Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 14

Aufgaben

Aufgabe 14.1. Es sei A_D ein quadratischer Zahlbereich und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq 0$ in A_D. Zeige, dass das konjugierte Ideal $\overline{\mathfrak{a}}$ in der Klassengruppe das Inverse zu $\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 14.2. Es sei R ein Dedekindbereich und es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gebrochene Ideale. Zeige, dass die beiden gebrochenen Ideale genau dann die gleiche Klasse in der Divisorenklassengruppe definieren, wenn sie als R-Moduln isomorph sind.

Aufgabe 14.3. Es sei R ein Dedekindbereich. Zeige, dass ein exakter Komplex

$$1 \longrightarrow R^{\times} \longrightarrow Q(R)^{\times} \longrightarrow \operatorname{Div}(R) \longrightarrow \operatorname{KG}(R) \longrightarrow 0$$

vorliegt.

Aufgabe 14.4. Interpretiere Lemma 14.4 für die folgenden Fälle:

(1) S wird durch ein Element erzeugt.
(2) $S = R \setminus \{0\}$
(3) R_S ist faktoriell.
(4) $S = R \setminus \mathfrak{p}$.

Aufgabe 14.5. Es sei R ein Zahlbereich vom Grad d. Zeige, dass die Norm einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$N\colon \operatorname{KG}(R) \longrightarrow \mathbb{Q}_+^{\times}/T$$

definiert, wobei T die Menge der Beträge von Normen von Elementen $\neq 0$ aus R bezeichnet. Zeige ferner, dass $\left(\mathbb{Q}_+^{\times}\right)^d \subseteq T$ gilt.

Aufgabe 14.6.*

Es sei S der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{-5}, \sqrt{2}].$$

(1) Zeige, dass $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-10}}{2}$ zu S gehört.
(2) Zeige $\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[z]$.
(3) Zeige $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}[z]$.
(4) Bestimme eine Ganzheitsgleichung für z über $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
(5) Bestimme eine Ganzheitsgleichung für z über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 14.7.*

Wir betrachten die Ringerweiterungen

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = R \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}, \mathrm{i}] \subseteq T,$$

wobei T den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}, \mathrm{i}]$ bezeichnet. Zeige, dass das Erweiterungsideal zu

$$\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5})$$

in T ein Hauptideal wird.

Aufgabe 14.8. Erkläre „geometrisch“, warum die Primideale der Form $(X - a, Y - b)$ des Ringes $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ keine Hauptideale sind.

Aufgabe 14.9. Es sei $R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$. Zeige, dass alle Primideale von R der Form $(X - a, Y - b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die gleiche Divisorklasse festlegen.

Aufgabe 14.10. Zeige, dass der Ringhomomorphismus

$$K[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \longrightarrow K[U,V]/(U^2+V^2-1),\ (X,Y) \longmapsto (U^2-V^2, 2UV),$$

über jedem Körper der Charakteristik $\neq 2$ ganz ist.

Aufgabe 14.11. Wir betrachten den kommutativen Ring

$$R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$$

und das Ideal $\mathfrak{p} = (X, Y - 1)$ aus Beispiel 14.7. Zeige, dass der Ring $R_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ ein Hauptidealbereich ist und bestimme einen Erzeuger für das Erweiterungsideal $(X, Y - 1)R_{\mathbb{C}}$.

Abbildungsverzeichnis