1933年

第 2 期

國立武漢大學
理科季刊

第四卷第二期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. IV No. 2 December 1933

本 期 目 錄

中華民國二十二年十二月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第四卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊

第四卷第三期目錄預告

紀數法命名之研究

(民國二十二年十二月十八日武漢大學數理學會演稿之一部)

曾 昭 安

第一章 緒言

上古之世,結繩而治,已具數學之觀念.黃帝使隸首作數,則計數法生焉.憶當人事較簡時,以一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,百,千,萬等,十三數字,處理算事已能運用自如,綽有餘裕,此外無需其他之數字.故在先秦經籍中,萬以上之大數,雖尙有億,兆,經,晐諸名稱,大抵表示衆多之意,非真指示確實數値也.迄後人事日繁,萬以內之數目,實覺不敷應用.於是更大數之名稱,具有事實之需要焉.惟是億兆諸名詞意義紛歧,茲舉其最著者述之於下:

第二章 大數命名法

(一) 漢靈帝時 (168—189) 徐岳撰數術記遺,曰:"黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉.十等者,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.三等者,謂上中下也.其下數者十十變之,若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也.中數者萬萬變之,若言萬萬

曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也.* 上數者數窮則變,若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也.”又曰:“下數淺短,計事則不盡,上數宏廓,世不可用,故其傳業,惟以中數耳.”此係以億兆京垓秭壤溝澗正載十個名詞,列作十等,分爲上中下三數用之,其各數之變化,下數十十變之,中數萬萬變之,上數數窮則變.細繹此文,當係下數以十進名,中數以萬進名,上數以自乘數進名.但解釋中數兆京等名詞之句下,不曰萬億曰兆,萬兆曰京,而曰萬萬億曰兆,萬萬兆曰京者,或係字句中有錯訛歟?抑非徐岳本文歟?二者必居一於此矣.蓋數術記遺一書,有甄鸞注本及甄鸞重述本之別.論者謂是書之徐岳本文極短,恐係甄鸞託徐岳名而僞造者,觀其書中有“刹那”等佛教名詞,而甄鸞乃極力擁護佛教之人,此說殆乎近之.又書中已明白表示傳業惟以中數,是其注意之點端在中數.但若由萬至億以萬變,由億至兆,由兆至京等,以萬萬變,則前後各數進名又屬不規則矣.

(二) 孫子算經曰:“凡大數之法,萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京,萬萬京曰陔,萬萬陔曰秭,萬萬秭曰壤,萬萬壤曰溝,萬萬溝曰澗,萬萬澗曰正,萬萬正曰載.”此與黃帝之中法,自萬至億以萬進,自億以上以萬萬進者相同.但該書說明量法又曰:“六粟爲一圭,十圭六十粟爲一撮,十撮六

* 理科季刊第二卷第一期第十五面引數術記遺論中數,書作“萬億曰兆萬兆曰京”者,係根據筆算數學註言之意斷其傳寫有誤也.

百粟爲一抄,十抄六千粟爲一勺,十勺六萬粟爲一合,十合六十萬粟爲一升,十升六百萬粟爲一斗,十斗六千萬粟爲一斛,十斛六億粟,百斛六兆粟,千斛六京粟,萬斛六陔粟,十萬斛六秭粟,百萬斛六壤粟,千萬斛六溝粟,萬萬斛爲一億斛六澗粟,十億斛六正粟,百億斛六載粟."今解釋之,卽謂"六粟爲一圭,十圭卽六十粟爲一撮,十撮卽六百粟爲一抄,十抄卽六千粟爲一勺,十勺卽六萬粟爲一合,十合卽六十萬粟爲一升,十升卽六百萬粟爲一斗,十斗卽六千萬粟爲一斛,十斛卽六億粟,百斛卽六兆粟,千斛卽六京粟,萬斛卽六陔粟,十萬斛卽六秭粟,百萬斛卽六壤粟,千萬斛卽六溝粟,萬萬斛卽一億斛亦卽六澗粟,十億斛卽六正粟,百億斛卽六載粟."依此則自萬至億,是以萬進,自億以上,又以十進,前後所云互相矛盾,抑非孫子之原文也耶?

(三) 鄭玄(127—200)注禮記,內則曰:"萬億曰兆."　三國時吳韋昭國語解曰"萬萬兆曰垓."　杜預(222—284)注左傳曰:"萬萬曰億.""萬億曰兆."此均以億兆等數依萬進名者也.

(四) 後周(557—581)甄鸞注五經算術曰:"黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉.十等者,謂億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載也.三等者,謂上中下也.其下數者十十變之,若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也.中數者萬萬變之,若言萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也.上數者數窮則變,若言萬萬

曰億,億億曰兆,兆兆曰京也.”此文與數術記遺所載者全同.其對於中數之變化曰:“萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京”者,凡前後重述三次之多.由此可知自億以上以萬萬進名之法,確係甄鸞所主張者無疑.

(五) 尚書兆民注云“億萬曰兆.”又詩豐年毛注云“數億至億曰秭.”此兩注以黃帝之三法解釋之皆欠通.故甄鸞於五經算術評此,均曰“有所未詳.” 又宋太平御覽工藝部七引唐僧一行(683—727)算法曰“萬萬穰爲載,數之極矣.”以此與黃帝三法比較之,亦均不合.惟“億萬曰兆”之億字若作萬萬解,而以萬萬萬爲兆,可勉强說明.

(六) 宋太平御覽卷七百五十引漢應劭風俗通義云:“十十謂之百,十百謂之千,十千謂之萬,十萬謂之億,十億謂之兆,十兆謂之經,十經謂之垓,十垓謂之秭,十秭謂之選,十選謂之載,十載謂之極.”於此秭以上之數,易爲選載極三名,各數統以十進名也.

(七) 唐僧慧琳(737—820)一切經音義二十一卷,引黃帝算法云“黃帝算法,總有二十三數,謂一二三四五六七八九十百千萬億兆京垓秭壤溝澗正載.從萬已上,有三等數法,其下者十十變之,中者百百變之,上者倍變之.”二十七卷引筭經云“黃帝爲數,法有十等,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.及其用也有三,謂上,中,下.下數十萬曰億,中數百萬曰億,上數萬萬曰億.”又一切經音義於大方廣佛華嚴經四卷

"一百洛叉(即萬)爲一俱胝"之條注云"今案此經,十,百,千,萬,十十變之,從萬至億,百倍變之,從億已去,皆以能數量爲一數,復數至能數量等."觀此知慧琳解釋黃帝算法,對於上下二數與數術記遺五經算術同.但對於中數,獨曰百百變之,而以百進名.豈慧琳對於甄鸞之書未曾過目,特異其說而不相同耶?又解釋華嚴經謂由一至萬以十變,由萬至億以百變,自億以上以自乘數變.是又紀數法之特別不同者也.

(八) 元朱世傑算學啓蒙(1299)曰:"大數之類,一,十,百,千,萬,十萬,百萬,千萬,萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京,萬萬京曰陔,萬萬陔曰秭,萬萬秭曰壤,萬萬壤曰溝,萬萬溝曰澗,萬萬澗曰正,萬萬正曰載,萬萬載曰極,萬萬極曰恆河沙,萬萬恆河沙曰阿僧祇,萬萬阿僧祇曰那由他,萬萬那由他曰不可思議,萬萬不可思議曰無量數."於此在載以上,有風俗通義之極字,在極字上,更增恆河沙,阿僧祇,那由他,不可思議,無量數五名,則借自印度,或取其音,或從其義也.其各數之變化,均以萬萬進名. 元賈亨算法全能集與明程大位算法統宗(1593)所載亦同.

(九) 清聖祖時數理精蘊載:"凡度量衡,自單位以上,則曰十,百,千,萬,億,兆,京,垓,秭,穰,溝,澗,正,載,極,恆河沙,阿僧祇,那由他,不可思議,無量數.自億以上,有以十進者,如十萬曰億,十億曰兆之類,有以萬進者,如萬萬曰億,萬億曰兆之類,有

以自乘之數進者,如萬萬曰億,億億曰兆之類,今立法從中數.”依此則所謂中數者,概以萬進.前乎此雖鄭玄韋昭杜預輩,對億以上之數,亦有萬進之說,但係零碎記載.此則就一切大數,作整個說明者也.

(十)　清代梅氏叢書輯要,梅瑴成增删算法統宗,屈曾發數學精詳,陳維祺中西算學大成,周廣詢算學入門,狄考文筆算數學,偉烈亞力數學啓蒙諸書,皆採取萬進法,與數理精蘊所載者同.按梅氏叢書,原爲梅文鼎所著(1693),經其孫瑴成重刊(1761)者,其中所用大數之名至載而止.至梅瑴成編纂數理精蘊(1719),修改算法統宗(1757),則更增用至無量數之名,對於從前萬萬億曰兆,萬萬兆曰京之類,悉改爲以萬進名.因梅氏祖孫者,乃清代第一流數學大家也,故其影響所及,至爲廣大.試檢閱方中通數度衍載五量用數說曰“中數者萬萬變之,萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京之類也.”但算學入門引方中通五量用數說,則曰“中數者,萬萬變之,萬萬曰億,萬億曰兆之類是也.”是自梅氏以後之進名法,均屬相隔四位,甚覺整齊劃一.讀者草率閱之,幾忘乎前此有甄鸞朱世傑輩以萬萬進名之說也.

總上均說,知大數之進名法極不一致.茲將其不同者各舉一例,列表如次:

數位	數術紀遺法 下法	數術紀遺法 中法 萬進法	數術紀遺法 中法 萬萬進法	數術紀遺法 上法	孫子算經別法	風俗通法	一切經音義法	華嚴經法
$(10)^0$	一	一	一	一	一	一	一	一
$(10)^1$	十	十	十	十	十	十	十	十
$(10)^2$	百	百	百	百	百	百	百	百
$(10)^3$	千	千	千	千	千	千	千	千
$(10)^4$	萬	萬	萬	萬	萬	萬	萬	萬
$(10)^5$	億	十萬	十萬	十萬	十萬	億	十萬	十萬
$(10)^6$	兆	百萬	百萬	百萬	百萬	兆	億	億
$(10)^7$	京	千萬	千萬	千萬	千萬	經	十億	十億
$(10)^8$	垓	億	億	億	億	垓	兆	百億
$(10)^9$	秭	十億	十億	十億	兆	秭	十兆	千億
$(10)^{10}$	壤	百億	百億	百億	京	選	京	萬億
$(10)^{11}$	溝	千億	千億	千億	陔	載	十京	十萬億
$(10)^{12}$	澗	兆	萬億	萬億	秭	極	垓	兆
$(10)^{13}$	正	十兆	十萬億	十萬億	壤		十垓	十兆
$(10)^{14}$	載	百兆	百萬億	百萬億	溝		秭	百兆
$(10)^{15}$		千兆	千萬億	千萬億	澗		十秭	千兆
$(10)^{16}$		京	兆	兆	正		壤	萬兆
$(10)^{17}$		十京	十兆	十兆	載		十壤	十萬兆
$(10)^{18}$		百京	百兆	百兆			溝	億兆
$(10)^{19}$		千京	千兆	千兆			十溝	十億兆
$(10)^{20}$		垓	萬兆	萬兆			澗	百億兆
$(10)^{21}$		十垓	十萬兆	十萬兆			十澗	千億兆
$(10)^{22}$		百垓	百萬兆	百萬兆			正	萬億兆
$(10)^{23}$		千垓	千萬兆	千萬兆			十正	十萬億兆
$(10)^{24}$		秭	京	億兆			載	京
$(10)^{25}$		十秭	十京	十億兆			十載	十京
$(10)^{26}$		百秭	百京	百億兆				百京
$(10)^{27}$		千秭	千京	千億兆				千京
$(10)^{28}$		壤	萬京	萬億兆				萬京
$(10)^{29}$		十壤	十萬京	十萬億兆				十萬京
$(10)^{30}$		百壤	百萬京	百萬億兆				億京
$(10)^{31}$		千壤	千萬京	千萬億兆				十億京
$(10)^{32}$		溝	垓	京				百億京

上表中數術記遺之下法,與風俗通法,雖名詞略異,然均以十進. 數術記遺之中法,依萬萬而變之說,應爲萬進法,若依萬萬億爲兆,萬萬兆爲京之解釋,則爲萬萬進法.此種進名法,五經算術孫子算經所載均同.嗣後算學啓蒙更於載極以上,增加五名至無量數,明白規定之.惟如斯進名,解釋參差.至數理精蘊以後諸書,採用各數一律萬進之法,乃歸於整齊劃一焉. 數術記遺之上法,自萬以上以自乘數進,依此法推至"載載,"卽等於$(10)^{8192}$. 若據數理精蘊更推此"無量數無量數,"卽等於$(10)^{524288}$. 孫子算經載大數用萬萬進法.但解釋量法,自萬至億以萬進,自億至載以十進,則兼用萬進與十進法. 一切經音義解釋黃帝中法,謂自萬以上以百進,其解釋上法曰萬萬爲億.然於華嚴經又謂自萬至億以百進,自億以上以自乘數進.彼此所云,蓋不相合.此均進名法之特立奇說者也.

觀上表所列八例,可得七種不同之進名法,至所謂"億億曰秭"及"萬萬穰曰載"之說,尚不具焉.惟其中除孫子慧琳之不規則紀數法外,萬以上以百進名之法亦世所罕用,故所存者僅有四法.卽十進,萬進,萬萬進,自乘數進是也.又此四法中,萬萬進名法,由萬至億相隔四位,由億以上均相隔八位,其進名不一律,而自乘數進名法,且早在數術記遺中,指其宏廓不可用.因此現所傳者,惟餘十進與萬進兩法.試檢閱康熙字典,辭源億兆等字之解釋,均僅具此二義

而已.但十進法,數術記遺亦言其計事不盡,故自康熙迄今,俱用萬進法.猶憶民國十七年,予在某地主試中小學教員數百人,命題爲"億兆二字之意義爲何?"得答案中,言"萬萬日億,萬億日兆"者,約居百分之八十,言"億兆有十進,萬進二法"者,約百分之十餘,至言"億兆有十進,萬進,自乘數進之上中下三法"者,尙不及百分之二.由此可知多數人對於億兆等數,俱用萬進法.至主張不用億兆之字,改稱"萬萬""萬萬萬"等,是亦無形中用以萬進名之法也.

再就"一,十,百,千,萬"諸位之字形觀之.各字與其所占之位有關,卽個,十,百,千,萬各位之數,橫縱相間,以橫畫表示單位,百位,萬位之數,縱畫表示十位,千位,十萬位之數.單位之"一""二""三"三字,均從橫畫."四"字,殷甲骨文作"亖"."四""五"二字,周秦金文作"亖""𠄡"俱從橫畫."十"字,殷甲骨文作,"丨"周秦之金文作"✝",可知是從縱畫."廿""卅""卌"諸字之字義爲二十,三十,四十,亦從縱畫.百位之"百"字,从一从白,白爲其音,橫畫乃表示其位置.千位之"千"字,亦如"十"字,以縱畫表示其位置.萬位之"万"字,雖亦用"萬",然"萬"字本爲蟲名,在數字原用"万"字.此字以一橫畫表示其位置."億"字之古義爲"十萬".其左旁之"亻",非爲人旁,乃千字除去橫畫之形,以一縱畫表示其位置,右旁之"意",則其字音也.至於"兆"字,字形已稍不同,橫縱之筆畫甚爲紊亂,在古時以之表示非常大之

數.兆以上之大數,因需用稍遲,乃後代所增加者,故其字形之構造,不適合於此橫縱相間之原則. 又"億"字之解釋,據宋李籍九章算術音義云:"億",於力切,十萬曰億.萬者物數也,以人之意數爲足,以勝物數故也." "載"字之解釋,據宋太平御覽工藝部七引"一行算經曰:或問之曰,何以數之爲載? 按孫子算經云:古者積錢,上至于天,天不能容,下至于地,地不能載.天不能蓋,地不能載,故名曰載." 卽其字義也. 又自印度借來之恆河沙,不可思議,無量數等名詞,考其字義,皆表示極多極大之義,未能確指何數値.

由此知億兆以上諸名詞,匪特進名紛歧,卽就其字形觀之,殊不可解,就其字義言之,復多不確.如是欲以之表示數値,本屬欠妥.惟是自漢數術記遺載明紀數宜採中法以來,凡千八百年,從淸梅氏叢書規定變名當從萬進,迄今已二百餘歲.是古人對此,業明白指示途徑有所遵循,吾人自不必矯同立異,節外生枝.此予向來主張億兆諸名詞,應使之僅存一義,不妨沿用萬進法也.民國二十二年四月教育部在南京召集天文數學物理討論會,曾討論"算數命名分節標準,"決議"大數紀法,爲個,十,百千,萬,用十進法.萬以上,億,兆,京,垓等,用萬進法." 此決議案所根據之原則爲:"(1)數名用字務求字少而效用大.(2)萬萬……萬萬萬……等名稱,既不順口,復不爽目.(3)世界進化,需數日大,億兆京垓…… 等字,仍應沿用.(4)在數學眼光上,四位制紀數法及三

位制紀數法初無二致.(5) Million 一字,倘譯成百萬,紀數分節上,可無三位四位之爭執.(6)祇定紀法,不定分節,任用三位或四位一節均可.”據此則對於億兆等舊有名詞,進名釋義之爭執,似宜告一結束.

西人用十百千等數,字體各不相同.然在千以上之數字,大多數國家均用 Million, Billion, Trillion 諸名稱.此等字概由拉丁文轉變得來.惟其意義,因時代與國土之不同,亦生差異. Million 一字爲 Mille 與 on 所合成, Mille 即拉丁文之“千”字, Million 可譯作“大千.”猶之 Salle 與 on 合成之 Salon 或 Saloon 字,意爲“大廳”, Ball 與 on 合成之 Balloon 字,意爲“大球”,也.“大千”亦可釋爲“多千,”僅表示衆多之意,未能確實指明數值.古時曾有“百萬”及“萬萬萬”兩種解釋.幸現所存者,“百萬”之一義而已. Million 以上之數,最初用 Billion, Trillion 諸名詞者,厥爲法人朱魁(Chuquet).朱氏於1484年一抄本中,以百萬爲 Million, 百萬 Million 爲 Byllion, 百萬 Byllion 爲 Tryllion, 百萬 Tryllion 爲 Quadrillion, 百萬 Quadrillion 爲 Quyllion, 百萬 Quyllion 爲 Sixlion, 百萬 Sixlion 爲 Septyllion, 百萬 Septyllion 爲 Ottyllion, 百萬 Ottyllion 爲 Nonyllion. 各名詞均以百萬進.

在十六世紀以前,義法二國用百萬進名法,西班牙用千進名法,嗣後義法之進名法,逐漸傳入德,英.至十七世紀以後,法義陸續改用千進名,英德反率由舊貫.美國受革命之影響,不從英而從法.現今則英,德,瑞典,挪威,丹麥,波蘭,俄及北

歐諸國用百萬進名法;法,美,義,西班牙,葡萄牙,希臘,荷蘭,亞剌伯,土耳其及南歐諸國用千進名法.美人槐特(William F. White)有言曰:"現今算數, Billion 一字,已甚通用.但全世界人類對於此字,有一半數人作爲百萬之千倍解釋,有一半數人作爲百萬之百萬倍解釋." 則大數名詞之意義,在西文亦不固定可知矣.

千進法以三位爲一節,百萬進法以六位爲一節.兩法雖不相同,但如列成數碼,各國均每三位作記號逗(,)以分隔之如下:

1,000,000,000,000,000,000.

英德以六位爲一節,亦每三位作逗者,蓋覺六位略長,亦如我國黃帝之上法不如中法,萬萬進不如萬進也. 自歐風東漸後,我國譯述,簿記,統計,表册等,亦有採用西法以三位作隔者.學術貴乎大同,論理固甚可取.惟是我國大數紀法,雖有十進,百進,萬進,萬萬進,自乘數進,及不規則進名多種,獨無所謂千進法,(五曹算經,夏侯陽算經有 "幾貫幾百幾十幾文" 之語,可勉稱千進法). 如是欲求與西法脗合,蓋亦難矣.

段撫羣駱紹先用數術記遺下法之兆秭澗,以譯法美之 Million, Billion, Trillion, 在兆以上,取消京垓穰溝等字,改用千進法.程瀛章則用風俗通之兆秭穣,放棄億經選載等字,在兆以上,亦用千進法.如此中西命數法,可符合幾位.但數術

記遺下法及風俗通法,古人已病其短少.又從今而割裂之,似非盡善之策. 惲震,王崇植,陳中熙主張不用億京垓等字,改從千進,以兆字譯 Million, 另造"⿱兆千""⿱兆兆"二新字,譯千進法之 Billion, Trillion, ⿱兆千讀如挑,⿱兆兆讀如堯.顧毓秀趙曾鈺楊叔藝亦贊成此種主張,但謂千兆應寫"⿱千兆"讀如"千兆",兆兆寫"⿱兆兆",讀如"兆兆".如此在千以上取消億字,未言取消萬字,似覺矛盾,在兆以上,再不用其他各字,獨留一字,欲表示一切大數,必嫌不足,且兆字之意義易生誤會,兆兆兆以上之數,更不便於寫不便於讀也.

陸貫一創造新字羣.* 作"[illegible]"字表示單位,讀如單."[illegible],[illegible],[illegible],[illegible],[illegible],[illegible],……"諸字,表示十,百,千,萬,十萬,百萬,……,讀法依次取百家姓各音,讀如趙,錢,孫,李,周,吳,……….如此則法美之 Million, Billion, 可譯爲[illegible],[illegible],讀如吳,馮.英德之 Million, Billion, 可譯爲[illegible],[illegible],讀如吳,衛.萬進之億兆,亦可作[illegible],[illegible],讀如王,衛.見字可得其義,應用亦甚方便,惜讀音不免牽强.

西文大數名稱,經美人亨克爾(W. D. Henkle)整理後,列如下表:+

(1) Million	(2) Billion
(3) Trillion	(4) Quadrillion
(5) Quintillion	(6) Sextillion
(7) Septillion	(8) Octillion

* 見科學第十六卷第十一期.

\+ 詳見理科季刊第二卷第一期.

(9)	Nonillion	(10)	Decillion
(11)	Undecillion	(12)	Duodecillion
(13)	Tertio-decillion	(20)	Vigillion
(21)	Primo-vigillion	(22)	Secundo-vigillion
(30)	Trigillion	(100)	Centillion
(999)	Nono-nonagesimo-nongentillion	(1,000)	Millillion
(2,200)	Bi-Vici-millillion	(10,000)	Deci-millillion
(100,000)	Centi-millillion	(1,000,000)	Milli-millillion

表中括弧內所記諸數字,乃按照拉丁文意義,表示節數之次第.其各字末尾字母作 o 者,表示該數應以之相加.末尾字母作 i 者,表示該數應以之相乘.若兩字末尾均為 i 者,表示應取其和以之相乘.而各名詞之最後一字,即表示相加或相乘時之被加數或被乘數也. 其最初十二節名詞,係沿用舊名.第十三節原作"Tredecillion,"第二十節作"Vigintillion," 經亨克爾改作 Tertio-decillion 與 Vigillion. 依照此表,則雖第百萬節以上之大數,無不可立時書出其名稱.

惟用 Million, Billion, Trillion 諸名詞命數,尚多缺點如次:(1)此等名詞中,第五節,第七節,第九節所用之 Quintillion, Septillion, Nonillion 等字,非用拉丁文之基數 Quinque, Sex, Novem 等字轉來,乃由序數 Quintus, Sextus, Nonus 等字變成.又由此等數所作之其他更大數名詞亦然.如此與其他名詞對照,不歸一律.惟因其相傳已久,祇得沿用之.(2)依百萬進法,每六位為一節, Million 即 1000000, 自右數起以第七位至十二位

爲第一節, Billion 卽 $(1000000)^2$, 以第十三位至十八位爲第二節, Trillion 卽 $(1000000)^3$, 以第十九位至二十四位爲第三節,餘依次推之。如此第一節不爲第一位至六位,而爲第七位至十二位,且每三位雖有逗號分隔,在各節間無其他記號區別之,讀時微感不便,(3)依千進法,每三位爲一節,Million 卽 1000×1000,以第七位至九位爲第一節,Billion 卽 $(1000)^2\times1000$,以第十位至十二位爲第二節, Trillion 卽 $(1000)^3\times1000$, 以第十三位至十五位爲第三節,餘依次推之.如此第一節不爲第一位至三位,亦不爲第四位至六位.且此等名詞所作成之式碼.須附以 1000 之乘數,然後式中之指數,可含有拉丁文意義.但如此列法,各式碼均多產生一尾巴,爲不可必有之贅疣,殊可怪也.

今欲去西文之缺點,採分節之公制,不背古,不違今,則除規定億兆等字仍舊用萬進法外,其惟創造新名詞乎?於此造新名,須根據下列數項原則:

(i) 字形宜簡單易寫.

(ii) 字體須使人易於認識以便讀音.

(iii) 須能表示節數之次第,使人望文生義.

(iv) 須能表示任何之大數,取用不盡,以免日後隨時增加.

(v) 不可與"一二三四……"等尋常數字相混,

(vi) 不借用外國來文字.

依照此等原則,可得三位一節大數紀法之新名詞如下:

整數之第一節曰"個",以個,十,百,凡三位爲一節.因"節"字,古文作"卩",故得簡書爲卩. 第二節曰"串",从二口,以一口代表一卩,卽一節,二口表示第二節.且"串"字之解釋爲"千",以之代千字,最爲適當.惟此時之串字,須用於一切數量,不必單獨計算銀錢也. 第三節曰"品",从三口,以之譯 Million.因 Million 原屬第三節也.又品字之解釋,本有衆多之意義焉. 第四節曰,"由",从四口,譯法美之 Billion.四口原可作"㗊",讀如戢,亦可作"㗛",或"𠱠",讀音同爲虛器反,皆係罕見之字,不用.但亦可作"田","甲","申"等.用"田"字恐與計算田畝時之田字相混.今採用"由"字而不用甲申者,因由字與下述第六節之"曲"字相似也. 第五節曰"吾",从五口,譯 Trillion. 第六節曰"曲,"从六口,譯 Quadrillion.但含有六口者尙有"晶"字,以其筆畫較繁,不用. 第七節曰"叱",似爲七口二字所合成,譯 Quintillion. 第八節曰"叭",从八口,譯 Sextillion.但亦可作"只". 第九節曰"杏",像我國數碼"夊"與"口"字所合成,譯 Septillion.九口原可作"旮"或"叴",讀音同爲求.因係古字,不用. 第十節曰"古",从十口,譯 Octillion.有此十字,則大數紀法,已甚足用矣.

第十一節曰"吉",从十一口,譯 Nonillion. 第十二節曰"卄口",从十二口,譯 Decillion. 第十三節曰"侃",左邊人邊,像亞剌伯數碼"1"字.右邊口下之川,像我國數碼"川"字.譯

Undecillion. 第十四節曰"如",左邊偏旁像"十"與我國數碼"×"二字合成.亦可作"哂",右邊西字像"一""四"二字合成,譯 Duodecillion. 第十五節曰"俉".左邊像亞剌伯數碼"1"字,右角上爲"五"字.譯 Tertio-decillion. 第十六節曰"呑",上面天字,从一从大,像"一""六"二字之合,譯 Quarto-decillion. 第十七節曰"尼,"下面像"1""七"二字合成,譯 Quinto-decillion. 第十八節曰"杏",爲十八口三字之合,譯 Sexto-decillion. 第十九節曰"故",左邊上面从十,右邊从攵,像我國數碼"文"字,譯 Septo-decillion. 第二十節曰"甘",从廿口,譯 Octo-decillion.

再上各節,不必每個立一新名.如第二十一節可曰"貳拾壹卩",譯 Nono-decillion. 第二十二節曰"貳拾貳卩",譯 Vigillion.餘類推.以我國大書數字表示節數,節字簡書作卩.如此則任何大數之紀法,均可有術以駕馭之. 總上所說,列表如下:

百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十
古古古,吝吝吝,呎呎呎,叱叱叱,曲曲曲,善吾吾,由由由,品品品,串串串,百十個

百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十　百十
甘甘甘,故故故,杏杏杏,尼尼尼,呑呑呑,俉俉俉,如如如,侃侃侃,㕧㕧㕧,吉吉吉,

百十　百十
貳貳貳 貳貳貳
……………拾拾拾 拾拾拾
貳貳貳 壹壹壹
卩卩卩,卩卩卩,

近來爭論未決之問題,爲億兆之意義,與 Million, Billion 之譯名.茲規定億爲"萬萬",兆爲"萬億". Million 譯"品",法美之 Billion 譯"由".俾萬進法與千進法兩者並行不悖.至於使用

時僅須注意"品""由"二字,其餘一切問題,均可迎刃而解,如此豈非至簡且易之辦法乎?

第三章　小數命名法

古者之論度量衡也,立有各種名稱,以計算長短多少輕重,固無需乎規定何者爲單位.迄後算事日精,由名數推而論不名數,於是單位定而小數之意義明.循至各種微細名稱中,無論名數與不名數,均多用分釐等名詞.惟其含義與居位,極爲雜亂.茲略述如次:

分釐字義之解釋,當起源於計算長度.黃帝時以一黍之長,爲長度之標準,謂之一分.漢書律歷志曰:"以子穀秬黍(即黑黍)中者,度之九十分,爲黃鍾之長,一黍爲分."主術訓曰:"寸生於穰,十穰爲分,十分爲寸."劉向說苑曰:"度量衡以黍生,一粟爲一分."漢賈誼(200B.C.–168B.C.)新書六術篇,謂"十毫爲一髮,十髮爲一釐,十釐爲一分."許慎說文解字則言"十毫爲一程,十程爲一釐,十釐爲一分."至漢劉歆(?–23)銅斛銘始確定"十毫爲一釐,十釐爲一分."

論長度.九章算術僅至寸而止(卷九句股章有"答曰二尺四寸五分"之句係"二尺四寸"之誤),寸以下概以命分法表之.魏劉徽(三世紀後半期)注,則在寸以下,增加分,釐,毫,秒,忽,五名,謂忽以下微數無名.五經算術在寸以下,雖尚有分字,但又於寸之下,常以命分法表之,是可證當時

以寸爲最低單位. 隋書載劉宋祖沖之(428--500)割圓術所用之名詞,爲丈,尺,寸,分,釐,毫,秒,忽,與劉徽同. 隋唐律歷志及宋李籍九章算術音義引孫子算經云:"蠶所生吐絲爲忽,十忽爲秒,十秒爲毫,十毫爲釐,十釐爲分." 但現傳唐李淳風(602-670)注釋本,則云:"蠶吐絲爲忽,十忽爲一絲,十絲爲一毫,十毫爲一釐,十釐爲一分."是將"秒"字更改爲"絲"字矣. 元朱世傑算學啓蒙載小數,於分釐毫絲忽之下,雖尚有纖,沙,塵,埃,渺,漠,模糊,逡巡,須臾,瞬息,彈指,刹那,六德,虛,空,清,淨等名稱.但論長度曰:"度起於忽,"是至忽而止也.

至清時數理精蘊始明白規定度法之名稱爲 "丈,尺,寸,分,釐,毫,絲,忽,微,纖,沙,塵,埃,渺,漠,模糊,逡巡,須臾,瞬息,彈指,刹那,六德,虛空,清淨."

論地積. 周時以六尺爲步,百步爲畝,百畝爲頃.此百步爲畝之"步"字,乃指"方步"而言,但不稱方步,而祇稱步. 六國時以六尺四寸爲步,百步(方步)爲畝. 秦時以六尺爲步,"二百四十步(方步)爲畝.故三通攷有云:"秦復古制,六尺爲步." 癸巳存稿亦云:"秦以周尺六尺爲步." 孫子算經及隋(589-618)韓延夏侯陽算經均言"六尺爲一步,二百四十步(方步)爲一畝,三百步爲一里."夏侯陽算經論步數不等曰:"田曹以六尺爲步,三百步爲一里.雜令諸度地以五尺爲一步,三百六十步爲一里.田令諸田廣一步,長二百四十步爲畝.百畝爲頃." 唐宋以後,以五尺爲步,但步之長短

不一,一方步稱曰"積步"(夏侯陽算經中用有積尺與積步之名),亦曰"弓"(弓字可作長度與面積兩種解釋.清順治十一年規定五尺爲弓,三百六十弓爲里,乃計算長度之弓也).二百四十積步,即二百四十弓,亦卽六十方丈,謂之一畝.弓之下以分釐爲小數,畝之下亦以分釐爲小數.弓下之分等於二方尺半,畝下之分等於六方丈. 又南宋楊輝(十三世紀後半期)田畝比類捷法曰:"二尺爲步後四分."是則以長度之步爲單位,五寸適等於一分. 元朱世傑算學啓蒙曰:"田起於忽.十忽謂之一絲,十絲謂之一毫,十毫謂之一釐,十釐謂之一分,十分謂之一畝,百畝謂之一頃,三百步謂一里."畝下有分,釐,毫,絲,忽五名,小數至忽而止.依此計算,則忽適爲六方寸(王鑒算學啓蒙述義於忽字下有註曰:"闊一寸長六分,"者誤也).於此以一里爲三百步,則一步必非五尺而爲六尺. 算法統宗增删本載田法之名詞爲頃,畝,步,分,角,而以三百六十步爲一里.是則以一畝爲四角,一步爲五尺,一分爲二十四積步也.

論體積. 古人以"立方尺""立方寸"與長度之"尺""寸"混稱,亦猶地積之"方尺""方寸"統稱爲"尺""寸"者然.

五曹算經稱"立方尺"爲"尺","立方寸"爲"寸",而於立方尺以下各數,順次稱之曰寸,分,釐,毫,實屬於理不合.

論容量. 九章算術至升而止,升以下用命分法表之.尙書舜典孔傳曰:"量本起于黄鍾之籥,以子穀秬黍中者,

千有二百實爲一籥,十籥爲合,十合爲升,十升爲斗,十斗爲斛,而五量嘉矣.」前漢律歷志曰:「量起於黃鍾之龠,以子穀秬黍中者千二百實其龠,合龠爲合,十合爲升,十升爲斗,十斗爲斛.」隋書律歷志引孫子算經曰:「六粟爲一圭,十圭爲一秒,十秒爲一撮,十撮爲一勺,十勺爲一合,十合爲一升,十升爲一㪷,十㪷爲一斛.」但現傳本則稱:「量之所起起於粟,六粟爲一圭,十圭爲一撮,十撮爲一抄,十抄爲一勺,十勺爲一合,十合爲一升,十升爲一㪷,十㪷爲一斛.」將從前之「撮」「秒」兩字之次第顚倒,且易「秒」爲「抄」.又漢應劭以「四圭爲撮.」孟康以「六十四黍爲圭.」夏侯陽算經載:「倉曹云,量之所起起於粟,十粟爲一圭,十圭爲一撮,十撮爲一抄,十抄爲一勺,十勺爲一合,十合爲一升,十升爲一斗,十斗爲一斛.」是以十粟爲一圭也.唐以後量制,均依斛斗升合勺抄撮圭之名爲次第,而以一圭爲六粟.數理精蘊,筆算數學復將「抄撮」二名詞易位爲「撮抄,」「斛」書作「石.」粟以下之名,數度衍謂有再作粒顆,或顆粒,或粒黍糲粸粃者.茲若將容量與長度之名詞對照之,容量用斛斗升,長度則用丈尺寸.容量之升,適當長度之寸.分釐毫秒忽之第四字爲「秒,」合勺撮秒圭之第四字亦爲「秒.」再「五斗亦可稱斛」及論語注「十六斗曰庾」(禮聘禮又曰十六斗曰籔,十籔曰秉)之說,則可與小爾雅載「五尺爲墨」(或五尺爲尋)及「十六尺爲當」之說相當.設容量原來名稱僅

至升而止,則古人必仍補之以小數之名.順次稱曰斛斗升分釐毫絲忽.現今容量名詞獨異於度權衡者,蓋以規定量法之名詞較多,尋常已足敷用.故不含有分釐等名稱也.

論重量. 尙書舜典孔傳.曰:"權本起於黃鍾之龠,一龠容千二百黍,重十二銖,兩之為兩,十六兩為斤,三十斤為鈞,四鈞為石."此以石,鈞,斤,兩,銖為五權. 九章算術論權,亦僅至銖而止.銖以下用命分法表之. 孫子算經曰:"稱之所起起于黍,十黍為一絫,十絫為一銖,二十四銖為一兩,十六兩為一斤,三十斤為一鈞,四鈞為一石."夏侯陽算經所載亦同.此均於銖之下,增有絫黍之名. 唐慧琳一切經音義一百卷引孫子算經曰:"凡稱之所起始于黍,十黍為一絫,十絫為一銖,六銖為一錙,錙卽分也,汾間反,四分為一兩,十六兩為一斤,三十斤為鈞,四鈞為一石,卽一百二十斤也."於此解釋六銖為錙,亦卽一分也. 北宋淳化三年(992)規定兩以下之十進小數為"錢分釐毫絲忽,"與銖絫制參用.然宋元算數仍舊以十黍為累,十累為銖,二十四銖為兩.至明以後,始通用錢分釐等名稱. 南宋楊輝言"六兩為斤後三分七釐五毫."是謂斤後之小數為分釐毫也. 元朱世傑算學啓蒙曰:"衡起於黍,十黍謂之一絫,十絫謂之一銖,六銖謂之一分,四分謂之一兩,十六兩謂一斤,十五斤謂一秤,三十斤謂一鈞,四鈞謂之一碩."在此除舊有之字外,再增"秤"之名稱,"石"書作"碩,"其小數之名,亦僅至絫黍

而止. 至數理精蘊載:"衡法,兩以下曰錢,分釐以下,幷與度法同." 於是兩錢分釐毫絲忽以下,借用度法之"微,纖,沙,塵,埃,渺,漠,模糊,逡巡,須臾,瞬息,彈指,刹那,六德,虛空,淸淨.諸名詞矣.算法統宗增删本所載亦同. 筆算數學載:"錢被分一次爲分,二次爲釐,三次爲毫,四次爲絲,五次爲忽,六次爲微,七次爲纖,八次爲沙,自此下推命名之法則易,乃每八次連名(內含千萬), 至十六次爲塵.自第九至十六諸次,乃倒用大數各位名目,與塵名相連,如第九次爲千萬塵,十次爲百萬塵,十一次爲十萬塵,十二次爲萬塵,十三次爲千塵,十四次爲百塵,十五次爲十塵,十六次爲塵,再下推八次(卽以十分二十四次) 爲埃,又八次爲渺,又八次爲漠,又八次爲模糊,餘次不必盡述.此命名之法係珠算所言,大抵指天平衡數立名." 於此所用諸小數,雖亦依照數理精蘊所云採用度法之名.但進位法,自沙以下,不用十進,而以萬萬進,則又借用算學啓蒙所載之小數進名法也.

論銀錢. 昔時以用制錢爲最小. 九章算術在錢以下,概以命分法表之. 五曹算經與夏侯陽算經均稱錢之單位爲"文," 而借用長度之"分釐毫"之名,爲文以下之十進小數. 元賈亨算法全能集載 "錢以下,有分,釐,毫,絲,忽,微,塵,渺,漠,幽,虛空淸淨,無爲,盡" 等名詞. 現今易兩爲圓.一圓爲十角,角以下之小數,亦借用分釐毫等名詞.

論曆法. 書堯典疏曰:"周天三百六十五度,日行一度,

月行十三度."此以度,日,月爲曆法之名. 洪範疏曰:"從夜半,以至明日夜半,周十二辰,爲一日." 此則以一日爲十二辰.韻會釋時爲辰,故十二辰亦即十二時. 唐南宮說(八世紀初)稱一年(365·2448日)爲"期周三百六十五日餘二十四,奇四十八,"一月(29·5306日)爲"月法二十九日,餘五十三,奇六." 是以一日之百分一爲餘,一餘之百分一爲奇. 元郭守敬(1231–1316)言:"一日爲一百刻,一刻爲一百分,一分爲一百秒." 數理精蘊載曆法有二,一爲"一宮爲三十度,一度爲六十分,一分爲六十秒,一秒爲六十微,一微爲六十纖,一纖爲六十忽,一忽爲六十芒."二爲"一日爲十二時,一時爲八刻,一刻爲十五分,分以下與前同." 算法統宗增删本所載亦然.此處雖用分秒等名詞,但均不以十進.

論角度. 一圓周爲三百六十度,係取周天之略數.度下用分秒等名詞,亦借用曆法中之名也.

論不名數. 不名數之小數命名法,發達較遲.蓋因度量衡諸數,既各具專名,而抽象計算,復有命分法以濟其窮,初無感若何重要也.嗣後遇各種餘數無以名之之時,無論其爲重量,面積,體積,貨幣,銀錢等,概借用長度中之分釐等名稱以稱之.於是無形中成爲通用之小數名稱.至泛言此等名稱得以命一切小數者,厥爲數學九章與算學啓蒙. 宋秦九韶(十三世紀)數學九章載:"小數之類,一以下,有分,釐,毫,絲,忽,微,塵,沙,渺,莽,輕,清,烟." 元朱世傑算學啓蒙載:"小

數之類:一,分,釐,毫,絲,忽,微,纖,沙,萬萬塵曰沙,萬萬埃曰塵,萬萬渺曰埃,萬萬漠曰渺,萬萬糢糊曰漠,萬萬逡巡曰糢糊,萬萬須臾曰逡巡,萬萬瞬息曰須臾,萬萬彈指曰瞬息,萬萬刹那曰彈指,萬萬六德曰刹那,萬萬虛曰六德,萬萬空曰虛,萬萬清曰空,萬萬淨曰清,千萬淨,百萬淨,十萬淨,萬淨,千淨,百淨,十淨,一淨." 此中沙,塵,埃,渺,漠,糢糊,逡巡,須臾,瞬息,彈指,刹那,六德,虛,空,清,淨,十六名詞,係借自印度佛典中之名.惟其進位法,自分至沙八名詞,每位易名,自沙以後,每八位易名,覺先後不一致.故數理精蘊增刪算法統宗等書,均一律改爲每位易名.又虛,空,清,淨,四名,則作爲虛空及清淨二名詞焉. 又淸方中通數度衍載微以下之小數"或作微,塵,渺,漠,埃,纖,沙,或作微,僉,或作纖,塵,沙,渺,漠,茫."

論百分法. 其百分數係屬於不名數.卽假定原數爲一百.與他數相比,所得之比値也.此類所用之名詞甚廣. 例如云:"收穫八成," "赤金九成." "是以"成"爲十分之一. "小帳見一加一," 意謂於一之外,再加十分之一.是以"一"爲十分之一. "成三破二,"意謂買賣房屋,買主出用錢百分之三,賣主出百分之二,是以"一"爲百分之一. "依價九折,"意謂價銀百圓之物,祇須九十圓.是以"折"爲十分之一. "照碼對折,"意謂價碼百圓之物,祇須五十圓.是以"對折"爲二分之一. "倒六折,"卽四折.是以"折"爲十分之一. "八五折,"亦稱"一五扣."意卽 8.5 折,或 15% 扣.卽

謂價銀百圓之物,祗須八十五圓.是"折"或"扣"原意爲十分之一者,亦可作爲百分之一."雙九折,"亦稱"雙九扣,"意謂價銀百圓之物,祗須八十一圓.是以第一折爲十分數,"雙折"爲第一折之自乘數."七折八扣,"即五六折.意謂價銀百圓之物,祗須五十六圓.是以"折"爲十分之一,"扣"爲折之十分之一."鋪店賺利一分,"意謂値銀十兩之物,售得銀十一兩.是以"分"爲十分之一.諺云:"某人十分可靠"及"三分容貌七分修飾"等語.是以"分"爲十分之一."某學生成績八十九分五釐."是以"分"爲百分之一,"釐"爲千分之一.又日本之割合算,亦稱步合算.是以"割"爲十分之一,"分"或"步"爲百分之一,"釐"爲千分之一.

論利息.亦百分法應用之一種.在昔借貸貨物,僅規定限期加償原物而已,故孫子算經中有"貸絲,"張邱建算經中有"貸絹"諸問題.迄後漸有銀錢之借貸,而加償以息金.惟所用名詞之意義亦不一.如云"月利二分"者,意謂本銀百兩,月得利息二兩(如夏侯陽算經分祿料節載"今有官本錢八百八十貫文,每貫月別收息六分,計息五十二貫八百文"),是以分爲百分之一."年利一分"者,意謂本銀百兩,年得利息十兩,是以分爲十分之一.近世稱"年利六釐"者,意謂本銀百圓,年得利息六圓,是以釐爲百分之一."月利六釐"者,意謂本銀百圓,月得利息六角,是以釐爲千分之一.故年利之分釐,實大於月利之分釐十倍也.

再近世譯名. 長度之單位為公尺(Metre), 譯曰"米,"亦譯"粎,"以下小數公寸,公分,公釐,依次譯曰"粉,""糎,""粍"(近有改譯"籿,""粉,""糎"者,但尚未通行). 地積之單位為公畝(Are). 譯曰"安,"日本譯曰"亞爾."其百分之一為公釐(Centiare),譯曰"[illegible],"日本譯曰"[illegible]." 容量之單位為公升(Litre),譯曰"立,"亦譯"竔."以下小數公合,公勺,公撮,依次譯曰"竕,""竰,""竓,"或"[illegible],""[illegible],""[illegible]." 重量之單位為公分(Gramme),譯曰"克,"日本譯曰"瓦,"以下小數公釐,公毫,公絲,依次譯曰"兝,""兣,""兞"(近有改譯為"[illegible],""[illegible],""[illegible]"者,亦尚未通行), 日本譯曰"瓰,""甅,""瓱."此類凡含有偏旁為分釐者之字體,均以分為十分之一,釐為百分之一.

茲據上所云,除其非十進法及不通用者外,將各數含有分釐等字,及作有偏旁者為主,對照列成二表如下:

第一表

數位	$(10)^0$	$(10)^{-1}$	$(10)^{-2}$	$(10)^{-3}$	$(10)^{-4}$	$(10)^{-5}$	$(10)^{-6}$	$(10)^{-7}$	$(10)^{-8}$	$(10)^{-9}$	$(10)^{-10}$	$(10)^{-11}$	$(10)^{-12}$
數名	一	成	分	釐	毫	絲	忽	微	纖	沙	塵	埃	渺
長度	尺	寸	分	釐	毫	絲	忽						
地積	晌	畝	分	釐	毫	絲	忽						
重量	兩	錢	分	釐	毫	絲	忽						
銀幣	圓	角	分	釐	毫	絲	忽						
百分法	一		分	釐									
月利	一		分	釐									

第二表

數位	$(10)^0$	$(10)^{-1}$	$(10)^{-2}$	$(10)^{-3}$	$(10)^{-4}$	$(10)^{-5}$	$(10)^{-6}$	$(10)^{-7}$	$(10)^{-8}$	$(10)^{-9}$	$(10)^{-10}$	$(10)^{-11}$	$(10)^{-12}$
數名	倜	份	俚	仛	份仛	俚仛	示	份示	俚示	末	份末	俚末	尔
長度	米(粎)	粉	糎	粍	[illegible]	粅							
地	安	坋	[illegible]										
積	亞爾		[illegible]										
容	立	竕	竰	竓									
量	竔	[illegible]	[illegible]	[illegible]									
重	克	兝	兣	兞									
量	瓦	瓰	甅	瓱									
年利		份	俚										

第一表中於數名一字之後,加一"成"字.所謂成者,亦猶農家之收成,金銀之成色,表示十分之幾之意.用作小數之第一位.地積計算,東三省以"晌"爲單位.一晌等於十畝.今取之以作地積之單位,表示東省原屬我土之意.如此則表中各單位皆整齊劃一焉. 百分法以"分"爲百分數最恰.其小數第一位可用"成"字,如稱"幾成幾分,"但亦可用"十分"二字,如云"攷試成績以六十分爲及格"之類是也.

第二表,依照古義,凡數量計算至最低單位無以名之之時,特以分釐等字補充之.是分應爲小數之第一位,釐爲小數之第二位,方爲適合.且"粉,糎,兝,兣,瓰,甅"等字,中日兩國

沿用已久,現雖長度用"公寸,公分."重量用"公釐,公毫"等稱,但舊譯字體,同時保留之,似亦無妨.惟須與第一表之分釐等字有所區別.故"分"改作"份,"爲小數第一位."釐"改作"俚,"仍讀若釐,爲小數第二位."毫"改作"仛,"仍讀若毫,爲小數第三位.各個左邊所加之人旁,卽"個"字左邊之人旁.意謂一個之十分一爲份,一個之百分一爲俚,一個之千分一爲仛也.〔清田雯(1635—1704)古歡堂集云:"不惟近古莫及遠古,卽十年之前,勝于十年之後,什佰千萬矣,世風之下也,抑何故歟!"是以人旁之什佰等字,表示倍數,茲以人旁之份俚等字,表示小數,殆同一意義.〕如是則凡含有分厘偏旁之字體,悉作爲"十分之一""百分之一"之解釋.與表中粉糎等字之意義,亦能一貫.至於小數分節法,法美亦以每三位爲一節(參閱 Davies' Mathematical Dictionary).今小數第一節之三位爲"份,俚,仛,"各字左邊之單人旁,亦作爲表示第一節.再下小數第二節之第一位,爲仛之十分之一,稱曰"份仛,"第二位爲仛之百分之一,稱曰"俚仛,"於此各小數名詞,均祇依位加份,俚,而不用十,百,千等字(如筆算數學稱十塵,百塵,千塵等),以示大小數各自成系統.又第三位曰"示,"从二从小,以表示小數第二節.小數第三節之三位曰"份示,俚示,未,此未字可視爲三小二字所合成,以之表示小數第三節.小數之第四節爲"尒."此字上邊像亞剌伯數碼"4"字,下邊爲"小"字,可作爲4小

二字之合成.小數之第五節曰"悟,"此字之右上角爲"五"字,左邊像"小"字.小數之第六節曰"宋,"此字上面之"宀"與"六"字相似,脚下含有"小"字之形.小數之第七節曰"坏,"此字左邊偏旁常書作"七"像"七"字,右角下像"小"字之形.小數之第八節曰"宗,"此字上面像我國數碼"亠"字,脚下爲"小"字.小數之第九節曰"亲,"此字上面像我國數碼"文"字,脚下含有"小"字.小數之第十節曰"索,"此字上面爲"十,"脚下爲"小."小數第十節以下之數,不必每節各立新名,祇用我國大書數字表示節數,而附以"小卩"二字,作爲"小數節"之簡稱,依次稱曰"拾壹小卩,""拾貳小卩"等,如此雖至任何小數,無不具有名稱也.列表如下:

份僱 份僱 份僱 份僱 份僱 份僱 份僱 份僱 份僱
個·份僱毛,毛毛示,示示未,未未尔,尔尔悟,悟悟宋,宋宋坏,坏坏宗,宗宗亲,亲亲索,

份僱 份僱
拾 拾拾拾 拾拾拾
壹 壹壹貳 貳貳叁
份僱小 小小小 小小小……………
索索卩,卩卩卩,卩卩卩,

又前第二表中年利計算,如稱"長年六釐,""年利一分"之類,均應改作"長年六僱""年利一份."然後含義明顯.

一二兩表,可同時幷存.所注意者,惟第一表加一"成"字,第二表改用"份""僱"二字,足矣.

集 合 論

(Theory of sets)

蕭 文 燦

集合論 (Theory of sets, Mengenlehre) 爲德意志 Halle 大學教授坎托耳 (Georg Cantor)(1845年3月3日生——1918年1月6日歿)所創造之數學一分科,乃論無窮之物之集合者也.據氏之自述,彼之發表集合論,曾費十年之躊躇.蓋其中所含之思想與常識相反者頗多,而爲常識意想不到者亦復不少.實爲富於革命色彩而又有巨大建設之理論者也.從來對於'無窮'一概念甚爲漠然.自集合論出不僅有精確嚴正之理論且於其上建築富麗堂皇之王宮.時至今日集合論已侵入數學各部門中.苟不知集合論,無論何門數學書皆難透澈了解.其重要實非數學任何分科所比擬.本篇之目的,在將此精深嚴密之理論爲平易之敍述.使無何等之預備知識皆得而卒讀焉.

I 基本概念

1 **集合之意義** 吾人直觀或思維之對象,如爲相異而確定之物,其總括之全體卽謂之**集合** (Aggregate or set, Menge) 其組成此集合之物謂之集合之**元素** (element). 通常用大文字表示集合如 A, B, C, 等用小文字表示元素如 a, b,

c 等.若集合 A 係由 $a, b, c, \cdots\cdots$ 諸元素所組成則表如 $A = \{a, b, c, \cdots\cdots\}$ 而 a 為 A 之元素,亦常有用 $a \varepsilon A$ 之記號表之者. a 非 A 之元素則記如 $a \bar{\varepsilon} A$.

上之定義中其所用之'相異'與'確定'之二語,殊有說明之必要.所謂相異者取二物於此,其為同一,其為相異,可得而決定.而集合所含之元素乃有彼此不同之意味.所謂確定者,此物是否屬於此集合一望而知,至少其概念上可以斷定其是否為該集合之元素.蓋合乎某條件之集合須其界限分明不容有糢糊不清之弊.

例如 1, 2, 3 三元素可組成一集合,單位長直綫上之一切點可組成一集合,反之如甚大之數或與 P 接近之點則不能為一集合.因其界限不清不能確定其數或某點是否屬於該集合也.他如自然數之全體,代數數之全體,超越數之全體等,皆各能組成一集合.蓋一數是否為超越數雖屬極難決定之問題.然一數為超越數則為超越數,不為超越數則不為超越數,固有其確然之概念,毫無抹棱兩可之餘地也.

組成集合之元素如為有窮則曰**有窮集合**(finite aggregate).元素無窮則曰**無窮集合**(infinite aggregate).如一切自然數之集合是.然此之所謂'無窮'與通常極限之'無窮大'稍異其趣.蓋所謂極限之無窮大者,不過為陳述之辭,並非一數,無確然之界限者也.而此之'無窮'則為自然數之數.自然數

之數有幾多卽有幾多,吾人思惟之活動有其確然之界限固不能或多或少也.吾人可名極限之無窮曰假無窮大而此之無窮乃'眞無窮大.'集合論中所論之集合,皆無窮集合.

無一元素之概念,亦得視爲一集合,可特名之曰**空集合**(leere Menge).

2. **部分集合**. 兩集合 A, B 之元素完全彼此相同者可以 $A=B$ 表之.

有二集合 A,B 於此,B 之各元素同時爲 A 之元素時則謂 B 爲 A 之**部分集合**(sub-aggregate, Teilmenge). A 之自身自亦可視 A 之部分集合.若 B 爲 A 之部分集合而 A 與 B 不相同,卽 B 之元素完全爲 A 之元素而 A 之元素則否,則謂 B 爲 A 之**眞部分集合**(pure sub-aggregate, echte Teilmenge),記如 $B\subset A$. 若單稱 B 爲 A 之部分集合則可記如 $B\subseteqq A$.

由定義 $A\subseteqq B$. $B\subseteqq C$ 則 $A\subseteqq C$ 乃屬甚明之事.

3. **對應及等價** 吾人能將無窮多之數及無窮多數之計算加以處理者,卽基於'對應'及'等價'之基礎觀念也.今有甲乙二集合,甲之一物與乙一物互相關聯之思維作用其最原始者卽互相對應之思維作用.苟無此則卽無何等之思維作用可言.吾人由此根本思維活動之對應觀念可導出集合等價之觀念之定義如次:

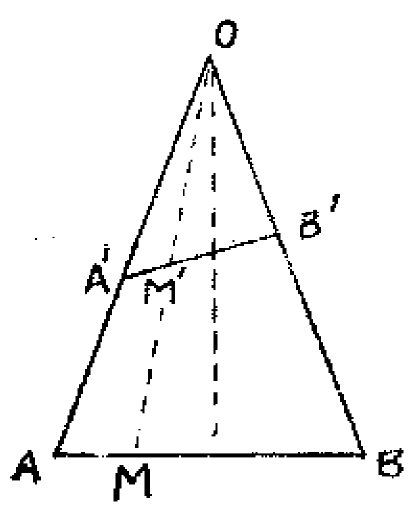
集合 M 之各元素各與集合 N 中之唯一元素對應.反之

集合N之各元素亦各與集合M中之唯一元素對應.如此稱爲**一一對應**(one-to-one correspondence). 凡兩集合之各元素有如此一一對應之關係者謂此兩集合爲**等價**(equivalent).

例如集合M乃由自然數之全體$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$所組成,集合$N$爲正偶數之全體$\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$所組成,則此兩集合卽如次樣對應:

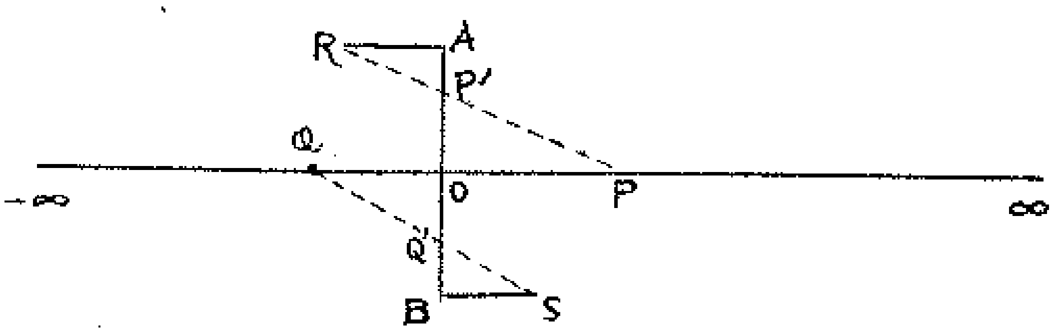
$$\begin{array}{cccccccc} M: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ N: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots\cdots \end{array}$$

卽M集合中之n對應於N集合中之$2n$,如此則M之一元素恰對應於N之一元素,反之亦如之,則此M集合與N集合卽爲等價.以吾人之常識觀之,集合N之偶數皆包含於集合M之中,是集合M之無窮大應比集合N之無窮大爲大.然實際上此兩集合乃一一對應者,故在某種意味上可視爲此無窮大相等.故無窮集合之部分集合與全體集合不如通常之有窮集合,其部分一定比全體小也.此再觀下之二例更明:今有二綫AB與$A'B'$綫分AB上之一切之點之集合I,與綫分$A'B'$上之一切之點之集合II,乃一一對應.何以言之!如圖聯AA'與BB'相交於O.由O引任意之直綫OM與AB,$A'B'$各相交於M及M'.M在AB上由A動至B時,則M在$A'B'$上由A'動至B'.



故 M 與 M' 恰是互爲對應.是以集合 I 與集合 II 爲等價.

不僅此也.無限直綫上(兩端除開)之點亦與有限直綫上之點爲等價.如圖於無限直綫 $(-\infty,\infty)$ 上之一點 O 引垂綫



AB, 過 A,B 各引平行於 $(-\infty,\infty)$ 之綫 AR, BS. 聯 R 與半直綫 (O,∞) 上之一點 P, 則與 AB 相交於 P'. 同樣聯 S 與半直綫 $(-\infty,O)$ 之一點 Q, 則與 AB 相交於 Q'. 如此則 (O,∞) 上之點與 OA 上之點一一對應, $(-\infty,O)$ 上之點與 OB 上之點一一對應. 故綫分 AB 上之點與無限直綫 $(-\infty,\infty)$ 之點爲等價.

兩集合 M 與 N 等價可用記號

$$M \sim N$$

表之.而 $M\sim N$, $N\sim P$ 則 $M\sim P$ 亦不難明者也.

關於無窮集合有次之顯著之定理:

定理 1. M 若爲無窮集合,則必含與自身等價之真部分集合.

〔證明〕　設無窮集合 M, 今於 M 中選出一元素 m_1, 再由其殘餘之部分取出第二元素 m_2, 再由其殘餘之部分取出

第三元素m_3.如斯繼續取出 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n,\cdots\cdots$, 因$M$為無窮集合,故無全部取盡之時.於是遂得一無窮集合$\{m_1,m_2,m_3,\cdots\}$.此集合以$M_1$名之$M$中除去$M_1$之集合名為$M_2$,* 卽記如

$$M = M_1 + M_2$$

今於M_1中取其偶數者作成集合$N_1=\{m_2,m_4,m_6,\cdots\cdots\}$. 則$N_1$為$M_1$之真部分集合,因而亦為$M$之真部分集合.

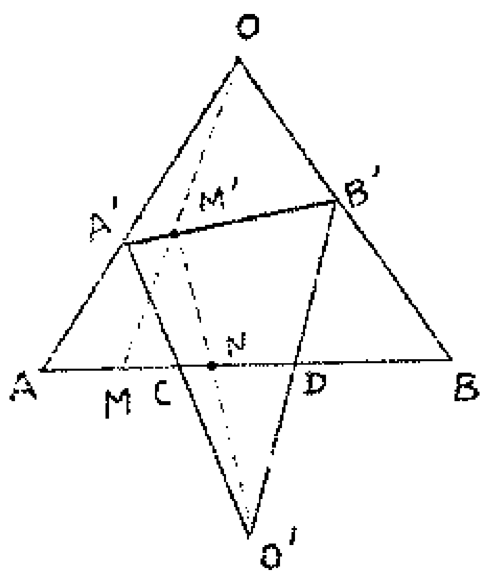
今將M_2與N_1成立之集合

$$M'=N_1+M_2 \qquad (2)$$

考之.則M'為M之真部分集合明也.

M_1與 N_1如次之關係一一對應.

$$\begin{array}{lcccc} M_1: & m_1 & m_2 & m_3 & \cdots\cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ N_1: & m_2 & m_4 & m_6 & \cdots\cdots \end{array}$$



又(1)之右邊之M_2之各元素a,與(2)之右邊之M_2之各元素a,其本身對應.故M與M'一一對應.因而M與M'等價.且M'為M之真部分集合.故上之定理成立.

與自己等價之真部分集合不限於如上者,有種種之方法可得.例如綫分AB上之點與其一部分CD上之點,能如左圖一一對應.卽於綫分AB

* 如M_1將M全部取盡之時實際M_2不存在,卽M_2有為空集合之時.

外一點 O, 聯 OA, OB 二線,於又一點 O' 聯 $O'C$, $O'D$ 與 OA, OB 各相交於 A',B'. 如圖可見 AB 綫上之任一點 M 與 CD 綫上之一點 N 相對應.

此爲無窮集合之特性所以異於有窮集合者也.因是有許多作家卽取此爲無窮集合之定義.卽

集合 M 有與之等價之真部分集合 M' 存在者,曰無窮集合.反之無論取何樣之真部分集合而無有與其自身等價之時,稱 M 曰有窮集合.

蓋此有窮與無窮之定義與吾人普通有窮無窮之思想毫無衝突之處.如由 5 個物所成之集合,無論如何不能與由 3 個或 4 個所成之集合對應.反之如爲無窮集合,則如上舉之例,可以有其等價之真部分集合存在.

4. 可數集合 吾人所見最簡單之無窮集合莫過於自然數全體之集合 $\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$. 凡與此自然數一一對應之集合卽謂之**可數集合** (enumerable set, abäzbre Menge) 蓋此種集合之元素皆可附以 1,2,3,…… 之番號也.故可數集合皆能書爲 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots\cdots\}$. a_1 卽番號爲 1 亦卽與 1 對應之元素, a_2 乃番號爲 2 亦卽與 2 對應之元素,以下準此.

若 M 爲有窮集合則至少亦爲可數集合.

定理 2 無窮集合常含一可數之部分集合.

〔證明〕 設 M 爲無窮集合.由 M 中任意取出一元素 m 於其殘餘之部分又任意取出一元素 m_2,更於其殘餘部分

取出m_3,如斯順次行之取出$m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots$.因M爲無窮集合故無取盡之時,因而$m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots$亦爲無窮之多.今將得出之元素之全部$\{m_1,m_2,m_3\cdots\cdots\}$視爲一集合,此集合明明爲$M$之部分集合,且其元素可附以1,2,3,……之番號.故定理云云.

因此可數集合於某意味上可視爲無窮集合之最小者.

例如由$\{1,2,3,\cdots\cdots\}$中除去有限個之集合例如$\{2,3,4,\cdots\cdots\}$仍爲可數集合.何則?蓋可以如

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\cdots \end{array}$$

對應也.他如正偶數或正奇數之全體自亦爲可數集合.

可數集合之性質甚多,由此可引出甚多有趣之結果,將於次章詳論之.

5.　集合之和,差,積.

(i)　**和集合.**　任意個集合$M_1,M_2,\cdots\cdots,M_n,\cdots\cdots$(其個數可超過可數以上)今有一集合$S$含一切$M_n$ $(n,=1,2,\cdots\cdots)$之元素之全體者.則謂S爲集合$M_1,M_2,\cdots\cdots$之**和**.常以

$$S=\mathfrak{S}M_n$$

或

$$S=M_1+M_2+M_3+\cdots\cdots$$

表之.如M_i,M_k皆含有同一元素a時則規定S中只取一次a.

例如　$M_1=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$,　$M_2=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$ 時則

$$M_1+M_2=\{0,1,2,3,\cdots\cdots\cdots\}.$$

若集合 $M_1, M_2, M_3\cdots\cdots$ 爲可數個時,其和可書如

$$S=M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

若爲

$$M_1\subset M_2\subset M_3\cdots\cdots\subset M_n$$

則 $$S=M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n=M_n$$

(ii) **餘集合.** 若 $M\supset N$ 時,由 M 中減去 N 其剩餘之元素之全體之集合.名 M 與 N 之**差**以 $M-N$ 表之.

(iii) **積集合.** 任意個集合 $M_1, M_2, \cdots\cdots$ 此等一切之 M_i 之共通元素之全體之集合名爲 $M_1 M_2, \cdots\cdots$ 之**積**或**共通集合** (Durchnitt). 以

$$D=\mathfrak{D}\,D_n$$

表之,或書如

$$D=M_1M_2M_3\cdots\cdots\cdots$$

如集合 $M_1, M_2\cdots\cdots M_n\cdots\cdots$ 之個數爲可數則其積可書如

$$D=M_1M_2\cdots\cdots M_n\ \cdots\cdots=\prod_{n=1}^{\infty} M_n.$$

若爲 $$M_1\supset M_2\supset M_3\supset\cdots\cdots\supset M_n$$

則 $$D=M_1M_2\cdots\cdots M_n=M_n$$

如集合 M, N 無共通之元素則

$$D=MN=O.$$

由和與積之定義次之關係不難證明.

(1)　　$A+B=B+A,$

(2)　　$A+(B+C)=(A+B)+C,$

(3)　　$C(A+B)=CA+CB.$

II　可數集合與不可數集合

6. 可數集合之主要性質

定理 3　可數集合之無窮部分集合爲又一可數集合.

〔證明〕 設可數集合$M=\{m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots\}$,今所取之無窮部分集合設爲$M'$,其所含之元素依其番號之大小排列之設爲$M'=\{m_{\alpha 1}, m_{\alpha 2}, \cdots\cdots\}$則此自可如下圖與1,2,3,……對應,卽

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ m_{\alpha 1} & m_{\alpha 2}, & m_{\alpha 3}, & \cdots\cdots \end{array}$$

故M'爲可數集合明矣.

定理 4.　一可數集合附加有限元素或除去有限個元素仍爲可數集合.

〔證明〕 設可數集合爲$M=\{m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots\}$ 今加入 p 個新元素$n_1, n_2, \cdots, n_p$則所成之集合爲

$$M'=\{n_1, n_2, \cdots\cdots n_p, m_1\ m_2, \cdots\cdots\}$$

則此集合之元素可如次樣與自然數一一對應

$$\begin{array}{cccccc} n_1, & n_2, \cdots\cdots, & n_p, & m_1, & m_2, & \cdots\cdots \\ 1 & 2 & p & p+1, & p+2, & \cdots\cdots \end{array}$$

除去有限個元素所得之集合亦可同樣證明之.

定理 5. 二可數集合之和仍爲一可數集合

〔證明〕 令
$$A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots\}$$
$$B=\{b_1, b_2, \cdots\cdots\}$$
$$C=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1\ b_2, \cdots\cdots\}$$

C 之元素 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots\}$ 可如次樣
$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 C 爲可數集合.但此乃假設 A 與 B 爲無共通元素之集合.

系 由一切整數而成之集合爲可數集合.

蓋因一切整數之集合可視如兩可數集合 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ 與 $\{-1, -2, -3, \cdots\cdots\}$之和也.

定理 6. 可數集合之可數的無窮個之和仍爲可數集合.

〔證明〕 設集合
$$M_1=\{a_{11},\ a_{12}\ a_{13}, \cdots\cdots\}$$
$$M_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\cdots\}$$
$$M_3=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots\cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其個數有可數的無窮之多,假定無共通之元素,其和以

$$M=M_1+M_2+M_3+\cdots\cdots$$

表之.今將 M 之元素如次排列之

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

由左上端始,其每一斜綫上之元素,其每一元素兩添數之和皆相同,且順次為 2, 3, 4, 5, ……而各斜綫上之元素之個數依次為 1, 2, 3, 4, ……個.故此各元素依其添數之和之順序排列之.即得

$$a_{11};\quad a_{12},\quad a_{21};\quad a_{13},\quad a_{22},\quad a_{31};\quad \cdots\cdots\cdots$$

此與自然數之集合乃一一對應不難知也.

7. 可數集合與不可數集合之實例

(i) **有理數之集合.** 今將依大小排列之有理數之集合考之.吾人素知無論如何接近之二有理數間有無窮多之有理數存在.所謂**稠密之集合** (dense set) 是也.換言之,相鄰二自然數間有無窮多有理數存在.故由表面言之,有理數之數為自然數之無窮大倍.以吾人粗率之常識觀之,有理數之集合與自然數集合不能一一對應.然以嚴密之理論竟能證其為可能.

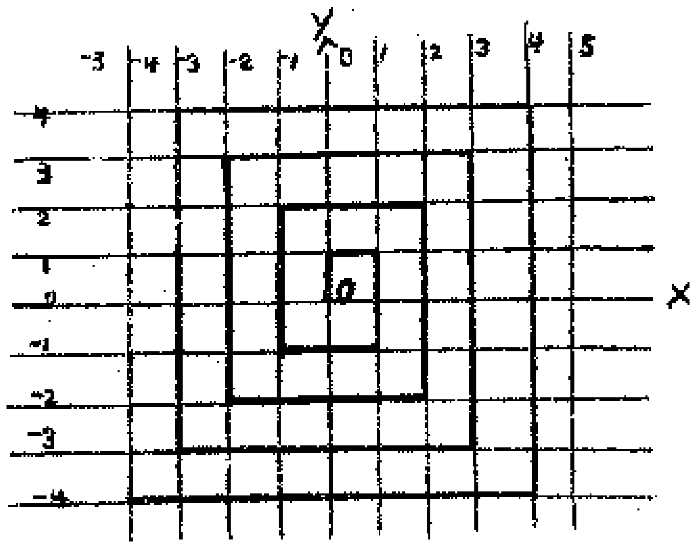
定理7. 由一切有理數而成之集合為可數集合.

〔證明〕 普通之有理數皆如$\frac{n}{m}$之形.今將各正分數依其分母分子之和之大小順序排列之.其和相同者,分子大者在前.負分數則列於其絕對値與正分數相同者之後.如次卽得次之排列

$$0;\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1};\ \ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2};\ \ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\cdots\cdots$$

此排列之集合全有理數皆含於其中,然此能與自然數一一對應不待言也.故定理云云.

此定理又可以次法證明之.取直交於o之x, y兩軸,各於其上記$1,2,3,\cdots\cdots\ -1,-2,-3,\cdots\cdots$點.今過此各點引平行於$x, y$之各綫則此全平面分成無數之正方形.此等平行綫之交點之x, y之値皆為正或負之整數及零甚明.卽$x=m,\ y=n$之形.



此(m,n)之一點自與有理數$\frac{m}{n}$一一對應.今由原點O始如上圖順次過平行綫之交點.此乃如螺旋狀進行,一切之格子點皆可無遺漏的通過.各格子點自可順次附以$1,2,3,\cdots\cdots$之番號卽與自然數一一對應.故此格子點為可數集合.今除去此$\frac{m}{n}$中之$\frac{m}{o}$,及$\frac{o}{o}$,無意味之點以及$m\ n$有公

約數之點,則其剩餘之全部卽對應於有理數之全部也.

此證明法包含次之定理.

定理 8. 平面上之格子點爲可數集合.

系 正有理數之全體之集合爲可數集合.

a, b 二數間之有理數爲可數集合.

(ii) **實數之集合.** 準上所論到處稠密之集合,亦能與自然數一一對應.然則一切無窮集合皆與自然數一一對應乎?若果如斯,則集合等價之觀念是無區別,而集合論中等價之觀念尙有何價値可言.然事實上有無論用何方法皆不能與自然數對應之集合存在.是爲**不可數集合** (non-enumerable set, Unzahlbare Menge), 如實數之集合是.

定理 9. 由 0 與 1 之間之一切實數而成之集合爲不可數集合.

〔證明〕 (Cantor 之證明,) 0 與 1 間之數皆各可以唯一一種無限小數之形表之.本來分數表成小數有兩種 (*i*) 有限小數 (*ii*) 無限循環小數,而無理數則爲 (*iii*) 非循環無限小數,在 (*ii*)(*iii*) 兩種已爲無限小數不必再論.而 (*i*) 種皆可書成 9 爲週期之循環小數.例如 $\frac{4}{8}=\cdot 8=79999\cdots\cdots$.蓋 1 卽可表成 9 爲週期之循環小數也.(因 $\frac{3}{1}=\cdot 3333\cdots\cdots$ $\therefore$ $1=\frac{1}{3}\times 3=\cdot 9999\cdots\cdots$) 故一切之有理數無理數皆得表成無限小數.而每數所表之形只能有一種,此可由小數之大小相等之意義直接推知.故 0 與 1 間之一切實數皆得表如

$o.p_1p_2p_3\cdots\cdots$ ($p_1p_2p_3\cdots\cdots$ 乃表 0, 1, 2, 3, ……, 9 諸數之任何一數)之形.吾人名 o 與 1 間一切如此形之數之集合爲 M. 今能證明 M 乃不可數集合.證此先證明次之事實:

"由集合 M 內無論取如何之可數集合 M_0,必有不屬於 M_0 而爲 M 之一元素存在."

今於 M 中任意選取之可數集合 M_0 其元素設爲 $A_1, A_2, A_3,$ ……其所表之無限小數如次.

$$
\begin{array}{ll}
A_1 & o.\,p_{11}\,p_{12}\,p_{13}\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_2 & o.\,p_{21}\,p_{22}\,p_{23}\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_3 & o.\,p_{31}\,p_{32}\,p_{33}\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_4 & o.\,p_{41}\,p_{42}\,p_{43}\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

今由此等數中如次之方法擇出 $q_1, q_2, q_3, q_4,$ …… 諸數

(i) $q_1\,q_2\,q_3\,q_4\cdots\cdots$ 乃, 1, 2, 3, ……, 9 之九數中之任一數,而非 o

(ii) q_1 乃與 A_1 之第一數字 p_{11} 異; q_2 與 A_2 之第二數 q_{22} 異, q_3 與 A_3 之第三數字異;……

以如斯擇出之數字 $q_1\,q_2\,q_3,$ ……… 作成無限小數

$$D=o.q_1\,q_2\,q_3\,q_4\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

此爲比 1 小之無限小數故爲 M 之一元素.而此與 M_0 中之任何元素異.因此數之第一數字 q_1 與 A_1 之第一數字 p_{11} 異,

故不爲A_1.此數之第二數字q_2與A_2之第二數字p_{22}異,故不爲A_2.以下同一理由知此數與M_0中一切之數皆不同.故此數D不屬於M_0而爲M之一元素.故由M中任取如何之可數集合亦猶有不屬於此集合而爲M之一元數存在.

如此,是由集合M中任取如何之可數集合而尙留有不屬於此可數集合之元素故知M乃一不可數集合.卽M爲一含有可數集合之眞部分集合之不可數集合.

系 由0與1間之一切無理數而成之集合乃一不可數集合.

何以言之,因若此爲可數集合而0與1間之一切有理數之集合爲可數集合則依定理5此二集合之和不得不爲可數集合也.然有理數集合與無理數集合之和爲實數之集合.是實數之集合爲可數集合,與前定理衝突.故無理數之集合不得不爲不可數集合.

定理 10. 一切實數之集合,及任如何接近二實數間之實數集合,與0與1間之實數集合一一對應,因而爲不可數集合.

又直綫上之點之集合與實數之集合一一對應,故由此定理可得次之定理.

定理 11. 無限直綫上之一切點之集合,及任如何接近二點間點之集合,及單位長綫上之點之集合一一對應,因而爲不可數集合.

然此定理已於§3所舉之二例證明之也.

定理12. 無理數集合與實數之集合乃一一對應.

〔證明〕 設無理數之集合爲 I. 無理數之集合中含有可數集合,設爲 A, 由 I 減去 A 所餘設爲 I'.

則 $$I = I' + A,$$

因而得 $$I+A=I'+A+A.$$

然實數之全體乃由無理數與有理數而成,但因有理數之集合爲可數集合,故與 A 一一對應.

$$\therefore \quad \text{實數集合} \sim I+A \qquad (1)$$

由定理 5 知 $A+A\sim A$ 故得

$$I+A=I'+A+A\sim I'+A=I \qquad (2)$$

由(1)與(2)即得

$$\text{實數集合} \sim I+A\sim I'+A=I= \text{無理數之集合}.$$

是即本定理之證明矣.

有理數依其大小順序排列無論取如何相鄰二有理數之間尙有無數多之有理數存在.然以如斯稠密之集合亦能與相鄰二數完全空虛之孤立性之自然數集合等價.此乃吾人常識意想不到之處;而以嚴正之理論能證明之,如定理7是.此不能不謂爲集合論之一成功.

然無理數之集合與有理數之集合相較,無論如何接近之二無理數間有無數多之無理數存在.同時有無數多之

有理數存在,"而"無論如何接近之二有理數間有無數多之有理數存在,同時有無數多之無理數存在." 兩者間之關係表面觀之恰恰相同.而有理數之集合與自然數之集合等價,是無理數之集合亦得與自然數等價;此無論何人所得而豫想者也.然以嚴正之理論證明其不然.可知無理數集合其稠密之程度大於有理數之集合萬萬倍.此種出乎常識之精密判斷,不能不謂爲集合論之又一成功.

不特此也.吾人尚可發現比有理數更廣之集合亦爲可數集合,而比無理數更稀之集合亦爲不可數集合者存在.

(iii)**代數數之集合與超越數之集合.** 凡滿足於方程式

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + p_1 x + p_0 = 0$$

(n: 正整數; $p_n, p_{n-1}, \cdots\cdots, p_0$ 爲 0 或正負之整數)

之值,只有 n 個存在.而此諸値中,其爲實數者特稱爲**代數實數**,或**代數數**.

由此定義可知一切有理數皆爲代數數.何則?蓋任意之有理數爲 $\frac{p}{q}$ 之形而 $x=\frac{p}{q}$ 即 $qx-p=0$ 之根.故有理數爲一次方程式之根.然一切代數數不必爲有理數.例如 $\sqrt{2}$ 非有理數,但爲 $x^2-2=0$ 之根,故亦爲代數數.實際有理數不過爲代數數之小部分.蓋有理數爲一次方程式之根,二次方程式以上之根一般即非有理數也.然一切實數皆代數數乎?是又不然.

凡非代數數之實數稱爲**超越數**(Transcendental Number)或

稱**超越實數**.

決定一數是否爲超越數乃不甚容易之事,然超越之存在由集合論證明則甚易.

定理 13. 由一切代數數而成之集合爲可數集合.

〔證明〕 於 n 次之代數方程式

(1) $$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+p_1x+p_o=o$$

$$(p_n,p_{n-1},\cdots\cdots,p_o:\text{整數};\ p_n\neq o)$$

中設

$$h=(n-1)+|p_n|+|p_{n-1}|+\cdots\cdots+|p_1|+|p_o|$$

($|p|$ 表 p 之絕對值)

稱爲方程式(1)之**高度** (rank). 一方程式只有一高度.例如 $4x^2+8x-1=o$ 則其高度爲 $(2-1)+3+8+1=13$. 而逆,設與以一高度則必只有有限個之方程式屬之.例如設 $h=3$ 則

$$3=(n-1)+|p_{n-1}|+\cdots\cdots+|p_1|+|p_o|$$

且 $p_n\neq o$ 是以 $n-1$ 可取之值只有2,1,0. 因而

$$3=2+|p_3|+|p_2|+|p_1|+|p_o|,$$

或 $$3=1+|p_2|+|p_1|+|p_o|,$$

或 $$3=|p_1|+|p_o|$$

故此時 $|p_3|+|p_2|+|p_1|+|p_o|$ 所取得之值不得超過3,因而其組合之數爲有限明已.

今先取 $h=1$ 所屬之一切代數方程式,(係數爲整數)再取屬於 $h=2$ 者,再取屬於 $h=3$ 者 ………,其同高度之方程爲有

限個,其中依方程式次數排列之,同次數者依 $p_n, p_{n-1}, \cdots\cdots, p_0$ 之大小排列之.如此則凡一切整係數之代數方程式吾人皆得而完全排列之也.各方程式於此列中有其一定之位置.故屬於此種之全體整代數方程式之集合為可數集合.

此等方程式中,無論何式其實根皆為有限個.再依其大小之順序排列之.即若整代數方程式之排列為

$$\psi_1(x)=0,\quad \psi_2(x)=0,\quad \psi_3(x)=0,\cdots\cdots\cdots$$

此等方程式之實根各為

$$a_1, a_2, \cdots\cdots a_p;\ b_1, b_2, \cdots\cdots, b_q;\ c_1, c_2, \cdots\cdots, c_r;$$

其 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 乃依其大小之順序排列者.但此時同一數有為異方程式之根者(例如 2 為 $x-2=0,\ x^2-4=0$ 之根). 則在此排列中為避免重複計,先出現者存之,後出現者去之.用如斯方法一切之代數數皆得而排列之,而每一代數數皆有其固定之位置.吾人依次附以番號則一切之代數之集合與自然數之集合一一對應也.故代數數之集合為可數集合.

定理 14 超越數必存在,其數比代數數多,為不可數集合.

〔證明〕 代數與超越數之全體乃作成實數之集合.今代數數為可數集合,則實數之中除代數數而外必尚有許多非代數數存在.此種非代數數之實數,即名為超越數.蓋若此超越數不存在,是實數完全為代數數,而為可數集合

也.此與定理 9 矛盾.

且此種非代數數之超越數不僅存在而已,其全體之集合必為不可數.蓋若可數則可數的代數數之集合與可數的超越數之集之和,必為可數集合,是卽實數為可數集合,仍與定理9矛盾.故超越數之集合,非為不可數集合不可.

系 一切非超越數之無理數之集合為可數集合.

定理15. 超越數之集合與實數之集合一一對應,因而與無理數之集合一一對應.

此可與定理 12 同樣證之.

任意二實數間有無數之超越數存在,在 Cantor 以前 Liouville 曾證明之.今於集合論中偶然而得此定理之別證.且不僅證明其存在而已,且定其為不可數集合.此種超越數之集合乃屬無理集合中之真部分集合,蓋無理數中除去代數數乃為超越數也.是超越數之稠密性其程度較無理數為稀薄,然亦不得與自然數一一對應.而代數數則有理數為其真部分集合,故代數數之稠密性其程度較有理數為大,然亦能與自然數一一對應.此種精密之判斷捨集合論其孰能之.此吾人對於 Cantor 氏之精思,不能不起崇高之景仰者也.

(iv) Liouville **之超越數之集合.** 雖然超越數之存在,固易證明而斷定某數為超越數與否則反無定法.通常所見之數如 π 如 e,其超越性之證明亦為歷史上有名之事蹟

如 e 之超越性乃法之 Hermite 於 1873 年證明. π 之超越性爲法之 Lindemann 於 1882 年證明.最近 e^{π} 之爲超越數乃 Gelfond 於 1929 年始證明.無論何數,其所用之計算皆異常巧妙.而如 Euler 常數

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.5772157\cdots\cdots$$

一般皆預料其爲超越數,但至今尙未能證明,其他如 2^{π}, π^{π} 是否爲超越數亦爲尙未決定之問題.然而吾人由 Liouville 之研究固不難書出無窮多之超越數也.

定理 16. ξ 爲 n 次之實代數數.即爲既約方程式.*

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n=0$$

之根.但 $a_0,\cdots\cdots,a_n$ 爲 0 或正負之整數,而 $a_n\neq 0$. 此時對於一切之整數 p, q $(q\geqq 1)$ 常有如

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>\frac{\varepsilon}{q^n} \qquad (1)$$

之 ε $(0<\varepsilon<1)$ 存在.

〔證明〕 吾人只須將如 $\left|\frac{p}{q}-\xi\right|<1$ 之分數 $\frac{p}{q}$ 而討論.因若 $\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>1$ 則(1)式已成立矣.用微積學中之平均定理因 $f(\xi)=0$, 得

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\xi)=\left(\frac{p}{q}-\xi\right)f'(u).$$

---

* 既約方程式者乃 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ 不能分解成 $(b_0+b_1x+\cdots\cdots+b_mx^m)(c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_px^p)$ 兩因數之積,但其中之 $b_0,\cdots\cdots b_m$; $c_0,\cdots\cdots c_p$ 爲正或負之整數或 0

此處之 u 乃 $\frac{p}{q}$ 與 ξ 間之一數.故 $\left|\frac{p}{q}-\xi\right|<1$ 則當然 $|u-\xi|<1$. 因此

$$|u|<|\xi|+1$$

故

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|=\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f'(u)}=\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu p^\nu q^{n-\nu}\right|}{q^n\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu u^{\nu-1}\right|} \tag{2}$$

$f(x)$ 既云為既約則右邊之分子不能為 o.因若為 o 則是 $\frac{p}{q}=o$ 因代數學之剩餘定理 $f(x)$ 必有 $x-\frac{p}{q}$ 之一因數,如此則 $f(x)$ 非既約也.

$\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu p^\nu q^{n-\nu}\right|$ 之各項皆整數之和.且不為 o 至少亦只能為1. 故

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu p^\nu q^{n-\nu}\right|\geqq 1 \tag{3}$$

又令

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu u^{\nu-1}\right|\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\nu\left|a_\nu\right|\left|u\right|^{\nu-1}<\sum_{\nu=1}^{n}\nu\left|a^\nu\right|(|\xi|+1)^{\nu-1}=\frac{1}{\varepsilon} \tag{4}$$

ε 僅依 $a_o,\cdots\cdots,a_n$ 及 ξ 而存在,且

$$o<\varepsilon<1$$

明已.故依(2),(3),(4)得

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>\frac{\varepsilon}{q^n}.$$

今用此定理如次可作無窮多之超越數.

今就

$$z=\frac{a_1}{10^{1!}}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots\cdots+\frac{a_m}{10^{m!}}+\cdots\cdots\cdots \qquad (m!=1.2.3\cdots\cdots,m)$$

一數考之.其中之 a_ν 乃如 $o\leqq a_\nu\leqq 9 \quad (\nu=1,2,\cdots\cdots\cdots)$ 之整數.此 z 爲有理數或超越數可證明如次:

設 $m\geqq 1$, 令

$$q=10^{m!};\quad p=a_1 10^{m!-1!}+a_2 10^{m!-2!}+\cdots\cdots+a_m$$

則

$$\left|\frac{p}{q}-z\right|=\frac{a_{m+1}}{q^{m+1}}+\frac{a_{m+2}}{q^{(m+1)(m+2)}}+\frac{a_{m+3}}{q^{(m+1)(m+2)(m+3)}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$<\frac{1}{q^m}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots\cdots\right)=\frac{1}{q^m}.$$

由某處起 a_ν 非全部爲 o 則 z 之展開之小數既不爲有限小數又不爲無限循環小數甚明.故此爲無理數.若 z 爲 n 次之代數數則依 Liouville 之定理,必有如

$$\left|\frac{p}{q}-z\right|>\frac{\varepsilon}{q^n} \qquad (o<\varepsilon<1) \qquad (6)$$

之 ε 存在.然一方

$$q^m>\frac{1}{\varepsilon}q^n$$

如 m 取得十分大則

$$\left|\frac{p}{q}-z\right|<\frac{1}{q^m}<\frac{\varepsilon}{q^n}$$

此與 (6) 相反.故除由某處起 a_ν 全部爲 o 外 z 常爲超越數.此超越數名爲 Liouville 之超越數.

今考對應於上之 Liouville 之無限小數

$$x = 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由假定 $a_1a_2a_3\cdots\cdots$ 非由某處起全部爲 0. 然此時之 x 乃 0 與 1 間展開之無限小數.故 Liouville 之超越數 z 與 0 與 1 間之實數 x 一一對應,即此二集合爲等價.然 0 與 1 間之實乃不可數集合.是以 Liouville 超越數之全體之集合亦爲不可數集合.因此吾人不難作出無窮多之超越數也.

Liouville 超越數之集合,爲超越數之真部分集合,自不待言,其密集自比超越數爲稀薄,然亦不可數集合.

(V) 不重合線分之集合. 可數集合尚有次例亦爲甚有用之定理.

定理 17. 直綫上不重合綫分(兩端可共有)之集合 M, 至多爲可數集合.

〔證明〕 先就 M 乃含於一有限綫分 AB 之內時證明之.此時因屬於 M 爲不重合之綫分,設綫分之長爲 l 則 $l \geqq 1$ 者,必爲有限個.今以

$$I_1^{(1)},\ I_2^{(1)},\ I_3^{(1)},\ \cdots\cdots\cdots,\ I_m^{(1)},$$

表之.其次屬於 M 之綫分其長 l 爲 $1 > l \geqq \frac{1}{2}$ 者,同樣亦必爲有限個,以

$$I_1^{(2)},\ I_2^{(2)},\ I_3^{(2)},\ \cdots\cdots\cdots,\ I_{m_2}^{(2)}$$

表之.以下同樣 l 之長係在 $\frac{1}{n-1} > l \geqq \frac{1}{n}$ 者以

$$I_1^{(n)},\ I_2^{(n)},\ I_3^{(n)},\ \cdots\cdots\cdots,\ I_{m_n}^{(n)}$$

表之.如此,凡屬於 M 之綫分依其長 l 爲大於 1 順次及

$\frac{1}{n-1}>l>\frac{l}{n}$中之$n=2,3,4,\cdots\cdots$等等之次序排列之,則$I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)},$

$\cdots\cdots, I_{m_1}^{(1)}, I_2^{(2)},\cdots\cdots, I_{m_2}^{(2)}, I_1^{(3)},\cdots\cdots I_{m_3}^{(3)},\cdots\cdots, I_1^{(n)}, I\cdots\cdots I_2^{(n)}, {}_{m_n}^{(n)},\cdots\cdots$

各有其固定之位置,而有1,2,3,……,之番號可附,順次與自然數對應也.故為可數集合.

其次論M並不含於有限綫分內之時.此時可以原點為中心而將直綫分成A_nB_n之n綫分考之.此A_nB_n內所含屬於M之綫分之集M_n如上段之證明至多為可數集合.而令

$$M_n:\quad I_1^{(n)},\ I_2^{(n)},\ \cdots\cdots,\ I_n^{(n)},\cdots\cdots$$

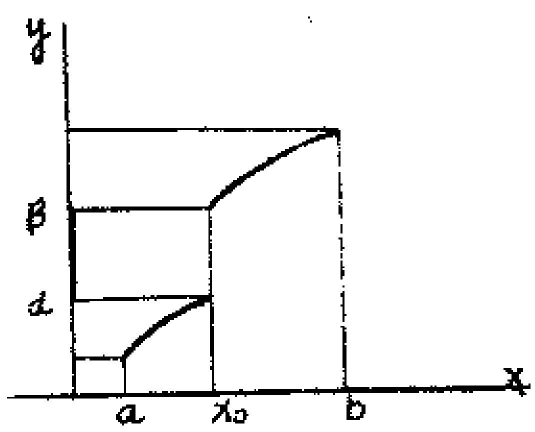
然此M乃明明為$M_1, M_2,\cdots\cdots, M_n,\cdots\cdots$全部之和,此$M_n$之個數又為可數個.故依定理6則$M$為可數集合無疑問也.

此定理不難擴張至平面卽

定理18. 平面上不相重之面分之集合,至多為可數集合.

用前定理可證明次之定理.

定理19. 設$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$為單調增加函數,則$f(x)$之不連續點之集合為可數集合.



〔證明〕x_0若為不連續之點如$h>o$則

$$\lim_{h\to o} f(x_0+h)=f(x_0+o)$$

與

$$\lim_{h\to o} f(x_0-h)=f(x_0-o)$$

兩值並不一致.因$f(x)$為增函數

則

$$f(x_o+o)>f(x_o-o).$$

故 $y=f(x)$ 之圖形對於 y 軸之射影,其 $f(x_o+o)-f(x_o-o)$ 之長得一綫分 $\alpha\beta$.是以每一不連續之點 x_o 卽與 y 軸上之一綫分 $\alpha\beta$ 對應.因 $f(x)$ 爲單調增加函數故此種綫分無重合之時.於是依定理17,此種綫分之集合爲可數集合.因而不連續點 x_o 之集合亦至多爲可數集合.

單調減少之函數亦有其同樣之定理.

8.直線上點集合與空間之點集合之關係. 直綫上之點其數爲無窮.平面上之點其數亦爲無窮.以吾人直覺之常識觀之,總以後者之無窮大其程度必比前者大.然而Contor於1877年證明此二集合爲等價,且直綫上之點集合與空間之點集合亦等價.

定理20. 單位長綫分上之點與一邊之長爲單位長之正方形及立方形內之點一一對應.

〔證明〕 此定理之證法有種種,今舉一種如次:

今正方形中之點 P 其坐標爲 x, y, 可書成無限小數之形.卽

$$x=o.x_1x_2,x_3\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y=o.y_1y_2\ y_3\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中之 $x_1, x_2,\cdots\cdots; y_1, y_2,\cdots\cdots\cdots$ 爲 $1,2,\cdots\cdots,9$ 數字及 o, 但如有爲 o 時則用下列方法.例如

$$x=o.aoobocd\cdots\cdots\cdots$$

$$y=o.ao\beta oo\gamma\cdots\cdots\cdots$$

其中之 $a, b, c, \cdots\cdots\cdots \alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots\cdots$ 乃表非 o 之數字,其爲 o 者卽表零.則可如次樣分成小節.

$$x = o.|a|oob|oc|d|\cdots\cdots\cdots$$

$$y = o.|\alpha|o\beta|oo\gamma|\cdots\cdots\cdots$$

卽以 o 爲首,連其次之數字,分成一小節.此等各小節各順次以 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots\cdots; \overline{y_1}, \overline{y_2}, \cdots\cdots$ 表之.卽

$$x=o.\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

$$y=o.\overline{y_1}\,\overline{y_2}\,\overline{y_3}\cdots\cdots\cdots$$

今得對應於此等 x, y 之一數

$$z=o.\overline{x_1}\,\overline{y_1}\,\overline{x_2}\,\overline{y_2}\,\overline{x_3}\,\overline{y_3}\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

考之.例如 (1),則爲

$$z=o.a\,\alpha\,o\,o\,b\,o\,\beta\,o\,c\,o\,o\,\gamma\cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

此 z 明明爲 o 與 1 間之一數.故此正方形內一點 P 對應於單位長綫分上之一點 P'.

反之,如在 o 與 1 間之任意一數 z,設表如

$$z=o.z_1\,z_2\,z_3\cdots\cdots\cdots \qquad (5)$$

之一無限小數.其中數字若有零,亦如上分節之法,分成若干小節.卽

$$z=o.\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}\cdots\cdots\cdots \qquad (6)$$

此 z 之爲數,則與平面上之坐標爲

$$\left.\begin{array}{l} x=0.\overline{z_1}\,\overline{z_3}\,\overline{z_5}\cdots\cdots \\ y=0.\overline{z_2}\,\overline{z_4}\,\overline{z_6}\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (7)$$

之一點對應.此 x, y 皆在 o 與 1 之間.故 (x,y) 點,在單位長爲邊之正方形內,且此時 $\overline{z_1}, \overline{z_2}\cdots\cdots$ 皆含有不爲 o 之數字故 x 與 y 皆屬無限小數.是此則此種對應爲可逆的對應也.卽由 (2) 可以得 (3) 而由 (3) 亦可以得 (2).故長爲 1 之綫分之點與邊爲 1 之正方形內之點一一對應矣.*

此種分節之法爲 König 所與者.蓋不如此則不甚便利也.例如

$$z=0.111010101\cdots\cdots \qquad (8)$$

而直取

$$\left.\begin{array}{l} x=0.111\cdots\cdots \\ y=0.1000\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

則 (9) 中之 y 不爲無限小數,而爲有限小數.勢必書成

$$y=.00999\cdots\cdots$$

然與此對應之 z 點卽 (x,y) 點,卽爲

$$z=0.10191919\cdots\cdots$$

則此 z 非 (8) 之數.故證其爲一一對應卽有不便也.

綫分上之點與立方形內之點.可同樣證之.並由此不難推出

* 此處之證明僅僅是 $o<z\leqq1$ 之一點與 $o<x\leqq1$, $o<y\leqq1$ 之一切點卽正方形 $OABC$ 除開 OA, OC 上之點對應.至 $o\leqq z\leqq 1$ 之一切點與 $o\leqq x\leqq1$, $o\leqq y\leqq1$ 之一切點對應將於後述等價定理之應用時證之.

定理 21. 直綫上一切點之集合與平面上一切點之集合一一對應.同樣一直綫上之一切點之集合,與三次元空間內一切點之集合一一對應.

然任意長之綫分之點之集合,與無限直綫一切點之集合一一對應,此乃定理11所主張者.結果必得極短直綫上之點,與充滿宇宙對一切之點之集合一一對應.此種驚人而又極精確之論斷,可謂爲集合論之一大收穫也.

不特此也.吾人更可將此定理擴張至一般之 n 次元空間.

定理 22. n 次元空間內之一切點之全集合與直綫上之點集合一一對應.

〔證明〕　此自可倣照上法證之.然再應用連分數證明如下.蓋前定理亦可用連分證明之,吾人爲節省篇幅計,故互見於此:

今爲簡單計,單就單位長之綫分,與單位長爲一邊之 n 次元體而論足矣.

由連分數之性質.o 與 1 間任意之無理數皆可以

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

形之無限連分數表之;反之此種連分數常常表一 o 與 1 間之無理數.今令

$$x_1=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_{n+1}+\cfrac{1}{a_{2n+1}+\cdots\cdots}}}$$

$$x_2=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_{n+2}+\cfrac{1}{a_{2n+2}+\cdots\cdots}}}$$

....

....

$$x_n=\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{a_{3n}+\cdots\cdots}}}$$

此等連分數皆表 o 與 1 之無理數.今取 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 爲 n 次元空間之點之坐標,則對於 x 之任一値,有唯一之點($x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$)可得.反之對於一點 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 有唯一之 x 之値可得.故單位綫分上之無理數與正 n 次元體之以無理數爲坐標之點一一對應.然由定理 12, o 與 1 間之實數 (X) 之全體與無理數之全體爲等價.故集合

$$\left\{x\right\} 與 \left\{X\right\};\ \left\{x_1\right\} 與 \left\{X_1\right\};\ \left\{x_2\right\} 與 \left\{X_2\right\};\cdots\cdots;\left\{x_n\right\} 與 \left\{X_n\right\}$$

互爲等價.由是可知實數集合(或實數之點集合) $\left\{X\right\}$ 與正 n 次元體之點之全集合 $\left\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n\right\}$ 爲等價也.

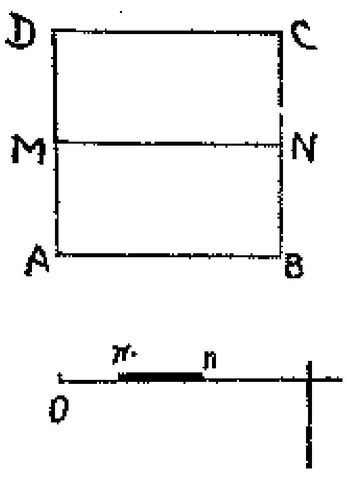
系, 上之定理於 $n\longrightarrow\infty$ 時亦成立.

由上諸定理可知二次元空間之點,三次元空間之點以及 n 次元空間之點皆與一次元空間之直綫上之點一一對應.然則豈非 n 次空間之性質皆可以在直綫上討論,而

通常所謂平面幾何,空間幾何,皆無其意義乎.是又不然.蓋所謂'次元'者尚有其根本之性質在也.

今吾人於'對應'之上,在加以'連續'一性質,則正方形內之點與綫分上之點不能連續的一一對應.所謂連續的對應者.蓋於 M 中之點 $P_1, P_2, \cdots\cdots; P_n, \cdots\cdots$ 任以何等之方法無限的接近於 P 時,於其對應之 M' 其對應之點 $P_1', P_2', P_3', \cdots\cdots, P_n' \cdots\cdots$ 亦無限的接近於 P 所對應點 P'.如此則謂之連續的對應.如此意義則所謂'次元'也者乃有其不變性也.

定理 23. 正方形與綫分決不能連續的一一對應.



〔證明〕設綫分(0,1)與正方形 $ABCD$ 乃連續的一一對應.今以平行於正方形一邊 AB 之綫分 $\overline{MN}$ 考之,則由連續的對應之意義,此必對應於綫分 (0,1) 上之一綫分 $\overline{mn}$. 此 $\overline{MN}$ 與 mn 既爲一一對應,因而 M 與 $\overline{mn}$ 爲一一對應.然 AD 上之點 M 其爲無窮乃不可數,而 (0,1) 綫上之 mn 依定理 17 至多爲可數.以此謂爲一一對應必不可能.是以正方形與綫分不能連續的一一對應.

由此推之,可知

正方形與立方形不能連續的一一對應.

一般 m 次之領域與 n 次之領域如 $m \neq n$ 時不能連續的一一對應.此乃 Brower 氏所證明而 Sperner 氏又從新證

之.*

9. 實數集合中之可數部分與不可數部分集合之一性質. 實數集合爲不可數集合.其中必含有可數之眞部分集合如整數之集合是.實數集合除去可數之整數集合,所餘非整數之實數集合仍爲不可數.然再由此所餘之不可數集合中抽出分數加入整數中成有理數,有理數乃無論何處稠密,而仍可數.其所餘之無理數集合仍爲不可數.比有理數更稠密之代數數集合仍爲可數,比無理數更稀薄之超越數仍爲不可數.然有比代數數更稠密之可數集合,比超越更稀薄之不可數集合乎?曰有.如 Liouville 之超越之集合其爲一般超越數集合之眞部分集合自不待論.然亦爲不可數.其比代數數更廣闊稠密之可數集合雖無實例發現,然其存在必無疑義.且不僅此也.將超越數集合中抽出一可數集合加於代數數中,其所成之集合仍爲可數,而所餘之集合而仍爲不可數.如斯取彼溢此,繼續行之,以至無窮,此仍爲不可數,而彼仍爲可數.何以言之?今設代數數之集合爲 A_1 超越數之集合爲 T_1. 由 T_2 中抽出一可數之眞部分集合 T', 加入於 A_1 中成 A_2, 而同時 T_1 成 T_2, 設順次抽出之眞部分可數集合爲 $T', T'', \ldots\ldots T^{(n)}, \ldots\ldots$ 則其關係如下:

* Spperner: Neuer Bewies für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebiets. (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminer der Hanburgischen Universität. VI (1923)).

$$T_1 - T' = T_2 \qquad A_1 + T' = A_2$$
$$T_2 - T'' = T_3 \qquad A_2 + T'' = A_3$$
$$T_3 - T''' = T_4 \qquad A_3 + T''' = A_4$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$T_n - T^{(n)} = T_{n+1} \qquad A_n + T^{(n)} = A_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

其中之 T 與 A 有如下之關係:

$$T_1 \supset T_2 \supset \cdots\cdots \supset T_n \supset \cdots\cdots \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots\cdots \subset A_n \subset \cdots\cdots$$

而此 T_n 與 A_n 中無論 n 如何之大而 T_n 仍爲不可數,A_n 仍爲可數.蓋

不可數集合 − 可數集合 = 不可數集合

可數集合 + 可數集合 = 可數集合

也.不但此也.T_k 與 T_{k+1} 之間尙可插入無窮多之不可數集合;A_k 與 A_{k+1} 間亦可插入無窮多之可數集合,使其間係如

$$T_k \supset T_{k_1} \supset T_{k_2} \supset T_{k_3} \supset \cdots\cdots \supset T_{k_n} \supset \cdots\cdots \supset T_{k+1},$$

$$A_k \subset A_{k_1} \subset A_{k_2} \subset A_{k_3} \subset \cdots\cdots \subset A_{k_n} \subset \cdots\cdots \subset A_{k+1}.$$

蓋 $T^{(k)}$ 之可數集合,可抽出無窮多之可數眞部分集合也.吾人今所知最稠密廣大之可數集合,爲代數數而較爲稀薄之不可數集合爲 Liouville 之超越數,其過此之實例如上式中之 $A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ 及 $T_2, T_3 \cdots\cdots T_n \cdots\cdots$ 究爲何類之數,有無其概念尙未有人舉出之.則此廣大無涯之領域,豈非尙未開拓之地乎?有志之士,盍興乎來,其將有所收穫乎? (未完)

突桁擁壁之設計

E. J. Flight 著

丁燮和譯

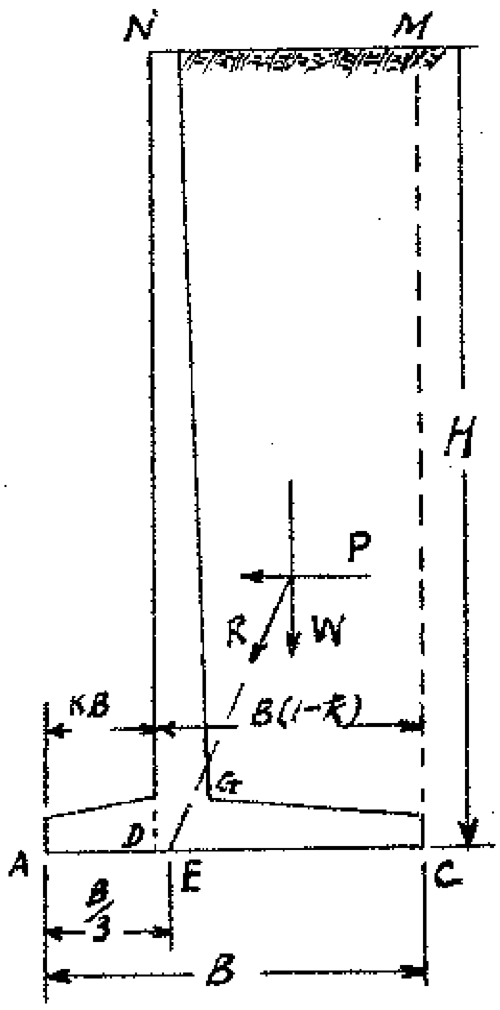
1933年二月份之 Concrete and Constructional Engineering 雜誌中,著者曾述一計算突桁擁壁 (Cantiliver Retaining Wall) 各部之方法,* 各項設計,皆根據于地土之安全壓力 (Safe bearing pressnre).該處所用之一切假定(assumptions),並不限制應用于新建之擁壁,或用以估計舊壁之安穩率,惟因壁基中之幾力 (moments) 及切力皆不能用簡單方式表示,故須有若干繁累之計算.

應用普通皆知之三分中段 (Center-third) 定律于突桁擁壁設計中,並非新法.此律乃限制重力壁 (gravity wall) 中作力線(Line of action) 之位置者,藉此可保證在水平面中,無張應力發生.此條件對于壁之强度甚重要,而並非爲壁之安穩所必須.雖合力之作力線經過壁基之點,距中點愈近,穩固力愈大,但亦無明顯理由,須用此定律于鋼筋混泥土擁壁設計中.

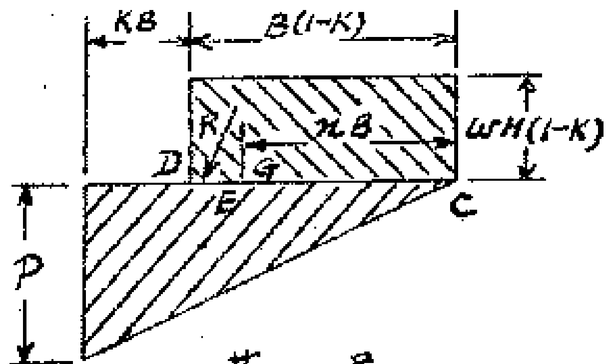
仍照前次文中所述,假定所任載地土加于壁上之壓力,與流質中之壓力相等.現有一明顯無疑之便利,即若假設

* 該篇譯文載本刊第三卷第三期

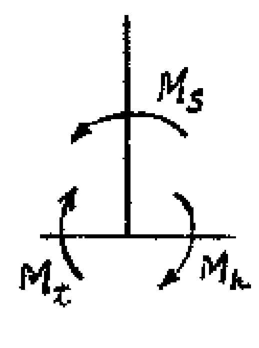
合力之作力線經過壁之三分中段前部,則底與高之比 (Base-Height Ratio) 及穩固公式皆可以比較簡單之方式表示之.且當此假定應用于壁在普通情況下之合力時,平板擁壁底中之幾力及切力皆可不難決定,惟須注意,當實際應用此假定于設計時,有一定限制,此可由以下所述之方法中知之.



第一圖



第二圖



第三圖

第一圖中,加于壁上之力為每單位闊度壁上之總地土壓力 P 及固定重量 W,現因壁之重量未知,故可假定 W 等

于單位厚度之地土稜體 $CMND$ 之重量,壁前地土之抵抗力,則略而不計.

曾假定之相等流質壓力(Equivalent fluid pressure) $P=\frac{1}{2}w_e H^2$, 該 w_e = 相等流質每單位重量,而 P 繞壁基之灣曲幾力 $=\frac{1}{6}w_e H^3=\frac{1}{6}fwH^3$, 該 $f=\frac{w_e}{w}$ 而 w 爲單位地土之重.

$$W = w\,H\,B\,(1-k)$$

而 W 繞 C 之灣曲幾力 $=\frac{1}{2}wHB^2(1-k)^2$

故

$$EC=\left\{\frac{1}{6}fwH^3+\frac{1}{2}wHB^2(1-k)^2\right\}\div wHB(1-k)$$

$$=\frac{f\cdot H^2+3B^2(1-k)^2}{6B(1-k)}$$

因已假定 P 及 W 之合力經過壁基三分中段之前部

$$\frac{fH^2+3B^2(1-k)^2}{6B(1-k)}=\frac{2}{3}B$$

由此 $$\frac{B}{H}=\sqrt{\frac{f}{(1+3k)(1-k)}}\quad\cdots\cdots(1)$$

在第一表中,令 k 等于若干不同之數,畫出 f 及 $\frac{B}{H}$ 之值.當 $k=\frac{1}{4}$ 及 $k=\frac{1}{3}$, 其得出之結果甚近,故卽以同一弧線代表之.實際情形,當 $k=\frac{1}{3}$, $\frac{B}{H}$ 爲最小值,但非最安全之切面.

壁之傾倒幾力 (overturing momeut) $=\frac{1}{6}fwH^3$

W 繞壁趾之灣曲幾力 $=\frac{1}{2}wHB^2(1-k^2)$

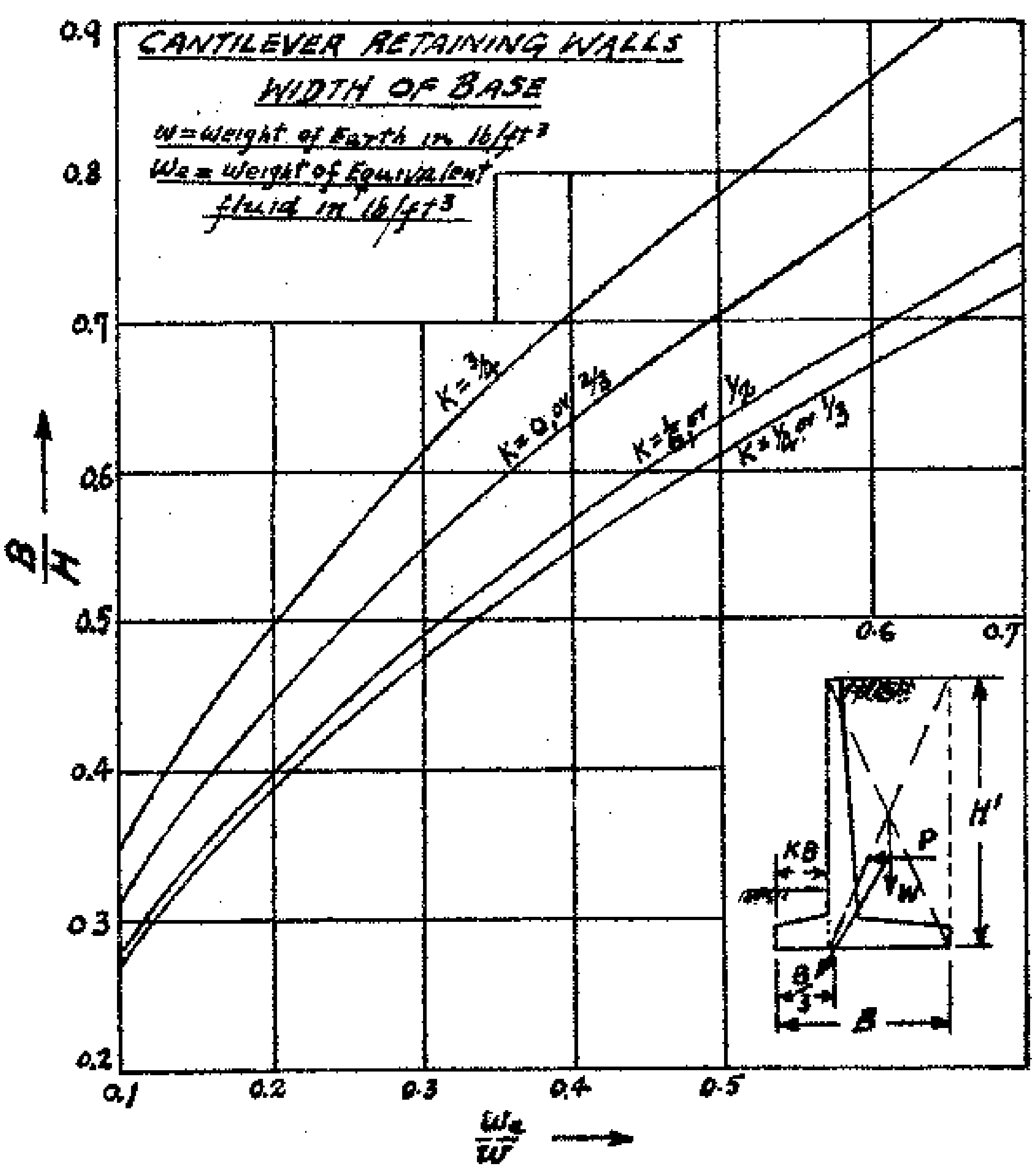
故

$$\frac{\text{穩固雙力}}{\text{傾倒雙力}}=\frac{1}{2}wHB^2(1-k^2)\div\frac{1}{6}fwH^3$$

$$=\frac{3(1-k)}{(1+3k)}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

由第二表中,可知當 $k=o$ 時,以上之比例爲最小值,此或卽爲所欲得之結果

$$\frac{P}{W}=\frac{fwH^2}{2wHB(1-k)}=\frac{f}{2(1-k)}\times\frac{H}{B}\times\sqrt{\frac{f(1+3k)}{4(1-k)}}\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$



第一表

設欲牆壁能抵抗滑崩,$\frac{P}{W}$必須小于混泥土與地土間之摩擦係數(coeffecient of friction)若留地土壓力有增加可能之餘地,而令增加因數(Factor)爲 γ,則$\frac{\gamma P}{W}$必須小于摩擦係數,但有時亦可由設計者之判斷,酌量應用壁前地土之抵抗力.壁基下壓力之分佈情形,卽如第二圖中所示,由此可知在普通地土壓力之下,趾下單位應力爲

$$P=\frac{2W}{B}=2wH(1-k)\cdots\cdots(4)$$

在地土壓力最大時,總壓力將爲 $\frac{1}{6}\gamma fwH^3$,而合力經過壁基之點卽向前移動.由 C 至此點之距離爲

$$\left\{\frac{1}{6}\gamma fwH^3+\frac{1}{2}wHB^2(1-k)^2\right\}\div wHB\ (1-k)=\frac{\gamma fH^2+3B^2(1-k)^2}{6B(1-k)}$$

而距趾端之距離 $=B-\frac{\gamma fH^2+3B^2(1-k)^2}{6B(1-k)}$,將(1)中 H 之値代入之,卽爲 $B^2(1-k)\left\{3(1-k)-\gamma(1+3k)\right\}\div6B(1-k)$

現時壁趾下之單位壓力則爲

$$\frac{2W\times6B(1-k)}{3B^2(1-k)\left\{3(1+k)-\gamma(1+3k)\right\}}=\frac{4wH(1-k)}{3(1+k)+\gamma(1+3k)}\cdots\cdots(5)$$

當 $\gamma=1.5$,則 k 爲任何數,而單位壓力皆等于 $2.67wH$.當 $\gamma=2.0$,則 k 大於 $\frac{1}{3}$ 時,總壓力卽通過壁基之外.故因此可知,且照滑崩而言,此處所述之方法,當 γ 之値大於1.5時,並不能有完好之結果.

關于設計平板突桁擁壁之第二步,卽決定壁身 (stem),壁趾及壁跟之最小厚度.設 w_c 爲每立方尺若干磅,壁身頂

下任何一點 h 尺處之彎曲幾力為 $\frac{1}{6}w_e h^3\ lbs\text{-}ft.$ 而當混泥土及鋼筋之應力為 $600 lbs/in^2$ 及 $16000\ lbs/in^2$ 時,有效高(effective depth)之最小值為 $\sqrt{\frac{w_e h^3}{570}}in.$ 有效高可直接由前次文中之第二表得之.

壁基載重圖,卽如第二圖所示,由此可知擁壁前面趾中之幾力為

$$M_t=\frac{1}{6}pB^2k^2(3-k)=\frac{1}{3}wHB^2k^2(1-k)(3-k)lb\text{-}ft\cdots\cdots(6)$$

此可寫成為 $\frac{M_t}{B^2}=\frac{1}{3}wHk^2(1-k)(3-k)$, 而可以繪圖表示之.

以(1)中 B 之值代入,則得

$$M_t=\frac{1}{6}w_e H^3\frac{2k^2(3-k)}{(1+3k)}\ lb\text{-}ft.$$

若 $d_s in$ 為全高 H 時壁身之最小有效高度(由前次文中第二表得之)而 d_t 為趾之最小有效高度,則

$$\frac{d_t}{d_s}=k\sqrt{2\cdot\frac{(3-k)}{(1+3k)}}\cdots\cdots\cdots\cdots(6_a)$$

擁壁前面趾中之切力為

$$\tfrac{1}{2}pBk(2-k)=wHB(1-k)(2-k)lb\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

因實際工作關係,厚度常令較理論所須者為大,故除非 k 之值小,最小有效高度常依彎曲幾力而定.

設壁身各部為薄板(Thin plate)如第三圖,則踵中之幾力甚易決定,蓋壁身與壁基連結處壁身中之幾力等于趾與踵繞同一點之幾力之和.惟實際情形,壁身與壁基須酌有少許之厚度,但此結果,對于計算方面或有一大略對照之

便利也.

設 p' 爲壁基 G 角下之壓力,則 G 處之幾力爲

$$\frac{1}{2}wH(CG)^2-p'\frac{(CG)^3}{6B}$$

令 $CG=nB$, 該 n 爲一分數,

$$M_h=\frac{1}{6}wHB^2n^2\left\{3-2n(1-k)\right\}lb-ft\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

或將(1)式 B 之值代入

$$M_h=\frac{1}{6}w_eH^3\frac{n^2}{(1-k)(1+3k)}\left\{3-2n(1-k)\right\}$$

故若 d_h in 爲 G 處之最小有效高,則

$$\frac{d_h}{d_s}=n\sqrt{\frac{3-2n(1-k)}{(1-k)(1+3k)}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8_a)$$

Values of K	Moment of Stability / Overturning moment	$\frac{P}{W}$	Pressure under Toe lb/sq ft	Bending Mt. in Toe lb-ft/ft run of wall	Effective depth "d_t" for Bending Mt.	Shear in Toe (lb)	Bending Mt. in Heel lb-ft per ft run of wall	Eff. depth "d_h" for average values of w_e	Shear in Heel (lb).
		$\times\sqrt{f}$	$\times wH$	$\times wHB^2$	$\times d_s$	$\times wHB$	$\times wHB^2$	$\times d_s$	$\times wHB$
0	3.00	0.500	2.00	—	—	—	$\frac{n^2}{6}(3-2n)$	0.95	$n(1-n)$
$\frac{1}{6}$	2.33	0.671	1.67	0.02187	0.324	0.225	$\frac{n^2}{18}(9-5n)$	0.83	$\frac{n}{6}(6-5n)$
$\frac{1}{4}$	2.14	0.764	1.50	0.04296	0.444	0.328	$\frac{n^2}{4}(2-n)$	0.75	$\frac{n}{4}(4-3n)$
$\frac{1}{3}$	2.00	0.866	1.33	0.06584	0.544	0.370	$\frac{n^2}{18}(9-4n)$	0.67	$\frac{n}{3}(3-2n)$
$\frac{1}{2}$	1.80	1.118	1.00	0.1042	0.706	0.375	$\frac{n^2}{6}(3-n)$	0.50	$\frac{n}{2}(2-n)$
$\frac{2}{3}$	1.66	1.500	0.67	0.1152	0.825	0.300	$\frac{n^2}{18}(9-2n)$	0.33	$\frac{n}{3}(3-n)$
$\frac{3}{4}$	1.61	2.236	0.50	0.1055	0.883	0.234	$\frac{n^2}{16}(6-n)$	—	$\frac{n}{4}(4-n)$

第二表

當 k 爲若干一定之値,w 與 H 成比例,但此種變更爲數甚小,故以平均數計算之,亦甚安全.第二表中 $\frac{d_h}{d_s}$ 比之各値,乃當 $w_e=25\ eb/ft^3$ 也.G 處之切力爲

$$wHnB\left\{1-n(1-k)\right\}lb \cdots\cdots(9)$$

第一表,第二表與前次文中之第二表相組合,能包括平板擁壁設計中所須之任何結果.

當擁壁所任載之地土面上,另有其他荷載,而此荷載可假定爲伸延至壁面上之當上荷載 (Equivalent surcharge), 則上述各表亦可用之以計算擁壁各部之大小.

前次文中,曾證得當 H_1 爲當上荷載之高度,壁上之總壓力等于 $\frac{1}{2}w_e H(H+2H_1)$ 而加于壁上之高度 $=\frac{H}{3}\ \frac{H+3H}{H+2H_1}$,由此地土壓力繞壁基之幾力等于 $\frac{1}{6}w_eH^2(H+3H_1)$ 或卽 $\frac{1}{6}fwH^3(1+3l)$,該處 $H_1=lH$,

$$W=w(H+H_1)B(1-k)=wHB(1+l)(1+k)$$

用無當上荷載計算時之同樣方法,可得

$$\frac{B}{H}=\sqrt{\frac{1+3l}{1+l}}\times\sqrt{\frac{f}{(1-k)(1+3k)}} \cdots\cdots(10)$$

故將由第一表中得出之比率,乘以 $\sqrt{\frac{1+3l}{1+l}}$, 卽爲擁壁載有當上荷載時 $\frac{B}{H}$ 之値.

$$\frac{\text{穩固幾力}}{\text{傾倒幾力}}=\frac{1}{2}wHB^2(1+l)(1-k^2)\div\frac{1}{6}fwH^3(1+3l)$$

$$=\frac{3(1+k)}{(1+3k)} \cdots\cdots(11)$$

此與(2)相同.

$$\frac{P}{W}=\sqrt{\frac{f(1+3k)}{4(1-k)}}\times\sqrt{\frac{(1+2l)^2}{(1+l)(1+3l)}} \quad \cdots\cdots(12)$$

當 $l=0.5$, $\sqrt{\frac{(1+2l)^2}{(1+l)(1+3l)}}=1.033$, 而此因數,在決定阻止滑崩時,可忽略之.

當合力經過三分中段前部時,趾下之單位壓力爲

$$\frac{P}{2}\times B=W, \text{或} \ P=2wH(1+l)(1-k) \quad \cdots\cdots(13)$$

當地土壓力增加,而增加因數仍爲 γ, 則趾下之單位壓力爲

$$4wH(1+l)\frac{(1-k)}{3(1-k)-\gamma(1+3k)} \quad \cdots\cdots(14)$$

當 $\gamma=1.5$, k 爲任何數,而單位壓 $=2.66wH\ (1+l)$

平板擁壁頂下任何一點 h' 處壁身中之幾力爲 $\frac{1}{6}w_e h^2(h+3H_1)$ lb-ft. 而混泥土之最小有效高,如前次文中所述,可由第二表決定.趾及踵中之幾力,可由第二表中各個之幾力乘以 $(1+3l)$ 而得之.

註:—本篇譯自 Concrete and Construction Engineering, June, 1933. Vol. XXVIII No. 6, London.

植物生理學史略

(續第四卷第一期)

張 珽

第 十 章

生長及其所受環境之影響

第一節 生長現象之測定:

I. 生長大週期:

1. Munter 1842 年發現植物某一器官之生長,在不受外界影響時,其速率恆依一定方式而變化.最初生長大抵甚緩,漸增漸速,終達一最高點 Maximum,過此卽又漸減漸緩,終至於完全停止.

2. 後此至 1873 年以前,學者對於植物生長率變化規律之觀察,所得結果,亦多相同.

3. Sachs 1873 年據歷年研究之結果,乃能於此變化之規律,作明確之推斷,而名此規律變化爲植物生長大週期 Grand period of Growth. Sachs. 以爲此大週期之變化,在單一之細胞,在多細胞之器官,皆同一律.就全植物界言,此大週期在各種植物中似皆表現有遺傳性;唯各個個體間,仍復有參差處處,未可盡以環境條件爲釋解者存在.

4. Baranetzky 1879 年再作實驗,使各種環境條件,胥成固

定情形,然後推尋生長大週期之跡象.結果發現有數種植物,其每日生長週期,均有一定旋律;而他種植物,則參差頗大.

5. Drude 1881年發現雖環境條件固定不移,而大週期曲線之起伏,仍有著明變化;往往五分鐘間,已見差異.

II. 生長部分:

1. Sachs 1871 年以其所發明之"植物生長計 Auxanometer"觀察正在生長中之苗,定其逐漸引長之狀況.植物生長計爲一構造簡單而作用精密之器械,能藉一指針之槓桿作用,自動在傅煤之紙片上畫出放大曲線,記載植物生長之過程.(後此 Baranetzky 1879年作研究時,即主以植物生長計爲實驗器械,唯已略加改良而已).據Sachs之觀察,知普通植物之生長,計分兩個區域.其一爲頂端生長區,名"增殖點 Qunctum vegetationis",即器官頂端之真正生長點 Growing point 其細胞時在分裂中,生而且長.其二爲節間生長區,即在增殖點直後下方,細胞能引長而不起分裂,蓋長而不生者.苗之節間生長區,較根之節間生長區爲長;通常恆有數"節間 Internodes" 同時生長.頂端生長區,無論在莖在根,均短於節間生長區,一器官中,真能生而且長之部位,初不過爲其節間生長區什一之長而已.

2. Askenasy 1880 年量水生植物節間生長區,知其長恆達三十乃至五十節間之數.

3. Stebler 1878年研究葉之節間生長,知多種之葉亦有節間生長區在.此種節間生長區之情形,與莖,根之節間生長區域不同:蓋葉之節間生長,乃由一帶盛行分裂之細胞,兩端各附一帶有引長能力之細胞而成.

第二節　膨壓變化與生長之關係:

I.　膨壓與生長之關係:

1. Sachs 1871 年發表其關於植物生長部位之研究時,卽謂膨壓 Turgor 與生長情形,有絕大關係.

2. Sorauer 1873 年始發現水分之供給為植物生長之先決條件.植物發達之能否完全,與土壤中水分之充足與否有密切關係.

3. De Vries 1877 年證明土壤含水量與植物生長有關,且更由此以說明 Sachs 之膨壓學說,謂土壤中水漲充足,植物乃能生成完全膨壓,然後始有生長.生長最速之處,卽為膨壓最旺之點.

4. Straburger 1882 年之發表,則謂膨壓與生長之關係,有時不甚明著.花粉發芽生成花粉管時,粉粒內之膨壓初不高漲.

5. Copeland 1896 年發表謂多數情形中,膨壓實受生長之調節而非膨壓調節生長.

II.　生長中膨壓之變化:

1. Hofmeister 於 1860 年卽已注意於植物體中之張力現

象:植物體中因生長部分分佈之不均齊,各生長部分之生長速率之差異,膨脹情形相差,因而生成張力.唯 Hofmeister 未知細胞內部之膨壓,以爲張力生成,其膨脹之起原,在於生長細胞之細胞膜吸水增厚.

2. Sachs 1865 年發表謂在生長中之組織,向縱向橫,均有張力生出.髓部因生長特速,故外圍組織除受其牽引向尖項延展外,同時因其壓迫而向外擴張,位置愈近外方者,受壓愈多,擴張愈大.

3. Kraus 1867——1870 兩年,分別有所發表,對於植物因生長而發生之縱向橫向兩種張力,詳加推論.Kraus由觀察膨脹之莖及葉柄中之縱向牽引,及表皮,皮層中之橫向張力,知在最幼嫩之節間中,殊無張力可見.及成長漸進,組織起分化時,張力卽隨之而起;迄乎分化既畢,張力亦隨而消滅.

4. Naegeli 及 Schwendener 1867 年共同研究植物生長組織中之張力現象,而解釋其生成之原因,以爲植物體之强固,必須有此張力.

5. Reess 1868 年發現植物有孔導管與有强膨壓之細胞相接時,則此細胞恆向導管壁上孔中突入,因而生成塞板 Thylose.

6. Schwendener 1874 年發表 Das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monocotylen 解釋植物組織中張力之機械原

理.

7. Strasburger 1882 年謂此種內在壓力,恆能使柔軟導管之接近有强盛膨壓之柔膜組織者,因壓力而閉塞.松屬 Pinus 之老年篩管中,此現象極為常見.

第三節 植物之位置與生長:

I. 生長之方向:

1. Sachs 1879 年謂植物之固定姿態,雖恆受環境條件之影響,然與生長之方向實有莫大關係.Sachs 名直立向上之一種位置為正生向 Orthotropic; 與直軸成角度者為偏生向 Plagiotropic.

2. Vöchting 1882 年發表謂將植物所受外界之影響完全析除,則無論為正生向或偏生向者,其生長軸皆向直上.此種特性,Vöchting 名之曰直立性 Rectipetality.

3. Francis Darwin 1891 年發表謂 Vöchting 之所謂直立性,乃由植物頻頻改正其逸離中軸後所生屈曲而得.

II. 對屈垂 Nutation 與周屈垂 Circumnutation:

平常植物之生長,絕未有能終循縱長軸直上不傾斜者.其生長方向主軸輒,不息偏欹.偏欹之方向,計有兩種:其一為先屈向一方,後屈向其正相反對之一側,旋又復回初時所傾向之一側,如此交互更迭,謂之對屈垂.其二為依羅針上之方向,循環屈曲者,謂之周屈垂.此兩名 Sachs 創始對用.

1. Frank 1868 年,謂植物生長時受外界影響而起之運動

為對屈垂.

2. Sachs 1873 年,乃發現周屈垂之現象,而以之與對屈垂作相比之兩種現象.

3. Baranetzky 1883 年,發表謂莖之周屈垂,為地心吸力 Gravity (重力)作用之結果.若除去重力之影響,則莖只有對屈垂一種運動.

4. C. Darwin 1880 年謂凡生長中之器官,皆有周屈垂,其運動之速度,依植物種類之不同而有極大變化:在 Tamus (薯蕷科之一屬)每轉一週,需時兩小時半至三小時十分鐘;在 Adhatoda (爵牀科之一屬)則需二十六小時半至兩晝夜.

5. Wiesner 次年於其所著"植物之運動力 Bewegungsvermögen" 一書中,反對 Darwin 所持凡生長器官皆有周屈垂之說,以為多種植物之莖若葉,皆依直線生長.生長器官之所以有運動者,由於

a. 構造上無絕對之對稱,各組織細胞所具之生長力量,又非絕對平均,故生長上遂有差異.

b. 外界種種條件,往往適在生長所向之方向,生遏制作用,故生長乃取其中和力 Resultant 之方向而進行.

唯 Darwin 之初意,並未謂有生長卽有周屈垂,不可分離.1875 年, Darwin 固卽已指出謂 Eccremocarpus(紫葳科之一屬)之卷鬚 Tendrils,經 24°C. 之冷凍二十分鐘後,有幾節間之周屈垂已完全停止,然其生長固仍在持續中也.

III. 生長時之卷曲——不平衡之生長:

1. De Vries 1874 年,發表一極有趣味之研究.植物器官中,無論解剖上或生理上爲對稱組織者,其兩面之生長,每不能平衡;一側之生長恆較對側爲優,因是遂起卷曲.其因生長較盛,屈向外側之一面,謂之"卷伸 Epinasty";其受牽引而卷入內側者,謂之"卷屈 Hyponasty."兩名詞皆 De Vries 所定,後來學者率沿用之.此種現象,葉中最爲常見,卷鬚中其例亦多.

2. Darwin 1880年,發表謂卷屈卷伸之現象,實卽"對屈垂"一種律率延緩之表現.在胚軸 Hypocotyledonary axis 中,此種不均齊生長尤爲有用,蓋唯有此而後胚軸乃能穿透種皮,透過土壤而生長向上出土也.

3. Wortmann 1882 年指出謂胚軸端 Epicotyl (子葉恰上之胚軸部分)之生長,亦與胚軸本身相同,藉不均齊之生長,以求遂達.

4. Wiesner 1883 年,發表幼芽之一種變態"對屈垂,"名之曰"波動屈垂 Undulating nutation."

5. Sachs, Wortmann, Vöchting 諸學者皆有觀察證明萌蘖植物之卷屈爲一種自然現象而與重力無關.

6. Vines 1886 年,重新決定卷伸與卷屈之律率性 Rhythm;且更舉多種例證以說明.

第四節 光線對於生長之作用:

I. 黑暗對於生長之影響:在黑暗中生長之綠色植物,輒失去綠色而身體各部每特別引長或起其他畸形變化.此種現象,通稱黃化作用 Etiolation. 關於黃化作用之研究,前於述光合作用時已略述梗概,其餘將詳於後章"刺戟與感應"之研究史中,茲不多贅.

Brefeld 1889 年,發現菌類之生長與發育,皆大受黑暗之阻滯,其胞子器 Sporangia 或竟不發育,或雖發育而不完全;斯爲黑暗對於生長速度直接發生影響之第一次發現.

II. 生長之每日週期:植物加長加厚之生長,每日均有一定週期;此週期之起因,與晝夜光線之强度有密切關係.

1. Reinke 1876 年,發表其觀察結果,證明植物之生長,每日均有一種具律率之週期性 Periodicity.

2. Prantl 1873 年,發現葉之生長,每日成旋律曲線.

3. Stebler 1878年,證明葉生長曲線之週期性.

4. Kraus 1880年,發現果實及多種菌類之生長,亦每日作週期變化.

5. Mcmillan 1891 年,謂馬鈴薯之塊莖,其生長亦有每日週期性.

6. Golden 1894 年,證明馬鈴薯塊莖之生長週期.

7. Friedrich 1897 年,又有關於植物各器官生長中每日週期率之發表.

III. 向日性屈曲 Heliotropic curvature: 植物生長時,每偏向日光投射之處而屈曲;此屈曲之起,生長實主成之.

1. Hofmeister 1863 年,發現向日性屈曲所在之處,乃生長軸中生長最旺盛之處.

2. Müller-Thurgau 1876 年之研究,所得結果亦同.

3. Wiesner 1878 年亦有同樣發表,唯關於最高點之位置,意見略有出入.

IV. 過强光線對於生長之害:

1. Wiesner 見過强之光可使生長完全停止.

2. Pringsheim 1879 年發見平常綠色植物,若經集中之强光曝射若干時,能致死亡.

第五節 溫度對於生長之影響:

I. 植物生長時溫度條件之極限:

1. 1860 年以前,諸學者已知植物能生長時之溫度極限,爲 $0^{\circ}-50^{\circ}$C.

2. Sachs 1860 年,始詳細研究各種植物生長時之最適(Optimum)溫度,知其數隨植物之種類而異.

3. Köppen 1870 年發現頻數之溫度變化,其範圍較大者,可使植物生長完全停止.

4. De Vries 1870 年與 Köppen 同時有同樣之推論發表.

5. Pedersen 1874 年則以爲欲引起此種變化,其所需溫度

必遙高於其植物之最適溫度.

6. Pfeffer 1875 年以爲"屈卷"及"伸卷,"與花之開合同,可由溫度之變化導成之.

(未完)

家鼠之解剖

(續第四卷第一期)

黃 震

血管系

哺乳類之血管系檢查,宜分三步行之:(一)以普通內臟解剖時殘餘之材料,投入酒精液中,作中樞器官——心臟——及諸大血管基部之檢查.(二)另以一新鮮材料,自心室插入乳嘴,向各動脈之基部,行朱液注射,檢查動脈系統.(三)復用一新鮮材料,自心耳插入乳嘴,向各靜脈注射藍色或黑色膠液,檢查靜脈系統.(注射手續,詳述於總章實驗之技術篇).

A. 心臟及各血管之基部 (The heart and the basis of arteries and Venas,)

I, 心臟之外部區分

1, 右心室(Right ventricle)——心臟之腹面右側部分,爲右心室,其肌肉壁甚厚.

2, 左心室(Left ventricle)——心臟之左側後方部分,爲左心室,與右心室以一窪陷之淺溝區劃,易於識別.

3, 右心耳(Right Aurticle)——掩覆於右心室之前方背側,有肌肉壁較薄之囊狀部分,爲右心耳,與右心室有明顯之

界限.

4, 左心耳 (Left Aurticle) —— 左心室之背方前側,亦有薄囊狀之左心耳,形較右心耳爲小.

II. 心臟前端諸血管

5, 大動脈 (Aorta) —— 左心室之前端,出一大血管,爲全身動脈之基管,曰大動脈.

6, 肺動脈 (Palmonary artery) —— 右心室之前方腹面,適當大動脈之基部,出一大形動脈管,通過左心耳之背面後,分爲兩支,入左右肺,是卽肺動脈.

7, 右前大靜脈 (Right anterior vena cava) —— 入於右心耳背面前端之大血管,曰右前大靜脈.

8, 左前大靜脈 (Left Anterior vena cava) —— 入於右心耳右側之大血管曰左前大靜脈.此脈與右前大靜脈皆來自體之前方,匯集前方各靜脈血以歸於心臟者也.

9, 肺靜脈 (Pwlmonary vein) —— 左心耳之背面,有一大靜脈,乃左右二靜脈管,匯集左右肺臟內諸靜脈而成者,是爲肺靜脈.

10,後大靜脈 (Posterior vena cava) —— 右心耳之後方,有一大靜脈,乃匯集體後諸靜脈而成,與前大靜脈共開口於右心耳,是爲後大靜脈.

11,冠動脈及冠靜脈 (Coronary artery and Coronary vein) —— 心臟本體之表面,分布數條血管,其通於大動脈者曰冠動

脈.通於大靜脈者,曰冠靜脈.

III,心臟之內景

12,瓣膜 (Valve) —— 自心尖縱切心臟爲前後兩部,洗滌其內部之淤血,就擴大鏡下檢之,得見下列三種瓣膜.

(a) 三尖瓣 (Tricusrid valve) —— 右心耳與心室之界線裏面,周圍以三枚瓣膜,司作闔作用以防血液逆流,是爲三尖瓣.

(b) 僧帽瓣 (Mitral valve)—— 左心耳與左心室之界線裏面,亦有二枚瓣膜,其作用與三尖瓣略同,是卽僧帽瓣.

(c) 半月瓣 (Semilunar valve)—— 大動脈及肺動脈之基端開口於心臟處,各具三枚半月狀之瓣膜,着生於管乳之周圍名之爲半月瓣,其游離緣向於動脈管之內.

13,乳嘴筋及腱索 (Papillar muslle and Chardae tendinae) —— 各心室之內壁有若干圓錐狀之筋束隆起卽乳嘴筋,由此乳嘴筋出若干索狀結締組織以聯絡于瓣膜,是卽健索.

B. 動脈系 (The artery system),

I, 頭頸胸部動脈

14,大動脈弧 (Arch of aorta)—— 前記由左心室所出之大動脈,其前方向左傾斜,轉向體後,成爲弧狀,特名之曰大動脈弧.

15,無名動脈 (Innominate artery)—— 大動脈弧之基部,分出三支脈,其第一支卽無名動脈,與第二支之左總頸脈在同

基點上分岐,此無名動脈旋復爲二支,即下記之右總頸動脈及右鎖骨下動脈是也.

16,總頸動脈 (Common carotida) —— 前記由無名動脉所分出之前向一枝管爲右總頸動脉.此脉與由大動脉弧所分出之第二支管 —— 左總頸動脉 —— 沿氣管之左右幷行前進,直達喉頭之位置,各分爲下列二枝.

(a) 內頸動弧 (Internal carotied A) —— 總頸動脈所分出之一支脉,進入頭骨腹面,貫穿蓋骨中,而散布於腦髓者曰內頸動脉.

(b) 外頸動脈 (External carotied A) —— 總頸動脉所分出之又一支脉,分布於頭顱之外部及顏面之上者,曰外頸動脈.

II, 前肢動脈

17,鎖骨下動脈 (Subclavian A.)——從無名動脈所分出之右鎖骨下動脈及自大動脈弧直接分出之第三支脈 —— 即左鎖骨下動脈,左右相背而馳,進入左右前肢,雖其起點不同,然其路徑完全一致.

18,腋下動脈 (Axillar A.) —— 鎖骨下動脈移至第一肋骨直前,沿前鋸筋下行,至於大胸脉之下緣,以入前肢是曰腋下動脈.

19,上膊動脉 (Brachial A.) —— 腋下動脉進入前後肢,沿膊三頭筋之長頭與烏喙膊筋間,下行,名之爲下膊脈.

20,尺骨動脈(Ulnar A.)——上膊動脈進至肘之部分,分爲二支.其一沿膊筋後面,循尺骨側面下行,現於尺腕屈筋與淺指屈筋間,是爲尺骨動脈,此動脉通横腕靱帶之內側,至手掌上,分爲數條細枝.

21,橈骨動脈(Radial A.)——由上膊動脉所分出之另一支脈,向橈骨內側下方,進行於長拇外轉筋及短拇伸筋之腱間,是爲橈骨動脈.此動脈出手背後,亦分爲若干細枝.

22,椎骨動脈(Vertebral A.)——鎖骨下動脉之基部上,分出一支,向背側而入於頸椎之椎骨動脈溝中,是爲內乳動脈.

23,內乳動脈(Internal Mammary A.)——鎖骨下動脉與腋下動脉交替之處,出一支脈,向胸部之腹面進行,是爲內乳動脈.

24.肋間動脈(Inter Costal A.)——背大動脈之兩側,分出數對小形動脈,入於胸腔背壁,沿肋骨之背方後行,分布於胸壁之內外面,是爲肋間動脉.

III 腹部動脉

25,腹腔動脈(Coeliac A.)——横膈膜之後方,由背大動脈腹面出一條大形動脈,自腹腔動脈,旋復分爲下記二支脉.

(a)肝動脈(Hepatic A.)——腹腔動脈分歧之二支脈中,其一分布於肝臟內,曰肝動脈.

(b)脾胃動脈(Lieno-gastric A.)——腹腔動脈之另一支脉.分

布於腸間膜上,而進入脾臟及胃壁中者曰脾胃動脈.

26,前腸間膜動脈 (Anterior Mesenteric A.) —— 腹腔動脈之稍後方,于背大動脈之腹面,出一枝動脈,再分三歧而散布於腸間膜上,分別進入十二指腸,脺臟.小腸,盲腸.結腸等部者曰前腸間膜動脈.

27,腎動脈 (Renal A.) —— 前腸間膜之後方,有一對由大動脈分出之支脈,入於左右兩腎盂,是卽腎動脈.

28,生殖巢動脈 (Genital A.) —— 腎動脈之次,復有由大動脈分出之一對支脈分布於生殖巢上,是卽生殖巢動脈.——雄者向外後方入副睪丸之前端,而散布於睪丸內部,曰精巢動脈,雌者側向,入於卵巢中,曰卵巢動脈.

29,後腸間膜動脈 (Posterior Mesenteric A.) —— 生殖巢動脈之次,復於大動脈之腹面出一枝動脈,後端分爲數多細枝,散布於腸間膜之上,以營養直腸之後部,曰後腸間膜動脈.

30,腰骨動脈 (Lumbar A.) —— 背大動脈行至腰椎之後部,分爲左右兩枝,下行而入於後肢,成下記之總腸骨動脈.當此分歧處之稍稍前方側面出一本動脈,分爲左右兩細枝,迴向前方,而散布於體壁之上,是卽腰骨動脈.

31,薦骨動脈 (Median Sacral A.) —— 腰骨動脈之後方,出一小動脈,直向尾部,宛若大動脈之繼續後向然,是爲薦骨動脈.

IV.後肢動脈

32,總腸骨動脈(Common Idiac A.)——背大動脈至腰椎之後部,分爲左右兩枝,以入於左右兩後肢,名之爲總腸骨動脈,已如上記.此動脈沿大腰筋之內緣,下行至薦骨與腸骨境界之前方,分爲下記兩動脈:

(a) 內腸骨動脈(Internal Iliac A.)——總腸骨動脈分歧後,其較小之一枝,直向後方,入骨盤腔內,曰內腸骨動脈.

(b) 外腸骨動脈(External Iliac A.)——總腸骨動脈另一枝,較前脈爲大,向後肢進發,至骨盤下方,移爲股動脈,是卽外腸骨動脈.

33,腸腰動脈(Ilio-Lumbar, A.)——外腸骨動脈之始點,另分出一小動脈,散布於腹腔之背壁,曰腸腰動脈.

34,股動脈(Femoral, A.)——外腸骨動脈之下方,逕向大腿骨上端進行,至於長內轉筋的腱的位置上移爲下記之膝膕動脈.其在腱的位置之上部者,卽股動脈.

35,膝膕動脈(Popliteal A.)——股動脈之下端,過內轉筋之腱,下降,出於比目魚筋之前面,曰膝膕動脈.

36,前脛骨動脈(Anterior Tibial A.)——膝膕動脈之下端分爲兩枝,其一,赴脛部前側之深部,沿前脛骨筋與長趾伸筋及長蹳伸筋間下行至足之背面,復行分支,是卽前脛骨筋.

37,後脛骨動脈(Posterior Tibial A.)——膝膕動脈下端之另一

枝,迴轉於脛部之後面,沿比目魚筋與後脛骨脛骨間,下行,分布於足蹠上,是曰後脛骨動脈.

38,腓骨動脈 (Fibulal A.) —— 後脛骨動脈之基部,適當腓骨之上端分出一動脈支,沿後脛骨筋與長蹈趾屈筋之間,下行,終於跟骨之外面,是爲腓骨動脈.

C 靜脈系 (The Veins System),

I. 頭頸胸部靜脈

39,外頸靜脈 (External Jugular V.) —— 前記左右前大靜脈之前方,適當喉頭部位,卽總頸動脈之外側皮膚下,有由下記之前後顏面靜脈匯合而成之外頸靜脈.

40,後顏面靜脈 (Posterior Facial V.) —— 由眼窩及外耳上之諸靜脈,徵管向後匯歸而成後顏面靜脈.

41,前顏面靜脈 (Anterior Facial V.) —— 由下顎骨之內側,後行一靜脈,匯合後顏面靜脈而成外頸靜脈者,卽前顏面靜脈.

42,內頸靜脈 (Internal Jugular V.) —— 由頭蓋骨底面諸細脈匯集而成之一枝管,沿氣管之兩側後行,合外頸靜脈及鎖骨下靜脈而入前大靜脈,是卽內頸靜脈.

43,鎖骨下靜脈 (Subclavirn V.) —— 前肢諸靜脈匯合而成一大形靜脈更集合腋窩靜脈以入於前大靜脈,是卽鎖骨下靜脈.

44,弧靜脈 (Azygos V.) —— 胸部背壁,適當脊梁下面,於大動

脈之左右側,見一較大形之靜脈卽弧靜脈,乃匯集胸間諸肋間靜脈,前向以入於右前大靜脈者.

45,前肋間靜脈 (Anterior intercostal V.) —— 體壁前方諸肋間靜脈,左右分別集合,成爲前肋間靜脈,以入於左右前大靜脈.

46,內乳靜脈 (Internal Mammary V.) —— 胸部腹壁內側諸靜脈,集合而成內乳靜脈,約當第一肋骨之位置上,入於前大靜脈.

II. 前肢靜脈

47,腋窩靜脈 (Axillar V.) —— 腋窩之下緣有一靜脈,沿腋窩動脈之後內側上昇,連接於上膊靜脈,曰腋窩靜脈.

48,上膊靜脈 (Brachial V.)——腋窩靜脈之前端,位於上膊部,而與上膊動脈並行之靜脈,曰上膊靜脈.乃下記尺撓骨二靜脈結合而成之者.

49,橈骨動脈 (Raial V.)——手背上諸細靜脈,匯集而成橈骨靜脈.沿橈骨動脈上昇,移爲上膊靜脈.

50,尺骨靜脈 (Unar V.)——手掌諸細靜脈匯集而成尺骨靜脈.沿尺骨動脈上昇,至肘部與撓骨靜脈結合,成上膊靜脈.

III, 腹部諸靜脈

51,橫隔靜脈 (Phrenic V.) ——後大靜脈通過橫隔膜時,有由橫隔膜中諸細小靜脈集合來歸之靜脈枝管,曰橫隔靜

脈.

52,肝靜脈 (Hepatic V.) —— 集合肝臟各葉上之細小靜脈而成肝靜脈,適當後大靜脈貫通諸肝葉基部時,入於後大靜脈.

53,腎靜脈 (Renal V.)——左右腎臟各出一靜脈,與腎動脈並行而入於後大靜脈,是爲腎靜脈.

54,生殖巢靜脈 (Genital V.)—— 左右生殖巢各出一靜脈,沿生殖巢動脈以入于後大靜脈,曰生殖巢靜脈 —— 雄者曰精巢靜脈,雌者曰卵巢靜脈.

55,腰骨靜脈 (Lumbar V.)—— 體之背壁有若干細小靜脈集合而成腰骨靜脈.與腰動脈並行,後向而入於大靜脈.

56,門脈系 (The Portal System) —— 腸間腹上有一大形之主脈,乃脾,胃十二指腸膵臟及大小腸各部臟器上諸靜脈匯集而歸於肝臟者,總稱之曰門脈系.其重要脈管有下列四種:

(a) 脾胃靜脈 (Lieno-gastric)——由胃囊及脾臟上諸細小靜脈集合而成脾膵靜脈.

(b) 十二指腸靜脈 (Suodenal V.) —— 由十二指腸之膵臟上諸細小靜脈集合而成十二指腸靜脈.

(c) 前腸間膜靜脈 (Anterior Mesenteric V.)——由小腸,盲腸,結腸,及直腸之大部分諸靜脈集合而成前腸間膜靜脈.

(d) 後腸間膜靜脈 (Posterior Mesenteric V.) —— 由直腸後端

諸細脈集成後腸間膜靜脈.

IV 後肢靜脈

57,總腸骨靜脈 (Common iliac V.) —— 後大靜脈之後端成自左左兩枝脈(卽下記之外腸靜脈及內腸靜脈)與總腸骨動脈之分歧情况相同,是爲總腸骨靜脈.

(a) 內腸骨靜脈 (Internal iliac V.)——膀胱及骨盤腔內部諸靜脈集合而成內腸骨靜脈.

(b) 外腸骨靜脈 (External iliac V.) —— 由大腿上昇之一大形靜脈卽外腸骨靜脈,與外腸骨動脈相伴而行,會內腸骨靜脈而成總腸骨動脈.

58,腸腰靜脈 (Iio-lumbar V.) ——腹腔背壁諸靜脈集合而成腸腰靜脈.與腸腰動脈並,行,接連於外腸骨靜脈.

59,股靜脈 (Femoral V.)——與股動脈駢行之一靜脈,卽股靜脈.上接外腸骨靜脈下連膝膕靜脈.

60,膝膕靜脈 (Potited, V.)——沿膝膕動脈上昇,移爲股靜脈者,曰膝膕靜脈.

61,前脛骨靜脈 (Anterilo tibial V.) —— 足背上若干小形靜脈集合而成一脈管,自脛骨下端沿前脛骨動脈上行於脛骨前面,是卽前脛骨靜脈.

62,後脛骨靜脈 (Posterior tibial V.)——足蹠之若干小形靜脈集合而成後脛骨靜脈.沿後脛骨動脈上昇,會合前脛骨靜脈而成膝膕靜脈.

63,腓骨靜脈 (Fibulal V.) —— 腓骨之側面,有一靜脈,沿腓骨動脈上昇以接於後脛骨靜脈,是爲腓骨靜脈.

神經系

神經系之檢查,宜備兩份材料.其一預浸於70%酒精液中,用爲檢查末稍神經之分布於肌肉中者,其又一,則除去皮膚肌肉,投入硝酸溶液中一晝夜,俟骨骼柔軟後,用流水冲洗,作爲觀察腦髓及脊髓等中樞器官之用.

A. 腦 (Brain)

I, 腦之背面觀

1, 腦膜 (Brain menbrance)—— 腦之外面包被下列諸種腦膜.

(a) 硬腦膜 (Sura mater) —— 腦腔之內部,覆以一層强靱之結締組織膜,曰硬腦膜,剝除頭蓋骨時,極易隨之而去.硬腦膜於大腦兩半球及大小兩腦間呈特殊狀態;

(i) 大腦鐮狀膜 (Falx Cerebri)—— 大腦兩半球間之下垂硬腦膜,曰大腦鐮狀膜.

(ii) 幕狀膜 (Tentorium) —— 大腦與小腦間之下垂硬腦膜曰幕狀膜.

(b) 軟腦膜 (Dia-mater) —— 硬腦膜之下面,有一層結締組織之薄膜,包被全腦,是卽軟腦膜.

2, 嗅葉 (Olfactory lobe) —— 大腦前端,一對棍棒狀部分,曰嗅葉.

3, 大腦 (Cerebrum) —— 全腦前部三分之二,略呈三角形,是

爲大腦.以大腦鐮狀膜分隔爲左右兩部分.有大腦半球之稱.其表面頗平滑,可區劃爲下列三部分;

(a)前葉(Frontal lobe)——大腦之前方部分曰前葉.

(b)顱頂葉(Parletae lobe)——大腦之後方部分,曰顱頂葉.

(c)顳顬葉(Temporal lobe)——大腦後方側面,有向下突出部分,曰顳顬葉.

4.松菓體(Pineal body)——兩大腦半球與小腦間之凹陷處,有一球形小體,曰松菓體.其基部以短柄連於間腦背面,爲一種内分泌腺.

5,小腦(Cerebellum)——全腦後部之主要部分,即小腦緊接於大腦之後,其表面有多數縐褶,得區劃爲下列三部分.

(a)蠕形葉(Vermis)——小腦之中央部分,爲蠕形葉,佔小腦之最大部分.

(b)側葉(Laterar lobe)——蠕形葉之兩側部分曰側葉.

(c)小葉(Floccular lobe)——側葉之更外側,有具縱褶之小部分,是曰小葉,與側葉之爲横皺者判然有別.

6,延髓(Medulla oblongata)之背面——接續於小腦後方,及腹面之大部分,爲較狹細部分之延髓.其背面有縱溝,與脊髓之背溝連續.

(a)背溝(Dorsal fissure)——延髓背面中綫上之菱溝曰背溝.

(b)背尖體(Dorsal Pyramid)——背溝兩側高聳之堤曰背

尖體.

(c) 索狀體 (Carpus restiforme)——背尖體之外側,卽延髓之最大部分曰索狀體.

II. 腦之腹面觀(腦神經附,)

腦之腹面,最重要現象爲漏斗體,黏液腺,腦橋,及十二對腦神經等.唯欲觀察腦神經之詳細狀况,最好另用新鮮材料,自各神經之末梢向中樞檢之.

7, 嗅神經 (Olbactory, n.)——嗅葉之前方腹面有若干小神經索散布於內鼻道上,卽腦神經之第一對,曰嗅神經.

8, 視神經 (Optci,N,)——嗅葉之基部後方,出一對大形神經,左右交叉,趨赴眼球底部,而分布於網膜之上,是爲視神經,爲腦神經之第二對.

9, 漏斗體 (Infundibulum body)——視神經之後方中線上,適當大腦兩顳顬葉之間有圓形隆處,曰漏斗體.

10,黏液腺(Pituctory body)——漏斗體底面之突出部分,曰黏液腺.

11,動眼神經(Oculo-motor, n,)——漏斗之後方,出一對神經分布於眼肌上,曰動眼神經.爲腦神經之第三對.

12,巴路里氏橋 (Pons Varolii)——動眼神經之後部,適當延髓之前方腹面,有橫走之神經纖維束,結連小腦之兩側,是卽巴路里氏橋或簡稱腦橋.

13,滑車神經 (Pathetic, n,)——大小腦之間,適當延髓背面

之前部,出一對神經,分布於滑車肌上,曰滑車神經.爲腦神經之第四對.

14,三叉神經(Trigeminal, n,)——巴路里氏橋之兩端後部,出一對較大形之神經,爲腦神經之第五對,曰三叉神經.

三叉神經之基部,得別爲大小二部分.大者在於外側,爲感覺神經;小者在於內側,爲運動神經.二者合格氏神經節.(Gassers ganglion)旋卽分爲三枝:

(a) 眼枝(Ophthalmic division)——自格氏神經節分出之第一枝,與動眼,滑車兩神經共通破裂孔,以入於眼窩底部,更分爲若干細枝,是卽眼枝.其中有一細枝通過眼窩孔,逕赴鼻孔之內特稱爲鼻枝(Nasal. d,)

(b) 上顎枝(Maxillar division)——第二枝在眼枝之稍下方外側與眼枝同出破裂孔,進眼窩之下緣,分爲若干細枝分布於上顎,是曰上顎枝,

(c) 下顎枝(Mandibular division)——第三枝自破裂孔出外界,向下顎進行卽分布下顎之齒齦上,曰下顎枝.

15,外旋神經(Abducent, n,)——巴路里氏橋之後方,近中綫處出一對細小神經,曰外旋神經,爲第六對腦神經,通過前破裂孔,出眼窩底部而分布於外直肌上.(注意!此神經極易脫落,手續須格外細心).

16,顏面神經(Facial, n,)——三叉神經之後方,適當延髓之前端兩側,出一對神經沿咬筋與顳顬筋間而分布於顏

面之上,爲第七對腦神筋,曰顏面神經.

17,聽神經 (Auditory, n.) —— 顏面神經之後方,出一對短小之神經直達於內耳,曰聽神經,爲腦神經之第八對.

(附)延髓之腹面觀察 (The ventral view of medulla oblongata) —— 延髓之背面景況,已於腦之背面觀察時見之,以際祇循便窺其腹面之狀態耳,

(a)腹溝 (Ventral fissure) —— 延髓之腹面中綫上亦具一縱溝,曰腹溝.

(b)腹尖體 (Ventral pyramid) —— 腹溝之兩堤曰腹尖體.

(c)富稜狀體 (Corpora tradezoidea) —— 腹尖體前部之外側,適當巴路里氏橋之後方,有橫走之神經纖維束,曰富稜狀體.

18,舌咽神經 (Glosso pharyngeal, n) —— 聽神經之後方,有一對神經,出後破裂孔,沿咽頭周圍而浸入舌體中,曰舌咽神經,爲第九對腦神經.其基部爲數根結合而成.

19,肺胃神經 (Pneumo gastric, n) —— 舌咽神經之基點後方另有由數根神經所結合而成之較大形神經,曰肺胃神經,爲腦神經之第十對.後向達於頸部,沿食道之背面而分布於咽頭,食道胃囊及心肺等臟器之上.

20,副神經 (Accessory, n,) —— 肺胃神經之後方稍遠處,約當脊髓神經之前端,有一對副神經,出後破裂孔外部,後行於頸部腹面而分布於僧帽筋上,爲腦神經之第十一對.

21,舌下神經 (Hypoglossal, n.)——延髓之後端腹面,近腹尖體之外側有一對神經,出髁孔,前向而分布於舌下諸筋,曰舌下神經爲腦神經之第十二對,其基部亦爲數根結合而成.

III,腦之解剖

取預浸於酒精液中之全腦,用利刀自中線縱切之,以觀察其內景.

一.端腦 Telencephalon,

22,胼胝體 (Corpus Callosum) —— 大腦之背面中央線上有深溝,分割大腦爲左右兩半球.此深溝之底部,爲神經纖維所組成之水平廣帶,用以連結兩大腦半球,是卽胼胝體.

23,皮質 (Cortex)——大腦之外部,爲灰白質,是卽皮質.

24,髓質 (Medullary portion)——大腦之內部(卽中心部)爲白質,或稱髓質,胼胝體之纖維擴散於此髓質中,成特殊狀態.

25,側室 (Lateral ventricle) —— 大腦半球內部,適當胼胝體之兩側方,有狹窄之腦室,曰側室.其前隅之尖狹部分曰前角 (Anterior Cornn);後隅之尖狹部分,曰後角;(Posterior Cornn);外側下方之尖角曰下角 (Descending Cornn).

26,大海馬 (Hippocampus majos) ——除去大腦之顳顬葉時,可於側室之下角見有 3 字形體,卽大海馬.

27,綫狀體 (Corpus Striatum) ——大海馬之前方,卽前角之下床,較厚之部分,曰綫狀體.

28,透明中隔 (Septum Lucidum)——綫狀體之反對側,適當胼胝體下部側室之內壁上,有透明中隔.

29,蒙路氏孔(　　　)——透明中隔之後端,有一孔道,爲左右側室與第三腦室之交通孔,曰蒙路氏孔.

30,穹隆體 (Fonix body)——蒙路氏孔之直上有穹隆體.

31,第五腦室 (Fifth Ventricle) ——胼胝體之深部,適當兩大腦半球之中間有一小腔,以透明中隔分爲左右兩部,是卽第五腦室.

二.間腦 Thalamenoevphalon,

32,視神經床 (Optic tharami)——間腦兩側線狀體之後部,卽顳顬葉之內部,有一肥厚部分,曰視神經床.

33,第三腦室 (Third Ventricle)——左右兩視神經床之中間有一縱溝,以蒙路氏孔與側室相通曰第三腦室.

34,中間垂 (Velum interpostum) ——第三腦室之背壁,有下垂之部分,曰中間垂.乃脈絡叢之後方擴展而成者也.

35,縫合帶 (Commissure) ——間腦之左右兩部,以下列三縫合帶連結之:

(a) 前縫 (Anterior Commissure)——第三腦室之前方,有狹扁圓形之縫合帶,曰前縫.

(b) 中縫 (Middle Commissure) —第三腦室之中央有一較大形之縫合帶曰中縫.

(c) 後縫 (Posterior Commissure)——視葉之前部,有與前縫同

形之縫合帶,曰後縫.

三.中腦Mesencephalon

36,四疊體(Corpora Puadrigemina)——間腦之後部,卽小腦之前方,有二對隆起,曰四疊體.其前部一對較大,曰大腦尻(Nates)後部一對較小,曰腦睪(testes).

37,大腦脚(Crura Cerebri)——中腦之下部,卽延髓之前方部分,特名之曰大腦脚.

四.後腦 Melencephalon,

38,第四腦室(Fourth ventricle)——後腦中之空腔,卽第四腦室.與間腦之第三腦室,以世羅比亞氏導管 (Caqueduct of Sylvius)溝通.

39,髓蓋膜(Velum medullae)——第四腦室之背壁,有膜狀體,曰髓蓋膜得區劃爲前後兩部.

B. 末稍神經

I, 腦神經 Cerebral nerve

腦神經十二對,亦爲末稍神經.原應記載於此篇,方合系統.第爲工作之便宜計,已提前記述於腦之腹面觀察篇,請參閱.

II, 脊髓 Spinal Cord,

接於延髓後端之神經索,卽脊髓出後頭大孔,貫穿於脊椎骨神經之內,成圓柱狀,有下列各種現象.

40,脊髓膜(Membrance of Spinal Cord)——脊髓之外部包被以

二重薄膜,曰脊髓膜,與腦膜略同.

41,菱溝(Fissure)——脊髓之背腹兩面中線上各具一縱行之裂溝是爲菱溝.

42,髓質 (Medullary Substance)——橫斷脊髓索,得見其內部,有白質與灰白質兩部分之不同.此灰白質居中央成 H 形;白質則包圍於外部.

III,脊髓神經 Spinal nerve

脊髓兩側,先後出三十一對神經,分布於全身各筋肉骨骼之上,統稱之曰脊髓神經.各神經之基部,有下列兩種狀態.

43,背根及腹根 (Dorsal and ventral root)——各側脊髓神,經皆由兩根神經束結合而成.其出自脊髓背側之一根,爲感覺神經曰背根,出自脊髓腹側之一根,爲運動神經,曰腹根背腹兩根,旋卽結合爲一.

44,背枝及腹枝 (Dorsal and ventral branch)——脊髓神經之背根及腹根結合後,旋卽分爲兩枝,一向背部進行,分布於背面諸筋之上,是爲背枝;一向腹部進行,分布於腹面諸筋之上,是爲腹枝.

45,頸神經 (Cervical, n,)——脊髓出後頭孔後,貫穿頸椎骨之神經腔時,先後共出八對神經,曰頸神經.第一對在於後頭骨或載椎之間;第八對在於第七頸椎與第一胸椎之間.

46,膊神經叢(Brachial plexus) —— 第五至第八頸神經及第一胸神經之前枝,連合而成膊神經叢,旋復分爲三條大形神經,直趨於後肢.——第五至第七頸神經結合成爲外根;第八頸神經及第一胸神經之前枝結合成爲內根.

47,尺骨神經 (Ulnar, n,) —— 膊神經叢所出之三枝神經中,第一枝(主由第八頸神經及第一胸神經之前枝所成)出背闊筋及膊三頭筋長頭之前方,經腋窩動脈及上膊動脈上部之後方內側,下向膊三頭筋之內頭前面,出尺腕屈筋之兩頭間,是爲尺骨神經.沿尺腕屈筋下行,分爲兩枝,分布於手部之背腹兩面.

48,撓骨神經(Radial, n,)——膊神經叢之第二枝(主第五至第八頸神經之腹枝所成)出肩胛下筋,背闊筋,及大圓筋腱部之後方,沿腋窩動脈及上膊動脈之後方,下向,穿入膊三頭筋之長頭及外頭之後,迴至撓骨之基部,分爲兩枝,

(a) 深枝(Profound branch) —— 自撓骨基端,進入迴後筋之內部,而分布於前膊部伸筋中者,爲深枝.

(b) 淺枝 (Sub; ericial branch) —— 自撓骨基端,沿迴後筋下向,出前膊之前面,再次分枝而散布於手背上者爲淺枝.

49,胸神經(Thoracic, n,)——各胸椎骨之左右出十二對神經,曰胸神經.其腹枝入內肋間筋與外肋間筋間,有肋間神經之稱.

50,腰神經及薦神經(Lumbar and Sacral, n,) —— 腰椎之左右,

後出六對腰神經;薦椎之左右出四對薦神經,各神經腹枝前後交互聯絡,成腰薦神經叢.由此三枝大形神經分布於後肢.

51,股神經(Femoral, n.)——腰薦神經叢分出之第一枝神經(主由第三至第五腰神經所結合而成)向大腰筋之外方後側,經大腰筋與腸骨筋間,而分布於大腿諸筋上,曰股神經.

52,閉鎖神經(Obtural, n,)——與股神經同根所出之另一神經曰閉鎖神經.沿大腰筋下行,出腸骨與薦骨交界處之前方,通過閉鎖孔後,分爲二枝.前枝通外鎖筋而分布於長短內轉筋之上,後枝通外鎖筋,而分布於大小內轉筋之上.

53,坐骨神經(Ischiadic, n,)——腰薦神經叢所出之一最大神經(主由最後之腰神經及第一至第三薦神經所結合而成). 出梨子狀筋之下方,通骨盤腔外,沿大臀筋之前側,進大轉子與坐骨結節中間,向大內轉筋與股二頭筋間下行,至膝之上部,分爲下記兩枝是卽坐骨神經.

54,脛骨神經(Tibial, n,)——坐骨神經分枝之一,經後腓腸骨筋之內方,出比目魚筋與後脛骨筋之間,沿後脛骨脛之後面,而分布於足蹠之上,曰脛骨神經.

54,總腓骨神經(Common peroneal, n,)——坐骨神經之另一枝,曰腓骨神經.於腓骨之頭部更分爲二枝.

(a)淺腓骨神經 (Superficial peroneal, n.)——其一枝出自長腓骨筋與短腓骨筋間而分布於足之背面,曰淺腓骨神經.

(b)深腓骨神經 (Protound Peroneal)——另一枝,通過長腓骨筋及伸趾筋之下面,下行於前脛骨筋與長蹋趾伸筋間而散布於足背,是爲深腓骨神經.

IV 交感神經系 Sympa-hetic nerve system, 交感神經之觀察,須用新鮮材料,剪除腹壁,盡去其胸腔中之內臟,然後從事檢察:

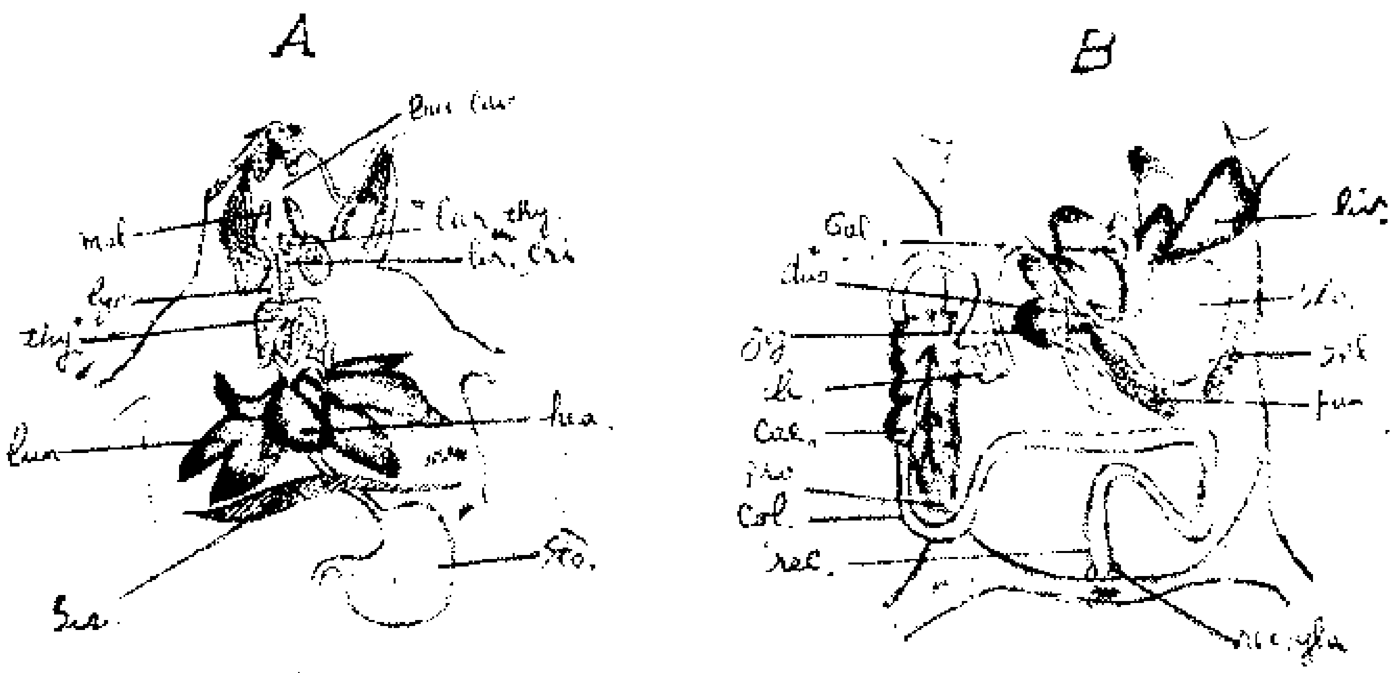
56,腹腔神經節及前腸間膜神經節 (Coepiac ganglion and mesenteric ganglion) —— 脊樑底面適當大動脈之兩側,有若干交感神經節.其在前腸間膜動脈基部前方之較大者,曰腹腔神經節;同動脈之基部後方,另有一較大者曰前腸間膜神經節,

57,胸部神經節 (Thoracic ganglion)——胸部大動脈之兩側,適當各肋骨之始點有若干小神經節,統稱之曰胸部神經節.

58,頸部神經節 (Middle cervical ganglion)——頸部之交感神經,係沿頸動脈之內側前行,適當鎖骨下動脈之稍前方,有中頸神經節,再前進至下顎之後,復有前頸神經節.

—完—

第 一 圖

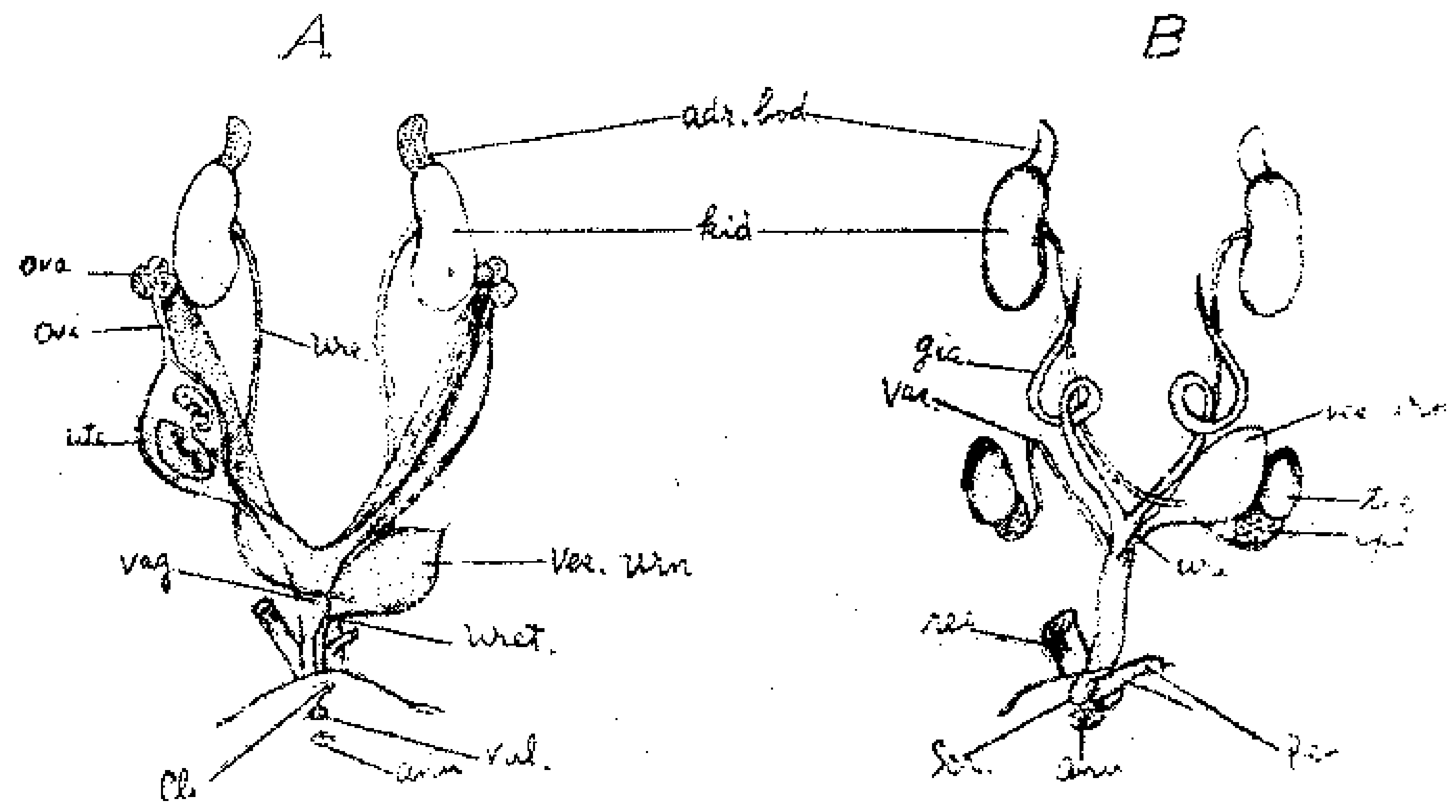


(內 臟)

A. 胸腔臟腑 B. 腹腔臟腑

lym.	淋巴腺	Cae.	盲腸
thy.	甲狀腺	Col.	結腸
Buc. Cav.	口腔	pro.	蟲樣垂
liv.	肝臟	rec,	直腸
Gal.	膽囊	rec, gla.	直腸腺
Pan.	膵腺	mol.	齟齒
spl.	脾臟	lar. thy,	甲狀軟骨
sto.	胃囊	lar. cri.	環狀軟骨
duo.	十二指腸	lun.	肺臟
jej.	空腸	hea.	心臟
ile.	迴腸	sia.	橫隔膜

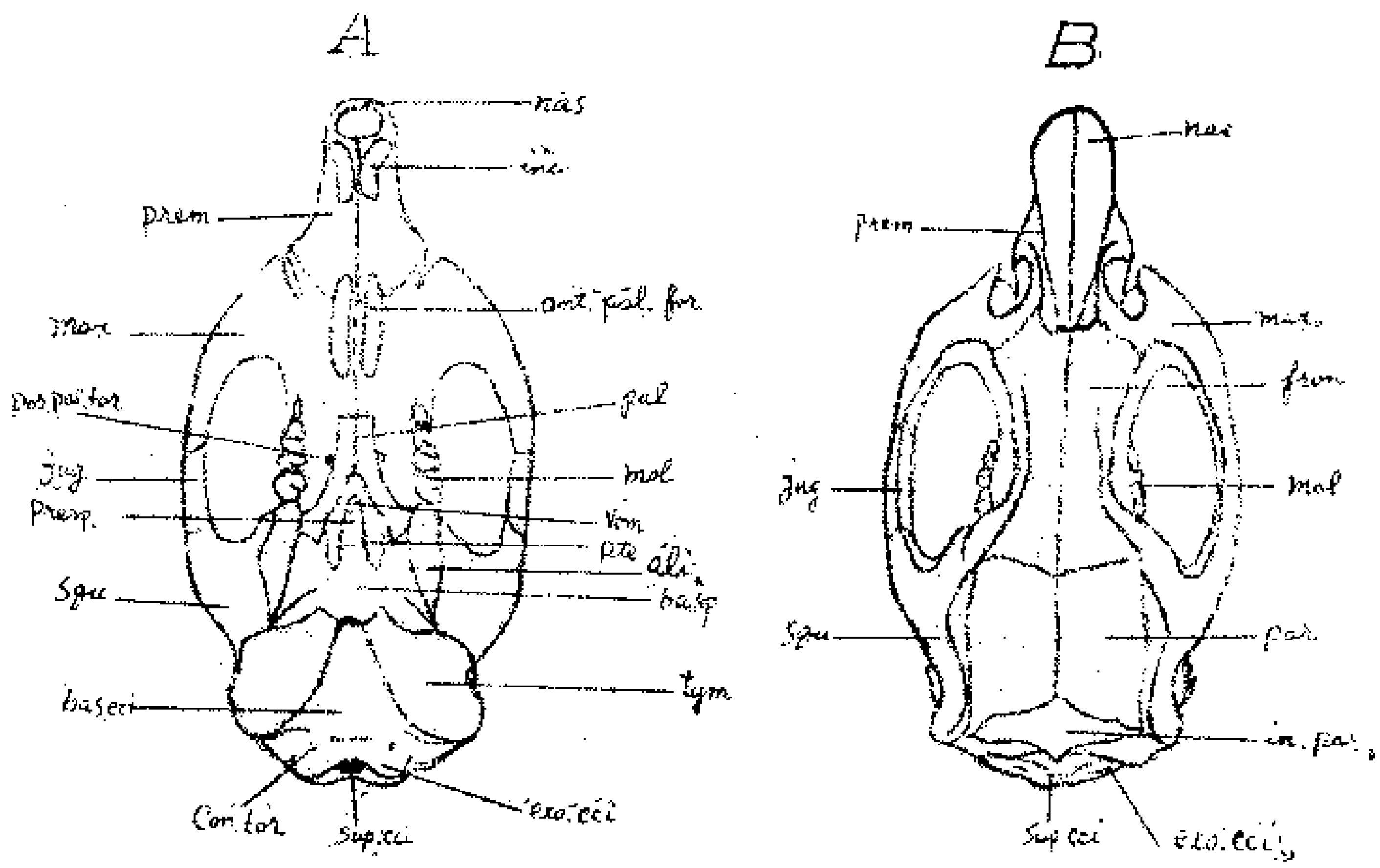
第 二 圖



（泌尿生殖器官）

A. 雌生殖器		B. 雄生殖器	
kiel.	腎臟	vag.	膣道
adr. bod.	副腎	vul.	陰戶
Ure	輸尿管	anu	肛門
Ves. urn	膀胱	tes	睪丸
Uret	尿道	epi	副睪丸
Cli.	陰核（卽泌尿器開口）	gia	攝護腺
Ova.	卵巢	scr.	陰囊
Ovi	輸卵管	pen	陰莖
Ute	子宮		

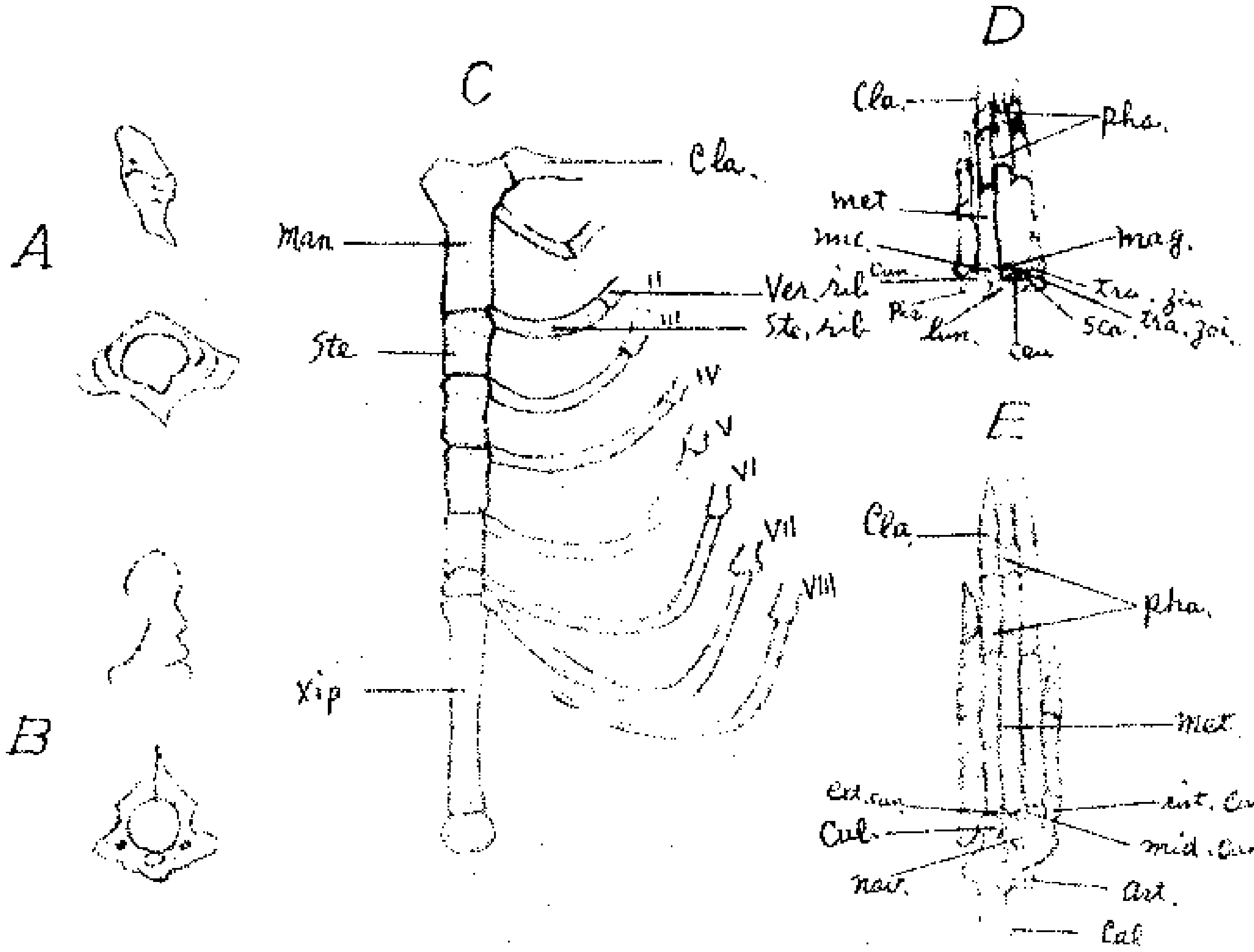
第三圖



A. 頭骨腹面觀　　B. 頭骨背面觀

presp.	前蝴蝶骨	Vom.	鋤骨
fron.	前額骨	ptl.	翼狀骨
basp.	基蝴蝶骨	pal.	口蓋骨
ali.	翼蝴蝶骨	max.	上顎骨
par.	顱頂骨	jug.	顴骨
bas. cci.	基後頭骨	prem.	前顎骨
ext. cci.	外後頭骨	inc.	門齒
sup. cci.	上後頭骨	mol.	臼齒
in. par.	間顱頂骨	ant. pal for.	前口蓋孔
tym.	聽骨	pos. pal for.	後口蓋孔
sqna.	鱗狀骨	Con. for.	髁孔
nas.	鼻骨		

第 四 圖

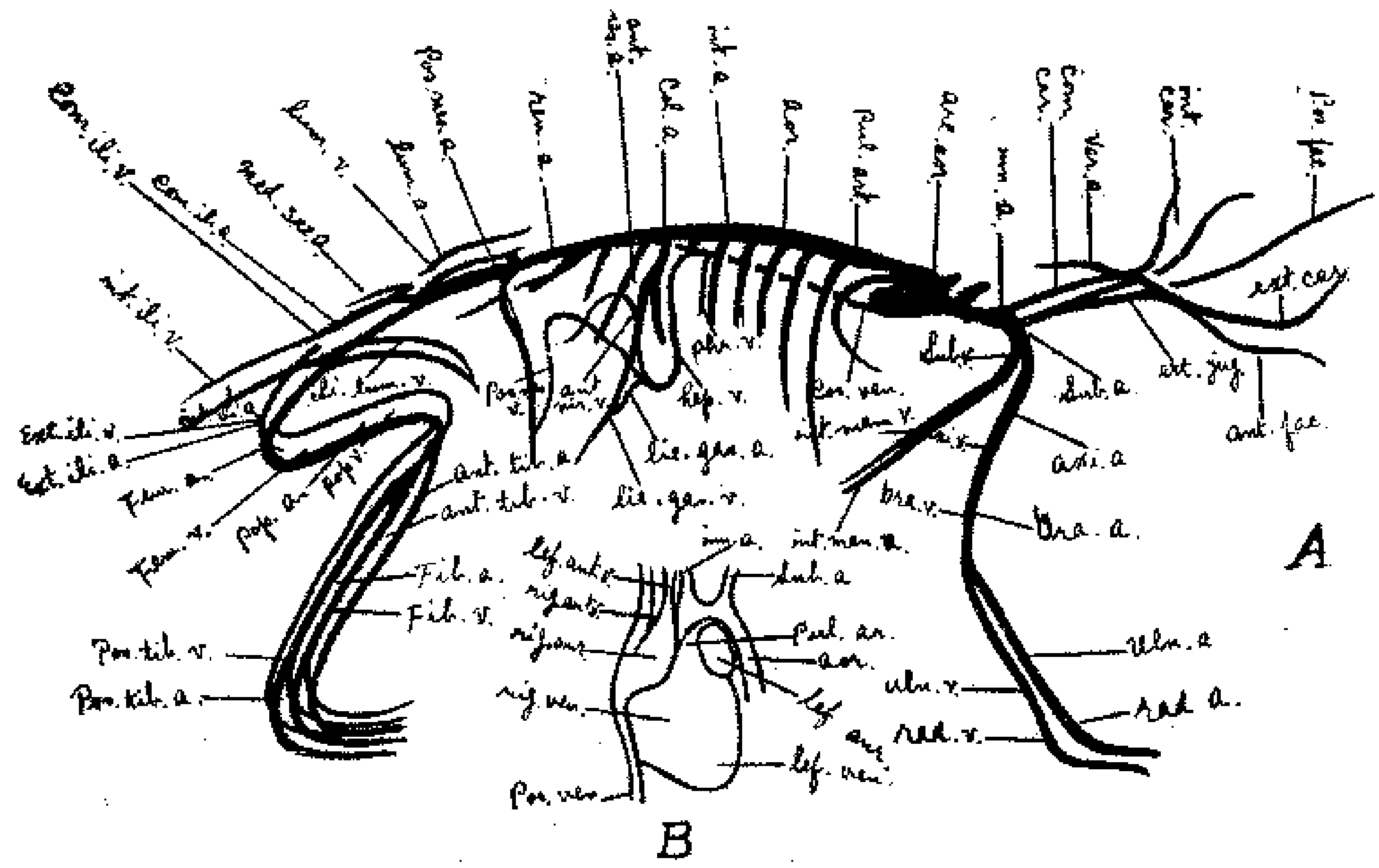


A. 載械　　B. 樞軸

C. 胸骨　　D. 手足骨骼

ver. rib	脊肋	mag	巨骨
ste rib	胸肋	une	鈎狀骨
ste	胸骨片	met	掌骨
man	把柄	pha	指骨
xip	劍胸骨	cla	爪
Cla.	鎖骨	ast.	距骨
sca	舶狀骨	cal.	跟骨
cun	楔狀骨	nav	舟樣骨
pis	腕豆骨	int. cun.	內楔狀骨
tra. ziu	大多稜骨	mid. cun.	中楔狀骨
tra zoi	小多稜骨	ext. cun.	外楔狀骨
Cen.	中央骨	Cub	骰子骨
lun.	月樣骨	met.	蹠骨
		pha	趾骨

第五圖



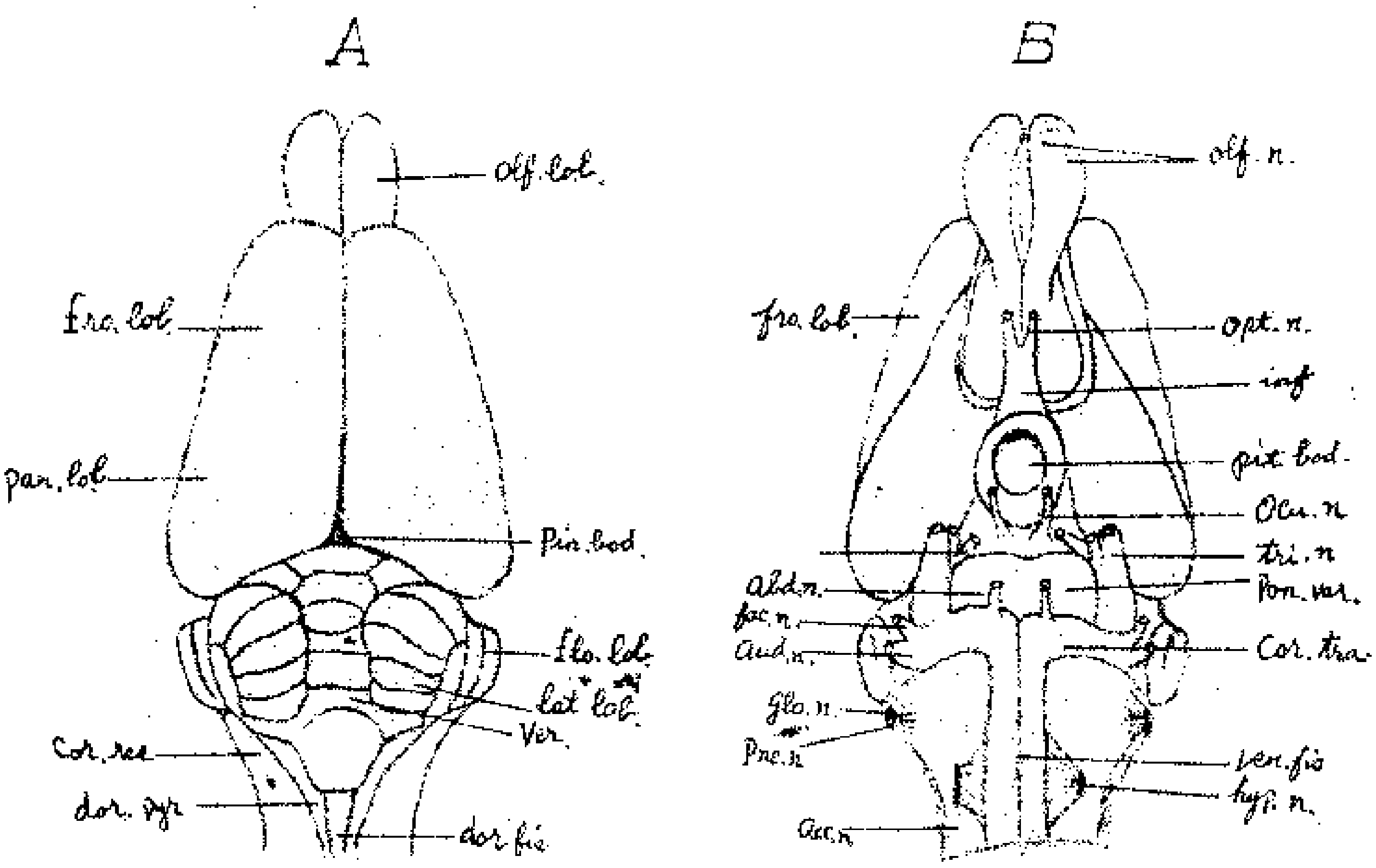
(血管系)

rig. ven.	右心室	inn a.	無名動脈
lef ven	左心室	com. car a.	總頸動脈
rig aur.	右心耳	int. : at. a.	內頸動脈
lef. aur.	左心耳	ext. car. a.	外頸動脈
aor	大動脈	subc. a.	鎖骨下動脈
pul. art	肺動脈	axi a.	腋下動脈
rig. ant. ven	右前大靜脈	bra. a.	上膊動脈
lef. ant. ven.	左前大靜脈	uln. a.	尺骨動脈
pos. ven.	後大靜脈	rad. a.	撓骨動脈
pul. vein.	肺靜脈	ver. a..	椎骨動脈
are. aor	大動脈弧	int. man. a.	內乳動脈

int. a. 肋間動脈
coe. a. 腹腔動脈
hep. a. 肝動脈
lie-gas. a. 胃脾動脈
ant. mes. a, 前腸間膜動脈
ren. a. 腎動脈
gen. a. 生殖巢動脈
pos. mes. a. 後腸間膜動脈
lum. a. 腰骨動脈
med. sac. a. 正薦骨動脈
com. ili. a. 總腸骨動脈
int. ili. a. 內腸骨動脈
ext. ili. a. 外腸骨動脈
ili-lum. a. 腸腰動脈
fem. a. 股動脈
pop. a. 膝膕動脈
ant. tib. a. 前脛骨動脈
pos. tib a. 後脛骨動脈
fib. a. 腓骨動脈
ext. jug v, 外頸靜脈
pos. fac. v. 後顏面靜脈
subc. v. 鎖骨下靜脈
azy. v. 弧靜脈

int. mam. v. 內乳靜脈
axi. v. 腋窩靜脈
bra. v. 上膊靜脈
rad. v. 橈骨靜脈
vln. v. 尺骨靜脈
phr. v. 橫隔膜靜脈
hep. v. 肝靜脈
ren. v. 腎靜脈
gen. v. 生殖巢靜脈
lum v. 腰骨靜脈
por v. 門脈系
lie-gas. v. 脾胃靜脈
ant. mes. v. 前腸間膜靜脈
pos. mes v. 後腸間膜靜脈
com. ili. v. 總腸骨靜脈
ili. lum. v. 腸腰靜脈
int. ili. v. 內腸骨靜脈
ext. ili. v. 外腸骨靜脈
fem. v. 股靜脈
pop. v. 膝膕靜脈
ant. tib v. 前脛骨靜脈
pos. tib v. 後脛骨靜脈
fib v. 腓骨靜脈

第六圖



（神經系）

A. 腦之背面觀　　B. 腦之腹面觀

olf. lob.	嗅神經葉	Ocu. n.	動眼神經
fro. lob.	前葉	pat. n.	滑車神經
par. lob.	顱頂葉	tri. n.	三叉神經
tem. lob.	顳顬葉	abd. n.	外轉神經
pin. bod.	松菓葉	fac. n.	顏面神經
ver.	蠕形葉	aud. n.	聽神經
lat. lob.	側葉	ven. fis	腹溝
flo. lob.	小葉	ven. pyr.	腹尖柱
dor. fis.	脊溝	cor. tra.	富稜狀體
dor. pyr.	背尖柱	glo. pha.	舌咽神經
cor. res.	索狀體	pne. gas.	肺胃神經
olf, n.	嗅神經	acc. n.	副神經
inf	漏斗	hyp. glo.	舌下神經
pit. bod.	腦下垂體		

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室中國鳥類標本之地理分佈研究

(續第三卷第四期)

任　國　榮

PRUNELLINÆ 籬雀亞科

嘴尖,微有缺刻,基部稍大而中部稍為緊縮;鼻孔大,斜形而為膜所掩閉;嘴鬚不甚發達;跗蹠鱗成盾狀,與其餘鶇科各鳥,最易區別.雌雄相似.棲古北極區及亞熱帶之地.生殖期約在五,六,七等月,產卵三枚,鮮為四五枚,卵色藍,或大或小,因種類而不同.

本目錄共記載籬雀亞科兩屬六種及亞種.

249. **Laiscopus collaris ripponi** Hartert. 立般籬雀

D. et O. p. 177 (*Accentor nipalensis*) —— 甘肅及中國西部高山中皆有之,且得有標本,採地高度約四千至五千密達.

Baker, ii, p. 191 —— 北撣部,雲南,四川,中國之西北部及西藏之東南部.

Rothschild, p. 249——雲南.

室中有十九標本: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4(?),1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 6(?),1902, 四川打箭爐; 7(?), 1896, 1897, Père Soulié, 雲南茛刧.

250. **Laiscopus collaris nipalensis** (Blyth). 東籬雀

D. et O. p. 177 (*Accentor nipalensis*) ——見前.

Baker, ii, p. 188 —— 錫金,西藏南部,尼泊爾,嘉華,裘馬安 (Kumaon) 及克什米爾之東南部.

室中只有錫金鳥,以既有記載于西藏,特編入本目錄.

L. c. ripponi 脇部有白横斑而 *L. c. nipalensis* 則無.

Biancho 因西藏東部標本脇部白横斑較寬,乃另定為 *L. c. tibetanus*. Baker 且舉其分佈地點為戈壁,甘肅,西藏東部以至 Huanche,青海,西藏東南部直至江孜高原.余所見之雲南四川鳥俱係 *L. c. ripponi* 而非 *L. c. tibetanus.*

Swinhoe 以中國北部鳥為 *erythropygius*, La Touche. 以 *Laiscopus collasi erythropygius* 記載直隸,山東,山西,陝西之遷移鳥.室中無該地標本,無從記載,亦無從比較其與諸種之異同.

251. **Prunella immaculata** (Hodgson). 栗背籬雀

D. et O. p. 181 (*Accentor immaculatus*) —— 夏季于漢平及四

川西部,頗不甚稀.秋末降落山谷,春間始回原處.吾以爲當可見于西藏北部也.

Baker, ii, p. 193——尼泊爾,錫金,西藏,亞森母北部山中,以至雲南及中國西部.

Rothschild, p. 249——雲南.

室中有中國鳥七: 1(?), 1871, David, 四川; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Père Soulié, 雲南苴却.

252. **Prunella rubiculoides** (Moore). 赤胸籬雀

D. et O. p 543 (*Accentor rubeculoides*) —— Przewalski 于甘肅見之.

Baker, ii, p. 193——喜馬拉雅帶自阿富汗邊境以至西藏,雅魯藏布江北岸山中,四川及甘肅.

室中有中國鳥九: 2♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5(?), 1892, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1898, 四川打箭爐.

253. **Prunella strophiata strophiata** (Blyth). 赤眉籬雀

D. et O. p. 179 (*Accentor multistriatus*) ——與 *Accentor strophiata* 極爲近似.冬季于四川西部,漠平,青海.常見之.秦嶺則極少.

Baker, ii, p. 196—— 尼泊爾,喜華,錫金,亞森母北部山中,西

藏之西部及南部.

Rothschild, p. 249 (*Prunella strophiata multistriata*) —— 雲南.

室中有中國鳥二十: 2♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 4(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5(?), 1902, 四川打箭爐; 6(?), 1896, Pére Soulié, 雲南茛却; 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南.

David以四川西部及漠平鳥爲 *Accentor* (=*Prunella*) *multistriatus*. Rothschild 引用之以記載雲南鳥.室中有錫金鳥二,余以之與打箭爐及茛却等處標本較,無論體色,條紋 (multistriatus卽多斑之意)與量度,皆不能發見何等區別,余以爲四川雲南鳥實同錫金鳥,故仍以 *Prunella s. strophiata* 記載之.

254. **Prunella fulvescens fulvescens** (Severtzoff). 赭腹籬雀

D. et O. p. 542 (*Accentor fulvescens*) —— Przewalski 于甘肅及西藏北部見之.

Baker, ii, p. 198 —— 土耳其斯坦自西至東,甘肅,蒙古之南, Gilgit, 克什米爾, Ladak, 西藏,錫金,雅魯藏布江北岸之山中.

室中有中國鳥六: 1♂, 2♀, 14, iv, 30, ix, 1889, Prince d'Orléans, 西藏; 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

MUSCICAPIDÆ, 鶲科

本科幼鳥有點斑或鱗狀斑,與河烏科及鶇科相似,但鼻鬚極發達,爲與二者區別之要點.嘴扁闊;跗蹠纖弱;撥風羽十;尾羽十二.純粹食蟲性,喜于小枝上突然飛起以捕食飛蟲.除少數例外,幾概係遷移鳥.生殖情形,各種不同.

巴黎博物館鳥類研究室鶲科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有十三屬三十五種及亞種,經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共一百一十三個.

255. **Hemichelidon sibirica sibirica** (gmelin). 塞鶲

D. et O. p. 122——(*Butalis sibirica*)——普見于西伯利亞東部,在中國則甚稀,但無論在南在北,余皆得有標本.

La Touche, p. 158 ——除雲南西部外,中國各地皆有之,遷移鳥.

室中有中國鳥六: 1(?),1851, M. Montigny, 中國; 2♂, 3♀, 10, 20, 21, X. La Touche, 福建.

余于廣西猺山及廣東北江皆得有記載.

Baker 以雲南鳥爲 *H. s. rothschild*, 謂其上體褐黑 (Bull. B. O. C. xliii, p. 156, 1923, 雲南.) 室中只有一幼鳥) (1♂, 1896, Père Soulié, 雲南 且刼,) 無從比較.此次寄來之廣東北部標本中,有一個,體色較其餘遙爲褐黑,余始認爲 *H. s. rothschild.* 後

經愼密比較,始知此乃新羽耳.

256. **Hemichelidon sibirica cacabata** (Penard). 褐塞鶲

Baker, ii, p. 240 —— 自尼泊爾以至東亞森母;自西藏以至甘肅.

室中有二標本: 2♂, 1892, Prince d'orléans, 西藏.

室中尙有一四川打箭爐鳥,足下標簽記作 *Hemichelidon sibirica* var *fuliginosa* Hodgson. 但一則係幼鳥,再則破爛不堪,不能判別.惟決非 *Hemichelidon ferruginea* (=*H. cinereiceps*).

257. **Hemichelidon cinereiceps** Hodgson. 灰頭銹鶲

D. et O. p. 191 (*Butalis ferruginea*) —— 夏季至中國南部,五月間余于漢平見之.

Baker, ii, p. 206 —— 喜馬拉雅帶,自嘉華至東亞森母,馬尼坡,緬甸北部高山及中國西部.冬季至緬甸,馬來半島,中國南部,台灣,海南及印度支那等處.

La. Touche, p. 159 (*Hemichelidon ferruginea*) ——廣東,四川,甘肅,夏鳥.雲南遷移鳥(夏鳥?). 于福州獲過一次.

室中除安南標本外,有中國鳥一: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

258. **Hemichelidon griseisticta** Swinhoe 斑鶲

D. et O. p. 122 (*Butalis griseosticta*) —— 夏季普見于中國各地,每年凡二過北京,第一次由五月至六月,第二次由八月至九月.

La Touche, p. 157 —— 廣東,福建,江蘇,浙江,沙尾山,遷移鳥.

室中只有一標本: 1(?), 1851, M. Montigny, 中國.

此次寄來之廣東北部標本,有此鳥一個.

此鳥第二枚撥風羽較長于第五枚而與第四枚等長,爲認識上一重要特徵.

259. **Siphia strophiata strophiata** Hodgson. 橙喉鶲

D. et O. p. 115 —— 在中國西南部度夏,余數見之于漠平.

Baker, ii, p. 208—— 自克什米爾以至東亞森母,婆羅洲之北及中國西部.

Rothschild, p. 295——雲南.

室中除印度鳥四,安南鳥五之外,有中國鳥十七: 3♂, 4♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♂, 1898, Biet, 四川打箭爐; 6♂,1♀, 1902, 四川打箭爐; 1♀, 1896. Père Soulié, 雲南茛刼.

余于廣西猺山得一雌鳥.

260. **Siphia parva albicilla** (Pallas). 赤胸鶲

D. et O. p. 120 (*Erythrosterna albicilla*) —— 夏季廣佈中國各地,春秋二季遷移期于北京見之.

Baker, ii, p. 211—— 西伯利亞東部自葉尼塞以至堪察加,經貝加爾,烏蘇里,南至西藏,印度北部;緬甸及中國.

La Touche, p.160——中國各地之遷移鳥.

室中除印度及安南標本外,有中國鳥九: 1♂, 1♀, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯淪河; 1♀, 22, V. David, 北京; 4(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1♀, 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

雄鳥腮喉栗赤之部,在雌鳥及幼雄鳥則爲白色.

261. **Siphia mujimaki** (Temm.). 日本駒鵝

D. et O. p. 121 (*Erythrosterna, luteola*) —— 至中國東部各處,但爲數常不多.又每歲必可于北京見數個,余曾得三雄,惜無一雌耳.

La Touche, p. 161 —— 廣東,福建,江蘇,浙江,沙尾山,直隸,雲南東南部,遷移鳥.

室中除日本及安南標本外,有中國鳥十: 1♀ 1884, David, 北京; 1♂, 5♀, iv, v, x, xi, 1899, La Touche, 福建西北部之掛墩; 1♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♂ 1851, M. Montigny, 中國.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部標本中,亦有此鳥.

雄鳥黑色之部,在雌鳥則代以橄欖青;雄鳥上體及尾部之白色,在雌鳥亦付闕如;雄鳥腮,喉,胸部之橙栗色,在雌鳥

則極為淺淡,幾近橙黃色.

262. **Xanthopygia narcissina narcissina** Temm. 黃眉彩鶲

D. et O. p. 119 —— 每年必有多數經過中國之東部及南部海岸,但逗留之時日無多.余永未見之于北京.

La Touche, p. 163 —— 廣東,福建,浙江,江蘇,沙尾山,遷移鳥.

室中只有日本鳥.

余于廣西猺山射得之.

263. **Xanthopygia narcissina xanthopygia** Hay. 白眉彩鶲

D. et O. p. 118 (*Xanthopygia tricolor*) ——余見之于北京,Swinhoe見之于甯波附近.

La Touche, p. 162 —— 雲南,廣東,福建,沙尾山,直隸東北部,遷移鳥.江蘇,直隸,夏鳥.

室中除安南鳥外,有中國鳥四: 1♂, 1851, M. Montigny, 中國; 3♂, 1898, 1899, Biet, 四川打箭爐.

余曾于廣西猺山射得之,此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,各有此鳥數個.

X. n. xanthopygia, 與 *X. n. narcissina* 相似之點頗多,但前者雄鳥之眉斑白而後者則黃;前者雌鳥之上體橄欖綠而後

者則爲橄欖灰.

264. **Cyornis hodgsonii** (Verreaux).銹胸藍鶲

D. et O. p. 115——十一月于漢平得一單獨標本供 Verraux 作標準標本.極爲稀少.

Baker. ii, p. 216—— 錫金,不丹,亞森母,……雲南及中國西部之甘肅.

Rothschild, p. 293 (*Muscicapa hodgsonii*) ——雲南.

室中有五標本: 2♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 2♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♀, 1896, Père Soulié, 雲南茈邱.

雌鳥上體橄欖褐而非石板藍;下體灰褐而非橙栗,腹幾爲白色.

265. **Cyornis hyperythra hyperythra** (Blyth). 赭胸藍鶲

Rothschild, p. 293 ——雲南.

室中只有錫金鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

雌鳥上體橄欖褐而非石板藍,下體赭石色而非橙栗色.

266. **Cyornis tricolor cerviniventris** (Sharpe). 東藍鶲

Baker, ii, p. 220—— 嘉沙北部,馬尼坡,錦山,雲南,撣部,暹羅北部及緬甸中部.

Rothschild, p. 292——吾初以雲南鳥爲 *cerviniventris*, 後經

愼密考驗,乃知係 *Cyornis tricolor tricolor* 也.

室中有兩四川鳥: 1♂, 1896, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1902, 四川打箭爐.

C.tricolor tricolor 之下體白色,或白而微帶赭黃, *C. tricolor cerviniventris* 則下體赭色極盛.雲南鳥應逮何型,因室中尙無標本,無從定奪,但兩四川鳥則應爲 *C. t. cerviniventris*, 因腮喉以下,赭色極盛也.

267. **Cyornis melanoleuca westermanni** (Sharpe). 白眉黑鶲

Baker, ii, p. 224 —— 雅魯藏布江之南岸,緬甸山中,馬來半島,撣部,雲南及暹羅.

室中除安南標本外,有雲南鳥三: 1♂, 29, iv, 1895, Tchian 與保慶之間; 1♀8, v, 1895,保慶與緬甯之間; 1♂, 27, v, 1895, 大理府; Prince d'Orléans.

此型雄鳥與標準型 *C. m. melanoleuca* 無別,特雌鳥上體灰藍而不渲染赭色,與前者之橄欖褐而渲染赭色者不同.

268. **Cyornis sapphira** (Tickell.) 碧頂藍鶲

D. et O. p. 120 (*Muscicapila sapphira*) —— 于中國東南部各省見之.

Rothschild, p. 291 (*Muscicapila sapphira*) —— 雲南.

室中有一印度鳥及兩四川鳥: 2♂, 四川打箭爐.

269. **Cyornis vivida oatesi** (Salvadori). 赭腹藍鶲

Rothschild, p. 294——雲南.

室中只有安南鳥,因有記載于雲南,特編入本目錄.

270. **Cyornis pallipes hainana** (O.-Grant). 石青

Baker, ii, p. 229——海南,安南,中國南部,暹羅及緬甸半島.

La Touche, p. 166——雲南東南部遷移鳥.廣西遷移鳥及夏鳥.廣東夏鳥.海南留鳥.

室中只有安南鳥.

余于廣西猺山多射得之,此次寄來之廣東北部標本,亦有此鳥.

雄鳥上體藍色之部,在雌鳥則代以橄欖褐;喉及胸暗藍之部,則代以栗黃色.

271. **Cyornis unicolor unicolor** Blyth. 淺藍鶲

室中只有安南鳥,余曾于廣西猺山射得之.故編入本目錄.

272. **Cyornis rubeculoides rubeculoides** (Vigors). 藍喉鶲

Baker, ii, p., 231——夏季于喜馬拉雅帶,自克什米爾以至

緬甸皆可見之.東行至雲南,亞森母,暹羅及交趾支那.冬季,印度之東部,東北部緬甸,皆可見之.

室中除安南標本外,有一四川鳥: 1♂, 1899, 四川打箭爐.

273. **Cyornis rbueculoides dialilaema** (Salvadori). 黑腮藍鶲

Baker, ii p. 233——緬甸中部山中,北行至撣部及雲南.

Rothschild, p. 293——雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

C. r. dialilaema 之腮部深黑,*C. r. rubeculoides* 則深藍.

274. **Cyornis tickelliae tickelliae** Blyth, 狄克藍鶲

Baker, ii p. 234 —— 印度,亞森母,馬尼坡,緬甸之北部及中部,雲南,撣部,暹羅北部及安南.

室中有中國鳥四: 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♂, 1899, 四川打箭爐; 1♂, 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

275. **Cyanoptila cyanomelana cyanomelana** (Temm.). 白腹藍鶲

D. te O. p. 116——每年必有多數經過廣州,亦並有記載于澳門.夏季經滿洲直至阿穆爾.在北京,春季多于秋季,四川

與漠平則永未見之.

La Touche, p. 167——廣東,福建,江蘇,沙尾山,遷移鳥.

Rothschild, p. 293——雲南,冬鳥.

室中除日本及安南標本外,有中國鳥五: 3♂, 2♀, x. La Touche, 福建.

雄鳥上體藍色之部,在雌鳥則代以橄欖褐.

Cyanoptila cyanomelana 一種,尚有兩型,經有記載于我國: 1. *C. c. intermedia* (Weigold), 爲沙尾山及福建西北部之遷移鳥; 2. *C. c. cumatilis* T.&.B 爲雲南東南部及北京之遷移鳥,湖北夏鳥.室中尚無來自該地之標本,無從比較.

276. **Stroparola thalassina thalassina** (Swainson) 青鶲

D. et O. p. 116 (*Stroparola melanops*) —— 在中國南部度夏.

La Touche, p. 173 (*Stroparola melanops melanops*) ——四川,湖北之夏鳥.冬季見于福建.冬春兩季見于廣東.廣西夏鳥,雲南留鳥.

Rothschild, p. 291——雲南.

室中除印度,安南標本五十餘外,有中國鳥十一: 1♂, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 3♂, 2♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 1♂, 1♀, 1896, Père Soulié, 雲南茈刧; 2♂, 1907, Père, Seguin, 興甯 (Shinen).

余曾于廣西猺山射得之,此次寄來之廣東北部標本中,

亦有此鳥.

雌鳥與雄鳥相似,但青藍色較黯淡,且略帶灰色.

277. **Alseonax latirostris latirostris** (Raffes) 褐鶲

D. et O. p. 123 (*Butalis latirostris*)——夏季見于中國各地,春秋兩季遷移期,見于北京.

Baker, ii, p. 248 —— 婆羅洲,蘇門答拉,馬來半島,緬甸,暹羅及安南.或可至雲南及中國西部.

Rothschild, p. 295——雲南.

室中有安南鳥十,中國鳥一: 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

余于廣西猺山射得之.

A. l. poonensis (Sykes) 與 *A. l. latirostris* (Raffles) 之區別,在前者之灰色較盛而褐色較遜,後者之褐色較盛而灰色較遜. La Touche 于 Birds of Eastern China p. 156, 且舉爲中國各地之遷移鳥.余前曾以 *A. l. latirostris* 記載廣西猺山標本, Stresemann博士亦然.但今次寄來之廣東北部標本,灰色較盛,顯係 *A. l. poonensis*. 究竟廣西猺山鳥與廣東北江鳥有無異同,須待標本寄到後,乃能作確切之比較.

278. **Culicicapa ceylonensis antioxcentior** Oberholser. 灰頭黃鶲

D. et O. p. 113 (*Culicicapa cinerocapilla*) ——Swinhoe 于四川西

部,余于宜昌峽,皆得有標本.

Baker, ii, p. 256 (*Culicicapa ceylonensis orientalis*) —— 中國南部及中部之西之山中,雲南,撣部,暹羅及交趾支那之北部.

La Touche, p. 175 (*Culicicapa ceylonensis orientalis*) ——雲南夏鳥及遷移鳥.四川,貴州,湖北,夏鳥.廣東冬鳥,或係留鳥亦未可知.

Rothschild, p. 290 (*Culicicapa ceylonensis orientalis*) ——雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥三: 1♂, 1895, Prince d'Orléans, 雲南保慶與緬寧之間; 1(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸朷; 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南.

余于廣西猺山射得之.

279. **Niltava grandis grandis** (Blyth). 大尼他瓦

Rothschild, p. 296——雲南.

室中安南標本不少,中國鳥只有一個: 1♀, 1854, M. Montigny, 中國.

280. **Niltava sundara sundara** Hogdson. 赭腹尼他瓦

D. et O. p. 117 ——見于四川與福建,頗爲稀少.

Baker, ii, p. 259 —— 喜馬拉雅帶,自西摩拉以至亞森母之極東,南至馬尼坡,錦山及嘉錦山,又由緬甸中部山中以至德尼薩拉;暹羅半島,暹羅北部,或可見于撣部及中國西部

四川.

Rothschild, p. 295——雲南.

室中除喜馬拉雅之標本外,有四川鳥一,雲南鳥五: 1♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5♂, 1895, 1896, Prince d' Orléans, 雲南.

雄鳥紫藍之部,在雌鳥則代以赭黃或橄欖褐.

雲南東南部之*Niltava sundara denotata* Bangs & Phillip. 下體較爲淺淡,室中尙無標本.

281. **Niltava sundara davidi** La Touche. 福建尼他瓦

La Touche, p. 170(*Niltava davidi davidi*)——福建西北部 (留鳥?).

室中只有安南鳥,以其係發見于中國,特編入本目錄.

余于廣西猺山得有標本.

282. **Niltava macgrigoriae** (Burton) 花頸他瓦

La Touche, p. 172——雲南東南部夏鳥,冬季,Kershaw于廣東見一雙.

室中只有安南鳥,以旣有記載于我國,特編入本目錄.

余曾于廣西猺山射得之.

雌鳥上體橄欖褐而非紫藍.

以上*Niltava* 之四種及亞種,互似之點頗多,茲以檢索表示其區別如下:

A. 翼在 95mm. 以上,常達 105mm. ……………………*N. g. grandis.*

B. 翼在 80 mm. 以上,95mm以下;下覆雨及腋部栗色或黃色.

a. ♂,頭項之鮮鈷藍色較發達,直延伸而至于後頸,與紫藍色之背部有截然之界限;翼 85——88mm.……………………*N. s. sundara.*

b. ♂,頭項之鮮鈷藍色較不發達,只限于頭項之前部,由此逐漸消減融和,與紫藍之背部無截然之界限;翼 90—95mm.……………*N. s. davidi.*

C, 翼在 70mm.以下,下覆雨及腋部白或灰白.…*N. macgrigoriae.*

283. **Tersiphone incei** (gould). 白壽帶

D. et O. p. 112 (*Tchitrea incei*) —— 夏季見于中國本部及滿洲,北京人稱白羽者曰白鍊,栗羽者曰黃鍊.秋季遷移期所見者概係栗羽鳥,春季遷移期則栗羽鳥與白羽鳥爲數相埒.以余觀察之所得,余以爲此種之大多數皆保持其栗羽,特少數易爲白羽耳.

La Touche, p. 177 ——中國全部各地之夏鳥及遷移鳥.

室中有十一標本 2♂(一白羽), 1(?) (栗羽), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂ (白羽), 1899, 四川打箭爐; 1♂ (赤羽), Père

Cavalerie, 雲南 San-chouen; 1♂(赤羽), 1(?)(赤羽), 1907, Père Seguin, 興甯; 1♂(赤羽), 10, vii, 1908, Gladin, 甯波; 1♀, 29, v, 1884, David, 北京; 1♂(白羽), 1(?)(赤羽), 1851. M. Montigny, 中國.

余于廣州,梧州,廣西猺山,皆射得標本.亦有記載于廣東北部及湖南南部.

無論白羽或栗羽之雄鳥,尾皆甚長,雌鳥之尾遙短,且必無白羽.幼雄鳥與雌鳥相似.

284. **Tersiphone paradisi affinis** (Hay). 灰喉壽帶

Baker, ii, p. 267 —— 亞森母,雅魯藏布江之南岸,緬甸全境,暹羅西部,安南,交趾支那,雲南.

Rothschild, p. 291 —— 雲南.

室中只有安南鳥,因旣有記載于雲南,特編入本目錄.

Tersiphone paradisi affinis 與 *Tersiphone incei* 極相似,但前者之栗羽鳥(♂,♀),自腮喉以至前胸深灰,而後者則爲輝黑.

栗羽之幼雄鳥,約須易羽三次,始得白羽.但在栗羽期,旣可配偶生殖.

285. **Tersiphone princeps princeps** Temm. 紫壽帶

D. et O. p. 113 (*Tchitrea princeps*) —— Swinhoe 謂在一定時期,則經過中國南部海岸.

La Touche, p. 179—— 廣東,福建,沙尾山遷移鳥.

室中除日本及安南標本外,有一中國鳥: 1♀, 1923, M. Nadar, 舟山.

286. **Hypothymis azurea styani** (Hartlaub). 黑枕藍鶲

D. et O. p. 114 (*Hypothymis azurea*) —— 台灣,海南.

Baker, ii p. 271 —— 印度,亞森母,緬甸,暹羅,交趾支那,雲南,撣部,安南,海南.

La Touche, p. 176 ——福建 (夏鳥?). 廣東冬鳥.廣西夏鳥.雲南東南部遷移鳥(或係夏鳥亦未定).

Rothschild, p. 295——雲南.

室中只有安南鳥.因最初係發見于海南,特編入本目錄.

余于廣西猺山射得標本極多.

287. **Chelidrorhynx hypxoanthum** (Blyth). 黃腹鶲

Rothschild, p. 290——雲南.

室中除印度,安南標本外,有中國鳥四: 2(?), 1902, 四川打箭爐; 1♂,20, V, 1895, Prince d'Orléans, 雲南漾濞江; 1(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸刧.

288. **Rhipidura aureol Curmanicaa** (Hume). 白眉扇尾鶲

Rothschild, p. 297 ——雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

1868年三月, Anderson 于雲南婆子得一雄鳥,但自茲以後,各採集隊皆未曾再得有記載,是或係偶然的機會也.

289. **Rhipidura albicollis albicollis** (Vieillot). 白喉扇尾鶲

Baker, ii, p. 279 —— 喜馬拉雅帶,自 Murree 以至東亞森母,緬甸,撣部,雲南,安南,暹羅,交趾支那,海南及馬來聯邦.

Rothschild, p. 296 —— 雲南.

室中除印度安南標本外,有一中國鳥: 1♀, 20, V, 1895, Prince d'Orléans, 雲南漾濞江.

余于廣西猺山得一單獨之雄鳥標本.

LANIIDÆ 伯勞科

本科介于鶲科與山椒鳥科之間,幼鳥有横斑,與前者異,腰部羽毛柔軟,與後者異.嘴壯健,有缺刻,尖端有一小鈎;嘴鬚常甚發達;跗蹠被盾狀鱗;初列撥風羽十;尾羽十二.兩性相似.以動物爲食,籠養者亦食植物質.通常爲留鳥.

巴黎博物館鳥類研究室伯勞科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有一屬十一種及亞種.經余作個別研究後而記載于目錄之中國鳥,共三十八個

290. **Lanius excubitor lahtora** (Sykes). 印度灰伯勞

D. et O. p. 94——每年遷移期必兩過北京,但爲數常不多.冬季亦偶可于北京見之.

室中只有印度鳥,以旣有記載于北京,特編入本目錄.

291. **Lanius excubitor mollis** Eversmann. 塞外灰伯勞

La Touche, p. 182——直隸冬鳥.

室中有一中國鳥: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古.

292. **Lanius collurioides** Lesson. 緬甸伯勞

Baker, ii, p. 291——嘉沙,馬尼坡,雅魯藏布江南部山中以至德尼薩拉,安南,暹羅.不列顛博物館中,亦有一來自中國西南部之標本.

La Touche, p. 186 —— 雲南留鳥.兩廣邊境,夏鳥.廣西.

Rothschild, p. 308 (*Lanius collurioides siamensis*) ——雲南.

室中大批標本皆來自安南,只有一中國鳥: 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

余于廣西平南城外小松山上射得之.

293. **Lanius nigriceps nigriceps** (Franklin). 黑頭伯勞

D. et O. p. 95 ——只于北京見一籠鳥,無論如何高價,玩者決不肯出售.

Baker, ii, p. 292——自嘉華東至亞森母,北錦山,嘉錦山,暹羅北部及雲南.

Rothschild, p. 308 ——雲南.

室中只有錫金及安南標本,以經有記載于我國,特編入本目錄.

294. **Lanius schach schach** L. 普通伯勞

D. et O. p. 95 —— 中國西部甚普通,但永不至北京及漢平.

La Touche, p. 183 —— 揚子江流域,西北以至杭州府,陝西南部及南中國之全部,留鳥.

Rothschild, p. 307 —— 雲南.

室中標本,大部來自安南,只有中國鳥六: 1(?), 1865, Swinhoe, 大沽 (Takow), 1♀, 1874, David, 江西; 1♂, 3, iii, 1909, Gladin, 甯波; 1(?), 1923, M. Nadar, 舟山; 1♀, 4, ix, La Touche, 福建; 1(?), Père Cavalerie, 雲南 (San-chouen).

兩廣各地最爲普通.余于廣西猺山及廣東北江皆得有記載.

295. **Lanius fuscatus** Lesson. 黑伯勞

D. et O. p. 96 —— 中國南部直至廈門,亦有記載于海南.

La Touche, p. 185 ——福建東南部以至福州,廣東,留鳥.

室中有三安南鳥.

余曾于廣州近郊射得之.

鳥類學家如 Stresemann, Rothschild, Delacour 等皆以 *L. s. schach* 與 *L. fuscatus* 係同種而異型,而 La Touche 則以爲係判然不同之兩種,因此而引起極大之爭論. La Touche 曰:"二鳥之色型 (colour-pattern) 極相似,細驗之下,一若 *fuscatus* 係由 *schach* 黑化病而來.余以爲似則似矣,而喉部與肩部實有極大之差殊.喉部全黑,與灰色之胸部,截然可分;肩之淺色部亦帶灰而非赭色.量度比例亦相似,但黑鳥似稍小耳.更有進者,黑鳥乃缺去白翼斑也.以地理分佈言之,黑鳥只限于海南,廣東與福建東南部,永不見于揚子江流域,該處 *schach* 固極繁多也. Bangs & Phillips 之雲南鳥,因無標記作證,未能謂此鳥亦可見于雲南也.吾在滇中採集經年,未嘗一見一聞也.除非 *schach* 與 *fuscatus* 同得自一巢耳,不然,此問題終須保留以待解決也."

吾人試一考鳥類生活史,可知鳥類體羽,雖屬同種,每因年齡,住所,氣候,食料,而有極顯著之區別.如白壽帶 (*Tersiphone incei*) 成長之雄鳥被白羽而未成長者被栗羽,年齡關係也.鴟鴞類棲于深林者體色較暗,棲于曠野者體色較淡,環境不同也.松鷄屬 (*Tetrao*) 夏羽深色(或褐,或黑,或雜色)而冬羽常白,氣候影響也.綠鵲屬 (*Cissa*) 若缺乏滋養料時,則鮮綠之部,逐漸蒼淡,或轉爲淺藍,食料所致也.其他相

似之例證,尙不知凡幾,舉不勝舉.*fuscatus* 除將 *schach* 赭色或白色之部盡變成褐黑外,別無其他大小上或構造上之不同,La Touche 所舉之特徵,以余比較結果言之,實極微弱也.又 Delacour 既于安南得之,則 La Touche 之地理分佈之說,又受一打擊.

以余射鳥經驗言之,有 *fuscatus* 之處必有 *schach*,有 *schach* 之處則未必有 *fuscatus*.故與其謂 *fuscatus* 係另一不同之稀有種類,似不如謂係 *schach*,之一型,因受某種影響,羽毛之細胞,竟含多量之黑色色素體.至受何種影響而發生黑化病,又屬另一問題,正大可供形態學家與生理學家之研究也.正猶吾國所常見之白瘋病,因色素消失,而黑髮黃膚,盡行變易,吾人只有研究色素消失之原因耳,不能因其逼肖歐人而謂其非黃種也.總之,此問題雖未曾完全解決,但從各方面考察之,同種異型之說,可能性實較多也.

白化病較普通于黑化病.余在研究室中所見鴉科,鶇科,燕科,鷙鷹科等白化標本,總不下百個.白化之鳥,多係黑色或褐色,被彩色體羽之種類,永不見有白化病.

296. **Lanius tephronotus** (Vigors). 灰背伯勞

D. et O. p. 94——上海,四川西部,漢平.

Baker, ii, p. 297——Gilgit, 克什米爾北部, Ladak, 西藏之大部,中國之西部;冬季至印度.

La Touche, p. 184 —— David 及 Oustalet 于 Les Oiseaux de la Chine, 舉其分佈地于上海,此點極無證據,吾尙未聞有人于彼處得有標本也.此乃南方種,四川雲南之留鳥也.

Rothschild, p. 308 (*Lanius schach tephronotus*) ——雲南.

室中有中國鳥二十一: 1♂, 1♀, 1892, Prince d'Orléans,西藏; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 12(?), 1892, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 24, ix, 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 3(?), 1896, Père Soulié,雲南茸刼; (1), 1912, Mme. Comby, 雲南.

297. **Lanius cristatus cristatus** Linn. 紅尾伯勞

D. et O. p. 99—— 中國南部,廈門.

Baker, ii, p. 300 —— 夏季見于西伯利亞,自貝加爾湖以至堪察加,或可至中國北部山中,冬季至印度之北.亦可見于印度支那及中國南部.

La Touche, p. 188 —— 雲南冬鳥,廣東,福建,揚子江下流,沙尾山,山東,直隸,遷移鳥.

Rothschild, p. 307——雲南.

室中只有安南鳥.因有記載于雲南,特編入本目錄.

余于廣西猺山射得之.

298. **Lanius cristatus superciliosus** Latham. 白眉紅尾伯

勞

D. et O. p. 100——遷移期經中部各省.

La Touche, p. 189 —— 雲南冬鳥.廣東,福建,江蘇,沙尾山,直隸東北部之遷移鳥.

Rothschild, p. 308——雲南.

室中標本皆來自安南.有一蒙古鳥記作 *Lanius superciliosus*, 但因十分破爛,難以認識.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部標本中,亦各有此鳥數個.

299. **Lanius cristatus lucionensis** Linn. 菲律賓紅尾伯勞

D. et O. p. 99,——見于中國東部各處.春秋二季往來于菲律賓及滿洲時,亦可于北京見之.北京人喜飼之以捕小鳥.

Baker, ii, p. 302——夏季至西伯利亞東部,中國東部,高麗,滿洲.冬季至中國南部,緬甸,印度支那,菲律賓,馬來半島等處.

La Touche, p. 189 —— 廣東留鳥及遷移鳥.福建遷移鳥及冬鳥.揚子江流域夏鳥.沙尾山遷移鳥.中國北部夏鳥.

室中除大批菲律濱標本外,有中國鳥五: 1♂, 2♀, 15, 16, ix, 1905, La Touche, 福建; 2(?), 1910, Gladin, 甯波.

余于廣西猺山,廣東北部,湖南南部,皆得有記載.

300. **Lanius tigrinus** Drapiez. 虎斑伯勞

D. et O. p. 97 (*Lanius magirostris*) —— 北京頗稀,只見于夏季.中部較多,在江西則尤普通.

Baker, ii, p. 304 —— 自烏蘇里以至高麗,中國北部,日本.冬季至中國南部,印度支那,暹羅,德尼薩拉,馬來半島及蘇門答拉.

La Touche, p. 191 —— 雲南,廣東,福建,遷移鳥.揚子江中流及下流,直隸,夏鳥.

Rothschild, p. 308—— 雲南.

室中標本,大部來自安南,有中國鳥三: 1(?), 1899, 四川打箭爐; 2(?), 1921, Père Cavalerie, 中國南部(雲南?).

余于廣西猺山多射得之.此次寄來之湖南南部標本中,亦有此鳥.

爲簡便計,特以下列檢索表,示 *Lanius* 一屬各種及亞種之區別:

A. 全體褐黑. …………………………………………… *L. fuscatus*.

B. 非全體褐黑.

a. 上尾筒與中翮色彩互異.

1a. 初列撥風羽有一白斑.

2a. 尾黑與白.

3a.背灰色.

4a.上體灰色,中翮純黑 ………………… *L. e. lahtora.*

4b.上體灰而渲染銹赤,中翮先端黑. …………… ……………………………………………*L. e. mollis.*

3b.背栗色 ……………………………………*L. collurioides.*

2b.尾黑或褐與赭.

3c.頭項黑.……………………………………*L. n. nigriceps.*

3d.頭項灰.……………………………………*L. s. schach.*

1b.初列撥風羽無白斑. ……………………………*L. tephronotus.*

b. 上尾筒與中翮同色.

1c.背部無橫斑

2c.頭項赤褐,前頭及眉斑之白色不甚發達.……………………………………………*L. c. cristatus.*

2d.頭項淺赤褐;前頭及眉斑之白色較發達. ………… ……………………………………………*L. c. superciliosus.*

2e 頭項灰色.…………………………………*L. c. lucionensis.*

1d.背部有橫斑.…………………………………*L. tigrinus.*

Lanius 一屬,尙有 *Lanius bucephalus* Temm. & Schleg 一種,分佈于福建,廣東,揚子江中流及下流,山東,及我國北部各地,室中尙無標本,故不記入本目錄.又本科之 *Tephrodornis* 一屬,其有記載于我國境內之亞種有二,室中尙無標本:

a. *Tephrodornis gularis hainanus* O.-Grant——海南.

b. *T. g. latouchei* Kinnear——福建.

PERICROCOTIDÆ 山椒鳥科

一般性質與伯勞科相似,但腰部羽毛,羽軸硬化成刺芒狀,嘴及蹠蹠亦不及前者之壯健.翼頗尖長,尾爲節尾,亦頗長,概係遷移鳥.

巴黎博物館鳥類研究室山椒鳥科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有三屬十一種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共十五個.

301. **Pericrocotus speciosus speciosus** (Latham) 朱山椒鳥

D. et O. p. 106 —— 甚稀. Swinhoe 得于福州.秋末,余于福建多樹之山中見之.

Rothschild, p. 319——雲南.

室中有雲南鳥三: 3♀, 1895, Prince d'Orleans, 雲南.

302. **Pericrocotus speciosus fraterculus** Swinhoe. 緬甸朱山椒鳥

D. et O. p. 106 —— Swinhoe 于海南發見之.

Baker, ii, p. 320——亞森母,緬甸,暹羅,安南,印度支那,中國西部及海南.

室中只有安南鳥以既有記載于我國,特編入本目錄.

Pericrocotus speciosus fohkiensis Buturlin. 曾有記載于福建,廣東西江與北江,廣西猺山等處,室中尙無標本.茲以下表檢索表,示三型之微細區別:

A. 翼長96——106 mm.

a. ♀,上下體黃色之部淨黃.……………………*P. s. speciosus.*

b. ♀,上下體黃色之部,多染靑色,成爲靑黃.*P. s. fohkiensis.*

B. 翼長90——97 mm.………………………………*P. s. fraterculus.*

303. **Pericrocotus brevirostris ethologus** Bangs & Phillips. 短嘴山椒鳥

D. et O. p. 104——見于北京及滿洲.

La Touche, p. 194——雲南,廣東,冬鳥及遷移鳥.四川,貴州,湖北,陝西,直隸,夏鳥.

室中有兩雲南鳥: 1♂, 1♀, 1895, 1896, Père Soulié, 雲南.

304. **Pericrocotus solaris mandarinus** Stresemann. 灰喉山椒鳥

D. et O. p. 105 (*Pericrocotus griseigularis*)——只限于台灣.

La Touche, p. 196 ——福建,廣東,留鳥

室中有一標本: 1♂, 13 x, 1896, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北江,湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

305. **Pericrocotus roseus roseus** (Vieillot). 玫瑰山椒鳥.

Baker, ii, p. 328 ——印度,阿富汗,東亞森母,緬甸,暹羅半島,雲南擇部及中國西南部.

La Touche, p. 197——雲南,廣東南部,夏鳥.廣西.

室中有中國鳥四: 2♂, 2♀, 1898, M. Francois, 廣西龍州.

余于廣東西部,廣西平南縣,廣西猺山皆射得之.

306. **Pericrocotus roseus stanfordi** Vaughan & gones. 斯丹福山椒鳥

La Touche, p. 199—— 廣東南部以至廣州,夏鳥.

室中有一標本: 1♂, 1907, Père Seguin, 興甯 (Shinen).

此鳥與 *P. r. roseus* 極相似,但雄鳥前頭有一粉紅色塊斑,在雌鳥則爲橙黃.

307. **Pericrocotus cinereus** Lafresnaye. 灰山椒鳥

D. et O. p. 107, —夏季至滿洲,北京頗少.

Baker, ii, p. 334——生殖于日本及亞穆爾,或可在中國之北部.冬季至中國南部,印度支那,菲律賓,蘇門答拉婆羅洲,馬來半島,隅或一至緬甸南部.

LaTouche, p. 201 ——雲南,廣東,福建,揚子江流域,沙尾山,直隸,遷移鳥.

室中只有安南鳥.

余曾于廣西猺山射得之.

308. **Pericrocotus cantonensis** Swinhoe. 廣州灰山椒鳥

D. et O. p. 107 ——于中國南部及海南多見之,但不逾揚子江.春季余于浙江內地及江西見之,甚爲普通.秋季至印度支那.

Baker, ii, p. 335——生殖于中國東部及東北部.冬季至中國南部,馬來諸邦,印度支那.偶可一至緬甸南部.

La Touche, p. 200 ——雲南遷移鳥.四川,湖北,揚子江下流以至鎮江,浙江,福建,廣東,夏鳥.

室中只有安南鳥,因係我國南部普通夏鳥,特編入本目錄.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,各有此鳥數個.

Pericrocotus cinereus 之腰與背同色, P. cantonensis 則腰部較淺色.

309. **Lalage melaschista avensis** (Blyth). 灰龍眼燕

D. et O. p. 103 (*Volvocivora melaschista*)——至中國南部營巢者,實屬不少.

Baker, ii, p. 338——緬甸,撣部,暹羅,雲南及中國南部.

La Touche, p. 202 —— 除極北外,夏季見于中國全部.

室中除安南鳥外,有中國鳥三: 1(?), 1899, 四川打箭爐; 1(?), Père Cavalerie, 雲南; 1(?),Pére Seguin, 興甯.

余于廣西猺山射得之,此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

310. **Lalage saturata** (Swinhoe). 黑龍眼燕

D. et O. p. 103 (*Volvocivora saturata*) ——海南.

室中有兩安南標本.因此鳥最初係發見于海南,故編入本目錄.

Lalage avensis 之最年老者,體色深鐵灰,與 *saturata* 幾無差別,但後者之嘴基部較闊,翼較短 (♂ 116, ♀ 114 mm.), 而 *avensis* 則嘴較纖,翼較長(120 mm.以上).

311. **Graucalus macei Siameusis** Baker. 大龍眼燕

D. et O. p. 108 ——(*Graucalus rex-pineti*) ——Swinhoe于台灣及海南見之,爲彼處山林中之留鳥.

Baker, ii, p. 345 ——亞森母,緬甸,撣部,暹羅及印度支那.

La Touche, p. 203 (*Graucalus macei rex-pineti*) —— 福建,廣東,雲南,留鳥.

Rothschild. p. 301——雲南.

室中安南鳥甚多,有一中國鳥: 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南雲州.

ARTAMIDÆ. 灰燕科

一般性狀與伯勞科相似,幼鳥上下體皆有橫斑;嘴亦壯健,但尖端不作鉤狀,亦無缺刻;跗蹠纖弱;翼極尖長,適于飛翔,撥風羽第一枚甚小,第二三枚等長,爲諸撥風羽中之最長者;尾短,爲角尾.雌雄相似.

巴黎博物館鳥類研究室灰燕科標本之採自我國或經有記載于我國者,只有一屬一種.

312. **Artamus fuscus** Vieillot 灰燕

D. et O. p. 101—— 中國南部之澳門及海南.

Baker, ii p. 248 —— 分佈于印度全境,亦可見于緬甸,撣部,暹羅,交趾支那,雲南及中國西部.

La Touche, p. 205 ——廣東,廣西,雲南,留鳥.

室中有交趾標本數十,只有一中國鳥: 1(?), 1898, M. Francois, 廣西龍州.

余于廣西平南縣城外小松山上射得十餘枚,亦可見于猺山山麓但八百呎以上之地,絕無蹤跡.

DICRURIDÆ. 魚尾燕科

一般性狀,與鶲科,伯勞科,極樂鳥科 (*Paradiseidae*)相似.幼鳥有白橫斑.翼尖長;撥風羽十;尾長而成叉狀;嘴頗壯;跗蹠短而健.常有裝飾羽,或在頭部,或在翼部,或在尾部.留鳥或遷移鳥,因境域而不同.爲留鳥者亦每有地方性之小遷移,或因氣候,或因食料,或因其他關係,現尙不明.食蟲性,善飛捕昆蟲,與鶲科各鳥相似.

巴黎博物館鳥類研究室魚尾燕科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有五屬八種及亞種,*Chaptia, Bhringa, Dissumurus* 等三屬,在我國境內,只可見于雲南或海南,而 *Chibia h. hottentotta* 一型,亦無記載于內地.又經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共只十五個.

313. **Dicrurus annectens** (Hodgson). 鴉嘴黑魚尾燕

Baker, ii, p. 353——尼泊爾,錫金,雅魯藏布江之南北兩岸,撣部,暹羅,馬來半島.

室中除大批安南標本外,有中國鳥一: 1(?), 28, xii, 1908,

Gladin, 中國(雖無詳細地名但余以爲係採自甯波附近,因Gladin,許多標本皆採自甯波也).

此次寄來之湖南南部標本中,有一標本,余以爲當係*D. annectens.*

314. **Dicrurus macrocercus cathoecus** Swinhoe. 黑魚尾燕

D. et O. p. 108 (*Buchanga cathoecus*) —— 廣佈中國各地.

Baker, ii, p. 358——緬甸,中國南部,暹羅,印度支那,海南.

La Touche, p. 206 —— 自雲南以至福建,留鳥.揚子江及中國北部夏鳥.沙尾山遷移鳥

Rothschild, p. 337——雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥四: 1(?), 1892, 西藏; 2(?), 1891, 四川打箭爐; 1♂, 3, iii, 1895, 雲南保山 (Pochan), Prince d'Orléans.

余于廣州郊外,廣西猺山多射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.又1927年正月,余旅居廣西南甯,晚飯後至廊外散步,至某池塘附近,見此鳥五六十個,飛捕出巢之白蟻.

外觀上,*D. annectens* 與 *D. m. cathœcus* 極難分別,但前者尾之卷曲度較大,側翮較中翮長,其長度約等于蹠;後者尾之卷曲度較小,側翮亦比中翮長,但其長度乃倍于蹠.

Dicrurus leucophaeus hopwoodi Stuart Baker, 在國外,分佈于亞森母,孟加拉,雅魯藏布江之東部及南部,馬尼坡,緬甸,撣部等處,在國內,亦可見于雲南,廣東,廣西諸省,余曾于廣西猺山多射得之.室中尙無標本,故爲本目錄記載所不及.

315. **Dicrurus leucogenys leucogenys** (Walden). 白頰魚尾燕

D. et O. p. 108 (*Buchanga leucogenies*) —— 在一定時期,可見于中國中部.每年可見二次于北京,但爲數無多.滿洲內地亦有之.

Baker, ii, p. 267—— 自緬甸半島以至新嘉坡,印度支那,暹羅,雲南,中國及日本.

La Touche, p. 208 (*Dicrurus leucogenys cerussatus*) —— 福建,浙江,江西,安徽,夏鳥.廣東夏鳥及遷移鳥.四川,陝西遷移鳥.湖北.直隸.

室中大批標本皆來自安南,有中國鳥二: 1♀, 16, vi, 1873, David, 江西; 1(?), 1907, Père Seguin, 興甯.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

Bangs & Phillips 以 *Dicrurus leucogenys cerussatus* 記載湖北鳥. La Touche 于 Birds of Eastern China p. 208, 援用此名,且舉其分

佈地點如上,並云,此鳥 (*cerussatus*) 體色較淺于印度支那之 *D. l. leucogenys* Walden, 頭側之白塊斑純白而與其餘頭部有明顯之界限.此言絕不可靠.*D. l. leucogenys* Walden 之標準地爲中國而非印度支那,是乃根本錯誤.余再以室中兩標本及余之湘粵標本與大批之安南鳥較,覺中國鳥,不特不淺于安南鳥,有時且較安南鳥爲遙深,氏之言,又不知何所根據矣.經愼密研究後,余以爲灰色之深淺,實與年齡有關,與其目此爲亞種的特性,實不如謂係個體的差別也.因此,余乃不以中國鳥爲 *cerussatus*, 最低限度,余亦可不以 *cerussatus*, 記載 David 之江西鳥, Seguin 之興甯鳥及余之廣東,廣西,湖南鳥也.

316. **Chaptia aenea aenea** (Vieillot). 銅光黑魚尾燕

Baker, ii, p. 368——亞森母,孟加拉,馬尼坡,緬甸,雲南,海南.

Rothschild, p. 337——雲南.

室中有兩安南鳥,以既有記載于雲南及海南,特編入本目錄.余前曾于海南射得一標本,附寄時竟爾失去,至今猶惋惜不置.

317. **Chibia hottentotta hottentotta** (Linn). 髮冠魚尾燕

Baker, ii, p. 370——印度,亞森母,緬甸,撣部,暹羅及雲南.

Rothschild, p. 337——雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

318. **Chibia hottentotta brevirostris** Cabanis & Heine.

D. et O. p. 110——廣佈中國全部.

La Touche, p. 209 —— 中國全部,夏鳥.

室中除安南標本外,有中國鳥八: 5(?), 1895, 1898, 1899, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1901, Père Seguin, 興甯; 1(?), 1907, Gladin, 中國(甯波?).

余于廣東鼎湖山,廣西猺山射得甚多.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥四個.

Chibia hottotentta brevirostris 與 *C. h. hottentotta* 之區別,在後者之嘴峯較大,尾較闊,胸部之點斑較圓.

319. **Bhringa remifer tectirostris** Hodgson. 紫頭魚尾燕

Baker, ii, p. 375 —— 印度北部,緬甸,撣部,雲南及暹羅等處.

Rothschild, p. 337——雲南婆子及騰越.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

320. **Dissemurus paradiseus grandis** (Gould). 叢冠黑魚尾燕

Baker, ii, p. 378——……北撣部及雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

(未 完)

數學家姓名錄

(續第四卷第一期)

曾昭安

Fontaine, Alexis〔封騰〕(1705—1771) 法人

Fontana, Gregorio〔豐坦那〕(1735—1803) 義人

Fontana Nicola〔豐坦那〕卽 Tartaglia

Fontebasso, D.〔封武巴索〕十九世紀後半期　義人

Fontell, A. G.〔豐武爾〕二十世紀前半期　芬蘭人

Fontèné, G.〔封特內〕十九世紀後半期　法人

Fontené, H.〔封特內〕十九世紀末　法人

Fontenelle, Bernard *le Bovier* de〔封特涅爾〕(1657—1757) 法人　著無窮幾何學

Fonvielle, W. de〔豐偉爾〕十九世紀　法人

Föppl, August〔斐普爾〕(1854—1925) 德人

Föppl, L.〔斐普爾〕二十世紀初　德人

Föppl, O.〔斐普爾〕二十世紀　德人

Foraker, F. A.〔福喇刻〕二十世紀前半期　美人

Forbenis〔福本尼斯〕

Forbes, C. S.〔佛白司〕二十世紀初　美人

Forbes, J. D.〔佛白司〕十九世紀中　英人

Forcadel, Pierre〔福卡德爾〕(?—1574) 法人　譯希臘文數學書數種

Forchheimer, P.〔福士海麥〕(1851—1933) 德人

Ford, Lester R.〔福德〕二十世紀前半期 美人 著自形函數

Ford, R. D.〔福德〕二十世紀前半期 美人

Ford, Walter Burton〔福德〕(1874,5,18—) 美人 研究發散級數

Fordemann, A.〔福得曼〕十九世紀後半期 德人

Forder, Henry George〔福得〕二十世紀前半期 英人 著高等幾何學

Forman Simon〔福蒙〕(1552—1611,9,12) 英人

Forncey〔阜錫〕十八世紀後半期 英人

Forrest, S. N.〔福勒斯特〕二十世紀前半期 英人

Forster, Emil〔福斯忒〕二十世紀 奧人

Forster Georg〔福斯忒〕十八世紀後半期

Forster, Mark〔福斯忒〕十七世紀 英人

Förster, W.〔福斯忒〕十九世紀後半期 德人

Forster, William〔福斯忒〕十七世紀前半期 英人

Forsyth, Andrew Russell〔福賽司〕(1858,6,18—) 英人 著微分方程函數論等.

Forsyth, Chester H.〔福賽司〕二十世紀前半期 美人 研究商業數學

Fort, Karl Osmar Alexander〔福特〕

Fort, O.〔福特〕二十世紀 德人

Fort, Tomlinson〔福特〕(1886,12,17—) 美人 著無窮級數

Forti, Angelo〔福提〕(1818—?) 義人

Fortia, Marquis de〔福體亞〕(1756—1843)

Fortolfus〔福托法〕十一世紀末 研究數學遊戲

Fortunatus, P. F.〔福條那塔〕十八世紀

Foster, E. S.〔福斯德〕二十世紀前半期 英人

Foster, Malcolm〔福斯德〕二十世紀前半期 美人

Foster, Mark〔福斯德〕十七世紀　英人

Foster, M. C.〔福斯德〕二十世紀前半期　美人

Foster, P. Field〔福斯德〕二十世紀　英人

Foster, Ronald M.〔福斯德〕二十世紀前半期　美人

Foster, Samuel〔福斯德〕(1619—1652) 英人

Foster, V. Le Neve〔福斯德〕二十世紀　英人

Foster, W.〔福斯德〕十九世紀中　英人

Foster, W. I.〔福斯德〕二十世紀前半期　美人

Foucault, Léon〔佛科〕(1819—1868) 法人

Foucher, L'Abbé〔孚社〕十八世紀　法人

Fouët, Édouard A.〔佛厄〕二十世紀初　法人

Fourcy, Lefebure de〔傅息〕十九世紀前半期　法人　代數幾何學家

Fouret, G.〔佛勒〕十九世紀後半期　法人

Fourier, C.〔傅利〕十九世紀　法人

Fourier, *Baron Jean Baptiste* Joseph〔傅利〕(1768,3,21—1830,5,16) 法人　發明傅利級數,研究方程式論,級數論.

Fournier, C. F.〔佛耳內〕十九世紀　法人

Fournier, Georges〔佛耳內〕二十世紀前半期　法人

Fourrey, E.〔孚累〕二十世紀　法人

Foville, A. de〔佛徽爾〕二十世紀初

Fowle, F. E.〔福爾〕二十世紀　美人

Fowler, Ralph Howard〔否勒〕(1889,1,17—　) 英人　著平面曲線之微分幾何學

Fox, C.〔福克斯〕二十世紀前半期　英人

Fox, H.〔福克斯〕二十世紀前半期　美人

Fracastoro, G.〔夫剌卡托洛〕 卽 H. Francastorius

Fraenkel, Adolf〔佛藍刻爾〕 亦作 Adolph Fraenkel 卽 A. Fränkel

Frahm, W.〔佛棱〕 十九世紀後半期 德人

Frahnert, W.〔夫剌涅〕 十九世紀後半期 德人

Fraleigh, P. A.〔福剌利〕 二十世紀前半期 美人

Francada, Gaudioso〔法蘭卡達〕 十六世紀中 義人

Français, J. F.〔法蘭舍〕 十九世紀初

Francastorius, H.〔夫剌卡托洛〕 亦作 G. Fracastoro 十六世紀前半期

Francesca, Pier della〔夫藍拆斯卡〕 亦作 Pietro della Francesca 或 Pietro Franceschi (1416—1492) 義人

Franceschi, Pietro〔夫藍拆斯岐〕 卽 P. Francesca

Francesco, Raffaele〔夫藍拆斯科〕 卽 R. Franciscus

Francesco dal Sole〔夫藍拆斯科〕 卽 Sole

Francesco, degli Stabili〔夫藍拆斯科〕 卽 Cecco

Francesco di Simone Stabili〔夫藍拆斯科〕 Cecco

Franchini, Pietro〔夫藍岐尼〕 (1768,4,24—1837,1,26) 義人

Franciscus, Raphael〔夫藍栖卡〕 亦作 Raffaele Francesco 十五世紀後半期 義人

Franciscus de Aretio〔夫藍栖卡〕 (1418—1483)

Franck, James〔佛郎克〕 二十世紀前半期 德人

Franck, Max〔佛郎克〕 二十世紀前半期 法人

Francke, Hermann〔佛郎剋〕 或作 August Herrmann Francke (1663—1727) 德人

Franco of Liège〔夫藍科〕 十一世紀後半期 比利時人

Franco von Lüttich〔夫藍科〕 十一世紀 德人

Francoeur, L. B.〔佛藍栖〕亦作 L. B. Francœur 十九世紀前半期

Francus, Johannes〔法郎卡〕卽 Regiomontanus

Frank, A. von〔夫郎克〕德人

Frank, Philipp〔夫郎克〕二十世紀前半期　德人

Frank, Sebastian〔夫郎克〕十六世紀　德人

Frank, W.〔夫郎克〕二十世紀前半期　德人

Franke, C.〔夫郎刻〕十九世紀後半期　德人

Franke, E.〔夫郎刻〕十九世紀後半期　德人

Franke, J. H.〔夫郎刻〕十九世紀後半期　德人

Franke, W.〔夫郎刻〕二十世紀前半期　德人

Fränkel, Adolf〔佛藍刻爾〕亦作 Adolph Fraenkel(1891—) 德人　著集合論

Frankenbach, F. W.〔夫郎墾巴哈〕十九世紀後半期　庫爾蘭 (Kurland) 人

Frankl, F.〔夫郎克爾〕二十世紀

Frankland, F. W.〔佛郎克蘭〕二十世紀初　英人

Frankland, W. B.〔佛郎克蘭〕二十世紀　英人

Franklin, Benjamin〔法蘭克林〕(1706,1,17—1790) 美人　研究幻方

Franklin, Mrs Christine〔法蘭克林〕卽 Mrs. Fabian Franklin 亦卽 Mrs. Christine Ladd-Franklin

Franklin, Constance W.〔法蘭克林〕卽 Mrs. Philip Franklin 二十世紀前半期　美女

Franklin Fabian〔法蘭克林〕(1853,1,18—) 美人生於匈牙利

Franklin, Philip〔法蘭克林〕二十世紀前半期　美人

Franklin, William Suddards〔法蘭克林〕(1863,10,27—) 美人

Fransèn, A. E.〔夫藍舍〕十九世紀末　瑞典人

Frantz, J.〔佛藍次〕十九世紀　德人

Franz, W. E.〔夫藍次〕二十世紀前半期　德人

Frascara, G. A.〔佛剌卡拉〕十九世紀後半期　瑞士人

Fraser, D. C.〔夫累則〕二十世紀初　英人

Fraser, J.〔夫累則〕二十世紀　英人

Fraser, Peter〔夫累則〕二十世紀前半期　英人

Frater, Fridericus〔佛剌式·夫里得利卡〕

Frattini, Giovanni〔夫剌提尼〕(1852—1925)　義人

Fréchet, Maurice〔弗勒岐〕(1878—　)　法人

Fréchet, René〔弗勒岐〕

Fred, William〔夫勒得〕十八世紀末　英人

Frederick the Great of Prussia〔腓特烈第一〕十八世紀　普魯士王　贊美數學家蘭格倫者

Frederick II of Germany〔腓特烈第二〕(1194—1250)　羅馬帝國皇帝　傳播亞剌伯數學於西歐

Fredholm, *Éric* Ivar〔佛勒德和〕(1866—1927,8,17)　挪威人　闡發積分方程式論

Freeland, F. T.〔福禮蘭〕十九世紀後半期　美人

Freeman, Alexander〔福禮門〕十九世紀後半期　英人　譯傅利熱之解析理論

Freeman, Harry〔福禮門〕二十世紀前半期　英人

Frege, *Friedrich Ludwig* Gottlob〔佛勒治〕(1848—1925,7,26)　德人　著數理哲學及數學之根本法則

Freigius, Joannes Thomas〔佛萊朱〕十六世紀後半期　瑞士人

French, C. H.〔夫棱喜〕二十世紀　英人

Frend, John〔夫棱德〕十八世紀　英人

Frend, William〔夫棱德〕(1757,11,22—1841,2,21)　英人

Frenet, F.〔福棱涅〕十九世紀末　法人　研究數理解析

Frenet, M. F.〔福棱涅〕十九世紀中　法人

Frénicle *de Bessey*, Bernard〔夫棱尼科〕(1602—1675)　法人

Frenkel, J.〔夫棱克〕二十世紀前半期　英人

Frenzel, C.〔夫棱策〕十九世紀末　德人

Frenzen, E.〔夫棱增〕二十世紀前半期　德人

Fresnel, Augustin *Jean*〔夫累涅爾〕(1788,5,10—1827,7,14)　法人　貢獻於數理光學

Freuchen, P.〔弗洛奇〕十九世紀後半期

Freudenthal, H.〔弗洛登退〕二十世紀前半期　德人

Freund, M.〔弗壘因德〕二十世紀前半期　德人

Freundlich, Erwin〔弗壘德利池〕二十世紀初　德人

Frey, Jacob〔夫賴〕十六世紀　德人

Frey, Johann〔夫賴〕十六世紀中　德人

Freyberg, J.〔夫賴柏〕十九世紀末　德人

Freyberger, Hans〔夫賴柏格〕二十世紀　德人

Freycinet, Charles de〔夫賴栖內〕十九世紀前半期　法人

Freyle, Juan Díaz〔夫賴爾〕即 Diez

Frézier, Amédée François〔法勒齊〕(1682—1773,10,16)　法人　創立畫法幾何學

Frick, J. H.〔夫立克〕二十世紀　美人

Fricke, H.〔夫立剋〕二十世紀　德人

Fricke, K.E.R.〔夫立刻〕即 R. Fricke

Fricke, Robert〔夫立刻〕(?—1930,7,22) 德人 研究橢圓函數

Fricke, W.〔夫立刻〕二十世紀初 德人

Friedlein, *Johann* Gottfried〔孚利德林〕(1828—1875) 巴伐利亞 (Bavaria) 人

Friedli, W.〔孚利德力〕二十世紀前半期 瑞士人

Friedmann, A. A.〔孚利德曼〕(1888—1925,9,16) 俄人

Friedrich, G.〔孚利里士〕十九世紀後半期 德人

Friedrich, M.〔孚利里士〕十九世紀 德人

Friedrichs, K.〔孚利里斯〕二十世紀前半期 德人

Frierson, L. S.〔夫里遜〕二十世紀

Fries, Jakob Friedrich〔弗黎斯〕(1773—1843) 德人

Fries, J. J.〔弗黎斯〕十九世紀中 德人

Friesecke, H.〔佛里塞刻〕

Friesen, S. G. von〔佛里森〕十九世紀後半期 瑞士人

Friesendorff, Th.〔佛里森多夫〕十九世紀末 德人

Frink, Aline H.〔夫靈克〕即 Mrs. Orrin Frink 二十世紀前半期 美女

Frink, F. G.〔夫靈克〕二十世紀 美人

Frink. Orrin〔夫靈克〕二十世紀前半期 美人

Frisch, Chr.〔佛里什〕十九世紀後半期 德人

Frisch, R. A. K.〔佛里什〕二十世紀前半期 挪威人

Frischauf, Johannes〔佛里紹夫〕十九世紀後半期 奧人 著絕對幾何學

Friscobaldi, Filippo〔弗里科巴狄〕十六世紀 義人

Frisi, Paul〔弗里西〕亦作 Paolo Frisi (1728—1784) 義人

Frisius, Gemma〔夫里柄〕 即 Gemma Frisius

Frisius, Paul〔夫里柄〕 十八世紀

Fritsche, C.〔佛里拆〕 十九世紀後半期 德人

Fritz〔佛里慈〕

Frizell, A. B.〔夫立策爾〕 二十世紀前半期 美人

Frizzo, G.〔夫立左〕 十九世紀後半期 義人

Frobenius, Georg〔夫洛本尼〕 (1849—1917) 德人

Frobenius, L.〔夫洛本尼〕 十九世紀末 德人

Frobes, Johan Nikolaus〔夫洛布〕 (1701—1756) 德人

Froda, A.〔夫洛達〕 二十世紀前半期 法人

Fröding, O. H.〔福勒定〕 十九世紀後半期 瑞典人

Froemmer, W.〔夫洛麥〕 二十世紀 德人

Froemter, A.〔夫洛忒〕 十九世紀 德人

Frölich, R.〔福勒力喜〕 二十世紀前半期 德人

Frolov〔夫魯洛〕 亦作 Frolow 十九世紀後半期 俄人

Fromanteel, A.〔夫洛蒙提〕 十九世紀後半期

Fromm, H.〔弗洛讀〕 十九世紀後半期 德人

Frömmichen〔弗洛米拆〕 十八世紀後半期 德人

Frömter, A.〔福勒忒〕 十九世紀後半期 德人

Frontera, G.〔弗倫特拉〕 十九世紀中 法人

Frontinus, Sextus Julius〔弗龍廷那〕 (23—79; 或 40—103) 義人

Frost, A. H.〔傅洛士〕 十九世紀

Frost, Percival〔傅洛士〕 十九世紀 英人 研究曲線求迹法

Froude, William〔夫魯德〕 (1810—1879)

Frucht, R.〔夫律許〕 二十世紀前半期 德人

Frullani, G.〔夫律蘭尼〕十九世紀前半期　義人

Frumveller, A. F.〔夫律昧勒〕二十世紀前半期　美人

Fry, C.〔傅賴〕十九世紀後半期　德人

Fry, D.〔傅賴〕十九世紀後半期　德人

Fry, Matthew Wyatt Joseph〔傅賴〕二十世紀前半期　英人

Fry, Thornton C.〔傅賴〕二十世紀前半期　英人　著微分方程

Fryer. E. H.〔傅賴厄〕二十世紀前半期　英人

Fryer, John〔傅蘭雅〕十九世紀後半期　英人　與華蘅芳共譯英文華里司代數術為中文

Fryer, M.〔傅賴厄〕

Fu Lay Ya〔傅蘭雅〕卽 John Fryer

Fubini, Guido〔佛賓尼〕(1879—　)　義人　著微分射影幾何學

Fubini, Lazzaro〔佛賓尼〕義人

Fuchs, A.〔富克斯〕十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Fuchs, C. H.〔富克斯〕十九世紀中　德人

Fuchs, *Emmanuel* Lazarus〔富克斯〕亦作 I. L. Fuchs 或 L. Fuchs　(1835,5,5—1902,4,26)　德人　闡發富克斯函數,貢獻於平直微分方程式

Fuchs, Richard〔富克斯〕二十世紀　德人

Fuerstenau, Eduard〔福史敦諾〕卽 E.Fürstenau

Fues, Erwin〔分斯〕二十世紀前半期　德人

Fueter, Rudolf〔芬退〕(1880—　)　瑞士人　著綜合數論

Fuhlberg-Horst, J.〔佛爾柏·和斯特〕二十世紀　德人

Fuhr, H.〔富爾〕二十世紀　德人

Fuhrmann, Arwed〔富爾曼〕十九及二十世紀　德人

Fuhrmann, W.〔富爾曼〕十九世紀　德人

Fujimaki, Usaburo 二十世紀前半期 日本人

Fujioka Yutei〔藤岡有貞〕日本人

Fujisawa Rikitaro〔藤澤利喜太郎〕(1861—) 日本人

Fujita Kagen〔藤田嘉言〕日本人

Fujita Sadasuke〔藤田貞資〕亦作 Honda Teiken 又名藤田定資 (1734—1807 八月六日) 日本人

Fujiwara Matsusaburo〔藤原松三郎〕二十世紀前半期 日本人

Fujiwara Michinori〔藤原〕(?—1159) 日本人

Fukasawa Seigo〔深澤淸吾〕二十世紀前半期 日本人

Fukuda Fuku〔福田正復〕(1806—1858 七月七日) 日本人

Fukuda Riken〔福田理軒〕(1815—1889) 日本人

Fukuhara, Masuo 二十世紀前半期 日本人

Fukuzawa, S.〔福澤〕二十世紀初 日本人

Fukuzawa, Yukichi〔福澤諭吉〕(1835—1901) 日本人

Fulco, Paolino〔佛耳科〕十九世紀末 義人

Fulconis, Io. Frans.〔佛耳昆尼〕十六世紀 法人

Fuller, Charles Edward〔佛勒〕二十世紀前半期 美人

Fulst, O.〔福爾斯特〕十九世紀後半期 德人

Fulton, William〔福爾敦〕(1876,12,18—) 英人

Funck, Christlieb Benedikt〔芬克〕(1736—1786)

Funck, Franz〔芬克〕二十世紀 德人

Funck, R.〔芬克〕二十世紀初 德人

Funcke, H.〔芬刻〕十九世紀後半期 德人

Funcke. R.〔芬刻〕十九世紀 德人

Fung King〔馮經〕十八世紀後半期 中國淸乾隆時人

Fung Kwei Fang〔馮桂芳〕（1809《清嘉慶十四年》—1874《清同治十三年》）中國人

Funk, Paul〔豐克〕二十世紀前半期　德人

Funk, R.〔豐克〕

Furch, Robert〔佛赤〕二十世紀前半期　德人

Fürle, H.〔孚耳〕十九世紀後半期　德人

Furness, Calorine *Ellen*〔斐湼斯〕（1869,1,24—　）美女　研究數理天文

Furst, I.〔孚斯特〕十六世紀　義人

Fürstenau, Eduard〔福史敦諾〕亦作 E. Fuerstenau　十九世紀中　德人

Fürstweger, Franz〔福史味革〕二十世紀前半期　德人

Fürstweger, Friedrich〔福史味革〕二十世紀前半期　德人

Furtenbach, Josef〔福滕巴哈〕亦作 Joseph Furtenbach　(1591—1667)　德人

Fürth, Reinhold〔孚耳特〕二十世紀前半期　德人

Furtmaenger, Ph.〔福美革〕亦作 Ph. Furtmänger　二十世紀前半期　德人

Furtmayr, Josef〔佛美爾〕二十世紀　德人

Furtwängler, Philip〔福特開勒〕（1869—　）奧人

Furuhjelm, R.〔孚魯澤讀〕二十世紀初　芬蘭人

Furukawa〔古川又山〕〔1805—1877 六月七日〕日本人　古川謙之子

Furukawa Ken〔古川謙〕亦作古川氏一（1783—1837 六月二十一日）日本人

Furukawa Ujikiyo〔古川氏清〕（1757—1820 六月十一日）日本人

Furwitz〔孚微次〕

Füss, H.〔佛斯〕二十世紀前半期　德人

Fuss, Nicolas v.〔佛斯〕（1755—1826）俄人

Fuss, Paul H. von〔佛斯〕十九世紀中　俄人

Futagawa Michiji〔二川道次〕二十世紀前半期　日本人

Fyzi〔菲晉〕十六世紀　波斯人

Gaba, M. G.〔加巴〕十九及二十世紀　美人

Gabbatt, John Percy〔加巴特〕(1880,2,3—　) 英人　研究幾何學

Gabeaud, C.〔伽波德〕二十世紀前半期　法人

Gaber, E.〔加柏〕二十世紀前半期　德人

Gabriel, Marie〔迦伯列〕即 Agnesi

Gaertner, R.〔加特湼〕十九世紀末　德人

Gaetena, Maria〔加武那〕即 Agnesi

Gagarine, Prince A.〔加加靈〕十九世紀後半期　俄人

Gage, Walter Henry〔給治〕二十世紀前半期　坎拿大人

Gaignat, de L'Aulnays, C. F.〔給那〕十八世紀後半期　法人

Gaines, Robert Edwin〔根茲〕(1861,12,7—　) 美人

Gajdeczka, J.〔根得卡〕十九世紀末　德人

Galasso, Horatio〔加拉索〕十六世紀　義人

Galbraith〔加布累司〕

Galbrum, M.〔賈爾布律〕

Galbrun, Henri〔賈爾布倫〕二十世紀前半期　法人　研究絕對微分學及相對論

Galdeano, Z. G. de〔賈爾底諾〕十九世紀後半期　西班牙人

Gale, Arthur Sullivan〔蓋耳〕(1877,6,26—　) 美人　著解析幾何及函數論

Gale, Thomas〔蓋耳〕十七世紀　英人

Galembert, Vte. de〔伽勒柏〕二十世紀

Galen〔格林〕希臘人

Galenus〔格稱納〕 即 Pediasimus

Galgemayr, Georg〔伽革邁〕 十七世紀前半期 德人

Galileo Galilei〔伽利力,伽利略〕 (1564,2,18--1642,1,8) 義人 伽利略乃其名也. 數學及物理學大家.發見物體落下及擺之定律.

Galiot de Genouillac〔加力奥〕 十六世紀 法人

Galitzin, Prince B.〔加力晉〕 二十世紀前半期 英人

Gallatly, William〔加拉歷〕

Galle, A.〔加里〕 二十世紀初 德人 著算器

Gallé, Jean〔加里〕 十七世紀前半期

Gallenkamp, W.〔加楞坎〕 十九世紀中 德人

Gallimard, J. E.〔加立瑪〕 十八世紀 法人

Gallissot, C.〔加利索〕 二十世紀前半期 法人

Gallo, Joaquin〔加羅〕 二十世紀前半期 墨西哥人

Gallois, Jean〔迦羅〕 (1632—1707) 法人

Gallop, E. G.〔加洛〕 十九世紀後半期 英人

Galloway, Thomas〔加羅威〕 十九世紀前半期 英人 著確率學

Gallucci, G.〔加路息〕 二十世紀前半期 義人

Galois, Évariste〔葛洛華〕 (1811,10,26—1832,5,30) 法人 發明羣論

Galton, Sir Francis〔哥爾通〕 (1822--1911) 英人 創立生物學之統計理論.

Gambardelli, F.〔甘巴得力〕 十九世紀後半期

Gambier, Bertrand〔干俾耳〕 二十世紀前半期 法人 研究曲面論.

Gambier, G.〔干俾耳〕 二十世紀 法人

Gambioli, D.〔干俾力〕 十九世紀末 義人

Gamboli, D.〔淵波力〕

Gamborg, V. E.〔甘波〕十九世紀末

Gamiczer〔伽米策〕即 W. Jamitzer

Gamundia〔格蒙特〕即 Gmünden

Gándara, A. N.〔干達剌〕二十世紀前半期　墨西哥人

Gandavensis, Henricus〔岡達溫栖〕亦作 Heinrich von Goethals (1217—1293) 法人

Gandillot, Maurice〔干狄羅〕二十世紀前半期　法人

Gandtner, O.〔干特湼〕十九世紀後半期　德人

Gandz, Solomon〔岡司〕二十世紀前半期　德人

Ganesa〔加湼薩〕亦作 Ganeça, 十六世紀中　印度人

Ganet, M.〔加湼〕二十世紀前半期　法人

Gangad'hara〔甘加哈剌〕十五世紀前半期　印度人

Gangopadphy, S.〔甘哥帕菲〕二十世紀　印度人　著高等平面曲線論

Ganguillet, V.〔岡金勒〕二十世紀前半期　瑞士人

Ganguli, S.〔岡谷利〕二十世紀前半期　印度人　著平面曲線論

Gans, Richard〔干斯〕二十世紀前半期　德人　著向量解析

Ganter, H.〔甘忒〕十九及二十世紀　瑞士人

Garabedian, Carl A.〔加剌柏第〕二十世紀前半期　美人

Garabedian, Henry Leslie〔加剌柏第〕二十世紀前半期　美人

Garbasso, A.〔加巴索〕二十世紀初　義人

Garbieri, G.〔加俾里〕十九世紀後半期　義人

Garcet, M. H.〔加塞〕十九世紀　法人

Garcia, Florentino〔加栖阿〕十九世紀　阿根廷人

García, G.〔加栖阿〕二十世紀前半期　秘魯人

Garcia-Conde, Genero Moreno〔加栖阿·康狄〕二十世紀前半期　智利人

Gardiner, William〔伽地納〕十八世紀後半期 英人 著對數表

Gardon, C.〔伽頓〕十九世紀初 法人

Garibaldi, C.〔加里波的〕

Garis, Charles Frederick Fleming〔加里斯〕(1881,2,1—) 美人

Garlin〔加林〕

Garner, C. L.〔伽涅〕二十世紀 美人

Garner, J. L,〔伽涅〕美人

Garner, Lofton Leroy〔伽涅〕二十世紀前半期 美人

Garnett, William〔加涅特〕(1851—1932,11,1) 英人

Garnier, E.〔加內〕二十世紀前半期 義人

Garnier, Jean Guillaume〔加內〕(1766—1840) 法人 著代數解析

Garnier, René〔加內〕二十世紀前半期 法人 著微積分

Garretson, W. V. N.〔加勒遜〕二十世紀前半期 美人

Garrett, W. H.〔加勒特〕二十世紀前半期 美人

Garth〔加司〕英人

Gartz〔加茲〕十九世紀前半期 德人

Garve, C.〔加爾微〕十八世紀後半期

Garver, Raymond〔伽維〕二十世紀前半期 美人

Gascó, L. G.〔加斯哥〕十九世紀後半期 西班牙人

Gaskin, Thomas〔加斯琴〕十九世紀中 英人 收集各種數學問題

Gáspár, J.〔加斯帕〕二十世紀前半期 匈人

Gasparis, A. de〔加斯帕利〕十九世紀 義人

Gassendi, Pierre〔伽桑狄〕(1592—1655) 法人

Gasser, A.〔加澀〕二十世紀初 瑞士人

Gässler, E.〔加斯勒〕二十世紀初 德人

Gataker, T.〔加塔克〕十七世紀前半期　英人

Gateaux〔加提〕

Gau, E.〔高〕十九及二十世紀　法人

Gaubil, Pater〔哥比爾〕十八世紀中　法人

Gaudio, Francesco Maria〔高第〕(1726—1793)　義人

Gauja, Pierre〔哥雅〕二十世紀　法人

Gault, A. E.〔高特〕二十世紀前半期　美人

Gaultier, l'Abbé〔高提爾〕(1745—1818)　法人

Gaunt, J. A.〔干特〕二十世紀前半期　英人

Gauss, Karl Friedrich〔高斯〕亦作 C. F. Gauss　(1770,4,30—1855,2,23)　德人 十九世紀最大數學家　發明最小二乘法,作圓內接正十七角形,研究整數論,誤差論,行列式論,函數論,複虛數,曲面論,雙曲幾何學等.

Gausz, F. G.〔高斯〕亦作 F. G. Gauss　十九及二十世紀　德人

Gautier, A.〔哥提〕十九世紀前半期　法人

Gautier, le Commandant D.〔哥提〕二十世紀　法人

Gautier, P.〔哥提〕十九世紀　法人

Gavett, G. I.〔加味特〕二十世紀前半期　美人

Gavrilovitch, B.〔加利羅微〕十九世紀末　巨哥斯拉夫人

Gawronsky, D.〔加綸斯啓〕二十世紀　瑞士人

Gay, H. J.〔給〕二十世紀前半期　美人

Gay, L.〔給〕二十世紀前半期　法人

Gay de Vernon, S. F.〔給·得·味嫩〕十八世紀　法人

Gay-Lussac, Joseph Louis〔給呂薩克〕(1778—1850)　法人

Gaylord, H. D.〔給羅德〕二十世紀　美人

Gayvernon, S.〔給味嫩〕

Gaza, Theodor von〔迦薩〕十五世紀

Gazzaniga, P.〔迦薩尼加〕(1853—1930,10,18) 義人

Geber〔給伯〕亦作 Jabir ibn Aflah 或 Jabir ben Aflah $\left(?—至\frac{1140}{1150}\right)$ 西班牙人 代數(Algebra)之名稱,卽由此人名得來.

Geber〔給伯〕亦作 Jabir ibu Haiyan al-Sufi (?—777) 亞剌伯人 化學家. 常誤指爲西班牙之代數學家.

Gebhardt, M.〔革哈特〕二十世紀前半期 德人

Gebler, Karl von〔給布勒〕十九世紀後半期 德人

Geburt, Christi〔給柏特〕二十世紀 德人

Gechauff〔給綽夫〕卽 T. Venatorius

Geck, E.〔給克〕十九世紀末 德人

Gee, W. W. H.〔基〕

Geel, W. C. van〔給爾〕二十世紀 荷蘭人

Geet, Martin〔基特〕十六世紀 德人

Gegenbauer, L.〔給眞寶〕十九世紀後半期 奧人

Gegenbaur, Leopold〔給眞保〕十九世紀後半期 奧人

Gehler, Johann Samuel Traugott〔基勒〕十八世紀後半期 德人

Gehman, H. M.〔基萌〕二十世紀前半期 美人

Gehmann〔基曼〕

Gehrcke, E.〔基爾刻〕二十世紀初 德人

Gehrke, E.〔基爾克〕二十世紀 德人

Gehrke, Joh.〔基爾克〕十九世紀末

Gehrl, Georg〔基爾〕十六世紀 捷克人

Geigel, R.〔蓋給〕十九世紀後半期 德人

Geigenmüller, Robert〔蓋眞米勒〕

Geiger, Hans〔蓋革〕二十世紀前半期 德人

Geiger, Ludwig〔蓋革〕德人

Geiger, Moritz〔蓋革〕(1880—) 德人

Geiger. R.〔蓋革〕二十世紀前半期 德人

Geilen, V.〔蓋楞〕二十世紀前半期 德人

Geiler of Kaiserberg〔該勒〕(1445—1510) 德人

Geiringer, H.〔蓋靈給〕二十世紀

Geisenheimer, L.〔蓋森海麥〕十九世紀後半期 德人

Geiser, C. F.〔蓋塞〕十九世紀後半期 瑞士人 著綜合幾何學

Geissler, K.〔該斯勒〕二十世紀初 德人

Gelcich, *H.* E.〔革奇士〕十九世紀後半期 德人

Geldard, C.〔革達德〕

Gelder, Jakob de〔革爾得〕(1765—1848) 荷蘭人

Gelder, J. J. de〔革爾得〕十九世紀初 荷蘭人

Gelfond, A.〔革爾方〕二十世紀前半期 俄人

Gellibrand, Henry〔澤力布蘭〕(1597,11,17—1637,2,16) 英人

Geminus of Rhodes〔根米那〕或作 Geminos 亦作 Geminus von Rhodos (100 B.C.—40 B.C.) 希臘人

Gemma Frisius〔根瑪·夫里栖〕原名爲根瑪累內 (Gemma Regnier) 亦作 Van den Steen, 因生於夫里栖 (Frisia), 故被呼爲根瑪夫里栖. (1508,12,8—1555,5,25) 荷蘭人 所著算術,極爲著名.

Gemma Frisius, Cornelius〔根瑪〕(1535—1577) 荷蘭人 夫里栖之子

Gemma Regnier〔根瑪·累內〕亦作 Rainer Gemma-Frisius 卽 Gemma Frisius

Gempelius, Michael〔根拍力〕十六世紀 德人

Gemunden, Johann von〔格蒙特〕卽 Gmünden

Genese, R. W.〔眞涅斯〕(1849—1928,1,21) 英人

Genetz, A.〔仁涅茲〕十九世紀後半期 芬蘭人

Genge, C.〔仁給〕十九世紀後半期 瑞士人

Gennadi〔眞納狄〕十五世紀末 俄人

Genocchi, Angelo〔哲諾契〕(1817—1889) 義人

Genocchi, F.〔哲諾契〕

Genouillac〔哲諾拉〕卽 Galiot

Gensho 十三世紀 日本人

Gent, Werner〔眞特〕二十世紀前半期 德人

Gentil, Ian〔眞提爾〕十七世紀 德人

Gentile, Benedetto〔眞提耳〕十七世紀

Gentleman, F. W.〔眞特曼〕二十世紀前半期 美人

Gentry, Ruth〔眞特里〕(1862—1917) 美人 研究平面四次曲線

Genz, E.〔眞次〕二十世紀前半期 德人

Genzer, O.〔根策〕二十世紀前半期 德人

Georg von Ungarn〔佐治〕卽 George of Hungary

George of Hungary〔佐治〕亦作 Georg von Ungarn 十五世紀 匈人

George of Trebizond〔佐治〕(1396—1486) 亞美尼亞人

Georges, Joel, S.〔佐治斯〕二十世紀前半期 美人

Georgios Pachymeres〔佐治宙・帕亦麥斯〕(1242—1316) 小亞細亞人

Geppert, Harold〔吉伯〕二十世紀前半期 德人

Gerard, A. E.〔吉剌德〕二十世紀前半期

Gerard, Juan〔吉剌德〕十八世紀 西班牙人

Gérard, M. L. J.〔吉剌德〕十九世紀末 法人 著非歐幾何學

Gerard of Cremona〔吉剌德〕亦作 Gherardo da Cremona 或 Gherardi Cremona

或 Gerhard of Cremona 或 Gerhard von Cremona (1114—1187) 義人

Gérardin, A.〔機刺定〕二十世紀

Gerbaldi, F.〔革巴狄〕十九世紀後半期　義人

Gerbert〔給爾貝〕卽 Pope Sylvester II　亦作 Papst Sylvester II (950—1003, 5,12) 羅馬教皇　著算術幾何學等書

Gerbillon, Jean François〔張誠〕(1654—1707) 清康熙時來中國

Gercke, C.〔熱剋〕十九世紀　德人

Gercken, W.〔革翟〕十九世紀後半期　德人

Gerdi, Father〔革狄〕十八世紀　義人

Gerdil, Hyacinth Sigismund〔革狄爾〕(1718,6,18—1802,8,12) 義人

Gergen, John Jay〔革戎〕二十世紀前半期　美人

Gergonne, Joseph Diaz〔給袞〕(1771,6,19—1859,5,4) 法人

Gerhard of Cremona〔吉刺德〕亦作 Gerhard von Cremona　卽 Gerard of Cremona

Gerhardt, Carl Emmanuel〔給耳哈特〕亦作 Carl Immanuel Gerhardt 或 C. J. Gerhardt 或 K. I. Gerhardt 十九世紀後半期　德人　數學史大家

Gerlach, A.〔革拉歧〕二十世紀　德人

Gerlach, J. E.〔革拉歧〕二十世紀　德人

Gerland, E.〔給蘭〕二十世紀

Gerland of Besançon〔給蘭〕十一世紀　法人

Gerling, Ch. L.〔給令〕(1788—1864) 德人

Germain, Mlle Sophie〔澤門〕(1776—1831,6,27) 法女　研究彈性曲面論

Germanus, Johannes〔澤美那斯〕卽 Regiomontanus

Germond, H. H.〔熱蒙〕二十世紀前半期　美人

Gernardus〔給那達〕

Gernet, N.〔給涅〕二十世紀初 德人

Geronimus, J.〔日羅尼馬〕二十世紀前半期 烏克蘭人

Gérono, E.〔熱給諾〕十九世紀後半期 法人

Gerrans, H. T.〔革蘭斯〕二十世紀

Gerrish, C.〔熱利許〕二十世紀初 美人

Gersbach, Mauricius Steinmetz〔最巴哈〕十六世紀 德人

Gerschgorin, S. A.〔革什哥靈〕(1901—1933,5,30) 俄人

Gerson, Levi ben〔最爾孫〕卽 Levi ben Gerson

Gerst, F. J.〔革斯特〕二十世紀前半期 美人

Gersten, Christian Ludwig〔革斯騰〕(1701—1762) 德人

Gerstenberg, G.〔革斯騰伯〕十九世紀後半期 德人

Gerstner, Franz Joseph von〔革斯特涅〕(1756—1832) 捷克人

Gerwien, P.〔革威〕十九世紀

Gevrey, Maurice〔格累〕二十世紀前半期 法人

Geyger, Erich〔格機〕二十世紀 德人

Geysius, Johann〔格栖〕

Ghaligai, Francesco〔加利給〕(?—1536,2,10) 義人 著實用算術

Ghebelino, Stefano〔基柏林諾〕十六世紀後半期 義人

Gherardi Cremonese〔吉剌第・格里摩磊〕卽 Gerard of Cremona

Gherardi Silvestro〔吉剌第・昔維斯洛〕十九世紀 義人

Gherardo da Cremona〔吉剌多・達・格里摩拿〕卽 Gerard of Cremona

Gherardo da Sabbionetta〔吉剌多・達・薩俾涅塔〕十三世紀 義人

Gherli, Odoardo〔給爾利〕十八世紀 義人

Ghersi, I.〔給息〕二十世紀 義人

Ghetaldi, Marini〔給塔第〕亦作 Marino Ghetaldi $\left(1566-\frac{1626}{1627}\right)$ 義人

Gheury de Bray, M. E. J.〔給立〕卽 de Bray

Ghosh, J.〔谷許〕二十世紀前半期

Ghosh, N. N.〔谷許〕二十世紀前半期 印度人

Giacomini, A.〔査科民尼〕二十世紀 義人

Giambattista della Porta〔査巴提塔〕十六世紀中 義人

Gianella, Carlo *Francesco*〔査涅拉〕(1740,6,13—1810,7,15) 義人

Giannini, Petro〔査寧尼〕十八世紀後半期 義人

Gibb, David〔季布〕二十世紀

Gibbens, Gladys E. C.〔季本斯〕二十世紀前半期 美人

Gibbs, *Josiah* Willard〔吉布〕(1839—1903) 美人 著向量解析研究數理力學.

Gibbs, R. W. M.〔吉布〕二十世紀 英人

Gibson, George A.〔幾卜生〕(1859—1930,4,1) 蘇格蘭人 著解析幾何,微積分.

Gibson, James Lambert〔幾卜生〕(1873,3,10—) 美人

Gibson, Thomas〔幾卜生〕十七世紀 英人

Gibson, Theodore Whidden〔幾卜生〕二十世紀前半期 美人

Giebel, K.〔基柏爾〕二十世紀 德人 著數學模型書

Gierster, J.〔基斯試〕十九世紀後半期 德人

Gieseking, H.〔基寒金〕二十世紀前半期 德人

Giesel, F.〔基則〕十九世紀後半期 德人

Giesing J.〔基信〕十九世紀

Gieswald〔基斯窩德〕十九世紀中 但澤人

Gietermaker, Claas〔基試馬克〕十七世紀 荷蘭人

Gifford, Emma〔季斐德〕二十世紀前半期 英人 計算三角函數表

Giger, A. 〔計給〕 二十世紀前半期 瑞士人

Gigli, Duilio 〔計格力〕 (?—1933,5,10) 義人

Gijat eddin Alkaschi 〔希雅・厄丁・亞卡斯奇〕

Gilbert, L. P. 〔吉爾柏持〕 十九世紀後半期 比利時人

Gilbert, Ludwig Wilhelm 〔吉爾柏特〕 (1769—1824) 德人

Gilbert, Ph. 〔吉爾柏特〕 十九世紀後半期 比利時人

Gilbert Maminot von Lisieux 〔吉爾柏特・馬密諾〕

Gilchrist, Archibald Daniel 〔季爾克立斯〕 (1877,4,14—) 英人

Gilchrist, Lachlan 〔季爾克立斯〕 二十世紀前半期 坎拿大人

Giles, J. A. 〔齋爾斯〕 十九世紀 英人

Gilham 〔季爾罕〕

Gill, B. P. 〔季爾〕 二十世紀前半期 美人

Gill, C. 〔季爾〕

Gillain, O. 〔吉雷〕 二十世紀前半期 比利時人

Gille, A. 〔吉勒〕 十九世紀後半期 德人

Gillespie, D. C. 〔季勒斯匹〕 〔二十世紀初〕 美人

Gillespie, William 〔季勒斯匹〕 (1870,11,—) 美人

Gillespie, W. M. 〔季勒斯匹〕 十九世紀 美人

Gillet, J. A. 〔季勒〕 十九世紀末 美人

Gilliss, J. M. 〔季力斯〕 十九世紀末 美人

Gilman, B. I. 〔紀爾曼〕 十九世紀後半期 美人

Gilman, D. C. 〔紀爾曼〕 十九世紀後半期 美人

Gilman, R. E. 〔紀爾曼〕 二十世紀前半期 美人

Gilman, Thomas Edward 〔季爾麥〕 二十世紀前半期 美人

Gini, C. 〔季尼〕 二十世紀前半期 義人

Ginsburg, Jekuthial〔京斯柏〕二十世紀前半期　美人

Ginzel, F.K.〔京策〕二十世紀初　德人

Giordani, Enrico〔佐達尼〕十九世紀　義人

Giordano, Annibale〔佐達諾〕十八世紀　義人

Giordano, Vitale *Giordano*〔佐達諾〕(1633—1711)　義人

Giorgi, Giovanni L. T. C.〔喬基〕二十世紀前半期　義人

Gioseppe, Dim.〔喬塞皮〕十六世紀　義人

Giotto〔喬托〕(1270—1336)　義人

Giovanni, F.〔佐凡泥〕十八世紀　義人

Giovanni, S.〔佐凡泥〕二十世紀　義人

Giovanni Battista Lanfreducci〔佐凡泥·巴替塔·蘭夫累達柄〕十五世紀末　義人

Giovanni da Firenze〔佐凡泥·達·斐棱〕十五世紀前半紀　義人　劉卡達斐棱 (Luca da Firenze) 之子

Girard, Albert〔吉剌〕$\left(1595-1632,12,\frac{8}{9}\right)$　荷蘭$\left\{\text{現今洛林(Lorraine)}\right\}$人　始用括弧之記號

Giraua Tarragones, Hieronymo〔吉勞·塔剌哥泡〕十六世紀　義人

Giraud, Georges〔吉牢〕二十世紀前半期　法人

Girault de Koudou, L'Abbé〔計勞特·得·科道〕亦作 Girault de Keroudou　十八世紀後半期　法人

Girdlestone, W. H.〔吉德勒斯吞〕

Girjka Gorla z Gorlssteyna〔機爾卡·哥拉·哥斯提那〕十六世紀後半期　波蘭人

Girod, F.〔計洛〕法人

Girndt, M.〔計德特〕二十世紀　德人

Gisborne, Thomas〔季斯柏涅〕十八世紀後半期 英人

Gitti, V.〔季提〕義人

Giudice, Francesco〔朱狄斯〕十九世紀後半期 義人

Giuliani, G.〔朱力尼〕十九世紀後半期 義人

Giuntini, Francesco〔朱廷尼〕(1522,11,14—?) 義人

Gladstone, W. E.〔葛拉德士吞〕十九世紀 英人

Glage, F.〔格拉治〕十九世紀末 德人

Glaisher, James〔格雷瑟〕(1809—1903) 英人 著因數表

Glaisher, James Whitbread Lee〔格雷瑟〕(1848—1928,12,7) 英人 著各種數學表

Glanville, Stephen Ranulph Kingdon〔格蘭維爾〕(1900,4,26—) 英人 研究埃及數學

Glarenus, Henircus Loritus〔葛拉里納〕(1488,6,—1563,5,28) 瑞士人

Glaser, A.〔格拉塞〕二十世紀 德人

Glaser, Robert〔格拉塞〕十九世紀及二十世紀 德人 著立體形學

Glaser, S.〔格拉塞〕十九世紀後半期 德人

Glashan, J. C.〔格拉善〕(1844—1932,3,14) 坎拿大人

Glashan, J. G.〔格拉善〕十九世紀末 英人

Glashan, J. S. C.〔格拉善〕二十世紀前半期 坎拿大人

Glass, James M.〔葛拉斯〕二十世紀 美人

Glathe, A.〔格拉司〕二十世紀 德人

Glauburgk, Adolf von〔格勞部克〕十四世紀 德人

Glauert, Hermann〔格勞厄〕(1892,10,4—) 英人

Glauner, T.〔格勞涅〕十九世紀末 德人

Glause, H.〔格勞斯〕二十世紀前半期 德人

Glazerbrook, *Sir* Richard Tetley〔格拉則布路〕(1854,9,18—) 英人 研究數理物理

Glazier, Herriet E.〔格拉齊〕二十世紀前半期 美人

Gleason, R. E.〔格利遜〕二十世紀前半期 美人

Gleichen, A.〔格來析〕

Gleitsmann, Georg〔格來特斯曼〕十六世紀 德人

Glenie, James〔葛倫泥〕亦作 J. Glennie (1750—1817,11,23)

Glenn, Oliver Edmunds〔格棱〕(1878,10,3—) 美人 著不變式

Glennie, J,〔葛倫泥〕即 James Glenie

Gliebe, J. J.〔葛利俾〕二十世紀前半期 美人

Glorioso, Camillus〔格羅奧索〕十七世紀 義人

Glösel, K.〔格羅塞爾〕十九世紀後半期 德人

Glöser, M.〔格羅舍〕十九世紀後半期 德人

Gloskowski, Mathias〔格羅科斯啓〕十七世紀

Glover, B. C.〔格拉味〕二十世紀前半期 美人

Glover, James Waterman〔格拉味〕十九世紀末 美人

Glysonius, C. M.〔格力孫尼〕十六世紀 義人

Gmeiner, Anton〔格邁涅〕(?—1927,1,11) 奥人

Gmeiner, J. A.〔格邁涅〕二十世紀 奥人

Gmelin, Johann Friedrich〔格梅齡〕(1748—1804) 德人

Gmelin, L.〔格梅齡〕

Gminder, A.〔格明得〕二十世紀前半期 德人

Gmünden, Johann von〔格蒙特〕亦作 Johann von Gemunden 或 Johannes de Gamundia 又作 Johann Schindel (1380—1442,2,23) 奥人 著三角術

Gneisse, K.〔格奈斯〕二十世紀前半期 德人

Gockel, Albert〔哥克爾〕(?—1927,3,4) 瑞士人 研究數理物理

Godbid, G.〔哥比得〕

Goddard, Edwin C.〔哥達德〕二十世紀 美人

Godeaux, Lucien〔哥第〕二十世紀前半期 比利時人

Godefroy, A. N.〔高德弗壘〕荷蘭人

Godefroy, M.〔高德弗壘〕二十世紀初 法人

Gödel, Kurt〔哥得爾〕二十世紀前半期 奧人

Godfray, Hugh〔高弗蕾〕十九世紀後半期 英人

Godfrey, Charles〔高弗梨〕二十世紀前半期 英人 研究近世幾何學

Godfrey, Thomas〔高弗梨〕十九世紀 美人

Godin, Louis〔哥當〕(1704,2,28—1760,9,11) 法人

Godo, T.〔伍堂卓雄〕二十世紀前半期 日本人

Goebel, J. B.〔歌柏爾〕十九世紀 瑞士人

Goedseels, E.〔歌德西爾〕二十世紀前半期 比利時人

Goerges, E.〔革治斯〕二十世紀初 德人

Goering, W.〔革靈〕十九世紀後半期 德人

Goesius, Wilhelm〔哥栖斯〕十七世紀後半期 荷蘭人

Goethals, F.V.〔哥退斯〕十九世紀 比利時人

Goethals, Heinrich von〔哥退斯〕即 H. Gandavensis

Goetting, E.〔歌廷〕二十世紀 德人

Goetting, R.〔歌廷〕十九世紀 德人

Goff, Thomas Theodore〔哥夫〕(1882,3,28—) 美人 著算術及代數

Gogou, C.〔哥谷〕十九世紀 法人

Goguet, A. Y.〔哥革〕十八世紀中 法人

Gokai Ampon (1794—1862) 日本人

Gokhale, V. D. 〔哥克嘿爾〕 二十世紀前半期 菲律賓人

Goldammer, Melchior 〔哥爾達麥〕 十六世紀 德人

Goldbach, Christian 〔哥爾巴哈〕 (1690—1764) 普魯士人 發明數論中之哥爾巴哈定理

Goldbeck, E. 〔哥爾伯克〕 十九世紀末 德人

Goldberg, Michael 〔哥爾柏格〕 二十世紀前半期 美人

Goldenring, R. 〔哥爾登靈〕 二十世紀前半期 德人

Goldhammer, A. 〔哥德罕麥〕 二十世紀 德人

Goldman, H. 〔哥爾德曼〕 十九世紀末 美人

Goldsbrough, George Ridsdale 〔哥德士布洛〕 (1881,5,19—) 英人

Goldscheider, F. 〔哥德晒德〕 十九世紀後半期 德人

Goldschmidt, E. 〔哥德士密特〕 二十世紀前半期 德人

Goldschmidt, L. 〔哥德士密特〕 十九世紀後半期 德人

Goldschmidt, S. 〔哥德士密特〕 十九世紀後半期 德人

Goldstein, S. 〔哥德斯泰〕 二十世紀前半期 英人

Goldsworthy, E. C. 〔哥德斯衞史〕 二十世紀前半期 美人

Goldziher, C. 〔哥德齊赫〕 二十世紀前半期 美人

Golius, Jacob 〔歌利斯〕 荷蘭人

Gölz, A. 〔哥爾司〕 二十世紀前半期 瑞士人

Gomes de Carvalho, A. S. 〔哥墨司·得·卡未和〕 二十世紀前半期 葡萄牙人

Gomes Teixeira, Francisco 〔哥墨司·泰賽拉〕 卽 Teixeira, F.

Gomperz, Theodor 〔哥拍司〕 (1832—1912) 奧人

Gondisalvi, Domenico 〔根狄薩微〕 西班牙人

Gonella 〔袞涅拉〕 十九世紀前半期 義人

Gonggriÿp, B.〔袞格得〕二十世紀前半期 法人

Gonnessiat, F.〔袞湼栖〕十九世紀末 法人

Gonseth, F.〔袞塞司〕二十世紀前半期 瑞士人

Gonzalez, T.〔袞塔勒司〕十七世紀後半期

Gonzalez Davila, Gil〔袞塔勒司·達微拉〕十七世紀 西班牙人

Gonzalo de las Casas, José〔袞紮羅·得·拉·卡薩〕十九世紀 西班牙人

Gooch, William〔谷喜〕十八世紀後半期 英人

Goodenough, George Alfred〔谷登諾〕(1868,5,3—1929,9,29) 美人

Goodman, John〔谷德曼〕(1862,5,1—) 英人 研究數理工程

Goodwin, Harvey〔谷德文〕十九世紀中 英人 收集數學問題

Goodwin, H. B.〔谷德文〕(1848—1927,2,24) 英人

Goodwin, Harry Manley〔谷德文〕(1870,4,18—) 美人

Goormaghtigh, R.〔谷耳馬提〕二十世紀前半期 法人

Gooss, J. W.〔谷斯〕十九世紀後半期 德人

Göpel, *Gustav* Adolph〔革拍爾〕(1812—1847) 德人

Göransson, E.〔革蘭遜〕二十世紀初 瑞典人

Gordan, Paul〔戈登〕(1837—1912) 德人 發明方式中同行函數必爲有窮個數之定理.

Gordin, J.〔哥定〕二十世紀前半期 德人

Gordon, A.〔哥頓〕十九世紀後半期 英人

Gordon, Frank A.〔哥頓〕二十世紀 英人

Gordon, Georg〔哥頓〕

Gordon, Margaret〔哥頓〕女人

Gordon, W.〔哥頓〕二十世紀 德人

Gore, James Howard〔哥耳〕(1856,9,18—) 美人

Gorini, Paolo〔哥盧尼〕

Gorla z Gorlssteyna, Girjka〔哥拉·哥斯提納〕十六世紀　波蘭人

Gorrell, G.W.〔哥勒爾〕二十世紀前半期　美人

Gorrieri, D.〔哥里立〕二十世紀　義人

Gorse, F.〔哥斯〕

Gorst, J. E.〔哥斯特〕二十世紀初　英人

Gorton, W. C. L.〔戈登〕二十世紀

Goschkewitsch, J.〔哥士邱尉士〕十九世紀　德人

Gossard, H. C.〔哥薩德〕二十世紀前半期　美人

Gossart, Alexandre〔哥薩〕十九世紀後半期　法人

Gosse, R.〔戈斯〕二十世紀前半期　法人

Gosselin, Guillaume〔哥塞林〕十六世紀後半期　法人

Gosselin, Pierre〔哥塞林〕十六世紀　法人

Got, Th.〔戈〕二十世紀後半期　法人　研究不連續羣論

Göthals, J. V.〔革退爾〕十九世紀　比利時人

Gottigniez, Gilles François〔哥替孟司〕(1630—1689)　義人

Götting, E.〔革廷〕十九世紀　德人

Gottschalk, A.〔哥特沙爾克〕二十世紀前半期　德人

Goudin, Mathieu Bernard〔谷丁〕(1734—1817)　法人

Gough, John〔哥夫〕(1721—1791)　愛爾蘭人

Gough, M. de L.〔哥夫〕二十世紀前半期　美人

Gouilly, A.〔谷歷〕十九世紀末　法人

Gould, Alice B.〔谷爾德〕二十世紀前半期　美人

Gould, Benjamin Apthrop〔谷爾德〕(1824—1896)　美人

Gould, S. C.〔谷爾德〕十九世紀後半期　美人

Goupillière, J. N. Haton de la〔谷匹利耳〕(1833—1927) 葡萄牙人

Gouraud, Charles〔谷牢〕十九世紀中 法人

Gournérie, Jules de la〔谷內里〕即 de la Gournérie

Goursat, Édouard *Jean Baptiste*〔古爾薩〕(1858—) 法人 數學解析大家

Gouwens, Cornelius〔高汶斯〕二十世紀前半期 美人

Gouy, G.〔谷〕十九世紀後半期

Gouy, L. G.〔谷〕(1854—1926,1,27) 法人

Gouye, Pater〔谷宜〕十八世紀

Gow, James〔高〕十九世紀後半期 英人 數學史專家

Gower〔高厄〕十四世紀後半期

Goyen, P.〔哥顏〕十九世紀後半期 英人

Graaf, Abraham de〔格拉夫〕十七世紀 荷蘭人

Graaf, H. T. de〔格拉夫〕二十世紀前半期 荷蘭人

Graber, M. E.〔格拉貝〕二十世紀前半期 美人

Grace, J. H.〔格累斯〕二十世紀初 英人 研究解析幾何不變式

Grace, S. F.〔格累斯〕二十世紀前半期 英人

Graefe, Fr.〔格拉斐〕十九世紀後半期 德人 研究四元原理

Graeſenhahn, Wolfgang Ludwig〔格拉分罕〕(1718—1767)

Graesser, Roy French〔格累塞〕二十世紀前半期 美人

Graeven, H.〔格累文〕二十世紀 德人

Graf, H. G.〔格拉福〕二十世紀初 德人

Graf, J. H.〔格拉福〕(1852—1918) 瑞士人 著數學史

Graf, Otto〔格拉福〕二十世紀 德人

Graff, Kasimir〔格賴夫〕二十世紀 德人

Gräffe, Carl Heinrich〔格累斐〕(1799—1873) 瑞士人

Graffe, Friedrich〔格累斐〕幾何學家

Grafton〔格拉夫頓〕十六世紀後半期 英人

Graham, John〔格累謨〕著實用數學

Graham, Palmer H.〔格累謨〕二十世紀前半期 美人

Graham, Robert Hudson〔格累謨〕十七世紀末 著圖解力學

Graham, V.〔格累謨〕二十世紀 英人

Graham, William Joseph〔格累謨〕(1877,9,23—) 美人

Graindorge, *Louis Arnold* Joseph〔格棱多治〕十九世紀末 比利時人 著解析力學

Gram, Johannes〔格蘭〕(1685—1748) 丹麥人

Gram, J. P.〔格蘭〕十九世紀後半期 德人

Gramisch. O.〔格蘭米士〕二十世紀前半期 德人

Grammateus, Henricus〔格蘭馬條〕德文作 Heinrich Schreiber 拉丁名為 Henricus Scriptor (1476—1525) 奧人 最初用十,一為加減號.

Grammaticus, Joannes〔格蘭馬替卡〕即 J. Philoponus

Grammel, R.〔格蘭麥〕二十世紀

Grand, J.〔格龍〕二十世紀初 瑞士人

Grandi, Agostino〔格龍狄〕十九世紀 義人

Grandi, *Luigi* Guido〔格龍狄〕(1671,10,7—1742,7,4) 義人

Grandjean, K.〔格龍冉〕二十世紀前半期 法人

Grandjean, M. G.〔格龍冉〕二十世紀初 法人

Grandjot〔格蘭佐〕(1900—) 德人

Grandpré, A. de〔格龍普累〕二十世紀 法人

Grane, N.〔葛蘭〕十九世紀末 瑞典人

Grant, Miss Alice A.〔格蘭特〕 二十世紀前半期 美女

Grant, Charles Cyrus〔格蘭特〕

Grant, E. D.〔格蘭特〕 二十世紀前半期 美人

Grant, Harris D.〔格蘭特〕 二十世紀 美人

Grant, Joseph D.〔格蘭特〕 (?—1932,7,9) 美人

Grante, C.〔格蘭提〕 十九世紀末 法人

Granville, William Anthony〔格蘭威〕 (1863,12,16—) 美人 著三角術及微積分

Grashof, F.〔格刺勺夫〕 十九世紀後半期 德人

Grässe, B. J. G. Th.〔格剌斯〕

Grassmann, Hermann〔格刺斯曼,赫爾曼〕 (1859—) 德人 赫爾曼君特之子

Grassmann, H. E.〔格剌斯曼〕 十九世紀末 德人

Grassmann, Hermann Günther〔格剌斯曼,赫爾曼君特〕 (1809,4,15—1877,9,26) 德人 發明諸象學 (Ausdehnungslehre).

Grassmann, J.〔格剌斯曼〕

Grassmann, Robert〔格剌斯曼〕 十九世紀末 德人 赫爾曼君特之弟.

Gratien-Arnoult〔格剌提·阿諾〕

Gratognini, Giovanni〔格剌多寧尼〕 (1757—1836) 義人

Grau, J. G.〔格牢〕 二十世紀前半期 德人

Graumann〔格牢曼〕 十八世紀

Graunt, John〔格牢特〕 (1620—1674) 英人

Graup, F.〔格牢普〕 十七世紀後半期 德人

Graustein, Mary C.〔格牢斯泰〕 即 Mrs. W. C. Graustein 二十世紀前半期 美女

Graustein, William Caspar〔格牢斯泰〕(1888,11,15—)美人　著高等幾何學

Gravatt, T. E.〔格刺法〕二十世紀前半期　美人

Grave, D. A.〔格刺甫〕二十世紀

Gravelaar, N. L. W. A.〔格拉威拉〕十九世紀後半期

Gravelius, Harry〔格拉威里〕十九世紀　德人

Graves, Charles〔格累甫茲〕(1868,9,23—)英人

Graves, G. H.〔格累甫茲〕十九及二十世紀　美人

Graves, L. M.〔格累甫茲〕二十世紀前半期　美人

Graves, R. P.〔格累甫茲〕十九世紀後半期　愛爾蘭人

Gravesande, Wilhelm Jacob〔格拉維桑得〕卽 Van s'Gravesande

Gray, Andrew〔格雷〕(1847—1925)蘇格蘭人　著柏塞函數論

Gray, Dionis〔格雷〕十六世紀後半期　英人

Gray, G. J.〔格雷〕二十世紀　英人

Gray, Horace〔格雷〕(1874—)英人

Gray, J. C.〔格雷〕二十世紀　美人

Gray, J. M.〔格雷〕十九世紀後半期　英人

Gray, J. Y.〔格雷〕

Gray, Peter〔格雷〕(1807—1887)英人　著對數表

Greathead, Robert〔格累特赫〕亦作 Robert Grosseteste 或 Robert of Lincoln (?—1253,10,9)英人

Greathead, S. S.〔格累特赫〕十九世紀　英人

Grebe, Ernst Wilhelm〔格勒布〕(1804,8,30—1874,1,14)德人

Grebe, W.〔格勒布〕二十世紀前半期　德人

Green, George〔格林〕(1793—1841)英格蘭人　數理物理家　發明函數論

中之格林定理。

Green, Gabriel Marcus〔格林〕(1891—1919) 美人

Green, Robert〔格林〕(?—1730) 英人

Green, R. L.〔格林〕(1861—1932,11,19) 美人

Greenfield, William〔格林飛德〕十八世紀後半期 英人

Greenhill, *Sir Alfred* George〔格林喜爾〕(?—1927,2,17) 英人 著微積分及橢圓函數

Greenleaf, B.〔格林利夫〕十九世紀後半期 美人

Greennstreet, William John〔格林斯特里〕(1860—1930,6,28) 英人 編輯數學雜誌 (Mathematical Gazette).

Greenwood, Isaac〔格麟武德〕(1702—1745) 美人

Greenwood, J. G.〔格麟武德〕十九世紀 英人

Greenwood, James M.〔格麟武德〕十九世紀 美人

Greenwood, S. M.〔格麟武德〕二十世紀

Greenwood, Thomaos〔格麟武德〕二十世紀 英人

Gregoras, Nikephors〔格列高剌〕(1295—1359) 德人

Gregory, Chester Arthur〔格列高里〕(1880,1,24—) 美人

Gregory, Charles Duncan〔格列高里〕二十世紀前半期 美人

Gregory, David〔格列高里〕(1661,6,24—1708,10,10) 英人

Gregory, Duncan *Farpuharson*〔格列高里〕(1813,4,—1844,2,3) 英人 劍橋數學雜誌之第一次編輯人,研究解析幾何學,微積分.

Gregory, James〔格列高里〕(1638,11,—1675,10,) 蘇格蘭人 判定無窮級數之收斂與發散,證明 π 爲不可約數.

Gregory, J. C.〔格列高里〕二十世紀前半期 英人

Gregory, Olinthus〔格列高里〕十九世紀初 英人 著三角術

Gregory XIII〔格列高里十三世〕十六世紀　羅馬王　改良曆法

Gtreimacher, H.〔格賴馬栎〕二十世紀　德人

Greiner, A.〔格來涅〕二十世紀初　德人

Grelle, F.〔格勒爾〕十九世紀後半期　德人

Grelling, Kurt〔格勒令〕二十世紀初　德人　著集合論

Gren, Karl Friedrich〔格棱〕(1760—1798)

Gresham, Sir Thomas〔格勒喜〕(1519—1579) 英人

Gresme, Nicole〔格勒謨〕

Greve, A.〔格累甫〕十九世紀後半期　德人

Grévy, A.〔格累微〕十九世紀末　法人

Grew, Edwin Sharpe〔葛流〕(1866,11,4—　) 英人

Gribble, T. G.〔格里布爾〕二十世紀　英人

Grienberger, Christoph〔格里倍日〕(1561—1636) 德人

Griess, J.〔格里斯〕十九世紀末　法人

Griev, William〔格里維〕美人

Grive, A. Barrie〔格里維〕二十世紀　英人

Griffin, Frank Laxley〔格里芬〕(1881,8,19—　) 美人　著數學解析

Griffin, Miss Mabel〔格利芬〕二十世紀前半期　美女

Griffin, William Nathaniel〔格利芬〕十九世紀前半期　英人

Griffith A. A.〔格利菲司〕二十世紀前半期　英人

Griffith, C. L. T.〔格利菲司〕二十世紀前半期　英人

Griffith, Francis Llewellyn〔格利菲司〕(1862—　) 英人

Griffiths, J.〔格利菲斯〕十九世紀後半期　英人

Griffiths, Lois W.〔格利菲斯〕二十世紀前半期　美女

Grimes, Ruby M.〔格賴謨兹〕二十世紀前半期　美人

Grimm, G.〔格黎牧〕二十世紀前半期　瑞士人

Grimm, Samuel Oliver〔格黎牧〕二十世紀前半期　美人

Grimsehl, E.〔格臨色〕二十世紀初　德人　研究位置函數

Grisar, C. M.〔格里薩〕二十世紀　德人

Grisio, Magnet〔格立柄〕十七世紀

Griss, G. F. C.〔格立斯〕二十世紀前半期　荷蘭人

Groat, B. F.〔格洛特〕二十世紀初　美人

Gröbli, W.〔格洛利〕十九世紀後半期　瑞士人

Grohn, E.〔格羅〕十九世紀末　巨哥斯拉夫人

Groll, J.〔格洛爾〕十九世紀末

Groll, Max〔格洛爾〕二十世紀　德人

Gröll, R.〔格洛爾〕十九世紀後半期　德人

Grolous〔格羅路〕十九世紀後半期　法人

Grommer, J.〔格綸麥〕二十世紀前半期　德人

Gronau, K. Th. E.〔格綸瑙〕二十世紀初

Gronwall, J.〔格綸窩爾〕

Gronwall, Thomas Hakon〔格綸窩爾〕(1877,1,16—1932,5,9) 瑞典人　研究數論,函數論,微分方程式等.

Groost, W.F. de〔格洛斯特〕二十世紀前半期　荷蘭人

Gros, G.〔格洛〕二十世紀前半期　法人

Groschius, J. A.〔格洛什阿〕十八世紀後半期

Grose, F.〔格洛斯〕二十世紀　英人

Gross, W.〔格羅斯〕十九世紀後半期　德人

Grosse, H.〔格羅色〕十九世紀後半期　德人

Grosseteste, Robert,〔格洛色忒特〕即 Greathead

Grossmann, E.〔格羅斯曼〕十九世紀末　德人

Grossmann, J.〔格羅斯曼〕二十世紀前半期　德人

Grossmann, Ludwig〔格羅斯曼〕(?—1927)　奧人

Grossmann, M.〔格羅斯曼〕二十世紀前半期　德人　研究非歐幾何學

Grossmann, W.〔格羅斯曼〕二十世紀　德人

Grote, George〔格羅脫〕(1794—1871)　英人

Grotefend, G. F.〔格洛忒分特〕十九世紀初　德人

Grötzsch, H.〔格老茲士〕二十世紀　德人

Grove, C. C.〔格羅夫〕二十世紀初　美人

Grove, V. G.〔格羅夫〕二十世紀前半期　美人

Grube, A. W.〔葛魯布〕(1816—1884)　德人

Grube, F.〔葛魯布〕十九世紀　德人

Gruber, O. von〔葛魯貝爾〕二十世紀　德人

Grübler, M.〔葛魯布勒〕十九世紀後半期　德人

Gruenwald, A.〔格林窩德〕十九世紀　奧人

Grünbaum, H.〔格輪波〕亦作 H. Gruenbaum　二十世紀　德人

Grünberg, V.〔格輪堡〕二十世紀初　德人

Grünberger, E.〔格輪柏日〕十九世紀後半期　德人

Grund〔格藍德〕十九世紀　德人

Grundel, F.〔格蘭德爾〕二十世紀前半期　德人

Grunert, Johann August〔格綸涅特〕(1797—1872)　德人　編輯數學物理雜誌 (Archiv).

Grünfeld, E.〔格輪斐德〕十九世紀末　德人

Grüngfeld, H. P. H.〔格輪斐德〕十九世紀後半期　德人

Grüning, M.〔格魯寧〕二十世紀初　德人

Grunsky, H.〔格藍斯啓〕二十世紀 德人

Grüppe〔格律佩〕十九世紀中 德人

Grusintzeff, A. P.〔格律辛策夫〕十九世紀末 俄人

Grüson, Johann Philipp〔格律遜〕十八世紀 德人

Gruy, Bouquet de la〔格壘〕卽 Bouquet

Grynæus, Simon der ältere〔格立內斯〕亦作 S. Grynäus 十六世紀 奧人

Grynæus, Simon der jüngere〔格立內斯〕(1539—1582) 奧人

Gschnitzer, F.〔格士尼策〕十九世紀末 德人

Gsell, M.〔格塞爾〕二十世紀前半期 德人

Gua, Jean Paul〔瓜〕亦作 de Gua de Molves (1713—1785,6,2) 法人

Guadet, J.〔瓜德〕二十世紀前半期 法人

Gualda, Juan Gutiérrez de〔瓜爾達〕十六世紀前半期 西班牙人

Guarducci, A.〔瓜度息〕二十世紀 義人

Guarducci, Federigo〔瓜度息〕(?—1931,2,6) 義人

Guareschi, G.〔瓜勒斯歧〕二十世紀 德人

Guarini, Camillo Guarino〔瓜立尼〕(1624—1711) 義人

Gubler, E.〔谷布勒〕十九世紀末 瑞士人

Guccia, Giovanni Battista〔谷察〕(1855—1914) 義人

Gucht, Adriaen van der〔谷喜特〕十六世紀 比利時人

Gudermann, Christoph〔谷德曼〕(1798,3,28—1852,9,25) 德人 發見谷德曼函數

Guell, le vicomte de〔歸爾〕二十世紀 法人

Guenther, A.〔圭帖〕二十世紀

Guenther, S.〔圭帖〕十九及二十世紀 德人

Guérinet, A.〔給靈涅〕二十世紀 法人

Guerritore, G.〔葛利托〕二十世紀初　義人

Guerry, A. M.〔給立〕十七世紀

Guggenbühl, Laura〔谷戎步爾〕二十世紀前半期　美人

Gugino, E.〔谷吉諾〕二十世紀前半期　義人

Gugle, M.〔谷格爾〕二十世紀前半期　美人

Gugler, B.〔谷格勒〕十九世紀　德人

Guglielmini, G. B.〔谷列民尼〕十九世紀　義人

Guglielmo de Lunis〔谷列爾莫〕義人

Guhrauer, G. E.〔谷勞厄〕十九世紀　德人

Guibert, A.〔基柏特〕十九世紀前半期　法人

Guichard, Claude〔基沙〕(1862—1924,5,12)　法人

Guichard, M.〔基沙〕

Guidiche, F.〔基第奇〕二十世紀前半期　義人

Guido d'Arezzo〔基多・達勒磋〕亦作 Guido von Arezzo 或 Guido of Arezzo 十一世紀前半期　義人

Guidobaldo〔基多巴多〕即 Del Monte

Guijeno, Juan Martínez〔基貞諾〕即 Blasius

Guillaume, Charles Edouard〔基雲〕(1861,2,15—　)　瑞士人

Guillaume, Édouard〔基雲〕二十世紀

Guillemin, Auguste〔基勒民〕二十世紀初　法人

Guillén, J. O.〔基楞〕二十世紀前半期　西班牙人

Guilmin, A.〔基民〕十九世紀　法人

Guimarães, Rodolphe〔金馬累〕十九世紀末　葡萄牙人

Guisneé〔季茲湟〕十八世紀初　法人

Guizot, François〔季左〕(1787—1874)　法人

Guldberg, Alf〔谷德柏〕二十世紀前半期　挪威人

Guldberg, A. S.〔谷德柏〕十九世紀後半期　瑞典人

Guldin, *Habakkuk* Paul〔季爾定〕亦作 Guldinus　(1577,6,12—1643,11,3) 瑞士人

Gülfferich, Herman〔加斐李治〕十六世紀中　德人

Gullstrand, Allvar〔加爾斯特蘭〕二十世紀初

Gullucci, Giovanni Paolo〔谷疏奇〕十六世紀末　義人

Gumbel, E. J.〔谷柏爾〕二十世紀　德人

Gummer, C. F.〔袞麥〕二十世紀前半期　坎拿大人

Gummere, H. V.〔袞麥爾〕二十世紀前半期　美人

Gummere, J.〔袞麥爾〕十九世紀　美人

Gummersall. T. B.〔袞麥薩爾〕

Gundelfinger, Siegmund〔干得芬澤〕(1846—1910) 法人

Gundermann. Gotthold〔干得曼〕十九世紀末　德人

Gundersen, Carl〔干得森〕二十世紀初　美人

Gunn, G. A.〔干〕二十世紀前半期　英人

Gunn, J. A.〔干〕二十世紀前半期　英人

Gunn, J. W. M.〔干〕二十世紀前半期　英人

Gunter, Edmund〔干忒〕(1581—1626,12,20) 英人　發明象限器

Gunther, C. O.〔君特〕二十世紀初　美人

Günther, G.〔君特〕二十世紀前半期　德人

Günther, M. S.〔君特〕十九世紀後半期　德人

Günther, N.〔君特〕

Günther, P.〔君特〕十九世紀後半期　德人

Gunther, Robert Theodore〔君特〕(1869,8,23—　) 英人

Günther, Siegmund〔君特〕十九世紀後半期　德人　著數學史

Güntzel, F.〔君策〕二十世紀初　德人

Gupta, H. M. Sen〔加普塔〕二十世紀前半期　印度人

Gurden, R. L.〔革登〕十九世紀

Gurief, Simeon〔革里夫〕(1766—1813) 俄人

Gurney, L. E.〔革尼〕二十世紀前半期　菲律賓人

Gurney, Margaret〔革尼〕二十世紀前半期　美人

Gurski, V.〔革斯啓〕二十世紀初　德人

Gürtler, M.〔革特勒〕二十世紀　德人

Güssmer, F.〔居斯馬〕二十世紀前半期　德人

Gut, A.〔古〕二十世紀

Gut, M.〔古〕二十世紀前半期　瑞士人

Gutberlet, C.〔谷白勒〕十九世紀　德人

Guthgsell, J.〔谷司塞爾〕二十世紀前半期　法人

Guthrie, Francis〔古斯里〕十九世紀

Gutiérrez *de Gualda*, Juan〔谷提聚〕十六世紀　西班牙人

Gutmayer, F.〔谷邁爾〕十九世紀末　德人

Gutsche, O.〔谷瑟〕十九世紀後半期　德人

Gutschoven, Gerhard von〔加申芬〕十七世紀後半期

Gützlaff, Carl Eduard〔居次拉夫〕(1805—?) 普魯士人

Gutzmer, August〔居次麥〕(1860—1924,5,10) 德人

Gutzmer, C. F. A,〔居次麥〕二十世紀　德人

Guyion, Johannes〔基温〕十六世紀前半期　法人

Guyot〔基奧〕十八世紀　法人

Guyou, E.〔基約〕十九及二十世紀　法人

Gwatkin, Richard〔瓜特京〕十九世紀前半期

Gwilt, J.〔格尉特〕十九世紀 德人

Gwinn, Ira〔格文〕二十世紀前半期 美人

Gwinn, I. J.〔格文〕二十世紀前半期 美人

Gwinner, Harry〔格文湼〕二十世紀前半期

Gwinner, Harry〔格文湼〕二十世紀前半期 美人

Gwyther, R. F.〔格威特〕十九世紀末 英人

Gyldén, Hugo〔級登〕(1841—1896) 挪威人

Gyllenberg, W.〔瑞楞貝〕二十世紀 瑞典人

Gyraldus, Lilius Gregorius〔吉拉達〕十六世紀中 義人

Gysel, J.〔吉塞爾〕十九世紀後半期 瑞士人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第三卷第四期目錄

國立武漢大學理科季刊第四卷第一期目錄

國立武漢大學社會科學季刊第四卷第二號目錄

學藝雜誌

第十二卷 第八期 目錄

第十二卷 第九期 目錄

第十二卷 第十期 目錄

定　價　另售每册二角七分全年十册計洋二元五角
發行處　上海愛麥虞限路中華學藝社總務部
代售處　上海生活書店開明書局現代書局

國內唯一的通俗科學刊物

科學世界

月出一册　　全年十二册

零售每册一角半　　郵費二分半

預定全年一元五角郵費在內

第二卷 第十一期 要目

二第卷 第十二期 要目

中華自然科學社編行

編輯部：　南京山西路國立編譯館內
定閱處：　本社編輯部
代售處：　南京　鍾山書局
　　　　　上海　開明書局
　　　　　　　　現代書局
　　　　　　　　作者書社
他　埠：　各　大　書　局

介紹期刊

地質彙報……北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所

自然科學季刊……國立北京大學自然科學季刊委員會

牛頓……日本東京市目黑區大岡山七一牛頓月刊社

師大月刊……國立北平師範大學

理工雜誌……上海呂班路二二三號震旦大學理工學院

理學院季刊……河南大學理學院

電業季刊……南京城內大石壩街廿一號全國民營電業聯合會編輯股

化學季刊……國立北平大學工學院化學季刊社

化工……國立浙江大學化學工程學會

土木工程會會刊……復旦大學土木工程學會

高工土木工程學會會刊……浙大高工土木工程學會

瓊崖實業雜誌……瓊州海口東門內實業雜誌社

上海物價月報……上海漢口路外灘新關國定稅則委員會

介紹期刊

時事類編……………………………上海福煦路八〇三號中山文化教育館

螞蟻月刊……………………………上海四川路五三六號

婦女旬刊……………………………杭州中華婦女學社

南洋情報……………………………上海眞如國立暨南大學

民大校刊……………………………廣東荔枝灣國民大學

安徽大學週刊………………………安慶安徽大學

國立四川大學周刊…………………成都四川大學

國立北平圖書館館刊………………北平文津街一號

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

南華評論……………………………上海山東路三二〇號南華評論社

中學生………………………………上海四馬路八五號開明書局

眞光校刊……………………………廣州市白鶴洞私立眞光女子中學

國立武漢大學理科季刊

第四卷第二期

價	目	郵	費
全年四册	價銀二元	訂購全年	本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售	價銀五角	函購零本	本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月六月為出版期			
費須先惠空函不覆			
各地代售處零售概不另加郵費			

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十二年十二月發行

1934年

第 3 期

國立武漢大學
理科季刊

第四卷第三期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. IV No. 3　　March 1934

本期目錄

中華民國二十三年三月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第四卷第三期目錄

頁數

國立武漢大學理科季刊

第四卷第四期目錄預告

絕對微分學的一個難關

(和羅馬大學教授Levi-Civita氏討論絕對微分學的經過及其主要內容)

湯璪眞

羅馬大學力學教授利未奇徵塔(Levi-Civita)氏所著之絕對微分學又可名爲張量(亦譯引量)計算學,就其內容觀之更可視爲黎曼微分幾何學,乃現代數學界之名著也,已有若干學者由意文譯成英法德三國文字,風行於全世界矣.

予既譯之成中文,發覺其中論輪回變位 (Cyclic displacement) 之一節須應用下式

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta'\delta\Phi$$

所代表之微分的分配性質.此點實絕對微分學之一難關,最易引人誤入迷途,因予意以爲此性質必須改爲

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta\delta'\Phi \tag{1}$$

也.此關不能渡過,則絕對微分學斷無真正了解之希望.因此三致書於德文譯者Duschek博士.雖有覆書而皆反對予之意見.其覆書中以爲予提之異議,不獨與利氏之說相反,且與Weyl及Schouten二大著作家之意見亦不相容,此外則攻擊予提之異議,並另舉其他問題以相難.博士既不以予之說爲然,予乃另致一書於英文譯者Long女士,然久未得

覆.於是決定直接與利氏通信,請其以英文或德文答覆.歷時近兩載,往覆達十函.其以前寄來各函亦無一贊成予之意見者,甚至有

Wenn man Ihrer Rechnung folgt, findet man alles in Ordnung bis auf die Formel (1).

一語,卽謂"依予之算法,一切合理,惟(1)式須除外耳."夫其人已享如彼之盛名而其言又復如此之堅決,且予最近所去之第五函彼亦遲遲未覆,予因之而愈疑惑不解矣.不意以後卒得其覆函略謂予言有理,且將樂為予發表之云云,予心乃大慰.今追記其討論之經過於上,所以示予業已打破絕對微分學之一難關也.後之讀此書者或不至到此仍誤入迷途乎.

予所欲言之經過已止於此,其他瑣碎皆非重要,故可從略.以下所應補敘者為上文(1)式必須成立之理由.但此項理由已見予致利氏各函中,故將原函錄之於後卽可.凡欲讀此函者須有兩種準備:首先可讀本理科季刊第一卷第二期葉志先生所作絕對微分學之理想與方法,次應用之以說明利氏所創之平行變位的學說於下:

設有一向量場,其在 P 點(或命其 n 坐標為 x^α 再呼其點為 x^α 點)之向量為 Φ(或命其分量為 u^ν 而呼其向量為 u^ν 向量)而在其鄰點 $P+dP$ (或 $x^\alpha+dx^\alpha$ 點)之向量為 $\Phi+d\Phi$ (或 $u^\nu+du^\nu$),則此二向量所生之差計有三種:

a. 其一曰 u^ν 之相對微分亦即尋常微分,乃 u^ν 變成 $u^\nu+du^\nu$ 時所增之 du^ν 也.此時坐標腿從 P 點至鄰點 $P+dP$ 宜視爲無變化.

b. 其二曰 u^ν 之輸荷微分亦即 Führungsdifferential, 乃視 u^ν 不變而視坐標腿從 P 點至鄰點 $P+dP$ 有變化時所生之 $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}u^\lambda dx^\mu$ 也.此處之 $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ 係三字記號 $\left\{{\lambda\mu \atop \nu}\right\}$ 之別寫,在下文並以適用於黎曼幾何學者爲限.

c. 其三曰 u^ν 之絕對微分亦即共變(亦譯協變)微分,乃上述兩種微分之總和也.因之得

$$u^\nu \text{ 之絕對微分} = du^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}u^\lambda dx^\mu .$$

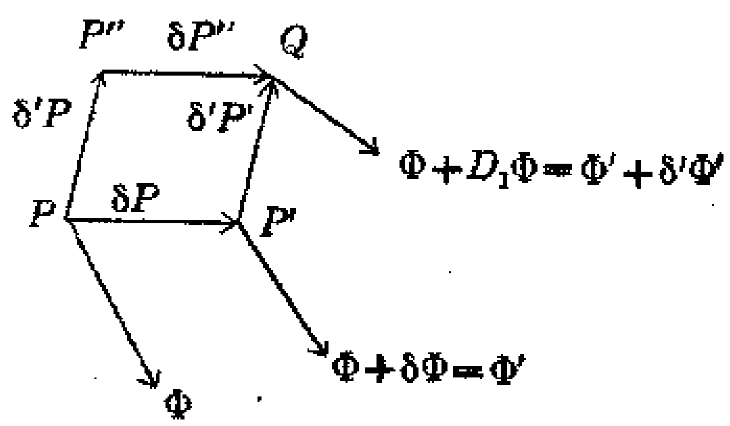
此公式可適用於任意之向量場,反之從此公式命 u^ν 之絕對微分$=0$則得一特殊之向量場,其場中每兩相鄰之向量 u^ν 與 $u^\nu+du^\nu$ 名曰平行向量,其所受之條件由上述公式亦可寫爲

$$du^\nu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, u^\lambda dx^\mu,$$

其名曰平行之微分方程.此即利氏之絕對平行概念.由此產生種種理論,所謂輪回變位不過其中之一種耳.

輪回變位之意義即謂一向量漸漸平行移動使其始點沿任意閉合曲線環轉一周回至原處也,其向量是否還至原位置,則須視空間之性質而決定之.在歐氏空間能還至原位置者也,在其他空間則通例不如是之簡單.欲知其理自可利用上述平行之微分方程以研究之.但利氏則否.氏

之方法係先取一無窮小之絕對平行四邊形$PP'QP''$為閉合曲線考之(參看下圖).命$P'=P+\delta P$, $P''=P+\delta' P$, 於是由平行四邊形之性質可命$Q=P'+\delta' P'=P''+\delta P''$.次假設平行移動之向量$\Phi\,(=u^v)$之始點自$P$點起沿四邊形上$PP'QP''P$之方向迴至$P$點,於是向量$\Phi$通例必起變化.命其所增之量為$\Delta\Phi$,則$\Delta\Phi$可視為由兩部分合成:



其第一部分為向量Φ之始點自P點起沿$PP'Q$路變至Q止所增之量$D_1\Phi$,其第二部分可不贅述.欲算$\Delta\Phi$必須先算$D_1\Phi$.而算$D_1\Phi$時又可分為二部分,其一為Φ平行變至$\Phi+\delta\Phi$時所增之$\delta\Phi$,其二為$\Phi'\,(=\Phi+\delta\Phi)$平行變至$\Phi+D_1\Phi$時所增之$\delta'\Phi'$亦即$\delta'(\Phi+\delta\Phi)$.予與利氏所爭之點卽在此處.利氏計算此第二部分之法係先承認

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta'\delta\Phi$$

所代表之微分的分配性質,而予則反對之.其始予以為係利氏一時之筆誤耳,然就其前後文觀之,則又非成為一種錯誤不可.而Duschek博士反不以予之言為然,又著向量計算之Lagally教授博士(於其書之330面)以及著同類書籍

之不少著作家亦皆陷於同一之錯誤而不自覺,予以爲此項錯誤若不更正,則學絕對微分學者必至誤入迷途終乃發生種種疑問矣.因此鼓其勇氣以與利氏爭.玆將予之第五次去函(參附以中文以便閱讀)錄之於下:

予之第五次去函曰:

(前略)

In Ihrem werten Brief vom 13. Juli(先生六月十三號之尊函中) haben Sie geschrieben, dass die Gleichung (曾言下列等式)

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta'\delta\Phi$$

gilt (成立), weil sie eine notwendige Folge der additiven Eigenschaft

$$\delta'(A+B)=\delta'A+\delta'B$$

ist(因其爲上式中加法的性質之必然結果故也). Das macht mich nicht klar (此則使予不明瞭矣), weil diese Eigenschaft (蓋此性質) in nichteuklidischen Fall (在非歐氏場合) nicht bewiesen wird (曾未加以證明),……(中略)……故也.

Ich kann mit Ihren Bezeichnungen, Annahmen, Erklärungen, u.s.w. in Ihrem Werke (予能用先生著作中之記法,假設,定義等) die Gleichung

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta\delta'\Phi \tag{1}$$

beweisen (以證明上式), wenn man $\Phi = u^\nu$ setzt (惟此時以 $\Phi = u^\nu$ 爲限耳).

Beweis (證). Aus der Erklärungen folgt es, dass (由定義得)

(a) $$\Phi + \delta\Phi = \Phi'.$$

und (及)

(b) $\delta'\Phi'$ = der Änderung von Φ' beim Übergan von P' zu Q (由 P' 平行變至 Q 時 Φ' 所增之量).

Setzen wir (若命)

(c) $\Phi' = u'^\nu$

Γ'^{ν} = d n Werten von $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ in P' (在 P' 點 $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ 所取之值)

$\delta' x'^\nu$ = den kontravarianten Komponenten von $\overrightarrow{P'Q}$ ($\overrightarrow{P'Q}$ 之抗變分量),

so haben wir (則得)

(d) $u'^\nu = u^\nu + \delta u^\nu$, wo (此處)

$$\delta u^\nu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu} u^\lambda \delta x^\mu \text{ ist,}$$

$\delta' x'^\nu = \delta' x^\nu + \delta\delta' x^\nu$, wo (此處)

$$\delta\delta' x^\nu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \delta' x^\lambda \delta x^\mu \text{ ist,}$$

$\Gamma'^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, wo (此處)

$$\delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \text{ ist.}$$

Aus (b) [由 (b)] müssen wir $\delta'\Phi'$ (od. $\delta' u'^{\nu}$) berechnen aus der Differentialgleichungen des Parallelismus [可知必由平行之微分方程以算 $\delta'\Phi'$ (或 $\delta' u'^{\nu}$)] —— aber nicht aus (然不能由)

$$\delta' u'^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u'^{\lambda}\, \delta' x^{\mu}$$

sondern aus (而祇能由)

$$\delta' u'^{\nu} = -\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} u'^{\lambda} \delta' x'^{\mu}, \tag{e}$$

weil Φ' und $\Phi'+\delta'\Phi'$ nicht lnäges PP' sondern länges $P'Q$ pallel sind (因 Φ' 與 $\Phi'+\delta'\Phi$ 之互相平行不沿 PP' 路而祇沿 $P'Q$ 路故也).

Aus (e) und (d) haben wir [由 (e) 及 (d) 得]

$$\begin{aligned}\delta' u'^{\nu} &= -(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu})(u^{\lambda}+\delta u^{\lambda})(\delta' x^{\mu} + \delta\delta' x^{\mu}) \\ &= -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\delta' x^{\mu} + (-\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\delta' x^{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta u^{\lambda}\delta' x^{\mu} \\ &\qquad - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\delta\delta' x^{\mu}) + \cdots\cdots \\ &= \delta' u^{\nu} + \delta\delta' u^{\nu} + \cdots\cdots\end{aligned} \tag{f}$$

Da das Glieder von 3. Ordnung vernachlässigt werden kann (因三次項可以省略), so haben wir aus (f) [故由 (f) 得]

$$\delta' u'^{\nu} = \delta' u^{\nu} + \delta\delta' u^{\nu}, \tag{g}$$

oder (卽)

$$\delta'\Phi' = \delta'\Phi + \delta\delta'\Phi. \tag{h}$$

Aus (h) und (a) bekommen wir dann (1) [由 (h) 及 (a) 於是得 (1)].

Steckt kein Fehler in (a) bis (h), [如 (a) 至 (h) 絕無

錯誤〕so ist (1) sicher richtig〔則(1)必成立無疑〕. Steckt mindestens ein Fehler in (a) bis (h)〔如(a)至(h)至少有一錯誤〕, so werde ich Sie nicht mehr mit solcher kleinen Sache immer fragen (則予以後決不復以此小事常問先生矣).

(後略).

利氏之第五次覆曰:

(前略)

Ich habe die von Ihnen gestellte Frage (予已將先生所提出之問題) etwas sorgfältiger geprüft (小心查驗矣). Erstens haben Sie Recht (第一先生之言實有理由), dass in Ihrem Beweise der Formel (因先生於下列公式之證明中)

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta\delta'\Phi$$

(wo Φ eine kontravariante Komponente u^v eines Vektors bezeichnet) (當Φ表示向量之一抗變分量u^v時) alles formell in Ordnung (推理上一切合法故也).

Ich denke (予思), dass auch das Resultat ganz richtig ist (其結果亦係完全正確) wenn man (倘吾人), für die Vektorverschiebung $\delta'\Phi'$ (於算此向量變位$\delta'\Phi'$之際), Ihre vektorielle Definition und die daraus entspringende Rechnung anwendet (而應用先生之向量定義及其所

發生之計算者). Ich habe dagegen ein analytisches Verfahren gebraucht (惟予未用此法而已用一解析方法矣). Da die zwei Verfahren sich auf verschiedene Definitionen der Operatoren $\delta\delta'$ und $\delta'\delta$ stützen (此兩方法既根據於兩算子 $\delta\delta'$ 及 $\delta'\delta$ 定義之不同), werden sie zu verschiedene Resultate führen (則其導出不同之結果自屬必然之理); jedoch hat vermutlich auch das Ihrige invarianten Charakter (然而先生之方法似乎倘含有不變性), so dass die Folgerungen nützlich sein können (故其推論當有裨益); und namentlich fähig zu eine Begruendung der Riemannschen Kruemmungen fuhren (而適宜於黎曼氏曲率之誘導也).

Wenn es eigentlich so ist (果真如是者), so werde ich mich freuen Ihre Resultate irgendwo veröffentlichen zu lassen (予將樂於取先生之結果於任何處公表之).

(後略)

予與利氏之討論,其經過及其主要內容大略如上.其中不明不白之處,見於本文或雖不見於本文而見於原書者,諒所難免.世有願加入而共同研究者,予甚所歡迎也.

植物鞣製底革顏色黑暗之避免方法

陶　延　橋

植物單寧爲鞣製底革之普遍材料,惟用不得當,革色常呈黑暗,不爲購者所歡迎,以故市價減低,甚至難以出售.近有以此事函詢避免之法者,爰作此篇以答之.

此問題表面似甚簡單,易於改良,而實乃一種複雜問題.業此者須於各項工程中,特別留意,稍一不慎,即易遭失敗.今將應加注意之各點,縷述如下:

1. 生皮. 保存生皮,歐美均用食鹽.吾國則曝生皮於日光之下,令其水分散失,并未用藥品以保存之.惟無論用何方法,下列各事,不可忽略.

a. 牲畜於宰殺後立卽洗淸,不得稽延,因皮上之污血,(1)能阻止鹽之吸收,(2)令黴菌發生,(3)發生鹽點(Salt stains),或曰鐵點(Iron stains).

鹽點爲一種斑點,如人之面斑點,常聚集於一處,或分散於各處.顏色因情形而異,如皮浸於淸石灰水中,點爲黃色,若石灰水含有硫化鈉,則變爲深綠色,迨至浸於植物單寧溶液內,則變成黑色或紫色,此因點內含有鐵質,鐵與石灰

水起作用,而成氧化鐵,致變爲黃色.與硫化物化合,則成硫化鐵,發現黃綠色.與植物單甯反應,而成黑色單甯鐵 (Iron Tannate) 之混合物.

b. 所用之鹽,如有多量鐵質,亦能發生鹽點.最好於鹽內加入 4 % 無水炭酸鈉,或 10.8 % 洗曹達 (Washing soda, $Na_2CO_3.10H_2O$), 益足阻止黴菌之發育.

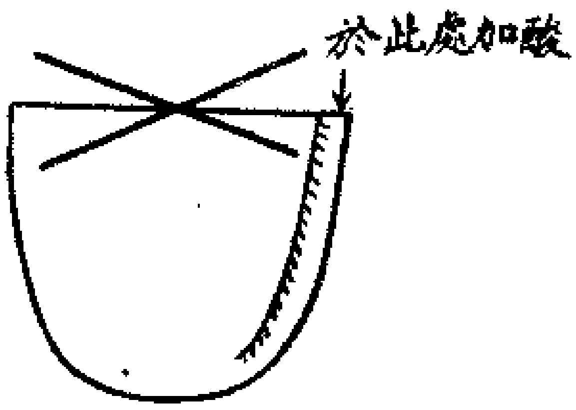
2. 水. 製革之各項工程,無一不需水,水中之鐵質如 $Fe(HCO_3)_2$,在所難免,惟不宜多,多則發生鐵點.

又當用水浸漬植物單甯,水中之鐵,因能與單甯化合,變爲黑色,已如上述.卽水中之鈣鹽,亦不宜過多,因鈣與單甯化合,而有單甯鈣之化合物產生,使溶液之顏色,驟變黑暗,以此製成之革,其色亦未有不黑暗者.

故製革廠所用之水,其中之鐵與暫硬(Temporary Hardness),決不可過多也.

3. 去灰. 當用酸去灰時,偶不經心,輒有過分去灰之虞 (Over-deliming).過分去灰之弊端頗多,而其最顯明者,厥爲革色灰暗.有用弱性酸如硼酸,醋酸,乳酸等,以避免此弊害者,惟弱性酸價昂,不合實用,茲述以鹽酸去灰之方法如下:

先浸皮於划桶 (Paddle-wheel) 內,桶盛清水,其一側隔以薄板,板上有數小孔,鹽酸自此邊加入,不使與皮直接相接觸.所需之酸,應逐漸加入,同時用玻杯取出少許溶液,滴入數點甲基橙指示劑 (methyl orange),如顏色變紅,則停止加酸,色



刳桶

若不變,再加酸少許.約每隔十分鐘,試驗一次,如此繼續進行,直至皮內之灰,除至適當限度爲止.

4. 鞣製.

a. 盛植物單甯之木桶,需用銅釘,決不可用鐵釘.

b. 植物單甯之種類. 植物單甯之種類甚多,有色淺者,亦有色深者.凡屬於沒食(Pyrogallol)類之單甯,製成之革,色均淺淡.以兒茶(Catechol)類鞣浸之革,色較深暗,此可視爲定例,又鞣製之初期及將完成時所用之植物,色必淺淡,否則革未有不黑暗者.茲述數種重要植物單甯如下:

(1) 栗木精(Chestnut extract). 常含有黑色物,所製之革,色亦黑暗,若與硬水(Hard water)內之鈣鹽相遇,或皮中之石灰接觸(在去灰時未能盡量除去者),革色甚易變黑.有用蛋白質者以除此者,名其成品曰血精(Blud Tan).當製精時,如所用之溫度甚高,色亦隨之加深.

(2) 槲皮(Oak-bark),所製之革,色頗淺淡,且堅實耐久.

(3) 漆葉(Sumach). 凡完全以此鞣成之革,色甚淡白,此爲一極有用之植物鞣料.

(4) 栂皮(Hemlock bark). 其中單甯與紅粉(Pholoba phenes or reds)夾雜,因之所製之革,呈深紅色,經日光後,漸漸變黑.

c. 初期鞣浸之植物單甯,其酸性最爲重要.如溶液內之酸太少,則皮中之鈣鹽與單甯化合,而成單甯鈣之化合物,吸收空中之氧氣,立變黑色.避免之法,厥爲加酸.通常所用之酸,爲乳酸醋酸等*.試驗單甯溶液之酸性方法如下:

先取若干溶液過濾,濾過之溶液,必須清澄.取 10cc 置于玻杯中,攙以水少許,用飽和石灰水滴定之.止點爲溶液發現混濁.石灰水需要愈多,則酸性愈强,反之則可爲酸性弱小之明證.10cc 單甯溶液,需 10cc 飽和石灰水,始可視爲酸性充足.竟有以 10:15 之比例爲滿意者.今舉一例,如 10cc 單甯溶液,只需 2.5cc 石灰水,若加以乳酸,增其酸性,問須用乳酸若干.

$\frac{7.5}{10}\times\frac{90}{22}=\frac{67.5}{22}=3.06$ 磅乳酸,爲 100 加倫單甯溶液所需者.

市上出售之乳酸,只有 50%,故必倍之,爲 6.12 磅,始足應用.

算式說明:　90 爲乳酸之分子量,

22 係石灰水之 Normality,

7.5爲 10-2.5之餘數.

若單甯溶液內毫無酸性,則

$\frac{10}{10}\times\frac{90}{22}=4.09$ 磅乳酸,爲 100 加倫溶液所必需者.

4.09 之 100%乳酸等於 8.18 磅之 50% 乳酸.

市上出售之乳酸,常含鐵質若干.此亦應事先注意者.

* 强性酸如鹽酸硫酸等,決不可用,因皮易過分膨脹,革色發黑且脆而易裂.

如所用之單甯爲兒茶精 (Gambier), 加入之石灰水,不能發生沉澱.此須另加其他任何單甯.照上述試驗酸性之方法以試驗之.

單甯之酸性,必一日一試,直至10:10或10:15之比例爲止.

d. 懸皮於懸池(Suspenders)內,皮之周圍輒呈黑暗色,此因四邊之單甯甚少,石灰則較多,單甯鈣之化合物,常能發生,繼之以氧化故也,宜時換邊懸掛,卽今日此邊向下,隔數日使另一邊向下,則黑色可避免也.

e. 皮於完全鞣浸之後,表面常有黃色鞣花酸 (Bloom),此須刮去 (Scouring), 使革色均勻而淺淡.刮去之後,復浸於下列之混合單甯溶液內過夜.

無論何種淺色單甯溶液,濃度爲 40-50° Bk (Barkometer 單甯度*),加 10%(照革之重量)漆葉,及淺色栗木精,使其濃度增加至 80° Bk, 溫度爲 100° F.

翌晨將皮取出,溫度再增高至 100° F, 皮復置其中,經過二十四小時,而後皮可取出拭乾.如此不但可增加革之重量,并使革色淺淡,此爲製造底革必經之手續,不可忽略者也.

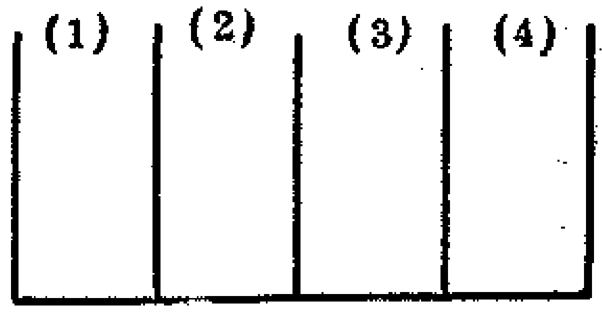
又有不用上述之混合單甯溶液,而代以亞硫酸化植物單甯者,如亞硫酸化訶子及奎布拉 (Sulphited myrobalans and quebracho) 或人造單甯(Synthetic Tannin),此因亞硫酸 (H_2SO_3)

* 1° 單寧度等於比重1.001.

與漆葉同有漂白之功用,革色因以變淺也.

美國漂白底革之方法如下:

四大水池,互相聯接,(1)盛水1800磅,有3600磅炭酸鈉溶解於內,溫度在85°F.(2)水.(3)有1800加侖水,及700磅硫酸,室溫.(4)水.



先縛皮於竿上,浸於(1)內,約三四分鐘,移置於(2),而後再浸於(3)內約三四分鐘,卽置於(4)洗之.總共所需之時,不過15-20分鐘.

革於(1)池內,色甚黑,此因革面之單甯,爲炭酸鈉溶解.至(2)池色仍黑,迨浸於酸內,顏色忽然改變,非復已往之黑暗也.

f. 漂白後之濕革粒面(Grain side),須塗魚油,使革內之水分,由肉面而散失.若由粒面,革則變硬,易於破裂,色亦灰黑.故塗油於粒面,必須均勻,不可或有或無也.

塗油後,革當懸掛以乾之,此時宜注意油或流集於革之一邊,蓋油太多,革色亦能黑暗也.

5. 皮上油脂,若在石灰水內,未能除去,則鞣製之後,革色亦難淺淡.

以上所述,爲革色變黑及避免之方法,此外尙有特殊情形,爲人意料所不及者,例如延橋一次製造底革,所用之生

皮及植物鞣料,事先均予檢查,認爲滿意者.不料當鞣製之初,革色發黑,單甯溶液亦發黑色,初以爲溶液之酸性不足,繼續加酸,而革色毫不改進.繼思所用之陳單甯,或有不當,於是完全傾棄之,始發現池底有小刀一柄,此物作祟,幾使試驗無從進行,而遺此小刀者,未曾告知,亦不能令人無遺憾也.

植物生理學史略

(續第四卷第二期)

張 珽

第十一章

刺激 感應

1859年,Charles Robert Darwin之"種源論 Origin of Species"出版,思想界全體,皆蒙其影響,波瀾驟起,進化論Theory of Evolution一原理,遂爲統治思想界之絕大權威.生物學者,身當其事,興趣所在,活動尤多.故1860年以後,生物學界直已另開新世界,研究討論之視景,全集於何以證明生物對於環境能起適應?此種適應之景象奚似?植物生理學方面,在1860年至1900年間,尤有光華燿熠之建樹,卽對於植物感應力Irritability or Sensitivity之研究,爲所謂植物動力學Phytodynamics之主題者,此四十年中成績最爲煊赫.

第一節 植物適應環境之認識

I. Darwin以前(1859以前)之觀念:

1. Dutrochet已注意研究重力與光對於植物各器官之影響.

2. Von Mohl 亦曾注意攀緣植物 Climbing plants 及卷鬚 Tendrils 等之運動.

3. De Candolle, Meyen 等諸學者所提出 Irritability, Excitability 以及 Sensation 等名稱,以爲皆植物生活作用之必備條件.

然凡此羣哲所注意發現者,不特吉羽片光,零星不備,於植物刺激感應之全部現象中所隱伏之大原理,卽"變化以求適存"未有顧及;卽所說明,亦祇爲一種位置變換時之情形,初未知爲植物本身內部之自律作用 Selb-regulation.

II. 1859 年以後之認識與貢獻:

1. Charles Robert Darwin:

a. 種原論: 在此震鑠今古之巨著中,其最後之基礎理論,卽爲凡生物對於其環境,皆能起有意義 Purposeful 之變化,俾與環境能適應 Adaptive, 以謀在生存競爭 Struggle for existance 中能得勝利.植物界之種種奇特構造,如花對於受粉作用 Pollination 而起之特殊裝置,各種種子爲求遠播而生之附屬器官等,皆有意義有目的之變化,非僅爲簡單機械作用.近世關於環境改造植物之種種研究,種源論之理論實肇其端.所有植物之運動,若以進化論之原理解釋之,則皆不過刺激感應現象,爲求適應環境之手段而已.

b. "攀緣植物 Climbing Plants" 1865 年出版,推論各種攀緣植物之刺激感應現象.

c."食虫植物 In.ectioorous Plants" 1875 年出版.

d."植物之運動能力 The Power of Movement in Plants"1880 年出版.是書爲Darwin與其長子 Francis Darwin 合力研究.所得結果綜合成書,亦卽 Darwin 對於植物生理學上最後之供獻.其結論除推定植物生長屈曲之爲刺激反應現象外,更推定植物之感應作用中,有感覺區域與運動區域分工合作現象.

2. Albert Bernhard Frank:

a."植物生理學研究 Beiträge zur Pflanzenphysiologie" 1868 年出版.指出植物生長屈曲起於內部組織生長之不平衡.

b."植物各部分之自然趨向律 Die Natürliche Wagerechte Ric-htung der Phlanzenthcilen" 1870 年出版.此爲 Frank 最大之貢獻,Frank於書中指出重力及單側光之照射能使生長中之植物器官生種種變化.不同器官對於均一之刺激,所起反應又恆不同;此不同唯有從內部構造上之各個差異解釋.

3. Sachs:

a."植物器官刺激感應及運動之週期性 Vorübergehende Starrezustände periodisch beweglicher und reizbarer Pflanzenorgare." 1863 年出版.

b."實驗生理學 Experimental-Physiologie" 1865 年出版,爲Sachs

派實驗生理學之經典.

c,"植物學教科書 Lehrbuch d. Botanik" 1873 年出版.書中關於植物之運動情形,有詳盡之解釋與記載.

d. 此外 Arbeiten d. botanisches Inotitut in Wurzburg 中歷年之發表,亦多所貢獻.

4. Wiesner:

a."植物之向日性 Heliotropische Erscheinungen" 1865 年出版.

b."植物之運動力 Bewegungs Vermögen" 1881 年.

c. 維也科學研究院彙刊 Sitzberichte D. K. K. Akad. D. Wissen. in Wien 中亦有許多文獻.

5. Pfeffer:

a."葉之週期運動 Die Periodischen Bewegungen der Blattorgane" 1875 年.

b."生理學研究 Physiologisches Untersuchungen" 1877 年.

c."植物之刺激感應 Die Reizbarkeit der Pflanzen" 1893 年.

Pfeffer由精到細密之研究,得知植物反應所表現之力量,與所受刺激之力,不成比例,故斷定刺激感應爲一種生命現象.

III. 刺激感應與原形質:

1. Darwin 1880年在植物之運動能力中指出謂植物之刺激感應,爲感覺部 perceptive or sensory area 及運動部 responsive or motor area 兩者合同作用之表現.前者專接受刺激,後者司

運動分泌等反應現象.

2. Sachs 1882 年於其所著"植物學講議 Vorlesungen"中提出謂反應爲有目的之變化,原形質爲感覺與運動之發源處,且於原形質之刺激感應現象,有詳明之記述.獨惜 Sachs於原形質本身之活動現象,與原形質因對應刺激而引起之特殊變化,以達其適應之目的者,未能明白劃分,故於理論上遂引起頗多糾紛.

3. Burdon-Sanderson 1873—1877 年中發表,其對於捕蠅草 Dioneae 之研究,以電氣刺激其葉,使之閉合,而測其電之變化.結果證明葉在閉合以前,顯有一短時期之停頓,以待刺激由葉面之感覺器官傳入,引起膨壓上之變化,而使葉閉合,其現象與肌肉或神經之刺激感應相同.

1888 年, Burdon-Sanderson 復有發表,批評 Sachs 之說,以爲 Sachs 未能將原形質感受刺激後分子中之變化與因此變化而再引起之變化如膨壓之變動及生長之機轉等,適應之變化區分. Sachs 曾謂"吾人初不必引神經系之生理現象以爲解釋植物刺激感應現象之助",故 Burdon-Sanderson不得不如 Sachs 之說再三致詞以求注意.

第二節 植物對於光之感覺

I. 黃化作用及其機轉:

A. 植物無光線時生長上之畸態:

1. Sachs 1863 年研究黃化植物莖葉各部之生長與正常

植物之差異,見有多種器官,如具地下子葉之萌櫱植物之胚軸,震布 Humulus lupulus 之莖, Bryonia 之下部節間等,在暗中皆不能生長.

2. Kraus, Koch, Rauwenhoff 1878 年時曾數數發現黃化植物,其延伸生長超過常規之節間,表皮組織及柔軟組織之細胞皆過分延長. Kraus 1870 年又曾發見在暗中細胞膜之增厚不甚顯著.

3. Stahl 1883 年發見葉之栅狀組織在暗中無顯著分化,葉肉中其他組織之分化亦不完全.

4. Janczewski 1885 年見多數蘭科植物 Orchidaceae 之氣根在暗中時其組織爲放射狀排列,在光中則變爲扁平排列.

5. Vöchting 1894 年見仙人掌 Opuntia, 及 Phyllocactus 之葉狀體 Phylloclades 在暗中亦變爲放射狀排列之組織.

6. Haberlandt 1896 年證明 Stahl 之發現,謂葉在暗中不能生成栅狀組織.

7. Klebs 1896 年見蘚苔及藻類之胞子器 Sporophore 在暗中特別引長.

8. Lendner 1897 年見多數之 Macorini 亦有此現象.

B. 黃化現象之解釋:

1. Batalin 1871 年提出謂黃化植物葉之所以特小者,蓋細胞分裂受遏制之結果.

2. Prantl 1873 年就黃化植物作精細之計算,推定謂 Batalin

之假定錯誤:黃化葉之所以小者全爲病理現象.

3. Kraus 及 Godlewski 則謂爲營養不良及食物之供給受干涉而起.

4, Sachs 1882 年在其 Vorlessungen 中亦提出謂黃化葉之所以小者,由於營養之不良.

II. 向日性 Heliotropism

A. 向日性之發現:

1. 植物器官之具放射排列組織者,對於一側光線,能生反應運動,名向日性;此現象發現甚早,第一次予以解釋者則爲 Dutrochet.

3. Hofmeister 1883 年始提出正向日性 positive helistropism 及負向日性 Negative heliotropism 之名稱.

3. Frank 1870 年發現背腹性 dorso-ventral 之組織,或構造上爲放射性而生理上仍爲背腹性之器官 (Frank 之例爲珍珠菜 Lysimachia nummularia 及萹蓄 Polygonum aviculare 之莖)及其他在暗中能直立生長而見光後立即匍伏之苗,具有另一種向日性,即橫向日性 Transverse heliotropism.

1883 年, Frank 又發現地錢 Marchantia 無節體之枝,由暗中出於有光處,則變狹而上面成溝.

4. Rauwenoff 1878 年綜結其觀察結果,發表謂植物之側出枝在光中向上斜生者,在暗中皆直立向上.

5. Wiesner 1880 年見白花蛇莓 Fragaria 及連錢草 Nepeta

之纖匐枝 runners 在暗中亦向上生長.

6. Francis Darwin 1880 年, Pfeffer 1882 年對於 Rauwenoff 之發現,皆提出例證.

7. De Vries 及 Sachs 則不承認橫向日性之存在,謂此種現象乃由其他力量(如器官本身之重量等)作用如向日性所得之中和力 resultant.

8. Charles Darwin 1880 年改定趨日性,避日性及橫日性之名爲 heliotropism, apheliotropism, diaheliotropism. 又以自動旋轉器 Klinostat 旋轉葉而視其生長情形,確定橫日性之存在,

9. Vöchting 1888 年見荷蘭牻牛兒苗 Erodium 及蒲公英 Taxacum 之葉柄有橫日性; Krabbe 1889 年亦有相似發現爲橫日性之證明.

B.　午睡現象(卽比日性 Paraheliotropism):

1. Pfeffer 1875 年發見多種之葉在强光照射之下,卽致死亡;然生活之葉,則頗能轉動而以葉緣向光源以避灼照.日午陽光正烈時,此現象極爲顯著. Pfeffer 以爲蓋因一側受光膨壓低降之結果.

2. Wiesner 同年亦發現此午睡現象.

3. C. Darwin 1880 年名此現象曰比日性 Paraheliotropism.

C.　色素體對於强光之防禦作用:

1. Boehm 1856 年發現景天科植物 Crassulaceae 之葉綠體,在光線過强時能自動移轉於他處以防强光之照射致引起

破壞.

2. Famintzin 及 Borodin 1865 及 1867 年之研究,得有更精密之結果.

3. Frank 1872 年之研究,得知色素體之移轉,實由原形質流司之:光線過强,則原形質團挾色素體退至最隱閟處,以防破壞.光線强度漸低,則原形質又挾色素體向有光處移動,以求光合作用之暢遂進行. Frank 名此種色素體之移動作爲就光移動 Epistroph 及避光移動 Apostroph.

4. Micheli 1876 年謂柔軟組織中栅狀組織之葉綠體,在弱光中則離細胞側壁而浮出表面;光强則復退回而緊貼於縱側壁上.

5. Stahl 1880 年更作仔細研究,所得結果與 Micheli 相同.唯光作用之條件,方向較强度之爲力尤巨.又此現象非盡植物皆有之.酢漿草屬 Oxalis 及蓖蔴屬 Ricinus 最爲顯著. Mesocarpus 細胞中帶狀之長形葉綠體,則循其長軸扭轉以適應光之照射:光强則垂直排列,光弱則排成水平.

6. Haberlandt 1886 年作有多種關於葉綠體感光運動之實驗,結果與 Stahl 之發現大體相同.

D. 光卷伸現象 Photoepinasty:

1. Detmer 1882 年謂光線之變化能引起卷屈 hyponasty 及卷伸 epinasty. 若將菜豆 Phaseolus 及南瓜 Cucurbita 之黃化萌蘖植物,驟暴之於日光,則起卷伸現象. Detmer 卽名之曰光

卷伸.

2. Vines 1889 年重行測定光卷伸,未得結果,故不承認其存在.

E. 光線給予植物體構造上之影響:

1. Frank 1870 年以多種松柏科植物 Coniferae 之苗爲實驗材料,用一側光線照灼之則其組織由放射狀排列變爲腹背式.

2. De Vries 1872 年之發表,則反對 Frank 之說,謂松柏科植物之側枝,自芽中展出時,其向下之一側必爲腹面.重力似爲重要之因子,光則無關係,蓋在暗中亦有同一之現象可見也.

3. Zimmermann 1882 年見地錢無節體之所以顯腹背性,全爲光之作用.

4. Leitgeb 1876 年見一側光線能使地錢科 Marchantiaceae 某數種胞子上之原絲體 protonemata 成背腹性構造.

5. Pick 1882 年見 Biota orientalis 之小枝,亦能由一側光照射之結果,變其組織之排列爲腹背式.

F. 植物之光中定位現象:

1. Frank 1870 年研究植物各器官之位置,知凡器官受光之刺激後必取一定位置以與光源相應對.此現象謂之光中定位 Fixed light-position.

2. Sachs 1873 年亦有同一發現.

3. Wiesner 1878-1880三年間之研究,推得謂葉之光中定位,祇白晝瀰散光最强烈處爲定,與直射光線無關.

4. Darwin 1880年所發表之巨著"植物運動能力 The Power of Movement in Plants" 即專論植物在取得光中定位時之運動. Darwin以爲植物皆有變態之周屈垂 Circumnutation 以求得適當之光中定位,一切屈曲運動,皆由此種變態周屈曲引起之. Wiesner 於此說反對極烈.

5. Stahl 1881年發表謂針草 (Compass plants) 能因直射光線而取得光中定位.

G. 夜闔運動 Nyctitropism:

1. Dutrochet 已發現含羞草 Mimosa 有自起之開闔運動,與普通之刺戟感應不同者在此.

2. Brücke 1848年有發表,說明此種夜闔現象之特性.

3. Millardet 1869年發表謂含羞草之夜闔非僅簡單之起伏而實有週期律調在,與每日中膨壓張力之律調相對應.夜闔作用中有力之因子爲小葉柄與小葉片間之關節,而與總葉柄之葉墊 Pulvini 無關.

4. Pfeffer 1875年見夜闔現象週期律調確與普通刺戟感應有不同之處.

5. Batalin 1873年以爲尋常葉之夜闔,與生長週期有極密切之關係,葉墊必參預生長.

6. Pfeffer 1875-1876兩年之發表,細究葉墊之構造,謂其生

長週期,隨晝夜成變化,與溫度光線兩者俱有關係.

H. 酢漿草之特殊現象:

1. Cohn 1859 年見酢漿草 Oxalis 之葉,由弱光忽移入强光中,則其小葉片頓卽下垂.

2. Batalin 1871 年亦曾見之.

3. Pfeffer 1873 年亦有同樣發見.

III. 光線對於下等植物之作用:

1. Braun 1851 年卽發現下等植物之能隨意運動者,能趨光避光.

2. Cohn 1867 年證明强屈折線能使游離運動之植物感受刺激而起趨避.

3. Hofmeister 1867 年研究粘菌 Myxomycetes, 發現光線能使之生感覺而作趨避運動.

4. Famintzin 1867 年見顫藻 Oscillatoriae 之運動,受光之影響亦極巨.

5. Strasburger 1878 年提出趨光性 Phototaxis 一名稱,以名能自由運動之下等生物對於光之趨避. Strasburger 又發現有多種游走子 Zoospores 能運動而使其體之縱軸與投射光線平行.

6. Baranetzky 1876 年見粘菌之原形體每避光線之投射; 1883 年更明白宣示謂粘菌確有負趨光性,證實 Hofmeister 之發見.

7. Stahl 1880 年證明游走子具有趨光性,Strasburger 之發現爲一種恆有現象.

8. Engelmann 1883 年發表細菌之趨光運動.其最著之例,則爲量光細菌 Bacterium photometricum; 此細菌在暗中甚爲遲滯,一經光線照射,則經過一短促之潛伏期 latent period 後,立卽起活潑之運動.

9. Marshall Ward 1892 年發現强光能致多種細菌於死亡.

10. Klemm 1895 年見强屈折線能破壞細胞中各種色素,漂白葉綠體,停止原形流動.

11. Flügge 1896 年證明 Marshall Ward 細菌畏光之發現.

12. Arloing 謂細菌之營養細胞,抵抗强光之力,較胞子爲大.

13. Green 1897 年發現强屈折線及紫外線 Ultra-violet 皆能破壞糖化酵素 diastase.

14. Tammes 1900 年獨發現生於岩石上之地衣蘚苔不畏强光.

IV. 植物感光作用之機轉:

A. 何種光線最能刺激植物?

1. Sachs 1864 年發表謂具高屈折力之線,最易使植物感受刺激. Sachs 用硫酸錏銅 Ammonio-cupric sulphate $(NH_4)_2Cu(SO_4)_2$ 及重鉻酸鉀 potassium bichromate $K_2Cr_2O_7$ 之溶液爲幕,植植物於幕後,則植物因强屈折線之被阻,而起黃化現象.

2. Cohn 1867 年證明唯強屈折線能引起自由運動之下等植物起趨避現象.

3. Kraus 1876 年發現黃線及藍線對於麥角菌 Claviceps 之殼果器 Perithecial head 柄之作用力量相等.

4. Wiesner 1878 年在其所著"植物之向日性 Heliotropische Erscheinunger" 中提出謂除黃光以外,所有光線殆皆有作用,而以紫線及紫外最強.此外赤外 infra-red 部分另有一第二最高點;此部之線,能透過碘 iodine 在二硫化碳 Carbon bisulphide CS_2 之溶液.至於光之強度,能使植物發生刺激感應現象者,其最高,最低,最適三點 Wiesner 亦有測定,依植物之種類而有差異.大概最低一點,輒與能致生長停止之弱光相合,最高一點,則頗有差異.同一種光線,以同等強度照射於不同之植物,所生結果亦不相同.

5. Strasburger 1878 年就能運動之下等植物所作研究,結果知可見光線及赤外線皆能刺激此等植物使起趨避.

6. Brefeld 1881 年證明 Kraus 關於麥角菌之發現.

7. Sachs 1882 年又發表謂由藍色以至於紫外之光線,皆能影響植物.

8. 1878—1893 數年間, Kraus, Vines, Wiesner 等又數有發表,證明 Sachs 1864 年之發現.

B. 光線生成刺激之原因:

1. Dutrochet 1824 年已提出謂光對於植物之刺激作用,非

僅爲簡單機械之投射,而確爲引起屈曲之原因.

2. De Candolle 見葉受蔭之一面有黃化跡象,遂謂光對於生長有遏制作用.此說一出,學者景從,然於避日性屈曲,究無法解釋.

3. Frank 由 1870 年起研究植物器官之向日現象,謂植物確有屈曲己體以求適應於照射光線之力,光弱則趨向光源,光强則屈曲相避.

4. Sachs 之實驗室中 1874 年以後所作關於向日性之研究極多.Sachs 本人則以爲凡植物器官之屈曲,皆爲屈曲部分感受外界刺激而起有意義有目的之反應.

5. Müller-Thurgau 1876 年在 Sachs 之實驗室中由實驗得知避日性之根,在暗中生長速,在光明處生長遲.故推定日光之影響,乃在生長速度方面.

6. De Vries 1879 年發表謂光所以能影響於生長者,乃因膨壓受光之影響而變化之結果.

7. Vines 1878 年及 1886 年之發表,則謂光能阻障生長細胞中之原形質流動力及其他刺激感應.

8. Pfeffer 則以爲原形質本身之一種刺激感應.

9. Palladin 1893 年另提出一種假說,謂植物之蒸騰作用在暗中大受窒礙,由是而膨壓盛大,伸張力强,因使生長呈過度之畸態.

C. 光線刺激之條件:

1. J. C. Müller 1872年發現辣菜(按Cress普通指獨行菜Lepidium sativum及蔊菜Nasturtium officinale等十字科野蔬而言).之萌蘖植物在弱光中顯趨日性,在過強之光中則呈避日性.

2. Sachs 1873年提出謂植物對於光之刺激感應,最重要之條件爲光源所在之方向及其投射角度. Müller-Thurgau 1876年之發表,亦證明光向及投射角爲光刺激中之重要因子.

3. Pfeffer 1877年證明Frank所提出趨日性植物器官皆能趨向弱光而避免過强之照射.

4. Wiesner 1878年亦謂植物感光器官對於光强度有選擇力,例如猪殃殃Galium之莖,山茱萸Cornus之幼根及苗,在弱光中呈趨日性,在强光中呈避日性.但同時光源方向及投射角度亦大有影響.

5. Francis Darwin 1880年則主張光强度爲重要之因子.

6. Charles R. Darwin 1880年之發表,謂植物感光器對於光强度有銳敏之感覺.某數種萌蘖植物之莖,對於不足使其本身投影於白紙上之弱光,亦能起相應屈曲.唯各種植物對於同等强度之光,所生感應各不相同.至於接受刺激之部分,與發生反應之地位,恆不一處,幼植物尤然,可知植物之刺激反應,亦與動物相同,同爲一種複雜之生命現象,蓄有目的有意義之變化也.

7. Stahl 1880 年發現藻類之能自由運動者,趨向弱光而避免過强之刺戟.

8. Berthold 1882 年亦有同一之發現.

9. Vöchting 同年見荷蘭欟牛兒苗 Erodium 及蒲公英之花梗亦有相類現象.

10. Oltmanns 1892 年見藻菌屬 Phycomyces對於投射光線之强度,有極大敏感:光弱則趨向光源,光過强則走避暗處,唯在一定光度,適應其需要時,乃游移不表示趨避.

第三節 植物對於熱之感覺:

1. 向熱性 Thermotropism在植物界中之發現:

1. Van Tieghem 提出植物界之向熱運動現象,而名之曰向熱性.

2. Wiesner 1878 年既發現引起向日性之主要光線爲熱線後,乃專以熱線照射植物,結果果在蠶豆及辣菜發見屈向熱線之屈曲.

3. Wortmann 1883 年見辣菜亞麻 Lilium 及玉蜀黍 Zea may之萌蘖植物,藻菌屬 Phycomycetes 某種之胞子囊器 Sporangiophores, 能屈曲趨向一放射熱線之熱板.又根在水中或濕空氣中雖不顯向熱性變化,然在鋸屑培養中則趨向溫熱而避免强溫.

4. Barthelémy 1884 年見風信子 Hyancinthus 之根亦有趨熱性.

5. Vöchting 1890 年見白頭翁 Anemone 之花梗有正趨熱性，在暗室中其花梗屈向室中最熱之壁側.

II. 溫度變化給予植物之刺激與其反應:

1. Sachs 1860 年正注意於溫度對於植物之一般影響.

2. Kabsch 1862 年觀察岩黃耆 Hedysarum 側面小葉之運動所受溫度之影響,知此植物之最適溫度爲35° C.,若低過 22° C 則其運動卽起障礙.

3. Sachs 1863 年謂含羞草之小葉長在15° C. 中或驟曝於 40° C.之高溫中,則其運動力卽消失.高低之力較低溫爲大.

4. Millardet 1869 年研究含羞草所受溫度之影響,知加高溫度能使葉柄上舉,溫度漸低則葉柄漸漸降下.

5. Pfeffer 1875 年謂花之開闔現象所受溫度之影響大而光之影響少.番紅花 Crocus 之花被,在 9° C. 時卽開放,27° C. 尙盛開,達 28°C. 則漸閉合,至 36.7°C.則全闔.溫度降低亦能使已開之花復行閉合.此種開闔之機轉, Pfeffer 以爲在於花被各片基部有一帶組織,其生長速度能因溫度之刺戟而改變.

是年 Pfeffer 又發現酢漿草 Oxalis acetosella 之夜闔運動,溫度降下 10° C 後尙不起障礙.

8. Kjellmann 1875 年定出海藻生活之最低溫度爲— 18°C..

9. Strasburger 1878 年發現紅球藻 Haematococus 之游走子,在 0° C 時尙能運動;最適溫度爲 30°—40° C.,高達 50° C 則運

動完全停止.海藻游走子之最高溫度約較淡水藻及陸生藻低 10°C.之譜.

10. Velten 1876 年見旋轉運動 rotation or circulation 亦有最高最適最低之三種溫度條件.最適與最高兩點相距較近;但視植物之種類不同,距離亦異.

11. Wiesner 1880 年論花之開闔與日光之關係時,聲明赤外線(即熱線)亦極有力量.

12. Vines 1886 年以爲 Pfeffer 所見花開闔所受溫度之影響,爲卷屈卷伸現象之一例.

第四節　植物所受重力之影響:

I. 向地性 Geotropism 之發現:

1. 根之向地生長,莖之背地生長,爲自來熟知之事實.

2. Frank 1868 年以爲腹背性器官如葉,放射性器官如根莖等之橫向生長,亦爲重力之影響.Frank 提出向地性一名稱,而分別稱向地,背地,橫地三種現象爲正向地性 Positive geotropism, 負向地性 Negative geotropism, 橫向地性 transverse geotropism.

3. Darwin 1880 年易此三名爲趨地性 Geotropism, 避地性 Apogeotropism 及橫地性 diageotropism.

4. De Vries 否認橫向地性之存在,謂葉之橫生,受光之影響爲大.光能引起向日性屈曲及卷屈卷伸運動,乃牽引葉使之橫出.

II. 植物器官感覺重力之部位:

1. Hofmeister 1863 年謂植物器官之具向日性或向地性者,除正在活潑生長中之地帶以外,不易見有屈曲.

2. Ciesielski 1872 年發現橫臥之根,若生長點 growing point 被破壞,則其屈曲運動之力亦消失.

3. Darwin 1880 年之發表,說明根尖為趨地性感覺之中樞.若切去根尖約 2mm. 之長,而平臥其根,則不顯屈曲現象.將根橫臥若干時然後切去其根尖,則因運動中樞(詳後刺戟之傳導及部位)已由傳導得受刺戟,故仍可屈曲.

4. Sachs 1882 在 Vorlesungen 中批評 Darwin 之試驗法,謂切斷根尖,則根之生長不能依照常規自然發展,所得結果不可靠.

5. Detlefsen 1882 年亦批評 Darwin 之實驗謂結果必致錯誤;因無尖之根平置後未必無屈曲能力.

6. Molisch 1883 年以實驗證明切去尖端之根尖,屈曲能力確已減少.

7. Wiesner 1884 年之發表,於 Sachs 之批評大體贊同,唯謂根尖切除後之根,再平置之,則其屈曲力確有減退.

8. Czapek 1884 年之實驗,卒證明 Darwin 之說不謬. Czapek 將幼根之尖,納入彎曲之細玻璃管中,管在尖端 2mm. 處彎成直角;於是乃獲得尖端天然已有 2mm 與縱軸成直角之根.將此根再平置之,使其尖端向下,則根之全部不復再有

屈曲發生,足證唯根尖 2mm. 乃能感覺重力也.

1898 年, Czapek 復證明屈曲運動恰起於有感覺力之根尖直後.

9. Mc Dongal 1897年亦指出謂根之屈曲地帶,在能感刺激之根尖恰後.

10. Francis Darwin 1899 年用 Czapek 之實驗法定出粟 Setaria 及高粱 Sorghum之子葉爲向地性感覺器官.

III. 趨地性屈曲之機轉:

1. Knight 1806 年謂向地性屈曲之起因在於比重不同之物質在植物組織內歧異之分佈.根之下指,由於原形質物質之積沉下墜;横臥之莖所以終必向上生長者,蓋因重物積沉下面,因使下面之生長特別旺盛,轉屈而向上耳.

2. Dutrochet 1824 年提出謂趨地運動避地運動皆爲刺激感應.

3. Treviranus 1838 年贊同 Dutochet 之說.

4. Hofmeister 1859 年復提出 Knight 之說略加修改,以說明植物器官之向地性運動. Hofmeister 以爲横臥之根,其營養物質溶液因輕而上浮,使上面一側生長旺盛而屈下;横莖則因髓部積水膨壓加强,牽引下面之細胞伸長因而向上湿曲.

5. Sachs 1865 年見葉墊在適當之環境條件下,亦能起向地性運動,唯其機轉則在膨壓之變化而與生長速度無關.

禾本科植物 Graminosae 生長作用已經停止之稈,若再水平置之,則因膨壓之變化又起生長,節之下面特別膨大.

6. Frank 1868 認向地性運動爲刺激反應中之一種,爲植物對於環境一種有意義之適應.

7. Ciesielski 1872 年以爲屈曲在生長旺盛之區,其間營養物質蓄積甚豐,一方面因物質凝聚力而膨壓加强,一方面細胞膜因營養佳而增厚,因以引起屈曲.

8. Sachs 1873 年發表其實驗研究之結果,說明趨地屈曲應外界之刺激而起,刺激銷去後反應仍能持續若干時,故知向地性爲刺激反應作用之一種.Sachs 將莖水平壓於土壤中,經三十分鐘乃至兩小時後,屈曲已起,此時扶莖使直立,則其在平置時所起之屈曲反應,猶能持續兩三小時.

9. Traube 1875 年在植物學報 Botanisches Zeitschrift 之發表,同意於 Ciesielski 之解釋.

10. Sachs 1879 年,發明自動旋轉器 Klinostat,旋轉植物體,使所受光與重力之影響,面面平均,結果知植物之屈曲,皆爲刺激反應.

11. Charles R. Darwin 1880 贊同 Sachs "屈曲爲刺激反應" 之說,謂植物有感知方向之能力.

12. Elfing 1880 年又以多數橫地性之例,證實植物對於方向有感覺力.

13. Pfeffer 1881 年乃正式提出植物對於方向之感覺,爲重

力感覺 Graui-perception.

14. Vöchting 1882年由觀察罌粟花 Papaver somniferm花梗之向地性運動,由始出至於花謝,皆能順其需要,變化運動方向,以適應環境,證明植物確有感覺方向之力.

15. Berthold 1886年以爲向地性屈曲起於體中較重部分,因重力牽引而下沈,因牽動全器官,使生彎曲.

16. Noll 1892年提出 Knight 舊時之實驗,謂感覺器官中必有較重物質能因心力作用而下沈於一處;至少則原形質必能辨別細胞何側所受之壓力爲大,因而匯集其間,遂起屈曲. 1900年, Noll 更作爲完密之解釋,謂外細胞質 Ectoplasm 中,必有多數蓄水之小囊狀體在;此囊中充滿細胞液,別有一小形重顆粒,能因重力被動墜下,牽引全部組織使生運動.

17. Haberlandt大約同時亦提出同一之解釋,名此粒爲"靜粒 Steatolith";此說爲"靜粒說 Statolith theory",在解釋重力作用之諸說,靜粒說爲最受歡迎者.

18. Czapek 1898年之發表,則謂感覺起後,與反應同時並進者尙有極複雜之化學變化,此變化或即爲靜粒墜下,內部起騷動之結果.感覺之表現,與反應之生出,所受環境條件之影響,各不相同.

19. Němec 1906年見根冠感覺帶細胞中,有可動之澱粉在,此粒能因根位置之移動,而改變其與細胞膜之相關位置.

(未 完)

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室
中國鳥類標本之地理分佈研究

(續第四卷第二期)

任 國 榮

SYLVIIDÆ. 鶯科

一般性質無異于普通鳴禽類,但幼鳥與成鳥相似,而體色則較爲鮮明,此爲分科之一要點.體小;體色常一致;大多數爲遷移鳥.

巴黎博物館鳥類研究室鶯科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有十五屬四十八種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共一百四十四個.

321. **Acrocephalus aurundinaceus orientalis** (Temm. & Schleg). 東葦雀

D. et O. p. 252 (*Calamodyta orientalis*)——Przewalski于蒙古,黃河流域,亞拉山 (Ala-chan) 南部見之.夏季廣佈中國本部.五月大羣至北京,營巢蘆葦中,九月始去.北京人稱曰葦雀 (Wei-djà).

Baker, ii, p. 391 ——生殖于日本,亞伯利亞之東,中國北部.

冬季普見中國南部,印度支那,安南,暹羅,緬甸及亞森母.

La Touche, p. 211——雲南,廣東,沙尾山,遷移鳥.福建,遷移鳥及夏鳥.揚子江中流及下流,中國北部,夏鳥.

Rothschild p. 283 (*Acrocephalus stentoreus orientalis*)——雲南.

室中除喜馬拉雅帶標本外,有中國鳥六: 1(?), 1896, M. Chaffanjon,蒙古東部克魯崙河; 2(?), 1851, M. Montigny,中國; 2♂, 1♀, 1, x, 1895, La Touche,福建.

余于廣西猺山得有記載.

322. **Acrocephalus bistrigiceps** Swinhoe. 雙眉葦雀

D. et O. p. 254 (*Calamodyta maackii*)——夏季至中國,營巢蘆葦中,北京河流水濱,極爲繁多.

Baker, ii, p. 392——生殖于日本及西伯利亞之東,或可在中國北部;冬季可見于中國南部,西行直至暹羅及緬甸,偶可一至亞森母.

La Touche, p. 213——中國東部,遷移鳥.揚子江下流,遷移鳥及夏鳥.沙尾山,遷移鳥.秋季見于揚子江中流.夏季及遷移期見于直隸.

室中除日本標本外,有中國鳥三: 2♂, 1♀, 3, 9, x, 1895, La Touche,福建.

此次寄來之廣東北部標本中,有此鳥一個.

323. **Locustella lanceolata** (Temm.). 斑腹草蝠鶯

D. et O. p. 251 —— 自北京至廣州皆可見之.

Baker, ii, p, 401 —— 夏季見于西伯利亞東部以至俄羅斯之東北,冬季南行經中國印度支那以至緬甸及孟加拉之東.

La Touche, p. 225 —— 中國全部之遷移鳥.

室中除兩安南鳥外,有一中國鳥: (?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯崙河.

324. **Orthotomus sutorius longicaudata** (Gmelin). 裁縫鳥

D. et O. p. 261 —— 見于中國極南各省.

Baker, ii, p. 412 —— 雲南及福建福州. Harington 于北撣部所得之標本,當速此型.

La Touche, p. 234 —— 廣東,福建,留鳥.

Rothschild, p. 283 —— 雲南.

室中有三標本: 1♀, 6, iv, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 2♀, 10, xi, 1895, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

325. **Cisticola juncidis tintinnabulans** (Swinhoe). 扇尾鶯

D. et O. p. 256 (*Cisticola schoenicola*) ——中國東部,自海南以

至天津皆有之.上海甚普通.江西則較稀.

La Touche, p. 235——揚子江中流及下流之夏鳥及遷移鳥.沙尾山遷移鳥.雲南,廣東,福建,冬鳥.四川夏鳥.

Rothschild, p. 280——雲南蒙自,大理,騰越.

室中標本皆來自安南.

余于廣西猺山射得之.

326. **Franklinia gracilis** (Flanklin). 佛蘭克林鷦鶯

Baker, ii, p. 245——錫蘭,印度全境,亞森母,緬甸,德尼薩拉,暹羅及安南.

Rothschild, p. 289——雲南.

室中標本皆來自安南.

327. **Franklinia rufiscens rufiscens** (Blyth). 亞森母鷦鶯

Baker, ii, p. 427——印度南部以至喜馬拉雅山麓;緬甸,德尼薩拉,雲南,暹羅及安南.

Rothschild, p. 290——1921年三月, La Touche 于雲南河口,得一雄鳥.

Delacour 曰:"經細驗大批標本後,吾以爲 *F. gracilis* 與 *F. r. ruficens* 實係相同,蓋其異點只有色彩上濃淡之差別耳,而此等差別,與年齡及季節,又極有關係也.此兩型既常混居,

而其間又有許多中性標本,則此鳥或係一多型種(Polymorphisme) 也.

室中只有安南鳥.

328. **Megalurus palustris andrewsi** Bangs.

Baker, ii, p. 435 (*Megalurus palustris*) —— 印度,亞森母,緬甸,暹羅,撣部,雲南,安南及爪哇.

Rothschild, p. 282 —— 雲南.

室中有兩貴州鳥: 2(?), 1910, Père Cavalerie, 貴州.

*M. p. andrewsi*與*M. p. palustris*之區別極微,只前者之量度稍大耳.貴州鳥與雲南鳥較近似,故余以*M. p. andrewsi*記載之.

329. **Phragmaticola aedon** (Pallas). 樹雀

D. et O. p. 254 (*Arundinax aedon*) ——來去期俱與葦雀同,習性亦相似,但較喜在高樹中耳.北京人稱之曰樹雀(Chou-djà),且謂其營巢于北京云.

Baker, ii, p. 440 —— 生殖于西伯利亞南部,自托木斯克以至滿州及中國北部.冬季至東孟加拉,尼泊爾,不丹,亞森母及暹羅.

La Touche, p. 217 —— 雲南,湖北,江西,福建,廣東,遷移鳥.直隸遷移鳥及夏鳥.

Rothschild, p. 283 ——猓姑寨,蒙自,雲南府,騰越.

室中只有印度及安南鳥.

330. **Herbivocula schwarzi** (Radde). 列氏叢鶯

D. et O. p. 245 (*Herbivocula flemingi*)——每年必經北京,但爲數無多.春秋二季,余皆得有標本.此鳥之量度差異甚大,極難斷其爲同種抑係異種也.

Baker, ii, p. 452 ——西伯利亞東部,自貝加爾湖以至烏蘇里.冬季至中國南部,緬甸及印度支那.

La Touche, p. 239 ——雲南,湖北,揚子江下流,福建,直隸,遷移鳥.

Rothschild, p. 284 ——雲南.

室中除安南標本外,有中國鳥三: 1(?), 1902, 四川打箭爐; 2(?), 1906, Père Soulié, 雲南苴刼.

331. **Phylloscopus affinis** (Tickell.). 狄克柳鶯

D. et O. p. 267 (*Oreopneuste affinis*) ——與中國北部之 *Oreopneuste armandi* 極相似,夏季見于四川及漠平多樹之山中.

Baker, ii, p. 454 ——夏季普見于喜馬拉雅一帶,自克什米爾以至東亞森母,西藏及中國西部以至甘肅皆有之.冬季廣佈印度全境.

Rothschild, p. 288 ——雲南.

室中有九標本: 3(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 2(?), 1896, Père Soulie', 雲南茛枷.

332. **Phylloscopus subaffinis** (Grant). 黃腹柳鶯

La Touche, p. 243 (*Oreopneuste subaffinis*) —— 福建,湖北,四川,夏鳥.雲南,貴州,留鳥.

Rothschild, p. 285——雲南.

室中除安南標本外,有中國鳥五: 2(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1900, 雲南茛枷.

此鳥與 p. affinis 極相似,但下顎之先端深角褐色;下體多染幽赭,只腹中部濃黃耳.

333. **Phylloscopus fuscatus** Blyth. 塵鶯

D. et O. p. 267 (*Phyllopneuste fuscata*) —— 遷移期見于北京及中國全部.

Baker, ii, p. 461 —— 西伯利亞,中國北部,蒙古及日本.冬季至印度東北及中部之北,緬甸及中國南部.

La Touche, p. 240 (*Oreopneuste fuscata fuscata*) —— 中國東北部,遷移鳥.江西,湖北,遷移鳥.雲南,中國東南部以至福州,冬鳥.

Rothschild, p. 285 ——雲南.

室中有中國鳥四: 1♀, 1(?), 1897, Père Soulie', 雲南苴却; 1(?), 1880, Farges, 中國; 1(?), 1896, M. Chaffanjou, 蒙古東部克魯倫河.

334. **Phylloscopus armandii** (Milne-Edward). 北柳鶯

D. et O. p. 265 (*Oreopneuste armandii*) ——中國北部及蒙古高山之樹林中.

Baker, ii, p. 463 —— 生殖于蒙古及中國北部,冬季至中國南部,印度支那及緬甸.

La Touche, p. 242 (*Oreopneuste armandii*) ——四川及中國北部.直隸夏鳥.十月有記載于雲南西北部.

Rothschild, p. 285 ——雲南.

室中有十一標本: 5(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1896, 1897, Père Soulie', 雲南苴却.

335. **Phylloscopus maculipennis** (Blyth). 灰喉柳鶯

Baker, ii, p. 463——喜馬拉雅帶,自蘇脫列及河(Sutlej River)以至東亞森母,雅魯藏布江之南北兩岸,馬尼坡.

Rothschild, p. 285 (*Phylloscopus maculipennis debilis*) ——雲南

室中有四川鳥一,雲南鳥二: 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896, 1897, Père Soulie', 雲南苴却.

336. **Phylloscopus pulcher pulcher** (Blyth). 橙斑柳鶯

Baker, ii, p. 464 —— 自尼泊爾以至東亞森母,馬尼坡,緬甸,撣部及雲南.

Rothschild, p. 288 —— 三四月皆有記載于雲南.

室中有中國鳥六: 2(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 4(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

此鳥之翼斑橙色,爲認識上一要點.

337. **Phylloscopus proregulus proregulus** (Pallas). 伯氏柳鶯

D. et O. p. 274 (*Reguloides proregulus*) —— 在中國中部南部各省度冬.

La Touche, p, 244 —— 中國大陸遷移鳥.中國南部,揚子江以南之冬鳥.

Rothschild, p. 286 —— 雲南.

室中有七標本: 1(?), 1896, M. chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 2♂, 5, 20, xi, La Touche,福建;3♂, 13, 22, ii, 1895, Prince d'Orléans, 蒙自及眉公河附近; 1(?), 1911, Père Cavalerie, 貴州.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥.

338. **Phylloscopus proregulus forresti** Rothschild. 羅氏柳

鶯

Baker, ii, p. 467 —— 撣部,雲南,嘉錦山及錦山.

Rothschild, p. 287 —— 雲南.

室中有三標本: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Père Soulie', 雲南甚却.

上鳥體色遙爲深暗,一經比較,自可別于 *P. p. proregulus.*

339. **Phylloscopus inornata inornata** (Blyth). 黃眉柳鶯

L. et O. p. 273 (*Reguloides superciliosus*) —— 歲必二經中國,間亦有留以生殖于山林中者.春秋二季,可見其羣集于北京.

Baker, ii, p. 470 (*Phylloscopus humii praemium*) —— 生殖于西伯利亞,蒙古,中國北部,西藏及中國之西北部.冬季至孟加拉,亞森母,緬甸,中國南部及印度支那.偶或可至俄羅斯及歐洲之東部與西部.

La Touchek, p. 245 (*Phylloscopus humei praemium*) —— 中國全部,沙眉山,遷移鳥.福建,廣東,雲南,冬鳥.

Rothschild, p. 285 (*Phylloscopus humei praemium*) —— 雲南.

室中除安南標本外,有中國鳥十: 1♀, 19, ix, 1872, David, 北京; 1(?), 1891, Prince d'Orleans, 西藏; 1(?), 1892, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Père Soulie', 雲南甚却; 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南; 2♂, 2♀, 1(?), 19, 20, x, 11, 13, xi, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥.

340. **Phylloscopus borealis borealis** (Blasius). 極鶯

D. et O. p. 271 (*Phyllopneuste borealis*) —— 春季見于蒙古東南部.中國本部,則遷移期與夏季皆可見之,留以生殖者,數亦不少.五,六,八,九等月,可見于北京.

Baker, ii, p. 472 (*Acanthopneuste borealis borealis*) —— 生殖于挪威,俄羅斯北部,亞洲北部以至大烏里,貝加爾,高麗,烏蘇里以至堪察加.冬季至亞森母,緬甸,印度支那,中國南部等處.

La Touche, p. 247 (*Acanthopneuste borealis borealis*) ——中國全部之遷移鳥.

Rothschild, p. 287 —— 雲南之蒙自,雲南府,麗江山脉.

室中除日本及安南鳥外,有中國鳥四: 1(?), 1896, M. Chaffanjon,蒙古東部克魯倫河; 1(?), xii, 1865,Swinhoe, Fungchow;1♂, 1(?), ix, 1895, La Touche, 福建福州.

341. **Phylloscopus borealis xanthodryas** (Swinhoe). 斯氏柳鶯

D. et O. p. 268 (*Phyllopneuste xanthodryas*) ——Swinhoe 于廈門發見之,Przewalski 謂在甘肅亦甚普通. Seebohm 記載之于日

本及婆羅洲.余于漠平亦得有一標本,雖不幸失去,想當係此種也.

Baker, ii, p. 472 (*Acanthopneuste borealis* xanthodryas)——生殖于日本,千島羣島及堪察加,冬季至中國南部,印度支那及緬甸南部.

La Touche, p. 249 (*Acanthopneuste borealis xanthodryas*)——廣東海岸,廈門,遷移鳥.四川夏鳥.

室中除日本及安南鳥外,有中國鳥一: 1(?), 1889, Swinhoe, 廈門.

P. borealis borealis 上體較深暗,頭與背皆橄欖綠,第一枚初列撥風,長不及 11 mm. *P. borealis xanthodryas* 之上體較青,頭部色彩較深于背,且灰色較盛,第一枚初列撥風長逾 11 mm.

342. **Phylloscopus nitidus plumbeitarsus** Swinhoe. 鉛蹠柳鶯

D. et O. p. 270 (*Phyllopneuste plumbeitarsa*) ——Przewalski 于甘肅山中見之,甚爲普通.北京亦不少,常與*Phyllopneuste borealis*成羣集.

Baker, ii, p, 474 (*Acanthopneuste nitidus plumbeitarsus*)——生殖于貝加爾,鄂角次克,及中國西北部;冬季至中國南部,印度支那,來馬半島,緬甸,間或可至亞森毋.

La Touche, p. 246 (*Acanthopneuste nitidus plumbeitarsus*) ——雲南東部,湖北西部,甘肅,直隸,遷移鳥.

Rothschild, p. 287 ——雲南.

室中只有俄羅斯及安南鳥,因確有記載于我國,特編入本目錄.

343. **Phylloscopus nitidus saturatus** (Baker). 安南柳鶯

Baker, ii, p. 475 (*Acanthopneuste nitidus saturatus*) ——生殖于滿洲,冬季至安南,雲南及北撣部.

Rothschild, p. 287 ——雲南.

室中有中國鳥四: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1897, Père Soulie', 雲南茸㘬.

P. n. saturatus 上體極爲深暗, *P. n. plumbeitarsus* 則較淺.

344. **Phylloscopus magirostris** (Blyth), 大嘴柳鶯

Baker, ii, p. 476 (*Acanthopneuste magirostris*) ——生殖地,自克什米爾以至 Ladak, 西藏及甘肅.冬季至印度中部,孟加拉,亞森母,緬甸.

Rothschild, p. 288 ——雲南眉公河流域及蒙自.

室中有兩中國鳥: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

345. **Phylloscopus tenellipes** Swinhoe白足柳鶯

D. et O. p. 269 (*Phyllopneuste tenellipes*) —— 主棲中國中部各省, Swinhoe 見之于福建,余數得標本于江西,第只有一北京鳥耳, Seebohm 亦記載之于日本.

Baker, ii, p. 477 (*Acanthopneuste tenellipes*) —— 生殖于阿穆爾,中國北部,高麗及日本.冬季南行至中國緬甸,馬來聯邦及印度支那.

La Touche, p. 250 (*Acanthopneuste tenellipes*) —— 雲南,廣東,福建,揚子江下流,沙尾山,直隸,遷移鳥.

Rothschild, p. 287 —— 雲南蒙自.

室中只有安南及日本鳥,因既有記載于我國,特編入本目錄.

此鳥足部淺肉色,爲認識上一重要特徵.

346. **Phylloscopus lugubris** (Blyth). 沉綠柳鶯

Baker ii, p. 478 (*Acanthopneuste lugubris*) —— 生殖于嘉華,西藏及中國之西北部與秦嶺.冬季至印度東部,亞森母,緬甸,雲南,安南,暹羅,馬來諸邦及中國南部.

Rothschild, p. 288 —— 雲南.

室中有中國鳥二: 1♂, 1♀, 12, ii, 11, v, 1895, Prince d'Orléans, 雲南眉公河與雲州之間.

347. **Phylloscopus trivirgatus ricketti** (Slater). 力克黃

腹柳鶯

La Touche, 255 (*Acanthopneuste trivirgatus ricketti*) ——福建夏鳥,貴州,雲南,遷移鳥.

Roth child, p. 287 ——雲南蒙自.

室中有五標本: 1♂, 1♀, 12, iv, 1897; 2♂, 1♀, 27, 28, iv, 4, v, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本,亦有此鳥數個.

348. **Phylloscopus occipitalis coronata** (Temm. & Schleg).

花頭柳鶯

D. et O. p. 269 (*Phyllopneuste coronata*) ——廣佈中國各地,五月,九月,常于北京見之.亦有留中部各省以生殖者.

Baker, ii, p. 480 (*Acanthopneuste occipitalis coronatus*) ——生殖于西伯利亞東部,高麗及日本.冬季至中國,台灣,印度支那,緬甸,馬尼坡及東亞森母.

La Touche, p. 251 (*Acanthopneuste occipitalis coronata*) ——中國全部遷移鳥.四川夏鳥中部各省生殖鳥.

Rothschild, p. 286 ——雲南.

室中除日本及安南鳥外,有中國標本七: 5(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Père Soulié, 雲南甚胡.

349. **Phylloscopus reguloides reguloides** (Sund.). 西藏花頭柳鶯

Baker, ii, p. 481 (*Acanthopneuste trochiloides trochiloides*) ——生殖地,自阿富汗經 gilgit, 克什米爾以至嘉華,尼泊爾,錫金及西藏.冬季至孟加拉,亞森母,緬甸及德尼薩拉.

Rothschild, p. 286 —— 雲南.

室中尚無中國鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

350. **Phylloscopus reguloides fokiensis** Hartert. 福建花頭柳鶯

La Touche, p. 252 (*Acanthopneuste reguloides fohkiensis*) ——福建留鳥.沙尾山,遷移鳥.

室中有兩福建鳥: 1♂, 1(?), 6, iv, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

351. **Phylloscopus reguloides disturbans** (La Touche). 雲南花頭柳鶯

Acanthopneuste trochiloides disturbans, La Touche, Bull. B. O. C. xliii, p. 22, (1922), 蒙自.

Rothschild, p. 286 —— 雲南.

室中有四標本: 1♂, 1(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 1(?), 1897, Père Soulie', 雲南苴却. 又另有一四川打箭爐鳥,余以

爲亦當逮此型.

Stuart Baker 之 *Acanthopneuste trochiloides harterti*, 想係相同.

352. Phylloscopus reguloides claudiae (La Touche).

Acanthopneuste trochiloides claudiae, La Touche, Bull. B. O. C. xliii, 1922, p. 22, 蒙自.

Rothschild, p. 286 —— 雲南.

室中有兩標本: 1(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 1(?), 1900, 雲南宜刼.

Phylloscopus reguloides (=*Acanthopneuste trochiloides*) 一種,據余所知,共有七亞種,茲特以檢索表示其區別如下:

A. 下體黃或白而參雜黃色.

a. 側翮內緣白色不發達.

1a.前頭,頭項及眉斑,色彩深暗, ……………… *P. r. reguloides.*

1b.前頭,頭項及眉斑,黃色較盛.

2a.上體較深暗,頭部側綫不明顯.……… *P. r. O.-granti.*

2b.上體較黃綠,頭部側綫極明顯.

3a.初列撥風之次枚,其長度在七與八,或八與九之間.……………………………… *P. r. fokiensis.*

3b.初列撥風之次枚與第十枚等長,或間于九與十.……………………………… *P. r. disturbans.*

b. 側翮內緣之白色部較發達. ………………… *P. r. harterti.*

c. 側翮之內瓣全白. ……………………………… *P. r. davisoni.*

B. 下體白而渲染橄欖靑. ………………………… *P. r. claudiae.*

除四型旣載于本目錄外,其餘三型之分佈地點如下:

1. *Phylloscopus reguloides O.-granti* (La Touche).——福建西北部夏鳥.

2. *P. r. harterti* (Stuart Baker)——生殖于亞森母,雅魯程布江之南岸,馬尼坡.冬季至孟加拉,緬甸,雲南.

3. *P. r. clavisoni* (Oates)——生殖于緬甸,嘉連尼,德尼薩拉,三,四,五,十,等月亦都有記載于雲南.

余以爲若得將各型標本集于一處而作精密之比較,其中必有重名.

353. **Seicercus affinis** (Hodgson). 灰頭捕蠅鶯

D. et O. p. 273 (*Abrornis affinis*)—— Przewalski 于甘肅見之.室中只有安南鳥.

354. **Seicercus burkii tephrocephala** (Anderson). 扁嘴捕蠅鶯

D. et O. p. 272 (*Cryptophala tephrocephala*)——歲至中國西部及漠平以營巢生殖者,實屬不少.

Rothschild, p. 288 —— 雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥三: 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1900, 雲南苴却.

355. **Seicercus burkii intermedia** (La Touche). 賴氏扁嘴捕蠅鶯

La Touche p. 257 —— 雲南遷移鳥.廣東冬鳥.福建西北部夏鳥.

室中有兩福建鳥: 1♂, 16, iv, 1897, 1♂, 14, iv, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余試以 La Touche 兩掛墩鳥 (*intermedia*) 與四川雲南鳥 (*tephrocephala*) 比較,量度上及一般體色,皆無差別,特福建鳥頭部之黑色,不及四川雲南鳥之明顯.但此等差別,或係個體的,或與年齡及季節有關,須有大幫標本比較始能定奪.最低限度,吾人可謂 *intermedia* 與 *tephrocephala* 差別極微弱也.

Seicercus burkii 一種,亞種頗多,其中實大大不乏重名,茲謹依文獻記載,試作檢索表區別之:

A. 頭項中綫及頭之兩側青色,不着或微着灰色.

a. 下體淡黃,眼圈狹而完整. .... *S. b. burkii.*

b. 下體鮮黃,眼圈寬闊,破缺于眼之上方. .... *S. b. cognitus.*

B. 頭項之一部青黃,中淺灰而雜青色. .... *S. b. intermedia.*

C. 頭項中淺及頭之兩側灰色,不着或微着青色.

c. 頭項之灰色及黑色極明顯,翼長55mm.…*S. b. distincta*.

d. 頭項之灰色及黑色無明瞭之界限.

1a.翼長60mm.以下.………………………… *S. b. tephrocephala*.

1b.翼長60mm.以上.……………………………… *S. b. valentini*.

除本目錄所記載之兩亞種外,其餘各型之分佈地點如下:

1. *Seicercus burkii burkii* (Burton).——自喜馬拉雅之西北,克什米爾以至馬尼坡及雅魯藏布江東部與南部山中,

2. *S. b. cognitus* (La Touche).——福建西北部夏鳥.福建中部,冬鳥.

3. *S. b. distincta* (La Touche).——雲南,安南.

4. *S. b. valentini* (Hartert).——雲南,廣東,福建,湖北,甘肅.

356. **Seicercus poliogenys** (Blyth). 灰面捕蠅鶯

Baker, ii, p. 491 —— 自尼泊爾以至亞森母之極東,雅魯藏布江之南北兩岸,馬尼坡及雲南.

Rothschild, p. 289 —— 雲南.

室中只有安南標本,因旣有記載于雲南,特編入本目錄.

357. **Seicercus castaneiceps sinensis** (Rickett). 黃腹捕蠅鶯

La Touche, p. 258——福建西北部夏鳥.福建中部冬鳥.

室中有四川鳥一,福建鳥四: 1(?), 1902, 四川打箭爐; 2♂, 2♀, 25, 28, iv, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余亦于廣西猺山射得之.

358. **Abroscopus schisticeps ripponi** (Sharpe). 黃眉捕蠅鶯

Baker, ii, p. 497 (*Abrornis schisticeps ripponi*)——雲南及撣部.

Rothschild, p. 289 (*Seicercus ripponi*)——雲南.

室中除安南標本外,有中國鳥四: 1(?), 1902, 四川打箭爐; 3(?), 1897, Père Soulie', 雲南其均.

359. **Abroscopus albogularis fulvifacies** (Swinhoe). 棕面捕蠅鶯

D. et O. p. 272 (*Abrornis fulvifacies*)——中國南部各省之留鳥,自湖北西部以至漠平皆可見之,亦曾于福建得有標本.

La Touche, p. 259 (*Abrornis albogularis fulvifacies*)——福建,四川,留鳥,亦有記載于雲南.

Rothschild, p. 288 (*Abrornis albogularis fulvifacies*)——雲南.

室中有中國鳥三: 3♂, 19, v, 9, x, 10, xi, 1896, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余亦于廣西猺山射得之.

360 **Horornis fortipes davidiana** (Verreaux). 大衛叢鶯

D. et O. p. 255 (*Arundinax davidiana*) —— 于漢平得一單獨之標準標本.

La Touche, p. 264 (*Horornis fortipes sinensis*) —— 廣東,福建,留鳥.揚子江流域夏鳥及留鳥.四川,揚子江上游及中流,留鳥.

Rothschild, p. 284 —— 雲南,

室中有七標本: 3♂, 2♀, 2(?), xi, xii, 1895, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥數個.

La Touche, 以 *Horornis sinensis* (=*H. fortipes sinensis*) 記載福建鳥 (Bull. B. O.C. vii, p. xxxvii. 1898), 于 Birds of Eastern China 中且舉其分佈地點如上.但當其在 Bull. B. O. C. 報告新種時,只將其與 *H. fortipes* (=*H. f. fortipes*) 比較而不與 *H. davidiana* (=*H. f. davidiana*) 比較,未免過于疏忽.以余比較研究結果, *H. f. sinensis* 與 *H. f. davidiana* 實係相同,爲保持優先權計,本目錄應採用 Verreaux 之 *H. f. davidiana.*

361. **Horornis cantans canturians** (Swinhoe). 南叢鶯

D. et O. p. 243 (*Homochlamys canturiens*) —— 爲中國南部,海南及台灣之留鳥,上海附近亦頗多,中部及西部則未嘗見之.

Baker, ii, p. 511 —— 廣佈中國全境,夏季北居,冬季南行至台灣及菲律賓.

La Touche, p. 261 —— 雲南,遷移鳥.廣東,福建,冬鳥.揚子江下流,留鳥及夏鳥.北方分佈界限直至秦嶺.

室中除安南鳥外,有一中國鳥: 1(?), 24, x, 1864, l'Abbe' Furet, 中國.

此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥一個.

362. **Phyllergates coronatus coronatus** Jerdon & Blyth. 金頂鶯

Rothschild, p. 282 —— 雲南.

室中只有安南鳥.又余前于廣西猺山射得之.

363. **Suya criniger parumstriata** David et Oustalet. 大衛山鶯

D. et O. p. 259 —— 于福建多樹之山中得之.

La Touche, p. 269 —— 廣東,福建,揚子江下流(江西,安徽,江蘇),留鳥.

室中只有一標本: 1♂, 22, vi, 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

S. c. parumstriata 本無記載于雲南,但Prince d'Orléans之標本,與David et Oustalet及La Touche之形態記載完全脗合.

余曾于廣西猺山得一標本.

364. **Suya cringer striata** (Swinhoe). 斑山鶯

D. et. O. p. 258 —— Swinhoe 始發見于台灣,及後余于江西,四川,陝西秦嶺之北部皆得見之.

室中有四標本: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐.

此四標本,與雲南之 *S. c. yunnanensis* 相似而上體較淺淡.

365. **Suya cringer yunnanensis** Harington. 雲南斑山鶯

Baker, ii, p, 521 ——雲南及撣部.

Rothschild, p. 281 ——雲南目緬,漾濞,騰越及眉公河流域.

室中有兩標本: 2(?), 1896, 1897, Père Soulié, 雲南苴却.

366. **Suya superciliaris superciliaris** Anderson. 白眉山鶯

D. et O. p. 260 —— Anderson 于雲南發見之,但余絕未遇之于四川.

Baker, ii, p. 524 —— 緬甸,撣部,雲南,福建.

La Touche, p. 268 —— 雲南,廣東,福建,留鳥.

Rothschild, p. 281 —— 雲南目緬,騰越,大理,雲南府,蒙自.

室中只有安南鳥,以既有記載于我國,特編入本目錄.

余于廣西猺山射得之,此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

367. **Prinia flaviventris sonitans** Swinhoe. 黃腹鷦鶯

D. et O. p. 262 —— 中國南部,海南,台灣.

La Touche, p. 272 —— 廣西,廣東,福建,留鳥.

室中除安南標本外,有中國鳥二:1♂,1♀,20, 30, x, 1898, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.

368. **Prinia inornata extensicaudata** (Swinhoe).東南鷦鶯

D. et O. p. 257 (*Drymoepus extensicaudata*) ——爲中國所特有,在江西與四川皆甚普通.喜在丘陵平野,不至高山.

La Touche, p. 270 —— 廣東,廣西,江西,福建,留鳥.

室中除多數安南鳥外,有中國鳥一: 1(?), 1904, La Touche, 中國.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥數個.

REGULIDÆ. 戴菊科

形體甚小;羽毛軟厚;有不甚發達之頭冠;嘴小而直,有嘴鬚;翼短而圓,第四,五,六枚之初列撥風羽長度相若;尾短于翼,形式不一;跗蹠纖長.

本目錄共記載戴菊科兩屬五種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共十六個.

369. **Regulus regulus japonensis** Blakiston. 東戴菊

D. et O. p. 276——日本,滿洲及中國北部.在西伯利亞則為 *Regulus cristatus* 所替代.

La Touche, p. 275——福建,江蘇,冬鳥.沙尾山,遷移鳥.直隸東北部冬鳥及遷移鳥.

室中只有日本鳥.因有記載于我國,特編入本目錄.

370. **Regulus regulus himalayensis** Jerdon. 喜馬拉雅戴菊

D. et O. p. 276——余于成都北部多樹之山中及漢平皆得有標本. Przewalskr, 曾以 *Regulus himalayensis?* 記載其得自甘肅之標本.

Baker, ii, p. 539——阿富汗,克什米爾,西摩拉,嘉華,尼泊爾,錫金,不丹.亦有記載于中國西部.

室中有中國鳥九: 1(?), 1891, Prince d'Orléans, 西藏; 2♂, 2♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1898, Biet, 四川打箭爐.

371. **Regulus regulus yunnanensis** Rippon. 雲南戴菊

Baker, ii, p. 541——雲南及北撣部.

Rothschild, p. 312——雲南揚子江流域,麗江,大理,漾濞等處.

室中有兩標本: 2(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸却.

Regulus regulus (=*Regulus cristatus*) 有比較明顯之五型,茲以檢索表示其區別:

A. 後頸不渲染灰色. .... *R. r. regulus.*

B. 後頸渲染灰色.

a. 上體橄欖青,下體白而多着赭色. .... *R. r. japonensis.*

b. 上體較深暗,下體赭色稍遜. .... *R. r. himalayensis.*

c. 上體極深暗,下體白而帶灰. .... *R. r. yunnanensis.*

d. 上體灰色甚盛,下體白而帶灰. .... *R. r. tristis.*

除 *japonensis, himalayensis, yunnanensis* 之地理分佈如上所舉外,其餘兩型之地理分佈如下:

1. *Regulus regulus regulus* (L.)=*Regulus cristatus cristatus.*——歐洲古北極區及西伯利亞.

2. *Regulus regulus tristis* (Pleske).——裏海,天山,撒馬爾罕,冬季或可至阿富汗及俾路支之間之印度邊境.

以上五型,室中皆有標本,故極易于比較.

372. **Cephalopyrus flammiceps olivaceus** Rothschild. 青戴菊

Baker, ii, p. 545. (*Cephalopyrus flammiceps*)——喜馬拉雅帶自阿富汗,Gilgit以至不丹,居地高約3,000—10,000 ft.冬季降落平原.雲南北部及四川亦有之.

Rothschild, p. 312——雲南騰越,萁却,猓姑寨等處.

室中有三標本: 1(?), 1896, Dejéan, 四川打箭爐; 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1900, 雲南萁却.

室中亦有印度鳥,但黃色較盛而橄欖色較遜,與雲南鳥有顯著之差別.印度鳥當名曰*Cephalopyrus flammiceps flammiceps* (Burton).

373. **Lophobasileus elegans** (Prjevalski).西戴菊

Dresser, A Manuel of Palaearctic Birds, p. 91——青海南部山中.

室中有兩標本: 1♂, 1♀, 中國,甘肅,老虎口,柏林博物館送來.

ORIOLIDÆ. 黃鶯科

普通性狀與一般鳴禽類相若,但幼鳥有條紋,爲區別之一要點.有嘴鬚;第一枚撥風羽,長逾次枚之半,此又與掠鳥科不同.嘴峯長壯而微灣;翼頗尖長,撥風羽十;尾稍短于翼,尾羽十二;跗蹠短而被盾狀鱗.食虫性及食果性.生殖期無殊于一般鳴禽類,巢常成籃狀,以樹葉苔蘚等物造成,懸于

二枝之間,卵之多寡,大小,顏色不一.爲熱帶或溫帶鳥類.

舊世界之黃鶯科,只有 *Oriolus* 一屬,其餘 *Mimeta* 及 *Sphecotheres* 兩屬,爲美洲所特有.本目錄所記載之 *Oriolus*, 共有五種及亞種.經余作個別研究而記入本目錄之中國鳥,共十三個.

274. **Oriolus chinensis deffusus** Sharpe. 黃鶯

D. et O. p. 132 (*Oriolus cochichinensis*) ——夏季見于西伯利亞之東及中國全部.九月乃向中國南部,交趾支那,印度之東部等處而遷移.

Baker, iii, p. 7 (*Oriolus chinensis indicus*) ——此鳥生殖于中國東部之北,滿洲及高麗,西行至大鳥里及烏蘇里.南部生殖于中國南部,海南,台灣,又或可在雲南及北撣部.冬季由北方南行至印度支那,馬來半島,南緬甸等處,間有少數至緬甸北部,亞森母,印度之東北部,再南行而直至錫蘭.

La Touche, p. 277 (*Oriolus chinensis indicus*) ——中國全部,夏鳥.在中國東南部,偶或可爲留鳥.

Rothschild, p. 336 (*Oriolus chinensis indicus*) ——四,五,九,十等月,皆有記載于雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥九: 1(?), 1896 Déjean, 四川打箭爐; 3(?),1895,1898,Biet, 四川打箭爐;1(?), 1898, M. François, 廣西龍州; 2(?), 1907, Père Seguin, 興甯 (Shinen); 1(?), 1910, Gladin,

甯波; 1(?), 1923, M. Nadar, 舟山.

余于廣西猺山射得不少.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

在昔每以 Jerdon 之 *Oriolus chinensis indicus* 記載此鳥,最近則概採用 Sharpe 之 *Oriolus chinensis diffusus*.

275. **Oriolus chinensis tenuirostris** Blyth. 纖嘴黃鶯

Baker, iii, p. 9——生殖地.自尼泊爾至亞森母,馬尼坡,孟加拉之東,緬甸,德尼薩拉之南,撣部,雲南及暹羅.

Rothschild, p. 336——十二月,一月,四月皆有記載于雲南.

室中只有安南標本.以既有記載于雲南,特編入本目錄.

276. **Oriolus traillii traillii** (Vigors). 朱鶯

Rothschild, p. 336——雲南麗江及騰越.

室中除大批安南鳥外,有雲南鳥一: 1♂(未成長), 1895, Prince d'Orléans, 雲南大理府.

安南之 *Oriolus traillii robinsoni* Delacour 與 *O. t. traillii* 十分相似,惟 *O. t. robinsoni* 雄成長鳥上體之朱色較鮮明,不及 *O. t. traillii* 之深暗,嘴峯較短壯,非若後者之纖長耳.

377. **Oriolus traillii nigellicauda** (Swinhoe). 海南朱鶯

D. et O. p. 133 (*Psaropholus nigellicauda*)——海南.

室中只有安南鳥.以最先係發見于海南,特編入本目錄.

台灣之 *Oriolus traillii ardens* (Swinhoe),與海南鳥無體色上之差別,特量度稍大而嘴稍厚耳.

378. **Oriolus mellianus** Stresemann. 銀鶯

Oriolus traillii mellianus Stresemann, Ornith. Monatsber., xxx, pt. 3, p. 64, 1922, 廣東北江; Mell, Beiträge zur Fauna Sinica, Archiv. für Naturgeschichte, 1922, Abteilung A, 10, Heft, p. 45, 廣東北江; Meinertzhagen, Ibis, 1923, p. 95, 廣東.

Oriolus mellianus Stresemann, Journal für Ornithologie, Lxxvii, Heft 2, p. 324, 1929, 廣西猺山; Delacour, Revue d'Histoire Naturelle, vol. xi, No. 6, 1930, p. 339, 廣西猺山; Stresemann, L'Oiseau et Revue française d'Ornithologie, no. 4, 1931, p. 202, 廣西猺山; Delacour, Les Oiseaux de l'Indochine, 安南.

室中有三標本,乃 Delacour 至廣州參觀中山大學鳥類研究室時,向辛樹幟先生求贈得來者: 1♂(幼), 13, vii, 1928, 羅香,廣西猺山; 1♂(成長), 17, v, 1929, 羅香,廣西猺山; 1♀, 6, v, 1930, 楊梅浪,廣東北江.

余于廣西猺山多射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥三個.

柏林博物館鳥類研究室主任 Stresemann 博士,對于此鳥,曾作極透闢之研究,最近(1931年四月),又用法文于法國鳥

類學雜誌上作一結束研究.茲特引譯其一小段如下,至于形態,生態,及羽毛構造等問題,因篇幅太長,暫行略去:

"二十世紀以來,中國鳥類目錄上最可注意之增加品,厥爲一種美麗之Loriot之發見,其體色與同屬各種,絕不相同,此Loriot爲何,卽 *Oriolus mellianus* 是也.

歷史 —— 自 1917 年 Rudolf Mell 博士于廣東東北部得一雌鳥後,六載以還,再無發見.此標本採期爲五月九日,採地名龍頭山,高度約1,170密達,位于北緯24°7, 東經 113°7, 與 Tsogok Wakn 村相距不遠.自此以後,土匪蜂起,行旅裹足,遂不能再事採集.

1927 年十二月十二日 Jean Delacour 先生于東甫寨南部之Bokor得一雌成長鳥,于是此新種之度冬地點,又稍明瞭.

Delacour 以後一年,卽 1928 年,廣東中山大學辛教授所領導之採集隊,又于廣西猺山採得之,在700以至1,200密達之高度,此鳥並不甚稀.其初只有幼雄鳥及雌成長鳥,1929至1930 年間,始得見其體羽鮮麗之雄成長鳥.同時,美人 Smith 又于暹羅東南部獲得之." 下略.

我國境內 *Oriolus* 之五型,互似之點頗多,難于識別,可用下列檢索表檢得之:

A. 一般體色黃及黑.

a. 後頭黑帶斑,寬逾15mm.嘴峯短而壯.*O. chinensis diffusus.*

b. 後頭黑帶斑不逾12mm.嘴峯較纖長. .... *O. c. tenuirostris.*

B. 一般體色紅及黑.

c. 紅色之部爲暗赤色.……………………………… *O. t. traillii.*

d. 紅色之部爲鮮朱色.……………………………… *O. t. nigellicauda.*

C. 一般體色爲銀色及黑色.………………………… *O. mellianus.*

STURNIDÆ. 椋鳥科 *

普通性狀與一般鳴禽類相似.幼鳥有條紋;無嘴鬚;第一枚撥風羽長不及次枚之半,撥風羽十;尾羽十二.

巴黎博物館鳥類研究室椋鳥科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有六屬十四種及亞種.經余作個別研究後而記載于本目錄之中國鳥,共三十七個.

379. **Pastor roseus** (Linn.). 粉紅椋鳥

Baker, iii, p. 29 —— 生殖于歐洲東南部,亞洲之西部及中部以至土耳其斯坦.冬季見于印度.

La Touche, p. 288 —— 上海.

室中只有中央亞細亞標本,以既有記載于上海,特編入本目錄.

380. **Sturnus vulgaris vulgaris** L. 椋鳥

* 椋鳥科一名詞,來自日本,因暫無更妥當之譯名,姑引用之.

Dresser, A Man, of Pal. Birds, p. 399 —— 歐洲自法羅羣島,那威之北直至地中海;北非洲;亞洲自西伯利亞以至印度;有一次見于格林蘭.

室中有一四川鳥,製作極劣,難作精密考究: 1(?), 1891, Prince d'Orléans, 四川打箭爐.

381. **Sturnus vulgaris poltaradskyi** Finsch.

La Touche, p. 281 —— 山東,直隸,遷移鳥,

室中標本皆非來自我國.因旣有記載,特編入本目錄.

382. **Spodiopsar cineraceus** (Temm.). 灰椋鳥

D. et O. p. 361 (*Sturnus cineraceus*) —— 最初發見于日本,秋冬兩季見于中國各地.夏季度夏于蒙古高原.

Baker, iii, p. 36 —— 生殖于西伯利亞東部,日本,中國北部及蒙古.冬季南行至中國南部,海南及台灣,有一次直抵緬甸.

La Touche, p. 282 —— 中國全部以至直隸之南,冬鳥.沙尾山遷移鳥.直隸夏鳥及遷移鳥.

室中除安南及日本鳥外,有中國鳥十四: 2(?), 1896. M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1♀, iii, Père David, 北京; 1(?), 1891, Prince, d'Orléans, 四川打箭爐; 1(?), 1901, Père Grosjean, 四川打箭爐; 1(?), 1912 年冬季, Père Cavalerie, 雲南 San-chouen; 2(?), 1911, Père Cavalerie, 貴洲; 2(?), Père Seguin, 興甯; 1♂, i, xii, La Touche, 福建; 3♀, 1910, Gladin, 寧波.

383. **Spodiopsar sericeus** (Gmelin). 絲光椋鳥

D. et O. p. 362 (*Sturnus sericeus*) —— 終年皆可見于南中國之大部,自浙江以至四川,無不有之.其分佈綫之最北點,據余所知,厥爲陝西之漢中府,余曾于該處見之.

La Touche, p. 283 —— 中國南部自浙江以至四川,陝西南部,安徽南部,留鳥.

Rothschild, p. 338 (*Sturnia sericea*) —— 雲南.

室中除安南標本外,有中國鳥八: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1901, Père Grosjean, 四川打箭爐; 1(?) 1911, Père Cavalerie,貴州; 1(?), 1854, M. Montigny, 上海; 2♀, 16, 24, iv, 1909, M. Gladin, 甯波.

此次寄來之湖南南部標本中,有此鳥一個.

384. **Sturnia sturnia** (Pallas.) 塞椋鳥

D. et O. p. 362 (*Temenuchus dauricus*) —— Pallas 于蒙古之大鳥里發見之,當其往印度馬來度冬時,道經中國西部.每年必于北京附近見數個.

La Touche, p. 284 —— 中國西部遷移鳥,廣東冬鳥,揚子江下流遷移鳥,中國東北部遷移鳥及夏鳥.

室中除菲律賓,馬拉甲等處標本外,有中國鳥三: 2♂, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐.

蒙古克魯倫河之標本,足下標簽記作 *Sturnia violacea* (Bodd.),實係錯誤,經既改正,在外觀上,*S. violacea*與 *S. sturnia* 本甚相似,但前者頭頸乳脂灰而非木灰.又 *violacea* 頰部有一深栗色塊斑而 *sturnia* 則無, *sturnia* 後頭有一紫黑色塊斑而 *violacea* 則無.

385. **Sturnia violacea** (Bodd.). 赤頰椋鳥

La Touche, p. 286 —— 沙尾山,浙江,福建,遷移鳥.

室中只有日本,菲律賓,馬拉甲等處標本,尚無中國鳥.以經有記載于我國,特編入本目錄.

386. **Sturnia malabarica nemoricola** Jerdon. 栗尾椋鳥

Rothschild p. 338 —— 二月至十月,于雲南蒙自,長龍(Chang-lung), 南丁,怒江與瑞麗江分水界,麗江,皆得有記載.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

387. **Sturnia sinensis** (Gmelin). 噪林鳥

D. et O. p. 363 (*Temenuchus sinensis*) —— 此鳥在印度支那度冬,夏季則羣至中國南部,喜至人家附近,營巢于屋項洞

穴中.

Baker, iii, p. 37 (*Sturnia turdiformis*) ——生殖于中國,台灣及日本.冬季至印度支那,暹羅,新加坡,祕古.Hume亦于馬尼坡見之.

室中除大批安南標本外,有中國鳥二: 1(?), 1898, M. François, 廣西龍州; 1♂, i, vii, La Touche, 福建.

安南標本中,有白色之體部完全代以銹赤者.

余曾于海南島射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

388. **Gracupica nigricollis** (Paykull). 黑頸白頭鶯

D. et O. p. 364 —— 自中國之極南以至福建一帶皆可見之,留鳥.

Baker, iii, p. 49 —— 中國南部,印度支那,擇部,暹羅,緬甸之南部.

La Touche, p. 289 —— 福建,廣東,廣西,雲南西南部,留鳥.

Rothschild p. 339 —— 雲南.

室中只有安南鳥.

389. **Acridotheres tristis tristis** (L.). 印度八哥

Rothschild, p. 338 —— 雲南.

室中只有印度及安南鳥.

390. **Acridotheres grandis grandis** Horsf. & Moore. 大八哥

Baker, iii, p. 59 (*Aethiopsar grandis grandis*) —— 緬甸西南部,緬甸東部,自南撣,嘉連尼以至德尼薩拉;雲南,暹羅,及交趾支那.

Rothschild, p. 339 —— 雲南.

室中只有安南鳥.

391. **Acridotheres cristatellus cristatellus** (Linn.). 八哥

D. et O. p. 365 —— 廣佈中國南部各地,中國人稱之曰八哥.最北之分佈地點,爲陝西漢中府.北京之籠鳥,概來自南方,以其歌聲既優美而又能效人言,故人多愛之.

La Touche p. 291 (*Aethiopsa cristatellus cristatellus*) —— 中國南部,自雲南之南以至揚子江一帶皆有之.

室中有七標本: 2(?), 1907, Père Seguin, 興甯(翼 137, 141 mm.); 2♂, 1♀, 6, vi, 1908, gladin, 寧波(翼 ♂ 144, ♀ 135 mm.); 2(?), 1923, M. Nadar, 舟山(翼 140, 146 mm.). 又以上各鳥,尾長 85—90mm.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之湖南南部標本中,亦有此鳥數個.

392 **Acridotheres cristatellus brevipennis** Hartert.

Acridotheres cristatellus brevipennis Hartert, Nov. Zoo. 1910, p. 250, 瓊州.

Rothschild, p. 339 (Acridotheres cristatellus cristatellus)——雲南.

Delacour Les Oiseaux de l' Indochine, iv, p. 250——安南.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥二: 1(?), vii, 1910, Mme. Comby, 雲南; 1(?), 1921, Père Cavalerie, 雲南 San-chouen. 翼 133, 134mm. 尾 75mm.

據 Hartert 博士研究結果,謂海南鳥之嘴較纖,翼較短,乃爲之另立一亞種曰 *brevipennis*, 意謂短翼也.博士舉海南鳥之標準量度如下:翼 125; 尾 75. 跗蹠 37; 嘴峯 25mm.

Delacour 以安南鳥爲 *brevipennis*, 舉其翼長爲 115—137mm.

Rothschild 以雲南鳥爲 *cristatellus*, 但以余所考驗之兩雲南鳥言之,實與 *brevipennis* 較近而與 *cristatellus* 較遠,故余暫以 *brevipennis* 記載之.但只有二標本而其性別又不明瞭,頗難作確切之決定也.

Eulabes 一屬 (=*Gracula*), 有將其歸入 *Sturnidae* 中者,有因其有嘴鬚而爲之自立一科曰 *Elabetidae* 者. David et Oustalet 于Les Oiseaux de la Chine中,共記載 *Eulabes* 兩種: 1. *Eulabes sinensis* Swinhoe. 見于廣州鳥鋪及江西; 2. *Eulabes hainana* Swinhoe. 發見于海南.室中安南品類不少,但皆非中國種,故不記載于本目錄.

PLOCEIDÆ. 織布鳥科

本科各鳥,其鼻孔之一部侵入前頭,與嘴峯之距離較近,而與會合綫之距離較遠,只此一特徵,旣足與以上各科區別.撥風羽十,與雀科之只有九枚者不同.嘴錐形,無缺刻.喜以禾本科穀實供食.通常爲留鳥.

巴黎博物館鳥類研究室織布鳥科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有兩屬六種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共十二個.

393. **Munia arizivora** (L.). 占卦文鳥

D. et O. p. 344 (Padda aryzivora) —— 在中國南部各省,每見養諸籠中.

La Touche, p. 293 —— 江蘇海岸(?),福建,廣東,留鳥.

室中標本皆非來自我國.有數標本,完全白化.

394. **Munia atricapilla rubronigra** Hodgson. 黑頭文鳥

D. et O. p. 342 (*Munia sinensis*) —— Swinhoe 謂見于中國西南部云:

Baker, iii, p. 81 —— ······ 雲南,撣部,安南,暹羅,緬甸,中國西部.

La Touche, p. 294 —— 廣東及雲南南部,留鳥.

Rothschild, p. 335 —— 雲南.

室中標本,皆非來自我國.

395. Munia striata squamicollis Sharpe. 白背文鳥

D. et O. p. 343 (*Munia acuticauda*) —— 廣佈中國南部,台灣,海南,揚子江流域及西藏邊境.

Baker, iii, p. 86 (*Uroloncha striata squamicollis*) —— 中國西部,撣部之東,雲南之北及中國南部.

La Touche, p. 296 (*Uroloncha striata squamicollis*) —— 廣東,福建,江西,江蘇(揚子江以南).

室中有中國鳥六: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1899, 四川打箭爐; 1♂, 1♀, 3, 20, x, La Touche, 福建; 1(?), 1907, Pere Seguin, 興甯.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

396. Munia striata subsquamicollis (Baker). 鱗羽白背文鳥

Baker, iii, p. 86 (*Uroloncha striata subsquamicollis*) —— 由緬甸以至新加坡及蘇門答拉,暹羅,交趾支那,雲南南部,海南及台灣.

Rothschild, p. 335 —— 雲南.

室中有中國鳥三: 1(?), 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 1(?), 1848, M. Montigny, 中國.

Munia striata squamicollis 與 *M. s. subsquamicollis* 極相似,但前

者胸部赭褐而鱗斑淺赭;後者胸部黑褐,鱗斑白而帶赭.

397. **Munia puntulata topela** Swinhoe. 斑腹文鳥

D. et O. p. 343 (*Munia topelia*) ——中國南部留鳥,台灣,海南亦有之,在江西則甚稀,余只獲得一次耳.

Baker, iii, p. 92 (*Uroloncha puntulata topela*) ——中國南部,海南,台灣,雲南及撣部.

La Touche, p. 295 (*Uroloncha puntulata topela*) ——江西,福建,廣東,留鳥.

Rothschild, p. 335——雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥二: 1♂, 1♀, 20, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

幼鳥自腮以下黃褐,無喉部之濃者古律色,亦無胸脇等部之鱗斑.

398. **Amandava amandava amandava** (Linn.). 梅花雀

Baker, iii, p. 96 ——錫蘭,印度,上緬甸,交趾支那,暹羅,新嘉坡,爪哇.

Rothschild, p. 336 ——雲南.

室中除大批安南標本外,有一中國鳥:1(?), 15, iii, 1910, Père

Cavalerie, 貴州.

FRINGILLIDÆ. 雀科

與文鳥科極相似,鼻孔亦近于前頭,與嘴峯之距離較近而與會合綫之距離較遠.初列撥風羽只有九枚,爲與文鳥科區別之唯一特徵.雌雄多互異,幼鳥亦與成長鳥不同.同在成長鳥中,夏羽與冬羽,亦每有極大之差別.爲留鳥或遷移鳥.主以穀實爲食,兼及菓子及昆虫.

David et Oustalet 于 Les Oiseaux de la Chine, 以 *Fringillidae* 及 *Emberizidae* 兩科分別記載之.Stuart Baker于 Birds of British India 第二版則將本科分爲三亞科.本目錄採用 Stuart Baker 之系統,並以檢索表示三亞科之區別如下:

A. 上顎侵越眼眶前部之垂直綫;下顎之下緣幾成一直綫.
.... *Coccothraustinae.*

B. 上顎不侵越眼眶前部之垂直綫.

a. 下顎之下緣成尖凹角狀;上下兩顎交接處,極爲密緻.
.... *Fringillinae.*

b. 下顎之下緣角度極深,上下兩顎之間有一空隙.........
.... *Emberizinae.*

(未　　完)

代數數域論

(Die Theorie der algebraischen Zahlkőrper)

德國 David Hilbert 氏原著

華羅庚譯

赫爾婆脫(Hilbert)氏於今日算學界上之地位,殆讀算學者類能知之,毋待羅庚作深長之介紹也.本文原發表於 Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4 中已成爲代數數論之經典,曾爲 Humbert 及 Got 二氏譯爲法文,載 Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série 3, Tome I, II, III 中,並加註釋及校訂,惟譯文因校對不愼,致多謬誤,去年出版之赫氏全集第一册中亦收及此文,重經校訂,更爲美備.羅不辭譾陋,譯此巨著,蓋以其能有助於我國治代數數論之學者也.文中亦間雜以譯者之註釋及補充.其簡短者卽雜於本文中言之,而冠以"譯者按"等字樣以示區別.其繁複者,則擬於譯竣後之補充中言之.

文中常有如〔Kronecker, (3)〕之引註號,其意義卽謂可參考本文之末之論文索引中 Kronecker 氏之第三篇.

第一篇

普通數域論

I. 代數數及數域

§1. 數域及共軛數域.

若 α 爲一 m 次方程式

$$\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+a_2\alpha^{m-2}+\cdots\cdots+a_m=0$$

之根,式中$a_1, a_2, \cdots, a_m$爲有理數,則 α 名爲代數數.

若$\alpha, \beta, \cdots, \varkappa$爲任意有限個代數數,則$\alpha, \beta, \cdots, \varkappa$之諸有盤係數之有理函數,成一組代數數,此組代數數,卽名之爲一數域 (Zahlkörper, Körper oder Rationalitätsbereich)〔Dedekind (1,2) Kronecker (16)〕.若取特例,可知二數之和,差,積商仍爲此域內之一數,故域之定義具有對加減乘除而不變之性質.

定理一. 凡一域 k 內,有一數 ϑ 能將此域內其他諸數,皆表爲 ϑ 之有理係數之整函數.(譯者按本文之所謂整函數係專指多項式言)

若m爲 ϑ 所能適合方程式之最低次數,則 ϑ 名爲此域 k 之次數, ϑ 名爲定此域之數. ϑ 所適合之方程式在有理數域內當爲不可化(英文Irreducible).反之,凡此方程式之一根,皆可一定m次域,若$\vartheta', \vartheta'', \cdots, \vartheta^{(m-1)}$爲該方程式之其他$(m-1)$個根,則 $\vartheta', \vartheta'', \cdots, \vartheta^{(m-1)}$ 各所定之域$k', k'', \cdots, k^{(m-1)}$謂之$k$之共軛域(英文 Conjugate field). 若 α 爲域 k 內之任意一數,則可表爲

$$\alpha = c_1 + c_2\vartheta + \cdots\cdots + c_m \vartheta^{m-1}$$

式中$c_1, c_2, \cdots, c_m$爲有理數.施變換$t'=(\vartheta, \vartheta'), t''=(\vartheta, \vartheta''), \cdots, t^{(m-1)}=(\vartheta, \vartheta^{(m-1)})$於 α 可得

$$\alpha' = c_1 + c_2\vartheta' + \cdots\cdots + c_m \vartheta'^{m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha^{(m-1)} = c_1 + c_2\vartheta^{(m-1)} + \cdots\cdots + c_m(\vartheta^{(m-1)})^{m-1},$$

此名爲 α 之共軛數.

§2. 代數整數.(Algebraic integer)

一代數數 α 若適合於方程式

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + a_2\alpha^{m-2} + \cdots\cdots + a_m = 0,$$

其係數$a_1, a_2, \cdots, a_m$皆爲有理整數,則 α 名爲代數整數.

定理二. 凡代數整數 $\alpha, \beta, \cdots, \varkappa$ 之有盤係數之整函數F,仍爲一代數整數.

證：以$\alpha', \alpha'', \cdots, \beta', \beta'', \cdots; \cdots; \varkappa', \varkappa'', \cdots$各表$\alpha, \beta, \cdots, \varkappa$之共軛數，作

$$F(\alpha, \beta, \cdots, \varkappa),\ F(\alpha', \beta, \cdots, \varkappa),\ F(\alpha, \beta', \cdots, \varkappa), \cdots\cdots$$
$$\cdots, F(\alpha, \beta, \cdots, \varkappa'),\ F(\alpha', \beta', \cdots, \varkappa), \cdots,$$

由對稱函數之定理可知，爲此諸數所適合之方程式，當具有整係數，且其未知數最高方次之係數爲1.

取特例言之，可知二整數之和，差，積仍爲整數，"整數"之意義經加減乘而不變。二整數γ及α，若有一整數β能使$\alpha\beta=\gamma$，則γ名爲可爲α所整除.

定理三．若$a_1, a_2, \cdots, a_r$皆爲代數整數，則方程式

$$\alpha^r+a_1\,\alpha^{r-1}+\cdots\cdots+a_r=o$$

之根，亦爲代數整數.

定理四．一代數整數α若爲有理數，則爲有理整數.

證：命$\alpha=\frac{a}{b}$，式中a, b爲互素之有理整數，且$b>1$．α所適合之方程式之係數$a_1, a_2, \cdots, a_m$爲有理整數，以b^{m-1}乘之，可得

$$\frac{a^m}{b}=-a_1\,a^{m-1}-a_2\,b\,a^{m-2}-\cdots\cdots-a_m\,b^{m-1}=A,$$

式中A爲一整數，是不可能〔Dedekind (I), Kronecker (16)〕.

§3．一數之距，別，判別式，數域之基數.

若α爲k內之任一數，以$\alpha', \cdots, \alpha^{(m-1)}$表$\alpha$之諸共軛數，則積

$$n(\alpha)=\alpha\alpha'\cdots\cdots\alpha^{(m-1)},$$

名爲α之距(Norm)．一數α之距爲有理數。又積

$$\delta(\alpha)=(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')\cdots\cdots(\alpha-\alpha^{(m-1)}),$$

名爲α之別(Differente)．一數之別，仍爲該域k內之數。爲簡單計，命

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha')\cdots\cdots(x-\alpha^{(m-1)})$$

則　$\delta(\alpha)=\left[\frac{-df(x)}{dx}\right]_{x=\alpha}$．又乘積

$$d(\alpha)=(\alpha-\alpha')^2(\alpha-\alpha'')^2(\alpha'-\alpha'')^2\cdots\cdots(\alpha^{(m-2)}-\alpha^{(m-1)})^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2, & \cdots\cdots, & \alpha^{m-1} \\ 1, & \alpha', & \alpha'^2, & \cdots\cdots, & \alpha'^{m-1} \\ \cdots\cdots & & & & \\ 1, & \alpha^{(m-1)}, & (\alpha^{(m-1)})^2, & \cdots\cdots, & (\alpha^{(m-1)})^{m-1} \end{vmatrix}^2$$

謂之α之判別式.一數之判別式爲一有理數.作別之距可得$d(\alpha)=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ $n(\delta)$.

若α爲定域之數,則此數之別及判別式皆非爲零;反之,凡一判別式或別非零之數,則此數可定此域,若α爲一整數則其距,別,判別式亦皆爲整數

定理五. 一m次域內可有m個數$\omega_1, \cdots, \omega_m$俱有如下之性質:凡此域內之一整數$\omega$可表爲

$$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots\cdots + a_m\omega_m$$

式中$a_1, a_2, \cdots, a_m$爲有理整數.

證: 若α爲定此域之整數,則凡此域內之數皆可表爲

$$\omega = \gamma_1 + \gamma_2\alpha + \cdots\cdots + \gamma_m\alpha^{m-1},$$

式中$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$爲有理數,其共軛數爲

$$\omega' = \gamma_1 + \gamma_2\alpha' + \cdots\cdots + \gamma_m\alpha'^{m-1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\omega^{(m-1)} = \gamma_1 + \gamma_2\alpha^{(m-1)} + \cdots\cdots + \gamma_m(\alpha^{(m-1)})^{m-1};$$

由此可得

$$\gamma_s = \frac{|1, \alpha, \cdots, \omega, \quad \cdots, \alpha^{m-1}|}{|1, \alpha, \cdots, \alpha^{s-1}, \cdots, \alpha^{m-1}|}$$

$$= \frac{|1, \alpha, \cdots, \omega, \cdots, \alpha^{m-1}| \cdot |1, \alpha, \cdots, \alpha^{s-1}, \cdots, \alpha^{m-1}|}{|1, \alpha, \cdots, \alpha^{s-1}, \cdots, \alpha^{m-1}|^2} = \frac{A_s}{d(\alpha)},$$

式中A_s爲 $\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(m-1)}, \omega, \omega', \cdots, \omega^{(m-1)}$ 之有整係數之整函數.因一方面$A_s = r_s d(\alpha)$爲有理數,故由定理四A_s爲有理整數.凡整數ω皆可表爲

$$\omega = \frac{A_1 + A_2\alpha + \cdots\cdots + A_m\alpha^{m-1}}{d(\alpha)} \qquad (1)$$

式中$A_1, A_2, \cdots, A_m$爲有理整數,且$d(\alpha)$爲α之判別式.

今再命s爲$1, 2, \cdots, m$之一;合計此域內可表爲

$$\omega_s = \frac{O_1 + O_2\alpha + \cdots\cdots + O_s\alpha^{s-1}}{d(\alpha)}$$

$$\omega_s^{(1)} = \frac{O_1^{(1)} + O_2^{(1)}\alpha + \cdots + O_s^{(1)}\alpha^{s-1}}{d(\alpha)}$$

$$\omega_s^{(2)} = \frac{O_1^{(2)} + O_2^{(2)}\alpha + \cdots + O_s^{(2)}\alpha^{s-1}}{d(\alpha)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之形之諸整數,式中$O, O^{(1)}, O^{(2)}, \cdots$皆爲有理整數,可設$O_s \neq o$,及$O_s$爲$O_s, O_s^{(1)}, O_s^{(2)}, \cdots$之最大公約數.則此$m$個整數$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$所成之組卽合所求.—可以1)式表出之數,必有$A_m = a_m O_m$之關係.式中$a_m$爲一有理整數;則$\omega^* = \omega - a_m \omega_m$可表爲

$$\omega^* = \frac{A_1^* + A_2^* d + \cdots\cdots + A^*_{m-1}\alpha^{m-2}}{d(\alpha)},$$

由此又當有$A^*_{m-1} = a_{m-1} O_{m-1}$.命$\omega^{**} = \omega^* - a_{m-1}\omega_{m-1}$,繼續此法行之,最後可知定理五爲眞.

數$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$名爲域$k$內諸整數之基數,或簡稱爲基數 (Basis),此域之另一組基數$\omega_1^*, \cdots, \omega_m^*$可表爲

$$\omega_1^* = a_{11}\omega_1 + \cdots\cdots + a_{1m}\omega_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_m^* = a_{m1}\omega_1 + \cdots\cdots + a_{mm}\omega_m$$

式中諸有理整係數a之行列式之値爲± 1 [Dedekind (1), Kronecker (16)].

2. 數域中之理想數.

§4. 理想數之乘積,及其整除性.質理想數.

數域論之第一重要問題,卽爲代數整數之分解定理.此定理之美麗及簡單,俱足贊賞.此定理與初等數論中分解有理整數之定理相若.此定理在分

圓域中(德文 Kreiskörper)最先為枯母(Kummer)氏發見〔Kummer, (5,6)〕; 其對普通數域之研究,則為代代肯得(Dedekind)氏及克郎耐可(Kronecker)氏.此項理論之基本定義如下:

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ 為 k 域內之一組無限個整數,具有次之性質:若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 為 k 內之整數,則 $\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\cdots$ 仍在此組中,如此之一組整數,謂之一理想數 $\mathfrak{a}$.

定理六　於一理想數 $\mathfrak{a}$ 中可有 m 個數 $\iota_1, \cdots, \iota_m$ 具有次之性質:凡 $\mathfrak{a}$ 內之一數可表為

$$\iota=l_1\iota_1+\cdots\cdots+l_m\iota_m,$$

式中 $l_1, \cdots, l_m$ 為有理整數.

證: 命 s 表 m 個數 $1, 2, \cdots, m$ 之一;則此理想數中可表為

$$\iota_s=J_1\omega_1+\cdots\cdots+J_s\omega_s,$$

$$\iota_s^{(1)}=J_1^{(1)}\omega_1+\cdots\cdots+J_s^{(1)}\omega_s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之諸數.式中 $J, J^{(1)}, \cdots$ 為有理整數,吾人可設 $J_s\neq 0$ 及 $J_s, J_s^{(1)}, \cdots$ 之最大公約數卽為 J_s. 如 §3 求域之基數之方法,可知 $\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_m$ 有定理所需之性質.

$\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_m$ 名為此理想數之基數,凡 $\mathfrak{a}$ 之另一組基數 $\iota_1^*, \iota_2^*, \cdots, \iota_m^*$ 可表為

$$\iota_1^*=a_{11}\iota_1+\cdots\cdots+a_{1m}\iota_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\iota_m^*=a_{m1}\iota_1+\cdots\cdots+a_{mm}\iota_m,$$

式中諸整係數 a 之行列式之值為 ± 1.

$\alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma$ 為 $\mathfrak{a}$ 內之任意 γ 個數,若 $\mathfrak{a}$ 內之任一數皆可表為 $\alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma$ 之一次齊次式,其係數為此域內之整數 λ, 則吾人可簡書之為

$$\mathfrak{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\gamma)$$

若 $\mathfrak{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\gamma)$ 及 $\mathfrak{b}=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ 為二理想數,則諸可以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\gamma$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 表出之數之集合,以 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ 表之,卽可書為

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma, \beta_1, \cdots, \beta_s).$$

一理想數中之各數,若皆可表爲$\lambda\alpha$之形,λ爲此域內之任一整數,而α爲此域內之一非零整數,則此理想數名爲主理想數(英文 Principal ideal),可以(α)表之,或卽簡單表爲α.

一理想數$\mathfrak{a}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma)$內之任一數,可名爲對理想數$\mathfrak{a}$相合於$o$,以

$$\alpha \equiv o, (\mathfrak{a})$$

表之.若二數α, β之差對$\mathfrak{a}$相合於o,則α, β互稱爲對$\mathfrak{a}$相合以

$$\alpha \equiv \beta, (\mathfrak{a})$$

表之.不然名爲不相合,以

$$\alpha \not\equiv \beta, (\mathfrak{a})$$

表之.

以$\mathfrak{a}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma)$內之任一數乘$\mathfrak{b}=(\beta_1, \cdots, \beta_s)$內之任一數所得之諸數顯然成一理想數,此理想數吾人卽定其義爲$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$二理想數之積,卽以

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_\gamma\beta_1, \cdots, \alpha_1\beta_s, \cdots, \alpha_\gamma\beta_s)$$

表之.$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$爲二理想數,若另有一理想數$\mathfrak{b}$可使$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$,則$\mathfrak{b}$名爲可爲$\mathfrak{a}$所整除.若$\mathfrak{b}$可爲$\mathfrak{a}$所整除,則凡$\mathfrak{b}$內之數皆對$\mathfrak{a}$相合於零.關於理想數之因子,可有下引:

引一. 一理想數$\mathfrak{i}$祇可有限個因子.

證: 作$\mathfrak{i}$內任一數ι之距n,則若$\mathfrak{a}$爲$\mathfrak{i}$之因子,則$n \equiv o\ (\mathfrak{a})$. 設$\mathfrak{a}$之基數爲

$$\alpha_1 = a_{11}\omega_1 + \cdots\cdots + a_{1m}\omega_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_m = a_{m1}\omega_1 + \cdots\cdots + a_{mm}\omega_m,$$

式中$a_{11}, \cdots, a_{mm}$爲有理整數,以$a'_{11}, \cdots, a'_{mm}$各表$a_{11}, \cdots, a_{mm}$對n之最小正剩餘,則

$$\mathfrak{a} = (a_{11}\omega_1 + \cdots + a_{1m}\omega_m, \cdots, a_{m1}\omega_1 + \cdots + a_{mm}\omega_m)$$
$$= (a'_{11}\omega_1 + \cdots + a'_{1m}\omega_m, \cdots, a'_{m1}\omega_1 + \cdots + a'_{mm}\omega_m, n),$$

由理想因子 $\mathfrak{a}$ 後者之表示法,可知定理爲眞.

一非 i 之理想數,舍其自已及 i 外不能再爲其他理想數所整除,則該理想數名爲素理想數 (Prime ideal). 若二理想數無 i 以外之其他公因子,則此二理想數謂之互素.若二主理想數 (α), (β) 互素,則二整數 α, β 謂之互素.若 (α) 與理想數 $\mathfrak{a}$ 互素,則名之爲 α 對 $\mathfrak{a}$ 互素.

§5. 一理想數分解爲質理想因子之唯一性.

下爲基本定理:

定理七. 凡理想數 i, 若以質理想數之乘積表之,其方法有一且唯有一通.

此定理代代肯得之證明,已爲彼整理成很簡單很清楚.該證明基於若干個互相關聯之定理. [Dedekind, (1)]. 克郎耐可氏之證明途徑,則有賴於彼所手創之屬於代數式論 (Algebraic for.n) 中之數域論.若吾人先明瞭理想數之定理,則式論 (Theory of forms) 極易明瞭.下引爲研究此定理之一極大助.

引二. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta_1, \beta_2, \cdots$, 爲整數,及

$$F(x) = \alpha_1 x^r + \alpha_2 x^{r-1} + \cdots\cdots,$$
$$G(x) = \beta_1 x^s + \beta_2 x^{s-1} + \cdots\cdots$$

爲以 x 爲變數之二多項式,又命

$$f(x) = F(x) \cdot G(x) = \gamma_1 x^{r+s} + \gamma_2 x^{r+s-1} + \cdots\cdots.$$

若 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ 可同時爲 ω 所整除,則 $\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \cdots, \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2, \cdots$ 皆可爲 ω 所整除. [Kronecker (19), Dedekind (7), Mertens (1), Hurwitz (1,2)].

譯者按此引實有證明之必要,今譯胡威之 (Hurwitz) 之證明補充於此(原文見 Hurwitz (1), p. 291—298, 或 Werke, p. 191).

證此定理可假定α_1, β_1非o,卽$\gamma_1=\alpha_1\beta_1$亦非o.爲簡單計表$\alpha_1\beta_2, \alpha_1\beta_3, \cdots, \alpha_1\beta_{s+1}$各爲$\xi_1, \cdots, \xi_s$,及$\xi$爲此$s$個數中之任一,則

$$\alpha_1 G(x) = \gamma_1 x^s + \xi_1 x^{s-1} + \cdots + \xi_s,$$

爲$f(x)$之一因子,故$\pm\frac{\xi}{\gamma_1}$爲$f(x)=o$中s個根之初等對稱函數.故$\frac{\xi}{\gamma_1}$當適合於方程式

$$\left(\frac{\xi}{\gamma_1}\right)^m + \varphi_1\left(\frac{\xi}{\gamma_1}\right)^{m-1} + \varphi_2\left(\frac{\xi}{\gamma_1}\right)^{m-2} + \cdots + \varphi_m = o,$$

式中$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$各爲$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \cdots \frac{\gamma_{\gamma+s+2}}{\gamma_1}$之一次,二次,…,$m$次多項式.以$\gamma_1^m$乘之,可得$\xi$爲方程式

$$\xi^m + \psi_1 \xi^{m-1} + \psi_2 \xi^{m-2} + \cdots + \psi_m = o,$$

之根式中$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$各爲$\gamma_1, \cdots, \gamma_{\gamma+s+2}$之一次,二次,…,$m$次有整係數之齊次函數,故上式之係數當爲整數,且可各爲$\omega, \omega^2, \cdots, \omega^m$所整除.$\frac{\xi}{\omega}$所適合之方程式爲

$$\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^m + \frac{\psi_1}{\omega}\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{m-1} + \frac{\psi_2}{\omega^2}\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{m-2} + \cdots + \frac{\psi_m}{\omega^m} = o,$$

其係數爲整數,故$\frac{\xi}{\omega}$爲代數整數.

此卽表示

$$\alpha_1\beta_1, \ \alpha_1\beta_2, \ \cdots, \ \alpha_1\beta_{s+1}$$

可爲ω所整除.由此可知函數

$$F(x) - \alpha_1 x^{\gamma} = \alpha_2 x^{\gamma-1} + \cdots + \alpha_{\gamma+1}$$

與$G(x)$之積之係數,亦皆可爲ω所整除,仿上法可得

$$\alpha_2\beta_1, \ \alpha_2\beta_2, \ \cdots, \ \alpha_2\beta_{s+1}$$

可皆爲ω所整除.繼此行之,可得所證.

定理八. 與一理想數$\mathfrak{a} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$可有一理想數$\mathfrak{b}$,使$\mathfrak{ab}$爲一主理想數.

證: 命

$$F(x) = \alpha_1 x^{\gamma} + \alpha_2 x^{\gamma-1} + \cdots\cdots$$

及

$$F^{(i)}(x) = \alpha_1^{(i)} x^{\gamma} + \alpha_2^{(i)} x^{\gamma-1} + \cdots\cdots$$

$$(i = 1, \cdots, m-1),$$

式中 $\alpha_k^{(i)}$ 爲 α_k 之共軛數,作

$$R = \prod_{i=1}^{m-1} F^{(i)}(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \cdots\cdots$$

式中 $\beta_1, \beta_2 \cdots$ 爲 k 域內之整數.又 $FR = nU$, 式中 n 爲有理整數, U 表一具有理整係數之方程式,其係數間爲互素.由此可得 n 對 $\mathfrak{a}$ 及 $\mathfrak{b}$ 之積而相合於零, $\mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \cdots)$. 由引二可知凡 $\alpha_i \beta_k$ 皆可爲 n 所整除,故 $\mathfrak{ab} = n$.

定理九. 若三理想數 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ 適合於 $\mathfrak{ac} = \mathfrak{bc}$, 而 $\mathfrak{c} \neq o$, 則 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

證: $\mathfrak{m}$ 爲一可使 $\mathfrak{cm}$ 爲一主理想數 (α) 之理想數.由假定可得 $\mathfrak{acm} = \mathfrak{bcm}$ 或 $\alpha\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{b}$ 及由此 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

定理十. 若一理想數 $\mathfrak{c}$ 之諸數皆對理想數 $\mathfrak{a}$ 相合於零,則 $\mathfrak{c}$ 可爲 $\mathfrak{a}$ 所整除

證: 若 $\mathfrak{am}$ 等於一主理想數 (α), 則凡理想數 $\mathfrak{mc}$ 之各數當皆爲 α 之倍數,由此可得一理想數 $\mathfrak{b}$ 使 $\mathfrak{mc} = \alpha\mathfrak{b}$. 由此可得, $\mathfrak{amc} = \alpha\mathfrak{ab}$, 即 $\alpha\mathfrak{c} = \alpha\mathfrak{ab}$, 可得 $\mathfrak{c} = \mathfrak{ab}$.

定理十一. 若二理想數 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 之積可爲一素理想數 $\mathfrak{p}$ 所整除,則 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 中至少有一可爲 $\mathfrak{p}$ 所整除.

證: 若 $\mathfrak{a}$ 不爲 $\mathfrak{p}$ 所整除,則 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})$ 當爲 $\mathfrak{p}$ 之非本身之因子,即當爲 1; 即 $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}$ 中可各有一數 α, π 使 $\alpha + \pi = 1$, 以 $\mathfrak{b}$ 內之任一數 β 乘之,則得 $\beta = \alpha\beta + \pi\beta \equiv \alpha\beta, (\mathfrak{p})$. 由假定 $\alpha\beta \equiv o, (\mathfrak{p})$, 故可得 $\beta \equiv o, (\mathfrak{p})$.

今可往證理想數之基本定理七矣.若 $\mathfrak{i}$ 非質數,則可分解之爲 $\mathfrak{i} = \mathfrak{ab}$, 式中 $\mathfrak{a}$ 爲 $\mathfrak{i}$ 之非 $\mathfrak{i}$ 非 1 之理想因子.若 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 中有一非質理想數則可繼續分解之爲 $\mathfrak{i} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, 如法前進.由引一已知 $\mathfrak{i}$ 之因子有限,故以上手續當有終止

之時,若 $\mathfrak{v}$ 爲 $\mathfrak{i}$ 諸不同之因子之個數,則 $\mathfrak{i}$ 不能等於多於 $\mathfrak{v}$ 個因子之積,因若 $\mathfrak{i}=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\mathfrak{a}_{\mathfrak{v}+1}$ 則 $\mathfrak{i}$ 當有 $\mathfrak{v}+1$ 個互異之因子:

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \cdots\cdots,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\cdots\mathfrak{a}_{\mathfrak{v}+1}.$$

上法至最後一步可得所需要之表示式:

$$\mathfrak{i}=\mathfrak{p}\mathfrak{q}\cdots\cdots\mathfrak{l},$$

式中 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \cdots, \mathfrak{l}$ 皆爲素理想數.

今往證此種表法是唯一的,因若不然而另有一種表法 $\mathfrak{i}=\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\cdots\mathfrak{l}'$, 則因 $\mathfrak{p}$ 可整除 $\mathfrak{i}$, 故由定理十一 $\mathfrak{p}$ 當可整除 $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \cdots, \mathfrak{l}'$ 之一.今卽命之爲 $\mathfrak{p}'$, 則 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'$. 由定理九可得 $\mathfrak{q}\cdots\mathfrak{l}=\mathfrak{q}'\cdots\mathfrak{l}'$, 可依原法,照樣處理之.

由定理七,可得下之結果:

定理十二. k 內一整數能表爲二整數 $\varkappa$ 及 ϱ 之最大公約數.

證: 若 $\varkappa$ 爲任一可爲 $\mathfrak{i}$ 整除之數,則可覓一整數 ϱ 爲 $\mathfrak{i}$ 之倍數,而 $\frac{\varrho}{\mathfrak{i}}$ 及 $\frac{\varkappa}{\mathfrak{i}}$ 爲互素卽得 $\mathfrak{i}=(\varkappa,\varrho)$. 覓整數 ϱ 之方法如下: $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots \mathfrak{p}_r$ 爲 $\varkappa$ 之質因子,卽 $=\mathfrak{p}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{a_r}$ 式中 $a_i\geq o$, 作 $\mathfrak{d}_i=\mathfrak{p}_1^{a_1+1}\cdots\mathfrak{p}_{i-1}^{a_{i-1}+1}\cdots\mathfrak{p}_{i+1}^{a_{i+1}+1}\cdots\mathfrak{p}_r^{a_r+1}$, 此 r 個理想數無公因子,故此 $\mathfrak{v}$ 個 $\mathfrak{d}_i$ 中可各有一數 δ_i 使

$$\delta_1+\delta_2+\cdots\cdots+\delta_r=1.$$

以 α_i 表 $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ 之一數,然不在 $\mathfrak{p}_i^{a_i+1}$ 中,命

$$\varrho=\alpha_1\delta_1+\cdots\cdots+\alpha_r\delta_r.$$

ϱ 可爲 $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ 所整除,然不能爲 $\mathfrak{p}_i^{a_i+1}$ 所整除.如此之 ϱ 卽合所需.

§6. 數域之式及其容. (Die Formen des Zahlkörpers und ihre Inhalte).

克郞尼可之式論需要下列之定義:

一任意個變數 $u, v, \cdots$ 之有理整函數,若其係數皆在域 k 內,則名爲域 k 內之式.若其諸同時變爲共軛數,則所得之諸式 $F', \cdots, F^{(m-1)}$ 名爲 F 之共軛式.合乘 $F, F', \cdots, F^{(m-1)}$ 可得一以 $u, v, \cdots$ 爲變之有理整函數,其係數爲有理整數.此可書爲

$$nU(u,v,\cdots\cdots),$$

式中 n 為一有理正整數，U 為一有理整函數，其係數為無公約數之有理整數。n 名為式 F 之距 (Norm of form F)。若 n 等於一，則此式謂之單位式。一整函數若其係數為無公因子之有理整數，則此名為有理單位式（德文 rationale Einheitsform）。若二式之商可等於二單位式之商，則該二式謂之等容。（德文 inhaltsgleichr）（記之以 $\simeq$）。特例如凡單位式與 1 等容。二式 H,F 若可覓出一式 G，使 $H\simeq FG$，則 H 謂之可為 F 所整除。若一式 P 在等容定義之下，無非 1 非 P 之因子，則 P 謂之素式 (Prime form)。

克郎耐可之式論，與理想數之理論之關係，經下之注釋而明顯。由一理想數 $\mathfrak{a}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，吾人可作一式 F，其作法如下：以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 乘未知數 $u,v,\cdots$，之任意不同乘方之積而總加之。反之，若有一式 F 其係數為 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，則可得一理想數 $\mathfrak{a}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$。此理想數 $\mathfrak{a}$ 卽名為式 F 之容（德文 inhalt）。可有下之定理：

定理十三. 二式之積之容等於二式之容之積.

證：命 F 及 G 為二任意若干個變數之多項式，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 各為其係數。命其積為 $H=FG$，此係數為 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$。又 $\mathfrak{p}^a$ 及 $\mathfrak{p}^b$ 各為 $\mathfrak{a}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 及 $\mathfrak{b}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$ 內所能取出一素理想數 $\mathfrak{p}$ 之最高方次。又將式 F 及 G 之各項悉依 u 之降冪排列，同時以 u 所乘之項，依 v 之降冪排列，同法繼續排列 v 以下之未知數。次序既排定後，命 $\alpha u^h v^l\cdots$ 為 F 中之最先一項具有 α 不能為 $\mathfrak{p}$ 之高於 a 次方所整除者，同樣 $\beta u^{h'}v^{l'}\cdots$ 為 G 中最先一項具有 β 不能為 $\mathfrak{p}$ 之高於 b 次方所整除者，則顯然 H 中之一項 $\gamma u^{h+h'}v^{l+l'}\cdots$ 之係數 γ 當不為 $\mathfrak{p}$ 之高於 $a+b$ 次方所整除，故可得 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)$。

由定理十三之特例可得凡一單位式之容為 1；反之，若一凡其係數之最大公約理想數為 1，則為一單位式。故二等容式之容相等；反之，若諸容之相等者等容。特例如任意二式若其係數相等，則彼此等容。

克郎耐克名此為 äquivalent in engerem sinne.

由定理十三可得更進一步之結果:

定理十四. F 為一所與之式,吾人常可覓出一式 R,使 FR 與一整數等容.

定理十五. 若二式之乘積可為一素式 P 所整除,則此二式中有一可為 P 所整除.(在等容定義下).

定理十六. 凡一式在等容定義下可分解為若干個素式之連乘積,且其方法祇有一通.

此諸定理各與理想數論中之定理八,十一及基本定理七相當.

定理七舍代代肯得及克郎耐可二氏之證明外尚有二簡單證明;一法則基於迦羅華數域之理論(Theory of Golois' Field)可參觀§36〔Hilbert (2, 3)〕.第二法則基於次之定理:一域中之理想數可分為有限個理想數班(Ideal classe) 此證明所需之基本觀念可視為次之方法之推廣:即歐幾里得 (Euclid) 所用輾轉相除,以求二有理整數最大公約數之法則.〔Hurwitz (3)〕.

3. 對理想數之相合式

§7. 一理想數之距及其性質.

於第二章中已說明一域內理想數之理論,此實含有使有理數域內之定義轉移入一代數數域中.今先與如下之普通定義:

域內對理想數 $\mathfrak{a}$ 不互相合之整數之個數,名為 $\mathfrak{a}$ 之距以 $n(\mathfrak{a})$ 表之.

定理十七. 一素理想數 $\mathfrak{p}$ 之距為 $\mathfrak{p}$ 可整除之有理素數 p 之乘方.

證: 命 $\omega_1, \cdots, \omega_f$ 為此域內一組整數,若相合式

$$a_1\omega_1 + \cdots\cdots + a_f\omega_f \equiv o, (\mathfrak{p})$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_f$ 為有理整數)無 $a_1, \cdots, a_f$ 不同時為 p 所整除之解答,則 $\omega_1, \cdots, \omega_f$ 謂非互依,$(\mathfrak{p})$.設 $\omega_1, \cdots, \omega_f$ 為此域內基數之一部分,且其他 $m-f$ 個基數皆對 $\mathfrak{p}$ 而相合於

$$a_1\omega_1 + \cdots\cdots + a_f\omega_f$$

凡此域內之一數皆相合於如上表出之一數,又此卽對 $\mathfrak{p}$ 不相合數之總數,顯然爲 $\mathfrak{p}^f$.

此指數 f 名爲質理想數之次數.

定理十八. 二理想數 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 之積之距等於其距之積.

證: 由定理十二 $\mathfrak{a}$ 內可有一數 α 使 $\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}$ 與 $\mathfrak{b}$ 互素.若 ξ 過對 $\mathfrak{a}$ 之諸不相合數,其數當有 $n(\mathfrak{a})$ 個,η 過對 $\mathfrak{b}$ 之諸不相合整數,其數當有 $n(\mathfrak{b})$ 個,則 $\alpha\eta+\xi$ 成一對 $\mathfrak{ab}$ 不相合之數之完全系,其總數有 $n(\mathfrak{a}).\ n(\mathfrak{b})$ 個.

定理十九. 若

$$\iota_1 = a_{11}\,\omega_1 + \cdots\cdots + a_{1m}\,\omega_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\iota_m = a_{m1}\,\omega_1 + \cdots\cdots + a_{mm}\,\omega_m,$$

爲 $\mathfrak{a}$ 之基數,則其距 $n(\mathfrak{a})$ 等於諸係數 a 所成之行列式之絕對值.

證: 取定理六證明之基數,則式中 a_{rs} 當 $s>r$ 是爲零,而 $a_{rr}>0$.故 a 之行列式之値爲 $a_{11}a_{22}\cdots a_{mm}$. 又另一方面

$$u_1\,\omega_1 + \cdots\cdots + u_m\,\omega_m$$

當

$$u_1 = 0, 1, \cdots, a_{11}-1, \cdots, u_m = 0, 1, \cdots, a_{mm}-1,$$

成一對 $\mathfrak{a}$ 不相合數之全系.由此證明定理十九.本定理之反定理亦極易求得.

聯及克郞耐可之式論可得下之定理:

定理二十. 若 F 爲一式,其容爲 $\mathfrak{a}$,則式 F 之距等於理想數 $\mathfrak{a}$ 之距,卽 $n(F)=n(\mathfrak{a})$,取特例一整數 α 之距等於理想數 $\mathfrak{a}=(\alpha)$ 之距之絕對值.

證: 若 $\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_m$ 爲理想數 $\mathfrak{a}$ 之一組基數作下式

$$F = \iota_1 u_1 + \cdots\cdots + \iota_m u_m$$

則

$$\omega_1 F = l_{11}\,\iota_1 + \cdots\cdots + l_{1m}\,\iota_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_m F = l_{m1}\iota_1 + \cdots\cdots + l_{mm}\iota_m,$$

式中 $l_{11},\cdots,l_{mm}$ 爲 $u_1,\cdots,u_m$ 之一次齊次式,其係數爲有理整數.茲往證齊次式 $l_{11},\cdots,l_{mm}$ 所成之行列式 $|l_{\gamma s}|$,當爲一有理單位式.因若不然,則 $|l_{\gamma s}|$ 之係數當爲一素數 ν 所整除.故必有 m 個式 $L_1,\cdots,L_m$ 其係數爲有理數不皆爲 ν 所整除,以使

$$L_1 l_{11} + \cdots\cdots + L_m l_{m1} \equiv o,\ (\nu),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$L_1 l_{1m} + \cdots\cdots + L_m l_{mm} \equiv o,\ (\nu).$$

由此可得

$$(L_1\omega_1 + \cdots\cdots + L_m\omega_m)F \equiv o,\ (\nu\alpha),$$

卽乘積 $\iota\alpha$ 可爲 $p\alpha$ 所整除,ι 爲式 $L_1\omega_1 + \cdots\cdots + L_m\omega_m$ 之容.卽 ι 可爲 ν 所整除.此爲不能,因若 $a_1\omega_1 + \cdots\cdots + a_m\omega_m$ ($a_1, a_2, \cdots$ 爲有理整數)可爲 r 所整除,則 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 當皆爲 r 之倍數也.此與前所假定之 $L_1,\cdots,L_m$ 之性質違.故 $|l_{\gamma s}|$ 之性質明.

由行列式相乘之定理可得

$$\begin{vmatrix} \omega_1 F, & \cdots\cdots, & \omega_m F \\ \omega_1' F', & \cdots\cdots, & \omega_m' F' \\ \cdots\cdots & & \\ \omega_1^{(m-1)}F^{(m-1)}, & \cdots\cdots, & \omega_m^{(m-1)}F^{(m-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11}, & \cdots\cdots, & l_{1m} \\ l_{21}, & \cdots\cdots, & l_{2m} \\ \cdots\cdots & & \\ l_{m1}, & \cdots\cdots, & l_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \iota_1, & \cdots\cdots, & \iota_m \\ \iota_1', & \cdots\cdots, & \iota_m' \\ \cdots\cdots & & \\ \iota_1^{(m-1)}, & \cdots\cdots, & \iota_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

兩邊都有

$$\begin{vmatrix} \omega_1, & \cdots\cdots, & \omega_m \\ \omega_1', & \cdots\cdots, & \omega_m' \\ \cdots\cdots & & \\ \omega_1^{(m-1)} & \cdots\cdots, & \omega_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

爲其因子,消去之可得$FF'\cdots F^{(m-1)}\simeq(na)$或$n(F)=n(a)$.此定理之第二部可由取$F=\alpha(u_1\omega_1+\cdots+u_m\omega_m)$以得之.

若一理想數$\mathfrak{a}$之各數$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$皆經變換$t'=(I:I')$,可得一理想數$\mathfrak{a}'=(\alpha_1',\alpha_2',\cdots)=(t'\alpha_1,t'\alpha_2,\cdots)$此理想數$\mathfrak{a}'$名爲$\mathfrak{a}$之共軛理想數,或即可爲施$t'$於$\mathfrak{a}$而得$\mathfrak{a}'$.若研究$k,k',\cdots,k^{(m-1)}$所成之總域,則定理十八及二十可知一理想數$\mathfrak{a}$及其諸共軛理想數之積爲$n(\mathfrak{a})$,由此可得一理想數之距之新定義,此與由一數$\alpha$之距之定義推廣所得者恰相符合.比較§14.

定理二十一. 一理想數$\mathfrak{i}$中可覓出二數,此二數之距之最大公約數即爲此理想數之距.

證: 命$a=n(\mathfrak{i})$,且由定理十二可定一數$\mathfrak{i}$內之一數α,使$\frac{\alpha}{\mathfrak{i}}$與$a$互素.若$\alpha',\cdots,\alpha^{(m-1)}$爲$\alpha$之共軛數,及$\mathfrak{i}',\cdots,\mathfrak{i}^{(m-1)}$爲$\mathfrak{i}$之共軛理想數,則$\frac{\alpha'}{\mathfrak{i}'},\cdots,\frac{\alpha^{(m-1)}}{\mathfrak{i}^{(m-1)}}$當皆對$a$互素,由此可得$\frac{n(\alpha)}{n(\mathfrak{i})}=\frac{n(\alpha)}{a}$當對$a$互素,即可得$n(\mathfrak{i})=a=(a^m,n(\alpha))=(n(a),n(\alpha))$.

§8. 理想數論中之弗爾馬定理及函數$\varphi(\mathfrak{a})$.

由有理數論中之相同的方法,可推得與弗爾馬定理(Fermat's theorem)相符之事實.〔Dedekind (1)〕.

定理二十二. $\mathfrak{p}$爲一f次之質理想數,凡域k內之整數皆可適合於相合式

$$\omega^{p^f}\equiv\omega,\ (\mathfrak{p}).$$

廣義的弗爾馬定理亦極易推廣至普通域之理想論中,不需辛苦,即可證明以下諸定理:

定理二十三. 對$\mathfrak{a}$互不相合且與$\mathfrak{a}$互素之數之個數可表爲

$$\varphi(\mathfrak{a})=n(\mathfrak{a})\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{p}_2)}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{p}_\gamma)}\right),$$

式中$\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_\gamma$爲$\mathfrak{a}$中互不相同之因子.對此$\varphi$可有下之二公式:

$$\varphi(\mathfrak{a})\varphi(\mathfrak{b})=\varphi(\mathfrak{ab})\quad 及\quad \Sigma\varphi(\mathfrak{t})=n(\mathfrak{a}),$$

於第一式中 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 爲互素,第二式中之和號(Σ)過 $\mathfrak{a}$ 之諸理想因子 $\mathfrak{t}$.

定理二四, 凡與 $\mathfrak{a}$ 互素之整數 ω 可適於相合式

$$\omega^{\varphi(\mathfrak{a})} \equiv 1, (\mathfrak{a})$$

例如:一 f 次之素理想數 $\mathfrak{p}$,則域 k 內不爲 $\mathfrak{p}$ 所整除之整數定適合於相合式

$$\omega^{\nu^f(\nu^f-1)} \equiv 1, (\mathfrak{p}^2)$$

進可有下之事實:

定理二十五. 若 $\mathfrak{a}_1 \cdots, \mathfrak{a}_\gamma$, 爲理想數,且每二個皆爲互素,則有一整數 ω 適合於相合式

$$\alpha \equiv \alpha_1, (\mathfrak{a}_1), \cdots\cdots, \omega \equiv \alpha_\gamma, (\mathfrak{a}_\gamma).$$

定理二十六. 對質理想數 $\mathfrak{p}$ γ 次相合式

$$\alpha x^\gamma + \alpha_1 x^{\gamma-1} + \cdots\cdots + \alpha_\gamma \equiv 0, (\mathfrak{p}),$$

式中 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma$ 爲 k 內之整數,且 $\alpha \not\equiv 0, (\mathfrak{p})$, 之不相合根之個數最多不能超過 γ 個.

定理二十七. $\mathfrak{p}$ 表一有理素數 ν 之素理想因子.若 α 爲相合式

$$a x^\gamma + a_1 x^{\gamma-1} + \cdots\cdots + a_\gamma \equiv 0, (\mathfrak{p}),$$

之根,式中 $a, a_1, \cdots, a_\gamma$ 爲有理整數,則 α^ν 亦爲此式之一根.

證: 上式左邊以 $F(x)$ 表之.由弗爾馬氏之定理可知 $F(x^\nu) \equiv (F(x))^\nu, (\nu)$, 此式對任意 x 之值皆然.由此事實,可得定理.

§9. 對一素理想數之原數.

ϱ 爲 k 域內之一整數,若 $\varrho, \varrho^2, \cdots, \varrho^{\gamma^f-1}$ 適爲素質理想數 $\mathfrak{p}$ 不相合數之全部,則 ϱ 即名爲對素理想數 $\mathfrak{p}$ 之原數 (Primitive munber). 此亦與有理論中之情形相若,極易引得下之事實:

定理二十八. 對一素理想數 $\mathfrak{p}$ 有 $\Phi(\nu^f-1)$ 個原數. $\Phi(\nu^f-1)$ 爲對 ν^f-1 互素,且不相合之有理整數之個數.

對一素理想數 $\mathfrak{p}$ 之乘方之原數理論迄今尚未開展,以下諸定理可不費勞力得之:〔Dedekind(6)〕.

定理二十九. 若 $\mathfrak{p}$ 爲 k 域內之所與之素理想數,於 k 內吾人能覓出一數 ϱ,使凡此域內之其他整數,皆可相合於 ϱ 之有有理整係之函數,$(\mathfrak{p}^e)$,式中 e 爲一任意之有理整數.

證: ϱ^* 爲 $\mathfrak{p}$ 之任一原數,則顯然凡此域內之數對 $\mathfrak{p}$ 皆相合於 ϱ^* 之有有理整係數之有理整函數,命

$$\mathfrak{p}(\varrho^*) \equiv o, \ (\mathfrak{p})$$

爲 ϱ^* 所適合之最低之有有理整係數之有理整函數,若 P 之次數爲 f',則 $a_1+a_2\varrho^*+\cdots+a_{f'}\varrho^{*f'-1}$,若其中之 $a_1,\cdots,a_{f'}$ 爲有理整數,且皆非 ν 之倍數,則該式對 $\mathfrak{p}$ 決不相合於零.另一方面言之,凡此域內之整數對 $\mathfrak{p}$ 可與形如 $a_1+a_2\varrho^*+\cdots+a_{f'}\varrho^{*f'-1}$ 之數相合,可得 $f'=f$.

若 $P(\varrho^*)\equiv o, (\mathfrak{p}^2)$,命 $\varrho=\varrho^*+\pi$,π 爲 $\mathfrak{p}$ 內之數,然非 $\mathfrak{p}^2$ 之倍數,由定理二十七可得

$$\frac{dP(\varrho^*)}{d\varrho^*}\equiv(\varrho^*-\varrho^{*r})\cdots(\varrho^*-\varrho^{*\nu^{f-1}}) \not\equiv o, \ (\mathfrak{p}).$$

則

$$P(\varrho)\equiv P(\varrho^*+\pi)\equiv P(\varrho^*)+\pi\frac{dP(\varrho^*)}{d\varrho^*}\not\equiv o, \ (\mathfrak{p}^2).$$

ϱ 即爲合所需性質之數,將 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ 表爲 $a_1+a_2\varrho+\cdots+a_f\varrho^{f-1}$ 之形其中 $a_1,\cdots,a_f$ 取自 $o,\cdots,r-1$,則顯然

$$\alpha_1+\alpha_2 P(\varrho)+\cdots\cdots+\alpha_l\{P(\varrho)\}^{l-1}$$

爲對 $\mathfrak{p}^l$ 不相合之諸整數,其個數有 ν^{fl} 個,(即 $=n(\mathfrak{p}^l)$),故卽爲對 $\mathfrak{p}^l$ 不相合數之全體.顯然對 $\mathfrak{p}^e$ 而相合於 ϱ 之諸數亦可有同樣性質.

利用上之定理,可得理想數 $\mathfrak{p}$ 之表示法:

定理三十. $\mathfrak{p}$ 爲一所與之 f 次素理想數,則在此域 k 內定有一數 ϱ 有定理二十九之性質,使

$$\mathfrak{p}=(\nu,\ P(\varrho)),$$

式中$P(\varrho)$為ϱ之f次整函數,其係數爲有理整數.

證: 命$\nu=\mathfrak{p}^{l}\mathfrak{a}$,$\mathfrak{a}$爲一非$\mathfrak{p}$之倍數之理想數,再命$\alpha$爲非$\mathfrak{p}$所可整除,而可爲$\mathfrak{a}$所整除之數,由定理二十四可得$\alpha^{\nu^f(\nu^f-1)}\equiv 1,(\mathfrak{p}^2)$.於上定理之證明中換$\varrho$爲$\varrho\alpha^{\nu^f(\nu^f-1)}$,則此新$\varrho$亦有以往之性質,因$P(\varrho)$之常數項之係數非$\nu$之倍數,故對此新$\varrho$,$P(\varrho)$與$\mathfrak{a}$互素,卽$\mathfrak{p}=(\nu,P(\varrho))$.

4. 域之判別式及其因子.

§10. 與域之判別式之因子有關之定理.關於有理整函數之諸引.

若$\omega_1,\cdots,\omega_m$爲k之基數,則k之判別式卽以下式爲義:

$$d=\begin{vmatrix}\omega_1, \cdots\cdots, \omega_m\\ \omega_1', \cdots\cdots, \omega'_m\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_1^{(m-1)}, \cdots\cdots, \omega_m^{(m-1)}\end{vmatrix}$$

此爲一有理整數.分解一域之判別式爲理想數因子之問題,在數域論有重大之意義.其基本定理爲:

定理三十一. 一域k判別式所有之有理素因子,且祇此素數可爲一素理想數之平方所整除.

此定理之證明,曾惹起重大困難,代代肯得氏爲處理此困難之第一人.〔Dedekind (6)〕.韓賽兒 (Hensel) 與其第二個證明,此證明爲克郎耐可數論之一重要補充,韓氏之證明憑籍於下之克郎耐可所已造成之定義〔Kronecker (16), Hensel (4)〕.

以$u_1,\cdots,u_m$表未知數,$\omega_1,\cdots,\omega_m$爲基數,則

$$\xi=\omega_1u_1+\cdots\cdots+\omega_mu_m,$$

名爲域k之基本式(Fundamental form).此適合於方程式

$$(x-\omega_1u_1-\cdots\cdots-\omega_mu_m)(x-\omega_1'u_1-\cdots\cdots-\omega'_mu_m)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots(x-\omega_1^{(m-1)}u_1-\cdots\cdots-\omega_m^{(m-1)}u_m)=o,$$

此可書爲

$$x^m+U_1x^{m-1}+U_2x^{m-2}+\cdots\cdots+U_m=o,$$

式中$U_1,\cdots,U_m$爲$u_1,\cdots,u_m$之函數.其係數爲有理整數.此m次式名爲基本方程式(Fundamental equation).若視此式祇有一個變數x,視$u_1,\cdots,u_m$爲襄數(Parameter),則吾人可將對有理質數v,而分解獨變數x之有理整函數之方法〔Serret (1)〕用入其中矣.(譯者按:英文書中Reids. Algebraic no. §§15-21,可作參考)

於下文中,若干個變數之有理整係數之有理整函數簡稱爲整係數函數(德文Ganzzahligen Funktion).二整係數函數$Z\ (x;u_1,\cdots,u_m)$, $X\ (x;u_1,\cdots,u_m)$若有一整係數函數$Y\,(x;u_1,\cdots,u_m)$使

$$Z\equiv XY,\ (\mathfrak{v})$$

則Z謂之對v可爲X所整除.整係數函數P,對v若含P或P與一有理整數之積,或有理整數外,無其他因子,則P名爲對v之素函數.此類函數仍如其爲獨變數時之情形,歐几里得計算術仍能應用.且不難證明下之定理:

定理三十二. X,Y爲$x,u_1,\cdots,u_m$之整係數函數.若X,Y對v無公約數,則可有一整係數函數U對v不相合於o,且祇有襄數$u_1,\cdots,u_m$使

$$U\equiv AX+BY,\ (\mathfrak{v}),$$

式中A,B爲$x,u_1,\cdots,u_m$之整係數函數.

其次之目標,卽爲對有理素數v,分解基本方程式之右邊F爲素函數.今先證下之諸引:

引三. 若$\mathfrak{p}$爲一f次之素理想數,爲v之因子,則對v有一素函數$\pi(x,u_1,\cdots,u_m)$,其中x之次數爲f.若x代以基本式ξ,則有如下之性質:$\pi(\xi;u_1,\cdots,u_m)$中$u_1,\cdots,u_m$之乘方之積之係數可爲$\mathfrak{p}$所整除,但不能同爲$\mathfrak{p}^2$所整除.且不能同爲v之其他理想因子所整除.

證：命 $\mathfrak{v}=\mathfrak{p}^i\mathfrak{a}$，式中 $\mathfrak{a}$ 不能爲 $\mathfrak{p}$ 所整除，又 ϱ 爲對 $\mathfrak{p}$ 之原數，具有定理二十九及三十之性質，$P(\varrho)$ 仍如前定爲對 $\mathfrak{p}$ 之 f 次式，則 $\mathfrak{p}=(r, P(\varrho))$，命

$$\varrho = a_1 w_1 + \cdots\cdots + a_m w_m$$

式中 $a_1, \cdots, a_m$ 爲有理整數，該 $P(\varrho)$ 中 ϱ^f 之係數爲 1. 因 $P(\varrho)\equiv o, (\mathfrak{p})$，故由定理二十七可得 $P(\varrho^{\mathfrak{v}})\equiv o, P(\varrho^{\mathfrak{v}^2})\equiv o, \cdots P(\varrho^{\mathfrak{v}^{f-1}})\equiv o, (\mathfrak{p})$，即相合式 $P(x)\equiv o, (\mathfrak{p})$ 可有 f 個互不相合之根 $\varrho, \varrho^{\mathfrak{v}}, \cdots, \varrho^{\mathfrak{v}^{f-1}}$ 即可得

$$P(x)\equiv(x-\varrho)(x-\varrho^{\mathfrak{v}})\cdots\cdots(x-\varrho^{\mathfrak{v}^{f-1}}), \ (\mathfrak{p}),$$

即 $\varrho, \varrho^{\mathfrak{v}}, \cdots, \varrho^{\mathfrak{v}^{f-1}}$ 之初等對稱函數可對 $\mathfrak{p}$ 而相合於一有理整數.

因凡 k 內之整數皆對 $\mathfrak{p}$ 而相合於 ϱ 之整係數函數，故可命基本式爲

$$\xi \equiv L(\varrho; u_1, \cdots, u_m), \ (\mathfrak{p}),$$

式中 L 爲 $\varrho, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數，由適之可證，可知

$$(x-L(\varrho; u_1, \cdots, u_m))(x-L(\varrho^{\mathfrak{v}}; u_1, \cdots, u_m))\cdots(x-L(\varrho^{\mathfrak{v}^{f-1}}; u_1, \cdots, u_m))$$

對 $\mathfrak{p}$ 當相合於 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數命之爲

$$\pi(x; u_1, \cdots, u_m) = x^f + V_1 x^{f-1} + \cdots\cdots + V_f,$$

式中 $V_1, \cdots, V_f$ 表 $u_1, \cdots, u_m$ 之整係數之函數，顯然基本式 ξ 可適合下相合式中之 x

$$\pi(x; u_1, \cdots, u_m) \equiv o, \ (\mathfrak{p}).$$

因 $\pi(x; a_1, \cdots, a_m)\equiv P(x), (\mathfrak{v})$，故可得 $\mathfrak{p}=(\mathfrak{v}, \pi(\varrho; a_1, \cdots a_m))$，且由此 $\pi(\xi, u_1, \cdots, u_m)$ 中 $u_1, \cdots, u_m$ 之乘方之積之係數不能同時爲 $\mathfrak{p}^i$ 所整除，且亦不同時爲 $\mathfrak{a}$ 之其他因子所整除. 因 $P(x)$ 對 r 爲素函數，故 $\pi(x; u_1, \cdots, u_m)$ 亦然.

引四. 凡一整係數函數 $\Phi(x; u_1, \cdots, u_m)$ 若當以基本數 ξ 代 x，而對 $\mathfrak{p}$ 全合於零，則該式對 $\mathfrak{v}$ 可爲 $\pi(x; u_1, \cdots, u_m)$ 所整除.

證：若不然 Φ 及 Π 對 $\mathfrak{v}$ 當無公因子，由定理三十二，必有一 $u_1, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數 U，對 $\mathfrak{v}$ 不相合於零，使 $U\equiv A\Phi+B\Pi, (\mathfrak{v})$ 式中 A, B 爲 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數. 當以基本式 ξ 代 x 時，可得 $U\equiv o, (\mathfrak{p})$，亦即 $U\equiv o, (\mathfrak{v})$，此爲不

能.

引五. Φ 爲 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之一整係數函數,若當 ξ 代 x, 而 Φ 對 p^t 全相合於零,則 Φ 對 r 必可爲 Π^t 所整除.

證: 假定 $\Phi = \Pi^{e'} F, (r)$, 式中 $e' < e$, 而 F 表 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數,且不再對 r 爲 Π 所整除,由此 $\{\Pi(\xi; u_1, \cdots, u_m)\}^{e'} F(\xi; u_1, \cdots, u_m)$ 中 $u_1, \cdots, u_m$ 之乘方之積之係數,必可爲 p^e 所整除.今視 $\Pi(\xi; u_1, \cdots, u_m)$ 及 $F(\xi; u_1, \cdots, u_m)$ 依 u_1 之降冪排列,且 u_1 之係數依 u_2 之降冪排列等等.若 π 爲 $\Pi(\xi)$ 中最係數之最先不能爲 p^2 所整除者, x 爲 $F(\xi)$, 中最先不能爲 p 所整除者,由此可得 $\pi^{e'}, x \equiv o, (p^e)$, 此爲不可能.故 $F(\xi)$ 之係數當皆可爲 p 所整除.由引四可得 $F(x; u_1, \cdots, u_m)$ 對 r 可爲 $\Pi(x; u_1, \cdots, u_m)$ 所整除.此又與假定違.

§11. 基本方程式左邊之分解.基本方程式之判別式.

由引三,四,五可得下之分解基本方程式之重要定理:

定理三十三. 一有理素數 r 之素理想數之分解式爲 $r = p^e p'^{e'} \cdots$,則基本方程式之左邊 F 對 r 可表爲

$$F \equiv \Pi^e \Pi'^{e'} \cdots\cdots, \quad (r),$$

式中 $\Pi, \Pi', \cdots$ 爲 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之素函數, (r), 且若命

$$F = \Pi^e \Pi'^{e'} \cdots\cdots + rG,$$

則 G 爲 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數對 r 不再爲 $\Pi, \Pi', \cdots$ 所整除.

定理三十四. 由基本方程式所發生之 m 次相合式

$$F(x; u_1, \cdots, u_m) \equiv o, (r).$$

同時爲以 ξ 代 x, 能對 r 適合之最低次方程式.

證: 若 Φ 爲 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之整係數函數,且具下之性質,即相合式 $\Phi(x) \equiv o, (r)$ 可爲基本式 ξ 所適合.又命 r 中諸不同理想之因子爲 $p, p', \cdots$ 其次數各爲 $f, f', \cdots$; 由此 $r^m = r^{fe + f'e' + \cdots}$ 即爲 $m = fe + f'e' + \cdots$, 又命 $\Pi, \Pi', \cdots$ 各爲 $p, p', \cdots$ 所屬之 $x, u_1, \cdots, u_m$ 之素函數.(如前引所述者).由引五可得

$$\Phi\equiv\Pi^{e}\Pi'^{e'}\cdots\Psi,\quad (r),$$

式中Ψ爲整係數函數,但$\Pi,\Pi',\cdots$各爲x之$f,f',\cdots$次式,故可得Φ至少須爲m次,故定理三十三之前半部及定理三十四業已證明.

若$G(x)$對r可爲$\Pi(x)$所整除,則當以基本式ξ代x時,則相合式$G(x)\equiv o,(\mathfrak{p})$成立,則得$\Pi^{e}(x)\Pi'^{e'}(x)-\cdots\equiv o,\ (\mathfrak{p}^{e+1})$. 由引五可知此爲不可能,故定理三十三之第二部分亦已證明.

由前之事實,可得一與判別式極關重要之定理:

定理三十五. 凡基本方程式之判別式之最大數因子等於此域之判別式.

證: 命

$$\left.\begin{array}{l} 1=U_{11}\omega_1+\cdots\cdots+U_{1m}\omega_m,\\ \xi=U_{21}\omega_1+\cdots\cdots+U_{2m}\omega_m,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi^{m-1}=U_{m1}\omega_1+\cdots\cdots+U_{mm}\omega_m,\end{array}\right\}\qquad(2)$$

式中$U_{11},\cdots,U_{mm}$爲整係數函數,若此m^2個U所成之行列式U之係數可同時爲有理素數r所整除,則顯然有m個不能皆對r相合於零之整係數函數$V_1,\cdots,V_m$; $V_1,\cdots,V_m$爲$u_1,\cdots,u_m$之函數,使下列諸式對$u_1,\cdots,u_m$全相合:

$$V_1U_{11}+\cdots\cdots+V_mU_{m1}\equiv o,\quad(r)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_1U_{1m}+\cdots\cdots+V_mU_{mm}\equiv o.\quad(r).$$

由此基本式ξ必適合於相合式

$$V_1+V_2\xi+\cdots\cdots+V_m\xi^{m-1}\equiv o,\quad(r),$$

其次數低於m次,故由定理三十四知此爲不可能,卽行列式U爲一單位式.

由方程式(2)及行列式乘法之定理可得

$$\begin{vmatrix} 1, & \xi, & \cdots\cdots, & \xi^{m-1} \\ 1, & \xi', & \cdots\cdots, & \xi'^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \xi^{(m-1)}, & \cdots\cdots, & (\xi^{(m-1)})^{m-1} \end{vmatrix} = U \begin{vmatrix} \omega_1, & \cdots\cdots, & \omega_m \\ \omega_1', & \cdots\cdots, & \omega'_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{(m-1)}, & \cdots\cdots, & \omega_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

平方之可得$d(\xi)=U^2d$,或$d(\xi)\cong d$,式中$d(\xi)$為基本式之判別式,而d為此域判別式.

解(2)可得下之定理:

定理三十六. 凡k內之整數可以基本式ξ之$m-1$次有理整函數表之,其係數爲$u_1,\cdots,u_m$之整係數函數及一有理單位式U之商.〔Kronecker (16), Hensel (4)〕.

§12. 一域之元及別.關於域之判別式之分解定理之證明.

定理三十五許以分解域之判別式.d為理想因子.下之$m-1$個理想數

$$e' = ((\omega_1 - \omega_1'),\cdots\cdots,(\omega_m - \omega'_m)),$$

$$e'' = ((\omega_1 - \omega_1''),\cdots\cdots,(\omega_m - \omega_m'')),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{(m-1)} = ((\omega_1 - \omega_1^{(m-1)})\cdots\cdots,(\omega_m - \omega_m^{(m-1)}))$$

名為域k之$m-1$個元 (Elemente). 此皆為理想數,然不定屬於k內;其積$d=e'e''\cdots e^{(m-1)}$為k內之一理想數.同時吾人可想到$e',e'',\cdots e^{(m-1)}$各為式$\xi-\xi'$, $\cdots$, $\xi-\xi^{(m-1)}$之容.由定理十三可知d即為基本式之別之容.基本式之別可書為

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = (\xi-\xi')\cdots\cdots(\xi-\xi^{(m-1)}).$$

此為k域內之一式.理想數d名為此域之別.[1](Die Differente[2] des Körpers)其距即為基本式之判別式之最大數因子.由定理三十五知此即為d,故有下之定理.

[1] 參觀§14. [2] Dedekind 名之為基理想數 (Grandideal)

定理三十七. 域之別之距等於此域之判別式.

由相合式

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}\equiv e\pi^{e-1}\frac{\partial\pi}{\partial x}\pi'^{e'}\cdots+e'\pi^{e}\pi'^{e'-1}\frac{\partial\pi'}{\partial x}\cdots+\cdots,\ (r)$$

可得一域之別可爲 p^{e-1} 個整除.若 e 與 r 互素,則不能爲 p 之更高之乘方所整除.取別之距,可知域之判別式可爲 $r^{f(e-1)+f'(e'-1)+\cdots}$ 所整除.若 $e,e',\cdots$ 皆與 r 互素,則 r 之更高方次不能整除 d. 由此§10之基本定理三十一,業已證明.

§13. 素理想數之表示式.有理單位式 U 之因子.

由定理三十三可知,實際分解一有解素數爲素理想數,可由分解基本方程式之左方以得之.今須知者爲當與 $u_1,\cdots,u_m$ 以何種特別數值時,此問題可以解決.

若以 U^2d 之 $u_1,\cdots,u_m$ 代以所可能有之有理整數,則 U^2d 當表該域諸數之判別式.此諸判別式之最大公約數並不卽爲此域之判別式 d.此可有許多實例以說明之.此情形中,有理單位式 U 經 $u_1,\cdots,u_m$ 之任意有理整數代入所得之各數有 $\neq 1$ 之公因子.在此情形中未知數 $u_1,\cdots,u_m$ 之決定有極大之用處.吾人可不難覓出有理素數 r 爲 U 之因子之必要且充分之條件,此條件卽爲 U 可表做

$$rV+(u_1^r-u_1)V_1+\cdots\cdots+(u_m^r-u_m)V_m$$

式中 $V,V_1,\cdots,V_m$ 爲 $u_1,\cdots,u_m$ 之整係數函數. [Hensel (1, 2, 5)]. (編者按,英文書 Dickson, L. E. Introduction to the theoy of numbers. §18 中可覓出此式之證明).

若有理整數 $a_1,\cdots,a_m$ 代 $u_1,\cdots,u_m$ 而有理單位式 U 不爲 r 所整除,則分解有理素數 r 爲素理想數時,可分解其基本方程式,再命 ξ 爲 $\alpha=a_1\omega_1+\cdots+a_m\omega_m$. 由定理三十六及在此假定之下,可知凡此域內之任一數 ω, 對 r 可相合於 α 之整係數函數,且若其係數不皆爲 r 之倍數,倘爲 α 低於 $m-1$ 次之整係

數函數.於 $\pi(x;u_1,\cdots,u_m)$, $\pi'(x;u_1,\cdots,u_m)$, ……中命 $u_1=a_1,\cdots,u_m=a_m$, 各以 $p(x)$, $p'(x)$, ……表之,此為對 r 互不相同之素函數.故

$$p=(r,\ P(\alpha)),\qquad p'=(r,P'(\alpha)),\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因若 $P(\alpha)$ 含 p 外尚可為 r 之其他因子所整除,(設其為 p'),則

$$\{P(\alpha)\}^{e}\{P'(\alpha)\}^{e'-1}\{P''(\alpha)\}^{e''}\cdots\equiv o,\ (r),$$

此式之次數低於 m,故此為不可能.

反之,不難證明下之定理:若域 h 內 r 可分解為 $p^{e}p'^{e'}\cdots$,式中 $p,p'\cdots$為互不相同之素理想數,其次數各為 $f,f',\cdots$.若此素理想數能對應於整係數函數 $P(x),P'(x),\cdots$, 此對 r 為素函數,其次數各為 $f,f',\cdots$,且各不相同,則可覓得一數 $\alpha=a_1w_1+\cdots+a_mw_m$, 使 U 之值與 r 互素故對 r 不能有如此之素函數 $P(x),P'(x),\cdots$,亦成為 r 可整除 U 之必要且充分之條件.〔Dedekind(4)〕.

本節所求出之二條件可用來計算數字之例,惟當該域內 U 具有 $=\pm1$ 之因子時,則仍有待決之問題在也.〔Dedekind(4), Kronecker(16), Hensel(1,2,5)〕.

尚有須注意者,即若 $u_1,\cdots,u_m$ 遍一選擇適當之域之各數,而 U 所表之各數之最大公約數為 1,則 U 不再具有有一定數為因子之性質.

譯者按:此問題已為 Ore 氏於 1926 年所解決,論文見 Math. Annalen. Bd. 96, P. 313. 譯者當於譯竣後之補充內言之.

5. 相對域

§14. 相對距,相對別及相對判別式.

距,別,判別式之定義有重要的推廣如下:

K 為一 M 次域,若一 m 次域 k 內之各數悉在其中,則 k 名為 K 之分域(德文 Unterkörper), K 名為 k 之倍域 (Oberkörper) 或名為對 k 之相對域 (Relativkörper). 命 Ⓗ 為定 K 域之數,可適合無數個係數在 k 內之方程式,取其次數低者,命之為

$$Ⓗ^{\gamma}+\alpha_1Ⓗ^{\gamma-1}+\cdots\cdots+\alpha_{\gamma}=o \qquad (3)$$

式中$\alpha_1, \cdots, \alpha_\gamma$皆爲$k$內之數.次數$\gamma$卽名爲域$K$對域$k$之相對次數,有關係$M=\gamma m$,此$\gamma$次方程式在$k$內不可化.(3)式其他$\gamma-1$個根$Ⓗ', Ⓗ'', \cdots, Ⓗ^{(\gamma-1)}$謂之Ⓗ之相對的共軛數,各定一域$K', \cdots, K^{(\gamma-1)}$謂之$K$之相對的共軛域.若$A$爲$K$內之任意數,且

$$A=\gamma_1+\gamma_2 Ⓗ+\cdots\cdots+\gamma_\gamma Ⓗ^{\gamma-1},$$

式中$\gamma_1, \cdots, \gamma_\gamma$爲$k$內之數,諸數

$$A'=\gamma_1+\gamma_2 Ⓗ'+\cdots\cdots+\gamma_\gamma Ⓗ'^{\gamma-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{(\gamma-1)}=\gamma_1+\gamma_2 Ⓗ^{(\gamma-1)}+\cdots\cdots+\gamma_\gamma (Ⓗ^{(\gamma-1)})^{\gamma-1}$$

卽爲施變換$T'=(Ⓗ:Ⓗ'), \cdots, T^{(\gamma-1)}=(Ⓗ:Ⓗ^{(\gamma-1)})$於$A$而得者,謂之$A$之相對的共軛數.施變換$T'$於理想數$F$可得一理想數$F'$,此名爲理想數$F$之相對的共軛理想數.

A與其相對的共軛數之積

$$N_k(A) = AA' \cdots\cdots A^{(\gamma-1)}$$

謂之A對k域之相對的距.距N_k爲k內之數.若$F=(A_1, \cdots, A_s)$爲K內之一理想數,與其諸相對的共軛數之積

$$N_k(F) = FF' \cdots\cdots F^{(\gamma-1)}$$

謂之F之相對距.相對距$N_k(F)$爲k內之理想數,因若以$U_1, \cdots, U_s$表未知數,則下式

$$(A_1U_1+\cdots+A_sU_s)(A'_1U_1+\cdots+A'_sU_s)\cdots(A_1^{(\gamma-1)}U_1+\cdots+A_s^{\gamma-1}U_s)$$

之係數爲k內之整數,故由定理十三可知其係數之最大公約數,與諸理想數之連乘積同.

若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$爲$k$內之任意數及$i=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$表$k$內一定之理想數,同時$F=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$表$K$內之一理想數,此理想數$F$並不能看出與理想數$i$有何不同.反之,$K$內之一理想數$F=(A_1, \cdots, A_s)$可表如$k$內一理想數$i$之必要

且充分之條件爲:F可表爲k域$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$之最大公約數.吾人可視環境之不同而視$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$爲$k$內之理想數,抑爲$K$內之理想數.可有下之定理:若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$及$\alpha_1^*, \cdots, \alpha_{s^*}^*$皆爲$k$內之整數,若在$K$內二理想數$F=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$及$F^*=(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_{s^*}^*)$相同,則在$k$內二理想數$i=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$及$i^*=(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_{s^*}^*)$亦相符合.因由假定,若$\alpha^*$爲可以$\alpha_1^*, \cdots, \alpha_{s^*}^*$表出之數,則$\alpha^*=A_1\alpha_1+\cdots+A_s\alpha_s$,式中$A_1, \cdots, A_s$爲$K$內之整數.若此式之兩邊皆取相對的距,則可知在$k$內$\alpha^{*\gamma}$必可爲$i_\gamma$所整除,卽於$k$內$\alpha^*$可爲$i$所整除,故$i^*$可爲$i$所整除,同理可得$i$亦可爲$i^*$所整除,故$i=i^*$.

式

$$\Delta_k(A)=(A-A')\cdots\cdots(A-A^{(\gamma-1)})$$

仍表K域內之一數,名爲A對域k之相對的別.又

$$D_k(A)=(A-A')^2(A-A'')^2\cdots(A^{(\gamma-1)}-A^{(\gamma-1)})^2$$

名爲A之相對的判別式.由此記號可知此卽等於A之相對的別之相對的距.卽$D_k(A)=(-1)^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}N_k(\Delta_k(A))$.

若$\Omega_1, \cdots, \Omega_M$爲$X$之$M$個基數,則$\gamma-1$個元

$$E'=((\Omega_1-\Omega_1'), \cdots\cdots, (\Omega_M-\Omega'_M)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E^{(\gamma-1)}=((\Omega_1-\Omega_1^{(\gamma-1)}), \cdots\cdots, (\Omega_M-\Omega_M^{(\gamma-1)})),$$

之連乘積爲理想數

$$D_k=E'E''\quad E^{(\gamma-1)}$$

此名爲域K對k之相對的別.

$$\Xi=\Omega_1U_1+\cdots\cdots+\Omega_MU_M$$

爲K之基本式,故Ξ之相對的別爲

$$\Delta_k(\Xi)=(\Xi-\Xi')\cdots\cdots(\Xi-\Xi^{(\gamma-1)}).$$

此式之係數爲K內之數,由定理十三可知其係數間之最大公約數卽爲D_k.

故D_k爲K內之一理想數.

數陣(Matrix)

$$\begin{vmatrix} \Omega_1, & \Omega_2, & \cdots\cdots, & \Omega_M \\ \Omega_1', & \Omega_2', & \cdots\cdots, & \Omega'_M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Omega_1^{(\gamma-1)}, & \Omega_2^{(\gamma-1)}, & \cdots\cdots, & \Omega_M^{(\gamma-1)} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

中γ行列之諸行列式之最大公約數之平方,卽名爲域K對k之相對的判別式,顯然此爲k內之一理想數.

§15. 一域之相對的別及相對的判別式之性質.

由此諸定義可得下之定理〔Hilbert (4)〕:

定理三十八. 域K對k之相對的判別式等於K之相對的別之相對的距,卽

$$D_k = N_k(\Delta_k)$$

證: 其基本式之相對的別之相對的距爲

$$N_k(\Delta_k(\Xi)) = \pm(\Xi-\Xi')^2(\Xi-\Xi'')^2\cdots\cdots(\Xi^{(\gamma-2)}-\Xi^{(\gamma-1)})^2$$

$$= \pm\begin{vmatrix} 1, & \Xi, & \cdots\cdots, & \Xi^{\gamma-1} \\ 1, & \Xi', & \cdots\cdots, & (\Xi')^{\gamma-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \Xi^{(\gamma-1)}, & \cdots\cdots, & (\Xi^{(\gamma-1)})^{\gamma-1} \end{vmatrix}^2.$$

就另一方面言之,右邊行列式之平方當爲K內之一式,其容卽等於相對的行列式D_k.若上行列式之諸項悉以K之基數$\Omega_1,\cdots,\Omega_M$及共軛基數排出之,則其係數當爲U之整係數函數,故可知此行列式之平方顯然可爲D_k所整除.[(1)]反之,由定理三十六可知,凡數陣中之一γ次行列式可將一單位式(以$U_1,\cdots,U_M$爲衰數)之γ方乘之,而知其可爲

$$(\Xi-\Xi')(\Xi-\Xi'')\cdots\cdots(\Xi^{(\gamma-2)}-\Xi^{(\gamma-1)}).$$

所整除[2]即 $N_k(\Delta_k(\Xi))\simeq D_k$.

註釋(1): 命 $\Xi^s=V_{1,s+1}\Omega_1+\cdots+V_{M,s+1}\Omega_M$, $(s=0,\cdots,\gamma-1)$, 式中諸 V 爲諸 U 之整係數函數.

$$\therefore N_k(\Delta_k(\Xi))=\pm\begin{vmatrix} V_{11}\Omega_1+\cdots\cdots+V_{M1}\Omega_M, & \cdots, V_{1\gamma}\Omega_1+\cdots\cdots+V_{M\gamma}\Omega_M \\ V_{11}\Omega_1'+\cdots\cdots+V_{M1}\Omega'_M, & \cdots, V_{1\gamma}\Omega_1'+\cdots\cdots+V_{M\gamma}\Omega_M^{(\gamma-1)} \\ \cdots\cdots & \\ V_{11}\Omega_1^{(\gamma-1)}+\cdots+V_{M1}\Omega_M^{(\gamma-1)}\cdots, & V_{1\gamma}\Omega_1^{(\gamma-1)}+\cdots+V_{M\gamma}\Omega_M^{(\gamma-1)} \end{vmatrix}$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} V_{11}, \cdots\cdots V_{M1} \\ \cdots\cdots \\ V_{1\gamma}\cdots\cdots V_{V\gamma}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\Omega_1, \cdots\cdots \Omega_1^{(\gamma-1)} \\ \cdots\cdots \\ \Omega_M\cdots\cdots\Omega_M^{(\gamma-1)}\end{vmatrix}\right\}^2$$

右邊爲二數陣.故 $|\Omega_N^{(s-1)}|$ 之 γ 次子行列式之公因子可整除右邊.(英文書中可參觀Dickson Modern Algebraic Theory p. 49, 以證此言).

(2)由定理三十六已知

$$U\Omega_i=V_{1i}V_{2i}\Xi+\cdots\cdots+V_{Mi}\Xi^{M-1},\ i=1,\cdots\cdots M.$$

式中 U 爲有理單位式,諸 V 爲 $U_1,\cdots,U_M$ 之整係數函數,故

$$U^\gamma\begin{vmatrix}\Omega_1, & \Omega_2, & \cdots\cdots, \Omega_M \\ \Omega_1' & \Omega'_2, & \cdots\cdots, \Omega'_M \\ \cdots\cdots & & \\ \Omega_1^{(\gamma-1)}, & \Omega_2^{(\gamma-1)} & \cdots\cdots, \Omega_M^{(\gamma-1)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} V_{11}+V_{21}\Xi+\cdots\cdots+V_{M1}\Xi^{M-1},\cdots \\ \cdots\cdots \\ V_{11}+V_{21}\Xi^{(\gamma-1)}+\cdots+V_{M1}(\Xi^{(\gamma-1)})^{M-1},\cdots\end{vmatrix}$$

故知其爲然.

定理三十九. D 及 d 各表域 K 及 k 之判別式,以 $n(D_k)$ 表相對判別式 D_k 之距,則

$$D=\pm d^\gamma n(D_k).$$

證: 命 $\xi=w_1u_1+\cdots+w_mu_m$ 爲 k 域之基本式,命 Ξ 適合下之 γ 次方程式

之X,

$$\Phi(X,\xi)=\Phi_0X^{\gamma}+\Phi_1X^{\gamma-1}+\cdots\cdots+\Phi_{\gamma}=O,$$

式中$\Phi_0,\cdots,\Phi_{\gamma}$爲$\xi$及$u_1,\cdots,u_m,U_1,\cdots,U_M$之整係數函數.$\Phi_0$爲$u_1,\cdots,u_m$之有理單位式.此$\gamma$次式之其他諸根爲$\Xi',\cdots,\Xi^{(\gamma-1)}$.命$\xi^{(h)}$爲$\xi$之$m-1$個共軛基本式之一;$\gamma$次方程式$\Phi(X,\xi^{(h)})=0$之$\gamma$個根命之爲$\Xi_{(h)},\Xi'_{(h)}\cdots\Xi_h^{(\gamma-1)}$,因$\xi$適合於$m$次方程式,故顯然$\Xi$之乘方乘以$\Phi_0$之若干次方,可表爲一$\xi$及$\Xi$之整函數,其中$\xi$最高爲$m-1$次,$\Xi$最高爲$\gamma-1$次,其係數爲$u_1,\cdots,u_m,U_1,\cdots,U_M$之整係數函數.由此基本式$\Xi$之判別式,可爲下之$M=\gamma m$次之行列式所整除.

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1,\ \Xi,\ \cdots\cdots,\ \Xi^{\gamma-1},\quad \xi,\quad \xi\Xi,\cdots\cdots,\ \xi\Xi^{\gamma-1},\ \cdots\cdots \\
\qquad\cdots\cdots,\ \xi^{m-1},\ \xi^{m-1}\Xi,\ \cdots\cdots,\ \xi^{m-1}\Xi^{\gamma-1} \\
1,\ \Xi',\ \cdots\cdots,\ \Xi'^{\gamma-1},\quad \xi,\quad \xi\Xi,\cdots\cdots,\ \xi\Xi'^{\gamma-1},\ \cdots\cdots \\
\qquad\cdots\cdots,\ \xi^{m-1},\ \xi^{m-1}\Xi',\ \cdots\cdots,\ \xi^{m-1}\Xi'^{\gamma-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1,\ \Xi^{(\gamma-1)},\cdots\cdots,\ (\Xi^{(\gamma-1)})^{\gamma-1},\ \xi,\ \xi\Xi,\cdots\cdots,\ \xi(\Xi^{(\gamma-1)})^{\gamma-1},\ \cdots \\
\qquad\cdots\cdots,\ \xi^{m-1},\ \xi^{m-1}\Xi^{(\gamma-1)},\cdots\cdots,\ \xi^{m-1}(\Xi^{(\gamma-1)})^{\gamma-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{vmatrix}$$

其中祇列出其前γ行;其他之$\gamma(m-1)$行,可由§之右下方各加角碼$(h)=(1),\cdots,(m-1)$以得,且諸Ξ之右下方亦同時附加同樣之角碼.

於Δ之諸項中若以基數$\Omega_1,\cdots,\Omega_M$表之,則可得

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\Omega_1, & \cdots\cdots, & \Omega_M \\
\Omega_1', & \cdots\cdots, & \Omega'_M \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\Omega_1^{(M-1)} & \cdots\cdots, & \Omega_M^{(M-1)}
\end{vmatrix} F,$$

式中F爲$u_1,\cdots,u_m,U_1,\cdots,U_M$之整係數函數.由此可知$\Delta$之平方之數因子定

爲 D 所整除,但由定理三十五可知 Ξ 之判別式之數因子 $=D$. 故由前可知,D 可爲 Δ 之數因子之平方所整除;即 Δ^2 之數因子即爲 D.

行列式論中之定理,可有下之恆等式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & \xi, \cdots\cdots, & \xi^{m-1} \\ 1, & \xi', \cdots\cdots, & \xi'^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \xi^{(m-1)}, \cdots\cdots, & (\xi^{(m-1)})^{m-1} \end{vmatrix}^{\gamma} \Pi$$

式中

$$\Pi=\begin{vmatrix} 1, & \Xi, \cdots\cdots, & \Xi^{\gamma-1} \\ 1, & \Xi', \cdots\cdots, & \Xi'^{\gamma-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \Xi^{(\gamma-1)}, \cdots, & (\Xi^{(\gamma-1)})^{\gamma-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & \Xi_{(1)}, \cdots\cdots, & \Xi_{(1)}^{\gamma-1} \\ 1, & \Xi'_{(1)}, \cdots\cdots, & \Xi'^{\gamma-1}_{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \Xi_{(1)}^{(\gamma-1)}, \cdots, & (\Xi_{(1)}^{(\gamma-1)})^{\gamma-1} \end{vmatrix} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \begin{vmatrix} 1, & \Xi_{(m-1)}, \cdots\cdots, & \Xi_{(m-1)}^{\gamma-1} \\ 1, & \Xi'_{(m-1)}, \cdots\cdots, & \Xi_{(m-1)}^{\gamma-1} \\ & & \\ 1, & \Xi_{(m-1)}^{(\gamma-1)}, \cdots\cdots, & (\Xi_{(m-1)}^{(\gamma-1)})^{\gamma-1} \end{vmatrix}.$$

由此遂得定理三十九.

定理三十九不但說明一域之判別式可爲其分域之判別式所整除,且說明分域判別式之乘方可整除其倍域之判別式,且同時以一簡單的關係以示倍域判別式之其他因子.

§16. 於倍域 K 中分解分域 k 之元. 關於倍域 K 之別之定理.

定理四十. 分域內 k 之元等於倍域 K 中 γ 個元之積,且確有下之公式:

證: 若

$$F(X)=X^M+F_1X^{M-1}+\cdots\cdots+F_M=o$$

爲 K 域之 M 次基本方程式,式中 $F_1,\cdots,F_M$ 爲 $U_1,\cdots,U_M$ 之整係數函數,對 X

有下之恆等式

$$\Phi_0{}^m F(X) = \Phi(X, \xi)\Phi(X, \xi')\cdots\Phi(X, \xi^{(m-1)}).$$

因 $\Phi(\Xi, \xi) = 0$，故基本式 Ξ 之別可以公式

$$\Delta(\Xi) = \frac{\partial F(\Xi)}{\partial \Xi} = \frac{1}{\Phi_0{}^m}\ \frac{\partial \Phi(\Xi, \xi)}{\partial \Xi}\Phi(\Xi, \xi')\cdots\Phi(\Xi, \xi^{(m-1)})$$

表之，今有

$$\Phi(\Xi, \xi^{(h)}) = \Phi_0(\Xi - \Xi_{(h)})(\Xi - \Xi'_{(h)})\cdots(\Xi - \Xi_{(h)}^{(\gamma-1)}), \tag{5}$$

及

$$\Phi(\Xi, \xi^{(h)}) = \Phi(\Xi, \xi^{(h)}) - \Phi(\Xi, \xi) = (\xi - \xi^{(h)})G^{(h)}, \tag{6}$$

式中 $G^{(h)}$ 爲一多項式．由此可得

$$\Phi_0{}^m \frac{\partial F(\Xi)}{\partial \Xi} = \frac{\partial \Phi(\Xi, \xi)}{\partial \Xi}(\xi - \xi')\cdots(\xi - \xi^{(m-1)})G'\cdots G^{(m-1)}.$$

因 $\dfrac{1}{\Phi_0}\ \dfrac{\partial \Phi(\Xi, \xi)}{\partial \Xi}$ 爲 Ξ 之相對的距．故由定理十三可得

$$D = D_k d F$$

式中 D 爲 K 之別，D_k 爲 K 對 k 之相對的別，d 爲 k 之別，F 爲 $G', \cdots, G^{(m-1)}$ 之容．由定理三十九可得 $N(F) = 1$，故 $F = 1$，卽 $G', \cdots, G^{(m-1)}$ 爲單位式．由公式 (5)，(6) 卽得定理四十．

由定理四十，吾人可於 K 內分解 k 內之元．此爲判別式理論之基本．由公式(7)可得下之重要事實．

定理四十一．K 之別 D 等於 K 對分域 k 之相對別 D_k 與 k 之別 d 之積，卽

$$D = D_k d.$$

由此定理分域別與倍域別之關係異常簡單：一高等域之別，可由其分域之別乘相對別以得之．

武昌害蟲誌略

張德興

前言

一千八百六十八年,美國加州桑港有一苗木商人,自澳洲輸入檸檬苗時,於不知不覺中將綿介殼蟲同時附入,繁殖以後,竟至該地生產最大之柑橘,幾處絕境;我國農作物因蟲害之損失,據一九二二年農商部統計,年在四十萬萬元以上;又據江蘇省昆蟲局調查之統計,民國十四年(一九二五年)江蘇江南十縣螟蟲害稻,約值銀二千一百二十七萬餘元,民國十八年(一九二九年)各省蝗蟲爲害損失達一萬萬餘元,我國地面遼闊,調查難能精確,據以推測,則全國損失之數量,斷不止此.北方各省,年有蝗災,南方各省,年有螟災.出產減少,米價騰貴,生計艱難,盜賊蠭起,賦稅短收,國產空虛,經濟困難,各事棘手.他如蟲害桑樹,蠶絲即遭損失,蟲害草棉,衣源即告缺乏,向有豐收可得輸出者,一遇蟲害反仰給外人之輸入,以農立國之國家,農產尚不足供自己之需要,如此而望國基鞏固,民生安定,其可得乎.又如森林害蟲,園藝害蟲,無一非間接蠹蝕民衆之脂膏者;再若蚊,蠅,蝨,蚤,臭蟲等,非僅刺螫人畜,又爲傳播病毒之努力者,故近來我國流行病,到處蔓延,死亡相繼之餘,更招極不名譽之恥辱.因在文明世界,有知識者決不致犯流行病而死也.據此則吾人爲增加衣食之源計,爲保全個體生命前途計,對於蟲害之應竭力研究,實爲刻不容緩之事.興於教學之餘,兼事園藝,今夏略遭蟲害,而研究害蟲之念於焉以起,現就所得誌以大略,錯誤之處,知所難免,尚望海內外專攻斯學者起而注

意並加指示爲幸!

I. 鱗翅目 Lepidoptera

一 粉蝶科 Pieridae

1. 粉蝶 Pieris rapae L.

別名: 俗名白粉蝶亦名菜花蝶又名菜青蟲

採集: 三月至十月於武昌南湖.

形 態

成蟲: 體纖弱細長,灰褐色,翅大色白,有稍帶綠色者,前翅尖端,有黑褐斑,前緣內半淡黑,近外緣有二黑點,後翅有一黑斑,體長約六分,展翅闊約一寸七分,♀前翅表面中央有二黑點甚明瞭,♂極淡,有時全缺.

卵: 卵長形,灰黃色,長約三厘,產於葉之裏面.

幼蟲: 體綠稍帶黃,皮面多微小凸起,由凸起生細毛,孵化時,長幼五六厘,鮮黃色,有細毛,稍長則綠變而柔軟,背面中央有帶色條紋,腹兩側各有一行黃色斑點,長成時約一寸二三分.

蛹: 初綠色,後變灰褐,六七分長,尾端有絲球固定其體,直懸於菜葉上,中部並有絲束縛以保持之.

生活史: 每年發生四次,第一次在三四月間,第二次在五六月間,第三次在七月間,第四次在八月間,末次所化之成蟲,至九月初旬產卵,下旬化蛹而越冬.在我國南部較暖之處,可再化蝶而產卵,十一月初旬化蛹而越冬.翌年四月間,發生第一次成蟲,早晚靜止,日中飛行交尾,二三天後,產卵,卵散產,直立於葉之裏面,卵經一星期孵化爲幼蟲,取食附近之葉肉,長大則葉成孔,幼蟲期之長短,常隨氣候之寒暖而不同,通常約十至十四天化蛹,蛹經一二週羽化成蟲,大抵在武昌夏季每完成一世代約需三週至五週.

被害物: 蘿蔔,蕪菁,菜苔,甘藍,花椰菜,球莖甘藍,白菜,青菜及其他十字花科植物.

防除法:

1. 撒佈除蟲菊肥皂合劑(A)除蟲菊加用石油乳劑(B)之三四十倍液等殺之.

(A)肥皂二——三錢,除蟲菊粉二——三錢水一升七合許

(B)石油一·七二四升,肥皂十二——十五錢除蟲菊粉二兩水爲石油之半量.

2. 巴黎綠一磅,和水五〇加侖注射於葉上以殺其幼蟲.

3. 砒酸鉛二——三磅,和水一大桶撒佈之亦效.如欲其黏着於光滑之菜葉上,可酌加二——三磅松香皂,或其他黏着劑.

4. 甘藍在幼苗期卽撒以砒素至球巳半結成爲止,可以防止幼蟲匿居於球中爲害.

5. 砒酸鉛粉末二磅,魚油二磅和水五加侖注射之亦効.

6. 砒酸鉛粉末一磅滲入五磅之風化石灰撒佈之有効.

7. 撒佈硫酸尼古丁或紅砒亦可.

8. 注意捕殺夜晚棲止菜圃四週之綠籬或附近樹林之成蟲.

9. 利用婦孺捕殺幼蟲,或以捕蟲網捕殺成蟲.

10.晚秋注意搜集燒殺附着於圃地附近之殘株枝葉上之越冬蛹,並於冬日行雙犂深耕法,使落於地面之蛹翻覆土內或壓斃或窒死.

11.保護幼蟲之寄生蜂及他種肉食性蟲類或鳥類.

12.十字花科植物育種時,須選含芥子油成分較少者.

2. 紋黃蝶 Colias hyale L.

別名: 越年蝶

採集: 三月下旬於武昌南湖

形　態

雄蝶翅皆黃色,前翅外緣帶黑褐色,中黃色,或有黃白色紋者,並有一黑褐

點,後翅暗色,外緣黑中央有一橙黃紋,於翅裏則現銀白紋而繞以黃褐環紋,雌蝶有二形,一似雄體翅皆黃色,一呈黃白色,紋樣兩性無大差異,體長均約六分半,展翅闊約一寸六分,初春出現,至十一月間尙見其飛翔,此蝶每能越冬,故有越年蝶之名,種類多以期節而變化,春生小,夏生大,幼虫體暗綠,背線及側綫均白色.

被害物: 苜蓿,大巢菜(烏豌荳)等豆科植物.

防治法:

1. 成蟲以捕蟲網捕之,幼蟲雇婦孺捕之.

2. 用除蟲菊石鹼合劑三四十倍液撒佈於葉上亦可.

3. 黃蝶 Terias multiformis Pryer.

採集: 三月下旬於武昌南湖

形 態

春生形小,全翅黃色,表面無斑紋,後翅裏面有數個褐點,夏生者大,翅亦黃色,邊緣黑,後翅裏面有褐色斑紋,極淡微,惟有同色粉鱗散布,二形雖頗有差異,而介於此兩形之間者亦多,此蝶細長纖弱,翅色多隨節氣而不同,普通種以成蟲狀越年,幼蟲體綠色.

被害物: 幼蟲食合歡,鐵掃箒等之葉.

防治法:

1. 成蟲以捕蟲網捕殺幼蟲以手採殺.

2. 以噴霧器噴射波爾多液亦効.

4. 山黃蝶 Gonopleryx rhamni L.

別名: 蝴蝶

採集: 七月中旬於武昌南湖

形 態

♂全翅濃黃色,前後兩翅中央皆有橙黃小點,裏面褐色,翅外緣有黑小點.

♀翅色淡黃而白,易識別,體長約七分,展翅闊約二寸三分,秋間飛行於山中,翅黃色,故有山黃蝶之稱,幼蟲體暗綠色,側面鮮綠有灰白波狀線.

被害物: 鼠李等之葉.

防治法:

人工捕殺或以波爾多液驅除之.

5. 菁蝶 Pieris napi L.

採集: 七月中旬於武昌南湖

形 態

♂小於♀,翅白而翅脈黑.前翅基部淡黑色,中央有黑斑二個,♀頗鮮明.翅裏♂♀皆淡黃色.♂♀體概呈暗色.體長約六分,展翅闊約一寸九分.幼蟲體暗綠,密被短毛,散布白色疣狀突起與黑點,長約一寸三分.

被害物: 萊菔,甘藍等十字花科植物.

防治法: 同前.

6. 梅白蝶 Aporia Crataegi L.

採集: 七月下旬於武昌洪山

形 態

成蟲: 體被灰白毛,長形色黑,翅白,翅脈黑,外緣色黑,翅底亦黑,體長約八分,展翅闊約二寸六分.

幼蟲: 體圓長,色赤褐,密被長毛,頭黑,背綫黑褐,背上有短毛黃褐色,體長約一寸四分.

生活史: 常於六月飛行花間,採食蜜汁,越冬之幼虫,六月間化蛹,後羽化爲成蟲,產卵於葉之下面,至八月孵化爲幼蟲,及冬則收集樹梢上之枯葉或其他枯葉造巢棲息而越冬.

被害物: 幼蟲害食梅,櫻,梨,海棠,蘋菓等樹之葉.

防治法:

1. 人工捕殺成蟲及幼蟲.

2. 淸潔園地,焚燒搜集之枯樹碎葉.

二. 蛺蝶科 Nymphalidae

7. 苺胥 Vanessa C-album, L.

採集: 五月下旬於武昌南湖

形態

成蟲: ♀♂翅緣濃褐而甚多出入,翅表面赤黃色,多濃褐斑紋,翅裏多不規則之波狀線,暗黃帶褐,後翅中央有形如 C 字純白之鈎紋,故有稱 C 字紋蛺蝶者.此種變化亦多,夏生形大,色淡,秋生形小而色濃,體長約七分.

幼蟲: 褐色,背前部赤黃色,後部白色,生有棘毛,頭有二短棘.

被害物: 草苺等.

防治法:

1. 人工捕殺成蟲及幼蟲.

2. 撒佈風化石灰或石油乳劑.

8. 葎胥 Crapta C-aureum, L.

採集: 三月下旬於武昌南湖

形態

成蟲: 翅緣尖銳突起,翅表面赤黃色,因季節而有濃淡之別,夏生者一般色淡,翅緣黑色中微有赤黃線,多小青點及黑斑,翅裏黃褐色,多不規則之濃褐波線,後翅中央有 C 字紋,銀白色.秋生形小,翅表面均濃色,裏面呈黑色.

幼蟲: 褐色,生有刺毛頭生二短棘.

被害物: 大麻,葎草等之葉.

防治法: 與前種同.

9. 赤胥 Vanessa callirhöe Fab.

採集: 五月下旬於武昌南湖

形　　態

成蟲: 體長約七分,展翅闊約二寸三分,前翅表面赤褐,前緣角黑,後翅黑紅相雜,外緣赤褐,翅裏面褐色,多黃白色斑紋.

幼蟲: 長約一寸半,體色暗褐,頭黑,背線亦黑,各體節具叉棘,帶黃色或灰色.

被害物: 苧蔴,蕁蔴,黃蔴等.

防治法: 與前法同.

10. 姬赤蛺 Pyrameis cardui, L.

別名: 姬赤蛺蝶

採集: 七月於武昌洪山

形　　態

成蟲: 翅淡柿色,前翅前角部黑,中有白色方斑,後翅柿色多,黑色部漸濃變於其中央,脈上有黑點,翅表有成列之絲紋,各間室之柿色中,有黑色圓紋與半月紋,裏面帶褐色,雜以黃白,後翅外緣,有數眼狀紋,並黑黃青三環,中心黑色,頗顯著.

幼蟲: 體色暗褐,生有短棘毛.

被害物: 與前種同

防除法: 與前種同.

11. 閃紫蝶 Apatura ilia

採集: 七月於武昌洪山

形　　態

成蟲: 翅表黃褐色,基部中央及邊緣黑褐色,前翅前角,有白小方斑,中室內黃褐色部,有四黑點,後翅有黃褐中央帶,沿外緣有半月狀紋列,裏面淡黃褐色,後翅基部暗色,表面鮮色部混以白鱗,今翅表面黑褐色,迎光線方向而

見美紫色,此幻色也.♀無此幻色而形大.

幼蟲: 綠色,頭有二角狀突起.

蛹: 側扁而前端尖.

被害物: 柳等

防治法: 與前種同

12. 菝葜胥 Vanessa Charonia Drury.

別名: 瑠璃蛺蝶

採集: 六月下旬於武昌洪山

形　態

成蟲: 翅緣突起,稍圓,翅表面一般黑而混藍色,前翅前角至後翅前角有瑠璃色闊帶紋直貫之,翅裏色褐,而翅中央背有一小白點,體長約八分半,展翅闊約二寸三分,出現於春夏秋三季.

幼蟲: 暗褐色.

被害物: 菝葜等

防治法: 與前種同.

13. 裴胥 Argynnis niphe L.

別名: 褄黑豹紋蝶

採集: 六月於武昌洪山

形　態

成蟲: 翅外緣有鋸齒,後翅外緣鋸齒尤深,翅表一般鮮黃赤色,而黑紋多,裏面前翅大半呈赤黃色,前角黃色,後翅色黃而有多數草色斑紋,各紋附有黑緣,其間有銀白紋,♀比♂大,青黑色多,前翅前半黑,其中央有大白斑.

幼蟲: 爲天鵝絨黑色,有濃橙黃色背線,棘毛分枝,一部黑,餘暗赤色,側面有不規則的蒼白色線.

蛹　淡褐色,有暗色模樣,頭有二短角狀物,胸部下面各節有金色點

被害物：紫花地丁等.

防治法：與前種略同.

14.—綫蝶 Limenitis sibilla L.

採集：八月中旬於武昌寶積菴之敬樂園

形　　態

成蟲：翅黑色,前後兩翅貫以白帶,在後翅者由七紋而成,與前翅二紋連續,中室外方,有三白紋,近前緣角有二小白紋,裏面黃褐色,內緣青白,外緣有黑色二紋列,分佈於亞歐,非,西比利亞等地,武昌寶積菴附近多見之.

幼蟲：體長五分至六分,暗褐色.

被害物：金銀花,金銀木等.

防治法：同前種.

15.豹紋蝶 Argynnis Sagana Dbl.

採集：五月下旬於武昌之松樹嶺.

形　　態

成蟲：♀前翅黑綠,近於中央及前緣角有白紋橫列,後翅之白紋列橫走于中央,其外側有黑紋二列,表面酷似綠豹紋蝶之♂,然其色淡,後翅底具一條黑綫,此♀之後翅色稍暗綠,具銀白色橫帶,散在斑紋中,♂內半淡褐,外半濃褐,中央之銀白帶不甚明瞭,體長♀七分五厘,展開翅約二寸四分,♂長七分,開展一寸七分.

被害物：不明

16.苧膏 Vanessa cardui, L.

採集：七月上旬於武昌寶積菴之敬樂園.

形　　態

成蟲：翅表面大部黃赤色,裏面甚美麗,前翅表面外半黑色,有白紋數個,外緣列生黑紋,又有黃紋及白紋,翅底綠褐,後翅近前緣半分暗色,外緣有黑

紋三列,中列之最後者藍色,緣毛色白,體長約七分,展翅闊約二寸,武昌地方出現於早春至晚秋間.

幼蟲: 灰褐色,頭黑有黃色點綫,各體節生叉刺六七枚.

被害物: 苧麻,蕁麻,黃麻等之葉.

防治法: 人工捕殺成蟲及幼蟲或以石油乳劑液殺之.

17. 赭胥 Junonia asterie, L,

採集: 九月於武昌之何家山口.

形　態

成蟲: ♀♂之翅皆赭色,前緣至外緣有淡黑褐色之鑲邊,外緣有眼斑及並行之暗褐線三條,翅裏色皆暗赭,中央有相貫之紋一條,自前翅中央起達於後翅之尾狀角.

幼蟲: 體色淡褐,體節略帶黑,背有白線,頭部赭色.

蛹: 赭色,多黑紋及黑點.

被害物: 爵牀科植物.

防治法: 同前種.

18. 豹蝶 Argynnis paphne, Schiff.

採集: 七月中旬於武昌寶積菴.

形　態

成蟲: 體長形,色灰褐,頭部寬闊,觸角末端粗而短,前翅略成三角形,後翅長橢圓形,翅色♂黃褐,♀綠褐,均有黑紋散布,前翅裏生斜方形黑紋列,後翅裏近外緣之半分,暗褐稍帶綠,有雲形紋,呈紫灰色,並有褐色眼斑,但不明顯,中央部同為黃色,有黃褐緣邊,基部有直行濃褐綫紋,體長約七分,展翅約一寸九分.

成蟲: 體圓長,色黑褐,背綫黃,側綫深黃,每體節具暗黃之棘叢.

蛹: 體呈紡錘形,背面有凹入亦有凸起頭呈叉狀.

被害物: 紫花地丁及蒜.

防治法: 人工捕殺外撒以草木灰或風化石灰.

三. 弄蝶科 Hesperidae

19. 弄蝶 Pamphila guttata, Brem.

別名: 花弄蝶,一線弄蝶或一字蝶.

採集: 八月於武昌南湖.

形　　態

成蟲: 體長約六分,展翅闊約一寸二分,體形稍扁,色濃褐略帶藍,頭大觸角短,翅小濃褐,前翅三角形,♂有七個半透明之白點,♀有八個白點,後翅圓形,有四個白紋並列成直綫於中央部,外緣有凹陷.

卵: 茶褐色,稍帶青味,狀似饅頭,夏產於稻葉,秋產於竹葉.

幼蟲: 幼蟲曰稻苞蟲,頭大頸細,至末端漸次膨大,尾端圓,腹部扁平,脚小,密着於葉,體長寸餘,幼時色綠,長成變灰黃,第一節有黑色細橫綫,全體有微小之凸起,且生細硬毛,又沿腹部有白色之分泌物,夏食稻葉,秋食竹葉,孵化後卷一枚之葉棲於其中,老熟則綴數葉成苞,且居且食.

蛹: 爲淡茶色,頭部扁平,在苞部以絲繞四圍以白色分泌物附着之,蛹化其中.

生活史: 每年發生次數因季節而略有不同,武昌地方,此蝶每年二回,成蟲六月頃發生,產卵稻葉,孵化幼蟲此幼蟲自八月中旬至九月上旬,蛹化而變成蟲,迄十一月頃漸次產卵直孵化以幼蟲態越年,春季五六月頃化蛹成第一回成蟲.

被害物: 稻,竹,蘆等葉.

防治法:

1. 在春季化蛹期前,將禾本科雜草除去.

2. 以捕蟲網捕殺成蟲

3. 以梳葉器梳取幼蟲燒殺之,若預將除蟲菊加石油液滴入稻田水面則由捲葉中梳落之幼蟲均可殺死.

20. 貍弄蝶 Hesperia flava. Mur.

採集: 八月於武昌南湖.

形 態

成蟲: ♀♂兩體除♀腹部較大外,餘無差別,翅表面暗褐,多黃斑,翅裏黃,有赤黃與淡黃之斑紋.

卵: 半圓形,綠褐色.

幼蟲: 體灰綠,頭黑,以枯葉造粗繭而化蛹.

蛹: 略呈橢圓狀,以尾端附着於粗繭之內部.

被害物: 大巢菜等之葉.

防治法: 人工捕殺或撒風化石灰.

四. 斑蝶科 Danaidae

21. 阿檀蝶 Daneis Chrysippus

採集: 八月於武昌娘娘廟

形 態

成蟲: 翅大色赤黃,前翅前緣角黑褐有橫貫之白紋,後翅外緣後緣均有黑邊,中央具三黑紋.在♀者黑邊中有白點整列,在♂者除三個黑紋外,又有長方形黑斑,而稍突起,此即蝶發生香氣之香腺所在處,體長約八分,展翅闊約二寸一分.

幼蟲: 體色淡紫.

被害物: 主害阿檀樹之葉,武昌南湖附近之楊柳亦遭害食.

防治法: 人工捕殺成蟲或以二三十倍之石油乳劑殺其幼蟲.

(附言) 此科依最近分類法定爲蛺蝶科中之亞科.

五. 鳳蝶科 Papilionidae.

22. 鳳蝶 Papilis Xuthus, L.

採集: 六月於武昌南湖

形態

成蟲: 體圓長,色黃綠或黃,頭部長形,複眼褐,棍棒狀觸角,口吻長黑,卷作盤香狀,胸腹部背面有直條紋,前翅黑,沿外緣列生八黃紋,中央部有多數黃斑,至後方漸長,中央室有直列之圓點綫,後翅近外緣有半月形黃紋,近內緣有藍斑,其多方有輪狀黃赤斑,中央部列生黃斑,具尾狀突起,脚之脛節具葉狀附屬物,♂體彩色濃豔於♀體,體長約一寸,展翅闊約三寸半.

卵: 卵圓形稍扁,常產於柚,柑,枸橘等樹.

幼蟲: 幼蟲曰小烏蠋,體色黑褐,頭尾黃白,長成時體變暗綠,散布黃赤紋,頭部黃綠,第一節藏有肉質之黃色叉狀角,第三體節有眼狀斑在兩旁,中有二對馬蹄狀紋,又近體之前端,具橫走之二條綠白色紋,中央部兩側又有斜走之濃藍綫紋,體長約一寸四分.

蛹: 蛹外無繭,以絲斜懸於屋壁及樹木間,故又稱之曰縊蟲.

生活史: 五六月至九月間,發生三次,第二次之蛾,形略大,翅色濃,尾狀突起亦長,其第三次發生之蛹,能越冬至翌年羽化爲成蟲.

被害物: 柚,柑,橘,枸橘等.

防治法:

1. 冬季剪枝時,注意擠殺其越冬蛹.

2. 當幼蟲發生期,可撒布砒酸鉛波爾多液以減其勢力.

3. 幼蟲幼稚弱時期可撒布除蟲菊石鹼合劑或除蟲菊石油乳劑之三十倍液.

23. 金鳳蝶 Papilio machaon, L.

別名: 黃鳳蝶

採集: 七月於武昌南湖.

形 態

成蟲: 爲大形鳳蝶,大小隨季節而有差異,全體濃黃色,翅色黃有黑直綫紋,前翅黑,具黃紋三列,沿內緣有斜方紋三,在中央有斜列之斜方紋八,沿外緣又有八小紋,後翅近外緣半分,黑色有藍紋,沿外緣又有整列黃紋,內緣角有藍黑色圍繞之赤橢圓紋,其餘半分黃色,體長春生者約八分,夏生者約一寸,展翅之闊,春生者約二寸五分許,夏生者約三寸.

卵: 球形,淡黃色,孵化前變紫黑.

幼蟲: 初齡時,形狀顏色酷似鳥糞,頭黑,腹暗黑,第六第七兩節黃白,至三齡時變綠,各體節皆有一條黑紋及數個赤黃紋,充分長成時,長約二寸.

蛹: 淡黃褐色,長形,略彎曲,長八分至一寸.

生活史: 一年發生三次以蛹越冬,蛹多在附近之樹木及垣籬上,成蟲出現,第一次四五月,第二次六月,第三次八九月,幼蟲發生於五六月,七八月,及九十月三期,成蟲飛行日中,產卵於葉上,幼蟲晝伏夜出.

被害物: 防風,茴香,胡蘿蔔及其他繖形花科植物.

防治法:

1. 連葉摘取燒殺其幼蟲.

2. 噴撒砒酸鉛以殺其多量幼蟲.

3. 以捕蟲網捕殺其成蟲.

24. 麝蝶 Papilio albinous Klug.

別名: 山女郎

採集: 四月於武昌洪山

形 態

成蟲: 能放一種如麝香之香氣,故名.♀者香氣弱於♂者.♀翅淡褐,外緣黑褐,後翅黑褐,後翅基部紫色.♀♂後翅沿外緣皆有淡紅色新月紋,被有黑鱗,不甚顯著,裏面較表面色淡,♂之彩色,比♀鮮豔.

幼蟲: 形如未熟莓實,有白紋,色黑.

蛹: 呈凸凹畸形.

被害物: 馬兜鈴,木防已,及蘿藦科植物.

防治法:

1. 幼蟲少時人工捕殺,多時噴射風化石灰或草木灰或三四十倍之除蟲菊石鹼合劑液.

2. 以捕蟲網殺其成蟲.

25. 縞鳳蝶 Papilio polytes L.

採集: 四月下旬於武昌洪山

形　態

成蟲: ♀♂翅帶黑褐色,翅脈明顯.♂之前翅,脈間之黃白斑,與外緣相並,至後緣則略大.後翅中央有黃色方形斑,比連成列.♀體有二種形狀.A種形色近似雄體,僅後翅後緣有二小赤點.B種前翅色甚淡,翅基色極濃厚,後翅中央有黃白方形斑,沿後緣有數個赤色半月斑.常隨氣候而改變其色彩斑紋.春生者小於夏生者.

被害物: 幼蟲害食芸香科植物.

防治法:

1. 摘取樹皮下之蟲卵而燒殺之.

2. 樹幹發見蟲穴時,以石油菜油灌注之.

3. 成蟲用燈火或白布誘殺之,或以捕蟲網捕殺之.

26. 縞蛛 Papilio macilentus, Janson.

採集: 八月於武昌洪山

形 態

成蟲: 類似黑鳳蝶,體翅皆黑,翅形細長,前翅表面灰黑色,脈間爲細黑紋,後翅外緣鋸齒深,翅基部色濃,尾頗狹長,外緣有暗赤色半月紋列,裏面比表面色淡,♀較♂翅廣,尾短,如黑鳳蝶,♂後翅前緣有蒼白色帶,♀缺,春夏常飛翔於百合花之間,武昌地方五月至八月常見於洪山附近.

被害物: 不明.

27. 碧鳳蝶 Papilio bianor Cram.

採集: 四月於武昌柏木嶺.

形 態

成蟲: 體色濃藍,前翅濃綠,中央部灰褐,後翅濃藍,後端周緣淡藍,有白紋新月形,近內緣角有赤紋亦新月形,體長約一寸二分,展翅闊約四寸半.

幼蟲: 體暗綠,第四體節具眼狀紋,其他又有輪狀紋,波狀紋,斜行線.

被害物: 柑橘類植物之葉

防治法:

1. 幼蟲於春夏秋發見時少則人工捕殺,多則噴射波爾多液.

2. 以捕蟲網捕殺其成蟲,或以燈火誘殺之.

3. 剪取附蛹之枝燒殺之.

六. 小灰蝶科 Lycaenidae

28. 燕蜆蝶 Lycaena argiades, Pall.

別名: 燕小灰蝶

採集: 四月於武昌南湖

形 態

成蟲: ♂蝶翅之表面爲美琉璃色,邊緣色褐,幅狹,♀蝶翅表爲暗褐色,前翅無斑紋,惟後翅外緣有二三黑點,圍以橙黃色之半環,緣毛皆純白,裏面灰

白色,基部帶青色,前後翅近中央外偏部分,有褐色點一列,其外側有微點二列,近於後翅外緣有橙紅色之半月紋,甚美麗.體長約三分半,展翅闊約一寸.

幼蟲: 蒼綠色,背側有暗色條線.

被害物: 紫雲英等豆科植物.

防治法: 人工捕殺其成蟲和幼蟲,多則噴以石油乳劑.

七. 尺蠖蛾科 Geometridae

29. 梅雨蛾 Abraxas eurumede Mats.

採集: 七月上旬於武昌南湖農場.

形態

成蟲: 體細長,頭部橙黃,複眼黑,觸角亦黑,爲絲狀,胸腹兩部雖爲橙黃色而胸部中央及腹部背部面色黑,前後兩翅皆薄而稍長,均有雲形斑紋,♀長約七分,展翅闊約一寸七分,雄長約六分,翅開展闊約一寸五分.

幼蟲: 五月上旬出現,六月上旬老熟六月中旬化蛾

蛹: 幼蟲五月下旬出現,六月上旬吐絲,牽綴葉片爲假繭而化蛹.

被害物: 梅,木瓜等.

防治法:

1. 急搖樹枝震落幼蟲於地而捕殺之.

2. 噴撒砒酸鉛,硫酸尼古丁或除蟲菊石鹼液於幼蟲發生期.

3. 膠塗樹幹阻止幼蟲之昇降.

4. 搜殺其卵塊,捕殺或誘殺其成蟲.

5. 冬季焚燒雜草及存留枝上之枯葉.

6. 保護或利用其大敵寄生蜂類及寄生蠅類.

30. 黃蛓蛾 Aspilates formosaria, Ever.

別名: 銀筋枝尺蠖.

採集: 九月上旬於武昌洪山

形 態

成蟲: 前翅橙黃色,前緣及外緣灰白,由翅端向後緣中央具有一條銀白色斜紋,其兩側褐色,散布濃褐色小點.後翅灰白於三分之二處,有一不明之細暗色條紋,不達到前緣,其下方散布小褐點,裏面灰白,前緣散布小褐色點,在翅端有灰褐色橫紋,前後同,頭及頸色灰白,胸背黃色,後胸及腹部灰白色體下帶暗色,體長約五分,展翅闊約一寸四分.

被害物, 未明.

31. 蠘蛾 Hemirophila atrilineata Butl.

別名: 尺蠖蛾或桑尺蠖.

採集: 七月下旬於武昌南湖桑園.

形 態

成蟲: 體長約七分,展翅闊約一寸七分,形圓長,體及翅皆灰褐,前翅灰黃或黑褐,有斜走之雲形紋二條,後翅近外緣有黑色曲線紋一條,♀蛾觸角羽狀,♂蛾觸角絲狀.

卵: 橢圓形,初綠,後變灰,孵化前則變紫藍.

幼蟲: 頭部赤褐,胸部暗褐體圓長,恰如桑皮色,各節兩側,均有黃褐色之瘤狀突起四.長成時長約二寸.行動時如尺之量物,又寄生於桑,且色如桑皮,故名桑尺蠖,又曰桑蠖.

蛹: 呈褐色,腹部特膨大,外有褐色粗繭.

生活史: 每年發生二三次,秋生者脫皮二次而越冬,至翌年四月間,更脫皮二次,以枝葉作繭,至七月間則化蛾,蛾卽交尾,產卵於樹枝葉背,卵復孵化經過幼蟲及蛹之時代,至八月羽化爲第二次成蟲,復產卵而以半長成之幼蟲越冬.其一年三化者,其第三化期之成蟲,於九月間羽化,產卵於陰處之葉裏或枝條上,孵化之幼蟲潛伏於樹皮隙間,或樹根附近之草內而越冬.

被害物: 桑

防治法:

1. 清潔桑田,燒毀枯枝殘葉.

2. 冬季竭力搜尋樹上之蟲卵結繭而燒殺之.

3. 春季竭力捕殺幼蟲.

32. 茶尺蠖 Biston sp.

採集: 十月於武昌磨盤山

形　　態

成蟲: 體長約五分,展翅闊約一寸半,體黑色,翅灰白,多黑斑小點,前翅有灰白帶,兼有黑褐及灰白色波狀線.後翅亦有同樣之波狀綫.

卵: 橢圓形,淡黃色,生於葉及枝上.

幼蟲: 體淡灰褐,有不規則之黑斑及灰黃直綫.

蛹, 黃褐色,腹部膨大,背腹均有毛.

被害物: 茶

防治法:

1. 春夏秋間勤耕除草,隨時捕殺,不使害蟲棲息.

2. 冬季深耕泥土翻轉地面,凍死或壓斃之.

3. 噴射二三十倍之石油乳劑藥液.

33. 杉尺蠖 Zethenia rutescentaria Motsch.

採集: 十二月於武昌卓刀泉.

形　　態

成蟲: 頭,胸,腹,足皆灰色,前翅暗褐或灰暗褐,濃淡不一,散布暗色之小點,前橫條微呈波狀而彎曲,中央爲直綫條紋,後橫條不規則,呈鋸齒狀.後翅灰白或稍帶褐色,滿布暗色微點,前緣弧形,外緣鈍鋸齒狀.體長約五分至五分五厘,展翅闊約一寸至一寸五分.

幼蟲：長成時長約一寸,黃褐色,微帶綠,背上有褐色綫二條.

蛹：鈍紡綞形,褐或黃褐色,尾端針狀,長三四分.

生活史：每年發生一次.九十月間幼蟲爲害,十月中旬以後長成入土化蛹,居於深達尺許之地下,普通於十二月羽化成蟲,以成蟲或蛹越冬,翌年五六月間出現.

被害物：松杉.

防治法：與治梅雨蛾同.

八. 夜蛾科 Noctuidae

34. 杏劍蛾 Acronycta major Brem.

別名：桑白蛄蟖蛾

採集：五月下旬於武昌南湖桑園

形　態

成蟲：♀♂大小雖相異,然着色略同.即體軀呈淡灰色,下唇鬚稍出於前面,觸角細長而尖,前翅色略同於體軀,中央有二黑環紋,內半自前緣縱走短黑斜行波紋綫.外半有一黑色波狀綫,由前緣向後緣斜行,外緣生黑色與淡灰色之緣毛,後翅爲灰色,外緣帶淡褐色而生白色緣毛,體長♀蛾約八分,♂蛾約六分.展翅闊二寸三分,雄闊一寸三分.

幼蟲：體灰黃兼綠,有黑斑紋與黃短毛,頭黑,體長約二寸半,別稱白毛蟲

被害物：杏桑等之葉.

防治法.

1. 不分幼蟲成蟲,一律用捕蟲網捕殺.

2. 撒佈石油乳劑與石灰溶液等殺之.

35. 甘藍蟲 Agrotis ypsilon Rott.

採集：五月於武昌南湖桑園

形　態

成蟲: 前翅灰褐稍帶赤味,環狀紋,及腎狀紋暗色,周緣黑色.前者稍成不正形,接於後者之外側具黑色栓狀紋,更于其外側有二個劍狀紋,前橫綫後橫綫及波狀綫皆淡色,波狀線與外緣之間暗黑,後翅灰白色,體灰褐,頸毛前緣暗黑,具黑色波狀帶,體長♀♂約八分,展翅約一寸五分.

幼蟲: 俗稱切根蟲,赤褐色,長六七分.

被害物: 甘藍,蘿蔔,豌豆,及其他十字花科植物之根.

防治法:

1. 向被害物根邊搜索捕殺之.

2. 移苗時應在移植部分,撒佈除蟲菊木灰成五寸徑之圓形,以防幼蟲侵害.

3. 發見作物呈萎凋現象時,宜將附近地面掘起搜殺潛伏土中之幼蟲.

4. 可施用砒酸鉛劑.

36. 褊蛾 Agrotis segetum, Schiff.

採集: 八月中旬於武昌徐家棚附近菜圃.

形　態

成蟲: 體長約六分,展翅闊約一寸半,體灰褐,♀體腹部灰褐,而♂者灰黃.前翅有灰褐與灰色之別,皆有黑色不規則形之紋與大小之環狀紋二枚,後翅灰白,有銀光.

幼蟲: 體暗灰,背面顯紫綠色,頭及第一節背上暗褐,側面有黑綫二條,體長約一寸六分.

生活史: 每年發生二次,第一次發生時,幼蟲出現於六月間,晝伏根際,蜷為環狀,夜出而覓食,至七月間入土為蛹,八月化蛾產卵於蕪菁等之根部,經一二星期孵化為第二次發生之幼蟲,在地中越冬,後乃成蛹化蛾.

被害物: 蕪菁,煙草,甜菜,馬鈴薯,麥類,玉蜀黍等之根及近根之莖葉.

防治法:

1. 利用其好撲火性以捕蟲燈誘殺之.

2. 利用其嗜糖性行糖蜜誘殺法.

3. 撒佈除蟲菊加用石油乳劑之二三十倍稀釋液以殺其稚弱的幼蟲.

37. 蕪菁蠶 Agrotis ingrata, But.

採集: 九月中旬於武昌漭口附近.

形 態

成蟲: 體長約八分,展翅闊約一寸半.體黃灰兼褐,腹部灰色.前翅灰褐,中央有白環紋,環之內外多種種異形黑綫.後翅灰黃.

幼蟲: 體暗褐,具不定形之黑紋.老熟時約一寸半.十月間出現.常在土中蜷爲環狀潛伏而越冬,至翌年化蛹化蛾.

被害物: 蕪菁,萊菔,葱等.

防治法: 與前種略同.

38. 甘藷夜蛾 Anophia leucomelas L.

別名: 食葉蟲,中白下羽.

採集: 七月中旬於武昌敬樂園.

形 態

成蟲: 體長六分,展翅闊約一寸二分,頭胸及前翅暗褐色,複眼黑褐,腹部稍帶灰色.前翅有不甚明顯之腎形紋,後翅較寬於前翅,色黑褐,內緣及外緣間有白色.

卵: 圓形,直徑二厘,初爲淡黃色,後褐變.

幼蟲: 老熟時長一寸四五分,淡綠白色,遍體密生微細黑點,背綫黃色,其左右除一,二,三,八等節外各節均有二黑紋,腹面有黑斑,色淡黃.

蛹: 長約六分,黑褐色,居於土內之繭中.

生活史: 以幼蟲越冬,每年發生三次.成蟲出現第一次五月,第二次七月,

第三次九月.幼蟲則第一次六月,第二次八月,第三次十月.卵產於地上,幼蟲老熟後卽淺入土中,作粗繭而化蛹.

被害物: 甘藷

防治法:

1. 當猖獗時,掘溝遮斷阻其轉移.

2. 噴撒砒酸鉛液毒殺之.

3. 冬日雙犂深耕凍斃或壓斃其幼蟲,

39. 煙草夜蛾 Chloridea assulta Gn.

採集: 七月於武昌油坊嶺.

形　態

成蟲: 體色微有變化,頭胸黃綠色並黃褐,腹部淡黃褐色前翅黃綠並黃褐,自前緣以至後緣有三條褐色波狀帶,及其他波狀線並曲綫,中部有腎形紋及小圓紋,後翅外緣有闊黑帶.體長五分展翅闊約一寸二分.

卵: 淡黃色,饅頭形.

幼蟲: 頭部黃褐,胸腹淡綠或帶淡黃,老熟時長約一寸二三分.

蛹: 赤褐色,長四五分.

生活史: 每年發生二三次,極不規則;一年三化者,第一次蛾於五月下旬出現,在煙草之心芽及葉裏產卵,幼蟲食葉成孔,六月中旬化蛹,七月中旬羽化爲第二次成蟲,復產卵.幼蟲於八月長成,九月上旬羽化第三次成蟲,產卵由幼蟲而蛹,潛伏於地下越冬,翌年羽化.

被害物: 煙草,蕃茄,南瓜,酸漿,大麻,玉蜀黍,等.

防治法:

1. 秋杪搜尋潛伏土中之蛹殺之,或以雙犂深耕土壤,斃其越冬蛹

2. 清晨搜取幼蟲及卵而毀滅之.

3' 噴撒砒酸鉛,或除蟲菊石油乳劑以殺其幼齡之幼蟲.

4. 以捕蟲網捕殺或點誘蛾燈誘殺其成蟲.

5. 集被害之果實或葉焚燒之.

40. 稻螟蛉 Naranga diffusa Wk.

採集: 六月上旬於武昌鳳頭嘴.

形 態

成蟲: ♂蛾前翅爲暗黃褐色,有二枚黑色斜紋,展翅闊約五分;♀蛾前翅爲黃褐色,有二條斜紋,一由前方出,一由後方出,消失於中央部分.其在第一化與第二化之色彩及紋理微有不同.體長約二分半.

卵: 初淡黃色,孵化前變紫褐.形如饅頭,有放射狀之縱線.

幼蟲: 老熟時長達七八分,腹足之前方二對,較發育,動作近似尺蠖.

蛹. 色綠.

生活史: 每年發生三次,以蛹越冬,翌年四五月間羽化爲蛾,在秧苗葉上產卵成塊,不規則排列爲數行,幼蟲害食稻葉,先沿葉脈食成直綫形,三齡以後,食成鋸齒狀,長成於六月中旬,在稻葉前端食成三角形,化蛹其內,羽化爲第二次成蟲,至七月下旬發生第三次成蟲.

被害物: 稻,牧草等.

防治法:

1. 每畝約用一升五合至二升石油注於水面,掃落幼蟲而殺死之.

2. 焚燒葉尖縮成三角形之稻葉及採取之卵.

3. 捕殺其成蟲及幼蟲,並利用成蟲樸火性用燈火誘殺之.

41. 通草蛾 Ophiderus tyrannus, Gn.

別名: 通草木葉蛾.

採集: 七月杪於武昌實積巷敬樂園.

形 態

成蟲: 頭胸及前翅濃灰褐色,後翅及腹部色橙黃,有美麗彩紋,體大形,長

約一寸二分,展翅闊約三寸四五分,又前翅木葉狀,嗜食通草,故又名通草木葉蛾.

卵: 圓形,淡黃色.

幼蟲: 紫黑色,長成時長約三寸,形似尺蠖,有蛇目狀之斑紋.

蛹: 褐色,長約一寸一二分.

生活史: 七月發生第一次蛾,九月發生第二次蛾,以成蟲越冬,翌春產卵.

被害物: 蕃茄,柑橘,桃,梨,通草等.

防治法:

1. 人工捕殺大形幼蟲及成蟲.

2. 夜以木屑混硫黃粉,焚燒熏烟以阻止其侵略.

42. 粟夜盜蟲 Sidéridis Unipuncta Haw.

別名: 粟蠶蛾

採集: 七月於武昌洋園東十里許.

形態

成蟲: 全體灰褐色,密佈微小黑點,體肥大,胸部廣闊,腹部較小,前翅中央有一白紋,處處有黑斑而具不明瞭之腎臟紋與環狀紋,後翅灰色,有光澤,體長六七分,展翅闊約一寸三四分.

卵: 數多,約越十餘日而孵化,卵色黃白.

幼蟲: 體暗綠,側面有三條粗直綫紋,頭部黃褐,體長約一寸五六分,背綫黑褐,老熟入土化蛹.

生活史: 發生因氣候而不同,暖地一年三次,寒地二次,以蛹或成蟲越冬.於枯葉或青葉及葉鞘中產卵,幼蟲初期不分晝夜取食,三齡以後夜出為害,長成入土化蛹.

被害物: 粟,甘蔗,萱,竹,麥,燕麥,陸稻,稗等.

防治法:

1. 保護並利用寄生蜂及寄生蠅以殺其幼蟲.

2. 人工捕殺成蟲及晝間潛伏根際之幼蟲.

3. 噴撒砒酸鉛或除蟲菊石油乳劑稀釋液.

43. 櫻蠶 Amphipyra Pyramidea, L.

採集: 八月中旬於武昌沙湖柳堤.

形 態

成蟲: 體長約八九分,展翅闊約二寸.體圓錐形而肥大;前翅灰褐,中央部帶褐色,其前後有黑色與灰白之二橫線為犬牙狀,正中有一黑紋,外緣列生灰色小紋.後翅赤褐色,遍生平行狀之黑色綫紋.

幼蟲: 色淡綠形圓長,長約一寸半,背綫白;其兩側多白紋;老熟時卷葉作薄繭化蛹,至七八月間化蛾.

被害物: 櫻桃楊柳等之新芽.

防治法:

1. 捕殺其成蟲及幼蟲(用燈火誘殺其成蟲)

2. 保護其幼蟲之大敵(寄生蜂及寄生蠅類).

(未 完)

數學家姓名錄

(續第四卷第二期)

曾昭安

Haack, *Miss* Bonnie〔哈克〕二十世紀前半期　美女

Haack, Wolfgang〔哈克〕二十世紀前半期　但澤人

Haaften, M. van〔哈夫滕〕二十世紀前半期　荷蘭人

Haag, Jules〔哈格〕二十世紀前半期　法人

Haagensen, S.〔哈真森〕十九世紀

Haalmeijer, B. P.〔哈美哲〕二十世紀前半期　荷蘭人

Haan, David *Bierens* de〔哈〕(1822—1895)　荷蘭人

Haar, Alfred〔哈耳〕(1885—1933, 3, 16)　匈人

Haarbleicher, André〔哈布來拆〕二十世紀前半期　法人

Haas, August〔哈斯〕二十世紀　德人

Haas, Arthur *Erich*〔哈斯〕二十世紀前半期　奧人

Haase〔哈栖〕

Haasemann, L.〔哈塞曼〕二十世紀　俄人

Habart, K.〔哈巴特〕十九世紀末　德人

Habash al-Hasib〔哈巴士•亞哈西〕即 Al-Mervazi

Habenicht, Bodo〔哈本尼喜特〕十九世紀末

Haberl, J.〔哈柏爾〕十九世紀後半期　奧人

Hachette, C. Jourdain〔阿瑟特〕十九世紀中　法人

Hachette, Jean Nicolas Pierre〔阿瑟特〕(1769—1834) 法人 著代數及幾何學

Hack, Franz〔哈刻〕十九世紀末 德人

Hackel, J. P.〔哈克爾〕十九世紀中 捷克人

Hackett, Felix E. W.〔哈刻特〕(1882, 8, 15—) 英人 研究數理物理

Hackley, C. W.〔哈克力〕十九世紀 美人

Hackney, Lilian M.〔哈克尼〕二十世紀前半期 美人

Hacks, J.〔哈克斯〕十九世紀後半期 德人

Hadamard, A.〔哈達瑪〕

Hadamard, Jacques〔哈達瑪〕(1865—) 法人

Hadamard, M.〔哈達瑪〕二十世紀前半期 法人

Hadaszczok, J.〔哈達左〕十九世紀末 德人

Haddon, J.〔哈頓〕十九世紀中 英人

Hadley, John〔哈德栗〕十八世紀

Hadley, Steven Marshall〔哈德栗〕(?—1931, 11, 10) 美人

Haebler, T.〔赫布勒〕十九世紀後半期 德人

Haecker, G.〔赫刻〕二十世紀初 德人

Haedenkamp, H.〔赫登翠普〕十九世紀中 德人

Haeder, W.〔赫德〕二十世紀 德人

Haedicke, J.〔赫狄刻〕二十世紀 德人

Haefner, Ph.〔赫夫涅〕二十世紀 德人

Haenert, L.〔赫涅特〕二十世紀 德人

Haentzschel, Emil〔赫瑟爾〕十九世紀後半期 德人

Haenzel, Gerhard〔赫策〕二十世紀前半期 德人 幾何學家

Haerdtl, E. v.〔哈德特〕十九世紀末

Haering, T. L.〔赫爾〕二十世紀前半期 德人

Haerttei, L. D.〔赫耳忒〕二十世紀 美人

Haese, A.〔赫色〕二十世紀 德人

Haeuser, G.〔赫塞〕十九世紀末 德人

Hafen, M.〔哈樊〕二十世紀初 德人

Hagar, D. B.〔夏甲〕十九世紀後半期 美人

Hage, H.〔哈革〕二十世紀初 德人

Hagen, G. F.〔哈根〕十八世紀前半期 德人

Hagen, G. H. L.〔哈根〕十九世紀前半期

Hagen, Johann Georg〔哈根〕亦作 John George Hagen (1847—1930, 9, 6) 德人 著高等數學綱要,微積分進化史.

Hagenbach, E.〔哈根巴哈〕十九世紀 瑞士人

Hager, G.〔哈吉〕十九世紀後半期 德人

Hagge, K.〔哈治〕二十世紀 德人

Hagiwara Teisuke〔萩原禎助〕亦作萩原信芳 (1828—1909, 11, 28) 日本人

Haglund, Gustaf〔哈革倫〕瑞典人

Hagstroem, K. G.〔哈革斯洛〕二十世紀前半期 瑞典人

Hague, B.〔哈給〕二十世紀 英人

Hahn, A.〔罕〕十九世紀後半期 戸哥斯拉夫人

Hahn, Hans〔罕〕(1879—) 奧人 著實函數

Hahn, J.〔罕〕十九世紀後半期 德人

Hahn, K.〔罕〕二十世紀 德人 研究數理物理

Hahn, Lilly〔罕〕二十世紀前半期 德人

Hahn, Ph. M.〔罕〕十八世紀 德人

Haid, M.〔亥德〕十九世紀末 德人

Hailmann, W. N.〔海爾曼〕二十世紀 美人

Haitam〔海坦〕即 al-Haitam

Hajjaj〔哈查〕即 al-Hajjaj

Hajnal-Konyi, K.〔哈那•剛伊〕二十世紀 德人

Hake, H.〔黑克〕

Halboth, W.〔哈爾波司〕十九世紀末 德人

Halbwachs, Maurice〔哈爾瓦士〕二十世紀前半期 法人

Halcke, Paul〔哈爾刻〕十八世紀前半期 德人

Hald ne, Elizabeth Sanderson〔哈爾登〕(1862—) 英女

Haldane, John Burdon Sanderson〔哈爾登〕(1892, 11, 5—) 英人 數理生物學家

Hale, G.〔嘿爾〕二十世紀 英人

Hale, George Ellery〔嘿爾〕(1868, 6, 29—) 美人 研究數理天文

Hale, Joseph W. L.〔嘿爾〕二十世紀 美人

Hale, William〔嘿爾〕十九世紀初 著解析流數術

Hales, William〔嘿爾茲〕(1747—1831) 愛爾蘭人

Haley, George〔哈列〕二十世紀前半期 美人

Halifax, John〔哈黎法克斯〕即 Sacro-Bosco

Hall, Asaph, Jr.〔荷爾〕(1859,10,6—1930,1,12) 美人

Hall, A. G.〔荷爾〕二十世紀初 美人

Hall, E.〔荷爾〕二十世紀 義人

Hall, F. G.〔荷爾〕二十世紀前半期 英人

Hall, Francis J.〔荷爾〕(1857, 12, 24—) 美人

Hall, G.〔荷爾〕二十世紀 美人

Hall, Granville Stanley〔荷爾〕(1846—1924) 美人

Hall, Henry Sinclair〔荷爾〕(1848, 6, 8—) 英人 著數學教科書

Hall, Percival〔荷爾〕(1872, 9, 16—) 美人

Hall, Thomas Grainger〔荷爾〕十九世紀前半期 英人 研究微積分及變分學

Hall, T. P.〔荷爾〕二十世紀前半期 坎拿大人

Hall, William Shafer〔荷爾〕(1861, 6, 27—) 美人 著微積分

Haller, Albrecht von〔哈勒〕

Haller, S.〔哈勒〕二十世紀初 德人

Hallerstein, F.〔哈勒斯泰〕十九世紀 德人

Hallerstein, H. von〔哈勒斯泰〕十九世紀 德人

Hallett, George H.〔哈勒特〕二十世紀 美人

Halley, Edmund〔哈列〕(1656, 11, 8—1742, 1, 14) 英格蘭人 造對數表.著天文表.貢獻於幾何學及代數學.

Hallgren. E.〔哈爾格棱〕十九世紀末 瑞典人

Halliday, Geo.〔哈力對〕十九世紀後半期 英人

Halliman, Peter〔哈力曼〕十七世紀後半期

Halliwell. J.O.〔哈力衞爾〕十九世紀前半期 英人

Hallock, William〔哈羅克〕二十世紀初 美人

Halm, J.〔哈謨〕十九世紀後半期 德人

Halm, J. K. E.〔哈謨〕十九世紀

Halma, N.〔哈馬〕十九世紀前半期 法人

Halperin, Hillel〔哈佩靈〕二十世紀前半期 美人

Halpern, O.〔哈爾佩〕二十世紀 德人

Halphen, George Henri〔哈爾芬〕(1844, 10, 30—1889,) 法人 貢獻於不變式及橢圓函數

Halsted, George Bruce〔哈爾斯忒〕(1853, 11, 25—) 美人　著有理幾何學

Halstenbach, G.〔哈斯騰巴〕十九世紀後半期　德人

Haluschka, F.〔哈盧士卡〕十九世紀後半期　奧人

Hamberger, Georg Albrecht〔漢柏給,佐治阿布勒〕(1662—1716) 德人

Hamberger, Georg Erhard〔漢柏給〕(1692—1755) 德人　佐治阿布勒之子

Hamburger, A.〔漢本給〕(1889—) 德人

Hamburger, Meyer〔漢本給〕(1838—1903) 德人

Hamdorff, C.〔漢多夫〕十九世紀後半期　德人

Hamel, G.〔哈麥〕二十世紀初　德人

Hamid ibn al-Khidr〔哈米·易·亞基耳〕(?—1000) 亞剌伯人

Hamilton, George Hall〔哈密爾敦〕(1884, 1, 31—) 英人

Hamilton, Hugh〔哈密爾敦〕(1729—1805) 英人

Hamilton, Olan Harvey〔哈密爾敦〕二十世紀前半期　美人

Hamilton, *Henry* Parr〔哈密爾敦〕(1794, 4, 3—1880, 2, 7) 蘇格蘭人　著解析幾何學

Hamilton, Samuel〔哈密爾敦〕二十世紀　美人

Hamilton, W. A.〔哈密爾敦〕二十世紀前半期　美人

Hamilton, *Sir* William *Rowan*〔哈密爾敦〕(1805, 8, 4—1865, 9, 2) 愛爾蘭人　發明四原法,爲十九世紀最大發明之一.

Hamkel, H.〔漢刻爾〕十九世紀後半期　德人

Hamlin, T. L.〔哈謨林〕二十世紀前半期　美人

Hammer, E.〔罕默〕二十世紀初　德人

Hammer, von〔罕默〕(1858—1925, 9, 11) 德人

Hammerstein, A.〔罕麥斯泰〕二十世紀前半期　德人

Hammond, E. S.〔罕夢德〕二十世紀前半期　美人

Hammond, Jacques〔罕夢德〕二十世紀前半期

Hammod, James〔罕夢德〕(1850—1930, 8, 29) 英人 代數學家

Hammond, Nathaniel〔罕夢德〕十八世紀 英人

Hammurabi〔罕麥拉俾〕紀元前二十一世紀 巴比倫王

Hamnet, Holditch〔罕涅〕

Hampel, H.〔罕拍爾〕二十世紀前半期 德人

Hamy, M.〔罕密〕十九及二十世紀 法人

Han Kung Leen〔韓公廉〕十一世紀末 中國宋紹聖時人

Han Yen〔韓延〕七世紀初 中國隋時人

Hanai Kenkichi 十九世紀中 日本人

Hanawalt, F. W.〔哈那窩特〕二十世紀前半期 美人

Hanckel. H.〔韓克爾〕即 H. Hankel

Hancock, E. L.〔韓科克〕二十世紀 美人

Hancock, Harris〔韓科克〕(1867,5,14—) 美人 研究代數數論及橢圓積分

Handel, O.〔罕得爾〕十九世紀後半期 德人

Handson, R.〔罕德孫〕英人

Handyside, John〔罕狄賽第〕十九世紀

Hanel, J.〔漢納爾〕十九世紀後半期 德人

Hangest, Hieronimus de〔漢革斯〕十五世紀 法人

Hänig, Conrad〔痕尼格〕二十世紀 德人

Hankel, E.〔韓克爾〕十九世紀 義人

Hankel, Hermann〔韓克爾〕亦作 H. Hanckel (1839, 2, 14—1873, 8, 20) 德人 研究數學史,射影幾何學.

Hann, Jas.〔漢〕十九世紀中 英人 著解析幾何學

Hann, Julius〔漢〕十九世紀 奧人

Hanna, Paul R.〔漢那〕二十世紀 美人

Hanna, U. S.〔漢那〕二十世紀初 義人

Hannelly, Robert Jeffrey〔漢涅力〕二十世紀前半期 美人

Hannequin, A〔漢涅琴〕十九世紀末 法人

Hanni, Lucius〔漢尼〕(?—1931) 奥人

Hannyngtog, J. C.〔漢力托〕

Hanotaux, G.〔罕諾托〕二十世紀 法人

Hans, John〔罕斯〕十八世紀前半期 英人

Hansch, Michael Gottlieb〔漢士〕(1683—1749) 但澤 (Danzig) 人

Hansdorff, F.〔罕斯多夫〕二十世紀初 德人

Hänsel〔罕塞爾〕十九世紀後半期 德人

Hänselmann, L.〔罕塞曼〕十九世紀 德人

Hansen, C.〔罕森〕二十世紀初 丹麥人

Hansen, George〔罕森〕(1809—1894) 德人

Hansen, O.〔罕森〕二十世紀初 德人

Hansen, Peter Andreas〔罕森〕(1795—1874) 德人 天文數理家

Hansen, P. C. V.〔罕森〕十九世紀後半期 丹麥人

Hansted. B.〔罕斯特〕十九世紀後半期 法人

Hanstedt, B.〔罕斯忒〕

Hanumanta Rao, C. V.〔哈努曼塔饒〕二十世紀 英人

Hanus, Paul Henry〔罕那斯〕(1855, 3, 14—) 美人生於普魯士

Hapgood, Isabel Florence〔哈普谷德〕(1850, 11, 21—1928, 6, 26) 美人

Happach, V.〔哈佩赤〕二十世紀前半期 德人 著最小二乘法

Happel, H.〔哈佩爾〕十九世紀末 德人

Harcourt, A. V.〔哈科特〕十九世紀後半期 英人

Hardcastle, Frances〔哈德卡斯爾〕 十九及二十世紀 英女 譯克萊因數學著作

Hardin, J. A.〔哈丁〕 二十世紀前半期 美人

Harding, Arthur McCracken〔哈定〕 (1884, 9, 3—) 美人

Hardörffer, Georg Philipp〔哈多斐〕 (1607—1658) 德人

Hardy, Arthur Sherburne〔哈第〕 (1847, 8, 13—) 美人 研究四原理論

Hardy, Claude〔哈第〕 十七世紀後半期

Hardy, G. F.〔哈第〕 十九世紀後半期 英人

Hardy, Godfrey Harold〔哈第〕 (1877, 2, 7—) 英人 解析數理學家

Hardy, James G.〔哈第〕 二十世紀前半期 美人

Hardy, Sir William〔哈第〕 二十世紀前半期 英人

Haren, Robert〔哈棱〕 二十世紀 德人

Haret, S. C.〔哈勒〕 二十世紀初 法人

Harétu, S. C.〔哈累圖〕 十九世紀後半期 法人

Hargreave, Charles James〔哈格理佛〕 十九世紀中 愛爾蘭人 研究方程式論

Hargreaves, R.〔哈格理佛士〕 十九世紀後半期 英人

Hariot, Thomas〔哈里奧〕 卽 T. Harriot

Harkin, D. C.〔哈寮〕 二十世紀前半期 坎拿大人 研究代數學

Harkness, James〔哈克涅斯〕 (1864—1923) 坎拿大人

Harkness, William〔哈克涅斯〕 十九世紀後半期 美人

Harley, R.〔哈黎〕 十九世紀後半期 英人

Harmegnies, René〔哈麥尼〕 二十世紀前半期 法人

Harms, C.〔哈謨斯〕 十九世紀後半期 法人

Harms, F.〔哈謨斯〕 二十世紀前半期 德人

Harmuth, Th.〔哈穆司〕 十九世紀

Harnack, Axel〔哈那克〕 (1851—1888) 德人 研究數理解析

Haro〔哈洛〕

Haroun Al Raschid〔哈盧・亞・剌屎〕 (765—809) 亞剌伯人

Harper, D. R.〔哈拍〕 二十世紀前半期 美人

Harper, F. H.〔哈拍〕 二十世紀 美人 著實用統計學

Harper, H. D.〔哈拍〕 二十世紀前半期 美人

Harprecht, J. C.〔哈普勒喜〕

Harrani〔哈剌尼〕 即 al-Harrani

Harrell, J. W.〔哈勒爾〕 二十世紀前半期 美人

Harren, .W〔哈蘭〕 二十世紀初 德人

Harrington, M. W.〔哈林頓〕 十九世紀 英人

Harriot, Thomas〔哈立奧〕 亦作 T. Hariot (1560—1621, 7, 2) 英格蘭人 於 1631 年始用>及<爲表示'大於'及'小於'之記號,其所著代數學,甚爲馳名。并研究解析幾何學.

Harris, H. W.〔赫黎斯〕 十九世紀後半期 英人

Harris, Isabel〔赫黎斯〕 二十世紀前半期 美人

Harris, James〔赫黎斯〕 二十世紀 英人

Harris, John〔赫黎斯〕 十八世紀

Harrison, Fred.〔哈禮孫〕 (1865, 11, 9—) 英人

Harrison, John〔哈禮孫〕 (1693—1776, 5, 24) 英人

Harrison, Jos.〔哈禮孫〕

Harrison, Robert〔哈禮孫〕 英人

Harrison, W. J.〔哈禮孫〕

Harrop, P. F.〔哈洛普〕 二十世紀 英人

Harscher〔哈瑟〕 十七世紀末

Harshbarger, Frances〔哈許巴革〕 二十世紀前半期 美女

Harshbarger, William Asbury〔哈許巴革〕 (1862, 9, 1—) 美人

Hart, Andrew Searle〔哈脫〕 (1811—1890) 英人

Hart, C. A.〔哈脫〕 二十世紀 美人

Hart, D. S.〔哈脫〕

Hart, H.〔哈脫〕 十九世紀後半期 英人

Hart, Ivor Blashka〔哈脫〕 (1889, 7, 14—) 英人

Hart, J.B.H. 't〔哈脫〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Hart, William L.〔哈脫〕 二十世紀前半期 美人

Hart, W. W.〔哈脫〕 二十世紀前半期 美人

Hartenstein, J. H.〔哈騰斯泰〕 十九及二十世紀 德人

Harter, George Abram〔哈忒〕 (1853, 11, 7—) 美人

Harter, N. W.〔哈忒〕 二十世紀前半期 美人

Hartig, Henry E.〔哈體格〕 二十世紀前半期 美人

Hartley, Miles C.〔哈得烈〕 二十世紀前半期 美人

Hartley, R. W.〔哈德烈〕 二十世紀前半期 美人

Hartmann, A.〔哈特曼〕 十九世紀後半期 瑞士人

Hartmann, B.〔哈特曼〕 二十世紀初 德人

Hartmann, E. von〔哈特曼〕 二十世紀初 德人

Hartmann, Georg〔哈特曼〕 十六世紀中 德人

Hartmann, J. J. G.〔哈特曼〕 二十世紀 德人

Hartmann, Sigismund Ferdinand〔哈特曼〕 (1632—1681) 德人

Hartog, A. H. de〔哈多格〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Hartogs, Friedrich M.〔哈多格斯〕 (1874—) 德人

Hartree, D. R.〔哈特里〕 二十世紀前半期　英人

Hartshorne, C.〔哈勺〕 二十世紀前半期　美人

Hartwell, Ro.〔哈衞爾〕 十七世紀　英人

Hartwick, F. C.〔哈威克〕 二十世紀前半期　美人

Hartwieg, O.〔哈威格〕 二十世紀初　德人

Harun al-Rashid〔哈綸•亞剌席〕 卽 Al Raschid

Harvey, Francis W.〔哈維〕 二十世紀　英人

Harvey, John〔哈維〕 (?—1592) 英人　理查之弟

Harvey, L. D.〔哈維〕 二十世紀　美人

Harvey, Richard〔哈維,理查〕 (?—1592) 英人

Harwood, May Naramore〔哈武德〕 二十世紀前半期　美人

Harwood, P. J.〔哈武德〕 二十世紀　英人

Harzer, P.〔哈紂〕 十九世紀末　德人

Hasan〔哈森〕 十世紀　猶太人

Hasan〔哈森〕 卽 al-Hasan

Hase, J. M.〔哈則〕 (1684—1742) 德人

Häseler, J. F.〔嘿塞勒〕 十八世紀

Hasegawa Kan〔長谷川寛〕 (1782或1784—1838) 日本人

Hasegawa Ko〔長谷川弘〕 (?—1889) 日本人

Haseman, Charles〔哈塞曼〕 (1880, 9, 27—1931, 7, 9) 美人

Haseman, Mary G.〔哈塞曼〕 二十世紀前半期　美人

Haskell, Harold Noad〔哈斯刻爾〕 (1887—) 英人

Haskell, Mellon Woodman〔哈斯刻爾〕 (1863, 3, 17—) 美人

Haskins, Charles Homer〔哈斯金士〕 (1870, 12, 21—) 美人

Haskins, Charles Nelson〔哈斯金士〕 (1874, 5, 7—) 美人

Haslam, S. H.〔哈斯蘭〕 十九世紀　英人

Haslam, W. T.〔哈斯蘭〕 二十世紀　英人

Hass, Arthur〔哈斯〕 二十世紀　奧人　數理物理學家

Hass, P.〔哈斯〕 二十世紀初　德人

Hassan ben Haithem〔哈孫・本・海忒〕 卽 Alhazen

Hassâr〔哈薩〕 卽 Al-Hassar

Hasse, Helmut〔哈瑟〕 (1898—) 德人　著高等代數

Hassler, J. O.〔哈斯勒〕 二十世紀前半期　美人

Hastings, Charles Sheldon〔哈斯丁斯〕 二十世紀前半期　美人

Hatch, D. A.〔哈赤〕 二十世紀前半期　美人

Hatcher, T. W.〔哈徹〕 二十世紀前半期　美人

Hathaway, Arthur Stafford〔哈塔威〕 十九世紀末　美人

Haton de la Goupillière, J. N.〔哈東・得・拉・谷匹利耳〕 卽 Goupillière

Hatono Soha〔鳩野宗巴〕 (1641—1697) 日本人

Hatt, M.〔哈特〕 十九世紀末　法人

Hattendorff, Karl〔哈騰多夫〕 亦作 K. Hattendorf 十九世紀後半期　德人　數理解析學

Hatton, Edward〔哈吞〕 十八世紀　英人

Hatton, John Leigh Smeatman〔哈吞〕 (1865, 5, 27—) 英人　幾何學家

Hattori Hiroshi〔服部博〕 二十世紀前半期　日本人

Hattori Kanae〔服部鼎〕 二十世紀前半期　日本人

Hatzidakis, N.〔哈戚達基〕 二十世紀初　希臘人

Hauber, Karl Friedrich〔豪柏〕 亦作 Carolus Fridericus Hauber (1775—1851) 德人

Hauber, W.〔豪柏〕 二十世紀初　德人　著靜力學

Hauck, A.〔豪克〕 二十世紀　德人

Hauck, G.〔豪克〕 十九世紀後半期　德人

Hauff, J. K. F.〔豪夫〕 (1766—1846) 德人

Haugh, J. J.〔豪〕

Haughton〔豪通〕 十九世紀　愛爾蘭人

Hauk Erlendssön〔豪克・厄楞德商〕 (1264—1334) 挪威人

Hauksbee〔豪克斯俾〕 十八世紀　英人

Haumann, C. G.〔豪曼〕 十九世紀前半期　德人

Haupt, Otto〔豪普特〕 二十世紀前半期　德人　著代數學

Hauptmann, H.〔霍卜特曼〕 二十世紀前半期　德人

Hauptmann M.〔霍卜特曼〕 二十世紀　德人

Haure, M.〔豪果〕 十九世紀末　法人

Hausdorff, Felix〔豪士多夫〕 (1868—) 德人　著集合論

Hausen, Christian August〔豪森〕 (1693—1743) 法人

Hauser, Matthias〔豪則〕 亦作 Mathias Hausser　十八世紀後半期　奧人

Hause, Eugenie C〔豪斯爾〕 二十世紀前半期　美人

Hausser, Matthias〔豪則〕 即 M. Hauser

Haussmann, A.〔豪斯曼〕 二十世紀前半期　德人

Haussner, Robert〔豪斯涅〕 十九世紀後半期　德人　著解析幾何學

Hauteserve, Gauthier D'〔高忒塞佛〕 十九世紀前半期　法人

Hauy, René Just〔阿羽伊〕

Havelock, Thomas Henry〔哈斐羅克〕 (1877—) 英人

Haviland, E. K.〔哈維蘭〕 二十世紀前半期　美人

Hawelka, R.〔和衛卡〕 德人

Hawkes, Herbert Edwin〔和刻斯〕 (1872, 12, 6—) 美人　闡發聯合代數學

Hawkes, John〔和剋斯〕十七世紀　英人

Hawkings, J.〔和京茲〕二十世紀前半期　英人

Hawkins, C.〔和琴茲〕二十世紀初　英人

Hawkins, John〔和琴茲〕(1520—1593) 英人

Hawks, Lena James〔和克斯〕二十世紀前半期　美人

Hay, John Primrose〔嘿〕(1878—) 英人

Hay, R.〔嘿〕十九世紀前半期

Hayashi Goro〔林〕二十世紀前半期　日本人

Hayashi Keiichi〔林〕二十世紀前半期　日本人

Hayashi Tsuruichi〔林鶴一〕(1873, 6, 13 明治六年—) 日本人　著數學叢書

Haycraft, Miss Alace〔嘿克拉夫〕二十世紀前半期　美女

Hayden, Camilla〔嘿登〕二十世紀前半期　美人

Hayden, W.〔嘿登〕十九世紀後半期　英人

Hayesr, Charles〔嘿茲〕(1678—1760, 12, 18) 英人

Hayes, Ellen〔嘿茲〕(1851, 9, 23—) 美人

Hayford, John Fillmore〔嘿福德〕(?—1925, 3, 10) 英人

Hayn, F.〔海〕二十世紀初　德人

Haynes, Eli Stuart〔痕茲〕(1880, 7, 12—) 美人

Hayter, C.〔嘿忒〕十九世紀前半期　英人

Hayward, Robert Baldwin〔嘿衞德〕十九世紀後半期　英人　研究幾何學及向量代數

Hazama Jufu〔間重富〕亦作 Hazama Shigetomi (1756—1816) 日本人

Hazama Jushin〔間重新〕十九世紀前半期　日本人

Hazard, C. T.〔阿紮〕二十世紀前半期　美人

Hazard, W. J.〔阿紮〕二十世紀前半期　美人

Hazeltine, Alan〔哈策廷〕二十世紀前半期　美人

Hazeltine, L. A.〔哈策廷〕二十世紀前半期　美人

Hazlett, Olive C.〔嘿勒特〕二十世紀前半期　美人　將僞空代數學分類

Hažmuka, W.〔嘿穆卡〕十九世紀後半期

Hazzidakis, J. N.〔嘿稷達啓〕十九世紀末　希臘人

Heal, W. E.〔希爾〕(1856—1925, 10, 9)　美人

Hearn, G. W.〔赫因〕十九世紀前半期

Heath, D. D.〔希司〕十九世紀　英人

Heath, Robert *Samuel*〔希司〕(1859—1931, 4, 15)　英人　研究幾何學

Heath, *Sir* Thomas *Little*〔希司〕(1861,10,5—)　英人　研究數學史

Heather, J. F.〔希試〕

Heaviside, James William Lucas〔希微賽地〕十九世紀　英人

Heaviside, Oliver〔希微賽地〕(1850, 5, 13—1925, 2, 5)　英人

Heawood, Percy John〔希武德〕(1861, 9, 8—)　英人

Hebbert. C. M.〔赫貝〕二十世紀前半期　美人

Hebel, I. L.〔嘿柏爾〕二十世紀前半期　美人

Hebeler, H.〔赫柏勒〕二十世紀初　德人

Hebenstreit, Johann Baptista〔赫本斯賚〕十七世紀

Hebrony, P.〔希伯倫尼〕二十世紀前半期　居耶路撒冷

Hecatæus〔赫刻提阿斯〕紀元前六世紀　希臘人　測繪地圖

Hecht, B〔赫希特〕十九世紀末　德人

Hecke, Erich〔赫克〕(1887—)　德人　著代數數論

Heckenberg〔赫肯柏〕德人

Hecker, J.〔赫刻〕 十九世紀後半期 德人

Hecker, Johann Julius〔赫刻〕 (1707—1768) 德人

Hecker, O.〔赫刻〕 二十世紀 德人

Heddaeus, H.〔嘿達斯〕 十九世紀末 瓦哥斯拉夫人

Hedelius, E.〔嘿得力斯〕 十九世紀後半期 瑞典人

Hedley, J. W.〔赫得力〕 二十世紀前半期

Hedraeus, Benedict〔赫德累斯〕 十七世紀中

Hedrich, Benjamin〔赫德李治〕 十八世紀初

Hedrick, Earle Raymond〔赫德立刻〕 (1876, 9, 27—) 美人

Hedrick, H. B.〔赫德立刻〕 二十世紀前半期 美人

Hedström, J. S.〔赫德斯龍〕 二十世紀初 瑞典人

Heede, A.〔希得〕 二十世紀前半期 德人

Heegaard, Poul〔希加德〕 十九世紀末 丹麥人

Heegmann〔希格曼〕 十九世紀後半期 法人

Heere, Johann〔希耳〕 十六世紀 德人

Heffter, Lothar〔嘿夫忒〕 十九世紀後半期 德人

Hefner, R. A.〔嘿夫涅〕 二十世紀前半期 美人

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich〔海格爾〕 (1770—1830) 德人

Hegele, A.〔黑機爾〕 十九世紀末 德人

Hegelin, Leonard〔赫澤林〕 十六世紀 德人

Hegemann, E.〔赫澤曼〕 二十世紀 德人

Heger, I.〔赫給〕 十九世紀中 奧人

Heger, Richard〔赫給〕 十九世紀後半期 德人 著解析幾何學

Hegesippus〔赫澤息帕斯〕 卽 Ambrose of Milan

Hegge Zijnen, B.G. van der〔赫基・晉能〕 卽 Zijnen

Heiberg, J. H.〔亥堡〕十九世紀後半期　德人

Heiberg, J. L.〔亥堡〕(1854—1928, 1, 4)　德人　研究希臘數學史

Heibron, Isidor Morris〔海布龍〕(1868, 11, 6—)　英人　研究化學計算法

Heidel, William Arthur〔海得爾〕(1868, 3, 10—)　美人

Heijting, A.〔亥廷〕二十世紀前半期　荷蘭人

Heiland, Fritz〔海蘭〕二十世紀初　德人

Heilbronner, Johann Christoph〔海布琅涅〕(1706—1747)　德人

Heilermann, *J. B.* H.〔海勒曼〕十九世紀　德人

Heine, *Heinrich* Eduard〔解奈〕(1821—1881)　德人　著調和函數

Heineman, Ellis Richard〔亥涅曼〕二十世紀前半期　美人

Heinen, Fr.〔海能〕十九世紀　德人

Heinitz, G.〔亥尼茲〕十九世紀末　德人

Heinlin, J. J.〔海林〕十七世紀　德人

Heinrich, Georg〔亥利喜〕十九世紀末　德人

Heinrich, M.〔亥利喜〕二十世紀　德人

Heinrich. W. W.〔亥利喜〕二十世紀　捷克人

Heinrich von Langenstein〔亥利喜〕亦作 Heinrich von Hessen 或 Henricus Hassianus　(1325—或$\frac{1394}{1397}$, 2, 11)　德人

Heinrich von Navarra〔亥利喜〕

Heinrichs, E.〔亥利喜斯〕十九世紀後半期　德人

Heinze, L.〔海策〕十九世紀後半期　德人

Heis, E.〔亥斯〕(1806—1877)　丹麥人　於1831年刊行數學問題集,至1904年重印至108印.

Heisel, C. T.〔亥塞爾〕二十世紀前半期　美人

Heisenberg, Werner〔海森堡〕(1901—)　德人

Heitmann, H.〔海特曼〕 二十世紀

Helbert von St. Hubertus〔赫爾柏〕

Helbronner, P.〔赫布綸涅〕 二十世紀 法人

Hele-Shaw, Henry Selby〔赫爾索〕 亦作 H. S. Hele Shaw (1854, 7, 29—) 英人

Helfenstein, A.〔赫爾分斯泰〕 二十世紀前半期 德人

Helicon of Cyzicus〔赫力昆〕 亦作 Helikon 紀元前四世紀 希臘人

Hélie, Faustin〔希列〕 (1799—1884) 法人

Helifax, John〔赫淮〕 (?—1256)

Heliodorus of Larissa〔希力奧多剌〕 或卽 Damianus 二世紀? 希臘人

Hellebrand, K.〔赫爾布蘭〕 二十世紀 奧人

Heller, August〔赫勒〕 德人

Heller, J.〔赫勒〕 十九世紀後半期 奧人

Heller, S.〔赫勒〕 二十世紀初 德人

Hellinger, E.〔赫林給〕 (1883—) 德人

Hellins, John〔赫林斯〕 (?—1827) 英人

Hellmann, W.〔赫爾曼〕 十九世紀

Hellwig, C.〔赫爾威〕 十九世紀末 德人

Helm, Erhart〔赫姆〕 十六世紀前半期 德人

Helm, Georg〔赫姆〕 十九及二十世紀 德人

Helmert, Friedrich Robert〔赫爾麥〕 二十世紀初 德人 著最小二乘法

Helmes, J.〔赫姆斯〕 十九世紀 德人

Helmholtz, Herman *Ludwig Ferdinand von*〔赫爾霍斯〕 (1821, 8, 31—1894,) 德人 以非歐幾何學研究各科

Helmling, K.〔赫姆令〕 十九世紀中 愛沙尼亞人

Helmling, P.〔赫姆令〕十九世紀後半期　德人

Helmreich, Andreas〔赫姆賴喜〕十六世紀後半期　德人

Helwig, P. I.〔黑爾威〕二十世紀初　荷蘭人

Hemelings, Johann〔赫美林斯〕十七世紀　德人

Hemenway, L. D.〔赫門尉〕二十世紀前半期　美人

Hemmant, George〔赫幔〕(1880—)　英人

Hemming, George Wirgman〔罕明〕十九世紀中　英人　著微積分

Hemmings, F. J.〔罕明斯〕二十世紀前半期　英人

Hempel, J.〔痕拍爾〕二十世紀　德人

Hench, J. J.〔亨治〕十八世紀中　德人

Hencky, H.〔亨啓〕二十世紀前半期　美人

Henderson, Archibald〔亨德孫〕(1877, 6, 17—)　美人　研究二十七線在立方曲面上之理論

Henderson, J.〔亨德孫〕二十世紀前半期　英人

Henderson, Robert〔亨德孫〕(1871, 5, 24—)　生於坎拿大

Hendrick, J. E.〔亨立克〕十九世紀　美人

Henisch, Georg〔亨尼士〕(1549—1618)

Henke, R.〔痕剋〕二十世紀　德人

Henkel, L.〔亨刻爾〕十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Henkel, Otto〔亨刻爾〕二十世紀　德人

Henkle, W. D.〔亨克爾〕十九世紀中　美人

Henle, Paul〔亨爾〕二十世紀前半期　美人

Henneberg, Lebrecht〔亨涅柏〕(1851—1933, 5, 10)　德人

Hennel, Cora B.〔亨耐爾〕二十世紀前半期　美人

Hennert, Johann Frederich〔亨涅特〕十八世紀後半期

Hennessy, H.〔亨湼西〕

Hennig, P.〔亨尼格〕 二十世紀前半期 德人

Henoch〔亨諾哈〕

Henrich, F.〔亨立治〕 十九世紀後半期 德人

Henrichi〔亨立犀〕

Henrici, J.〔亨立奇〕 十九世紀末 德人

Henrici, O.〔亨立奇〕 (1840—1928) 英人 研究幾何學及向量解析

Henricus Hassianus〔亨立卡•哈栖挪〕 卽 Heinrich von Langenstein

Henrion, Denis〔亨里温〕 (1590—1640) 法人

Henry, Alfred〔亨利〕 二十世紀 英人 著差分學

Henry, Charles〔亨利〕 十九世紀後半期 法人

Henry, Joseph〔亨利〕 (1797—1878) 美人

Henry, W. C.〔亨利〕 十九世紀 英人

Henschel, A.〔亨謝爾〕 十九世紀末 德人

Henschel, O.〔亨謝爾〕 十九世紀末 德人

Henschke, E.〔亨士克〕 二十世紀前半期 德人

Hensel, C.〔亨塞爾〕 十九世紀 巨哥斯拉夫人

Hensel, Kurt〔亨塞爾〕 (1861—) 德人 著數論

Henson J. W.〔亨孫〕 二十世紀 英人

Henstchel, O.〔亨斯拆爾〕 十九世紀後半期 德人

Hentsch, Johann Jakob〔亨什〕 (1723—1764) 德人

Heppel, J. M.〔亨拍爾〕 十九世紀中 英人

Hepperger, J. von〔亨拍澤〕 二十世紀初 德人

Heracleides〔亨拉克來斯〕 亦作 Herakleides 紀元前五世紀 希臘人 幾何學家

Herapath, John〔赫拉帕司〕十九世紀中 英人 數理物理家

Herbart, I. F.〔赫巴特〕十九世紀初 德人

Herbart, Johann Friedrich〔赫巴特〕(1776—1841) 德人

Herbener, E.〔赫本涅〕二十世紀前半期 瑞士人

Herbestus, Benedictus〔赫伯特塔〕(1531—1593, 3, 4) 波蘭人

Herbrand, Jacques〔赫布蘭〕(1908—1931) 法人

Herbst, H.〔赫布斯特〕十九世紀後半期 德人

Herglotz, Gustav〔赫格洛茲〕(1881—) 奧人

Hérigone, Pierre〔亞立袞〕亦作 Herigonus 十七世紀前半期 法人 於1634年以拉丁文及法文著數學書(Cursus mathematicus)六卷

Hering, A. G.〔嘿靈〕十九世紀後半期 德人

Hering, Carl〔嘿靈〕二十世紀前半期 美人

Herlinus, Christian〔赫林那〕十六世紀

Herman, R. A.〔赫孟〕(1861—1927, 11, 29) 英人

Hermann, A.〔赫曼〕十九世紀後半期 法人

Hermann, Gottfried〔赫曼〕十九世紀 德人

Hermann, Jakob〔赫曼〕(1678—1733) 瑞士人 著微分學

Hermann, J. M.〔赫曼〕十九世紀前半期 瑞士人

Hermann, Robert Alfred〔赫曼〕著幾何光學

Hermannus Contractus〔赫曼那·康特剌搭〕(1013—1054, 9, 24) 羅馬人 著星學,算盤術.

Hermes, J.〔黑梅斯〕十九世紀後半期 德人

Hermes, Oswald〔黑梅斯〕(1826—1909) 德人

Hermias〔赫密亞斯〕紀元前四世紀 希臘人

Hermite, Charles〔赫美提〕(1822, 12, 24—1901, 1, 14) 法人 研究整數論,不

變式論,方程式論,函數論等.於1873年證明e爲超越數.

Hermotimus of Colophon〔黑摩廷馬〕 亦作 Hermotimus von Kolophon 紀元前四世紀 雅典人

Hero〔希洛〕 卽 Heron

Herodotus of Thurii〔希羅多德〕 (484 B.C.—425 B.C.) 希臘人

Herold, K.〔希洛德〕 二十世紀 奥人

Heromides〔希羅密得斯〕 希臘人

Heron der Ältere〔希琅〕 卽 Heron von Alexandria

Heron der Jüngere〔希琅〕 卽 Feldmesser von Byzanz

Heron of Alexandria〔希琅〕 亦作 Hero Alexandrinus 或 Heron von Alexandria (285 B.C.—222 B.C.) 希臘人 發見以三角形三邊表示面積之公式

Heron of Constantinople〔希琅〕 亦作 Hero 九世紀 土耳其人

Herr, Gertrude A.〔黑爾〕 二十世紀前半期 美人

Herr, J. P.〔黑爾〕 十九世紀 奥人

Herrick, P. E.〔赫立克〕 二十世紀 英人

Herrmann, A.〔赫爾曼〕 二十世紀前半期 德人

Herrmann, F.〔赫爾曼〕 十九世紀後半期 德人

Herrmann, O.〔赫爾曼〕 十九世紀後半期 德人

Herschel, Sir John Frederick William〔侯失勒〕 (1792, 3, 7—1871, 5, 11) 英人 威廉之子 數理物理及天文學名家.貢獻於解析學.

Herschel, Sir William〔侯失勒,威廉〕 (1738—1822) 英人 天文數理家

Herstowski, F. N.〔赫斯托斯啓〕 十九世紀後半期 德人

Herting, G.〔赫廷〕 十九世紀後半期 德人

Hertz, Heinrich *Rudolf*〔赫芝〕 (1857—1894) 德人 數理物理學名家

Hertz, Paul〔赫芝〕 十九世紀後半期 德人

Hertz, W.〔赫芝〕 二十世紀初 德人

Hertzsprung, S.〔赫芝斯普朗〕 十九世紀後半期 丹麥人

Herundes〔赫朗得斯〕 希臘人

Hervas, L.〔赫發斯〕 十八世紀

Herwarth von Hohenburg, Hans Georg〔赫瓦司〕 亦作 H. G. Hoerwarth (1553—1622) 德人

Herz, N.〔赫次〕 十九世紀後半期 奧人

Herzfeld, Karl Ferdinand〔赫次斐德〕 (1892, 2, 24—) 奧人

Herzog, A.〔赫磋喜〕 十九世紀 瑞士人

Herzog, D.〔赫磋喜〕 二十世紀 波蘭人

Hespe, W.〔赫斯拍〕 十九世紀後半期 巨哥斯拉夫人

Hess, A.〔黑斯〕 二十世紀前半期 德人

Hess, E.〔黑斯〕 十九世紀後半期 德人

Hess, George W.〔黑斯〕 二十世紀前半期 美人

Hess, O.〔黑斯〕 二十世紀初 巨哥斯拉夫人

Hess, Wilhelm〔黑斯〕 十九世紀

Hesse, *Ludwig* Otto〔赫斯〕 (1811, 4, 22—1874, 8, 4) 德人 研究赫斯式,爲近世純粹幾何學,解析幾何學及行列式名家.

Hessenberg, Gerhard〔赫森柏〕 (1874—1925, 11, 6) 德人 著三角術,幾何學.

Hestenes, M. R.〔赫斯騰斯〕 二十世紀前半期 美人

Hetherwick, Alexander〔赫忒威克〕 (1860, 4, 12—) 英人

Hettner, Georg〔赫特湼〕 (1854—1914) 德人

Hetying, A.〔赫替〕 二十世紀前半期

Heu Joo Lan〔許如蘭〕 中國清乾隆嘉慶時人

Heu Kwei Lin〔許桂林〕 (1778〔清乾隆四十三年〕—1821〔清道光元年〕) 中

國人

Heu Shang〔許商〕紀元前一世紀　中國漢初人

Heu Tsung Yen〔許宗彥〕(1768[清乾隆三十三年]—1819[清嘉慶二十四年]) 中國人

Heu Yung〔許榮〕十五世紀後半期　中國明成化時人

Heuman, C.〔厄曼〕十九世紀末　瑞典人

Heun, Karl〔厄因〕(？—1929, 1, 10) 德人

Heung Khe Kwang〔熊其光〕(1817[清嘉慶二十二年]—1855[清咸豐五年]) 中國人

Heuraët, Heinrich van〔厄累〕十七世紀中　荷蘭人

Heusch, F. de〔厄士〕十九世紀末　比利時人

Hevelius〔赫微力阿斯〕亦作 Johann Höwelcke (1611—1687) 德人

Hewes, L. I.〔休衛斯〕二十世紀前半期　美人

Hewlett. John〔休勒特〕

Heyden, A. F. van der〔亥登〕二十世紀前半期

Heyl, Paul Renno〔海爾〕(1872, 6, 30—) 美人

Heyman, H. J.〔海孟〕二十世紀前半期　瑞典人

Heymann, K. W.〔海曼〕十九世紀　德人

Heynatz, Johann Friedrich〔亥那玆〕十八世紀後半期

Heynes, Samuel〔亥因斯〕十八世紀　德人

Heyting, A.〔亥廷〕二十世紀　德人

Heywood, Horace Bryan〔嘿武德〕二十世紀初　法人　研究數理物理

Hickey, Deborah May〔喜岐〕二十世紀前半期　美女

Hickey, Maude I.〔喜岐〕二十世紀前半期　美女

Hicks, George Dawes〔希客司〕(1862, 9, 14—) 英人

Hicks, H. C.〔希客司〕 二十世紀前半期　美人

Hicks, William Mitchinson〔希客司〕 (1850, 9, 23—) 英人 研究圓環函數

Hickson, A. O.〔希客孫〕 二十世紀前半期　美人

Hierholzer, K.〔亥厄和則〕 十九世紀後半期　德人

Hieronymus of Rhodes〔海琅尼莫〕 亦作 Hieronymus von Rhodos　紀元前四世紀　希臘人

Hierta, Carolus Diethericus〔海厄塔〕 十八世紀後半期　瑞典人

Higbee, Frederic Goodson〔喜格比〕 (1881, 11, 29—) 美人　著畫法幾何學

Higgins, Ellen C.〔喜金斯〕 (1871—) 英人

Hightower, Ruby U.〔亥陶厄〕 二十世紀前半期　美人

Hilb, Emil〔希爾布〕 (?—1929, 8, 6) 德人

Hilb, O.〔希爾布〕 二十世紀前半期　德人

Hilbert, David〔希柏特〕 (1862—) 德人 確定數學之基礎,成立型式論派.對於數論,代數,幾何,解析,數理物理等,均有宏偉之貢獻.

Hilbert, K. S.〔希柏特〕 十九世紀末　德人

Hildebrandsson, H. H.〔喜得布蘭孫〕 (1838—1925, 7, 29) 瑞典人

Hildebrandt, E. H. C.〔喜得布藍〕 二十世紀前半期　美人

Hildebrandt, Theophil Henry〔喜得布藍〕 (1888, 7, 24—) 美人

Hill, Abraham〔喜爾〕 (1635—1721) 英人

Hill, Bruce Vickroy〔喜爾〕 二十世紀前半期　美人

Hill, C.〔喜爾〕 十九世紀後半期

Hill, C. H.〔喜爾〕 二十世紀前半期　英人

Hill, C. J. D.〔喜爾〕 十九世紀中　德人

Hill, Edwin〔喜爾〕 (1843, 6, 7—) 英人

Hill, E. B.〔喜爾〕 (1885—1933, 10, 13) 美人

Hill, George A.〔喜爾〕(1858—1927, 8, 29) 美人

Hill, George Francis〔喜爾〕(1867, 12, 22—) 英人 研究亞剌伯數

Hill, George William〔喜爾〕(1838—1916, 8, 17) 美人 研究數理天文

Hill, John〔喜爾〕十八世紀後半期

Hill, J. C.〔喜爾〕十九世紀前半期 瑞典人

Hill, John E.〔喜爾〕十九世紀末 英人

Hill, John Muller〔喜爾〕十九世紀

Hill, Lester S.〔喜爾〕二十世紀前半期 美人

Hill, M. J. M.〔喜爾〕(1857—1929, 1, 11) 英人

Hill, Thomas〔喜爾〕十六世紀中 英人

Hill, Thomas〔喜爾〕(1818—1891) 美人

Hill, T. H. W.〔喜爾〕二十世紀前半期 英人

Hill, W.〔喜爾〕二十世紀初

Hillard, C. R.〔喜勒德〕二十世紀前半期 美人

Hille, C. E.〔希爾〕二十世紀前半期 美人

Hille, Einar〔希爾〕(1894—) 美人

Hillebrand, C.〔喜勒布蘭〕十九及二十世紀 奧人

Hiller, Eduardus〔喜勒〕十九世紀後半期 德人

Hillers, W.〔喜勒斯〕二十世紀 德人

Hillyer〔喜爾業〕

Hilprecht. H. V.〔喜爾普勒特〕二十世紀初 美人

Hilton, Harold〔希爾頓〕(1876,10,22—) 英人 著齊次平直置換論,平面曲線論.

Hime, Lieul-Col. Henry William Lovett〔亥姆〕

Himpel. H.〔欣柏爾〕二十世紀初 德人

Himsi〔欣西〕 卽 Al-Himsi

Himstedt. A.〔欣斯試〕 十九世紀末 德人

Hind, John〔亥因德〕 十九世紀前半期 英人

Hindenburg, Carl Friedrich〔欣登柏〕 亦作 K. F. Hindenburg (1741—1808) 德人 研究配合解析論.

Hinds, Anthony Keith〔興德斯〕 二十世紀前半期 美人

Hinks, Arthur Robert〔赫克斯〕 (1873, 5, 26—) 英人 研究數理天文

Hinrichs, W.〔赫利克斯〕 二十世紀 德人

Hinrichsen, F. W.〔赫利克森〕 二十世紀 德人

Hinrichsen, J. J. L.〔赫利克森〕 二十世紀前半期 美人

Hinsch, V. B.〔赫士〕 二十世紀前半期 美人

Hintikka, E. A.〔赫替卡〕 二十世紀前半期 芬蘭人

Hintrikka, E. A.〔赫特立卡〕 二十世紀前半期 芬蘭人

Hinton, C. H.〔赫香〕 二十世紀初 英人

Hipler, F.〔希普勒〕

Hipparchus〔喜帕卡斯〕 或作 Hipparchos (180 B.C.—125 B.C.) 希臘雅典人 始創三角術.

Hippasus〔喜帕薩斯〕 紀元前五世紀 希臘人

Hippaus, H.〔希帕斯〕 十九世紀後半期 德人

Hippias of Elis〔喜庇亞〕 亦作 Hippias von Elis (460 B.C.—?) 希臘人 發見圓積線 (Quadratrix).

Hippisley, Richard Lionel〔喜庇斯來〕 (1853, 7, 2—) 英人

Hippocrates von Chios〔希波革拉第〕 亦作 Hyppocrates 或 Hippokrates von Chios (470 B.C.—?) 希臘人 與柏拉圖(Plato)及攸多克薩斯(Eudoxus), 爲雅典學校之三大幾何學家.發明變圓爲方及立方倍積二大問題.

Hippolytus〔希波利式〕 亦作 Hippolytos 三世紀初 義人

Hipsley〔希普斯力〕

Hiraga Yasuhide (?—1683) 日本人

Hirakawa Junko 二十世紀前半期 日本人

Hirano Kiho〔平野喜房〕 日本人

Hirayama Senri〔平山〕 十八世紀後半期 日本人

Hire〔亥爾〕 卽 De la Hire

Hirn, Gustav Adolph〔希因〕 (1815—1890) 法人 數理物理家

Hirsch, A.〔希爾士〕 二十世紀初 瑞典人

Hirsch, Meier〔希爾士〕 十九世紀初 德人

Hirsch, Th.〔希爾士〕

Hirschler, Edmund John〔喜士勒〕 二十世紀前半期 美人

Hirschvogel, Augustin〔喜士福吉〕

Hirst, T. A.〔喜斯特〕 十九世紀中 英人 研究平面曲線之二次反轉法.

Hispalensis, Johannes〔希斯巴棱息〕 卽 Johannes of Seville

Hitchcock, Frank Lauren〔喜亦科克〕 二十世紀 美人 著徵分方程式

Hitchcock, R. R.〔喜亦科克〕 二十世紀前半期 美人

Hjelmslev, J. T.〔澤姆斯勒〕 亦作 J. T. Petersen 二十世紀前半期 丹麥人 著解析幾何學

Hlavatý, V.〔拉法替〕 二十世紀前半期

Ho Cheng Tien〔何承天〕 (370〔晉太和五年〕—447〔劉宋元嘉二十四年〕) 中國晉及南北朝時人

Ho E〔葛宜女士〕 十七世紀 中國淸時女 朱邇邁之妻

Ho Kwo Tsung〔何國宗〕 中國淸初人

Ho Mung Yaou〔何夢瑤〕 中國淸康熙時人

Ho Ping Tsze〔何平子〕 中國元時人

Ho Poo Ying〔何步瀛〕（1856〔清咸豐六年〕—1917〔民國六年〕） 中國人

Ho Yuen Seih〔何元錫〕（1766〔清乾隆三十一年〕—1804〔清道光九年〕） 中國人

Hoadly, Benjamin〔和德力〕（1706—1757） 英人

Hoar, R. S.〔和耳〕 二十世紀

Hobart, Henry Metcalf〔哈巴特〕（1868--） 美人

Hobbes, Thomas〔霍布斯〕 英人

Hobbs, A. W.〔和布斯〕 二十世紀前半期　美人

Hobel, Wolffgang〔霍柏爾〕 十六世紀　德人

Hobert〔和柏特〕 十八世紀

Hobson, Ernest William〔霍蒲孫〕（1856, 10, 27—1933, 4, 18） 英人　函數論名家

Hoccleve〔和克利夫〕 十五世紀前半期

Hočevar, F.〔和色發〕 十九世紀後半期　奧人

Hoche, Richard〔奧士〕 十九世紀後半期　德人

Hochheim, Adolf〔和喜海〕 十九世紀後半期　德人

Hochheim Fr.〔和喜海〕 二十世紀　德人

Hock, C. F.〔和克〕 十九世紀中　義人

Hockevar, F.〔何刻發〕 著立體幾何學

Höckner, W. G.〔赫克涅〕 十九世紀末　德人

Hodder, James〔霍得〕 十七世紀後半期

Hodge, F. H.〔荷幾〕 二十世紀前半期　美人

Hodgkins, H. G.〔和琴斯〕 二十世紀前半期　美人

Hodgkins, Howard Lincoln〔和琴斯〕（1862,1,23—1931） 美人

Hodgkins, John〔和琴斯〕(?—1485) 英人

Hodgkinson, Eaton〔和治琴孫〕十九世紀 英人

Hodgkinson, J.〔和治琴孫〕十九世紀末 英人

Hodgson, C. V.〔和治孫〕二十世紀 美人

Hodgson, Herbert Henry〔和治孫〕(1883, 3, 7—) 英人

Hodgson, James〔和治孫〕(1672—1755, 6, 25) 英人

Hodgson, J. E.〔和治孫〕二十世紀前半期 美人

Hodoji Wajuro (1823—1871) 日本人

Hoecke, Gielis van der〔胡剋〕十六世紀前半期 荷蘭人

Hoefer, Ferdinand〔胡斐〕十九世紀後半期 法人 數學史大家

Hoefler, A.〔霍夫勒〕即 A. Höffler

Hoefler, A. E. Maiss〔霍夫勒〕二十世紀 德人

Hoek, R. van der Over〔賀克〕二十世紀前半期 荷蘭人

Hoelder, O.〔胡爾得〕即 O. Hölder

Hoëne Wrońsky, J.〔和因・琅司啓〕即 Wronski

Hoernke, A. F. Rudolph〔和耳克〕

Hoerwarth, Hans Georg〔赫瓦司〕即 H. G. Herwarth

Hoesch, A.〔胡士〕十九世紀後半期 德人

Hoestra, H. P.〔胡斯特拉〕二十世紀前半期 荷蘭人

Hofer, J.〔和斐〕十九世紀後半期 德人

Höffler, A.〔霍夫勒〕亦作 A. Hoeffler 十九世紀末 瑞士人

Hoffman, Julius Schmittle〔和夫曼〕(1896, 10, 23—1920, 6, 29) 美人

Hoffmann, A.〔賀弗曼〕二十世紀 德人

Hoffmann, B.〔賀弗曼〕二十世紀 德人

Hoffmann, E.〔賀弗曼〕十九世紀後半期 巨哥斯拉夫人

Hoffmann, Gottfried August〔賀弗曼〕(1700—1775) 德人

Hoffmann, Heinrich〔賀弗曼〕十七世紀 德人

Hoffmann, J.〔賀弗曼〕(1777—1866) 德人 研究平行線理論

Hoffmann, J. C. V.〔賀弗曼〕十九世紀後半期 德人

Hoffmann, Johann Gottfried〔賀弗曼〕(1765—1847) 德人

Hoffmann, Joh. Jos. Ign.〔賀弗曼〕十九世紀 德人

Hoffmann, K. E.〔賀弗曼〕十九世紀

Hoffmann, Ludwig〔賀弗曼〕十九世紀中 亘哥斯拉夫人 著數學字彙

Hoffmann, V.〔賀弗曼〕十九世紀 德人

Hoffmeister, C.〔賀弗邁斯忒〕二十世紀初 德人

Höflein, Georg〔霍夫雷〕十六世紀 德人

Höfler, A.〔霍佛勒〕(1853—1922) 德人

Hofmann, F.〔何夫曼〕十九世紀中 德人

Hofmann, Heinrich〔何夫曼〕十七世紀

Hofmann, Lulu〔何夫曼〕二十世紀前半期 瑞士人

Hofs, G. J.〔何夫斯〕十九世紀後半期 荷蘭人

Högberg, O.〔霍格柏〕二十世紀前半期 法人

Hoheisel, Guido〔何海色〕二十世紀前半期 德人 著微分方程式

Hohenburg, Herwart von〔和恩柏〕十七世紀

Hohenemser, K.〔霍亨湼塞〕二十世紀 德人

Höhmann, C.〔霍滿〕二十世紀 德人

Höhndorf, F.〔霍多夫〕二十世紀前半期 德人

Höhne, R.〔荷因〕十九世紀後半期 德人

Höhr, D.〔霍耳〕十九世紀後半期 奧人

Holbroke, John〔和布洛克〕(?—1437) 英人

Holder, Francis Jerome〔霍爾得〕 (1876, 8, 11—) 美人

Hölder, Otto〔霍爾得〕 (1859—) 德人

Holgate, Thomas Franklin〔霍爾蓋提〕 (1859, 4, 8—) 美人　射影幾何學家

Holl, D. L.〔霍爾〕 二十世紀前半期　美人

Hollaender, E.〔和勒得〕 十九世紀末　德人

Holland, Georg Jonathan *Freiherr* von〔何蘭〕 十八世紀

Hollcroft, Temple Rice〔和爾克洛夫〕 二十世紀前半期　美人

Hollenberg〔和楞貝〕 十八世紀後半期　瑞士人

Hollender, H. J.〔和楞得〕 十九世紀末　德人

Hollicroft, T. R.〔和力克洛夫〕 二十世紀前半期

Holliday, Francis〔和力對〕 十八世紀　英人

Hollmann〔何爾曼〕 十八世紀末　德人

Hollowell, P. W. C.〔霍羅衛爾〕 二十世紀　英人

Hollweck, M.〔和爾威克〕 十九世紀後半期　德人

Holm〔和謨〕

Holman, Silas W.〔霍爾孟〕 十九世紀末　美人

Holmans, Sheppard〔霍孟斯〕 十九世紀中　美人

Holmboe, Berndt Michael〔和謨部〕 (1795—1850) 挪威人

Holmes, B. T.〔和謨茲〕 二十世紀前半期　美人

Holmes, C. T.〔和謨茲〕 二十世紀前半期　美人

Holmgren, E. A.〔和格棱〕 二十世紀初　法人　研究曲面論

Holmquist, B.〔和謨歧斯〕 十九世紀末　瑞典人

Holst, E.〔和爾斯特〕 十九世紀後半期　挪威人

Holst, H.〔和爾斯特〕 二十世紀

Holt, A. H.〔和爾特〕 二十世紀

Holyer, P.〔荷業〕十九及二十世紀　德人

Holywood, John de〔和力武德〕即拉丁文之 Sacrobosco

Holzhausen, W. von〔和爾豪森〕二十世紀前半期　德人

Holzinger, F. S.〔和爾晉給〕十九世紀　德人

Holzinger, Karl J.〔和爾晉給〕二十世紀前半期　美人

Holzmann, C.〔霍爾次曼〕十九世紀前半期　德人

Holzmann, Wilhelm〔霍爾次曼〕常稱日 Xylander

Holzmüller, *Ferdinand* Gustav〔霍次米勒〕亦作 G. Holzmuller　(1844—1914)　德人　研究數理物理

Hombu Hitoshi 二十世紀前半期　日本人

Homén〔和美〕

Hommel〔何美爾〕(1518—1562)　德人

Honda Remei〔本多利明〕(1744—1821)　日本人

Honda Teiken〔藤田貞資〕即 Fujita Sadasuke

Honduras, Bishop of〔渾杜剌斯〕即 Edward Arthur Dunn　(1870, 8, 8—)　英人

Honecker, M.〔和涅刻〕二十世紀前半期　德人

Honein ibn Ishâq〔何奈・易・伊沙〕亦作 Hunain ibn Ishak　($\genfrac{}{}{0pt}{}{809}{810}$—873)　亞剌伯(現今美索不達米亞)人　譯希臘文數學爲亞剌伯文

Honey, F. R.〔和內〕十九世紀　美人

Hönigswald, R.〔和尼斯窩得〕二十世紀前半期　德人

Honoratus〔和諾拉忒〕十六世紀　義人

Hood, Thomas〔呼得〕十六世紀末　英人

Hooke, Robert〔虎克〕(1635, 7, 18—1703, 3, 3)　英格蘭人

Hooker, G. N.〔呼克爾〕

Hoover, Borden P.〔胡威〕 二十世紀前半期 美人

Hopf, Eberhard〔霍布夫〕 二十世紀前半期 德人

Hopf, Heinz〔霍布夫〕 二十世紀前半期 瑞士人

Hopf, L.〔霍布夫〕 二十世紀 德人

Hopfner, F.〔霍夫湼〕 十九世紀後半期 捷克人

Hopit l, G. F. A.〔何批他〕 卽 Hospital

Hopkins, Charles〔霍布金司〕 二十世紀前半期 美人

Hopkins, O. Irwing〔霍布金司〕 二十世紀初 美人

Hopkins, J. W.〔霍布金司〕 二十世紀 美人

Hopkins, Louis Allen〔霍布金司〕 二十世紀前半期 美人

Hopkins, William〔霍布金司〕 (1805—1866) 英人

Hopkins, W. B.〔霍布金司〕 十九世紀中 英人

Hopkinson, B.〔和普琴孫〕 二十世紀 英人

Hopmann, J.〔和普曼〕 二十世紀 德人

Hoppe, Edmund〔和批〕 (?—1928, 8, 12) 德人 研究數學史

Hoppe, Reinhold〔和批〕 (1816—1900) 德人

Höppner, W.〔和普湼〕 二十世紀前半期 德人

Horcher, Philip〔何社爾〕 十七世紀初

Horem, Nicolaus〔奧勒謨〕 卽 N. Oresme

Horen, Nicolas〔奧勒謨〕 卽 N. Oresme

Horford, H. M.〔何福德〕 二十世紀前半期 美人

Horiguchi, Kimiko〔堀口〕 二十世紀前半期 日本女

Hormann, G.〔賀曼〕 十九世紀後半期 德人

Horn, Caspar Heinrich〔和輪〕 十七世紀 德人

Horn, Jakob〔和輪〕 十九世紀後半期 德人 著偏微分方程

Horn, T.〔和輪〕 十九世紀後半期 德人

Horn, W.〔和輪〕 十九世紀後半期 德人

Horn-D'Arturo, G.〔和輪•達土洛〕 二十世紀 義人

Horne, C. E.〔何温〕 二十世紀前半期西印度羣島波德黎各(Porto Rico)人

Horner, Francis〔和涅〕 十九世紀 英人

Horner, J.〔和涅〕 十九世紀後半期 英人

Horner, Joh. Kaspar〔和涅〕

Horner, William George〔和涅〕 (1786—1837, 9, 22) 英人 發見數字方程求實根近似值之計算法.

Hornich〔和尼哈〕 二十世紀 德人

Hornmannus, Henricus〔和滿那〕 十六世紀

Hornung, Cl. P.〔和納〕 十九世紀 英人

Horrebowius, Petrus〔和累玻微〕 十八世紀

Horrox, Jaremiah〔和洛克斯〕 亦作 J. Horrocks (1619—1641) 美人

Horsburgh, E. H.〔霍斯柏格〕 二十世紀

Horsburgh, E. M.〔霍斯柏格〕 二十世紀 蘇格蘭人

Horsfall, I. O.〔和斯福爾〕 二十世紀前半期 美人

Horsley, Samuel〔和斯力〕 (1736—1806) 英人

Horstmann. H.〔和斯曼〕 二十世紀 德人

Hort, W.〔和特〕 二十世紀初 德人

Horta, F. da P.〔和塔〕 十九世紀後半期 葡萄牙人

Hortega, *Fray* Juã de〔和武加〕 十六世紀 西班牙人

Horton, Goldie P.〔和頓〕 二十世紀前半期 美人

Horwitz, B.〔和尉茲〕 十九世紀 英人

Hosein〔何舍〕 即 al-Hosein

Hosenfeldt, W.〔何森斐特〕十九世紀後半期　德人

Hosford, Hemphill Moffett〔何斯福德〕二十世期前半期　美人

Hoshino Jitsusen〔星野實宣〕日本人

Hoshino Sanenobu〔星野〕十七世紀後半期　日本人

Hoskins, L. M.〔和斯金斯〕十九世紀末　美人

Hosokawa Toyomon　二十世紀前半期　日本人

Hospital, G. F. A. l'〔何批他〕亦作 G. F. A Hopital 卽 L'Hospital

Hossard〔賀薩德〕十九世紀前半期　法人

Hoste, P.〔賀斯提〕十七世紀　法人

Hostinsky, B.〔賀廷斯啓〕二十世紀初　法人

Hostus, Mattheus〔和斯塔〕亦作 Mathäus Hostus　(1509—1587)　德人

Hotelling, Harold〔何武林〕二十世紀前半期　美人

Hotson, W. C.〔和遜〕

Hotta〔堀田維祺〕十九世紀後半期　日本人

Hotz, Henry G.〔霍兹〕二十世紀　美人

Hoüel, *Guillaume* Jules〔胡厄爾〕(1823—1886)　法人　研究非歐幾何學及解析學

Hoüel, S.〔胡厄爾〕十九世紀

Hough, S. S.〔哈〕二十世紀前半期　德人

Hougnton〔豪乔〕

Householder, A. S.〔豪斯和得〕二十世紀前半期　美人

Housel, Charles Pierre〔豪塞爾〕著幾何學

Housel, M.〔豪塞爾〕十九世紀中　法人

Houstoun, Robert Alexander〔豪斯都〕(1883—)　蘇格蘭人　著數理物理學

Houtain〔豪騰〕

Hovestadt, H.〔和惠思塔〕十九世紀後半期 德人

Hovgaard, William〔哈加德〕二十世紀前半期 美人

Howe, Anna M.〔豪〕二十世紀前半期 美人

Howe, C. B.〔豪〕二十世紀 美人

Howe, George〔豪〕(1881, 9, 22—) 美人

Howe, George William Osborn〔豪〕(1875, 12, 4—) 英人

Howe, H. A.〔豪〕(1859—1926) 美人

Höwelcke, Johann〔豪衛刻〕即 Hevelius

Howland, Leroy Albert〔豪蘭德〕(1879, 7, 6—) 美人

Howland, R. C. J.〔豪蘭德〕二十世紀前半期 英人

Howse, G. F.〔豪斯〕十九世紀後半期 英人

Hoyle〔惠爾〕十八世紀中 英人

Hoyle, Vinton Asbury〔惠爾〕二十世紀前半期 美人

Hoza, F.〔何紮〕十九世紀後半期

Hrabanus Mauraus〔剌巴剌斯・摩納〕亦作 Rabanus Maurus (788—856) 德文 著曆書及天文書

Hrotsvitha〔洛斯維塔〕亦作 Hrotswitha von Gandersheim (932—1002) 德女尼 研究希臘算術

Hsia Han〔夏翰〕亦稱夏翔 中國宋時人

Hsia Luan Hsiang〔夏鸞翔〕(1823【清道光三年】—1864【清同治三年五月】) 中國人

Hsia Yuan Chai〔夏源澤〕十五世紀前半期 中國明正統時人

Hsia-Hou Yang〔夏侯陽〕六世紀 中國後魏時人

Hsiang Min Ta〔項明達〕亦作項名達 (1789【清乾隆五十四年】—1850【清道光三十年】) 中國人

Hsin Yun Lu〔邢雲路〕 十六世紀 中國明時人

Hsu Fa〔徐發〕 中國清時人

Hsu Jin Mei〔徐仁美〕 中國宋時人

Hsu Kuang Ching〔徐光啓〕 (1562〔明嘉靖四十一年陰曆三月二十一日〕—1633〔明崇禎六年十月初七日〕) 中國人 與利瑪竇合譯幾何原本

Hsu Show〔徐壽〕 (1818〔清嘉慶二十三年〕—1884〔清光緒九年〕) 中國人

Hsu Yang Yuen〔徐養原〕 (1758〔清乾隆二十三年〕—1825〔清道光五年〕) 中國人

Hsu Yew Jin〔徐有壬〕 (1800〔清嘉慶五年〕—1860〔清咸豐十年〕) 中國人

Hsu Yo〔徐岳〕 卽 Siu Yo

Hsu Yueh〔徐岳〕 卽 Siu Yo

Hua Heng Fang〔華蘅芳〕 (1833〔清道光十三年〕—1902〔清光緒二十八年〕) 中國人

Hua She Fang〔華世芳〕 (1854〔清咸豐四年〕—1905〔清光緒三十一年〕) 中國人

Huang Chung Seuen〔黃鍾駿〕 十九世紀後半期 中國清時人

Huang Hung Tsoo〔黃弘祖〕 十六世紀 中國明嘉靖時人

Huang Peh Kea〔黃百家〕 十七世紀後半期 中國清康熙時人

Huang Tae Shang〔黃泰生〕 (1852〔清咸豐二年〕—1893〔清光緒十九年〕) 中國人

Huang Tse Ngan〔黃棲巖〕 中國唐時人 著心機算術括

Huang Tsung He〔黃宗羲〕 (1610〔明萬歷三十八年〕—1695〔清康熙三十四年〕) 中國人

Huang Tsung Hsien〔黃宗憲〕 十九世紀後半期 中國清光緒時人

Huang Yu Tseih〔黃虞稷〕 (1629〔明崇禎二年〕—1691〔清康熙三十年〕) 中

國人

Hubbell, H.〔哈貝爾〕十九世紀後半期　美人

Hubbs. Horace Newton〔胡布斯〕二十世紀前半期　美人

Hube, Joh. Michael〔胡布〕(1737—1807) 波蘭人

Huber, A.〔胡柏〕二十世紀　德人

Huber, C. M.〔胡柏〕二十世紀前半期　美人

Huber, D.〔胡柏〕十九世紀前半期　瑞士人

Huber, G.〔胡柏〕(1858—1923, 1, 24) 瑞士人

Huber, P.〔胡柏〕二十世紀初　瑞士人

Huberdt, A.〔胡柏特〕十九世紀中　德人

Hubert, W. G.〔休柏特〕二十世紀前半期　美人

Hübner, Johann〔許布涅〕十八世紀

Hübner, M.〔許布涅〕十九世紀　德人

Hübsch, Johann Georg Gotthold〔許士〕十八世紀中　德人

Hückel, W.〔休克爾〕二十世紀　德人

Hudalrich Regius〔哈達利•勒朱〕十六世紀前半期

Hudde, Johann〔哈第〕(1633—1704, 4, 16) 荷蘭人　研究極大極小論,方程式論,及數論.

Hüdel, J.〔許得爾〕十九世紀後半期　德人

Hudisita Risyu　二十世紀前半期　日本人

Hudson, Hilda P.〔哈得孫〕二十世紀前半期　英人

Hudson, James Frank〔哈得孫〕(1872, 9, 19—) 英人

Hudson, Ralph Gorton〔哈得孫〕(1885, 6, 7—) 美人

Hudson, R. W. H. T.〔哈得孫〕(1876—1904) 英人　研究二次曲面

Huebner, L.〔羽布涅〕十九世紀　德人

Huelsse, J. A.〔烏爾斯〕十九世紀 德人

Hufford, Mason E.〔哈福德〕二十世紀 美人

Hugel, Th.〔胡革爾〕十九世紀中 德人

Hugens〔惠更斯〕 即 Huygens

Hugershoff, Reinhold〔攸機紹夫〕二十世紀 德人

Hughes, Hector James〔休玆〕(1871, 10, 23—1930, 3, 1) 美人

Hughes, H. K.〔休玆〕二十世紀前半期 美人

Hughes, Jewell C.〔休玆〕二十世紀前半期 美人

Hughes, R. T.〔休玆〕二十世紀前半期 英人

Hughes, T. M. P.〔休玆〕二十世紀 英人

Hugo, Graf Leopold〔羅俄〕十九世紀 法人

Hugo, L.〔羅俄〕十九世紀 法人

Hugoniot, A.〔呼哥奈〕十九世紀後半期 法人

Huguetan, Gilles〔胡給坦〕(1500—?) 法人

Huips, Frans van der〔休斯〕十七世紀 荷蘭人

Huisken, H. F.〔休斯墾〕十九世紀末 荷蘭人

Huke, Aline〔攸克〕二十世紀前半期 美人 研究變分學

Hulbe, Adam Ehregott Leberecht〔哈爾布〕(1768—?) 德人

Hulbert, Lorrain Sherman〔赫爾柏〕(1858, 3, 8—) 美人 著微積分

Hull, Daniel〔赫爾〕二十世紀前半期 美人

Hullett, G. H.〔哈勒特〕二十世紀前半期 英人

Hulme, F. E.〔哈爾謨〕十九世紀 英人

Hülsenberg, A.〔休森柏〕十九世紀後半期 德人

Hulsius, Levinus〔哈栖斯〕十六及十七世紀 德人

Hultén, Andreas〔哈爾騰〕十八世紀後半期 瑞典人

Hultsch, Fr.〔哈爾士〕 十九世紀後半期　德人

Humbert, E.〔洪伯特〕 十九世紀後半期　法人

Humbert, G.〔洪伯特〕 二十世紀初　法人

Humbert, Marie Georges〔洪伯特〕 (1859, 1, 7—1921, 1, 22) 法人

Humbert, Pierre〔洪伯特〕 二十世紀前半期　法人　解析學家

Humboldt, Alexander von〔洪保德〕 (1769—1859) 德人

Humboldt, Wilhelm von〔洪保德〕

Hume, Alfred〔休謨〕 (1866, 12, 1—) 美人

Hume, James〔休謨〕 十七世紀前半期　法人　生於英國　於1635年在巴黎刊行代數學(Le traite d'algèbre).

Humphrey, D.〔漢符理〕 二十世紀前半期　英人

Humphreys, William Jackson〔漢符理斯〕 (1862, 2, 3—) 美人　研究數理物理及氣候學

Hun, John Gale〔韓〕 (1877, 11, 21—) 美人　著三角術

Hunaeus, G. C. K.〔韓尼斯〕 十九世紀　德人

Hunain ibn Ishak〔罕內•易•伊沙〕 (810—873) 亞剌伯人

Hund, Friedrich〔罕德〕 二十世紀前半期　德人

Hundley, Robert E.〔罕德力〕 二十世紀前半期　美人

Hunger, K. G.〔抗革〕 十九世紀　德人

Hunrath, K.〔罕剌司〕 十九世紀後半期　德人

Hunsaker, J. C.〔韓薩刻〕 二十世紀前半期　英人

Hunt, B.〔韓德〕 二十世紀　美人

Hunt, G. H.〔韓德〕 二十世紀前半期　美人

Hunt, Mildred〔韓德〕 十七世紀　美女

Hunt, Nicolas〔韓德〕 十七世紀　英人

Hunt, William〔韓德〕十七世紀 英人

Hunter, H. St. J.〔罕特〕

Hunter, John〔罕特〕

Hunter, W.〔罕特〕二十世紀前半期 英人

Huntington, Edward Vermilye〔罕亭香〕(1874, 4, 26—) 美人 數理哲學家

Hunton, Sidney W.〔罕頓〕二十世紀前半期 坎拿大人

Hunyadi, E.〔罕雅狄〕亦作 Hunyady (1838—1889) 匈人

Hupe, A.〔休普〕二十世紀初 德人

Hupperz, R.〔勒柏次〕二十世紀初 德人

Hurewicz, W.〔赫勒威次〕二十世紀前半期 荷蘭人

Hurry, J. A.〔赫立〕二十世紀前半期 美人

Hurst, John Wildeboor〔赫斯特〕二十世紀前半期 美人

Hurwitz, Adolf〔赫維茲〕(1859—1919) 瑞士人 著函數論

Hurwitz, J.〔赫維茲〕十九世紀末 德人

Hurwitz, Wallie Abraham〔赫維茲〕(1886, 2, 18—) 美人

Husband, J.〔哈斯班〕二十世紀 美人

Husserl, Edmund〔哈塞爾〕(1859, 4, 8—) 德人 生於捷克

Hussey, William J.〔哈西〕(1862—1926, 10, 28) 美人

Husson Édouard〔哈遜〕二十世紀 法人

Hustler, James Devereux〔哈斯勒〕十九世紀初 英人

Huswirt, Johann〔哈衛特〕亦作 Johannes Huswirt 十六世紀初 德人

Hutcherson, W. R.〔哈起遜〕二十世紀前半期 美人

Hutchins, Mabel〔哈欽斯〕二十世紀前半期 美人

Hutchinson, Charles Angevine〔哈欽孫〕二十世紀前半期 美人

Hutchinson, John Irwin〔哈欽孫〕(1867, 4, 12—) 美人

Huth, J. C.〔休司〕 十八世紀

Hutton, Charles〔哈囘〕 (1737, 8, 14—1823, 1, 27) 英人 著數學字典,表解,公式等.

Hützler, Caspar〔許兹勒〕 十六世紀 德人

Huxley, Thomas Henry〔赫胥黎〕 (1825—1895) 英人

Huybrechts, M.〔惠布勒喜〕 二十世紀 法人

Huygens, Christian *von Zuylichen*〔惠更斯〕 亦作 Huyghens 或 Hugens (1629, 4, 14—1695, 6, 8) 荷蘭人 天文數理學家,貢獻於曲線論.

Huygens, Constantin〔惠更斯〕 十七世紀 荷蘭人

Huyghens〔惠更斯〕 卽 Huygens

Hvolyson, Orest Danilovich〔覊力遜〕 (1852—) 俄人

Hwuy Lin〔慧琳〕 (737〔唐開元二十五年〕—820〔唐元和十五年〕) 中國唐時僧

Hwuy Sze Ke〔惠士奇〕 (1671〔清康熙十年〕—1741〔清乾隆六年〕) 中國人

Hyatt, F. K.〔雅特〕 二十世紀前半期 美人

Hyde, Emma〔亥德〕 二十世紀前半期 美人

Hyde, Edward Wyllys〔亥德〕 (1843—1930) 美人 研究格刺斯曼空間解析

Hyden, John Albert〔亥登〕 二十世紀前半期 美人

Hyginus〔亥吉那〕 一世紀 羅馬人

Hylles, Thomas〔亥爾斯〕 十六世紀末 英人

Hymers, John〔海麥斯〕 (?—1887) 英人 著解析幾何學,微分方程式及差分學.

Hypatia *of Alexandaia*〔海披蕯〕 亦作 Hypatie (375—415) 希臘女人 狄奧 (Theon of Alexandria) 之女

Hyppocrates〔希波革拉第〕 卽 Hippocrates

Hypsicles of Alexandria〔喜西克爾〕或作 Hypsikles von Alexandria (190?B.C.--100?B.C.) 埃及人 分圓爲三百六十度著立體幾何學及數數論.

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外概不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第四卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊第四卷第二期目錄

國立武漢大學文哲季刊第三卷第二號目錄

學藝雜誌

第十三卷 第一期 目錄

第十三卷 第二期 目錄

定　價　另售每册二角七分全年十册計洋二元五角

發行處　上海愛麥虞限路中華學藝社總務部

代售處　上海生活書店開明書局現代書局

國內唯一的通俗科學刊物

科學世界

月出一册　全年十二册

零售每册一角半　郵費二分半

預定全年一元五角郵費在內

第三卷 第一期 要目

第三卷 第二期 要目

中華自然科學社編行

編輯部：　南京山西路國立編譯館內

定閱處：　本社編輯部

代售處：　南京　鍾山書局

上海　開明書局

現代書局

作者書社

他　埠：　各　大　書　局

介紹期刊

地質彙報……………………………北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所

自然科學季刊……………………國立北京大學自然科學季刊委員會

師大月刊……………………………國立北平師範大學

理工雜誌……………………………上海呂班路二二三號震旦大學理工學院

理科期刊……………………………上海光華大學科學會

電業季刊……………………………南京城內大石壩街廿一號全國民營電業聯合會編輯股

化學季刊……………………………國立北平大學工學院化學季刊社

化工……………………………………國立浙江大學化學工程學會

土木工程會會刊…………………復旦大學土木工程學會

高工土木工程學會會刊…………浙大高工土木工程學會

大衆畫報……………………………上海卅山路十二號大衆出版社

上海物價月報……………………上海漢口路外灘新關國定稅則委員會

介紹期刊

時事類編……………………上海福煦路八〇三號中山文化教育館

螞蟻月刊……………………上海四川路五三六號

大學……………………上海南京路大陸商場三〇四號

婦女旬刊……………………杭州長明寺巷長慶里十五號
中華婦女學社

協力月刊……………………北平東城大方家胡同五十二號

民大校刊……………………廣東荔枝灣國民大學

安徽大學[illegible]刊……………………安慶安徽大學

國立四川大學周刊……………………成都四川大學

國立北平圖書館館刊……………………北平文津街一號

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

華安……………………上海靜安寺路一〇四號華安出版社

中學生……………………上海四馬路八五號開明書局

真光校刊……………………廣州市白鶴洞私立真光女子中學

國立武漢大學理科季刊

第四卷第三期

價目				郵費
全	年	四	册	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費二圓
價	銀	二	圓	
每	期	零	售	函購零本 本國及日本郵費五分 其他地域加郵費五角
價	銀	五	角	
本刊以九月十二月三月六月爲出版期				
費須先惠空函不覆				
各地代售處零售概不另加郵費				

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十三年三月發行

1934年

第4期

國立武漢大學

理科季刊

第四卷第四期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. IV No. 4 June 1934

本期目錄

中華民國二十三年六月發行
國立武漢大學理科季刊委員會編印
中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第四卷第四期目錄

國立武漢大學理科季刊

第五卷第一期目錄預告

集合論

(續第四卷第二期)

蕭文燦

III. 基數或濃度

10 超限基數之導入 由有窮個元素而成之集合,其互爲等價者皆與同一有限基數(Cardinal number)對應.此基數吾人卽名爲集合之元素之個數,乃所以表此等集合之共通性質者也.其不等價之集合,則其所對應之基數不同.吾人今可將此觀念擴充至於無窮集合.

由前章所論可見無窮集合有相異之兩種.此兩種集合,不能一一對應,卽非等價者.其一曰可數集合,其一曰不可數集合.屬可數集合之集合爲數綦多,如自然數之集合,有理數之集合,代數數之集合,平面上格子點之集合等等是.總之凡屬可數集合皆屬彼此一一對應.吾人可將此等一一對應之集合卽等價之集合謂爲有同一之**基數**,或同一之**濃度**(Power, Machtigkeit).以表其共通之性質.若欲無窮集合之基數與有窮集合之基數明示其區別,則又稱爲**超限基數**或簡稱**超限數**(Transfinite number)通常可數集合之基數以 $\mathfrak{a}$ (德文字母之 $\mathfrak{a}$)表之.若用濃度一語則可數集合之

濃度以$\aleph_0$*以表之.

不可數集合,其例亦甚多.如實數之集合,無理數集合,超越數集合,直綫上之點集合,及空間之點集合等等.此種集合不能與可數集合一一對應.而彼此皆可一一對應.故其超限基數與 a 不同,以 c 表之.如用濃度一語則以$\aleph$表之.如此則吾人對於無窮之爲數,至少有兩個不同存在,卽超限數至少有兩個.

超限數 c 乃表充塡宇宙全體之點之集合之基數者也.以吾人數學的常識觀之,比宇宙全體之點集合更多之元素之集合,似乎不能存在.然研究之結果,則尙比 c 有更高度之基數存在.今證明如下:

定理24　一切一價實函數$f(x)$之集合與實數之集合不等價,而其所含之元素比實數集合多.

〔證明〕　首先吾人易知一價實函數$f(x)$至少有 c 個存在.何以言之?蓋任意予以一實數 p, 則對於一切實値 x 之函數$f(x)$其等於 p 者,恰恰有 c 個明已.

其次,於一價實函數之集合 $F\equiv\{f(x)\}$ 中任意選擇 c 個之函數,設其集合爲F_0.則吾人能證明在此集合以外常有其他之實函數$f(x)$存在.因而知實函數之集合比 c 個多.今爲論述簡單計只取在 $0\leqq x\leqq 1$ 間所定義之函數而論之.其對應於 $0\leqq z\leqq 1$ 間之一切實數 z 之函數卽以添數 z 表示之,

* $\aleph_0$ 讀爲阿勒夫零$\aleph$(Alef)乃西伯來字母.

如對應於實數 z 之函數即表如 $f_z(x)$.

今此函數 $f_z(x)$ 其在 z 點之值即 $f_z(z)$ 又作成一新函數命爲 $\varphi(z)$. 即

$$\varphi(z)=f_z(z) \tag{1}$$

例如設 F_0 中有一函數爲 $f_{\frac{2}{3}}(x)=x^3$ 則對應於 $z=\frac{2}{3}$ 之 $\varphi(z)$ 即 $f_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ 也.作成此新函數 $\varphi(z)$ 之法即係如此.若將 z 書爲 x 即

$$\varphi(x)=f_x(x) \tag{2}$$

即可視爲 x 之一函數也.今將

$$\psi(x)=\varphi(x)+1 \tag{3}$$

又視爲一函數.則此函數 $\psi(x)$ 即與 F_0 中之任何函數 $f_z(x)$ 不同.何以言之?設假定其等於對應於 z_0 之函數 $f_{z_0}(x)$, 則

$$\psi(x)=\varphi(x)+1=f_{z_0}(x) \tag{4}$$

今試考其 $x=z_0$ 點之值,則由(4)

$$\psi(z_0)=\varphi(z)+1=f_{z_0}(z_0) \tag{5}$$

然由(2) $\varphi(z_0)=f_z(z_0)$ 於是(5)成

$$f_{z_0}(z_0)+1=f_{z_0}(z_0)$$

也.是不合理.故 $\psi(x)$ 即爲不屬於 c 個實函數 $f_z(x)$ 之集合 F_0 中之函數.

然 $\psi(x)$ 固爲實函數乃屬於 F 中之一函數.而 F 中任取 c 個之任何函數集合 F_0 皆不含此.是以函數集合 F 不能與實數集合一一對應.且其所含元素又常比實數集合多.

是其基數與 c 不同.

吾人以 $\mathfrak{f}$(德文字母 f)表對應於此實函數之集合之超限數.

如此則知實函數集合之基數,比實數集合之基數爲高.然實函數有連續函數與不連續函數之分.連續實函數集合之基數與實數集合之基數相等.吾以後可證明之.而不連續函數之集合與實函數之集合等價.是以不連續函數之數比連續函數爲多.即前者之基數 $\mathfrak{f}$ 比後者之基數 c 爲高.蓋實函數集合中連續函數與不連續函數之關係,恰如實數集合中有理數集合與無理數集合云.

由上所論,吾人已知有三個不同之超限數 $a, c, \mathfrak{f}$ 也.雖然尙有比 $\mathfrak{f}$ 更高度之超限數存在否?此吾人不得不起之疑問也.此經Cantor氏證明其存在.

定理 25 對於各任意之集合 M,必有比此集合有更高度之超限數之集合存在.即有與 M 不等價而含更多元素之集合存在.

〔證明〕 今設 M 爲有窮或無窮之集合.今取其一切相異部分集合之集合考之.設此種集合爲 U.此時 U 之各元素乃 M 之部分集合,而 M 之各部分集合爲 U 之元素.吾人今證明 U 之基數比 M 之基數爲大.

首先注意 U 之中之與 M 等價之部分集合確存在.何以言之?譬如 a 爲 M 之一元素,今僅取一元素而成之集合考

之,則此集合$\{a\}$固明明爲M之部分集合也,故爲U之一元素,而由此僅僅一個元素而成之集合,其個數恰如M之元素之個數,故與M爲等價.然此種集合其爲U之一部分乃毫無疑義者.

今吾人在U中任意取與M等價之部分集合之集合考之,設爲U_0,則吾人能證明U_0以外之元素有常常爲U之元素者存在;即能證明不在U_0中而爲M之部分集合之集合w'常存在也.證此,先取在M, U中互爲對應之元素m_1, u_1而觀.則此m_1與u_1能有次之兩種情形出現:

(1)　元素m_1乃含於M之部分集合u_1中者.

(2)　元素m_2乃不含於M之部分集合u_1中者.

因此吾遂可將M之元素分爲二組.即凡元素$m^{(1)}$乃含於U中所對應於$m^{(1)}$之元素$u^{(1)}$中者屬於第一組;凡元素$m^{(2)}$乃不含於U中所對應於$m^{(2)}$之元素$u^{(2)}$中者屬於第二組.

今M中取屬於第二組之一切元素視爲一集合命爲w'.此w'當然爲M之部分集合,故爲U之一元素.然此卽不屬於U_0.今證明如下:

先假設w'乃屬於U_0中,對應於此w'之M之元素m'必屬於第一組或第二組.今假定m'屬於第一組.由第一組之性質w'不得不含m'.然他方面由w'之性質,w'乃僅含於第二組之數,故w'不得含m'.

如上既生出兩種矛盾結論,故 m' 不能屬於第一組,因而不得不屬於第二組.然由第二組之性質,m' 不得含於 u' 中,而由他方面 u' 之性質,u' 乃含屬於第二組之一切之元素,因而不得不含 m'.於此又來矛盾.故 m' 不得屬於第二組.於是 m' 既不屬於第一組亦不屬於第二組也.由此可知吾人假定"u' 在 U_0 中"者乃不可能.

故取 M 等價之任如何之集合 U_0,而 U 之中亦有不屬於 U_0 之元素存在.是以 U 之超限數比 M 之超限數爲更高也.因此吾人遂得

定理 26. 設 M 爲任意集合,則 M 之一切部分集合之集合 U,比 M 有更高度之超限數.

故任取何等之超限數常有比之更高之超限數存在.

11 超限基數之大小. 當吾人規定超限數之大小之觀念時,須顧及有限數,務須使有限數亦能適用此規定.故吾人先考察决定有限數大小之標準爲何?

吾人對於兩有窮集合,如甲乃與乙之真部分集合等價時,則謂甲之基數小於乙之基數.然而在無窮集合則不能適用此種標準.何則?譬如甲爲自然數之集合,乙爲有理數之集合.則甲雖與乙之真部分集合等價,然此甲,乙二集合皆爲可數集合,因而爲等價之集合.由前基數之定義,只能謂甲乙二集合之基數相等,而不能謂甲之基數小於乙之基數.此有窮集合與無窮集合不同之處,蓋無窮集合有一

特性卽"與自己之眞部分集合等價"是也.故大小之定義不能如此規定,須如次之定義,方有窮與無窮皆得而適用焉.

集合 A 與集合 B 之部分集合等價,而 B 不能與 A 之任何部分集合等價時,則謂 A 之基數 $\mathfrak{a}$ 比 B 之基數 $\mathfrak{b}$ **小**.亦卽 $\mathfrak{b}$ 比 $\mathfrak{a}$ **大**.

由此定義吾人可知關於次列之大小之基本性質在超限數亦能證明其成立:

性質 1.　$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ 時卽不能 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

蓋 $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ 則 B 不能與 A 之任何部分集合等價.然 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ 則由基數之定義 B 不得不與 A 之等價也.此逆亦眞.

性質 2.　二不等價集合之基數 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ 不能同時 $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, 及 $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$.

性質 3.　$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$,　$\mathfrak{b}<\mathfrak{c}$　則 $\mathfrak{a}<\mathfrak{c}$.

性質 4.　$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$　$\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$　則 $\mathfrak{a}<\mathfrak{c}$.

此等性質由大小之定義可直接推出,

吾人由此等定義,可導得下之定理:

定理 27. 實數之基數 $\mathfrak{c}$ 比自然數之基數 $\mathfrak{a}$ 大,又實函數之基數 $\mathfrak{f}$ 比實數之基數 $\mathfrak{c}$ 大.

〔證明〕　設自然數之集合爲 M, 實數之集合爲 N, 因 M 爲 N 之一部分,故 M 乃與 N 之部分集合等價.而自然數之部分集合,爲有限集合,或可數集合,故 N 不能與 M 之任何部

分集合等價.故由上之定義 c 比 a 大.同樣能證明 f 比 c 大.

定理 28. 有窮集合之基數比可數集合之基數 a 小.

此定理由定義可直證明之.

定理 29. 可數集合之基數 a 乃最小之超限數.

〔證明〕 任何無窮集合皆含有可數之部分集合(定理 2).故凡不可數之無窮集合皆含有與自然數等價之部分集合.而自然數之任何部分集合皆不能與不可數之集合等價.故不可數無窮集合之基數比自然數之基數 a 大.又任何可數集合皆與自然數集合等價.是以其基數等於 a.由此則凡任何無窮集合之基數不大於 a 即等於 a.故 a 爲最小之超限數.

a 爲最小之超限數,c 比 a 大,f 比 c 大,已如上之證明.而 a 與 c 之間,尙有超限乎?此自然應起之問題也.此爲有名之連續體問題 (Continnum problem). Cantor 曾否决之.氏以 c 爲第二超限數居 a 之次,然無嚴密之證明.其後經各家之研究至今尙存而未決.同樣 c 與 f 之間有無超限數存在亦尙未決定.然比 f 大之超限數乃已爲Cantor所解决,由定理25吾人可直得下之定理.

定理 30. 對於各任意集合,皆有比該集合較大之基數之集合存在.因此超限數無最大者,由 a 始有無窮個依次較大之超限數存在.

今取任意之集合爲例,譬如實函數集合 M, 其一切部分集合之集合 U_1 依定理26及超限數大小之定義,則 U_1 之超限基數 $\mathfrak{g}$ 大於 M 之超限數 $\mathfrak{f}$. 其次於 U_1 之一切部分集合之集合 U_2, 則 U_2 之超限數 $\mathfrak{h}$ 大於 $\mathfrak{g}$. 如斯次第取前集合之部分集合考之.則得一次第較大之超限數之無窮敍列.而此等無窮大數(超限數)其相互間之差別得以數學的精密區別之.然於普通之無窮大卽假無窮大,於其種種無窮大間之大小差別,難以數學的精密區別之.關於此點,在集合論中之種種無窮大卽超限數乃有極重要之意義.而得如此精確區別之無窮大(超限數)至少與普通之有限基數有同樣之無窮多存在.

定理26不僅可以證明如上述之超限數有無窮多存在,且指示吾人實際作超限數之方法.關於此點可見定理26之重要也.

超限數相等,大小之定義既如上述.而由此等定義.所謂"$a<b$, $a=b$, $a>b$ 之諸關係不能有二者同時成立,"之基本性質及其他大小之諸基本性質與有限數同樣成立.雖然凡有任意二集合於此,其基數皆必滿足於此相等大小之關係乎?吾人不得不再加一番考察也.今試考甲乙二集合之部分集合有等價之關係時,不出下列四種情形:

(1) 甲與乙之一部分集合等價,乙與甲之一部分集合等價之時.

(2) 甲與乙之一部分集合等價,而乙與甲之任何部分集合不等價之時.

(3) 甲與乙之任何部分集合不等價,而乙與甲之一部分集合等價之時.

(4) 甲與乙之任何部分集合不等價,而乙與甲之任何部分集合不等價之時.

在(2)之時,依吾人之定義卽甲之基數小於乙之基數之時.在(3)卽甲之基數大於乙之基數之時.而在(1),(4)兩種情形則甲乙之基數有何關係乎?此吾人不得不討論之問題也.其在(1)者有 Bernstein 之等價定理證明其爲相等.今將於次節論之.其在(4),甲乙二基數之關係頗難致答.蓋甲乙二集合有同樣之條件可以滿足.若甲之基數比乙之基數大,則同時不得不謂乙之基數比甲之基數大,是與大小之基本觀念矛盾;又若謂甲乙之基數相等,則與超限基數相等之定義矛盾.故在(4)之時乃兩超限數不能爲相等大小之時. Cantor 素主張兩集合不能有(4)之情形出現,然不能精密證明之.吾人於後章之整列集合可以證明此種情形不起.而任意之集合經 Zermelo 之研究,若經適當處理皆可得整列集合.若果 Zermelo 之證明無缺陷,則任意二集合之超限數乃得而比較其相等大小.於是次之重要命題方得而主張焉.卽

若有甲乙二任意之集合,則或甲與乙有同基數,或甲之

基數比乙之基數大,或甲之基數比乙之基數小.

關於此等之論述,在後論整列集合之超限基數超限序數時再爲詳說之也.

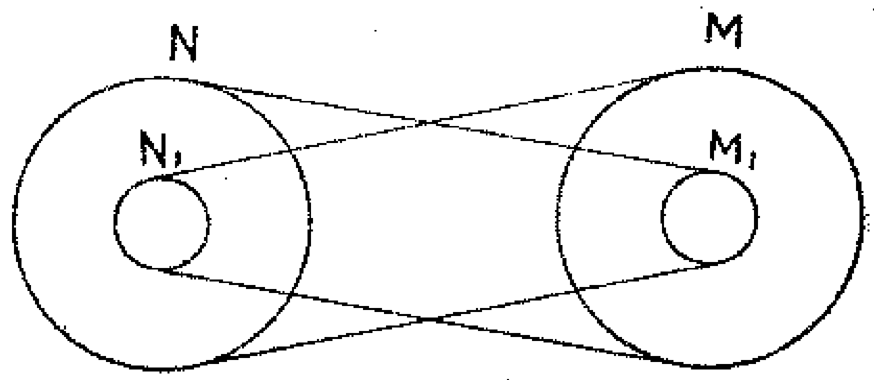
12. Bernstein 之等價定理.

定理 31. 設 M 與 N 之一部分集合等價,而 N 又與 M 之一部分集合等價時則 M 與 N 等價.

〔證明〕 設 M_1 爲 M 之部分集合,N_1 爲 N 之部分集合而

$$M_1 \sim N, \quad N_1 \sim M \qquad (1).$$

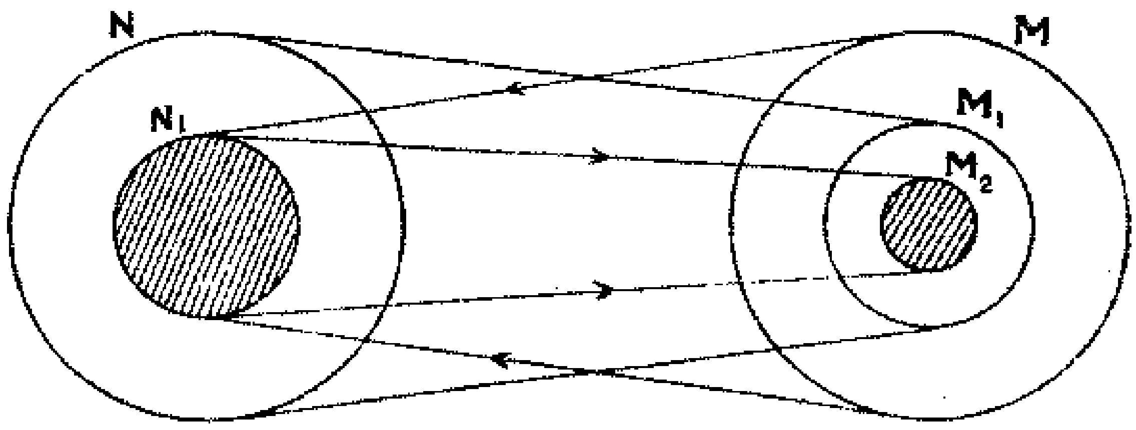
則吾人能證明 $M \sim N$.



證此,只須取 M_1, N_1 各爲 M, N 之真部分集合證之卽可.蓋若 $M=M_1$ 則由 (1) $M \sim N$ 甚明.故今假定 M_1, N_1 各爲 M, N 之真部分集合.

由假設 N 與 M_1 一一對應,因而知 N 之部分集合 N_1 與 M_1 之一部分集合 M_2 一一對應.卽

$$N_1 \sim M_2 \qquad (2).$$



然由假設 $M \sim N_1$ 故由(2)即知

$$M \sim M_2 \qquad (3).$$

因此只須證明次之補助定理卽得矣.

定理32. 設 M 與其真部分集合 M_2 等價,則 M 亦與 M_2 與 M 間之集合 M_1 等價.卽

$$M_2 \subset M_1 \subset M, \quad M \sim M_2 \text{ 則}$$

$$M_1 \sim M$$

如能將此證明則前定理卽證明.何則?蓋由(3)而得此補助定理之假設,於是遂得

$$M \sim M_1.$$

但由其假設 $\qquad N \sim M_1$

故得 $\qquad M \sim N.$

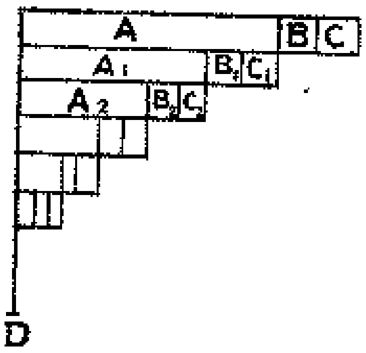
今將此補助定理證明如次:

吾人將其記號稍加變更,卽令

$$M_2 = A$$

$$M_1 = A + B$$

$$M = A + B + C.$$



於是卽由 $A+B+C \sim A \qquad (4).$

而證 $A+B+C \sim A+B.$

今 $A+B+C$ 與 A 既一一對應.則 $A+B+C$ 之部分集合 A, B, C 應各與 A 之部分集合 A_1, B_1, C_1 一一對應.卽

$$A \sim A_1,\ B \sim B_1,\ C \sim C_1, \quad A = A_1 + B_1 + C_1 \qquad (5).$$

卽 $$A_1+B_1+C_1\sim A_1 \qquad (6).$$

今將(6)與(4)比較乃完全同形.因此可得次列同樣之諸關係式

$$A_1\sim A_2,\ B_1\sim B_2,\ C_1\sim C_2,\quad A_1=A_2+B_2+C_2 \qquad (7).$$

$$A_2+B_2+C_2\sim A_2 \qquad (8).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽得
$$\left.\begin{aligned} &A\sim A_1\sim A_2\sim A_3\sim\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &B\sim B_1\sim B_2\sim B_3\sim\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &C\sim C_1\sim C_2\sim C_3\sim\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (9).$$

今作 $A, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots$ 之積 D

$$D=AA_1A_2\cdots\cdots\cdots A_n\cdots\cdots$$

此集合 D 有爲空集合時亦有非空集合之時.*

應用此 D 則可書成

$$A+B+C=(B+B_1+B_2+\cdots\cdots)+(C+C_1+C_2+\cdots\cdots)+D$$

$$A+B\quad=(B+B_1+B_2+\cdots\cdots)+(C_1+C_2+\cdots\cdots\cdots)+D$$

由此式容易證明

$$A+B+C\sim A+B.$$

---

* 今設 $A=(1,2,3,4,5,\cdots\cdots)$, $A_1=(2,3,4,5,\cdots\cdots)$, $A_2=(3,4,5,\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots$ $A_n=(n+1, n+2,\cdots\cdots)$ 則 $D=AA_1A_2\cdots\cdots A_n\cdots\cdots$ 爲空集合,因 $A, A_1, A_2, \cdots\cdots A_n, \cdots$ 無共通之元素也. 又如 $A=$(2寸之直綫上之點集合), $A_1=$(2寸$-\frac{1}{2}$寸之直綫上之點集合), $A_2=\left\{2\text{寸}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\text{寸之直綫上之點集合}\right\}$,$\cdots\cdots\cdots$, $A_n=\left\{2\text{寸}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\text{中之直綫上之點集合}\right\}$,$\cdots\cdots$則 D 乃1寸之直線上之點集合.

蓋乃如

$$\begin{array}{lllllllll} A+B+C: & B, & B_1, & B_2 \cdots\cdots\cdots & C, & C_1, & C_2 \cdots\cdots\cdots & D \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ A+B \quad : & B, & B_1 & B_2, \cdots\cdots\cdots & C_1, & C_2, & C_3 \cdots\cdots\cdots & D \end{array}$$

一一對應也.

卽 $A+B+C$ 中之 B_i 及 D 之各元素乃與 $A+B$ 內其本身之元素對應.而 $A+B+C$ 中之 $C, C_1, C_2, \cdots\cdots$ 之元素由 (9) 可知其與 $C_1, C_2, \cdots\cdots$ 之元素對應.故 $A+B+C \sim A+B$ 亦卽

$$M \sim M_1.$$

由等價定理又可直推出次之定理.

定理 33. 設 M 之基數爲 $\mathfrak{m}$, N 之基數爲 $\mathfrak{n}$, 且 M 與 N 之部分集合等價時則

$$\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}.$$

蓋此時若 N 與 M 之部分集合等價則

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$$

若 N 不與 M 之任何部分集合等價則

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$$

故 $$\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}.$$

Bernstein 定理之應用.

由 Bernstein 定理可導出種種之結論,今略舉如次:

(i) $0 < x \leqq 1$ 間之一切實數 x 之集合 M 與 $0 \leqq x \leqq 1$ 間之一切實數 x 之集合 N 等價.

今 $$M:\ 0 < x \leqq 1, \qquad N:\ 0 \leqq x \leqq 1.$$

吾人於 0 與 1 間取 a, b 二數,試考 $a \leqq x \leqq b$ 間之一切 x

之集合 M_1,卽

$$M_1: a \leqq x \leqq b.$$

M_1 乃 M 之部分集合,而 $M_1 \sim N$ 甚明.蓋 N 之 x 對應於 M 之 $a+x(b-a)$ 也.但 M 乃 N 之部分集合故由 Bernstein 之定理

$$M \sim N.$$

同樣可證明 $a<x<b$ 之全部 x 之集合與 $a \leqq x \leqq b$ 之全部 x 之集合等價.而 $a<x<b$ 之 x 之集合乃與全部實數之集合等價故 $a \leqq x \leqq b$ 之 x 之集合與全部實數之集合等價.

(ii)　一邊之長爲 1 之正方形除開二邊之點集合 M 卽座標 (x,y) 滿足於

$$o<x \leqq 1, \quad o<y \leqq 1$$

之點集合 M 與正方形各邊在內之點集合 N,卽座標 (x_1,y_1) 滿足於

$$o \leqq x_1 \leqq 1, \quad o \leqq y_1 \leqq 1$$

之點集等價.

蓋由 (i) $o<x \leqq 1$ 之 x 之集合與 $o \leqq x_1 \leqq 1$ 之 x_1 之集合等價,而 $o<y \leqq 1$ 之 y 之集合與 $o \leqq y_1 \leqq 1$ 之 y_1 之集合等等價.故滿足於 $o<x \leqq 1$, $o<y \leqq 1$ 之 (x,y) 點與滿足於 $o \leqq x_1 \leqq 1$, $o \leqq y_1 \leqq 1$ 之 (x_1,y_1) 點等價明已.如此可知吾人證明定理20時係將兩邊除開卽指定正方形內者,由此可知將邊包於其中亦能成立也.

同樣可推之於立方體,n 次元體.如次元之數爲無窮而

可數者則在此無窮次空間之部分如

$$o<x_1\leqq 1,\ o<x_2\leqq 1,\ o<x_3\leqq 1,\cdots\cdots\cdots\ o<x_n\leqq 1\cdots\cdots\cdots$$

與長爲 1 之綫分卽 $(o<t\leqq 1)$ 等價.因而用同法可證明此無窮次空間

$$-\infty<x_1<\infty,\quad -\infty<x_2<\infty,\cdots\cdots,\quad -\infty<x_n<\infty,\cdots\cdots$$

之全部之集合與綫分

$$a\leqq t\leqq b$$

爲一一對應.由此且可證明 §10 中所述連續函數之集合與實數之集合之關係卽可證明.

定理34. 一切連續函數之集合與一切實數之集合等價.

〔證明〕

$k=f(x)$ $(o\leqq x\leqq 1)$ 當 x 以任何態度迫近於 x_0 時,$f(x)$ 亦迫近於 $f(x_0)$ 卽謂 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 時連續.如 $f(x)$ 在 $o\leqq x\leqq 1$ 之間各點皆有此性質則謂 $f(x)$ 在此變域中爲連續.此連續函數之定義乃吾人所夙知者.故在 $o\leqq x\leqq 1$ 中之連續函數 $y=f(x)$ 之值當 x 爲有理數時 $f(x)$ 之值代入之卽取得其值,無待言也.當 x 爲無理數時則 $f(x)$ 之值可以有理數時之 $f(x)$ 之值之極限值決定之.詳言之如 ξ 爲無理數則 ξ 可展開成一無限小數卽

$$\xi=o\cdot a_1a_2a_3a_4\cdots\cdots\cdots$$

今設 $x_1=o\cdot a_1$

$$x_2=0\cdot a_1a_2$$

$$x_3=0\cdot a_1a_2a_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=0\cdot a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則此 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, \cdots\cdots$ 明明爲有理數且 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 乃無限的接近於 ξ 也.卽

$$x_n \longrightarrow \xi.$$

因 $f(x)$ 在 ξ 爲連續故

$$f(x_n) \longrightarrow f(\xi).$$

因此 $f(\xi)$ 之値乃 $f(x_1)$, $f(x_2), \cdots\cdots\cdots$ 之値可以無限的接近之.而 $f(x_1), f(x_2), \cdots\cdots$ 諸値則因,$x_1, x_2, \cdots\cdots$ 爲有理數故直以其値代入 $f(x)$ 卽可得之.故

連續函數 $f(x)$ 當 x 爲有理數時卽可直接取得 $f(x)$ 之値,當 x 爲無理數時則 $f(x)$ 之値亦可由極限値決定之.

今 0 與 1 間之有理數全體 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, \cdots\cdots$ 乃可附以番號者(因有理數集合爲可數).在其點之 $f(x)$ 之値設各爲 ξ_1, $\xi_2, \cdots\cdots$ 卽

$$\xi_1=f(x_1),\quad \xi_2=f(x_2), \cdots\cdots, \xi_n=f(x_n) \cdots\cdots$$

由上所述 $f(x)$ 爲連續函數則 $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots$ 可定.卽連續函數 $f(x)$ 與次元之數爲可數的無窮大之空間 R 之一點($\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n, \cdots$)對應.因此連續函數全體之集合與空間 R 之一部分等價.然空間 R 之一切點之集合乃與 $a \leqq t \leqq b$ 之綫分

之點集合等價,因而知與實數之集合等價.故連續函數全體之集合與實數全體集合之部分集合等價.然一方設 $y=$ 一常數得視成一連續函數,此常數可以一切實數代之,於是連續函數全體之集合含有實函數全體之集合爲其部分集合.故由 Bernstein 之定理可知一切連續函數之集合與一切實數之集合等價.

13. 超限基數之算法

(i) 超限基數之加法

今設有基數 $c_1, c_2, c_3,$…………所謂此諸基數之和者乃指由次之方法所作之數.

先作基數爲 c_1 之集合 M_1,次作基數爲 c_2 而與 M_1 不同元素之集合 M_2,次作基數爲 c_3 而與 M_1, M_2 不同元素之集合 M_3,如斯次第作得 $M_4, M_5,$…………,則得基數爲 $c_1, c_2, c_3,$…………之一羣集合,而此一羣集合中無有二者有共通之元素.此一羣集合之和設爲集合 S,而集合 S 之基數爲 k,則 k 即稱爲基數 c_1, c_2, c_3 …………之**和**.以

$$k=c_1+c_2+c_3+\cdots\cdots$$

表之.

由此定義可知"加法之交換法則,組合法則"亦能成立.蓋集合之和 M_1+M_2 與 M_2+M_1 含相同之元素,又 $(M_1+M_2)+M_3$ 與 $M_1+(M_2+M_3)$ 亦含同一之元素也.

但關於超限數雖如是之原則能成立,而實際應用之時

則多與有限數者大異其趣.觀下例可知也.惟此加法之定義用之於有限數時與普通之結果自無不同,此甚易明.

例 1. 對於可數集合之超限數之加法.

可數集合中加入有限個之元素仍爲可數集合.故今以有限數之基數 n 加於可數集合之基數 a 則可得次之關係式:

$$n+a=a+n=a. \tag{1}$$

又取兩可數集合 $M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots\}$, $N=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots\}$ 其集合之和 $M+N=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots\cdots\}$ 乃又一可數集合故

$$a+a=a.$$

一般 n 個爲

$$a+a+a+\cdots\cdots\cdots\cdots+a=a. \tag{2}$$

若更進一步如 a 乃有無窮之多但爲可數則其和亦爲 a.吾人觀下例自明:自然數之集合可分解成無窮個(可數的)之可數集合,如

$$\begin{array}{llllll}
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
2 & 6 & 10 & 14 & 18 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
4 & 12 & 20 & 28 & 36 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
8 & 24 & 40 & 56 & 72 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

(第一列乃奇數全體,第二列,乃以 2^1 乘第一列;第三列乃以 2^2 乘第一列,…………) 故

∴ (3) $$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\cdots\cdots=\mathfrak{a}.$$

由此又可導得下之關係

(4) $$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\cdots\cdots=\mathfrak{a},\quad 1\leqq\mathfrak{a}_n\leqq\mathfrak{a}$$

何則? 因 $\mathfrak{a}_n\leqq\mathfrak{a}$, 故相應於 $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\cdots\cdots$ 之集合乃與相應於 $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\cdots\cdots$ 集合之部分集合等價,又因 $1\leqq\mathfrak{a}_n$ 故相應於 $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\cdots\cdots$ 卽 $\mathfrak{a}$ 之集合與 $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\cdots\cdots$ 之部分集合 $1+1+1+1+\cdots\cdots$ 卽 $\mathfrak{a}$ 等價.故由等價定理

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\cdots\cdots$$

相等卽

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\cdots\cdots=\mathfrak{a}.$$

此(1), (2), (3)之超限數之加法其結果與有限數之加法異.

例 2. 對於連續集合的超限數之加法.

區間 $[0,1]$ 之實數,區間 $(1,2]$ 之實數及區間 $[0,2]$ 之實數其基數皆爲 $\mathfrak{c}$. 而一般有基數 $\mathfrak{c}$ 之任意二集合 C_1, C_2, (無共通元素)與區間 $[0,1]$ 之實數,及區間 $(1,2]$* 之實數一一對應.故其和 C_1+C_2 乃與區間 $[0,2]$ 之實數一一對應,因而知

(1) $$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}.$$

同樣一般 n 個得

(2) $$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\cdots\cdots+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}.$$

且一般 $(n-1,n)$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 之區間之實數之集合之和乃與由 o 至 ∞ 之一切實數一一對應,故

* $(1,2]$ 乃表示 1 與 2 間之實數但含 1 不含 2.

(3) $c+c+c+\cdots\cdots=c.$

例 3. c 與 a 及與 n 之加法.

今考 o 與 1 間之實數與自然數之全體之和 $\{c_1\}+\{a\}$. 其基數明明爲 $c+a$. 然此集合乃與全體實數之集合等價者.何以言之.蓋 o 與 1 間之實數 $\{c_1\}$ 與全體實數 $\{c\}$ 等價是後者 $\{c\}$ 與前者 $\{c_1\}+\{a\}$ 之部分集合 $\{c_1\}$ 等價.然實數之全體含 o 與 1 間之實數及自然數之全體,是前者 $\{c_1\}+\{a\}$ 乃與後者 $\{c\}$ 之部分集合 $\{c_1\}+\{a\}$ 等價.故由等價定理此兩集合爲等價.即

(1) $c+a=c$

由此又可證明

(2) $c+n=c.$

何則?蓋

$$c+n=(c+a)+n=c+(a+n)=c+a=c.$$

定理 35. $\mathfrak{f}$ 爲任意之超限數時若加可數集合之超限數 a 仍等於 $\mathfrak{f}$

蓋由定理 2 可知任何超限數或等於 a 或比 a 大.故得 $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}+a$ 因而知

$$\mathfrak{f}+a=(\mathfrak{g}+a)+a=\mathfrak{g}+(a+a)=\mathfrak{g}+a=\mathfrak{f}.$$

定理 36. 二基數之和或比各基數大或與之相等.

〔證明〕 今設對應於任意二基數 m, n 之集合爲 M, N(M 與 N 無共通元素),集合 $(M+N)$ 必含集合 M 或 N 之真部分

集合,故集合 M 或 N 乃與集合 $(M+N)$ 之部分集合等價.於是若集合 $(M+N)$ 與 M 或 N 之部分集合等價,則集合 M 或 N 之基數與集合 $(M+N)$ 之基數 $\mathfrak{p}$ 相等.若集合 $(M+N)$ 與 M, N 之任何部分集合不能等價時則 $\mathfrak{p}$ 大於 $\mathfrak{m}$ 或 $\mathfrak{n}$.

此定理可擴張至於二個以上之基數之和,亦成立.

定理 37. 若 $\{\mathfrak{a}_n\}$ 爲基數之集合,其中無最大之基數時,其全部基數之和

$$\mathfrak{a}=\Sigma\mathfrak{a}_m$$

比其任一基數 $\mathfrak{a}_m$ 大.

〔證明〕 由基數之和之定義及定理33,對於任一 $\mathfrak{a}_m$ 皆有如

$$\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{a}_m$$

之 $\mathfrak{a}$ 存在.但在此時等號不能立.因若 $\{\mathfrak{a}_m\}$ 中有 $\mathfrak{a}_{m0}=\mathfrak{a}$ 之 $\mathfrak{a}_{m0}$ 存在則是 $\mathfrak{a}_{m0}\geqq\mathfrak{a}_m$ 而 $\mathfrak{a}_{m0}$ 爲最大與假設相反也.故

$$\mathfrak{a}>\mathfrak{a}_m.$$

定理 38. 設有基數之集合 $\{\mathfrak{a}_m\}$ 必有比其中任一基數 $\mathfrak{a}_m$ 大之基數存在.

〔證明〕 設 $\mathfrak{a}_m$ 之中無最大之時則由前定理 $\Sigma\mathfrak{a}_m$ 即比一切之 $\mathfrak{a}_m$ 大.

若 $\mathfrak{a}_m$ 之中有最大之時如爲 $\mathfrak{a}_{m0}$ 則依定理30必有比 $\mathfrak{a}_m$ 大之基數存在.

故一切基數之集合不能思惟.蓋包含一切基數之集合 M 由上定理必有比 M 中之一切基數大之基數存在,而此

基數不包含於 M 之中,此與 M 爲一切基數之集合之假設相反也.

(ii) **超限基數之乘法**

二集合 M, N 其基數各爲 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 今任取 M 之一元素 m, N 之一元素 n 作成 (m,n) 之一組.將如斯一切之組作爲一集合考之.此集合卽稱爲 M 與 N 之**結合集合** (aggregate of bindings, Verbin dungsmenge). 其基數 $\mathfrak{p}$ 卽稱爲 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 之**積**.表如

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

而結合集合則以 $(M\cdot N)$ 表之,卽

$$(M\cdot N)=\left\{(m,n)\right\}.$$

同樣可下 $M_1, M_2, \cdots\cdots M_n, \cdots\cdots$ 之結合集合之定義.此結合集合之基數 $\mathfrak{p}$, 仍稱爲各集合之基數之積.卽

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_1\cdot\mathfrak{m}_2\cdot\mathfrak{m}_3\cdot\cdots\cdots\cdots$$

上之定義有限基數時亦能適用,例如二有限集合

$$M=\left\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m\right\},\quad N=\left\{b_1,b_2\cdots\cdots b_n\right\}$$

其 (a_i,a_k) 之組合明明爲 mn 個也.

定理29. 由此超限數之乘法之定義.關於下之原則仍成立.

交換法則 $\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{a},$

組合法則 $\quad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}=\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$

分配法則 $\quad \mathfrak{a}(\mathfrak{a}+\mathfrak{a})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \qquad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$

〔證明〕 因由乘法之定義,於結合集合,下之關係易知其

成立.

$$(A\cdot B)\sim(B\cdot A)^{*}$$

$$\big((A\cdot B)C\big)\sim\big(A(B\cdot C)\big).$$

$$\big(A(B+C)\big)\sim(A\cdot B)+(A\cdot C),\quad \big((A+B)C\big)\sim(A\cdot C)+(B\cdot C).$$

(但最後一式 B 與 C, A 與 C 無共通之元素)

故關於基數之積三個法則亦成立.

定理 40. 超限數之積,其因數有一為 o, 且限於此時,為 o.

〔證明〕 因於結合集合中其因數必有一為 o 集合,且限於有一為 o 集合時,結合集合始為 o 集合故也.蓋由結合集合之定義所作 $(m_1, m_2, \cdots\cdots)$ 之組,每一集合須有一元素乃非 o 集合.今其因數中有一為 o 集合則即無此元素,故結果之結合集合為 o 集合.由此可直推上之定理為真.

由上乘法定義雖有限數亦能適用,然對於超限數之結果,恆有與有限數大異之處,觀次例自明.

例 1.　今 $\mathfrak{a}$ 為可數集合之超限數時,如前所述,可知

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

之關係成立.而又因 $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2\mathfrak{a}$, 故得

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

因而知

$$3\mathfrak{a}=(2+1)\mathfrak{a}=2\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

$$4\mathfrak{a}=3\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

* (a,b) 與 (b,a) 雖異,然其互為對應乃一一對應也.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般得 (1) $n\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$. ($n$:有限數)

例 2. $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$

今有超限數爲 $\mathfrak{a}$ 之二集合

$$M=\left\{a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots\right\},\quad N=\left\{b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots\right\}$$

今將所作 (a_i,a_k) 之組如次排列

$$\begin{array}{llllll}
(a_1,b_1) & (a_1,b_2) & (a_1,b_3) & \cdots\cdots & (a_1,b_n), & \cdots\cdots \\
(a_2,b_1) & (a_2,b_2) & (a_2,b_3) & \cdots\cdots & (a_2,b_n), & \cdots\cdots \\
(a_3,b_1) & (a_3,b_2) & (a_3,b_3) & \cdots\cdots & (a_3,b_n), & \cdots\cdots \\
(a_4,b_1) & \cdots\cdots & & & & \\
\cdots\cdots & & & & & \\
\cdots\cdots & & & & &
\end{array}$$

由左上端始依斜綫所指之次序排列之,卽如

$$(a_1,b_1);\ (a_1,b_2),\ (a_2,b_1);\ (a_1,b_3),\ (a_2,b_2),\ (a_3,b_1);\cdots\cdots$$

則其所得之敍列明明爲又一可數集合.故其基數亦爲 $\mathfrak{a}$.

於是得

(2) $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdots\cdots\cdots$

吾人觀上所舉之

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

兩式,可知最簡之超限數 $\mathfrak{a}$. 其在加法者有如 o 之性質,其在乘法者有如 1 之性質.此表無窮大之基數 $\mathfrak{a}$, o 與 1 之

性質皆具之,豈非驚人之事乎!

例 3.

$$(3)\quad \begin{cases} n\cdot c = c & (n:\text{有限數}) \\ a\cdot c = c \\ c\cdot c = c \end{cases}$$

n 個綫分

$$0\leqq x<1,\quad 1\leqq x<2,\quad \qquad n-1\leqq x<n$$

之和爲 $0\leqq x<n$, 其基數爲 c. 今設 $M=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$, $N=\{0\leqq x<1$ 之一切 x 之集合$\}$ 則 $0\leqq x<n$ 綫分上之一切點之集合明明與 M 與 N 之結合集合等價,故得,

$$n\cdot c = c,$$

同樣可得 $$a\cdot c = c.$$

又正方形內之點 (x,y) $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$ 之集合明明爲 $0\leqq x\leqq 1$ 之集合與 $0\leqq y\leqq 1$ 之集合之結合集合.然正方形內之點集合由定理20其基數爲 c 故得

$$c\cdot c = c,$$

同樣可得 $$c\cdot c\cdot c = c,$$

$$c\cdot c\cdot c\cdots\cdots\cdots = c.$$

(iii) 超限基數之減法除法.

超限基數之加法與乘法乃有限數加法乘法之一般化者也.而有限數之減法與除法是否可推及於超限數乃自然而生之問題.然由上之結果關於超限數 a 見

$$a+1=a,\quad a+n=a,\quad a+a=a$$

之諸關係成立故 $\mathfrak{a}-\mathfrak{a}$ 可爲 1, 爲 n, 亦可得 $\mathfrak{a}$. 又關於超限數 $\mathfrak{c}$, 見

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c},\quad \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$$

之關係成立.故 $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}}$ 可得 n 可得 $\mathfrak{a}$, 又可得 $\mathfrak{c}$. 是以關於超限數之減法與除其值不得而定.雖然 Bernstein 曾證明若 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ 爲任意之超限數如 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$ 則 $\frac{\mathfrak{g}}{n}=\frac{\mathfrak{h}}{n}$.

(iv) **超限基數之冪法.**

關於超限數冪法之定義,亦與有限數同,不過積之因數皆相等之特別情形而已.今釋如次.

今有 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ 二超限數(或有限數亦可), $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ 之定義可以如下作得,試考合於下列兩性質的集合之集合

$$N=\{M_1, M_2,\cdots\cdots\}:$$

1. 集合 N 之基數爲 $\mathfrak{n}$

2. N 中各集合 $M_1, M_2,\cdots\cdots$ 皆有同一之基數 $\mathfrak{m}$,

此時由乘法之定義作 $M_1, M_2, M_3\cdots\cdots$ 之結合集合,其基數設爲 $\mathfrak{p}$ 則 $\mathfrak{p}$ 卽作爲 $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ 之定義,卽

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}.$$

Cantor 之冪之定義與此不同,然結果實一.今舉氏之一般基數之冪法之定義如下:

今 M, N 爲任意二集合,其任意之元素各爲 m, n, 今作函數 $m=f(n)$ 如此 n 乃係取 N 中之一切之值,而此函數對應之值之 m 皆限於 M 中之元素,如斯作得種種之函數.此等

相異函數之全體卽謂爲 M 關於 N 之羃集合.如此時 M, N 之基數各爲 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, 則此羃集合之基數 $\mathfrak{p}$ 稱爲 $\mathfrak{m}$ 之第 $\mathfrak{n}$ 羃.以記號

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$$

表之.

上述定義之意義可以實例說明如次:

爲說明方便計只取 M, N 爲有窮集合時.如 $M=\left\{1,2,3,\right\}$. $N=\left\{8,9,10,11\right\}$. 則

$$\begin{cases}1=f_1\ (8)\\2=f_1\ (9)\\3=f_1(10)\\3=f_1(11)\end{cases}\qquad\begin{cases}2=f_2\ (8)\\2=f_2\ (9)\\1=f_2(10)\\3=f_2(11)\end{cases}\qquad\begin{cases}3=f_3\ (8)\\3=f_3\ (9)\\3=f_3(10)\\1=f_3(11)\end{cases}\ \cdots\cdots\cdots$$

無論何者皆 $m=f(n)$ 之函數.此時 $f(8)$ 取得之値爲 1, 2, 3, $f(9)$ 取得之値亦爲 1, 2, 3. 而 $f(8)$ 任取 1, 2, 3 之一時 $f(9)$ 亦任取其一.今將 $f(8)$, $f(9)$ 所取得之値組合之.其全體爲 1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 3, 1; 3, 2; 3, 3. 卽共有 3^2 組.同樣 $f(8)$, $f(9)$, $f(10)$, $f(11)$ 所取得之値組合之恰有 3^4 組.故如上列之函數之全體共有 3^4 個.卽 M 有 3 個元素,N 有 4 個元素時其所作之函數 $m=f(n)$ 之全體恰爲 3^4 個.故 Cantor 之上列羃法之定義對於有限基數時與普通之羃法有同一之結果.其於超限數時與吾人先下之定義其結果亦相同.蓋由此兩定義所生之元素乃互爲對應,不難知之.故此兩種定義任用其一皆無不可.

定理41. N 爲任意之集合設其基數爲 n 則 N 之一切部分集合之集合其基數爲 2^n.

〔證明〕 N 之任意之部分集合 N' 乃含 N 中之某元素,或不含某元素.今 N 中之元素如 N' 中有者則皆以 1 表之,如 N' 中無者皆以 ○ 表之.此由 1 與 ○ 而成之集合命爲 N'',即用以代 N'.然此時 N'' 之元素乃各各與 N 之元素對應.此對以函數 $n'=f(n)$ 表之,即 $\begin{cases} o=f(n_r) \\ 1=f(n_s) \end{cases}$ 其一部分集合對應與一函數 $n'=f(n)$ $\left(n'=\{o,1\},\ n\varepsilon N^{*}\right)$. 反之凡如此之一函數與一部分集合對應.故此部分集合全體之集合乃與 $M=(o,1)$ 關於 N 之冪集合等價.

故　N 之一切部分集合之集合之基數 $=2^n$

吾人爲上之證明更爲明瞭起見再以具體之實例說明部分集合與函數之對應.今設 N 之元素爲 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5; N' 之中有 n_1, n_3.今 N 之元素與 N' 之元素對應時,N 之 n_1, n_3 對應於 N' 之 n_1, n_3 而 N 之 n_2, n_4, n_5 則 N' 中無有與之對應者,故設其對應者爲 o, 而 N' 之 n_1, n_3 爲 1, 1. 如斯配合則 N 之 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 對應於 N' 之 1, 0, 1, 0 0. 即吾人之部分集合 N' 得視爲與一組函數 $n'=f(n)$ 即 $\left\{\begin{matrix} 1=f(n_1) & 0=f(n_4) \\ 0=f(n_2) & 0=f(n_5) \\ 1=f(n_3) & \end{matrix}\right\}$ 對應也.反之如此任意一組之函數例如 $\left\{\begin{matrix} f(n_1)=0 & f(n_4)=0 \\ f(n_2)=1 & f(n_5)=1 \\ f(n_3)=1 & \end{matrix}\right\}$ 則係與 N 之部分

* $n\varepsilon N$ 乃表 n 爲集合 N 之元素之記號.

集合 $(n_2, n_{[illegible]}, n_5)$ 對應,如斯兩者間互爲一一對應.

定理 42. n 如爲任意之有限或超限數時則 $2^n > n$ 之關係成立.

蓋由定理 26 部分集合之基數比原集合之基數大也.故

$$2^n > n.$$

定理 43. 任予一基數 m_0(有限數或超限數)由此可作得依次遞大之超限數無窮敍列.

何則?今令　$2^{m_0} \equiv m_1,\ 2^{m_1} \equiv m_2,\ 2^{m_2} \equiv m_3, \cdots\cdots$

則得一基數敍列

$$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots\cdots$$

而由定理 37 此等一切基數之和

$$m_0 + m_1 + m_2 + \cdots\cdots$$

比其中各基數皆大.今令之爲 f, 則得

$$2^f > f$$

依此又令　$2^f \equiv f_1,\ 2^{f_1} \equiv f_2,\ 2^{f_2} \equiv f_3, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 則得

$$f_1 < f_2 < f_3 < \cdots\cdots$$

此 f_1, f_2, f_3 ……之和又命爲 g, 則 g 比 f_1, f_2……之任何皆大.而 $2^g > g$ 故可得比 g 更大之超限數.於是得一無窮敍列

$$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots\cdots < f < f_1 < f_2 < \cdots\cdots < g < g_1 < g_2 < \cdots\cdots$$

定理 44. 關[illegible]數 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ 之冪之基本法則仍成立.即

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}},\quad \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p})^{\mathfrak{n}},\quad (\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}.$$

此定理由加法乘法冪法之定義作出上式兩邊所對應

之集合.可見此等集合之元素互爲一一對應.因而得知此等關係式成立也.

超限數羃法關於此等法則雖與有限數者同,然其結果亦如加法乘法有與有限數甚不相同之事發生也.

定理45. 由可數集合之一切部分集合而成之集合超限數與連續集合(實數集合)之超限數 c 等.即 a 爲自然數之集合之超限數下之關係成立.

$$10^a=c \qquad 2^a=c \qquad \text{一般} \quad n^a=c \qquad (n:\text{有限數})$$

〔證明〕 今一切自然數之集合 $N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$ 與由10個實數而成之集合 $M=\{0,1,2,\cdots\cdots8,9\}$ 作成 M 關於 N 之羃集合.其超限數爲 10^a. 然今以 $1,2,3,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots$ 示小數之第一位,第二位,第三位,…………第 n 位,……之地位.其第一位乃由 $0,1,2,\cdots\cdots,9$ 中任意取數字,第二位,第三位,…………亦如之.但如此所作得之小數之全體集合卽 0 與 1 間實數全體之集合是以其基限數爲 c

故 $$10^a=c.$$

此時 M 乃由10個數字而成之集合,卽相當於十進法.一般取 n 個數字而成之集合卽相當於 n 進法,故與上同樣得

$$n^a=c \qquad (\text{其特別時卽 } 2^a=c)$$

然如前所述 2^n 乃由可數集合之一切部分集合而成之集合之超限數.故由此卽知本定理爲真.

上之論述乃斷定 $2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}=10^{\mathfrak{a}}$. $2^{\mathfrak{a}}$ 與 $10^{\mathfrak{a}}$ 雖相等,然其對應之集合究如何一一對應.不說明之,亦殊費思量者也.今示以一例卽可見其一般焉.

今取十進法之任一小數

$$0\cdot a_1a_2a_3\cdots\cdots$$

此 $a_1, a_2\cdots\cdots$ 者乃由 $0, 1, 2,\cdots\cdots, 9$ 諸數字中任取其一者也.今將 a_k 之數字代以 a_k 個 0 其終者置以 1. 如 $a_k=4$ 則 4 卽代以 00001 例如對於 $0\cdot3201\cdots\cdots$ 之十進小數可得

$$(i)\qquad 0\cdot0001001101\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然此 (i) 者乃由 0 與 1 二數字而成之數故可視爲二進法之小數.依此約束任意之十進小數皆有唯一之二進小數與之對應,而任意一二進小數有唯一之十進小數對應.卽兩者互爲一一對應.(然此 $\cdot3201\cdots\cdots$ 與 $\cdot0001001101\cdots\cdots$ 不過爲對應而已並非表一數也). 上之事實乃 $\mathfrak{a}$ 爲超限數而生,若 $\mathfrak{a}$ 爲有限數則 $2^{\mathfrak{a}}$ 與 $10^{\mathfrak{a}}$ 自不相等也.

定理 46. 關於超限數 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ 有下之關係成立.

$$\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a},\qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}=n^{\mathfrak{a}};$$

$$\mathfrak{c}^n=\mathfrak{c},\qquad \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c},\qquad \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f}=n^{\mathfrak{c}}.$$

〔證明〕 (I) $\qquad \mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ 　　(乘法之法則)

$\therefore\qquad \mathfrak{a}^3=\mathfrak{a}^2\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

一般 $\qquad \mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ 　　(n: 有限數)

(II) $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=(n\cdot\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ (因 $\mathfrak{a}=n\cdot\mathfrak{a}$)

$=n^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$ (超限數之指數法則)

$=n^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$ (證明(I))

$=(n^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$ (超限數之指數法則)

$=(n^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ (超限數之指數法則)

$=(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ (定理45)

$=\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}$ (因 $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$)

$=(n^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}$ (定理45)

$=n^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}}=n^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$

∴ $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$

(III) $\mathfrak{c}^2=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$

∴ $\mathfrak{c}^3=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$

……………………………

……………………………

一般 $\mathfrak{c}^n=\mathfrak{c}^{n-1}\mathfrak{c}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$

又 $\mathfrak{c}^n=(2^{\mathfrak{a}})^n=2^{n\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$

(IV) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}=(2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$

∴ $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$

(V) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f}$ 之證如次:

令取 x 之一切實數值時,試考 $f(x)$ 乃取得 o 與 1 間之實數值之一切實函數之集合.此集合依 Cantor 之冪法之定義乃"由 0, 1 間一切實數而成之集合 M"關於"由一切實數而成之集合 N"之冪集合.故其超限數爲 $\mathfrak{c}$ 然此超限

數如前所述同於一切實函數之集合其超限爲 $\mathfrak{f}$

$$\therefore \qquad \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f}$$

又依羃之指數定則次式成立.

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=(2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}$$

$$\therefore \qquad 2^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f}$$

故"僅僅取得二個之値之實函數之超限數與取得一切實數之値之實函數之超限數相等.又連續集合(實數集合)之一切部分集合之集合的超限數等於一切實函數集合之超限數."

吾人由 Cantor 集合論之思想,可見數之範圍由有限可以擴張至無限於是遂得一超限數之系統.在此系統中之數亦能歸定數之相等大小運算之定義.且此等定義亦得適用於有限數.因而此等數可以互相比較.且於加法乘法羃法之正運算時,有限數之法則同樣成立.但其施於超限數之結果頗多與有限數不同之處.吾人由此可見數之系統於此得有新擴張.在此等之數系統之硏究,使吾人得知形形色色之及各種程度之無窮大.且示吾人以幾多有興味之事實,如前所述 (i) 有理數集合與無理數集合之基數之關係 (ii) 代數數之集合與超越數集合之基數之關係,(iii) 實數之集合與實函數集合之元素之多少,(iv) 連續函數與不連續函數之種類之多少,(v) 直綫上之點集合與平面上之點集合,全空間之點集合, n 次空間之點集合皆等價.其

最著者也.然此超限數之爲數,其實卽與有限基數相當,而與有限序數相當者尙有其數乎.今將於下章論之.

(未　　完)

中國香辛食料之化學成分

吳 祥 龍

所謂香辛食料者,乃一種植物,其某部份因含有揮發性芳香油或具特味之物質,置於食品中能使其發生適口之香味,或食之能促進人類胃液之分泌及食量之增進者也.

國人所嗜之香辛食料,爲數至夥.故若將日常所用者,加以分析,研究其成分,必爲一極有興趣之事.是篇所載,僅就作者之所分析者加以說明.其詳盡之研究,及關於具揮發性之芳香油或具特味物質性質之檢定,則不在本篇範圍以內.俟日後研究得有結果,再事報告.

作者所用之分析方法大部採取各國食物分析之標準方法.茲略述如下:

(一)水分　以所分析之香辛,置於空氣中乾燥之.然後研成粉末,混合均勻.取五克之樣品,置於水蒸汽烘箱內,(100°c)二小時後取出重秤之.由乾燥前及乾燥後所差之重量,即爲失去之水分.此法不甚精確,因在100°c二小時內,一部份之揮發性芳香油亦同時失去.惟如用同樣物品,在同一情形下,可互相比較所含水分之多寡而已.

(二)揮發油　揮發油之檢定,係採取拉愛絜(Reich)方法[1].如所試之樣品含揮發油極富者,用十克;較少者用二十克,與浮石粉相混和,置於拉氏器內.因水汽蒸溜之結果,將樣品中所有之揮發油完全逐出.在蒸溜時,當注意迴環冷却器內冷却之程度;其較難揮發之揮發油不致冷却仍與水汽同時蒸發,其不揮發之油脂,得完全不被水汽所帶去.尋常在一小時半或二小時間,蒸溜所得之液體約600-800 c.c.,蒸溜卽行終止.以食鹽飽和蒸溜液,用25-30c.c.,淨潔之戊烷(Pentan)提取三四次.淨潔之戊烷與濃硫酸及濃鹼均當不起作用.其戊烷之浸出液,集於一處,置於一已知重量之平底瓶內,在尋常溫度蒸發之.最後將平底瓶之殘渣,置於真空乾燥器內乾燥後再秤其重量,卽得揮發油之重.

有時不用戊烷而用乙醚(Aether)提取,則在置於空氣中揮發以前,須處置乾燥,然後置於真空乾燥器內,其所得結果,當不如用戊烷準確.

(三)油脂　用二克樣品之乾燥粉末,置於沙氏抽油器(Soxhletocher Apparat)內,用無水乙醚提取之.十二小時後,將乙醚在尋常溫度揮發.所得之殘渣,置於真空乾燥器內約二三日,然後秤其重量.再將殘渣置於水汽烘箱六小時,(100°c.)並空氣烘箱(110°c.)內一小時至重量不變爲止,再秤其重量.所得之重量卽爲不揮發之乙醚浸出物,或稱油脂之重

註(1) Zeitschr. f. Untersuch. d. Nahrungs-und Genussmittel. 1909, 18, 401.

量.兩次重量之差,爲揮發油之重量[2].

(四)粗蛋白質或含氮化合物　依克氏(Rjeldahl)定氮法,將香辛粉末用濃硫酸,過錳酸鉀,硫酸鉀等加熱處理之.樣品中所含之氮質,完全變成硫酸錏.於是將混合液加氫氧化鈉使成鹼性,其中之阿摩尼亞蒸溜至預置已知容量之 $1/_{20}$ N 硫酸標準溶液.其未與阿摩尼亞化合之過剩硫酸之容量,以 $1/_{20}$ N 氫氧化鈉標準溶液滴定之.由香辛食料中所含之氮量,可計算其所含粗蛋白質或含氮化合物.因蛋白質或有機體中之氮化合物,尋常氮量約佔百分之十六.故已知有機體生物之含氮量乘一因子 $\frac{100}{16}$ (卽 6.25),卽得粗蛋白質或含氮化合物之量.

(五)粗纖維　用已被乙醚提去油分之殘渣.置於五百 c.c. 之圓底瓶內,加二百 c.c.含四克濃硫酸之甘油(比重 1.23),上置迴環冷却器,熱至 130°-135° c. 時時攪盪之.約一小時後,使其冷却.充稀至 400-500c.c.,再熱至前述溫度,乘其尙未冷却,卽將反應混合液過濾於古氏坩堝(Goochscher Tiegel)之石棉墊上.用約 400-500 c.c. 之沸騰水汽淨之.然後再用熱酒精及乙醚洗濯至濾液無色爲止.於是將古氏坩堝及其殘渣置於 105°-110° c. 之烘箱內,乾燥至重量不變爲度.秤得其重量.再將殘渣灰化,冷却重秤之.其兩次所秤相差之數,卽爲無灰纖維之重量.

註(2) 此法所得揮發油之重量不甚準確,故另用 Reich 方法直接定之.

(六)灰分　用五克在空氣中乾燥後已研細之粉末,置於一已知重量之白金鍋內,用酒精潤濕之.將酒精燃着.所試之物質,雖不用火焰燃燒,亦可繼續自燃.如此可將物質完全炭化.再將已炭化之物質,加强熱燃燒,至微紅爲度.冷却後,白金鍋與不含炭質之灰分,秤得其重量,至恆量爲止.白金鍋所增之重量,卽爲灰分之重.

(七)炭水化合物　置二克至五克研細之粉末於燒瓶中.初以四五十度之溫水浸取四五次.再用百度之沸水浸取三四次.所得之水浸出液,加鹽酸水解.使其中之炭水化合物變成轉化糖.用氫氧化鈉溶液中和後,充稀至其中含葡萄糖之容量不及百分之一.用五十克之斐氏溶液(Fehling-sche Lösung)煑至沸騰.將所得之轉化糖液徐徐加入,至其中所含之糖量能還原40-45 c.c.之斐氏溶液爲度.再煑沸之.過濾於已知重量之古氏坩堝,用熱水酒精,及乙醚依次洗濯,置水蒸汽乾燥箱內三十分鐘.取出置於乾燥器內冷却後,稱取其重量.由氧化低銅之重量,可算出樣品內轉化糖之量或炭化水合物之量[3].

(八)不含氮之其他物質　普通將樣品之重量減去其中所含之水分,揮發油,油脂,粗蛋白質,粗纖維,灰分所得重量之差,卽爲不含氮其他物質之重量.

註(3) Röttger: Lehrb. d. Nahrungs mittel-chemie, Seit 2039—

A. O. A. C Methods of Analysis

一. 豆蔻(Kardamomen)

豆蔻爲我國南方諸省所產蘘荷科(Zingiberaceae) Amonum Kardamomen Linné 植物之成熟種子.果之外表爲草黃色,微呈球形,有三條縱直之鈍稜.直徑約 1.5-2.5 cm. 長.內分三室.每室中含有種子十至十三個,帶紅棕色,有縱直極薄之表皮.表皮呈極細密之網紋.種子之形狀極不規則,厚約 1.5-2.5 mm., 長約 2.5-3.5mm., 嗅微,味辛灼,帶松節油性而頗佳適.

種子約佔全果重量之60-75%.外皮約佔40-25%.其所含之揮發油大部均在種子內.全果之成分如下表:

樣品	水分	粗蛋白質	揮發油	油脂	粗纖雜	灰分	其他物質
1	12.53%	11.75%	1.53%	2.54%	19.92%	8.25%	43.48%
2	7.83%	12.49%	1.42%	2.63%	20.95%	9.22%	45.46%
平均	10.18%	12.12%	1.48%	2.58%	20.24%	8.73%	44.47%

表中所述之其他物質,包含 0.5 左右之植物膠(Pektin)及 2.35-2.65 之戊醣(Pentosen).其餘大部分爲澱粉及醣質,未分析.

二. 丁香(Gewürznelken)

丁香大部產於我國南部諸省,其餘各省亦均產之.用作香辛食料者乃爲桃金孃科(Myrtaceen) Engenia Caryophyllata Willd., 植物之已發育完全,未全開放之乾燥花蕾.

丁香長約 10-17.5 mm. 呈淺棕色或暗棕色.子房爲鈍四稜柱之長圓柱形.上部分爲二室.含種子約二十個.子房之

上爲一四裂之花萼.萼之內則爲四片圓形之花瓣,團如球形.花瓣之內,包藏多數彎曲之雄蕊及一細長之雌蕊花柱.嗅烈而佳,味香而辛.含有多量之揮發油.如以夾於兩紙間壓之.則可得若干之油漬.

丁香之分析結果如下:

樣品	水分	揮發油	油脂	粗蛋白質	粗纖維	灰分	其他物質
1	6.03%	17.11%	9.92%	7.16%	10.20%	5.91%	43.66%
2	8.25%	16.23%	7.81%	6.94%	9.39%	6.22%	45.16%

丁香所含之揮發油依 R. Reich 氏之分析其中約 80%爲 Engenol, 其餘爲 Stearopten 及其他芳香油.表中所列之其他物質仍包含澱粉及醣質,丹甯酸及其他鞣料(Gerbstoff).

三. 甘草(Süssholz)

甘草爲豆科(Leguminosae)植物 Glycerrhiza glabra Linné(甘草)及其他我國西北地方所產甘草屬(Glycerrhiza, Papikönaceen)諸種植物之乾燥根或根狀莖,除去其分岐之副根所得.市上售者有去皮不去皮二種.

甘草爲黃色或棕色之圓柱形體.易縱直劈裂,折斷面呈粗纖維性.嗅微,味特殊而甘.

其未去皮之樣品分析所得之成分如下

樣品	水分	揮發油及油脂	粗蛋白質	粗纖維	灰分	其他物質
1	8.57%	3.45%	9.65%	19.20%	5.50%	46.37%
2	8.92%	3.58%	10.23%	19.56%	5.60%	47.99%
平均	8.75%	3.52%	9.94%	19.38%	5.55%	47.08%

其他物質中係包括甘草精(Glycerrhizin)醣質(Zuckerartige Substanz)及膠質(Harz)在內.

甘草中所含之甘草精約8.75%甘草精之成分依P. Rarrer W. Rarrer und J. C. Chao[4]之研究,約爲$C_{44}H_{63}O_{13}$,係白色易潮解之粉末.甘草之味,全以此也.

四. 桂皮(Zimh)

我國所產之桂皮係由廣西等省所產樟科(Lauraceae)植物Cinnamomum Cassia Blume.(菌桂)之枝及幹之樹皮,採集後除去栓皮層乾燥所得.市上所售者爲圓筒形或半圓筒形之捲片,其直徑約二三公分.長三四十公分,厚二三公厘.外面現淺棕色或紅棕色,內層色較深.常有附着之灰色栓皮.皮之外層有縱直之纖維紋,折斷面呈均平之顆粒性.

桂皮嗅强烈,味辛而香,稍帶黏液性.我國兩廣福建所產者與錫蘭所產略同.玆將其分析所得成分錄下:

樣品	水分	揮發油	油脂	粗蛋白質	粗纖維	灰分	其他物質
1	11.57%	1.24%	2.63%	3.43%	25.97%	3.89%	51.27%
2	10.05%	1.63%	2.94%	3.05%	28.23%	3.01%	51.09%
平均	10.81%	1.44%	2.79%	3.24%	27.09%	3.45%	51.18%

揮發油之主要成分爲桂皮醛(Zimtaldehyde)$C_6H_5CH:CH.CHO$.

五. 芥子(Senf)

芥子我國各省均產.係十字花科(Cruciferae)植物芥藍菜

註(4) Helv. Chim. Acta 1921, 4, 100—112; Chem. Centralbl. 1921, I, 629—630
甘草中Glykose之量及其性質參看P. Rarrer, Ber. 55, 153(1922)

(Schwarzer Senf, Brassica nigra, Linné, Koch)或芥菜(Weisser Senf, Brassica juncea, Linné, Cosson)之熟乾種子.色黃或紅棕色.帶橢圓形或蛋形.約一至一個半公厘之直徑.其成分如下:

樣品	水分	揮發油	油脂	粗蛋白質	粗纖維	灰分	其他物質
1	12.50%	0.47%	29.87%	29.78%	8.12%	4.60%	14.66%
2	13.14%	0.85%	31.53%	27.64%	7.53%	7.18%	12.13%

樣品1.係由芥菜子卽白芥子採集而得

樣品2.爲芥藍菜子卽黑芥子帶紅棕色

芥子之主要成分爲芥子油(Senföl).卽異性硫蜻酸三稀(C_3H_5NCS).有强烈之刺激性嗅及辛味.有猛烈之毒性.

六. 茴香(Fenchel)

茴香爲我國四川及西南諸省所產繖形科(Umbelliferae)植物Foeniculum vulgare Miller(茴香)之成熟乾燥果實.乃一種雙懸果,呈微小之長圓柱形.長約0.3-1.0 cm.,大多數爲0.6-0.7 cm.直徑約2-4 mm.外面現淺綠色或綠黃色.無毛.頂端有殘存之花盤.下端有小果梗.易分離成兩分果.各分果之間,其背面均有五條顯著之肋狀線.各肋狀線之間,又各有一波形模糊之副肋狀線.

茴香嗅佳適味甘香其成分如下:

樣品	水分	粗蛋白質	揮發油	油脂	粗纖維	灰分	其他物質
1	11.23%	16.82%	6.75%	18.13%	16.93%	8.86%	21.28%
2	8.54%	7.62%	4.56%	29.04%	21.82%	6.25%	22.17%

七，八角茴香 (Sternanis)

八角茴香又名大茴香爲我國西南諸省所產木蘭科(Magnoliaceae)植物 Illicium verum Hooker Filius (八角茴香)之成熟果實.

八角茴香爲六至十一個(平常均爲八個)蓇葖所成之果.各蓇葖均是開縫之小艇形基部附生於一共同之中軸上.中軸之下有一鈎形之果梗.心皮長約 0.5-2 cm.高約 0.5-1.2cm.外面現紅棕色有多數不規則之皺紋,內面平滑,色較淺而有光澤,頂端往往成鈍鳥嘴形.基部則殆平坦,內有種子一個.種子成卵形,微扁,長度極小,表面平滑,現鮮亮之紅棕色,尖端有一明顯之凹卵,形種臍,邊緣有一窄脊,種皮脆硬,內含有巨大柔軟之油性球心.嗅佳適,味香甜.其成分如下:

樣品	水分	揮發油	油脂	粗蛋白質	粗纖維	灰分	其他物質
1	13.05%	2.97%	8.76%	5.84%	28.25%	2.68%	38.45%
2	10.15%	4.03%	5.36%	8.84%	26.02%	3.76%	41.84%

八，薑 (Ingwer)

薑爲蘘荷科 (Zingiberaceae) 植物 (Zingiber officinale Roscoe (薑)之乾燥根狀莖.爲扁平而分叉如列指之塊.各指頂端,均有一凹形之疤痕.表面爲栓皮層,現淺灰色.亦有已將栓皮剝除者,以石灰拌塗之.折斷面呈顆粒性,色黃白,有維管束之纖維外吐,心柱頗厚.周圍之樹皮則較薄.嗅特殊而香,味辛辣.

薑之大小不一.大約長7-9 cm. 闊3-5 cm. 分枝之直徑約僅一至一個半公分.日常家用者大都未去栓皮.

薑之成分如下:

樣品	水分	揮發油	油脂	粗蛋白質	澱粉	粗纖維	灰分	其他
1	11.59%	0.71%	4.40%	5.61%	62.18%	4.67%	4.78%	6.06%
2	13.68%	1.05%	3.85%	7.28%	54.30%	5.50%	4.24%	10.10%
平均	12.64%	0.88%	4.13%	6.44%	58.24%	5.08%	4.51%	8.08%

薑中揮發油之主要成分爲薑精(Zingiberen),$C_{15}N_{24}O_{33}$.

九. 番椒(辣椒)(Cayenne Pfeffer)

番椒爲我國各省栽培之茄科植物(Solanceae) Capsium frutescens Linne-China或 Capsium annum Linné之成熟乾燥果實.果實爲長圓錐形,外面鮮紅或橙紅色,往往稍灣曲.長約 5-10cm. 直徑大端達 1-2 cm. 頂端尖銳.底部則微圓而附有一不明顯之五齒萼及一纖弱之果梗.果皮爲革質性,體薄,縐縮而帶光澤.內表皮有二縱直隆起線.內部空洞,往往分成兩三室.室內有多數白色種子.番椒嗅微.味極辛辣.其成分爲:

樣品	水分	揮發油	油脂	粗蛋白質	粗纖維	灰分	其他物質
1	13.15%	1.25%	20.08%	12.84%	21.50%	6.20%	24.98%
2	15.21%	1.10%	18.36%	11.06%	19.80%	6.00%	28.47%
平均	14.18%	1.18%	19.22%	11.95%	20.65%	6.10%	26.72%

番椒之有效成分爲花椒精(Capsaicin)$C_{18}H_{28}NO_2$.含量多寡不等自0.02%至5.83%.

結　論

我國食物中所摻用之香辛,其成分至不相同.大概均含有多少之揮發油,而揮發油中又含特種化合物以爲其主要成分.雖香辛中亦有蛋白質,油脂及醣質,而其摻入食品之主要目的,乃爲增進飲食樂趣,刺激胃液,以助消化,初非其有營養價値也.故香辛於人生,非必需品.食之過多,非惟無益,亦且有害.兒童發育未全,刺激性過猛之香辛如香椒,芥子等,自以少食爲妙.

參考書:

H. Röttgers : Nahrungs mittel-chemie, Lehrb. der,

J. König : Chemie d. menschl. Nahrungs-und Genussmittel,

E. Spaeth : Gewürze, die chemischen Untersuch ungsmethoden

Leach : Food Inspection and Analysis

中華藥典

本草綱目

植物生理學史略

（續第四卷第三期）

張　珽

第五節　植物之接觸感覺

I.　纏繞植物 Twineos: 從來皆以爲攀升植物唯具卷鬚者乃有接觸感覺.研究目標,亦皆集中於卷鬚攀緣.至於纏繞植物以莖之本身爲纏繞具者,在 1860 年以前,學者皆認爲其纏繞機轉,與卷鬚攀緣者不同,無感覺可見.唯 Von Mohl最後曾提出謂纏繞植物亦具有接觸感覺,與卷鬚之攀緣現象約略相同.

1. Darwin 1865 年欲檢出纏繞植物之接觸感覺,但幾經試驗,終無結果.於是 Darwin 乃提出謂纏繞植物之纏繞作用,乃其莖接觸支柱 Support 後所起周屈垂 Circumnutation.

2. De Vries 1873 年之發表,贊同 Darwin 之說.

3. Schwendener 1881 年則謂纏繞作用爲周屈垂與反向扭曲 Antidromous torsion 合並作用之結果.

4. Baranetzky 1882 年以爲纏繞起於不平衡之周屈垂.

II.　攀緣植物 Climbing plants 之纏繞: 藉卷鬚之纏繞以上升之攀緣植物,歷來皆認其卷鬚確具接

觸感覺.

A. 卷鬚纏繞之機轉: 卷鬚之纏繞,自來已認爲非普通屈屈垂現象所能賅括.然究竟之解釋,則各執一說:

1. Sachs謂卷鬚纏繞爲卷鬚受刺激後生長上發生擾亂,兩側生長速度不同所致.

2. C. Darwin 1865年將Knight昔所持卷鬚內側能收縮以起蜷曲之說加以擴充,解釋卷鬚之纏繞: 蓋卷鬚生蜷曲之速度極大,不能全以生長爲解釋也.

3. De Vries 1873年則謂接觸刺激能使卷鬚外側細胞之膨壓增加,因而特別延伸,此後卽循此生長而成永續曲蜷.

4. Mc Dougal 1896年發現西番蓮 Passiflora gracilis 之卷鬚,內側確有收縮. Mc Dougal 對於此收縮之解釋,則謂爲接觸刺激使內側細胞膨壓降低,則益以外側盛旺之生長,卷鬚遂起蜷曲.

5. Fitting 以顯微鏡解剖研究卷鬚內外兩側受接觸刺戟後所起縱線方面變化: 至1903年始公佈其結果,謂由研究測定,知外側細胞增長之速度,每小時可達原長兩倍以外: 換言之,卽未受刺激之卷鬚,其生長率只爲已受刺激一側之二十分一.內側則每小時收縮1%以下.Fitting以爲此等現象,皆爲生長之結果.

B. 卷鬚外側特別延長原因之解釋,亦極紛

紜:

1. De Vries 1879 年提謂凸出之側,其細胞原形質能生出多量强滲透性物質於細胞液中,使膨壓加大,遂致引長.

2. Wortmann 1887-1889 年間,倡言彼發現卷鬚內側細胞膜確有特別增厚處,結果內側細胞之膜益强直,同時外側薄膜細胞盡力伸張,而蜷曲遂起.

3. Kohl 1894 年則謂為外側細胞膜彈力較大,故在同一膨壓之下,獨能較內側延特多.

4. Noll 1895 年調和原形質說與細胞膜說,謂卷鬚外側之細胞膜,受原形質之影響,特別具有生活物質性因而張弛力强,故引長特多.

C. 卷鬚接觸感覺中之機轉:

1. Darwin 1865 年發表之"攀緣植物 The Climbing Plants"中,有極堪注意之種種觀察:

a. 西番蓮 Passiflora gracilis 之卷鬚,感覺極銳敏:一極輕度之刺觸可於兩分鐘內引起蜷曲,重 0.2gram 之柔絲,輕壓其頂尖三次,半分鐘內亦起彎捲.又其卷鬚能辨別雨滴與固體物,而有選擇反應.

b. Echinocystis lobata 之卷鬚亦能辨別雨滴與固體物;且對於其本身植物,不起纏繞.

c. 卷鬚定位後,常起高過剩生長 hypertrophic growth. 如蛇葡萄 Ampelopsis, 葡萄 Vitis 卷鬚頂端之吸盤,馬鈴薯

Solanum tuberosum 葉柄木質部之增厚,皆其明證.

2. Pfeffer 就番蓮及 Echinocystis 之卷鬚辨別力作實驗,雜固體粉末於水滴中,滴其尖端,亦起反應,遂假定"凡一接觸刺激之對於卷鬚能生影響者,必當使此卷鬚在多處受固體物質前後衝擊." Echinocystis 之卷鬚,光滑纖細,且多運動,故對於本身植物,不起纏繞.

3. Treub 發見鈎藤 Uncaria 之鈎,蜷曲後有肥大生長.

4. Ewart 1898 年更見 Dalbergia (豆科)之葉墊,在接受接觸感覺後,一週中其厚度增加兩倍.

III. 根之接觸感覺:

1. Sachs 1873 年記載根與土壤之顆粒接觸時,其受刺激之一側卽轉而屈曲向內.Sachs 以爲此蓋受刺激之側生長停止,他側生長繼續進行,遂致屈曲,與創傷現象相同,皆爲機械作用.

2. Darwin 1880 年發表謂根尖遇阻礙時,其生長主軸卽轉而向上,以超越此障礙,蓋亦一種刺激感應.

3. Wiesner 1881 年名此屈曲曰"達爾文屈曲 Darwinian curvature"

4. Detlefsen 1882 年於 Darwin 以此種屈曲爲接觸刺激之反應之主張,大加反對,而以爲與割破,燒灼,及塗傅苛性鹼金屬化合物後所起之屈曲同爲機械的動作.

5. Burgerstein 1883 年贊同 Detlefsen 之說.

IV. 接觸刺激與開闔運動:

A. 含羞草 Mimosa: 含羞草爲植物中有接觸感覺者最著名之例,至其開闔機轉,則至 1900 年,猶爲未決問題:

1. Pfeffer 1873 年謂接觸含羞草之任何部分,結果即使其葉墊下半之組織,排出水分於細胞間隙中,結果組織間張力失去平衡,而葉身之重量,即可致垂下閉合.膨壓恢復,則葉亦復歸原來位置.

2. Cohn 1876 年則以爲蓋原形質滲透性發生變化之結果而非收縮失水.

3. Vines 1878 年謂膨壓之變化及其以後之運動中,葉墊下部之細胞,同時亦起收縮爲助.

4. Vines 1886 年贊同 Cohn 之說.

5. Gardiner 1887 年由不同方面之研究所得結果,發表證明 Vines 之說.

6. Pfeffer 於此說不贊同,唯於其最後出版之"植物生理學 Pfanzenphysiologie"中,猶認爲未決之問題.

B. 花:

1. Cohn 1861 年至 1863 年間研究 Cynarlae(菊科)及小蘗 Berberis 雄蕊之接觸刺激,謂其現象與肌肉纖維之收縮同,僅變形態而無水分之消失.

2. Unger 1862-1863 年間之發表,與 Cohn 同意.

3. Hofmeister 1867 年反對此說,此爲此運動之起在於細胞膜性質之變化.

4. Pfeffer 則以爲與含羞草葉之開闔現象相同.

V. 食虫植物之接觸刺激與反應之解釋:

A. 茅膏菜屬 Drosera:

1. Darwin 1875 年關於食虫植物之研究中,對於茅膏菜毛茸體(觸毛 tentacles)之運動,運動與受刺激部位之關係,感覺部位之分佈,感覺在各觸毛間之傳導,運動與感覺之調和,及食物之消化吸收情形,有極詳細之紀載.接觸刺激能喚起運動之反應;但消化液之分泌,消化物之吸收等作用,則非單純之接觸刺激所能引起. Darwin 見觸毛細胞,在接受接觸刺激後,原形質與細胞液顯呈一種混雜狀態,卽名之曰"凝聚 Aggregation,"以爲感應用運動之起,卽"凝聚"之結果,據 Darwin 之意見,觸毛尖端實爲一雛形之調和器 Coordinator, 具有反射作用 reflaxation 之現象,故能調節刺激感應,於傳導刺激中有重要之力量,初非僅簡單之感覺器;卽就感覺言,能分別水滴與固體非營養物質固體可消化物質,固亦足驚異也.

2. Batalin 1877 年提出謂觸毛之收縮作用,生長屈曲之一種.

3. Schimper 1882 年研究觸毛細胞未受刺激前,在刺激感應中,經過刺激後之組織情形,發現在受强刺激時,細胞中

物質能起沉澱,此沉澱蓋原形質起化學變化後所生之分泌物.據Schimper之意見,此種沉澱作用爲機轉作用,非如"凝聚"之爲生活現象.

4. Correns 1892 年發現觸毛屈曲後驟浸於熱水中使之死亡,其屈曲仍不改變,證明 Batalin 觸毛屈曲爲一種生長屈曲之說.

5. Goebel 1893 年又發現觸毛經强刺激後能起沉澱.Goebel名此沉澱現象爲"顆粒化 Granulation."

6. Miss Huie 1896年,-1899 年之發表,皆謂觸毛活動之結果,其細胞中原形質及核皆縮小而細胞液顯有增加.

7. Rosenberg 1899 年之發表,與 Miss Huie 同意.

B. 捕蠅草 Dioneae muscipula

1. Darwin 1880 年之巨著,於此植物亦有詳盡記載: 據 Darwin 之研究,此植物之葉,葉面有三丈剛毛,爲專司感覺之器官;此外另有分泌性之運動區,爲小形之腺毛,能依刺激而起分泌;葉面具趨化性,有吸收作用;唯於過度之營養物質,則拒絕吸收.

2. Munk 1876 年見感覺不盡司於剛毛,唯剛毛實爲主要感覺器.

3. Batalin 1877 年見捕蠅草葉中肋兩側各有一條特殊組織,由其膨壓變化之影響,以司葉之啓閉;至於中肋本身,則無感覺及反應.

4. Burdon-Sanderson, 於 1873, 1877, 1882, 1888 四年疊有發表,說明其刺激感應與肌肉之現象相同.(參看章首第一節).

C. 貉藻 Pinguicula Vulgaris:

Darwin 之書,對於其捕蟲作用曾有記載:

a. 葉緣爲感覺區,葉緣之茸毛能運動閉合,而葉中心則能分泌消化液.

b. 昆虫之刺激能使運動與分泌並起.

c. 碳酸錏 $(NH_4)_2CO_3$ 溶液能刺起分泌.

d. 機械的接觸則僅能引起葉緣之閉合,不能引起分泌作用.

VI. 水生植物: 多種水生植物,無論水漲至若何高處,其葉柄皆能舉其葉片浮在水面.昔之學者多以爲機械的牽引刺激所引起.Frank 1872 年設法減除牽引力,但於葉面布水一層,亦可使葉柄繼續生長不息,乃推斷其亦當爲接觸刺激.

VII. 下等植物之接觸感覺: 此類發現之發表甚多,其中較著者有下列諸篇關於菌及藻類之記錄:

1. Errera 1884 年 (Bot. Zeit.)

2. De Bary 1886 年 (Ibid.)

3. Wortmann 1887 年 (Ibid.)

4. Ward 1888 年 (Annals of Botany)

5. Büsgen 1893 年 (Bot. Zeit.)

6. Borge 1895 年 (Bot. Centralbl.)

7. Goebel 1900 年.

第六節 植物對於化學刺激之感應

I. 向水性 Hydrotropism:

1. Knight 1811 年之頃已注意根對於水分之趨向性.

2. Sachs 1872 年重作精細之研究,名之曰向水性 hydrytropism.

3. Darwin 1880 年更作詳盡之研究觀察,定出其感覺部位在根尖.

4. Wortmann 1881 年見 Mucorini 之胞子囊器 Sporangiophore 有避水性.

5. Wiesner 1881 年提出反對 Darwin "根尖為向水性感覺區"之說.

6. Detlefsen 1882 年亦與 Wiesner 同情.

7. Molisch 1883 年之發表:

a. 證實 Darwin 之假說.

b. 地錢 Marchantia 之假根 rhizoid 亦有趨水性.

c. 莖中不見有向水性之存在.

d. 有若干幼芽 Plumules(如亞麻 Linium 等)有避水性.

8. Pfeffer 1893 年前後,發表謂根尖不僅為感覺區,即屈曲亦為根尖有之.若根尖四面俱濕潤,生長帶即不起屈曲.

9. 三好學 1894 年見花粉管有趨水性.

II. 向質性 Chemotropism or Chemotaxis:

1. C. Darwin 1875 年發現茅膏菜,捕蠅草,貉藻等食虫植物之葉,有感應碳酸錏等化學藥品溶液之刺激而起反應之力.即平常消化液之分泌,運動之恢復等,亦恆由於蛋白質分解物之刺激而起.

2. Engelmann 1881 年發現氧能吸引 Bacterium Kermo.

3. De Bary 同年發現化學刺激能使魚菌 Saprolegnia 之生殖組織相接近而起結合.

4. Kihlmann 1883 年發現 Isaroia 之細胞,若置在 Melanospora parasitica 之發芽胞子附近,則向其胞子屈曲,而終偃蓋其上,亦爲向化性之例.

5. Pfeffer 1883 年謂羊齒,及蘚類之藏卵器 Archegonium 能分泌林擒酸 Malicacid 及糖類之溶液,以誘致精子.

6. Molisch 及 De Bary 1884 年不謀而合,發現花粉管端之接近卵珠 Ovule, 亦爲向化性之誘致.

7. 同年 Stahl 及 Pfeffer 各發表有關於硝石 KNO_3, 甘油 $C_3H_5(OH)_3$,糖類,及蘇油浸出物對粘菌類 Myxomycetes之招致及排拒作用之文獻.

8. Berthold 1886 年由觀察知 Dudresnaya 之卵原絲 Ooblastema filament 癒着時,對於各種化學藥品顯有刺激感應.

9. Overton 1888 年見水綿 Spirogyra 絲狀體生殖時之接近與癒合,向化性實爲一種大關鍵.

10. Molisch 1889年見根尖屈向游離氧而趨避二氧化碳.花粉管則對於游離氧有正趨向性.

11. Haberlant 1890年研究水綿,得與 Overton 同一之結果.

12. 三好學 1894年發表有關於向化性之擴大研究多種:

a. 多種菌類對於不同之化學藥品顯有明著之正負趨向性.

b. 寄生植物之根穿入寄主體中時,向化性之作用為一重要因子.

c. 花粉管穿過花柱時,主要發動力實在珠孔 Micropyle所分泌之蔗糖.

13. Correns 1896年見迷蒙精與硇精氣能使卷鬚屈曲.

III. 植物對於濃度變化之刺激反應:

1. Massart 1889年見某數鹽類不同濃度之溶液,對於能自由運動之植物,能有刺激作用.其作用因濃度而異,與物質本身之化學性無甚關係. Massart 名此現象為趨濃性 torotaxis.

2. Pfeffer 1893年名此現象為趨滲性 Osmotaxis.

3. Stahl 1900年發表其關於粘菌向化性之繼續研究,謂粘菌對於各種刺激藥液不同之濃度具不同感應.

第七節 植物對於機械刺激之感應

I. 向電性 Galvanotropism (Electropism):

1. Elfving 1882 發現有數種萌櫱植物之幼根,對於電流

之通過,能顯屈曲,有爲趨電性者,有爲避電性者.

2. Müller 1883 年亦有同樣發現.

3. Brunchorst 1884 年又舉出多種向電性例證,謂電流之强度不同,植物之感應亦異.

4. Hegler 1891 年發見藻菌 Phycomyces 有負向電性.

II. 創傷屈曲:

1. Darwin 1880 年在切斷根尖以作實驗時發現創傷能使植物器官起屈曲,因名之曰趨傷現象 Traumotropism.

2. Spalding 1894 年亦有關於創傷屈曲之研究發表.

III. 震動感覺:

1. Prillieux 1868 年見頻頻輕擊正在生長中之苗頂端一側,能使之向對面屈曲.

2. Pfeffer 1885 年名此種震動感覺爲震動屈曲 Seismotropism.

凡卷鬚,具運動力之葉柄,及特殊之葉如 Biophytum sensitivum 等,皆有震動感覺.唯其原理尙未明知.

IV. 向流性 Rheotropism:

1. Jönsson 1883 年發現植物之根,能逆水流方向而起屈曲.萌蘖植物之根,反應尤爲顯著.

2. Juel 1900 年發現玉蜀黍 Zea maiz 及小巢菜 Vicia sativa 之根,切去根尖後猶有向流性表現,向流性純爲對於水壓之感覺,爲對於機械刺激所起之反應,與向水性之爲化學

刺激感應者不同.

3. Newcombe 1902 年之研究,知向流性之感覺,在某數種植物,在根尖直後 15 mm. 處尙有之,非僅生長區域始有屈曲.感覺最敏者爲十字花科植物 Cruciferae,每分鐘流 2 cm.之速度已足喚起反應;每分鐘 100-150 cm. 之流爲最適,達 1,000 cm. 則起避流屈曲.

第八節　植物剌激感應現象之基本原理

關於植物剌激感應現象最重要之一原理,卽爲植物之剌激感應,雖表現程度不若動物之高,然其機轉則與動物根本相同,皆爲細胞原形質活動之結果,而爲一種高級複雜之生活現象: 故植物之剌激感應,必受新陳代謝之影響,有疲勞,能因痲醉而失效,在感應本身,則有聯絡,有傳導,有潛伏期,有後作用 (After effect.)高等植物之感應,唯一重要之表現爲屈曲,如開闔運動等,蓋極少而不恆見;關於屈曲之起因,感覺之部位,則爲植物剌激感應特具之情形.此兩大端,在此四十年中,有極多研究發表:

I. 感覺部位問題: 植物不若動物之有神經系統之分化,各器官恆具有多種感覺反應力,而無一定之感應器官可尋,故植物感覺部位,只能有一種比較上之決定,而不能確切指出實際器官或組織.

A. 器官之感覺性:

1. Sachs 1879 年謂植物同一器官中,同時有多種感覺力

在植物生活物質內部之組織,實有絕大分化,各部分各有特殊勢能 Energy 供其活動,情況與動物之神經系統作用正復相似.

2. Müller-Thurgau 1876 年證明同一器官中確有多種感覺同時並存.

3. Wiesner 1878 年亦有證明.

4. Noll 1892 更證明在同一器官中存在之各種感覺力各自獨立而相成.

B. 感覺區域 Area of perception:

1. Hofmeister 1863 年提出謂植物屈曲之區,爲生長軸中生長最旺盛之一帶.

2. Müller-Thurgau 1876 年, Wiesner 1878 年亦有同一之結論發表,唯對於最高點之意見,則各有岐異.

3. Charles Darwin 1880 年乃提出謂植物感覺之區域與運動之區域不相重合; 一器官中,有感覺刺激之區,有表現反應運動之區; Darwin 分別名兩者爲感覺區域 Sensitive or pesceptive area 及運動區域 Resporsive or Motor area. 例如根之極尖,爲感覺區,而起屈曲之部位,位在根尖後端者,則爲運動區.

4. Czapek 1884 年由實驗證明根尖之 2mm 長處爲感覺區.

5. Mc. Dovgal 1896 年發表其更進一步之研究,謂根尖之感覺器官,乃爲一團長約 1-2 mm. 之杯狀物,爲原初皮層

periblem之一部,位在縱軸之極端,後側與運動區域相接.其最底之一層,即爲增殖點 Punctum vegetationis.

6. Noll 1892-1900年提出謂細胞原形質具有感覺力之部位,爲較濃厚之外細胞質 Ectoplasm 凝集之處,此處在細胞中之位置,頗爲安定.

II. 植物屈曲現象之解釋:

A. 屈曲之機轉:

1. Hofmeister根據舊日Knight之機械說,解釋屈曲之起因:

a. 根之向地爲重量所引起之彎曲.

b. 平臥之莖,水分因重力而堆積如下側,致下側細胞膜柔軟對於髓部之牽引膨壓,無力抵抗,結果遂向上屈曲.

c. 在通腔細胞 Caenocystis 之構造中,外側細胞細胞膜之角皮層 Cuticle 受內側强盛生長之牽引而擴長,因起屈曲.

2. Sachs 1865年亦贊同是說,唯略有修改.

3. Frank 1868年始提出反對機械說,而謂植物之屈曲爲生命現象,由生物本身改變生長速率之結果.Frank謂縱向之生長,因外界刺激而分佈遂不同,於是遂起屈曲.向地性之三種表現,皆可以此一理釋明之.

4. Sachs 1871年亦贊此說,且更進一步解釋謂生長之所以不平衡,蓋由於細胞中壓力不同,膨壓各異.

5. Darwin 1880年則以為屈曲實為周屈垂現象自然律調變所生結.

B. 屈曲之原動力基於內側抑為外側?

1. Mc Dougal 自1865年着手研究卷鬚之生長,結果發現卷鬚內側確能收縮以引起屈曲;但蜷曲一起則外側生長頓時加速.內側收縮之先,其細胞原形質流聚一處,堆積後即緊縮而排出水分於細胞間隙中,於是管組織,厚皮組織,表皮組織等膨壓弛緩,由彈力之結果,遂致屈曲.

次年, Mc Dougal 就根之接觸反應作研究,結果知根屈曲時,外側細胞因細胞膜之延展變薄而特別延長;內側因壓力變化其細胞膜壁特別變厚,細胞變小.

2. Ciesielski 1871年發表謂根之運動區域起屈曲時,外側細胞大小在三軸(縱,橫,高)方面均有增加,內側則膨壓降低,生長弛緩.

3. De Vries 1879年謂多細胞器官,其外側細胞因細胞液中有多量滲透性物質生成,滲透壓加强,遂致張大,生長速度增高,結果乃凸出.

4. Kraus 1882年之研究報告謂並未見外側細胞中有多量滲透性物質生成.

5. Wiesner 1880年發表之"植物向日現象 Heliotropische Erscheinungen"則謂屈曲之際,器官外側細胞中,細胞膜之伸張力與膨壓同時加大,而內側細胞,收縮彈力,則較外側之伸

張力為尤强,因致屈曲.

6. Wortmann 1887 年謂通腔細胞屈曲時,其內側原形質確起凝聚現象,細胞亦因此而加厚.結果膨壓既異,抵抗膨壓之力尤有不同,因而屈曲.故屈曲之起,實為內側生長受限制之結果.多細胞器官之屈曲,亦同此理.

7. Elfving 1888 年之研究,以 Klinostat 旋轉植物,而實際計算其生長率,決定謂屈曲之起因,在於外側生長速率之加大.

8. Noll 1888 年之發表,亦反對 Wortmann 之說,而與 Elfving 同情,謂屈曲之真正原因,在於器官外側組織伸張力之加大,而與內側生長之是否有過制,無大關係. Wortmann 所見之原形質凝聚現象,未得見有. 1895 年, Noll 重有發表,主張一如舊日.

9. Fitting 1900 年以後之研究,定出屈曲器官中,外側確有膨大,內側有收縮.且外側之伸張,力量較內側之收縮為大,故結果之中性層,乃較近於內側.

III. 刺激之强度問題:

1. Darwin 以為感覺之敏銳,至少可與動物同等,有時恆見超越,但遲緩之例亦極多.据 Darwin 之測定,則不能使萌蘖植物本身投影於白紙之光,已能引起屈曲.對於食蟲食物之感覺,尤為銳敏, 0.01 mg 之重量, 0.002% 之濃度,皆足以引起反應.

2. Musset 1890年見月光能引起向光屈曲.

3. Figdor 1893年見辣菜及Linaria biennis(柳穿魚屬之一種),其萌蘖植物之胚軸,對於0.003標準燭光(Standard candle)之弱光能起反應.

4. Wiesner 1893年見感覺最銳敏之植物,對於不能影響氯化銀Agcl之弱光亦有反應.

5. Czapek 1895年測定遠心力Centifugal force影響於向地性之強度,知0.001g.之力已足影響幼根之向地力.

IV. 刺激感應與新陳代謝率之關係: 就常理言,植物之刺激感應力,自當與新陳代謝率成正比;新陳代謝率高之器官,其感應力亦必强,生長停止,生活力衰,則對於外界刺激,感覺亦必較遲鈍.證以實驗,泰半相符,且間有特殊極端之現象在:

1. Sachs 1863年見金蓮花Tropaelum之莖,常春藤Hedera之苗,幼時顯趨日性,老成則顯避日性.

2. Hofmeister 1867年見柳穿魚Linaria之果實,成熟後由趨日變爲避日.

3. Sachs 1874年切斷植物之主根以觀察根之向地性,見其支根中原與主根成60°角之一支,沿直向下生長取主根之位置.

4. Kraus 1879年—1880年之研究,見新陳代謝狀況,與向地向日之屈曲有極大關係: 橫臥之苗,在未起屈曲以前,

下側細胞中所含還元糖之量較平時爲多;屈曲漸成則漸減少.又細胞液中之有機酸量亦有極著變化,但生長已停止,不能再起屈曲之莖,其糖量及酸量亦能因平置而變易.

5. Wiesner 1882年發現 Helianthemum 之花梗,在受精後,由趨日變避日.

6. Goebel 1883年謂根莖之能改變向地性運動,向上生長成苗,及根莖之變爲着變莖苗,皆爲老成後新陳率變化之結果.

7. Oltmann 1892 年—1897年試驗藻菌 Phycomyces 之向光性,見在某種强度之光中,藻菌不顯任何反應,蓋其原形質與光之間,已有特殊適應,細胞內部組織,以起變化也.

V. 各種刺激共同作用時之應響:

A. 向地性與向日性:

1. Noll 1892 年以 Klinostat 試驗;知向日性作用强盛時,向地性運動顯受障礙.

2. Czapek 1895 年繼續同樣之研究,以燕麥 Avena 及獨行菜 Lepidium 爲材料,則證明向地向日之屈曲,其力量速率相同.若遏止向地性屈曲,則向日性屈曲特別顯著.

B. 氧之存在與趨向性之表現:

1. Dutrochet 謂植物在無氧之供給時,其一切活動皆滯止.

2. Kabsch 1862 年證明氧之存在爲植物起趨向運動時

之必要條件.

3. Darwin 1875 年亦證明植物起趨向運動時必需有氧.

C. 植物感光性所給予他種刺激感應作用方面之影響:

1. Sachs 1863 年發現無光線時植物呈木强狀態.

2. Bert 1870 年證明凡具葉綠素之器官,在暗中卽失去其感覺力量.

D. 溫度刺激給予植物其他感應力之影響:

1. Sachs 1863 年謂溫度之適直爲植物起刺激感應之必要條件.

2. Frank 1870 年證明寒冷之能致植物生長停止者卽可致其向地性屈曲停止.

3. Pfeffer 1873 年研究含羞草時見外界溫度降低達一定限度後,其感覺力卽減退.

4. Sachs 1874 年又發現植物在高溫中之僵直現象.在濕潤空氣中熱含羞草至 50° C 則其活動卽停止.

5. Darwin 1875 年發表謂 55° C 之溫度可使茅膏菜 Drosera 失去感覺.

VI. 感覺之傳導現象:

A. 傳導途徑:

1. Pfeffer 1873 年見刺激能通過旣經迷蒙精麻醉過之莖而傳至體中他部,因假想刺激之傳導必與水液擠進現

象有關.於是更作實驗,割傷含羞草之莖,則見創傷必達維管束柱,有水液一滴迸出後,其葉蟄葉柄,始起運動.由是Pfeffer 遂决定謂刺激傳導由維管束中水液運行水壓變化司之.

2. Ziegler 1874 年贊同 Pfeffer以維管束爲植物體中傳導刺激感應器官之說.

3. Batalin 1877 年亦有同一之主張.

4. Gardiner 及 Russow 1883 年發現植物組織細胞中原形質絲通過細胞膜之小孔而相互連接,遂有人主張刺激感應之傳導,當由此等原形質絲司之.

5. Haberlant 1891 年發現莖葉中已死之部分,尚保有其傳導刺激感應之力,力主 Pfeffer 維管束水液通路爲傳導通路之說.

1896 年,更進謂含羞草傳導刺激之途徑,爲靭皮部 Phlloem 中之𥾐質管 Schlauchzellen.

6. Mc Dongal 1896 年之實驗,以人工引起含羞草體中水壓之變化,結果不能使起刺激傳導,懷疑Pfeffer之說.

7. Oliver 1888 年提出謂Masdevallia傳導刺激之通絡爲包絡在木部 Xylem 近旁一層薄膜柔膜組織之鞘.

8. Czapek 1895 年以爲傳導刺激之組織,不在維管束而在基本柔膜組織 fundamental parenchyma.

9. Rothert 1896 年亦贊同Czapek之說.

10. Němec 1900 年又發表謂曾見受刺激後之根細胞中,有特殊之原形質絲,司傳導者在.

B. 傳導之速率:

1. Rothert 1896 年測定向日性之傳導速率每五分鐘爲 1-2 mm,

2. Czapek 1898 年關於向地性傳導速率之測定結果亦相彷彿.

3. Fitting 1900 年以來測定某數種卷鬚接觸感覺之傳導速率爲每五分鐘 18 mm.

VII. 植物刺激感應之潛伏期 Catent period:

1. Pfeffer 1875 年見 Lourea vespertilionis 之葉縶,其向日性反應,在接受刺激後一分鐘內開始.

2. Wiesner 1878 年見菜豆 Phaseolus 之胚軸端,受一側光線照射一小時,尙不起反應.此時再移置暗處,復經兩小時,方顯出向光性屈曲. Wiesner 名此種以光刺激時不起作用,刺激移去後始呈反應之現象爲"光力傳導 Photomechanical induction," 在環境條件一定時,植物接收刺激後至顯出所需反應之時間,恆爲刺激作用時期之三倍.菜豆以外,如小巢菜 Vicia sativa 之荫蘖植物,辣菜等,亦有此現象.小巢菜之潛伏期爲 35 分鐘,辣菜爲 25 分鐘.

3. Darwin 由 1870 年至 1880 年有多數關於植物刺激感應潛伏期之觀察.

4. Ewart 1897 年發表謂在强光照射下,含羞草小葉之反應潛伏期僅需一兩秒鐘.

5. Oltmann 1897 年見藻菌 Phycomyces 之胞子囊器 Sporangiophores, 約需一分至三分鐘之潛伏後,始有刺激反應表現.

6. Czapek 1898 年見向地性屈曲之傳導感應期爲二十至三十分鐘.

VIII. 後作用 After effect: 强度刺激傳達植物後經較長時間之作用,再移去刺激,其反應仍能持續若干時.此種後作用(亦稱後効),例證頗亦不少:

1. Sachs 1873 年已有發現: 避地性之莖,横臥若干時,再扶使直立,則其尖端並不立即向上,而仍續其横臥時屈曲之向,横向生長,至若干時,始復正常.

2. Wiesner 及 Müller 在 1876 年時各有證明.

3. Vines 1878 年將 Secale 之葉置暗中,每隔若干時後復曝之於日光中一小時許,則其葉之生長卽停止,此時再移入暗中,則至少仍須一小時始能恢復生長.

4. Darwin 1880 年有所發表,結果亦相似.

5. Rothert 1896 年最重要之貢獻,爲發現將已起反應之植物器官,切去其感覺區域,則其運動區域,仍能持續起屈曲作用.至其持續時間之久暫,則依[illegible]向性種類之不同而異: 大概向日性之後作用時間爲最短.据 Rothert 之說,此種後作用之持續,其原因不在感應區域原形質感受刺

激而在運動區域原形質之遲鈍,不易恢復.

IX. 疲勞現象:

1. Cohn 1861 年見 Cynareae(菊科)之雄蕊,感受刺激次數過多,或刺激過度,皆易疲勞而致暫失其反應力.唯恢復亦極易.

2. Bert 1870 年證明 Cohn 之發現.

3. Pfeffer 1873 年見繼持之機械刺激雖不能反礙含羞草復還原位之運動,但還原後暫時不復能感受機械刺激,唯對於他種刺激之反應力則仍存在. Pfeffer 以爲是蓋感覺區域雖已因刺激而疲勞,第其運動中樞則仍活潑之結果.

4. Burdon-Sanderson 1882 年見捕蠅草 Dioneae 之葉,亦有疲勞現象.

5. Pfeffer 1885 謂酢漿草亦有疲勞,但不甚易於檢出,以其在恢復疲勞之期中,仍可接受刺激而起反應也.

X. 麻醉 Anaesthetication:

1. Kabsch 1862 年發現迷蒙精 Chlorform $CHCl_3$能阻礙岩黃耆 Hedyssarum 側面小葉之運動.

2. Bert 1870 年發現迷蒙精對於含羞草有同一作用.

3. Pfeffer 1873 年證明 Bert 之發現.

4. Haeckel 1873 及 1874 兩年發表其關於麻醉品對於能運動之植物器官作用之研究,謂多數能運動之雌雄蕊,能

因迷蒙精之麻醉而失其作用;小蘗 Berberis 之雄蕊,能受 1% 鴉片鹼 Morphine 之麻醉.

5. Darwin 1875 年發現醚 Ether 能麻醉捕蠅草葉面之剛毛.

6. Correns 1896 年發現鈣鹽對於茅膏草類葉面茸毛之麻醉力,與迷蒙精及醚相等.

雲南中部之西及西北部採鳥記

(續第二卷第二期)

任 國 榮 譯

274. 白頭鶯 Gracupica nigricollis (Payk).

Gracula nigricollis Paykull, Nova Acta Stockh. xxviii, p. 291, pl. 9 (1766).

2♂,滕越山谷,5300呎,草原中,III. 1919.(虹彩乳脂灰色;嘴黑褐,眼週之裸肉黃色;足象牙白色).

275. 紅嘴烏 Pyrrhocorax pyrrhocorax (Linn).

Upupa pyrrhocorax Linnceaus, Syst. Nat. edit. x. p. 118, (1758) (英倫).

2♂,1♀,1幼,麗江山脉, 9000-13,000 呎,石崖及松林中, VI. 1918.(虹彩暗褐;嘴深紅色.幼鳥則爲淺橙紅色;足深紅;爪黑).

Ingram 以 P. graculus 記載 Rippon 氏所得標本,誤也.該標本實係 P. pyrrhocorax 耳.

276. 懸巢 Garrulus bispecularis sinensis Swinhoe.

Garrulus sinensis Swinhoe, P. Z. S. Lond. p. 304 (1863) (廣州以至寧波).

在 Nov. Zool., xxv. pp. 430-433 (1918), Hartert 博士曾論及 Garrulus bispecularis 一種中之各地方種,謂 Reichenow 所定之 g. b. rufescens 有存在之價值,並以 Rippon 氏所採之五標本爲 rufescens.据云, g. b. rufecens 與 g. b. sinensis 之主要區別,在其喉部較白色,而背部較灰但 Rippon 氏之五標本中,其喉部較白者只有兩枚;而 Forrest 之兩標本,則相互間亦有顯著之差別,其一,背部玉桂赭,與標準型之 g. b. sinensis 相同,腮喉及其餘下體則一概爲玉桂色;其餘一枚,背部葡萄灰與 g. b. glandarius 相似,喉,胸,腹等部則葡萄色較盛,而腮部則又爲白色.故吾以爲苟能得雲南之懸巢標本多枚時,則必能證明 rufescens 一名詞爲 sinensis 之重名;而在此文中,余又當以 sinensis 記載雲南鳥也.

2♂ 麗江山脉, 9,000-10,000 呎,松林中, v 1918.(虹彩灰白;嘴黑,足淺褐灰色).

277. 松鳥 Nucifraga caryocatactes yunnanensis Ingr.

Nucifraga yunnanensis Ingram, Bull. B. O. C. xxv, p. 86 (1910). (雲南山中).

此鳥爲 N. c. owstoni Ingr. 及 N. c. hemispila (Vig.) 之中間型.其與 hemispila 之主要區別,在其頭頂黑色.

2♂, 4♀, 2幼鳥,麗江山脉, 8,500-13,000呎,松林及山谷中, V-VIII 1918, 1♂,瑞麗江與怒江分水處, VII 1919.(虹彩暗褐;嘴,足黑色).

278. 紅嘴山鵲 Urocissa erythrorhyncha erythrorhyncha (gm.).

Corvus erythrorhynchus Gmelin, Syst. Nat. i. p. 372 (1788) (中國).

4♂, 5幼,麗江山脉, 8,500-11,000 呎, VI-X 1918, 松林中; 1♂, 1♀,瑞麗江與怒江分水界, 7,000 呎, V 1919, 1♂, 1♀,揚子江山谷中, 8,000 呎, IX, 1919.(虹彩橙黃而帶紅;嘴橙赤;足幽赤).

279. 樹鵲 Dendrocitta himalayensis Blyth.

Dendrocitta himalayensis Blyth, Ibis, p. 45 (1865) (喜馬拉雅).

1♂, 3♀, 瑞麗江與怒江分水界, 8,000呎, V-VI 1919. (虹彩赤;嘴;足黑色).

(完)

代數數域論

(續第四卷第三期)

David Hilbert 氏原著

華羅庚譯

§17. 諸共軛數之絕對值適合於某不等式之代數數之存在.

於第二章中一域內整數分解之問題業已詳細討論矣.今進而論一極重要之觀念.在研究此事實時,下引實爲至要〔Minkowski,(3)〕:

引 6. 若

$$f_1=a_{11}u_1+\cdots\cdots\cdots+a_{1m}u_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_m=a_{m1}u_1+\cdots\cdots\cdots+a_{mm}u_m,$$

爲 $u_1,\cdots,u_m$ 之 m 個一次齊次式,其係數爲實數,其行列式 $|a_{ij}|$ 之值爲 1, 則 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 能有一組非皆爲零之有理整數,使 m 個式 $f_1,\cdots,f_m$ 之絕對值皆 $\leqq 1$.

由此易得:

引 7. 若 $f_1,\cdots,f_m$ 爲 m 個以 $u_1,\cdots,u_m$ 爲變數之一次齊次式其係數爲任意實數,其行列式之絕對值爲 A. $x_1,\cdots,x_m$ 表任意正數量,其積爲 A. 則有一組有理整數 $u_1,\cdots,u_m$ 不皆爲零,使 m 個式之絕對值適合於

$$|f_1|\leqq x_1,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,|f_m|\leqq x_m.$$

譯者按此二引有加證明之必要.當於補充 III 中言之

於此章中,命 k 及其 $m-1$ 個共軛域爲 $k=k^{(1)},k^{(2)},\cdots,k^{(m)}$ 此與前略

有不同.$k^{(s)}$內其軛於基數 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 之共軛基數,表之爲 $\omega_1^{(s)},\cdots,\omega_m^{(s)}$.

由引七可證得下之定理:

定理42. 若 $x_1,\cdots,x_m$ 爲任意之正實數,其積等於$|\sqrt{d}|$,若$k^{(s)}$與$k^{(s')}$爲共軛虛域,則取 $x_s=x_{s'}$, 則域 k 中有一非零之整數ω適合於

$$|\omega^{(1)}|\leq x_1,\cdots\cdots\cdots\cdots,|\omega^{(m)}|\leq x_m.$$

證: 對 $k^{(1)},\cdots,k^{(m)}$ 諸域各作一一次齊次式,其作法如下:若 $k^{(r)}$ 爲實域,則命

$$f_r=\omega_1(r)u_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+\omega_m(r)u_m.$$

爲其對應之一次齊次式;若 $k^{(s)}$ 與 $k^{(s')}$ 爲共軛虛域,則命

$$\left.\begin{aligned} f_s&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\omega_1^{(s)}+\omega_1^{(s')})u_1+\cdots\cdots\cdots+(\omega_m^{(s)}+\omega_m^{(s')})u_m\right\},\\ f_{s'}&=\frac{1}{i\sqrt{2}}\left\{(\omega_1^{(s)}-\omega_1^{(s')})u_1+\cdots\cdots\cdots+(\omega_m^{(s)}-\omega_m^{(s')})u_m\right\}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

爲其所對應之兩個一次齊次式.此m個$f_1,\cdots,f_m$之行列式之絕對值$=|\sqrt{d}|$.若注意對應共軛虛域有

$$f_s^2+f_{s'}^2=\alpha\,|\omega_1^{(s)}u_1+\cdots\cdots\cdots+\omega_m^{(s)}u_m|^2$$

之性質,及引 7 可得本定理

另一方面易得下之定理

定理43. x 爲一所與之實正數,祇有有限個m次之代數整數與其諸共軛數之絕對值皆小於x.

證: 具如此性質之數所適合之方程式之係數之絕對值必小於一爲 m 及 x 所定之數,故其個數當受限制.

§18. 關於域之判別式之絕對值之問題.

茲證下之二定理:

定理44. 域 k 判別式 d 非 ± 1. 〔Minkowski, (1, 2, 3)〕.

定理45. 祇有有限個m次域,其判別式之值爲一所與之數(Hermite

(1, 2) Minkowski. (3))

證此二定理需用下引:

引 8. 若 $f_1,\cdots,f_m$ 爲如(8)所定之 m 個實一次齊次式,其未知數爲 $u_1,\cdots,u_m$,則此域 k 內有一非零之整數 $\alpha=a_1\omega_1+\cdots\cdots+a_m\omega_m$,當 $u_1=a_1,\cdots,u_m=a_m$ 可使

$$|f_1|\leq|\sqrt{d}|,\ |f_2|<1,\ |f_3|<1,\ \cdots\cdots,\ |f_m|<1 \qquad (9)$$

證: 由定理43已知有有限個k內之整數 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots$,能使

$$|f_1|<|\sqrt{d}|+1,\ |f_2|<1,\ \cdots\cdots,\ |f_m|<1.$$

於諸數 $\alpha,\alpha_1,\cdots$,中能使 $|f_1|$ 之值最小者,設其爲 α,今以 φ 表之.若無如此之 α 存在,則可命 $\varphi=|\sqrt{d}|+1$. 若 $\varphi\leq|\sqrt{d}|$,則引 8 顯已爲眞,若不然,則吾人可定一正數量 ε,使 $(1+\varepsilon)^{m-1}|\sqrt{d}|<\varphi$. 由引七有一組非皆爲零之有理整數,使

$$|f_1|\leq(1+\varepsilon)^{m-1}|\sqrt{d}|,\quad |f_2|\leq\frac{1}{1+\varepsilon},\cdots\cdots,|f_m|\leq\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

由此 $$|f_1|<\varphi,\ |f_2|<1,\ \cdots\cdots,\ |f_m|<1.$$

此與選擇 α 之原意相違.

由此可證定理44及45如下:若 $k=k^{(1)}$ 爲一實域,則 f_1 卽如前決定.若 $k^{(1)}$ 爲虛域,$k^{(2)}$ 爲其共軛虛域,則選擇 f_1 爲

$$f_1=\frac{1}{i\sqrt{2}}\left\{(\omega_1^{(1)}-\omega_1^{(2)})u_1+\cdots+(\omega_m^{(1)}-\omega_m^{(2)})u_m\right\}.$$

其他諸式 $f_2,\cdots,f_m$ 之選擇,一如前法.由引 8, 可有一整數 α 適合(9).另一方面

$$\prod_{(r)}|f_r|\prod_{s,s'}\frac{f_s^2+f_{s'}^2}{2}=|n(\alpha)|,$$

式中第一乘積爲諸式 f_r 之乘積,第二乘積,表諸共軛虛域所屬之式,則必爲 $|n(\alpha)|\geq1$, 故可能 $|f_1|>1$, 卽 $|\sqrt{d}|>1$. 故定理44業已證明.

同時由不等式$|f_1|>1$, $|f_2|<1$, $|f_3|<1$, ……, $|f_m|<1$, 可得α爲$k=k^{(1)}$內之整數,與其諸共軛數皆不相同,卽其別$\delta(\alpha)\neq 0$. 由§3(定理五之上節)可知α能定此域k. 因d爲一所預定之數,故由定理43祇有有限個m次之代數整數適合(9)之條件,故可得定理四十五.

定理44可知凡一域之判別式至少可爲一素數所整除.

本章之研究全依賴於引6.若吾人借助明枯斯基之另一更敏銳之定理,則可得更確切之結果:m次域之判別式之絕對值不能小於$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2r_2}\left(\frac{m^m}{m!}\right)^2$而大於$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2r_2}\frac{e^{2m-\frac{1}{6m}}}{2\pi m}$, 式中$r_2$表$k^{(1)}, \cdots, k^{(m)}$中共軛虛域之對數.

利用後者之結果可知若與一判別式d. 則所可能之域有限,任此區之次數若何.

由同樣之原則,可得一定理.此定理於第七章內有特殊之重要[Minkowski, (1, 3)].

定理46. 若$\mathfrak{a}$爲k內之一理想數,則其中有一非零之整數α,適合於

$$|n(\alpha)|\leq|n(\mathfrak{a})\sqrt{d}|.$$

證: 命

$$\iota_1=a_{11}\omega_1+\cdots\cdots+a_{1m}\omega_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\iota_m=a_{m1}\omega_1+\cdots\cdots+a_{mm}\omega_m,$$

爲$\mathfrak{a}$之m個基數.凡$\mathfrak{a}$內之數可表爲

$$\iota_1u_1+\cdots\cdots+\iota_mu_m$$

視此及其共軛式爲m個以$u_1, \cdots, u_m$爲變數之一次齊次式,此m式之行列式之值爲

$$\begin{vmatrix}\iota_1^{(1)}, & \cdots\cdots, & \iota_m^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \iota_1^{(m)}, & \cdots\cdots, & \iota_m^{(m)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mm}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\omega_1^{(1)} & \cdots\cdots & \omega_m^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_1^{(m)} & \cdots\cdots & \omega_m^{(m)}\end{vmatrix}.$$

由定理19知其絕對值 $=|n(\alpha)\sqrt{d}|$ 若 $k^{(s)}$ 及 $k^{(s')}$ 爲共軛虛域時,則取 $x_s=x_{s'}$,可由定理42以得定理46.

§19. 域內單位之存在定理,關於單位適合於特種條件之引.

進一步研究代數整數之最重要點,即爲域 k 內之單位之基本問題〔Dirichlet (13, 14, 16), Dedekind (1), Kronecker (18, 20), Minkowski (3)〕.

k 域內一整數 ε, 若其倒數 $\frac{1}{\varepsilon}$ 亦爲一整數,則此數名爲 k 內之一單位.單位之距爲 ± 1; 反之,此域內之距爲 ± 1 之整數,即爲此域內之單位.

定理47. m 個共軛域 $k^{(1)},\cdots,k^{(m)}$, 中 r_1 個爲實域及 $r_2=\frac{m-r_1}{2}$ 對共軛虛域則此域 $k=k^{(1)}$ 中有 $r=r_1+r_2-1$ 個單位 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$, 具次之性質:凡 k 內之單位數 ε 皆可表爲

$$\varepsilon=\varrho\varepsilon_1^{a_1}\cdots\cdots\varepsilon_r^{a_r}$$

且其表法是唯一的,式中 $a_1,\cdots,a_r$ 爲有理整數, ϱ 爲 k 內所可有之壹之根(譯者註,所謂壹之根者,乃方程式 $x^n=1$ 之根).

因欲證此定理,吾人可先與 $k^{(1)},\cdots,k^{(m)}$ 以一定之意義.設 r_1 個域 $k^{(1)}$, $\cdots$, $k^{(r_1)}$ 爲實域;其他 r_2 對虛域可分配之如下: $k^{(r_1+1)},\cdots,k^{(r_1+r_2)}$ 名爲 $k^{(r_1+r_2+1)},\cdots,k^{(m)}$ 之共軛虛域,命 $u_1,\cdots,u_m$ 爲 m 個任意實變數及 m 個一次齊次式爲

$$\xi_s=\omega_1^{(s)}u_1+\cdots+\omega_m^{(s)}u_m,\quad (s=1,2,\cdots,m),$$

$\xi_1=\xi$. 若 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 不同時爲零,則當 $k^{(s)}$ 爲實域時,命

$$\log|\xi_s|=l_s(\xi);$$

當 $k^{(s)}$ 及 $k^{(s')}$ 爲共軛虛域時,則命

$$\log(\xi_s)=\tfrac{1}{2}l_s(\xi)-il_{s'}(\xi),$$

$$\log(\xi_{s'})=\tfrac{1}{2}l_s(\xi)+il_{s'}(\xi),$$

式中 $l_1(\xi),\cdots,l_m(\xi)$ 皆爲實數,且 $l_{s'}(\xi)$ 適合下之不等式

$$0\leqq l_{s'}(\xi)<2\pi,$$

故 $l_1(\xi),\cdots,l_m(\xi)$ 於實變數 $u_1,\cdots,u_m$ 之單值實函數,此即名為式 ξ 之對數.又以 $l_n(\xi)$ 表 $n(\xi)$ 之對數之實數部分,故

$$l_1(\xi)+\cdots\cdots+l_{r+1}(\xi)=l_n(\xi).$$

若 $u_1,\cdots,u_m$ 為非皆為零之有理整數,則 $\xi=\xi_1$ 表 $k=k^{(1)}$ 內之一非零之整數 α. 則 $l_1(\xi),\cdots,l_m(\xi)$ 當為 α 所唯一的決定,此即名為數 α 之對數值.若 ε 為 k 域內之單位,則 $n(\varepsilon)=\pm1$, 故能

$$l_1(\varepsilon)+l_2(\varepsilon)+\cdots\cdots+l_{r+1}(\varepsilon)=o.$$

反之;實變數 $u_1,\cdots,u_m$ 之值可由 $l_1(\xi),\cdots,l_m(\xi)$ 以定之,因若與 $l_1(\xi),\cdots,l_m(\xi)$ 以定數值時,則可得 $\xi_1,\cdots,\xi_r$, 惟其符號不明, $\xi_{r1+1},\cdots,\xi_m$ 則完全決定,故可決定出 2^{r_1} 組 $u_1,\cdots,u_m$ 之值,使合所設之件.

若 $f_1,\cdots,f_m$ 為 $x_1,\cdots,x_m$ 之 m 個函數,則 $f_1,\cdots,f_m$ 對 $x_1,\cdots,x_m$ 之函數行列式 $\frac{f_1,\cdots\cdots f_m}{x_1,\cdots\cdots,x_m}$ 不全等於零,為 $f_1,\cdots,f_m$ 非互依之必要且充分之條件.(譯者按:可參觀 Goursat-Hedrick, Math. Analsis, Vol. I, p. 45) 今

$$\left|\frac{u_1,\cdots\cdots,u_m}{\xi_1,\cdots\cdots,\xi_m}\right|=\frac{1}{|\sqrt{d}|},\quad\left|\frac{\xi_1,\cdots\cdots\cdots,\xi_m}{l_1(\xi),\cdots\cdots,l_m(\xi)}\right|=|\xi_1\cdots\cdots\xi_m|=|n(\xi)|$$

相乘可得 $\left|\frac{u_1,\cdots\cdots\cdots,u_m}{l_1(\xi),\cdots\cdots,l_m(\xi)}\right|$ 之值.故若 $\xi\neq o$, 則 $n(\xi)\neq o$, 即 $l_1(\xi),\cdots,l_m(\xi)$ 對 $u_1,\cdots,u_m$ 為非互依.

式 ξ (或數 α) 之前 r 個對數 $l_1,\cdots,l_r$ 特別研究之如下:式 ξ,η (或數 α,β) 之前 r 個對數顯然適合下式:

$$l_s(\xi\eta)=l_s(\xi)+l_s(\eta),$$
$$l_s(\alpha\beta)=l_s(\alpha)+l_s(\beta),\qquad (s=1,2,\cdots,r).$$

今往證下之事實:

引 9. 於 k 域內有單位數 ε, 適合於

$$r_1l_1(\varepsilon)+\cdots\cdots+r_rl_r(\varepsilon)\neq o,$$

式中 $r_1,\cdots,r_r$ 為任意所設之非皆為零之實數.

證：命 ω 爲 k 内之任意非零之整數,簡書

$$L(\omega)=r_1l_1(\omega)+\cdots\cdots+r_rl_r(\omega);$$

吾人可定 r 個實數 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 使 $r_1\lambda_1+\cdots+r_r\lambda_r=1$, 命

$$\Lambda_1=e^{\lambda_1 t},\ \cdots\cdots,\ \Lambda_{r_1}=e^{\lambda_{r_1} t},\ \Lambda_{r_1+1}=e^{\frac{1}{2}\lambda_{r_1+1}t},\ \cdots\cdots,\ \Lambda_r=e^{\frac{1}{2}\lambda_r t}.$$

式中 t 爲一實變數.今分二種情形論之.即 m 個域 $k^{(1)},\cdots,k^{(m)}$ 皆爲實域或否.於前者之情形中,命 $r=m-1$ 個域 $k^{(1)},\cdots,k^{(r)}$ 各對應於數 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r$. 與 $k^{(m)}$ 對應之數爲 $\Lambda_m=\frac{\sqrt{d}}{\Lambda_1\cdots\Lambda_{m-1}}$ 於第二種情形中,列 $k^{(1)},\cdots,k^{(r)}$ 對應於 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r$, 虛域 $k^{(r+1)}$ 對應於 $\Lambda_{r+1}=\left|\left\{\frac{\sqrt{d}}{\Lambda_1\cdots\Lambda_{r_1}\Lambda^2_{r_1+1}\cdots\Lambda^2_r}\right\}^{\frac{1}{2}}\right|$, 其他 $m-r-1$ 個域 $k^{(r+2)},\cdots,k^{(m)}$ 所對應之 Λ 與其共軛數域所對應者同,命之爲 $\Lambda_{r+2},\cdots,\Lambda_m$, 於此二種情形中皆有

$$\Lambda_1\cdots\cdots\cdots\Lambda_m=|\sqrt{d}|.$$

如此之 Λ 論定理42中之 $x_1,\cdots,x_m$ 適相類似.

由定理42 k 内有一非零之數 α, 使

$$|\alpha^{(1)}|\leqq\Lambda_1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ |\alpha^{(m)}|\leqq\Lambda_m \tag{10}$$

由此可得 $|n(\alpha)|\leqq|\sqrt{d}|$. 因 $|n(\alpha)|\geqq1$, 故當 s 爲 $1,\cdots,m$ 之任一時可得

$$|\alpha^{(s)}|\geqq\frac{1}{|\alpha^{(1)}|\cdots|\alpha^{(s-1)}||\alpha^{(s+1)}|\cdots|\alpha^{(m)}|}.$$

由不等式

$$\left|\frac{1}{\alpha^{(1)}}\right|\geqq\frac{1}{\Lambda_1},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \left|\frac{1}{\alpha^{(m)}}\right|\geqq\left|\frac{1}{\Lambda_m}\right|,$$

及

$$\Lambda_1\cdots\cdots\Lambda_m=|\sqrt{d}|,$$

可得

$$|\alpha^{(s)}|\geqq\frac{\Lambda_s}{|\sqrt{d}|}. \tag{11}$$

由(10)及(11)可知,若 $\log|\sqrt{d}|$ 之實值以 δ 表之,則

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_s t\geqq l_s(\alpha)\geqq\lambda_s t-2\delta\\ 0\leqq|l_s(\alpha)-\lambda_s t|\leqq2\delta\end{array}\right\}\qquad(s=1,2,\cdots,r).$$

或

由此可知

$$\gamma_1\{l_1(\alpha)-\lambda_1 t\}+\cdots\cdots+\gamma_r\{l_r(\alpha)-\lambda_r t\}=L(\alpha)-t$$

之值在二有限數 $\delta_1, \delta_2(>\delta_1)$ 之間.此限依賴於 d 及 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$ 而與 t 無關.

今定一數 $\Delta>\delta_2-\delta_1$, 則當 t 取 $o, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \cdots$ 時,故人可得一無窮數列 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 其距皆 $\leq|\sqrt{d}|$, 且有 $L(\alpha)<L(\beta)<L(\gamma)<\cdots\cdots$ 之關係.因有理整數之絕對值 $\leq|\sqrt{d}|$, 互不相同者,其個數有限.故如此之諸數祇有有限個不同之理想因子.故於主理想數 $(\alpha), (\beta), (\gamma), \cdots$ 所成之數列中,祇有有限個不相同,即有無數個相等.若 $(\alpha)=(\beta)$, 則 $\varepsilon=\dfrac{\beta}{\alpha}$ 爲一單位.因 $L(\varepsilon)=L(\beta)-L(\alpha)>o$, 此合引 9 之所求.

§20. 單位存在定理之證明.

因欲證明定理47,由引 9 知吾人常可選擇一單位 η_1, 使 $l_1(\eta_1)\neq o$, 又以有一單位 η_2 使

$$\begin{vmatrix} l_1(\eta_1), & l_1(\eta_2) \\ l_2(\eta_1), & l_2(\eta_2) \end{vmatrix}\neq o\;;$$

更可有一 η_3 使

$$\begin{vmatrix} l_1(\eta_1), & l_1(\eta_2), & l_1(\eta_3) \\ l_2(\eta_1), & l_2(\eta_2), & l_2(\eta_3) \\ l_3(\eta_1), & l_3(\eta_2), & l_3(\eta_3) \end{vmatrix}\neq o,$$

繼此行之,可知有一組 r 個單位 $\eta_1,\cdots,\eta_r$, 能使行列式

$$\begin{vmatrix} l_1(\eta_1), & \cdots\cdots\cdots, & l_1(\eta_r) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ l_r(\eta_1), & \cdots\cdots\cdots, & l_r(\eta_r) \end{vmatrix}\neq o.$$

由此可知,若 H 爲此域內之一單位,則 H 之前 r 個對數值可表爲

$$l_1(H)=e_1 l_1(\eta_1)+\cdots\cdots+e_r l_1(\eta_r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_r(H)=e_1l_r(\eta_1)+\cdots\cdots+e_rl_r(\eta_r),$$

式中 $e_1,\cdots,e_r$ 爲實數.又可表爲

$$l_1(H)=m_1l_1(\eta_1)+\cdots\cdots+m_rl_1(\eta_r)+E_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_r(H)=m_1l_r(\eta_1)+\cdots\cdots+m_rl_r(\eta_r)+E_r,$$

$m_1,\cdots,m_r$ 爲 $e_1\cdots,e_r$ 所能有之最大之整數.即 $E_1,\cdots,E_r$ 可表爲

$$E_1=\mu_1l_1(\eta_1)+\cdots\cdots+\mu_rl_1(\eta_r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_r=\mu_1l_Y(\eta_1)+\cdots\cdots+\mu_rl_r(\eta_r).$$

式中 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 爲 ≥ 0 及 <1 之實數.故 $E_1,\cdots,E_r$ 之絕對值當小於一數 $\varkappa$, 此數與 H 無關.即單位

$$\overline{H}=\frac{H}{\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}}$$

之前 r 個對數值當若小於 $\varkappa$. 因 $l_1(\overline{H})+\cdots+l_{r+1}(\overline{H})=o$, 故 $l_{r+1}(\overline{H})$ 之絕對值小於 $r\varkappa$, 即有下之不等式

$$|\overline{H}^{(1)}|<e^{\varkappa},\cdots,|\overline{H}^{(r)}|<e^{\varkappa},|\overline{H}^{(r+1)}|<e^{r\varkappa},$$

卽單位 $\overline{H}$ 與其諸共軛數之絕對值皆小於 $e^{r\varkappa}$.

由定理43知如此之單位有限.今以 $H_1,\cdots,H_G$ 表之,則可得 $\overline{H}=H_s$ 或卽 $H=H_S\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}$, 式中 S 爲 $1,2,\cdots,G$ 之一.設 H_T 爲 G 個單位 $H_1,\cdots,H_G$ 之一.作 $H_T,H_T^2,\cdots,H_T^{G+1}$, 則由前之所證其中有二可表爲 $H_S\eta_1^{m_1'}\cdots\eta_r^{m_r'}$ 及 $H_S\eta_1^{m_1''}\cdots\eta_r^{m_r''}$ 式中 H_S 爲 G 個 H 之一.其商可表爲 $\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}$. 此卽證明,對一單位 H_T 可有一指數 M_T, 使 $H_T^{M_T}$ 可以 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 之乘積表之.以 M 表 $M_1,\cdots,M_G$ 之最小公倍數,則此 G 個單位 $H_1,\cdots,H_G$ 對指數 M 皆同時有該項性質.由此可得域 k 中任一單位 H 之前 r 個對數值可表爲

$$\left.\begin{array}{l} l_1(H)=\dfrac{m_1l_1(\eta_1)+\cdots\cdots+m_rl_1(\eta_r)}{M} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_r(H)=\dfrac{m_1l_r(\eta_1)+\cdots\cdots+m_rl_r(\eta_r)}{M} \end{array}\right\} \qquad (12).$$

式中 $m_1,\cdots,m_r$ 爲有理整數.

模仿定理 5 之證明,可知當有一組 r 個單位 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 具下之性質:凡此域內之一單位 H 其前 r 個對數值悉爲 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 之前 r 個對數值,表成

$$l_1(H)=a_1l_1(\varepsilon_1)+\cdots\cdots+a_rl_1(\varepsilon_r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_r(H)=a_1l_r(\varepsilon_1)+\cdots\cdots+a_rl_r(\varepsilon_r).$$

式中 $a_1,\cdots,a_r$ 爲有理整數.此組單位 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 卽合定理47之所求

若 H 爲此域之任一單位,則 $\varrho=\dfrac{H}{\varepsilon_1^{a_1}\cdots\varepsilon_r^{a_r}}$ 亦爲一單位,其諸對數值皆等於零.今往證如此之單位,卽爲壹之根.由上證可知 $\varrho^M=\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}$,式中 $m_1,\cdots,m_r$ 爲有理整數,由其對數值可知

$$m_1l_1(\eta_1)+\cdots\cdots+m_rl_1(\eta_r)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_1l_r(\eta_1)+\cdots\cdots+m_rl_r(\eta_r)=0.$$

卽得 $m_1=0,\cdots,m_r=0$ 故 $\varrho^M=1$. 由此可知定理47中 H 之表示法爲眞.

由一定之 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 可知

$$\begin{vmatrix} l_1(\eta_1), & \cdots\cdots, & l_1(\eta_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_r(\eta_1), & \cdots\cdots, & l_r(\eta_r) \end{vmatrix}=AR$$

式中 A 表有理整數,及

$$R=\begin{vmatrix} l_1(\varepsilon_1), & \cdots\cdots, & l_1(\varepsilon_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_r(\varepsilon_1), & \cdots\cdots, & l_r(\varepsilon_r) \end{vmatrix}$$

此行列式 $R\neq 0$. 由此可知 H 之表示為 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 之積時,其方法是唯一的.基本定理47至此已完全證明.

§21. 基單位域之規,一組非互依之單位.

定理47中之一組單位 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 名為 k 域內之基本單位組.由此易得,若另有一基本組 $\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_r^*$, 則其前 r 個對數所成之 R 相同.(符號不計).擇一基本單位組其 R 之値為正者,此 R 在此域 k 內唯一的決定,名為域 k 之規(Regulator).

由定理47之證明中,已知若一單位之諸對數値皆為零,則必為壹之根.此事實可有下定理〔Kronecker (6), Minkowski (3)〕:

定理48. 凡單位數及其共軛數之絕對値皆 $=1$ 時,則此數即為壹之根.

凡一域內皆有壹之根 $+1$ 及 -1, 故一域 k 中壹之根之總數為偶.若諸 m 個共軛域悉為虛域,則其個數顯然可多於 2.

任意 t 個單位 $\eta_1, \cdots, \eta_t$, 若無非皆為零之有理整數 $m_1, \cdots, m_t$ 以使 $\eta_1^{m_1}\cdots\eta_t^{m_t}=1$. 則此 t 個單位名為非互依.故 t 不大於 r. 基本單位 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 卽為 r 個非互依之單位.若另有 r 個非互依之單位 $\eta_1, \cdots, \eta_r$, 則可有一有理整數 M, 使任一單位 ε 之 M 方可表為 $\varepsilon^M=\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}$, 式中 $m_1, \cdots, m_r$ 為有理整證.今往證之:若 $\eta_s=\varrho_s\varepsilon_1^{a_{1s}}\cdots\varepsilon_r^{a_{rs}}$ $(s=1, 2, \cdots, r)$, 式中 ϱ_s 為壹之根, $a_{1s}, \cdots, a_{rs}$ 為有理整數.因 $\eta_1 \cdots, \eta_r$ 非互依,故可知 $a_{11}, \cdots, a_{rr}$ 所列成之行列式必不為零.此行列式名之為 A. 由此可得,此域內任一單位之 A 方可以 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 之乘方乘積,乘以壹之根 ϱ 表之.若 $\varrho^E=1$, 則 $M=AE$ 卽合所求.

由定理47之證明,可得 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 可有無限種方法得之.因欲研究計算單位之最簡單方法之問題,曾導入與連分數相仿之理論,該種展開式之週期實為一有趣之問題〔Minkowski, (4)〕.

7. 域之理想數班

§22. 理想數班,班數有限.

凡 k 內之整數可定一主理想數,凡 k 內之一非整數(德文 Gebrochene Zahl)$\varkappa$ 為二整數 α,β 之商,即可表為 $\varkappa=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$,式中 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 為二互素之理想數,且此種表示法是唯一的,反之,若二理想數 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 之商 $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 可互素或否)等於此域內之一非整數 $\varkappa=\frac{\alpha}{\beta}$,則 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 謂之相似(德文 *Äquivalent*). 以 $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$ 表之,由 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$,可得 $(\beta)\mathfrak{a}=(\alpha)\mathfrak{b}$ 故二理想數相似之必要且充分之條件為:有二主理想數各乘其相當之一,而其所得之積為二相等之理想數.凡與一理想數相似之諸理想數,謂之成一理想數班 (Casses of ideals). 凡主理想數皆與(1)相似,故諸主理想數成一班,謂之主班(Principal class) 以 1 表之,若 $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{a}'$ 及 $\mathfrak{b}\sim\mathfrak{b}'$, 則 $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\sim\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ 若 A 表 $\mathfrak{a}$ 所屬之班, B 表 $\mathfrak{b}$ 所屬之班,則 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ 所屬之班以 AB 表之,名之為 A,B 二班之積,顯然 $1B=B$. 且反之,由 $AB=B$ 可得 $A=1$.

於計算時,往往引用理想數之商,即如等式 $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}=\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}$ 或相似式 $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}\sim\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}$, 其義即各代表等式 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'=\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, 及相似式 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\sim\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

定理49. 對一班 A 有一且祇有一班 B, 使 AB 為主理想數班.

證: 若 $\mathfrak{a}$ 為班 A 之一理想數, α 為 $\mathfrak{a}$ 內之一整數,則 $\alpha=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. 若 $\mathfrak{b}$ 所屬之班為 B, 則 $AB=1$. 若另有一班 B' 亦使 $AB'=1$, 則由乘法可得 $ABB'=B'=B$

班 B 謂之 A 之倒班,以 A^{-1} 表之.

進言之,有下之基本定理:

定理50. 於一理想數班內有一理想數,其距不大於此域之判別式之平方根之絕對值〔Minkowski (1, 3)〕.故一域內班之數有限〔Dedekind(1), Kronecker (16)〕.

證: 若 A 為任一理想數班, $\mathfrak{i}$ 為倒班 A^{-1} 之一理想數,由定理46可知 $\mathfrak{i}$ 內有一數 ι, 其距適合於 $|n(\iota)|\leq n(\mathfrak{i})|\sqrt{d}|$ 命 $\iota=\mathfrak{i}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ 當屬於 A, 因 $|n(\iota)|=n(\mathfrak{i})n(\mathfrak{a})$, 故 $n(\mathfrak{a})\leq|\sqrt{d}|$. 即班 A 中有一理想數 $\mathfrak{a}$ 適合所需.惟 $\leq|\sqrt{d}|$

之有理整數有限,故祇能分解爲有限個理想數.由此可得定理50之第二部分.

§23. 班數有限之定理之應用.

今述由定理50所得出之產物及其應用.

定理51. 若 h 爲班數,則任一班之 h 次方皆爲主班.

證: 作 $A, A^2, \cdots, A^{h+1}$,其中當有二班 A^r 及 A^{r+e} 互等.由此 $A^rA^e=A^r$,故得 $A^e=1$. 若e爲最小之指數可使 $A^e=1$ 者,則 e 個班 $A^0=1, A, \cdots, A^{e-1}$ 當互不相同.若 B 爲此 e 班以外之另一班,則 e 班 $B, AB, \cdots, A^{e-1}B$ 當與前之各班全不相同,且此諸班亦互不相同.由此可得 h 必爲 e 之倍數.此即證明定理51.

由此定理得知:任一理想數 $\mathfrak{a}$ 之 h 次方爲一主理想數.

定理52. 若 α,β 爲任意二整數,且有非零之整數 r 可整除之,則可選擇二適當之整數 ξ,η, 使 $r=\xi\alpha+\eta\beta$. 就一般言, r,ξ,η 未必皆屬於 α,β 所定之域內,〔Dedekind (1)〕

定理53. 若 $\varkappa,\varrho$ 及 $\varkappa^*,\varrho^*$ 爲 k 內之兩對整數,且 $\mathfrak{i}=(\varkappa,\varrho)=(\varkappa^*,\varrho^*)$,其必要且充分之條件爲 k 內有四整數 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, 其行列式 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. 且

$$\varkappa^*=\alpha\varkappa+\beta\varrho,$$

$$\varrho^*=\gamma\varkappa+\delta\varrho.$$

〔Hurwitz (4)〕.

證: 先證此爲充分的:由假定

$$\varkappa=\alpha^*\varkappa^*+\beta^*\varrho^*,$$

$$\varrho=\gamma^*\varkappa^*+\delta^*\varrho^*$$

式中 $\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\delta^*$ 仍爲整數.今再往證,此爲必要的,以 h 表此域內之理想數之班數,則 $\mathfrak{i}^h=(\varkappa^h,\varrho^h)=(\varkappa^{*h},\varrho^{*h})=(\tau)$, 式中 τ 爲 k 內之一整數,命

$$\tau=\mu\varkappa^h+\nu\varrho^h=\mu^*\varkappa^{*h}+\nu^*\varrho^{*h}$$

式中 μ,ν,μ^*,ν^* 爲 k 內之整數.由此可得

$$-\tau=\begin{vmatrix}\mu\varkappa^{h-1}, & \varrho\\ \nu\varrho^{h-1}, & -\varkappa\end{vmatrix} \quad 及 \quad -\tau=\begin{vmatrix}\varkappa^*, & \nu^*\varrho^{*h-1}\\ \varrho^*, & -\mu^*\varkappa^{*h-1}\end{vmatrix}$$

由此二式相乘,易知

$$\alpha=\frac{\mu\varkappa^*\varkappa^{h-1}+\nu^*\varrho\varrho^{*h-1}}{\tau},\qquad \beta=\frac{\nu\varkappa^*\varrho^{h-1}-\mu^*\varkappa\varrho^{*h-1}}{\tau},$$

$$\gamma=\frac{\mu\varrho^*\varkappa^{h-1}-\mu^*\varrho\varkappa^{*h-1}}{\tau},\qquad \delta=\frac{\nu\varrho^*\varrho^{h-1}+\mu^*\varkappa\varkappa^{*h-1}}{\tau},$$

卽合定理53之所求.卽 α,β,ν,δ 爲整數,且 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

由定理12已知凡理想數可表爲 $\mathfrak{i}=(\varkappa,\varrho)$ 命 $\vartheta=\frac{\varkappa}{\varrho}$ 由數 ϑ 完全表 $\mathfrak{i}$ 所屬之班, ϑ 名爲此班相關之分數(Zahlbruch).定理53表示,若 $\vartheta^*=\frac{\varkappa^*}{\varrho^*}$ 亦爲該班之表示數,其必要且充分之條件爲: k 內有四整數 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 其行列式之值爲 1,能使 $\vartheta^*=\frac{\alpha\vartheta+\beta}{\gamma\vartheta+\delta}$.

§24. 諸班之列出狹義的相似之定義.

由定理50之證明同時與吾人以一簡單方法經有限次手續,可將所與域中之諸不相似理想數完全覓出.其法先求距 $\leqq|\sqrt{d}|$ 之諸理想數,因欲判斷此諸理想數是否相似,可取任一與其他相乘,設 $\mathfrak{i}$ 爲如此乘積之一,取 $\mathfrak{i}$ 中絕對值最小而非零之整數 ι, 則(ι)之另一因子當屬於其倒班中.由定理46可知此項手續顯然有限.卽若 $\iota_1,\cdots,\iota_m$ 爲 $\mathfrak{i}$ 之基數,吾人須覓非皆爲零之有理整數 $u_1\cdots,u_m$ 使 $\iota_1^{(s)}u_1+\cdots+\iota_m^{(s)}u_m\ (s=1,2,\cdots,m)$ 之實數部分及虛數部分悉小於所與之限.同樣理想數所屬之諸班亦可由有限次手續以定出之.

譯者按:理想數班之尋求,依譯者之經驗實以下法爲便:距小於 $|\sqrt{d}|$ 之諸理想數設其爲 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_s$. 其諸主理想數成一主班 1. 設其卽爲 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_{s_1}$ $(s_1<s)$. 取一非主理想數之班 $\mathfrak{a}_{s_1+1}$ 作 $\mathfrak{a}_{s_1+1}\mathfrak{a}_{s_1+1},\mathfrak{a}_{s_1+1}\mathfrak{a}_{s_1+2},\cdots,\mathfrak{a}_{s_1+1}\mathfrak{a}_s$ 凡足以使 $\mathfrak{a}_{s_1+1}\mathfrak{a}_i$ 爲主理想數之 $\mathfrak{a}_i$ 成一班 K_1, 再取 K_1 內之一數同上法所得

之諸理想數成一班 K_1^{-1}（顯然 $\mathfrak{a}_{s_1+1}$ 屬焉,若 $\mathfrak{a}_{s_1+1}$ 已屬 K_1 中,則 $K_1^{-1}=K_1$ 可不必如此做）.設此二班之理想數即爲 $\mathfrak{a}_{s_1+1},\cdots,\mathfrak{a}_{s_2}$ 再取 $\mathfrak{a}_{s_2+1}$ 如前之 $\mathfrak{a}_{s_1+1}$ 依法泡製,如是經有限之之手續後即得所求.至於求距小於 $|\sqrt{d}|$ 之理想數,可由分解小於 $|\sqrt{d}|$ 之有理整數得之.

若限定相似理想數之比值之距須爲正,則此項相似謂之狹義的相似（德文 Engene Aequivalenz）.所能之班謂之狹義的相似班〔Dedekind, (1)〕.

§25. 關於可爲每定理想數所整除之主理想數之個數之漸近值之引.

由狄利西來(Dirichlet)氏所用之超越方法決定所與判別式之二元二次式班數〔Dirichlet (7, 8)〕及第六章中代代肯得(Dedekind)關於域之單位之結果,可引得之基本公式,即任一域之班數 h 可用一無窮級數之限表之〔Dedekind (1)〕.因欲證此定理須先明下引:

引10. 若 t 爲一正實變數,距不大於 t 且可爲理想數 $\mathfrak{a}$ 所整除之主理想數之總數以 T 表之,則

$$\underset{t=\infty}{L}\frac{T}{t}=\frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}}{w}\cdot\frac{1}{n(\mathfrak{a})}\cdot\frac{R}{|\sqrt{d}|},$$

式中 w 爲 k 內壹之根之個數, R 爲 k 之規, r_1, r_2, 與定理47所表者同. L 爲表極限(Limite)之記號.

證: 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 爲 $\mathfrak{a}$ 之基數,則凡可爲 $\mathfrak{a}$ 所整之除整數,皆可表爲

$$\eta=\eta(v)=v_1\alpha_1+\cdots+v_m\alpha_m=f_1(v)w_1+\cdots+f_m(v)w_m,$$

式中 $v_1,\cdots,v_m$ 爲有理整數, $f_1(v),\cdots,f_m(v)$ 爲 $v_1,\cdots,v_m$ 之一次齊次整係數函數,若視 $v_1,\cdots,v_m$ 爲實變數,且命

$$u_1=\frac{f_1(v)}{|\sqrt[m]{n(\eta)}|},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ u_m=\frac{f_m(v)}{|\sqrt[m]{n(\eta)}|},$$

$$\xi=\xi(v)=u_1w_1+\cdots\cdots+u_mw_m=\frac{\eta(v)}{|\sqrt[m]{n(\eta)}|},$$

則 $u_1,\cdots,u_m$ 爲 $v_1,\cdots,v_m$ 之單值函數,且 ξ 式適合於 $n(\xi)=\pm 1$. 今計算式 ξ 之前 r 個對數值,若 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 爲基本單位,則可有實數 $e_1(\xi),\cdots,e_r(\xi)$, 使

$$l_1(\xi)=e_1(\xi)l_1(\varepsilon_1)+\cdots\cdots+e_r(\xi)l_1(\varepsilon_r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_r(\xi)=e_1(\xi)l_r(\varepsilon_1)+\cdots\cdots+e_r(\xi)l_r(\varepsilon_r),$$

於本節中諸數 $e_1,\cdots,e_r$ 卽簡稱爲 η 之 r 個指數.

取 $v_1,\cdots,v_m$ 爲非皆爲零之整數,如此可定一整數 η, 可以單位 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 乘之,使其指數 $e_1,\cdots,e_r$ 之值合於下之關係

$$o\leq e_1<1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ o\leq e_r<1 \qquad (13).$$

反之,若有二數具同樣之指數,則相差祇能爲一壹之根的因子,若 w 爲 k 內壹之根之個數,故當有 wT 個不同的整數組 $v_1,\cdots,v_m$ 使 $|n(\eta)|\leq t$, 且其指數 $e_1,\cdots,e_r$ 適合於條件(13).

再命

$$\tau=t^{-\frac{1}{m}},\quad v_1=\frac{\varphi_1}{\tau},\quad \cdots\cdots\cdots,\quad v_m=\frac{\varphi_m}{\tau},$$

代入式 ξ 中,數 $l_1(\xi),\cdots,l_r(\xi)$, $e_1,\cdots,e_r$ 不依賴於 τ, 且祇含有新變數 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 不等式 $|n(\varphi)|\leq t$ 變爲 $|n(\eta(\varphi))|\leq 1$, 由條件(13)及 $l_1(\xi)+\cdots+l_{r+1}(\xi)=l_n(\xi)=o$, 可知 $l_1(\xi),\cdots,l_r(\xi)$ 及 $l_{r+1}(\xi)$ 之值皆小於定限,該限可由 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 定之,故 $|\xi^{(1)}(\varphi)|,\cdots,|\xi^{(m)}(\varphi)|$ 亦然.若視 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 表 m 度空間一點之坐標,則不等式(13)及 $|n(\eta(\varphi))|\leq 1$ 表一 m 度空間之一有限超越體,(德文 Raumgebild).

由§19可知,若 $l_1(\eta),\cdots,l_m(\eta)$ 之值已知,則有 2^{r_1} 組 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 之值.由一重積分之觀念之定義可知

$$\underset{\tau=o}{L}\left\{wT\tau^m\right\}=2^{r_1}\int\int\cdots\cdots\int d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_m$$

式中右邊之積分展布於

$$o\leq e_1\leq 1,\ \cdots\cdots\cdots,\ o\leq e_r\leq 1,\ |n(\eta\,\varphi')|\leq 1.$$

所定之m度空間之超越體上故上積分有定值.

因欲求此式之數值換變數 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 爲新變數

$$\psi_1=e_1(\xi),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \psi_r=e_r(\xi),\ \psi_{r+1}=|n(\eta)|$$

$$\psi_{r+2}=l_r+2(\xi),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \psi_m=l_m(\xi).$$

式中 ξ,η 與 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 相干,此m個數所展布的對應的超越體爲(注意此變形是分析的(Analytic)).

$$o\leq\psi_1\leq 1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ o\leq\psi_r\leq 1,\ o\leq\psi_{r+1}\leq 1.$$

$$o\leq\psi_{r+2}\leq 2\pi,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ o\leq\psi_m\leq 2\pi.$$

(卽爲一超越長方形)且 $\psi_1\cdots,\psi_m$ 爲 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 之單值函數故

$$\int\cdots\cdots\int d\varphi_1\cdots\cdots d\varphi_m=\int\cdots\cdots\int\left|\frac{\varphi_1,\cdots\cdots\varphi_m}{\psi_1,\cdots\cdots\psi_m}\right|d\psi_1\cdots\cdots d\psi_m.$$

由 §19 之註可知

$$\left|\frac{f_1,\cdots\cdots f_m}{l_1(\eta)\cdots\cdots,l_m(\eta)}\right|=\left|\frac{n(\eta)}{\sqrt{d}}\right|.$$

又因

$$l_n(\eta)=l_1(\eta)+\cdots+l_{r+1}(\eta),\ l_s(\xi)=l_s(\eta)-\frac{1}{m}\,l_n(\eta).$$

$$(s=1,2,\cdots,r).$$

顯然可得

$$\left|\frac{l_1(\eta),\ \cdots\cdots,\ l_r(\eta),\ l_{r+1}(\eta)}{l_1(\eta),\ \cdots\cdots,\ l_r(\eta),\ l_n(\eta)}\right|=1,\ \left|\frac{l_1(\eta),\ \cdots\cdots,\ l_r(\eta),\ l_n(\eta)}{l_1(\xi),\ \cdots\cdots,\ l_r(\xi),\ l_n(\xi)}\right|=1,$$

及

$$l_{r+1}(\eta)=l_{r+2}(\xi),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ l_m(\eta)=l_m(\xi).$$

$$\left|\frac{l_n(\eta)}{n(\eta)}\right|=\frac{1}{|n(\eta)|},\ \left|\frac{\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_m}{f_1(\varphi_1),\cdots,f_m(\varphi)}\right|=\frac{1}{n(a)},\ \left|\frac{l_1(\xi)\cdots l_r(\xi)}{\psi_1,\cdots,\psi_r}\right|=R.$$

相乘可得

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_m \\ \psi_1, \cdots\cdots, \psi_m \end{matrix} \right| = \frac{R}{n(\mathfrak{a})|\sqrt{d}|}.$$

故上之積分值爲 $\frac{(2\pi)^{r_2} R}{n(\mathfrak{a})|\sqrt{d}|}$，故引十已證明矣.

以下爲簡單計書

$$\varkappa = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}}{w} \frac{R}{|\sqrt{d}|},$$

故 $\varkappa$ 可爲一域所決定,且爲該域之特徵數.

§26. 用當 $s=1$ 時,函數 $\zeta(s)$ 之殘量,以定班數.

定理54. 一班內距 $\leqq t$ 之理想數之總數以 T 表之,則

$$\underset{t=\infty}{L} \frac{T}{t} = \varkappa.$$

證: 若 $\mathfrak{a}$ 爲 A 之倒班 A^{-1} 中之一理想數,命 $\mathfrak{x}$ 過 A 之諸理想數,則積 $\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ 爲 $\mathfrak{a}$ 所可整除之主理想數,且每數祇有一次.於引10之公式中命 $t=n(\mathfrak{a})t'$, 則 T 卽爲 A 內理想數 $\mathfrak{x}$ 且適合 $n(\mathfrak{x})<t'$ 之個數,移去因子 $n(\mathfrak{a})$, 可得上公式,惟 t' 佔 t 位.

數 $\varkappa$ 之值不依賴於班 A. 故由定理54可得下之事實.

定理25. 若 T 爲域 k 內理想數其距 $\leqq t$ 者之個數,及 h 表理想數之班數,則

$$\underset{t=\infty}{L} \frac{T}{t} = h\varkappa.$$

用分析方法,可由此公式導得班之基本表示法,可述如下之定理:

定理56. 無窮級數

$$\zeta(s) = \sum_{(\mathfrak{i})} \frac{1}{n(\mathfrak{i})^s}$$

其中 $\mathfrak{i}$ 過此域之諸理想數,當 $s>1$ 時,則此級數收斂,且

$$\underset{s=1}{L} \left\{(s-1)\zeta(s)\right\} = h\varkappa.$$

〔Dedekind (1)〕.

證: 以 $F(n)$ 表距爲 n 之不同理想數之個數,若 T 有定理55之意義,則顯然

$$\underset{t=\infty}{L}\frac{T}{t}=\underset{n=\infty}{L}\frac{F(1)+F(2)+\cdots+F(n)}{n}.$$

右邊可表爲一無窮級數之極限値〔Dirichlet (15)〕.依距之大小排列此域內之諸理想數,命之爲 $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{i}_t, \cdots$, 且 $\mathfrak{i}_t$ 之距以 n_t 表之,則

$$F(1)+\cdots+F(n_t-1)<t\leqq F(1)+\cdots+F(n_t),$$

或
$$\frac{F(1)+\cdots+F(n_t-1)}{n_t-1}\left(1-\frac{1}{n_t}\right)<\frac{t}{n_t}\leqq\frac{F(1)+\cdots+F(n_t)}{n_t},$$

由定理55可得 $\underset{t=\infty}{L}\frac{t}{n_t}=h\varkappa$, 卽若與一頗小之正數量 δ, 吾人常可覓出一適當大之 t, 使不等式

$$\frac{h\varkappa-\delta}{t'}<\frac{1}{n_{t'}}<\frac{h\varkappa+\delta}{t'} \qquad (14).$$

當諸 $t'\geqq t$ 時皆然.

另一方面,若 s 爲大於一之實數,則級數 $\sum\limits_{(t)}\frac{1}{t^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\cdots$ 收斂,且 $\underset{s=1}{L}\left\{(s-1)\sum\limits_{(t)}\frac{1}{t^s}\right\}=1$. 後者表示下式亦眞, $\underset{s=1}{L}\left\{(s-1)\sum\limits_{t'}\frac{1}{t'^s}\right\}=1$, 式中 t' 表過大於 t 之諸整數.再由級數 $\sum\frac{1}{t^s}$ 之收斂性及不等式 $\frac{1}{n_{t'}}<\frac{h\varkappa+\delta}{t'}$, 故級數

$$\sum_{(t)}\frac{1}{n_t^s}=\sum_{(\mathfrak{i})}\frac{1}{n(\mathfrak{i})^s},$$

當 $s>1$ 時收斂,式中 t 過諸整正數, $\mathfrak{i}$ 爲 k 域之諸理想數.又由不等式 (14), 可得公式

$$(h\varkappa-\delta)^s(s-1)\sum_{(t')}\frac{1}{t'^s}<(s-1)\sum_{t'}\frac{1}{n^s_{t'}}<(h\varkappa+\delta)^s(s-1)\sum_{(t')}\frac{1}{t'^s},$$

式中 t' 過 $\geq t$ 之諸整數.當 s 趨於 1, 則

$$h\varkappa-\delta\leq \underset{s=1}{L}\left\{(s-1)\sum_{t'}\frac{1}{n^s_{t'}}\right\}\leq h\varkappa+\delta.$$

即

$$\underset{s=1}{L}\left\{(s-1)\sum_{(\mathfrak{j})}\frac{1}{n(\mathfrak{j})^s}\right\}=\underset{s=1}{L}\left\{(s-1)\sum_{(t)}\frac{1}{n_t^s}\right\}=\underset{s=1}{L}\left\{(s-1)\sum_{(t')}\frac{1}{n^s_{t'}}\right\}$$

之值 $\geq h\varkappa-\delta$ 及 $\leq h\varkappa+\delta$, 式中 δ 表任意小之數,故上式之值即 $=h\varkappa$, 定理 56 已證明.

§27. 函數 $\zeta(s)$ 之他種無窮展開式.

函數 $\zeta(s)$ 能另表成下之三種形式〔Dedekind (1)〕:

$$\zeta(s)=\sum_{(n)}\frac{F(n)}{n^s}$$

$$=\prod_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

$$=\prod_{(\nu)}\left(\frac{1}{1-\nu^{-f_1s}}\quad\frac{1}{1-\nu^{-f_2s}}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{1-\nu^{-f_es}}\right).$$

第一種表示法之 n 過諸有理正整數;第二種之 $\mathfrak{p}$ 過此域內之諸素理想數;第三種之 ν 過諸有理素數.其中 $f_1,\cdots,f_e$ 爲ν之 e 個素理想因子之次數.此諸無窮展開式皆當 $s>1$ 時收斂.其諸項皆爲正,故不因任意若干項次序之變更而變其值.

§28. 一域之理想數班之組織.

關於理想數班之乘法表示有下之重要定理〔Schering (1), Kronecker (11)〕:

定理 57. 有 q 個班 $A_1,\cdots,A_q$, 凡此域內之班皆可表爲 $A=A_1^{x_1}\cdots\cdots A_q^{x_q}$ 之形,且其表法唯一.式中 $x_1,\cdots,x_q$ 爲有理整數.且 $A_1^{h_1}=1,\cdots,A_q^{h_q}=1$, $h=h_1h_2\cdots h_q$. 當 x_i 匭取 $0,1,\cdots,h_i-1$ 之一 $(i=1,2,\cdots,q)$, 則 A 表此域內班之全部.

證: 每一班A皆可有一最小之指數e_1使$A^{e_1}=1$,此諸e_1之最大者以h_1表之,則由h_1可引出一班H_1(即$H_1^{h_1}=1$).今定諸A之最小指數e_2,可使A^{e_2}為H_1之乘方者,諸e_2之最大者以h_2表之,且命H_2表h_2所引出之班,更定A內之班之最小指數e_3,使A^{e_3}可表為H_1,H_2之乘方乘積者,名h_3即為諸e_3之最大者,由此又可得一班H_3,如此繼進,即可得$H_1,H_2,\cdots,H_q$具吾人所需之性質,即凡一班A可表為$H_1^{x_1}\cdots H_q^{x_q}$之形,且其表法唯一,式中$x_1,\cdots,x_q$為如定理57中所設者.

設

$$H_s^{h_s}=H_t^{a_t}H_{t-1}^{a_{t-1}}\cdots H_1^{a_1} \tag{15}$$

式中$t<s$且$a_t,\cdots,a_1$為已知之整指數,若$H_s^{h_t}=H_{t-1}^{b_{t-1}}\cdots H_1^{b_1}$式中$b_{t-1},\cdots,b_1$為已知整數,則$h_t$必可為$h_s$所整除,何則,設其不然,則可有一較$h_s$為小之數$h'_s$數指數,使$H_s$之$h'_s$次方可以$H_t,H_{t-1},\cdots,H_1$之乘方乘積表示之,命$h_t=h_s l_s$,則可得$H_t^{a_t l_t}$可為$H_{t-1},\cdots,H_1$之乘方乘積表示之,即$a_t l_t$必為$h_s$所整除,即$a_t$可為$h_s$所整除,命$a_t=h_s c_s$及選擇$H_s'=H_s H_t^{-c_s}$代替班$H_s$,由(15)可得等式$H_s'^{h}=H_{t-1}^{a_{t-1}}\cdots H_1^{a_1}$,繼繼進行,最後可以班$A_s$代替$H_s$,且有$A_s^{h_s}=1$.此為所需之關係式.

此上所述之班之表示法,其中$h_1,\cdots,h_q$倘可限制之為素數或素數之乘方,即若g為$h_1,\cdots,h_q$之一而非素數或素數之乘方,則可命$g=v'v''\cdots$,式中v',v'',為素數或素數之乘方,且無公因子,若g所屬之班為B,如命$B'=B^{\frac{g}{v'}}$ $B''=B^{\frac{g}{v'}}\cdots$,則如此之$B',B'',\cdots$可代該$B$.其理由為:

$$B'^{v'}=1,\ B''^{v''}=1,\ \cdots\cdots,$$

及由

$$\frac{1}{g}=\frac{a'}{v'}+\frac{a''}{v''}+\cdots\cdots.$$

得$B=B'^{a'}B''^{a''}\cdots$.若$A_1,\cdots,A_\varepsilon$為如此選擇之班,名為此域內班之基本組.

譯者按: 由羣論(Theory of groups)之觀點言之,一域之班成一亞培

爾羣(Abelian group)所謂班之基本組者,即對應該羣之母元(Generator).海客(Hecke)所著之代數數論,即以此列論.

§29. 理想數班之特徵,函數 $\zeta(s)$ 之推廣.

一域之班之基本組既經取定,則由指數 x_1, x_q, 即可確定一班 A, 又倘可由下之 q 個壹之根

$$x_1(A)=e^{\frac{2\pi i x_1}{h_1}},\ \cdots\cdots,\ x_q(A)=e^{\frac{2\pi i x_q}{h_q}}$$

以唯一决定之.此 q 個壹之根 $x(A)$ 名爲班 A 之特徵(Character),若 $x(A)$, $x(B)$ 各爲 A,B 之特徵,則顯然 $x(A)x(B)=x(AB)$. 若 A 內有理想數 $\mathfrak{a}$,則 $x(A)$ 亦可由 $x(\mathfrak{a})$ 表之.

籍特徵之助,可得一函數爲 $\zeta(s)$ 之推廣〔Dedekind (1)〕.此函數爲

$$\sum_{(\mathfrak{j})}\frac{x(\mathfrak{j})}{n(\mathfrak{j})^s}=\prod_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{1-x(\mathfrak{p})n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

式中和號之 $\mathfrak{j}$ 過此域之諸理想數,積號之 $\mathfrak{p}$ 過此域之諸素理想數.

8. 域之可分式.

§30. 域之可分式式之班及其合組.

若 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(m)}$ 爲個變數 $u_1\cdots,u_m$ 之 m 個一次齊次式.其係數或實或虛.其乘積

$$U(u_1,\cdots,u_m)=\xi^{(1)}\cdots\xi^{(m)}$$

名爲此 m 個變數 $u_1,\cdots,u_m$ 之 m 次可分式(Zerlegbare Form). $u_1,\cdots,u_m$ 之乘積之係數,名爲此式之係數.研究

$$-\frac{\partial^2\log U}{\partial u_r\partial u_s}=\frac{\partial\log\xi^{(1)}}{\partial u_r}\frac{\partial\log\xi^{(1)}}{\partial u_s}+\cdots\cdots+\frac{\partial\log\xi^{(m)}}{\partial u_r}\frac{\partial\log\xi^{(m)}}{\partial u_s}$$

$$(r,s=1,\cdots,m)$$

由行列式之乘法可得 m 個一次式 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(m)}$ 之行列式之平方,即等於 $(-1)^m U^2\Sigma\pm\frac{\partial^2\log U}{\partial u_1\partial u_1}\cdots\cdots\frac{\partial^2\log U}{\partial u_m\partial u_m}$,且爲 U 之係數之整係數函數.此名爲式 U

之判別式.若一式U之係數爲有理整數,且無公約數,則此名爲原式 (primitive form),亦卽爲一有理單位式.

若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$爲理想數$\mathfrak{a}$之基數,則$n(\xi)=n(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m)$爲一$m$次之可分式.其係數爲有理整數且有最大公約數$n(\mathfrak{a})$.除去此因子,則得一原式$U$,此名爲域$k$內之可分式.且有下之性質.選擇$\mathfrak{a}$之另一組基數$^*\alpha_1,\cdots,\alpha^*_m$以替代$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$則可另有一式$U^*$,此式可由$U$經一有理整係數之一次齊形得之.該變形之行列式之值爲±1.凡爲此種變形所關連之式謂之成一式班 (Class of forms).顯然一理想數$\mathfrak{a}$可定一式班.若以$\alpha\mathfrak{a}$代替$\mathfrak{a}$ (α爲此域內之一數) 則所對應之式屬同一式班.卽凡同一班之理想數所對應之式,屬同一式班.

式$n(\xi)=n(\mathfrak{a})U$之判別式顯然卽爲$n(\mathfrak{a})^2d$,故有下之定理.

定理58. k內可分式U之判別式,卽爲域之判別式d. [Dedekind (1)].

式U已知之性質,可完全決定其存在.反之,可有下之定理:

定理59. 若U爲一原可分式,但在低於m次之域內不可分,其判別式爲d,則於k內至少有一,至多有m個理想數班與之對應.

證: $\eta=\mu_1u_1+\cdots+\mu_mu_m$爲$U$之一次因子,其係數在$k$內.以一整數$a$乘之,可使$\xi=a\eta=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m$爲有整係數$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$之一次式.命$\mathfrak{a}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$,則由定理50知$n(\xi)=n(\mathfrak{a})U$. U之判別式卽爲此域之判別式.因

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \cdots\cdots\cdots, \alpha_m \\ \alpha_1', & \cdots\cdots\cdots, \alpha_m' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(m-1)}, & \cdots\cdots\cdots, \alpha_m^{(m-1)} \end{vmatrix}^2 = n(\mathfrak{a})^2d,$$

式中$\alpha',\alpha'',\cdots$等表α之共軛數.由此式及定理19之逆可知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$成理想數$\mathfrak{a}$之基數.

二理想數$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$各有一式$U,V$;則$\mathfrak{r}=\mathfrak{ab}$所對應之式$W$,名爲式$U$及$V$

之合組式(德文 Zusammengesetzte Form)〔Dedekind(1)〕.

今發生一問題,卽若已知 k 內之二式,此二式屬一班或否,究宜如何決定.由上所言可知此問題可由二理想數相似經有限次之手續以定所需.(比較 §24).

9. 域之數環

§31. 數環,環中之理想數及其重要性質.

若 $\vartheta, \eta, \cdots$ 爲 m 次域 k 內之任意代數整數,諸 $\vartheta, \eta, \cdots$ 之整係數函數成一組數,此組數卽名爲數環(德文 Zahlring, Ring 或 Integritatsbereich)[1].一環內二數之加減乘仍爲此環內之一數,數環之定義亦可視爲經加減乘不變之一組數.域 k 內之最大數環卽爲由基數 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 所定之環.此卽表此域內之一切數.每一數環 r 內有 m 個整數 $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ 具次之性質:凡 r 中之一數 ϱ,可表爲

$$\varrho = a_1\varrho_1 + \cdots\cdots + a_m\varrho_m,$$

式中 $a_1, \cdots, a_m$ 爲有理整數. $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ 名爲此環之基數.以 $\varrho'_1, \cdots, \varrho'_m, \cdots, \varrho_1^{(m-1)}, \cdots, \varrho_m^{(m-1)}$ 表 $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ 之共軛數,則行列式

$$\begin{vmatrix} \varrho_1, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \varrho_m \\ \varrho_1', & \cdots\cdots\cdots\cdots, \varrho_m' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho_1^{(m-1)}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \varrho_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

之平方爲一有理整數,此名爲環 r 之判別式 d_r.

一環 r 之理想數(卽簡稱爲環想數)卽爲此環內無限個整數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 之集合,且具有次之性質.凡 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots$ 仍在此集合中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 爲此環內之數.凡環之理想數中有 m 個整數 $L_1, \cdots, L_m$ 使凡此環理想數中之一數可以 $a_1L_1+\cdots+a_mL_m$ 表之,式中 $a_1, \cdots, a_m$ 爲有理整數,數 $L_1, \cdots, L_m$ 謂之此環理

[1] Dedekind 名此爲 "Ordnung".

想數之基數,環之基數及環理想數之基數存在之證明,與§3,§4中證明域之基數及理想數之基數存在相同.有下之定理:〔Dedekind (3)〕.

定理60. 若 $L_1, \cdots, L_m$ 爲 k 內之任意 m 個理數,其間無有理整係數之一次關係,可選擇適當之有理整數 A,而得一環 r,以 $AL_1, \cdots, AL_m$ 爲其基數.此定理60之證明與定理61相彷彿.

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 爲 r 內之 s 個數,則此 s 個數之具此環內之數爲係數之一次齊次式成此域內一理想數 $\mathfrak{i}_r$,簡單表之爲 $\mathfrak{i}_r=(L_1, \cdots, L_m)$.

定理61. 於每一環 r 內有一環理想數 $\mathfrak{i}_r$ 即爲此域之理想數.

證: 以環 r 之基數 $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_m$ 表域之基數 $\omega_1, \cdots, \omega_m$

$$\omega_i=\frac{a_{i1}\varrho_1+\cdots+a_{im}\varrho_m}{A} \qquad (i=1, 2, \cdots, m),$$

式中 $a_{i1}, \cdots, a_{im}$, A 爲有理整數.可知 k 內,凡此域內可爲 A 所整除之數在此環中.又凡 k 內可爲 A 所整除之理想數爲環 r 之理想數.

域 k 內同時爲環 r 內之諸理想數之最大公理想因子,謂之環 r 之宰(Führer)〔Dedekind (3)〕. 由此易得下之定理:

定理62. 域 k 內可爲環 r 之宰 $\mathfrak{f}$ 所整除之理想數即爲環 r 之理想數.

§32. 爲一整數所定之環,關於域內一整數之別之定理.

域之最重要環爲由一整數所定之環.代代肯得氏曾由此環之性質,以建立彼之域之判別式之理論〔Dedekind (6)〕.氏之主要之結果可由下定理概括之.

定理63. k 域之諸整數之別之最大公約數即爲此域之別 $\mathfrak{d}$.若 δ 爲定 k 之整數 θ 之別,及 $\mathfrak{f}$ 爲 θ 所定之環之宰,則 $\delta=\mathfrak{f}\mathfrak{d}$.

證: 命 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 爲域 k 之基數,以 $\omega'_1, \cdots, \omega'_m; \cdots\cdots, \omega_1^{(m-1)}, \omega_m^{(m-1)}$ 表其共軛數作 m^2 個數 $\omega_i^{(l)}$ 之 m 級行列式

$$\Omega=\begin{vmatrix}\omega_1, & \cdots\cdots, \omega_m\\ \omega_1', & \cdots\cdots, \omega_m'\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \omega_1^{(m-1)}, & \cdots\cdots, \omega_m^{(m-1)}\end{vmatrix}$$

Ω 內 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ 之 $(m-1)$ 餘因子各以 $\Omega_1,\cdots,\Omega_m$ 表之.則 m 個乘積 $\Omega\Omega_1,\cdots,\Omega\Omega_m$ 為 k 內之整數,且合為 k 內一理想數之基數.

因欲證明上之事實,可乘行列式 Ω_h 之諸行各以

$$u+\omega_i', u+\omega_i'', \cdots\cdots, u+\omega_i^{(m-1)} \qquad (16).$$

式中 u 為一未定之襄變數.如此所成之 $m-1$ 級行列式顯然可表為

$$f_1(u)\Omega_1+f_2(u)\Omega_2+\cdots\cdots+f_m(u)\Omega_m,$$

式中 $f_1,\cdots,f_m$ 為 u 之整係數函數.另一方面(16)諸一次式之乘積有如下之形

$$u^{m-1}+(\omega'_i+\cdots+\omega_i^{(m-1)})u^{m-2}+\cdots=u^{m-1}+(a-\omega_i)u^{m-2}+\cdots,$$

式中 a 為一有理整數.比較 u^{m-2} 之係數可知: $\omega_i\Omega_h$ 可由 $\Omega_1,\cdots,\Omega_m$ 之有有理整係數之一次齊次式表之.由此可得所需,即 $\Omega\Omega_1,\cdots,\Omega\Omega_m$ 為一理想數之諸基數.

以 $\Omega_h^{(i)}$ 表 Ω 中 ω_h^i 之 $(m-1)$ 級補因子.則由行列式之定理可知 m 級行列式 $|\Omega_h^{(i)}|=\Omega^{m-1}$, 故可知理想數 $\mathfrak{F}=(\Omega\Omega_1,\cdots,\Omega\Omega_m)$ 之距,當適合於

$$dn^2(\mathfrak{F})=|\Omega\Omega_h^{(i)}|^2=\Omega^{2m-2}$$

由此得 $n(\mathfrak{F})=|d|^{m-1}$. 顯然域之判別式 d 可為 $\mathfrak{F}$ 所整除;命 $d=\mathfrak{F}i$, 可得 $n(i)=|d|$.

設 ϑ 為定域 k 之數,則域 k 之 m 個基數可以表成

$$\omega_1=1$$

$$\omega_2=\frac{a_1+\vartheta}{f_1}$$

$$\omega_3 = \frac{a_1 + a_2'\vartheta + \vartheta^2}{f_2}$$

....

$$\omega_m = \frac{a_{m-1} + a'_{m-1}\vartheta + \cdots\cdots + a_{m-1}^{(m-2)}\vartheta^{m-2} + \vartheta^{m-1}}{f_{m-1}},$$

式中 $a_1, a_2, a_2', \cdots, a_{m-1}^{(m-2)}, f_1, \cdots, f_{m-1}$ 爲有理整數.再命 $\mathfrak{f}$ 爲 ϑ 所定之環之宰,且命其基數爲

$$\varrho_1 = f_1',$$

$$\varrho_2 = b_1 + f_2'\vartheta,$$

$$\varrho_3 = b_2 + b_2'\vartheta + f_3''\vartheta^2,$$

....

$$\varrho_m = b_{m-1} + b'_{m-1}\vartheta + \cdots\cdots + b_{m-1}^{(m-2)}\vartheta^{m-2} + f'_m\vartheta^{m-1},$$

式中 $b_1, b_2, b_2', \cdots, b_{m-1}^{(m-1)}, f_1', f_2', \cdots, f'_m$ 爲有理整數.由定理62 $\varrho_1\omega_m, \varrho_2\omega_{m-1}, \cdots, \varrho_m\omega_1$ 必可表爲 ϑ 之整係數函數.故 f_1' 必可爲 f_{m-1} 所整除; f_2' 必爲 f_{m-2} 所整除, $\cdots, f'_{m-1}$ 必爲 f_1 所整除,卽乘積 $f_1'\cdots f_m'$ 爲乘積 $f = f_1\cdots f_{m-1}$ 所整除,因 $n(\mathfrak{f}) = f_1\cdots f_{m-1}f_1'\cdots f'_{m-1}f'_m$, 故 $n(\mathfrak{f}) = f^2g$ 式中 g 爲一有理整數.

再命

$$Ⓗ = \begin{vmatrix} 1, \vartheta, & \cdots\cdots, \vartheta^{m-1} \\ 1, \vartheta', & \cdots\cdots, \vartheta'^{m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1, \vartheta^{(m-1)}, & \cdots\cdots, (\vartheta^{(m-1)})^{m-1} \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} 1, \vartheta', & \cdots\cdots, \vartheta'^{m-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1, \vartheta^{(m-1)}, & \cdots\cdots, (\vartheta^{(m-1)})^{m-2} \end{vmatrix};$$

則數 ϑ 之別 δ 可表爲 $(-1)^{m-1}\delta = \frac{Ⓗ}{H}$ 且由§3知 $(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} n(\delta) = Ⓗ^2 = f^2d$.

又

$$\sum_{(h=1,\cdots,m)} u_h\Omega\Omega_h$$

$$
=\frac{\text{Ⓗ}}{f^2}\begin{vmatrix} u_1, f_1u_2, & f_2u_3, & \cdots\cdots, f_{m-1}u_m \\ 1, a_1+\vartheta' & a_2+a_2'\vartheta'+\vartheta'^2, & \cdots\cdots, a_{m-1}+\cdots+\vartheta'^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, a_1+\vartheta^{(m-1)}, & a_2+a_2'\vartheta^{(m-1)}+(\vartheta^{(m-1)})^2, & \cdots\cdots, a_{m-1}+\cdots+(\vartheta^{(m-1)})^{m-1} \end{vmatrix} \quad (17).
$$

式中$u_1,\cdots,u_m$爲未定數.依第一行展開此行列式,故可書爲$u_1H_1+\cdots+u_mH_m$.易知$\frac{H_1}{H},\cdots\cdots,\frac{H_m}{H}$皆爲$k$內之整數.由(17)可知數$\Omega\Omega_1,\cdots,\Omega\Omega_m$爲由$\frac{H_1}{H},\cdots,\frac{H_m}{H}$乘$k$內之一整數而得者.故$\frac{H_1}{H},\cdots\cdots,\frac{H_m}{H}$亦爲一理想數之基數,此理想數記之爲$\mathfrak{m}$.

理想數$\mathfrak{m}$之數皆爲ϑ之整係數函數,故當爲$\mathfrak{f}$所整除.即命$\mathfrak{m}=\mathfrak{f}\mathfrak{l}$,式中$\mathfrak{l}$爲$k$域內之一理想數.方程式(17)示吾人以

$$\mathfrak{F}=\frac{\text{Ⓗ}H}{f^2}\mathfrak{f}\mathfrak{l}=\frac{d\,\mathfrak{f}\mathfrak{l}}{\delta}.$$

取此式之距,可得

$$|d|^{m-1}=\frac{|d|^m n(\mathfrak{f})n(\mathfrak{l})}{f^2|d|}$$

即
$$f^2=n(\mathfrak{f})n(\mathfrak{l})$$

由另一方面已知$n(\mathfrak{f})=f^2g$,故必有$g=1, n(\mathfrak{l})=1, \mathfrak{l}=1$,由此$n(\mathfrak{f})=f^2, \mathfrak{F}\delta=\mathfrak{f}d$,$\delta=\mathfrak{f}\mathfrak{i}$.

又命$\mathfrak{p}$爲k內任意一素理想數.今後往證:k內可有一整數$\vartheta=\varrho$,ϱ所定之環之宰不爲$\mathfrak{p}$所整除.命$\mathfrak{p}$所能整除之有理素數爲$\nu=\mathfrak{p}^r\mathfrak{a}$,式中$\mathfrak{a}$爲與$\mathfrak{p}$互素之理想數.取$k$內之一整數$\varrho$,使具下之性質:$k$內任一數對$\mathfrak{p}$之任何方皆能相合於$\varrho$之一整係數函數.由定理29已知有如此之$\varrho$存在.同時選$\varrho$使$\equiv o, (\mathfrak{a})$(定理25),且爲定此域$k$之數.又命數$\varrho$之判別式$d(\varrho)$等於$\nu^h a$,式中$a$爲與$\nu$互素之有理整數.則凡$k$域內之一整數$\omega$皆可表爲$\omega=\frac{F(\varrho)}{a\varrho^h}$,式中$F(\varrho)$爲$\varrho$之一整係數函數.今證此如下:若$\omega=H(\varrho),(\mathfrak{p}^{e\nu})$,式中$H(\varrho)$爲$\varrho$之一整係數函數.命$\omega=H(\varrho)+\omega^*$,則$\omega^*\varrho^h$可爲$\nu^h$所整除.

命 $\omega\varrho^h=\nu^h\alpha$, 式中 α 為 k 內之一整數.由§3凡一整數 α 皆可表為 $\frac{G(\varrho)}{d(\varrho)}$ 之形式中 $G(\varrho)$ 表 ϱ 之一整係數函數.由此可得 $\omega^h=\frac{G(\varrho)}{a\varrho^h}$, 又 $\omega=\frac{a\varrho^h H(\varrho)+G(\varrho)}{a\varrho^h}$. 由 ϱ 之性質可知數 $a\varrho^h$ 定為 ϱ 所定之環之宰所整除,但不為 $\mathfrak{p}$ 所整除.即數 $\varrho=\theta$ 為一合前之所需性質之數.

令往證理想數 $\mathfrak{i}$ 恰為諸整數之別之最大公約數.由域之別 $\mathfrak{d}$ 之定理此最大公約數必有 $\mathfrak{d}$ 為其因子.命 $\mathfrak{i}=\mathfrak{b}\mathfrak{d}$, 由定理13 $n(\mathfrak{d})$ 必可為判別式 d 所整除.可得 $n(\mathfrak{i})=n(\mathfrak{b})da$, 式中 a 表一有理整數.因 $n(\mathfrak{i})=\pm d$, 故可得 $n(\mathfrak{b})=1, \mathfrak{b}=1, a=\pm 1$, 故 $\mathfrak{i}=\mathfrak{d}$, 定理63至此完全證明.

如§12之末關於域之判別式之素因子之敍述,可由定理63易得定理31及37.欲得此結果,祇須注意 $\theta=\varrho$ 所適合之方程式對素數 $\mathfrak{p}$ 之分解,其法與§11分解基本方程式之左邊相類似.

§33. 有規理想數及其分解之定理.

若 r 為任一環,且 $\mathfrak{i}_r=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 為其中之一環理想數,則此諸數之最大公理想因子,表一域理想數,名此理想數為 $\mathfrak{i}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 為環理想數 $\mathfrak{i}_r$ 之並列域理想數(德文 Zugeordnete Körperideal).若域理想數 $\mathfrak{i}$ 與 r 環之宰 $\mathfrak{f}$ 互素,則 $\mathfrak{i}_r$ 名為有規環理想數(德文 Reguläres Ringideals)可有下之定理:

定理64. 若 $\mathfrak{i}$ 為與宰 $\mathfrak{f}$ 互素之域理想數,則環 r 內有一環理想數 $\mathfrak{i}_r$ 與 $\mathfrak{i}$ 並列.

證: 定 r 內之可為域理想數 $\mathfrak{i}$ 所整除之諸整數,此當成一 r 內之環理想數 $\mathfrak{i}_r=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$. 又選擇環 r 之宰 $\mathfrak{f}$ 中之一與 $\mathfrak{i}$ 互素之整數 φ. 則域理想數 $\mathfrak{i}$ 中當有一與 φ 互素之數 α. 此域內有二整數 ψ 及 β 使 $\psi\varphi+\alpha\beta=1$. 因 $\psi\varphi$ 可為 $\mathfrak{f}$ 所整除,故為環 r 中之一數,故 $\alpha\beta$ 亦在環 r 中.另一方面 $\alpha\beta$ 可為 $\mathfrak{i}$ 所整除,故 $\alpha\beta=1-\varphi\psi$ 表環理想數 $\mathfrak{i}_r$ 內之一數.環理想數 $\mathfrak{i}_r$ 之並立域理想數 $\mathfrak{i}^*=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 與 $\mathfrak{f}$ 兩素,因 $\mathfrak{i}^*$ 可為 $\mathfrak{i}$ 所整除,且可整除 $\mathfrak{i}$, 故可得 $\mathfrak{i}^*=\mathfrak{i}$. 即 $\mathfrak{i}_r$ 為一有規理想數,且域理想數 $\mathfrak{i}$ 為其並立的,故定理

64證明.

二環理想數 $\mathfrak{a}_r=(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 及 $\mathfrak{b}_r=(\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 之積之意義爲

$$\mathfrak{a}_r\mathfrak{b}_r=(\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_s\beta_1, \cdots, \alpha_1\beta_t, \cdots, \alpha_s\beta_t).$$

顯然可有下之定理:

定理65. 二有規環理想數之積與其二並立域理想數之積並立.

由定理65,可知有規理想數之分解性及整除性可由分解與 $\mathfrak{f}$ 互素之域理想數得之.

以下祗用及有規環理想數,爲簡單計,將有規二字常略去之.以下所謂環理想數之意義卽爲有規環理想數.

由定理23,可知域 k 內有 $\varphi(\mathfrak{f})$ 個數對 $\mathfrak{f}$ 不相合,且對 $\mathfrak{f}$ 互素之整數.若其中有一屬於環 r, 則顯然凡對 $\mathfrak{f}$ 相合此數者皆屬於環 r. 環 r 內對 $\mathfrak{f}$ 不相合且對 $\mathfrak{f}$ 互素之數之個數 $\varphi(\mathfrak{f})$ 之因子,以 $\varphi_r(\mathfrak{f})$ 表之.

一環理想數 $\mathfrak{a}_r$ 之距 $n<(\mathfrak{a}_r)$, 其義卽爲此環理想數之並立域理想數 $\mathfrak{a}$ 之距.環理想數之距之簡單定理可由此定義得之.

§34. 一環之單位.環之班.

環內基本單位之存在定理,並無何種困難,卽可得之.此定理由關於域中單位相彷之定理,得之極易.因由定理24已知,凡域之任一單位之 $\varphi(\mathfrak{f})$ 方,卽爲一環之單位.此定理與定理47相同,祗須將其中之 r 換爲 s. 環 r 內可有一組基本單位 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s$ 卽此諸數與 r 環內之壹之根之積,可表此環中所有之單位.此 s 個單位之前 s 個對數値所作成之行列式之正値,名爲環 r 之規 R_r 環 r 內壹之根之個數以 ω_r 表之 (Dedekind (3)).

二環理想數 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 若有二整數 λ,μ 使 $\mu\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{b}$, 則此二環理想數謂之相似.今限制 $\frac{\mu}{\lambda}$ 之距須爲正數,則如§24可名之爲狹義的相似.凡相似之環理想數成一環班 (德文 Ringklasse). 一環理想數 (α), 式中 α 與 $\mathfrak{f}$ 互素,且有正距爲一主環理想數,此所成之班,謂之主班 (注意狹義的).更進一步環理想

數班之乘法之定義及定理與§§22, 28, 29對域所言者均屬相同.又如§22可知環班之數有限.定此數之法有二.一用純粹的算術方法.他係用分析方法與§45, §26所用之方法相同.由此所得之結果如次〔Dedekind (3)〕:

定理66. 若 h 及 h_r 各爲域 k 及環 r 之班數(皆就狹義言之),則

$$\frac{h_r}{h}=\frac{\varphi(\mathfrak{f})}{\varphi_r(\mathfrak{f})}\cdot\frac{w_rR}{wR_r}.$$

又第8章之可分式之觀念,可推至環班中.

§35. 模及模班

若 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 爲 k 內之任意 m 個整數,其間無有理整係數之一次齊次關係.則凡可以 $a_1\mu_1+\cdots+a_m\mu_m$ ($a_1,\cdots,a_m$ 爲有理整數)表出之數,謂之成一 k 域內之模(Modul)以 $[\mu_1,\cdots,\mu_m]$ 表之.模之定義亦可謂經加減不變之一組整數.如域 k 內之諸整數,理想數,環及環理想數皆成爲模.若有二整數 λ, μ 可使 $[\mu\mu_1,\cdots,\mu\mu_m]=[\lambda\lambda_1,\cdots,\lambda\lambda_m]$,則二模 $[\mu_1,\cdots,\mu_m]$ 及 $[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]$ 謂之相似.諸相似之模成一模班(德文 Modulklasse).代代肯得氏研究代數數爲由模之觀念列論〔Dedekind, (1, 3, 6, 9)〕.

行列式

$$\begin{vmatrix} \mu_1, & \cdots\cdots, & \mu_m \\ \mu_1', & \cdots\cdots, & \mu_m' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mu_1^{(m-1)}, & \cdots\cdots, & \mu_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

之平方顯然爲一有理整數.且可爲理想數 $\mathfrak{m}=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ 之距之平方所整除.此二數之商以 ∂ 表之.作任意相似於 $[\mu_1\cdots,\mu_m]$ 之模之商,則與吾人以同樣的 ∂ 值.有理整數 ∂ 爲定 $[\mu_1,\cdots,\mu_m]$ 之模班之特徵,此名爲模班之判別式.

如§30可分式及式班之觀念可推廣至模之理論中.

(本篇完本文未完)

甘肅鳥類新種之記載

H. E. Dresser 及 E. Delmar Morgan 原著

Ibis, 1899, pp. 270-276

任國榮譯

M. Berezovsky君于1884年以一鳥學家身分隨G. N. Potanin君旅行中國東北部,歸來得W. P. Sukatscheff君之慨諾,旋又繼續其探險事業.其爲科學辛勞之結果,得Messrs.Berezovsks及Bianchi整理之,成爲"Potanin探險隊經過甘肅及其附近村落所得之鳥類"一文,中有六新種.文獻係用俄文發表,爲大多數西歐鳥類學者所不能曉. E. Delmar Morgan君,果如鄙願,將全文繙譯之,且以示余,囑余付印.余以全文太長,不易出版,乃縮短之而作此形式,俾本雜誌編者得以採取也.此六品種中,其中有二種(Trochalopterum sukatschavi及Poecile davidi)于Tring Museum中已有之,蓋H. W. Rothschild貸吾以考驗及記載者也.其餘四種,譯自俄文.——H.E.D.附記.

1. Trochalopterum Sukatschewi 褐畫眉

雄成鳥　下體較T. ellioti爲深褐及較暗;腰部棕色,內側次列撥風內瓣之頂端白,外側初列撥風外瓣石板藍,而非如T. ellioti之金黃色;尾與彼種相若,而無金黃之色彩;上頸基部有一狹線紋橫貫之;眼先深黑,聯結眼下白斑之線紋亦然,下體與T. ellioti相若而帶葡萄色;下腹及下尾筒淡棕橙色.尾頗圓,最外側尾羽短于中央尾羽2.0 m.m. 嘴峯0.9 m.m; 翼4.1 m.m; 尾長5.85; m.m; 跗蹠1.55 m.m. 虹彩暗肉桂色;足淡玫瑰灰色,嘴暗角色,基部黃綠.

各標本,十月,十一月,十二月于沙灘泥(Satani)村落捕得之;又十一月,十二

月于沙溝(Chago)村落間得之;又七月于樂古浦(Yo-dzam-pn)村落間得之.其量度如下:

雄	全長	2.80--3.10 mm.	展翼	312--320 mm.
	翼長	99--108 mm.	嘴	23--28 mm.
	跗蹠	37--39 mm.	後趾及爪	19.5--22 mm.
	尾長	143--166 mm.		
雌	全長	270--293 mm.	展翼	305--320 mm.
	翼長	97--106 mm.	嘴	22--26 mm.
	跗蹠	38--39 mm.	後趾及爪	20--21 mm.
	尾長	132--158 mm.		

Berezovsky于西古鎮(Si-gu-chen)及明州(Ming-diau得之.此為稀少之種類.棲于高山松柏繁茂之區,竹樹叢生之處尤多.無論冬夏皆成對以生活,常見其在地上啄掘苔蘚乾葉以覓食,棲於樹上,日落時,雌雄二鳥互相呼喚.

2. Suthora przewalskii 甘肅鸚嘴

兩性相似.頭頂及上頸灰色;鼻毛,眼先及前頭玉桂黑;由前頭經眼及沿耳羽之上方有玉桂黑色帶紋,近上頸處則紋較寬而色較深;上背橄欖灰;下背,肩羽,腰及上尾筒汙橄欖色,肩羽及腰部則較鮮明;圍眼,口角邊緣,腮,喉及上胸部玉桂色;胸中部較鮮明而胸以下則較淺淡;頸側及胸側灰而着玉桂色;脇,腹及下尾筒汙色,其下部較為鮮明;上覆雨及撥風羽概汙色而着以橄欖色;中覆雨之內瓣帶黑;撥風羽之外瓣汙色,初列之羽基參以紅色;第一第二列撥風羽,內瓣概灰黑,而後列撥風之內瓣則黑褐而帶橄欖色;除外列撥風外,其餘撥風一概皆有淺色斑紋,初列撥風只在基部及中部,次列及後列則內瓣全部皆有之,堆疊至於前瓣;下覆雨汙灰色,腋灰白;尾橄欖灰,外緣較淺.七月間之雌成鳥虹彩磚紅,八月間之幼雄鳥則為黃赭石色;嘴玫瑰色,上顎尖端白,下顎帶黃;足鉛灰;翼頗圓,第六撥風羽最長,第一枚之長度間於最末

及次末兩枚之間,較第六短22—26 mm.,第二則短12-15 mm.,第三短6-7 m.m,第四短2—3 mm.,第五短1 m.m.尾之等差極大,最外側尾羽僅48—51 mm.,第三較之尾尖短去1—15 mm.,其中央四枚長度幾等.

各標本於七月八月在樂古浦村落間得之,十二月于沙灘泥村落間得之.量度:—— 雄鳥全長130 mm.;展翼160 mm.;翼長55 mm.;嘴8 mm.;蹠蹠19 mm;.後趾及爪11 mm.;尾長70 mm.　　雌鳥全長145 mm.;展翼160 mm.,翼長56 mm.;嘴8 mm.;蹠蹠18 mm.;後趾及爪11 mm.;尾長80 mm..

此為甘肅稀有之鳥類,Berzovsky 君只遇見三次;一次在1886年之早春,于明州樂古浦附近高山落葉松之疏林中見其一雙方棲樹上,性質與Paros major 相似.八月間又於此村落見一小羣,往來叢草間,得一羽毛未豐之幼雄鳥.同年十二月於西古鎮(Si-go-chen)沙灘泥之大海口(Ta-heh-kan)峽口間見其小羣,彼等常在竹叢中,超出海面8000-10000英尺,所得之標本羽毛甚好,惜未能別其雌雄耳.

3. Larvivora obscura. 藍啣鳥

雄成鳥　鼻毛及眼先黑,此色彩繼續成線紋而經過眼部;其餘頭頂,上頸,後頸,頸側及背部,皆灰石板藍;新羽色較蒼,陳羽色較暗;腰與背同色而較灰,上尾筒黑;頰耳羽腮,喉及胸為釋黑;脇部灰而帶紅色;腹中部白,下腹及下尾筒汙白而參有紅色;肩羽及小覆雨與背同色;中及大覆雨黑褐;初列撥風羽黑褐,外緣灰,而外緣之基部白色;次列及後列撥風羽黑褐,外瓣帶暗藍灰色,而內緣則稍灰;下覆羽淡紅,中央尾羽黑,羽幹近基部則白色;其他諸尾羽黑而基部白,外側尾羽基部之白色部佔全長十分之三,第二雙佔十分之五,第四雙佔四分之三,第五雙佔六分之五.翼圓,第四第五撥風羽等長,為撥風羽中之最長者,第三與第六幾相等,或稍短,或稍長,較最長之撥風羽約短1½-3 mm.;第二枚撥風羽長居第七第八之間,較最長之撥風羽約短10—11 mm.;第一枚撥風羽長約當第二枚之半而有餘,較最長之撥風羽則約短29—32

mm.;上尾筒遮蓋尾部全長五分之三.虹彩極暗;嘴黑,狀與L. brunnea相似而口角無剛毛;足藍灰色.

此鳥只得四雄,雌鳥如何,尚未能知.皆于10000至11000英尺之高山竹林中獲得.八月二日Berezovsky君於竹林地上得未生毛之幼鳥四個,此蓋墮自鳥巢者也,於此射得一方易羽之雄鳥,時已入夜遂不能再候雌鳥也.聲音似笛,頗悅耳.

量度:——♂.全長140—100 mm.;展翼210—240 mm.;翼66—71 mm.;嘴15.5-16 mm.;跗蹠26—29 mm.;尾長51.53 mm..

4. Poecile hypermelaena. 甘肅黑頭山雀

頭輝黑,背中部亦然;背及腰橄欖褐,腰部渲染沙黃色;頭之兩側有一白帶紋,由嘴基部沿頰及耳羽而至于褐色之背部;腮及喉汙黑,胸中部,腹部,及肛門汙白色;胸側暗橄欖褐;脇部沙褐;肩羽及上覆雨與背同色;撥風羽黑灰,後列撥風羽及其他撥風羽之邊緣橄欖灰;撥風羽之底面灰而內緣白;下覆雨及腋羽淡鵝黃色;尾羽暗灰,而有橄欖色邊緣,邊緣在近尖端處者則變灰色;虹彩暗;嘴黑,邊緣較灰色;跗蹠鉛灰色;第四第五第六撥風羽幾等長而為撥風羽中之最長者;第三幾與第七同長,或竟長過,較最長之撥風羽則短2mm.;第二與第八同長,較第三短8mm.;較最長者短10mm.;第一約當閉翼時長度之半,較第二短20mm.;尾短,幾為平尾,較翼羞短,中央尾羽較外側者稍長,惟不過1.5 mm..

此標本之色彩,與P. affinis相近似,惟頭部輝黑而非褐黑,尾為平尾而非圓尾,且較細小.其頭部色彩及平尾,與P. plastris相似,惟喉部有黑色塊斑,與P. ater相似而塊斑較大,體下部色彩較不一致,頭部黑色伸張至于背部.

量度:——全長107—110 mm.;展翼195—197 mm.;翼長61 mm.;嘴9-9.2 mm.;跗蹠14 mm.;尾47—49 mm..

于陝西得二標本,其他各處皆未見之.

5. Poecile davadi 大衛氏山雀

雄成鳥　頭頂及上頸深黑,黑色上頸之下,有棕色帶紋橫過背部,與胸部紅色相連接;背部橄欖褐而參以灰色;尾及翼與背部相似,羽之外緣汙赭色;頭頸之兩側在眼下方者白色;腮及喉汙黑,其餘下體部栗紅,腹中部較灰;第四第五撥風羽最長,第六亦幾同長,第二與第九第十同長,第一約短去21mm.;足鉛色;虹彩黑褐;嘴黑色.兩性相似.幼鳥頰及耳羽帶黃色,嘴黑,顎之邊緣較灰色,此與成鳥不同之點也.

量度:——雄全長 120-130 mm.; 展翼 200 mm.; 翼長 66-67 mm.; 嘴 95-11 mm.; 跗蹠 15 mm.; 尾長 50—54 mm..　雌全長 115—125 mm.; 展翼 197—202 mm.; 翼長 64—67 mm.; 嘴 9.5—11 mm.;跗蹠 14—15.5 mm.; 尾長 50—51 mm..

標本數個,十一月于沙攤泥村落附近得之;六月七月八月于樂古浦村落間得之;九月十月于陀坦泥(Totani)村落得之;十二月於沙滿附近得之.

此種山雀 Berezovsky 君只于甘肅西南部見之,甚爲稀少,每五或十個成小羣集,在 7000 至 9000 英尺高度之山谷樹林之邊周.性質靈敏而馴良.鳴聲與 P. affinis 相似,但較粗澀而不和諧.

6. Sitta przewalskii 藍走木鳥

雄成鳥　前頭,頭頂,及上頸深藍黑色;上體深石板藍色而腰部稍爲灰色;翼帶黑色,表面以暗石板藍色飾其邊緣.中央尾羽與背部同色,其餘黑,先端石板藍;其外側尾羽之內瓣有及于羽半之白色大斑;腮,頭側及頸汙白,而參以銹棕色;其餘體下部赭石色,胸側及脇銹栗色;上顎黑,下顎帶灰,尖端暗色;虹彩極暗褐色;足暗褐;第三第四撥風羽幾同長,爲撥風羽中之最長者,第三約短 3 mm.; 第二第五較第六長;第一當閉翼時全長之半,短於最長之撥風羽約 39 mm.; 尾短,稍呈凹形,中央尾羽較內翼羽短去 1—2 mm.. 全長 125 mm.; 展翼 225 mm.; 翼長 73 mm.; 嘴 17 mm.; 跗蹠 18 mm.; 尾 43 mm..

只于岷州樂古浦河流峽口間得一標本,時正七月間也.捕得處在兩谷間

脊部高地森林之外周,時彼方飛入空中以捕昆蟲,如捕蠅鳥焉.此品種與 Sitta leucopsis 極爲相似,但體較細小,而下體幾全爲深紅色.

海南內部鳥類新種七種之紀載

W. R. Ogilvie Grant 原著

Ibis 1899, No. XX, pp. 584-587

任 國 榮 譯

已故之 John Whitehead 君從海南中部五指山低坡採得之標本現已運到,其中有許多極有趣味之鳥類,而新種凡七,全部報告,異日再行發表之.

1. Cittocincla brevicauda, Sp.n. 短尾鵲鴝鶯

雄成鳥. 與 C. tricolor 極爲近緣,惟其體較小而中央尾羽幾與他對同長,一望卽可辨別.在 C. tricolor 其延長之尾羽,最幼之雄鳥亦已發達.中央二對尾羽純黑色,第三對末端白色 (0.3 英寸) 第四第五第六對白色部較寬,在第四對者寬達一英寸,外側一對則達 0.7 英寸.

2. Dryonastes castanotis, Sp. n. 栗耳珊瑚與印度之 D. ruficollis 極爲近緣,但區別甚易.

雌雄成鳥. 普頭色彩,上部石板灰.下背及上尾筒則參以青色.眼先,圍眼羽及頰前部黑色;頰及耳羽後部有毛一叢,圓而作鮮亮之栗色;腮,喉及前胸上部褐黑;其餘下體灰色,脅部,股部及下尾筒則參以綠色.嘴及眼黑;足暗黑褐.

全長 10.7 英寸;翼 5 英寸;尾 5 英寸;跗蹠 1.75 英寸.

3. Gecinus hainanus, Sp. n. 海南青啄木

雄成鳥. 與中國內地之G. guerini極為近緣.惟可以其上體及下體之暗綠色區別之;在G. guerini其上體為汙灰綠色,下體亦然,惟灰色較深.

與G. occipitalis亦有關係;與其上體之暗綠色相似;但尾羽有斑點而無條紋.

J. W: 此鳥虹彩白;嘴灰黑,基部青白;足鉛灰色.

全長約10.8英寸;嘴峯1.5英寸;翼5.3英寸;尾3.8英寸;跗蹠1.05英寸.

雌成鳥. 與雄者不同之點只缺頭頂上之紅色耳.

4. Chrysophlegma Styani, Sp. n. 海南黃啄木

與C. wrayi 及 C. ricketti極為近緣.與後者不同之點在其外列撥風之末部一律黑色,與前種同.而其暗褐栗色之頭頂及塵色之下體,與C. ricketti相似,又一望而可與C. wrayi區別.

J. W: 虹彩暗朱;嘴塵黑色,下顎基部青色;足橄欖綠.

全長11.5英寸;嘴峯1.65英寸;翼 6 英寸;尾4.5英寸;跗蹠1.05英寸.

雌成鳥　其頰部栗色而非如雄鳥之作白色者.

5. Lepocestes hainanus, sp. n. 海南赭啄木

雄成鳥　與L. sinensis Rickett極為相緣,而以翕部之暗色相類似,但下背及腰部羽毛暗褐,尖端棕色,永無鵝黃色之條紋;腮及喉更為棕色;體下部較為深暗,而脊部及下尾筒一律無條紋之痕跡.翼及尾之黑紋寬闊而為數不多. J. W: 虹彩褐色,嘴稻草黃;足汙黑褐.

全長10英寸;嘴峯1.75英寸;翼5.3英寸;尾3.2英寸;跗蹠1.05英寸.

6. Nycticorax magnifica, sp. n. 海南夜鷺

雄成鳥 與非洲之 N. leuconotus (Wagl.) 極爲近緣,惟有下列諸異點:——背部及翼皆純褐,下背之羽毛其中有許多于近末端一部有橢圓之白色斑點;眼後以至黑羽冠之基部,有一白帶紋直貫之,羽冠長約三英寸;腮喉及頸側之前部皆白;頸側之後部栗色;前頸中部暗赤褐,兩側概有黑色之邊緣;其餘體下部概白色而有不規則的寬闊的赤褐色邊緣;大腿部暗赤褐.J.W.:虹彩褐色;圍眼皮及嘴基部硫磺色;嘴黑;足豆青.

全長約20英寸;嘴峯3.1英寸;翼11.9英寸;尾4.9英寸;跗蹠2.95英寸.

此美麗之品種與現世所知各種皆不甚近緣;體下部色彩與 Gorsachius melanolophus 極相似.

7. Gennaeus whitehead, sp. n. 海南白鷴

雄鳥 與 G.nycthemerus 極爲近緣,但有數重要之特點區別之.

雄成鳥 上頸及上翕全白;下翕,背,腰,較短之上尾筒,翼及覆雨羽每根羽毛其內外兩瓣之先端皆黑緣,成爲矢狀斑,愈近尾部,闊度愈增,而許多之羽毛亦飾以窄狹之黑色邊緣,較長之上尾筒及次列撥風羽更連續的,顯著的,着以矢頭狀斑,初列撥風羽黑而着以寬闊之斜行白斑,中央尾羽幾純白;第二第三雙白外瓣有斜行之黑帶紋,寬約半英寸;末後一對,其內瓣亦有不規則之黑斑;其餘各雙白色,兩瓣皆有寬闊之斜行黑帶紋,成爲不規則之矢頭狀花式.J.W:——虹彩褐黃色;肉垂及面側皮膚朱紅色;嘴青白,足珊瑚紅.

全長35英寸;翼9.4英寸;尾20英寸;跗蹠3.15英寸.

雌成鳥 與 G. andersoni 之雌鳥極相似,但色較深暗,背部頸部及翕部羽毛大多數黑而有寬闊之白色羽幹斑;體下部以至下尾筒亦然,惟有寬闊之白色中間部;外側尾羽暗栗而有朦朧之黑色蟲樣斑.J.W:虹彩淡褐;上顎青褐,下部汙綠色;面皮裸出部紅色;腿,足鮮朱紅色.

武昌害蟲誌略

(續第四卷第三期)

張 德 輿

九. 天 蛾 科 Sphingidæ.

44. 條背天蛾 Theretra (Chaerocampa) Oidenlandiae F.

別名: 天蛾.

採集: 七月於武昌南湖.

形 態

成蟲: 體大色灰褐,稍帶綠色,頭部大,複眼亦大,觸角短壯而末端頗細尖稍曲,胸部之側生灰白色毛,腹圓筒形,末端尖細,背面中央縱走二條白線,側面橙黃色,兼淡綠褐,前翅成三角形,綠黑褐色,由後緣中央向前緣與外緣之接點斜走一黃白帶,其兩側有一黑褐帶間帶黃白,與外緣之間,有一條黑褐波線斜走,更於前緣中央近黑褐帶處生一小黑點,後翅小於前翅,色灰黃,其中央有褐色廣帶,外緣黑褐色,體長一寸三分,翅開展約二寸四分.

卵: 圓形.

幼蟲: 體黑,背面黃,有黃紅色斑紋,尾端有一尾角,體長幼二寸八分,常食芋等之葉,故一名芋蟲.

蛹: 圓筒形,體黑褐,背面稍彎突.

生活史: 每年發生一次,幼蟲九月上旬老熟後入土,經一星期成蛹,經過冬日,至翌年六七月間羽化,產卵於心葉上,孵化爲幼蟲,於七八月間加害作

物,成蟲產卵多在黃昏時候.

被害物: 黑芋,甘藷等.

防治法:

1.隨時捕殺頗大而易注目之幼蟲.

2,掘殺土中越冬蛹.

3.噴撒砒酸鉛液.

4.以捕蟲網捕殺成蟲或用誘蛾燈誘殺.

45.面形天蛾 Acherontia stex, Moore.

別名: 人面蛾.

採集: 七月於武昌南湖.

形　　態

成蟲: 體形肥大,黑褐色,前胸背部有眉紋及目紋,恰似人面形之斑紋,故名,腹部黃,每環節有黑色粗橫帶,前翅黑褐,鵝絨狀,有多數鋸齒狀橫紋,後翅暗黃,有二並行之黑帶,前後兩翅裏面黃色,具二三條黑線,體長約一寸半,展翅闊約三寸半.

卵: 橢圓形,淡綠色.

幼蟲: 老熟時長三四寸,通常多綠褐色,有白點,兩側有斜行線,尾角長大,色彩常變.

蛹: 色黑褐,長約一寸六分.

生活史: 每年發生一次或二次,以蛹居於地下越冬,七月間第一次蛾出現,九月羽化第二次成蟲,幼蟲期不規則,卵產於葉裏.

被害物: 馬鈴薯,茄子,胡麻等.

防治法: 與前種同.

46.銀星天蛾 Parum Colligata Wk.

採集: 六月下旬於武昌洪山.

形 態

成蟲: 翅綠褐,前翅底有三角形灰白紋,又稍近三分之一處有灰白色一橫帶,外緣有一橫帶,與灰白帶顯然分界,中脉上有一褐色縱條,縱條中央具一銀色紋,翅之外緣有半月形灰白紋,其內色黑,第六第七室有一綠褐紋,而在第七室者爲新月形,內側白色,更於前緣三分之二處有一褐色紋,兩側色淡,近於後翅之內緣角有黑褐色寬橫紋,前後兩側白色綜觀全翅裏面斑紋與表面雖近似,而後翅近中央有一黑褐縱線,體軀灰色,胸背兩側有褐色毛塊,但♀較♂帶青味,體長雌雄約一寸,翅展闊約二寸一分至二寸二分.

被害物: 構葉.

防治法:

1. 人工捕殺其成蟲及幼蟲.

2. 砒酸鉛液毒殺.

47. 桃蠋蛾 Marumba gaschkewi-tschi Brem.

別名: 桃天蛾或桃雀.

採集: 六月於武昌楊園甲桃園.

形 態

成蟲: 體黃褐,胸部有一條褐綠紋,腹部紫赤,胸背有濃暗條,前翅黃褐色,有多數濃色之屈曲橫線,後翅桃紅色,外緣暗褐,近內緣處有二黃紋,體長一寸二分,展翅二寸五分至三寸.

幼蟲: 黃白色,老熟時長約二寸七八分,全身密布白色小顆粒,體側有黃綠色之顆粒斜條七個,尾端有角,長約三分.

生活史: 每年發生一二次,以蛹蟄伏土中越冬,五六月間羽化爲蛾,產卵於葉裏,幼蟲就葉取食,長成時入土化蛹.

被害物: 桃櫻等.

防治法: 與前種同.

48. 小天蛾 Theretra (Chaerocampa) Nessus, Moore.

採集: 六月於武昌南湖.

形　態

成蟲: 體長約一寸二分,展翅闊約二寸二分,翅黃褐,前翅外緣之一半褐色,中室具黑點,中央有寬暗黑色一斜條,由近於翅底起展於翅端,其下方色灰黃,中間有暗色之一線,更於外側有三條暗色線相合於翅端,緣毛稍帶紅色,後翅色黑,內緣灰黃色,由此出一同色橫紋,更於其紋內現一細暗色線,緣毛灰白,裏面黃褐,頭及胸背兩側色灰白,近中央縱走二條黃赤線,腹背線雖不明瞭,然能認出暗色線三條,兩側大黃褐條放出金光,氣門黑色,脚色灰白.

被害物: 葡萄野山藥等之葉.

防治法: 與前種同.

49. 諸蠋蛾 Proctoparce Convolvuli, L.

採集: 七月於武昌南湖.

形　態

成蟲: 體長約一寸半,展翅約二寸二分,體灰褐,眼綠,觸角淡灰,為鞭狀,腹肥大,尾尖,背面列生黑白赤三色之毛,呈環狀斑,前翅有灰褐,黑灰等色之紋條,且具灰色腎狀紋,其中央暗色,近於外緣處有犬牙黑色波狀紋,內側灰色,後翅暗灰色,有黑色四橫線,腹部列有黑白赤三色橫紋,恰如蝦之腹部.

幼蟲: 色暗綠者,體旁之斜線紋分黃黑二種,尾端尾角黃色,氣孔赤色,背面有黑線紋二條,暗褐者,體旁有黃褐之斜線紋七條,氣孔黑色,繞以黃環,尾端具黑色之尾角,此二種幼蟲,其背部之正中,皆有褐色直線紋一條.

蛹：暗褐色有光澤，與卵皆能越冬，至翌夏則羽化為蛾.

被害物：甘藷，朝顏，旋花等.

防治法：與前種同.

50. 葡蝎蛾 L. Theretra japonica Kirby.

採集：六月於武昌南湖.

形 態

成蟲：近似小天蛾，前翅斑紋與小天蛾同，僅後翅表面一半黃色，裏面及腹背橙褐色，展翅約二寸半，多現於夏季.

幼蟲：棲於葡萄.

被害物：葡萄.

防除法：

1. 人工捕殺其成蟲和幼蟲.

2. 幼蟲猖獗時噴以波爾多液.

51. 寶石蛾 Ampelophaga rubiginosa Brem. et Grey.

採集：九月於武昌南湖.

形 態

成蟲：體形大，觸角灰色，為櫛齒狀，體前半濃褐，腹部圓錐形，背黑，腹黃褐，體之全背面有一條縱貫之灰色線，前翅褐兼紫，有四條濃褐橫線，後翅暗黑，裏面黃褐，體長約一寸至一寸三分，展翅闊約二寸五分.

卵：黃綠色，附着於葉下.

幼蟲：綠色，腹面有赤褐紋，背線及側線，幷各節之斜紋，皆赤褐，且各節有七條如皺之橫紋，脚黃褐，尾端有尾角，老熟時長約七寸七分，初出幼蟲有長形尾角，黑色.

蛹: 灰色,取落葉造爲粗繭而越冬.

被害物: 葡萄之花葉.

防治法: 與前種同.

52. 入幕賓 Smerinthus Ocellatus, L.

採集: 八月於武昌南湖.

形　態

成蟲: 體形大,爲圓錐狀,褐色.觸角羽狀.頭及前胸,帶灰色,中胸節後胸節及腹部,帶綠色.前翅暗綠兼灰,或暗褐兼灰色,中央部色濃,有灰色半月紋,外緣有濃色雲狀紋,此紋近旁更有二橫紋,全翅呈三角形.後翅爲卵圓形,中央桃紅色而有藍色大眼紋,紋中央暗色,外環黑.體長♀♂約一寸四分,展翅闊約三寸.此蛾常飛入室內,故名.

幼蟲: 綠色,形圓長,體大,散布白色之粒狀突起,列生於兩旁者獨大.頭部青綠,尾角亦綠,長成時長約二寸半.

蛹: 黑褐色,尾端有短突起.

生活史: 每年發生一次,幼蟲發生於七月間,九月間老熟入地化蛹而越冬,翌年六月間化蛾,產卵於葉陰.

被害物: 櫻,柳,等之葉.

防治法: 與前種同.

十. 天社蛾科 Notodonidae

53. 天社蛾 Sturopus fagi, L.

採集: 七月中旬於武昌洪山.

形　態

成蟲: 體長約七分,展翅闊約一寸六分.體及翅背濃灰兼褐,密被輭毛.觸

角羽狀具灰黃色之櫛齒無口吻.前翅有灰黃色波狀線與灰褐色斑點,內緣稍黃.後翅有一灰黃帶.

幼蟲: 體赤褐,尾端粗,有棍棒狀尾形物二枚,體長約一寸二分,其尾常好上舉,稱曰虓蟲.

被害物: 冬青,柳,槭等之葉.

防治法:

1. 日間捕殺成蟲.

2. 噴撒砒酸鉛及除蟲菊合劑毒殺幼蟲,或連枝剪取燒殺之.

3. 振動枝梢,候幼蟲落下後集而殺之.

54. 苹果天社蛾 Phalera (Trisula) flavescens Brem, et Grey.

別名: 櫻毛蟲,舟形蟲,舉尾毛蟲.

採集: 八月下旬於武昌油坊嶺.

形　態

成蟲: 體色黃白,前翅灰黃,帶灰白色光澤,翅底有大圓紋,由後緣角至前緣角,有暗色斑點紋.♀蛾觸角絲狀,♂蛾呈櫛齒狀,體長七分餘,展翅闊約一寸四分至二寸.

卵: 圓形,淡黃色,多集成塊.

幼蟲: 體長約一寸八分,頭黑,身暗黑,帶紫褐色,通體疏生黃灰色之毛.

蛹: 紫黑色.

生活史: 每年發生一次,以蛹潛居土內越冬,翌年八月上旬羽化爲成蟲.在葉裏產卵,量約二百粒左右,約經十日,孵化爲幼蟲,九月中下旬老熟,入土化蛹.

被害物: 苹果,李,桃,櫻,杏,梨,榆,櫟,枇杷等.

防治法:

1.潛伏根際土中之蛹,冬季掘殺之.

2.震落幼蟲於地上集殺之.

3.噴撒砒酸鉛及除蟲菊合劑.

55.柳芋蟲 Dicranura felina, But.

採集: 四月下旬於武昌寶積菴.

形　　態

成蟲: 體翅背灰白,頭胸部略黃,胸部有褐紋,翅沿外緣有黑點,前翅有灰褐之飛白紋,後翅中央有斑紋,半月形,體長約八分,展翅闊約二寸.

幼蟲: 體黃綠,背面有赤白色直紋二條,第三節特隆起,最後環節有二長突起,體長約一寸半.

生活史: 幼蟲五月間出現,六月間造繭,後化蛹越冬,翌年四月間化蛾產卵,每年發生一次.

被害物: 柳,白楊等之葉.

防治法: 與前種同.

56.木理蛾 Dicranura vinula, L.

採集: 五月中旬於武昌尙武橋.

形　　態

成蟲: 體翅皆灰白,胸腹背有黑紋,前翅具黑色木理樣之斑紋,在外緣室者特顯明,翅脈黃色,後翅缺木理樣斑紋,具く形暗黑紋於横脉上沿,於外緣並列七八個黑紋,體長♀♂七分,開張一寸八分五厘.

幼蟲: 體肥大,綠色,背上一部褐色,尾端有二長尾.

被害物: 柳葉.

防治法: 與前種同.

57. 柳蛅 Pygaera anachoreta, F.

採集: 四月中旬於武昌南湖.

形態

成蟲: 體翅皆灰褐,前翅有二條白橫線及翅端濃褐色三角斑,其中央赤黃.又三角斑下方有暗褐色紋,後翅灰色,中央具不明顯之一濃色帶,裏面一橫帶貫前後翅,後翅灰白,散在褐色小點,頭與胸背之縱條,色黑褐,體長雌雄約五分,展翅闊約一寸二分.

幼蟲: 體黃褐,雜生黑褐,白色等毛,體長約一寸.

被害物: 柳葉.

防治法: 與前種同.

58. 貍蚄 Phalera flavescens, Brem.

採集: 八月下旬於武昌卓刀泉.

形態

成蟲: 體長♀約八分,♂約六分,展翅♀闊約一寸八分,♂闊約一寸三分.體色黃白,翅亦黃白,前翅有灰白與灰黃之波狀線及一個灰白斑紋,後翅無紋.

幼蟲: 體黑紫,有長白毛,體長約一寸四五分.

生活史: 幼蟲八月間出現,九月間入土化蛹而越冬,翌年八月間化蛾卽產卵,一年僅發生一次.

被害物: 櫻,桑,櫟,梨,榆等之葉.

防治法: 與前種同.

59. 櫟蛅 Phalera sp.

採集: 六月上旬於武昌青山.

形態

成蟲: 體茶褐,翅灰白,前翅有二條黑色曲線紋,邊緣黑,近翅有尖橢圓形黃紋,體長約七分,展翅約一寸八分.

幼蟲: 體色黑,背上有赤褐線紋,體表散列淡褐兼灰色之長毛,體長約二寸.

生活史: 幼蟲出現於七月間,羣棲於櫟樹,食葉,至八月終,由樹幹漸下,潛入土中化蛹,至翌年五六月間化蛾,產卵,復孵化爲幼蟲.

被害物: 櫟樹之葉.

防治法:

1.掘取潛伏土中之蛹殺之.

2.捕殺其成蟲和幼蟲.

3.保護其天敵寄生蜂及寄生蠅類.

十一. 蠶蛾科 Bombycidæ

60. 野蠶蛾 Bombyx mandalina, Moare.

採集: 六月中旬於武昌省辦桑園.

形態

成蟲: 酷似家蠶蛾,惟體軀灰褐,翅亦灰褐,頭部小,複眼黑,觸角櫛齒狀,色與體同,前翅爲三角形,外緣上部有濃黑褐色半球狀之凹,故外緣與前緣相接交爲圓頭凸起之狀,翅面由前緣向後緣有二個濃灰褐色帶,與一條濃灰褐色線,後翅形小,色較前翅濃,其後緣有藍黑色長紋,上橫白線二條.♀蛾體長六分,且肥大,展翅闊約一寸五分,觸角櫛齒短小;♂蛾體長五分,翅開展約一寸二分,觸角櫛齒稍長,且♂蛾全身之色,皆較♀蛾濃厚.

卵: 橢圓扁平,色淡灰黃.

幼蟲: 體暗灰褐色,第二第三軀節頗腫隆,其背面左右呈黑赤斑紋,第五軀節背面有二個新月形赤褐色斑紋而包黑點,第八節背面有茶褐色之圓紋散在數白點,第十一節背面具一肉角,自初眠起至第五齡,體軀前部五軀節,背面色灰白,或僅白色,第一至第五軀節腹面色與背面略同,第六軀節以下之腹面色灰白而無斑紋.

蛹: 體外有長橢圓或紡錘形之繭,繭色淡黃,長一寸,幅四分,質粗而堅,固着於桑柄及桑枝.

被害物　桑葉.

防治法:

1.搜索冬期附着於枝幹之蛹燒殺之,並須行桑園的冬季清潔法.

2.早春巡視桑園,搜殺幼蟲.

3.人工捕殺其成蟲,或以燈火誘殺之.

61.梅蛅蟖 Clisiocampa neustra, L.

採集: 七月於武昌官園.

形　態

成蟲: ♀♂ 體色有別,♀體及翅皆赤褐色,前翅中央有濃色之闊條紋,兩旁呈黃色,♂之翅及體皆黃色,前翅中央有二赤褐色斜紋,緣毛亦赤褐色,體長約六七分,開張約一寸二三分.

卵: 灰白色,圓筒形,數百枚集於一處,附枝上如環.

幼蟲: 初生時體黑,外被黃褐毛,老熟時長約寸半,背藍色,腹黑色,兩旁有赤褐條紋,背上有赤褐線紋,每節生黑疣,由此叢生黑粳毛,頭部藍有一對黑紋.

蛹: 茶褐色,隱於卷葉中或軒下及壁隅而張作天幕狀由白絲製成之白繭中.

被害物: 柳梅及他種薔薇科植物.

防治法:

1.冬日覓卵塊殺之.

2.發現幼蟲時,採其網巢而焚之.

3.以捕蟲網或誘蛾燈捕殺其成蟲.

十二. 天蠶蛾科 Saturnidae

62.栗毛蟲 Dictyoploca (Coligula) japonica Moor.

別名: 樟蠶.

採集: 九月中旬於武昌洪山.

形　態

成蟲: 前翅與後翅均有眼狀斑紋,體長一寸一分,展翅闊約三寸五分至四寸餘.

卵: 色灰褐,圓筒形.

幼蟲: 老熟時長三寸五分,體黃綠,叢生白色細長毛.

蛹: 繭網狀,呈褐色,可透視其內部之蛹.

生活史: 一年發生一次,以卵越冬,翌年五月間孵化,幼蟲初齡羣居害葉,老熟則分散,六七月結繭而化蛹,九月間羽化爲成蟲,產卵於樹皮上.

被害物: 栗苹果白楊,胡桃,樟,漆,櫨等.

防治法:

1.摘取羣居幼蟲之枝而燒之.

2.震落老熟幼蟲而捕殺之.

3.撒布砒酸鉛波爾多液.

63.樸蠶 Rhodia fugax, Butl.

採集:　十月於武昌青山.

形　態

成蟲:　體翅♀者黃綠色,♂者赤褐色.觸角櫛齒狀,♀短♂長,♀♂前翅近翅尖處具半月形黑褐紋,近外緣有灰褐斜行帶紋二,中央部有一透明之橢圓點;後翅近外緣有波狀之灰褐帶二條,以褐色環紋包之,並有一透明點.體長♀一寸♂七分,展翅♀闊三寸,♂闊二寸七分.

幼蟲:　體黃綠,有黃色藍色隆起,長約二寸.

生活史:　每年發生一次,六月間化蛹,十月間羽化成蟲,產卵孵化,幼蟲四月間害食櫟枹等之葉.

被害物:　櫟,枹等之葉.

防治法:　與前種同.

63. 櫸蠶 Saturnia boisduvalii, Evers.

採集:　十月於武昌青山.

形　態

成蟲:　體茶褐色,胸部前緣與腹部微黃色.觸角櫛齒狀,翅灰褐,前後兩翅均有包被半月形之白紋,更有赤褐之橢圓紋.體長♀約九分,♂七分.開張♀約三寸六分,♂約三寸.

幼蟲:　體鮮綠,背面有黑直紋與紅斑紋,疏生細白毛.體長約二寸.

生活史:　每年發生一次,幼蟲六月間出現爲害,九十月間造繭爲蛹,十月間羽化爲成蟲.

被害物:　櫸,梨,漫疏等之葉.

防治法:　與前種同.

65. 燕尾蛾 Tropaea selene, Hub.

採集: 四月下旬於武昌洪山.

形 態

成蟲: 體長約一寸,展翅闊約三寸四分,♂小於♀,體翅皆淡綠,有白毛,觸角羽狀茶褐色,胸部前緣赤褐,前翅前緣赤褐,與胸背前緣色相混,中央有一黃點,後翅中央亦有一黃點,其外緣下端甚延長作燕尾狀,脚之脛節下赤褐.

幼蟲: 體綠色,簇生長白毛,體長約三寸.

蛹: 蛹色黑褐,被赤褐之厚繭.

生活史: 每年發生一次,以蛹越冬,翌年四月間化蛾,產卵孵化爲幼蟲,六月間爲害,七月間綴葉爲蛹.

被害物: 赤楊,馬醉木等之葉.

防治法:

1.冬季努力清潔園地,並搜燒綴葉之蛹.

2.人工捕殺其成蟲和幼蟲.

3.噴射波爾多液.

66. 樗蠶 Attacus Cynthia, Drury.

採集: 九月於武昌卓刀泉.

形 態

成蟲: 體大,色灰白,近翅底之大半色濃,在各翅中央有一枚透明半月形斑紋,並多有淡紅色之部分.

幼蟲: 體綠色.

被害物: 樗,黃蘗等之葉.

防治法:

1.人工捕殺其成蟲和幼蟲.

2.噴以砒酸鉛波爾多液.

十三. 捲葉蛾科 Tortricidæ

67. 捲蛾 Cacaecia Crataegan, Hb.

別名: 捲葉蛾.

採集: 六月下旬於武昌桑園.

形　態

成蟲: ♀體長約三分半.♂體長約三分.♀體頭胸兩部灰褐色.胸部有褐毛.腹部灰褐.前翅暗黃帶褐.具數條橫行之暗褐線.並有濃褐斑.後翅呈淡灰黃色.與帶鮮橙色之二部.♂體頭胸兩部紫褐.胸部之毛呈鼠色.腹部暗灰帶黃.前翅紫褐.具多數波狀細線紋.中央有二暗紫褐斑紋.後翅呈淡灰色與淡灰橙色之二部.

卵: 橢圓形.色如桑葚.

幼蟲: 幼蟲曰捲葉蟲.體圓長.黃綠色.頭部濃褐.體長約八分半.出見於四五月間.

蛹: 由幼蟲吐絲捲葉造巢.至六月間化蛹.

生活史: 每年發生一次.越冬幼蟲.至四五月間活動.六月間化蛹.經一星期羽化為成蟲.

被害物: 桑之嫩葉.

防治法:

1. 摘取燒却被害變色之桑芽.
2. 冬季燒燬秋間束草於枝以供產卵之草.
3. 保護及利用寄生蜂.

68. 桑蛾 Exartema morivora Mats.

採集: 六月於武昌桑園.

形 態

成蟲: 體色暗黑,前翅帶灰藍色,基部及近翅頂處有白色帶及雜亂小點,後翅暗褐色,愈向外方色愈濃,體長約二分,展翅闊約五分.

卵: 扁球形,透明.

幼蟲: 頭黑,胸腹暗綠或淡褐,遍體散布疣狀突起,各有短毛一本.

蛹: 色褐,被有薄繭.

生活史: 每年發生一次,幼蟲越冬,活動於翌年四五月間,桑芽被害即枯死,如遭霜害.五月下旬化蛹,六月中旬至七月上旬羽化成蟲,產卵於葉裏,孵化之幼蟲,潛伏於老樹皮裂隙下或草束內越冬.

被害物: 桑.

防治法: 與前種同.

69. 蜜柑捲葉蟲 Cacaecia Citrinella Shirak.

採集: 六月於武昌洪山.

形 態

成蟲: 體色淡灰兼褐,長約二分五,展翅闊約四分五厘.

幼蟲: 老熟時頭部及第一節之硬皮板黑褐色,餘綠色,長約四分.

蛹: 帶綠褐色,微扁平形,長約二分七厘.

生活史: 每年發生二三次,以六月間為最盛,幼蟲常捲曲心葉二三枚或一葉,且居且食,長成後結薄繭化蛹於其中.

被害物: 柑橘,梔子等.

防治法:

1. 摘取被害之葉燒殺其幼蟲,於少數發生時.

2. 噴射砒酸鉛波爾多液,於極盛時.

70. 桃捲蛾 Astura Punctiferalis. Guen.

採集: 六月於武昌紙坊.

形 態

成蟲: 體長約四分展翅闊約九分半形細長濃黃色散布褐色小點前後翅背略呈三角形亦濃黃色並散布褐黑點.

幼蟲: 體長約七分呈紡錘形黃色頭色褐各體節有數箇淡褐紋.

生活史: 一年發生二次以幼蟲越冬成蟲於六月第一次發生八月發生第二次成蟲.

被害物: 蠹食桃實.

防治法:

1.冬耕果園土壤以殺其越冬蟲.

2.幼蟲發生時噴撒硫酸尼古丁液.

3.套袋於果實上預防其產卵.

4.隨時摘取被害果實並檢拾被害果實一併燒却.

71.桃姬食心蟲 Carposina Sasokii Mats.

採集: 七月於武昌紙坊.

形 態

成蟲: 體長約二分餘展翅闊約五分爲灰黃色小蛾前翅灰黃色帶鉛色光澤前緣中央有藍色塊四個全翅中央亦有二個後翅灰黑色微帶紫.

卵: 色橙黃球形.

幼蟲: 老熟時長約四五分緋色背線部分色特濃頭部背板褐色體各節有數枚顆粒各生一二本褐毛以蟲眼鏡始見.

蛹: 濃褐色長二分五厘繭有兩型扁平者越冬繭紡錘形者化蛹繭.

生活史: 每年發生二三次以長成幼蟲潛伏土內繭中越年五月下旬第一回成蟲出現七月中旬第二回成蟲出現八月下旬至九月上旬第三回成

蟲出現於桃實縫溝上,產卵孵化之幼蟲,含人果實內並排泄蟲糞於果外.

被害物: 桃,杏,梨,苹果等.

防治法: 與前種同.

72. 梨姬食心蟲 Laspeyresia molesta Busck.

採集: 五月於武昌楊開甲桃園.

形態

成蟲: 體長一二分,翅展開闊約三四分,頭部呈暗灰色,觸角鞭狀,前翅煤黑色,前緣有七對灰色帶紋,並有不顯明短斜線多數,後翅暗褐色,生緣毛如前翅,腹背黑褐,腹面銀白色.

卵: 橢圓形,乳白色,中部稍隆起,卵面有網狀紋理,為半透明體.

幼蟲: 老熟時長約二三分,初期乳白色,三齡以後變為淡紅色,頭部褐色,略扁平.

蛹: 黃褐色,圓筒形,約二分長,繭呈紡綞形,絹絲灰白色,表面灰黑色,含有塵芥及樹屑之故.

生活史: 每年因氣候發生三至五次,以幼蟲越冬,翌春二三月間化蛹,四月上中旬羽化為成蟲,害桃櫻梅等之新梢,至八月間加害梨果,完成一世代,春季約四十日,夏季十餘日,通常於黃昏時產卵於桃梅等之葉裏及梨之果面上,幼蟲老熟時於枝幹粗皮之隙間結繭化蛹,於八月下旬至九月上旬出現最後一次成蟲.

被害物: 梨,櫻,李,桃,苹果,扁桃,油桃,榲桲,枇杷,海棠等.

防治法:

1. 冬季剝除樹幹上老皮,並用八倍稀釋石油乳劑液洗滌消毒.

2. 剪取受害作物之枝幹等燒滅其幼蟲.

3. 果實掛袋避免產卵其上.

4.摘取被害果及落果燒燬之.

5.時時撒布煙草石灰液,除蟲菊石鹼液,或砒酸液於四月上旬至六月上旬之際,六月下旬以硫酸尼古丁之稀釋液或石灰硫黃之稀釋液撒之.

6.利用作物誘殺或用燈火及毒餌誘殺其成蟲.

73.苹果捲葉蟲 Tmetocera ocellana (F.) Schiff.

別名: 桼蝗.

採集: 七月上旬於武昌楊關甲桃園.

形　態

成蟲: 暗灰色,前翅白色,中央有灰色波狀線,翅底暗黑,近後緣角有稍呈三角形之黑褐紋,外緣有灰藍色部分,其中央有黑紋列七條,後翅暗灰,頭暗黑,胸背亦暗黑,腹部有光澤,灰黃色,體長約二分,展翅闊約五分.

卵: 微小,扁平形.

幼蟲: 老熟時長四五分,色桂皮褐,頭背板,腳,皆黑褐,體呈紡錘形,各環節皆有疣狀突起六至八,各突起生一細毛.

蛹: 管狀,幼蟲老熟時吐絲纏葉為管狀巢,蛹居其中.

生活史: 每年發生一次,以未長成之幼蟲越冬,多潛伏於樹皮間隙或枝上芽之附近,四五月間活動,以新芽為食,並吐絲纏綴,至結實時蛀入幼果,或鑽入嫩枝中,且食且息,幼蟲期約六七星期化蛹,經十日羽化為成蟲,再一星期後於葉裏產卵,經七天至十天孵化為幼蟲,害食葉肉,最後則營絲質小管於葉之中肋上而居之,是越冬準備,於八九月間已告完成矣.

被害物: 苹果,桃,李,櫻桃,赤楊,落葉松,須具利等.

防治法:

1.冬季努力搜殺樹皮及葉片中之越冬蟲.

2.採集捲葉及幼蟲之巢焚燬之,並用燈火誘殺其成蟲.

3.早春噴射石灰硫黃加用砒酸鉛除蟲菊石鹼或尼古丁石鹼稀釋液.

74. 李捲蛾 Pandemis sinapina, But.

採集: 七月於武昌青山.

形　態

成蟲: 體長約三分七八厘.開張約一寸.體稍肥大,長橢圓形,橙黃色.前翅黃色,有網紋,色黃褐,中央有二斜線,赤褐色.後翅色暗灰.

幼蟲: 能越冬.色綠,各體節有疣狀突起,每突起綴一短毛.初食嫩葉.化蛹時則捲葉作繭.

被害物: 苹果,李,梨,櫻桃等.

防治法: 與前種同.

75.大豆莢蠹蟲 Laspeyresia (Eucosma) glycinivorella Mats.

採集: 五月於武昌寶積菴敬樂園.

形　態

成蟲: 前翅色灰黑,翅前緣有黃色及黑色之短線相間排列,並有二條粗曲線在其中央部分.後翅色暗黑.體長約二分.開張約四五分.

卵: 扁圓形,黃白色.

幼蟲: 初孵化時白色,老熟時帶肉色,頭部褐色.長約三分.

生活史: 每年發生一次.幼蟲越冬,翌年化蛹,八月間羽化為成蟲,在大豆嫩莢上產卵,孵化之幼蟲,害食莢內豆粒,長成於九十月間,越冬卽潛居於地中之繭內.

被害物: 大豆.

防治法:

1.冬季利用雙犂深耕法以凍或壓毀滅其幼蟲.

2. 實行輪栽法使其翌年失所食息.

3. 栽培於成蟲發生前卽可收穫之早熟種.

4. 採取或以蟲網捕之.

76. 小豆莢蠹蟲 Thiodia azukivora Mats.

採集: 八月中旬於武昌寶積菴.

形　態

成蟲: 前翅灰白,外緣橫列五六個黑點,後緣近翅底有顯明褐紋,含蛾後翅前緣基部,有毛束,筆狀,靜止則縱置,與前緣平行,體長約二分,展翅闊約六分.

幼蟲: 初孵化時色白,後變淡黃,頭部褐色,各節有黃褐色之疣狀突起,老熟時長約三分餘.

生活史: 每年發生一次或二次,幼蟲長成時則潛入地中爲蛹而越冬,翌年化蛾產卵,至八九月發生幼蟲,蛀入小豆莢及豆粒內而食息.

被害物: 小豆.

防治法: 與前種同.

77. 引絲捲葉蟲 Cacaecia Crataegana Hb.

採集: 七月於武昌教育學院.

形　態

成蟲: 前翅灰褐色,近翅底後緣有斑紋,褐濃色,中央近前緣部分有帶,亦濃褐色,翅尖有同色斑紋,體長約三分六釐,開張約八分二釐.

卵: 橢圓形,灰黃色.

幼蟲: 頭部黑褐色,背面黃綠色,腹面色淡黃,體各節有黑色疣狀突起,各生一短毛,老熟時八分多長.

生活史: 每年發生一次以卵越年翌春孵化蛀入新芽為害六月上旬長成化蛹隨即羽化為成蟲於枝上產卵排成鱗狀塊初色白後變黑並有膠質物包被卵塊以防損害.

被害物: 白楊苹果梨桑槲樹等.

防治法:

1. 震落幼蟲捕殺之.

2. 噴射毒劑如砒酸鉛巴黎綠風化石灰等殺之.

3. 冬採卵塊飼養家禽六七月以捕蟲網或誘蛾燈殺其成蟲.

4. 保護其天敵如寄生蜂類.

78. 筒捲蛾 Phycis indigenella Zell.

採集: 七月於武昌青山.

形態

成蟲: 頭灰黑胸背亦灰黑眼黑色腹部暗灰色前翅灰黑中央有三角形灰色紋紋旁又有二黑點翅底灰白後翅暗色外緣稍呈濃色與前翅皆有緣毛體長約三分.

幼蟲: 體長約七分餘圓長形暗褐色或暗灰帶褐頭黑全體各環節約有十二箇小黑疣各疣有一灰褐短毛胸脚黑褐色多短毛.

被害物: 梨李櫻桃苹果等.

防治法:

1. 採集捲葉及幼蟲之巢燬却之.

2. 冬季搜殺樹皮及葉片中之越冬蟲.

3. 以蟲網捕殺其成蟲或用燈火燒殺之.

4. 噴撒尼古丁石鹼除蟲菊石鹼或用石灰硫黃加用砒酸鉛液.

79. 米黑蟲 Algessa dimidiata, Haw.

採集: 七月於武昌敬樂園.

形 態

成蟲: 體長約四分,體色黃褐,翅亦黃褐,前翅中央有不明瞭之濃色斑,前緣列生小黃紋,外緣有濃色波狀線.

幼蟲: 細長形,黑褐色,頭部赤褐,全體表面多皺,疏被黃毛,長約七分,常吐絲牽合米粒造巢,且食且息,五六月至八九月間,約發生二次.

被害物: 米,麥,粟粒等.

防治法:

1.倉庫須保持清凉,或密閉倉庫,施行二硫化炭素燻蒸,或施行克洛羅勞克林燻煙法.

2.使穀米等充分乾燥,或放入石腦油精於種用穀粒中.

3.篩取幼蟲於冬期而殺之.

80. 餅蛾 Asopia fimbrialis, Hub.

採集: 六月於武昌寶積菴.

形 態

成蟲: 體長約三分,展翅闊約七分,體色紫褐,翅亦紫褐,前翅有暗黃色細橫線二條,後翅亦有二條暗黃色細橫線,前後翅各分翅面為三區.

幼蟲: 體灰白色,頭赤褐,各體節疏生長毛,長約五分,造筒狀巢於穀粉及餅餌中,且食且息.

被害物: 穀粉,餅餌等.

防治法:

1.殺死細眼篩上之蟲於秋冬之際.

2.充分乾燥穀粉及餅餌等.

3.保持貯器清凉及清潔,並密閉貯器,施行二硫化炭素燻蒸法. (未完)

數學家姓名錄

（續第四卷第三期）

曾昭安

I Hai〔羲和〕亦作 Hi Ho 紀元前二十七世紀　中國黃帝時人

I Hsing〔一行〕亦作 I Hang (683 {唐弘道元年}—727 {唐開元十五年十月八日}) 中國唐時僧

Iamblichus〔愛布力卡斯〕或作 Iamblichos (283—330)　希臘人　貢獻於數論

Iarník, Vojtěch〔愛尼克〕二十世紀前半期　捷克人

Ibbetson, William John〔伊貝遜〕十九世紀　英人　研究彈性物體之數理

Ibbetson, W. S.〔伊貝遜〕二十世紀前半期　英人

Ibn Aladami〔易阿拉達密〕

Ibn al Banna〔易亞班拿〕$\left(\begin{smallmatrix}1252\\1257\\1258\end{smallmatrix}—1339\right)$ 亞剌伯(現今摩洛哥〔Morocco〕)人代數學家

Ibn al-Haim〔易亞海〕$\left(\begin{smallmatrix}1352\\1355\end{smallmatrix}—1412\right)$ 埃及人

Ibn Al-Haitam〔易亞海坦〕(?—1038) 埃及人

Ibn Alhusain〔易亞休舍〕

Ibn al-Katib〔易亞卡替〕$\left(?—\begin{smallmatrix}1210\\1211\end{smallmatrix}\right)$ 亞剌伯人

Ibn al-Lubudi〔易亞琉巴第〕亦作 Yahya ibn Mohammed $\left(\begin{smallmatrix}1210\\1211\end{smallmatrix}—\begin{smallmatrix}1267\\1268\end{smallmatrix}\right)$ 亞剌伯人

Ibn al-Mejdi〔易亞麥第〕(1359—1447) 亞剌伯人

Ibn Almuncim〔易亞夢甯〕亞剌伯人

Ibn al-Saffar〔易亞蘇法〕即 Al-Saffar

Ibn al-salah〔易亞薩拉〕$\left(?-\frac{1153}{1154}\right)$ 波斯人

Ibn al-Shatir〔易亞沙提〕亦作 Ali ibn Ibrahim $\left(1034-\frac{1375}{1380}\right)$ 亞剌伯人

Ibn Alsiradsch〔易亞栖剌士〕

Ibn al-Yasimin〔易亞耶信明〕$\left(?-\frac{1203}{\text{至}1205}\right)$ 亞剌伯人

Ibn al-Zaraqala〔易亞紮卡拉〕即 Al-Zarkala

Ibn as-Samh〔易阿撒〕

Ibn Bauwab〔易波窩〕十一世紀前半期

Ibn Bedr〔易柏耳〕即 Abenbeder

Ibn Chaldun〔易蔡丹〕亦作 Ibn Khaldun (1332,5,27—1406,4,19) 亞剌伯人

Ibn Challikan〔易·卡力坎〕即 Ibn Khallikan

Ibn Esra〔易厄斯剌〕亦作 Aben-Ezra (1093—1168) 生於西班牙

Ibn Junos〔易占訥〕亦作 Ibn Junus (?—1008) 埃及人

Ibn Khaldûn〔易卡當〕即 Ibn Chaldun

Ibn Khallikan〔易·卡力坎〕亦作 Ibn Challikan (1211, 9, 22—1282, 10, 29) 亞剌伯人

Ibn Mana〔易馬那〕(1156—1242) 亞剌伯人

Ibn Mukla〔易瑟克拉〕十世紀前半期

Ibn Sina〔易信那〕即 Avicenna

Ibn Yunus〔易猶訥〕亦作 Ibn Yunos 或 Yunis 或 Ali ibn Abi Said (960—1009) 亞剌伯人 解球三角術之難題

Ibn Yunus, the younger〔易猶訥〕即 Ibn Mana

Ibrahim ibn Sinan〔伊布剌希·易信南〕(908—946)

Ibrahim ibn Yahya〔伊布剌希·易耶雅〕即 Al-Zarkali

Ichak, F.〔伊迦克〕二十世紀

Ichida Asajiro〔市田朝次郎〕二十世紀前半期 日本人

Ideler, *Christian* Ludwig〔伊得勒〕(1766—1846) 德人

Igel, B.〔伊革爾〕十九世紀後半期 奧人

Iglisch, R.〔伊格利士〕二十世紀 德人

Ignatowsky, W. von〔伊拿陶斯啓〕二十世紀 德人 著向量解析

Igurbide, J. F.〔伊究比德〕二十世紀 西班牙人

Ihlenburg, W.〔伊栁柏〕二十世紀初 德人

Ikeda Yoshiro〔池田芳郎〕二十世紀前半期 日本人

Ikin, A. E.〔伊京〕二十世紀 英人

Iliovici, G.〔易略微奇〕二十世紀前半期 法人

Illigens, E.〔壹利澤斯〕

Illing, Carl Christian〔伊令〕十八世紀末 德人

Illsung, F.〔伊松〕二十世紀前半期 德人

Imai Kentei (1718—1780) 日本人

Imamura Chisho 十七世紀 日本人

Imanuel ben Jacob〔伊曼紐爾·本·雅科布〕亦作 Emanuel ben Jacob (?—1377) 猶太人

Imchénietzky, B.〔印祉尼茲奇〕

Imshenetski, Wassili Grigorjewich〔音申涅斯奇〕 亦作 V. G. Imschenetsky (1832—1892) 俄人

Inama Sternegg, Karl Theodor von〔伊那馬·斯騰涅〕(1843—) 奧人

Ince, Edward Lindsay〔英斯〕(1891.11.30—) 英人卒埃及 研究畫法幾何學微分方程論.

Infortunatus, Johannes〔英福冊那塔〕即 Sfortunati

Inge, D.〔英治〕二十世紀前半期　英人

Ingendoh, H.〔印戎多〕二十世紀　德人

Ingersoll, Leonard Rose〔英革索爾〕(1880, 6, 1—　)美人　著熱傳導之數理理論

Ingham, A. E.〔英干〕二十世紀前半前　英人

Inghirami, G.〔英基剌米〕二十世紀前半期　法人

Inglin, C.〔印格林〕二十世紀前半期　瑞士人

Ingold, Byron〔英哥爾德〕二十世紀前半期　美人

Ingold, Louis〔英哥爾德〕二十世紀前半期　美人

Ingraham, M. H.〔英格剌安〕二十世紀前半期　美人

Ingram, A.〔音格拉〕

Ingram, J. R.〔音格拉〕十九世紀前半期

Ingram, W. H.〔音格拉〕二十世紀前半期　美人

Ingrami, G.〔音格拉密〕十九世紀末　義人

Innes, Robert T. A.〔印涅斯〕(1861, 11, 10—　)英人　研究數理天文

Ino Chukei〔伊能〕(1745—1821)日本人

Ino Tadayoshi〔伊能忠敬〕(1727正月十一日—1807四月十三日)日本人

Insolera, F.〔英索勒拉〕二十世紀　義人

Intze, O.〔英茲〕十九世紀末

Ioachimescu, A. G.〔愛奧琛麥庫〕二十世紀初　羅馬利亞人

Ionescu, I.〔愛涅斯庫〕十九世紀末　羅馬利亞人

Irwin, Frank〔愛爾溫〕二十世紀前半期　美人

Irwin, J. O.〔愛爾溫〕二十世紀　英人

Isaac ben Joseph Israeli〔以撒•本•約瑟•伊色力〕十四世紀　猶太人

Isaac ben Salom〔以撒•本•薩羅〕十世紀　埃及人

Isaac ben Sid〔以撒·本錫〕（?—1256）西班牙人

Isaacs, Charles Applewhite〔伊薩斯〕（1881, 4, 9— ）美人

Isaak Argyrus〔伊薩克·阿該刺〕十四世紀後半期

Isander, F.〔伊聖得〕十九世紀中 瑞典人

Isayama, S.〔諫山三郎〕二十世紀前半期 日本人

Isè, E.〔義塞〕十八世紀後半期 義人

Iseli, F.〔易色利〕二十世紀初 瑞士人

Isely, L.〔易色力〕十九及二十世紀 瑞士人

Isely-Delisle, L.〔易色力·得利爾〕二十世紀初 瑞士人

Isenkrahe, C.〔伊笙克刺〕二十世紀 德人

Ishâq ibn Honein〔伊沙易何奈〕亦作 Ishak ibn Hunain（?—910）亞剌伯(現今美索不達米亞)人 爲何奈易伊沙 (Honein ibn Ishâq) 之子. 譯歐氏幾何學及他數學書爲亞剌伯文

Isherwood, J. G.〔伊瑟武德〕二十世紀初 英人

Ishiguro Sinyu〔石黑信由〕(1760—或$\frac{1813}{1826}$) 日本人

Ishikawa〔石川彝〕十九世紀後半期 日本人

Ishimaru, K.〔石丸小一〕二十世紀前半期 日本人

Isidore of Miletus〔伊錫多〕亦作 Isidorus von Milet 紀元前五世紀 希臘人

Isidorus of Atheus〔以錫多〕或作 Isidoros 或 Isidorus von Alexandria 紀元前五世紀 雅典人

Isidorus of Hispalensis〔以錫多〕亦作 Isidorus of Seville 或 Isidorus von Sevilla 或 Isidore (570—636, 4, 4) 西班牙人 著辭學 (Origines) 二十卷其中第三卷爲數學.

Isomura Kittoku〔礒村吉德〕亦作 Iwamura Kittoku 十七世紀後半期 日

本人 於1684年著增補算法闕疑鈔

Israel, H.〔易斯累〕二十世紀前半期 德人

Israel, Otto〔易斯累〕二十世紀 德人

Issaly, *Abbé* Pierre Adolphe〔伊薩力〕二十世紀初 法人

Itelson, G.〔伊試孫〕二十世紀初

Itihara, Tetuzi〔市原哲治〕二十世紀前半期 日本人

Ito Makoto〔伊藤〕二十世紀前半期 日本人

Ito Masaji〔伊藤〕二十世紀前半期 日本人

Iuga, G.〔愛攸加〕十九世紀末 德人

Ives, Howard Chapin〔伊甫斯〕(1878, 3, 20--) 美人 著測量術及三角術表

Ivey, J. N.〔伊味〕二十世紀初 德人

Ivory, Sir James〔伊服里〕(1765—1842, 9, 21) 蘇格蘭人 貢獻於解析數學及吸引論

Iwai Juyen〔岩井重遠〕日本人

Iwama Rokuro〔岩間綠郎〕二十世紀前半期 日本人

Iwasaki Toshihisa〔岩崎〕十八世紀後半期 日本人

Iwata〔岩田好算〕(1812—1878) 日本人

Iwatsuki Toransuke〔岩付寅之助〕二十世紀前半期 日本人

Iyanaga Shokichi〔彌永昌吉〕二十世紀前半期 日本人

Izquierdo, Gabriel〔易茲奎多〕十九世紀 智利人

Izumi Shin-ichi〔泉信一〕二十世紀前半期 日本人

Jabir ibn Aflah〔哲伯·易·阿福拉〕卽 Geber

Jabir ibn Haiyan al-Sufi〔哲伯·易·海雅·亞蘇菲〕卽 Geber 或 Jeber

Jablonovsky, P.〔哲布倫諾斯啓〕二十世紀前半期 美人

Jablonowsky, Fürsten Joseph Alexander〔哲布倫瑙斯啓〕 十八世紀後半期 但澤(Danzig)人

Jablonski, Édouard〔哲布倫斯奇〕(?—1923, 4,) 法人

Jablonski, M. E.〔哲布倫斯奇〕 十九世紀末 法人

Jaccottet, C.〔雅科忒〕 十九世紀末 德人

Jack, William〔哲克〕 十九世紀中 英人

Jackson, C. S.〔約克孫〕 二十世紀前半期 英人

Jackson, Dunham〔約克孫〕(1888, 7, 24—) 美人

Jackson, Frank Hilton〔約克孫〕(1870, 8, 16—) 英人

Jackson, G. H.〔約克孫〕 二十世紀初 英人

Jackson, J. B.〔約克孫〕 二十世紀前半期 美人

Jackson, J. Stuart〔約克孫〕 十九世紀 英人 幾何學家

Jackson, Lambert Cameron〔約克孫〕(1875, 9, 28—) 英人

Jackson, L. D' A.〔約克孫〕 十九世紀後半期 英人 著對數表

Jackson, Lambert Lincoln〔約克孫〕(1870, 4, 14—) 美人 著算術,代數,幾何學.

Jackson, Rosa L.〔約克孫〕 二十世紀前半期 美女

Jackson, W. H.〔約克孫〕 二十世紀初 英人

Jackstein, H.〔查克斯泰〕 十九世紀後半期 德人

Jacob, Fridericus〔雅各〕 二十世紀 德人

Jacob, M.〔雅各〕 二十世紀前半期 英人

Jacob, Pancraz〔雅各〕 十六世紀後半期 德人

Jacob, Simon〔雅各〕(?—1564, 6, 24) 德人 著商業算術

Jacob ben Machir〔雅各·本·馬柴〕 即 Prophatius

Jacob ben Nissim〔雅各·本·尼辛〕 八世紀 猶太人

Jacob Caphanton〔雅各·卡潘頓〕(?—1439) 猶太人

Jacob Carsono〔雅各·卡孫諾〕十四世紀 西班牙人

Jacob von Cremona〔雅各·奉·格里摩拿〕即 Jacobi of Cremona

Jacob von Soest〔雅各·奉·左斯特〕

Jacob von Speier〔雅各·奉·斯佩耳〕德人

Jacobi, Karl Friedrich Andreas〔雅科俾〕亦作 C. F. A. Jacobi (1795—1855) 德人

Jacobi Karl Gustav Jacob〔雅科俾〕亦作 C. G. J. Jacobi (1804, 12, 10—1851, 2, 18) 德人 研究橢圓函數近世記號法等.

Jacobi, S.〔雅科俾〕二十世紀 德人

Jacobi of Cremona〔雅科俾〕十五世紀 義人

Jacobs, Freidrich〔雅科布斯〕十九世紀前半期 德人

Jacobs, Hermanns von〔雅科布斯〕十九世紀末 德人

Jacobs, Joseph〔雅科布斯〕(1854—1916) 生於澳洲

Jacobsthal, E.〔雅各斯退爾〕二十世紀初 德人

Jacobsthal, W.〔雅各斯退爾〕二十世紀 德人

Jacoby, Harold〔雅科比〕(1865, 3, 4—1932, 7, 20) 美人 天文數理家

Jacoli, F.〔雅科利〕義人

Jacopo da Firenze〔雅科坡·達·菲勒〕亦作 Magister Jacobus de Florentia 十四世紀初 義人

Jacottet, C.〔札科忒〕二十世紀 瑞士人

Jacquier, Edme〔札奎耳〕十九世紀後半期 法人

Jacquier, François〔札奎耳〕(1711—1788) 德人

Jadanza, N.〔札丹紮〕十九世紀後半期 義人

Jaeger, C. G.〔哲格〕二十世紀前半期 美人

Jaeger, F. M.〔哲基〕二十世紀 荷蘭人

Jaeger, G.〔哲基〕二十世紀 德人

Jaeger, M.〔哲基〕二十世紀初 德人

Jaeger, Werner〔哲基〕(1888,7,30—) 德人

Jafar ibn Mohammed〔雅發·易·穆罕默德〕卽 Albumasar

Jaffé, George〔哲斐〕二十世紀前半期 德人

Jagemann, C. J.〔雅革曼〕十八世紀前半期 德人

Jäger, E. L.〔雅熱〕十九世紀後半期 德人

Jäger, Peter〔雅熱〕十八世紀

Jager, Robert〔雅熱〕十七世紀 英人

Jahn, G. A.〔揚〕十九世紀前半期 德人

Jahn, L.〔揚〕十九世紀後半期 德人

Jahn, O.〔揚〕十九世紀 德人 著解析幾何學

Jahnke, E.〔揚克〕十九世紀末 德人

Jahnke, P. R. E.〔揚克〕二十世紀初 德人

Janraus, K.〔雅勞斯〕

Jai Singh, Maharajah〔日星〕十八世紀前半期 印度人

Jaime, Florncio D.〔日謨〕二十世紀前半期 阿根廷人

Jakobi, S.〔雅柯俾〕二十世紀 德人

Jakub ibn Tarik〔賁卡·易·塔立〕八世紀後半期

Jakut〔雅卡特〕卽 Yaqut

Jaller, A.〔査勒〕二十世紀前半期 德人

Jamblichus〔占布力卡斯〕亦作 Jamblichos 卽 Iamblichus

James, Glenn〔詹姆士〕二十世紀前半期 美人

James, George Oscar〔詹姆士〕(1873, 8, 1—1931, 11, 24) 美人

James, R.〔詹姆士〕 二十世紀　英人

James, Vern〔詹姆士〕 二十世紀前半期　美人

Jameson, Alexander Hope〔哲麥孫〕 (1874, 10, 15—　) 英人著數理地理學

Jameson, F. J.〔哲麥孫〕

Jamet, E. V.〔哲麥〕 二十世紀初　法人

Jamet, V.〔哲麥〕 十九世紀後半期　法人

Jamieson, Alex.〔哲密孫〕

Jamieson, Walter〔哲密孫〕 二十世紀　蘇格蘭人

Jamin, Jules *Célestin*〔哲明〕 (1818—1886) 法人

Jamison, G. H.〔哲米孫〕 二十世紀前半期　美人

Jamitzer, Wenzel〔哲米策〕 亦作 Jamnitzer 或 Gamiczer (1508—1585,12,19) 德人

Jan, C. von〔冉〕 十九世紀中　德人

Janet, Maurice〔札內〕 二十世紀前半期　法人

Janet, P.〔札內〕 十九世紀　法人　研究偏微分方程式

Jänicke, E.〔查尼克〕

Janisch, E.〔雅尼士〕 十九世紀後半期　德人

Janiszewski, S.〔占尼嗟斯奇〕 二十世紀前半期

Janni, Giuseppe〔占尼〕 十九世紀中　義人

Janni, V.〔占尼〕 十九世紀後半期　義人

Jansen, H.〔冉森〕 二十世紀初　德人

Jansen, Z.〔冉森〕 卽 Z. Janszoon

Janssen, G.〔冉斯森〕 二十世紀前半期　德人

Janssen, Pierre Jules César〔冉斯森〕 (1824,2,22—1907,12,23) 法人

Janssen Van Raaij, W. H. L.〔冉斯森·凡拉其〕 十九世紀末　荷蘭人

Jansaon, T.〔冉斯松〕 二十世紀前半期　瑞典人

Janszoon, Zacharias〔冉斯森〕亦作 Zacharias Jansen 十六及十七世紀 南非洲人

Jaquemet, Claude〔哲揆麥〕(1651—1729)

Jariez, J.〔查里〕十九世紀 法人

Jarnik, Vojtěch〔札尼克〕二十世紀前半期 捷克人

Jarochenko, S. P.〔贊羅仁科〕十九世紀末 俄人

Jarolimek, V.〔札羅利麥〕十九世紀末 捷克人

Jarosch, J.〔札羅士〕二十世紀前半期 奧人

Jarošenko, S.〔惹羅舍科〕十九世紀前半期 烏克蘭人

Jarratt, Sir William Smith〔查拉特〕(1871, 6, 28—) 英人

Jarrett, Thomas〔查勒特〕(1805—1882) 英人

Jartoux, Pierre〔杜德美〕(1670—1720, 11, 30) 法人 清康熙三十八年(即1700年)來中國

Jastremski〔哲特棲斯奇〕二十世紀 俄人

Jauhari〔堯哈利〕即 al-Jauhari

Javelot〔若味羅〕二十世紀前半期 法人

Jeake, Samuel *Sr.*〔冉克〕十七世紀 英人

Jeans, *Sir* James Hopwood〔冉士〕(1877, 9, 11—) 英人 研究數理電磁及力學

Jeaurat, Edmond Sebastian〔冉拉〕(1724—1803) 法人

Jebb, John〔澤布〕十八世紀中 英人

Jebb, Richard Claverhouse〔澤布〕(1841,8,27—1905,12,10) 英人

Jebb, S.〔澤布〕十九世紀前半期 英人

Jeber〔哲伯〕即 Jabir

Jechiel ben Josef〔澤岐·本·約瑟夫〕十四世紀初 俄人

Jecke, R. H.〔澤克〕二十世紀初　德人

Jefferson, Thomas〔哲斐孫〕(1743,4,2—1826,7,4)　美人

Jeffery, Gerge Barker〔澤斐里〕(1891,5,9—　)　英人

Jeffery, Henry M.〔澤斐里〕十九及二十世紀　美人

Jeffery, R. L.〔澤斐里〕二十世紀前半期　坎拿大人

Jeffreys, Harold〔澤夫立茲〕(1891,4,22—　)　英人

Jeffs, Eva E.〔澤夫斯〕二十世紀　美人

Jehuda ben Salomon Kohen〔機休達·本·撒洛蒙·科亨〕(?—1247)　猶太人

Jehudah Barzilai〔札達·巴威雷〕亦作 Judah ben Barzilai　十三世紀　西班牙猶太人

Jekhowsky, B.〔機豪斯啓〕二十世紀　法人

Jellen, Marten〔澤楞〕十八世紀後半期　德人

Jellett, John Hewitt〔澤勒特〕(1817—1888)　愛爾蘭人　研究變分學

Jemshid〔吉什〕即 Al-Kashi

Jenkin, F.〔貞琴〕十九世紀後半期　英人

Jenkins, F.〔貞琴茲〕二十世紀　美人

Jenkins, M.〔貞琴茲〕十九世紀末　英人

Jenkins, Wilmer Atkinson〔貞琴茲〕二十世紀前半期　美人

Jenkinson, A. J.〔貞琴孫〕二十世紀　英人

Jenkinson, H.〔貞琴孫〕

Jennes, N. J.〔眞內斯〕二十世紀　美人

Jenrich, P.〔眞里治〕十九世紀後半期　德人

Jensen, C. M.〔勤森〕二十世紀

Jensen, J. L. W. V.〔勤森〕(?—1925,4,5)　丹麥人

Jentsch, F.〔眞赤〕二十世紀前半期　德人

Jentzsch, R.〔眞慈士〕二十世紀前半期 德人

Jenvall, A.〔眞發爾〕二十世紀 瑞典人

Jenphson T.〔耶弗孫〕

Jerome〔哲羅姆〕(1861—) 英人

Jerónimo de Valencia〔耶綸甯摩〕十六世紀 義人

Jerrard, George Birch〔機拉德〕(?—1863) 愛爾蘭人

Jervis, Sybil D.〔澤維斯〕二十世紀前半期 英人

Jess, Zachariah〔澤斯〕十八及十九世紀 美人 著測量學

Jessen, K.〔澤森〕二十世紀前半期 丹麥人

Jessop, C. M.〔澤索〕十九世紀末 英人 著線叢學,實用數學.

Jessup, Walter Albert〔澤薩〕(1877, 8, 12—) 美人

Jevons, *William* Stanley〔澤豐茲〕(1835,9,1—1882,8,13) 英人 研究數理論理學.

Ježek, O.〔澤策克〕十九世紀後半期 捷克人

Jin Hung Tse〔任弘濟〕中國宋時人

Joachim, Georg〔佐琛〕卽 Rhæticus 或 Rheticus

Joachim Jungius〔佐琛·永及斯〕十七世紀 德人

Joachimsthal, F.〔佐琛斯退〕(1818—1861) 德人

Joad, Cyril Edwin Mitchinson〔佐德〕(1891—) 英人

Joannes de Gmunden〔佐安泥茲〕卽 Gmünden

Joannes de Monte Regio〔佐安泥茲〕卽 Johannes Müller

Joannes de Muris〔佐安泥茲〕卽 Meurs

Joannes de Praga〔佐安泥茲〕卽 Johannes of Praga

Job ben Salomon〔佐·本·撒洛蒙〕猶太人

Jochmann, Emil〔佐治曼〕十九世紀

Jocelyn L. P.〔佐塞介〕二十世紀 美人

Joergensen, N. R.〔佐貞森〕二十世紀　德人

Joffe, S.A.〔佐斐〕二十世紀前半期　美人

Johannes, J.〔約翠涅斯〕十九世紀後半期　德人

Johannes, K.〔約翠涅斯〕二十世紀前半期　德人

Johannes de Landshut〔約翠涅斯〕十六世紀　奧人

Johannes of Praga〔約翠涅斯〕亦作 Joannes Pragensis 或 Joannes de Praga (或 $\frac{1370}{1375}$—1450) 波希米亞(Bohemia)人

Johannes of Seville〔約翠涅斯〕亦作 Johannes Hispalensis 或 Johannes Hispanensis 或 Johannes von Luna (?—1153) 西班牙人　譯亞剌伯文數學爲拉丁文

Johannes von Jerusalem〔約翠涅斯〕

Jahannes von Damaskus〔約翠涅斯〕即 Damaskus

Johannes Hispalensis〔約翠涅斯·西班楞息〕亦作 Johannes von Sevilla 即 John of Saville

Johansen, F. C.〔佐翠森〕二十世紀前半期　英人

Johanson, A. M.〔佐翠遜〕十九世紀

Johansson, S.〔佐翠遜〕二十世紀初　芬蘭人

John, Frederick Wallace〔約翰〕二十世紀前半期　美人

John, Gustav Adolf〔約翰〕

John, U.〔約翰〕二十世紀前半期　德人

John, V.〔約翰〕

John of Basingstoke〔約翰〕(?—1252)　英人

John of Beverley〔約翰〕(687—721)　英人

John of Luna〔約翰〕即 John of Seville

John of Meurs〔約翰〕即 Meurs

John of Palermo〔約翰〕亦作 Johannes von Palermo 十三世紀末 義人

John of Seville〔約翰〕亦作 Johannes von Sevilla 即 Johannes of Seville

John Hispalensis〔約翰·西班栗思〕即 John of Seville

Johnson, Edgar Hutchinson〔約翰孫〕(1873, 2, 15—) 美人

Johnson, F. W.〔約翰孫〕二十世紀前半期 美人

Johnson, G.〔約翰孫〕二十世紀 美人

Johnson, George Frederic〔約翰孫〕二十世紀前半期 英人

Johnson, G. W.〔約翰孫〕十九世紀中

Johnson, John〔約翰孫〕十七世紀

Johnson, Jesse Breland〔約翰孫〕(?—1929, 12, 18) 美人

Johnson, James F.〔約翰孫〕二十世紀 美人

Johnson, Lewis Jerome〔約翰孫〕(1867, 9, 24—) 美人 著代數及圖解之靜力學

Johnson, Miss Myra I.〔約翰孫〕二十世紀前半期 美女

Johnson, Marie Mathilda〔約翰孫〕二十世紀前半期 美人

Johnson, Roger A.〔約翰孫〕二十世紀前半期 美人 著近世幾何學

Johnson, Richard P.〔約翰孫〕二十世紀前半期 美人

Johnson, Th. W.〔約翰孫〕二十世紀 英人

Johnson, W. E.〔約翰孫〕(1859—1931, 1, 14) 英人 著三角術

Johnson, William Woolsey〔約翰孫〕(1841, 6, 23—1927, 5, 14) 美人 著微分方程最小二乘法

Johnston, E.〔鍾斯通〕二十世紀

Johnston, Francis Edgar〔鍾斯通〕二十世紀前半期 美人

Johnston, John Alexander Hope〔鍾斯通〕(1971, 7, 10—) 英人

Johnston, L. S.〔鍾斯通〕二十世紀前半期 美人

Jolles, S. 〔佐爾斯〕 十九世紀後半期 德人

Jolley, L. B. W. 〔佐力〕 二十世紀前半期 英人 著級數求和表

Jolliffe, Arthur Ernest 〔佐利斐〕 (1871—) 英人

Jolly, J. B. Florian 〔佐立〕 十九世紀初 英人

Jolly, P. 〔佐立〕 十九世紀 德人

Jolly, von 〔佐立〕 十九世紀後半期

Joly, Charles Jasper 〔佐里〕 (1864—1906) 愛爾蘭人 著四原論

Joly, Gabriel 〔佐里〕 二十世紀前半期 法人

Jonah, F. C. 〔約拿〕 二十世紀前半期 美人

Jonak, Eberhard 〔約納克〕 (1820—1876) 奧人

Jonas, F. 〔郁納斯〕 十九世紀 德人

Jonas, Justus 〔郁納斯〕 (1493,6,5—1555,10,9) 德人

Joncourt, Elie de 〔準庫特〕 十八世紀後半期 荷蘭人

Jones, A. Clement 〔瓊斯〕 二十世紀初 英人

Jones, B. W. 〔瓊斯〕 二十世紀前半期 美人

Jones, Cecil Charles 〔瓊斯〕 (1872, 2, 11—) 英人

Jones, David 〔瓊斯〕 十九世紀 英人 研究年金理論

Jones, D. Caradog 〔瓊斯〕 二十世紀 英人

Jones, E. H. 〔瓊斯〕 二十世紀前半期 美人

Jones, Edgar Montague 〔瓊斯〕 (1866, 6, 11—) 英人

Jones, George Maceo 〔瓊斯〕 二十世紀前半期 美人

Jones, George William 〔瓊斯〕 (1837—1911) 美人 著代數學

Jones, Harris 〔瓊斯〕 二十世紀前半期 美人

Jones, Henry 〔瓊斯〕 十八世紀

Jones, Harold Spencer 〔瓊斯〕 (1890, 3, 29—) 英人 研究數理天文

Jones, H. Sydney〔瓊斯〕二十世紀　英人

Jones, J. Lennard〔瓊斯〕二十世紀前半期　英人

Jones, J. R.〔瓊斯〕二十世紀前半期　英人

Jones, M. E.〔瓊斯〕二十世紀前半期　美人

Jones, R.〔瓊斯〕二十世紀　英人　譯等角寫像法

Jones, S. I.〔瓊斯〕二十世紀前半期　美人

Jones, Thomas〔瓊斯〕十八世紀後半期　英人

Jones, William〔瓊斯〕(1675—1749) 英人

Jonesco, D. V.〔瓊涅斯科〕二十世紀前半期　比利時人

Jong, C. de〔準〕二十世紀前半期　荷蘭人

Jonnes. A. M. de〔準泥茲〕十九世紀　法人

Jonquière, A.〔瓊基〕十九世紀後半期　瑞士人

Jonquières, Fauke de〔瓊基爾〕即 De Jonquières

Jonsson, A.〔準遜〕二十世紀　瑞典人

Jonsson, K. G.〔準遜〕二十世紀前半期　瑞典人

Jonzon, B.〔準預〕二十世紀前半期　瑞典人

Joochimescu, A. J.〔佐契麥斯庫〕

Jordan, Camille〔約但〕(1838—　) 法人　解析數學大家

Jordan, Charles〔約但〕二十世紀前半期　匈人

Jordan, H. E.〔約但〕二十世紀前半期　美人

Jordan, H. J.〔約但〕二十世紀前半期　荷蘭人

Jordan, Marie Évremond Camille〔約但〕即 Camille Jordan

Jordan, Pascual〔約但〕二十世紀前半期　德人

Jordan, Wilhelm〔約但〕(1819,2,8—1904,6,25)　德人

Jordan of Namur〔約但〕即 Nemorarius

Jordanus Nemorarius〔約但那·能摩剌栗斯〕 卽 Nemorarius

Jordanus Saxo〔約但那·薩克索〕 十三世紀 德人

JΦrgensen, J.〔約貞森〕 二十世紀前半期 丹麥人

Jorjani〔約占尼〕 卽 al-Jorjani

Joseph ben Wakkar〔約瑟·本·瓦略〕 卽 Wakkar

Josephus, Flavius〔約瑟法〕 (37—95) 猶太人

Joss, S.〔佐玆〕 二十世紀 瑞士人

Jöstel, Melchior〔若斯忒〕 十六世紀 德人

Joubert, C.〔朱伯爾〕 十九世紀後半期 法人

Joubert, P. C.〔朱伯爾〕 十九世紀 法人

Jouffret, E.〔喬弗勒〕 二十世紀初 法人

Jouffret, G.〔喬弗勒〕 二十世紀初 法人

Joukofsky, N.〔喬科夫斯啓〕 十九世紀後半期 俄人

Joukowski, N.〔喬科斯奇〕 亦作 N.E. Joukowsky 二十世紀 俄人

Joule, James Prescott〔朱爾〕 (1818,12,24—1889,10,11) 英人

Jouravsky, A.〔朱拉斯啓〕 二十世紀前半期 俄人

Jourdain, Phillip E. B.〔朱耳丹〕 二十世紀前半期 英人

Jourjon, Ch.〔朱準〕 十九世紀後半期 法人

Jousse, Maturin〔如栖〕 十七世紀

Jowett, Benjamin〔昭厄特〕 (1817,4,15—1893,10,1) 英人

Judah ben Barzilai〔扎達·本·巴威雷〕 卽 Jehudah Barzilai

Judd, Charles Habbard〔査德〕 (1873, 2, 20—) 美人 生於印度 著算術基礎之心理解析

Juel, Christian〔周爾〕 (1855—) 丹麥人

Juergens, E.〔朱貞斯〕 十九世紀後半期 德人

Juhanna〔朱漢那〕 卽 Bar-Hebraeus

Juhos, B. von〔朱和斯〕 二十世紀前半期　德人

Julia, Gaston〔朱理雅〕 二十世紀前半期　法人　解析學家

Julia, Roger〔朱理雅〕 二十世紀前半期　法人

Julian, E.〔朱理安〕 十九世紀　美人

Julianus, Salvianus〔朱理安那〕 二世紀　羅馬人

Julianus Apostata〔朱理安那•阿坡塔達〕 (331—363,6,26) 羅馬帝

Julien, P. M.〔璆良〕 十九世紀　法人

Julius, V. A.〔朱理亞〕 瑞九世紀末　法人

Julius Paulus,〔朱理亞•玻盧〕

Jumeau, André〔贄摩〕

Jung, E.〔永〕 二十世紀　法人

Jung, Giuseppe〔永〕 十九世紀後半期　義人

Jung, Heinrich W. E.〔永〕 二十世紀前半期　德人　著函數論

Jung, I.〔永〕 二十世紀前半期　瑞典人

Jung, J.〔永〕 二十世紀前半期　德人

Jung, V.〔永〕 十九世紀末　捷克人

Junge, Gustav〔永治〕 二十世紀　德人

Junge, Johannes〔永治〕 十六世紀

Junghann, G.〔永罕〕 十九世紀　德人

Jungius, Joachim〔古青亞〕 (1587—1657) 德人

Junker, Friedrich〔永克〕 十九世紀後半期　德人　著高等解析

Jürgens, E.〔周眞斯〕

Jürgensen, Christian〔周眞森〕 (1805—1861) 丹麥人

Jurin, James〔朱霖〕 常署名爲 Philalethes Cantabrigiensis (1684—1750) 英人

Jusi, O.〔卑西〕二十世紀初　瑞士人

Just, R.〔查斯特〕二十世紀初　德人

Justice, Howard〔查斯替斯〕二十世紀前半期　美人

Jusuf ibn Harun al Kindi〔查薩•易•哈綸•亞京箭〕十世紀後半期　西班牙人

Jüthe, O.〔朱狄〕二十世紀初　德人

Jüttner, Ferenz〔朱特涅〕二十世紀前半期　瑞士人

Juventius Celsus〔朱味替亞•塞爾薩斯〕即 J. Celsus

Juvet, Gustave〔朱味〕二十世紀前半期　瑞士人　著向量解析

Kaba〔樺正董〕（？—1925, 12, 27）日本人

Kabul〔喀布爾〕即 Cabul

Kaden, H.〔喀登〕二十世紀前半期　德人

Kadesch, A.〔卡疊〕十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Kadizadeh Ar-Rumi〔卡第紮得•阿魯米〕$\left(?\text{—或}{1412 \atop 1413}\right)$

Kadowaki, M.〔門協政治〕二十世紀前半期　日本人

Kaempf〔墾普夫〕十九世紀

Kaerger, E.〔卡基〕十九世紀後半期　德人

Kaestner, Abraham Gottlieb〔刻斯格涅〕即 Kästner

Kafka, Heinrich〔喀夫卡〕二十世紀前半期　德人　著向量算法

Kagami〔鏡光照〕（1837—1915）日本人

Kagan, B.〔卡干〕二十世紀前半期　俄人

Kahl H.〔卡〕二十世紀前半期　德人

Kahle, L. M.〔卡爾〕十八世紀前半期

Kahn, G.〔坎〕二十世紀初　德人

Kaiser, F.〔愷撒〕十九世紀　德人

Kaiser, H.〔愷撒〕十九世紀後半期　德人

Kaiser, Ludwig〔愷撒〕二十世紀前半期　德人

Kajetan, J.〔卡哲坦〕十九世紀　奧人

Kakeya Soichi〔掛谷宗一〕二十世紀前半期　日本人

Kalähne, A.〔卡利內〕亦作 A. Kalaehne 二十世紀初　但澤人

Kalb, Udalrich〔卡布爾〕十六世紀　德人

Kalbfleisch, G.〔卡布夫來士〕二十世紀初　德人

Kalcheim, Wilhelm von〔卡爾琛〕十七世紀　德人

Kalonymos ben Kalonymos〔卡薩尼摩·本·卡薩尼摩〕(1286—?)　猶太人

Kalsadi〔卡薩第〕卽 Al Kalsadi

Kaluza, Theodor〔嘎路紮〕二十世紀前半期　德人

Kambly, Ludwig〔坎布力〕十九世紀中　德人

Kameda Toyojiro〔龜田豐治朗〕亦作 Kameda Toyodiro　二十世紀前半期 日本人

Kamerlingh Onnes, Heike〔喀麥林·溫勒斯〕(1853,9,21—1926,2,21)　荷蘭人

Kamiya Hitosi〔神谷仁〕二十世紀前半期　日本人

Kamiya Teirei〔神谷定令〕日本人

Kamke, Erich〔坎克〕二十世紀前半期　德人　著集合論及實函數論

Kampé de Fériet, J.〔坎帕〕二十世紀前半期　法人　研究超比函數向量解析。

Kampen, E. R. van〔坎益〕二十世紀前半期　荷蘭人

Kämpfe, Br.〔堪斐〕二十世紀　德人

Kan Tsch〔闞澤〕(?—243 [三國時吳赤烏六年冬])　中國三國時吳人

Kanda Kahei〔神田孝平〕(1830 九月十五日—1898 七月五日)　日本人

Kandleon, Johann〔康德利奧〕十六世紀

Kang Show Chang〔耿壽昌〕紀元前一世紀　中國漢初人

Kang Suen〔耿詢〕七世紀初　中國隋時人

Kankah〔坎卡〕八世紀　印度人

Kanner, M.〔康涅〕十九世紀後半期　德人

Kanroku　六世紀　高麗人

Kant, Immanuel〔康德〕亦作 J. Kant　(1724,4,22—1804,2,12)　德人

Kantor, S.〔康托〕十九世紀末

Kaou Joo〔高儒〕十六世紀前半期　中國明嘉靖時人

Kaou Tagn Lung〔高堂隆〕三世紀前半期　中國三國時魏人

Kaou Yun〔高允〕(390〔晉太元十五年〕—487〔齊永明五年〕)　中國人

Kapfer, Jobs〔卡斐〕十五世紀初　德人

Kapferer〔卡斐勒〕

Karagiannides, A.〔卡剌查尼〕十九世紀末　德人

Karamata, J.〔卡剌馬塔〕二十世紀前半期　巨哥斯拉夫人

Karapetoff, Vladimir〔喀剌柏托夫〕(1876,1,8—　)　俄人　著高等數學之工程應用.

Karatheodory, Alexander Pascha〔喀拉帖多黎〕十九世紀

Karelitz, George〔卡異利次〕二十世紀前半期　美人

Karkhi〔卡基〕即 Al Karkhi

Karl, Herzog〔卡爾〕十八世紀　德人

Kármán, Theodor von〔喀曼〕二十世紀前半期　德人

Karpinski, Louis Charles〔卡品斯啓〕(1878,8,5—　)　美人　數學史大家

Karsten, B.〔卡斯騰〕十九世紀後半期　德人

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav〔卡斯騰〕(1732—1787)　德人

Karstens, F.〔卡斯騰斯〕十八世紀　德人

Käsbohrer, L.〔卡斯波勒〕十九世紀末　德人

Kase, G. 〔揆斯〕 十九世紀後半期 德人

Kashi 〔卡細〕 卽 Al-Kashi

Kasir, Daoud S. 〔卡柄〕 二十世紀前半期 美人

Kasner, Edward 〔喀斯涅〕 (1878, 4, 2—) 美人 著反羣之不變式等角幾何學等書.

Kasten, H. 〔喀斯騰〕 十九世紀後半期 德人

Kästner, Abraham Gotthelf 〔刻斯特涅〕 亦作 A. G. Kaestner (1719, 9, 27—1800, 6, 30) 德人 數學史專家

Kato, G. 〔加藤悟郎〕 二十世紀前半期 日本人

Kato, H. 〔加藤平左衞門〕 二十世紀前半期 日本人

Katter, F. 〔卡忒〕 二十世紀 德人

Katyayana 〔卡揚雅那〕 紀元前五世紀 印度人

Katz, D. 〔卡次〕 二十世紀 德人

Kaucký, J. 〔考啓〕 二十世紀前半期 捷克人

Kaudler 〔考德勒〕 十六世紀末

Kauffmann, Nicolaus 〔考富曼〕 卽 Nicholas Mercator

Kaufmann, Al. 〔考夫曼〕 十九世紀 俄人

Kaufmann, Felix. 〔考夫曼〕 二十世紀前半期 奧人

Kaufmann, Walter 〔考夫曼〕 (1871,6,5—) 德人

Kausler, Christian Friedrich 〔考斯曼〕 (1765—1825) 德人

Kaván, J. 〔喀蕃〕 二十世紀初 捷克人

Kawaguchi Akitsugu 〔河口商次〕 二十世紀前半期 日本人

Kawai Kyutoku 〔川井久德〕 日本人

Kawai Saboro 〔川井〕 二十世紀前半期 日本人

Kawakita Chorin 〔川北朝鄰〕 (1841—1919) 日本人

Kawanishi, T.〔川西德藏〕二十世紀前半期　日本人

Kaye, G. R.〔奎〕(1867—1929, 7, 1) 印度人　研究印度數學史

Kaye, George William Clarkson〔奎〕(1880, 4, 8—　) 英人　研究數理物理

Kayteyn, J. C.〔揆退〕十九世紀　荷蘭人

Kayteyn, W.〔揆退〕十九世紀後半期　荷蘭人

Kazarinaff, D. C.〔卡賛靈那夫〕二十世紀前半期　美人

Ke Ta Kwei〔紀大奎〕(1746〔清乾隆十一年〕—1825〔清道光五年〕) 中國人

Kēa Hang〔賈亨〕中國元時人

Kēa Heen〔賈憲〕十一世紀前半期　中國宋時人

Kēa Kwei〔賈逵〕(30〔漢建武六年〕—101〔漢永元十三年〕) 中國人

Kēa Poo Wei〔賈步緯〕中國清時人

Keae Tsung Heun〔解崇輝〕十九世紀末　中國清光緒時人

Keal, Harry M.〔岐爾〕二十世紀　美人

Kēang Lin Tae〔江臨泰〕十九世紀前半期　中國清嘉慶時人

Kēang Pun〔江本〕中國唐時人

Kēang Seang Fun〔江湘芬女士〕十九世紀　中國清末女人

Kēang Yung〔江永〕(1681〔清康熙二十年〕—1762〔清乾隆二十七年〕) 中國人

Kearney, Dora E.〔岐耳內〕二十世紀前半期　美女

Keasey, M. A.〔岐西〕二十世紀前半期　美人

Kēe Heuen〔揭暄〕十七世紀後半期 (清康熙時—清乾隆時) 中國人

Keelhoff, F.〔岐爾荷甫〕二十世紀　法人

Keeling, S. V.〔岐林〕二十世紀前半期　英人

Kegel, Johann Michael〔開革爾〕

Keiler, H.〔開勒〕二十世紀前半期

Keill, John〔開爾〕(1671—1721) 英人

Keiser, K.〔開則〕二十世紀 德人

Keisker, H,〔開斯刻〕二十世紀前半期 德人

Keith, Thomas〔歧司〕(1827—1895) 英人

Kelland, Philip〔刻蘭〕(1810—1879) 蘇格蘭人 研究代數學四原理論.

Kelleher, S. B.〔刻雷耳〕二十世紀前半期 法人

Keller, A.〔刻勒〕十九世紀後半期 德人

Keller, E.〔刻勒〕二十世紀前半期 瑞士人

Keller, E, G.〔刻勒〕二十世紀前半期 美人

Keller, S. S.〔刻勒〕二十世紀 美人

Kelley, Truman Lee〔刻力〕(1884, 5, 25—) 美人 著統計學

Kellogg, Oliver *Dimon*〔刻羅格〕(1878, 8, 26—1932, 8, 27) 美人 研究函數論

Kellogg, Vernon〔刻羅格〕二十世紀前半期 美人

Kells, Lyman M.〔刻爾茲〕二十世紀前半期 美人 著微分方程

Kelly, C. T.〔刻黎〕二十世紀

Kelso, O. L.〔刻爾索〕二十世紀初 美人

Kelvin, Lord〔克爾文〕卽 Sir William Thomson (1824, 6, 26—1907, 12, 17) 愛爾蘭人 物理數學名家.推廣數學之應用於物理問題.

Kemal ed-din ibn Yunis〔克馬•厄丁•易猶訥〕卽 Ibn Yunus 或 Ibn Mana 或 Musa ibn Yunis

Kemble, Edwin Crawford〔墾布爾〕(1889, 1, 28—) 美人 研究數理物理.

Kemmochi Shoko〔劍持章行〕(1798—1873) 日本人

Kempe, Alfred Bray〔墾佩〕十九世紀後半期 英人 研究作直線法

Kemper, D.〔墾柏〕十九世紀後半期 英人

Kempin, W.〔墾品〕二十世紀　德人

Kempinski, S.〔墾品斯啓〕即 S. Kepínski

Kempner, A. G.〔肯浦涅〕二十世紀　德人

Kempner, Aubrey John〔肯浦涅〕(1880, 9, 22—　) 生於英

Kempson, Edwin Hone〔肯浦遜〕(1862, 4, 16—1931, 9, 5) 英人

Kempten〔肯浦甸〕即 de Kempten

Kendall, Claribel〔墾達爾〕二十世紀前半期　美人

Kenison, E.〔墾尼孫〕二十世紀　美人

Kenison, Irving〔墾尼孫〕二十世紀　美人　著畫法幾何學

Kennedy, A.〔墾涅狄〕十九世紀後半期　英人

Kennedy, Evelyn C.〔墾涅狄〕二十世紀前半期　美人

Kennelly, Arthur Edwin〔墾涅力〕(1861, 12, 17—　) 美人生於印度　研究雙曲函數

Kent, Fredick Charles〔肯德〕(?—1929, 6, 11) 美人

Kent Maud E.〔肯德〕二十世紀前半期　美人

Kenyon, Alfred Monroe〔墾雲〕二十世紀前半期　美人

Kenyon, Otis Allen〔墾雲〕二十世紀　美人

Kepínski, S.〔墾品斯啓〕亦作 S. Kempinski　二十世紀初　波蘭人

Kepler, Johann〔刻卜勒〕亦作 Johannes Kepler 或 Jean Képler (1571, 12, 27—1630, 11, 15) 德人　天文學及幾何學家.擴張對數之用途.敍述連續之原理有功於立微積分學之基礎者.

Kerékjártó, B. von〔克果査托〕亦作 Bela de Kerékjárto　二十世紀前半期　匈人

Kerl, O.〔愷爾〕二十世紀初　德人

Kern, G. J.〔刻〕十九世紀

Kern, H.〔刻〕十九世紀

Kerner, M.〔刻涅〕二十世紀 德人

Kerr, John G.〔刻耳〕二十世紀 英人

Kerry, B.〔刻立〕

Kerschensteiner, Georg Michael〔刻爾斯泰〕(1854, 7, 29—1932, 1, 15) 德人

Kerseboom, Wilhelm〔刻塞波〕(1691—1771) 荷蘭人

Kersey, John〔刻西〕(1616—1690) 英人

Kerst, B.〔揆斯特〕二十世紀前半期 德人

Kerstein, B. H.〔刻斯泰〕(?—1925) 美人

Ketchum, Milo Smith〔刻成〕(1872, 1, 26—) 美人 著測量術

Ketchum, Pierce Waddell〔刻成〕二十世紀前半期 美人

Ketensis, Robertus〔刻騰息〕即 Robert of Chester

Ketteler, E.〔刻忒勒〕十九世紀 德人

Keu Tan Lo〔瞿曇羅〕七世紀末 中國唐神功時人

Keu Tan Seih Ta〔瞿曇悉達〕八世紀前半期 中國唐時人

Keue Tsang Fa〔屈曾發〕十八世紀後半期 中國清乾隆時人

Keung Lun〔龔淪〕(1739{清乾隆四年}—1799{清嘉慶四年五月}) 中國人

Keung Ming Fung〔龔銘鳳〕十九世紀末 中國清光緒時人

Kewitsch, G.〔邱威士〕十九世紀末 德人

Key, Thomas Hewitt〔岐〕(1799—1875, 11, 29) 英人

Keyes, Frederick George〔岐斯〕(1885, 6, 24—) 生於坎拿大

Keynes John Maynard〔岐因斯〕(1883, 6, 5—) 英人 著確率學

Keynes, John Neville〔岐因斯〕(1852, 8, 31—) 英人

Keyser, Cassius Jackson〔開塞〕(1862, 5, 15—) 美人 數理哲學家

Keyser, Sarah Y.〔開塞〕即 Mrs. C. J. Keyser 二十世紀前半期 美女

Khallikan〔卡力坎〕亦作 Challikan 卽 Ibn Khallikan

Khayyam, Omar〔開儼〕卽 Omar Khayyam

Khazin〔卡晉〕卽 Al-Khazin

Kheang Joo Seun〔强汝詢〕（1824〔清道光四年〕—1894〔清光緒二十年〕）中國人

Kheil, *Carl* Peter〔開爾〕十九世紀末　捷克人

Khidr〔基耳〕卽 Al-Khidr

Khinchine〔興金〕

Khintchine, A.〔興欽〕（1894—　）俄人

Khojandi〔科查第〕卽 Al Khojandi

Kholodovsky, E. A.〔科羅多斯啓〕（？—1931, 10, 10）俄人

Khowarizmi〔科瓦利米〕卽 Al Khowarizmi

Kiaer, H. J.〔恰耳〕十九世紀末　挪威人

Kiæs, J.〔基斯〕

Kiefer, A.〔基斐〕十九世紀後半期　瑞士人

Kiefer, C. L.〔基斐〕二十世紀初　德人

Kiehl, H.〔奇爾〕十九世紀後半期　波蘭人

Kienast, A.〔岐那斯特〕二十世紀　瑞士人

Kienle, H.〔凱恩爾〕二十世紀　德人

Kiepert, L.〔岐拍托〕十九世紀末　德人

Kiernan, Arthur〔契南〕二十世紀　美人

Kierpert, Ludwig〔凱拍特〕十九及二十世紀　德人　著微積分

Kies, Johann〔岐斯〕（1713—1781）德人

Kiessling〔岐斯林〕十九世紀前半期　德人

Kijlstra, A.〔岐爾斯剌〕二十世紀初　荷蘭人

Kikuchi Dairoku〔菊池大麓〕（1855—1917）日本人

Kilbinger, G.〔啓爾內給〕十九世紀後半期　德人

Kilgour, D. E.〔啓爾谷〕二十世紀初　美人

Kill, P.〔啓爾〕二十世紀初　德人

Killam, S. D.〔啓蘭〕二十世紀前半期　德人

Killebrew, C. D.〔啓勒布魯〕二十世紀前半期　美人　研究解析幾何學及微積分

Killermann, A.〔啓勒曼〕二十世紀前半期

Killing, W.〔啓令〕十九世紀後半期　德人　研究非歐幾何學

Killingworth, John〔啓令渥斯〕十五世紀　英人

Kimball, R. S.〔琴巴爾〕二十世紀前半期　美人

Kimball, William Scribner〔琴巴爾〕二十世紀前半期　美人

Kimura, Kinzo〔木村〕二十世紀前半期　日本人

Kimura, Shunkchi〔木村〕十九世紀末　日本人

Kin Wang Hin〔金望欣〕十九世紀中　中國清道光時人

Kinckhuysen, Gerard〔京克羽森〕十七世紀後半期　荷蘭人　著代數學

Kindel, P.〔欽德爾〕十九世紀　德人

Kindi〔京笛〕卽 Al Kindi

Kindle J. H.〔京得爾〕二十世紀前半期　美人

King, E. F.〔欽格〕二十世紀

King, G.〔欽格〕二十世紀前半期　英人

King, Joshua〔欽格〕（1798—1857）英人

King, Louis Vessot〔欽格〕（1886, 4, 18—　）坎拿大人　研究數理物理

King, Wilford Isbell〔欽格〕（1880, 6, —　）美人　著統計學

King, W. J.〔欽格〕（？—1928, 1, 15）美人

Kingsley, Charles〔金斯黎〕（1819,6,12—1875,1,23）英人

Kingston H. R.〔京斯敦〕二十世紀前半期　坎拿大人

Kinkelin, H.〔琴剜林〕十九世紀　德人

Kinner von Löwenthurm, Aloysius〔金涅〕十七世紀中　捷克人

Kinnes, J. M.〔金內〕二十世紀前半期　美人

Kioes, J.〔基阿斯〕十九世紀　法人

Kippels, K.〔吉拍斯〕二十世紀初　德人

Kirby, Johann〔剋比〕（1716—1774）

Kirby, R. Sh.〔剋比〕二十世紀　美人

Kirchberger, P.〔克希柏給〕二十世紀初　德人

Kircher, Athanasius〔啓徹〕（1601, 5, 2—1680, 11, 27）德人

Kircher, E. A. T〔啓徹〕二十世紀前半期　美人

Kirchhoff, Gustav *Robert*〔克希荷夫〕(1824,3,12—1887,10,17) 德人　數理物理學家

Kirchmann, Julius Heinrich von〔克希曼〕（1802, 11, 5—1884, 10, 20）德人

Kirchner, F. W.〔克希涅〕十九世紀後半期　德人

Kirchner, W. H〔克希涅〕二十世紀前半期　美人

Kirkby, John〔剋克比〕十八世紀　英人

Kirkman, J. P.〔剋克孟〕

Kirkman, Thomas Penyngton〔剋克孟〕（1806—1895）英人　關明四原論及位相學

Kirsch〔克什〕

Kiseljak, M.〔基塞查〕二十世紀初　德人

Kistler, H.〔奇斯特勒〕二十世紀初　瑞士人

Kitchener F. E.〔啓拆涅〕十九世紀後半期　英人

Klaas, A.〔克拉斯〕十九世紀後半期　德人

Klaess, P.〔克雷斯〕二十世紀 德人

Klamroth〔克拉洛司〕十九世紀後半期 德人

Klau, Christoph〔克勞〕卽 C. Clavius

Klaucke, F.〔克勞剋〕二十世紀前半期 德人

Kleber, A.〔克雷貝〕二十世紀前半期 德人

Klebitus, Wilhelm〔克雷俾塔〕十六世紀 比利時人 代數學家

Kleeberg, R.〔克利貝〕二十世紀前半期 德人

Kleiber, J.〔克來柏〕十九世紀後半期 德人

Kleiber, M.〔克來柏〕十九世紀末 德人

Kleim, F.〔克來謨〕二十世紀 德人

Klein, B.〔克萊因〕十九世紀後半期 巨哥斯拉夫人

Klein, C. Felix〔克萊因〕(1849—1925, 6, 22) 德人 幾何學大家.發明極夥.改良數學教授法.成立數學直觀派.

Klein, H. J.〔克萊因〕十九世紀末 德人

Klein, L.〔克萊因〕二十世紀 德人

Klein, Oscar〔克萊因〕二十世紀前半期 瑞典人

Klekler, K.〔克勒克拉〕十九世紀 德人

Klempt, D. A.〔克勒普特〕十九世紀後半期 德人

Klepisch, K.〔克勒匹士〕二十世紀前半期 德人

Kletler, B.〔克勒特勒〕二十世紀前半期 奥人

Kleyber, J. A.〔克來柏〕十九世紀後半期 俄人

Kleyer, Adolph〔克來業〕十九世紀 德人 著微積分

Kliem, F.〔克利謨〕二十世紀前半期 德人

Klimpert, R.〔克林柏〕十九世紀末 德人

Kline, G. A.〔克來〕二十世紀前半期 美人

Kline, John Robert〔克來〕(1891, 12, 7--　) 美人

Kline, Morris〔克來〕二十世紀前半期　美人

Kling, J.〔克林〕十九世紀　英人

Klingenstierna, Samuel〔克林哲斯提那〕(1698—1765) 瑞典人

Klitzkowski, F.〔克利科斯啓〕十九世紀後半期　德人

Klokow, T.〔克洛科〕二十世紀前半期　德人

Kloosterman, H. D.〔克盧斯忒孟〕二十世紀前半期　荷蘭人

Klōs, Tomas〔克洛〕十六世紀前半期　波蘭人

Klotz, J.〔克洛兹〕二十世紀　瑞士人

Klug, L.〔克路〕十九世紀後半期　德人

Kluge, G.〔克盧格〕十九世紀末　德人

Kluge, R.〔克盧格〕二十世紀前半期　德人

Klugel, *Georg* Simon〔克呂革〕(1739--1812) 德人

Klumpius, Johannes〔克拉庇護〕十六世紀末　德人

Kluyver. J. C.〔克路昧〕十九及二十世紀　荷蘭人

Knabe, K. A. F.〔克那柏〕十九世紀後半期　德人

Knapp, G. F.〔克拿普〕十九世紀後半期

Knaster, B.〔克那士忒〕二十世紀　德人

Knebelman, M. S.〔克內柏孟〕二十世紀前半期　美人

Knepper, Martha M.〔克涅柏〕二十世紀前半期　美人

Kneser, Adolf〔克涅塞〕亦作 Adolph Kneser (?—1930) 德人 研究積分方程式

Kneser, H.〔克涅塞〕(1898--　) 德人

Kneser, J. C. C. A.〔克涅塞〕二十世紀初　德人

Kneucker〔克諾剋〕

Knibbs, Sir George〔克尼布斯〕(1859—1929. 3. 30) 澳洲人 著人口之數學理論

Knibbs, G. H.〔克尼布斯〕二十世紀

Knight, Elizabeth E.〔乃特〕二十世紀前半期 美女

Knight, S. R.〔乃特〕十九世紀後半期 英人

Knilling〔克尼令〕十九世紀後半期 德人

Knisely, Alexander〔克尼塞力〕(?—1931) 美人

Knobel, E. B.〔克諾柏〕(1841—1930, 7, 25) 美人

Knablauch, Johannes〔克諾布勞〕(1855—1915) 德人

Knoche, G.〔克諾歧〕十九世紀末 巨哥斯拉夫人

Knoche, Joachim Heinrich〔克諾歧〕十九世紀中

Knockenhauer, K. W.〔克諾墾豪〕十九世紀後半期 德人

Knopf, A.〔克諾普夫〕二十世紀前半期 美人

Knopf, Otto〔克諾普夫〕二十世紀 德人

Knopp, Konrad〔克諾普〕(1882—) 德人 著級數論函數論.

Knothe, E. P.〔克諾提〕十九世紀末 挪威人

Knott, Cargill〔諾特〕(1856—) 英人

Knott, Cargill Gilston〔諾特〕二十世紀初 愛爾蘭人

Knott, E. S.〔諾特〕二十世紀前半期 英人

Knox, Alexander〔諾克斯〕(1757—1831) 英人

Knox, W. E.〔諾克斯〕二十世紀 美人

Knox-Shaw, Thomas〔諾克斯勺〕(1886. 11. 27—) 英人

Knutzen, Martin〔那繒〕(1713. 12. 14—1751. 1. 29) 德人

Ko Shang Tseen〔柯尚遷〕十六世紀後半期 中國明嘉靖萬曆時人

Kobayashi〔小林〕(?—1683) 日本人

Kobayashi〔小林忠良〕(1796—1871) 日本人

Kobayashi M.〔小林幹雄〕二十世紀前半期 日本人

Kobayashi Mikio〔小林〕二十世紀前半期 日本人

Kobayashi Mikiwo〔小林基〕二十世紀前半期 日本人

Kobbernagel, P.〔科柏那革〕二十世紀前半期 丹麥人

Köbel, Jacob〔哥柏〕(1470—1533, 1. 31) 德人 著算學書三種,爲極受歡迎之作,其中之算術(Rechenbiechlin)至少重印二十二版.

Kober, G.〔科柏〕十九世紀後半期 德人

Kober, H.〔科柏〕二十世紀 德人

Kobold, Hermann〔科波德〕二十世紀 德人

Kobori, Akira〔小堀〕二十世紀前半期 日本人

Koc, Johann〔科〕十八世紀

Koch, A.〔科和〕十九世紀後半期 德人

Koch, B.〔科和〕十九世紀後半期 巨哥斯拉夫人

Koch, Ernest F.〔科和〕二十世紀 美人

Koch, H.v.〔科和〕十九世紀末 瑞典人

Koch, *Nils Fabian* Helge von〔科和〕(?—1924. 3. 11) 瑞典人

Koch, Walter〔科和〕十九世紀後半期 波蘭人

Koch, Walther〔科和〕十九世紀後半期

Kochansky, Adam Adamandus〔科產斯啓〕十七世紀後半期 奧國猶太人

Kochljakov, N.〔科爾札哥〕二十世紀前半期

Koda Shin-yei (?—1758) 日本人

Koebe, Paul〔庫比〕(1882—) 德人

Koehler, C.〔庫勒〕十九世紀後半期 德人

Koehler, H. G.〔庫勒〕亦作 H. G. Köhler 十九世紀 德人

Kœhler, J.〔庫勒〕 法人

Koenig, S. W.〔庫爾〕 英人

Kœnig, E.〔庫尼喜〕 二十世紀 德人 著橢圓函數

Koenig, H.〔庫尼喜〕 即 H. König

Koenig, J.〔庫尼喜〕 即 J. König

Koenig, Samuel〔庫尼喜〕(1712—1757) 德人

Koenig, W.〔庫尼喜〕 二十世紀 德人

Koenigs, Gabriel〔庫尼喜斯〕 亦作 G. Kœnigs (1858—1931, 10,) 法人

Kœnigs, G. P. X.〔庫尼喜斯〕 十九世紀末 法人

Kœnigsberger, Leo〔剋尼斯貝革〕(1837—) 德人 函數論專家

Koërsma, Jacob〔庫斯馬〕 十七世紀後半期 荷蘭人

Koester〔庫斯忒〕 二十世紀 著對數表

Koestler, Woldemar〔庫斯特勒〕 二十世紀初 德人

Koeveslígethy, R. v.〔庫惠里革忒〕 十九世紀 德人

Kogbetliantz, Ervand〔哥柏力兹〕 二十世紀前半期 法人

Kogiso, T.〔小木曾玉喜〕 二十世紀前半期 日本人

Köhler, C.〔庫勒〕(1880—1933) 德人

Köhler, E. T.〔庫勒〕 十九世紀後半期

Köhler, Friedrich〔庫勒〕 十八世紀

Köhler, H. G.〔庫勒〕 即 H. G. Koehler

Kohler, K. M.〔庫勒〕 二十世紀

Kohlmann, W.〔科爾曼〕 十九世紀後半期

Kohlrausch, Friedrich〔科爾牢士〕(1840, 10, 14—1910, 1, 17) 德人

Kohlrausch, F. L.〔科爾牢士〕 二十世紀 德人

Kohlschütter, A.〔科爾叔忒〕 二十世紀初 德人

Kohn, Gustav〔科因〕 十九世紀末 奧人

Koide〔小出光敎〕 (1820—1876) 日本人

Koide Shuki〔小出修喜〕 (1798—1865 八月二十七日) 日本人

Koide Yuken〔小出〕 (1636—1707) 日本人

Koike Yuken (1683—1754) 日本人

Kojima,Shunji〔小島〕 二十世紀前半期 日本人

Kojima, T.〔小島鐵藏〕 二十世紀前半期 日本人

Kok, J.〔科克〕

Kokomoor, F. W.〔科科穆〕 二十世紀前半期 美人

Koksma. J. F.〔科克斯馬〕 二十世紀 荷蘭人

Kokura〔小倉金之助〕 卽 K. Ogura

Koláček, F.〔科拉栖〕 十九世紀末 捷克人

Kolberg, J.〔科爾堡〕 十九世紀 厄瓜多爾(Ecuador)人

Kollar, V.〔科拉〕 十九世紀前半期 奧人

Kölmel, F.〔刻麥爾〕 十九世紀後半期 德人

Kolmogoroff. A.〔科摩哥洛夫〕 二十世紀前半期 俄人

Kolousek, J.〔科盧栖〕 二十世紀初 捷克人

Kolross, Johann〔科洛斯〕 亦作 Joannem Kolross 十六世紀前半期 瑞士人

Kommerell, Karl〔科墨棱爾〕 十九及二十世紀 德人

Kommerell. Viktor〔科墨棱爾〕 二十世紀初 德人 研究數學史

Kondo Makoto〔近藤眞琴〕 (1831 九月二十四日—1886 九月四日) 日本人

Kondo Motokichi〔近藤〕 二十世紀前半期 日本人

Konen, H.〔科稜〕 二十世紀初 德人

König, Dénes〔刻尼喜〕 二十世紀前半期 德人

König, E.〔刻尼喜〕 卽 E. Koenig

König, H. 〔刻尼喜〕 二十世紀前半期 德人

König, Julius 〔刻尼喜〕 (1849--1913) 匈人

König, Johann Samuel 〔刻尼喜〕 卽 Samuel Koenig

König, Karl 〔刻尼喜〕 二十世紀前半期 德人

König, Robert 〔刻尼喜〕 二十世紀初 德人 著橢圓函數

König, S. 〔刻尼喜〕 卽 S. Koenig

Königsberger, L. 〔刻尼斯貝革〕 卽 Leo Kœnigsberger

Konon von Samos 〔哥諾〕 亦作 Conon (?--390B.C.) 希臘人

Konorski, B. M. 〔科諾斯啓〕 二十世紀 德人

Kondo Tsutomu 二十世紀前半期 日本人

Koopman, B. O. 〔科普曼〕 二十世紀前半期 美人

Kooyman, F. 〔哥孟〕

Kooyman, J. T. 〔哥孟〕

Köpcke, A. 〔科克〕

Köpcke, H. A. 〔科克〕 十九世紀

Kopf, E. W. 〔哥甫〕 (1889--1933, 8, 4) 美人

Köpfer, Simon 〔科斐〕 十六世紀 德人

Kopff, August 〔科甫〕 二十世紀 德人 著數理相對論

Köpp, Ulr. 〔哥布〕 十九世紀前半期 德人

Koppe, Karl 〔哥佩〕 亦作C. Koppe 十九世紀後半期 德人

Koppe, Max 〔哥佩〕 十九世紀 德人

Koppelmann, W. 〔科柏曼〕 二十世紀前半期 德人

Köppen, Fr. Th. 〔刻盆〕 十九世紀 德人

Koppernikus, Nicolaus 〔哥白尼〕 亦作 Kopperlingk 卽 Coppernicus

Koralek, Ph. 〔可剌勒〕 十九世紀中 法人

Korczynski, J. 〔科契斯齊〕 十九世紀末 波蘭人

Kordenbusch, G. F. 〔科登部士〕 十八世紀 德人

Korkine, Alexander 〔昆琴〕 (1837—1908) 俄人

Kormes, Jennie P. 〔科謨斯〕 卽 Mrs. Mark Kormes 二十世紀前半期 美女

Kormes, Mark 〔科謨斯〕 二十世紀前半期 美人

Korn, Arthur 〔昆〕 十九及二十世紀 德人

Korndörfer, Georg H. L. 〔昆多斐〕 十九世紀

Körner, T. 〔剋涅〕 二十世紀初 德人

Korra 〔科剌〕 卽 Tabit ibn Korra

Korseit 〔科塞爾特〕

Korteweg, D. J. 〔科條衞〕 十九世紀末 荷蘭人

Körting, G. 〔科廷〕 二十世紀初 德人

Kortum, Ludwig Hermann 〔科耳沌〕 (1836—1904) 德人

Korzybski, Alfred 〔科咸斯啓〕 二十世紀前半期 美人

Koschmiedr, Lothar 〔科士邁得〕 二十世紀前半期 德人

Koshliakov, N. S. 〔科士力科〕 二十世紀前半期

Kossak, E. 〔科薩克〕 十九世紀後半期 德人

Kossak, H. 〔科薩克〕 十九世紀後半期

Kössler, H, 〔科斯勒〕 二十世紀前半期 德人

Kosta 〔科斯塔〕 亦作 Qosta卽Tabit ibn Korra

Košťál, C. 〔科斯退〕 十九世紀後半期

Koster, P. 〔科斯忒〕 十八世紀 德人

Kostka, C. 〔科斯卡〕 十九世紀後半期 德人

Köstlin, W. 〔剋斯特林〕 十九世紀 德人

Kotany, Ludwig 〔科坦尼〕 (1860, 9, 5—1930, 5. 14) 美人生於匈牙利

Köthe, G.〔刻提〕二十世紀前半期 德人

Kotjelnikoff, A. P.〔科澤尼可夫〕十九世紀末 俄人 研究向量解析之射影理論

Kötter, Ernst〔科武〕十九世紀後半期 德人

Kötter, Fritz〔科武〕二十世紀 德人

Kötterlitzsch, Theodor〔科武利士〕亦作 T. Kötteritzsch 十九世紀後半期

Kottler, Fritz〔科特勒〕二十世紀 德人

Kou Shou King〔郭守敬〕即 Kuo Shou Ching

Koudon, Girault de〔科頓〕十八世紀 法人

Kourensky, M.〔科稜斯啓〕二十世紀前半期 英人

Kourganof, Nicolas〔科干諾夫〕(1725—1796) 俄人

Koutorga, M. S.〔科托加〕十九世紀中 法人

Kouznetzoff, Vasilii〔科涅左夫〕十八世紀

Kovalenko, Michael〔科瓦薩哥〕二十世紀前半期 美人

Kovalevski, Sophie〔科瓦琉斯歧〕亦作 Soyhie Kowalewski 或 S. v. Kovalewsky 原名爲 Sónya Krukovsky 其夫名爲 Vladímir Kovalevski (1850, 1, 15—1891, 2, 10) 俄女 女數學家.發見剛體運動之微分方程式.證明偏微分方程系之積分存在定理.

Kovarik, Alois Francis〔科瓦立〕(1880, 3, 8—) 美人

Kowalewski, Arnold〔科瓦琉斯歧〕二十世紀 德人

Kowalewski, Gerhard〔科瓦琉斯歧〕二十世紀初 捷克人 著行列式幾何變換法連續羣論.

Kowalewski, Sophie〔科瓦琉斯歧〕即 S. Kovalevski

Kozák, Josef〔科紮〕二十世紀初 奥人

Kraemer, A.〔克果麥〕二十世紀初 巨哥斯拉夫人

Krafft, Georg Wolffgang〔克剌夫特〕(1701—1754) 德人

Krafft, Johann〔克剌夫特〕十六世紀　德人

Krafft, Maximilian〔克剌夫特〕二十世紀前半期　巨哥斯拉夫人　研究橢圓函數

Kraft, F.〔克拉夫特〕十九世紀後半期　德人

Kraft, Johannes〔克拉夫特〕十六世紀末　德人

Kraitchik, M.〔克累契克〕二十世紀前半期　比利時人

Krakowski, V.〔克剌科斯喀〕二十世紀前半期　瑞士人

Krall, G.〔克剌爾〕二十世紀　義人

Kramer, A.〔克剌麥〕十九世紀　德人

Kramer, Edna E.〔克剌麥〕二十世紀前半期　美女

Krames, F.〔克剌麥〕二十世紀前半期　德人

Kramer, J.〔克剌麥〕二十世紀　德人

Kramer, W.〔克剌麥〕二十世紀　瑞士人

Kramers, H. A.〔克剌麥斯〕二十世紀

Krames, F. S.〔克剌謨斯〕二十世紀前半期　奧人

Krames, Joseph Leopold〔克剌謨斯〕二十世紀　奧人

Krammel, H.〔克剌麥爾〕

Kramp, Christian〔克剌普〕(1760—1826) 法人　始用n! 表示n之階乘

Krampf, W.〔克剌普夫〕二十世紀前半期　德人

Krancke, F.〔克倫刻〕十九世紀　德人

Krates von Mallus〔克剌提〕紀元前二世紀　希臘人

Krathwohl, W. C.〔克剌司服〕二十世紀前半期　美人

Kratzer, A.〔克剌策〕二十世紀　德人　數理物理家

Kraupner, W.〔克勞涅〕二十世紀

Kraus, L.〔克勞斯〕十九世紀後半期　奥人

Krause, A.〔克勞西〕十九世紀末　德人

Krause, Karl Christian Friedrich〔克勞西〕(1781, 5, 6—1832, 9, 27)　德人

Krause, Marten〔克勞西〕十九及二十世紀　德人　著雙週期函數論及超橢圓函數之變換

Krause, Richard〔克勞西〕十九世紀後半期　德人

Krause, Rudolf〔克勞西〕二十世紀初　德人

Krawtchouk, M.〔克洛剛克〕二十世紀前半期　法人

Krazer, Adolf〔克剌策〕(1858—1926, 8, 7)　德人　著狄達函數,亞柏爾函數.

Krazer, G.〔克剌策〕二十世紀　德人

Krebs, William S.〔克勒布斯〕二十世紀　美人

Krediet, C.〔克勒第特〕二十世紀前半期　荷蘭人

Kreft, W.〔克累夫特〕二十世紀初　德人

Kreimler, C. J.〔克來勒〕二十世紀初　德人

Kreis, H.〔克賴斯〕二十世紀　瑞士人

Kremer, Alfr. von〔克勒麥〕十九世紀後半期　奥人

Kremer, G.〔克勒麥〕

Kresa, Jacob〔克勒薩〕十八世紀　捷克人

Kress, G. von〔克勒斯〕　德人

Kretkowski, W.〔克勒科斯啓〕十九世紀後半期　波蘭人

Kretschmer, E.〔克勒士麥〕二十世紀　德人

Kretschmer, Walter〔克勒士麥〕(1897—1925, 9, 22)

Kreza, Jakob〔克勒紮〕(1648—1715)　西班牙人

Kries, Johannes von〔克里斯〕(1853—1928, 12, 30)　德人

Krigar-Menzel, O.〔克立加·蒙策〕十九世紀末　德人

Kriloff, A.〔克立羅夫〕 二十世紀

Krishnan. K. S.〔克立什南〕 二十世紀前半期 英人

Křištan von Prachatic〔克立坦〕 (1392—1437) 捷克人

Kritikos, N.〔克立提科〕 二十世紀前半期 德人

Kritter, J. A.〔克立武〕 十八世紀 德人

Krober〔克洛柏〕 十九世紀後半期 德人

Kroes F.〔克洛斯〕 十九世紀後半期 德人

Krogh, G. C.〔克羅〕 十九世紀 挪德人

Krohs, G.〔克陸斯〕 十九世紀末 德人

Król de Premislia, Martin〔克洛爾〕 十五世紀

Króla, Marcina〔克洛拉〕 十九世紀 波蘭人

Kroman〔克洛孟〕 二十世紀 德人

Kronecker, Leopold〔克洛勒克〕 (1823, 12, 7—1891, 12, 29) 德人 貢獻於數論,方式,函數論等.

Krönig, A. K.〔克琅尼〕 十九世紀中

Kronsbein, J.〔喀琅斯拜〕 二十世紀前半期 德人

Krueger, L.〔克路革〕 十九世紀 德人

Krüger, F.〔克律革〕 亦作 F. Krueger 二十世紀初 德人

Krüger, H.〔克律革〕 十九世紀後半期 德人

Krüger, J. G.〔克律革〕 十八世紀

Krüger, R.〔克律革〕 十九世紀末 德人

Krukovsky, Sónya〔克魯科斯啓〕 卽 S. Kovalevski

Krull, Wolfgang〔克魯爾〕 (1899—) 德人

Krumbiegel, B.〔克綸俾革〕 十九世紀 奧人

Krummbiegel〔克剩俾革〕 十九世紀 德人

Kruppa, Erwin〔克魯帕〕二十世紀 奧人

Krüss, P.〔克律斯〕二十世紀初 德人

Kryker, Lylah〔克里得〕（?—1932, 3, 29）美女

Kryloff, Nicolas〔克里羅夫〕二十世紀前半期 烏克蘭人

Kryschanowsky, D. A.〔克里成諾斯啓〕二十世紀前半期 烏克蘭人

Ku Chang Fa〔顧長發〕十八世紀 中國清時人

Ku Chen Seu〔顧陳垿〕（1678〔清康熙十七年〕—1747〔清乾隆十二年〕）中國人

Ku Jo Ke〔顧若溪〕十六世紀後半期 中國明嘉靖時人

Ku Kuan Kuang〔顧觀光〕（1799〔清嘉慶四年〕—1862〔清同治元年〕）中國人

Ku Kuang Ke〔顧廣圻〕（1766〔清乾隆三十一年〕—1835〔清道光十五年〕）中國人

Ku Ying Hsiang〔顧應祥〕（1483〔明成化十九年〕—1565〔明嘉靖四十四年〕）中國人

Kuapp, Georg Friedrich〔庫普〕（1842— ）德人

Kuba, F.〔庫巴〕二十世紀前半期 奧人

Kubitschek, W.〔庫俾奇克〕十九世紀末 奧人

Kübler, J.〔所屈勒〕二十世紀初 德人

Kubota Tadahiko〔窪田忠彥〕二十世紀前半期 日本人

Kučery, B.〔庫柄立〕二十世紀前半期 捷克人

Küchemann, R.〔屈奇曼〕二十世紀 德人

Kuckuck, A.〔庫卡克〕十九世紀後半期 德人

Kuehn, Martin H.〔屈因〕二十世紀 美人

Kuehne, O.〔鯤奈〕二十世紀 德人

Kuehtmann〔屈特曼〕二十世紀　德人

Kuelp, E.〔屈爾普〕十九世紀　德人　著代數解析

Kuhff, Henry〔昆夫〕(?－1842) 英人　著差分學

Kuhl, Heinrich〔昆爾〕二十世紀　德人

Kühn, F. R.〔屈因〕二十世紀前半期　德人

Kuhn, Heinrich〔屈因〕(1690－1769) 德人

Kuhn, Harry Waldo〔屈因〕十九及二十世紀　美人　研究商業數學

Kuhn, John〔屈因〕十七世紀

Kuhn, K.〔屈因〕十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Kühne, H.〔屈奈〕十九世紀末　德人

Kühne, O.〔屈奈〕二十世紀前半期　德人

Kühnen, F.〔屈能〕十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Kühner, J.〔屈涅〕二十世紀　德人

Kulischer, A. R.〔庫力徹〕二十世紀前半期　俄人

Kull, H.〔卡爾〕二十世紀初　瑞典人

Kullrich, E.〔卡爾理治〕十九世紀末　德人

Kumm, E.〔昆謨〕二十世紀前半期　德人

Kummer, Ernst Eduard〔昆麥〕(1810, 1, 29－1893, 5, 14)　德人　創立幻數(Ideal Numbers)之理論.

Kummer, R.〔昆麥〕十九世紀末　德人

Kung Chi Han〔孔繼涵〕(1739〔清乾隆四年〕－1783〔清乾隆四十八年〕) 中國人

Kung Hing Tae〔孔興泰〕十七世紀後半期　中國清康熙時人

Kung Kwang San〔孔廣森〕(1752〔清乾隆十七年〕－1786〔清乾隆五十一年〕) 中國人

Kunisperger〔昆尼培莱〕 即 Regiomontanus

Kuniyeda Motoji〔國枝元治〕 二十世紀前半期 日本人

Künneth, H.〔庫插詞〕

Kunningham, William〔堪林干〕 即 W. Cunningham

Künsberg, Hans〔庫斯柏〕 十九世紀

Kunsperck, Johann von〔昆斯培萊〕 即 Regiomontanus

Künssbery, Hans〔庫斯貝〕 十九世紀 德人

Kunugi Kinziro〔功力金二郎〕 二十世紀前半期 日本人

Kunze, William Frederick〔昆則〕 (1872, 6, 1—) 美人 著算術習題

Kuo Shou Ching〔郭守敬〕 亦作 Kou Shou King (1231〔宋紹定四年〕—1316〔元延祐三年〕) 中國人

Kuo Yung〔郭榮〕 中國元時人

Kupfer, Lillian〔卡斐〕 二十世紀 美人

Kupferberg, J.〔卡斐柏〕 十九世紀末 德人

Küppers, H.〔屈珀斯〕 十九世紀後半期 德人

Kuratowski, C.〔庫拉托士啓〕 亦作 K. Kuratowski (1896—) 波蘭人

Kürchák, Joseph〔庫察克〕 亦作 J. Kürschák (1864—1933, 3,) 匈人

Kurino〔栗野忠雄〕 十九世紀後半期 日本人

Kurishima Yoshita〔久留島義太〕 亦作 Kurushima Gita (?—1757 十一月二十九日) 日本人

Kuroda Sigetaka 二十世紀前半期 日本人

Kurokawa, R.〔黑河龍三〕 二十世紀前半期 日本人

Kurosu, K.〔黑須康之介〕 二十世紀前半期 日本人

Kürschák, Joseph〔庫察克〕 即 J. Kürchák

Kurten, L.〔庫騰〕 十九世紀末 芬蘭人

Kurth, F.〔庫司〕

Kurtz, E.〔庫次〕

Kurtze, M.〔庫茲〕

Kurushima Gita〔久留島義太〕 卽 Kurishima Yoshita

Kusaka, Sei〔日下誠〕（1764—1839 十一月二日） 日本人

Kuschke. C. G. P.〔庫斯克〕 二十世紀前半期 西印度羣島波德黎各(Porto Rico)人

Kushi〔卡細〕 卽 Al Kushi

Kushyar ibn Lebban〔庫什雅·易·列班〕 卽 Abu'l Hasan Ali

Kusner, Joseph Harrison〔卡斯涅〕 二十世紀前半期 美人

Kusta ibn Luka〔卡斯塔爵·盧喀〕 十九世紀末

Küster, F. W.〔屈斯忒〕 二十世紀 德人

Kuster, Ludolph〔屈斯忒〕 十七世紀初 荷蘭人

Küstermann, W. W.〔屈斯忒曼〕 十九及二十世紀 德人

Kutta, W.〔卡塔〕

Kutta W. M.〔卡塔〕 二十世紀

Kutter. W. R.〔卡忒〕 十九世紀 美人

Kuwamoto Masaaki〔桑本正明〕 日本人

Kuylenstierna. N.〔魁楞斯提納〕 二十世紀前半期 瑞典人

Kwan Tsze Fow〔管嗣復〕 十九世紀 中國清時人

Kynast, R.〔揆那斯特〕 二十世紀前半期 德人

Kyzikenus von Athen〔啓成製那〕 希臘人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第四卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊第四卷第三期目錄

科學的中國

通俗的科學雜誌(半月刊)

第三卷第七期

第三卷第八期

第三卷第九期

第三卷第十期

第三卷第十一期

第三卷第十二期

訂閱處　南京城北蔡巷四號中國科學化運動協會發行部
代售處　南京及外埠各大書店
價　目　零售每册大洋一角五分國外加郵大洋一角
定閱(連郵)　國內半年十二册一元六角全年二十四册三元　國外半年十二册三元全年二十四册五元八角

中南情報

第三期目錄

出版者　國立暨南大學海外文化事業部

代售處　上海眞如　南新書店
上海眞如　新中華書店
上海四馬路　作者書社
上海北四川路　華僑書店
上海河南路　蔚藍書店
上海四馬路　羣益圖書公司
海內外　各大書店

	冊數	定價	郵費 國內	郵費 國外
定價	一冊	五分	一分	一角
	半年十冊	五角	一角	一元
	全年廿冊	一元	二角	二元

國立中山大學理工學院

自然科學季刊

第五卷 第二期 目錄

每冊大洋三角

編輯者：國立中山大學理工學院
發行者：廣州文明路本校出版部
代售處：各　大　書　局

大　夏

第一卷 第一期 目錄

上海大夏大學發行

定　價：每卷大洋二元（每卷十冊）
每冊零售大洋二角
售賣處：上海各大書局

介紹期刊

地質彙報……北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所
自然科學季刊……國立北京大學自然科學季刊委員會
師大月刊……國立北平師範大學
清華學報……北平清華大學
理工雜誌……上海呂班路二二三號震旦大學理工學院
理科期刊……上海光華大學科學會
電業季刊……南京城內大石壩街廿一號全國民營電業聯合會編輯股
無線電雜誌……上海愛多亞路一三九五號中國業餘無線電社
化學季刊……國立北平大學工學院化學季刊社
化工……國立浙江大學化學工程學會
土木工程會會刊……復旦大學土木工程學會
高工土木工程學會會刊……浙大高工土木工程學會
同濟醫學季刊……上海白克路國立同濟大學醫學院
機務譯報……江蘇浦鎮津浦鐵路機務處
大衆畫報……上海舟山路十二號大衆出版社
上海物價月報……上海漢口路外灘新關國定稅則委員會

介紹期刊

時事類編……上海福煦路八〇三號中山文化教育館

螞蟻月刊……上海四川路五三六號

大學……上海南京路大陸商場三〇四號

婦女旬刊……杭州長明寺巷長慶里十五號
中華婦女學社

協力月刊……北平東城大方家胡同五十二號

新中華……上海中華書局

安徽大學月刊……安慶安徽大學月刊編輯室

民大校刊……廣東荔枝灣國民大學

國立四川大學周刊……成都四川大學

國立北平圖書館館刊……北平文津街一號

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

青島市建設月刊……青島市政府秘書處編輯委員會

華安……上海靜安寺路一〇四號華安出版社

中學生……上海四馬路八五號開明書局

真光校刊……廣州市白鶴洞私立真光女子中學

國立武漢大學理科季刊

第四卷第四期

價目				郵費
全	年	四	册	訂購全年 本國及日本不加郵費
價	銀	二	圓	其他地域加郵費二圓
每	期	零	售	函購零本 本國及日本郵費五分
價	銀	五	角	其他地域加郵費五角
本刊以九月十二月三月六月爲出版期				
費須先惠空函不覆				
各地代售處零售概不另加郵費				

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十三年六月發行

1934年

第 1 期

國立武漢大學
理科季刊

第五卷第一期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. V No. 1　　　September 1934

本期目錄

中華民國二十三年九月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

本刊特別啓事

1. 凡關於寄稿請求介紹批評書籍以及交換雜誌或廣告等函件均請寄交武昌國立武漢大學理科季刊委員會

2. 凡關於訂購以及其他營業事件均請直函武昌國立武漢大學出版部接洽

國立武漢大學理科季刊

第五卷第一期目錄

頁數

鉻鹽製革之原理

陶延橋

製革之原料,可分爲兩大類:(1)植物鞣料,(2)礦物鞣料.二者之中,以礦物最爲普遍,礦物可用以鞣革者,爲數甚多,而真能合乎製革之用者,只有鉻鋁之化合物,惟鉻鹽最爲通用,現各國所出產之種種皮革,幾盡爲此所製,

鞣革之鉻鹽,須有鹽基性,其他如正鉻鹽之硫酸鉻 $Cr_2(SO_4)_3$ 或三氯化鉻 $CrCl_3$,無甚効果.至於三氫氧化鉻 $Cr(OH)_3$ 則毫無用處.介乎酸性與鹼性間之鹽基性化合物 (Basic chrome salts), 方合製革之用.此中原理,有多說以解釋之,茲將諸家之說,摘要分述之,

I. 負離子鉻鹽之原理 (The Negatively-charged Chrome Compound Theory). 套姆生及阿提京兩氏 (F. C. Thompson and W. R. Atkin)[1]謂鹽基性鉻鹽可以鞣革者,實因綠色硫酸鉻產生負離子,或此物變成膠質細粒,內含鉻質,皮置于鉻鹽溶液內,首先吸收其中之游離酸,可變爲正離子.正負離子互相聯合,因而成革.湯阿兩氏舉下列各事實,以證明其說:

a. 以植物或礦物鞣革所用之方法,完全相同. 濮老克

與威爾生兩氏 (Procter and Wilson) 前提出之植物鞣革原理,謂皮在帶酸性之植物溶液內,先吸酸,繼之皮中氨基與氫聯合變成正離子,植物單寧本爲負離子,正負相遇,革因以成,礦植物鞣革之方法既完全相同,則濮威兩氏之說,(已爲世所公認)當可引證,卽鉻鹽爲負離子,皮吸酸後轉爲正離子,如下列之公式:

$$\underset{\text{皮}}{RNH_2}{}^{(2)}+HCl=RNH_3^{+}+Cl^{-}$$

$$RNH_3^{+}+[\text{鉻鹽}]^{-}=\text{革}$$

依此而言,同時有二物互起作用,致發生沉澱.此二物者爲正離子皮與負離子鉻鹽,沉澱卽革也,

b. 有多種不相同之硫酸鉻, 硫酸鉻一物,如與氫氧化銨相接觸,則有三氫氧化鉻之沉澱.與氯化鋇亦起反應,而成硫酸鋇,此爲習見之事.但有數人製出數種不相同之硫酸鉻,於其溶液內,加入上述之二物,毫無沉澱發生,此可表示其中幷無平常所謂之鉻質及硫酸根.但若將溶液加熱至沸,則有沉澱.又在未加藥品之前,令溶液放置多時,而後試驗,亦有沉澱,此又可表示鉻質及硫酸根二者,雖在溶液中,但爲極複雜之形狀,須加熱或擱置多時,始能恢復常態也,

茲述芮孜芮氏 (A. Recoura)[3] 之工作,彼曾發現五種硫酸鉻,下列三種,較爲重要:

1) 先置鉻酸於少許水中,熱至 30°c 之下,使不致溶解,再

加酒精及硫酸,鉻酸可以還原,產生一種淺綠色物,其成分爲 $Cr_2(SO_4)_3+11H_2O$,甚易吸收潮氣,氯化鋇不能立卽與之發生反應,必待半小時後,始有硫酸鋇之沉澱,此因綠色鉻鹽之一部份,自動變爲紫色一種,故可反應.但如須完全沉澱,非將溶液煑沸數小時不可.

2)從紫色溶液變出之綠色溶液,與氯化鋇混合,不能立卽發生沉澱.若加鹼性物,則有氫氧化合物如 $Cr_2O(OH)_4$ 發生.

3)綠色硫酸鉻可與硫酸及金屬硫酸化合物如硫酸鉻硫酸鉀等聯合,而成複雜物,此中之……根,不能爲氯化鋇沉澱,雖所含之金屬,可用常法以試驗之.例如用硫酸與硫酸鉻,則所成之複雜物,可視爲 $H_2Cr_2(SO_4)_4$. 至鉀之複雜物,可自鉻明礬製成之.先將鉻明礬烘至 90°c, 其中之結晶水本有二十四分子,則失去十二分子,如溫度增至 110°c, 再散八分子,始可成綠色複雜物 $K_2[Cr_2(SO_4)_4]$ (Potassium Chromsulphate). 此物溶化於冷水中,甚爲遲緩,所成之溶液,不能與氯化鋇發生沉澱.由此可證明鉻鹽溶液內,如有中性硫酸化合物,可阻止鞣浸也,

硫酸鉻與金屬硫酸化合物,所成之複雜物,極不固定,常自分離,所受影響最大者:(1)爲溶液之酸性,可以阻止水化.(2)溶液之濃度.

總之凡中性硫酸鉻之複雜物,不可爲鞣革之用也.

此外尙有一事,亟宜說明者,卽鉻鹽溶液與溫度之關係.

鉻鹽如鉻明礬或硫酸鉻溶解於冷水,則成紫色溶液.若加熱則紫色立卽散失,變爲綠色.如使綠色之溫度,逐漸降低,至於平常室溫,則溶液仍變爲紫色,此因鉻鹽有紫綠二類,在 20°c 之上,紫類立卽變成綠類.反之在 20°c 之下,紫類永遠固定,不致或變.此種變化,凡鉻鹽皆有之,惟有快慢之別而已.例如硫酸鉻由紫色變爲綠色,甚爲遲緩.硝酸鉻與三氯化鉻則較爲迅速,此其變化快慢之不同.至於溶液之酸性,亦有大小.紫色溶液之酸性較小於綠色溶液,此或因鉻鹽在高溫度之下,爲水分解,故有多量之酸產生,下列之方程式可以證明之:

$$CrCl_3+H_2O=Cr(OH)Cl_2+HCl.$$

芮七爾得及碰乃得兩氏 (T.W. Richards and F. Bonnet)[4] 舉下列方法,以證明鹽基性鉻鹽之有無.

1)用酒精和醚之混合溶液,數次振盪綠色硫酸鉻溶液,則有 $Cr(OH)SO_4$ 發生.

2)硫酸鉻與三氫氧化鉻在蒸氣鍋上熱之,亦有同樣結果.　$Cr_2(SO_4)_3+Cr(OH)_3=3Cr(OH)(SO_4)$.

3)三氫氧化鉻若與紫色鉻鹽溶液在尋常室溫相振盪,則有 $Cr_6(OH)_7(SO_4)_4$ 發生.

4)溶液內如有硫酸鈉及三氯化鉻二者,加入氯化鋇,使沉澱發生,此卽爲鹽基性硫酸鉻.

芮碰兩氏之研究,確實證明鉻鹽鞣液內有鹽基性硫酸

鉻.

c. 巴色提氏(Bassett)[6]用二氧化硫,使重鉻酸鉀還原.其中含有94—95%硫酸鉻, 5—6% $Cr_2(S_2O_6)_3$,及少許亞硫酸鉀(K_2SO_3),若加入氯化鋇及氫氧化銨,均不能產生沉澱,此表明其中幷無硫酸與鉻離子.巴氏又先使溶液煮沸,而後令冷.通以電流,則見綠色溶液移向陽極,而紫色溶液,則向陰極.紫色內又有三價之鉻質,綠色鉻質乃呈複雜形態.有此二因,巴氏認爲一種特別硫酸化鉻(Chromosulphates),如下式:

$$\begin{matrix} KSO_3 \\ KSO_4 \end{matrix}\!\!>Cr_2(SO_4)_2$$

又溶液愈陳,則綠色移向陽極之速度愈減少,如經過一夜,則完全停止.此綠色鉻質經過若干時,則呈解體之現象.

巴氏之結論,爲綠色溶液含負離子,紫色者含正離子.綠色之複雜物,與芮氏所得者大略相似.氯化鋇不能與之發生反應,又不固定,能自分離,芮巴兩氏均已證明,可無疑問也.

凡鉻鹽溶液所以能與氯化鋇發生沉澱者,其中必含有三價之鉻,如鉻成爲複雜物,則不可能也.

$$Cr_2(SO_4)_3+3BaCl_2=3BaSO_4+2CrCl_3$$

$$Cr(OH)SO_4+BaCl_2=BaSO_4+Cr(OH)Cl_2.$$

上述之中性複雜物,依芮氏之說,幷無鞣性,惟巴氏則謂有之,含負離子,第此物一經煮沸,或予久置,則自行分解,是製成已久之鉻鹽,必無鞣性,與事實相反.延橋以爲溶液內

除此之外,尚有合乎製革之鹽基性鉻鹽也.

d. 鮑里氏(Pauli)[6]曾申明鹽基性之鋯鹽及鉻鹽,均含有正負離子.鋯之複雜化合物如下:

$$Zr(OH)_4 Zr\,O\,Cl_2\,Cl_2^- | H_2^{++}$$

鉻鹽亦同樣變爲複雜化合物,

$$Cr(OH)_2 Cr\,O\,Cl\,Cl^- | H^+.$$

e. 套阿兩氏又使二氨基聯苯(Benzidine base)溶化於醋酸戊烷(Amyl acetate)內.再與三氯化鉻振盪,二氨基聯苯變爲正離子,鉻爲負離子,因而沉澱.植物單寧亦可與氨基聯苯發生沉澱,更可證明礦植物完全相同.又硝酸鉛與三氯化鐵,亦能與二氨基聯苯反應,有沉澱產生,是礦植物具鞣性者,均能如此,而無例外也.

f. 博爾頓氏(Burton)[7]試驗鹽基性鉻鹽之沉澱點(Precipitation point)[8], 亦謂沉澱點愈高,則含負離子之鉻愈多.此因當鹼性物加入時,游離酸首先中和,繼之使含負離子鉻之複雜化合物,變成鉻鹽,終之鉻質沉澱,凡鹽基性鉻鹽製自重鉻酸鉀及葡萄糖或二氧化鉻,最爲製革者所樂用,一因溶液攙稀時,不致發生沉澱.二因加入鹼性物,亦不易有沉澱.此由所含鉻質多爲負離子之故,或因溶液之酸性較大,亦未可知,

凡用葡萄糖或澱粉爲還原劑,製成之鹽基性鉻鹽,以之製革,較之以鉻明礬所製者爲佳,此因革頗充滿而膨脹,無

空處之弊,

博氏[9]復補充負離子鉻鹽之原理,謂當用鉻鹽鞣浸時,有三種不之同工作,同時進行:

1) 淨皮(Pelt)吸收鉻鹽,纖維間充滿鉻之化合物.

2) ……吸收游離酸,自已變爲正離子,當初期鞣浸時[10],酸與鉻雖均被吸收,但有快慢之別.吸酸之速度,較之吸鉻,約快兩倍,過此之後,兩者之速度相同,無所區別,

3) 溶液內之游離酸,旣爲皮吸收,則鉻鹽繼續水化,復可產酸,而鉻鹽之鹽基酸,因以增高,

$$2Cr(OH)SO_4+2H_2O=Cr_2(OH)_4SO_4+H_2SO_4$$

照上列之方程式解釋,原來之鹽基度爲96°,一經水化,則發生一分子硫酸,鉻鹽之鹽基度增高至48°.如此酸仍爲皮吸去,則鉻鹽仍可繼續水化,如下式:

$$Cr_2(OH)_4SO_4+2H_2O=2Cr(OH)_3+H_2SO_4$$

惟鉻鹽決不能水化至此地步,因鹽基性鉻鹽一經產生,早爲皮吸收,不可繼續增高,至於沉澱也,

關於此原理,尙有以下諸實驗以證明之:

(1)凡金屬之氫氧化合物,均爲正離子,已成慣例,此獨爲負,實係所處之情形不同.如氫氧化鉻在鹼性溶液中,變成負離子.在酸性溶液中,則轉變爲正.故鉻鹽可爲正離子,亦可爲負離子.潘威斯氏(Powis)[11]曾言實有此類事,例如膠質氫氧化鐵中,加入稀氫氧化鈉,則其所含之離子,可自正變

而為負.

(2) 濮老克及郭芮夫斯(Griffith)[12]兩氏謂鉻鹽所製之革,當中和時,如多用鹼性物,將其中所有之酸,完全除去,則皮之品質,與前迴異,卽忽而變硬,與未充分鞣製者相似.惟革中吸收之鉻質,絲毫未去,其所以改變者,因鹽基性鉻鹽成為三氫氧化鉻:

$$Cr(OH)SO_4+2NaOH=Cr(OH)_3+Na_2SO_4$$

三氫氧化鉻無鞣製之功用.

皮既吸酸,變為正離子,可與鉻鹽聯合而成革.今遇多量氫氧化鈉,鉻酸可變為無用之三氫氧化鉻,而皮亦由正變而為負,不能與鉻鹽起作用,故皮質不如前也.

(3) 懷特氏(White)[13]置革(用雙鉻鹽法製造)於水,逐漸加入氫氧化鈉,則溶液常不現鹹性,此亦革吸酸之明證也.

(4) 莘磨將氏(Seymour-Jones)用顯微鏡視察鉻鹽所製革之內部,發現纖維之外表,有鉻之氧化物,而其內部仍為膠質,此為最佳之革.至於製造不善者,只纖維之粗而大者,尚有鉻之氧化物.其中小者,一無所有.普通上等革約有 $7\% Cr_2O_3$. 凡革能經沸水試驗(Boiling Test),而不稍收縮者,非有 $3\% Cr_2O_3$ 不可.(百分率照濕革之重量).

(5) 鮑里氏又用下列諸方程式解釋鉻鹽之複雜離子:

$$\underset{\text{鹽基性鉻酸}}{[\text{Basic Chrome salt}]}+H_2O \rightleftharpoons \underset{\text{加大鹽基性鉻鹽}}{[\text{More Basic Chrome salt}]}+2H^{\cdot}+SO_4''$$

$$[\text{加大鹽基性鉻鹽}] \rightleftharpoons H^{\cdot} + \underset{\text{鉻之化合物}}{[\text{Chrome Compound}]}$$

應用質量作用定量(Law of Mass Action)

$$K \times [\text{More Basic Chrome Salt}] = [H^{\cdot}] \times [\text{Negatively Charged Chrome Compound}]\ \text{負離子鉻鹽}$$

$$\text{負離子鉻鹽} = \frac{K \times [\text{Basic Chrome Salt}]}{[H^{\cdot}]}$$

依上列之方程式而言,

1. 如向鉻鹽溶液內加酸,則增加氫離子,卽減少負離子鉻鹽.

2. 反之如增多鹼性物,卽減少氫離子,則負離子鉻鹽可以大增,

3. 中性物[14]如中性氯化物×,加入鉻鹽溶液內,可以阻止鞣浸,此因氫離子頓形增加,負離子隨之減少故也,又如用中性硫酸化合物[15]如硫酸鈉及硫酸鉀×,不但少減負離子鉻鹽,幷可使皮內酸性變小,則皮之正離子亦因之減少.故鞣浸之速度與沉澱點有聯帶之關係,卽沉澱點愈低,則鞣浸愈速.反之沉澱點愈高,鞣浸愈慢,此因酸性之大小,亦負離子增減應有之現象也.

負離子鉻鹽之原理,套阿水氏倡之,復有多人贊助其說,舉出種種事實,以證明之.惟反對此原理者,亦舉下列諸事實,加以抨擊.

× 此等化合物在溶液中,可以水化.

1. 苯磨將氏[16]研究鉻鹽鞣革之原理,大意如下:

(1)鹽基性硫酸鉻之溶液內,實有一部份負離子,并爲複雜物.

(2)鹽基性三氯化鉻之溶液內,并無含負離子鉻之複雜物,仍可用以鞣浸.

(3)中性之綠色鉻明礬溶液內,亦無負離子鉻之複雜物,但鞣革甚速.

由此觀之,多數之鹽基性硫酸鉻,確有含負離子鉻之複雜物,惟中性鉻明礬及鹽基性三氯化鉻,并無此物,而亦能鞣浸,是與上述之原理,格格不入也.

華氏[17]又謂於綠色硫酸鉻溶液內,加入三氫氧化鉻,并予振盪,則有 $Cr(OH)SO_4$ 及 $Cr_5(OH)_7(SO_4)_4$ 產生.若通以電流,則見無鉻移向陽極,是鉻鹽複雜物雖有發生,竟無鉻之負離子,可以證明套阿兩氏之說也。

2. 芮碰兩氏[18]用三氫氧化鉻振盪綠色硫酸鈉,以除去其中之酸,則複雜物發生,成分略似 $Cr(OH)SO_4$ 與 $Cr_5(OH)_7(SO_4)_4$ 二者.若通以電流,陽極間并未發現鉻質,由此更見華氏工作之確實,毫無疑意也.

3. 若[19]於紫色鉻明礬溶液內,加入氫氧化鈉,使成鹹性,以之鞣浸,較用綠色溶液,革可速成.雖兩者之鹽基性與鉻之成分完全相同,而其速度快慢,亦難幸免,依巴色提氏之理論而言,綠色溶液含鉻負離子,而紫色者有鉻正離子,真純紫色鉻鹽溶液者,必無鞣性.博氏證明紫色溶液鞣皮之速

度,較之綠色,頗爲迅速,是與負離子鉻鹽鞣革之原理,益大相違異矣.

II. 吸收原理 (Absorption Theory).

(1)克那布氏 (F. Knapp)[20] 首謂鉻鹽所以能製革者,爲吸收原理.皮經鞣浸後,纖維間無所改變,惟其上蓋有一層不易爲水濕透之物,可以避免膨脹,兼防腐化,又可使纖維分散,不如前之簇集.

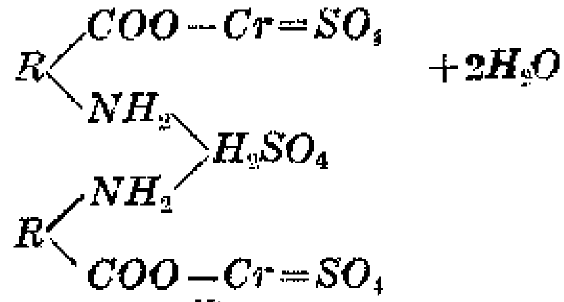
(2)濮老克氏見鉻鹽易爲水化,變成鹽基性,同時并有游離酸發生,因謂皮能吸收游離酸,鉻鹽得以繼續水化,直至鹽基性發生變爲膠質,不復能溶解於水,則聚集於纖維之上,自成一層.

(3)美利爾氏 (Meunier)[21] 亦謂鉻鹽鞣浸,係皮吸收膠狀氧化鉻,使之沉澱於纖維表面上,此種吸收爲不可反轉的 (Irreversible absorption). 已經吸收之鉻鹽,逐漸深入纖維之內部,第鉻鹽鞣浸最速,若依美氏之理論而言,殊費解釋.

III 化學原理 (Chemical Theories).

主此說者謂鉻鹽與皮化合而成革,實一化學反應也.當皮初浸於鹽基性鉻鹽溶液時,其中硫酸立卽與氨基連合,而鹽基性硫酸鉻,亦能與酸根反應,不過無前者之迅速,特較慢耳.

$$2\underset{\text{皮}}{R}\begin{matrix} \diagup NH_2 \\ \diagdown COOH \end{matrix} + H_2SO_4 + 2Cr(OH)SO_4 =$$



革

A. 威爾生氏[22]於一九一七年發表一文,大約爲明礬鉻及鐵之化合物,若與皮之蛋白質反應,必成爲複雜物.威氏又想鞣浸之要素,爲膠質三氫氧化鉻.此物在酸性溶液內含正離子,故鉻鹽鞣革與植物鞣革,絕不相同也.

威氏復舉下列事實,以證明其說:

(1)鉻鹽與蛋白質既可化合,則必成爲蛋白質化鉻 (Chromium Collagenate). 此物頗爲固定,極不易電解,卽浸於水中,亦不致溶解或稍膨脹.

(2)假設皮中蛋白質之原質量爲 750, 則應需之氧化鉻,至爲微細,玆以下列方法計算之:

設有一百克(100g)淨皮間三氧化二鉻若干

$$100 : X = 750 : \frac{152}{6}\,(Cr_2O_3)$$

$$\therefore X = \frac{100 \times \frac{152}{6}}{750} = \frac{100 \times 152}{6 \times 750} = 3.37\%\,Cr_2O_3$$

卽每 100g 淨皮需 3.37%三氧化二鉻也.此正與南姆與哈爲兩氏 (M.C. Lamb and A. Harvey)[23]研究之結果,甚相符合.彼等認爲鉻鞣之革,必含有 2.8–3.0%[24]三氧化二鉻,否則可視爲未完全鞣浸者.

(3)鉻鹽與皮之反應,可以反轉,如置革於有氫氧根之酸內,能完全溶解鉻之化合物.

最近威氏對於前所發表鉻鹽製革之原理,稍加以改變,卽皮之蛋白質,先與鉻之一價聯合.迨鉻鹽再行水化,又與鉻之第二價聯合.至鉻之第三價與皮化合甚慢,終變為蛋白質化鉻.

$$3\underset{\text{皮}}{R\langle{}^{NH}_{CO}} + Cr(OH)_3 \rightleftharpoons \underset{\text{革}}{(NH_2RCOO)_3Cr}$$

B. 置皮[25]於數種鉻鹽溶液內,其三氧化二鉻之成分,各不相同,每100cc最少含0.038g Cr_2O_3,最多有6.64g Cr_2O_3,如此分配,則見鉻鹽為皮吸收最多者,為100cc中含有1.5g-2.0g Cr_2O_3,如鉻之成分多於此者,則皮之吸收能力反而減低.再者每100g淨皮可吸收13.4g Cr_2O_3,幾乎四倍威氏所得(3.37g),此化合物名為蛋白質化四鉻(Tetra chrome Collagen).

C. 湯姆斯氏(A. W. Thomas)等[26]亦置皮於數種鉻鹽溶液內,所含三氧化二鉻之量,各不相同,有少至0.04g者,有多至20.8g者,發現每100g淨皮,可吸收26.6g Cr_2O_3,溶液之濃度為100cc含有1.536g Cr_2O_3.此數較之威氏所得,約大八倍,可名為蛋白質化八鉻(Octachrome Collagen).而皮中蛋白質之原質量,因之低至94,卽小於750約八倍也.

以上為用鉻鹽製革之各種原理,究竟孰是孰非,現尚未十分決定也.

參攷書

(1) A Possible Theory of Chrome Tanning. J.A.L.C.A., 1922, 571; J.S.L. T.C., 1922, 207, 244.

(2)皮之原質至為複雜,吾人所知不過為其中有酸根(COOH)與氨基(NH_2),R代表其他複雜物.

(3) On the Isomeric States of Chromic Sulphate. J.C.S., 1892, A., 411, 783.

(4) Variable Hydrolytic Equilibrium of Dissolved $Cr_2(SO_4)_3$ Zeit. Physikal. Chem. 1904, 47, 29-51; J.C.S., 1904, Aii, 343.

(5) The Mechanism of the Reduction of $K_2Cr_2O_7$ by H_2SO_3. J.C.S., 1903, 692.

(6) The General Structure of Colloids, Report of a General Discussion held by the Faraday Society and the Phy. Society of London, 1920.

(7) D. Burton, R.P. Wood and A. Glover. Some Observations on the Properties of the Common Chrome Liquors. J.S.L.T.C., 1922, 281.

(8)沉澱點 加曹達溶液於濾出之鉻鹽溶液內至發現混濁為止

(9) The Relation between the Properties of Chrome Liquors and the Leather they produce. J.S.L.T.C., 1922, 164.

(10) A. W. Thomas, M.E. Baldwin, and M. W. Kelly, J.A.L.C.A., 1920, 155.

(11) F. Powis. Negative Colloidal Ferric Hydroxide. J.C.S., 1915, 818 (T).

(12) The Absorption of Basic Chrome Salts by Skins. J.S.C.I., 1900, 223; J.A.L.C.A., 1917, 612.

(13) E. J. White. Chrome Leather Problems for Research Laboratories. J.A.L.C.A., 1919, 2.

(14) A. W. Thomas & M. E. Baldwin. The Action of Neutral Salts Upon Chrome Liquors. J.A.L.C.A., 1918, 248.

(15) D. Burton, & A. Glover. The Influence of Neutral Salts on the Absorption of the Acid and Chrome from Chrome Solutions by Gelatine. J.S.L. T.C., 1921, 187, 244.

(16) F. L. Seymour-Jones. The Electrophoresis of Chromic Solutions. J. S.L.T.C., 1922, 377.

(17) T. W. Richard & F. Bonnet. Variable Hydrolytic Equilibrium of Dissolved $Cr_2(SO_4)_3$. Zeit. Physikal. Chem., 1904, 47, 29-51.

(18) The Colloid Chemistry of Basic Chromic Solutions. J.S.L.T.C., 1922, 377.

(19) D. Burton. Chrome Tanning 1. J.S.L.T.C., 1920, 205.

(20) The Nature & Essential Character of the Tanning Process of Leather. J.A.L.C.A.. 1921, 658.

(21) F. L. Seymour-Jones. Mineral Tannages. J.S.L.T.C., 1922, 446; J. Ind. Eng. Chem., 1922, P. 832.

(22) J. A. Wilson. Theories of Leather Chemistry. J.A.L.C.A., 1917, 108; Coll., 1917, 105.

(23) The Estimation of Chromic Oxide in Chrome Tanned Leather. Coll. 1916, 201; J.A.L.C.A., 1916, 571.

(23)此百分率係依無水無油之革而言,但若照純皮計算須高至3.4%.

(25) M. E. Baldwin. The Effect of the Concentration of a Chrome Liquor

Upon Absorption by Hide Substance. J.A.L.C.A., 1919, 433.

(26) A. W. Thomas & M. W. Kelly. Studies in Chrome Tanning. The Formation of Octachrome Collagen. J.S.L.T.C., 1922, 321.

集合論

(續第四卷第四期)

蕭文燦

IV. 有序集合

14. 有序集合之引入 二集合 M, N 若其元素互爲一一對應時,吾人不論其各元素之特性而着眼於共通之性質,特謂此"兩集合有同一之基數".故所謂基數者,乃不論集合元素之特性而用以表示集合之公共性質者也.然有同一基數之集合吾人若着眼於元素仍得見其差異之點.例如順大小之次序而排列之自然數集合 M,與依大小順序而排列之有理數之集合 N. 此二集合由其元素之一一對應之點而觀,則爲等價,故其基數相同.然由其元素互相之間之順序而觀,則兩集合切然不同.卽 M 有其第一元素 1, N 則無第一元素之最小之分數;又 M 除 1 以外,任何元素皆有其直前之元素與直後之元素;N 則取任何元素皆無直前之元素及直後之元素.且於同一集合依其元素排列之順序不同,而呈非常相異之形狀.如整數之集合,依

$$\cdots\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

之順序排列之,無有第一元素,然如

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots\cdots$$

之順序排列之,則有第一元素.故吾人於此須更就元素有順序排列之集合而考之.特舉有序集合之定義如下:

凡合於下列之條件之集合謂之**有序集合** (simply ordered aggregates, geordnete menge):

1. 此集合中不同之二物 a, b 則 a, b 非 $a \prec b$* 卽 $b \prec a$.

2. 若 $a \prec b$ 則 a 與 b 異.

3. 若 $a \prec b$. $b \prec c$ 則必 $a \prec c$.

由此三條性質故有序集合可直推得次之性質:

(一)集合之任何元素其自身不能在自身之前.

蓋由(2)若 $a \prec a$ 則 a 不得不與 a 異也.

(二) a 在 b 前則不能同時 b 在 a 前.

蓋由(3) $a \prec b$, $b \prec a$ 則 $a \prec a$ 此與(一)相背也.

15. 有序集合之相似 二有序集合 M, N. M 之元素與 N 之元素滿足於下之條件對應之時.謂此二集合互爲相似 (similar; ähnlich).

1. M, N 之元素一一對應.

2. 於此對應中,其對應元素之順序相同.卽 M 之 m, m' 對應於 N 之 n, n' 時,如 $m \prec m'$ 則 $n \prec n'$.

滿足此二條件之對應謂之**相似對應**.

* 此時記號"$\prec$"乃表前後之意味,如 $a \prec b$ 卽表 a 在 b 前, b 在 a 後之意.

今將集合之等價與相似比較而觀則相似之性質更易明瞭.

(I) 由相似對應之定義,互爲相似之集合必等價,然其逆不真.

例如　　$M=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$,　　$N=\{\cdots\cdots, 4, 3, 2, 1\}$

兩集合係由同一之元素而成,故爲等價甚明.然此兩集合則非相似.何則?蓋 N 之 1 之元素在其他之一切元素之後,如此元素對應於 M 之 a 則 M 之其他一切元素不得不在 a 後.但 M 之中實無有此性質之元素.故此兩集合不能相似。

(II)互爲等價之無窮集合,其一加入有限個元素,"等價"之關係依然成立.而互爲相似之無窮集合,其一只須加唯一之元素"相似"之關係卽不成立.

此命題之上半,由定理24自易證明.蓋加入有限個元素於可數集合中仍爲可數集合.而任何無窮集合皆含有可數集合.今設任意之無窮集合爲 M, 其中可數之部分集合爲 N 則 M 可以 $M=M_1+N$ 表之.今加入有限個元素 $(b_1, b_2, \cdots b_n)$ 於其中則

$$M+(b_1, b_2, \cdots, b_n)=M_1+N+(b_1, b_2, \cdots, b_n)=M_1+\{N+(b_1, b_2, \cdots, b_n)\}$$

而 N 爲可數集合故 $N+(b_1, b_2, \cdots b_n)$ 亦爲可數是以 N 與 $N+(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 能一一對應.因而知 $M_1+\{N+(b_1, b_2, \cdots, b_n)\}$ 與 M_1+N 亦一一對應,而 $M+(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 自能與 M 一一對應也.

至於此命題之下半可示如次:

今0及正有理數之全體依大小順序排列之集合命爲有序集合甲.由0至100之有理數與由200以後之一切有理數之全體依其大小順序排列令爲有序集合乙.吾人試考此甲乙二集合可知其爲相似.蓋兩集合中由0至100之有理數,其同數彼此對應,而甲集合比100大之數$(100+\alpha)$則與乙集合之$(200+\alpha)$相對應.且此兩集合乃一一對應,而任兩元素皆能滿足於相似之關係.

反之,吾人若於集合乙中加入200之一元素,則兩集合即不保持其相似之關係.何則?今取任意對應法Φ,對應於集合乙之100與200之集合甲之元素各爲p, q.然此時$100\prec200$依兩集合相似之關係p, q之順序亦必爲$p\prec q$.又因兩集合之元素乃依大小之順序排列之規約,p之有理數不得不比q小.故$p<q$.今作$\frac{p+q}{2}$,則因$p<\frac{p+q}{2}<q$,不得不$p\prec\frac{p+q}{2}\prec q$.而$\frac{p+q}{2}$爲一正有理數,故爲集合甲之一元素且在$p$與$q$二元素之間.故兩集合若相似對應成立則集合乙中必有對應於$\frac{p+q}{2}$之一元素,但乙集合100與200間無有元素存在.故如此之關係不能成立.即任用如何之對應法而兩集合間相似對應之關係不能成立也.

16. 超限序型　對於互爲相似之一切集合特命一名以表其共通之性質,此即名爲此等集合之**序型**(Order-types; Ordnungstypus).猶之乎對於互爲等價之一切集合之共通

性質特名爲此等集合之基數也.故二有序集合有相同之序型云者卽無異於謂此二集合爲相似.

二等價之有窮集合常常相似.卽二有窮集合常能視爲有序集合.吾人只須將其元素間一一附以對應之關係,甲之第一元素與乙之第一元素對應,甲之第二元素與乙之第二元素對應,如斯一一對應,自然含有兩集合相似之性質也.故互爲等價之有窮集合又有相同之序型.且其序型可以用基數相同之數表之,卽有窮集合之序型得以1,2,3,…表之也.

其次可數集合卽自然數之集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 之序型普通以 ω 表之.其逆序之集合 $\{\cdots,4,3,2,1\}$ 之序型以 $^*\omega$ 表之.一般若一有序集合之序型以 η 表之,則其逆序集合之序型以 $^*\eta$ 表之.

基於相似觀念之序型與基數異,一般不能定其大小,是以吾人不名之曰序數而特名爲序型(所謂數者一般皆伴有得依大小排列之之觀念也)吾人於後章特取序型中之特別一類可以定其大小者名爲序數.

17. 超限序型之運算　一般之序型其大小雖不能定,而其運算到某種程度亦可行之.

第一　加法

設 M 乃有序型 μ 之有序集合,N 有序型 ν 之有序集合.兩者無共通之元素,今試作此兩集合之和,惟其元素次序

之法則如次之規定.

先任取M中之兩元素m_1, m_2,如$m_1 \prec m_2$則在新集合中亦須$m_1 \prec m_2$;其次N之任二元素n_1, n_2,如$n_1 \prec n_2$則在新集合中亦須$n_1 \prec n_2$.且在新集合中M之任何元素m皆必在N之任何元素n之前.換言之,在新集合中,M, N之元素須保持其原來之次序,而M之元素且須在N之一切元素之前也.

依如此法則規定而作之新集合乃一有序集合,如命此集合爲S則S即稱爲M, N之和.如S, M, N之序型各爲α, μ, ν則α稱爲μ, ν之和.即

$$S=M+N, \qquad \alpha=\mu+\nu.$$

例 1. 設$M=\{2, 3, 4, \cdots\cdots\}$, $N=\{1\}$ 則 $M+N=\{2, 3, 4, \cdots\cdots, 1\}$此集合之序型爲$\omega+1$. 此$\omega+1$與$\omega$異;何則?蓋$\omega$無最後之元素而$\omega+1$有最後元素也.

但$N+M$則爲$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$此爲可數集合故其序型爲$\omega$. 然以$N$之序型爲1, M之序型爲ω故$N+M$之序型依上之定義爲$1+\omega$.

$$\therefore \qquad 1+\omega=\omega \qquad (1)$$

然由前所述$\omega+1$與ω異,故$1+\omega$與$\omega+1$異.

$$\therefore \qquad 1+\omega \neq \omega+1 \qquad (2)$$

故關於序型之加法交換法則不成立.

同樣$\omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\cdots$乃各有相異之序型而$1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, $\cdots\cdots$, $n+\omega$則皆等於ω故序型相等.又$1+{}^*\omega$, $2+{}^*\omega$, $\cdots\cdots$亦

各有相異之序型而 ${}^*\omega+1, {}^*\omega+2, \cdots\cdots {}^*\omega+n$ 之序型皆相同,即同等於${}^*\omega$.

例 2. 設 $M=\{1,3,5,\cdots\}$, $N=\{2,4,6,\cdots\}$ 則 $M+N=\{1,3,5,\cdots,2,4,6,\cdots\}$ 其序型爲$\omega+\omega$.今以之加入於有理數之集合$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right\}$中則得

$$n+\omega+\omega=\omega+\omega.$$

雖然,$\omega+\omega$, $\omega+\omega+1$ $\omega+\omega+2,\cdots,\omega+\omega+n$ 則有相異之序型.

由以上之實例及序型之和之定義吾人直知下之定理爲真.

定理 47. 關於序型之加法,組合法則雖一般成立,而交換法則一般不成立.

第二　乘法.

集合M 乃以序型 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 爲元素之集合如 α 爲任一有序集合 A 之序型,β 爲任意有序集合 B 之序型,……此等集合皆無共通元素然後作 $S=A+B+C+\cdots\cdots$ A之各元素在 B 之各元素之前,B 之各元素在 C 之各元素之前,……且 A,B,C之各元素在S 中保持其原來之次序.如此則 S 爲一有序集合.此集合 S 之序型如爲 λ 稱爲M*集合之序型之和以

$$\lambda=\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots$$

* 此時M不必有第一元素,又各元素亦不必皆有其直後之元素,即M乃視爲如$\{\cdots,\alpha,\cdots,\beta,\cdots,\gamma,\cdots\}$之有序集合可也.

表之.

吾人由此定義可導得下之序型乘法之定義.

於上之定義中,$\alpha=\beta=\gamma=\cdots\cdots$ 而 $M=\{\alpha,\beta,\gamma\cdots\cdots\}$ 之序型為 μ 則此時 S 之序型 λ 卽稱為 α 與 μ 之積,以

$$\lambda=\alpha\mu$$

表之.

例如 $\alpha=\omega,\quad \mu=2$ 則

$$\lambda=\omega+\omega=\omega\cdot 2$$

其對應之集合之例卽如次者是也:

$$\{1,3,5,\cdots;2,4,6,\cdots\}.$$

若 $\alpha=2,\quad \mu=\omega$ 則得

$$\lambda=2+2+2+\cdots\cdots=2\omega$$

其對應之集合乃如

$$\{a_1\,b_1;\,a_2\,b_2;\,a_3\,b_3;\,\cdots\cdots\}$$

此集合為可數集合故其序應為 ω 因此

$$\therefore\qquad 2\,\omega=\omega.$$

同樣若 n 為有限之基數則得

$$n\cdot\omega=\omega.$$

雖然,如 $\omega\cdot 1,\omega\cdot 2,\omega\cdot 2,\omega\cdot 3\cdots\cdots$ 之序型乃各不相同,

$$\therefore\qquad n\,\omega\neq\omega\cdot n$$

是故超限序型之乘法,交換法則不成立.

上之乘法定義,乃如普通之乘法,由相等之許多數之和導出.然若考三個以上之乘法則以次之定義為便.

今有 α, β 之序型之有序集合各爲 A, B. 試各取其任意之元素 a, b 作成 (a, b) 之一'元素組'如斯一切'元素組'之集合其次序如次所規定,卽作成一有序集合.

於 (a, b) (a_1, b_1) 中若 $a \prec a_1$ 或 $a=a_1$ $b \prec b_1$ 則令 $(a, b) \prec (a_1, b_1)$ 如此所作之有序集合以 (A, B) 表之.此時集合 $(A \cdot B)$ 之序型卽謂集合 A, B 之序型 α, β 之積以

$$\lambda = \beta \cdot \alpha$$

表之.

此定義之實質與前定義相同,且其根本之思想,與超限基數之乘法完全相同.

由此乘法之定義可直得次之結果:

I. 二有序集合 (A, B), (B, A) 雖爲等價然一般非相似.

II. 如 A_1 與 A 相似, B 與 B_1 相似時,則 (A, B) 與 (A_1, B_1) 相似.

例. 設 $A \equiv \{1, 2, 3, \cdots\}$, $B \equiv \{3, 5, 7\}$ 如此,乃 $\alpha=\omega$, $\beta=3$ 則 (A, B) 之元素如下之排列.

$$(1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7), (3,3), (3,5), (3,7); \cdots\cdots$$

故 (A, B) 之序型爲

$$\beta \cdot \alpha = 3 \cdot \omega = \omega.$$

但 (B, A) 乃如下之排列

$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \cdots\cdots; (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), \cdots\cdots;$$

$$(7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), \cdots\cdots$$

故 (B, A) 之序型乃

$$\alpha\cdot\beta=\omega\cdot 3=\omega+\omega+\omega.$$

因而知 (A, B) 與 (B, A) 之序型不相等.

定理 48. 關於超限序型之分配法則如第二因數爲二數之和時成立,卽

$$\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha_{,}+\gamma\beta,$$

一般
$$\beta\cdot\sum_m\alpha_m=\sum_m\beta\alpha_m$$
亦成立.

〔證明〕　設 α_m, β 各爲有序集合. A_m, B 之序型時則

$$(A_1+A_2+A_3+\cdots,B)=(A_1,B)+(A_2+B)+(A_3,B)+\cdots\cdots$$

成立.於上式之兩邊各作其元素組 $(a, b)'$ 如前所示之順序排列之,兩者相等不難得知.然左邊集合之序型爲 $\beta\cdot\sum\limits_m\alpha_m$ 右邊集合之序型爲 $\sum\limits_m\beta\alpha_m$.

$$\therefore\qquad \beta\sum_m\alpha_m=\sum_m\beta\alpha_m.$$

例.　設　$A_1\equiv\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\}$,　$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\}$,　$B=\{b_1, b_2\}$

則下之關係成立.

$$\begin{aligned}(A_1+A_2,B)&=\left\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots), (b_1\, b_2)\right\}\\&=(a_{11}\, b_1),\ (a_{11}, b_2),\ (a_{12}, b_1),\ (a_{12}, b_2), \cdots\cdots,\\&\quad(a_{21}, b_1)\ (a_{22}, b_2),\ (a_{22}, b_1),\ (a_{22}, b_2), \cdots\cdots\\(A_1,B)+(A_2,B)&=\left\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots), (b_1, b_2)+\left\{(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots), (b_1, b_2)\right\}\right.\\&=(a_{11}, b_1), (a_{11}, b_2), (a_{12}, b_1), (a_{12}, b_2), \cdots\cdots\\&\quad\cdots\cdots, (a_{21}, b_1)\ (a_{21}, b_2), (a_{22}, b_1), (a_{22}, b_2), \cdots\cdots\end{aligned}$$

故兩者實相同.雖然 (B, A_1+A_2) 與 $(B, A_1)+(B+A_2)$ 則不等.何則?今設 $A_2=\{a_2\}$ 則

$$(B, A_1+A_2)=(b_1, a_{11}), (b_1, a_{12})\cdots, (b_1, a_2), (b_2, a_{11}), (b_2, a_{12}), \cdots, (b_2, a_2).$$

$$(B, A_1)+(B, A_2)=(b_1, a_{11}), (b_1, a_{12}), \cdots; (b_2, a_{11}), (b_2, a_{12}), \cdots; (b_1, a_2), (b_2, a_2)$$

因而知前者之序型爲 $\omega+\omega+1$, 後者之序型爲 $\omega+\omega+2$. 故兩者之序型不同.卽

$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta \neq \alpha_1\beta+\alpha_2\beta$$

之不等式成立.

吾人由上之定義可推得三個以上超限數乘法之定義如次:

α, β, γ 乃有序集合 A, B, C 之序型,此等集合之元素各爲 a, b, c 今作成 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \cdots$ 之'元素組'而次序則如次規定:

如　　$a_1<a_2$

或　　$a_1=a_2 \quad b_1<b_2$

或　　$a_1=a_1, \quad b_1=b_2, \quad c_1<c_2$

時則令 $(a_1 b_1 c_1)<(a_2, b_2, c_2)$. 此時 (a, b, c) 之集合卽爲一有序集合.此集合之序型卽稱爲 α, β, γ 之積以

$$\lambda = \gamma.\beta.\alpha$$

表之.

此定義 $n=4, 5, 6. \cdots$ 時不難擴張之.卽 $\alpha, \alpha_2, \alpha_3 \cdots$ 乃有序集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 之序型,此等集合之元素各爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 作成'元素組' $p=(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 其次序則如次之規定,卽如有兩'元素組'爲 $p=(a_1, a_2, a_3, \cdots) \quad q=(b_1, b_2, b_3, \cdots)$, 若

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad a_3=b_3,\quad \cdots\cdots,\quad a_{m-1}=b_{m-1},\quad a_m<b_m$$

時則令 $p(a_1 a_2, a_3\cdots)<q(b_1, b_2, b_3\cdots)$.

如斯所作之集合爲一有序集合其序型 λ 卽稱爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\cdots$ 之積.可以

$$\lambda=\cdots\cdots\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1$$

表之.

定理49. 超限序型之乘法組合法則常成立.卽

$$\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha=\gamma\beta\alpha.$$

此定理由乘法之定義容易導出之.

第三 冪法.

以有限基數爲指數之超限序型之冪法由上之定義容易導得.卽如 $\lambda=\alpha\beta$ 於 $\alpha=\beta$ 時則得 $\lambda=\alpha^2$ 故

$$\omega^2=\omega\omega=\omega+\omega+\omega+\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\omega^3=\omega\omega\omega=\omega+\omega+\omega+\cdots\cdots\\ +\omega+\omega+\omega+\cdots\cdots\\ +\omega+\omega+\omega+\cdots\cdots\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

設 $A_1, A_2, A_3\cdots\cdots$ 皆自然數之集合,且其集合之個數有無窮之多.(可數的).由每一集合中取出一元素作成 $(a_1, a_2, a_3\cdots)$ 之'元素組'此等'元數組'依超限數乘法之規約定其次序,則得一有序集合其序型爲

$$\cdots\cdots\omega\omega\omega\omega<\omega^\omega.$$

吾人由 0 至 1 之區間 $(0\leqq x<1)$ 之一切實數之集合依其

自然之順序其序型即為

$$\cdots\cdots\omega\omega\omega\omega$$

後將證之.一般指數為超限數之冪之研究甚為繁難,在此殊不能多述也.

關於超限序型之加法其交換法則一般不成立.例如

(1) $\omega+\omega^2=\omega(1+\omega)$　　分配法則

$$=\omega\omega=\omega^2$$

又 $\omega^2+\omega=\omega(\omega+1)$

$\therefore$ $\omega+\omega^2\neq\omega^2+\omega.$

(2) $(\omega+\omega)\omega=(\omega 2)\omega=\omega(2\omega)$　　組合法則

$$=\omega\omega=\omega^2$$

$$\omega(\omega+\omega)=\omega(\omega 2)=\omega^2 2$$

$$=\omega^2+\omega^2$$

$\therefore$ $(\omega+\omega)\omega\neq\omega(\omega+\omega).$

18. 有序集合之結構. 吾人若考有序集合 M 之結構一般僅注意其部分集合即可.惟此等部分集合其元素間之順序須與原集合相同耳.一有序集合之最簡單之無窮部分集合其序型或為 ω 或為 $^*\omega$. 前者謂之含於 M 中之昇敍列 (Ascending sequences) 後者謂為降敍列 (descending sequences).

含於 M 中之兩昇敍列 $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$, 若在第一,所對應之任何元素 a_n 及第二之元素 a'_n 有如 $a_n<a'_{n'}$ 及第二所對應之任何元素 a'_n 與第一之元素 $a_{n'}$ 有如 $a'_n<a_{n'}$ 之關係存在者謂為互相關聯.

在M中兩降敘列$\{b_n\}$, $\{b'_n\}$謂爲互相關聯,則係第一所對應之任何元素b_n與第二之元素b'_n有如$b_n>b'_{n'}$之關係;及第二所對應之任何元素b'_n與第一之元素$b_{n'}$有如$b'_n>b_{n'}$之關係者.

含於M中之一昇敘列$\{a_n\}$與一降敘列$\{b_n\}$若於每n, n'皆$a_n<b_{n'}$;及M中無有元素存在或只有一元素m存在於每n皆有如$a_n<m<b_n$之關係者謂爲互相關聯.

含於有序集合中之兩敘列彼此皆與第三敘列互爲關聯則此兩者亦互爲關聯.

在有序集合中之兩敘列皆爲昇或皆爲降,而其一爲其他之部分者,則兩者互相關聯.

設於有序集合M中有一元素m_0關於M中之一昇敘列$\{a_n\}$滿足於下列之二條件:

(1)於每n皆$a_n<m_0$

(2)於M中其$<m_0$之任何元素m,而有如$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots$皆$>m$之關係之$n$存在.

則謂如此之元素m_0謂爲極限元素(limiting element)或在M中之$\{a_n\}$之極限;而m_0謂爲M之主元素(principal element).

同樣若M中之一元素m_0對於M中之一降敘列$\{a_n\}$滿足於

(1)於每n皆$a_n>m_0$

(2)於M中其$>m_0$之任何元素m而有如$a_n\, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots$皆

$<m$ 之關係之 n 存在

則謂元素 m_0 爲極限元素,或 M 中之 $\{a_n\}$ 之極限;而 m_0 謂爲 M 中之主元素.

含於 M 中之敍列在 M 中之極限元素決不多於一.

若在 M 中之一敍列有一極限元素 m_0 則 m_0 乃爲與第一敍列關聯之一切敍列之極限元素.

M 中之兩敍列有同一極限元素彼此互爲關聯.

若 M 與 M' 爲互爲相似之有序集合,則在 M 之或昇或降之敍列其對應於 M' 中之敍列亦爲同類,而在 M 中之每一主元素,亦對應 M' 之主元素.

有序集合之每一元素皆爲主元素者謂爲自身稠密.

若含於有序集合之每一敍列其極限元素皆在集合之中者則謂此有序集合爲閉集合(Closed aggregate).

有序集合其自身稠密而又爲閉集合者謂之完備 (perfect).

有序集合任兩元素間皆有該集合之其他元素者謂爲處處稠密(everywhere dense).

19. 幾種重要之超限序型. 超限序型除可數集合之序型 ω 尚有數種重要之序型.

第一　η 型. **此乃** 0 與 1 間(兩端除外)之一切有理數依其自然之順序排列之集合 R 之序型,其特徵有三:

I. $R=\aleph_0=a^*$

II. R無最初之元素亦無最終之元素

III. R爲處處稠密.

定理49. 有序集合M有次之三性質者則$M=\eta$.

(1)　$M=a_0$

(2)　M無最初之元素亦無最後之元素,

(3)　M有處處稠密性.

〔證明〕　因有理數之集合其濃度爲$\aleph_0$其各元素間皆可附以番號,換言之可排成序型爲ω之集合也.有理數集合排成序型爲ω者令爲R_0即

$$R_0=\left\{r_1, r_2, \cdots\cdots r_\nu, \cdots\cdots\right\}\qquad(\bar{R}_0=\omega)$$

同樣理由M亦可列成

$$M_0=\left\{m_1, m_2, \cdots\cdots, m_\nu, \cdots\cdots\right\}\qquad(\bar{M}_0=\omega).$$

今須證明$M\simeq R$,** 即須證明兩集合間有相似對應之關係存在.先取R中之元素r_1此與M對應之元素爲m_1,其次再取r_2此r_2對於r_1自有其某種一定前後之關係存在(即$r_2<r_1$或$r_2>r_1$).而M中對於m_1有同樣前後之關係之元素爲m_ν但此m_ν有無窮之多(由於性質2).今於此無數多之m_ν中取其在M_0中番號最小者之m_{i_2}令其對應於r_2.以此方法順次行之則對於R中之ν個元素$r_1, r_2, \cdots, r_\nu$在M中有其對應

* $\bar{R}$乃表R集合之基數或濃度之記號,$\bar{R}$乃表R集合之序型之記號.

** $M\simeq R$乃表M與R相似對應之記號

之元素 $m_1, m_{i_2}, m_{i_3}, \cdots, m_{i_\nu}$ 其相互間前後之關係兩者完全相同.今 R 中之 $r_{\nu+1}$ 對於 $r_1, r_2, \cdots, r_\nu$ 各各有其一定前後之關係.但於 M 中對於 $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\nu}$ 有如斯同樣前後關係之元素有無數之多(由 2, 3 兩性質).其中設於 M_0 中番號最小者爲 $m_{i_{\nu+1}}$,此 $m_{i_{\nu+1}}$ 卽爲與 $r_{\nu+1}$ 對應者.如此則凡 R 中之各元素 r_ν M 中皆有其元素 m_{i_ν} 與之對應也.而此一切之 m_{i_ν} 組成一集合 M', 此 M' 爲 M 之部分集合且 $R\cong M'$ 甚明.故今只須證明 $M'=M$ 則證明卽完結也.

此可用歸納法證明之.吾人已知 M_0 之元素 m_1 確爲 $m_1\varepsilon M'$, 今設 M_0 之元素 $m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ 屬於 M' 中而能證明 $m_{\nu+1}$ 亦屬於 M' 中卽得之矣.今取 λ 使其大以至於 $m_1, m_2, \cdots, m_{\nu_\lambda}$ 皆含於 $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\lambda}$ 之中.此時若 $m_{\nu+1}$ 含於其中則 $m_{\nu+1}\varepsilon M'$ 自不待言.如 $m_{\nu+1}$ 不含於 $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\lambda}$ 之中則於 M 中 $m_{\nu+1}$ 對於此等各元素皆有其一定之前後關係.而於 R 中對於 $r_1, r_2, \cdots, r_\lambda$ 各元素, 有如斯一定前後之關係之元素有無數之多(由 2, 3 兩性質).其中在 R_0 中之番號最小者設爲 $r_{\lambda+\sigma}$. 如此則於 R 中 $r_{\lambda+\sigma}$ 對於 $r_1, r_2, \cdots, r_{\lambda+\sigma-1}$ 之各元素之前後關係與於 M 中 $m_{\nu+1}$ 對於 $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_{\lambda+\sigma-1}}$ 之各元素之前後關係相同甚明.今 M' 之作法乃如 $i_{\lambda+\sigma}\leqq\nu+1$ 而 $m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ 皆含於 $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\lambda}$ 之中者如是則不得不 $i_{\lambda+\sigma}=\nu+1$ 矣.卽 $m_{\lambda+1}=m_{i_{\lambda+\sigma}}\varepsilon M'$. 故 $M'=M$ 因而知 $R\simeq M$.

今舉有序型 η 之集合之例如次:

(1)一切正負有理數及 0 依其自然之次序之集合,爲 η 型

(2)設有任兩實數 a, b 而 $a<b$, 比 a 大, b 小之一切有理數之集合,爲 η 型.

(3)在連續統中之一切實代數數依其自然次序之集合爲 η 型.

依照吾人序型加法乘法之定義次之關係式易知爲真.

$$\eta+\eta=\eta. \tag{1}$$

$$\eta\eta=\eta. \tag{2}$$

$$(1+\eta)\eta=\eta. \tag{3}$$

$$(\eta+1)\eta=\eta. \tag{4}$$

$$(1+\eta+1)\eta=\eta. \tag{5}$$

(1),(2)兩式中將 μ 換爲有限數 ν 亦真.

$$\eta\,\nu=\eta. \tag{6}$$

$$\eta^{\nu}=\eta. \tag{7}$$

雖然如於 $\nu>1$ 時則 $1+\eta$, $\eta+1$, $\nu\eta$, $1+\eta+1$ 則皆與 η 異型是不可不知也.今雖

$$\eta+1+\eta=\eta \tag{8}$$

但 $\eta+\nu+\eta$ 於 $\nu>1$ 時則異於 η. 最後

$${}^{*}\eta=\eta. \tag{9}$$

第二 θ 型. 此乃 0 與 1 間之一切實數依其自然順序排列之集合 X 之序型,其特徵有二:

I. X 爲完備集合

II. 含於 X 中有有基數爲 a 之集合 R 而集合 R 之元素在 X 之任兩元素間皆有之.

定理 50. 有上列兩性質之集合 M 其序型爲 θ, 換言之 (1) M 爲完備集合, (2) M 中有有基數爲 a 之集合 S 而 S 之元素在 M 之任兩元素 m_0, m_1 間皆有之. 如此則 $M\simeq X$.

〔證明〕 若 S 有最初及最終之元素其對於 M 之關係亦無影響, 故吾人設 S 之序型爲 η, 卽在 0 與 1 間 (0, 1 除外) 依其自然之順序之有理數之集合 R 之序型.

如此則 $S\simeq R$, 吾人可設 S 之元素對應於 R 之元素, 而由此對應以建立 M 與 X 之元素間之對應關係.

設 M 之元素其屬於 S 者其對應於 X 之元素之屬於 R 者, 其對應之關係恰如 S 與 R 所爲者. 其不屬於 S 與 M 之任一元素 m 爲 S 元素之敍列 $\{m_n\}$ 之極限元素. 此敍列 $\{m_n\}$ 乃對應於 X 中之敍列 $\{r_n\}$, 其一切元素 r_n 皆屬於 R; 而此敍列 $\{r_n\}$ 有一極限元素 x 乃在 X 中而不屬於 R; 故吾人可取 M 中之此 m 對應於 X 中之此 x. 若吾人取另一敍列 $\{m'_n\}$ 其在 M 中仍如前有同一之極限元素 m 在對應於 R 中之敍列 $\{r'_n\}$ 亦如前在 X 中有同一極限元素 x. 今吾人證明如斯建立之 M 與 X 之元素間之對應關係其在 M 之兩元素間之次序關係與 X 中所對應之元素之次序相同. 此若 M 之任兩元素係如斯, 則在 S 之元素亦如斯. 次設 M 之兩元素 m, s, 第一不屬於 S 而第二屬之; 設其對應於 X

之元素爲x_1, r_1若$r<x_1$則在R中有昇敍列存在,x_1爲其極限元素,而一切元素皆$>r$;如是則其在S中所對應之昇敍列其一切元素皆$>s$,而m爲其極限元素.故$s<m$.若$r>x_1$同樣可證明$s>m$.至於證明M之不屬於S之任兩元素m_1, m_2其在X中所對應之元素x_1, x_2其次序m_1 m_2係準乎x_1 x_2;亦可與前述者同樣證之.故M與X乃相似之集合而具有(1),(2)兩性質之θ型也.

第三 π型. 序型$^*\omega+\omega$以π表之.此乃負與正之整數依其自然次序排列之之集合之序型.此序型之性質與ω異.例如$n+\omega$乃曾證其恆等於ω而$n+\pi$乃不恆等於π.由方程式$n+\pi=m+\pi$或$\pi+n=\pi+m$卽得$m=n$或其更一般者:

定理 51. 若n, n'爲有限整數,ζ與ζ'爲其他之序型,由方程式$n+\pi+\zeta=n'+\pi+\zeta'$而知$n=n'$, $\zeta=\zeta'$.

〔證明〕今將兩集合列成相似對應之關係,其一最初之元素對應於其他最初之元素,其次者亦如之,則$n=n'$卽刻可知;而吾人今須證明$\pi+\zeta=\pi+\zeta'$.

今設序型爲$\pi+\zeta$, $\pi+\zeta'$之兩有序集合$M_\pi+Z$, $N_\pi+Z'$,令其互相對應.則或M_π對應於N_π或M_π對應於N_π之部分集合,或N_π對應於M_π之部分集合.在後兩者將π分成$\pi=\pi_1+\pi_2$,其中之$\pi=\pi_1$而π_2爲其他之序型;但由$\pi={}^*\omega+\omega$之定義不能將π分成兩部分,而不變其元素互相之次序,仍有如$^*\omega+\omega$之形;是以不能$\pi=\pi_1+\pi_2$而爲$\pi=\pi_1$;故M_π對應於N_π.因而知Z對應於

Z' 卽 $\zeta=\zeta'$.

上述之幾種超限序型爲序型中之常見者. ω 型爲可數集合之序型卽自然集合之序型爲其代表. η 型乃處處稠密之集合之序型依自然順序之有理數之集合之序型是其代表. θ 型乃連續統集合之序型,自然次序之實數集合乃其代表.

（未　完）

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室中國鳥類標本之地理分佈研究

(續第四卷第三期)

任　國　榮

COCCOTHRAUSTINÆ. 大嘴雀亞科

巴黎博物館鳥類研究室本亞科標本之採自我國,或經有記載于我國者.據余所見,共有四屬八種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共有二十五個.

399. **Coccothraustes coccothraustes japonicus** T. & S.

截翼大嘴雀

D. et O. p. 348 (*Coccothraustes vulgaris*) —— 年中大都可見于中國,且甚普通.夏季則向較北之地而遷移.

La Touche, p. 298——福建揚子江下流(江蘇),冬鳥.湖北(五月十五日),沙尾山遷移鳥.直隸冬鳥,或係留鳥亦未可知.

室中除日本鳥外,有蒙古鳥一: 1♀, 1898. M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河.

此鳥之初列撥風羽內側數枚及次列撥風之外側數枚,

其先端平齊如截,與普通撥風羽不同,爲認識上之一好特徵.

中國及日本鳥與歐洲鳥無顯著之差別,特前者之體色稍淡耳.如有大幫標本作比較,或可合二者而爲一,亦未可知.

400. **Perissospiza icterioides affinis** (Blyth). 橙黃大嘴雀

D. et O. p. 345 (*Hesperiphona affinis*)——于漢平得有標本.

Baker, iii, p. 103——喜馬拉雅,尼泊爾,錫金,經西藏以至中國西部.

Rothschild, p. 334——雲南.

室中有中國鳥四: 4♂, 1899, 1902, 四川打箭爐.

與印度標準種 *P. i. icterioides* (Vigors) 之區別,在其後頸橙赭而非金黃,腿青黃而非純黑.

401. **Perissospiza carnipes carnipes** (Hodgson). 白翼大嘴雀

D. et O. p. 550 ——Przewalski 于亞拉山,甘肅,及青海南部見之.

Baker, iii, p. 104——阿富汗, Gilgit, 錫金,西藏,雅魯藏,布江北部山中,土耳其及阿爾泰.

Rothschild, p. 334 (*Mycerobas carnipes carnipes*)——雲南.

室中有中國鳥十: 1♂, 1♀, 1892, Prince d'Orleans, 西藏; 3♂, 3♀, 1895. 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♀, 1899, 四川打箭爐.

雄鳥黑色之部,雌鳥則爲灰褐,黃色之部,則爲青黃.

402. **Mycerobas melanoxanthus** (Hodgson). 斑翼大嘴雀

D. et O. p. 345——度夏于四川西部多樹之山中,但爲數無多.對于果子,損傷甚大,尤嗜梨及櫻桃之核.

Baker, iii, p. 105——喜馬拉雅帶自阿富汗, Hazara 至以亞森母之東,嘉沙,馬尼坡,緬甸北部,撣部及中國西部之四川.

Rothschild, p. 335——雲南.

室中有中國鳥五: 1♂, 4♀, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐.

雄鳥黑褐之部,在雌鳥則稍爲淺淡;雄鳥下體濃黃,雌鳥則鮮黃而腮,喉,頸,脅,及胸部皆密佈黑條紋.

403. **Eophona migratoria pulla** Penard. 揚子黑尾桑鳸

D. et O. p. 347 (*Eophona melanura*)——爲中國南部及中部極普通之留鳥,夏季成小羣至北方各省,每年皆可于北京附近得數個,

La Touche, p. 300——揚子江流域留鳥.

室中有兩中國鳥: 1♀, 1(?), 1895, M. Montigny, 中國.

404. **Eophona migratoria migratoria** Hartert. 桑鳲

D. et O. p. 347, (*Eophona melanura*)——見前.

La Touche, p. 301 ——廣東,福建,冬鳥,揚子江下流,沙尾山,直隸,遷移鳥,或可爲夏鳥.

室中有一四川鳥: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

Eophona migratoria pulla 與 *Eophona migratoria migratoria* 之區別,在前者翼較長,嘴較大.余之湖南南部標本,與四川鳥同.

405. **Eophona migratoria harterti** La Touche. 雲南桑鳲

Eophona migratoria harterti La Touche, Bull. B. O. C. xliii, p. 150, 1923 雲南蒙自.

Rothschild, p. 334——雲南.

室中有一雲南鳥: 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南.

La Touche 以雲南鳥背部灰褐而非黃褐,乃另定爲一新亞種.余試以雲南,四川及余之湖南南部標本較,體色與量度,皆無若何差別.如能得有各地之大批標本,吾恐 *hartert* 與 *migratoria* 非合爲一不可,姑誌此以存疑.

406. **Eophona personata magirostris** Hartert, 大桑鳲

D. et O. p. 346 (*Eophona personata*)——此日本品類,亦廣佈于中國西部,冬季余于四川西部常見之,北京附近則頗稀,中

國人極喜養之,非特愛其歌,尤且愛其馴,擲一小球于遠處,而馴鳥則能飛覓之也.

La Touche p. 303——沙尾山及直隸遷移鳥,四川西部冬鳥.

室中有一標本: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

*Eophona personata magirostris*與日本標準型 *E. p. personata* 較,中國鳥上體較淨灰;腰部灰色較盛;初列撥風羽之白斑較狹;嘴峯較大(Hartert 博士所舉爲29對22 mm.; 余量度室中之四川鳥及日本鳥則爲25對22 mm.).

FRINGILLINÆ. 雀亞科

巴黎博物館鳥類研究室雀亞科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有十六屬三十九種及亞種.經余作個別研究而記入本目錄之中國標本,共二百五十個.

407. **Pyrrhula pyrrhula griserventris** Lafresnaye. 督型雀

D. et O. p.348——非爲日本所特有,亦可見于高麗,滿洲,西伯利亞之東及中國北部.余居北京時,曾見三四個.

La Touche, p. 306——上海,直隸,冬鳥或遷移鳥.

室中只有日本鳥,以既有記載于我國,特編入本目錄.

408. **Pyrrhula erythaca altera** Rippon. 立般芬雀

D. et O. p. 349 (Pyrrhula erythara)——余于四川西部得有標本甚多.

Baker, iii, p. 112——雲南及撣部.

Rothschild, p. 332 ——雲南.

室中有二十二標本: 1♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏;4♂, 4♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4♂, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 2♀, 1902, 四川打箭爐; 6♂, 1♀, 1896, 1900, Père Soulié及甘劫教士,雲南甘劫.

雄鳥,胸,上腹及脅部之橙赤色,在雌鳥則付闕如.

Pyrrhula erythaca altera 與錫金標準型*P. e. erythaca*之區別,在其雄鳥胸部之橙赤色較深,上體較灰;雌鳥之一般體色亦較深暗.四川雄鳥胸部之橙赤色不及雲南雄鳥之深濃,但上體之灰色則相同,雌鳥亦無區別,故四川鳥或係 *P. e. altera*, 亦未可定,惜室中無標準地錫金之*P. e. erythaca*以供比較耳. Prince d'Orléans標本,足下標簽記作*Pyrrhula aurantiaca* Gould, 係屬錯悞,因改正之.

*Pyrrhula erythaca*一種,其幼鳥胸部橙色,年齡愈增,則赤色隨之而愈盛,故以橙色之濃淡淺而判別亞種,頗屬危險.

409. **Pyrrhula nipalensis ricketti** La Touche. 福建芬雀

La Touche, p. 339——福建西北部留鳥.廣東北部留鳥(?).

Rothschild, p. 332——雲南.

室中有兩標本: 1♂, 5, iv, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩; 1(?), 1902, 四川打箭爐.

以福建鳥與標準型之 *P. n. nipalensis* Hodgson 較,覺福建鳥頭部之鱗紋較明顯,亦較深暗,其餘無甚差別.四川鳥則介于二者之間,總之,此不外一極微弱之亞種而已.

410. **Pyrrohoplectes epauletta** (Hodgson). 金頭黑芬雀

Baker, iii, p. 114——由蘇脫列及以至錫金;雲南.

Rothschild, p. 332 —— 雲南瑞麗江與怒江分水界.

室中只有錫金鳥,因既有記載于雲南,特編入本目錄.

411. **Haematospiza sipahi** (Hodgson). 大朱雀

Baker, iii, p. 117——尼泊爾及亞森母.

Rothschild, p. 332——雲南瑞麗江與怒江分水界.

室中只有尼泊爾鳥,因既有記載于雲南,特編入本目錄.

412. **Propyrrhula subhimachala subhimachala** (Hodgson). 赤頭朱雀

Baker, iii, p. 119 ——尼泊爾,錫金,不丹,美麗山 (Miri Hills)……,

室中有兩中國鳥: 1♂, 1♀, 1896, Déjean, 四川打次爐.

雄鳥之前頭,眉斑,腮,頰,及喉部之深赤色,在雌鳥則代以橙黃色;其餘雄鳥赤色之體部,在雌鳥則爲橄欖黃.

Rothschild 因雲南鳥雄鳥之赤色較盛而青色較遜,乃另以 *Propyrrhula subhimachala intensior* 記載之.室中除四川鳥外,別無印度或雲南鳥以比較,故四川鳥是否確屬標準型之 *P. s. subhimachala* 抑係 *P. s intensior*,未能十分決定也.

413. **Pyrrhospiza punicea punicea** Hodgson. 赤胸朱雀

Baker, iii. p. 120——尼泊爾,錫金;西藏之 Chambi Valley, 西藏東南部及雅魯藏布江北岸山中.

室中有中國鳥四: 2♂, 2♀, 1898, Biet, 四川打箭爐.

雄鳥赤色之部,雌鳥皆付闕如.

414. **Propasser pulcherrinus davidianus** (Milne-Edw.) 大衞朱雀

D. et O. p. 354——此鳥居中國東北部之高山,秦嶺,陝西,蒙古亦皆有之,留鳥,分佈並不甚廣.

Baker, iii, p. 127——西藏東部,不丹,雅魯藏布江北部山中,雲南,中國本部自四川以至秦嶺及陝西.

La Touche, p 316——直隸西南部,陝西,四川西北部,雲南西北部,留鳥.

Rothschild, p. 330——雲南.

室中有中國鳥三十七個: 4(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 11♂, 6(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 15(?), 1896, 1900,

Père Soulié 及甘却教士,雲南甘却.

415. **Propasser thura thura** Bon. & Schleg. 銀眉朱雀

D. et O. p. 357——見于中國西部,極爲稀少,居留十五月,只得一雙耳.

Baker, iii, p. 123——嘉華,西摩拉山中,尼泊爾,錫金,西藏西部.

室中只有一標本: 1♀, 10, V, 1890, Prince d'Orléans, 西藏.

416. **Propasser thura clubius** (Przewalski). 甘肅銀眉朱雀.

D. et O. p. 552——居阿拉山及甘肅多樹之區.

Baker, iii, p. 125——西藏東部及中國西北部,亞森毋之冬鳥.

室中有四川鳥十一,余以爲當逮此型: 5♂, 4(?), 1892, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 2♀,(?) 1902, 四川打箭爐.

雄鳥赤色之部,雌鳥闕如,幼雄鳥與雌鳥相似.

417. **Propasser thura femininus** Rippon. 雲南銀眉朱雀

Baker, iii, p. 126——雲南,撣部.

Rothschild, p. 330——雲南.

室中有 Rothschild Museum 送來兩標本: 1♂, viii, 1922; 1♀, 2, xi, 1921, 雲南麗江山脉.

雌鳥亦無雄鳥赤色之部,幼雄鳥與雌鳥相似.

Propasser thura femininus 上體褐條紋,較粗于 *P. t. dubius*,下體粉紅色之紫色亦略盛,但此等區別極爲微弱,非十分留意,不易發覺.

418. **Propasser verreauxii** (David). 衛廬朱雀

D. et O. p. 355 —— 四月二十日,余于漢平見其一雙營巢生殖,只射得一枚,因損傷過甚,乃不能別其雌雄,苟非雌鳥,卽爲被雌鳥羽之雄鳥耳.

Baker, iii, p. 132 (*Propasser ripponi*) —— 撣部及雲南.

Rothschild, p. 329 (*Propasser ripponi*) —— 雲南.

室中有十標本: 3♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♀, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1898, 四川打箭爐; 3♀, 1896, Père Soulié, 雲南其刧; 1♂, 1♀, 18, 19, X, Rothschild Museum 送來,雲南麗江.

按 *Propasser ripponi* (Sharpe) 乃 *Propasser verreauxii* (David) 之重名,茲謹引述 Berlioz 先生之研究結果如下:

Berlioz, Bull. du Mus. d'Hist. Nat. no. 2, 1929, p. 129 —— David 神父于漢平所得之雌鳥 (或係雄鳥而被雌鳥羽者), 久爲 *Carpodacus verreauxii* 一種之單獨標本. 1902 年, Sharpe 以 *Propasser ripponi* 一名詞,記載雲南西部鷄蓋山之雄鳥,及後 Sharpe 更作雌鳥及雄鳥之形態記載,觀其記載,與巴黎

博物館中 *Carpodacus verreauxii* 標準標本,竟極脗合.近來得 Rothschild 及 Hartert 博士之厚惠,蒙其送贈 *C. ripponi* 之副標準標本雌雄各一,採地為雲南西部之麗江山中.此兩標本,與巴黎博物館于四川打箭爐及雲南苴刧所採之 *C. verreauxii* 完全相同.為保持優先權計,應用 David 之 *Carpodacus verreauxii* 一名詞.下略.

419. **Propasser vinaceus vinaceus** (Verreaux). 酒紅朱雀

D. et O. p. 356——余于四川西部山林中得二標本.

Baker, iii, p. 133 —— 四川,甘肅,雲南及撣部.

Rothschild, p. 329 ——雲南.

室中有六標本: 3♂, 1♀, 1898, Biet,四川打箭爐; 2♀,1896, Père Soulié, 雲南苴刧.

雄鳥之赤色如紅葡萄酒,故曰 *Vinaceus*.雄鳥酒紅色之部,在雌鳥則以赭石褐.又雌鳥與 *P. verreauxii* 之雌鳥相似,但上下體之黃褐色較盛,而深褐色之條紋則較稀.

420. **Propasser edwardsii edwardsii** (J. Verreaux). 愛德華朱雀

D. et O. p. 355 —— 為中國西南部最繁多之品類,週年皆可于漢平及四川北部見之,但永未遇諸陝西山中.

Dresser, A Man. of Pal. Birds, p. 327 —— 喜馬拉雅帶,自尼泊爾

至不丹,甘肅西南部及四川.

室中有九標本: 2♀, 24vi, 14xi, 1896, David, 漢平; 1♂, 1♀ 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♂, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 2♀, 1902, 四川打箭爐.

Propasser edwardsii saturatus (Hartert)與標準種*P. e. edwardsii*之區別,在其一般體色較深暗. Baker 于 Birds of British India 2nd. Ed. iii, p. 131 舉其分佈地爲尼泊爾,錫金,東亞森母及西藏. Rothschild 于 On the Anifauna of yunnan 一文亦以*P. e. saturatus*記載雲南鳥,謂雲南鳥之體色更深,或可另成一地方種云云.室中既無尼泊爾標本,亦無雲南標本,無從比較,特附誌于此.

Propasser 一屬之各種,互似之點頗多,玆特就其雄鳥與雌鳥,分別作檢索表如下:

本屬之雄鳥,其體羽必多少帶赤色或朱色.眉斑或深赤,或粉紅,或粉紅而帶銀色.

A. 頭頂密佈黑或黑褐條紋.

a. 耳羽銀白而略帶粉紅;下體粉紅.…………*p. p. davidianus.*

b. 耳羽紫紅;下體紫紅.

1a. 下體紫色不甚發達.……………………………………*p. t. thura.*

1b. 下體紫色極發達,上體深暗,褐黑條紋極多.…………

……………………*p. t. femininus.*

1c.介于以上二者之間. ……………………………… *p. t. dubius.*

B. 頭頂色彩一致,間或有不明顯之羽軸條紋.

c. 上背有銀粉紅色之長形點斑. ………………… *p. verreauxii.*

d. 上背無銀粉紅色之長形點斑.

1d.眉斑不會合于前頭;背部無條紋.………… *P. vinaceus.*

1e.眉斑會合于前頭,背部有條紋. ………… *P. e. edwardsii.*

本屬之雌鳥,常缺去赤色或朱色,眉斑或鵝黃或赭石色.

A. 下體色彩不一致,腹部帶白色.

a. 前胸之赭色極盛;上尾筒羽緣金黃.……………*P. t. thura*

b. 前胸不着赭色;上尾筒濃黃.………………………*P. t. dubius.*

c. 前胸不着赭色;上尾筒赭色或橙黃.……… *p. t. femininus.*

B. 下體色彩一致,

d. 下體灰白,有褐條紋. …………………………… *P. p. davidianus*

e. 下體鵝黃而帶赭.

1a.翼長在80mm.以下.

2a.眉斑寬闊,極為顯著.…………………………*P. verreauxii*

2b.眉斑不顯著. ……………………………………… *P. vinaceus*

1b.翼長逾80mm. ………………………………………… *P. edivardsii.*

421. **Carpodacus rubicilla rubicilloides** Przewalski. 甘肅大朱雀

D. et O. p. 551 ——Przewalski于甘肅發見之.

Baker, iii, 138——Kashgar, Ladakh, 克什米爾之東北部,西藏,錫金,甘肅及雲南.

Rohschild, p. 332 (*Erythrina rubicilloides rubicilloides*)——雲南.

室中有中國鳥六: 1♂, 1♀, 15, 1930, 柏林博物館送來,甘肅老虎口; 2♂, 2♀, 1895, Biet, 四川打箭爐.

422. **Carpodacus severtzovi** Sharpe. 土耳其朱雀

Baker, iii, p. 139 —— 中央亞細亞山中,克什米爾東北部, Ladakh. 西藏,蒙古, Chambi Valley, 錫金.

室中共有兩標本,其一乃中國鳥: 1♂, 1929, 蒙古西部.

Carpodacus rubicilla rubicilloides Przewalski 以 *Carpodacus severtzovi* Sharpe之區別,在前者上體無條紋,耳羽鮮粉紅,後者上體密佈褐條紋,而耳羽則爲深暗之紅色. Rothschild 之意見,以爲 *C. rubicilla rubicilloides* 當另成一種而稱爲 *C. rubicilloides rubicilloides* 而 *C. severtzovi* 則逮 *C. rubicilla* 中而稱爲 *C. rubicilla severtzovi* 云 (On the Avifauna of Yunnan, p. 331). 吾茲所採用者,乃 Stuart Baker 之分類系統也.

423. **Carpodacus synoica stolickzkae** (Hume). 甘肅沙背朱雀

Dresser, A Man. of Pal. Birds p. 321 ——yarkand, 甘肅西北部及亞莫多斯高原(Amodos).

Hartert, Die Vög. Pal. p. 109——yarkand 及甘肅.

室中有兩標本: 1♂, 1♀, 17, 20, X, 1928, 甘肅新寧府,老虎口,柏林博物館送來.

424. **Carpodacus erythrinus roseatus** (Hodgson). 普通朱雀

D. et O. p. 351 (*Carpodacus erythrinus*) —— 此鳥每成大羣依期經過中國,在北京附近,間亦有留以生殖者,

Baker, iii, p. 137 —— 生殖于喜馬拉雅帶,自 Kuman, 嘉華,尼泊爾以至西藏之東部以入雲南,撣部,中國西部及中部.冬季見于印度全境,緬甸,暹羅,印度支那及中國南部.

La Touche, p. 314 —— 雲南留鳥.福建冬鳥.沙尾山,直隸東北部遷移鳥.湖北夏鳥.北京夏鳥及遷移鳥.

Rothschild, p. 329 ——雲南.

室中有中國鳥十一: 1♂, 1892, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1♂, iii, 1867, David, 北京; 1♂, 1868, David, 沙市; 1♀, 3, xi, 1869, David, 漢平; 3♂, 1♀, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1868, Dejéan, 四川打箭爐; 1♂, 1902, 四川打箭爐; 1♂, 1897, Père Soulié, 雲南其切.

余于廣西猺山多射得之.

425. **Carpodacus trifasciatus** J. Verreaux. 三斑朱雀

D. et O. p. 353(*Propasser trifasciatus*)——嚴寒時,余于四川西部山林中見之,所射得之二雄鳥,其一竟埋沒雪中.

Dresser, A Man. of Pal. Birds, p. 323 ——四川西部及甘肅.

Rothschild, p. 330——Forrest 于雲南麗江得有記載.

室中有四川鳥九: 1♂, 3♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4♂, 1♀, 1898, Biet, 四川打箭爐.

426. **Carpodacus roseus** (Pallas). 伯氏朱雀

D. et O. p. 352 (*Propasser roseus*)——秋末成大羣經北京,春季則完全可得見于中國.嚴寒時余曾于秦嶺見之.

La Tuoche, p. 312——沙尾山遷移鳥.直隸遷移鳥及冬鳥.山東,山西,陝西,冬鳥.

室中除多數西伯利亞標本外,只有一中國鳥: 1♀, 1868, David, 北京.

Carpodacus 一屬,雄鳥體部多少帶有赤色或朱色,雌鳥闕如.無眉斑,爲與 *Propasser* 區別之要點.本目錄所記載之 *Carpodacus* 六種,用下列檢索表檢得之:

A. 翼長 100mm. 以上

a. 上體密着黑條紋.……………………………… *C. r. rubicilloides*

b. 上體不着黑條紋.……………………………… *C. severtzovi.*

B. 翼長在 95mm. 以下.

c. 上體沙色,决無條紋. ………………………… *C. s. stolickzkae.*

d. 上體非沙色,條紋或有或無.

1a. 上體無條紋,腮與喉深赤, …………………… *C. e. roseatus.*♂

1b. 上體無條紋,下體白而帶橄欖色. … *C. e. roseatus.*♀

1c. 上體有條紋,腮,喉銀粉紅色.

2a. 翼部有橫斑三. ………………………… *C. trifasciatus.*

2b. 翼部只有一橫斑. ………………………… *C. roseus.*

Propasser 及 *Carpodacus* 兩屬,雄鳥體羽之赤色色素,與年齡,氣候,食料都極有關係,故以色彩之深淺濃淡而別各種爲若干亞種,實屬危險.經考驗大批標本後,覺採地相同之標本,其體色亦每有不同,此無他,個體之差異耳. Berlioz 先生語余,謂瑞典京都 Stockholm 博物園中之 *Propasser* 及 *Carpodacus* 各鳥,因囚養關係,其雄鳥體羽一如雌鳥,永無赤色或朱色之痕跡云.

427. **Uragus sibiricus ussuriensis** Buturlin. 長尾朱雀

D. et O. p. 357 (*Uraga sibiricus*)—— 爲西伯利亞東部留鳥,亦分佈于滿洲及中國北部.冬季數見于北京,四月十一日且得一極成長之雌鳥.

La Touche, p. 317——直隸冬鳥.

室中只有來自西伯利亞之標本.

428. **Uragus sibiricus sanguinolentus** (Temm. & Schleg). 日本朱雀

D. et O. p. 358——Przwalski 于滿洲見之.

室中只有日本鳥,因旣有記載于滿洲,特編入本目錄.

U. s. sanguinolentus 與 *U. s. ussuriensis* 之區別,在其尾較短,上體較深暗,下體較赤.

429. **Uragus sibiricus lepidus** David & Oustalet. 西朱雀

D. & O. p. 359——余于秦嶺及陜西南部發見之,雖爲留鳥,但分佈不廣.此鳥與 *sibiricus* 及 *sanguinolentus* 之區別: 1.體遙小; 2.嘴較大; 3.體色較不一致而條紋較多; 4.雄鳥全體之體色,與二者俱有不同,雌鳥爲尤甚.

Rothschild, p. 332——Forrest 于湄公河流域得一雌鳥.

室中有四川鳥十一,雲南鳥九: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 5(?), 1902, 四川打箭爐; 9(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸却.

430. **Acanthis flavirostris brev irostris** Moore.

D. et O. p. 547——Przewalski 于甘肅見之.

Baker, iii, p. 156——由高加索山脉以至中央亞細亞,波斯,

土耳其,西藏,滿洲及 Gilgit.

室中有中國鳥三: 1♂, 1♀, 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

431. **Hypacanthis spinoides spinoides** (Vigors).印度黑頭黃雀

D. et O. p. 338 (*Chrysomitris spinoides*)——余只于四川成都同一籠鳥.

Baker, iii, p. 160——喜馬拉雅帶,自阿富汗,俾路支邊境以至 Gilgit, 經克什米爾, Kuman, 嘉華,尼泊爾,西藏,錫金,不丹及馬尼坡.

室中只有錫金鳥,因有記載于我國,特編入本目錄.

432. **Hypacanthis spinoides ambiguus** (Oustalet). 雲南黑頭黃雀

D. et O. p. 338 (*Chrysomitris spinoides*)——見前.

Baker, iii, p. 161 ——撣,雲南,四川.

Rothschild, p. 333 (*Carduelis ambiguus*)——雲南.

室中有中國鳥十三: 4(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5(?), 1898, 1899, Biet, 四川打箭爐; 3(?), 1900, 雲南苴却; 1(?), 1912 Mme. Comly,雲南.

Hypacanthis spinoides spinoides 之下體鮮黃而 *H. S. ambiguus* 則為幽黃,胸及脅橄欖青. *H. s. ambiguus* 與 *Chloris sinica sinica*

亦頗相似,但前者頭部黑而非灰而帶青.

433. **Chloris sinica sinica** (L.). 黃雀

D. et O. p. 338 (*Chlorospiza sinica*) —— 廣佈中國各地,凡有松林之處皆可得之.

La Touche, p. 321——除甘肅,雲南外,中國全部皆有之.

室中有九標本: 5(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 3(?), 1902, 四川打箭爐; 1♂, 10, iii, 1911, Legendre, 四川寧遠府.

余于兩廣平原常射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

434. **Chrysomitris spinus** (L.). 黑腮黃雀

D. et O. p. 337 —— 歲必如期經北京,但爲數無多.冬季可于中國北部各省東其小羣.

La Touche, p. 325——中國北部冬鳥及遷移鳥.沙尾山遷移鳥.揚子江下流,福建,廣東北部,冬鳥.

室中只有日本鳥.

435. **Chrysomitris bieti** (Oustalet). 打箭爐黃雀

Spinus bieti, Oustalet, Nouv. Arch. Mus. (3) vi, p. 41, 打箭爐.

室中有四標本: 4(?), 1892, Biet, 四川打箭爐.

436. **Fringilla montifringilla** Linn. 山麻雀

D. et O. p. 327 —— 春秋二季遷移期經過北京,冬季普見于中國中部及南部.

Baker, iii, p. 165 —— 生殖于歐洲及亞洲之北部,自挪威以至堪察加.冬季至南歐,中央亞細亞及印度之西北,西藏,中國北部及中部,東行以至日本.

La Touche, p. 327 —— 中國北部,揚子江下流以至福建,冬鳥.中國中部,西部,雲南,冬鳥.沙尾山遷移鳥.

Rothschild, p. 328 —— 雲南.

室中除印度日本鳥外,有中國鳥四: 1(?), 18, xi, 1908, Père Cavalerie, 遂化 (Sui-fa); 1♂, 1896, Père Soulié,雲南茸却; 1♀, Père Seguin, 興寧(無日期); 1♂, 1910, Gladin, 寧波.

437. **Passer montanus malaccensis** Dubois, 麻雀

Baker, iii, p. 177 —— 喜馬拉雅帶,自 Kuman, 克什米爾以至東亞森母緬甸,馬來半島,爪哇,蘇門答拉,及婆羅洲.東行至暹羅,雲南及中國西部.

Rothschild, p. 328 —— 雲南.

室中除大批安南標本外,有雲南鳥一: 1(?), 1896, Père Soulié,雲南茸却.

438. **Passer montanus saturatus** Stejneger. 麻雀

D. et O. p. 340 (*Passer montanus*)——廣佈中國各地.

La Touche, p. 328 ——中國各地留鳥.沙尾山及中國海沿岸遷移鳥.

室中有七標本: 1♀, xi, 1872, David, 陝西中部; 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1(?),1902, 四川打箭爐; 2♂, 1♀, 1(?), iii, 1907, Gladin, 寧波.

余于兩廣各地皆求之及得有標本.

439. **Passer montanus obscurus** Jacobi. 麻雀

Baker, iii, p. 179——西藏,錫金及四川.

室中有一西藏鳥: 1♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

以上 *Passer montanus* 三亞種.區別極微,可用下列檢索表檢得之:

A. 翼長不逾 75mm.

a. 頭部銹赤較濃;上體較褐. .... *p. m. malaccensis.*

b. 頭部銹赤較淡;上體較淺沙. .... *p. m. saturatus.*

B, 翼長 76mm. 以上. .... *p. m. obscurus.*

雲南荳坵標本.頭部銹赤,確較深暗于陝西,四川及寧波鳥.故余暫以 *malaccensis* 記載之.但再以大幫新加坡,馬拉甲,蘇門答拉,安南等處之 *malaccensis* 與日本及中國之 *saturatus* 比較,覺二亞種間,殊無明顯之差別,而上體褐色之深淺,頭

部銹赤之濃淡,完全因年齡而不同,故個體之差異甚著,吾以為若能再得大批中國及日本之 *saturatus* 作比較後,則 *malaccensis* 與 *saturatus* 或係相同也.

Passer montanus obscurus 之標準地點為四川,但吾曾量度兩四川打箭爐標本,翼長只有 68, 72 mm. 與西藏鳥相差甚遠(81mm.),與陝西中部及甯波鳥則較相近,或可謂之曰完全相同 (65, 68, 70 mm.). 故余以 *obscurus* 記載西藏鳥而以 *saturatus* 記載四川鳥.

440. **Passer rutilans rutilans** Temm. 銹雀

D. et. O. p. 341 ——始發原于日本,及後于台灣,中國中部之山原,福建,四川,漠平皆有記載,北行不至北京.

Baker, iii, p. 182 (*Passer rutilans intensior*)——雲南緬甸.

La Touche, p. 331 ——安徽南部,浙江,福建,廣東,留鳥,江西當亦有之.

Rothschild, p. 327 (*Passer rutilans intensior*)——雲南.

室中有中國鳥二十: 1♂, 2,ii, 1869, David, 四川西部; 1♀, 1, vi, 1869, David, 漠平; 2♂, 1♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4♂, 2♀, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 2♂, 1802, 四川打箭爐; 3♂, 1895, Prince d'Orléaus, 雲南; 1♂, 1896, Père Soulié, 雲南茸切; 1♂, 1911, Pére Cavalerie, 貴州; 2♀, 18, x, La Touche, 福建.

此次寄來之湖南南部標本中,亦有此鳥數個.

Rothschild 以 *Passer rutilans intensior* 記載雲南鳥,謂其栗色之部較深,下體所着之黃色較少 (Bull. B. O. C. xliii. 1922, p. 11, 眉公河流域).四川鳥與雲南鳥相若,當係同一亞種.余試之四川雲南鳥與標準地日本之 *P. r. rutilans* 標本比較,覺日本部似稍淺淡,但其差異程度,實極徵弱,或可簡直謂之曰相同.至渲染黃色一特徵,適與 Rothschild 所指示者相反,日本部下體,其黃色遠不及雲南部之盛也.

此部栗色部之深淺,與年齡有關,渲染黃色之多少,隨季節而不同,故若以此二者爲判別地方種之標準實極危險.惜室中只有一單獨之日本雄部,若多有數個標本,此問題當可立卽解決.

441. **Montifringilla nivalis adamsi** Adams. 西藏雪雀

D. et O. p. 547——甘肅及西藏北部.

Baker, iii, p. 187——克什米爾,甘肅,嘉華,尼泊爾,錫金及西藏.

室中除兩印度鳥外,有中國鳥三: 1♂, 2(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

442. **Montifringilla ruficollis** Blanford. 赭頭雪雀

D. et O. p. 548 (*Pyrgilauda ruficollis*)——Przewalski 于青海,西藏,及 Tsai-dam 遇見之.

Baker, iii, p. 189 —— 西藏,錫金,青海及甘肅.

Rothschild, p. 328——雲南.

室中有八標本: 4♂, 2♀, 2(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

443. **Fringillauda nemoricola nemoricola** Hodgson. 賀孫山麻雀

D. et O. p. 334 —— 冬季于漠平及青海邊境成大羣集以覓食田野間.

Baker, iii, p. 191——尼泊爾,錫金,東經西藏之南部及中部以至甘肅及漠平.

室中有中國部十八: 1♂, 2♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏: 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 4(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 7(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1897, Père Soulié, 雲南茛刧.

444. **Fringillauda brandti brandti** Bonaparte. 伯郎山麻雀

Baker, iii, p 193——天山,帕米爾,土耳其,阿爾泰山,Yarkand, Kashgar, 及 Gilgit.

室中有兩四川部,體色頗淺,余以爲當逮此型: 2(?), 1892, Biet, 四川打箭爐.

445. **Fringillauda brandti haematophygia** Gould. 西藏

山麻雀

Baker, iii, p. 194——克什米爾,類達,錫金,西藏.

室中有一中國鳥: 1♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

F. b. brandti 之體色較淺較灰,而 *B. b. haematophygia* 則較深較褐,但此或與季節有關亦未可知,須得大幫標本比較,乃能決其異同.

EMBERIZINÆ. 鵐亞科

本亞科有將其自已獨立成一科而稱爲*Emberizidae*者,有將其歸入雀科而僅爲之立一亞科者,本目錄採用後種方法.

巴黎博物館鳥類研究室鵐亞科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有兩屬十九種及亞種,經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共八十一個.

436. **Emberiza pallasi** (Cabanis).——葦鵐

D. et O. p. 321 (*Schoenicole pallasi*)——主棲蒙古之大鳥里,冬季成大羣至中國西部,喜在水邊蘆葦中,以種子供食.

La Touche, p. 339——自中國北部以至揚子江流域之冬鳥,福建冬鳥,沙尾山遷移鳥,直隸東北部遷移鳥及冬鳥.

室中只有西伯利亞標本.

447. **Emberiza fucata fucata** Pallas. 寒灰首鵐

D. et O. p. 325——春末經北京,但爲數無多.

Baker, iii, p. 198——生殖于西伯利亞東南部,滿洲,高麗,日本及中國北部.冬季至中國南部,印度支那,緬甸,亞森毋,或可至孟加拉及不丹.

La Touche, p. 344——中國東部海岸冬鳥.揚子江下流.中流(?),雲南西北部(?),冬鳥.沙尾山及直隸東北部遷移鳥.

Rothschild, p. 325——雲南.

室中除安南及日本鳥外,有中國鳥二: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 23. iv, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

La Touche, 以 *E. f. kwatunensis* 記載福建掛墩鳥,謂其量度較小,上體色彩較深而赤色較盛,于 Birds of Eastern China, p. 347 且舉其分佈地爲福建及廣東.余試以 La Touche 送來之福建掛墩鳥與安南及日本之 *E. f. fucata* 較,覺氏所舉之特徵,皆無效果.

448. **Emberiza fucata arcuata** Sharpe. 印度灰首鵐

Baker, iii, p. 199——克什米爾, Kuman, 西摩拉,嘉華,尼泊爾,錫金及雲南.

Rothschild, p. 226——雲南.

室中只有一標本: 1(?), 1902, 四川打箭爐.

E. f. fucata 上體栗色甚不發達,脅及胸側之栗色亦無多.

E. f. arcuata 則反是.

449. **Emberiza pusilla** Pallas. 小鵐

D. et O. d. 323 —— 秋季至中國,瞬卽廣佈全國各地,喜居童山禿嶺,鮮至水濱.春秋二季遷移時,北京附近,為數極多.

Baker, iii, p. 201 —— 自歐洲東北部,以至滿洲及蒙古.冬季至印度東北部,孟加拉,貝哈爾,亞森母,馬尼坡緬甸及中國南部.

La Touche, p. 348 —— 中國北部遷移鳥及冬鳥.沙尾山遷移鳥.揚子江流域及中國南部冬鳥.

Rothschild, p. 325——雲南.

室中有中國鳥十四: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 3(?), 1902, 四川打箭爐; 2♂, 1♀, ii, iii, Prince d'Orléans, 雲南; 1(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸却; 2♂, 2♀, x, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,各有此鳥數個.

450. **Emberiza rustica** Pallas. 銹鵐

D. et O. p. 324——入冬卽至中國,春初始去.

La Touche, p. 324 —— 中國北部,揚子江流域,福建,冬鳥.沙尾山遷移鳥.

室中只有西伯利亞鳥.

451. **Emberiza tristrami** Swinhoe. 赤腰白眉鵐

D. et O. p. 326 —— 在北京,同屬各種,以此爲最稀.中國北部,只于五月見之,度冬于中部及南部各省.

La Touche, p. 352 —— 福建冬鳥.揚子江下流冬鳥(?)及遷移鳥.沙尾山,直隸東北部遷移鳥.

Rothschild, p. 327——四月間于雲南猓姑寨得有記載.

室中有三標本: 1♂, 2♀, xi, xii, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥數個.

452. **Emberiza elegans elegantula** Swinhoe. 鵊鵐

D. et O. p. 323 —— Swinhoe 于湖北西部得一雌鳥,乃定爲 *elegantula*.

La Touche, p. 355 —— 直隸之極南(!), 陜西,湖北,貴州,四川,雲南西北部及南部.

Rothschild, p. 326——雲南.

室中有中國鳥十四: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 6(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 3(?), 1899, 四川打箭爐; 1♂, 2(?), 1896, Père Soulié, 雲南苴却.

此次寄來之湖南南部標本中,有此鳥一個.

室中有一日本鳥,余試以之與雲南四川鳥較,覺日本鳥背部黑條紋較不發達,後頸不着灰色,應名曰 *Emberiza elegans elegans* Temm. 但福建及直隸等處之 *E. e. sibirica* Sushkin 未知有無別于日本鳥或雲南四川鳥耳.

453. **Emberiza cioides castaneiceps** Moore. 栗頂草鵐

D. et O. p. 328 (*Emberiza cioides*) —— 普膊于貝加爾湖之南,大烏里,阿穆爾河流域,烏蘇里,蒙古等處.中國大部之山中亦有之.

La Touche, p. 356 —— 揚子江中流及下流,中國北部以至山海關.

室中有兩中國鳥: 2♀, iv, 1895, David, 北京.

余前于廣西柳州之石灰岩山中射得之.

454. **Emberiza cia godlewskii** Tacz. 葛氏草鵐

D. et O. p. 546 (*Emberiza godlewskii*) —— 多見于大烏里南部,亦可見于土耳其斯坦. Przewalski 遇之于蒙古東南部,甘肅爲尤多.

Baker, iii, p. 207 (*E. c. godlewskii*) —— 中國北部由直隸至甘肅,四川及西藏之東南部,東土耳其,阿爾泰,青海及貝加爾湖.冬季至錫金及阿森母北部山中.

Baker, iii, p. 207 (*E. c. yunnanensis*)——雲南,撣部,揚子江流域(?).

La Touche, p. 362 (*E. godlewalskii bangsi*)——直隸,陝西,湖北北部(?),留鳥.

Rothschild, p. 326 (*E. cia yunnanensis*)——二,三,四,五等月,皆有記載于雲南.

室中有中國鳥三十六個: 1♂, 1(?), 1891, Prince d'Orléans, 天山; 1♂, 2♀, 1(?), Prince d'Orléans, 西藏; 9(?), 1892, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 7(?), 1902, 四川打箭爐; 14(?), 1896, 1897, 1900, Père Soulié, 雲南茸却.

關于此鳥之重名甚多,在湖北四川者有 Rothschild 之 *E. godlewski omissa* (=*E. cia omissa*); 在西藏及打箭爐者有 Sushkin 之 *E. g. khamensis*(=*E. cia khamensis*); 在雲南者有 Sharpe 之 *E. g. yunnanensis* (=*E. cia yunnanensis*); 在天山者有 Sushkin 之 *E. g. decolorata* (=*E. cia decolorata*). 但吾試集天山,西藏,四川,雲南等三十六標本作詳細之比較,覺翼之長短固有極大之變差,卽體色之深淺,在同一採地之標本,亦往往有所不同.例如 Sharpe 謂 *yunnanensis* 體色較深暗于 *godlewskii*,但打箭爐標本,亦有比雲南標本更深暗者.又如 Sushkin 謂天山之 *decolorata* 體色最爲淺淡,但雲南四川標本中,亦有比天山標本同樣淺淡者.以此之故,余以爲強定名字而分爲若干亞種,實屬難能,趨至極端,非一標本一學名不可,究不如

合而爲一之爲愈也.但有一普遍現象不可不注意者,卽一般雲南鳥,誠較深暗于一般四川鳥,而一般四川鳥,又較深暗于西藏及天山鳥也.惜其間無一顯明之界限耳.

455. **Emberiza spodocephala spodocephala** Pallas. 黑面灰首鵐

D. et O. p. 329——冬季普見於中國中部各省,四月末,五月初,由印度回至西伯利亞,道經北京.留中國以生殖者,間亦有之.

La Touche, p. 365——中國南部全部及揚子江流域一帶,冬鳥.沙尾山及中國北部,遷移鳥.

Rothschild, p. 326——雲南.

室中有中國鳥四: 1(?), 23, ii, 1895, Prince d'Orléans,雲南; 2♂, 1(?), ii, xi, La Touche,福建西北部之掛墩.

456. **Emberiza spodocephala melanops** Blyth. 青首鵐

Baker, iii, p. 213——生殖于揚子江流域及中國西北部:冬季至緬甸北部及中部,暹羅,馬尼剌,亞森毋,東孟加拉,不丹,尼泊爾,錫金等處,生殖于湖北者想係此鳥,又或可生殖于雲南.由四川西部以至阿爾泰之生殖鳥,則爲 *E. s. spodocephala.*

La Touche, p. 367——雲南冬鳥,揚子江流域夏鳥.甘肅.

Rothschild, p.326——正,二,三,四,五,十,十一,十二等月皆有記載于雲南.

室中只有安南鳥.

余前曾以 *E. spodocephala melanops* 記載廣西猺山鳥.此次寄來之廣東北部標本,則係 *E. s. spodocephala.*

457. **Emberiza spodocephala personata** Temm. 日本黑面鵐

La Touche, p. 368——沙尾山.

室中只有日本鳥.以旣有記載于我國,特編入本目錄.

本目錄所記載之 *Emberiga spodocephala* 三亞種,可用下列檢索表示其區別之要點.

A. 側翮第一第二雙,其內辦皆有楔形大白斑.

a. 頭頸灰而帶青色.………… *E. s. spodocephala.*

b. 頭頸橄欖青.………… *E. s. melanops.*

B. 側翮第一雙,其內辦有一楔形大白斑,第二雙或全缺,或僅成一小白點斑.………… *E. s. personata.*

458. **Emberiza sulphurata** Temm. & Schleg. 硫鵐

D. et O. p. 330——在中國南部度冬.

La Touche, p. 369——沙尾山遷移鳥.福建冬鳥及遷移鳥.

香港.

室中標本皆非來自中國.

459. **Emberiza leucocephala** Gmelin. 白項鵐

D. et O. p. 329——冬季專見中國北部,直至陝西南部邊境皆有之.余常于秦嶺觀察其習性與聲音,覺與歐洲之黃鵐(Bruant jaune)相似.

Baker, iii, p. 202——生殖于北亞洲,自烏拉山以至滿洲及中國北部.

La Touche, p. 271——自中國北部以至陝西南境,冬鳥.沙尾山遷移鳥.

室中標本皆來自西伯利亞.

460. **Emberiza melanocephala** Scopoli. 黑頭黃鵐

La Touche, p. 372——秋季于福州得兩標本.

室中標本,皆非來自中國.因既有記載,特編入本目錄.

461. **Emberiza icterica** Eversman. 赤頭黃鵐

La Touche, p. 373——北京.

室中標本,皆非來自中國.以既有記載于北京,特編入本目錄.

462. **Emberiza rutila** Pallas. 栗鵐

D. et O. p. 331——冬季至中國南部,歲必二經北京,秋季一次,爲數較少,春季一次,爲數較多.

Baker, iii, p. 216——生殖于西伯利亞東部及中國北部;冬季至中國南部,印度支那,緬甸,擺部,亞森母,馬尼坡,不丹及錫金.

La Touche, p. 373——中國東部及中部之東,遷移鳥.直隸西部,夏鳥.雲南東南部,冬鳥.

Rothschild, p. 327——,四,十等月,皆有記載于雲南.

室中有一安南鳥及一蒙古鳥: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之粵北,湘南兩批標本中,亦各有此鳥數個.

463. **Emberiza aureola** Pallas. 寒鵐

D. et O. p. 332——秋季由滿洲南下,春季由南方北返,皆必道經北京,爲數極多.

Baker, iii, p. 210——生殖于俄國北部,經西伯利亞,蒙古,滿洲以至日本;冬季南行至歐洲中部,南部及西部,印度之西北,尼泊爾,錫金,亞森母,緬甸全部,暹羅,馬來諸邦及中國.

La Touche, p. 375——中國全部.

Rothschild, p. 327——四,五,六,十等月皆有記載于蒙自.

室中除安南鳥外,有中國鳥三: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1♀, 1896, Déjéan, 四川打箭爐; 1♀, 10, X, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.

464. **Melophus melanicterus** (Gmelin). 冠鵐

D. et O. p. 333——見于中國南部,余曾遇之于浙江,江西,四川及漠平.

La Touche, p. 378—— 浙江,福建,江西,廣東,雲南,四川,漠平,留鳥.

Rothschild, p. 325——雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥一: 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南黑水河.

余于廣西猺山射得之,此次寄來之湖南南部標本,亦有此鳥一雙.

BOMBYCILLIDÆ. 連雀科

次列撥風羽羽軸延長,色彩如蠟,爲本科最主要之特徵.頭部有羽冠;初列撥風羽十,第一枚小;尾短而方,尾羽十二枚;事短而壯;跗蹠亦短.以果子及昆蟲供食.在我國境內,概非留鳥.

巴黎博物館鳥類研究室連雀科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所救,只有一屬兩種.

465. **Bombycilla garrula** (L.). 太平雀

D. et O. p. 131 (*Ampelis garrulus*)——歲必可見于中國北部,但爲數無多,其大羣者,特偶然耳.北京人稱曰太平雀 (Tai-ping tsiao=Oiseaux de la paix) 以其性和善也.

Baker, iii, p. 223——生殖于東西兩半球之極區,冬季南行至歐洲中部,亞洲;在遠東可直至中國南部.

La Touche, p. 379 (*Bombycilla garrulus centralasiae*)——直隸,揚子江三角洲,遷移鳥及冬鳥.沙尾山,遷移鳥.

室中標本皆非來自我國.

Baker 曰:"雖有阿爾泰山之生殖鳥(卽 Poliakow 之 *B. g. centralasiae*) 但經研究不列巔博物館大批標本後,覺此種實無再分亞種之餘地,故余仍用二名法,記載之".

466. **Combycilla japonica** (Siebold). 日本連雀

D. et O. p. 132 (*Ampelis phoenicoptera*)——此鳥最初發見于日本,亦至西伯利亞東部,中國北部及台灣,但爲數無多.余留彼邦十餘年,只有兩次于北京附近得此鳥數個耳.

La Touche, p. 381——直隸,揚子江下流,福建,冬鳥.沙尾山,遷移鳥.

室中除日本及高麗鳥外,有中國鳥一: 1♂, 16, iii, 1909,

Gladin, 甯波.

B. japonica 之 *B. garrula* 相似,但腹部檸檬黃色較盛,下尾筒栗赤而渲染暗紅,翮之先端暗紅。

(未　　完)

寶石的成因及其分佈

陳 鴻 瑞

寶石的成因,有三種主要不同方法:(1)自溶液中造成(2)自鎔融體凝成及(3)被變質而成.今分叙於下:

(1)自溶液中生成的最好例子,莫如海水受日光之熱而水份被蒸發,其水中所含的鹽份則結晶成完全晶體.此外由溶液中失去一種氣體,也可使此溶液中所含物質結晶.如方解石 Calcite 便是由 Calcium Bicarbonate 溶液中失去二氧化炭汽體所成者.其他的方法還多得很,如石英脈多係因溶液的溫度或壓力的變更而成.兩種溶液相混合後,致使其濃度加厚而沉澱結晶者亦有之,如方解石由硫酸鈣及炭酸鈣兩溶液相交合而成結晶體者.由溶液及固體物相交合而結晶者亦有之,如菱鋅礦係由硫酸鋅溶液及石灰岩Limestone相交合而成者.由溶液及氣體相交合而成者如黃鐵礦係由硫化氫氣體在融鐵中生成者.此外由有機物如動物在溶液中分泌出一種礦物質使其沉澱結晶者如方解石及石英皆有由此生成者.寶石中由溶液中生成者以蛋白石,孔雀石為最普通.

(2)自鎔融體凝成者,火成岩的生成總是由地心中甚複雜成份的岩漿 Magma 上升後經凝固作用而成者.當凝固作用進行時,岩漿中所含的各種化學原素皆可相互配合生成各種不同的新礦物.岩漿凝固的速度愈大——散熱的時間很快,則其所結晶成的顆粒很小.反過來說,凝固的速度緩慢的,其所成結晶體很大.寶石由岩漿凝固作用而成者如金剛石,翠玉,黃玉,青玉等.今日世上出售的人造金剛石便是根據此種原理造成的.其以一爐灼熱之鐵代替岩漿,以純粹炭素代岩漿中所含炭質;將炭素加入爐中後,并立使融鐵冷却,則融鐵因受冷而凝固:俟其全部冷却後,再以酸將鐵消去,人造寶石便告成功.

(3)經變質作用而成者;岩石經熱力,壓力,氣體諸作用後,均可使其固有性質及所含礦物改變.火成岩的侵入,因牠能自其本體中發出熱力及氣體,故常使其四周的圍岩 Country rock 行變質作用而改變其原形.頁岩及石灰岩極易由此而變質.寶石由此種作用生成者如翠玉,石榴子石,紅柱石,尖晶石及十字石等.

講到寶石的分佈,可與地質上的分佈及地理上的分佈兩方面敍述;前者專敍寶石在何種岩石中產生最多或其他特別性質,後者專講寶石在世界各國的產生,今分別敍述於后:

(A)地質上的分佈 Geological Distribution

寶石有散佈在岩石中或其他礦物中,亦有集合多數晶體於一穴中者.散佈在岩石或礦物中的寶石,其結晶體必很完全,且兩端有極平滑的表面.如金剛石及綠玉.但集合在穴中的寶石的晶體每多成不完全形狀,如透輝石便是一例.

地殼上的岩石,尋常分為三種,火成岩 Igneous rocks, 水成岩 Sedimentary rocks 及變質岩 Metamorphic rocks.寶石在此三種岩石中,均有產生,唯其量大有不同.

火成岩中的礦物,約可分為兩種,一為組成岩石不可缺少的礦物名主要礦物 Essential minerals, 如花崗岩中的長石 Feldspar 及石英皆是.一為佔岩石全部很細小成份的名附生礦物 Accessory minerals,此種礦物在岩石中可有可無皆無重要關係.如橄欖岩 Peridotite 中的金剛石.故寶石存在於岩石中的常屬附生礦物.

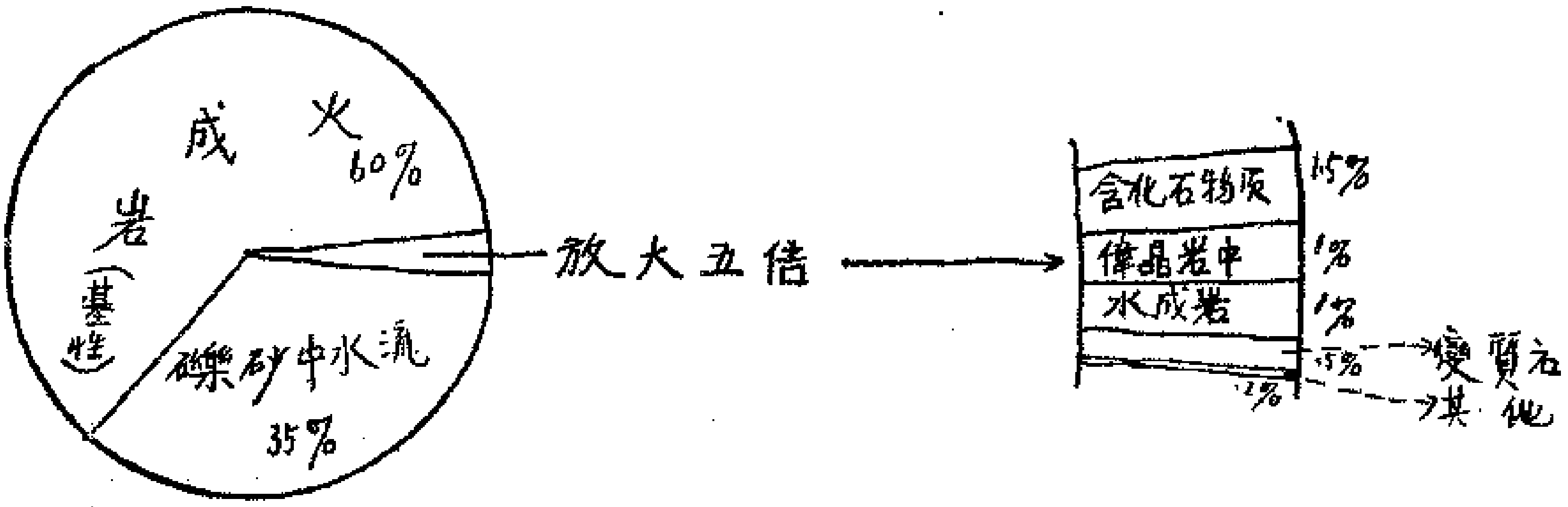
火成岩經火山作用由地內岩漿噴出地表凝固而成的叫噴出岩 Extrusine rocks, 其石理 Texture 多為玻璃狀,細胞狀或極細的顆粒狀 Fine grains, 在這種岩石中少有寶石的存在.火成岩由岩漿在地表以內很深處經過長久時間凝固而成的名深成岩 Plutonic rocks, 其石理粗大而結晶體亦完全.寶石發現於此中者頗多.

火成岩又有一種分類法,完全根據其所含礦物的化學成份而定;如岩石含有多量矽質 Silica 者,稱曰酸性岩石

Acid rocks. 其顏色大都很淺淡.例如花崗岩,正長岩,偉晶岩 Pegmatite 等皆是.寶石自此類岩石產出者多在粗大顆粒及完全結晶體中.如綠玉,黃玉等.其他一種爲含有微量矽質及多量黑色不易識別的礦物稱基性岩 Basic rocks. 此類岩石顏色多黑暗,如輝長岩,輝石岩及橄欖岩等.基性火成岩中亦有大量寶石.而尤以橄欖岩產金剛石爲最重要.

水成岩乃由較老的水成岩,變質岩或火成岩經風化及流水搬運作用而沉積的.故多成層狀構造 Stratification Structure. 水成岩有三種不同的沉積:(1)機械的沉積如砂岩 Sandstone. 礫岩 Conglomerate 等.(2)化學的沉積 Chemical deposits 如石膏 Gypsum, 岩鹽 Rocks salt 及石灰岩等.(3)生物的沉積 Organic deposits 如石灰岩.寶石在水或岩中生成者頗少.但在水或岩脈中亦間有蛋白石,石英及翠玉的發現.

變質岩是由水成岩或火成岩在地下很深處經熱力,壓力或氣體的强大作用,使其中所含的鑛物重復結晶而成.例如帶伏片麻岩 Banded gneisses是由火成岩經强大壓力而成.石英岩Quartzite是由水成岩中的砂岩經擠壓作用而成的.大理石 Marble 是由石灰岩或白雲岩 Dolomite 經高熱力使其中所含礦物重復結晶而成.寶石在變質岩中的產量沒有火成岩中多.但在大理石中每有青玉,紅玉,及尖晶石等.片麻岩及片岩中每有翠玉,硬玉及軟玉等發現.下圖卽爲寶石在各種岩石中的分佈情形、



圖示寶石在地質上的分佈及其百分比

(B) 地理上的分佈 Geographical Distribution

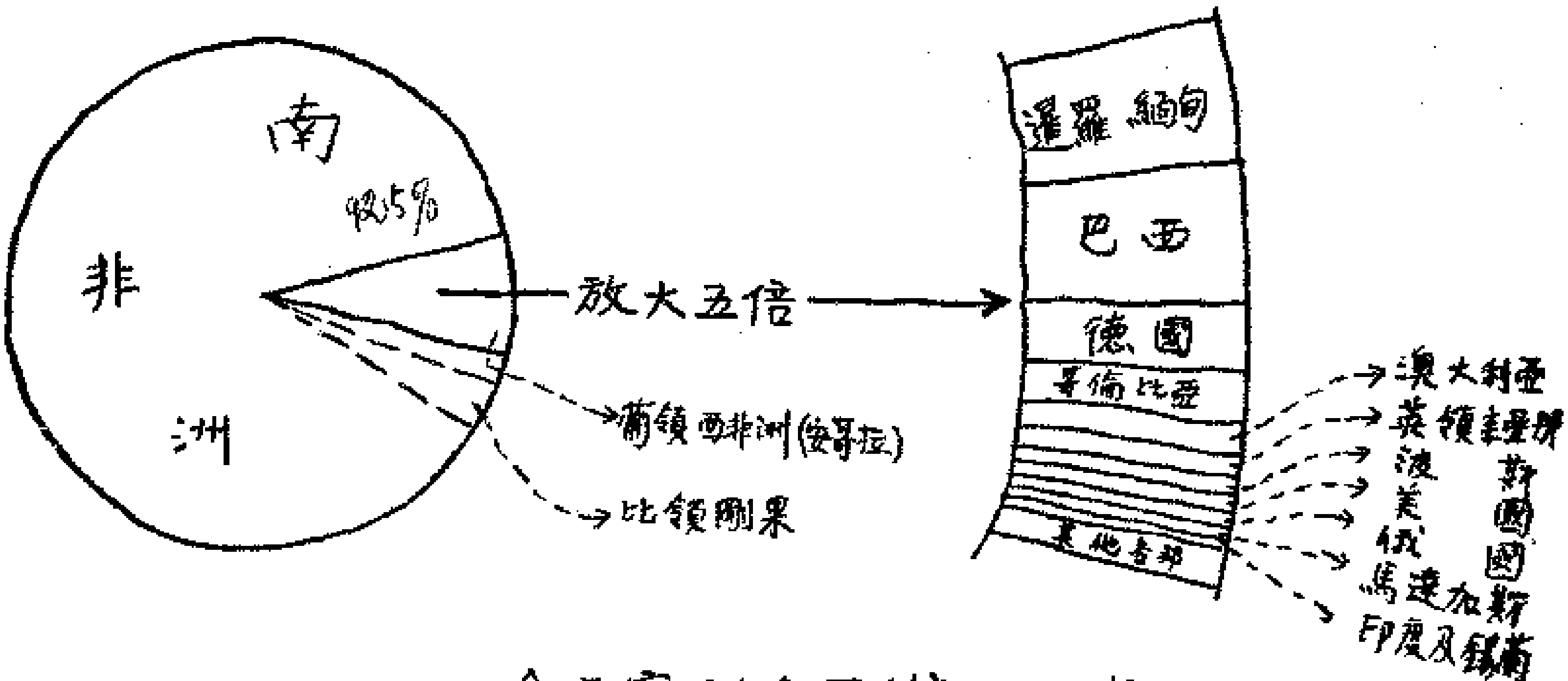
全世界總合起來,寶石的產量每年有八千萬元的代價.在這巨大的產量中,金剛石確佔了百分之九十四.今以下表示各種寶石每年所產的價格:

金剛石	$ 76,112,000
青玉	1,210,000
琥珀	800,000
翠玉	550,000
紅玉	365,000
硬玉	294,000
土耳其玉	290,000
蛋白石	209,000
水晶	110,000
綠玉	100,000
電氣石	90,000
其他	566,000
總量	$ 80,696,000

現在再討論各國的產量,寶石在非洲Africa的產量要比世界上其他任何國的產量多.其每年所產約佔全世界百分之九十二强.其他如比領剛果,葡領西非洲,巴西,暹羅緬甸,錫蘭等地亦有出產.今以下表示各洲的產量及百分比:

地名	寶石總量	百分比	金剛石
非洲	$74,653,500	92.5	$ 196,500
南美洲	2,270,000	2.8	654,000
亞洲	2,123,000	2.6	2,072,000
歐洲	1,095,500	1.3	1,094,500
澳洲	360,000	0.4	353,000
北美洲	195,000	0.3	192,500

下圖更示各國產生的比較:



圖示寶石在各國產生的比較

重要寶石之性質及人造寶石識別法

各種重要寶石的性質示之於下表:

名稱	化學成份	硬度	比重	光澤	透明性	結晶系	顏色
金剛石	純粹炭質	10	3.5	金剛石狀	透明	正方	白,青白,黃,褐,綠,紅,藍,灰白等.
青玉	Al_2O_3	9	3.9–4.1	„	„	六方	碧青色.
紅玉(古名紅剌)	„	„	„	„	„	„	薔薇色至海綠色
翠玉	$Be_3Al_2(SiO_3)_6$	7.5–8	2.6–2.8	玻璃狀	„	„	翠綠色.
泳石	„	„	„	油滑玻璃狀	„	„	無色.
水晶	SiO_2	7	2.7	„	„	„	„
瑪瑙	„	„	„	„	„	„	雜色.
鷄血石	„	„	„	„	„	„	血紅或褐紅色.
翡翠	„	„	„	„	„	„	深韭綠色.
虎眼石(遷光石)	„	„	„	„	„	„	藍,綠,紅色.
貓眼石	„	„	„	„	„	„	灰褐或綠色.
玉髓	„	„	„	„	„	„	蒼藍或灰色.
硬玉	$NaAl(SiO_3)_2$	6.5–7	3.3	眞珠狀	„	單斜	葉綠至深綠.
土耳其玉	$Al_2(OH)_3PO_4.H_2O$	6	2.6–2.83	臘狀	暗淡	多節狀	天青至蘋果綠.
電氣石(古名碧璽)	$(Al,K,Ca,Mg)_{18}B_2(SiO_5)_4$	7–7.5	2.9–3.2	玻璃狀	透明	六方	無色,紅,綠,黃,暗青色.
金綠玉	$Be(AlO_2)_2$	8.5	3.5–3.8	„	„	斜方	淡黃至綠色.
眞珠	有機物及炭酸鈣	2.5–3.5	2.5–2.7	眞珠狀	微透明	„	白,紅,黃,綠,褐等單色.

琥　　珀	$C_{10}H_{16}O$	2-2.5	1-1.1	油滑狀	,,	核瘤狀	紅,微紅,淡白色.
軟　　玉	$Ca(Mg,Fe)_3(SiO_3)_4$	6.5-7	2.9	眞珠狀	,,	緻密狀	淡綠至深綠色.
蛋白石 (古名驪珠)	$SiO_2.xH_2O$	5.5-6.5	2.1-2.3	油滑狀	微透明	緻密狀	深白,深灰,綠,黃,紅等色.
火蛋白石	,,	,,	,,	,,	,,	,,	黃,紅,火紅色.
孔雀石	$CaSiO_3.H_2O$	2-4	2-2.3	玻璃狀	,,	,,	綠及淡藍色.
貴珊瑚	$Ca\,CO_3$	3,5	2.6-2.7	,,	,,	樹枝狀	紅色.
藍晶石	Al_2SiO_3	5-7	3,56-3.67	,,	,,	三　斜	綠及白灰色.
頑火石	$Mg\,SiO_3$	5.5	3.1-3,3	金剛石狀	,,	斜　方	褐或灰綠色.
董菁石	Mn,Fe,Al,Si	7-7.5	2.6	玻璃狀	,,	,,	淡綠,烟藍.灰,紫,黃色.
白鋍玉	Be_2SiO_4	7.5-8	3	,,	透　明	六　方	無色,淡黃,淺玫瑰,紅色.
薔薇輝石	$Mn\,SiO_3$	5-6	3.4-3.7	,,	微透明	三　斜	淡紅或玫瑰紅.
金紅石	$Ti\,Ti\,O_4$	6-6.5	4.2-4.3	金剛石狀	,,	正　方	褐紅至黑色.
貴蛇紋石	$H_4\,Mg_3Si_2O_9$	2;5-4	2.5-2.8	油,綠狀	,,	單　斜	綠,黃,紅,黑色.
紅晶玉	$Mg(Al\,O_2)_2$	8	3.5-3.7	玻璃狀	透　明	正　方	玫瑰紅.
鋰翠玉	$Li\,Al(SiO_3)_2$	6-7	3.1-3,2	,,	,,	單　斜	白,淡綠,翠綠,淡紅,紫色.
鋰紫玉	,,	,,	,,	,,	,,	,,	紫丁香花色.
十字石	$HFeAl_5Si_2O_{13}$	7-7,5	3.4-3,8	,,	微透明	斜　方	淡紅至褐紅色.
黃　　玉	$Al_2Si_6O_{25}F_{10}$	8	7.4-3.6	,,	透　明	,,	淺藍,綠至紅色.

在本篇結束以前,略微講點天然寶石與人造寶石的識別法,此識別法雖不能如有經驗於寶石者之萬一,然亦可略示其一二,以使不黯礦物學而愛好真珠寶石者不致爲古玩賈所蒙騙.今分別敍述於下:

(1)構造紋

人造寶石的表面,常顯有構造紋 Structure line, 此紋由於寶石在製造時溫度的漲落或色質散佈不均勻所致.但這種構造紋是很微細的,非在顯微鏡下是不能察見的.故欲檢查寶石是否是天然品抑爲人造品,最好是放在顯微鏡下,觀察其表面有無此種構造紋.此紋的形狀有時成很直的,但有時亦有彎曲的.

(2)暗滯色

在製造人造寶石時,常有極稀微的粉末雜入製造寶石的原料中;倘經過播動以後,這粉末便成爲使此寶石富於一種不光明的暗滯色原料.此種暗滯色不必用顯微觀察便可分別出來.但是那些狡猾的古玩賈,每用一種很精巧的手術使此暗滯色消除.

(3)氣泡

人造寶石中,還有一件不可掩飾的缺點,就是多數均雜有氣泡.氣泡的形狀有圓形或扁圓形.天然寶石中很少有氣泡,不過有時會含有其他種類的礦物細粒;如天然剛玉中每有金紅石細粒的存在.但在顯微鏡下觀察的結果,證

明不是粒狀而成極細微的針狀結晶.

(4)內部裂隙

製造人造寶石的原料,於凝結時因溫度驟然間的冷却,其內部每因脆性關係而生裂隙.此裂隙多生於寶石的內部,但經過修理手術以後,多移至其表面.古玩賈欲除此劣點,多將表面有裂隙的人造寶石飾以羽毛狀或他種花紋以掩蓋之.此不可不注意者.唯裂隙之存於內部者,則無法以掩蔽之.

行列式之差誤談

愛丁堡大學 I.M.H. Etherington 著

程 綸 譯

§1 緒論 當行列式之元素,具有實驗之差誤者,必須小心計算,而於行列式之本身較小於其各第一子式時尤然,今舉一例,如

$$\begin{vmatrix} -73 & 78 & 24 \\ 92 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10 \end{vmatrix} = 1; \quad \begin{vmatrix} -73 & 78 & 24 \\ 92 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10.01 \end{vmatrix} = -118.94.$$

可見一元素中之差誤極微,而由此所生行列式之差誤,則甚大也.

設 Δ 爲 n 級 a_i 个元素之行列式 $(i=1,\cdots\cdots n^2)$,再設每個元素 a_i 中之實際差誤爲 e_i,而 Δ 中之結果差誤爲 E,於第二節至第四節,則求 (i) 以 e_i 表 E (ii) 以 e_i 之範圍表 E 之極大範圍, (iii) 以 e_i 之概率分布 $P_i(e_i)$ 表 E 之概率分布 $P_i(E)$ 更爲簡便起見,假定其爲獨立而對稱者.於第五節至第七節,則論行列式商之相當結果.此兩行列式除一行或一列外,餘均完全相同.此種商式,在實際上求一組聯立一次代數方程式之解法甚爲重要.於第八節則將此方法應用於一任意函數而假定其自變數具有差誤.

若應用於數字行列式,則必須計算第一子式之全組,以得第一近似値;再計算第二第三等各子式,以得更近之近似値.故在高級行列式時,計算子式之工作,甚爲繁重.然用展開法以求行列式及其聯式之値,則可得所有第一子式之値;例如 T. Smith 之方法載於 Phil. Mag (7), 3 (1927), 1007 是也.(註一)

(註一) Dr Aitken 有一方法可適用於計算機用者,現在尚未發表.

§2 行列式之實際差誤．設 $A_i, A_{ij}, A_{ijk}, \cdots$ 爲行列式 Δ 中相當於各底註所指元素之第一第二第三等子式.於 Δ 中,由 a_i 項內之差誤 e_i 所生之差誤爲 e_iA_i; 又於 Δ 中由 a_i, a_j 項內之差誤 e_i, e_j 所合生之差誤爲 $(e_iA_i+e_jA_j+e_ie_jA_{ij})$ 以此類推,總之得

$$E=\Sigma e_iA_i+\Sigma e_ie_jA_{ij}+\Sigma e_ie_je_kA_{ijk}+\cdots\cdots \tag{1}$$

而每一總和內之底註,均由 1 至 n^2 (其結果可由 Taylor 定理而得,因 A_i, A_{ij}, A_{ijk} 即 Δ 之各個偏微分.)且可知(1)中各個差誤,決無平方,或其他高次方者．

§3　差誤之範圍　若 $|e_i|\leqq\varepsilon_i$, 由(1)得

$$|E|\leqq\Sigma\varepsilon_i|A_i|+\Sigma\varepsilon_j\varepsilon_j|A_{ij}|+\Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k|A_{ijk}|+\cdots\cdots \tag{2}$$

式中兩直柱表示絕對值,若使 $\varepsilon_i=\varepsilon$, 而略去 ε^2, 則

$$|E|\leqq\varepsilon\Sigma|A_i|. \tag{3}$$

故在其平方可以略去之微小差誤時, $\Sigma|A_i|$ 可以視爲行列式靈敏性之量數．

欲明此公式之應用,可以§1之第一行列式爲例,設其各元素之差誤範圍爲 $\pm\frac{1}{2}$, 則得 $\Sigma|A_i|=33099$, $\Sigma|A_{ij}|=2\Sigma|A_i|=970$, 又其任何三級行列式 $|A_{ijk}|=6$; 故由(3)得 ±16550 爲 Δ 中差誤範圍之第一近似值.由(2)則得更準確之

$$|E|\leqq\tfrac{1}{2}.33099+\tfrac{1}{4}.970+\tfrac{1}{8}.6<16793.$$

設於實際計算時,有一行列式其各元素只爲粗忽之第一近似值(如 $\varepsilon=\frac{1}{2}$), 則發生一重要問題:各元素之所求值,須使 n 準確至如何程度方能使 Δ 中之差誤,不超過一定限如 .02．

歸總言之,當各元素之差誤範圍爲 $\pm\eta$ 時,可得

$$|E|\leqq\eta\Sigma|B_i|+n^2\Sigma|B_{ij}|+\cdots\cdots,$$

此處 $B_i, B_{ij}, \cdots$ 爲 $A_i, A_{ij}, \cdots$ 各子式之近似值所漸近之確值．

今

$$|A_i-B_i|=a_i \text{ 之子式中之差誤}$$

$$\leqslant \varepsilon\sum_{j}|A_{ij}| + \varepsilon^2\sum_{jk}|A_{ijk}| + \cdots\cdots$$

故

$$|B_i| \leqslant |A_i| + \varepsilon\sum_{j}|A_{ij}| + \varepsilon^2\sum_{jk}|A_{ijk}| + \cdots\cdots$$

使 $i=1 \cdots\cdots n$ 而加之,

$$\Sigma|B_i| \leqslant \Sigma|A_i| + \varepsilon\,\Sigma|A_{ij}| + \varepsilon^2\Sigma|A_{ijk}| + \cdots\cdots$$

仿此

$$\Sigma|B_{ij}| \leqslant \Sigma|A_{ij}| + \varepsilon\,\Sigma|A_{ijk}| + \cdots\cdots$$

故

$$|\Sigma| \leqslant \eta\,[\Sigma|A_i| + \varepsilon\,\Sigma|A_{ij}| + \varepsilon^2\Sigma|A_{ijk}| + \cdots\cdots]$$
$$+ \eta^2\,[\Sigma|A_{ij}| + \varepsilon\,\Sigma|A_{ijk}| + \cdots] + \cdots\cdots$$

當各元素校正至 $\pm\eta$ 之間,而各子式之第一近似值又校正至 $\pm\varepsilon$ 之間,則差誤之範圍,可以各子式表之如上公式.

今再以此應用於上述之行列式,則

$$\Sigma|A_i| + \varepsilon\,\Sigma|A_{ij}| + \varepsilon^2\Sigma|A_{ijk}| = 33585.5$$

使 $\eta=.000005$, 則得 $|E|<0.17$. 故欲使 Δ 中之差誤不超過0.2, 則各元素之值求至五位小數爲止,已足夠用.

4 概率分布　設 e_i 之概率分配記以 $p_i(e_i)$, 而此函數之 γ 次能率記以

$$m_{ri} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e_i^r p_i(e_i)\,de_i \qquad (4)$$

設函數 p_i 爲已知則其能率 m_{ri} 亦爲已知,並可將 $P(E)$ 之 r 次能率 M_r 表出而計算之:卽得

$$M_r \equiv \int_{-\infty}^{\infty} E^r P(E)\,dE = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} E^r \cdot \prod_{1}^{n^2} [p_i(e_i)\,de_i]. \qquad (5)$$

由(1), 可知(5)之右端 E^r 爲 e_i 之函數,故應用(4)及條件

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i\,de_i = 1,$$

在 r 爲任何值時,可展開 E^r 而將每項求其積分.

例如,

$$E^2=\Sigma A_i^2e_i^2+2\Sigma A_iA_je_ie_j+2\Sigma A_iA_{ij}e_i^2e_j+2\Sigma A_iA_{jk}e_ie_je_k+\cdots\cdots$$

積分之,則得

$$\Sigma A e_i^2m_{2i}+2\Sigma A_iA_jm_{1i}m_{1j}+2\Sigma A_iA_{ij}m_{2i}m_{1j}+2\Sigma A_iA_{jk}m_{1i}m_{1j}m_{1k}+\cdots\cdots$$

即M_2之值.

此種函數,本已假設其爲對稱者,即 $p_i'(e_i)=p_i(-e_i)$, 則其奇次能率 m_{1i}, m_{3i}……等皆爲零,故只須計及E^r中含有差誤e_i之偶次乘方之各項;其餘者於求積分時皆爲零矣.故得

$$M_1=0 \tag{6}$$

$$M_2=\Sigma A_i^2m_{2i}+\Sigma A^2_{ij}m_{2i}m_{2j}+\Sigma A^2_{ijk}m_{2i}m_{2j}m_{2k}+\cdots\cdots \tag{7}$$

$$M_3=6\Sigma A_iA_jA_{ij}m_{2i}m_{2j}+6\Sigma A_{ij}A_{jk}A_{ik}m_{2i}m_{2j}m_{2k}+6\Sigma A_iA_{jk}A_{ijk}m_{2i}m_{2j}m_{2k}+\cdots$$

$$M_4=\Sigma A_i^4m_{4i}+6\Sigma A_i^2A_j^2m_{2i}m_{2j}+\cdots\cdots,$$

以此類推.

凡此各式,其項數雖爲有限,而變爲複雜,則甚迅速.然若已知差誤甚小,即若p_i實際爲零,e_i甚小,則其能率 m_{ri} 亦爲微小量,故只取數項即可得M_r之近似值,而所得各能率M_r之值亦迅速依次減小.

另用一記法,則(7)可寫爲

$$S^2=\Sigma A_i^2\sigma_i^2+\Sigma A^2_{ij}\sigma_i^2\sigma_j^2+\Sigma A^2_{ijk}\sigma_i^2\sigma_j^2\sigma_k^2+\cdots\cdots \tag{8}$$

則可將行列式之標準偏差$S(=\sqrt{M_2})$表以元素之標準偏差$\sigma_i(=\sqrt{m_{2i}})$

$M_1, M_2, M_3,\cdots$既已求得,即可用尋常方法求$P(E)$之近似值.例如設差誤 e_i 可遵分配之正常定律

$$p_i(e_i)=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}e\times p(-e_i^2/2\sigma_i^2)$$

(或遵更普遍之Charlier氏之A型對稱定律,則行列式所遵之定律必爲Charlier氏A型定律.故可設

$$P(E)=\left[1+A\frac{d^3}{dE^3}+B\frac{d^4}{dE^4}+\cdots\cdots\right]\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-E^2/2S^2},$$

S 可由(8)得之面其他常數則由

$$A=-\frac{M_3}{3!},\qquad B=\frac{M_4-3S^4}{4!},\qquad \text{等等.}$$

此結果可以函數之各能率與 $M_2, M_3, \cdots\cdots$ 等比較而得之.

對於第一近似值,

$$S^2=\Sigma A_i^2\sigma_i^2;\qquad A,\ B,\ \cdots\cdots=0.$$

對於第二近似值,

$$S^2=\quad \Sigma A_i^2\sigma_i^2+\Sigma A_i^2A_j^2\sigma_i^2\sigma_j^2;$$

$$A=-\Sigma A_iA_jA_{ij}\sigma_i^2\sigma_j^2;$$

$$4!B=\quad \Sigma A_i^4m_{4i}+6\Sigma A_i^2A_j^2\sigma_i^2\sigma_j^2-3(\Sigma A_i^4\sigma_i^4+2\Sigma A_i^2A_j^2\sigma_i^2\sigma_j^2)$$

$$=0$$

蓋因正常分布,則 $m_{4i}=3\sigma_i^4$.

在實用時,當各元素之計算已校正至 x 位小數時,必須用四捨五入法以確定最後一位.如此凡在 $\pm\frac{1}{2}10^{-x}$ 間之差誤均可相等,且不超過此限,此處 $\int_{-\infty}^{\infty}p(e)de$ 必爲 1, 故若

$$-\tfrac{1}{2}10^{-x}\leqq e<\tfrac{1}{2}10^{-x}\quad \text{則}\quad p(e)=10^x;$$

$$\text{否則}\qquad =0.$$

而此分布定律對於各元素均能應用.

故得

$$m_1=m_3=\cdots\cdots=0$$

$$m_2=\int_{-\frac{1}{2}10^{-x}}^{\frac{1}{2}10^{-x}}e^2.10^x de=\frac{1}{12.10^{2x}};$$

$$m_4=\int_{-\frac{1}{2}10^{-x}}^{\frac{1}{2}10^{-x}}e^4.10x^4de=\frac{1}{80.10^{4x}};$$

$$M_1=0;$$

$$M=\frac{\Sigma A_i^2}{12.10^{2x}}+\frac{\Sigma A_{ij}^2}{144.10^{4x}};\ \cdots$$

$$M_3=\frac{\Sigma A_i A_j A_{ij}}{24.10^{4\varepsilon}}+\cdots\cdots;$$

$$M_4=\frac{\Sigma A_i^4}{80.10^{4\varepsilon}}+\frac{\Sigma A_i^2 A_j^2}{24.10^{4\varepsilon}}+\cdots\cdots$$

略去含有$10^{-6\varepsilon}$,之各項得

$$P(E)=\left[1-\frac{\Sigma A_i A_j A_{ij}}{144.10^{4\varepsilon}}\frac{d^3}{dE^3}-\frac{\Sigma A_i^4}{288.10^{5\varepsilon}}\frac{d^4}{dE^4}\right]\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-E^2/2S^2} \tag{9}$$

式中

$$S^2=\frac{\Sigma A_i^2}{12.10^{2\varepsilon}}+\frac{\Sigma A^2_{ij}}{144.10^{4\varepsilon}}. \tag{10}$$

今取一例以爲此公式之應用,設行列式

$$\begin{vmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{11} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{6} \end{vmatrix},$$

其五位值爲6.93899,將各元素求至二値,則得

$$\begin{vmatrix} 2.65 & 1.41 & 1.41 \\ 1.41 & 3.32 & 1.73 \\ 1.73 & 2.24 & 2.45 \end{vmatrix},$$

其五位值則爲6.98983,於後一行列式得(各校正其小數位數),

$$\Sigma A_i \quad =26.8,$$

$$\Sigma A_i^2 \quad =111.9,$$

$$\Sigma A^2_{ij} \quad =78,$$

$$\Sigma A_i A_j A_{ij}=287,$$

$$\Sigma A_i^4 \quad =1078,$$

$$\varepsilon \quad =.005.$$

由(3),差誤之最大範圍爲±.135,由(10),標準偏差之第一近似值爲.031,此結果可與實際差誤.051相較.對於概率分布之第二近似値則爲

$$S=.0314,\qquad A=-.0002,\qquad B=-.0004.$$

§5 行列式之商中之差誤. 今有兩行列式

$$\Delta_1=|a_i a_{i1} a_{i2},\cdots\cdots a_{in-1}|,\qquad (i=1\cdots\cdots n)$$

$$\Delta_2=|b_i a_{i1}, a_{i2},\cdots\cdots a_{in-1}|,$$

之商為$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$.(註一)

設各元素a_i, b_i, a_{ij}所受之差誤為e_i, f_i, e_{ij}而Δ_1, Δ_2, 及$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$中所受之差誤為$E_1, E_2, E$. 再作行列式

$$\Delta_3=|c_i a_{i1}, a_{i2},\cdots\cdots a_{i\,n-1}|,$$

使 $c_i=a_i-X\,b_i,$

而 $X=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ 所計算出之值;

故 $\Delta_3=\Delta_1$所計算出之值$-X\Delta_2=0.$ (11)

再設 $g_i=c_i$ 中之差誤 $=e_i-Xf_i,$

$E_i=\Delta_3$中之差誤$=E_1-XE_2,$

$A_i=\Delta_1$中a_i之子式

$=\Delta_2$中b_i之子式

$=\Delta_3$中c_i之子式

$A_{ij}=\Delta_1$中a_{ij}之子式

$B_{ij}=\Delta_2$中a_{ij}之子式

$C_{ij}=\Delta_3$中a_{ij}之子式$=A_{ij}-XB_{ij}.$

由(11)可知Δ_3中任何一列之子式與第一列之子式成正比例,卽

$$C_{ij}=\frac{A_i C_{ij}}{A_1}\tag{12}$$

用(1),則得第一近似值

$$E_2=\Sigma f_i A_i+\Sigma e_{ij}B_{ij},$$

(註一) 此記法表此行列式含有此第i列,且此兩行列式除第一行外均完全相同.此種商常於求n个聯立一次方程式系時見之,如§1所云.

$S_3=D$之第一排之各第一子式之絕對值之和.

D 卽行列式 $\left|\frac{a_i-Xb}{/+|X|}a_{i_1}a_{i_2}\cdots\cdots a_{i_{n-1}}\right|$

§7 行列商之概率分布 設e_i, f_i, e_{ij}之標準偏差爲$\sigma_i, \tau_i\ \sigma_{ij}$,而假定各第一能率爲零,再設$M_1, M_2, M_3,\cdots\cdots$爲$E$之概率分布$P(E)$之能率.如§4法,用(14)及(15),又由(6),其E_3之第一能率爲零,則偏差可校正至第二級而得

$$M_1=\frac{1}{\Delta_2^2}\Big[X\,\Sigma\,\tau_i^2 A_i^2-\Sigma\,\sigma^2_{ij}B_{ij}C_{ij}\Big]$$

$$M_2=\frac{1}{\Delta_2^2}\Big[\Sigma(\sigma^2_i+X^2\tau_i^2)\,A_i^2+\Sigma\,\sigma^2_{ij}\,C^2_{ij}\Big],$$

$$M_3=\cdots\cdots=0.$$

設所求之函數,爲 Charlier 氏之A型,則得第一近似值.

$$P(E)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-(E-a)^2/2S^2},$$

式中

$$a=M_1=[X\,\Sigma\,\tau_i^2 A_i^2-\Sigma\,\sigma^2_{ij}B_{ij}C_{ij}]/\Delta_2^2$$

$$S^2=M_2-M_1^2=[\Sigma(\sigma_i^2+X^2\tau_i^2)A_i^2+\Sigma\,\sigma^2_{ij}\,C^2_{ij}]/\Delta_2^2$$

$P(E)$之第二近似值含有許多複雜之總和.

若已知標準偏差均相等,卽$\sigma_i=\tau_i=\sigma_{ij}=\sigma_i$由(12)則得

$$a=\frac{\sigma^2}{\Delta_2^2}\Big[X\Sigma A_i^2-\frac{1}{A_1}\Sigma B_{ij}A_iC_{1j}\Big], \tag{17}$$

$$S^2=\frac{\sigma^2}{\Delta_2^2A_1^2}\Sigma A_i^2.\Big[(1+X^2)A_1^2+\Sigma C_{1j}^2\Big] \tag{18}$$

與§6同(18)可寫爲

$$S^2=\sigma^2\frac{1+X^2}{\Delta_2^2A_1^2}S_3S_4,$$

式中$S_3=D'$中第一行之各第一子式之平方和,

$S_4=D'$中第一排之各第一子式之平方和.

而D'則爲行列式 $\left|\frac{a_i-Xb_i}{(1+X^2)^{\frac{1}{2}}}a_{i_1}\ a_{i_2}\ \cdots\cdots\ a_{i_{n-1}}\right|$

今取一例以爲此公式之應用.設於方程式

$$X\sqrt{7}+Y\sqrt{2}+Z\sqrt{2}=\sqrt{17}$$

$$X\sqrt{3}+Y\sqrt{11}+Z\sqrt{3}=\sqrt{12}$$

$$X\sqrt{2}+Y\sqrt{5}+Z\sqrt{6}=-\sqrt{3}.$$

中求X之值求至四位小數則X之值$=3.1468$.然若將各係數計算至二位小數,則得

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4.12 & 1.41 & 1.41 \\ -1.41 & 3.32 & 1.73 \\ -1.73 & 2.24 & 2.45 \end{vmatrix}=21.842244,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2.65 & 1.41 & 1.41 \\ 1.41 & 3.32 & 1.73 \\ 1.73 & 2.24 & 2.45 \end{vmatrix}=6.989832,$$

以下之結果皆已校正其小數位數。

$$X=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=3.1249$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -4.16 & 1.41 & 1.41 \\ -5.82 & 3.32 & 1.73 \\ -7.14 & 2.24 & 2.45 \end{vmatrix}=.01.$$

$$A_1=4.26$$

$$\Sigma|A_i|=6.8$$

$$\Sigma A_i^2=23.25$$

$$\Sigma B_{ij}A_1C_{1j}=-264,$$

$$(1+|X|)|A_1|+\Sigma|C_{1j}|=30,$$

$$X\Sigma A_i^2-\frac{1}{A_1}\Sigma B_{ij}A_iC_{1j}=134,$$

$$(1+X^2)A_1^2+\Sigma C_{1j}^2=313,$$

$$\varepsilon=.005$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12.10^4}$$

由 (16) (17) 及 (18),推知差誤之範圍為 $\pm .035$,而 $a = .00002$, $S = .008$,故實際差誤為 .022.

§8 一任意函數之差誤 §4之方法亦可應用於 a_i 之任意函數 F 以代行列式 Δ 而定出差誤之概率分布.如此方程式不變,但因 $F_{ii} = \partial^2 F/\partial a_i^2 \neq 0$,故含有差誤 e_i 高次方之各項.以下為其相當之結果. F 之底註表明其偏微商.

若已知之分布定律為對稱者,則

$$M_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma F_{ii} m_{2i} + \tfrac{1}{24}\Sigma F_{iiii}\, m_{4i} + \tfrac{1}{4}\Sigma F_{iijj}\, m_{2i}\, m_{2j} + \cdots\cdots$$

$$M_2 = \Sigma F_i^2 m_{2i} + \tfrac{1}{4}\Sigma F^2_{ii}\, m_{4i} + \Sigma(F_{ii} F_{jj} + F^2_{ij}) m_{2i}\, m_{2j} + \cdots\cdots$$

$$M_3 = \tfrac{3}{2}\Sigma F_i^2 F_{ii}\, m_{4i} + (\tfrac{3}{2}\Sigma F_i^2 F_{ij} + 6\Sigma F_i F_j F_{ij}\ m_{2i}\, m_{2j} + \cdots\cdots$$

$$M_4 = \Sigma F_i^4 m_{4i} + 6\Sigma F_i^2 F_j^2 m_{2i}\, m_{2j} + \cdots\cdots \qquad (i \neq j)$$

若已知之分布定律為正常者,則所得之函數為

$$P(E) = \left[1 + A\frac{a^3}{aE^3} + B\frac{a^4}{aE^4} + \cdots\cdots\right]\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-(E-a)^2/2S^2}.$$

其各個常數為

$$a = M_1,\ S^2 = M_2 - M_1^2,\ A = -\frac{M_3}{6} + \frac{M_1 M_2}{2} - \frac{M_1^3}{3},\ B = \frac{M_4}{24} + \frac{M_1^4}{12} - \frac{M_2^2}{8} + M_1 A.$$

而第一近似值為

$$a = \tfrac{1}{2}\Sigma F_{ii}\,\sigma_i^2;\quad S^2 = \Sigma F_i^2\,\sigma_i^2;\quad A, B, \cdots\cdots = 0.$$

第二近似值為

$$a = \tfrac{1}{2}\Sigma F_{ii}\sigma_i^2 + \tfrac{1}{8}\Sigma F_{iiii}\sigma_i^4 + \tfrac{1}{4}\Sigma F_{iijj}\sigma_i^2\,\sigma_j^2;$$

$$S^2 = \Sigma F_i^2\sigma_i^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma F^2_{ii}\,\sigma_i^4 + \Sigma F^2_{ij}\,\sigma_i^2\,\sigma_j^2;$$

$$A = -\tfrac{1}{2}\Sigma F_{ii}\,F_i^2\,\sigma_i^4 - \Sigma F_{ij}\,F_i\,F_j\,\sigma_i^2\,\sigma_j^2;$$

$$B \cdots\cdots = 0$$

若 F 之主元之計算,校正至 x 位小數,則最後一位有影響,而第二近似值,即為

$$a=\frac{\Sigma F_{ii}}{24.10^{2\omega}}+\frac{\Sigma F_{iiii}}{1920.10^{4\omega}}+\frac{\Sigma F_{iijj}}{576.10^{4\omega}};$$

$$S^2=\frac{\Sigma F_i^2}{12.10^{2\omega}}+\frac{\Sigma F^2_{ii}}{720.10^{4\omega}}+\frac{\Sigma F_{ii}F_{jj}}{288.10^{4\omega}}+\frac{\Sigma F^2_{ij}}{144.10^{4\omega}};$$

$$A=-\frac{\Sigma F_{ii}F_i^2}{720.10^{4\omega}}-\frac{\Sigma F_{ij}F_iF_j}{144.10^{4\omega}}$$

$$B=-\frac{\Sigma F_i^4}{2880.10^{4\omega}}$$

本篇原文載 Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society Series 2, Vol. 3, Part II

代數數域論

(續第四卷第四期)

David Hilbert 原著

華羅庚 譯

第二篇 迦羅華氏域

10. 迦氏域及其分域之素理想數.

§36. 迦氏域中理想數之分解為素理想數,其法是唯一的.

一域K與其諸共軛域相同,名為迦羅華域(Galoisscher Körper). 若k為一m次域,$k', \cdots, k^{(m-1)}$為k之共軛域,則域$k, k', \cdots, k^{(m-1)}$之諸數合成一新域K,此域K必為一迦氏域,域$k, k', \cdots, k^{(m-1)}$為其分域.故任一域k可視為一迦氏域之分域.由此觀點,並無重大之限制,吾人可先研究迦氏域內理想數分解之方法,再引伸至其任一分域中.

迦氏域內分解理想數為素理想因子之唯一性之證明,非常簡單 [Hilbert (2, 3)], 因欲明此,先與下之記號:

迦氏域K為M次,定此域之整數為Ⓗ:Ⓗ適合一M次具有理整係數之不可化方程式.此方程式之M個根為

$$s_1Ⓗ = Ⓗ, \quad s_2Ⓗ, \quad \cdots\cdots, \quad s_MⒽ,$$

式中$s_1, s_2, \cdots, s_M$為Ⓗ之具有理係數之有理函數.若視$s_1, \cdots, s_M$為M個代換則當成一M級羣G,即繼續運用二代換,仍為$s_1, \cdots, s_M$之一,G名為迦羅華域K之羣.一理想數經$M-1$個代換$s_2, \cdots, s_M$而不變者,名為不變理想數(Invariant Ideal),一不變理想數有下之性質:

引11.　一不變理想數$\mathfrak{J}$之$M!$次乘方爲一有理整數.

證:　命A爲理想數$\mathfrak{J}$內之一數,及$A_1, \cdots, A_M$爲$\mathrm{A}=s_1\mathrm{A}, s_2\mathrm{A}, \cdots, s_M\mathrm{A}$之$M$個初等對稱函數.$M$個有理整數

$$A_1^{\frac{M!}{1}},\ A_2^{\frac{M!}{2}},\ \cdots\cdots,\ A_M^{\frac{M!}{M}} \tag{18}$$

之最大公約數,以A表之.同樣可由理想數$\mathfrak{J}$中之其他整數$\mathrm{B}, \Gamma \cdots$及其共軛數之對稱函數,以得整數$B, C, \cdots$等.$A, B, C, \cdots$之最大公約數以$J$表之.則$\mathfrak{J}^{M!}=J$.今往證之.因A之共軛數亦在理想數$\mathfrak{J}$內,故

$$A_1 \equiv 0,\ (\mathfrak{J}),\ A_2 \equiv 0,\ (\mathfrak{J}^2),\ \cdots,\ A_M \equiv 0,\ (\mathfrak{J}^M);$$

由此故(18)之諸數皆爲$\mathfrak{J}^{M!}$之倍數,卽$A \equiv 0, (\mathfrak{J}^{M!})$同樣$B, C, \cdots$亦然.故$J \equiv 0, (\mathfrak{J}^{M!})$.另一方面言之,A所適合之$M$次方程式之係數$A_1, \cdots, A_M$可各爲$J^{\frac{1}{M!}}, \cdots, J^{\frac{M}{M!}}$所整除.故A可爲$J^{\frac{1}{M!}}$所整除.同樣$\mathrm{B}, \Gamma, \cdots$亦然.故$J$可整除$\mathfrak{J}^{M!}$.

由引11進而證明

定理67.　對迦氏域之任一理想數$\mathfrak{A}$,可求得一理想數$\mathfrak{B}$,使$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$爲一主理想數.

證　理想數$\mathfrak{J}=\mathfrak{A}\, s\mathfrak{A} \cdots s_M\mathfrak{A}$顯然爲一不變理想數.由引11可知.若取

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{J}^{M!-1} s_2\mathfrak{A} \cdots\cdots s_M\mathfrak{A}.$$

卽合定理67之所需.

由定理67,可如§5之由定理8以得任一域k內理想數分解定理之法,以證迦氏域內理想數之分解定理.

因欲由迦氏域之理想數之分解法之定理,以推至任意域k中,有二法可循:一爲先證明克郎耐可之定理13,14在迦氏域及其分域中皆然,一可用直接之方法得之[Hilbert (3)].

§37.　迦氏域之元,別,判別式.

以前之許多結果,至迦氏域皆有簡單的表示.如一迦氏域之元,仍爲此域內之理想數.且可有下之定理:

定理68. 迦氏域K之元可由應用M個代換$s_1, \cdots, s_M$使其互相等,其別$\mathfrak{D}$爲域K內之不變理想數,且若視其判別式$D=\pm N(\mathfrak{D})$爲一理想數,則即爲別$\mathfrak{D}$之M次方.

證: 以$\Omega_1, \cdots, \Omega_M$表域$K$之基數,則$K$之元爲理想數

$$\mathfrak{E}_2=(\Omega_1-s_2\Omega_1, \cdots, \Omega_M-s_2\Omega_M),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{E}_M=(\Omega_1-s_M\Omega_1, \cdots, \Omega_M-s_M\Omega_M).$$

用任意代換s於$\mathfrak{E}_i$,並注意$s\Omega_1, \cdots, s\Omega_M$仍爲此域之基數,可得若$ss_i=s_{i_1}s$則

$$s\mathfrak{E}_i=(s\Omega_1-s_{i_1}s\Omega_1, \cdots, s\Omega_M-s_{i_1}s\Omega_M)=\mathfrak{E}_{i_1}$$

由域別之不變性,可知$\mathfrak{D}=\mathfrak{E}_2\cdots\mathfrak{E}_M$爲一不變理想數.

§38. 迦氏域之分域

對一迦氏域之分域以分此迦氏域內之諸數,已成一極嚴正之研究,由此結果,可由一特別域之已與之結果用入普通域內[Hilbert(4)].

爲簡單計,判別迦氏域及其分域,可用下之記法,若G內之r個代換$s_1=1, s_2, \cdots, s_r$成一羣g,則顯然域K內諸數可經g之代換不變者,當成一域k,其次數爲$m=\frac{M}{r}$.此域k名爲屬於分羣g之分域.迦氏域本身所屬之分羣,祇有一代換$s_1=1$.域內屬於G之諸M個代換s者爲有理數.反之,迦氏域之一分域k,定屬於G之一分羣g,此羣g,即名爲分域k所定之羣.

§39. 一素理想數$\mathfrak{P}$之分散域及其惰性域.

於迦氏域K中選定一f級素理想數$\mathfrak{P}$,則有一組K之特別的分域與$\mathfrak{P}$相關.今簡述其堪注意的性質如下:

命γ爲$\mathfrak{P}$所可整除之素有理數. $z, z', z'', \cdots$爲羣G之r_z個代換,使素理想數$\mathfrak{P}$不變,此當成一r_z級羣,此即名爲素理想數$\mathfrak{P}$之分散羣(德文 Zerlegungs-gruppe)以g_z表之.對一分散羣當有一相關之域k_z,此名爲分散域(德文 Zerlegungskorper).其次數爲$m_z=\frac{M}{r_z}$次.

又若 $t, t', t'', \cdots$ 爲 G 之代換 s 具下之性質者凡 K 域內之整數 Ω 皆適合於 $s\Omega \equiv \Omega$, $(\mathfrak{P})$, 設其個數爲 r_t, 由此所得之 r_t 個代換成一 r_t 級之羣.此羣名爲理想數 $\mathfrak{P}$ 之惰性羣(德文 Trägheitsgruppe), 以 g_t 表之,屬惰性羣 g_t 之域 k_t 名爲素理想數 $\mathfrak{P}$ 之惰性域.其次數爲 $m_t = \frac{M}{r_t}$.

惰性域與分散域之此有下之定理:

定理69. $\mathfrak{P}$ 之惰性羣 g_t 爲其分散羣 g_z 之不變分羣.若以惰性羣之代換乘 $1, z, z^2, \cdots, z^{f-1}$, 則可得分散羣之諸代換.且每代換祇得一次. z 爲分散羣中選擇適當之一代換.

證: 若 t 爲 g_t 之任一代換.及 Ω 爲 K 內 $\mathfrak{P}$ 可整除之整數.命 $\Omega' = t^{-1}\Omega$, 則由惰性羣之性質; $\Omega' \equiv t\Omega' \equiv \Omega$, $(\mathfrak{P})$, 即 $\Omega' \equiv o$ $(\mathfrak{P})$. 用變換 t 可得 $\Omega \equiv o$, $(t\mathfrak{P})$. 因此相合式,對 $\mathfrak{P}$ 內之任一整數皆然.故 $\mathfrak{P}$ 必爲 $t\mathfrak{P}$ 所整除,即 $\mathfrak{P} = t\mathfrak{P}$. 故惰性羣 g_t 爲分散羣 g_z 之分羣.

爲欲證明定理69之其餘部分,可定一素理想數 $\mathfrak{P}$ 之原數P,使P之諸相異共軛數皆爲 $\mathfrak{P}$ 之倍數.惟P不然.由定理25知能定此數.作 x 之 M 次整係數函數

$$F(x) = (x - s_1\mathrm{P})(x - s_2\mathrm{P}) \cdots (x - s_M\mathrm{P}).$$

因P爲 $F(x) = o$, $(\mathfrak{P})$ 之根,故由定理27, P^{r} 亦適合此式.由此可知此 M 個代換 $s_1, \cdots, s_M$ 中必有一代換 s 可使 $s\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^{\mathrm{r}}$, $(\mathfrak{P})$. 若 $s^{-1}\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}$, 則由選擇P時之假定已知 $\mathrm{P} \equiv o$, $(s^{-1}\mathfrak{P})$, 必得 $s\mathrm{P} \equiv o$, $(\mathfrak{P})$. 此與前所得之相合式矛盾.

因 $s\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, 故代換 s 屬於分散羣內.命 $z = s$. 再用代換 z 於相合式 $z\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^{\mathrm{r}}$ $(\mathfrak{P})$, 可得相合式 $z^2\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^{\mathrm{r}^2}$, $z^3\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^{\mathrm{r}^3}$, $\cdots$, $z^f\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathrm{r}^f} \equiv \mathrm{P}$, $(\mathfrak{P})$. 由後之相合式可知 z^f 爲惰性羣之一代換.其理由爲 K 內任一數可表爲 $\Omega = \mathrm{P}^a + \pi$ 或 π, 式中 a 爲一有理數, π 爲此域內 $\mathfrak{P}$ 可整除之整數.由 $z^f\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ 可得 $z^f\Omega \equiv \Omega$, $(\mathfrak{P})$.

相合式 $z\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^{\mathrm{r}}$, $(\mathfrak{P})$ 可得 $z^{-1}tz\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}$, $(\mathfrak{P})$, 式中 t 爲惰性羣 g_t 之任一代換.命 $z' = z^{-1}tz$, 及 Ω 爲 K 內之任意整數,則可得:若 Ω 適合於 $\Omega \equiv \mathrm{P}^a$, $(\mathfrak{P})$, $z'\Omega \equiv (z'\mathrm{P})^a$

$\equiv P^{e} \equiv \Omega$, $(\mathfrak{P})$ 又若 $\Omega \equiv o$, $(\mathfrak{P})$ 亦然.故 $z' = z^{-1}tz$ 屬於惰性域中.

設 $P(\mathrm{P})$ 爲 P 之 f 次整係數函數,且 $\equiv o$, $(\mathfrak{P})$. 由定理27可知 $\mathrm{P}, \mathrm{P}^{r}, \cdots \mathrm{P}^{r^{f-1}}$ 皆爲 $P(x) \equiv o$, $(\mathfrak{P})$ 之根又由定理26此式無含此以外之其他根.

若 z^{*} 爲分散域內之任一代換,則由相合式 $P(\mathrm{P}) \equiv o$, $(\mathfrak{P})$ 必得 $P(z^{*}\mathrm{P}) \equiv o$, 故必爲 $z^{*}\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^{r^{i}}$ $(\mathfrak{P})$, 式中 i 爲 f 個値 $0, 1, \cdots, f-1$ 之一.另一方面 $\mathrm{P}^{r^{i}} \equiv z^{i}\mathrm{P}$, 故 $z^{-i}z^{*}\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}$, $(\mathfrak{P})$, 故 $z_{-i}z^{*}$ 爲惰性域中之一變換 t, 卽 $z^{*} = z^{i}t$. 凡分散羣中之諸代換 $z, z', z'', \cdots$ 皆可表爲上之形式.反之, $z^{i}t$ 當 $i = 0, 1, \cdots, f-1$ 表互不相同之代換,故定理69之後一部分業已證明,又前已證明 $z^{-1}tz$ 仍在惰性域內,故 g_{t} 爲 g_{z} 之不變分羣.

同時可有 $r_{z} = fr_{t}$.

§40. 關於分散域之一定理.

分散域之重要性質可表如下之定理:

定理70. 理想數 $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_{r}^{t}$ 在分散域 k_{z} 中,且爲一一級素理想數.卽於分散域 k_{z} 中 $\gamma = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$, 式中 $\mathfrak{a}$ 爲與 $\mathfrak{p}$ 互素之理想數.

證: 對域 k_{z} 素理想數 $\mathfrak{P}$ 之相對距爲 $N_{k_{z}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{\gamma_{z}}$, 因欲尋出 $\mathfrak{P}$ 之最低方次,能在 k_{z} 中,可視其爲 k_{z} 內可爲 $\mathfrak{P}$ 所整除之諸整數最大公因數.此因子必爲 k_{z} 內一素理想數 $\mathfrak{p}$, 且 $\mathfrak{P}^{\gamma_{z}}$ 在 k_{z} 中,故 $\mathfrak{p}$ 必爲 $\mathfrak{P}$ 之乘方.命 $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{u}$. 玆往定指數 u. K 內一不爲 $\mathfrak{P}$ 所整除之數 A, 若適合相合式 $\mathrm{A} \equiv z\mathrm{A}$, $(\mathfrak{P})$, 且 $\mathrm{A} \equiv \mathrm{P}^{i}$, $(\mathfrak{P})$, 故必 $i \equiv \gamma i$, $(\gamma^{f}-1)$, 可得 i 爲一可爲 $1+\gamma+\gamma^{2}+\cdots+\gamma^{f-1}$ 所整除之整數,卽對 $\mathfrak{P}$ 有 $\gamma-1$ 個不互相合之整數有所需之性質,則 $\mathrm{A} \equiv a$, $(\mathfrak{P})$ 式中 a 表一有理整數.由此取特例,凡 k_{z} 內之一數 α 對 $\mathfrak{P}$ 相合於一有理數 a, 故對 $\mathfrak{p}$ 亦相合.卽 $\mathfrak{p}$ 爲 k_{z} 中之一次素理想數.於 k_{z} 內其距 $n(\mathfrak{p})$ 等於 γ. 另一方面,於 K 中 $\mathfrak{p}$ 之距爲 $N(\mathfrak{p}) = [n(\mathfrak{p})]^{\gamma_{z}}$, 又因 $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{u}$ 及 $N(\mathfrak{P}) = \gamma^{f}$, 故可得 $\gamma^{uf} = \gamma^{\gamma_{z}}$, 卽 $u = r_{t}$.

由分散羣之定義,可得 $N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{\gamma}\mathfrak{A}$, 式中 $\mathfrak{A}$ 爲對 $\mathfrak{P}$ 互素之理想數.命 $\gamma = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$, $N(\mathfrak{P}) = \gamma^{f} = \mathfrak{p}^{f}\mathfrak{a}^{f}$ 由此 $\mathfrak{a}^{f} = \mathfrak{A}$, 定理70之最後一部分業已證明.

§41. 一素理想數之支域.

因欲覓出惰性域之構造,今以A表K內可爲$\mathfrak{P}$所整除之數,然非$\mathfrak{P}^{a}$之倍數.對惰性羣之諸代換$t, t', t'', \cdots$有下之相合式:

$$\left.\begin{array}{l} t\,\mathrm{A} \equiv \mathrm{P}^{a}\,\mathrm{A} \\ t'\,\mathrm{A} \equiv \mathrm{P}^{a'}\,\mathrm{A} \\ t''\mathrm{A} \equiv \mathrm{P}^{a''}\mathrm{A} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}(\mathfrak{P}^{2}),$$

式中$a, a', a'', \cdots$爲$0, 1, 2, \cdots, \gamma^{f}-2$諸數之一.代換$t, t', t'', \cdots$中使$a, a', a'', \cdots$爲零之諸代換以$v, v', v'', \cdots$表之.命其個數爲$r_{v}$,此顯然成惰性羣之不變分羣.此$r_{v}$級分羣,名爲素理想數$\mathfrak{P}$之支羣(德文Verzweigungsgruppe)以g_{v}表之.屬於g_{v}之域k_{v}名爲素理想數$\mathfrak{P}$之支域(德文Verzweigungskorper).

支羣與惰性羣之關係可由下定理表之.

定理71. 支羣g_{v}爲惰性羣之不變分羣,其次數r_{v}爲γ之乘方,即$r_{v}=\gamma^{l}$.支羣之諸代換以$1, t, t^{2}, \cdots t^{h-1}$乘之,可得惰性羣之諸代換,且每代換祇出現一次,其中$h=\frac{r_{t}}{r_{v}}$, t爲惰性羣中選擇適當之一代換,h爲$\gamma^{f}-1$之因子.

證: 命$\mathfrak{P}^{u}$爲$\mathfrak{P}$乘方能使凡支羣內之一非1代換v皆有$v\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}, (\mathfrak{P}^{u})$者.命$v\mathrm{A} \equiv \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}+\mathrm{BA}^{2}, (\mathfrak{P}^{3})$,式中B爲$K$內之一整數,由此$v^{\gamma}\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}, (\mathfrak{P}^{3})$.由同法可得$v^{\gamma^{2}}\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}, (\mathfrak{P}^{4})$等等.最後$v^{\gamma^{u-2}}\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}, (\mathfrak{P}^{u})$.故$v^{\gamma^{u-2}}=1$,即支羣之級數$r_{v}$爲$\gamma$之乘方,命$r_{v}=\gamma^{l}$.

命a爲諸指數$a, a', a'', \cdots$中之最小者但非零,則此諸指數有h個不相同之整數,且此諸數必爲a之倍數,且與$o, a, 2a, \cdots, (h-1)a$相符合.又$ha=\gamma^{f}-1$.同時可知,惰性羣之諸代換皆可表爲$t^{i}v$之形,其中i爲$0, 1, \cdots, h-1$之值,v爲支羣g_{v}之代換,可得$r_{t}=hr_{v}$.

§42. 惰性域之一定理.

理想數$\mathfrak{P}$與k_{t}內相關之理想數$\mathfrak{p}$有下之定理:

定理72. 凡域K內之數對$\mathfrak{P}$相合於惰性域內之數理想數$\mathfrak{p}$在惰性域中不能分解,惟當由域k_z至其倍域k_t時,$\mathfrak{p}$由一一級素理想數變爲一f級理想數.

證: 命

$$\pi=\left\{\nu P,\nu' P,\nu' P\cdots\cdots\right\}^{\gamma^{t(f-1)}},$$

$$x=\frac{1}{h}(\pi+t\pi+t\pi+\cdots\cdots+t^{h-1}\pi)$$

式中P仍爲$\mathfrak{P}$之原數,t仍如定理71所定.π在k_V內,x在k_t內.因欲證此,祇須注意數x經代換t而不變,其理由爲t^h屬g_V內,$\pi,t\pi,\cdots$不爲g_V所變.顯然π及x對素理想數$\mathfrak{P}$皆相合於原數P.由此可得,域k_z中恰有γ^t個對$\mathfrak{P}$不相合之數.故於k_t內$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}^{\gamma t}$必不可分解,且爲$f$級素理想數.

§43. 關於支域及支羣之定理.

支羣有如下之特性:

定理73 屬支羣g_V之諸代換,且祇此代換s,能使K內諸整數適合於相合式$s\Omega\equiv\Omega,(\mathfrak{P}^2)$.

證: 命Ω爲K內之任一數對$\mathfrak{P}$相合於惰性域中之一數ω,且命$\Omega-\omega\equiv BA,(\mathfrak{P}^2)$,式中A如§41所示,B爲$K$內選擇適當之整數.用支域之一代換$v$,可得$v\Omega-\omega\equiv v(BA)\equiv BA\equiv\Omega-\omega$,卽$v\Omega\equiv\Omega,(\mathfrak{P}^2)$.

同時易知對支域之進一步的定理:

定理74. 理想數$\mathfrak{p}_V=\mathfrak{P}^{\gamma^V}$在支域內且爲一$f$級素理想數,則$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_V^h$在支域內有$h$個相等的素因子.

§44. 一素理想數之重支域.

今後之問題爲再分理想數爲相等之理想因子.爲欲達此目的,命L爲最高之指數,對支羣中每一變換,使K內之整數皆適合於$v\Omega\equiv\Omega,(\mathfrak{P}^L)$,定支羣內之諸代換$s$之可能使$s\Omega\equiv\Omega,(\mathfrak{P}^{L+1})$者,則當成支羣之一分羣$g_{V'}$,此名爲對素理想數$\mathfrak{P}$之一次重支羣(德文 einmal überstrichene Verzweigungsgruppe).

$g_{\mathfrak{v}'}$所屬之域$k_{\mathfrak{v}'}$名爲一次重支域（德文 einmal überstrichene Verzweigungs-körper).此域之重要性質如下:

定理75. 一次重支羣$g_{\mathfrak{v}'}$爲支羣$g_{\mathfrak{v}}$之不變分羣.$g_{\mathfrak{v}'}$之次數爲$r_{\mathfrak{v}'}=\gamma^{l'}$.一次重支羣$g_{\mathfrak{v}'}$之諸代換與支羣之$\gamma^{e}$個代換$v_1,\cdots,v_{\gamma^{e}}$之積可表支羣$g_{\mathfrak{v}}$之諸代換,且每一代換祗表一次,其中$r^{e'}$個代換$v_1,\cdots,v_{\gamma^{e'}}$俱有下之特殊性質:任二$v_i,v_{i'}$有關係式$v_i\,v_{i'}=v_{i'}\,v_i\,v'$,式中$v'$爲$g_{\mathfrak{v}'}$中之一代換.理想數$\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}'}=\mathfrak{P}^{\gamma_{\mathfrak{v}'}}$爲$k_{\mathfrak{v}'}$內之一素理想數.於$k_{\mathfrak{v}'}$內理想數$\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}}=\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}'}^{\gamma^{e'}}$可分爲$\gamma^{e'}$個相等之素理想數之積,指數$e'$不超過素理想數$\mathfrak{P}$之級數$f$.

證: A爲K內之整數可爲$\mathfrak{P}$所整除,但不能爲$\mathfrak{P}^2$所整除;定支域內之一組代換$v_1\cdots,v_r$使具下之性質:若表

$$v_1A\equiv A+B_1A^L,\cdots\cdots,v_rA\equiv A+B_rA^L,\ (\mathfrak{P}^{L+1})$$

諸數$B_1,\cdots\cdots,B_r$皆對$\mathfrak{P}$互不相合,且$g_{\mathfrak{v}}$無其他之代換可以加入$v_1,\cdots,v_r$而不生矛盾者.(即$g_{\mathfrak{v}}$若另有一代換,則由該代換可得一B,該B對$\mathfrak{P}$當相合於$B_1,\cdots,B_r$之一)選擇支羣$g_{\mathfrak{v}}$中之任一代換v^*,且命$v^*A\equiv A+BA^L\ (\mathfrak{P}^{L+1})$,故B對$\mathfrak{P}$相合於$B_1,\cdots,B_r$之一,即命$B\equiv B_i\ (\mathfrak{P})$,故可得$v_i^{-1}v^*A\equiv A,\ (\mathfrak{P}^{L+1})$.由定理72,凡$K$內之一整數$\Omega$對$\mathfrak{P}^{L+1}$相合於$\alpha_t+\beta_tA+\cdots+\lambda_tA^L$,式中$\alpha_t,\beta_t,\cdots,\lambda_t$爲惰性域內之整數.且由此$\Omega$適合於相合式$v_i^{-1}v^*\Omega\equiv\Omega,\ (\mathfrak{P}^{L+1})$.即$v_i^{-1}v^*=v'$或$v^*=v_iv'$,由此式可知羣$g_{\mathfrak{v}'}$之構造矣.

命$\gamma_{\mathfrak{v}'}=r^{l'}$,及$e'=l-l'$.

顯然此法尚可繼續進行.以L表最高之指數,凡代換v'之可使K內之諸數皆適合於$v'\Omega\equiv\Omega,\ (\mathfrak{P}^{L})$,定諸代換$v''$之可使$v''\Omega\equiv\Omega,\ (\mathfrak{P}^{L+1})$者.此諸代換成一羣$g_{\mathfrak{v}''}$爲羣$g_{\mathfrak{v}'}$之不變分羣.此羣名爲對素理想數$\mathfrak{P}$之二次重支羣.其次數爲$r_{\mathfrak{v}''}=\gamma^{l''}$命$e''=l'-l''$可得$\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}'}=\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}''}^{\gamma^{e''}}$式中$\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}''}$爲$g_{\mathfrak{v}''}$所屬之域$k_{\mathfrak{v}''}$之素理想數.

繼此進行,可得三次重支羣$g_{\mathfrak{v}'''}$等等.若素理想數$\mathfrak{P}$之i次重支羣祇有代換1,$\mathfrak{P}$之i次重支域即爲K自己.支羣$g_{\mathfrak{v}}$之構造可明.若域K之次數M可爲

γ所整除,則對素理想數$\mathfrak{P}$可有一套重支羣.

§45. 迦氏域內一有理素數γ之分解定理之概括.

由§39—44所得之諸定理,迦氏域內一有理素數γ之分解,可言之如下:

取γ之一定素理想因子$\mathfrak{P}$,故γ於$\mathfrak{P}$之分散域中可分為$\gamma=\mathfrak{p}\mathfrak{a}$之形,式中$\mathfrak{p}$為一一級素理想數,$\mathfrak{a}$為分散域中非$\mathfrak{p}$所可整除之理想數.$\mathfrak{P}$之分散域為$\mathfrak{P}$之惰性域之分域,其中$\mathfrak{p}$不再能分解,但此理想數$\mathfrak{p}$已變為一$f$級之素理想數.若$K$即為分散域及惰性域,則此分解之第一步已達.若不然,則$\mathfrak{p}$於K內可分為若干個相等因子之積,且$\mathfrak{p}$即為支域內之一素理想數$\mathfrak{p}_{\mathrm{v}}$之乘方,其指數為$\gamma^f-1$之因子,可知非$\gamma$之倍數.若$\gamma$不能整除惰性域之次數,則$\mathfrak{p}$之分解至此第二步必已停止.(其時域$K$即為支域).繼求之重支域,所得之方指數各為$\gamma^{e'},\gamma^{e''},\cdots$,式中指數$e',e'',\cdots$無超過素理想數之級數$f$.

以上之結果可列成下表:

k_z	k_t	k_{v}	$k_{\mathrm{v}'}$	$k_{\mathrm{v}''}$	K
γ_z	γ_t	γ_{v}	$\gamma_{\mathrm{v}'}$	$\gamma_{\mathrm{v}''}$	1
$m_z=\frac{M}{\gamma_z}$	$m_t=\frac{M}{\gamma_t}$	$m_{\mathrm{v}}=\frac{M}{\gamma_{\mathrm{v}}}$	$m_{\mathrm{v}'}=\frac{M}{\gamma_{\mathrm{v}'}}$	$m_{\mathrm{v}''}=\frac{M}{\gamma_{\mathrm{v}''}}$	M
	$f=\frac{r_z}{r_t}$	$h=\frac{r_t}{r_{\mathrm{v}}}$	$\gamma^{e}=\frac{r_{\mathrm{v}}}{r_{\mathrm{v}'}}$	$\gamma^{e'}=\frac{r_{\mathrm{v}'}}{r_{\mathrm{v}''}}$	$\gamma^{e'''}=r_{\mathrm{v}}$
$\underbrace{\qquad\qquad}$ $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathrm{v}}^{h}$ $=\mathfrak{P}^{r_t}$		$\mathfrak{p}_{\mathrm{v}}=\mathfrak{p}_{\mathrm{v}'}^{\gamma^{e'}}$ $=\mathfrak{P}^{r_{\mathrm{v}}}$	$\mathfrak{p}_{\mathrm{v}'}=\mathfrak{p}_{\mathrm{v}''}^{\gamma^{e''}}$ $=\mathfrak{P}^{r_{\mathrm{v}'}}$	$\mathfrak{p}_{\mathrm{v}''}=\mathfrak{P}^{\gamma^{e'''}}$ $=\mathfrak{P}^{r_{\mathrm{v}}}$	$\mathfrak{P}$

上表之第一列表所得之一組域,第二列各表其所屬羣之級數,第三列表域之次數,第四列表該域對其較低域之相對的次數,最末各該域之素理想數且可各以$\mathfrak{P}$之乘方表之.上表中K域即為三重支域.又表內之級數及指數對K內γ之任一素理想數皆有同值,故此可由有理素數γ所完全決定之.

11. 迦氏域及其分域之別.

§46. 惰性域及支域之別.

若吾人將已知之結果及第五章之結果連貫之,可得一眞理之富源.由定理41得一定理,此定理爲惰性域最重要之性質:

定理76. 對素理想數$\mathfrak{P}$所得之惰性域之別不能爲$\mathfrak{P}$所整除.惰性域包含K之諸分域其別不能爲$\mathfrak{P}$所整除者.

關於支域之別有下之定理:

定理77. 支域對惰性域之相對別可爲$\mathfrak{P}^{r_t-r_v}=\mathfrak{p}_v^{h-1}$所整除,但不能爲$\mathfrak{P}$之更高次乘方所整除.

證: 由定理41 $\mathfrak{D}_t(K)=\mathfrak{D}_v(K)\mathfrak{d}_t(k_v)$, 式中 $\mathfrak{D}_t(K)$, $\mathfrak{D}_v(K)$, $\mathfrak{d}_t(k_v)$ 各爲K對k_t, K對k_v, k_v對k_t之相對別.若Ξ爲K之基本式,則式$\Pi(\Xi-t\Xi)$之容等於式$\Pi(\Xi-v\Xi)$之容乘$\mathfrak{d}_t(k_v)$; 前式之t過惰性羣之諸代換,後式之v過支羣之諸代換.因子$\Xi-v\Xi$於$\Xi-t\Xi$中皆有之,由支羣之定義,此皆可爲$\mathfrak{P}$所整除,但不能爲$\mathfrak{P}$之更高方次所整除由

$$(h-1)r_v=r_t-r_v$$

故得定理.同法可得下之定理

定理78. 一次重支域$k_{v'}$對重支域k_v之相對別可爲$\mathfrak{P}^{L(r_v-r_{v'})}=\mathfrak{p}_{v'}^{L(\gamma^{e''}-1)}$所整除,但不能爲$\mathfrak{P}$之更高方次所整除.二次重次域$k_{v''}$對$k_{v'}$之相對別可爲$\mathfrak{P}^{L(r_{v'}-\gamma_{v''})}=\mathfrak{p}_{v''}^{L'(\gamma^{e''}-1)}$所整除但不能爲$\mathfrak{P}$之更高次乘方所整除,等等.

§47. 迦氏域之判別式之因子.

定理79. 域K之判別式D之有理素因子γ乘方指數爲

$$m_t\left\{r_t-r_v+L(r_v-r_{v'})+L'(r_{v'}-r_{v''})+\cdots\cdots\right\}.$$

證: 由定理41及已知定理76, 77, 78間之關係可知K域之別$\mathfrak{D}$,可適爲素理想數$\mathfrak{P}$之$r_t-r_v+L(r_v-r_{v'})+L(r_{v'}-r_{v''})+\cdots$乘方所整除.(譯者註"適爲"之意義謂不能爲$\mathfrak{P}$之更高方次所整除)由此及定理68,故定理爲眞.

若無重支域存在,則L不成問題,此可知D中γ之指數爲$m_t(\gamma_t-1)$.又若M與γ互素,則卽得此情形.吾人可比較§12之末之註釋

定理80　可整除判別式D之有理素數γ之乘方次數不得超過某定限,該限依賴於迦氏K之次數M.

證:　一素理想數之諸指數$L, L', \cdots$皆小於一M所定之限.因欲覓出L之限,可於$k_{v'}$內取一整數ω可為$\mathfrak{p}_{v'}$所整除,但不能為$\mathfrak{p}_{v'}^2$所整除.選擇支域之$\gamma^{e'}$個代換$v_1, v_2, \cdots, v_{\gamma^{e'}}$之可與$g_{v'}$產生出羣$g_{v'}$者.數$\alpha = v_1\omega + v_2\omega + \cdots + v_{\gamma^{e'}}\omega$不為$g_v$之諸代換而變,故當屬$k_v$域內.另一方面$\omega \equiv v\omega, (\mathfrak{P}^L)$,可得$\alpha \equiv \gamma^{e'}\omega, (\mathfrak{P}^L)$若$L > e'r_t + r_{v'}$,則$\alpha \equiv o, (\mathfrak{p}^{e'}\mathfrak{p}_{v'})$,而$\not\equiv o, (\mathfrak{p}^{e'}\mathfrak{p}_{v'}\mathfrak{P})$.命$\gamma = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$,式中$\mathfrak{a}$為分散域中與$\mathfrak{p}$互素之理想數.以$\gamma$表分散域內可為$\mathfrak{a}$所整除,但與$\mathfrak{p}$互素之一數,故$\beta = \dfrac{\alpha\gamma^{e'}}{\gamma^{e'}}$為$k_v$內之一整數.此數可為$\mathfrak{p}_{v'}$所整除但不能為$\mathfrak{p}_{v'}\mathfrak{P}$所整除.由定理75, $\mathfrak{p}_{v'}\mathfrak{P}$之性質,得一矛盾點.同法可求諸$L', \cdots$之上限,故由定理79所與之$D$中$\gamma$之乘方之次數,不能超過一由$K$域之次數$M$所定之限.

定理80有特殊的重要,因M之素因子γ之個數有限.若計算諸M次域,其中M之素因子之分解,若所與之$L, L', \cdots$有同值者,謂之成一屬(Type).由此可知,所可能之M次域之不同屬有限.

定理80可以二次域為例明之:(參觀第三篇§59,定理95)其判別式之奇素數因子最高為一次,素因子2最高為三次.

12.　迦氏域之數論的性質與代數的性質之關聯.

§48.　相對的迦氏域,相對的亞培爾氏域,及相對的循環域.

若迦氏域之羣G之代換$s_1, \cdots, s_M$為一亞培爾氏羣(Abelian group)則此迦氏域謂之亞培爾氏域.所謂亞培爾氏羣者,即$s_1, \cdots, s_M$中任意二代換s_i, s_j有$s_is_j = s_js_i$之關係也.若代換羣G為循環羣,則該域謂之循環域(Cyclic field).所謂循環羣者,乃凡該羣內之一代換,悉可表為某定代換之乘方

若如§28用於理想數班之方法,則關亞培爾羣可有下之定理:凡亞培爾域可由諸循環域連合得之;又循環域可以素數次或素數乘方次之循環域連合得之.

以上之定義可推廣之如下:

命Θ爲一l次方程式

$$\Theta^l+\alpha_1\Theta^{l-1}+\cdots\cdots+\alpha_l=o$$

之根,其係數$\alpha_1,\cdots,\alpha_l$在m次域k內.此l次方程式於此k內不可化,且有下之特殊性質,其他$l-1$個根$\Theta'\cdots\Theta^{(l-1)}$皆可以Θ之有理函數表之,此有理函數之係數在$k$內.由此假定Θ及$k$內之數成一$M=lm$次之域$K$,此域名爲對$k$之相對的迦氏域次數$l$名爲$K$之相對的次數.若命

$$\Theta=S_1\Theta,\quad \Theta'=S_2\Theta,\quad \cdots\cdots,\quad \Theta^{(l-1)}=S_l\Theta,$$

則諸代換$S_1,\cdots,S_l$所成之羣謂之相對的羣,若此羣爲亞培爾氏羣,則域K謂之相對的亞培爾氏域,若此羣爲相對的循環羣,則域K謂之相對的循環域.

§49. 惰性域及支域的代數性質.迦氏域內之數由分散域內方根號之表示.

用適所定之義極易得分散域與惰性域之代數性質;同樣,惰性域支域之性質等等.此類性質之來源,若由其各對應羣之性質觀念,固極易明瞭也.可述如下之定理.

定理81. 惰性域k_t對分散域k_z爲一相對的循環域,其相對次數爲f.支域k_v對惰性域k_t爲一h次循環相對域.一次重支域$k_{v'}$與支域k_v爲γ'次相對亞培爾域,域$k_{v''}$對域$k_{v'}$爲γ''次相對亞培爾域,等等.域$k_{v'},k_{v''},\cdots$之亞培爾相對羣,皆有γ次之代換.

由定理81,可知由求相等因子,而得出一組亞培爾域,此結果可得分散域之一種新性質.

定理82. 由K域內一素理數所得之分散域具次之性質:凡K域內之數,皆可於分散域內以根號表之.

此定理82使方程式之根可以方根號表出之理論放一異彩,因此定理表示,由分解素理想數之步驟而得一組相對的域,而此諸域皆可於分解域內

以根號表出之.

§59. 一級素理想數之密率,及此密率與域之代數性質之關係:

有一值得注意之事實

命 k 爲任一 m 次域,以 γ_i 表一有理數之有 i 個不相同之一級素理因子者.

$$\underset{s=1}{L}\left\{\frac{\sum\limits_{(\gamma_i)}\frac{1}{\gamma_i^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}\right\}$$

若之極限存在,式中和號過諸素數 γ_i 者,此卽謂之如 γ_i 之素數有密集性,以 Δ_i 表此限,Δ_i 名爲如 r_i 之素數之密率 (Dichtigkeit). 克郎耐可氏於其研究中曾用下之假定,m 種素數 $\gamma_1, \cdots \gamma_m$ 皆有密集性,當定 k 域之方程式之羣爲對稱羣時,克氏假定密率 $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$ 業已存在.麗祿比尼 (Frobenius) 氏證明任何域 k 之密率皆存在,且定其值,此諸值爲有理數,且祇賴於定域 k 之方程式 [Frobenius (1)]. 易得下定理之說明:

定理83. 任一 m 次域內之 m 類素數 $r_1, \cdots, r_m$ 已有 $m-1$ 個密率,則所缺之其他一密率卽能求出,此 m 個密率 $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$ 有下之關係:

$$\Delta_1+2\Delta_2+\cdots\cdots+m\Delta_m=1.$$

證: 若作 §27 之 $\zeta(s)$ 之第二種表示法之對數,可得

$$\log\zeta(s)=\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}+S,$$

$$S=\frac{1}{2}\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{2s}}+\frac{1}{3}\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{3s}}+\cdots\cdots,$$

式中之和號過域之諸素想數,以 $\mathfrak{p}_1$ 表一級之素理想數,則顯然

$$\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)^s}=\sum_{(\gamma_1)}\frac{1}{\gamma_1^s}+\sum_{(\gamma_2)}\frac{2}{\gamma_2^s}+\cdots\cdots+\sum_{(\gamma_m)}\frac{m}{\gamma_m^s} \tag{19}$$

式之左邊過諸素理想數 $\mathfrak{p}_1$,右邊各過諸有理素數 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$.

由另一方面素理想數 $\mathfrak{p}$ 之高於一級者有 $n(\mathfrak{p})\geqq\gamma^2$ 之關係,且一任意素

數γ最多祇有m個素理想因子,故可得:

$$\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}-\sum_{(\mathfrak{p}_1)}\frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)^s}\leq m\sum_{\gamma}\frac{1}{\gamma^{2s}}<m\sum_{(h)}\frac{1}{h^2},$$

式中最後之和號h過大於一之諸有理整數.同法可得

$$S<m\left\{\sum_{(h)}\frac{1}{h^2}+\sum_{(h)}\frac{1}{h^3}+\cdots\cdots\right\}=m\sum_{(h)}\frac{1}{h(h-1)}=m.$$

由此不等式,故$\log\zeta(s)-\sum_{(\mathfrak{p}_1)}\frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)^s}$當$s$趨於1時,此式有定限.由定理56, $\log\zeta(s)-\log\frac{1}{s-1}$亦有定限.故當$s$趨於1時,

$$\sum_{(\mathfrak{p}_1)}\frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)^s}-\log\frac{1}{s-1}$$

趨於一限.且卽

$$\underset{s=1}{L}\frac{\sum_{(\mathfrak{p}_1)}\frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)^s}}{\log\frac{1}{s-1}}=1,$$

由此利用(19)卽得定理.

於M次迦氏域K內之$\Delta_1=o$, $\Delta_2=o$, $\cdots$, $\Delta_{M-1}=o$, 故由定理可得:

定理84. 於M次迦氏域中一次素理想數γ_M之密率爲$\Delta_M=\frac{1}{M}$.

若k爲任意域,K爲其M次迦氏域,此卽爲由k之諸共軛域k', $\cdots$, $k^{(n-1)}$合併而得者.易知k內素數γ_m與K內素數γ_M相同,故k內素數γ_m之密率,卽爲$\frac{1}{M}$,亦卽可謂等於其迦氏分解式(Galois resolvent)之次數之倒數[Kronecker (14)].

13. 域之合併

§51. 由一域及其諸共軛域合併所成之迦氏域.

定理85. k_1, k_2合併所成之域爲K,則凡可整除k_1, k_2之判別式之有理素數,定能整除K之判別式.且祇此有理素數可整除K之判別式.

此定理之第一部分可由定理39逕得之,第二部分可由定理41之補助說

明之如下:

命$\Omega_1,\cdots,\Omega_M$及$\omega_1,\cdots,\omega_m$名爲K及k_1之基數,ω_i可表爲

$$\omega_i=a_{i1}\Omega_1+\cdots\cdots+a_{iM}\Omega_M \qquad (i=1,\cdots,m).$$

式中$a_{i1},\cdots,a_{iM}$爲有理整數.又命$\Omega_1^{(l)},\cdots,\Omega_M^{(l)}$爲$\Omega_1,\cdots,\Omega_M$對$k_2$之相對的共軛數,

$$\omega_i^{(l)}=a_{i1}\Omega_1^{(l)}+\cdots\cdots+a_{iM}\Omega_M^{(l)}$$

爲ω_i共軛數由此K內之元

$$(\Omega_1-\Omega_1^{(l)},\cdots\cdots,\Omega_M-\Omega_M^{(l)}).$$

於k_1域內.由相對元之定義及定理38可得所言.

由定理85,可得更進之定理:

定理86. 若由m次域k及其諸共軛域$k',\cdots,k^{(m-1)}$合併之迦氏域K,故K域之判別式可爲k域之判別式之素因子所整除,且祇爲此諸素因子所整除.

§52. 判別式互素之二域之合併.

判別式互素之域之合併,實爲一有趣之問題,其最要之性質及結果如下:

定理87. 二域k_1k_2各爲m_1,m_2次,若其判別式互素,則其二域合併所得之域爲m_1m_2次.

證: k_1及其共軛域合併所得之域爲一迦氏域以K_1表之.由定理86 K_1之判別式當與k_2之判別式互素.命ϑ爲定k_1域之數,此數適合於一m_1次之不可化方程式,其係數爲有理整數.

若k_1,k_2合併所得之域之次數低於m_1m_2,則此方程式在k_2域內必爲可化.即ϑ適合於方程式

$$\vartheta^{\gamma}+\alpha_1\vartheta^{\gamma-1}+\cdots\cdots+\alpha_\gamma=0,$$

$\gamma<m_1$,且其係數$\alpha_1,\cdots,\alpha_\gamma$在$k_2$內.因係數$\alpha_1,\cdots,\alpha_\gamma$所成之域名之爲$k$.因$\alpha_1,\cdots,\alpha_\gamma$可以上之方程式之$\gamma$個根之有理式表之,故$k$爲$K_1$之分域.又$k$同時爲$k_2$

之分域.故由定理39故 k 之判別式可整除 k_1 及 k_2 之判別式.由此域 k 之判別式當為1,此與定理44相違背.

尙可有下之定理.其眞實性頗易明瞭:

定理88. 若 k_1, k_2 二域各為 m_1, m_2 次,且各有判別式 d_1, d_2, 且 d_1, d_2 互素.則合併所成之域 K 之判別式等於 $d_1^{m_2} d_2^{m_1}$. 此域 K 之 $m_1 m_2$ 個基數.可以 k_1 之基數乘 k_2 之基數以得之.若 r 為一有理素數於 k_1 內可分解為 $\gamma=\mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{e_r}$, 於 k_2 內可分解為 $\gamma=\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s$ 式中 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_r$ 及 $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_s$ 各為 k_1, k_2 內之不同的素理想數,則於 K 中 $\gamma=\prod_{i,l}\mathfrak{F}_{il}^{e_i}$, 式中 $i=1,\cdots,r$ 及 $l=1,\cdots,s$. $\mathfrak{F}_{il}$ 表 K 內之理想數為二理想數 $\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{q}_l$ 之最大公約數.理想數 $\mathfrak{F}$ 不必為 K 內之素理想數.

若 k_1, k_2 為二有任意判別式之域,則與上相仿問題之答案.祇能限於某種假定之素數之分解為較簡單 [Hensel (3)].

第 10—13 節之結果示吾人以理想數之理論.及迦羅華域之判別式之重要原理所用之方法.當普通之進行時.亦可得出不同的結果.特如 §§39—44 之諸定理.對相對的迦氏域時並無何種特別變化 [Dedekind (8)].

§4. 一級素理想數及班之觀念

§53. 由一級素理想數演出理想數班.

第 10—12 章所得之原則.對一域之理想數班之性質及演出之問題.所發出之新光輝.至為有趣.於此章及下章中將述關於此問題最重要之問題.第一定理為研究由任一迦氏域之一級素理想數.以演出其理想數班.

定理89. 凡迦氏域之一理想數班中有理想數.其素理想因子皆為一級者.

今先證下引:

引12. 若 K 為一 M 次之迦氏域.其判別式為 D, 且 $\mathfrak{P}$ 為此域內之一不能整除 $DM!$ 之素理想數.其級數 $f>1$, 則 K 內有一與 $DM!$ 互素之整數 Ω, 可為 $\mathfrak{P}$ 所整除.但非 $\mathfrak{P}^2$ 之倍數.且其其他素理想因子之級數皆低於 f 級.

證：命P爲K內之一整數,具下之性質;凡K內之數Ω對$\mathfrak{P}^2$相合於P之一整係數函數.由定理29知有如此之P存在.又表與$\mathfrak{P}$共軛而非$\mathfrak{P}$之諸素理想數爲$\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \cdots, \mathfrak{P}^{(m)}$,定$K$內之一整數A使適合下之相合式

$$\mathrm{A}\equiv\mathrm{P}, \quad (\mathfrak{P}^2)$$

$$\mathrm{A}\equiv 0, \quad (\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\cdots\mathfrak{P}^{(m)})$$

$$\mathrm{A}\equiv 1, \quad (M!).$$

若z爲屬於$\mathfrak{P}$之分散域之一代換,即$z\mathrm{P}\equiv\mathrm{P}^{\gamma}$, $(\mathfrak{P})$,故顯然$f-1$個差$\mathrm{A}-z\mathrm{A}$, $\mathrm{A}-z^2\mathrm{A}, \cdots, \mathrm{A}-z^{f-1}\mathrm{A}$對$\mathfrak{P}$互素.又若$s$爲一不屬於分散域之代換,則$s\mathrm{A}$可爲$\mathfrak{P}$所整除,故可得$\mathrm{A}-s\mathrm{A}$與$\mathfrak{P}$互素.故A之別與$\mathfrak{P}$互素.且由§3可知A爲定$K$域之數.由定理81,$K$即爲$\mathfrak{P}$之惰性域.故A所適合之方程式爲

$$\mathrm{A}^f+\alpha_1\mathrm{A}^{f-1}+\cdots\cdots+\alpha_f=o,$$

式中$\alpha_1, \cdots, \alpha_f$表$\mathfrak{P}$之分散域$k$內之數.$K$域之其他$\frac{M}{f}$次分域以$k', k'', \cdots$表之,則A所適合之方程式各爲

$$\mathrm{A}^f+\alpha_1'\mathrm{A}^{f-1}+\cdots\cdots+\alpha_f'=o,$$

$$\mathrm{A}^f+\alpha_1''\mathrm{A}^{f-1}+\cdots\cdots+\alpha_f''=o,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

式中$\alpha_1', \cdots, \alpha_f'$爲$k'$內之數,$\alpha_1'', \cdots, \alpha_f''$爲$k''$內之數,等等.又定$f$個有理整數$a_1, \cdots, a_f$使

$$a_1\equiv\alpha_1, \ \cdots\cdots, \ a_f\equiv\alpha_f, \ (\mathfrak{P}).$$

由定理70知$\mathfrak{P}$於k內爲一級素理想數,故上相合式爲可能的.命$b_1, \cdots, b_f$爲f個有理整數之可使

$$M!b_1\equiv a_1, \ \cdots\cdots, \ M!b_f\equiv a_f, \qquad (\gamma)$$

者,且對指號1所屬之關係

$$\beta_1=M!b_1-\alpha_1, \quad \beta_1'=M!b_1-\alpha_1', \cdots\cdots$$

無爲零者.命

$$B=A^{f}+M!(b_1A^{f-1}+b_2A^{f-2}+\cdots\cdots+b_f).$$

最後以 $q_1,\cdots,q_l$ 表非 γ 之有理素數,可整除A之判別式 A 或 $\beta_1,\beta_1',\cdots$ 之距者,且皆大於 M. 若 q 爲其中之一,則於 K 內最多有 M 個素因子,於 $q_i(>M)$ 個數 B, B+1, B+2, $\cdots$, $B+q_i-1$ 至少有一與 q_i 互素,今卽命之爲 $B+C$. 定一有理整數 c, 使適合於 l 個相合式 $M!rc\equiv c_i,\ (q_i)\ (i=1,2,\cdots,l)$, 則

$$\Omega=B+M!rc$$

卽爲合引12所需之性質之數.

今往證此:由相合式 $A\equiv 1,(M!)$ 可知 Ω 與 $\leqq M$ 之諸有理整數皆互素;另一方面,由 c 之定法,可知 Ω 與 A 之諸有理素因子之大於 M 互素.故數 Ω 對 A 內非 γ 之諸有理素因子皆互素.

又若 Ω 可爲 $\mathfrak{P}$ 所整除但不爲 $\mathfrak{P}'\ \mathfrak{P}'',\cdots\mathfrak{P}^{(m)}$ 所整除,因 $M!b_f\equiv a_f\not\equiv o,\ (\gamma)$ 也.數 Ω 可表爲

$$\Omega=A^{f}+m_1A^{f-1}+\cdots\cdots+m_f$$

式中 $m_1,\cdots,m_f$ 爲有理整數.因 $A\equiv P,\ (\mathfrak{P}^2)'$ 及P不能適合於低於 $2f$ 次之相合式, $(\mathfrak{P}^2)$, 由此 Ω 不爲 $\mathfrak{P}^2$ 所整除.

又若 Ω 可爲 $f'>f$ 級之素理想 $\equiv\mathfrak{Q}$ 所整除及 $1,z',z'^2,\cdots,z'^{f'-1}$ 爲 $\mathfrak{Q}$ 之分散域之 f' 個代換,可由此及惰性之諸代換以得出分散域者(參觀定理69).必有 f' 個相合式

$$A^{f}+m_1\ \ A^{f-1}+\cdots\cdots+m_f\equiv o,\qquad(\mathfrak{Q})$$

$$(z'A)^{f}+m_1(z'A)^{f-1}+\cdots\cdots+m_f\equiv o,\qquad(\mathfrak{Q})$$

此可得數A之判別式 A 可爲 $\mathfrak{Q}$ 所整除,由上已知此爲不然.

最後命 Ω 可爲 f 級之素理想數 $\mathfrak{Q}$ 所整除.則域 $k,k',k'',\cdots$ 必有一爲 $\mathfrak{Q}$ 之分散域,卽命其爲 k', 由此假定 Ω 可表爲

$$\Omega=\Omega-(A^{f}+\alpha_1'A^{f-1}+\cdots\cdots+\alpha_f')=\beta_1'A^{f-1}+\cdots\cdots+\beta_f'',$$

式中 $\beta_1',\cdots,\beta_f'$ 表 k' 內之數.若 $1,z',z'^2,\cdots,z'^{f-1}$ 爲 $\mathfrak{Q}$ 之分散羣內之 f 個代換,可

由此諸代換及惰性羣以構成分散羣,可得

$$\beta_1'A^{f-1}+\cdots\cdots+\beta_f'\equiv o,\quad(\mathfrak{Q})$$

$$\beta_1'(z'A)^{f-1}+\cdots\cdots+\beta_f'\equiv o,\quad(\mathfrak{Q})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此相合式可得 A 或 β_1' 必為 $\mathfrak{Q}$ 所整除,與上所命者違.

若注意凡一班內可省出一理想數與 DM 互素,則由引22易知定理為眞.對分圓域此定理已為柘母(Kummer)氏所證明 [Kummer (6)].

15. 素數次之相對循環域

§54. 記號乘方.關於相對距為1之數之定理.

今將得出關於相對亞培爾氏域的一組基本定理,為便利表示及證明計,吾人先與下之記號及說明.

命 K 為一 lm 次域,命其對 m 次域 k 為一相對的循環域,其相對次數為素數 l. 此循環羣之諸代換為 $1, S, S^2, \cdots, S^{l-1}$. 今定域 K 內一數 A 之記號乘方之義如下:若 A 為 K 內之任一數(或為整數或非整數)及 $a, a_1, \cdots, a_{l-1}$ 為任意之有理整數,則

$$A^a(SA)^{a_1}(S^2A)^{a_2}\cdots\cdots(S^{l-1}A)^{a_{l-1}}$$

可簡表之為

$$A^{a+a_1S+a_2S^2+\cdots+a_{l-1}S^{l-1}}=A^{F(S)},$$

式中 $F(S)$ 表左邊 A 之指數,即 S 之整係數函數.故 A 之記號乘方 $F(S)$ 次表一 K 域內之一整數或非整數.此記號乘方可有不同的推廣,克郎耐可氏曾推廣之至分圓域中 [Kronecker (1)].

今往證相對的循環域下之性質:

定理90. 凡 K 內之一數 A (或整或非整),其對 k 之相對距為1者為 K 內一整數 B 之 $(1-S)$ 次記號乘方.

證: 命 x 為一變數, Θ 為定 K 域之一數.則命

$$A_x=\frac{x+\Theta}{x+S\Theta}A=(x+\Theta)^{1-S}A$$

及
$$B_x=1+A_x^1+A_x^{1+S}+A_x^{1+S+S^2}+\cdots\cdots+A_x^{1+S+S^2+\cdots+S^{l-2}}.$$

由假定已知 $A^{1+S+\cdots S^{l-1}}=1$，及 $A_x^{1+S+\cdots+S^{l-1}}=1$，可得 $B_x^{1-S}=A_x$，因 B_x 爲 x 之有理函數且對 x 不全等於零,故能選擇一有理整數 a，使 B_a 爲 K 內非零之數.此數 $B^*=\frac{B}{a+\Theta}$ 適合於方程式 $A=B^{*1-S}$，命 $B^*=\frac{B}{b}$，式中 B 爲 K 內之一整數,b 爲一有理整數,故 $A=B^{1-S}$.

§55. 相對的基單位組,及其存在之證明.

關於研究域 K 之單位之性質尚有一重要定理.於 k 之 m 個共軛域內有 r_1 個實域,r_2 對共軛虛域,由定理47可知 k 內有 $r=r_1+r_2-1$ 個基單位.今往定域 K 對 k 之相對的基單位之義,相對的基單位組者乃 K 域內之 $r+1$ 個單位 $H_1,\cdots,H_{r+1}$ 個單位具次之性質:一單位可表爲 $H_1^{F_1(S)}\cdots H_{r+1}^{F_{r+1}(S)}[\varepsilon]$，若 $F_1(\zeta),\cdots,F_{r+1}(\zeta)$ 皆可爲 $1-\zeta$ 所整除則該式祗能爲 K 內一單位之 $1-S$ 次符號乘方,式中 $F_1(S),\cdots,F_{r+1}(S)$ 表 S 之整係數函數,$[\varepsilon]$ 表 k 內之任意單位,或 k 內一單位之 l 次根,ζ 表一非1之 l 次壹之根.

定理91. 對域 k 之相對循環域 K，其相對的次數爲奇素數 l，則於 K 內有一組 $r+1$ 個,其 r 對 k 域仍如定理47所與之義.

證: 因 $l\neq2$，故 K 之 lm 個共軛域中有 lr_1 個實域,lr_2 對共軛虛域,命 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 爲 k 域之一組 $r_1+r_2-1=r$ 個基單位,選擇 K 內之一單位 E_1 使 $E_1,\varepsilon_1\cdots,\varepsilon_r$ 成一組非互依之單位者,則 $r+l-1$ 個單位 $E_1,E_1^S,\cdots,E_1^{S^{l-2}},\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 爲一組非互依之單位.

因欲證此,今先假定其不然,即設 $E_1^{F(S)}=\varepsilon^*$，式中 $F(S)$ 爲一 S 之 $(l-2)$ 次整係數函數,非全等於零,且 ε^* 爲 k 內之一單位.函數 $1+S+\cdots+S^{l-1}$ 爲不可化(比較§91之末).故有二 S 之整係數函數及可定一非零之有理整數 a 使

$$FG_1+(1+S+\cdots\cdots+S^{l-1})G_2=a.$$

由此及

$$E_1^{1+S+\cdots+S^{l-1}}=\varepsilon^{**}$$

可得方程式$E_1^c=\varepsilon^{***}$,式中ε^{**}, ε^{***}皆爲k內之單位,此與假定違.

更選擇一單位E_2使$E_2, E_1, E_1^S, \cdots, E^{S^{l-2}}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$爲一組非互依之單位,則同法可證單位$E_2, E_2^S, \cdots, E_2^{S^{l-2}}, E_1, E_1^S, \cdots, E_1^{S^{l-2}}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$爲非互依.如此繼進,可得$r_1+r_2=r+1$個單位$E_1\cdots, E_{r+1}$以合所需.單位

$$E_i, E_i^S, \cdots, E_i^{S^{l-2}}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r \qquad (i=1, 2, \cdots, r+1)$$

爲一組非互依之單位.其個數有

$$(r+1)(l-2)+r=lr_1+lr_2-1.$$

命l^m爲l之最高乘方,使

$$E_1^{F_1(S)} \cdots\cdots E_{r+1}^{F_{r+1}(S)}[\varepsilon] \tag{20}$$

不能爲K內他一單位之l^m次乘方者,式中$F_1(S), \cdots, F_{r+1}(S)$爲$S$之$l-2$次整係數函數,其係數不皆爲$l$之倍數.其$[\varepsilon]$仍有如本節開端時之意義.由定理47知$K$域內有$lr_1+lr_2-1$個基單位存在,故有此$l^m$

又由恒等式

$$(1-S)^l=1-S^l+lG(S'),$$

式中G爲一整係數函數.故K內一數之$(1-S)^{lm}$次記號乘方實等於其l^m次方,由此可得(20)不能爲另一單位之$(1-S')^{lm}$次記號乘方.合代數整數$F_1(\zeta)$, $\cdots, F_{r+1}(\zeta)$同時爲$1-\zeta$所整除.

命e_1爲最大之有理整正數可使(20)所表之單位爲一單位$(1-S)^{e_1}$次記號乘方.其$F_1(\zeta), \cdots, F_{r+1}(\zeta)$不同時爲$1-\zeta$所整除.即可假定

$$E_1^{F_1(S)} \cdots\cdots E_{r+1}^{F_{r+1}(S)}[\varepsilon]=H_1^{(1-S)^{e_1}},$$

式中$F_1(S), \cdots, F_{r+1}(S)$爲$S$之整有理函數,$F_1(\zeta)$不爲$1-\zeta$所整除.$[\varepsilon]$仍如前定.且$H_1$爲$K$內之一單位.更進而假定$e_2$爲最大之整正數可使其對$E_2, \cdots, E_{r+1}$有與前相仿之性質,即由$E_2, \cdots, E_{r+1}$所得之相仿表示可爲$K$內一單位

之 $(1-S)^{e_2}$ 次記號乘方,命如此之式爲

$$E_2^{F_2(S)}\cdots\cdots E_{r+1}^{F_{r+1}(S)}[\varepsilon]=H_2^{(1-S)^{e_2}}$$

式中 $F_1(S),\cdots,F_{r+1}(S)$ 再爲 S 之有理整函數及 $F_2(\zeta)$ 不可爲 $1-\zeta$ 所整除. H_2 表 K 內之單位.繼此續進,可得 $r+1$ 個單位 $H_1,\cdots,H_{r+1}$; 此卽爲 K 域之一組相對的基單位組.

因欲證此,可假定其不然,卽有 $r+1$ 個 S 之有理整函數使

$$H_1^{G_1(S)}\cdots\cdots H_{r+1}^{G_{r+1}}[\varepsilon]=Z^{1-S}$$

式中Z爲 K 內之一單位.又於諸數 $G_1(\zeta),\cdots,G_{r+1}(\zeta)$ 中 $G_h(\zeta)$ 爲第一數之不能爲 $1-\zeta$ 所整除者;則顯然

$$H_h^{G_h(S)}H_{h+1}^{G_{h+1}(S)}\cdots\cdots H_{r+1}^{G_{r+1}(S)}[\varepsilon]$$

爲 K 內一單位之 $(1-S)$ 次記號乘方.但數列 $e_1,\cdots,e_{r+1}$ 中無後者可大於前者者,故若上式行 $(1-S)^{e_h}$ 次記號乘方可爲 $E_h,\cdots,E_{r+1}$ 表之,此與吾人前所設者相違.

由定理91之證明中易知若 $l=2$ 仍得之如此之結果,則 K 之 $2m$ 個共軛域內之實域之個數當 k 之共軛實域之個數之二倍.

§56. K 域內一單位之存在,該單位之相對距之值爲1,且不爲二相對共軛單位之商.

定理92. 相對循環域 K 對 k 域之相對次數爲 l 次, l 爲一素數則 K 內有一單位 H,其對 k 之相對距爲1,且非K內另一單位之 $(1-S)$ 次記號乘方.

證: 假定 k 域無 l 次之壹之根 ζ,命 $\eta_1,\cdots,\eta_{r+1}$ 爲 k 內之任意 $r+1$ 個單位.則可有 $r+1$ 個有理整數 $a_1,\cdots,a_{r+1}$ 非皆爲 l 之倍數以使 $\eta_1^{a_1}\eta_2^{a_2}\cdots\eta_{r+1}^{a_{r+1}}=1$. 茲往證之,若指數 $a_1,\cdots,a_{r+1}$ 皆可爲 l 所整除,故 $\eta_1^{\frac{a_1}{l}}\cdots\eta_{r+1}^{\frac{a_{r+1}}{l}}$ 必爲 l 次壹之根,此與假定相違背.取 $\eta_1,\cdots,\eta_{r+1}$ 各爲 $H_1,\cdots,H_{r+1}$ 之相對距.式中 $H_1,\cdots,H_{r+1}$ 爲 K 內之一組相對的基單位.命 $H=H_1^{a_1}\cdots H_{r+1}^{a_{r+1}}$ 則可得 $N_k(H)=H^{1+S+S^2+\cdots+S^{l-1}}=1$,故由定理95, $H=A^{1-S}$,因 $H_1,\cdots,H_{r+1}$ 爲相對的基單位故 A 非一單位.

因欲證明定理92之普通情形,可假定k內有之l^h次壹之原根ζ',但無l^{h+1}次之壹之原根.由同樣的手續可知若$\eta_1,\cdots,\eta_{r+2}$為k內之任意$r+2$個單位,則可有一個有理整數a,及$r+2$個非皆為l所整除之整數$a_1,\cdots,a_{r+2}$,使

$$\eta_1^{a_1}\cdots\eta_{\gamma+2}^{a_{\gamma+1}}=\zeta'^{al}.$$

另一方面,相對距

$$N_k(\zeta)=\zeta^{1+S+S^2+\cdots+S^{l-1}}=1,$$

故由定理90 ζ 必為一$(1-S)$次記號乘方今設於K內無單位E,使$\zeta=E^{1-S}$,則ζ已合所求.若不然,則$E^{l(1-S)}=1$,即$E^l=SE^l$,故E^l可表為k內之一單位ε.但E不在k中.因$E=\sqrt[l]{\varepsilon}$,可得$N_k(E)=E^l=\varepsilon$.命$H_1,\cdots,H_{\gamma+1}$為K之一組相對的基單位.命

$$\eta_1=N_k(H_1),\cdots\cdots,\eta_{\gamma+1}=N_k(H_{\gamma+1}),\ \eta_{\gamma+2}=N_k(E)=E^l$$

$$H=H_1^{a_1}\cdots\cdots H_{r+1}^{a_{r+1}}E^{a_{r+2}}\zeta'^{-a}=H_1^{a_1}\cdots\cdots H_{r+1}^{a_{r+1}}[\varepsilon],$$

式中$a,a_1,\cdots,a_{r+2}$為預定之數,$[\varepsilon]$為k內一單位之l次根,則$N_k(H)=1$.數$a_1,\cdots,a_{r+1}$不能皆為l所整除.由

$$\left(\eta_1^{\frac{a_1}{l}}\cdots\eta_{r+1}^{\frac{a_{r+1}}{l}}E^{a_{r+2}}\zeta'^{-a}\right)^l=1$$

則可得

$$\eta_1^{\frac{a_1}{l}}\cdots\eta_{r+1}^{\frac{a_{r+1}}{l}}E^{a_{r+2}}\zeta'^{-a}=\zeta^b$$

式中b表一有理整數.因吾人已假定a_{r+2}非l之倍數,故由後式可知E在k中,此為不然.故單位H合定理92所需之條件.

定理90,91,92當分域k為ζ所定之$l-1$次分圓域已為枯母(Kummer)氏所證明[Kummer (14,20,21)].

§57. 兩合理想數及循環相對域之相對別.

若$\mathfrak{A}$為相對的循環域K內之一理想數經代換S而不變,且不在k內,如此

之理想數謂之兩合理想數(Ambiguous ideal).特例如K內之一素理想數若經代換而不變且不卽在k中者名爲一兩合素理想數(德文 Ambiges Primideal).

定理93. 相對循環域K對k之相對別所含之素理想數$\mathfrak{P}$爲兩合的,且祇此爲然

今分k內之素理想數$\mathfrak{p}$爲三種情形以往證之:第一種爲K內素理想數$\mathfrak{P}$之l次乘方者,第二種爲K內l個理想數$\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_l$之乘積者,第三種爲$K$內之素理想數者.

第一種情形中,命距$N(\mathfrak{P})=\gamma^f$,則可得$N(\mathfrak{p})=N(\mathfrak{P}^l)=\gamma^{lf}$故$k$內之素理想數$\mathfrak{p}$之距$n(\mathfrak{p})$爲$\gamma^f$.由$N(\mathfrak{P})$及$n(\mathfrak{p})$相等可知:$K$內每一整數對$\mathfrak{P}$相合於$k$內之一整數.由此可知,$K$之對$k$相對別必可爲$\mathfrak{P}$所整除.

第二種情形中,可覓出一整數A非$\mathfrak{P}_i$之倍數,但可爲其他$l-1$個素理想數$\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_{i-1}, \mathfrak{P}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{P}_l$所整除.由此可知,整數A之相對別非$\mathfrak{P}_i$之倍數故$K$域之別亦然.

最後第三種情形,$\mathfrak{p}$爲K內之素理想數,命P爲K內$\mathfrak{p}$之原數,ϱ爲k內$\mathfrak{p}$之原數,且P爲定K之數,則P當適合於一l次方程式

$$F(\mathrm{P})=\mathrm{P}^l+\alpha_1\mathrm{P}^{l-1}+\cdots\cdots+\alpha_l=0,$$

其係數$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$皆爲$k$內之整數.命

$$\alpha_1\equiv f_1(\varrho),\ \cdots\cdots,\ \alpha_l\equiv f_l(\varrho),\ (\mathfrak{p})$$

式中$f_1(\varrho), \cdots, f_l(\varrho)$爲$\varrho$之整係數函數,故P有相合式

$$F(\mathrm{P})\equiv\mathrm{P}^l+f_1(\varrho)\mathrm{P}^{l-1}+\cdots\cdots+f_l(\varrho)\equiv o,\ (\mathfrak{p}).$$

因$N(\mathfrak{p})=(n(\mathfrak{p}))^l$爲$K$內對$\mathfrak{p}$不相合之數之個數,故可知此數爲$k$內對$\mathfrak{p}$不相合之數之個數之$l$次方,故$\mathfrak{p}$不能適合低於$l$次之相合式,故必$\frac{\partial F(\mathrm{P})}{\partial \mathrm{P}}\not\equiv o$, $(\mathfrak{p})$;卽P之相對別不可爲$\mathfrak{p}$所整除.由此可知,K域之相對別與第二第三種之素理想數互素.由此可知,定理93爲眞.

§58. 關於相對循環域之相對別爲 1 之基本定理表此域如班域.

定理 90,92,93 可使吾人知一事實,此對數域之理論有進一步的重要.此事實爲:

定理 94. 若 K 域對 k 域爲一相對的循環域,其相對的次數爲素數 l,其對 k 之相對別爲 1,則於 k 內有一理想數 i,於 k 內非主理想數,但於 K 內爲主理想數,則此理想數之 l 次乘方必爲 k 內之一主理想數,且 k 域之班數可爲 l 所整除.

證: 由定理 93,可有一單位 H 其相對距爲 1,然不爲一單位之 $(1-S)$ 次記號乘方.由定理 90, $\mathrm{H}=\mathrm{A}^{1-S}$,式中 A 爲 K 內之一整數,卽 $\mathrm{A}=\mathrm{H}.S\mathrm{A}$.對主理想數 $\mathfrak{A}=(\mathrm{A})$ 可得 $\mathfrak{A}=S\mathfrak{A}$.此理想數 $\mathfrak{A}$ 在域 k 內,若 $\mathfrak{P}$ 爲 K 內 $\mathfrak{A}$ 之理想因子,但不在 k 域內,則由定理 93 及由假定相對判別式無因子,可得 $\mathfrak{P}\neq S\mathfrak{P}$,故 $\mathfrak{A}$ 可爲 k 之素理想數 N_k $\mathfrak{P}$) 所整除.理想數 A 非 k 內之主理想數,則若 $\mathrm{A}=\mathrm{H}^*\alpha$,式中 H^* 爲一單位,α 爲 k 內之一數,由此 $\mathrm{H}=\mathrm{H}^{*1-S}$,此與前矛盾.由此定理 94 之前半部已證明.

因 $N_k(\mathrm{A})=\alpha$ 爲 k 內之一數故可得 $N_k(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}^l=(\alpha)$ 爲域 k 內之主理想數,故定理 94 全部證明矣.

當 $l=2$,定理 92 及 94 有如 §55 末之附註.

定理 94 可推廣至相對的亞培爾氏域之相對別爲 1 者,其時 l 非爲素數.其證明並無特殊的困難.

由定理 94,域 K 可生出 k 域之理想數班,如此之 K 域名爲 k 域之班域 (Klassenkörper).

重　氫

湯佩松演講　　黃孝慧筆記

1. 導　言

今晚我所講的題目爲重氫的發現.這個題目在過去的一年中,爲科學界注意中心之一.氫這種原素,在以前是被認爲最簡單的.直到兩年前,我們雖然猜測 H-isotopes (Or Deuterium, D) 有存在的可能,然而沒有確實的證據來證明.自從 Urey 等第一次發現 D 以後,到現在不上兩年;在這兩年之中,已經達到一個很有成績的地步:不但在化學裏面重氫(D)有相當的地位,而對于物理及生物上,也有許多的供獻.論及 D 關于這三種科學的文章,已經不下兩百篇.今晚因爲時間有限,不能夠盡這兩百餘篇之所藏,僅取其中最重要的幾篇來說一說罷了.(註)

D 本來是被幾個美國人發現的,但自從發現以後,許多別國的科學家也加入他們研究的範圍.現在已有好幾個團體在研究這個問題,這些團體爲 Urey 等在 Columbia, Lewis 等在 California, Taylor 等在 Princeton, Rutherford 等在 Cambridge, 還有一些別的人在奧國德國.他們的努力是很有成績的.

(註) 此稿校對時我們方才發見吳光寰先生的一篇講重水文章載科學雜誌第十八卷第三期

我們好像是這科學戲院裏的觀衆,雖然不能親自參加扮演,至少應該能夠欣賞,並且享受這個戲劇.

II. Isotopes 與 H-istopes 的特性

在 1918 年 Richards, Aston 等在測定原子量時,已經申言原素的原子量是幾個有整數原子量的原子合併而成的.後來 Aston 就稱這些東西爲 isotopes 例如:鉛爲 107 或 108,氯爲 35 或 37,這兩個混合即使氯的原子量成爲 35.457, 氧氫及碳在以前是認爲沒有 isotopes 的,至少沒有 isotopes 從這幾種原素中分出來.近年來,他們的 isotopes 也就發現了.

1928 年以前,氫及氧的原子量,已經測定,並且大家承認它們的質量有下面的比例:

$$\frac{\text{氫的質量}}{\text{氧的質量}}=\frac{1.00778}{16}\ \text{Aston 從物理方法得來,}$$

$$\frac{\text{氫的質量}}{\text{氧的質量}}=\frac{1.00777}{16}\ \text{從化學方法得來,}$$

假若不是故意求疵的時候,這個十萬分之一以內的相差,當然可以忽略;並且氧的原子量也早認爲16.

但在 1929 年 Guiague 及 Johnston 在 Columbia 由吸收光帶(Absorption band)認明氧的 isotopes 存在.自然界內有 O_{16}, O_{17}, 及 O_{18}, 其分佈之比 (Relative abundance) 爲 1:1.5×630:1.630, 因此 Aston 用物理方法所得數值.與化學方法的不是一樣:是因爲 Aston 的數值由單純的一種氧得來,而化學方法的數值則由這幾種不同的氧的平均值得來的.根據 O_2-isotopes 分佈

之比,化學方法的數値應大1.00022倍,卽:

$$\frac{1.00777}{16}\times 1.00022=\frac{1.00799}{16},$$

Aston的數値仍與以前一樣,卽1.00778/16,于是有十萬分之二十一的差異.這差異或由于實驗的不準確,或由于氫以外尙有其他 H-isotopes 存在.

Birge 與 Menzel 計算出來平常氫中若只有 1/5000 的D,則 21/100,000 的差異可有着落.於是引起Urey等來研究 D 的存在,他們之所以費許多時間與精力來做這研究,是因爲他們認爲上面兩個數値的差異並非偶然的.由于他們的信仰和毅力,Urey, Brickwedde, 及 Murphy 在 1932 年成功了這個很有價値的發現,並且在 1934 年Urey因此獲得了 Nobel 獎金.他們用光景分析法 (Spectroscopic analysis) 觀測得了 D 的 Balmer lines. 這個氫的 isotope 的質量已被 Bainbridge 證明了是 2.01351×0.00018.

當 D 的研究還很熱烈並且他的性質還沒有完全知道的時候, Tuve, Hafstead 等在 Washington, Latimar, Young, Oliphant, Hartek 及 Rutherford 在 Cambridge, 和 Smith 及 Bleakney 在 Princeton 又發現了氫的第三個 isotope 卽 T, 這個 isotope 的質量爲 3.0151,在自然界的分佈爲 $1/10^9$ 對于氫而言.

下面是一個表來比較這些原素的質量,爲比較起見, Neutron, Proton 及 He-isotope 的質量也一同寫下:—

Neutron	1.0067
Proton	1.0078
Neutron + Proton	2.0145
H (Hyrogen, or Protium)	1.00778
D (Deuterium, or Diplogen)	2.0131
T (Tritium)	3.0151
He^3 (He-isotope)	3.0165

關于 H, D, 及 T 的命名,很不一致:在美國他們叫 Protium, Deuterium, 及 Tritium, 符號爲 H, D, T, 在英國他們叫做 Diplon, Diplogen, 及 H-isotope 3,符號爲 H^1 H^2 及 H^3

III. 重 水

現在本應該就詳細討論製 D 的方法,但爲了方便起見,我們先來談談重水的問題.現在我們還只能論及 D 的化合物,因爲 T 的我們還不大詳細知道,並且還不能製出適當的分量來供研究.

因爲有三種不同的氫及三種不同的氧,所以因不同的結合,可以有十八種不同的水,而且水有七個不同的分子量,卽 18,19,20,21,22,23,24, 我們現在只討論 D_2O 及 HDO. 它們的分子量爲 20,及 19.HDO可由 $D_2O \times H_2O$ 化合而成,並且在事實上,純粹的 D_2O 也能吸收 H_2O 而成 HDO, 因其有潮解性的緣故.

現在我們來討論 D_2O.它的分子量爲 2+2+16=20.他的比

重本應爲 20/18=1.111 對水而言,但實際却不然,因他們的最大密度的溫度 (Temperature of Maximum Density) 不同的原故.

下表爲其普通的性質:

性　　質		H_2O	D_2O
Density		1	1.1079
Freezing point		0°C	3.82°C
Boiling point		100°C	101.42°
Heat of vaporation Cal./mol.		L	L+259
Dielectric constant at 10°C		82	80.5
Viscosity at 20°C		10.87	12.6
Surface Tension dynes/cm.		72.75	67.8
Refractive index		1.3379	1.3281
Mobility at 18° C	K^+	64.2	54.5
	Cl^-	65.2	55.3
	—	315.2(H^+)	213.7(D^+)
Solubility at 25°C	NaCl	359	305
g/liter	$BaCl_2$	357	289
Ionization Constant(ionic product)		$kw=10^{-14}$	$\frac{1}{5}kw$
Lattice constant of ice	a	4.525	4.505
near melting point Å	c	7.39	7.36
Volume of ice cell, Cube Å		131.0	128.3
Relative molecular volume at 20°C		1	1.0037

這點是値得注意的:因有氫被D的置換,物理上化學上的性質,都有很顯明的變動.有很多的學說來解釋這種現象,但我不相信他們之中有任何一個是根據實驗的.有些說是因爲水分子重合了(Polymerized)但有些又說得相反.有人認爲是因他們質量的不同,所以Zero Point Energy也不同,如是影響到他們的性質差異.將來也許能找出一個公式,能夠使我們將 D_2O 的所有性質都可從一已知性質推演出來,好像化學上一些物質的Colligative Properties一樣.

IV. D的分出與集濃(Separation and Concentration)

在1932年以前已經有很多的方法來分出和集濃D,但成功都很少,只是Urey用液體氫作分部蒸溜的方法,得到一個濃度足夠他們的Spectrographic analysis的研究.

我們已由計算知道自然存在D,對氫而言,有1/5000的濃度.並且由上表我們又可看出D的性質與氫完全不同,由他們與氧的化合物可以證明,根據這些不同之點,應該有一些方法去分出重水.

化學方法:

將水蒸汽通過鐵——Bleakney與Gould等的方法,

將鈉加于水——Davis與Johnston等的方法.

物理方法:

分部蒸溜——Urey等的方法,上面已經述過.

分部結晶——Richards及Hall的方法,Bruni用在重水

上有相當的成功.

吸着及放出 (Adsorption and Desorption)——Taylor 等研究在液體空氣溫度下,氫從木炭放出,他們發覺木炭吸收 5 公升的氫的氣體後,再使他漸漸放出,至最後 50 c.c. 時,其中可將 HD 集濃 2.23%, D_2 集濃 4.357.%

滲透 Palladium 膜 ——產量很少.

電解 ——Washburn 及 Urey 的方法,是最適用的,並且採用最廣,我們稍候再講.

天然方法.

海洋的蒸發 ——從海水內收集的水較常水為重.

從有機質的來源:

無生命的有機物,如 Kerosene, Cholesterol, Benzene, 及 Honey.

有生命的有機物,如楊柳 (Lewis 及 Smith) 植小柳樹于水中,經五六個月以後,因他吸收水分,同時蒸發水分,而 D_2O 比 H_2O 蒸發較慢,所以 D_2O 在柳樹體內,即有相當的濃度.

以上的幾個方法,雖然都有人用過,但除了電解一法外,沒有一個可以使我們能得到多量的重氫,所以都沒詳細的討論,

V. 重水的電解方法 (Electrolytic Separation)

第一次大規模的電解方法製造重水是 Taylor 及 Eyring

在Princeton做的.我們現在把這個方法來說一說:

第一步用15加侖的0.5N的氫氧化鈉溶液,在一個電箱內電解,這種電箱有960個單位電池,每個帶有9安倍的電流,這些單位電池成長圓筒式,一位有200c.c.的容量,都放在流水冷櫃內.電極的陽極是鈦的,陰極是鎳的.每40個單位電池順接一組,其電位差為110弗特.電解繼續進行,一直到電解質的容積減少至五分之一為止.于是將剩餘的液體取出,用蒸溜方法除去其中的電解質,再進行第二步的電解.

第二步與第一步完全一樣,不過電箱內的單位電池僅用160個,容量也僅五分之一,同時再加入氫氧化鈉使成為0.5N的氫氧化鈉溶液.起首用商業上製氫氣的電池內所剩餘的水,其中含有1/1600的重氫對氫而言.第一次電解以後,卽有百分之0.25的D_2O第二次電解以後,卽有百分之一的濃度.

從第三步起.電解方法就要改變一點.就是要把電解出來的氫和氧再變成水,導入以前的電池內,使他再起電解.以後再同樣的繼續進行第四步:第四次電解以後,容積減至1500c.c.含有百分之13的D_2O第五次電解以後,容積減至240c.c.內含百分之40的D_2O第六次電解以後,容積減至45c.c.內含百分之95的D_2O至第七次電解以後,只剩15c.c.的容積,可得百分之百的D_2O在每個步驟中,氫氧化鈉

的濃度,總保持0.5 N.

VI. 重水的分析方法

比重 —— Washburn, Lewis 等利用比重表,重水越多,比重越大,因此可以算出重水之量.

曲折率 —— Lewis 及 Urey 等利用 Interferometer. 水的曲折率因,重水的增加,有相當的變更（見上表）. Lewis等有一方程式以由曲折率計算重水的量.

分光方法(Mass Spectrograph) —— Bleakney 利用的方法,可以計算出 D在 H同 T 中之成分.

VII. 重氫的化學性質

我們暫且不談重水的話,關于他在生物學上的情形以後再講,現在且說 D的兩個化學上的重要作用:

1. 有機化學上的作用.

Pascu 已經證明 α-d-glucose 的 H 被 D 置換了時,他的 Mutarotation 的速度,即減低一些.

在 20°C含 D 的 Glucose 的 Mutarotation 速度 (k)爲 0.00221, 這和平常 Glucose 在 10°C 時一樣,可見得 H 被 D 置換了時,分子活動率的減少和溫度降低 10° C 時一樣. Pascu 認爲 Glucose所呈Mutarotation的現象,是因一個氫原子從一碳移到另一碳去,結果即一個雙聯 (double bound)的碳,變成 Cyclic structure. 因氫爲一活動較小的 D 置換,他的移動的速度較小,所以 Mutarotation 的速度也較小了.

2. 光的化學作用.

D與氯在常溫下光化學作用 (Photo chemical reaction) 的速度比氫與氯的慢.其速度之比為1:10.

$$Cl+D_2 \longrightarrow DCl+D$$

$$Cl+H_2 \longrightarrow HCl+H$$

在Hg同光使氫與氧化合成H_2O_2之情形下,兩個Intermediate reactions可以發生,可是以前沒有法子將他們分別,如:

(1) $Hg'+H_2 \longrightarrow Hg+{}_2H$(Hg'是感光後之Hg)

(2) $H+O_2 \longrightarrow HO_2$

(3') $HO_2+H_2 \longrightarrow H_2O_2+H$, 或

(3'') $HO_2+HO_2 \longrightarrow H_2O_2+O_2$

(3')與(3'')都是可能的,且無法分別.但據 Taylor 說,如果用D來置換氫,照上面氫與氯的作用的結果看來,可將他們區別出來.若用D代替氫,作用(3')就比(1),(2)較慢,但若是作用(3'')則無速度差別.由實驗的結果,用D代氫,(3'')並不比(1), 2慢,所以Taylor說作用(3'')是比較可靠些.但據最近關于這作用的一篇文章(17)看來,這個問題的解決,並不如是簡單.但是用D來置氫,是的確可以給我們一個很好的工具來研究 Mechanism of chemical reaction.

VIII. 重氫的生物化學

據上面Pescu的結果,若導入一D, α-d-glucose的 Mutarotation 的速度可減少一半,又據Steiner等的報告,蘿蔔糖 (beet sugar)

的 inversion 如下:

% D in water	0	44.4	67.1	90	98.1
Velocity Constants	1	1.15	1.33	1.67	2.01

在蘿蔔糖這種情形下,D在水中之量增加,卽增加此糖的 inversion的速度.增加水中的D,當然卽增加糖中的D,因爲D同H是可以互換的.

這個實驗的結果,好像同Pascu的實驗相反.但現在我們還不能解釋.而其他生物化學的作用,同這個結果,却又不同,例如:zymase及 catalase 的活動率也都被D減少.D對于Yeast及Bacteria 的代謝作用也有妨礙,例如:酒的發酵作用可被減至平常値之1/9,但是Yeast的本身的重量,如 Aspergillus一樣,是增加的.

各種動物植物,如 Lumineus bacteria, Euglena, Lupinus seedling, tobacco seeds, Paramecea 等都曾拿來實驗過,大概可以說,在D的濃度低時百分之一以下可以無害,並且有時還能使生長同呼吸增加.若D的濃度超過百分之三十至百分之五十以上,則妨礙其生長,呼吸,及代謝.

一個小鼠若喂重水,卽呈渴醉的狀態,可見重水對于高等動物是有害的.按照前面所講的,水分從植物蒸發的時候 (Transpiration)可以使重水的濃度增加.現在有人以爲這種現象在生物裏也許是很普遍的,生物之所以會老會死,也許是因爲重水在生物體內集濃的緣故.這些實驗除了

大致的表明了一些性質以外,在生理上都是沒有多大價值,所以一切的結論我們都不能過于相信.

IX. 重氫的物理性質

這可算是在研究中最有顯著成績的一部分.在原子變化現象中,重氫現在是用來作衝擊離子 (bombarding ion) 的.由這種試驗的結果,我們有了一個作人造輻射 (Artificial Radioactivity) 的工具.並且還得到一個新的 He-isotope, 其質量爲3,如我以前所講的.

現在我們將這部分的研究,簡單的說一下,首先說 D 與 Li 的撞擊:

$Li^6+D^2 \longrightarrow 2He^4$ (頂上的小字表示質量,

$Li^7+D^2 \longrightarrow 2He^4+n'$ n' 爲 Neutron)

D 在這個作用中的效力比用 α-particles 要大得多.

D 亦用作製造 T,一個新的 H-isotope,質量爲 3,產生的情形如下;

$D_1^2+D_1^2 \longrightarrow He_2^4 \longrightarrow T_1^3+H_1^1$ (上面小字爲質量,

$D_1^2+D_1^2 \longrightarrow He_2^4 \longrightarrow He_2^3+n'$ 下面小字爲電荷)

此 He-isotope 之質量爲 3.0165, T 之質量爲 3.0151.

在人造輻射現象中,D的效力也比 α-particles 更大,例如:

$B^{10} \times D^2 \longrightarrow C^{11}+n'$

此碳就是由這個輻射現象而產生,同時有下面的作用發生:

$B^{11}+D^{2}\longrightarrow C^{12}+n^{1}+\gamma$輻射線.

以前就是把幾種重氫關于物理方面的情形,簡單的說了一些.

今晚並非演講,只是報告科學上最新的一個問題.因爲有了重氫的產生,我們不僅在化學上添了一個新的名目,並且在研究物理生物及化學方面,也得了一個很有用的工具.

重氫的發現不只是在這個發現的本身有趣味,並且因這個發現從許多深刻的思想與實驗證明事實中得來,我們更覺得有價值,這對于我們永遠是一個啓啻,並且也永遠是科學的一件美事,他的成功也就是人類良好企圖的勝利,科學也能夠常常以此自豪的.

以下是關于重氫的幾種重要參考論文:

1. Bell, Ronald P., the theory of the electrolytic separation of the isotopes. J. Chem. Phys. 2: 164-5, 1934.

2. Farkas, A. and L. Farkas, the equilibrium $H_2O+HD=HOD+H_2$ and its role in the separation of the hydrogen isotopes. J. Chem. Phys. 2: 468-9, 1934.

3. Farkas, A., Das schwere Wasserstoffisotop. Naturwiss. 22: 658-662, 1934. A continuation of previous review.

4. Taylor, Hugh S., Heavy hydrogen, a new research tool. J. Franklin Institute, 218: 1-27, 1934.

5. Topley, B. W., and F. K. Wynne-Jones, Ionic product of heavy

water, Nature, 134: 574, 1934.

6. Barnes, T. Cuniffe, and Theo. L. Jahn, Properties of water of biological interest. Quart. Rev. Biol. 9: 292-341, 1934.
7. Mark, Hermann, Das schwere Wasser. Leipzig, 1934. 32 pp.
8. Fox, Denis L., Heavy water and metabolism. Quart. Rev. Biol. 9: 342-346, 1934.
9. Lewis, Gilbert N., Biology of Heavy water. Sci. 79: 151-153, 1934.
10. Urey, Harold C., The separation and properties of the isotopes of hydrogen. Sci. 78: 566-571, 1934.
11. Anonymous [Editor], Deuterium. J. Ind. Eng. Chem. News Ed. 12: 11-12, 1934.
12. Fowler, R. H., The heavy isotope of hydrogen. Proc. Cambridge Phil. Soc. 30: 225-241, 1934.
13. Anderson, Leigh C., J. O. Halford, and John R. Bates, Continuous flow method of concentrating deuterium. J. Chem. Phys., 2: 342-344, 1934.
14. Tuve, M. A., L. R. Hafstead, and O. Dahl, A stable hydrogen isotope of mass three. Phys. Rev. 45: 840-841, 1934.
15. Frerichs, Rudolf, Das Wasserstofisotop und das schwerer Wasser. Naturwiss. 22: 113-118, 1934.
16. Oliphant, M. L., P. Hartek, and Rutherford, Transmission effects observed with heavy hydrogen. Nature, 133: 413, 1934.
17. Evans, Meredith Gwynne, Comparison of the photosensitized reaction of hydrogen and oxygen and deuterium and oxygen. J. Chem. Phys. 2: 726-731, 1934.

數學家姓名錄

(續第四卷第四期)

曾昭安

Labbe, P.〔拉俾〕 十八世紀　德人

La Beaumelle, L. Angliviel de〔拉波麥爾〕 十九世紀　法人

Laber, M.〔拉柏〕 二十世紀

Labérenne, P.〔拉貝棱〕 二十世紀前半期　法人

Labitzke, P.〔拉俾玆克〕 二十世紀前半期　德人

Labosne, A.〔拉波斯奈〕 十九世紀

Laboureur, M.〔拉部壘〕 二十世紀　法人

Labrouste, Henri〔拉布魯〕 二十世紀前半期　法人

Laby, Thomas Howell〔拉比〕 (1880－　) 澳洲人

La Caille, Nicolas Louis de〔拉卡厄〕 亦作 de Lacaile (1713, 5, 15－1762, 3, 21) 法人　著拉丁文數學

Lacaze, H.〔拉卡則〕 二十世紀前半期　法人

Lac De Bosredon, V.〔雷得波勒頓〕 十九世紀後半期　法人

Lach, F. W. V.〔拉哈〕 (1772－1796) 德人

Lachlan, R.〔拉克蘭〕 十九世紀末　英人　著近世幾何學

Lackemann, C.〔拉刻曼〕 十九世紀後半期　德人

Lackemann, W.〔拉剋曼〕 十九世紀後半期　德人

Lacolonge, O. de〔拉科郎治〕 十九世紀後半期　法人

Lacombe, J. 〔拉科說〕 (1724—1811) 德人

La Condamine, Charels Marie de 〔拉宏達民〕 (1701—1774) 法人

Lacouperie, Albert Terrin de 〔拉庫佩里〕 (1845—1894) 法人

Lacour, E. 〔拉庫〕 十九世紀末 法人 研究橢圓函數

Lacroix, Adrien 〔拉克啦〕 二十世紀前半期 法人

Lacroix, Sylvestre François 〔拉克啦〕 (1765—1843, 5, 25) 法人 始用微積分之名稱,并規定定積分與不定積分之定義.

Ladd, *Miss* Christine 〔拉德〕 卽 Mrs. Fabian Franklin (1847, 12, 1—1930, 3, 5) 美女

Ladegast, K. 〔雷第加斯特〕 二十世紀 德人

Ladner, A. C. 〔拉德涅〕 二十世紀前半期 美人

Ladue, Pomeroy 〔拉雕〕 十九世紀末 美人

Laemmel, R. 〔拉麥爾〕 二十世紀 德人

Laertius, Diogenes 〔雷厄細阿斯〕 卽 Diogenes Laertius

Laeu Nae Seuen 〔勞乃宣〕 卽 Laou Nae Seuen

La Faille, *Jean* Charles de 〔拉非爾〕 十七世紀前半期 比利時人

La Fay, A. 〔拉滙〕 亦作 A. Lafay 二十世紀前半期 法人

Laffite, P. de 〔拉菲特〕 二十世紀初 法人

Lafon, M. A. 〔拉封〕 十九世紀

Lafremoire, H. Ch. de 〔拉佛林抹〕 十九世紀中 法人

Lafrogne, l'Amiral 〔拉夫洛奈〕 二十世紀前半期 法人

Lagally, M. 〔拉迦立〕 二十世紀前半期 德人 著向量算法

Lagasa, Manuel Fernández 〔拉加薩〕 十六世紀 西班牙人

Lagny, Thomas Fantet de 〔拉革尼〕 (1660,11,7—1734,4,12) 法人

La Goupillière, H. de 〔拉谷匹利耳〕 卽 Goupillière

Laloubère, Simon de〔拉盧柏〕 亦作 Loubère 或作 Lalouvère 即 De la Loubère

Lalouvère〔拉盧味〕 即 Laloubère

Lamarle, Ernest〔拉馬爾〕 十九世紀後半期 法人

Lamb, Ernest Horace〔拉穆〕 (1878, 5, 5—) 英人生於南澳洲 研究數理工程

Lamb, *Sir* Horace〔拉穆〕 (1849, 11, 27—) 英人 數理物理學家,著微計算.

Lambert, A.〔藍伯〕 二十世紀 法人

Lambert, C.〔蘭伯〕

Lambert. Johann Heinrich〔藍伯〕 (1728, 8, 26—1777, 9, 25) 法人 發見雙曲三角術,始證π為無理數.

Lambert, Preston A.〔藍伯〕 (1862—1925, 2, 15) 美人 著微積分

Lambert, Walter Davis〔藍伯〕 (1879, 1, 12—) 美人

Lambo, Ch.〔藍波〕 十五世紀後半期 比利時人

Lamé, Gabriel〔拉梅〕 (1795—1870) 法人 闡發數理物理之函數,研究確率學及曲面論.

Lämmel, R.〔蘭麥〕 二十世紀初 瑞士人

Lamond, J. K.〔蘭夢〕 二十世紀前半期 美人

Lamouche, A.〔拉穆奇〕 二十世紀前半期 法人

Lampariello, G.〔蘭帕里夢〕 二十世紀前半期 德人

Lampe, Emil〔蘭佩〕 (1840—1918) 德人 研究數學史

Lampland, Carl Otto〔蘭普郎〕 (1873, 12, 29—) 美人 研究數理天文

Lamprecht, V.〔蘭普累特〕 二十世紀前半期 奧人

Lampridius, Aelius〔蘭普里第阿〕 四世紀

Lamson, K. W.〔蘭孫〕 二十世紀前半期 美人

Lamy, Bernard〔蘭密〕(1640—1715) 荷蘭人

Lanciani, R. A.〔蘭察尼〕十九世紀 英人

Lanczos, Cornelius〔蘭左斯〕二十世紀前半期

Lanczos, Kornel〔蘭左斯〕二十世紀前半期 美人

Landau, A.〔蘭都〕二十世紀 德人

Landau, Edmund〔蘭都〕(1877—) 德人 數學解析家

Landen, John〔蘭登〕亦作 Joseph Landen (1719, 1, 23—1790, 1, 15) 英人
發明以兩橢圓弧表示一雙曲線弧之蘭登定理

Landerbeck, Nils〔蘭得伯克〕(1735—1810) 瑞典人

Landesburg〔蘭德斯勃〕

Landfriedt, E.〔蘭德夫佛里〕二十世紀 德人

Landi, F.〔蘭第〕十九世紀初 義人

Landis, E. H.〔蘭狄斯〕二十世紀

Landis, William Weidman〔蘭狄斯〕(1869, 2, 15—) 美人

Landré, C. L.〔郎得〕十九世紀後半期 德人

Landry, A. E.〔蘭德立〕二十世紀前半期 美人

Landry, Fortuné〔蘭德立〕(1790—?)

Landsberg, G.〔蘭芝堡〕十九及二十世紀 德人

Landsberg, J.〔蘭芝堡〕二十世紀 法人

Landsberg, O.〔蘭芝堡〕十九世紀後半期 德人

Landshut, Johann Karl von〔蘭杏胡特〕十六世紀 德人

Lane, A.〔雷因〕十九世紀後半期 美人

Lane, Erenst Preston〔雷因〕(1886, 11, 28—) 美人 著射影微分幾何學

Lane, H. I.〔雷因〕二十世紀前半期 美人

Lane, J. A. C.〔雷因〕

Lanela, E.〔雷涅納〕 二十世紀

Lanfreducci, Giovanni Battista〔朗法勒度息〕 亦作 Andrea di Giovanni Battista Lanfreducci 十五及十六世紀 義人

Lang Show Chung〔冷守忠〕 十七世紀前半期 中國明崇禎時人

Lang, Sir Peter R. S.〔郎〕 (1851—1926, 7, 5) 蘇格蘭人

Lang, V. v.〔郎〕 十九世紀末 德人

Lange, E.〔朗格〕 十九世紀後半期 德人

Lange, Friedrich〔朗格〕 十九世紀 德人

Lange, G.〔朗格〕 十九世紀末 德人

Lange, Joseph〔朗格〕 十六世紀 丹麥人

Lange, Julius〔朗格〕 十九世紀末 德人

Lange, M.〔朗格〕 二十世紀 德人

Lange, Th.〔朗格〕 十九世紀 德人

Lange, W.〔朗格〕 二十世紀 德人

Langenbeck, R.〔郎根柏克〕 十九世紀後半期 德人

Langenstein, Heinrich von〔郎根斯秦〕 即 Heinrich von Langenstein

Langer, Rudolph E.〔郎澤〕 二十世紀前半期 美人

Langevin, Paul〔蘭給芬〕 (1872—) 法人

Langford, Cooper Harold〔蘭福德〕 二十世紀前半期 美人

Langland, William〔郎蘭〕 (1334—1400) 英人

Langley, Edward M.〔蘭格力〕 十九世紀 英人

Langman, Harry〔郎孟〕 二十世紀前半期 美人

Langsdorf, Karl Christian〔郎斯多夫〕 十八世紀後半期 德人

Lanner, A.〔蘭涅〕 二十世紀 德人

Lansberg, Philip von〔蘭斯柏〕 (1561—1632) 比利時人

Lantz, Johann〔蘭茲〕 十七世紀前半期 德人

Lanz, H.〔蘭次〕 二十世紀前半期 英人

Lanza, Gaetano〔蘭紮〕 (1849—1928, 3, 21) 美人

Lanzut〔蘭組〕 卽 Landshut

Laou Nae Seuen〔勞乃宣〕 (1842｛清道光二十二年｝—1920｛民國九年｝) 中國人

La Paz, Lincoln〔拉巴斯〕 二十世紀前半期 美人

Lapazzaia, Georgio〔拉巴宰〕 十六世紀後半期 義人

Lapeyre, Jean Martial〔拉派耳〕 二十世紀前半期 美人

La Peyrouse, Jean François de〔拉派魯斯〕 十八世紀

Laplace, *Marquis* Pierre Simon de〔拉普拉斯〕 (1749, 3, 23—1827, 3, 5) 法人 爲自牛頓以後之最大天文數學家.著星氣論,天體力學,研究確率學,最小二乘法.發見拉普拉斯係數,拉普拉斯方程等.

La Placette, J.〔拉普拉塞提〕 十八世紀初

Laquière, E. M.〔拉岐耳〕 十九世紀後半期 法人

Larard, C. E.〔拉剌德〕 二十世紀前半期 英人

Larcret〔拉克勒〕 十九世紀

Lardner. Dionysius〔拉德涅〕 (1793,4,3—1859,4,29) 愛爾蘭人 著幾何學三角術及微積分

Larew, Gillie A.〔拉留〕 二十世紀前半期 美女

Largiader, A. P.〔拉查得〕 十九世紀 瑞士人

Larkin, N. J.〔拉京〕

Larmor, A.〔拉摩〕

Larmor, Sir Joseph〔拉摩〕 (1857, 7, 11—) 英人

Larmor, J. S. B.〔拉摩〕 二十世紀前半期 英人

La Roche, E. de〔拉洛〕 卽 De la Roche

La Roque〔拉洛克〕 十七世紀後半期

Larrett, Denham〔拉累特〕 二十世紀 英人

Larsen, V.〔拉辛〕

Laska, V.〔拉斯卡〕 十九世紀末 捷克人

Láska, W.〔拉斯卡〕 十九世紀末

Lasker, Emanuel〔拉斯刻〕 (1868,12,24—) 德人 數學家而爲世界棋手者

Lasley, J. W. *Jr.*〔拉力〕 二十世紀前半期 美人

Lassalle, E.〔拉薩爾〕 十九世紀後半期 德人

Lasswitz, K.〔拉斯尉玆〕 德人

Latham, H.〔雷塔謨〕

Latham, James King〔雷塔謨〕 (1847, 12,—) 英人

Latham, Marcia L.〔雷塔謨〕 (?—1925, 5, 9) 美女 譯笛卡兒幾何學

Latimer, C. G.〔拉替麥〕 二十世紀前半期 美人

Latoon, F.〔拉圖〕 研究幻方

Latta, Robert〔拉塔〕 (1865,6,15—) 英人 研究論理學

Lattès, S.〔拉提斯〕

Latzin, H.〔拉晉〕 二十世紀前半期 奧人

Lauchen, Georg Joachim von〔勞拆〕 卽 Rhæticus

Laudensis, Martinus Garatus〔勞登息〕 十六世紀 法人

Lauder, William〔羅得〕 (1680—1771) 英人

Laue, Max von〔勞〕 (1879, 10, 9—) 德人 研究相對論

Lauer, L.〔勞厄〕 二十世紀初 德人

Laufer, Hans〔羅斐〕 十七世紀 德人

Laugel, L.〔勞革〕 十九世紀末 法人

Laughton, Richard〔拉夫吞〕（？—1726）英人

Laumann, T.〔勞曼〕二十世紀初　德人

Laura, E.〔羅剌〕二十世紀前半期　義人

Lauremberg, Johann Wilhelm〔羅累柏〕（1590—1658）德人

Laurence, E. J.〔羅梭斯〕十九世紀後半期　英人

Laurent, l'Abbe〔勞郎〕研究數理解析

Laurent, Hermann〔勞郎〕（1841—1908）法人　著解析論及確率學

Laurent, Pierre Alphonse〔勞郎〕十九世紀中

Laurès, Clement〔勞累〕二十世紀前半期　法人

Lauricella, G.〔勞里西〕二十世紀　義人

Laurin, P.〔勞鑾〕十九世紀後半期　瑞典人

Lautenschlager. Johann Fridolin〔勞騰士拉革〕十六世紀末　德人

Lautenschläger, M.〔勞騰士拉革〕十九世紀後半期　德人

Lauteschlaeger, G.〔勞特士拉革〕十九世紀　德人

La Vallée-Poussin, C. J. de〔拉發雷浦桑〕卽 Vallée

Laverty, W. H.〔拉味替〕十九世紀後半期　英人

Laves, Kurt〔拉佛斯〕（1866, 8, 24—　）德人　研究數理天文學

Lavoisier, Antoine Laurent〔拉瓦節〕（1743, 8, 26—1794, 3, 8）法人　發明空氣之成分

Lavrov, Piotr Lavrovitch〔拉洛甫〕（1823, 6, 14—1900, 2, 6）俄人

Law, Jean〔羅〕亦作 John Law（1671, 4, 21—1729, 3, 21）英人

Lawless, O. G.〔羅勒斯〕二十世紀前半期　美人

Lawrence, F. W. P.〔羅凌士〕卽 F. W. Pethick-Lawrence

Lawrence, *Miss* Lucile〔羅凌士〕二十世紀前半期　美女

Lawrence, M. Graves〔羅凌士〕二十世紀　奥人

Laws, C. D.〔羅斯〕 二十世紀前半期　美人

Lawson, J.〔羅孫〕 十八世紀

Lawson, R. W.〔羅孫〕 二十世紀

Lawson, W.〔羅孫〕

Lax, Gaspar〔拉克斯〕 (1487—1560, 2, 23) 西班牙人

Lax, William〔拉克斯〕 (1751—1836, 10, 29) 英人

Lay, W. A.〔雷〕 十九及二十世紀　德人

Laying, A. E.〔雷印〕 十九世紀　英人

Lazerri, G.〔拉則利〕 十九世紀後半期　義人

Lazesio, Francesco Feliciano da〔拉濟蘇〕 卽 Feliciano da Lazesio

Lazzarini, M.〔拉撒靈利〕

Lazzarini, V.〔拉撒靈利〕 二十世紀　義人

Lazzeri, G.〔拉則利〕 十九世紀末　義人

Le Che Ngo〔厲之鍔〕 中國清乾隆時人

Le Ying Nan〔黎應南〕 卽 Li Ying Nan

Leang Ling Tsan〔梁令瓚〕 八世紀前半期　中國唐開元時人

Leang Shuh〔梁述〕 七世紀　中國唐貞觀時人

Leaou Kea Show〔廖家綬〕 (1860〔清咸豐十年〕—1890〔清光緒十六年〕) 中國人

Leathem, J. G.〔利忒〕 二十世紀初　美人　研究電磁數理及極限論

Leau, Léopold〔琉〕 十九世紀末　法人

Leauté, H.〔琉提〕 十九世紀後半期　法人　研究偏微分方程

Leavens. D. H.〔勒汾斯〕 二十世紀前半期　美人

Lebedeff, Wera *Myller*〔列柏得夫〕 二十世紀初　德人

Lebesgue, Henri〔雷柏革〕 (1875—　) 法人　函數論大家

Le Besgue, Victor Amédée〔雷柏棠〕(1791—1875) 法人

Le Blond, Auguste Savinien〔勒布隆〕

Le Blond, Guillaume〔勒布隆〕(1704—1781)

Lebon, Ernest〔勒逢〕十九世紀後半期　法人

Leboulleux, L.〔勒波類〕十九世紀後半期　瑞士人

Lebrixa〔雷布里黎〕十五世紀　義人

Le Calvé, A.〔勒卡爾維〕二十世紀　法人

Lecat, Maurice〔勒卡〕二十世紀前半期　比利時人

Lecchi, G. A.〔勒契〕十八世紀中　義人

Lechalas, G.〔勒察拉〕二十世紀初　法人

Lechler, A.〔勒喜勒〕二十世紀　奧人

Le Clerc, Sébastien〔勒克雷爾〕亦作 S. Leclerc (1637—1714) 法人

Leclerc du Salon〔勒克雷爾〕二十世紀　法人

Leclert〔勒克雷特〕

Leconte, T.〔勒康特〕二十世紀前半期　法人

Le Corbeiller, P.〔勒科拜勒〕二十世紀前半期　法人

Le Cordier, P.〔勒科第〕十九世紀後半期　法人

Lecornu, Léon〔勒科奴〕十九世紀末　法人　研究數理物理

Ledingham, John Charles Grant〔勒定哈〕(1875—　) 英人

Lee, Chauncey〔利〕十八世紀　美人

Leechman, J. D.〔利亦孟〕

Leeper, Clement〔利佩〕(1882, 2,—　) 英人

Lees, Charles Herbert〔利茲〕(1864, 7, 28—　) 英人　研究數理物理

Leeuwen, Cornelis van〔利汶〕十七世紀　荷蘭人

Lefébure de Fourcy〔勒非步耳〕十九世紀　法人

Lefebure, L. E.〔勒弗步耳〕(1785—1869) 法人

Lefebvre, B.〔勒非甫耳〕十九世紀 比利時人

Lefèvre, Jaques〔勒非耳〕即 Faber

Lefèvre-Gineau, L.〔勒非耳·季尼〕十八世紀

Leffler, Anna Charlotte〔勒夫勒〕十九世紀

Leffler, Miss Marjorie〔勒夫勒〕二十世紀前半期 美女

Lefort, F.〔勒福耳〕十九世紀中 法人

Lefrancq, E.〔勒弗郎克〕十九世紀末 比利時人

Lefschetz, Solomon〔雷夫哲茲〕(1884, 9, 3—) 俄人 著位相學

Legaut, M.〔雷高〕二十世紀前半期 法人

Legendre, Adrian Marie〔勒戎德〕(1752, 9, 18—1833, 1, 10) 法人 與蘭格倫拉普拉斯爲當時歐洲三大數學家.發明球調和解析,橢圓函數.

Legendre, Francois〔勒戎德〕亦作 F. Le Gendre 十七世紀後半期 法人

Legge, A. di〔勒格〕十九世紀後半期 義人

Legoux, A.〔勒谷〕十九世紀後半期 法人

Legrand, Enrique〔勒格蘭〕二十世紀前半期 法人

Legrand, Pierre〔勒格蘭〕十七世紀 荷蘭人

Legras, Gustav〔勒格刺〕十九世紀末 美人

Le Heux, J. W. N.〔勒休〕二十世紀前半期 德人

Lehmann, Ernst〔雷曼〕十九世紀後半期 德人

Lehmann, G. A,〔雷曼〕二十世紀前半期 瑞士人

Lehmnn, Jacob Wilhelm Heinrich〔雷曼〕十九世紀 德人 著高等力學

Lehmann, M.〔雷曼〕二十世紀 德人

Lehmann, M. B.〔雷曼〕二十世紀 德人

Lehmann, P.〔雷曼〕二十世紀初 德人

Lehmann, R. 〔雷曼〕 二十世紀　德人

Lehmann-Filhés, Rudolf 〔雷曼·菲厄〕 十九世紀　德人

Lehmer, D. H. 〔雷麥〕 二十世紀　美人

Lehmer, Derrick Norman 〔雷麥〕 (1867, 7, 27—　) 美人

Lehmus, D. C. L. 〔利麥〕 十九世紀　德人

Lehnen 〔利內〕

Lehr, A. Marguerite 〔雷耳〕 二十世紀前半期　美人

Leib, D. 〔來布〕 二十世紀前半期　法人

Leib, D. D. 〔來布〕 二十世紀前半期　美人

Leibniz, G. C. I. 〔來布尼茲〕 十九世紀　英人

Leibniz, Gottfried Wilhelm 〔來布尼茲〕 亦作 G.W. Frieherr von Leibnitz (1646, 6, 21 [舊曆]—1716, 11, 14) 德人　發見微積分於1675年10月29日. 始用微積分記號.研究接觸曲線,交跡理論等.

Leigh, C. W. 〔利〕 二十世紀　美人

Leigh, Thomas Bowes 〔利〕 (1867—　) 英人

Leighton, A. 〔雷頓〕 二十世紀　英人

Leighton, R. F. 〔雷頓〕 十九世紀　美人

Leighton, Walter 〔涅頓〕 二十世紀前半期　美人

Leijonmark, Gustaf Adolph 〔來準馬克〕 (1734—1815)

Leineweber, N. 〔來紐威柏〕 二十世紀前半期　德人

Leiste, C. 〔來斯特〕

Leith, J. D. 〔利斯〕 二十世紀前半期　美人

Leitz, H. 〔來茲〕 二十世紀前半期　德人

Leitzmann, H. 〔來茲曼〕 十九世紀末　德人

Leitzmann, Walter 〔來茲曼〕 二十世紀前半期　德人

Leja, F.〔勒札〕 二十世紀前半期 波蘭人

Lejeune, G.〔勒仁〕

Lejeune-Dirichlet, Peter Gustav〔勒仁•狄利士勒〕 卽 Dirichlet

Lekarski, I. C.〔勒卡斯啓〕 二十世紀前半期 布加利亞人

Lelieuvre M.〔勒利甫耳〕 十九世紀後半期 法人

Lely, U. P.〔利力〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Lemaire, J.〔勒美耳〕 二十世紀前半期 法人

Lemaitre, Abbé Georges〔勒美脫〕(1894—) 比利時人 研究相對論

Leman, A.〔利曼〕 二十世紀 德人

Lémeray, E. M.〔勒美累〕 十九世紀末 法人

Lemke〔勒謨刻〕

Lemoch, Ignaz〔勒摩赫〕 十九世紀 奧人

Lemoine, Émile *Michel Hyacinthe*〔勒滿〕 (1840—1912) 法人 研究勒滿點

Lemoine *d'Essoies*, Edmé Marié Joseph〔勒滿〕 (1751—1816)

Lemonnier〔勒摩內〕(1715—1799) 法人

Lemonnier. H.〔勒摩內〕 十九世紀後半期 法人

Le Monnier, Pierre Charles〔勒摩內〕

Lemoyne, T.〔勒抹〕 二十世紀 法人

Lenard, Philipp〔勒納爾〕 (1862, 6, 7—) 德人

Lengauer〔勒高厄〕 十九世紀後半期 德人

Lennes, Nels Johann〔楞涅斯〕 (1874, 6, 15—) 美人生於挪威 著代數,幾何學,三角術,極微解析等書.

Lenness, N. J.〔楞楞思〕

Lense, Jakob〔隆塞〕 二十世紀 荷蘭人

Lense, Josef〔隆塞〕 二十世紀前半期 奧人

Lenthéric〔楞狄立〕十八世紀　法人

Lenz, K.〔楞次〕二十世紀　德人

Lenzen, Victor F.〔楞繒〕二十世紀前半期　美人

Leodamas of Athens〔雷達馬〕亦作 Leodamas von Thasos　紀元前四世紀　雅典人

Leon *Miss* Alice Katharine〔雷翁〕二十世紀前半期　美女

Leon of Athens〔雷翁〕紀元前四世紀　雅典人

Leonard, Clarence J.〔雷納〕二十世紀　美人

Leonard, H. B.〔雷納〕二十世紀初　美人

Leonard, *Miss* Ruth〔雷納〕二十世紀前半期　美女

Leonardo da Vinci〔利那多〕亦作 Leonard de Vinci　(1452—1519,5,2)　義人　貢獻於幾何學及光學

Leonardo de' Antonii〔利那多〕亦作 Léonardo of Cremona　(1380—?)　義人

Leonardo of Pisa〔利那多〕亦作 Leonardo von Pisa　(1180—1250)　義人　原姓爲費波拿西 (Fibonacci 亦作 Bonaccii)，利那多乃其名也.氏於1200年著一代數書,廢棄羅馬數字,改亞剌伯數字.至今通行全球,蓋藉其傳播之力也.

Leonardus Maynardus〔利那達•美那達〕十五世紀後半期　義人

Leonelli, *Guiseppe* Zecchini〔雷涅力〕(1776—1847)　義人

Leotaud, Vincent〔利陶〕(1595—1672)　法人

Le Paige, C.〔勒佩〕十九世紀後半期　法人

Lépinay, A. Mace de〔勒品內〕十九世紀末　法人

Lépinay, J.M. de〔勒品內〕二十世紀初　法人

L'Epine A. le Bourg de〔雷品〕

Le Poivre, Jacob〔勒坡甫耳〕亦作 Jaques Le Poivre　(?—1710,12,)　比利時人

Lepper, Gerald Harper〔列佩〕(1885, 11, 11—) 英人

Lepsius, J.〔列卜修司〕十九世紀 德人

Leray, J.〔勒累〕二十世紀 法人

Lerch, Matyáš〔雷赫〕十九世紀末 捷克人

Le Roux J.〔勒魯〕十九世紀末 法人

Leroy, C. F. A.〔勒啦〕十九世紀前半期 法人 研究幾何學

Le Roy, Édouard〔勒啦〕(1870—) 法人

Léry, Georges〔勒賴〕二十世紀前半期 法人

Le Seur, Thomas〔勒栖〕亦作 T. Leseur (1703—1770, 9, 22) 德人

Leske, Nathanael Gottfried〔勒斯剋〕(1751—1786)

Leslie, H. J.〔勒斯力〕二十世紀前半期 美人

Leslie, Sir John〔勒斯力〕(1766, 4, 16—1832, 11, 3) 蘇格蘭人 研究幾何學及算術哲學

Le Sœur〔勒左〕

Lessells, J. M.〔勒左爾斯〕二十世紀 英人

Lessing, Gotthold Ephraim〔勒新〕(1729, 1, 22—1781, 2, 15) 德人

Lester, Oliver Clarence〔雷斯忒〕(1873,11,3—) 美人 著力學之積分

Le Stourgeon, *Flora* E.〔勒斯忒赫〕二十世紀前半期 美人

Letang, Gustave〔勒坦〕二十世紀前半期 法人

Letronne, Jean Antoine〔勒脫倫內〕(1787—1848) 法人

Lettenmeyer, Fritz〔勒騰邁爾〕二十世紀前半期 德人

Letz, E.〔勒茲〕二十世紀前半期 德人

Leuch, S. R. A.〔琉赫〕十九世紀後半期 瑞士人

Leucippus〔琉息帕斯〕亦作 Leukippos 紀元前五世紀 希臘人

Leudesdorf, Charles〔盧得多夫〕(1853—1924, 8, 10) 英人 譯格里摩拿之

射影幾何學

Leunback, Georg〔琉巴哈〕 十六世紀　德人

Leupold, Jacob〔留坡德〕 (1674—1727) 德人

Leurechon, Jean〔留勒春〕 常署名爲 Hendrick van Etten (1591—1670, 1, 17)

Leuschner, Armin Otto〔類什涅〕 (1868, 1, 16—) 美人　研究數理天文

Le Vavasseur, Raymond〔勒華發栖〕 十九及二十世紀　法人　著數學辭典

Leverrier, Urbain Jean Joseph〔勒汾里〕 (1811, 3, 11—1877, 9, 23) 法人　依數理計算,曾預測天王星

Levi, Beppo〔利末〕 (1875—) 義人

Levi, E. E.〔利末〕 二十世紀初　義人

Levi, Friedrich〔利末〕 二十世紀前半期　德人

Levi ben Gerson〔利未·本·晨爾孫〕 (1288—1344) 猶太人

Levi-Civitá, Tullio〔利未·奇微塔〕 (1873—) 義人　發表絕對微分學

Levinas, E.〔雷微那〕 二十世紀前半期　法人

Levinson, Horace C.〔利焚遜〕 二十世紀　英人

Levita *der Deutsche*, Elias〔雷微塔〕 (1472—1549) 德人

Levitzki, Jacob〔利未茲啓〕 二十世紀前半期　德人

Levot, Prosper〔勒服〕

Lévy, A.〔雷維〕

Levy, F.〔雷維〕 二十世紀　德人

Levy, Harris〔雷維〕 二十世紀前半期　瑞士人

Levy, Hyman〔雷維〕 (1889, 3, 7—) 蘇格蘭人　著數學教科書及航空學

Lévy, Lucien〔雷維〕 十九世紀末　法人　數學解析家

Lévy, Maurice〔雷維〕 (1838—1910) 法人　著圖解靜力學

Lévy, Paul〔雷維〕 (1886—) 法人　著解析函數

Levy, Sophia H.〔雷維〕 二十世紀前半期 美人

Lewent, Leo〔雷溫〕 二十世紀 德人 著等角寫像法

Lewickyj, W.〔勒尉啓〕 亦作 W. Lewicky 十九世紀末 波蘭人

Lewis A. B.〔留伊斯〕 二十世紀前半期 美人

Lewis, Anna D.〔留雷斯〕 二十世紀前半期 美人

Lewis, C. I.〔留雷斯〕 二十世紀前半期 美人 著記號論理學

Lewis, F. A.〔留雷斯〕 二十世紀前半期 美人

Lewis, Florence P.〔留雷斯〕 二十世紀前半期 美人

Lewis, George Cornwall〔留雷斯〕 十九世紀後半期 英人

Lewis, Gilbert Newton〔留雷斯〕 (1875,10,23—) 美人 研究數理化學

Lewis, T. C.〔留雷斯〕 十九世紀

Lewis, W. J.〔留雷斯〕 (1847, 1, 16—1926, 4, 16) 英人 研究幾何結晶學

Lewitt, M.〔琉尉特〕 二十世紀 德人

Lewy, Hans〔琉歲〕 二十世紀前半期 德人

Lexell, Anders Johann〔勒克舍爾〕 (1740—1784) 瑞士人

Lexis, Wilhelm〔勒希斯〕 (1837—1914) 德人

Leybourn, William〔來部倫〕 亦稱爲 O. Wallinby (1626—1700) 英人

Leyde, Grace〔來第〕 二十世紀前半期 英女

Leywourn, William〔雷塽綸〕 十七世紀 英人

Lezinas, Georges A.〔勒進納〕 二十世紀前半期 法人

Lezius, Jos.〔勒齊斯〕 二十世紀 德人

L'Hospital, Guillaune François Antoine de〔勞批他〕 亦作 Marquis de l'Hospital 或 Marquis de l'Hopital 或 L'Hopital 又稱 Saint Mesme (1661—1704, 2, 2) 法人 著無窮小解析學一書,促進微積分,使由法國及遍全歐.

L'huilier, Simon *Antoine Jean*〔盧利〕 (1750, 4, 24—1840, 3, 28) 瑞士人 研究

多邊形及多面形之測量與作法.

Li Chang Mow〔李長茂〕 十七世紀　中國明及清時人

Li Chaou Lo〔李兆洛〕 (1769{清乾隆三十四年}—1841{清道光二十一年}) 中國人

Li Che〔李治〕 元史誤作李冶 (1178{宋淳熙五年}—1265{宋咸淳元年}) 或(1192{宋紹熙三年}—1279{宋祥興二年}) 中國人　著測圓海鏡及益古演段

Li Chi Tsao〔李之藻〕 亦作 Li Chih Tsao (?—1631{明崇禎四年}) 中國人

Li Ching Tien〔李經天〕 一作李天經　十七世紀後半期　中國明崇禎時人

Li Chun〔李惇〕 十八世紀後半期　中國清乾隆時人

Li Chun Feng〔李淳風〕 卽 Li Shun Fung

Li Chung〔李翀〕 十四世紀後半期　中國明洪武時人

Li Chung Lun〔李鍾倫〕 十七世紀末　中國清康熙時人　李光地之子

Li Fan〔李梵〕 一世紀後半期　中國後漢時人

Li Hwang〔李潢〕 (?—1811{清嘉慶十六年}) 中國人

Li Juan〔李銳〕 (1773{清乾隆三十八年}—1817{清嘉慶二十二年}) 中國人

Li Kēen〔李謙〕 十三世紀後半期　中國元至元大德時人

Li Kwang Po〔李光坡〕 十七世紀　中國清初人　李光地之弟

Li Kwang Te〔李光地〕 (1642{明崇禎十五年}—1718{清康熙五十七年五月}) 中國人

Li Ma Tou〔利瑪竇〕 卽 Matteo Ricci

Li Nee Hing〔李業興〕 六世紀前半期　中國後魏時人

Li Seih Fan〔李錫蕃〕 (1823{清道光三年}—1850{清道光三十年}) 中國人

Li Shaou Kuh〔李紹穀〕 中國宋時人

Li She Poo〔李時溥〕 十九世紀前半期 中國清道光時人

Li She Teh〔李世得〕 (1663〔清康熙二年〕—1706〔清康熙四十五年〕) 中國人

Si Shan Lan〔李善蘭〕 (1809〔清嘉慶四年正月〕—1882〔清光緒八年十月〕) 中國人

Li Shu〔隸首〕 亦作 Li Shou 紀元前二十七世紀 中國黃帝時人

Li Shun Fung〔李淳風〕 亦作 Li Chun Feng (602〔隋仁壽三年〕—670〔唐咸亨元年〕) 中國人

Li Teh Fang〔李德芳〕 十四世紀末 中國明洪武時人

Li Teh King〔李德卿〕 十三世紀中 中國宋淳祐時人

Li Teh Tsae〔李德載〕 十三世紀 中國宋元時人

Li Tien Ching〔李天經〕 卽 Li Ching Tien

Li Ting Ching〔李鼎徵〕 十七世紀 中國清初人 李光地之弟

Li Tseih〔李籍〕 中國宋時人

Li Tsun E〔李遵義〕 六世紀 中國南北朝人

Li Tsze Kin〔李子金〕 十七世紀後半期 中國清康熙時人

Li Tuh Pei〔李篤培〕 (1575〔明萬曆三年〕—1621〔明天啓元年〕) 中國人

Li Wen I〔李文一〕 十三世紀 中國宋元時人

Li Yeh〔李冶〕 卽 Li Che

Li Ying Nan〔黎應南〕 亦作 Le Ying Nan 十九世紀前半期 中國清嘉慶時人

Liadov, Mortyn Nokolaevich〔力亞多〕 二十世紀前半期 俄人

Liagre, Jean Baptiste Joseph〔力亞格耳〕 十九世紀中 比利時人 研究誤差論

Liapounoff A.〔力亞補諾夫〕 亦作 A. Liapounov 二十世紀初 俄人

Liapounov, A.〔力亞浦諾夫〕即 A.Liapounoff

Liard, Louis〔力亞德〕(1846—) 法人

Libman, E. E.〔利布曼〕二十世紀前半期　英人

Libri, Guglielmo〔利布立〕亦作 Guil Libri 或 Guillaume Libri (1803, 1, 2—1869, 9, 28) 義人　數學史專家

Licht, Balthasar〔利特〕十五世紀末　德人

Lichte, H.〔力喜特〕二十世紀前半期　德人

Lichtenberg, Georg Christoph〔力喜騰堡〕(1744—1799)

Lichtenfeld, G. J.〔力喜騰菲〕十九世紀後半期　波蘭人

Lichtenstein, Leon〔力喜騰斯泰〕(1878—1933, 8, 21) 德人　著積分方程

Lichtscheidt, Ferdinand Hefreich〔力喜晒特〕(1661—1707) 德人

Licks, H. E.〔力克斯〕二十世紀　美人　著遊戲數學

Lidstone, George James〔力得斯吞〕(1870, 12, 11—) 英人

Lie, *Marius* Sophus〔李〕(1842, 12, 17—1899, 2, 18) 挪威人　研究連續羣論. 發見相切變換法

Lieber. H.〔利柏〕十九世紀末　德人

Lieber, H. G.〔利柏〕二十世紀前半期　美人

Lieber, L. R.〔利柏〕二十世紀前半期　美人

Liebermann, F.〔利柏曼〕十九世紀後半期　德人

Liebermeister, C.〔利柏美斯忒〕十九世紀後半期　德人

Liebert, Arthur〔利柏特〕(1878, 11, 10—) 德人

Liebhard〔李布哈〕即 Camerarius

Liebheit, E.〔李布亥〕十九世紀後半期　德人

Liebisch, T.〔利比什〕二十世紀初　德人

Lieblein, R.〔利布來〕二十世紀

Liebmann, Heinrich〔李布曼〕(1874—) 德人 著非歐幾何學及微分方程式

Liedloff, W.〔李得羅夫〕二十世紀前半期 德人

Liénard, A.〔呂那德〕二十世紀前半期 法人

Liers, E.〔利爾斯〕十九世紀末 德人

Lietke, A.〔利特刻〕十九世紀後半期 德人

Lietzmann, Hans〔利次曼〕(1875, 3, 2—) 德人

Lietzmann, Walter〔利次曼〕二十世紀初 德人

Liévano, Indalecio〔呂凡諾〕十九世紀 可倫比亞人

Ligda, Paul〔林達〕二十世紀 美人 著代數教授法

Light, G. H.〔賴特〕二十世紀前半期 美人

Lightfoot, Ben〔賴特佛〕(1888, 1, 30—) 英人 研究測地術

Lightfoot, J.〔賴特佛〕二十世紀 英人

Lignères, Jean de〔歷涅累〕 亦作 Johannes de Liverius 或 Lineriis 或 Liveriis (1300—1350) 法人

Ligowski, Wilhelm〔力高斯啓〕(1821—1893) 德人

Liguine, V.〔力基內〕十九世紀後半期 烏克蘭(Ukraine)人

Lilienfeld, J.〔力里斐德〕二十世紀初 德人

Lilienthal, Reinhold von〔力里退〕 十九及二十世紀 德人 研究微分幾何學及曲線論

Lilius, Aloysius〔力盧斯〕 亦作 Ludovico Lilio 或 Luigi Lilio Ghiraldi (1510—1576) 義人

Liljeström, A.〔利澤斯倫〕

Lille〔里爾〕十八世紀中

Lillius, Z.〔力利阿〕十五世紀 義人

Liman, O.〔利孟〕十九世紀　德人

Limbourg, H.〔靈部〕

Limburg, H.〔靈堡〕二十世紀前半期　荷蘭人

Lin Kaou〔林高〕十六世紀前半期　中國明嘉靖時人

Lina Jaunez, Mlle〔林那•堯內〕十九世紀中　法女

Lind, Samuel Colville〔林德〕(1879, 6, 15—　) 美人　研究電子數理

Lindblad, B.〔林德布拉〕二十世紀前半期　瑞典人

Lindeberg, J. W.〔林得柏〕十九世紀　芬蘭人　研究等周問題

Lindelöf, Ernst〔林德洛夫〕亦作 E. Lindeloef 或 E. L. Lindelöf, (1870—　)
　芬蘭人　研究函數論

Lindelöf, Lorentz Leonard〔林德洛夫〕(1827—1908) 芬蘭人

Lindemann, Charles Arthur〔林得曼〕二十世紀前半期

Lindemann, *C.L.* Ferdinand〔林得曼〕(1852—　) 德人　始證π為超越數

Lindemann, L.〔林得曼〕二十世紀　德人

Lindenau, B. A.〔林得瑙〕(1780—1854) 德人

Linders, O.〔林得斯〕二十世紀　德人

Lindgren, B.〔林德格稜〕二十世紀初　瑞典人

Lindhagen, A.〔林德哈根〕十九世紀後半期　瑞典人

Lindman, C. F.〔林德孟〕十九世紀末　瑞典人

Lindner, P.〔林德訥〕二十世紀　德人

Lindow, Martin〔林道〕二十世紀前半期　德人　著微積分,微分方程.

Lindsay, R. B.〔林賽〕二十世紀前半期　美人

Lindsey, Louis〔林稷〕二十世紀前半期　美人

Lindstedt, A.〔林德斯忒〕十九世紀後半期　俄人

Lindwall, B.〔林德窩爾〕二十世紀前半期　瑞典人

Lindwart, E.〔林窩特〕 二十世紀前半期 德人

Linebarger, Charles Elijah〔林湼巴革〕 (1867,2,21—) 美人 研究微積分

Linehan, P. H.〔林湼哈〕 二十世紀前半期 美人

Lineriis, Johannes de〔歷湼累〕 卽 Lignères

Linfield, B. Z.〔林飛德〕 二十世紀前半期 法人

Linfoot, E. H.〔林佛特〕 二十世紀前半期 英人

Linford, Leon B.〔林福德〕 二十世紀前半期 美人

Ling, George Herbert〔令〕 (1874,1,15—) 坎拿大人 研究羣論及射影幾何學

Ling Kwan〔凌埦〕 (?—1862〔清同治元年五月〕) 中國人

Ling Lun〔伶倫〕 紀元前二十七世紀 中國黃帝時人

Ling Ting Kan〔凌廷堪〕 (1755〔清乾隆二十年〕—1809〔清嘉慶十四年〕) 中國人

Ling Seaou〔凌霄〕 中國清時人

Linker, J. B.〔林刻〕 二十世紀前半期 美人

Linnemann, M.〔林湼曼〕 二十世紀初 德人

Linsenbarth, H.〔林森拔斯〕 十九世紀 德人

Lionardo da Vinci〔利那多〕 卽 Leonardo da Vinci

Lionnet〔路湼〕 十九世紀 法人

Liouville, Joseph〔廖維爾〕 (1809—1882) 法人 創刊廖維爾數學雜誌於1838年

Lipka, Joseph〔力普卡〕 (1860—1924, 1, 15) 美人

Lipke, J.〔里普刻〕 二十世紀前半期 美人

Lipkine, L.〔利普琴〕 亦作 L. Lipkin 十九世紀後半期 俄人

Lippershey, Hans〔利拍錫〕 十七世紀初 南非洲人

Lippmann, Adolf〔李字曼〕二十世紀　德人

Lippmann, Edward O. von〔李字曼〕二十世紀　德人

Lipps, G. F.〔利普斯〕十九及二十世紀　瑞士人

Lipps, Hans〔利普斯〕二十世紀前半期　德人

Lips〔力普斯〕二十世紀　德人

Lipschitz, Rudolf〔李希兹〕(1832—1903) 德人　著解析學及微積分

Lissajous, Jules-Antoine〔李薩喬〕(1822—1880)　法人

Listing, Johann Benedict〔李斯廷〕(1808—1882)　德人　著位置解析

Lit, R. R.〔李特〕十九世紀後半期　荷蘭人

Little, A. S.〔力特爾〕二十世紀前半期　英人

Little, Charles Newton〔力特爾〕十九世紀後半期　美人

Little, Edward Milton〔力特爾〕二十世紀前半期　美人

Little, J.〔力特爾〕

Littlewood, John Edensor〔力特武德〕(1885, 6, 9—　) 英人　著實函數論

Littrow, J. J. v.〔力特牢〕十九世紀前半期　奧人

Litwinowa-Iwaschinka, E. von〔利文諾瓦·伊窩細卡〕十九世紀後半期　瑞士人

Litzingen, Marie〔利晉澤〕二十世紀前半期　美女

Liu Che〔劉智〕三世紀後半期　中國晉時人

Liu Chih〔劉歆〕字子駿　(?〔漢甘露初年〕—23〔漢更始元年〕) 中國人

Liu Chih〔劉基〕亦作 Liu Chi　(1311〔元至大四年〕—1375〔明洪武八年正月〕) 中國人

Liu Cho〔劉焯〕(544〔梁大同十年〕—610〔隋大業六年〕) 中國人

Liu Fung Luh〔劉逢祿〕(1773〔清乾隆三十八年〕—1829〔清道光九年〕) 中國人

Liu Hang〔劉衡〕(1776〔清乾隆四十一年〕—1841〔清道光二十一年〕) 中國人

Liu Heang〔劉向〕紀元前一世紀 中國漢時人

Liu He Tsae〔劉熙載〕(1813〔清嘉慶十三年〕—1881〔清光緒七年〕) 中國人

Liu Heuen〔劉炫〕六世紀後半期 中國隋時人

Liu Hsiao Sun〔劉孝孫〕六世紀後半期 中國隋時人

Liu Hsiao Yung〔劉孝榮〕十二世紀後半期 中國宋乾道時人

Liu Hui〔劉徽〕三世紀後半期 中國三國時魏人 魏景元四年(即263年)著海島算經

Liu Hung〔劉洪〕二世紀後半期 中國東漢延熹光和時人

Liu Hung〔劉洪〕十五世紀後半期 中國明成化時人

Liu He Sow〔劉羲叟〕十一世紀 中國宋時人

Liu I〔劉益〕十二世紀 中國宋時人 著議古根源

Liu Jin E〔劉日義〕十九世紀前半期 中國清道光時人

Liu Ju Hsieh〔劉汝諧〕十三世紀中 中國宋元時人 撰如積釋鎖

Liu Ping Chung〔劉秉忠〕(1216〔宋嘉定九年〕—1274〔宋咸淳十年〕) 中國人

Liu Seang Kwei〔劉湘煃〕中國清時人

Liu Shih Lu〔劉士隆〕十五世紀前半期 中國明永樂時人

Liu Ta Chien〔劉大鑑〕中國宋末人

Liu Taou Yung〔劉道用〕十二世紀末 中國金時人

Liu Yew〔劉祐〕六世紀後半期 中國隋時人

Liu Yo Yun〔劉嶽雲〕(1849〔清道光二十九年〕—1917〔民國六年〕) 中國人

Livens, G. H.〔利文斯〕二十世紀前半期 英人

Liveriis, Johannes de〔歷味理〕即 Lignères

Ljungh, A. T.〔章〕十九世紀末 瑞典人

Lloyd, Humphrey〔魯意〕十九世紀 數理物理家

Lo Hêa Hung〔落下閎〕紀元前二世紀 中國漢武帝時人

Lo Shih Lin〔羅士琳〕(1800{清嘉慶五年}—1860{清咸豐十年}) 中國人

Lo Tang Fung〔駱騰鳳〕(1770{清乾隆三十五年}—1842{清道光二十二年八月}) 中國人

Lo Yo Ku〔羅雅谷〕即 Giacomo Rho

Lobachevsky, Nicolai Ivanovitch〔羅巴瑟斯啓〕亦作 Nicholaus Lobatschewski 或 Nicolái Ivánovich Lobachévski 或 N.J. Lobatschewsky 或 N. Lobatchewski 或 Lobatscheískij (1793, 11, 2〔舊曆爲10月22日〕—1856, 2, 24〔舊曆爲2月12日〕 俄人 發見非歐幾何學

Lobatto, R.〔羅巴托〕十九世紀前半期 法人

Lobell, Frank〔羅貝爾〕二十世紀前半期 法人

Lobenstein, K.〔羅本史泰〕二十世紀初 德人

Locher, L.〔羅奇〕二十世紀前半期 瑞士人

Lochs, G.〔陸次斯〕二十世紀 德人

Lock, John Bascombe〔羅克〕十九世紀 英人 研究三角術

Locke, George T.〔陸克〕(1872, 2, 13—) 英人

Locke. John〔陸克〕(1632, 8, 29—1704, 10, 28) 英人

Locke, L.〔陸克〕二十世紀 美人

Locke, Leslie Leland〔陸克〕二十世紀前半期 美人

Lockhart, J.〔羅剋特〕十九世紀前半期 英人

Lockyer, *Sir* Joseph Norman〔羅絜〕(1836, 5, 17—1920, 8, 16) 英人

Lodge, Alfred〔洛治〕(1854, 3, 21—) 英人 著微積分

Lodge, *Sir* Oliver *Joseph*〔洛治〕(1851, 6, 12—) 英人 數理物理學家

Loeber, K.〔勒柏〕二十世紀前半期 德人

Loeffler, A.〔羅夫勒〕 二十世紀 法人

Loeffler, E.〔羅夫勒〕 卽 E. Löffler

Loewen, O. B.〔洛汶〕 二十世紀前半期 美人

Loewenberg, K.〔洛汶柏〕 二十世紀前半期 美人

Loewy, Alfred〔盧威〕 (1873—) 德人 著代數學

Löffler, Eugen〔羅夫勒〕 亦作 E. Loeffler 二十世紀前半期 德人

Logsdon, Mrs. Mayme Irwin〔羅格斯頓〕 二十世紀前半期 美女 著初等數學解析

Lohnstein, R.〔羅斯泰〕 十九世紀後半期 德人

Lokotsch, K.〔羅科許〕 二十世紀 德人

Lombardi, Domenico〔倫巴狄〕 二十世紀初 義人

Lommel, Eugen〔羅麥〕 (1837—1899) 德人

Lonchampt, A.〔倫產普〕 十九世紀後半期 法人

London, Franz〔倫敦〕 (1863—1917) 德人

Loney, Sidney Luxton〔隆內〕 (1860, 3, 16—) 英人 著數學教科書

Long, Edith〔隆〕 二十世紀 美人

Long, John〔隆〕 十八世紀前半期

Long, J. K.〔隆〕 (1905—1933, 12, 30) 美人

Long, *Miss* M.〔隆〕 二十世紀前半期 英女

Long, Roger〔隆〕 (1680, 2, 2—1770, 12, 16) 英人 天文數理家

Long, T. R.〔隆〕 二十世紀前半期 美人

Longchamps, Gobierre de〔龍朱〕 十九世紀後半期 法人

Longfield, M.〔郞飛爾德〕

Longley, T. R.〔龍雷〕 二十世紀前半期 美人

Longley, William Raymond〔龍雷〕 (1880,10,28—) 美人 著代數,幾何學,

微積分及數學公式等書.

Longo, Signorina〔龍哥〕

Longobardi, Nicolô〔龍華民〕(1565—1655, 12, 11) 義人 明萬歷二年(即1597年)來中國

Longomontanus, Christian S.〔龍哥蒙坦那〕十七世紀前半期 丹麥人 天文數理家

Lonicerus, Adam〔隆尼塞拉〕十六世紀 德人

Lony, G.〔隆尼〕二十世紀 德人

Loo, P.J. van〔盧〕二十世紀前半期 荷蘭人

Loo Tsing〔魯靖〕中國南北朝人

Looman, H.〔盧曼〕二十世紀前半期 荷蘭人

Loomis, Elias〔羅密士〕(1811, 8, 7—1899, 8, 15) 美人 研究數學天文氣象

Loomis, E. S.〔羅密士〕二十世紀初 美人

Loor, B. de〔洛耳〕二十世紀前半期 荷蘭人

Lopez de Corella, Alfonzo〔羅佩司〕即 Corella

Loppe, F.〔羅佩〕二十世紀 法人

Lorand, S.〔羅郎〕十九世紀末 羅馬利亞人

Lörcher, O.〔羅捨〕二十世紀 德人

Lorentz, F.〔羅倫玆〕十九世紀 德人

Lorentz, Hendrick Antoon〔羅倫玆〕(1853, 7, 18—1928, 2, 4) 荷蘭人

Lorenz, Johann Friederich〔羅倫徵〕(1738—1807) 德人

Lorenz, Ludwig〔羅倫徵〕(1829—1891) 丹麥人

Lorenz, P.〔羅倫徵〕二十世紀前半期 德人

Lorenz, R.〔羅倫徵〕二十世紀初 德人

Lorey, Adolf〔羅累〕十九世紀 德人

Lorey, W.〔羅累〕 二十世紀　德人

Lorgna, Antonio Maria〔羅格那〕（1735—1796）義人

Lori, F.〔羅立〕 二十世紀前半期　義人

Loria, Gino〔羅立亞〕 十九世紀後半期　義人　研究數學史

Loritus Glareanus, Henricus〔羅立.葛拉里納〕 亦作 Loriti 或 Loreti 卽 Glareanus

Lorsch, Ad.〔羅耳士〕

Lortze, John de〔羅子〕 卽 Ortega

Losada y Puga, Cristóbal de〔羅沙達.伊.譜伽〕 二十世紀前半期　秘魯人

Löschner, Hans〔洛什湼〕 二十世紀　德人

Losehand, O.〔羅舍漢〕 二十世紀初　德人

Lossius, Lucas〔羅栖斯〕 十六世紀中　德人

Losskij, N. O.〔羅斯吉〕 二十世紀　捷克人

Lotter〔羅忒〕 十五世紀後半期　德人

Lotteri, Angelo Luigi〔羅忒里〕（1760—1840）義人

Lottin, J.〔羅廷〕 二十世紀初　瑞士人

Lottini, A.〔羅廷尼〕 十六世紀　法人

Lottner, Eduard〔羅特湼〕（1826—1887）德人

Lötzbeyer, Ph.〔陸次伯業〕 二十世紀前半期　德人

Lotze, Alfred〔陸宰〕 二十世紀前半期　德人　著點及向量解析

Lotze, Rudolf Hermann〔陸宰〕（1817, 5, 21—1881, 7, 1）德人

Loubère, Antoine de la〔盧柏〕 卽 De la Loubère, Antoine

Loubère, Simon de la〔盧柏〕 卽 De la Loubère, Simom

Loud, F. H.〔勞德〕（1852—1927）美人

Loud, G. H.〔勞德〕 十九世紀末　美人

Loudon, William James〔勞頓〕

Louis, Henry〔路易〕(1855, 12, 7—) 英人　研究數理工程

Lourié, S.〔路里〕二十世紀初　德人

Lousada, Miss Abigial〔盧薩達〕英女

Louville, Chevalier de〔勞維爾〕十八世紀　法人

Lovas, Andrés Garcia de〔羅發斯〕十六世紀　西班牙人

Love, Augustus Edward Hough〔陸甫〕(1863—) 英人　著彈性數理及微積分

Love, Clyde E.〔陸甫〕二十世紀前半期　美人　著解析幾何微積分.

Love, J. L.〔陸甫〕十九世紀末　美人

Lovegrove, Edwin William〔拉味格洛夫〕(1868—) 英人

Lovett, C. O.〔羅味特〕十九世紀末　美人

Lovett, Edgar Odell〔羅味特〕(1871, 4, 14—) 美人　研究幾何學及物理天文

Lovitt, William Vernon〔羅微特〕二十世紀前半期　美人　著積分方程

Low, A. M.〔羅〕(1888—) 英人

Low, A. R.〔羅〕二十世紀前半期　英人

Low, B. B.〔羅〕二十世紀前半期　美人

Low, David Allan〔羅〕(1857, 2, 9—) 英人　著實用幾何學及作圖

Lowan, A. N.〔羅聞〕二十世紀前半期　美人

Lowell, Abbott Lawrence〔羅厄爾〕(1856—) 美人

Lowell, Percival〔羅厄爾〕(1855,3,13—1916,11,12) 美人　預測冥王星位置

Löwner, Karl〔駱湼〕亦作 Karl Loewner (1893—) 俄人

Lowry, H. V.〔勞利〕二十世紀前半期　英人

Lowson, G.〔勞遜〕

Loyarte, R. G.〔羅雅特〕二十世紀前半期　阿根廷人

Loyau, Achille〔臘耶〕十九世紀後半期　法人

Lubbe, S. F.〔拉比〕十九世紀　法人

Lubben, R. G.〔拉本〕二十世紀前半期　德人

Lubbock, J. W.〔拉布克〕十九世紀前半期　英人

Lubbock, Sir William〔拉布克〕十九世紀　英人　採用拉普拉斯之確率主義

Lubin, Clarence Isaac〔拉丙〕二十世紀前半期　美人

Lübsen, H. B.〔律布森〕十九世紀中　德人

Luby, J.〔盧比〕十九世紀前半期　愛爾蘭人

Luby, W. A.〔盧比〕二十世紀前半期　美人

Luca da Firenze, Maestro〔劉卡達斐棱〕十四世紀末　義人　瑪竇達斐棱(Mates da Firenze)之子

Luca de Borgo〔劉卡·得·波哥〕亦作 Luca di Borgo 卽 Pacioli

Lucar, Cyprian〔琉卡〕十六世紀　英人

Lucas, Félix〔劉卡司〕十九世紀後半期　法人

Lucas, *François* Édouard *Anatole*〔劉卡司〕(1842—1891)　法人　研究數論，遊戲數學

Lucas, Henry〔劉卡司〕(?—1663, 6, 22)　英人　設立數學講座於英國劍橋大學

Lucas, Lossius〔劉卡司〕十六世紀　德人

Lucas di Burgo〔劉卡司〕卽 Pacioli

Lucian〔琉啓安〕亦作 Lukianos　(125—180)　希臘人

Lucianus〔盧細納〕二世紀　希臘人

Luck, J. J.〔盧克〕二十世紀前半期　美人

Lucke, B.〔呂剋〕二十世紀前半期　德人

Luckey, P.〔盧岐〕 二十世紀前半期　德人　著直線圖解術

Lucretius, Titus〔魯克雷雕斯〕 (96 ? B. C.—55 B. C.) 羅馬人

Lüdeke. O.〔呂得刻〕 十九世紀後半期　德人

Ludendorff, Hans〔呂登多夫〕 二十世紀　德人

Lüders, O.〔呂得斯〕 二十世紀初　德人

Ludewig, P.〔盧得維〕 二十世紀初　德人

Ludlam, William〔拉德蘭〕 (1718—1788) 英人

Ludlow, H. H.〔拉德羅〕 (？—1926, 8, 14) 美人

Ludolff〔羅道夫〕 卽 Rudolff

Ludolph, G. L.〔羅道佛〕 二十世紀前半期　荷蘭人

Ludolph van Ceulen〔羅道佛〕 亦作 Ludolf van Ceulen 卽 Van Ceulen

Ludovico Alt〔羅道韋科•奧爾特〕 卽 Alt

Ludwig H.〔呂易〕 十九世紀　德人

Ludwig, W.〔呂易〕 二十世紀初　德人

Luebsen, H. M.〔盧布森〕 十九世紀　德人　著解析學及高等幾何學

Luh Tseih〔陸績〕 三世紀　中國三國時吳人

Luh Yen〔六嚴〕 十九世紀中　中國清道光時人

Luhmann, F. von〔盧曼〕 十九世紀　德人

Luini, Francesco〔盧伊泥〕 亦作 F. Luino (1740—1792) 義人

Lukacs, E.〔盧卡斯〕 二十世紀　奧人

Lukács, F.〔盧卡斯〕 二十世紀前半期　德人

Lukasiewicz, Jan〔盧迦西維次〕 (1875—　) 波蘭人

Lukat, M.〔盧卡特〕 十九及二十世紀　德人

Lullus, Raymundus〔呂盧斯〕 亦作 Raimundus Lullus 或 Raymond Lully 或 Ramon Lull 或 R. Lullius (1235—1315) 法人

Lummel, H.J. van〔蘭美爾〕 二十世紀初 荷蘭人

Lund, Thomas〔倫德〕 十九世紀中 英人

Lundahl, C. F.〔蘭達爾〕 二十世紀前半期 瑞典人

Lundberg, E.〔蘭柏〕 二十世紀前半期 瑞典人

Lundberg, F. I.〔蘭柏〕 二十世紀初 瑞典人

Lung Show〔龍受〕 八世紀後半期 中國唐貞元時人

Lung Show Yih〔龍受益〕 中國宋時人

Lunis, Guglielmo de〔蘭尼斯〕 十三世紀 義人

Lunn, Arthur Constant〔蘭〕 (1877, 2, 19—) 美人

Lunn, J. R.〔蘭〕 十九世紀中 英人

Lunnon, R. G.〔蘭努〕 (?—1931, 1, 25) 英人

Lupton, Sydney〔拉普頓〕 十九世紀 英人

Lurie, A. J.〔盧里〕 二十世紀前半期 俄人

Lüroth, F.〔呂洛司〕 十九世紀後半期 德人

Lüroth, Jacob〔呂洛司〕 (1844—1910) 德人

Lurquin, C.〔盧岐〕 二十世紀前半期 比利時人

Lurtz, E.〔琉茲〕 十九世紀後半期 羅馬利亞人

Lusin, Nicolas〔魯新〕 (1883—) 俄人

Lusk, Hilton Frank〔琉斯克〕 二十世紀前半期 美人

Lusternik. L.〔魯斯忒尼〕

Luteyn, P.〔路條〕 二十世紀前半期 美人

Luther, Eduard〔路得〕

Luther, F. S.〔路得〕 (1851—1928, 1, 4) 英人

Luther, Martin〔路得〕 (1483, 11, 10—1546, 2, 18) 德人

Lütkemeyer, G.〔呂刻邁爾〕 二十世紀初 德人

Lutz, E.〔盧次〕 二十世紀　德人

Lutz, H. F.〔盧次〕 二十世紀　美人

Luvini, John〔呂文尼〕

Luy Tsung〔雷宗〕 中國明時人

Luyken, W.〔呂懇〕 二十世紀初　德人

Luzzato〔盧紮托〕

Lwowski, W.〔倭斯啓〕

Lyche, R. T.〔力奇〕 二十世紀前半期　挪威人

Lyddon-Roberts, P.〔呂頓·羅伯〕 二十世紀　英人

Lydon, Noel S.〔力頓〕 二十世紀　英人

Lyle, G. A.〔力爾〕 二十世紀前半期　美人

Lyle, *Sir* Thomas Ranken〔力爾〕 (1860, 8, 26—) 英人

Lyman, Elmer Adelbert〔呂孟〕 (1861,7,27—) 美人　著代數幾何及三角術

Lyman, Theodore〔呂孟〕 (1874, 11, 23—) 美人　研究數理物理

Lynch, Arthur〔林赤〕 二十世紀前半期　生於澳洲

Lynch, D. J.〔林赤〕 二十世紀前半期　美人

Lyne, James〔來因〕 十八世紀前半期　美人

Lyon, I.〔來溫〕 十九世紀後半期　法人

Lyonne, De〔來溫內〕

Lyons, Israel〔里昂〕 (1739—1775) 英人

Lysis of Tarentum〔力息斯〕 紀元前四世紀　希臘人

Lyte, Henry〔來特〕 十七世紀前半期　英人

Lyte, H. C. M.〔來特〕 十九世紀後半期　英人

Lytle, E. B.〔來特爾〕 二十世紀前半期　美人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於天文數學物理化學生物地質氣象心理等科之稿件及新刊學術書藉之介紹與批評海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名與雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙與黑色墨水繪畫或製成照片或附寄原圖

五・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

六・稿件登載後本刊略備現金或複印本以答雅意惟願受複印本作報酬者應預先聲明

七・稿件內容本刊得酌量增刪但不願意者請預先聲明

八・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第四卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊第四卷第四期目錄

國立武漢大學文哲季刊第三卷第三號目錄

中南情報

第四期目錄

第五六期目錄

定　價　每冊五分全年廿冊一元
出版者　國立暨南大學海外文化事業部

學風月刊

第四卷 第六期 目錄

第四卷 第七期 目錄

編印及發行：　安慶安徽省立圖書館
定　　　價：　每冊零售一角全年十期
連郵一元

國立武漢大學理科季刊

第五卷第一期

價目	郵費
全年四冊 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費二圓
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本郵費五分 其他地域加郵費五角
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

總發行所　武昌國立武漢大學出版部

中華民國二十三年九月發行

1934年

第 2 期

國立武漢大學
理科季刊

第五卷第二期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. V. No. 2. December 1934

本　期　目　錄

中華民國二十三年十二月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

本刊特別啓事

1. 凡關於寄稿請求介紹批評書籍以及交換雜誌或廣告等函件均請寄交武昌國立武漢大學理科季刊委員會

2. 凡關於訂購以及其他營業事件均請直函武昌國立武漢大學出版部接洽

國立武漢大學理科季刊

第五卷第二期目錄

頁數

國立武漢大學理科季刊第四卷第四期目錄

國立武漢大學理科季刊第五卷第一期目錄

東亞恐慌中中國煤鐵供給問題

李四光講演

今天講的是根據過去的研究,及調查所得,關於中國煤礦及鐵礦的分配,產量及品質等等情形,就淺近而重要的幾點,大略談談.煤和鐵的重要性,在近世工業國家,已有相當認識.人類有史以前,有一個時代,日用的器具以及武器,大都用石質,故稱爲石器時代.其次一個時代,所用的器具,用不純的銅質造成,稱爲銅器時代.近代人類生活必需之品,主要的是鐵質造成,所以有人就稱最近時代爲鐵器時代.同時近世發明的輪船,火車等機件的原動力,除了利用天然水力外,非用燃料不可;而天然燃料,除煤油外,煤是獨一無二的燃料.所以關於煤的出產及保藏等問題,成爲一個國家極重要的問題;而國際的紛爭,也往往導源於煤鐵的供給問題,有如愛爾薩斯勞倫之於德法.如此,可知此項問題,在近世國際問題上,也佔有極重要的地位了.今天要談的,不是一般的供給問題,而是中國在日本人侵略之下,中國自身供給煤鐵的問題,

中國人往往妄自誇大,總以爲本國是地大物博,礦產豐富;即使不熟悉中國情形的外國人,亦以爲中國之大,不特地廣人衆,並且富有天然寶藏,雖說有些話是有相當根據,同時亦有幾點,犯著相當的錯誤,關於煤鐵蘊藏量的估計,就是一個明顯的例子.我們要知道中國領土內蘊藏著若干煤鐵,以及在地理上的分配情形,和如何採取等項,都非實地調查不能明瞭.煤鐵兩物,在中國各方面發展上,尤其是工業上,佔有重要位置,固不待言;同時我們要注意到煤鐵二物,對于中國生命的前途,有密切的關係.如果擴大一點說,對于國際經濟和國際政治,同樣有重大關係.換句話說:這是世界問題了.

煤,鐵在中國領土內分配情形等,經近二十年來,地質調查所和其同樣學術團體或個人,迭次調查,和實地估計,雖然質量兩方面還不能十分精確,然而可以說大致不差.

〔一〕煤田分配情形,品質及蘊藏量等:　中國煤田分配情形,與地理形勢及地質構上造有相關之點.爲便利起見,大致可分爲兩大區,卽華北及華南.由西藏高原發源之崐崙山脈,經甘肅入陝西,四川,河南,湖北,成秦嶺山脈,進邐而東,成淮陽山脈,形成兩大區.這些山脈,將中國分爲兩個天然區域,兩大區之氣候,地勢以及經濟情形,天然不同,煤田之品質及產量亦各相異.

(甲)華北區　煤田面積大小不同,爲便利研究計,分爲幾

小區:

(一)山西陝西(卽山陝高原)區　在太行山之西,地面平均高出海拔一千公尺左右,本區又分爲三支區:

(子)東部　在太行山以西,形成山西東南部高原,幾乎盡屬煤田,有許多地方煤層接近地面,易於採取.

(丑)中部　沿汾河一帶,地勢較低,有若干煤田分散,如大同附近,煤質甚佳.

(寅)西部　呂梁山脈以西,超過黃河至陝西,又形成一大煤田.

上述各煤田的成長時期,遠近不同,品質亦各處相異,單就其總量及一般成分而言,約略如下:

西部蘊藏量是六二六二二百萬噸(每噸爲一瓩),東部是三四〇七七百萬噸,連中部合計約有二十萬個百萬噸.煤的成分,含有固定炭素百分之五十至八十,揮發質百分之二十至三十,亦有少至百分之三或多至百分之六十八的,用低溫度蒸餾法,可由若干種煤中提出液體燃料.中國液體燃料之供給缺乏,此種工業,將來必定到相當重要地位.又每克煤之發熱量,爲七千卡至八千卡.

(二)太行山以東　亦有若干煤田曝露地面,此等煤田原與山西煤田聯成一貫,後因山西地域隆起,華北平原下降,於是分爲東西兩段;其成生的時代,和產生的方式,大致相同.煤層的總厚度有厚至二三十呎者,原來煤層的層次排

列,有如岩石,一旦因地層中斷或翻覆,煤層乃能露出地面.太行山以東一帶的煤田就是明顯的例子.由開平,北平西山,經磁州,湯陰,六河溝達焦作,約有煤田三十餘個,其品質與山西產者相仿,蘊藏量共計九六九五百萬噸有煙煤及無煙煤.六河溝之煙煤,可製焦炭,供煉鐵之用,然而中國挖煤事業,實在太苦,往往出產之煤,堆積如山;但因運輸不便,推銷不廣,往往發生極大的困難.例如六河溝之煤,每噸成本不過四元,而漢口市價非十二元不可.反之,撫順之煤,日本人利用其交通利器,運輸到中國內地,廉價傾銷,中國人無如之何,可見交通事業,亦極關重要.

(三)山東皖北一帶　煤田亦不少,蘊藏量總計為二九七一百萬噸,煤質成分,含固定炭素百分之五十五至八十五,揮發質百分之十三至三十,每克發熱量七千五百卡至八千五百卡,惟灰分太重,是中國煤一般的缺點.

(四)綏遠熱河一帶　煤田量少質佳,尤以綏遠附近之煤為最佳,蘊藏量總計為一五三五百萬噸.

(五)東三省全部　產煤時期,大致在中國可分六七期,而東三省之煤田,兼而有之.即最新期之泥炭,亦有相當儲量.全區蘊藏量總計為四九九六百萬噸,若加以近年在黑省滿洲里附近發見之若干煤田,或不止此數.在西南各省所發見之第三紀煤田,煤質皆不佳,而奉天附近撫順之煙煤,雖屬第三紀,其產量很多,煤質亦佳,目下全區煤田,全在日

人勢力控制之下矣!

(六)甘肅新疆一帶　全區蘊藏量總計為六〇〇〇百萬噸,惟因交通不便,無從運輸,否則運費太多,銷路不暢,不能開辦.

綜觀北方煤田,當以中央部分為重心,太行山以東一帶,因交通便利,質量尚佳,尚可採取.若遠在西北,則目下因交通,經濟或市價之牽制,尚非開採之時也.

(乙)華南區　本區又可劃分若干小區

(一)四川全部　為一盆地,蘊藏不少煤田,品質亦不甚壞,但煤層甚薄,大抵厚度不及三呎,大部分無開採之價值.若將能開採者與不能開採者合共計算,全川煤田蘊藏量為四,四五二百萬噸.

(二)貴州雲南一帶　地處南方高原,地層之構造及歷史,與山陝高原相似,可惜煤層甚薄,能開採者不多.

(三)湖北湖南及江西一帶　煤田雖多,但除湖南之湘鄉,寶慶,衡陽等處,江西一部分外,煤質不佳,儲量亦不大.

(四)江浙福建一帶　煤田之量不多,品質亦劣,不足論也.

(五)廣東廣西一帶　煤質不佳,煤量亦少,與江,浙,閩相類似.

就全國煤田分配情形而言,中國欲謀工業之發展,卽不可一日忘去華北之重要.然而自日本人佔有東三省後,極力經營鐵路,尤注意于綏遠及大同間之聯絡線,企圖從山

西後門攫取中國命脈所係之煤礦,其處心積慮,不可謂不深矣!日人深知中國煤田,華北實占百分之九十二,而華南僅有百分之八,儻山西一帶煤田,盡入日本人之手,則吾國工業之前途,可想而知矣.

〔二〕鐵礦分配情形　中國蘊藏之鐵礦,爲量極少,儻使中國工業發達,全部產量,尙不足供給本國之需要.然而大部分——在百分之九十以上——之採取權,完全操諸日人之手,卽東三省全部而論,實佔全國蘊藏量的百分之三十,此外如宣化一帶之鐵礦,品質尙佳,豫,湘,皖北一帶,亦間有發現,惟爲數不多.總計全國蘊藏量爲九五〇百萬噸,而東三省佔二七〇百萬噸.目下絕對爲日本人所控制者,在百分之九十以上,其餘非有條約關係不能自由開採,卽屬礦砂甚劣不値開採,談論及此,幸國人早日醒悟,急起圖之!

數理邏輯綱要

朱言鈞

邏輯之學,始盛於希臘.自亞里斯多德以來,其學日益光大,治科學者,咸利賴之.降至近代,學者更以研究數學之法,從事邏輯,於是有所謂數理邏輯者起;自茲以往邏輯之學,益爛然光燄萬丈,有凌駕一切之勢矣.

數學在學問界中所以能取得最高之位置者,其原因甚多;要之數學能運用其獨有之符號與公式為推理之工具,使持論常圓滿周到,首尾相赴,若何而得真,若何而墮謬,皆析之極精而出之極顯;其所以斐然大成者,未始不賴是也.吾人研索邏輯之理,茍能取法於是,舍其尋常章句而代以符號公式,則模稜兩可之病可以盡除,而剖析真謬之法,可以益顯;壯哉盛哉,數理邏輯之發明,其為後此學問界開一新紀元乎!

數理邏輯之創始者,當推 Leibniz. 惟研究此學有特殊之成績者首推 Boole (1815–1864). 其後 W. S. Jevons (1835–1882) 及 Peirce (1839–1914) 復補偏救弊,各有增損,至 E. Schröder 而其學大昌.數十年來,數學新潮風起雲湧,數理邏輯幾成研

究數學基礎問題之必要工具,故數學家之從事此學者日益衆多,如 Frege, Peano, 羅素 (Russell) 及懷特海 (Whitehead), 其最著者也.最近赫百德 (D. Hilbert) 復用之以解決數學中之糾紛而數理邏輯至是遂集其大成.

§1 何謂論斷

論斷者,含有唯一意義之辭句也.夫論斷者,所以達意,惟其含義,獨一無二;苟不然者,義即淆混,或真或譌,末由辨明;是以含有唯一之意義者,始可與言真譌;而足供真譌之辨者,其義亦必唯一.此說既明,則如"數學是一種學問","二小於三","雪的顏色是黑的","三加四等於五"等等,皆謂之論斷可也.凡此種種,義皆正確,或真或否,尙爲懸案.

復次,論斷之立,賴乎概念,吾人苟詳考之任何論斷必有主詞,有賓詞,有媒詞;主賓相聯,而論斷乃成,此稍習邏輯者,類能言之.然則概念者,果何自而生乎?此哲學家聚訟紛紜之問題,自來言邏輯者常忽略之.雖然,此科學中之根本問題,吾人不可不勉也.

吾人可將論斷與論斷相接,使成一新論斷.欲結合之,常賴"及""或","若……則……"等等連詞.如"二小於三",與"雪的顏色是黑的"兩種論斷,可結合之如下:"若二小於三,則雪的顏色是黑的""二小於三,或雪的顏色是黑的"之類.論斷邏輯所研討者.數種論斷互相結合時之邏輯關係,質而言之,先假定吾人已知每種論斷之真否(如何知之,非論斷邏輯

之事,容後再詳),然後將此種論斷相接,研究其如何結合而得真,如何結合而墮謬,論斷邏輯之任務如是而已.由是以觀,論斷邏輯所研討者,非主詞與賓詞間之關係,實論斷與論斷間之關係也.

§2　基本結合

論斷相接,其道至繁.雖然,有少數結合之法,使其他種種,皆以此爲基焉.吾人以 $x, y, z, u \cdots$ 等等名任何論斷,復爲此基本結合之法嚴定界說如下:

(一) $\bar{x}$(讀"反 x") 其意卽謂 x 之反面也.若 x 爲真,則反 x 爲謬;若 x 爲謬,則反 x 爲真矣.

(二) $x \& y$ (讀"x 又 y")此 x 與 y 兩論斷由"又"字相接而成之論斷也.此論斷若真,則 x 與 y 皆真;不甯唯是,x 與 y 若皆真,則此論斷亦真.質而言之,此論斷得真之必要與充分條件,x 與 y 皆真是也.

(三) $x \vee y$(讀"x 或 y") 此 x 與 y 兩者由"或"字相接而成之論斷也.此論斷若真,則 x 與 y 兩者之中,至少有一必真;反言之,若 x 與 y 兩者之中,至少有一爲真,則此論斷亦真.質而言之,此論斷得真之必要與充分條件,卽 x 與 y 兩者,至少有一必真也.

惟有一言須聲明者,此論斷中之"或"字與排中律內之"或"字,其意義有異.此處之"或",固不限制 x 與 y 之同時成立;蓋 x 與 y 若皆謬時,"$x \vee y$ 始謬矣.

(四) $x\rightarrow y$ (讀"若 x,則 y")此 x 與 y 兩者由"若,…則"相接而成之論斷也.若 x 爲真, y 爲謬,則此論斷始謬;苟不然者,則此論斷必真.質而言之,此論斷陷謬之必要與充分條件無他, x 爲真而 y 爲謬是也.

吾人所最當注意者,卽此論斷非表示 x 與 y 兩者之因果關係也.由其界說言之,若 x 與 y 皆謬,或 x 爲謬 y 爲真時,此論斷未始不真也.故如下之論斷:

"若2乘2爲四,則雪的顏色是白的".

"若2乘2爲五,則雪的顏色是白的".

"若2乘2爲五,則雪的顏色是黑的".

皆真,惟

"若2乘2爲四,則雪的顏色是黑的".

則謬矣.

(五) $x\leftrightarrow y$ (讀"x 同 y")此 x 與 y 兩者由"同"字相接而成之論斷也.此論斷若真,則 x 與 y 必皆真或皆謬;反言之,若 x 與 y 皆真或皆謬,則此論斷亦真.故如下之論斷:

"(2乘3爲6)↔(雪的顏色是白的)"

"(2大於3)↔(雪的顏色是黑的)"

皆真,惟

"(2大於3)↔(雪的顏色是白的)"

則謬矣.

以上五種,吾人名之爲基本結合.其界說中之所謂真謬

者,自專求其結合之關係言之,至其內容之真否,固非論斷邏輯之所願問,此不可不注意者也.由是以論若以 R 表一真確之論斷, F 表一錯誤之論斷,則如 $R\to R, F\to R, F\to F, R\&R, R\vee F, R\vee R, R\leftrightarrow R, F\leftrightarrow F$ 等均真,而 $R\to F, R\&F, F\&F, F\vee F, R\leftrightarrow F$ 均謬,讀者可自舉例以明斯義,務使上述五種界說瞭然於胸中,然後可進而討論其他問題矣.

§3 等式

吾人苟將上述之基本結合疊相應用,可得種種不同之論斷,如名 x, y, z 為任何論斷,則

$$(x\to y)\&(y\to z)\&(x\vee z)$$

卽其一例也.雖然此類論斷中亦有意義相等者,如 x 與 $\bar{\bar{x}}$ 因之

$$\bar{\bar{x}} \text{ 等 } x \qquad (1)$$

復次,旣明上述之界說,則以下種種亦皆顯而易見者:

$$x\&y \text{ 等 } y\&x \qquad (2)$$

$$x\&(y\&z) \text{ 等 } (x\&y)\&z \qquad (3)$$

$$x\vee y \text{ 等 } y\vee x \qquad (4)$$

$$x\vee(y\vee z) \text{ 等 } (x\vee y)\vee z \qquad (5)$$

$$x\vee(y\&z) \text{ 等 } (x\vee y)\&(x\vee z) \qquad (6)$$

惟吾於此欲更有一言者,卽"等"與"同"其意義有異,不可不辨也.同者,兩論斷皆真或皆謬之謂,若一真一謬,則非同矣.等者,列於等式左右之物,在任何條件之下必同之謂也.故"等"所包羅者實較同為廣.要而言之,此處之"等"與數學中

之≡符號相似.吾人苟欲將上述各等式舉例證實之,可爲 x, y, z 任擇真譌之論斷,代入以上等式中,則等式左右必表示同一之結果.如使 $x\,y$ 爲兩真確之論斷,以 R 表之;使 z 爲一錯誤之論斷,以 F 表之,於是第六等式卽得如下之形式:

$$R\vee(R\& F)\leftrightarrow(R\vee R)\&(R\vee F)$$

因 $R\& F$ 爲 F, $R\vee F$ 爲 R, 故 $R\vee(R\& F)\leftrightarrow R$ 求式之右方觀之, $R\vee R$ 爲 R, $R\vee F$ 爲 R, 故 $(R\vee R)\&(R\vee F)\leftrightarrow R$ 此卽其明驗矣.

此外復有一極要之等式,亦顯而易見者;

$$\boxed{x\&(y\vee z)\ 等\ (x\&y)\vee(x\&z)} \qquad (7)$$

此等式可用如下之例以證實之:

"吾今日欲看書,又欲訪友或散步".

若據等式(7)而易言詞之,可云"吾今日欲看書又欲訪友,或欲看書又欲散步",兩者之意義,固相同也.綜觀以上(2)至(7)六種等式,其中僅含有 ∨ 與 & 兩種結合,此兩種結合與算學中之相加相乘頗有類似之處,因之,亦有稱 & 爲加號,∨ 爲乘號者.明乎(3)(5)兩式,始知相加相乘之時,凡一切括孤可以棄去不顧.不甯惟是,觀乎(6),知每兩項若共含有一論斷時,亦可將此論斷括而出之,凡此種種,皆與算學中之原理相懸契者也.因此之故,吾人乃仿算學中之例,將 ∨ 略去不寫,故此後若逢 $x\cdot y$, 其意卽謂 $x\vee y$, 藉求公式之簡潔耳.

復次,吾人若於 & 及 $\vee$ 之外,更施第一種之結合得如下之等式

$\overline{x\&y}$ 等 $\bar{x}\vee\bar{y}$	(8)
$\overline{x\vee y}$ 等 $\bar{x}\&\bar{y}$	(9)

苟使 x 爲“某三角形爲等邊”, y 爲“某三角形爲等角”,因此 $x\&y$ 之意,即謂“某三角形爲等邊又爲等角”,故其反面 $\overline{x\&y}$ 爲“某三角形非等邊,或非等角”,此即 $\bar{x}\vee\bar{y}$ 所欲表達者,於是公式(8)得證實矣.又欲明等式(9),可舉一例如下:在算學考試之時,投考者非於代數幾何兩科之中至少有一及格不可.今使 x 爲“某投考者之代數考分及格”,y 爲“某投考者之幾何考分及格”;故 $x\vee y$ 若能成立,則彼必得錄取矣.苟彼未獲錄取,其故必由於 $\overline{x\vee y}$, 即彼兩者均未能及格也,故 $\bar{x}\&\bar{y}$.

此外若再應用第四第五兩種結合,復可得如下種種之等式焉.如

$$\boxed{x\rightarrow y \text{ 等 } \overline{x\&\bar{y}}} \qquad (10)$$

何以故?據第四種結合之界說,$x\rightarrow y$ 之意 x 爲真 y 爲謬之不可能故.由此,復根據等式(8)與(1),知 $\overline{x\&\bar{y}}$ 等 $\bar{x}\vee\bar{\bar{y}}$ 等 $\bar{x}\vee y$ 故

$$\boxed{x\rightarrow y \text{ 等 } \bar{x}\vee y} \qquad (11)$$

若將此式中之 x 代以 $\bar{x}$,復因 $\bar{\bar{x}}$ 等 x,故

$x\vee y$ 等 $\bar{x}\rightarrow y$	(12)

等式 (11) 與 (12) 之形式頗覺對稱,亦極有趣味之結果也.

又據等式(10)知　　$y\rightarrow x$ 等 $\overline{\bar{y}\&\bar{x}}$

由此得　　$y\rightarrow x$ 等 $\overline{\bar{y}\&x}$　　〔因 (1)〕

或　　$y\rightarrow x$ 等 $\overline{x\&\bar{y}}$　　〔因 (2)〕

　　$y\rightarrow x$ 等 $x\rightarrow y$　　〔因(10)〕

於是又得一等式:

$x\rightarrow y$ 等 $\bar{y}\rightarrow\bar{x}$	(13)

復次,吾人苟於等式(8)(9)之左右,均施以第一種結合,可得

$x\&y$	等	$\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}$	(14)
$x\vee y$	等	$\overline{\bar{x}\&\bar{y}}$	(15)

又既明第五種結合之界說,則如下等式之爲真理亦可識矣

$x\leftrightarrow y$	等	$y\leftrightarrow x$	(16)
$x\leftrightarrow y$	等	$\bar{x}\leftrightarrow\bar{y}$	(17)

最後尚有一等式可證其爲真者,卽

$x\leftrightarrow y$ 等 $(x\rightarrow y)\&(y\rightarrow x)$	(18)

何以故? $x\rightarrow y$ 者,謂 x 爲真 y 爲謬之不可能; $y\rightarrow x$ 者,謂 y 爲

真 x 爲謬之不可能;今 $(x\rightarrow y)$ 與 $y\rightarrow x$ 欲同時成立,則 x 與 y 必同真或同謬也明矣,故 $x\leftrightarrow y$.

若將此式中之→據(11)易以 $\vee\,\overline{}$,可得

$$x\leftrightarrow y \text{ 等 } \bar{x}\vee y\;\&\;\bar{y}\vee x \qquad (19)$$

又據↔之界說,知

$$x\leftrightarrow y \text{ 等}(x\;\&\;y)(\bar{x}\;\&\;\bar{y}) \qquad (20)$$

自無待證矣.

4　再論基本結合

吾人將少數結合之法遞相運用,竟得如許之結果亦可謂作始雖簡,將畢甚鉅者矣.惟基本結合,其數有五,此五種基本結合者,其他一切之所從出也.然觀乎(18),知↔之意,可由→,& 兩者轉達之;觀乎(10)與(15),知→,∨兩者可由&,¯兩者轉達之.由是言之,↔→∨三種結合似可不必要,蓋僅有&,¯兩者,其他之意已可盡達之矣.復次,吾人苟考(11)與(14),知∨¯兩者,亦能盡五種結合之能事.不嗇惟是,苟有→¯兩者,亦已足矣,因據(14),&可由∨¯轉達之,據(12)∨復可由→¯轉達之也.總而論之,上節所述之五種結合,尚有省略之餘地,非缺一不可者也.昔 Frege 以→¯兩者,爲一切之基,羅素則以∨¯兩者爲一切之基.惟吾人在此書中擬以 & ∨ ¯ 三者爲基;非不知尚可省略也,因¯無論如何不可或缺,而 & ∨ 兩者旣受(2)—(7)諸式之束縛,與算學中之相加相乘頗相似,故共存之,爲求推論時之便利耳.

第一種結合$\bar{\ }$之所以不能或缺者,因其他結合無論如何不能轉達其意故也.惟昔 Sheffer 曾創另一結合之法,曰 x/y,其意卽謂 x 與 y 不能同時成立.於是

$$\bar{x} \text{等} x/x$$

且 $$x/x/y/y \text{等} \bar{x}/\bar{y} \text{等} x \vee y$$

由此觀之,$\bar{\ }$與 $\vee$ 兩者亦皆可由 / 轉達之,故上述之五種結合,可用一種符號盡之矣.

§5 基本形式

吾人可將種種論斷如 $x, y, z\cdots$ 結合之使成一新論斷,由此結合之新論斷,有意義相等者,於是種種等式因之而生,前已詳論之矣.此種被結合之論斷,如 $x, y, z\cdots$ 者,謂之基本論斷.基本論斷之真否,非此時所欲問,惟如何結合之方能得真,則吾人所欲研究者也.明乎上節所述之等式,則論斷之結合必有種種不同之形式,從可識矣.何則,吾人藉等式之用,可由一種結合,變易之使其爲別種與之相等之結合也.既經變易之後,其形式自大異於前矣.綜觀上節所述之等式,其最要者厥爲下列數端,今復一一論列之:

(I) & 及 $\vee$ 兩者與算學中之加號乘號相似,共受 (2)—(7) 之束縛而不能自肆.

(II)凡遇 $\bar{\bar{x}}$ 時,可以 x 代之.

(III)因

$$\overline{x \& y} \text{等} \bar{x} \vee \bar{y} \qquad (8)$$

及　　$\overline{x\vee y}$ 等 $\bar{x}\&\bar{y}$　　(9)

之成立,凡遇 $\overline{x\&y}$ 時,可以 $\bar{x}\vee\bar{y}$ 代之,遇 $\overline{x\vee y}$ 時可以 $\bar{x}\&\bar{y}$ 代之.

(IV)因　　$x\to y$ 等 $\bar{x}\vee y$　　(11)

及　　$x\leftrightarrow y$ 等 $\bar{x}y\&\bar{y}x$　　(19)

之成立,凡遇 $x\to y$ 時可代以 $\bar{x}\vee y$,遇 $x\leftrightarrow y$ 時可以 $\bar{x}y\&\bar{y}x$ 代之.

吾人茍將上述四種方法相遞相續施之於任何結合,必可得一特殊之形式焉.由法(IV),可將任何結合中之 $\to$ $\leftrightarrow$ 兩符號一一盡去之,於是僅存者惟 $\&$ $\vee$ $\overline{\ }$ 三者而已.復由法(III),可使一之符號僅能加於基本論斷之上.如是遞相運用,至最後得一數種基本論斷及其反論斷相乘相加之結果而後止;此結合之形式謂之基本形式.故任何結合,可由上述之四法歸之於基本形式請舉數例,以明斯義.

茍有一結合如下:

$$\overline{(xy\&\bar{y})\vee(z\&y)}$$

由(III),得　　$\overline{(xy\&\bar{y})}\&\overline{(z\&y)}$

復用(III),　　$\overline{xy}\vee\bar{\bar{y}}\&\bar{z}\vee\bar{y}$

$$(\bar{x}\&\bar{y})\bar{\bar{y}}\&z\bar{y}$$

用(I)及(II),　　$\bar{x}y\&\bar{y}y\&z\bar{y}$

是卽其基本形式矣.復次,吾人欲將

$$(x\to y)\longleftrightarrow(\bar{y}\to\bar{x})$$

化爲基本形式,可先用(IV)使之成

$$\bar{x}y\longleftrightarrow\bar{\bar{y}}\bar{x}$$

或
$$\bar{x}y \longleftrightarrow y\bar{x}$$

復用(IV)得
$$(\overline{\bar{x}y})y\bar{x}\,\&\,(\overline{y\bar{x}})\bar{x}y$$

由此用(III)後得
$$(\bar{\bar{x}}\,\&\,\bar{y})y\bar{x}\,\&\,(\bar{y}\,\&\,x)\bar{x}y$$

或
$$(x\,\&\,\bar{y})y\bar{x}\,\&\,(\bar{y}\,\&\,x)\bar{x}y$$

於是因(I)之故,可得其基本形式如下:
$$xy\bar{x}\,\&\,\bar{y}yx\,\&\,\bar{y}\bar{x}y\,\&\,x\bar{x}y$$

任何結合,可有一基本形式已如上所言矣.惟果僅有唯一之基本形式乎?吾人苟細察之,知其未必然也.何也? $x\leftrightarrow y$ 之基本形式,由(19)可知其爲
$$\bar{x}y\,\&\,\bar{y}x$$

然由(20),知 $x\leftrightarrow y$ 等 $x\bar{x}\,\&\,x\bar{y}\,\&\,y\bar{x}\,\&\,y\bar{y}$

兩者之形式不同,而其爲基本形式則一.故言任何結合僅有唯一之基本形式,無有是處.

§6 永眞之結合

明乎以上所述,則如下種種,從可識矣.

(A) $x\bar{x}$ 必爲真確.何以故? $x\bar{x}$ 者,其意卽謂 x, $\bar{x}$ 兩者之中至少有一必真,故不論 x 之內容如何, $x\bar{x}$ 必真,此理之最易見者也.

(B)若 x 爲一真確之論斷, y 爲一任何論斷,則 xy 必真.此理至顯,自無待論.

(C)若 x 及 y 爲兩真確之論斷,則 $x\,\&\,y$ 必真,此由 $\&$ 之界

說可以見之,更無待言.

既明此理,吾人乃可進而從事一極要之問題.如上所言,任何論斷之結合,可化爲基本形式.此基本形式之特點何在乎?基本形式者,數種論斷如 $x, y, z\cdots$ 及其反論斷如 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \cdots$ 等相乘之積復相加之結果也.詳言之基本形式之中,僅有 $\vee$ & 及 $\bar{\ }$ 三種符號,且 $\bar{\ }$ 之符號必僅加於基本論斷若 $x, y, \cdots$ 之上,至若 $\overline{x \vee y}$ 等等決不能在基本形式中見之.故基本形式之中,僅見如下種種相乘之積:

$$x\bar{x}yzz$$

$$xyyz$$

$$xy\bar{y}z\bar{z}$$

復相加如 $$x\bar{x}yzz \& xyyz \& xy\bar{y}z\bar{z}$$

雖其結合可甚繁賾,要之,不外此種 $xx'yy'\cdots$ 等等相乘之後復相加而已。

於是吾人乃得一認識曰:苟任何結合化爲基本形式之後,凡列於 & 左右之積,其中至少有一論斷及其反論斷同時出現者,則此結合必永遠真確.所謂永遠真確者,不論彼被結合之論斷內容如何,此結合必真之謂也.何以言之?蓋若至少有一論斷及其反論斷同時出現於 & 之左右,如

$$xy\bar{z} \& \bar{y}y\bar{x} \& \bar{y}\bar{x}y \& x\bar{x}y$$

則據(A)之理, $x\bar{x}$, $y\bar{y}$ 等必永遠真確,於是復據(B),知列於 & 左右之積,不論其他論斷如何,亦必真確.列於 & 之左右者

既皆真,則因(C)之故,此結合之全體遂真矣.由是以論,吾人不問 x,y …等等之內容如何,但求至少有一論斷與其反論斷同時出現於 & 之左右,則其結果之爲真,已可斷言矣.

不甯惟是,凡永遠真確之論斷,其形式亦非如是不可,何則,苟列於 & 左右之物,其中無一論斷與其反論斷同時並立者,如 $x\bar{y}z$

則當 x,z 爲謬, y 爲真時,此必謬矣.此若果謬,則以此與任何論斷由 & 結合之,亦必謬,是此類結合不能永遠真確也明矣.吾人復舉數例以明斯義.

例一 $x \leftrightarrow x$ 之永真由 $\leftrightarrow$ 之界說可以知之,若由前節所論之法(VI)歸之於基本形式之後:

$$\bar{x}x\&\bar{x}x$$

觀此知列於 & 之左右者同時含有 x 及其反論斷.

例二 $x\&y \rightarrow x$ 永真.何以故?苟簡化之,得

$$\overline{x\&y} \vee x \qquad 〔因(11)〕$$

由此復得 $$\bar{x}\bar{y}x \qquad 〔因(8)〕$$

是卽其基本形式而同時含有 x 及其反論斷故.

例三: $(x\&(x\rightarrow y))\rightarrow y$ 永真.何以故?苟據(11)化之

$$x\&\bar{x}y\rightarrow y$$

由此復得 $$\overline{x\&\bar{x}y} \vee y \qquad 〔因(11)〕$$

$$\bar{x} \vee (\bar{\bar{x}}\&\bar{y})y \qquad 〔因(8)〕$$

$$\bar{x}\bar{\bar{x}}y\&\bar{x}\bar{y}y \qquad 〔因 I〕$$

$$\bar{x}xy\&\bar{x}\bar{y}y \qquad \text{〔因 II〕}$$

觀此可知其永真.

§7 互易性之定理

綜觀以上諸等式,其最令人注目者,厥爲(8)(9)兩種;

$$\overline{x\&y} \text{ 等 } \bar{x}\vee\bar{y} \qquad (8)$$

$$\overline{x\vee y} \text{ 等 } \bar{x}\&\bar{y} \qquad (9)$$

詳言之,任何兩論斷相加後之反面適等於其反論斷相乘之結果,而兩論斷相乘後之反面又等於其反論斷相加之結果,是誠一奇異之現象,然 & 與 $\vee$ 兩符號間互相溝通之關係於此可以略見矣.

吾人爲欲求推論之便利,凡遇數種論斷結合後之結果,如 $x(y\&z)x$ 等等,概以甲,乙,丙,丁等字表之.吾人苟知

$$\text{甲} \leftrightarrow \text{乙}$$

爲真,則由是亦可推知

$$\overline{\text{甲}} \leftrightarrow \overline{\text{乙}}$$

之必真.何則,由 $\leftrightarrow$ 之定義知所謂"甲 $\leftrightarrow$ 乙"者,其意卽謂甲與乙同真或同謬也.旣知甲乙同真或同謬,則 $\overline{\text{甲}}$ 與 $\overline{\text{乙}}$ 亦必同謬或同真,是卽所謂"$\overline{\text{甲}}$ 等 $\overline{\text{乙}}$"也.於是吾人得一結論曰,苟甲乙兩論斷果相同者,其反論斷亦相同.雖然,甲乙者,數種論斷結合而成,且其結合可假定其已化爲基本形式者也.因此之故,吾人苟欲從甲求 $\overline{\text{甲}}$,有一極敏捷之方法焉.此方法若何?吾人既明上述(8)(9)兩等式之內容及 & 與 $\vee$ 之

相互關係,則惟將甲所含之各論斷 $x\,y\,\bar{x}\,\bar{y}$ 各以其反論斷代之,又將 & $\vee$ 兩者互相調換,卽得 $\overline{甲}$ 矣.由是以論,吾人若知甲 $\leftrightarrow$ 乙之永真,則將甲乙中之每論斷與其反論斷互易,又將 & 與 $\vee$ 互易,卽得一永真之結合:

$$\overline{甲}\leftrightarrow\overline{乙}$$

雖然,"$\overline{甲}\leftrightarrow\overline{乙}$"永真云者,不論 $\overline{甲}\,\overline{乙}$ 所含之論斷內容如何,此結合必真之謂也.質而言之,吾人若將其中之論斷,各以其反論斷易之,此"$\overline{甲}\leftrightarrow\overline{乙}$"之真確仍依然如故.於是吾人得一極重要之認識曰,苟甲,乙爲兩種結合之基本形式,又假定甲 $\leftrightarrow$ 乙之永真,則將甲乙中所含之 & $\vee$ 兩符號互易,必得一永真之結合. & 與 $\vee$ 兩者之相互關係,於是乃益顯矣.請舉例以明此理.

吾人均知(6)

$$x(y\&z)\leftrightarrow xy\&xz$$

之永真,若將此式中之 &, $\vee$ 互易,得

$$x\&yz\leftrightarrow(x\&y)(x\&z)$$

此卽等式(7),故其爲真,可無疑義.又如下之結合

$$(x\&\bar{x})y\leftrightarrow y$$

必真.何則, $x\&\bar{x}$ 必謬,故 $(x\&\bar{x})y$ 之真否,視 y 之真否而定.由是將 & 與 $\vee$ 互易,可又得一真確之結合:

$$x\bar{x}\&y\leftrightarrow y$$

§8 永謬之結合

在本章第五節中,吾人既知有所謂基本形式者.任何論斷之結合可化爲基本形式.且由此基本形式,其結合之永真與否可以立判.所謂基本形式者,數種論斷及其反論斷相乘後復相加而成者也.與此基本形式相對峙者,復有一種特殊之形式,曰第二種基本形式.由第一種基本形式,其結合之永真與否,可以立斷;由第二種基本形式,其結合之永謬與否之問題,亦可得一圓滿之解決;所謂永謬之結合,不問其被結合之論斷內容如何,而此結合必謬之謂也.然則第二種基本形式果何如乎?簡括言之,數種論斷及其反論斷相加後復相乘而成者也.如

$$(x\&y)\vee(y\&\bar{x}\&x)$$

是.復次,任何論斷之結合,將用何法使之成爲第二種基本形式乎?苟一結合已化爲第一種基本形式:

$$x\bar{x}y\&y\bar{y}x$$

則其反面據(8)(9)之理必爲

$$\overline{x\bar{x}y\&y\bar{y}x} \text{ 等 } \overline{x\bar{x}y}\vee\overline{y\bar{y}x}$$

$$\text{等 } \overline{x\bar{x}}\&\bar{y}\vee\overline{y\bar{y}}\&\bar{x}$$

$$\text{等 } (\bar{x}\&\bar{\bar{x}}\&\bar{y})\vee(\bar{y}\&\bar{\bar{y}}\&\bar{x})$$

然此卽吾人所謂第二種基本形式也.循是以觀,無論何種結合,若已化爲第一種基本形式,則其反面必可根據(8)(9)兩等式而變爲第二種基本形式,此由於 & 與 $\vee$ 之相互關係,理使然也.此理既明,吾人苟欲將任何結合化爲第二種

基本形式,可先求此結合之反面,歸之於第一種基本形式(其法如第五節中所述),復求其反面,然後遵上述之法,根據(8)(9)兩式而化之可矣.蓋兩次求其反面,其意義仍復原意,而其形式則爲第二種基本形式也.

吾人既將一種結合化爲第二種基本形式矣,於是此結合之永謬與否之問題,亦得迎刃而解.何以言之?苟在第二種基本形式中,凡列於$\vee$左右之和,其中至少有一論斷與其反論斷同時出現者,則此結合必永謬,如

$$(\bar{x}\&\bar{y}\&x)\vee(\bar{x}\&y\&\bar{y})$$

是.何以故?苟如是者,則其反面之第一種形式中,此論斷與其反論斷必同時出現於$\&$之左右

$$\overline{(\bar{x}\&\bar{y}\&x)\vee(\bar{x}\&y\&\bar{y})}\ 等$$

$$\overline{\bar{x}\&\bar{y}\&x}\ \&\ \overline{\bar{x}\&y\&\bar{y}}\ 等$$

$$\overline{\bar{x}\&y}\vee\bar{x}\ \&\ \overline{\bar{x}\&y}\vee\bar{y}\ 等$$

$$\bar{\bar{x}}\bar{y}\bar{x}\&\bar{\bar{x}}\bar{y}\bar{y}\ 等\ xy\bar{x}\&xy\bar{y}$$

故永真,而任何結合,其反面永真者,必永謬故也.

§9　特殊之基本形式

如上所述,任何論斷之結合可化爲兩種不同之基本形式,由此基本形式,其結合之永真與永謬與否可以立辨,此誠學問界中偉大之成績也.雖然,苟將吾人所研究之範圍擴張之,其前途之希望,更有不可限量者.

今有n種論斷於此,吾人以$x_1\,x_2\cdots x_n$等符號表之,將此類

論斷任意結合之,其結果可化爲第一種基本形式.此第一種基本形式者,此類論斷及其反論斷相乘之後復相加而成,已如上所言矣.雖然,此第一種基本形式,除永真者不必復論外,尚有繼續化簡之可能焉.其一,試觀此類式中如

$$x_1\bar{x}_1x_2x_3x_4\,\&\,x_2x_3\bar{x}_4x_1\,\&\,x_5x_6x_7\bar{x}_8\,\&\cdots\cdots$$

其列於 $\&$ 之左右者,如其中有一爲永真之結合,卽至少有一論斷與其反論斷同時出現於其中者,則可以棄去之也.何則,苟其結合,本爲真者,去其永真之一項,(所謂一項,係指列於 $\&$ 左右之積而言)其真如故;苟其謬者,去其永真之一項,其謬依然.故永真之項存在與否,不致影響其全體之真僞,因此可以棄去之也.其二,苟遇 $x\vee x$,可代以 x,蓋兩者之意義相等故也.吾人苟循此將第一種基本形式化簡之,其結果必使列於 $\&$ 右右之項中,任何論斷不能與其反論斷同時出現,且同一論斷不能出現兩次.要而言之,經此變易之後,在每項中,吾人不復能見 $x_ix_i\bar{x}_i\bar{x}_i$ 言 $x_i\bar{x}_i$ 矣(i 爲 1, 2, 3, 4, …… n 中之任何一數).雖然,每項之中,雖無 x_ix_i 復無 $\bar{x}_i\bar{x}_i$ 及 $x_i\bar{x}_i$,然可以使之必有一 x_i 或一 $\bar{x}_i$.欲明此理,當知任何論斷,若乘以 $(x_i\&\bar{x}_i)$ 必不影響其真謬.何以故?$(x_i\&\bar{x}_i)$ 者,其義永謬,若有一結合甲,苟其真者,則"甲 $\vee(x_i\&\bar{x}_i)$"亦真,苟不然者,"甲 $\vee(x_i\&\bar{x}_i)$"亦謬.因此之故,在上述之形式中,苟有一項,如 $x_1\bar{x}_2x_3$ 其中無 x_4,亦無 $\bar{x}_4$,吾人可以 $(x_4\&\bar{x}_4)$ 乘之,卽得含有 x_4 或 $\bar{x}_4$ 之兩項

$$x_1\bar{x}_2x_3x_4 \& x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

如是展轉化簡,可得一最後之結果,就其大體觀之,亦為種種論斷 $x_1x_2\cdots x_n\bar{x}_1\cdots$ 相乘後復相加之形式,惟列於 $\&$ 左右之積,各含有 x_i 或 $\bar{x}_i$, 但不能含有 $x_ix_i\bar{x}_i\bar{x}_i$ 及 $x_i\,x_i$, (i 為 1, 2, 3, $\cdots$ n 中之任何一數);此種基本形式謂之特殊之第一種基本形式.請舉數例,以明其用.

若有一結合如下:

$$A\&AB$$

欲歸之於特殊之基本形式,先以 $(B\&\bar{B})$ 乘其左方,因 $(B\&\bar{B})$ 永謬之故,其本有之真謬性不因之而變,遂得

$$(B\&\bar{B})A\&AB$$

於是

$$BA\&\bar{B}A\&AB$$

又任何結合中,若有兩項相同,可任去其一而不變其固有之真謬性,故得

$$AB\&A\bar{B}$$

此卽其特殊之基本形式也.由此得

$$A(B\&\bar{B})$$

因 $(B\&\bar{B})$ 永謬,可去之而不影響其真謬性,故此與 A 相等.於是知 A 者,實 $A\&AB$ 之最簡之形式也.

又舉一例如下:苟欲將

$$A\&\bar{A}B$$

歸之於特殊之基本形式,先以永謬之 $(B\&\bar{B})$ 乘其左方,得

$$AB\&A\bar{B}\&\bar{A}B$$

此亦可寫為

$$AB\&A\bar{B}\&AB\&\bar{A}B$$

或

$$(AB\&A\bar{B})\&(AB\&\bar{A}B)$$

$$A(B\&\bar{B})\&B(A\&\bar{A})$$

因 $(B\&\bar{B})$ 及 $(A\&\bar{A})$ 均永謬,故

$$A\&B$$

是即 $A\&\bar{A}B$ 之最簡之形式矣.

§10　再論永眞與永謬之問題

如上所述,任何論斷 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ 之結合,可化爲特殊基本形式.所謂特殊之基本形式者,其特點何在乎?特殊之基本形式,爲 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 諸論斷及其反論斷相乘之後復相加之結果,且列於加號 $\&$ 左右之積必含一 x_i 或 $\bar{x}_i$ (i 爲 $1, 2, 3, \ldots, n$ 中之任何一數),惟不能含兩相同之論斷如 $x_i x_i$ 或 $\bar{x}_i \bar{x}_i$ 及兩相反之論如 $x_i \bar{x}_i$.列於 $\&$ 左右之積,亦稱之曰該形式之項.欲將 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 諸論斷之結合化爲特殊之基本形式,亦稱向 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 諸論斷展開.如何將一已知之結合向其中之論斷展開之觀於以上之例已可概見矣.

復次,苟有一結合,其中除 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 之外,復含有 $y_1 y_2 \cdots y_m$ 等論斷,則吾人亦可向 $x_1 x_2 \cdots x_n\ y_1 y_2 \cdots y_m$ 諸論斷展開之,此理之易見者也.不特此也,如是展開之後,吾人復可將其式中之每一項變爲兩者之積,其一僅含 $y_1 y_2 \cdots y_m$ 等等而其他則僅含 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 等等例如

$$y_1 y_2 x_1 x_2 y_3 \& y_1 \bar{y}_2 y_3 x_1 x_2 \& y_1 y_2 y_3 \bar{x}_1 x_2 \& y_1 y_2 \bar{y}_3 \bar{x}_1 x_2$$

爲一向 $x_1 x_2 y_1 y_2 y_3$ 展開之形式,惟第一第二兩項各含有 $x_1\ x_2$,

第三第四兩項各含有 $\bar{x}_1 x_2$, 故可將其共同所含之物括而出之,得

$$(y_1y_2y_3 \& y_1\bar{y}_2y_3)(x_1x_2) \& (y_1y_2y_3 \& y_1y_2\bar{y}_3)(\bar{x}_1x_2)$$

於是列於 & 之左右者,爲兩者之積,其一僅含 $x_1x_2\cdots$ 其他僅含 $y_1y_2\cdots$.循是以推,彼特殊之基本形式中即含有極多之論斷,亦可依法化爲如是之形式.此不過將各論斷之位置依類整理之以醒眉目,初無深奧之理可言也.

於是吾人乃可從事如下之問題:今苟有一結合於此,其中含有任何論斷 $x_1x_2x_3\cdots x_n$ 及確定之論斷 $y_1y_2\cdots y_m$.此 $y_1y_2\cdots y_m$ 必滿足如何之條件,其結合始爲永真(即不論 $x_1x_2\cdots x_n$ 之內容如何,其結合必真之意)耶?此 $y_1y_2\cdots y_m$ 必滿足如何之條件,其結合爲永謬(即不論 $x_1x_2\cdots x_n$ 之內容如何,其結合必謬之意)耶?

爲求研究之便利,可假定 $n=2$, 若 $n>2$, 其理可以類推.既明以上所述,則知任何結合,其中含有 $x_1x_2y_1y_2\cdots y_m$ 者,必可化爲如下之形式:

$$\phi_1(y_1y_2\cdots y_m)x_1x_2 \& \phi_2(y_1y_2\cdots y_m)\bar{x}_1x_2 \& \phi_3(y_1y_2\cdots y_m)x_1\bar{x}_2 \& \phi_4(y_1\cdots y_m)\bar{x}_1\bar{x}_2 \quad (A)$$

式中之 $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$ 者,均表示僅含有 $y_1y_2\cdots y_m$ 之結合也.苟其中若有一項如最末之一項未出現者,吾人必可創一真確之結合 $\phi_4(y_1\cdots y_m)$,將 $\phi_4\bar{x}_1\bar{x}_2$ 加於其上,故假定此四項完全出現焉可也.

然則此結合(A)永真之條件何如乎?應之者曰,(A)永真之必要與充分條件,如下之關係必真確

$$\phi_1(y_1\cdots y_m)\,\&\,\phi_2(y_1\cdots y_m)\,\&\,\phi_3(y_1\cdots y_m)\,\&\,\phi_4(y_1\cdots y_m) \qquad (B)$$

是也.何以言之?(B)苟真者,(A)必永真,此理至顯,無待復證.不甯惟是,(A)苟真者,(B)亦必真.何以故?(B)若不真,其中諸項,至少有一如ϕ_3者,不能真確;於是當x_1爲真x_2爲謬時,$\phi_3(y_1\cdots y_m)\bar{x}_1x_2$必謬,故$(A)$亦謬矣.故言$(A)$爲真,而$(B)$爲謬者,無有是處.此理既明,則與此對峙之問題,卽如何求索(A)永謬之條件,亦得一圓滿之解決.(A)永謬之必要與充分條件無他,如下之關係

$$\phi_1(y_1\cdots y_m)\vee\phi_2(y_1\cdots y_m)\vee\phi_3(y_1\cdots y_m)\vee\phi_4(y_1\cdots y_m)$$

必謬是也.

如何下斷案問題

邏輯中有一極切要之問題,卽如何由種種假定之前提,推求其斷案是已.吾人於此亦得一解決之法,且其法周到精徵,盛水不漏;其所以如是者,則特殊之基本形式之用爲之也.

苟欲在數種前提如甲乙丙丁等之下,求其答案,吾人可先以 & 將此種前提結合之,

甲 & 乙 & 丙 & 丁

甲乙丙丁者,既含有各種論斷$x_1x_2\cdots x_n$,則吾人可向此類論斷展開之,質而言之,可將甲 & 乙 & 丙 & 丁歸之於其特殊之第一種基本形式.苟此前提,果真確者,就此式中,任擇一項,或擇數項,亦必真確;苟其謬者,此亦必謬;故此一項或數

項者,即由此前提推論而得之斷案也.

不甯惟是,凡在此等前提之下所能推得之斷案,亦必爲此式中一項或數項所成.何以言之?苟有一項,未嘗出現於彼前提之基本形式中,吾人一方假定其前提,而他方可使此項爲謬;或一方堅持其前提之謬,而他方使此斷案爲真;如是則不復能爲彼前提之斷案.譬如 $x_1\bar{x}_2$ 必不能爲如下之前提

$$x_1x_2\&\bar{x}_1x_2\&\bar{x}_1\bar{x}_2$$

之斷案,蓋當 x_1 爲謬,x_2 爲真時,此前提雖真而 $x_1\bar{x}_2$ 則否也.由是以論,苟將一切所假定之前提以 & 結合之復歸之於特殊之第一種基本形式,則種種由此所推論之斷案,可以一覽無餘矣.復舉數例,以明此理.

例一:以 A 及 $A\to B$ 前提,其應有之斷案爲何如乎?先將此兩前提以 & 連之:

$$A\&(A\to B)$$

然後向 A 及 B 展開之.據等式(11),此可化爲

$$A\&\bar{A}B$$

以永謬之 $(B\&B')$ 乘其左方,得

$$A(B\&\bar{B})\&\bar{A}B$$

復據(6)得 $$AB\&A\bar{B}\&\bar{A}B$$

是即其特殊之基本形式也.於此式中擇其兩項

$$AB\&\bar{A}B$$

必爲一斷案,已如上所言矣,此斷案者,苟化簡之,得

$$(A\&\bar{A})B$$

因 $A\&\bar{A}$ 爲永謬,故可省去之,遂知 B 者,A 及 $A\rightarrow B$ 兩前提之下所應有之斷案也.觀於上列之基本形式,吾人除 B 之外,復可由兩前提推論如下之斷案:

$$AB;\ A\bar{B};\ \bar{A}B;$$

$$AB\&A\bar{B} \text{ 等 } A(B\&\bar{B}) \text{ 等 } A$$

$$A\bar{B}\&\bar{A}B \text{ 等 } A\leftrightarrow B$$

$$AB\&A\bar{B}\&\bar{A}B \text{ 等 } A\&B$$

例二: 以 $A\leftrightarrow B$ $B\leftrightarrow C$ 爲前提,其應有之斷案爲何如乎?先將此前提據(19)化簡之.各得

$$\bar{A}B\&\bar{B}A \text{ 及 } \bar{B}C\&\bar{C}B$$

連以 $\&$, 復向 A,B,C 展開之,卽得其特殊之基本形式如下:

$$AB\bar{C}\&\bar{A}BC\&A\bar{B}C\&A\bar{B}\bar{C}\&\bar{A}B\bar{C}\&\bar{A}\bar{B}C$$

由此形式,可得一斷案:

$$AB\bar{C}\&A\bar{B}\bar{C}\&\bar{A}BC\&\bar{A}\bar{B}C$$

$$A\bar{C}(B\&\bar{B})\&\bar{A}C(B\&\bar{B})$$

或

$$A\bar{C}\&\bar{A}C$$

$$A\leftrightarrow C$$

例三: 使 A "任何認識,必爲論斷"

B "任何認識,必須證明"

苟吾人有兩定理如下:

$A\rightarrow B$ 其意謂任何認識,旣爲論斷,然論斷爲概念任意聯合而成,必待證明,方爲眞確,故任何認識,必須證明.

$\bar{B}$ 其意謂有不必證明之認識.

吾人以此兩定理爲前提,可得一極要之斷案,先將此兩前提以 & 連之,

$$(A\rightarrow B)\&\bar{B}$$

據(11),此式可寫作:

$$\bar{A}B\&\bar{B}$$

復以 $(A\&\bar{A})$ 乘其右方,使歸於特殊之基本形式:

$$\bar{A}B\&\bar{B}A\&\bar{B}\bar{A}$$

觀此可得一斷案如下:

$$\bar{A}B\&\bar{A}\bar{B}$$

或　$$\bar{A}(B\&\bar{B})$$

故得　$$\bar{A}$$

其意謂任何認識,不必爲論斷也.

例四: 使 A: 認識之起源,惟有經驗與邏輯.

B: 數學認識之起源,不由於經驗.

C: 數學認識之起源,不由於邏輯.

吾人苟有如下之定理:

$(A\&B)\rightarrow\bar{C}$ 詳言之,認識之起源,惟有經驗與邏輯,但數學認識之起源,既非經驗,故必爲邏輯.此外復知 B 與 C 之真確,則可循是得一斷案焉.

吾人之前提維何? $(A\&B)\rightarrow\bar{C}$, B, C, 三者是也.若據(11)(8)將第一前提變其形式與其他兩者相加,得

$$\bar{A}\bar{B}C\&B\&C$$

於是得　$\bar{A}\bar{B}C\&BA\&B\bar{A},\&CA\&C\bar{A}$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\&BAC\&BA\bar{C}\&CB\bar{A}\&\bar{C}B\bar{A}\&CA\bar{B}\&C\bar{B}\bar{A}$$

由此特殊之基本形式,可得其一斷案如下:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\&B\bar{A}\bar{C}\&B\bar{A}C\&\bar{B}\bar{A}C$$

$$(\bar{B}\&B)\bar{A}\bar{C}\&(B\&\bar{B})\bar{A}C$$

故　$\bar{A}\bar{C}\&\bar{A}C$

$$(\bar{C}\&C)\bar{A}$$

$$\bar{A}$$

其意謂認識之起源,不僅經驗與邏輯也.

例五: 苟有互相矛盾之兩論斷 A 與 $\bar{A}$ 以此兩者爲前提,將

$$A\&\bar{A}$$

之兩方,各乘以 $(B\&\bar{B})$, 使其歸於特殊之形式,得

$$AB\&A\bar{B}\&\bar{A}B\&\bar{A}\bar{B}$$

由此知　$AB\&\bar{A}B$　卽　B

必爲其斷案,故任何斷案 B 皆可由兩矛盾之前提推得之亦理使然也.

集合論

(續第五卷第一期)

蕭文燦

V 整序集合

20. **整序集合之分出** 有序集合之任意部分集合(零集合除外)常有第一元素者稱爲整序集合(well-ordered aggregates; Wohlgeordnete Menge.

例如有窮集合,及依大小次序排列之自然數之集合雖爲整序集合,然依大小次序排列之一切整數之集合則非整序集合,蓋其部分集合$(\cdots,-3,-2,-1)$無有第一元素也,又有理數依其自然順序排列之集合爲有序集合而非整序集合,但依§7,(i)中所排列之有理數集合仍爲整序集合.

惟須注意者上述之有序集合之部分集合不僅其元素爲原集合之元素,卽其元素間之先後次序亦須保持原集合之次序.例如有序集合$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$其部分集合如$(a_2, a_4, a_5)$.

吾人由此定義可直推得整序集合之下列諸性質.

定理 52. (1)整序集合之部分集合乃又一整序集合.

(2)與某整序集合相似之一切有序集合皆爲整序集合.

(3)於無有二共通元素之許多整序集合之有序集合其

元素之集合如次歸定者爲整序集合.

(a) m_1, m_2 同屬於同一集合 M 時其在新集合 R 中前後之順序亦與在 M 者同.

(b) m, n 乃各屬於不同之集合 M, N 時,其在新集合 R 中前後之次序與 R 中 M, N 之前後之順序同.

定理 53. 取整序集合之任意元素(最後元素除外)必有其唯一直繼其次之元素存在.

〔證明〕 設 a 爲整序集合 M 之任一元素,於 M 之元素在 a 後者之一切元素令爲集合 N, 由性質 (1) N 爲部分集合故亦爲一整序集合.是以有其第一元素,設爲 b. 然此 b 卽直繼 a 之元素;而 a 與 b 間無 M 之元素存在.蓋若 a 與 b 間有元素 c, 則因 c 在 a 後;應屬於 N, 但 b 爲 N 之第一元素 c 不得在 b 之前.如此則與 c 在 a, b 間之假定矛盾,故 a 與 b 間不得有 M 之元素存在.

21. **超限序數之導入其大小**　整序集合之序型特稱爲**序數** (ordinal number, Ordungszahl).此時之序型其大小可得而比較之。

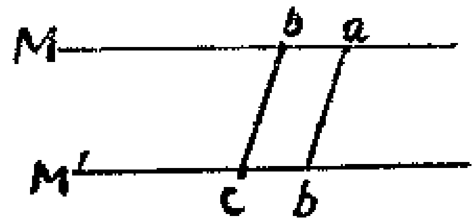
設 m 爲整序集合之任意元素,則由在 m 前之一切元素所成之部分集合稱爲 M 之**截段** (segment; Abschnitt).

整序集合 M 之截段之序數謂爲比集合 M 之序數**小**;而集合 M 之序數則謂爲比其截段之序數**大**,

定理 54. 整序集合 M 與其部分集合 M' 相似對應時則

M'之元素不能在與之對應之M元素之前.

〔證明〕 設若M之元素在其所對應於M'之元素之後.如



令此元素後之一切元素爲一部分集合則其中必有最初之元素設爲a,此與M'之b相對應.依假定

$$b \prec a.$$

此b自然亦爲M之一元素,在M'中與之對應者設爲c.因在M中$b \prec a$,則由相似對應不得不

$$c \prec b.$$

故M之b之元素倘有比其在前所對應之元素c.然吾人前之假定稱a爲此等元素之最初元素,是不合理.故此定理不得不爲真.

定理55. 整序集合不能與其截段相似.

〔證明〕 先假定集合M之截段A與M相似但截段A乃由M之元素a所產生.是A之一切元素皆在a前.而由相似對應之性質對應於M之元素a之截段A之元素不得不在a之前.然此與前定理54相反.故截段A不能與集合M相似.

定理56. 任意之序數μ與序數$(\mu+1)$不同而$(\mu+1)$比μ大,且$(\mu+1)$與μ間無其他之序數.

〔證明〕 有序數爲$(\mu+1)$之集合必有最後元素.由此最後元素所定之截段則爲序數爲μ之集合.由前定理整序

集合不能與其截段相似,故 μ 與 $(\mu+1)$ 不能相同.而由序數大小之定義直知 $(\mu+1)$ 比 μ 大,且其間無其他之序數.

定理 57. 關於序數之順序有三個基本性質:

(1) M,N 爲互爲相似之整序集合則因 N 不能與 M 之截段相似,故 N 之序數 α 不能比 M 之序數 β 小.然由他方面 M 與 N 相似故 α,β 相等.故二序數 α,β 相等,則不能同時 α 小於 β. α,β 相等亦不能同時 α 大於 β. 是以 α 不能比 α 大或小.

(2) M 與 N 之截段相似,則由截段之性質(定理55及截段之定義) N 不能再與 M 之截段相似,故一集合之序數不能同時比他集合之序數既大而又小

(3) M 如與整序集合 N 之截段相似,又 L 與 M 之截段相似則因 L 之序數比 M 之序數小, M 之序數比 N 之序數小因而 L 之序數必比 N 小.

如此,關於序數之順序有三個基本性質可滿足,因而相等大小之三關係中,不能同時滿足於二者然此雖可推知.而任意之二序數此三關係中必有一於此乎?此吾人尙未解決者也.

今欲進而解決此根本問題,先須證明次之定理.

定理 58. 整序集合與本身相似對應之方法唯有一;又集合與相似集合相似對應之方法亦唯有一.

〔證明〕 整序集合與其自身之相似對應時,只能各元素

與其自身各各相似對應.非然者,則必有在自身之前之對應元素存在而此與定理54相反,故不可能.

又整序集合M與其相似集合N,亦只有唯一之法對應.蓋若有二法對應,則此N之同一元素必與M之兩元素m_r, m_s相對應,然是時m_r與m_s亦必相對應,此即M之自身相對應,由上所述非$m_r=m_s$不可,故N與M之相似對應法唯有一.

定理59. 同一整序集合之截段或完全相同,或其一為其他之截段.

〔證明〕 整序集合M由其元素a所截之截段為A,由元素b所截之截段為b.則a與b或為同一元素,或於M中a在b前,或a在b後.如是第一情形截段A,B相同,第二情形則A為B之截段,第三情形則B為A之截段.

定理60. 屬於同一整序集合之截段之序數其大小可得而比較.

〔證明〕 取整序集合M之任意二截段A,B.然由前定理A,B或為同一,或其一為其他之截段.第一情形者之序數相等,第二若A為B之截段則A之序數小於B者.若B為A之截段則A之序數大於B者.三者之中必有其一也.

如此則同一集合之截段之序數其互相間之大小可得而比較.然在相異之集合其大小亦可得而比較乎?證此須先證次之定理.

定理61. 設μ為任意之序數,比μ小之一切序數(μ不

在)依其大小排列之得一有序集合乃以 0, 1, 2, …… 爲始者,則此集合 $W(\mu)$ 乃一整序集合其序數爲 μ.

〔證明〕 今取一序數爲 μ 之任意集合 M, 吾人能將 M 與 $W(\mu)$ 之間建立一相似對應之關係卽得矣.先取 M 之任一元素 a 作成一截段 A, 其序數設爲 α. 然由定義 α 比 μ 小;因而知其爲 $W(\mu)$ 之一元素.吾人卽以 $W(\mu)$ 之元素 α 與 M 之元素 a 對應.於是 M 之各元素 a 皆於 $W(\mu)$ 各有其唯一之元素 α 與之對應.反之 $W(\mu)$ 之各元素 α 在 M 中亦必各有其唯一之元素 a 與之對應.蓋 α 乃比 μ 小之序數,由定義 α 乃爲與 M 之截段 A 相似之集合之序數,而此時之元素 A 乃對應於 α 之 M 之元素 a 所生者,如此之 a 唯限於一.蓋若有他之元素 b 亦生如此之截段,則由定理59,此截段不得不有與 α 不同之序數.

如是所作之對應乃相似對應.卽 M 之任意二元素 a, b 如係 $a \prec b$. 則由此 a, b 而生之二截段 A, B 其序數爲 α, β. 然此時因 $a \prec b$, 由定理59及其證明知 A 爲 B 之截段.於是由定義可知 $\alpha<\beta$. 反之如 $\alpha<\beta$ 同樣可知 $a<b$. 故 M 與 $W(\mu)$ 爲相似對應;因而 $W(\mu)$ 與 M 乃相同之整序集合,其序數爲 μ.

由此整序集合之各元素吾人可將添數示其順序,如:

$$\{m_0, m_1, m_2, \cdots, m_\omega, m_{\omega+1}, \cdots . m_{\omega_2}, m_{\omega_{2+1}}, \cdots\}.$$

若須二序數大小之時由定理61有序數 μ 之集合 $M=\{m_0\ m_1, m_2, \cdots\}$ 可以 $W(\mu)=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 代之.卽論序數 μ, ν 之時,吾人

可以下列有序數爲μ, ν之代表集合論之斯可也:

$$W(\mu)=\{0,1,2,\cdots\}$$

$$W(\nu)=\{0,1,2,\cdots\}$$

由上所論吾人遂得整序集合之次之定理62,63二基本定理.

定理62. 二整序集合或互爲相似,或其一與其他之截段相似.因而知二不等序數其一必比其他小,

〔證明〕 今取任意二序數μ, ν而論之.其各比μ, ν爲小之一切序數所成之集合各爲$W(\mu)$, $W(\nu)$. 然此時$W(\mu)$與$W(\nu)$之元素之最初部分$0, 1, 2, \cdots$必相一致.今將$W(\mu)$與$W(\nu)$之共通者以整序集合D表之.在D有$W(\mu)$, $W(\nu)$之共通元素γ則在γ前之一切元素皆屬兩集合共通者,故D可視爲含此等一切之共通元素之集合,卽由γ而生之截段不得不爲共通之截段也.故D或與$W(\mu)$同一,或與$W(\mu)$之截段相似,(卽相似於次於D之一切元素之元素而生之截斷).而D對於$W(\nu)$之關係亦有同樣者成立.卽D之序數以δ表之則$D=W(\delta)$. 而D與$W(\mu)$及$W(\nu)$之關係不外次之數種:

第一 $D=W(\mu)$ 卽$\delta=\mu$, 且同時$D=W(\nu)$ 卽$\delta=\nu$ 之時.

此時乃$W(\mu)=W(\nu)$ 卽$\mu=\nu$之關係成立.

第二 $D=W(\mu)$ 卽$\delta=\mu$ 而D爲$W(\nu)$之截段卽$\delta<\nu$之時.

此時$W(\mu)$爲$W(\nu)$之截段,因而知$\mu<\nu$之關係成立.

第三 D爲$W(\mu)$之截段卽$\delta<\mu$而$D=W(\nu)$ 卽$\delta=\nu$之時.

此時$W(\nu)$爲$W(\mu)$之截段因而知$\nu<\mu$之關係成立.

第四　D爲$W(\mu)$之截段且同時又爲$W(\nu)$之截段之時.

然此第四情形不能生.何則?蓋D爲$W(\mu)$,$W(\nu)$之共通截段,則生此截段之元素δ不得不同屬於兩集合,因而序數δ亦兩集合之共通元素不得不屬於D. 然D爲$W(\delta)$只含比δ小之一切序數而不含δ,此即來矛盾.故D至少非與$W(\mu)$, $W(\nu)$之一,一致不可.故第四情形不得起.

故任意之序數μ, ν. 對於$\mu=\nu$, $\mu<\nu$, $\nu<\mu$三關係中必有唯一之關係滿足.即是本定理之證明矣.

換言之下之命題必成立.

系　任意二序數對於相等大小之關係必有唯一可滿足.

定理63. 關於整序集合不僅其序數可得而比較,即其基數亦常得而比較.即二整序集合之基數或互爲相等,或其一比其他小.

『證明』　設M, N爲任意整序集合.因M, N如爲相似則必等價,故M, N之基數相等.若M, N不相似則由前定理其一必與其他之截段相似,故或M與N之部份集合等價,或N與M之部分集分等價.因而知M之基數比N之基數或小或大.

22.　**序數之敘列**　吾人既將超限序數之相等大小之能相比較證明.今將進而論此超限序數有無限之多存在,

卽任取一超限序數必有比之大之序數存在.

定理64. ω乃最小之超限序數

〔證明〕 今設M爲任意之無窮整序集合,而$A=\{m_0,m_1,m_2,\cdots\}$之集合,係取M之第一元素m_0,M之第二元素,第三元素,…而成一M之部分集合,則此部分集合之序數爲ω.然此時A與M或同一,或爲M之截段.蓋A不與M相同,則M必有A之一切元素而外之元素m存在.今令此等元素之第一元素爲a(M爲整序集合故此種之第一元素必存在),則由此a而生之截段卽爲A.在他方面A之任何截段皆爲有限數,故A之序數ω乃超限序數中之最小者.

吾人爲應用便利計前舉之定理61可以另語述之如次:

"於序數之集合W中,任取一數α時,W中有α及與比α小之一切序數存在,此等之序數依其大小之次序排列之全集合W乃一整序集合,且此集合W之序數μ卽W中之序數之直後之序數.換言之,有上記性質之整序集合W其自身之序數μ卽比W中任何序數爲大之序數之最小者".

由此定理,吾人可導後次之結論:

"吾人已知一序數之敍列,若欲作直繼其次之序數,則將此已知之一切序數作成一整序集合而考之,此所作之整序集合之序數卽所求直繼其後之序數".

由此方法則由0, 1, 2, … 始可得一依次遞大之無窮敍列:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ \omega, \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots\cdots,\ \omega\cdot 2,\ \omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\omega^2=(\omega\cdot\omega),\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \cdots,\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \cdots,\ \omega^2+\omega\cdot 2,\ \cdots$$

$$\cdots,\ \omega^2\cdot 2=(\omega^2+\omega\cdot\omega),\ \cdots\cdots,\ \omega^2 m+\omega\cdot n+p,\ \cdots\cdots,\ \omega^3, \omega^3+1,\ \cdots\cdots,\ \omega^n,\ \cdots\cdots$$

$$\cdots,\ \omega^n+\omega^{n-1}\cdot m_1+\omega^{n-2}m_2+\cdots+\omega^1\cdot m_{n-1}+m_n,\ \cdots\cdots,\ \omega^\omega,\ \omega^\omega+1,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\omega^\omega+\omega^n,\ \cdots,\ \omega^\omega n,\ \cdots,\ \omega^{\omega+1},\ \omega^{\omega+1}+1,\ \cdots,\ \omega^{\omega\cdot n},\ \cdots,\ \omega^{\omega^2},\ \cdots,\ \omega^{\omega^n},\ \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\ \omega^{\omega^\omega},\ \cdots\cdots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}=\varepsilon,\ \varepsilon+1,\ \varepsilon+2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

此處 ε 乃表 $\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ 故有 $\omega^\varepsilon=\varepsilon$ 之性質之數,此數由 ω 出發,以加法乘法羃法不能表之之最初之數,故須立一新記號 ε. 由此 ε 出發又繼續得一序數之無窮叙列.

Cantor 以一般滿足於 $\omega^\xi=\xi$ 之數 ξ 謂之'ε 數'. ε 者乃'ε 數'之最小者也.

上舉之序數排列之具體寫像由次例可以得之

第一 幾何學的之例

今取直綫上之一點 0 爲原點,於此直綫上作相應於

$$x=(\tfrac{1}{2})^1,\quad (\tfrac{1}{2})^1+(\tfrac{1}{2})^2,\quad (\tfrac{1}{2})^1+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^3,\quad \cdots\cdots\cdots$$

之點 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 此等點列有一極限點爲 $x=1$. 此極限點乃不屬於 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 而在此一切點之右;此點以 p_ω 表之.而此點列 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_\omega$ 卽對應於 $1, 2, 3, \cdots\ \omega$ 之序數也.

其次設

$$x=1+(\tfrac{1}{2})^2,\quad 1+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^3,\quad 1+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^3+(\tfrac{1}{2})^4, \cdots\cdots$$

於直綫上取其相應之點.此等點皆在前之點列之右,可令其與序數

$$\omega+1,\quad \omega+2,\quad \omega+3,\cdots\cdots$$

相對應.各各以$p_{\omega+1}, p_{\omega+2}, p_{\omega+3}\cdots$表之.而此點列於$x=1+\frac{1}{2}$之處有一極限點.此點卽對應於$\omega+\omega=\omega2$,以$p_{\omega2}$表之.

再取對應於

$$x=(1+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^3,\quad (1+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^3+(\tfrac{1}{2})^4,\quad (1+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^3+(\tfrac{1}{2})^4+(\tfrac{1}{2})^5,\cdots$$

此等點又皆在前舉之點列之右,乃與$\omega2+1, \omega2+2, \omega2+3,\cdots$之序數相對應,各以$p_{\omega2+1}, p_{\omega2+2}, p_{\omega2+3},\cdots$表之.而此點列乃於$x=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$之處有一極限點$(p_{\omega2+\omega}=p_{\omega3})$此極限點乃對應$\omega3$者也.

如斯次第行之吾人可得一無窮列點對應於無窮序數之數列卽

$$1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \cdots\cdots,\ \omega2,\ \omega2+1,\ \cdots\cdots\ \omega3,\ \omega3+1,\ \cdots\cdots$$

$$p_1, p_2, p_3\cdots\cdots\ p_\omega, p_{\omega+1},\ \cdots\cdots,\ p_{\omega2}, p_{\omega2+1},\ \cdots\cdots\ p_{\omega3}, p_{\omega3+},\ \cdots\cdots$$

今因$p_\omega, p_{\omega2}, p_{\omega3},\cdots$乃各各對應於$x=1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2,\cdots$故可推知於$x=2$處亦有一極限點,此點恰與序數$\omega\omega=\omega^2$相對應,而在其右對應於序數$\omega^2+1,\ \omega^2+2,\cdots$之點,可以同樣方法繼續求之.卽將對應於

$$\omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \cdots\cdots\ \omega^2+\omega2,\ \omega^2+\omega2+1,\ \cdots\cdots,$$

$$\omega^2+\omega n,\ \cdots\cdots,\ \omega^2+\omega^2=\omega^2 2,\ \cdots\cdots\ \omega^2 3,\ \cdots\cdots,\ \omega^2 n,\ \cdots\cdots.$$

之列點也.若再繼續行之,卽可次第得對應於

$$\omega^3,\ \omega^4,\ \cdots\cdots,\ \omega^\omega,\ \cdots\cdots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \cdots\cdots$$

之點列.

第二　算術的之例.

吾人利用關於質因數及奇數之自然數之性質,將自然數適當排列之,可作得對應於超限序數之數列.如前於超限基數加法所述卽其一例.今又另排列如次.

質數列	$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11, \cdots\cdots$	對應於 a 者(a 質數)
序　數	$1\ \ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \cdots\cdots$	
質數列	$2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2, \cdots\cdots$	對應於 a^2 者
序　數	$\omega\ \ \omega+1\ \ \omega+2\ \ \omega+3\ \ \omega+4, \cdots\cdots$	
質數列	$2^3,\ 3^3,\ 5^3,\ 7^3,\ 11^3, \cdots\cdots$	對應於 a^3 者
序　數	$\omega.2,\ \omega2+1,\ \omega2+2,\ \omega2+3,\ \omega2+4, \cdots\cdots$	
	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	
	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	
質數列	$2^{r+1},\ 3^{r+1},\ 5^{r+1},\ 7^{r+1},\ 11^{r+1}, \cdots\cdots$	對應於 a^{r+1} 者
序　數	$\omega r\ \ \omega r+1,\ \omega r+2,\ \omega r+3,\ \omega r+4, \cdots\cdots$	
	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	
	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	
質數列	$2\cdot3,\ 2\cdot5,\ 2\cdot7,\ 3\cdot5, \cdots\cdots$	對應於 ab 者(依大小順排列)
序　數	$\omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \omega^2+3, \cdots\cdots$	
質數列	$2^2 3^2,\ 2^2 5^2,\ 2^2 7^2,\ 3^2\cdot7^2, \cdots\cdots$	對應於 a^2b^2 者
序　數	$\omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \omega^2+\omega+3, \cdots$	
	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	
	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	

由此更取對應於 $(ab)^3,\ (ab)^4, \cdots\cdots\ (a^2b)^1,\ (a^2b)^2, \cdots\cdots,\ (a^3b)^1,\ (a^3b)^2, \cdots\cdots,\ (ab^2)^1,\ (ab^2)^2, \cdots\cdots,\ (a^3b^2)^1,\ (a^3b^2)^2, \cdots\cdots,\ (abc)^1,\ (abc)^2, \cdots\cdots,\ (a^2bc)^1,\ (a^2bc)^2, \cdots\cdots$ 如斯可以無限的繼續進行也.

23. 整序集合之基數與序數對照.

〔第一〕 **定理 65.** 二集合之序數等則其基數相等,但其逆不真.

本命題之前半,由序型及序數之相等之定義可直接推之.其後半可示如次.

今取基數相等之二集合 M, N, 則依 M 之元素之排列如何而 M 之序數與 N 之序數可相等,可以大,又可以小.例如

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, a\}$$

乃一整序集合其序數爲 $\omega+1$. 今 M 若爲自然數之集合,則因 M 與 N 可一一對應,故兩集合爲等價;因而其基數相等.然今將 M 之元素之順序如

$$\{1, 3, 5, \cdots\cdots, 2, 4, 6, \cdots\cdots\}$$

之形排列之乃一整序集合而序數爲 $\omega+\omega$ 比 N 之序數 $\omega+1$ 大.又 M 之元素若如

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$$

排列之整序集合則其序數爲 ω 比 $\omega+1$ 小.然設如

$$\{2, 3, 4, \cdots\cdots, 1\}$$

排列之則其序數爲 $\omega+1$ 與 N 者等.

『第二』 **定理 66.** 有窮集合之基數對應於唯一之序數,而無窮集合之基數 $\aleph$* 則有無數多之序數與之對應.

今 M 爲無窮整序集合,其序數爲 μ, 其基爲 $\aleph$, 此無窮集

* $\aleph$ (alef) 用以表無窮整序集合之基數

合之最後加入一元素,則序數變爲 $\mu+1$ 與前之序數 μ 異,但其基數則仍與前之 $\aleph$ 同.同樣此集合加入二個,三個,……之元素於其後,其對應之序數雖爲 $\mu+2, \mu+3, \cdots\cdots \mu+\omega, \mu+\omega+1,$ …然而其基數依然爲 $\aleph$.故同一'阿勒夫'其所對應之序數有無限之多也.

如此屬於一'阿勒夫'之一切序數特稱爲'阿勒夫之數集團' (number class; Zahlenklass) 其中最小之序數名曰'數集團之首數' (first number; Anfangszahl).

〔第三〕 **定理 67.** 序數之冪與基數之冪大異其趣;有 ω^ω 序數之集合雖爲可數集合,而序數 ω 所對應之基數之 $\mathfrak{a}$ 之冪 $\mathfrak{a}^\mathfrak{a}$, 其所對應之集合非可數集合而爲更高級之連續集合.

〔證明〕 由定理 46 $\mathfrak{a}^\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$, 故基數 $\mathfrak{a}^\mathfrak{a}$ 所對應之集合爲連續集合而非可數集合.至於有序數 ω^ω 之集合爲可數集合則示如次.

試考自然數之各數分解成質因數,將此等積依其因數之多少順次排列之,其因數之個數相同者則依其數之大小排列之,則可得一自然數之排列如次:

$1, 2, 3, 5, 7, 11, \cdots\cdots\cdots$ (一切之質數)

$2^2=4, 6, 10, 14, 22, \cdots\cdots\cdots$

$9, 15, 21, 33, 39, \cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2^3=8,\ 12,\ 20,\ 28,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\quad 18,30,\ 42,\ 66,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\quad 27,\ 45,\ 63,\ 99,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2^4=16,\ 24,\ 40,\ 56,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

在此排列中其在$2^2=4$之前者爲$1, 2, 3, 5, \cdots\cdots$其序數爲ω。其次在$2^3=8$之前者乃

$$\left.\begin{array}{l}
1\times(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\cdots\cdots\cdots\cdots)\ \text{第一列}\\
2\times(2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots\cdots\cdots)\ \text{第二列}\\
3\times(\quad 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots\cdots\cdots)\ \text{第三列}\\
5\times(\qquad 5,\ 7,\ \cdots\cdots\cdots\cdots)\ \text{第四列}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}\text{(甲)}$$

其序數爲$\omega+\omega+\omega+\cdots\cdots=\omega\times\omega=\omega$。又在$2^4$之前者乃由前之二

個因數而成之 ω^2 個以 1 乘之者;又於(甲)之 ω^2 個數羣中除開第一列以 2 乘之者,除開第一列第二列以 3 乘之者,……其結局之序數爲 $\omega^1+\omega^1+\cdots=\omega^2.\omega=\omega^3$.

一般 2^n 前之一切數之集合其序數爲 ω^{n-1}. 而 n 則又 1, 2, 3, ……之值皆可取得故全體之序數爲 ω^ω.雖然,此爲自然數之集合,故其基數乃可數集合之基數 a.

〔第四〕 **定理68.** (i)設序數 α 比序數 β 小則對應於 α 之基數 $\aleph_\alpha$ 與對應於 β 之基數 $\aleph_\beta$ 或相等或前者比後者小. (ii)逆,設整序集合之基數 $\aleph_\alpha$ 比 $\aleph_\beta$ 小,則對應於 $\aleph_\alpha$ 之序數 α 比對應於 $\aleph_\beta$ 之序數 β 小,(此時同一之基數雖有無數多之序數與之對應,然無論何者上之關係皆成立).

〔證明〕 (i)序數 α 比序數 β 小,α,β 所對應之整序集合 M, N 各以 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 之形表之,則 M 爲 N 之截段.是以由基數相等大小之定義 M 之基數或與 N 之基數相等或小於 N 之基數.然在此時兩者皆得而起.例如 $M=\{0, 1, 2, 3\}$, $N=\{0, 1, 2, 3, 4\cdots\}$ 則 $\alpha<\beta$,同時 M 之基數小於 N 之基數.然如 $M=\{0, 3, 5, 7, \cdots\}$, $N=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2, 4, 6, \cdots\}$ 時則者 $\alpha<\beta$ $(\alpha=\omega, \beta=\omega+\omega)$ 而兩者皆可數集合,故其基數相等.

(ii)在此時 α 不能等於 β. 何則?蓋若 α 等於 β 則 M 與 N 等價,因而其基數不得不相等也.其次 α 不能比 β 大.蓋若 α 比 β 大,則 N 與 M 之截段相似,因而 N 之基數或等於 M 之基數或小於 M 之基數,然此與 $\aleph_\beta$ 大於 $\aleph_\alpha$ 之假定相反.而整

序集合之序數或互相等,或一比他大或一比他小,三者必有其一,故 α 不得不比 β 小.

〔第五〕 **定理 69.** 序數 1, 2, 3, …… 用超限序數之乘法則雖得

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots=\omega,$$

而基數 1, 2, 3, …… 依超限基數乘法則得

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots=\mathfrak{c}.$$

茲所注意者對應於序數 ω 之基數爲 $\mathfrak{a}$ 而上之基數之積則非 $\mathfrak{a}$ 而爲比 $\mathfrak{a}$ 高度之 $\mathfrak{c}$.

〔證明〕 前半之證明於後述超序數乘法時再論之,後半則因

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots=2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots\geqq 2\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots=2^{\mathfrak{a}}$$

又 $$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots\leqq \mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}\qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=(2)^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}\text{(超限基數之指數法則)}$$

$$=2^{\mathfrak{a}}\ \text{(因}\mathfrak{a}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\text{)}.$$

$$\therefore\quad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}.$$

〔第六〕 **定理 70.** 自然數集合如適當排列之之整序集合有超限序數

$$\omega^{\omega}=\omega\omega\omega\cdots\cdots$$

而 0 與 1 間之一切實數 $(0\leqq x<1)$ 依其大小順序排列之有序集合其超限序型爲

$$\cdots\cdots\omega\omega\omega=\omega^{*\omega}.$$

卽對應於序數 $\omega\omega\omega\cdots\cdots$ 之整序集合之超限基數雖爲 $\aleph_0$ 卽 $\mathfrak{a}$, 而對應於序型 $\cdots\cdots\omega\omega\omega$ 之有序集合之超限基數乃比 $\mathfrak{a}$

高度之 $\mathfrak{c}$.

〔證明〕前半於定理67之證明已述之,今將後半示於次.

設 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m, \cdots$ 乃各爲自然數之集合,依超限序型之乘法作 $p=(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots)$ 之有序集合,其序型乃爲 $\cdots\omega\omega\omega=\omega^{*\omega}$ (由序型乘法之定義).今此各元素 p 設其對應於

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_2+a_3}+\cdots\cdots$$

然此 x 者乃得以二進法所表之0與1間之實數表之者也.譬如 $p=(1, 1, 3, 1, 2, \cdots)$ 其對應之 x 爲

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{0}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots\cdots$$

則此卽二進法所表之數

$$0.11001101\cdots\cdots\cdots$$

也.反之凡0與1間之實數以二進法表之者必與一

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{a'_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{a'_1+a'_2}+\cdots\cdots$$

對應.因而知有一 $p=(a'_1, a'_2, \cdots)$ 與之對應.

故 x 與 p 一一對應,而其大小之順序則相反.卽 $p<q$ 則 $x>y$. 今 x 於區間 $0\leqq x<1$ 次第變大,其所對應之 p 則次第減小 (p 之大小之定義參照前於超限序型之乘法所予者)故對應於 $1-x$ 之 x 之區間 $[0, 1]$ 而變者.故依 p 之大小順序之排列者係與 $1-x=y(0\leqq y<1)$ 之 y 爲一一對應,且其大小之關係相同;卽兩者爲相似.因而知 $\cdots\cdots\omega\omega\omega$ 乃0與1間之實數依

其自然之順序排列者之序型也.

24. **超限基數之敘列** 超限基數之最小者已於前述乃可數集合之基數 a. 此當然與無窮整序集合之基數之最小者相同.故 $\aleph_0$ 等於 a. 吾人對於各整序集合之基數,常有欲求比其更大者之舉.因而須續求一整序集合之基數之敘列.於此吾人可證明下之有趣定理.

定理 71. 對於整序集合之各基數 $\aleph$,常有直次其後比之較大之基數存在.

〔證明〕設 $\aleph_\alpha$ 為任意之'阿勒夫'.而有有序數為 μ 之整序集合,必有其所對應之基數.今以 μ 所對應之基數之或等於 $\aleph_\alpha$ 或小於 $\aleph_\alpha$ 者作成由一切序數 μ 而成之集合,此集合令為 M. 然此時集合 M 之序數由定理 61 比 M 中之各序數為大,而為此等序數之直後之序數.此序數設為 ν.

由 M 之定義對應於此序數 ν 之基數不能為 $\aleph_\alpha$ 亦不能比之小.蓋有 $\aleph_\alpha$ 或比之小之基數之集合之序數皆在 M 之中也.故任何皆比之為小.而 M 含有基數為 $\aleph_\alpha$ 之部分之集合,而基數非 $\aleph_\alpha$,則由基數大小之定義 M 之基數必比 $\aleph_\alpha$ 為大.此基數設為 $\aleph_\beta$,然 $\aleph_\beta$ 乃直在 $\aleph_\alpha$ 之次之基數.何則?若 $\aleph_\alpha$ 與 $\aleph_\beta$ 間有基數 $\aleph_\gamma$ 存在,則因 $\aleph_\gamma$ 比 $\aleph_\beta$ 小,故由定理 68 對應於 $\aleph_\gamma$ 之序數 μ 必比對應於 $\aleph_\beta$ 之序數 ν 小.然由他方面則見取比 ν 小之任何序數其所對應之基數或等於 $\aleph_\alpha$ 或小於 $\aleph_\alpha$ 故對應於 $\aleph_\gamma$ 之序數 μ 不能小於 ν. 於是而兩結論

相矛盾.故$\aleph_\alpha$與$\aleph_\beta$間不得有其他之基數存在.故M之基數$\aleph_\alpha$其直後之基數可以$\aleph_{\alpha+1}$表之.

系 比ν之任何序數其對應之基數或爲$\aleph_\alpha$或小於$\aleph_\alpha$故ν乃屬於$\aleph_{\alpha+1}$之序數中之最小者.故ν乃對於基數$\aleph_{\alpha+1}$之序數.

吾人由上之方法,由最小之基數$\aleph_0$始可作得一依次第大之無窮超限序列

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots\cdots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \cdots\cdots$$

25. **超限歸納法** 今欲證明命題$A(n)$於一切之自然數皆成立,則首先證明$n=0$時成立,其次證明假定n之時成立則$n+1$時亦成立,此謂之數學歸納法.對於超限序數亦有如此之法則存在.卽欲證明命題$A(\mu)$於一切序數皆成立則有所謂超限歸納法(transfinite induction)者如次.

定理72. 超限歸納法. 關於序數μ之命題$A(\mu)$,於$\mu=0$時成立,且若關於比μ小之一切序數$\nu(<\mu)A(\nu)$成立時而能證明$A(\mu)$成立則$A(\mu)$於一切之序數μ皆成立.

〔證明〕假定關於某序數$\bar{\mu}$, $A(\bar{\mu})$不成立,因比$\bar{\mu}+1$小之一切序數全體之集合$W(\bar{\mu}+1)$乃整序集合,是在$W(\bar{\mu}+1)$中$A(\mu)$不成立之序數全體之集合M,亦一整序集合也.

M含有$\bar{\mu}$故非空集合,M之最小序數設爲μ_0則關於如$\mu<\mu_0$一切μ, $A(\mu)$皆成立.故由假設$A(\mu_0)$亦成立.然此與μ_0之意義相反.故關於一切序數$A(\mu)$皆必成立.

26. 整序可能定理 由前所論,若所與之集合爲整序集合,其超限序數及基數皆有極簡單之興味關係,蓋其大小相等可得而比較之也.然任何集合皆可列成整序集合乎?此乃自然而生之問題,Cantor 曾考究之,但不得其證明,直至1904年 Zermelo 證明其可能.* 1908年氏又發表其第二證明焉.+

集合M之整序可能性,由次樣大體考之可以豫想爲真.

先由M中取出一元素m_0,再由$M-\{m_0\}$取出一m_1,再由$M-\{m_0, m_1\}$中取出一m_2如斯順次由

$$M-\{m_0, m_1, m_2, \cdots\cdots, m_\omega\, m_{\omega+1}, \cdots\cdots\}$$

取出$m_0, m_1, m_2, \cdots\cdots$行至$M$盡時.然$M$若爲可數以上之集合時用此方法果能將$M$之全部取盡乎?是不無疑問也.

Zermelo 之證明乃用 Zermelo 之公理卽又稱爲選擇公理者如次:

"M係由$P, Q, R, \cdots$集合而成之集合,此等集合$P, Q, R, \cdots$乃至少含有一元素者,今由此等集合各選出一元素$p_0, q_0, r_0 \cdots$由此等元素得作成一集合S".

如上所選出之元素謂之代表元素,如由M之部分集N選出a則a稱爲N之代表元素(special element; ausgezeichnetes)書如

$$a=\varphi(N)$$

此時二部分集合N_1, N_2之代表元素$\varphi(N_1)$, $\varphi(N_2)$可以相同.

* Math. Annalen. Vol LIX (1904) p.514　+Math. Annalen, Vol LXV (1908), p.107

用此Zermelo之公理可證明次之重要定理.

定理73. 整序可能定理(Wohlordnungssatz). 任意集合M, 其元素依適當之順序排列之可成整序集合.

〔證明〕 今分數段論之.

(I) 設Γ為M之部分集合且為整序集合.設c為Γ之任意元素,由c决定Γ之截段Γ_c即如

$$\varphi(M-\Gamma_c)=c$$

之Γ謂之Γ敍列(Γ-sequence; Γ-Folge).

Γ_c可為o(卽空集合之意)而$M-\Gamma_c$則確非o. Γ敍列常存在.例如$m_0=\varphi(M)$則只一元素m_0之集合$\{m_0\}$乃Γ敍列.蓋因$\Gamma_{m_0}=0$

$$\varphi(M-\Gamma_{m_0})=\varphi(M)=m_0.$$

且一切之Γ序列有最初元素m_0.蓋c如為任意Γ序列之最初元素則

$$\Gamma_c=o. \quad \text{故} \quad c=\varphi(M-\Gamma_c)=\varphi(M)=m_0 \quad \text{故} \quad c=m_0.$$

(II) 若二相異之Γ敍列,則一為其他之截段.

何則?蓋若Γ, Γ^{**}為二Γ序列由定理67 Γ與Γ^{**}或相似或其一與其他之截段相似.今設Γ與Γ^{**}之一截段Γ^*相似.即$\Gamma\cong\Gamma^*$.次須證明$\Gamma=\Gamma^*$.

Γ之一元素c. 關於$\Gamma\cong\Gamma^*$則Γ^*有一c^*與之對應.此時須證明$c=c^*$.

若c與c^*各各為Γ, Γ^*之最初元素時,由(I) $c=m_0=\varphi(M)$, $c^*=m_0$

$=\varphi(M)$ 故 $c=c^*$. 今由超限歸納法證明其在一般者.

今假定一切關於 $c\prec c_1$, $c^*\prec c_1^*$ 皆 $c=c^*$ 成立,由是以證明 $c_1=c_1^*$. 由此假定,則截段 Γ_{c_1} 與 $\Gamma^*_{c_1^*}$ 必一致,故 $\Gamma_{c_1}=\Gamma^*_{c_1^*}$

由定義

$$c_1=\varphi(M-\Gamma_{c_1}),\quad c_1^*=\varphi(M-\Gamma^*_{c_1^*})$$

故 $c_1=c_1^*$, 是以用超限歸納法關於一切之 c 皆 $c=c^*$. 故

$$\Gamma=\Gamma^*.$$

Γ 與 Γ^{**} 相似時,同樣 $\Gamma=\Gamma^{**}$.

故 $\Gamma\neq\Gamma^{**}$ 則其一爲其他之截段也.

(III) 若二 Γ 敍列共有一元素 c 則由 c 決定之截段互相一致.

蓋由(II)其一爲其他之截段也.

由 (III) 敍列若共有 a, b 二元素時於其一之敍列如爲 $a\prec b$ 則於其他之敍列亦 $a\prec b$.

(IV) 一切之 Γ 敍列之和設爲 Σ, 則 Σ 爲有序集合.

蓋若 a, b 爲 Σ 之二元素,含 a 之 Γ 敍列爲 Γ, 含 b 之 Γ 敍列爲 Γ^*. 如 $\Gamma\neq\Gamma^*$ 則由(II)其一爲其他一之截段.今設 Γ 爲 Γ^* 之截段則 a, b 皆屬於 Γ^*.故 Γ^* 之中如 $a\prec b$ 則在 Σ 之中亦 $a\prec b$, 此爲規約.故 Σ 之任意二元素之順序可得而決定.其次再證明若 $a\prec b$, $b\prec c$ 則 $a\prec c$.

如 a, b 同屬 Γ, b, c 屬於 Γ^* 則由(III) Γ^* 含 Γ_b, 故含 a. 又因 Γ^* 含 a, c 而在 Γ^* 中明明 $a\prec c$ 故在 Σ 中亦 $a\prec c$.

(V)　Σ 乃一整序集合.

設 Σ^* 乃 Σ 之一部分集合(非空集合者),此時須說明 Σ^* 有最初之元素.取 Σ^* 之一元素 c^*. c^* 如爲 Σ^* 之最初元素則不成問題.若 c^* 非 Σ^* 之最初元素. c^* 乃屬於一 Γ 敍列 Γ^*.若 a^* 係在 Σ^* 中 c^* 之前之一元素則由(III)者 Γ 中 a^* 亦在 c^* 前.因 Σ^* 中 c^* 前之一切元素乃整序集合 Γ^* 之部分集合,此必有最初元素存在.因而 Σ^* 中有最初元素存在.故 Σ 爲一整序集合.

(VI)　Σ 乃 Γ 敍列.

設 Σ_c 爲 Σ 之一元素 c 所決定之截段.含 c 之一 Γ 敍列爲 Γ.在 Γ 中由 c 所決定之截段爲 Γ_c.則與(V)同樣可知 Σ_c 之元素全部屬於 Γ_c 中,反之 Γ_c 之元素亦屬於 M_c 中,蓋由前在(IV)中者 c 所定之順序之規約可知也.故 $\Sigma_c=\Gamma_c$.故

$$\varphi(M-\Sigma_c)=\varphi(M-\Gamma_c)=c$$

故 Σ 由(V)乃 Γ 敍列.

(VII)　$M=\Sigma$ 故 M 爲整序集合.

$\Sigma\subset M$ 甚明.若 $M-\Sigma\neq 0$ 則令

$$\varphi(M-\Sigma)=z.$$

z 之順序規定在 Σ 之一切元素之後,則 $\Sigma+\{z\}$ 爲整序集合.

c 如爲 $\Sigma+\{z\}$ 之任意元素,由此所決定 $\Sigma+\{z\}$ 之截段爲 Γ_c 則

$$\varphi(M-\Gamma_c)=c.$$

蓋 $c\neq z$ 時,由(VI)之證明可知.今論 $c=z$ 之時者.此時因 $\Gamma_z=\Sigma$

$$\varphi(M-\Gamma_z)=\varphi(M-\Sigma)=z$$

故 $\Sigma+\{z\}$ 乃 Γ 敍列.然此與 Σ 爲 Γ 敍列全部之和矛盾.故 $M=\Sigma$. 因而由(V)知 M 爲整序集合.

此證明乃1904年 Zermelo 所發表之第一證明.今再述一證法於次

〔證二〕 此證法仍然應用選擇公理.今對於與 A 不同之任意部分集合 P, 由 P 以外之元素而成集合 $(A-P)$ 選出一定之元素 a (此 a 乃由 P 而定故可以 $a=f(P)$ 表之)此 a 名爲集合 P 之添加元素;添加於 P 所成之集合 $P+\{a\}$ 名爲 P 之後繼元素,可以記號 P_+ 表之.今吾人用此添加元素與後繼集合之思想而論任意集合之排列.

今先述連鎖集合 (Kette) 之定義及其性質:

今考 A 之部分集合之集合其滿足次之三條件者:

(a)此集合含‘0集合’,

(b)此集合若含多集合時必含其和集合,

(c)此集合含集合 $P(P\subset A)$ 時則必含其後繼集合 P_+.如此之集合吾人稱爲連鎖集合.

如此之連鎖集合其存在甚明.如由 A 及比 A 小之一切部分集合而成之集,明明爲最大之一連鎖集合.今若有如此之連鎖集合之二個以上者,則此一切連鎖集合之共通元素(A之部分集合)之集合亦一連鎖集合,此連鎖集合爲

一切連鎖集合中之最小者,此由連鎖集合之性質容易得知,此最小之連鎖集合以 $\mathfrak{K}$ 表之.此最小連鎖集合有兩最要之性質.

最小連鎖集合之性質第一:

$\mathfrak{K}$ 之一切元素(A 之部分集合)其大小得而比較;卽 $\mathfrak{K}$ 之任意之元素如爲 P,Q 則 P,Q 必有 $P\lesseqqgtr Q$ 之關係之一可以滿足.

茲分成兩段證之.

第一段　$\mathfrak{K}$ 之元素 P 與 $\mathfrak{K}$ 之其他之一切元素其大小得而比較時,則 P 稱爲 $\mathfrak{K}$ 之正則集合.

定理　$P(P\subset A)$ 爲正則集合,則 $\mathfrak{K}$ 之一切元素 X 有

$$X\subseteqq P \quad 或 \quad X\supseteqq P_+$$

之關係可滿足.

證明.　首先,見凡滿足於 $X\subseteqq P$,及 $X\supseteqq P_+$ 之一切集合 X 乃作成一連鎖集合.其理由如下.

(a) 因 $o\subseteqq P$ 故'o 集合'乃一 X 之集合.

(d) 任意多之 X 之和乃又一 X 之集合.

今設 $S=\Sigma X_m$;(i)如各 X_m 皆滿足於 $X_m\subseteqq P$, 之關係,則其和 S 亦滿足於 $S\subseteqq P$ 之關係(因 $X_m\subseteqq P$ 乃 X_m 之一切元素皆屬於 P 之意).(ii)若 X_m 之中至少有一滿足於 $X_m\supseteqq P_+$ 之關係時,則其和 S 亦滿足於 $S\supseteqq P_+$.故無論如何 S 皆一 X 也.卽許多 X 之和爲又一 X.

(c) $X(X\subset A)$ 之後繼集合乃又一 X.

(i)若$X\supseteqq P_+$則X之後繼集合X_+乃滿足於$X_+\supset P_+$. (ii)若$X=P$則X_+滿足於$X_+=P_+$. (iii)且若$X\subset P$則X_+不得不滿足於$X_+\subseteqq P_+$蓋因X_+與P乃可以比較者,若$X_+\supset P$則$X_+-X=(X_+-P)+(P-X)$至少不得不有二元素.何則?蓋因$X\subset P$故$P-X$至少須含一元素,$X_+\supset P_+$故X_+-P亦至少須含一元素,而其和至少含有二元素也,然由他方觀之X_+乃$X+\{a\}$,因而X_+-X不過只含唯一之元素a,故X_1乃滿足於

$$X_+\supseteqq P_+ \quad 或 \quad X_+\subseteqq P.$$

因而X_+乃又一X也.

由(a)(b)(c)三款,X之集合爲一連鎖集合可知也,

然P及X皆$\mathfrak{K}$之連鎖集合之元素.因$\mathfrak{K}$乃一最小連鎖集合,X之集合與$\mathfrak{K}$不得不相同,故$\mathfrak{K}$之一切元素X皆滿足於

$$X\subseteqq P \quad 或 \quad X\supseteqq P_+.$$

第二段. 定理, 最小連鎖集合$\mathfrak{K}$之一切元素皆正則集合.

證明. 首先,可見$\mathfrak{K}$之一切正則集合乃作成又一連鎖集合.

何則?因如下所示此集合有連鎖集合(a),(b),(c)之三性質也.

(a) '0集合'爲正則集合.

(b) 正則集合之和爲又一正則集合.

今設$P=\Sigma P_m$爲正則集合之和,X乃$\mathfrak{K}$之任意元素.

然此時因P_m爲正則集合,故P_m須滿足於$P_m \gtreqless X$之一關係.(i)若各P_m皆滿足於$P_m \subseteqq X$時,則P滿足於$P \subseteqq X$.故P於一切情形皆滿足於$P \gtreqless X$,因而P與各X其大小可得比較,故P爲正則集合.

(c) 正則集合$P(P \subset A)$之後繼集合P_+又爲正則集合.

此事由前定理可直接導得.蓋若P爲正則集合則由前定理屬於$\mathfrak{K}$之任意集X乃滿足於

$$X \subseteqq P \quad 或 \quad X \supseteqq P_+$$

而$X \subseteqq P$對$X \subset P_+$成立.故對於$\mathfrak{K}$之任意元素X

$$X \subset P_+ \quad 或 \quad X \supseteqq P_+$$

成立.故P_+爲正則集合.

如斯$\mathfrak{K}$之一切正則集合之集,乃有(a)(b)(c)之三性質故爲一連鎖集合.然因$\mathfrak{K}$爲最小連鎖集合故$\mathfrak{K}$之一切正則集合之集合不得不爲$\mathfrak{K}$之自身,故$\mathfrak{K}$之元素皆正則集合.

由上二定理則屬於連鎖集合之一切集合,其大小得比較可知也.

最小連鎖集合$\mathfrak{K}$之性質第二:

最小連鎖集合$\mathfrak{K}$爲一整序集合.

由性質第一,屬於$\mathfrak{K}$之一切集合其任何二者,其大小皆得而决定,故可依其大小之順序排列之.如斯排列之集合以$\mathfrak{K}'$表之.此時之$\mathfrak{K}'$卽一連鎖集合也.

何以言之,先,$\mathfrak{K}'$之自身有第一元素卽'0集合'.故欲說明

$\mathfrak{K}'$爲連鎖集合可將$\mathfrak{K}'$任意分成二部分$\mathfrak{K}'_1+\mathfrak{K}'_2$證明,$\mathfrak{K}'_2$有第一元素斯可也.($\mathfrak{K}'$常含有0集合故有第一元素).今設$P_1$爲$\mathfrak{K}'_1$之任意元素,$P_2$爲$\mathfrak{K}'_2$之任意元素,則因$\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{K}'_2$乃依大小順序排列之集合故$P_1\subset P_2$. 今設一切P_1之和爲P則

$$P_1\subseteqq P\subseteqq P_2$$

之關係成立.故P乃P_2中之最初者或P_1中之最後者.今如P爲P_1中之最後者則P_+卽P_2之最初者.故無論如何$\mathfrak{K}'_2$有最初元素,因而$\mathfrak{K}$爲整序集合.

於是吾人利用此最小連鎖集合$\mathfrak{K}$則任意之集合A得爲連鎖集可證明如下:

取任意集合A, 作其最小連鎖集合$\mathfrak{K}$.連鎖集合$\mathfrak{K}$之元素P與集合A之元素a如下所論可得知其爲一一對應.因而遂知A得爲一連鎖集合.

(1)先取$\mathfrak{K}$之任意不同之元素P_1, P_2 ($P_1\subset P_2$). 則由$a_1=f(P_1)$, $a_2=f(P_2)$而定互爲相異之添加元素a_1, a_2蓋因$P\subset P_2$, 故P_2含P_1之後繼元素P_{1+}, P_2含a_1而P_2乃不能含$a_2=f(P_2)$ (因a_2乃屬於P_2之後繼元素P_{2+})故a_1與a_2異.是以P乃由$a=f(P)$所定之添加元素a與之對應且有唯一之a與之對應,而相異之P有相異之a與之對應.

(2)次取A之任意一元素a, 此a可見其爲唯一之集合P之添加元素.卽今於$\mathfrak{K}$中取其不含元素a之一切集合,設其和爲P (因P或由a而定故可以$P=F(a)$表之)時則a爲此

P 之添加元素,卽 $a=f(P)$. 何則?蓋若不然則 P_+ 不含 a, 於是由有不含 a 而比 P 大之集合 P_+ 存在,此與 P 爲不含 a 之一切集合之和之性質矛盾.

故如與一 $\mathfrak{P}$ 之元素 P 時有由 $a=f(P)$ 時決定之唯一元素 a 與之對應;而與一 A 之元素 a 時,則有由 $P=F(a)$ 所定之一唯一之 P 與之對應.故兩者互爲一一對應.故依 P 之排列而移 a, 卽對應於 P_1, P_2 之 a_1, a_2 其大小依 $P_1 \subset P_2$ 而定 $a_1 < a_2$. 然 $\{P\}$ 爲整序集合故 $\{a\}$ 亦可知其爲整序集合.

如是則此整序集合可能之定理爲真可知也.如將實數之集合適當處置則雖可斷定其得一整序集合,然實際上用何方法以排列之則尤未發現.因此關於此定理之正否有種種之異論及對其異論之反駁.蓋 Zermelo 證明之前題爲選擇公理,學者對此公理卽有種種之意見.然如此之問題乃數學中所常見.卽理論上"存在之證明"與實際上"作之之方法"乃全然各別之事.

例如吾人若假定百年前卽有集合論則對於超越數之存在在理論上固可證明之.然實際上則無一個超越數可以求得也.(今日所知之數個超越數及 Liouville 之許多超越數之作法則爲近數年內之事)又如代數方程式,於理論上 n 次方程式有 n 個根存在雖可證明,而實際上求此等根之法則殊爲困難.集合論中之整序集合之問題卽屬於此種者也.

由此吾人前於 §11 中論基數大小時所遺留之問題可以解決矣.卽:

定理 74. (基數比較可能定理)二集合 A, B 其基數 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 常能比較.卽次之三關係常有一存在:

$$\mathfrak{a}>\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}=\mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}<\mathfrak{b}.$$

27. 超限序數之運算

第一　加法及乘法

超限序型之和及積前已論述.而於

$$S=\sum_{m}^{M} A_m \qquad P=\prod_{m=1}^{n} A_m \qquad (n\text{: 正數})$$

如 $\overline{\overline{M}}$, 及 A_m 皆整序集合時,其和 S, 及有限個 A_m 之積亦整序集合,此易得知.故得次之結果:

無數多之超限序數之和(整序的)又有限個超限序數之積皆爲超限序數.

定理 75. 若 α, β 爲超限序數,如 $\alpha<\beta$ 則關於其和與積有次之關係成立;

$$(I)\begin{cases} \xi+\alpha<\xi+\beta & \alpha+\xi\leqq\beta+\xi, \\ \xi\alpha<\xi\beta \quad (\xi>o) & \alpha\xi\leqq\beta\xi. \end{cases}$$

〔證明〕 如 $\alpha<\beta$ 則對應於 α 之集合 A 爲對應於 β 之集合 B 之截段.故 $\beta=\alpha+\gamma\ (\gamma>o)$ 之關係可得反之爲 $\beta=\alpha+\gamma\ (\gamma>o)$ 則 $\alpha<\beta$.

$$\therefore \qquad \xi+\beta=\xi+(\alpha+\gamma)$$

$$=(\xi+\alpha)+\gamma \quad \text{(關於序型之組合法則)}$$

$$\xi+\beta>\xi+\alpha.$$

$$\xi\beta=\xi(\alpha+\gamma)$$

$$=\xi\alpha+\xi\gamma \qquad \text{(序型之分配法則)}$$

$$>\xi\alpha.$$

雖然,於和及積若將 ξ 之順序變卽將 ξ 置於 β 之後時則須不等號與等號皆併列乃可.何則?如

$$\beta+\xi=(\alpha+\gamma)+\xi=\alpha+(\gamma+\xi),$$

$$\beta\xi=(\alpha+\gamma)\xi=\alpha\xi+\gamma\xi$$

之關係可得而起也.故爲 $\gamma+\xi\geqq\xi$, $\gamma\xi\geqq\xi$. 例如

$$1+\omega=2+\omega=\omega \quad (\text{而 } \omega+1<\omega+2)$$

$$1\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega \quad (\text{而 } \omega\cdot1<\omega\cdot2).$$

系　由〔I〕之逆直推得下之結論.

若 $\xi+\alpha<\xi+\beta$, 或 $\alpha+\xi<\beta+\xi$ 時則 $\alpha<\beta$.

若 $\xi+\alpha=\xi+\beta$ 時則 $\alpha=\beta$.

若 $\xi\alpha<\xi\beta$ 或 $\alpha\xi<\beta\xi$ 時則 $\alpha<\beta$

若 $\xi\alpha=\xi\beta$ 時則 $\alpha=\beta$.

然若 $\alpha+\xi=\beta+\xi$ 及 $\alpha\xi=\beta\xi$ 則皆不斷能定 $\alpha=\beta$ 之關係必成立也.

第二　減法

定理 76.　a.　設序數 α, β 滿足於 $\beta>\alpha$ 之關係時則滿足於

$$\alpha+\zeta=\beta$$

關係之序數 ζ 常存在.且只能限於唯一之 ζ.

此如前所述,如 $\beta>\alpha$ 時則對應於 α 之整序集合爲對應

於 β 之整序集合之截段.由是卽可推知.此 ζ 名爲由序數 β 減去序數 α 之差.可以記號

$$\zeta=\beta-\alpha$$

表之.

此減法之定義,α,β 爲有限數時雖屬相同,而若爲超限數時則其結果殊有與有限數者不同之處.例如 β 爲超限序數 ω,則對於 $\alpha=1,2,3,\cdots\cdots,n$ 之 ζ 常爲 ω.卽 β 若爲一定數 ω 而對於 α 爲比 β 小之一切之值之差之 ζ 皆爲同一之數 ω.此乃有限數之減法所不見者也.又如 β 爲 $\omega+k$(k: 自然數)時對於 α 比 β 小之一切之值之差 ζ 乃只能取 $\omega+k, k, k-1, k-2,\cdots\cdots,3,2,1$ 共 $k+1$ 個之值而不取其他之值,何則?蓋

$$\begin{array}{ll}
\alpha+\zeta=\beta & \\
\hline
o+(\omega+k)=\omega+k) & \\
n+(\omega+k)=(\omega+k) & n=1,2,3\cdots\cdots,p \\
\omega+k=(\omega+k) & \\
(\omega+1)+(k-1)=(\omega+k) & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\omega+(k-2)+2=(\omega+k) & \left(\begin{array}{l}\text{此時 } \alpha<\beta \text{ 故 } \alpha \text{ 可取得之值惟限於}\\ o,n,\omega,\omega+1,\cdots\cdots\omega+(k-1)\end{array}\right) \\
\omega+(k-1)+1=(\omega+k). &
\end{array}$$

定理 76. b. 設序數 α,β 滿足於 $\beta>\alpha$ 之關係時則滿足於

$$\eta+\alpha=\beta$$

之 η 一般不存在.

例如滿足於

$$\eta+\omega=(\omega+1)$$

之 η 不存在.何則?蓋對應於 $(\omega+1)$ 之整序集合有最後一元素而對應於 $\eta+\omega$ 之整序集合則無論 η 爲何序數皆不能有最後元素也.

雖然若上之關係滿足之 η 如存在時,若 $\alpha\geqq\omega$ 則 η 常有無數多之解卽 $\eta_0, \eta_0+1, \eta_0+2, \cdots\cdots$. 僅 α 爲有限數時乃有唯一之解 η_0. 因 α 爲有限數時 $\eta+(\alpha-1)$ 乃 β 直前之數, $\eta+(\alpha-2)$ 乃 $\eta+(\alpha-1)$ 直前之數,$\cdots\cdots$ 此法往返有限回遂可達到定數 η 也.如此之時 η 稱爲 β 與 α 之差.以記號表如

$$\eta=\beta-\alpha \qquad (\alpha\text{: 自然數})$$

第三除法.

定理 77. 設序數 α β, ζ 滿足於 $\zeta<\alpha\beta$ 之關係時則 ζ 常得以

$$\zeta=\alpha\eta+\xi \qquad (\xi<\alpha,\ \eta<\beta)$$

表之.此時之 ξ, η 如 α, β, ζ 定則只有唯一可定.

〔證明〕 今設 α, β 各爲整序集合 A, B 之序數.作此 B, A 之結合集合 $(B\cdot A)$. 此時 ζ 乃由 (b_m, a_n) 之元素所定 $(B\cdot A)$ 之截段序數.其截段乃由下之元素所組成:

$$(I)\begin{cases}(b_1, a_1), & (b_1, a_2), & (b_1, a_3), \cdots\cdots \\ (b_2, a_1), & (b_2, a_2), & (b_2, a_3), \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (b_{m-1}, a_1), & (b_{m-1}, a_2), & (b_{m-1}, a_3), \cdots\cdots\end{cases}\left(\begin{array}{l}b<b_m \\ a: A\text{之一切元素}\end{array}\right)$$

$$(II)\qquad (b_m, a_1),\ (b_m, a_2),\ (b_m, a_3)\ \cdots\cdots,\ (b_m, a_{m-1})\ ^*$$

今ξ, η乃各爲對應於由a_n, b_m而定之A, B之截段之序數則〔I〕乃表對應於$\alpha\eta$之元素之集,〔II〕乃表等於序數ξ之元素之集.故

$$\zeta=\alpha\eta+\xi$$

之關係成立.且同時可見b_m, a_{n-1}, ξ, η.乃由ζ, α, β所定之唯一之數也.

今β爲任意時吾人可得下之定理:

定理 78.　設$\alpha>o$, $\zeta<\alpha\beta$時則ζ可以

$$(b)\qquad \zeta=\alpha\eta+\xi\qquad (\xi<\alpha)$$

之形表之.此時之ξ, η乃由α, ζ所定之唯一之數.

〔證明〕　今設β乃如$\zeta<\alpha\beta$之充足大之數(例如令$\beta=\zeta+n\equiv\beta_1$).如前定理同樣行之,此對於$\beta$可得如(b)之式.其次於其他之$\beta$(例如$\beta_2$乃$\zeta<\alpha\beta_2$者)同樣行之.此時對於不同之$\beta$可得同一之(b)式.何以言之?蓋若相異,則取$\beta_1, \beta_2$之大者例如爲$\beta_1$.用$\beta_2$作(b)式,於其一切步驟中以$\beta_1$代$\beta_2$而考之.可見$\beta_2$時之(b)式與此時之(b)仍屬同一此由前定理所作(a)式之方法可以得之.如此是對於同一之β_1得兩相異之(b)式(卽(a)式),此與前定理之主張相背.

今ζ, α爲所予之有限數則(b)式之η乃以α除ζ之商,ξ爲其剩餘.故吾人於有限數時吾人稱η爲"α除ζ之商,ξ其

* [I], [II] 乃 $(B\cdot A)$ 之元素成爲整序集合者之排列也.

餘".若$\xi=o$則謂ζ可以α(左側之因子之α)整除.

然於越限數時於$\zeta=\eta\alpha+\xi$如此與ζ,與α時則η,ξ不定爲唯一的.例如$\zeta=\omega+3,\alpha=\omega$則其對應之$\eta$,無論爲1, 2, 3, ……何數皆可.卽

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \eta\alpha+\xi \\
(\omega+3) &= 1\cdot\omega+3 \\
&= 2\cdot\omega+3 \\
&= 3\,\omega+3 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

同樣ξ非唯一的之例亦容易作得.

第四　乘法之擴張及冪法.

適用以前所與無限個因數乘法之定義可得……$\alpha_3\alpha_2\alpha_1$之積.雖然如$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$……之因數之積(整序形之排列之因數之積)則不能得.於是吾人不得不另立乘法之定義.

今$\mu_0,\mu_1,\mu_2,$……乃表有限或超限之序數且1號與μ_0對應,2號與μ_1對應.一般α號與$\mu_{\alpha-1}$對應,作

$$f(\alpha)=\prod_{\xi}^{\omega(\alpha)\,*}\mu_0\mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_\xi\cdots\cdots$$

依下之條件如次計算其值.

$$(A)\begin{cases} f(o)=1 \\ f(\alpha) \text{ 乃表對於比 } \alpha \text{ 小之一切之 } \xi \text{ 所作之 } f(\xi)\mu_\xi \text{ 皆不比其小者之最小之數.} \end{cases}$$

* 此記號之意味如(A)所說明

今取比1大之一切因數則由(A)可得如次之$f(\alpha)$之值

$$f(0)=1$$

$$f(1)=f(0)\mu_0=\mu_0$$

$$f(2)=\{f(0)\mu_0,\ f(1)\mu_1\ \text{皆不比其小者之中之最小者}\}$$

$$=f(1)\mu_1=\mu_0\mu_1$$

$$f(3)=\mu_0\mu_1\mu_2$$

………………………

………………………

一般　$f(\alpha+1)=f(\alpha)\mu_\alpha$　　(a)

若α如ω之極限數時則

$$f(\alpha)=\lim f(\xi)\qquad(\xi<\alpha)\qquad(b)$$

此$f(\alpha)$稱爲$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$之積。

故此定義於α爲有限數時與普通乘法相同。

例　由此定義2.3.4……之積如下

$$2\cdot3\cdot4\cdots\cdots=\lim(2,\ 2\cdot3=6,\ 2\cdot3\cdot4=24,\cdots\cdots)=\omega.$$

冪法　令一切之因數μ_α爲同一之數$\mu(\mu>1)$時則

$$f(\alpha)=\mu^\alpha.$$

因而由

$$f(\alpha+1)=f(\alpha)\mu$$

得

$$\mu^{\alpha+1}=\mu^\alpha\cdot\mu.$$

又β,乃爲ω之極限序數時則由

$$f(\beta)=\lim f(\xi)\qquad(\xi<\beta)$$

得

$$\mu^\beta=\lim\mu^\xi\qquad(\xi<\beta).$$

定理79.　由此定義關於超限序數之指數法則成立,卽

$$(I)\quad \mu^\alpha\mu^\beta=\mu^{\alpha+\beta},\qquad (II)\quad (\mu^\alpha)^\beta=\mu^{\alpha\beta}.$$

證明　此可用超限歸納法證明之.

(I)　(i) 先見此法則於 $\beta=0$ 時爲真

(ii) 對於比 β 小之一切 β' 假定爲真則對於 β' 亦爲真.蓋由假定因

$$\mu^\alpha\mu^{\beta'-1}=\mu^{\alpha+(\beta'-1)}$$

故　$$(\mu^\alpha\mu^{\beta'-1})\cdot\mu=\mu^{\alpha+(\beta'-1)}\cdot\mu.$$

然於一方面由前頁之 (α)

$$\mu^{\alpha+(\beta'-1)}\cdot\mu=\mu^{\alpha+(\beta'-1)+1}=\mu^{\alpha+\beta'}$$

成立.而於他方面

$$(\mu^\alpha\mu^{\beta'-1})\cdot\mu=\mu^\alpha(\mu^{\beta'-1}\cdot\mu)\qquad\text{(乘法之組合法則)}$$
$$=\mu^\alpha\mu^{\beta'-1+1}=\mu^\alpha\mu^{\beta'}$$

成立.

$$\therefore\qquad \mu^\alpha\mu^{\beta'}=\mu^{\alpha+\beta'}.$$

若 β' 爲極限數例如 ω 時則

$$\mu^\alpha\mu^{\beta'}=\lim(\mu^{\alpha+\xi})\qquad(\xi<\beta')$$

而 $\xi<\beta'$ 時,由假定常常

$$\mu^\alpha\mu^\xi=\mu^{\alpha+\xi}$$

成立.故由極限之性質

$$\lim(\mu^\alpha\mu^\xi)=\lim(\mu^{\alpha+\xi})$$

成立.

$$\therefore\qquad \mu^\alpha\mu^{\beta'}=\mu^{\alpha+\beta'}.$$

此卽指數法則對於超限數兩條件皆滿足故對於 β 之各値此法則常爲真.

(II)之證明．與(I)時所用之方法全同．

注意　於序數乘法之交換法則一般不成立，故

$$(\mu\nu)^n=\mu^n\nu^n$$

一般不成立．例如

$$(\mu\nu)^2=\mu\nu\,\mu\nu \quad 與 \quad \mu^2\nu^2=\mu\mu\nu\nu$$

一般不同也．

例〔I〕　$2^\omega=\lim 2^\nu=\lim(2,4,8,16,\cdots\cdots)=\omega$

同樣　$2^\omega=3^\omega=4^\omega=\cdots\cdots=\omega.$

注意　雖 $2^{\alpha}\neq\alpha$ 而 $2^\omega=\omega$．此亦可見基數與序數不同之點．

〔II〕　$\omega^\omega=\lim \omega^\nu=\lim\{\omega,\omega^2,\omega^3,\cdots\cdots\}$

然因　$1+\omega=\omega,\ 1+\omega+\omega^2=\omega+\omega^2=\omega^1(1+\omega)=\omega\omega=\omega^2,$

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3=\omega^2+\omega^3=\omega^2(1+\omega)=\omega^2\omega=\omega^3,\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故　$\omega^\omega=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

吾人於上之論述則與集合論相伴而生結果可得而概括焉．由上所述，吾人於超出有限之數世界之範圍，建設一新的超限之數世界之方法．且已述其種種驚人之重要結果．有限之自然數可由基數與序數兩方面考察，於超限數亦分成超限基數與超限序數而論之．其結果，於有限之數世界得作成次第增大之之基數與序數之無限敍列．而於超限之數世界兩者亦皆得作其次第增大無限敍列．然於有限之世界凡相等基數之集合常有同一之序數，而於超

限之世界則其情形大異.相等基數之幾多集合有互爲相異之序數而同一集合亦視其排列之順序如何而序數因而不同.是以基數與序數不得不完全各別的考之,與在有限世界中常混爲一談者不同.故吾人於超限之數世界中,乃能得知序數與基數之真實意義也.

其次於運算之法則,超限基數與超限序數亦大異其趣.前者於加法乘法之法則(組合,交換,分配)殆全部成立.而後者則不過僅組合法則及分配法則之一部成立.又羃法中前者 $2^{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{a}$ 而後者 $2^{\omega} = \omega$ 亦可對見其互異之處.

又若將有限數與超限數比較時,超限數加法乘法之結果往往與有限數呈相異之現象.例如:

有限數	超限數	
$n+a=a+n\neq a$	$n+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+n=\mathfrak{a}$	$n+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+n=\mathfrak{c}$
$a+a+\cdots+a\neq a$	$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\cdots+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$
$a\times . \neq a$	$\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$
$na=an$	$n+\omega\neq\omega+n$	$n\omega\neq\omega n$

且比較各種之集合之超限數,如前所述有許多與吾人數學常識豫想之相反之事實.此種堪驚之事實之指出與其闡明,乃由此無窮集合之妙論及其與數之微妙關係所產生,此吾人所感嘆不置者也.而此超限數之理論,一面爲集合論發展之基礎,而一面又爲奇怪矛盾論之導火綫.數學者由此而對於論理之根底與數學之組織得有其大之

反省與熟慮之機緣,對於最近之數學有非常之影響.此涉及於集合論基礎之批判,茲篇殊未能述之也.

其次對於集合論之應用而有點集合論者乃實變數函數論之基礎多見於實函數論之專著中.本篇亦未加論列.

最後列舉集合論之重要書籍,以終吾篇.

1. Cantor: Contributions to the founding of the Theory of transfinite Numbers.

2. Kamke: Mengenlehre (Sammlung Göschen).

3. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. (1928)

4. Fraenkel: Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.

5. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. (1927)

7. Schoenflies und Halm: Die Entwicklu g der Mengenlehre und her Anewendungen.

8. Sielpinski: Lecons sur les nombres transfinis. (1928)

9. Young: The Theory of sets of points.

10. 能代清: 集合論

11. 辻正次: 集合論

12. 米山國藏:數學之基礎下卷

一年來武漢大學試驗煤氣廠

葛毓桂

近年來國內自然科學,已漸脫離隨從他位,屢屢有所建白.科學工作之惟一場所,是試驗室,試驗室設備,有三個基本條件,曰水,火,電是.

水,電問題,因城市設備之便,或較易解決.我國氣體工業尙未萌芽(有一二處規模較大者皆非國人經營)火的問題,殊未易設法.約十年前北京大學曾設置煤氣機一部,嗣後東北大學亦有同樣計劃,惜機件甫到,便遭九一八事變,其他有採用油氣者中央大學金陵大學等.最近中山大學,軍政部理化研究所,河南大學等均有擬議.就國情上,教育上,暨工業上自以採用煤氣爲宜.

武漢大學試驗煤氣廠,於十七年計劃新校舍之初,卽有此項設計.二十年由漢口禮和洋行經手向柏林柏麥格(Bamag Meguin) 公司定購,二十一年春到齊,是年夏,建築廠屋,裝按機件,次年五月全部竣工.計共用國幣三萬元左右.同年九月正式應用,迄本年暑假已經一年.爰將一年來之工作狀況,主副產品及原料之研究,縷述於后,以供參考.

工作情形—是廠設鑄鐵乾餾甑一只,每次裝入煙煤在130–180公斤之間,每八小時換煤一次,一全日換三次.現時每隔一日裝煤一次(下年需要多時換煤次數當然增加)於甑中無煤時間,爐內仍保持500—700°C溫度.有100立方公尺儲氣塔一座.所有廠中各機件,如冷却塔,洗錏塔,清潔箱,以及打氣機,節制器,氣表等均照一個乾餾甑之最高產量設計.氣壓表,溫度表等應有盡有.故此廠計劃頗週到,廠屋地位亦頗經濟.

廠內煤氣運輸管,自爐子間至冷却塔爲15公分直徑,餘均10公分.由廠至理學院管子爲5公分.將來需要加多,須行改大或加裝支管.

此廠僱機匠一名工資35元,(本學年另換改支工資14元)粗工一名,工資12元,並兼燒蒸餾水,機匠兼做其他五金工作.

原料及產品—凡揮發物在26–35%之間的煙煤,皆可作蒸餾煤氣原料.現採用者爲開灤選塊(分析成分見下)並以之爲燒爐子之燃料.

產品以煤氣爲主,煤焦次之,煤膏,錏又次之.

烟煤消耗統計表

消耗總量		燃燒爐子用		蒸餾煤氣用	
噸	每月平均*	噸	%	噸	%
68.5	7.61	47.58	72.40	20.92	27.60

* 九個月平均計算

產品統計表

	類別	產量	
產品	煤氣	3320.87 立方公尺	
副產品	焦炭	15.91 噸	1.
	煤膏	40—50 公斤	2.
	錏	——	3.

注 1. 自甑取等出之焦炭,質甚輕鬆,且經高溫蒸餾之後,不宜其他用途,如煉鋼等,本廠皆用作爐子之燃料.

注 2. 本年共蒸餾21噸烟煤,照理論每噸可產煤膏2—3公斤之譜,表內係估計數字.

注 3. 產錏爲量更鮮,錏液亦未收存,無從計較.

煤氣廠以製造煤氣爲惟一目的,烟煤之產氣能力,實際上究屬如何亟應注意,開濼選塊產氣能力如下表.

烟煤	煤氣	每噸 c.m.	每噸 c.f.	每磅 c.m.	每磅 c.f.
20.92 噸	3320.87 c.m.	158.74	5605.74	0.0708	2.5

注一. 此氣體積均照逐日報造表計算,未施以標準改正.

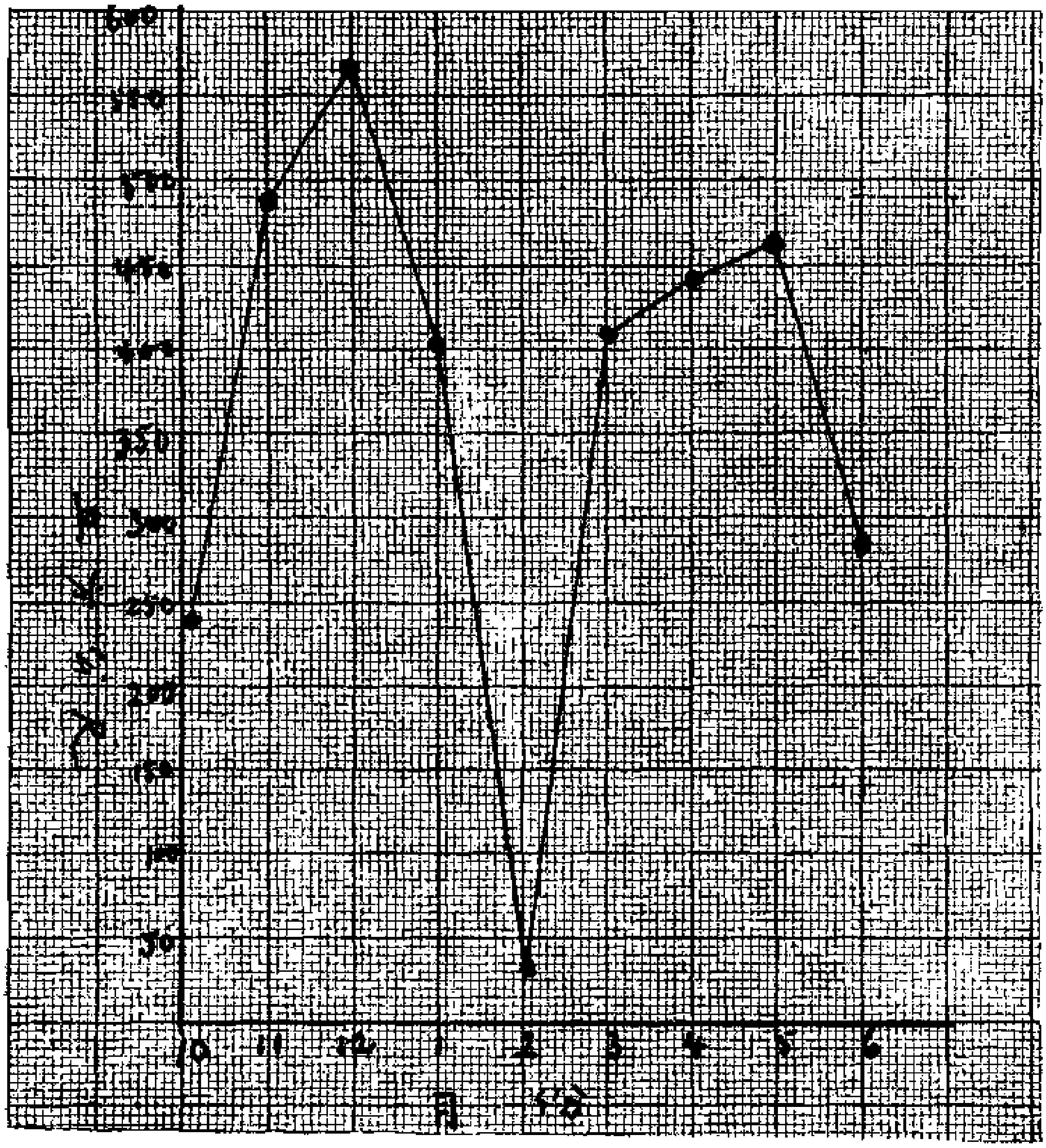
二. 每噸等2240磅.

武漢大學理學院消耗煤氣量,各月份恆有出入,但除10月2月6月外(放假或開學)較少外,餘均在400—600立方公尺.

煤汽消耗表

月份	廿二年 10	11	12	廿三年 1	2	3	4	5	6	總計
立方公尺	238.38	489.18	568.50	401.72	28.65	406.94	439.80	465.20	282.50	3320.87

各月份氣量消耗比較圖



本廠全年用費統計表

烟煤68.5噸	$ 1164.50	每噸平均 $17.00
機匠一名	$ 442.00	每月工資$35.00兼做其他五金工作
粗工一名	$ 144.00	每月工資$12.00兼做蒸餾水

維持及修理費	$ 42.00	此係約數
全　年	$ 1792.50	
每　月	$ 146.00	以十二個月計算

註:自來水電力由學校供給,所費無幾,未列入.機件及廠屋之折舊,亦未計入.

本廠原料及各產品均經嚴密研究其結果如下:—

煙煤之物理性:—

顏色—黝黑,斷面或現銀光,中夾褐色物.

形狀—塊狀,經特別檢選全無碎末.

比重—1.680(室溫16°C)

煙煤之實用分析:—

水份	揮發物	固定炭	灰分	總計	熱值
2.03%	28.78%	51.52%	17.41%	99.74	6657.2加里*

*每gram之calories數.

煙煤之元素分析:—

硫	磷	氫	炭	氮	氧
0.83%	0.023%	4.8%	58.9%	0.99%	14.74%

以下為產品之分析.

煤焦(自甑取出者)之實用分析:—

分份	揮發物	固定炭	灰分	總計	熱值
1.06%	7.47%	67.15%	24.07	99.75	4016加里

焦煤之元素分析:—

硫	磷	炭	氫	氮
0.69%	0.045%	71.49%	2.76%	0.822%

煤氣之研究:—

1. 比重　0.4368 (在 756mm 及 20°c)
2. 熱值　6765.7 加里(Cal)每立方公尺,
3. 成分

	一次	二次
取料	98.8c.c.	98.8c.c.
CO_2	3.10%	2.5%
未飽和烴	2.20%	2.07%
氧	0.70%	0.41%
一氧化炭	7.20%	6.20%
沼氣(CH_4)	29.54%	38.92%
氫氣	44.60%	39.94%
氮	11.59%	9.30%

煤膏之研究:—

1. 比重　1.078(20°c)(未行去水手續)
2. 蒸餾　取試料100公分,分餾之結果如下:—

0°c	成分	體積	比重	色澤
170°C以下	水分	15.8c.c.	0.7234*	灰色
	輕油	8.8c.c.	0.8733	黃褐色
130°C—230°C	中油	11.8c.c.	0.9312	褐色

*此部份蒸溜物水份輕油互相混合,定水份之比重時應有輕油成分.

230—270℃	重油	12.0c.c.	1.0040	紅褐色
270—370℃	綠油	28.0c.c.	1.0640	棕紅色
360°c以上	瀝青脂	28公分		黑色

皚液之分析.

試料	比重	成分		平均
甲	1.017	1.92%	2.184%	1.88%
乙	1.003	0.66%	0.67%	0.67%

注——甲試料取自皚液池,乙試料取自爐上之水壓箱.

過去一年間,試用之結果滿意大致尙屬滿意,二十三年度開始,將有若干改良,並將繼續攷察與試驗,作後來改良之張本.

本篇主副產品之分析表,皆摘錄本校化學系女生魏琬之畢業論文,附此誌謝

二十三年九月於武昌珞珈山

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室中國鳥類標本之地理分佈研究

（續第五卷第一期）

任　國　榮

HIRUNDINIDAE. 燕科

普通性質與一般鳴禽類相若.外觀上與疾燕科 *Micropidae*. 相似,但後者只有尾羽十枚而本科則有十二枚;後者足部無盾狀鱗而本科則有之,是亦不難區別.翼尖長,初列撥風羽九,第一枚與第二枚幾等長;嘴短而扁闊,自上方觀之,幾成三角形,口之裂縫,直至眼下方;跗蹠短弱,不適步行,非取泥營巢,幾不至平地.完全以昆虫供食,且疾飛以捕之.生殖期大約在四,五,六,七等月,可產卵數次.巢之形式不一,或爲杯狀,或爲曲頸瓶狀……,主以泥土構成,而雜以羽毛,草桿,樹葉等物.卵色白,或帶有斑紋,每次可產四五個或六七個.

巴黎博物館鳥類研究室燕科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有四屬十二種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共二十六個.

吾國人所珍視之燕窩,乃疾燕科 *Micropidae* 許多種類,以口涎與海藻所營之巢,與本科各種無關,將于疾燕科詳述之.

467. **Delichon urbica dasypus** (Bonaparte). 日本毛足燕

La Touche, p. 387 —— 沙尾山遷移鳥.直隸遷移鳥及夏鳥.

室中只有日本鳥,以旣有記載于我國,特編入本目錄.

468. **Delichon urbica whiteleyi** (Swinhoe). 塞毛足燕

D. et O. p. 130 (*Chelidon lagopoda*)——生殖于北京東部岩石之山中,漠平,及中部諸省.頗爲稀罕.永未見于城市或人家附近.

Baker, iii, p. 229——自西伯利亞之葉尼塞以至滿州.冬季至南中國及印度緬甸.

La Touche, p. 383——香港,沙尾山,直隸,遷移鳥.湖北(夏鳥?).

室中有五標本: 5(?), 1895, 1898, B.et, 四川打箭爐.

此五標本,破爛不堪,難作精密之研究,是否 *whiteleyi* 尙屬疑問.再進一步言之,所謂 *D. u. dasypus* 與 *D. u. whiteleyi* 是否非同物異名,實大有研究之餘地,觀各人之形態記載,皆未能指出其區別之要點.如能將 *D. u. dasypus* 標準地之日本鳥與 *D. u. whiteleyi* 之北京鳥聚于一堂而作詳細之比較,吾信其必有許多新發見也.

又室中另有雲南鳥一,亦因太殘破,無從別其亞種,但爲 *Delichon urbica* 則可斷言. 1(?), 27, ix, 1896, Prince d'Orléans, 雲南.

469. **Delichon urbica nigrimentalis** (Hartert).福建毛足燕

La Touche, p. 386 ——福建西北部夏鳥.福建中部(二月).直隸夏鳥.

室中有一福建鳥: 1♂, 26, iv, 1897, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余在廣西猺山所得及此次寄來之廣東北部標本,都應逮此型.

D. u. nigrimentalis 與日本之 *D. u. dasypus* 之區別,在其量度較小(翼 9.35—98×102—110; 尾 41—44×42—48mm.), 腮及下顎基部純黑而非白或黃白;下體常染煙灰色.

470 **Riparia riparia ijimae** (Lönnberg). 東沙燕

D. et O. p. 128 (*Cotyle riparia*) —— 中國北部甚普通,亦曾于蒙古見之,但爲數無多.

Baker, iii, p. 234——Sahalin, 亞森母,緬甸,西藏,或可至中國北部.

La Touche, p. 387——沙尾山遷移鳥,直隸遷移鳥及夏鳥.

室中有兩蒙古鳥,雖甚殘破,但余以爲應屬此種:2(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河.

471. **Riparia fohkiensis** (La Touche). 福建沙燕

La Touche, p. 388 —— 福建留鳥.四川,湖北,揚子江下流夏鳥.但不可得見于沙尾山.

室中只有安南鳥.

余之廣東北部標本,亦逮此型.

472. **Riparia paludicola chinensis** (Gray). 棵足沙燕

D. et O. p. 126 (*Cotyle sinensis*) —— 可見于中國之大部.大雪初融,余朗于陝西見之,當係在中國南部度冬也.

Baker, iii, p. 235——印度全境,亞森母,緬甸,南行至德尼薩拉,印度支那及中國南部.亦可見于台灣及菲律賓.

La Touche, p. 389——Swinhoe 及 David 雖以此入中國鳥類目錄,但並無證據以證明之,或係 *R. fohkiensis* 之悞亦未可知.

室中只有兩安南鳥,因既經 Swinhoe 及 David 之記載,故特編入本目錄.

473. **Ptyonoprogne rupestris** (Scopoli). 岩燕

D. et O. p. 129 —— 中國之岩燕,與歐洲及北非洲之岩燕,係屬同種,並廣佈于中央亞細亞.余常于中國西部各地及蒙古見之.其翼雖長,而飛翔反不及其他燕子之敏捷.中國人云,嚴寒時,其蟄匿岩洞中者,實爲數不少云.

Baker, iii, p. 236——非洲北部,歐洲南部亞洲西部以至土

耳其,西藏,中國西部及甘肅,雲南;南行至印度之西北境.

La Touche, p. 390——雲南東南部,四川,甘肅,直隸.

Rothschild, p. 248——雲南.

室中有兩中國鳥: 1♀, 29, iv, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

474. **Hirundo rustica rustica** L. 赭腹家燕

Baker, iii, p. 240——生殖于歐洲,非洲西北部,西伯利亞西部以至葉尼塞,小亞細亞,喜馬拉雅帶,自克什米爾以至錫金,西藏及亞森母山中.

室中有一西藏鳥: 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

475. **Hirundo rustica gutturalis** Scopoli. 家燕

D. et O. p. 124 —— 四月初至北京,在人家以營巢生殖者,實爲數不少.吾所見之蒙古鳥,下體赭黃,而中國本部者則爲純白,其中豈有不同之兩種歟?

Baker, iii, p. 241——生殖于西伯利亞之東,自葉尼塞以至日本,阿富汗,卑路支, Gilgit, Ladakh, 西藏北部,中國西北部等處沙漠高原之生殖鳥,亦當係此型.冬季至印度東部,緬甸,馬來羣島,婆羅洲,蘇門答拉,爪哇,菲律賓,中國南部.亦可見于新幾內亞及澳洲之北部.

La Touche, p. 392——中國全部,夏鳥.中國東南部,雲南東

部,夏鳥及冬鳥.

Rothschild, p. 247 —— 二,三,六,七,十二等月皆有記載于雲南.

室中除大批別處標本外,有中國鳥七: 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1♀, 1895, Prince d'Orléans,雲南; 1(?), vi, 1910, Mme. Comby, 雲南; 1♂, 2♀, 25, iii, 1909, Gladin, 寧波.

余于廣西猺山射得之.亦有記載于廣東北部.

H. r. rustica 胸部黑環完好,不受喉部濃栗色之侵蝕,下體赭色. *H. r. gutturalis* 胸部黑環爲喉部濃栗色所侵蝕,下體純白.

476. **Hirundo daurica daurica** L. 塞斑腹燕

D. et O. p. 125 (*Cecropis daurica*) —— 見于中國各地,蒙古,甘肅,阿拉山 (Ala-chan). 與普通燕子同來北京,但離去期則稍遲數日.

Baker, iii, p. 248 —— 西伯利亞東部,外貝加爾,亞穆爾,烏蘇里,蒙古,甘肅,西藏及亞森母.

La Touche, p. 395 ——福州 (四月,一標本).沙尾山遷移鳥.九月亦得有記載于雲南東部之蒙自.

室中除別處標本外,有一中國鳥: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河.

477. **Hirundo daurica striolata** Temm. & Schleg. 中國斑腹燕

D. et O. p. 127 (*Cecropis striolata*)——爲台灣之留鳥.

Baker, iii, p. 249——分佈于中國中部,南部,安南,雲南,緬甸北部及亞森姆.

Rothschild, p. 248——雲南.

室中只有安南鳥.

478. **Hirundo daurica nepalensis** Hodgson. 小斑腹燕

La Touche, p. 397——汕頭,廈門,留鳥.福州,沙尾山,遷移鳥.四川,揚子江中流及下流,夏鳥.

Rothschild, p. 247——雲南.

室中除大批印度及安南標本外,有中國鳥四: 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 3(?), 1896, Déje n, 四川打箭爐.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之粵北湘南兩批標本中,亦各有此鳥數個.

Hirundo daurica 之三亞種,可用下列檢索表區別之.

A. 翼長 120mm. 以上.

a. 下體多着赭色,條紋甚細.........*H. d. daurica.*

b. 下體幾爲純白,條紋甚粗.........*H. d. striolata.*

B. 翼長 120mm. 以下.........*H. d. nepalensis.*

MOTACILLIDÆ. 鶺鴒科

翼之初列撥風羽只有九枚,第一與第二枚幾等長;次列撥風羽甚長,有時直達翼之先端;凡此二者,乃本科之主要特徵.嘴纖長,嘴鬚頗發達;跗蹠亦長,後爪常甚發達;尾羽十二枚.雌雄相似,縱不十分相似,當亦相差不遠.幼鳥亦似成長鳥.通常以昆虫及水生小動物爲食有時亦食種子.在我國境內,大多數爲冬鳥及遷移鳥,少數爲留鳥或夏鳥.

巴黎博物館鳥類研究室鶺鴒科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有三屬二十種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共九十七個.

479. **Motacilla alba baicalensis** Swinhœ. 貝加爾白面鶺鴒

D. et O. p. 301——在貝加爾及大烏里皆甚普通,歲必于此營巢生殖.中國本部,余只于四川西部得之.

Baker, iii, p. 260——生殖于西伯利亞東部,自貝加爾湖以至滿洲東部;冬季至中國南部,雲南及撣部.亦曾于西藏得有標本.

La Touche, p. 399 ——直隸西部以至北京,遷移鳥,夏鳥及冬鳥.陝西.四川,冬鳥,春季于沙尾山得一標本.

Rothschild, p. 322 ——雲南.

室中標本皆非來自我國,因既有記載,特編入本目錄.又,余曾于廣西猺山射得之.

480. **Motacilla grandis** Sharpe. 黑面鶺鴒

La Touche, p. 404——北京,東陵直隸東北部.

室中只有日本鳥.因既有記載于我國,特編入本目錄.

481. **Motacilla lugubris alboides** Hodgson. 賀孫白面鶺鴒

D. et O. p. 298 (*Motacilla hodgsoni*) ——于四川及陜西南部皆得有標本.

Baker, iii, p. 262 ——生殖于喜馬拉雅帶者,自 Gilgit 以至錫金及西藏東南部.……

La Touche, p. 406——雲南,四川,陜西南部留鳥.

Rothschild, p. 321 (*Motacilla alba alboides*)——雲南留鳥.

室中有中國鳥五: 1(?), 1892, Prince d'Orléan, 四川打箭爐, 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐, 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐,

482. **Motacilla lugubris leucopsis** Gould. 白面鶺鴒

D. et O. p. 298 (*Motacilla alboides*)——廣佈全國濱水之地.

Baker, iii, p. 264——阿穆爾,滿洲,蒙古,中國北部及西藏,冬季至中國南部,台灣,緬甸,亞森母,東孟加拉以至尼伯爾.

La Touche, p. 404 ——直隸遷移鳥,夏鳥及留鳥.山東遷移

鳥及夏鳥.沙尾山遷移鳥.揚子江下流遷移鳥,或有一部爲留鳥.中國中部,四川,雲南,冬鳥.福建,廣東,留鳥.廣西夏鳥.

Rothschild, p. 322——九,十,二,三,四,等月皆有記載于雲南.

室中除別處標本外,有中國鳥六: 5(?), 1894, 1895, Biet, 四川打箭爐; 1♀, 5, viii, 1873, David, 江西.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

483. **Motacilla cinerea caspica** (Gmelin). 灰鶺鴒

D. et O. p. 302 (*Calobates melanope*)　此鳥與歐洲鳥完全相似,但尾則較短,分佈于菲律濱,爪哇,印度,蒙古,西伯利亞東部及中國.

La Touche, p. 408——揚子江下流一帶,冬鳥.沙尾山,中國東北部,遷移鳥.直隸東北部之東陵,有生殖鳥一雙,四川西北部夏鳥及遷移鳥.

Rothschild, p. 322——正,二,三,四,九,十,十一,十二等月皆有記載于雲南.

室中別處標本甚多,有中國鳥十一個: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河; 5(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 2♀, 1896, Père Soulé, 雲南茛妫; 1♂, 1♀, vi, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦

有此鳥數個.

484. **Motacilla flava thunbergi** Billberg. 灰頭黃鶺鴒

D. et O. p. 303 (*Budytes cinereocapillus*)——春秋二季遷移期,蒙古及中國本部皆甚普通.

La Touche, p. 410 ——揚子江流域,沙尾山,直隸,遷移鳥.廣東(?),福建冬鳥.

室中有兩標本: 1♂, 1895, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

486. **Motacilla flava taivana** (Swinhoe) 青鶺鴒

D. et O. p. 303 (*Budytes taivanus*)——Swinhoe 于台灣,海南,福建,見之.

Baker, iii, p. 270——生殖于貝加爾湖,大鳥里,阿穆爾, Sakhalien, 及千島群島.冬季至中國南部,台灣及印度支那.

La Touche, p. 413——廣東,福建,留鳥.揚子江下流沙尾山,直隸,遷移鳥.

室中有中國鳥四: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 7, a, La Touche, 福建; 1(?), 1910, Gladin, 寧波.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥數個.

486. **Motacilla citreola citreola** Pallas. 黃頭鶺鴒

D. et O. p. 304 (*Budytes citreola*)——此鳥在印度度冬,在中國,蒙古及西伯利亞東部度夏.春末見于北京附近,頗爲普通.在黃河與長江流域之沼池,爲數更多.

Baker, iii, p. 273——生殖于俄羅斯之東及土耳其斯坦,阿穆爾及蒙古之東南部.冬季見于印度全境.

La Touche, p. 414——安徽,雲南,冬鳥.四川,廣東,沙尾山,直隸,遷移鳥.

Rothschild, p. 323——三,四,十,十一等月皆有記載于雲南.

室中有中國鳥十: 1♂, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河; 2♂, 1♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 2♂, 1892, 1875, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 3♂, 1902, 四川打箭爐.

Motacilla citreola citreola 之夏羽,背部不着黑色,而 *M. c. calcarata* 之夏羽,上體自背以下深黑. Rothschild 于 Avifauna of Yunnan, p. 323 曾有 *M. c. calcarata* 之記載(轉錄自 Bangs & Phillibs), La Touche 于 Birds of Eastern China p. 415 又舉其分佈地于雲南四川.室中四川鳥,頭部鮮黃,背部或淨橄欖灰,或橄欖灰而渲染黑色不等,與 *M. c. citreola* 之夏羽鳥脗合,但無一係深黑者,故余以 *M. c. citreola* 記載四川鳥.

487. **Dendronanthus indicus** (Gmelin). 林鶺鴒

D. et O. p. 305 (*Limonidromus indicus*)——此為 *Motacilla* 與 *Anthus* 兩屬之連鎖,分佈于印度之大部,錫蘭, Adamen, 亦至中國西部山中營巢生殖,但為數無多.遷移期可見于北京.

Baker, iii, p. 276——生殖于西伯利亞東部及中國北部緬甸,亞森母之山中.冬季南行至印度,印度支那,緬甸,新嘉坡,爪哇,蘇門答拉,婆羅洲及中國南部.

La Touche, p. 417——雲南,四川,廣東,福建,江西,沙尾山,遷移鳥.安徽,直隸,夏鳥.湖北(十月,遷移鳥?).

Rothschild, p. 321——雲南.

室中除安南及南洋羣島標本外,有中國鳥三: 2(?), 1895, 1899, Biet, 四川打箭爐; 1(?), vii, 1910, Mme. Comby, 雲南.

余前曾于廣西猺山射得之.此次寄來之湖南南部標本中,亦有此鳥兩個.

488. **Anthus trivialis haringtoni** Whiterby. 樹鷚

La Touche, p. 419——于沙尾山得一標本.

室中有一四川打箭爐鳥,余以為當逮此型: 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

489. **Anthus hodgsoni yunnanensis** Uch. & Kur. 青樹鷚

D. et O. p. 308 (*Pipastes agilis*)——除冬季外,中國各地皆曾見之,春秋二季遷移期,經過北京者,為數極多, Przewalski 秋

季見于阿拉山,夏季見其營巢于甘肅樹林茂盛之山谷.

Baker, iii, p. 281 (*Anthus hodgsoni hodgsoni*) ——生殖于喜馬拉雅,阿富汗, Gilgit, Kuman,克什米爾,嘉華.冬季可見于印度全境及錫蘭.

Baker, iii, p. 282 (*Anthus hodgsoni yunnanensis*) ——雲南及台灣.撣部,緬甸中部及南部之標本,亦當逮此型.冬季可見于印度支那.

La Tonche, p. 420 (*Anthus hodgsonihodgsoni*) ——中國南部,中國中部之揚子江流域一帶,冬鳥.沙尾山,揚子江北部,遷移鳥.

Rothschild, p. 323 (*Anthus hodgsoni yunnanensis*)——一,二,三,十,十一,十二等月皆有記載于雲南.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥十九: 1♂, 4, vi, 1490, Prince d'Orléans, 西川; 5(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 3(?), 1902, 四川打箭爐; 8(?), 1896, Père Soulié, 雲南其却; 1(?), 1905, La Touche, 中國.

Anthus hodgsoni hodgsoni 與 *A. h. yunnanensis* 之區別,在雲南鳥上體較深暗,下體黑條紋較粗,喉,胸及下尾筒之赭色較盛.室中之十九中國鳥,相互間無甚差別,與安南之 *A. h. yunnanensis* 可謂相同.再與日本鳥較,亦不能發見若何異點.惜無 *A. h. hodgsoni* 標準地尼泊爾鳥以比較,此問題乃懸而莫決.爲權宜計,乃暫採用 *yunnanensis* 以記載此十九鳥.

A. h. hodgsoni 與 *A. h. yunnanensis* 之不易區別, Harter 博士及 Rothschild 早已注意及之.

Stuart Baker 于 Birds of British India 2nd. Ed. vol. iii, p. 283, 又用 *Anthus hodgsoni berewzowskii* Sarudny 一名詞,且舉其分佈地爲四川,蒙古,滿洲,西伯利亞及日本;冬季至中國南部,印度支那及緬甸云云.但 La Touche 旣以 *A. h. hodgsoni* 記載中國鳥,而 Delacour 又以 *A. h. yunnanensis* 記載安南鳥,則 Baker 所舉之分佈地點,又將發生問題.總之 *hodgsoni*, *yunnanensis*, *berewzowskii* 三者是否確爲明瞭之亞種,尙大有研究之餘地也.

廣東北部之標本,與 *A. h. yunnanensis* 較近,而湖南南部標本,則與 *A. h. hodgsoni* 較近.

490. **Anthus richardi richardi** Vieillot. 長爪鷚

D. et O. p. 309 (*Corydalla richaroli*) —— 歲必二經北京,爲數甚多.余曾見其營巢于蒙古 Ortous 草叢之地上.

Baker, iii, p. 288 —— 生殖于西伯利亞,阿爾泰,天山,以至甘肅.冬季至中國南部,印度支那,緬甸及印度.

La Touche, 432 —— 中國各地,沙尾山,遷移鳥.南中國自福建以南,冬鳥.

Rothschild, p. 323 —— 雲南.

室中除別處標本外,有中國鳥一: 1(?), 1902, 四川打箭爐.

余曾于廣西猺山射得之.

491. **Anthus richardi rufulus** Vieillot.

Baker, iii, p. 290——印度,錫蘭,緬甸及德尼薩拉.

Rothschild, p. 324——雲南.

室中只有安南及印度鳥,以既有記載于雲鳥,特編入本目錄.

此次寄來之廣東北部標本,其中有數個,余以爲當逮此型.

492. **Anthus richardi sinensis** (Bonaparte).

D. et O. p. 311 (*Carydalla sinensis*)——Canino殿下以來頓Leyde博物館一中國南部標本,定此名詞,謂其量度較小,上體較深暗,赭色較盛,下體銹色較濃.吾以爲此等特徵,不甚固定,實不如視爲個體差別之爲愈也.

La Touche, p. 434 ——福州,江西,江蘇,夏鳥.春季見于廈門,或係夏鳥亦未可定.

室中除安南標本外,有一中國鳥: 1♀, 20, xi, La Touche (福建?).

A. r. richardi 翼長90mm.以上(常在95mm.以上), *sinensis* 則在90mm.以下,且上體色彩亦較深.*A. r. rufulus* 翼亦在90mm.以下,但上體則與 *A. r. richardi* 全同,故視 *A. r. rufulus* 爲 *A. r. richardi* 之較小種固可,視爲 *A. r. richardi* 與 *A. r. sinensis* 之中間種亦未嘗不可.

493. **Anthus campestris campestris** (Linn). 沙鷚

Baker, iii, p. 292 —生殖地點,自瑞典南部以至地中海一帶,非洲西北部,小亞細亞及西伯利亞東部.冬季南行至印度.

室中除大批別處標本外,有中國鳥三: 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

494. **Anthus gustavi** Swinhoe. 斯氏鷚

D. et O. p. 423 (*Corydalla gustavi*) ——六月間于江西見之,似欲營巢生殖,但永未見于北京及蒙古.

La Touche, p. 423 ——江西夏鳥.廣東,福建,江蘇,沙尾山,直隸東北部,遷移鳥.

室中有一標本,採地,採期,採者皆不詳.

495. **Anthus cervinus** (Pallas). 赤喉鷚

D. et O. p. 306——余在中國所得之標本,皆被冬羽.

Baker, iii, p. 294 —生殖于歐亞二洲之北部.冬季可見于北非洲, Gilgit, 克什米爾,錫金,以至亞森母,緬甸,印度支那,中國南部及馬來羣島.

La Touche, p. 428 ——四川,揚子江下流,沙尾山,直隸東北部,遷移鳥.福建,廣東,冬鳥.湖北遷移鳥及冬鳥.

Rothschild, p. 324——四月間, Uchida 于蒙自得一雄一雌.

室中除大批安南標本外,有中國鳥四: 1♂,1♀, 26, ii, 1896, La Touche, 福州; 1♂, 1♀, 10, 20, xi, La Touche, 採地不明.

496. **Anthus roseatus** Blyth. 黃腋赤喉鷚

D. et O. p. 308 (*Anthus sosaceus*) ——余得自漠平之標本,係屬此種, Przewalski 于甘肅見之,甚爲普通云.

Baker, iii, p. 295 ——生殖于阿富汗,土耳其,經喜馬拉雅山以至甘肅,西藏東部,雲南及揮部.冬季見于印度之平原,亞森母,緬甸之北以至阿拉干.

La Touche, p. 430 ——雲南,四川,留鳥,漠平,甘肅,湖北,夏鳥(留鳥?).直隸夏鳥.

Rothschild, p. 324 ——雲南.

室中有中國鳥十九: 1♀, 1, v, 1890, Prince d'Orléans, 西藏; 5(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 11(?), 1902, 四川打箭爐; 1♂, 10, iii, 1911, Legendre, 四川甯遠府; 1(?), 1897, Père Soulié, 雲南茸却.

Anthus cervinus 腋部及下覆兩白或略帶褐色; *A. roseatus* 則爲鮮黃.

497. **Anthus spinoletta blakistoni** Swinhoe. 中國水鷚

D. et O. p. 306 (*Anthus spinoletta*) ——冬季余于北京附近得之,是時,喜棲不冰凍之小河鄰近潮濕之地.夏季棲童山及

高原中. Przewalski 謂此鳥分佈于蒙古者較少,不及中國本部之繁多云.

Baker, iii, p. 298——生殖于中央亞細亞以至西藏之東部,及中國之西北,阿爾泰,土耳其,天山及南山(Nan-Schan).冬季南行至印度西北境,Gilgit,克什米爾及中國.

La Touche, p. 425 ——雲南西部,揚子江中流及下流,中國北部,冬鳥.十一月于沙尾山得一標本.

Rothschild, p. 324——雲南大理府及麗江山脈.

室中有中國鳥七: 1♀, 20, ix, 1889, Prince d'Orléans, 天山; 3♀, i, 1873, David, 陝西南部漢中府; 3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

498. **Anthus spinoletta japonicus** Temm. & Schleg. 日本水鷚

Baker, iii, p. 299——生殖于堪察加,亞穆爾,西伯利亞東部及千島羣島.冬季至中國南部,印度支那,緬甸,偶可一至印度北境.

La Touche, p. 299 —揚子江流域(自四川以至于海),福建,廣東,冬鳥.沙尾山,中國東北部,遷移鳥.

室中只有日本鳥.以旣有記載于我國,特編入本目錄.

Anthus spinoletta japonicus 上體比 *A. s. blakistoni* 較爲深暗.四川打箭爐鳥顯係 *blakistoni* 而非 *japonicus*.

ALAUDIDÆ. 雲鳥科

一般體色與鶺鴒科之 *Anthus* 一屬頗相似,但跗蹠後方有橫列之盾狀鱗,只此一特徵,既足別于其他一切鳴禽類.翼之初列撥風或九或十.尾羽十二.雌雄常相似,縱不相似,亦相差不遠.幼鳥下體有點斑而上體則有橫斑.以昆蟲菓子供食.或爲留鳥,或非留鳥.

巴黎博物館鳥類研究室雲鳥科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有四屬八種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共五十四個.

499. **Otocoris alpestris elwesi** Blanford. 白喉豎耳雲鳥

D. et O. p. 316 (*Otocorys sibirica*) ——爲蒙古高原之留鳥,有時自此以至中國北部.

Baker, iii, p. 310 —— 錫金,尼泊爾,西藏之南部及西部, Ladakh, 青海及南山 Nan-Schan.

室中共有中國鳥二十: 4♂, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河; 2♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏　2♂, 1♀, 1893, 1898, Biet, 四川打箭爐; 3♂, 8♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐.

500. **Otocoris alpestris flava** (Gmelin). 黃喉豎耳雲鳥

D. et O. p. 315 (*Otocorys alpestris*) ——此鳥居歐亞二洲之西部及北部,北美之西北部,在中國只可于冬季見之.中國人喜飼作籠鳥愛其歌聲也.

La Touche, p. 400 ——直隸冬鳥.

室中只有墨西哥及俄國等處標本.

Otocoris alpestris 一種之可見于我國境內爲本目錄所不及載者,尚有兩亞種: 1. *O. a. longirostris* —— 西藏之西極; 2. O. a. brandti —— 阿爾泰山,直隸,冬鳥.

501. **Melanocorypha mongolica** (Pallas). 蒙古銹肩雲鳥

D. et O. p. 319 ——在蒙古高原,分佈甚廣,中國北部,只可見于冬季,且爲數亦無多.中國人愛其歌聲,故多飼作籠鳥.

Dresser, A Man. of Pal. Birds p. 385 —— 大烏里之南,蒙古及滿洲;冬季至中國北部.

La Touche, p. 442 ——直隸冬鳥.

室中有蒙古鳥四: 3(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1(?), 1911, Mission de Lacoste, 蒙古.

502. **Alauda arvensis pekinensis** Swinhoe. 北雲鳥

D. et O. p. 312 (*Alauda arvensis*) ——分佈于中國之大部,初冬來北京,四月又離此而北返,夏季亦有少數留居直隸平原者.北京附近及宣化府皆甚普通,絕跡于蒙古,但在西伯

利亞東部,又甚繁多.

La Touche, p. 444——中國北部冬鳥.

室中有一西藏鳥,標簽上記作 *Alauda cantarella* Bp. 余以爲當逮此型,蓋其上體極淺淡而翼又較長也(119mm.): 1♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏.

503. **Alauda arvensis intermedius** Swinhoe.

D. et O. p. 313 (*Alauda cantarella*)——中國中部各省留鳥,但爲數無多.

Baker, iii, p. 316 (*Alauda arvensis inopinata*)——西藏之中部,南部及東部以至中國西北部及中部之山中.

La Touche, p. 445——中國北部遷移鳥及冬鳥.沙尾山遷移鳥,揚子江中流及下流,福州,廣東北部,冬鳥.

Rothschild, p. 323——雲南

室中有十九標本: 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 4(?), 1892, 1895, Biet, 四川打箭爐; 10(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Père Soulié, 雲南其刦; 1♂, 1♀, xi, xii, La Touche, 中國(福建?).

504. **Alauda arvensis japonicus** Temm. & Schleg. 日本雲鳥

Baker, iii, p. 317——日本,冬季至中國南部,雲南及撣部.

Rothschild, p. 325——雲南.

室中只有日本鳥,因既有記載于我國,特編入本目錄.

505. **Alauda arvensis coelivox** Swinhoe. 南雲鳥

D. et O. p. 314 ——Swinhoe. 謂係中國極南各省所特有,但余于四川得一標本.

Baker, iii, p. 321 (*Alauda gulgula coelivox*) ——中國南部及東部,直至雲南及撣部.

La Touche, p. 448——福建,廣東,留鳥.

Rothschild, p. 324——雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥三: 2♂, 1♀, xi, xii, La Touche, 福建.

Baker 于 Birds of British India 2nd. Ed. 將 *Alauda gulgula* 及 *A. arvensis* 別爲兩種,謂 *gulgula* 之初列撥風羽第五枚,比最長之初列撥風羽,短去 5mm. 以上; *arvensis* 則不及 5mm. Delacour 于 Les Oiseaux de l'Indochine, vol. iv, 則合二者而爲一,而以 *Alauda arvensis* 代表之.余考驗百餘標本之結果,覺第五枚撥風羽之長短,並無恆性,個體之差異甚大,實不足爲種的特徵. Baker 又云, *arvensis* 較大而 *gulgula* 較小,但試以 *A. arvensis japonicus* 與 *A. gulgula coelivox* 之量度比較之,亦無大小之可分.故余乃採納 Delacour 之意見,合二者而爲一.最低限度,余亦可以 *coelivox, japonicus, intermedia, pekinensis* 同隸于 *Alauda* *arvensis*…種中也.

爲方便計,本目錄之 *Alauda arvensis* 之四亞種,可用下列檢索表區別之:

A. 翼長 115mm. 以上(通常爲 120mm.)……………… *A. a. pekinensis.*

B. 翼長 100mm. 以上,115mm.以下,……………………*A. a. intermedia.*

C. 翼長 100mm. 以下.

a. 上體褐黑較勝;胸部褐條紋甚盛.………… *A. a. japonicus.*

b. 上下體之赭色部較勝;胸部褐條紋極疎. *A. a. coelivox.*

506. **Calandrella brachydactyla dukhunensis** (Sykes), 短趾雲鳥

D. et O. p. 318 (*Calandrella brachydactyla*) ——余于中國及蒙古邊境見其大羣

Baker, iii, p. 326——生殖于南山,戈壁沙漠及西藏沙漠.冬季可見于印度北部及緬甸.

La Touche, p. 453 ——沙尾山遷移鳥.直隸,陝西,春季遷移鳥.

室中有中國鳥七: 2(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 4(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

ZOSTEROPIDÆ. 銹眼兒科

形體頗小;眼有白眼圈;嘴纖小而微灣;舌之先端二裂;鼻孔為膜所掩閉;跗蹠纖長;翼頗長,初列撥風羽十,第一枚甚小;尾短而為角尾.雌雄相似.以昆蟲及菓子供食.

本目錄共記載綉眼兒科一屬三種及亞種.經余作個別研究後而記載于本目錄之中國標本,共十八個.

507. **Zosterops simplex simplex** Swinhoe. 銹眼

D. et O. p. 85 —— 此鳥與印度之 *Zosterops palpebrosus* 相似,為中國南部所特有,廣州人稱曰相思 (Sheong-Shee). 夏季北行至秦嶺,四五月間于漢平,秋季于浙江及江西多見之.

La Touche, p. 457 —— 雲南留鳥.漢平(四,五月).四川(?).貴州,陝西,夏鳥.湖北夏鳥.廣西,五月.揚子江下流,直隸,夏鳥.

Rothschild, p. 318 —— 雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥十二: 1♂,1♀, 25, 26, iv, 1869, David, 漢平; 3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 2♀, 27, v, 1896, Prince d'Orléans, 雲南大理府; 1(?), 1861, Swinhœ, 廈門; 1♂, 1♀, 22, x, 7, xi, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部標本中,亦各有此鳥數個.

508. **Zosterops palpebrosa williamsoni** Rob. & Kloss. 黃銹

眼

Rothschild, p. 318——雲南. La Touche之 *johannae*實乃 *williamsoni* 之重名.

室中除安南標本外,有中國鳥五; 3(?), 1891, Prince d'Orléans, 四川; 1♂, 1♀, 10, ii, 11, v, 1895, Prince d'Orléans, 雲南雲州.

此鳥上體青黃,因色較盛,自易別于 *T. s. simplex.*

509. **Zosterops erythropleura erythropleura** Swinhoe. 赤脇綉眼

D. et O. p. 85——此鳥或係來自中國南方,印度支那,歲必二經北京,爲數甚多,歸程更夥,北行至阿穆爾.在漠平分佈亦廣,來到期與上種同(四,五月).

La Touche, p. 459——雲南蒙自及麗江遷移外.四川漠平遷移鳥.直隸遷移鳥.

Rothschild, p. 317——雲南.

室中除安南標本外,有中國鳥一: 1(?), 1863, Swinhoe, 上海.

此鳥於 *Zosterops simplex simplex* 相似,但脅部有一銹栗色之一大塊斑,一見卽可識別.

David et Oustalet于 Les Oiseaux de la Chine, p. 86, no. 136論 Swinhoe 之 *Zosterops subroseus* 云"Swinhoe于漢口得一單獨標本,遂爲之另立名目.此鳥之大小,色彩,皆無別于 *Zosterops simplex*,特

嘴稍小,脇部之灰色較深,腹部染着玫瑰色耳,此得毋係個體之變異歟?”

NECTARINIIDÆ. 太陽鳥科

上下兩顎,其先端三分之一成鋸齒狀;舌管狀;此爲本科之二大特徵.翼之撥風羽十,第一枚小;尾羽十二.雌雄相似或不相似,幼鳥似雌鳥.

本目錄共記載太陽鳥科一屬五種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共四十一個.

510. **AEthopyga cristinae latouchii** Sloter. 賴氏太陽鳥

La Touche, p. 461 —— 福建,廣東留鳥.廣西(五,六月).四川(?)

室中除六安南鳥外,有中國標本五: 1♂, 20, x, La Touche, 福建; 2♂, 2♀, ii, vi, Vi, xii, 廣西猺山,辛樹幟先生贈Delacour, Delacour轉贈研究室.

在廣西猺山爲留鳥.余曾射得百餘個.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥一個.又, La Touche 舉其分佈地于四川,室中四川標本不少,但獨無此種,此點未免可疑也.

海南島之 *AEthopyga cristinae cristinae* Swinhoe,余前曾于海口鄉間射得一枚,因墜入叢莽中,未能拾得,室中尚無標本.

511. **AEthopyga siparaja tonkinensis** Hartert. 東京赤喉太陽鳥

Rothschild, p. 320——1921年四月間, La Touche于雲南河口得雄鳥十四,雌鳥二.

室中只有安南標本,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

512. **AEthopyga dabrayi** (Verreaux). 四川太陽鳥

D. et O. p. 80——Verreaux用作形態記載之標準標本,乃Chauveau得自四川打箭爐寄交漢口法領士Dabray君者, Verreaux謂此鳥來自中國北方誤也.此後, Anderson博士再獲之于雲南,而余則屢于漠平山林中見之,大約四月間至漠平,留此以度夏.

Baker, iii, p. 387——Muliyet,嘉連尼,南攑部,嘉錦山,中國西北部,自四川以至雲南.

Rothschild, p. 320——二,三,四,五,六,七,八等月皆有記載于雲南.

室中除安南標本外,有四川,雲南鳥三十四: 2♂, 1892, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 4♂, 4♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 14♂, 2♀, 1898, 1896, Biet, 四川打箭爐; 2♂, 1902, 四川打箭爐; 3♂, 1♀, 1896, Père Soulié, 雲南其却; 2♂, 1911, Père Cavalié, 貴州.

余前曾于廣西猺山射得標本甚多.此次寄來之湖南南

部標本,亦有雄鳥一個,則此種之分佈界限,當益明瞭.

513. **AEthopyga saturata sanguinipectus** Walden. 暗赤太陽鳥

Baker, iii, p. 390 (*AEthopyga sanguinipectus sanguinipectus*) —— 南撣部,嘉連山,德尼薩拉,雲南.

Rothschild, p. 320 (*AEthopyga sanguinipectus sanguinipectus*) —— 雲南.

室中只有安南鳥.

Baker 及 Rothschild 以 *saturata* 與 *sanguinipectus* 別為兩種, Delacour 則合二者而為一而以 *saturata* 代表之,以 *sanguinipectus* 為 *saturata* 之一亞種.余經比較多數標本後,乃採 Delacour 之系統.

514. **AEthopyga nipalensis nipalensis** (Hodgson). 尼伯爾橙胸太陽鳥

Rothschild, p. 320 —— 雲南.

室中除安南標本外,有兩中國鳥: 1♂, 1902, 四川打箭爐; 1♀, 1896, Prince d'Orléans, 雲南.

Arachnothera magna 一種,雲南鳥代表係 *A. m. aurata* Blyth 而室中只有 *A. m. magna* (Hodgson),故不編入目錄.又 La Touche

以 *Arachnothera longirostris sordida* 記載一單獨雄鳥于雲南河口 (Bull. B.O.C. xii, 1921, p. 32), 而 Delacour 則以安南鳥爲 *A. longrostris longirostris* (Latham). 因無雲南鳥以比較,未知二者是否相同.以理度之,河口與安南相距咫尺,想無若何分別也.特誌此以待來日.

DICÆIDÆ. 啄花鳥科

上下兩顎其先端三分之一亦成鋸齒狀,與太陽鳥科相同,但嘴三角形而非筒狀,舌先端四裂而非管狀,爲兩科區別之要點.翼之初列撥風羽或九或十,九枚者第一枚長,十枚者第一枚短.尾羽十二.雌雄相異者多而相似者少,幼鳥似雌成長鳥.

本目錄共記載啄花鳥科兩屬四種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共十二個.

515. **Dicaeum chrysorrheum chrysochlore** Blyth. 花腹啄花鳥

Rothschild, p. 318——雲南大莊及河口.

室中只有安南鳥

516. **Dicaeum ignipectus ignipectus** (Blyth). 朱胸啄花鳥

D. et O. p. 84 ——最初發見于喜馬拉雅南部;中國,自南方以至福建一帶皆有之.以昆蟲及花芽供食.懸巢樹枝上,甚爲可觀.

Baker, iii, p. 427——喜馬拉雅帶,自蘇脫烈及流域以至東亞森母,馬尼坡及亞森母之南;又自緬甸山中以至德尼薩拉,暹羅,安南,雲南以至福建.

La Touche, p. 467——福建,廣東,雲南,四川留鳥.

Rothschild, p. 319——雲南.

室中除大批安南標本外,有中國鳥六; 1♂, 1896, Prince d'Orléans, 雲南緬寧; 2♂, 1♀, 1900, 雲南苴刦; 2♂, x, xi, La Touche, 福建.

余于廣西猺山射得之.在廣州附近亦得有標本.自冬季以至三月,頗爲繁多,三月以後,日漸稀少,永未于夏季見之. La Touche 舉爲廣東留鳥,吾不無疑.

517. **Dicaeum minullum olivaceum** Walden. 靑啄花鳥

D. et O. p. 83 (*Dicaeum minullum*) —— Swinhoe 發見于海南島,自此以後,永未見于大陸各地.以體色言之,與*Dicaeum cruentatum*之雌鳥相似,但腰部决無朱塊斑耳.

Baker, iii, p. 430——喜馬拉雅帶,自尼泊爾東至亞森母南北兩部;馬尼坡;緬甸山中以至馬來半島;暹羅,撣部,雲南,安南及中國南部.

La Touche, p. 466.——雲南,廣東南部,留鳥.四川(?).

Rothschild, p. 319——雲南.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥二: 1♀, 10, v, 1895, Prince d'Orléans, 雲南緬甯與雲州間; 1(?), 1900, 雲南苴刧.

518. **Pachyglossa melanozantha** Hodgson. 黃腹大啄花鳥

Rothschild, p. 318 —— 迷勒地,大莊,眉公河與揚子江之三角洲,眉公河與怒江之三角洲,瑞麗江與怒江之三角洲,麗江山脈.

室中有四川鳥三,雲南鳥一: 3♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 1900, 雲南苴刧.

*Dicaeum cruentatum*一種,亞種頗多,要不外以其下體赭色之濃淡爲標準.此等色澤差,變異甚大,並不可靠.中國鳥,若據 Scopoli 所定之名,則應爲 *Dicaeum cruentatum coccineum* (Scop). 據 Harter 博士研究結果,謂中國鳥之嘴較大,翼較長于印度鳥,雌鳥上體亦多染綉橙色云云.室中除印度安南標本外,無一中國鳥,無從作比較研究,故本目錄竟無 *Dicaeum cruentatum* 之記載.余前在廣西猺山射得之標本,余曾以 *D. c. cruentatum* (L.) 記載之.

La Touche 于 Birds of Eastern China p. 465,舉 *Dicaeum cruentatum coccineum* (Scop.) 之分佈地點爲福建西部及南部,廣東東北

部及南部,雲南,留鳥.

PITTIDÆ. 披他科

鳴肌附着于氣管半環之中部,所着之環,常爲二對,與其餘鳴禽類完全不同.跗蹠極長壯;尾短;翼之初列撥風羽十,第一枚長.

本目錄共記載披他科三種.中國標本,只有一個.

519. **Pitta soror tonkinensis** Delacour. 東京披他

Yen, Birds from Yaoschan, Kwangsi, Bull. Dep. Biol. no. 5, 1931, p. 23——廣西猺山.

室中只有安南鳥,因余曾于廣西猺山射得之,故編入本目錄.

520. **Pitta nympha nympha** Temm. & Schleg. 朱腹披他

D. et O. p. 144 (*Pitta moluccensis*)——此鳥之發見于中國南部者凡二三次,余于上海博物院見一標本,乃採自長江出口處者. 1861年六月, Swinhoe得有記載于廈門, 1873年彼又于山東芝罘得一標本,據謂乃來自 Sen-Tchou-fou 云.

La Touche, p. 469 —— 廣東,福建,沙尾山,江蘇內地,山東,遷移鳥.安徽夏鳥.直隸(?).

室中只有一標本: 1(?), vii, 1917, Père Courtois (上海徐家匯博物院),安徽.

Dr. Stresemann 以 *Pitta nympha melli* 記載廣東北江龍頭山鳥,謂七標本,其翼長爲 113, 114, 116, 115, 117, 118, 120 mm. 較小于日本之標準種 *P. n. nympha* (118–127mm.).徐家匯博物院送來之安徽鳥,翼長117mm. 與余之廣東北江荒洞標本相同.究竟安徽鳥是否 *P. n. nympha* 抑係 *P. n. melli*, 因無標準地之日本鳥以比較,而安徽鳥又只有一個,勢難決定.再推而廣之, *P. n. melli* 是否確有別于 *P. n. nympha*, 是否可自爲一亞種,恐亦尙有研究之餘地也.

521. **Pitta sordida cucullata** Hartlaub. 青胸披他

La Touche, p. 471——雲南東南部夏鳥.

室中只有印度及安南標本,以旣有記載于我國,特編入本目錄.

EURYLAIMIDÆ. 闊嘴鳥科

鳴肌附着于氣管半環之中部,所附着之半環,只有一對.跗蹠不甚長;尾如平常鳥

本目錄只記載闊嘴鳥科一屬一種.

522. **Serilophus lunatus elisabethae** La Touche. 雲南闊嘴鳥

La Touche, p. 473——雲南東南部.

Rothschild, p. 234——雲南

室中只有安南鳥,以其係發見于雲南,故特編入本目錄.

海南島之 *Seriophus lunatus polionotus* Rothschild, 室中尙無標本.

(完)

代數數域論

(續第五卷第一期)

David Hilbert 氏原著

華羅庚譯

第三篇

二次數域

16. 二次域內數之分解.

§59. 二次域之基數及判別式.

m表一有理整數,或正或負,不為一非1之平方數所整除,且不等於$+1$.二次方程式

$$x^2-m=0$$

在有理數域內不可化.若$m>0$,以$\sqrt{m}$表此式之正根;若$m<0$,$\sqrt{m}$表正虛根.故$\sqrt{m}$各定一實域或虛域以$k(\sqrt{m})$,或即以k表之,此域為一迦氏域.於一數或一理想數中由$\sqrt{m}$及$-\sqrt{m}$之更替而得者,名為其之共軛數或共軛理想數.此種過程,以代換記號s表之.

吾人之第一問題即為表此二次域之基數,及計算其判別式

定理95. 二次域k內有一組基數$1, \omega$其中

$$\omega=\frac{1+\sqrt{m}}{2}, \text{ 或 } \sqrt{m}$$

視$m\equiv 1, (4)$或否而定.k之判別式對此二種不同情形當各為

$$d=m, \text{ 或 } d=4m.$$

證: ω為一整數,以其適合於方程式

$$x^2-x-\frac{m-1}{4}=0,\quad 或\quad x^2-m=0 \tag{21}$$

也,以 $\omega'=s\omega$ 表ω之共軛數,則 $d=(\omega-\omega')^2$ 為ω之判別式,由§3可知凡k之整數可表為

$$\alpha=\frac{u+v\omega}{d},$$

式中u, v為有理整數.

當 $m\equiv1,(4)$, 可得 $2\alpha m=2u+v+v\sqrt{m}$, 由此相合式可得 $2u+v\equiv0,(\sqrt{m})$, 由此及前之相合式可知 $v\sqrt{m}\equiv0,(m)$ 即v必為$\sqrt{m}$所整除,故必為m所整除,故整數u, v皆為$m=d$所整除.故可知α之分子可為d所整除.

另一方面 $m\not\equiv1,(4)$, 則由相合式 $4\alpha m=u+v\sqrt{m}\equiv0,(m)$ 同樣可知u, v必為m所整除,故α之分子,分母可約去因子m,命 $\alpha=\frac{u'+v'\sqrt{m}}{4}$, 式中 u', v' 為有理整數,但由距$\alpha, s\alpha$須為整數之限制及$m\equiv2, 3,(4)$, 可知u', v'須皆為偶數.再用此法於2α,可知當$m\not\equiv1,(4)$時,凡k內之整數悉如$u+v\omega$之形,式中u, v為有理整數.

此定理之第二部分由

$$d=\begin{vmatrix}1, & \omega\\ 1, & \omega'\end{vmatrix}^2=(\omega-\omega')^2,$$

及§3之域之判別式之定義自明.

§69. 二次域中之素理想數

分解有理素數為域k內之素理想數,可由下之定理完全決定.

定理96. 凡d之有理素因子l等於k內一素理想數之平方.一非d之因子之奇素數p或為k內二不同一級共軛素理想數$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$之積,或即其自己即為一二級素理想數,胥視$d$為$p$之二次剩餘或否而定.素數2當$m\equiv1,(4)$時或為$k$內二不同一級共軛理想數之積或即為素理想數,胥視$m\equiv1$,或$5,(8)$而定.

證：此定理之第一部分即r爲d之因子時,可由定理31即得.若l爲d之奇素因子,則可覓

$$l=\mathfrak{l}^2,$$

式中$\mathfrak{l}=(l,\sqrt{m})$爲一一級之素理想數,與其共軛理想數相等.$d$如有素因子2,則

$$2=(2,\sqrt{m})^2,\quad 或\quad 2=(2,1+\sqrt{m})^2$$

各視$m\equiv 2$或$m\equiv 3$,(4)爲然

分解非d之素因子,μ可由§31之注釋及定理33以得之.由此d之因子p在k內爲二不同素理想數之積,或即爲素理想數,胥視方程式(21)對p可化或否而定.若此素數爲奇數可得相合式

$$(2x-1)^2-m\equiv 0,\quad 或\quad x^2-m\equiv 0.\quad (p).$$

顯然當m爲p之二次剩餘,爲可化.不然,爲不可化.前者命$m\equiv a^2$,(p)可得

$$p=(p,a+\sqrt{m})(p,a-\sqrt{m})=\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'.$$

因

$$(p,a+\sqrt{m},\ a-\sqrt{m})=1$$

故$\mathfrak{p}$,$\mathfrak{p}'$爲互素.當$m\equiv 1$,(4),相合式$x^2-x-\frac{m-1}{4}\equiv 0$,(2)之可化與否,視$\frac{m-1}{4}\equiv 0$或$\equiv 1$,(2)而定,即$m\equiv 1$,或$\equiv 5$,(8).前者可得

$$2=\left(2,\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)\left(2,\frac{1-\sqrt{m}}{2}\right).$$

因
$$\left(2,\frac{1+\sqrt{m}}{2},\quad \frac{1-\sqrt{m}}{2}\right)=1,$$

故所得之二理想數互不相同.

所得理想數之基數可表爲:

$$l,\quad \frac{l+\sqrt{m}}{2},\quad 或\quad l,\sqrt{m},$$

$$p,\quad \frac{a\pm\sqrt{m}}{2},\quad 或\quad p,a\pm\sqrt{m},$$

$$2,\quad \frac{1\pm\sqrt{m}}{2},\quad 或\ 2,\sqrt{m};\ 2,\ 1+\sqrt{m},$$

各視$m\equiv1$或$\equiv2,3,(4)$.由定理19之逆可知由此及其共軛數可作成一行列式.於第二行中a為相合式$a^2\equiv m,(r)$之根,且當$m\equiv1,(4)$此表一奇數.

§61.　記號$\left(\frac{a}{w}\right)$.

因欲表出已求得之關於分解有理素數之結果,可引入下之記號.若a為任意一有理整數,w為一有理奇素數,則若$a(\not\equiv0,(w))$為w之二次剩餘,或非剩餘,或可為w所整除,各以$\left(\frac{a}{w}\right)$為$+1,-1,0$表之.又$\left(\frac{a}{2}\right)$為$+1,-1,0$各視$a(\not\equiv0,(2))$為2^3之二次剩餘,非剩餘,或a為偶數而定.用此記號及定理96可得.

定理93.　任一有理素數$p(=2$或$\neq2)$於k域內為二不同素理想數之積.或即為一素理想數,其為一素理想數之平方,皆視$\left(\frac{d}{p}\right)=+1,-1$或$0$而定[Dedekind (1)].

由此可分素理想數為三類如下:

1. 一級素理想數$\mathfrak{p}$與其及軛理想數$\mathfrak{p}'$互異者;

2. 二級素理想數(p),p表一於k內不可分解之有理素數.

3. 一級素理想數$\mathfrak{l}$其平方為一可整除d之有理素數.

由§39及§41之定義可知域k對第一種理想數即為分散域;對第二種理想數,即為惰性域;對第三種理想數即為支域.

§62. 二次域之單位.

由定理47可知有二種不同之情形,即就為虛域或實域而分.

第一種情形中k內祇有此域內之壹之根,故舍±1外祇有壹之3次,4次,六次根.故於二次虛域中,舍$k(\sqrt{-1})$及$k(\sqrt{-3})$之外,其他諸域祇有±1為其單位.於$k(\sqrt{-1})$中尚有二單位$\pm i$,於$k(\sqrt{-3})$中尚有四個單位$\pm\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$.此域之判別式各為$-4$及$-3$.由定理50,故此域內每一理想數班中有一理想數其距≤2,或$\leq[\sqrt{3}]$.又於$k(\sqrt{-1})$中2為主理數$(1+i)$之平方,故此二

域中理想數之班數爲 1.故此域內祇有主理想數.若一有理整數,可爲此域一有理想數之距,則即爲此域內一整數之距.由此可知,此有理整數,可藉 x^2+y^2 或 x^2+xy+y^2 表出之,式中 x 及 y 爲有理整數.

若 k 爲一實域,則由定理47可知有一基單位 ε, 非 ± 1, 凡此域內之單位可表爲 $\pm\varepsilon^a$, 式中 a 爲一有理整數.

基本單位 ε 爲 $+1$ 或 -1 之問題,迄今猶祇能解決其若干特例 [Arndt (1), Diriculet (4), Legendre (1), Tano (1)]. 比較引 13 之證明之第一節.

§63. 理想數班之組之表出.

對一特別值 m, h 內之理想數班可如 §24 之所述,悉表出之,且可計算其班數 h. 此表可由二次齊次式之簡約式之理論以得之 [Gauss (1), Cayley (1)].

17. 二次域之族,及其特徵系.

§64. 記號 $\left(\frac{n, m}{w}\right)$.

二次域之更進一步之研究,爲一域內理想數之性質.今先導入下之新符號.若 n, m 爲有理整數, m 非平方數, w 爲任意之一有理素數.當 n 與 $\sqrt{m}$ 所定之二次域內之一整數之距相合, (w), 及對 w 之任意方 $k(\sqrt{m})$ 內皆有一整數其距相合於 n, 如此吾人記 $\left(\frac{n, m}{w}\right)=+1$. 若不然,則記之爲 $\left(\frac{n, m}{w}\right)=-1$. 若 $\left(\frac{n, m}{w}\right)=+1$, 則 n 名爲對 w 於域 $k(\sqrt{m})$ 之距剩餘 (Norm residue), 若 $\left(\frac{n, m}{w}\right)=-1$, n 名爲對 w 於域 $k(\sqrt{m})$ 之非距剩餘 (Non Norm residue). 若 m 爲一平方數,命 $\left(\frac{n, m}{w}\right)$ 之值爲 1. 關於計算符號 $\left(\frac{n, m}{w}\right)$ 之性質有下之定理:

定理 98. n, m 爲二有理整數,非 w 之倍數,可有下之規則:

當奇素數 w, 有

$$\left(\frac{n, m}{w}\right)=+1, \tag{a'}$$

$$\left(\frac{n, w}{w}\right)=\left(\frac{w, n}{w}\right)=\left(\frac{n}{w}\right); \tag{a''}$$

當 $w=2$, 則

$$\left(\frac{n, m}{2}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}, \qquad (b')$$

$$\left(\frac{n, 2}{2}\right)=\left(\frac{2, n}{2}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \qquad (b'')$$

又普通對任意之有理整數n, n', m, m'及對任意之素數w有下之公式

$$\left(\frac{-m, m}{w}\right)=+1, \qquad (c')$$

$$\left(\frac{n, m}{w}\right)=\left(\frac{m, n}{w}\right), \qquad (c'')$$

$$\left(\frac{nn', m}{w}\right)=\left(\frac{n, m}{w}\right)\left(\frac{n', m}{w}\right), \qquad (c''')$$

$$\left(\frac{n, mm'}{w}\right)=\left(\frac{n, m}{w}\right)\left(\frac{n, m'}{w}\right). \qquad (c'''')$$

證: 下之事實顯然爲眞:若n爲域$k(\sqrt{m})$內一整數之距,則$\left(\frac{n, m}{w}\right)=+1$. 因$-m$爲$\sqrt{m}$之距,故公式$(c')$成立.若$n, n'$爲二非零之整數其商爲$k(\sqrt{m})$內一整數或一非整數之距,故由定義可得$\left(\frac{n, m}{w}\right)=\left(\frac{n', m}{w}\right)$.若商$\frac{n}{n'}$爲一有理整數之平方則上式當然爲眞,故當吾乘$n$(或$m$)以一平方數或去其一平方因子,記號$\left(\frac{n, m}{w}\right)$之值不變,故可假定$m, n$皆無平方因子,並不失其普徧性.

因欲知此諸式之眞實性可分三段證明之:

1. w爲奇數爲m之因子.

若n非w之倍數,則顯然相合式

$$4n\equiv(2x+y)^2-my^2 \quad 或 \quad n\equiv x^2-my^2, \ (w) \qquad (22)$$

有有理整數x, y可適合之必要且充分之條件爲$\left(\frac{n}{w}\right)=+1$. 反之若後之條件合,則相合式$n\equiv x^2$對$w$之任何方次皆有解答,故顯然可得相合式(22),故於此假定之下$\left(\frac{n, m}{w}\right)=\left(\frac{n}{w}\right)$.

爲n亦爲w之倍數,則可得

$$\left(\frac{n, m}{w}\right)=\left(\frac{-nm, m}{w}\right)=\left(\frac{-\frac{nm}{w^2}, m}{w}\right)=\left(\frac{-\frac{nm}{w^2}}{w}\right).$$

2. 若w為奇數非m之因子.

若n非w之倍數則相合式$n\equiv x^2-my^2$, (w)有解.因此式之右邊當$y=0$, $x=1,2,\cdots,\frac{w-1}{2}$得$w$之諸二次剩餘且當

$$\left(\frac{-m}{w}\right)=-1$$

時$x=0$, $y=1,2,\cdots,\frac{w-1}{2}$可得$w$之諸二次非剩餘.若$\left(\frac{-m}{w}\right)=+1$,命$a$為$w$之一最小的正二次非剩餘,命$y=b$為$-my^2\equiv a-1$, (w)之一解,因$a\equiv 1-mb^2$,(w)故$x^2-m(bx)^2$當$x=1,2,\cdots,\frac{w-1}{2}$時表$w$之諸二次非剩餘.由相合式$n\equiv x^2-my^2$, (w)之解易知此相合式對w之任何方次皆有解.即於本假定之下

$$\left(\frac{n,m}{w}\right)=+1.$$

命n可為w所整除,但非w^2之倍數,若不然可除去此因子w^2.故相合式$n\equiv x^2-my^2$, (w^2)之解在域$k(\sqrt{m})$內對應一數$\alpha=x-\sqrt{m}\,y$,其距$\alpha s\alpha=n(\alpha)$為w之倍數,但非w^2之倍數.即w在域$k(\sqrt{m})$內可分解為二不同的素理想數$\mathfrak{m},\mathfrak{m}'$,由定理97可得必要條件:$\left(\frac{m}{w}\right)=+1$.反之,若此條件適合$w$則為二不同理想數$\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$之積.$\alpha$表$k(\sqrt{m})$內之一整數可為$\mathfrak{m}$所整除,但非$\mathfrak{m}^2$或$\mathfrak{m}'$之倍數,可得

$$\left(\frac{n,m}{w}\right)=\left(\frac{n\cdot n(\alpha),m}{w}\right)=\left(\frac{\frac{n\,n(\alpha)}{w^2},m}{w}\right)=+1.$$

此已證明在本節之假定下$\left(\frac{n,m}{w}\right)=\left(\frac{m}{w}\right)$.

由上之結果可知公式(a'),(a'')為真,且w為奇數時,公式(c''),(c''')亦真,證此時可列舉n,m,n'可為w所整除或否之情形以得.

3. 今往論$w=2$之情形,命$f(x,y)$為x,y之有整係數之二次齊次式,n為一奇數,若相合式$n\equiv f(x,y)$, (2^3)有x,y之有理整數解,則$n\equiv f(x,y)$, (2^{e+1}) $(e\geqq 3)$亦有解答.今往證明若e為然,則$e+1$亦然.命a,b為二有理整數$n\equiv f(a,b)$, (2^e),指數$e\geqq 3$,若不能使$n\equiv f(a,b)$, (2^{e+1}),則$n\equiv(a,b)+2^e$, (2^{e+1}),因$e\geqq 3$故有一整數c使$c^2\equiv 1+2^e$, (2^{e+1}),則

$$f(ca, cb) \equiv c^2 f(a,b) \equiv f(a,b) + 2^e f(a,b)$$

$$\equiv f(a,b) + 2^e \equiv n, (2^{e+1})$$

故此已證明.

因欲當 n 爲奇數時以定 $\left(\frac{n, m}{2}\right)$ 之值,必須覓 n, m 之值可使相合式

$$n \equiv x^2 + xy - \frac{m-1}{4} y^2 \quad 或 \quad n \equiv x^2 - my^2, (2^3) \qquad (23)$$

$$(m \equiv 1, (4)) \qquad\qquad (m \equiv 2, 3\,(4))$$

有解者.加以簡單計算可得下表,m 對 2^3 可有六值,n 對 2^3 爲奇數,祗有下表之各數使 (23) 對 2^3 能解.

m	n
1	1, 3, 5, 7
2	1, 7
3	1, 5
5	1, 3, 5, 7
6	1, 3
7	1, 5

此表可知.若 m, n 皆爲奇數, (b') 式爲眞.若 n 爲奇數,m 爲偶數, $=2m'$ 可得

$$\left(\frac{n, 2m'}{2}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{m'-1}{2}}.$$

另一方面 n 爲偶數, $=2n'$,及 m 爲奇數,則可得二種不同情形,$m \equiv 1, (4)$ 及 $m \equiv 3, (4)$. 於第一種情形中 2 在域 $k(\sqrt{m})$ 中爲二不同素理想數之積,即必 $\left(\frac{m}{2}\right) = +1$,若此條件適合,則於 $k(\sqrt{m})$ 中可覓出一 α, 使 $n(\alpha)$ 爲 2 之倍數,但非 4 之倍數,可得

$$\left(\frac{2n', m}{2}\right) = \left(\frac{2n' n(\alpha), m}{2}\right) = \left(\frac{\frac{n' n(\alpha)}{2}, m}{2}\right)$$

由公式b'知此值為$+1$,故可得公式

$$\left(\frac{2n',m}{2}\right)=\left(\frac{m}{2}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

第二種情形中,即$m\equiv3$,(4)所成問題者即為相合式$2n'\equiv x^2-my^2$對任意乘方2^e是否有解,此問題與$m\equiv x^2-2n'y^2$,(2^e)完全相同,由此易知

$$\left(\frac{2n',m}{2}\right)=\left(\frac{m,2n'}{2}\right).$$

最後若n,m皆為2之倍數即$n=2n',m=2m'$,可得公式

$$\left(\frac{2n',2m'}{2}\right)=\left(\frac{-2^2n'm',2m'}{2}\right)=\left(\frac{-n'm',2m'}{2}\right).$$

由已知之結果可得公式(b'),且由此可知公式(c''),(c''')當$w=2$時亦真.公式(c'''')可由(c''')及(c'')以得之.故定理98之證明已完全矣.

由公式(a'),(a''),(b'),(b'')可得下之事實:

對w^e不互相合,對w互素之整數之全體,或皆為域$k(\sqrt{m})$內w之距剩餘,或祇有其半為然,胥視w與$k(\sqrt{m})$之判別式互素與否而定.式中$e\geqq1$,但當$w=2$時,$e>2$.

§65.　一理想數之特徵系

今以$l_1,\cdots,l_t$表域$k(\sqrt{m})$之判別式之不同的有理素因子.對一任意之有理整數a可定t個定值($=+1$或-1).

$$\left(\frac{a,m}{l_1}\right),\cdots\cdots,\left(\frac{a,m}{l_t}\right),$$

其表示一如上節.此t個±1謂之數a在域$k(\sqrt{m})$中之特徵系(Characteristic system).又對$k(\sqrt{m})$內任一理想數$\mathfrak{a}$亦可有特徵系,其義分虛域實域兩種論之.若為虛域則凡$k(\sqrt{m})$內之數之距悉為正.使$\gamma=t$, $n=+n(\mathfrak{a})$,γ個單位

$$\left(\frac{n,m}{l_1}\right),\cdots\cdots,\left(\frac{n,m}{l_\gamma}\right) \qquad (24)$$

即名為理想數$\mathfrak{a}$之特徵系.此系由理想數$\mathfrak{a}$唯一的決定.若$k(\sqrt{m})$為實域,可

先作-1之特徵系

$$\left(\frac{-1,\ m}{l_1}\right),\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{-1,\ m}{l_t}\right) \tag{25}$$

若此t個單位皆爲$+1$,則吾人命$\bar{n}=+n(\mathfrak{a}),\gamma=t$,(24)所表之$\gamma$個單位,即爲理想數$\mathfrak{a}$之特徵系,若不然,即(25)之$t$個特徵中有一爲$-1$,假定$\left(\frac{-1,\ m}{l_t}\right)=-1$,命$\gamma=t-1,\ n=\pm n(\mathfrak{a})$,此$\pm$號使$\left(\frac{n,\ m}{l_t}\right)=+1$以定之,由此之$\gamma$及$n$所得(24)之$\gamma$個單位謂之理想數$\mathfrak{a}$之特徵系,由如此之定義,可得定理99.

§66. 一理想數班之特徵系及族之定義.

定理99. 域$k(\sqrt{m})$內同一理想數班之理想數有相同的特徵系.

證: $\mathfrak{a},\mathfrak{a}'$爲域$k(\sqrt{m})$內屬於同一理想數班之二理想數,於$k(\sqrt{m})$內有一整數或非整數$\alpha$使$\mathfrak{a}'=\alpha\mathfrak{a}$則$n(\mathfrak{a}')=\pm n(\alpha)n(\mathfrak{a})$,式中$\pm$表$n(\alpha)$之符號,故:

$$\left(\frac{n(\mathfrak{a}'),\ m}{l}\right)=\left(\frac{\pm n(\mathfrak{a}),\ m}{l}\right)$$

對$l=l_1,\cdots,l_t$皆然.由§65之所言可得定理99.

由此可知凡理想數班有一特徵系,有同特徵系之班謂之成一族(德文Geschlecht).凡其特徵悉爲$+1$之族謂之主族(德文Hauptgeschlecht).因主班具此性質,故主班在主族中,由(c''')可知,二族中各取一理想數班之積所得之班當在同一族內,其特徵系當適爲前二特徵系對應特徵之乘積,特別如在一族之班之平方之特徵皆爲$+1$,故可知一班之平方定在主族中.

各族所有之班相等.

§67. 二次域族之基本定理.

今之問題,即爲若任與γ個±1是否可成一域$k(\sqrt{m})$內其一族之特徵系.此問題之解答於二次域之理論頗爲重要,可述如下定理,但其證明須待至§78.

定理100. γ個單位±1可爲域$k(\sqrt{m})$內一族之特徵系之必要且充分之條件爲此諸單位之乘積爲$+1$,域$k(\sqrt{m})$中族數爲$2^{\gamma-1}$ [Gauss (1)].

§68. 關於判別式祗爲一個有理素因子之二次域之引.

欲接近定理100先證下引:

引13. 若一二次域 $k=k(\sqrt{m})$ 其判別式祗爲一有理素數 l 所整除,則 k 內理想班之個數爲奇數,對 k 之特徵系祗有一特徵 $=+1$,即 k 域內祗有一族——主族.

證: 以 s 表 k 內一數變爲其共軛數之代換.當 $m>0$ 時,以 ε 表 k 域內之基單位, $-\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}$ 必亦然.今往證明若有引中所述之假定,則 ε 之距必爲 -1. 設其不然 $n(\varepsilon)=\varepsilon\cdot s\varepsilon=+1$, 則由定理90可知域內 k 有一整數 α 能表 $\varepsilon=\frac{\alpha}{s\alpha}$, 可得 $\alpha=\varepsilon\cdot s\alpha$, 即可整除 α 之素理想數亦可整除 $s\alpha$. 當 $m>0$, 且有此引中之假定, 則 $\sqrt{m}$ 爲一唯一的可與其共軛理想數相等,且無有理因子之一數,故或 $\alpha=\eta a$, 或 $=\eta\sqrt{m}\,a$, 式中 η 爲一單位, a 爲一正或負之有理整數,由此可得 $\varepsilon=\pm\eta^{1-s}=\pm\eta^2$, 此與 ε 爲 k 域內之基單位之假定違.

今往證本定理之第一部分.若 k 內理想數之班數爲偶數,則由定理57可知, k 內有一非主理想數班,其中之理想數 $\mathfrak{i}$, 使 $\mathfrak{i}^2\sim1$, 因 $\mathfrak{i}\cdot s\mathfrak{i}\sim1$, 故 $\mathfrak{i}\sim s\mathfrak{i}$. 命 $\mathfrak{i}=\alpha\cdot s\mathfrak{i}$ 或 $\mathfrak{i}^{1-s}=\alpha$, 故 α 爲 k 內之一數,其距 $n(\alpha)=\pm1$. 若爲 $+1$, 則命 $\beta=\alpha$; 若爲 -1, 此種情形祗當實域時始能發生,命 $\beta=\varepsilon\alpha$, 式中 ε 爲 k 內之基單位.由此所言,可得 $n(\beta)=+1$, 故由定理90可得 $\frac{1}{\beta}=\gamma^{1-s}$, 式中 γ 爲 k 內之一整數.由 $\alpha=\mathfrak{i}^{1-s}$ 可得 $(\gamma\mathfrak{i})^{1-s}=1$, 即 $(\gamma)\mathfrak{i}=s(\gamma\mathfrak{i})$, 由此與前相仿可得理想數 $(\gamma)\mathfrak{i}$ 必或 $=(a)$ 或 $=(a)\mathfrak{l}$ 式中 a 爲一有理整數, $\mathfrak{l}$ 爲唯一的等於其共軛理想數,而不爲有理數所整除之素理想數.今當 $m\neq-1$, $\mathfrak{l}=\sqrt{m}$, 若 $m=-1$, 則 $\mathfrak{l}=1+\sqrt{-1}$, 故 $\mathfrak{l}\sim1$, 故 $\mathfrak{i}\sim1$, 此與 $\mathfrak{i}$ 之假定有違.

若 k 爲一實域,由 $n(\varepsilon)=-1$, 故

$$\left(\frac{-1,\,m}{l}\right)=+1$$

由 §65 可知 k 域之理想數 $\mathfrak{i}$ 之特徵系從 $\left(\frac{+n(\mathfrak{i}),m}{l}\right)$. 即於域 k 中每一理想數 $\mathfrak{i}$ 之特徵爲 $+1$. 若不然,則 k 內之理想數班當分屬二族中,此與理想數之班

數 k 爲奇數,相違背.

由引13表示基本定理100當二次域之判別式 d 祗有一素因子時已成立.

§69. 二次剩餘之相反定律,關於記號 $\left(\frac{n,m}{w}\right)$ 之一引.

定理101. 若 p,q 爲二互不相同之有理奇素數,則有公式

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

此即所謂二次剩餘之相反定律.又

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}},\qquad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

此即名爲二次相反定律之補充定律 [Gauss (1)].

證: 若 $k(\sqrt{m})$ 域之判別式祗有一素因子 l, 及 n 表此域內一理想數之距,故由引13可得 $\left(\frac{n,m}{l}\right)=+1$.今由定理96或97,凡一非 m 因子之奇正數,且爲 m 之二次剩餘,則此數爲 $k(\sqrt{m})$ 內一理想數之距.下表中 p,p' 表二不同 $\equiv 1,(4)$ 之有理正素數, p,p' 表二不同 $\equiv 3,(4)$ 之有理正素數. r 表一有理正奇數

若:　　　　則:

	m	l	n	$\left(\frac{m}{n}\right)=+1$	$\left(\frac{n,m}{l}\right)=+1$
1.	-1	2	r	$\left(\frac{-1}{r}\right)=+1$	$\left(\frac{r,-1}{2}\right)=(-1)^{\frac{r-1}{2}}=+1$
2.	2	2	r	$\left(\frac{2}{r}\right)=+1$	$\left(\frac{r,2}{2}\right)=(-1)^{\frac{r^2-1}{2}}=+1$
3.	p	p	p'	$\left(\frac{p}{p'}\right)=+1$	$\left(\frac{r',r}{r}\right)=\left(\frac{r'}{r}\right)=+1$
4.	p	p	q	$\left(\frac{p}{q}\right)=+1$	$\left(\frac{q,r}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=+1$
5.	$-q$	q	p	$\left(\frac{-q}{p}\right)=+1$	$\left(\frac{r,-q}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)=+1$
6.	$-q$	q	q'	$\left(\frac{-q}{q'}\right)=+1$	$\left(\frac{b',-q}{q}\right)=\left(\frac{q'}{q}\right)=+1$

取域$k(\sqrt{p})$，因$n(\varepsilon)=-1$，可知$\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$，故$\left(\frac{-1}{p}\right)=+1$，由上表之第一行可知$\left(\frac{-1}{r}\right)=(-1)^{\frac{r-1}{2}}$，用此方法於素數$n=2$，可知數2爲$k(\sqrt{r})$或$k(\sqrt{-q})$域內一理想數之脈，則$(-1)^{\frac{r^2-1}{8}}=+1$及$(-1)^{\frac{q^2-1}{8}}=+1$，可得$\left(\frac{2,+p}{p}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)=+1$，$\left(\frac{2,-q}{q}\right)=\left(\frac{2}{q}\right)=+1$，即若$(-1)^{\frac{r^2-1}{8}}=+1$，則$\left(\frac{2}{r}\right)=+1$. 取表之第二行，可得$\left(\frac{2}{r}\right)=(-1)^{\frac{r^2-1}{8}}$. 由第三行可得$\left(\frac{p}{p'}\right)=\left(\frac{p'}{p}\right)$，由第四第五行可得$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$；由第六行祗可得

$$\left(\frac{-q}{q'}\right)=+1,\qquad \text{則}\left(\frac{q'}{q}\right)=+1.$$

爲欲求二有理素數q, q' $(\equiv 3, (4))$之相反定律，可先研究域$k(\sqrt{qq'})$. 因$\left(\frac{-1,qq'}{q}\right)=-1$，故此域之基單位必爲$+1$. 由定理90域$k(\sqrt{qq'})$內有一整數$\alpha$，使$\varepsilon=\alpha^{1-s}=\frac{\alpha}{s\alpha}$，式中$s\alpha$爲$\alpha$之共軛數. 且易知$q$所有之兩合素理想數*因子$\mathfrak{q}$必爲主理想數. 由此可知

$$\left(\frac{\pm q,qq'}{q}\right)=+1 \quad \text{及} \quad \left(\frac{\pm q,qq'}{q'}\right)=+1.$$

故

$$\left(\frac{q,qq'}{q}\right)=\left(\frac{q,qq'}{q'}\right),$$

由定理98之公式(c')可得

$$-\left(\frac{q'}{q}\right)=\left(\frac{q}{q'}\right).$$

引14. 若n, m爲二任意有理整數，非同爲負，則

$$\prod_{(w)}\left(\frac{n,m}{w}\right)=+1,$$

式中左邊之乘積w過諸有理素數.

證：p, q表任意不同的奇素數，則由§64之(a'') (b')，(b'')及定理101可得

$$\left(\frac{-1,2}{2}\right)=+0,\qquad \left(\frac{-1,p}{2}\right)\left(\frac{-1,p}{p}\right)=+1,$$

$$\left(\frac{2,2}{2}\right)=+1,\qquad \left(\frac{2,p}{2}\right)\left(\frac{2,p}{p}\right)=+1,$$

---

*兩合理想數之定義參觀§73(譯者).

$$\left(\frac{p,p}{2}\right)\left(\frac{p,p}{p}\right)=+1, \qquad \left(\frac{p,q}{2}\right)\left(\frac{p,q}{p}\right)\left(\frac{p,q}{q}\right)=+1;$$

由§64之公式(a')及引14可知若n, m等於±1,或祇有一素因子,此定理能成立.由§64之公式(c''),(c''')及引14可得本定理之普通情形.

若m, n皆爲負數.則因$\left(\frac{-1,-1}{2}\right)=-1$,故$\prod\limits_{w}$之值爲$-1$.若採下之符號$\left(\frac{n,m}{-1}\right)=\pm1$,其正負號,可由$n, m$不皆爲負,或否而定.如此,則由引14上之定理之意義更可廣大.

§70. 定理100中所言.一族之諸特徵間之關係之證明.

因欲證明定理100之一部分,可用§69中之引14.A表$k(\sqrt{m})$域內之任意理想數班,$\mathfrak{a}$爲班A中之一理想數與2及d互素.且$n=\pm n(\mathfrak{a})$其符號仍如§65之所取,則班A諸特徵之積爲

$$\left(\frac{n,m}{l_1}\right)\cdots\cdots\cdots\left(\frac{n,m}{l_\gamma}\right)$$

由$n(\mathfrak{a})$爲一理想數之距,故凡n中奇數次乘方之素因子p,於$k(\sqrt{m})$域內可分解.由定理96,m爲如此之p之二次剩餘由引14及定理98公式(c'''),(a'),(a'')可得

$$\prod_{(w)}\left(\frac{n,m}{w}\right)=+1,$$

其中w過m所有之素因子及素數2.

若域$k(\sqrt{m})$之判別式d有素因子2,則本定理已證明.即凡域$k(\sqrt{m})$之一班之諸特徵之積爲$+1$.

若2非d之因子,則$m\equiv1,(4)$,故$\left(\frac{n,m}{2}\right)=+1$,與所需之結果亦同符合.

由前所證明諸特徵之積爲$+1$,可知一二次域$k(\sqrt{m})$內之族數最多等於諸可能之特徵系之數之半,即最多能等於$2^{\gamma-1}$.

18. 二次域之族之存在.

§71. 一二次域內之數之距之定理.

今尙待證者爲基本定理之其餘部分,卽須證明前所覓出γ個單位±1所適合之必要條件,且爲充分的,卽可有一域其中有一族之特徵系爲如上所與者.證此定理有二種方法,一爲用純粹之數的性質,一爲用超越方法相助.其前法可有如下之過程:

定理102[1]. 若m, n爲二有理整數,m非平方數,且對每一素數w皆合條件

$$\left(\frac{n, m}{w}\right)=+1,$$

則n爲$k(\sqrt{m})$內一整數或分數α之距.

證: 因$\prod_{(w)}\left(\frac{n, m}{w}\right)=+1$,故由§69之末所言可知$m, n$非皆爲負數.吾人可假定$n, m$無有理數之平方因子.$p$表$n$之一素因子,同時亦爲域$k(\sqrt{m})$之判別式之因子,故$p$等於$k(\sqrt{m})$內一理想數之距又$p$爲一奇素數,爲$n$之因子,但非$m$之因子,則由

$$\left(\frac{n, m}{p}\right)=\left(\frac{m}{p}\right)=+1,$$

故p爲$k(\sqrt{m})$內一理想數之距.最後若n之素因子p,但非$k(\sqrt{m})$內之判別式之因子,則因$\left(\frac{n, m}{2}\right)=\left(\frac{2, m}{2}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}=+1$,故素數2在域$k(\sqrt{m})$等於一理想數之距,且故於$k(\sqrt{m})$內可有一理想數$\mathfrak{i}$,其距$n(\mathfrak{i})=|n|$,於$\mathfrak{i}$所定之理想數班中選擇一理想數$\mathfrak{i}'$.使$n(\mathfrak{i}')\leqq|\sqrt{d}|$,式中$d$爲$\sqrt{m}$所定之域判別式.由定理50知此爲可能命$\mathfrak{i}'\sim\nu\mathfrak{i}$及$n'=n\cdot n(\nu)$,式中$\nu$爲$k(\sqrt{m})$內之一整數或分數,故$n'=\pm n(\mathfrak{i}')$,式中之$\pm$號,可視$n\cdot n(\nu)$爲正或負而定.特別當$m$爲負時,$n'$須爲正.因$d$爲$m$或$4m$故$|n'|\leqq2|\sqrt{m}|$,若$m>4$,卽$2|\sqrt{m}|<|m|$,則$|n'|<|m|$.另一方面,因$n'=n\cdot n(\alpha)$,故由定理98公式($c''$)可知$\left(\frac{n, m}{w}\right)=\left(\frac{n', m}{w}\right)=+1$,卽$\left(\frac{m, n'}{w}\right)=+1$對每一$w$之值皆然.

今假定定理102於域$k(\sqrt{m'})$內業已證明,m'爲一可正可負之數,且$|m'|<|m|$.

[1] 三個未知數之二次齊次式有有理數解答否之判定條件,最先爲拉果蘭忌(J. Lagragae)所覓出[Lagrange (1)].

則適所覓出之 n' 適合條件 $|n'|<|m|$，且非平方數，並對任意之素數 w，皆有 $\left(\frac{m,n'}{w}\right)=+1$ 之關係，則由定理102之眞實性，可知於 $k(\sqrt{n'})$ 中有一數 α' 其距爲 m。卽有二有理整數或分數 a 及 b，使 $m=a^2-n'b^2$，若 n' 爲一平方數，此式之可能性並未失去，因 $b\neq 0$，故可得 $n'=\left(\frac{a}{b}\right)^2-m\left(\frac{1}{b}\right)^2=n(\lambda)$，卽 n' 爲 $k(\sqrt{m})$ 域內一數 λ 之距用方程式 $n'=n\cdot n(n)$ 可知 $n=n(\alpha)$，式中 $\alpha=\frac{\lambda}{n}$ 表 $k(\sqrt{m})$ 內之一數。

定理102之完全證明，今引爲證明當 $|m|\leq 4$ 及 $|n|\leq|\sqrt{d}|$ 之眞實性矣。如此限制定理102中之 n, m，祇有八種情形，方程式

$$1=n(\sqrt{-1}) \qquad -2=n(\sqrt{2}),$$
$$2=n(1+\sqrt{-1}), \qquad 2=n(\sqrt{-2}),$$
$$2=n(2+\sqrt{2}), \qquad -2=n(1+\sqrt{3}),$$
$$-1=n(1+\sqrt{2}), \qquad -3=n(\sqrt{3}),$$

此卽表示此八種情形，皆謂定理102爲眞。

易知定理102尙可述之如下：條件 $\left(\frac{n,m}{w}\right)=+1$，對諸奇素數爲然，再加以 m, n 須皆爲正數之限制 [Lagrange (1), Legendre (1), Gauss (1)]。因由引14可知 $\left(\frac{n,m}{2}\right)=+1$ 也。

§72. 主族之班。

於 §36 之末已證明一理想數班之平方屬主族中。由 §71 之定理102可證其逆定理：

定理103. 二次域內凡主族之班爲此域內一班之平方 [Gauss (1)]。

證：命 H 爲 $k(\sqrt{m})$ 域內主族之一班，命 $\mathfrak{h}$ 爲 H 班之一理想數，與域 $k(\sqrt{m})$ 之判別式互素 $n=\pm n(\mathfrak{h})$ 其 $\pm$ 號之選擇仍如§65。此數 n 對任一素數 w，合條件 $\left(\frac{n,m}{w}\right)=+1$，故由定理102可得域 $k(\sqrt{m})$ 內有一整數或分數 α 使 $n=n(\alpha)$ 命 $\frac{\mathfrak{h}}{\alpha}=\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}'}$，式中 $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}'$ 爲二互素的理想數，故可得 $\frac{\mathfrak{k}\, s\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}'\, s\mathfrak{k}'}=1$，故必 $\mathfrak{k}'=s\mathfrak{k}$。因 $\mathfrak{k}\cdot s\mathfrak{k}\sim 1$，故 $\mathfrak{h}\sim\mathfrak{k}^2$。

適所證明之主族中理想數之特性,可使此同類性質之理想數彼此間有下之關係:

定理104. 若 ω_1, ω_2 為二次域 k 之基數且 η_1, η_2 為 k 內主族之一理想數 $\mathfrak{h}$ 之基數,且 N 為一所與之有理整數,則可有四個有理數 $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ 其分母與 N 互素,行列式 $\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}$ 之值為 ± 1, 且

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{\gamma_{11}\omega_1+\gamma_{12}\omega_2}{\gamma_{21}\omega_1+\gamma_{22}\omega_2}.$$

證: 定一與 $\mathfrak{h}$ 相似之理想數 $\mathfrak{h}'=\beta\mathfrak{h}$, 使其與 Nd 互素,如定理108之證明,可得 $\bar{n}=\pm n(\mathfrak{h}')$ 皆為 k 域內一整數或分數 α 之距.(±號之取法仍如§65), 能選擇 α 使能有一 γ 使 Nd 與 γ 互素,且 $\alpha\gamma$ 為整數,及 γ 為有理整數,理想數 $\gamma\alpha\mathfrak{h}'=\gamma\alpha\beta\mathfrak{h}$ 有基數

$$\gamma\alpha\beta\eta_1=a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_2,$$

$$\gamma\alpha\beta\eta_2=a_{21}\omega_1+a_{22}\omega_2,$$

式中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 表有理整數,因 $n(\alpha\mathfrak{h}')=\bar{n}^2$, 行列式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\pm\gamma^2\bar{n}^2$, 故可有四數 $\gamma_{11}=\frac{a_{11}}{\gamma n'}$, $\gamma_{12}=\frac{a_{12}}{\gamma n'}$, $\gamma_{21}=\frac{a_{21}}{\gamma n'}$, $\gamma_{22}=\frac{a_{22}}{\gamma n'}$ 適合定理之求所求.

§73. 兩合理想數.

二次域 k 中一理想數 $\mathfrak{a}$, 若不因代換 $s=(\sqrt{m};-\sqrt{m})$ 而變,且無有理整數 $\neq 1$ 為其因子,則此理想數謂之兩合理想數 (Ambigous ideal). (比較§57.) 有下之定理:

定理105. k 域之判別式 d 之 t 個且祗此 t 個不同的素理想因子 $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_t$ 為兩合理想數. k 域內之諸兩合想想數即為下之 2^t 個: $1, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\cdots\mathfrak{l}_t$.

證: 由定理96知有此且祗此 t 個素理想數 $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_t$ 是兩合的.若 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{q}\cdots\mathfrak{r}$ 為一兩合理想數分解為素理想數之乘積,因 $\mathfrak{a}=s\mathfrak{a}$, 故素理想數 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \cdots, \mathfrak{r}$ 之共軛理想數 $s\mathfrak{p}, s\mathfrak{q}, \cdots, s\mathfrak{r}$ 當即為 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \cdots, \mathfrak{r}$. 若 $s\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, 則 $\mathfrak{a}$ 將有有理數因子 $\mathfrak{p}\cdot s\mathfrak{p}$,

此與兩合理想數之定義違.故必爲 $\mathfrak{p}=s\mathfrak{p}$, 同樣 $\mathfrak{q}=s\mathfrak{q},\cdots,\mathfrak{r}=s\mathfrak{r}$, 卽素理想數 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q},\cdots,\mathfrak{r}$ 當皆爲兩合的.又 $\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_t$ 之平方爲有理整數,故 $\mathfrak{p},\mathfrak{q},\cdots,\mathfrak{r}$ 必互不相同由此定理105之後部業已證明.

§74. 兩合理想數班.

若 $\mathfrak{a}$ 爲班 A 內之一理想數, $s\mathfrak{a}$ 所屬之班以 sA 表之.若 $A=sA$, 則班 A 謂之兩合班.因乘積 $\mathfrak{a}\cdot s\mathfrak{a}\sim 1$, 故 $A\cdot sA\sim 1$; 故一兩合班之平方爲一主班.反之,若一班 A 之平方爲主班,則 $A=\frac{1}{A}=sA$, 卽得 A 爲一兩合班.

§75. 由兩合理想數以定兩合班.

今之問題爲定 k 域所有之兩合班.顯然一兩合理想數有 $\mathfrak{a}=s\mathfrak{a}$ 之性質,故 $\mathfrak{a}$ 定一兩合班.故吾人可由 2^t 個兩合理想數以覓其所定之不相同理想數班.若有一組理想數班其中無班 1, 且無班可爲其他若干之乘方之積者,如此之一組班,謂之非互依的理想數班.由此可述下之定理:

定理106. 於虛域中 t 個兩合素理想數定 $t-1$ 個互不相依之兩合班.於實域中視基單位 ε 之距爲 $+1$ 或 -1 而定 $t-2$ 個或 $t-1$ 個非互依之兩合班.卽於虛域內 2^t 個兩合理想數,定 2^{t-1} 個不相同之兩合班,於實域中可各定 2^{t-2} 個或 2^{t-1} 個不相同之兩合班.

證: m 之諸素理想因子之積等於 $\sqrt{m}$, 故爲 k 內之一主理想數.若 m 爲負,而非 $-1,-3$, (α) 爲此域內之一兩合主理想數.則 α^{1-s} 必爲一單位 $=(-1)^e$, 式中 e 爲 0 或 1, 由此

$$\{\alpha(\sqrt{m})^e\}^{1-s}=1,\quad 或\quad \alpha(\sqrt{m})^e=s\{\alpha(\sqrt{m})^e\},$$

卽 $\alpha(\sqrt{m})^e$ 爲一有理整數.此卽證明,於虛域 $k(\sqrt{m})$——但非 $k(\sqrt{-1}),k(\sqrt{-3})$——中含 1 及 $\sqrt{m}$ 外無其他之兩合主理想數.由此可知定理106對此情形爲眞.

今之問題爲實域,可分二種情形論之,卽此域之基單位 ε 之距爲 $+1$ 或 -1.

若 $n(\varepsilon)=+1$, 則由定理90可知,於 k 域內有一整數 α 無非 ± 1 之有理因子,

使$\varepsilon=\alpha^{1-s}$、因$\alpha=\varepsilon\cdot s\alpha$,故$(\alpha)$爲一兩合主理想數此主理想數$(\alpha)$非1非$\sqrt{m}$,因若$\alpha=\pm\varepsilon^f$,或$\alpha=\pm\varepsilon^f\sqrt{m}$,式中指數$f$爲一有理整數,則各得

$$\alpha^{1-s}=(-1)^e\varepsilon^{(1-s)f}=(-1)^e\varepsilon^{2f} \qquad (e=0\text{ 或 }1),$$

但此與ε之所設違.又若α'爲h內任一兩合主理想數,則必有$\alpha'^{1-s}=(-1)^e\varepsilon^f$,式中$e,f$爲有理整數.命$\alpha''=\frac{\alpha'}{(\sqrt{m^e})\alpha^f}$,則$\alpha''^{1-s}=1$,卽$\alpha''$爲一有理數.故含1,$\sqrt{m}$及$\alpha$之外,祗有一兩合理想數$\alpha\cdot\sqrt{m}$.

另一方面$n(\varepsilon)=-1$,則k內含1,$\sqrt{m}$外無其他之兩合主理想數.因若α爲k內之任一兩合主理想數,則可得方程式$\alpha^{1-s}=(-1)^e\varepsilon^f$,式中$e,f$爲有理整數,因$n(\alpha^{1-s})=+1$,可知$(n(\varepsilon))^f=+1$,卽$f$爲一偶數.命$\alpha'=\frac{\alpha}{\varepsilon^{\frac{f}{2}}(\sqrt{m})^{e+\frac{f}{2}}}$,則可得$\alpha'^{1-s}=+1$,卽$\alpha'$爲一有理數.

於k域中之t個兩合素理想數可由$\sqrt{m}$及其他$t-1$個兩合素理想數表出之,若k域爲實域,且$n(\varepsilon)=+1$,則此$t-1$個兩合素理數尙可由α及其他$t-2$個兩合素理想數表之.由此可知定理106之第二部分亦眞.

§76.　兩合班之不含兩合理想數者.

有下之定理:

定理107.　若k爲實域且其-1之特徵系皆爲$+1$,及其基單位之距爲$+1$,祗如此之k域有一兩合班無兩合理想數.如此之諸理想數班,可由其一乘諸含兩合理想數之班以得之.

證:　若k爲實域且-1之諸特徵悉爲$+1$,由定理102可知k內有一整數或分數α,其距爲-1.若其單位之距爲$n(\varepsilon)=+1$,則α必爲分數而非整數.命$\alpha=\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{j}'}$,式中$\mathfrak{j},\mathfrak{j}'$爲互素之理想數.又$\frac{\mathfrak{j}\cdot s\mathfrak{j}}{\mathfrak{j}'\cdot s\mathfrak{j}'}=1$,故可得$\mathfrak{j}'=s\mathfrak{j}$,故$\mathfrak{j}\sim s\mathfrak{j}$,卽$\mathfrak{j}$定一兩合班.此兩合班中無兩合理想數.因若有一兩合理想數$\mathfrak{a}=\mathfrak{j}\beta$,$\beta$爲$k$域內之一整數或分數,則$\mathfrak{a}^{1-s}=\alpha\beta^{1-s}$,故$\alpha\beta^{1-s}$須等於一單位,設其爲$(-1)^e\varepsilon^f$,可得$n(\alpha)=+1$,此與前所設定之$\alpha$之性質相矛盾.此已證明,由$\mathfrak{j}$所定之兩合班中無兩合理想數.

命A爲任意所與之兩合班,且$\mathfrak{i}$爲此班之一理想數,則$\mathfrak{i}^{1-S}$等於k域內之一整數或分數,距$n(\alpha)$或爲$+1$或爲-1.若k爲虛域,或k爲實域設其-1之特徵有一爲-1,則$n(\alpha)$祇能爲$+1$.如$n(\alpha)=+1$,則由定理90,k內有一整數β使$\frac{1}{\alpha}=\beta^{1-S}$,則$(\mathfrak{i}\beta)^{1-S}=1$,卽$\mathfrak{i}\beta$等於一兩合理想數與一有理數之積,卽班$A$有兩合理想數.另一方面,若$n(\alpha)=-1$,同時$n(\varepsilon)=-1$,故$n(\varepsilon\alpha)=+1$.同法可證班$A$有兩合理想數由此可見,當$k$爲一虛域,及爲一$-1$之特徵有一爲$-1$之實域,及$n(\alpha)=-1$之實域之諸兩合班中定有兩合理想數.

最後假定非如上述之情形,則k內當有許多兩合班不含兩合理想數.由其二各取一理想數$\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$,則由前節可知$\alpha=\mathfrak{i}^{1-S}$, $\alpha'=\mathfrak{i}'^{1-S}$之距必爲$-1$,故$n\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=+1$.由定理90可知$k$內有一整數$\beta$使$\frac{\alpha}{\alpha'}=\beta^{1-S}$.命$\frac{\mathfrak{i}'\beta}{\mathfrak{i}}=b\mathfrak{a}$,式中$b$爲一有理數,$\mathfrak{a}$爲一無非$\pm1$有理因子之理想數.由$\left(\frac{\mathfrak{i}'\beta}{\mathfrak{i}}\right)^{1-S}=1$可得$\mathfrak{a}=S\mathfrak{a}$,卽$\mathfrak{a}$爲一兩合理想數,由此$\mathfrak{i}'\sim\mathfrak{a}\mathfrak{i}$.故定理107之後一部分亦已證明.

§77. 兩合班之總數.

定理106及107可計算諸兩合班之總數.

定理108. 於k域中有$\gamma-1$個非互依之兩合班,式中γ表特徵之個數故互不相同之兩合班之個數爲$2^{\gamma-1}$.

證: 命t爲k域之判別式d之不同的有理素因子之個數.今先研究k爲虛域,則由定理106及107可得k內確有2^{t-1}個兩合班,此卽爲此域之兩合班之全體.若k爲實域,及k內-1之特徵系皆爲正單位,則由定理106及107可知k內有2^{t-1}個兩合班.此2^{t-1}個兩合班,或爲此域諸兩合班之全體,抑爲其一半,背視$n(\varepsilon)=-1$或$+1$以定之.若-1之特徵系中有-1,且$n(\varepsilon)=+1$:由定理106及107可知有2^{t-2}個兩合班,且此爲k內所有之兩合班之全體.若k爲實域且k內-1之特徵有負單位,則$\gamma=t-1$,其他情形$\gamma=t$,故定理108於是證明.

§78. 族存在之數論的證明.

已知之結果可與吾人以族數的解答.即如基本定理100所言,其數爲$2^{\gamma-1}$.惟適合定理100之條件之特徵系恰如此數.以g表所能有之不同的族之個數,主族所有之班數爲f.則由§66可知,每族所言之班數相等,故此域之總班數爲$h=gf$.以$H_1,\cdots,H_f$表主族之各班,則由定理103可知$H_1=K_1^2, H_2=K_2^2,\cdots, H_f=K_f^2$,式中$K_1,\cdots,K_f$表此域之$f$個班.

命C爲此域內之任意一班,則C^2當爲主族之一班,故$C^2=K_a^2$,式中K_a爲f班$H_1,\cdots,H_f$之一.則當有一班A,使$C=AK_a$,A顯然爲一兩合班.即若A過諸兩合班,K爲$K_1,\cdots,K_f$,則$C=AK$當過此域內之所有之理想數班.且每班祗過一次.由定理108已知兩合班之總數爲$2^{\gamma-1}$,故可得$h=2^{\gamma-1}f$.與$h=gf$相比較,可得$g=2^{\gamma-1}$,故基本定理100已完全證明矣[Gauss (1)].

§79. 班數之超越的表示法,及其應用——已知之無限乘積之極限爲正

至於$2^{\gamma-1}$個族之存在的第二個證明,實賴於超越方法,可由下之諸定理得之:

定理109. h爲二次域k內的班數.d爲此域之判別式.h可由下之公式明之

$$\varkappa h=\underset{s=1}{\mathrm{L}}\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}}.$$

右邊之乘積p過諸有理素數.記號$\left(\frac{d}{p}\right)$一如§61所定.因子$\varkappa$可分k爲虛或實,即d爲正或負,以定之爲

$$\varkappa=\frac{2\pi}{w\,|\sqrt{d}\,|},\quad 或\quad \varkappa=\frac{2\log\varepsilon}{|\sqrt{d}\,|}.$$

式中w當$d=-3$時爲6,$d=-4$是爲4,其他之負d皆爲2;另一方面,ε爲實域k內四個基單位之一,其值>1者.且$\log\varepsilon$爲基單位ε之實對數值[Dirichlet (8, 9)].

證: 由§27,s爲實數且>1,則

$$\zeta(s)=\sum_{(\mathfrak{i})}\frac{1}{n(\mathfrak{i})^s}=\prod_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}},$$

式中 $\mathfrak{p}$ 過此域之諸素理想數.依有理素數 p 排列之,則由定理97可知,對有理素數 p 之諸項之乘積,視 $\left(\frac{d}{p}\right)=+1,=-1,=0$ 而有

$$\frac{1}{(1-p^{-s})^2},\text{ 或 }\frac{1}{1-p^{-2s}},\text{ 或 }\frac{1}{1-p^{s}}.$$

此三種形式可總寫之爲

$$\frac{1}{1-r^{-s}}\ \frac{1}{1-\left(\frac{d}{r}\right)r^{-s}},$$

故可得

$$\zeta(s)=\prod_{(p)}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}}.$$

右邊之二乘積之 p 皆過諸有理素數.因

$$\lim_{s=1}\left\{(s-1)\prod_{(p)}\frac{1}{1-p^{-s}}\right\}=\lim_{s=1}\left\{(s-1)\sum_{(n)}\frac{1}{n^s}\right\}=1,$$

n 過諸有理整數,則

$$\lim_{s=1}\left\{(s-1)\zeta(s)\right\}=\lim_{s=1}\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}}.$$

由定理56可知,若 n 所表仍如§25,則可知定理109已證明.今往求 w 之值.於域 $k(\sqrt{-3})$ 中有六個壹之根 $\pm1,\ \pm\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$,及於域 $k(\sqrt{-1})$ 中有四個壹之根 $\pm1,\pm i$,其他之虛域中祇有兩個壹之根 ±1.(比較§62).

由以上所證明之事實之最重要的推演爲下之定理:

定理110. a 爲一任意之正或負有理數,非一平方數,則極限

$$\lim_{s=1}\prod_{(r)}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{p}\right)p^{-s}}$$

趨於一非零之有限數 [Dirichlet (8, 9)].

證: 命 $a=b^2m$,式中 b^2 爲 a 中最大之平方因子.命 d 爲由 $\sqrt{a}$ 所定之二次域之判別式,則每對一非可整除 b 之整數皆有 $\left(\frac{a}{r}\right)=\left(\frac{d}{r}\right)$ 故二無限乘積

$$\prod_{(r)}\frac{1}{1-\left(\frac{d}{r}\right)r^{-s}}\quad\text{及}\quad\prod_{(r)}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{r}\right)r^{-s}}$$

中,祇相差有限項.由定理109知第一個連乘積之極限爲有限,故第二個連乘積亦然.

§80. 對定數有所與之二次剩餘之特徵之有理素數無限.

由定理110可證明下之定理 [Dirichlet (9), Kronecker (10)]:

定理111. $a_1, a_2, \cdots, a_t$ 表 t 個有理整數,正或負,且於 2^t-1 整個數 $a_1, a_2, \cdots, a_t$, $a_1 a_2, \cdots, a_{t-1} a_t, \cdots, a_1 a_2 \cdots a_t$ 中無一爲平方數者, $c_1, c_2, \cdots, c_t$ 爲所與之單位 $+1$ 或 -1, 則有無限個有理素數 p, 使

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)=c_1, \left(\frac{a_2}{p}\right)=c_2, \cdots, \left(\frac{a_t}{p}\right)=c_t$$

證: 當 $s>1$, 則

$$\log \sum_{(n)} \frac{1}{n^s}=\sum_{(p)} \log \frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{(p)} \frac{1}{p^s}+S$$

$$S=\frac{1}{2}\sum_{(p)} \frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{3}\sum_{(p)} \frac{1}{p^{3s}}+\cdots\cdots$$

由§50已知當 $s=1$ 時, S 之值有限,故可得當 p 過諸有理素數時,和

$$\sum_{p} \frac{1}{p^s} \tag{26}$$

當 s 趨於1而超過諸限.又若 a 爲任一有理數,同樣當 $s>1$ 時

$$\log \prod_{(p)} \frac{1}{1-\left(\frac{a}{p}\right)p^{-s}}=\sum_{(p)}\left(\frac{a}{p}\right)\frac{1}{p^s}+S_a$$

$$S_a=\frac{1}{2}\sum_{(p)}\left(\frac{a}{p}\right)^2 \frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{3}\sum_{(p)}\left(\frac{a}{p}\right)^3 \frac{1}{p^{3s}}+\cdots;$$

若 a 非一平方數,則由定理110可知 $\log \prod_{(p)} \frac{1}{1-\left(\frac{a}{p}\right)p^{-s}}$ 當 $S=1$ 爲有限, S_a 亦然,故和

$$\sum_{(p)}\left(\frac{a}{p}\right)\frac{1}{p^s} \tag{27}$$

當 $s=1$ 時趨於一有限之數.於(27)中命

$$a=a_1^{u_1} a_2^{u_2} \cdots\cdots a_t^{u_t}$$

且命此 t 個指數 $u_1, u_2, \cdots, u_t$ 之值爲0或1,但 $u_1=0, u_2=0, \cdots, u_t=0$ 之一組須除

去.由此代入(27)所得之和,乘以相對應的$c_1^{u_1}\cdots c_t^{u_t}$,且以此所得之$2^t-1$個式子加入(26)可得

$$\sum_{(p)}\left(1+c_1\left(\frac{a_1}{p}\right)\right)\left(1+c_2\left(\frac{a_2}{p}\right)\right)\cdots\cdots\left(1+c_t\left(\frac{a_t}{p}\right)\right)\frac{1}{p^s} \qquad (28)$$

此和如(26),當s趨於1而超過任何之有限數. $a_1 a_2\cdots a_t$中有p爲因子之項數有限,和(28)之其餘部分等於$2^t\sum_{p'}\frac{1}{p'^s}$,式中$p'$爲諸素數$p$之有定理111之性質者.故可知當$s$趨於1時,上級數當超過任一有限數,故素數$p'$之個數無限,故定理111已證明.

§81. 於一二次域中有所與之特徵之素理想數之個數無限.

定理112. 若

$$\chi_1(\mathfrak{i})=\left(\frac{\pm n(\mathfrak{i}),m}{l_1}\right),\ \cdots\cdots,\ \chi_\gamma(\mathfrak{i})=\left(\frac{\pm n(\mathfrak{i}),m}{l_\gamma}\right).$$

爲k內一理想數$\mathfrak{i}$所之之族之諸特徵,以$c_1,\cdots,c_\gamma$表適合於條件$c_1\cdots c_\gamma=+1$之γ個單位±1,則於k內有無限個素理想數$\mathfrak{p}$使

$$\chi_1(\mathfrak{p})=c_1,\ \cdots\cdots,\ \chi_\gamma(\mathfrak{p})=c_\gamma.$$

證: 此域之判別式d之t個有理素因子爲$l_1,\cdots,l_t$.命$t=\gamma$或$t=\gamma+1$,於後者之情形中且有$\left(\frac{-1,m}{l_t}\right)=-1$,由條件$\left(\frac{\pm n(\mathfrak{i}),m}{l_t}\right)=+1$以決定$\pm n(\mathfrak{i})$之符號.於此情形中命$c_t=c_{\gamma+1}=+1$.今先證明有無限個有理素數$r$使

$$\left(\frac{p,m}{l_1}\right)=c_1,\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{p,m}{l_t}\right)=c_t.$$

爲欲達此目的可分$m\equiv1,\equiv3,\equiv2,(4)$三種情形論之.

於第一種情形中,可由

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=+1,\left(\frac{l_1}{p}\right)=c_1,\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{l_t}{p}\right)=c_t$$

出發.由定理111可知有無限個素數p適合此式.由第一個式子可得$p\equiv1,(4)$,故對此素數p,則

$$\left(\frac{p,m}{l_i}\right)=\left(\frac{p}{l_i}\right)=\left(\frac{l_i}{p}\right)=c_i$$

$i=1,\cdots,t$ 皆然.

於第二種情形中,命 $l_1,\cdots,l_t$ 中之 l_z 為素數2.若 $c_z=+1$,則吾人需要

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=+1,\quad \left(\frac{l_i}{p}\right)=c_i \qquad (i=1,\cdots,z-1,z+1,\cdots,t)$$

由定理111知有無數個素數 p 適合之.因第一式之關係,故 $\left(\frac{p,m}{2}\right)=+1=c_z$,且 $\left(\frac{p,m}{l_i}\right)=\left(\frac{p}{l_i}\right)=\left(\frac{l_i}{p}\right)=c_i$, $i=1,\cdots,z-1,\cdots,z+1,\cdots,t$.若 $c_z=-1$,則需要

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=-1,\quad \left(\frac{l_i}{p}\right)=(-1)^{\frac{l_i-1}{2}}c_i \qquad (i=1,\cdots,z-1,z+1,\cdots,t),$$

且有無限個素數 p 同時適合此諸式,且同時適合條件:

$$\left(\frac{p,m}{2}\right)=-1=c_z \quad 及 \quad \left(\frac{p,m}{l_i}\right)=\left(\frac{p}{l_i}\right)=(-1)^{\frac{l_i-1}{2}}\left(\frac{l_i}{p}\right)=c_i$$

$i=1,2,\cdots,z-1,z+1,\cdots,t.$

於第三種情形中仍以 $l_z=2$.由定理111知有無限個素數 p,使

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=+1,\quad \left(\frac{2}{p}\right)=c_z,\quad \left(\frac{l_i}{p}\right)=c_i \qquad (i=1,\cdots,z-1,z+1,\cdots,t);$$

由此

$$\left(\frac{p,m}{2}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{2}+\frac{t-1}{2}\,\frac{\frac{m}{1}-1}{2}}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=\left(\frac{2}{p}\right)=c_z$$

及 $\left(\frac{p,m}{l_i}\right)=\left(\frac{p}{l_i}\right)=\left(\frac{l_i}{p}\right)=c_i \quad (i=1,\cdots,z-1,z+1,\cdots,t).$

r 表如此之有理素數之任一,則

$$\left(\frac{p,m}{l_1}\right)=c_1,\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{p,m}{l_t}\right)=c_t.$$

由引14則

$$\prod_{(w)}\left(\frac{p,m}{w}\right)=\left(\frac{p,m}{r}\right)\left(\frac{p,m}{l_1}\right)\cdots\cdots\left(\frac{p,m}{l_t}\right)=+1,$$

可得

$$\left(\frac{m}{p}\right)c_1\cdots\cdots c_t=\left(\frac{m}{p}\right)=+1;$$

故 r 為 p 內二素理想數 $\mathfrak{p},\mathfrak{p}'$ 之積.凡此素理想數 $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$ 皆適合定112之條件.

§82. 族之存在之超越的證明,及§§71—77諸結果之證.

定理112不但表示有$2^{\gamma-1}$個族存在且同時有下之更深的事實.

定理113. 二次域之任一族之諸理想數中有無限個為素理想數.

$2^{\gamma-1}$個族之存在定理之超越的證法與定理102,103及108並無關係,且易知可由存在定理以得該諸定理.又吾人需要知道k內兩合班之數有$2^{\gamma-1}$.此事實可由定理106及定理107之證明之第二,第三段之末之關係得之,此完全與定理102無關.

仍如以前,以f表示主族之班數,g表示族數,又f'表示主族之班之可表為他一班之平方者.如§78可知$gf=af'$,又已知$g=2^{\gamma-1}$,故$a\leq 2^{\gamma-1}$,且顯然$f'\leq f$,故可知$f=f'$,即$a=2^{\gamma-1}$.第一式證明定理103.第二式證明108,及定理102當$n=-1$之情形.由定理103及適才所言定理102可完全得出.因數n若適合定理102之條件則當為主族中一理想數$\mathfrak{h}$之距,以$\mathfrak{k}$表理想數之可使$\mathfrak{h}\sim\mathfrak{k}^2$者,則$\alpha=\frac{\mathfrak{h}\cdot n(\mathfrak{k})}{\mathfrak{k}^2}$必為$k$內之一整數或分數,可得$n(\alpha)=\pm n$,由定理102可知當$n=-1$時亦然.

故由超越的方法,凡§71至§78之結果,可反其順序以證明之.

§83. 狹義的相似及班之定義.

若取§24之二理想數之狹義的定義,則第17,18章之定理,經此修飾,可為較簡單.

顯然於一虛域及基單位之距為$n(\varepsilon)=-1$之實域內,當施行狹義相似的定義實與舊定義無何差別.但若k為實域且$n(\varepsilon)=+1$時,則舊定義中之一班,在新定義中變為兩班,特別如舊之主班,今變為由主理想數(1)及$(\sqrt{m})$所定之兩班.以h'表理想數之狹義的班之班數,則可知$h'=2h$ [Dedekind (1)].

§84. 新班之基本定理及族之定義.

由班之新定義遂發生新的族之定義;$k(\sqrt{m})$域內一理想數$\mathfrak{i}$,無論此域如何,其特徵為t個單位

$$\left(\frac{+n(\mathfrak{i}),m}{l_1}\right),\cdots\cdots,\left(\frac{+n(\mathfrak{i}),m}{l_t}\right)$$

式中理想數 $\mathfrak{i}$ 之距之記號與前不同,今當取其正號.對一虛域,此定義與舊者完全吻合.於 -1 之特徵悉為 $+1$ 之實域亦然.當基單位之距為 -1,則後者顯然成立.若 k 為實域,其基單位之距為 $+1$,則有二種不同之情形,即以 -1 之特徵悉為正或否而分.

於第一種情形中理想數 (1) 及 $(\sqrt{m})=\mathfrak{a}$ 屬同一族中,因

$$\left(\frac{n(\mathfrak{a}),m}{l_i}\right)=\left(\frac{+m,m}{l_i}\right)=\left(\frac{+m,m}{l_i}\right)\left(\frac{-1,m}{l_i}\right)=\left(\frac{-m,m}{l_i}\right)=+1.$$

$i=1,\cdots,t$.新族有與舊族同之理想數,故族數仍 $=2^{t-1}$.

第二種情形中,理想數 (1) 及 $\mathfrak{a}=(\sqrt{m})$ 各表一不同的新族,故新族數當為舊族數的二倍.對舊族之定義,其特徵系依賴於 $t-1$ 個特徵,且舊族之數為 2^{t-2}.故新族之數當如上節亦為 2^{t-1}.又於每種情形中乘積

$$\left(\frac{-1,m}{l_1}\right)\cdots\cdots\cdots\left(\frac{-1,m}{l_t}\right)=+1.$$

故基本定理100中若換 γ 為 t,則對此新族新班之定義仍以成立.

其他之定理及第17,18兩章之證明,皆無重大之困難,即可推入新定義中,且運用新定義後,皆能有相當的簡單之表示.

19. 二次域內理想數之班數序決定.

§85. 記號 $\left(\frac{a}{n}\right)$ 對一複合數 n.

若能將定理109之公式之右邊

$$\mathop{\mathrm{L}}_{s=1}\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}}$$

以一有限式表之,則二次域 k 之班數 h 可有一極堪注意之表示法.為此目的須定 $\left(\frac{a}{n}\right)$ 當 n 為一複合數時之義.若 $n=pq\cdots w$,式中 $p,q,\cdots,w$ 為相同或不相同之素數,$\left(\frac{a}{n}\right)$ 之義即定為

$$\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)\cdots\cdots\left(\frac{a}{w}\right);$$

且命 $\left(\frac{a}{1}\right)$ 爲 $+1$.若 $s>1$,則

$$\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}}=\sum_{(n)}\left(\frac{d}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

式中 n 過諸有理整正數.當 $s=1$ 此和之極限數可由一有限式示之,故對班數 h 可有下之結果.

§86. 理想數之班數之有限式表示法.

定理114. 域 $k(\sqrt{m})$ 內之班數 h 爲

$$h=-\frac{w}{2|d|}\sum_{(n)}\left(\frac{d}{n}\right)n. \qquad m<0;$$

$$h=\frac{1}{2\log\varepsilon}\log\frac{\prod_{(b)}\left(e^{\frac{bi\pi}{d}}-e^{-\frac{bi\pi}{d}}\right)}{\prod_{(a)}\left(e^{\frac{ai\pi}{d}}-e^{-\frac{ai\pi}{d}}\right)}, \qquad m>1,$$

式中和號 $\sum_{(n)}$ 經 $|d|$ 個有理整數 $n=1,2,\cdots,|d|$,又積號 $\prod_{(a)},\prod_{(b)}$ a,b 各過此 $|d|$ 個值且適合此條件 $\left(\frac{d}{a}\right)=+1,\left(\frac{d}{b}\right)=-1$. [Dirichlet (8, 9) Weber (4)].

證; 命 n,n' 爲二不等於零之整數.若 n 與 d 有非 ±1 之公約數,則 $\left(\frac{d}{n}\right)=0$. 若 n 與 d 互素,則 $\left(\frac{d}{n}\right)=\prod_{(w)}\left(\frac{d,n}{w}\right)$,式中乘號過 n 之諸不同的素因子.由引14可知,此當與乘積 $\prod_{(l)}\left(\frac{d,n}{l}\right)$ 同,式中 l 過 d 之諸素因子.若 $n'\equiv n,(d)$,則

$$\prod_{(l)}\left(\frac{d,n}{l}\right)=\prod_{(l)}\left(\frac{d,n'}{l}\right),$$

故可得若 $n\equiv n',(d)$,則

$$\left(\frac{d}{n}\right)=\left(\frac{d}{n'}\right) \qquad (29)$$

(譯者按上之證明限於 n 無有理數之平方爲其因子,惟極易說明其有有理數之平方爲其因子亦然).

又因

$$\left(\frac{d}{1}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{d}{|d|}\right)=0 \tag{30}$$

證此可定一 b 使 $\left(\frac{d}{b}\right)=-1$，且以此乘(30)式之左邊且由(29)可知

$$\left(\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{d}{2b}\right)+\cdots+\left(\frac{d}{|d|b}\right)=-\left\{\left(\frac{d}{1}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{d}{|d|}\right)\right\}.$$

使用公式

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-nt}t^{s-1}dt,$$

若用(29)式可得

$$\lim_{s=1}\sum_{(n)}\left(\frac{d}{n}\right)\frac{1}{n^s}=\lim_{s=1}\int_0^\infty\frac{F(e^{-t})t^{s-1}}{1-e^{-|d|t}}dt,$$

式中

$$F(x)=\left(\frac{d}{1}\right)x+\left(\frac{d}{2}\right)x^2+\cdots+\left(\frac{d}{|d|}\right)x^{|d|}.$$

由(30)式可知 $F(x)$ 可爲 $1-x$ 所整除，即 e^{-t} 之有理函數 $\frac{F(e^{-t})}{1-e^{-|d|t}}$ 當 $t=0$ 時爲有限，由此可得

$$\lim_{s=1}\int_0^\infty\frac{F(e^{-t})t^{s-1}}{1-e^{-|d|t}}dt=\int_0^\infty\frac{F(e^{-t})}{1-e^{-|d|t}}dt.$$

若於後之積分中換變數 $x=e^{-t}$，則得

$$\int_0^1\frac{F(x)}{x(1-x^{|d|})}dx.$$

用分項分數之法可得

$$\frac{F(x)}{x(1-x^{|d|})}=-\frac{1}{|d|}\sum_{(n)}\frac{F(e^{\frac{2n i\pi}{|d|}})}{x-e^{\frac{2n i\pi}{|d|}}}$$

其和 n 過 $1,2,\cdots,|d|$．由一高斯(Gauss)之定理，即

$$\sum_{(n')}\left(\frac{d}{n'}\right)e^{\frac{2nn'i\pi}{|d|}}=\left(\frac{d}{n}\right)\sqrt{d}$$

n' 過數 $1,2,\cdots,|d|$．且 $\sqrt{d}$ 當 $d>0$ 時，取其爲正；$d<0$ 時，取其爲正虛數(比較§124)．又因

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-e^{\frac{2\pi i x}{d}}} = \log \frac{e^{\frac{n i\pi}{d}}-e^{-\frac{n i\pi}{d}}}{i} - \frac{i\pi}{|d|}\left(n-\frac{1}{2}d\right)$$

$$(n=1, 2, \cdots, |d|).$$

式中之對數取實值,由此不難得定理114所表之結果.

此結果之形式,因 k 爲實或虛域,而互不相同,於第一種之情形 h 可由所與之公式得之,並無何困難的計算,於第二種情形中,須知其基單位 ε. 二乘積 $\prod\limits_{(a)}$ 及 $\prod\limits_{(b)}$ 之商,後來可知此非他,乃由分圓域之理論對二次域 h 之一所與之單位也(比較§121).

今取一虛域爲例,吾人可得,若 $m=-p$ 及 p 爲 $\equiv 3, (4)$ 之有理素數,且 >3, 則

$$h=\frac{\Sigma b-\Sigma a}{r};$$

和 Σa, Σb 各表示 r 之諸二次剩餘及二次剩餘之和,且此剩餘限於0及 r 之間,由一極易之變化,上表示中之分母 r 可移去,由此可得班數 h 或等於 p 之於 0 及 $\frac{p}{2}$ 之間之二次剩餘之個數減去其非二次剩餘之個數,或等於此數之三分之一.但前數超越過後者迄今尚未有純粹的數論的方法以證明之.

§87. 狄黎西來氏之四次域.

二次域之理論之最相近之推廣當爲下之問題,以二次域 k 爲基域以代替所常用之有理數域,則對 k 之相對的二次域 K 爲一四次域 K,有 k 爲其分域.

若域 h 爲虛數 $\sqrt{-1}$ 所定之域,則 K 所表之域謂之爲一狄黎西來氏之四次域(Dirichlet's biquadratic field 關於此域之研究可參觀[Dirichlet 10, 11, 12), Eisenstein (3, 6), Bachmann (1, 3), Minnigerode (1), Hilbert (5)]. 由相仿的引導可分域 K 之班爲族,且可再得基本定理 100, 且第18章中,證明定理之二方法,皆可用此域 K 中,故狄氏四次域中之基本定理可用純粹的數論方法證之 [Hilbert, (5)] 亦可以狄氏之超越方法證之 [Dirichlet (10, 11,12), Minnigerode (1)].

特別有趣之特例爲狄氏之四次域含二次域 $k(\sqrt{-1})$ 外尙有兩二次式 $k(\sqrt{+m})$ 及 $k(\sqrt{-m})$ 爲其分域.對如此之特別狄式域 K 仍可由超越方法及純粹的數論方法以證下之定理:

定理115. 特別狄氏四次域 $K(\sqrt{+m}, \sqrt{-m})$ 之班數,等於二域 $h(\sqrt{+m})$ 及 $h(\sqrt{-m})$ 之班數之積,或爲其積之半,端賴域 K 對域 $h(\sqrt{-1})$ 之基單位之相對距爲 $\pm i$ 或 ± 1 而定.

此結果表示虛域論之最美麗定理之一,且足使驚奇,因由此可使兩二次域發生關聯,此兩二次域爲由一相異符號的二實數之平方根所定者.

由純粹的數論方法,此定理亦有一極簡單之證明.且可確定四次域 $K(\sqrt{+m}, \sqrt{-m})$ 內之理想數班之特徵爲: $h(\sqrt{+m})$ 內一理想數班之特徵與 $h(\sqrt{-m})$ 內一理想數班之特徵之積.

20. 二次域之環及模.

§88 一二次域之環.

一二次域之環則及模之理論,可由第 9 章之普通定理得來.易知凡 k 域之一環 γ 可由一數 $\varrho=f\omega$ 定之,式中 ω 仍表 §59 所定之數此與 1 成 k 域之組基數;其 f 爲一有理整正數同時表 γ 環之宰.若 d 爲負且 <-4, 由定理66可知環 γ 之有規環理想數之班數可表爲

$$h_\gamma=hf\prod_{(p)}\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)\frac{1}{p}\right)$$

式中之符號過 f 之諸不同之有理素因子 p [Dedekind, (1, 3)].

§89. 二次域之模班之一定理.二元二次齊次式.

研究二次域之模班可有下之定理:

定理116. 於二次域 h 之任一模班中有一有規環理想數[Dedekind (1)].

證: 命 $[\mu_1, \mu_2]$ 爲 h 域之任意模,其中 μ_1, μ_2 爲二整數. $\partial=f^2d$ 爲 $[\mu_1, \mu_2]$ 所定之模班之判別式又以 $\mathfrak{m}=(\mu_1, \mu_2)$ 表由 μ_1, μ_2 所定之理想數且命 $s\mathfrak{m}$　$\mathfrak{m}'$ 爲 $\mathfrak{m}$

之共軛理想數又於 k 內定一整數 α 為 $\mathfrak{m}'$ 之倍數,但 $\frac{\alpha}{\mathfrak{m}'}$ 與 ∂ 互素.命

$$\alpha_1=\frac{\alpha\mu_1}{n(\mathfrak{m}')},\quad \alpha_2=\frac{\alpha\mu_2}{n(\mathfrak{m}')},$$

則 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 為一與 $[\mu_1, \mu_2]$ 相似之模.同時 α_1, α_2 所定之理想數 $\mathfrak{a}=(\alpha_1, \alpha_2)$ 與 ∂ 互素.

若 ∂ 為一偶數,則可證明三個整數 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2$ 中至少有一與 2 互素.因若不然,則此三數內有二數與 2 有相同的素理想因子,但此與 $\mathfrak{a}, \partial$ 互素之條件違.命 α_1 卽對 2 互素,又 ∂ 之諸奇素因子命之為 $r, q, \cdots, w$. 因 $\mathfrak{a}$ 與 r 互素,故 $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2$ 中至少與 r 互素.命 $\alpha_1+x\alpha_2$ 對 r 互素,又 $\alpha_1+y\alpha_2$ 對 q 互素, $\cdots$, 式中 $x, y, \cdots$ 表有理整數.則可有一有理整數 a, 使 $\alpha_1+a\alpha_2$ 與 ∂ 互素.

命

$$b=\frac{|n(\alpha_1+a\alpha_2)|}{n(\mathfrak{a})},\quad \beta=\frac{\alpha_2(\alpha_1'+a\alpha_2')}{n(\mathfrak{a})}$$

式中 α_1', α_2' 為 $\alpha_1\ \alpha_2$ 之共軛數,故 b 為一有理整正數 β 為一代數整數.模 $[\alpha_1, \alpha_2]=[\alpha_1+a\alpha_2, \alpha_2]$ 與模 $[b, \beta]$ 相似.因 $(b,\beta)=\frac{\alpha_1'+a\alpha_1'}{\mathfrak{a}'}$ 故距 $n(b,\beta)=b$. 模 $[b, \beta]$ 顯然為 β 所定之環 $\gamma=[\beta]$ 內之一有規環理想數,由此定理 116 已完全證明.

由

$$\partial=\frac{1}{(n(b,\beta))^2}\begin{vmatrix} b, \beta \\ b, \beta' \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \beta' \end{vmatrix}^2,$$

故環 γ 之判別式與所研究之模班之判別式同.環 γ 是唯一的可與模 $[\mu_1, \mu_2]$ 相似,且有一有規環理想數者.定理 116 表示於二次域中可研究其模班或有規環理想數之一以及他一.

由 §30 及 §35 之普通申述可知,一二次域 $k(\sqrt{m})$ 之一模班可與有整係數二元二次齊次式之班對應;反之,凡一式班亦與一模班對應.其模班與二次式有相同之判別式.由此之研究可得有 ∂ 為判別式之二次齊次式之研究.

§90. 二次域之初等及高等理論

本篇所言統括名之為二次域之初等理論.至於高等理論為涉及此域之

質之陳述,此當然須用及較高次域之助.此項理論之一部分,將於第四篇中論之.一虛二次域所屬之班域之理論,與其屬於一亞培爾氏域同,此需要橢圓函數之複虛乘法之方法,此已出本文範圍,不復置論.

數學家姓名錄

（續第五卷第一期）

曾昭安

Ma Chaou [馬釗] (1812[清嘉慶十七年]—1860[清咸豐十年]) 中國人

Ma Chung Tseih [馬重績] 十世紀前半期　中國五代後晉時人

Ma Fow Too [馬負圖] 十七世紀後半期　中國清康熙時人

Ma Hëen [馬顯] 六世紀後半期　中國南北朝北周人

Ma Kee [馬傑] 中國明時人　改正算法

Ma Suh [馬續] 二世紀前半期　中國東漢順帝時人

Mac Adam, David L. [馬克亞丹] 二十世紀前半期　美人

Macalister, *Sir* Donald [馬卡力斯武] (1854, 5, 17—) 蘇格蘭人

Macaulay, Francis Sowerby [馬可梨] (1862, 2, 11—) 英人　著模系之代數理論

Macaulay, William Herrick [馬可梨] (1853, 11, 16—) 英人　著立體幾何學

Macbeth, Alexander [馬克柏司] (1888—) 英人

Maccaferri, E. [馬卡斐里] 二十世紀前半期　義人

Mac Coll, Hugh [馬科爾] (1837—1909) 英人

Mac Cord, C. W. [馬克科] 十九及二十世紀　美人

Mac Creadie, W. T. [馬克里第] 二十世紀前半期　美人

Mac Cullagh, James [馬卡雷] 即 J. Mc Cullagh

Mac Dermott, C. F. G. [馬克得謨] 二十世紀　英人

Macdonald, Hector Munro [馬克多爾那] (1865－　) 英人

Macdonald. J. W. [馬克多那爾] 十九世紀末　美人

Macdonald, Marion E. [馬克多那爾] 二十世紀　美人

Macdonald, Stewart Lincoln [馬克那多爾] (1873, 7, 23－　) 美人

Macdonald, W. J. [馬克多那爾] 十九世紀後半期　蘇格蘭人　著高等幾何學

Macdonald, W. R. [馬克多那爾] 十九世紀後半期　愛爾蘭人

Mac Duffee, C. C. [馬克達非] 二十世紀前半期　美人

Mace, C. A. [馬斯] 二十世紀前半期　英人

Mace, Jean [馬斯]

Macfarlane, Alexander [馬克法雷] (1851－1913) 英人　研究四原及向量解析

Macgregor, D. C. [馬格勒革] 二十世紀

Mac Gregor, H. H. [馬格勒革]

Macgregor, James Gordon [馬格勒革] 十九世紀　英人　研究數理力學

Mac G ckin de Slane [馬克谷琴] 十九世紀中　法人

Mach, Ernst [馬赫] (1838, 2, 18－1916, 2, 9) 德人　幾何學家

Mache, H. [馬希] 二十世紀　奧人

Machin, John [馬欽] (1680－1751) 英人

Machmer, W. L. [馬士麥] 二十世紀前半期　美人

Macine, John [馬賽] 十九世紀　美人

Mac Innes, Charles Ronald [馬克印斯] (1876－1929, 9, 29) 美人

Mack, H. [抹克] 二十世紀前半期　德人

Mackay, John Sturgeon [馬開] (1843—1914) 英人

Mackenzie, Alexander Herbert [麥肯基] (1867—) 英人

Mackenzie, Arthur Stanley [麥肯基] (1865, 9, 20—) 坎拿大人

Mackenzie, Alastair St. Clair [麥肯基] (1875, 2, 17—) 蘇格蘭人

Mackenzie, J. L. [麥肯基] 即 J. L. Mc Kenzie

Mackenzie, Michael Alexander [麥肯基] (1866, 2, 28—) 坎拿大人

Mac Kenzie, Nicol Finlayson [麥肯基] (1857, 2, 23—) 英人

Mackie, Ernest Lloyd [馬岐] 二十世紀前半期 美人

Mackie, J. [馬岐] 二十世紀前半期 英人

Mac Lane, Saunders [馬克雷] 二十世紀前半期 美人

Maclaren, G. C. [馬克拉棱] 二十世紀 英人

Maclaurin, Colin [馬克羅麟] (1698, 2,—1746, 6, 14) 蘇格蘭人 發表馬克羅麟定理

Maclaurin, R. C. [馬克羅麟] 十九世紀末 英人

Maclay, James [馬克來] 十九世紀末 美人

Maclean, M. [馬克利] 十九世紀末 美人

Maclean, Magnus [馬克利] 二十世紀前半期 英人

Mac Lean, Neil Bruce [馬克利] (1883, 4, 14—) 坎拿大人 研究曲面之理論

Mac Leod, A. H. D. [麻克勞德] 二十世紀前半期 法人

Macloskie, G. [馬克老斯岐] 十九世紀末 美人

Mac Mahon, Percy Alexander [麥馬韓] 亦作 P. A. Mc Mahon (1854—1929, 12, 25) 英人 研究對稱函數數論及組合解析.

Mac Millan, William *Duncan* [馬克密蘭] (1871, 7, 24—) 美人

Macneill, Murray [馬克奈爾] (1877, 1, 9—) 坎拿大人

Mac Neish, H. F. [馬克奈什] 二十世紀前半期　美人

Macnie, J. B. [馬克奈] 十九世紀後半期　美人

Mac Nutt, Barry [馬克那特] 二十世紀　美人

Mac Pike, E. F. [馬克派克] 二十世紀　英人

Mac Queen, Marion Lee [馬克昆] 二十世紀前半期　美人

Macquer [馬克給] (1718—1784) 法人

Mac Robert, Thomas M. [馬克羅伯] 二十世紀　蘇格蘭人　著球調和函數,複變數函數.

Macrobius, Theodosius [馬克洛比阿] 五世紀

Macully, J. F. [馬卡力] 十九世紀前半期　美人

Mc Alister, E. H. [美加力斯武] 二十世紀前半期　美人

Mc Arthur, Duncan [馬克阿武] (1772—) 美人

Mc Atee, J. E. [馬揆提] 二十世紀前半期　美人

Mc Aulay, Alexander [瑪可梨] 十九世紀末　英人　著八原論

Mc Cain, Gertrude I. [馬槊] 二十世紀前半期　美人

Mc Call, William A. [馬科爾] 二十世紀　美人

Mc Carthy, Edward Dennis [麥卡替] 二十世紀前半期　美人

Mc Clatchie, Thomas [馬克拉希] (?—1885, 6, 4) 英人

Mc Clelland, William [瑪克勒蘭] (1889, 6, 10—) 英人

Mc Clelland, William J. [瑪克勒蘭] 亦作 W. J. M'Clleland 十九世紀　英人　研究反形法

Mc Clenon, Raymond Benedict [馬克勒諾] (1883, 8, 4—) 美人　研究函數

Mc Clintock, Emory [馬克林托] (1840—1916) 美人　貢獻於確率學

Mc Coard, G. W. [馬科德] (1850—1930, 3, 19) 美人

Mc Coll, Hugh [馬科爾] 即 H. Mac Coll

Mc Connell, A. J. [馬康涅爾] 二十世紀前半期 愛爾蘭人 著絕對微分學之應用

Mc Cormack, Thomas Joseph [馬科麥克] (1865, 5, 28—) 美人 編數學書

Mc Cormick, Clarence [馬科密克] 二十世紀前半期 美人

Mc Cormick, James Thomas [馬科密克] (1876, 2, 21—) 美人

Mc Cowan, John [馬柯閩] 十九世紀 英人

Mc Coy, Dorothy [馬夸] 二十世紀前半期 美人

Mc Coy, L. M. [馬夸] 二十世紀前半期 美人

Mc Coy, Neal H. [馬夸] 二十世紀前半期 美人

Mc Cullagh, James [馬卡雷] 亦作 J. Mac Cullagh (1809—1846) 愛爾蘭人 貢獻於二次曲面論

Mc Culloch, R. S. [馬卡羅] 十九世紀 美人

Mc Daniel, William Roberts [馬克丹屰] 二十世紀前半期 美人

Mc Donald, Emma W. [馬克多那] 即 Mrs. J. H. Mc Donald 二十世紀前半期 美女

Mc Donald, John Hector [馬克多那] 十九世紀末 美人

Mc Donnell, John [馬多納] (?—1933, 12, 29) 居坎拿大

Mc Dougall, A. H. [馬克杜加爾] 二十世紀 坎拿大人

Mc Dowell, John [馬克道厄爾] 十八世紀中 英人

Mc Elroy, Frank D. [馬克厄洛] 二十世紀 美人

Mc Ewen, George Francis [馬厄汶] (1882, 6, 16—) 美人 研究數學之應用於海洋學

Mc Ewen, W. H. [馬厄汶] 二十世紀前半期 坎拿大人

Mc Farlan, Lee H. [馬克法郎] 二十世紀前半期 美人

Mc Farland, Elsie J. [馬克法蘭] 二十世紀前半期 美人

Mc Gavock, Miss Martha P. [馬加福克] 二十世紀前半期 美女

Mc Gaw, F. M. [馬戈] 二十世紀前半期 美人

Mc Gee, W. J. [馬基] 十九世紀末 美人

Mc Giffert, James [馬季斐] 二十世紀前半期 美人

Mc Guire, J. W. [馬居耳] 二十世紀 美人

Mc Guire, Margaret [馬居耳] 二十世紀 美人

Mc Hugh, P. J. [馬休] 二十世紀前半期 美人

Mc Ilhatten, D. A. [馬咨哈滕] 二十世紀前半期 美人

Mc Kay, A. D. D. [馬揆] 二十世紀前半期 英人

Mc Kay, Herbert [馬揆] 二十世紀 英人

Mc Kelden, A. M. [馬刻登] 二十世紀初 美人

Mc Kelvey, J. V. [馬刻徵] 二十世紀前半期 美人

Mc Kelvey, Martha M. [馬刻徵] 即 Mrs. J. V. Mc Kelvey 二十世紀前半期 美女

Mc Kenzie, J. L. [麥肯基] 亦作 J. L. Mackenzie 十九世紀後半期 蘇格蘭人

Mc Kinney, Thomas Emery [馬琴內] (1864, 4, 26—1930,4, 14) 美人

Mc Kinstry, Archibald [馬琴斯特里] (1877—) 英人

Mc Laughlin, Miss Isabel C. [馬老林] 二十世紀前半期 美女

Mc Laughlin, James Anson [馬老林] 二十世紀前半期 美人

Mc Laurin, Kate L. [馬老靈] 即 Mrs. Ferderick Calvin 二十世紀前半期 美女

Mc Lellan, James A. [馬勒蘭] 十九世紀末 美人 研究數之心理學

Mc Lennan, J. C. [馬隆蘭] 二十世紀

Mc Leod, A. R. [麻勞德] 二十世紀前半期 英人

Mc Mackin, F. J. [馬麥京]　二十世紀前半期　美人

Mc Mahon, James [麻馬韓]　十九世紀末　美人　研究雙曲函數

Mc Mahon, P. A. [麻馬韓]　卽 P. A. Mac Mahon

Mc Millan, Mary B. [馬密蘭]　二十世紀前半期　美人

Mc Murry, Charles Alexander [馬墨黑]　二十世紀初　美人

Mc Neal, Marshall Jefferson [馬泥爾]　二十世紀前半期　美人

Mc Neer, E. Loula [馬內耳]　二十世紀前半期　美人

M'Crae, W. H. [馬克累]　二十世紀前半期　英人

Mc Shane, Edward James [馬禪]　二十世紀前半期　美人　研究變分學

Mc Vittie, G.C. [馬維提]　二十世紀前半期　英人

Mc Weeny, Henry C. [馬韋尼]　二十世紀初　愛爾蘭人

Mc Whan, John [馬克惠] (1885－　) 蘇格蘭人

Madan, Falconer [馬丹]　二十世紀前半期　英人

Maddox, A. C. [馬多克斯]　二十世紀前半期　美人

Made, H. [馬德]　二十世紀初　德人

Madelung, Erwin [馬德倫]　二十世紀前半期　德人

Mader, K. [馬得]　二十世紀前半期　奧人

Mader, Philomena [馬得]　二十世紀前半期　德人

Madison, James [馬的孫] (1751, 3, 16－1836, 6, 28)　美人

Mädler, Johann Heinrich von [美德勒]　亦作 J. H. Maedler (1794－1874)　德人

Madschd Addaulah [馬德什阿多拉]　十及十一世紀　波斯人

Madsen, V. H. O. [馬德森]　十九世紀後半期

Maecianus, Volusius [美息安納]　亦作 Lucius Volusius Maecianus (?－175)　羅馬人

Maeda, Fumitomo　二十世紀前半期　日本人

Maedler, J. H. [美德勒] 卽 J. H. Mädler

Maennchen, Ph. [美瑟] 二十世紀前半期　德人

Maeterlinck, Maurice [梅德森] (1862, 8, 29—) 比利時人

Maffei, Raphael [馬非伊] 十六世紀　德人

Maffei, Scipione [馬非伊] 亦作 Francesco Scipione Maffei 或 Scipion Maffei (1675, 7, 1—1755, 2, 11) 義人

Maffett, R. [馬斐特] 十九世紀前半期　英人

Magalhães, Gabriel de [安文思] (1611—1677, 5, 6) 葡萄牙人　明崇禎十三年（卽1640年）來中國

Magalotti, Lorenzo [馬加羅提] (1637—1712) 義人

Maggi, G. A. [馬吉] 十九世紀後半期　義人

Magie, W. F. [馬基] 十九世紀　德人

Magini, Giovanni Antonio [馬基尼] 亦作 Joannes Antonius Maginus (1555, 6, 13—1617, 2, 11) 義人

Magistrini, G. B. [馬基斯特立尼] 十八世紀　義人

Magnan, H. [曼永] 十九世紀　法人

Magnier, André [曼泥耳] 二十世紀前半期　法人

Magnitzky, Leontius Philippovisth [馬格尼啓] (1669—1739) 俄人

Magnus, Albertus [馬格那斯] (1193?—1280) 德人

Magnus, G. [馬格那斯] 十九世紀　德人

Magnus, H. G. [馬格那斯] (1802—1870) 德人

Magnus, L. I. [馬格那斯] 十九世紀　德人

Magnus, Sir Philip [馬格那斯] (1842, 10, 7—) 英人　研究數學及物理

Magnu son, Carl Edward [馬格努孫] (1872, 9, 29—) 美人　研究數理物理

Mahaffy, John Pentland [馬哈菲] (1839—1919) 生於瑞士

Mahan, D. H. [馬罕] 十九世紀末 美人

Mahani [馬哈尼] 卽 Al-Mahani

Maharncuria, Petrus de [馬哈庫利亞] 亦作 Petrus Peregrinus 十三世紀 英人

Mahavira [馬黑外拉] 亦作 Mahaviracarya 九世紀中 印度人 算術及代數學家

Mahler, Ed. [馬勒] 十九世紀後半期 奧人

Mahler, Gustav [馬勒] (1869—1911) 捷克人 著幾何學

Mahler, K. [馬勒] 二十世紀前半期 德人

Mahnke, D. [馬岐] 二十世紀前半期 德人

Maï, Angelo [麥] (1782—1854) 義人

Maibaum, T. [梅波] 二十世紀前半期 德人

Maier, Friedrich Christian [美耳] 十八世紀

Maier, J. G. [美耳] 十九世紀 德人

Maier, Wilhelm [美耳] 二十世紀前半期 德人

Maillard, L. [邁拉德] 二十世紀前半期 瑞士人

Maillet, Edmond [馬耶] (1865—) 法人

Maillet, E.T. [馬耶] 十九世紀末 法人

Mailly, Ed. [邁立] 十九世紀 比利時人

Maimonides, Moses [邁夢尼第] 亦作 Moses ben Maimum (1135, 3, 30—1204, 12, 13) 西班牙人

Main, Robert [美因] 十九世紀後半期 英人

Mainardi, Gaspare [梅那狄] (1800—1879) 義人

Mair, David Beveridge [梅耳] 二十世紀前半期 英人 研究四原容間

Mair, John [梅耳] (1470—1550) 蘇格蘭人

Mairan, Jean Jaques d' Orton de [梅蘭] (1678—1771) 法人

Maire, A. [美耳] 二十世紀前半期　法人

Maiss, J. [梅斯] 十九世紀後半期　德人

Maitland, F. [麥特蘭] 二十世紀　英人

Maizlish, Israel [梅力士] 二十世紀前半期　美人

Maizlish, Y. V. [梅力士] 二十世紀前半期　英人

Maj, Carlo [瑪] 十八世紀

Majo, L. de [瑪約] 十九世紀中　義人

Majocchi, G. A. [瑪約契] 十九世紀中　義人

Majriti [麥利替] 即 Al-Majriti

Mako, Pavlvs [摩科] 亦作 Paulus Mako 或 Paul Mako de Kerek Gede (1724?—1793) 奧人

Malassis, Lucien [馬拉息斯] 二十世紀前半期　研究計算機

Malavard, L. [馬拉發] 二十世紀前半期　法人

Malcolm, Alexander [馬肯] 十八世紀前半期　英人

Malcus [馬卡斯] 即 Porphyrius

Maldidier, Jules [馬底狄耳] 十九世紀末

Male, Charles Thomas [麥爾] 二十世紀前半期　美人

Malebranche, Nicolas [麥爾伯蘭基] 亦作 N. Mallebranche (1638, 8, 6—1715, 10, 13) 法人

Maler, Jacob Friderich [馬勒] 十八世紀後半期　德人

Malet, J. C. [馬雷] 十九世紀後半期　愛爾蘭人

Malet, Henri [馬雷] 二十世紀前半期　法人　研究幾何變換法

Maleyx, L. [馬來] 十九世紀末　法人

Maélzieu, Nicolas de〔馬勒齊〕 十七世紀後半期 法人

Malfatti, Giovanni Francesco Giuseppe〔摩爾法提〕 亦作 Gianfrancesco Malfatti (1731, 9, 26—1807, 10, 9) 義人

Malgorn, G.〔馬爾哥〕 二十世紀前半期 法人

Malik, O. H.〔馬利克〕 二十世紀前半期 德人

Malisoff, W. M.〔馬利索夫〕 二十世紀前半期 美人

Malkhos〔馬爾客斯〕 即 Porphyrius

Mallebranche, Nicolas〔麥爾伯蘭基〕 即 N. Malebranche

Mallet, Friedrich〔馬勒特〕 (1728—1797) 瑞典人

Mallet-Favre, Jacques André〔馬勒•發浮〕

Mallik, Devendra Nath〔馬力克〕 (1866—) 印度人 著代數幾何學等

Mallik, Justice S. C.〔馬力克〕 (1874, 2, 25—) 印度人

Mallius〔馬力斯〕 即 Manilius

Mallock, Henry Reginald A.〔馬羅克〕 二十世紀前半期 英人

Mallory, V. S.〔馬羅里〕 二十世紀前半期 美人

Malmborg, M.〔曼波格〕 十九世紀末 瑞典人

Malmcolm, C. W.〔馬科姆〕 二十世紀 美人

Malmquist, A. J.〔曼基斯特〕 二十世紀 瑞典人

Malmquist, K. G.〔曼基斯特〕 二十世紀前半期 瑞典人

Malmrot, B.〔曼洛〕 二十世紀前半期 瑞典人

Malmstén, C. J.〔馬姆斯騰〕 十九世紀中 法人

Malo, E.〔馬羅〕 十九世紀末 法人

Malsch, F.〔馬爾什〕 二十世紀前半期 德人

Maltbie, William Henry〔馬爾俾〕 (?—1926, 1, 23) 美人

Maltézos, C.〔馬特佐〕 十九世紀末 希臘人

Malus, Étienne Louis〔馬呂斯〕(1775, 6, 23—1812, 2, 24) 法人

Malves, Jean Paul Gua de〔馬爾佛〕(1713—1785, 6, 2) 法人

Mameranus, Henricus〔曼麥藍那〕十六世紀　比利時人

Mamercus〔曼麥卡斯〕亦作 Mamerkus 即 Ameristus

Mamlock, L.〔曼羅克〕二十世紀初　德人

Mammana, G.〔曼馬那〕二十世紀前半期　義人

Mamun〔馬蒙〕卽 Al Mamun

Manabe, S.〔眞邊仙一〕二十世紀前半期　日本人

Manaechmus of Suidas〔孟尼基馬斯〕卽 Menaechmus

Manchester, J. E.〔曼徹斯特〕十九世紀末　德人

Manchester. R. E.〔曼徹斯特〕二十世紀前半期　美人

Mandart, H.〔曼達特〕二十世紀初　比利時人　著解析幾何學

Mandelbrojt, *M.* Szolem〔孟德卜羅〕二十世紀前半期　法人

Mandelung, E.〔曼德倫〕二十世紀　德人

Manders, J. H. M.〔孟得斯〕二十世紀前半期　荷蘭人

Mandryatus〔孟德賴塔〕紀元前六世紀　希臘人

Manduith, John〔曼雕司〕十四世紀　英人

Manenti, Giovanni〔孟門替〕亦作 Zuan Manenti　十六世紀前半期　義人

Manes, Alfred〔美泥茲〕二十世紀前半期　德人

Manfield, G. W.〔曼飛爾德〕二十世紀　英人

Manfredi, Eustachio〔孟佛勒第,歐斯達郎〕(1674, 9, 20—1739, 2, 15) 義人　著天文曆書

Manfredi, Gabriello〔孟佛勒第〕(1681, 3, 25—1761, 10, 13) 義人　歐斯達郎之弟　著微分方程

Manfredius, G.〔孟佛勒第阿〕即 G. Manfredi

Manfredonia, Giovanni Batista de〔滿佛里多尼亞〕(1450—1490) 義人

Mangelsdorf, E.〔芒革士多夫〕二十世紀初 德人

Mangeot, S.〔芒佐〕十九世紀後半期 法人

Mangili, G.〔曼季利〕十九世紀 義人

Mangold, M. C.〔蒙哥德〕二十世紀前半期 美人

Mangoldt, Hans von〔蒙哥特〕(1854—1925) 但澤人 著高等數學

Manheim, E.〔滿亥〕二十世紀前半期 德人

Maniardi〔曼尼地〕

Manilius〔馬力斯〕亦作 Mallius 或 Manlius 紀元前一世紀 羅馬人

Manitius, Carl〔馬力狄〕亦作 Karl Manitius 十九世紀末 德人

Manlius〔馬力斯〕即 Manilius

Mankah〔曼卡〕印度人

Mann, C. R〔梅因〕十九世紀 德人

Mann, Horace〔梅因〕(1796, 5, 4—1859,8,2) 美人

Mann, H. Leslie〔梅因〕二十世紀 英人 著實用數學

Männchen, Ph.〔孟瑟〕二十世紀 德人

Manneback, C.〔曼湼巴克〕二十世紀前半期 德人

Mannes, E.〔曼泥茲〕二十世紀前半期 德人

Mannheim, Amédée〔曼亥〕(1831—1906) 法人

Mannheim, M.〔曼亥〕二十世紀 法人

Mannheimer, N.〔曼亥麥〕二十世紀 德人

Manning, Edward Payson〔蔓甯〕十九世紀末 美人

Manning, Henry Parker〔蔓甯〕二十世紀初 美人 著四原幾何學

Manning, Thomas〔蔓甯〕(1772—1840) 英人

Manning, William Albert〔蔓甯〕(1876, 12, 5—) 美人 研究羣論

Mannoury, G.〔曼努里〕二十世紀初　荷蘭人

Mansfield, Jared〔曼斯菲爾德〕十八世紀　美人

Mansfield, John E.〔曼斯菲爾德〕二十世紀　美人

Mansion, Paul〔孟栖〕(1844—1919) 比利時人　編輯數學雜誌(Mathesis),研究偏微分方程,行列式,及微積分史.

Manson, E. S.〔孟遜〕二十世紀前半期　美人

Månsson, Peder〔蒙遜〕十六世紀前半期　瑞典人

Mansur〔曼蘇〕卽 Al Mansur

Mansur ibn Ali〔曼蘇・易・阿利〕十世紀末　亞剌伯人

Mantey-Dittmer, A.F. von〔曼提・狄特麥〕十九世紀末　德人

Mantovani, V,〔孟圖發尼〕十九世紀　義人

Menufaetures〔馬紐發屠〕十九世紀　法人

Many, Anna E.〔馬尼〕二十世紀前半期　美人

Manzoni, Domenico〔曼蘇尼〕十六世紀中　義人

Ma^{o}u E〔毛扆〕(1640〔明崇禎十三年〕—?) 中國人　毛晉之子

Maou Kheen Kheen〔毛乾乾〕(1653〔清順治十年〕—1709〔清康熙四十八年〕) 中國人

Maou Tse Ko〔毛際可〕(1633〔明崇禎六年〕—1708〔清康熙四十七年〕) 中國人

Maou Tsin〔毛晉〕(1598〔明萬曆二十六年〕—1659〔明永曆十三年〕) 中國人

Maou Tsung Tan〔毛宗旦〕十七世紀　中國人

Maou Yo Sang〔毛嶽生〕(1791〔清乾隆五十六年〕—1841〔清道光二十一年〕) 中國人

Marais, Henri〔馬累〕二十世紀前半期　法人

Marbach, O.〔馬巴哈〕十九世紀後半期　德人

Marbe, Karl〔馬俾〕十九世紀末 德人
Marbois, Barbé〔馬謝〕十八世紀後半期
March, Herman W.〔瑪赤〕二十世紀前半期 美人
Marchand, M. A. L.〔麻向〕十九世紀
Marchesi, S.〔馬徹息〕二十世紀 義人
Marchetti, Filippo〔馬徹替〕(1835—1902) 義人
Marchi, Luigi de〔馬鮁〕十九世紀 義人
Marchtaler, Conrad〔馬赤搭勒〕十六世紀中 德人
Marci, A. F.〔馬細〕十八世紀後半期 荷蘭人
Marcks, W. D.〔馬克斯〕十九世紀後半期 美人
Marcolongo, R.〔馬可蘭哥〕十九世紀後半期 義人
Marcuse, Adolf〔瑪卡斯〕二十世紀 德人
Marczewsky, M.N.〔馬策斯啓〕二十世紀前半期 俄人
Marden, Morris〔馬登〕二十世紀前半期 美人
Marey, M.〔馬累〕十九世紀 法人
Margenau, Henry〔馬革諾〕二十世紀前半期 美人
Margetts〔馬葛茲〕十八世紀末 英人
Marggraff, B.〔馬格剌夫〕十九世紀後半期 德人
Margolis, Louis〔馬歌利〕二十世紀 美人
Margossian, A.〔馬哥栖〕二十世紀前半期
Margoulis, W.〔馬哥利〕二十世紀前半期 法人
Marguerie, Jean Jacques de〔馬居里〕(1742—1779)
Margules, Max〔馬谷爾斯〕(1856, 4, 23—1920, 10, 4) 奧人
Marheld, Johann〔馬赫德〕十六世紀
Maria, A. J.〔馬利亞〕二十世紀前半期 德人

Mariana, Joannes〔馬利亞納〕 亦作 Jean de Mariana 或 Juan Mariana (1536—1624, 2, 17) 西班牙人

Mariani, Giovanni〔馬利亞尼〕 亦作 Zuane Mariani(1509—?) 義人

Marianus, Carolus〔馬利那斯〕 即 C. M. Cremonensis

Mariares, F.〔馬利亞果〕 二十世紀前半期　西班牙人

Maricourt, Pierre de〔馬利庫〕 十三世紀

Marie, Abbé Joseph François〔馬利〕 (1738—1833) 法人

Marie, *Charles François* Maximilien〔馬利〕 (1819—1891,5,8) 法人 研究數學史

Marie, L.〔馬利〕 十九世紀末　法人

Marie Cecilia, Mangold〔馬利·寧息力亞〕 二十世紀前半期　美女

Marinati, Aurelio〔馬利拿替〕 十六世紀　義人

Marini, Giambattista〔瑪利里〕 亦作 G. Marino (1569,10,18—1625,3,24) 義人

Marino, Giambattista〔瑪利諾〕 即 G. Marini

Marinoni, J, J.〔馬立諾里〕 十八世紀　奧人

Marinus of Athens〔馬立那斯〕 亦作 Marinus of Elavia Neapolis 或 Marinus von Neapolis 五世紀後半期　希臘人

Mariotte, Edmé〔馬略特〕 (1620—1684, 5, 12) 法人

Mark, Hermann〔馬可〕 二十世紀前半期　德人

Markley, Joseph Lybrand〔馬克雷〕 (1859—1930, 4, 20) 美人

Markoff, A. A.〔馬科夫〕 十九世紀末　俄人

Marković, Ž.〔馬科徵〕 二十世紀前半期

Marletta, G.〔馬勒塔〕 二十世紀前半期　義人

Marloh, E.〔馬洛〕 十九世紀後半期　德人

Marm, Anna〔馬謨〕 二十世紀前半期　美人

Mormer, Harry Aaron〔馬麥〕 (1885, 1, 21—) 烏克蘭人　湍流數理學家

Maroger, A.〔馬洛澤〕 二十世紀前半期 法人

Marolais, Samuel〔馬洛雷〕 十七世紀 荷蘭人 著幾何學

Maroli, Francesco〔馬洛力〕 即 F. Maurolico

Maroni, A.〔馬洛尼〕 二十世紀前半期 義人

Marotte, F.〔馬洛提〕 十九世紀末 法人

Marples, P. M.〔馬普爾〕 二十世紀前半期 英人

Marquardt, J.〔瑪夸特〕 十九世紀後半期 法人

Marquise du Châtelet, Mme Émile〔沙特雷侯爵夫人〕 亦作 Gabrielle-Émile Chastelet (1706, 12, 17—1749, 9, 10) 法女 翻譯牛頓之著作(Principia).

Marrat, William〔瑪刺〕 (1772—1852) 美人

Marre, Aristide〔瑪耳〕 十九世紀後半期 法人

Marriott, R. W.〔馬里奧〕 二十世紀前半期 美人

Marsano, G.B.〔馬薩諾〕 十九世紀後半期 瑞士人

Marsden, H. K.〔馬斯登〕 二十世紀 英人

Marsh, Harry Brooks〔馬許〕 二十世紀 美人

Marsh, Horace Wilmer〔馬許〕 二十世紀 美人 著對數表

Marsh, John〔馬許〕 十八世紀 英人

Marsh, J. A.〔馬許〕 二十世紀 美人

Marsh, Malcolm Ray〔馬許〕 二十世紀前半期 美人

Marsh, Walter Randall〔馬許〕 (1867, 6, 16—) 美人 著代數及三角術

Marshall, D. H.〔馬沙爾〕 (1848—1932, 3, 14) 坎拿大人

Marshall, Roger〔馬沙爾〕 十五世紀 英人

Marshall, V. M.〔馬沙爾〕 二十世紀 英人

Marshall, William〔馬沙爾〕 二十世紀初 美人

Martchevsky, M. N.〔馬柴斯啓〕 二十世紀前半期 俄人

Martelet, E.〔馬武勒〕 十九世紀　法人

Martens, H.〔馬騰斯〕 二十世紀　德人

Martin, Antonio〔馬丁〕 十六世紀　西班牙人

Martin, Artemas〔馬丁〕 (1835－1918) 美人

Martin, Benjamin〔馬丁〕 十八世紀中　英人

Martin, Émile〔馬丁〕 二十世紀初　法人

Martin, Emilie Norton〔馬丁〕 十九世紀末　美人

Martin, Francis〔馬丁〕 十九世紀　英人

Martin, George〔馬丁〕 十八世紀　英人

Martin, Harold Medway〔馬丁〕 (?－1933, 11, 17) 英人　數理物理家

Martin, Henri〔馬丁〕 (1810, 2, 20－1883, 12, 14) 法人

Martin, John〔馬丁〕 (1789, 7, 19－1854, 2, 17) 英人

Martin, Louis Adolphe, Jr.〔馬丁〕 (1880, 11, 5－　) 美人　研究數理物理

Martin, P.〔馬丁〕 十九世紀後半期　法人

Martin, Roger〔馬丁〕 (?－1811) 法人

Martin, Th.〔馬丁〕 十九世紀中　義人

Martin, Thomas Adams〔馬丁〕 二十世紀前半期　美人

Martin, Thomas Henri〔馬丁〕 十九世紀中　義人

Martines, D.〔馬提涅〕 十九世紀後半期　義人

Martini, G. H.〔馬提泥〕 十八世紀後半期　德人

Martini, M.〔馬提泥〕 十八世紀　德人

Martini, Rani ri Bonaventura〔馬提泥〕 (1723－1774) 義人

Martinotti, P.〔馬丁諾提〕 二十世紀前半期　義人

Martinus, Ioannes〔馬提那斯〕 即 Blasius

Martius-Matzdorff, H.〔馬齊烏·瑪茲多夫〕 十九世紀　德人

Martone, M〔馬通〕 十九世紀後半期 義人

Martus, Hermann C. E.〔馬塔斯〕 二十世紀初 德人

Marty, F.〔馬替〕 二十世紀前半期 法人

Marty, J.〔馬替〕 二十世紀 法人

Marty, Pater Martin〔馬替〕 十九世紀中

Martyn, Henry〔馬廷〕 (1781, 2, 18—1812, 10, 6) 英人

Martyn, W. J.〔馬廷〕 二十世紀前半期 英人

Marullo〔馬魯羅〕 即 Mauoolico

Marvin, F.S.〔馬芬〕 二十世紀前半期 英人

Marxsen, S.〔馬克森〕 十九世紀末 德人

Masae, H.〔馬薩〕 十九世紀末 德人

Masal, H.〔馬舍爾〕 十九世紀末 瑞典人

Masaryk, Thomas Garrigue〔馬賽立克〕 (1850, 3, 7—) 捷克人

Mascart, E.〔馬斯卡〕 (1835—?) 法人

Mascart, Jean〔馬斯卡〕 二十世紀前半期 法人

Mascheroni, Lorenzo〔馬奇洛里〕 (1750, 5, 14—1800, 7, 14) 義人 著圓規幾何學,享受盛名.

Maschke, Heinrich〔瑪遂歧〕 (1853, 10, 24—1907, 3, 1) 德人 研究不變式

Maschke, T.〔瑪遂岐〕 十九世紀後半期 德人

Maser, H.〔馬塞〕 十九世紀後半期 德人

Masères, *Baron* Francis〔馬賽耳〕 (1731, 12, 15—1824, 5, 19) 英人 研究排列及組合法

Masihi〔馬西喜〕 即 Al Masihi

Masing, G.〔馬新〕 二十世紀 德人

Masius, M.〔馬西阿〕 二十世紀前半期 美人

Maskeleyne, Nevil〔馬斯刻來〕(1732, 10, 5 [舊曆]—1811, 2, 9)　英人

Maslama al-Majriti〔馬斯拉馬·亞麥利梯〕十世紀

Mason, Charles〔梅遜〕(1730—1787)　英人

Mason, Max〔梅遜〕(1877, 10, 26—　)　美人

Mason, T. E.〔梅遜〕二十世紀前半期　美人

Mason, Wendell Earle〔梅遜〕二十世紀前半期　美人

Mason, W. P.〔梅遜〕二十世紀前半期

Masotti, A.〔馬索替〕二十世紀前半期　義人

Maspero, Gaston Camille Charles〔馬斯柏洛〕亦作 Gaston Maspero (1846, 6, 23—1916, 6, 30)　生於法

Massabiau, Jean Antoine François〔馬薩畢〕(1765—1837)　法人

Massaloup, J. V.〔馬薩盧〕

Massarini, I.〔馬薩靈尼〕十九世紀末　義人

Massau, J.〔馬索〕十九世紀　比利時人

Massenbach, von〔馬森巴哈〕十八世紀後半期

Massieu, M. F.〔馬雪〕十九世紀　法人

Massip, L〔馬西〕十九世紀末　法人

Masson, M.〔馬孫〕十九世紀　法人

Massoutié, Georges〔馬蘇提〕二十世紀前半期　法人

Master, Richard〔馬斯武〕十六世紀前半期　英人

Masterson, Thomas〔馬斯武孫〕十六世紀末　英人　著算術(Arithmeticke).

Mästlin〔馬斯林〕十六世紀　德人

Masudi〔馬蘇第〕(?—956)　亞剌伯人

Masurkiewicz, S.〔馬塞歧尉茲〕

Mateer, Calvin Wilson〔狄考文〕(1836, 1,—1908, 9,)　美人　選譯形學備旨士

卷

Matell, M.〔馬忒爾〕二十世紀前半期　瑞典人

Matern, A.〔馬帖〕十九世紀後半期　德人

Mather, William Tyler〔馬得〕(1864, 9, 2—)美人　研究數理物理

Matheson, John〔馬提孫〕(1873—)坎拿大人

Mathet, M. G.〔馬忒〕十九世紀　法人　著橢圓函數

Mathews, G. B.〔馬條茲〕十九世紀末　英人　著數論

Mathews, Robert Maurice〔馬條茲〕(1884, 3, 20—1929, 10, 20)美人　研究曲線及曲面

Mathewson, Louis Clark〔馬條孫〕二十世紀前半期　美人　著羣論

Mathias, M.〔馬泰阿斯〕二十世紀

Mathieu, C. L.〔馬退〕(1783—1875)法人

Mathieu, Émile *Leonard*〔馬退〕(1835—1890)法人　數理物理學名家

Mathieu, Paul〔馬退〕十九世紀　法人

Mathissen, S.〔馬提森〕十七世紀

Matisse, Georges〔瑪替栖〕二十世紀　法人

Matsko, J. M.〔馬斯科〕(1721—1796)

Matson, R.〔馬特孫〕二十世紀初　瑞典人

Matsumaga〔松永直英〕(1777—1850)日本人

Matsumaga Ryohitsu〔松永良弼〕(?—1744)日本人

Matsumoto Toshizo〔松本敏三〕二十世紀前半期　日本人

Matsumura Soji　二十世紀前半期　日本人

Matteo da Firenze〔瑪竇達斐棱〕十四世紀末　義人

Matteson, J.〔馬特孫〕十九世紀後半期　美人

Matthews, Everett Richard〔馬太斯〕(?—1933)美人

Matthews, G. F.〔馬太斯〕 十九世紀後半期　英人

Matthiessen, H. F. Ludwig〔馬退森〕 十九世紀後半期　德人　研究方程式

Mattia, A. de〔馬提〕 二十世紀前半期　義人

Mattioli, G. D.〔馬泰奧力〕 二十世紀　義人

Matuzawa, T. 二十世紀前半期　日本人

Matzka, Wilhelm〔馬茲卡〕 十九世紀後半期　德人

Maudit, E.〔摩狄特〕 十九世紀　法人

Maudith, John〔摩狄司〕 亦作 Johannes Maudith 十三世紀　英人

Maudvit, Antoine Remi〔摩雕〕 亦作 Antoine René Mauduit (1731—1815)　荷蘭人

Maule, William Henry〔毛勒〕 十九世紀初　英人

Mault, A.〔毛爾特〕 十九世紀　英人

Maupertius, Pierre Louis *Moreau* de〔摩柏特斯〕 (1698, 7, 17—1759, 7, 27)　法人　貢獻於天文及測地學

Maupin, G.〔摩平〕 十九及二十世紀　法人

Maurer, F.〔卯勒〕 十九世紀後半期　德人

Maurer, K.〔卯勒〕 二十世紀前半期　德人

Maurer, Ludwig〔卯勒〕 (?—1927, 1, 10)　德人

Maurice, F.〔摩里士〕 十九世紀中　法人

Maurin, J.〔毛靈〕 十九世紀末　法人

Maurolico, Francesco〔摩洛利哥〕 亦作 Franciscus Maurolycus 或 François Maurolycus 或 F. Marullo 或 F. Maroli (1494, 9, 16—1575, 7, 21)　義人

Maurus, E. J.〔摩納〕 二十世紀

Maurus, Hrabanus〔摩納〕 即 Harabanus

Maximovitch, W. de〔馬克息摩維〕 十九世紀後半期　法人

Maxwell, *James* Clerk〔馬克斯威〕(1831, 11, 13—1879, 11, 5) 蘇格蘭人 數理電磁光學名家.闡發氣體及熱學理論.

May, Lida Belle〔梅依〕二十世紀前半期 美人

Mayali, R. H. D.〔馬雅利〕十九世紀末 英人

Mayeda, M.〔前田正雄〕二十世紀前半期 日本人

Mayer, Adolf〔邁爾〕亦作 Adolph Mayer (1839-1908) 德人

Mayer, F. C.〔邁爾〕十八世紀前半期 著正弦之算術

Mayer, Georg von〔邁爾〕(1841—) 德人

Mayer, Jos.〔邁爾〕十九世紀後半期 德人

Mayer, Johann Heinrich〔邁爾〕瑞士人

Mayer, Joanna I.〔邁爾〕二十世紀前半期 美人

Mayer, Julius Robert von〔邁爾〕(1814, 11, 25—1878, 3, 20) 德人 數理物理學家

Mayer, Johann Tobias〔邁爾〕(1723-1762) 德人

Mayer, Johann Tobias II〔邁爾〕十八世紀後半期 德人

Mayer, Mathias〔邁爾〕十九世紀前半期 法人 著代數學

Mayer, O.〔邁爾〕二十世紀前半期

Mayer, Robert〔邁爾〕(1814—1879) 德人

Mayer, Walther〔邁爾〕二十世紀前半期 奧人

Mayerson, E〔邁爾孫〕二十世紀

Maymann, H.〔美曼〕二十世紀前半期 德人

Maynard, Horace〔美涅德〕十九世紀前半期 美人

Maynardus, Leonardus〔美涅達〕即 Leonardus

Mayne, Arthur Brinley〔美恩〕(1893, 1, 9—) 英人

Mayo, C. H. P.〔美奧〕二十世紀 英人

Mayor, B.〔美約〕 二十世紀初 瑞士人

Mayr, A.〔美耳〕 二十世紀中 德人

Mayr, K.〔美耳〕 二十世紀 奧人 著定積分及超比函數

Mayrhofer, K.〔美和斐〕 二十世紀 德人

Mazurkiewicz, S.〔馬沮歧維〕 二十世紀前半期 波蘭人

Mazza, F.〔馬紮〕 十九世紀後半期 義人

Mazzoni, P.〔馬佐尼〕 二十世紀前半期 義人

Mazzuchelli, C. G. M.〔馬沮奇利〕 十八世紀 義人

Mazzuchelli, Grafen Maruli Giovanni〔馬沮奇利〕 (1707－1765) 義人

Meacham, E. D.〔彌產〕 二十世紀前半期 美人

Meaden, Alban Anderson〔米登〕 (1876, 6, 15－) 英人

Meaou Show Sin〔苗守信〕 (954〔後周顯德元年〕－1000〔宋咸平三年〕) 中國人

Mears, *Miss* Florence Marie〔米耳斯〕 二十世紀前半期 美女

Méchain, Pierre François Andre〔美禪〕 (1744, 8, 16－1804, 9, 20) 法人 天文數理家

Meckenburg, H. B.〔梅喀稜堡〕 十九世紀後半期 德人

Mečnikov, V.V.〔梅尼科〕 二十世紀前半期 俄人

Meder, A. E.〔麥德〕 二十世紀前半期 美人

Meder, A. L.〔麥德〕 二十世紀前半期 美人

Medl i, Leopold von〔美地奇〕 十七世紀

Medlerus, Nicolaus〔麥德勒剌〕 十六世紀中 德人

Medmaeus Philippus〔麥德米阿斯〕 亦作 Philippus Mendaeus 或 Philippus of Medma 或 Opuntius (375B.C.－?) 雅典人

Meech, L. W.〔米喜〕 十九世紀後半期 美人

Megiorini, Paolo〔米佐利尼〕 十六世紀

Mehler, F. G.〔美勒〕 十九世紀中 德人

Mehler, Gustav〔美勒〕 (1835–1895) 德人

Mehmke, Rudolf〔美謨剋〕 十九世紀後半期 德人

Mehta, D. M.〔美塔〕 二十世紀前半期 德人

Mei Chung〔梅冲〕 十八世紀末 中國清嘉慶時人

Mei Ku Cheng〔梅穀人〕 (1681〔清康熙二十年〕–1763〔清乾隆二十八年〕) 中國人

Mei Tsing〔梅清〕 (1620〔明泰昌元年〕–1697〔清康熙三十六年〕) 中國人

Mei Wen Nae〔梅文鼐〕 十七世紀 中國清初人

Mei Wen Ting〔梅文鼎〕 (1633, 3, 16〔明崇禎六年夏歷二月初七日亥時〕–1721〔清康熙六十年〕) 中國人 著書七十餘種 其弟文鼐,文鼏,子以燕,孫穀成,曾孫鈖,鈺,鈔,鈁,鏐,鍼,具通數學,尤以穀成爲最著.

Meibomius, M.〔邁逢密阿〕

Meighen, Arthur〔邁根〕 (1874. 6, 16–) 坎拿大人

Meikle, Henry〔美克爾〕 十九世紀 英人

Meilink, B.〔邁林克〕 十九世紀後半期 荷蘭人

Meilong, Ale ius〔美琅〕 (1853–) 德人

Meinert, F.〔邁勒特〕 (1757–1828) 德人

Meinesz, F. A. V.〔邁涅玆〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Meisel, Benjamin〔梅塞爾〕 二十世紀前半期 法人

Meissel, Ernst〔邁塞爾〕 (1826–1895) 德人

Meissner, Bruno〔邁斯勒〕 二十世紀

Meissner, Heinrich〔邁斯勒〕 十七世紀 德人

Meissner, Otto〔邁斯勒〕 二十世紀初 德人 著機率學

Meissner, Waldemar〔邁斯勒〕十九及二十世紀　德人

Meister, Albr. Ludov. Fr.〔邁斯忒〕(1724—1788) 德人

Meitzen, Franz E. August〔邁特則〕(1822, 12, 16—1910, 1, 19) 德人

Mejer, L. C.〔麥澤〕十九世紀中　德人

Melan, E.〔梅蘭〕二十世紀前半期　德人

Melanchthon, Philip〔梅蘭克吞〕或作 Philipp Melanchthon 希臘文作 Schwartzerd (1497, 2, 6—1560, 4, 19) 德人

Melander, K.〔梅蘭德〕十九世紀後半期　瑞典人

Melanderhjelm, Daniel〔梅蘭德澤〕(1726—1810) 瑞典人

Melandri, Daniel〔梅蘭得利〕十八世紀　瑞典人

Meldau, H.〔墨爾多〕二十世紀　德人

Melde, F.〔墨爾第〕十九世紀　德人

Melero, Pedro〔麥勒洛〕十六世紀　西班牙人

Melish, John〔麥力士〕十八世紀　蘇格蘭人

Melissus〔美利瑟斯〕亦作 Melissos (450 B. C.—?) 埃璃亞〔Elea〕(現今義大利)人

Mellberg, E. J.〔麥爾柏〕十九世紀後半期　芬蘭人

Mellema〔麥勒瑪〕十六世紀後半期　比利時人

Mellin, Robert Hjalmar〔麥林〕(1855—1933, 4, 5) 芬蘭人

Mellis, John〔麥力斯〕十六世紀末　英人

Mellor, Joseph William〔麥羅〕(1869, 7, 9—　　) 英人　著高等數學之理化用書

Melluish, R. K.〔麥盧士〕二十世紀　英人

Memmius〔麥密阿〕即 Memmo

Memmo, Gianbattista〔麥摩〕拉丁文作 Memmius 十六世紀　義人

Menæchmus〔孟尼基馬斯〕(350?B. C.—325B. C.) 希臘人 發見圓錐曲線

Ménant, Joachim〔麥南〕(1820—1899) 法人

Menchoff, D.〔孟科夫〕二十世紀前半期 俄人

Mencke, Otto〔孟刻〕(1644—1707) 德人

Mendaeus, Philippus〔門丹斯〕即 P. Medmæus

Mendel, Gregor Johann〔門得爾〕(1822, 7, 22—1844, 1 ,6) 奧人

Mendelbrojt〔孟特布洛〕二十世紀前半期 法人

Mendelssohn, Moses〔孟特爾遜〕(1729, 9, 6—1786, 1, 4) 德人

Mondenhall, Gertrude W.〔孟登荷爾〕(?—1926,4,) 美女

Mendenhall, Thomas Corwin〔孟登荷爾〕(1841—) 美女

Mendenhall, W. O.〔孟登荷爾〕二十世紀前半期 美人

Mendizâbel-Tamborrel, M. Joaquin de〔孟第最柏〕亦作 Joaquin de Mendizabal Tamborrel (?—1926,9,8) 墨西哥人 著數學表

Mendoza y Rios, José de〔門多薩•伊•約斯〕十九世紀 西班牙人

Mendthal, D.〔門退爾〕十九世紀後半期 德人

Menelaus of Alexandria〔門涅勞斯〕亦作 Menelaus vonAl xandria 一世紀末 希臘人 發見一直線截三角形時所成線分之比之定理

Menesson〔麥涅孫〕十九世紀後半期 法人

Menge, Heinrich〔孟治〕十九世紀後半期 德人

Menge, W.O.〔孟治〕二十世紀前半期 美人

Menger, Karl〔孟吉〕(1902—) 奧人 集合論及幾何學家

Menges, Charles L.R.E.〔麥治〕二十世紀前半期 法人

Mengoli, Petro〔孟哥利〕十七世紀 義人

Menher, Valentin〔門厄〕亦作 Valentin Mennher (1549—?) 德及荷蘭人

Menninger, K.〔門甯吉〕二十世紀前半期 德人

Menochius, Jacobus〔麥諾岐斯〕(1531－1607) 義人

Mentrè, F.〔孟脫〕二十世紀初　法人

Mentré, Paul〔孟脫〕二十世紀前半期　法人

Menzel. D. H.〔門策爾〕二十世紀前半期　美人

Menzel, H.〔門策爾〕十九世紀末　德人

Méray, Charles〔美累〕(1835－1911) 法人　立初等幾何學之基礎

Méray, H. C. R.〔美累〕十九世紀　研究數之性質

Meray, M.G.〔美累〕十九世紀　法人

Mercado, Thomas de〔麥卡多〕十六世紀中　西班牙人

Mercante, V.〔麥坎武〕二十世紀　阿根廷人

Mercastel, Jean Baptiste Adrien de〔麥卡武〕十八世紀　法人

Mercatello, Stephano〔麥加武羅〕(?－1522之後) 義人

Mercator, Gerardus〔麥卡托〕亦作 Gerhard Mercator (1512, 3, 5－1594, 12, 2) 荷蘭人　發見作地圖射影法

Mercator, Nicolaus〔麥卡托〕德文作 N. Kaufmann (1620－1687, 2,) 丹麥人　發見log(1+x)級數之展開式

Mercer, James〔麥塞〕(1883, 1, 15－1932, 2, 21) 英人

Mercer, J. W.〔麥塞〕二十世紀　英人　著三角術及微積分

Méré, Chevalier de〔梅列〕即 De Méré

Meres, Francis〔米耳茲〕十六世紀　英人

Merian, P.〔麥立安〕十九世紀中　瑞士人

Merino, M.〔麥立諾〕十九世紀後半期　西班牙人

Merlin, E.〔麥林〕二十世紀前半期　法人

Merrick, Joseph P.〔麥立刻〕二十世紀前半期　美索不達米亞人

Merrifield, C. M.〔麥立飛德〕十九世紀後半期　英人

Merrill, A. S.〔麥利爾〕 二十世紀前半期 美人

Merrill, Helen Abbot〔麥利爾〕 二十世紀初 美女

Merriman, G. M.〔麥立萌〕 二十世紀前半期 美人

Merriman, Mansfield〔麥立萌〕 (1848,3,27—1925,6,7) 美人 著最小二乘法

Mersenne, Marin〔麥森內〕 亦作 Pater Marin Mersene 或 le Père Mersenne (1588,12,8—1648,9,1) 法人 研究希臘數學,幾何學.注意於質數及完全數.

Mertens, Franz〔麥騰斯〕 (?—1927) 奧人

Mertens, P.〔麥騰斯〕 二十世紀初 德人

Mertz〔麥茲〕 十九世紀中 德人

Mervarrudi〔美發魯狄〕 即 Al Mervarrudi

Mervazi〔美發稷〕 卽 Al-Mervazi

Merz, J. T.〔麥茲〕 二十世紀初 英人

Merz, K.〔麥茲〕 二十世紀 瑞士人

Meshenberg, M. P.〔麥申柏〕 二十世紀前半期 英人

Mesnager, Augustin〔麥內吉〕 (?—1933) 法人

Messahala〔麥薩哈拉〕 八世紀末 猶太人

Messedaglia, Angelo〔美塞達來〕 (1820—1901) 英人

Messick, John Frederick〔墨昔克〕 二十世紀前半期 美人

Messier, C.〔墨栖耳〕 十八世紀後半期

Messina, I.〔墨西拿〕 二十世紀 義人

Metcalfe, R. M.〔麥特卡夫〕 二十世紀 英人

Metger, C.〔麥吉〕 十九世紀末 德人

Meth, Paul〔麥式〕 二十世紀 德人

Metius, Adriaen〔米梯阿亞得里恩〕 亦作 Adrianus Methius 或 Adriaen Anthoniszoon (1543,—1620, 11, 20) 荷蘭人

Metius, Adriaen *the younger*〔米替阿少年〕(1571 12,9－1635,9, 16 或 18) 荷蘭人 亞得里恩之子

Metius Adriaenszoon, Jacob〔米替阿亞得里恩佐〕亦作 Jacob Metius 十七世紀初 荷蘭人 米替阿少年之兄弟也.

Meton〔米吞〕紀元前五世紀 雅典人 天文數理家

Métrod, G.〔梅特洛〕二十世紀前半期 法人

Metrodorus〔梅洛多剌〕或作 Metrodoros 四世紀或六世紀 希臘人

Metz, A.〔麥次〕二十世紀 法人

Metz, Miss Muriel〔麥次〕二十世紀前半期 美女

Metzburg, Freyherr von〔麥次柏〕十八世紀 奧人

Metzburg, Georg〔麥次柏〕十八世紀末 奧人

Metzler, George Frederic〔麥次勒〕十九世紀末 美人

Metzler, William Henry〔麥次勒〕十九世紀末 美人

Metzner, K.〔麥次涅〕二十世紀前半期 德人

Meurice, L.〔繆來斯〕二十世紀前半期 法人

Meurs, Jean de〔繆斯〕亦作 Jo nnes de Muris (1290－1360之後) 法人

Meusel, Johann Georg〔麥塞爾〕(1743－1820) 德人

Meusnier *de la Place*, Jean Baptiste Marie *Charles*〔麥尼爾〕(1754－1793) 法人 發見曲面之曲率定理

Meutzner, P.〔麥茲涅〕十九世紀後半期 德人

Mewes, R.〔梅衛〕二十世紀前半期 德人

Mewrer, Jacob〔梅呆〕十六世紀 瑞士人

Mey, O.〔美〕十九世紀後半期 德人

Meyer, Adolf〔邁耳〕十九世紀後半期 瑞典人

Meyer, Albert〔邁耳〕十九世紀末 德人

Meyer, Antoine〔邁耳〕十九世紀中　比利時人　研究定積分

Meyer, C.F.〔邁耳〕十九世紀後半期　德人

Meyer, Eugen〔邁耳〕(1869－1930, 12, 31)　德人

Meyer, Franz〔邁耳〕十九世紀末

Meyer, Friedrich〔邁耳〕十九世紀　德人

Meyer, F. G.〔邁耳〕十九世紀後半期　德人

Meyer, F. W.〔邁耳〕二十世紀

Meyer, G.〔邁耳〕十九世紀後半期　德人

Meyer, Georg〔邁耳〕十六世紀　德人

Meyer, Gustav Ferdinand〔邁耳〕十九世紀中　德人　研究積分論

Meyer, G. W.〔邁耳〕二十世紀　美人

Meyer, H.〔邁耳〕二十世紀前半期　德人

Meyer, H. A.〔邁耳〕二十世紀前半期　美人

Meyer, Julius〔邁耳〕德人　研究數理熱力學

Meyer, Johann Heinrich〔邁耳〕丹麥人

Meyer, J. J.〔邁耳〕十八世紀後半期　德人

Meyer, K. O.〔邁耳〕十九世紀中　德人

Meyer, M.〔邁耳〕十九世紀末　德人

Meyer, Oskal Emil〔邁耳〕(1834－1909)　德人

Meyer, Paul〔邁耳〕(1840－　)　法人

Meyer, S.〔邁耳〕二十世紀前半期　德人

Meyer, Th.〔邁耳〕十九世紀後半期　德人

Meyer, W. A.〔邁耳〕十九世紀　德人

Meyer, W. Franz〔邁耳〕(1856－1934)　德人　研究不變式及曲線論

Meyer, W. J.〔邁耳〕十九世紀末　英人

Meyerhoffer, W.〔邁耳和斐〕 二十世紀初　德人

Meyerson, Émile〔邁耳孫〕 (?—1933, 12, 4) 法人

Meyl, A. J. F.〔默爾〕 十九世紀後半期　法人

Meynieux, R.〔美尼克斯〕 二十世紀　法人

Méziriac, Claude Gaspard Bachet de〔美最利亞〕 卽 Bachet de Méziriac

Miall, B.〔邁奧爾〕 二十世紀前半期　英人

Michael, H.〔邁克爾〕 十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Michaelis, L.〔米哈亞力斯〕 二十世紀　德人

Michaelsen, A.〔米哈爾森〕 十九世紀後半期　德人

Michal, A.D.〔米卡爾〕 二十世紀前半期　美人

Michaud, Félix〔米勺〕 二十世紀前半期　法人

Michaud, G.〔米勺〕 二十世紀　法人　著三原空間幾何學

Michel, Charles〔米雪爾〕 十九世紀末　法人

Michel, François〔米雪爾〕 十九世紀　法人

Michell, John〔米拆爾〕 十八世紀前半期　英人

Michell, John Henry〔米拆爾〕 二十世紀初　英人　居南澳洲　數理物理家

Michelotti, Francesco Domenico〔米雪羅提〕 十八世紀後半期　義人

Michelsen, Johann Andreas Christian〔邁克爾孫〕 (1749—1797) 英人

Michelson, Albert Abraham〔邁克爾遜〕 (1852,12,19—1931,5,9) 生於波蘭

數理光學大家

Michie, J. N.〔密希〕 二十世紀前半期　美人

Michizane〔密岐贊〕 卽 Tenjin

Mickelson, E.L.〔密刻爾孫〕 二十世紀前半期　美人

Micyllus, Jacobus〔密息琉斯〕 亦作 Moltzer (1503,4,6—1558,1,28) 德人

Middel, P.〔密得爾〕 二十世紀初　荷蘭人

Middleton, Joseph〔密德爾頓〕十八世紀

Midolo, P.〔彌多羅〕二十世紀　義人

Midy, E.〔密狄〕十九世紀前半期　法人

Mie, G.〔密〕十九及二十世紀　德人

Mieses, J.〔密色〕二十世紀　德人

Migne, Jacques Paul〔米磊〕(1800,10,25—1875,10,24)　法人

Mignosi, G.〔密諾息〕二十世紀前半期　義人　代數學家

Miju Rakusai　十九世紀前半期　日本人

Mikaelsson, G.〔密卡孫〕二十世紀前半期　瑞典人

Mikami, Yoshio〔三上義夫〕二十世紀初　日本人

Mikelli, A.〔密刻力〕十九世紀後半期　義人

Mikesh, James S.〔密刻士〕二十世紀　美人

Mikuta, A.〔密庫塔〕二十世紀　奥人

Milankovitch, M.〔米蘭科維〕二十世紀

Mildner,R.〔密德涅〕十九世紀

Miles, Eustace〔邁爾斯〕(1868,9,22—　)　英人　著數理法律

Miles, Egbert J.〔邁爾斯〕二十世紀前半期　美人

Miles, Edward Roy Cecil〔邁爾斯〕二十世紀前半期　美人

Milet de Mureau〔彌列得繆累〕十八世紀

Miletos, Hippodamos of〔米利托〕紀元前五世紀　希臘人

Miletti, Francesco〔米列特〕十七世紀後半期　義人

Milhaud, G.〔密和〕(1858—1918)　法人

Milichius, Jacob〔密力岐〕十六世紀　德人

Milinowski, A.〔彌林諾斯啓〕十九世紀　德人　著綜合幾何學

Mill, John Stuart〔彌爾〕(1806,5,20—1873,5,8)　英人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於天文數學物理化學生物地質氣象心理等科之稿件及新刊學術書籍之介紹與批評海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名與雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙與黑色墨水繪畫或製成照片或附寄原圖

五・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

六・稿件登載後本刊略備現金或複印本以答雅意惟願受複印本作報酬者應預先聲明

七・稿件內容本刊得酌量增刪但不願意者請預先聲明

八・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

北京大學自然科學季刊要目

Volume I.

Number 1, October 1, 1929.

Li-Pin King: Recherches sur l'hyperglycémie post-anesthésique
(經利彬:—麻醉劑與血中糖質的研究)
孫雲鑄:—中國研究古生物學之歷史
王晨:—芳香族之新變換
Kung-Hsü Yang: Über Vanadinsäure-Jodate, -Perjodate und einige -Phosphate, nebst einem Anhange: Über alkalimetrische Bestimmungen der Vanadinsäure
Kou-Tschi Chang: Zur Konstitution der Oxim-N-Äther
Tchéoufaki: Recherches sur les Hydrocarbures α diacétyléniques
A. W. Grabau: Problems in Chinese Stratigraphy
Wu-Yu Marr: Some Natural Dyestuffs produced in China. I. The Flowers or Beans of Saphora Japonica

Number 2, January 1, 1930.

翁文灝:—中國金礦床生成之時代
Li-Pin King: Contribution à l'étude de la rate sur la croissance
(經利彬:—脾臟與動物的滋長)
曾義:—生物消用糖質與燐之功用
K. P. Young: The Action of Ferric Chloride on Cellulose
Kien-Tsing Bau: Eine seltene Verlagerung des Herzens
Tchéoufaki: Recherches sur les Hydrocarbures α diacétyléniques
A. W. Grabau: Problems in Chinese Stratigraphy

Number 3, April 1, 1930.

王恭睦:—歐州犀牛之進化
何衍璿:—轉時之錐線擺
A. W. Grabau: Contributions to Geological Science by Graduates of the National University
Li-Pin King: Contribution à l'étude des anethésiques géneraux sur la teneur en eau du sang)
(經利彬:—麻醉藥與血中水底成分之研究)
Tchéoufaki: Recherches sur les Hydrocarbures α diacétyléniques
趙漢威:—The Applications of Grignard's Reagent to the Modern Synthetic Organic Chemistry
李象元:—中國北部之鳥類
劉慎諤:—東陵植物分布初步之觀察

Number 4, July 1, 1930.

A. W. Grabau: Problems in Chinese Stratigraphy
楊敷海, 鮑鑑衡:—鴿腳氣症實驗上證明北平幾種食米中生活素 B 之缺乏及其與衛生上之關係
袁可士:—肥大吸蟲透視標本製作之一法 ——石炭酸法
Serge Voronoff: Lecture delivered at the National University of Peking
洪式閭:—人類赤血球內檢出一種類似 Theileria Parva 之寄生物
李象元:—中國北部之鳥類(續)
周頌聲:—衰減傳播說及無衰減傳播說

北京大學自然科學季刊要目

Volume II.

Number 1, October 15, 1930.

Number 2, January 15, 1931.

Number 3, April 15, 1931.

Number 4, July 15, 1931.

國立武漢大學理科季刊

第五卷第二期

價目	郵費
全年四期 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費二圓
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本郵費五分 其他地域加郵費五角
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

總發行所　武昌國立武漢大學出版部

中華民國二十三年十二月發行

1935年

第 3 期

國立武漢大學
理科季刊

第五卷第三期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. V, No. 3. March 1935

本　期　目　錄

中華民國二十四年三月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

本刊特別啓事

1. 凡關於寄稿請求介紹批評書籍以及交換雜誌或廣告等函件均請寄交武昌國立武漢大學理科季刊委員會

2. 凡關於訂購以及其他營業事件均請直函武昌國立武漢大學出版部接洽

國立武漢大學理科季刊

第五卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊第五卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊第五卷第二期目錄

生物與無生物

湯佩松講　童家驊筆記

時常有許多人問我們,生命是什麼?據現代的科學觀念看來,我們只能答覆說是個沒有意義的問題(Meaningless Question)。因爲生命是一個抽象的名辭,科學的方法還不能研究這種抽象的問題.凡科學研究一種問題,一種現象,都是用許多的推測,或者儀器來算計,來檢定,可是現象的真正性質(Intrinsic Nature),依然不能知道.例如,想知道一個原子是什麼,只能測定它的重量,或者它的原子數,或者這原子與其他原子間的許多關係等等,但是某個原子的真正性質,無從知道."生命"的真正性質,在科學上亦是這樣的無從解釋,我們只好討論生物與無生物的區別——生物的特徵.

在生物學上最基本的一個問題,就是生物與無生物的區別.物類有了生物的幾個特徵,就叫作生物:但是不能總括的告訴人們生命是什麼東西.只能分爲一條一條的講,那些是生命的特徵.這幾個特徵完全可用我們的官感覺得到的.根據科學答復"生命是什麼"只止于此了.

現在逐條討論所謂生命的特徵.

第一,化學的成分:以前有許多人主張,生物與無生物最大的區別就在生物身上的化合物與無生物上的化合物絕對不同,因此有了有機與無機化學的分別.舉幾個淺近的例來說;蛋白質,炭水化合物,與脂肪,以前以爲在生物是特有的物質,沒有生命就沒有這類化合物,從來亦沒有一個化學家能製造這三種有機化合物.這三種化合物的成分各不相同,而且它們的物理的結構在生物上還有特殊的佈置.在動植物身體內的化合物,不是固體,亦不是液體,是一種膠體 (Colloid). 生物的化學成分與構造,與無生物不同,這種論點作爲生物的特徵像是很好.

據現在所知道,這不能認爲是個充足的特徵,因爲曾有許多科學家經過許多次的化驗,知道生物的化學成分到最後的分析,不過有幾樣原素;如碳,氧,氫,磷,鉀,鈣,鎂,矽,鐵,鈉,氯,氟,僅此而已,沒什麼稀奇.譬如在一個人的身體內,所有這些原素的分量加起來,它的價值不過兩三塊錢.但是成分雖然相同,它們的配合却不一樣,他們那時仍不能使無機化合物變爲有機化合物.

在 1828 年 Wöhler 從 ammonium cyanate 製成 Urea, 一個有機物.因爲有他的製成 Urea, 有機物與無機物的界限,可說打破很多了.但這是個很初步的化合,不能令人信服有機物與無機物沒有區別.自從 Wöhler的 Urea 化合了以後,有機化

合物的製造就層出不窮, E. Fisher 把十八個亞基酸(Amino acids)連合在一起製成一種 Polypeptid,這個 Polypeptid 有許多性質與蛋白質相似.可見人工能夠從簡單的化合物製成複雜的像蛋白質一類的化合物.再者,簡單的糖現在亦能從無機物製成,在一隻石英的器皿中,只有水及二氧化碳,用紫外光照射後就製造成蟻醛(Formaldehyde)由此再凝縮(Condense)成簡單的糖.雖然份量不多,可是這可能性的存在就打破有機與無機物的界限.在有機物中有幾種化合物是與通常複雜的無機化合物不能並論的;例如維生素與酵素(Vitamins and Enzymes)。據最近三四年來的研究結果,不但酵素可以提煉,還可以使之純粹;從純粹的物質得知這是同蛋白質化合物相似.當然有一部分人懷疑,爭執之點不在酵素是否是通常的化學化合物;是在它究竟是蛋白質或是膠體物.再說維生素,以前認爲它是一種神祕不可思議的物質,祇能在生物的身體內纔找得到,但是現在,維生素已經能夠提煉出來,還能使之純淨,它的化學成分和結構的公式都可以知道,于是我們有了人工製造的維生素的結晶體.

從以上所見,我們不能以化學成分作爲生命或生物的特徵,亦不能作爲生物與無生物的區別.籠統的說,二十世紀的化學有機化合物同無機化合物的界限已經消滅,分別可說完全沒有了,生物與無生物從化學成分上看不出

什麼區別.

第二,生長:這是十分容易見着的一種現象,活物能夠生長,死物不能.從一個小孩的長高長大,以至于成人,可見得生長是生物的一個特徵.生長究竟是什麽?我們知道生長可以用大小,面積,體積,數目或重量的增加來測定,但是有許多生物照這樣的測定,並沒有任何的加增.譬如一粒種子,一顆豆子,乾着的時候,的確是活着,不覺得有體積或其他的增加,而當它萌芽時,體重甚至減少.設若放一粒氯化鈣($CaCl_2$)的結晶體在炭酸鈉(Na_2CO_3)飽和溶液裏,就能看到它的生長,體積增加,所以這方法是不能用來决定一個生物或無生物.

大概最好的一個生長的定義是原生質的增加.一個細胞能夠吸收外面的有機或無機的食料到細胞裏面,因它的代謝作用(Metabolism),使得這些食料粉碎之後,再改變成爲自已的原生質.這定義比較上面所用的方法爲可取,但是有許多許多的動植物,有生命而無生長,所以以爲生長是生物的特徵,就要有許多許多有生命的東西,不認爲是生物了.

第三,繁殖:最簡單的生殖是一分爲二的分體法(Binary fission).這種現象却不祇在生物中纔有,在無生物中亦可以呈現如此分裂.譬如加一些迷蒙精(Chloroform)在橄欖油(Olive oil)裏,使這油滴比水重,然後在水面下油滴的左右,放

兩粒炭酸鈉的結晶體,于是這油滴自然的分裂,與生物的最簡單生殖法一樣.再者,在細胞分裂時,先有中心體(Centrosme)的分裂,與梭狀線(Spindle fiber)的形成;這種現象亦能夠模仿:Leduc作過一個很有趣味的實驗,在動物膠(Animal gelatin)裏放兩粒鯖鉄化鉀($K_4Fe(CN)_6$)的結晶體,距離很近,不久就有細絲從這結晶體上生出,細絲的行爲與細胞分裂中的梭狀線一般的.由此可見生殖的現象,無生物亦能模擬,所以生殖亦不是一個很好的生物的特徵.

第四,代謝作用(Metabolism).這是包括消化與呼吸兩個作用,當生物吃下一種食品,經過消化與氧化,然後發生能力,這現象或者可以認爲一個很重要的生物的特徵.

但是有許多實驗的結論却相反.譬如有人把從壓碎了的酵母菌(Yeast)內提出來的液汁加到糖裏,糖依然會發酵,這就是所謂無生命的發酵作用(Fermentation).再譬如用一種化學品使海膽(Arbacia)的卵子溶解,據外表上看這細胞是已經死了:倘若用相當手續來測量它的呼吸,却是照舊吸氧呼炭.這細胞的體態雖然已經失掉,呼吸作用仍然存在.因之,用呼吸與消化作爲生物的特徵,亦不能認爲十分美滿.

第五,行動.無生物是呆定的,生物有行動,這是件很普通的事情.行動可以分兩種,一是移動(Locomotion),一是流動(Streaming).前者譬如阿米巴(Amoeba)可以從一個地方動到

另一個地方.後者像植物的向光性(Phototropism)所表示,可以謂之生物的特徵.

但這並不是很好的特徵,譬如用一滴水銀放在一隻裝了淡硫酸的碟內,靠近這滴水銀,放一粒鉻酸鉀(K_2CrO_4)結晶體,就會得發生一種原生質的流動(Protoplasmic Streaming)。與一個阿米巴的行爲相似.植物的向光性,或向地性,這問題在現在是研究最出色的,據許多實驗的結果,知道完全是由于內分泌的管轄.這種內分泌使得受光方面的細胞生長得慢,不向光方面與平時一般的速率生長.因爲兩面生長速率的不同,就發生了向光性的流動.這現象由此觀察,可說完全是一種化學作用,並不奇異,所以不能認爲行動(Motion)只限于生物纔有的特徵.

第六,生物電流(Bio-electric Current).在動植物的身體上,有許多發生電流的現象.這現象分二種,一是常有的,一是臨時發生的.前者譬如在蛙的表皮上,或植物一莖的兩端有電流,這完全可以用精密的測電表(galvanometer)來測量.後者發生在神經傳導的時候,設有一條神經連結到一只測電表上,在這神經的一端,加一個刺激,在測電表上可以看見有電流經過,這速率非常的快,一秒鐘約有三十公尺(meter)。所以有人說,神經傳導時發生電流與平常動植物身體內的電流,可以當作生物的一種特殊現象.

不過仔細想來,也不盡然,靜電在無生物常有,像乾電池.

至於神經傳導與傳導時發生電流,雖則還沒有完全了解它的深奧;但在無機物中有時可以找到這種現象,在十幾年以前,Lillie 以爲假設神經傳導現象與電流一樣,或者可用一根電線來模仿神經傳導.他做了一個試驗,取一根很純粹的鐵絲,先浸在很濃的硝酸 (Nitric acid) 裏,取出,再浸在淡的硝酸裏,在鐵絲上有一層黑色的氧化物.設在鐵絲的一端,給一個刺激,一段黑色的氧化物變成黃色的.這黃色的一段很快的向沒有受到刺激的一端走去,這黃色的一段可以等于一個神經激刺.當這激刺走過之後,這鐵絲恢復原狀,重新可受刺激,可以傳導,能夠做多少次的.設如這鐵絲作成圈形,就可以看見這刺激不停止的循環,所發生的電極與速率,與神經激刺傳導是不相上下.所以,雖然激刺傳導的真正性質現在還不能了解,但無機物可以模仿這種現象.

第七,激感性(Irritability).動植物受到外界的一種刺激,無論機械的,或化學的,都呈現一種反應,這反應的結果所生出的能力,不一定同刺激所用的能力成正比例的.一個最典型的比喻,就是我們輕聲說一句話,或兩三個字,汚辱一個人的本身或他的先人,結果反應很大;也許被這人痛打一頓.可是這種行爲,這種現象,在無生物中亦有,譬如一顆鎗彈,雖然裏面有火藥,平常並不爆炸,可是只須一個指頭的力,扳動鎗栓,打在發火點,這鎗彈就會打死人.這亦是反

應很大.據現在所知道,人的情感的變化,有許多是能由物理化學 (Physical Chemistry) 的現象解釋.譬如忿怒與恐懼這些現象,是由于腎上腺(adrenal gland) 所分泌的一種內分泌 (adrenalin) 所節制.倘若注射這種內分泌到一個人的身體裏,這人立刻呈現忿怒或者恐懼.這種內分泌已經能夠提煉純淨,它的化學的結構亦清楚了.所以從這一點看來,生物與無生物並沒有什麼區別.

總括的再說一遍,生命是什麼?我們不容易答復;只能一一舉出生命的特徵,但是我們絕對不敢相信,有了生命的特徵,就算有了生命的.從來還沒有一個創造者能夠把一切無生物可以模仿的生命的特徵,聚在一個物質裏面,使它們有諧和的組織,而顯示生命.由此我們得到一個暫時的結論:就是生物與無生物是在一個連續的統系 (System),不是間斷的,它們的區別是逐漸的,不是絕對清晰的:但生物的一切無生物可模擬的生命的特徵是相互諧和,有節奏,有組織的.

上面所講的生命的定義是很古板與冠冕堂皇的,但是有點不十分中肯,許多讀者或者還是以為不能把生命的意義說出來.這種生命的意義或特徵,有人說就是"意旨"同"目的",我們就從這點往下申論.當我下面所講的脫稿之後,我才見到 Lillie 教授所著的一篇文章(註一)與 Whitehead 所著的一本書(註二),我的意見却與他們的不謀而

合.

我們爲講得清楚些起見,不能不先把生物學一方面丟開,來簡單的說一說熱力學的第二律.這第二律有好幾種解釋,這裏只引兩種:第一,一個能力較低的系統不能以能力給與另外一個能力較高的系統:假若要做這步工作,一定非借外界的能力不可.第二個解釋,可以這樣說,一個物質的系統,聽其自然的時候,是從有秩序的境地進到混亂的境地.

致于生物服從熱力學第二律的第一條解釋,可以說是毫無疑義,我們有很多的實驗證明這樁事情,因爲這些實驗指示給我們,許多生命的程序從能力的效率觀察,都是遠不及百分之百.譬如許多用氮的細菌,他們的能力效率是百分之七;筋肉收縮時的能力效率,不過百分之二十一左右;光合作用的能力效率大概在各種生命程序內算是最大的一個,據 Warburg 說是百分之五十八,據 Adams 說是百分之九十八,但是也不到百分之百.由此可見,生物在做這許多工作的時候一定需要外界的能力.利用外界能力,得到很大的工作效果的.氮氣細菌的化合炭水化合物所需要的能力是從氧化亞莫尼亞與氮化物(Nitrates)而來;筋肉動作所用的機械力與熱力,也是從燃化筋肉內所貯藏的炭水化合物而來;光合作用製糖需要的能力,是從太陽光得來.但是,據上面的效率的數目看,它們用掉的能力,都

是比得到的能力爲小,就是說能力的效率非常的小.除了光合作用外,我們可以講所有生命程序的能力效率不比一個內燃發動機的來得大:由此可見,一切生命的程序,據第一條解釋,它們是服從熱力學第二律.

但是要從熱力學第二律第二種解釋,我們稍稍感覺困難:根據統計學的原則說,各種物質的統系,都是有這種從有秩序的境地進到很混亂的境地的趨勢.常引以爲例的,如玩的牌:一付秩序排列很好的牌,經過均勻的洗過之後,只是增加混亂,不會和原來的秩序一樣.一堆堆砌着的磚,照第二律的推測,只會向四外分散,由高而矮,決不會使它有程序的堆起像牆或屋子一樣.許多印字館所用的鉛字,舖散開來,也決不會自然而然的排成一篇文章或一本書,這便是第二律從統許方面的簡單的說法.但是有一種可能,一付牌洗得很久,在幾千萬次中的一次,排列的方法會與原來的一樣;在千萬堆磚之內,也許有一堆是不四下分散而有程序的堆起;一盤鉛字倒出來成爲一篇文章.像擲骰子可以一次擲出全是六點,但是從來沒有人每擲都是六,要在許多許多次中才有一次;從統計學上講,這一次特殊的情形的發生,只能稱作一種不可思議的奇蹟(Miracle).但是因爲有了生物的存在,猶其是高等的生物,那末這種統計上所謂的奇蹟,時常可以發生,只要生物有意使它發生,就可以發生.一付洗過了的牌,我們可以隨時使它歸還

從前的秩序;許多許多的磚,只要有人工與時間,就可建築起高樓大廈;許多盤的鉛字,經過工人的編排,就可以印成了這篇文章.所以說,一個統系經過相當物質的變換以後,因爲有生物的工作隨時可以使它歸還原狀,這種事情假若要完全根據物質方面講來,是不應該有或不可能的;但因爲生物的參與其間就發生所謂非常的事情.這不能不說是生物的最特殊的一點,這點在生物中就叫作"目的"或"意志".總之,不論稱爲"目的"或"意志",行爲確是有目標,雖然它有許多方向可走,但獨傾向某一個,這不能不稱作有一種選擇,是生物最顯着的一點.

現在用普通生物學上的例來說:一個多細胞生物的發生是從一個細胞起始,這一個細胞能變成許多許多的細胞,據熱力學第二律統計的推測,這些細胞應當是都成一樣的形狀與大小,並且有一律的功效,也應當是分散的而不當有組織.但事實不然,譬如一隻小鼠,它的一個細胞分裂到相當數目的時候,可以看出那幾個將來形成頭部,那幾個形成身軀,那部分形成四肢或尾巴,不但細胞的大小各異,形態與功效也不同.這不能不講生物與無生物是有許多的區別,生物的發展是有程序,有秩序,有特化,與有組織的.從一個細胞分裂成幾千萬的細胞已經是與無生物很不同,而這許多細胞又能夠按步就班的專門用來形成不同的器官與組織,恰與無機物的趨勢相反.這樣看來,無

機物經過時間越久,秩序越混亂.有機物則越久,秩序越趨于特殊化.有人這樣講:物質統系內混亂程度的增加,是可用作測量絕對時間的工具;那末我們可否這樣說,生物的特殊化的增加同秩序的增加,也可以用作測量絕對時間的工具?

再從進化論看來:根據物質的統系的趨勢,任何一個統系的結果,不是混亂便是不同點的消滅,或個性與特徵的消滅,到最後各種東西都相似.但在生物進化程序中,却相反,據我們現在所知道的生物進化,都是從簡單的進到複雜的,從相似的變到不相似的.這也是生物違反熱力學第二律統計的性質.

再看一例,假如把兩樣糖給一個植物作食料,這兩樣糖只有糖內的原子的支配不同,因之一種就使 Polarized light 的 Plane 向右轉,一種就使之向左轉.糖的原子支配的不同,只在分子的構造不同.僅此一點區別,一個植物有兩樣糖作食料時,它只取一種,另一種絲毫不動.若由統計的原則講,這兩樣糖都有被用的可能,但因爲生物有選擇的能力,結果僅有一種被利用.在生物化學中我們可以舉許多類似的例子,如Enzyme對于它的Substrate有相當的Specificity,譬如Pepsin只能溶解蛋白質,不能溶解炭水化合物或脂肪,同時,Diastase 只能溶解澱粉,不能溶解其他的食料.這種種的 Specificity 都是來臆定生物的動作,行爲,是有一種選擇

的,有目的的,不一定是目的,是有單方向的影響的(Uni-directional influence).

那末,我們怎樣能夠解釋這種生命的特徵?當然可以引用"生活力"或"魂魄":但這不是解釋,僅是生氣論者 Vitalist 對于生氣論 Vitalism 的偏論.我們現在不管生氣論或生機論(Mechanism),根本不願意偏袒那一面的主張,我們知道生氣論有不能解釋的許多東西,生機論也有不能解釋的許多東西.生氣論者用魂魄或人來解釋生命,生機論者就用機械模型來解釋生命.這種比喻與模型的解釋都是不能澈底,這在現在科學上是大家公認的一種原則.到底如何解釋生命?如何解釋生物之所以異于無生物呢?我們建議這樣:生物的各種生活程序,有目的與有意志的在內,雖有大部分是被熱力學第二律所管轄,但有許多是這定律不能約束的,因爲根本上熱力學第二律的所以成立,是在乎要有非常之多的數目,用統計方法來算計.現在假定一種程序所包含的因子數目是非常之小,不能用統計方法來計算,那末第二律在這裏就無用了.我們建議在生物中有許多的程序,有意志與有目的的在內,是屬于這一類的.就是說,這些程序是被極少數的 Master-reactions 所管轄,這幾個 Master-reactions 同時又只被少數的 Key-molecules 所管轄,這幾個 Key-molecules 的動作,與物理化學(Physical Chemistry)上所謂的 Activated Molecules 一樣.因爲它們的動作,就發生

一個集團的連續的反應 Catenary Reactions, 由于這些連續的反應,發生我們所能看見的生物的一切動作,其中有我們稱爲有意志與目的的.這些 Key-molecules 的數目是少到一種地步,它們的行爲不能從熱力學第二律用統計方法來推測.既然如此,它們同時所能夠引起的許多生命程序,當然不能被一切根據統計學推演來的定律來推測了,熱力學第二律在內.換言之,生物的行爲也有一種不定性的原則,與物質科學中的 Principe of Indetererminacy 相似.

據上所建議的原則,還可以這樣解釋:一個生物的行爲,是不能只被一套的因子(Conditions)所決定:就是不僅算外界的因子,還要加入一套內部因子(Internal Conditions), 就是生物自身的.這些內部因子又可分爲兩種.一種可以引用統計學方法來推測,那就是在數目很大的時候;一種不能,因爲開端的動作是被極少數的幾個 Key-molecules 所管轄.因爲它數目之少,不能引用從統計方法推演來的定律來管轄,熱力學第二律就是其中之一.這一部分動作就是平常人所謂的直覺(intuition),有目的(purposefulness),有意向(aim),與選擇力(selectiveness).

我們承認以上所說的都是假設,但這假設是有用實驗來證實的可能.在單細胞生物中,現在有人用酵母菌,細菌,水藻,與原生動物作一種實驗,把這幾種生物放在高溫,紫外光,與X光等致死工具的下面,所得結果非常有趣,時間

越久,當然殺死的細胞越多.時間與未殺死的細胞成一種比例;這種比例的一個解釋,我們可以認爲是一種推想,是假設這個細胞裏有一個地方或一部分是對于全細胞有相當關係,假若這一部分被這種致死工具毀壞之後,全部的細胞都會死.如果我們承認這樣解釋是對的,我們就有了一個方法可以用來試驗以上說過的 Key-molecules 或 Area 的大小,同時又可以證實這假設是否成立.據 Crowther, Swann 與 Rahn 等的實驗結果,細胞內一種可以致死的 particle 的直徑是大概 01^{-4} mm. 這是比一個整個細胞小得許多許多了,但是比一個蛋白質的分子又要大一百倍(據所知道蛋白質的分子的直徑,猜測的大概是 5×10^{-6} mm.). 但是這些實驗的結果並不十分正確,他們原來做實驗的意思,不是用來證明我們的解釋的.況且我們應當注意這種致死的現象,可以有幾個方法解釋,我們所說的僅是一個罷了.我們應當在這種實驗上多用功夫,將來或者能解釋這種問題.這種實驗恐怕在最近期間,一定會有許多許多人在那裏做,因爲這是在生物物理學(Bio-physics)上最新穎有趣的問題.

總括的歸結起來,生物與無生物的最大區別,還是在生物的有一種有"目的",有"意志",有"單方向",與有"選擇"的行爲,還有有"秩序的發生".這些生物行爲表面上違背從統計原則推演來的熱力學第二律,但是並非說生命是

一種有生活力(vital force),或神,或魂魄來主持的:是說因爲生物內有許多程序只被幾個 Master-reoctions 所管轄,而這幾個 Master-reactons 又只被少數的幾個 Key-molecules 所約束. Key-molecules 的數目若是之少,它們的行爲不能被任何的統計原則來推測的,熱力學第二律是應用統計學方法成立的,所以不能引用來推斷上面所講的幾種生命的現象.我們並沒有幫助生氣論者或生機論者:我們根本就否認一切自然現象是可以被這類模型與比喻可以解釋的.我們祇把物質科學上的 Principle of Indeterminacy 應用到少數的生物現象上,同時我們又舉出一個實驗方法,可以引用來證明或推翻我們的這個假設.

註一)Lillie, Ralph S., The problem of vital-organization, Philosophy of Science, 1:296－312,1934.

(註二)Whitehead, A.N., Nature and Life, Cambridge University Press, 1934.

物質新概念

(二十三年十二月十四日武漢大學化學會演稿"原子新概念"之續編)

鄔保良

A……十年前之回顧. 自希臘哲學家提倡原子論後,經數千年之久,人類相信世界萬物是不連續的.鳥,獸,草,木,灰泥,沙,石,皆可分開;由大分爲小,由小分爲更小.但此種分剖,不能繼續無窮.最後達到極小之部分,則不能再分剖.此不能再分之物,名之曰原子.各種物質,由原子化合而成;由原子結合,成爲分子;由分子結合,成爲化合物;由化合物結合,成爲天地人類萬物.哲學家倡之於前,科學家表演於後.相沿數千年,鮮有敢議其爲非者.十九世紀末葉,電子發現後,原子構造問題,大受各方面注意.原子是由質子與電子陰陽相合而成.對於分剖手續,更深一層.但對於物質構造之根本問題,並無多大的變動,仍是"至微不可再分".不過"至微"之定義與時代同演變而已.總之物質是不連續的;是一粒一粒的,此所謂物質粒形學說之要點.

與物質粒形學說相並立者,爲光之波形學說.對於光之性質,歷史上爭執殊多:有主張光是波形;亦有主張光是粒形的.兩說相持有數百年之久,此盛彼衰,此衰彼盛.各有各

的理論與事實.但其內容繁雜,本文不便討論.茲爲簡單與容易明瞭起見,將物質與光之性質概念之變更,列於表 I

表 I

物質與光之性(註1)

年　代	物　質	光(輻射能)
420BC→1550AD	粒　形	?
1550→1850	粒　形	粒形或波形?
1850→1890	粒　形	波　形
1890→1900	粒　形	波形或/及粒形?
1900→1925	粒　形	波形或/及粒形
1925→1927	粒形或/及波形?	波形或/及粒形
1928→	粒形或/及波形	波形或/及粒形

表中年代是大概的,凡一學說之變更與創造,非一二年可以完成的,但其大約情形,不外乎此.其主要之點,爲物質概念之根本變動.能之性質,由粒而波,由波而粒,反復變更,莫可捉摸.惟物質粒形學說,相傳數千年絕無搖動.殊料十年前物質概念,根本變化.不可爲非科學史上的一個最值得注意的事情.關於此項問題,十年來有許多專門書籍討論.欲明瞭其詳情,須有高深的數學物理學識.本文爲普通讀者起見,特採取半通俗式的文字,將物質概念改變之背景與過程略述之.

B……改變之背景……力學與光學之平行性.(註1)

在普通物理學內容之分配而論,力學與光學是分開的.其界限亦十分清楚的.表面上無多大關係,蓋物質是粒形,光是波形.此兩種概念,根本不相容納.但在二十世紀初葉量子論與光電效應說盛行後,波性之光,表現粒性.然則粒性之質,是否有表現波性之可能?此問題之解答,似乎甚簡單.實在關係物質論根本觀念者甚大.茲將力學與光學兩方面之定律的平行性,簡簡單單列於表II

表　II

力學與光學間之平行性

力　學	光　學
物質不滅	能力不滅
直線傳播（牛端第一定律）	直線傳播（幾何光學）
動量 $P=mv$	（光子 動量 $P=\frac{h\nu}{c}=\frac{E}{c}$
能　$E=mc^2$	（光子）能　$E=h\nu$
質量 $m=\frac{E}{c^2}$	（光子）質量 $m=\frac{h\nu}{c^2}=\frac{E}{c^2}$
最少作用原則	最短時間原則
$\delta\int mvds=o$	$\delta\int\frac{ds}{u}=o$

力學與光學之平行性,爲物質論變更之動機.表中各項皆頗明顯.爲明瞭其中關係起見,將最少作用,與最短時間二原則,加以說明與討論.

在力學上有一重要的原則.凡一射體由 A 至 B 所經過

的自然路程,所發生的作用,是最少的(或最大的).可用數學的方程式表之於次

$$\int_A^B mvds = \text{minimum}\ (最少) \quad \cdots\cdots(1)$$

或

$$\delta\int_A^B mvds = o \quad \cdots\cdots(1a)$$

因作用 $=mvds$, 故稱之爲最少作用原則.

在光學上亦有相似的原則.凡一光線由 A 至 B 其所需之時間是最短的.用方程式表之於次.

$$\int_A^B \frac{ds}{u} = \text{minimum} \quad \cdots\cdots(2)$$

或

$$\delta\int_A^B \frac{ds}{u} = o \quad \cdots\cdots(2a)$$

其中之 u 爲光波速度.的 ds/u 爲時間,故稱爲最短時間原則.

如一物體運動時一方面若粒動,又一方面如波動,則上列(1)(2)方程式均應適用.反而言之,如(1)方程式等於(2)方程式,質與光則可鎔於一爐.

依相對原理,質與能之關係,可以下方程式表之.

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \cdots\cdots(3)$$

其動量爲

$$P = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \cdots\cdots(4)$$

其中之 $v=$ 質粒速度

$c=$ 光在自由空間之速度

$m_0=$ 靜止質量

又因 $P=mv$

(1)方程式變爲

$$\int_A^B \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{v}{c^2}ds=E\int_A^B\frac{v}{c^2}ds=\text{minimum}\cdots\cdots(5)$$

由(3),(4)等方程式,則得

$$\frac{E}{P}=\frac{c^2}{v}$$

$$\because\ \text{速度}\,u=\frac{E}{P}\quad\therefore\quad u=\frac{c^2}{v}\cdots\cdots(6)$$

以(6)之值代入(5)則知(2)與(5)卽是(2)與(1)方程式,完全相似.彼此適合.就是質粒路程,旣適於最少作用原則,亦適於最短時間原則.不過其中 u 與 v 不應混亂耳.

由(6)方程式可得波長與粒速度之關係

$$\because\quad \lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{c^2}{\nu v}$$

$$\text{又}\quad \nu=\frac{mc^2}{h}$$

$$\because\quad \lambda=\frac{h}{mv}\cdots\cdots(7)$$

此爲都布羅格里 De Broglie 於十年前首次提出討論的.其關係近年來思想者甚大,亦可以下文表示之.

電子在適當情形之下,表示波動性.其附與波之波長爲

布朗克常數與該電子之動量之比率.此種關係,不止電子爲然,其他質粒亦復如是.

電子之速度,因其電勢高低,而變其大小.因此其附與波長亦隨之而變,其關係可以次列方程式表之;

$$\lambda = \frac{12.2}{\sqrt{V}} \mathring{A} \quad \cdots\cdots (8)$$

其中之 V 爲電勢之伏特,$\mathring{A}$ 爲 Angstrom 恩士土攬單位(10^{-8} 糎).

下列表III中之數目,指示各質粒之速度,質量與所計算出之附與波長.

表 III

質粒與附與波長

質粒	質量(克)	速度(糎)	都氏波長(糎)
慢電子	9×1^{-28}	1	7 27
,,	,,	100	0.0727
1伏電子	,,	5.94×10^{27}	1.2×10^{-7}
1 0伏電子	,,	5.94×10^{28}	1.2×10^{-8}
10) 伏 質粒	6.6×10^{-24}	6.94×10^{6}	1.43×10^{-10}
高爾夫球	45.9	2500	5.71×10^{-32}

由表III可見凡電子其能力於 1—100 伏特之間者,其波長之大小與X光相等.職此之故,近十年內許多實驗利用電子替代 X 光.其測定之波長,與由都氏方程式算得的相等.

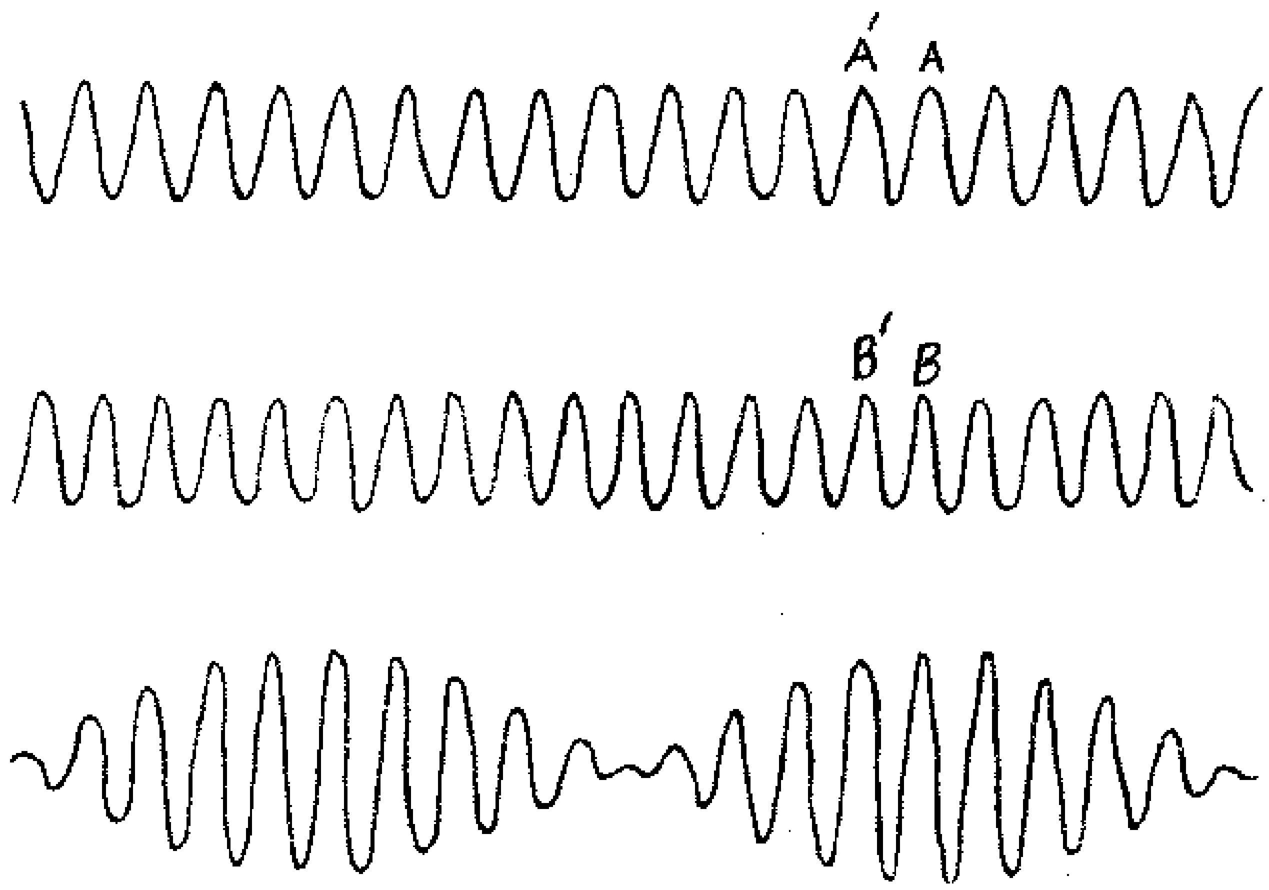
欲明粒與波之關係,我們應先討論波動中兩種不同之

速度.一曰波速度 u,一曰羣速度 g (group velocity)

設有 A 及 B 兩個正弦波列(見圖 I)其振幅相等.B 之波長爲 λ 而 A 之波長爲 $\lambda+\Delta\lambda$. $\Delta\lambda$ 是一非常微小數目.如將 A B 重疊,則得一拍序,形如圖 I 第三曲線.如 D 爲任意兩個鄰近最高拍間之距離,則得(註 2)

$$\lambda/D=\Delta\lambda/\lambda \quad \cdots\cdots (9)$$

圖　I



如 A 及 B 波列進行之速度相等,則拍之速度與 A 及 B 的速度相等.如 A 及 B 的速度各不相等,則拍之速度不等於 A 的,亦不等於 B 的,亦不等於 A 及 B 的平均速度.

設 A 波列之速度爲 $u+\Delta u$, B 的爲 u. 當 $t=O$,A 在 B 上則得其最高之拍,表示適在 A,B 之下.經過某時間後,A 比 B 先 $\Delta\lambda$,A'

則適在 B' 之上.可見拍之速度比 A 的或 B 的慢些.如 g 代表拍之速度,且如以 B 爲準則,則得下方程式

$$\frac{g-u}{\Delta u}=-\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad\cdots\cdots(10)$$

其負號表示如 A 經過路程爲 $\Delta\lambda$, 拍之經過路程爲 λ, 惟其方向相反.

如 $\Delta\lambda$ 爲甚小,則得

$$g=u-\lambda\frac{du}{d\lambda} \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\because \quad u=\nu\lambda, \quad \therefore \quad \frac{1}{g}=\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad\cdots\cdots(12)$$

在波動學中 g 稱爲羣速度,(11)方程式表示波速與羣速的關係.

在質粒運動中,其動能 T 爲 $E-V$. 其中之 V 爲勢能.

因 $T=\frac{1}{2}mv^2=E-V$

故 $mv=\sqrt{2m(E-V)} \quad\cdots\cdots(13)$

又因 $\frac{1}{\lambda}=\frac{mv}{h} \quad\cdots\cdots(7)$

及 $E=h\nu$

(12)方程式變爲

$$\frac{1}{g}=\frac{d}{d\nu}\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{h}\right]=\frac{m}{\sqrt{2m(E-V)}}=\frac{1}{v} \quad\cdots\cdots(14)$$

(14)方程式表示波之羣速 g 與粒速 v 相等.可見波粒之分漸微.因此,我們常說"電子是波包 wave packet"

C…質波之發現. 我們記得十九世紀末葉,科學家對

於陰極射線之性質曾有許多爭執.有一說主張該種射線是以太波動的現象.後由威爾遜表演濕霧中之電子徑跡.電子顯有粒性之表現.至於電子波形之現象,自都氏提出後,二三年之久討論雖多,然仍屬紙上空談,無實驗以證實之.追至1927年後,物質波形說,始有具體的證實.茲將其大略情形述之於次.

(a) …. 丹維孫及朱爾莫(Davison, & Germer)的反射法.

單色 X 光,綫是普通認爲波性的.在結晶體面上,受反射.其反射之角度,有一定的規則的.丹朱二氏用電子替代 X 光.所得結果,與用 X 光所得者甚爲相似.如曉得電勢 V,其電子波長可以由(8)方程方求得.普通在 X 光線實驗中.我們用波列 Bragg 定律求其波長就是

$$n\lambda = 2d\sin\theta \qquad (15)$$

其中之 n=整數

λ=波長

d=原子間距離

θ=X光入射角

每一實驗結果用上列二方法推算,所得之波長甚相符合,茲將其二種數列於表IV

表 IV

V	θ	λ〔由(3)方程式〕	λ〔由(15)方程式〕
54伏	50	1.66A	1.65A
65	44	1.52	1.50
811	55	.91	.88

此種結果,表示電子與 X 光同爲波形.

(b)…湯姆孫 G.P. Thomson. 的透射法.

湯氏用高電勢的電子透射過甚薄的銅晶,曾得一種繞射花樣 diffraction pattern.中有斑點無數.與用 X 光線所得者相同.亦有用雲母薄片以代銅結晶.所得結果,與湯氏所得者相似.魯布 Rupp 用薄金片其測得之波長與算得的極爲一致.今列其一部份於表 V

表　V

電　勢	測得波長	算得波長
11.98(10^4)	32.52(10^{-11})糎	32.5(10^{-11})糎
21.00　"	23.72　"	22.6　"
23.10　"	23.51　"	22.4　"
24.30　"	21.42　"	21.7　"
25.30　"	21.06　"	21.2　"

近來(1930)有士端 Stern 等用氫氦等氣之射線,以替代電子.受結晶體之反射後,所得之實驗結果,與理論上算得的亦相符合.於此可見不但光有波性,質亦有波性.近年來關於反射,屈折,透射甚實驗皆曾用電子或分子甚以代 X 光者,而物質之波性表現,實無可疑之點.

D…波粒概念之解釋…波動力學大意.(註 3)

物質既有波與粒兩種現象.究竟可否以普通力學(古典

力學 Cla sical Mechanics)解釋之?在事實上,是不可以的.如欲明其真相,須將光學中定律應用範圍,略爲申述.

在光學中,

(1) 如波長小,射程半徑大,則光似粒形;可應用幾何光學定律.

(2) 如波長大,射程半徑小,則光似波形;須應用物理光學定律.

於是在力學方面而論,亦有相似的限制.依都氏方程式

$$\lambda=\frac{h}{mv} \qquad (7)$$

質粒大則波長小因 λ 與 m 成反比例.我們亦可簡單條列其相對性於次:

(1) 如質粒大,波長小,路程半徑大,則質似粒形;可以應用粗體力學定律 Macro-mechanics(普通力學).

(2) 如質粒小,波長大,路程半徑小,則質似波形;須應用微體力學定律 Micro-mechanics (波動力學, Wave mechanics)如用粗體力學推算微體之行動,未有不失敗者也.例如舉

氫原子之電子圓軌道而論.其軌道依量子情形而定.

$$2\pi mvr=nh \qquad (16)$$

其中 m 爲電子質量,v 爲速度,r 爲圓軌道半徑,n 爲量子數.h 爲布朗克常數.此方程式爲波耳原子論中常見的.假用(7)方程式,則得

$$\frac{\lambda}{\gamma}=\frac{2\pi}{n} \quad \cdots\cdots (17)$$

當 u 是甚小(*e.g.* 等於一), λ 與 r 比起來則太大.於是普通力學定律則不適用.俟波動力學發明後,始能解釋微體現象.爲簡易起見,茲將其關係列下.

幾何光學:物理光學 = 普通力學:波動力學,

$\lambda<r$ $\lambda\leqq r$ $\lambda<r$ $\lambda\leqq r$

每一項下之符號表示該項應用的範圍.波動力學與物理光學應用範圍雖廣,但在適當範圍內,普通力學與幾何光學易於運用耳.

欲明波動力學的大意,我們須先討論一次元的調和運動.此種運動,是將等速運動投影於一軸上以 θ 表與振動方向成直角的軸,和方徇半徑所成的角.卽所謂位相.時刻爲零時,如振動體通過於中心點,則變位 S 可以下式表之:

$$S=A\sin\theta \quad \cdots\cdots (18)$$

A 是最大變位,卽爲振幅,振數 ν 和圓運動每秒的迴轉數相當,故每秒爲 $2\pi\nu$ 的迴轉速度故得下式:

$$S=A\sin 2\pi\nu t \quad \cdots\cdots (19)$$

此波如以 u 的速度進行,中心點進至 x 的距離時始在此點振動,則較原點遲後 x/u 秒故此處的變位如下:

$$S=A\sin\left[2\pi\nu t-2\pi\nu\frac{x}{u}\right] \quad \cdots\cdots (20)$$

將(20)方程式偏微之,則得諸式如下:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-A\frac{2\pi\nu}{u}\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+4\pi^2\left(\frac{\nu}{u}\right)^2 S=o \cdots\cdots(21)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=-4\pi^2\nu^2 S \cdots\cdots(22)$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \cdots\cdots(23)$$

因 $\left(\frac{\nu}{u}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{m^2v^2}{h^2}=\frac{2m}{h^2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

$$=\frac{2m}{h^2}(E-V)$$

故(21)方程式變爲:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)S=o \cdots\cdots(24)$$

如 E 一定,而 V 由位置而變時,則動量亦變,波長及速度,時時刻刻在變化之中.此時在各點亦可適用上式.又因既非表示物質的振動,故可用 ψ (Psi)以表 S

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi=o \cdots\cdots(25)$$

此是許而丁格的波動力程式.適用於一次元的形式.

試應用此式,以檢振數爲 ν 的單一調和振動,質量爲 m 的波,如前所述由中心點的距離 x 可以下式簡單表示.

$$x=A\sin\theta=A\sin 2\pi\nu t$$

此點的速度如次:

$$v=\frac{ds}{dt}=2\pi\nu A\cos\theta$$

$$\therefore \quad T=\tfrac{1}{2}mv^2=2\pi^2\nu^2A^2m\cos^2\theta$$

在中心點 $\cos\theta=1$，其時勢能爲零故

$$E=2\pi^2\nu^2mA^2$$

$$V=E-T=2\pi^2\nu^2mx^2$$

故(25)式變爲:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-2\pi^2\nu^2mx^2)\psi=o \quad \cdots\cdots(26)$$

爲簡單計,令

$$s^2=\frac{4\pi^2m\nu x^2}{h}, \quad \sqrt{\frac{4\pi^2m\nu}{h}}\,dx=ds$$

(26)式變爲:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\left(\frac{2E}{h\nu}-s^2\right)\psi=o \quad \cdots\cdots(27)$$

此式之一般解答不易求得,茲僅舉其一二例如次:

今假定 ψ 爲如下特別之形,逐次微分之:

$$\psi=ke^{-\frac{s^2}{2}} \quad (k\text{是任意常數}) \quad \cdots\cdots(28)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=-\psi s$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+(1-s^2)\psi=o \quad \cdots\cdots(29)$$

(27)式與(29)式比較,則得下式

$$\frac{2E}{h\nu}=1$$

可見(28)式中之 ψ 爲解答.

其次以

$$\psi = kse^{-\frac{s^2}{2}} \quad \cdots\cdots(30)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\psi s + \frac{\psi}{s}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + (3 - s^2)\psi = o \quad \cdots\cdots(31)$$

於是

$$\frac{2E}{h\nu} = 3$$

如 $\frac{2E}{h\nu} = 1, 3, 5$ 等奇數時,可得(27)式的妥當解答.否則,沒有妥當的解答.在此處不能證明.如此微分方程式中的常數,限於有特別之值時,可得適當的解答.此等值,卽前例的 1, 3, 5 等,稱爲此方程式的特宜值 Eigenwert-characteristic value. 與此對應的解答,卽與前例的 $e^{-\frac{s^2}{2}}$.稱爲特宜函數 Eigenfunktion, chavacteristic function.由此方程式之特宜値,可以決定其能 E 之值.在上例則得次式;

$$E = \frac{2n-1}{2} h\nu \quad \cdots\cdots(32)$$

於是調和振體的能爲 $\frac{1}{2}h\nu$, $\frac{3}{2}h\nu$, $\frac{5}{2}h\nu\cdots$并不是舊量子論的 $o, h\nu, 2h\nu, 3h\nu\cdots$.

但在(28)式中之 k 之値須有定,此方程式始能有具體的解答.解答以後則得振幅.在光學中,振幅的自乘與光子之所在或然率 (probability of occurrence) 爲比例.如果卽欲以此表示所在或然率,則將 ψ^2 就全體看來選定爲一便可:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=1$$

如 $n=1,\ \psi=ke^{-\frac{s^2}{2}}$，$\frac{4\pi^2mv}{h}x^2=s^2$

由積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=k^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}dx=k^2\sqrt{\frac{\pi h}{4\pi^2mv}}=1$$

$$\therefore\ k=\left(\frac{4\pi^2mv}{\pi h}\right)^{\frac{1}{4}}\quad\cdots\cdots(33)$$

如此附與 ψ 以一定條件,而定其值,稱為規準 (normalize).其必要的係數 k ,稱為規準係數.規準的結果,生如下的意義,將振動體的所在或然率,積方向的全長而定爲一的事是表示此線上確有一個存在,此時 x 與 $x+dx$ 之間,所在或然率可以 ψ^2dx 表之.

以上是就一個微體,例如電子,爲一次元的運動時而觀.如假定此電子能在 x,y,z 三次元的空間而動時,則波動方程式(25)變爲:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-V)=o\quad\cdots\cdots(34)$$

或簡寫爲:

$$\Delta^2\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-V)=o\quad\cdots\cdots(35)$$

對於三次元以上的波動方程式之解答,其方法殊爲繁雜茲舉一二最簡單的例而已.

氫原子由陽核和一個電子而成.電荷相等.其間力的作用認爲從庫倫定律.今假定陽核是靜止,以爲座標的基點.採用三次元的波動方程式.電子的勢能 V 與陽核的距離爲 r 時則如下:

$$V=\int_{\infty}^{r}\frac{e^2}{r^2}dr=-\frac{e^2}{r}$$

(35)式變爲:

$$\Delta^2\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E+\frac{e^2}{r})\psi=o \quad\cdots\cdots(36)$$

此方程式的解答與上列一次元的相似.但其手續更爲繁雜.本文不便詳爲列出.其解答的先決條件爲:

$$E=-\frac{2\pi^2me^2}{h^2n^2},\quad n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$$

此結果適與波耳理論所得的相同.與實驗所得的,亦相符合.許多現象,波耳理論所不能解釋者.波動力學可以解釋之.許多問題之解答,爲波動力學所預料者,後爲實驗證實之.十年來,波動力學之所以受科學家之熱烈歡迎者職此故耳.(註3)

與波動力學並駕齊驅之理論,有所謂方陣分學者,爲海森堡 Heisenberg 所首先提倡.應用於原子世界.其方法殊繁.不如波動力學之簡易,姑置不論.

E…不定原理. 波動力學,是一種統計學說.對於微體之行爲,不能加以決定,只能說出其或然率.表面上似是波動力學的缺點,實在是其優點.在實驗上而論,關於微體之

個體的將來,無法測定,我們測定手續影響到微體之位置.海森堡於 1925 年提倡不定原則 Principle of Uncertainty, 或 Principle of Indeterminism. 其大意謂微體的位置與速度(動量不能同時準確測定,茲舉其一二具體的譬喻.

假使某池塘中,有一木柱.柱項適在水平面下,我們不能直接看見的.如池水生波因波動之變更,我們曉得木柱之位置.如水波長甚大,波經過木柱時,變更甚小,柱之位置似乎甚難測定.波長愈小,則木柱之位置之測定愈準確.但如波長小,木柱之形狀無從而知其詳.或圓或方,莫得而知.可見木柱之位置與形狀,二者不可同時準確測定。不定原理之大意在此.

照昆普吞 Compton 之實驗,當 X 光線爲電子所散射,被散射的光子的振數 ν 因此減少,就是波長因之增加,能力因之減少.其少之能爲反動的 recoiling 電子所得.其結果如下式

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

其中之 θ 爲散射角,$\Delta\lambda$ 爲波長之增加.其餘符號之意義與以上所述的相同.

此種昆氏效應不止在 X 光範圍內爲然.無論何時如光子爲電子或其他粒子所散射,亦有此種效應,其主要點爲 $\Delta\lambda$ 與原來的 λ 絕無關係請見表 IV

表 VI

λ	θ	$\Delta\lambda$	散射後光子之 λ
$1A^\circ$(X光)	90°	$0{,}024A^\circ$	$1{,}024A^\circ$
$5000A^\circ$(綠色光)	90°	$0{,}024A^\circ$	$5000{,}024A^\circ$

第一項能($E=\frac{hc}{\lambda}$)之變更之百分比大於第二項的約五千倍.電子得此能後,成爲動能.其由 X 光反動的電子之速度,比由綠色光反動的電子的速度要大 5000 倍.

如我們用波長大的光,如綠色光之類,以測定其位置,結果找不出來.因所用者粗,所求者微.如用 X 光,電子受光子之猛擊,反射而遠跑高飛.茫無踪跡.我們只曉得該電子過去之位置.不曉得現在的位置,其速度與將來之行動無從準確測定.其大意可簡列如下:

(1)用長波,位置不定,速度慢,且易準確測定.

(2)用短波,位置易定,速度快,不易準確測定.

如位置不定範圍以 ΔX 表之,

動量(速度)之不定範圍以 ΔP 表之

海森堡得下式

$$\Delta X\cdot\Delta P=h \qquad \cdots\cdots(37)$$

其中之 h 爲布朗克常數 $=6.5\times10^{-27}$爾格秒.

(37)方程式,可以用次列簡粗的方法導演出來:(註2)

由 (9) 式

$$\frac{\lambda}{D}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

其中之 D 可以表位置不準範圍 ΔX 卽是

$$\Delta X=D=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$\therefore \quad \Delta X\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}=\Delta X\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1$$

但由(7)方程式

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{mv}{h}=\frac{P}{h}$$

$$\therefore \quad \Delta X\cdot\Delta\frac{P}{h}=1$$

卽 $\Delta X\cdot\Delta P=h$ ……………………………………(37)

其意義爲如我們欲準確測定微體之位置,則不能準確測定其動量;如我們欲準確測定其動量,則不能準確測定其位置.一方面之差誤愈小,則第二方面之差誤愈大.不定論在粗體方面不發生多大的關係.例如有一槍彈其量爲30克.假此子彈的射程用機攝映之,且此機之運用全靠此彈.今如槍彈之位置差悞只在.01糎.求其速度之準確程度.

因 $\Delta X=10^{-2}$ 糎

由(37)式

$$\Delta P=\frac{h}{\Delta X}=\frac{6.5\times10^{-27}}{10^{-2}}=65.\times10^{-25}\text{ 克糎/秒}$$

$$\therefore \quad \Delta v=\frac{6.5\times10^{-25}}{30}=22.\times10^{-26}\text{ 糎/秒}$$

此數目根本太小.超出測驗準確度以外.

不定原理表示可能學識的限度,自然定律的限度.併非由於測驗儀器之不精.位置與動量之不能同時準確測定,與所用之器具之精與不精毫無關係.其不定之性質,是自然現象.關於此一點,我們應特別注意的.

F.... 不定原理與自由意志(註4,5,6,7,)十年來之物質新概念與哲學有殊大的關係.自牛端以來,人人深信物質之行動完全服從一定的規律.如一物現在之位置與速度.可以準確測定,我們就可以計算其將來的行動.樣樣是有一定的.在事實上,雖難得十分符合,在理論上是一定不易的.尤其在無生物界爲然.凡哲學家如欲主張自由意志學說,不能不承認人類腦中之原子與無生物之原子是不同的.兩種不得一律看待,否則自由意志學說不能成立.

在新物質論上,其情形迴不相同.自由意志之學說不必根據人腦原子與死物原子之異點.原子界之定律多以或然率表之,其行動是偶然的,其數愈多其或然率愈大.就擲骰子而論,何方面在上與何方面在下,我們無從預料.其結果如何,是偶然的,我們只能以或然率表示之.但此一點不能影響到決定論.如我們能明瞭箱中骰子之情形與搖動時用力之方向與大小,我們當然可以用力學定律推算定各骰子各方面之方向.其所謂偶然與或然率不過表示我們之不知其詳情而已.但我們之意不在此一點.十年前之物理學家以爲此種理論上之決定性,適用於各種物質,無

論大小,其理一也.普通物體如是,原子界亦應如是.但新物質概念之特別處,就在此點.假使在理論上沒有準確的限度,如我們可以準確測定現在,就可預算將來.那麽決定論是不錯的.但依不定原理,在理論上,準確程度是有限的.現在的位置與速度,無論儀器精與不精,不能同時準確測定.其將來如何當然不得而知.決定論之失其重要意義,就在此.或說將來我們或者能規劃一準確的定然性的定律,以替代現在不準確的或然性的定律.那麽不定原理就可從此推翻.但,不是如此.此種定律卽使發現,其價值之有無固成問題,然在實驗上永不能證實之:不過紙上的定律;不是自然界的定律.

在另一面而論,許多事是偶然的.對於自由意志學說,形而上學中或有反對之理由,但在物理世界中沒有反對之理由.如人腦原子與死物原子是相同的.且如人之意志以腦中原子之變化爲依歸,腦中原子之行動,旣無從準確測定,則意志在一定範圍內,當有自由之可能.如說腦中原子電子衆多,不下千萬,其個體的行動雖不能定,其羣衆之行動,可依統計原理以定其或然率,其數愈多其或然性愈變爲定然性.關於此一點,當然發生問題.究竟人之意志是根據少數原子抑根據多數原子.我們現在無法決定.或者人之意志可以控制一二樞要原子;此一二原子控制其他原子;於是指揮身上一切行動.現在我們沒有生理學上之確

實證明,無從斷定.總之自物質概念改變後,以前地角天涯的質與靈二問題,漸有統一的趨向.亦爲科學史上之極重要中之一頁,(註 9)

讀者到此,一定發生疑問"究竟物質是顆粒抑是波動?"波與粒之不能同時並立,猶與圓與方之自相矛盾.波耳提倡互補論.波與粒不相矛盾是互相補助.我們舉一簡單譬喻解釋之.設有一個長方形箱子,上面有左右兩孔.各鑲透明玻璃鏡片,箱中置有無數骰子.鏡片上有一不透明的蓋板.可以移動.一次只能蓋一孔:蓋左孔則開右孔;蓋右孔則開左孔.箱子之構造有一特別之點.苟一移動蓋片,箱中骰子隨之而搖動輾轉.當我們開左孔看見孔內骰子上面之數目時,絕對不明瞭右孔內骰子上面之數目.如我們開右孔以觀之,可惜其骰子因蓋片之移動,而輾轉顛倒.景象全變.同時又不能曉得左邊之情形.觀左而右變,觀右而左變.知其一,同時不得知其二,我們只能左右往還看之.其測驗之次數愈多,其預料之或然率愈大.但終不能絕對決定之.假使有人明瞭箱子之機構,曉得蓋片與各骰子的關係,當然可以推算出來左右二孔內骰子上面之數目.但畢竟我們每次只看見一孔內之數目.其第二孔仍是遮蔽.所計算出來的結果,終是紙上空說,不能用實驗以證明之.

在普通眼光看來,此似乎是懦弱科學家之主義.十年前的科學家多有相信"一事不知儒者之恥"之論調.但十年

來態度變更.覺得"知愈多,愈知其不知"與"愈求其決定,愈不定".

或者我們感覺得現在情形,太不完美,物質是粒又不是粒;是波又不是波.似乎根本不合邏輯.或者我們可以將所用的邏輯,再加考慮.我們用亞里士多德的邏輯,其中有所謂排中立定律,凡一陳述 proposition 一定是或不是.一樣東西是存在或不存在.此所謂二價邏輯.(註7)

關於此點羅素曾有下列譬喻

某村中有一理髮匠.他只剃村中一切不自剃的人,那麼究竟此理髮匠自剃抑不自剃呢?

此問題的解答,就是他自剃亦不自剃.

如果三價邏輯是可能的,那麼如果我們說"物質是波亦不是波是粒亦不是粒"亦不是太難懂的.

丑……結論與摘要 照上文看來,物質新概念與舊概念根本不同.愛丁頓說:(註8)

"十九世紀造物者是一個工程師.二十世紀造物者是一個數學家",

依舊的物質論,物質是實實在在的,可以用機械模型解釋的.現在變成比較抽象的,空空洞洞的.不能用機械模型表示的.但須用抽象的數學符號以解釋的.且只能曉得其或然性,而不能曉得其定然性.其物理上具體意義,既"不可以意會,更不可以言傳."我們可以舉其重要之點用通俗的

方法列之於次:

(1)質可變爲能,能可變爲質.

(2)質之波粒兩"矛盾性"只能以抽象的數學符號 ψ (Psi) 解釋之.ψ 之自乘 $(\psi,\overset{*}{\psi})$ 表示電子所在的或然率,

(3)在原子世界中,位置與速度(動量)是不能同時準確測定的.其不能之原因,不是由於所用儀器之不精,是由於自然界定律的限制.

(4)卽使我們能規劃定然性的定律出來,在實驗上亦無法可以證實之.

(5)自由意志學說,在物理學上,不能反對的.

(6)依新物質論,質與靈似有統一的趨向.

本文參考用書

註 1 Richtmyer—Introduction to Modern Physics 2nd Ed. Wave Theory of Matter 1934

註 2 Darrow—Elementary Notions in Quantum Mechanics, Review of Modern Physics, Jan. 1934

註 3 片山正夫—量子與化學(鄭貞文譯)

註 4 Darwin—The New Conception of Matter. 1932

註 5 Thomson—The Atom. 1930

註 6 Wilson—The Mysteris of the Atom. 1934

註 7 Lindsay—Where is Physic Going. Scientific Monthly, Mar. 1934

註 8 Eddington—The Nature of the Physical World. 1927

註 9 Jeans—The New World Picture of Modern Physics. Nature p 345 — 1934.

人功蛻變原子與人功放射原素

葛 正 權

原子蛻變之現象,可分爲自然破裂與人功破裂二種.自然破裂之原子稱爲放射原素,計有釷系,鈾系,錒系,均經十次以上之蛻變,成爲鉛之同位素(Isotope).其間平均壽命之長短極不一致,有數萬萬年者,有數日者,有數分鐘者亦有數秒鐘者,更有十萬分之一秒鐘者.各視其原子核之組織穩固與否而定.此種蛻變純出于原子核內部團結力之變化,非一切外力所能制止或促進.故稱爲原子核之自然破裂.

人功破裂之原子,則以實驗室內之方法,使一種原子蛻變爲他種原子.羅斯福[1](Rutherford)漆飛[2](Chadwick)及白郎開脫[3](Brackett)等先以鐳或釷射出之 α 微粒衝擊其他原子核如硼(B)氮(N)氟(F)鈉(Na)鋁(Al)及磷(P)等較輕原素均呈蛻變現象.次則可克窠羅夫[4](Cockcroft)與華爾東(Walton)及羅藍斯[5]等,(Laurence)始以高速度之質子(Proton)衝擊其他原素,而使之蛻變,近一二年來復以新發現之中和子(Neutron)及重氫核(Diplon)爲破裂各種原子核之有效工具,而人功蛻變原子之成績,遂爲研究物理化學者所樂道,亦即爲探

知原子核內部組織最直接之方法.

人功放射原素 (Artificol. Radio-active substance) 爲人功蛻變原子之不穩固者.其現象與自然放射原素相似.或放射 β 綫,或放射 α 綫,更有放射正電子 (positron)或中和子者.其平均壽命之長短亦極不一致,有數日者'有數十分鐘者,亦有數秒鐘者.本篇所述先序其理論上之演進,次述其實驗之結果,後將實驗之結果加以解釋,藉以明瞭原子核內組織之大概而已.

(一)人功蛻變原子理論上之演進

水銀變金之說,久爲方士欺世之談,然以今日科學之進步,略知原子核內之組織,又見原子之自然蛻變,則人定勝天,當可以人功之法,使原子改變其性質也.以下各節先說明其簡單理論如次.吾人已知各原子之性質,全視其原子核外之電子數及其分佈而異.然此又隨其原子核內所含之質子數(Mass number)及電荷數(Charge number or atomic number)而不同.故欲原子改變其化學及物理之性質時,勢必使原子核內增減其電荷數不爲功.因思 α 微粒由放射物質內射出,其速度高出于最快之槍彈二萬倍,其動能與同質量之槍彈相較,且四千萬倍之.以此擊射他種原子核,似宜無堅不破,然以二者電場力之推拒,亦不能使 α 微粒與較重之原子核相接近.遇有較輕者,則如二彈性球相擊而已.至與輕之原子核相遇,始呈破裂之現象.茲先述二彈性球相

擊(Elastic impact)之原理,以便辨別原子核破裂之現象.若一球之質及速度爲 M 及 V 衝擊他球之質 m 時,衝擊後則 V 變爲 V' 而 m, 球被擊而得速度 v, 依運動量及動能不滅之原理,得以下二式

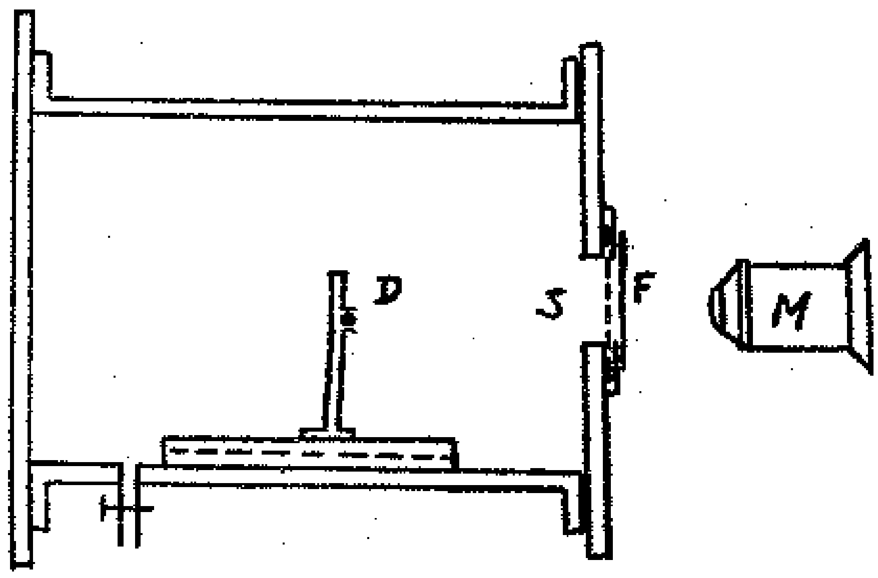
$$MV=MV'+mv$$

$$\tfrac{1}{2}MV^2=\tfrac{1}{2}MV'^2+\tfrac{1}{2}mv^2$$

消去 V' 則得　$$v=\frac{2M}{m+M}V \qquad (1)$$

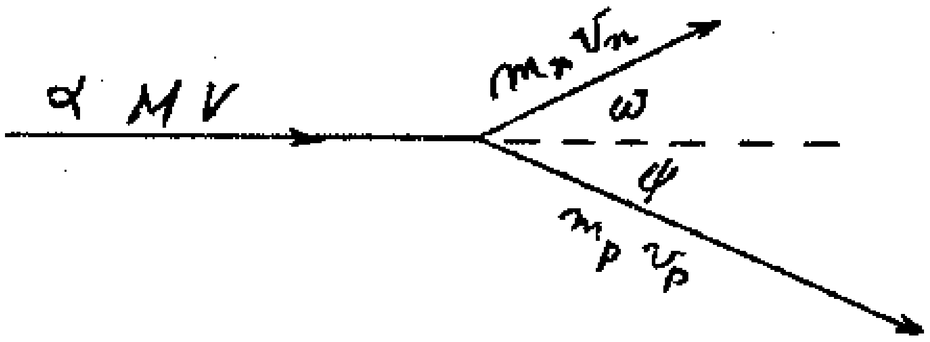
設以 α(卽 M) 擊氫之原子核 (m) 則 $M=4m$, 代入上式則得 $v=1.6\,V$, 爲氫原子核被擊後之速度.意卽謂氫原子核被擊後之速度爲 α 之初速度1.6倍.實驗者每以 α 微粒透射空氣之厚薄,表其速度之高低,例如由 RaC 所射出之 α 微粒,每秒鐘爲 1.922×10^9 糎.在空氣中之射程(Range)爲7糎.而氫原子核被擊後之速度,依(1)式爲每秒 $1.6V=3.08\times10^9$ 糎,其射程爲32糎.則以 α 微粒衝擊氫氣時,所發現之32糎射程之微粒.卽可斷定其爲氫原子核被擊後之行程.羅斯福[1]于1919年曾作第一次人功破裂原子核之實驗.其儀器之裝置甚簡單.如圖(一) D 爲鐳, S 爲箱之開

圖(一)



口處,F 為螢光幕,M 為顯微鏡,S 與 F 之間可插入雲母片,以增減其相當之射程,如此裝置,則箱內之氣體被 α 微粒衝擊後之情形可于螢光幕上探知之,當羅斯福以氮氣(N)引入箱內時,雖 D 與 F 間之射程大于29糎,亦見有無數螢光發光.若將氮氣取出,而代以氧(O).或二氧化炭時,則螢光不復見.由此可知氧與炭之原子核未曾破裂,而氮之原子核已被 α 微粒擊破,而射出他種微粒以電磁場之方法測定其 $\frac{e}{m}$ 之值,證明其為氫之原子核 H_1^1 (後稱質子)。P 因此斷定氫之原子核,實由氮原子中破裂而來.而氮原子何以破裂?則其為鐳所放射之 α 微粒擊破,可無疑義.自 1921 至 1922 羅斯福與漆飛[2]改良其方法,竟于射程40糎處,得射出之質子甚多,證明硼(B)氮(N)氟(F)鈉(Na)鋁(Al)及磷(P)等六種原素均被 α 微粒擊破,且發現質子向各方面飛散,更足為原子破裂之左證.自 1922 至 1924 羅斯福與漆飛[6]乃發現氖(Ne)鎂(Mg)硅(Si)硫(S)氯(Cl)氬(Ai)及鉀(K)等可以鐳$(Ra\ C+D)$射出之 α 微粒擊破之.同時德人(Kirsch)與(Petterson)亦證明鍇(Sc)釩(Va)及鈷(Co)均可以 α 微粒破裂之.然以上所述之方法僅能證明原子核之破裂與否,而無從探知其 α 與原子核相撞後之行動.白郎開脫(Blackett)[8]及赫根(Harkin)[9]曾于 1923 至 1928 之間,用韋爾遜(Wilson Cloud Chamber)之雲箱照相法,攝取 α 與氮原子核相撞時之影像.由白氏實驗之結果,乃知人功破裂原子之事,雖屬可能,然其機會則絕少.約

言之,即一百萬個 α 之射影中,僅見有20個破裂原子核之影像.就此數個破裂原子核之影像而研究之,乃知 α 微粒射入氮原子核後,遂留在氮原子核內不復出,並知其破裂後質子射出之方向,與 α 及原子核之方向均在一平面內,故知其運動量(Momentum)並不消滅.如圖(二)M,V 為 α 微粒之質量及速度,m_n,v_n 為氮原子核被擊後之質量及速度.m_p,v_p 為氮原子核破裂後射出質子之質量及速度.若以 ψ 及 ω 表其偏斜之角度.依運動量不滅之定理,得以下二式



(圖二)

$$\left.\begin{aligned} m_p v_p \sin\psi - m_n v_n \sin\omega &= o \\ m_p v_p \cos\psi + m_n v_n \cos\omega &= MV \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2)$$

由此可以求得

$$m_p v_p = MV \frac{\sin\omega}{\sin(\psi+\omega)} \cdots\cdots (3_a)$$

$$m_n v_n = MV \frac{\sin\psi}{\sin(\psi+\omega)} \cdots\cdots (3_b)$$

白郎開脫由雲箱照相攝取原子核破裂後射出之行徑,則 ω 及 ψ 二角可以測定.依式計算所得之 v_p,與羅斯福實驗方法(圖一)所得之結果相合,依 (3_b) 式更可測定 v_n 之值,而斷定原子核破裂後,蛻變為何種原子(m_n)也.

以 α 微粒衝擊其他原子核時,則 α 微粒或留在原子核內,或不留在原子核內.全視其被擊之原子核內組織如何而定.如留在原子核內,則原子核蛻變後,或吸收 α 之動能,或放射原子核內之能量.其能量之支配,可以下式表之.

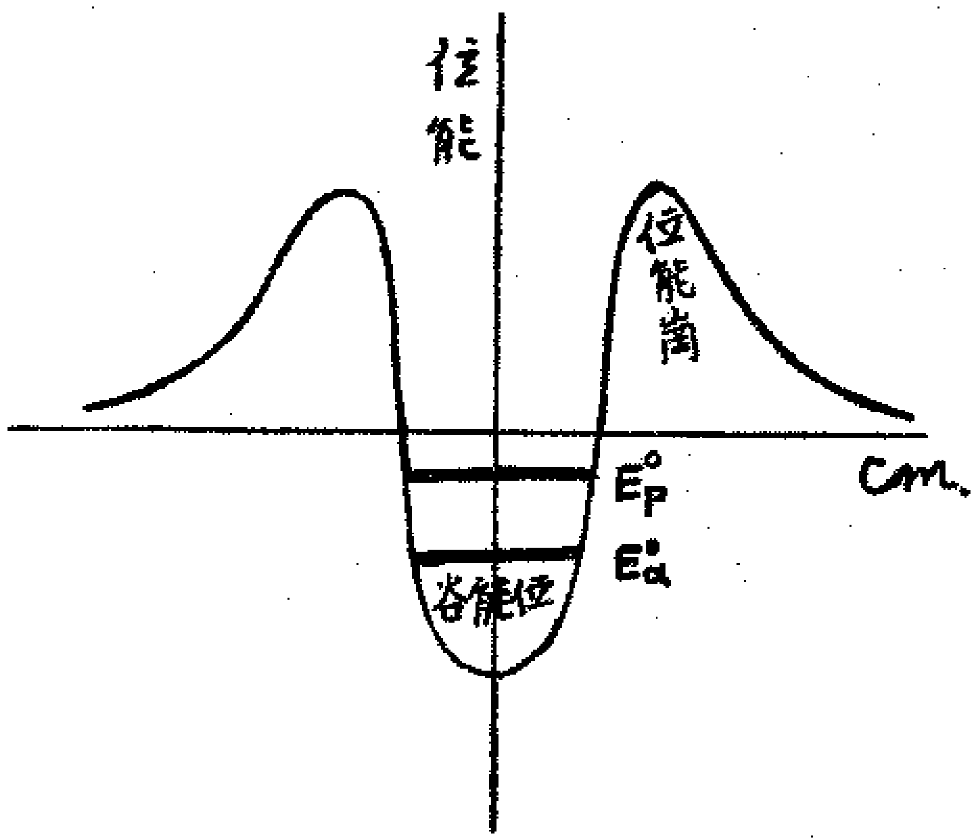
$$\tfrac{1}{2}m_p v_p^2+\tfrac{1}{2}m_n v_n^2=\tfrac{1}{2}MV=Q \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

設 Q 為原子核破裂時放出之能量,則上式應取正號.合 (2) 與 (4) 三式而解之,得

$$Q=\frac{1}{2m_n}\left\{m_p v_p^2(m_p+m_n)-MV^2(m_n-M)-2MVm_p v_p\cos\psi\right) \quad\cdots\cdots (5)$$

上式右邊各項,均為已知,故 Q 之值易于測定.

原子核內之組織如何,現時尚未十分明瞭,然 α 與 p 之在核內,均有一定之能階,如圖(三)表原子核內位能之分布.E°_{p} 為質子在位能谷(potential Valley)內之能增.E_α 為 α 射入原子核時之動能,E°_{α} 為 α 停留在位能谷內之能增.則原子核破裂時所放之動能,可如上式表之如次



(圖　三)

$$\tfrac{1}{2}m_n v_n^2+\tfrac{1}{2}m_p v_p^2$$
$$=\tfrac{1}{2}MV^2+Q$$
$$=E_\alpha+E^{\circ}_{\alpha}-\ {}_{p}$$

$Q=E^{\circ}_{\alpha}-E^{\circ}_{p}$ 為原子核

內放出之能量,然此能量必由物質變換而來.當可依相對論中之質能交換原理 $mc^2=E$ 計算得之.此卽所謂原子核之緊束效應也(mass defect).例如1932可克寬羅夫(Cockcroft)與華爾東(Walton)以高速度(300,000 e Volt)之質子衝擊鋰之原子,其蛻變之結果爲氦,以式表之如次,

$$Li^{7}_{3}+H^{1}_{1}\rightarrow 2He^{4}_{2}$$

其指數表質子數,下角數字表電荷數.由愛斯童(Aston)質譜儀(mass spectrograph)之測定,而知其『緊束效應』每克原子(gram atom)爲.0188克,卽

$$Li+H-2He=7.013+1.0078-2\times4.001=0.0188$$

其放出之能量每.7013克鋰,盡蛻變爲氦時,當爲 $.0188\times9\times10^{20}$ ergs, 或 1.69×10^{9} Kilojoules.若以每克炭之燃燒熱爲2200 Cal.計算,適與16000噸炭相當.每克原子之數既爲 6.06×10^{23},則一鋰原子與一氫原子蛻變爲二氦原子時放出之能量,應爲

$$1.69\times10^{19}\times\frac{1}{6.06\times10^{23}}=2.8\times10^{-5}\ \text{ergs}$$

或

$$\frac{2.8\times10^{-5}}{1.59\times10^{-12}}=17\times10^{6}\ \text{e. volts.}$$

此卽爲 Q 之値,加入質子衝擊之動能, 0.3×10^{6} (e. Volt)約共 18×10^{6} (e. Volt) 設以此能量爲二個氦原子平均分配,則每個應得 9×10^{6} (e. Volt) 與實驗所得之結果,適相符合.故上式之蛻變認爲合理.

人功蛻變之原子,其數量既微,若欲以化學之方法,分析

其蛻變後之結果,實覺非常困難.故不如依質能交換之原理,計算其衝擊前後之能量與質量,藉以斷定蛻變後爲何物也.玆再舉一例如下式

$$B_5^{11} + He_2^4 \rightarrow N_7^{14} + n_0^1$$

卽以 α 微粒衝擊硼之原子核時,則蛻變爲氮與中和子.中和子旣不帶電荷,又無化學作用,惟有依下式計算其質而認識之.

$$B_5^{11}\text{之質} + He_2^4\text{之質} + He_2^4\text{之動能}$$

$$= N_7^{14}\text{之質} + n_0^1\text{之質} + N_7^{14}\text{之動能} + n_0^1\text{之動能}$$

由愛斯童之測定,已知

$$B_5^{11} = 11.00825,\quad He_2^4 = 4.00106 \quad N_7^{14} = 14.0042$$

由質能關係,以克原子計算 $m = \frac{E}{AC^2}$ 則知

與 He_2^4 動能相當之質爲　.00565

與 N_7^{14} 動能相當之質爲　.00061

與 n_0^1 動能相當之質爲　.00350

代入上式得 n_0^1 之質量爲 1.0067. 漆飛[(10)]近更精測 n_0^1 之值爲 1.0070±.0005.故斷定中和子與質子之質量相近.

(二)最近實驗之結果

一九三二年以前,人功破裂原子核之實驗,均以放射原

素所發射之 α 微粒,爲擊破原子核之工具,此猶藉天然放射之能,以攻天然造成之原子.可克寬羅夫與華爾東[4]始以實驗室方法之高速度質子,擊射各種原子.其實驗之成功實爲驚人之創舉,茲略述其結果如下.

$$Li^{7}_{3} + {}_{1} \qquad e^{4}_{2}$$

$$F^{19}_{9} + H^{1}_{1} \rightarrow O^{16}_{8} + He^{4}_{2}$$

$$Na^{23}_{11} + H^{1}_{1} + Ne^{20}_{10} \qquad {}^{4}$$

$$K^{39}_{19} + H^{1}_{1} \rightarrow A^{36}_{18} + He^{4}_{2}$$

以實驗室方法之高速度質子,衝擊其他原子核時,其優點計有三端(1)電流較强,一千分之一安培(Ampere)卽可當 180 克鐳所發之 α 微粒數.(2)速度可隨意增減,且無同時放射 β 及 γ 綫之應響.(3)以質子擊射時,其穿入原子核內之機會較多,根據以上理由,故研究人功破裂原子核者,莫不努力于增進高速度質子之方法,其中最著者,如美國羅藍斯[5](Lawrence)曾于 1932 年得一百二十萬伏特(e: Volt)之高速度之質子,用以破裂原子核之實驗,至 1933 年復以一百三十三萬伏特之重氫核[11]衝擊鋰(*Li*)氮(*N*)及鈹(*Be*)炭(*C*)金(*Au*)鉑(*Pt*)銅(*Cu*)等均呈破裂之現象,射出 α 微粒.其蛻變之作用,可舉例如下

$$N^{14}_{7} + H^{2}_{1} \rightarrow C^{13}_{6} + He^{4}_{2}$$

$$Li^{6}_{3} - H^{2}_{1} \rightarrow He^{4}_{2} + He^{4}_{2}$$

1934 年羅斯福[12]亦以高速度之重氫核衝擊重氫核而得二種不同之蛻變

$$H^{2}_{1} + H^{2}_{1} \rightarrow He^{4}_{2} \rightarrow He^{3}_{2} + n^{1}_{0}$$

$$H^{2}_{1} + H^{2}_{1} \rightarrow He^{4}_{2} \rightarrow H^{3}_{1} + H^{1}_{1}$$

前者成爲氦原子核後,卽蛻變爲氦之同位素與中和子.後者成爲氦原子核後,卽蛻變爲氫之同位素與質子,其現象與自然蛻變之原素相似.

以上所舉人功破裂原子之工具,有放射原素射出之 α 微粒及高速度之質子,與重氫核三種,此外尙有利用放射原素之 α 微粒衝擊硼或鈹所發出之高速度中和子,轉以擊射他種原素者.硼 (*B*) 與,鈹 (*Be*) 被擊時所發出之中和子,其作用可表之如下.

$$B^{11}_{5} + \alpha^{4}_{2} \rightarrow N^{14}_{7}\ n^{1}_{0}\nearrow$$

$$Be^{9}_{4} + \alpha^{4}_{2} \rightarrow C^{12}_{6} + n^{1}_{0}\nearrow$$

1934 年浮美 (E. Fermi)[13] 等曾以中和子衝擊 92 種原素,自氫至鈾乃發見大多數原子核被中和子擊射後成爲人功放射原素(Artifical Radio-active substances) 例如氟 (*F*) 加一中和子卽成爲氦與氮,此氮爲人功放射原素,轉卽射出 β 綫蛻變爲氧.其半量期 (half value period) 僅及 9 秒鐘,又如鎂(*Mg*) 加一中

和子,卽成爲鈉與氫,此鈉爲人功放射原素轉卽射出 β 綫復變爲鎂,其半量期有40秒鐘,與 15 點鐘二種.茲舉其最確定之結果,以式表之如次,記有星號者均係人功放射原素,其半量期各注于後.

(a) $F^{19}_{9} + n^{1}_{0} \rightarrow He^{4}_{2} + {}^{*}N^{16}_{7}$

蛻變之半量期(9s.) $N^{16}_{7} \rightarrow O^{16}_{8} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow$

(b) $Mg^{24}_{12} + n^{1}_{0} \rightarrow H^{1}_{1} + {}^{*}Na^{24}_{11}$

(15 hrs) $Na^{24}_{11} \rightarrow Mg^{24}_{12} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow$

(c) $Al^{27}_{13} + n^{1}_{0} \rightarrow He^{4}_{2} + {}^{*}Na^{24}_{11}$

(15 hrs) $Na^{24}_{11} \rightarrow Mg^{24}_{12} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow$

(d) $Si^{28}_{14} + n^{1}_{0} \rightarrow H^{1}_{1} + {}^{*}Al^{28}_{13}$

(3 $m.$) $Al^{28}_{13} \rightarrow Si^{28}_{14} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow$

(e) $P^{31}_{15} + n^{1}_{0} \rightarrow H^{1}_{1} + {}^{*}Si^{31}_{14}$

(3 hrs) $Si^{31}_{14} \rightarrow P^{31}_{15} + e^{-}\nearrow$

(f) $S^{32}_{16} + n^{1}_{0} \rightarrow H^{1}_{1} + {}^{*}P^{32}_{15}$

(13 days) $P^{32}_{15} \rightarrow S^{32}_{16} + e^{-}\nearrow$

(g) $Cl^{35}_{17} + n^{1}_{0} \rightarrow He^{4}_{2} + {}^{*}P^{32}_{15}$

(13 days) $P^{32}_{15} \rightarrow S^{32}_{16} + e^{-}\nearrow$

(h) $\quad {}_{24}Cr^{52} + {}_{0}n^{1} \to {}_{1}H^{1} + {}^{*}{}_{23}V^{52}$

$$(4\ m.) \qquad {}_{23}V^{52} \to {}_{24}Cr^{52} + e^{-}\nearrow$$

(i) $\quad {}_{25}Mn^{55} + {}_{0}n^{1} \to {}_{2}He^{4} + {}^{*}{}_{23}V^{52}$

$$(4\ m) \qquad {}_{23}V^{52} \to {}_{24}Cr^{52} + e^{-}\nearrow$$

(j) $\quad {}_{26}Fe^{56} + {}_{0}n^{1} \to {}_{1}H^{1} + {}^{*}{}_{25}Mn^{56}$

$$(150m.) \quad {}_{25}Mn^{56} \to {}_{26}Fe^{56} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow$$

(k $\quad {}_{27}Co^{59} + {}_{0}n^{1} \to {}_{2}He^{4} + {}^{*}{}_{25}Mn^{56}$

$$(150m) \quad {}_{25}Mn^{56} \to {}_{26}Fe^{56} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow$$

(l) $\quad {}_{33}As^{75} + {}_{0}n^{1} \to {}^{*}{}_{33}As^{76} \to {}_{34}Se^{76} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow \quad$ (1 day)

(m) $\quad {}_{35}Br^{79} + {}_{0}n^{1} \to {}^{*}{}_{35}Br^{80} \to {}_{36}Kr^{80} + e^{-}\nearrow \quad$ (30 m.)

$\quad {}_{35}Br^{81} + {}_{0}n^{1} \to {}^{*}{}_{35}Br^{82} \to {}_{36}Kr^{82} + e^{-}\nearrow \quad$ (6 hrs)

(n) $\quad {}_{53}I^{127} + {}_{0}n^{1} \to {}^{*}{}_{53}I^{128} \to {}_{54}Xe^{128} + e^{-}\nearrow \quad$ (30 m.)

(o) $\quad {}_{92}U^{238} + {}_{0}n^{1} \to {}^{*}{}_{92}U^{239} \to {}_{93}X^{239} + e^{-}\nearrow + \gamma\nearrow \quad$ (15 m.)

$(o)_1$ $\quad {}_{92}U^{238} + {}_{0}n^{1} \to {}^{*}{}_{93}X^{239} + e^{-}\nearrow \qquad {}^{*}{}_{93}X^{239} \to {}_{93}U^{239} + e^{+}\nearrow + \gamma\nearrow$

由浮美等實驗之結果,可知以高速度之中和子,衝擊各種原子核時,無論輕原素與重原素,均將中和子吸收在原子核內,然後呈破裂現象,蛻變爲他種不穩固原子.蓋中和子既不帶電荷,則其穿入他種原子核之電場時,固無關于

原素之輕重,與其電場之强弱也.惟原子核破裂後,所發出之微粒,在輕原素爲氫原子核,或氦原子核,均帶電荷者.在重原素因其原子核之位能閾(potential Barrier)(圖三)較高.帶電荷之物不能射出,故以上舉例自 a 至 k 與自 l 至 o 截然不同.浮美等曾以化學分析之方法,斷定 $l\ m\ n$ 三例之放射原素.爲其同位素 As^{76}_{33}, Br^{80}_{35}, Br^{82}_{35} 及 I^{128}_{53} 惟最後一例未能斷定其爲 U^{239}_{92} 或未知原素 X^{239}_{93}.若 l 與 o 二例之蛻變,亦如前例射出一質子時,則應如下式

$$(l)_1 \qquad As^{75}_{33} + n^{1}_{0} \rightarrow {}^*Ge^{75}_{32} + p \qquad {}^*Ge^{75}_{32} \rightarrow As^{75}_{33} + e^{-}\nearrow$$

$$(o)_2 \qquad U^{239}_{92} + n^{1}_{0} \rightarrow {}^*Pa^{238}_{91} + p \qquad {}^*Pa^{238}_{91} \rightarrow U^{238}_{92} + e^{-}\nearrow$$

其放射原素爲 Ge^{75}_{32} 與 Pa^{238}_{91}, 然實驗之結果,並無質子射出,而放射原素,亦經浮美等確實證明其非是.

總上所述,關于人功裂破原子核之實驗莫非以高速度之 He^{4}_{2}, H^{2}_{1}, H^{1}_{1} 或 n^{1}_{0} 衝擊各種原子.結果則原子核破裂而蛻變爲他種原素或其同位素.當蛻變時射出之物,則不外 He^{4}_{2}, H^{1}_{1}, n^{1}_{0}, e^{-} 或 e^{+} 等五種.茲以鋁與鎂爲例,說明其各種蛻變之作用如下.

$$(A) \qquad Al^{27}_{13} + He^{4}_{2} \rightarrow Si^{30}_{14} + H^{1}_{1}\nearrow$$

$$(B) \qquad Al^{27}_{13} + He^{4}_{2} \rightarrow P^{30}_{15} + n^{1}_{0}\nearrow$$

$$(C) \qquad Al^{27}_{13} + H^{1}_{1} \rightarrow Mg^{24}_{12} + He^{4}_{2}\nearrow$$

$$(D)\quad {}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{27}_{12}Mg + {}^{1}_{1}H\nearrow$$

$$(E)\quad {}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{*}{}^{24}_{11}Na + {}^{4}_{2}He \qquad {}^{*}{}^{24}_{11}Na \rightarrow {}^{24}_{12}Mg + e^{-}\nearrow$$

$$(F)\quad {}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{*}{}^{28}_{13}Al \rightarrow {}^{28}_{14}Si + e^{-}\nearrow$$

$$(G)\quad {}^{26}_{12}Mg + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{*}{}^{28}_{13}Al \leftarrow {}^{28}_{14}Si + e^{-}\nearrow$$

$$(H)\quad {}^{24}_{12}Mg + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{*}{}^{27}_{14}Si + {}^{1}_{0}n\nearrow \qquad {}^{*}{}^{27}_{14}Si \rightarrow {}^{27}_{13}Al + e^{-}\nearrow$$

以上所舉之例,(A)式先後由 Chadwick,[14] Duncan與Miller[15] 證明.(C)式則由 Cockcroft 與 Walton[4] 證明,(D),(E)(F)三式根據 Fermi[13] 等實驗之結果.(G)式由 Lawrence[16] 證明.(B)與(H)二例則係 Ellis 與 Henderson[17] 實驗之結果.

(三)實驗結果之解釋

凡自然放射之原素,射出一 α 微粒者,則原子量減 4,而原子序數退 2.射出 β 綫者則原子量不變,而原子序數進一.因 α 微粒,係由四質子與二電子所合成,β 綫卽係電子,故前時均以爲原子核之基本組織爲質子與電子二種,卽世間一切物質,均由此二種基本組織而成.然以原子核體量之小,在理論上實不能容如許之電子.故1932年波耳(Bohr)在羅馬開學會時,卽宣言『一般人以電子爲帶電荷之小球形之觀念,亟應更正.』漆飛先以中和子爲一質子與一電子所組成,尙以質子爲原子之基本組織.然由 Lewis, Levingstsn 與 Lowrence[18] 及 Kurie[19] 實驗之結果,與量子力學之理

論,遂改變其主張,當 1933 年在 Bakerrian 演講時,則以中和子爲原子之基本組織,而以質子爲一正電子與一中和子所組成.自重氫核發現後,復由羅藍斯及羅斯福[12]實驗之結果,而知

$$(I)\qquad {}^{2}_{1}H = p+n$$

$$(J)\qquad {}^{4}_{2}\alpha = {}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H = \overline{p+n} + \overline{p+n}$$

$$(K)\qquad {}^{6}_{3}Li = {}^{4}_{2}\alpha + {}^{2}_{1}H = (\overline{p+n}+\overline{p+n}) + \overline{p+n}$$

故原子核之基本組織,實爲中和子,已無疑義.

關于正電子之發生,白郎開脫曾于 1933 年在 Leicester 開會時 (British Association Meeting at Leicester P.M.S.)宣稱係光電效應,與尋常所得之光電子,同一作用.今試以鉒 C' 發出之 γ 綫,其能爲 2.65×10^{6} (e. Volt)射于鉛上,則正電子與負電子同時發出.而正電子佔總數百分之七.若以此 γ 綫射于鋁片上,則無正電子發生.然以 5×10^{6} (e.volts,)較強之 γ 綫射于鉛上,則有百分之 35 之正電子發生,射于鋁上則有百分之十之正電子.射于鈾上則有百分之四十正電子.潘林 (Perrin) 已證明,凡二微粒衝擊時,動者爲 M_1,靜者爲 M_2,若 M_1 之動能大于 $2mc^2(\frac{m+M_1+M_2}{M_2})$ 時,可產生正負電子對 (e^-+e^+).上式中之 m 爲電子之質量,c 爲光之速度.$2mc^2=1.02\times10^{6}$(e. volts,)若將 m 略去,則最少限度之動能,需 $\frac{M_1+M_2}{M_2}\times10^{6}$ $e.v.$ 方能產生正負電子對.設以 α 衝擊硼之原子核 (B) 時,則其最少之

動能需

$$2mc^2\left(\frac{M_1+M_2}{M_2}\right)=\frac{10+4}{10}\times10^6=1.5\times10^6\ e.v.$$

依上式與實驗之結果,則產生正負電子對所需之動能,與原子量(M_2)成反比,(Bethe)與(Hetler)[20]近更作數理上之研究,以e^-之能位在原子核內爲負值,$E=-|E|$(State of negative energy)(見圖三)則以γ綫擊盪原子核時,依光電效應,則射出一正電子e^+,其能量爲$E_0=hv-|E|$當γ綫完全被原子核吸收而產生正負電子對時,則

$$hv=E+E_0$$

反之則射出γ綫,而e^-與e^+相消,e^-仍陷入負能位,射出之γ綫仍有能量hv.此種理論已經多方證明,如以上所舉2.65×10^6 e.v.之γ綫,射于鉛上時,乃得正電子之最大動能爲1.7×20^5 e.v.今試以質能關係$(m_++m_-)C^2=2mc^2$計算之,則$2mc^2=1.02\times10^6$ e.v.意即以γ綫產生一正負電子對時,需1.02×10^6 e. v.其剩餘之能量爲$(2.65-1.02)\times10^6=1.63\times10^6$ e. v.即正電子之最大動能當不能超過1.63×10^6 e.v.此與實驗之結果,適相符合.

Walke[22]因提議正電子不能在原子核內單獨存在,必須與中和子組合成爲一質子.而質子又不能單獨游離于原子核中,必須再與一中和子組合成爲一重氫核.故重氫核乃爲各種原子核中基本組織之一.又依實驗之結果,乃知二重氫核組合成爲一α微粒.故α微粒實爲各種原子核中最穩固之基本組織.

以下卽本此意,解釋前舉各例,自 A 至 H 說明人功蛻變原子之作用.自 a 至 o 說明人功放射原素之起因.括號〔〕之內者,表原子核心中之最堅固部分.括號()之內者,表原子核心周圍較易破裂之部分.以 p 代質子,$\overline{p+n}$ 代重氫核,α 代氦原子核.則前舉各例可釋之如下.

$$(A)'\quad Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+\alpha\rightarrow Si^{30}_{14}\left\{[7\alpha]+(n+n)\right\}+p$$

$$(B)'\quad Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+\alpha\rightarrow P^{30}_{15}\left\{[7\alpha]+\overline{p+n}\right\}+n$$

$$(C)'\quad Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+P\rightarrow\left\{[\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n})\right\}$$

$$\rightarrow Mg^{24}_{12}\left\{[6\alpha]\right\}+\alpha$$

$$(D)'\quad Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+n\rightarrow Mg^{27}_{12}\left\{[6\alpha]+3n\right\}+p$$

$$(E)'\quad Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+n\rightarrow {}^{*}Na^{24}_{11}\left\{[5\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n}+e^{-}\right\}+\alpha$$

$$^{*}Na^{24}_{11}\rightarrow Mg^{24}_{12}\left\{[6\alpha]\right\}+e^{-}\nearrow$$

$$(F)'\quad Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+n\rightarrow {}^{*}Al^{28}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n})+e^{-}\right\}$$

$$^{*}Al^{28}_{13}\rightarrow Si^{28}_{14}\left\{[7\alpha]\right\}+e^{-}\nearrow$$

$$(G)'\quad Mg^{26}_{12}\left\{[6\alpha]+2n\right\}+\overline{p+n}\rightarrow {}^{*}Al\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n})+e^{-}\right\}$$

$$^{*}Al^{28}_{13}\rightarrow Si^{28}_{14}\left\{[7\alpha]\right\}+e^{-}\nearrow$$

$$(H)'\quad Mg^{26}_{12}\left\{[6\alpha]\right\}+\alpha\rightarrow {}^{*}Si^{27}_{14}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+p^{*})\right\}+n$$

$$^{*}Si^{27}_{14}\rightarrow Al^{27}_{13}\left\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\right\}+e^{+}\nearrow$$

(A)′(B)′(D)′三式爲核心周圍之重氫核破裂,或中和子射出之證.(C)′爲質子不能在原子核內單獨存在,必須與中和子組合成爲重氦,及二重氦核成爲一 α 微粒之證.(E)′(F)′(G)′說明正負電子對產生之方法,(H)′可以說明原子核內,如有單獨游離之質子存在,卽爲不穩固之原子核,必呈放射現象,而蛻變爲穩固之原子.由此可知原子核內之基本組織,絕不能僅視其蛻變時射出爲質子,電子,或正電子,遂信其基本組織爲質子與電子也.人功放射原素之來源,不一而足,如(F)′(G)′(H)′三式所示以中和子,重氫核或 α 微粒衝擊各種原素均可得之.前舉浮美等實驗之結果,因其精確可靠,故不殫繁雜逐一說明之如下.

$$(a)'\quad F^{19}_{9}\Big\{[4\alpha]+(\overline{p+n}+n)\Big\}+n\rightarrow\Big\{[4\alpha]+(\overline{p+n}+2d+e^{+}+e^{-})\Big\}$$

$$\rightarrow{}^{*}N^{16}_{7}\Big\{[4\alpha]+e^{-}\Big\}+\alpha$$

$$^{*}N^{16}_{7}\rightarrow O^{16}_{8}\Big\{[4\alpha]\Big\}+e^{-}\nearrow$$

$$(b)'\quad Mg^{24}_{12}\Big\{[6\alpha]\Big\}+n\rightarrow\Big\{[6\alpha]+(n+e^{-}+e^{+})\Big\}$$

$$\rightarrow{}^{*}Na^{24}_{11}\Big\{[6\alpha]+e^{-}\Big\}+p$$

$$^{*}Na^{24}_{11}\rightarrow Mg^{24}_{12}\Big\{[6\alpha]\Big\}+e^{-}\nearrow$$

$$(C)'\quad Al^{24}_{13}\Big\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+n)\Big\}+n\rightarrow\Big\{[6\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n})+e^{-}\Big\}$$

$$\rightarrow{}^{*}Na^{24}_{11}\Big\{[6\alpha]+e^{-}\Big\}+\alpha$$

$$^*Na^{24}_{11} \to Mg^{24}_{12}\left\{[6\alpha]\right\} + e^{-}\nearrow$$

(d)′ $$Si^{28}_{14}\left\{[7\alpha]\right\} + n \to {}^*Al^{28}_{13}\left\{[7\alpha] + e^{-}\right\} + p$$

$$^*Al^{28}_{13} \to Si^{28}_{14}\left\{[7\alpha]\right\} + e^{-}\nearrow$$

(e)′ $$P^{31}_{15}\left\{[7\alpha] + (\overline{p+n}+n)\right\} + n \to Si^{31}_{14}\left\{[7\alpha] + (\overline{p+n}+n+e^{-})\right\} + p$$

$$^*Si^{31}_{14} \to P^{31}_{15}\left\{[7\alpha] + (\overline{p+n}+n)\right\} + e^{-}\nearrow$$

(f)′ $$S^{32}_{16}\left\{[8\alpha]\right\} + n \to {}^*P^{32}_{15}\left\{[8\alpha] + e^{-}\right\} + p$$

$$^*P^{32}_{15} \to S^{32}_{16}\left\{[8\alpha]\right\} + e^{-}\nearrow$$

(g)′ $$Cl^{35}_{17}\left\{[8\alpha] + (\overline{p+n}+n)\right\} + n \to {}^*P^{32}_{15}\left\{[8\alpha] + e^{-}\right\} + \alpha$$

$$P^{32}_{15} \to S^{32}_{16}\left\{[8\alpha]\right\} + e^{-}\nearrow$$

(h)′ $$Cr^{52}_{24}\left\{[12\alpha] + 4n\right\} + n \to {}^*V^{52}_{23}\left\{[12\alpha] + (4n+e^{-})\right\} + p$$

$$^*V^{52}_{23} \to Cr^{52}_{24}\left\{[12\alpha] + 4n\right\} + e^{-}\nearrow$$

(i)′ $$Mn^{55}_{25}\left\{[12\alpha] + (\overline{p+n}+5n)\right\} + n \to {}^*V^{52}_{23}\left\{[12\alpha] + (4n+e^{-})\right\} + \alpha$$

$$^*V^{52}_{23} \to Cr^{52}_{24}\left\{[12\alpha] + 4n\right\} + e^{-}\nearrow$$

(j)′ $$Fe^{56}_{26}\left\{[13\alpha] + 4n\right\} + n \to {}^*Mn^{56}_{25}\left\{[13\alpha] + (4n+e^{-})\right\} + p$$

$$^*Mn^{56}_{25} \to Fe^{56}_{26}\left\{[13\alpha] + 4n\right\} + e^{-}\rightarrow$$

(k)′ $$Co^{59}_{27}\left\{[13\alpha] + (\overline{p+n}+5n)\right\} + n \to {}^*Mn\left\{[13\alpha] + (4n+e^{-})\right\} + \alpha$$

$$^*Mn^{56}_{25} \to Fe^{56}_{26}\left\{[13\alpha] + 4n\right\} + e^{-}\rightarrow$$

$(l)'$ $\quad As^{75}_{33}\left\{[16\alpha]+(\overline{p+n}+9n)\right\}+n\rightarrow {}^{?}Ge^{75}_{32}\left\{[16\alpha]+(\overline{p+n}+9n+e^{-})\right\}+p?$

$$?Ge^{75}_{32}\rightarrow As^{75}_{33}\left\{[16\alpha]+(\overline{p+n}+9n)\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$(l)'$ $\quad As^{75}_{33}\left\{[16]+(\overline{p+n}+9n)\right\}+n\rightarrow {}^{*}As^{76}_{33}\left\{[16\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n}+8n+e^{-})\right\}$

$$\rightarrow Se^{76}_{34}\left\{[17\alpha]+8n\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$(m)'$ $\quad Br^{79}_{35}\left\{[17\alpha]+(\overline{p+n}+9n)\right\}+n\rightarrow {}^{*}Br^{80}_{35}\left\{[17\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n}+8n+e^{-})\right\}$

$$\rightarrow Kr^{80}_{36}\left\{[18\alpha]+8n\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$\quad Br^{81}_{35}\left\{[17\alpha]+(\overline{p+n}+11n)\right\}+n\rightarrow {}^{*}Br^{82}_{35}\left\{[17\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n}+10n+e^{-})\right\}$

$$\rightarrow Kr^{82}_{36}\left\{[18\alpha]+10n\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$(n)'$ $\quad I^{127}_{53}\left\{[26\alpha]+(\overline{p+n}+21n)\right\}+n\rightarrow {}^{*}I^{128}_{53}\left\{[26\alpha]+(\overline{p+n}+\overline{p+n}+20n+e^{-})\right\}$

$$\rightarrow Xe^{128}_{54}\left\{[27\alpha]+20n\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$(o)'$ $\quad U^{238}_{92}\left\{[46\alpha]+54n\right\}+n \qquad \rightarrow {}^{*}U^{239}_{92}\left\{[46\alpha]+(\overline{p+n}+53n+e^{-})\right\}$

$$\rightarrow X^{239}_{93}\left\{[45\alpha]+(\overline{p+n}+53n)\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$(o)^{1}_{2}$ $\quad U^{238}_{92}\left\{[46\alpha]+54n\right\}+n \qquad \rightarrow {}^{*}Pa^{238}\left\{[46\alpha]+59n+e^{-})\right\}+p?$

$${}^{*}Pa^{238}_{91}\rightarrow U^{238}_{92}\left\{[46\alpha]+54n\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$(o)^{1}_{1}$ $\quad U^{238}_{92}\left\{[46\alpha]+54n\right\}+n \qquad \rightarrow [46\alpha]+(55n+e^{-}+e^{+})\}$

$$\rightarrow {}^{*}X^{239}_{93}\left\{[46\alpha]+(54n+p^{*})\right\}+\overrightarrow{e^{-}}$$

$${}^{*}X^{239}_{93}\rightarrow U^{239}_{92}\left\{[46\alpha]+55n\right\}+\overrightarrow{e^{+}}$$

以上舉例,均可以中和子衝擊原子核後,產生正負電子對之方法,解釋無遺,$(l)_1^1$ 與 $(o)_2^1$ 二例因與實驗之結果不合,故附以？號.而最後一例,浮美等未能決定其放射原素爲 U_{92}^{239} 或 X_{93}^{239},若依此解釋,乃得一極易辨別之事實,如 $(o)'$ 式所示,U_{92}^{239} 爲放射原素時,則射出者爲電子.蛻變後爲 X_{93}^{239} 原素,如以 $(o)_1^1$ 式爲是,則 X_{93}^{239} 爲放射原素,射出者爲正電子,蛻變後仍變爲鈾之同位素.然浮美等之實驗中旣無正電子發現,則 $(o)'$ 式之解釋爲妥.惟其蛻變之結果,應有 X_{93}^{239} 之新原素存在.今地球上未發見此種原素,或因此 X_{93}^{239} 新原素,係放射原素亦未可知.故 $(o)_1^1$ 式中以 p 爲原子核中游離質子.凡人功蛻變之原子,若其原子核內含有一游離質子時,卽係不穩固之原素,必呈放射現象,如前之釋例 $(H)'$ 亦足證明,玆更舉數例以實之.

$$*Li_3^5\{[\alpha]+p\}\rightarrow He_2^5\{[\alpha]+n\}+\overrightarrow{e^+}$$

$$*C_6^{11}\{[2\alpha]+(\overline{p+n}+p)\}\rightarrow B_5^{11}\{[2\alpha]+(\overline{p+n}+n)\}+\overrightarrow{e^+}$$

$$*N_7^{13}\{[3\alpha]+p\}\rightarrow C_6^{13}\{[3\alpha]+n\}+\overrightarrow{e^+}$$

$$*O_8^{5}\{[3\alpha]+\overline{p+n}+p\}\rightarrow N_7^{15}\{[3\alpha]+(\overline{p+n}+n)\}+\overrightarrow{e^+}$$

總上以觀可知物質之基本組織爲中和子.而各原子核之基本組織爲中和子.重氫核,與 α 微粒,人功蛻變之原子,有穩固者有不穩固者,不穩固之原子,卽係人功放射原素,凡人功放射之原素,射出一 e^- 者,則其原子序數進一,射出

一 e^+ 者,則其原子序數退一.今欲推論物源,窮究各原子蛻變之系統,如自然放射原素之有釷系,鈕系鈾系,則可假設宇宙間原係一團中和子氣,因其互相撞擊,一變爲氫,再變氦爲,三變爲鋰,如$(I)(J)(K)$三式所示,由簡而繁,積輕而重,漸次蛻變,遂爲今日地球上碩果僅存之九十二種原素.(完)

參攷論文

(1)Phil. Mag;	Vol. 37	P. 518	1919
(2)Nature;	Vol. 113	P. 457	1924
(3)Proc. Roy Soc. A	Vol. 10·	P. 394	1923
Proc. Roy Soc. A	Vol. 134	P. 659	19 2
(4)Proc. Roy Soc. A	Vol. 129	P. 436	1930
Proc. Roy Soc. A	Vol. 136	P. 619	1932
Proc. Roy Soc. A	Vol. 137	P. 229	1932
(5)Phy. Rev.	Vol. 38	P. 2021	1931
Phy. Rev.	Vol. 40	P. 19	1932
(6)Nature	Vol. 113	P. 457	1924
(7)Phil, Mag	Vol. 47	P. 500	1924
(8)Proc. Roy. Soc. A	Vol. 107	P. 349	1923
Proc. Roy. Soc. A	Vol. 124	P. 659	1932
(9)Zeit. f. Phys.	Vol. 5[illegible]	P. 97	1928
(10)Proc. Roy. Soc. A	Vol. 132		1933
(11)Phy. Rev.	Vol. 44	P. 7·1	1933
(12)Pro Roy Soc. A	Vol. 143	P. 724	1534
Pro Roy Soc. A	Vol. 144	P. 693	1934

(13)Pro Roy Soc. A	Vol. 146	P. 483	1934
(14)Pro Roy Soc. A	Vol. 130	P. 464	1930
(15)Pro Roy Soc. A	Vol. 145		1934
(16)Phy. Rev.	Vol. 46	Oct. 15	1934
(17)Proc. Roy Soc. A	Vol. 146	P. 206	1934
(18)Phy. Rev.	Vol. 44	P. 56	1933
(19)Phy. Rev.	Vol. 44	P. 463	1933
(20)Proc. Roy Soc. A	Vol. 146	P. 83	1934
(21)Nature	Vol. 133	P. 893	1934
(22)Phil, Mag.	Vol. 17	P. 793	1934
Phil, Mag.	Vol. 18	P. 129	1934
Phil, Mag.	Vol. 18	P. 795	1934

本篇係一九三五年二月脫稿最近關于本題材料未能搜集收入殊屬遺憾著者識

代數數域論

(續第五卷第二期)

David Hilbert 原著

華羅庚譯

第四篇　分圓域

21. 素數 l 次之壹之根及由此所定之域.

§91. l 次壹之根之分圓域之次數及素數 l 於此域中之分解.

l 表一有理奇素數,命 $\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$. l 次方程式

$$x^l-1=0$$

有 l 個根

$$\zeta,\zeta^2,\ \ ,\zeta^{l-1},\zeta^l=1.$$

此數名爲 l 次之壹之根.由 ζ 所定之域 $k(\zeta)$,名爲 l 次壹之根之分圓域(德文 Kreiskörper).對此可由下之定理:

定理117. l 表一奇素數,則由 $\zeta=l^{\frac{2i\pi}{l}}$ 所定之域 $k(\zeta)$ 之次數爲 $l-1$.素數 l 於 $k(\zeta)$ 內可分解爲 $l=\mathfrak{l}^{l-1}$,式中 $\mathfrak{l}=(1-\zeta)$ 爲域 $k(\zeta)$ 內之一級素理想數.

證: ζ 適合於 $l-1$ 次方程式

$$F(x)=\frac{x^l-1}{x-1}=x^{l-1}+x^{l-2}+\cdots+1=0.$$

故域 $k(\zeta)$ 最高爲 $l-1$ 次.因 $\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{l-1}$ 爲 $F(x)=0$ 之 $l-1$ 個根,故有下式

$$x^{l-1}+x^{l-2}+\cdots+1=(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^{l-1}),$$

當 $x=1$，可得

$$l=(1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdots(1-\zeta^{l-1}) \tag{31}$$

命 g 爲任一非 l 之倍數之有理整數，且 >1，則可有一正整數 g'，使 $gg'\equiv 1,(l)$。則商

$$\frac{1-\zeta^g}{1-\zeta}=1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{g-1}$$

及

$$\frac{1-\zeta}{1-\zeta^g}=\frac{1-\zeta^{gg'}}{1-\zeta^g}=\frac{1-(\zeta^g)^{g'}}{1-\zeta^g}=1+\zeta^g+\zeta^{2g}+\cdots+\zeta^{(g'-1)g}$$

皆爲代數整數，故可知

$$\varepsilon_g=\frac{1-\zeta^g}{1-\zeta}$$

爲 $k(\zeta)$ 內之一單位。命 $\lambda=1-\zeta$ 及 $\mathfrak{l}=(\lambda)$，則由(31)可得

$$l=\lambda^{l-1}\varepsilon_2\,\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{l-1}=\mathfrak{l}^{l-1} \tag{32}$$

由定理33可知一有理素數於一 m 次域內不能分解爲多於 m 個素理想數之積。於公式(32)可知域 $k(\zeta)$ 之次數至少 $=l-1$，故可知此域之次數當即爲 $l-1$ 次。另一方面可知 $\mathfrak{l}$ 不能再行分解，故 $\mathfrak{l}$ 爲域 $k(\zeta)$ 內之素理想數 [Dedekind(1)]

由已知結果可知函數 $F(x)$ 於有理域內不可化。

§92.　l 次壹之根之分圓域之基數及判別式.

定理118.　由 l 次壹之根 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{l}}$ 所定之分圓域 $k(\zeta)$ 中，數

$$1,\ \zeta,\ \zeta^2,\cdots,\zeta^{l-2}$$

爲其一組基數。分圓域 $k(\zeta)$ 之判別式爲

$$d=(-1)^{\frac{l-1}{2}}\,l^{l-2}$$

證：　於域 $k(\zeta)$ 內數 ζ 之別爲

$$\delta=(\zeta-\zeta^2)(\zeta-\zeta^3)\cdots(\zeta-\zeta^{l-1})=\left[\frac{dF(x)}{dx}\right]_{x=\zeta}$$

由

$$(x-1)F(x)=x^l-1$$

可得

$$(x-1)\frac{dF(x)}{dx}+F(x)=lx^{l-1},\ 卽\delta=-\frac{l\zeta^{l-1}}{1-\zeta}$$

由§3之所言,可知ζ之判別式爲

$$d(\zeta)=(-1)^{\frac{(l-1)(l-2)}{2}}n(\delta)=(-1)^{\frac{l-1}{2}}l^{l-2}$$

又數λ之判別式$d(\lambda)$亦顯然與$d(\zeta)$有同值.故由定理五公式(1)之所言可知,凡$k(\zeta)$域內之一整數皆可表爲

$$\alpha=\frac{a_o+a_1\lambda+\cdots+a_{l-2}\lambda^{l-2}}{l^{l-2}} \tag{33}$$

式中$a_o, a_1, a_2, \cdots, a_{l-2}$爲有理整數.

諸數$a_o, a_1, \cdots, a_{l-2}$必皆爲分母$l^{l-2}$所整除.何則.設其不然,可假定$a_g$爲$a_o, \cdots, a_{l-2}$中首先非$l$之倍數者,則由$l^{l-2}\alpha\equiv 0, (l)$,及由$l=\mathfrak{l}^{l-1}$之關係可知$a_g\lambda^g\equiv 0, (\mathfrak{l}^{g+1})$,卽$a_g\equiv 0, (\mathfrak{l})$,故可得$a_g\equiv 0, (l)$,此與假定違.故(33)式中分子分母皆可爲$l$所整除.繼續運用此法,可知於$k(\zeta)$內凡一整數皆可表爲

$$\alpha=a_o+a_1\lambda+\cdots+a_{l-2}\lambda^{l-2}=b_o+b_1\zeta+\cdots+b_{l-2}\zeta^{l-2}$$

式中$a_o, a_1, \cdots, a_{l-2}$及$b_o, b_1, \cdots, b_{l-2}$皆爲有理整數.

故ζ之乘方$1, \zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{l-1}$爲域$k(\zeta)$之基數;故數$\zeta$之判別式$d(\zeta)$,卽爲域$k(\zeta)$之判別式.

§93. 於l次壹之根之分圓域內非l之有理整素數之分解.

於域$k(\zeta)$中分解有理素數l已如定理117之所述矣.於$k(\zeta)$域內其他有理素數之分解可有下之法則:

定理119. 若p爲非l之有理素數,及f爲最小之正指數可使$p^f\equiv 1,(l)$者,且$l-1=ef$,則p於分圓域$k(\zeta)$中可分解爲

$$p=\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_e,$$

式中$\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_e$爲$k(\zeta)$內不同的$f$級理想數[Kummer(5,6)].

證: 命$\alpha=a+a_1\zeta+\cdots+a_{l-2}\zeta^{l-2}$爲分圓域$k(\zeta)$內之任一整數則有下之相合式

$$\alpha^p\equiv(a+a_1\zeta+\cdots+a_{l-2}\zeta^{l-2})^p \qquad \equiv a+a_1\zeta^p+\cdots+a_{l-2}\zeta^{p(l-2)},(p)$$

$$\alpha^{p^2}\equiv(a+a_1\zeta^p+\cdots+a_{l-2}\zeta^{p(l-2)})^p \qquad \equiv a+a_1\zeta^{p^2}+\cdots+a_{l-2}\zeta^{p^2(l-2)},(p)$$

$$\alpha^{p^f}\equiv(a+a_1\zeta^{p^{f-1}}+\cdots+a_{l-2}\zeta^{p^{f-1}(l-2)})^p \qquad \equiv a+a_1\zeta^{p^f}+\cdots+a_{l-2}\zeta^{p^f(l-2)}\equiv\alpha,(p)$$

若$\mathfrak{p}$爲p之一素理想因子,則可有$\alpha^{p^f}\equiv\alpha,(p)$,卽$\alpha^{p^f}\equiv\alpha,(\mathfrak{p})$卽相合式

$$\xi^{p^f}-\xi\equiv o,\ (\mathfrak{p}) \tag{34}$$

可爲$k(\zeta)$域內任一整數所適合,故相合式(34)對素理想數$\mathfrak{p}$不互相合之根之個數,卽爲對$\mathfrak{p}$不相合數之個數,卽$=n(\mathfrak{p})=p^{f'}$,f'爲素理想數之級數,今(34)式之次數爲p^f,由定理26可得$p^{f'}\leq p^f$,卽$f\leq f'$

另由定理廣義弗爾馬定理可得:

$$\zeta^{p^{f'}-1}\equiv 1,\ (\mathfrak{p}). \tag{35}$$

由公式(31)對一非可爲l所整除之數g,數$1-\zeta^g$與$\mathfrak{p}$互素,由相合式(35)可得$p^{f'}-1\equiv 0,(l)$且$f'\leq f$,故可得$f'=f$,卽凡p之素理想因子皆爲f次.

因p非域$k(\zeta)$之判別式之因子,故由定理31可知p可分爲互不相同之素因子,命$p=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{e'}$則由$n(p)=p^{l-1}=p^{e'f}$,卽$l-1=e'f$, $e'=e$.故定理119之證明業已完成.

素理想數$\mathfrak{p}_1\cdots,\mathfrak{p}_e$之實際表示可應用定理33及§13之所言以得之,卽對p可有分解式

$$F(x)\equiv F_1(x)\cdots F_e(x),\ (p),$$

式中$F_1(x),\cdots,F_e(x)$爲對p不可化且互不相合之f次整係數函數,由定此

函數.所需之結果可表之如下:

$$\mathfrak{p}_1=(p,F_1(\zeta)),\cdots,\mathfrak{p}_e=(p,F_e(\zeta)).$$

22. 一複數m次之壹之根及其所定之分圓域.

§94. m次壹之根之分圓域.

m表任意一有理整正數,且$Z=e^{\frac{2\pi i}{m}}$. m次方程式

$$x^m-1=0$$

有m個根

$$Z,Z^2,\cdots,Z^{m-1},Z^m=1.$$

此數名m爲次之壹之根由此所定之域名$k(Z)$爲以m次壹之根所定之分圓域.

命m之素因子之分解式爲:

$$m=l_1^{h_1}l_2^{h_2}$$

式中l_1 l_2爲不相同的有理素數,由分項分數可得

$$\frac{1}{m}=\frac{a_1}{l_1^{h_1}}+\frac{a_2}{l_2^{h_2}}+\cdots,$$

式中$a_1,a_2,\cdots$爲有理正或負整數,且a_1對l_1, a_2對l_2,…皆互素用此分解式可得

$$Z=Z_1^{a_1}Z_2^{a_2}\cdots,$$

式中$Z_1=e^{\frac{2i\pi}{l_1^{h_1}}}$ $Z_2=e^{\frac{2i\pi}{l_2^{h_2}}}$,…故由$l_1^{h_1}$單位根之域$k(Z_1)$,及由$l_2^{h_2}$次單位根之域$k(Z_2)$,…等之合併可得域$k(Z)$,故吾人可先研究較簡單之情形$m=l^h$,即其$m$祇有一素因子$l$.

§95. l^h次壹之根之分圓域之次數及此域內素數l之分解.

對l^h次壹之根所定之分圓域有下之定理:

定理120. l表素數2或奇素數則由$Z=e^{\frac{2i\pi}{l^h}}$所定之l^h次壹之根之分圓域$k(Z)$爲$l^{h-1}(l-1)$次,素數l於$k(Z)$域內可分解爲$l=\mathfrak{L}^{l^{h-1}(l-1)}$.式中$\mathfrak{L}$

爲域$k(Z)$內之一級素理想數.

證: Z適合於$l^{h-1}(l-1)$次方程式

$$F(x)=\frac{x^{l^h}-1}{x^{l^{h-1}}-1}=x^{l^{h-1}(l-1)}+x^{l^{h-2}(l-2)}+\cdots+1=0.$$

g表一非l可整除之有理整數,則有一有理整數g'使$gg'\equiv 1,(l^h)$,故與§91同法,可知

$$E_g=\frac{1-Z^g}{1-Z}$$

及其倒數

$$\frac{1-Z}{1-Z^g}=\frac{1-Z^{gg'}}{1-Z^g}$$

皆爲整數,故E_g爲一單位,由與§91相彷之方法可得,

$$F(1)=l=\prod_{(g)}(1-Z^g)=\Lambda^{l^{h-1}(l-1)}\prod_{(g)}E_g=\mathfrak{L}^{l^{h-1}(l-1)}$$

式中$\Lambda=1-Z$, $\mathfrak{L}=(\Lambda)$,及乘積g過諸與l互素且$>o$及$<l^h$之有理整數.

由此及如§91可知域$k(Z)$之次數至少$=l^{h-1}(l-1)$次故即爲$l^{h-1}(l-1)$次.

§96. l^h次壹之根之分圓域之基數及判別式.

定理121. 於由$Z=e^{\frac{2i\pi}{l^h}}$所定之l^h次壹之根之分圓域中,數

$$1, Z, Z^2, \cdots, Z^{l^{h-1}(l-1)-1}$$

成一組基數,此域之判別式爲

$$d=\pm l^{l^{h-1}(lh-h-1)},$$

式中$l^h=4$,或$l\equiv 3,(4)$時取負號,不然,則取正號.

定理122. 若p爲一非l之有理素數,且f爲最小之正指數可使$p^f\equiv 1,(l^h)$者,且$l^{h-1}(l-1)=ef$.則於域$k(Z)$中p可分解爲

$$p=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_e$$

式中$\mathfrak{P}, \cdots, \mathfrak{P}_e$爲$k(Z)$內互不相同之$f$級素理想數.

定理121及122之證明與域$k(\zeta)$內之定理118及119完全相似.

§97. m次壹之根之分圓域.此域之次數,判別式及此域之素理想數.

今表m成不同的素數之積$m=l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots$,由§94已知$m$次壹之根所定之分圓域$k(Z)$爲下之諸域合併所得:$l_1^{h_1}$次壹之根所定之域$k(Z_1)$,$l_2^{h_2}$次壹之根所定之域$k(Z_2)$等等.此諸分圓域之判別式皆互素.故由定理87(§52)可得下之定理:

定理123. 由$m=l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots$次壹之根所定之分圓域$k(Z)$之次數爲

$$\Phi(m)=l_1^{h_1-1}(l_1-1)l_2^{h_2-1}(l_2-1)\cdots.$$

應用定理88之第二部分圓域$k(Z_1)$,$k(Z_2)$,…及定理121可得更進一步之結果.

定理125. m次壹之根之分圓域有一組基數.

$$1, Z, Z^2, \cdots\cdots, Z^{\Phi(m)-1}$$

m次壹之根之域$k(Z)$之判別式,可由定理88之第一部分得之

最後由定理88及分散域,惰性域之助於$k(Z)$域內一有理素數之分解,可有上之定理:

定理126. 若p爲一不能整除$m=l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots$之有理整數,且$f$爲最小之正數可使$p^f\equiv1,(m)$者,且命$\Phi(m)=ef$,則於$m$次壹之根之分圓域$k(Z)$中,

$$p=\mathfrak{P}_1\cdots\cdots\mathfrak{P}_e$$

式中$\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_e$爲互不相同之$f$級素理想數.

又若p^h爲p之一乘方且$m^*=p^h m$,則於m^*次壽之根之域$k(Z^*)$內可覓得

$$p=\{\mathfrak{P}_1^*\cdots\mathfrak{P}_e^*\}^{p^{h-1}(p-1)}$$

式中$\mathfrak{P}_1^*, \cdots\mathfrak{P}_e^*$爲域$k(Z^*)$中互不相同的$f$級素理想數[Kummer(15),Dedekind(5),Weber(4)].

今取單簡情形$m = l_1^{h_1} l_2^{h_2}$以證定理125．今以$k^{(1)}, k^{(2)}$各表由$l_1^{h_1}$次,$l_2^{h_2}$次壹之根所定之分圓域.又p為一非l_1, l_2之有理素數,且$\mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^{(2)}$各表$k^{(1)}, k^{(2)}$內$p$之一素理想因子.以$k_z^{(1)}, k_z^{(2)}$各素域$k^{(1)}, k^{(2)}$對數理想數$\mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^{(2)}$之分散域.命$f_1\ f_2$為最小之指數可各使$p^{f_1} \equiv 1, (l_1^{h_1})$及$p^{f_2} \equiv 1, (l_2^{h_2})$者,且命

$$l_1^{h_1-1}(l_1-1)=e_1 f_1,\quad l_2^{h_2-1}(l_2-1)=e_2 f_2,$$

則e_1, e_2各為域$k_z^{(1)}, k_z^{(2)}$之次數及f_1, f_2各為$k^{(1)}$對$k_z^{(1)}$, $k^{(2)}$對$k_z^{(2)}$之相對的次數,由定理88一由理素數p至$k_z^{(1)}, k_z^{(2)}$之合併域$k_z^{(1,2)}$中可分為$e_1 e_2$個理想數,故此皆為域$k_z^{(1,2)}$中之一次素理想數.研究素理想數$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^{(2)})$,且以$\mathfrak{P}$表$k^{(1)}, k^{(2)}$之合併域$k$內$\mathfrak{p}$之素理想因子.命$k_z$為$k$對素理想數$\mathfrak{P}$之分散域.由分散域之定義可知$k_z^{(1,2)}$或即為$k_z$,或為$k_z$之分域.域$k^{(1)}, k^{(2)}$之合併域對域$k_z^{(1,2)}$之相對羣為$f_1$次之循環羣.$k_z^{(1)}, k^{(2)}$之合併域對$k_z^{(1,2)}$為$f_2$次之循環羣.今若以$f$表$f_1 f_2$之最小公倍數,則$k$對$k_z^{(1,2)}$之相對羣無高於$f$次之循環羣為其分羣.因$k$之素理想數$\mathfrak{P}$之惰性域對$k_z$有一相對的循環域,及$k_z$包有$k_z^{(1,2)}$,故$k$對$k_z$循環相對羣最高為$f$次.

另一方面,二域$k^{(1)}$及k_z皆有$k_z^{(1)}$為其分域且無再高次之公分域[1],因若不然,則$\mathfrak{p}^{(1)}$於$k^{(1)}$內必再可分.同樣$k_z^{(2)}$亦為k_z及$k^{(2)}$之最大公分域.以$k_z^{(1,2)}$域為基域,則k_z對$k_z^{(1,2)}$與$k^{(1)}$對$k_z^{(1,2)}$無公分域,同樣與$k^{(2)}$對$k_z^{(1,2)}$亦無公分域.由此並無何等困難可得k_z對$k_z^{(1,2)}$最高為$\frac{f_1 f_2}{f}$次.故域k_z最高為$\frac{e_1 f_1\ e_2 f_2}{f}$次.即$k$對$k_z$域之相對羣祇少為$f$次.由此與上節之結果可知$k$域對$k_z$之相對羣之級數必為$f$級.由此可研究定理125之所言.

由定理123, $Z = e^{\frac{2i\pi}{m}}$當適合於$\Phi(m)$次不可化方程式$F(x) = o$,其係數為有理整數.由定理37可知$F(x) = o$,於判別式與m互素之域中亦不可化[Kronecker (3, 29)].

$F(x)$可由下法求出之.為簡單計命

$$x^m-1=[m],$$

及

$$\Pi_0=[m],$$

$$\Pi_1=\left[\frac{m}{l_1}\right]\left[\frac{m}{l_2}\right]\cdots,$$

$$\Pi_2=\left[\frac{m}{l_1l_2}\right]\left[\frac{m}{l_1l_3}\right]\cdots\left[\frac{m}{l_2l_3}\right]\cdots,$$

$$\Pi_3=\left[\frac{m}{l_1l_2l_3}\right]\left[\frac{m}{l_1l_2l_3}\right]\cdots\left[\frac{m}{l_1l_2l_3}\right]\cdots,$$

則

$$F(x)=\frac{\Pi_0\Pi_2\Pi_4\cdots}{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\cdots}$$

[Dedekind(1), Bachmann(2)].

[1] 譯者按,此處無再高次之公分域,應作再高次之公分域可包含 $k_z^{(1)}$ 者解.

若 a 爲一有理整數,且 p 爲 $F(a)$ 之素因子,但與 m 互素,故由定理125可知 p 適合相合式 $p\equiv1,(m)$.顯然有無限個素數 p 適合此相合式.

§98. 分圓域 $k\,(e^{\frac{2\pi i}{m}})$ 中之單位,分圓單位之定義.

有下之定理:

定理126. 若 m 爲一素數 l 之乘方,及 g 爲一非 l 所可整除之數,則由 $Z=e^{\frac{2i\pi}{m}}$ 所定之分圓域中

$$\frac{1-Z^g}{1-Z}$$

表一單位.

若 m 有不同的素因子,且 g 與 m 互素,則由 $Z=e^{\frac{2i\pi}{m}}$ 所定之域中

$$1-Z^g$$

爲一單位.

證: 定理126之第一部分已於定理117及160之證明中證明之矣.因欲證其第二部分,可命$m=l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots$,及

$$\frac{g}{m}=\frac{a}{l_1^{h_1}}+\frac{b}{l_2^{h_2}l_3^{h_3}\cdots},$$

式中a爲與l_1互素,b爲與$l_2, l_3, \cdots$等互素之有理整數.由

$$1-Z^g=1-e^{\frac{2i\pi g}{m}}=1-e^{\frac{2i\pi a}{l_1^{h_1}}}e^{\frac{2i\pi b}{l_2^{h_2}l_2^{h_3}\cdots}} \tag{39}$$

因

$$\prod_{(x)}\left(1-e^{\frac{2i\pi x}{l_1^{h_1}}}e^{\frac{2i\pi b}{l_2^{h_2}l_3^{h_3}\cdots}}\right)=1-e^{\frac{2i\pi b l_1^{h_1}}{l_2^{h_2}l_3^{h_3}\cdots}}$$

式中乘積之x過$0, 1, 2, \cdots, l_1^{h_1}-1$,或

$$\prod_{(x')}\left(1-e^{\frac{2i\pi x'}{l_1^{h_1}}}e^{\frac{2i\pi b}{l_2^{h_2}l_3^{h_3}\cdots}}\right)=\frac{1-e^{\frac{2i\pi b l_1^{h_1}}{l_2^{h_2}l_3^{h_3}\cdots}}}{1-e^{\frac{2i\pi b}{l_2^{h_2}l_3^{h_3}\cdots}}} \tag{37}$$

式中x'過$1, 2, \cdots, l_1^{h_1}-1$.

今分兩種情形論之,卽m之素因子$l_1 l_2\cdots$之個數爲2或大於2.於第一種情形中,公式(37)之右,由定理129之前部已知其爲一單位.於第二種情形中,可假定定理126於分圓域$k(e^{\frac{2i\pi}{m^*}})$已經證明.數m^*之素因子較少於m,卽此定理對由$\frac{m}{l_1^{h_1}}$次之壹之根所定之域已證明,則(37)之右邊之分子分母皆爲但位.(36)式爲37)式左邊之因子,故當爲一單位.由此定理126已完全證明.

分圓域中之任一單位等於壹之根及一實單位之積.壹之根不必卽爲此$e^{\frac{2i\pi}{m}}$或其乘方,特別如當m爲偶數時,有$2m$之壹之根,當m爲奇數次時有$4m$次壹之根[Kronecker(7)].今特別述下之已爲枯母(Kummer)氏所證明之事實:

定理127. l表一奇素數,今研究由$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{l}}$所定之分圓域$k(\zeta)$,及由$\zeta$

$+\zeta^{-1}$所定之域$k(\zeta+\zeta^{-1})$,此顯然爲$k(\zeta)$之分域,則實域$k(\zeta+\zeta^{-1})$之基單位仍爲$k(\zeta)$之基單位.

證: 若$\varepsilon(\zeta)$爲域$k(\zeta)$內之一任意單位,則$\frac{\varepsilon(\zeta)}{\varepsilon(\zeta^{-1})}$當亦爲$k(\zeta)$域內之一單位.此單位及其諸共軛數之絕對值皆爲1,故由定理48此爲一壹之根.命$\frac{\varepsilon(\zeta)}{\varepsilon(\zeta^{-1})}=\pm\zeta^{2g}$,式中$g$爲有理整數.單位$\eta(\zeta)=\varepsilon(\zeta)\zeta^{-g}$當有次之性質:

$$\frac{\eta(\zeta)}{\eta(\zeta^{-1})}=\pm1.$$

此式祇能取十號,因若不然則$\eta(\zeta)$當爲一純虛單位.命$\eta^2=\vartheta$,則ϑ當爲實域$k(\zeta+\zeta^{-1})$內之單位.數$\eta=\sqrt{\vartheta}$對實域$k(\zeta+\zeta^{-1})$之相對別爲2η故與l互素.故域$k(\zeta)$對域$k(\zeta+\zeta^{-1})$之相對別亦與l互素.以$\mathfrak{l}^*$表$k(\zeta+\zeta^{-1})$域內之一可整除l之素因子.故由定理93此理想數不等於$k(\zeta)$內一素理想數之平方.但$\mathfrak{l}^*$於l中最高次乘方爲$\frac{l-1}{2}$,故與$k(\zeta)$內分解l之定理117所述者違.卽(38)式之如右邊祇能取下號.由$\eta(\zeta)=\eta(\zeta^{-1})$可知$\eta(\zeta)$爲實數,由此定理127已證明.

於定理126中所舆之單位皆爲虛數.如欲求其實單位,當m爲一素數之乘方,或有不同的素數時各作

$$E_g=\sqrt{\frac{(1-Z^g)(1-Z^{-g})}{(1-Z)(1-Z^{-1})}}$$

或

$$E_g=\sqrt{(1-Z^g)(1-Z^{-g})}$$

以得之,式中g表一與g互素之整數.平方根前取十號.此單位名爲分圓單位(德文 Kreiseinheiten).由$1-Z^{-g}=-Z^{-g}(1-Z^g)$可知於第一種情形中此單位在域$k(Z)$內.於第二種情形中爲由$k(Z)$內之一單位,乘$2m$次或$4m$次壹之根,其分別視m爲偶數或奇數以定.

23. 分圓域之性質如亞培爾氏.

§99. m域次壹之根之分圓域之羣.

對 m 之任意值,m 次壹之根之分圓域顯然爲一亞培爾域,且有下之定理:

定理128. l 表一奇素數,則由 $Z=e^{\frac{2i\pi}{l^h}}$ 所定之域爲一循環域.

由 $Z=e^{\frac{2i\pi}{2^h}}$ ($h\geq 2$) 所定之域爲二次虛域 $k(i)$ 及實域 $k(e^{\frac{2i\pi}{2^h}}+e^{-\frac{i\pi}{2^h}})$ 合併所得者.實域 $k(e^{\frac{i\pi}{2^h}}+e^{-\frac{i\pi}{2^h}})$ 爲 2^{h-1} 次之循環域.

證: 若用代換

$$s=(Z:Z^{\gamma})$$

式中 γ 爲一對 l^h 之原根,則顯然域 $k(Z)$ 之諸代換可表爲 s 爲之乘方,故定理 128 之第一部分已證明.

因欲證其第二部分,可用代換

$$s=(Z:Z^5),\quad s'=(Z:Z^{-1})=(i:-i)$$

顯然凡 $k(Z)$ 域內之代換可以 s 以之乘方及 s' 之積以得之.

以定理128爲基本,對任一複合數 m,m 次壹之根之分圓域之羣可得.

由§§95, 96, 97 之關於有理素數於分圓域內之分解之定理之助,可作出對域 $k(e^{\frac{2i\pi}{m}})$ 內所與理想數之分散域惰性域及支域,特例有如下之結果.

定理129. l 表一奇素數且命 $k(Z)$ 爲由 l^h 次壹之根所定之域,則對此 l 之一素理想因子 $\mathfrak{L}=(1-Z)$,域 $k(Z)$ 爲一重支域且其中有一 l 次壹之根之域又有理數域同時與 $\mathfrak{L}$ 之分散及惰性域同相吻合.若 $\mathfrak{P}$ 爲 $k(Z)$ 內非 $\mathfrak{L}$ 的素理想數,其級數爲 f 次,則此域之本身卽爲 $\mathfrak{P}$ 之分散域.$\mathfrak{P}$ 之惰性域爲 $k(Z)$ 之 $e=\frac{l^{h-1}(l-1)}{f}$ 次之分域,其代換羣爲

$$s^e, s^{2e}, s^{3e}, \cdots, s^{fe}.$$

故 $k(Z)$ 域之代換羣可由 $s=(Z:Z^{\gamma})$ 之乘方完全演出之.

§100. 分圓域之普通定義.亞培爾域之基本定理.

今可進一步而定分圓域之義.分圓域之意義不但爲由 m 次壹之根所定

之域$k(e^{\frac{2i\pi}{m}})$.且凡分圓域$k(e^{\frac{2i\pi}{m}})$所有之分域亦皆負斯名.此域顯然皆爲亞培爾氏域.又若m, m'表二任意指數,則m次壹之根之域及m'次壹之根之域當同時mm'爲次壹之根之域之分域.由此廣義的定義可有下之定理:

定理 130. 凡分圓域爲亞培爾氏域.凡分圓域之分域仍爲分圓域.分圓域之合併仍爲分圓域.

今有一基本定理,卽爲定理 130 前部之逆:

定理 131. 凡對有理數域之亞培爾氏域爲一分圓域[Kronecker (2, 13), Weber(1), Hilbert 6)].

於證定理之前,先注意由 §48 可知,凡亞培爾氏域爲素數次或素數乘方次之循環合併所得.今作上之特別的循環域.以u表一奇素數及u^h爲其正指數乘方,則由$e^{\frac{2i\pi}{u^{h+1}}}$所定之域$k(e^{\frac{2i\pi}{u^{h+1}}})$爲一$u^h(u-1)$次之循環域.此域之$u^h$次之循環分域以$U_h$表之.又數$e^{\frac{i\pi}{2^{h+1}}}+e^{\frac{-i\pi}{2^{h+1}}}$定一$2^h$次之實循環域以$H_h$表之.最後命$l^h$爲任一素數之$l$乘方($l=o$或$\neq o$),且有素數$p$適合於相合式$p\equiv1, (l^h)$.則域$k(e^{\frac{2i\pi}{p}})$顯然有$l^h$次之循環分域.此$l^h$次之循環分域以$P_h$表之.域$U_h, H_h, P_h$皆爲分圓域.且各爲$u^h, 2^h, l^h$次.此域$U_h, H_h, P_h$之判別式由定理39及121可知其爲素數$u, 2, p$之乘方.由§97後之所言,可知對每一$l^h$可有一素數$p$合相合式$p\equiv1, (l^h)$,故此$p$之存在不成問題.

於下節中將證明,凡亞培爾域爲由$k(i)$及U_h, π_h, P_h合併所成之域之分域.於證此定理之前先述下之諸引.

§101. 循環域之普通引.

引 15. 一非U_1, H_1之分域之循環域C_h,其次數爲l^h,式中l爲一任意素數($=2$或±2),C_h與$Z=e^{\frac{2i\pi}{l^h}}$所定之域之合併成一$l^{2h-1}(l-1)$次之域$k(Z, C_h)$,則於$k(Z)$內有一整數κ,具下之性質:域$k(Z, C_h)$亦可由數Z及$\sqrt[l^h]{\kappa}$定之,γ

表任一不爲 l 所整除之有理整數,域 $k(Z)$ 之羣之代換

$$s=(Z:Z^{\gamma}),$$

則 $\varkappa^{s-\gamma}$ 爲 $k(Z)$ 內一數之 l^h 次乘方.

證: 第一步中域 $k(Z, C_h)$ 之次數可知 $k(Z)$ 與 C_h 含有理數域外,無其他的公共域.命 α 爲定域 C_h 之整數,且無 α 之乘方可在 C_h 之分域內,又命 t 爲域之羣之一代換,可由其乘方以得其羣者.若 a, b 爲二任意指數命

$$K(\alpha^a, Z^b)=\alpha^a+Z^b(t\alpha)^a+Z^{2b}(t^2\alpha)+\cdots+Z^{(l^{h-1})b}(t^{l^{h-1}}\alpha)^a.$$

式 $K(\alpha, Z), K(\alpha^2, Z), \cdots K(\alpha^{l^{h-1}}, Z)$ 不能皆爲零.因若不然,則由 $K(\alpha^a, Z)=0$,可得

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots & , 1 \\ \alpha, & t\alpha, & \cdots & , t^{l^h-1}\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha^{l^{h-1}}, & (t\alpha)^{l^{h-1}}, & \cdots & , (t^{l^h-1}\alpha)^{l^{h-1}} \end{vmatrix}$$

必爲零,由 §3 所言,則 α 不能定域 C_h 矣.命 $\alpha^*=\alpha^a$ 爲 α 之乘方可使 $K=K(\alpha^*, Z)\neq 0$ 者.依照 $K(t\alpha^*, Z^b)=Z^{-b}K(\alpha^*, Z^b)$ 可知數 K^{l^h} 及諸數 $\dfrac{K(\alpha^*, Z^b)}{K^b}$ 皆在 $k(Z)$ 域之內.因

$$\alpha^*=\frac{1}{l^h}\{K(\alpha^*, Z)+K(\alpha^*, Z^2)+\cdots+K(\alpha^*, Z^{l^h})\},$$

及 α^* 亦爲定域 C_h 之數,故可知由 K 及 Z 所定之域至高爲 $l^{2h-1}(l-1)$ 次,然含有 $l^{2h-1}(l-1)$ 次域 $k(Z, C_h)$,故前域即爲後域,且 $\varkappa=K^{l^h}$ 有引 15 所需之性質.

今作下之附註,由 Z 及 $\sqrt[l^h]{\varkappa}$ 所定之域,易知對 $k(Z)$ 爲相對 l^h 次之相對的循環域,有唯一的分域包有 $k(Z)$,且其次數對 $k(Z)$ 爲相對的 l 次之循環域.表 C_1 爲 C_h 之 l 次分域,則由 $k(Z), C_1$ 之合併域與由 Z $\sqrt[l]{\varkappa}$ 及所定之域同.

§192. l^h 次循環域之判別式之素因子.

引16. 若 C_h 為一 l^h 次之循環域,式中 l 為任意素數 $(=2$ 或 $\neq 2)$, 且 C_1 為 C_h 之 l 次分域則 C_1 之判別式之非 l 之素因子 p 適合於相合式 $p\equiv 1, (l^h)$.

證: 今先研究 l 為一奇數 $h=1$ 之情形.假定引之所言不確,即於 C 之判別式中有一素數 $p\neq 1, (l)$. 命 $\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$,又 γ 為 l 之原根,且取域 $k(\zeta)$ 之羣之代換 $s=(\zeta:\zeta^{\gamma})$ 若 $\mathfrak{p}$ 為 $k(\zeta)$ 內 p 之素理想因子.因 $p\equiv 1, (l)$, 故素理想數 $\mathfrak{p}$ 由定理119可知 $f>1$, 故由定理129理想數 $\mathfrak{p}$ 之分散域之次數 $e>l-1$, p 之其他素因子為

$$\mathfrak{p}'=s\mathfrak{p}, \cdots, \mathfrak{p}^{(e-1)}=s^{e-1}\mathfrak{p},$$

及 $s^e\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$, 即

$$p^{\,s^e-1}\equiv 1 \tag{39}$$

同樣對 $\mathfrak{p}$ 之共軛素理想數 $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \cdots$ 有方程式

$$\mathfrak{p}'^{\,s^e-1}\equiv 1, \mathfrak{p}''^{\,s^e-1}\equiv 1, \cdots \tag{40}$$

由引15於 $k(\zeta)$ 內可有一整數 $\varkappa$ 使二數 ζ 及 $\sqrt[l]{\varkappa}$ 定一由 $k(\zeta)$ 及 C_1 合併之域 $k(\zeta, C_1)$, 且對 $\varkappa^{s-\gamma}$ 等於 $k(\zeta)$ 內之一整數.因 $s-\gamma$ 及 s^e-1 為 s 之二整函數,故有三個 s 之整係數函數 $\varphi(s), \psi(s), \chi(s)$ 使

$$1=(s^e-1)\varphi(s)+(s-\gamma)\psi(s)+l\chi(s)$$

且由此

$$\varkappa=\varkappa^{(s^e-1)\varphi(s)+(s-\gamma)\psi(s)+l\chi(s)}=\varkappa^{(e^s-1)\varphi(s)}\alpha^{e},$$

式中 α 為 $k(\zeta)$ 內之一數,由前證明對素理想數 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \mathfrak{p}'', \cdots$ 之(39)及40),可命 $\varkappa^{s^e-1}$ 為一整數分子其分子分母皆與 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \cdots$ 互素,故與 p 互素,故 $\varkappa^{(e^e-1)\varphi(s)}$ 亦然,命 $\varkappa^{(s^e-1)\varphi(s)}=\frac{\varrho}{a^l}$ 其 ϱ 為 $k(\zeta)$ 內與 p 互素之整數, a 為一有理整數.域 $k(\zeta, C_1)$ 則亦為二數 ζ 及 $\sqrt[l]{\varrho}$ 所定.數 $\sqrt[l]{\varrho}$ 對域 $k(\zeta)$ 之相對判別式 $=\pm l^h\varrho^{l-1}$, 且 ϱ 與 p 互素,故 $k(\zeta, C_1)$ 對 $k(\zeta)$ 之相對的判別式與 p 互素.另一方面 $k(\zeta)$ 之判別式不為 p 所整除,故由定理39 $k(\zeta, C_1)$ 之判別式及由定理85, C_1 之判別

式皆與p互素,此與吾人之假定違.

同法可知引16當l為奇數,$h>1$時亦真.命$Z=e^{\frac{2i\pi}{l^h}}$,又γ為對l^h之原根,且域$k(Z)$之羣系由$s=(Z:Z^\gamma)$得之.命p為C_1之判別式之一非素數l之素因子,及$\mathfrak{p}$為p於$k(Z)$內之素理想因子.設$p\equiv 1,(l)$但$\not\equiv 1,(l^h)$,則素理想數$\mathfrak{p}$當亦在域$k(Z)$之分域$k(Z^l)$中,即$\mathfrak{p}^{s^{l^{h-2}(l-1)}-1}=1$,及同樣$k(Z)$域內$\mathfrak{p}$之共軛數$\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''$,…亦適合於

$$\mathfrak{p}'^{s^{l^{h-2}(l-1)}-1}=1,\quad \mathfrak{p}''^{s^{l^{h-2}(l-1)}-1}=1,$$

因γ為l^h之原數,故$\gamma^{l^{h-1}(l-1)}\equiv 1,(l^h)$,故有$s$之三個整係數函數$\varphi(s)$,$\psi(s)$,$\chi(s)$使

$$l^{h-1}=(s^{l^{h-1}(l-1)}-1)\varphi(s)+(s-\gamma)\psi(s)+l^h\chi(s).$$

由此若$\varkappa$為引15所定之數,則

$$\varkappa^{l^{h-1}}=\varkappa^{(s^{l^{h-2}(l-1)}-1)\varphi(s)}\alpha^{l^h},$$

式中α為$k(Z)$內之數.由前證明之$\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'',\cdots$之性質,$\varkappa^{s^{l^{h-2}(l-1)}-1}$及$\varkappa^{(s^{l^{h-2}(l-1)}-1)\varphi(s)}$為一數其分子分母皆與$p$互素,故可命後者$=\frac{\varrho}{a^{l^h}}$,$\varrho$為$k(Z)$內與$p$互素之整數,$a$表一有理整數,則$\sqrt[l]{\varkappa}=\frac{\alpha}{a}\sqrt[l^h]{\varrho}$由此可得$\varrho=\sigma^{l^{h-1}}$,式中$\sigma$為$k(Z)$內之數.因由$Z$及$\sqrt[l]{\varkappa}$所定之域與$k(Z)$由$C_1$此合併域相吻合,(§101之末)及$\sqrt[l]{\sigma}$對$k(Z)$之相對判別式之值為$\pm l^h\sigma^{l-1}$與$p$互素,故域$k(Z,C_1)$對$k(Z)$之相對判別式亦對$p$互素.另一方面,域$k(Z)$之判別式亦不為$p$所整除,故可得域$k(Z,C_1)$之判別式及域$C_1$之判別式亦與$p$互素,此與假定違.

引16當$l=2$時之真實性,可先研究$h=2$應用引15於4次之循環域C_2,命$Z=e^{\frac{i\pi}{2}}=i$域$k(Z)$之羣之代換為$s'=(i:-i)$命C_1為C_2之二次分域,且假定C_1之判別式中有一素因子$p\not\equiv 1,(4)$,則此p在$k(i)$內可分解.若由引15所定

之數$\varkappa$可爲p所整除,則作一數$\varrho=\varkappa^{s-1}$.另一方面由引15 $\varkappa^{s+1}=\alpha^4$,式中α於$k(i)$內,可得$\varkappa^2=\varrho^{-1}\alpha^4$,即$\sqrt{\varkappa}=\alpha\sqrt[4]{\varrho^{-1}}$.故$\varrho$爲$k(i)$域內一數之平方,故能命$\varrho=\frac{\tau^2}{\alpha^4}$,式中$\tau$爲$k(i)$內與$p$互素之整數,$\alpha$爲一有理整數.因域$k(i,C_1)$與$k(i,\sqrt{\tau})$吻合,及數$\sqrt{\tau}$對$k(i)$之相對的判別式與$p$互素.故$k(i,C_1)$對$k(i)$域之判別式與$p$互素,故$C_1$之判別式不$p$所整除,此與假定違.

若$l=2, h>2$,命$Z=l^{\frac{i\pi}{2^{h-1}}}$設$C_1$之判別式中有一素數$p\equiv 1,(4)$但$\not\equiv 1,(2^h)$,且$\mathfrak{p}$爲$k(Z)$內$p$之因子,則代換$s_*^{2^{h-1}}$使$\mathfrak{p}$不變,式中$s_*$或爲$(Z:Z^5)$或爲$(Z:Z^{-5})$,由此$\mathfrak{p}^{s_*^{2^{h-3}}-1}=1$.因$(\pm 5)^{2^{h-3}}\not\equiv 1,(2^h)$.與前節相同,可得公式

$$2^{h-1}=(s_*^{2^{h-3}}-1)\varphi(s_*)+(s_*\mp 5)\psi(s_*)+2^h\chi(s_*),$$

且由此與前l爲奇數時同,可得一結論與C_1之判別式可爲p除相盾矛.故定理17已完全證明矣.

由引16並無何種困難可進得下引:

引17. C_h爲一l^h次之循環域,l爲一任意素數$(=2,$或$\pm 2)$,C_h之l次分域以C_1表之.C_1之判別式中有與l不同的素因子p.則可有一亞培爾域$C'_{h'}$,其次數$l^{h'}\leq l^h$,且有下之性質:

1. 由$C'_{h'}$及一分圓域P_h之合併域爲C_h域之倍域.

2. $C'_{h'}$域判別式祗有C_h域之判別式之因子,無素因子p.

證: 由引16有理素數p.當適合相合式$p\equiv 1,(l^h)$,由§100作l^h次之循環域P_h.其判別式爲p之乘方.由C_h及P_h合併所得之域$k(C_h,P_h)$命其爲$l^{h+h'}$次.於P_h內$p=\mathfrak{p}^{l^h}$,式中$\mathfrak{p}$爲P_h內之素理想數.命$\mathfrak{P}$爲域$k(C_h,P_h)$內$\mathfrak{p}$之素理想因子.因素理想數不能整除域$k(C_h,P_h)$之次數$l^{h+h'}$,故此域$k(C_h,P_h)$即爲素理想數$\mathfrak{P}$之支域,且由定理81可知此域對$\mathfrak{P}$之惰性域成相對的循環域,其相對的次數至少爲l^h次,此惰性域即名之爲$C'_{h'}$.又$k(C_h,P_h)$之循環分域之次數不能高於l^h次,故$k(C_h,P_h)$對$C'_{h'}$之相對的次數當恰爲l^h次.由此域$C'_{h'}$

爲$l^{h'}$次惰性域$C'_{h'}$之别由定理76知其非$\mathfrak{P}$之倍數,故由定理68 $C'_{h'}$域之判别式不爲p所整除.另一方面,由定理39可知此判别式祇有C_h别式之素因子爲因子.最後由定理87,$C'_{h'}$及P_h之合併域與$k(C_h, P_h)$吻合.故域$C'_{h'}$有引17所述之諸性質.

§103. u以次循環域,其判别式祇有u爲其因子者,及u^h(或2^h)次之循環域有U_1(或π_1)爲其分域者.

引18. 若奇數u次之循環域,其判别式祇有u爲其因子,則C_1與U_1相重合.

證:命$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{u}}$及$s=(\zeta:\zeta^{\gamma})$ 式中γ爲u之原數.且命$\lambda=1-\zeta$,故$\mathfrak{l}=(\lambda)$爲域$k(\zeta)$內之一素理想數.由理想數之理論可知$u=\mathfrak{l}^{u-1}$,又可有相合式

$$s\lambda=1-\zeta^{\gamma}\equiv\gamma\lambda,\ (\mathfrak{l}^2).$$

今研究由引15所得之數$\varkappa$.因素理想數$\mathfrak{l}$在$k(\zeta)$內爲一級的,故若命$\varrho=\varkappa^{(s-1)(u-1)}$,由等式$\mathfrak{l}=s\mathfrak{l}$及定理25可知$\varrho\equiv1,(\mathfrak{l})$此爲一分數相合式.若乘一與$\mathfrak{l}$互素之相當整數,可得普通之相合式.因$\gamma-1$與$u$互素,故由$C_1$與$k(\zeta)$合併所成之域,卽爲由$\zeta$及$\sqrt[u]{\varrho}$所定之域.命$\varrho\equiv1+a\lambda,(\mathfrak{l}^2)$式中$a$爲一有理整數,則$\sigma=\varrho\zeta^{a}\equiv1,(\mathfrak{l}^2)$.

再往證$\sigma\equiv1,(\mathfrak{l}^u)$.爲此目的,假定$\sigma\equiv1+a\lambda^{e},(\mathfrak{l}^{e+1})$式中$e<u$,且$a$爲一不爲$u$所整除之整數.

由引15之$\varkappa^{s-\gamma}$可知$\sigma^{s-\gamma}$爲$k(\zeta)$內一數之u乘方.命$\sigma^{s-\gamma}=\beta^u$,式中$\beta$爲域$k(\zeta)$內之一數.由此式可得相合式$1+a(\gamma\lambda)^{e}-a\gamma\lambda^{e}\equiv\beta^u,(\mathfrak{l}^{e+1})$.由此可得$\beta\equiv1,(\mathfrak{l})$,更得$\beta^u\equiv1,(\mathfrak{l})$,由此$a\gamma^{e}\equiv a\gamma,(\mathfrak{l})$,此爲不可能.因其與$\gamma$爲$u$之原根及$e>1$相違也.以上所言即謂相合式$\sigma\equiv1,(\mathfrak{l}^u)$眞實不謬.

命$\sigma=\frac{\tau}{a^{u(u-1)}}$,其$\tau$爲$k(\zeta)$內之一整數,$a$爲一有理整數,則$\tau\equiv1,(\mathfrak{l}^u)$.假定域$C_1$非$U_1$,則由$k(\zeta)$,$U_1$及$C_1$合併所成之域即爲由$\sqrt[u]{\zeta}$及$\sqrt[u]{\tau}$所定之域

$k(\sqrt[u]{\zeta}, \sqrt[u]{\tau})$,其次數爲$u^2(u-1)$.另一方面$\zeta=\frac{1-\sqrt[u]{\tau}}{\lambda}$,爲方程式$\frac{(\xi\lambda-1)^u+\tau}{\lambda^u}=0$之根,故爲$k(\sqrt[u]{\zeta}, \sqrt[u]{\lambda})$內之一整數.其對域$k(\sqrt[u]{\zeta})$之相對的判別式等於$\varepsilon\tau^{u-1}$,式中$\varepsilon$爲一單位.因$\tau$與$u$互素,故域$k(\sqrt[u]{\zeta}, \sqrt[u]{\tau})$對$k(\sqrt[u]{\zeta})$之相對的判別式亦與$u$互素.故以$\mathfrak{L}^*$表域$\eta(\sqrt[u]{\zeta}, \sqrt[u]{\tau})$內$\mathfrak{l}$之素因子.故由定理93可知對$\mathfrak{L}^*$此域有一惰性域$T$,其次數爲$u$次.此惰性域$T$之判別式與$u$互素,且因定理85,故必須爲$+1$或$-1$.或直接由定理44,或由定理94,若於定理94中取k所表之域爲有理數域,皆可見於有理數域內諸理想數皆爲主理想數.故引18已明.

引19. 若C_h爲l^h次之循環域,其l爲一奇素數u,或等於2,有域U_1(或π_1)爲其分域,則C_h爲一由U_h(或π_h)及循環域$C'_{h'}$合幷而成之域之分域,環循域$C'_{h}{}^*$之次數爲$l^{h'}<l^h$.

證: 命$C_h \neq U_h$(或π_h).C_h與U_h(或π_h)之最大公分域以L_{h*}表之,L_{h*}之次數爲l^{h*}次,式中h^*爲一小於h之有理整正數.命t爲域C_h之羣之一代換,由此由演出此羣者,及z爲域U_h(或π_h)之羣之代換,亦可由之演出全羣.命$t^*=t^{l^{h*}}$及$z^*=z^{l^{h*}}$,則t^*及z^*皆演出一l^{h-h*}級之分羣.一方面屬於C_h之分域L_{h*},他方面屬於U_h(或π_h)由C_h及U_h(或π_h)合併所成之域K對L_{h*}之相對次數爲l^{2h-2h*},故其次數爲l^{2h-h*}.

爲欲求域K之羣G,以ϑ表定域C_h之一數,γ表定域U_h(或π_h)之一數,且命x,y爲不定襄變數.數$\Theta=x\vartheta+y\gamma$適合於$l^{2h-h*}$次不可化方程式,其係數爲$x,y$之整係數函數,且於襄變數$x,y$所定之域內不可化.此方程式之不同的根可表爲

$$\Theta_{mn}=x\,t^m\vartheta+y\,z^n\gamma,$$

式中m,n表已知的一對有理整數,由一已知之定理可知,ϑ及γ皆可表爲Θ之函數,其係數爲x,y之整係數函數,故數Θ_{mn}亦顯然可以表出.命

$$\Theta_{mn}=xt^{m}\vartheta+yz^{n}\gamma=\Phi_{mn}(\Theta).$$

式中Φ_{mn}爲Θ之有理函數,其係數爲x,y之整係數函數.以A表域K內之任一數,或爲一x,y之有理函數,其係數在K內,則A等於數Θ之一有理函數$F(\Theta)$其係數爲x,y之整函數.數A之共軛數表爲

$$S_{mn}A=F(\Phi_{mn}(\Theta)),$$

且l^{2h-h^*}個代換S_{mn}成一K域之羣G.因

$$S_{mn}(\Theta)=xS_{mn}\vartheta+yS_{mn}\gamma=xt^{m}\vartheta+yz^{x}\gamma,$$

其中因

$$S_{mn}\vartheta=t^{m}\vartheta,\quad S_{mn}\gamma=z^{x}\gamma,$$

由此易得

$$S_{mn}S_{m'n'}=S_{m+m',\,n+n'},\tag{41}$$

若命$S_{mn}=S_{m^*n^*}$,則$m\equiv m^*,n\equiv n^*,(l^h)$由(41)可得羣$G$中交換定則存在.即$K$域爲亞培爾羣.

以γ表l_h之原根,特如$z^\gamma\gamma$爲γ之共軛數,故G必有一代換之第二個足碼$n\equiv\gamma,(l^h)$.命如此之$S_{m\gamma}=s$.由s所演成之循環羣爲l^h次.又易知,凡羣G之第二足碼$\equiv o,(l^h)$者,成一l^{h-h^*}次之循環分羣.命$s^*=S_{m^*o}$爲此循環羣之一基代換.則羣G顯然可由s之l^h次乘方及s^*之$l^{h-h'}$次乘方合併得之.s^*之乘方所定之分域顯然屬於域K之循環分域U_h(或π_h).s所演成之域屬於域K之l^{h-h^*}次循環分域$C'_{h'}$.二域U_h(或ψ_h)與$C'_{h'}$無有理數域外之公分域及K域爲此二域之合併域.故引19已完全證明.

§104. 亞培爾氏域之基本定理之證明.

今證明基本定理如下:由§48已知,凡一亞培爾域爲由循環域合併而成,且此循環域之次數爲素數或素數之乘方次.故祇須證明凡l^h次之循環域C_h爲分圓域即足.l表一素數.

因欲證此,可假定定理131對諸$l^{h'}$之亞培爾氏域皆已證明,此$h'<h$.

於C_h中有l次之分域C_1.假定C_1之判別式有非l之素數p爲其因子.則

由定理39 C_h之判別式亦為p所整除.設引17可有一亞培爾氏域C'_h,其次數$l^{h'}\leq l^h$,能使C_h為C'_h,與分圓域P_h合併所成之域之分域.若C'_h為次數低於l^h之循環域,或為若干個如此之域合併所成,則由假定C'_h,即為分圓域,故C_h亦為一分圓域.故今祇須研究$h'=h$及$C'_{h'}=C'_h$為一l^h次循環域之情形.應用引17之2,可得C'_h之判別式祇有C_h之判別式之素因子為因子,但素因子p已不能整除C'_h之判別式.即C'_h之判別式之素因子至少較C_h之判別式之素因子少一.

今以C'_1表C'_h之l次分域.如C'_1之判別式尚有非l不之理素數p'則吾人可將用於C_h之方法,再用至C'_h上,可得C'_h或為一分圓域或另有一域C''_h,其次數為l^h,其判別式較C'_h之判別式至少少一素因子p'.繼續運用此法至m次後或可得一域$C_h^{(m)}$,由假定吾人已證此為一分圓域或得一l^h次循環域,其l次分域$C_1^{(m)}$之判別式l以外之其他素有理因子.由引18之證明之末段所言一l次之循環域之判別式不能為±1,故$C_1^{(m)}$之判別式確須有l為其因子.

分二種情形論之:

1.　l為一奇素數u,由引18故$C_1^{(m)}$與U_1重合.

2.　l等於2,若$h=1$,則$C_h^{(m)}=C_1^{(m)}$等於域$k(i)$或為域$k(\sqrt{2})=\pi_1$,故顯然為分圓域.當$h>1$,則可證明$C_1^{(m)}$等於$k(\sqrt{2})=\pi_1$.若$C_h^{(m)}$為實域則顯然$C_1^{(m)}$亦為實域,故如所言.若$C_h^{(m)}$為虛域,則其諸實數成一2^{h-1}次之實分域,$C_1^{(m)}$必在此實域中,故$C_1^{(m)}$為實域,故即為π_1.

由此二種情形可知,若$l=2$,$h=1$,則域$C_1^{(m)}=U_1$或$=\pi_1$.由引19可知$C_h^{(m)}$為一由U_h(或π_h)與一循環域$C_{\bar h}$合併所成之域之分域,$C_{\bar h}$之次數$l^{\bar h}<l^h$.由假定$C_{\bar h}$為分圓域,故$C_h^{(m)}$亦為一分圓域.故定理131已完全證明,同時可知用如何之方法以表出有所與羣及所與判別式之諸亞伯爾氏域.

24.　l次壹之根之分圓域之根數.

§105. 標準基數之定義及其存在.

若m次亞培爾氏域有一整數N,此數與其共軛數成各域之一組基數,如此之一組基數謂之標準基數(Normal basis)可有下引:

引20. 若一亞培爾氏域K有標準基數,則K之分域亦有標準基數.

證: 命M爲K之次數.$t_1,\cdots,t_m$爲亞培爾氏域K之羣之諸代換,又N爲K內之整數,與其共軛數能成此域之標準基數者.命$t_1,\cdots,t_\gamma$爲該M個代換成一分羣者,其相關之域爲K之分域k,則M個代換中能有$m=\frac{M}{\gamma}$個代換t_1', $\cdots,t'_m$使此M個代換$t_1,\cdots,t_m$可表爲代換之積:

$$t_1't_1,\cdots,t_1't_\gamma\ ;\ t_2't_1,\cdots,t_2'\,t_\gamma\ ;\ \cdots;t'_m\,t_1,\cdots,t_m'\,t_\gamma\ .$$

若α爲k內之一整數,故亦爲K內之一整數,故可表爲

$$\alpha=a_{11}t_1't_1N+\cdots+a_{1\gamma}t_1't_\gamma N+\cdots+a_{m1}t_m't_1N+\cdots+a_{m\gamma}\,t_m't_\gamma N,$$

式中$a_{11},\cdots,a_{1\gamma},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{m\gamma}$爲有理整數.因$\alpha$經代換$t_1,\cdots,t_\gamma$而不變,及$t_1't_1N$, $\cdots,t_1't_\gamma N,\cdots,t_m't_1N,\cdots,t_m'\,t_\gamma N$間無一次齊次關係,其係數爲非$o$之有理整數者.顯然可得:

$$a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1\gamma},\cdots\cdots,\ a_{m1}=a_{m2}=\cdots=a_{m\gamma}\ .$$

卽若命

$$\nu=t_1N+\cdots+t_\gamma N,$$

則m個數$t_1'\nu,t_2'\nu_1\cdots,t_m'\nu$當成$k$域之標準基數.

定理133. 凡M次之亞培爾氏域之判別式D與M互素者,有標準基數.

證: D之不同的有理素因子爲$p,p',\cdots$.此諸素數皆不能整除M,故由定理131之證明可知,此亞培爾氏域爲一分圓域之分域,該分圓域爲由$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{p}}$, $\zeta'=e^{\frac{2i\pi}{p'}}$, $\cdots$定出者,亦即爲由$Z=e^{\frac{2i\pi}{pp'\cdots}}$定出者.由定理118於$k(\zeta)$域中$1,\zeta,\cdots,\zeta^{(p-2)}$成一組基數,故$\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{p-1}$亦成一組基數.此即爲域$k(\zeta)$之標準基數,同法可施於$k(\zeta'),\cdots$.

作一組$(p-1)(p'-1)\cdots$個數$\zeta^h\zeta'^{h'}\cdots$,式中h,h'各個

$$1, 2, \cdots, p-1; 1, 2, \cdots, p'-1; \cdots\cdots.$$

此當互不相依,由定理88可知此$\Phi(pp'\cdots)$個數爲域$k(Z)$之基級,且此卽爲標準基數,故由引20可知亞培爾氏域有標準基數,故定理132已證明。

§106. 素數l次之亞培爾域及其判別式$=p^{l-1}$,此域之根數。

二次域以外之其他最簡單最重要之亞培爾氏域即爲其次數爲素數l次其判別式d祇有一非l之素因子p者。k表此域。由引16此素數必合條件$p\equiv1, (l)$。素數p於k域內爲一一級素理想數之l次乘方。由定理79之所言及上之所言可知k爲一實域d爲正數,且$d=p^{l-1}$。

命k域之羣之諸代換爲$1, t, t^2, \cdots, t^{l-1}$,數$\nu, t\nu, \cdots, t^{l-1}\nu$爲$k$域之標準基數。(定理132),數$\nu$當爲定$k$域之數。命$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$,式

$$\Omega=\nu+\zeta\cdot t\nu+\zeta^2 t^2\nu+\cdots+\zeta^{l-1}\cdot t^{l-1}\nu$$

名爲域$k=k(\nu)$中之根數(德文Wurzelzahl)。

凡一根數Ω顯然爲$k(\nu)$及$k(\zeta)$合併域$k(\nu,\zeta)$內之一整數。研究$k(\nu)$域之標準基數及根數,可將$k(\zeta)$內素數p之分解之素理想數明白表出之。又於此章中若以奇素數l換爲2,則其結果祇有極易之變化。

§107. 根數之特徵性質。

定理133. k爲一l次之亞培爾氏域,其判別式爲$d=p^{l-1}$,式中l及p爲不同之奇素數。又$\nu, t\nu, \cdots, t^{l-1}\nu$爲$k$域之標準基數。若$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$,$\mathfrak{l}=(1-\zeta)$及$s=(\zeta:\zeta^\gamma)$,式中$\gamma$爲$l$之原根,則每一組標準基數所對應之一根數$\Omega$有下之三性質:

1. 根數之l次乘方,$\omega=\Omega^l$,爲分圓域$k(\zeta)$內之一數,並$\omega^{s-\gamma}$等於$k(\zeta)$內一數之l次乘方。

2. 另一方面合下之相合式之條件

$$\Omega\equiv\pm1, (\mathfrak{l}),\quad \omega\equiv\pm1(\mathfrak{l}^l).$$

3. 數ω於$k(\zeta)$內之距$n(\omega)=p^{\frac{l(l-1)}{2}}$.

證: 數Ω^l及$\Omega^{g-\gamma}$在$k(\zeta,\nu)$內,且經變ν為$t\nu$而不變,故為$k(\zeta)$內之數.定理133之1.已經明.

因$\nu, t\nu, \cdots t^{l-1}\nu$為$k(\nu)$之基數,故有有理整數$a_0, a_1 \cdots, a_{l-1}$使

$$1=a_0\nu+a_1 t\nu+\cdots+a_{l-1}t^{l-1}\nu.$$

應用代換t於此公式可知$a_0=a_1=\cdots=a_{l-1}$.又$a_0\ a_1, \cdots, a_{l-1}$不能有$\pm1$之公約數,故此當等於$\pm1$,即$\nu+t\nu+\cdots+t^{l-1}\nu=\pm1$.由此公式可得

$$\Omega=\nu+\zeta\cdot t\nu+\zeta^2\cdot t^2\nu+\cdots+\zeta^{l-1}\cdot t^{l-1}\nu$$

$$\equiv\nu+t\nu+\cdots+t^{l-1}\nu\equiv\pm1,\ (\mathfrak{l}).$$

由$\omega\mp1=(\Omega\mp1)(\zeta\Omega\mp1)\cdots(\zeta^{l-1}\Omega\mp1)$可得$\omega$之第二性質.

最後由行列式分解因子之定理可得

$$\begin{vmatrix} \nu, & t\nu, & \cdots, & t^{l-1}\nu \\ t^{l-1}\nu, & \nu, & \cdots, & t^{l-2}\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t\nu, & t^2\nu, & \cdots, & \nu \end{vmatrix}=(\nu+t\nu+\cdots+t^{l-1}\nu)n(\Omega)=\pm n(\Omega),$$

式中

$$n(\Omega)=(\nu+\zeta t\nu+\cdots+\zeta^{l-1}t^{l-1}\nu)\cdots(\nu+\zeta^{l-1}t\nu+\cdots+\zeta^{(l-1)2}t^{l-1}\nu)$$

為Ω對域$k(\nu)$之相對的距.該行列式之平方即為$k(\nu)$域之判別式,即$=p^{l-1}$,且此可得

$$n(\omega)=(n(\Omega))^l=p^{l\left(\frac{l-1}{2}\right)}$$

故定理133已完全證明.

域$k(\nu)$內根數Ω於定理133中所證明之三性質,足以完全判定此數.可述之如下定理:

定理134. l為一奇素數,$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$,又$p$為一素數$\equiv1,\ (l)$;若$\omega$為分圓域

$k(\zeta)$內之一數,非$k(\zeta)$內一數之 l 次乘方,且有定理 133 所與之之三性質,則 $\Omega=\sqrt[l]{\omega}$ 爲一 l 次判別式$=p^{l-1}$之亞培爾式域之根數.

證: 數$\Omega=\sqrt[l]{\omega}$定一對$k(\zeta)$爲相對的 l 次之迦羅華氏域.命 t 爲相對羣之一代換,能使$t\Omega=\zeta^{-1}\Omega$.由ω之性質,可有公式$s\omega=\omega^{\gamma}\alpha^{l}$表之,式中$\alpha$爲 $k(\zeta)$內之一數.由ζ及Ω所定之域爲$l(l-1)$次之迦氏域.數α適合條件

$$\omega^{1-\gamma^{l-1}}=\alpha^{l\frac{s^{l-1}-\gamma^{l-1}}{s-\gamma}},$$

又可書

$$\omega^{\frac{1-\gamma^{l-1}}{l}}=\alpha^{\frac{s^{l-1}-\gamma^{l-1}}{s-\gamma}},$$

今欲知$k(\zeta,\Omega)$域之羣爲由 t 及 s 演出之,由已經確定之t,s之性質可有$t\zeta=\zeta$及$s\Omega=\Omega^{\gamma}\alpha$.此二代換 s 與 t 是可互換的,因

$$st\Omega=\zeta^{-\gamma}\Omega^{\gamma}\alpha=ts\Omega$$

卽域$k(\zeta,\Omega)$爲一亞培爾氏域.又$k(\zeta,\Omega)$之羣由s演成之分羣恰爲 $l-1$ 次.故此分羣當屬於$k(\zeta,\Omega)$域之一 l 次分域,且定爲亞培爾氏域,此域以k表之.

吾再證k域之判別式與l互素.因$\Omega\equiv\pm1,(\mathfrak{l}=(1-\zeta))$,故$\frac{\Omega\mp1}{1-\zeta}$表一整數.因$t\Omega=\zeta^{-1}\Omega$,故此整數對$k(\zeta)$之相對別之值爲$\varepsilon\Omega^{l-1}$,式中$\varepsilon$爲一單位.故$k(\zeta,\Omega)$對$k(\zeta)$之相對別與 l 互素.以$\mathfrak{L}$表於$k(\zeta,\Omega)$域內 $\mathfrak{l}$ 之素因子,則由定理93知 $\mathfrak{l}$ 不能爲 $\mathfrak{L}$ 之更高以乘方所整除.即$l=\mathfrak{L}^{l-1}\mathfrak{M}$,式中$\mathfrak{M}$不再爲 $\mathfrak{L}$ 所整除.由§39及§40可得,素理想數$\mathfrak{L}$之惰性域爲 l 次.故k即爲其惰性域.由定理76 k域之別不爲$\mathfrak{L}$所整除,及由定理68 k之判別式亦不爲 l 所整除.

命

$$\nu=\frac{\pm1+\Omega+s\Omega+s^{2}\Omega+\cdots+s^{l-1}\Omega}{l}\tag{41}$$

式中之$\pm$號依相合式$\Omega\equiv\pm1$ $s\Omega\equiv\pm1,\cdots,(\mathfrak{l})$之號$\pm$而定,則此分數$\nu$之分子當爲 $\mathfrak{l}$ 所整除.此分子表k域之一數.若 l 在k內爲素理想數,則此分子必

爲 l 所整除,即 ν 爲一整數.另一方面,若 k 域之判別式不爲 l 所整除,則 l 可分解爲 $l=\mathfrak{l}_1\cdots\mathfrak{l}_e$,式中 $\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_e$ 爲互不相同之素理想數,且由定理 88 之助,可知 $k(\zeta,\Omega)$ 於域內爲分解式

$$\mathfrak{l}=(1-\zeta)=(\mathfrak{l},\mathfrak{l}_1)(\mathfrak{l},\mathfrak{l}_2)\cdots(\mathfrak{l},\mathfrak{l}_e).$$

(41)式之右邊之分子可爲理想數$(\mathfrak{l},\mathfrak{l}_1)$所整除故此即爲 k 內一整數可爲 $\mathfrak{l}_1$ 所整除者.同樣,此分子可爲 $\mathfrak{l}_2,\cdots,\mathfrak{l}_e$ 所整除,即可爲 l 所整除.即由(41)所定之 ν 爲一整數.

使用方程式 $t\Omega=\zeta^{-1}\Omega$ 可用(41)以得

$$\begin{aligned} t+\quad t\nu+\quad t^2\nu+\cdots+\quad t^{l-1}\nu&=\pm 1,\\ \nu+\zeta\cdot t\nu+\zeta^2\cdot t^2\nu+\cdots+\zeta^{l-1}\cdot t^{l-1}\nu&=\Omega. \end{aligned}\tag{42}$$

如定理 133 之證明用行列式之分解定理可得

$$N=\begin{vmatrix} \nu, & t\nu, & \cdots, & t^{l-1}\nu \\ t^{l-1}\nu, & \nu, & \cdots, & t^{l-2}\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t\nu, & t^2\nu, & \cdots, & \nu \end{vmatrix}=\pm\,\Omega\cdot s\,\Omega\cdots s^{l-2}\Omega,$$

且由定理 133 (a) 之第三性質,可得

$$N^l=\pm p^{\frac{l(l-1)}{2}}$$

故

$$\begin{vmatrix} \nu, & t\nu, & \cdots, & t^{l-1}\nu \\ t^{l-1}\nu, & \nu, & \cdots, & t^{l-2}\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t\nu, & t^2\nu & \cdots, & \nu \end{vmatrix}=p^{l-1}.$$

茲往證 k 域之判別式必 $=p^{l-1}$.由上式可知其爲 p^{l-1} 之因子.由定理 44 或定理 94 判別式不爲 ± 1,故有一素因子 p,由定理 79 之附言可知必爲 $l-1$ 次乘方.由適所證明之事實知 $\nu,t\nu,\cdots,t^{l-1}\nu$ 爲 k 域之基數,顯然即爲標準基

數.由(42 數 Ω 即爲對此基數之根數.

§108.　於 l 次壹之根之域內一根數之 l 乘方之分解.

定理135.　l, p, ζ, γ, s 仍如前義.且 $k(\nu)$ 爲一 l 次之亞培爾氏域,其判別式 $d=p^{l-1}$.且 Ω 爲域 $k(\nu)$ 內之根數.且 $\omega=\Omega^l$ 當 $k(\zeta)$ 內之數,於此域內可分解爲

$$\omega=\mathfrak{p}^{\gamma_0+\gamma_{-1}s-\gamma_{-2}s^2+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}}.$$

式中 $\mathfrak{p}$ 爲 k 域內 p 之素理想因子,γ_{-i} 爲最小之整正數可與 l 之原數 γ 之 $-i$ 乘方 γ^{-i} 相合者(對l).[Kummes (6, 11)].

證:　素數 p 於域 $k(\zeta)$ 內中分解爲 $l-1$ 個不同的素理想數 $\mathfrak{p}, s\mathfrak{p}, \cdots, s^{l-2}\mathfrak{p}$, 數 ω 必爲此諸素理想數所整除.因由定理 134 之證明域 $k(\zeta, \Omega)$ 對域 $k(\zeta)$ 之相對別爲 $\Omega^l=\omega$ 之一因子.若 ω 與 $\mathfrak{p}$ 互素,則由定理 42 $k(\zeta, \Omega)$ 域之別,由定理 68 $k(\zeta, \Omega)$ 之判別式皆與 $\mathfrak{p}$ 互素,此爲不可能因域 $k(\nu)$ 之判別式有此因子也.因 $n(\omega)=p^{\frac{l(l-1)}{2}}$.故 ω 所能有之素因子,卽爲 $\mathfrak{p}, s\mathfrak{p}, \cdots, s^{l-2}\mathfrak{p}$. 命 $\mathfrak{p}$ 爲素因子之一,且於 ω 中其乘方之指數最低,則可有

$$\omega=\mathfrak{p}^{a_0+a_1s+\cdots+a_{l-2}s^{l-2}},$$

式中 $a_0, a_1, \cdots, a_{l-1}$ 表有理整正數,其中 a_0 爲最小.作 $n(\omega)$ 可得

$$a_0+a_1+\cdots+a_{l-2}=\frac{l(l-1)}{2}.$$

因 $a_0, a_1, \cdots, a_{l-2}$ 皆 $>o$, 此數不能皆爲 l 所整除.由定理 133 所證明之第一性質

$$\omega^{s-\gamma}=\mathfrak{p}^{(s-\gamma)(a_0+a_1s+\cdots+a_{l-2}s^{l-2})}=\alpha^l$$

式中 α 爲 $k(\zeta)$ 內之一數.因 $\mathfrak{p}$ 與其諸共軛數間皆彼此互異,故於 s 之整係數函數中命 s^{l-1} 爲 1, 此當爲 l 所整除,即此函數 $\equiv a_{l-2}(s^{l-1}-1), (l)$.顯然可知 $a_{l-2}\not\equiv o, (l)$, 且若 $a_{l-1}\equiv\gamma^{m-l+2}, (l)$ 式中 m 爲 $0, 1, \cdots, l-2$ 之一數可得對每一指數 $i=0,1,\cdots,l-2$ 有相合式

$$a_i\equiv\gamma^{m-i}, \quad (l).$$

普通命$a_i=\gamma_{m-i}+lb_i$,則$o<\gamma_{m-i}<l$及b_i為一有理整數,且$b_i\geq o$,因

$$\gamma_m+\gamma_{m-1}+\cdots+\gamma_{m-l+2}=1+2+\cdots+(l-1)=\frac{l(l-1)}{2}$$

可得$b_0+b_1+\cdots+b_{l-2}=o$,必得

$$b_0=o,\ b_1=o,\ \cdots,\ b_{l-2}=o,$$

即
$$a_i=\gamma_{m-i},\ (i=o,\ 1,\ \cdots,\ e-2).$$

其中數$\gamma_0,\gamma_1\cdots,\gamma_{l-2}$,以$\gamma_0=1$為最小,且因$a_0$為$a_0,a_1,\cdots,a_{l-2}$中之最小者,故$a_0=\gamma_0=1$,即$m=o$,又普通$a_i=\gamma_{-i}$,故定理135已證明.

§109. l次壹之根之域之一級素理想數之一相似式.

由以上之研究,可知於l次壹之根之域內素數$p\equiv1,(l)$分解為素因子之一重要性質.今述之如下:

定理136. l為一奇素數,$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$,又$\gamma$為$l$之原根,及$s=(\zeta:\zeta^\gamma)$;若$\mathfrak{p}$為域$k(\zeta)$內之任一一級素理想數,則有相似式

$$\mathfrak{p}^{q_0+q^{-1}s+q^{-2}s^2+\cdots+q^{-l+2}s^{l-2}}\sim1,$$

式中q_{-i}為有理整數,由方程式組

$$q_{-i}=\frac{\gamma\gamma_{-i}-\gamma_{-i+1}}{l}\qquad\qquad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ l-2)$$

定之,故非負數,其$\gamma_0,\gamma_{-1},\cdots,\gamma_{-l+2}$仍如定理135之義,且$\gamma_1=\gamma_{-l+2}$ [Kummer (6, 11)].

證: p及ω可有如定理123之表示,由定理133 $\omega^{s-\gamma}$為域$k(\zeta)$內一數α之l次乘方.若以定理135中所與之ω由$\mathfrak{p}$之表出式,則可得

$$\mathfrak{p}^{(s-\gamma)(\gamma_0+\gamma_{-1}s+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2})}=\alpha^l,$$

此式表示α之分解式,故定理136為眞.

若C為分圓域$k(\zeta)$之任一理想班,且$\mathfrak{i}$為C之任一理想數,以$sC,s^2C,\cdots,s^{l-2}C$表由$s\mathfrak{i},s^2\mathfrak{i},\cdots,s^{l-2}\mathfrak{i}$所定之理想數班,則由定理89之助及定理136可得

$$C^{q^{0}}(sC)^{q^{-1}}(s^2C)^{q^{-2}}\cdots(s^{l-1}C)^{q^{-l+2}}=1.$$

§110. 諸標準基數及根數之作法.

定理 133, 134 及 135 可與亞培爾氏域 k 內諸根數之作法.此可有下之定理:

定理 137. k 爲一素數 l 次之亞培爾氏域,其判別式爲 p^{l-1}, Ω 及 Ω^* 表此域內之二不同根數,但可由此域之一代換 t 得之,且 t 可演成此域之諸代換,則 $\Omega^*=\varepsilon\Omega$, 式中 ε 表 $k(\zeta)$ 域內之一單位,有適合相合式 $\varepsilon\equiv\pm1$ ($\mathfrak{l}=1-\zeta$))之性質.反之,若 ε 爲 $k(\zeta)$ 內之一單位有上之性質者,且 Ω 表 k 域之任一根數,則 $\Omega^*=\varepsilon\Omega$ 亦爲此亞培爾域之根數.

證: 由假定之第一部,商 $\varepsilon=\dfrac{\Omega^*}{\Omega}$ 爲 k 及 $k(\zeta)$ 合併域內之一數,此由換 ζ, v 爲 ζ, tv 而不變故此數在 $k(\zeta)$ 中.由定理 135 $\omega=\Omega^l=\mathfrak{p}^{\gamma_0+\gamma_{-1}s+\gamma_{-2}s^2+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}}$ 若 $s^{-a}\mathfrak{p}$ 之 a 過 $0, 1, 2, \cdots, l-2$, 則此表 p 之於 $k(\zeta)$ 內之諸素因子.卽爲 $\mathfrak{p}$ 之諸共軛理想數,此於 $\omega^*=\Omega^{*l}$ 祇爲一次乘方,故由定理 135 可顯見

$$\omega^*=\mathfrak{p}^{s^{-a}(\gamma_0+\gamma_{-1}s+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2})}$$

由此 $\mathfrak{p}$ 於 ω^* 恰爲 γ_{-a} 次乘方,故 $\dfrac{\omega^*}{\omega}$ 爲一分數,其分子可爲素理想數 $\mathfrak{p}$ 之 $(\gamma_{-a}-\gamma_0)$ 次乘方所整除,其分母與 $\mathfrak{p}$ 互素,因 $\dfrac{\omega^*}{\omega}=t^l$ 其指數 $\gamma_{-a}-\gamma_0$ 須爲 l 所整除故可得 $\gamma_{-a}=\gamma_0$, 卽 $a=0$, 由此 ω, ω^* 對同素理想數有同次乘方,故 ε 爲一單位.

定理 137 之其餘部分可由定理 133 及 134 得之.

t 所屬之根數,由公式 41)可得 $v, tv, \cdots, t^{l-1}v$ 爲亞培爾氏域之標準基數.

§111. 拉格蘭忌之標準基數及拉氏根數.

l 仍爲一奇素數, $\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$, 又 p 爲一如 $lm+1$ 形之有理素數,命 $Z=e^{\frac{2i\pi}{p}}$. 又 k 爲 l 次亞培爾氏域其判別式 $=p^{l-1}$.

$p-1$ 個數 $Z, Z^2, \cdots, Z^{p-1}$ 爲域 $k(Z)$ 之一組標準基數,由引 20 之證可知 l 個

數

$$\lambda_0 = Z + Z^{R^l} + Z^{R^{2l}} + \cdots\cdots + Z^{R^{(m-1)l}}$$

$$\lambda_1 = Z^R + Z^{R^{1+l}} + Z^{R^{1+2l}} + \cdots\cdots + Z^{R^{1+(m-1)l}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{l-1} = Z^{R^{l-1}} + Z^{R^{2l-1}} + Z^{R^{3l-1}} + \cdots\cdots + Z^{R^{m-1}}$$

爲 k 域之標準基數.由此標準基數可得此域之根數.

$$\Lambda = \lambda_0 + \zeta\lambda_1 + \zeta^2\lambda_2 + \cdots\cdots + \zeta^{l-1}\lambda_{l-1},$$

$$= Z + \zeta Z^R + \zeta^2 Z^{R^2} + \cdots\cdots + \zeta^{p-2} Z^{R^{p-2}}.$$

此標準基數 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{l-1}$ 謂拉氏標準基數(Lagrange's normal basis ,根數 Λ 謂拉氏根數(Lagrangesche Wurzelzahl).

§112.　拉氏根數之特性.

域 k 之拉氏根數 Λ 作出 k 域之其他根數,有下之定理.

定理138.　由定理134拉氏根數 Λ 之 l 乘方可表爲

$$\Lambda^l = \mathfrak{p}^{\gamma_0 + \gamma_{-1}s + \gamma_{-2}s^2 + \cdots + \gamma_{-l+2}s^{l-2}},$$

故 $\mathfrak{p}$ 可表爲

$$\mathfrak{p} = (p, \zeta - R^{-m}), \quad (m = \frac{p-1}{l})$$

此爲一素理想數.其中符號所表之意義仍如定理135所述.拉氏根數 $\Lambda \equiv -1$, $(\mathfrak{l})$,且其絕對値 $= |\sqrt{p}|$.

反之,若根數 Ω 有上之性質,且 Ω^l 恰爲素理想數 $\mathfrak{p}$ 之一次方所整除,且 $\Omega = \zeta^* \Lambda$ 式中 ζ^* 表一 l 次壹之根.

證:　若命 $\mathfrak{P} = (1-Z, \mathfrak{p})$, 則由 $(1-Z)^{p-1} = (p)$ 及 $(p, \mathfrak{p}^{p-1}) = \mathfrak{p}$ 之助可知

$$\mathfrak{P}^{p-1} = (p, (1-Z)^{p-2}\mathfrak{p}, \quad , \mathfrak{p}^{p-1}) = \mathfrak{p},$$

由此顯然 $\mathfrak{p}$ 爲由 ζ 及 Z 所定之域內之一素理想數,且 $1-Z$ 祇有 $\mathfrak{P}$ 的一次方爲其因子.命 $Z = 1 + \pi$, 且由相合式 $\zeta \equiv R^{-m}$, $(\mathfrak{p})$ 及方程式 $(1+\pi)^p = 1$,則

$$\Lambda \equiv \sum_{(x)} R^{-mx}(1+\pi)^{R^x}, \quad (\mathfrak{p})$$

$$\equiv \sum_{(X)} \left\{ X^{-m} \sum_{(Y)} \binom{X}{Y} \Pi Y \right\}, \quad (\mathfrak{p})$$

式中和號 $x=0, 1, 2, \cdots, p-2, X=1, 2, \cdots, p-1, Y=0, 1, 2, \cdots, X$ 由此級數之和可得相合式

$$\Lambda \equiv -\frac{\pi^m}{m!}, \qquad (\mathfrak{P}^{m+1})$$

拉氏根數恰有$\mathfrak{P}$之w次乘方爲其因子,且可得Λ^l祗爲$\mathfrak{p}$之一次方所整除.

以$\bar{\Lambda}$表Λ之共軛虛數,則

$$\bar{\Lambda} = Z^{-1} + \zeta^{-1} Z^{-R} + \zeta^{-2} Z^{-R^2} + \cdots + \zeta^{-p+2} Z^{-R^{p-2}},$$

於乘積$\Lambda\bar{\Lambda}$中以ζ相同乘方者集合之,可得

$$\begin{aligned}
\Lambda\bar{\Lambda} = &\quad (1 + 1 + \cdots + 1) \\
&+ \zeta \ (Z^{R-1} + Z^{R^2-R} + \cdots + Z^{R^{p-1}-R^{p-2}}) \\
&+ \zeta^2 \ (Z^{R^2-1} + Z^{R^3-R} + \cdots + Z^{R^p-R^{p-2}}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \zeta^{p-2} \ (Z^{R^{p-2}-1} + Z^{R^{p-1}-R} + \cdots + Z^{R^{2p-4}-R^{p-2}}) \\
= &\ p-1-(\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{p-2}) = p.
\end{aligned}$$

故定理 138 之第一步已證明.

第二部分爲第一部分之重要的反定理,此第二部分之眞實性可由定理135及137得之而無重大困難.若用此至定理48,可知若亞培爾氏域內一數之絕對值爲一,則其諸共軛數亦有此性質.

同法如相合式(43)能化得下之相合式[Jacobi(3)]:

$$s^{-i}\Lambda \equiv -\frac{\pi^{\gamma_{-i} m}}{(\gamma_{-i} m)!}, \quad (\mathfrak{P}^{\gamma_{-i} m+1}), \tag{44}$$

$i=0, 1, 2, \cdots, l-2$. 由 $\Lambda = -1, (\mathfrak{P})$ 及 $\Lambda = |\sqrt{p}|$, 同樣由相合式(44)得定理 135 及 136 之別證[Kummer(6, 11)].

本第24章之諸定理及證明當 $l=2$ 時亦然,該明亞培爾氏域 k 之判別式之值 $=d(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$.

k 域之拉氏根數 Λ 爲 $k(\zeta)$ 及 k 合併域內之整數,可由定理133及138已知之性質及此因子 $z\zeta^*$ 以完全決定之.最後因欲求 ζ^* 之確值,命 $\Lambda=\left|\sqrt{p}\right|e^{2i\pi\varphi}$, $o\leq\varphi<1$, 則數 φ 當位於 l 個區間中

$$o\leq\varphi<\frac{1}{l},\quad \frac{1}{l}\leq\varphi<\frac{2}{l},\ \cdots,\frac{l-1}{l}\leq\varphi<1.$$

此問題當 l 爲素數2時,卽所謂著名的決定高斯氏和之記號問題(比較§124).當 $l=3$ 時,則得一栝母氏所涉及之問題[Kummer(2, 4)].

拉氏基數之數通常名爲"週期" (Perioden).關於此週期研究之文獻,如應用至分圓域之整數[Kummer (3, 17), Fuchs (1,2), Schwering(1,3, 4), Kronecker (17), Smith (1)].於次文獻中亦可覓得特別的分圓域之研究[Berkenbusch (1), Eisenstein (10), Schwering (2), Weber(1, 2, 4), Wolfskehl (1)].又若 l 爲小於 100 之素數舍29及41之外,其分圓域有一理想數班,此域內之諸班可由此班之乘方表之[Kummer (11, 13)].

25. 一有理數及 l 次壹之根之域內一數之 l 次剩餘之相反定律.

§113.一數之乘方特徵及符號 $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}$

l 一奇素數, $\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$, 且 $k(\zeta)$ 爲由 ζ 所定之分圓域.若 p 爲一有理素數,但非 l, $\mathfrak{p}$ 爲 $k(\zeta)$ 內素數 p 之素理想因數,其級數爲 f.則由定理24, $k(\zeta)$ 任一非 $\mathfrak{p}$ 所能整除之整數 α, 皆適吿

$$\alpha^{p^{f}-1}-1\equiv 0,(\mathfrak{p}),$$

因 p^f-1 爲 l 之倍數(定理119),故此相合式之左邊可分解爲

$$\alpha^{p^{f}-1}-1=\prod_{(c)}\left(\alpha^{\frac{p^f-1}{l}}-\zeta^c\right),$$

式中之c過$0, 1, \cdots, l-1$.由各對α有一且祇為一c之值使

$$\alpha^{\frac{p^f-1}{l}} \equiv \zeta^c, \quad (\mathfrak{p}).$$

此壹之根ζ^c卽名為$k(\zeta)$域內之數α對素理想數$\mathfrak{p}$之乘方特徵(德文 Potenz-character)且以符號

$$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}$$

表此壹之根ζ^c,故有相合式

$$\alpha^{\frac{p^f-1}{l}} \equiv \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}, \quad (\mathfrak{p}) \tag{45}$$

[Kummer(10)].

若α及β表$k(\zeta)$內之二非$\mathfrak{p}$之倍數之整數,則顯可得

$$\left\{\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}\left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\}$$

特如整數α對素理想數$\mathfrak{p}$相合於$k(\zeta)$內一整數之l次乘方,則α名為$\mathfrak{p}$之l次剩餘.有下之定理:

定理139.　$\mathfrak{p}$為一非$\mathfrak{l}$,於$k(\zeta)$內之素理想數,則α為l次剩餘之必要且充分之條件為$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}=1$.

證:　若$\alpha \equiv \beta^l, (\mathfrak{p})$,式中$\beta$為$k(\zeta)$內之一整數,則$\alpha^{\frac{p^f-1}{l}} \equiv \beta^{p^f-1} \equiv 1, (\mathfrak{p})$,即$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}=1$.因欲證其逆亦眞,可以$\varrho$表$\mathfrak{p}$之原數,命$\alpha \equiv \varrho^h, (\mathfrak{p})$,取$\alpha^{\frac{p^f-1}{l}} \equiv \varrho^{\frac{h(p^f-1)}{l}} \equiv 1$,故$\frac{h(p^f-1)}{l} \equiv 0, (p^f-1)$,卽$h$為$l$之倍數,且此可得$\alpha$為$\mathfrak{p}$之$l$次剩餘,此證所言.

$\mathfrak{p}$之原數ϱ之乘方特徵$\left\{\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right\}$定非為1,因於數列$\varrho, \varrho^2, \cdots$中$\varrho^{p^f-1}$為其第一個$\equiv 1, (\mathfrak{p})$者,故$\varrho^{\frac{p^f-1}{l}} \equiv 1, (\mathfrak{p})$.

命$\left\{\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right\}=\zeta^g$,定一與$p^f-1$互素之有理整數$g^*$使$gg^* \equiv 1, (l)$,則顯然$\varrho^*$

$=\varrho^{g*}$爲$\mathfrak{p}$之一原數,因其$\left\{\frac{\varrho^*}{\mathfrak{p}}\right\}=\zeta$也.若$\alpha$爲$k(\zeta)$域內非$\mathfrak{p}$之倍數之整數,且若$\alpha\equiv\varrho^{*c}$, $(\mathfrak{p})$,則α之乘方特徵爲ζ^c.

由此顯然可知,於$\mathfrak{p}$不相合數之全隊之p^f-1個數$1,\varrho^*,\varrho^{*2},\cdots,\varrho^{*p^f-2}$中,可分爲$l$組,每組之$\frac{p^f-1}{l}$個數有同樣的乘方指數.且恰有$\frac{p^f-1}{l}$個不相合之數爲$\mathfrak{p}$之$l$次剩餘.

若$\mathfrak{b}$爲任一與$\mathfrak{l}$互素之理想數,α爲與$\mathfrak{b}$互素之整數,且若$\mathfrak{b}=\mathfrak{p}\mathfrak{q}\cdots\mathfrak{m}$,式中$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q},\cdots,\mathfrak{m}$爲素理想數,則符號$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right\}$可由下式定其義

$$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right\}\cdots\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right\}.$$

§114.　關於拉氏根數之l次乘方特徵之引.

愛遜斯坦(Eisenstein)氏發明且證明於$k(\zeta)$域內一有理數及此域中任一數間之相反定律.其ζ仍表$e^{\frac{2i\pi}{l}}$, l任一奇素數.同時此相反定律迄今認爲證明枯姆氏普通相反定律之必需的幫助(比較第31章).於證愛氏相定律之前先述下引:

引21.　命　$\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$,又$p$表一非$l$之有理素數,其形式爲$p=ml+1$, R爲p之原數, $\mathfrak{p}$爲$k(\zeta)$域內一級素理想因子:

$$\mathfrak{p}=(p,\zeta-R^{-m});$$

又　$Z=e^{\frac{2i\pi}{p}}$,拉氏根數

$$\Lambda=Z+\zeta Z^R+\zeta Z^{R^2}+\cdots+\zeta^{p-2}Z^{R^{p-2}}$$

及$\pi=\Lambda^l$.最後q爲一非l非p之有理素數.$\mathfrak{q}$爲q於$k(\zeta)$內之素理想數,g爲$\mathfrak{q}$之級數,則$\pi=\Lambda^l$對理想數$\mathfrak{q}$之乘方特徵由下公式表之:

$$\left\{\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right\}=\left\{\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right\}^g.$$

證:　行g次q方可得下之相合式

$$\Lambda^{q^g} = Z^{q^g} + \zeta^{g^q} Z^{Rq^g} + \zeta^{2q^g} Z^{R^2 q^g} + \cdots + \zeta^{(p-2)q^g} Z^{R^{p-2} q^g}, (q). \quad (46)$$

由定理119可得 $q^g \equiv 1, (l)$，且命 $q^g \equiv R^h, (p)$，則(46)式之右邊爲

$$Z^{R^h} + \zeta Z^{R^{h+1}} + \zeta^2 Z^{R^{h+2}} + \cdots + \zeta^{p-2} Z^{R^{h+p-2}} = \zeta^{-h} \Lambda.$$

由此及 Λ 與 q 互素(定理138)可得相合式:

$$\Lambda^{q^g-1} \equiv \zeta^{-h}, \quad (q).$$

由巳知可得

$$\Lambda^{q^g-1} = \pi^{\frac{q^g-1}{l}} \equiv -\zeta^{-h}, \quad (q)$$

即

$$\left\{\frac{\pi}{q}\right\} = \zeta^{-h} \quad (47)$$

另一方面由相合式 $q^g \equiv R^h, (p)$，及 $R^m \equiv \zeta^{-1} (p)$ 可得

$$q^{\frac{g(p-1)}{l}} = q^{gm} \equiv R^{hm} \equiv \zeta^{-h}, \quad (p)$$

即

$$\left\{\frac{q^g}{p}\right\} = \left\{\frac{q}{p}\right\}^g = \zeta^{-h}; \quad (48)$$

合併(47)與(48)可得引21.

§115. $k(\zeta)$域內一有理整數與任一整數之相反定律.

命 $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$表 $k(\zeta)$ 域內 l 之素理想因子. $k(\zeta)$域內一整數 α，若對 $\mathfrak{l}$ 互素，對 $\mathfrak{l}^2$ 相合於一有理整數，則此數名爲半原數(Semiprimär). 一有理整數之不爲 l 所整除者顯然爲一原數. $k(\zeta)$內任一非 $\mathfrak{l}$ 之倍數之整數 α 能乘以壹之根 ζ 之相當乘方，而爲一半原數，其理由爲：若

$$\alpha \equiv a + b(1-\zeta), \quad (\mathfrak{l}^2)$$

式中 a, b 爲二有理整數，則

$$\zeta^{b^*} \cdot \alpha \equiv a, \quad (\mathfrak{l}^2),$$

式中 b^* 爲相合式 $ab^* \equiv b, (l)$ 之解答，故數 $\zeta^{b^*} \cdot \alpha$ 爲半原數.

由此所言愛遜斯坦氏之相反定律可述之如下

定理140. 若 a 爲一任意有理整數,非奇素數 l 之倍數,且 α 爲 l 次壹之根之域 $k(\zeta)$ 內之任一半原數,且與 a 互素,則此域中有相反定律:

$$\left\{\frac{a}{\alpha}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{a}\right\}$$

[Eisenstein(2)].

證: 命 γ 爲 l 之原根,且命 $s=(\zeta:\zeta^{\gamma})$,先假定 $a=q$ 爲一有理素數,且數中祇有一級素理想因子.命 $\mathfrak{q}$ 爲 $k(\zeta)$ 內 q 之素因子其級數爲 g, 又 p 爲距 $n(\alpha)$ 之有理素因子.則能有於引21同義之 $\mathfrak{p}$ 及 π. 若 s^u 爲代換 s 之任一乘方,應用引21至素理想數 $s^{-u}\mathfrak{p}$ 及 $\mathfrak{q}$, 可得

$$\left\{\frac{\pi}{s^{-u}\mathfrak{q}}\right\}=\left\{\frac{q}{\mathfrak{p}}\right\}^{g}$$

行以代換 s^u, 可得

$$\left\{\frac{s^u\pi}{\mathfrak{q}}\right\}=\left\{\frac{q}{s^u\mathfrak{p}}\right\}^{g}$$

命 $n(\alpha)$ 所有之不同素有理因子爲 $p\equiv ml+1, p^*=m^*l^*+1, \cdots$, 及 $R, R^*, \cdots$ 爲素數 $p, p^*, \cdots$ 之原根,最後

$$\mathfrak{p}=(p,\zeta-R^{-m}),\quad \mathfrak{p}^*=(p^*,\zeta-R^{*-m^*}),\cdots$$

則 α 之分解式爲

$$\alpha=\mathfrak{p}^{F(s)}\quad \mathfrak{p}^{*F^*(s)}\cdots,$$

式中指數 $F(s), F^*(s), \cdots$ 爲 s 之 $l-2$ 次整係數函數,其係數 $\geqq 0$.

以 $\Lambda, \Lambda^*, \cdots$ 各表素數 $p, p^*, \cdots$ 及其原根 $R, R^*, \cdots$ 所屬之拉氏根數,且命 $\pi=\Lambda^l, \pi^*=\Lambda^{*l}, \cdots$, 則由定理138可得分解式

$$\pi=\mathfrak{p}^{\gamma_0+\gamma_{-1}s+\gamma_{-2}s^2+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}},$$

$$\pi^*=\mathfrak{p}^{*\gamma_0+\gamma_{-1}s+\gamma_{-2}s^2+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

式中γ_{-h}爲最小之有理整正數,可對l相合於γ之$-h$次乘方γ^{-h}者,商

$$\varepsilon=\frac{\alpha^{\gamma_0+\gamma_{-1}s+\gamma_{-2}s^2+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}}}{\pi^{F(s)}\pi^{*F^*(s)}\cdots}$$

顯然爲域$k(\zeta)$內之一單位.今欲證此單位即$\varepsilon=\pm1$,爲欲達此目的,可作下式

$$|\varepsilon|^2=\varepsilon^{1+s^{\frac{l-1}{2}}}=\frac{\alpha^{(1+s^{\frac{l-1}{2}})(\gamma_0+\gamma_{-1}s+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2})}}{(|\pi|^2)^{F(s)}(|\pi^*|^2)^{F^*(s)}\cdots}$$

因當$h=0,1,2,\cdots,\frac{l-3}{2}$時有方程式

$$\gamma_{-h}+\gamma_{-h-\frac{l-1}{2}}=l$$

故右邊之分子

$$\alpha^{(1+s^{\frac{l-1}{2}})(\gamma_0+\gamma_{-1}s+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2})}=\alpha^{l(1+s+\cdots+s^{l-2})}=(n(\alpha))^l.$$

由定理138已知$|\pi|^2=p^l$, $|\pi^*|^2=p^{*l}$, $\cdots$,故可知$|\varepsilon|=1$.由定理48可知ε爲±1與一壹之根ζ之乘方乘積.另一方面由定理138可得相合式

$$\pi\equiv-1,\ \pi^*\equiv-1,\ \cdots,(l^2),$$

故$\pi,\pi^*,\cdots$皆爲半原數故ε亦然,可得$\varepsilon=\pm1$,故

$$\alpha^{\gamma_0+\gamma_{-1}s+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}}=\pm\pi^{F(s)}\pi^{*F^*(s)}\cdots.$$

由此式於公式(49)可得相反方程式

$$\left\{\frac{\alpha^{\gamma_0+\gamma_{-1}s+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}}}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{p^{(F(s)}p^{*F^*(s)}\cdots}\right\}^g=\left\{\frac{q}{\alpha}\right\}^g \tag{50}$$

由

$$\left\{\frac{s\alpha}{q}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{s^{-1}q}\right\}^{\gamma},\ \left\{\frac{s^2\alpha}{q}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{s^{-2}q}\right\}^{\gamma^2},\cdots\left\{\frac{s^{l-2}\alpha}{q}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{s^{-l+2}q}\right\}^{\gamma^{l-2}},$$

此可以ζ之記號乘方表之,由(50)可得等式

$$\left\{\frac{\alpha}{q^g}\right\}=\left\{\frac{q}{\alpha}\right\}^g,\ 或\ \left\{\frac{\alpha}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{\alpha}\right\};$$

即定理140中當 α 祇有一級素理想數爲其因子及 a 爲一素數時已證明.

因欲解除其第一限制,假定 α 爲 $k(\zeta)$ 內之任一半原數,與 q 互素,且有高於一級之素理想因子,作數

$$\beta=\alpha^{\underset{(e)}{\pi}(1-s^{e})}$$

式中指數乘積中之 e 過 $l-1$ 之不同的因子,命

$$\beta=\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{k}}$$

其 $\mathfrak{j}$ 與 $\mathfrak{k}$ 爲互素之理想數,此顯然祇有一級的素理想數爲其因子,且不爲 $\mathfrak{l}$ 所整除.若 h 爲域 $k(\zeta)$ 內理想班之數,則由定理51 $\mathfrak{k}^{h}=(\varkappa)$,式中 $\varkappa$ 爲 $k(\zeta)$ 內之一整數,命 $\gamma=\beta\varkappa^{l}$,則 γ 亦爲 $k(\zeta)$ 內之整數無一級之素理想因子,且顯然 γ 如 q 而爲半原數.故由以上證明知

$$\left\{\frac{\gamma}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{\gamma}\right\} \tag{51}$$

若 ρ 及 σ 爲 $k(\zeta)$ 內對 q 互素之二整數,則爲簡單計書

$$\frac{\left\{\frac{\rho}{q}\right\}}{\left\{\frac{\sigma}{q}\right\}}=\left\{\frac{\frac{\rho}{\sigma}}{q}\right\} \text{ 及 } \frac{\left\{\frac{q}{\rho}\right\}}{\left\{\frac{q}{\sigma}\right\}}=\left\{\frac{q}{\frac{\rho}{\sigma}}\right\},$$

此與前之所言,並無矛盾處,則可由 $\beta=\frac{\gamma}{\varkappa^{l}}$,及(51)顯然得

$$\left\{\frac{\beta}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{\beta}\right\} \tag{52}$$

由等式

$$\left\{\frac{s^{u}\alpha}{q}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{q}\right\}^{\gamma^{u}} \text{ 及 } \left\{\frac{q}{s^{u}\alpha}\right\}=\left\{\frac{q}{\alpha}\right\}^{\gamma^{u}},$$

由(52)可知

$$\left\{\frac{\alpha}{q}\right\}^{\underset{e}{\pi}(1-\gamma^{e})}=\left\{\frac{q}{\alpha}\right\}^{\underset{(e)}{\pi}(1-\gamma^{e})}$$

若吾人注意此雙方之指數皆與 l 互素,則可得

$$\left\{\frac{\alpha}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{\alpha}\right\}.$$

最後,a 爲任一不爲 l 所整除之有理整數,α 與 a 互素,且 $a=qq^{*}\cdots$ 式中 q, q^{*}, $\cdots$ 爲有理素數,則由等式

$$\left\{\frac{q}{\alpha}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{q}\right\},\ \left\{\frac{q}{\alpha}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{q^{*}}\right.,\ \cdots\Big\}$$

相乘可知定理 140 爲眞

26. m 次壹之根之分圓域內理想數班數之決定.

§116. 符號$\left[\frac{a}{L}\right]$.

爲欲用 §26 之超越之方法以定 $k(e^{\frac{2i\pi}{m}})$之班數,先定下之符號之義,式中 m 以爲任意有理整數.

命 l^h 爲素數 l 之正指數,及 γ 爲 l^h 之原數,若 a 爲一非 l 倍數之有理整數,及定指數 a', 使相合式

$$\gamma^{a'}\equiv a,\quad (l^h),$$

則有下之定義

$$\left[\frac{a}{l^h}\right]=e^{\frac{2i\pi a'}{l^{h-1}(l-1)}};$$

若 a 爲 l 之倍數,則命

$$\left[\frac{a}{l^h}\right]=o.$$

若 a, b 爲任意二有理整數,則顯然

$$\left[\frac{ab}{l^h}\right]=\left[\frac{a}{l^h}\right]\left[\frac{b}{l^h}\right].$$

又若 a 非偶數,則命

$$\left[\frac{a}{2^2}\right]=(-1)^{\frac{a-1}{2}},$$

又當 $h>2$,若 a' 爲一整數能使

$$5^{a'}\equiv\pm a,\quad(2^h)$$

者,則命

$$\left[\frac{a}{2^h}\right]=e^{\frac{2i\pi a'}{2^{h-2}}},$$

最後 a 爲偶數,則命

$$\left[\frac{a}{2^2}\right]=0,\quad\left[\frac{a}{2^h}\right]=0,\qquad(h>2).$$

若 a,b 爲任意二整數,則可知等式

$$\left[\frac{ab}{2^h}\right]=\left[\frac{a}{2^h}\right]\left[\frac{b}{2^h}\right],\qquad(h>1).$$

由上所言,當 a 爲任意一數及 L 爲 2 之一次以上乘方或一奇素數之乘方時,符號 $\left[\frac{a}{L}\right]$ 已完全決定.於後者之情形中可依 L 之任一原根 γ 爲基礎.

若 $l_1^{h1}l_2^{h2},\cdots$ 爲任意所與之不同奇素數之乘方及 2^{h*} 爲 2 之乘方之大於 2^2 者,爲簡單計命

$$\left[\frac{a}{u_1,u_2,\cdots}\right]=\left[\frac{a}{l_1^{h1}}\right]^{u_1}\left[\frac{a}{l_2^{h2}}\right]^{u^2}\cdots,$$

又 $$\left[\frac{a}{u;u_1,u_2,\cdots}\right]=\left[\frac{a}{2^2}\right]^{u}\left[\frac{a}{l_1^{h1}}\right]^{u^1}\left[\frac{a}{l_2^{h2}}\right]^{u^2}\cdots,$$

又 $$\left[\frac{a}{u,u^*;u_1,u_2\cdots}\right]=\left[\frac{a}{2^2}\right]^{u}\left[\frac{a}{2^{h*}}\right]^{u^*}\left[\frac{a}{l_1^{h1}}\right]^{u^1}\left[\frac{a}{l_2^{h2}}\right]^{u^2}\cdots,$$

其 a 爲任一有理整數,且指數 $u,u^*,u_1,u_2,\cdots$ 爲非負的有理整數.最後定 $\left[\frac{a}{L}\right]^0$ 之値爲 1,卽若 $\left[\frac{a}{L}\right]=0$,亦然.

§117. m 以次壹之根之分圓域之班數之表示.

下之定理之證明於§118 言之.

定理141.　命m爲一有理整數可表爲

$$m=l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots,\ \text{或}=2^2l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots,\ \text{或}=2^{h^*}l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots$$

$$(h^*>2,\ h_1>0,\ h_2>0,\cdots),$$

式中$l_1, l_2,\cdots$表不同的奇素數.命$\gamma_1, \gamma_2, \cdots$各$l_1^{h_1}, l_2^{h_2}, \cdots$之原數,且由此以定所需之記號.則$m$次壹之根之分圓域之班數$H$可由二法以定之.

H第一表示法爲:

$$H=\frac{l}{n}\prod_{(u_1,u_2,\cdots)}\ \prod_{s=1}^{L}\ \prod_{(p)}\frac{l}{1-\left[\dfrac{p}{u_1,u_2,\cdots}\right]^{p-s}}$$

或於此公式之$u_1, u_2, \cdots$換爲$u; u_1, u_2, \cdots$,或換爲$u, u^*; u_1, u_2, \cdots$.其外之乘積π各過

$$\left.\begin{array}{l} u_1=0,\ 1,\ \cdots,\ l_1^{h-1}\ (l_1-1)-1, \\ u_2=0,\ 1,\ \cdots,\ l_2^{h-1}\ (l_2-1)-1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{53}$$

又u過

$$\left.\begin{array}{l} u\ =0,1 \\ \text{及}\quad u^*=0,1,\cdots,\ 2^{h-2}-1 \end{array}\right\}$$

但下之值須除去之$u_1=0, u_2=0, \cdots$,或$u=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$或$u=0, u^*=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$,故此乘積祇有有限個因子.凡其一內乘積$\prod\limits_{(p)}$之$p$過諸有理素數,故爲一無窮乘積.數$n$於$k$域,仍如定理56(見§25之末).

H之第二表示式爲由二分數式之乘積,且

$$H=\frac{\prod\limits_{(u_1,u_2,\cdots)}\sum\limits_{(n)}\left[\dfrac{n}{u_1,u_2,\cdots}\right]^n}{(2m)^{\frac{1}{2}\Phi(m)-1}}\cdot\frac{\prod\limits_{(u_1,u_2,\cdots)}\sum\limits_{(n)}\left[\dfrac{n}{u_1,u_2,\cdots}\right]^{\log A_n}}{R}\,2^{\frac{1}{2}\Phi(m)-1}$$

或於此式之第一因子加入一因子$\frac{1}{2}$,且換$u_1, u_2, \cdots$爲$u; u_1, u_2, \cdots$或$u, u^*; u_1, u_2, \cdots$.其第一個分子之乘積過(53)之諸數,且於第一種情形中$u_1+u_2+\cdots$,或於

第二第三種情形中 $u+u_1+u_2+\cdots$ 爲一奇數.第二分子之分母之乘積 π 過(53)之諸值,第一種情形中 $u_1+u_2+\cdots$ 或他二種情形中 $u+u_1+u_2+\cdots$ 爲一偶數,且 $u_1=0, u_2=0, \cdots$ 或 $u=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$, 或 $u=0, u^*=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$ 之值須除去又第一分數中之每一和號 $\sum\limits_{(n)}$ 過諸有理整數 $n=1, 2, \cdots, m-1$; 第二分數中每一和號 $\sum\limits_{(u)}$ 祇過 $<\frac{m}{2}$ 之諸數.最後 $\log A_n$ 表分圓域數

$$A_n=\sqrt{\left(1-e^{\frac{2i\pi n}{m}}\right)\left(1-e^{-\frac{2i\pi n}{m}}\right)}$$

之對數之實值,及 R 爲分圓域之規[Kummer(22, 23)].

H 之第二表示式之二分數桔母氏名之爲班數之第一因子,及第二因子.第一因子之二倍及第二因子確爲有理整數[Kronecker(9)].

由 H 之第二種表示韋伯(Weber)已證明 2^{h*} 次壹之根之分圓域內之班數爲奇數[Weber(1, 4)].

H 之第二種尙有更進之結果.若 $m=l$ 爲一奇素數,則不必計算卽可得下之定理:

定理142. 若 l 爲一奇素數,則 l 次壹之根之分圓域內之班數 h 可表如

$$h=\frac{\prod\limits_{(u)}\sum\limits_{(n)} n e^{\frac{2i\pi n' u}{l-1}}}{(2l)^{\frac{l-3}{2}}}\cdot\frac{\Delta}{R}2^{\frac{l-1}{2}}.$$

其中乘積 $\prod\limits_{(u)}$ 過奇奇數 $u=1, 3, 5, \cdots, l-2$, 凡其和 $\prod\limits_{(n)}$ 過諸數 $n=1, 2, 3, \cdots, l-l$.又 l 之原數 γ, 及 n' 爲一對 n 能使 $\gamma^{n'}\equiv n, (l)$, Δ 表行列式

$$(-1)^{\frac{(l-3)(l-5)}{8}}\begin{vmatrix}\log\varepsilon_1, & \log\varepsilon_2, & \cdots, & \log\varepsilon_{\frac{l-3}{2}}\\ \log\varepsilon_2, & \log\varepsilon_3, & \cdots, & \log\varepsilon_{\frac{l-1}{2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \log\varepsilon_{\frac{l-3}{2}} & \log\varepsilon_{\frac{l-1}{2}}, & \cdots, & \log\varepsilon_{l-4}\end{vmatrix}$$

普通 $\log \varepsilon_g$ 表單位

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{1-\zeta\gamma^g}{1-\zeta\gamma^{g-1}} \cdot \frac{1-\zeta^{-}\gamma^g}{1-\zeta^{-}\gamma^{g-1}}},$$

之對數之實值,式中 ζ 爲 $e^{\frac{2i\pi}{l}}$ 之值[Kummer 7, 11),Dedekind(1)].

此 h 之表示式之二分數,即由前普通情形之二分數中得來,班數之第一第二因子,仍如前義.且於此情形中此二因子皆爲有理因子.第二因子即爲 $k(\zeta)$ 內之 $\frac{l-1}{2}$ 次實分域之班數,枯母氏對此二因子已有進一步之定理,即此可爲 2 整除[Kummer(25)].克郎耐可氏曾試以純粹的數論方法以證此定理,但有一謬誤,且其推廣亦不眞 [Kronecker(11)]. 此外枯母氏有另一方向以研究此二因子之表示法及性質[Kummer,(13)].可比較第36章.最後枯母氏曾申述下之定理:凡 $k(\zeta)$ 之分域之理想數之班數,可整除 $k(\zeta)$ 之班數,其證明迄今猶未明白[Kummer(7)].

§118.　分圓域 $k(e^{\frac{2i\pi}{m}})$ 之班數之表示式之演出.

因欲證明定理 141, 若 m 爲 8 之倍數時,較爲繁雜,先述下引.

引22.　若 p 爲任一有理素數及 m 爲 8 之倍數,則用定理 141 之符號可知當 s 當有大一之實值時

$$\prod_{(\mathfrak{P})}\{1-n(\mathfrak{P})^{-s}\} = \prod_{(u,u^*;u_1,u_2,\cdots)}\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}\right\},$$

式之右端之乘積𝔓過域 $k(e^{\frac{2i\pi}{m}})$ 之諸不同的素理想數之可整除 p 者;式之右端之乘積過(53)所與 $u, u^*; u_1, u_2, \cdots$ 之諸值(連 $u=0, u^*=0, u_1=0, p_2=0, \cdots$ 之值在內).

證:　先命 u 爲一非 m 之因子之素數, l 爲奇素數 $l_1, l_2, \cdots$ 之一,且 l^h 爲 m 中 l 之最高次乘方,又 γ 爲 l^h 之原數,及 $p \equiv \gamma^{p'}(l^h)$. l 表 p' 與 $l^{h-1}(l-1)$ 之最大公約數,且命 $l^{h-1}(l-1) = ef$,則符號 $\left[\frac{p}{l^h}\right]$ 顯然表　f 次之壹之根,且不能者較

低次

取$l=l_1$且命$h=h_1$, $e=e_1$, $l_1^{h_1-1}(l_1-l)=e_1f_1$,由所與之件可得公式

$$\prod_{(u_1)}\left(1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}\right)=\left(1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_2,u_3,\cdots}\right]^{f_1}p^{-sf_1}\right)^{e_1},$$

或中u_1過(53之數.又取$l=l_2$及命$h=h_2$, $e=e_2$, $l_2^{h_2-1}(l_2-l)=e_2f_2$,則若$f_{12}$為$f_1, f_2$之最小公倍數,則可得

$$\prod_{(u_1u_2)}\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}\right\}$$

$$=\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*,u_3,u_4,\cdots}\right]^{f_{12}}g^{-sf_{12}}\right\}^{\frac{e_1e_2f_1f_2}{f_{12}}}$$

式中u_1, u_2過(53)之諸數.同法續進,可得若$f_{12}\cdots$為$f_1, f_2, \cdots$之最小公倍數,則

$$\prod_{(u_1,u_2,\cdots)}\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}\right\}$$

$$=\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*}\right]^{f_{12}\cdots}p^{-sf_{12}\cdots}\right\}^{\frac{e_1e_2\cdots f_1f_2\cdots}{f_{12}\cdots}},$$

式中$u_1, u_2, \cdots$過(53)之諸値.

又命$p\equiv\pm5^{p'}(2^{h^*}$,及e^*表p'與2^{h^*-2}之最大公約數,且$2^{h^*-2}=e^*f^*$;則顯然$\left[\frac{p}{2^{h^*}}\right]$恰為$f^*$次之壹之根,而不能稍低,由此可得若$f^*_{12}\cdots$為$f^*, f_1f_2, \cdots$之最小公倍數,則

$$\prod_{(u^*;u_1,u_2,\cdots)}\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}\right\}$$

$$=\left\{1-\left[\frac{p}{2^2}\right]^{uf^*_{12}\cdots}p^{-sf^*_{12}\cdots}\right\}^{\frac{e^*e_1e_2\cdot f^*_1f_1f_2\cdots}{f^*_{12}\cdots}},$$

式中u^*過(53之値.

最後以$\bar{e}$表$\frac{p-l}{2}$與2之最大公約數,且命$2=\bar{e}\bar{f}$,由後式可知,若F為f, f^*, f_1, f_2之最小公倍數,及簡書

$$E=\frac{\bar{e}e^*e_1e_2\cdots f_1f_2\cdots}{F},$$

可得

$$\prod_{(u,u^*;u_1,u_2\cdots)}\left\{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}\right\}=\{1-p^{-sF}\}^E,\tag{54}$$

乘積中$u,u^*;u_1u_2,\cdots$過(53)之各數.直接可見F爲最小之正指數可使$p^F\equiv 1,(m)$者,又$FE=\Phi(m)$,由公式(54)及定理125可得引22之式.由定理125後半之助,易知當p爲m之因子時亦眞.

定理141中H之第一表示法之證可先由定理56,再由§27之$\zeta(s)$第二種表示法及適所證明之引22以得之.

求H之第二表示法可先將第一表示法中之無窮乘積,變爲無窮級數,如

$$\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}}=\sum_{(n=1,2,3\cdots)}\left[\frac{n}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]\frac{1}{n^s}.$$

再以

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-nt}t^{s-1}dt$$

代入再與§86相同之方法以得其公式.

§119.　對一有理整數相合於定數之有理素數之個數無限.

述於§117而證於上節之m次壹之根之分圓域之班數H之二表示法,可有重要之推演由其第一表示式可證下之定理:

定理143.　m,n表二互素之有理整數則有無限個有理素數p適合於相合式$p\equiv n,(m)$之條件.[Dirichlet(5, 6) Dedekind (1)].

證:　今亦祇討論較複雜的情形,卽m爲8之倍數時,且如§117命$m=2^{h^*}l_1^{h_1}l_2^{h_2}\cdots$,下之諸無窮乘積

$$\prod_{(p)}\frac{1}{1-\left[\frac{p}{u,u^*;u_1,u_2,\cdots}\right]p^{-s}}$$

皆當$s=1$時趨一定值.(含$u=0, u^*=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$之情形)由§117 H之第一表示法可知此限非零.故能用對數於此乘積,且與§80之同法可得結果.對任一組$u, u^*; u_1, u_2 \cdots$之值非$u=0, u^*=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$者,無窮級數

$$\sum_{(p)}\left[\frac{p}{u, u^*; u_1 u_2, \cdots}\right]\frac{1}{p^s}, \tag{55}$$

當$s=1$時收歛,式中p過諸有理素數.

因n與m互素,故符號

$$\left[\frac{n}{2^2}\right], \left[\frac{n}{2^h}\right], \left[\frac{n}{l_1 h_1}\right], \left[\frac{n}{l_2 h_2}\right] \cdots$$

中無爲零者,乘(55)式以

$$\frac{1}{\left[\frac{n}{2^2}\right]^u \left[\frac{n}{2^{h^*}}\right]^{u^*}\left[\frac{n}{l_1 h_1}\right]^{u_1}\left[\frac{n}{l_2 h_2}\right]^{u_2}\cdots},$$

$u, u^*; u_1, u_2, \cdots$過(53)之諸值但$u=0, u^*=0; u_1=0, u_2=0, \cdots$除去之,總加之可得與無窮級數(26)相彷之表示式(見§80).由此途徑可得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{(p)}(1+P)(1+P^*+P^{*2}+\cdots+P^{*2h^*-2-1}).\\ &\qquad(1+P_1+P_1^2+\cdots+P_1^{l_1^{h_1-1}(l_1-1)-1}).\\ &\qquad(1+P_2+P_2^2+\cdots+P_2^{l_2^{h_2-1}(l_2-1)-1})\cdots\frac{1}{p^s}\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

其中簡書

$$P=\frac{\left[\frac{p}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad P^*=\frac{\left[\frac{p}{2^{h^*}}\right]}{\left[\frac{n}{2^{h^*}}\right]}, \quad P_1=\frac{\left[\frac{p}{l_1 h_1}\right]}{\left[\frac{n}{l_1 h_1}\right]}, \quad P_2=\frac{\left[\frac{p}{l_2 h_2}\right]}{\left[\frac{n}{l_2 h_2}\right]}, \cdots.$$

可見無窮級數(56)之諸項爲m之因子$2, l_1, l_2, \cdots$者祇有有限項存在.故所餘之級數等於$\Phi(m)\Sigma\frac{1}{p^s}$,式中$p$祇過有理素數之可使$P, P^* P_1, P_2, \cdots$同時爲1者,卽爲適合定理143之條件之有理整數.

無窮級數(26)(§80)當$s=1$,時大於任何限,又級數(55)當$s=1$時爲有限故可

得無窮級數(56當 $s=1$ 時其值大於任何限,即適合該相合式之素數有無限個

§120. 由分圓單位以表分圓域之諸單位.

§117. 之第二種表示可用於下之定理:

定理 144. 凡一亞塔爾氏域之單位爲分圓單位之乘積之有理整指數方.

證: 今先論 $m=l$ 爲一奇素數,由定理 142 公式,班數之第二因子之分子,可知行列式 $\triangle$ 不等於 0, 故由此及 §20 及 §21 可知,定理 142 中所與之 $\frac{l-3}{2}$ 個單位 $q_1, q_2, \cdots, q_{\frac{l-3}{2}}$ 爲分圓域 $k(e^{\frac{2i\pi}{l}})$ 之互不相依的單位.由此可知定理 144 對分圓域 $k(e^{\frac{2i\pi}{l}})$ 之諸分域皆眞 [Kummer(11)].

同樣步驟,可如定理 142 以表班數之第二因子,於 m 次壹之根之分圓域內(m 爲任一複合數)定理爲然,由定理 131 可得定理 144 之普通證明.

分圓域應用之高深研究仍有許多, Reuschle氏曾造複素數者[Reuschle(1), Kummer(24), Kronecker(12)].

27. 應用分圓域至二次域.

§121. 由分圓單位表實二次域之單位.

前章已知 m 次壹之根之分圓域之性質,對其二次分域亦然,由之可得二次域之新定理.此方法尙可引出第三篇關於二次域之諸眞理.

由定理 144 可知,凡一實二次域 $k(\sqrt{w})$ 之單位可由分圓單位之有理整指數方表之;又域 $k(\sqrt{m})$ 之單位可簡表之如下式

$$\frac{\prod\limits_{(b)}\left(e^{\frac{bi\pi}{d}}-e^{-\frac{bi\pi}{d}}\right)}{\prod\limits_{(a)}\left(e^{\frac{ai\pi}{d}}-e^{-\frac{ai\pi}{d}}\right)},$$

式中 d 爲 $k(\sqrt{m})$ 域之判別式,且其中乘積 $\prod\limits_{(a)}, \prod\limits_{(b)}$ 之 a,b 過 $1, 2, \cdots, d$, 且有

條件 $\left(\frac{d}{a}\right)=+1$, 及 $\left(\frac{d}{b}\right)=-1$ [Dirichlet(7)].比較 § 6.

§122. 二次剩餘相反定律.

命 l 爲一奇素數, γ 爲 l 之原根,又 $\zeta=e^{\frac{2i\pi}{l}}$ 及 $s=(\zeta,\zeta^{\gamma})$. $\frac{l-1}{2}$ 個代換 $1,s^2,s^4,\cdots,s^{l-2}$ 成分圓域 $k(\zeta)$ 之羣之分羣,其所屬之二次域 k^* 爲分圓域 $k(\zeta)$ 之分域. $k(\zeta)$ 之判別式由定理 118 等於 $(-1)^{\frac{l-1}{2}}l^{l-2}$, 又由定理39 k^* 之判別式無 l 以外之其他素因子,故由定理95知 $d=(-1)^{\frac{l-1}{2}}l$.

命 p 爲素數 2,或任一非 l 之奇素數.一方面於 l 次壹之根之域 $k(\zeta)$ 得一分解式,他一方面由定理97於二次分域 k^* 中直接得之,且此二結果互相等,此與吾人以二次剩餘之相反定律以一新證明 [Kronecker (15)].此可述之如下:

若 f 爲最小之正指數,可使 $p^f\equiv1,(l)$ 者,且命 $e=\frac{l-1}{f}$ 則由定理119素數 p 於 $k(\zeta)$ 中可分解 e 個素理想數 $\mathfrak{P},s\mathfrak{P},\cdots,s^{e-1}\mathfrak{P}$ 之積,且此有一公共的分散域 k_z,由定理 129 知其次數爲 e,有理素數 p 於二次域 k^* 中可分解否,胥視 k^* 爲 k_z 之分域與否而定.因域 $k(\zeta)$ 祇有一二次分域 k^*;又一亞培爾氏有二次分域之必要且充分之條件爲此域之次數爲偶數,故 k^* 爲 k_z 之分域之必要且充分之條件爲 e 之偶數.另一方面由定理97素數 p 於域 k^* 內可分解與否,胥視 $\left(\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}l}{p}\right)=+1$,或 -1 而定.若 e 爲偶數,則 $p^{\frac{l-1}{2}}=p^{f\cdot\frac{e}{2}}\equiv1,(l)$,即 $\left(\frac{p}{l}\right)=+1$;另一方面 $p^{\frac{l-1}{2}}=p^{\frac{f}{2}\cdot e}\equiv(-1)^e\equiv-1,(l)$,即 $\left(\frac{p}{l}\right)=-1$, 故於每種情形中皆有

$$\left(\frac{p}{l}\right)=\left(\frac{(-l)^{\frac{l-1}{2}}l}{p}\right) \tag{57}$$

假定 p 爲奇數;由 57 可得

$$\left(\frac{p}{l}\right)\left(\frac{l}{p}\right)=\left(\frac{(-l)^{\frac{l-1}{2}}}{p}\right) \tag{58}$$

又若 p 與 l 互換,可得

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{p}\right)=\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{l}\right)$$

後之公式當 $l=3$ 時

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \tag{59}$$

故由(59)及(58)可得

$$\left(\frac{l}{p}\right)\left(\frac{p}{l}\right)=(-1)^{\frac{l-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}} \tag{60}$$

於(57 中命 $p=2$, 可得

$$\left(\frac{2}{l}\right)=\left(\frac{(-l)^{\frac{l-1}{2}}}{2}\right)=(-1)^{\frac{l^2-1}{8}} \tag{61}$$

公式(60),(59)及(61)包括二次剩餘之相反定律.

§123.　判別式爲素數的二次虛域.

定理145. 若 l 爲一素有理數合相合式 $l\equiv3,(4)$者,且 p 爲一如 $p=lm+1$ 形之有理素數,則二次域 $k(\sqrt{-l})$內 p 之素因子 $\mathfrak{p}$ 有下之相似式

$$\mathfrak{p}^{\frac{\Sigma b-\Sigma a}{l}}\sim 1,$$

式中 Σa 爲 l 之諸最小的正二次剩餘之和,Σb 爲 l 之最小的正二次非剩餘之和.

又命 $p=\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$ 及

$$\mathfrak{p}^{\frac{\Sigma b-\Sigma a}{l}}=(\pi,$$

式中 π 爲 $k(\sqrt{-l})$域內之一整數,則可有相合式

$$\pi \equiv \pm \frac{l}{\prod_{a} (am)!}, \quad (\mathfrak{p}')$$

式中分母之乘積過 l 之諸最小正二次剩餘 a [Jacobi (1, 2, 3, 4), Canchy (l), Eisenstein(4)].

證: 由定理 163 若 $\mathfrak{P}$ 爲$k(\zeta)$內之一級素理想數,及使用已知之符號可得

$$\mathfrak{P}^{q_0+q_{-1}s+q_{-2}s^2+\cdots+q_{-l+2}s^{l-2}}=(A) \tag{62}$$

能使 A 爲$k(\zeta)$內之一整數,若 $p=ml+1$ 爲 $\mathfrak{P}$ 所能整除之有理素數,及 $p=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ 爲此素數於二次分域 $k(\sqrt{-l})$ 內之分解式,則另一方面, $k(\sqrt{-l})$域內之二素理想數 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ 可表爲

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}^{1+s^2+s^4+\cdots+s^{l-3}}$$

$$\mathfrak{p}'=s\,\mathfrak{p}=\mathfrak{P}^{s(1+s^2+s^4+\cdots+s^{l-3})}.$$

若於(62)式行$(1+s^2+s^4+\cdots+s^{l-3})$次符號的乘方,可得

$$\mathfrak{p}^{q_0+q_{-2}+q_{-4}+\cdots+q_{-l+3}}\,\mathfrak{p}'^{\,q_{-1}+q_{-3}+q_{-5}+\cdots+q_{-l+2}}=(\alpha),$$

式中 α 爲 $k(\sqrt{-1})$內之一數.因

$$q_{-1}+q_{-3}+q_{-5}+\cdots+q_{-l+2}-q_0-q_{-2}-q_{-4}-\cdots-q_{-l+2}=(\gamma+l)\,\frac{\Sigma b-\Sigma a}{l},$$

故若由 $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\sim l$ 則可得

$$\mathfrak{p}^{(\gamma+1)\frac{\Sigma b-\Sigma a}{l}}\sim 1. \tag{63}$$

另一方面由定理 135

$$\mathfrak{P}^{\gamma_0+\gamma_{-1}s+\gamma_{-2}s^2+\cdots+\gamma_{-l+2}s^{l-2}}=(B)$$

能使B表$k(\zeta)$內之一整數.作此式之$(1+s^2+s^4+\cdots+s^{l-3})$次符號乘方可得

$$\mathfrak{p}^{\Sigma b-\Sigma a}=\mathfrak{p}^{l\frac{\Sigma b-\Sigma a}{l}}\sim 1 \tag{63}$$

若$l \neq 3$則因$\gamma+1$非l之倍數顯然可由(63)及(64)以得定理145第一部分之相似式.

定理145之第二部分,如§112之拉氏根數Λ之相合式性質43)及44)得之.

定理145第一部之殘不相同的證明,可由§88之末所附言之關於$k(\sqrt{-l})$域之素理想數之班之表示法以得之.

經耶可比(Jacobi)氏之一有價値之修飾,定理145之所言當p非$ml+l$之形時亦眞[Eisenstein(11), Stikelberger(1)].

§124. 高斯氏和之符號之決定.

命p爲一有理奇素數,則由§111之定義及§112所符加之推廣,吾人可表出$l=2$二次域$k\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\right)$之拉氏標準基數,及拉氏根數.命$Z=e^{\frac{2i\pi}{p}}$,則此域之拉氏標準基數由二數

$$\lambda_0=\sum_{(a)} Z^a, \qquad \lambda_1=\sum_{(b)} Z^b,$$

表之且拉氏根數爲

$$\Lambda=\lambda_0-\lambda_1=\sum_a Z^a-\sum_b Z^b$$

式中a,b各爲p之二次剩餘,或非剩餘之於$1,2,\cdots,p-1$中者.

於§112之末,Λ^l已經覓出,故當二次域時,完全決定Λ之問題,即爲定其$\pm$號,此可由下之定理決之.

定理146. 判別式爲$(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$之二次域之拉氏根數Λ爲正實數或爲正純虛數[Gauss(2), Kronecker(4)].

證: 因拉氏根數Λ爲一二次域之數,且由定理138,知其

$$|\Lambda|=|\sqrt{p}|,$$

故Λ之平方已知,於每種情形中其値皆爲$(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$,故可得

$$\Lambda=\pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}. \tag{65}$$

於§112中當 $l=2$ 時 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ 各表理想數 (p) 及 $(1-Z)$; 由相合式(43故得相合式

$$\Delta \equiv \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{\frac{p-1}{2}} (1-Z)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left((1-Z)^{\frac{p+1}{2}}\right),$$

即

$$\Delta \equiv \frac{p-1}{2}! \, (1-Z)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left((1-Z)^{\frac{p+1}{2}}\right), \tag{66}$$

另一方面研究

$$\Delta = (Z^{-1}-Z^{+1})(Z^{-2}-Z^{+2})\cdots\left(Z^{-\frac{p-1}{2}}-Z^{+\frac{p-1}{2}}\right)$$

若換 Z 爲 Z^R 其符號不變,式中 R 爲 p 之原根,且理想數 (Δ) 卽爲理想數 $(1-Z)^{\frac{p-1}{2}}$ 故必

$$\Delta = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$$

因欲定此符號,可視

$$Z^{-h}-Z^{+h} = -2i \sin\frac{2h\pi}{p}, \quad \left(h=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\right)$$

故 Δ 之一值表爲 $(-i)^{\frac{p-1}{2}} P$, 式中 P 爲一正數.由此可知,若以 $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$ 代表二平方根之正實數值或正虛數值,

$$\Delta = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}. \tag{67}$$

最後由等式

$$\Delta = Z^{-1-2-\cdots-\frac{p-1}{2}} (1-Z^2)(1-Z^4)\cdots(1-Z^{p-1}),$$

得

$$\Delta \equiv 2\cdot4\cdot6\cdots(p-1)(1-Z)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \frac{p-1}{2}!(1-Z)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left((1-Z)^{\frac{p+1}{2}}\right),$$

由(66可得

$$\Lambda\equiv 2^{\frac{p-1}{2}}\Lambda,\quad \left((1-Z)^{\frac{p+1}{2}}\right).$$

因

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{2}{p}\right)\equiv(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},\quad (p)$$

故由(67)可知

$$\Lambda\equiv\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p},\left((1-Z)^{\frac{p+1}{2}}\right),$$

及由65)可得

$$\Lambda=\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p},$$

故定理 146 已證明.

高於二次之特別亞培爾氏域,論者頗少.如愛遜斯坦氏由分圓之齊次式與相關三次域之工作,爲亞培爾氏三次域之引論[Eisenstein 10)],又如[Bachmann 對兩二次域合成之複數之硏究[Bachmann(1)],及韋伯關於三次及四次亞培爾氏域之硏究[Werber(2,4)].

(本篇完全文未完)

答覆"絕對微分學的一個難關"之疑問

湯　璪　眞

理科季刊四卷三期中曾登載絕對微分學的一個難關，其後附有"世有願加入而共同研究者予甚所歡迎也"一語.頃得日本仙台東北帝國大學孫澤瀛先生函,云其中(1)式是否成立實屬疑問故特答覆之於此.　來函云:

璪眞先生惠鑒前閱武大理科季刊四卷三期曾載
先生一文題爲「絕對微分學的一個難關」誠屬匠心獨運所見非凡後學拜閱之下不勝欽仰然以利氏爲世界有數大家且絕對微分學一書更舉世傳誦奉爲圭範何以其理論不能融洽之處久未發現是無怪
先生之不憚煩而磋商之函件往復於途也後學不敏亦曾努力于闡明此理覺
尊論尙有爲後學所不解者幸
鑒其愚誠不吝垂教爲禱

以下所用之符號,一依先生之例.

(1)證明　$\delta'(\varphi+\delta\varphi)=\delta'\varphi+\delta'\delta\varphi$　之成立:

依平行移動之微分方程式吾人得

$$\delta'\varphi=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\varphi\delta x^{\mu} \qquad \delta'(\delta\varphi)=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta\varphi\delta' x^{\mu}$$

$$\delta'(\varphi+\delta\varphi)=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(\varphi+\delta\varphi)\delta' x^{\mu}$$

$$\therefore\quad \delta'(\varphi+\delta\varphi)=\delta'\varphi+\delta\,\delta\varphi.$$

(2)指出先生證明中之不充分點:

在先生之證明中,其(f)式爲

$$\delta' u'^{\nu}=-(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}+\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu})(u^{\lambda}+\delta u^{\lambda})(\delta' x^{\mu}+\delta\delta' x^{\mu})$$

$$=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta' x^{\mu}+(-\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta' x^{\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta u^{\lambda}\delta' x^{\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta\delta'\ ^{\mu})+\cdots$$

$$=\delta' u^{\nu}+\delta\delta' u^{\nu}+\cdots$$

$(-\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta' x^{\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta u^{\lambda}\delta' x^{\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta\delta x^{\mu})$之所以等於$\delta\delta' x^{\nu}$者,蓋已假定

$$\delta(-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta' x^{\mu})=-\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta' x^{\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta u^{\lambda}\delta' x^{\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}u^{\lambda}\delta\delta' x^{\mu} \quad (1)$$

自表面觀之,此式之成立,固無疑義,蓋由于微分之一般法則故也.然在先生之一貫推理中,全係應用平行移動之意義,固未嘗稍涉及微分之法則也.否則若照微分之法則,則

$$\delta'(\varphi+\delta\varphi)=\delta'\varphi+\delta'\delta\varphi$$

之成立,理所當然.而先生之一篇反證,豈非失其意義.是以在通篇之證明中,應避免用微分.換言之,卽"δ"不以之爲difierential operator由此觀點評之,則(1)式是否成立,實屬疑問.

後學孫澤瀛鞠躬二月六日

覆函:

澤瀛先生惠鑒: 來示敬悉.所疑之點極關重要.真甚願繼續討論.來示分爲兩段;今分別答覆.

(1)證明 $\delta'(\varphi+\delta\varphi)=\delta'\varphi+\delta\delta\varphi$ 之成立,一段共用三式.第一式

$$\delta'\varphi=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\varphi\delta x^{\mu}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

即平行移動之微分方程,當然無錯誤.第二式與第三式

$$\delta'\delta\varphi=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta\varphi\delta' x^{\mu}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

$$\delta'(\varphi+\delta\varphi)=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(\varphi+\delta\varphi)\delta' x^{\mu}\cdots\cdots(c)$$

則均爲錯誤之前提.此事實甚爲奇特且極有趣,蓋就形式觀之兩式似皆合理而就意義考之實爲錯誤故也.欲明其理僅須注意 $\varphi,\delta\varphi,\varphi+\delta\varphi$ 三者之性質不同.第一 φ 表向量且係 x^{ν} 點之向量,第二 $\delta\varphi$ 既不表 x^{ν} 點之向量亦不表 $x^{\nu}+\delta x^{\nu}$ 或 $x^{\nu}+\delta' x^{\nu}$ 點之向量,因坐標變換時 $\delta\varphi$ 通例不遵守向量之變換法則也,第三 $\varphi+\delta\varphi$ 雖表向量然非 x^{ν} 點之向量.所以 (a) 式無錯誤 (b) 式不能用而 (c) 式宜改爲理科季刊四卷三期第七面中之 (e) 式.因之本段之證明真認爲不完全.惟若尊意對 $(b)(c)$ 二式尙有充分之理由以確定其成立,真仍願領教.

(2)指出真證明中之不充分點一段謂真已假定.

$$\delta(-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\, \delta' x^{\mu}) = -\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\, \delta' x^{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\, \delta u^{\lambda}\, \delta' x^{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\, \delta\delta' x^{\mu}$$

實則真未嘗作一新假定也.此式在德文本絕對微分學九十一面第十一列已用之矣(但須交換 δ 與 δ').因之真證明中此點應非不充分點.

最後所謂"δ 不以之爲 differentral operator" 與真見解固不相合與利氏本人見解似亦不同(其理仍參看上列之假定).不識尊意以爲如何?

湯璪真敬覆,二月廿二.

此函去後,不久又得孫先生函;今錄其與本文有關者以作結束. 來函云:

璪眞先生台鑒:昨奉來示,欣幸莫名今知先生與利氏糾紛之所在矣.

(一)利氏從 differential operator 之一般法則出發,故

$$\delta'(\varphi+\delta\varphi)=\delta'\varphi+\delta'\delta\varphi$$

之成立,勿甯謂之爲假定後學前函之證明,實屬多事.誠如先生所主張者,此種假定,在沿平行四邊形平行移動以求一向量之變化時,有不能應用之嫌.

(二)先生則純從圖形上之關係着手,在此情形下,先生所得之結論,當然成立.不過此又與 differential operator 之一般法則衝突.

假定之所以爲假定,蓋不論其眞僞,必服從者也.然則,何以在某種情形下,與假定相反之結論成立,而此相反之結論又係確切無誤者,是誠令人不可解.爲解決此謎起見,不能不承認利氏在求一向量沿平行四邊形平形移動時其所生變化之計算法爲不合法.蓋除此說外,無法可解說以上疑難也.以下將舉另一方法,以計算向量平行移動後之差而無須乎 $\delta'(\varphi+\delta\varphi)$ 之計算. 下略.

數學家姓名錄

(續第五卷第二期)

曾昭安

Millar, J. B.〔密拉〕 十九世紀 英人

Miller, Alton Lombard〔密勒〕 (1890,4,10—) 美人

Miller, Bessie I.〔密勒〕 (?—1931,2,4) 美人

Miller, Dayton Clarence〔密勒〕 (1866,3,13—) 美人 研究數理物理

Miller, Ephraim〔密勒〕 (1833,4,25—) 美人 著三角術

Miller, E. A.〔密勒〕 二十世紀前半期 英人

Miller, E. B.〔密勒〕 二十世紀前半期 美人

Miller, Edward Furber〔密勒〕 (1866,1,18—1933,6,12) 美人 研究熱力學

Miller, F. H.〔密勒〕 二十世紀前半期 美人

Miller, George〔密勒〕 十七世紀前半期 英人

Miller, George Abram〔密勒〕 (1863,7,31—) 美人 羣論專家

Miller, Harry L.〔密勒〕 二十世紀前半期 美人

Miller, Henry Willard〔密勒〕 (1884,7,12—) 美人 著畫法幾何學

Miller, I. L.〔密勒〕 二十世紀前半期 美人

Miller, Sir John〔密勒〕 十八世紀末 英人

Miller, John〔密勒〕 (1871—) 蘇格蘭人 著圓錐曲線及三角之幾何學

Miller, John Anthony〔密勒〕 (1859,12,16—) 美人 著三角術及解析

力學

Miller, J. S.〔密勒〕 二十世紀前半期　美人

Miller, J. W.〔密勒〕 (1876—1925,9,11) 美人

Miller, M.〔密勒〕 二十世紀前半期　德人

Millier, Norman〔密勒〕 二十世紀前半期　坎拿大人

Miller, Samuel〔密勒〕 十八世紀後半期　美人

Miller, S. A.〔密勒〕 十九世紀

Miller, T. H.〔密勒〕 十九世紀後半期　英人

Miller, William Hallows〔密勒〕 (1801,4,6—1880,5,2) 英人

Miller, W. J. C.〔密勒〕 十九世紀後半期　英人

Miller, W. M.〔密勒〕 二十世紀前半期　美人

Millet, J.〔彌列〕 十九世紀後半期　法人

Millikan, Robert Andrew〔密利干〕 (1868,3,22—　) 美人　數理物理家

Millis, C. T.〔米力斯〕 二十世紀　英人

Millis, J. F.〔米力斯〕 二十世紀　美人

Millot, Stanislas〔彌約〕 二十世紀前半期　法人

Millou〔彌盧〕 二十世紀　法人

Milloux, Henri〔彌盧克斯〕 二十世紀前半期　法人　研究函數論

Milloux, René〔彌盧克斯〕 二十世紀前半期　法人

Mills, C. N.〔穆爾斯〕 二十世紀前半期　美人

Mills, Frederick Cecil〔穆爾斯〕 二十世紀　美人

Milne, Arthur〔米倫〕 亦作 Edward Arthur Milne (1896,2,14—　) 英人

Milne, Edwards〔米倫〕 十九世紀後半期　法人

Milne, Edward Arthur〔米倫〕 即 A. Milne

Milne, John〔米倫〕 (1850,12,30—1913,7,31) 英人

Milne, Joshua〔米倫〕 (1776—1853) 英人

Milne, John James〔米倫〕 十九世紀後半期 英人 著交比幾何學

Milne, R. M.〔米倫〕 二十世紀 英人

Milne, T. H.〔米倫〕 二十世紀前半期 坎拿大人

Milne, W. E.〔米倫〕 二十世紀前半期 美人

Milne, William J.〔米倫〕 十九世紀末 美人 著初等數學

Milne, William Proctor〔米倫〕 (1881, 5, 22—) 英人 著高等代數,齊次坐標法,射影幾何學等.

Milne-Thomson, Louis Melville〔米倫湯姆孫〕 (1891—) 英人 著平方根表

Milner, *F.*〔米爾納〕 二十世紀初 美人

Milner, Florence Cushman〔米爾納〕 二十世紀初 美人

Milner, Isaac〔米爾納〕 (1750—1820) 英人

Milner, John〔米爾納〕 (1752—1826) 英人

Milner, Joseph〔米爾納〕 (1744—1797) 英人

Milton, John〔密爾頓〕 (1608,12,9—1674,11,8) 英人

Mimori Mamori〔三守守〕 二十世紀 日本人

Mina, L.〔密那〕 二十世紀初 義人

Minamoto Keian 十八世紀前半期 日本人

Minchin, George Minchin〔明欽〕 (1845—1914) 英人 數理物理學家

Minding, Ferdinand *Adolf*〔民丁〕 (1806—1885) 德人

Mineo, Corradino〔民泥奧〕 二十世紀前半期 義人

Miner, G. W.〔明內〕 二十世紀初 美人

Minetola, S.〔明涅托拉〕 二十世紀前半期 義人

Minetti, S.〔明涅替〕 二十世紀前半期 義人

Mineur, A.〔明紐〕 二十世紀前半期 比利時人

Ming Kheh Jang〔明克讓〕 六世紀中 中國北周武成時人

Ming Ngan Too〔明安圖〕 十七世紀 中國清康熙時蒙古人

Ming Sin〔明新〕 十七世紀 中國清康熙時人 明安圖之季子

Ming Too〔明圖〕 十八世紀前半期 中國清雍正時滿人

Mingot Shelly, J.〔明哥·瑟力〕 二十世紀前半期 西班牙人

Minich, Serafino Raffaele〔米尼士〕 十九世紀 義人

Minin, A. P.〔明甯〕 十九世紀後半期 俄人

Minio, Ersilia Bisson〔明尼奧〕 (?—1931,8,18) 義人

Minkowski, Hermann〔明科斯啓〕 (1864—1909) 德人 創立四原以表示宇宙

Minnigerode, B.〔民尼澤羅〕 十九世紀後半期 德人

Minozzi, A.〔民諾威〕 十九世紀後半期 義人

Minto, Walter〔民托〕 (1753—1796) 蘇格蘭人

Mintrop, I.〔明特洛〕 二十世紀 德人

Minzele〔明策爾〕 十八世紀末 義人

Miot〔米奥〕 (1762—1841) 法人

Miot, E.〔米奥〕 二十世紀初 法人

Mirande, M.〔米蘭得〕 二十世紀前半期 法人

Mirandula, Johannes Franciscus Picus〔彌蘭度拉〕 (?—1533)

Mirea, St. N.〔密累〕 二十世紀初 羅馬利亞人

Mirimanoff, Dmitry〔米林曼諾〕 十九世紀末 瑞士人

Miry, Raoul〔米立〕 二十世紀 法人

Miser, W. L.〔米舍〕 二十世紀前半期 美人

Mises, Richard von〔彌塞〕 卽 von Mises

Misra, D. P.〔米斯剌〕 二十世紀前半期 印度人

Misra, Rama Dhar〔米斯剌〕 二十世紀前半期 印度人

Misrachi, *Rabbi* Elia〔米剌欽〕 亦作 Elias Misrachi 卽 Elia Misrachi

Misri〔米理〕 卽 Al-Misri

Mitault, H.〔米陶爾〕 二十世紀前半期 法人

Mitchell, A. K.〔米恰爾〕 二十世紀前半期 美人

Mitchell, B. E.〔米恰爾〕 二十世紀前半期 美人

Mitchell, G〔米恰爾〕 十八世紀後半期

Mitchell, H.B〔米恰爾〕 二十世紀前半期 美人

Mitchell, Hugh Chester〔米恰爾〕 (1877,4,15—) 美人 研究三角術及測地學

Mitchell, Howard Hawks〔米恰爾〕 (1885,1,14—) 美人

Mitchell, James〔米恰爾〕 十九世紀

Mitchell, John〔米恰爾〕 (1724—1793)

Mitchell, Oscar Howard〔米恰爾〕 十九世紀後半期 美人

Mitchell, U.G〔米恰爾〕 二十世紀初 美人

Mitchell, W.G〔米恰爾〕 二十世紀 美人

Mithobius, Burchard〔密托俾阿〕 十六世紀前半期 德人

Mitra, S.C.〔密特剌〕 二十世紀前半期 印度人

Mittag-Leffler, Gösta *Magnus*〔密塔勒福勒〕 (1846—1927,7 12) 瑞典人 主編數學雜誌(Acta Mathematica),貢獻於函數論.

Mittenzwey, L.〔密騰韋〕 十九世紀末 德人

Mitter, O. K.〔密武〕 二十世紀前半期 居緬甸

Mittinger, Eugene R.〔米廷澤〕 二十世紀前半期 美人

Mitzscherling, A.〔密拆林〕 二十世紀 德人

Miwa〔三輪桓一郎〕 (1861—1920) 日本人

Miyada〔宮田耀之助〕 十九世紀末　日本人

Miyajima, Yutaka〔宮島豐〕 二十世紀前半期　日本人

Miyake Kenryu〔三宅〕 十八世紀前半期　日本人

Miyoshi Kiyoyasu (?—916) 日本人

Mizauld, Antoine〔米匝爾〕 (1520—1578) 法人

Mizuno〔水野行敏〕 十九世紀後半期　日本人

Mizuuchi, K.〔水内金太郎〕 二十世紀前半期　日本人

M'Kenna, Reginald〔馬鑾那〕 (1863,7,6—　) 英人

M'Lachlan, N.〔馬拉克蘭〕 二十世紀

M'Laren, Lord John〔馬拉棱〕 十九世紀　英人

Mlodzějevskij, B. K.〔羅濟澤斯啓〕 二十世紀初　俄人

Mlodzieioski, B.〔羅濟奥斯啓〕 二十世紀初　俄人

Mo Jo〔莫若〕 十四世紀初　中國元大德時人

Mo Yew Che〔莫友芝〕 (1811{清嘉慶十六年}—1871{清同治十年} 中國人

Möbius, August Ferdinand〔麥俾烏〕 亦作 A. F. Moebius (1790,11,17—1868, 9,26) 德人　幾何學天文學家

Möbius, P. J.〔麥俾烏〕 十九世紀末　德人

Möbius, W.〔麥俾烏〕 二十世紀　德人

Mochinaga 十七世紀後半期　日本人

Močnik, F. v.〔摩尼克〕 十九世紀中　奥人

Mode, Elmer Beneken〔摩德〕 二十世紀前半期　美人

Moebius, A. F.〔麥俾烏〕 卽 A. F. Mobius

Moeller, Max〔麥勒〕 亦作 M. Möller　二十世紀　奥人

Moennich, B. F.〔麥尼哈〕 十八世紀

Moerbecke, Wilhelm von〔美柏刻〕 十三世紀

Moeris〔美立斯〕 紀元前 埃及人

Moessner, A.〔美斯涅〕 二十世紀前半期 德人

Moffitt, G. W.〔摩菲特〕 二十世紀前半期 美人

Mögelin, M.〔麥革林〕 十九世紀後半期 德人

Mohammed Bagdadinus〔穆罕默德·巴達丁那〕 十六世紀 亞剌伯人

Mohammed ibn al-Leit〔穆罕默德·易·亞來〕 十世紀末 亞剌伯人

Mohammed ibn Ibrahim〔穆罕默德·易·伊布剌希〕 即 Abu Abdallah al-Fazari

Mohammed ibn Maruf〔穆罕默德·易·馬剌〕 即 Taqi eddin

Mohammed ibn Musa〔穆罕默德·易·穆薩〕 亦作 Mohammed ben Musa 即 al-Khowarizmi

Mohr, Georg〔莫兒〕 十七世紀後半期 荷蘭人

Mohr, Johann〔莫兒〕 十七世紀後半期

Mohr, O.〔莫兒〕 十九世紀末 德人

Mohr, R.〔莫兒〕 二十世紀前半期 德人

Mohrmann, G.〔莫兒曼〕 十九世紀後半期 德人

Mohrmann, Hans〔莫兒曼〕 二十世紀前半期 德人 著非歐幾何學

Moigno, François〔梅格諾〕 (1804—1884) 法人 數學解析學家

Moigno, F. N. M.〔梅格諾〕 十九世紀 法人

Moir, Henry〔梅耳〕 二十世紀前半期 美人

Moivre, Abraham de〔抹甫〕 即 de Moivre

Mokre, H.〔摩克耳〕 二十世紀前半期 德人

Mokrzycki, Gustave André〔摩克威啓〕 二十世紀前半期 法人

Molenaar, P. G.〔摩勒納〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Molenbroek, Pieter〔摩隆布洛克〕 十九世紀末 荷蘭人 著四原論

Molesworth, Sir William〔摩爾茲衞司〕 (1810—1855) 英人

Molien, Theodor〔摩歷〕 十九世紀末 愛沙尼亞(Esthonia)人

Molières, Josef Privat de〔摩利耳〕 (1677—1742) 法人

Molinæus, Carolus〔摩林尼斯〕 (1500—1566)

Molinari, A. M.〔摩林那利〕 二十世紀前半期 義人

Molins, H.〔摩令〕 十九世紀前半期 法人

Molk, Jules〔摩爾克〕 (1857—1914) 法人 研究橢圓函數

Molke, R.〔摩爾刻〕 十九世紀末 德人

Mollame, V.〔摩拉梅〕 十九世紀後半期 義人

Möller, Arnold〔門勒〕 十七世紀中 德人

Möller, Hermann〔門勒〕 (1850—1924) 丹麥人

Möller, J.〔門勒〕 十九世紀後半期 瑞典人

Möller, Max〔門勒〕 即 M. Moeller

Mollerup, *P.* J.〔摩勒刺〕 二十世紀初 丹麥人

Mollweide, Karl Brandon〔摩爾外德〕 亦作 Karl Brandau Mollweide 或 C. B. Mollweide (1774,2,3—1825,3,10) 德人

Molony, B. C.〔摩羅尼〕 二十世紀前半期 英人

Molteno, Percy Aiport〔毛騰諾〕 (1861—) 英人

Moltzer〔摩爾策〕 即 Micyllus

Molyneaux, William〔毛力紐〕 (1656,4,17—1698,10,11) 愛爾蘭人

Mommsen, Théodore〔蒙森〕 (1817,11,30—1903,11,1) 德人

Momokawa Chubei〔百川治兵衞〕 十七世紀中 日本人

Monck, H. S.〔夢克〕 十九世紀後半期 英人

Mondésir〔夢德栖〕 十九世紀

Mondeux〔滿兌〕 (1826—?) 法人

Mondoré, Pierre〔蒙多果〕 拉丁文作 Petrus Montareus 十六世紀中 法人

Monforte, Antonio di〔蒙爾武〕 (1644—1717) 義人

Monge, Gaspard〔蒙日〕 (1746,5,10—1818,7,28) 法人 發見畫法幾何學

Monge, Jakob〔蒙日〕

Mongez, Jean André〔蒙機〕 (1751—1788)

Monhemius, Johannes〔蒙痕密阿〕 十六世紀中 德人

Mönnich〔夢尼哈〕 二十世紀

Monod-Herzen, G. E.〔摩諾·赫增〕 二十世紀前半期 法人

Monro, C. J.〔曼洛〕 十九世紀後半期 英人

Monroe, T. R.〔孟祿〕 二十世紀前半期 美人

Monsante, Luis〔蒙散提〕 十九世紀 秘魯人

Montag, C.〔蒙坦〕 十九世紀後半期 德人

Montag, J. B.〔蒙坦〕 十九世紀 德人

Montague, Karl〔孟德鳩〕 十七世紀 英人

Montaigne, Michel de〔蒙旦〕 (1533,2,28—1592,9,13) 法人

Montaite, Louis de〔蒙堵提〕 十七世紀

Montaureus, Petrus〔蒙托果〕 即 P. Mondoré

Montauzan, C. G. de (蒙托臧〕 二十世紀初 法人

Montcheuil, M. de〔夢特哲〕 二十世紀初 法人

Monte Regio, Joannes de〔蒙特浬佐〕 亦作 Joannes de Monteregio 即 Johannes Müller

Monteil, C.〔蒙武爾〕 二十世紀初 法人

Monteil, P. L.〔蒙武爾〕 二十世紀 法人

Monteiro, A. S.〔孟武洛〕 二十世紀前半期

Monteiro, Joao〔孟儒望〕（?—1648） 葡萄牙人 明崇禎時來中國

Monteiro da Rocha, José〔孟武洛·達·洛沙〕（1735—1819） 西班牙人

Montel, Paul〔蒙特爾〕（1876— ） 法人

Montén, T.〔夢騰〕 二十世紀初 瑞典人

Monteregio, Joannes de〔蒙特湼佐〕 卽 Regiomontanus

Montesano, Domenico〔夢武薩諾〕（1863—1930,10,1） 義人

Montessus *de Ballore*, R. de〔蒙武色〕 十九世紀末 法人

Montfaucon, Bernhard von〔蒙福晃〕 亦作 Bernhard de Montfaucon 十八世紀前半期

Montferrier, Alexandre *André Victor* Sarrazin de〔蒙福里〕 十九世紀中 法人 以絕對原理著數學辭典

Montgomery, Deane〔夢干麥里〕 二十世紀前半期 美人

Monti, Vincenzo〔夢提〕 亦作 Vincent Monti （1754,2,19—1828,10,13） 義人

Montigny, Charles de〔夢提尼〕 十八世紀 法人

Montmorency, H. de〔芒模倫西〕 二十世紀前半期 英人

Montmort, Pierre Rémond de〔蒙摩〕（1678,10,27—1719,10,7） 法人

Montucla, Jean Étienne de〔蒙塔拉〕（1725,9,5—1799,12,18） 法人 數學史專家.著有數學史兩種,前乎此無出其右者.

Monville, L.〔蒙徵爾〕 二十世紀前半期 德人

Mony, P.〔蒙尼〕 二十世紀前半期 法人

Monzó, Pedro Juan〔夢左〕 十六世紀後半期 美人

Moody, W. A.〔模帶〕 二十世紀前半期 美人

Moon, R.〔模〕 十九世紀中 英人

Moor, James〔穆耳〕 十八世紀 英人

Moor, P.〔穆耳〕 二十世紀前半期 瑞士人

Moore, C. B.〔穆爾〕 二十世紀初 美人

Moore, Clarence Lemuel Elisha〔穆爾〕 (1876,5,12—1931,12,5) 美人

Moore, Charles Napoleon〔穆爾〕 (1882,11,14—) 美人

Moore, Eliakim Hastings〔穆爾〕 (1862,1,26—1932,12,30) 美人

Moore, Francis〔穆爾〕 十七世紀末

Moore, Jonas〔穆爾〕 十七世紀後半期 英人

Moore, Joseph Haines〔穆爾〕 (1878,9,7—) 美人 研究數理天文

Moore, Lucius Terrell〔穆爾〕 二十世紀前半期 美人

Moore, Robert Lee〔穆爾〕 (1882,11,14—) 美人 著點組論之基礎

Moore, Thomas W.〔穆爾〕 二十世紀前半期 美人

Moore, W. L.〔穆爾〕 二十世紀前半期 美人

Moors, B. P.〔穆耳斯〕 二十世紀初 法人

Moots, E. E.〔摩玆〕 二十世紀前半期 美人

Morale, M.〔摩剌爾〕 二十世紀初 義人

Morales, C. M.〔摩剌爾斯〕 十九世紀後半期 阿根廷人

Morales, José Dionisio〔摩剌爾斯〕 二十世紀前半期 波德黎各島人

Morand, L.〔摩蘭〕 十九世紀

Moray, Robert〔馬累〕 十七世紀

Mörck, S.〔墨克〕 十九世紀前半期 瑞典人

Mordell, Louis Joel〔摩得爾〕 (1888,1,28—) 生於美 研究數論

Mordente, Fabricio〔摩登忒〕 十六世紀 義人

Mordoukhay-Boltovskoy, D. D.〔摩多開·波托斯剩〕 亦作 D.Morduchai-Boltowski 或 D.D. Morduchaj-Boltovskoj 二十世紀前半期 俄人

More, Sir Thomas〔謨耳〕 (1478,2,7—1535,7,6) 英人

Moreau, C.〔摩羅〕 十九世紀後半期 法人

Moreau, G.〔摩羅〕 二十世紀前半期 法人

Morehead, J. C.〔摩勒赫德〕 二十世紀前半期 美人

Morel, A.〔摩勒〕 十九世紀後半期 法人

Moreno, G.〔摩累諾〕 十九世紀後半期 義人

Moreno, H. C.〔摩累諾〕 二十世紀初 美人

Moreno, Maria〔摩累諾〕 二十世紀前半期 義人

Moreno, Morris Halcott〔摩累諾〕 十九世紀末 美人

Morenus, Eugenie M.〔摩棱那〕 二十世紀前半期 美女

Morera, Giacinto〔摩勒拉〕 (1856—1909) 義人

Moret, M. E.〔摩勒〕 十九世紀後半期 瑞士人

Moret-Blanc〔摩勒勃郎〕 十九世紀後半期 法人

Moretti, Pietro〔摩勒替〕 十七世紀後半期 義人

Moretus, Magister Matheus〔摩勒塔〕 十四世紀 比利時人

Moreux, T.〔摩魯〕 二十世紀前半期 法人

Morf〔摩夫〕 二十世紀 瑞士人

Morgan, Alexander〔摩爾根〕 (1860,8,21—) 蘇格蘭人 著第一種橢圓積分之幾何表示法

Morgan, Augustus de〔摩爾根〕 即 de Morgan

Morgan, Frank Millet〔摩爾根〕 (1886,10,6—) 美人 著初等數學解析及三角術

Morgan, H. A.〔摩爾根〕 十九世紀 英人

Morgan, R. B.〔摩爾根〕 二十世紀 英人

Morgan, William〔摩爾根〕 (1870,11,8—) 英人 研究數理化學及工程

Morgans, W. R.〔摩根斯〕 二十世紀前半期 英人

Morgenroth, W.〔摩異洛司〕 二十世紀 德人

Morgenstern, A.〔摩賔斯武〕　二十世紀初　德人　研究五次方程之數値解法

Mori Arinori〔森有禮〕(1847—1888)　日本人

Mori Kambei *Shigeyoski*〔毛利重能〕十六及十七世紀　日本人

Mori Kititaro〔森吉太郎〕　二十世紀前半期　日本人

Mori Yasuo〔毛利集雄〕　二十世紀前半期　日本人

Moriconi, C.〔摩利科尼〕　十九世紀後半期　義人

Morimoto Seigo〔森本淸吾〕　二十世紀前半期　日本人

Morin, A.〔摩靈〕　二十世紀　英人

Morin, Arthur Jules〔摩靈〕

Morin, H. de〔摩靈〕　二十世紀前半期　法人

Morishima Taro　二十世紀前半期　日本人

Moritz, Robert *Edouard*〔摩理茲〕　(1868,6,2—　)　德人　著三角術及循環調和曲線理論

Moritz von Nassau　十七世紀

Moriya Kimihiro〔森谷公博〕　二十世紀前半期　日本人

Moriya Mikao〔森谷〕　二十世紀前半期　日本人

Moriyasu, I.〔森安茂一〕　二十世紀前半期　日本人

Morland, Sir Samuel〔摩蘭〕　(1625—1696,1,6)　英人

Morley, Arthur〔摩黎〕　(1876—　)　英人

Morley, Daniel〔摩黎〕　亦作 Daniel of Merlai　十二世紀後半期　英人

Morley, Edward William〔摩黎〕　(1838,1,29—1923,2,24)　美人

Morley, Frank〔摩黎〕　(1860,9,9—　)　英人　研究函數論

Morley, Frank Vigor〔摩黎〕　(1899,1,4—　)　美人

Morley, Henry〔摩黎〕　(1822,9,15—1894,5,14)　英人

Morley, Henry Forster〔摩黎〕 (1855—　　) 英人

Morley, R. K.〔摩黎〕 二十世紀前半期　美人

Morliani, Giovanni〔摩力亞尼〕 十五世紀

Mormoraj〔毛摩拉〕 十八世紀後半期　義人

Moroff, A.〔摩洛夫〕 十九世紀前半期　德人

Morpurgo, A.〔摩拍哥〕 二十世紀前半期　德人

Morreil, A. J. H.〔摩來爾〕 二十世紀前半期　英人

Morrel, J. S.〔摩利爾〕 二十世紀前半期　美人

Morrill, W. K.〔摩里爾〕 二十世紀前半期　美人

Morris, Charles Clement〔莫理斯〕 二十世紀前半期　美人　研究商業數學

Morris, C. R.〔莫理斯〕 二十世紀前半期　英人

Morris, F. R.〔莫理斯〕 二十世紀前半期　美人

Morris, Inez〔莫理斯〕 二十世紀前半期　美人

Morris, J. H.〔莫理斯〕 二十世紀　美人

Morris, Max〔莫理斯〕 二十世紀前半期　美人

Morris, Richard〔莫理斯〕 二十世紀前半期　美人

Morris, Robert〔莫理斯〕 十九世紀　美人

Morrison, C. M.〔摩立孫〕 二十世紀前半期　美人

Morrow, David Clarence〔摩洛〕 二十世紀前半期　美人

Morse, C. N.〔模斯〕 二十世紀前半前

Morse, D. C.〔模斯〕 二十世紀前半期　美人

Morse, D. S.〔模斯〕 二十世紀前半期　美人

Morse, Harold Marston〔模斯〕 (1892,3,24—　　) 美人

Morse, Marston〔模斯〕 二十世紀前半期　美人

Morse, Walter Priest〔模斯〕 二十世紀前半期　美人

Morsheimer, Marcus〔摩犀麥〕 十六世紀中

Morsianus, Christiernus Torchillus〔摩栖亞那〕 十六世紀 德人

Morss, E. L.〔莫斯〕 二十世紀 美人

Mortara, E.〔莫塔剌〕 十九世紀中 義人

Mortet, Victor〔摩忒〕 十九世紀末 法人

Morton, A. B.〔摩頓〕 (?—1933,10,13) 美人

Morton, James〔摩頓〕 十九世紀後半期 美人

Morton, Pierre〔摩頓〕 十九世紀 英人

Morton, Robert Lee〔摩頓〕 (1889,11,25—) 美人 著算術教授法及統計表

Morton, William Blair〔摩頓〕 十九世紀末 英人

Morus, Thomas〔摩剌〕 (1480—1535) 英人

Morveau, Guyton de〔摩味〕

Mosch, E.〔摩什〕 二十世紀 德人

Moschietti, E.〔摩席替〕 二十世紀前半期 義人

Moschopulus, Manuel〔摩勺帕拉〕 亦作 Emmanuel Moschopulus (?—1460?) 希臘人 研究幻方

Mosdorff〔莫斯多夫〕 十八世紀中 德人

Mose, Henry〔摩兹〕 十七世紀 美人

Moser, Chr.〔墨塞耳〕 二十世紀前半期 瑞士人

Moser, Ludwig〔墨塞耳〕 十九世紀前半期 德人

Moses ben Maimum, Rabbi〔摩西·本·梅夢〕 即 Maimonides

Moses ben Tibbon〔摩西·本·替波〕 十三世紀 猶太人 譯亞剌伯文數學爲猶太文

Moskovitz, David〔摩科微兹〕 二十世紀前半期 美人

Moss, T.〔莫斯〕 十八世紀後半期 英人

Mossman, Miss Thirza A.〔摩斯曼〕 二十世紀前半期 美女

Most, R.〔摩斯特〕 二十世紀 德人

Moston, L. T.〔摩斯頓〕 二十世紀前半期 美人

Moszkowszki, Alexander (摩科茲啓) 二十世紀

Moszowski, A.〔摩左斯啓〕 二十世紀

Mott, N. F.〔謨特〕 二十世紀前半期 英人

Motte, A.〔穆忒〕 十九世紀前半期

Mouchel, J.〔摩奇爾〕 十九世紀後半期 法人

Mouchot, A.〔穆綽〕 十九世紀 法人

Moufang, R.〔穆蕃〕 二十世紀前半期 德人

Moul, Margret〔莫爾〕 二十世紀前半期 英人

Moullin, Eric Balliol〔莫爾林〕 (1893,8,10—) 英人 研究電磁數理

Moulton, Elton James〔莫爾頓〕 二十世紀前半期 美人 研究解析函數

Moulton, Forest Ray〔莫爾頓〕 (1872,4,29—) 美人 著微分方程式

Moulton, Gabriel〔莫爾頓〕 (1618,—1694,9,28) 法人

Moulton, J. F.〔莫爾頓〕 十九世紀 英人

Mourad, S.〔莫剌〕 二十世紀前半期 美人

Moureaux, M. (摩杲〕 十九世紀末 法人

Mourey〔毛杲〕 十九世紀中 法人

Mourhess, C. A.〔毛赫斯〕 二十世紀 美人

Mourlot, A.〔摩羅〕 十九世紀末 法人

Mourraille, J. Raym.〔穆杲爾〕 十八世紀中 法人

Moursund, A. F.〔穆散〕 二十世紀前半期 美人

Moutard, Th.〔毛塔〕 十九世紀後半期 法人

Moutier, P.〔穆提耳〕 十九世紀末 法人

Mouton, Gabriel〔穆頓〕 (1618—1694) 法人

Maw Ting〔牟庭〕 十九世紀前半期 中國清道光時人

Mowbray, A. H.〔莫布栗〕 二十世紀前半期 美人

Moxon, Joseph〔穆克孫〕 十七世紀後半期 英人 著數學字典

Moya, *Juan* Pérez de〔摩雅〕 十六世紀後半期 西班牙人

Moyer, James Ambrose〔穆業〕 (1877,9,13—) 美人 著畫法幾何學

Mozhnik, Franz Seraphin〔摩尼克〕 十九世紀 奧人

Mozley, E. N.〔摩力〕 二十世紀 英人

Mu Ni Ko〔穆尼閣〕 卽 Smogolenski

Mueller, Clara H.〔睦勒〕 二十世紀前半期 美人

Mügge, O.〔睦治〕 二十世紀 德人

Muhammed ibn Kasim〔睦罕默德·易·卡辛〕 八世紀 印度人

Muhammed ibn Musa Alchwarizmi〔睦罕默德·易·穆薩·亞科瓦利米〕 卽 Alchwarizmi

Mühlbach, R.〔睦爾巴哈〕 二十世紀前半期 德人

Mühlendyck, O.〔睦楞狄克〕 二十世紀前半期 德人

Muica, I.〔繆卡〕 亦作 J. Muika 二十世紀前半期 羅馬利亞人

Muir, Sir Thomas〔繆耳〕 (1844,8,25—1934,3,21) 生於蘇格蘭,居南非洲. 著行列式.

Muirhead, R. F.〔繆耳赫德〕 十九世紀末 英人

Mukhopâdhyáy, Sir Austosh〔穆科帕雅〕 十九世紀末 英人 著圓錐曲線論

Mukhopadhyaya, Syamadas〔穆科帕雅耶〕 二十世紀初 印度人

Mulcahy, John〔穆爾加〕 十九世紀中 愛爾蘭人 研究近世幾何學

Mulder, P.〔馬爾得〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Mulholland, H. P.〔馬和蘭〕 亦作H. P. Mullholland 二十世紀前半期 英人

Mullen, L. B.〔馬楞〕 十九世紀末 英人

Müller, Aloys〔米勒〕

Müller, Anton〔米勒〕

Müller, C.〔米勒〕 二十世紀 德人

Müller, Christ. Friedr.〔米勒〕 十九世紀末 德人

Müller, C. G. D.〔米勒〕 十八世紀 德人

Müller, Carl Heinrich〔米勒〕 (1855—1927) 德人

Müller, Emil〔米勒〕 (?—1927,9,1) 奧人 研究畫法幾何學

Müller, Felix〔米勒〕 亦作F. Mueller 十九及二十世紀 德人 研究數學史

Müller, George〔米勒〕 (1805,9,27—1898,3,10) 德人

Müller, H.〔米勒〕 亦作H. Mueller 十九世紀後半期 德人

Müller, H. F.〔米勒〕 十九世紀後半期 德人

Müller, John〔米勒〕 亦作Johann Müller或John Mueller 即Regimontanus或Monteregio

Müller, J. H. T.〔米勒〕 亦作J. H. T. Mueller 十九世紀中 德人

Müller, J. O.〔米勒〕 二十世紀初 德人

Müller, Johann Wolfgang〔米勒〕 十九世紀前半期 德人

Müller, K. E.〔米勒〕 十九世紀末 德人

Müller, M.〔米勒〕 二十世紀前半期

Müller, Max〔米勒〕 (1823—1900) 德人

Müller, Otfried〔米勒〕 亦作Ottfried Müller (1797—1840) 德人

Müller, Reinhold〔米勒〕 十九世紀後半期 德人

Müller, Richard〔米勒〕 十九世紀後半期 德人

Müller, Th.〔米勒〕 十九世紀末 德人

Müller, Wilhelem〔米勒〕 亦作 W. Mueller 二十世紀前半期 德人

Müller-Breslau, H.〔米勒·北勒斯勞〕 二十世紀前半期 義人

Mullhall, J.〔穆哈爾〕 二十世紀前半期 阿根廷人

Mullholland, H. P.〔馬和蘭〕 卽 H. P. Mulholland

Mullikin, Anna M.〔馬利琴〕 二十世紀前半期 美人

Mullings, M. E.〔麻林斯〕 二十世紀前半期 美人

Mullins, George W.〔馬林斯〕 二十世紀前半期 美人

Münch〔明希〕 二十世紀前半期 德人

Mundt, C. I.〔夢特〕 十九世紀中 丹麥人

Münger, F.〔閔澤〕 十九及二十世紀 瑞士人

Munk, M.〔蒙克〕 十九世紀末 亘哥斯拉夫人

Muñoz, Jerónimo〔閔諾〕 亦作 H. Munyos (?—1584) 西班牙人

Munro, Hugh Andrew Johnstone〔蒙洛〕 (1819,10,19—1885,3,30) 英人

Münster, Sebastian〔閔斯德〕 (1489—1552,5,23) 德人 生於巴勒斯坦

Munstervs, Sebastianvs〔閔斯德斯〕 十六世紀

Müntz, C.〔閔茲〕 二十世紀初 德人

Müntz, Hermann〔閔茲〕 二十世紀前半期 德人

Munyos, Hiernymus〔閔諾〕 卽 J. Muñoz

Münzner, H.〔濛涅〕 二十世紀前半期 德人

Murai Chuzen〔村井中漸〕 (1708—1797) 日本人

Murai Masahiro〔村井〕 十八世紀前半期 日本人

Muramatsu *Kudayu* Mosei〔村松茂清〕 十七世紀後半期 日本人

Murat, Salih〔繆拉〕 二十世紀前半期　土耳其人

Muravief, Nicolas〔木拉威〕(1721—1770)　俄人

Murdoch, Patrick〔麥多克〕十八世紀中　瑞士人

Murdoch, William〔麥多克〕(1754,8,21—1839,11,15)

Mure, G. R. G.〔繆兒〕 二十世紀前半期　英人

Murent, J.〔繆棱〕十九世紀後半期　法人

Murer, V.〔繆累〕 十九世紀末　義人

Murhard, Friedrich〔睦哈德〕十八世紀　德人

Murhard, F. W. A.〔睦哈德〕(1779—1853)　德人

Muris, Joannes de〔繆斯〕 即 Meurs

Murnaghan, Francis Dominic〔繆那加〕(1893,8,4—　)　美人　生於愛爾蘭　著向量解析及力學

Murphy, J.〔繆菲〕二十世紀前半期　美人

Murphy, P.〔繆菲〕十九世紀末　美人

Murphy, R.〔繆菲〕十九世紀前半期　英人　數理物理學家

Murr, C. G. von〔穆耳〕 十八世紀　德人

Murr, Christian Theoph. de〔穆耳〕亦作 Christian von Murr　十八世紀後半期　德人

Murray, Alexander〔墨果〕(1775—1813)　英人

Murray, A. R.〔墨果〕 二十世紀前半期　英人

Murray, David〔墨果〕(1830,10,13—1905,3,6)　美人

Murray, Daniel Alexander〔墨果〕(1862—1934,10,19)　生於坎拿大　研究微積分,微分方程

Murray, F. H.〔墨果〕二十世紀前半期　坎拿大人

Murrle, P.〔睦爾〕 二十世紀前半期　德人

Mursi-Ahmed, M.〔麥息·阿默德〕 二十世紀前半期 英人

Musa ibn Shakir〔穆薩·易·沙啓〕 亦作 Musa ibn Schakir 九世紀 美索不達米亞人

Musa ibn Yunis〔穆薩·易·猶尼〕 卽 Kemal ed-din ibn Yunis

Musa Sakir〔穆薩·撒啓〕 九世紀 美索不達米亞人

Musckelišvili, N.〔穆斯刻里徽力〕 亦作 N. Muschelišvili 或 N. Mouskhelichvili 二十世紀前半期 俄人

Muscus von Constantinopel〔馬斯卡·奉·君士坦丁〕 土耳其人

Müsebeck, C.〔睦塞柏克〕 十九世紀末 德人

Muslin ibn Ahmed al-Leiti〔馬斯林·易·阿默德·阿來替〕 卽 al-Qible

Musschenbroek, Petro van〔馬斯奇布洛克〕 亦作 Peter van Musschenbroek (169?—1761) 荷蘭人 數理物理家

Musselman, J. R.〔馬塞爾曼〕 二十世紀前半期 美人

Musso, G.〔馬索〕 十九世紀末 義人

Muth, F.〔穆司〕 二十世紀前半期 德人

Muth, P.〔穆司〕 十九世紀末 德人

Muther, Richard〔穆武〕 (1860,2,25—1909,6,28) 德人

Mutinens, Angelus〔穆廷內〕 十六世紀前半期 義人

Myard, F. E.〔密雅〕 二十世紀前半期 法人

Mydorge, Claude〔密多治〕 (1585,—1647,7,) 法人 研究透視法,最初著法文之圓錐曲線論.

Myers, George William〔邁爾士〕 (1864,4 30—1931,11 23) 美人 著數學書數種

Mylius, Christlob〔密力阿〕 (1678—1754) 德人

Myller, A.〔密勒〕 二十世紀初 德人

Myrberg, P. J.〔密柏〕 二十世紀前半期　芬蘭人　研究函數論

Nâbauer, M.〔內寶〕 二十世紀前半期 德人

Naber, H. A.〔那貝〕 二十世紀初　荷蘭人

Nabeshima, N.〔鍋島信太郎〕 二十世紀前半期　日本人

Nabholz, P.〔拿和茲〕 二十世紀初　瑞士人

Nabl, J.〔拿爾〕 二十世紀　德人

Nabod, Valentin〔拿波〕 亦作 Naibod　或 Naiboda　(?—1593,3,3) 德人

Nachreiner, V.〔那哈賴涅〕 十九世紀後半期　德人

Nachshon, Rau〔那哈勺〕 九世紀

Nachtergal, A.〔那哈武迦〕 二十世紀　法人

Nachtikal, F.〔那哈梯卡〕 十九世紀末　捷克人

Nádai, A.〔內戴〕 二十世紀前半前　德人

Nadell, A.〔拿德爾〕 二十世紀　美人

Nadim〔那丁〕 卽 Al-Nadim

Nadori, Arpad〔拿多利〕 二十世紀前半期　德人

Naebauer, M.〔尼寶厄〕 二十世紀　德人

Naegelsbach, H.〔內革巴哈〕 卽 H. Nägelsbach

Naess, Almar〔尼斯〕 二十世紀前半期　挪威人

Naetsch, E.〔尼什〕 二十世紀　德人

Naetsch, F. W. E.〔尼什〕 十九世紀末　德人

Nagakubo〔長久保玄珠〕 (1719—1803 七月二十五日) 日本人

Nagaoka Hamitaro〔長岡半太郎〕 (1865—　) 日本人

Nagasawa Kamenosuke〔長澤龜之助〕 (1860—1927) 日本人

Nagel, C. H.〔內格爾〕 十九世紀　德人

Nagel, Ernest.〔內格爾〕 二十世紀前半期　美人

Nagel, Trygve〔內格爾〕 二十世紀前半期

Nagell, Tr.〔內革爾〕 二十世紀前半期 挪威人 著不定解析

Nägelsbach, Hans〔內革巴哈〕 亦作 H. Naegelbach 十九世紀後半期 德人

Nagl, Alfred〔那格〕 十九世紀末 奧人

Nagumo, Mitio 二十世紀前半期 日本人

Nagy, Julius von Sz.〔諾澤〕 二十世紀前半期 匈人

Nahm, E.〔拿謨〕 二十世紀前半期 德人

Naibod, V.〔拿波〕 卽 V. Nabod

Nairîzî〔內立成〕 卽 Al-Nairîzî

Nakahara, T.〔中原富藏〕 二十世紀前半期 日本人

Nakajima, Soji〔中島宗治〕 亦作 M. Nakajima 二十世紀前半期 日本人

Nakamura〔中村正直〕 (1832—1891) 日本人

Nakamura Yoshikata〔中村〕 (1824—1893) 日本人

Nakane Genjun〔中根彥循〕 (1698—1758 或 1701—1761) 日本人 元圭之子

Nakane Genkei〔中根元圭〕 (1662—1733) 日本人

Nakanishi Seiko〔中西正好〕 十七世紀後半期 日本人

Nalli, D.〔拿里〕 二十世紀前半期 義人

Nalli, *Miss* Pia〔拿里〕 二十世紀前半期 義女

Name, R. van〔內謨〕 十九世紀 美人

Namur, A.〔那慕爾〕 著對數表

Nan Huai Jen〔南懷仁〕 卽 Ferdinand Verbiest

Nan Kung Yue〔南宮說〕 八世紀初 中國唐中宗時人

Nañawa, I. N.〔那奈瓦〕 二十世紀 美人

Nannei, E.〔南奈〕 二十世紀初 義人

Nansen, Fridjof〔南森〕(1861,10,10—1930,5,13) 挪威人

Nanson, Edward John〔南遜〕(1850,12,13—　) 英人

Napier, A.〔訥白爾〕十九世紀中　英人

Napier, John〔訥白爾〕亦作 J. Nepair 或 J. Neper (1550,—1617,4,4) 蘇格蘭人　發明對數及球面三角術中之訥白爾公式,創製運算籌,計算尺.

Napier, Mark〔訥白爾〕十九世紀　蘇格蘭人

Napoli, F.〔那波力〕十九世紀後半期　義人

Narducci, Enrico〔那度息〕十九世紀後半期　義人

Narr, F.〔那耳〕十九世紀　德人

Narrien, J.〔那里〕十九世紀中　英人

Narumi, Seimatsu〔成實清松〕二十世紀前半期　日本人

Nasawi〔那薩維〕亦作 Nasavi　卽 Al Nasawi

Nash, A. M.〔那士〕二十世紀初　美人

Nash, Melatiah〔那士〕十九世紀　美人

Nasimov, P.〔拿綫摩夫〕亦作 P. Nasimof 或 P. S. Nasimoff 卽 Nazimoff

Nasir-Eddin〔納速剌丁〕亦作 Al Tusi (1201,2,17—1274,或 $^{6,25}_{12,12}$) 波斯人　著三角術

Nassau, J. J.〔拿騷〕二十世紀前半期　美人

Nassò, M.〔納梭〕十九世紀末

Natani, L.〔納塔尼〕十九世紀中　德人　著數學字彙

Nathans, A. D.〔拿單斯〕二十世紀前半期　荷蘭人

Natorp, Paul〔拿托爾伯〕(1854,1,24—1924,8,17) 德人

Natucci, Alpinlo〔那塔息〕二十世紀前半期　義人

Nau, F.〔諾〕十九世紀末　法人

Naucrates〔諾克剌特〕紀元前三世紀　希臘人

Naudé, Philipp der Aeltere〔諾對〕(1654—1729) 德人

Naudé, Philipp der Jüngere〔諾對〕(1684—1747) 德人

Navarette, D. M. F.〔納瓦累退〕十九世紀 西班牙人

Navarro, Jos.〔納瓦洛〕十九世紀前半期 丹麥人

Nave, Annibale della〔納甫〕十六世紀 義人

Navier, *Claude* Louis Marie Henri〔那徽爾〕(1785—1836) 法人 數理物理學家

Navo, Curtio Trojano dei〔那服〕十六世紀中 義人

Naylor, V.〔內洛〕二十世紀前半期 英人

Nazari, Francesco〔拿撒利〕十七世紀後半期 義人

Nazif ibn Jumn〔拿威·易·贊〕卽 al-Qass

Nazimoff, P. S.〔拿稷摩夫〕亦作 P. Nasimov 或 P. Nazimov 十九世紀後半期 俄人 應用橢圓函數於數論

Neander, Michael〔泥安得〕(1529,4,3—1581,10,23) 荷蘭人

Necker, Jacques〔芮克〕(1739—17?4) 法人

Néculcéa, E.〔湼卡會〕二十世紀初 法人

Nedden, H. M. C. zur〔湼登〕十九世紀中 德人

Neder, Ludwig〔湼得〕(1890—) 德人

Neel, E. E.〔泥爾〕十九世紀 法人

Neelley, John Haven〔倪力〕二十世紀前半期 美人 著微積分

Nëen He Yaou〔年希堯〕十八世紀前半期 中國清康熙時人

Neff, I. F.〔湼夫〕二十世紀前半期 美人

Nehavendi〔內哈汾狄〕卽 Al Nehavendi

Neikirk, L. I.〔奈基剋〕十九世紀末 美人

Neil, William〔奈爾〕亦作 William Neile (1637,12,7—1670,8,24) 英人

Neiss, F.〔奈斯〕二十世紀前半期　德人

Nejedli, J. J.〔內澤德利〕十九世紀後半期

Nekrasov, K. P.〔耐克拉索〕亦作 K.P. Nekrasow　二十世紀前半期　俄人

Nekrassoff, P. A.〔耐克拉索夫〕(1851,—1924,12,20)　俄人

Nelkenbrecher, Johann Christian〔涅塈塈勒〕(?—1760)　德人

Nelkenbrecher, R.〔涅塈布勒〕二十世紀前半期　德人

Nelli, G. C. de〔涅力〕(1661—1725)

Nelson, A. L.〔納爾遜〕二十世紀前半期　美人

Nelson, C. A.〔納爾遜〕二十世紀前半期　美人

Nelson, Miss Mildred〔納爾遜〕二十世紀前半期　美女

Nelson, Walter Kenneth〔納爾遜〕二十世紀前半期　美人

Németh, J.〔內麥司〕二十世紀初　匈人

Nemorarius, Jordanus〔能摩刺萊斯〕亦作 Jordanus Nemerarius 或 Jordanus de Saxonia 或 Jordan of Namur　(?—1237)　德人　著代數學

Neocleides〔泥克來諦〕亦作 Neokleides　紀元前四世紀　雅典人

Neomagus〔諾馬谷〕亦作 Noviomagus　卽 Bronkhorst

Neovius, E. R.〔泥維厄〕十九世紀末　芬蘭人

Nepair, John〔訥白爾〕卽 John Napier

Neper, John〔訥白爾〕卽 John Napier

Nernst, Walter〔涅斯特〕(1864,6,26—　)　德人

Neronov, N.P.〔涅綸諾〕二十世紀前半期　俄人

Nesbit, A.〔涅斯俾〕十九世紀前半期　英人

Nesbitt, A. M.〔涅斯俾特〕二十世紀初　英人

Nesselmann, Georg Heinrich *Ferdinand*〔涅塞爾曼〕(1811—1881)　德人　著代數史

Nessen, Mathäus〔涅森〕 亦作 Nesse　十六世紀　德人

Nessi, A.〔涅西〕 二十世紀前半期　法人

Nestle, P.〔涅斯特〕 二十世紀初　德人

Nestor, Dém〔涅斯忒〕 二十世紀前半期　法人

Netteshelm, Agrippa von〔涅忒屏〕 (1487—1535)　德人

Nettleton, H. R.〔涅特爾頓〕 二十世紀

Netto, *Otto Erwin Johannes* Eugen〔涅托〕 十九及二十世紀　德人　羣論大家并研究數學史

Neubauer, E.〔紐寶厄〕 二十世紀前半期　德人

Neubauer, M.〔紐寶厄〕 二十世紀　德人

Neuberg, Joseph〔諾柏〕 (1840—　) 比利時(即今之盧森堡)人　貢獻於三角術幾何學

Neubuser, A.〔諾巴塞〕 十九世紀　德人

Neuendorff, R.〔諾恩多夫〕 二十世紀初　德人

Neufeld, J. L.〔紐斐德〕 二十世紀前半期　美人

Neugebauer, O.〔紐機寶厄〕 二十世紀前半期　德人

Neugebauer, Paul Viktor〔紐機寶厄〕 二十世紀　德人

Neumann, Carl〔牛滿,卡爾〕 即 Karl Gottfried Neumann

Neumann, E.〔牛滿〕 十九世紀後半期　德人

Neumann, Ernst Richard〔牛滿〕 二十世紀前半期　德人

Neumann, Franz Ernst〔牛滿,法蘭埃斯〕 (1798,9,11—1895,5,23)　德人　研究球函數論

Neumann, Karl *Gottfried*〔牛滿,卡爾〕 亦作 Carl Neumann　(1832,5,7—1925,4,23)　德人　為法蘭埃斯之子,研究亞柏爾積分.

Neumann, Johann〔牛滿〕 十八世紀後半期　德人

Neumann, Johann von〔牛滿〕 二十世紀前半期　德人

Neumann, J. L. v.〔牛滿〕 二十世紀前半期　德人

Neumann, K. W.〔牛滿〕 十九世紀後半期　德人

Neumann, R.〔牛滿〕 二十世紀前半期　德人

Neurath, Otto〔紐拉什〕 二十世紀前半期　奧人

Neut, D. N. van der〔紐特〕 二十世紀前半期　荷蘭人

Neuveglise, Charles de〔紐未格利〕 十七世紀末　法人

Nevanlinna, F.〔涅凡林那〕 二十世紀前半期　芬蘭人　研究函數論

Nevanlinna, Rolf〔涅凡林那〕 二十世紀前半期　芬蘭人　研究函數論

Neville, Eric Harold〔涅徵爾〕 (1889,1,1—　) 英人　著四原及解析幾何學

Newcomb, R. S.〔紐卡謨〕 二十世紀　美人　研究算術教授法

Newcomb, Simon〔紐卡謨〕 (1835,3,12—1909,7,11) 美人　生於坎拿大

Newcombe, Luxmoore〔紐卡布〕 二十世紀前半期　英人

Newdörffer, Anthon〔紐多斐〕 十六世紀末　德人

Newlin, R. L.〔牛林〕 二十世紀前半期　美人

Newman, Francis William〔紐盟〕 (1805—1897) 英人

Newman, Henry〔紐盟〕 十七世紀後半期　美人

Newman, M. H. A.〔紐盟〕 二十世紀前半期　英人

Newmarch, J.〔紐瑪赤〕

Newsom, C. V.〔紐索姆〕 二十世紀前半期　美人

Newson, H. B.〔紐孫〕 二十世紀　美人

Newson, Mary W.〔紐孫〕 卽 Mrs. H. B. Newson　二十世紀前半期　美女

Newson, R. Z.〔紐孫〕 二十世紀前半期　美人

Newth, S.〔紐司〕 十九世紀中　英人

Newton, G. A.〔牛頓〕 二十世紀前半期 美人

Newton, Hubert Anson〔牛頓〕 (1830,3,19—1896,8,12) 美人

Newton, H. F.〔牛頓〕 二十世紀前半期 英人

Newton, Sir Isaac〔牛頓〕 (1642,11,25〔舊曆爲12月5日〕—1727,3,20) 英人
爲有史以來之大數學家,大物理學家,發明二項式定理,流數術,萬有引力,運動三大定律等.

Newton, John〔牛頓〕 (1622—1678) 英人

Newton, T.〔牛頓〕 十九世紀前半期 英人

Ngae Sin Keo Lo Heuen Hwa〔愛新覺羅玄燁〕 (1654{清順治十一年}—1722{清康熙六十一年}) 卽清康熙帝

Ngan Che Chae〔安止齋〕 中國元時人

Ngad Tsing Keaou〔安清翹〕 (1759{清乾隆二十四年}—1803{清嘉慶八年}) 中國人 著數學五書

Ngow Yang King〔歐陽敬〕 中國清時人

Niccoletti, Onorato〔泥科勒替〕 (1870—11929,12,31) 義人

Niccolô de' Niccoli〔泥科洛得泥科力〕 (1363—1437) 義人

Nicéron〔尼舍琅〕 (1613—1646) 法人

Nicholas, Master〔尼科拉〕 十三世紀 英人

Nichols, E. H.〔尼科爾斯〕 十九世紀末 美人

Nichols, E. W.〔尼科爾斯〕 十九世紀末 美人

Nichols, F.〔尼科爾斯〕 十九世紀初 美人

Nichols, H. W.〔尼科爾斯〕 (1886—1925,11,16) 美人

Nichols, Thomas F.〔尼科爾斯〕 十九世紀末 美人

Nicholson, James W.〔尼科爾孫〕 十九及二十世紀 英人

Nicholson, John William〔尼科爾孫〕 二十世紀前半期 英人

Nicholson, Peter〔尼科爾孫〕（1765—1844）英人

Nicholson, R.〔尼科爾孫〕十八世紀末　英人

Nicholson, William〔尼科爾孫〕（1753—1815）英人

Nichomacus〔尼科馬卡〕卽 Nicomachus

Nicita, F.〔尼西堵〕二十世紀前半期　義人

Nicod, Jean〔尼哥〕二十世紀　法人

Nicodemi, R.〔尼科得米〕十九世紀後半期　義人

Nicoladzé, G.〔泥科雷〕二十世紀前半期　法人

Nicolai, E. L.〔尼高來〕二十世紀前半期　俄人

Nicolai, Friedrich〔尼高來〕十九世紀

Nicolai, Giambattista〔尼高來〕或作 Giovanni Battista Nicolai（1726,3,30—1793,7,15）義人

Nicolaïdès, N.〔尼高雷得〕十九世紀後半期　法人

Nicolas, J.〔尼哥拉〕十九世紀後半期　法人

Nicolas, Pierre〔尼哥拉〕（1663—1720）法人

Nicolas Petri of Deventer〔尼哥拉·皮特利〕卽 N. Petri

Nicolau, C.〔尼哥勞〕二十世紀前半期　法人

Nicole, François〔尼哥爾〕（1683,12,23—1758,1,18）法人　最初著差分學

Nicolesco, Miron〔尼可勒科〕二十世紀前半期

Nicolletti, O.〔尼可列替〕二十世紀初　義人

Nicolò de Orbelli〔尼哥洛·得·奥柏利〕亦作 Nicolaus Orbellis 十五世紀　義人

Nicolo of Brescia〔尼哥洛〕卽 Tartaglia

Nicolosi, G.〔尼哥洛西〕二十世紀初　義人

Nicomachus of Gerasa〔尼科馬卡〕亦作 Nikomachus von Gerasa 或 Nichomacus 或 Nikomachos（50—110）希臘人　貢獻於數論

Nicomedes of Gerasa〔泥科美德〕 亦作 Nikomedes 紀元前二世紀 希臘人 發見蚌線,可藉以解决角之三等分問題.

Nicostratus〔尼哥特剌塔〕 希臘人

Nicoteles of Alexandria〔尼科忒列〕 亦作 Nikoteles von Kyrene 紀元前三世紀 希臘人

Niebuhr, Carstens〔尼部耳〕 (1733—1815) 德人

Nieden, E. zur〔泥登〕 十九世紀末

Niedermüller, H.〔泥得米勒〕 十九世紀後半期 德人

Niegemann, Anton〔泥季曼〕 十九世紀後半期 德人

Nieland, L. W.〔泥蘭〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Nielsen, J.〔尼爾森〕 二十世紀 德人

Nielsen, Niels〔尼爾森〕 (?—1931) 丹麥人 著函數論

Niemöller, F.〔尼門勒〕 二十世紀前半期 德人

Niemöller, M.〔尼門勒〕 二十世紀前半期 德人

Niessl von Mayendorff, G.〔尼斯爾〕 二十世紀

Nietzsche, Friedrich Wilhelm〔聶玆謝〕 (1844,10,15—1900,8,26) 德人

Nieuport, C. F. de〔聶坡耳〕 十九世紀前半期 比利時人

Nieuport, Vicomte de〔聶坡耳〕 (1746—1827)

Nieuwentijt, Bernhard〔聶溫替特〕 (1654—1718) 荷蘭人

Niewenglowski, Boleslas〔聶溫洛基〕 亦作 B. A. Nievenglowski 十九及二十世紀 波蘭人 著解析幾何學

Niewenglowski, P.〔聶溫洛基〕 二十世紀前半期

Niewiadomski, R.〔聶威頓斯啓〕 二十世紀前半期 波蘭人

Nijland, Albertus Antonie〔奈蘭〕 (1868,10,30—　) 荷蘭人 研究函數及天文

Nikephoros Gregoras〔泥刻爾洛格列高剌〕 卽 N. Gregoras

Nikliborc, L.〔尼利波〕 二十世紀前半期　波蘭人

Nikodym, S.〔尼高狄〕 二十世紀前半期　波蘭人

Nikolajew, B.〔尼科雷朱〕 二十世紀　俄人

Nikomachus〔尼科馬卡〕 卽 Nicomachus

Nikomedes〔泥科美德〕 卽 Nicomedes

Nikoteles von Kyrene〔尼科忒列〕 卽 Nicoteles

Nile, *Mrs.* Dorothy P.〔奈爾〕 二十世紀前半期　美女

Nillus, M.〔尼拉〕 二十世紀　法人

Nillus, P.〔尼拉〕 二十世紀前半期　法人

Nilsson, G.〔尼爾孫〕 十九世紀末　瑞典人

Nipher, F. E.〔尼斐〕 (1848—1926,10,6) 美人

Nipsus, *Marcus* Junius〔尼薩斯〕 二世紀　羅馬王

Nishikawa Joken (?—1724) 日本人

Nishiuchi, T. 二十世紀前半期　日本人

Nisolle, L.〔尼索爾〕 二十世紀前半期　法人

Nitsche, A.〔尼瑟〕 十九世紀末　德人

Nitsche, Otto〔尼瑟〕 二十世紀　德人

Niven, C.〔尼文〕 十九世紀末　英人

Niven, Sir William D.〔尼文〕 十九世紀末　英人

Nix, L. M. L.〔尼克斯〕 十九世紀　德人

Nixon, Mrs. Elizabeth Elliott〔尼克孫〕 卽 Mrs. J. D. Nixon　二十世紀前半期　美女

Nixon, Henry Barber〔尼克孫〕 十九世紀後半期　美人

Nixon, J. W.〔尼克孫〕 二十世紀　英人

Nixon, R. C. J.〔尼克孫〕 十九世紀後半期 英人 著歐氏幾何學

Nizze, Ernestus〔泥濟〕 亦作 Ernst Nizze 十九世紀前半期 德人

Noack, A.〔諾克〕 二十世紀前半期 德人

Noaillon, P.〔諾愛隆〕 二十世紀前半期 比利時人

Nöbeling, Georg〔諾柏令〕 二十世紀前半期 德人

Nobile, V.〔諾比爾〕 二十世紀初 義人

Noble, C. A.〔諾布爾〕 二十世紀初 德人

Noble, M.〔諾布爾〕 十九世紀前半期 英人

Nocco, Giov.〔諾珂〕 十九世紀後半期

Noel, E.〔諾厄爾〕 二十世紀前半期 法人

Noelting, F.〔諾爾廷〕 二十世紀 德人

Noether, Emmy〔諾忒〕 亦作 E. Nöther (1882—) 德女

Noether, Fräulein E.〔諾忒〕 即 E. Noether

Noether, Max〔諾忒〕 亦作 M. Nöther (1844—) 德人

Nogues, R.〔諾給〕 二十世紀前半期 法人

Nokk, A.〔諾克〕 十九世紀中 德人

Nolen, H. G.〔諾楞〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Nollet, l'Abbé〔諾勒〕 (1700—1770) 法人

Nomura, T.〔野村武衛〕 二十世紀前半期 日本人

Nonius, Petrus〔嫩耶司〕 即 Nuñez

Noonan, M. E.〔努南〕 二十世紀 美人

Norden, Eduard〔諾登〕 (1868,9,21—) 德人

Nordgaard, Martin Andrew〔諾伽德〕 二十世紀前半期 美人

Nordlund, K. P.〔諾蘭〕 二十世紀初 丹麥人

Nordmark, Zakarias〔諾馬克〕 (1751—1828) 瑞典人

Norfolk, John〔諾福克〕亦作 Johannes Norfolk　十四世紀前半期　英人

Norico〔諾立科〕十五世紀末　德人

Norlie, O. M.〔諾利〕二十世紀前半期　美人

Nörlund, Niels Erik〔諾倫德〕(1885—　)　瑞士人居丹麥　研究函數論

Norman, Robert〔諾爾曼〕十七世紀　英人

Norrie, R.〔諾里〕二十世紀前半期　英人

Norris, Earle B.〔挪利斯〕二十世紀　美人

Norris, P. W.〔挪利斯〕二十世紀　英人

Norris, Robert Earl〔挪利斯〕二十世紀前半期　美人

Norry, Milles de〔諾里〕十六世紀　法人

North, H. B.〔挪兒斯〕二十世紀　美人

Northcott, J. A.〔諾司可特〕二十世紀前半期　美人

Northrop, F. S. C.〔諾司洛〕二十世紀前半期　英人

Norton, H. T. J.〔諾呑〕二十世紀前半期　英人

Norton, Robert〔諾呑〕十七世紀初　英人

Norwood, Richard〔諾武德〕十七世紀前半期　英人

Nöther〔諾武〕卽 Noether

Notker, Labeo〔挪剋〕(95?—1022,6,29)　德人

Novák, J.〔諾法克〕十九世紀後半期　捷克人

Novák, Vitezslav〔諾法克〕(1870—　)　捷克人

Novalis〔諾伐利斯〕卽 Friedrich von Hardenberg 之署名　(1772,3,2—1801,3,25)　德人

Novara *da Ferrara*, Domenico Maria〔諾瓦拉〕(1454—1504)　義人

Novarese, E.〔諾瓦果斯〕十九世紀後半期　義人

Novarese, H.〔諾瓦果斯〕十九世紀後半期

Novaro, Augusto〔諾發洛〕 二十世紀前半期 墨西哥人

Noviomagus, Johann〔諾維馬谷〕 亦作 Neomagus 即 Bronkhorst

Nowlan, Frederick S.〔諾蘭〕 二十世紀前半期 坎拿大人

Nowlan, Kevin〔諾蘭〕 二十世紀前半期 美人

Nozawa Teicho 十七世紀後半期 日本人

Nrisimha〔里辛哈〕 十六世紀末 印度人

Nuber, A.〔努柏〕 二十世紀前半期 德人

Nudorf, G.〔那多夫〕 二十世紀 德人

Nugel, F.〔那革爾〕 二十世紀前半期 德人

Nugteren, G. K.〔奴武棱〕 二十世紀初 荷蘭人

Numata, S.〔沼田重三〕 二十世紀前半期 日本人

Nuñez, Pedro〔嫩耶司〕 亦作 P. Nunes 或 Nugne 拉丁文作 Nonius (1502—1578 7,11) 葡萄牙及西班牙人 於1564年12月1日以葡萄牙文著代數學(Libro de algebra),嗣後三十年再譯爲西班牙文.

Nunn, *Sir* Percy〔能〕 (1870—) 英人

Nunn, T. Percy〔能〕 二十世紀前半期 英人

Nur ed-din al-Betruji〔努·厄丁·亞柏刺計〕 即 Alpetragius

Nušl, F.〔納爾〕 二十世紀前半期

Nutzhorn, F.〔納兹和〕 二十世紀前半期 丹麥人

Nützlein, T.〔努兹來〕 十九世紀後半期 德人

Nuyens, Maurice〔努顏斯〕 二十世紀前半期 比利時人

Nyberg, Joseph A.〔尼柏〕 二十世紀 美人

Nyden, Johannes〔尼登〕 十五世紀前半期 奧人

Nyhlén, R.〔尼隆〕 二十世紀前半期 瑞典人

Nystrom, J. W.〔尼斯特綸〕 十九世紀 美人

Nyswander, James A.〔尼斯開德〕 二十世紀前半期 美人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於天文數學物理化學生物地質氣象心理等科之稿件及新刊學術書籍之介紹與批評海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名與雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙與黑色墨水繪畫或製成照片或附寄原圖

五・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

六・稿件登載後本刊略備現金或複印本以答雅意惟願受複印本作報酬者應預先聲明

七・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

八・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

北京大學自然科學季刊目錄

中國植物學雜誌

全國 植物學家 農林園藝家 實業家 圖書館 植物學教學者 藥物學家 實業行政機關 不可不備

全國植物學專家的大貢獻

定 價：全年四冊 預定連郵費一元五角 零售每冊五角

編印者：中國植物學會(通信處：北平文津街靜生生物調查所)

國立武漢大學理科季刊

第五卷第三期

價目	郵費
全年四期 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費二圓
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本郵費五分 其他地域加郵費二角
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學部出版

印刷者　中國科學公司

總發行所　武昌國立武漢大學出版部

中華民國二十四年三月發行