Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 40

Übungsaufgaben

Aufgabe 40.1. Es sei V ein Minkowski-Raum.

(1) Zeige, dass ein skalares Vielfaches eines zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektors wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.
(2) Zeige, dass die Summe von zwei zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektoren im Allgemeinen nicht wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.

Aufgabe 40.2.*

Ist die Einschränkung einer Minkowski-Form im $\mathbb{R}^n$ auf einen $n-1$-dimensionalen Untervektorraum wieder eine Minkowski-Form?

Aufgabe 40.3. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass es zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^{\perp}$$

gibt, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $(\mathbb{R}v)^{\perp}$ positiv definit ist.

Aufgabe 40.4. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{25}{24} \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

Die Hyperbelfunktionen werden in Analysis 1 eingeführt.

Aufgabe 40.5. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $\alpha \in \mathbb{R}$ der Vektor $\begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

Aufgabe 40.6.*

Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, die Vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} z - \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -z + \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren eines Beobachters sind. Zeige, dass jeder Beobachtervektor diese Gestalt besitzt.

Aufgabe 40.7. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -,- \rangle$ und es seien v, w gleichgerichtete Beobachtervektoren. Zeige

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

Aufgabe 40.8. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -,- \rangle$ und es seien v, w zeitartige Vektoren. Zeige die Abschätzung

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle .$$

Aufgabe 40.9. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme die Raumkomponente dazu.

Aufgabe 40.10. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.11. Es sei V ein Minkowski-Raum. Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfallen. Zeige, dass zwei Beobachtervektoren v, w genau dann zur gleichen Komponente gehören, wenn

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

Aufgabe 40.12. Es sei V ein zweidimensionaler Minkowski-Raum.

(1) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
(2) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
(3) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

Aufgabe 40.13. a) Zeige, dass die Summe von Bilinearformen Ψ_1 und Ψ_2 auf einem K-Vektorraum V wieder eine Bilinearform ist.

b) Zeige ebenso, dass das skalare Vielfache einer Bilinearform wieder eine Bilinearform ist.

Aufgabe 40.14. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Zeige, dass die negierte Form $- \langle -, - \rangle$ den Typ (q, p) besitzt.

Aufgabe 40.15. Zeige, dass die Menge der Bilinearformen auf einem K-Vektorraum V einen K-Vektorraum bilden.

Aufgabe 40.16. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$\operatorname{Hom}_K(V, V^*) \longrightarrow \operatorname{Bilin}(V)$$

gibt.

Aufgabe 40.17.*

Zeige, dass für eine hermitesche Form $\langle -, - \rangle$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V die Werte $\langle v, v \rangle$ zu $v \in V$ stets reell sind.

Aufgabe 40.18. Zeige, dass eine Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V genau dann hermitesch ist, wenn die Gramsche Matrix der Form bezüglich einer Basis von V hermitesch ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 40.19. (4 Punkte)

Der $\mathbb{R}^3$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthonormalbasis der Raumkomponente dazu.

Aufgabe 40.20. (4 Punkte)

In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.21. (6 (2+2+2) Punkte)

Der $\mathbb{R}^3$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

(1) Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
(2) Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
(3) Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

Aufgabe 40.22. (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf V einen Untervektorraum des Raumes aller Bilinearformen bildet. Welche Dimension besitzt dieser Raum, wenn

$$\dim (V) = n$$

ist?

Aufgabe 40.23. (1 Punkt)

Es sei V ein reeller Vektorraum. Bildet die Menge der Skalarprodukte auf V einen Untervektorraum des Raumes aller Bilinearformen?