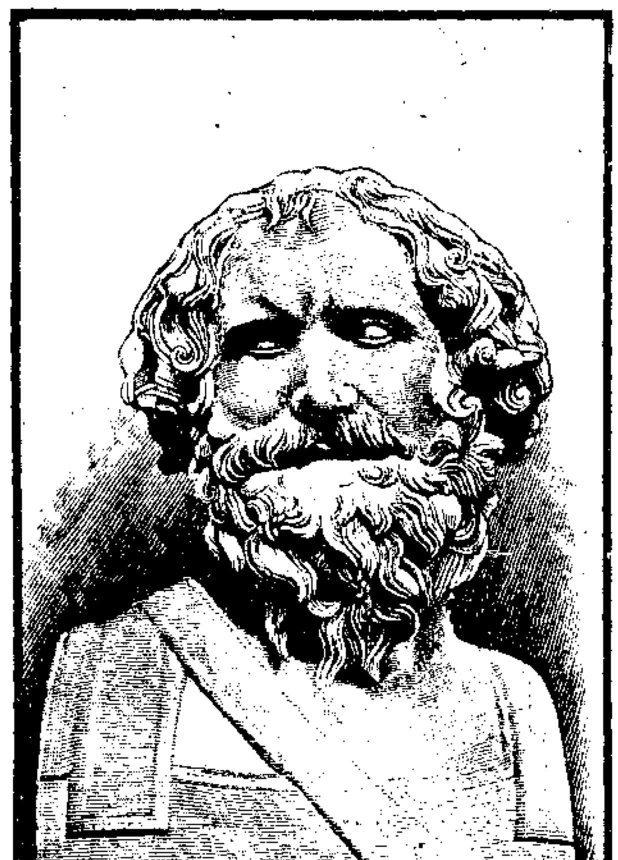
贈閱



第一卷

第四期

第四期目錄

部頒中學算學課程標準平議*

余 潛 修

教育部鑒於我國中學程度參差不齊，各自爲政，乃於前年頒佈高初中課程暫行標準，期求全國教材之統一，法意至爲良善．經過一年間之討論及實施，始於去年正式釐定公佈．關於算學部份，內容計分四項：(1)目標，(2)時間支配，(3)教材大綱，(4)實施方法概要．高初中兩級分別敘述，對於種種教學方法及教材選擇，闡明甚爲詳盡，持論亦頗新穎，所列舉之目標，雖稍嫌誇大，然由此吾人得知所努力之方向，且其中末段謂"「根據訓練可爲相當轉移」之原則，注意培養學生良好習慣與態度"，尤爲正確卓絕之見解．由算學訓練而得之遷習性，乃爲最近心理學家公認可能之新學說，因此吾人可知算學之最大的目標，不僅在求其計算之純熟及理解之敏捷，尤在養成自由研究與分析事理之習慣，及去僞求眞之態度．關於教材大綱中之節目，已經鄭重聲明„不過依其性質而彙集之，並非教時應採之次序，又各年級中教材之支配，亦僅爲示範之用，教者得斟酌情形而變通之"，故吾人認爲無討論之必要，免涉吹毛求疵之嫌，其次，對於實施方法概要亦經中等算學研究會於其所提出之意見書中儘量地加以說明及補充（見中華教育界第19卷7期），讀者可自行參閱，故吾人對此亦不欲多所論及，致貽抄襲重複之譏．唯關於時間支配一

請參看上期及本期特載

項,其中亟待商榷之處甚多,而評者每多忽略未顧,或理想太高,難期實行。玆篇所述,僅就我國現在教學情形而論,並顧及整個課程之支配,非敢徒作高論,不過略抒管見,以求中等算學教育界諸先進之指正而已。

(一)初中。部頒規定28學分,其時間支配如次;

學程＼時數＼學期	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
算術(附簡易代數)	4	4				
代數			3	3	2	2
幾何(附數值三角)			2	2	3 (實驗幾何)	3

初中新生若完全令其複習小學算術，未免令人厭倦，故應偏重理論部分,尤應注意訓練心算，速算及省略算，因就心理發展程度而言,此時最適宜於此種訓練也。實驗幾何之基本作圖,較簡易代數更爲容易,而由實驗方法所得之新知識,能使初學者興趣盎然，且其中面積與體積之度量,運用數值計算之處甚多,故與速算及省略算同時講授,甚爲合理。美國中等算學教育改造計劃(Reorganization of Mathematics in Secondary Schools)曾列舉教材支配方法五種,均將實驗幾何列在第一學年講授；上期所介紹最近英國老教師哥德弗及雪頓(Godfrey and Siddons)所著算學教授法亦有如是主張。簡易代數之內容,似未明白規定，吾人以爲不僅用文字代數說明算理，用簡易方程解四則問題,尤應運用代數基本公理，例如應用算術上之百分利息等,可

引用代數中等量公理．故初一下除應用算術外，另闢簡易代數一科，俾可於二年級正式學習代數時，不致感受驟習新原理之困難．其次，數值三角中三角函數之意義及其關係，須將幾何中之比例讀完後，方能講授，且不僅與幾何有關，亦應與代數聯絡，因直角三角形解法及其應用問題，純係利用代數中之對數計算，最近何魯陶三氏所著之代數亦附有三角一章，可知此科在代數與幾何皆應有同等之聯絡也．初中算學所習者均係基本事項，應有充分時間之講授，俾得徹底之了解，原定時間不敷，故擬增為30學分，其支配情形如次表所示:

學程 \ 時數 \ 學期	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
算術	理論部分 3	應用部分 3				
代數		簡易部分 2	3	3	2	2 附數值三角
幾何	實驗部分 2		2	2	3	3 附數值三角

(二)高中．部頒暫行標準規定必修課程原為15學分，現已增為20學分，其時間支配如次;

學程 \ 時數 \ 學期	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
代數			3	3	2	
幾何	3	2				
三角	1	2				
解析幾何大意					2	2

高中取消文理分科制，吾人認爲流弊甚大. 因學生至高中後，志趣已經確定，而讀習算學能力程度之差別，甚爲顯著. 非學習理工科者，强制灌輸過量之算學知識，匪特徒勞無益，抑且影響個性之發展. 願習理工科者，若不施行嚴格之訓練，勢難與國內各大學理工科所學之算學程度啣接. 近年來中學程度之低落，及投考大學取錄人數百分比之銳減，謂係受此非驢非馬之普通科制所賜，不爲過甚其辭. 最爲吾人所不解者，誠如部頒標準中所言："高中必修課程僅有二十學分，而課程竟有五六種之多，勢難悉詳盡.……故立體幾何，高等代數，解析幾何，僅需講授大意". 既知有此缺點，理應多設選修課程，補充講授，不料其中所定之選科僅有四學分，而所設之課程，則爲下列四門，(1)微積分大意，(2)近世幾何大意，(3)球面三角，(4)應用算學. 此種好高騖遠之見解，吾人實不敢贊同. 蓋前述三種必修課程，乃係奠定中等算學之基礎，進修高等算學之鑰匙，國內各大學皆未重設此種課程，將此責任諉之於高中，而高中又僅授其大意，基本事項尚未嫻熟，遽選習大學中應有之高深課程如上述之四門者，其無良好效果，固可逆料也. 更有進者，高中既係普通科，所有之知識當然不會高深而專門，故應用算學，似無另設之必要. 近世幾何一科，坊間教本，多有摻入平面幾何中，實係錯誤. 克萊因主張應在習解析幾何後方能講授，因其幾何量，乃與代數中正負無窮虛實之理相對應者. 不過，微積分大意，必須列入高中課程中，因其不僅養成學生之函數觀念，且其微係數與高等代數之方

程式論及解析幾何之切線法線方程式有關，故應提早至三上講授，俾能于三下時所選之課程中運用．因此，吾人爲顧及有志理工科者起見，主張增設選科爲十學分，補授所學各科大意中未習之部份，並爲便利選修課程計，乃將必修課程提前授完，合計必修課程共爲30學分，其時間支配有如次表所示：

學程＼時數＼學期	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
代數及高等代數		2	3（大意）	3（大意）		3（選科）
平面幾何	2	2				
立體幾何		1（大意）	2（選科）			
三角	3					
解析幾何				2（大意）	2（大意）	3（選科）
微積分大意					2（選科）	

我國向有"會而不議，議而不決，決而不行"之通病，此次部頒課程標準，幸經專家會議議決，更望各校當局努力奉行，共同推進，則今後中等算學教育之前途，實利賴之．吾人因其影響之鉅大，輒自忘其譾陋，不敢緘默，謹述所見，以供參考，倘能拋磚引玉，尤爲吾人所企望者也．

不等式淺說

蕭文燦

3. 不等式之種類. 等式有恒等式與方程式之別. 恒等式者,不問式中文字爲何值,其等號之關係常常能保持者也. 方程式者,式中文字須爲某值,而等號乃成立者也. 證明恒等式之關係常成立謂之證恒等式. 求合乎方程式之數值謂之解方程式. 不等式亦有此兩類. 其對應於恒等式者,曰絕對不等式,對應於方程式者,曰條件不等式,關於條件不等式之解,留待下章討論. 此處僅證明幾個絕對不等式,以爲基本原理應用之例焉.

例1. 証: $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, a,b 均爲正數.

(證1) $$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

因 $a\neq b$, 故 $\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$.

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0,$$

而 $$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

(証2) 因 $$\frac{a}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

兩邊各減 1. 則得

$$\frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}-b}{b},$$

設 $a>b>0$. 則 $\sqrt{ab}>b$,

因而得 $a-\sqrt{ab}>\sqrt{ab}-b.$

移項即得 $a+b>2\sqrt{ab}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

注意.如設 $b>a>0$. 則由恒等式 $\frac{b}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$ 出發.

(証3) 如 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ 爲眞,

則不可不 $a+b>2\sqrt{ab}$ 爲眞.

即不能不 $(a+b)^2>4ab.$

即不能不 $a^2-2ab+b^2>0$

即 $(a-b)^2>0.$

但 $a\neq b$ 故此式爲眞. 如此上推可知 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$. 爲眞.

例2. 設 a,b,c 皆爲正且不相等，則

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab.$$

(證) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}>0.$$

故 $a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab.$

(別證) 將下列三不等式

$$b^2+c^2>2bc,$$

$$c^2+a^2>2ca,$$

$$a^2+b^2>2ab,$$

邊邊相加則得

$$2(a^2+b^2+c^2)>2(bc+ca+ab)$$

故 $$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab.$$

例3. 設 a, b, c 為各不相等之數，則依 $a+b+c>0$ 或 $a+b+c<0$ 而得

$$a^3+b^3+c^3>3abc \quad 或 \quad a^3+b^3+c^3<3abc.$$

(證) $$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$$

故 $a+b+c>0$ 則 $a^3+b^3+c^3-3abc>0$ 即 $a^3+b^3+c^3>3abc.$

$a+b+c<0$ 則 $a^3+b^3+c^3-3abc<0$ 即 $a^3+b^3+c^3<3abc.$

例4. 若 n 為任意之正整數，則

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}>\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$$

(證) 因 $2n-1$ 與 $2n+1$ 為兩不等之整數，依例1.

$$(2n-1)+(2n+1)>2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}.$$

即 $$2n>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$$

兩邊以 $2n\sqrt{2n+1}$ 除之，$\sqrt{2n-1}$ 乘之，得

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}>\frac{2n-1}{2n}$$

即 $$\frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式中之 n 迭次以 $n-1$ 代之得下列之一羣不等式.

$$\frac{2n-3}{2(n-1)}<\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{2n-5}{2(n-2)}<\frac{\sqrt{2n-5}}{\sqrt{2n-3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{2\cdot 3}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\cdots\cdots\cdots\cdots(n-2)$$

$$\frac{3}{2\cdot 2}<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdots\cdots\cdots\cdots(n-1)$$

$$\frac{1}{2\cdot 1}<\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(n)$$

將此 n 個不等式邊邊相乘則得

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

此卽本題所欲証之第一部分也.

又 n 與 $n+1$ 為兩不等之整數. 故

$$n+(n+1)>2\sqrt{n(n+1)}$$

即 $$2n+1>2\sqrt{n(n+1)}$$

故得 $$\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{\frac{n+1}{n}}.\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

次第以 $n-1$ 代之,得

$$\frac{2n-1}{2(n-1)}>\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

$$\frac{2n-3}{2(n-2)}>\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{2\cdot 3}>\sqrt{\frac{4}{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(n-2)'$$

$$\frac{5}{2\cdot 2} > \sqrt{\frac{3}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (n-1)'$$

$$\frac{3}{2\cdot 1} > \sqrt{\frac{2}{1}} \cdots\cdots\cdots\cdots (n')$$

將此 n 式邊邊相乘得

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots\cdots 2n} > \sqrt{n+1}$$

故 $$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n} > \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$$

此即本題之第二部分也.

II. 不等式之解法

1. 求不等式中所含文字之數値之界限,謂之解不等式. 在界限中之數値,皆可使不等式成立,此等使不等式成立之數値,謂之滿足於不等式. 但界限不必定爲有限數,其一爲有限數者,如 $a<x<\infty$ 或 $a>x>-\infty$,僅標明其有限數値之界限即可. 即前者書爲 $a<x$,其意爲凡大於 a 之一切實數,皆滿足於此不等式;後者書爲 $x<a$,其意爲凡比 a 小之實數,皆滿足於此不等式也. 至兩界限皆爲無限大如 $-\infty<x<+\infty$ 者,則是一切實數値皆滿足於此不等式,是即絕對不等式. 本章就條件不等式立論,分爲一元一次不等式,一元二次不等式,分數不等式,無理不等式,聯立不等式諸節論之.

2. 一元一次不等式. 不等式之次數仍如等式,以其所含未知數之文字之次數爲準. 凡一次不等式,皆可依前章定理III移項及定理VI去分母整理爲

$$ax+b>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之形．故

$$ax>-b.$$

若 $a>0$ 則 $$x>-\frac{b}{a}.$$

若 $a<0$ 則 $$x<-\frac{b}{a}.$$

若 $a=0$ 且 $b>0$，則不等式(1)無論 x 爲何値皆成立，是即原式爲絕對不等式．若 $a=0$ 而 $b<0$，則(1)不能成立，因而原式亦不能成立．

例．解 $\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{x+3}{5}>\dfrac{2x+1}{6}-\dfrac{2}{5}$．

(解)．以分母之最小公倍數30乘原式之兩邊得

$$10(3x-1)-6(x+3)>5(2x+1)-12$$

移項而整理之得

$$14x>21,$$

$$\therefore \quad x>\frac{3}{2}.$$

3．一元二次不等式．凡一元二次不等式皆可整理成

$$ax^2+bx+c>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $$ax^2+bx+c<0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之形．(其實只爲(1)形，蓋若爲(2)形則兩邊以 -1 乘之即變爲(1)形也)．今設此二次式爲

$$y=ax^2+bx+c$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}.$$

以 D 代此二次式之判別式 b^2-4ac，則得

$$4ay=(2ax+b)^2-D \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(a) $D\leqq 0$ 時．(3)式之右邊無論 x 爲何值皆爲正，即 $4ay>0$．故此時(i)若 $a>0$ 則(1)常成立，而(2)不能成立．(ii)若 $a<0$ 則(1)不能成立而(2)常成立．

(b) $D>0$ 時，二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

常有兩不同之實根，今以 x_1 表其大者，x_2 表其小者則

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(i)若 $x>x_1$ 則 $x-x_1>0$，$x-x_2>0$ 因而 $(x-x_1)(x-x_2)>0$，若 $x<x_2$ 則 $x-x_1<0$，$x-x_2<0$ 因而 $(x-x_1)(x-x_2)>0$，故此時若 $a>0$ 則(1)常成立而(2)不成立．若 $a<0$ 則(1)不能成立而(2)常成立．(ii)若 x 在 x_1 與 x_2 之間即 $x_1>x>x_2$，則 $x-x_1<0$，$x-x_2>0$，因而 $(x-x_1)(x-x_2)<0$．故此時若 $a>0$ 則(1)不能成立而(2)成立，若 $a<0$ 則(2)常成立而(1)不能成立．

例1．解．$x(2x+5)>(x-3)(3x+5)$

(解) 解括弧移項簡單之得

$$-x^2+9x+15>0 \quad 即 \quad x^2-9x-15<0.$$

$x^2-9x-15$ 之判別式爲 $D=141>0$，此乃(b)之情形．方程式

$$x^2-9x-15=0$$

之根爲 $x_1=\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{141}}{2}$ $x_2=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{141}}{2}$

故不等式成立之x之界限爲

$$\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{141}}{2}<x<\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{141}}{2}$$

例2. 解不等式

$$x^3+29x> \text{或} <9x^2+30.$$

(解) 移項整理之得

$$x^3-9x^2+29x-30> \text{或} <0.$$

故 $$(x-2)(x^2-7x+15)> \text{或} <0.\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

而 $x^2-7x+15$ 之判別式爲負而 $a>0$ 故 $x^2-7x+15$ 常爲正，

故(A)式依

$$x-2> \text{或} <0$$

而定，即 $$x>2 \text{ 或 } <2,$$

故 $x>2$ 時，$x^3+29x>9x^2+30$ 成立. $x<2$ 時，$x^3+29x<9x^2+30$ 成立.

本刊啟事

本刊前因年假關係，致第二第三兩期出版稍遲，深爲抱歉. 以後决按期出版，以副讀者之厚意. 幸垂築焉!

初等幾何之一問題

彭　先　蔭

無三線共過一點的任意四直線交成四個三角形，這四個三角形互相有下列的幾種關係：

a. 各三角形的外接圓圓周會於一點.

b. 從諸外接圓的公共點至各直綫所作垂線之足共在一直線上.

c. 四外接圓圓心共在一圓周上.

d. 四三角形之垂心(Orthocenter)共在一直線上.

這是一個老題目，其他理論關於此四直綫者當然很多；上之四種在歐美書籍雜誌中早有記載，偶然想到覺有趣味，特書出以供讀者研究.

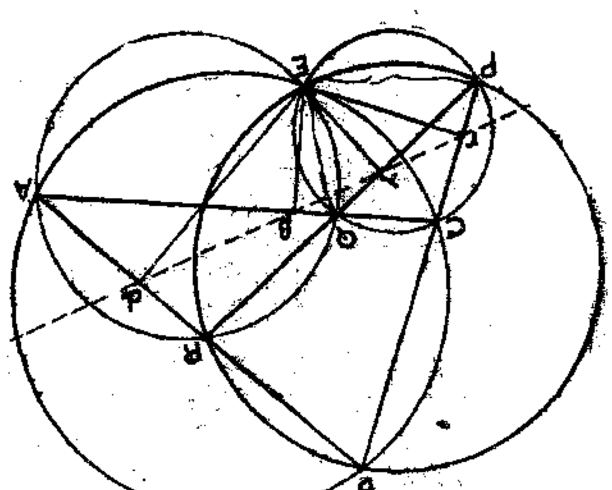
a. 求証各三角形之外接圓會於一點.(參看第一圖)

設 AB, AC, PR, PB, 爲任意四直線交成四個三角形 ABC, PBR, AQR, PQC. 作 PBR, 與 PQC 兩三角形之外接圓；設其另一交點爲 E.

則 $\angle AQE = \angle CQE$ 之補角

$= \angle CPE = \angle BPE$

$= \angle ERB$ 之補角 $= \angle ARE$



(第一圖)

因知　$\angle AQE=\angle ARE$，則 A，E，Q，R 四點必共在一圓周上；即 E 點在 Δ ARQ 的外接圓周上。

同理　$\angle ABE=\angle RBE=\angle QPE=\angle QCE=\angle ACE$.

因知　$\angle ABE=\angle ACE$，則 A，B，C，E 四點必共在一圓周上；即 E 點亦在 Δ ABC 之外接圓上。

是以三角形 ABC，PBR，AQR，PQC 之外接圓共會於一點 E.

b.　求証自諸外接圓的公共點至各直線所作垂線之足共在一直線上.(參看第一圖)

設諸外接圓之公共點爲 E．

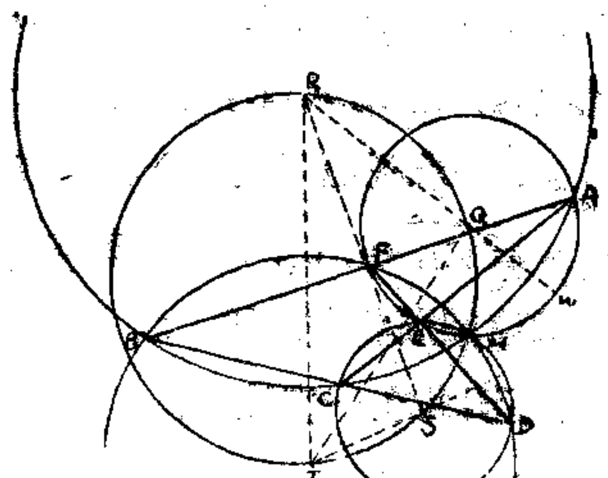
以三角形 ABC 論，從 E 至 AB，AC，BC 三邊的垂線之足 α，β，γ 必共在一直線上(西摩松線 Simsons line)，

以三角形 PBR 論，從 E 至 PB（即 BC），PR，BR（即 AB）三邊的垂線之足 γ，λ，α．必共在一直線上．

前後兩線有 α，γ 兩點公共故必相合爲一直線；即 α，β，γ，λ 共在一直線上．

c.　求証四外接圓心共在一圓周上(參看第二圖)．

（第一法）設四線爲 AFB，BCD，CEA，DEF．三角形 AFE ABC，ECD，FBD，的諸外接圓圓心依次爲 Q，R，S，T．並設此諸圓相會於 M，則因 $RQ\perp AM$，



（第二圖）

$RS \perp CM$，且 A, B, C, M 同在一圓周上，

$$\therefore\quad \angle QRS = \angle AMC \text{ 之補角 } = \angle ABC.$$

同理 $QT \perp FM$, $ST \perp DM$ 故得

$$\angle QTS = \angle FMD \text{ 之補角 } = \angle FBD.$$

F 爲 AB 上之一點，D 爲 BC 上之一點． 故 $\angle ABC$ 即 $\angle FBD$

$$\therefore\ \angle QRS = \angle QTS.$$

因之証明 Q, T, S, R 共在一圓周上．

（第二法）連圓心 Q, R；則 QR 必平分 AM 弧於其中點 W.

則 $\angle MQW = \angle AEM = \angle MEC$ 之補角

$= \angle MDC = \angle MSR$ （因 SR 平分 $\overset{\frown}{MC}$ ）

故 $\angle MQW = \angle MSR$，即 $\angle MQR$ 同 $\angle MSR$ 互爲補角．

因知 M, Q, S, R 共在一圓周上．

同理 $\angle MQW = \angle MEA = \angle MFA = \angle MFB$ 之補角 $= \angle MTR$（因 TR 平分 $\overset{\frown}{MB}$）

故 $\angle MQR$ 同 $\angle MTR$ 互爲補角；則 T 必在 M, Q, S, R 的圓周上，即 Q, R, S, T 四圓心共在一圓周上．

d. 求証四三角形之垂心共在一直線上．(參看第三圖)．

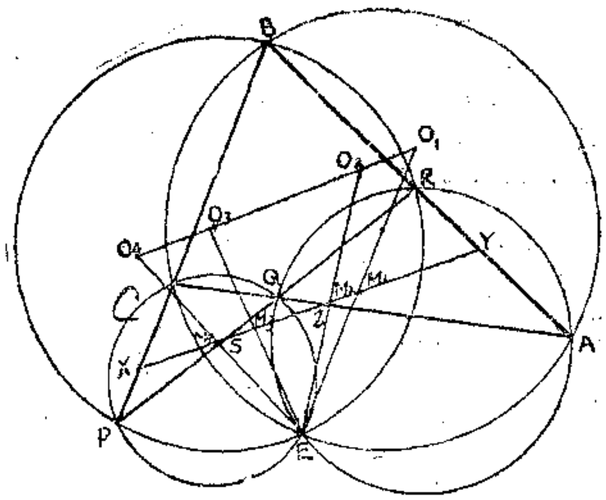
設 O_1, O_2, O_3, O_4，依次爲 $\triangle$ ARQ, PBR, ABC, FQC 的垂心．E 爲諸圓周相會之點．X, S, Z, Y 爲自 E 至各邊所作垂線之足(已証明共在一直線上)．

連 EO_1, EO_2, EO_3, EO_4，各交 XSZY 直線於 M_1, M_2, M_3, M_4.

SZY 爲 E 對於 $\triangle ARQ$ 之西摩松線，故 M_1 爲 EO_1 之中點*(此定理另証之於後)．

同理 M_2 爲 EO_2 之中點，M_3 爲 EO_3 之中點，M_4 爲 EO_4 之中點．

但 M_1，M_2，M_3 M_4 在一直綫上，故 O_1，O_2，O_3，O_4 亦必共在一直綫上．



(第三圖)

*證明從三角形之外接圓上一點 E，連其垂心 O 之直綫 EO，必被 E 點對於此三角形之西摩松線所平分．(參看第四圖)

設 E 爲 $\triangle ABC$ 之外接圓上一點．YZX 爲 E 對於 ABC 的西摩松線．

延長由 E 到 AC 的垂綫 EZ 遇外接圓於另一點 E'，則

$BE' \parallel YX$ (因 $\angle CXZ=\angle CEZ=\angle E'BC$)

延長 BO 遇 AC 與外接圓於 M 與 D 二點，

則

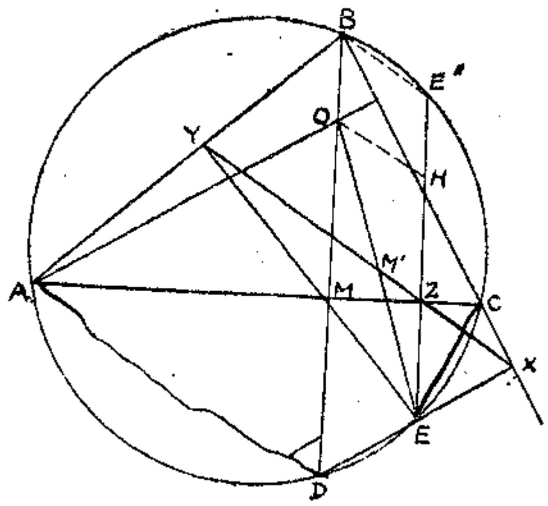
$BD\perp AC$ $\therefore BD \parallel EE'$ $\therefore BE'=DE$

從 O 作 $OH \parallel BE'$；則 $OH=BE'=DE$．

故 OHED 爲一等腰梯形．

又 $\angle ADB=\angle ADO=\angle BCA=AOD$．(因 $AO\perp BC$，$DO\perp AC$)

故 △AOD 爲一等腰三角形,而 M 爲 DO 之中點.



(第四圖)

在等腰梯形 OHED 內 ZM 爲 OD 之垂直平分綫;故亦必爲 EH 之垂直平分綫. 故 Z 爲 EH 之中點.

今設 M' 爲 EO 與西摩松綫 XY 之交點,則因 ZM' // OH,而 Z 爲 EH 之中點,故 M' 爲 EO 之中點.(證訖)

本刊啟事

自第五期起,特請程綸先生將歐美名家所著之算學教授法,擇其重要者譯之,陸續發表,讀者幸注意焉。

行列式在平面解析幾何上之應用

龍季和

行列式在中等算學方面的應用，要算在解析幾何上最廣了．但是國內出版的教科書和國內流行的英文教本，很少把牠討論，因此學解析幾何的學生受苦不淺．我現在把牠介紹出來，給大家應用去．

定理一．以 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 三點爲頂點之三角形，其面積爲

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

証．在普通的解析幾何教本上，都有下面求三角形面積的公式，(所以牠的證明也從略了)：

$$F = \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$$

括號內每連續兩項可書成一小行列式，故

$$F = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

定理二．$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 三點在一直線上的條件爲

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = o$$

證. 若這三點在一直線上，那末以這三點爲頂點三角形的面積，必定等於零，所以所要的條件就如上述.

定理三. 經過 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ 兩定點之直線方程式爲

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = o$$

證. 在定理二中，假定 P_3 是動點，便可以把方程式求出了.

定理四. 三綫 $a_1x+b_1y+c_1=o$, $a_2x+b_2y+c_2=o$, $a_3x+b_3y+c_3=o$ 相交於一點的條件爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

證. 先求出第一二兩直綫的交點

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};$$

代入第三方程式內，

$$\frac{a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + \frac{b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + c_3=o,$$

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =0,$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0,\text{ 或 }\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

定理五. 三綫 $a_1x+b_1y+c_1=o$, $a_2x+b_2y+c_2=o$, $a_3x+b_3y+c_3=o$ 所包三角形之面積,等於 $-\frac{\Delta^2}{2C_1C_2C_3}$, 內 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$,

證. 先自三方程式求出三對 x 與 y 之值,

$$x_1=\frac{A_1}{C_1} \qquad y_1=\frac{-B_1}{C_1}$$

$$x_2=\frac{A_2}{C_2} \qquad y_2=\frac{-B_2}{C_2}$$

$$x_3=\frac{A_3}{C_3} \qquad y_3=\frac{-B_3}{C_3}$$

內 $A_1, B_1,$……代表 Δ 中與 a_1, b_1……相當之小行列式,其值自 $C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 中易悟得.

再依定理一,得

$$F=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{A_1}{C_1} & \frac{-B_1}{C_1} \\ 1 & \frac{A_2}{C_2} & \frac{-B_2}{C_2} \\ 1 & \frac{A_3}{C_3} & \frac{-B_3}{C_3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} C_1 & A_1 & B_1 \\ C_2 & A_2 & B_2 \\ C_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=-\frac{\Delta^2}{2C_1C_2C_3}.$$

最後一步,須再一補題證之:

補題．
$$D=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_2 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2$$

證． 第二行第二列各乘 -1，則

$$D=\begin{vmatrix}A_1 & -B_1 & C_1\\ -A_2 & B_2 & -C_2\\ A_3 & -B_3 & C_3\end{vmatrix},$$

$$D\Delta=\begin{vmatrix}a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1 & a_2A_1-b_2B_1+c_2C_1 & a_3A_1-b_3B_1+c_3C_1\\ -a_1A_2+b_1B_2-c_1C_2 & -a_2A_2+b_2B_2-c_2C_2 & -a_3A_2+b_3B_2-c_3C_2\\ a_1A_3-b_1B_3+c_1C_3 & a_2A_3-b_2B_3+c_2C_3 & a_3A_3-b_3B_3+c_3C_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\Delta & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & \Delta\end{vmatrix}=\Delta^3. \qquad \therefore\ D=\Delta^2.$$

定理六． $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 代表一對相交直線之條件爲

$$\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}=0.$$

證． 解此方程式得

$$x=\frac{-(By+D)\pm\sqrt{(B^2-4AC)y^2+(2BD-4AE)y+(D^2-4AF)}}{2A}$$

要該方程式代表一對相交直綫，該方程式之右邊必能分解爲兩個一次有理因子，即根號下之式必爲一完全平方，即

$$(2BD-4AE)^2-4(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0,$$

或　$4ACF+BDE^2-AE^2-CD^2-FB^2=o,$

或 $$\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = o.$$

定理七. $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, $P_4(x_4,y_4)$ 四點在一圓周上之條件爲

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

証　設圓之方程式爲

$$A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=o.$$

將 P_1, P_2, P_3, P_4 之坐標依次代入得四方程式,次自這四方程式,消去A, B, C 及 D 即得.

定理八. 經過 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 及 $P_3(x_3,y_3)$ 三點圓之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = o.$$

証. 在定理七中,假定 P_4 是一動點,便可以把方程式求出了.

在立體解析幾何中亦有許多地方利用行列式,待異日再做一篇論續討罷. （二卷五期

亞 幾 默 德

Archimedes (287?—212 B. C.)

瘦 桐

亞幾默德是有史以來的一個大工學家,建築家.物理學家,而兼算學家,紀元前 287 年生於西西里島 (Sicily) 之敍拉古城 (Syracuse). 其家世與皇族有親戚關係, 但亦有說他出身寒微的. 少時曾僑居西班牙和埃及,在亞歷山大大學講學有年,爲該學派中傑出的人物.

他一生未嘗政治生涯, 所以豐功偉績, 非彼所有;不過曾充國王希羅 (Hiero) 的顧問,替政府解決了一些關於物質上的問題. 相傳希羅做了一頂金冠,疑心工匠偸了他的金子,雜些銀質在裡頭,命他去辨別眞僞. 你想這除掉把金冠打破之外, 如何去鑑定呢? 亞幾默德受實有些爲難了. 想了許久,不易解決. 有一次他正在洗澡的時候,偶然發覺他的身體減輕了許多,於是恍然大悟, 喜出望外, 忘卻赤身露體奔出浴室,大聲疾呼:"我知道了! 我知道了!" (Eureka! Eureka!). 結果, 他畢竟利用水的浮力,物質的比重,絲毫不損毀這座金冠,設法把牠的眞僞判定了.

他特別富於駕馭自然的能力, 嘗稱"無論多重的東西, 總可用力量去移動牠."並誇大的說:" 給我一個支點, 我可以移動地球" (Give me where I can stand and I will move the world). 國王希羅,初不謂然. 恰巧當時有一艘擱淺的大船,用許多的人費很大的氣力, 都沒法使牠入塢. 希羅特地叫亞幾默德去試驗

一下，他滿以爲如此必可以難住亞幾默德了．殊不知亞幾默德從容不迫的裝置許多的轆轤，不費甚麼氣力輕輕巧巧平平坦坦把他拖到岸上來，如同在海水面上一樣．從此亞幾默德名噪一時，國王希羅也嘆服不已，嘗向人道："亞幾默德的話，沒有一句是不可信服的．"

西歷紀元前 218 年(?)，羅馬大將軍馬薩拉士 (Marcellus) 率衆圍攻敍拉古，勢甚危急．國王召亞幾默德進宮，籌商抵抗救亡的大計．亞幾默德遂製造許多戰具，應用槓杆的原理飛箭擲石，復發明凹鏡聚光焚燒敵船．羅馬軍隊，損失不小，敍城賴以稍安．然而寡固不可以敵衆，弱固不可以敵强，這座小小的城池，被圍七年，餉盡援絕，終於爲馬薩拉士於紀元前 212 年攻下了．

當那城破的時候，滿城百姓，眞個是國難臨頭，如同喪家之犬，救死未遑．你想這位大科學家他在幹些甚麼？他並不逃之夭夭和別人一樣，很鎮靜的依舊在沙上證他的幾何．有一個羅馬士兵闖近他的身旁，來勢洶洶．要帶他一同去見他們的大帥——因爲馬薩拉斯愛惜其才，曾經下過一道軍令，不許殺害亞幾默德，只要生擒活捉．亞幾默德毫不在意反厲色呵叱："別毀了我的圓形(Don't spoilmy circle)！"這小兵怒不可遏，拔出腰刀竟把他殺害了．亞幾默德死後，馬薩拉士深爲痛惜，厚禮優葬，並在他的墓前樹立石碑，上面鐫刻他平生得意之作，即一個內含球體的圓柱，以示紀念．

亞幾默德關於純粹科學上的貢獻，極其宏大．德人來布尼

玆(Leibniz)稱讚他的著作,謂可使我們佩服的不在近世學者的發明之下.玆將他在算學方面的研究,略舉於次.

I.關於平面幾何學之研究:

(甲)量圓法(The measure of the circle).　含有命題三則.第一題證明圓之面積與一直角三角形之面積相等,夾此直角之兩邊,一爲半徑 r,一爲圓周 $2\pi r$,即圓之面積爲 $\frac{1}{2}r\times 2\pi r=\pi r^2$.第二題證明 π 之值約有 $\pi r^2:(2r)^2=11:14$ 之關係.第三題於圓之內外同作 96 邊形,各計其周邊之長,假定圓周之長,位於兩者之間,可推得 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

(乙)拋物線求積法(Quadrature of the Parabola).

計有命題二十四:由一至五論圓錐截線的性質,復由此等曲線之交截,誘導出下列三次方程式 $x^3\mp ax^2\pm bx+c=0$ 之解法;由六至十七,說明拋物線與任意弦所包圍之面積,約爲其外切平行四邊形面積之三分之二;由十八至二十四,係根據窮舉法(Method of Exhaustion)而作幾何的證明.

(丙)螺線之探討(The Spiral).　共有命題二十八則.即所謂亞幾默德螺線(The Spiral of Archimedes),此底稿曾寄與其友人杜西塞斯(Dositheus)及戈龍(Conon)校讀一過,杜戈二氏均爲歐幾里得之後起的碩學.

II.關於立體幾何學之研究:

(甲)圓球及柱體(The sphere and cylinder).　書共兩册,題凡六十,此稿亦曾寄給杜氏,他頗以爲得意.書中如角

錐,圓錐,球,內接於圓之多邊形及繞圓之直徑旋轉所生之旋轉體之面積和體積,均已求出.

(乙)圓錐狀體及球狀體(Conoids and spheroids). 共命題四十,也多半是求積的方法.

Ⅲ.關於算術之研究

(甲)命數原理(Principle of numeration). 其主旨在供給我們以最便利的命數方法.當時希臘的命數法所表出之數,只能由 1 至 10^8, 他稱此爲第一級單位數.若以 10^8 爲第二級單位,則凡由 10^8 至 10^{16} 間之數皆可以第二級單位加第一級單位表之.又若以 10^{16} 爲第三級單位則由 10^{16} 至 10^{24} 間各數,亦可表出.如是遞推,遂開後世命數法的先河.

(乙)計沙法(The sand reckoner). 他嘗說凡人皆以爲在西西里海岸之沙數,爲不能計算之量,但他可以算出.設以地球爲中心,太陽至地球之距離爲半徑,作一大球用沙裝滿,亦能求出其沙粒之最大極限值.

總之,他最富於創造的天才.雖與其先輩歐幾里得.後輩亞波羅里斯(Apollonius)共稱爲古代三大算學家,但歐亞二氏,整理先人所得者居多,而他獨具隻眼,別開生面,處處均表現其偉大創造力.所以意人稱他有超人的天才(He had a genius more divine than human),蒲林里(Pling)尊他爲算學之神(The god of mathematics),法人譽爲幾何學之荷馬(The Homer of geometry),均是的當的批評.

世 外 奇 談

（續）

A Square 原著 乙 閣 譯

7. 不正當的人們

在本書以前各節中，我曾經假設——雖然沒有在開場白中明白表示出來——二元世界內面的人們，一個個都是正的。正的意思，就是說身體各部都有規則，譬如婦女們不但是線，而且一定要直，工人士兵一定要有兩邊相等，商人們的三邊都要相等，律師（我自己忝在其列）四邊相等，總之凡屬多邊形，他的各邊都要相等。

邊的長短，自然要看各人的年齡如何而定。新產女嬰差不多一寸左右，身量高的婦女有到一尺的。至於各級的男子，邊長之和，就成年人而言，大約三尺內外。不過邊的長短是沒有關係的，要緊的是邊的等不等。邊之相等性，是上天的意旨，二元世界的人們，其所以能安居樂業的理由，全在於此，這個道理，稍為思索一下，就可以明瞭。

如果邊不相等，當然角也不相等。要知道人們的品級，無論"摸"也好，"看"也好，單單一個角是不夠的，勢必每一個角都要摸到纔行。但是人的生命有限，那能一天到晚"摸"過日子哩？這樣一來，視覺認識法立即化為無用；"摸"的技術再不能保存；往來交際都有危險；凡事皆不能相信，無從預料；整日價在危險中過活，眞是如臨深淵，如履薄冰；總之一句話，一切文化都要毀滅，重復回到野蠻時代的狀態。

我的話固然說得太快，不過這都是事有必至，理有固然。只要稍一思索，再取日常生活中一事為例，誰都可以相信我們社會的組織，是以"角度相等"為根據的。譬如在大街之上，遇着兩三位朋友，一看他們的角度和那很快暗下去的邊，你便立即知道他們是正當商人，於是請他們到家便餐。這種很平常的事情，現時你可以十分放心的去做，因為一個成年的三角商人應該占多大的面積，誰都知道得很清楚；

但是假使你的商人朋友，在他那端正的頂角後面，拖着一個有一尺來長的對角線的平行四邊形，夾在門口，進退不得，試問對於這樣一個怪物你有什麼辦法？

這種事實，在你們住在三元世界的讀者們看起來，是顯而易見的，本來用不着絮聒，反而令人生厭．總之在這種不倫不類的情形之下，只量一個角是靠不住的，一個人的畢生時光，只好都用了去量別人的角度．本來在羣衆之中，想要避免相撞，即便在受過教育的正方人士，已經不是一件容易事，如果在場的人，沒有一個是正的，一切情形，無法可以預料，稍有意外的擾亂，一定有莫大的危險，如果恰巧有婦女或兵士在內，說不定還要送掉幾條性命啦．

所以體形的端正，不獨是上天所命，爲了生活上一切便利，也有必要，同時法律方面，對於這點也很關切．在我們這裏體形不正當的人們，等於你們的惡人，罪犯，或且過之，處置他們的方法，也和你們一樣．有一班是非不明輕重不分的人們，以爲外形的不正，與內心的不正，不能混爲一談．他們說："這些不正當的人們，生下來就爲父母所厭惡，爲弟兄姊妹所戲弄，爲家人所不理，爲社會所鄙視猜疑，永遠得不到負責做事，令人信仰的地位，和有益的工作．他的一舉一動，都要受警士們惡意的監視，一直等到相當年齡，自已去請求檢驗，如果不正的程度，超過法定範圍以外，就被處以死刑，否則幽禁在官廳內，任七等書記職務，事情既毫無興趣，薪俸更少得可憐，而且不許婚配，起居飲食，都不准出外，即便遇有例假，也要受嚴重的監視，不能行動自由．這種冷酷的環境，非人的待遇，試問誰受得了？內心之不正，與其說同外形不正一樣是生成的，毋寧說是環境造成的．"

這些理由，無論如何動聽，我個人是不相信的，我以爲我們祖先所定的政策，認爲縱容不正當的人們，和維持國家的治安不能兼籌並顧，是毫無舛誤的．才識淵博的政治家，所見與我正同，所以他們也不爲浮言所動．不正當的人們，他們的生活誠然是難受，不過爲了大多數的利益，不得不如此．假令一個人前面是三角形，後面却是多邊，如仍聽其存在，再生出奇形怪狀的子孫，那還成什麼樣子？難道爲了要容納這種怪物，把二元世界內的房屋教堂都重新另造一遍？戲院售票人勢必先量好

觀客的身材，纔敢請他入座，豈不麻煩煞人？再說這些不正當的人們，是否應免兵役？假使不能免，試問將何以整飭軍紀？况且他們欺詐成性，只要把那身體多邊的部份，先進店門，便可冒充闊客，騙取貨物，易如反掌．儘管有些侈談博愛主義的人們，要請求取消關於懲治不正人們的刑法，據我個人的觀察，大凡體形不正的人，沒有一個有好心眼兒的，至少是一個僞君子，假道學，其次便是性情乖張，不近人情，最壞的那就無惡不作了．

有些地方嬰孩產生之後，只要角度超過規定數目半度，立即處死，這種嚴刑峻法，我也是不贊成的．有幾位天才卓絕，精明能幹的人，他們小時候的角度，曾經差到四十五分之多，假使那時便遭了殺害，豈不是國家一種不可補救的大損失？好在醫學進步，手術奏效，體形的不正，在嬰孩時期，可以部分治療，有時竟能全愈．所以我主張不要規定差到多少度，只要醫院認爲可以補救，就該仰體上天好生之德，貸其一死，就令萬不得已，也應該用一種不痛苦的方法，絕其生命，這纔是折衷的辦法呢．

8. 歷史上之彩色時代

二元世界的生活，是苦悶的，這話在留心本書的讀者們，聽了一定不會驚訝，不過我的意思，並不是說我們這裏沒有戰爭，黨變，暴動，叛亂以及其他種種可供史料的有興趣的事實；而且日常生活方面，隨時隨地都發生算學上的問題，舉凡視聽所及，都要用心察度，纔能解決其究竟，這種滋味，你們在三元世界是嘗不到的．我之所以說生活苦悶，是從審美的，藝術的觀點而言，眞的，從這兩方面說起來，生活是苦悶得很．

一個人環境的一切，如風景，名勝，照像，花草，圖畫等等足以引起美感的事物，都不過是一條直線，除了稍許有點光暗的分別而外，總是千篇一律，這樣的生活，還能不枯燥苦悶嗎？

不過這種情形，並不是自古以來就是這樣的．據民間傳說，我們遠代的祖先

有一個時期，曾經飽享眼福，可惜爲時不久，祇過得六百來年，這種眼福就消滅了。原來那時有一位五邊形，——他的名字，各人各樣說法，不過那時在朝元老們都叫他做顏繚(料)——偶然發見了幾種色素，可以配成各種彩色，幷且發明了著色的方法，於是先把他的住宅粉飾起來，再依次把他的僕人，父親，兒子和孫子都塗上彩色，最後自已也打扮好了。結果不但是美觀，而且有種種便利，所以大家都來傚效。這位顏繚先生，無論走到那裏，他那花花綠綠的身體，立即惹人注意。誰也用不着去"摸"他；誰也不會把他的前身錯認作後身；他的一舉一動，在他旁邊的人看得淸淸楚楚，一點不費思索；在路上看見他，老早就給他讓路，誰都不會撞着他。我們沒有着色的正方形和五邊形，有時在等邊羣衆中間經過，叫他們讓路，所費唇舌，眞是不少，甚至於力竭聲嘶，可是在顏老先生，這些滿用不着。

這種風氣，傳播之速，有如火之燎原。剛過了一個禮拜，顏繚所在地方的正方形和三角形，都依樣裝飾起來，祇有少數比較固執的五邊形未曾加入。一兩個月之後，連那十二邊形都受了傳染。不到一年的工夫，除了品級極高的貴族以外，所有一切人們，都披上了時代的服裝。這種習慣，不消說得，當然由近而遠，傳播出去，經過兩代之後，二元世界中的人們都着了色彩，祇有元老們和婦女們還是例外。

這兩個階級的人們，其所以沒有陷入漩渦，這裏面却有一種自然的道理。因爲新派人物，他們的口號是"一邊一色，天意所在"，意思是說人身的多邊，是天生成好預備分別着色的，一般多邊人士，爲其所惑，盡入彀中，所以他們所到之處，氣象立時爲之一新。可是這句口頭禪，對於我們的元老們和婦女，顯然是風馬牛不相及。婦女是一條直線，無所謂邊不邊，而元老們因爲有那光滑平坦令人羨慕的圓周，——這所說的當然是那眞正地道的圓形，並不是那高級的多邊形——又常時以無邊自誇(這正是婦女們所引爲憾事的)。所以這兩個階級，對於那"一邊一色"的格言，看不出甚麼道理來，因之在這風靡一時的彩色運動魔力之下，還能潔身自好，不與流俗同汚。

這種彩色運動，流弊很多，後文自有交代，不過就美術眼光看來，這個彩色革命的時代，正是二元世界藝術之花萌芽的時期，可惜沒有等到開花結果，就煙消雲散了。生在這個時代，眞是一種愉快的事情，眼福着實不淺。在小的宴會內面，看看在座賓客，已經可以賞心悅目，至於教堂之內，劇院之中，那彩色的種類之多，何只萬千之數，縱令是學問淵博的教師，和那日與脂粉爲緣的優伶，身臨此境，也只有目迷五色，難於辨認。但是最令人心曠神怡的，還要算那莊嚴威武的閱兵式。

但見校場之上，威風凜凜殺氣騰騰，兩萬等腰健兒，一字排開，口令下去，那暗黑的底邊，立即轉將過去，那橙黃或茄花色的銳角夾邊，便現在眼前。正三角形的國民軍，三邊顏色，是紅，白，藍三種，摻在裏面，相映成趣。正方形的砲隊，配好蓮紫，紺青，藤黃，濃赭四色，在那朱紅色的大砲近傍，周旋進退。此外還有五顏六色的正五邊形和正六邊形，在場內來來往往，執行他們副官，軍曹和測量師的職務。此時情景，在身臨其境的人，沒有不神移氣奪的。相傳有一位元老將軍，在閱兵的時候，見他部下隊伍這樣的美觀，一時情不自禁，把他的寶刀和金冠拋在一邊，宣言要拿他們去換美術家的筆，這個故事，至今還傳爲美談。

因爲美術發達的結果，在彩色革命的當時，一切文化都有很光榮的進步，從那時所流行的語言文字方面考察，便可知之。那時最平常的人談吐之間，都充滿着一種風雅的味兒，而最美的詩文，也都是這個時代的產品。晚近科學發達，語言文字隨之變遷，然而話裏行間，多少還有點音韻諧和的意思存在，飲水思源，我們還要深深感謝這個時代的厚賜哩。

問題欄

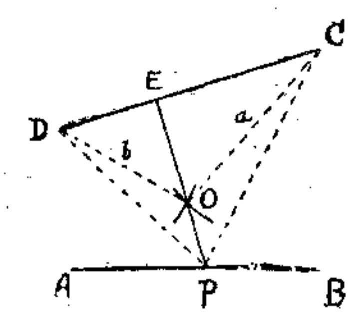
本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露．數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登．來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰．至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下．

I.問題已解決者

7．在直線 AB 上求一點，令從此至 C，D 二定點距離平方之差爲一定．

解(湖北省立師範汪心洞)：

設 a^2-b^2 爲與二定點 C，D 距離平方之一定差．按此以 C 爲心，a 爲半徑；以 D 爲心，b 爲半徑，畫弧相交於 O．作 OE⊥CD 而交 AB 於 P，則 P 卽爲所求之點．



証：因 $CP^2-DP^2=(CE^2+EP^2)-(DE^2+EP^2)$

$$=CE^2-DE^2$$

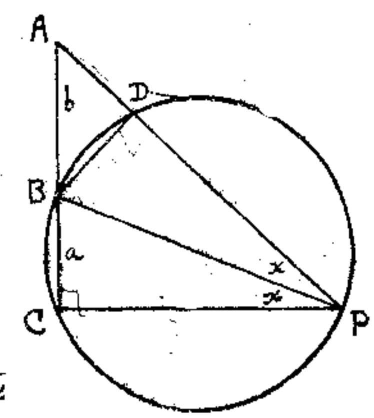
又 $a^2-b^2=CO^2-DO^2=(CE^2+EO^2)-(DE^2+EO^2)=CE^2-DE^2$

故 $CP^2-DP^2=a^2-b^2$(証訖)

(本題解者尙有湖北省立高級中學劉後利君，安徽省立第一中等職業學校湯燧生君，兩君之解均爲特別情形，卽設 $a^2-b^2=CD^2$ 者，已包括於上解中，不另錄)．

8．有山高 a 尺，其頂有樹高 b 尺，在平地上 P 點望之，則山之對角等於樹之對角；求 P 點與山之距離．

解1.(湖北第一女子高級中學畢業生陳傳瑜)：



如圖,設 CP 為所求之距離。以 BP 為直徑作圓截 AP 於 D,則 $AD\cdot AP=AB\cdot AC=b(b+a)$.

但 $$AP=AD+DP=AD+CP,$$

即 $$AD(AD+CP)=(b+a)$$
$$=AD^2+AD\cdot CP.$$

又 $$AD^2=b^2-a^2,\quad AD=\sqrt{b^2-a^2}$$

$$\therefore\quad CP=\frac{b(b+a)-(b^2-a^2)}{\sqrt{b^2-a^2}}=a\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}.$$

解2.(湖北省立師範學校夏曾成):

因 BP 平分$\angle APC$,故 $AP:CP=b:a$. 但 $AP^2=CP^2+(a+b)^2$,故有

$\sqrt{CP^2+(a+b)^2}:CP=b:a$,解之即得CP,答與前同.

解3(湖北省立師範學校梁誠格):

設等對角為x,則$\sin 2x=AD/AB=\sqrt{b^2-a^2}/b$,因之得$x=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$.
由是 $CP=a\cot x=a\cot\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)$,或$CP=(a+b)\cot 2x=(a+b)$
$\cot\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)$ 為答數.

解4(武昌私立張楚中學皮亦雄):

由 $CP=a\cot x$ 及$CP=(a+b)\cot 2x$得$CP^2=a(a+b)\cot x\cot 2x=\frac{a}{2}(a+b)$
$(\cot^2 x-1).=\frac{a}{2}(a+b)\left(\frac{CP^2}{a^2}-1\right)$,解之即得CP,答數同解1.

解5(湖北省立師範學校汪心洞):

由 $CP=\frac{a}{\tan x}=\frac{a+b}{\tan 2x}$,求得 $\tan x=\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$,因得CP之值如前.

9, 有三連續數,設其中數為一平方數,則此三連續數之乘積,必能以60除盡之,求証.

証1(武昌私立張楚中學校皮亦雄):

(1) 凡三個連續數中,必有一個數為3之倍數,故其乘積必能以3整除.

（2）凡數N必成5m，5m±1，5m±2諸形之一，因之N^2必為5n，5n+1，5n−1三形之一．故此三連續數當為5n−1，5n，5n+1；5n，5n+1，5n+2；或5n−2，5n−1，5n，在任何情形之下，其連乘積必能以5整除．

（3）設此三數之中數為奇數2n+1，則其前數為2n，後數為2(n+1)，其連乘積必能以4整除；若中數為偶數，則其平方即可以4除盡．

合(1)，(2)，(3)而觀之，知此三連續數之連乘積必能以$3\times5\times4=60$除盡之，是為証．

証2（湖北第一女子高級中學畢業生陳傳瑜）：

（1）連續五數之積必能以60除盡，因其中至少有二個偶數，一個3之倍數，及一個5之倍數也．

（2）n為整數時則$n^2(n^2-1)$必能以12除盡．因$n^2(n^2-1)=(n-1)n^2(n+1)$而n−1，n，n+1為連續數，必有一為3之倍數；若n為奇數，則$(n-1)(n+1)$可以4除盡，n為偶數則n^2可以4除盡也．

如題所言之三數，為

$$\begin{aligned}(n^2-1)n(n^2+1)&=(n^2-1)n^2(n^2-4+5)=5n^2(n^2-1)+(n^2-1)n^2(n^2-4)\\&=5n^2(n^2-1)+(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

由(1)及(2)此式右邊兩項均可以60除盡，是為証．

10．試解 $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$．

解（湖北第一女子高級中學畢業生陳傳瑜）：

令 $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$，則 $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=y^2+\frac{8}{3}$，代入原式而化簡之得$3y^2-10y+8=0$，而$y=2$及$\frac{4}{3}$．因得$x=3\pm\sqrt{21}$，6，−2．

（本題解者尚有湖北省立師範汪必洞，湖北省立高級中學張業鑫，湖北省立一中初三上王永甫，武昌私立張楚中學皮亦雄，安徽省立第一中等職業學校高一上湯煥生諸君，解法同不另錄．）

提出之問題

提出者國立武漢大嚴棟開.

17.　在以何數爲底數之記數法內,2,8,12方可爲等差級數?爲等比級數?

18.　求解 $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{b}{a}$, $\frac{xy}{ax+by}=\frac{a}{b}$, 其中 $ab\neq 0$.

19. 求証 $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{24}-\sqrt{15}}{20}$

$+\cdots\cdots$至無窮$=\frac{\pi}{2}$,

20,　AB弦上立一弓形,於AB之中點C作垂線交圓弧於D.設CD=a,AD=2a,求此弓形之面積.

提出者安徽省立第一中等職業學校湯烺生.

21.　過一定點作一直線割兩已知圓,令兩圓內爲弦之部分之和爲定長.

22.　試作－18^0之角.

國立北京大學入學試驗算學試題

（二十一年七月理學院用）

（編者按北京大學試題,較上期所載武漢大學試題爲易,故祇擇其難者附以解法,其他計算題,僅示答數.）

(A)

代數

1. 試解方程式

$$a(x+y)=b(x-y)=xy.$$

答: $x=\frac{2ab}{b-a}$,　$y=\frac{2ab}{b+a}$.

2. 求 $4x+49y-28\sqrt{xy}$ 之平方根.　答: $\pm(2\sqrt{x}-7\sqrt{y})$.

3. 設 $x+y+z=o$,試證明 $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

4. 試解方程式

$$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}.$$ 答 $10;-\frac{2}{5}$.

三角

5.試求方程式

$$\sin 3\theta+\cos\theta=0$$

之一般根. 答 $\frac{(4n-1)\pi}{4}$.

6.試證

$$\frac{\tan a+\tan b}{\tan a-\tan b}=\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}.$$

幾何

7.於四邊形之內，取一點不在兩對角線之交點之上者. 試證明從此點至各頂點之距離之和，大於兩對角線之和.

8.內接(inscribed)於圓之平行四邊形為矩形，其對角線通過圓心. 試證明之.

9.求內接於圓之正六角形(Regular hexagon)與外切(circumscribed)正三角形之面積之比. 答: 1:2

10.直角三角形之斜邊(hypotenuse)上所畫之正三角形之面積，等于其餘二邊上所畫之正三角形之面積之和.

(B)

解析幾何

關于直交軸有三直線$x=o$, $y=o$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.求與此三直線相切之圓之方程式.

答:三線所成三角形之內切圓為$(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$, $h=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

2.求二直線$y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$,及y軸所包圍之三角形之面積.

答: $\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}$.

3.試討論方程式$3y^2+2x+1=0$所表示之曲線.

4.雙曲線之切線與漸近線相交，試證切點移動其所包圍之三角形之面積為常

數.

高等代數

5.試求適合

$$5x+3y>121$$
$$\frac{7}{4}x+y=42$$

二式之x,y之值之界限.

解：令$5x+3y=121+K$,K爲正數．與第二式聯立解之,得

$$x=20-K,\quad y=7+K$$

故所求之界限爲$x\angle 20, y>7$.

6.$(1+x)^n$之展開式中,求其各項係數之平方之和.

解：$(1+x)^n=1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\cdots+c_nx^n$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=1+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{x^n}.$$

兩式相乘,得

$$\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}=1+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots+c_n^2+\text{含有}x\text{之項}.$$

故所求之值,爲此式左端展開式中不含x項之係數,亦卽$(1+x)^{2n}$中x^n之係數也.

答：${}_{2n}C_n=\frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$

7.試求方程式$(x-2)(x-3)(x-4)=1\cdot2\cdot3$之諸根.

答：　$5,\ 2\pm\sqrt{2}\,i$

8.試求$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdots\cdots}}}$至無窮.

解：設y爲所求之值,則$y=\sqrt{ay}$,卽$y=a$.

書評

小學算學課本中之一個問題

下面是許多小學裡担任算學的朋友們提出來的一個問題;

『銅元一百枚，可買筆一百枝，但知毛筆每枝值銅元五枚，鉛筆每枝值銅元三枚，石筆每枝值銅元半枚，這三種筆各有幾枝?』

此題載在中華書局出版的新中華算術課本第八冊第56面裡，——這時學生的程度，並沒學過如比例等一類的算法．——編者原意，無非作爲一道玩算，叫學生去試探一下猜猜牠的答數，以鍛練思考力，並不必要列出甚麽算式．編者用意，雖屬完善，可是經驗告訴我們，這題目排列的地位，似乎有些不很適當．因爲讀這書的兒童，不過是小學四年級下學期的學生，年齡只十歲上下，憑他們的智力，多半不容易猜了出來．間或也有一二個恰巧湊出一組答數的，自然他們還想引用已知的四則算法，去求答案，因此爲難了許多指導的教師．就是編者自己在他的教授法第89面裡也這樣說:"不能用算術來算出牠的答數．"

實際這題是古時的一道名題叫做百鷄術的化身，六朝張邱建算經所載:「今鷄翁一，值錢五，鷄母一，值錢三，鷄雛三，值錢一:凡百錢買鷄百隻，問鷄翁，母，雛各幾何?」就與上題完全一樣．這題雖不能用四則去列式．但可用混合比例去求解，不必像編者教授法中所說的．

平均值	品名	原價	比較		混合量之比									
	毛筆	5	損 4	8	1	1	2	1	3		5		5	
1	鉛筆	3	損 2	4	1	2	1	3	1	······	1	······	11	······
	石筆	$\frac{1}{2}$	益 $\frac{1}{2}$	1	12	16	20	20	28		44		84	
					14	19	23	24	32	······	50	······	100	······

在上面解法裡推定混合量之比,其組數無限. 但我們所應取的,是要這些比率的和能够除得盡100的;換句話說,就是要各比率之和,是100的約數. 必須這樣,方可得整數的答數. 現在檢查「混合量之比」的一欄,得5:1:44及5:11:84兩組牠們的總和恰是100的約數,並且除此以外再沒有別一組的了. 因此得答數兩組如下:

a. 因爲 $5+1+44=50$,

所以

$100\times\frac{5}{50}=10$.……………毛筆數.

$100\times\frac{1}{50}=2$.……………鉛筆數.

$100\times\frac{44}{50}=88$.……………石筆數.

b. 因爲 $5+11+84=100$.

所以

$100\times\frac{5}{100}=5$.……………毛筆數.

$100\times\frac{11}{100}=11$.……………鉛筆數.

$100\times\frac{84}{100}=84$.……………石筆數,

再用代數不定方程式的解法,來驗証一下.

〔解II〕設x=毛筆的枝數,y=鉛筆的枝數,z=石筆的枝數.

則依題意得 $x+y+z=100$……………………(1)

$5x+3y+\frac{1}{2}z=100$……………………(2)

(2) × 2 $10x+6y+z=200$……………………(2)

(2)−(1) $9x+5y=100$……………………(3)

移項 $x=\frac{100-5y}{9}$……………………(3)

(3) × 2 $2x=\frac{200-10y}{9}=22-y+\frac{2-y}{9}$

令 $\frac{2-y}{9}=m$, 則 $y=2-9m$

代入(3)',得 $x=\frac{100-6(2-9m)}{9}=10+5m$

代入(1),得 $(10+5m)+(2-9m)+z$

即 $z=88+4m$

若m=0或−1; 則x = 10或5, y = 2或11, z = 88或84.

但m若爲+1以上之正整數,則y爲負數,不合題意. 又m若爲−2以下之負整數,則x爲0或負數,也不合題意.所以答數只有二組,和上面的答數一樣.

在下的意思,主張在原書中將這題改爲:『一百個和尚,吃一百包子,大和尚一人吃三個.小和尚三人吃一個,問大小和尚各幾多?』覺得比較容易,使學生好猜一點不知編者意下如何?

(瘦桐)

特　　載

教育部公佈中學算學課程標準

高級中學之部

第一　目標

(壹)充分介紹形數之基本觀念,使學生認識二者之關聯,明瞭代數幾何各科呼應一貫之原理,而確立普通算學教育之基礎.

(貳)切實灌輸說理推證之方式,使學生確認算學方法之性質.

(叁)繼續訓練學生計算及作圖之技能,使益爲豐富敏捷.

(肆)供給各學科研究上必需之算理知識,以充實學生考驗自然與社會現象之能力。

(伍)算理之深入與其應用之廣闊,務使成平行之發展,俾學生愈能認識算理本身之價值,與其效力之宏大,而油然生不斷努力之趨向。

(陸)仍據「訓練可爲相當轉移」之原則,注意培養學生之良好心習與態度「參看初中算學標準目標第五條下」,使之益爲鞏固.

第二　時間支配

學程　時數　學期	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
代數			3	3	2	算學 4
幾何	3	2				
三角	1	2				
解析幾何大意					2	2

第三　教材大綱

（壹）第一學年

（一）幾何部份

（1）基本原理

（甲）幾何學目的與觀念.

（乙）幾何公理.

（丙）幾何證題法.

（2）圖形之基本性質.

（甲）直線形　全等形,平行綫,線段之比較「相等條件與不等條件」,角之比較.三角形內之共點線.對稱形.

（乙）圓弧,角之關係.弦,切線,割線之性質.二圓之相對位置.內接形,外切形.

（丙）比例與相似形

（丁）度量計算　直綫形面積,圓之度量,幾何算題.　極大極小.

（3）軌跡與作圖.

（甲）軌跡　分析與証實,基本軌跡及其應用.

（乙）作圖題　基本作圖題,軌跡交截法,代數分析法,變形與變位.

（4）立體幾何大意.

（甲）直線與平面.　二面角,三面角.

（乙）多面體及其面積體積.

（丙）圓柱,圓錐,球,

（二）三角部份

（1）廣義之三角函數,基本關係式,三角函數變跡「圖解」.

（2）和角公式,化和爲積法,三角恒等式.

(3)任意三角形性質.

(4)任意三角形解法,對數,測量及航海方面之應用問題.

(5)反三角函數,三角方程.

(6)三角函數造表法略論*,表之精確度*.

(貳) 第二學年

代 數

(一)基本原理與觀念.

(1)代數學目的和方法「與算術比較」.

(2)運算律一形式變易律「加法與乘法對易律 Commutative law, 指數律等」,推演律 Rules of Equality and Inequality.

(3)數系 Number System 大意.

(4)變數,函數. 極限. 坐標. 圖解.

(二)基本法則.

(1)基本四則,分離係數法,綜合除法.

(2 餘式定理,因式定理,析因式法.

(3)公因式與公倍式,整除性「對算術上之應用*」.

(4)恒等式性質,証法,未定係數法,對稱式之析因式法.

(5)比例,變數法.

(6)方程解法性質,同解原理.

(三)一次方程及函數

(1)一元方程及應用問題. 解之討論,

(2)一次函數圖解,含參變數之函數,一次方程解法之幾何解釋.

(3)聯立方程「以二元者爲主」及應用問題. 解之討論「附行列式大意*」,非齊次式,與齊次式*.

(4)不定方程之整數解.

(四)不等式.

(1)基本法則,絕對不等式.

(2)條件不等式解法及幾何說明.

(五)高次方程「應用問題附」及有理整函數.

(1)一元二次方程　解之類別「附論複素數」,根與係數之關係,根之對稱式,作已知根之方程,方程之變易.

(2)高次方程之有理根「綜合除法之應用」.

(3)可化為二次方程之高次方程.

(4)等根,消去法,高次聯立方程「以二元及二次者為主」.

(5)二次函數之變值與極大極小,圖解,含參數之函數,根與已知數之比較.

(6)分數式運算,簡易不定值式之極限.分數方程式解法.分項分數 Partial fraction 原理及解法.

(六)無理函數.

(1)多項式開方,根式運算,有理化因式.

(2)無理方程式解法,增根之討論,應用題.

(七)指數,對數,級數.

(1)指數之推廣「分指數,負指數」,

(2)對數特性和應用.應用題「如利息算等,須注意所得結果之精確度」.造表法略論,表之精確度.

(3)級數　等差,等比,調和級數應用題「年金等」.

(叁)第三學年

(一)代數部份

(1)複素數　特性及四則,極坐標式與圖解,棣美弗 Demoivre 定理,複素

數方根.

(2)方程論　方程通性,根與係數之關係,根之對稱函數,方程之變易.重根,「附有理整函數之微商」笛卡氏符號律 Descartes Rule of Signs.無理根之近似求法「忽拿 Horner 氏法」

(3)行列式　定義及特性.子式,展開法.消去法及其應用.

(4)無盡連級數　收斂與發散.正項連級數,交錯連級數,複項連級數等之主要審斂法.冪連級數*,收斂性.重要冪連級數之研究*,和之近似值.

(5)排列分析 Combinatory Analysis .二項式定理「附論算學歸納法」.蓋然率Probability及其應用.

(二)解析幾何大意部份

(1)笛卡兒坐標.射影定理.幾何量之解析表示「如角,距離,面積,斜率,分點等」.

(2)軌跡與方程式.直線之各種方程式及應用.圓,切線,圓冪,等冪軸.

(3)圓錐曲綫大意,模範式,特性及應用.普通二次方程式.坐標軸之變換及應用.切線,法線,次切距,次法距,配徑,直徑.

(4)極坐標,與笛氏坐標之互換法.重要高等平曲線及超性曲線.

「附註一」 上列條目,不過依其性質而彙集之,並非教授時應採之次序.又各年級中教材之支配,亦僅爲示範之用,教者儘可斟酌情形而變通之.

「附註二」 以上各項,凡前後附有星號*者,教者得斟酌情形,以定取捨.

「附註三」 第二表中之算學四小時,可酌量情形,開設下列各學程;(1)微積分大意,(2)近世幾何大意,(3)球三角,(4)應用算學等.

第四　實施方法概要

(壹) 作業要項

教室練習,課外練習及考試各項辦法,均與初中者相同.但高中學生,理解能

力，較為充足，應儘量引起其自動研究之興趣，而培養其自動研究之能力．故宜注意下列事項。

（一）先期指定教材，令其預習．其較簡易者，并可指定學生，就教室中問答，以代注入式之講解。

（二）每習完一章或至相當段落，應令學生自行摘要，列為表解。

（三）宜指定補充及參考教材，在教師指導下，令學生分組或個別為自動之研閱而報告所得結果之大綱．或另出教科書以外之難題，使自行演算討論．如不能全班學生盡行作此項課外作業，亦應就班中資稟學力較優者行之。

（四）除講授正課外，如覺時間尚有寬餘，亦可就教室中，添授補充教材．但應令學生練習筆記之能力，并整理謄正，繳交教師考核，不宜編成講義，發給學生。

（貳） 教法要點

（一）總論　高中教材為初中教材之第二圓周，故應與前者有切實之聯絡。

（1）高中算學之最先部份，與初中教材相同，宜多選較困難問題，以資複習，并可由此導入較深之研究。

（2）初中算學注意計算技能之純熟，與基本觀念之了解，研究方法，由實例特例，歸納成為通則．高中則應注重理論方面，用演繹法，作較有系統之研究．以算理之繁深，初中學生自有未能徹底明瞭之處，故初中教材，高中仍應重提．但詳略不同，輕重異趣，自不至使學生厭倦，并有溫故知新，剝繭抽絲之妙．

（3）高中算學科，僅有二十學分，而必授之課程，竟有五六種之多，勢難悉皆詳盡．與其教材過多，徒使學生食而不化，不如注重基本訓練，養成其自動研究之能力．故立體幾何，高等代數，解析幾何三種，僅需講授大意．但每遇問題有不能徹底搜討時，應提出注意，以啓學生向上研究之志趣，

（二）代數及高等代數　高中代數應以函數及方程為中心．

（1）學生於函數觀念，不易明瞭．教者應於推求初等函數之變值變跡時，加

意解釋，以確立其基礎。如二次函數，卽爲最適用之一例。

（2）方程之解法，初中畢業生，已能明瞭。故高中代數，應注重方程通性，同解原理，討論解之變化「含參變數之方程」及增減「例如分數方程，無理方程之根」。二次方程爲方程之入門，最足訓練學生思想。

（3）高等代數，以方程論爲中心。複素數之存在，爲代數基本定理成立之先決條件。行列式爲消去法之利器。級數雖爲極限運算，與代數性質，頗有不同，然一切函數之展式，皆有賴於此，而爲解析學之基礎，故亦宜多加注意。

（4）方程應用問題，不僅限於日常事實，并應與幾何，三角，理化方面，多加聯絡。實際問題，宜注意所得結果之精確程度。高次數字方程之數值解法，實際效用頗多，爲習算者所應知。或然率爲統計學核心，亦應講授大意。

（三）幾何　高中幾何，應訓練學生自動探求之能力，并注意邏輯次序，使達於相當之嚴謹程度。

（1）幾何最重邏輯次序，初中學生，年齡幼稚，未易與之嚴守，高中教授幾何，對此宜加意訓練，但理論嚴謹之程度以學生能感覺其必要且能了解者爲限。

（2）初中已習之定理，宜再用啟發式之解剖，儘量用逆證法。以明思考之途徑。并應就定理間關係，組成系統，顯出幾何全部一貫之線索，庶學生得提綱挈領，增加運用之能力。但所組系統，應從理論上着眼，以利理解，而便記憶，不宜流於板滯之分類。

（3）初中未能詳授之部份，應加以補充，并應注意軌跡及作圖題二部分，因此二部分於推理證題之外，尚可發展學生探求發明之能力。

（4）幾何証題及作圖，應就可能範圍內，儘量採用代數方法求已知件與未知件間之關係。

（5）立體幾何，可僅授大意，以明空間性質及量法爲主，務使學生能透視平面上之圖形，了解各種立體之構造，以與圖畫科中之用器畫相聯絡。

（四）三角　高中三角應以三角函數爲中心。

（1）銳角三角函數及直角三角形解法，既已於初中習過，故高中即可從普遍角三角函數入手，以資參較，而示推廣，此不僅求理論之普遍且爲習物理者所必需之知識.

（2）初中所授三角，以簡易爲主，高中宜注意三角函數性質，三角恒等式，方程式等（均宜與代數方面相當問題比較），以供進修高等算學時之用.

（五）解析幾何　高中解析幾何，應融滙代數，幾何，三角諸學程示其相互爲用之處. 一面作中學階段算學科之一總結束，一面立高深研究之基礎.

（1）解析幾何，應與代數，幾何，三角互相聯絡，以解決幾何問題，而充分表示算學各部分呼應一氣之性質.

（2）欲圖形與數量，得相應之關聯，不得不用推廣之幾何元素，故解析幾何遂不能不與綜合幾何互有出入（如分角線求法之問題）. 凡此等處，最宜使初學者注意以期其見解明晰無所惶惑.

（3）綜合法作圖之範圍，非解析莫能決.　如有充分時間，宜略示作圖不能（Impossible construction）之意義.

（完）