通分　　　　$\dfrac{4x-16-x+2}{x^2-6x+8}=\dfrac{4}{x^2-6x+8}.$

去分母，整理　　　　$3x-14=4.$

$\therefore\quad x=6$ 爲所求根。

4. $\dfrac{3}{2x+3}+\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{8}{2x^2-7x-15}=0.$

［解］　去分母，整理 $3x-15+2x+3-8=0.$

$$5x=20.$$

$\therefore\quad x=4$ 爲所求根。

5. $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+1)}=0.$

［解］　去分母，整理 $(x+2)+2(x+1)+3(x-3)=0,$

$$x+2+2x+2+3x-9=0,$$

$$6x=5.$$

$\therefore\quad x=\frac{5}{6}$ 爲所求根。

6. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+4x-5}+\frac{3}{x^2+6x+5}=0.$

［解］ 將分母分解因式

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)(x+5}+\frac{3}{(x+1)(x+5)}=0.$$

去分母　$2(x+5)-2(x+1)+3(x-1)=0.$

$$3x=-5.$$

$\therefore\quad x=-\frac{5}{3}$ 爲所求根。

7. $\frac{x+1}{3x+1}+\frac{2x}{5-6x}=\frac{5}{5+9x-18x^2}.$

［解］ 通分 $\frac{(x+1)(5-6x)+2x(3x+1)}{5+9x-18x^2}=\frac{5}{5+9x-18x^2}.$

去分母　$-6x^2-x+\quad+6x^2+2x=5.$

$\therefore\quad x=0$ 爲所求根。

8. $\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}.$

［解］ 通分　$\frac{a(x+a)^2+b(x+b)^2}{ab(x+a)(x+b)}=\frac{(a+b)(x+a)(x+b)}{ab(x+a)(x+b)}.$

去分母　$ax^2+2a^2x+a^3+bx^2+2b^2x+b^3-ax^2-2abx-bx^2$

$$-a^2x-b^2x-a^2b-ab^2=0.$$

整理　$x(a^2+b^2-2ab)=-a^3-b^3+a^2b+ab^2.$

$\therefore\quad x=-\frac{(a+b)(a-b)^2}{(a-b)^2}=-(a+b)$ 爲所求根。

9. $\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^3-1}{x-1}=20.$

［解］ 通分 $\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}-\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=20.$

去分母　$x^2-x+1-x^2-x-1=20.$

$\therefore\quad x=-10$ 爲所求根。

10. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}+\frac{x-1}{x^2+3x-4}=0.$

［解］ 分解因式 $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+4)}+\frac{x-1}{(x-1)(x+4)}=0.$

去分母 $$x+1+1=0.$$

$$\therefore\quad x=-2 \text{ 爲所求根。}$$

11. $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}.$

［解］ 原式可化爲 $1+\frac{-5}{x-3}-1+\frac{5}{x-4}=1+\frac{-1}{x+8}-1+\frac{1}{x+3}.$

化簡 $$\frac{5}{(x-3)(x-4)}=\frac{5}{(x+8)(x+3)}.$$

去分母 $$(x-3)(x-4)=(x+8)(x+3),$$

整理 $$x^2-7x+12=x^2+11x+24,$$

$$18x=-12,$$

$$\therefore\quad x=-\tfrac{2}{3} \text{ 爲所求根。}$$

12. $\frac{x+7}{x+6}+\frac{x+9}{x+8}=\frac{x+10}{x+9}+\frac{x+6}{x+5}.$

［解］ 原式可化爲 $1+\frac{1}{x+6}+1+\frac{1}{x+8}=1+\frac{1}{x+9}+1+\frac{1}{x+5}.$

化簡 $$\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}.$$

$$\frac{3}{(x+6)(x+9)}=\frac{3}{(x+5)(x+8)}.$$

去分母 $$(x+6)(x+9)=(x+5)(x+8).$$

$$2x=-14.$$

$$\therefore\quad x=-7 \text{ 爲所求根。}$$

13. $\frac{x^3+2}{x-2}-\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{15}{x^2-4}=4x.$

［解］ 去分母 $(x^3+2)(x+2)-(x^3-2)(x-2)-15=4x(x^2-4).$

化簡　$x^4+2x^3+2x+4-x^4+2x^3+2x-4=4x^3-16x+15.$

$$20x=15.$$

$\therefore\quad x=\frac{3}{4}$ 爲所求根。

14. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}+\dfrac{3x^2+x}{1-x^4}=0.$

［解］　原式可化爲 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}-\dfrac{3x^2+x}{x^4-1}=0.$

去分母　$(x+1)(x^2+1)-(x-2)(x^2+1)-(3x^2+x)=0.$

$$x^3+x^2+x+1-x^3+2x^2-x+2-3x^2-x=0.$$

$\therefore\quad x=3$ 爲所求根。

15. $\dfrac{3}{x^3-8}+\dfrac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\dfrac{1}{x-2}=0.$

［解］　通分　$\dfrac{3\times 2+(2x+5)(x-2)-2(x^2+2x+4)}{2(x^3-8)}=0.$

去分母　$6+2x^2+x-10-2x^2-4x-8=0.$

化簡　$3x=-12.$

$\therefore\quad x=-4$ 爲所求根。

16. $\dfrac{ax+c}{x-p}+\dfrac{bx+d}{x-q}=a+b.$

［解］　移項　$\dfrac{ax+c}{x-p}-a+\dfrac{bx+d}{x-q}-b=0.$

合併　$\dfrac{ap+c}{x-p}+\dfrac{bq+d}{x-q}=0.$

去分母　$(ap+c)(x-q)+(bq+d)(x-p)=0.$

化簡　$apx+cx-apq-cq+bqx+dx-bpq-dp=0.$

$$x(c+d+ap+bq)=cq+dp+apq+bpq.$$

$\therefore\quad x=\dfrac{cq+dp+(a+b)pq}{c+d+ap+bq}$ 爲所求根。

17. $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}+\dfrac{x^2+x+3}{x+2}+\dfrac{2x^2-x+7}{x+3}=4x.$

[解] 化為帶分式 $x+8+x-1+\dfrac{5}{x+2}+2x-7+\dfrac{28}{x+3}=4x.$

整理 $$\frac{5}{x+2}+\frac{28}{x+3}=0.$$

去分母 $$5x+15+28x+56=0.$$

$$33x=-71.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{71}{33}\ \text{為所求根。}$$

18. $\dfrac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\dfrac{b^2-x^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0.$

[解] 原式可化為 $\dfrac{(x-a)(x+2b)}{x-a}-\dfrac{x^2-b^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0.$

化簡 $$x+2b-(x+2b)-\frac{3b^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0.$$

$$-\frac{3b^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0.$$

去分母 $$-b^2x+2b^2c+c^2x-2bc^2=0.$$

整理 $$(c^2-b^2)x=2bc(c-b).$$

$$(c+b)x=2bc.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2bc}{b+c}\ \text{為所求根。}$$

19. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3.$

[解] 去分母 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c).$

整理 $3x(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc.$

$$\therefore\quad x=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}=\frac{a+b+c}{3}\ \text{為所求根。}$$

20. $\frac{3x+2}{x^2+x}-\frac{x-5}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2-x}=0.$

［解］ 分解因式 $\frac{3x+2}{x(x+1)}-\frac{x-5}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-2}{x(x-1)}=0.$

去分母 $(3x+2)(x-1)-(x-5)x-(x-2)(x+1)=0.$

整理 $3x^2-x-2-x^2+5x-x^2+x+2=0.$

$$x^2+5x=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\qquad x=-5.$$

$x=0$ 使原方程式之分母爲 0，非方程式之根，故所求方程式之根爲 $x=-5$.

21. $\frac{a}{x+2}+\frac{2}{x-2}-\frac{x+6}{x^2-4}=0.$

［解］ 去分母 $a(x-2)+2(x+2)-x-6=0.$

整理 $(a+1)x-2(a+1)=0.$

$$(a+1)x=2(a+1).$$

$$\therefore\quad x=2.$$

$x=2$ 使方程式中之分母爲 0，故非方程式之根，卽原方程式無根.

22. $\begin{cases}\frac{3x+y-1}{x-y+2}=\frac{6}{7}\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm] \frac{x+9}{y+4}=\frac{x+3}{y+3}\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

［解］ 從 (1) 式， $21x+7y-7=6x-6y+12.$

卽 $15x+13y-19=0\cdots\cdots\cdots(3)$

從 2 式， $xy+9y+3x+27=xy+3y+4x+12.$

卽 $6y-x+15=0\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)×15+(3)， $103y=-206.$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}y&=-2.\\ x&=3.\end{aligned}\right\}$$

代入 (4) 式，得

$x=3$, $y=-2$ 爲所求之解答.

23. $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-3}+\dfrac{x-y}{x^2-9}=\dfrac{y-4}{x+3} & \cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{xy-2y}+\dfrac{9}{xy}=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

[解] 從 (1) 式， $xy-2x+3y-6+x-y-xy+4x+3y-12=0.$

$$3x+5y-18=0 \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式， $$6x+y-9=0 \cdots\cdots(4)$$

(3)×2−(4)， $$9y=27.$$

$$\therefore \quad y=3.$$

代入 (4) 式，得 $$x=1.$$

$x=1,\ y=3$ 爲所求之解答。

24. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a & \cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{yz}{y+z}=b & \cdots\cdots(2)\\[2ex] \dfrac{zx}{z+x}=c & \cdots\cdots(3)\end{cases}$

[解] 從 (1) 式， $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \cdots\cdots(4)$$

從 (2) 式， $$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b} \cdots\cdots(5)$$

從 (3) 式， $$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c} \cdots\cdots(6)$$

(4)+(5)+(6)， $$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{bc+ca+ab}{2abc} \cdots\cdots(7)$$

(7)−(5)， $$\frac{1}{x}=\frac{bc-ca+ab}{2abc}.$$

$$\therefore\quad x=2abc/(ab+bc-ca).$$

(7)－(6)，
$$\frac{1}{y}=\frac{bc+ca-ab}{2abc}.$$

$$\therefore\quad y=2abc/(-ab+lc+ca).$$

(7)－(4)，
$$\frac{1}{z}=\frac{-bc+ca+ab}{2abc}.$$

$$\therefore\quad z=2abc/\ ab-bc+ca).$$

故上列 x, y, z 之值爲所求之解答。

25. $$\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3 & \cdots\cdots(1)\\[2mm] \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2} & \cdots\cdots(2)\\[2mm] \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

(1)＋(3)，
$$y+z+\frac{2}{z-3x}=1\quad\cdots\cdots(4)$$

(4)×10，
$$10(y+z)+\frac{20}{z-3x}=10\cdots\cdots(5)$$

(2)×4，
$$2(y+z)-\frac{20}{z-3x}=14\cdots\cdots(6)$$

(5)＋(6)，
$$12(y+z)=24.$$
$$y+z=2.$$
$$z=2-y\quad\cdots\cdots(7)$$

以 (7) 代入 (1) 式，得 $$\frac{2}{x+2y}+2y+2(2-y)=3.$$

即 $$x+2y=-2\quad\cdots\cdots(8)$$

以 (7) 代入 (3) 式，得 $$\frac{4}{2-y-3x}-\frac{2}{x+2y}=-1\quad\cdots\cdots(9)$$

從 (8) 式，$$x=-2(y+1).$$

代入 (9) 式，得 $$\frac{4}{5y+8}-\frac{2}{-2}=-1,$$

$$-10y-16=4.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ y&=-2.\\ z&=4.\\ x&=2.\end{aligned}\right\}$$

代入 (7) 式,得 $z=4$.

代入 (8) 式,得 $x=2$.

上列 x, y, z 之值爲所求之解答。

習　題　XXVIII

第 244 頁

分解下列各式爲最簡部分分式,而分母具實係數:

1. [解]　設 $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+3}$,

則　$2x+11=A(x+3)+B(x-2)$.

命 $x=2$, 則　$15=5A$.

$$\therefore\ A=3.$$

命 $x=-3$, 則　$5=-5B$.

$$\therefore\ B=-1.$$

[答]　$\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$.

2. [解]　設 $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{3x-1}$,

則
$$\begin{aligned}6x-1&=A(3x-1)+B(2x+1)\\&=x(3A+2B)-(A-B).\end{aligned}$$

比較係數　$3A+2B=6,\quad A-B=1.$

$$\therefore\ A=\tfrac{8}{5},\quad B=\tfrac{3}{5}.$$

[答]　$\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}=\dfrac{8}{5(2x+1)}+\dfrac{3}{5(3x-1)}$.

3. [解]　設 $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$,

則　$4x=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$.

命 $x=-1$, 則　$-4=2A$,　　$\therefore\ A=-2$.

命 $x=-2$，則　$-8=-B$，　$\therefore\ B=8.$

命 $x=-3$，則　$-12=2C$，　$\therefore\ C=-6.$

［答］ $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{8}{x+2}-\dfrac{6}{x+3}.$

4. ［解］ 設 $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x-4}.$$

則
$$\begin{aligned}x^2+2x+3=&A(x-2)(x-3)(x-4)\\&+B(x-1)(x-3)(x-4)\\&+C(x-1)(x-2)(x-4)\\&+D(x-1)(x-2)(x-3).\end{aligned}$$

命 $x=1$，得　$6=-6A$，　$\therefore\ A=-1.$

命 $x=2$，得　$11=2B$，　$\therefore\ B=\dfrac{11}{2}.$

命 $x=3$，得　$18=-2C$，　$\therefore\ C=-9.$

命 $x=4$，得　$27=6D$，　$\therefore\ D=\frac{9}{2}.$

［答］ $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{11}{2(x-2)}-\dfrac{9}{x-3}+\dfrac{9}{2(x-4)}.$

5. ［解］ 設 $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{Bx+C}{1-x+x^2}.$

則　$x^2+2=A(1-x+x^2)+(Bx+C)(1+x).$

命 $x=-1$，得　$3=3A$，　$\therefore\ A=1.$

以 A 之值代入　$x^2+2=1-x+x^2+(Bx+C)(x+1)$

化簡　$x+1=(Bx+C)(x+1)$，即 $Bx+C=1.$

$$\therefore\ B=0,\qquad C=1.$$

［答］ $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x+x^2}.$

6. ［解］ 設 $\dfrac{8x+2}{x-x^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{1+x}+\dfrac{C}{1-x}.$

則 $8x+2=A(1+x)(1-x)+Bx(1-x)+Cx(1+x).$

命 $x=0$，得 $2=A,\quad \therefore\ A=2.$

命 $x=-1$，得 $-2B=-6,\quad \therefore\ B=3.$

命 $x=1$，得 $2C=10,\quad \therefore\ C=5.$

[答] $\dfrac{8x+2}{x-x^3}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{1+x}+\dfrac{5}{1-x}.$

7\. [解] 設 $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=x+2+\dfrac{-x}{(x-1)(x-2)}$

$$=x+2+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

則 $-x=A(x-2)+B(x-1).$

命 $x=1$，得 $-1=-A,\quad \therefore\ A=1.$

命 $x=2$，得 $-2=B,\quad \therefore\ B=-2.$

[答] $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=x+2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}.$

8\. [解] 設 $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}+\dfrac{D}{(x-2)^4}.$

則 $2x^3-x^2+1=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D.$

命 $x=2,\quad \therefore\ D=13.$

以 D 之值代入 $2x^3-x^2-12=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2).$

全式除以 $(x-2)$，$2x^2+3x+6=A(x-2)^2+B(x-2)+C.$

再命 $x=2,\quad \therefore\ C=20.$

以 C 之值代入 $2x^2+3x-14=A(x-2)^2+B(x-2).$

全式除以 $(x-2)$，$2x+7=A(x-2)+B.$

令 $x=2,\quad \therefore\ B=11.$

$\therefore\ A=2.$

[答] $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{11}{(x-2)^2}+\dfrac{20}{(x-2)^3}+\dfrac{13}{(x-2)^4}.$

9. [解] 設 $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}=\dfrac{x-1}{x(2x+3)(x-4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{2x+3}+\dfrac{C}{x-4}$.

則 $\quad x-1=A(2x+3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(2x+3)$.

命 $x=0$, $\quad -1=-12A$, $\quad\therefore\ A=\dfrac{1}{12}$.

命 $x=-\dfrac{3}{2}$, $\quad -\dfrac{5}{2}=\dfrac{33}{4}B$, $\quad\therefore\ B=-\dfrac{10}{33}$.

命 $x=4$, $\quad 3=44C$, $\quad\therefore\ C=\dfrac{3}{44}$.

[答] $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}=\dfrac{1}{12x}-\dfrac{10}{33(2x+3)}+\dfrac{3}{44(x-4)}$.

10. [解] 設 $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}=\dfrac{Ax+B}{2x^2+1}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x-1}$,

則 $$6=(Ax+B)(x+1)(x-1)+C(2x^2+1)(x-1)$$
$$+D(2x^2+1)(x+1)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

命 $x=1$, $\quad 6=6D$, $\quad\therefore\ D=1$.

命 $x=-1$, $\quad 6=-6C$, $\quad\therefore\ C=-1$.

將 C, D 的值代入 (1) 式,得

$$6=(Ax+B)(x+1)(x-1)-2x^3+2x^2-x+1+2x^3+2x^2+x+1.$$
$$\therefore\ -4x^2+4=Ax^3+Bx^2-Ax-B.$$
$$\therefore\ A=0,\qquad B=-4.$$

[答] $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}=-\dfrac{4}{2x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$.

11. [解] 設 $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$

$$=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{D}{(x+3)^4}+\frac{E}{(x+3)^5}.$$ 則

$$2x^3-3x^2+4x-5=A(x+3)^4+B(x+3)^3+C(x+3)^2+D(x+3)+E.$$

命 $x=-3$, $\quad\therefore\ E=-98$,

以 E 之值代入,並以 $(x+3)$ 除全式,得

$$2x^2-9x+31=A(x+3)^3+B(x+3)^2+C(x+3)+D.$$

命 $x=-3$, $\therefore\ D=76.$

以 D 之值代入，並以 $(x+3)$ 除全式，得

$$2x-15=A(x+3)^2+B(x+3)+C.$$

命 $x=-3$, $\therefore\ C=-21.$

以 C 之值代入，並以 $(x+3)$ 除全式，得

$$2=A(x+3)+B.$$

命 $x=-3$, $\therefore\ B=2.$

以 B 之值代入， $0=A(x+3)$ $\therefore\ A=0.$

[答] $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}=\dfrac{2}{(x+3)^2}-\dfrac{21}{(x+3)^3}+\dfrac{76}{(x+3)^4}-\dfrac{98}{(x+3)^5}.$

12. [解] 設 $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}.$

則 $x^2+x+1=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)$

$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D).$$

比較係數 $A+C=0,\quad B+D=1,$

$2A+C=1,\quad 2B+D=1.$

$\therefore\ A=1,\quad B=0,\quad C=-1,\quad D=1.$

[答] $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x-1}{x^2+2}.$

13. [解] 設 $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}.$

則 $x^2+6x-1=A(x-3)^2+B(x-1)(x-3)+C(x-1)$

命 $x=1$, $6=4A$, $\therefore\ A=\frac{3}{2}$

命 $x=3$, $26=2C$, $\therefore\ C=13$

命 $x=2$, $15=\frac{3}{2}-B+13$, $\therefore\ B=-\frac{1}{2}.$

[答] $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}=\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-3)}+\dfrac{13}{(x-3)^2}$

14. [解] 設 $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}.$

則 $$3x-1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$
$$=(A+B)x^2-(2B-C)x+(A-2C).$$

比較係數　$A+B=0,\quad -2B+C=3,\quad A-2C=-1.$
$$\therefore\ A=1,\quad B=-1,\quad C=1.$$

[答]　$\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x^2+1}.$

15. [解]　設 $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+x+1)^3}.$

則 $2x^5-x+1=(Ax+B)(x^2+x+1)^2+(Cx+D)(x^2+x+1)+(Ex+F)$
$$=Ax^5+(2A+B)x^4+(3A+2B+C)x^3$$
$$+(2A+3B+C+D)x^2+(A+2B+C+D+E)x$$
$$+(B+D+F).$$

比較係數　$A=2,\quad 2A+B=0,\quad 3A+2B+C=0.$
$$2A+3B+C+D=0,\quad A+2B+C+D+E=-1$$
及 $$B+D+F=1.$$
$$\therefore\ A=2,\quad B=-4,\quad C=2,\quad D=6.$$
$$E=-3,\quad F=-1.$$

[答]　$\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{2x-4}{x^2+x+1}+\dfrac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}-\dfrac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}.$

16. [解]　設 $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}.$

則 $2x^2-x+1=A(x^3-2x^2+x)+B(x^2-2x+1)+C(x^3-x^2)+Dx^2$
$$=(A+C)x^3-(2A-B+C-D)x^2+(A-2B)x+B.$$

比較係數　$A+C=0,\quad 2A-B+C-D=-2,$
$$A-2B=-1,\quad B=1.$$
$$\therefore\ A=1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=2.$$

[答]　$\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}.$

17. [解]　設 $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+2}+\dfrac{C}{x-2}+\dfrac{D}{x+1}.$

則 $$3x^2-x+2=(Ax+B)(x^2-x-2)+C(x^2+2)(x+1)$$
$$+D(x^2+2)(x-2)\cdots\cdots(1)$$

命 $x=2$, $\qquad C=\frac{2}{3}$.

命 $x=-1$, $\qquad D=-\frac{2}{3}$.

將 C, D 二值代入 (1) 式，得

$$3x^2-x+2=(Ax+B)(x^2-x-2)+2x^2+4.$$
$$x^2-x-2=Ax^3-(A-B)x^2-(2A+B)x-2B.$$
$$\therefore\ A=0,\qquad B=1.$$

[答] $$\frac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}=\frac{1}{x^2+2}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+1)}.$$

18. [解] 設 $$\frac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}.$$

則 $$x^2+px+q=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)$$
$$+C(x-a)(x-b).$$

命 $x=a$, $$a^2+ap+q=A(a-b)(a-c)$$
$$\therefore\ A=\frac{a^2+ap+q}{(a-b)(a-c)}.$$

命 $x=b$, $$b^2+bp+q=B(b-a)(b-c),$$
$$\therefore\ B=\frac{b^2+bp+q}{(b-a)(b-c)}.$$

命 $x=c$, $$c^2+cp+q=C(c-a)(c-b),$$
$$\therefore\ C=\frac{c^2+cp+q}{(c-a)(c-b)}.$$

[答] $$\frac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{a^2+ap+q}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x-a}$$
$$+\frac{b^2+bp+q}{(b-a)(b-c)}\cdot\frac{1}{x-b}+\frac{c^2+cp+q}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{x-c}.$$

19. [解] 設 $$\frac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}.$$

則 $2x^2-3x-2=A(x-1)^2(x+3)^3+Bx(x-1)(x+3)^3$

$$+Cx(x+3)^3+Dx(x-1)^2(x+3)^2$$

$$+Ex(x-1)^2(x+3)+Fx(x-1)^2$$

$$=(A+B+D)x^5+(7A+8B+C+4D+E)x^4$$

$$+(10A+18B+9C-2D+E+F)x^3$$

$$-(18A-27C+12D+5E+2F)x^2$$

$$-(27A+27B-27C-9D-3E-F)x+27A.$$

比較係數　$A+B+D=0,\quad 7A+8B+C+4D+E=0.$

$$10A+18B+9C-2D+E+F=0,$$

$$18A-27C+12D+5E+2F=-2,$$

$$27A+27B-27C-9D-3E-F=3,$$

$$27A=-2.$$

$$\therefore\ A=-\frac{2}{27},\qquad B=\frac{25}{256},\qquad C=-\frac{3}{64},$$

$$D=-\frac{163}{6912},\quad E=-\frac{35}{288},\quad F=-\frac{25}{48}.$$

[答]　$$\frac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}=-\frac{2}{27x}+\frac{25}{256(x-1)}-\frac{3}{64(x-1)^2}$$

$$-\frac{163}{6912(x+3)}-\frac{35}{288(x+3)^2}-\frac{25}{48(x+3)^3}.$$

20. [解]　設 $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}.$

則 $x^3+x+3=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$

$$=(A+C)x^3-(A-B-C-D)x^2$$

$$+(A-B+C+D)x+(B+D)$$

比較係數 $A+C=1,\ A-B-C-D=0,\ A-B+C+D=1,$

$$B+D=3.$$

$$\therefore\ A=2,\quad B=\tfrac{3}{2},\quad C=-1,\quad D=\tfrac{3}{2}.$$

[答]　$$\frac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}=\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x-3}{2(x^2-x+1)}.$$

習　題　XXIX　　　　第249頁

1. 試述式 $x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2)$ 關於若何之文字爲對稱。

［解］ 以 x, z 互換，所得結果與原式全同，即

$$z^4-2y^4+x^4+4(z^3-y^3)(y^3-x^3)(z^2+x^2).$$

故原式關於 x 及 z 爲對稱。

2. 將以下關於 a, b, c 之對稱函數全部書出。

Σa^2b^2, Σa^3b^4, $\Sigma a^2/b$, $\Sigma a^2b^3c^5$, $\Sigma a^2b^2c^4$, $\Sigma(a+b)c$, $\Sigma(a+b^2)c^3$, $\Sigma(a+2b+3c)$.

［解］ $\Sigma a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

$\Sigma a^3b^4=a^3b^4+b^3a^4+b^3c^4+c^3b^4+c^3a^4+a^3c^4$.

$\Sigma a^2/b=a^2/b+b^2/a+b^2/c+c^2/b+c^2/a+a^2/c$.

$\Sigma a^2b^3c^5=a^2b^3c^5+a^2c^3b^5+b^2a^3c^5+b^2c^3a^5+c^2a^3b^5+c^2b^3a^5$.

$\Sigma a^2b^2c^4=a^2b^2c^4+a^2c^2b^4+b^2c^2a^4$.

$\Sigma(a+b)c=(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$.

$$\Sigma(a+b^2)c^3=(a+b^2)c^3+(b+a^2)c^3+(b+c^2)a^3+(c+b^2)a^3+(c+a^2)b^3+(a+c^2)b^3.$$

$$\Sigma(a+2b+3c)=(a+2b+3c)+(a+2c+3b)+(b+2c+3a)+(b+2a+3c)+(c+2a+3b)+(c+2b+3a).$$

3. 試證 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 爲關於 a, b, c 之輪換式而非對稱式；又 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 爲對稱式。

［解］ 以 a 代 b, b 代 c, c 代 a 代入原式，則原式不變。如以 a 及 b 互換，則原式變爲 $(b-a)(a-c)(c-b)$，與原式符號相反，故 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 爲輪換而非絕對對稱。

再在 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 式中，任以 a, b, c 中二字互換，所得結果與原式全同，故知關於 a, b, c 爲對稱。

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 關於 a,b,c,d 爲對稱否?

〔解〕 若將 a,b,c,d 之任意二字,如 a,b 互換,則原式變爲 $(b-a)^2(a-c)^2(c-d)^2(d-b)^2$ 與原式中並不相同,故知原式關於 a,b,c,d 爲不對稱。

5. 將以下各組之式依輪換次序排列之。

$$y^2-x^2,\ z^2-y^2,\ x^2-z^2;\qquad a^2bc,\ abd^2,\ ac^2d,\ b^2cd;$$
$$(a-c)(b-a),\ (a-c)(c-b),\ (a-b)(b-c).$$

〔解〕 $y^2-x^2,\ z^2-y^2,\ x^2-z^2$ 關於 x,y,z 之輪換式爲 $z^2-y^2,\ x^2-z^2,\ y^2-x^2$.

$a^2bc,\ abd^2,\ ac^2d,\ b^2cd$ 關於 a,b,c,d 之輪換式爲 $b^2cd,\ bca^2,\ bd^2a,\ c^2da$.

$(a-c)(b-a),\ (a-c)(c-b),\ (a-b)(b-c)$ 關於 a,b,c 之輪換式爲 $(b-a)(c-b),\ (b-a)(a-c),\ (b-c)(c-a)$.

6. 試將 a,b,c,d 之輪換函數全部書出,已知其首項如下:

$$ab^3c^2,\ a(b-c),\ (b+2c)(a+d),\ a^2/(a-b)(a-c).$$

〔解〕 ab^3c^2 之輪換式爲 $ab^3c^2+bc^3d^2+cd^3a^2+da^3b^2$.

$a(b-c)$ 之輪換式爲 $a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)+d(a-b)$.

$(b+2c)(a+d)$ 之輪換式爲 $(b+2c)(a+d)+(c+2d)(b+a)+(d+2a)(c+b)+(a+2b)(d+c)$.

$\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}$ 之輪換式爲 $a^2/(a-b)(a-c)+b^2/(b-c)(b-d)+c^2/(c-d)(c-a)+d^2/(d-a)(d-b)$.

7. 證明下之恆等式爲眞。

$$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=\Sigma a^4+\Sigma a^3b;\qquad \Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\,\Sigma abc.$$

〔解〕
$$\begin{aligned}\Sigma a^3\cdot\Sigma a&=(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\\&=a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b\\&=\Sigma a^4+\Sigma a^3b.\end{aligned}$$

$$\Sigma ab\cdot\Sigma a=(ab+bc+ca)(a+b+c)$$
$$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$$
$$=\Sigma a^2b+3\Sigma abc.$$

習 題 XXX

第251頁

分解下列各式之因式：

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

[解] 當 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數皆爲零，故此函數能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡。

原式爲三次齊次輪換對稱式而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 亦然。

故 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(y-z)(z-x)(x-y)$，$k$ 爲不含 x,y,z 之常數。

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$，得 $k=-1$.

[答] $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)$.

2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$.

[解] 當 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數爲 0，故此函數能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡。

原式爲三次齊次輪換對稱式，而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 亦然。

故 $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$. k 爲不含 x,y,z 之常數。

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$，得 $k=-1$.

[答] $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$.

3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.

[解] 當 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數爲 0，故此函數能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡。

原式爲三次齊次輪換對稱式，而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 亦然。

故 $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=k(x-y)(y-z)(z-x)$.

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$，得 $k=3$.

[答] $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.

[解] 設 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時,此函數爲 0, 故此函數能爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡,但原式爲四次齊次輪換對稱式,而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 則爲三次齊次輪換對稱式.故原式中除 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 之因式外尙有一次齊次對稱式,故

$$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$$
$$=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z),\ k \text{ 爲常數。}$$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$, 得 $k=1$.

[答] $$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.

[解] 當 $x=y,\ y=z$, 及 $z=x$ 時,此函數爲 0. 故此函數能爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡,但原式爲五次齊次輪換對稱式,而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 爲三次齊次輪換對稱式. 故原式中除 $(x-y)(y-z)\times(z-x)$ 之因式外,應有二次齊次對稱式。

$$\therefore\ x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)],\ k, l \text{ 爲常數。}$$

設 $x=1,\ y=-1,\ z=0$, 得 $-2=4k-2l$. (1)

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$, 得 $-4=-10k-4l$. (2)

解 (1), (2) 式,得 $k=0,\ l=1$.

[答] $$x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$$

6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

[解] 當 $x^2=y^2,\ y^2=z^2$ 及 $z^2=x^2$ 時,此函數爲 0, 故此函數爲 $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$ 除盡.但原式爲六次齊次輪換對稱式,而 $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$ 亦然。

故 $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$=k(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$, k 爲不含 x, y, z 之常數。

設 $x=2, y=1, z=0$, 得 $k=-1$.

［答］ $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$=-(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

$=-(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)$.

7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

［解］ 當 $x=-y, y=-z, z=-x$ 時，此函數爲 0，故此函數爲 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 除盡。原式爲三次齊次對稱式，而 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 亦然。

故 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=k(x+y)(y+z)(z+x)$, k 爲不含 x, y, z 之常數。

設 $x=2, y=1, z=0$, 得 $k=3$.

［答］ $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.

［解］ 當 $x=y$ $y=z, z=x$ 時，此函數爲 0，故此函數爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡，但原式爲五次齊次輪換對稱式，而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 爲三次齊次輪換對稱式，故原式中除 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 之因式，外尚有二次齊次輪換對稱式。

故 $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

$=(y-z)(z-x)(x-y)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$, k, l 爲常數。

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$, 得 $30=10k+4l$.

$x=3,\ y=1,\ z=0$, 得 $-210=-60k-18l$.

$$\therefore\ k=5,\ l=-5.$$

［答］ $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

$=5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

［解］ 當 $x=0, y=0, z=0$ 時，原式爲 0，故原式有 xyz 之因式，原式爲五次齊次輪換對稱式 而 xyz 爲三次式，故原式中除 xyz 之因式

外，尙有二次齊次對稱式.

故 $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

$=xyz[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$, k, l 爲常數。

設 $x=1$, $y=1$, $z=1$, 得 $240=3k+3l$.

$x=1$, $y=1$, $z=-1$, 得 $-240=-3k+l$.

$$\therefore\ l=0,\ k=80.$$

［答］ $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

$=80xyz(x^2+y^2+z^2)$.

10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$.

［解］ 當 $x=y, y=z, z=x$ 時，原式爲 0，故原式爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡，但原式爲四次齊次輪換對稱式，而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 爲三次齊次輪換對稱式，故原式中除 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 之因式外，尙有一次齊次輪換對稱式.

故 $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$

$=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$, k 爲常數.

設 $x=2$, $y=1$, $z=0$, 得 $k=-2$.

［答］ $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$

$=-2(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

［解］ 當 $x=-y$, $y=-z$, $z=-x$ 時原式爲 0，故原式有 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 之因式，但原式爲三次齊次對稱式，而 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 亦然.

故 $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$

$=k(x+y)(y+z)(z+x)$, k 爲不含 x, y, z 之常數.

設 $x=2$, $y=1$, $z=0$, 得 $k=1$.

［答］ $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$

$=(x+y)(y+z)(z+x)$.

12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

［解］　當 $x=y$, $y=z$, $z=x$ 時,原式爲 0,故原式有 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 之因式，但原式爲六次齊次輪換對稱式，而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 爲三次齊次輪換對稱式，故原式中除 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 之因式外，尙有三次齊次輪換對稱式，故

$$x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$$
$$\times[(kx^3+y^3+z^3)+l(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+mxyz].$$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$, 得　$30=-18k-12l.$

$x=3,\ y=1,\ z=0$, 得 $240=-6[2\ k+12l].$

$x=3,\ y=2,\ z=1$, 得 $180=-72k-99l-12m.$

$$\therefore\ k=-1,\ l=-1,\ m=-1.$$

［答］　$x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$
$\times(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+xyz).$

簡化下列各分式:

13.　$\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}.$

［解］　原式 $=\dfrac{-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$

因 $-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)$ 能爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡,故

$$-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)[k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)].$$

設 $a=2,\ b=1,\ c=0$, 得 $14=10k+4l.$

$a=3,\ b=1,\ c=0$, 得 $13=10k+3l.$

$$\therefore\ l=1,\ k=1.$$

［答］　$\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$
$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$

14.　$\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}.$

[解] 公分母爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

分子爲 $-[(b-c)(x+a)+(c-a)(x+b)+(a-b)(x+c)]$

$$=-x\Sigma(b-c)-\Sigma a(b-c)=0.$$

[答] $$\frac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\frac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\frac{x+c}{(c-a)(c-b)}=0.$$

15. $$\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}.$$

[解] 公分母爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

分子爲 $-(a^2-bc)(b-c)-(b^2-ca)(c-a)-(c^2-ab)(a-b)$

$$=-\Sigma a^2(b-c)+\Sigma bc(b-c)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)-(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

[答] $$\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}=0.$$

16. $$\frac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

[解] 公分母爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

分子爲 $-(b+c)^2(b-c)-(c+a)^2(c-a)-(a+b)^2(a-b)$.

當 $a=b$, $b=c$, $c=a$ 時此式爲 0，故此式有 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之因式。

再因原式與 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 均爲三次齊次輪換式，故 $(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)$，而 k 爲不含 a, b, c 之常數。

設 $a=2$, $b=1$, $c=0$, 得 $k=-1$.

∴ 分子爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

[答] $$\frac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}=1.$$

17. $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

[解] 公分母爲 $(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)$.

分子爲 $-a^2(b-c)(x-b)(x-c)-b^2(c-a)(x-c)(x-a)-c^2(a-b)$

$\times(x-a)(x-b)$

$=-[x^2\cdot\Sigma a^2(b-c)-x\Sigma a^2(b+c)(b-c)+\Sigma a^2bc(b-c)]$

$=-[x^2\cdot\Sigma a^2(b-c)-x\cdot\Sigma a^2(b^2-c^2)+abc\Sigma a(b-c)]$.

但 $\Sigma a^2(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

$$\Sigma a^2(b^2-c^2)=0,$$

$$\Sigma a(b-c)=0.$$

故分子爲 $(b-c)(c-a)(a-b)x^2$.

［答］ $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

$$=\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

習　題　XXXI　　　　第 259 頁

藉助於二項定理展開下列各式：

1. ［解］ $(3x+2y)^3$

$$=27x^3+3(3x)^2\cdot 2y+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(3x)\cdot(2y)^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}(2y)^3$$

$$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3.$$

2. ［解］ $$(a-b)^8=a^8-8a^7b+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}a^6b^2-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}a^5b^3$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4b^4-\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^3b^5+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^2b^6$$

$$-\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}ab^7+b^8$$

$$=a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6$$

$$-8ab^7+b^8.$$

3. ［解］ $$(1+2x^2)^7=1^7+7(2x^2)+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}(2x^2)^2+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}(2x^2)^3$$

$$+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2x^2)^4+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(2x^2)^5$$

$$+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}(2x^2)^6+(2x^2)^7$$

$$=1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}$$

$$+128x^{14}.$$

4. ［解］ $$\left(2+\frac{1}{x}\right)^4=2^4+4\cdot2^3\cdot\frac{1}{x}+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot2^2\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}\cdot2\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$=16+\frac{32}{x}+\frac{24}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}.$$

5. ［解］ $$\left(x-\frac{3}{x}\right)^6=x^6-6\cdot x^5\left(\frac{3}{x}\right)+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}x^4\left(\frac{3}{x}\right)^2-\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3\left(\frac{3}{x}\right)^3$$

$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^2\left(\frac{3}{x}\right)^4-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x\left(\frac{3}{x}\right)^5+\left(\frac{3}{x}\right)^6$$

$$=x^6-18x^4+135x^2-540+\frac{1215}{x^2}-\frac{1458}{x^4}+\frac{729}{x^6}.$$

6. ［解］ $$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^5=\left(\frac{x}{y}\right)^5-5\left(\frac{x}{y}\right)^4\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$-\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^4-\left(\frac{y}{x}\right)^5$$

$$=\frac{x^5}{y^5}-\frac{5x^3}{y^3}+\frac{10x}{y}-\frac{10y}{x}+\frac{5y^3}{x^3}-\frac{y^5}{x^5}.$$

7. ［解］ $$(1-x+2x^2)^4=[1-(x-2x^2)]^4$$

$$=1^4-4(x-2x^2)+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}(x-2x^2)^2$$

$$-\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}(x-2x^2)^3+(x-2x^2)^4$$

$$=1-4x+8x^2+6x^2-24x^3+24x^4-4x^3+24x^4-48x^5$$

$$+32x^6+x^4-8x^5+24x^6-32x^7+16x^8$$

$$=1-4x+14x^2-28x^3+49x^4-56x^5+56x^6-32x^7+16x^8$$

8. 【解】 $(a^2+ax-x^2)^3=(a^2)^3+3(a^2)^2(ax-x^2)$

$$+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}a^2(ax-x^2)^2+(ax-x^2)^3$$

$$=a^6+3a^5x-3a^4x^2+3a^4x^2-6a^3x^3+3a^2x^4+a^3x^3-3a^2x^4$$

$$+3ax^5-x^6$$

$$=a^6+3a^5x-5a^3x^3+3ax^5-x^6.$$

9. 求 $(1+x/2)^{11}$ 中第六項。

［解］ $n=11,\ r+1=6,\ \therefore r=5.$

$$\therefore \text{所求項為 } \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{x^5}{32}=\frac{231}{16}x^5.$$

10. 求 $(3a-4b)^{12}$ 中第八項。

［解］ $n=12,\ r+1=8,\ \therefore r=7.$

$$\therefore \text{所求項為 } -\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}(3a)^5(4b)^7$$

$$=-3153199104a^5b^7.$$

11. 求 $(a^2-2bc)^{10}$ 之中項。

［解］ $n=10$, 中項為 $\frac{n}{2}=\frac{10}{2}=5=r.$

$$\therefore \text{所求項為 } -\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(a^2)^5(2bc)^5=-8064a^{10}b^5c^5.$$

12. 求 $(1-x)^9$ 之兩中項。

［解］ $n=9$, 中項為 $\frac{n+1}{2}=\frac{9+1}{2}=5$ 及 $\frac{n-1}{2}=\frac{9-1}{2}=4.$

(1) 若 $r=4$, 則第 5 項為 $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4=126x^4.$

(2) 故 $r=5$, 則第 6 項為 $-\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5=-126x^5$

13. 求 $(1+x)^8$ 中 x^5 之係數。

［解］ $n=8$, 今欲求 x^5 之係數，$\therefore r=5$,

$\therefore r+1=6$, 即求第 6 項之係數。

故所求第 6 項之係數爲 $\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=56.$

14 求 $(3-2x)^7$ 中 x^4 之係數。

［解］ $n=7$，今欲求 x^4 之係數，$\therefore\ r=4$，

$$\therefore\ r+1=5.\ \text{即求第 5 項之係數。}$$

故所求第 5 項之係數爲 $\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(3)^3(-2)^4=15120.$

15. 求 $(1-x^2)^6$ 中 x^8 之係數。

［解］ $n=6$，因原式爲 x^2 之展開式而 $x^8=(x^2)^4$，

$$\therefore\ r=4,\qquad r+1=5.$$

故 x^8 之係數卽爲第 5 項之係數。

$$\therefore\ \text{所求係數爲}\ \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=15.$$

16. 求 $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ 中 x^3 之係數。

［解］ $n=9$ 及 11，今欲求 x^3 之係數

$\therefore\ r=3,\ \ r+1=4$ 卽在二式中各求第四項之係數。

$$\therefore\ \text{所求係數爲}\ \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^3+\frac{11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3}(-2)^3=672-1320=-648.$$

17. 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ 中之常數項。

［解］ $n=12$，代入普偏項公式 $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r$

得 $\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdots\cdots(12-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}x^{12-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdots\cdots(13-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}x^{12-2r}.$

因所求項爲常數項，x 之指數應爲 0，卽 $12-2r=0$，$\therefore\ r=6.$

$$\text{故所求常數項爲}\ \frac{12\cdot11\cdot10\cdots\cdots(13-6)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$$

$$=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=924.$$

18. 求 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{15}$ 中 x^7 之係數。

[解]　$n=15$,代入普偏項公式 $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r$.

得　$$\frac{15\cdot14\cdot13\cdots\cdots(15-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}(2x)^{15-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=(-1)^r\frac{15\cdot14\cdot13\cdots\cdots(16-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}\cdot2^{15-r}\cdot x^{15-2r}.$$　$2x^2y$

今欲求 x^7 之係數,　$\therefore 15-2r=7$,　$\therefore r=4$.

故所求 x^7 之係數爲　$(-1)^4\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot2^{11}=2795520$.

19　用視察法求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$.

[解]　$(x+2y)(x-3y)(x-5y)=x^3-6x^2y-xy^2+30y^3$.

20.　用視察法求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$.

[解]　$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=x^4-4x^3-19x^2+46x+120$.

21.　積 $(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$ 之項數若何?

[解]　$(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$ 乘積中之項數爲 $4\times3\times2\times4=96$.

22.　求下列各積中係數之和。

1.　$(1+x^2+x^3+x^4)^3$.　　2.　$(1+2x+x^2)^2(1+x+3x^3)^2$.

[解]　1.　$(1+x^2+x^3+x^4)^3$ 各項係數之和爲

$(1+1+1+1)^3=4^3=64$.

2.　$(1+2x+x^2)^2(1+x+3x^3)^2$ 各項係數之和爲

$(1+2+1)^2(1+1+3)^2=4^2\cdot5^2=400$.

23.　以下關於 a, b, c, d 四文字之對稱函數,展開時係數之和若何?

1.　$\Sigma a^2\cdot\Sigma a$.　　2.　$\Sigma a^3\cdot\Sigma abc$.　　3.　$\Sigma ab\cdot\Sigma abc$.

[解]　1.　$\Sigma a^2\cdot\Sigma a=(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$ 其係數之和爲 $4\times4=16$.

2.　$\Sigma a^3\cdot\Sigma abc=(a^3+b^3+c^3+d^3)(abc+bcd+cda+dab)$ 其係數之和爲 $4\times4=16$.

3. $\Sigma ab\cdot\Sigma abc=(ab+bc+cd+da+ac+bd)(abc+bcd+cda+dab)$
其係數之和爲 $6\times4=24$.

24. 試證 $(a+b)^n$ 展開式中係數之和爲 2^n.

［解］ $(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots\cdots$ 至 n 項。

其係數之和爲 $2\cdot2\cdot2\cdots\cdots$ 至第 n 項 $=2^n$.

25. 試證 $(a-b)^n$ 展開式中，正係數之和，數值上與負係數之和相等。

［解］ $\because\ (a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-2}b^3+\cdots\cdots$$

在上式中偶項爲負，奇項爲正，命 $a=b=1$,

則 $$(1-1)^n=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots.$$

即 $$0=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots.$$

將各負項移至等號左邊即得證正項係數之和與負項係數之和相等。

習　題　XXXII　　　第 269 頁

簡化下列各式：

1. ［解］ $\sqrt[3]{-\frac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}=-\frac{3x^2y^5}{5a^3z^4}$.

2. ［解］ $\sqrt{\frac{529a^4b^6}{625c^2d^8}}=\frac{23a^2b^3}{25cd^4}$.

3. ［解］ $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}=\sqrt[6]{(x^2y-xy^2)^6}=x^2y-xy^2$

$=xy(x-y)$.

依 § 569 或 § 570 求下列各式之平方根：

4. ［解］ 設 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1\equiv(x^2+px+q)^2$

$$\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

比較係數， $2p=-2,\quad\therefore\ p=-1.$

$p^2+2q=3,\quad\therefore\ q=1.$

因 p, q 之值能適合 $2pq=-2$ 及 $q^2=1$.

$\therefore$ 所求之平方根爲 x^2-x+1.

5. [解] 設 $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9=x^6-2x^4+6x^3+x^2-6x+9$

$$\equiv(x^3+px^2+qx+r)^2$$

$$\equiv x^6+2px^5+(p^2+2q)x^4+2(r+pq)x^3+(2pr+q^2)x^2+2qrx+r^2.$$

比較係數，
$$2p=0, \quad \therefore p=0.$$
$$p^2+2q=-2, \quad \therefore q=-1.$$
$$2(r+pq)=6, \quad \therefore r=3$$

因 p, q, r 之值均能適合於其餘各係數.

$\therefore$ 所求根爲 x^3-x+3.

6. [解] 設 $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$

$$\equiv(2x^3+px^2y+qy^3)^2$$

$$\equiv 4x^6+4px^5y+p^2x^4y^2+4qx^3y^3+2pqx^2y^4+q^2y^6.$$

比較係數，
$$4p=12, \quad \therefore p=3$$
$$4q=-4, \quad \therefore q=-1.$$

因 p, q 之值能適合 $p^2=9$, $2pq=-6$, $q^2=1$.

$\therefore$ 所求之平方根爲 $2x^3+3x^2y-y^3$.

7. [解] 設 $4x^2-20x+13+30/x+9/x^2\equiv(2x+p+q/x)^2$

$$\equiv 4x^2+4px+(4q+p^2)+2pq/x+q^2/x^2.$$

比較係數，
$$4p=-20, \quad \therefore p=-5.$$
$$4q+p^2=13, \quad \therefore q=-3.$$

因 p, q 之值能適合 $2pq=30$, $q^2=9$.

$\therefore$ 所求之平方根爲 $2x-5-\dfrac{3}{x}$.

8. [解] 設 $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4\equiv(7+px+qx^2)^2$

$$\equiv 49+14px+(14q+p^2)x^2+2pqx^3+q^2x^4.$$

比較係數，
$$14p=-84, \quad \therefore p=-6.$$

$$14q+p^2=-34, \qquad \therefore\ q=-5.$$

因 p, q 之值能適合於 $2pq=60, \quad q^2=25.$

$$\therefore\ \text{所求之平方根為 } 7-6x-5x^2.$$

9. ［解］ $x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4$

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4 \;\;\underline{\big|\; x^4+x^3-x^2+x-2} \\
 & x^8 \\
\hline
2x^4+x^3 & 2x^7-x^6 \\
 & 2x^7+x^6 \\
\hline
2x^4+2x^3-x^2 & -2x^6-x^4 \\
 & -2x^6-2x^5+x^4 \\
\hline
2x^4+2x^3-2x^2+x & 2x^5-2x^4-6x^3+5x^2 \\
 & 2x^5+2x^4-2x^3+x^2 \\
\hline
2x^4+2x^3-2x^2+2x-2 & -4x^4-4x^3+4x^2-4x+4 \\
 & -4x^4-4x^3+4x^2-4x+4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求之平方根為 $x^4+x^3-x^2+x-2.$

10. ［解］ 設 $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)\equiv x^4+2x^2+1-4x^3+4x$

$$\equiv x^4-4x^3+2x^2+4x+1\equiv(x^2+px+q)^2$$

$$\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

比較係數， $2p=-4, \qquad \therefore\ p=-2.$

$$p^2+2q=2, \qquad \therefore\ q=-1.$$

因 p, q 之值能適合 $2pq=4, \qquad q^2=1.$

$$\therefore\ \text{所求之平方根為 } x^2-2x-1.$$

11. ［解］ 設 $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$

$$\equiv(2x^2+pxy+q)^2$$

$$\equiv 4x^4+4px^3y+4qx^2+p^2x^2y^2+2pqxy+q^2.$$

比較係數， $4p=-12, \qquad \therefore\ p=-3.$

$$4q=16, \qquad \therefore\ q=4.$$

因 p, q 之值能適合 $p^2=9,\ 2pq=-24,\ q^2=16.$

$$\therefore\ \text{所求之平方根為 } 2x^2-3xy+4.$$

12. [解] 設 $x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$

$$\equiv(x/y+pxy+qy/x)^2$$

$$\equiv x^2/y^2+2px^2+2q+2pqy^2+p^2x^2y^2+q^2y^2/x^2.$$

比較係數，　$2p=2,\quad \therefore\ p=1.$

$2q=2,\quad \therefore\ q=1.$

因 p, q 之值能適合　$2pq=2,\ p^2=1,\ q^2=1.$

$$\therefore \text{所求之平方根爲 } \frac{x}{y}+xy+\frac{y}{x}.$$

求下二式之近似平方根至四項:

13. $1-2x.$

[解]

$$\begin{array}{l|l}
 & 1-2x \quad \Big|\ 1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\cdots\cdots \\
 & 1 \\ \hline
2-x & -2x \\
 & -2x+x^2 \\ \hline
2-2x-\dfrac{x^2}{2} & -x^2 \\
 & -x^2+x^3+\dfrac{x^4}{4} \\ \hline
2-2x-x^2-\dfrac{x^3}{2} & -x^3-\dfrac{x^4}{4} \\
 & -x^3+x^4+\dfrac{x^5}{2}+\dfrac{x^6}{4} \\ \hline
 & -\dfrac{5x^4}{4}-\dfrac{x^5}{2}-\dfrac{x^6}{4}
\end{array}$$

$$\therefore \text{所求之平方根爲 } 1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\cdots\cdots.$$

14 [解] 設 $4-x+3x^2\equiv(2+px+qx^2+rx^3+\cdots\cdots)^2$

$$\equiv 4+4px+(4q+p^2)x^2+(4r+2pq)x^3+\cdots\cdots.$$

比較係數，　$4p=-1,\quad \therefore\ p=-\frac{1}{4}.$

$$4q+p^2=3,\quad \therefore\ q=\frac{47}{64}.$$

$$4r+2pq=0,\quad \therefore\ r=\frac{47}{512}.$$

$\therefore$ 所求之平方根爲 $2-\dfrac{x}{4}+\dfrac{47x^2}{64}+\dfrac{47x^3}{512}+\cdots\cdots.$

依 §569 或 §575 求下列各式之立方根：

15. ［解］ 設 $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1\equiv(x^2+px+q)^3$

$$\equiv x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3+3(p^2q+q^2)x^2+3pq^2x+q^3.$$

比較係數， $3p=3,\quad \therefore\ p=1.$

$p^2+q=2,\quad \therefore\ q=1.$

因 p, q 之値能適合 $p^3+6pq=7,\ 3(p^2q+q^2)=6,\ 3pq^2=3,\ q^3=1.$

$\therefore$ 所求之立方根爲 $x^2+x+1.$

16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1.$

［解］

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1 & \underline{3x^4+x^2-1} \\
 & 27x^{12} & \\
\hline
3(3x^4)^2=27x^8 & 27x^{10}-18x^8-17x^6 & \\
3(3x^4)(x^2)=\quad 9x^6 & & \\
(x^2)^2=\quad x^4 & & \\
\hline
27x^8+9x^6+x^4 & 27x^{10}+9x^8+x^6 & \\
\hline
3(3x^4+x^2)^2=27x^8+18x^6+3x^4 & -27x^8-18x^6+6x^4+3x^2-1 & \\
3(3x^4+x^2)(-1)=\quad -9x^4-3x^2 & & \\
1^2=\quad 1 & & \\
\hline
27x^8+18x^6-6x^4-3x^2+1 & -27x^8-18x^6+6x^4+3x^2-1 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求之立方根爲 $3x^4+x^2-1.$

17. ［解］ 設 $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$

$$\equiv(2x^2+pax+qa^2)^3\equiv 8x^6+12pax^5+(12q+6p^2)a^2x^4$$
$$+(12pq+p^3)a^3x^3+(6q^2+3p^2q)a^4x^2+3pq^2a^5x+q^3a^6$$

比較係數， $12p=-36,\quad \therefore\ p=-3.$

$12q+6p^2=90,\quad \therefore\ q=3.$

因 p, q 之値能適合其餘各係數，

$\therefore$ 所求之立方根爲 $2x^2-3ax+3a^2.$

18. $\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{3x^2}{y^2}+\dfrac{3y^2}{x^2}+\dfrac{6x}{y}+\dfrac{6y}{x}+7.$

[解]

$$\begin{array}{l|l}
 & \frac{x^3}{y^3}+3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+7+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3} \;\Big|\; \frac{x}{y}+1+\frac{y}{x} \\
 & \frac{x^3}{y^3} \\
\hline
3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}+1 & 3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+7+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3} \\
 & 3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}+1 \\
\hline
3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+3 & 3\frac{x}{y}+6+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3} \\
\quad +3\left(\frac{x}{y}+1\right)\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} & 3\frac{x}{y}+6+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3} \\
\hline
3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+6+3\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} & 0
\end{array}$$

$\therefore$ 所求之立方根爲 $\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}$.

19. 求式 $1-x+x^2$ 之近似立方根至三項.

[解] 設 $1-x+x^2\equiv(1+px+qx^2+\cdots\cdots)^3$

$$\equiv 1+3px+(3q+3p^2)x^2+\cdots\cdots.$$

比較係數, $\quad 3p=-1, \qquad \therefore\ p=-\frac{1}{3}.$

$\quad 3q+3p^2=1, \qquad \therefore\ q=\frac{2}{9}$

$\therefore$ 所求之立方根爲 $1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\cdots\cdots$.

20. **[解]** 設 $x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$

$$\equiv(x^2+px+q)^4\equiv x^8+4px^7+(6p^2+4q)x^6$$
$$+(12pq+4p^3)x^5+(p^4+12p^2q+6q^2)x^4$$
$$+(12pq^2+4p^3q)x^3+(4q^3+6p^2q^2)x^2+4pq^3x+q^4.$$

比較係數, $\quad 4p=-4, \qquad \therefore\ p=-1.$

$\quad 6p^2+4q=10, \qquad \therefore\ q=1.$

因 p, q 之值能適合於其餘各係數.

$\therefore$ 所求之四次根爲 x^2-x+1.

21. **[解]** 設 $x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3$

$$+15x^2+5x+1\equiv(x^2+px+q)^5$$
$$\equiv x^{10}+5px^9+(10p^2+5q)x^8+(20pq+10p^3)x^7$$

$$+(5p^4+30p^2q+10q^2)x^6+(p^5+30pq^2+20p^3q)x^5$$
$$+(5p^4q+30p^2q^2+10q^3)x^4+(20q^3+10p^3q^2)x^3$$
$$+(5q^4+10p^2q^3)x^2+5pq^4x+q^5.$$

比較係數，　$5p=5,\qquad \therefore\ p=1.$

$$10p^2+5q=15,\qquad \therefore\ q=1.$$

因 p, q 之值能適合於其餘各係數.

$\therefore$　所求之五次根爲 $x^2+x+1.$

22. [解]　設 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b\equiv(x^2+px+q)^2$

$$\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

比較係數，　$2p=6,\qquad \therefore\ p=3.$

$$p^2+2q=11,\qquad \therefore\ q=1.$$

又　$2pq=a,\qquad \therefore\ a=6$

$$q^2=b,\qquad \therefore\ b=1.$$

若原式爲一完全平方，則　$a=6,\quad b=1.$

求下列各數之平方根：

23.　27889.

[解]

```
         2,78,89 | 167
         1
   26 |  178
      |  156
  327 |   2289
      |   2289
             0
```

$\therefore\ \sqrt{27889}=167.$

24.　2313.61.

[解]

```
         23,13.61 | 48.1
         16
   88 |   713
      |   704
  961 |     961
      |     961
              0
```

$\therefore\ \sqrt{2313.61}=48.1.$

25. 583.2225.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
 & 5,83.22,25 \;\; \underline{|\,24.15} \\
 & 4 \\ \hline
44 & 1\,83 \\
 & 1\,76 \\ \hline
481 & 7\,22 \\
 & 4\,81 \\ \hline
4825 & 2\,41\,25 \\
 & 2\,41\,25 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\therefore\ \sqrt{583.2225}=24.15.$$

26. 4149369.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
 & 4,14,93,69 \;\; \underline{|\,2037} \\
 & 4 \\ \hline
403 & 14\,93 \\
 & 12\,09 \\ \hline
4067 & 2\,84\,69 \\
 & 2\,84\,69 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\therefore\ \sqrt{4149369}=2037.$$

27. 0.00320356.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
 & 0.00,32,03,56 \;\; \underline{|\,0.0566} \\
 & 25 \\ \hline
106 & 703 \\
 & 636 \\ \hline
1126 & 6756 \\
 & 6756 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\therefore\ \sqrt{0.00320356}=0.0566.$$

28. 9.024016.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
 & 9.02,40,16 \;\; \underline{|\,3.004} \\
 & 9 \\ \hline
6004 & 24016 \\
 & 24016 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\therefore\ \sqrt{9.024016}=3.004.$$

求下列各數之近似平方根準確至第三位小數：

29. 2.

[解]

```
        2 | 1.414
        1
   24 | 100
      |  96
    281 | 400
        | 281
   2824 | 11900
        | 11296
           604
```

$\therefore\ \sqrt{2}=1.414.$

30. 55.5

[解]

```
        55.5 | 7.449
        49
   144 | 650
       | 576
   1484 | 7400
        | 5936
  14889 | 146400
        | 134001
           12399
```

$\therefore\ \sqrt{55.5}=7.449.$

31. 234.561.

[解]

```
      2,34.56,10 | 15.315
      1
  25 | 134
     | 125
   303 | 956
       | 909
   3061 | 4710
        | 3061
  30625 | 164900
        | 153125
           11775
```

$\therefore\ \sqrt{234.561}=15.315.$

求下列各數之立方根：

32. 1860867.

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1,860,867 \;\big\lfloor\; 123 \\
 & 1 \\
\hline
300 & 860 \\
60 & \\
4 & \\
\hline
364 & 728 \\
\hline
43200 & 132867 \\
1080 & \\
9 & \\
\hline
44289 & 132867 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt[3]{1860867}=123.$

33. 167284.151.

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 167,284.151 \;\big\lfloor\; 55.1 \\
 & 125 \\
\hline
7500 & 42284 \\
750 & \\
25 & \\
\hline
8275 & 41375 \\
\hline
907500 & 909151 \\
1650 & \\
1 & \\
\hline
909151 & 909151 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt[3]{167284.151}=55.1.$

34. 1036.433728.

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1,036.433,728 \;\big\lfloor\; 10.12 \\
 & 1 \\
\hline
30000 & 36433 \\
300 & \\
1 & \\
\hline
30301 & 30301 \\
\hline
3060300 & 6132728 \\
6060 & \\
4 & \\
\hline
3066364 & 6132728 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt[3]{1036.433728}=10.12.$

習 題 XXXIII 第 274 頁

化下列各根式爲最簡形式:

1. [解] $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$.

2. [解] $\sqrt{588}=\sqrt{14^2\times 3}=14\sqrt{3}$.

3. [解] $\sqrt[3]{-27^2}=\sqrt[3]{-(3^3)^2}=\sqrt[3]{-(3^2)^3}=-9$.

4. [解] $\sqrt[9]{-1000}=\sqrt[9]{-10^3}=\sqrt[3]{-10}$.

5. [解] $\sqrt{3/2}=\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{2/2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

6. [解] $\sqrt[3]{3/2}=\sqrt[3]{\dfrac{3\times 4}{2\times 4}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$.

7. [解] $\sqrt[3]{3/4}=\sqrt[3]{\dfrac{3\times 2}{4\times 2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$.

8. [解] $\sqrt[5]{3/16}=\sqrt[5]{6/32}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{6}$.

9. [解] $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}=ab^2c^3d\sqrt[5]{25d}$.

10. [解] $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}=2c\sqrt[6]{2a^2b^4c^2}$.

11. [解] $\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}=z\sqrt[12]{8x^6y^9z^3}=z\sqrt[4]{2x^2y^3z}$.

12. [解] $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}=\sqrt[n]{5ab^2c^3}$.

13. [解] $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}=c\sqrt[3]{ab^2}$.

14. [解] $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}=a^2b^3c^4\sqrt[n]{ab^2}$.

15. [解] $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}=x\sqrt{y^2-z^2}$.

16. [解] $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}=\sqrt{(x-y)(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{x-y}$.

17. [解] $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}=x\sqrt{x^3-y^3}$.

18. [解] $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}=\sqrt[4]{a^2b^4(a^2-2ab+b^2)}$

$=\sqrt[4]{a^2b^4(a-b)^2}=b\sqrt{a(a-b)}$.

19. [解] $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2(a^3+b^3)a^2b}{64a^3b^3}}=\dfrac{1}{4ab}\sqrt[3]{2(a^3+b^3)a^2b}$.

20. [解] $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}}=\dfrac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.

21.　[解]　$\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}=\sqrt[3]{\frac{(x^2-x+1)3(x+1)}{27(x+1)^3}}=\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3(x^3+1)}.$

22.　[解]　$\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}}=\sqrt[3]{\frac{b^3-a^3}{b^3}}=\frac{1}{b}\sqrt[3]{b^3-a^3},$

23.　[解]　$\sqrt[3]{\frac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}=\sqrt[3]{\frac{bc^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+3}}}=\frac{c}{a^nb^{n+1}}\sqrt[3]{bc^n}.$

24.　[解]　$\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{2ax}{b^2}+\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{b(a^2x^2-2abx+b^2)}{b^4}}$

$$=\sqrt{\frac{b(ax-b)^2}{b^4}}=\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}.$$

將下列各根式之係數移入根號內:

25.　[解]　$3a\sqrt{3a}=\sqrt{(3a)^2}\sqrt{3a}=\sqrt{27a^3}.$

26.　[解]　$\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)^2}{(a+b)(a-b)^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$

27.　[解]　$3ax\sqrt[4]{\frac{1}{27a^3x^3}}=\sqrt[4]{\frac{(3ax)^4}{27a^3x^3}}=\sqrt[4]{\frac{81a^4x^4}{27a^3x^3}}=\sqrt[4]{3ax}.$

證明下列各組根式為同類根式:

28.　[解]　$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=3\sqrt{2}.$

$\sqrt{50}=\sqrt{2\times5^2}=5\sqrt{2}.$

$\sqrt{1/8}=\sqrt{2/16}=\sqrt{2}/4.$

29.　[解]　$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\times2^3}=2\sqrt[3]{3}.$

$\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{3\times4^3}=4\sqrt[3]{3}.$

$\sqrt[3]{8/9}=\sqrt[3]{24/27}=2\sqrt[3]{3}/3.$

30.　[解]　$\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}=\sqrt{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}$

$=(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}$

$\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}=\sqrt{x^2y^2(x^2+xy+y^2)}$

$=xy\sqrt{x^2+xy+y^2}.$

習 題 XXXIV 第277頁

化下列各根式使有最小公根指數:

1. [解] $\sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}.$

$\sqrt[10]{3}=\sqrt[30]{3^3}=\sqrt[30]{27}.$

$\sqrt[15]{3}=\sqrt[30]{3^2}=\sqrt[30]{9}.$

2. [解] $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{(a^2)^4}=\sqrt[12]{a^8}.$

$\sqrt[4]{2a^3b^2}=\sqrt[12]{(2a^3b^2)^3}=\sqrt[12]{8a^9b^6}.$

$\sqrt[6]{7b^5}=\sqrt[12]{(7b^5)^2}=\sqrt[12]{49b^{10}}.$

比較下列各根式:

3. [解] $3\sqrt{2}=\sqrt{18}=\sqrt[6]{18^3}=\sqrt[6]{5832}.$

$2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[6]{24^2}=\sqrt[6]{576}.$

$\therefore\quad 3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}.$

4. [解] $\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}.$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}.$

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}.$

$\therefore\quad \sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}.$

化下列各式爲最簡形式之單純根式:

5. [解] $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}=\sqrt{35}\cdot\sqrt{5/7}=\sqrt{5^2}=5.$

6. [解] $10\div\sqrt{5}=10\times 1/\sqrt{5}=10\times\frac{\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}.$

7. [解] $4\div\sqrt[3]{2}=4\times\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=4\times\frac{\sqrt[3]{4}}{2}=2\sqrt[3]{4}.$

8. [解] $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{900}=30.$

9. [解] $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{60\cdot 90\cdot 15}$

$=\sqrt[3]{30\cdot 2\cdot 3\cdot 30\cdot 15}=30\sqrt[3]{3}.$

10. [解] $2\sqrt{3}\div 3\sqrt{2}=\sqrt{12}\times\sqrt{1/18}=\sqrt{6/9}=\frac{1}{3}\sqrt{6}.$

11. [解] $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^{13}}=2\sqrt[12]{2}.$

12. [解] $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{9}\cdot\sqrt[12]{1/5^3}$

$=\sqrt[12]{9/5^3}=\frac{1}{5}\sqrt[12]{9\cdot5^9}=\sqrt[12]{17578125}/5.$

13. [解] $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}=2\sqrt{35\times65/91}$

$=2\sqrt{5\times7\times5\times13/7\times13}=10.$

14. [解] $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}=ab^2c^3\sqrt{abc}\times bc^2\sqrt[3]{a^2bc^2}$

$=ab^3c^5\sqrt[6]{a^3b^3c^3\times a^4b^2c^4}=a^2b^3c^6\sqrt[6]{ab^5c}.$

15. [解] $\sqrt[2]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}=\sqrt[6n]{a^3}\cdot\sqrt[6n]{a^2}=\sqrt[6n]{a^5}.$

16. [解] $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}=\sqrt[6]{a^9b^9}\cdot\sqrt[6]{1/a^5b^5}=\sqrt[6]{a^4b^4}=\sqrt[3]{a^2b^2}.$

17. [解] $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}=\sqrt[3]{a^3b^3c^6}=abc^2.$

18. [解] $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{a}=\sqrt[6n]{a^{2n}}\cdot\sqrt[6n]{a}=\sqrt[6n]{a^{2n+1}}.$

19. [解] $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}=\sqrt[18]{a^3/b^3}\cdot\sqrt[18]{b^2/a^2}$

$=\sqrt[18]{a/b}=\sqrt[18]{ab^{17}}/b$

20. [解] $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$

$=\sqrt[6]{a^2b^4}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[30]{a^{21}b^{27}}\cdot\sqrt[30]{a^{24}b^{28}})$

$=\sqrt[6]{a^3b^9}\div\sqrt[30]{a^{45}b^{55}}=\sqrt[6]{a^3b^9}\div\sqrt[6]{a^9b^{11}}=\sqrt[6]{a^3b^9/a^9b^{11}}$

$=\frac{1}{ab}\sqrt[6]{b^4}=\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}.$

21. [解] $(\sqrt{12})^3=12\sqrt{12}=24\sqrt{3}.$

22. [解] $(\sqrt[3]{a^2})^6=(a^2)^2=a^4.$

23. [解] $(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^6=64\sqrt[4]{x^6y^{12}z^{18}}=64xy^3z^4\sqrt[4]{x^2z^2}$

$=64xy^3z^4\sqrt{xz}.$

24. [解] $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[12]{a^2}=\sqrt[6]{a}.$

25. [解] $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}.$

26. [解] $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}=\sqrt[30]{a^3b^6/c^9}=\sqrt[10]{ab^2/c^3}$

$=\sqrt[10]{ab^2c^7/c^{10}}=\sqrt[10]{ab^2c^7}/c.$

27. [解] $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}=\sqrt[12]{256}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[3]{4}$.

28. [解] $\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{8}$.

29. [解] $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{4}$.

30. [解] $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4}}=\sqrt{\sqrt[6]{32}}=\sqrt[12]{32}$.

31. [解] $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[2mn]{a^m}=\sqrt[2n]{a}$.

32. [解] $(\sqrt[2m]{\sqrt[m]{a}})^{mnp}=\sqrt[mn]{a^{mnp}}=\sqrt[4]{a^p}$.

簡化下列各式,盡力之所及:

33. [解] $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$

$=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+7\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

34. [解] $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$

$$=5\sqrt{5}+5\sqrt{7}-2\sqrt{7}+\frac{1}{10}\sqrt{5}=\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}.$$

35. [解] $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}=5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$.

36. [解] $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$

$$=\sqrt{\frac{a^3bc}{a^2b^2c^2}}+\sqrt{\frac{ab^3c}{a^2b^2c^2}}+\sqrt{\frac{abc^3}{a^2b^2c^2}}$$

$$=\frac{a}{abc}\sqrt{abc}+\frac{b}{abc}\sqrt{abc}+\frac{c}{abc}\sqrt{abc}=\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}.$$

37. [解] $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$

$=5\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}=\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.

38. [解] $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$

$=(a+b)\sqrt{c}-a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=0$.

39. [解] $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$

$=\sqrt{ax(x^2+6x+9)}-\sqrt{ax(x^2-4ax+4a^2)}$

$=\sqrt{ax(x+3)^2}-\sqrt{ax(x-2a)^2}$

$=(x+3)\sqrt{ax}-(x-2a)\sqrt{ax}$

$=(3+2a)\sqrt{ax}$.

40. [解] $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{1}{x^2-y^2}}$

$=(x+y)\sqrt{\frac{(x^2-y^2)}{(x+y)^2}}-(x-y)\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x-y)^2}}+\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2}}$

$=\frac{1}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}.$

41. [解] $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+6.$

42. [解] $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$

43. [解] $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})=2\sqrt{3}+3\sqrt{10}+\sqrt{10}+5\sqrt{3}$

$=7\sqrt{3}+4\sqrt{10}.$

44. [解] $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}.$

45. [解] $(1+\sqrt{3})^3=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}.$

46. [解] $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$

$=(\sqrt{a}+1+\sqrt[4]{a})(\sqrt{a}+1-\sqrt[4]{a})$

$=(\sqrt{a}+1)^2-(\sqrt[4]{a})^2=a+2\sqrt{a}+1-\sqrt{a}=a+\sqrt{a}+1.$

習 題 XXXV　　　第282頁

力避根號，簡化下列各式：

1 [解] $\sqrt[12]{a^8}=a^{\frac{8}{12}}=a^{\frac{2}{3}}.$

2. [解] $\sqrt{c^{\frac{4}{3}}}=c^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}=c^{\frac{2}{3}}.$

3. [解] $\frac{a^{\frac{8}{5}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{6}{5}}}}=\frac{a^{\frac{8}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}}=a^{\frac{8}{5}-\frac{2}{5}}=a^{\frac{6}{5}}.$

4 [解] $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[6]{b^5}=b\cdot b^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{5}{6}}=b^{1+\frac{4}{3}+\frac{5}{6}}=b^{\frac{19}{6}}.$

下列各式，試不用負指數或分指數表之：

5 [解] $a^{\frac{14}{21}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$

6. [解] $c^{-1.5}$　$c^{-\frac{3}{2}}=1/c^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{c\sqrt{c}}=\frac{1}{c^2}\sqrt{c}.$

7. [解] $(d^{\frac{2}{3}})^{-6}=\dfrac{1}{(d^{\frac{2}{3}})^{6}}=\dfrac{1}{d^{4}}.$

8. [解] $(e^{-3\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{7}}=(e^{-\frac{7}{2}})^{-\frac{1}{7}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

不用根號，以正指數表下列各式：

9. [解] $\dfrac{a^{-1}}{b^{-3}c^{-2}}=\dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{b^{3}}\cdot\dfrac{1}{c^{2}}}=\dfrac{b^{3}c^{2}}{a}.$

10. [解] $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y^{-3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}.$

11. [解] $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^{-5}}}\right)^{-4}=\left(\dfrac{1}{x^{-\frac{5}{2}}}\right)^{-4}\dfrac{1}{x^{10}}.$

12. [解] $\dfrac{x^{-2}\sqrt{y^{-3}}}{y^{-2}\sqrt{x^{-3}}}=\dfrac{x^{-2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}}{y^{-2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^{2}x^{\frac{3}{2}}}{x^{2}y^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}.$

力避分母，簡化下式：

13. [解] $\dfrac{a}{bc}-\dfrac{b^{-1}}{c^{-2}}-\dfrac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\dfrac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$

$$=\frac{a}{bc}-\frac{c^{2}}{b}-\frac{a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}{b+c}+\frac{b+c}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

$$=\frac{a}{bc}-\frac{c^{2}}{b}-\frac{a(b+c)}{bc(b+c)}+\frac{bc(b+c)}{b+c}=\frac{a}{bc}-\frac{c^{2}}{b}-\frac{a}{bc}+bc$$

$$=\frac{-c^{2}+b^{2}c}{b}=(-c^{2}+b^{2}c)b^{-1}=bc-c^{2}b^{-1}.$$

化下列各式爲最簡之指數形：

14 [解] $\left(3\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{25}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{5^{2}}{2^{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{5^{3}}{16\sqrt{2}}=\dfrac{125\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{32}.$

15. [解] $(81)^{\frac{3}{4}}=(3^{4})^{\frac{3}{4}}=3^{3}=27.$

16. [解] $(-27)^{\frac{2}{3}}=[(-3)^3]^{\frac{2}{3}}=(-3)^2=9.$

17. [解] $8^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{8^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{(2^3)^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{15}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2^{15}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^{16}}}=2^{\frac{1}{2}}/2^8=2^{\frac{1}{2}}/256.$

18. [解] $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{9}{4}}.$

19. [解] $a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{15}}=a^{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{15}}=a^0=1.$

20. [解] $(a^{\frac{3}{2}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=(ab)^{\frac{5}{4}}.$

21. [解] $\dfrac{ab^{-2}}{a^{-3}b}=\dfrac{a}{b^2}\cdot\dfrac{a^3}{b}=\dfrac{a^4}{b^3}=a^4b^{-3}.$

22. [解] $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}=a^{\frac{6}{36}}=a^{\frac{1}{6}}.$

23. [解] $(a^{-1}b^{-2}c^3)^{-2}=a^2b^4c^{-6}.$

24. [解] $(-32a^{10})^{\frac{3}{5}}=(-2^5a^{10})^{\frac{3}{5}}=-2^3a^6=-8a^6.$

25. [解] $(-a^6b^{-9})^{-\frac{2}{3}}=+a^{-4}b^6=a^{-4}b^6.$

26. [解] $b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[12]{b^{-5}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}=b^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{5}{12}}\div b^{-1}\cdot b^{-\frac{1}{2}}$

$=b^{-\frac{3}{4}}\div b^{-\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{4}}.$

27. [解] $(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^5})^{\frac{2}{3}}=a^{-1}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}.$

28. [解] $\left(\dfrac{8a^{-15}}{\sqrt{125a^3}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{2^3a^{-15}}{5^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2^{-2}a^{10}}{5^{-1}a^{-1}}=2^{-2}\cdot5a^{11}=\dfrac{5}{4}a^{11}.$

29. [解] $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}=a^{\frac{2}{6}}(bc^{-1})^{-\frac{2}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{-1}c.$

30. [解] $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^3}}=a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{3}{12}}=a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{-\frac{1}{12}}.$

31. [解] $\dfrac{\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[6]{a}}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{7}{6}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{a}{a^{-1}}=a^2.$

32. [解] $[(x^x)^x]^x=[x^{x^2}]^x=x^{x^3}.$

33. [解] $(x^{x^2+xy}y^{y^2+xy})^{\frac{xy}{x+y}}=x^{x^2y}+y^{xy^2}.$

34. [解] $$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}}=(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$=(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}\right)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}.$$

35. [解] $$(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}})=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2-(x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}})^2$$

$$=(x^{\frac{1}{4}})^2+2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+(y^{\frac{1}{4}})^2-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}.$$

36. [解]
$$\begin{array}{l|l}
a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -b^3 & a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}} \\
\hline
\underline{a^2-a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}} & a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^2+b^{\frac{5}{2}} \\
\quad a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}} & \\
\quad \underline{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{4}{3}}b} & \\
\qquad a^{\frac{4}{3}}b & \\
\qquad \underline{a^{\frac{4}{3}}b-ab^{\frac{3}{2}}} & \\
\qquad\quad ab^{\frac{3}{2}} & \\
\qquad\quad \underline{ab^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b^2} & \\
\qquad\qquad a^{\frac{2}{3}}b^2 & \\
\qquad\qquad \underline{a^{\frac{2}{3}}b^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}} & \\
\qquad\qquad\quad a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}-b^3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}-b^3} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad (a^2-b^3)\div(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}})=a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^2+b^{\frac{5}{2}}.$$

37. [解] $$(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^4=(x^{\frac{1}{2}})^4-4(x^{\frac{1}{2}})^3(y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})+6(x^{\frac{1}{2}})^2(y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^2$$

$$-4(x^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^3+(y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^4$$

$$=x^2-4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}+6xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}+yz.$$

38. [解] $$[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac{1}{2}}=[e^{2x}+2+e^{-2x}-4]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[e^{2x}-2+e^{-2x}]^{\frac{1}{2}}=[(e^x-e^{-x})^2]^{\frac{1}{2}}=e^x-e^{-x}.$$

39. ［解］

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3 \;\Big|\; \underline{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}} \\
 & \underline{x^2} \\
2x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & 4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy \\
 & \underline{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy} \\
2x+4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} & 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3 \\
 & \underline{6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3} \\
 & 0
\end{array}
$$

∴　所求之平方根爲 $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.

40 ［解］ $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}=(x+p+qx^{-1})^3$

$$=x^3+3px^2+\cdots\cdots+qx^{-3}.$$

$$3p=3. \qquad \therefore\ p=1, \qquad q=1.$$

∴　所求之立方根爲 $x+1+x^{-1}$.

習　題　XXXVI　　第284頁

展開下列各式至四項：

1. ［解］ $(1+x)^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x+\frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{1\cdot 2}x^2+\frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\cdots\cdots.$$

2. ［解］ $(a^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}+(-\frac{1}{2})(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2}(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{5}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{7}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$+\cdots\cdots$$

$$=a^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}a^{-1}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{8}a^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{5}{16}a^{-\frac{7}{3}}x^{-2}+\cdots\cdots,$$

3. ［解］ $\sqrt[3]{(27-2x)^2}=(27-2x)^{\frac{2}{3}}=27^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}(2x)$

$$+\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})}{1\cdot 2}(27)^{-\frac{4}{3}}(2x)^2-\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{1\cdot 2\cdot 3}(27)^{-\frac{7}{3}}(2x)^3+\cdots\cdots$$

$$\doteqdot 9-\frac{4}{3^2}x-\frac{4}{3^8}x^2-\frac{32}{3^{11}}x^8-\cdots\cdots.$$

4. ［解］ $(a^m+x)^{\frac{1}{m}}=(a^m)^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}(a^m)^{\frac{1}{m}-1}x$

$$+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1-m}{m}\right)}{1\cdot2}(a^m)^{\frac{1}{m}-2}x^2+\frac{\frac{1}{m}\left[\frac{1-m}{m}\right]\left[\frac{1-2m}{m}\right]}{1\cdot2\cdot3}(a^m)^{\frac{1}{m}-3}x^3$$

$$+\cdots\cdots$$

$$=a+\frac{1}{m}a^{1-m}x+\frac{1-m}{2m^2}a^{1-2m}x^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{6m^3}a^{1-3m}x^3$$

$$+\cdots\cdots.$$

5. ［解］ $(a^{-1}-b^{-\frac{1}{2}})^{-4}=a^4+4a^5b^{-\frac{1}{2}}+\frac{(-4)(-5)}{2}a^6b^{-1}$

$$-\frac{(-4)(-5)(-6)}{2\cdot3}a^7b^{-\frac{3}{2}}$$

$$=a^4+4a^5b^{-\frac{1}{2}}+10a^6b^{-1}+20a^7b^{-\frac{3}{2}}+\cdots\cdots.$$

6. ［解］ $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{-6}=(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}})^{-6}=x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

$$+\frac{(-6)(-7)}{2}x^{-4}(y^{\frac{1}{3}})^2+\frac{(-6)(-7)(-8)}{2\cdot3}x^{-\frac{9}{2}}(y^{\frac{1}{3}})^3$$

$$+\cdots\cdots$$

$$=x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}+21x^{-4}y^{\frac{2}{3}}-56x^{-\frac{9}{2}}y+\cdots\cdots.$$

7. ［解］ $\frac{1}{2+3x}=(2+3x)^{-1}=2^{-1}-2^{-2}3x+\frac{(-1)(-2)}{2}\cdot2^{-3}(3x)^2$

$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{2\cdot3}2^{-4}(3x)^3+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}x^2-\frac{27}{16}x^3+\cdots\cdots.$$

8. ［解］ $\frac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}=(1+x)^{-\frac{2}{5}}=1-\frac{2}{5}x+\frac{(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})}{2}x^2$

$$+\frac{(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})(-\frac{12}{5})}{2\cdot3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{2}{5}x+\frac{7}{25}x^2-\frac{28}{125}x^3+\cdots\cdots.$$

9. [解] $\left(\frac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}\right)^3=(1+3x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}}$

$$=1-\frac{3}{2}3x^{\frac{1}{2}}+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{2}(3x^{\frac{1}{2}})^2+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{2\cdot3}(3x^{\frac{1}{2}})^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{135}{8}x-\frac{945}{16}x^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots.$$

10. 求 $(1+x)^{-3}$ 中第十項.

[解] $n=-3, a=1, b=x$, 因 $r+1=10$, $\therefore r=9$. 代入公式

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r,\text{ 得}$$

$$\frac{(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}x^9=-55x^9$$

11. 求 $(x^{-2}-2y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}$ 中第七項.

[解] $n=\frac{3}{4}, a=x^{-2}, b=2y^{\frac{1}{3}}$, 因 $r+1=7$. $\therefore r=6$.

代入 $(r+1)$ 項公式,得

$$\frac{\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})(-\frac{13}{4})(-\frac{17}{4})}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}x^{\frac{21}{2}}(2y^{\frac{1}{3}})^6=-\frac{663}{1024}x^{\frac{21}{2}}y^2.$$

12. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$ 中含 $x^{\frac{9}{2}}$ 之項.

[解] $n=\frac{1}{4}, a=1, b=-x^{\frac{1}{2}}$ 代入 $(r+1)$ 項公式得

$$\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)\cdots(\frac{1}{4}-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots r}(-x^{\frac{1}{2}})^r=(-1)^r\frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})(-\frac{7}{4})\cdots(\frac{5}{4}-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}x^{\frac{r}{2}}.$$

今欲求 $x^{\frac{9}{2}}$ 之一項,故 $\frac{r}{2}=\frac{9}{2}$, $\therefore r=9$.

$\therefore$ 所求項爲 $(-1)^9\frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})(-\frac{7}{4})(-\frac{11}{4})(-\frac{15}{4})(-\frac{19}{4})(-\frac{23}{4})(-\frac{27}{4})(-\frac{31}{4})}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}x^{\frac{9}{2}}$

$$=-\frac{19\cdot23\cdot31\cdot33}{2^{25}}x^{\frac{9}{2}}.$$

13. 求 $x^{-\frac{3}{2}}(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-8}$ 中含 x^{-2} 之項.

[解] $n=-3, a=2, b=x^{-\frac{1}{6}}$, 代入 $(r+1)$ 項公式得

$$\frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots\cdots(-3-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}(2)^{-3-r}(x^{-\frac{1}{6}})^{r}$$

$$=\frac{-3(-4)(-5)\cdots\cdots(-2-r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}(2)^{-3-r}x^{-\frac{r}{6}}.$$

今欲求 x^{-2} 之一項故 $x^{-\frac{r}{6}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$ 即 $x^{-\frac{r+9}{6}}=x^{-2}$.

$$\therefore\quad -\frac{r+9}{6}=-2.\quad \therefore\quad r=3.$$

∴ 所求項為 $\frac{-3(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2)^{-6}x^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{5}{32}x^{-2}$.

14. 用 § 601, 例四說明之方法, 求下列各數之近似值.

1. $\sqrt{99}$. 2. $\sqrt[3]{62}$. 3. $\sqrt[5]{31}$.

[解] 1. $\sqrt{99}=3(9+2)^{\frac{1}{2}}=3\Big[3+\frac{1}{2}9^{-\frac{1}{2}}\cdot 2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}9^{-\frac{3}{2}}\cdot 2^{2}$

$$+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}\cdot 9^{-\frac{5}{2}}\cdot 2^{3}\Big]=9+1-\frac{12}{216}+\frac{24}{3888}=9.9498.$$

2. $\sqrt[3]{62}=(64-2)^{\frac{1}{3}}=4-\frac{1}{3}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}\cdot 2+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}\cdot 64^{-\frac{5}{3}}\cdot 2^{2}$

$$-\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}\cdot 64^{-\frac{8}{3}}\cdot 2^{3}=4-\frac{2}{48}-\frac{1}{2304}-\frac{5}{663552}=3.9578.$$

3. $\sqrt[5]{31}=(32-1)^{\frac{1}{5}}=2-\frac{1}{5}\cdot 32^{-\frac{4}{5}}+\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2}\cdot 32^{-\frac{9}{5}}$

$$-\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{5})}{2\cdot 3}\cdot 32^{-\frac{14}{5}}=2-\frac{1}{80}-\frac{1}{6400}-\frac{3}{1024000}=1.9873.$$

習 題 XXXVII 第287頁

求下列各式之有理化因式:

1. $\sqrt[7]{a^{5}}$.

[解] $\because\quad a^{\frac{5}{7}}a^{\frac{2}{7}}=a.$

$\therefore\quad \sqrt[7]{a^6}$ 之有理化因式爲 $a^{\frac{2}{7}}$.

2. $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$.

［解］ $\because\quad (a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})=ab^2$.

$\therefore\quad \sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$ 之有理化因式爲 $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$.

3 $x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$.

［解］ $\because\quad (x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}})x^{\frac{1}{2}}=x^2+x^3+x^4$.

$\therefore\quad x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$ 之有理化因式爲 $x^{\frac{1}{2}}$.

4. $\sqrt{a}+\sqrt{bc}$.

［解］ $(a^{\frac{1}{2}}+\overline{bc}^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-\overline{bc}^{\frac{1}{2}})=a-bc$.

$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{bc}$ 之有理化因式爲 $\sqrt{a}-\sqrt{bc}$.

5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

［解］ 1. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{z})^2=x+y-z+2\sqrt{xy}$.

2. $(x+y-z+2\sqrt{xy})(x+y-z-2\sqrt{xy})=(x+y-z)^2-4xy$.

$\therefore\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$之有理化因式爲$(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})$

亦卽 $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})$.

6. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.

［解］ 此題與上題解法相同，若以 x_1 換 xy, y_1 換 yz, z_1 換 zx, 則得 $\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}+\sqrt{z_1}$ 與上題無異。

故所求有理化因式爲

$(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx})(\sqrt{xy}-\sqrt{yz}+\sqrt{zx})(\sqrt{xy}-\sqrt{yz}-\sqrt{zx})$.

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$.

［解］ 1. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{z}+\sqrt{u})^2=x+y+2\sqrt{xy}-z-u-2\sqrt{zu}$

$=(x+y-z-u)+2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})$.

2. $[(x+y-z-u)+2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})][(x+y-z-u)-2(\sqrt{xy}$

$-\sqrt{zu})] = (x+y-z-u)^2 - 4(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})^2$

$= (x+y-z-u)^2 - 4(xy+zu-2\sqrt{xyzu})$

$= x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu+8\sqrt{xyzu}.$

3. $(x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu+8\sqrt{xyzu})$
$\times(x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu$
$-8\sqrt{xyzu}) = (x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu$
$-2zu)^2-64xyzu.$

故所求之有理化因式爲

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u})[x+y-z-u-2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})][(x^2+y^2+z^2+u^2$
$-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu)-8\sqrt{xyzu}]$ 亦卽
$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{u})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}+\sqrt{u})$
$\times(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{u})(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}+\sqrt{u})$
$\times(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{u}).$

8. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1.$

[解] 1. $(\sqrt{x}+1+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}+1-\sqrt[4]{x})$
$= x+1+2\sqrt{x}-\sqrt{x} = x+1+\sqrt{x}.$

2. $(x+1+\sqrt{x})(x+1-\sqrt{x}) = (x+1)^2-x = x^2+x+1.$

$\therefore$ $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1$ 之有理化因式爲 $(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1)(x-\sqrt{x}+1).$

9 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}.$

[解] $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}) = x+y.$

$\therefore$ $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ 之有理化因式爲 $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}.$

10. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}.$

[解] $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}) = [a^{\frac{1}{3}}-(b^2)^{\frac{1}{3}}].$

$[a^{\frac{1}{3}}-(b^2)^{\frac{1}{3}}][a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}] = a-b^2.$

$\therefore$ $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$ 之有理化因式爲 $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}.$

11. $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}.$

[解] 1 $(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}) = x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}.$

2. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}) = x-y.$

∴ $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$ 之有理化因式爲 $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

12. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$.

[解] $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}=(x^9)^{\frac{1}{12}}+(y^8)^{\frac{1}{12}}$.

$[(x^9)^{\frac{1}{12}}+(y^8)^{\frac{1}{12}}][(x^9)^{\frac{11}{12}}-(x^9)^{\frac{10}{12}}(y^8)^{\frac{1}{12}}+(x^9)^{\frac{9}{12}}(y^8)^{\frac{2}{12}}-\cdots\cdots-(y^8)^{\frac{11}{12}}]$
$=x^9-y^8$.

∴ $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$ 之有理化因式爲 $[(x^9)^{\frac{11}{12}}-(x^9)^{\frac{10}{12}}(y^8)^{\frac{1}{12}}+(x^9)^{\frac{9}{12}}(y^8)^{\frac{2}{12}}-\cdots\cdots$
$-(y^8)^{\frac{11}{12}}]$.

13. $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$.

[解] 1. $(1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})(1-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})=1-xy^{\frac{2}{3}}$.

2. $(1-xy^{\frac{2}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^2y^{\frac{4}{3}})=1-x^3y^2$.

∴ $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ 之有理化因式爲 $(1-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^2y^{\frac{4}{3}})$.

14. [解] $(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1)=x-1$.

∴ $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$ 之有理化因式爲 $x^{\frac{1}{3}}-1$.

15. [解] $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=9-5=4$.

∴ $3-\sqrt{5}$ 之有理化因式爲 $(3+\sqrt{5})$.

16. [解] 1. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=1+2-3+2\sqrt{2}$
$=2\sqrt{2}$.

2. $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$.

∴ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 之有理化因式爲 $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$.

17. [解] $(1+2^{\frac{1}{3}})(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}})=1-2=-1$.

∴ $1+\sqrt[3]{2}$ 之有理化因式爲 $1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$.

18. [解] $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)(1-\sqrt[3]{3})=1-3$.

∴ $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$ 之有理化因式爲 $1-\sqrt[3]{3}$.

19. [解] 1. $(\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3^2}=3\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+3$.

2. $(3\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+3)(1-\sqrt[3]{2})=3$.

∴ $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$ 之有理化因式爲 $\sqrt[3]{3^2}(1-\sqrt[3]{2})$.

化下列各分式，令其分母爲有理數或有理式：

20. [解] $\dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt[5]{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[5]{b^3}}{ab}$.

21. [解] $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$.

22. [解] $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{15}$.

23. [解] $\dfrac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}=\dfrac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}$.

24. [解] $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\dfrac{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}{2y}=\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$.

25. [解] $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{-4-2\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{12}}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

26. [解] $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2}$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-6-4\sqrt{2}}=-\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})(6-4\sqrt{2})}{36-32}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}.$$

27. [解] $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$

$$=\frac{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})}{x+y-x-y+2\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})\sqrt{xy}}{2xy}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(xy\sqrt{x}+xy\sqrt{y})}{2xy}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{2}.$$

28. [解] $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+1+\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3^2}-1}$

$$=\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}-1}=\frac{2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{(\sqrt[3]{3^2}-1)(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{4}.$$

求下列各式之近似值，正確至第三位小數：

29. [解] $\dfrac{5}{\sqrt{125}}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0.447.$

30. [解] $\dfrac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{196}}{7}=\dfrac{2\sqrt{7}+14}{7}=2.756.$

31. [解] $\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}=1.732.$

習 題 XXXVIII

第 290 頁

就 x 解下列各方程式：

1. $x^{\frac{1}{4}}=4.$

[解] 兩邊自乘再乘得 $x=4^4=256$，此卽爲所求根。

2. $x^{-\frac{1}{2}}=3.$

[解] 化爲正指數 $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=3$ 或 $\dfrac{1}{x}=3^2=9.$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{9}，\text{爲所求根。}$$

3. $x^{\frac{2}{3}}=8.$

[解] 原式立方再求平方根 $x=8^{\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{(2^3)^2}=4$，爲所求根。

4. $(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$

[解]　兩邊平方　$(2x-1)^{\frac{1}{3}}=3.$

再兩邊立方　$2x-1=3^3=27.$

$\therefore\ x=14$，爲所求根。

5.　$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2.$

[解]　原式可化爲　$[2+(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=2.$

兩邊平方　$2+(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=4.$

整理，　$(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2.$

再平方　$3+x^{\frac{1}{2}}=4.$

$x^{\frac{1}{2}}=1.\quad \therefore\ x=1$，爲所求根。

6　$\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=d.$

[解]　分解因式　$\sqrt{x}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=d.$

$$\therefore\quad \sqrt{x}=\frac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

平方　$\therefore\quad x=\left[\dfrac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right]^2$，爲所求根。

7.　$\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1.$

[解]　兩邊平方　$4x^2+x+10=4x^2+4x+1.$

整理　$3x=9.$

$\therefore\ x=3$，爲所求根。

8　$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$

[解]　移項　$\sqrt{x+4}=7-\sqrt{x+11}.$

兩邊平方　$x+4=49-14\sqrt{x+11}+x+11.$

整理　$14\sqrt{x+11}=56.$

$\sqrt{x+11}=4.$

兩邊平方　$x+11=16.$

$\therefore\ x=5$，爲所求根。

9. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0.$

[解] 移項 $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}=\sqrt{9x+10}.$

平方 $4x+5+x+1+2\sqrt{4x^2+9x+5}=9x+10.$

整理 $\sqrt{4x^2+9x+5}=2x+2.$

再平方 $4x^2+9x+5=4x^2+8x+4.$

$\therefore\quad x=-1$, 爲所求根。

10. $\sqrt{x+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}=0.$

[解] 移項 $\sqrt{x+1}=-\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}.$

兩邊平方 $x+1=\dfrac{(x-6)^2}{x+2}.$

去分母 $x^2+3x+2=x^2-12x+36$

整理 $15x=34.$

$\therefore\quad x=\dfrac{34}{15}$, 爲所求根。

11. $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2.$

[解] 移項 $\sqrt{x^2+3x-1}=2+\sqrt{x^2-x-1}.$

兩邊平方 $x^2+3x-1=4+4\sqrt{x^2-x-1}+x^2-x-1.$

整理 $x-1=\sqrt{x^2-x-1}.$

再平方 $x^2-2x+1=x^2-x-1.$

$\therefore\quad x=2$, 爲所求根。

12. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}.$

[解] 兩邊平方 $x+7+x-2+2\sqrt{x^2+5x-14}$

$=x+2+x-1+2\sqrt{x^2+x-2}.$

整理 $2+\sqrt{x^2+5x-14}=\sqrt{x^2+x-2}.$

再平方 $4+4\sqrt{x^2+5x-14}+x^2+5x-14=x^2+x-2.$

整理 $\sqrt{x^2+5x-14}=2-x.$

再平方
$$x^2+5x-14=4-4x+x^2.$$
$$9x=18.$$
$$\therefore\quad x=2,\ \text{爲所求根.}$$

13. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2.$

[解] 去分母 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=2\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-5}.$

整理
$$3\sqrt{x-5}=\sqrt{x+3}.$$
兩邊平方
$$9x-45=x+3.$$
化簡
$$8x=48.$$
$$\therefore\quad x=6,\ \text{爲所求根.}$$

14. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$

[解] 去分母
$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1=0.$$
移項
$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+1}.$$
兩邊平方
$$x-1+1+2\sqrt{x-1}=x+1.$$
化簡
$$4x-4=1.$$
$$4x=5.$$
$$\therefore\quad x=\frac{5}{4},\ \text{爲所求根.}$$

就 x 及 y 解下列方程式:

15. $\begin{cases}\sqrt{x+17}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{y+6}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \sqrt{y-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{y-3}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

[解] 從 (2) 式, $y-x=3-x+y-3+2\sqrt{(3-x)(y-3)}$
$$\sqrt{(3-x)(y-3)}=0,$$
$$3-x=0\ \text{及}\ y-3=0$$
$$\therefore\quad x=3\ \text{及}\ y=3.$$

將此二值各代入 (1) 式;當 $x=3$ 時,則
$$\sqrt{20}+\sqrt{y-2}=\sqrt{8}+\sqrt{y+6}$$

$$\sqrt{20}-\sqrt{8}=\sqrt{y+6}-\sqrt{y-2}$$

$$28-2\sqrt{160}=2y+4-2\sqrt{(y+6)(y-2)}$$

$$12-4\sqrt{10}-y=\sqrt{(y+6)(y-2)}$$

$$(12-4\sqrt{10})^2-2(12-4\sqrt{10})y+y^2=y^2+4y-12$$

$$4^2(3-\sqrt{10})^2-2\times4(3-\sqrt{10}\ y=4(y-3)$$

$$4(9-6\sqrt{10}+10)-6y+2\sqrt{10}y=y-3$$

$$7y-2\sqrt{10}y=79-24\sqrt{10}.$$

$$\therefore\quad y=\frac{79-24\sqrt{10}}{7-2\sqrt{10}}=\frac{73-10\sqrt{10}}{49-40}$$

$$=\frac{73-10\sqrt{10}}{9}.$$

當 $y=3$ 時，則　$\sqrt{x+17}+\sqrt{1}=\sqrt{x+5}+\sqrt{9}$,

$$\sqrt{x+17}=\sqrt{x+5}+2,$$

兩邊平方，化簡　$2=\sqrt{x+5}.$

$$\therefore\quad x=-1.$$

故 $x=-1,\ y=3$; $x=3,\ y=(73-10\sqrt{10})/9$，爲所求解答。

16. ［解］ $\begin{cases}3\sqrt{x-2y}-\sqrt{x+y-4}=3 & \cdots\cdots(1)\\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+y-4}=8 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)×2+(2)，　$7\sqrt{x-2y}=14$

$$x-2y=4\quad\cdots\cdots(3)$$

(2)×3−(1)，　$7\sqrt{x+y-4}=21$

$$x+y=13\quad\cdots\cdots(4)$$

(4)×2+(3)，　$3x=30.$

$$\therefore\quad x=10.$$

代入 (4) 式，　$y=3.$

$\therefore$　$x=10,\ y=3$，爲所求解答。

17. ［解］ $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0$

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=-(\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d})$$

$$x+a+x+b+2\sqrt{(x+a)(x+b)}$$

$$=x+c+x+d+2\sqrt{(x+c)(x+d)}.$$

但因 $$2x+a+b=2x+c+d,$$

及 $$\sqrt{(x+a)(x+b)}=\sqrt{(x+c)(x+d)}$$

$$\therefore\quad x^2+(a+b)x+ab=x^2+(c+d)x+cd$$

即 $$(a+b-c-d)x+ab-cd=0.$$

18. ［解］ $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}-\sqrt{ex+f}=0$

移項 $$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=\sqrt{ex+f}$$

$$ax+b+cx+d+2\sqrt{acx^2+(ad+bc)x+bd}=ex+f$$

$$(a+c-e)x+b+d-f=-2\sqrt{acx^2+(ad+bc)x+bd}$$

$$(a+c-e)^2x^2+(b+d-f)^2+2(a+c-e)(b+d-f)x$$

$$=4[acx^2+(ad+bc)x+bd]\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

若 $$\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0,$$

則 $$(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2=e.$$

$$a+c-e=-2\sqrt{ac}$$

$$\therefore\quad (a+c-e)^2-4ac=0$$

代入 (1)，化簡，得

$$2[(a+c-e)(b+d-f)-2(ad+bc)]x+(b+d-f)^2-4bd=0.$$

故若 $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0$，原式可化爲一次有理方程式．

習　題　XXXIX

第 293 頁

求下列各式之平方根：

1. ［解］ 設 $\sqrt{9+\sqrt{56}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

兩邊平方， $$9+\sqrt{56}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

$$\therefore\quad x+y=9,\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{56}.$$

$$\therefore\quad xy=14\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1), (2) 兩式　　$x=2,\quad y=7.$

$$\therefore\quad \sqrt{9+\sqrt{56}}=\sqrt{2}+\sqrt{7}.$$

2. [解] 設 $\sqrt{20+2\sqrt{96}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

則　　$x+y=20,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{96}$, 即 $xy=96$

解聯立方程式得　　$x=8,\quad y=12.$

$$\therefore\ \sqrt{20+2\sqrt{96}}=\sqrt{8}+\sqrt{12}=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=2(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

3. [解] 設 $\sqrt{32-2\sqrt{175}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$

則　　$x+y=32,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{175}$, 即 $xy=175$

解聯立方程式得　　$x=25,\quad y=7.$

$$\therefore\quad \sqrt{32-2\sqrt{175}}=\sqrt{25}-\sqrt{7}=5-\sqrt{7}.$$

4. [解] $\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}=\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5}}=\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5}}.$

設　　$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

則　　$x+y=5,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, 即 $xy=6.$

$$\therefore\quad x=2,\quad y=3.$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}(\sqrt{10}+\sqrt{15}).$$

5 [解] 設 $\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$

則　　$x+y=7,\ 2\sqrt{xy}=3\sqrt{5}$, 即 $4xy=45.$

$$\therefore\quad x=\frac{9}{2},\quad y=\frac{5}{2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{10}).$$

6. [解] $\sqrt{8\sqrt{2}+2\sqrt{30}}=\sqrt{\sqrt{2}(8+2\sqrt{15})}=\sqrt[4]{2}\sqrt{8+2\sqrt{15}}.$

設　　$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$

$$\therefore\quad x+y=8,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{15},\ \text{即}\ xy=15,$$

$\therefore\ x=3,\ y=5.\qquad \therefore\ \sqrt{8\sqrt{2}+2\sqrt{30}}=\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}).$

7. [解] 設 $\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b^2})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

則 $x+y=2a,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{a^2-b^2}$ 即 $xy=a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

$$\therefore\quad x=a+b,\quad y=a-b.$$

$$\therefore\quad \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b^2})}=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b},$$

8. [解] 設 $\sqrt{b-2\sqrt{ab-a^2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$

則 $x+y=b,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{ab-a^2}$ 即 $xy=ab-a^2=a(b-a).$

$$\therefore\quad x=a,\quad y=b-a.$$

$$\therefore\quad \sqrt{b-2\sqrt{ab-a^2}}=\sqrt{a}-\sqrt{b-a}.$$

簡化下列各式:

9. [解] $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}.$

設 $$\sqrt{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

則 $$x+y=17,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{72}\ \text{即}\ xy=72.$$

$$\therefore\quad x=8,\quad y=9.$$

$$\therefore\quad \sqrt{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{8}+\sqrt{9}=3+2\sqrt{2},$$

$$\therefore\quad \sqrt[4]{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

再設 $$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1},$$

則 $$x_1+y_1=3,\ 2\sqrt{x_1y_1}=2\sqrt{2},\ \text{即}\ x_1y_1=2.$$

$$\therefore\quad x_1=1,\quad y_1=2.$$

$$\therefore\quad \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}.$$

10. [解] 設 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$

則 $$x+y=4,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{3},\ \text{即}\ xy=3.$$

$$\therefore\quad x=1,\quad y=3.$$

$$\therefore\quad \sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{9+4(1+\sqrt{3})}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}.$$

設 $$\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1},$$

則 $$x_1+y_1=13,\ 2\sqrt{x_1y_1}=4\sqrt{3}\ \text{卽}\ x_1y_1=12$$

$$\therefore\quad x_1=1,\quad y_1=12.$$

$$\therefore\quad \sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=1+\sqrt{12}=1+2\sqrt{3}.$$

習題 XL

第297頁

簡化下列各式:

1. [解] $\sqrt{-49}=\sqrt{49}i=7i.$

2. [解] $\sqrt{-18}=\sqrt{18}i=3\sqrt{2}i.$

3. [解] $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-12}=\sqrt{8}i\cdot\sqrt{12}i=\sqrt{96}i^2=4\sqrt{6}i^2=-4\sqrt{6}.$

4. [解] $\sqrt{-2^2}=\sqrt{2^2}i=2i.$

5. [解] $(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2.$

6. [解] $i^{12}=(i^4)^3=1^3=1.$

7. [解] $i^{-7}=\dfrac{1}{i^7}=\dfrac{i}{i^8}=i.$

8. [解] $i^{15}=i^{12}\cdot i^3=(i^4)^3\cdot i^3=i^3=-i$

9. [解] $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{y-x}=\sqrt{x-y}\sqrt{x-y}i=(x-y)i.$

10. [解] $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-2})=(2+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{2}i)$

$=2+\sqrt{3}i+2\sqrt{2}i+\sqrt{6}i^2=2-\sqrt{6}+(\sqrt{3}+2\sqrt{2})i.$

11. [解] $(\sqrt{-2})^7(\sqrt{-3})^9=(\sqrt{2}i)^7(\sqrt{3}i)^9$

$=8\sqrt{2}\times 81\sqrt{3}i^{16}=648\sqrt{6}.$

12. [解] $(1+2i)^3+(1-2i)^3$

$=1+6i+12i^2+8i^3+1-6i+12i^2-8i^3$

$=1-12+1-12=-22.$

13. [解] $\dfrac{a}{\sqrt{-a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}=\dfrac{a}{i\sqrt{a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i}=0.$

14. [解] $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}=\dfrac{4+2i-6i^2+4-2i-6i^2}{1-i^2}=\dfrac{20}{2}=10.$

15 [解] $(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2=3+4i+3-4i+2\sqrt{9-16i^2}$

$=6+2\sqrt{25}=6+10=16.$

16. [解] $\dfrac{1+i^3}{1+i}=1-i+i^2=1-i-1=-i.$

17. [解] $\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{a^2-b^2i^2}=\dfrac{a^2+2abi+b^2i^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i.$

18. [解] $\dfrac{9+3\sqrt{2}i}{(3+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}=\dfrac{3(3+\sqrt{2}i)}{(3+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}$

$=\dfrac{3}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}i)}{1-2i^2}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}i)}{3}=1-\sqrt{2}i.$

19. 以 $1+\sqrt{-3}$ 除 4.

[解] $\dfrac{4}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{4(1-\sqrt{3}i)}{1-(\sqrt{3})^2i^2}=\dfrac{4(1-\sqrt{3}i)}{4}=1-\sqrt{3}i.$

20. 求 -16 之一個四次根。

[解] $\sqrt[4]{-16}=\sqrt{\sqrt{-16}}=\sqrt{4i}=\sqrt{2}\sqrt{2i}=\sqrt{2}\sqrt{1+2i+i^2}$

$=\sqrt{2}(1+i).$

21. 證明 $(-1+\sqrt{3}i)/2$ 爲 1 之立方根。

[解] $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\dfrac{-1+3\sqrt{3}i-9i^2+3\sqrt{3}i^3}{8}$

$=\dfrac{-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i}{8}=\dfrac{8}{8}=1.$

$\therefore\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 爲 1 之立方根。

22. 證明 $(1+i)/\sqrt{2}$ 爲 -1 之四次根.

[解] $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{1+4i+6i^2+4i^3+i^4}{4}=\dfrac{1+4i-6-4i+1}{4}$

$=\dfrac{2-6}{4}=-1.$

23. 求 x 及 y 之實數値，俾適合方程式

$$3+2i+x(i-1)+2yi=(3i+4)(x+y).$$

［解］ $3+2i+x(i-1)+2yi=(3i+4)(x+y)$.

整理 $(3-x)+(2+x+2y)i=4(x+y)+3(x+y)i$，左右兩邊實數部分相等，虛數部分亦相等。

$\therefore\ 3-x=4(x+y)$，　　卽 $5x+4y=3$ ……………………(1)

又　$2+x+2y=3(x+y)$，　　卽 $2x+y=2$ ……………………(2)

解 (1), (2) 兩式得　$x=\dfrac{5}{3}$,　$y=-\dfrac{4}{3}$.

24. 求下列各式之平方根：

［解］ 設 $\sqrt{5+12i}=\sqrt{x}+\sqrt{y}i$

兩邊平方　$5+12i=x-y+2\sqrt{xy}i$

$\therefore\ x-y=5$ ……………………………………(1)

$2\sqrt{xy}=12$ 卽 $xy=36$. ……………………(2)

解 (1), (2) 兩式得　$x=9$,　$y=4$

$$\therefore\ \sqrt{5+12i}=\sqrt{9}+\sqrt{4}i=3+2i$$

25. ［解］ 設 $\sqrt{2i}=\sqrt{x}+\sqrt{y}i$

則　$2i=x-y+2\sqrt{xy}i$

$\therefore\ x-y=0$, $2\sqrt{xy}=2$, 卽 $xy=1$.

解聯立方程式得　$x=1$,　$y=1$.

$$\therefore\ \sqrt{2i}=1+i.$$

26. ［解］ 設 $\sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}=\sqrt{x}+\sqrt{y}i$.

則　$4ab+2(a^2-b^2)i=x-y+2\sqrt{xy}i$.

$\therefore\ x-y=4ab$ ……………………………………(1)

$\sqrt{xy}=a^2-b^2$ ……………………………………(2)

由 (2),　$xy=a^4-2a^2b^2+b^4$ ……………………(3)

由 (1),　$x^2+2xy+y^2=16a^2b^2$ ……………………(4)

(4)+(3)×4,　$(x+y)^2=4(a^4+2a^2b^2+b^4)$.

$x+y=2(a^2+b^2)$ ……………………………………(5)

$\dfrac{(5)+(1)}{2}$, $\qquad x=(a+b)^2$.

$\dfrac{(5)-(1)}{2}$, $\qquad y=(a-b)^2$.

$$\therefore\quad \sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}=(a+b)+(a-b)i.$$

習 題 XLI

第 301 頁

解下列各方程式:

1. [解] $x^2+2x=35$.

分解因式 $\qquad (x-5)(x+7)=0$.

$$\therefore\quad x=5 \text{ 及 } -7.$$

2. [解] $4x^2-4x=3$.

分解因式 $\qquad (2x-3)(2x+1)=0$.

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2} \text{ 及 } -\frac{1}{2}.$$

3. [解] $x^2=10x-18$.

移項 $\qquad x^2-10x+18=0$.

應用公式 $\qquad \therefore\quad x=5\pm\sqrt{5^2-18}=5\pm\sqrt{7}$.

4. [解] $9x^2+6x+5=0$.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-5\times9}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{36}i}{9}=\frac{-1\pm2i}{3}.$$

5. [解] $2x^2+3x-4=0$.

應用公式 $\qquad x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+32}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$.

6. [解] $(2x-3)^2=8x$.

展開,化簡 $\qquad 4x^2-12x+9-8x=0$.

$$4x^2-20x+9=0.$$

分解因式 $\qquad (2x-9)(2x-1)=0$.

$$\therefore\quad x=\frac{9}{2} \text{ 及 } \frac{1}{2}.$$

7. [解] $x^2+9x-252=0.$

分解因式 $$(x+21)(x-12)=0.$$

$$\therefore \quad x=-21 \text{ 及 } 12.$$

8. [解] $12x^2+56x-255=0.$

分解因式 $$(6x-17)(2x+15)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{17}{6} \text{ 及 } -\frac{15}{2}.$$

9. [解] $8x^2-82x+207=0.$

分解因式 $$(4x-23)(2x-9)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{23}{4} \text{ 及 } \frac{9}{2}.$$

10. [解] $15x^2-86x-64=0.$

分解因式 $$(5x-32)(3x+2)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{32}{5} \text{ 及 } -\frac{2}{3}.$$

11. [解] $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0.$

應用公式 $$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4-4\sqrt{3}}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13-2\sqrt{12}}}{2}$$

設 $$\sqrt{13-2\sqrt{12}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

則 $$x+y=13,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{12},\ \text{卽}\ xy=12.$$

$$\therefore \quad x=1, \quad y=12.$$

$$\therefore \quad \sqrt{13-2\sqrt{12}}=1-\sqrt{12}=1-2\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm(1-2\sqrt{3})}{2}. \qquad \therefore\ x=2-\sqrt{3} \text{ 及 } 1+\sqrt{3}.$$

12. [解] $x^2-(6+i)x+8+2i=0.$

分解因式 $$x^2-(6+i)x+2(4+i)=0.$$

$$(x-2)[x-(4+i)]=0.$$

$$\therefore \quad x=2 \text{ 及 } 4+i.$$

13. [解] $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6).$

展開 $$x^3-11x^2+32x-28=x^3-7x^2+36.$$

化簡 $$4x^2-32x+64=0.$$

$$x^2-8x+16=0.$$

分解因式 $$(x-4)^2=0.$$

$$\therefore\quad x=4,\ 及\ 4.$$

14. ［解］ $\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x}=2.$

全式乘以 $\dfrac{x+2}{2x}$, $$1+\left(\frac{x+2}{2x}\right)^2-2\left(\frac{x+2}{2x}\right)=0.$$

分解因式 $$\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)^2=0.$$

或 $$\left(\frac{2-x}{2x}\right)^2=0.$$

去分母, $(2-x)^2=0,\quad \therefore\ x=2,$ 及 $2.$

因 $x=2$ 時分母不爲 0, 故 2, 2 均爲原方程式之根。

15. ［解］ $\dfrac{x+1}{x}+1=\dfrac{x}{x-1}.$

去分母 $$2x^2-x-1=x^2.$$

整理 $$x^2-x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$ 爲所求根。

16 ［解］ $\dfrac{3}{2(x^2-1)}+\dfrac{x}{4x+4}=\dfrac{3}{8}.$

去分母, 整理 $$x^2+2x-15=0.$$

分解因式 $$(x+5)(x-3)=0.$$

$\therefore\quad x=-5$ 及 3, 爲所求根。

17. ［解］ $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{1}{4x-2}-\dfrac{2x}{1-4x^2}=\dfrac{7}{8}.$

去分母, 整理 $$28x^2-56x+21=0.$$

$$4x^2-8x+3=0.$$

分解因式　$(2x-3)(2x-1)=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2}\ 及\ \frac{1}{2}.$$

以 $\frac{1}{2}$ 代原方程式，使分母爲 0，故非原方程式之根，即所求根爲 $\frac{3}{2}$.

18. ［解］ $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}.$

原式可化爲　$2+\dfrac{3}{x-2}+3+\dfrac{10}{x-3}=5+\dfrac{6}{x-4}.$

即　$\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{10}{x-3}-\dfrac{6}{x-4}=0.$

去分母　$3(x-3)(x-4)+10(x-2\ (x-4)-6(x-2)(x-3)=0.$

整理　$7x^2-51x+80=0.$

分解因式　$(7x-16)(x-5)=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{16}{7}\ 及\ 5，爲所求根.$$

19. ［解］ $\dfrac{x+1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{2x}=0.$

去分母　$2(x+1)(x-1)-x(x-2)+(x-2)(x-1)=0$

整理　$2x^2-x=0.\quad x(2x-1)=0.$

$$\therefore\quad x=\tfrac{1}{2}\ 或\ 0.$$

但 0 能使分母爲 0，故非原方程式之根，即所求根爲 $\frac{1}{2}$.

20. ［解］ $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{3-x}.$

移項　$\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}.$

合併　$\dfrac{x-5}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x-5}{(x-3)(x-4)}.$

去分母　$(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4).$

化簡　$x^2-3x+2=x^2-7x+12.$

$$4x=10.$$

$$\therefore\quad x=\tfrac{5}{2}.$$

又 $$x-5=0.$$

$$\therefore\quad x=5.$$ 故 5 及 $\frac{5}{2}$ 均爲所求根。

21. [解] $$\frac{x+3}{4(x+2)(3x-1)}+\frac{2x+1}{3(3x-1)(x+4)}-\frac{17x+7}{6(x+4)(x+2)}=0.$$

去分母 $$3(x+3)(x+4)+4(2x+1)(x+2)-2(17x+7)(3x-1)=0.$$

整理 $$91x^2-33x-58=0.$$

分解因式 $$(x-1)(91x+58)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 及 } -\frac{58}{91},$$ 爲所求根。

22. [解] $$\frac{x+7}{2x^2-7x+3}+\frac{x}{x^2-2x-3}+\frac{x+3}{2x^2+x-1}=0.$$

將分母分解因式 $$\frac{x+7}{(2x-1)(x-3)}+\frac{x}{(x+1)(x-3)}+\frac{x+3}{(2x-1)(x+1)}=0.$$

去分母 $$(x+7)(x+1)+x(2x-1)+(x+3)(x-3)=0.$$

化簡 $$4x^2+7x-2=0.$$

分解因式 $$(4x-1)(x+2)=0.$$

$$\therefore\quad x=\tfrac{1}{4} \text{ 及 } -2,$$ 爲所求根。

23. [解] $$3x^2+(9a-1)x-3a=0.$$

分解因式 $$(3x-1)(x+3a)=0.$$

$$\therefore\quad x=\tfrac{1}{3} \text{ 及 } -3a,$$ 爲所求根。

24. [解] $$x^2-2ax+a^2-b^2=0.$$

分解因式 $$(x-a)^2-b^2=0.$$

$$(x-a+b)(x-a-b)=0.$$

$$\therefore\quad x=a-b \text{ 及 } a+b$$ 均爲所求根。

25. [解] $$c^2x^2+c(a-b)x-ab=0.$$

分解因式 $$(cx+a)(cx-b)=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{a}{c} \text{ 及 } \frac{b}{c}$$ 均爲所求根。

26. [解] $x^2-4ax+4a^2-b^2=0.$

分解因式 $$(x-2a)^2-b^2=0.$$

$$(x-2a+b)(x-2a-b)=0.$$

$\therefore\quad x=2a-b$ 及 $2a+b$ 均爲所求根。

27. [解] $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0.$

原式可化爲 $$x^2-6acx+9a^2c^2-4a^2b^2=0.$$

$$(x-3ac)^2-(2ab)^2=0.$$

分解因式 $$(x-3ac+2ab)(x-3ac-2ab)=0.$$

$\therefore\quad x=a(3c-2b)$ 及 $a(3c+2b)$ 均爲所求根。

28. [解] $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0.$

分解因式 $$\{(a-b)x-(a+b)\}\{(a+b)x-(a-b)\}=0.$$

$\therefore\quad x=\dfrac{a+b}{a-b}$ 及 $\dfrac{a-b}{a+b}$ 均爲所求根。

29. [解] $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0.$

去分母 $$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0.$$

化簡 $$3x^2-(2a+2b+2c)x+ca+bc+ab=0.$$

應用公式 $\therefore\quad x=\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$，爲所求根。

30. [解] $\dfrac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0.$

去分母 $$[(x-a)^2-(x-b)^2](a^2-b^2)+4ab(x-a)(x-b)=0.$$

化簡 $$4abx^2-2(a^2+b^2)(a+b)x+(a^2+b^2)^2=0.$$

分解因式 $$[2ax-(a^2+b^2)][2bx-(a^2+b^2)]=0.$$

$\therefore\quad x=\dfrac{a^2+b^2}{2a}$ 及 $\dfrac{a^2+b^2}{2b}$ 均爲所求根。

習　題　XLII　　第302頁

1. 二連續整數之積爲506，求此二數。

［解］ 設 $x, x+1$ 爲二連續整數.

則 $$x(x+1)=506,$$

$$x^2+x-506=0.$$

分解因式 $$(x-22)(x+23)=0.$$

$$\therefore\quad x=22 \text{ 或 } -23,$$

$$x+1=23 \text{ 或 } -22.$$

［答］ 所求二連續整數爲 22, 23 或 −23, −22.

2. 二連續整數之平方之和爲 481, 求此二數.

［解］ 設 $x, x+1$ 爲所求之二連續整數.

則 $$x^2+(x+1)^2=481,$$

$$x^2+x-240=0.$$

分解因式 $$(x-15)(x+16)=0.$$

$$\therefore\quad x=15 \text{ 或 } -16,$$

$$x+1=16 \text{ 或 } -15.$$

［答］ 所求連續整數爲 15 及 16, 或 −16 及 −15.

3. 二連續整數之立方之差爲 91, 求此二數.

［解］ 設 $x, x+1$ 爲所求之二連續整數.

則 $$(x+1)^3-x^3=91,$$

$$x^2+x-30=0.$$

分解因式 $$(x+6)(x-5)=0.$$

$$\therefore\quad x=5 \text{ 或 } -6,$$

$$x+1=6 \text{ 或 } -5.$$

［答］ 所求連續整數爲 5 及 6, 或 −6 及 −5.

4. 三連續整數兩兩之積之和爲 587, 求此三數.

［解］ 設 $x-1, x, x+1$ 爲三連續整數.

則 $$(x-1)x+x(x+1)+(x+1)(x-1)=587.$$

化簡 $$3x^2=588,\quad x^2=196.$$

$$\therefore\quad x=\pm 14.$$

［答］ 所求三連續整數爲 13, 14, 15 或 $-15,\ -14,\ -13$.

5. 由下開條件求二位之數；兩數字之積爲 48，若將數字易位，其數減小 18.

［解］ 設 x 爲十位數，則 $\frac{48}{x}$ 爲個位數，所求數爲 $10x+\frac{48}{x}$，個位數與十位數互換位置後此數爲 $10\cdot\frac{48}{x}+x$.

依題意得方程式　$10x+\frac{48}{x}=10\cdot\frac{48}{x}+x+18.$

去分母，化簡　$9x^2-18x-432=0.$

即　$x^2-2x-48=0.$

分解因式　$(x-8)(x+6)=0.$

$$\therefore\quad x=8,\quad -6.\ (\text{負數不適用})$$

$$\frac{48}{x}=\frac{48}{8}=6.$$

［答］ 所求數爲 86.

6. 有一分數，其分子較分母多 2，又其自身較其倒數多 $\frac{24}{35}$. 求此分數.

［解］ 設 x 爲分母，則分子爲 $x+2$，所求之分數爲 $\frac{x+2}{x}$.

依題意得方程式　$\frac{x+2}{x}-\frac{x}{x+2}=\frac{24}{35}.$

去分母　$6x^2-23x-35=0.$

分解因式　$(x-5)(6x+7)=0.$

$$\therefore\quad x=5,\ -\frac{7}{6}.\ (\text{負數不適用})$$

$$\therefore\quad x+2=7.$$

［答］ 所求分數爲 $\frac{7}{5}$.

7. 販牛者以 1260 圓買牛若干頭. 除失去四頭外，餘牛每頭增價

10 圓賣之,計尚獲利 260 圓. 則此人原買牛幾頭?

［解］ 設 x 爲此人所購牛之頭數,則每頭價爲 $\frac{1260}{x}$ 元.

故得方程式 $$(x-4)\left[\frac{1260}{x}+10\right]-1260=260.$$

$$x^2-30x-504=0,$$

$$(x+12)(x-42)=0.$$

$$\therefore\ x=42 \text{ 及 } -12 \text{ (負數不適用)}.$$

［答］ 此人原購牛四十二頭.

8. 一人將貨物以 48 圓售出,獲利之百分數,等於貨物原價圓數之半. 貨物之原價若何?

［解］ 設 x 爲該物之原價,則獲利爲 $48-x$, 其百分率爲 $\frac{48-x}{x}$

依題意得方程式 $$\frac{48-x}{x}\cdot 100=\frac{x}{2}.$$

去分母 $$200(48-x)=x^2,$$

整理 $$x^2+200x-9600=0.$$

$$\therefore\ (x-40)(x+240)=0.$$

$$\therefore\ x=40,\ -240. \text{ (負數不適用)}$$

［答］ 貨物之原價爲 40 元.

9. 本金 4000 圓,以複利法貸出,利息每年加入本中. 若二年後本利和達到 4410 圓,則利率若何?

［解］ 設 $x\%$ 爲所求利率,則第一年本利和爲 $4000\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

第二年本利和爲 $$4000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right),$$

即 $$4000\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=4410.$$

化簡 $$x^2+200x-1025=0.$$

分解因式 $$(x-5)(x+205)=0,\quad \therefore\ x=5.$$

[答] 所求利率為 5%.

10. 一人繼承遺產 25,000 圓，但除繳去遺產稅後，又提出若干成充費用，其百分數較遺產稅率多一，故僅得 22,800 圓。遺產稅率若何？

[解] 設繼承遺產稅率為 $x\%$，則繼承稅為 $25000\cdot\frac{x}{100}$，雜費為 $25000\cdot\frac{x+1}{100}$.

$$\therefore\quad 25000\left[\frac{x}{100}+\frac{x+1}{100}\right]=25000-22800$$

化簡 $$500x=1950.$$

$$\therefore\quad x=4.$$

[答] 繼承遺產稅率為 4%.

11. 一人以 4500 圓購進有折扣之 50 圓股票若干張，除 10 張外，其餘後以 5850 圓售出。其時溢價之百分數三倍於購入時之折扣率，此人購入股票幾張？

[解] 設 x 為每張股票購進時折扣之數，則 $\frac{4500}{50-x}$ 為股票之張數。

$$\therefore\quad \frac{4500}{50-x}=\frac{5850}{50+3x}+10.$$

化簡 $3x^2+1835x-9250=0.\quad \therefore\ (3x+1850)(x-5)=0.$

$$\therefore\quad x=-\frac{1850}{3}\ \text{及}\ 5\ (\text{負數不適用}).$$

$$\therefore\quad x=5,\quad \frac{4500}{50-x}=\frac{4500}{50-5}=100.$$

[答] 此人共買股票 100 張。

12. 貨車後輪之周圍，較前輪之周圍長 8 吋，而車行 1 哩，後輪較前輪少轉 88 次。求各輪之周圍。

[解] 設前輪周圍長 x 吋，則後輪周圍長為 $x+8$ 吋，

因 $$1\text{ 哩}=5280\text{ 呎}=63360\text{ 吋}.$$

$$\therefore\quad \frac{63360}{x}-\frac{63360}{x+8}=88$$

化簡 $$x^2+8x-5760=0$$

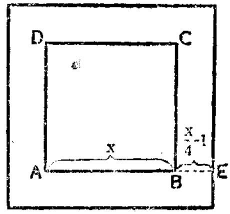
$$(x+80)(x-72)=0$$

$$\therefore\quad x=-80,\ 72\ (\text{負數不適用}).$$

$$x+8=72+8=80.$$

［答］ 前輪周圍長 72 吋即 6 呎，後輪周圍長 80 吋即 $6\frac{2}{3}$ 呎.

13. 正方形之四周有邊緣，緣之闊較正方形每邊之長之四分之一少 1 吋，其面積之平方吋數，較正方形四周之長之吋數多 64. 求正方形及邊緣之面積.



［解］ 設正方形 $ABCD$ 每邊之長爲 x 吋，其邊緣之闊 BE 爲 $\left(\frac{x}{4}-1\right)$ 吋，故得方程式

$$\left[x+2\left(\frac{x}{4}-1\right)\right]^2-x^2=4x+64.$$

化簡 $x^2-8x-48=0$, $\quad\therefore\ (x-12)(x+4)=0.$

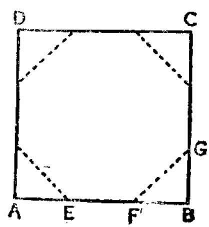
$$\therefore\quad x=12,\ -4\ (\text{負數不適用}).$$

$$\therefore\quad x^2=12\times12=144,$$

而 $$\left[x+2\left(\frac{x}{4}-1\right)\right]^2-x^2=[12+4]^2-144=112.$$

［答］ 正方形及邊緣之面積各爲 144 及 112 方吋.

14. 正方形每邊之長爲 2，截去四角得正八角形. 此八角形每邊之長若何？



［解］ 設正方形 $ABCD$ 每邊 $AB=2$，截去四角成一等邊八邊形.

命八邊形每邊之長 $EF=FG=x$,

則因 $$\overline{FG}^2=\overline{FB}^2+\overline{BG}^2=2\overline{FB}^2=2\left(\frac{AB-EF}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad x^2=2\left(\frac{2-x}{2}\right)^2,$$

化簡 $$x^2+4x-4=0.$$

應用公式 $x=-2\pm\sqrt{4+4}=-2\pm2\sqrt{2}$ (負數不適用).

$$\therefore\quad x=-2+2\sqrt{2}=2(\sqrt{2}-1).$$

[答] 八邊形每邊之長為 $2(\sqrt{2}-1)$.

15. 酒商由裝滿 63 喲之桶中取出一定量之酒，仍用水將桶注滿，復取出同量之液體，其時桶中僅含純酒 28 喲，求其每次取出幾喲?

[解] 設每次取出 x 喲. 則第一次取出後餘酒 $63-x$ 喲. 今第二次再取 x 喲，因有水注入，故所取出純酒為 $\left(\frac{63-x}{63}\right)x$ 喲.

$$\therefore\quad 63-x-\left(\frac{63-x}{63}\right)x=28.$$

化簡 $x^2-126x+2205=0$, $\therefore\ (x-105)(x-21)=0$.

$\therefore\ x=21$ 或 105, 但 105 不合題意.

[答] 每次取出 21 喲.

16 一人附甲車行 50 哩，停留 5 分鐘後，復附乙車返，乙車較甲車每小時快 5 哩. 全程共費時 $2\frac{4}{9}$ 小時. 兩車之速率若何?

[解] 設甲車速率為每時 x 哩，則乙車速率為每時 $x+5$ 哩，又 5 分 $=1/12$ 時，

故得方程式 $$\frac{50}{x}+\frac{1}{12}+\frac{50}{x+5}=2\frac{4}{9}.$$

化簡 $$17x^2-635x-1800=0.$$

$$\therefore\quad (17x+45)(x-40)=0.$$

$$\therefore\quad x=40,\quad -\frac{45}{17}\ (\text{負數不適用})$$

$$\therefore\quad x+5=40+5=45.$$

[答] 甲乙二車之速率各為 40 及 45 哩.

17. 旅人於一定時間內步行 6 哩. 若時間少 1/2 小時，則速率每小時應多 2 哩. 求時間及速率.

[解] 設旅人之速率為每時 x 哩，則行 6 哩所需時間為 $6/x$ 時.

故得方程式　$$\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{2}\right)(x+2)=6.$$

化簡　$$x^2-2x-24=0$$

$$\therefore\ (x+6)(x-4)=0.$$

$$\therefore\quad x=4,\ -6\ (\text{負數不適用})。$$

$$\therefore\quad \frac{6}{x}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

［答］ 旅人每時行 4 哩，而所需時間爲 $1\frac{1}{2}$ 時。

18. 旅人以一定速率行 12 哩後，復以每小時較前多 $\frac{1}{2}$ 哩之速率前行 6 哩。若此人以第二次之速率行全程，時間應省 20 分鐘。此旅人行上述 18 哩所費之時間若何？

［解］ 設所求速率爲每時 x 哩，則所求時間爲 $\frac{12}{x}+\frac{6}{x+\frac{1}{2}}$ 時，

$$\therefore\quad \frac{12}{x}+\frac{6}{x+\frac{1}{2}}-\frac{12+6}{x+\frac{1}{2}}=\frac{20}{60}.$$

化簡　$$2x^2+x-36=0.$$

$$\therefore\ (2x+9)(x-4)=0,\qquad \therefore\ x=4,\ -\tfrac{9}{2}\ (\text{負數不適用})。$$

$$\therefore\quad \frac{12}{x}+\frac{6}{x+\frac{1}{2}}=3+\frac{4}{3}=4\frac{1}{3}.$$

［答］ 所求速率爲每時 4 哩，所需時間爲 $4\frac{1}{3}$ 時，卽 4 時 20 分。

19. 兩直路成直交，甲乙二人由交點同時出發，甲以每小時 3 哩之速率進行一路，乙以每小時 4 哩之速率進行他一路。幾小時後二人相距 30 哩？

［解］ 設 x 爲所求時間，在 x 時內，甲行 $3x$ 哩，乙行 $4x$ 哩。

依題意得方程式　$$(3x)^2+(4x)^2=(30)^2.$$

化簡　$$25x^2=900.\quad \therefore\ x=\pm 6\ (\text{負數不適用})。$$

［答］ 所求時間爲 6 小時。

20. 若甲與乙各以每小時 2 哩及 3 哩之速率於上述之兩路行走，而甲先乙兩小時出發，則乙出發後幾小時二人相距 10 哩？

[解]　設經 x 時,甲與乙相距 10 哩,則因在 x 時內,甲行 $2x$ 哩,乙行 $3x$ 哩.

故得方程式　　$(2x+2\cdot2)^2+(3x)^2=(10)^2$.

化簡　　$13x^2+16x-84=0$.

$$\therefore\quad (x-2)(13x+42)=0$$

$$\therefore\quad x=2,\ -\frac{42}{13}.\ \text{(負數不適用)}.$$

[答]　須經 2 小時,甲乙方能相距 10 哩.

21.　在離地面 a 呎高處,以每秒 b 呎之初速將物體鉛直上拋,t 秒後物體之高當如公式 $h=a+bt-16t^2$ 所示.若使物體鉛直下落,則其對應公式爲 $h=a-bt-16t^2$.

(1) 若在地上以每秒 32 呎之初速將物體鉛直上拋,何時物體高達 7 呎?何時高達 16 呎?物體能高達 17 呎否?

(2) 在離地面 64 呎高處,以每秒 48 呎之初速使物體鉛直下落.何時物體高達 36 呎?

(3) 若物體在離地面 36 呎高處下落,何時達到地面?

[解]　(1) a. $h=7$, $b=32$, $a=0$ 代入公式 $h=a+bt-16t^2$ 得

$$7=0+32t-16t^2,\quad \therefore\ 16t^2-32t+7=0.$$

$$\therefore\ (4t-7)(4t-1)=0,\quad \therefore\ t=\frac{1}{4}\ \text{或}\ \frac{7}{4}.$$

b.　$h=16$, $b=32$, $a=0$, 代入公式 $h=a+bt-16t^2$.

得　　$16=0+32t-16t^2,\quad \therefore\ 16t^2-32t+16=0.$

$$\therefore\quad 16(t-1)^2=0.\quad \therefore\ t=1.$$

c.　$h=17$, $b=32$, $a=0$ 代入公式 $h=a+bt-16t^2$.

得　　$17=0+32t-16t^2,\quad \therefore\ 16t^2-32t+17=0.$

$$\therefore\quad t=\frac{16\pm\sqrt{256-272}}{16}=\frac{16\pm\sqrt{-16}}{16}=\frac{4\pm i}{4}\ \text{(虛數不適用)}$$

(2)　$h=36$, $a=64$, $b=48$ 代入公式 $h=a-bt-16t^2$,

得 $$36=64-48t-16t^2. \quad \therefore\ 16t^2+48t-28=0.$$

卽 $$4t^2+12t-7=0 \quad \therefore\ (2t-1)(2t+7)=0.$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2},\ \text{(負數不適用)}.$$

(3) $h=0$, $a=36$, $b=0$, 代入公式 $h=a-bt-16t^2$,

得 $$0=36-16t^2, \quad \therefore\ 4t^2=9.$$

$$\therefore\ t=\pm\tfrac{3}{2}\ \text{(負數不適用)}.$$

[答] 所求之時間爲 $\begin{cases}(1)\ a.\ \tfrac{1}{4}\text{秒及}\tfrac{7}{4}\text{秒},\ b.\ 1\text{秒},\ c.\ \text{不適用}. \\ (2)\ \tfrac{1}{2}\text{秒}. \\ (3)\ \tfrac{3}{2}\text{秒}.\end{cases}$

習題 XLIII

第 308 頁

1. m 須有若何之値，$(m+2\ x^2-2mx+1=0$ 之二根始能相等？

[解] 原方程式二根相等，判別式應等於 0.

$\because$ 判別式 $B^2-4AC=(2m)^2-4(m+2)=4m^2-4m-8$

$$=4(m-2)(m+1)=0.$$

$$\therefore\ m=2\ \text{或}\ -1.$$

2. $m=-1$ 時，$(m^2+m)x^2+3mx-2=0$ 之根若何？$m=0$時又若何？

[解] (1) 當 $m=-1$，原方程式化爲 $0\cdot x^2-3x-2=0$.

因 x^2 之係數爲 0，故有一根爲 ∞，另一根爲 $-\frac{2}{3}$.

(2) 當 $m=0$，原方程式化爲 $0\cdot x^2+0\cdot x-2=0$.

因 x^2 及 x 之係數均爲 0，故二根均爲 ∞.

3 若可能時，分解 $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2$ 之因式.

[解] 原式依 x 之降冪序排列.

設 $$3x^2+(5y-5)x-(2y^2-4y+2)=0$$

應用公式 $$x=\frac{-(5y-5)\pm\sqrt{(5y-5)^2+12(2y^2-4y+2)}}{6}$$

$$=\frac{-(5y-5)\pm(7y-7)}{6}=\frac{y-1}{3}\ \text{或}\ -2y+2.$$

因根式中爲完全平方，故原式可分解因式，

即 $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2=(3x-y+1)(x+2y-2)$.

4. m 須有若何之値，$x^2-y^2+mx+5y-6$ 始得分解因式？

[解] 將原式排列爲 x^2+mx-y^2+5y-6.

設 $$x^2+mx-(y^2-5y+6)=0,$$

應用公式 $$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4(y^2-5y+6)}}{2}$$

$$=\frac{-m\pm\sqrt{4y^2-20y+24+m^2}}{2}.$$

若原式能分解因式，則根式中 $4y^2-20y+24+m^2$ 應爲完全平方，即 $4y^2-20y+24+m^2$ 之判別式應爲 0.

$$\therefore\quad (-20)^2-4\cdot4(24+m^2)=0.$$

即 $$400-16(24+m^2)=0.$$

化簡 $$m^2=1,\qquad \therefore\quad m=\pm1.$$

故 $m=\pm1$ 時，原式可分解因式.

5. $x^2+px+q=0$ 之根爲 α 及 β，試將 $(\alpha-\beta)^2$，$\alpha^4+\beta^4$，及 $\alpha/\beta+\beta/\alpha$ 以含 p 及 q 之項表之.

[解] 因 α,β 爲 $x^2+px+q=0$ 之二根，

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q.$$

因此 $$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2-4q.$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2-2(\alpha\beta)^2$$
$$=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2.$$

$$\alpha/\beta+\beta/\alpha=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{p^2-2q}{q}.$$

6. $2x^2-3x+4=0$ 之根爲 α 及 β，求 $\alpha/\beta^2+\beta/\alpha^2$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ 之値.

[解] 因 α,β 爲 $2x^2-3x+4=0$ 之二根，則 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=2$.

$$\therefore\quad \frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{(\frac{3}{2})^3-3\cdot 2(\frac{3}{2})}{2^2}=-\frac{45}{32}.$$

$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$

$$=2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\right]=2\left[\frac{-7}{4}\right]=-\frac{7}{2}.$$

7. $x^2+x+2=0$ 之根爲 α 及 β，試求方程式，令其根分別爲 $-\alpha$, $-\beta$; $1/\alpha$, $1/\beta$; 2α, 2β; $\alpha+1$, $\beta+1$.

［解］ 因 α,β 爲 $x^2+x+2=0$ 之二根，則 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$, 故

(1) 若以 $-\alpha$, $-\beta$ 作根，所求方程式爲

$$x^2-(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=0.$$

即
$$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

亦即
$$x^2-x+2=0.$$

(2) 若以 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 作根，所求方程式爲

$$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0.$$

即
$$x^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha\beta}=0.$$

亦即
$$x^2-\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}=0.$$

$$\therefore\quad 2x^2+x+1=0.$$

(3) 若以 2α, 2β 作根，所求方程式爲

$$x^2-(2\alpha+2\beta)x+4\alpha\beta=0,$$

即
$$x^2-2(\alpha+\beta)x+4\alpha\beta=0.$$

亦即
$$x^2+2x+8=0.$$

(4) 若以 $\alpha+1$, $\beta+1$ 作根，所求方程式爲

$$x^2-(\alpha+1+\beta+1)x+(\alpha+1)(\beta+1)=0,$$

即 $$x^2-(\alpha+\beta+2)x+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)=0,$$

亦即 $$x^2-(-1+2)x+(2-1+1)=0.$$

$$\therefore\quad x^2-x+2=0.$$

8. 求下列各式之極大及極小值:

(1) x^2-8x+3. (2) $2x^2-x+4$. (3) $1+4x-x^2$.

(4) $x/(x^2+1)$. (5) $1/x+1/(1-x)$. (6) $(x+1)/(2x^2-1)$.

[解] (1) x^2-8x+3.

設 $$y=x^2-8x+3+13-13=(x-4)^2-13.$$

[答] 當 $x=4$ 時, y 有一極小值 -13.

(2) $2x^2-x+4$.

設 $$\begin{aligned}y&=2x^2-x+4=2\left[x^2-\tfrac{1}{2}x+2\right]\\&=2\left[x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}+\frac{31}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]\\&=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}.\end{aligned}$$

[答] 當 $x=\dfrac{1}{4}$ 時, y 有一極小值 $\dfrac{31}{8}$.

(3) $1+4x-x^2$.

設 $y=1+4x-x^2=5-4+4x-x^2=5-(2-x)^2$.

[答] 當 $x=2$ 時, y 有一極大值 5.

(4) $\dfrac{x}{x^2+1}$.

設 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, 去分母,化簡得 $x^2y-x+y=0$

應用公式 $$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}=\frac{1\pm\sqrt{(1+2y)(1-2y)}}{2y}$$

因 x 須爲實數,故根式中 $(1+2y)(1-2y)\geqq 0$.

$$\therefore\quad -\frac{1}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ y 之極大值爲 $\frac{1}{2}$，極小值爲 $-\frac{1}{2}$.

(5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$.

設 $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$ 去分母，化簡得 $x^2y-xy+1=0$.

應用公式 $$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4\cdot y\cdot 1}}{2y}=\frac{y\pm\sqrt{y(y-4)}}{2y}.$$

因 x 須爲實數，故根式中 $y(y-4)\geqq 0$.

$$\therefore\quad y\leqq 0 \text{ 或 } y\geqq 4.$$

$\therefore$ y 之極小值爲 4.

(6) $\frac{x+1}{2x^2-1}$.

設 $y=\frac{x+1}{2x^2-1}$，去分母，化簡 $2yx^2-x-(y+1)=0$.

應用公式 $$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2y(y+1)}}{4y}=\frac{1\pm\sqrt{8y^2+8y+1}}{4y}.$$

根式中 $$8y^2+8y+1=8\left[y^2+y+\frac{1}{8}\right]=8\left[y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right]$$
$$=8\left[\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right]=8\left(y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=8\left(y+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(y+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right).$$

因 x 須爲實數，故根式中 $8y^2+8y+1\geqq 0$,

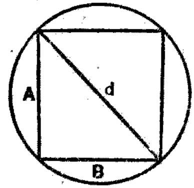
即 $$\left(y+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(y+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\geqq 0.$$

$$\therefore\quad y\leqq\frac{-2-\sqrt{2}}{4} \text{ 或 } y\geqq\frac{-2+\sqrt{2}}{4}.$$

$\therefore$ y 之極大值爲 $\frac{-2-\sqrt{2}}{4}$，極小值爲 $\frac{-2+\sqrt{2}}{4}$.

9 求內接於定圓之最大矩形；又求其周之最大者.

［解］　設 x 爲矩形一邊之長，d 爲圓之直徑之長，則 $\sqrt{d^2-x^2}$ 爲矩形另一邊之長．



設 y 表矩形之面積，則

$$y=x\sqrt{d^2-x^2}$$

平方，得　$y^2=x^2(d^2-x^2)$，$x^4-d^2x^2+y^2=0.$

$$\therefore\quad x^2=\frac{d^2\pm\sqrt{d^4-4y^2}}{2}=\frac{d^2\pm\sqrt{(d^2-2y)(d^2+2y)}}{2}.$$

因 x^2 須爲實數，　$\therefore\ (d^2-2y)(d^2+2y)\geqq 0.$

$$\therefore\ d^2\leqq -2y,\quad d^2\geqq 2y.$$

但 d^2 不能爲負數卽 d^2 不能 $\leqq -2y$，故 y 之極大值爲 $\frac{d^2}{2}$

當 $y=\frac{d^2}{2}$ 時 $x^2=\frac{d^2}{2}$，$\therefore\ x=\frac{d}{\sqrt{2}}$，

而
$$\sqrt{d^2-x^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{2}}=\sqrt{\frac{d^2}{2}}=\frac{d}{\sqrt{2}}.$$

故圓內接正方形面積爲最大．

又設 P 爲矩形之周長，則

$$P=2x+2\sqrt{d^2-x^2},$$

化簡，得
$$8x^2-4Px+(P^2-4d^2)=0,$$

$$\therefore\ x=\frac{P\pm\sqrt{8d^2-P^2}}{4}=\frac{P\pm\sqrt{(2\sqrt{2}d-P)(2\sqrt{2}d+P)}}{4}.$$

因 x 須爲實數，　$\therefore\ (2\sqrt{2}d-P)(2\sqrt{2}d+P)\geqq 0.$

$$-2\sqrt{2}d\leqq P\leqq 2\sqrt{2}d.$$

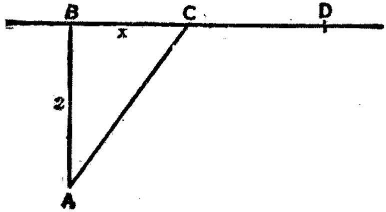
P 不能爲負數，　$\therefore\ P$ 之極大值爲 $2\sqrt{2}d.$

當 $P=2\sqrt{2}d$ 時 $x=\frac{P}{4}=\frac{\sqrt{2}d}{2}$，

而
$$\sqrt{d^2-x^2}=\sqrt{d^2-\frac{2d^2}{4}}=\sqrt{\frac{d^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}d}{2}.$$

故圓內接正方形周圍亦爲極大．

10. 一人在舟中，距海岸上最近點爲 2 哩，欲盡其力之所及，速至距最近點 6 哩之岸上。若此人每小時划船能 4 哩，步行能 5 哩，則此人應向何點划行？



［解］ 設此船在 A 點與岸邊最近距離 AB 爲 2 哩，其目的地 D 與 B 之距離爲 $BD=6$ 哩。

若此人在 C 點登岸，假定 $BC=x$ 哩。

則 $$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2.$$

即 $$2^2+x^2=\overline{AC}^2. \qquad \therefore\ AC=\sqrt{x^2+4}.$$

又設 y 爲此人從 A 過 C 至 D 所需之時間。

則 $$y-\frac{6-x}{5}=\frac{\sqrt{4+x^2}}{4}.$$

化簡 $$400y^2-960y+160xy+476-192x-9x^2=0.$$

應用公式

$$\therefore\ x=\frac{\dfrac{160y-192}{9}\pm\sqrt{\dfrac{(192-160y)^2}{81}+\dfrac{1600y^2-3840y+1904}{9}}}{2}$$

$$=\frac{160y-192}{18}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40000y^2-96000y+54000}{81}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

根式中 $$40000y^2-96000y+54000$$
$$=2000(20y^2-48y+27)$$
$$=2000(10y-9)(2y-3).$$

因 x 須爲實數，(1) 中根式須大於或等於 0 即 $(10y-9)(2y-3)\geqq 0$.

$$\therefore\ y\leqq\frac{9}{10}\ \text{或}\ y\geqq\frac{3}{2}.$$

故 y 之極小值爲 $\frac{3}{2}$.

當 $y=\dfrac{3}{2}$ 時， $x=\dfrac{160(\frac{3}{2})-192}{18}=\dfrac{240-192}{18}=\dfrac{8}{3}=2\dfrac{2}{3}.$

［答］ 此人在距最近點$2\frac{2}{3}$哩之處登岸，方使行程所需之時間爲最短.

11. 在地面上以每秒 48 呎之初速將物體鉛直上拋，此物體能達之高度若何，又何時可達此高度？參閱第 272 頁，21 題.

［解］ 在公式 $h=a+bt-16t^2$ 中 $a=0$, $b=48$.

$$\therefore\quad h=0+48t-16t^2$$

$$=16(3t-t^2)=16\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3t-t^2\right)$$

$$=36-16\left(\frac{9}{4}-3t+t^2\right)=36-16\left(\frac{3}{2}-t\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今欲求 h 之極大值，故在 (1) 中 $t=\frac{3}{2}$ 秒時 $h=36$ 爲極大。

∴ 該物體最高可升至 36 呎，而所需時間爲 $\frac{3}{2}$ 秒.

習 題 XLIV

第 316 頁

解下列各方程式：

1. ［解］ $4x^4-17x^2+18=0.$

分解因式 $$(4x^2-9)(x^2-2)=0.$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{3}{2}\text{ 及 }\pm\sqrt{2}.$$

2. ［解］ $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7.$

分解因式 $$(3x^{\frac{3}{4}}-7)(x^{\frac{3}{4}}+1)=0.$$

$$\therefore\quad x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{3}\text{ 或 }-1,$$ 但 $x^{\frac{3}{4}}$ 不能爲負數，故不能等於 -1.

$$\therefore\quad x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{3},$$

$$\therefore\quad x=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{7}{3}\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{3}}=\frac{7}{9}\sqrt[3]{63}.$$

3. ［解］ $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2.$

化簡 $$x^4-20x^2+36=0.$$

分解因式 $$(x^2-18)(x^2-2)=0.$$

$$x^2=18 \text{ 及 } 2.$$

$$\therefore \quad x=\pm 3\sqrt{2} \text{ 及 } \pm\sqrt{2}.$$

4 ［解］ $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)^2=0.$

分解因式 $$(2x-3)(x+1)(3x-2)^2(x+1)^2=0.$$

卽 $$(2x-3)(x+1)^3(3x-2)^2=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2},\ -1,\ -1,\ -1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}.$$

5. ［解］ $x^4+x^3+x^2+3x-6=0.$

分解因式 $$(x-1)(x+2)(x^2+3)=0.$$

$$\therefore \quad x=1,\ -2,\ \pm\sqrt{3}i.$$

6. ［解］ $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0.$

分解因式 $$(x+1)(x-1)(x^2-2x+2)=0.$$

$$\therefore \quad x=-1,\ 1,\ 1\pm i.$$

7. ［解］ $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0.$

原式可化爲 $$(3x^2-2x)^2-6(3x^2-2x)+5=0.$$

分解因式 $$(3x^2-2x-5)(3x^2-2x-1)=0.$$

$$(3x-5)(x+1)(3x+1)(x-1)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{3},\ -1,\ -\frac{1}{3},\ 1.$$

8. ［解］ $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0.$

原式可化爲 $$(x^4-12x^3+36x^2)-3x^2+18x-28=0.$$

分解因式 $$(x^2-6x)^2-3(x^2-6x)-28=0.$$

$$(x^2-6x-7)(x^2-6x+4)=0.$$

$$(x+1)(x-7)(x^2-6x+4)=0.$$

$$\therefore \quad x=-1,\ 7,\ 3\pm\sqrt{5}.$$

9. ［解］ $4x^4+4x^3-x^2-x-2=0.$

分解因式 $$(2x^2+x)^2-(2x^2+x)-2=0.$$

$$(2x^2+x+1)(2x^2+x-2)=0.$$

若 $$2x^2+x+1=0.$$

得 $$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{4}.$$

若 $$2x^2+x-2=0,$$

得 $$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{4}\text{ 及 }\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

10. ［解］ $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0.$

分解因式 $$x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)=0.$$

$$(x^2+1)(x^2-2x+1)=0.$$

$$(x^2+1)(x-1)^2=0.$$

$$\therefore\quad x=\pm i,\ 1,\ 1.$$

11. ［解］ $x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$

全式以 x^2 除之， $$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

集項 $$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

分解因式 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=0.$$

若 $$x+\frac{1}{x}=0.$$

$$x^2+1=0.$$

$$\therefore\quad x=\pm i.$$

若 $$x+\frac{1}{x}+1=0.$$

$$x^2+x+1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\pm i\ 及\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

12. [解] $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$

集項 $\quad (x^5-1)-11(x^4-x)+36(x^3-x^2)=0.$

分解因式 $\quad (x-1)[x^4-10x^3+26x^2-10x+1]=0.$

全式除以x^2,得 $\quad (x-1)\left[x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=0.$

即 $\quad (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+24\right]=0.$

分解因式 $\quad (x-1)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\left(x+\frac{1}{x}-6\right)=0.$

$$(x-1)(x^2-4x+1)(x^2-6x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=1,\ 2\pm\sqrt{3};\ 3\pm2\sqrt{2}.$$

13. [解] $x^5-243=0.$

設 $\quad x=3y \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

代入上式,全式除以 243, 得 $\quad y^5-1=0.$

分解因式 $\quad (y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0.$

全式除以 y^2, $\quad (y-1)\left(y^2+y+1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)=0.$

$$(y-1)\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)-1\right]=0.$$

$$\therefore\ y=1,\ 及\ \left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)-1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

應用公式解 (2) $\quad y+\frac{1}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

去分母 $\quad y^2-\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]y+1=0.$

應用公式 $\therefore\ y=\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right]\pm\sqrt{\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right]^2-1}$

$$=\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right]\pm\sqrt{\frac{[-1\pm\sqrt{5}]^2-16}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}[-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}].$$

以 y 之值代入 (1),

$$\therefore\quad x=3 \text{ 及 } \frac{3[-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}]}{4}.$$

14. [解] $(2x-1)^3=1.$

移項 $(2x-1)^3-1=0.$

分解因式 $[(2x-1)-1][(2x-1)^2+(2x-1)+1]=0.$

即 $\therefore\quad (2x-2[(4x^2-4x+1)+(2x-1)+1]=0,$

亦即 $2(x-1)(4x^2-2x+1)=0.$

$$\therefore\quad x=1,\text{ 或 } 4x^2-2x+1=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

應用公式解 (1), $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}.$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 及 } \frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}.$$

15 [解] $(1+x,^3=(1-x)^3.$

移項 $(1+x)^3-(1-x)^3=0.$

分解因式 $[1+x)-(1-x)][1+x)^2+(1+x)(1-x)+(1-x)^2]=0,$

即 $2x(1+2x+x^2+1-x^2+1-2x+x^2)=0,$

亦即 $2x(x^2+3)=0,\ x=0,\ x^2+3=0.$

$$\therefore\quad x=0,\text{ 及 } \pm\sqrt{3}i.$$

16. [解] $(x-2,^4-81=0.$

分解因式 $[(x-2)^2-9][(x-2)^2+9]=0.$

$$(x-5)(x+1)(x^2-4x+13)=0.$$

$$\therefore\quad x=5,\ -1,\ 2\pm3i.$$

17. [解] $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3.$

分解因式 $[(a+x)+(b+x)][(a+x)^2-(a+x)(b+x)+(b+x)^2]$

$$=(a+b+2x)^3.$$

即 $(a+b+2x)[(a+x)^2-(a+x)(b+x)+(b+x)^2]-(a+b+2x)^3=0.$

分解因式

$$(a+b+2x)[(a+x)^2-(a+x)(b+x)+(b+x)^2-(a+b+2x)^2]=0.$$

即 $$(a+b+2x)[(a+x)^2-(a+x)(b+x)+(b+x)^2 -\{(a+x)+(b+x)\}^2]=0.$$

亦即 $$(a+b+2x)[(a+x)^2-(a+x)(b+x)+(b+x)^2 -(a+x)^2-2(a+x)(b+x)-(b+x)^2]=0.$$

$$\therefore\quad -3(a+b+2x)(a+x)(b+x)=0.$$

$$\therefore\quad x=a,\ b,\ \frac{a+b}{2}.$$

18. [解] $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x).$

分解因式 $[(a-x)^2+(b-x)^2][(a-x)^2-(b-x)^2]=(a-b)(a+b-2x).$

即 $$(a^2-2ax+x^2+b^2-2bx+x^2)(a^2-2ax+x^2-b^2+2bx-x^2) =(a-b)(a+b-2x),$$

亦即 $$[2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2](a^2-b^2-2ax+2bx) =(a-b)(a+b-2x).$$

$\therefore$ $[2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2](a+b-2x)(a-b)=(a-b)(a+b-2x).$

移項，分解因式 $(a-b)(a+b-2x)[2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-1]=0.$

$$\therefore\quad a+b-2x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1)， $$x=\frac{a+b}{2},$$

應用公式解 (2)，

$$x=\frac{(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-1)}}{2}=\frac{a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}}{2}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{a+b}{2} \text{ 及 } \frac{a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}}{2}.$$

19. [解] $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0.$

全式以 $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}$ 乘之，

$$\left[\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}\right]^2-2\left[\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}\right]-3=0.$$

分解因式 $\quad \left[\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}+1\right]\left[\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\right]=0.$

若 $\quad \dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}+1=0.$

去分母，化簡 $\quad x(5x+9)=0.$

$$\therefore \quad x=0 \text{ 及 } -\frac{9}{5}.$$

若 $\quad \dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3=0.$

去分母，化簡 $\quad 11x^2+15x-4=0.$

$$\therefore \quad x=\frac{-15\pm\sqrt{225+176}}{22}=\frac{-15\pm\sqrt{401}}{22}.$$

$$\therefore \quad x=0,\ -\frac{9}{5},\ \frac{-15\pm\sqrt{401}}{22}, \text{ 均爲所求根.}$$

20. [解] $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}.$

$$(x^2-a^2)-\frac{(x^2-a^2)}{a^2x^2}=0.$$

$$(x^2-a^2)\left\{1-\frac{1}{a^2x^2}\right\}=0.$$

$$\therefore \quad x=\pm a,\ \pm\frac{1}{a}.$$

21. [解] $3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0.$

原式可寫爲 $(3x^2-2x+3)-5\sqrt{3x^2-2x+3}+6=0.$

分解因式 $[\sqrt{3x^2-2x+3}-2][\sqrt{3x^2-2x+3}-3]=0.$

若 $$\sqrt{3x^2-2x+3}=2.$$

兩邊平方，化簡 $$3x^2-2x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{3},\ 1.$$

又 $$\sqrt{3x^2-2x+3}=3.$$

兩邊平方，化簡 $$3x^2-2x-6=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+18}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}.$$

$$\therefore\quad x=1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1\pm\sqrt{19}}{3}，均爲所求根。$$

22. [解] $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}.$

原式改寫爲 $$2(2x^2-x)-\sqrt{2x^2-x}-1=0.$$

分解因式 $$(2\sqrt{2x^2-x}+1)(\sqrt{2x^2-x}-1)=0.$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{2x^2-x}=-1,\ \sqrt{2x^2-x}=1.$$

但 $2\sqrt{2x^2-x}$ 不能爲負數，故不能等於 -1.

若 $$\sqrt{2x^2-x}=1,\ 則\ 2x^2-x=1.$$

移項 $$2x^2-x-1=0,$$

分解因式 $$\therefore\quad (2x+1)(x-1)=0.$$

$$\therefore\quad x=1,\ -\frac{1}{2}，均爲所求根。$$

23. [解] $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}.$

兩邊平方 $$3-x+2-x+2\sqrt{(3-x)(2-x)}=5-2x.$$

化簡 $$2\sqrt{(3-x)(2-x)}=0.$$

$$\therefore\quad x=3,\ 2，均爲所求根。$$

24. [解] $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=0.$

移項 $$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}.$$

平方，化簡 $$\sqrt{(2x+3)(3x-5)}=\sqrt{(x+1)(4x-3)}.$$

再平方， $$6x^2-x-15=4x^2+x-3.$$

$$x^2-x-6=0.$$

分解因式 $$(x-3)(x+2)=0.$$

$\therefore\quad x=3,\ -2,$ 均爲所求根。

25. ［解］ $$\frac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\frac{6}{x}}.$$

化簡 $$\frac{1}{x-1}=\sqrt{\frac{6}{x}}.$$

$$6x^2-13x+6=0.$$

分解因式 $$(2x-3)(3x-2)=0.$$

$\therefore\quad x=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ 不能適合於原方程式，故非原方程式之根，即所求根爲 $\frac{3}{2}$.

26. ［解］ $$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$$

移項 $$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x}.$$

自乘 $$x-\sqrt{1-x}=1+x-2\sqrt{x}.$$

再自乘，化簡 $$4\sqrt{x}=5x.$$

$$16x=25x^2.$$

$$x(25x-16)=0.$$

$\therefore\quad x=0,\ \frac{16}{25}.$

$x=0$，不適合於原方程式，故非原方程式之根，即所求根爲 $\frac{16}{25}$.

27. ［解］ $$\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0.$$

移項 $$\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+3x}.$$

自乘 $$x+3=x(x+3).$$

$\therefore \quad x=1,\ -3$, 均爲所求根.

28. [解] $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0.$

化爲分數指數 $x^{\frac{3}{4}}-5x^{\frac{2}{4}}+6x^{\frac{1}{4}}=0.$

分解因式 $x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{2}{4}}-5x^{\frac{1}{4}}+6)=0.$

$$\therefore \quad x=0.$$

又 $x^{\frac{2}{4}}-5x^{\frac{1}{4}}+6=0.$

分解因式 $(x^{\frac{1}{4}}-3)(x^{\frac{1}{4}}-2)=0.$

$$\therefore \quad x^{\frac{1}{4}}=3,\ 2.$$

即 $x=81,\ 16$, 均爲所求根.

29. [解] $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0.$

全式乘以 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}$ 得 $\dfrac{2x-5}{x-2}+2\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3=0.$

分解因式 $\left(\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}+3\right)\left(\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-1\right)=0.$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}=-3 \text{ 及 } \sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}=1.$$

但 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}$ 不能爲負數,故不等於 $-3.$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}=1.$$

自乘,去分母,化簡 $x=3$, 爲所求根.

30. [解] $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3.$

分子,分母各以 $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$ 乘之,

$$\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})^2}{(x-1)-(x+1)}=x-3.$$

化簡 $$-x+\sqrt{x^2-1}=x-3.$$

移項 $$\sqrt{x^2-1}=2x-3.$$

兩邊平方 $$x^2-1=4x^2-12x+9.$$

整理 $$3x^2-12x+10=0.$$

應用公式 $$\therefore\quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-30}}{3}=\frac{6\pm\sqrt{6}}{3},$$ 爲所求根。

31. [解] $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1.$

分解因式 $\sqrt{(5x-1)(x-1)}-\sqrt{(5x-1)(x+2)}=(\sqrt{5x-1})^2,$

即 $\sqrt{(5x-1)(x-1)}-\sqrt{(5x-1)(x+2)}-\sqrt{(5x-1)^2}=0.$

$$\therefore\quad \sqrt{5x-1}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-1})=0.$$

$$\therefore\ \sqrt{5x-1}=0,\quad \therefore\ x=\frac{1}{5}.$$

及 $$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-1}=0.$$

化簡 $$5x^2-16x+12=0.$$

分解因式 $$(5x-6)(x-2)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{6}{5},\quad 2.$$

但此二值非原方程式之二根，故原方程式之根爲 $\frac{1}{5}$.

32. [解] $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0.$

分子，分母各以 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}$ 乘之，

$$\frac{2x-1+3x+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x}}{2x-1-3x}+3=0.$$

去分母，化簡 $5x-1+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x}-3x-3=0.$

$$\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x}=2-x.$$

兩邊平方 $$5x^2+x-4=0.$$

分解因式 $$(5x-4)(x+1)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{4}{5}, \ -1.$$

但 -1 非原方程式之根，故原方程式之根爲 $\frac{4}{5}$.

33. [解] $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$.

移項，兩邊立方 $2-x=(2-\sqrt[3]{x})^3=8-12\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x^2}-x$.

化爲分數指數 $\quad 6x^{\frac{2}{3}}-12x^{\frac{1}{3}}+6=0$.

分解因式 $\quad 6(x^{\frac{1}{3}}-1)^2=0$.

$$\therefore \quad x^{\frac{1}{3}}=1.$$

即 $\quad x=1$, 爲所求根。

34. [解] $(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}+(x+c)^{\frac{1}{3}}=0$.

移項 $\quad (x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}=-(x+c)^{\frac{1}{3}}$ ……………………(1)

兩邊立方 $\quad x+a+3(x+a)^{\frac{2}{3}}(x+b)^{\frac{1}{3}}+3(x+a)^{\frac{1}{3}}(x+b)^{\frac{2}{3}}+x+b$

$=-(x+c)$.

整理 $\quad 3x+a+b+c=-3(x+a)^{\frac{1}{3}}(x+b)^{\frac{1}{3}}\{(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}\}$.

以 (1) 代入 $\quad 3x+(a+b+c)=-3(x+a)^{\frac{1}{3}}(x+b)^{\frac{1}{3}}\{-(x+c)^{\frac{1}{3}}\}$.

兩邊立方 $\quad 27x^3+27x^2(a+b+c)+9x(a+b+c)^2+(a+b+c)^3$

$=27(x+a)(x+b)(x+c)$.

整理 $\quad 27x^3+27x^2(a+b+c)+9x(a+b+c)^2+(a+b+c)^3$

$=27x^3+27x^2(a+b+c)+27x(ab+ca+bc)+27abc$.

$$\{9(a+b+c)^2-27(ab+ca+bc)\}x=27abc-(a+b+c)^3.$$

$$\{9(a^2+b^2+c^2)-9(ab+bc+ca)\}x=27abc-(a+b+c)^3.$$

$$\therefore \quad x=\frac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}, \text{ 爲所求根。}$$

35 [解] $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3$.

原式可化爲 $\quad (x^2-3x+2)(x^2-3x)=18\cdot20$.

即 $\quad (x^2-3x)^2+2(x^2-3x)-18\cdot20=0$.

分解因式 $$(x^2-3x-18)(x^2-3x+20)=0.$$

$$(x-6)(x+3)(x^2-3x+20)=0.$$

$$\therefore\quad x=6,\ -3.$$

及 $$x^2-3x+20=0.$$

應用公式 $$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-80}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{71}\,i}{2}.$$

36. ［解］ $(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}.$

移項 $$(x+a)^2-a^2=-4\sqrt{x}(x+2a).$$

化簡 $$x(x+2a)=-4\sqrt{x}(x+2a).$$

移項，分解因式 $$\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)(x+2a)=0.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x}=0,\ \sqrt{x}=-4,\ x=-2a.$$

但 $\sqrt{x}$ 不能爲負數， $\therefore\ x=0,\ -2a,$ 爲所求根。

37. ［解］ $\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2-1}}=6.$

整理 $$\sqrt[3]{\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=6.$$

改爲分數指數 $$\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{1}{3}}-6=0.$$

分解因式 $$\left\{\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{1}{3}}+3\right\}\left\{\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{1}{3}}-2\right\}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2+1}{x^2-1}=(-3)^3=-27.$$

去分母 $$x^2+1=-27x^2+27.$$

化簡 $$28x^2=26.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{26}{28}}=\pm\sqrt{\frac{13}{14}}=\pm\frac{1}{14}\sqrt{182}.$$

又 $$\frac{x^2+1}{x^2-1}=2^3=8.$$

去分母 $$x^2+1=8x^2-8.$$

化簡 $$7x^2=9.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{9}{7}}=\pm\frac{1}{7}\sqrt{63}=\pm\frac{3}{7}\sqrt{7}.$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{14}\sqrt{182},\ \pm\frac{3}{7},\text{均爲所求根。}$$

習 題 XLV　　第 320 頁

解下列各方程組：

1. ［解］ $\begin{cases}7x^2-6xy=8 \cdots\cdots\cdots(1)\\ 2x-3y=5 \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (2) 式, $$y=\frac{2x-5}{3}\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (1), 得 $$3x^2+10x-8=0.$$

分解因式 $$(3x-2)(x+4)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{3}\text{ 及 }-4,$$

以 x 之值代入 (3), 得 $$y=-\frac{11}{9}\text{ 及 }-\frac{13}{3}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{2}{3}\\ y&=-\frac{11}{9}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&-4\\ &-\frac{13}{3}\end{aligned}\right\}$$

2. ［解］ $\begin{cases}xy=1 \cdots\cdots\cdots(1)\\ 3x-5y=2 \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1), $$x=\frac{1}{y}\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入 (2), 得 $$5y^2+2y-3=0.$$

分解因式 $$(5y-3)(y+1)=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{3}{5}\text{ 及 }-1,$$

以 y 之值代入 (3) 得 $$x=\frac{5}{3}\text{ 及 }-1.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{5}{3}\\ y=\frac{3}{5}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-1\\ -1\end{array}\right\}$$

3. [解] $$\begin{cases}x^2+x=4y^2 \cdots\cdots(1)\\ 3x+6y=1 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2), $$y=\frac{1-3x}{6}\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (1), 得 $$x^2+x=4\left[\frac{1-3x}{6}\right]^2.$$

即 $$15x=1.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{15},$$

以 x 之值代入 (3) 得 $$y=\frac{2}{15},$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{15}\\ y=\frac{2}{15}\end{array}\right\}$$

但原方程式應有 $1\times2=2$ 組解答，今 (1), (2) 中高次項 x^2-4y^2 及 $3x+6y$ 有一公因式 $x+2y$, 故其餘一組解答為無窮大.

4. [解] $$\begin{cases}3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0 \cdots\cdots(1)\\ 3x-y-8=0 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2), $$y=3x-8\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (1), 得 $$15x^2-44x-3=0.$$

分解因式 $$(15x+1)(x-3)=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{15}\text{ 及 }3,$$

以 x 之值代入 (3) 得 $$y=-\frac{41}{5}\text{ 及 }1.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{15} \\ y=-\dfrac{41}{5} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}\right\}.$$

5. [解] $\begin{cases} x^2+5y^2-8x-7y=0 \cdots\cdots(1) \\ x+3y=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2), $x=-3y$ ……(3)

以 (3) 代入 (1), 得 $14y^2+17y=0.$

分解因式 $y(14y+17)=0.$

$$\therefore\quad y=0 \text{ 及 } -\frac{17}{14},$$

以 y 之值代入 (3) 得 $x=0$ 及 $\frac{51}{14}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{51}{14} \\ -\dfrac{17}{14} \end{array}\right\}$$

6. [解] $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0 \cdots\cdots(1) \\ 7x-6y-4=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2), $y=\dfrac{7x-4}{6}$ ……(3)

以 (3) 代入 (1), 得 $5x^2-17x+12=0.$

分解因式 $(x-1)(5x-12)=0.$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 及 } \frac{12}{5},$$

以 x 之值代入 (3) 得 $y=\frac{1}{2}$ 及 $\frac{32}{15}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{32}{15} \end{array}\right\}$$

7. [解] $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2-1=0 \cdots\cdots(1) \\ x+y=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) 與 (2) 最高次項 $x^2+3xy+2y^2$ 及 $x+y$ 有一次公因式 $x+y$，故有一組無窮大解答。又次一高次項亦有 $x+y$ 之因式，故又有一組無窮大解答。

原二方程式共有 $1\times2=2$ 組解答，即原二方程式有二組公解均為無窮大。

8. [解] $\begin{cases} 2x+3y=37 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{14}{45} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2), $45y+45x-14xy=0.$

$$\therefore\quad y=\frac{45x}{14x-45} \cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (1), 得 $28x^2-473x+1665=0.$

應用公式 $\therefore\quad x=\dfrac{473\pm\sqrt{223729-186480}}{56}$

$$=\frac{473\pm193}{56},$$

$$=\frac{333}{28} \text{ 及 } 5.$$

以 x 之值代入 (3) 得 $y=\dfrac{185}{42}$ 及 9.

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{333}{28} \\ y=\dfrac{185}{42} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5 \\ 9 \end{array}\right\}$$

9. [解] $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1)，$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}-1\right)\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (2)，得 $$\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=12.$$

去分母，整理 $$36y^2+7y-4=0.$$

分解因式 $$(4y-1)(9y+4)=0.$$

$$\therefore\quad y=-\frac{4}{9}\text{ 及 }\frac{1}{4},$$

以 y 之值代入 (3) 得 $$x=-\frac{12}{13}\text{ 及 }1.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}x&=-\frac{12}{13}\\ y&=-\frac{4}{9}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&1\\ &\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}$$

10. [解] $$\begin{cases}x^2+xy+2=0\cdots\cdots(1)\\ (3x+y)(2x+y-1)=0\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) $$3x+y=0\cdots\cdots(3)$$

及 $$2x+y-1=0\cdots\cdots(4)$$

解 (1) 及 (3)，以 $y=-3x$ 代入 (1) 得 $2x^2=2$，

即 $$x=\pm 1,$$

以 x 之值代入 ( ) 得 $$y=\mp 3.$$

解 (1) 及 (4)，以 $y=1-2x$ 代入 (1) 得

$$x^2-x-2=0,$$

即 $$(x+1)(x-2)=0,\qquad \therefore\quad x=-1,\ 2.$$

以 x 之值代入 (4) 得 $$y=3,\ -3.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}x&=1\\ y&=-3\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}-1\\ 3\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}-1\\ 3\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}2\\ -3\end{aligned}\right\}.$$

11. [解] $$\begin{cases}x^2+y^2-8=0\cdots\cdots(1)\\ (x+1)^2=(y-1)^2\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式，　$(x-y+2)(x+y)=0.$

(2) 與下二式同値　$x-y+2=0 \cdots\cdots(3)$

$x+y=0 \cdots\cdots(4)$

解 (1), (3)；得　$x=-1\pm\sqrt{3},\quad y=1\pm\sqrt{3}.$

解 (1), (4)；得　$x=\pm 2,\quad y=\mp 2.$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3} \\ y=1+\sqrt{3} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2 \\ -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2 \\ 2 \end{array}\right\}$$

12. ［解］ $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0 \cdots\cdots(1) \\ (x-2y)(x+y-3)=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) 可改寫爲　$(x+y)(x-2y)+y=0 \cdots\cdots(3)$

(2) 可改寫爲　$(x+y)(x-2y)-3(x-2y)=0 \cdots\cdots(4)$

(3) 與 (4) 最高次項有二個一次因式 $x+y$ 及 $x-2y$，故原二方程式有兩組解答爲無窮大。

今知 (2) 與下二式同値　$x-2y=0 \cdots\cdots(5)$

$x+y-3=0 \cdots\cdots(6)$

以 (1) 與 (5) 聯立得　$x=0,\quad y=0.$

以 (1) 與 (6) 聯立得　$x=\dfrac{15}{8},\quad y=\dfrac{9}{8}.$

故原二方程式有二組公解 $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \frac{15}{8} \\ \frac{9}{8} \end{array}\right\}$ 其餘二組爲無窮大。

13. 求定 m，俾方程式 $y^2+4x+4=0$, $y=mx$ 之二解能相等。

［解］ $\begin{cases} y^2+4x+4=0 \cdots\cdots(1) \\ y=mx \cdots\cdots(2) \end{cases}$

將 (2) 式代入 (1)，得

$$m^2x^2+4x+4=0.$$

若二解答相等，則判別式

$$b^2-4ac=0.$$

即 $$16-16m^2=0,$$

$$m^2=1.$$

$$\therefore\quad m=\pm 1.$$

14. 求定 m 及 c，俾方程式 $x^2+xy-2y^2+x=0$, $y=mx+c$ 之二解皆爲無窮大.

［解］ $$\begin{cases} x^2+xy-2y^2+x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ y=mx+c \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

將 (2) 代入 (1)，得

$$(1+m-2m^2)x^2+(c-4mc+1)x-2c^2=0.$$

若二解皆爲無窮大，則

$$1+m-2m^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$c-4mc+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

從 (3)， $$(1+2m)(1-m)=0.$$

$$\therefore\quad m=-\frac{1}{2} \text{ 及 } 1.$$

代入 (4)，得 $$c=-\frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}\\ c=-\frac{1}{3}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1\\ \frac{1}{3}\end{array}\right\}$$

15. 用 §650，例二之法，證 $2x-y+4$ 爲 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因式.

［解］ $$\begin{cases} 2x-y+4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ 2x^2+xy-y^2+10x+y+12=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

從 (1)， $$y=2x+4.$$

代入 (2)，得 $$4x^2-4x^2+16x-16x+16-16=0.$$

但此方程式爲一恆等式，故 x 之任何値皆能適合，即 $2x-y+4$ 爲 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因式.

16. 試證方程組 $xy=1$, $xy+x+y=0$ 之有窮解之數，不能多於二，

又方程組 $x^2y+xy=1$, $x^2y+y^2=2$ 之有窮解之數，不能多於四。

(1) 在 $xy=1$ 及 $xy+x+y=0$ 二組方程式中，最高次項有一次因式 x 及 y. 故至少有二組解答爲無窮大，但原二式共有 $2\times 2=4$ 組公解，故有窮解之數至多有二組，即不能多於二。

(2) 在 $x^2y+xy=1$ 及 $x^2y+y^2=2$ 二組方程式中，最高次項有二個 x 之一次因式，故有兩組無窮解，又最高次項，次一高次項及次二高次項有一個 y 之一次因式，故又有三組無窮解。原二方程式均爲三次式共有 $3\times 3=9$ 組公解，今已證明至少有五組無窮解，故原二式至多有四組有窮解，即有窮解之數不能多於四。

習　題　XLVI　　　　第 324 頁

解下列各方程組：

1. [解]
$$\begin{cases} x^2+3y^2=31 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 7x^2-2y^2=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)×2+(2)×3,　　$23x^2=92.$

$$x^2=4, \qquad \therefore \quad x=\pm 2.$$

代入 (1) 式，得　$y^2=9, \qquad \therefore \quad y=\pm 3.$

$$\therefore \quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}\right\}$$

2. [解]
$$\begin{cases} \dfrac{36}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4}{x^2}=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)−(2),　　$\dfrac{40}{x^2}=10, \quad x^2=4.$

$$\therefore \quad x=\pm 2.$$

將 x 之各值代入 (2) 式：

當 $x=2$ 時，　　$y=\pm\dfrac{1}{3}.$

當 $x=-2$ 時，　　$y=\pm\frac{1}{3}$.

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} -2 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} -2 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$$

3. [解]
$$\begin{cases} y^2+xy+6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2-y-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式，　　$(y+1)(y-2)=0.$

$$\therefore\quad y=-1 \text{ 及 } 2.$$

以 y 之值代入 (1) 式，得　$x=7$　及 -5.

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=7 \\ y=-1 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} -5 \\ 2 \end{matrix}\right\}$$

(1), (2) 兩式共有 4 組公解，最高次項及次一高次項有一次公因式 y，故有二組無窮解。

4. [解]
$$\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y-39=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x^2-17xy+10y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 分解因式　　$(3x-2y)(x-5y)=0.$

$$\therefore\quad x=\tfrac{2}{3}y \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x=5y \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 (3) 代入 (1)，得　　$y^2=27$,

$$\therefore\quad y=\pm 3\sqrt{3}.$$

以 y 之值代入 (3) 得　　$x=\pm 2\sqrt{3}$.

以 (4) 代入 (1) 得　　$2y^2-y-3=0$.

分解因式　　$(2y-3)(y+1)=0$,

$$\therefore\quad y=\frac{3}{2} \text{ 及 } -1.$$

以 y 之值代入 (4) 得

$$x=\frac{15}{2} \text{ 及 } -5.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=2\sqrt{3}\\ y=3\sqrt{3}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-2\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{15}{2}\\ \frac{3}{2}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-5\\ -1\end{array}\right\}$$

5. [解] $\begin{cases} y^2-x^2-5=0 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

將 (2) 分解因式　$(2x+y+3)(2x+y-1)=0.$

$\therefore\quad 2x+y+3=0$ 即 $y=-(2x+3)$ $\cdots\cdots\cdots(3)$

及　$2x+y-1=0$ 即 $y=1-2x$ $\cdots\cdots\cdots(4)$

將 (3) 代入 (1), 得　$3x^2+12x+4=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-12}}{3}=\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{3}.$$

以 x 之值代入 (3), 得　$y=\dfrac{3\mp4\sqrt{6}}{3}.$

將 (4) 代入 (1), 得　$3x^2-4x-4=0.$

分解因式　$(3x+2)(x-2)=0.$

$$\therefore\quad x=-\frac{2}{3} \text{ 及 } 2.$$

以 x 之值代入 (4), 得　$y=\dfrac{7}{3}$ 及 $-3.$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=2\\ y=-3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-\frac{2}{3}\\ \frac{7}{3}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{-6+2\sqrt{6}}{3}\\ \frac{3-4\sqrt{6}}{3}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{-6-2\sqrt{6}}{3}\\ \frac{3+4\sqrt{6}}{3}\end{array}\right\}.$$

6. [解] $\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)×3−(2) 得　$x+y=1,$

即　$y=1-x$ $\cdots\cdots\cdots(3)$

以 (3) 代入 (1) 得　$4x^2-4=0,\quad \therefore x=\pm1.$

以 x 之值代入 (3) 得　$y=0$ 及 $2.$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -1 \\ 2 \end{array}\right\},$$

原方程組最高次項有兩個一次因式 x 及 $x+5y$ 故有二組無窮解.

7. ［解］ $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y=98 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5xy+y^2-3y=-21 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)+(2)×3 得 $x^2+2x-35=0.$

分解因式 $(x+7)(x-5)=0,$

$$\therefore\quad x=-7 \text{ 及 } 5.$$

以 $x=-7$ 代入 (2), 得 $y^2-38y+21=0.$

$$\therefore\quad y=19\pm\sqrt{361-21}=19\pm2\sqrt{85}.$$

以 $x=5$ 代入 (2), 得 $y^2+22y+21=0.$

分解因式, $(y+1)(y+21)=0.$

$$\therefore\quad y=-1,\ -21.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=19+2\sqrt{85} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} -7 \\ 19-2\sqrt{85} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5 \\ -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5 \\ -21 \end{array}\right\}$$

8. ［解］ $\begin{cases} 2x^2+3xy-4y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 15x^2+24xy-31y^2=200 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)×8−(2), $x^2-y^2=0$

即 $(x+y)(x-y)=0.$

$\therefore\quad x+y=0$ 即 $x=-y \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

及 $x-y=0$ 即 $x=y \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (1), 得 $y^2=-5,$

$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{5}i.$$

以 y 之值代入 (3) 得 $x=\mp\sqrt{5}i.$

以 (4) 代入 (1), 得 $y^2=25,$

$$\therefore\quad y=\pm5.$$

以 y 之值代入 (4) 得 $x=\pm5.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=5\\y=5\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-5\\-5\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\sqrt{5}i\\-\sqrt{5}i\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\sqrt{5}i\\\sqrt{5}i\end{matrix}\right\}$$

9. ［解］ $\begin{cases}x(x+3y)=18 \cdots\cdots(1)\\ x^2-5y^2=4 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)×2－(2)×9 得 $45y^2+6xy-7x^2=0.$

分解因式 $(15y+7x)(3y-x)=0.$

$\therefore\quad 15y+7x=0$ 卽 $y=-\frac{7}{15}x \cdots\cdots(3)$

及 $3y-x=0$ 卽 $y=\frac{1}{3}x \cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (2) 得 $x^2=-45,\ \therefore\ x=\pm3\sqrt{5}i.$

以 x 之值代入 (3), 得 $y=\mp\frac{7\sqrt{5}}{5}i.$

以 (4) 代入 (2) 得 $x^2=9,\quad \therefore\ x=\pm3.$

以 x 之值代入 (4), 得 $y=\pm1.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}3\sqrt{5}i\\-\frac{7\sqrt{5}i}{5}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-3\sqrt{5}i\\\frac{7\sqrt{5}i}{5}\end{matrix}\right\}$$

10. ［解］ $\begin{cases}x^2-3xy+3y^2=x^2y^2 \cdots\cdots(1)\\ 7x^2-10xy+4y^2=12x^2y^2 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)×12－(2), 得 $5x^2-26xy+32y^2=0.$

分解因式 $(5x-16y)(x-2y)=0.$

$\therefore\quad 5x-16y=0$ 卽 $x=\frac{16}{5}y \cdots\cdots(3)$

$x-2y=0$ 卽 $x=2y \cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (1), 得 $y^2(256y^2-91)=0,$

$\therefore\quad y=0,\ 0,\ \pm\frac{1}{16}\sqrt{91}.$

以 y 之值代入 (3) 得 $x=0,\ 0,\ \pm\frac{1}{5}\sqrt{91}.$

以 (4) 代入 (1) 得 $y^2(4y^2-1)=0,$

$\therefore\quad y=0,\ 0,\ \pm\frac{1}{2}.$

以 y 之值代入 (4) 得 $x=0,\ 0,\ \pm 1.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-1\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{5}\sqrt{91}\\ \frac{1}{16}\sqrt{91}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\frac{1}{5}\sqrt{91}\\ -\frac{1}{16}\sqrt{91}\end{matrix}\right\}\text{ 共八組有窮解.}$$

原方程組共有 $4\times4=16$ 組公解，其中最高次項及次一高次項有四個一次公因式 x, x, y 及 y 故尚有 $2\times4=8$ 組無窮解.

11. [解] $\begin{cases}x^2+xy+y^2=38 \cdots\cdots(1)\\ x^2-xy+y^2=14 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)+(2), $x^2+y^2=26 \cdots\cdots(3)$

(1)−(2), $2xy=24 \cdots\cdots(4)$

(3)+(4), $(x+y)^2=50.$

開方 $x+y=\pm5\sqrt{2} \cdots\cdots(5)$

(3)−(4), $(x-y)^2=2.$

開方 $x-y=\pm\sqrt{2} \cdots\cdots(6)$

(5)+(6), $x=\pm3\sqrt{2},\ \pm2\sqrt{2}.$

(5)−(6) $y=\pm2\sqrt{2},\ \pm3\sqrt{2}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=3\sqrt{2}\\ y=2\sqrt{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-3\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2\sqrt{2}\\ 3\sqrt{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-2\sqrt{2}\\ -3\sqrt{2}\end{matrix}\right\}$$

12. [解] $\begin{cases}x^2-xy+y^2=21(x-y) \cdots\cdots(1)\\ xy=20 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)−(2), $x^2-2xy+y^2=21(x-y)-20.$

移項 $(x-y)^2-21(x-y)+20=0.$

分解因式 $(x-y-1)(x-y-20)=0.$

$\therefore\quad x=1+y \cdots\cdots(3)$

及 $x=20+y \cdots\cdots(4)$

將 (3) 式代入 (2) 式，得

$$y^2+y-20=0.$$

分解因式 $$(y-4)(y+5)=0.$$

$$\therefore\quad y=4 \text{ 及 } -5,$$

以 y 之值代入 (3), $$x=5 \text{ 及 } -4.$$

將 (4) 式代入 (2) 式，得

$$y^2+20y-20=0.$$

應用公式 $$y=-10\pm\sqrt{100+20}=-10\pm2\sqrt{30},$$

以 y 之值代入 (4) $$x=10\pm2\sqrt{30}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=5\\ y=4\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-4\\ -5\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}10+2\sqrt{30}\\ -10+2\sqrt{30}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}10-2\sqrt{30}\\ -10-2\sqrt{30}\end{matrix}\right\}$$

13. [解] $$\begin{cases}x^2+y-8=0 & \cdots\cdots(1)\\ y^2+15x-46=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式， $$y=8-x^2\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 ( ) 式，得 $x^4-16x^2+15x+18=0.$

分解因式 $$(x-2)(x-3)(x^2+5x+3)=0.$$

$$\therefore\quad x=2,\ 3,\ \frac{-5\pm\sqrt{13}}{2};$$

以 x 之值代入 (3) $y=4,\ -1,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=2\\ y=4\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}3\\ -1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}\\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}\\ \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\end{matrix}\right\}$$

習 題 XLVII 第 325 頁

解下列各方程組：

1. [解] $$\begin{cases}x^3-y^3=63 & \cdots\cdots(1)\\ x-y=3 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1) ÷ (2), $x^2+xy+y^2=21$ ……(3)

(2) 平方, $x^2-2xy+y^2=9$ ……(4)

(3) − (4), $3xy=12.$

即 $xy=4$ ……(5)

(3) + (5), $x^2+2xy+y^2=25.$

開平方 $x+y=\pm 5$ ……(6)

(2) + (6), $x=4,\ -1.$

以 x 之値代入 (2) 式, 得 $y=1,\ -4.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=4\\y=1\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $1\times 3=3$ 組公解,其中最高次項有一次公因式 $x-y$, 故尙有一組無窮解.

2. ［解］ $\begin{cases}x+y=98 & \cdots\cdots(1)\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1) ÷ (2), $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=49$ ……(3)

從 (2) 式, $\sqrt[3]{x}=2-\sqrt[3]{y}.$

(2) 平方, $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}=4$ ……(4)

(4) − (3), $3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}=-45.$

即 $\sqrt[3]{xy}=-15$ ……(5)

(3) − (5), $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2=64.$

即 $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\pm 8$ ……(6)

(2) + (6), $2\sqrt[3]{x}=10$ 或 $-6.$

$\therefore\quad x=125$ 或 $-27.$

以 x 之値代入 (1) 式,得 $y=-27$ 或 $125.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=125\\y=-27\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}-27\\125\end{matrix}\right\}$$

原方程組中設以 $\sqrt[3]{x}=X$, $\sqrt[3]{y}=Y$, 則 (1), (2) 兩式可改寫爲

$X^3+Y^3=98\cdots\cdots(A)$ 及 $X+Y=2\cdots\cdots(B)$. 在 (A), (B) 兩式中最高次項有一次公因式 $X+Y$, 故有一組無窮解, 卽原方程組尙有一組無窮解.

3. [解] $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931 \cdots\cdots(1) \\ x^2+xy+y^2=49 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2), $x^2-xy+y^2=19 \cdots\cdots(3)$

(2)−(3), $2xy=30.$

卽 $xy=15 \cdots\cdots(4)$

(2)+(4), $(x+y)^2=64.$

開平方 $x+y=\pm 8 \cdots\cdots(5)$

(3)−(4), $(x-y)^2=4.$

開平方 $x-y=\pm 2 \cdots\cdots(6)$

$\frac{(5)+(6)}{2}$, $x=5,\ -5,\ 3,\ -3.$

以 x 之值代入 (4) 式,得 $y=3,\ -3,\ 5,\ -5.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=5 \\ y=3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -5 \\ -3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3 \\ -5 \end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $4\times 2=8$ 組公解,其中最高次項及次一高次項有兩個一次公因式,其乘積爲 x^2+xy+y^2, 故尙有 $2\times 2=4$ 組無窮解.

4. [解] $\begin{cases} (x+y)(x^2-2y^2)=-70 \cdots\cdots(1) \\ (x-y)(x^2-2y^2)=14 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2), $x+y=-5(x-y).$

化簡 $x=\frac{2}{3}y \cdots\cdots(3)$

以 (3) 代入 (2) 式,得 $\left[\frac{2}{3}y-y\right]\left[\frac{4}{9}y^2-2y^2\right]=14.$

卽 $y^3-27=0.$

分解因式 $(y-3)(y^2+3y+9)=0.$

$$\therefore\quad y=3,\ 3(-1\pm\sqrt{3}i)/2;$$

以 y 之值代入 (3) $\qquad x=2,\quad -1\pm\sqrt{3}i.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=2\\ y=3\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}-1+\sqrt{3}i\\ \dfrac{3(-1+\sqrt{3}i)}{2}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}-1-\sqrt{3}i\\ \dfrac{3(-1-\sqrt{3}i)}{2}\end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $3\times3=9$ 組公解，其中最高次項，次一高次項及次二高次項有兩個一次公因式，其乘積為 x^2-2y^2 故尚有 $3\times2=6$ 組無窮解。

5. [**解**] $\begin{cases}(x+y)^2(x-y)=3xy+6y \cdots\cdots(1)\\ x^2-y^2=x+2 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1) 可改寫爲 $\qquad (x+y)^2(x-y)=3y(x+2) \cdots\cdots(3)$

(2) 可改寫爲 $\qquad (x+y)(x-y)=x+2 \cdots\cdots(4)$

(3), (4) 兩式公解與下列兩種方程組公解相同。

(3)÷(4) $\begin{cases}x+y=3y \cdots\cdots(5)\\ (x+y)(x-y)=x+2 \cdots\cdots(6)\end{cases}$

及 $\begin{cases}(x+y)(x-y)=0 \cdots\cdots(7)\\ x+2=0 \cdots\cdots(8)\end{cases}$ § 660.

解 (5), (6) 兩式，從 (5) $\qquad x=2y \cdots\cdots(9)$

以 (9) 代入 (6) 得 $\qquad 3y^2-2y-2=0.$

用公式解 $\qquad \therefore\quad y=\dfrac{1\pm\sqrt{1+6}}{3}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}.$

以 y 之值代入 (9)，得 $\quad x=\dfrac{2(1\pm\sqrt{7})}{3}.$

解 (7), (8) 兩式，從 (8) $\qquad x=-2.$

以 x 之值代入 (7)，得 $\qquad y=\pm2.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=-2\\ y=2\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}-2\\ -2\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\dfrac{2(1+\sqrt{7})}{3}\\ \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}\dfrac{2(1-\sqrt{7})}{3}\\ \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $2\times3=6$ 組公解，其中最高次項有兩個一次公因式 $x+y$ 及 $x-y$，故尚有二組無窮解。

6. [解] $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=6x \cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=-5y \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2) $$\frac{x-2y}{x+y}=-\frac{6x}{5y}.$$

去分母,化簡 $6x^2+11xy-10y^2=0.$

分解因式 $(3x-2y)(2x+5y)=0.$

$$\therefore\quad 3x-2y=0,\quad \therefore\quad x=\frac{2}{3}y \cdots\cdots(3)$$

及 $$2x+5y=0,\quad \therefore\quad x=-\frac{5}{2}y \cdots\cdots(4)$$

以 (3) 代入 (2), 得 $y^2-9y=0$, 即 $y(y-9)=0.$

$$\therefore\quad y=0,\ 9.$$

以 y 之值代入 (3), 得 $x=0,\ 6.$

以 (4) 代入 (2), 得 $21y^2+20y=0$, 即 $y(21y+20)=0.$

$$\therefore\quad y=0,\ -\frac{20}{21}.$$

以 y 之值代入 (4), 得 $x=0,\ \frac{50}{21}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} 6 \\ 9 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} \frac{50}{21} \\ -\frac{20}{21} \end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $2\times 2=4$ 組公解，其中最高次項有一個一次公因式 $x-y$, 故祗有三組有窮解,餘一組爲無窮解.

習 題 XLVIII 第 328 頁

解下列各方程組:

1. [解] $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots(1) \\ xy+36=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $x=5-y \cdots\cdots(3)$

以 (3) 代入 (2) 式，得 $y^2-5y-36=0.$

分解因式 $(y-9)(y+4)=0.$

$\therefore\ y=9$ 及 $-4.$

以 y 之值代入 (3)，得 $x=-4$ 及 $9.$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x&=-4\\y&=9\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&9\\&-4\end{aligned}\right\}$$

2. [解] $\begin{cases}x^2+y^2=200 \cdots\cdots(1)\\x+y=12 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(2) 平方， $x^2+2xy+y^2=144 \cdots\cdots(3)$

$(1)\times 2-(3)$ $x^2-2xy+y^2=256.$

$x-y=\pm 16$

$\dfrac{(2)+(4)}{2}$， $x=14$ 及 $-2,$

以 x 之值代入 (2) $y=-2$ 及 $14.$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x&=14\\y&=-2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&-2\\&14\end{aligned}\right\}$$

3. [解] $\begin{cases}x^2+y^2=293 \cdots\cdots(1)\\xy=34 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(1)+(2)\times 2$ $(x+y)^2=361.$

即 $x+y=\pm 19 \cdots\cdots(3)$

$(1)-(2)\times 2$ $(x-y)^2=225.$

$x-y=\pm 15 \cdots\cdots(4)$

從 (3) 及 (4) $x=\pm 17,\ \pm 2.$

以 x 之值代入 (2)，得 $y=\pm 2,\ \pm 17.$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x&=17\\y&=2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&-17\\&-2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&2\\&17\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&-2\\&-17\end{aligned}\right\}$$

4. [解] $\begin{cases}x^2+y^2=85 \cdots\cdots(1)\\x-y=7 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (2) $x=7+y$ ……………………………… (3)

以 (3) 代入 (1) 得 $y^2+7y-18=0.$

分解因式 $(y+9)(y-2)=0.$

$\therefore \quad y=-9,\ 2.$

以 y 之值代入 (3), $x=-2,\ 9.$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 9 \\ 2 \end{array}\right\}$$

5. [解] $\begin{cases} x^3+y^3=513 \cdots\cdots (1) \\ x+y=9 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1) ÷ (2), $x^2-xy+y^2=57$ ……………………………… (3)

從 (2) $y=9-x$ ……………………………… (4)

以 (4) 代入 (3), 得 $x^2-9x+8=0.$

分解因式 $(x-8)(x-1)=0.$

$\therefore \quad x=8,\ 1.$

以 x 之值代入 (4), 得 $y=1,\ 8.$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 \\ 8 \end{array}\right\}$$

原方程組共有 $3\times1=3$ 組公解,其中最高次項有一次公因式 $x+y$, 故尚有一組無窮解.

6. [解] $\begin{cases} x^3+y^3=468 \cdots\cdots (1) \\ x^2y+xy^2=420 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1) + (2) × 3, 得 $x^3+3x^2y+3xy^3+y^3=1728.$

即 $(x+y)^3=12^3.$

移項,分解因式 $[x+y-12][(x+y)^2+12(x+y)+144]=0.$

$\therefore \quad x+y=12$ ……………………………… (3)

及 $(x+y)^2+12(x+y)+144=0.$

即 $x+y=-6\pm\sqrt{36-144}=-6\pm6\sqrt{3}i$ ……………………………… (4)

以 (2), (3) 兩式聯立,

(2) ÷ (3) $$xy=35 \quad\cdots\cdots(5)$$

再以 (3), (5) 兩式聯立,得 $x=7,\ 5;\ y=5,\ 7.$

以 (2), (4) 兩式聯立,

(2) ÷ (4) $$xy=\frac{70}{-1\pm\sqrt{3}i}=\frac{35}{2}(-1\mp\sqrt{3}i) \quad\cdots\cdots(6)$$

再以 (4), (6) 兩式聯立,

$(4)^2-(6)\times4$, $$(x-y)^2=-2(1\pm\sqrt{3}i).$$

即 $$x-y=\pm\sqrt{-2\mp2\sqrt{3}i}=\pm(\sqrt{3}i\mp1) \quad\cdots\cdots(7)$$

(4)+(7) $$2x=(-6+6\sqrt{3}i)\pm(\sqrt{3}i-1) \quad\cdots\cdots(8)$$

及 $$2x=(-6-6\sqrt{3}i)\pm(\sqrt{3}i+1) \quad\cdots\cdots(9)$$

從 (8) $$x=\frac{-7+7\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-5+5\sqrt{3}i}{2} \quad\cdots\cdots(10)$$

從 (9) $$x=\frac{-7-7\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-5-5\sqrt{3}i}{2} \quad\cdots\cdots(11)$$

以 (10) 代入 $x+y=-6+6\sqrt{3}i$ 得 $y=\dfrac{-5+5\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-7+7\sqrt{3}i}{2}.$

以 (11) 代入 $x+y=-6-6\sqrt{3}i$ 得 $y=\dfrac{-5-5\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-7-7\sqrt{3}i}{2}.$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l}x=7\\y=5\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}5\\7\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\frac{7(-1+\sqrt{3}i)}{2}\\\frac{5(-1+\sqrt{3}i)}{2}\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\frac{5(-1+\sqrt{3}i)}{2}\\\frac{7(-1+\sqrt{3}i)}{2}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-5(1+\sqrt{3}i)}{2}\\\frac{-7(1+\sqrt{3}i)}{2}\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\frac{-7(1+\sqrt{3}i)}{2}\\\frac{-5(1+\sqrt{3}i)}{2}\end{array}\right\}$$

原方程組共有 $3\times3=9$ 組公解,其中最高次項,次一高次項及次二高次項有一個一次公因式 $x+y$. 故尚有三組無窮解.

7. [解] $$\begin{cases}27x^3+64y^3=65 \quad\cdots\cdots(1)\\3x+4y=5 \quad\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)÷(2), $9x^2-12xy+16y^2=13$ ……………………(3)

從 (2) 式, $y=\dfrac{5-3x}{4}$ ……………………(4)

以 (4) 代入 (3) 式,得 $27x^2-45x+12=0.$

分解因式 $(3x-4)(9x-3)=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{3}\ \text{及}\ \frac{1}{3},$$

以 x 之値代入 (4), $y=\dfrac{1}{4}$ 及 1.

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}\\ 1\end{array}\right\}$$

原方程組共有 $1\times3=3$ 組公解,其中最高次項有一個一次因式 $3x+4y$,故尙有一組無窮解.

8. [解] $\begin{cases}x^4+y^4=82 & \text{……………………(1)}\\ x-y=2 & \text{……………………(2)}\end{cases}$

設 $x=u+v,\ y=u-v$ ……………………(3)

從 (1) 式, $(u+v)^4+(u-v)^4=82$ ……………………(4)

從 (2) 式, $2v=2,\ \therefore\ v=1.$

代入 (4) 式, $u^4+6u^2-40=0.$

$$(u^2+10)\ u^2-4)=0.$$

$$u^2=-10\ \text{及}\ 4.$$

$$\therefore\quad u=\pm\sqrt{10}i\ \text{及}\ \pm2;$$

以 u, v 之値代入 (3), 得 $x=\pm\sqrt{10}i+1, 3, -1;$

$$y=\pm\sqrt{10}i-1, 1, -3.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=3\\ y=1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-1\\ -3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\sqrt{10}i+1\\ \sqrt{10}i-1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-\sqrt{10}i+1\\ -\sqrt{10}i-1\end{array}\right\}$$

9. [解] $\begin{cases}x^5+y^5=32 & \text{……………………(1)}\\ x+y=2 & \text{……………………(2)}\end{cases}$

設 $x=u+v,\ y=u-v$ ……………………(3)

從 (2) 式，　$2u=2,\quad \therefore\quad u=1.$

從 (1) 式，　$v^4+2v^2-3=0.$

分解因式　$(v^2+3)(v^2-1)=0.$

$$\therefore\quad v=\pm i\sqrt{3}\text{ 及 }\pm 1;$$

以 u, v 之值代入 (3)，得　$x=1\pm i\sqrt{3},\ 2,\ 0;$

$$y=1\mp i\sqrt{3},\ 0,\ 2.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=1+i\sqrt{3}\\ y=1-i\sqrt{3}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}1-i\sqrt{3}\\ 1+i\sqrt{3}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}0\\ 2\end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $1\times5=5$ 組公解，其中最高次項有一個一次公因式 $x+y$，故尙有一組無窮解。

10. ［解］
$$\begin{cases}x+y=\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 56\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+113=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(2) 化簡　$56x^2+113xy+56y^2=0.$

分解因式　$(7x+8y)(8x+7y)=0.$

$$\therefore\quad 7x+8y=0,\quad \therefore\quad y=-\frac{7}{8}x\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

及　$8x+7y=0,\quad \therefore\quad y=-\dfrac{8}{7}x\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (1) 得　$x=4.$

以 x 之值代入 (3)，得　$y=-\frac{7}{2}.$

以 (4) 代入 (1)，得　$x=-\frac{7}{2}.$

以 x 之值代入 (4)，得　$y=4.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=4\\ y=-\frac{7}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\frac{7}{2}\\ 4\end{matrix}\right\}$$

11. ［解］
$$\begin{cases}xy+x+y=-19\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x^2y+xy^2+20=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2)　$xy(x+y)=-20\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

命 $xy=a,\ x+y=b.$

則 (1) 可變爲 $a+b=-19$ ……………………(4)

(2) 亦卽 (3) 可變爲 $ab=-20$ ……………………(5)

解 (4), (5) 兩式,得 $a=-20,\ b=1$; 或 $a=1,\ b=-20.$

若 $a=-20,\ b=1$, 則 $xy=-20$ ……………………(6)

$x+y=1$ ……………………(7)

解 (6), (7) 兩式得 $x=5,\ y=-4$; 或 $x=-4,\ y=5.$

若 $a=1,\ b=-20$, 則 $xy=1$ ……………………(8)

$x+y=-20$ ……………………(9)

解 (8), (9) 兩式,

$(9)^2-(8)\times 4$ 得 $(x-y)^2=396.$

$\therefore\quad x-y=\pm 6\sqrt{11}$ ……………………(10)

將 (9), (10) 兩式聯立, $x=-10\pm 3\sqrt{11}.$

$y=-10\mp 3\sqrt{11}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=5\\ y&=-4\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&-4\\ &5\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&-10+3\sqrt{11}\\ &-10-3\sqrt{11}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&-10-3\sqrt{11}\\ &-10+3\sqrt{11}\end{aligned}\right\}$$

得原方程組共有 $2\times 3=6$ 組公解,其中最高次項有二個一次公因式 x 及 y, 故尚有二組無窮解。

12. [解] $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72 & \cdots\cdots(1)\\ x^2+x^2y^2+y^2=19 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(1)+(2)\times 2$ $x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+y^2=110,$

卽 $(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)=110.$

分解因式 $(x^2+y^2+11)(x^2+y^2-10)=0.$

$y^2=10-x^2$ 及 $y^2=-(11+x^2).$

代入 (2) 式,得 $x^4-10x^2+9=0$ ……………………(3)

及 $x^4+11x^2+30=0$ ……………………(4)

從 (3) 式, $x=\pm 1$ 及 $\pm 3,$

$$\therefore \quad y=\pm 3 \text{ 及 } \pm 1.$$

從 (4) 式，
$$x=\pm\sqrt{6}i \quad \pm\sqrt{5}i,$$
$$\therefore \quad y=\pm\sqrt{5}i \text{ 及 } \pm\sqrt{6}i.$$

$$\therefore \left.\begin{array}{r}x=1\\ y=3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-1\\ -3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}1\\ -3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-1\\ 3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}3\\ 1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-3\\ -1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}3\\ -1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-3\\ 1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}\sqrt{6}i\\ \sqrt{5}i\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}-\sqrt{6}i\\ -\sqrt{5}i\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}\sqrt{6}i\\ -\sqrt{5}i\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-\sqrt{6}i\\ \sqrt{5}i\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}\sqrt{5}i\\ \sqrt{6}i\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-\sqrt{5}i\\ -\sqrt{6}i\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}\sqrt{5}i\\ -\sqrt{6}i\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-\sqrt{5}i\\ \sqrt{6}i\end{array}\right\}$$

13. ［解］
$$\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{10} \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，
$$xy(x+y)=30 \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式，$\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{10}$ $\cdots\cdots(4)$

$\sqrt{(3)\times(4)}$，
$$x+y=\pm 3.$$
$$\therefore \quad x=3-y \text{ 及 } x=-3-y.$$

代入 (4) 式，得
$$y^2-3y+10=0 \cdots\cdots(5)$$

及
$$y^2+3y-10=0 \cdots\cdots(6)$$

從 (5) 式，
$$y=\frac{3\pm\sqrt{31}i}{2},$$
$$\therefore \quad x=\frac{3\mp\sqrt{31}i}{2}.$$

從 (6) 式，
$$y=-5 \text{ 及 } 2,$$
$$\therefore \quad x=2 \text{ 及 } -5.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{r}x=2\\ y=-5\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-5\\ 2\end{array}\right\} \left.\begin{array}{c}\dfrac{3+\sqrt{31}i}{2}\\ \dfrac{3-\sqrt{31}i}{2}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{c}\dfrac{3-\sqrt{31}i}{2}\\ \dfrac{3+\sqrt{31}i}{2}\end{array}\right\}$$

14. ［解］
$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8 \cdots\cdots(1)\\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，　$(x+y)^2+xy+2(x+y)-8=0$ ……(3)

從 (2) 式，　$2(x+y)^2-4xy+3(x+y)-14=0$ ……(4)

$(3)\times4+(4)$　$6(x+y)^2+11(x+y)-46=0.$

分解因式　$[6(x+y)+23][(x+y)-2]=0.$

$\therefore\ 6(x+y)+23=0$ 卽 $x+y=-\dfrac{23}{6}$ ……(5)

$(x+y)-2=0$ 卽 $x+y=2$ ……(6)

以 (5) 代入 (3)，得　$xy=\dfrac{35}{36}$ ……(7)

以 (6) 代入 (3)，得　$xy=0$ ……(8)

將 (5), (7) 兩式聯立，

以 (5) 中 x 之值代入 (7) 得　$36y^2+138y+35=0.$

應用公式　$y=\dfrac{1}{12}(-23\pm\sqrt{389}).$

以 y 之值代入 (5) 得　$x=\dfrac{1}{12}(-23\mp\sqrt{389}).$

將 (6), (8) 兩式聯立，得 $x=2, y=0$; $x=0, y=2.$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x&=0\\y&=2\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}&2\\&0\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}&\tfrac{1}{12}(-23+\sqrt{389})\\&\tfrac{1}{12}(-23-\sqrt{389})\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}&\tfrac{1}{12}(-23-\sqrt{389})\\&\tfrac{1}{12}(-23+\sqrt{389})\end{aligned}\right\}$$

15. [解]　$\begin{cases}x^3=5y &\cdots\cdots(1)\\ y^3=5x &\cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(1)+(2)$，　$x^3+y^3=5(x+y).$

分解因式　$(x+y)(x^2-xy+y^2)=5(x+y).$

$\therefore\ x+y=0$ ……(3)

及　$x^2-xy+y^2-5=0$ ……(4)

$(1)-(2)$，　$x^3-y^3=-5(x-y).$

分解因式　$(x-y)(x^2+xy+y^2)=5(x-y).$

$\therefore\ x-y=0$ ……(5)

及 $$x^2+xy+y^2+5=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

從 (3) 及 (5), 得 $\quad x=0,\quad y=0.$

從 (3) 及 (6), 得 $\quad x=\pm\sqrt{5}i,\ y=\mp\sqrt{5}i.$

從 (4 及 (5), 得 $\quad x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}.$

從 (4) 及 (6), 得 $x=\pm\sqrt{10}(1+i)/2,\ y=\mp\sqrt{10}(1-i)/2;$

$$x=\pm\sqrt{10}(1-i)/2,\ y=\mp\sqrt{10}(1+i)/2.$$

$$\therefore\ \left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\sqrt{5}\\\sqrt{5}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\sqrt{5}i\\-\sqrt{5}i\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\sqrt{5}i\\\sqrt{5}i\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\sqrt{10}(1+i)\\-\frac{1}{2}\sqrt{10}(1-i)\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}\sqrt{10}(1+i)\\\frac{1}{2}\sqrt{10}(1-i)\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\sqrt{10}(1-i)\\-\frac{1}{2}\sqrt{10}(1+i)\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}\sqrt{10}(1-i)\\\frac{1}{2}\sqrt{10}(1+i)\end{matrix}\right\}.$$

習題 XLIX　第 329 頁

解下列各方程組:

1. [解] $$\begin{cases}x+y=3 & \cdots\cdots(1)\\ y+z=2 & \cdots\cdots(2)\\ x^2-yz=19 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

從 (1)式, $$x=3-y\quad\cdots\cdots(4)$$

從 (2)式, $$z=2-y\quad\cdots\cdots(5)$$

代入 (3) 式,得 $\quad 9-6y+y^2-2y+y^2=19.$

即 $$y^2-4y-5=0.$$

$$\therefore\quad y=5\ \text{及}\ -1,$$

以 y 之值代入 (4) 及 (5), 得 $x=-2$ 及 4,

$$z=-3\ \text{及}\ 3.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=-2\\y=5\\z=-3\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}4\\-1\\3\end{matrix}\right\}$$

2. ［解］ $\begin{cases} x(y+z)=12 \cdots\cdots(1) \\ y(z+x)=6 \cdots\cdots(2) \\ z(x+y)=10 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)+(2)−(3)， $xy=4 \cdots\cdots(4)$

(1)+(3)−(2)， $xz=8 \cdots\cdots(5)$

(2)+(3)−(1)， $yz=2 \cdots\cdots(6)$

(4)×(5)÷(6)， $x^2=16.$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x&=4 \\ y&=1 \\ z&=2 \end{aligned}\right\} \text{ 或 } \left.\begin{aligned} &-4 \\ &-1 \\ &-2 \end{aligned}\right\}$$

3. ［解］ $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2 \cdots\cdots(1) \\ (z+c)(x+a)=b^2 \cdots\cdots(2) \\ (x+a)(y+b)=c^2 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)×(2)÷(3)， $\dfrac{(y+b)(z+c)(z+c)(x+a)}{(x+a)(y+b)}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}.$

$$(z+c)^2=\frac{a^2b^2}{c^2} \text{ 即 } z+c=\pm\frac{ab}{c}.$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} z&=\frac{-c^2\pm ab}{c} \\ y&=\frac{-b^2\pm ca}{b} \\ x&=\frac{-a^2\pm bc}{a} \end{aligned}\right\}$$

習 題 L

第 330 頁

任用本章中何法，解下列各方程組：

1. ［解］ $\begin{cases} 7x^2-6xy=8 \cdots\cdots(1) \\ 2x-3y=5 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $3y=2x-5.$

代入 (1)，得 $$3x^2+10x-8=0.$$

即 $$(3x-2)(x+4)=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{2}{3}\\ y&=-\frac{11}{9}\end{aligned}\right\}\ \text{及}\ \left.\begin{aligned}&-4\\ &-\frac{13}{3}\end{aligned}\right\}$$

2. ［解］ $$\begin{cases} x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式， $$y=x-1.$$

代入 (1) 式，得 $$x^2-x-12=0.$$

即 $$(x-4)(x+3)=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=4\\ y&=3\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\text{及}\\ &\text{及}\end{aligned}\ \left.\begin{aligned}&-3\\ &-4\end{aligned}\right\}$$

3. ［解］ $$\begin{cases} x-y=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ xy=(b^2-a^2)/4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1) 平方， $$x^2-2xy+y^2=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)＋(2)×4， $$(x+y)^2=b^2$$

$$x+y=\pm b \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$\dfrac{(1)+(4)}{2}$ $$x=\frac{a+b}{2}\Bigg\}\ \frac{a-b}{2}\Bigg\}$$

代入 (4)式，得 $$y=\frac{-a+b}{2}\Bigg\}\ \frac{-a-b}{2}\Bigg\}$$

4. ［解］ $$\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{y^2}=a^2+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式， $$y^2=-x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入 (1) 式，得 $$\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x^2}=a^2+b^2.$$

$$x^2=\frac{a-b}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}}.$$

當 $$x=\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}},\qquad y=\pm\sqrt{\frac{b-a}{a^2+b^2}}.$$

當 $$x=-\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{b-a}{a^2+b^2}}.$$

即 $$\left.\begin{array}{l}x=\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}}\\ y=\sqrt{\dfrac{b-a}{a+b}}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}}\\ -\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}}\\ \sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}-\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}}\\ -\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}\end{array}\right\}$$

5. [解] $$\begin{cases}\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

從 (1) 式, $$\frac{1}{y}=1+\frac{3}{x}.$$

代入 (2) 式,得 $$13x^2-x-12=0.$$

即 $$(13x+12)(x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{12}{13}\\ y=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right\}\ \text{及}\ \left.\begin{array}{l}1\\ \dfrac{1}{4}\end{array}\right\}$$

6. [解] $$\begin{cases}x+y=a+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

從 (1) 式, $$y=a+b-x.$$

代入 (2) 式,得 $$x^2-(3a-b)x-(ab-2a^2)=0.$$

即 $$(x-a)(x-2a+b)=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=a\\ y=b\end{array}\right\}\ \text{及}\ \left.\begin{array}{l}2a-b\\ 2b-a\end{array}\right\}$$

7. [解] $\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1) ÷ (2), $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{91}{25}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{1}{x}.$

代入 (3) 式，得 $2x^2-11x+5=0.$

即 $(2x-1)(x-5)=0.$

$\therefore \left.\begin{aligned}x&=\tfrac{1}{2}\\ y&=5\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}&\text{及 } 5\\ &\text{及 } \tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}$

8. [解] $\begin{cases}\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{ab}{xy}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)＋(2)×2, 得 $\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\right)^2=9.$

$\therefore \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\pm 3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)－(2)×2, 得 $\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}\right)^2=1.$

$\therefore \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\pm 1 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

解 (3), (4) 兩式

$\dfrac{2a}{x}=4, \quad \therefore x=\dfrac{a}{2}; \qquad \dfrac{2b}{y}=2, \quad \therefore y=b.$

或 $\dfrac{2a}{x}=2, \quad \therefore x=a; \qquad \dfrac{2b}{y}=4, \quad \therefore y=\dfrac{b}{2}.$

$\dfrac{2a}{x}=-4, \quad \therefore x=-\dfrac{a}{2}; \qquad \dfrac{2b}{y}=-2, \quad \therefore y=-b.$

及 $\dfrac{2a}{x}=-2, \quad \therefore x=-a; \qquad \dfrac{2b}{y}=-4, \quad \therefore y=-\dfrac{b}{2}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=\dfrac{a}{2} \\ y=b \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} a \\ \dfrac{b}{2} \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -\dfrac{a}{2} \\ -b \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -a \\ -\dfrac{b}{2} \end{matrix}\right\}$$

9. [解] $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4}xy \cdots\cdots(1) \\ x-y=\dfrac{3}{4}xy \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) $\qquad y=\dfrac{4x}{3x+4} \cdots\cdots(3)$

以 (3) 代入 (1) 得 $\qquad x^4-3x^3-4x^2=0.$

卽 $\qquad x^2(x+1)(x-4)=0.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -1 \\ -4 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}\right\}.$$

以 x 之值代入 (3) 得

10. [解] $a(x+y)=b(x-y)=xy.$

原式分爲二式 $\qquad a(x+y)=xy \cdots\cdots(1)$

$\qquad b(x-y)=xy \cdots\cdots(2)$

從 (1) $\qquad y=\dfrac{ax}{x-a} \cdots\cdots(3)$

以 (3) 代入 (2) $\qquad bx-\dfrac{abx}{x-a}=\dfrac{ax^2}{x-a}.$

化簡 $\qquad bx^2-2abx-ax^2=0,$

卽 $\qquad (b-a)x^2-2abx=0.$

$$\therefore\quad x[(b-a)x-2ab]=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} \dfrac{2ab}{b-a} \\ \dfrac{2ab}{b+a} \end{matrix}\right\}$$

以 x 之值代入 (3)

11. [解] $40xy=21(x^2-y^2)=210(x+y).$

原式分爲二式 $\qquad 4xy=21(x+y) \cdots\cdots(1)$

$\qquad x^2-y^2-10(x+y)=0 \cdots\cdots(2)$

(2) 分解因式 $\qquad (x+y)(x-y-10)=0$

$\therefore\quad x+y=0$，即 $y=-x$ ……………………(4)

及　$x-y-10=0$，即 $y=x-10$ ……………………(5)

將 (1), (4) 聯立，

以 (4) 代入 (1) 得　$x^2=0,\ \therefore\ x=0,\ 0.$

以 x 之值代入 (4)，　$\therefore\quad y=0,\ 0.$

將 (1), (5) 聯立，

以 (5) 代入 (1) 得　$2x^2-41x+105=0.$

即　$(x-3)(2x-35)=0.$

$$\therefore\quad x=3,\ \frac{35}{2}.$$

以 x 之值代入 (5)　$y=-7,\ \dfrac{15}{2}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}3\\-7\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\frac{35}{2}\\\frac{15}{2}\end{array}\right\}$$

12. ［解］ $\begin{cases}4x^2-25y^2=0 & \cdots\cdots(1)\\ 2x^2-10y^2-3y=4 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1)　$(2x-5y)(2x+5y)=0.$

$\therefore\quad 2x-5y=0$，即 $y=\dfrac{2}{5}x$ ……………………(3)

及　$2x+5y=0$，即 $y=-\dfrac{2}{5}x$ ……………………(4)

以 (3) 代入 (2)，得　$x^2-3x-10=0$ ……………………(6)

即　$(x-5)(x+2)=0.$

$$\therefore\quad x=5,\ -2.$$

以 x 之值代入 (3)　$y=2,\ -\frac{4}{5}.$

以 (4) 代入 (2)，得　$x^2+3x-10=0$

即　$(x+5)(x-2)=0.$

$$\therefore\quad x=-5,\ 2.$$

以 x 之值代入 (4) $\qquad y=2,\ -\frac{4}{5}.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=5 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -5 \\ 2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2 \\ -\frac{4}{5} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2 \\ -\frac{4}{5} \end{matrix}\right\}$$

13. [解] $\begin{cases} x^2+3xy-9y^2=9 & \cdots\cdots(1) \\ x^2-13xy+21y^2=-9 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)+(2), $\qquad 2x^2-10xy+12y^2=0.$

分解因式 $\qquad 2(x-3y)(x-2y)=0.$

$$\therefore\quad y=\frac{x}{3}\ \text{及}\ \frac{x}{2}.$$

以 y 之值代入 (1) 式,得 $x^2+x^2-x^2=9.$

$$\therefore\quad x=\pm 3,\ \text{而}\ y=\pm 1.$$

又 $\qquad 4x^2+6x^2-9x^2=36.$

$$\therefore\quad x=\pm 6,\ \text{而}\ y=\pm 3.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x-3 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -6 \\ -3 \end{matrix}\right\}$$

14. [解] $\begin{cases} x^2-7y^2-29=0 & \cdots\cdots(1) \\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式, $\qquad (x-3y)^2-2(x-3y)-3=0.$

分解因式 $\qquad (x-3y-3)(x-3y+1)=0.$

$$\therefore\quad x=3y+3\ \text{及}\ x=3y-1.$$

代入 (1) 式,得 $\qquad y^2+9y-10=0.$

分解因式 $\qquad (y+10)(y-1)=0.$

$$\therefore\quad y=-10\ \text{及}\ 1,$$

而 $\qquad x=-27\ \text{及}\ 6.$

又 $\qquad y^2-3y-14=0.$

應用公式 $\qquad y=\frac{3\pm\sqrt{9+56}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{65}}{2},$

而 $\qquad x=\frac{9\pm3\sqrt{65}-2}{2}=\frac{7\pm3\sqrt{65}}{2}.$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x&=-27 \\ y&=-10 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 6 \\ 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \frac{7+3\sqrt{65}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{65}}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \frac{7-3\sqrt{65}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{65}}{2} \end{aligned}\right\}$$

15. [解] $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{65}{28} \cdots\cdots (1) \\ 2(x^2+y^2)+(x-y)=34 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

從 (1) 式， $28(x^2+y^2)=65xy.$

即 $28(x-y)^2-9xy=0 \cdots\cdots (3)$

從 (2) 式， $2(x-y)^2+(x-y)+4xy=34 \cdots\cdots (4)$

$(3)\times 4+(4)\times 9$ $\quad 130(x-y)^2+9(x-y)-306=0.$

分解因式 $[65(x-y)+102][2(x-y)-3]=0.$

$$\therefore \quad x=-\frac{102}{65}+y, \text{ 及 } x=\frac{3}{2}+y.$$

代入 (3) 式，得 $(65y-238)(65y+136)=0.$

及 $2y^2+3y-14=0$, 即 $(y-2)(2y+7)=0.$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} y&=\frac{238}{65} \\ x&=\frac{136}{65} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -\frac{136}{65} \\ -\frac{238}{65} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2 \\ \frac{7}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -\frac{7}{2} \\ -2 \end{aligned}\right\}$$

而

16. [解] $\begin{cases} x^2y=a \cdots\cdots (1) \\ xy^2=b \cdots\cdots (2) \end{cases}$

$(1)\div(2)$， $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}, \quad x=\dfrac{a}{b}y.$

以 x 之值代入 (2) 式， $y^3=\dfrac{b^2}{a}.$

$$\therefore \quad y=\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}, \quad \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\omega, \quad \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\omega^2;$$

而 $$x=\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\omega, \quad \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\omega^2.$$

$$\omega \text{ 爲 } \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \ \omega^2 \text{ 爲 } \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

原方程組共有 $3\times 3=9$ 組公解，其中最高次項，次一高次項及次二高次項有二個一次公因式 x 及 y，故尚有六組無窮解．

17. [解] $\begin{cases} x^2y+xy^2=a & \cdots\cdots(1) \\ x^2y-xy^2=b & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)+(2)， $$2x^2y=a+b \quad\cdots\cdots(3)$$

(1)−(2)， $$2xy^2=a-b \quad\cdots\cdots(4)$$

(3)÷(4)， $$\frac{x}{y}=\frac{a+b}{a-b}.$$

$$x=\frac{a+b}{a-b}y.$$

代入 (4) 式， $$y^3=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

$$\therefore\quad y=\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}},\quad \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}}\omega,\quad \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}}\omega^2;$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{2(a-b)}},\quad \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{2(a-b)}}\omega,\quad \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{2(a-b)}}\omega^2.$$

$$\omega \text{ 爲 } \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \omega^2 \text{ 爲 } \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

原方程組共有 $3\times 3=9$ 組公解，其中最高次項，次一高次項及次二高次項有二個一次公因式 x 及 y，故尚有 6 組無窮解．

18. [解] $\begin{cases} x=a(x^2+y^2) & \cdots\cdots(1) \\ y=b(x^2+y^2) & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2)， $$x=\frac{a}{b}y.$$

代入 (2) 式， $$y\left[\frac{a^2+b^2}{b}y-1\right]=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{matrix}\right\}$$

19. [解] $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (2x+3y)(3x-2y)=110a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

從 (1) 式， $x=4y.$

代入 (2) 式， $(8y+3y)(12y-2y)=110a^2.$

$$y^2=a^2.$$

$$\therefore\quad y=\pm a,$$

$$x=\pm 4a.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=4a \\ y=a \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -4a \\ -a \end{matrix}\right\}$$

20. [解] $\begin{cases} 3(x^3-y^3)=13xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

$(1)\div(2)$， $3x^2-10xy+3y^2=0.$

分解因式 $(3x-y)(x-3y)=0.$

$$x=\tfrac{1}{3}y,\ 及\ x=3y.$$

代入 (2) 式， $\left.\begin{matrix} y=\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$

而

原方程組共有 $3\times1=3$ 組公解，其中最高次項有一個一次公因式 $x-y$，故尚有一組無窮解.

21. [解] $\begin{cases} x^4+y^4=a^4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

設 $x=u+v,\ 及\ y=u-v \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

以 (3) 代入 (2)， $2u=a.$

即 $u=\dfrac{a}{2}.$

以 u 之值及 (3) 代入 (1) $\left[\dfrac{a}{2}+v\right]^4+\left[\dfrac{a}{2}-v\right]^4=a^4.$

化簡 $16v^4+24a^2v^2-7a^4=0.$

分解因式 $(4v^2+7a^2)(4v^2-a^2)=0.$

$$\therefore\quad v^2=-\frac{7}{4}a^2\ \text{及}\ v^2=\frac{1}{4}a^2.$$

即 $$v=\pm\frac{a}{2}\sqrt{7}i\ \text{及}\ \pm\frac{a}{2};$$

以 u, v 之值代入 (3), $$x=\frac{a(1\pm\sqrt{7}i)}{2},\ a,\ 0;$$

$$y=\frac{a(1\mp\sqrt{7}i)}{2},\ 0,\ a.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=a\\ y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}0\\ a\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\dfrac{a(1+\sqrt{7}i)}{2}\\ \dfrac{a(1-\sqrt{7}i)}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\dfrac{a(1-\sqrt{7}i)}{2}\\ \dfrac{a(1+\sqrt{7}i)}{2}\end{matrix}\right\}$$

22. [解] $$\begin{cases}21(x+y)=10xy\cdots\cdots(1)\\ x+y+x^2+y^2=68\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式, $$(x+y)^2+(x+y)-68=2xy\cdots\cdots(3)$$

(3) × 5 − (1), $$5(x+y)^2-16(x+y)-340=0.$$

分解因式 $$[5(x+y)+34][(x+y)-10]=0.$$

$$x+y=-\frac{34}{5}\ \text{及}\ x+y=10\cdots\cdots(4)$$

解 (1) 及 (4), 得 $$x=7,\ 3,\ (-17\pm\sqrt{646})/5;$$

$$y=3,\ 7,\ (-17\mp\sqrt{646})/5.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=7\\ y=3\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}3\\ 7\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\dfrac{-17+\sqrt{646}}{5}\\ \dfrac{-17-\sqrt{646}}{5}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\dfrac{-17-\sqrt{646}}{2}\\ \dfrac{-17+\sqrt{646}}{2}\end{matrix}\right\}$$

23. [解] $x^2+y^2=xy=x+y.$

原式可分爲二式 $$xy=x+y\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=xy\cdots\cdots(2)$$

從 (2) $$(x+y)^2=3xy\cdots\cdots(3)$$

以 (1) 代入 (3), $(x+y)^2=3(x+y)$ 即 $(x+y)(x+y-3)=0.$

$$\therefore\quad x+y=0,\ \text{即}\ x=-y\cdots\cdots(4)$$

及 $x+y-3=0$, 即 $x=3-y$ ......(5)

以(4)代入(1)得 $y^2=0$, $\therefore$ $y=0, 0$ ......(6)

以(5)代入(1)得 $y^2-3y+3=0$, $\therefore$ $y=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ ......(7)

以(6)代入(4)得 $x=0, 0.$

以(7)代入(5)得 $x=\frac{3\mp\sqrt{3}i}{2}.$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\\\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\\\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right\}$$

24. [解] $x^2-xy+y^2=3a^2=x^2-y^2.$

原式可分爲二式 $x^2-xy+y^2=x^2-y^2$ ......(1)

$x^2-y^2=3a^2$ ......(2)

從(1)化簡 $y(x-2y)=0.$

$\therefore$ $y=0$ ......(3)

$x-2y=0$, 即 $x=2y$ ......(4)

以(3),(4)兩式代入(2)得 $x^2=3a^2$. $\therefore$ $x=\pm\sqrt{3}a.$

又 $3y^2=3a^2$. $\therefore$ $y=\pm a.$

以 y 之値代入(4)得 $x=\pm 2a.$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}x=2a\\y=a\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-2a\\-a\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}\sqrt{3}a\\0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-\sqrt{3}a\\0\end{array}\right\}$$

25. [解] $\begin{cases}x^2+xy+y^2=21 & \text{......(1)}\\ x+\sqrt{xy}+y=7 & \text{......(2)}\end{cases}$

(1)÷(2), $x-\sqrt{xy}+y=3$ ......(3)

(2)+(3), $2x+2y=10.$

即 $x+y=5.$

$y=5-x$ ......(4)

代入(1)式,得 $x^2-5x-4=0,$

分解因式　$(x-1)(x-4)=0.$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=1\\ y=4\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}4\\ 1\end{matrix}\right\}$$

以 x 之值代入 (4) 得

原方程組中最高次項有公因式 $x+\sqrt{xy}+y$，故尙有一組無窮解.

26. [解] $\begin{cases}4x^2-3y^2=12(x-y) \cdots\cdots(1)\\ xy=0 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (2) 式，　$x=0,\ y=0.$

將 $x=0$ 代入 (1) 式，得　$y^2-4y=0.$

$$\therefore\quad y=0\ \text{及}\ 4.$$

將 $y=0$ 代入 (1) 式，得　$x^2-3x=0.$

$$\therefore\quad x=0\ \text{及}\ 3.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}3\\ 0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}0\\ 4\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}3\\ 4\end{matrix}\right\}$$

27. [解] $\begin{cases}x^2+y^2=x+y+20 \cdots\cdots(1)\\ xy+10=2(x+y) \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式，　$(x+y)^2-(x+y)-2xy-20=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　$xy=2(x+y)-10 \cdots\cdots(4)$

以 (4) 代入 (3) 式，　$(x+y)^2-5(x+y)=0.$

分解因式　$(x+y)(x+y-5)=0.$

$$y=-x\ \text{及}\ y=5-x.$$

將 $y=-x$ 代入 (2) 式，得　$x^2=10.$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{10},\ \text{而}\ y=\mp\sqrt{10}.$$

將 $y=5-x$ 代入 (2) 式，得 $x(5-x)=0.$

$$\therefore\quad x=0\ \text{及}\ 5,\ \text{而}\ y=5\ \text{及}\ 0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=5\\ y=0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}0\\ 5\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\sqrt{10}\\ -\sqrt{10}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}-\sqrt{10}\\ \sqrt{10}\end{matrix}\right\}$$

28. [解] $\begin{cases}x^2+4x-3y=0 \cdots\cdots(1)\\ y^2+10x-9y=0 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)－(2)，　$x^2-y^2-6x+6y=0.$

分解因式　$(x-y)[(x+y)-6]=0.$

$x=y$ 及 $x=6-y$ ……………………(3)

以(4)代入(1)式，得　$x^2+x=0.$

$\therefore\ x=0$ 及 $-1,$

而　$y=0$ 及 $-1.$

及　$y^2-19y+60=0.$

即　$(y-4)(y-15)=0.$

$\therefore\ y=4$ 及 $15,$

而　$x=2$ 及 $-9.$

$$\therefore\ \left.\begin{matrix}x=2\\y=4\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-9\\15\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right\}$$

29. [解]　$\begin{cases}28(x^5+y^5)=61(x^3+y^3) \cdots\cdots(1)\\ x+y=2 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

設　$x=u+v,\ y=u-v$ ……………………(3)

以(3)代入(2)，　$u=1.$

以 u 之值代入(1)，　$28[(1+v)^5+(1-v)^5]=61[(1+v)^3+(1-v)^3].$

化簡　$140v^4+97v^2-33=0.$

分解因式　$(4v^2-1)(35v^2+33)=0.$

$$\therefore\ v=\mp\frac{1}{2}\ 及\ \pm\frac{i\sqrt{1155}}{35};$$

以 u,v 之值代入(3)，　$x=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\pm\frac{i\sqrt{1155}}{35};$

$$y=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 1\mp\frac{i\sqrt{1155}}{35}.$$

$$\therefore\ \left.\begin{matrix}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}1+\frac{i\sqrt{1155}}{35}\\1-\frac{i\sqrt{1155}}{35}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}1-\frac{i\sqrt{1155}}{35}\\1+\frac{i\sqrt{1155}}{35}\end{matrix}\right\}$$

30. [解] $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a \cdots\cdots(1) \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)－(2), $$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=a-\frac{1}{a}.$$

$$y^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)xy-x^2=0.$$

$$(y-ax)\left(y+\frac{x}{a}\right)=0.$$

$$\therefore\quad y-ax=0 \text{ 即 } y=ax \cdots\cdots(3)$$

$$y+\frac{x}{a}=0 \text{ 即 } y=-\frac{x}{a} \cdots\cdots(4)$$

以 (3) 代入 (1) 得 $$ax^2-\frac{1}{a}=a.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ \frac{-\sqrt{a^2+1}}{a}.$$

以 x 之値代入 (3) $\quad y=\sqrt{a^2+1},\ -\sqrt{a^2+1}.$

再以 (4) 代入 (1) 得 $\quad -\dfrac{x^2}{a}=0$, 即 $x=0,\ 0.$

但 $x=0$ 使 (2) 之分母爲 0, 故不適合.

$$\therefore\quad \text{所求公解爲 } \left.\begin{matrix} x=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a} \\ y=\sqrt{a^2+1} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \dfrac{-\sqrt{a^2+1}}{a} \\ -\sqrt{a^2+1} \end{matrix}\right\}$$

31. [解] $\begin{cases} (x+1)^3+(y-2)^3=19 \cdots\cdots(1) \\ x+y=2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式, $$y=2-x.$$

代入 (1) 式, 得 $$x^2+x-6=0.$$

即 $$(x+3)(x-2)=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=-3 \\ y=5 \end{matrix}\right\} \text{ 及 } \left.\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

原方程組共有 $1\times 3=3$ 組公解，其中最高次項有一個一次公因式

$x+y$，故尚有一組無窮解。

32. ［解］ $$\begin{cases} x^2+y=\dfrac{8}{3} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y^2=\dfrac{34}{9} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (1) 式， $$y=\frac{8}{3}-x^2.$$

代入 (2) 式，得 $$3x^4-16x^2+3x+10=0.$$

分解因式 $$(x-1)(x-2)(3x^2+9x+5)=0.$$

$$\therefore\quad x=1,\ 2\ \text{或}\ \frac{-9\pm\sqrt{21}}{6};$$

$$y=\frac{5}{3},\quad -\frac{4}{3}\ \text{或}\ \frac{-1\pm3\sqrt{21}}{6}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=\dfrac{5}{3} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} 2 \\ -\dfrac{4}{3} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \dfrac{-9+\sqrt{21}}{2} \\ \dfrac{-1+3\sqrt{21}}{6} \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \dfrac{-9-\sqrt{21}}{6} \\ \dfrac{-1-3\sqrt{21}}{6} \end{matrix}\right\}$$

33. ［解］ $$\begin{cases} y^2-xy-yz=3 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+4y+z=14 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ x-y+2z=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(2)−(3)， $5y-z=14$ $\qquad z=5y-14$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

代入 (2) 式，得 $x+9y-14=14$ $\qquad x=28-9y$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

將 x，z 之值代入 (1)式，得下列方程式：

$$5y^2-14y-3=0.$$

即 $$(5y+1)(y-3)=0.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix} y=3 \\ z=1 \\ x=1 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} -\dfrac{1}{5} \\ -15 \\ \dfrac{149}{5} \end{matrix}\right\}$$

以 y 之值代入 (4) 及 (5) 得

34. [解] $\begin{cases} x+y+z+u=0 & \cdots\cdots(1) \\ 3x+z+u=0 & \cdots\cdots(2) \\ 3y+2z=0 & \cdots\cdots(3) \\ x^2+y^2+zu=5 & \cdots\cdots(4) \end{cases}$

從 (2) 及 (3) 得 $$x=\frac{-z-u}{3} \cdots\cdots(5)$$

及 $$y=-\frac{2z}{3} \cdots\cdots(6)$$

以 (5), (6) 兩式代入 (1) 得 $-u-z-2z+3z+3u=0$, $\therefore\ u=0$.

從 (5) $$\therefore\ x=-\frac{z}{3} \cdots\cdots(7)$$

以 (6), (7) 兩式及 u 之值代入 (4), 得 $5z^2=45$, $\therefore\ z=\pm 3$.

再以 z 之值代入 (6), (7) 得 $x=\mp 1$, $y=\mp 2$.

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} x&=1 \\ y&=2 \\ z&=-3 \\ u&=0 \end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{aligned}\right\}$$

35 [解] $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=10 & \cdots\cdots(1) \\ (z+x)(x+y+z)=20 & \cdots\cdots(2) \\ (x+y)(x+y+z)=20 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)+(2)+(3), $$(x+y+z)^2=25.$$
$$(x+y+z)=\pm 5.$$

代入 (1), (2) 及 (3) 式, 得

$$y+z=\pm 2 \cdots\cdots(4)$$
$$z+x=\pm 4 \cdots\cdots(5)$$
$$x+y=\pm 4 \cdots\cdots(6)$$

(4)+(5)−(6), $$2z=\pm 6\mp 4=\pm 2.$$
$$\therefore\ z=\pm 1.$$

代入 (5) 式, 得 $$x=\pm 3.$$

代入 (6) 式，得 $$y=\pm 1.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}x&=3\\y&=1\\z&=1\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&-3\\&-1\\&-1\end{aligned}\right\}$$

36. ［解］ $$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6 \cdots\cdots(1)\\ xy+yz+zx=-1 \cdots\cdots(2)\\ 2x+y-2z=-3 \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

(1)＋(2)×2 $$(x+y+z)^2=4.$$

即 $$x+y+z=2 \cdots\cdots(4)$$

及 $$x+y+z=-2 \cdots\cdots(5)$$

解 (3) 及 (4)，得

$$x=3z-5 \text{ 及 } y=7-4z \cdots\cdots(6)$$

代入 (1) 式，得 $$13z^2-43z+34=0.$$

即 $$(13z-17)(z-2)=0.$$

$$\therefore\quad z=\frac{17}{13} \text{ 及 } 2,$$

以 z 之值代入 (6)， $$y=\frac{23}{13} \text{ 及 } -1,$$

$$x=-\frac{14}{13} \text{ 及 } 1.$$

解 (3) 及 (5)，得

$$x=3z-1 \text{ 及 } y=-4z-1 \cdots\cdots(7)$$

代入 (1) 式，得 $$13z^2+z-2=0.$$

$$\therefore\quad z=\frac{-1\pm\sqrt{105}}{26},$$

以 z 之值代入 (7)， $$y=\frac{-11\mp 2\sqrt{105}}{13},$$

$$x=\frac{-29\pm 3\sqrt{105}}{26}.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ \\ y=-1 \\ \\ z=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} -\dfrac{14}{13} \\ \dfrac{23}{13} \\ \dfrac{17}{13} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \dfrac{-29+3\sqrt{105}}{26} \\ \dfrac{-11-2\sqrt{105}}{13} \\ \dfrac{-1+\sqrt{105}}{26} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \dfrac{-29-3\sqrt{105}}{26} \\ \dfrac{-11+2\sqrt{105}}{26} \\ \dfrac{-1-\sqrt{105}}{26} \end{array}\right\}$$

習題 LI　　第331頁

1. 二數立方之差爲 218，而其差之立方爲 8，求此二數。

［解］ 設 x 爲大數，y 爲小數。

則 $\begin{cases} x^3-y^3=218 \cdots\cdots(1) \\ (x-y)^3=8 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $x-y=2 \cdots\cdots(3)$

(1) ÷ (3)， $x^2+xy+y^2=109 \cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (4)，得 $y^2+2y-35=0.$

卽 $(y-5)(y+7)=0.$

$\therefore \quad y=5$ 及 $-7,$

$x=7$ 及 $-5.$

［答］ 所求二數爲 7 及 5，或 -5 及 -7.

2. 有二數，其和之平方減其積爲 63，而其立方之差爲 189. 此二數若何？

［解］ 設 x 爲大數，y 爲小數。

則 $\begin{cases} (x+y)^2-xy=63 \cdots\cdots(1) \\ x^3-y^3=189 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式， $x^2+xy+y^2=63 \cdots\cdots(3)$

(2) ÷ (3)， $x-y=3$ 卽 $x=3+y$

代入 (3) 式，得 $y^2+3y-18=0.$

卽 $(y-3)(y+6)=0.$

$$\therefore \quad y=3 \text{ 及 } -6.$$
$$x=6 \text{ 及 } -3.$$

[答] 所求二數為 6 及 3, 或 -3 及 -6.

3. 有一分數，其二項之和為 11，其與他一分數之積為 $2/3$，但後者之分子分母各較前者之分子分母多 3, 4 求原分數。

[解] 設 x 為分子，y 為分母。

則 $$\begin{cases} x+y=11 \quad \cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x+3}{y+4}=\dfrac{2}{3} \quad \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式， $$3x^2-2y^2+9x-8y=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

從 (1) 式， $$x=11-y.$$

代入 (3) 式，得 $$y^2-83y+462=0.$$

卽 $$(y-6)(y-77)=0.$$

$$\therefore \quad y=6 \text{ 或 } 77,$$
$$x=5 \text{ 或 } -66.$$

[答] 所求之分數為 $\frac{5}{6}$.

4. 求分 37 為三部分，俾三者之積為 1440，且其中二者之積較第三者之三倍多 12.

[解] 設 x, y 及 z 為所求之三部分。

則 $$\begin{cases} x+y+z=37 \quad \cdots\cdots\cdots(1) \\ x\cdot y\cdot z=1440 \quad \cdots\cdots\cdots(2) \\ xy-3z=12 \quad \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

從 (3) 式， $$xy=12+3z.$$

代入 (2) 式，得 $$3z^2+12z-1440=0.$$

卽 $$(3z+72)(z-20)=0.$$

$$\therefore \quad z=20.$$

以 z 之值代入 (3)， $$xy=12+3\cdot 20=72.$$

即 $$x=\frac{72}{y}.$$

代入 (1) 式，得 $$y^2-17y+72=0.$$

$$(y-8)(y-9)=0.$$

$$\therefore\quad y=8\ 及\ 9,$$

$$x=9\ 及\ 8.$$

［答］ 此三部分為 8, 9 及 20.

5. 矩形之對角線長 13 尺，若各邊增 2 尺，則面積應增 38 平方尺．各邊長幾何？

［解］ 設矩形二邊之長各為 x 及 y 尺，

則 $$\begin{cases} x^2+y^2=13^2 \cdots\cdots(1) \\ (x+2)(y+2)=38+x\cdot y \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) $$x+y=17,\ 即\ y=17-x \cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (1) 得 $$x^2-17x+60=0.$$

即 $$(x-5)(x-12)=0.$$

$$\therefore\quad x=5,\ 12.$$

而 $$y=12,\ 5.$$

［答］ 二邊之長各為 5 尺及 12 尺．

6. 直角三角形之周為 36 寸，而其面積為 54 平方寸，求各邊之長．

［解］ 設直角三角形夾直角二邊之長各為 x 及 y 寸，則斜邊為 $\sqrt{x^2+y^2}$ 寸．

依題意得方程式 $$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=36 \cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{2}xy=54 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式， $$xy=108,\ 即\ y=108/x.$$

代入 (1) 式，得 $$x^2-21x+108=0.$$

分解因式 $$(x-12)(x-9)=0.$$

$$\therefore\quad x=12\ 及\ 9,$$

而 $$y=9\ 及\ 12.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=15.$$

[答] 所求三邊之長度爲 9 寸，12 寸及 15 寸.

7. 直角三角形之斜邊較他二邊各長 3 寸及 24 寸，求三角形之各邊.

[解] 設斜邊之長爲 x 寸，則其餘二邊爲 $x-3$ 及 $x-24$ 寸，

由是 $$(x-3)^2+(x-24)^2=x^2.$$

化簡 $$x^2-54x+585=0.$$

分解因式 $$(x-39)(x-15)=0.$$

$$\therefore\quad x=39,\ 15\ (\text{不合理}).$$

$$\therefore\quad x-3=36,\ x-24=15.$$

[答] 所求各邊各爲 39，36 及 15 寸.

8. 由下開條件求室之深廣及高：地板爲矩形，面積 224 平方尺，兩側壁之面積各爲 126 及 144 平方尺.

[解] 設所求之長，寬，高各爲 x，y 及 z 尺.

則 $$\begin{cases} x\cdot y=224 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ y\cdot z=144 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ z\cdot x=126 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

(1) × (3) ÷ (2)， $$\frac{xy\cdot zx}{yz}=\frac{224\times126}{144}.$$

$$x^2=\overline{14}^2.$$

$$x=14\ \text{尺}.$$

代入 (1) 及 (3) 式，得 $$y=16\ \text{尺},$$

$$z=9\ \text{尺}.$$

[答] 此室之長，寬，高爲 14 尺，16 尺及 9 尺.

9. 矩形之周圍有闊 5 寸之邊緣.矩形之面積爲 168 平方寸，邊緣之面積爲 360 平方寸，求矩形之長及闊.

[解] 設矩形之長闊各爲 x 及 y 寸.

則 $$\begin{cases} x\cdot y=168 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ (x+10)(y+10)=360+168 \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式，
$$xy+10x+10y-428=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
從 (1) 式，
$$y=\frac{168}{x}.$$
代入 (3) 式，得
$$x^2-26x+168=0.$$
分解因式
$$(x-14)(x-12)=0.$$
$$\therefore \quad x=14 \text{ 及 } 12.$$
$$y=12 \text{ 及 } 14.$$

[答] 長方形之長及寬爲 14 寸及 12 寸。

10. 甲乙二人購煤，每付價 135 圓甲比乙多得 3 噸，甲所付 4 噸之價較乙所付 5 噸之價少 7 圓，求二人所付每噸之價。

[解] 設甲乙二人所付每噸之價各爲 x 及 y 元。

則
$$\begin{cases} \dfrac{135}{x}=\dfrac{135}{y}+3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5y=4x+7 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$
從 (2) 式，
$$y=\frac{4x+7}{5}.$$
代入 (1) 得
$$4x^2+52x-315=0.$$
分解因式
$$(2x-9)(2x+35)=0.$$
$$\therefore \quad x=\frac{9}{2}=4.5,\ -\frac{35}{2} \text{ 負數不適用.}$$
$$\therefore \quad y=5.$$

[答] 甲乙所付每噸之價各爲 4.5 元及 5 元。

11. 本金若干，以單利計算，一年後之本利和爲 1248 圓，若本金增 100 圓，利率增 $1\frac{1}{2}$ 倍，則二年後之本利和爲 1456 圓，本金及利率若何？

[解] 設本金爲 x 元，利率爲 y，

則
$$x+xy=1248 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$(x+100)+(x+100)\cdot y\cdot\tfrac{3}{2}\cdot 2=1456 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
從 (2)
$$x+300y+3xy=1356 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
(1)×3−(3)
$$2x-300y=2388.$$
即
$$x-150y=1194 \text{ 亦即 } x=150y+1194 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 (4) 代入 (1) $150y^2+1344y=54.$

卽 $75y^2+672y-27=0.$

分解因式 $(25y-1)(3y+27)=0.$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{25}=\frac{4}{100}=4\% \text{ 或 } -\frac{27}{3}=-9 \text{ (負數不適用).}$$

以 y 之值代入 (4), $x=1200.$

[答] 本金爲 1200 元，利率爲 4%.

12. 一人以金 60,000 圓與其子及孫，計共七人，每人所得，子較孫多 2000 圓，而諸子共得總數之 $\frac{1}{3}$. 求子及孫各幾人，又各得金幾何？

[解] 設 x 爲其子數，則 $7-x$ 爲其孫數.

再設 y 元爲諸子所得之數，則諸孫所得之數爲 $60000-y$ 元.

依題意得方程式
$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}-\dfrac{60000-y}{7-x}=2000 & \cdots\cdots(1)\\[2ex] y=\dfrac{1}{3}\times 60000 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 得 $y=20000,$

代入 (1) $$\frac{20000}{x}-\frac{40000}{7-x}=2000.$$

化簡 $x^2-37x+70=0.$

分解因式 $(x-2)(x-35)=0.$

$\therefore\quad x=2$ 人(子數),

$7-x=5$ 人(孫數),

而 $$\frac{20000}{x}=10000 \text{ 元(子所得),}$$

$$\frac{40000}{7-x}=8000 \text{ 元(孫所得).}$$

[答] 其子二人，其孫五人；子每人所得爲 10000 元，孫每人所得爲 8000 元.

13. 舟人以常速划船 15 哩所費之時間，順流較逆流少 5 小時，如速率加倍，則順流較逆流少 1 小時. 此人靜水中之常速若何，又流速若何？

[解]　設流速爲每小時 x 哩，此人靜水中常速爲每小時 y 哩。

則此人順流速度爲 $y+x$ 哩，逆流速度爲 $y-x$ 哩。

故得方程式 $\begin{cases}\dfrac{15}{y-x}-\dfrac{15}{y+x}=5 \cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{15}{2y-x}-\dfrac{15}{2y+x}=1 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1)　　$x^2+6x-y^2=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2)　　$x^2+30x-4y^2=0 \cdots\cdots(4)$

(3)×5－(4)　　$4x^2=y^2 \cdots\cdots(5)$

以 (5) 代入 (3) 得　$3x^2-6x=0$　即　$3x(x-2)=0$.

$\therefore$　$x=0$ (不適用)，$x=2$.

從 (5)　　$y=\sqrt{4x^2}=2x=4$.

[答]　流速爲每小時 2 哩，此人靜水中常速爲 4 哩。

14　甲乙丙三人合作一工，1 小時又 20 分可畢。各人獨作此工所費之時間，丙倍於甲而較乙多 2 小時。問獨作此工各須時幾何？

[解]　設甲乙丙單獨作工所需之時間各爲 x, y, z 小時，

因 1 小時 20 分 $=1\frac{1}{3}$ 時　$\therefore$ $\begin{cases}1\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1\dfrac{1}{3} \cdots\cdots(1)\\ z=2x \cdots\cdots(2)\\ z=2+y \cdots\cdots(3)\end{cases}$

從 (2), (3) 式，　　$y=2x-2 \cdots\cdots(4)$

將 (2), (4) 代入 (1) 式，得 $3x^2-11x+6=0$.

即　　$(3x-2)(x-3)=0$.

$\therefore$　$x=3$ 小時，

$y=2x-2=4$ 小時，

$z=2x=6$ 小時。

[答]　甲獨作須 3 小時；乙 4 小時；丙 6 小時。

15.　在 20 尺長之圓周上，有甲乙兩物以一定速率依同方向運動。甲行一周所費之時間較乙少 2 秒，甲與乙每分鐘相會一次。甲與乙之速率

各若何?

[解] 設甲與乙之速率各爲每秒 x 及 y 尺。

則 $\begin{cases} \dfrac{20}{y}-\dfrac{20}{x}=2 & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{20}{x-y}=60 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，$$10x-10y=xy$$

$$\therefore \quad x=\frac{10y}{10-y}.$$

代入 (1) 式，得 $$3y^2+y-10=0.$$

$$(3y-5)(y+2)=0.$$

$$\therefore \quad y=\tfrac{5}{3},\ -2\ (\text{負數不適用})。$$

$$\therefore \quad x=2.$$

[答] 甲乙之速率各爲每秒 $\frac{5}{3}$ 尺及 2 尺。

16. 二直線成直角相交於 O，其上有二點 A 及 B 以一定速率向 O 移動。現今 A 距 O 爲 28 寸；B 距 O 爲 9 寸；二秒鐘後，A 及 B 相距 13 寸，三秒鐘後，相距 5 寸。A 及 B 之速率各若何?

[解] 設 A, B 之速率各爲每秒 x 及 y 寸。

則 $\begin{cases} (28-2x)^2+(9-2y)^2=\overline{13}^2 & \cdots\cdots(1) \\ (28-3x)^2+(9-3y)^2=5^2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，$$x^2+y^2-28x-9y+174=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式，$$3x^2+3y^2-56x-18y+280=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

(4) − (3) × 3，$$28x+9y-242=0.$$

即 $$y=\frac{242-28x}{9}.$$

代入 (3) 式，得 $$865x^2-13552x+53056=0.$$

分解因式 $$(865x-6632)(x-8)=0.$$

$$\therefore \quad x=8 \text{ 或 } \frac{6632}{865}.$$

$$y=2 \text{ 或 } \frac{23634}{7785}.$$

［答］ A之速率每秒8寸；B，每秒2寸，或$\frac{6632}{865}$寸，$\frac{23634}{7785}$寸。

17. 甲乙丙三人同時出發步行某距離。甲每小時行$4\frac{1}{2}$哩，先乙2小時完成行程。乙每小時比丙快1哩，先丙3小時完成行程。求此距離。

［解］ 設此距離爲x哩，乙之速率爲每小時y哩則丙之速率當爲$y-1$哩。

依題意得方程式 $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{4\frac{1}{2}}=2 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{y-1}-\dfrac{x}{y}=3 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從(1)式， $9x-2xy=18y \cdots\cdots(3)$

從(2)式， $3y^2-3y-x=0.$

即 $x=3y^2-3y.$

代入(3)式，得 $2y^2-11y+15=0.$

分解因式 $(2y-5)(y-3)=0.$

$$y=3 \text{ 或 } \frac{5}{2}.$$

$$\therefore\quad x=18 \text{ 或 } \frac{45}{4}.$$

［答］ 此距離長18哩或$\frac{45}{4}$哩。

18. 甲乙兩脚夫同時各由P及Q出發，相向而行。兩人相會時甲已比乙多行12哩。兩人相會後甲以原速又行$4\frac{2}{3}$小時而至Q，乙亦以原速又行$7\frac{5}{7}$小時而至P。由P至Q之距離若何？

［解］ 設二人相遇時，甲行x哩，乙行y哩。

則甲之速率爲$\dfrac{y}{4\frac{2}{3}}$即$\dfrac{3y}{14}$哩， 乙之速率爲$\dfrac{x}{7\frac{5}{7}}$即$\dfrac{7x}{54}$哩。

依題意得方程式 $\begin{cases} x-y=12 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{\frac{3y}{14}}=\dfrac{y}{\frac{7x}{54}} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) $98x^2=162y^3$ 即 $49x^2=81y^2$ ………………………… (3)

從 (1) $x=y+12.$

代入 (3) $49(y+12)^2=81y^2.$

化簡 $\therefore\ 32y^2-1176y-7056=0.$

即 $4y^3-147y-882=0.$

應用公式 $\therefore\ y=\dfrac{147\pm\sqrt{(147)^2-4\cdot4\cdot(-882)}}{8}$

$$=\frac{147\pm\sqrt{21609+14112}}{8}$$

$$=\frac{147\pm\sqrt{35721}}{8}=\frac{147\pm189}{8}.$$

$\therefore\ y=42,\ -\dfrac{21}{4}$ (負數不適用).

$$\therefore\ x=y+12=42+12=54.$$

$$\therefore\ x+y=54+42=96.$$

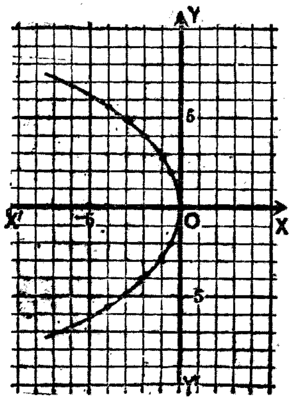
[答] PQ 間之距離爲 96 哩.

習 題 LII 第 339 頁

求下列各方程式之圖象.

1. [解] $y^2=-8x.$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{-8x}=\pm2\sqrt{-2x}.$



因 y 爲實數,故根式中須爲正數,即 x 須爲負數,故圖象完全在 y 軸之左.

當 $x=0$ 時 $y=0$ 即圖象經過原點,又 x 爲一數值時 y 有絕對值相等而符號相反之二數值故關於 x 軸爲對稱.

當 $x=0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$ ……

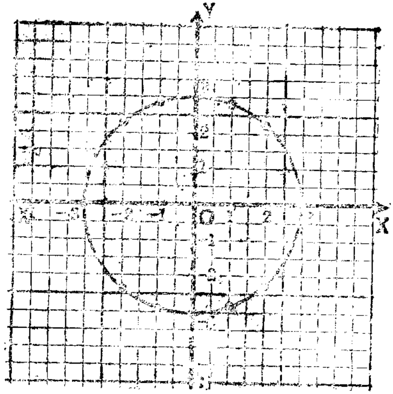
得 $y=0,\ \pm2,\ \pm2\sqrt{2},\ \pm4,\ \pm2\sqrt{6},\ \pm4\sqrt{2}$ ……

此圖象爲拋物線.

2. [解] $x^2+y^2=9.$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{9-y^2}$

$\quad\quad=\pm\sqrt{(3+y)(3-y)}.$



當 $y>3$ 或 $y<-3$ 時根式中爲負數，而 x 爲虛數，故欲使 x 爲實數須 $-3\leqq y\leqq 3$.

又 y 有一數值時，x 有絕對值相等而符號相反之二數值，故關於 y 軸爲對稱.

同理，$y=\pm\sqrt{9-x^2}$

$\quad\quad=\pm\sqrt{(3+x)(3-x)}.$

欲使 y 爲實數須 $-3\leqq x\leqq 3$. 當 x 有一數值時，y 有絕對值相等而符號相反之二數值，故關於 x 軸亦對稱。

當 $x=-3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\cdots\cdots$

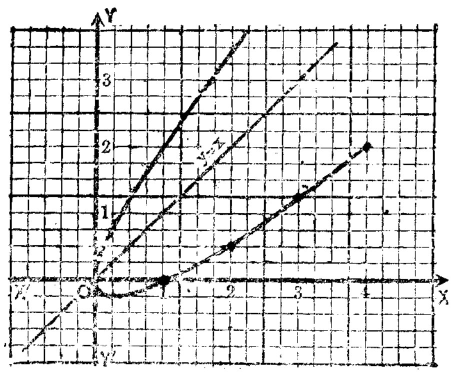
得 $y=0,\quad \pm\sqrt{5},\ \pm 2\sqrt{2},\ \pm 3,\ \pm 2\sqrt{2},\ \pm\sqrt{5},\ 0\cdots\cdots$

此圖象爲圓.

3. [解] $(y-x)^2=x.$

$\because\quad y-x=\pm\sqrt{x},$

$\therefore\quad y=x\pm\sqrt{x}.$



因 y 爲實數，故根式中 x 不能爲負數.

即圖象完全在 y 軸之右.

畫 $y=x$ 之直線，在此直線上任取一點以此點之縱標增減此點橫標之平方根數即得圖象上之相當二點。

當 $x=0,\quad \frac{1}{4},\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots\ldots$

得 $y=0,\ \frac{1}{4}\pm\frac{1}{2},\ 1\pm1,\ 2\pm\sqrt{2},\ 3\pm\sqrt{3},\ 4\pm2,\ \ldots\ldots$

將原方程式展開得 $\qquad y^2-2xy+x^2=x.$

即 $$x^2-(2y+1)x+y^2=0.$$

解 x, $\therefore\ x=\dfrac{(2y+1)\pm\sqrt{(2y+1)^2-4y^2}}{2}=\dfrac{2y+1\pm\sqrt{4y+1}}{2}.$

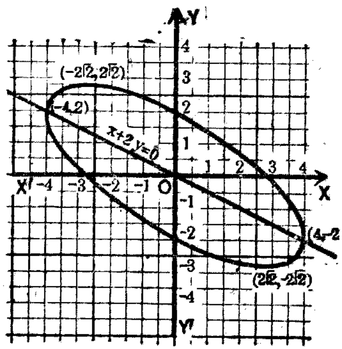
因 x 爲實數，故根式中須爲正數即 $4y+1\geqq0.$

$\therefore\ y\geqq-\dfrac{1}{4}$ 故 y 之極小值爲 $-\dfrac{1}{4}.$

此圖象爲拋物線。

4. [解] $x^2+2xy+2y^2=8.$

$\because\quad x^2+2xy+2y^2-8=0.$



用公式解 x,

$$\begin{aligned}x&=-y\pm\sqrt{y^2-(2y^2-8)}\\&=-y\pm\sqrt{8-y^2}\\&=-y\pm\sqrt{(2\sqrt{2}+y)(2\sqrt{2}-y)}.\end{aligned}$$

因 x 爲實數，根式中須爲正數即須 $-2\sqrt{2}\leqq y\leqq2\sqrt{2}.$

而 y 之極大值爲 $2\sqrt{2}$，極小值爲 $-2\sqrt{2}.$

當 $y=2\sqrt{2}$ 時，$x=-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}.$

又 $y=-2\sqrt{2}$ 時，$x=2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}.$

即此圖象與 $y=2\sqrt{2}$ 及 $y=-2\sqrt{2}$ 直線相切，其切點爲 $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ 及 $(2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}).$

若由原方程式解 y 得 $\quad y=\dfrac{-x\pm\sqrt{16-x^2}}{2}.$

即 $$y=\frac{-x\pm\sqrt{(4+x)(4-x)}}{2}.$$

因根式中須爲正數，$\therefore$ 須 $-4\leqq x\leqq4.$ 此圖象與 $x=4$ 及 $x=-4$ 相切。

其切點爲 $(-4, 2)$ 及 $(4, -2)$. 畫 $y=-\frac{x}{2}$ 即 $x+2y=0$ 之直線，在此直線上任取一點.

以此點之縱標增減 $\sqrt{16-x^2}$ (其中 x 即爲該點之橫標)，即得圖象上之相當二點.

當 $x=-4,\quad -2,\quad 0,\quad 2,\quad 4$

$y=2,\quad 1\pm\sqrt{3},\quad \pm 2,\quad -1\pm\sqrt{3},\quad -2.$

此圖象爲橢圓.

5. [解] $y^2-4xy+3x^2+4x=0.$

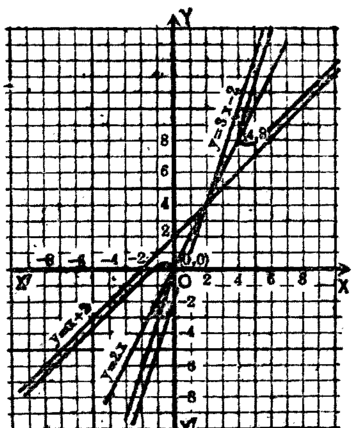
解 y, $\therefore\quad y=2x\pm\sqrt{4x^2-(3x^2+4x)}=2x\pm\sqrt{x(x-4)}.$

因根式中須爲正數，在 $0<x<4$ 時無圖象.

x 之絕對值可大至 ∞.

故此圖象爲雙曲線.

畫 $y=2x$ 之直線，在此直線上任取一點，以此點之縱標增減 $\sqrt{x(x-4)}$ (其中 x 爲該點之橫標)，即得圖象上之相當二點.



再設此雙曲線之漸近線之方程式爲 $y=mx+c$, 以此方程式與原方程式聯立，得

$(mx+c)^2-4(mx+c)x+3x^2+4x=0.$

即　　$(m^2-4m+3)x^2+(2mc-4c+4)x+c^2=0.$

因 x 之二值均爲 ∞,

$$\therefore\quad m^2-4m+3=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

及

$$2mc-4c+4=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) $m=1, 3$, 代入 (2), $c=2, -2$.

故二漸近線之方程式爲 $y=x+2$ 及 $y=3x-2$.

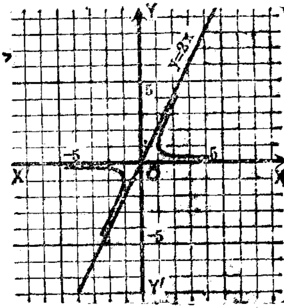
當 $x=-3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\ 4,\quad 5\quad\cdots\cdots$

得 $y=-6\pm\sqrt{21},\ -4\pm2\sqrt{3},\ 2\pm\sqrt{5},\ 0,\ 8,\ 10\pm\sqrt{5}\cdots\cdots$

6. [解] $y^2-2xy+1=0.$

解 y, $\quad y=x\pm\sqrt{x^2-1}=x\pm\sqrt{(x+1)(x-1)}.$

因根式中須爲正數，$\therefore$ 在 $-1<x<1$ 時無圖象.



x 之絕對值可大至 ∞，故此圖象爲雙曲線.

設漸近線之方程式爲 $y=mx+c$.

代入原方程式得

$$(mx+c)^2-2(mx+c)x+1=0,$$

即 $(m^2-2m)x^2+(2mc-2c)x+c^2+1=0.$

因 x 之二值均爲 ∞，故 $m^2-2m=0$ 及 $2mc-2c=0.$

$$\therefore\quad m=0,\ 2,\ 而\ c=0,\ 0.$$

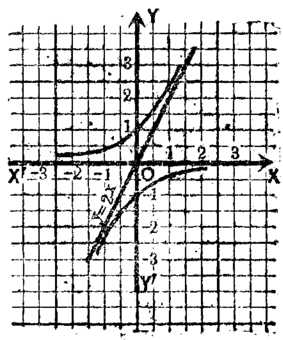
故二漸近線之方程式爲 $y=0,\ y=2x.$

當 $x=-1,\quad -2,\quad -3\quad\cdots\cdots1,\quad 2,\quad 3\quad\cdots\cdots$

得 $y=-1,\ -2\pm\sqrt{3},\ -3\pm2\sqrt{2}\cdots\cdots1,\ 2\pm\sqrt{3},\ 3\pm2\sqrt{2}\cdots\cdots$

7. [解] $y^2-2xy-1=0.$

解 y, $\quad y=x\pm\sqrt{x^2+1}.$



x 之任何數值均可使根式爲正數.

故此圖象爲雙曲線.

設漸近線之方程式爲 $y=mx+c$，代入原式得 $\quad(mx+c)^2-2x(mx+c)-1=0.$

即 $(m^2-2m)x^2+(2mc-2c)x+c^2-1=0.$

因 x 之二值爲 ∞，$\therefore\ m^2-2m=0$ 及 $2mc-2c=0.$

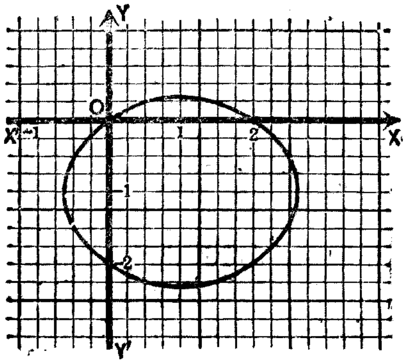
$$\therefore\quad m=0,\ 2\ 及\ c=0,\ 0.$$

故所求漸近線爲 $y=0,\ y=2x.$

當 $x=-2\qquad -1,\qquad 0,\qquad 1,\qquad 2\quad\cdots\cdots$

得 $y=-2\pm\sqrt{5}\quad -1\pm\sqrt{2},\ \pm1,\ 1\pm\sqrt{2},\ 2\pm\sqrt{5}\cdots\cdots$

8. [解] $2x^2+3y^2-4x+6y=0.$



解 y, $y=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-3(2x^2-4x)}}{3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+12x-6x^2}}{3}$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{3(3+4x-2x^2)}}{3}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-6\left(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}}{3}$$

因 y 爲實數,須 $+1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\leqq x\leqq 1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

解 x, 可得 y 之極小值爲 $-1+\dfrac{\sqrt{15}}{3}$, 極大值爲 $-1-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

當 $x=1-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\qquad 0,\qquad 1,\qquad 2,\qquad 1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}.$

得 $y=-1,\qquad 0$ 或 $-2,\ -1\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3},\ 0$ 或 $-2,\quad -1.$

此圖象爲橢圓.

9. [解] $y^2-x^2-3x+y-2=0.$

解 y. $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(x^2+3x+2)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4x^2+12x+9}}{2}$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{(2x+3)^2}}{2}$$

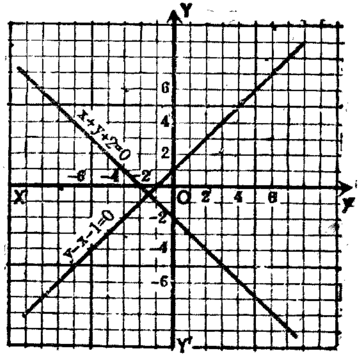
$$=\frac{-1\pm(2x+3)}{2}.$$

$$\therefore\ y=\frac{-1+2x+3}{2},$$

即 $y-x-1=0,$

及 $y=\dfrac{-1-2x-3}{2},$

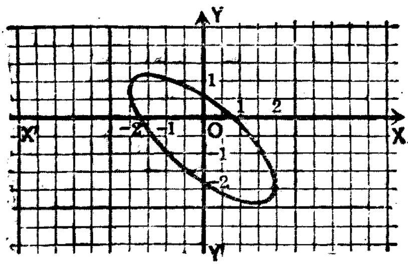
即 $y+x+2=0.$



即原式可分解爲二因式 $(y+x+2)(y-x-1)=0.$

故圖象爲相交二直線。

10. [解] $2x^2+4xy+4y^2+x+4y-5=0.$



解 y, $y=\dfrac{-(x+1)\pm\sqrt{(x+1)^2-(2x^2+x-5)}}{2}$

$$=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{(3-x)(2+x)}}{2}.$$

因 y 爲實數故須 $-2\leqq x\leqq 3.$

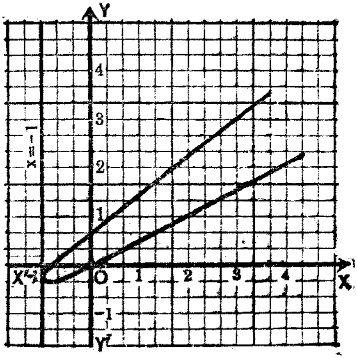
同樣解 x, 可求得 y 之極小値爲 $\dfrac{-(3+5\sqrt{2})}{4}$ 極大値爲 $\dfrac{-3+5\sqrt{2}}{4}$.

當 $x=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad -1,\quad -2\cdots\cdots$

得 $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{2},\quad \dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2},\quad \dfrac{-3\pm 2}{2},\quad -2,\quad \pm 1,\quad \dfrac{1}{2}\cdots\cdots$

此圖象爲橢圓.

11. [解] $4x^2-12xy+9y^2+3x-6y=0$.



解 y, $$y=\frac{(2x+1)\pm\sqrt{x+1}}{3}.$$

因 y 爲實數根式中須爲正數即須 $x>-1$.

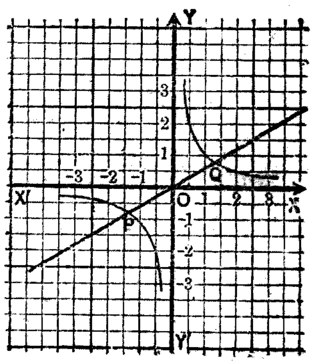
故此圖象爲抛物線.

當 $x=0$　　1,　　2,　　3,　　-1……

得 $y=0$ 或 $\frac{2}{3}$, $1\pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\frac{5\pm\sqrt{3}}{3}$, 3 或 $\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}$……

求下列各組方程式之圖象及其交點.

12. [解] $\begin{cases} xy=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-5y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$



(1) 爲雙曲線, 其漸近線爲 $x=0$ 及 $y=0$.

當 $x=1, 2, 3, -1, -2, -3$……

得 $y=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$……

(2) 爲一直線.

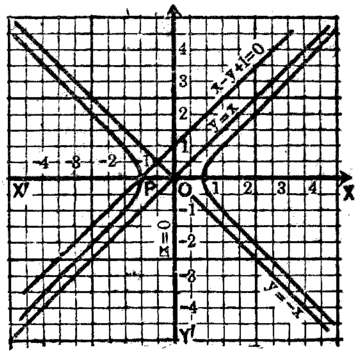
當 $x=0$,　2, -1……

得 $y=-\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$, -1……

(1), (2) 交點之坐標爲 $P(-1, -1)$ 及 $Q(\frac{5}{3}, \frac{3}{5})$.

13. ［解］ $\begin{cases} x^2-y^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) 爲雙曲線，$\because\ y=\pm\sqrt{(x+1)(x-1)}$ 故在 $-1<x<1$ 時無圖象.



設漸近線方程式爲 $y=mx+c$ 代入 (1),

得 $x^2-(m^2x^2+2mcx+c^2)=1.$

即 $(1-m^2)x^2-2mcx-c^2-1=0$. 因 x 之二值爲 ∞.

$\therefore\ 1-m^2=0$ 及 $2mc=0,$

$\therefore\ m=\pm1,\ c=0.$

故二漸近線方程式爲 $y=x$ 及 $y=-x$.

當 $x=\pm1,\ \pm2,\ \pm3\ \cdots\cdots$

得 $y=0,\ \pm\sqrt{3},\ \pm2\sqrt{2}\cdots\cdots$

(2) 可分解因式，即 $x(x-y+1)=0.$

故 (2) 爲二直線 $x=0,\ x-y+1=0.$

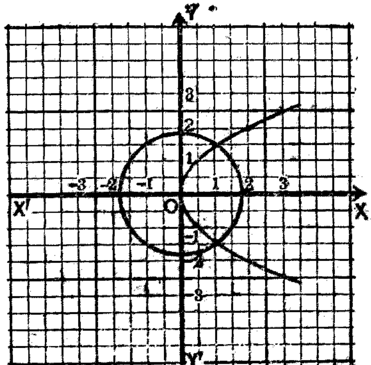
$x=0$ 爲 y 軸，在 $x-y+1=0$ 中，

當 $x=0,\ 2\cdots\cdots$

得 $y=1,\ 3\cdots\cdots$

(1), (2 交點之坐標爲 $P(-1,0)$.

14. ［解］ $\begin{cases} x^2+y^2=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2=2x \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$



(1) 爲圓，

$\because\ y=\pm\sqrt{3-x^2}$

$=\pm\sqrt{(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)},$

故 $x>\sqrt{3}$ 或 $x<-\sqrt{3}$ 時無圖象.

同樣，$\because\ x=\pm\sqrt{3-y^2}$

$=\pm\sqrt{(\sqrt{3}+y)(\sqrt{3}-y)},$

故 $y>\sqrt{3}$ 或 $y<-\sqrt{3}$ 時無圖象.

當 $x=0,\quad \pm1,\quad \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}\cdots\cdots$

得 $y=\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2},\quad \pm1,\quad 0\ \cdots\cdots$

(2) 爲拋物線. $\because\ y=\pm\sqrt{2x}$, 故 x 之值不能爲負數。

當 $x=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\ \cdots\cdots$

得 $y=0,\ \pm\sqrt{2},\ \pm2,\ \pm\sqrt{6},\ \pm2\sqrt{2}\cdots\cdots$

(1), (2) 交點爲 $P(1,\sqrt{2})$ 及 $Q(1,-\sqrt{2})$.

15. [解] $\begin{cases} y^2-xy-2x^2-2x-2y-2=0 & \cdots\cdots(1)\\ y^2-xy-2x^2+2=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

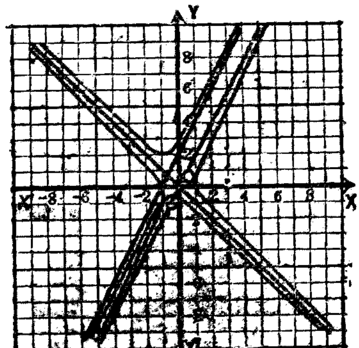
從 (1) $\qquad y^2-(x+2)y-2x^2-2x-2=0.$

$$\therefore\quad y=\frac{x+2\pm\sqrt{(x+2)^2+4\cdot2(x^2+x+1)}}{2}=\frac{x+2\pm\sqrt{3(3x^2+4x+4)}}{2},$$

根式中 $3x^2+4x+4=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\right)=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\right)$

$$=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right].$$

故不論 x 爲何種實數,根式中必爲正.



故此圖象爲雙曲線.

設漸近線之方程式爲 $y=mx+c$,

代入 (1) 得 $(m^2-m-2)x^2$

$\qquad+(2mc-c-2-2m)x$

$\qquad+c^2-2c-2=0.$

因 x 之二值均爲 ∞,

$\qquad\therefore\quad m^2-m-2=0,$

及 $2mc-c-2-2m=0$, 解之,

得 $\qquad m=2,\ -1.$

而 $c=2,0$. 故二漸近線方程式爲 $y=-x$ 即 $y+x=0$ 及 $y=2x+2$.

當 $x=-2,\quad -1,\quad 0,\quad 1\ \cdots\cdots$

得 $y=\pm\sqrt{6},\ -1$ 或 $2,\ 1\pm\sqrt{3},\ \frac{3\pm\sqrt{33}}{2}\cdots\cdots$

從 (2) $$y^2-xy-(2x^2-2)=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{x\pm\sqrt{x^2+4(2x^2-2)}}{2}=\frac{x\pm\sqrt{9x^2-8}}{2}$$

$$=\frac{x\pm\sqrt{(3x+2\sqrt{2})(3x-2\sqrt{2})}}{2}.$$

$\therefore$ 在 $x\leqq-\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 及 $x\geqq\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 時，根式中方爲正數，卽在

$$-\frac{2}{3}\sqrt{2}<x<\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

時無圖象，此圖象亦爲雙曲線，而此曲線之漸近線可求得爲 $y+x=0$ 及 $y-2x=0$.

當 $x=\quad -2,\quad -1,\quad 1,\quad 2\ \cdots\cdots$

得 $y=-1\pm\sqrt{7},\ 0$ 或 $-1,\ 1$ 或 $0,\ 1\pm\sqrt{7}\cdots\cdots$

(1), (2) 之交點爲 $P(-1,-1)$.

16. ［解］ $(x-2y)(x+y)+x-3y=0$ ……………………………(1)

$(x-2y)(x-y)+2x-6y=0$ ……………………………(2)

從 (1) $$2y^2+(x+3)y-(x^2+x)=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{-(x+3)\pm\sqrt{9x^2+14x+9}}{4}.$$

因 $$9x^2+14x+9=9\left[\left(x+\frac{7}{9}\right)^2+\frac{32}{81}\right].$$

不論 x 爲何種實數，根式中常爲正。

故此圖象爲雙曲線。

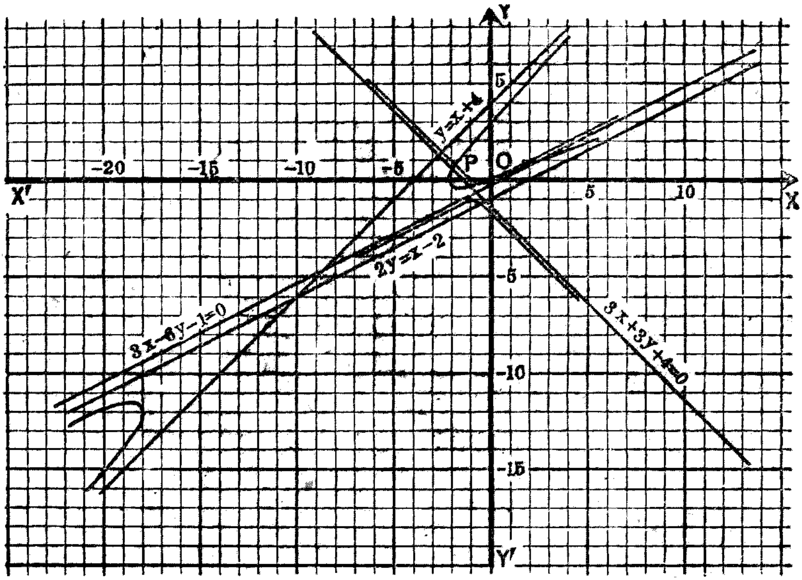
照上例可求得二漸近線爲 $3x+3y+4=0$ 及 $3x-6y-1=0$.

當 $x=0,\quad 1,\quad 2,$

得 $y=0$ 或 $-\frac{3}{2},\ -1\pm\sqrt{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{73}}{4},$

$x=-1,\quad -2,\quad -3,\quad -4\ \cdots\cdots$

$y=0$ 或 $-1,\ \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4},\ \pm\sqrt{3},\ \frac{1\pm\sqrt{97}}{4}\cdots\cdots$



從 (2) $$2y^2-3(x+2)y+(x^2+2x)=0,$$

$$\therefore\quad y=\frac{3(x+2)\pm\sqrt{x^2+20x+36}}{4}=\frac{3(x+2)\pm\sqrt{(x+2)(x+18)}}{4}$$

在 $-18<x<-2$ 時根號中為負數，無圖象。在 $x\leqq-18$ 及 $x\geqq-2$ 時根號中為正數而 y 可為實數，故此圖象為雙曲線。

照上例可求得二漸近線為 $y=x+4$ 及 $2y=x-2$.

當 $x=0,\quad 1,\quad 2,\quad -1,\quad -2,\ -18,\quad -19\quad\cdots\cdots$

得 $y=3$ 或 $0,\ \dfrac{9\pm\sqrt{57}}{4},\ 3\pm\sqrt{5},\ \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4},\ \ 0,\ \ -12,\ \dfrac{-51\pm\sqrt{17}}{4}\ \cdots\cdots$

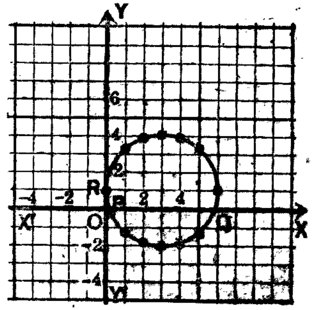
(1), (2) 之交點為 $P(-\frac{9}{5},\frac{3}{5})$ 及 0 (0, 0).

17 求 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 之圖象及其與 x 軸 y 軸之交點。

〔解〕 求 y, $\therefore\ y=1\pm\sqrt{1-(x^2-6x+1)}=1\pm\sqrt{x(6-x)}$.

$\therefore$ 在 $x<0$ 及 $x>6$ 時無圖象。

$x=0$ 及 6 時 $y=1$，即此圖象切於二直線 $x=0$ 及 $x=6$.



同理求 x，
$$x=3\pm\sqrt{9-(y^2-2y+1)}$$
$$=3\pm\sqrt{8+2y-y^2}$$
$$=3\pm\sqrt{(2+y)(4-y)}.$$

在 $y<-2$ 及 $y>4$ 時無圖象。

$y=-2$ 及 4 時，$x=3$，即此圖象切於二直線 $y+2=0$ 及 $y-4=0$.

當 $y=1,\ 1\pm\sqrt{5},\ 1\pm\sqrt{8},\ 4$ 或 $-2,\ 1\pm2\sqrt{2},\ 1\pm\sqrt{5},\ 1$

得 $x=0,\quad 1,\quad 2,\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 6$

此圖象爲圓與 x 軸之交點爲 $P\,(3-\sqrt{8},0)$ 及 $Q\,(3+\sqrt{8},0)$

與 y 軸之交點爲 $R\,(0,1)$，R 即爲切點。

18. 求證 $(x-y)^2-2(x+y+1=0$ 之圖象與 x 軸及 y 軸相切。

［解］ 以 $x=0$ 代入原方程式，得 $y=1,1$，即 $(0,1),(0,1)$ 兩點相合，即爲切點。

以 $y=0$ 代入原方程式，得 $x=1,1$，即 $(1,0),(1,0)$ 兩點相合，即爲切點。

$\therefore$ 原方程式之圖象與 x 軸及 y 軸相切。

19. 求證直線 $y=3x+5$ 與 $16x^2+y^2-16=0$ 之圖象在點 $(-3/5,\ 16/5)$ 相切。

［解］ 以 $y=3x+5$ 代入 $16x^2+y^2-16=0$ 得 $25x^2+30x+9=0$，

即
$$(5x+3)^2=0.\qquad \therefore\ x=-\frac{3}{5}\ \text{而}\ y=\frac{16}{5}.$$

因 $25x^2+30x+9$ 爲完全平方，故 x 之二值相等，$\therefore$ y 之二值亦等。即原二式之兩交點合一。亦即原二式之圖象相切於 $\left(-\frac{3}{5},\ \frac{16}{5}\right)$.

20. m 須有若何之值，直線 $y=mx+3$ 始能與 $x^2+2y^2=6$ 之圖象相切？

［解］ 將 $y=mx+3$ 代入 $x^2+2y^2=6$ 式中，得

$$x^2+2(mx+3)^2=6.$$

$$x^2(1+2m^2)+12mx+12=0.$$

若原二方程式之圖象相切，則上式 x 之二值應相等，卽上式之判別式應等於 0.

$$\therefore\quad (12m)^2=4\cdot12(1+2m^2)=0.$$

卽 $$144m^2-4\cdot12(1+2m^2)=0.$$

$$\therefore\quad m^2=1.\qquad \therefore\quad m=\pm1.$$

當 $m=\pm1$ 時，則 $y=mx+3$ 與 $x^2+2y^2=6$ 相切。

21. c 須有若何之値，直線 $7x-4y+c=0$ 始能與 $3x^2-y^2+x=0$ 之圖象相切？

［解］ 從 $7x-4y+c=0$ 求 y 得 $y=\dfrac{7x+c}{4}$.

代入 $3x^2-y^2+x=0$ 化簡得 $x^2+14cx-16x+c^2=0$.

因原二方程式之圖象相切，故上式 x 之二値應相等，卽判別式應等於 0.

$$\therefore\quad (14c-16)^2-4c^2=0.$$

卽 $$3c^2-7c+4=0.$$

分解因式 $(3c-4)(c-1)=0$，　$\therefore\ c=\dfrac{4}{3}$ 及 1.

$\therefore$ 當 $c=1$，及 $\dfrac{4}{3}$ 時，$7x-4y+c=0$ 與 $3x^2-y^2+x=0$ 相切。

22. 求證 $y=0$ 及 $x-2y+1=0$ 二直線爲 $xy-2y^2+y+6=0$ 之圖象之漸近線。

［解］ 設 $y=mx+b$ 爲 $xy-2y^2+y+6=0$ 之漸近線，將 y 之値代入此方程式中，得 $(m-2m^2)x^2+(b-4bm+m)x+(2b^2+b+6)=0$.

因 $y=mx+b$ 爲漸近線，故 x^2 及 x 之係數須爲 0.

卽 $$m-2m^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$b-4bm+m=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) $m(1-2m)=0$, 得 $\left.\begin{array}{l}m=0\\b=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

以 m 之值代入 (2) 得

$\therefore$ 所求之漸近線爲 $y=0$, 及 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 卽 $x-2y+1=0$.

23. 求下方程式之圖象之漸近線.

$$2x^2+3xy-2y^2+x+2y+2=0.$$

[解] 設 $y=mx+b$ 爲所求漸近線, 代入

$$2x^2+3xy-2y^2+x+2y+2=0.$$

得 $(2+3m-2m^2)x^2+(3b-4mb+1+2m)x+(2b-7b^2+2)=0.$

x^2 及 x 之係數應等於 0, $\therefore\quad 2+3m-2m^2=0$ ……………………(1)

及 $3b-4mb+1+2m=0$ ……………………(2)

從 (1) $(m-2)(2m+1)=0.\quad\therefore\quad \left.\begin{array}{l}m=2\\b=1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\\0\end{array}\right\}$

以 m 之值代入 (2) 得

$\therefore$ 所求之漸近線爲 $y=2x+1$, 及 $y=-\frac{1}{2}x$ 卽 $x+2y=0$.

24. λ 須有若何之値, $x^2+\lambda xy+y^2=x$ 之圖象始能爲橢圓? 爲抛物線? 爲雙曲線?

[解] 以 $x^2+\lambda xy+y^2-x=0$ 與下方程式比較

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

得 $a=1,\ 2h=\lambda,\ b=1,\ 2g=-1,\ 2f=0,\ c=0.$

(1) 若原方程式爲橢圓, 則 $h^2-ab<0$,

卽 $$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1\cdot 1<0,\quad\therefore\quad \lambda^2-4<0.$$

分解因式 $(\lambda+2)(\lambda-2)<0.\quad\therefore\quad -2<\lambda<2.$ 或 $|\lambda|<2.$

(2) 若原方程式爲抛物線, 則 $h^2-ab=0$,

卽 $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1\cdot 1=0.\quad\therefore\ \lambda^2-4=0.\quad\therefore\ \lambda=\pm 2.$ 或 $|\lambda|=2.$

(3) 若原方程式爲雙曲線, 則 $h^2-ab>0$,

卽 $$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1\cdot 1>0.\quad\therefore\quad \lambda^2-4>0.$$

分解因式 $(\lambda+2)(\lambda-2)>0.\quad\therefore\ \lambda<-2$ 及 $\lambda>2$ 或 $|\lambda|>2$

$\therefore\ |\lambda|<2,\ |\lambda|=2$, 及 $|\lambda|>2$ 時, 原方程式爲橢圓, 抛物線及雙曲線.

習題 LIII

第 341 頁

下列各題中 a, b, c 諸文字假定指示不相等之正數。

1. 求證 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2.$

[解] 因 a, b 為不相等正數，$\therefore (a-b)^2>0.$

展開 $$a^2-2ab+b^2>0$$

移項 $$a^2+b^2>2ab.$$

兩邊除以 ab $$\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

2. 求證 $(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2.$

[解] 因 a, b 為不相等正數，$\therefore (a-b)^2>0.$

展開，移項 $$a^2+b^2>2ab.$$

兩邊乘以 $ab.$ $$ab(a^2+b^2)>2a^2b^2.$$

即 $$a^3b+ab^3>2a^2b^2.$$

兩邊加以 a^4+b^4 $$a^4+a^3b+ab^3+b^4>a^4+2a^2b^2+b^4.$$

分解因式 $$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2.$$

3. 求證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2.$

[解] 因 a, b 為不相等正數，$\therefore (a+b)(a-b)^2>0.$

展開 $$a^3+b^3-a^2b-ab^2>0.$$

移項 $$\therefore a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

4. 求證 $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc.$

[解] 因 a, b, c 為不相等正數，$\therefore (a-b)^2>0.$

展開，移項 $$a^2+b^2>2ab.$$

兩邊乘以 $c.$ $$a^2c+b^2c>2abc.$$

同理 $$b^2a+c^2a>2abc.$$

$$c^2b+a^2b>2abc.$$

三式相加，$\therefore a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc.$

5. 求證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.

[解]　$\because$ $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.　(從第3題)

$b^3+c^3>b^2c+bc^2$.

$c^3+a^3>c^2a+ca^2$.

三式相加　$2(a^3+b^3+c^3)>a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$.

但　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2>6abc$.　(從第4題)

$\therefore$ $2(a^3+b^3+c^3)>6abc$

即　$a^3+b^3+c^3>3abc$.

6. 解 $x+7>\frac{3x}{2}-8$.

[解]　去分母　$2x+14>3x-16$.

移項,合併　$x-30>0$.

$\therefore$ $x>30$.

7. 解 $2x^2+4x>x^2+6x+8$.

[解]　整理　$x^2-2x-8>0$.

分解因式　$(x-4)(x+2)>0$.

當 $x>4$ 時, $x-4$ 及 $x+2$ 均爲正,其乘積爲正.

當 $x<-2$ 時, $x-4$ 及 $x+2$ 均爲負,其乘積亦爲正.

當 $-2<x<4$ 時, $x-4$ 爲負, $x+2$ 爲正,其乘積爲負.

故所求 x 之値爲 $x>4$ 及 $x<-2$.

8. 解 $(x+1)(x-3)(x-6)>0$.

[解]　當 $x<-1$ 時, $x+1$ 爲負, $x-3$ 爲負, $x-6$ 亦爲負,故其乘積爲負.

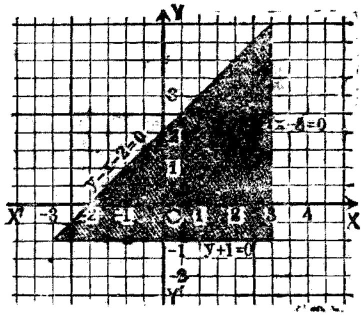
當 $-1<x<3$ 時, $x+1$ 爲正, $x-3$ 爲負, $x-6$ 亦爲負,故其乘積爲正.

當 $3<x<6$ 時, $x+1$ 爲正, $x-3$ 亦爲正, $x-6$ 爲負,故其乘積爲負.

當 $x>6$ 時, $x+1$ 爲正, $x-3$ 爲正, $x-6$ 亦爲正,故其乘積爲正.

$\therefore$ 所求 x 之値爲 $-1<x<3$ 及 $x>6$.

9. 用圖解法解 $y-x-2<0$, $x-3<0$, $y+1>0$.



[解] $y-x-2<0$…………(1)

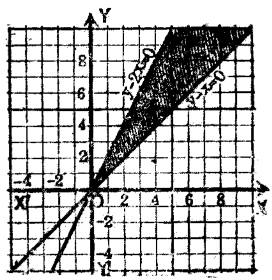
$x-3<0$ …………(2)

$y+1>0$ …………(3)

以原點坐標 $(0, 0)$ 代入 (1), (2), (3) 三式中均能適合.故知適合於 (1) 之各點均在 $y-x-2=0$ 直線之下,適合於 (2) 之各點均在 $x-3=0$ 直線之左,適合於 (3) 之各點均在 $y+1=0$ 直線之上.

圖中三角形內各點之坐標均能同時適合於三不等式.

10. 又 $y-x>0$, $y-2x<0$.

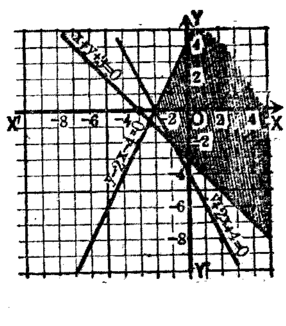


[解] $y-x>0$……(1) $y-2x<0$……(2)

設 $k_1=y-x>0$, $k_2=y-2x<0$.

畫 $k_1=0$, $k_2=0$ 二直線,在 $k_1=0$ 直線上方之各點其 x, y 之值能適合於不等式 $k_1>0$;在 $k_2=0$ 直線下方之各點,其 x, y 之值能適合於不等式 $k_2<0$. 圖中陰影部份各點之 x, y 之值能同時適合於 (1), (2) 故卽爲所求各點之位置.

11. 又 $x+y+3>0$, $y-2x-4<0$, $y+2x+4>0$.



[解] $x+y+3>0$…………(1)

$y-2x-4<0$ …………(2)

$y+2x+4>0$ …………(3)

以原點坐標代入 (1), (2), (3) 三式中,三式均能適合.

故知適合於 (1) 之各點均在 $x+y+3=0$ 直

線之上。

適合於 (2) 之各點均在 $y-2x-4=0$ 直線之下。

適合於 (3) 之各點均在 $y+2x+4=0$ 直線之上。

圖中陰影部分各點之 x, y 之値能同時適合於 (1), (2), (3) 三式，故卽爲所求各點之位置。

12. 試證 $x^2+2x+5>0$ 對於 x 之一切値皆能成立。

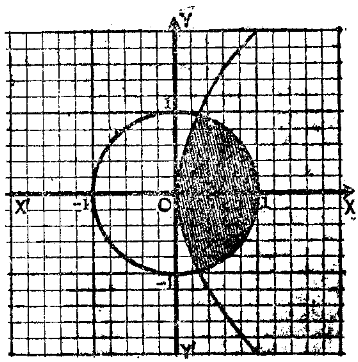
[解] $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4.$

x 之一切値皆使 $(x+1)^2$ 爲正數，故 $x^2+2x+5>0$ 對於 x 之一切値皆能成立。

13 用圖解法解 $x^2+y^2-1<0,\ y^2-4x<0.$

[解] 設 $k_1=x^2+y^2-1<0 \cdots\cdots(1)$

$$k_2=y^2-4x<0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$



書 $k_1=0, k_2=0$ 二圖象 (1) 爲圓，(2) 爲拋物線。在圓周上任何一點 $P(x, y)$ 與原點(卽圓中心)之距離爲 $\sqrt{x^2+y^2}$. 而此距離卽圓半徑。其長等於 1. 在圓內任何點與原點之距離均小於圓半徑卽小於 1. 故適合於 (1) 之各點均在圓內。

再從 (2), $y^2<4x$, 卽 $|y|<|2\sqrt{x}|$, 故適合於 (2) 之各點均在拋物線弧內。圖中陰影部分各點之 x, y 之値能同時適合於 (1) 及 (2) 故卽爲所求各點之位置。

習　題　LIV　　第 346 頁

求下列各方程式或方程組之普徧整數解及正整數解。

1. **[解]** $6x-17y=18.$

$$x=3+2y+\frac{5}{6}y.$$

若 x 爲整數，則 $\frac{5}{6}y$ 必爲整數。

設
$$\frac{5}{6}y=u,\ \text{即}\ 5y-6u=0.$$

$$\therefore\quad y=u+\frac{u}{5}.$$

同理 $\frac{u}{5}$ 必爲整數，命其爲 v，故

$$\frac{u}{5}=v,\ \text{即}\ u=5v.$$

當 $v=1$ 時，
$$u=5,$$
$$y=6,\ x=20.$$

$\therefore$ 普徧整數解爲 $x=20-17t,\ y=6-6t.$

若 x, y 須爲正數，則 $20-17t\geqq 0$ ……(1) 及 $6-6t\geqq 0$ ……(2)

從 (1) $t\leqq\frac{20}{17}$ ……(3) 從 (2) $t\leqq 1$ ……(4)

從 (3), (4) 兩式，可得 $t=1, 0, -1, -2, -3$ ……時 x, y 之值皆爲正整數解。

2. [**解**] $43x-12y=158.$

$$y=-13+3x+\frac{-2+7x}{12}.$$

若 y 爲整數，則 $\frac{-2+7x}{12}$ 必爲整數。

設
$$\frac{-2+7x}{12}=u\ \text{即}\ 7x-12u-2=0.$$

$$x=u+\frac{2+5u}{7}.$$

當 $u=1$ 時，
$$x=2,\ y=-6.$$

$\therefore$ 普徧整數解爲 $x=2-12t,\ y=-6-43t.$

若 x, y 須爲正數，則 $2-12t\geqq 0$ ……(1) 及 $-6-43t\geqq 0$ ……(2)

從 (1) $t\leqq\frac{1}{6}$， 從 (2) $t\leqq-\frac{6}{43}.$

從(3),(4)兩式可得 $t=-1,\ -2,\ -3,\ -4\cdots\cdots$ 時 x, y 之值皆爲正整數解.

3. [解] $16x+39y=1.$

$$x=-2y+\frac{1-7y}{16}.$$

若 x 爲整數,則 $\frac{1-7y}{16}$ 必爲整數.

設 $$\frac{1-7y}{16}=u,\ \text{即}\ 16u+7y=1.$$

$$\therefore\quad y=-2u+\frac{1-2u}{7}.$$

當 $u=-3$ 時, $y=7,\ x=-17.$

$\therefore$ 普徧整數解爲 $x=-17+39t,\ y=7-16t.$

若 x,y 須爲正數,則 $-17+39t\geqq 0\cdots\cdots(1)$ 及 $7-16t\geqq 0\cdots\cdots(2)$

從(1) $t\geqq\frac{17}{39}\cdots\cdots(3)$ 從(2) $t\leqq\frac{7}{16}\cdots\cdots(4)$

從(3),(4)兩式可知 t 無整數值而使 x, y 爲正整數,即 $16x+39y=1$ 無正整數解.

4. [解] $72x+23y=845.$

$$y=36-3x+\frac{17-3x}{23}.$$

若 y 爲整數,則 $\frac{17-3x}{23}$ 必爲整數.

設 $$\frac{17-3x}{23}=u,\ \text{即}\ 3x+23u=17.$$

$$\therefore\quad x=5-7u+\frac{2-2u}{3}.$$

當 $u=1$ 時, $x=-2,\ y=43.$

$\therefore$ 普徧整數解爲 $x=-2+23t,\ y=43-72t.$

若 x,y 須爲正數,則 $-2+23t\geqq 0\cdots\cdots(1),\quad 43-72t\geqq 0\cdots\cdots(2)$

從(1) $t\geqq\frac{2}{23}\cdots\cdots(3)$ 從(2) $t\leqq\frac{43}{72}\cdots\cdots(4)$

從(3),(4)兩式可知t無整數值而使x, y爲正整數，即$72x+23y=845$無正整數解.

5. [解] $49x-27y=28$.

$$y=x-1+\frac{22x-1}{27}.$$

若y爲整數，則$\frac{22x-1}{27}$必爲整數.

設 $\frac{22x-1}{27}=u$, 即 $22x-27u=1$.

$$\therefore\quad x=u+\frac{5u+1}{22}.$$

若x爲整數，則$\frac{5u+1}{22}$必爲整數.

設 $\frac{5u+1}{22}=v$, 即 $22v-5u=1$.

$$\therefore\quad u=\frac{22v-1}{5}=4v+\frac{2v-1}{5}.$$

當$v=3$時，$u=13, x=16, y=28$.

$\therefore$ 普偏整數解爲 $x=16-27t,\ y=28-49t$.

若x, y須爲正數，則$16-27t\geqq 0\cdots\cdots(1)$ 及 $28-49t\geqq 0\cdots\cdots(2)$

從(1) $t\leqq\frac{16}{27}\cdots\cdots(3)$, 從(2) $t\leqq\frac{4}{7}\cdots\cdots(4)$

從(3),(4)兩式，可得$t=0, -1, -2, -3, \cdots\cdots$時，$x, y$之値皆爲正整數解.

6. [解] $47x-97y=501$.

$$x=10+2y+\frac{31+3y}{47}.$$

若x爲整數，則$\frac{31+3y}{47}$必爲整數,

設 $\frac{31+3y}{47}=u$, 即 $31+3y=47u$.

$$\therefore\quad y=15u-10+\frac{2u-1}{3}.$$

當 $u=2$ 時， $y=21,\ x=54.$

$\therefore$ 普偏整數解爲 $x=54-97t,\ y=21-47t.$

若 x, y 須爲正數，則 $54-97t\geqq 0\cdots\cdots(1)$ 及 $21-47t\geqq 0\cdots\cdots(2)$

從 (1) $t\leqq\frac{54}{97}\cdots\cdots(3)$ 從 (2) $t\leqq\frac{21}{47}\cdots\cdots(4)$

從 (3), (4) 兩式，可得 $t=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \cdots\cdots$ 時，x, y 之値皆爲正整數解.

7. ［解］ $\begin{cases}2x+5y-8z=27\cdots\cdots(1)\\ 3x+2y+z=11\cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(2)\times 8+(1)$ $26x+21y=115.$

$$\therefore\quad y=5-x+\frac{10-5x}{21}\cdots\cdots(3)$$

若 y 爲整數，則 $\frac{10-5x}{21}$ 必爲整數.

設 $\frac{10-5x}{21}=u,$ 卽 $21u+5x=10.$

$$\therefore\quad x=2-4u-\frac{u}{5}\cdots\cdots(4)$$

而 $\frac{u}{5}$ 亦必爲整數解.

設 $-\frac{u}{5}=t.$ 卽 $u=-5t.$

以 u 之値代入 (3), (4) 兩式，得 $x=2+21t,\ y=3-26t.$

以 x, y 之値代入 (2) 得 $z=-1-11t.$

$\therefore$ 普偏整數解爲 $x=2+21t\ \ y=3-26t,\ z=-1-11t.$

若 x, y, z 須爲正數，則 $2+21t\geqq 0\cdots\cdots(4)$ $3-26t\geqq 0\cdots\cdots(5)$

及 $-1-11t\geqq 0\cdots\cdots(6)$

從 (4) $t\geqq\frac{-2}{21}\cdots\cdots(7)$, 從 (5) $t\leqq\frac{3}{26}\cdots\cdots(8)$, 從 (6) $t\leqq\frac{-1}{11}\cdots\cdots(9)$

從 (7), (8), (9) 三式可知 t 無整數値而使 x, y, z 爲正整數，卽原方程組無正整數解.

8. [解] $\begin{cases} 5x+2y=42 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3y-7z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times 3-(2)\times 2$, $15x+14z=122$.

$$\therefore \quad z=-x+8+\frac{10-x}{14} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

若 z 爲整數，則 $\frac{10-x}{14}$ 必爲整數.

設 $\frac{10-x}{14}=t$，卽 $x=10-14t \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以 x 之值代入 (3)，$\therefore \quad z=-2+15t \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

以 (5) 代入 (2) $3y+14-105t=2$，卽 $3y=-12+105t$.

$$\therefore \quad y=-4+35t.$$

$\therefore$ 普偏整數解爲 $x=10-14t$, $y=-4+35t$, $z=-2+15t$.

若 x, y, z 須爲正數，則 $10-14t\geqq 0\cdots\cdots(6)$ $-4+35t\geqq 0\cdots\cdots(7)$

及 $-2+15t\geqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

從 (6) $t\leqq\frac{-5}{7}\cdots\cdots(9)$，從 (7) $t\geqq\frac{4}{35}\cdots\cdots(10)$，從 (8) $t\geqq\frac{2}{15}\cdots\cdots(11)$

從 (9), (10), (11) 三式可知 t 無整數值能使 x, y, z 爲正整數，卽原方程組無正整數解.

9. [解] $4x+3y=2z+3$.

$$z=2x+y-1+\frac{y-1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 z 爲整數，$\therefore \quad \frac{y-1}{2}$ 須爲整數.

設 $\frac{y-1}{2}=v$，則 $y=1+2v \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

設 $x=u \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

以 (2), (3) 代入 (1) $z=2u+3v$.

$\therefore$ 普偏整數解爲 $x=u$, $y=1+2v$, $z=2u+3v$.

若 x, y, z 須爲正數，則 $u\geqq 0\cdots(4)$, $1+2v\geqq 0\cdots(5)$ 及 $2u+3v\geqq 0\cdots(6)$

從 (5) 及 (6)，$v\geqq-\frac{1}{2}\cdots\cdots(7)$, $v\geqq-\frac{2}{3}u\cdots\cdots(8)$.

從 (4), (7) 及 (8), 可知 u, v 爲正整數時，x, y, z 皆爲正整數解。

10. [解] $2x+3y+4z=17$.

$$x=8-y-2z-\frac{y-1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

因 x 爲整數， $\therefore \quad \frac{y-1}{2}$ 須爲整數。

設 $\frac{y-1}{2}=u, \quad \therefore \quad y=1+2u \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

設 $z=v \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

以 (2), (3) 代入 (1), $\quad x=7-3u-2v.$

$\therefore$ 普偏整數解爲 $x=7-3u-2v, y=1+2u, z=v.$

若 x, y, z 須爲正數，則 $7-3u-2v \geqq 0 \cdots (4)$, $1+2u \geqq 0 \cdots (5)$, $v \geqq 0 \cdots (6)$

從 (4), (6) 兩式，(4)+(6)×2 得 $7-3u \geqq 0$, $\quad \therefore \quad u \leqq \frac{7}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

從 (2) $\quad u \geqq -\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$

從 (7) 及 (8) 知 u 之整數值爲 0, 1, 2.

以 $u=0$ 代入 (4) 得 $7-2v \geqq 0$, $\quad \therefore \quad v \leqq \frac{7}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$

從 (6) 及 (9 得 $\quad v$ 之整數值爲 0, 1, 2, 3.

以 $u=1$ 代入 (4) 得 $\quad 4-2v \geqq 0$, 即 $v \leqq 2 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$

從 (6) 及 (10) 得 $\quad v$ 之整數值爲 0, 1, 2.

以 $u=2$ 代入 (4) 得 $\quad 1-2v \geqq 0$, 即 $v \leqq \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$

從 (6) 及 (11) 得 $\quad v$ 之整數值爲 0.

故當 $\quad u=0, \ v=0$ 時 $x=7, \ y=1, \ z=0.$

$u=0, \ v=1$ 時 $x=5, \ y=1, \ z=1.$

$u=0, \ v=2$ 時 $x=3, \ y=1, \ z=2.$

$u=0, \ v=3$ 時 $x=1, \ y=1, \ z=3.$

$u=1, \ v=0$ 時 $x=4, \ y=3, \ z=0.$

$u=1, \ v=1$ 時 $x=2, \ y=3, \ z=1.$

$$u=1,\ v=2\ 時\ x=0,\ y=3,\ z=2.$$
$$u=2,\ v=0\ 時\ x=1,\ y=5,\ z=0.$$

$\therefore$ x, y, z 之正整數解爲 7, 1, 0； 5, 1, 1； 3, 1, 2； 1, 1, 3； 4, 3, 0； 2, 3, 1； 0, 3, 2； 1, 5, 0.

11. 求方程式 $3x+7y=1043$ 之正整數解之個數.

[解] $3x+7y=1043$, $\therefore$ $x=347-2y+\dfrac{2-y}{3}$ ……………………(1)

因 x 爲整數， $\therefore$ $\dfrac{2-y}{3}$ 須爲整數.

設 $\dfrac{2-y}{3}=u$, 則 $y=2-3u$.

代入 (1) $\therefore$ $x=343+7u$.

若 x, y 須爲正數，則 $2-3u\geqq 0$……(2)，及 $343+7u\geqq 0$……(3)

從 (2) $u\leqq\dfrac{2}{3}$……(4)， 從 (3) $u\geqq-\dfrac{343}{7}$……(5)

從 (4) 及 (5) 知 u 之整數值爲 0, -7, -2, …… -49 共五十個.

$\therefore$ x, y 之正整數解共有五十個.

12. 求化分數 41/35 爲以 5 及 7 作分母之二正分數之和.

[解] 設 x 及 y 爲二正分數之分子，

則 $$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=\frac{41}{35},\ 即\ 7x+5y=41.$$

$$\therefore\quad y=8-x+\frac{1-2x}{5}\text{ ……………………(1)}$$

因 y 須爲整數， $\therefore$ $\dfrac{1-2x}{5}$ 亦爲整數.

設 $\dfrac{1-2x}{5}=u$, $\therefore$ $2x=1-5u$, 即 $x=-2u+\dfrac{1-u}{2}$ ……………………(2)

因 x 須爲整數, $\dfrac{1-u}{2}$ 亦爲整數.

設 $\dfrac{1-u}{2}=v$, $\therefore$ $u=1-2v$ ……………………(3)

以 (3) 代入 (2) 得 $x=-2+5v$ ……………………(4)

以 (3), (4) 代入 (1) 得　　$y=11-7v$ ………………………………(5)

因 x, y 須為正數，　$\therefore\ -2+5v\geqq 0$……(6)，及　$11-7v\geqq 0$……(7)

從 (6)　$v\geqq\dfrac{2}{5}$，　　從 (7)　$v\leqq\dfrac{11}{7}$.

故 v 之整數值為 1.

$\therefore$　從 (4), (5) 得　　$x=3,\ y=4.$

［答］　　$\dfrac{41}{35}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}.$

13. 一人以金 110 圓購牛羊若干頭，牛每頭 7 圓而羊每頭 6 圓．此人買牛羊各幾頭?

［解］　設 x 及 y 各為牛與羊之頭數，

則　　$7x+6y=110.$　$\therefore$　$y=18-x+\dfrac{2-x}{6}$ ………………(1)

因 y 為整數，　$\therefore$　$\dfrac{2-x}{6}=$整數 u.　　$\therefore$　$x=2-6u$ ………………(2)

以 x 之值代入 (1) 得　　$y=16+7u$ ………………………………(3)

x, y 須為正數，　$\therefore\ 2-6u\geqq 0$ ……(4)　及　$16+7u\geqq 0$……(5)

從 (4)　$u\leqq\dfrac{1}{3}$，　　從 (5)　$u\geqq\dfrac{-16}{7}$.

故 u 之整數值為 $0, -1, -2$.

以 u 之值代入 (2) 及 (3) 得　$x=2, y=16$; $x=8, y=9$; $x=14, y=2$.

［答］　此人買牛 2 頭羊 16 頭；或牛 8 頭羊 9 頭；牛 14 頭羊 2 頭.

14. 求分 23 為三部分，俾三倍第一部分，兩倍第二部分，與五倍第三部分之和能為 79.

［解］　設 x, y 與 z 為所求之三部.

$$\text{則}\quad\begin{cases} x+y+z=23 & \cdots\cdots(1)\\ 3x+2y+5z=79 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)\times 5-(2)$　　$2x+3y=36.$

$$\therefore\quad x=18-y-\frac{y}{2}.$$

設 $y=2u$ 時，　　$x=18-3u.$

代入 (1) 式，得 $z=5+u$.

x, y, z 須爲正數，∴ $18-3u\geqq 0\cdots\cdots(4)$ $2u\geqq 0\cdots\cdots(5)$

及 $5+u\geqq 0\cdots\cdots(6)$

從 (4) $u\leqq 6$, 從 (5) $u\geqq 0$.

故 u 之整數值 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

當 $u=0$ 時 $x=18$, $y=0$, $z=5$.

$u=1$ 時 $x=15$, $y=2$, $z=6$.

$u=2$ 時 $x=12$, $y=4$, $z=7$.

$u=3$ 時 $x=9$, $y=6$, $z=8$.

$u=4$ 時 $x=6$, $y=8$, $z=9$.

$u=5$ 時 $x=3$, $y=10$, $z=10$.

$u=6$ 時 $x=0$, $y=12$, $z=11$.

因 x, y 不能等於 0, 且 $x=9, y=6, z=8$ 與 $x=6, y=8, z=9$ 相同。

[答] 所求三部分爲 15, 2, 6; 12, 4, 7; 9, 6, 8; 3, 10, 10.

15. 求最小之數，除以 5, 7, 9 能得餘數 4, 6, 8 者。

[解] 設 x, y, z 爲此最小數值被 5, 7, 9 所除得之各商。

$$5x+4=7y+6=9z+8.$$

$$5x-7y=2\cdots\cdots(1)$$

$$5x-9z=4\cdots\cdots(2)$$

(2) − (1), $7y-9z=2$.

$$y=z+\frac{2z+2}{7}\cdots\cdots(3)$$

因 y 爲整數，∴ $\frac{2z+2}{7}=$ 整數 u. ∴ $2z=7u-2$.

$$\therefore\quad z=3u-1+\frac{u}{2}\cdots\cdots(4)$$

因 z 爲整數，∴ $\frac{u}{2}=$ 整數 t, ∴ $u=2t$.

以 u 之值代入 (3) 及 (4), 得 $z=7t-1$, $y=9t-1$ $\cdots\cdots(5)$

以 (5)代入(1) $5x-63t+7=2$, $\therefore$ $5x-63t=-5$.

$$\therefore\quad x=12t-1+\frac{3t}{5}\quad\cdots\cdots(6)$$

因 x 爲整數, $\therefore$ $\frac{3t}{5}=$整數 v, $\therefore$ $3t=5v$,

$$\therefore\quad t=\frac{5}{3}v=2v-\frac{1}{3}v\cdots\cdots(7)$$

因 t 爲整數, $\therefore$ $\frac{1}{3}v=w$, $\therefore$ $v=3w$ $\cdots\cdots(8)$

以 (8) 代入 (7) $t=5w$.

以 t 之值代入 (6) $x=63w-1$.

以 t 之值代入 (5) $y=45w-1$, $z=35w-1$.

$x,y\ z$須爲正數, $\therefore$ $63w-1\geqq0$, $45w-1\geqq0$, $35w-1\geqq0\cdots\cdots(9)$

從 (9) 知 w 之整數值爲 0, 1, 2, ……

$\therefore$ x, y, z 之最小值爲 63, 45, 35, 而 $5x+4=7y+6=9z+8=314$.

［答］ 所求之最小數爲 314.

16. 等長之二棒,各自等分爲 250 及 253 部分.二棒相並而齊其端,則最接近之劃分線在何處?

［解］ 設二等桿之長爲 a, 而從並齊一端至最接近劃分線處一爲 x 等份, 一爲 y 等份. 則其距離各爲 $\frac{ax}{250}$ 及 $\frac{ay}{253}$ 而二最接近劃分線間之距離爲 $\frac{ax}{250}-\frac{ay}{253}$ 即 $\frac{(253x-250y)a}{250\cdot253}$. 因二劃分線不能相合,即分子 $253x-250y$ 不能爲 0, 但須求其差爲最小, 故 $253x-250y=\pm1$.

若 $253x-250y=1$, 則 $y=x+\frac{3x-1}{250}$ $\cdots\cdots(1)$

因 y 爲整數, $\therefore$ $\frac{3x-1}{250}=$整數 u, $\therefore$ $3x=250u+1$.

$$\therefore\quad x=83u+\frac{u+1}{3}\quad\cdots\cdots(2)$$

因 x 爲整數, $\therefore$ $\frac{u+1}{3}=$整數 t, $\therefore$ $u=3t-1$.

以 u 之值代入 (2) $\qquad x=250t-83.$

以 x 之值代入 (1) $\qquad y=253t-84.$

若 x, y 須爲正數，t 應等於 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 但 $t=2, 3, \cdots\cdots$ 不適合題意，

$\therefore\ t=1$，而 $x=167$，$y=169$.

［答］ 自並齊一端起一桿之 167 等分與另一桿之 169 等分最接近。

習 題 LV

第 350 頁

1. 求 15, 24, 及 20 之第四比例項；15 及 24 之第三比例項；$5a^3b^2$ 及 $20ab^2$ 之比例中項；$\sqrt{12}$ 及 $\sqrt{75}$ 之比例中項。

［解］ (a) $15 : 24 = 20 : b.$

$$\therefore\quad b=\frac{24\times 20}{15}=32.$$

(b) $15 : 24 = 24 : c.$

$$\therefore\quad c=\frac{24\times 24}{15}=\frac{192}{5}.$$

(c) $5a^3b^2 : x = x : 20ab^2.$

$$x^2=20ab^2\times 5a^3b^2=100a^4b^4.$$

$$\therefore\quad x=\pm 10a^2b^2.$$

(d) $\sqrt{12} : x = x : \sqrt{75}.$

$$x^2=30.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{30}.$$

2. 若 $3x-2y=x-5y$，求 $x : y$；及 $x+y : x-y$.

［解］

$$3x-2y=x-5y.$$

$$2x=-3y.$$

$$\therefore\quad x : y=-3 : 2,$$

$$x+y : x-y=(-3+2) : (-3-2)=1 : 5.$$

3. 若 $2x^2-5xy-3y^2=0$，求 $x : y$，及 $y : x$.

［解］ $2x^2-5xy-3y^2=0.$

分解因式 $\qquad (x-3y)(2x+y)=0.$

$$\therefore \quad x=3y \text{ 及 } 2x=-y.$$

即　$x:y=3:1$ 及 $-1:2$,

$y:x=1:3$ 及 $2:-1$.

4. 若 $ax+by+cz=0$ 及 $a'x+b'y+c'z=0$,

則　$x:y:z=bc'-b'c:ca'-c'a:ab'-a'b$.

［解］　$ax+by=-cz$ ……………………(1)

$a'x+b'y=-c'z$ ……………………(2)

$(1)\times c'-(2)\times c$　$c'ax+bc'y=ca'x+b'cy$.

$(bc'-b'c)y=(ca'-c'a)x$.

$x:y=bc'-b'c:ca'-c'a$.

同理　$x:z=bc'-b'c:ab'-a'b$.

$$\therefore \quad x:y:z=bc'-b'c:ca'-c'a:ab'-a'b.$$

5. 若 $a:b=c:d$, 則 $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 及 b^2+d^2 之比例中項。

［解］　$a:b=c:d$.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r.$$

$a=br,\ c=dr$ ……………………(1)

即　$b=\frac{a}{r},\ d=\frac{c}{r}$ ……………………(2)

將 (1) 代入 $ab+cd$, 得 $ab+cd=b^2r+d^2r=(b^2+d^2)r$.

將 (2) 代入 $ab+cd$, 得 $ab+cd=a\left(\frac{a}{r}\right)+c\left(\frac{c}{r}\right)=\frac{a^2+c^2}{r}$.

$$\therefore \quad (ab+cd)^2=(b^2+d^2)(a^2+c^2).$$

即　$a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$.

$\therefore$ $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 與 b^2+d^2 之比例中項.

6. 若 $(a^2+b^2)cd=(c^2+d^2)ab$, 則非 $a:b=c:d$ 即 $a:b=d:c$.

［解］　$\because \quad (a^2+b^2)cd=(c^2+d^2)ab$.

$\therefore \quad a^2cd+b^2cd=abc^2+abd^2$.

移項，分解因式　$ac(ad-bc)-bd(ad-bc)=0$.

即 $$(ac-bd)(ad-bc)=0.$$

若 $$ad-bc=0,\ 則\ a:b=c:d.$$

若 $$ac-bd=0,\ 則\ a:b=d:c.$$

7. 若 $a:b=c:d$, 則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}$.

[解] $$a:b=c:d.$$

合比 $$a+b:b=c+d:d,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a+b}:\sqrt{b}=\sqrt{c+d}:\sqrt{d}.$$

又 $$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{c}:\sqrt{d}.$$

合比 $$\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{d}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}.$$

8. 若 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, 則 $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{y^3}{b^3}+\dfrac{z^3}{c^3}=3\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$.

[解] $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=r.$$

$$x=ar,\ y=br,\ z=cr.$$

按 § 987, $$r=\frac{x+y+z}{a+b+c}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{a^3r^3}{a^3}+\frac{b^3r^3}{b^3}+\frac{c^3r^3}{c^3}=3r^3=3\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}.$$

9. 若諸數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$; $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n$ 皆爲正數，則比 $l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots+l_na_n:l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots+l_nb_n$ 之值，介乎 $a_1:b_1, a_2:b_2, \cdots\cdots, a_n:b_n$ 諸比之最大者與最小者之間.

[解] 諸比爲 $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dfrac{a_3}{a_3}, \cdots\cdots$ 其中 $\dfrac{a_r}{b_r}=m$ 爲最大值，$\dfrac{a_s}{b_s}=n$ 爲最小值.

則 $$\frac{l_1a_1}{l_1b_1}<m,\quad \therefore\quad l_1a_1<l_1b_1m.$$

$$\frac{l_2a_2}{l_2b_2}<m,\quad \therefore\quad l_2a_2<l_2b_2m.$$

$$\frac{l_3a_3}{l_3b_3}<m,\quad \therefore\quad l_3a_3<l_3b_3m.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{l_r a_r}{l_r b_r}=m, \quad \therefore \quad l_r a_r = l_r b_r m.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{l_n a_n}{l_n b_n}<m, \quad \therefore \quad l_n a_n < l_n b_n m.$$

相加得 $l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots+l_ra_r+\cdots\cdots+l_na_n<m(l_1b_1+l_2b_2$
$+l_3b_3+\cdots\cdots+l_nb_n)$

$$\therefore \quad \frac{l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots+l_na_n}{l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots+l_nb_n}<m \text{ 即 } <\frac{a_r}{b_r}.$$

同理 $$\frac{l_1a_1}{l_1b_1}>n, \quad \therefore \quad l_1a_1>l_1b_1n.$$

$$\frac{l_2a_2}{l_2b_2}>n, \quad \therefore \quad l_2a_2>l_2b_2n.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{l_sa_s}{l_sb_s}=n, \quad \therefore \quad l_sa_s=l_sb_sn.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{l_na_n}{l_nb_n}>n \quad \therefore \quad l_na_n>l_nb_nn.$$

相加得 $l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots+l_na_n>n(l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots$
$+l_nb_n).$

$$\therefore \quad \frac{l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots+l_na_n}{l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots+l_nb_n}>n \text{ 即 } >\frac{a_s}{b_s}.$$

$\therefore \quad l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots+l_na_n : l_1a_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots+l_nb_n$
介乎最大比值 $a_r : b_r$ 及最小比值 $a_s : b_s$ 之間。

10. 若 $a-b : k=b-c : l=c-a : m$，而 a, b, c 不相等，則

$$k+l+m=0.$$

［解］ 已知 $\dfrac{a-b}{k}=\dfrac{b-c}{l}=\dfrac{c-a}{m}.$

分子分母各相加，得

$$\frac{a-b}{k}=\frac{b-c}{l}=\frac{c-a}{m}=\frac{0}{k+l+m}.$$

因 a, b, c 不相等，$\therefore$ $a-b, b-c, c-a$ 不等於 0，

$$\therefore \quad k+l+m=0.$$

11. 若 $x : mz-ny=y : nx-lz=z : ly-mx$, 則 $lx+my+nz=0$, 又

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

[解] 已知 $\dfrac{x}{mz-ny}=\dfrac{y}{nx-lz}=\dfrac{z}{ly-mx}$ ……………………………(1)

則
$$\frac{lx}{l(mz-ny)}=\frac{my}{m(nx-lz)}=\frac{nz}{n(ly-mx)}$$
$$=\frac{lx+my+nz}{lmz-lny+mnx-lmz+lny-mnx}$$
$$=\frac{lx+my+nz}{0}.$$
$$\therefore \quad lx+my+nz=0.$$

又從 (1)
$$\frac{x^2}{x(mz-ny)}=\frac{y^2}{y(nx-lz)}=\frac{z^2}{z(ly-mx)}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{mxz-nxy+nxy-lyz+lyz-mxz}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{0}.$$
$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2=0.$$

12. 若 $a_1 : b_1=a_2 : b_2=a_3 : b_3$, 則此三比各等於下比：

$$(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}} : (l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}.$$

[解] $a_1 : b_1=a_2 : b_2=a_3 : b_3$.

$$\therefore \quad \frac{l_1a_1^n}{l_1b_1^n}=\frac{l_2a_2^n}{l_2b_2^n}=\frac{l_3a_3^n}{l_3b_3^n}=\frac{l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n}{l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n}.$$

即
$$\frac{(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}}{(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

13. 藉助於 § 686, 解下列各方程式。

(1) $\dfrac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\dfrac{2x^2+a}{2x^2-a}$.

(2) $\dfrac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\dfrac{3x^3-x^2+10x-26}{3x^3-x^2-10x+26}$.

［解］ (1) $\dfrac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\dfrac{2x^2+a}{2x^2-a}$.

按 § 686, 3, $$2x^2:2a(x-1)=4x^2:2a.$$

$$\therefore\quad 4x^2a=8ax^2(x-1).$$

移項，分解因式 $4ax^2[2(x-1)-1]=0$, $\therefore$ $4ax^2=0$, $2(x-1)-1=0$,

即 $$2x-3=0.$$

$\therefore$ $x=0, 0, \frac{3}{2}$. 均爲所求根。

(2) $\dfrac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\dfrac{3x^3-x^2+10x-26}{3x^3-x^2-10x+26}$.

按 § 686, 3, $4x^3-6x^2:4x+4=6x^3-2x^2:20x-52$.

$$\therefore\quad (4x+4)(6x^3-2x^2)=(4x^3-6x^2)(20x-52).$$

故 $$x^2[(2x-3)(5x-13)-(x+1)(3x-1)]=0.$$

即 $$x^2(7x^2-43x+40)=0.$$

分解因式 $$x^2(x-5)(7x-8)=0.$$

$\therefore$ $x=0, 0, 5, \frac{8}{7}$. 均爲所求根。

14. 求以 2 : 3 : 5 之比分 520 爲三部分。

［解］ 設所分三部分爲 x, y, z,

則 $x+y+z=520$ ··············(1)　　$x:y:z=2:3:5$ ············(2)

從 (2) 若 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}=r$, 則 $x=2r, y=3r, z=5r$ ··············(3)

以 (3) 代入 (1) $2r+3r+5r=520$, 即 $10r=520$, $\therefore$ $r=52$.

以 r 之值代入 (3) 得 $x=104$, $y=156$, $z=260$.

［答］ 所求三部分爲 104, 156, 260.

15. A, B 二酒桶貯上下兩種酒之混合物，其混合量之比，在 A 桶中者爲 3 : 5 在 B 桶中者爲 3 : 3. 今欲得上酒 6 器下酒 12 器之混合物，二桶中各須取出幾器?

［解］ 設 x 與 y 爲自 A 與 B 桶中所取出之酒量.

則 $$\frac{3}{8}x+\frac{3}{10}y=6 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5}{8}x+\frac{7}{10}y=12 \quad \cdots\cdots(2)$$

(1)×5, $$\frac{15}{8}x+\frac{15}{10}y=30 \quad \cdots\cdots(3)$$

(2)×3, $$\frac{15}{8}x+\frac{21}{10}y=36 \quad \cdots\cdots(4)$$

(4)−(3), $$\left[\frac{21}{10}-\frac{15}{10}\right]y=6.$$

$$\therefore \quad y=10 \text{ 罂}.$$

代入 (1) 式，得 $$x=8 \text{ 罂}.$$

［答］ 須自 A 桶中取出 8 罂，B 桶中取出 10 罂.

習 題 LVI

第 353 頁

1. 若 y 隨 x 而變，且 $x=5$ 時 $y=-2$，則 $x=7$ 時 y 之值若何？

［解］ 因 y 隨 x 而變，$\therefore\ y=cx$，其中 c 爲常數.

以 $x=5, y=-2$ 代入得 $-2=5c$ 卽 $c=-\frac{2}{5}$ $\quad\therefore\quad y=-\frac{2}{5}x.$

當 $x=7$ 時， $\quad\therefore\quad y=-\frac{2}{5}x=-\frac{2}{5}\times 7=-\frac{14}{5}.$

2. 若 y 隨 x^2 反變，且 $x=2$ 時 $y=1$，則對於 x 若何之值可有 $y=3$？

［解］ 因 y 隨 x^2 反變，$\therefore\ y=\frac{c}{x^2}$ 其中 c 爲常數.

以 $x=2, y=1$ 代入得 $\quad 1=\frac{c}{2^2} \quad\therefore\quad c=4.$

$$\therefore \quad y=\frac{4}{x^2}.$$

當 $y=3$ 時， $\quad 3=\frac{4}{x^2} \quad\therefore\ x^2=\frac{4}{3}, \quad\therefore\ x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

3. 已知 y 爲常數與隨 x^2 而變之一項之和，幷知 $x=1$ 時 $y=1$，$x=2$ 時 $y=0$. 求聯結 x 及 y 之方程式.

［解］ 因 y 爲常數與隨 x^2 而變之一項之和，

$$\therefore \quad y=b+cx^2, \text{ 其中 } b, c \text{ 均爲常數}.$$

以 $x=1, y=1$ 代入得　　$1=b+c$ ……………………………………(1)

以 $x=2, y=0$ 代入得　　$0=b+4c$ ……………………………………(2)

(1), (2) 兩式聯立得　　$c=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$.

$$\therefore\quad y=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x^2,\ 即\ x^2+3y-4=0.$$

4. 若 y 隨 x^2 正變而隨 z^3 反變，且 $x=-1$ 而 $z=2$ 時 $y=1$，則 $x=3$ 而 $z=-1$ 時 y 之値若何？

[解] 因 y 隨 x^2 正變而隨 z^3 反變，

$$\therefore\quad y=\frac{cx^2}{z^3}\ 其中\ c\ 爲常數。$$

以 $x=-1, y=1, z=2$ 代入得　$1=\frac{c}{2^3}$,　$\therefore\ c=8$.

$$\therefore\quad y=\frac{8x^2}{z^3}.$$

當 $x=3$ 而 $z=-1$ 時，　$y=\frac{8\cdot 3^2}{(-1)^3}=\frac{72}{-1}=-72$.

5. 若 y 隨 x 而變，試證 x^2-y^2 隨 xy 而變。

[解] 因 y 隨 x 而變，$\therefore\ y=cx$，其中 c 爲常數。

今 $\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{x^2-(cx)^2}{x(cx)}=\frac{x^2-c^2x^2}{cx^2}=\frac{x^2(1-c^2)}{cx^2}=\frac{1-c^2}{c}$. 而 $\frac{1-c^2}{c}$ 亦爲常數。

故 x^2-y^2 隨 xy 而變。

6. 若 y 之平方隨 z 之立方而變，且 z 隨 x 反變，試證 xy 隨 x 之平方根反變。

[解] 因 y 之平方隨 z 之立方而變，且 z 隨 x 反變。

$\therefore\ y^2=cz^3$ ……(1) 及 $z=\frac{b}{x}$ ……(2) 其中 c, b 均爲常數。

以 (2) 代入 (1)　　$y^2=\frac{b^3c}{x^3}$. 即 $x^2y^2=\frac{b^3c}{x}$,　$\therefore\ xy=\frac{b\sqrt{bc}}{\sqrt{x}}$　而 $b\sqrt{bc}$ 亦爲常數。

故 xy 隨 x 之平方根反變

7. 三人作工四星期，工資為 108 圓，則五人作工幾星期可得 135 圓？

［解］ 設 x 為人數，y 為星期數，z 為工資之元數。

則因工資與人數成正變，與星期數亦成正變。

$$\therefore\quad z=cxy \text{ 其中 } c \text{ 為常數。}$$

以 $x=3, y=4, z=108$ 代入得 $108=3\times4\times c,\ \therefore\ c=9.$

$$\therefore\quad z=9xy.$$

今以 $x=5, z=135$ 代入得 $135=9\times5y,\ \therefore\ y=3.$

［答］ 五人作工三星期可得 135 元。

8. 圓盤之體積，隨其厚及底面半徑之平方聯變。今將厚為 3 及 2 而半徑為 24 及 36 之二金屬圓盤熔化，另鑄一圓盤，令其半徑為 48。則其厚若何？

［解］ 設 v 為圓盤之體積，r 為底面半徑，h 為厚度，

則 $$v=chr^2, \text{其中 } c \text{ 為常數。}$$

再設二圓盤之體積，底面半徑及厚度各為 v_1, v_2；r_1, r_2 及 h_1, h_2。

則 $$v_1=ch_1r_1^2 \text{ 及 } v_2=ch_2r_2^2.$$

今 $h_1=3, r_1=24$；$h_2=2, r_2=36$.

$\therefore\ v_1=c\cdot3\cdot(24)^2$ 及 $v_2=c\cdot2\cdot(36)^2$ 即 $v_1=1728c, v_2=2592c.$

$$\therefore\quad v=v_1+v_2=1728c+2592c=4320c.$$

但 $$v=c\cdot h\cdot(48)^2,\ (\text{已知 } r=48).$$

$$\therefore\quad 4320c=ch\cdot2304,\quad \therefore\quad h=\frac{15}{8}.$$

［答］ 所求圓盤之厚為 $\frac{15}{8}$.

9. 高為 a 之直圓錐為一平行於底面之平面所截。截面之面積為底面積之半時，則此平面距圓錐之頂點幾何？截分圓錐為等體積之二部分時，則此平面距頂點幾何？

［解］ R 及 r 為底面與截面之圓半徑，x 為所求之高度，

則 $$x : a = r : R \quad\cdots\cdots(1)$$

又面積 $$\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}R \quad\cdots\cdots(3)$$

代入(1)式, $$x = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

又體積 $$\frac{1}{3}\pi x r^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi a R^2.$$

則 $$\frac{r^2}{R^2} = \frac{a}{2x} \quad\cdots\cdots(4)$$

將(1)平方,得 $$\frac{r^2}{R^2} = \frac{x^2}{a^2} \quad\cdots\cdots(5)$$

從(4)及(5), $$2x^3 = a^3.$$

$$\therefore\quad x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}a.$$

[答] 截面面積為底面積之半時此平面距頂點 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,若將此圓錐分為二部等積時,此截面距頂點 $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}a$.

習 題 LVII

第356頁

1. 求(1) $3, 6, 9, \cdots\cdots$, (2) $-3, -1\frac{1}{2}, 0, \cdots\cdots$之第二十項及開首二十項之和。

[解] (1) $a=3, d=3, n=20$. 應用公式 $l=a+(n-1)d$, $S=\frac{n}{2}(a+l)$,

$$\therefore\quad l = 3+(20-1)\cdot 3 = 3+19\cdot 3 = 60.$$

$$S = \frac{20}{2}(3+60) = 10\cdot 63 = 630.$$

(2) $a=-3, d=\frac{3}{2}, n=20$.

$$l = a+(n-1)d = -3+(20-1)\cdot\frac{3}{2} = -3+\frac{19\cdot 3}{2} = 25\frac{1}{2}.$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{20}{2}\left(-3+25\frac{1}{2}\right)=10\cdot\left(-3+25\frac{1}{2}\right)=10\cdot\frac{45}{2}=225.$$

2. 求 (1) 1, 2, 3, ……, (2) 1, 3, 5, ……, (3) 2, 4, 6, ……至 n 項之和之公式.

［解］ (1) $a=1, d=1$, 項數爲 n.

$$S=\frac{n}{2}(a+l) \text{ 而 } l=a+(n-1)d.$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$$=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\cdot 1\}=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) $a=1, d=2$, 項數爲 n.

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\cdot 2\}=\frac{n}{2}\{2n\}=n^2.$$

(3) $a=2, d=2$, 項數爲 n.

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{4+(n-1)\cdot 2\}=\frac{n}{2}\{2n+2\}=n(n+1).$$

3. 有 $6r+1$ 形式之數於此，其中 r 指示 0 或正整數；求開首 n 個數之和.

［解］ $r=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$時，

$$6r+1=1, 7, 13, 19, \ldots\ldots$$

$a=1, d=6$, 項數爲 n.

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2+6n-6\}=\frac{n}{2}(6n-4)=n(3n-2).$$

4. 求十項之等差級數，令其第五項爲 1 而第八項爲 2.

［解］ 設 a 爲首項，d 爲公差，則第五項爲 $a+4d$, 第八項爲 $a+7d$.

$$\therefore\ a+4d=1\cdots\cdots(1),\ a+7d=2\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 及 (2) $\quad a=-\frac{1}{3}, d=\frac{1}{3}.$

$$\therefore\ l=a+(n-1)d=-\frac{1}{3}+(10-1)\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}+9\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}.$$

$\therefore$ 所求等差級數爲 $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}.$

5. 在 -1 與 2 之間插入五個等差中項。

[解]　$a=-1, l=2, n=5+2=7.$

用公式 $l=a+(n-1)d$ 得 $2=-1+(7-1)d$,　$\therefore d=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 所求五個等差中項爲 $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

6. 已與 $n=16, a=0, d=4/3$; 求 l 及 S.

[解]　$l=a+(n-1)d=0+(16-1)\cdot\frac{4}{3}=20,$

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{16}{2}(0+20)=160.$$

7. 已與 $n=7, l=-7, d=-5/3$; 求 a 及 S.

[解]　$\because l=a+(n-)d$, $\therefore -7=a+(7-1)\left(-\frac{5}{3}\right)$,

$$\therefore \quad a=-7-6\left(-\frac{5}{3}\right)=3.$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{7}{2}(3-7)=-14.$$

8 已與 $n=12, a=-5/3, l=31\frac{1}{3}$; 求 d 及 S.

[解]　$\because l=a+(n-1)d$, $\therefore 31\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}+(12-1)d$,

$$\therefore \quad d=\frac{31\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{11}=3.$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{12}{2}\left(-\frac{5}{3}+31\frac{1}{3}\right)=6\cdot\frac{89}{3}=178.$$

9. 已與 $a=2, l=-23\frac{1}{2}, S=-559$; 求 n 及 d.

[解]　$\because S=\frac{n}{2}(a+l)$, $\therefore -559=\frac{n}{2}\left(2-23\frac{1}{2}\right)$,

$$\therefore \quad n=\frac{-559\cdot 2}{2-23\frac{1}{2}}=52.$$

又 $l=a+(n-1)d$,　$\therefore -23\frac{1}{2}=2+(52-1)d$,

$$\therefore \quad d=\frac{-23\frac{1}{2}-2}{51}=-\frac{1}{2}.$$

10. 已與 $n=7, a=3/7, S=45$; 求 d 及 l.

[解] $\because\ S=\frac{n}{2}(a+l)$, $\quad\therefore\ 45=\frac{7}{2}\left(\frac{3}{7}+l\right)$,

$$\therefore\ l=45\cdot\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{87}{7}=12\frac{3}{7}.$$

又 $\because\ l=a+(n-1)d$, $\quad\therefore\ \frac{87}{7}=\frac{3}{7}+(7-1)d$, $\quad\therefore\ d=\frac{\frac{87}{7}-\frac{3}{7}}{6}=2.$

11. 已與 $a=4,\ d=1/5,\ l=9\frac{2}{5}$；求 n 及 S.

[解] $\because\ l=a+(n-1)d$, $\quad\therefore\ 9\frac{2}{5}=4+(n-1)\cdot\frac{1}{5}$.

$$\therefore\ n=\frac{9\frac{2}{5}-4}{\frac{1}{5}}+1=28.$$

又 $\quad\because\ S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{28}{2}\left(4+9\frac{2}{5}\right)=14\cdot\frac{67}{5}=187\frac{3}{5}$.

12. 已與 $n=9,\ d=-4,\ S=135$；求 a 及 l.

[解] $\because\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{9}{2}\{2a+(9-1)(-4)\}$,

$$\therefore\ 135=\frac{9}{2}(2a-32). \quad \therefore\ a=\frac{135\cdot\frac{2}{9}+32}{2}=31.$$

又 $\because\ l=a+(n-1)d=31+(9-1)(-4)=31+8(-4)=31-32=-1.$

13. 已與 $n=10,\ l=-2,\ S=115$；求 a 及 d.

[解] $\because\ S=\frac{n}{2}(a+l)$, $\quad\therefore\ 115=\frac{10}{2}[a+(-2)]=5(a-2)$,

$$\therefore\ a=\frac{115}{5}+2=25, \quad 又\ \because\ l=a+(n-1)d,$$

$$\therefore\ -2=25+(10-1)d, \quad \therefore\ d=\frac{-27}{9}=-3.$$

14. 已與 $d=5,\ l=-47,\ S=-357$；求 n 及 a.

[解] $\because\ l=a+(n-1)d$, $\quad\therefore\ -47=a+(n-1)\cdot5$,

即 $$a+5n=-42 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $\because\ S=\frac{n}{2}(a+l)$, $\quad\therefore\ -357=\frac{n}{2}(a-47)$,

即 $$an-47n=-714\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) 聯立，得　$a=-72,\quad n=6.$

15. 已與 $a=-10, d=7, S=20$；求 n 及 l.

〔解〕 $\because\ S=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\},\quad \therefore\ 20=\dfrac{n}{2}\{-20+(n-1)\cdot 7\}.$

$$\therefore\ 40=-20n+7n^2-7n.\ \text{即}\ 7n^2-27n-40=0.$$

$$\therefore\quad (n-5)(7n+8)=0.$$

$$\therefore\quad n-5=0,\quad 7n+8=0,\ \text{負數不適用.}$$

$$\therefore\quad n=5.$$

$$\therefore\ l=a+(n-1)d=-10+(5-1)\cdot 7=-10+28=18.$$

16. 試證若 a^2, b^2, c^2, 成等差級數，則 $1/(b+c), 1/(c+a), 1/(a+b)$ 亦然.

〔證〕 $\because\ a^2, b^2, c^2$ 爲等差級數,

$$\therefore\quad b^2-a^2=c^2-b^2.$$

分解因式　$(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b).$

即　$$\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}.$$

兩端乘以 $\dfrac{1}{c+a}$　$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}.$$

即　$$\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}.$$

故 $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ 亦爲等差級數.

17. 試證若 n 爲奇數，任 n 個連續整數之和得爲 n 所整除.

〔證〕 因 $S=\dfrac{n}{2}(a+l)=\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d],$

$$\therefore\quad \frac{s}{n}=a+\frac{n-1}{2}d\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在 (1) 中，若 n 爲奇數，則 $n-1$ 爲偶數，而 $\frac{n-1}{2}d$ 必爲整數且 a 又已知爲整數，故 $a+\frac{n-1}{2}d$ 爲整數，而 $\frac{S}{n}$ 不得不爲整數，即連續 n 個整數之和必爲 n 所整除。

18. 求一等差級數，令其首項爲 1，又開首三項之和爲其次四項之和之半.

［解］ 設開首三項之和爲 S_1 其次四項之和爲 S_2，

則
$$S_1=a+(a+d)+(a+2d)=3a+3d.$$
$$S_2=(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)+(a+6d)$$
$$=4a+18d.$$

依題意得 $3a+3d=\frac{1}{2}[4a+18d]=2a+9d.$

$$\therefore\ 6d=a,\qquad \therefore\ d=\frac{1}{6}a=\frac{1}{6}.\ (\because\ a=1).$$

$\therefore$ 所求之等差級數爲 $1,\ 1\frac{1}{6},\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{5}{6},\ 2,\cdots\cdots$

19. 三數成等差級數，其和爲 15，其平方之和爲 83. 求此三數。

［解］ 設三數爲 $a-d,\ a,\ a+d.$

則
$$a-d+a+a+d=15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 得 $a=5.$

以 a 之值代入 (2) 得 $2d^2=8,\quad \therefore\ d=\pm 2.$

故所求三數爲 3, 5, 7.

20. 求爲 9 之倍數之一切三位正整數之和。

［解］ 9 之倍數中含有三位數字者必在於 108 與 999 之間，

故
$$a=108,\quad l=999,\quad d=9.$$
$$\because\ l=a+(n-1)d,\quad \therefore\ 999=108+9n-9=9n+99.$$
$$n=111-11=100.$$

又 $\because\ S_n=\frac{n}{2}(a+l),\qquad \therefore\ S_n=\frac{100}{2}(108+999)=50\times 1107=55350$

21. 一人每年儲金 130 圓，年利率 4%，以單利計算．11 年後之儲金總額若何？

〔解〕 此人每年儲金成一等差級數，

$$a=130,\ 利息為\ 130\cdot\frac{4}{100}=5.2=d,\quad n=11.$$

代入公式 $$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{11}{2}\{2\times130+(11-1)\times5.2\}$$

$$=\frac{11}{2}(260+52)=1716.$$

〔答〕 11 年後之儲金總額為 1716 元。

22. 甲乙二人由相距 72 哩之兩地同時出發，相向而行．如甲以每小時 4 哩之速率而行，而乙第一小時行 2 哩，第二小時行 $2\frac{1}{2}$ 哩，第三小時 3 哩，餘依此類推，則二人何時又在何處相會？

〔解〕 設 x 小時後二人相遇，則甲共行 $4x$ 哩，而乙每小時所行距離成一等差級數，x 小時內所行距離即為等差級數之和而 $a=2,\ d=\frac{1}{2},\ n=x$，

$$\therefore\quad 乙所行距離=S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{x}{2}\{4+(x-1)\cdot\tfrac{1}{2}\}.$$

$$\therefore\quad S=2x+\tfrac{1}{4}x(x-1).$$

依題意得方程式 $4x+2x+\frac{1}{4}x(x-1)=72,\quad \therefore\ x^2+23x-288=0.$

分解因式 $(x-9)(x+32)=0$，x 不能為負數， $\therefore\ x=9.$

〔答〕 二人於 9 小時後相遇，其相遇地點在距甲起行處 $4x$ 即 36 哩。

習　題　LVIII　　第 360 頁

1. 求等比級數 $2,\ -6,\ 18,\cdots\cdots$ 之第五項及開首五項之和。

〔解〕 $a=2,\ r=-3,\ n=5.$

$$\therefore\quad l=ar^{n-1}=2(-3)^4=2\times81=162,$$

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{2(1+3^5)}{1+3}=122.$$

2. 求等比級數 $4,\ 6,\ 9,\cdots\cdots$ 之第四項及開首四項之和。

〔解〕 $a=4,\ r=\frac{3}{2},\ n=4.$

$$\therefore\quad l=ar^{n-1}=4\left(\frac{3}{2}\right)^{4-1}=4\cdot\frac{27}{8}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}.$$

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{4\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4\left(1-\frac{81}{16}\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{65}{2}=32\frac{1}{2}.$$

3. 求下列各無窮等比級數之和:

$$12-6+3-\cdots\cdots;\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots;\quad \frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots.$$

［解］ (a) $12-6+3-\cdots\cdots.$

$$a=12,\quad r=-\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{12}{1+\frac{1}{2}}=8.$$

(b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots.$

$$a=1,\quad r=-\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(c) $\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots.$

$$a=\tfrac{5}{3},\quad r=\tfrac{1}{5}.$$

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{25}{12}.$$

4. 求下列各循環小數之值.

$$0.341341\cdots\cdots,\quad 0.0567272\cdots\cdots,\quad 8.45164516\cdots\cdots.$$

［解］ (a) $0.341341\cdots\cdots=0.341+0.000341+0.000000341+\cdots\cdots.$

上式為一等比級數, $a=0.341,\quad r=0.001.$

$$\therefore\quad 0.341341\cdots\cdots=\frac{0.341}{1-0.001}=\frac{0.341}{0.999}=\frac{341}{999}.$$

(b)　$0.0567272\cdots\cdots=0.056+0.00072+0.0000072+\cdots\cdots$

$$=0.056+\frac{0.00072}{1-0.01}=0.056+\frac{0.00072}{0.99}$$

$$=0.056+\frac{72}{99000}=\frac{5616}{99000}=\frac{78}{1375}.$$

(c)　$8.45164516\cdots\cdots=8+0.4516+0.00004516+\cdots\cdots$

$$=8+\frac{0.4516}{1-0.0001}=8+\frac{0.4516}{0.9999}$$

$$=8+\frac{4516}{9999}=8\frac{4516}{9999}.$$

5.　已與 $a=-0.03,\ r=10,\ n=6$；求 l 及 S.

[解]　$l=ar^{n-1}=(-0.03)10^5=-3000,$

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{-0.03(1-10^6)}{1-10}=-3333.33.$$

6.　已與 $n=7,\ a=48,\ l=3/4$；求 r 及 S.

[解]　$\because\ l=ar^{n-1},\quad \therefore\ \frac{3}{4}=48\cdot r^{7-1}$ 卽 $r^6=\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6,\quad \therefore\ r=\frac{1}{2}$

又　$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{48[1-(\frac{1}{2})^7]}{1-\frac{1}{2}}=96\left(1-\frac{1}{128}\right)=\frac{381}{4}=95\frac{1}{4}.$$

7.　已與 $a=1/16,\ r=2,\ l=8$；求 n 及 S.

[解]　$\because\ l=ar^{n-1},\quad \therefore\ 8=\frac{1}{16}\cdot 2^{n-1}$, 卽 $2^{n-1}=128=2^7.$

$$\therefore\ n-1=7,\qquad \therefore\ n=8.$$

又　$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{\frac{1}{16}(1-2^8)}{1-2}=\frac{255}{16}=15\frac{15}{16}.$$

8.　已與 $n=5,\ r=-3,\ l=81$；求 a 及 S.

[解]　$\because\ l=ar^{n-1},\quad \therefore\ 81=a(-3)^{5-1},\quad \therefore\ a=\frac{81}{(-3)^4}=1.$

又　$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\cdot[1-(-3)^5]}{1+3}=\frac{1+243}{4}=\frac{244}{4}=61.$$

9. 已與 $a=54,\ r=1/3,\ S=80\frac{2}{3}$；求 n 及 l.

［解］ $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{54\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{3}}$, 卽 $80\dfrac{2}{3}=\dfrac{54\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}{\dfrac{2}{3}}$.

化簡 $$3^n=243=3^5,\qquad \therefore\ n=5.$$

$$l=ar^{n-1}=54\left(\frac{1}{3}\right)^{5-1}=\frac{2}{3}.$$

10. 已與 $n=4,\ a=-3,\ S=-468$；求 r 及 l.

［解］ $\because\ S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, $\quad\therefore\ -468=\dfrac{-3(1-r^4)}{1-r}=-3(1+r+r^2+r^3)$

$$\therefore\quad r^3+r^2+r-155=0.$$

$$\therefore\ (r-5)(r^2+6r+31)=0,\qquad \therefore\ r=5.$$

又 $$l=ar^{n-1}=-3\cdot5^{4-1}=-3\cdot5^3=-375$$

11. 已與 $a=-9/16,\ l=-16/9,\ S=-781/144$；求 n 及 r.

［解］ $\because\ S=\dfrac{a-rl}{1-r}$, $\qquad\therefore\ -\dfrac{781}{144}=\dfrac{-\dfrac{9}{16}+\dfrac{16}{9}r}{1-r}=\dfrac{-81+256r}{144(1-r)}$.

化簡， $$\therefore\ 525r=700,\qquad \therefore\ r=\tfrac{4}{3}.$$

又 $l=ar^{n-1}$, $\quad\therefore\ -\dfrac{16}{9}=-\dfrac{9}{16}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$, 卽 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{256}{81}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^4$.

$$\therefore\quad n=5.$$

12. 已與 $n=6,\ r=-2/3,\ S=665/216$；求 a 及 l.

［解］ $\because\ S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

$$\therefore\quad \frac{665}{216}=\frac{a\left[1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^6\right]}{1+\dfrac{2}{3}}=\frac{a\left[1-\dfrac{64}{729}\right]}{\dfrac{5}{3}}=\frac{133}{243}a.$$

$$\therefore\quad a=\frac{45}{8},$$

又　$l=ar^{n-1}$,　$\therefore\ l=\frac{45}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^5=-\frac{20}{27}$.

13. 已與 $r=3/2$, $l=30\frac{3}{8}$, $S=83\frac{1}{8}$; 求 n 及 a.

[解]　$\because\ S=\frac{a-rl}{1-r}$.

$$\frac{665}{8}=\frac{a-\frac{3}{2}\cdot\frac{243}{8}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{16a-729}{-8}.$$

$$-665=16a-729.$$

$$\therefore\quad a=4.$$

又　$\because\ l=ar^{n-1}$,　$\therefore\ \frac{243}{8}=4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

$$n-1=5.$$

$$\therefore\quad n=6.$$

14. 巳與 $n=4$, $l=54/25$, $S=544/25$; 求 a 及 r.

[解]　$\because\ l=ar^{n-1}$,　$\therefore\ \frac{54}{25}=ar^{4-1}=ar^3$ ……………………(1)

又　$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$,　$\therefore\ \frac{544}{25}=\frac{a(r^4-1)}{r-1}$ ……………………(2)

從 (2) 式,　$\frac{544}{25}=a(r^3+r^2+r+1)$ ……………………(3)

(3) ÷ (1),　$272r^3=27(r^3+r^2+r+1)$.

移項,　$245r^3-27r^2-27r-27=0$.

分解因式,　$(5r-3)(49r^2+24r+9)=0$.

$$\therefore\quad r=\frac{3}{5}.$$

$$\frac{54}{25}=a\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}a.$$

$$\therefore\quad a=10.$$

15. 已與 $n=5, l=48, S=93$; 求 a 及 r.

[解] $\because\ l=ar^{n-1}$, $\quad\therefore\ 48=ar^{5-1}=ar^4$ ……………………(1)

又 $S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, $\quad\therefore\ 93=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}$ ……………………(2)

從 (2) 式, $\quad 93=a(r^4+r^3+r^2+r+1)$ ……………………(3)

(3)÷(1), $\quad 93r^4=48(r^4+r^3+r^2+r+1)$.

化簡, $\quad 31r^4=16(r^4+r^3+r^2+r+1)$.

$$15r^4-16r^3-16r^2-16r-16=0.$$

分解因式, $\quad (r-2)(15r^3+14r^2+12r+8)=0$.

$$\therefore\ r=2.$$

代入 (1) 式,得 $\quad a=3$.

16. 求 a^3/b 及 b^3/a 之正等比中項.

[解] 設 x 為等比中項,則 $\dfrac{a^3}{b}:x=x:\dfrac{b^3}{a}$.

$$\therefore\ x^2=\frac{a^3b^3}{ab}=a^2b^2,\quad \therefore\ x=ab.$$

17. 在 5 與 405 之間插入三個等比中項.

[解] $a=5,\ l=405,\ n=3+2=5$.

$\because\ l=ar^{n-1}$, $\ \therefore\ 405=5r^{5-1}=5r^4$, $\ r^4=81=(\pm3)^4$.

$$\therefore\ r=\pm3.$$

當 $r=3$ 時,所求插入之三個等比中項為 $15, 45, 135$.

當 $r=-3$ 時,所求插入之三個等比中項為 $-15, 45, -135$.

18. 有一等比級數,第三項為 3 而第六項為 $-3/8$. 求第七項.

[解] 設首項為 a, 公比為 r, 則第三項為 ar^2, 第六項為 ar^5.

$$\therefore\ ar^2=3,\quad ar^5=-\tfrac{3}{8}.$$

兩式聯立,得 $\quad r=-\frac{1}{2}$, $\quad\therefore\ a=12$.

$$\therefore\ 第七項=ar^6=12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}.$$

19. 求四項之等比級數，令其首末兩項之和爲 133，而中間兩項之和爲 70.

［解］ 設等比級數之四項爲 a, ar, ar^2 及 ar^3，

則 $\begin{cases} a+ar^3=133 \cdots\cdots(1) \\ ar+ar^2=70 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式， $a(1+r^3)=133 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式， $ar(1+r)=70 \cdots\cdots(4)$

(1) ÷ (2)， $\dfrac{1-r+r^2}{r}=\dfrac{133}{70}.$

化簡， $70r^2-203r+70=0.$

分解因式， $(35r-14)(2r-5)=0.$

$$\therefore\quad r=\tfrac{5}{2}.$$

代入 (3) 式，得 $a=8.$

∴ 所求之等比級數爲 8, 20, 50, 125.

20. 三數成等比級數，其和爲 7，其平方之和爲 91. 求此三數.

［解］ 設三數爲 a, ar, ar^2，則 $a+ar+ar^2=7$ 及 $a^2+a^2r^2+a^2r^4=91.$

即 $\begin{cases} a(1+r+r^2)=7 \cdots\cdots(1) \\ a^2(1+r^2+r^4)=91 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ÷ (1)， $a(1-r+r^2)=13 \cdots\cdots(3)$

(3) − (1)， $ar=-3.$

$$r=-\frac{3}{a}.$$

代入 (1) 式，得 $a^2-10a+9=0.$

$$(a-1)(a-9)=0.$$

$$\therefore\quad a=1,\ r=-3.$$

∴ 所求之三數爲 1, −3, 9.

21. 三數成等差級數，其和爲 36. 若各加 1, 4, 43，結果成等比級數，求此三數.

［解］ 設三數爲 $a-d, a, a+d$ 若各加 1, 4, 43 則得 $a-d+1, a+4, a+d+43$.

故得方程組
$$\begin{cases} a-d+a+a+d=36 & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{a+4}{a-d+1}=\dfrac{a+d+43}{a+4} & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (1) 式， $a=12.$

代入 (2) 式，得 $\dfrac{16}{13-d}=\dfrac{55+d}{16}.$

化簡， $d^2+42d-459=0.$

$\therefore \quad d=9$ 或 $-51.$

∴ 所求之三數爲 3, 12, 21； 或 63, 12, −39.

22. 有四數，前三數成等差級數，而後三數成等比級數。首末兩數之和爲 16, 中間兩數之和爲 8. 求此四數.

［解］ 設此四數爲 $a, a+d, a+2d, \dfrac{(a+2d)^2}{a+d}.$

$$\begin{cases} a+\dfrac{(a+2d)^2}{a+d}=16 & \cdots\cdots(1) \\ a+d+a+2d=8 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式， $a=\dfrac{8-3d}{2}.$

代入 (1) 式，化簡 $4d^2+16d-128=0.$

$$d^2+4d-32=0.$$

$$(d-4)(d+8)=0.$$

$\therefore \quad d=4$ 及 -8, (不適用)

$$a=(8-12)/2=-2.$$

∴ 所求之數爲 −2, 2, 6, 18.

23. 有一彈性球，從離地 15 尺高處下落，如每次返躍之高爲下落距離之 2/3, 則在靜止以前此球應經過之距離若何？

［解］ 此球每次下落之距離成一等比級數，

而 $a=15$ 尺，$r=\frac{2}{3}$, $n=\infty$.

每次下落之距離爲 $15,\ 15\left(\frac{2}{3}\right),\ 15\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ 15\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdots\cdots$

設 S 爲所經過之距離，

則
$$S=15+2\left[15\left(\frac{2}{3}\right)+15\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$
$$=15+2\cdot15\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$
$$=15+30\left[\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right]$$
$$=15+30\times2=75 \text{ 尺.}$$

∴ 此球所經過之距離爲 75 尺.

習題 LIX 第 363 頁

1. 試爲調和級數 3/5, 3/7, 1/3, 再續二項.

〔解〕 ∵ $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}$ 成調和級數， ∴ $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3$ 成一等差級數，其公差爲 $\frac{2}{3}$, 故再後二項等差級數應爲 $\frac{11}{3}, \frac{13}{3}$ 而所求之二項調和級數爲 $\frac{3}{11}, \frac{3}{13}$.

2. 求 3/4 與 5 之調和中項.

〔解〕 設 x 爲所求之調和中項.

則因
$$x=\frac{2ab}{a+b}, \qquad \therefore\ x=\frac{2\cdot\frac{3}{4}\cdot5}{\frac{3}{4}+5}=\frac{30}{23}.$$

3. 在 10 與 15 之間插入四個調和中項.

〔解〕 其相對之等差級數中之二項爲 $\frac{1}{10}$ 與 $\frac{1}{15}$; 故
$$a=\frac{1}{10},\ l=\frac{1}{15},\ n=4+2=6.$$

因 $l=a+(n-1)d$, ∴ $\frac{1}{15}=\frac{1}{10}+5d$, ∴ $d=-\frac{1}{150}$.

是以 $\frac{1}{10}$ 與 $\frac{1}{15}$ 之間所插各項爲 $\frac{14}{150}, \frac{13}{150}, \frac{12}{150}, \frac{11}{150}$.

∴ 所求調和中項爲 $\frac{75}{7}, \frac{150}{13}, \frac{75}{6}, \frac{150}{11}$.

4. 調和級數之第二,第四兩項爲 $4/5$, -4. 求第三項。

[解] 設 x 爲所求第三項,則 x 卽爲 $\frac{4}{5}$ 及 -4 之調和中項。

$$\therefore \text{應用公式}\ x=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\left(\frac{4}{5}\right)(-4)}{\frac{4}{5}-4}=\frac{\frac{-32}{5}}{\frac{-16}{5}}=2.$$

∴ 所求第三項爲 2.

5. 二數之等差中項爲 4, 調和中項爲 $15/4$. 求此二數。

[解] 設二數爲 a 與 b, 則因 4 爲等差中項, $\frac{15}{4}$ 爲調和中項。

$$\therefore \quad 4=\frac{a+b}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及
$$\frac{15}{4}=\frac{2ab}{a+b}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) × (2), $\quad 15=ab, \quad a=\frac{15}{b}$.

代入 (1) 式,得 $\quad b^2-8b+15=0$.

分解因式, $\quad (b-3)(b-5)=0$.

$$\therefore \quad b=3,\ 5;$$
$$a=5,\ 3.$$

∴ 所求之二數爲 5 與 3.

6 二數之等比中項爲 4, 調和中項爲 $16/5$. 求此二數。

[解] 設二數爲 a 與 b, 則因 4 爲等比中項, $\frac{16}{5}$ 爲調和中項。

$$\therefore \quad 4=\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及
$$\frac{16}{5}=\frac{2ab}{a+b}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$ab=16\cdots\cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式，得　$a+b=10\cdots\cdots\cdots(4)$

$$a=10-b.$$

代入 (3) 式，得　$b^2-10b+16=0.$

$$(b-8)(b-2)=0.$$

$$\therefore\quad b=8,\ 2;$$

$$a=2,\ 8.$$

$\therefore$ 所求之二數爲 2 與 8.

7 試證若 a, b, c 成調和級數，則 $a/(b+c)$, $b/(c+a)$, $c/(a+b)$ 亦然.

[證] $\because$ a, b, c 爲調和級數.

$$\therefore\quad \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\ \text{爲等差級數.}$$

即　$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

全式乘以 $a+b+c$,

$$\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{c}-\frac{a+b+c}{b},$$

即　$$\frac{a+c}{b}+1-\frac{b+c}{a}-1=\frac{a+b}{c}+1-\frac{a+c}{b}-1,$$

$$\therefore\quad \frac{a+c}{b}-\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}-\frac{a+c}{b}.$$

故　$$\frac{b+c}{a},\ \frac{c+a}{b},\ \frac{a+b}{c}\ \text{爲等差級數.}$$

是以　$$\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{c+a},\ \frac{c}{a+b}\ \text{爲調和級數.}$$

8. 三數成調和級數. 試證各數減以中項之半，其結果成等比級數.

[解] 設 a, b, c 成調和級數，$a-\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, $c-\frac{b}{2}$ 成一等比級數，今因 b 爲 a, c 之調和中項，

$$\therefore\quad b=\frac{2ac}{a+c},\ \text{即}\ \frac{b}{2}=\frac{ac}{a+c}\cdots\cdots\cdots(1)$$

而
$$\frac{\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}}=\frac{\frac{ac}{a+c}}{a-\frac{ac}{a+c}}=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}.\quad[\text{以 (1) 代入}]$$

及
$$\frac{c-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}=\frac{c-\frac{ac}{a+c}}{\frac{ac}{a+c}}=\frac{c^2}{ac}=\frac{c}{a}.\quad[\text{以 (1) 代入}]$$

$$\therefore\ \frac{\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}}=\frac{c-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}},\ \text{即}\ a-\frac{b}{2},\ \frac{b}{2},\ c-\frac{b}{2}\ \text{成一等比級數.}$$

9. 試證若 x 爲 a 與 b 之調和中項，則 $1/(x-a)+1/(x-b)=1/a+1/b$.

[證]　已知
$$x=\frac{2ab}{a+b}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}&=\frac{1}{\frac{2ab}{a+b}-a}+\frac{1}{\frac{2ab}{a+b}-b}\\&=\frac{a+b}{ab-a^2}+\frac{a+b}{ab-b^2}\\&=\frac{a+b}{a-b}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\&=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.\end{aligned}$$

10. 三角形 ABC 之頂角 C，其二等分線交底邊 AB 於 D，其外角之二等分線交 AB 之延長線於 E. 試證 AD, AB, AE 成調和級數.

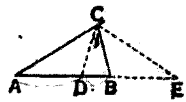
[解]　因 CD 爲頂角 ACB 之二等分線，

$$\therefore\quad AC:CB=AD:DB\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

又因 CE 爲 $\angle ACB$ 之外角二等分線，

$$\therefore\quad AC:CB=AE:EB \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 及 (2), $\therefore\quad AD:DB=AE:EB.$



$$AD\times EB=DB\times AE.$$

但 $$EB=AE-AB.$$

$$DB=AB-AD.$$

$$\therefore\quad AD(AE-AB)=AE(AB-AD).$$

$$AD\cdot AE-AD\cdot AB=AE\cdot AB-AE\cdot AD.$$

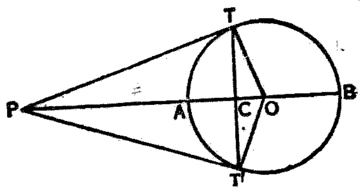
$$\therefore\quad 2AD\cdot AE=AB(AE+AD).$$

$$\therefore\quad AB=\frac{2AD\cdot AE}{AE+AD}.$$

故 AD, AB, AE 爲調和級數.

11. 點 P 在中心爲 O 之圓外, 由 P 所引之二切線與圓相切於 T 及 T'. 若直線 PO 交圓於 A 及 B, 交 TT' 於 C, 試證 PC 爲 PA 與 PB 之調和中項.

[證] 聯 TO 與 $T'O$.



$$\because\quad PC\perp TT'.$$

$$\therefore\quad \overline{PC}^2=\overline{PT}^2-\overline{TC}^2=\overline{PT}^2-(\overline{TO}^2-\overline{OC}^2)$$

$$=PA\cdot PB-(TO+OC)(TO-OC)\quad [\because PT^2=PA\cdot PB]$$

$$=PA\cdot PB-(BO+OC)(AO-OC)$$

$$=PA\cdot PB-BC\cdot AC$$

$$=PA\cdot PB-(PB-PC)(PC-PA)$$

$$=PA\cdot PB-PB\cdot PC+\overline{PC}^2+PA\cdot PB-PA\cdot PC$$

$$=2PA\cdot PB+\overline{PC}^2-PC(PA+PB).$$

移項，整理 $$PC(PA+PB)=2PA\cdot PB$$

$$\therefore\quad PC=\frac{2PA\cdot PB}{PA+PB}.$$

$\therefore$ PC 為 PA 及 PB 之調和中項.

習 題 LX 第 369 頁

1. 求數列 1, 2, 4, 7,……之第二十項及開首二十項之和.

[解] 1, 2, 4, 7,……
一階差 1, 2, 3,……
二階差 1, 1,……

今 $a_1=1,\ d_1=1,\ d_2=1,\ d_3=d_4=\cdots=0,\ n=20.$

$$\because\quad a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots r}d_r$$

$$\therefore\quad a_{20}=1+19\times 1+\frac{19\times 18}{1\cdot 2}\times 1=191.$$

$$\because\quad S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots(r+1)}d_r$$

$$\therefore\quad S_{20}=20+\frac{20\times 19}{1\cdot 2}+\frac{20\times 19\times 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1350.$$

2. 求數列 3, 8, 15, 24, 35,……之第八十項及其開首八十項之和.

[解] 3, 8, 15, 24, 35,……
一階差 5, 7, 9, 11,……
二階差 2, 2, 2,……

今 $a_1=3,\ d_1=5,\ d_2=2,\ d_3=d_4=\cdots=0,\ n=80.$

代入公式 $$\therefore\quad a_{80}=3+(80-1)5+\frac{(80-1)(80-2)}{1\cdot 2}\cdot 2$$

$$=3+395+6162=6560.$$

及 $$S_{80}=80\times 3+\frac{80\times 79}{2}\cdot 5+\frac{80\times 79\times 78}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$$

$$=240+15800+164320=180360.$$

3. 下列等差級數各屬於何階？試決定之.

(1) $3, 0, -1, 0, 3, \cdots\cdots$,　　(2) $10, 38, 88, 166, 278, 430, \cdots\cdots$,

(3) $285, 204, 140, 91, 55, \cdots\cdots$,　　(4) $2, 20, 90, 272, 650, 1332, \cdots\cdots$,

並求 (1) 之第十八項，(2) 之第二十項，(3) 之第十二項，及 (4) 之第十項.

[解] (1)

	3,		0,		-1,		0,		$3, \cdots\cdots$
一階差		-3,		-1,		1,		$3, \cdots\cdots$	
二階差			2,		2,		$2, \cdots\cdots$		

因二階差相等，故爲二階等差級數.

令　$a_1 = 3,\ d_1 = -3,\ d_2 = 2,\ d_3 = 0.$

$$\therefore\ a_{18} = 3 + (18-1)(-3) + \frac{(18-1)(18-2)}{2!} \cdot 2 = 224.$$

(2)

	10,		38,		88,		166,		278,		$430, \cdots\cdots$
一階差		28,		50,		78,		112,		$152, \cdots\cdots$	
二階差			22,		28,		34,		$40, \cdots\cdots$		
三階差				6,		6,		$6, \cdots\cdots$			

因三階差相等，故爲三階等差級數.

令　$a_1 = 10,\ d_1 = 28,\ d_2 = 22,\ d_3 = 6,\ d_4 = 0 \cdots\cdots$

$$\therefore\ a_{29} = 10 + (20-1)28 + \frac{(20-1)(20-2)}{2!} \cdot 22$$

$$+ \frac{(20-1)(20-2)(20-3)}{3!} \cdot 6 = 10118.$$

(3)

	285,		204,		140,		91,		$55, \cdots\cdots$
一階差		-81,		-64,		-49,		$-36, \cdots\cdots$	
二階差			17,		15,		$13, \cdots\cdots$		
三階差				-2,		$-2, \cdots\cdots$			

因三階差相等，故爲三階等差級數.

令　$a_1 = 285,\ d_1 = -81,\ d_2 = 17,\ d_3 = -2,\ d_4 = 0, \cdots\cdots$

$$\therefore\ a_{12} = 285 + (12-1)(-81) + \frac{(12-1)(12-2)}{2!} \cdot 17$$

$$+ \frac{(12-1)(12-2)(12-3)}{3!}(-2) = -1.$$

(4)	2,	20,	90,	272,	650,	1332,……
一階差	18,	70,	182,	378,	682,……	
二階差	52,	112,	196,	304,……		
三階差	60,	84,	108,……			
四階差	24,	24,……				

因四階差相等，故爲四階等差級數。

令 $a_1=2,\ d_1=18,\ d_2=52,\ d_3=60,\ d_4=24,\ d_5=0,\cdots\cdots$

$$\therefore\ a_{10}=2+(10-1)18+\frac{(10-1)(10-2)}{2!}\cdot 52$$

$$+\frac{(10-1)(10-2)(10-3)}{3!}\cdot 60$$

$$+\frac{(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)}{4!}\cdot 24=10100.$$

4. $1\cdot2\cdot3,\ 2\cdot3\cdot4,\ 3\cdot4\cdot5,\cdots\cdots$ 屬於何階？其第 n 項若何？關首 n 項之和若何？$1\cdot4\cdot2^2,\ 2\cdot6\cdot3^2,\ 3\cdot8\cdot4^2,\cdots\cdots$ 屬於何階？其第 n 項若何？

[解] (1) $1\cdot2\cdot3,\quad 2\cdot3\cdot4,\quad 3\cdot4\cdot5,\quad 4\cdot5\cdot6,\quad 5\cdot6\cdot7$ 可改寫爲

一階差	6,	24,	60,	120,	210,……
二階差	18,	36,	60,	90,……	
三階差	18,	24,	30,……		
四階差	6,	6,……			

因四階差相等，故爲四階等差級數。

令 $a_1=6,\ d_1=18,\ d_2=18,\ d_3=6,\ d_4=0,\cdots\cdots$

$$\therefore\ a_n=6+(n-1)18+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 18+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot 6$$

$$=6+18n-18+9n^2-27n+18+n^3-6n^2+11n-6$$

$$=n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2).$$

$$S_n=6n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 18+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 18+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\cdot 6$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

(2)　$1\cdot4\cdot2^2,\ 2\cdot6\cdot3^2,\ 3\cdot8\cdot4^2,\ 4\cdot10\cdot5^2,\ 5\cdot12\cdot6^2,\ 6\cdot14\cdot7^2,\cdots\cdots$

上式可改寫爲	16,		108,		384,		1000,		2160,		4116,……
一階差		92,		276,		616,		1160,		1956,……	
二階差			184,		340,		544,		796,……		
三階差				156,		204,		252,……			
四階差					48,		48,……				

因四階差相等故爲四階等差級數.

令　$a_1=16,\ d_1=92,\ d_2=184,\ d_3=156,\ d_4=48,\ d_5=0,\cdots\cdots$

$$\therefore\ a_n=16+(n-1)92+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot184$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot156$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\cdot48$$

$$=2n^4+6n^3+6n^2+2n=2n(n+1)^3.$$

5.　求十四層之三角錐狀彈積中彈丸之數.最下層有彈丸幾個?

[解]　自頂點起三角錐各層之彈丸數爲

	1,		3,		6,		10,	15……
一階差		2,		3,		4,		5,……
二階差			1,		1,		1,……	

因二階差相等,故爲二階等差級數,

令　$a_1=1,\ d_1=2,\ d_2=1,\ d_3=0\cdots\cdots$

$$S_{14}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3}=560,$$

$$a_{14}=1+(14-1)2+\frac{(14-2)(14-1)}{2!}=105.$$

[答]　三角錐彈丸數爲 560, 最下層彈丸數爲 105.

6.　若由十五層之正方形彈積撤去六層,尙餘彈丸幾何?

[解]　令 S_{15} 爲十五層彈丸總數,而 $n=15$.

S_6 爲六層彈丸總數,而　$n=6$.

代入公式　$\therefore\ S_{15}-S_6=\dfrac{15(15+1)(30+1)}{3!}-\dfrac{6(6+1)(12+1)}{3!}=1149.$

［答］　尙餘彈丸 1149 個。

7.　最上層有 5 個彈丸之十二層矩形彈積，共有彈丸幾個？

［解］　令 S_{12} 爲十二層矩形彈積總數，而 $n=12$，$p=5$.

代入公式，

$$S_{12}=\frac{n(n+1)(3p+2n-2)}{\underline{|3}}=\frac{12(12+1)(3\cdot5+2\cdot12-2)}{\underline{|3}}=962\text{ 個}.$$

8.　最下層有彈丸 253 個之三角錐狀彈積，共有彈丸幾個？

［解］　從第 5 題 $a_1=1$，$d_1=2$，$d_2=1$，$d_3=0$.

$$\therefore\quad \text{從公式 } a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}d_2,$$

得　$$253=1+(n-1)\cdot2+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}=\frac{n^2+n}{2}.$$

化簡　$$n^2+n-506=0.$$

分解因式　$$(n+23)(n-22)=0.\text{ 負數不適用}.$$

$$\therefore\quad n=22.$$

$$\therefore\quad S_{22}=\frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}}=\frac{22(22+1)(22+2)}{\underline{|3}}=2024\text{ 個}.$$

［答］　共有彈丸 2024 個。

9.　三角錐狀彈積與正方形彈積層數相同，而前者彈丸之數爲後者彈丸之數之 $\frac{4}{7}$. 各有彈丸幾個？

［解］　三角錐狀彈丸數爲 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}}$

正方形彈積數爲　$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{\underline{|3}}$，其中 n 爲層數。

依題意得式　$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{4}{7}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}.$$

$$7n+14=8n+4.$$

$$\therefore\quad n=10.$$

$$S_{10}=\frac{10(10+1)(10+2)}{3!}=220.$$

$$S_{10}=\frac{10(10+1)(20+1)}{3!}=385.$$

［答］ 三角錐狀彈丸共有 220 個，正方形彈積共有 385 個。

10 最上層有 9 個而最下層有 240 個之矩形彈積，共有彈丸幾個？

［解］ 自頂點起，矩形彈積各層彈丸數爲

	9,		20,		33,		48,		65,……	
一階差		11,		13,		15,		17,……		
二階差			2,		2,		2,……			

因二階差相等，故爲二階等差級數。

令 $a_1=9,\ d_1=11,\ d_2=2,\ d_3=0,\cdots\cdots$

用公式 $$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}d_2,$$

因 $a_n=240$, $\therefore\ 240=9+(n-1)11+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2$

$$=9+11n-11+n^2-3n+2.$$

化簡 $$n^2+8n-240=0.$$

分解因式 $$(n-12)(n+20)=0.$$

$$\therefore\ n=12.$$

$$\therefore\ S_{12}=\frac{12(12+1)(27+24-2)}{3!}=1274.$$

［答］ 矩形彈積共有彈丸 1274 個。

11. 試證 $1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+\cdots\cdots+n)^2$.

［解］ $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3,\cdots\cdots$ 可改寫爲

	1,		8,		27,		64,		125,……	
一階差		7,		19,		37,		61,……		
二階差			12,		18,		24,……			
三階差				6,		6,……				

因三階差相等，故爲三階等差級數。

令 $a_1=1,\ d_1=7,\ d_2=12,\ d_3=6,\ d_4=0\cdots\cdots$

$$\because\ S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}d_3$$

$$\therefore\quad S_n=n+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot 7+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cdot 12+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}\cdot 6$$

$$=\frac{n^2+2n^3+n^4}{4}=\frac{n^2(1+2n+n^2)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

但 $$1+2+3+\cdots+n=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

故 $$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

12. 試證 $1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

[解] $1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4,\cdots\cdots$ 可改寫爲

	1,		16,		81,		256,		625,		1296,……
一階差		15,		65,		175,		369,		671,……	
二階差			50,		110,		194,		302,……		
三階差				60,		84,		108,……			
四階差					24,		24,……				

因四階差相等,故爲四階等差級數.

今 $$a_1=1,\ d_1=15,\ d_2=60,\ d_3=24,\ d_4=0,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 15+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 50$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot 60$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cdot 24$$

$$=\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$$

$$=\frac{n}{30}(2n^2+3n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

故 $$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

13　第 n 項爲 (1) n^2-n+1, (2) $n(n+1)(n+2)/6$ 之級數屬於何階? 其開首 n 項之和若何?

[解]　(1) $\phi(n)=n^2-n+1$ 爲二次式, 據 §714, 此級數爲二階等差級數.

命	$n=$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,\cdots\cdots$	
則	$n^2-n+1=$	$1,$	$3,$	$7,$	$13,$	$21,\cdots\cdots$	
一階差		$2,$	$4,$	$6,$	$8,\cdots\cdots$		
二階差		$2,$	$2,$	$2,\cdots\cdots$			

令　　$a_1=1,\ d_1=2,\ d_2=2,\ d_3=0,$

$$\therefore\ S_n=n+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot 2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot 2=\frac{n^3+2n}{3}=\frac{n(n^2+2)}{3}.$$

(2) $\phi(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 爲三次式, 據 §714, 此級數爲三階等差級數.

命	$n=$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	$6,\cdots\cdots$
則	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=$	$1,$	$4,$	$10,$	$20,$	$35,$	$56,\cdots\cdots$
一階差		$3,$	$6,$	$10,$	$15,$	$21,\cdots\cdots$	
二階差		$3,$	$4,$	$5,$	$6,\cdots\cdots$		
三階差		$1,$	$1,$	$1,\cdots\cdots$			

令　　$a_1=1,\ d_1=3,\ d_2=3,\ d_3=1,\ d_4=0,\cdots\cdots$

$$\therefore\ S_n=n+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

14　若將 $d=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 之各個一階等差級數書出, 再求各個級數之一項, 二項, 三項, 四項, $\cdots\cdots$ 之和, 卽得

$$1, 3, 6, 10,\cdots\cdots;\ 1, 4, 9, 16,\cdots\cdots;\ 1, 5, 12, 22\cdots\cdots;\cdots\cdots$$

諸數列, 分別稱之爲三角數, 四角數, 五角數, $\cdots\cdots$

試證此諸數列中之第 k 個, 其第 n 項及開首 n 項之和. 各爲

$$n(kn-k+2)/2\ \text{及}\ n(n+1)(kn-k+3)/6.$$

［解］ $d=k$ 時一階等差級數爲

$$1,\quad 1+k,\quad 1+2k,\quad 1+3k,\quad 1+4k,\cdots\cdots$$

求此級數之一項，二項，三項，四項，……之和得

$$1,\quad 2+k,\quad 3+3k,\quad 4+6k,\quad 7+10k,\cdots\cdots$$

一階差　$1+k,\quad 1+2k,\quad 1+3k,\quad 1+4k,\cdots\cdots$

二階差　$k,\quad k,\quad k,\cdots\cdots$

令　$a_1=1,\ d_1=1+k,\ d_2=k,\ d_3=0,\cdots\cdots$

$$\therefore\ a_n=1+(n-1)(1+k)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot k$$

$$=\frac{kn^2-kn+2n}{2}=\frac{n(kn-k+2)}{2},$$

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}(1+k)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot k$$

$$=\frac{n}{6}\{6+3(n-1)(1+k)+(n-1)(n-2)k\}$$

$$=\frac{n}{6}(n+1)(kn-k+3)$$

15. 屬於任何階之等差級數，其各項加以他一低階等差級數之對應項時，結果仍屬原階．證之，

［證］ 設一 r 階等差級數及一 s 階等差級數而 $s<r$.

按 §713, r 階等差級數之 n 項應爲

$$a_0n^r+a_1n^{r-1}+a_2n^{r-2}+\cdots\cdots+a_r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

s 階等差級數之 n 項應爲

$$b_0n^s+b_1n^{s-1}+b_2n^{s-2}+\cdots\cdots+b_s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其中 $a_0, a_1,\cdots\cdots$ 及 $b_0, b_1\cdots\cdots$ 爲不含 n 之係數.

今將二對應項 (1) 及 (2) 相加得 $a_0n^r+\cdots\cdots+(a_r+b_s)$. 最高次數仍爲 r 次，再按 §714, 命 $n=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 等數值代入 $a_0n^r+\cdots\cdots+(a_r+b_s)$ 時所得數列成一 r 階等差級數與 (1) 同階，故如題言.

16. n 次多項式，$f(x)$，中若以一階等差級數之各項依次代 x，即得

n 階等差級數；普徧言之，若以 r 階等差級數之各項依次代 x，即得 nr 階等差級數。試證之。

［證］　設 n 次多項式爲 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

一階等差級數之普徧項爲　b_0y+b_1.

今以 $x=b_0y+b_1$ 代入 (1)，得

$$a_0(b_0y_1+b_1)^n+a_1(b_0y_1+b_1)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=a_0b_0y^n+\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 爲 n 次式，故按 §714 命 $y=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 等數值代入 (2) 時所得數列仍爲 n 階等差級數。

又設若 r 階等差級數之普徧項爲 $c_0y^r+c_1y^{r-1}+\cdots\cdots+c_r$

今以 $x=c_0y^r+c_1y^{r-1}+\cdots\cdots+c_r$ 代入 (1)，得

$$a_0(c_0y^r+c_1y^{r-1}+\cdots\cdots+c_r)^n+a_1(c_0y^r+c_1y^{r-1}+\cdots\cdots c_r)+\cdots\cdots$$
$$=a_0c_0{}^ny^{nr}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) 爲 nr 次式，故按 §714，命 $y=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 等數值代入 (3) 時所得數列爲 nr 階等差級數。

習　題　LXI　　第 374 頁

1.　對於 $x=-3, -2, -1, 0$，已知 $y=-20, 6, 0, 4$. 求 $x=-5/2$ 時及 $x=-1/2$ 時 y 若何。

［解］　已知　$x_1=-3,\quad x_2=-2,\quad x_3=-1,\quad x_3=0;$

$$y_1=-20,\quad y_2=6,\quad y_3=0,\quad y_4=4.$$

以 y 之值排成數列。

	$-20,$		$6,$		$0,$		4
一階差		$26,$		$-6,$		4	
二階差			$-32,$		10		
三階差				42			

$$\therefore\ y_1=-20,\ d_1=26,\ d_2=-32,\ d_3=42.$$

代入公式

$$y=y_1+(x-x_1)d_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{1\cdot2}d_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{1\cdot2\cdot3}d_3$$

$$=-20+(x+3)\cdot 26-16(x+2)(x+3)+7(x+1)(x+2)(x+3)$$
$$=7x^3+26x^2+23x+4.$$

當 $x=-\frac{5}{2}$ 時，$y=7\left(-\frac{5}{2}\right)^3+26\left(-\frac{5}{2}\right)^2+23\left(-\frac{5}{2}\right)+4=-\frac{3}{8}$.

當 $x=-\frac{1}{2}$ 時，$y=7\left(-\frac{1}{2}\right)^3+26\left(-\frac{1}{2}\right)^2+23\left(-\frac{1}{2}\right)+4=-\frac{15}{8}$.

2. 已與 $f(4)=10$, $f(6)=-12$, $f(7)=-20$, $f(8)=-18$；試求 $f(x)$ 而藉以計算 $f(12)$.

[解] 設 $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(1)

則 $f(4)=b_0+4b_1+16b_2+64b_3=10$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2)

$f(6)=b_0+6b_1+36b_2+216b_3=-12$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3)

$f(7)=b_0+7b_1+49b_2+343b_3=-20$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4)

$f(8)=b_0+8b_1+64b_2+512b_3=-18$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(5)

從 (2), (3), (4) 與 (5) 各式，得

$$b_0=-90,\ b_1=73,\ b_2=-16,\ b_3=1.$$

代入 (1) 式，得 $f(x)=-90+73x-16x^2+x^3$,

$$\therefore f(12)=-90+73\cdot 12-16\cdot 144+1728=210.$$

3. 已與 $25^2=625$, $26^2=676$, $27^2=729$；用遞差法求 26.54^2.

[解] $x_1,\ x_2,\ x_3=25,\ 26,\ 27$

$y_1,\ y_2,\ y_3=625,\ 676,\ 729.$

一階差 51, 53,

二階差 2,

$$\therefore y=625+(26.54-25)51+\frac{(26.54-25)(26.54-26)}{2}\cdot 2$$
$$=625+78.54+0.8316=704.3716.$$

4. 已與 $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$；用遞差法求 4.8^3.

[解] $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4=8,\ 27,\ 64,\ 125$

一階差　19,　37,　61
二差階　18,　24
三階差　6

$$\therefore\ y=8+(4.8-2)19+\frac{(4.8-2)(4.8-3)}{2!}\cdot 18$$

$$+\frac{(4.8-2)(4.8-3)(4.8-4)}{3!}\cdot 6=110.592.$$

5. 已與 $1/22=0.04546$, $1/23=0.04348$, $1/24=0.04167$, $1/25=0.04$; 用遞差法求 $1/23.6$.

[解] $x_1, x_2, x_3, x_4=22, 23, 24, 25$

$y_1, y_2, y_3, y_4=0.04546, 0.04348, 0.04167, 0.04$

一階差　-0.00198,　-0.00181,　-0.00167
二階差　0.00017,　0.00014
三階差　-0.00003

$$\because\quad x=23.6.$$

$$\therefore\ y=0.04546+(23.6-22)(-0.00198)+\frac{(23.6-22)(23.6-23)}{2!}(0.00017)$$

$$+\frac{(23.6-22)(23.6-23)(23.6-24)}{3!}(-0.00003)$$

$$=0.04237552.$$

6. 已與 $\sqrt{432}=20.7846$, $\sqrt{433}=20.8087$, $\sqrt{434}=20.8327$, $\sqrt{435}=20.8566$, $\sqrt{436}=20.8806$; 用遞差法求 $\sqrt{435.7}$.

[解] $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5=$ 432,　433,　434,　435,　436
$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5=$ 20.7846, 20.8087, 20.8327, 20.8566, 20.8806
一階差　0.0241,　0.0240,　0.0239,　0.0240
二階差　-0.0001,　-0.0001,　0.0001
三階差　0　0.0002
四階差　0.0002

$$\because\quad x=435.7.$$

$$\therefore\quad y=20.7846+(435.7-432)(0.0241)$$

$$+\frac{(435.7-432)(435.7-433)}{2!}(-0.0001)+0$$

$$+\frac{(435.7-432)(435.7-433)(435.7-434)(435.7-435)}{4!}(0.0002)$$

$$=20.7846+0.0892-0.0005+0.0001=20.8734.$$

7. 藉助於拉格郎奇公式,求三次多項式,已知其對於 $x=-2, 0, 4, 5$ 之值爲 $5, 3, -2, -4$

[解] $x_1, x_2, x_3, x_4=-2,\ 0,\ 4,\ 5$

$y_1, y_2, y_3, y_4=5,\ 3,\ -2,\ -4$

$$y=5\frac{(x-0)(x-4)(x-5)}{(-2-0)(-2-4)(-2-5)}+3\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{(0+2)(0-4)(0-5)}$$

$$-2\frac{(x+2)(x-0)(x-5)}{(4+2)(4-0)(4-5)}-4\frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(5+2)(5-0)(5-4)}$$

$$=-\frac{5x^3-45x^2+100x}{84}+\frac{3x^3-21x^2+6x+120}{40}$$

$$+\frac{2x^3-6x^2-20x}{24}-\frac{4x^3-8x^2-32x}{35}$$

$$=\frac{2520-806x-9x^2-13x^3}{840}.$$

習題 LXII 第 378 頁

1. 求 $\log_2 4$, $\log_4 2$, $\log_{\sqrt{2}} 8$, $\log_5 625$, $\log_3 729$, $\log_{10} 0.001$, $\log_2 1/64$, $\log_2 0.125$, $\log_a \sqrt[3]{a^{-2}}$, $\log_8 128$, $\log_{a^2} a^8$.

[解] (a) $\log_2 4=x,\quad 2^x=4=2^2,\quad \therefore\ x=2.$

(b) $\log_4 2=x,\quad 4^x=2=4^{\frac{1}{2}}.\quad \therefore\ x=\frac{1}{2}.$

(c) $\log_{\sqrt{2}} 8=x,\quad \sqrt{2}^x=8=\sqrt{2}^6,\quad \therefore\ x=6.$

(d) $\log_5 625=x,\quad 5^x=625=5^4,\quad \therefore\ x=4.$

(e) $\log_3 729=x,\quad 3^x=729=3^6,\quad \therefore\ x=6.$

(f) $\log_{10} 0.001=x,\ 10^x=0.001=10^{-3},\ \therefore\ x=-3.$

(g) $\log_2 \frac{1}{64}=x,\quad 2^x=\frac{1}{64}=2^{-6},\quad \therefore\ x=-6.$

(h)　$\log_2 0.125 = x,\quad 2^x = 0.125 = 2^{-3},\quad \therefore\quad x = -3.$

(i)　$\log_a \sqrt[3]{a^{-2}} = x,\quad a^x = \sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}},\quad \therefore\quad x = -\frac{2}{3}.$

(j)　$\log_8 128 = x\quad 8^x = 128 = 8^{\frac{7}{3}},\quad \therefore\quad x = \frac{7}{3}.$

(k)　$\log_{a^2} a^3 = x,\quad a^{2x} = a^3,\quad \therefore\quad x = \frac{3}{2}.$

2. 若 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 而 $\log_{10} 3 = 0.4771$，求 12, 9/2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$ 以 10 爲底之對數．

［解］ (a)　$\log_{10} 12 = \log_{10} 3 \times 2^2 = \log_{10} 3 + 2\log_{10} 2$

$$= 0.4771 + 0.6020 = 1.0791.$$

(b)　$\log_{10} \dfrac{9}{2} = \log_{10} \dfrac{3^2}{2} = 2\log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0.9542 - 0.3010 = 0.6532.$

(c)　$\log_{10} \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_{10} 2 = 0.1505.$

(d)　$\log_{10} \sqrt[3]{6} = \dfrac{1}{3}\log 2 \times 3 = \dfrac{1}{3}[\log_{10} 2 + \log_{10} 3]$

$$= \frac{1}{3}(0.3010 + 0.4771) = 0.2594.$$

3. 將 $\log_a 600^{\frac{1}{6}}$ 以 $\log_a 2$, $\log_a 3$, 及 $\log_a 5$ 表之．

［解］ $\log_a 600^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\log_a 600 = \frac{1}{6}[\log_a 2^3 + \log_a 3 + \log_a 5^2]$

$$= \frac{1}{6}[3\log_a 2 + \log_a 3 + 2\log_a 5].$$

4. 將下列各式對於底 a 之對數，以 $\log_a b$, $\log_a c$, $\log_a d$ 表之．

(1)　$b^{\frac{2}{3}} c^{-\frac{1}{2}} / d^{\frac{4}{5}}$.　　　(2)　$\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b^6}} \div \sqrt{b^3\sqrt{a^{-3}}}$.

［解］ (1)　$\log_a \dfrac{b^{\frac{2}{3}} c^{-\frac{1}{2}}}{d^{\frac{4}{5}}} = \log_a b^{\frac{2}{3}} c^{-\frac{1}{2}} - \log_a d^{\frac{4}{5}}$

$$= \log_a b^{\frac{2}{3}} + \log_a c^{-\frac{1}{2}} - \log_a d^{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{2}{3}\log_a b - \frac{1}{2}\log_a c - \frac{4}{5}\log_a d.$$

(2)　$\log_a[\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b^6}} \div \sqrt{b^3\sqrt{-a^{-3}}}] = \log_a(a^{-2}\sqrt{b^6})^{\frac{1}{3}} - \log_a(b^3\sqrt{a^{-3}})^{\frac{1}{2}}$

$$=\log_a(a^{-\frac{2}{3}})(b^6)^{\frac{1}{6}}-\log_a(b^{\frac{3}{2}})(a^{-\frac{3}{4}})$$

$$=\log_a a^{-\frac{2}{3}}+\log_a b-\log_a b^{\frac{3}{2}}-\log_a a^{-\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{2}{3}\log_a a+\log_a b-\frac{3}{2}\log_a b+\frac{3}{4}\log_a a$$

$$=\frac{1}{12}\log_a a-\frac{1}{2}\log_a b=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\log_a b.$$

5. 試證 $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}}=31/18.$

［證］ $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}}=\log_3\left[81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{3}}$

$$=\log_3[81\cdot 729^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-\frac{2}{12}}]^{\frac{1}{3}}=\log_3[3^4\cdot 3^{\frac{6}{4}}\cdot 3^{-\frac{4}{12}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\log_3[3^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{9}}]=\log_3 3^{\frac{31}{18}}=\frac{31}{18}.$$

6. 試證 $\log_a\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1}).$

［證］ $\log_a\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\log_a\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-x^2+1}$

$$=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})^2=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1}).$$

習 題 LXIII

第 389 頁

用對數求下列各式之近似值.

1. ［解］ $79\times 470\times 0.982.$

$$\log(79\times 470\times 0.982)=\log 79+\log 470+\log 0.982$$

$$=1.89763+2.67210+\bar{1}.99211=4.56184.$$

$$\therefore\quad 79\times 470\times 0.982=36460.$$

2. ［解］ $(-9503)\times(-0.0086578)=9503\times 0.0086578.$

$$\log(9503\times 0.0086578)=\log 9503+\log 0.0086578$$

$$=3.97786+\bar{3}.93739=1.91525.$$

$$\therefore\quad (-9503)\times(-0.0086578)=82.28.$$

3. [解] 1375600×8799000.

$$\log(1375600 \times 8799000) = \log 1375600 + \log 8799000$$
$$= 6.13851 + 6.94443 = 13.08294.$$
$$\therefore \quad 1375600 \times 8799000 = 1.210 \times 10^{13}.$$

4. [解] $0.0356 \times (-0.00049) = -(0.0356 \times 0.00049)$.

$$\log(0.0356 \times 0.00049) = \log 0.0356 + \log 0.00049$$
$$= \bar{2}.55145 + \bar{4}.69020 = \bar{5}.24165.$$
$$\therefore \quad 0.0356 \times (-0.00049) = -1.744 \times 10^{-5}.$$

5. [解] $\dfrac{8075}{364.9}$.

$$\log 8075 + \operatorname{colog} 364.9 = 3.90715 + \bar{3}.43791 = 1.34506.$$
$$\therefore \quad \frac{8075}{364.9} = 22.13.$$

6. [解] $\dfrac{0.00542}{0.04708}$.

$$\log 0.00542 - \log 0.04708 = \bar{3}.7340 - \bar{2}.67284 = \bar{1}.06116.$$
$$\therefore \quad \frac{0.00542}{0.04708} = 0.1151.$$

7. [解] $\dfrac{24617}{-0.00054}$.

$$\log 24617 + \operatorname{colog} 0.00054 = 4.3912 + 3.2673 = 7.6588.$$
$$\therefore \quad \frac{24617}{-0.00054} = -4.558 \times 10^{7}.$$

8. [解] $\dfrac{0.643 \times 7095}{67 \times 9 \times 0.462}$.

$$\log 0.643 + \log 7095 + \operatorname{colog} 67 + \operatorname{colog} 9 + \operatorname{colog} 0.462$$
$$= \bar{1}.80821 + 3.85095 + \bar{2}.17393 + \bar{1}.04576 + 0.33536$$
$$= 1.21421.$$
$$\therefore \quad \frac{0.643 \times 7095}{67 \times 9 \times 0.462} = 16.38.$$

9. [解] $\dfrac{9097\times 5.4086}{-225\times 593\times 0.8665}$.

$$\log 9097+\log 5.4086+\text{colog}\,225+\text{colog}\,593+\text{colog}\,0.8665$$
$$=3.9589+0.7331+\bar{3}.6478+\bar{3}.2268+0.0622=\bar{1}.6288.$$
$$\therefore\quad \frac{9097\times 5.4086}{-225\times 593\times 0.8665}=-0.4255.$$

10. [解] $(2.388)^5$.

$$5\log 2.388=5\times 0.37804=1.89020.$$
$$\therefore\quad (2.388)^5=77.66.$$

11. [解] $(0.57)^{-4}$.

$$-4\log 0.57=-(4\times\bar{1}.7569)=-(\bar{1}.0276)=0.9764.$$
$$\therefore\quad (0.57)^{-4}=9.472.$$

12. [解] $\left(\dfrac{19}{11}\right)^9$.

$$9(\log 19+\text{colog}\,11)=9(1.2788+\bar{2}.9586)=2.1366.$$
$$\therefore\quad \left(\frac{19}{11}\right)^9=137.$$

13. [解] $(1.014)^{25}$.

$$25\log 1.014=25(0.00904)=0.15100.$$
$$\therefore\quad (1.014)^{25}=1.413.$$

14. [解] $\sqrt{67.54}$.

$$\tfrac{1}{2}\log 67.54=\tfrac{1}{2}(1.82956)=0.91478.$$
$$\therefore\quad \sqrt{67.54}=8.218.$$

15. [解] $\sqrt[3]{-0.30892}$.

$$\tfrac{1}{3}\log(-0.30892)=-\tfrac{1}{3}(\bar{1}.48985).$$
$$\therefore\quad \sqrt[3]{-0.30892}=-0.6761.$$

16. [解] $8^{\frac{5}{4}}$.

$$\tfrac{5}{4}\log 8=\tfrac{5}{4}(0.90309)=1.12886.$$
$$\therefore\quad 8^{\frac{5}{4}}=13.46.$$

17. [解] $(0.001)^{\frac{2}{3}}$.

$$\tfrac{2}{3}\log 0.001=\tfrac{2}{3}(\overline{3}.0000)=\overline{2}.0000.$$

$$\therefore\quad (0.001)^{\frac{2}{3}}=0.01.$$

18. [解] $\left(29\frac{9}{11}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{1}{2}\log\frac{328}{11}=\frac{1}{2}(\log 328+\text{colog }11)$$

$$=\frac{1}{2}(2.51587+\overline{2}.9586)=\frac{1}{2}(1.4745)=0.73725.$$

$$\therefore\quad \left(29\frac{9}{11}\right)^{\frac{1}{2}}=5.461.$$

19. [解] $\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{79}{45}}$.

$$\tfrac{1}{2}(\log 5+\text{colog }6)+\tfrac{1}{3}(\log 79+\text{colog }45)$$

$$=\tfrac{1}{2}(0.6990+\overline{1}.2218)+\tfrac{1}{3}(1.8976+\overline{2}.3468)=0.04187.$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{79}{45}}=1.101.$$

20. [解] $\sqrt{0.1}\div(0.009)^{\frac{3}{5}}$.

$$\tfrac{1}{2}\log 0.1+\tfrac{3}{5}\text{colog }0.009=-0.50000+1.22745=0.72745.$$

$$\therefore\quad \sqrt{0.1}\div(0.009)^{\frac{3}{5}}=5.34.$$

21. [解] $(0.00068)^{-\frac{5}{4}}$.

$$-\tfrac{5}{4}\log 0.00068=-\tfrac{5}{4}\times\overline{4}.83251=0.95936.$$

$$\therefore\quad (0.00068)^{-\frac{5}{4}}=9108.$$

22. [解] $\left(6\frac{2}{3}\right)^{3.4}$.

$$3.4(\log 12+\text{colog }3)=4.42350+\overline{2}.377792=2.80129.$$

$$\therefore\quad \left(6\frac{2}{3}\right)^{3.4}=632.8.$$

23. [解] $(-9306)^{\frac{3}{7}}=-(9306)^{\frac{3}{7}}$.

$$\tfrac{3}{7}\log 9306=\tfrac{3}{7}\times 3.96874=1.70089.$$

$$\therefore\quad (-9306)^{\frac{3}{7}}=-50.22.$$

24. [解] $(0.0057)^{2.5}$.

$$2.5\log 0.0057=2.5\times\bar{3}.7659=\bar{6}.41455.$$

$$\therefore\quad (0.0057)^{2.5}=2.592\times 10^{-6}.$$

25. [解] $(5648)^{\frac{1}{2}}\times(-0.94)^{\frac{1}{3}}$.

$$\tfrac{1}{2}\log 5648+\tfrac{1}{3}\log 0.94=1.87595+\bar{1}.99103=1.86698.$$

$$\therefore\quad (5648)^{\frac{1}{2}}\times(-0.94)^{\frac{1}{3}}=-73.6.$$

26. [解] $28927^3\div(0.8)^{\frac{2}{5}}$.

$$3\log 28927+\tfrac{2}{5}\operatorname{colog} 0.8=13.383915+0.03876=13.422675.$$

$$\therefore\quad 28927^3\div(0.8)^{\frac{2}{5}}=2.647\times 10^{13}.$$

27. [解] $\dfrac{\sqrt[7]{0.0476}\times\sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{5059\times 0.0088}}$.

$$\tfrac{1}{7}\log 0.0476+\tfrac{1}{5}\log 222+\tfrac{1}{3}(\operatorname{colog} 5059+\operatorname{colog} 0.0088)$$

$$=\bar{1}.8111+0.4693+\bar{1}.45049=\bar{1}.73089.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt[7]{0.0476}\times\sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{5059\times 0.0088}}=0.5381.$$

28. [解] $\dfrac{\sqrt[6]{943\times 7298}}{\sqrt[5]{0.00006\times 0.99}}$.

$$\tfrac{1}{6}(\log 943+\log 7298)+\tfrac{1}{5}(\operatorname{colog} 0.00006+\operatorname{colog} 0.99)$$

$$=\tfrac{1}{6}(2.9745+3.86318)+\tfrac{1}{5}(4.2218+0.0044)$$

$$=1.13961+0.84524=1.98485.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt[6]{943\times 7298}}{\sqrt[5]{0.00006\times 0.99}}=96.57.$$

29. [解] $\sqrt{\dfrac{854\times\sqrt[3]{0.042}}{7.9856\times\sqrt[4]{0.0005}}}$.

$$\tfrac{1}{3}\log 854+\tfrac{1}{6}\log 0.042+\tfrac{1}{2}\operatorname{colog} 7.9856+\tfrac{1}{8}\operatorname{colog} 0.0005$$
$$=1.46575+\bar{1}.770541+\bar{1}.54884+0.41263=1.197761.$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{854\times\sqrt[3]{0.042}}{7.9856\times\sqrt[4]{0.0005}}}=15.77.$$

30. [解] $\sqrt[3]{\dfrac{7^{\frac{1}{4}}\times 92^{\frac{1}{5}}\times(0.01)^{\frac{1}{2}}}{(0.00026)^5\times 5968^{\frac{1}{3}}}}$.

$$\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{4}\log 7+\tfrac{1}{5}\log 92+\tfrac{1}{2}\log 0.01+5\operatorname{colog} 0.00026+\tfrac{1}{3}\operatorname{colog} 5968]$$
$$=\frac{1}{12}\log 7+\frac{1}{15}\log 92+\frac{1}{6}\log 0.01+\frac{5}{3}\operatorname{colog} 0.00026+\frac{1}{9}\operatorname{colog} 3968$$
$$=0.07042+0.13099-0.3333+5.9750+\bar{1}.58046=5.42357.$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{\frac{7^{\frac{1}{4}}\times 92^{\frac{1}{5}}\times(0.01)^{\frac{1}{2}}}{(0.00026)^5\times 5968^{\frac{1}{3}}}}=2.652\times 10^5.$$

習　題　LXIV　　第 392 頁

1. 求 $\log_5 555$, $\log_7 0.0463$, $\log_{100} 47$.

[解]
$$\log_5 555=\frac{\log 555}{\log 5}=\frac{2.7443}{0.6990}=3.92603.$$
$$\log_7 0.0463=\frac{\log 0.0463}{\log 7}=\frac{\bar{2}.6656}{0.8451}=-1.578.$$
$$\log_{100} 47=\frac{\log 47}{\log 100}=\frac{1.0721}{2}=0.83605.$$

2. 解下列各指數方程式:

(1)　$3^x=729$.　　(2)　$a^{x^2+2}=a^{3x}$.　　(3)　$213^x=516^{-x+4}$.

[解] (1)　$3^x=729$.

$$x=\log_3 729=\frac{\log 729}{\log 3}=\frac{2.8627}{0.4771}=6.$$

(2)　$a^{x^2+2}=a^{3x}$, 底數旣相等,則指數不得不相等。

$$\therefore\quad x^2-3x+2=0.$$

分解因式 $$(x-1)(x-2)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 及 } 2.$$

(3) $213^x=516^{-x+4}$.

$$\log_{213}516^{-x+4}=x.$$

$$\therefore\quad (-x+4)\log_{213}516=x.$$

即 $$\frac{x}{4-x}=\log_{213}516=\frac{\log 516}{\log 213}=\frac{2.7126}{2.3284}.$$

$$10.8504=5.041x.$$

$$\therefore\quad x=2.152.$$

3. 解下列各對數方程式。

(1) $\log x+\log(x+3)=1$. (2) $\log x^2+\log x=2$.

(3) $\log(1-2x)^3-\log(3-x)^3=6$. (4) $x^{\log x}=2$.

[解] (1) $\log x+\log(x+3)=1$.

$$\log[x(x+3)]=\log 10.$$

$$\therefore\quad x^2+3x-10=0.$$

分解因式 $$(x+5)(x-2)=0.$$

$$\therefore\quad x=-5 \text{ 及 } 2.$$

(2) $\log x^2+\log x=2$.

$$\log x^3=2.$$

$$\log x=\tfrac{2}{3}=0.6666.$$

$$\therefore\quad x=4.642.$$

(3) $\log(1-2x)^3-\log(3-x)^3=6$.

$$3\log(1-2x)-3\log(3-x)=6.$$

$$\log\frac{1-2x}{3-x}=2=\log 100,$$

$$\therefore\quad \frac{1-2x}{3-x}=100.$$

即 $$1-2x=300-100x.$$

整理
$$98x=299.$$
$$\therefore \quad x=\frac{299}{98}=3.051.$$

(4)　$x^{\log x}=2.$
$$\therefore \quad (\log x)^2=\log 2=0.3010.$$
$$\log x=\sqrt{0.3010}=0.549.$$
$$\therefore \quad x=3.537.$$

4.　年利率 5%，利息每年併入本中，求本金 7500 圓三十五年後之本利和。

[解]
$$A=P(1+r)^n=7500\left[1+\frac{5}{100}\right]^{35}.$$
$$\log A=\log 7500+35\log 1.05=4.6171.$$
$$\therefore \quad A=41410.$$

[答]　三十五年後之本利和爲 41410 元。

5.　年利率 3%，利息每半年併入本中，求本金 5500 圓二十年後之本利和。

[解]
$$A=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}=5500\left[1+\frac{3}{200}\right]^{40}.$$
$$\log A=\log 5500+40\log 1.015=4.004.$$
$$\therefore \quad A=10010.$$

[答]　本利和爲 10010 元。

6.　試證本金一宗若以 5% 複利計算，則十五年後金額應增至一倍以上，而九十五年後應增至百倍以上。

[證]
$$A=P\left[1+\frac{5}{100}\right]^{15}=P\times 2.079\cdots\cdots$$

故知十五年後，本利和應增至一倍以上。

又
$$A=P\left[1+\frac{5}{100}\right]^{95}=P\times 103.09\cdots\cdots$$

故知九十五年後，本利和應增至百倍以上。

7. 年利率 4%，以複利計算，十五年後本利和達 1250 圓，則本金若何？

［解］
$$A=P(1+r)^n.$$
$$1250=P\left(1+\frac{4}{100}\right)^{15}.$$
$$\log 1250=\log P+15\log 1.04.$$
$$\log P=3.0969-15\times 0.0170=2.8419.$$
$$\therefore\quad P=694.8.$$

［答］本金爲 694.8 元.

8. 某人每年存入儲蓄銀行 200 圓，年利率 $3\frac{1}{2}\%$. 二十五年後本利合計若干？

［解］ $A=200[1.035+(1.035)^2+\cdots\cdots+(1.035)^{25}]$.

按 §701, $$A=200\times 1.035\times\frac{(1.035)^{25}-1}{1.035-1}$$
$$=200\times 1.035\times 1.363\div 0.035.$$
$$\therefore\quad \log A=\log 200+\log 1.035+\log 1.363+\operatorname{colog} 0.035$$
$$=2.30103+0.01494+0.13450+1.45593$$
$$=3.90640.$$
$$\therefore\quad A=8030.$$

［答］此人於二十五年後共得總數 8030 元.

9. 年利率 4%，須一次付金幾何，始能得三十年間每年支金 1200 圓之年金？又若爲永續年金則如何？

［解］
$$P=\frac{A}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{1200}{0.04}\left[1-\frac{1}{(1.04)^{30}}\right]$$
$$=\frac{1200}{0.04}\times\frac{2.236}{3.236}$$
$$=30000\times\frac{2.236}{3.236}=20730\text{ 元.}$$

若爲永續年金則　$P=\frac{A}{r}=\frac{1200}{0.04}=30000$ 元。

[答]　須一次付金 20730 元始能得三十年間每年支金 1200 元之年金．又若爲永續年金則須一次付金 30000 元。

10.　若 c 表直角三角形斜邊之長，而 a, b 爲他二邊之長，則 $b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$，今知 $c=586.4$, $a=312.2$, 試用對數求 b 及三角形之面積：

[解]　已知 $b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$; $c=586.4$, $a=312.2$.

$$\log b=\tfrac{1}{2}[\log(c+a)+\log(c-a)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[2.95357+2.43807]=2.69582.$$
$$\therefore\quad b=496.4.$$

面積　$$A=\tfrac{1}{2}ab.$$

$$\log A=\log a+\log b+\operatorname{colog} 2$$
$$=2.49446+2.69582+\bar{1}.6990=4.88928.$$
$$\therefore\quad A=77500.$$

[答]　$b=496.4$ 面積爲 77500.

11.　若 a, b, c 指示三角形諸邊之長，而 $s=(a+b+c)/2$，則三角形之面積爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 今知 $a=416.8$, $b=424$, $c=25.68$，求三角形之面積。

[解]　已知 $s=(a+b+c)/2$, $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;　$a=416.8$, $b=424$, $c=25.68$.

$$s=\frac{416.8+424+25.68}{2}=433.24.$$

$$\log A=\tfrac{1}{2}[\log s+\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[2.63\,47+1.21588+0.96570+2.610216]$$
$$=3.714268.$$
$$\therefore\quad A=5179.$$

[答]　所求面積爲 5179.

12. 假定 $\pi=3.1416$, 藉助於公式 $S=4\pi r^2$, $V=4\pi r^3/3$, 求半徑爲 23.6 之球之表面積及體積.

[解] 設 $\pi=3.1416$, S 爲球之表面積, V 爲體積.

$$\log S=\log 4+\log \pi+\log r^2$$
$$=0.6021+0.49715+2.7458$$
$$=3.84505.$$
$$\therefore\quad S=6998.$$
$$\log V=\log 4+\log \pi+\log r^3+\operatorname{colog} 3$$
$$=0.6021+0.49715+4.1187+\bar{1}.5229$$
$$=4.74085.$$
$$\therefore\quad V=55050.$$

[答] 球之表面積爲 6998, 體積爲 55050.

習 題 LXV　　第 405 頁

1. 由甲地至乙地,有通道三,由乙地至丙地有通道二,由丙地至丁地有通道四.今有人由甲地行向丁地共有幾種行法?

[解] 自甲至乙有 C_1^3 種方法,自乙至丙有 C_1^2 種方法,自丙至丁有 C_1^4 種方法.故自甲至丁共有 $C_1^3\cdot C_1^2\cdot C_1^4=3\times2\times4=24$ 種方法.

2. 人數五,編號之椅數爲六,共有幾種坐法?

[解] 五人坐在六張編號之椅上,其方法爲 P_5^6.

而 $$P_5^6=6\times5\times4\times3\times2=720.$$

故共有 720 種坐法.

3. 八人作半英里競走,其第一名,第二名,第三名之獲得方法有幾?

[解] 八人中獲得第一名,第二名,第三名之排列方法爲 P_3^8.

而 $P_3^8=8\cdot7\cdot6=336$ 種方法,故所求之方法共有 336 種.

4. 由水手十人中選四人盪槳,共有幾種方法?又諸人列坐艇上共有幾種方法?

[解] 十人中選四人之方法爲 C_4^{10}, 若列坐艇上其方法爲 P_4^{10}.

而 $C_4^{10}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210,\quad P_4^{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040.$

故十人中選四人之方法有 210 種，其列坐方法有 5040 種。

5. 由兵士一百名中選哨兵三名，共有幾種方法？

［解］ 兵士一百名選哨兵三名應有

$$C_3^{100}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}=161700 \text{ 種方法。}$$

6. 五組壘球隊，共商一比賽次序表，欲令每組與其他各組各比賽三次。則此表中應共有比賽幾次？

［解］ 比賽時，每二隊一次，其選擇方法爲 C_2^5，但每隊須比賽三次，故應共比賽 $3\cdot C_3^5=3\cdot\dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=30$ 次。

故此表中應共比賽 30 次。

7. 1, 2, 1, 3, 2, 1, 5 諸數字，每次全取，共有幾種排列方法？

［解］ 在 1, 2, 1, 3, 2, 1 5 七個數字中，三個 1 相同，二個 2 相同，故所求排列方法應有 $\dfrac{\lfloor 7}{\lfloor 3\,\lfloor 2}=420$ 種方法。 § 766.

8. "factoring" 一字中諸字母每次全取之排列，其中 (1) 以母音始以子音終者幾何？ (2) f 不在首位置上者幾何？ (3) 母音在最先三個位置上者幾何？

［解］ 在 factoring 一字中，母音有三個，子音有六個。

(1) 首位須用母音，有 C_1^3 次選法，末位須用子音，有 C_1^6 種選法。

原字共有九位，除去首位及末位尚餘七位，以所餘七個文字排在所餘七個位置中共有 P_7^7 種排法。

故以母音始以子音終者共有 $C_1^3\cdot C_1^6\cdot P_7^7=3\cdot 6\cdot\lfloor 7=70720$ 種方法。

(2) 因 f 不在首位，∴ 以 f 排在其餘八個位置中有 P_1^8 種方法。

其餘八個文字可任意排列有 P_8^8 種排法。

故 f 不在首位之排列方法共有 $P_1^8\cdot P_3^8=8\cdot\lfloor 8=322560$ 種方法。

(3) 以三個母音排在最先三個位置有 P_3^3 種方法。

再以六個子音排在其餘六個位置上有 P_6^6 種方法。

故母音在最先三個位置上之方法共有 $P_3^3 \cdot P_6^6 = \lfloor 3 \times \lfloor 6 = 4320$ 種方法。

9. 在上述排列中，母音不變 a, o, i 之次序者幾何？子音不變 f, c, t, r, n, g 之次序者幾何？母音子音俱不變，此等次序者幾何？

［解］ (1) 母音 a, o, i 之次序不變，其排列方法與三個相同文字者相等。

故其排列方法為 $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 3} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$ 種方法。§766.

(2) 子音 f, c, t, r, u, g 之次序不變，其排列方法與六個相同文字者相等。

故其排列方法為 $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 6} = 9 \times 8 \times 7 = 504$ 種方法。§766.

(3) 母音，子音次序俱不變，其排列方法與有三個文字相同，及六個文字亦相同者相等。

故其排列方法為 $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 3 \lfloor 6} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$ 種方法。

10. 由 "resident" 一字中每次取五字母，但第一，第三，及第五字母須為母音，共可作幾種排列？

［解］ resident 八個文字中有三個母音，但此三個母音中有兩個相同，以此三個排在第一，三，五，三個位置有 $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ 種方法。

在上列八文字中，除去已排三個母音外再取二個排列在第二，第四兩位置中有 P_2^5 種方法．故所求方法應為 $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} \times P_2^5 = 3 \times 5 \times 4 = 60$ 種方法．

11. 壘球隊九人，三人在外場，六人在內場．今有十五人候選，其中六人能在外場，九人能在內場，共有幾種選法？

［解］ 能在外場之六人中任選三人有 C_3^6 種方法。

能在內場之九人中任選六人有 C_6^9 種方法。

故所求方法共有 $C_3^6 \times C_3^9 = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} \times \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} = 1680$ 種方法。

12. 由 1, 2, 3, 8, 9, 10 諸數中選取二數，其和須爲偶數，共有幾種選法？

［解］ 若二數之和爲偶數，此二數須皆爲奇數或皆爲偶數。

二數若皆爲奇數則自 1, 3, 9 三個奇數中任選二數有 C_2^3 種方法。

二數若皆爲偶數則自 2, 8, 10 三個偶數中任選二數有 C_2^3 種方法。

故所求方法應爲 $C_2^3 + C_2^3 = 3 + 3 = 6$ 種方法。

13. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 諸數字作一位，二位，及三位之數，(1) 數字許重複時共可作成若干數？ (2) 數字不許重複時共可作成若干數？

［解］ (1) 作一位數有 7 種方法，作二位數許重複有 $7\times7=7^2$ 種方法。作三位數許重複有 $7\times7\times7=7^3$ 種方法。故共可作成 $7+7^2+7^3 = 7+49+343 = 399$ 種之數。

(2) 若不許重複，則共可作成 $P_1^7 + P_2^7 + P_3^7 = 7 + 7\cdot6 + 7\cdot6\cdot5 = 259$ 種之數。

14. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 諸數字，可作五位不同之奇數幾何？

［解］ 以 1, 2, 3, 4, 5, 6 排列成奇數，其末位應自 1, 3, 5 中任選一個有 C_1^3 種方法。

其餘四位則自所餘 5 個數字中選出有 P_4^5 種方法。

兩種配合，得所求之奇數共有 $C_1^3 \times P_4^5 = 3\times5\times4\times3\times2 = 360$ 種。

15. 在 3000 與 8000 之間，有數字不重複之奇數爲何？其能爲 5 所整除者又幾何？

［解］ (1) 在 3000 與 8000 間之奇數，首位數可於 3, 4, 5, 6, 7 五個數字中任選一個有 $C_1^5 = 5$ 種方法。末位數可於 1, 3, 5, 7, 9 中任選一個，亦有 $C_1^5 = 5$ 種方法。中間兩位數字可從八個數字（自 1, 2, 3,……9, 10 共十個數字，除去首位末位二個，尙餘八個）中任選二個排列，其方法爲 P_2^8 種。

但首位末位不能重複，均爲 3, 5, 7, 時應除去，此種重複奇數有 $3\cdot P^8_2$ 種方法。

故所求方法應有 $5\cdot5\cdot P^8_2-3\cdot P^8_2=(25-3)\cdot P^8_2=22\cdot P^8_2=1232$ 種。

(2) 若所求奇數須能被 5 除盡，則末位數應爲 5，而首位數可自 3, 4, 5, 6, 7 中任選一個，其中間二位數字之排列方法則仍爲 P^8_2.

故所求方法應有 $4\cdot P^8_2=4\cdot56=224$ 種。

16. 某人邀其五友中一人或多人午餐，共有幾種方法？

［解］ 五友中請一人，二人，三人，四人，五人之方法共有 $C^5_1+C^5_2+C^5_3+C^5_4+C^5_5=31$ 種方法。

17. 今將蘋果十五隻分給三童子，令一人得六隻，一人得五隻，又一人得四隻，共有幾種方法？

［解］ 十五隻蘋菓先分六隻給第一個童子，其方法共有 C^{15}_6 種。

餘九隻蘋菓再分五隻給第二個童子，其方法共有 C^9_5 種。

餘四隻蘋菓分給第三個童子，其方法有 C^4_4 種。

三個童子互換可得 $\underline{|3}$ 種排列法。

故所求方法應爲

$$\underline{|3}\cdot C^{15}_6\cdot C^9_5\cdot C^4_4=\underline{|3}\cdot\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$=\underline{|3}\cdot630630=3783780 \text{ 種.}$$

18 六 + 號與五 − 號書作一列，共有幾種方法？

［解］ 按 §766, 得所求方法 $\dfrac{\underline{|11}}{\underline{|6}\,\underline{|5}}=\dfrac{11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5}=462$ 種。

19. 用 1, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7 諸數字，共可作成若干四位之數？

［解］ 以 1, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7 整列得 2, 2, 2; 3, 3, 3; 4, 4; 1, 5, 6, 7.

(1) 所取四數字中有三字相同其排列法有

$$C^2_1\times C^6_1\times\frac{\underline{|4}}{\underline{|3}}=2\times6\times\frac{\underline{|4}}{\underline{|3}}=48 \text{ 種。}$$

(2) 有兩對文字相同其排列法有 $C_2^3\times\frac{|4}{|2\,|2}=3\times\frac{|4}{|2\,|2}=18$ 種。

(3) 有二文字相同其餘二文字不同，其排列法有

$$C_1^3\cdot C_2^6\cdot\frac{|4}{|2}=3\cdot\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\frac{|4}{|2}=540\text{ 種。}$$

(4) 有四不同文字其排列法有 $P_4^7=7\times6\times5\times4=840$ 種。

故所求四位數共有 $48+18+540+840=1446$ 種。

20. 由法文書十五册及德文書十二册中，選出法文書八册及德文書七册，列置書架上，共有幾種方法？

［解］ 十五册法文書任選八册有 C_8^{15} 種方法。

十二册德文書任選七册有 C_7^{12} 種方法。

若列置書架上，則共有 $C_8^{15}\cdot C_7^{12}\cdot\underline{|15}=6435\times792\times\underline{|15}=5096520\times\underline{|15}$ 種方法。

21. 由同套紙牌十三張中擇取五張，須有 King (王)或 Queen (女王)或二者在內，共有幾種方法？

［解］ 十三張牌中任選五張其中須有一張 King (王)其方法有 C_4^{11} 種.

十三張牌中任選五張其中須有一張 Queen (女王)其方法有 C_4^{11} 種.

十三張牌中任選五張其中須有一張 King (王) 及一張 Queen (女王)其方法有 C_3^{11} 種方法.

故所求方法應有 $C_4^{11}+C_4^{11}+C_3^{11}=2C_4^{11}+C_3^{11}=660+165=825$ 種.

22 由五美國人及六英國人中選出四人，(1) 若祇有一英國人在內，共有幾種方法？(2) 若至少有一英國人在內，共有幾種方法？

［解］ (1) 六英人中選一人有 C_1^6 種方法，五美人中選三人有 C_3^5 種方法.

故四人中若祇有一英人在內共有 $C_1^6\cdot C_3^5=6\cdot10=60$ 種方法.

(2) 在所選四人中，有一英人,三美人其方法有 $C_1^6\cdot C_3^5$ 種；有二英人，二美人其方法有 $C_2^6\cdot C_2^5$ 種；有三英人,一美人其方法有 $C_3^6\cdot C_1^5$ 種；有四英人其方法有 C_4^6 種.故所求方法應共有

$$C^6_1\cdot C^5_3+C^6_2\cdot C^5_2+C^6_3\cdot C^5_1+C^6_4=60+150+100+15=325\text{ 種.}$$

23. 一組平行線,其數爲十,他一組平行線,其數爲十二,二組相交,共成若干平行四邊形?

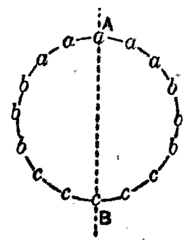
[解] 二組平行線相交成一平行四邊形,在十條平行線中任取二條其方法爲 C^{10}_2, 十二條平行線中任取二條其方法爲 C^{12}_2.

故所求平行四邊形共有 $C^{10}_2\times C^{12}_2=45\cdot 66=2970$ 個.

24. 有 n 點在一平面上,其中 m 點在一直線上,此外無三點在同一直線上者.試證聯結諸點所得之直線,其數爲 $C^n_2-C^m_2+1$.

[證] 二點決定一直線,故 n 點可決定 C^n_2 條直線.若 m 點不在一直線上,則 m 點可決定 C^m_2 條直線.今因 m 點在一直線上,故 C^m_2 條直線祇能算一條直線,即所求直線數應爲 $C^n_2-C^m_2+1$.

25. 用同樣珍珠五粒,同樣紅寶石六粒,同樣金剛石五粒,穿成一手鐲,其穿法有幾?



[解] 五個相同之珍珠,六個相同之紅寶石,及五個相同之金剛石共計十六個,其環狀排列法應爲 $\dfrac{\underline{|16}}{16\underline{|5}\,\underline{|6}\,\underline{|5}}$, 但此環反轉 180° 時可與原環排列相同,故其結果爲上式之 $\frac{1}{2}$, 惟其中排成對稱式者,(如右圖)反轉後與不反轉時完全相同,在上式中祇有一種故須將對稱式之方法加入始能乘以 $\frac{1}{2}$.

圖中 a, b, c 各表珍珠,紅寶石,金剛石三種,今以 AB 爲軸旋轉 180° 時,結果與原形無異,而此種對稱式應有 $\dfrac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|3}\,\underline{|2}}$ 種方法.

$$\therefore\text{ 所求排列法應爲 }\frac{1}{2}\left[\frac{\underline{|16}}{16\underline{|5}\,\underline{|6}\,\underline{|5}}\right]+\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|3}\,\underline{|2}}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}[126126+210]=63168\text{ 種.}$$

26. 十人圍兩圓桌而坐,每桌五人,共有幾種坐法?

[解] 先從十人中選五人排在第一圓桌,其選擇法有 C^{10}_5 種,其坐法

有 $\underline{|5-1}$ 種.所餘五人坐在第二圓桌,其坐法亦有 $\underline{|5-1}$ 種.

故所求坐法應有 $C^{10}_5\,\underline{|5-1}\cdot\underline{|5-1}=252\cdot\underline{|4}\cdot\underline{|4}=145152$ 種.

27. 今有五男六女,欲舉行雙打網球比賽,兩方須各為一男一女,共有幾種配合法?

[解] 雙打網球每組一男一女,在五男中選二人與六女中選二人配合,其方法為 $C^5_2\cdot C^6_2$ 但二男或二女互調位置,可有 2 法.

故所求配合法應有 $2\times C^5_2\times C^6_2=2\times 10\times 15=300$ 種.

28. 十五人投票互選,被選者一人,候選者五人,共有幾種投票方法?所投之票平均分配於五候選者之間,共有幾種方法?

[解] 候選者五人中選舉一人有 5 法,共有十五人投票,故所求投票方法應有 $5\cdot5\cdot5\cdots\cdots$ 至 15 項 $=5^{15}$ 種.

又所投之票平均分配於五候選者之間,則每一候選人可得三票,第一候選人在十五票中得三票之方法為 C^{15}_3,第二候選人在餘十二票中得三票之方法為 C^{12}_3,第三候選人在餘九票中得三票之方法為 C^9_3,餘類推.

故所求方法應有

$$C^{15}_3\cdot C^{12}_3\cdot C^9_3\cdot C^6_3\cdot C^3_3=\frac{\underline{|15}}{\underline{|3}\,\underline{|12}}\cdot\frac{\underline{|12}}{\underline{|3}\,\underline{|9}}\cdot\frac{\underline{|9}}{\underline{|3}\,\underline{|6}}\cdot\frac{\underline{|6}}{\underline{|3}\,\underline{|3}}\cdot\frac{\underline{|3}}{\underline{|3}\,\underline{|0}}$$

$$=\frac{\underline{|15}}{\underline{|3}\,\underline{|3}\,\underline{|3}\,\underline{|3}\,\underline{|3}}=\frac{\underline{|15}}{(\underline{|3})^5}\text{ 種.}$$

29. 艇上水手八人,二人常居左舷,另一人常居右舷,則諸人列坐之法共幾何?

[解] 左舷有四位,右舷有四位,二人常居右舷其坐法有 P^4_2 種,一人常居右舷,其坐法有 P^4_1 種,尚餘五位以所餘五人排列則有 P^5_5 種.

故所求諸人列坐之法有 $P^4_2\times P^4_1\times P^5_5=12\cdot4\cdot\underline{|5}=5760$ 種.

30. 由十八人選九人成一組壘球隊,其十八人中十人祇能在內場,五人祇能在外場,餘三人無此種限制,共有幾種選法?

[解] 一組壘球隊內場六人,外場三人.

(1) 內場十人中選六人,外場五人中選三人共有方法 $C^{10}_6\cdot C^5_3$ 種.

(2) 內場中或外場中少選一人，以餘三人中之一補充共有方法 $[C^{10}_5\cdot C^5_3+C^{10}_6\cdot C^5_2]\cdot C^3_1$ 種.

(3) 內場中或外場中少選二人，或內場外場各少選一人，以餘三人中之二補充共有方法 $[C^{10}_4\cdot C^5_3+C^{10}_6\cdot C^5_1+C^{10}_5\cdot C^5_2]\cdot C^3_2$ 種.

(4) 內場中或外場中少選三人，或內場少選二人外場少選一人，或內場少選一人外場少選二人，以所餘三人補充，共有方法 $[C^{10}_3\cdot C^5_3+C^{10}_6+C^{10}_4\cdot C^5_2+C^{10}_5\cdot C^5_1]C^3_3$ 種.

故共有

$$\begin{aligned}&C^{10}_6\cdot C^5_3+[C^{10}_5\cdot C^5_3+C^{10}_6\cdot C^5_2]C^3_1+[C^{10}_4\cdot C^5_3+C^{10}_6\cdot C^5_1+C^{10}_5\cdot C^5_2]\cdot C^3_2\\&\qquad+[C^{10}_3\cdot C^5_3+C^{10}_6+C^{10}_4\cdot C^5_2+C^{10}_5\cdot C^5_1]C^3_3\\&\quad=2100+7560+6300+6300+3150+7560+1200+210\\&\qquad+2100+1260=37740 \text{ 種方法.}\end{aligned}$$

31. 試證六相異文字，每次全取作排列，若有二文字各須避免一特殊位置，則排列數爲 $6!-2\cdot5!+4!$.

[證] 六文字之排列法爲 $\underline{|6}$，一文字佔據特殊位置時，其排列法爲 $\underline{|5}$，共有二個文字，故其排列法爲 $2\underline{|5}$. 但二個文字同時各佔特殊位置時，其排列法在 $2\underline{|5}$ 中已重複，故所求排列數爲 $\underline{|6}-2\cdot\underline{|5}+\underline{|4}$ 即 $6!-2\cdot5!+4!$.

32. p, q, r, s, t, v 諸文字每次取四文字之重複配合數若何?

[解] 按 §772, 在六文字中任取四個之重複配合數爲

$$C^{6+4-1}_4=C^9_4=126.$$

33. 五粒骰子能擲出幾種不同結果?

[解] 五粒骰子擲出不同結果，其方法與求六個文字任取五個之重複配合數相同. 故所求不同結果有 $C^{6+5-1}_5=C^{10}_5=252$ 種.

34. 若變數之個數爲十, $\Sigma x^4y^3z^2u$, $\Sigma x^2y^2z^2u$, $\Sigma x^3y^3z^2u^2v$ 諸對稱函數各有幾項?

[解] (1) 十個文字任取四個，其方法有 $P^{10}_4=10\times9\times8\times7=5040$ 種.

(2)　十個文字任取四個，其中三個因指數相同不能互換，其方法有
$\dfrac{P^{10}_4}{\underline{|3}}=\dfrac{5040}{6}=840$ 種。

(3)　十個文字任取四個其中有兩個指數相同，其方法有

$$\frac{P^{10}_4}{\underline{|2}\,\underline{|2}}=\frac{5040\times 6}{4}=7560 \text{ 種。}$$

35.　試證四變數之 n 次完全齊次函數之項數爲

$$(n+1)(n+2)(n+3)/3!.$$

〔證〕　四變數中任取 n 個之重複配合數爲

$$C^{4+n-1}_n=C^{n+3}_n=C^{n+3}_3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{\underline{|3}}.$$

習　題　LXVI　　第409頁

1.　求 $(a+b+c+d)^3$ 之展開式，但須合併同類項。

〔解〕　在 $(a+b+c+d)^3$ 展開式中之項，有三種形式：a^3, a^2b, abc，其係數各爲 $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|3}}$, $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|2}\,\underline{|1}}$, $\underline{|3}$.

合併同類項得 $(a+b+c+d)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc.$

2.　再求 $(a+b+c+d)^5$ 之展開式。

〔解〕　在 $(a+b+c+d)^5$ 展開式中之項有六種形式：a^5, a^4b, a^3b^2, a^3bc, a^2b^2c, a^2bcd，其係數各爲

$$\frac{\underline{|5}}{\underline{|5}},\ \frac{\underline{|5}}{\underline{|4}\,\underline{|1}},\ \frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\,\underline{|2}},\ \frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\,\underline{|1}\,\underline{|1}},\ \frac{\underline{|5}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|1}},\ \frac{\underline{|5}}{\underline{|2}\,\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}.$$

合併同類項得 $(a+b+c+d)^5=\Sigma a^5+5\Sigma a^4b+10\Sigma a^3b^2+20\Sigma a^3bc$
$+30\Sigma a^2b^2c+60\Sigma a^2bcd.$

3.　求 $(a+b+c+d)^{12}$ 展開式中 $a^5b^4c^2d$, $a^4b^4c^4$ 及 $a^5b^5c^2$ 之係數。

〔解〕　$a^5b^4c^2d$ 之係數爲 $\dfrac{\underline{|5+4+2+1}}{\underline{|5}\,\underline{|4}\,\underline{|2}\,\underline{|1}}=\dfrac{\underline{|12}}{\underline{|5}\,\underline{|4}\,\underline{|2}\,\underline{|1}}=83160.$

$a^4b^4c^4$ 之係數爲 $\dfrac{\underline{|4+4+4}}{\underline{|4}\,\underline{|4}\,\underline{|4}}=\dfrac{\underline{|12}}{\underline{|4}\,\underline{|4}\,\underline{|4}}=34650.$

$a^5b^5c^2$ 之係數爲 $\dfrac{\underline{|5+5+2}}{\underline{|5}\,\underline{|5}\,\underline{|2}}=\dfrac{\underline{|12}}{\underline{|5}\,\underline{|5}\,\underline{|2}}=16632.$

4. 求 $(a-b+c-d)^{10}$ 展開式中 $ab^2c^6d^4$ 之係數。

[解]　$ab^2c^8a^4$ 之係數爲 $\dfrac{\underline{|10}}{\underline{|2}\,\underline{|3}\,\underline{|4}}=12600.$

5. 求 $(a+3b+2c)^8$ 展開式中 a^4b^8c 之係數。

[解]　a^4b^3c 之係數爲 $\dfrac{\underline{|8}}{\underline{|4}\,\underline{|3}\,\underline{|1}}\cdot 1^4\cdot 3^8\cdot 2^1=280\times 54=15120.$

6. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展開式中 x^6 之係數。

[解]　以展開式之項之普偏形式爲 $\dfrac{\underline{|10}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\delta}}x^{\beta+2\gamma+3\delta}$ ……………(1)

而　$\beta+2\gamma+3\delta=6$ ……………………………(2)

及　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=10$ ……………………………(3)

從 (2), 設 $\delta=2$, 則 $\gamma=0$, $\beta=0$, 再從 (3), $\alpha=8$.

設 $\delta=1$, $\gamma=1$, 則 $\beta=1$, 再從 (3), $\alpha=7$.

設 $\delta=1$, $\gamma=0$, 則 $\beta=3$, 再從 (3), $\alpha=6$.

設 $\delta=0$, $\gamma=3$, 則 $\beta=0$, 再從 (3), $\alpha=7$.

設 $\delta=0$, $\gamma=2$, 則 $\beta=2$, 再從 (3), $\alpha=6$.

設 $\delta=0$, $\gamma=1$, 則 $\beta=4$, 再從 (3), $\alpha=5$.

設 $\delta=0$, $\gamma=0$, 則 $\beta=6$, 再從 (3), $\alpha=4$.

以 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 各組値代入 (1) 得

所求 x^6 之係數爲

$$\frac{\underline{|10}}{\underline{|2}\,\underline{|8}}+\frac{\underline{|10}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|7}}+\frac{\underline{|10}}{\underline{|1}\,\underline{|3}\,\underline{|6}}+\frac{\underline{|10}}{\underline{|3}\,\underline{|7}}+\frac{\underline{|10}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|6}}+\frac{\underline{|10}}{\underline{|1}\,\underline{|4}\,\underline{|5}}+\frac{\underline{|10}}{\underline{|6}\,\underline{|4}}$$

$$=45+720+840+120+1260+1260+210=4455.$$

7. 求 $(1-x+3x^2)^9$ 展開式中 x^7 之係數。

［解］　此展開式之項之普徧形式爲 $\frac{\lfloor 9}{\lfloor \alpha \lfloor \beta \lfloor \gamma} 1^{\alpha}\cdot(-1)^{\beta}\cdot 3^{\gamma}\cdot x^{\beta+2\gamma}$……(1)

而　$$\alpha+\beta+\gamma=9 \cdots\cdots(2)$$

$$\beta+2\gamma=7 \cdots\cdots(3)$$

從 (3)，設 $\gamma=3$，　則 $\beta=1$，　再從 (2)，　$\alpha=5$.

設 $\gamma=2$，　則 $\beta=3$，　再從 (2)，　$\alpha=4$.

設 $\gamma=1$，　則 $\beta=5$，　再從 (2)，　$\alpha=3$.

設 $\gamma=0$，　則 $\beta=7$，　再從 (2)，　$\alpha=2$.

以 α, β, γ 各組値代入 (1)，得

所求 x^7 之係數爲 $-\frac{\lfloor 9 \times 3^3}{\lfloor 5 \lfloor 1 \lfloor 3}-\frac{\lfloor 9 \times 3^2}{\lfloor 4 \lfloor 3 \lfloor 2}-\frac{\lfloor 9 \times 3}{\lfloor 3 \lfloor 5 \lfloor 1}-\frac{\lfloor 9}{\lfloor 2 \lfloor 7 \lfloor 0}$

$$=-13608-11340-1512-36=-25496.$$

習　題　LXVII　　第414頁

1.　某事之或然率爲 3/8；試問其機比偏於成功抑偏於失敗？此等機比爲何？其不致發生之或然率爲何？

［解］　其機比爲 5 對 3 而偏於失敗，不致發生之或然率爲 $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

2.　利於某甲得勝某種遊戲之機比爲 10 對 9，則其得勝之機會若何？其失敗又若何？

［解］　甲得勝之或然率爲 $\frac{10}{10+9}$ 即 $\frac{10}{19}$.

其失敗之或然率爲　$1-\frac{10}{19}=\frac{9}{19}$.

3　賭金 60 元，利於 A 之機比爲 5 對 3，試問此希冀爲若何？

［解］　A 勝之或然率爲 $\frac{5}{5+3}$ 即 $\frac{5}{8}$，故希冀爲 $60\times\frac{5}{8}=37.5$ 元.

4.　法國哲學家達蘭貝耳氏 (D' Alembert) 有言 '對於任何未來事象，僅有兩種可能的結果，一曰成，一曰敗. 故任何事象之機會均爲 1/2，而或然率之定義乃爲無意識耳.” 試問將如何以對答之？

［解］ 對於未來事象其結果誠爲成與敗兩種，但成與敗中之各種現象未必能具有相若，相等之機會，故任何事象之機會不能預斷其爲 $\frac{1}{2}$，而或然率之定義不能謂爲無意識.

5. 某甕有球十六枚，七枚爲白色，六枚黑色，三枚紅色.問：

(1) 從中引取一球，則白色球之機會若何？黑色球若何？紅色球又若何？

(2) 從中引取兩球，則同爲黑色球之機會若何？一白及一紅之機會若何？

(3) 從中引取三球，則全爲紅色球之機會若何？無紅色球者若何？一白一黑一紅者又若何？

(4) 從中引取四球，一枚爲白色，而其餘非白色之機會若何？二枚爲白色而他二枚非白色之機會若何？

(5) 同時引取十球，必須五枚爲白色，三枚爲黑色，二枚爲紅色，則其機會如何？

［解］ (1) 取得白球之方法有 C^7_1；取得任一球之方法有 C^{16}_1，故取得白球之機會爲 C^7_1/C^{16}_1 卽 $\dfrac{7}{16}$.

同理，取得黑球之機會爲 C^6_1/C^{16}_1 卽 $\dfrac{3}{8}$；取得紅球之機會爲 C^3_1/C^{16}_1 卽 $\dfrac{3}{16}$.

(2) 二球皆爲黑球之機會爲 C^6_2/C^{16}_2 卽 $\frac{1}{8}$.

一球爲白球，另一球爲紅球之機會爲 $C^3_1\cdot C^7_1/C^{16}_2$ 卽 $\dfrac{7}{40}$.

(3) 全爲紅球之機會爲 C^3_3/C^{16}_3 卽 $\dfrac{1}{560}$.

三球中無紅球之機會爲 C^{13}_3/C^{16}_3 卽 $\dfrac{143}{280}$.

三球中白、黑、紅各一之機會爲 $C^7_1\cdot C^6_1\cdot C^3_1/C^{16}_3$ 卽 $\dfrac{9}{40}$.

(4) 僅一球爲白色，其餘非白色之機會爲 $C^7_1\cdot C^9_3/C^{16}_4$ 卽 $\dfrac{21}{65}$.

僅二球爲白色，其餘非白色之機會爲 $C_2^7\cdot C_2^3/C_4^{16}$ 即 $\frac{27}{65}$.

(5)　其機會爲 $C_5^7\cdot C_3^6\cdot C_2^3/C_{10}^{16}$ 即 $\frac{45}{286}$.

6.　二骰擲下，試問其擲出同點之機會若何？以三枚骰子投擲時又若何？

［解］　以二骰子能擲出 36 種情形，其中有 6 種同點，故其機會爲 $\frac{6}{36}$ 即 $\frac{1}{6}$.

以三骰子擲時，或然情形之數爲 $6\times6\times6=216$，兩點相同而一點不同的情形之數爲 $3\times5\times6=90$，三點全同的情形之數爲 6.

故擲出同點之數爲 $90+6=96$，而其機會爲 $\frac{96}{216}$ 即 $\frac{4}{9}$.

7.　二骰擲下得和爲七點之機會若何？試示此爲最易擲得之點。

［解］　二骰子現 1, 6；2, 5；3, 4 均成七點。

二骰子擲下時，或然情形之數爲 $6\times6=36$，成七點情形之數爲

$$3\times\underline{|2}=6.$$

∴ 得和爲七點之機會爲 $\frac{6}{36}$ 即 $\frac{1}{6}$.

又因二骰子擲出七點情形之數 6 爲最大故七點爲最易擲得。

8.　試問擲下二骰至少有一爲么之機會若何？其中僅一爲么之機會又若何？

［解］　二骰子擲下時全無么之機會爲 $\frac{5\times5}{6\times6}$ 即 $\frac{25}{36}$，故至少有一爲么之機會爲 $1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

又若一爲么，另一不爲么即僅一爲么之機會爲 $\frac{2\times5}{6\times6}$ 即 $\frac{5}{18}$.

9.　從 factor 與 banter 二字中胡亂取出一個字母，試問得以取出同一字母之機會若何？

［解］ factor 與 banter 二字中有三個文字 a, t, r 相同.

或然情形之數爲　　$6\times6=36$.

取出同一文字情形之數爲 3.

故所求機會爲 $\frac{3}{36}$ 即 $\frac{1}{12}$.

10. 一箱藏有紙劵九張,各以數字 1, 2……9 標明.若胡亂引取二張,則所得二劵數字相乘積爲偶數之機會若何? 爲奇數之機會若何?

［解］ 所取二張紙劵上之數字,若有一個爲偶數 則其乘積亦爲偶數.

故乘積爲偶數的情形之數爲 $C^4_2+C^4_1\cdot C^5_1$ (因偶數共四個,奇數共五個).

或然情形之數爲 C^9_2

故乘積爲偶數之機會爲 $\frac{C^4_2+C^4_1\cdot C^5_1}{C^9_2}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$.

又若乘積爲奇數的情形之數爲 C^5_2.

故乘積爲奇數之機會爲 $\frac{C^5_2}{C^9_2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

11. 承上題從箱中引取五劵,試求下列各項之機會: (1) 1, 2, 3 三劵均被取出; (2) 1, 2, 3 任何一劵單獨被取出; (3) 引取之劵不雜有此三劵之任何一張.

［解］ (1) 1, 2, 3 三劵均被取出,其餘二劵可在餘 6 劵中引取之,

其機會爲
$$\frac{C^6_2}{C^9_5}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}.$$

(2) 1, 2, 3 三劵中任取一劵其餘四劵從餘六劵中取之,

其機會爲
$$\frac{C^3_1\cdot C^6_4}{C^9_5}=\frac{45}{126}=\frac{5}{14}.$$

(3) 除去 1, 2, 3 三劵,所取五劵完全從餘六劵中取之,

其機會爲
$$\frac{C^6_5}{C^9_5}=\frac{6}{126}=\frac{1}{21}.$$

12. 整包撲克牌五十二張,從中任取四張,則得四張爲 ace, king, queen 及 knave 之機會若何? ace, king, queen 及 knave 爲同花者之

機會若何?

［解］ (1) 取 ace, king, queen 及 knave 四張之方法有 $4\times4\times4\times4=4^4$ 種。

但任取四張之方法共有 C_4^{52} 種，故所求機會爲 $\frac{4^4}{C_4^{52}}=\frac{256}{270725}$.

(2) 又若所取之 ace, king, queen 及 knave 須爲同花其方法祇有 4 種，故所求機會爲 $\frac{4}{C_2^{52}}=\frac{4}{270725}$.

13. 以鬬 whist 爲戲，某人手有 trumps 四張，其餘三張則各屬別花，試求其機會。

［解］ 五十二張紙牌中，一種花四張，其餘每種三張共取十三張其機會爲
$$\frac{C_4^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}}{C_{13}^{52}}.$$

再任何一組，如心形花有四張，其餘三種花每種三張，輪爲將牌(trumps) 其機會爲 $\frac{1}{4}$, 故所求機會爲
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{C_4^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}}{C_{13}^{52}}=\frac{10\times(143)^4\cdot\underline{|13}\cdot\underline{|39}}{\underline{|52}}.$$

14 三骰同擲，得和爲五點之機會若何？其和小於五點之機會又若何？

［解］ (1) 和爲五點之情形爲 1, 1, 3; 1, 2, 2 二種。

擲出 1, 1, 3 三點有 3 種方法，擲出 1, 2, 2 三點亦有 3 種方法。

故其機會爲 $$\frac{3+3}{6\times6\times6}=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}.$$

(2) 和小於五點者有四點及三點兩種。

若和爲四點，則有 1, 1, 2 一種，擲出時有 3 種方法。

若和爲三點，則有 1, 1, 1 一種，擲出時祇有一種方法。

故其機會爲 $$\frac{3+1}{6\times6\times6}=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}.$$

15. 八人同圍圓桌而坐，試問某某二人連座之機會若何？

［解］ 八人圍桌而坐，其方法有 $|\underline{8-1}$ 即 $|\underline{7}$ 種。

若某某二人連坐，其方法則爲 $2\cdot|\underline{6}$.

故所求機會爲
$$\frac{2\cdot|\underline{6}}{|\underline{7}}=\frac{2}{7}.$$

習　題　LXVIII　　第 422 頁

1. 一囊盛有白球三枚，黑球五枚，及紅球七枚，每次從中引取一球而即隨手放入，試求下列各種引取之機會：(1) 先爲白球一枚，繼以紅球一枚，終爲黑球一枚；(2) 白，紅，黑球各一枚而次序不論.

［解］ (1) 先取白球一枚，繼以紅球一枚，終爲黑球一枚，

其機會爲
$$\frac{3}{15}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{7}{225}.$$

(2) 因次序不論，故可排列，其機會爲 $\frac{7}{225}\cdot|\underline{3}=\frac{42}{225}=\frac{14}{75}.$

2. 上題中設球取出後不復收入，則每三次引取中第一次即得一白球之機會若何？

［解］ 先取出白球，其機會爲 $\frac{3}{15}$，第二，等三次各取一球，不論紅黑，其機會爲 $\frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13}$ (因取出後不復收入)。

故所求機會爲
$$\frac{3}{15}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13}=\frac{66}{455}.$$

3 一袋盛有五角幣五枚，一元幣四枚，五元幣三枚，設讓某君從中任取二枚，則其希冀之值若何？

［解］ 袋中共有幣十二枚，任取二枚，

若爲五角幣二枚，其機會爲
$$\frac{C^5_2}{C^{12}_2}=\frac{5}{33},$$

其希冀爲
$$1\times\frac{5}{33}=\frac{5}{33}\text{ 元}.$$

若爲一元幣二枚，其機會爲 $\dfrac{C_2^4}{C_2^{12}}=\dfrac{1}{11}$，

其希冀爲 $2\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{2}{11}$ 元。

若爲五元幣二枚，其機會爲 $\dfrac{C_2^3}{C_2^{12}}=\dfrac{1}{22}$，

其希冀爲 $10\times\dfrac{1}{22}=\dfrac{5}{11}$ 元。

若爲五角幣一枚，一元幣一枚，其機會爲 $\dfrac{C_1^5\cdot C_1^4}{C_2^{12}}=\dfrac{10}{33}$，

其希冀爲 $1.5\times\dfrac{10}{33}=\dfrac{5}{11}$ 元。

若爲五角幣一枚，五元幣一枚，其機會爲 $\dfrac{C_1^5\cdot C_1^3}{C_2^{12}}=\dfrac{5}{22}$，

其希冀爲 $5.5\times\dfrac{5}{22}=\dfrac{5}{4}$ 元。

若爲一元幣一枚，五元幣一枚，其機會爲 $\dfrac{C_1^4\cdot C_1^3}{C_2^{12}}=\dfrac{2}{11}$，

其希冀爲 $6\times\dfrac{2}{11}=\dfrac{12}{11}$ 元。

故其希冀之值爲 $\dfrac{5}{33}+\dfrac{2}{11}+\dfrac{5}{11}+\dfrac{5}{11}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{12}{11}=\dfrac{473}{132}=3.58$ 元。

4. 某門不知是否上鎖，故其上鎖之機會爲 $1/2$，鑰匙一束共有八枚，其一爲啓此門之用。設余於此八枚鑰匙中任取三枚而前往啓門，則余得開啓此門之機會若何？

［解］ 設此門已上鎖，其機會爲 $\frac{1}{2}$．如欲啓此門，在八枚鑰匙中任取三枚必須取出啓門之一枚，其啓門之機會爲 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C_2^7}{C_3^8}$ 即 $\dfrac{3}{16}$.

若此門未鎖其機會爲 $\frac{1}{2}$，在八枚鑰匙中任取三枚均可，啓門之機會爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{C_3^8}{C_3^8}=\frac{1}{2}.$$

故所求之機會為 $$\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{11}{16}.$$

5. 有獨立事象三，其機會各為 1/2, 2/3, 及 3/4. 其中無一得以成就之機會若何？僅有一事象成就則若何？僅有二事象成就則若何？三事象皆得成就又若何？

［解］ 三事象成就之機會各為 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},$

其不成就之機會為 $\left(1-\frac{1}{2}\right), \left(1-\frac{2}{3}\right), \left(1-\frac{3}{4}\right).$

(1) 三事象無一成就之機會為

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}.$$

(2) 僅有一事象成就其機會為

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1+2+3}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$$

(3) 僅有二事象成就其機會為

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}$$

$$=\frac{2+6+3}{24}=\frac{11}{24}.$$

(4) 三事象皆得成就其機會為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$

6. 二骰同擲，則得和為七點或十一點而不利於其一之機比若何？

［解］ 擲得七點之情形為 1, 6; 2, 5; 3, 4 共六種.（連排列）

擲得十一點之情形為 5, 6 共二種.（連排列）

故其擲得七點或十一點之機會為 $\frac{6+2}{6\times 6}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$

其不利於其一之機會為 $1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$

故所求之機比為 7 : 2.

7. 三骰同擲而不利於總和十點之機比若何？利於總和大於五點之機比又若何？

[解]　(1)　三骰同擲總和為十之情形有 1, 3, 6； 1, 4, 5； 2, 2, 6； 2, 3, 5； 2, 4, 4； 3, 3, 4 六類.

但 1, 3, 6； 1, 4, 5； 2, 3, 5 各有 $\underline{|3}$ 種 2, 2, 6； 2, 4, 4； 3, 3, 4 各有 $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|2}}$ 卽 3 種.

擲出和為十點之方法共有 $3\times\underline{|3}+3\times 3=27$ 種.

故擲出和為十點之機會為 $\dfrac{27}{6\times6\times6}=\dfrac{1}{8}$.

擲不出和為十點之機會為 $1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

故所求機比為 7 : 1.

(2)　總和為五點或不滿五點之情形有 1, 1, 3； 1, 2, 2； 1, 1, 2； 1, 1, 1 四類.

但 1, 1, 3； 1, 2, 2； 1, 1, 2 各有 $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|2}}$ 卽 3 種, 1, 1, 1 有一種. 共有

$$3\times3+1=10 \text{ 種}.$$

故擲出和為五點或不滿五點之機會為 $\dfrac{10}{6\times6\times6}=\dfrac{5}{108}$

而其和大於五點之機會為 $1-\dfrac{5}{108}=\dfrac{103}{108}$.

故其機比為 103 : 5.

8. 箱中有劵十一張, 各以 1, 2, ……11 標明, 從中引取三劵, 則其數之和得為十二之機會若何？其和為奇數之機會又若何？

[解]　(1)　和為十二之情形有 1, 2, 9； 1, 3, 8； 1, 4, 7； 1, 5, 6； 2, 3, 7； 2, 4, 6； 3, 4, 5 七種.

故其和為十二之機會為 $\dfrac{7}{C^{11}_{3}}=\dfrac{7}{165}$.

(2) 所取三票中有一票或三票其票數為奇數時，三數之和為奇數.

若一票為奇數其方法有 $C_1^6 \cdot C_2^5$ 種方法 (餘二票為偶數).

若三票為奇數其方法有 C_3^6 種.

故所求機會為 $\dfrac{C_1^6 \cdot C_2^5 + C_3^6}{C_3^{11}} = \dfrac{16}{33}.$

9. A, B 二賭徒以二骰為賭具，議定擲得七點則為 A 勝，十點則為 B 勝，其餘點數則將賭注均分. 試比較二人之機會.

[解] A 擲七點之機會為 $\dfrac{6}{36}$ 即 $\dfrac{1}{6}.$

B 擲十點之機會為 $\dfrac{3}{36}$ 即 $\dfrac{1}{12}.$

除去七點及十點二種之機會為

$$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

故 A 勝之機會為 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{13}{24}.$

B 勝之機會為 $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{11}{24}.$

A, B 二人機會之比為 $13:11$.

10. 若上題二賭徒議定 A 先擲得六點而後 B 得七點則為 A 勝，B 先得七點而 A 方得六點則為 B 勝，以 A 開首而輪流投擲. 試比較二人之機會.

[解] 1, 5; 5, 1; 2, 4; 4, 2; 3, 3 皆為六點.

1, 6; 6, 1; 2, 5; 5, 2; 3, 4; 4, 3 皆為七點.

故第一循環 A 之機會為 $\dfrac{5}{36}=\dfrac{30}{216},$

A 失敗之機會為 $1-\dfrac{5}{36}.$

B 之機會為 $\dfrac{6}{36}\left(1-\dfrac{5}{36}\right)=\dfrac{31}{216}.$

因各循環 A, B 二人機會之比相同，故二人機會之比爲 30 : 31.

11. 一囊盛有白球四枚及黑球八枚，A, B, C 三賭徒議定誰能先行取得一枚白球者爲勝；依 A, B, C 爲引取之先後，若球被取出後不再投入，則其各人之機會若何？若球被取出後卽復投入則又若何？

［解］ (1) 當球不復置入時：

A 第一次之機會爲

$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, 失敗之機會爲 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

B 第一次之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{33}$, 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$.

C 第一次之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{28}{165}$; 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}$.

A 於第二次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{56}{495}$, 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

B 於第二次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{7}{99}$, 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{8}=\frac{4}{8}$.

C 於第二次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{99}$; 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$.

A 於第三次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{99}$, 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{6}=\frac{2}{6}$.

B 於第三次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{495}$, 失敗之機會爲 $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

C 於第三次獲勝之機會爲

$$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{495}.$$

(此袋中僅存白球四枚)

A 之總機會爲

$$\frac{1}{3}+\frac{56}{495}+\frac{2}{99}=\frac{231}{495}=\frac{7}{15},$$

B 之總機會爲

$$\frac{8}{33}+\frac{7}{99}+\frac{4}{495}=\frac{159}{495}=\frac{53}{195},$$

C 之總機會爲

$$\frac{28}{165}+\frac{4}{99}+\frac{1}{495}=\frac{105}{495}=\frac{7}{33}.$$

(2) 當球重置入時:

A 在第一循環之機會爲

$\frac{4}{12}$ 即 $\frac{1}{3}$，失敗之機會爲 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

B 在第一循環之機會爲

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{12}$ 即 $\frac{2}{9}$，失敗之機會爲 $1-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

C 在第一循環之機會爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{12} \text{ 即 } \frac{4}{27}.$$

因三人在各循環中機會之比相同，故三人機會之比爲

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{9}:\frac{4}{27} \text{ 即 } 9:6:4.$$

故 A 之機會爲 $\frac{9}{19}$，B 之機會爲 $\frac{6}{19}$，C 之機會爲 $\frac{4}{19}$.

12. 某種奬劵發行百張，其中有五張之奬額爲 \$100，十張爲 \$50，二十張爲 \$5，則一劵之值當爲幾何?

[解] 抽奬額 100 元劵一張之機會爲 $\frac{5}{100}$，抽奬額 50 元劵一張之機

會爲 $\frac{10}{100}$，抽獎額 5 元券一張之機會爲 $\frac{20}{100}$.

故一券之值爲 $100\times\frac{5}{100}+50\times\frac{10}{100}+5\times\frac{20}{100}=5+5+1=11$ 元。

13. 囊 A 盛球五枚，其一白色；囊 B 盛球六枚，無一爲白色。設自囊 A 取球三枚置之囊 B，然後再自囊 B 取球三枚置於囊 A，則此白球在囊 A 之機會若何？

[解] 白球自 A 袋中置入 B 袋之機會爲 $C_2^4/C_3^5=\frac{3}{5}$，

自球在 B 袋中不被拿出之機會爲 $C_3^8/C_3^9=\frac{2}{3}$.

故二次摸取後，球仍在 B 袋中之機會爲 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

故白球在 A 袋中之機會爲 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

14. 囊 A 有球 m 枚，而 a 枚爲白色；囊 B 有球 n 枚而 b 枚爲白色。試問任從二囊之一引取一球而得爲白色之機會是否等於諸球置於一囊以任取一球而得爲白色之機會？

[解] 於二袋中之任意一袋，取一次而得一白球之機會爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{n}=\frac{an+bm}{2mn}.$$

將所有之球置於一袋中，取一次而得一白球之機會爲

$$\frac{a+b}{m+n}.$$

故知此二種之機會不相同。

15. 連元旦在內，某市鎮十天內共死五人。問：元旦日不死人之機會若何？

[解] 一人不死在元旦日，其機會爲 $\frac{9}{10}$

五人均不死在元旦日，其機會爲

$$\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\left(\frac{9}{10}\right)^5=\frac{59049}{100000}.$$

16. 設平均三個六十歲之老人中,有二人可以活至七十歲,則現在五個六十歲之老人中至少有三人再活十歲之機會若何?

[解] 六十歲之老人活至七十歲其機會爲 $\frac{2}{3}$,不能活至七十歲之機會爲 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

五個六十歲之老人中至少有三人再活十年之機會爲

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5+C_4^5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^5\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{192}{243}=\frac{64}{81}.$$

17. 某童能力,平均於五個問題中可以解答其三.若某次考試共有八題而須解答五題爲及格,則某童得以及格之機會若何?

[解] 某童能解問題之機會爲 $\frac{3}{5}$,不能解之機會爲 $\frac{2}{5}$.

如欲考試及格,須至少能解五題其機會爲

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8+C_7^8\left(\frac{3}{5}\right)^7\left(\frac{1}{5}\right)+C_6^8\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{1}{5}\right)^2+C_5^8\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^8+8\left(\frac{3^7}{5^8}\right)+28\left(\frac{3^6}{5^8}\right)+56\left(\frac{3^5}{5^8}\right)=\frac{191\times3^5}{5^7}.$$

18 某人以二骰同擲,若和爲七點,即可得洋一元,若在第二次方擲得則亦可得洋一元,如是以至擲得七點爲止.試求其希冀之總值.

[解] 擲得七點之機會爲 $\frac{1}{6}$,擲不得七點之機會爲 $\frac{5}{6}$.

第一次擲得七點之希冀爲 $1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 元.

第二次擲得七點之希冀爲 $1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$ 元.

第三次擲得七點之希冀爲 $1\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$ 元.

....

其總希冀爲 $$S=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式爲一無窮等比級數,公比爲 $\frac{5}{6}$.

$$\therefore\quad S=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1\text{ 元}.$$

故其希冀之總值爲一元.

19. A 君與 B 君作網球戲，平均 A 於四盤中可勝三盤. 問一局中其勝 B 之比爲六與三之機會若何？若和局不計，則其勝 B 一局之總機會又若何？

［解］ A 勝之或然率爲 $\frac{3}{4}$，B 勝之或然率爲 $\frac{1}{4}$.

(1) 若 A 勝 B 之比爲六與三其機會爲

$$C_5^8\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5103}{32768}.$$

(2) 若和局不計，則 A 勝 B 之情形有下列六種.

六與零之比，其機會爲 $\left(\frac{3}{4}\right)^6$.

六與一之比，其機會爲 $C_5^6\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$.

六與二之比，其機會爲 $C_5^7\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$.

六與三之比，其機會爲 $C_5^8\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)$.

六與四之比，其機會爲 $C_5^9\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)$.

六與五之比，其機會爲 $C_5^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)$.

故所求之總機會爲

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{4}\right)^6+C_5^6\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+C_5^7\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)+C_5^8\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)\\&\quad+C_5^9\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)+C_5^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)\\&=\frac{3^6}{4^6}+6\times\frac{3^6}{4^7}+21\times\frac{3^6}{4^8}+56\times\frac{3^6}{4^9}+126\times\frac{3^6}{4^{10}}+252\times\frac{3^6}{4^{11}}\\&=\frac{3^6}{4^6}\left(1+\frac{6}{4}+\frac{21}{4^2}+\frac{56}{4^3}+\frac{126}{4^4}+\frac{252}{4^5}\right)\\&=\frac{1012581}{1048576}.\end{aligned}$$

20. 承上題所述條件，若二人已打至四比二而不利於 A，則 A 之得勝之機會若何？

［解］ A 如欲獲勝，其情形可分爲二種。

(1) A 連勝四盤，其機會爲 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$.

(2) A 勝四盤，B 勝一盤，其機會爲 $C_3^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

故 A 得勝之機會爲

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4+C_3^4\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{81}{256}+\frac{81}{256}=\frac{81}{128}.$$

21. A, B 二人各注 \$32 對賭，而以得三分 (Three points) 者爲勝；若 A 得二分 B 得一分之時中斷，則彼等將如何以分此 \$64？

［解］ 若 B 欲獲勝須連得二分，其機會爲 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore$ A 得勝之機會爲 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. 故 A, B 之機比爲 $3:1$.

今將 64 元照 3 與 1 之比分配.

A 應得 $\qquad 64\times\frac{3}{4}=48$ 元。

B 應得 $\qquad 64\times\frac{1}{4}=16$ 元。

習　題　LXIX　　第 425 頁

試以算學的歸納法證明下列諸公式，§§ 701, 712.

1. $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=a(1-r^n)/(1-r)$ ……………………(1)

［證］ (a) $n=1$ 時，$\qquad a=a.$

$n=2$ 時，$\qquad a+ar=a+ar.$

$n=3$ 時，$a+ar+ar^2=a+ar+ar^2.$

故 n 爲特定數值時 (1) 爲正確.

(b) $n=k$ 時，$\quad a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{k-1}=\dfrac{a(1-r^k)}{1-r}$ ……………(2)

$n=k+1$ 時，$\quad a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^k=\dfrac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$ …………(3)

若 (2) 正確,在 (2) 兩端各加以 ar^k, 得

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{k-1}+ar^k=\frac{a(1-r^k)}{1-r}+ar^k$$

$$=\frac{a-ar^k+ar^k-ar^{k+1}}{1-r}=\frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) 與 (3) 全同. 即以 ar^k 加於 (2) 兩端所得結果與以 $n=k+1$ 代入 (1) 完全相同. 故若 (2) 成立, (3) 亦必能成立,即 $n=k$ 時 (1) 如能正確,則 $n=k+1$ 時亦必能正確.

今已知 $n=1$ 時, (1) 正確,故 $n=1+1$ 即 2 時,亦能正確.

$n=2$ 時, (1) 既能正確, $n=2+1$ 即 3 時亦能正確.

$n=3$ 時, (1) 既能正確, $n=3+1$ 即 4 時亦能正確.

照此推論, n 爲一切正整數值時, (1) 恆能正確.

2. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

[證] (a) $n=1$ 時, $1=1.$

$n=2$ 時, $1^2+2^2=\frac{2\cdot3\cdot5}{6}$, 即 $5=5.$

$n=3$ 時, $1^2+2^2+3^2=\frac{3\cdot4\cdot7}{6}$, 即 $14=14.$

故 n 爲特定數值時 (1) 爲正確.

(b) $n=k$ 時, $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$n=k+1$ 時,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\cdots\cdots\cdots(3)$$

若 (2) 正確,在 (2) 兩端各加以 $(k+1)^2$, 得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\tfrac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\tfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) 與 (3) 全同，即以 $(k+1)^2$ 加於 (2) 兩端所得結果與以 $n=k+1$ 代入 (1) 完全相同。故若 (2) 成立，(3) 亦能成立，即 $n=k$ 時 (1) 如能正確，則 $n=k+1$ 時亦必能正確。

今已知 $n=1$ 時，(1) 正確，故 $n=1+1$ 即 2 時亦能正確。

$n=2$ 時，(1) 既能正確，$n=2+1$ 即 3 時亦能正確。

$n=3$ 時，(1) 既能正確，$n=3+1$ 即 4 時亦能正確。

照此推論，n 爲一切正整數值時 (1) 恆能正確。

3 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4$ ……………………………(1)

［證］ (a) $n=1$ 時， $1=1$.

$$n=2\text{ 時，}\quad 1^3+2^3=\frac{2^2\cdot 3^2}{4}\text{ 即 }9=9.$$

$$n=3\text{ 時，}\quad 1^3+2^3+3^3=\frac{3^2\cdot 4^2}{4}\text{ 即 }36=36.$$

故 n 爲特定數值時 (1) 爲正確。

(b) $n=k$ 時，
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}\quad\cdots\cdots(2)$$

$n=k+1$ 時，
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\quad\cdots\cdots(3)$$

若 (2) 正確，在 (2) 兩端各加以 $(k+1)^3$，得

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\quad\cdots\cdots(4)$$

(4) 與 (3) 全同，即以 $(k+1)^3$ 加於 (2) 兩端所得結果與以 $n=k+1$ 代入 (1) 完全相同，故若 (2) 成立，(3) 亦能成立，即 $n=k$ 時 (1) 如能正確，則 $n=k+1$ 時亦必能正確。

今已知 $n=1$ 時，(1) 正確，故 $n=1+1$ 即 2 時亦能正確。

$n=2$ 時，(1) 既能正確，$n=2+1$ 即 3 時亦能正確。

$n=3$ 時，(1) 既能正確，$n=3+1$ 即 4 時亦能正確。

照此推論，n 爲一切正整數值時 (1) 恆能正確.

4. $1+3+6+\cdots\cdots+n(n+1)/2!=n(n+1)(n+2)/3!$ ....(1)

〔證〕 (a) $n=1$ 時， $1=1.$

$n=2$ 時， $1+3=\dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{\underline{|3}}$，卽 $4=4.$

$n=3$ 時， $1+3+6=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{\underline{|3}}$，卽 $10=10.$

故 n 爲特定數值時 (1) 爲正確.

(b) $n=k$ 時， $1+3+6+\cdots+\dfrac{k(k+1)}{\underline{|2}}=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{\underline{|3}}$ ....(2)

$n=k+1$ 時，

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{\underline{|2}}+\frac{(k+1)(k+2)}{\underline{|2}}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{\underline{|3}} \quad \cdots\cdots(3)$$

若 (2) 正確，在 (2) 兩端各加以 $\dfrac{(k+1)(k+2)}{\underline{|2}}$，得

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{\underline{|2}}+\frac{(k+1)(k+2)}{\underline{|2}}$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{\underline{|3}}+\frac{(k+1)(k+2)}{\underline{|2}}=\frac{(k+1)(k+2)}{\underline{|3}}(k+3)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{\underline{|3}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) 與 (3) 全同，卽以 $\dfrac{(k+1)(k+2)}{\underline{|2}}$ 加於 (2) 兩端所得結果與以 $n=k+1$ 代入 (1) 完全相同. 故若 (2) 成立，(3) 亦能成立，卽 $n=k$ 時 (1) 如能正確則 $n=k+1$ 時亦必能正確.

今已知 $n=1$ 時，(1) 正確，故 $n=1+1$ 卽 2 時亦能正確.

$n=2$ 時，(1) 旣能正確，$n=2+1$ 卽 3 時亦能正確.

$n=3$ 時，(1) 旣能正確，$n=3+1$ 卽 4 時亦能正確.

照此推論，n 爲一切正整數值時，(1) 恆能正確.

習題 LXX　　　　第431頁

1. 作方程式，令其根為

(1)　$a,\ -b,\ a+b.$　　　　(2)　$3,\ 4,\ 1/2,\ -1/3,\ 0.$

[解]　(1)　$a,\ -b,\ a+b$ 為三根。$\therefore\ x-a,\ x+b,\ x-(a+b)$ 為三因式。

故所求方程式為　$(x-a)(x+b)[x-(a+b)]=0.$

即　$$x^3-2ax^2+(a^2-ab-b^2)x+a^2b+ab^2=0.$$

(2)　$3,\ 4,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ 0$ 為五個根，$\therefore\ x-3,\ x-4,\ 2x-1,\ 3x+1,\ x$ 均為因式。

故所求方程式為　$x(x-3)(x-4)(2x-1)(3x+1)=0,$

即　$$(x^3-7x^2+12x)(6x^2-x-1)=0,$$

亦即　$$6x^5-43x^4+78x^3-5x^2-12x=0.$$

2. 求證 -3 為下方程式之三重根：

$$x^4+8x^3+18x^2-27=0.$$

[證]

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & +8 & +18 & +0 & -27 & \underline{-3} \\
 & -3 & -15 & -9 & +27 & \\
\hline
1 & +5 & +3 & -9 & +0 & \underline{-3} \\
 & -3 & -6 & +9 & & \\
\hline
1 & +2 & -3 & +0 & & \underline{-3} \\
 & -3 & +3 & & & \\
\hline
1 & -1 & +0 & & &
\end{array}$$

$$\therefore\quad x^4+8x^3+18x^2-27=(x+3)^3(x-1).$$

故 -3 為此方程式之三重根。

3. 求證 1 及 $1/2$ 為下方程式之二重根：

$$4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=0.$$

［解］

$$\begin{array}{rrrrrrl}
4+ & 0- & 23+ & 33- & 17+ & 3 & \underline{|1} \\
 & 4+ & 4- & 19+ & 14- & 3 & \\
\hline
4+ & 4- & 19+ & 14- & 3+ & 0 & \underline{|1} \\
 & 4+ & 8- & 11+ & 3 & & \\
\hline
4+ & 8- & 11+ & 3+ & 0 & \underline{|\tfrac{1}{2}} & \\
 & 2+ & 5- & 3 & & & \\
\hline
2\,|\,4+ & 10- & 6+ & 0 & & & \\
2+ & 5- & 3 & \underline{|\tfrac{1}{2}} & & & \\
 & 1+ & 3 & & & & \\
\hline
2\,|\,2+ & 6+ & 0 & & & & \\
1+ & 3 & & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ 4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=(x-1)^2(2x-1)^2(x+3)=0.$

故 1 與 $\frac{1}{2}$ 均爲此方程式之二重根。

4. 試用 §803 之方法，求 $x^5-5x^4-5x^3+4x^2-7x-250=0$ 之諸根之上限及下限。

［解］

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1- & 5- & 5+ & 4- & 7- & 250 & \underline{|6} \\
 & 6+ & 6+ & 6+ & 60+ & 318 & \\
\hline
1+ & 1+ & 1+ & 10+ & 53+ & 68 &
\end{array}$$

原方程式以 $x-6$ 除之所得商式之係數均爲正號，故 6 爲上限。

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1- & 5- & 5+ & 4- & 7- & 250 & \underline{|-2} \\
 & -2+ & 14- & 18+ & 28- & 42 & \\
\hline
1- & 7+ & 9- & 14+ & 21- & 292 &
\end{array}$$

原方程式以 $x+2$ 除之所得商式之係數符號爲正負相間，故 -2 爲下限。

5. 求證 $2x^4-3x^3+4x^2-10x-3=0$ 無有理根。

［解］ 此方程式所能有之有理根爲 $\pm1,\ \pm3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}$. 以此八個有理根之因式除原方程式，均不能除盡，故知此方程式無有理根。

以下各方程式皆有一個或多於一個之有理根，解之。

6. ［解］ $x^3-x^2-14x+24=0.$

可爲此方程式之有理根者有 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm8,\ \pm12,\ \pm24.$ 今以 2, 3 先試之知其爲根。

$$\begin{array}{r|l} 1-1-14+24 & 2 \\ 2+\ 2-24 & \\ \hline 1+1-12+\ 0 & 3 \\ 3+12 & \\ \hline 1+4+\ 0 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x^3-x^2-14x+24=(x-2)(x-3)(x+4)=0.$$

故其根爲 2, 3 與 -4.

7. [解] $x^3-2x^2-25x+50=0.$

$$\begin{array}{r|l} 1-2-25+50 & 2 \\ 2+\ 0-50 & \\ \hline 1+0-25+\ 0 & 5 \\ 5+25 & \\ \hline 1+5+\ 0 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x^3-2x^2-25x+50=(x-2)(x-5)(x+5)=0.$$

故其根爲 2, 5 與 -5.

8. [解] $3x^3-2x^2+2x+1=0.$

$$\begin{array}{r|l} 3-2+2+1 & -\frac{1}{3} \\ -1+1-1 & \\ \hline 3\ \big|\ 3-3+3+0 & \\ \hline 1-1+1 & \end{array}$$

$$\therefore\quad 3x^3-2x^2+2x+1=(3x+1)(x^2-x+1)=0.$$

若 $x^2-x+1=0$, $\qquad x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

故其根爲 $\qquad -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

9. [解] $2x^4+7x^3-2x^2=x.$

$$2x^4+7x^3-2x^2-x=x(2x^3+7x^2-2x-1)=0.$$

$$\begin{array}{r|l} 2+7-2-1 & \frac{1}{2} \\ 1+4+1 & \\ \hline 2\ \big|\ 2+8+2+0 & \\ \hline 1+4+1 & \end{array}$$

$$\therefore\quad 2x^4+7x^3-2x^2-x=x(2x-1)(x^2+4x+1)=0.$$

若 $x^2+4x+1=0,\quad x=-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3}.$

故其根爲 $0,\ \frac{1}{2},\ -2\pm\sqrt{3}.$

10. [解] $x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0.$

$$\begin{array}{r|l} 1+4+8+8+3 & -1 \\ -1-3-5-3 & \\ \hline 1+3+5+3+0 & -1 \\ -1-2-3 & \\ \hline 1+2+3+0 & \end{array}$$

$\therefore\quad x^4+4x^3+8x^2+8x+3=(x+1)^2(x^2+2x+3)=0.$

若 $x^2+2x+3=0,\quad \therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}i.$

故其根爲 $-1,\ -1,\ -1\pm\sqrt{2}i.$

11. [解] $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0.$

$$\begin{array}{r|l} 2+7+\ 4-\ 7-6 & 1 \\ 2+\ 9+13+6 & \\ \hline 2+9+13+\ 6+0 & -1 \\ -2-\ 7-\ 6 & \\ \hline 2+7+\ 6+\ 0 & -2 \\ -4-\ 6 & \\ \hline 2+3+\ 0 & \end{array}$$

$\therefore\ 2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=(x-1)(x+1)(x+2)(2x+3)=0.$

故其根爲 $1,\ -1,\ -2,\ -\frac{3}{2}.$

12. [解] $3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=0.$

$$\begin{array}{r|l} 3+11+9+11+6 & -3 \\ -\ 9-6-\ 9-6 & \\ \hline 3+\ 2+3+\ 2+0 & -\frac{2}{3} \\ -\ 2+0-\ 2 & \\ \hline 3\,|\,3+\ 0+3+\ 0 & \\ \hline 1+\ 0+1 & \end{array}$$

$\therefore\ 3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=(x+3)(3x+2)(x^2+1)=0.$

若 $x^2+1=0,\quad \therefore\ x=\pm i.$

故其根爲 $-3,\ -\frac{2}{3},\ \pm i.$

13. [解] $x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0.$

$$\begin{array}{l|l}
1-\ 9+\ 2+71+81+70 & -2 \\
\quad -\ 2+22-48-46-70 & \\ \hline
1-11+24+23+35+\ 0 & 5 \\
\qquad 5-30-30-35 & \\ \hline
1-\ 6-\ 6-\ 7+\ 0 & 7 \\
\qquad 7+\ 7+\ 7 & \\ \hline
1+\ 1+\ 1+\ 0 &
\end{array}$$

$\therefore\ x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=(x+2)(x-5)(x-7)(x^2+x+1)=0.$

若 $\qquad x^2+x+1=0, \qquad \therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

故其根爲 $\qquad -2,\ 5,\ 7,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

14. [解] $2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0.$

$$\begin{array}{l|l}
2-\ 8+\ 7+\ 5-\ 8+4 & -1 \\
\quad -\ 2+10-17+12-4 & \\ \hline
2-10+17-12+\ 4+0 & 2 \\
\qquad 4-12+10-\ 4 & \\ \hline
2-\ 6+\ 5-\ 2+\ 0 & 2 \\
\qquad 4-\ 4+\ 2 & \\ \hline
2-\ 2+\ 1+\ 0 &
\end{array}$$

$\therefore\ 2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=(x+1)(x-2)^2(2x^2-2x+1)=0.$

若 $\qquad 2x^2-2x+1=0, \qquad \therefore\ x=(1\pm i)/2.$

故其根爲 $-1,\ 2,\ 2,\ (1\pm i)/2.$

15. [解] $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0.$

$$\begin{array}{l|l}
1+3-15-35+54+72 & -1 \\
\quad -1-\ 2+17+18-72 & \\ \hline
1+2-17-18+72+\ 0 & 2 \\
\quad 2+\ 8-18-72 & \\ \hline
1+4-\ 9-36+\ 0 & 3 \\
\quad 3+21+36 & \\ \hline
1+7+12+\ 0 & -3 \\
\quad -3-12 & \\ \hline
1+4+\ 0 &
\end{array}$$

$\therefore\ x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=(x+1)(x-2)(x-3)(x+3)(x+4)=0.$

故其根爲 $-1,\ 2,\ 3,\ -3,\ -4.$

16. [解] $12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0.$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
12-&32+&13+&8-&4 & \underline{|\ 2} \\
 & 24-&16-&6+&4 & \\ \hline
12-&8-&3+&2+&0 & \underline{|\ \tfrac{1}{2}} \\
 & 6-&1-&2 & & \\ \hline
12-&2-&4+&0 & & \\
6-&1-&2 & \underline{|\ -\tfrac{1}{2}} & & \\
 & -3+&2 & & & \\ \hline
2\,|\ 6-&4+&0 & & & \\ \hline
3-&2 & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ 12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=(x-2)(2x-1)(2x+1)(3x-2)=0.$

故其根爲 $2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}.$

17. [解] $x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=0.$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
1-&7+&10+&18-&27-&27 & \underline{|\ -1} \\
 & -1+&8-&18+&0+&27 & \\ \hline
1-&8+&18+&0-&27+&0 & \underline{|\ -1} \\
 & -1+&9-&27+&27 & & \\ \hline
1-&9+&27-&27+&0 & \underline{|\ 3} & \\
 & 3-&18+&27 & & & \\ \hline
1-&6+&9+&0 & \underline{|\ 3} & & \\
 & 3-&9 & & & & \\ \hline
1-&3+&0 & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=(x+1)^2(x-3)^3=0.$

故其根爲 $-1,\ -1,\ 3,\ 3,\ 3.$

18. [解] $2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=0.$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
2-&17+&25+&74-&120 & \underline{|\ -2} \\
 & -4+&42-&134+&120 & \\ \hline
2-&21+&67-&60+&0 & \underline{|\ 4} \\
 & 8-&52+&60 & & \\ \hline
2-&13+&15+&0 & \underline{|\ 5} & \\
 & 10-&15 & & & \\ \hline
2-&3+&0 & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ 2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=(x+2)(x-4)(x-5)(2x-3)=0.$

故其根爲 $-2,\ 4,\ 5,\ \frac{3}{2}.$

19. [解]　$4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0.$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & 4 & +0 & -9 & +6 & -13 & +6 & \underline{|-2} \\
 & & -8 & +16 & -14 & +16 & -6 & \\
\hline
 & 4 & -8 & +7 & -8 & +3 & +0 & \underline{|\tfrac{1}{2}} \\
 & & 2 & -3 & +2 & -3 & & \\
\hline
 & 4 & -6 & +4 & -6 & +0 & & \underline{|\tfrac{3}{2}} \\
 & & 6 & +0 & +6 & & & \\
\hline
2| & 4 & +0 & +4 & +0 & & & \\
\hline
 & 2 & +0 & +2 & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ 4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=2(x+2)(2x-1)(2x-3)(x^2+1)=0.$

若　$x^2+1=0,\quad \therefore\ x=\pm i.$

故其根爲 $-2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \pm i.$

20. [解]　$x^5+8x^4+3x^3-80x^2-52x+240=0.$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1 & +8 & +3 & -80 & -52 & +240 & \underline{|2} \\
 & 2 & +20 & +46 & -68 & -240 & \\
\hline
1 & +10 & +23 & -34 & -120 & +0 & \underline{|2} \\
 & 2 & +24 & +94 & +120 & & \\
\hline
1 & +12 & +47 & +60 & +0 & & \underline{|-3} \\
 & -3 & -27 & -60 & & & \\
\hline
1 & +9 & +20 & +0 & & & \underline{|-4} \\
 & -4 & -20 & & & & \\
\hline
1 & +5 & +0 & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ x^5+8x^4+3x^3-80x^2-52x+240=(x-2)^2(x+3)(x+4)(x+5)=0.$

故其根爲 $2,\ 2,\ -3,\ -4,\ -5.$

21. [解]　$2x^5+11x^4+23x^3+25x^2+16x+4=0.$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & 2 & +11 & +23 & +25 & +16 & +4 & \underline{|-2} \\
 & & -4 & -14 & -18 & -14 & -4 & \\
\hline
 & 2 & +7 & +9 & +7 & +2 & +0 & \underline{|-2} \\
 & & -4 & -6 & -6 & -2 & & \\
\hline
 & 2 & +3 & +3 & +1 & +0 & & \underline{|-\tfrac{1}{2}} \\
 & & -1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
2| & 2 & +2 & +2 & +0 & & & \\
\hline
 & 1 & +1 & +1 & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ 2x^5+11x^4+23x^3+25x^2+16x+4=(x+2)^2(2x+1)(x^2+x+1)=0.$

若 $x^2+x+1=0,\quad \therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

故其根為 $-2,\ -2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

22. [解] $6x^4-89x^3+359x^2-254x+48=0.$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 6 & -89 & +359 & -254 & +48 & \underline{6} \\
 & & 36 & -318 & +246 & -48 & \\ \hline
 & 6 & -53 & +41 & -8 & +0 & \underline{8} \\
 & & 48 & -40 & +8 & & \\ \hline
 & 6 & -5 & +1 & +0 & & \underline{\tfrac{1}{2}} \\
 & & 3 & -1 & & & \\ \hline
2 & 6 & -2 & +0 & & & \\ \hline
 & 3 & -1 & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ 6x^4-89x^3+359x^2-254x+48=(x-6)(x-8)(2x-1)(3x-1)=0.$
故其根為 $6,\ 8,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}.$

23. [解] $10x^4+41x^3+46x^2+20x+3=0.$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 10 & +41 & +46 & +20 & +3 & \underline{-\tfrac{1}{2}} \\
 & & -5 & -18 & -14 & -3 & \\ \hline
 & 10 & +36 & +28 & +6 & +0 & \underline{-\tfrac{3}{5}} \\
 & & -6 & -18 & -6 & & \\ \hline
10 & 10 & +30 & +10 & +0 & & \\ \hline
 & 1 & +3 & +1 & & &
\end{array}$$

$\therefore\ 10x^4+41x^3+46x^2+20x+3=(2x+1)(5x+3)(x^2+3x+1)=0.$

若 $x^2+3x+1=0,\quad \therefore\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$

故其根為 $-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{5},\ \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$

24. [解] $36x^4-108x^3+107x^2-43x+6=0.$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 36 & -108 & +107 & -43 & +6 & \underline{\tfrac{1}{2}} \\
 & & 18 & -45 & +31 & -6 & \\ \hline
 & 36 & -90 & +62 & -12 & +0 & \underline{\tfrac{1}{3}} \\
 & & 12 & -26 & +12 & & \\ \hline
 & 36 & -78 & +36 & +0 & & \underline{\tfrac{2}{3}} \\
 & & 24 & -36 & & & \\ \hline
18 & 36 & -54 & +0 & & & \\ \hline
 & 2 & -3 & & & &
\end{array}$$

$$\therefore\ 36x^4-108x^3+107x^2-43x+6=(2x-1)(3x-1)(3x-2)(2x-3)=0.$$

故其根爲 $\qquad \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2}.$

25. [解] $\quad 12x^5+20x^4+29x^3+77x^2+69x+18=0.$

$$\begin{array}{r|l}
12+20+29+77+69+18 & -\frac{1}{2} \\
-\ 6-\ 7-11-33-18 & \\
\hline
12+14+22+66+36+\ 0 & -\frac{2}{3} \\
-\ 8-\ 4-12-36 & \\
\hline
12+\ 6+18+54+\ 0 & -\frac{3}{2} \\
-18+18-54 & \\
\hline
12\ \big|\ 12-12+36+\ 0 & \\
\hline
1-\ 1+\ 3 &
\end{array}$$

$$\therefore\ 12x^5+20x^4+29x^3+77x^2+69x+18$$

$$=(2x+1)(3x+2)(2x+3)(x^2-x+3)=0.$$

若 $\qquad x^2-x+3=0, \qquad \therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}.$

故其根爲 $\qquad -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}.$

26. [解] $\quad 2x^6+7x^5+8x^4+7x^3+2x^2-14x-12=0.$

$$\begin{array}{r|l}
2+7+\ 8+\ 7+\ 2-14-12 & 1 \\
2+\ 9+17+24+26+12 & \\
\hline
2+9+17+24+26+12+\ 0 & -1 \\
-2-\ 7-10-14-12 & \\
\hline
2+7+10+14+12+\ 0 & -2 \\
-4-\ 6-\ 8-12 & \\
\hline
2+3+\ 4+\ 6+\ 0 & -\frac{3}{2} \\
-3+\ 0-\ 6 & \\
\hline
2\ \big|\ 2+0+\ 4+\ 0 & \\
\hline
1+0+\ 2 &
\end{array}$$

$$\therefore\ 2x^6+7x^5+8x^4+7x^3+2x^2-14x-12$$

$$=(x-1)(x+1)(x+2)(2x+3)(x^2+2)=0.$$

若 $\qquad x^2+2=0, \qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i.$

故其根爲 $\qquad 1,\ -1,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ \pm\sqrt{2}i.$

27. [解] $2x^6+11x^5+24x^4+22x^3-8x^2-33x-18=0$。

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
2 & +11 & +24 & +22 & -8 & -33 & -18 & \underline{|\,1} \\
 & 2 & +13 & +37 & +59 & +51 & +18 & \\
\hline
2 & +13 & +37 & +59 & +51 & +18 & +0 & \underline{|\,-1} \\
 & -2 & -11 & -26 & -33 & -18 & & \\
\hline
2 & +11 & +26 & +33 & +18 & +0 & & \underline{|\,-2} \\
 & -4 & -14 & -24 & -18 & & & \\
\hline
2 & +7 & +12 & +9 & +0 & & & \underline{|\,-\frac{3}{2}} \\
 & -3 & -6 & -9 & & & & \\
\hline
2\,|\,2 & +4 & +6 & +0 & & & & \\
\hline
1 & +2 & +3 & & & & &
\end{array}
$$

$$\therefore\quad 2x^6+11x^5+24x^4+22x^3-8x^2-33x-18$$
$$=(x-1)(x+1)(x+2)(2x+3)(x^2+2x+3)=0.$$

若　　$x^2+2x+3=0,\quad \therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}i.$

故其根爲 $1,\ -1,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1\pm\sqrt{2}i.$

28. [解] $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4=0$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
5 & -7 & -8 & -1 & +7 & +8 & -4 & \underline{|\,1} \\
 & 5 & -2 & -10 & -11 & -4 & +4 & \\
\hline
5 & -2 & -10 & -11 & -4 & +4 & +0 & \underline{|\,-1} \\
 & -5 & +7 & +3 & +8 & -4 & & \\
\hline
5 & -7 & -3 & -8 & +4 & +0 & & \underline{|\,2} \\
 & 10 & +6 & +6 & -4 & & & \\
\hline
5 & +3 & +3 & -2 & +0 & & & \underline{|\,\frac{2}{5}} \\
 & 2 & +2 & +2 & & & & \\
\hline
5\,|\,5 & +5 & +5 & +0 & & & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & & & & &
\end{array}
$$

$$\therefore\quad 5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)=0.$$

若　　$x^2+x+1=0,\quad \therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

故其根爲 $1,\ -1,\ 2,\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

習題 LXXI 第435頁

1. $2x^3-7x^2+10x-6=0$ 之二根爲 $1\pm i$；求其第三根。

［解］ 設第三根爲 a，因三根之和爲 $\frac{7}{2}$.

$$\therefore\quad a+(1+i)+(1-i)=\tfrac{7}{2}.$$

$$\therefore\quad a=\frac{7}{2}-1-1=\frac{7-4}{2}=\frac{3}{2}.$$

2. 設以下各方程式之根皆成等比級數，試求之。

(1) $8x^3-14x^2-21x+27=0$， (2) $x^3+x^2+3x+27=0$.

［解］ (1) 設 $\dfrac{a}{\beta}$, a, $a\beta$ 代表三根。

則
$$\frac{a}{\beta}+a+a\beta=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a^2}{\beta}+a^2+a^2\beta=-\frac{21}{8}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{a}{\beta}\cdot a\cdot a\beta=-\frac{27}{8}\quad\cdots\cdots(3)$$

從 (3) 式，
$$a^3=-\frac{27}{8}.$$

$$\therefore\quad a=-\frac{3}{2}.$$

代入 (1) 式，得
$$-\frac{3}{2\beta}-\frac{3}{2}-\frac{3\beta}{2}=\frac{7}{4}.$$

化簡
$$6\beta^2+13\beta+6=0.$$

分解因式
$$(3\beta+2)(2\beta+3)=0.$$

$$\therefore\quad \beta=-\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{3}{2}.$$

故所求根爲 $1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}$.

(2) 設 $\dfrac{a}{\beta}$, a, $a\beta$ 代表三根。

則
$$\frac{a}{\beta}+a+a\beta=-1\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha^3=-27 \cdots\cdots(2)$$

從 (2) 式，$\alpha=-3.$

代入 (1) 式，得 $-\dfrac{3}{\beta}-3-3\beta=-1.$

化簡 $3\beta^2+2\beta+3=0.$

$$\therefore\quad \beta=\frac{-1\pm2\sqrt{2}i}{3}.$$

故所求根爲 $1+2\sqrt{2}i,\ -3,\ 1-2\sqrt{2}i.$

3. 設以下各方程式之根皆成等差級數，試求之。

(1) $x^3+6x^2+7x-2=0.$ (2) $x^3-9x^2+23x-15=0.$

[解] (1) 設 $\alpha-\beta,\ \alpha,\ \alpha+\beta$ 爲三根。

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=-6 \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha(\alpha^2-\beta^2)=2 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，$\alpha=-2.$

代入 (2) 式，得 $\beta^2=5,\quad \therefore\ \beta=\pm\sqrt{5}.$

故所求三根爲 $-2-\sqrt{5},\ -2,\ -2+\sqrt{5}.$

(2) $x^3-9x^2+23x-15=0.$

(2) 設 $\alpha-\beta,\ \alpha,\ \alpha+\beta$ 爲三根。

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=9 \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha(\alpha^2-\beta^2)=15 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，$\alpha=3.$

代入 (2) 式，得 $\beta^2=4.$

$$\therefore\quad \beta=\pm2.$$

故所求根爲 $1,3,5.$

4. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之二根僅符號相異，求證 $pq=r$.

[證] 設其根爲 $\alpha,\ -\alpha,\ \beta.$

則 $\alpha-\alpha+\beta=-p,\quad \therefore\ \beta=-p \cdots\cdots(1)$

$-\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta=q,\quad \therefore\ \alpha^2=-q \cdots\cdots(2)$

$$\alpha(-\alpha)\beta=-r, \qquad \therefore \quad \alpha^2\beta=r \cdots\cdots(3)$$

將 (1), (2) 代入 (3) 式,得 $\quad pq=r.$

故此方程式之一根爲另一根之負數之條件爲 $pq=r.$

5. 欲令 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根爲他根之倒數,其條件若何?

[解] 設其根爲 $\alpha, \dfrac{1}{\alpha}, \beta.$

則
$$\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta=-p \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\cdot\beta+\alpha\beta=q \cdots\cdots(2)$$

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\beta=-r \cdots\cdots(3)$$

從 (3) 式,
$$\beta=-r \cdots\cdots(4)$$

代入 (1) 式,得
$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-p+r \cdots\cdots(5)$$

從 (2) 式,
$$\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\beta+1=q \cdots\cdots(6)$$

將 (4), (5) 代入 (6) 式,得

$$(-p+r)(-r)+1=q.$$

$$\therefore \quad r^2-pr+q-1=0.$$

故所求條件爲 $\quad r^2-pr+q-1=0.$

6. 設方程式 $x^4+4x^3+10x^2+12x+9=0$ 有兩個二重根,求解。

[解] 設其根爲 $\alpha, \alpha, \beta, \beta.$

則
$$2\alpha+2\beta=-4 \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式,
$$\beta=-2-\alpha \cdots\cdots(3)$$

代入 (2) 式,得
$$\alpha^2+2\alpha+3=0.$$

$$\therefore \quad \alpha=-1\pm\sqrt{2}i.$$

代入 (3) 式,得
$$\beta=-1\pm\sqrt{2}i.$$

故所求根爲 $-1\pm\sqrt{2}i,\ -1\pm\sqrt{2}i$.

7. 設方程式 $14x^3-13x^2-18x+9=0$ 之根成調和級數，求解。

［解］ 設其根爲 $\dfrac{1}{\alpha-\beta}$, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$, 則根爲 $\alpha-\beta$, α 及 $\alpha+\beta$ 之方程式爲

$$9x^3-18x^2-13x+14=0.$$

$$\therefore\quad \alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=\frac{18}{9}=2 \quad\cdots\cdots(1)$$

及
$$\alpha(\alpha^2-\beta^2)=-\frac{14}{9}\quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，
$$\alpha=\frac{2}{3}.$$

代入 (2) 式，得
$$\frac{4}{9}-\beta^2=-\frac{7}{3}.$$

$$\therefore\quad \beta=\pm\frac{5}{3}.$$

故所求之三根爲 $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{3}{2}$, -1.

8. 設方程式 $x^4-x^3-56x^2+36x+720=0$ 之二根有比 $2:3$，他二根之差爲 1，求解。

［解］ 設其根爲 2α, 3α, β, $\beta+1$.

$$2\alpha+\ \alpha+\beta+\beta+1=1.$$

$$5\alpha+2\beta=0\quad\cdots\cdots(1)$$

$$6\alpha^2\beta^2+6\alpha^2\beta=720.$$

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta=120\quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，
$$\beta=-\tfrac{5}{2}\alpha\quad\cdots\cdots(3)$$

代入 (2) 式，得
$$5\alpha^4-2\alpha^3-96=0.$$

卽
$$(\alpha+2)(5\alpha^3-12\alpha^2+24\alpha-48)=0.$$

$$\therefore\quad \alpha=-2.$$

代入 (3) 式，得
$$\beta=5.$$

故所求根爲 -4, -6, 5, 6.

9. 設 α, β, γ 為 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根，試作方程式 令其根為

(1)　$-\alpha, -\beta, -\gamma$.　　　(2)　$k\alpha, k\beta\ \ k\gamma$.

(3)　$1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$.　　　(4)　$\alpha+k, \beta+k, \gamma+k$.

(5)　$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.　　　(6)　$-1/\alpha^2, -1/\beta^2, -1/\gamma^2$.

[解]　設所求方程式為 $x^3+p'x^2+q'x+r'=0$ ……………………(1)

(1) 若 $-\alpha, -\beta, -\gamma$ 為 (1) 之根。

則
$$-p'=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=p$$
$$q'=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q.$$
$$-r'=-\alpha\beta\gamma=r.$$

∴ 所求之方程式為 $x^3-px^2+qx-r=0$.

(2) 若 $k\alpha, k\beta, k\gamma$. 為 (1) 之根。
$$-p'=k(\alpha+\beta+\gamma)=-kp.$$
$$q'=k^2\alpha\beta+k^2\alpha\gamma+k^2\beta\gamma=k^2q.$$
$$-r'=k^3\alpha\beta\gamma=-k^3r.$$

∴ 所求之方程式為 $x^3+kpx^2+k^2qx+k^3r=0$.

(3) 若 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$. 為 (1) 之根。
$$-p'=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{q}{r}.$$
$$q'=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{p}{r}.$$
$$-r'=\frac{1}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=-\frac{1}{r}.$$

∴ 所求之方程式為 $rx^3+qx^2+px+1=0$.

(4) 若 $\alpha+k, \beta+k, \gamma+k$. 為 (1) 之根。
$$-p'=(\alpha+\beta+\gamma)+3k=-p+3k.$$
$$q'=(\alpha+k)(\beta+k)+(\alpha+k)(\gamma+k)+(\beta+k)(\gamma+k)$$
$$=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+2k(\alpha+\beta+\gamma)+3k^2$$
$$=q-2kp+3k^2.$$

$$-r'=(\alpha+k)(\beta+k)(\gamma+k)$$
$$=\alpha\beta\gamma+k(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)+k^2(\alpha+\beta+\gamma)+k^3$$
$$=-r+kq-k^2p+k^3.$$

∴ 所求之方程式爲

$$x^3+(p-3k)x^2+(q-2kp+3k^2)x+(r-kq+k^2p-k^3)=0.$$

(5) 若 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$. 爲 (1) 之根。

$$-p'=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$$
$$=p^2-2q.$$
$$q'=\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta\gamma^2$$
$$=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta\gamma^2)$$
$$=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=q^2-2pr.$$
$$-r'=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=r^2.$$

∴ 所求之方程式爲 $x^3-(p^2-2q)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0.$

(6) 若 $-\frac{1}{\alpha^2}, -\frac{1}{\beta^2}, -\frac{1}{\gamma^2}$. 爲 (1) 之根。

$$-p'=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}=-\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^4\beta^2\gamma^2}$$
$$=-\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$
$$q'=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{p^2-2q}{r^2}$$
$$-r'=\frac{-1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=-\frac{1}{r^2}.$$

∴ 所求之方程式爲 $r^2x^3+(q^2-2pr)x^2+(p^2-2q)x+1=0.$

10. 設 α, β, γ 爲 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之根，求以下各式之值：

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

(3) $1/\beta\gamma+1/\gamma\alpha+1/\alpha\beta$.　　(4) $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma$.

［解］ $\because\ \alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-2,\ \alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}.$

$\therefore$ (1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2(-2)=\frac{17}{4}.$$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma$

$$+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma)-6\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\times(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)+3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{37}{8}.$$

(3) $\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1.$

(4) $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-3\alpha\beta\gamma$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

11. 設 α,β,γ 爲 $x^3-2x^2+x-3=0$ 之根，求以下各式之值：

(1) $\alpha/\beta\gamma+\beta/\gamma\alpha+\gamma/\alpha\beta.$　　(2) $\alpha\beta/\gamma+\beta\gamma/\alpha+\gamma\alpha/\beta.$

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha\ (\alpha+\beta).$　　(4) $(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2).$

(5) $\alpha\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right).$

［解］ $\because\ \alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=+1\ \ \alpha\beta\gamma=3.$

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}.$$

(2) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$

$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{1-2\cdot 3\cdot 2}{3}=-\frac{11}{3}.$$

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-8+2-3=-1.$

(4) $(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$

$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)-\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$=[(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)][(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2$

$-2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma]-(\alpha\beta\gamma)^2$

$=(4-2)(1-2\cdot 2\cdot 3)-9=-31.$

(5) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$$=\frac{\alpha^2\gamma+\alpha^2\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^2\alpha+\beta^2\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^2\beta+\gamma^2\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{2\cdot 1-3\cdot 3}{3}=-\frac{7}{3}.$$

習 題 LXXII

第 443 頁

1. 試將 $x^7+3x^4-2x^2+6x+7=0$ 之根變號。

［解］ 將偶次方各項之符號變換，得所求之方程式

$$x^7-3x^4+2x^2+6x-7=0.$$

2. 試以 -2 乘 $2x^4+x^3-4x^2-6x+8=0$ 之根．又試以 3 除之。

［解］ 以 -2 乘原方程式之根得方程式

$$2x^4+(-2)x^3-4(-2)^2x^2-6(-2)^3x+(-2)^4\cdot 8=0.$$

化簡 $$2x^4-2x^3-16x^2+48x+128=0.$$

即 $$x^4-x^3-8x^2+24x+64=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

再以 3 除即以 $\frac{1}{3}$ 乘 (1) 之根，得所求方程式

$$2x^4+\left(\frac{1}{3}\right)x^3-4\left(\frac{1}{3}\right)^2x^2-6\left(\frac{1}{3}\right)^3x+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 8=0.$$

化簡 $$162x^4+27x^3-36x^2-18x+8=0.$$

3. 試將 $5x^6-x^4+3x^3+9x+10=0$ 之根易爲其倒數。

［解］ 將原方程式係數之順序倒轉，得所求之方程式

$$10x^6+9x^5+3x^3-x^2+5=0.$$

4. 試以 2 減小 $2x^5+x^4-3x^2+6=0$ 之根。又試以 1 增大之。

［解］ (1) 以 2 減小原方程式之根。

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2+ & 1+ & 0- & 3+ & 0+ & 6 & 2 \\
 & +\ 4+ & 10+ & 20+ & 34+ & 68 & \\
\hline
2+ & 5+ & 10+ & 17+ & 34+ & 74 & \\
 & +\ 4+ & 18+ & 56+ & 146 & & \\
\hline
2+ & 9+ & 28+ & 73+ & 180 & & \\
 & +\ 4+ & 26+ & 108 & & & \\
\hline
2+ & 13+ & 54+ & 181 & & & \\
 & +\ 4+ & 34 & & & & \\
\hline
2+ & 17+ & 88 & & & & \\
 & +\ 4 & & & & & \\
\hline
2+ & 21 & & & & &
\end{array}$$

∴ 所求之方程式爲 $2x^5+21x^4+88x^3+181x^2+180x+74=0.$

(2) 以 1 增大原方程式之根，即以 -1 減小原方程式之根。

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2+ & 1+ & 0- & 3+ & 0+ & 6 & -1 \\
 & -2+ & 1- & 1+ & 4- & 4 & \\
\hline
2- & 1+ & 1- & 4+ & 4+ & 2 & \\
 & -2+ & 3- & 4+ & 8 & & \\
\hline
2- & 3+ & 4- & 8+ & 12 & & \\
 & -2+ & 5- & 9 & & & \\
\hline
2- & 5+ & 9- & 17 & & & \\
 & -2+ & 7 & & & & \\
\hline
2- & 7+ & 16 & & & & \\
 & -2 & & & & & \\
\hline
2- & 9 & & & & &
\end{array}$$

∴ 所求之方程式為 $2x^5-9x^4+16x^3-17x^2+12x+2=0$.

5. 試將 $x^4-x^3/3+x^2/4+x/25-1/48=0$ 變換為另一方程式，令其係數皆為整數，且第一係數為 1.

〔解〕 將原方程式各根乘以 k，得

$$x^4-\frac{1}{3}kx^3+\frac{1}{4}k^2x^2+\frac{1}{25}k^3x-\frac{1}{48}k^4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

欲使其係數為整數，k 之最小值為 $3\cdot2\cdot5=30$，以 k 之值代入 (1)，得所求方程式為 $x^4-10x^3+225x^2+1080x-16875=0$.

6. 試將方程式 $3x^4-36x^3+x-7=0$ 變換為另一方程式，令其缺 x^3 項.

〔解〕 以 k 減小原方程式之根，得

$$3x^4+12(k-3)x^3+18k(k-6)x^2+(12k^3$$
$$-108k^2+1)x+3k^4-36k^3+k-7=0 \cdots\cdots(1)$$

因所求方程式須缺 x^3 項，　∴ $k-3=0$.　∴ $k=3$.

以 k 之值代入 (1) 得所求方程式 $3x^4-162x^2-647x-733=0$.

7. 試將下二方程式變換為缺 x 項之方程式.

(1)　$x^3+6x^2+9x+10=0$.　　(2)　$x^3-x^2-x-3=0$.

〔解〕 (1)　以 k 減小原方程式之根得

$$x^3+(3k+6)x^2+(3k^2+12k+9)x+k^3+6k^2+9k+10=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

命 $3k^2+12k+9=0$，即 $k^2+4k+3=0$，　∴ $k=-3$ 及 -1.

以 k 之值代入 (1) 得所求方程式

$$x^3-3x^2+10=0,\ \text{及}\ x^3+3x^2+6=0.$$

(2)　以 k 之值減小原方程式之根，得

$$x^3+(3k-1)x^2+(3k^2-2k-1)x+k^3-k^2-k-3=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

命　$3k^2-2k-1=0$，得 $k=1$ 及 $-\frac{1}{3}$.

以 k 之值代入 (2)，得所求方程式

$$x^3+2x^2-4=0.$$

及　$$27x^3-54x^2-76=0.$$

8. 設 $x^4+x^3-x+2=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 試以 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 爲根作方程式.

[解] $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 各爲原方程式根之平方.

設 y 爲新方程式之根，x 爲原方程式之根，則得關係式

$$y=x^2, \text{ 即 } x=\pm\sqrt{y} \quad \cdots\cdots(1)$$

以 (1) 代入原方程式得 $(\pm\sqrt{y})^4+(\pm\sqrt{y})^3-(\pm\sqrt{y})+2=0$.

即 $$y^2\pm y\sqrt{y}\mp\sqrt{y}+2=0.$$

移項 $$\pm\sqrt{y}(y-1)=-(y^2+2).$$

兩端平方 $y(y-1)^2=(y^2+2)^2$, 即 $y(y^2-2y+1)=y^4+4y^2+4$.

化簡，整理得 $y^4-y^3+6y^2-y+4$ 此爲所求方程式.

9. 設 $x^4+3x^3+2x^2-1=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 試以 $\beta+\gamma+\delta, \alpha+\gamma+\delta, \alpha+\beta+\delta, \alpha+\beta+\gamma$ 爲根作方程式.

[解] $\because$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲原方程式之根, $\therefore$ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$.

又 $$\beta+\gamma+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\alpha=-3-\alpha.$$

$$\alpha+\gamma+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\beta=-3-\beta.$$

$$\alpha+\beta+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\gamma=-3-\gamma.$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\delta=-3-\delta.$$

設 y 爲所求方程式之根，x 爲原方程式之根，

則得關係式 $y=-3-x$, $\therefore$ $x=-y-3$.

以 x 之值代入原方程式中，得

$$(-y-3)^4+3(-y-3)^3+2(-y-3)^2-1=0.$$

化簡之，得所求之方程式爲

$$y^4+9y^3+29y^2+39y+17=0.$$

10. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 α, β, γ, 試以

(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}, \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}, \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$. (2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

爲根，作方程式.

[解] 因 α, β, γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根, $\therefore$ $\alpha\beta\gamma=-r$.

(1)　以 $\frac{\alpha\beta}{\gamma}, \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma\alpha}{\beta}$ 作根。

則　$\frac{\alpha\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma^2}=-\frac{r}{\gamma^2},\ \frac{\beta\gamma}{\alpha}=-\frac{r}{\alpha^2},\ \frac{\gamma\alpha}{\beta}=-\frac{r}{\beta^2}.$

設　$$y=-\frac{r}{x^2},\qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}.$$

代入原方程式中，得

$$\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\right)^3+p\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\right)^2+q\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\right)+r=0,$$

即　$$\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\left(-\frac{r}{y}+q\right)=\frac{pr}{y}-r.$$

兩端平方　$$-\frac{r}{y}\left(-\frac{r}{y}+q\right)^2=\left(\frac{pr}{y}-r\right)^2.$$

化簡　$$-r(r^2-2qry+q^2y^2)=yr^2(p^2-2py+y^2).$$

$$\therefore\quad ry^3+(q^2-2pr)y^2+r(p^2-2q\,y+r^2=0.$$

(2)　以 $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ 作根.

則
$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\alpha}{-p-\alpha},$$

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma-\beta}=\frac{\beta}{-p-\beta},$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-\gamma}=\frac{\gamma}{-p-\gamma}.$$

設　$$y=\frac{x}{-p-x},\qquad \therefore\ x=\frac{-py}{1+y}.$$

代入原方程式中，得

$$\left(\frac{-py}{1+y}\right)^3+p\left(\frac{-py}{1+y}\right)^2+q\left(\frac{-py}{1+y}\right)+r=0.$$

化簡　$$-p^3y^3+p^3y^2+p^3y^3-pqy-2pqy^2-pqy^3$$
$$+r+3ry+3ry^2+ry^3=0.$$

$$\therefore\quad (r-pq)y^3+(p^3-2pq+3r)y^2+(3r-pq)y+r=0.$$

11. 設 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之根爲 α,β,γ, 作方程式, 令其根爲

(1) $\beta^2+\gamma^2,\ \gamma^2+\alpha^2,\ \alpha^2+\beta^2$. (2) $\alpha(\beta+\gamma),\ \beta(\gamma+\alpha),\ \gamma(\alpha+\beta)$.

(3) $\beta\gamma+\dfrac{1}{\alpha},\ \gamma\alpha+\dfrac{1}{\beta},\ \alpha\beta+\dfrac{1}{\gamma}$. (4) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha},\ \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta},\ \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.

(5) $\alpha\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right),\ \beta\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right),\ \gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$.

[解] 因 α,β,γ 爲 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之根,

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=+3,\ \alpha\beta\gamma=-4.$$

(1) 以 $\beta^2+\gamma^2,\ \gamma^2+\alpha^2,\ \alpha^2+\beta^2$ 作根。

則
$$\begin{aligned}\beta^2+\gamma^2&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\\&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha^2\\&=p^2-2q-\alpha^2=-2-\alpha^2.\end{aligned}$$

$$\gamma^2+\alpha^2=-2-\beta^2,\ \alpha^2+\beta^2=-2-\gamma^2.$$

設
$$y=-2-x^2,\qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{-2-y}.$$

代入原方程式中, 得

$$(-2-y)\sqrt{-2-y}+2(-2-y)+3\sqrt{-2-y}+4=0.$$

化簡
$$(1-y)\sqrt{-2-y}=2y.$$

$$(1-2y+y^2)(-2-y)=4y^2.$$

$$\therefore\quad y^3+4y^2-3y+2=0.$$

(2) 以 $\alpha(\beta+\gamma),\ \beta(\gamma+\alpha),\ \gamma(\alpha+\beta)$ 作根。

則
$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma)&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\beta\gamma=3-\beta\gamma\\&=3-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=3+\frac{4}{\alpha},\end{aligned}$$

$$\beta(\gamma+\alpha)=3+\frac{4}{\beta},\ \gamma(\alpha+\beta)=3+\frac{4}{\gamma}.$$

設
$$y=3+\frac{4}{x},\qquad \therefore\quad x=\frac{4}{y-3}.$$

代入原方程式中，得

$$\left(\frac{4}{y-3}\right)^3+2\left(\frac{4}{y-3}\right)^2+3\left(\frac{4}{y-3}\right)+4=0.$$

化簡 $$64+32(y-3)+12(y-3)^2+4(y-3)^3=0.$$

$$\therefore\quad y^3-6y^2+17y-8=0.$$

(3) 以 $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta+\frac{1}{\gamma}$ 作根。

則 $$\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\beta\gamma+1}{\alpha}=\frac{-4+1}{\alpha}=\frac{-3}{\alpha},$$

$$\gamma\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{-3}{\beta},\qquad \alpha\beta+\frac{1}{\gamma}=\frac{-3}{\gamma}.$$

設 $$y=\frac{-3}{x},\qquad \therefore\quad x=-\frac{3}{y}.$$

代入原方程式中，得

$$\left(-\frac{3}{y}\right)^3+2\left(-\frac{3}{y}\right)^2+3\left(-\frac{3}{y}\right)+4=0.$$

化簡 $$-27+18y-9y^2+4y^3=0.$$

$$\therefore\quad 4y^3-9y^2+18y-27=0.$$

(4) 以 $\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}$, $\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}$, $\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$ 作根。

則 $$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}=\frac{\alpha}{-2-2\alpha},$$

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}=\frac{\beta}{-2-2\beta},\quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{-2-2\gamma}.$$

設 $$y=\frac{x}{-2-2x},\qquad \therefore\quad x=\frac{-2y}{2y+1}.$$

代入原方程式中，得

$$\left(\frac{-2y}{2y+1}\right)^3+2\left(\frac{-2y}{2y+1}\right)^2+3\left(\frac{-2y}{2y+1}\right)+4=0.$$

化簡 $$-8y^3+8y^2(2y+1)-6y(2y+1)^2+4(2y+1)^3=0.$$

$$\therefore\quad 8y^3+16y^2+9y+2=0.$$

(5) 以 $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$, $\beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)$, $\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ 作根。

則 $$\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\frac{\alpha(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma}-1=\frac{-3\alpha}{4}-1,$$
$$\beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{-3\beta}{4}-1,\ \gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{-3\gamma}{4}-1.$$

設 $$y=\frac{-3x}{4}-1,\qquad \therefore\quad x=-\frac{4}{3}(1+y).$$

代入原方程式中，得
$$\left[-\frac{4(1+y)}{3}\right]^3+2\left[-\frac{4(1+y)}{3}\right]^2+3\left[-\frac{4(1+y)}{3}\right]+4=0.$$

化簡 $$-64(1+y)^3+96(1+y)^2-108(1+y)+4\cdot 27=0.$$
$$-64y^3-96y^2-108y+32=0.$$
$$\therefore\quad 16y^3+24y^2+27y-8=0.$$

12. 求以下各方程式之實根之上限及下限。

(1) $x^4+3x^3-13x^2-6x+28=0$. (2) $2x^5-120x^2-38x+27=0$.

(3) $x^4-29x^2+50x+12=0$. (4) $2x^5-26x^3+60x^2-92=0$.

(5) $x^4-14x^3+44x^2+28x-92=0$. (6) $3x^6-35x^3+77x^2-50x-110=0$.

設 $$f(x)=x^4+3x^3-13x^2-6x+28=0.$$

[解] (1)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
1+ & 3- & 13- & 6+ & 28 & \underline{2} \\
+ & 2+ & 10- & 6- & 24 & \\ \hline
1+ & 5- & 3- & 12+ & 4 & \\
+ & 2+ & 14+ & 22 & & \\ \hline
1+ & 7+ & 11+ & 10 & & \\
+ & 2+ & 18 & & & \\ \hline
1+ & 9+ & 29 & & & \\
+ & 2 & & & & \\ \hline
1+ & 11 & & & &
\end{array}$$

以 2 減小 $f(x)=0$ 之根所得新方程式之係數均爲正號，惟 1 則不然，故知 2 爲上限。

又　　$$f(-x)=x^4-3x^3-13x^2+6x+28=0.$$

$$\begin{array}{r|l} 1-3-13+\ 6+\ 28 & 6 \\ +6+18+30+196 & \\ \hline 1+3+\ 5+36+244 & \end{array}$$

因所得商式之係數及賸餘均爲正號，若以 5 減小 $f(-x)=0$ 之根，則新方程式之係數不能全體爲正號，故知 6 爲 $f(-x)=0$ 之上限，即 -6 爲 $f(x)=0$ 之下限。

(2)　設 $f(x)=2x^5-120x^2-38x+27=0.$

$$\begin{array}{r|l} 2+\ 0+\ 0-120-\ \ 38+27 & 4 \\ +\ 8+32+128+\ \ 32-24 & \\ \hline 2+\ 8+32+\ \ 8-\ \ \ 6+\ 3 & \\ +\ 8+64+384+1568 & \\ \hline 2+16+96+392+1562 & \end{array}$$

以 4 減小 $f(x)=0$ 之根所得新方程式之係數爲正號。若以 3 減小 $f(x)=0$ 之根則不然，故知 4 爲上限。

又　　$$f(-x)=2x^5+120x^2-38x-27=0.$$

$$\begin{array}{r|l} 2+0+0+120-\ \ 38-27 & 1 \\ +2+2+\ \ 2+122+84 & \\ \hline 2+2+2+122+\ 84+57 & \end{array}$$

因所得商式之係數及賸餘均爲正號，但 $f(-x)=0$ 之係數不能全體爲正，故知 1 爲 $f(-x)=0$ 之上限，即 -1 爲 $f(x)=0$ 之下限。

(3)　設 $f(x)=x^4-29x^2+50x+12=0.$

$$\begin{array}{r|l} 1+0-29+50+12 & 4 \\ +4+16-52-\ 8 & \\ \hline 1+4-13-\ 2+\ 4 & \\ +4+32+76 & \\ \hline 1+8+19+74 & \end{array}$$

以 4 減小 $f(x)=0$ 之根，所得新方程式之係數均爲正號，惟 3 則不然，故知 4 爲上限。

又　　$$f(-x)=x^4-29x^2-50x+12=0.$$

$$\begin{array}{r|l} 1+0-29-\ \ 50+\ \ 12 & 7 \\ +7+49+140+630 & \\ \hline 1+7+20+\ \ 90+642 & \end{array}$$

因所得商式之係數及賸餘均爲正號，若以 6 減小 $f(-x)=0$ 之根，則新方程式之係數不能全體爲正，故知 7 爲 $f(-x)=0$ 之上限，卽 -7 爲 $f(x)=0$ 之下限.

(4)　設 $f(x)=2x^5-26x^3+60x^2-92=0.$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2+ & 0- & 26+ & 60+ & 0- & 92 & \underline{2} \\
 + & 4+ & 8- & 36+ & 48+ & 96 & \\ \hline
2+ & 4- & 18+ & 24+ & 48+ & 4 & \\
 + & 4+ & 16- & 4+ & 40 & & \\ \hline
2+ & 8- & 2+ & 20+ & 88 & & \\
 + & 4+ & 24+ & 44 & & & \\ \hline
2+ & 12+ & 22+ & 64 & & &
\end{array}$$

以 2 減小 $f(x)=0$ 之根，所得新方程式之係數均爲正號，惟 1 則不然.故知 2 爲上限.

又　　$f(-x)=2x^5-26x^3-60x^2+92=0.$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2+ & 0- & 26- & 60+ & 0+ & 92 & \underline{5} \\
 + & 10+ & 50+ & 120+ & 300+ & 1500 & \\ \hline
2+ & 10+ & 24+ & 60+ & 300+ & 1592 &
\end{array}$$

因所得商式之係數及賸餘均爲正號，若以 4 減小 $f(x)=0$ 之根，則新方程式之係數不能全體爲正，故知 5 爲 $f(-x)=0$ 之上限，卽 -5 爲 $f(x)=0$ 之下限.

(5)　設 $f(x)=x^4-14x^3+44x^2+28x-92=0.$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1- & 14+ & 44+ & 23- & 92 & \underline{9} \\
 + & 9- & 45- & 9+ & 171 & \\ \hline
1- & 5- & 1+ & 19+ & 79 & \\
 + & 9+ & 36+ & 315 & & \\ \hline
1+ & 4+ & 35+ & 334 & &
\end{array}$$

以 9 減小 $f(x)=0$ 之根，所得新方程式之係數均爲正號，惟 8 則不然，故知 9 爲上限.

又　　$f(-x)=x^4+14x^3+44x^2-28x-92=0.$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1+ & 14+ & 44- & 28- & 92 & \underline{2} \\
 + & 2+ & 32+ & 152+ & 248 & \\ \hline
1+ & 16+ & 76+ & 124+ & 156 &
\end{array}$$

因所得商式之係數及賸餘均爲正號，若以 1 減小 $f(x)=0$ 之根，則新方程式之係數，不能全體爲正，故知 2 爲 $f(-x)=0$ 之上限，卽 -2 爲 $f(x)=0$ 之下限。

(6) 設 $f(x)=3x^6-35x^3+77x^2-50x-110=0.$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
3 & +0 & +0 & -35 & +77 & -50 & -110 & \underline{2} \\
 & +6 & +12 & +24 & -22 & +110 & +120 & \\
\hline
3 & +6 & +12 & -11 & +55 & +60 & +10 & \\
 & +6 & +24 & +72 & +122 & +354 & & \\
\hline
3 & +12 & +36 & +61 & +177 & +414 & &
\end{array}$$

以 2 減小 $f(x)=0$ 之根，所得新方程式之係數均爲正號，惟 1 則不然，故知 2 爲上限。

又 $$f(-x)=3x^6+35x^3+77x^2+50x-110=0.$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
3 & +0 & +0 & +35 & +77 & +50 & -110 & \underline{1} \\
 & +3 & +3 & +3 & +38 & +115 & +165 & \\
\hline
3 & +3 & +3 & +38 & +115 & +165 & +55 &
\end{array}$$

因所得商式之係數及賸餘均爲正號，而 $f(-x)=0$ 全式符號並不均爲正，故知 1 爲 $f(-x)=0$ 之上限，卽 -1 爲 $f(x)=0$ 之下限。

習 題 LXXIII

第 449 頁

1. 設 $2x^4-x^3+5x^2+13x+5=0$ 之一根爲 $1-2i$，求解。

［解］ 設 α, β 爲其另二根。

$$1+2i+1-2i+\alpha+\beta=\tfrac{1}{2} \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta(1+2i)(1-2i)=\tfrac{5}{2} \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式， $$\alpha+\beta=-\tfrac{3}{2} \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式， $$\alpha\beta=\tfrac{1}{2} \cdots\cdots(4)$$

從 (3) 及 (4)， $$\alpha=-1,\ \beta=-\tfrac{1}{2}.$$

故其四根爲 $-1,\ -\frac{1}{2},\ 1\pm 2i.$

2. 設 $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0$ 之一根爲 $2+\sqrt{2}$，求解。

［解］ $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0.$

按 §825，知 $2-\sqrt{2}$ 亦爲其一根.

$$\therefore\quad [x-(2+\sqrt{2})][x-(2-\sqrt{2})]=0.$$

卽 $$x^2-4x+2=0 \cdots\cdots(1)$$

以 (1) 除原方程式，得 $$\frac{2x^4-11x^3+17x^2-10x+2}{x^2-4x+2}=0.$$

卽 $$2x^2-3x+1=0.$$

分解因式 $$(2x-1)(x-1)=0.$$

$$\therefore\quad x=\tfrac{1}{2},\ 1.$$

故其根爲 $\frac{1}{2}$, 1, $2\pm\sqrt{2}$.

3. 以 $-5+2i$ 及 $-1+\sqrt{5}$ 爲二根，作一具有理係數之最低次方程式.

[解] 因 $-5+2i$ 及 $-1+\sqrt{5}$ 爲二根，且各項係數須爲有理數，故 $-5-2i$ 及 $-1-\sqrt{5}$ 皆爲根.

所求方程式應爲

$$[x-(-5+2i)][x-(-5-2i)][x-(-1+\sqrt{5})][x-(-1-\sqrt{5})]=0$$

卽 $$(x^2+10x+29)(x^2+2x-4)=0.$$

亦卽 $$x^4+12x^3+45x^2+18x-116=0.$$

4. 作一不可約方程式，令其一根爲 $\sqrt{2}+i$.

[解] 此方程式之其他數根爲 $-\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}-i$, $-\sqrt{2}-i$.

故所求方程式應爲

$$[x-(\sqrt{2}+i)][x-(-\sqrt{2}+i)][x-(\sqrt{2}-i)][x-(-\sqrt{2}-i)]=0,$$

卽 $$(x^2-2ix-3)(x^2+2ix-3)=0,$$

亦卽 $$x^4-2x^2+9=0.$$

5. 藉笛卡兒符號律及 §832 之助，以研討下列各方程式之根，可得何種結論？

(1) $x^4+1=0$. (2) $x^4-x^2-1=0$.

(3) $x^4+2x^3+x^2+x+1=0$. (4) $x^4-2x^3+x^2-x+1=0$.

(5) $x^7+x^5+x^3-x+1=0$. (6) $x^7+x^4-x^2-1=0$.

(7) $x^5-4x^2+3=0$. (8) $x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0$.

［解］ (1) $\because f(x)=x^4+1=0$, $\therefore f(-x)=x^4+1=0$.

$f(x)=0$ 無符號變化，即 $v=0$, $f(-x)=0$ 亦無符號變化，即 $v'=0$.

$$\because \quad n-(v+v')=4-0=4.$$

故 $f(x)=0$ 無實根，僅有四個虛根.

(2) $\because f(x)=x^4-x^2-1=0$, $\therefore f(-x)=x^4-x^2-1=0$.

$f(x)=0$ 有一符號變化，$\therefore v=1$; $f(-x)=0$ 符號亦有一變化，$\therefore v'=1$.

$$\because \quad n-(v+v')=4-(1+1)=2.$$

故 $f(x)=0$ 至多有一正根，及一負根，即至少有二虛根.

(3) $\because \quad f(x)=x^4+2x^3+x^2+x+1=0$,

$$\therefore \quad f(-x)=x^4-2x^3+x^2-x+1=0.$$

$f(x)=0$ 無符號變化，即 $v=0$, $f(-x)=0$ 符號有四變化，即 $v'=4$,

故 $f(x)=0$ 無正根，至多有四負根.

(4) $\because \quad f(x)=x^4-2x^3+x^2-x+1=0$,

$$\therefore \quad f(-x)=x^4+2x^3+x^2+x+1=0.$$

$f(x)=0$ 符號有四變化，至多有四正根.

$f(-x)=0$ 無符號變化，$f(x)=0$ 無負根.

(5) $\because f(x)=x^7+x^5+x^3-x+1=0$,

$$\therefore \quad f(-x)=x^7+x^5+x^3-x-1=0.$$

$f(x)=0$ 符號有二變化，至多有二正根.

$f(-x)=0$ 符號有一變化，$f(x)=0$ 至多有一負根.

故至少尚有四虛根.

(6) $\because f(x)=x^7+x^4-x^2-1=0$, $\therefore f(-x)=x^7-x^4+x^2+1=0$.

$f(x)=0$ 符號有一變化，至多有一正根.

$f(-x)=0$ 符號有二變化，$\therefore f(x)=0$ 至多有二負根.

故至少尚有四虛根.

(7) $\because$ $f(x)=x^5-4x^2+3=0$, $\therefore$ $f(-x)=x^5+4x^2-3=0$.

$f(x)=0$ 符號有二變化，至多有二正根.

$f(-x)=0$ 符號有一變化， $\therefore$ $f(x)=0$ 至多有一負根.

故至少尙有三虛根.

(8) $\because$ $f(x)=x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0$,

$\therefore$ $f(-x)=x^{3n}+x^{2n}+x^n+x-1=0$.

$f(x)=0$ 符號有二變化，至多有二正根.

$f(-x)=0$ 符號有一變化， $\therefore$ $f(x)=0$ 至多有一負根.

故至少尙有 $3n-3$ 個虛根.

6. 設一完全方程式之根皆爲實數，求證其正根之個數等於其變化之個數，其負根之個數等於其連續之個數.

［證］ 凡完全方程式符號之變化與連續之和適等於該方程式之最高次數，所以實根之個數等於所有根之總數. 又其正限之個數不能比變化之個數多，負根之個數不能比連續之個數多，故知其正根之個數等於其變化之個數，負根之個數等於其連續之個數.

7. 設 $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$ 之根皆爲實數，則若干爲正，若干爲負?

［解］ 原方程式爲完全方程式，共有二變化三連續. 據第 6 題證明可知有兩個正根，三個負根.

8. 試用笛卡兒符號律證 $x^{2n}+1=0$ 無正根，又用同律研討 $x^{2n+1}+1=0$, $x^{2n}-1=0$, $x^{2n+1}-1=0$ 之根，可得如何之結論?

［解］ (1) 設 $f(x)=x^{2n}+1=0$.

$\because$ $f(x)=0$ 符號無變化，故 $f(x)=0$ 無正根.

(2) 設 $f(x)=x^{2n+1}+1=0$, 則 $f(-x)=x^{2n+1}-1=0$.

$\because$ $f(x)=0$ 符號無變化，而 $f(-x)=0$ 有一變化，故 $f(x)=0$ 有一負根，及 $2n$ 個虛根，而無正根.

(3) 設 $f(x)=x^{2n}-1=0$, 則 $f(-x)=x^{2n}-1=0$.

$\because$ $f(x)=0$ 有一變化，$f(-x)=0$ 亦有一變，故 $f(x)=0$ 有一正根，一負根，$2n-2$ 個虛根。

(4)　設 $f(x)=x^{2n+1}-1=0$，則 $f(-x)=x^{2n+1}+1=0$。

$\because$ $f(x)=0$ 有一變化，$f(-x)=0$ 無變化，故 $f(x)=0$ 有一正根，無負根及 $2n$ 個虛根。

9.　具正係數之方程式，若僅含 x 之偶次冪，則不能有正根或負根。試證之。

[證]　若 $f(x)=0$ 之係數均爲正且僅含 x 之偶次冪，則 $f(x)=0$ 無變化，$f(-x)=0$ 亦無變化，故此方程式不能有正根及負根。

10.　具正係數之方程式，若僅含 x 之奇次冪，則除 0 外不能有實根，試證之。

[證]　若 $f(x)=0$ 之係數均爲正且僅含 x 之奇次冪，則可以 x 之因式析出，餘下因式之係數仍爲正且僅含 x 之偶次冪，故除 $x=0$ 之一個實根外，不能再有其他實根。

11.　設方程式 $x^3+px+q=0$ 中，p 及 q 皆爲正，求證此方程式僅有一實根，且此根爲負。

[證]　$f(x)=x^3+px+q=0$，因 p, q 均爲正，符號無變化。

又 $f(-x)=x^3+px-q=0$ 有一變化。

故 $f(x)=0$ 無正根，有一負根即有一實根。

12.　設一不完全方程式無零根，求證此方程式必有兩個或更多個虛根，但若在異號之二項間有一缺項如 $x^4-3x^2+1=0$ 者則否。

[證]　不完全方程式符號之變化與連續之和必小於此方程式之最高次數，故其實根之個數必小於此方程式之次數，所餘之根皆爲虛根，但虛根成對，故此方程式有二或二以上之虛根。

又若 $f(x)=x^4-3x^2+1=0$，則 $f(-x)=x^4-3x^2+1=0$。

因 $f(x)=0$ 及 $f(-x)=0$ 均有二變化，故 $f(x)=0$ 有四實根而不能有兩個或更多個虛根。

13. 在具實係數之任意方程式 $f(x)=0$ 中，必有奇數個變化介乎兩不相隣之異號間，且必有偶數個，或無變化，介乎兩不相隣之同號間。

［證］ 在 $f(x)=0$ 中若不相隣二項爲異號如 $+$，$-$，則自 $+$ 變至 $-$ 時有一變或三變等卽有奇數個變化，又若不相隣二項爲同號，則在二項間之符號無變化，如有變化，則先變爲異號，再變爲同號其中必有偶數個變化。

14. 由具實係數之方程式，取其對應於負根及虛根之因式作積，則積之最後項常爲正，試證之；又此積若有變化，則其個數必爲偶數。

［證］ 設具有實係數方程式之負根爲 $-a$，則此方程式有一因式 $(x+a)$，又若有一虛根 $\alpha+\beta i$ 則另有一虛根 $\alpha-\beta i$ 故此方程式又有一因式爲 $[x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)]$．因 a，及 $(\alpha^2+\beta^2)$ 均爲正數，其乘積 $(x+a)[x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)]$ 之絕對項（卽最後項）當然亦爲正。

又 $(x+a)[x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)]$ 之乘積中最高次項爲正，絕對項又爲正，據第 13 題證明，此積若有變化，其個數必爲偶數。

15. 若變化之個數超過正根之個數，則超過之個數爲一偶數，試證之．

［證］ 任何方程式除去正根外，祇有負根與虛根兩種，但負根及虛根之因式乘積中，據第 14 題證明，若有符號變化，其變化必爲偶數，故任何方程式之符號變化之個數超過正根之個數時，其個數應爲偶數。

16. 求證 $x^4+x^3-x^2+x-1=0$ 之正根之個數，非一卽三，而負根之個數爲一．

［證］ $f(x)=x^4+x^3-x^2+x-1=0$ 中有三變化，故至多有三正根，卽此方程式有三正根或一正根，因據第 15 題之證明符號變化之個數超過正根之個數必爲偶數也．又 $f(x)=0$ 中符號之連續數爲 1．且因虛根須成對，故 $f(x)=0$ 必有一負根。

17. 凡絕對項爲負之各偶次方程式至少有一正根及一負根．試證之。

［證］ 因 $f(x)=0$ 爲偶次方程式，第一項爲正，絕對項爲負，其中符號至少有一變化，故 $f(x)=0$ 至少有一正根．又 $f(-x)=0$ 中，第一項仍爲正，絕對項仍爲負，故符號至少亦有一變化，故 $f(x)=0$ 至少有一負根。

習　題　LXXIV　第453頁

試定以下各方程式實根之位置。

1. ［解］ $$f(x)=2x^3-3x^2-9x+8=0.$$
$$f(-x)=2x^3+3x^2-9x-8=0.$$

按笛卡兒法則，§ 830，此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$$f(0)=8,\quad f(1)=-2,\quad f(2)=-6,\quad f(3)=8;$$
$$f(0)=8,\quad f(-1)=12,\quad f(-2)=-2.$$

$\therefore$ 其根位於 0 與 1, 2 與 3, -1 與 -2 之間。

2. ［解］ $$f(x)=x^3+x^2-4x-2=0.$$
$$f(-x)=x^3-x^2-4x+2=0.$$

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過二個。

$$f(0)=-2,\quad f(1)=-4,\quad f(2)=2;$$
$$f(0)=-2,\quad f(-1)=2,\quad f(-2)=2,\quad f(-3)=-8.$$

$\therefore$ 其根位於 1 與 2, 0 與 -1, -2 與 -3 之間。

3. ［解］ $$f(x)=x^3-3x^2-2x+5=0.$$
$$f(-x)=x^3+3x^2-2x-5=0.$$

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$$f(0)=5,\quad f(1)=1,\quad f(2)=-3,\quad f(3)=-1,\quad f(4)=13;$$
$$f(0)=5,\quad f(-1)=3,\quad f(-2)=-11.$$

$\therefore$ 其根位於 1 與 2, 3 與 4, -1 與 -2 之間。

4. ［解］ $$f(x)=2x^3+3x^2-10x-15=0.$$
$$f(-x)=2x^3-3x^2-10x+15=0.$$

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過二個。

$$f(0)=-15,\quad f(1)=-20,\quad f(2)=-7,\quad f(3)=36;$$
$$f(0)=-15,\quad f(-1)=-4,\quad f(-2)=1,\quad f(-3)=-12.$$

$\therefore$ 其根位於 2 與 3, -1 與 -2, -2 與 -3 之間。

5. ［解］ $$f(x)=x^3-4x^2-4x+12=0.$$

$$f(-x)=x^3+4x^2-4x-12=0.$$

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個.

$$f(0)=12,\quad f(1)=5,\quad f(2)=-4,\quad f(3)=-9,$$
$$f(4)=-4,\quad f(5)=17;$$
$$f(0)=12,\quad f(-1)=11,\quad f(-2)=-4.$$

∴ 其根位於 1 與 2, 4 與 5, −1 與 −2 之間

6. [解] $$f(x)=x^3+13x^2+54x+71=0.$$
$$f(-x)=x^3-13x^2+54x-71=0.$$

此方程式負根不能超過三個.

$$f(0)=71,\quad f(-1)=29,\quad f(-2)=7,\quad f(-3)=-1,$$
$$f(-4)=-1,\quad f(-5)=1,\quad f(-6)=-1.$$

∴ 其根位於 −2 與 −3, −4 與 −5, −5 與 −6 之間.

7. [解] $$f(x)=x^3+5x+19=0.$$
$$f(-x)=x^3+5x-19=0.$$

此方程式負根不能超過一個，而且必有一個.

$$f(0)=19,\quad f(-1)=13,\quad f(-2)=1,\quad f(-3)=-23.$$

∴ 其根位於 −2 與 −3 之間.

8. [解] $$f(x)=x^4-95=0.$$
$$f(-x)=x^4-95=0.$$

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過一個.

$$f(0)=-95,\quad f(1)=-94,\quad f(2)=-79,$$
$$f(3)=-14,\quad f(4)=161;$$
$$f(0)=-95,\quad f(-1)=-94,\quad f(-2)=-79,$$
$$f(-3)=-14,\quad f(-4)=161.$$

∴ 其根位於 3 與 4, −3 與 −4 之間.

9. [解] $$f(x)=x^4-8x^3+14x^2+4x-8=0.$$
$$f(-x)=x^4+8x^3+14x^2-4x-8=0.$$

此方程式正根不能超過三個，負根不能超過一個.

$$f(0)=-8,\quad f(1)=3,\quad f(2)=8,\quad f(3)=-7,$$

$$f(4)=-24,\quad f(5)=-13,\quad f(6)=88;$$
$$f(0)=-8,\quad f(-1)=11.$$

故其根位於 0 與 1, 2 與 3, 5 與 6, 0 與 -1 之間。

10. [解]
$$f(x)=x^4+5x^3+x^2-13x-7=0.$$
$$f(-x)=x^4-5x^3+x^2+13x-7=0.$$

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過三個.

$$f(0)=-7,\quad f(1)=-13,\quad f(2)=27;$$
$$f(0)=-7,\quad f(-1)=3,\quad f(-2)=-1,$$
$$f(-3)=-13,\quad f(-4)=-3,\quad f(-5)=23.$$

故其根位於 1 與 2, 0 與 -1, -1 與 -2, -4 與 -5 之間。

11. [解]
$$f(x)=x^4-11x^3+32x^2-4x-46=0.$$
$$f(-x)=x^4+11x^3+32x^2+4x-46=0.$$

此方程式正根不能超過三個，負根不能超過一個.

$$f(0)=-46,\quad f(1)=-28,\quad f(2)=2,\quad f(3)=14,$$
$$f(4)=2,\quad f(5)=-16,\quad f(6)=2;$$
$$f(0)=-46,\quad f(-1)=2.$$

故其根位於 1 與 2, 4 與 5, 5 與 6, 0 與 -1 之間。

12. [解] $f(x)=x^5+2x^4-16x^3-24x^2+48x+32=0.$
$$f(-x)=x^5-2x^4-16x^3+24x^2+48x-32=0.$$

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過三個.

$$f(0)=32,\quad f(1)=43,\quad f(2)=-32,\quad f(3)=-67,\quad f(4)=352;$$
$$f(0)=32,\quad f(-1)=-23,\quad f(-2)=-32,$$
$$f(-3)=23,\quad f(-4)=-32.$$

故其根位於 1 與 2, 3 與 4, 0 與 -1, -2 與 -3, -3 與 -4 之間。

13. 設 x 之絕對值甚大時，$f(x)$ 之符號與其最高次項同，求證:

(1) 具實係數之各方程式 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$ 至少有一正根及一負根，但 n 爲偶數，b_n 爲負數。

(2) 方程式 $k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)+m^2(x-a)(x-b)$
$$-x(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

之四根，分別介乎 $-\infty$ 與 a, a 與 b, b 與 c, c 與 ∞ 之間，但假定 a, b, c, k, l, m 爲實數，且 $a<b<c$.

［解］ (1) 設 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$ 其中 n 爲偶數，b_n 爲負數.

$x=-\infty$ 時，$f(x)$ 爲正數，$x=0$ 時，$f(x)$ 爲 b_n 卽負數.

故 $f(x)=0$ 至少有一根位於 $-\infty$ 及 0 之間，卽 $f(x)=0$ 至少有一負根.再 $x=\infty$ 時，$f(x)$ 爲正數.

故 $f(x)=0$ 至少有一根位於 0 及 ∞ 之間，卽 $f(x)=0$ 至少有一正根.

(2) 設 $f(x)=k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)+m^2(x-a)(x-b)$
$$-x(x-a)(x-b)(x-c)=0.$$

因 a, b, c, k, l, m 俱爲實數，又 $a<b<c$.

$$\therefore\ f(-\infty)=-,\qquad f(a)=k^2(a-b)(a-c)=+,$$
$$f(b)=l^2(b-c)(b-a)=-,\qquad f(c)=m^2(c-a)(c-b)=+,$$
$$f(\infty)=-.$$

故此四根位於 $-\infty$ 與 a, a 與 b, b 與 c, c 與 ∞ 之間.

14. 設 $a\gtreqless 3$, 求證凡呈 $x^3+(x-1)(ax-1)=0$ 形式之方程式，有二根介乎 0 與 1 之間，卽一根介乎 $1/a$ 與 $1-1/a$ 之間，一根介乎 $1-1/a$ 與 1 之間.

［解］ 設 $f(x)=x^3+(x-1)(ax-1)=0$, 則

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^3},\quad f\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{-a^2+3a-1}{a^3},$$
$$f(1)=+1.$$

若
$$a\gtreqless 3,\quad \frac{1}{a^3}=+,\quad \frac{-a^2+3a-1}{a^3}=-,$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right)=+,\quad f\left(1-\frac{1}{a}\right)=-,\quad f(1)=+.$$

故 $a\gtreqless 3$ 時，則有一根位於 $\frac{1}{a}$ 與 $1-\frac{1}{a}$ 之間，另一根位於 $1-\frac{1}{a}$ 與 1 之間.

15. 設 $a\gtreqless 5$, 求證 $x^4+(x-1)(2x-1)(ax-1)=0$ 有介乎 0 與 $1/a$, $1/a$ 與 $1-2/a$, $1-2/a$, 與 1 間之根.

［解］ 設 $f(x)=x^4+(x-1)(2x-1)(ax-1)=0.$

則當 $a \geqq 5$ 時，　$f(0)=-$，　$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a^4}=+$，

$$f\left(1-\frac{2}{a}\right)=\frac{-a^4+2a^3+16a^2-32a+16}{a^4}=-1,\quad f(1)=+.$$

故此方程式之根位於 0 與 $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{a}$ 與 $1-\dfrac{2}{a}$，$1-\dfrac{2}{a}$ 與 1 之間。

習　題　LXXV　　　　第 459 頁

計算以下所示各根至小數第六位。

1. $x^3+x-3=0$；在 1 與 2 間之根。

[解]

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +0 & +1 & -3 & 1.213411 \\
 & +1 & +1 & +2 & \\
\hline
1 & +1 & +2 & -1 & \\
 & +1 & +2 & & \\
\hline
1 & +2 & +4 & & \\
 & +1 & & & \\
\hline
1 & +30 & +400 & -1000 & 2 \\
 & 2 & +64 & +928 & \\
\hline
1 & +32 & +464 & -72 & \\
 & 2 & +68 & & \\
\hline
1 & +34 & +532 & & \\
 & 2 & & & \\
\hline
1 & +360 & +53200 & -72000 & 1 \\
 & +1 & +361 & +53561 & \\
\hline
1 & +361 & +53561 & -18439 & \\
 & +1 & +362 & & \\
\hline
1 & +362 & +53923 & & \\
 & +1 & & & \\
\hline
1 & +363 & +53923 & -18439 & 3 \\
 & & 12 & +16212 & \\
\hline
 & 4 & +5404 & -2227 & \\
 & & 12 & & \\
\hline
 & 4 & 5426 & -2227 & 4 \\
 & & & +2168 & \\
\hline
 & & 542 & -59 & 1 \\
 & & & +54 & \\
\hline
 & & 54 & -5 & \\
\end{array}
$$

$\therefore$　所求根爲 1.213411.

2.　$x^3+2x-20=0$; 在 2 與 3 間之根.

[解]

$$
\begin{array}{rrrrl}
1+0 & +2 & & -20 & \big|\ \underline{2.469547} \\
2 & +4 & & +12 & \\
\hline
1+2 & +6 & & -8 & \\
2 & +8 & & & \\
\hline
1+4 & +14 & & & \\
2 & & & & \\
\hline
1+60 & +1400 & - & 8000 & \big|\ \underline{4} \\
4 & +\ 256 & + & 6624 & \\
\hline
1+64 & +1656 & - & 1376 & \\
4 & +\ 272 & & & \\
\hline
1+68 & +1928 & & & \\
4 & & & & \\
\hline
1+720 & +192800 & - & 1376000 & \big|\ \underline{6} \\
6 & +\ 4356 & + & 1182936 & \\
\hline
1+726 & +197156 & - & 193064 & \\
6 & +\ 4392 & & & \\
\hline
1+732 & +201548 & & & \\
6 & & & & \\
\hline
\cancel{1}+73\cancel{8} & +20155\cancel{8} & - & 193064 & \big|\ \underline{0.009547} \\
 & +\ 63 & + & 181962 & \\
\hline
7 & +20218 & - & 11102 & \\
 & +\ 63 & & & \\
\hline
\cancel{7} & +2028\cancel{1} & - & 11102 & \\
 & & + & 10190 & \\
\hline
 & 203\cancel{8} & - & 912 & \\
 & & & 812 & \\
\hline
 & 20\cancel{3} & - & 100 & \\
 & & + & 140 & \\
\hline
 & 20 & - & 40 &
\end{array}
$$

$\therefore$　所求根爲 2.469547.

3.　$x^3+6x^2+10x-2=0$；在 0 與 1 間之根。

[解]

$1+60$	$+1000$	-2000	0.179981
$+1$	$+61$	$+1061$	
$1+61$	$+1061$	-939	
$+1$	$+62$		
$1+62$	$+1123$		
$+1$			
$1+630$	$+112300$	-939000	7
$+7$	4459	$+817313$	
$1+637$	$+116759$	-121687	
$+7$	$+4508$		
$1+644$	$+121267$		
$+7$			
$1+6510$	$+12126700$	-121687000	9
9	$+58671$	$+109668339$	
$1+6519$	$+12185371$	-12018661	
$+9$	$+58752$		
$1+6528$	$+12244123$		
$+9$			
$1+6537$	$+12244123$	-12018661	0.000981
	$+585$	$+11024973$	
65	$+1224997$	-993688	
	$+585$		
165	$+1225582$	-993688	
	$+8$	$+980528$	
1	$+122566$	-13160	
	$+8$	$+12257$	
1	122571	-903	

∴　所求根為 0.179981.

4. $3x^3+5x-40=0$；在 2 與 3 間之根。

[解]

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & +0 & +5 & -40 & 2.137812 \\
 & 6 & +12 & +34 & \\
\hline
3 & +6 & +17 & -6 & \\
 & 6 & +24 & & \\
\hline
3 & +12 & +41 & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
3 & +180 & +4100 & -6000 & 1 \\
 & 3 & +183 & +4283 & \\
\hline
3 & +183 & +4283 & -1717 & \\
 & 3 & +186 & & \\
\hline
3 & +186 & +4469 & & \\
 & 3 & & & \\
\hline
3 & +1890 & +446900 & -1717000 & 3 \\
 & 9 & +5697 & +1358791 & \\
\hline
3 & +1899 & +452597 & -358209 & \\
 & 9 & +5724 & & \\
\hline
3 & +1908 & +458321 & & \\
+ & 9 & & & \\
\hline
3 & 19 & +45832 & -358209 & 0.007812 \\
 & & 133 & +321755 & \\
\hline
 & 19 & +45965 & -36454 & \\
 & & 133 & & \\
\hline
 & 19 & +4609 & -36454 & \\
 & & & 36872 & \\
\hline
 & & 460 & -582 & \\
 & & & 460 & \\
\hline
 & & 46 & -122 & \\
 & & & 92 & \\
\hline
 & & 5 & -30 &
\end{array}
$$

∴ 所求根爲 2.137812.

5. $x^3+10x^2+8x-120=0$；在 2 與 3 間之根。

〔解〕

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1+ & 10+ & 8 & -120 & \underline{2.768345} \\
 & 2+ & 24+ & 64 & \\
\hline
1+ & 12+ & 32- & 56 & \\
 & 2+ & 28 & & \\
\hline
1+ & 14+ & 60 & & \\
 & 2 & & & \\
\hline
1+ & 160+ & 6000 & -56000 & \underline{7} \\
 & 7+ & 1169+ & 50183 & \\
\hline
1+ & 167+ & 7169- & 5817 & \\
 & 7+ & 1218 & & \\
\hline
1+ & 174+ & 8387 & & \\
 & 7 & & & \\
\hline
1+ & 1810+ & 838700 & -5817000 & \underline{6} \\
 & 6+ & 10896+ & 5097576 & \\
\hline
1+ & 1816+ & 849596- & 719424 & \\
 & 6+ & 10932 & & \\
\hline
1+ & 1822+ & 860528 & & \\
+ & 6 & & & \\
\hline
1+ & 18+ & 86053 & -719424 & \underline{0.008345} \\
 & & 144+ & 689576 & \\
\hline
 & 18+ & 86197- & 29848 & \\
 & + & 144 & & \\
\hline
 & 18+ & 8634- & 29848 & \\
 & & & 25902 & \\
\hline
 & & 863- & 3946 & \\
 & & & 3452 & \\
\hline
 & & 86- & 494 & \\
 & & & 430 & \\
\hline
 & & 9- & 64 & \\
\end{array}
$$

∴　所求根爲 2.768345。

6. $2x^3-x^2-9x+1=0$; 在 -1 與 -2 間之根。

[解]

```
2 -  1 - 9 + 1 | -1.945341
  -  2 + 3 + 6
---------------
2 -  3 - 6 + 7
  -  2 + 5
------------
2 -  5 - 1
  -  2
----------------------------
2 -  70 -  100 + 7000 | -9
  -  18 +  792 - 6228
-------------------------
2 -  88 +  692 +  772
  -  18 +  954
-------------------
2 - 106 + 1646
  -  18
-------------------------------------
2 - 1240 + 164600 + 772000 | -4
  -     8 +   4992 - 678368
-------------------------------
2 - 1248 + 169592 +  93632
  -     8 +   5024
-------------------
2 - 1256 + 174616
  -     8
------------------------------------------------
2 - 13    + 17462  +  93632 | -0.005341
                65  -  87635
-------------------------------
  - 13    + 17527  +   5997
                65
              -----------------
              1759  +   5997
                    -   5277
              -----------------
              176   +    720
                    -    704
              -----------------
              18    +     16
                    -     18
              -----------------
              2     -      2
```

∴ 所求根爲 -1.945341。

7. $x^3+x^2-5x-1=0$；在 1 與 2 間之根。

［解］

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1+1 & -5 & -1 & & 1.903211 \\
1 & +2 & -3 & & \\
\hline
1+2 & -3 & -4 & & \\
1 & +3 & & & \\
\hline
1+3 & +0 & & & \\
1 & & & & \\
\hline
1+40 & +0 & -4000 & & 9 \\
9 & +441 & +3969 & & \\
\hline
1+49 & +441 & -31 & & \\
9 & +522 & & & \\
\hline
1+58 & +963 & & & \\
9 & & & & \\
\hline
1+6700 & +9630000 & -31000000 & & 3 \\
3 & +20109 & +28950327 & & \\
\hline
1+6703 & +9650109 & -2049673 & & \\
3 & +20118 & & & \\
\hline
1+6706 & +9670227 & & & \\
3 & & & & \\
\hline
67 & +967023 & -2049673 & & 0.000211 \\
 & 134 & +1984314 & & \\
\hline
67 & +967157 & -115359 & & \\
 & 134 & & & \\
\hline
 & 96729 & -115359 & & \\
 & & 96729 & & \\
\hline
 & 9673 & -18630 & & \\
 & & 9673 & & \\
\hline
 & & -8957 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求根爲 1.903211.

8. $x^3-2x^2-23x+70=0$；在 -5 與 -6 間之根。

[解]

$$
\begin{array}{rrrrl}
1- & 2- & 23+ & 70 & \big|\,-5.134578 \\
 - & 5+ & 35- & 60 & \\
\hline
1- & 7+ & 12+ & 10 & \\
 - & 5+ & 60 & & \\
\hline
1- & 12+ & 72 & & \\
 - & 5 & & & \\
\hline
1- & 170+ & 7200+ & 10000 & \big|\,-1 \\
 - & 1+ & 171- & 7371 & \\
\hline
1- & 171+ & 7371+ & 2629 & \\
 - & 1+ & 172 & & \\
\hline
1- & 172+ & 7543 & & \\
 - & 1 & & & \\
\hline
1- & 1730+ & 754300+ & 2629000 & \big|\,-3 \\
 - & 3+ & 5199- & 2278497 & \\
\hline
1- & 1733+ & 759499+ & 350503 & \\
 - & 3+ & 5208 & & \\
\hline
1- & 1736+ & 764707 & & \\
 - & 3 & & & \\
\hline
 & -17 & +76471 & +\ 350503 & \big|\,-0.004578 \\
 & & 68 & -\ 306156 & \\
\hline
 & -17 & +76539 & +\ 44347 & \\
 & & 68 & & \\
\hline
 & & 7661 & +\ 44347 & \\
 & & & -\ 38305 & \\
\hline
 & & 766 & +\ 6042 & \\
 & & & -\ 5362 & \\
\hline
 & & 77 & +\ 680 & \\
 & & & 616 & \\
\hline
 & & 8 & +\ 64 &
\end{array}
$$

∴　所求根爲 -5.134578.

9. $x^4-10x^2-4x+8=0$；在 3 與 4 間之根.

[解]

```
1−   0   −10      −   4+   8 | 3.236067
     3   + 9      −   3− 21
1+   3   − 1      −   7− 13
     3   +18      +  51
1+   6   +17      +  44
     3   +27
1+   9   +44
 +   3
1+ 120   +4400    +44000−130000 | 2
     2   + 244    + 9288+106576
1+ 122   +4644    +53288− 23424
     2   + 248    + 9784
1+ 124   +4892    +63072
     2   + 252
1+ 126   +5144
     2
1+1280+514400+63072000−234240000 | 3
     3+  3849+  1554747+193880241
1+1283+518249+64626747−  40359759
     3+  3858+  1566321
1+1286+522107+66193068
     3+  3867
1+1289+525974
     3
     1+5260+6619307−40359759 | 0.006067
          6+  31596+39905418
     1+5266+6650903−   454341
          6+  31632
     1+5272+6682535
          6
          53   +668254  −   454341
                     0  +        0
          1    +66825   −   454341
                     6  +   400986
                66831   −    53355
                             46781
                 6683   −     6574
```

∴ 所求根爲 3.236067.

10. $x^4+6x^3+12x^2-11x-41=0$; 在 -2 與 -3 間之根。

[解]

```
1+6   + 12−11−41 | −2.157451
 −2   −  8− 8+38
1+4   +  4−19− 3
 −2   −  4+ 0
1+2   +  0−19
 −2   +  0
1+0   +  0
 −2
1−20  +  0−19000−30000 | −1
 − 1  + 21−    21+19021
1−21  + 21−19021−10979
 − 1  + 22−    43
1−22  + 43−19064
 − 1  + 23
1−23  + 66
 − 1
1−240+ 6600−19064000−109790000 | −5
 −   5+ 1225−   39125+  95515625
1−245+ 7825−19103125−  14274375
 −   5+ 1250−   45375
1−250+ 9075−19148500
 −   5+ 1275
1−255+10350
 −   5
          104   −1914850  −  14274375 | −0.007451
                −    728  +  13409046
          104   −1915578  −    865329
                −    728
          1     −191631   −    865329
                −      4  +    766540
          1     −191635   −     98789
                −      4
                −19164    −     98789
                                95870
                −1916     −      2969
                                 1916
                  192     −      1056
```

∴ 所求根為 -2.157451.

11. $x^3-3x^2-4x+13=0$; 在 2 與 3 間之二根.

〔解〕 將已知方程式之各根減 2, 所得之新方程式爲

$$x^3+3x^2-4x+1=0.$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1+30 & -400 & +1000 & & \underline{3} \\
3 & +99 & -903 & & \\
\hline
1+33 & -301 & +97 & & \\
3 & +108 & & & \\
\hline
1+36 & -193 & & & \\
3 & & & & \\
\hline
1+390 & -19300 & +97000 & & \underline{5} \\
5 & +1975 & -86625 & & \\
\hline
1+395 & -17325 & +10375 & & \\
5 & +2000 & & & \\
\hline
1+400 & -15325 & & & \\
5 & & & & \\
\hline
 & 4 & -1533 & +10375 & \underline{0.006885} \\
 & & 24 & -9054 & \\
\hline
 & 4 & -1509 & +1321 & \\
 & & 24 & & \\
\hline
 & & -149 & +1321 & \\
 & & & -1192 & \\
\hline
 & & -15 & +129 & \\
 & & & -120 & \\
\hline
 & & -2 & +9 & \\
 & & & -10 & \\
\hline
 & & & -1 & \\
\end{array}
$$

又

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +30 & -400 & +1000 & 6 \\
 & 6 & +216 & -1104 & \\
\hline
1 & +36 & -184 & -104 & \\
 & 6 & +252 & & \\
\hline
1 & +42 & +68 & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
1 & +480 & +6800 & -104000 & 9 \\
 & 9 & +4401 & +100809 & \\
\hline
1 & +489 & +11201 & -3191 & \\
 & 9 & +4482 & & \\
\hline
1 & +498 & +15683 & & \\
 & 9 & & & \\
\hline
 & 5 & +1568 & -3191 & 0.002021 \\
 & & 10 & +3156 & \\
\hline
 & 5 & +1578 & -35 & \\
 & & 10 & & \\
\hline
 & & 159 & -35 & \\
 & & & 0 & \\
\hline
 & & 16 & -35 & \\
 & & & 32 & \\
\hline
 & & 2 & -3 & \\
 & & & 2 & \\
\hline
 & & & -1 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求二根爲 2.356885 與 2.692021.

求下列各方程式所有各根至小數第三位。

12. [解] $x^3-3x^2-4x+10=0.$

此方程式僅能有二正根與一負根。

$$f(0)=10,\quad f(1)=4,\quad f(2)=-2,\quad f(3)=-2,\quad f(4)=10;$$

$$f(0)=10,\quad f(-1)=10,\quad f(-2)=-2.$$

故此三根位於 1 與 2, 3 與 4, -1 與 -2 之間。

$$
(1)\quad
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & -4 & +10 & 1.602 \\
 & 1 & -2 & -6 & \\
\hline
1 & -2 & -6 & +4 & \\
 & 1 & -1 & & \\
\hline
1 & -1 & -7 & & \\
 & 1 & & & \\
\hline
1 & +0 & -700 & +4000 & 6 \\
 & 6 & +36 & -3984 & \\
\hline
1 & +6 & -664 & +16 & \\
 & 6 & +72 & & \\
\hline
1 & +12 & -592 & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
1 & +1800 & -5920000 & +16000000 & 2 \\
 & 2 & +3604 & -11832792 & \\
\hline
1 & +1802 & -5916396 & +4167208 & \\
 & 2 & +3608 & & \\
\hline
1 & +1804 & +5912788 & & \\
 & 2 & & & \\
\hline
1 & +1806 & & &
\end{array}
$$

$$
(2)\quad
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & -4 & +10 & 3.292 \\
 & 3 & +0 & -12 & \\
\hline
1 & +0 & -4 & -2 & \\
 & 3 & +9 & & \\
\hline
1 & +3 & +5 & & \\
 & 3 & & & \\
\hline
1 & +60 & +500 & -2000 & 2 \\
 & 2 & +124 & +1248 & \\
\hline
1 & +62 & +624 & -752 & \\
 & 2 & +128 & & \\
\hline
1 & +64 & +752 & & \\
 & 2 & & & \\
\hline
1 & +660 & +75200 & -752000 & 9 \\
 & 9 & +6021 & +730989 & \\
\hline
1 & +669 & +81221 & -21011 & \\
 & 9 & +6102 & & \\
\hline
1 & +678 & +87323 & & \\
 & 9 & & & \\
\hline
1 & +687 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(3)\quad 1-3-4+10 \,|\, \underline{-1.895} \\
\quad -1+4+\ 0 \\
\hline
1-4+0+10 \\
\quad -1+5 \\
\hline
1-5+5 \\
\quad -1 \\
\hline
1-60+\ 500+10000 \,|\, \underline{-8} \\
\quad -\ 8+\ 544-\ 8352 \\
\hline
1-68+1044+\ 1648 \\
\quad -\ 8+\ 608 \\
\hline
1-76+1652 \\
\quad -\ 8 \\
\hline
1-840+165200+1648000 \,|\, \underline{-9} \\
\quad -\ \ 9+\ \ 7641-1555569 \\
\hline
1-849+172841+\ \ 92431 \\
\quad -\ \ 9+\ \ 7722 \\
\hline
1-858+180563 \\
\quad -\ \ 9 \\
\hline
1-867
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求三根爲 1.602, 3.292 與 -1.895.

13. [**解**] $x^3+x^2-2x-1=0.$

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過二個。

$$f(0)=-1,\quad f(1)=-1,\quad f(2)=7;$$

$$f(0)=-1,\quad f(-1)=1,\quad f(-2)=-1.$$

故其根位於 1 與 2, 0 與 -1, -1 與 -2 之間。

(1)
$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & +1 & -2 & -1 & \underline{|\,1.246} \\
 & 1 & +2 & +0 & \\ \hline
1 & +2 & +0 & -1 & \\
 & 1 & +3 & & \\ \hline
1 & +3 & +3 & & \\
 & 1 & & & \\ \hline
1 & +40 & +300 & -1000 & \underline{|\,2} \\
 & 2 & +84 & +768 & \\ \hline
1 & +42 & +384 & -232 & \\
 & 2 & +88 & & \\ \hline
1 & +44 & +472 & & \\
 & 2 & & & \\ \hline
1 & +460 & +47200 & -232000 & \underline{|\,4} \\
 & 4 & +1856 & +196224 & \\ \hline
1 & +464 & +49056 & -35776 & \\
 & 4 & +1872 & & \\ \hline
1 & +468 & +50928 & & \\
 & 4 & & & \\ \hline
1 & +472 & & &
\end{array}
$$

(2)
$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & +1 & -2 & -1 & \underline{|\,-0.445} \\
 & 0 & +0 & +0 & \\ \hline
1 & +10 & -200 & -1000 & \underline{|\,-4} \\
 & -4 & -24 & +896 & \\ \hline
1 & +6 & -224 & -104 & \\
 & -4 & -8 & & \\ \hline
1 & +2 & -232 & & \\
 & -4 & & & \\ \hline
1 & -20 & -23200 & -104000 & \underline{|\,-4} \\
 & -4 & +96 & +92416 & \\ \hline
1 & -24 & -23104 & -11584 & \\
 & -4 & +112 & & \\ \hline
1 & -28 & -22992 & & \\
 & -4 & & & \\ \hline
1 & -32 & & &
\end{array}
$$

$$
(3)\quad
\begin{array}{l|l}
1+1-2-1 & -1.802 \\
\quad -1+0+2 & \\ \cline{1-1}
1+0-2+1 & \\
\quad -1+1 & \\ \cline{1-1}
1-1-1 & \\
\quad -1 & \\ \hline
1-20-100+1000 & -8 \\
\quad -8+224-992 & \\ \cline{1-1}
1-28+124+8 & \\
\quad -8+288 & \\ \cline{1-1}
1-36+412 & \\
\quad -8 & \\ \hline
1-440+41200+8000 & -0 \\
\qquad 0+0+0 & \\ \cline{1-1}
1-4400+412000+80000 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求三根爲 $1.246,\ -0.445,\ -1.802$。

14. [解] $x^3-3x+1=0$.

此方程式正根不能超過二個,負根不能超過一個。

$$f(0)=1,\quad f(1)=-1,\quad f(2)=3;$$

$$f(0)=1,\quad f(-1)=3,\quad f(-2)=-1.$$

故其根位於 0 與 1, 1 與 2, -1 與 -2 之間。

$$
(1)\quad
\begin{array}{l|l}
1+0-3+1 & 0.347 \\
\quad 0+0+0 & \\ \hline
1+0-300+1000 & 3 \\
\quad 3+9-873 & \\ \cline{1-1}
1+3-291+127 & \\
\quad 3+18 & \\ \cline{1-1}
1+6-273 & \\
\quad 3 & \\ \hline
1+90-27300+127000 & 4 \\
\qquad 4+376-107696 & \\ \cline{1-1}
1+94-26924+19304 & \\
\qquad 4+392 & \\ \cline{1-1}
1+98-26532 & \\
\qquad 4 & \\ \cline{1-1}
1+102 &
\end{array}
$$

(2)

$$\begin{array}{l}
1+0-3+1 \quad \underline{|\,1.532} \\
\quad 1+1-2 \\
1+1-2-1 \\
\quad \underline{1+2} \\
1+2+0 \\
\quad \underline{1} \\
1+30+\;\;0-1000 \quad \underline{|\,5} \\
\quad \underline{5+175+\;875} \\
1+35+175-\;125 \\
\quad \underline{5+200} \\
1+40+375 \\
\quad \underline{5} \\
1+450+37500-125000 \quad \underline{|\,3} \\
\quad \underline{3+\;1359+116577} \\
1+453+38859-\;\;8423 \\
\quad \underline{3+\;1368} \\
1+456+40227 \\
\quad \underline{3} \\
1+459
\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{l}
1+0-3+1 \quad \underline{|\,-1.879} \\
\quad \underline{-1+1+2} \\
1-1-2+3 \\
\quad \underline{-1+2} \\
1-2+0 \\
\quad \underline{-1} \\
1-30+\;\;0+3000 \quad \underline{|\,-8} \\
\quad \underline{-\;8+304-2432} \\
1-38+304+\;568 \\
\quad \underline{-\;8+368} \\
1-46+672 \\
\quad \underline{-\;8} \\
1-540+67200+568000 \quad \underline{|\,-7} \\
\quad \underline{-\;7+\;3829-497203} \\
1-547+71029+\;70797 \\
\quad \underline{-\;7+\;3878} \\
1-554+74907 \\
\quad \underline{-\;7} \\
1-561
\end{array}$$

$\therefore$　所求三根爲 0.347, 1.532; −1.879.

15.　[解]　$x^4+5x^3+x^2-13x-7=0.$

此方程式之正根不能超過一個，負根不能超過三個。

$$f(0)=-7,\qquad f(1)=-13,\qquad f(2)=27;$$

$$f(-1)=3,\qquad f(-2)=-1,\qquad f(-3)=-13,$$

$$f(-4)=-3,\quad f(-5)=83.$$

故其根位於 1 與 2, 0 與 −1, −1 與 −2, −4 與 −5 之間。

$$
(1)\quad
\begin{array}{rrrrrl}
1 & +5 & +1 & -13 & -7 & \underline{|\,1.558} \\
 & 1 & +6 & +7 & -6 & \\
\hline
1 & +6 & +7 & -6 & -13 & \\
 & 1 & +7 & +14 & & \\
\hline
1 & +7 & +14 & +8 & & \\
 & 1 & +8 & & & \\
\hline
1 & +8 & +22 & & & \\
 & 1 & & & & \\
\hline
1 & +90 & +2200 & +8000 & -130000 & \underline{|\,5} \\
 & 5 & +475 & +13375 & +106875 & \\
\hline
1 & +95 & +2675 & +21375 & -23125 & \\
 & 5 & +500 & +15875 & & \\
\hline
1 & +100 & +3175 & +37250 & & \\
 & 5 & +525 & & & \\
\hline
1 & +105 & +3700 & & & \\
 & 5 & & & & \\
\hline
1 & +1100 & +370000 & +37250000 & -231250000 & \underline{|\,5} \\
 & 5 & +5525 & +1877625 & +195638125 & \\
\hline
1 & +1105 & +375525 & +39127625 & -35611875 & \\
 & 5 & +5550 & +1905375 & & \\
\hline
1 & +1110 & +381075 & +41033000 & & \\
 & 5 & +5575 & & & \\
\hline
1 & +1115 & +386650 & & & \\
 & 5 & & & & \\
\hline
1 & +1120 & & & &
\end{array}
$$

(2)
$$\begin{array}{l|l}
1+50+100-13000-70000 & -0.578 \\
\quad -5-225+625+61875 & \\
\hline
1+45-125-12375-8125 & \\
\quad -5-200+1625 & \\
\hline
1+40-325-10750 & \\
\quad -5-175 & \\
\hline
1+35-500 & \\
\quad -5 & \\
\hline
1+300-50000-10750000-81250000 & -7 \\
\quad -7-2051+364357+72699501 & \\
\hline
1+293-52051-10385643+8550499 & \\
\quad -7-2002+378371 & \\
\hline
1+286-54053-10007272 & \\
\quad -7-1953 & \\
\hline
1+279-56006 & \\
\quad -7 & \\
\hline
1+272 &
\end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l|l}
1+5+1-13-7 & -1.904 \\
\quad -1-4+3+10 & \\
\hline
1+4-3-10+3 & \\
\quad -1-3+6 & \\
\hline
1+3-6-4 & \\
\quad -1-2 & \\
\hline
1+2-8 & \\
\quad -1 & \\
\hline
1+10-800-4000+30000 & -9 \\
\quad -9-9+7281-29529 & \\
\hline
1+1-809+3281+471 & \\
\quad -9+72+6633 & \\
\hline
1-8-737+9914 & \\
\quad -9+153 & \\
\hline
1-17-584 & \\
\quad -9 & \\
\hline
1-26 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
(4)\quad \begin{array}{rrrrr|l}
1+ & 5+ & 1- & 13- & 7 & \underline{-4.075} \\
 & -\ 4- & 4+ & 12+ & 4 & \\ \hline
1+ & 1- & 3- & 1- & 3 & \\
 & -\ 4+ & 12- & 36 & & \\ \hline
1- & 3+ & 9- & 37 & & \\
 & -\ 4+ & 28 & & & \\ \hline
1- & 7+ & 37 & & & \\
 & -\ 4 & & & &
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1- & 1100+ & 370000- & 37000000- & 300000000 & \underline{-7} \\
- & 7+ & 7749- & 2644243+ & 277509701 & \\ \hline
1- & 1107+ & 377749- & 39644243- & 22490299 & \\
- & 7+ & 7798- & 2698829 & & \\ \hline
1- & 1114+ & 385547- & 42343072 & & \\
- & 7+ & 7847 & & & \\ \hline
1- & 1121+ & 393394 & & & \\
- & 7 & & & & \\ \hline
1- & 1128 & & & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 所求根爲 1.558, -0.578, -1.904, -4.075

16. 試應用霍納法於方程式 $x^3-17=0$ 以計算 $\sqrt[3]{17}$ 至小數第四位。

[解] 設 $\sqrt[3]{17}=x$, 則 $x^3-17=0$.

$$f(0)=-17,\quad f(1)=-16,\quad f(2)=-9,\quad f(3)=10.$$

故其根位於 2 與 3 之間。

$$
\begin{array}{l}
1+0+\ 0-17 \,|\, \underline{2.5712} \\
\quad\ 2+\ 4+\ 8 \\
\hline
1+2+\ 4-\ 9 \\
\quad\ 2+\ 8 \\
\hline
1+4+12 \\
\quad\ 2 \\
\hline
1+60+1200-9000 \,|\, \underline{5} \\
\qquad 5+\ 325+7625 \\
\hline
1+65+1525-1375 \\
\qquad 5+\ 350 \\
\hline
1+70+1875 \\
\qquad 5 \\
\hline
1+750+187500-1375000 \,|\, \underline{7} \\
\qquad 7+\ \ 5299+1349593 \\
\hline
1+757+192799-\ \ 25407 \\
\qquad 7+\ \ 5348 \\
\hline
1+764+198147 \\
\qquad 7 \\
\hline
\qquad 8+19815-25407 \,|\, \underline{1} \\
\qquad\qquad 8+19823 \\
\hline
\qquad 8+19823-\ \ 5584 \\
\qquad\qquad 8 \\
\hline
\qquad\qquad 1983\ -\ 5584
\end{array}
$$

$$\sqrt[3]{17}=2.5712.$$

17. 用同法計算 $2\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt[4]{87}$ 至小數第三位。

[解]　(1)　設 $x=2\sqrt[3]{3}$,　$\therefore\ x^3-24=0.$

$\because\ f(2)=-16,\ f(3)=3,\ \therefore$ 其根位於 2 與 3 之間。

$$\begin{array}{l}
1+0+0-24 \quad \underline{|2.884} \\
\quad 2+4+8 \\
\hline
1+2+4-16 \\
\quad 2+8 \\
\hline
1+4+12 \\
\quad 2 \\
\hline
1+60+1200-16000 \quad \underline{|8} \\
\quad 8+544+13952 \\
\hline
1+68+1744-2048 \\
\quad 8+608 \\
\hline
1+76+2352 \\
\quad 8 \\
\hline
1+840+235200-2048000 \quad \underline{|8} \\
\quad 8+6784+1935872 \\
\hline
1+848+241984-112128 \\
\quad 8+6848 \\
\hline
1+856+248832 \\
\quad 8 \\
\hline
1+864
\end{array}$$

$\therefore\ 2\sqrt[3]{3}=2.884.$

(2)　設 $\sqrt[4]{87}=x$,　$\therefore\ x^4-87=0.$

$\because\ f(3)=-6,\ f(4)=169,$　$\therefore$ 其根位於 3 與 4 之間.

$$\begin{array}{l}
1+0+0+0-87 \quad \underline{|3.054} \\
\quad 3+9+27+81 \\
\hline
1+3+9+27-6 \\
\quad 3+18+81 \\
\hline
1+6+27+108 \\
\quad 3+27 \\
\hline
1+9+54 \\
\quad 3 \\
\hline
1+1200+540000+108000000-600000000 \quad \underline{|5} \\
\quad 5+6025+2730125+553650625 \\
\hline
1+1205+546025+110730125-46349375 \\
\quad 5+6050+2760375 \\
\hline
1+1210+552075+113490500 \\
\quad 5+6075 \\
\hline
1+1215+558150 \\
\quad 5 \\
\hline
1+1220
\end{array}$$

$$\therefore\quad \sqrt[4]{87}=3.054.$$

18. 試藉 §845 之助及霍納法以求 $x^3+x^2-2500=0$ 之實根至小數第二位。

〔解〕 $\because\ f(0)=-2500,\ f(10)=-1400,\ f(20)=5900.$

$\therefore$ 原方程式之根位於 10 與 20 之間。

$$\begin{array}{rl}
1+\ 1-\quad 0-2500 & \underline{|10} \\
10+110+1100 & \\
\hline
1+11+110-1400 & \\
10+210 & \\
\hline
1+21+320 & \\
10 & \\
\hline
1+31+320-1400 & \underline{|3} \qquad f(3)=-134 \\
3+102+1266 & \qquad\quad f(4)=440 \\
\hline
1+34+422-\ 134 & \\
3+111 & \\
\hline
1+37+533 & \\
3 & \\
\hline
1+400+53300-134000 & \underline{|2} \\
2+\ 804+108208 & \\
\hline
1+402+54104-\ 25792 & \\
2+\ 808 & \\
\hline
1+404+54912 & \\
2 & \\
\hline
1+406 &
\end{array}$$

故其實根為 13.24.

19. 試藉 §844 之助，以定 $x^3+5x^2-6x+1=0$ 之根之位置。

〔解〕 依笛卡兒法則，知此方程式有二正根與一負根。

$$f(0)=1,\quad f(1)=1,\quad f(2)=17\cdots\cdots.$$

依 §803，知 1 為此方程式之上限，故該方程式如有正根在 0 與 1 之間，至少必有二正根。由計算，知 $f(0.2)=+$，$f(0.3)=-$，$f(0.4)=-\cdots$，$f(0.8)=-$，$f(0.9)=+$；故知該方程式有兩正根，一位於 0.2 與 0.3 之

間，一位於 0.8 與 0.9 之間，又 $f(-6)=+$, $f(-7)=-$，故 -6 與 -7 間有一負根.

20. 求 $3x^5+x^4-14x^3-x^2+9x-2=0$ 所有一切之根。

[解] 先將有理根求出.

$$\begin{array}{r|rrrrrr|l}
 & 3 & +1 & -14 & -1 & +9 & -2 & \frac{2}{3} \\
 & & 2 & +2 & -8 & -6 & +2 & \\
\hline
3 & 3 & +3 & -12 & -9 & +3, & 0 & \\
\hline
 & 1 & +1 & -4 & -3 & +1 & & -1 \\
 & & -1 & +0 & +4 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & +0 & -4 & +1, & 0 & &
\end{array}$$

故 $3x^5+x^4-14x^3-x^2+9x-2=(3x-2)(x+1)(x^3-4x+1)=0.$

次將 $\phi(x)=x^3-4x+1=0$ 求無理根。

$$\because \quad \phi(0)=+1, \qquad \phi(1)=-2, \quad \phi(2)=+1,$$

及 $\qquad \phi(-2)=+1, \quad \phi(-3)=-14.$

故知 $\phi(x)=0$ 之三實根位於 0 與 1, 1 與 2, 及 -2 與 -3 之間。今用霍納法求之。

$$\begin{array}{lrrrr|l}
(1) & 1 & +0 & -400 & +1000 & 0.254 \\
 & & 2 & +4 & -792 & \\
\hline
 & 1 & +2 & -396 & +208 & \\
 & & 2 & +8 & & \\
\hline
 & 1 & +4 & -388 & & \\
 & & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & +60 & -38800 & +208000 & 5 \\
 & & 5 & +325 & -192375 & \\
\hline
 & 1 & +65 & -38475 & +15625 & \\
 & & 5 & +350 & & \\
\hline
 & 1 & +70 & -38125 & & \\
 & & 5 & & & \\
\hline
 & 1 & +75 & & &
\end{array}$$

```
(2)  1+0-4+1 |1.8608
       1+1-3
     ---------
     1+1-3-2
       1+2
     -------
     1+2-1
       1
     --------------------
     1+30-100-2000 |8
         8+304+1632
     --------------------
     1+38+204-  368
         8+368
     ------------
     1+46+572
         8
     ----------------------------
     1+540+57200-368000 |6
           6+ 3276+362856
     ----------------------------
     1+546+60476-   5144
           6+ 3312
     ----------------
     1+552+63788
           6
     --------
     1+558
(3)  1+0-4+1 |-2.114
      -2+4+0
     ---------
     1-2+0+1
      -2+8
     -------
     1-4+8
      -2
     ----------------------
     1-60+800+1000 |-1
      - 1+ 61-  861
     ----------------------
     1-61+861+ 139
      - 1+ 62
     -------------
     1-62+923
      - 1
     ---------------------------
     1-630+92300+139000 |-1
      -   1+  631-  92931
     ---------------------------
     1-631+92931+ 46069
      -   1+  632
     ---------------
     1-632+93563
      -   1
     ---------
     1-633
```

故其根為 $\frac{3}{5}$, -1, 0.254, 1.8608, -2.114.

習題 LXXVI　　第464頁

1. 求 $2x^5-4x^4+x^2-20x$ 之第一，第二，……導來函數。

［解］
$$\because\quad f(x)=2x^5-4x^4+x^2-20x.$$
$$\therefore\quad f'(x)=10x^4-16x^3+2x-20.$$
$$f''(x)=40x^3-48x^2+2.$$
$$f'''(x)=120x^2-96x.$$
$$f^{iv}(x)=240x-96.$$
$$f^{v}(x)=240.$$

2. 設 $f(x)=x^4-2x^3+1$，試由泰羅定理，求 $f(x+h)$.

［解］
$$\because\quad f(x)=x^4-2x^3+1,$$
$$\therefore\quad f'(x)=4x^3-6x^2.$$
$$f''(x)=12x^2-12x.$$
$$f'''(x)=24x-12.$$
$$f^{iv}(x)=24.$$
$$\therefore\quad f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f^{iv}(x)\frac{h^4}{4!}$$
$$=(x^4-2x^3+1)+(4x^3-6x^2)h+(12x^2-12x)\frac{h^2}{2!}$$
$$+(24x-12)\frac{h^3}{3!}+24\frac{h^4}{4!}$$
$$=(x^4-2x^3+1)+2(2x^3-3x^2)h+6(x^2-x)h^2$$
$$+2(2x-1)h^3+h^4.$$

3. 用 §849 之公式 (II)，(1) 以 $x+1$ 爲冪表 x^4+x^2+1；(2) 以 $x-2$ 爲冪表 x^5-32；(3) 以 $x-1$ 爲冪表 $(x^3+1)/(x^2+1)$.

［解］ $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\cdots+f^n(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!}.$

(1) $f(x)=x^4+x^2+1,\quad f'(x)=4x^3+2x,\quad f''(x)=12x^2+2,$

$f'''(x)=24x,\qquad f^{iv}(x)=24;$

$$f(-1)=3,\quad f'(-1)=-6,\quad f''(-1)/2!=7,$$
$$f'''(-1)/3!=-4,\quad f^{iv}(-1)/4!=1.$$

故 $x^4+x^2+1=3-6(x+1)+7(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4.$

(2) $f(x)=x^5-32,\quad f'(x)=5x^4,\quad f''(x)=20x^3,$

$f'''(x)=60x^2,\quad f^{iv}(x)=120x,\quad f^{v}(x)=120;$

$f(2)=0,\quad f'(2)=80,\quad f''(2)/2!=80,\quad f'''(2)/3!=40,$

$f^{iv}(2)/4!=10,\quad f^{v}(2)/5!=1.$

故 $x^5-32=80(x-2)+80(x-2)^2+40(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5.$

(3) $f(x)=x^3+1,\quad f'(x)=3x^2,\quad f''(x)=6x,\quad f'''(x)=6;$

$F(x)=x^2+1,\quad F'(x)=2x,\quad F''(x)=2;$

$f(1)=2,\quad f'(1)=3,\quad f''(1)/2!=3,\quad f'''(x)/3!=1;$

$F(1)=2,\quad F'(1)=2,\quad F''(1)/2!=1.$

故
$$\frac{x^3+1}{x^2+1}=\frac{2+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{2+2(x-1)+(x-1)^2}.$$

4. 設以下各方程式有重根，試解之。

(1) $x^3-3x-2=0.$　(2) $9x^3+12x^2-11x+2=0.$

(3) $4x^4+12x^2+9=0.$　(4) $x^4-4x^3+8x+4=0.$

(5) $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0.$　(6) $x^5-x^3-4x^2-3x-2=0.$

(7) $x^4-2x^3-x^2-4x+12=0.$　(8) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0.$

(9) $3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0.$

［解］ (1) $x^3-3x-2=0.$

$$f(x)=x^3-3x-2=0.$$
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0.$$

其最高公因式爲　$\phi(x)=x+1=0.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 -1，再設 a 爲另一根，則

$$a+(-1)+(-1)=0,\quad \therefore\ a=2.$$
$$\therefore\ f(x)=0 \text{ 之根爲 } -1,\ -1,\ 2.$$

(2) $9x^3+12x^2-11x+2=0.$

$$f(x)=9x^3+12x^2-11x+2=0.$$

$$f'(x)=27x^2+24x-11=0.$$

其最高公因式爲 $\phi(x)=3x-1=0.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 $\frac{1}{3}$, 再設 a 爲另一根,則

$$a+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{12}{9}=-\frac{4}{3}, \quad \therefore\ a=-2.$$

$\therefore\ f(x)=0$ 之根爲 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2.$

(3) $4x^4+12x^2+9=0.$

$$f(x)=4x^4+12x^2+9=0.$$

$$f'(x)=16x^3+24x=0.$$

其最高公因式爲 $\phi(x)=4x^2+6=0.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 $\pm\frac{\sqrt{6}i}{2},$

再以原方程式共有四根,故所求四根卽爲 $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i,\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}i.$

(4) $x^4-4x^3+8x+4=0.$

$$f(x)=x^4-4x^3+8x+4=0.$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8=0.$$

其最高公因式爲 $\phi(x)=x^2-2x-2=0.$

解之,得 $x=1\pm\sqrt{1+2}=1\pm\sqrt{3}.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 $1\pm\sqrt{3}.$

再以 $f(x)=0$ 共有四根,故所求四根卽爲 $1\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{3}.$

(5) $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0.$

$$f(x)=2x^4-12x^3+19x^2-2x+9=0.$$

$$f'(x)=8x^3-36x^2+38x-6=0.$$

其最高公因式爲 $\phi(x)=x-3=0.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 3, 今以 $\frac{f(x)}{(x-3)^2}=2x^2+1.$

其餘二根爲 $2x^2+1=0$ 之根,解之,得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

卽 $f(x)=0$ 之根爲 $3,\ 3,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

(6)　$x^5-x^3-4x^2-3x-2=0.$

$$f(x)=x^5-x^3-4x^2-3x-2=0.$$

$$f'(x)=5x^4-3x^2-8x-3=0.$$

其最高公因式爲　$\phi(x)=x^2+x+1=0,$

解之,得　$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲　$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$

再設 a 爲其餘一根,則

$$a+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=1.$$

$$\therefore\quad a=2.$$

卽 $f(x)=0$ 之根爲　$2,\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

(7)　$x^4-2x^3-x^2-4x+12=0.$

$$f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12=0.$$

$$f'(x)=4x^3-6x^2-2x-4=0.$$

其最高公因式爲　$\phi(x)=x-2=0.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 2, 今以 $\frac{f(x)}{(x-2)^2}=x^2+2x+3.$

$\therefore$ 其餘二根爲 $x^2+2x+3=0$ 之根,解之,得 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

卽 $f(x)=0$ 之根爲 $2,\ 2,\ -1\pm\sqrt{2}i.$

(8)　$x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0.$

$$f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0.$$

$$f'(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0.$$

其最高公因式爲　$\phi(x)=(x-1)^2(x+1)=0.$

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 -1, 三重根爲 1,

$f(x)=0$ 共有五根，故所求之五根爲 $1, 1, 1, -1, -1$.

(9) $3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0$.

$$f(x)=3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0.$$

$$f'(x)=15x^4-8x^3+18x^2-8x+3=0.$$

其最高公因式爲 $\phi(x)=x^2+1=0$，解之，得 $x=\pm i$.

故 $f(x)=0$ 之二重根爲 $\pm i$,

再設 a 爲其餘 根，則 $a+i+i+(-i)+(-i)=\frac{2}{3}$. $\therefore\ a=\frac{2}{3}$.

即 $f(x)=0$ 之根爲 $\frac{2}{3}$, $\pm i$, $\pm i$.

5. 求證 $x^n-a^n=0$ 不能有重根。

[證] $f(x)=x^n-a^n=0$, $f'(x)=nx^{n-1}$.

$f(x)$ 及 $f'(x)$ 無最高公因式.

故 $f(x)=0$ 不能有重根。

6. 設方程式 $x^3-12x+a=0$ 有一重根，求 a.

[解] $f(x)=x^3-12x+a=0$,

$$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2).$$

因 $f(x)=0$ 有一重根，故 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 必有一個一次公因式.

若 $x-2$ 爲公因式，則以 $x=2$ 代入 $f(x)=0$ 得 $a=16$.

若 $x+2$ 爲公因式，則以 $x=-2$ 代入 $f(x)=0$ 得 $a=-16$.

$$\therefore\ a \text{ 之値爲 } \pm 16.$$

7. 試定 a 及 b 之値，俾 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三重根，且求此根。

[解]
$$f(x)=3x^3+ax^2+x+b=0.$$

$$f'(x)=9x^2+2ax+1.$$

$$f''(x)=18x+2a=2(9x+a).$$

若 $f(x)=0$ 有三重根，則 $f(x)$ 與 $f''(x)$ 有一次公因式，故知其公因式必爲 $9x+a$ 而 $x=-\frac{a}{9}$ 即爲所求三重根.

以 $x=-\frac{a}{9}$ 代入 $f'(x)=0$ 及 $f(x)=0$ 必能適合。

$$\therefore\quad a^2=9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及
$$2\left(-\frac{a}{9}\right)^3+a\left(-\frac{a}{9}\right)^2+\left(-\frac{a}{9}\right)+b=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 得 $a=\pm 3$. 以 a 之值代入 (2).

得
$$b=\pm\tfrac{1}{9}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=\frac{1}{9}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} a=-3 \\ b=-\frac{1}{9}\end{array}\right\}$$

8. 求證 $x^4+qx^2+s=0$ 不能有三重根。

［證］
$$f(x)=x^4+qx^2+s=0.$$
$$f'(x)=4x^3+2qx=2x(2x^2+q)=0.$$

$f'(x)=0$ 之根爲 $0,\ \sqrt{\frac{q}{2}},\ -\sqrt{\frac{q}{2}}$，故 $f'(x)=0$ 無二重根.是以 $f(x)=0$ 能有一三重根。

9. 欲令 $x^5-px^2+r=0$ 有二重根，其條件若何？

［解］ $f(x)=x^5-px^2+r=0$, $f'(x)=5x^4-2px=x(5x^3-2p)$.

$f'(x)=0$ 之根爲 $\quad 0,\quad \sqrt[3]{\frac{2p}{5}},\quad \omega\sqrt[3]{\frac{2p}{5}},\quad \omega^2\sqrt[3]{\frac{2p}{5}},$

其中
$$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

但 $x=0,\ \omega\sqrt[3]{\frac{2p}{5}}$ 及 $\omega^2\sqrt[3]{\frac{2p}{5}}$ 決不能爲 $f(x)=0$ 之二重根。

故 $f(x)=0$ 之二重根必爲 $x=\sqrt[3]{\frac{2p}{5}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

以 (1) 代入 $f(x)=0$ 得 $\frac{2p}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{2p}{5}\right)^2}-p\sqrt[3]{\left(\frac{2p}{5}\right)^2}+r=0.$

化簡
$$\sqrt[3]{\left(\frac{2p}{5}\right)^2}\left[\frac{2p}{5}-p\right]=-r.$$

$$\left(\frac{2p}{5}\right)^2\left(-\frac{3p}{5}\right)^3=-r^3.$$

$$\frac{-108p^5}{3125}=-r^3.$$

$\therefore\quad 108p^5=3125r^3$ 此卽爲所求之條件。

10. 設 $f(x)$ 得爲 $f'(x)$ 所整除，則 $f(x)$ 之形式如何？

［解］ 設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

則 $f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+(n-3)a_3x^{n-4}+\cdots\cdots+a_{n-1}$.

若 $f(x)$ 能爲 $f'(x)$ 所整除則其商式必爲一次式。

今假定 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}\equiv c_0x+c_1$, 則 $f(x)\equiv(c_0x+c_1)f'(x)$.

卽 $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$\equiv(c_0x+c_1)(na_0x^{n-1}+\overline{n-1}a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1})$$
$$\equiv nc_0a_0x^n+[(n-1)c_0a_1+nc_1a_0]x^{n-1}$$
$$+[(n-2)c_0a_2+(n-1)c_1a_1]x^{n-2}+\cdots\cdots+c_1a_{n-1}$$

比較係數，得

$a_0=nc_0a_0,\qquad\qquad \therefore\ c_0=\dfrac{1}{n}.$

$a_1=(n-1)c_0a_1+nc_1a_0,\qquad \therefore\ a_1=nc_1a_0.$

$a_2=(n-2)c_0a_2+(n-1)c_1a_1,\qquad \therefore\ a_2=\dfrac{n(n-1)}{2}(c_1n)^2a_0$

$a_3=(n-3)c_0a_3+(n-2)c_1a_2,\qquad \therefore\ a_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}(c_1n)^3a_0.$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_n=c_1a_{n-1},\qquad\qquad \therefore\ a_n=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor n}(c_1n)^na_0.$

以 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots a_n$ 之值代入 $f(x)$.

得 $$f(x)=a_0x^n+nx^{n-1}(c_1n)a_0+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}(c_1n)^2a_0$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^{n-3}(c_1n)^3a_0+\cdots\cdots+(c_1n)^na_0$$

$$=a_0\left[x^n+nx^{n-1}(c_1n)+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}x^{n-2}(c_1n)^2\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}x^{n-3}(c_1n)^3+\cdots\cdots+(c_1n)^n\right].$$
$$=a_0[x+c_1n]^n=(a'x+b')^n.$$

其中　$a'=a_0^n,\quad b'=a_0^n c_1 n.$

故 $(a'x+b')^n$ 爲 $f(x)$ 能被 $f'(x)$ 整除之所求形式。

11. 設方程式 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 及 $x^4+x^3-x-1=0$ 有公根，試並解之。

［解］ 設　$f_1(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$

$f_2(x)=x^4+x^3-x-1=0.$

其最高公因式爲　$\phi(x)=x^2+x+1=0$ ……………………………………(1)

解 (1) 得 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 之公共根爲 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

以 (1) 式除此二方程式，得下列二式：

$x^2+1=0$ ……………………………………(2)

$x^2-1=0$ ……………………………………(3)

從 (2) 式，得 $x=\pm i$; 從 (3) 式，得 $x=\pm 1$.

故第一方程式之根爲　$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\pm i$;

第二方程式之根爲　$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, ± 1.

12. 設方程式 $x^3-20x-16=0$ 有一根爲 $x^3-x^2-3x-1=0$ 之一根二倍，試並解之。

［解］ 設　$f_1(x)=x^3-20x-16=0.$

$f_2(x)=x^3-x^2-3x-1=0.$

以 2 乘 $f_2(x)=0$ 之各根，得一方程式

$f_3(x)=x^3-2x^2-12x-8=0.$

因 $f_1(x)=0$ 有一根爲 $f_2(x)=0$ 之一根之二倍故 $f_1(x)$ 與 $f_3(x)$ 有公

共根.

$f_1(x)=0$ 與 $f_3(x)=0$ 之 H. C. F. 爲 $\phi(x)=x^2-4x-4=0$.

解 $\phi(x)=0$, 得 $\quad x=2\pm\sqrt{16+16}=2\pm2\sqrt{2}$,

以 $\phi(x)$ 除 $f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 得 $x+4$ 及 $x+2$.

故 $\qquad f_1(x)=0$ 之根爲 $2\pm2\sqrt{2}$ 與 -4,

而 $\qquad f_2(x)=0$ 之根爲 $1\pm\sqrt{2}$ 與 -1.

13. **設具有理係數之三次方程式有重根,求證此根必爲有理數.**

[證] 若此三次方程式之重根爲 $a+\sqrt{b}$, 則因係數爲有理數,無理根須成對故 $a-\sqrt{b}$ 亦必爲其重根如此則三次方程式共有四個根,不合理.故該方程式如有重根,此根必爲有理數.

14. **設具有理係數之四次方程式 $f(x)=0$ 有重根,而 $f(x)$ 非完全平方,則此根必爲有理數,試證之.**

[證] 若此四次方程式之重根爲 $a+\sqrt{b}$, 則因係數爲有理數,無理根須成對故 $a-\sqrt{b}$ 亦必爲其重根如此則 $f(x)$ 必爲完全平方,與假設不合,故 $f(x)=0$ 如有重根,此根必爲有理數.

15. **設 a 爲 $f(x)=0$ 之一 r 重根,則 a 又爲方程式 $f'(x)=0$, $f''(x)=0,\cdots\cdots f^{(r-1)}(x)=0$ 之根,試證之.**

[證] 由 § 849,

$$\begin{aligned} f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{\lfloor 2}(x-a)^2 \\ +\cdots\cdots\frac{f^{r-1}(a)}{\lfloor r-1}(x-a)^{r-1}+\frac{f^{r}(a)}{\lfloor r}(x-a)^{r} \\ +\cdots\cdots\frac{f^{n}(a)}{\lfloor n}(x-a)^{n}+\cdots\cdots \end{aligned}$$

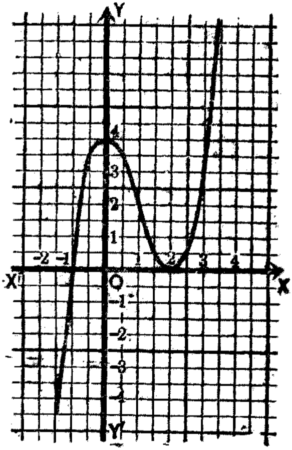
如 $f(x)=0$ 有一 r 次重根 a, 則 $f(x)$ 必爲 $(x-a)^r$ 除盡.

$$\therefore\quad f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots=f^{r-1}(a)=0.$$

即 a 爲 $f'(x)=0$, $f''(x)=0,\cdots\cdots f^{r-1}(x)=0$ 之根.

習題 LXXVII 第471頁

1. 討論 $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$ 之變化，求其極大與極小值，並作 $y=f(x)$ 之圖象。



［解］ $y=f(x)=(x+1)(x-2)^2$

$\qquad =x^3-3x^2+4.$

$x=-1,\ 2$ 時，$y=0$.

當 $x=-\infty$，$f(x)=-\infty$；x 位於 $-\infty$ 與 -1 之間，$f(x)$ 為負；x 位於 -1 與 2 之間，$f(x)$ 為正；x 位於 2 與 ∞ 之間，$f(x)$ 為正，當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 之根為 $0,\ 2$.

當 $x<0$ 時，$f'(x)>0$，$f(x)$ 連續增加；$0<x<2$ 時 $f'(x)<0$，$f(x)$ 連續減少。

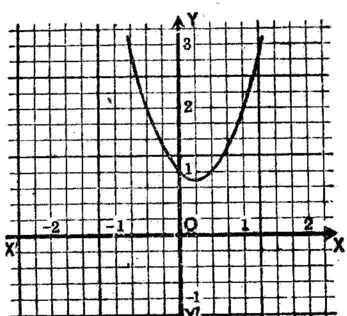
$x>2$ 時，$f'(x)>0$. $f(x)$ 又連續增加，

$$f''(x)=6x-6=6(x-1).$$

當 $x=0$ 時，$f(0)=4$，$f'(0)=0$，$f''(0)<0$ 故 $f(0)=4$ 為極大值。

$x=2$ 時，$f(2)=0$，$f'(2)=0$，$f''(2)>0$ 故 $f(2)=0$ 為極小值。

2. 承上題之意處理以下各函數。



(1) $2x^2-x+1$.

(2) $(x+1)(x-2)(2x-1)$.

(3) $x^3-12x+14$.

(4) x^3-5x^2+3x+9.

(5) x^3-3x^2+5.

(6) $(x+1)^2(x-2)^2$.

(7) $(x^2+x+1)(x+2)$.

(8) $x(x-1)(x+2)(x+3)$.

［解］ (1)　$2x^2-x+1$.

$$f(x)=2x^2-x+1=2[(x-\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{16}].$$

當 $x=\pm\infty$ 時，$f(x)=\infty$；當 x 爲任何實數時，$f(x)$ 常爲正，故此曲線不經過 x 軸。

$f'(x)=4x-1$ 之根爲 $\frac{1}{4}$.

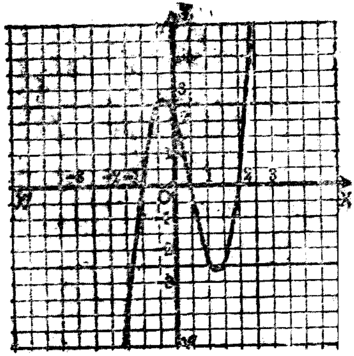
當 $x<\frac{1}{4}$ 時，　　$f'(x)<0$, $f(x)$ 連續減少。

　$x>\frac{1}{4}$ 時，　　$f'(x)>0$, $f(x)$ 連續增加。

$f''(x)=4$. 故 $x=\frac{1}{4}$ 時，$f(\frac{1}{4})=\frac{7}{8}$, $f'(\frac{1}{4})=0$, $f''(\frac{1}{4})>0$, 故 $f(\frac{1}{4})=\frac{7}{8}$ 爲極小。

(2)　$(x+1)(x-2)(2x-1)=2x^3-3x^2-3x+2$.

當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 -1 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-1$, $f(x)=0$；當 x 位於 -1 與 $\frac{1}{2}$ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\frac{1}{2}$, $f(x)=0$；當 x 位於 $\frac{1}{2}$ 與 2 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=2$, $f(x)=0$；當 x 位於 2 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.



$f'(x)=6x^2-6x-3=3(2x^2-2x-1)$，其根爲 $(1\pm\sqrt{3})/2$，當 $x<\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$，$f'(x)>0$，　$\therefore$ $f(x)$ 連續增加，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ $f'(x)$ 爲負 $\therefore f(x)$ 連續減少，$x>(1+\sqrt{3})/2$, $f'(x)$ 爲正，故 $f(x)$ 連續增加。

$$f''(x)=12x-6=6(2x-1).$$

當 $x=(1+\sqrt{3})/2=1.366$,

$f(x)=-2.59\cdots\cdots$, $f'(x)=0$.

$f'(x)=6\sqrt{3}>0$, 故　$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=-2.59$ 爲極小值。

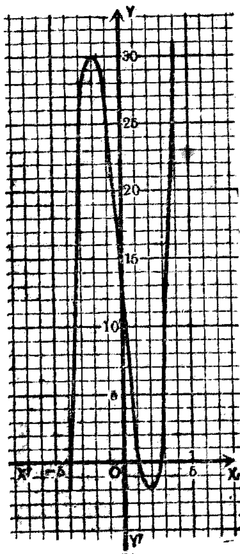
當 $x=(1-\sqrt{3})/2=-0.366$, $f(x)=2.6\cdots\cdots$, $f'(x)=0$,

$f''(x)=-10.3<0$, 故 $f\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=2.6$ 爲極大值。

(3) $x^3-12x+14$.

$f(x)=x^3-12x+14$ 之三根爲 $1.3+$, $2.3+$, $-3.2+$.

當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$; 當 x 位於 $-\infty$ 與 $-3.2+$ 之間, $f(x)$ 爲負; 當 $x=-3.2+$, $f(x)=0$; 當 x 位於 $-3.2+$ 與 $1.3+$ 之間, $f(x)$ 爲正; 當 $x=1.3+$, $f(x)=0$; 當 x 位於 $1.3+$ 與 $2.3+$ 之間, $f(x)$ 爲負; 當 $x=2.3+$, $f(x)=0$; 當 x 位於 $2.3+$ 與 ∞ 之間, $f(x)$ 爲正; 當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.



$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)$, $f''(x)=6x$.

設 $x=-2$, $f'(x)=0$, $f''(x)=-12<0$.

設 $x=2$, $f'(x)=0$, $f''(x)=12>0$.

故當 x 在 $-\infty$ 與 -2 及 2 與 ∞ 之間, $f'(x)>0$ 而 $f(x)$ 之值連續增加.

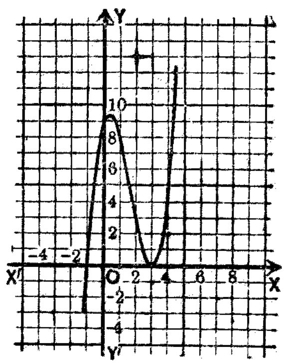
當 x 在 -2 與 2 之間, $f'(x)<0$, $f(x)$ 之值連續減少.

又當 $x=-2$ 時, $f(-2)=30$, $f'(-2)=0$, $f''(-2)=-12<0$.

故 $f(-2)=30$ 爲極大值.

當 $x=2$ 時, $f(2)=-2$, $f'(2)=0$, $f''(2)=12>0$.

故 $f(2)=-2$ 爲極小值.



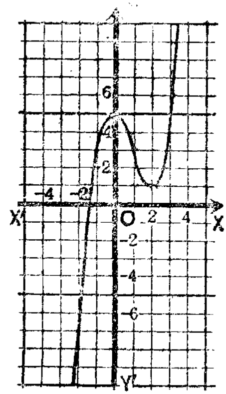
(4) x^3-5x^2+3x+9.

$f(x)=x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x-3)^2$.

當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$; 當 x 位於 $-\infty$ 與 -1 之間, $f(x)$ 爲負; 當 $x=-1$, $f(x)=0$; 當 x 位於 -1 與 3 之間, $f(x)$ 爲正; 當 $x=3$, $f(x)=0$; 當 x 位於 3 與 ∞ 之間, $f(x)$ 爲正; 當 $x=\infty$,

$f(x)=\infty$.

$$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3),$$
$$f''(x)=6x-10.$$



當 $x=\frac{1}{3}$ 時，$f(\frac{1}{3})=9.5\cdots\cdots$ $f'(\frac{1}{3})=0$，$f''(\frac{1}{3})=-8<0$.

故 $x=\frac{1}{3}$ 時，$f(\frac{1}{3})=9.5$ 爲極大値。

$x=3$ 時，$f(3)=0$，$f'(3)=0$，$f''(3)=8>0$.

故 $x=3$ 時，$f(3)=0$ 爲極小値。

(5) x^3-3x^2+5.

$f(x)=x^3-3x^2+5$. 此方程式有一負根在 -1 與 -2 之間，其餘爲二虛根。

當 $x=-\infty$ 時，$f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與負根之間，$f(x)$ 爲負；當 x 位於負根與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正，當 $x=\infty$ 時，$f(x)=\infty$.

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，$f''(x)=6x-6=6(x-1)$.

當 $x=0$ 時，$f(0)=5$，$f'(0)=0$，$f''(0)=-6<0$.

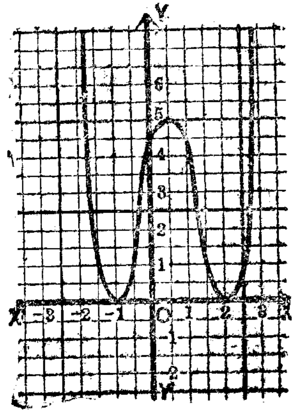
故 $x=0$ 時，$f(0)=5$ 爲極大値。

$x=2$ 時，$f(2)=+1$，$f'(2)=0$，$f''(2)=6>0$.

故 $x=2$ 時，$f(2)=1$ 爲極小値。

(6) $(x+1)^2(x-2)^2$.

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)^2$$
$$=x^4-2x^3-3x^2+4x+4.$$



當 $x=\pm\infty$，$f(x)=\infty$；當 $x=-1$ 或 2 時，$f(x)=0$；當 $x<-1$ 或 $x>2$ 時，$f(x)$ 爲正；當 x 位於 -1 與 2 之間，$f(x)$ 爲正，即 x 之任何値，$f(x)$ 皆爲正。

$$f'(x)=4x^3-6x^2-6x+4$$
$$=2(2x-1)(x-2)(x+1).$$

$f'(x)$ 之根爲 $\frac{1}{2}, 2, -1$.

$$f''(x)=12x^2-12x-6=6(2x^2-2x-1).$$

當 $x<-1$ 時，　$f'(x)<0$　$\therefore f(x)$ 連續減少.

$-1<x<\frac{1}{2}$ 時，　$f'(x)>0$，　$f(x)$ 連續增加.

$\frac{1}{2}<x<2$ 時，　$f'(x)<0$，　$f(x)$ 連續減少.

$x>2$ 時，　$f'(x)>0$，　$f(x)$ 連續增加.

當 $x=-1$ 時，$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$, $f''(-1)=18>0$.

故 $x=-1$ 時，$f(-1)=0$ 爲極小值.

$x=\frac{1}{2}$ 時，$f(\frac{1}{2})=\frac{81}{16}$, $f'(\frac{1}{2})=0$, $f''(\frac{1}{2})=-9<0$.

故 $x=\frac{1}{2}$ 時，$f(\frac{1}{2})=\frac{81}{16}$ 爲極大値.

$x=2$ 時，$f(2)=0$,　$f'(2)=0$, $f''(2)=18>0$.

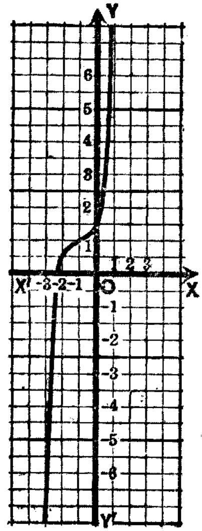
故 $x=2$ 時，$f(2)=0$ 爲極小值。

(7)　$(x^2+x+1)(x+2)$.

$f(x)=(x^2+x+1)(x+2)=x^3+3x^2+3x+2$.

此方程式有一負根爲 -2, 其餘二根爲虛根.

當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 -2 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-2$, $f(x)=0$；當 x 位於 -2 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.



$$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2,$$

$$f''(x)=6(x+1),\quad f'''(x)=6.$$

當 $x<-1$ 或 >-1 時 $f'(x)>0$,　$\therefore f(x)$ 連續增加.

當 $x=-1$ 時，$f(-1)=1$, $f'(-1)=0$, $f''(-1)=0$, $f'''(-1)=6$.

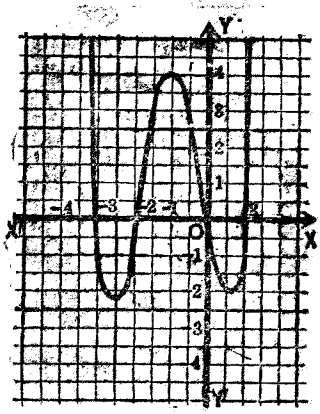
故此曲線連續增加.

(8)　$x(x-1)(x+2)(x+3)$.

$$f(x)=x(x-1)(x+2)(x+3)=x^4+4x^3+x^2-6x.$$

當 $x=\pm\infty$, $f(x)=\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 -3 之間，$f(x)$ 爲正；當

$x=-3$, $f(x)=0$；當 x 位於 -3 與 -2 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-2$, $f(x)=0$；當 x 位於 -2 與 0 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=0$, $f(x)=0$；當 x 位於 0 與 1 之間；$f(x)$ 爲負；當 $x=1$, $f(x)=0$；當 x 位於 1 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正，當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.



$$f'(x)=4x^3+12x^2+2x-6$$
$$=2(x+1)(2x^2+4x-3).$$
$$f''(x)=12x^2+24x+2.$$

$f'(x)=0$ 之根爲 -1, $\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$.

當 $x<\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}$ 時，$f'(x)<0$, $\therefore$ $f(x)$ 連續減少。

$\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}<x<-1$ 時，$f'(x)>0$, $\therefore$ $f(x)$ 連續增加。

$-1<x<\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ 時，$f'(x)<0$, $\therefore$ $f(x)$ 連續減少。

$x>\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ 時，$f'(x)=0$, $\therefore$ $f(x)$ 連續增加。

若 $x=-1$, $f(-1)=4$, $f'(-1)=0$, $f''(-1)=-10<0$, 故 $f(-1)=4$ 爲極大值。

若 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$, $f\left(\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}\right)=-2.2$,

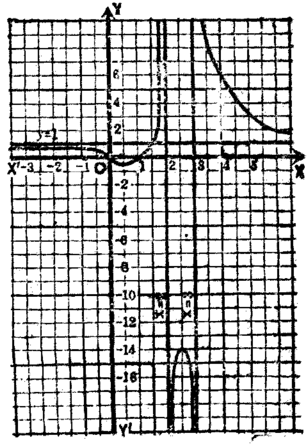
$$f'\left(\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}\right)=0,\quad f''\left(\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}\right)=10.36>0.$$

故 $f\left(\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}\right)=-2.2$ 爲極小值。

3. 命 $x=-1, -1/2, 0, 1/2, 1, \cdots\cdots, 4$, 以定其對應點而求下列分方程式之圖象。

(1) $y=\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$.

(2) $y=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$.



［解］ (1) $y=\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$ ……………(1)

當 $x=0$ 及 1 時，$y=0$.

$x=2$ 及 3 時，$y=\infty$. 故 $x=2$ 及 $x=3$ 爲漸近線.

若 $x<0$, y 爲正；若 $0<x<1$, y 爲負；若 $1<x<2$, y 爲正；若 $2<x<3$, y 爲負；若 $x>3$, y 爲正.

將 (1) 去分母 $(x^2-5x+6)y=x^2-x$.

即 $$(y-1)x^2-(5y-1)x+6y=0.$$

$$\therefore\ x=\frac{5y-1\pm\sqrt{(5y-1)^2-24y(y-1)}}{2(y-1)}=\frac{5y-1\pm\sqrt{y^2+14y+1}}{2(y-1)}$$

$$=\frac{5y-1\pm\sqrt{[y-(-7-4\sqrt{3})][y-(-7+4\sqrt{3})]}}{2(y-1)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (2), x 須爲實數，∴ 根式中須爲正數，即

$$y<-7-4\sqrt{3},\ 及\ y>-7+4\sqrt{3}.$$

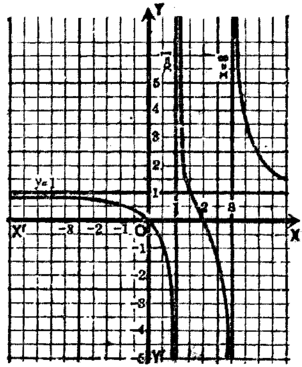
故 y 之極大值爲 $-7-4\sqrt{3}$ 即 -13.8,

y 之極小值爲 $-7+4\sqrt{3}$ 即 -0.2,

又 $y=+1$ 時 $x=\infty$ 故 $y=+1$ 亦爲漸近線.

當 x	-1,	$-\frac{1}{2}$,	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	2,	$\frac{5}{2}$,	3,	$\frac{7}{2}$,	4
∴ y	$\frac{1}{6}$,	$\frac{3}{35}$,	0,	$-\frac{1}{15}$,	0,	1,	∞,	-15,	∞,	$\frac{35}{3}$,	6

(2) $y=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$ ……………………(1)



當 $x=0$ 及 2 時，$y=0$.

$x=1$ 及 3 時，$y=\infty$.

故 $x=1$ 及 $x=3$ 爲漸近線.

若 $x<0$, y 爲正；$0<x<1$, y 爲負；

$1<x<2$, y 爲正；$2<x<3$, y 爲負；

$x>3$, y 爲正.

將 (1) 去分母，$(x^2-4x+3)y=x^2-2x$,

即 $(y-1)x^2-(4y-2)x+3y=0$.

$$\therefore\ x=\frac{2y-1\pm\sqrt{(2y-1)^2-3y(y-1)}}{y-1}=\frac{2y-1\pm\sqrt{4y^2-4y+1-3y^2+3y}}{y-1}$$

$$=\frac{2y-1\pm\sqrt{y^2-y+1}}{y-1}=\frac{2y-1\pm\sqrt{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}{y-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 中之根式恆爲正. 故 y 無極大與極小值.

又 $y=1$ 時，(2) 中分母爲 0, $\therefore\ x=\infty$ 即 $y=1$ 亦爲漸近線.

當 x	-1,	$-\frac{1}{2}$,	0,	$\frac{1}{2}$	1,	$\frac{3}{2}$,	2,	$\frac{5}{2}$,	3,	$\frac{7}{2}$,	4
$\therefore$ y	$\frac{3}{8}$,	$\frac{5}{21}$,	0,	$-\frac{3}{5}$,	$\pm\infty$,	1,	0,	$-\frac{5}{3}$,	$\pm\infty$,	$\frac{21}{5}$,	$\frac{8}{3}$.

習題 LXXVIII 第 477 頁

以下各方程式之實根之位置，試藉斯圖謨定理以定之.

1. [解] $x^3-6x^2+5x+13=0$.

$f(x)=x^3-6x^2+5x+13$, $f_1(x)=3x^2-12x+5$.

$3-12+5$	$1-6+5+13$	$1-2$
$6-24+10$	$3-18+15+39$	$\therefore\ f(x)=x^3-6x^2+5x+13$
$6-21$	$3-12+5$	$f_1(x)=3x^2-12x+5$
$-3+10$	$-6+10+39$	$f_2(x)=2x-7$
$-6+20$	$-6+24-10$	$f_3=1$
$-6+21$	$-14+49$	$3-3$
-1	$\therefore\ f_2=2-7$	
$\therefore\ f_3=1$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$+$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$, 有二正根與一負根.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$+$	二個變化
$x=1$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=3$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$+$	二個變化
$x=-2$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化

[答]　二正根位於 3 與 4 之間,負根位於 -1 與 -2 之間.

2.　[解]　$x^3-4x^2-10x+41=0.$

$$f(x)=x^3-4x^2-10x+41,\ f_1(x)=3x^2-8x-10.$$

$3-\quad 8-\quad 10$	$1-\ 4-10+\ 41$	$1-4$
$276-\quad 736-\quad 920$	$3-12-30+123$	
$276-\quad 987$	$3-\ 8-10$	$\therefore\ f(x)$
$251-\quad 920$	$-\ 4-20+123$	$=x^3-4x^2-10x+41$
$23092-84640$	$-12-60+369$	$f_1(x)=3x^2-8x-10$
$23092-82579$	$-12+32+\ 40$	$f_2(x)=92x-329$
$-\quad 2061$	$-92+329$	$f_3=2061$
$\therefore\quad f_3=2061$	$\therefore\ f_2=92-329$	$3+251$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$, 有二正根與一負根.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=1$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=3$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x=-2$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x=-3$	$+$	$+$	$-$	$+$	二個變化
$x=-4$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化

[答] 二正根位於 3 與 4 之間，負根位於 -3 與 -4 之間.

3. [解] $x^3+5x+2=0$.

$$f(x)=x^3+5x+2,\quad f_1(x)=3x^2+5.$$

$3+\ 0+\ 5$	$1+0+\ 5+2$	1
$15+\ 0+\ 25$	$3+0+15+6$	
$15+\ 9$	$3+0+\ 5$	$\therefore\ f_2(x)=-5x-3$
$-\ 9+\ 25$	$10+6$	$f_3=-152$
$-45+125$	$\therefore f_2=-5-3$	$-3+9$
$-45-\ 27$		
152		
$\therefore\ f_3=-152$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	二個變化
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化

故 $f(x)=0$, 有一負根與二虛根.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=-1$	$-$	$+$	$+$	$-$	二個變化

[答] 此負根位於 0 與 -1 之間.

4. [解] $x^3+3x^2+8x+8=0$.

$$f(x)=x^3+3x^2+8x+8,\quad f_1(x)=3x^2+6x+8.$$

$3+\ 6+\ 8$	$1+3+\ 8+\ 8$	$1+1$
$15+30+\ 40$	$3+9+24+24$	
$15+24$	$3+6+\ 8$	$\therefore\ f_2(x)=-5x-8$
$6+\ 40$	$3+16+24$	$f_3=-152$
$30+200$	$3+\ 6+\ 8$	
$30+\ 48$	$10+16$	$-3-6$
152	$\therefore\ f_2=-5-8$	
$\therefore f_3=-152$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	二個變化
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化

故 $f(x)=0$, 有一負根.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=-2$	$-$	$+$	$+$	$-$	二個變化

［答］ 此負根位於 -1 與 -2 之間。

5. ［解］ $x^3-x^2-15x+28=0.$

$$f(x)=x^3-x^2-15x+28,\quad f_1(x)=3x^2-2x-15.$$

$3-\quad 2-\quad 15$	$1-1-15+\ 28$	1
$276-\quad 184-\quad 1380$	$3-3-45+\ 84$	
$276-\quad 711$	$3-2-15$	$\therefore\ f_2=92x-237$
$527-\quad 1380$	$-1-30+\ 84$	-1
$48484-126960$	$-3-90+252$	
$48484-124899$	$-3+\ 2+\ 15$	$f_3=2061$
$-\quad 2061$	$-92+237$	$3+527$
$\therefore\ f_3=2061$	$\therefore\ f_2=92-237$	

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$，有二正根與一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=1$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=3$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化
$x=-1$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=-2$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x=-3$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x=-4$	$+$	$+$	$-$	$+$	二個變化
$x=-5$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化

［答］ 二正根位於 2 與 3 之間，負根位於 -4 與 -5 之間。

6. ［解］ $x^4-4x^3-5x^2+18x+20=0.$

$$f(x)=x^4-4x^3-5x^2+18x+20,$$

$$f_1(x)=4x^3-12x^2-10x+18.$$

$4-\ 12-\ 10+\ 18$	$1-\ 4-\ 5+18+20$	$1-1$
$44-132-110+198$	$4-16-20+72+80$	
$44-\ 88-196$	$4-12-10+18$	
$-\ 44+\ 86+198$	$-\ 4-10+54+80$	
$-\ 44+\ 88+196$	$-\ 4+12+10-18$	
$-\ 2+\ 2$	$-22+44+98$	
$\therefore\ f_3=1-1$	$-11+22+49$	
	$\therefore\ f_2=11-22-49$	$4-4$
	$11-11$	$11-11$
	$-11-49$	
	$-11+11$	
	-60	
	$\therefore\ f_4=60$	

$$\therefore\ f_2(x)=11x^2-22x-49,\ f_3(x)=x-1,\ f_4=60.$$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$, 有二正根與二負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x=1$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x=3$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	二個變化
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=-2$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化

[答] 二正根位於 3 與 4 之間,二負根位於 -1 與 -2 之間。

7. [解] $2x^4-3x^2+3x-1=0.$

$$f(x)=2x^4-3x^2+3x-1,\ f_1(x)=8x^3-6x+3.$$

$8+0-6+3$	$2+0-3+3-1$	1
$48+0-36+18$	$8+0-12+12-4$	
$48-72+32$	$8+0-6+3$	
$72-68+18$	$-6+9-4$	
$72-108+48$	$\therefore f_2=6-9+4$	$8+2$
$40-30$	$24-36+16$	-6
$\therefore f_3=-4+3$	$24-18$	
	$-18+16$	
	$-36+32$	9
	$-36+27$	
	5	
	$\therefore f_4=-5$	

$\therefore f_2(x)=6x^2-9x+4,\ f_3(x)=-4x+3,\ f_4=-5.$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	三個變化
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化

故 $f(x)=0$, 有一正根與一負根,其餘二個爲虛根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	二個變化
$x=1$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=-1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	二個變化
$x=-2$	$+$	$-$		$+$	$-$	三個變化

[答] 正根位於 0 與 1 之間,一負根位於 -1 與 -2 之間。

8. [解] $x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0.$

$f(x)=x^4-8x^3+19x^2-12x+2,\ f_1(x)=4x^3-24x^2+38x-12.$

$4-24+38-12$	$1-8+19-12+2$	
$20-120+190-60$	$4-32+76-48+8$	$1-2$
$20-80+32$	$4-24+38-12$	
$-40+158-60$	$-8+38-36+8$	
$-40+160-64$	$-8+48-76+24$	
$-2+4$	$-10+40-16$	
$\therefore f_3=1-2$	$\therefore f_2=5-20+8$	$4-8$
	$5-10$	$5-10$
	$-10+8$	$\therefore f_2(x)=5x^2-20x+8$
	$-10+20$	$f_3(x)=x-2$
	-12	$f_4=12$
	$\therefore f_4=12$	

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化
$x=0$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$, 有四正根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=0$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化
$x=1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$x=3$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	二個變化
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

[答] 二根位於 0 與 1 之間,二根位於 3 與 4 之間。

9. [解] $x^4-12x^2+12x-3=0$.

$f(x)=x^4-12x^2+12x-3$, $f_1(x)=4x^3-24x+12$.

$4+0-24+12$	$1+0-12+12-3$	
$4-6+2$	$4+0-48+48-12$	1
$6-26+12$	$4+0-24+12$	
$6-9+3$	$-24+36-12$	
$-17+9$	$\therefore f_2=2-3+1$	$2+3$
$\therefore f_3=17-9$	$34-51+17$	2
	$34-18$	
	$-33+17$	
	$-561+289$	-33
	$-561+297$	
	-8	
	$\therefore f_4=8$	

$\therefore \quad f_2(x)=2x^2-3x+1,\ f_3(x)=17x-9,\ f_4=8.$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	三個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$, 有三正根與一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	三個變化
$x=1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	一個變化
$x=2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	一個變化
$x=3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化
$x=-1$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x=-2$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x=-3$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變化
$x=-4$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化

［答］ 二正根位於 0 與 1 之間，一正根位於 2 與 3 之間，負根位於 -3 與 -4 之間.

10. ［解］ $x^4+2x^3-6x^2-8x+9=0.$

$$f(x)=x^4+2x^3-6x^2-8x+9,$$

$$f_1(x)=4x^3+6x^2-12x-8=2(2x^3+3x^2-6x-4).$$

$$
\begin{array}{r|r|r|r}
 & 2+\ 3-\ \ 6-\ \ 4 & 1+2-\ 6-\ \ 8+\ \ 9 & \\
2 & 30+45-\ 90-\ 60 & 2+4-12-\ 16+\ 18 & 1 \\
 & 30+36-\ 80\quad (- & 2+3-\ 6-\ \ 4\quad (- & \\
\hline
 & 9-\ 10-\ 60 & 1-\ 6-\ 12+\ 18 & \\
3 & 45-\ 50-300 & 2-12-\ 24+\ 36 & 1 \\
 & 45+\ 54-120(- & 2+\ 3-\ \ 6-\ \ 4(- & \\
\hline
 & -104-180 & -15-\ 18+\ 40 & \\
 & \therefore\ f_3=26+45 & \therefore\ f_2=15+\ 18-\ 40 & \\
 & & 390+\ 468-\ 1040 & 15 \\
 & & 390+\ 675\quad (- & \\
\hline
 & & -\ 207-\ 1040 & \\
 & & -5382-27040 & \\
 & & -5382-\ 9315 & -207 \\
\hline
 & & -17725 & \\
 & & \therefore\ f_4=17725 &
\end{array}
$$

$$\therefore\quad f_2(x)=15x^2+18x-40.$$

$$f_3(x)=26x+45.$$

$$f_4=17725.$$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化

故 $f(x)=0$，有二正根與二負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	二個變化
$x=1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	一個變化
$x=2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變化
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$x=-2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變化
$x=-3$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	四個變化

［答］ 此方程式之一正根位於 0 與 1 之間，一正根位於 1 與 2 之間，二負根位於 -2 與 -3 之間。

以下各方程式之實根之個數，試藉斯圖謨定理以定之。

11. ［解］ $4x^3-2x-5=0$.

$$f(x)=4x^3-2x-5,\ f_1(x)=12x^2-2.$$

$$\begin{array}{r|r|l}
12+\ \ 0-\ \ 2 & 4+0-2-\ 5 & \\
12+\ 45\qquad & 12+0-6-15 & 1 \\
\hline
-\ 45-\ \ 2 & 12+0-2\qquad & \\
\cline{2-2}
-180-\ \ 8 & -4-15 & \therefore\ f_2(x)=4x+15 \\
-180-675 & & \qquad f_3=-677 \\
\cline{1-1}
667 & \therefore\ f_2=4+15 & 3-45 \\
\therefore\ f_3=-667 & &
\end{array}$$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	一個變化

［答］ $f(x)=0$，有一實根。

12. ［解］ $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,\ f_1(x)=4x^3+3x^2+2x+1.$$

$$\begin{array}{r|r|l}
4+3+\ 2+\ 1 & 1+1+1+\ 1+\ 1 & \\
4+8+12\qquad & 4+4+4+\ 4+\ 4 & 1 \\
\cline{1-1}
-5-10+\ 1 & 4+3+2+\ 1\qquad & \\
\cline{2-2}
-5-10-15 & 1+2+\ 3+\ 4 & \therefore\ f_2(x) \\
\cline{1-1}
16 & 4+8+12+16 & 1\qquad =-x^2-2x-3 \\
\therefore\ f_3=-16 & 4+3+\ 2+\ 1 & \qquad f_3=-16 \\
\cline{2-2}
 & 5+10+15 & \\
 & \therefore\ f_2=-1-2-3 & -4+5
\end{array}$$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$-$	$-$	一個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	一個變化

[答]　$f(x)=0$ 無實根.

13.　[解]　$x^n+1=0.$

$$f(x)=x^n+1,\quad f_1(x)=nx^{n-1}.$$

$n+0+\cdots\cdots$至 $(n-1)$ 項	$1+0+\cdots\cdots+1$
	$n+0+\cdots\cdots+n$
	$n+0+\cdots\cdots$
	n
	$\therefore\ f_2=-n$

(1) 當 n 爲偶數時:

	$f(x)$	$f_1(x)$	f_2	
$x=-\infty$	$+$	$-$	$-$	一個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$-$	一個變化

[答]　當 n 爲偶數時,無實根.

(2)　當 n 爲奇數時:

	$f(x)$	$f_1(x)$	f_2	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$-$	一個變化

[答]　當 n 爲奇數時,有一實根.

14.　[解]　$x^4-6x^3+x^2+14x-14=0.$

$$f(x)=x^4-6x^3+x^2+14x-14,$$
$$f_1(x)=4x^3-18x^2+2x+14.$$

$4-18+2+14$	$1-6+1+14-14$	
$2-9+1+7$	$2-12+2+28-28$	1
$10-45+5+35$	$2-9+1+7$	
$10-18+14$	$-3+1+21-28$	
$-27-9+35$	$-6+2+42-56$	-3
$-135-45+175$	$-6+27-3-21$	
$-135+243-189$	$-25+45-35$	
$-288+364$	$\therefore\ f_2=5-9+7$	$2-27$
$\therefore\ f_3=72-91$	$360-648+504$	5
	$360-455+$	
	$-193+504$	
	$-13896+36288$	-193
	$-13896+17563$	
	18725	
	$\therefore\ f_4=-18725.$	

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

［答］ $f(x)=0$，有二實根。

15. 設 $f(x)=0$ 爲一無重根之 n 次方程式。求證令 $f(x)=0$ 之根皆爲實數之條件爲其斯圖謨函數列 $f(x), f_1(x)\cdots\cdots, f_m$ 中，須有 $n+1$ 項，且此諸函數之第一項須皆有同號。

［證］ $f(x)=0$ 爲 n 次方程式，共有 n 個不等根，若皆爲實數，則用斯圖謨函數時自 $x=-\infty$ 至 $x=\infty$，符號變化應失去 n 變。故斯圖謨函數 $f(x), f_1(x), f_2(x),\cdots\cdots, f_m$. 須有 $n+1$ 項，而在 $x=-\infty$ 時，連續二函數之符號且須相反，否則符號變化少於 n，就不能有 n 個實根，與題中假設不合。再在 $f(x), f_1(x), f_2(x),\cdots\cdots f_m$ 中，各函數之 x 之最高次冪爲奇偶數相間，而各函數之第一項皆須同號，於是以 $x=-\infty$ 代入時，方可得 n 個符號變化。故 $f(x)=0$ 有 n 個不等實根時，$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots f_m$ 須有 $n+1$ 項且各函數之首項須皆有同號。

16. 欲令三次方程式 $x^3+px+q=0$ 之根皆爲實數而不相等，必須 $4p^3+27q^2$ 爲負。試藉上題之定理以證之。

［證］
$$f(x)=x^3+px+q=0.$$

$$\therefore\quad f_1(x)=3x^2+p.$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & 3+0+p & 1+0+p+q & \\
-3 & 6p+0+2p^2 & 3+0+3p+3q & 1 \\
 & 6p+9q & 3+0+p & \\
\hline
 & -9q+2p^2 & 2p+3q & \\
9q & -18pq+4p^3 & \therefore f_2=-2p-3q & \\
 & -18pq-27q^2 & & \\
\hline
 & 4p^3+27q^2 & &
\end{array}
$$

$$\therefore\quad f_2(x)=-2px-3q\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$f_3=-4p^3-27q^2=-(4p^3+27q^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\quad f_3=-4p^3-27q^2.$$

在斯圖謨函數 $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, f_3 中，因 $f(x)=0$ 有三不等實根，據第 15 題證明連續二函數符號應相反，因 $f(x)$ 爲三次式，當以 $x=-\infty$ 代入時 $f(x)$ 爲負，$f_1(x)$ 爲正，而 $f_2(x)$ 必須爲負，f_3 必須爲正。

從 (2) 可知 $4p^3+27q^2$ 必須爲負，即 $4p^3+27q^2<0$。

習 題 LXXIX　　第 482 頁

1. 就方程式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$，試用 a_0, a_1, a_2, a_3 以求 s_3 及 s_4.

［解］
$$f(x)=x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=0.$$

設 β_1 β_2 β_3 爲其三根.

$$f_1(x)=3x^2+2\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}.$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta_1}=x^2+\left(\beta_1+\frac{a_1}{a_0}\right)x+\beta_1^2+\frac{a_1}{a_0}\beta_1+\frac{a_2}{a_0}.$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta_2}=x^2+\left(\beta_2+\frac{a_1}{a_0}\right)x+\beta_2^2+\frac{a_1}{a_0}\beta_2+\frac{a_2}{a_0}.$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta_3}=x^2+\left(\beta_3+\frac{a_1}{a_0}\right)x+\beta_3^2+\frac{a_1}{a_0}\beta_3+\frac{a_2}{a_0}.$$

三式相加，$3x^2+2\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}=3x^2+\left(s_1+3\frac{a_1}{a_0}\right)x+\left(s_2+\frac{a_1}{a_0}s_1+3\frac{a_2}{a_0}\right)$.

比較係數，
$$s_1+3\frac{a_1}{a_0}=2\frac{a_1}{a_0}.\qquad\therefore\ s_1=-\frac{a_1}{a_0}.$$

$$s_2+\frac{a_1}{a_0}s_1+3\frac{a_2}{a_0}=\frac{a_2}{a_0}.\qquad\therefore\ s_2=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-2\frac{a_2}{a_0}.$$

以 x^{k-3} 乘已知方程式，然後以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 之值按次代替 x，將所得結果加之，得下式：

$$s_k+\frac{a_1}{a_0}s_{k-1}+\frac{a_2}{a_0}s_{k-2}+\frac{a_3}{a_0}s_{k-3}=0.$$

設 $k=3$，
$$s_3+\frac{a_1}{a_0}s_2+\frac{a_2}{a_0}s_1+3\frac{a_3}{a_0}=0$$ (見 p. 430—10).

$$\therefore\quad s_3=-(a_1^3-3a_0a_1a_2+3a_0^2a_3)/a_0^3.$$

設 $k=4$，$$s_4+\frac{a_1}{a_0}s_3+\frac{a_2}{a_0}s_2+\frac{a_3}{a_0}s_1=0.$$

$$\therefore\quad s_4=(a_1^4-4a_0a_1^2a_2+4a_0^2a_1a_3+2a_0^2a_2^2)/a_0^4.$$

2. 設 α,β,γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根，試用 p,q,r 以求 $\Sigma 1/\alpha^2$，$\Sigma 1/\alpha^3$ 及 $\Sigma\alpha\beta^2$.

［解］ $\because$ α,β,γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根，

變爲倒數方程式，則 $rx^3+qx^2+px+1=0$ 之根爲 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$.

與 $x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$ 對照，　$\therefore$ $b_1=\frac{q}{r},\ b_2=\frac{p}{r},\ b_3=\frac{1}{r}$.

$$\therefore\quad \Sigma\frac{1}{\alpha}=s_1=-b_1=-\frac{q}{r}.$$

$$\Sigma\frac{1}{\alpha^2}=s_2=b_1^2-2b_2=\frac{q^2}{r^2}-\frac{2p}{r}=\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$

$$\Sigma\frac{1}{\alpha^3}=s_3=-b_1^3+3b_1b_2-3b_3$$

$$=-\frac{q^3}{r^3}+\frac{3pq}{r^2}-\frac{3}{r}=\frac{-(q^3-3pqr+3r^2)}{r^3}.$$

$$\Sigma\alpha\beta^2=s_1s_2-s_3=-\frac{q}{r}\left(\frac{q^2-2pr}{r^2}\right)+\frac{q^3-3pqr+3r^2}{r^3}$$

$$=\frac{2pqr-3pqr+3r^2}{r^3}=\frac{3r-pq}{r^2}$$

3. 試作一方程式，令其根爲 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 之根之立方.

［解］ 設 α,β,γ 爲 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 之三根，則 $\alpha^3,\beta^3,\gamma^3$ 爲所求方程式之三根.

而 $\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta\gamma=1,\ b_1=-2,\ b_2=3,\ b_3=-1,\ s_1=-b_1=2,$

$$s_2=b_1{}^2-2b_2=4-6=-2.$$

$$\therefore\quad \Sigma\alpha^3=s_3=-b_1s_2-b_2s_1-3b_3=-b_1{}^3+3b_1b_2-3b_3$$

$$=-(-2)^3+3(-2)\cdot 3-3(-1)=8-18+3=-7$$

但因 $s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1=0$, $s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2=0$.

及 $$s_6+b_1s_5+b_2s_4+b_3s_3=0,$$

$$\therefore\quad s_4=-b_1s_3-b_2s_2-b_3s_1=-14+6+2=-6,$$

$$s_5=-b_1s_4-b_2s_3-b_3s_2=-12+21-2=7,$$

$$s_6=-b_1s_5-b_2s_4-b_3s_3=14+18-7=25.$$

$$\therefore\quad \Sigma\alpha^3\beta^3=\frac{1}{2}(s_3{}^2-s_6)=\frac{1}{2}(49-25)=12.$$

$$\alpha^3\beta^3\gamma^3=(\alpha\beta\gamma)^3=\beta=1.$$

故所求方程式為 $x^3-\Sigma\alpha^3\cdot x^2+\Sigma\alpha^3\beta^3\cdot x-\alpha^3\beta^3\gamma^3=0$,

即 $$x^3+7x^2+12x-1=0.$$

4. 設 α, β, γ 為方程式 $x^3-x^2+3x+4=0$ 之根，試用 §§ 866, 867 之方法，求此諸根之以下各對稱函數之值。

(1) s_1, s_2, s_3, s_4.　　(2) $\Sigma\alpha^3\beta^2$.　　(3) $\Sigma\alpha^3\beta\gamma$.

(4) $\Sigma\alpha^3\beta^2\gamma$.　　(5) $\Sigma 1/\alpha^4$.　　(6) $\Sigma\alpha^2\beta^2/\gamma$.

［解］ (1) $s_1=-b_1=1$, $s_2=b_1{}^2-2b_2=1-6=-5$,

$$\because\quad b_1=-1,\ b_2=3,\ b_3=4.$$

$$s_3=-b_1s_2-b_2s_1-3b_3=-(5+3+12)=-20,$$

$$s_4=-b_1s_3-b_2s_2-b_3s_1=-20+15-4=-9.$$

$$s_5=-b_1s_4-b_2s_3-b_3s_2=-9+60+20=71.$$

(2) $\Sigma\alpha^3\beta^2=s_3s_2-s_{3+2}=(-5)(-20)-71=29.$

(3) $\Sigma\alpha^3\beta\gamma=\Sigma\alpha^3\cdot\Sigma\beta\gamma-\Sigma\alpha^4\beta=s_3(s_1^2-s_2)/2-(s_4s_1-s_5)$

$=(-20)(1+5)/2-(-9\times1-71)=-60+80=20.$

(4) $\Sigma\alpha^3\beta^2\gamma=s_3s_2s_1+2s_{3+2+1}-s_{3+2}s_1-s_{3+1}s_2-s_{2+1}s_3=-60.$

再將原方程式變為倒數方程式得 $4x^3+3x^2-x+1=0$,

其根為 $$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}.$$

而 $$b_1=\frac{3}{4},\quad b_2=-\frac{1}{4},\quad b_3=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore\quad s_1=-b_1=-\frac{3}{4},\quad s_2=b_1^2-2b_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}+\frac{1}{2}=\frac{17}{16}.$$

$$s_3=-b_1s_2-b_2s_1-3b_3=-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{17}{16}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)-3\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{51}{64}-\frac{3}{16}-\frac{3}{4}=\frac{-111}{64}.$$

$$s_4=-b_1s_3-b_2s_2-b_3s_1=-\frac{3}{4}\left(-\frac{111}{64}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{17}{16}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{333}{256}+\frac{17}{64}+\frac{3}{16}=\frac{449}{256}.$$

$\therefore$ (5) $\quad \Sigma\frac{1}{\alpha^4}=s_4=\frac{449}{256}.$

(6) $\quad \Sigma\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma}=\Sigma\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\gamma^3}=(\alpha\beta\gamma)^2\Sigma\frac{1}{\alpha^3}$

$$=(-4)^2\left(\frac{-111}{64}\right)=\frac{-111}{4}.\qquad (\because\ \alpha\beta\gamma=-4).$$

習 題 LXXX

第491頁

用§871及§874之方法,解方程式1至10.

1. [解] $x^3-9x-28=0.$

$$p=-9,\qquad q=-28.$$

$$\therefore\quad A=14+\sqrt{196-27}=27,\ B=14-\sqrt{196-27}=1.$$

[答] 其根為 $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1},\ \omega\sqrt[3]{27}+\omega^2\sqrt[3]{1},\ \omega^2\sqrt[3]{27}+\omega\sqrt[3]{1};$

即 $\qquad 4,\ -2\pm i\sqrt{3}.$

2. [解] $x^3-9x^2+9x-8=0.$

以 $x=y+3$ 代入原方程式,得 $y^3-18y-35=0.$

$$p=-18,\quad q=-35.$$

$$\therefore\quad A=\frac{35}{2}+\sqrt{\frac{1225}{4}-216}=\frac{35+19}{2}=27,$$

$$B=\frac{35-19}{2}=8.$$

［答］ 原方程式之根為 $3+\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}$, $3+3\omega+2\omega^2=-\omega^2$,

$$3+3\omega^2+2\omega=-\omega;\ \text{即}\ 8,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

3. ［解］ $x^3-3x-4=0$.

$$p=-3,\qquad q=-4.$$

$$\therefore\quad A=2+\sqrt{4-\frac{27}{27}}=2+\sqrt{3},\ B=2-\sqrt{3}.$$

［答］ 其根為 $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, $\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$.

4. ［解］ $4x^3-7x-6=0$.

$$x^3-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0,\quad p=-\frac{7}{4},\ q=-\frac{3}{2}.$$

$$\therefore\quad A=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{343}{1728}}=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{972-343}{1728}}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{24}\sqrt{\frac{629}{3}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{72}\sqrt{1887},$$

$$B=\frac{3}{4}-\frac{1}{72}\sqrt{1887}.$$

［答］ 其根為 $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$, $\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$.

5. ［解］ $x^3+3x^2+9x-1=0$.

以 $x=y-1$ 代入原方程式，得 $y^3+6y-8=0$.

$$p=6,\qquad q=-8.$$

$$\therefore\quad A=4+\sqrt{16+8}=4+2\sqrt{6},\ B=4-2\sqrt{6}.$$

［答］ 原方程式之根為 $-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, $-1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$, $-1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$.

6. ［解］ $3x^3-9x^2+14x+7=0$.

以 $x=y+1$ 代入原方程式，得 $3y^3+5y+15=0$, 即

$$y^3+\frac{5}{3}y+5=0,\ p=\frac{5}{3},\ q=5.$$

$$\therefore\quad A=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{125}{729}}=-\frac{5}{2}+\frac{5}{54}\sqrt{749},$$

$$B=-\frac{5}{2}-\frac{5}{54}\sqrt{749}.$$

［答］ 原方程式之根爲

$$1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ 1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ 1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}.$$

7. ［解］ $x^4+x^2+6x+1=0.$

$$a=1,\quad b=6,\quad c=1.$$

代入 $u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0$，得

$$u^3-u^2-4u-32=0.$$

此三次方程式之一根爲 4，設 $u_1=4.$

應用 $x^2\pm\sqrt{u_1-a}x+\left(\frac{u_1}{2}\mp\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0$，得

$$x^2+\sqrt{3}x+2-\sqrt{3}=0 \cdots\cdots(1)$$

$$x^2-\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}=0 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-5+4\sqrt{3}}}{2}.$

從 (2) 式，　$x=\dfrac{\sqrt{3}\pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2}.$

［答］ 此方程式之根爲

$$(-\sqrt{3}\pm\sqrt{-5+4\sqrt{3}})/2,\ (\sqrt{3}\pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}})/2.$$

8. ［解］ $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0.$

以 $x=y+1$ 代入原方程式，得 $y^4-5y^2-2y+3=0.$

$$a=-5,\quad b=-2,\quad c=3.$$

$$u^3+5u^2-12u-64=0.$$

其一根爲 4，　$u_1=-4.$

$$y^2+y-1=0 \cdots\cdots(1)$$

$$y^2-y-3=0 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

從 (2) 式，　$y=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$

［答］ 此方程式之根爲 $1+\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $1+\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$;

卽 $$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\quad \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

9. ［解］ $x^4+12x-5=0.$

$$a=0,\quad b=12,\quad c=-5.$$

$$u^3+20u-144=0.$$

其一根爲 4, $\therefore\quad u_1=4.$

$$x^2+2x-1=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-2x+5=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式, $x=-1\pm\sqrt{2}.$

從 (2) 式, $x=1\pm 2i.$

［答］ 此方程式之根爲 $-1\pm\sqrt{2}$, $1\pm 2i$.

10. ［解］ $x^4+8x^3+12x^2-11x+2=0.$

以 $x=y-2$ 代入原方程式,得 $y^4-12y^2+5y+24=0.$

$$a=-12,\quad b=5,\quad c=24.$$

$$u^3+12u^2-96u-1177=0.$$

其一根爲 -11, $\therefore\quad u_1=-11.$

$$y^2+y-8=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y^2-y-3=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式, $y=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}.$

從 (2) 式, $y=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$

［答］ 此方程式之根爲 $-2+\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$, $-2+\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$;

卽 $$\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2},\quad \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

11. ［解］ $3x^6-2x^5+6x^4-2x^3+6x^2-2x+3=0.$

全式除以 x^3 得 $3x^3-2x^2+6x-2+6/x-2/x^2+3/x^3=0.$

$$3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 $x+\dfrac{1}{x}=y$, 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y$,

代入 (1), 得 $\qquad 3(y^3-3y)-2(y^2-2)+6y-2=0.$

卽
$$3y^3-2y^2-3y+2=0.$$
$$(y-1)(y+1)(3y-2)=0.$$
$$\therefore\quad y=1,\ -1,\ 2/3.$$

$$x+\frac{1}{x}=1 \quad 卽 \quad x^2-x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x+\frac{1}{x}=-1 \quad 卽 \quad x^2+x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$x+\frac{1}{x}=\frac{2}{3} \quad 卽 \quad 3x^2-2x+3=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從 (1), (2), (3) 式, 得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1\pm2\sqrt{2}i}{3}$;

[答] 此方程式之根爲 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1\pm2\sqrt{2}i}{3}$.

12. [解] $2x^8-9x^7+18x^6-30x^5+32x^4-30x^3+18x^2-9x+2=0.$

全式除以 x^4, 得

$$2x^4-9x^3+18x^2-30x+32-30/x+18/x^2-9/x^3+2/x^4=0.$$

$$2\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-9\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+18\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-30\left(x+\frac{1}{x}\right)+32=0.$$

設 $x+\dfrac{1}{x}=y$, 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y$,

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2.$$

代入上式得 $2(y^4-4y^2+2)-9(y^3-3y)+18(y^2-2)-30y+32=0.$

$$2y^4-9y^3+10y^2-3y=0$$

$$y(y-1)(y-3)(2y-1)=0.$$

$$\therefore\quad y=0,\ 1,\ 3,\ \tfrac{1}{2}.$$

$$x+\frac{1}{x}=0\quad\text{即}\quad x^2+1=0\cdots\cdots(1)$$

$$x+\frac{1}{x}=1\quad\text{即}\quad x^2-x+1=0\cdots\cdots(2)$$

$$x+\frac{1}{x}=3\quad\text{即}\quad x^2-3x+1=0\cdots\cdots(3)$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\quad\text{即}\quad 2x^2-x+2=0\cdots\cdots(4)$$

從 (1), (2), (3) (4) 式,得 $x=\pm i,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4}.$

[答] 方程式之根爲 $\pm i,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4}.$

13. [解] $6x^7-x^6+2x^5-7x^4-7x^3+2x^2-x+6=0.$

此倒數方程式有 1, 1, 與 -1 各根,以 $(x-1)^2(x+1)$ 除原方程式,得

$$6x^4+5x^3+13x^2+5x+6=0.$$

全式除以 x^2, 得 $6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+13=0.$

設 $x+\dfrac{1}{x}=y$, 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. 代入上式得

$$6(y^2-2)+5y+13=0.$$

$$6y^2+5y+1=0.$$

$$(2y+1)(3y+1)=0.$$

$$\therefore\quad y=-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{3}.$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\quad\text{即}\quad 2x^2+x+2=0\cdots\cdots(1)$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}\quad\text{即}\quad 3x^2+x+3=0\cdots\cdots(2)$$

從 (1), (2) 式,得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{35}i}{6}.$

［答］　方程式之根為 $1, 1, -1, \dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}, \dfrac{-1\pm\sqrt{35}i}{6}$.

14.　解 $x^7-1=0$ 時,依照 § 875, 所當用之 z 之三次方程式如何?

［解］　$x^7-1=0$ 有一根為 1, 以 $x-1$ 除之,得

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

全式除以 x^3, 得　$x^3+x^2+x+1+1/x+1/x^2+1/x^3=0.$

即
$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

設 $x+\dfrac{1}{x}=z$, 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2-2,\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=z^3-3z,$

代入上式得
$$(z^3-3z)+(z^2-2)+z+1=0.$$
$$\therefore\quad z^3+z^2-2z-1=0.$$

15.　欲令 $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ 之根皆為實數,其條件如何?

［解］　$x^3+3ax^2+3bx+c=0.$

以 $x=y-a$ 代入原方程式,得

$$y^3+(3b-3a^2)y+2a^3-3ab+c=0.$$
$$p=3(b-a^2),\qquad q=2a^3-3ab+c.$$

從 § 871 得 $A=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}},\ B=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}}.$

若其根均為實數,則
$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqq 0.$$

即
$$\frac{(2a^3-3ab+c)^2}{4}+\frac{3^3(b-a^2)^3}{27}\geqq 0.$$

即
$$\frac{(2a^3-3ab+c)^2}{4}+(b-a^2)^3\geqq 0.$$

16.　試求各三角式,以表 $x^5-1=0$ 及 $x^6+1=0$ 之根。

［解］　(1)　$x^5-1=0.$

$$x^5=1=\cos(2k\pi)+i\sin(2k\pi).$$
$$\therefore\quad x=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},$$

其中 $$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

(2) $x^6+1=0$.

$$x^6=-1=\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi).$$

$$\therefore\quad x=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$$

$$=\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}.$$

其中 $$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

17. 解以下不可約三次方程式:

(1) $x^3-3x-1=0$.　　(2) $x^3-6x-4=0$.

［解］ (1) $x^3-3x-1=0$.

$$p=-3,\qquad q=-1.$$

$$r=\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{27}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=1.$$

$$\cos\theta=-\frac{q}{2}\left(-\frac{27}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

$$\theta=\cos^{-1}\tfrac{1}{2}=60^\circ.$$

$$\therefore\quad x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}=2\cos 20^\circ,$$

$$x_2=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+360^\circ}{3}=2\cos 140^\circ,$$

$$x_3=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+720^\circ}{3}=2\cos 260^\circ.$$

(2) $x^3-6x-4=0$.

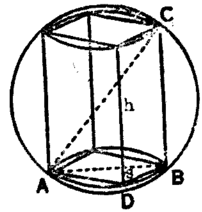
$$p=-6,\qquad q=-4.$$

$$r=\left(\frac{216}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}.\quad \cos\theta=2\left(\frac{27}{216}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=45^\circ.$$

$$\therefore\quad x_1=2\sqrt{2}\cos 15^\circ,\ x_2=2\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ x_3=2\sqrt{2}\cos 255^\circ.$$

18. 底面爲正方形之直角柱，內接於直徑爲 $3\sqrt{3}$ 之球中，設此直角柱之體積爲 27，則其高如何？



［解］ 設 h 爲直角柱之高，s 爲正方形底之邊，照圖中 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$，而 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2$，

$$\therefore\quad \overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2+\overline{BC}^2.$$

因 $AD=DB=s,\ BC=h,\quad \therefore\ \overline{AC}^2=2s^2+h^2.$

但 AC 爲球之直徑，其長爲 $3\sqrt{3}$.

$$\therefore\quad 2s^2+h^2=27\cdots\cdots(1)$$

$$s^2\times h=27\cdots\cdots(2)$$

從 (1)，
$$s^2=\frac{27-h^2}{2},$$

代入 (2) 得
$$h^3-27h+54=0.$$

用綜合除法得
$$h=3.$$

［答］ 所求之高度爲 3.

19. 設一直圓柱之體積爲 50π，其全表面積爲 $105\pi/2$，求其底面之半徑及高．

［解］ 設底之半徑爲 r，高度爲 h，則

$$50\pi=\pi r^2h\cdots\cdots(1)$$

$$105\pi r/2=2\pi rh+2\pi r^2\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，
$$h=50/r^2\cdots\cdots(3)$$

代入 (2) 式，得
$$4r^3-105r^2+200=0.$$

$$\therefore\quad r=2\tfrac{1}{2}.$$

代入 (3) 式，得
$$h=8.$$

［答］ 直圓柱底面之半徑爲 $2\frac{1}{2}$，高爲 8.

20. 一直圓錐之高爲 6，其底面之半徑爲 4．一直圓柱，其體積爲圓錐體積之九分之四，而內接於圓錐．求此圓柱之高．

［解］ 設 h 爲圓柱之高度，r 爲其底面之半徑．

則圓柱之體積爲 πr^2h.

又圓錐之體積爲 $\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 6.$

依題意得方程式 $\pi r^2h=\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 6=\frac{128}{9}\pi$ ························(1)

又 $4:r=6:(6-h)$ ·····························(2)

從 (2) 得 $r=\frac{2(6-h)}{3},$

代入 (1), 得 $4(6-h)^2h=128.$

即 $h^3-12h^2+36h-32=0.$

解之,得 $h=2.$

[答] 圓柱之高度爲 2.

習 題 LXXXI

第 497 頁

展開下之行列式:

1. [解] $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}=p^3+qsr+rsq-q^2p-s^2p-r^2p$

$=p^3-p(q^2+s^2+r^2)+2qrs.$

2. [解] $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}=yc+xb+az-ay-bz-cx$

$=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z.$

3. [解] $\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}=p^3-qsr+qrs+r^2p+s^2p+q^2p$

$=p(p^2+r^2+s^2+q^2).$

4. [解] $\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}=qrs-qrs=0.$

求以下各行列式之值.

5. [解] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+2^3+3^3-1\cdot 2\cdot 3-1\cdot 2\cdot 3-1\cdot 2\cdot 3$

$=36-18=18.$

6. [解] $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0+45-8-0-5+42=74.$

7. [解] $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$=8(-15)-9(-10)=-120+90=-30.$$

試展開各行列式而證其間之關係:

8. [證] $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3,$$

$$-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3-c_1b_2a_3+c_1a_2b_3+a_1b_2c_3+b_1c_2a_3.$$

故此三行列式皆相等。

9. [證] $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$

左式 $=a_1b_2c_3+c_1a_2b_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3,$

右式 $=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1.$$

∴ 原式兩邊相等。

10. 在行列式 $|a_1\ b_2\ c_3\ d_4|$ 之展開式中，集其含有以下因數之各項：

(1) c_3d_4，　(2) a_1d_4，　(3) $a_2b_3d_1$，　(4) a_1，　(5) c_3.

［解］ (1) $a_1b_2c_3d_4-a_2b_1c_3d_4$.

(2) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_3c_2d_4$.

(3) $-a_2b_3c_4d_1$.

(4) $a_1b_2c_3d_4+a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2-a_1b_3c_2d_4-a_1b_2c_4d_3$.

(5) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_4c_3d_2+a_2b_4c_3d_1-a_2b_1c_3d_4+a_4b_1c_3d_2-a_4b_2c_3d_1$.

11. 求行列式 $|a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5|$ 之展開式中，以下諸項之符號：

(1) $a_2b_4c_3d_1e_5$.　(2) $a_4b_2c_1d_5e_3$.　(3) $a_5b_4c_3d_2e_1$.

(4) $c_1d_2a_3e_4b_5$.　(5) $c_1b_2e_3a_4d_5$.　(6) $d_3a_2e_4b_1c_5$.

［解］ (1) 在 $a_2b_4c_3d_1e_5$ 中數字之反轉數爲四，故其符號爲正。

(2) 在 $a_4b_2c_1d_5e_3$ 中數字之反轉數爲五，故其符號爲負。

(3) 在 $a_5b_4c_3d_2e_1$ 中數字之反轉數爲十，故其符號爲正。

(4) 在 $c_1d_2a_3e_4b_5$ 中文字之反轉數爲五，故其符號爲負。

(5) 在 $c_1b_2e_3a_4d_5$ 中文字之反轉數爲五，故其符號爲負。

(6) 在 $d_3a_2e_4b_1c_5$ 中文字之反轉數爲五，數字之反轉數爲四。其反轉數之和爲九，故其符號爲負。

習 題 LXXXII　　第501頁

1. 計算以下行列式。

［解］ (1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}_{(1)} = 3\cdot4\cdot5 \begin{vmatrix} 2 & 14 & 9 \\ 2 & -7 & 9 \\ 4 & 7 & 27 \end{vmatrix}_{(2)}$

(1) 中第一列析出因數 3，第二列析出因數 4，第三列析出因數 5.

(2) 中第一行析出因數 2，第二行析出因數 7，第三行析出因數 9.

$$=3\cdot4\cdot5\cdot2\cdot7\cdot9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-22680.$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) 第一列析出因數 2，第二列 3，第三列 4，再第一行析出因數 5，第二行 4.

$$(3)\quad \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} a\cdot d\cdot f\cdot b\cdot c\cdot e \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

(1) 第一列析出因數 a，第二列 d，第三列 f，第一行析出因數 b，第二行 c，第三行 e.

2. 求證 $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

［證］ 左 $=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} la_3 & a_2 & a_3 \\ lb_3 & b_2 & b_3 \\ lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & ma_3 & a_3 \\ b_1 & mb_3 & b_3 \\ c_1 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & ma_3 & a_3 \\ kb_2 & mb_3 & b_3 \\ kc_2 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} la_3 & ma_3 & a_3 \\ lb_3 & mb_3 & b_3 \\ lc_3 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. 試藉 §907 之定理，以證下各行列式之值爲 0.

［證］ $(1)\quad \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a+c & d+b & b \\ a & a+c & d+b & b \\ a & a+c & d+b & d \\ c & a+c & d+b & d \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 0.$

(1) 第二行，第三行析出因式 $a+c$ 及 $b+d$ 後全同.

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & q & p+q+r+s \\ 1 & q & r & p+q+r+s \\ 1 & r & s & p+q+r+s \\ 1 & s & p & p+q+r+s \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 0.$$

(1) 第四行析出因式 $p+q+r+s$ 後與第一行全同.

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 1-1 & 4+2 & -1-1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}_{(1)}=0. \qquad \text{(1) 第一列與第四列全同.}$$

4. 求證 $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r).$

設 $p=q$, 則此行列式 Δ 爲 0, 故 $p-q$ 爲 Δ 之一因式. 因行列式對於 p, q, r 爲對稱, 故 $(q-r)(r-p)$ 亦爲因式; 又因行列式爲 4 次的齊次式, 故 Δ 除 $(p-q)(q-r)(r-p)$ 之因式外尚有一次的齊次對稱式, 卽 $k(p+q+r)$. $\therefore\ \Delta=(p-q)(q-r)(r-p)k(p+q+r)$. 比較係數:

因 Δ 中 qr^3 項之係數爲 1, 乘積中 qr^3 項之係數爲 k.

$$\therefore\quad k=1. \text{ 故 } \Delta=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r).$$

5. 求證 $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$

$$\Delta=\begin{vmatrix} (b+c)^2+a(b+c) & ab & ac \\ (c+a)^2+b(c+a) & (c+a)^2 & bc \\ (a+b)c+(a+b)^2 & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}_{(1)}$$

原式第一行加以第二第三行之和.

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ c+a & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}_{(2)}$$

(1) 第一行析出因式 $(a+b+c)$.

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & c+a & a+b \\ c+a & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

(2) 第一列加以第二第三列之和, 然後再將第一列析出因式 $(a+b+c)$.

$$=(a+b+c)^2[2(c+a)^2(a+b)^2+2bc(c+a)(a+b)$$
$$-(a+b)^2(c+a)^2-(c+a)^2(a+b)^2-2b^2c^2]$$
$$=(a+b+c)^2[2a^2bc+2ab^2c+2abc^2]$$
$$=2abc(a+b+c)^3.$$

習題 LXXXIII

第 507 頁

計以下行列式之值：

1. [解]
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}_{(2)} = 0.$$

(1) 中第三列加入第二列得 (2).

(2) 中第二列與第四列全同.

2. [解]
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(3)} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & -7 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(4)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & -7 & 3 \end{vmatrix}_{(5)} = -\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & 17 \end{vmatrix}_{(6)} = 51 - 5 = 46.$$

(1) 中第一列乘以 -2 加入第二列得 (2).

(3) 中第三列加入第二列 再以 -2 乘第四列加入第三列,得 (4).

(5) 中第二行乘以 -2 加入第三行,得 (6).

3. [解]
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 30 \\ 12 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}_{(1)} = 3\cdot 2\cdot 10\cdot 2\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$= 240 \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}_{(3)} = 0.$$

(1) 中第一行析出因數 3, 第二行 2, 第四行 10, 第二列 2, 第四列 2, 得 (2). 從 (2) 應用 § 917 得 (3).

4. [解]
$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 10 & 28 \\ 18 & 6 & -30 & 21 \\ 12 & 24 & 40 & 28 \\ 9 & -2 & 20 & 14 \end{vmatrix}_{(1)} = 3\cdot 2\cdot 10\cdot 7\cdot 3\cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$=\frac{5040}{4}\begin{vmatrix}6&-4&-6\\8&1&-2\\4&1&-8\end{vmatrix}_{(3)}=5040\begin{vmatrix}3&-4&-3\\4&1&-1\\2&1&-4\end{vmatrix}_{(4)}$$

$$=\frac{5040}{3}\begin{vmatrix}19&9\\11&-6\end{vmatrix}_{(5)}=5040[(-19)2-11\cdot 3]=-357840$$

(1) 中第一行析出因數 3, 第二行 2, 第三行 10, 第四行 7, 第二列 3, 第三列 4 得 (2). 從 (2) 應用 §917 得 (3).

(3) 中第一行析出因數 2, 第三行 2 得 (4).

從 (4) 應用 §917 得 (5).

試將以下之積,表爲行列式.

5. [解] $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b&-a&-0\\-a&0&b\\0&b&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab-ab&-a^2+bc&b^2-ac\\b^2-ac&-ab+ab&bc-a^2\\bc-a^2&-ac+b^2&ab-ab\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}0&bc-a^2&b^2-ac\\b^2-ac&0&bc-a^2\\bc-a^2&b^2-ac&0\end{vmatrix}.$$

6. [解] $\begin{vmatrix}p&0&r\\p&q&0\\0&q&r\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&0&c\\a&b&0\\0&b&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ap+cr&ap&cr\\ap&ap+bq&bq\\cr&bq&bq+cr\end{vmatrix}.$

7. [解] $\begin{vmatrix}a&-a&a&a\\-b&b&b&b\\c&c&-c&c\\d&d&d&-d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&-a&a&a\\-b&b&b&b\\c&c&-c&c\\d&d&d&-d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a&-a&a^2+ab&ac+ad\\-b&b&ab+b^2&bc+bd\\c&c&-ac+bc&-c^2+cd\\d&d&ad-bd&cd-d^2\end{vmatrix}.$$

8. [解] $\begin{vmatrix}l&m&n\\m&n&l\\n&l&m\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}l&m&n\\m&n&l\\n&l&m\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}l&m&n\\m&n&l\\n&l&m\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}l^2+m^2+n^2&lm+mn+nl&ln+ml+nm\\ml+nm+ln&m^2+n^2+l^2&mn+nl+lm\\nl+lm+mn&mn+ln+ml&n^2+l^2+m^2\end{vmatrix}.$$

9. 求證 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\\C_1&C_2&C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}^3.$

［證］　
$$\text{左}=\begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3.$$

10.　若行列式中首對角線任一側之元皆為零，則行列式之值等於其首項。試證之。

［證］
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \vdots & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots\cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots\cdots a_{nn}.$$

習　題　LXXXIV　　　　第511頁

用行列式解以下各組方程式。

1.　［解］
$$\begin{cases} 2x+3y-5z=3, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y+3z=7, \end{cases}$$

$$x=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-70}{-49}=\frac{10}{7},$$

$$y=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-49}{-49}=1,$$

$$z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-28}{-49}=\frac{4}{7}.$$

2. ［解］ $\begin{cases}2x+4y-3z=3,\\3x-8y+6z=1,\\8x-2y-9z=4.\end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix}3&4&-3\\1&-8&6\\4&-2&-9\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&4&-3\\3&-8&6\\8&-2&-9\end{vmatrix}=\frac{6\times49}{6\times49}=1,$$

$$y=\begin{vmatrix}2&3&-3\\3&1&6\\8&4&-9\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&4&-3\\3&-8&6\\8&-2&-9\end{vmatrix}=\frac{3\times49}{6\times49}=\frac{1}{2},$$

$$z=\begin{vmatrix}2&4&3\\3&-8&1\\8&-2&4\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&4&-3\\3&-8&6\\8&-2&-9\end{vmatrix}=\frac{2\times49}{6\times49}=\frac{1}{3}.$$

3. ［解］ $\begin{cases}ax+by+cz=d,\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2,\\a^3x+b^3y+c^3z=d^3.\end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix}d&b&c\\d^2&b^2&c^2\\d^3&b^3&c^3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\frac{d\cdot b\cdot c(d-b)(b-c)(c-d)}{a\cdot b\cdot c(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)},$$

$$y=\begin{vmatrix}a&d&c\\a^2&d^2&c^2\\a^3&d^3&c^3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\frac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)},$$

$$z=\begin{vmatrix}a&b&d\\a^2&b^2&d^2\\a^3&b^3&d^3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\frac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

4. ［解］ $\begin{cases}2x-4y+3z+4t=-3,\\3x-2y+6z+5t=-1,\\5x+8y+9z+3t=9,\\x-10y-3z-7t=2.\end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix}-3&-4&3&4\\-1&-2&6&5\\9&8&9&3\\2&-10&-3&-7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&-4&3&4\\3&-2&6&5\\5&8&9&3\\1&-10&-3&-7\end{vmatrix}=1,$$

$$y=\begin{vmatrix}2&-3&3&4\\3&-1&6&5\\5&9&9&3\\1&2&-3&-7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&-4&3&4\\3&-2&6&5\\5&8&9&3\\1&-10&-3&-7\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

$$z=\begin{vmatrix}2 & -4 & -3 & 4\\ 3 & -2 & -1 & 5\\ 5 & 8 & 9 & 3\\ 1 & -10 & 2 & -7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 6 & 5\\ 5 & 8 & 9 & 3\\ 1 & -10 & -3 & -7\end{vmatrix}=\frac{1}{3},$$

$$t=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & -3\\ 3 & -2 & 6 & -1\\ 5 & 8 & 9 & 9\\ 1 & -10 & -3 & 2\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 6 & 5\\ 5 & 8 & 9 & 3\\ 1 & -10 & -3 & -7\end{vmatrix}=-1.$$

求證以下各方程組一致，且就比 $x:y:z$ 解之。

5. ［解］ $\begin{cases}x+2y-z=0,\\ 3x-y+4z=0,\\ 4x+y+3z=0.\end{cases}$

因 $$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=0.$$

又 $$A_1=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3-4=-7,$$

$$A_2=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=7,$$

$$A_3=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=7.$$

故 $$x:y:z=-1:1:1.$$

6. ［解］ $\begin{cases}a_1x+b_1y+(ka_1+lb_1)z=0,\\ a_2x+b_2y+(ka_2+lb_2)z=0,\\ a_3x+b_3y+(ka_3+lb_3)z=0.\end{cases}$

因 $$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & ka_1+lb_1\\ a_2 & b_2 & ka_2+lb_2\\ a_3 & b_3 & ka_3+lb_3\end{vmatrix}=0.$$

又 $$A_1=\begin{vmatrix}b_2 & ka_2+lb_2\\ b_3 & ka_2+lb_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}+l\begin{vmatrix}b_2 & b_2\\ b_3 & b_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix},$$

$$A_2=-\begin{vmatrix}a_2 & ka_2+lb_2\\ a_3 & ka_3+lb_3\end{vmatrix}=l\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix},$$

$$A_3=-\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}.$$

若 $b_2a_3-a_2b_3\neq 0$, 則 $x:y:z=k:l:-1$.

7. λ 有何值,則下方程式一致?

$$4x+3y+z=\lambda x,$$

$$3x-4y+7z=\lambda y,$$

$$x+7y-6z=\lambda z.$$

[解] $\begin{cases}4x+3y+\ z=\lambda x,\\3x-4y+7z=\lambda y,\\ \ x+7y-6z=\lambda z.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(4-\lambda)x+3y+\ z=0,\\3x-(4+\lambda)y+7z=0,\\x+7y-(6+\lambda)z=0.\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4-\lambda & 3 & 1\\3 & -(4+\lambda) & 7\\1 & 7 & -(6+\lambda)\end{vmatrix}_{(1)}=\begin{vmatrix}4-\lambda & \lambda & 1\\3 & -\lambda & 7\\1 & -\lambda & -(6+\lambda)\end{vmatrix}_{(2)}$$

(1) 第一行乘以 (-1) 與第三行之和加入第二行得 (2).

$$=\lambda\begin{vmatrix}7-\lambda & 0 & 8\\3 & -1 & 7\\-2 & 0 & -(13+\lambda)\end{vmatrix}=\lambda(75-6\lambda-\lambda^2).$$

若此組方程式為符合,則 Δ 必等於零,即

$$\lambda(75-6\lambda-\lambda^2)=0.$$

$$\therefore\quad \lambda=0.$$

$$\lambda^2+6\lambda-75=0.$$

$$\therefore\quad \lambda=-3\pm\sqrt{84}=-3\pm2\sqrt{21}.$$

習　題　LXXXV　　第519頁

1. 用 §§ 924, 925 之法證明二方程式 $6x^2+5x-6=0$ 及 $2x^3+x^2-9x-9=0$ 有一公根,並求此根.

[解] $6x^2+5x-6=0$ 及 $2x^3+x^2-9x-9=0$.

$$D=\begin{vmatrix}6 & 5 & -6 & 0 & 0\\0 & 6 & 5 & -6 & 0\\0 & 0 & 6 & 5 & -6\\2 & 1 & -9 & -9 & 0\\0 & 2 & 1 & -9 & -9\end{vmatrix}_{(1)}=-2\cdot3\begin{vmatrix}0 & 2 & 21 & 27 & 0\\0 & 6 & 5 & -6 & 0\\0 & 0 & 6 & 5 & 2\\1 & 1 & -9 & -9 & 0\\0 & 2 & 1 & -9 & 3\end{vmatrix}_{(2)}$$

(1) 中第一行析出因數 2, 第五行 3, 然後第四列乘以 -3 加入第一列得 (2).

$$=2\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 21 & 27 & 0\\ 3 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5 & 2\\ 1 & -5 & -14 & 1\end{vmatrix}_{(3)}=12\begin{vmatrix}1 & 21 & 27 & 0\\ 3 & 5 & -6 & 0\\ -2 & 16 & 33 & 0\\ 1 & -5 & -14 & 1\end{vmatrix}_{(4)}$$

(2) 中第二行析出因數 2，第三列乘以 -1 加入第四列得 (3)

(3) 第四列乘以 -2 加入第三列得 (4).

$$=12\begin{vmatrix}1 & 21 & 27\\ 0 & -58 & -87\\ 0 & 58 & 87\end{vmatrix}=0.$$

$$\therefore\quad x=\lambda_1:\lambda_2=\begin{vmatrix}6 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -6\\ 1 & -9 & -9 & 0\\ 2 & 1 & -9 & -9\end{vmatrix}\div-\begin{vmatrix}0 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -6\\ 2 & -9 & -9 & 0\\ 0 & 1 & -9 & -9\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}.$$

2. 試作 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 及 $b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 之結式。

[解]
$$D=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

3. 求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $x^3=1$ 之結式。

[解] $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $x^3=1$.

$$D=\begin{vmatrix}a & b & c & d & 0 & 0\\ 0 & a & b & c & d & 0\\ 0 & 0 & a & b & c & d\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}_{(1)}=-\begin{vmatrix}b & c & d+a & 0 & 0\\ a & b & c & d & 0\\ 0 & a & b & c & d\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}_{(2)}$$

(1) 中第一行加入第四行得 (2).

$$=\begin{vmatrix}c & d+a & b & 0\\ b & c & d+a & 0\\ a & b & c & d\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}d+a & b & c\\ c & d+a & b\\ b & c & d+a\end{vmatrix}$$

$$=(a+d)^3+b^3+c^3-3bc(a+d).$$

4. 用 §931 之法求下列方程式之判別式。

(1) $x^3+px+q=0$. (2) $ax^3+bx^2+c=0$.

[解] (1) $x^3+px+q=0$.

$$f(x)=x^3+px+q=0,\quad f'(x)=3x^2+p=0.$$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&p&q&0\\0&1&0&p&q\\3&0&p&0&0\\0&3&0&p&0\\0&0&3&0&p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&p&q\\0&-2p&-3q&0\\3&0&p&0\\0&3&0&p\end{vmatrix}\quad(\text{應用 §917})$$

$$=\begin{vmatrix}-2p&-3q&0\\0&-2p&-3q\\3&0&p\end{vmatrix}=4p^3+27q^2.$$

(2) $ax^3+bx^2+c=0.\ f'(x)=3ax^2+2bx.$

$$D=\begin{vmatrix}a&b&0&c&0\\0&a&b&0&c\\3a&2b&0&0&0\\0&3a&2b&0&0\\0&0&3a&2b&0\end{vmatrix}\div a=\begin{vmatrix}a^2&ab&0&ac\\-ab&0&-3ac&0\\3a^2&2ab&0&0\\0&3a^2&2ab&0\end{vmatrix}\div a^4$$

$$=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot ac}{a^4}\begin{vmatrix}a&b&0&1\\-b&0&-3c&0\\3a&2b&0&0\\0&3a&2b&0\end{vmatrix}=-c\begin{vmatrix}-b&0&-3c\\3a&2b&0\\0&3a&2b\end{vmatrix}$$

$$=c(4b^3+27a^2c).$$

5. 藉助於 §931，試證 $x^3+x^2-8x-12=0$ 有一二重根，並求此根。

［解］ $f(x=x^3+x^2-8x-12=0,\quad f'(x)=3x^2+2x-8=0.$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-8&-12&0\\0&1&1&-8&-12\\3&2&-8&0&0\\0&3&2&-8&0\\0&0&3&2&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-8&-12\\-1&16&36&0\\3&2&-8&0\\0&3&2&-8\end{vmatrix}\quad(\text{應用 §917})$$

$$=2\cdot 4\begin{vmatrix}1&1&-4&-3\\-1&16&18&0\\3&2&-4&0\\0&3&1&-2\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}17&14&-3\\-1&8&9\\3&1&-2\end{vmatrix}$$

$$=8\begin{vmatrix}17&-3&-3\\-1&9&9\\3&-2&-2\end{vmatrix}=0.$$

故 $f(x)=0$，有一二重根。

$$\therefore\ x=\lambda_1:\lambda_2=\begin{vmatrix}1&1&-8&-12\\2&-8&0&0\\3&2&-8&0\\0&3&2&-8\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}0&1&-8&-12\\3&-8&0&0\\0&2&-8&0\\0&3&2&-8\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot4\cdot2\begin{vmatrix}1&1&-4&-3\\0&-5&4&3\\0&-1&8&9\\0&3&1&-2\end{vmatrix}\div(3\cdot4\cdot2\cdot2)\begin{vmatrix}1&-4&-3\\1&-2&0\\3&1&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-17&4&11\\-25&8&25\\0&1&0\end{vmatrix}\div3\begin{vmatrix}2&3\\13&7\end{vmatrix}=-\frac{6\times25}{3\times25}=-2.$$

6. 用 § 927 之法解下之方程組.

[解] $f(x)=x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0$ ………………(1)

$f(x)=x^2-xy-2y^2-5x-5y=0$ ………………(2)

$$D=\begin{vmatrix}1&-(3y+16)&(2y^2-28y)&0\\0&1&-(3y+16)&(2y^2-28y)\\1&-(y+5)&-(2y^2+5y)&0\\0&1&-(y+5)&-(2y^2+5y)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-(3y+16)&(2y^2-28y)\\(2y+11)&-(4y^2-23y)&0\\1&-(y+5)&-(2y^2+5y)\end{vmatrix}=0.\ (\text{應用 § 917})$$

將行列式展開 $8y^4-26y^3-115y^2-4y^4+14y^3+478y^2+1540y+8y^4$

$-158y^3+644y^2-12y^4-160y^3-677y^2-880y=0.$

卽 $-330y^3+330y^2+660y=0.$

亦卽 $y^3-y^2-2y=0.$

分解因式 $y(y^2-y-2)=0.$

$y(y+1)(y-2)=0.$

$\therefore\ y=0,\ -1,\ 2.$

設 $y=0$ 代入 (1) 式,得 $x(x-16)=0.$

代入 (2) 式,得 $x(x-5)=0.$

故得一公解 $(0,\ 0).$

設 $y=-1$ 代入 (1) 式,得 $(x-10)(x-3)=0.$

代入 (2) 式，得 $(x-3)(x-1)=0.$

故得一公解 $(3,\ -1).$

設 $y=2$ 代入 (1) 式，得 $(x+2)(x-24)=0.$

代入 (2) 式，得 $(x+2)(x-9)=0.$

故有一公解 $(-2,\ 2).$

[答] $x, y=0, 0;\ 3, -1;\ -2, 2$ 爲原二方程式之公共解答。

習 題 LXXXVI 第 530 頁

試定下列各級數爲收斂的抑爲發散的。

1. [解] $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}+1}}{\frac{1}{2^n+1}}=\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}.$$

$$\lim\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}=<1.$$

[答] 此級數爲收斂級數。

2. [解] $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}}{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}}=\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1.$$

[答] 此級數爲收斂級數。

3. [解] $\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}+\frac{6}{4\cdot 5}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)}}{\frac{2n}{(n+1)(n+2)}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+3)}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+3n}.$$

由 § 954,　　$a'-a=3-2=1.$

［答］ 此級數為發散級數.

4. ［解］ $\frac{2}{3}+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)}{n}=\frac{2n+2}{3n}=\frac{2+\frac{2}{n}}{3}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{3}<1.$$

［答］ 此級數為收斂級數.

5. ［解］ $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt[n+2]{3}}}{\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{n+1}}}{3^{\frac{1}{n+2}}}=3^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}=3^{\frac{1}{n^2+3n+2}}>1.$$

$$\therefore\quad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

［答］ 此級數為發散級數.

6. ［解］ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+2}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{a^2+n}}{\frac{1}{a^2+(n-1)}}=\frac{a^2+n-1}{a^2+n}.$$

由 § 954,　　$n-(n-1)=1.$

［答］ 此級數為發散級數.

7. ［解］ $\frac{2}{4}+\frac{2\cdot4}{4\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6}{4\cdot7\cdot10}+\cdots+\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+4)}}{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}}=\frac{2n+2}{3n+4}=\frac{2+\frac{2}{n}}{3+\frac{4}{n}}.$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

［答］ 此級數為收斂級數.

8. ［解］ $\frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)} + \cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)(n+2)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)(n+4)}}{\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}} = \frac{n+2}{n+4}.$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad a' - a = 4 - 2 = 2 > 1.$$

［答］ 此級數為收斂級數.

9. ［解］ $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} + \cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2 + \dfrac{1}{n}}{2 + \dfrac{2}{n}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2n+1}}.$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad 但 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}.$$

由 § 954, $\qquad a' - a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$

［答］ 此級數為發散級數.

各級數 u_n 項之值如下列者，其開首四項若何？試書出之，並決定其為斂的抑發散的.

10. ［解］ $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)}.$

其前四項為 $\qquad \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n+2}{(n+1)(n+3)}}{\dfrac{n+1}{n(n+2)}} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{n^3 + 5n^2 + 7n + 3}.$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1, \text{ 而 } a'-a=5-4=1.$$

［答］ 此級數爲發散級數。

11. ［解］ $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

其前四項爲 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{28}}+\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{65}}+\cdots$.

$$\therefore\ u_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3+1}}>\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(n+1)^3}} \text{ 卽 } >\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由 § 950, (1) 中分母最高次數減去分子最高次數卽 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$.

可知以 $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$ 爲 n 項之級數爲發散。

［答］ 此級數爲發散級數。

12. ［解］ $u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

其前四項爲 $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{10}-3)+(\sqrt{17}-4)$.

$$\because\ u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}+n} \text{ 卽 } >\frac{1}{2n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由 § 950, (1) 中分母最高次數減去分子最高次數卽 $1-0=1$, 可知以 $\dfrac{1}{2n+1}$ 爲 n 項之級數爲發散。

故以 $\sqrt{n^2+1}-n$ 爲 n 項之級數亦發散。

［答］ 此級數爲發散級數。

各級數之 u_{n+1}/u_n 項其值如下，試定此諸級數爲收斂的抑發散的。

13. ［解］ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2n}{2n+3}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{\frac{3}{2}}{n}}, \quad a_n=\frac{3}{2}>1.$$

［答］ 此級數爲收斂級數。(§ 953).

14. [解] $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n^3-2n^2}{3n^3+n^2+1}=\frac{n^3-\frac{2}{3}n^2}{n^3+\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{3}}.$

由 §954, $$a'-a=\tfrac{1}{3}-(-\tfrac{2}{3})=1.$$

[答] 此級數爲發散級數.

15. [解] $1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot 6}{5\cdot 8}x^2+\frac{3\cdot 6\cdot 9}{5\cdot 8\cdot 11}x^3+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n+3)}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+5)}x^{n+1}}{\frac{3\cdot 6\cdots 3n}{5\cdot 8\cdots(3n+2)}x^n}=\frac{3n+3}{3n+5}x=\frac{3+\frac{3}{n}}{3+\frac{5}{n}}x.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=x.$$

[答] $x<1$ 時,此級數爲收斂級數.

16. [解] $\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{x^3}{1+x^4}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{x^n}{1+x^{n+1}}}{\frac{x^{n-1}}{1+x^n}}=\frac{x+x^{n+1}}{1+x^{n+1}}.$$

欲 $\frac{x+x^{n+1}}{1+x^{n+1}}<1$, 則 $$x<1.$$

[答] $x<1$ 時,此級數爲收斂級數.

17. 試證 a 取正值時, $\frac{a}{1}+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ 爲發散的.

[證] $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)n}=\frac{a+n}{n}.$

當 a 爲正值時, $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$

故當 a 爲正值時,此級數乃爲發散級數.

18. 若對於 n 之一切值皆有 $\sqrt[n]{u_n}<r$, 其中 r 爲正數且小於 1, 試將 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 與收斂級數 $r+r^2+r^3+\cdots$ 比較,而證明其爲收斂的.

［證］ $\because \quad \sqrt[n]{u_n}<r.$

$\therefore \quad u_n<r^n.$

即 $n=1$ 時， $u_1<r;$

$n=2$ 時， $u_2<r^2;$

……… ………

$n=k$ 時， $u_k<r^k.$

相加，得 $u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots<r+r^2+\cdots+r^k+\cdots$

因 $r<1$， $\therefore\ r+r^2+r^3+\cdots$為收斂級數．

故 $u_1+u_2+u_3+\cdots$亦為收斂級數．

習 題 LXXXVII

第534頁

1. 試決定下列各級數究為收斂的抑為發散的．

［解］ (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots.$

設 $$|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

因 $$|u_n|<|u_{n-1}|,$$

且 $$\lim u_n=\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$$

［答］ 此級數為收斂級數．(§ 958).

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\cdots.$

$$\because\quad \lim|u_n|=\lim\left|\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right|=\lim\left|\frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}}\right|=1\neq 0.$$

由 § 958 知 (2) 第 n 項之極限不為 0.

［答］ 此級數為發散級數．

(3) $\frac{3}{3}-\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots.$

因 $$\left|\frac{3}{3}\right|>\left|\frac{3\cdot5}{3\cdot6}\right|>\left|\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}\right|>\left|\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}\right|>\cdots\cdots$$

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}{3\cdot6\cdot9\cdots\cdots3n}=0.$$

［答］ 此級數爲收斂級數.

2. 對於 x 若何之實值下列各級數爲收斂的。對於若何之值爲發散的?

［解］ (1) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^n nx}$ ……………(1)

當 $x=1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 時,級數中有一項等於 ∞, 故該級數爲發散.

當 $x=0$ 時,該級數變爲 $1+1+1+\cdots$, 故爲發散.

今就 $x\neq0,\frac{1}{2n-1},-\frac{1}{2n}$ 時討論此級數.

設 $s_{2n}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^{2n-1}(2n-1)x}+\frac{1}{1+(-1)^{2n}2nx}$ …(1)

$$s_{2n+1}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^{2n}2nx}+\frac{1}{1+(-1)^{2n+1}(2n+1)x}$$

$$=u_1+u_2+\cdots+u_{2n}+u_{2n+1} \quad\cdots\cdots(2)$$

又設 $s'_n=\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{1+(-1)^{2n-1}(2n-1)x}+\frac{1}{1+(-1)^{2n}2nx}\right]$

$$=u_1'+u_2'+\cdots+u_n' \quad\cdots\cdots(3)$$

從 (2) 及 (3), $\quad s_{2n+1}=s_n'+u_{2n+1}$.

而 $$u_{2n+1}=\frac{1}{1+(-1)^{2n+1}(2n+1)x},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(-1)^{2n+1}(2n+1)x}=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}s_n'+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}s_n'.$$

但 $$s_n'=s_{2n}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}s_n'=\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\lim_{n\to\infty}s_{2n+1}.$$

故若 s_n' 即 (3) 能收斂則原級數亦能收斂.

今知 $$|u_n'|=\left|\frac{1}{1-(2n-1)x}+\frac{1}{1+2nx}\right|$$
$$=\left|\frac{x+2}{4n^2x^2-2nx^2-x-1}\right|=\frac{|x+2|}{|(4n^2-2n)x^2-x-1|}.$$

以 u_n' 與 $\Sigma\frac{1}{n^2}$ 比較，則

$$\frac{|u_n'|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{|n^2(x+2|}{|(4n^2-2n)x^2-x-1|}=\frac{|x+2|}{\left|\left(4-\frac{2}{n}\right)x^2-\frac{x+1}{n^2}\right|}\to\left|\frac{x+2}{4x^2}\right|$$

無論 x 爲何數，只要取定，此 $\left|\frac{x+2}{4x^2}\right|$ 亦爲定值。因 $\Sigma\frac{1}{n^2}$ 爲收斂級數，故由 §945 知 s_n' 爲收斂。

∴ 所設級數除 $x=0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\cdots\frac{1}{2n-1},-\frac{1}{2n}$ 外，任何 x 之實數值均可收斂。

(2) $$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+2x^4}+\frac{x^5}{1+3x^6}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}+\cdots.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{x^{2n+1}}{1+(n+1)x^{2n+2}}}{\dfrac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}}=\frac{x^2+nx^{2n+2}}{1+(n+1)x^{2n+2}}.$$

因 $x=$任何值時，$x^2+nx^{2n+2}<1+nx^{2n+2}+x^{2n+2}$，

卽 $$x^2<1+x^{2n+2}.$$

∴ x 爲任何值時，級數均爲收斂。

3. 若 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 爲絕對收斂的，而 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$ 指示一列之數，各數之絕對值皆小於一定數 c 者，試用 §956 之法，證明級數 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots\cdots$ 亦爲收斂的。

[解] ∵ $|a_n|<c$, ∴ $|a_n|\,|u_n|<c\,|u_n|$.

$$\therefore\ |a_1u_1|+|a_2u_2|+|a_3u_3|+\cdots<c|u_1|+c|u_2|+c|u_3|+\cdots$$

但 $$c|u_1|+c|u_2|+c|u_3|+\cdots=c\{|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\}.$$

而 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots$ 爲收斂。

故 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots$亦爲收斂。

4. 若S指示§958所述之一種級數之和,試證$a_1, a_1-a_2, a_1-a_2+a_3,$ ……諸和交相大於S及小於S.

[證] 設 $S=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$.

則 $$S=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $$S=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)\cdots\cdots\cdots(2)$$

及 $$S=a_1-a_2+a_3-(a_4-a_5)\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\because\ a_1>a_2>a_3>a_4\cdots\cdots$, 故括弧中各數均爲正.

從 (2), $\qquad S<a_1$.

從 (1), $\qquad S>a_1-a_2$.

從 (3), $\qquad S<a_1-a_2+a_3$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\therefore\ a_1, a_1-a_2, a_1-a_2+a_3,\cdots\cdots$諸和交相大於$S$及小於$S$.

習　題　LXXXVIII　　第538頁

決定下列各級數之收斂之限界.

1. [解] $1+mx+\dfrac{m^2x^2}{2!}+\dfrac{m^3x^3}{3!}+\cdots$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\dfrac{m^n}{n!}}{\dfrac{m^{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{n+1}{m}.$$

$$\therefore\ \lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\infty. \qquad \therefore\ \mu=\infty.$$

2. [解] $2(2x)^2+3(2x)^3+2(2x)^4+3(2x)^5+\cdots$

$$=[2(2x)^2+2(2x)^4+\cdots]+[3(2x)^3+3(2x)^5+\cdots].$$

在 $2(2x)^2+2(2x)^4+\cdots\cdots$級數中,

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\frac{2(2)^{2n-2}}{2(2)^{2n}}=\frac{1}{4},\quad x^2<\frac{1}{4},\ |x|<\frac{1}{2}.$$

在 $3(2x)^3+3(2x)^5+\cdots\cdots$ 級數中，

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\frac{3(2)^{2n-3}}{3(2)^{2n-1}}=\frac{1}{4},\quad x^2<\frac{1}{4},\ |x|<\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \mu=\tfrac{1}{2}.$$

3. [解] $mx+\dfrac{m(m-2)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-2)(m-4)}{3!}x^3+\cdots.$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2n+2)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{m(m-2)\cdots(m-2n)}=\frac{n+1}{m-2n}.$$

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\frac{n+1}{m-2n}=-\lim\frac{1+1/n}{2-m/n}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \mu=\tfrac{1}{2}.$$

x 須有若何之實數値，下列各級數始收斂？

4. [解] $\dfrac{3x}{x+4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)^{n+1}\cdot n}{(n+1)\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{3x}{x+4}\right).$$

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{3x}{x+4}\right|.$$

如 $|3x|<|x+4|$. 則級數爲收斂。

當 $x>0$ 時，$|3x|<|x+4|$ 可寫成

$$3x<x+4.$$

$$x<2.$$

當 $x<0$ 時，可命 $x=-x'$. $\therefore$ $|3x|<|x+4|$ 可寫成

$|-3x'|<|4-x'|$, $\therefore$ $3x'<4-x'$, 即 $x'<1$.

$$x>-1.$$

$\therefore$ $-1<x<2$ 時，級數 (1) 爲收斂。

當 $x=2$ 時，級數 (1)′成爲 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots.$

$\therefore$ 級數 (1) 爲發散。

當 $x=-1$ 時，級數 (1) 成爲 $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$。

$\therefore$ 級數 (1) 爲收斂。

故 $-1<x<2$ 時，級數 (1) 爲收斂。

5. ［解］ $\frac{x}{x^2+1}+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\cdots$。

此乃 $\frac{x}{x^2+1}$ 之冪級數，於 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|<1$ 時將爲收斂。因 $|x|$ 恆小於 $|x^2+1|$，故此級數於 x 爲任何値時，皆爲收斂。

6. ［解］ $\cdots(3x)^{-3}+(3x)^{-2}+(3x)^{-1}+1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots$。

此級數中之 $(3x)^{-1}+(3x)^{-2}+(3x)^{-3}+\cdots$ 爲 $(3x)^{-1}$ 之等比冪級數。於 $|(3x)^{-1}|<1$ 卽 $|x|>\frac{1}{3}$ 時，爲收斂。

又此級數中之 $1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots$ 爲 $(2x)$ 之等比冪級數。於 $|x|<\frac{1}{2}$ 時，爲收斂者。

故此已知級數，於 $\frac{1}{3}<|x|<\frac{1}{2}$ 時，爲收斂。

習題 LXXXIX　　第 551 頁

1. 證明 $(1+x+x^2+\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$。

［證］

$$\begin{array}{r|c|c|l}
f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots & & & \\
f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots & & & \\
\hline
f(x)\cdot f(x)=1+1 & x+1 & x^2+1 & x^3+\cdots \\
+1 & +1 & +1 & \\
 & +1 & +1 & \\
 & & +1 &
\end{array}$$

$\therefore (1+x+x^2+\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$。

2. 證明 $(1+x+x^2+\cdots)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$。

［證］

$$\begin{array}{r|c|c|l}
f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots & & & \\
[f(x)]^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots & & & \\
\hline
f(x)\,[f(x)]^2=1+2 & x+3 & x^2+4 & x^3+\cdots \\
+1 & +2 & 3 & \\
 & +1 & 2 & \\
 & & 1 &
\end{array}$$

$$\therefore\ (1+x+x^2+\cdots)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots.$$

3.　證明 $(1+x^2+x^4+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)=1-x+x^2-\cdots.$

［證］

$$\begin{array}{r|l}
1+0+1+0+1+\cdots & 1+1+1+\cdots \\
\underline{1+1+1+1+1+\cdots} & \overline{1-1+1-\cdots} \\
-1+0-1+0-\cdots & \\
\underline{-1-1-1-1-\cdots} & \\
1+0+1+\cdots & \\
\underline{1+1+1+\cdots} & \\
-1+0-\cdots &
\end{array}$$

$$\therefore\ (1+x^2+x^4+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)=1-x+x^2-\cdots.$$

4.　假定 $(1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$，試平方之並應用 §973 以求 a_1,a_2,a_3,a_4。

［解］　$1-x+2x^2=(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)^2.$

$$\begin{array}{rl}
f(x)= & 1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \\
f(x)= & 1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
[f(x)]^2=1+a_1 & x+a_2 & x^2+a_3 & x^3+a_4 & x^4+\cdots \\
+a_1 & +a_1^2 & +a_1a_2 & +a_1a_3 & \\
 & +a_2 & +a_1a_2 & +a_2^2 & \\
 & & +a_3 & +a_1a_3 & \\
 & & & +a_4 &
\end{array}$$

$$\therefore\ 1-x+2x^2\equiv1+2a_1x+(2a_2+a_1^2)x^2+(2a_3+2a_1a_2)x^3$$
$$+(2a_4+2a_1a_3+a_2^2)x^4+\cdots。$$

比較係數，得　$2a_1=-1,\quad 2a_2+a_1^2=2,$

$$2a_3+2a_1a_2=0,\quad 2a_4+2a_1a_3+a_2^2=0.$$

$$\therefore\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{7}{8},\ a_3=\frac{7}{16},\ a_4=-\frac{21}{64}.$$

$$\therefore\ (1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3-\frac{21}{64}x^4+\cdots.$$

5.　用同法求下列二式之展開式之開首四項。

(1)　$(8-3x)^{\frac{1}{3}}$.　　　　(2)　$(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$

［解］　(1)　$(8-3x)^{\frac{1}{3}}$.

設 $(8-3x)^{\frac{1}{3}}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$.

則 $$8-3x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^3$$
$$=a_0^3+3a_0^2a_1x+(3a_0^2a_2+3a_0a_1^2)x^2$$
$$+(3a_0^2a_3+6a_0a_1a_2+a_1^3)x^3+\cdots.$$

比較係數，$a_0^3=8$, $\qquad\therefore\ a_0=2.$

$3a_0^2a_1=-3$, $\qquad\therefore\ a_1=-\frac{1}{4}.$

$3a_0^2a_2+3a_0a_1^2=0$, $\qquad\therefore\ a_2=-\dfrac{1}{32}.$

$3a_0^2a_3+6a_0a_1a_2+a_1^3=0$, $\qquad\therefore\ a_3=-\dfrac{5}{768}.$

$$\therefore\quad (8-3x)^{\frac{1}{3}}=2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32}x^2-\frac{5}{768}x^3\cdots.$$

(2) $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

設 $$(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.$$

則 $$(1+x-x^2)^3=(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^2.$$

即 $$1+3x-5x^3+3x^5-x^6=1+2a_1x+(a_1^2+2a_2)x^2$$
$$+(2a_1a_2+2a_3)x^3+\cdots.$$

比較係數，$2a_1=3$, $a_1^2+2a_2=0$, $2a_1a_2+2a_3=-5$.

$$\therefore\quad a_1=\frac{3}{2},\quad a_2=-\frac{9}{8},\quad a_3=-\frac{13}{16}.$$

$$\therefore\quad (1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\frac{13}{16}x^3-\cdots.$$

6. 用 § 980 例中之法，以 x 之遞增乘冪展開下列各分式至四項.

(1) $\dfrac{2+x-3x^2+5x^3}{1+2x+3x^2}$, $\qquad$ (2) $\dfrac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$.

〔解〕 (1) $\dfrac{2+x-3x^2+5x^3}{1+2x+3x^2}$.

$$\begin{array}{l|l}
2+1-3+5 & 1+2+3 \\
\underline{2+4+6} & \overline{2-3-3+20-\cdots} \\
\quad -3-9+5 & \\
\quad \underline{-3-6-9} & \\
\qquad -3+14 & \\
\qquad \underline{-3-6-9} & \\
\qquad\quad 20+9 &
\end{array}$$

[答] 此級數之商爲 $2-3x-3x^2+20x^3-\cdots$.

(2) $\dfrac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$.

$$\begin{array}{l|l}
1+5-1 & 1-1+1-1 \\
\underline{1-1+1-1} & \overline{\quad 1+6+4-1+\cdots} \\
\quad 6-2+1 & \\
\quad \underline{6-6+6-6} & \\
\qquad 4-5+6 & \\
\qquad \underline{4-4+4-4} & \\
\qquad\ -1+2+4 &
\end{array}$$

[答] 此級數之商爲 $x+6x^2+4x^3-x^4+\cdots$.

7. 用待定係數法,以 x 之遞增乘冪展開下列各分式至四項.

(1) $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}$. (2) $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}$.

[解] (1) $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}$.

設 $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}=3x^2+a_1x^3+a_2x^4+a_3x^5+\cdots$.

則 $3x^2+x^3=(1+x+x^2)(3x^2+a_1x^3+a_2x^4+a_3x^5+\cdots)$

$$3x^2+x^3=3x^2+\begin{array}{r|r|r|l} a_1 & x^3+a_2 & x^4+a_3 & x^5+\cdots \\ +3 & +a_1 & +a_2 & \\ & +3 & +a_1 & \end{array}$$

比較係數, $3+a_1=1$, $3+a_1+a_2=0$, $a_1+a_2+a_3=0$.

$$\therefore\quad a_1=-2,\ a_2=-1,\ a_3=3.$$

[答] $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}=3x^2-2x^3-x^4+3x^5+\cdots$.

(2) $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}$.

設 $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}=a_0x^{-2}+a_1x^{-1}+a_2+a_3x+\cdots$.

則 $x+5x^4=(x^3+2x^4+3x^5)(a_0x^{-2}+a_1x^{-1}+a_2+a_3x+\cdots)$.

$$x+5x^4=a_0x+\left.\begin{matrix}a_1\\+2a_0\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}a_2\\+2a_1\\+3a_0\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}a_3\\+2a_2\\+3a_1\end{matrix}\right|x^4+\cdots$$

比較係數， $a_0=1,\ a_1+2a_0=0,\ a_2+2a_1+3a_0=0,$

$$a_3+2a_2+3a_1=5.$$

$$\therefore\ a_0=1,\ a_1=-2,\ a_2=1,\ a_3=9.$$

［答］ $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}=x^{-2}-2x^{-1}+1+9x+\cdots$.

8. 用§981例一之法，展開下列各分式至五項，並示此等展開式之收斂限界.

(1) $\dfrac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}$. (2) $\dfrac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}$.

［解］ (1) 將分式分項 $\dfrac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-3}$.

但 $\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-1}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2^2}-\dfrac{x^2}{2^3}-\dfrac{x^3}{2^4}-\dfrac{x^4}{2^5}-\cdots$.

當 $|x|<2$ 時，此級數爲收斂.

$$\frac{-2}{x+2}=-\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}-\frac{x^4}{2^4}+\cdots.$$

當 $|x|<2$ 時，此級數爲收斂.

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}=-\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}-\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{3^4}-\frac{x^4}{3^5}+\cdots.$$

當 $|x|<3$ 時，此級數爲收斂.

$$\therefore\ \frac{6x-22}{(x^2-4)(x-3)}=-\frac{11}{6}+\frac{5x}{36}-\frac{89x^2}{216}+\frac{65x^3}{1296}-\frac{761x^4}{7776}+\cdots$$

當 $|x|<2$ 時，此級數爲收斂.

(2) 將分式分項 $\dfrac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}$.

$$\frac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}=\frac{-6}{2x+3}+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

但 $\dfrac{-6}{2x+3}=-2\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{-1}=-2+\dfrac{2^2x}{3}-\dfrac{2^3x^2}{3^2}+\dfrac{2^4x^3}{3^3}-\dfrac{2^5x^4}{3^4}+\cdots.$

當 $|x|<\frac{3}{2}$ 時,此級數爲收斂.

$$\frac{3}{x+1}=3(1+x)^{-1}=3-3x+3x^2-3x^3+3x^4-\cdots.$$

當 $|x|<1$ 時,此級數爲收斂.

$$\frac{1}{(x+1)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\cdots.$$

當 $|x|<1$ 時,此級數爲收斂.

$$\therefore\ \frac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}=2-\frac{11}{3}x+\frac{46}{9}x^2-\frac{178}{27}x^3+\frac{616}{81}x^4+\cdots.$$

當 $|x|<1$ 時,此級數爲收斂.

9. 以 x 之遞減乘冪展開下列各分式至四項. x 須有若何之值,首一展開式始收斂?

(1) $\dfrac{2x+3}{2x^2+x-15}$. (2) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

[解] (1) $\dfrac{2x+3}{2x^2+x-15}$.

$$\begin{array}{r|l}
2x+3 & 2x^2+x-15 \\ \cline{2-2}
2x+1-\dfrac{15}{x} & x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots \\ \cline{1-1}
2+\dfrac{15}{x} & \\
2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{15}{x^2} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{14}{x}+\dfrac{15}{x^2} & \\
\dfrac{14}{x}+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{105}{x^3} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{105}{x^3} &
\end{array}$$

$$\therefore\quad \frac{2x+3}{2x^2+x-15}=x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots.$$

$$2x^2+x-15=(2x-5)(x+3).$$

級數 $x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots$ 於 $|x|<\frac{5}{2}$ 時爲收斂。§ 981.

(2) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

$$\begin{array}{l|l}
1+0+0+0+1 & 1+1+1+1+1 \\ \cline{2-2}
\underline{1+1+1+1+1} & 1-1+0+0+1+0-1+\cdots \\
\quad -1-1-1+0 & \\
\quad \underline{-1-1-1-1-1} & \\
\qquad\qquad\quad 1+1 &
\end{array}$$

[答] $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=1-x^{-1}+x^{-4}-x^{-6}+\cdots.$

10. 將下列各級數逆轉,求至四項.

(1) $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots.$ (2) $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots.$

[解] (1) $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots.$

設 $x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+b_4y^4+\cdots.$

$$x=b_1(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)+b_2(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^2$$
$$+b_3(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^3+\cdots$$
$$=b_1x+\begin{array}{r|r|r|l}
b_1 & x^2+\ \ b_1 & x^3+\ \ b_1 & x^4+\cdots \\
+b_2 & +2b_2 & +3b_2 & \\
 & +\ \ b_3 & +3b_3 & \\
 & & +\ \ b_4 &
\end{array}$$

比較係數, $\therefore\quad b_1=1,\ b_2=-1,\ b_3=1\cdots.$

[答] $x=y-y^2+y^3-y^4+\cdots.$

(2) $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots.$

設 $x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots.$

$$x=b_1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)+b_2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^2$$
$$+b_3\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
=b_1x-\dfrac{b_1}{2} & x^2+\dfrac{b_1}{3} & x^3-\dfrac{b_1}{4} & x^4+\cdots \\
\quad +b_2 & \quad -b_2 & \quad +\dfrac{11b_2}{12} & \\
 & \quad +b_3 & \quad +\dfrac{3}{2}b_3 & \\
 & & \quad +b_4 &
\end{array}
$$

比較係數， $\therefore\ b_1=1,\ b_2=\frac{1}{2},\ b_3=\frac{1}{6}.\ b_4=\frac{1}{24}\cdots.$

［答］ $x=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{24}y^4+\cdots.$

11. 由 $y=1+x+x^2/2+x^3/3+\cdots$, 求以 $y-1$ 爲冪表 x 之級數至四項.

［解］ 設 $x=b_1(y-1)+b_2(y-1)^2+b_3(y-1)^3+\cdots.$

$$=b_1\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)+b_2\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^2$$

$$+b_3\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
=b_1x+\dfrac{b_1}{2} & x^2+\dfrac{b_1}{3} & x^3+\dfrac{b_1}{4} & x^4+\cdots \\
\quad +b_2 & \quad +b_2 & \quad +\dfrac{11b_2}{12} & \\
 & \quad +b_3 & \quad +\dfrac{2}{3}b_3 & \\
 & & \quad +b_4 &
\end{array}
$$

比較係數， $\therefore\ b_1=1,\ b_2=-\frac{1}{2}.\ b_3=\frac{1}{6},\ b_4=-\frac{1}{24}.$

［答］ $x=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{6}(y-1)^3-\frac{1}{24}(y-1)^4+\cdots$

12. 由 $y=x^2+3x^3$, 求以 $y^{\frac{1}{2}}$ 爲冪表 x 之級數至四項.

［解］ 設 $x=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2(y^{\frac{1}{2}})^2+b_3(y^{\frac{1}{2}})^3+b_4(y^{\frac{1}{2}})^4+\cdots$

$$=b\ y^{\frac{1}{2}}+b_2y+b_3y^{\frac{3}{2}}+b_4y^2+\cdots$$

$$=b_1(x^2+3x^3)^{\frac{1}{2}}+b_2(x^2+3x^3)+b_3(x^2+3x^3)^{\frac{3}{2}}+\cdots$$

$$=b_1x+\left.\begin{matrix}\frac{3b_1}{2}\\+b_2\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}\frac{9b_1}{8}\\+3b_2\\+b_3\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}\frac{27b_1}{16}\\ \\+\frac{9b_3}{2}\\+b_4\end{matrix}\right|x^4+\cdots$$

比較係數， $\therefore\quad b_1=1,\ b_2=-\frac{3}{2},\ b_3=\frac{45}{8},\ b_4=-27\cdots.$

［答］ $x=y^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}y+\frac{45}{8}y^{\frac{3}{2}}-27y^2+\cdots.$

13. **適合下方程式之 y 之值，有 $x=0$ 時爲 0 者，試用 §983 之法，求其展開式之開首三項。**

(1) $x^2+y^2+y-3x=0.$ (2) $x^3+y^3-xy=0.$

［解］ (1) 設 $x=0,\ y^2+y=0.\quad\therefore\ y=0,\ -1.$

故 $x=0$ 時，y 祇有一值爲 0，即 y 可等於一個 x 之昇冪級數。

再設 $y=ax^u+\cdots(1)$，即 y 爲 x 之昇冪級數而 ax^u 爲全式中之最低次項，a 爲待定係數。

將 (1) 代入原方程式中，得

$$x^2+a^2x^{2u}+\cdots+ax^u+\cdots-3x\equiv 0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此式爲恆等式，凡次數相同各項之係數和應爲 0.

在 (2) 中，ax^u 及 $-3x$ 爲最低項且其係數之和

$$a-3=0,\quad\therefore\ a=3,\ u=1.$$

再設 $$y=3x+bx^2+cx^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入原式整理得 $(10+b)x^2+(6b+c)x^3+\cdots=0.$

$$\therefore\quad 10+b=0,\ 6b+c=0.$$

即 $$b=-10,\quad c=60.$$

［答］ $y=3x-10x^2+60x^3+\cdots.$

(2) 設 $x=0$，則 $y^3=0,\quad\therefore\ y=0,\ 0,\ 0.$

故 $x=0$ 時，y 有三值爲 0，即 y 可等於三個 x 之昇冪級數。

再設 $y=ax^u+\cdots(1)$，即 y 爲 x 之昇冪級數，而 ax^u 爲全式中之最低

次項，a 爲待定係數．

將 (1) 代入原方程式，得 $x^3+a^3x^{3u}+\cdots-x(ax^u+\cdots)\equiv 0$ …………(2)

(2) 爲恆等式，凡次數相同各項之係數和應爲 0.

在 (2) 中，x^3, a^3x^{3u} 及 $-ax^{u+1}$ 必須有二指數爲最小(即次數最低)且相等，(1) 設 $3u$ 及 $u+1$ 爲低次數，則 $3u=u+1$, 而 $u=\frac{1}{2}$.

當 $u=\frac{1}{2}$ 時，$3u$ 與 $u+1$ 俱小於 3，此爲可能值．

(2) 設 3 與 $u+1$ 爲低次數，則 $3=u+1$, 而 $u=2$.

當 $u=2$ 時，$u+1$ 與 3 俱小於 $3u$, 此亦爲可能值．

(3) 設 3 與 $3u$ 爲低次數，則 $3=3u$, 而 $u=1$.

當 $u=1$ 時，3 與 $3u$ 不能小於 $u+1$, 故 $u=1$ 非爲可能值．

故 u 之值可有 $\frac{1}{2}$ 及 2 兩種．

若 $u=\frac{1}{2}$ 則 (2) 化爲 $x^3+a^3x^{\frac{3}{2}}+\cdots+\cdots-ax^{\frac{3}{2}}+\cdots=0$.

$\therefore$ 最低次項係數和 $a^3-a=0$, $\therefore a=0, 1, -1$. 但 $a\neq 0$, $\therefore a=\pm 1$.

若 $u=2$, 則 (2) 化爲 $x^3+a^3x^6+\cdots-ax^3+\cdots=0$.

$\therefore$ 最低次項係數和 $1-a=0$, $\therefore a=1$.

故 y 可假定爲三個 x 之昇冪級數，即

$$y=x^{\frac{1}{2}}+\cdots\cdots\tag{3}$$

或

$$y=-x^{\frac{1}{2}}+\cdots\cdots\tag{4}$$

$$y=x^2+\cdots\cdots\tag{5}$$

從 (3) 再設 $y=x^{\frac{1}{2}}(1+v)$.

代入原方程式 $x^3+y^3-xy=0$, 得一 x 及 v 之方程式

$$v^3+3v^2+2v+x^{\frac{3}{2}}=0\cdots\cdots\tag{6}$$

照上法解之，得 $v=-\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2}+\cdots$ 再設 $v=-\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2}(1+v')$ 代入 (6) 又可得 v' 與 x 之方程式依此類推可得

$$y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^{\frac{7}{2}}+\cdots$$

同樣從 (4) 可得 $y=-x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^{\frac{7}{2}}+\cdots$

從 (5) 可得 $y=x^2+x^5+3x^8+\cdots$

14. 藉助於 § 976 之定理，證明

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots.$$

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots.$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2}=2x^2+2x^4+2x^6+2x^8+2x^{10}+\cdots.$$

$$\frac{3x^3}{1-x^3}=3x^3+3x^6+3x^9+3x^{12}+3x^{15}+\cdots.$$

由 § 976，$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots=x(1+2x+3x^2+\cdots)$

$$+x^2(1+2x^2+3x^4+\cdots)+x^3(1+2x^3+3x^6+\cdots)+\cdots$$

$$=x(1-x)^{-2}+x^2(1-x^2)^{-2}+x^3(1-x^3)^{-2}+\cdots$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots.$$

習 題 XC　　第 559 頁

1. 計算 $\log_e 4$ 及 $\log_e 5$ 各至第四位小數止。

[解]　$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right].$

[§ 993]

(1) 設 $n=3$，

$$\log_e 4=\log_e 3+2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\cdots\right)$$

$$=\log_e 3+\frac{2}{7}+\frac{2}{1029}+\frac{2}{84035}+\cdots$$

$$=1.0986+0.2857+0.0019+\cdots$$

$$=1.3862.$$

(2) 設 $n=4$,

$$\log_e 5=\log_e 4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\right)$$

$$=\log_e 4+\frac{2}{9}+\frac{2}{2187}+\frac{2}{295245}+\cdots$$

$$=1.3862+0.2222+0.0009+\cdots$$

$$=1.6093.$$

2. 試證 $e^{-1}=2/3!+4/5!+6/7!+\cdots$.

［證］ $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$

設 $x=-1$, $e^{-1}=1-1+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\cdots$

$$=(1-1)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots$$

$$=\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\cdots.$$

3. 用乘法證明

$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1.$$

［證］

$$f(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\phi(x)=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
f(x)\cdot\phi(x)=1+1 & x+\frac{1}{2!} & x^2+\frac{1}{3!} & x^3+\cdots \\
-1 & -1 & -\frac{1}{2!} & \\
 & +\frac{1}{2!} & +\frac{1}{2!} & \\
 & & -\frac{1}{3!} &
\end{array}$$

故　$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1.$$

4. 證明 $(e^{ix}+e^{-ix})/2=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots$.

［證］ $$e^{ix}+e^{-ix}=\left\{1+ix+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}+\left\{1-ix+\frac{i^2x^2}{2!}-\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$$

$$=2-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^6}{6!}+\cdots.$$

故 $$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots.$$

5. 證明 $(e^{ix}-e^{-ix})/2i=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\cdots$.

［證］ $$e^{ix}-e^{-ix}=\left\{1+ix+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}-\left\{1-ix+\frac{i^2x^2}{2!}-\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$$

$$=2ix+\frac{2i^3x^3}{3!}+\frac{2i^5x^5}{5!}+\cdots.$$

故 $$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.$$

6. 試證 $(1-x)^{-n}$ 依二項定理展開時，其第 $(r+1)$ 項為

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r.$$

［證］ $(1-x)^{-n}$ 之展開式中第 $r+1$ 項為

$$\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-1)^r x^r$$

$$=\frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}(-1)^r x^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r.$$

7. 求 $(8+x)^{\frac{2}{3}}$ 展開式中含 x^4 之項.

［解］ 在 $(8+x)^{\frac{2}{3}}$ 之展開式中，其普徧項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}8^{n-r}x^r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今欲求 x^4 之一項， $\therefore\quad n=\frac{2}{3},\ r=4.$

代入 (1), 得 $$\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)(\frac{2}{3}-3)}{\underline{|4}}8^{\frac{2}{3}-4}x^4$$

$$=\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{\underline{|4}}\cdot 8^{-\frac{10}{3}}x^4$$

$$=\frac{-56x^4}{8\cdot 3^5\cdot 2^{10}}=-\frac{7x^4}{3^5\cdot 2^{10}}.$$

8. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ 展開式中含 x^3 之項.

[解] 在 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式中其普徧項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}(-x^{\frac{1}{2}})^r\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今欲求 x^3 之一項, $\therefore\ n=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}r=3,\quad \therefore\ r=6.$

代入 (1), 得 $$\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{1}{2}-3)(-\frac{1}{2}-4)(-\frac{1}{2}-5)}{\underline{|6}}(-x^{\frac{1}{2}})^6$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})(-\frac{11}{2})}{\underline{|6}}\cdot x^3$$

$$=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6\cdot \underline{|6}}x^3=\frac{231}{2^{10}}x^3.$$

9. x 須有若何之値, 則 $(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}$ 及 $(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}$ 按 x 之昇冪展開之式始收斂?

[解] $$(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}=3\left(1-\frac{4}{9}x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}=12^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{x}{12}+\frac{x^2}{12}\right)^{\frac{2}{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 之昇冪展開式爲收斂, 若 $\left|\frac{4}{9}x^2\right|<1$ 即 $|x|<\frac{3}{2}.$

(2) 之昇冪展開式爲收斂, 若 $\left|\frac{x}{12}\right|+\left|\frac{x^2}{12}\right|<1.$

即 $$|x|+|x^2|<12.$$

配平方 $$|x^2|+|x|+\tfrac{1}{4}<12+$$

$$\therefore\quad \left(|x|+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{49}{4}.$$

$$\therefore\quad |x|+\frac{1}{2}<\frac{7}{2}.\qquad \therefore\quad |x|<3.$$

故 $|x|<\frac{3}{2}$ 時，　$(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}$ 之 x 昇冪展開式爲收斂。

$|x|<3$ 時，$(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}$ 之 x 昇冪展開式爲收斂。

10. 以 x 爲冪展開 $(1-x+2x^2)^{\frac{3}{4}}$ 至含 x^4 之項止。

〔解〕 $$(1-x+2x^2)^{\frac{3}{4}}=1-\frac{3}{4}(x-2x^2)+\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)}{2!}(x-2x^2)^2$$

$$-\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)(\frac{3}{4}-2)}{3!}(x-2x^2)^3+\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)(\frac{3}{4}-2)(\frac{3}{4}-3)}{4!}(x-2x^2)^4-\cdots$$

$$=1-\frac{3}{4}x+\frac{45}{32}x^2+\frac{43}{128}x^3-\frac{333}{2048}x^4-\cdots.$$

11. $(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 以 x 爲冪之展開式中，其開首三項若何？x 須有若何之値，此展開式始收斂？

〔解〕 $$(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}=8^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{9}x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}x\right)+\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{8}x\right)^2+\cdots\right\}$$

$$\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}x\right)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2}\left(-\frac{2}{9}x\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\cdots\right\}\left\{1+\frac{1}{9}x+\frac{1}{54}x^2-\cdots\right\}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{13}{27}x+\frac{53}{1296}x^2+\cdots.$$

在 $(8+3x)^{\frac{2}{3}}$ 之展開式中 $\left|\frac{3}{8}x\right|<1$，卽 $|x|<\frac{8}{3}$ 時展開式爲收斂。

在 $(9-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式中 $\left|\frac{2}{9}x\right|<1$，卽 $|x|<\frac{9}{2}$ 時展開式爲收斂。

故原二式乘積以 x 爲冪之展開式在 $|x|<\frac{8}{3}$ 時方爲收斂。

12. 求下列各式之極限値。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$

［解］ (1) $$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}=\frac{1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\cdots-1+2x-\frac{4}{2!}x^2+\cdots}{3x}$$

$$=\frac{4x+\frac{16}{3!}x^3+\frac{64}{5!}x^5+\cdots}{3x}=\frac{4+\frac{16}{3!}x^2+\cdots}{3}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}=\frac{4}{3}.$$

(2) $$\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+\cdots\right)-\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+\frac{5}{81}x^6+\cdots\right)}{\left(1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+\cdots\right)-\left(1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\cdots\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{72}x^4+\cdots}{\frac{1}{2}x^2-\frac{17}{6}x^3+\cdots}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}=\frac{5}{3}.$$

13. 試證 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{nx}=e^x$.

［證］ $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{nx(nx-1)}{2!n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{n^2x^2-nx}{2!n^2}+\frac{n^3x^3-3n^2x^2+2nx}{3!n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2-x/n}{2!}+\frac{x^3-3x^2/n+2x/n^2}{3!}+\cdots.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x.$$

14. 試證 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2.$

［證］ $$(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e+\frac{1}{x}(e^x)^{\frac{1}{x}-1}\cdot x+\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}(e^x)^{\frac{1}{x}-2}\cdot x^2$$
$$+\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}(e^x)^{\frac{1}{x}-3}\cdot x^3+\cdots$$
$$=e+e^{1-x}+\frac{1-x}{2!}e^{1-2x}+\frac{1-3x+2x^2}{3!}e^{1-3x}+\cdots$$
$$=e\left\{1+e^{-x}+\frac{1-x}{2!}e^{-2x}+\frac{1-3x+2x^2}{3!}e^{-3x}+\cdots\right\}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right\}=e\cdot e=e^2.$$

15. 以 x 爲冪展開 $\log_e(1+x+x^2)$ 至含 x^4 之項止。x 須有若何之值，此展開式始收斂？

［解］ $$\log_e(1+x+x^2)=\log_e\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)=\log_e(1-x^3)-\log_e(1-x)$$
$$=-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\frac{x^{12}}{4}-\cdots-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)$$
$$=-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\frac{x^{12}}{4}-\cdots+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$
$$=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots.$$

此展開式於 $|x|+|x^2|<1$ 時，爲收斂；

卽 $$|x|+|x^2|+(\tfrac{1}{2})^2<1+(\tfrac{1}{2})^2.$$

開方 $$|x|+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \quad |x|<(\sqrt{5}-1)/2.$$

故 $|x|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時上展開式始收斂。

16. 試證 $\log_e\frac{m}{n}=\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\cdots.$

［證］ $\log_e\frac{m}{n}=\log_e\left(1+\frac{m-n}{n}\right)$

$$=\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\cdots.$$

17. 試證 $\log_e\frac{n^2}{n^2-1}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\cdots.$

［證］ $\log_e\frac{n^2}{n^2-1}=-\log_e\frac{n^2-1}{n^2}=-\log_e\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\cdots.$$

18. 試證 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots.$

［證］ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=-\log_e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=-\log_e\frac{n}{n+1}=\log_e\frac{n+1}{n}=\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots.$$

習 題 XCI

第563頁

1. 若三階循環級數之開首三項爲 $2-3x+5x^2$, 而關係式爲

$$a_n+2a_{n-1}-a_{n-2}+3a_{n-3}=0,$$

求其第四項及第五項.

［解］ 當 $n=4$, $a_3=5$, $a_2=-3$, $a_1=2$.

∴ 從關係式 $\quad a_4+2a_3-a_2+3a_1=0.$

得 $\quad a_4+2\cdot5-(-3)+3\cdot2=0,\quad \therefore\ a_4=-19.$

當 $n=5$, 則 $\quad a_5+2a_4-a_3+3a_2=0,$

即 $\quad a_5+2(-19)-5+3\cdot(-3)=0,\quad \therefore\ a_5=52.$

故其第四項爲 $-19x^3$ 第五項爲 $52x^4$.

2. 求下列各級數之關係式及續增二項.

(1) $1+3x+2x^2-x^3-3x^4+\cdots$.

(2) $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\cdots$.

(3) $1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\cdots$.

[解] (1) 設關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

則
$$2+3p+q=0\cdots\cdots(1)$$
$$-1+2p+3q=0\cdots\cdots(2)$$
$$-3-p+2q=0\cdots\cdots(3)$$

從 (1) 及 (2), 得 $p=-1$, $q=1$, p, q 之値能適合於 (3).

故所求之關係式爲 $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=0$.

當 $n=5$, 則 $a_5-a_4+a_3=0$. 因 $a_4=-3$, $a_3=-1$.

$$\therefore\ a_5+3-1=0,\qquad \therefore\ a_5=-2.$$

當 $n=6$, 則 $a_6-a_5+a_4=0$. 卽 $a_6+2-3=0$, $\therefore\ a_6=1$.

故所求續增之二項爲 $-2x^5+x^6$.

(2) 設所求之關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

則
$$4-5p+2q=0\cdots\cdots(1)$$
$$7+4p-5q=0\cdots\cdots(2)$$
$$-26+7p+4q=0\cdots\cdots(3)$$

從 (1) 及 (2), 得 $p=2$, $q=3$, p, q 之値能適合於 (3).

故所求之關係式爲 $a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0$.

當 $n=5$, 則 $a_5+2a_4+3a_3=0$. 因 $a_4=-26$, $a_3=7$.

$$\therefore\ a_5+2(-26)+3\cdot 7=0,\qquad a_5=31.$$

當 $n=6$, 則 $a_6+2a_5+3a_4=0$, 卽 $a_6+62-78=0$, $\therefore\ a_6=16$.

故所求續增之二項爲 $31x^5+16x^6$.

(3) 設所求之關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.

則
$$-10+6p-3q+r=0\cdots\cdots(1)$$

$$15-10p+6q-3r=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$-21+15p-10q+6r=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

從 (1), (2), (3) 得 $p=3,\ q=3,\ r=1.$

故所求關係式爲 $a_n+3a_{n-1}+3a_{n-2}+a_{n-3}=0.$

當 $n=6$, 則 $a_6+3a_5+3a_4+a_3=0$. 因 $a_5=-21,\ a_4=15,\ a_3=-10.$

$$\therefore\ a_6+3(-21)+3\cdot15+(-10)=0, \qquad \therefore\ a_6=28.$$

當 $n=7$, 則 $a_7+3a_6+3a_5+a_4=0,$

即 $a_7+3\cdot28+3(-21)+15=0, \quad \therefore\ a_7=-36.$

故所求之二項爲 $28x^6-36x^7.$

3. 求下列各級數之母函數及普偏項.

[解] (1) $2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots.$

設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0.$

則 $5+p+2q=0$ (1). $7+5p+q=0$ (2).

$17+7p+5q=0$ (3). $\therefore\ p=-1,\ q=-2.$

故其關係式爲 $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=0.$

設

$$\begin{aligned}
S_n&=2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots\\
-xS_n&=-2x-x^2-5x^3-7x^4-\cdots\cdots\\
-2x^2S_n&=-4x^2-2x^3-10x^4-\cdots\cdots\cdots\\
\hline
(1-x-2x^2)S_n&=2-x
\end{aligned}$$

故所求之母函數爲

$$S=\frac{2-x}{1-x-2x^2}=\frac{2-x}{(1-2x)(1+x)}$$

$$=\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+x}=(1-2x)^{-1}+(1+x)^{-1}.$$

於 $|x|<\frac{1}{2}$ 時, $(1-2x)^{-1}=1+2x+4x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots.$

又 $|x|<1$ 時, $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots(-1)^nx^n+\cdots.$

$\therefore$ 其普偏項爲 $\{2^nx^n+(-1)^nx^n\}$ 即 $\{2^n+(-1)^n\}x^n.$

(2) $3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots.$

設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0.$

則 $17+7p+3q=0$ (1). $43+17p+7q=0$ (2).

$113+43p+17q=0$ (3). $\therefore\ p=-5,\ q=6.$

故其關係式爲 $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0.$

設
$$S_n=3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots$$
$$-5xS_n=-15x-35x^2-85x^3-\cdots$$
$$6x^2S_n=18x^2+42x^3+\cdots$$
$$\overline{(1-5x+6x^2)S_n=3-8x}$$

故其母函數爲 $S=\dfrac{3-8x}{1-5x+6x^2}=\dfrac{2}{1-2x}+\dfrac{1}{1-3x}$

$$=2(1-2x)^{-1}+(1-3x)^{-1}.$$

於 $|x|<1$ 時，$2(1-2x)^{-1}=2\{1+2x+4x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots\}$，

又 $|x|<\frac{1}{2}$ 時，$(1-3x)^{-1}=1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots.$

$\therefore$ 其普徧項爲 $(2^{n+1}x^n+3^nx^n)$ 卽 $(2^{n+1}+3^n)x^n.$

4. 試證三階循環級數 $a_0+a_1x+\cdots$，若其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$，則母函數爲

$$\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}.$$

設
$$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$
$$pxS_n=pa_0x+pa_1x^2+pa_2x^3+\cdots+pa_{n-2}x^{n-1}+pa_{n-1}x^n$$
$$qx^2S_n=qa_0x^2+qa_1x^3+\cdots+qa_{n-3}x^{n-1}+qa_{n-2}x^n+qa_{n-1}x^{n+1}.$$
$$rx^3S_n=ra_0x^3+\cdots+ra_{n-4}x^{n-1}+ra_{n-3}x^n+ra_{n-2}x^{n+1}+ra_{n-1}x^{n+2}$$
$$\overline{(1+px+qx^2+rx^3)S_n=a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}$$
$$+(pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3})x^n$$
$$+(qa_{n-1}+ra_{n-2})x^{n+1}+ra_{n-1}x^{n+2}.$$

若已知方程式爲收斂，則 x^n 應接近於 0.

$$\therefore \quad S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}.$$

5. 藉助於上之公式，求下列級數之母函數及普偏項.

$$1+2x+11x^2+24x^3+85x^4+238x^5+\cdots.$$

［解］ 設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0.$

則 $24+11p+2q+r=0$ (1). $85+24p+11q+2r=0$ (2).

$$238+85p+24q+11r=0 \ (3).$$

$$\therefore \quad p=-1,\ q=-5,\ r=-3.$$

故其關係式爲 $a_n-a_{n-1}-5a_{n-2}-3a_{n-3}=0.$

設

$$\begin{aligned}
S_n&=1+2x+11x^2+24x^3+85x^4+\cdots\\
-xS_n&=\quad -x-2x^2-11x^3-24x^4-\cdots\\
-5x^2S_n&=\qquad -5x^2-10x^3-55x^4-\cdots\\
-3x^3S_n&=\qquad\qquad -3x^3-6x^4-\cdots\\
\hline
(1-x-5x^2-3x^3)S_n&=1+x+4x^2
\end{aligned}$$

［答］ 其母函數爲 $S=\dfrac{1+x+4x^2}{1-x-5x^2-3x^3},$

其普偏項爲 $\{3^n+(-1)^n n\}x^n.$

6. 試證 $a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots$ 爲二階之循環級數，並求其母函數.

［證］ 設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qn_{n-2}=0.$

則 $(a+2d)+p(a+d)+qa=0\cdots\cdots(1)$

$(a+3d)+p(a+2d)+q(a+d)=0\cdots\cdots(2)$

$(a+4d)+p(a+3d)+q(a+2d)=0\cdots\cdots(3)$

從 (1), (2) 得 $p=-2,\ q=1$ p,q 之値能適合於 (3).

故其關係式爲 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0.$

而所設級數爲二階循環級數.

設

$$\begin{aligned}
S_n&=a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots\\
-2xS_n&=\quad -2ax-2(a+d)x^2-2(a+2d)x^3-\cdots\\
x^2S_n&=\qquad\qquad ax^2+(a+d)x^3+\cdots\\
\hline
(1-2x+x^2)S_n&=a-(a-d)x
\end{aligned}$$

$\therefore$　母函數　$$S=\frac{a-(a-d)x}{1-2x+x^2}.$$

7.　試證 $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$ 爲三階循環級數，而其母函數爲 $(1+x)/(1-x)^3$ 者.

［證］　設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.

則
$$16+9p+4q+r=0\cdots\cdots(1)$$
$$25+16p+9q+4r=0\cdots\cdots(2)$$
$$36+25p+16q+9r=0\cdots\cdots(3)$$
$$\therefore\quad p=-3,\ q=3,\ r=-1.$$

故其關係式爲　$a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0$.

但 p, q, r 之值尚能適合於 $49+36p+25q+16r=0$.

故知所設級數爲三階循環級數.

設
$$\begin{aligned}
S_n&=1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\\
-3xS_n&=\quad -3x-12x^2-27x^3-\cdots\\
3x^2S_n&=\qquad\qquad 3x^2+12x^3+\cdots\\
-x^3S_n&=\qquad\qquad\qquad -\quad x^3-\cdots\\
\hline
(1-3x+3x^2-x^3)S_n&=1+x
\end{aligned}$$

$\therefore$　母函數　$$S=\frac{1+x}{1-3x+3x^2-x^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

8.　試證 $1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+4\cdot5x^3+\cdots$ 爲三階循環級數，並求其收斂時之和.

［證］　設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.
$$20+12p+6q+2r=0\cdots\cdots(1)$$
$$30+20p+12q+6r=0\cdots\cdots(2)$$
$$42+30p+20q+12r=0\cdots\cdots(3)$$
$$\therefore\quad p=-3,\ q=3,\ r=-1.$$

故其關係式爲　$a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0$.

但 p, q, r 之值尚能適合於 $56+42p+30q+20r=0$.

故知所設級數爲三階循環級數.

用題 4 之公式 $S=\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}$, 得

$|x|<1$ 時, $S=\dfrac{2}{1-3x+3x^2-x^3}$.

習 題 XCII

第 565 頁

1. 試證 $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{17}{16}\cdots$ 及 $\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\dfrac{26}{25}\cdots$ 爲收斂的.

[證] (1) $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{17}{16}\cdots\cdots$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\cdots.$$

$\because$ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots$ 爲收斂,

由 §1001, $\therefore$ $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{7}{16}\cdots$ 亦爲收斂.

(2) $\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\dfrac{26}{25}\cdots\cdots$

$$=\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)\cdots.$$

$\therefore$ $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\cdots$

$=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$ 爲收斂.

$\therefore$ $\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\dfrac{26}{25}\cdots$ 亦爲收斂.

2. x 須有若何之正値,下列各無窮連乘積始爲收斂的?

(1) $\Pi\left(1+\dfrac{x^n}{n^2}\right)=\left(1+\dfrac{x}{1^2}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{x^3}{3^2}\right)\cdots\cdots.$

(2) $\Pi\left(1+\dfrac{x^n}{n!}\right)=\left(1+\dfrac{x}{1!}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{2!}\right)\left(1+\dfrac{x^3}{3!}\right)\cdots\cdots.$

(3) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\left(1+\frac{x^3}{27}\right)\cdots\cdots$

[解] (1) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)=\left(1+\frac{x}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^3}{3^2}\right)\cdots\cdots$

$$\Sigma\frac{x^n}{n^2}=\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots=x\left(1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^2}+\cdots\right).$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2x}{(n+1)^2}=\frac{n^2x}{n^2+2n+1}=\frac{x}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=x.$$

故此乘積於 $x\leqq 1$ 時，爲收斂。

(2) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)=\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}\right)\cdots\cdots$

$$\Sigma\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)-1$$

上式括號中爲指數級數，由 §968，爲任何有限值卽 $x<\infty$ 時恆能收斂。

故由 §1001，$\Pi\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)$ 在 $x<\infty$ 時爲收斂。

(3) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\left(1+\frac{x^3}{27}\right)\cdots\cdots$

$$\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}+\cdots=x\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}+\cdots\right).$$

在括號中，$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}/3^{n+1}}{x^n/3^n}=\frac{x}{3}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{3}.$$

故此乘積於 $\frac{x}{3}<1$ 卽 $x<3$ 時，爲收斂。

3. 試證 $\lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}=\infty$ 或 0，視 $a>b$ 或 $a<b$ 而定。

$$\lim \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$$

$$=\lim \frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\frac{a+n}{b+n}.$$

當 $a>b$: 設 $a-b=a'$, 則 $a=b+a'$.

$$\lim \frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\frac{a+n}{b+n}$$

$$=\lim\left(1+\frac{a'}{b}\right)\left(1+\frac{a'}{b+1}\right)\left(1+\frac{a'}{b+2}\right)\cdots\left(1+\frac{a'}{b+n}\right).$$

$\because\quad \dfrac{a'}{b}+\dfrac{a'}{b+1}+\dfrac{a'}{b+2}+\cdots+\dfrac{a'}{b+n}$ 爲發散級數.

$\therefore\quad \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a+1}{b+1}\cdot\dfrac{a+2}{b+2}\cdots\dfrac{a+n}{b+n}$ 亦爲發散.

$$\therefore\quad \lim \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}=\infty.$$

當 $a<b$: 設 $b-a=b'$, 則 $a=b-b'$.

$$\lim \frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\frac{a+n}{b+n}$$

$$=\lim\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{b'}{b+1}\right)\left(1-\frac{b'}{b+2}\right)\cdots\left(1-\frac{b'}{b+n}\right).$$

$\because\quad \dfrac{b'}{b}+\dfrac{b'}{b+1}+\dfrac{b'}{b+2}+\cdots+\dfrac{b'}{b+n}$ 爲發散級數.

由 §1001 例一, $\lim\left(1-\dfrac{b'}{b}\right)\left(1-\dfrac{b'}{b+1}\right)\left(1-\dfrac{b'}{b+2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{b'}{b+n}\right)=0.$

即 $$\lim \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}=0.$$

習題 XCIII　　第575頁

計算下列各連分式之近値.

1. ［解］ $3+\dfrac{1}{4+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{5}.$

$$p_1=a_1,\ p_2=a_1a_2+1,\ p_3=a_1a_2a_3+a_1+a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2};$$

$$q_1=1,\ q_2=4,\quad q_3=a_2a_3+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$$

$$\therefore\quad p_1=3,\ p_2=13,\ p_3=16,\ p_4=93;$$

$$q_1=1,\ q_2=4,\quad q_3=5,\quad q_4=29.$$

故其近值爲 $\frac{3}{1},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{93}{29}.$

2. [解] $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{12}.$

應用公式　$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$ 及 $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$

$$p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=1,\ p_4=4,\ p_5=41,\ p_6=496;$$

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_3=2,\ q_4=7,\ q_5=72,\ q_6=871.$$

故其近值爲 $\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{41}{72},\ \frac{496}{871}.$

變下列各數爲連分式，對於末後三數並各須計算其第四個近值及估定以此爲分式之值時之誤差。

3. [解] $\frac{10}{12}.$

5	10	12	1
	10	10	
	0	2	

$$\therefore\quad \frac{10}{12}=\frac{1}{1+}\frac{1}{5}.$$

4. [解] $\frac{457}{56}.$

8	457	56	6
	448	54	
4	9	2	2
	8	2	
	1	0	

$$\therefore\quad \frac{457}{56}=8+\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$$

5. [解] $\frac{142}{513}.$

1	142	513	3
	87	426	
1	55	87	1
	32	55	
2	23	32	1
	18	23	
1	5	9	1
	4	5	
	1	4	4
		4	
		0	

$$\therefore\quad \frac{142}{513}=\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}$$

$$+\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}.$$

6.　[解]　$3.54=\frac{354}{100}$.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 354 & 100 & 1 \\
 & 300 & 54 & \\ \cline{2-3}
1 & 54 & 46 & 5 \\
 & 46 & 40 & \\ \cline{2-3}
1 & 8 & 6 & 3 \\
 & 6 & 6 & \\ \cline{2-3}
 & 2 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad 3.54=3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}.$$

7.　[解]　$0.1457=\frac{1457}{10000}$.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 1457 & 10000 & 6 \\
 & 1258 & 8742 & \\ \cline{2-3}
3 & 199 & 1258 & 6 \\
 & 192 & 1194 & \\ \cline{2-3}
7 & 7 & 64 & 9 \\
 & 7 & 63 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad 0.1457=\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\frac{1}{9+}\frac{1}{7}.$$

8.　[解]　$\frac{233}{177}$.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 233 & 177 & 3 \\
 & 177 & 168 & \\ \cline{2-3}
6 & 56 & 9 & 4 \\
 & 54 & 8 & \\ \cline{2-3}
2 & 2 & 1 & \\
 & 2 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}$$

$$\therefore\quad \frac{233}{177}=1+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$$

而　　　$p_1=1,\ p_2=4,\ p_3=25,\ p_4=104;$

　　　　$q_1=1,\ q_2=3,\ q_3=19,\ q_4=79.$

故其第四近值爲 $\frac{104}{79}$，其誤差 $<1/79^2$.

9.　[解]　$\frac{421}{972}$.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 421 & 972 & 2 \\
 & 390 & 842 & \\ \cline{2-3}
5 & 31 & 130 & 4 \\
 & 30 & 124 & \\ \cline{2-3}
 & 1 & 6 & 6 \\
 & & 6 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad \frac{421}{972}=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{6}.$$

而　　$p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=3,\ p_4=13;$

$q_1=1,\ q_2=2,\ q_3=7,\ q_4=30.$

故其第四近值爲 $\frac{13}{30}$, 其誤差 $<1/30^2$.

10. ［解］ $\frac{23456}{31827}$.

2	23456	31827	1
	16742	23456	
4	6714	8371	1
	6628	6714	
3	86	1657	19
	69	1634	
2	17	23	1
	12	17	
5	5	6	1
	5	5	
	0	1	

$$\therefore\ \frac{23456}{31827}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{19}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}.$$

而　　$p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=2,\ p_4=3;$

$q_1=1,\ q_2=1,\ q_3=3,\ q_4=4.$

故其第四近值爲 $\frac{3}{4}$, 其誤差 $<\frac{1}{4\cdot 19}$.

變下列各數爲循環連分式，對於開首四數並各須計算其第五個近值及對應之誤差.

11. ［解］ $\sqrt{17}=4+(\sqrt{17}-4)=4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}.$

$$\sqrt{17}+4=8+(\sqrt{17}-4)=8+\frac{1}{\sqrt{17}+4}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{17}=4+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

故其第五近值爲 $\frac{17684}{4289}$, 其誤差 $<\frac{1}{4289^2}$.

12. ［解］ $\sqrt{26}=5+(\sqrt{26}-5)=5+\frac{1}{\sqrt{26}+5},$

$$\sqrt{26}+5=10+(\sqrt{26}-5)=10+\frac{1}{\sqrt{26}+5}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{26}=5+\frac{1}{10+}\frac{1}{10+}\cdots.$$

各個近值為 $5,\ \frac{51}{10},\ \frac{515}{101},\ \frac{5201}{1020},\ \frac{52525}{10301}.$

故其第五近值為 $\frac{52525}{10301}$, 其誤差$<\frac{1}{10301^2}$.

13. [解] $$\sqrt{6}=2+(\sqrt{6}-2)=2+\frac{2}{\sqrt{6}+2}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{6}+2}{2}=2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}=2+\frac{1}{\sqrt{6}+2},$$

$$\sqrt{6}+2=4+(\sqrt{6}-2)=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots.$$

各個近值為 $2,\ \frac{5}{2},\ \frac{22}{9},\ \frac{49}{20},\ \frac{218}{89}.$

故其第五近值為 $\frac{218}{89}$, 其誤差$<\frac{1}{89^2}$.

14. [解] $$\sqrt{38}=6+(\sqrt{38}-6)=6+\frac{1}{\frac{\sqrt{38}+6}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{38}+6}{2}=6+\frac{(\sqrt{38}-6)}{2}=6+\frac{1}{\sqrt{38}+6},$$

$$\sqrt{38}+6=12+(\sqrt{38}-6)=12+\frac{1}{\frac{\sqrt{38}+6}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{38}=6+\frac{1}{6+}\frac{1}{12+}\frac{1}{6+}\frac{1}{12+}\cdots.$$

各個近值爲 $\qquad 6,\ \frac{37}{6},\ \frac{450}{73},\ \frac{2737}{444},\ \frac{33294}{5401}.$

故其第五近值爲 $\frac{33294}{5401}$, 其誤差 $<\frac{1}{5401^2}.$

15. [解] $\sqrt{105}=10+(\sqrt{105}-10)=10+\frac{5}{\sqrt{105}+10}=\frac{1}{\frac{\sqrt{105}+10}{5}},$

$$\frac{\sqrt{105}+10}{5}=4+\frac{\sqrt{105}-10}{5}=4+\frac{1}{\sqrt{105}+10},$$

$$\sqrt{105}+10=20+\sqrt{105}-10=20+\frac{1}{\frac{\sqrt{105}+10}{5}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{105}=10+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{20+}\cdots.$$

各個近值爲 $\qquad 10,\ \frac{41}{4},\ \frac{830}{81},\ \frac{3361}{328},\ \frac{68050}{6641},\cdots$

故其第五近值爲 $\frac{68050}{6641}$, 其誤差 $<\frac{1}{6641^2}.$

16. [解] $\sqrt{23}=4+\sqrt{23}-4=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}},$

$$\frac{\sqrt{23}+4}{7}=1+\frac{\sqrt{23}-3}{7}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+3}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{23}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{23}-3}{2}=3+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+3}{7}},$$

$$\frac{\sqrt{23}+3}{7}=1+\frac{\sqrt{23}-4}{7}=1+\frac{1}{\sqrt{23}+4},$$

$$\sqrt{23}+4=8+\sqrt{23}-4=8+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{23}}=4+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\cdots.$$

各個近值爲 $4,\ \frac{1}{5},\ \frac{4}{19},\ \frac{5}{24},\ \frac{44}{211},\cdots\cdots$

故其第五近值爲 $\frac{44}{211}$, 其誤差$<\frac{1}{211^2}$.

17. [解] $\sqrt{19}=4+\sqrt{19}-4=4+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{19}+4}{3}}$,

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{19}+2}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{19}+3}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{19}+3}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{19}+2}{3}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4},$$

$$\sqrt{19}+4=8+\sqrt{19}-4=8+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{19}+4}{3}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{8+}\cdots\cdots.$$

各個近值爲 $4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\cdots\cdots.$

其第五近值爲 $\frac{61}{14}$, 其誤差$<\frac{1}{14^2}$.

18. [解] $\sqrt{71}=8+\sqrt{71}-8=8+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+8}{7}}$,

$$\frac{\sqrt{71}+8}{7}=2+\frac{\sqrt{71}-6}{7}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+6}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+6}{5}=2+\frac{\sqrt{71}-4}{5}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+4}{11}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+4}{11}=1+\frac{\sqrt{71}-7}{11}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+7}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+7}{2}=7+\frac{\sqrt{71}-7}{2}=7+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+7}{11}}$$

$$\frac{\sqrt{71}+7}{11}=1+\frac{\sqrt{71}-4}{11}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+4}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+4}{5}=2+\frac{\sqrt{71}-6}{5}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+6}{7}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+6}{7}=2+\frac{\sqrt{71}-8}{7}=2+\frac{1}{\sqrt{71}+8},$$

$$\sqrt{71}+8=16+\sqrt{71}-8=16+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{71}+8}{7}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{71}=8+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+$$

各個近值爲　$8,\ \frac{17}{2},\ \frac{42}{5},\ \frac{59}{7},\ \frac{455}{54},\ldots\ldots$

其第五近值爲 $\frac{455}{54}$, 其誤差$<\frac{1}{54^2}$.

19. ［解］ $3\sqrt{3}=5+3\sqrt{3}-5=5+\cfrac{1}{\cfrac{3\sqrt{3}+5}{2}},$

$$\frac{3\sqrt{3}+5}{2}=5+\frac{3\sqrt{3}-5}{2}=5+\frac{1}{3\sqrt{3}+5}.$$

$$3\sqrt{3}+5=10+3\sqrt{3}-5=10+\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}+5}{2}}.$$

$$\therefore\quad 3\sqrt{3}=5+\frac{1}{5+}\frac{1}{10+}\cdots\cdots.$$

各個近值爲 $\quad 5,\ \frac{26}{5},\ \frac{265}{51},\ \frac{1351}{260},\ \frac{13775}{2651},\cdots\cdots.$

其第五近值爲 $\frac{13775}{2651}$, 其誤差$<\frac{1}{2651^2}$.

20. ［解］ $$\frac{\sqrt{10}-2}{2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+2}{3}},$$

$$\frac{\sqrt{10}+2}{3}=1+\frac{\sqrt{10}-1}{3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+1}{3}},$$

$$\frac{\sqrt{10}+1}{3}=1+\frac{\sqrt{10}-2}{3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+2}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{10}+2}{2}=2+\frac{\sqrt{10}-2}{2}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+2}{3}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{10}-2}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots.$$

各個近值爲 $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{7}{12},\cdots\cdots.$

其第五近值爲 $\frac{7}{12}$, 其誤差$<\frac{1}{12^2}$.

21. ［解］ $$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3+2\sqrt{2}}{1}=5+(2\sqrt{2}-2)=5+\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+2}{4}},$$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{4}=1+\frac{2\sqrt{2}-2}{4}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}+2},$$

$$2\sqrt{2}+2=4+2\sqrt{2}-2=4+\cfrac{1}{\cfrac{2\sqrt{2}+2}{4}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=5+\frac{\dot{1}}{1}+\frac{\dot{1}}{4}+\cdots\cdots.$$

各個近值為　$5,\ \frac{6}{1},\ \frac{29}{5},\ \frac{35}{6},\ \frac{169}{29},\cdots\cdots.$

其第五近值為 $\frac{169}{29}$，其誤差$<\frac{1}{29^2}$.

求下列各循環連分式之值。

22. ［解］ $\frac{\dot{1}}{1}+\frac{1}{2}+\frac{\dot{1}}{3}+\cdots\cdots.$

設 x 為純循環連分式之值.

則
$$x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3+}=\frac{7+2x}{10+3x}.$$

化簡
$$3x^2+8x-7=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{37}-4}{3}.$$

23. ［解］ $\frac{\dot{1}}{2}+\frac{1}{1}+\frac{\dot{1}}{3}+\cdots\cdots.$

設 x 為循環連分式之值.

則
$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3+x}=\frac{4+x}{11+3x}.$$

$$3x^2+10x-4=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{37}-5}{3}.$$

24. ［解］ $3+\frac{1}{4}+\frac{\dot{1}}{5}+\frac{\dot{1}}{2}+\cdots\cdots.$

設 y 為連分式之值，x 為循環部分之值。

則
$$y=3+\frac{1}{4+x}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x=\frac{1}{5+}\frac{1}{2+x}=\frac{2+x}{11+5x}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 化簡
$$5x^2+10x-2=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{35}-5}{5}.$$

代入 (1) 式,得
$$y=3+\frac{1}{4+\frac{\sqrt{35}-5}{5}}=\frac{3\sqrt{35}+50}{\sqrt{35}+15}.$$

25. [解] $\dot{2}+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\cdots\cdots.$

設 x 爲連分式之值.

則
$$x=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{x}=\frac{157x+30}{68x+13}.$$

$$34x^2-72x-15=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{1806}+36}{34}.$$

26. [解] $\frac{1}{2+}\frac{1}{7+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{1+}\cdots\cdots.$

設 y 爲連分式之值, x 爲循環部分之值。

則
$$y=\frac{1}{2+}\frac{1}{7+x},$$

$$x=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+x}=\frac{3+2x}{4+3x}.$$

化簡
$$3x^2+2x-3=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{10}-1}{3},$$

而
$$y=\frac{1}{2+}\frac{1}{7+\frac{\sqrt{10}-1}{3}}=\frac{20+\sqrt{10}}{43+2\sqrt{10}}.$$

27. 試證 $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$

［證］ $\sqrt{a^2+1}=a+(\sqrt{a^2+1}-a)=a+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}+a},$

$$\sqrt{a^2+1}+a=2a+(\sqrt{a^2+1}-a)=2a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$$

28. 試證 $\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a\ +}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{a\ +}\,\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$

［證］ $\sqrt{a^2+2}=a+(\sqrt{a^2+2}-a)=a+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}},$

$$\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}=a+\frac{\sqrt{a^2+2}-a}{2}=a+\frac{1}{\sqrt{a^2+2}+a},$$

$$\sqrt{a^2+2}+a=2a+\sqrt{a^2+2}-a=2a+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a\ +}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{a\ +}\,\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$$

29. 試證 $\frac{1}{a\ +}\,\frac{1}{b\ +}\,\frac{1}{c\ +}\cdots=\dfrac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$

［證］ 設 x 爲連分式之值。

$$x=\frac{1}{a\ +}\,\frac{1}{b\ +}\,\frac{1}{c+x}=\frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c}.$$

$$(ab+1)x^2+(abc+a+c-b)x-(bc+1)=0.$$

解 x, $\quad\therefore\ x=\dfrac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a-b+c)^2+4(ab+1)(bc+1)}}{2(ab+1)}$

$$=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

30. 變 $x^2+x-1=0$ 之正數爲連分式。

［解］　所設方程式之正根爲 $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

變爲連分式
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots\cdots.$$

31.　試證 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{p_1}{q_1}+\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\cdots\cdots+\dfrac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$.

［證］　因 $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$.

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}+\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

同理
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}+\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{(-1)^2}{q_2q_1}+\frac{p_1}{q_1}.$$

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

32.　試證 $\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\dfrac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots$.

［證］　從上題 $\dfrac{p_n}{q_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\dfrac{p_1}{q_1}+\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\dfrac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots$.

但 $\dfrac{p_1}{q_1}=a_1$, 故 $\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\dfrac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots$.

33　以分母小於 1000 之有理分數表正方形之對角線與一邊之比,則與此最接近者若何?試估定以此分數爲比值時之誤差。

［解］　正方形對角線與一邊之比爲 $\sqrt{2}$.

將 $\sqrt{2}$ 變爲連分式。

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

$$\sqrt{2}+1=2+\sqrt{2}-1=2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots.$$

各個近値爲 $1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ \frac{1393}{985},\cdots\cdots.$

故最接近之分數而分母小於 1000 者爲 $\frac{1393}{985}$ 其誤差小於 $\frac{1}{985^2}$.

34. 求以小於 0.000001 之誤差代表 $\pi=3.14159265\cdots$ 之最簡分數。

[解] $\pi=3.14159265\cdots\cdots=\frac{314159265}{100000000}$ 將此分式化爲連分式.

7	100000000	314159265	3
	99114855	300000000	
1	885145	14159265	15
	882090	13277175	
	3055	882090	288
		879840	
		2250	

故 $3.14159265\cdots\cdots=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{288}+\cdots\cdots.$

各個近値爲　$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{102573}{32650},\cdots\cdots.$

故代表 π 之最簡分數爲 $\frac{335}{113}$, 其誤差 $<\frac{1}{113\times 32650}<0.000001.$

35 計算 $e=2.71828\cdots$ 之第六個近値,並估定以此爲 e 之値時之誤差。

[解] $e=2.71828\cdots\cdots=\frac{271828}{100000}$, 將此分式化爲連分式。

2	271828	100000	1
	200000	71828	
2	71828	28172	1
	56344	15484	
1	15484	12688	4
	12688	11184	
1	2796	1504	
	1504		
	1292		

故 $2.71828\cdots\cdots=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots$

各個近值爲 $2,\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{19}{7},\ \frac{87}{32},\cdots\cdots$

其第六個近值爲 $\frac{87}{32}$, 其誤差$<\frac{1}{32^2}$.

36. 求 $127x-214y=6$ 之一整數解.

[解] 將 $\frac{214}{127}$ 化爲連分式.

1	214	127	1
	127	87	
2	87	40	5
	80	35	
1	7	5	2
	5	4	
2	2	1	
	2		
	0		

故 $$\frac{214}{127}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}.$$

其近值爲 $\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{27}{16},\ \frac{32}{19},\ \frac{91}{54},\ \frac{214}{127}$

$$\therefore\quad 91\cdot127-214\cdot54=1,$$

全式乘以 6, $\quad 546\cdot127-324\cdot214=6.$

$\therefore$ 所求一整數解爲 $x=546,\ y=324$.

37. 求 $235x+412y=10$ 之一整數解.

[解] 將 $\frac{412}{235}$ 化爲連分式.

1	235	412	1
	177	235	
19	58	177	3
	57	174	
	1	3	3
		3	
		0	

故 $$\frac{412}{235}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{19+}\,\frac{1}{3}.$$

其近值為 $$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{7}{4},\ \frac{135}{77},\ \frac{412}{235}.$$

$$\therefore\quad 135\cdot235-412\cdot77=1.$$

全式乘以 10, $$1350\cdot235-412\cdot770=10.$$

∴ 所求一整數解為 $x=1350,\ y=-770.$

38. 求 $517x-323y=31$ 之普偏解.

[解] 將 $\frac{517}{323}$ 化為連分式.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 517 & 323 & 1 \\
 & 323 & 194 & \\
\hline
1 & 194 & 129 & 1 \\
 & 129 & 65 & \\
\hline
1 & 65 & 64 & 64 \\
 & 64 & 64 & \\
\hline
 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$$\frac{517}{323}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{64}.$$

其近值為 $$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{517}{323}.$$

$$\therefore\quad 517\cdot5-323\cdot8=1,$$

全式乘以 31, $$517\cdot155-323\cdot248=31.$$

∴ x y 之一整數解為 155, 248.

故所求之普偏解為 $$x=155-323t.$$

$$y=248-517t.\quad \S\,674.$$