算尺原理及用法

陳世仁著
駱師曾校

商務印書館發行

算尺原理及用法

陳世仁著
駱師曾校

商務印書館發行

一九二四年十一月初版
一九五〇年一月第七版

算尺原理及用法一册
(58772)

基價肆元伍角
印刷地點外另加運費

著作者　陳世仁
校訂者　駱師曾
發行兼印刷者　商務印書館
發行所　各地商務印書館

序

算學之施於實用者,以計算爲歸宿.計算之法雖多,異途同歸,不外七術.(加減乘除羃法開法對數)疇人之徒,習之有素,理論推算,固不厭其難,然遇數值計算,每苦繁複,失之毫釐,謬以千里,故從事職業之人,尤以計算爲凜凜於是深思之士作各種數表,(如對數表.三角函數表方羃表.方根表.逆數表.圓弧表.圓積表等)以便實用,一可省時,二可免誤,意至善也.更進者,則創圖表算法 (Nomographie) 按圖索驥,不勞計算,可得結果.法雖妙然分類作圖亦苦費時.乃有創機器以行計算者,一舉手而結果可得,便莫甚焉.我國舊有算籌,算盤,即屬是類.算盤之利,盡人皆知.設珠算之術不行,吾知事倍功半,商家所費之光陰,將不可勝數矣.夫算盤因爲商家之利器,乃用之理工,則嫌不足,因施算之範圍旣狹,且推得之結果易誤.西土所創算器,類似籌算算盤者有之,此外或以手搖,或以電動,於短時間中得精確之結果,(關於圖表算法及算器之記載可參觀 Encyklopaedie der mathematischne Wissenschaften, Band I, Teil II 中 R. Mehmke 著 Numerisches Rechnen) 可謂盡學理及機械之能事矣.然或以製作繁複,價昂不易得,器重不便攜,或以限於數法,不適於用.故雖有其制,用仍未廣.算器中,惟算尺爲唯一之利器.器小攜便施算之範圍旣廣,而用法亦簡,七術之中惟加減二法除外,他如三角函數,亦可施算.其更進更精者,分科別類,各爲特製;計算普通題外,尙可算專科之題.凡歐美習工業者,無不人置一尺,視若

環寶,親如至友,無論工場,教室,實地應用,各種計算,皆倚此爲之,幾不可一日離,不僅習工者如是,習理化及純正科學者,借重算尺之時實多.我國學子近亦漸知算尺之重要,購備應用者,頗不乏人.然每苦構造原理之不明,施算各法不能盡其用.關於算尺之參考書,求之西籍已不易得,漢籍更無論矣.陳子世仁編此小册,以彌是憾.先述原理,繼及應用,解說詳明,讀此不啻如數掌上螺紋.有利學子與工業前途可斷言也.

民國十一年十月顧寶琳序於吳淞同濟工科大學

算尺原理及用法目錄

第一篇　概言

第二篇　應用

第三篇　附尺

附錄

算尺原理及用法

第一篇　概言

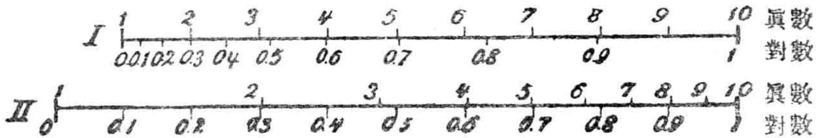
第一章　溯源及奠基

要知道算尺的構造,該先澈底了解下列兩條公理:

(一)　一個單位,可以用一個任意長的間距來代表;一個數含兩個單位以上的,可以用一段含同樣幾個間距的距離來代表.我們可以將這樣的距離增大,祇須將他加上或接了另外的間距或距離;也可以將這樣的距離減小,祇須從他當中截去幾個間距或距離.

(二)　對數是一串等差級數的數(像1,2,3,4,…………等),同另外一串等比級數的數(像1,2,4,8,…………等)相對應.

第 一 圖



從第一圖 I 和 II 兩種情形——比較看一個數表容易瞭然——我們就不難得到對數所具有的一個根本見解,就是:把等比級數的排列變做等差級數的排列.

將這兩種級數寫在一處:——

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

這裏的第一列,是一串等差級數的數;第二列是一串等比級數的數.第二列諸數的對數,彼此有同樣的關係,像第一列裏的對應諸數.

這兩種級數的性質,經一度研究,就能懂得怎樣去利用他們應用到算尺上去.

(一) 倘使將第一列裏任意兩個數相加,像 3 和 5,那麼他們的和 8,同第二列的 256 對應.256 是 8 和 32 的積,這兩個數就是同第一列的 3 和 5 對應的.

(二) 倘使從第一列裏某數,減去在同列內任意的另外一個數,像 9 減 6,那麼他們的差

3同第二列的8對應. 8是$\frac{512}{64}$的商,這兩個數就是同第一列的9和6對應的.

(三) 倘使將第一列裏任意的一個數乘2,像3·2,他們的積6同第二列的64對應.64是8的平方,而第二列裏的8同第一列的3對應的.

(四) 倘使用2除第一列裏任意的一個數,像8:2,他們的商4,同第二列的16對應,16是256的平方根,而第二列的256同第一列的8對應的.

(五) 同樣,倘使用3,4,……等去乘或除,我們得到三次,四次….等的乘冪和方根.

這就是對數的特性,對於解繁複的計算上,供獻了無限的便宜.再經過了第一條公理的手續,應用到算尺上去.

至於算尺的由來,沒有別的,就不過根據了對數上的四條原則:——

〔一〕 積的對數,是各因數的對數的和.

或 $\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n.$

〔二〕 商的對數,是被除數和除數的對數的代數差.

或 $\log_a(m:n)=\log_a m-\log_a n.$

〔三〕 某數任意乘方的對數,是本數的對數同他方指數的積.

或 $\log_a\left(m^n\right)=n\cdot\log_a m.$

〔四〕 某數任意次根的對數,等於用 n 除這個數的對數的商.

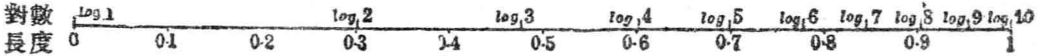
或 $$\log_a\left(\sqrt[n]{m}\right)=\frac{1}{n}\log_a m.$$

現在我們假使要創造一條算尺,第一步手續,就是將從 1 到 10 以內整數的對數抄下來,列成一個表,像〔I〕行:

I	II	III
log 1 =0.0000	0.00 cm.	0.00 cm.
log 2 =0.3010	30.10 cm.	7.53 cm.
log 3 =0.4771	47.71 cm.	11.93 cm.
log 4 =0.6021	60.21 cm.	15.05 cm.
log 5 =0.6990	69.90 cm.	17.48 cm.
log 6 =0.7782	77.82 cm.	19.46 cm.
log 7 =0.8451	84.51 cm.	21.13 cm.
log 8 =0.9031	90.31 cm.	22.58 cm.
log 9 =0.9542	95.42 cm.	23.86 cm.
log 10 =1.0000	100.00 cm.	25.00 cm.

拿一條狹紙片,任意長的.不過為容易明瞭起見,拿 1m (公尺)長的,使他來表10的對數.假使用 100 cm(公分)當做 log 10 的所在;那麼,像第(II)行所列,69.9 公分該是 log 5 的所在.現在拿一個兩脚規,使他兩足端的距離是69.9 cm;一個足端放在紙條的左緣上,照他的右足端的所指,劃一條線,記出 log 5 在那裏.同樣,將 1 到 10 內其餘整數的對數,從同一條起線起,照第〔II〕行所列的長度——第〔II〕行的各個長度同第〔I〕行各個對數對應的——一個一個照樣記下來,就成一條『對數尺』,像第二圖.

第　二　圖



這條尺的妙處,就在把抽象的各個數的對數,用一定的一種長度——這裏 log 10＝100 公分——和一個共同的起點,變成了具體的一個一個的尺寸。

普通纔1 m.長的對數尺不便利,所以往往把他的長度縮短,祇用四分之一,因此每分段的長度,該用 4 除,對應的長度,像上表第〔III〕行所列.這樣簡單的一條對數尺上,我們就可以:

(一)　根據第(一)條的原則,做乘法.

例:　4·2我們祇須在尺上表log 4的一段加上表log 2的一段.結果就是log 8一段的長,因爲 log (4·2) ＝log 4＋log 2.

手續:　拿一個兩脚規,使他兩足端的距離是log 2一段的長.左足端放在log 4的線上,他的右足端就在log 8的所在.

(二)　根據第〔二〕條對數原則,做除法.

例:　4:2.

手續:　在log 4的足端依舊,將同一個兩脚規的右足端向左旋.意思就是:log 4－log 2,所以結果是log 2.

(三) 再進一步,做比例。

例: $\frac{3}{2}=\frac{6}{x}$。這個做法,可以這樣想:左邊的結果旣然不得不等於右邊的;而左邊的結果,我們已經知道,就是將 log 3 的減去 log 2 所剩下的一段的長.那麽右邊的結果,祇須在 log 6 的一段裏減去在左邊所剩下的一段就是了——這裏是 log 4。

因爲 $$\log(3:2)=\log(6:x),\ 或\ \log 3-\log 2=\log 6-\log x,$$

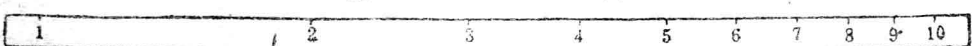
所以 $$\log x=\log 6-[\log 3-\log 2].$$

手續 拿一個兩脚規,把一個足端放在 log 3 線上.移動另外一個足端,使他恰巧在 log 2 的線上。意思就是使他兩足端的距離等於 log 3 − log 2 的一段.再將一端移在 log 6 的所在,不要改動他兩端的距離.他在左邊另外一端,就指着所求的結果是 log 4.

註:譬如有 $\frac{2}{3}=\frac{4}{x}$ 一類的題——除數比被除數大了——可以當做 $\frac{3}{2}=\frac{x}{4}$ 想,仍舊可以說得過去.

在實用的算尺上面,不刻 log 1, log 2, log 3,……等等,祇刻 1,2,3……等等數字,像第三圖.所以我們演算的時候,所碰到的,不像是各數的對數,竟像是他們的眞數了。

第三圖

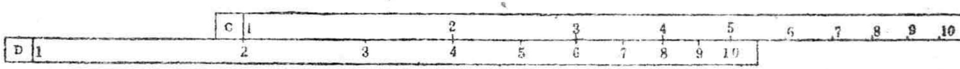


這條尺是英國算學家康達(Edmond Gunter〔1581－1626〕)創造的,所以那時叫做康達尺(Gunterskala)。

用兩脚規的辦法,總覺得不十分便利.因此,我們照樣再劃了一條尺,爲易於辨別起見,叫他C尺和D尺。我們將C尺放在D尺的上面,使C尺上的起線——以後作C1——恰好在D尺的log 2上——以後作D2——那麼,我們得了如下的結果:

在D尺上的各個對數,都是在C尺上相對的各個對數的二倍。

第　四　圖



兩尺在這樣的一個位置,正是我們把C尺上每個對數,加了log 2的一段;意思就是將C尺的各數乘2.相乘的結果,就直接的在C尺上尋到的一個因數的下面.這條C尺,和上述的兩脚規有異曲同工之妙;我們把C1移在D2上時,意思就同規的一個足端放在D2上一樣.我們在C3的下面讀所求的結果,就是和將規的兩足端距離log 3.加上log 2一段,同一個辦法。

用第二條尺替兩脚規,是英國人文蓋脫(Wingate〔1593—1653〕)所創始.這種尺就叫做算尺(Slide Rules)。

算尺上的C尺和D尺,普通長25 cm.,已經說過的了.現在我們再講另外兩條,叫他A尺和B尺.這兩條所用的長度,照C, D兩尺所用的,縮短了一半,像下表所列的(做法和上述的完全相同,不再說了).所以在25 cm.長的尺上,可以接續劃兩條同樣的對數尺.

A尺和B尺

數	他的對數	log100=100cm	log100=25cm	數	他的對數	log100=100cm	log100=25cm
1	0.0000	0.00	0.00	10	1.0000	50.00	12.50
2	0.3010	15.05	3.76	20	1.3010	65.05	16.26
3	0.4771	23.86	5.96	30	1.4771	73.86	18.46
4	0.6021	30.10	7.53	40	1.6021	80.10	20.03
5	0.6990	34.95	8.74	50	1.6990	84.95	21.24
6	0.7782	38.91	9.73	60	1.7782	88.91	22.23
7	0.8451	42.26	10.56	70	1.8451	92.26	23.06
8	0.9031	45.16	11.29	80	1.9031	95.16	23.79
9	0.9542	47.71	11.93	90	1.9542	97.71	24.43
				100	2.0000	100.00	25.00

C尺和D尺

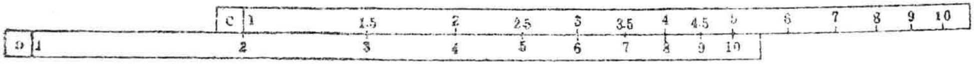
log	1	0.00	cm
log	2	7.53	cm
log	3	11.93	cm
log	4	15.05	cm
log	5	17.48	cm
log	6	19.46	cm
log	7	21.13	cm
log	8	22.58	cm
log	9	23.86	cm
log	10	25.00	cm

在幾種算尺裏,中分線記10,以下的主分線依次記20,30,40,....等等.不過有許多算尺的樣式,把中線仍記1,以下的記法又和前一半的完全相同.雖然如此,但是我們應有一種成見,將他們的中分線,當做A10和B10看;他們右端的末線,當做A100和B100看.

C尺和D尺在第四圖的位置,我們已經知道:D尺上諸數,是C尺上相對各數(c)的二倍(2c).倒過來說:C尺上諸數,是D尺上相對各數(d)的一半$\left(\frac{d}{2}\right)$.

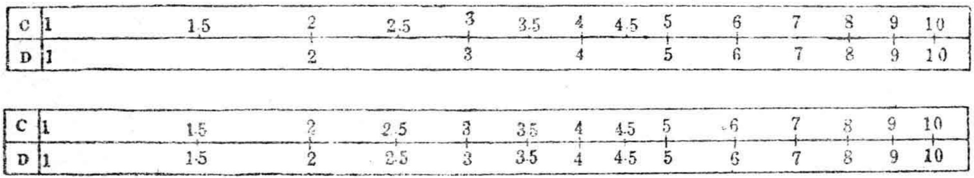
將D尺上表奇數的分線,延長到C尺上去——C尺上本來所沒有的——我們就得幾條新的分線,應該就是1.5,2.5,3.5和4.5,如第五圖.

第　五　圖



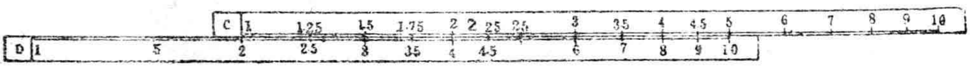
移C尺和D尺在標準位置——就是C1正對D1——我們可以將C尺所新得的分線延長，在D尺上照樣劃出，如第六圖。

第　六　圖



現在再把C1移在D2上，將D尺上的新分線延長，C尺又得到幾條新分線，就是1.25, 1.75,

第　七　圖



再移C尺和D尺在標準位置，再將新分線劃到D尺上去。

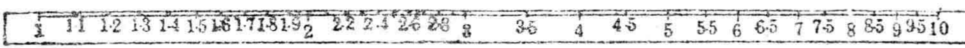
照這樣的手續繼續下去,在理想上,可以得到無窮多的新分線.但是在實際上我們覺得:這樣的方法,不能長此進行,而所得的分線,不過在一定範圍以內的.倘使要把一切的缺位都填出來,那就不得不另外用一個新的位置,給這兩條尺.譬如我們移C1在D1.25上,那麼:

D尺上的各數,是C尺上相對各數的1.25倍;

C尺上的各數,是D尺上相對各數的1.25分之一.

用了這個起點,等到兩尺得到夠用的分線之後:我們又可以另選一個新起點,再做下去,直到這兩條對數尺十分完全.

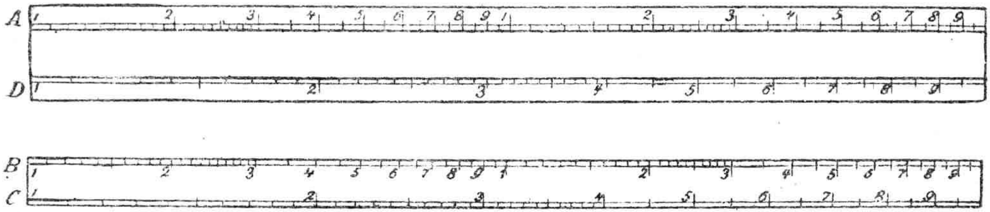
第　八　圖



分線的排列如第八圖,看起來就知道:非但這幾條主要分線的距離,各不相等;就是一切小分線的距離也不等,愈近左邊的相離愈寬,愈近右邊的相離愈窄.所以譬如說尺上還有幾個缺位,要估量着補上去,實在是很不容易的.

A, B和C,D四尺,是算尺上的主要部分. A,D兩尺刻在尺體上(I); B,C兩尺在尺舌上(II).尺體有槽,在A,D兩尺中間,恰好可以把尺舌放在那裏,左右移動.

第九圖

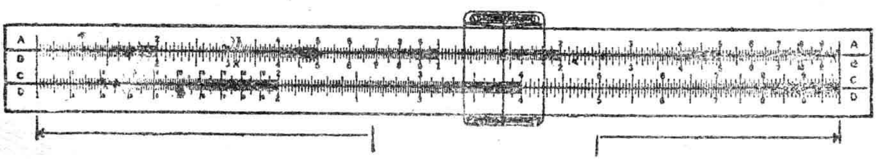


還有一個推片,他的用處:

(一) 可以幫助尋出諸尺中任意那條尺上相關的諸點.

(二) 解一個複雜的算題,中間所得的結果,可用推片指明,不必讀出,因此在末了所得的一個,比較的準確些.

第十圖



尺上的分線,已經講過一點了.現在再照普通最有實用的算尺,把他的分線說一說.

我們知道:四條尺裏,A尺和B尺是相同的;C尺和D尺也是相同,所以祇要說兩種的分線法:

第一種　A,B兩尺.

(一)　左半刻法分三段:

(1) 1−2　這個分段中,分十個小分段;每個小分段,又分五個再小分段.

讀法: 1, 1.02, 1.04, 1.06, 1.08 到次分線1.1. 以下類推,直到主分線2

(2) 2−3, 3−4, 4−5　這三個分段中,各分十個小分段;每個小分段,又分兩個再小分段.

讀法: 2, 2.05, 2.10, 2.15, 2.20,........4.95 到 5.00.

(3) 5−6, 6−7, 7−8, 8−9, 9−10　這五個分段裏,因爲實在太狹了,所以每段祇分十個小分段.

讀法: 5, 5.1, 5.2, 5.3,........9.9 到 10.

(二)　右半的刻法和左半完全相同,不過各分段的數值,比左半對應的大十倍.

第二種　C,D兩尺.　表的數值是 1 至 10,和A,B兩尺的左半相同,長度却加倍,所以分線較多.因此所讀的數值,也可以比較的精細一些.

刻法也分三段:

(1) 1—2　分十個小分段;每分段又分十個再小分段.

讀法: 1, 1.01, 1.02, 1.03……1.09, 1.10,依此類推,直到1.98, 2.

(2) 2—3, 3—4　各分十個小分段;每個小分段,又分五個再小分段.

讀法: 2, 2.02, 2.04,……2.10,……到3.98, 4.

(3) 4—5, 5—6, 6—7, 7—8, 8—9, 9—10　各分十個小分段;每個小分段,又分兩個再小分段.

讀法: 4, 4.05, 4.10, 4.15, 4.20……到9.95, 10.

雖然如此,我們在實用上,尺上各分段的數值,該直接照起線的假定值來定.我們又應該澈底了解,所刻的一切數字,是任意定的,所以起線雖然刻的是1,但是當做10的甚麼倍數或10的甚麼反商倍數都可以.

例如D1可當做1, 10, 100, 1000等,或0.1, 0.01, 0.001, 0.0001等;但是一次將一個數值給了起線之後,其餘各分段的數值,就同時和他有一定的同比.

例: 假定D1爲10,同時他的主分線2,3,4……等當讀做20, 30, 40……等;在1 2一段內的次分線,應讀做11, 12, 13, 14,……等;餘類推.

從另外說來:假使假定了尺的第四條主分線是0.004,同時他左邊的起線當做0.001看.另外的倍數依此,不再細述。

尺上分線的真價值,完全依所解的算題來定.不過定一個數値給了D1以後,D尺上各分線的數値,同時也就一定了;上兩尺和下兩尺的中間,亦起了不變的關係,就是無論用什麼數值給了C和D,A和B必是他們的平方.同樣,若是A1的數値定了,其餘也跟着他們變做一定,C,D兩尺上,就是他們平方根的所在。

上面說過在A,B兩尺上,右半的各數值,各比左半的大十倍,所以倘使假定A1爲10,其餘的主分線,依次當讀做20,30,40,50,60,70,80,90,100(中分線),200,300,400...直到尺末爲1000.次分線等,均照此類推.

我們知道用C尺和D尺,可以做普通的乘法,除法,比例等類;那自然也可以用A尺和B尺來做.不過用A,B兩尺和用C,D兩尺各有所長罷了.用A,B兩尺的長處,就是在解算題的時候,手續上面,省了許多尺舌的往返(說明在後),就可以讀得一個很大的答案;但是從另外一方面說(缺點),這兩條尺的長度,不過C,D尺的一半.所以在C,D兩尺所得的結果,應當比較的可以

精確一些.在平常實用上:倘使祇要一個數的近似值的,就可以用A,B兩尺;倘使要比較精確一些的答案,應當用C尺和D尺.不過無論如何,算尺上所得的,大都不是精確的却是近似的數值——普通算尺上,大都二三位數字可以靠得住;不過有時的答案,碰巧在最前的一段裏,那麼所表的位數可以多些.

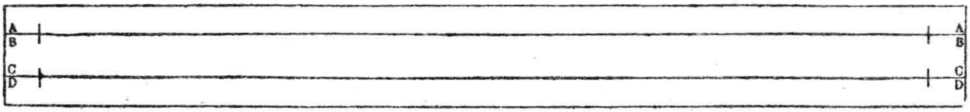
分法和讀法知道了,另外還有爲難的問題發生.甚麼呢,就是怎樣把1.273, 3.13, 9.54一類的分線尋出來?在A,B兩尺上果然不必說,就是在C,D兩尺,也沒有這三個數的特別分線.碰到這種情形,不得不照下面的辦法.

例: 尋1.273的所在. 我們在D尺上,見1.27和1.28都有特別的分線.因此1.273的所在,必定在這兩條分線的中間,是無疑的了.移推片的黑線(以後稱推片線)在這中間一小段裏,用目力去分配,去尋出0.003的所在.這一樁事,實在不容易辦,因爲我們知道在對數尺上,無論那一段那一個小節,向右邊的,都應該連續的減狹下去.我們的眼光,在平常分配均分的東西,還許靠不住;現在碰到這樣難的分法,當然應該敬謝不敏了.但是不要緊,因爲在實用上,本來是不過求近似值的,這點小錯誤,竟可不用計較.不過碰到很精細的計算(像物價的規定和零件的確定等等),連末尾幾位都要完全寫出的時候,那麼祇好眞正敬謝不敏了.

第二章　四尺的關係

1. 正置尺舌

第　十　一　圖



如圖,尺舌的起線正對着尺體的,稱爲『標準位置』.

用推片,可以顯明A尺和D尺互相的關係——B尺和C尺自然也相同.譬如說:A尺上的某數(a)——以後作Aa——和D尺上的某數(d)——後作Dd——中間隔着一條槽,正相對準.就是說Aa和Dd正同時在推片線下.我們知道:D尺上1....d一段的長,用了一定的某種長度(m)表log d的,因此這一段的長可以用m•log d表出.同時A尺上1....a一段的長,用二分之一的D尺所用的長度表log a的,因此這段的長,應用½ m• log a表出.但是1....a一段的長剛好等於1....d一段,所以用算式來表,爲:

$$m\cdot \log d = \tfrac{1}{2}m\cdot \log a.$$

就是　　$2\log d = \log a;$　根據了第〔三〕條對數原則,知道

$d^2 = a$; 又根據了第〔四〕條對數原則,知道

$$\sqrt{a} = d.$$

由此我們得到兩個結果:

(一) A尺上諸數,爲D尺上相對各數的平方值.

例: $2.5^2=6.25$, $1.7^2=2.89$, $\pi^2=9.87$, $7.12^2=50.7$, $1.063^2=1.13$.

〔註〕 定某數平方後的數位:

1) 倘使他的結果在A尺的右半,其數位當爲原數數位的兩倍.

2) 倘使他的結果在A尺的左半,其數位當爲原數數位的兩倍減一.

(二) D尺上諸數,爲A尺上相對各數的平方根.

例: $\sqrt{7}=2.646$, $\sqrt{11}=3.317$, $\sqrt{41.4}=6.66$.

〔註〕 定某數於開平方前在A尺上應取的位置,和開平方後他的結果的數位:

1) 倘使原數的數位是單數的,他的位置應取在A尺的左半;結果的數位爲$\frac{N+1}{2}$(N爲原數的數位).

2) 倘使原數的數位是雙數的,他的位置應取在A尺的右半;結果的數位爲原數的數位的一半$\left(\frac{N}{2}\right)$.

碰到數位在小數點前兩位以上的開平方數,或含有10的負冪的開平方數,到我們能夠活看尺上分線的時候,那自然直接的可以照做.不過我們起初不妨將10的偶次冪,可以從那個數裏分開了看,使他和先前的例一樣.

例: $\sqrt{137}=\sqrt{1.37\cdot10^2}=1.17\cdot10=11.7,$

$\sqrt{2578}=\sqrt{25.78\cdot10^2}=5.08\cdot10=50.8\cdot$ 這是一個近似的答案,因爲我們不能讀得三個以上的數字.

$\sqrt{37564}=\sqrt{3.7564\cdot10^2}=193.8,$

$\sqrt{0.017}=\sqrt{1.7:10^2}=1.304:10=0.1304.$

現在將尺舌的C1,放在D尺的任意一個數上(δ).我們在第一章裏已經見過:D尺上各數,爲C尺上相對之數的δ倍數.

例如　Cc和Dd兩數相對,則δ...d一段和1....c一段等長,意思就是:

$$m\cdot\log d-m\cdot\log\delta=m\cdot\log c,$$

或

$$\log d=\log\delta+\log c,$$

就是

$$d=\delta\cdot c.$$

1) 倘使有一連串的數,要用同一個因數去乘的時候——像做計算表時所常碰到的——祇須將C1放在那個因數上,在C尺上尋到的各個已知數下面,讀所求的積於D尺上就對了.

例: 已知數 14.5, 20.7, 37.9, 50.9, 70.5 以 1.375 乘之.

結果爲 19.99, 28.5, 52.1, 70.0, 96.9.

2) 有時碰到一連串的數,被同一個數所除,那自然就可以照同樣的放置去讀所求的結果.不過讀法適得其反——在D尺上尋已知數,在C尺上尋他們的商.

例: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 被除於 1.225.

結果爲 1.62, 2.43, 3.24, 4.95, 4.86, 5.67, 6.48, 7.29.

倘使將這一類的例繼續的再做下去,就覺得在幾種情形中,不能讀出他的結果來,因爲他在尺的外面了.這種情形,怎樣可以仍舊達到我們的目的,將來當另外說明.

置C1於D尺的任意一個數上(δ). C尺上對D10的某數叫他δ'.去研究δ和δ'的比怎樣.現在因爲δ....10一段和1....δ'一段是等長的,所以

$$m\cdot\log 10-m\cdot\log\delta=m\cdot\log\delta'.$$

就是　$10:\delta=\delta'$.　在算尺上,我們知道數位可以活看的.小數點的判定,不過是附屬的事情,所以我們儘可以將他作 $\delta'=1:\delta$ 看.由此我們可以說:

移尺舌的起線於D尺的任意一個數上,在D10上面就是那個數的倒數. 自然又可以將看法反轉來:

將已知數放在D10上,D尺上對C1的一個就是所求的倒數.

例: $1:7=0.143$, $1:17=0.0588$, $1:234=0.00427$. 在算尺上所讀得的,不過是一個一個依了位次的數字;至於小數位怎樣,當經粗算之後再行加入,在許多算題,甚至把粗算的手續都忽略了,因爲把結果看大了10倍,是難得會做出來的.下邊幾個算題,相異的地處不過分子裏含有10的某次冪,所以他們的解法,完全同理.

例: $10:7=1.43$, $100:17=5.88$, $10000:234=42.7$ 等等.

A,B兩尺自然也具有同樣的性質.不過在這對尺上也可以在中分線(A 10下....)讀倒數,因爲他們都是由兩尺接連而成的.

末了我們利用這樣關係,還可以將上兩尺和下兩尺所含有的合作起來,祇須左右尺舌,可解下列的算題:

$1:7^2=0.0204$,　$10:13.7^2=0.0533$ 這樣的結果,不在D10上讀了——他倒數的所在——而應當於A100下面在B尺上讀他的倒數之平方值.

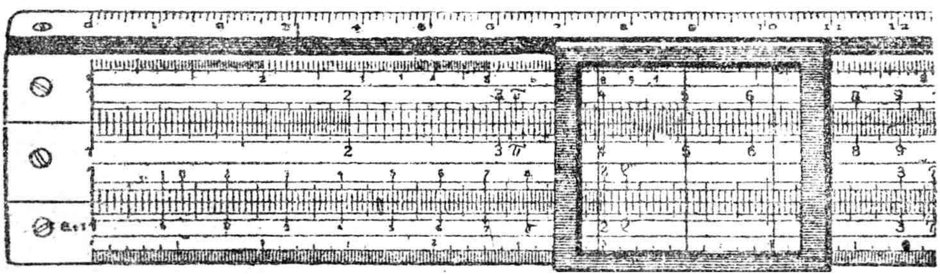
反之,倘使將某數的倒數開平方,那就應該將B1放在A尺上已知數下面,C尺上對D10的就是所求的結果.

例：$1:\sqrt{6}=0.4085$,　$1:\sqrt{60}=0.129$,　$10:\sqrt{0.7}=11.95$.

這類算題,定起小數位來,或是應將適當的10之某次羃分離須稍費腦力的時候,宜將所得的結果,再用紙筆定之.

有一種算尺,A,B,C,D四尺以外,還有另外一條,叫做E尺的,刻在A尺的上面.他所用的長度和C,D兩尺的比為1:3,所以在一條尺上,首尾相接共有三次.

第十二圖



以推片得數對Ee和Dd,那麼他們的關係爲:

$$m\cdot\log d=\tfrac{1}{3}m\cdot\log e,$$

或　$$3m\cdot\log d=m\cdot\log e.$$

意爲　$$d^3=e,$$

或　$$\sqrt[3]{e}=d.$$

所以E尺含D尺上各數的立方值;而D尺含E尺上各數的立方根。

設Ee和Aa相對,那麼

$$\tfrac{1}{2}m\cdot\log a=\tfrac{1}{3}m\cdot\log e,$$

或　$$3m\cdot\log a=2m\cdot\log e,$$

意爲　$$a^3=e^2.$$

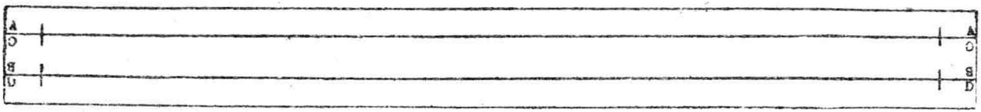
或　$$a=e^{\frac{2}{3}};\qquad e=a^{\frac{3}{2}}.$$

所以置推片於A尺上任意的一個數,在E尺上就得這個數的3/2次冪值;反之,E尺上的任意一個數,在A尺上所對的爲這個數的2/3次冪值。

II. 倒置尺舌

將尺舌完全抽出,再把他倒轉推進去,使(倒)C尺(此後以C'記之)和A尺;(倒)B,尺(記以B')和D尺爲鄰,如圖,叫做『倒置尺舌』.在標準位置,左端一行,依次當爲A1,C'10,B'100和D1.

第十三圖



(一) 將推片,採取C'尺上和D尺上相對的某數對——設爲c'和d.那麽1...d一段加了1…c'一段,等於1....10全段之長.

意爲 $m\cdot\log d+m\cdot\log c'=m\cdot\log 10,$

就是 $c'\cdot d=10.$ 因爲10的甚麽次冪都可分離,所以可看做: $c'\cdot d=1.$

由此便得:**在倒置尺舌的標準位置,相對的數對是互爲倒數的.A尺和B'尺也自然有同樣的關係.**

這樣放法,我們祗須左右推片(不移動尺舌),就可以讀得一個表,其中各個數對之積均爲1;換句話說,一切數對,合於方程式 $x\cdot y=1.$

(一) 再看 A 尺和 C' 尺.譬如 Aa 和 C'c' 是相對的數對,那麼 1....a 和 1....c' 兩段之和等於 C' 尺的 1....10 或 A 尺的 1....100 的全長.意爲:

$$\frac{1}{2}m\cdot\log a+m\cdot\log c'=m\cdot\log 10\left(=\frac{1}{2}m\cdot\log 100\right),$$

以 2 乘之: $m\cdot\log a+2m\log c'=2m\cdot\log 10(=m\cdot\log 100)$,

去 10:　　　　$a.c'^2=1$。

同理得　　　　$b'd^2=1$。

這麼一來,可以解前面所舉 $x=1:c^2$ 和 $x=1:\sqrt{a}$ 一類的算題,用不到去移動尺舌.其實就可以說,我們天然的得到合於方程式 $x.y^2=1$ 一切數對的一個表。

例: $1:3.4^2=0.0866$; A 尺上對 C'3.4 的就是。

$10:\sqrt{4.2}=4.885$; C'尺上對 A 4.2 的就是。

移倒置尺舌,使 C'10 正對 D 尺上任意一個數(δ).去研究 C'尺和 D 尺相對的某數對 c' 和 d.現在知道 1....10 減去 1....c' 一段和 1…d 減去 1....δ 段等長,就是

$$m\cdot\log 10-m\cdot\log c'=m\cdot\log d-m\cdot\log\delta。$$

意爲:　　　　$10:c'=d:\delta$,

或　　　　　　　　$c'd=\delta$。

這樣所得的,是合於方程式$x\cdot y=k$(k為定數)的一切數對.在標準位置,不過是一種特別的情形,定數是1罷了.

例:求合於$x\cdot y=1.8$的數對.移C10於D1.8上,以推片,讀其種種數對.也可以移B'100於A1.8下,而於A,B'兩尺上讀其數對.

結果:0.35和5.14,0.4和4.5,0.5和3.6等等.

這一類的算題,在實用上所碰到的,像在波以爾(Boyle-Mariott)的定律裏已知容積求氣壓;或已知氣壓求容積.

〔註〕波以爾定律:氣量一定,不管或是氣壓變,或是容積變了,兩者之積的值總是一定的.

利用倒置尺舌所發生的關係,可以很便利的解一元二次方程式.

例:$x^2+ax+b=0$.解法根據於兩個關係.

(一)合於公式的兩個根數之積,應等於公式裏的絕對項(b)的.

(二)兩根數的和之負值,應等於x項的係數的.

〔證〕設z_1和z_2為他的兩根數,那麼

$$(x-z_1)(x-z_2)=0, \quad 或 \quad x^2+(-z_1-z_2)x+z_1z_2=0.$$

故　$a=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)$;　$b=z_1z_2$

解法：移倒置尺舌的起線於 b 上.如上所述,可以得到許多數對其積等於 b 的.就中選其合於 $x^2+ax+b=0$ 的。

例：求合於 $x^2-8.05x+16.16=0$ 的根數

移 C'10 於 D16.16.以推片在 C',D 兩尺上,畧費試驗的工夫,讀出幾個數對,每次試其和是否等於8.05.

D尺上：	3.00	3.50	3.80	3.82
C'尺上：	5.38	4.62	4.25	4.23
和：	8.38	8.12	8.05	8.05

積太大

所以這裏的根爲3,82和4,23兩個。

例：求 $x^2+1.45x-43.8=0$ 的根數.

用 A,B'兩尺.移 B'100 於 A43.8.因爲絕對項是負的,所以這裏兩個根數的符號不同.又因爲 x 項的係數的符號是正的,故兩根之和應爲負值.因此所得的數對,絕對值較大的一個,

當爲負值.

A尺上:	5.00	6.00	5.90	5.92	
B尺上:	−8.76	−7.30	−7.42	−7.40	
和:	−3.76	−1.30	−1.52	−1.48	差不多了.倘使要更精

確的答案,可在C'尺和D尺上重求一次.根爲 5.93和 −7.38.

用倒置尺舌.也可以解一元三次方程式.

化簡的公式: $x^3-ax+b=0.$

每項以x除: $x^2+\frac{b}{x}=a.$

手續:1) 移倒置尺舌的起線——C'10和B'100——於D尺上b——這樣,我們在C',D兩尺上得到一切的數對,他們的積等於b的.

2)移推片,持試驗的態度,在D尺上尋x,同時於C'尺上得$\frac{b}{x}$(因$x\cdot c'=b$,故$c'=\frac{b}{x}$)

因爲x是這三次方程式的根數之一,所以$\frac{b}{x}+x^2$應當等於$a-x^2$就可以同時在A尺上讀得.故兩個被加數是直接的並列在C'尺和A尺上的.

3)將推片每次移動所得被加數的數對,記錄下來,去試他們的和是否等於定數a.

例：求　$x^3-13.5x+17.4=0$ 的根.

寫作　$x^2+\frac{17.4}{x}=13.5.$

移倒置尺舌的起線於D17.4上.像下列的表去試:

x	$=3.00$	2.90	2.80	2.70	2.60	2.62
x^2	$=9.00$	8.41	7.84	7.29	6.76	6.86
$\frac{17.4}{x}$	$=5.80$	6.00	6.22	6.45	6.69	6.64
和：	14.80	14.41	14.06	13.74	13.45	13.50

得 $x_1=2.62$.

依上表所試,知道愈向右,所得的和愈大.向左漸漸的小了.再試一個負值的根.

x	$=-4.00$	-4.50	-4.20
x^2	$=16.00$	20.25	17.64
$\frac{17.4}{x}$	$=-4.35$	-3.87	-4.14
和：	11.65	16.38	13.50

得 $x_2=-4.2$

現在在這個方程式,x^2 項的係數是 O.因之根據了 $x_1+x_2+x_3=0$ 的關係,可以定他的第三

個根數,就是

$$2.62-4.2+x_3=0,$$

$$x_3=1.58.$$

在物理上和工業上各種試驗裏的一般方程式,小數的係數常常碰得到.在那些時候,特別的可以用算尺去解.

末了,我們還要研究,在倒置尺舌上直接相鄰的兩尺——A尺和C'尺或B'尺和D尺——有甚麼關係.

(一)移C'10於Aα上,而a和c'爲相對的數對.於是

$$1\ldots10-1\ldots c'=1\ldots a-1\ldots\alpha$$

或 $$m\cdot\log 10-m\cdot\log c'=\frac{1}{2}m\cdot\log a-\frac{1}{2}m\cdot\log\alpha.$$

就是 $$\frac{1}{c'}=\sqrt{\frac{a}{\alpha}},$$

或 $$a\cdot c'^2=\alpha.$$

因此,在A尺和C'尺上,可得合於$a\cdot c'^2=k$(定數)的一切數對。

例: 求合於$x\cdot y^2=25$的數對

移 C'10 於 A 25 下.採 x 於 A 尺上;C'尺上讀y.

$0.8 \cdot 5.59^2 = 25$,　　$1.3 \cdot 4.39^2 = 25$,

$8.0 \cdot 0.177^2 = 2,5$　　$13 \cdot 1.387^2 = 25$,

$800 \cdot 0.559^2 = 25$,　　$130 \cdot 0.439^2 = 25$ 等等.

(二) 移 B'100 於 Dδ 上, b'和 d 爲相隣的數對.

$$1....100-1....b'=1....d-1....\delta,$$

意爲　$\frac{1}{2}m\cdot\log 100-\frac{1}{2}m\cdot\log b'=m\cdot\log d-m\cdot\log\delta.$

由此得　$$\sqrt{\frac{100}{b}}=\frac{d}{\delta},$$

去10　$$b'd^2=\delta^2.$$

在 B', D 兩尺上所得的數對,是合於方程式 $b'\cdot d^2=k^2$ 的。

例: 求合於 $x\cdot y^2=1.74^2$ 的數對.

移 B'100 於 D1.74 上.採 x 於 B'尺,在 D 尺上讀 y:

$30\cdot 0.318^2 = 1.74^2$,　　$12\cdot 0.502^2 = 1.74^2$,

$3\cdot 1.004^2 = 1.74^2$,　　$1.2\cdot 1.589^2 = 1.74^2$,

$0.3\cdot 3.18 = 1.74^2$,　　$0.12\cdot 5.02^2 = 1.74^2$ 等等

〔實用一〕一個圓柱體的體積爲$773cm^3$，求他的高和半徑。

設x指半徑；y指高。

按公式：　　$\pi.x^2y=773$。

先寫作　　$x^2y=773:\pi$　用普通的除法，求　$773:\pi=246$

移倒置尺舌的起線於　A 246　下。於C'尺上讀半徑；A尺上讀高。

如　$x=6.00$,　5.00,　3.51,　3.14,　……cm,

$y=6.83$,　9.84,　20.00,　25.00,　……cm。

照這樣下去，我們可以得到無數的答案。不過倘如在兩個未知數中，給他一個條件，就能得到一個單獨的解答。

例一〕圓柱體的半徑和高是相等的——就是$x=y$——現在我們祇可尋到6.27 cm是合的。

例二〕他的高和直徑是相等的，就是$y=2x$。

我們不得不像下列的方法去試驗：

$x=$	5.00,	4.95,	4.975.
$2x=$	10.00;	9.90,	9.95.
$y=$	9.84,	10.05,	9.95.

這個圓柱體的直徑和高應爲 9.95 cm

實用二）上面所述解一元三次方程式的辦法,又可以推廣去解一元四次方程式。有一個已經約化過的公式：

$$x^4-ax^2+bx+c=0.$$

以 x^2 除之，　　$x^2+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=a.$

x^2 和 $\frac{b}{x}$ 兩個被加數的定法,手續和解三次方程式所用的一樣.至於定 $\frac{c}{x^2}$ 呢：

移倒置尺舌的起綫於A尺上c的所在——現在我們在A, C'兩尺所得的數對(以A α 和C' γ' 代表數對)都合於 $\alpha\cdot\gamma'^2=c$ 的——以推片在C'尺上x的上面,A尺上相對的就是 $\frac{c}{x^2}$。

由此尋到三個被加數,他們的和爲a的。

倘使備有二條算尺,可以用一條的(倒置尺舌的)起綫,置於D尺上的b;還有一條的置於A尺上c.這樣,尋x的時候,祇須左右推片,可省許多手續.

例　　$x^4-17x^2-18x+22=0,$

$$x^2-\frac{18}{x}+\frac{22}{x^2}=17.$$

x :	4.46	4.465	0.732	-2.47
x^2 :	19.9	19.93	0.54	6.10
$-\frac{18}{x}$:	-4.035	-4.03	-24.59	7.29
$\frac{22}{x^2}$:	1.107	1.104	41.06	3.61
和 :	16.972	17.004	17.01	17.00

故　$x_1=4.465$,　　$x_2=0.732$,　　$x_3=-2.47$。

因　$x_1+x_2+x_3+x_4=0$;　故　$x_4=-2.727$。

這裏所有解方程式的方法,因爲純係粗簡的機械的手續,所以所得的根數,當然不過是近似值,最多祇有三個數字可以靠得住.但是碰到不用十分精確的答案的時候,儘可用算尺解,因爲又容易又快得多。

這幾個實用題,不過藉此來表明利用四尺的種種關係,可以得到不少的應用.其中妙用多端,祇須我們切實練習,自然熟能生巧.俗話說『戲法人人會變,各有巧妙不同』,正可以作這裏的一個教訓.還有對於讀者不能不說的,就是在未看下面幾章以前,應該把所知道的各種關係,自己完全信任無疑。

現在把倒置尺舌的種種關係,摘錄於下,做一個附錄

〔I〕

(一) A尺和B'尺
- (1)標準位置: $a \cdot b' = 1$
- (2)任意位置: $a \cdot b' = a$

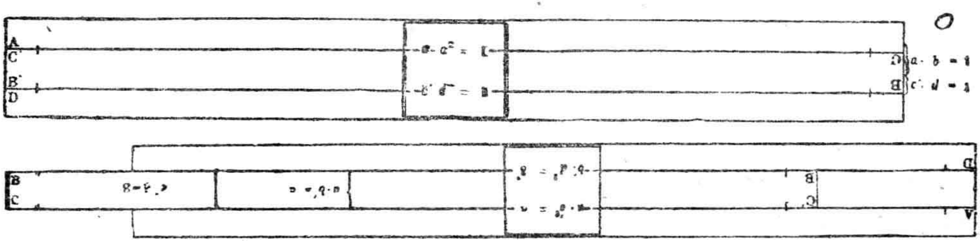
(二) C'尺和D尺
- (1)標準位置: $c' \cdot d = 1$
- (2任意位置: $c' \cdot d = \delta$

〔II〕

(一) A尺和C'尺
- (1)標準位置: $a \cdot c'^2 = 1$
- (2)任意位置: $a \cdot c^2 = a$

(二) C'尺和D尺
- (1)標準位置: $b' \cdot d^2 = 1$
- (2)任意位置: $b' \cdot d^2 = \delta^2$

第十四圖



第二篇　應用

第一章　乘

碰到算題,像兩數 e 和 f 相乘.那麼:移(正置)尺舌的起綫於 De 上.在第一章裏已經證明,現在算尺上就成了一個表,他含有一切以 e 乘得之積.所以倘使在 C 尺上尋到 f,那下面就是所求的積 ef.自然也可以移起綫於 f,而讀結果於 e 下.小數位的所在,不妨自己憶測,或經粗算的手續而定.

C	置　1	在另外一個因數下面
D	於一個因數之上	得他們的積

手續:

1) 在 D 尺上尋到一個因數的所在,
2) 推尺舌,置 C 尺的起綫在那個位置上,
3) 移推片,置黑線於 C 尺上另外一個因數的所在,
4) 在 D 尺同一線上,就是所求之積.

例：$1.753 \cdot 2.03 = 3.56$；　$1.135 \cdot 7.74 = 8.78$；　$1.047 \cdot 9.32 = 9.76$；　長方形的二邊爲 7.66 m 和 1.266 m,面積多大？結果爲 9.7 m^2.圓的直徑爲 21.2 cm,他的圓周多長？結果爲 66.6 cm.

乘法如(2.16.7.56),我們覺得照所知道的方法,在下兩尺不能達到目的,因爲第二個因數下面的結果,已在算尺外面了.碰到如此情形,可以用上兩尺,在那裏得結果 16.3.

例：$52.1 \cdot 11.3 = 589$；　$85.9 \cdot 113 = 9700$.

對於解單獨的乘法,普通多用下兩尺的,因爲所得的結果,可以比上兩尺精確一些.因此在價值上不能不去研究這一種算題,在事實上是否不得不用上兩尺的.就以 $2.16 \cdot 7.56$ 爲例.從 C1 於 D2.16 上;可是在 C7.56 下面,甚麽數都沒有.我們想:假使 D 尺是做了兩倍的長,就是假使 D10 的右邊,還有第二條接着的話,那麽這樣障礙是不成問題,就能在他的上面(對 C7.56 的)讀得結果.但是倘使我們是很明白的懂得,尺舌之於理想上的補助尺處在甚麽一個地位的話,要有這樣一條(補助尺),實在不難.因爲 C 尺和 D 尺是相同的,所以 C 尺的末綫之在補助尺上和 C 尺的起綫之在原尺的所在是一致的.所以要得這樣的補助尺,祇須將尺舌的末綫移到他的起綫的所在——這裏在 D2.16 上——.於是在 7.56 下面,讀其結果爲 16.33.由此可得一條簡單的規律：**倘使用下兩尺解乘法而第二個因數不在 D 尺上面的時候,我們置尺舌的末綫代替他的起綫於第一個因數的上面.**這樣的

辦法,叫他『反推』.這裏要和讀者說一句話:以反推的方法去解乘法,不妨多習幾個例題.每次所得的結果,最好再經過上兩尺的復演,去試驗所得的結果,究竟對不對.

利用反推的手續,亦可以解乘法之含有二個因數以上者.這類算題所需要的,就不過應用數次連續的乘法.

例如 求1.21·2.45·3.74·4.38之積.先求爲首兩個因數的積,置推片線於其上,不用去讀出他.移尺舌的起線於推片線下——前二因數的積之所在——移置推片線於第三個因數上.再將尺舌的起綫移置於推片線下,而讀得結果 48.6 於最後一個因數上,所以含許多因數的乘法,雖須將尺舌和推片移置多次而祇須一次讀出,中間的各個結果,祇須用推片去確定他.上例用上兩尺去解,用不到甚麽反推;但是用下兩尺去解,在以第三個因數去乘的時候,有一次反推.所以在那裏不以尺舌的起綫而以他的末綫移置於推片線下.

例: 方石的邊爲5.4 cm, 6.3 cm, 和 7.8 cm, 求他的體積. 結果: 265 cm^3.

圓柱體的底圓半徑爲11.5 cm, 高爲21.3 cm. 他的側面積多大? 結果: 1538 cm^2.

更複雜的,是同時須用到上下四尺的乘題.利用他們的合作,將求得之積去作平方或開平方,和某數與他數之平方或平方根相乘,成爲可能的事.就是這一類算題,像$(ab)^2$, $\sqrt{a.b}$, a^2b 和

$a\sqrt{b}$ 都可應手而解.至於怎樣能達到各樣情形的目的,當舉例以顯明之:

(一)先論將一個積作平方,例如$(1.753\cdot2.03)^2$.在下兩尺將這兩個數相乘不過不去採取他們的積,而移推片綫於其上.相望在A尺上的就是他的平方12.67,這一類算題應該在下兩尺先着手,因爲後來採取平方,非用上兩尺不可.

(二)將一個積開平方,例如$\sqrt{1.135\cdot774}$.因爲平方根的採取不能不用到下兩尺,所以解乘法應該在上兩尺.不用讀出中間的結果而得29.6.

例:　$\sqrt{2.16\cdot7.56}=4.04$,　7.32和4.86的比例中項爲什麼?結果:5.96.

積的平方,不過是機械的手續,無困難可言;但是去開積的平方,那就不同,勢不能不謹愼從事了.就是每次不能不經一番粗算,先去定出這個積位於A尺的那一半,才是正當.第一篇第二章裏曾經說過,將某數所含適當的10之偶次羃拆去之後,倘使他的數位是1,那麼祇能位於A之左半,若是2祇能在右半的.例如解$\sqrt{52.1\cdot11.3}$,我們所得的積在尺的右半;但是一經估量,知道他有三位整數的——或拆去10^2,是一位整數——而理應取於左半.碰到這樣情形,我們不得不先讀出其積而在正當的一段上有第二次的採取.在實際,這裏不移動推片而用尺舌的起綫.我們本來用不到去讀出其積,不過藉此而看出結果就是了.在目前的情形,解了乘法以後,倘使右半是5,B1亦應取於5;其後讀得8,左半亦取於8;末來讀得9而左半亦應

取於9.這樣找到結果爲24.3.這個辦法還有一種長處,就是像在這裏的情形,積的末了數位,我們無用豫先去計及,而祇須額目力照右半去定取捨罷了.至於明明白白的去根究他末了的數位是9或者是8,在這裏可說是過分了,因爲B1像右半的推片所指,應該取在相鄰兩分綫之間的.

例:$\sqrt{85.9\cdot113}$,乘法解決之後,經一度的估量,知道這箇結果有5位整數,或折去10^4,是一位的.探取於A尺的左半,而得根爲3.115;應該還用10^2去乘他,得311.5.

算尺對於種種圖解問題,很有帮助的地方.例如圖解一個拋物綫方程式$y^2=6.92x$.置B1於A尺上定變數的下面,移推片,在B尺上看x的種種數值,相對在D尺上的就是相屬的縱坐標.

x = 1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.000, 3.50, 4.00,

y = 2.63, 3.22, 3.72, 4.16, 4.565, 4.92, 5.26,

(三)某數和另外一個數的平方相乘,例如$4.25^2\cdot4.15$.我們有兩種方法可以達到目的:1)可以移尺舌的起綫於D 4.25,那A尺上隔岸相望的爲4.25^2,以4.15去乘,得結果75. 2)亦可以移尺舌的起綫於A 4.15,然後移推片線於C 4.25上,其時B尺上爲4.25^2,而A尺爲$4.15\cdot4.25^2=75$.這類算題自然亦有反推的需要.又例$7.46^2\cdot11.7=651$.這裏倘使取11.7於A尺右半,或取7.46

於D尺,我們勢必移B 100相就纔對.倘使先在A尺左半着手,那麼沒有發生反推的手續.

例:· 圓的直徑爲13.7 cm.和2.75 cm,他們的面積多大?從公式$\frac{\pi}{4}d^2$而得147.4 cm^2和5.94 cm^2,許多算尺上,$\frac{\pi}{4}$=0.7854刻有一條特別的分綫的.圓柱體的半徑爲4.75cm,高爲7.25cm,他的體積多大?結果514cm^3.實習了幾個算題之後,我們就能豫測,那裏應有反推的必要,而能節省不正當的採取.

(四)現在講到某數和一個數的平方根相乘,例如$17.6\cdot\sqrt{21.7}$.這裏亦有兩種方法可達目的:1) 置尺舌的起綫於A尺右半的21.7,得他的方根於D岸,將這個數乘17.6.祇須移推片於C1,76而讀結果於D尺爲82. 2)置C1於D17.6而移推片於B21.7,下面C尺上就是他的方根;D尺上就是他的方根和17.6之積.因爲這樣的算題,主要的計算不能不假諸下兩尺,所以反推天然常常要碰到.

例: $3.32\cdot\sqrt{7.34}=9$, 　　$0.051\cdot\sqrt{11.1}=0.17$.

這類算題,在實際上非常之多.在更進一層以前,希望諸君多習幾個例題.

譬如在a^2b裏,第二個因數和第一個相同的(b=a),這實在是不算一回新的事.由此而可作a^3算.對待他完全和上面一樣:例如求19.5^3,祇須移C1於D19.5上,在B尺上找到19.5相對

A尺上就是結果7415.碰到反推的時候須移C10於已知數上.

例 $\pi^3=31$.這個算題可以試驗尺上本來所刻的綫準不準! $0.4625^3=0.099$, $91.5^3=7660$.球體的半徑為4.75 cm,他的容積多大?據公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,得結果為449cm³.

倘使我們不取結果於A尺而取於D尺上,意思就是將這樣的結果開過平方了,所以所得的是已知數的第$\frac{3}{2}$冪.這裏又不得不注意他的第三次冪是否在正當的去處.

例: $4.5^{\frac{3}{2}}=9.54$; $5.45^{\frac{3}{2}}=12.73$

現在要求某數的立方根了.這個辦法和剛才所說的,適得其反.例如求6的立方根.先假定我們已經知道他的立方根是w,那麼,他(指w)應該同時發現於對C1的D尺上和對A6的B尺上的.所以求之之法,應持試驗的態度,將尺舌永續的移動,直至所說的位置達到了而定譬如置B3於A6下,見尺舌的起綫在D尺上指1.41;所以我們應該將尺舌再向右移,以B2去試,指D1.73;可說是好得多了.我們現在再連續的進行,而得:

B 1.90, 1.85, 1.82.

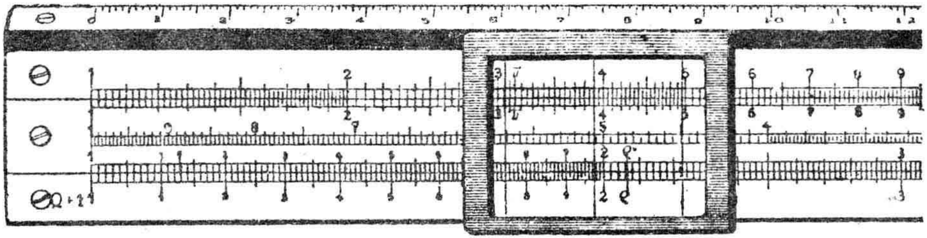
D 1.78, 1.80, 1.82.

所以1.82是所求的根.同樣,可得 $\sqrt[3]{5}=1.71$; $\sqrt[3]{30}=3.11$; $\sqrt[3]{40}=3.42$; $\sqrt[3]{0.0007}=\sqrt[3]{700\cdot10^{-6}}=\sqrt[3]{700}:10^2=8.879:10^2=0.08879$. 末了一個例,以C1的移動而定探取,覺得不能

達到我們的目的.所以不能不假諸反推,就是他的根當以C10在B尺的右半去找.這個定立方根的方法,要知道不算是最便利的,下面還要講到一個方法,比這個好得多(達到目的快得多).話雖如此,不過照了這個方法去解一二個例,也不能算甚麼過分.

在倒置尺舌,我們早已證明,C'和D(或A和B')隔尺相望的一切數對具有一個共同之積,這個積就等於尺舌的起綫或末綫在D(或A)所指的數的.不過那時候,我們假定積是已知而去求適合的因數的;現在反用那個辦法,假定因數是已知而去求他們的積了.處置之法,祇須循相反的次序去着手從事:假推片之助,我們使已知的因數(譬如說)在C',D兩尺上互相正對,在尺舌的起線或末線下得其積於D尺上.因爲尺舌的兩條端綫之一勢必落在D尺上的,所以這裏用不到甚麼反推,因之我們解乘法不妨專用比較上精確一點的下兩尺來算.希望閱者諸君,對於以倒置尺舌解乘法的手續,使自己能完全純熟,信任得過他.最好能將以前所舉的例,用了這個辦法,再做過一次.有一種算尺,在正置尺舌上,竟刻了兩條相對的尺如下圖.有一條這樣的倒尺,在我們現在所有幾處不便利的地方(像尺舌上諸數都顚倒了),完全免去.

第 十 五 圖



倘使將所得的結果還要作平方,那麼我們應將A尺閒着而用C,D兩尺來解乘法,因爲所採的結果不在D而在隔岸相望的A尺上的.反是,倘使所得的積要開平方的,那乘法應該在A,B兩尺上着手而採取結果於下面D尺上.這裏像無論在甚麼時候開平方一樣所當注意的,就是方根數在A尺上採取的位置要對.

例如解 $\sqrt{2.16\cdot7.56}$,因爲積是二位整數的,所以應採取於A尺的右半.但是用倒置尺舌解乘法,倘使移B'1—10中的7.56和在A10—100中的2.16相對,其積亦能在左半找到.在這樣情形,積的採取,不必像用正置尺舌的時候,需第二次的手續,須將他置於正當的所在.這裏祗須看中線B'10就對,他就自己負顧慮之責了.在這裏還用不到推片,因爲B'10直接的和D尺爲

鄰的,結果4.04很容易讀出.這麽辦法既可省去反推,又能免積的第二次採取,碰到這一類算題 $\sqrt{ab}$ 我們不妨專用倒置尺舌去解.

在第一篇第二章已經證明,在倒置尺舌A尺和C'尺相對的數對(a和c')有 $a\cdot c'^2=\alpha$ (α 爲定數)的關係.我們又要顚之倒之,假定兩個因數是已知的而積爲所求者,如 $x=ac'^2$.去定x,所以須循顚倒的次序去着手;就是使A尺上和C'尺上的兩個因數正對,而讀其結果.

例 $3.38\cdot4.42^2=66$; $21.2\cdot2.47^2=129.5$ 圓柱體的半徑長5.06cm,高爲11.7cm,他的體積多大?

結果: $\pi\cdot11.7\cdot5.06^2=941\mathrm{cm}^3$.

這末一例所當注意,第一部分的積須用A,B'兩尺來解,因爲若用A,C'兩尺,所得的爲 $\pi\cdot11.7^2$,不是 $\pi\cdot11.7$.中間的結果以推片定之.

倘使在 $a\cdot c'^2=\alpha$,正巧a和c是等值的,那麽我們就得一個定某數立方的新法,在A尺和C'尺上找到這個數的所在而置之相對,在A尺上對C'尺末綫的,就是所求的立方.這個方法,用不着反推,比前面所述的便當甯捨彼取此.

前又證明,在倒置尺舌B',D兩尺上的數對(b'和d),是合於方程式 $b'\cdot d^2=\delta^2$ (δ 爲定數)的,就是合於方程式 $d\sqrt{b'}=\delta$ 的.這裏我們又假定已知道兩個因數而求他們的積,就是 $x=d.\sqrt{b'}$.不過在將這兩個數移置相對以前,應當顧慮到b'數當取在B'尺的那一半.

例如解 $7.21.\sqrt{4.92}=?$ 那 4.92 本來應當取於B尺的左半,所以在倒置尺舌應當取在右半,結果爲16. 倘使是 $7.21\cdot\sqrt{49.2}$,那麼我們應更易其手續,結果爲50.6.

A尺和C'尺在倒置尺舌的性質,就是 $a\cdot c'^2=\alpha$ (α 爲定數)的,還供獻了一個很好的實用.譬如說在一個已知的定數k,假定 $a=c'=x$ 的,那就說去解 $x^3=k$ 或 $x=\sqrt[3]{k}$. 這樣我們得到一個很便利的開立方的方法.我們祇須移C'1於A尺的已知數下而在A和C'上去找兩個等值的數相對之所在.倘使叫這個數爲x,那 $x^2\cdot x=k$ 或 $x=\sqrt[3]{k}$ 是一定合他的.例如解 $\sqrt[3]{6}$,先置C'10於A6下.在A,C'兩尺上可以找到兩個等值的數正對在那裏,但是沒有一個合於 $\sqrt[3]{\ }$ 的.可是假使A尺還接長了一段,那麼這個根數定許在C'尺的外邊一段上讀得之.要供給這樣的要求不難,以C'1代C'10移至A6就對了.如此立刻可以知道所求的根在1.8附近.以推片經精確的分配,知道 $\sqrt[3]{6}=1.818$.

在6右邊的另外兩個數,亦同是某數的三方根,不過自然不是6的而是60和600的.因爲算尺上每數有具有10的任意次冪的可能,所以尺上諸數的根數亦當應有盡有.用了倒置尺舌,祇須一推之勞,就可得 $k,k\cdot10$ 和 $k\cdot10^2$ 的三方根.倘使碰到大於1000或小於1的數開三方,那可先將他所含適當 10^3 的冪分拆了,導他爲1—100以內的數.上面所列 $\sqrt{60}=3.91$ 和 $\sqrt[3]{600}=8.43$.

又例：$\sqrt[3]{60000}=10\cdot\sqrt[3]{60}=39.1$;

$\sqrt[3]{0.6}=10^{-1}\cdot\sqrt[3]{600}=0.843$.

就在這個開立方的方法,我們將 B'和 D 合 A 和 C'對較一下知道上兩尺有兩個相對且等的數,那同時下兩尺亦有一對具同樣關係的數對在那裏.因爲這四條是一對一對的相同而所占的位置又勻配的,所以這也是一定不易之理.所以將已知數探在 A 尺上之後,他的立方根在上兩尺或在下兩尺去找,是一樣的.倘使已知數不取於 A 而取於 D,則上面在 A 尺的就爲 k^2,而在下鄰 C'尺可得這個數的立方根,由此我們所得的爲 $\sqrt[3]{k^2}$ 或 $k^{\frac{2}{3}}$.

例 $2.5^{\frac{2}{3}}=1.842$.

求某數的立方,平方根或分指數的方,在純粹的和應用的算學上,是常常可以碰得到,所以剛才所申說的幾個方法,最好能够確實無疑的會運用他.

普通言之：一個算題到手像我們所述及的一類計算和別的混在一處的時候,那麼我們自然要揀最便利的一個方法.先將他分析一下,那裏應當用正置尺舌,那裏應當用倒置尺舌的,至於結果呢,除不得已外,不必去讀他出來,祇須以推片去確定他的所在.從那個所在,再繼續我們的計算.

第二章　除

C	移置除數於	在1的下面
D	被除數上	找到所求的商

手續:

1)在D尺上尋到被除數的所在,

2)推動尺舌,置C尺上的除數於那個所在,

3)移推片,置線於C1上,

4)在D尺同一線下就是所求之商.

我們早已知道,倘如置C1於D尺任意數(δ)上,則D尺各數(d)上面就爲所屬的商d:δ.碰到除數的絕對值比被除數的大了,要求他們的商,那應當移C10於δ上.現在叫C尺上的商爲c,則三個數的關係爲c.δ＝d.寫作除法的式子,則d處於被除數的地位.又因爲可以用c作除數,亦可以用δ作除數因此除法可分兩種.

先當作以δ爲除數c爲商的.那除數和被除數均在D尺上而商在C尺.例如49.4:16.7;置C1於D16.7上,在D49.4上面,(在C尺)爲商2.96.

例：857:253=3.39；0.075:5.9=0.0127.

我們自然亦可以用上兩尺,那就應取除數和被除數於A而讀結果於B.結果在上兩尺總能讀得的;而在下兩尺則未必盡然.有時除數上面,竟沒有數了.碰到這樣情形,可以用反推來幫助,就是將C10移於除數上.

例：3.74:7.12=0.525.

這除法不很便利,所以甯取第二個方法:以c爲除數,d爲商.兩個已知數在兩條尺上而商在固定的尺上.

例：49.4:16.7=2.96;以推片,找到49.4於D(或A).移C16.7於推片線下.尺舌起綫的下面.D尺(或A尺)上卽爲結果.以上諸例,可以用了這個方法再做一次.至於碰到尺舌的起綫到尺體外邊去了用甚麼方法來補救,下面另有說明.不過用上兩尺,這種情形,是永不會發生的.

還有一個很重要的方法,是根據於以除數的倒數和被除數相乘得來的.我們已經知道在正置尺舌任意的位置,他的起綫下面和尺體的末綫上面的兩個數是互爲倒數的.例如以此法求49.4:16.7之商.則置C16.7於D10上,得他的倒數1:16.7於C1下面;以49.4去乘這個數.這樣可以不必移動尺舌,就得結果於對C49.4的D尺上.有時,就像斯例,亦有反推的需要,就是先以推片置於除數的倒數的所在,而移尺舌的末綫於其上.不過倘如用上兩尺,不消說得,沒

有這樣的事情發生.

倘使在倒置尺舌,利用倒數的關係,那除法就可以簡單得許多.倒置尺舌之在標準位置,我們知道,相屬兩條尺上的各個數對,是互為倒數的.所以我們以推片在C'尺上找到16.7,那同線下在D尺的就是1:16.7.將他以49.4去乘就對了——推倒置尺舌,直至C'49.4現於推片線下;那麼,尺舌的末綫就指結果於D尺上.

計算之用到倒數的,是很切於實用,我們不妨照這個方法去多解幾個算題.在實際,碰到有許多數給同一個除數去除的時候,我們很喜歡用這個方法;先求得除數的倒數;而因此把許多除法題一變而為乘法題了.在算尺的背面,往往載有在經驗上覺得必須用得到的倒數,像π的,g的和e的.在演算上常常要碰到的數,甚至將他和他的倒數都用特別的分綫刻在算尺上面.

我們以普通的除法,除想像上將尺之末端延長了一條補助尺以外,另外可以來解釋在乘法裏何以可以有反推的辦法.例如以下兩尺解4.65·6.45,則不得不徙C10替C1於第一個因數上面.現在可以說,這就不過是一個除法,以10去除4.56罷了.所以反推的辦法,在下兩尺就可以說被除於10;在上兩尺被除於100,而繼之以和第二個因數的乘法.因為算尺上以10的乘方去乘或除,對於答案不致有甚麼更改的,所以有便利的地方,總用得到反推.反推的長

處就在他把所求的答案遷徙到算尺的需用一部分來.

倘使除法的結果要落在尺外的時候,我們亦可以將已知數之一,乘入一個適當的10的乘方,使所求的結果,仍舊落在算尺的範圍以內.不過乘法是以10的乘方去除的;而除法需要這樣的數去乘的.例如以下兩尺解3.74:7.12,那C1伸出左旁外邊去了.要讀出他的結果,可以將他乘10,意思就是讀結果於C10下面:0.525.這個辦法我們叫他『前推』.他和『反推』不同;他用不到去更動尺舌,不過所讀的,換一個地位罷了.在上兩尺那自然被乘於100.

除法像乘法一樣,亦可將上下四尺合作起來例如解$(a:b)^2$,那除法應當在下兩尺着手,因為結果是在A尺的.如$(49.4:16.7)^2=8.76$.倘使商數要開平方的,那除法應在上兩尺着手,而採取結果於D尺上.這裏我們要留心,像開平方總是如此,那開方數是否位於A尺上正當的位置例如$\sqrt{857:253}$,我們將這兩數均採取於上兩尺的右半,亦可以將他們均採取於左半;則商在A尺的左半而得結果1.84.也許商應在A尺的右半的,那就應該把他調置一下.

解算題如$\sqrt{a}:b$,也沒有甚麼特別困難的地方.在A尺上找到a的所在,D尺上相望的就是他的平方根,被除於b就是.

例:　$\sqrt{7.42}:16.9=0.161$.

碰到算題如$a^2:b$.那麼應當以推片找a於D尺上;A尺上相望的就是他的平方,被除於

b 就算完事。

例：$14.2^2:21.5=9.38$。

算題像 $a:\sqrt{b}$ 我們最簡便的可以達到目的，就是以推片取 a 於 D 尺上；然後將尺舌移動，直至 Bb 落在推片線下了那麼，在 C 尺上為 $\sqrt{b}$ 而 D 尺上在尺舌的起綫那裏就為結果的所在。

例：$6:\sqrt{7}=2,27$

現在說到這一種算題如 $a:b^2$。以推片在 A 尺上找到 a。移 C 尺上 b 於線下。同時就在被除數下面在 B 尺上即 b^2。尺舌的末綫（或起綫）在 A 尺上所指的就是結果。這裏自然又可以用倒數來解，祇須置 C 尺的 b 於 D10 上；上面 B 尺上為 b^2；B1 上面 A 尺上就為 $1:b^2$；再以 a 去乘他。

例：$18.3:1.975^2=4.7$。

還要講到用倒置尺舌怎樣去解除法。我們知道，倘使將倒置尺舌的起綫置於 Dδ 上，則 C′，D 兩尺上相對的一切數對均合於公式 $c'\cdot d=\delta$ 的。現在以 δ 為被除數，卽 $d=\delta/c'$ 以推片在 C′尺上找到除數，那下面 D 尺上就是商。我們自然亦可以取除數於 D 尺而得商於 C′尺，意卽 $c'=\delta/d$。這個辦法有一個短處，就是用下兩尺解時，常有『前推』的發生。

根據了從前所講過倒置尺舌和尺體所含的關係種種，天然又可以解 $a^2:b$，$a:b^2$，$a:\sqrt{b}$

和$\sqrt{a:b}$一類的算題.不過普通就不去請教他們了,因爲前面所述的方法,覺得沒有甚麼不便利.但是要知道知道他們,也不爲過,讓你們自己去試罷.

現在我們將各式各樣的乘法和除法對較一下之後.知道以倒置尺舌解乘法,永沒有發生『反推』;而以正置尺舌解除法,一定有一個讀得出的結果.**因此我們解乘法,以用倒置尺舌爲宜;而解除法,不妨仍舊用正置尺舌.**

第三章　混合乘除

算尺效力之最顯著者,莫如解混合的乘除.在實用上所碰到的算題,差不多大半是如此的.用算尺所以能省功夫,是在一切中間的結果,均可不必顧問,祇須以推片去定他們的所在就是.例如已知三個數值去求第四個,

$$x:27.5=19.6:37.8 \qquad \text{或} \qquad x=\frac{19.6\cdot 27.5}{37.8}.$$

則先解除法19.6:37.8;結果既不必讀出,又無須以推片去定他,再以27.5去乘就對了.意思就是注視尺舌的27.5而得結果14.26.這裏我們只移動尺舌一次,而同時解了乘除了.不過這樣的長處,只限於先從除法着手的.假使我們將上述的算題,先乘分子,那麼解除法時,須得再

將尺舌移動一次.算題如 $\frac{a.b}{c}$ 的均應如此解才算簡便.回想乘法裏所用的『反推』,就是這裏的一種特別情形,不過除數是100罷了 $\left(\frac{a\cdot b}{100}\right)$.

同時用了上下四尺,那算題更複雜一些的,也可應手而解.現在有幾個例題在這裏:
$\frac{19.6^2\cdot 27.5}{37.8}=279$, $\frac{19.6\cdot 27.5}{\sqrt{37.8}}=87.7$ $\frac{19.6\cdot 27.5}{\sqrt{3.78}}=277$,至於怎樣去聯合諸尺,讓讀者自己去試罷.

分子分母多含了幾個因數,像 $\frac{5.7\cdot 7.8\cdot 11.2}{9.7\cdot 8.5}=6.04$.也算不得難事,只須用尺舌推移兩次就夠了:第一次在被除於9.7而以7.8去乘,第二次在被除於8.5而以11.2去乘.解這樣算題,就是在上兩尺亦說不定永沒有反推的發生,但倘能稍加留意,亦常常免得去的.例如解 $\frac{\overset{1)}{3.16}\cdot\overset{5)}{7.34}\cdot\overset{3)}{4.55}}{\underset{2)}{15.3}\cdot\underset{4)}{8.84}}=0.78$,倘使解的時候,依原來的次序,那麼尺舌須往返多次;但是照數字編定的次序去解,就只用到一次的遷徙.經過幾次實習之後,我們就能見得到怎樣排列,才是最便利.

算尺上特別有價值的效用,是在解比例題之需列表者.例如求 $y=\frac{7.96}{11.5}\cdot x$ 裏屬於一串獨立變數的函數值,那麼先解得已知數的商,然後在各個X的上面,得相屬的函數值.可列表如下:

x =	1.50,	1.75,	2.00,	2.25,	2.50,	…………
y =	10.38,	12.11,	13.85,	15.57,	17.30,	…………

這函數是很顯著的代表一條經過起點的直線的.他的方向係數為 $tg\phi=7.96:11.5=0.692$.

故所得的x和y爲在線上諸點的坐標.反之,倘使已經有了種種的坐標,要決定他相應諸點是否都在一條直線上的時候,那也可以用算尺來解決.

例: $x=$ 1.48, 1.77, 2.00, 2.24, 2.50.

$y=$ 10.20, 12.30, 13.90, 15.40, 17.20.

我們求y:x之值而得各點的方向係數.倘使諸點確在一直線上的,那麼祇須y:x採取一次,其他也就同時定了.反之,倘使每求一個商數,必須移動尺舌的,那麼諸點不是在一直線上的.不過尺舌每次的移動愈微,就是諸點之連線愈近於一直線.上列諸點,差不多在一直線上的,他們近似的方向係數爲0.69.至於各個精確的商,依次當爲0.689, 0.695, 0.695, 0.688和0.688.

這類乘除混合的計算,其特別的如決定屬於一個變數的函數值,在純粹的和應用的算學裏,都可以碰得到,像在天文學,物理學,化學,工藝學,測量學,靜力學裏,都非常之多.所以對於那幾種學術,算尺可說是一種不可缺的工具.至於怎樣去應用他,在本篇不能一一加以說明,只可舉幾個緊要的例說說罷.

已知直徑,求圓的周圍和面積,或求球體,圓柱體,圓錐體等的體積,做工程師之人,常常會碰得到.算學上關於這類的公式,用算尺去計算,往往不很適宜,因爲公式含因數太多了.在算尺上最適宜的,要公式中所含的因數和除數的更換須很整齊的.所以我們就爲了這個緣故,

將算學上公式的面目,先變換一下.圓錐體,球體和圓柱體容積的計算,須利用一個特別的助數,在算尺上刻作c的,$c=\frac{2}{\sqrt{\pi}}=1.128$,至於怎樣去利用他,說明在下面:

(一)已知直徑d,求圓的面積F:

$$F=\pi\cdot r^2=\frac{\pi\cdot d^2}{4}=\frac{d^2}{\frac{4}{\pi}}=\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

所以我們只須從c於D尺上直徑的所在,那尺舌的起綫,就指$\frac{d}{c}$的商於D尺,而相望在A尺上的,就是他的平方.

例: d=27cm, F=573cm²; d=65.7cm, F=3390cm².

(二)已知直徑d和高h,求圓柱體的體積Vc.

我們知道,圓柱體的體積,是以底圓的面積乘高.用了助數,當爲$V_c=\left(\frac{d}{c}\right)^2\cdot h$.所以應先求底圓的面積,而以所得的結果乘h.這種乘法用不到尺舌的遷徙.從c於Dd之後,可說就得了一個表,因爲在B尺上採取不同的高h,在A尺就爲對應的圓柱體的體積.

例: 求一般圓柱體的體積,直徑爲21.3cm,而高不同:

h = 10. 15. 20. 25. 30. 42.2. 56.2. cm.

V_c =	3560.	5340.	7120.	8900.	10680.	15000.	20000.	cm^3.
G_c =	27.75.	41.6.	55.5.	69.5.	83.4.	117.	154.	kg (公斤)
V_k =	1190.	1780.	2373.	2970.	3560.	5000.	6667.	cm^3.

求圓柱體的重量G_c.須再以比重去乘,或較便利的,以比重的倒數去除.譬如說一般圓柱體——他們的體積列上表第二列——是以鍛鐵鑄成的(比重爲7.8),求其重量,只須再以7.8去乘就是了.倘使只要知道他的重量而不管其他,我們就可不走這樣的迂道,而以下法去解:求得$\left(\frac{d}{c}\right)^2$,從推片於結果的所在.移比重的倒數B 0.128於推片線下.在B尺任意高的上面得所屬的各重量.如上表第三列.

(三)已知直徑d和高h,求圓錐體的體積Vk: 圓錐體的體積,爲同高同直徑的圓柱體積三分之一.故求他的公式,爲$V_k=\frac{1}{3}\left(\frac{d}{c}\right)^2 h$.普通先解$\left(\frac{d}{c}\right)^2$以推片定其結果,而移B3於其下.在B尺上各個高的上面,就爲相屬的各個圓錐體的體積,見上表第四列.

(四)已知直徑d,求球體的面積O: 用了助數c,則球面積的公式爲$O=4\left(\frac{d}{c}\right)^2$.所以得$\left(\frac{d}{c}\right)^2$之後,在B4上面,爲所屬的球面積.

(五)已知直徑d,求球體的體積V: 經助數c的參預,得如下的演算:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{4d}{6}\cdot\left(\frac{d}{c}\right)^2;\quad V=\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^2\cdot d}{1,5}$$

設球體物質的比重為σ,可得他的重量: $G=\dfrac{\left(\frac{d}{c}\right)^2\cdot d}{1.5\cdot\frac{1}{\sigma}}$

例:求一般不同直徑d的黃銅球(比重8.6)之面積0,體積v和重量G:

d =	2.0,	2.1,	2.2,	2.3,	2.4,	2.5	..............cm
O =	12.6,	13.9,	15.25,	16.65,	18.1,	19.65	..........cm^2
V =	4.2,	4.85,	5.58,	6.38,	7.25,	8.2	..............cm^3
G =	36.1,	41.7,	48.	54.9,	62.4,	70.5	..............g(公分)

有一種算尺,但非將c刻的D尺上,並且把他還刻在推片上面.辦法就在推片的主線左右,照下兩尺1.128的距離,刻了兩條.這麽一來,解上列的演算,手續上簡便多了.求圓的面積,只需單用推片採取.就是徙推片線之一於下尺直徑的所在,在他左鄰的線下,得圓的面積於A尺上.反之,我們也可以置線之一於A尺圓面積的所在,在右鄰線下得直徑於D尺上.其實含三條線的推片,不妨作一條新尺舌看,不過他所表的,只logc罷了.誰碰得到這類算題很多的,那是很好去添置或自己去刻這樣的推片.推片上自然也可以將別的記號刻在那裏,只須他

的長度,和算尺相應就好.不過像π的數目,在這裏就未免太大了些.

算尺是根據對數原理的,所以不能以之解加減的算題.但是倘能先將他改換一下,變了乘除,那就未始不可了.這類算題,是常要碰到的,不妨介紹一下.例如在純粹的和應用的算學常有的算題.如已知直角三角形的兩邊,去求第三邊.爲了這類算題,甚至有一種特別的算尺——航海家和測量家用的——不過我們只須知道怎樣用普通算尺去解就够了.

例如已知直角三角形的弦和兩邊之一,求另外一邊,就是解公式$X=\sqrt{c^2-a^2}$.先將開方數寫作$(c+a)(c-a)$.我們將兩已知數寫作一行,得他們的和和差,求其積於上兩尺,得其平方根於下兩尺.這裏又不能不留意那開方數是否位於A尺正當的一半.

例:				
c =	17.6	11.2	485	8,65
a =	9.8	7.8	483	2,87
x =	14.62	8.04	44	8,16

較難的是已知兩邊去求他的弦.要解方程式$x=\sqrt{a^2+b^2}$,$(a>b)$,須用到一個助數z,他的關係爲$\frac{b^2}{z}=\frac{a^2}{10}$.由此得$\frac{b^2+a^2}{x+10}=\frac{a^2}{10}$或$\frac{x^2}{z+10}=\frac{a^2}{10}$.我們先解第一個比例,徙推片於D尺上a,A尺上爲$a^2$.他應被除於10,只須徙B.10於其下.在D尺上找到較小的一邊b,相望在A尺

上就為b^2,下鄰B尺上得所求的助數z.解第二個比例,那z應加以10,這就用腦力好了,沒有困難的.現在因為尺舌的位置是表$\frac{a^2}{10}$的,所以只徙推片於方才求得的z+10上,那上鄰A尺上就為x^2,相望在D尺上為x,即所求的弦.所以倘如碰到的數,用不到反推的話,只需把尺舌移置一次就得.

例:				
	a = 252	7.52	14.62	8.05
	b = 115	4.37	9.8	7.80
	x = 277	8.70	17.6	11,20

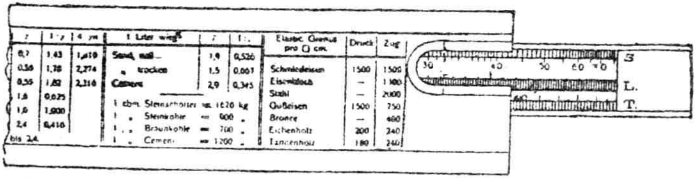
因為x^2由比例$\frac{a^2}{10}=\frac{x^2}{z+10}$求得的,而商$\frac{a^2}{10}$又以尺舌去探取的,所以$x^2$永遠在A尺正當的一半,而x也就可以永遠直接的在下面讀得.倘使三角形的兩邊相差不甚麼大,那麼以此法所得的弦,大概不致有錯誤.又因為假定$b<a$的,故z至多不能過於10,而在1和10之間,所以z+10應在11和20之間.要得x^2在A尺正當的所在,那z+10只能取於B尺的右半.倘使兩邊的差十分大了,那麼z也許比1小,而z+10不過在10與11之間.若相差實在太大了,z甚至於比0.1小,而z+10在10和10.1之間,差不多和B10為鄰了.所以碰到兩者的差太大的時候,須得愼重其事,估量一下,去定z+10究竟該屬於那一種數類的.在10和10.1之間的.我們就可在B10下鄰讀弦.因為我們將z+10取了一個較精確的所在,就算不是完全不能的話,也是多事的.

例：$a=$	24,	40,	575,	1104,
$b=$	7,	9,	48,	47,
$z+10=$	10.85,	10.5,	10.07,	10.0181.

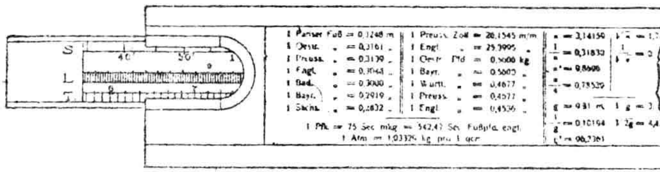
z 的值到底何如，也可從所得的結果看出來，因爲直角三角形的弦，必在較大一邊與二邊和之間，但又不能達到其和的．所以倘使結果過了此限，或和此限相等的話，那就是 z 錯誤的標識．例如在第一個例題，以18,5來替10.85，那麼弦當爲32.6，就過了所限31．又如第二例，$z+10=15$，則弦剛巧等於所限49了．

第三篇 附尺

第一章 三角函數諸尺



第十五圖



第十五圖

尺舌背面,有三條尺:上面一條,記有S的是正弦尺;下面記有T的,是正切尺;介於兩者之間而有等分的分綫的是一條合D尺諸數相對應的對數尺.

將尺舌背面向上推入尺體,那A尺就直接和S尺爲鄰.用S尺時,A尺上一切數值,均應

被除於100.A尺的末綫當視爲1,故下面爲sin 90°;左端起綫視爲0.01,下面所列的角度∢34′的正弦值,應該就爲這個數.A尺中綫爲0.1,下面應爲∢5°45′,因爲∢5°45′=0.1的.普通言之,在A尺各數(a)的下面,爲適應的角度,而他的正弦值爲$\frac{a}{100}$的.現在叫任意的某角爲ϕ,則A和S兩尺之間.就具有如下的關係:

1..........a和34′..........ϕ兩段,是等長的,

意爲
$$m\cdot\log a = m\cdot\log\sin\phi - m\cdot\log\sin 34',$$

或
$$a=\frac{\sin\phi}{\sin 34'}=100\phi\sin\phi.$$

這條對數的正弦尺,是不完全的.角度在34′以下的就沒有了.要知道在算尺上設備一條完全的,簡直不能。就是假使將A尺延長了一段,不過可以讀到3′26.5″,因sin3′26.5″=0.001;譬如說再延長了一段的話,也不過達到sin20.6″(=0.0001)以下類推.

用了背置尺舌,算尺供獻了屬於∢34′至90°的一切正弦值——不是正弦值的對數,只須以推片採取,就可讀得屬於任何角度的正弦值,和屬於任何正弦值的角度.

例:　sin 2°15′=0.0393,　　0.2=sin 11°33′.

sin 15° =0.259,　　0.02=sin 1°8′.

sin 45° =0.707,　　0.736= sin 47.4°.　　sin 74.5°=0.964.

S 尺之於 B 尺,當然和他之於 A 尺一樣.因此我們不用將尺舌翻轉過來,也可以解得.在算尺的背面,A100 對下——也有在 A1 對下的——有一條刻痕.若推尺舌向外,使已知的角度 ϕ 對準刻痕,那麼在 B 尺上,A100 的下鄰——左推的,在 A1 下鄰——就是 $\sin\phi$.反之,也可以移 B 尺上任意某數於 A 尺末綫的下面,而得所屬的角度於背面刻痕所在.

例: $\sin 21° = 0.358$, $\sin\alpha = 0.6$, $\alpha = 36°50'$;

$\sin 8° = 0.139(2)$ $\sin\alpha = 0.242$, $\alpha = 14°$;

$\sin 74°30' = 0.964$, $\sin\alpha = 0.97$, $\alpha = 76°$;

$\sin 36°40' = 0.597$, $\sin\alpha = 0.434$, $\alpha = 25°40'$.

就這個方法,還可以得到正弦值的倒數,在普通是很有用的.——對 A100 下鄰爲 $\sin\phi$ 的話,那 B1 上鄰就爲他的倒數 $1/\sin\phi$.

例: $\dfrac{1}{\sin 15°} = 3.86$, $\dfrac{1}{\sin 45°} = 1.414$.

S 尺又可和 A, B 兩尺——不是和 C, D——合作起來.例如解 $a/\sin\phi$,那麼徙 ϕ 於背面的右刻痕;在 B1 上鄰,爲 $1/\sin\phi$,而以 a 乘之.

例: $\dfrac{1.25}{\sin 18°15'} = 4$, $\dfrac{51.4}{\sin 45.5°} = 72.1$. $\dfrac{634}{\sin 71°} = 671$.

這類除法,也可以背置尺舌來解.徙 ϕ 於 a 的下鄰,在尺舌末綫的上鄰,就是結果.倘使要

解 a,sin ϕ, 有許多算尺都不能不用背置尺舌,除非尺體背面的左端也有一條刻痕的,那麽也不必將尺舌翻轉來;只須將尺舌左移,直至∢ϕ出現了,在 A1 下鄰爲 sin ϕ, 再以 a 去乘其法以推片在 A 尺找到 a 的所在,下鄰 B 尺上就是所求的。

例：　$1.73 \cdot \sin 21.5° = 0.634$,　$4.29 \cdot \sin 3°25' = 0.256$,　$1.7 \cdot \sin 66.5° = 1.56$.

按正弦定律,可以用背置尺舌解三角形.如已知 a = 260 cm, b = 169 cm 和 $\alpha = 112.6°$, 則先求 $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2R - \alpha)}$ 的商,其法就移相屬的兩綫爲鄰.同時就得 $\frac{b}{\sin\beta}$ 和 $\frac{c}{\sin\gamma}$. b 是已知的.得 ∢β = 36.9° 於他的下鄰.又因 $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, 得 $\gamma = 30.5°$, 在這條分綫上鄰,得 c = 143cm.碰到直角三角形,則弦的下鄰,應爲 sin90°, 就是 S 的末綫,或在末綫上鄰讀弦.

例：　a = 195cm, $\alpha = 67.4°$, $\beta = 53.1°$; 所求的兩邊爲 b = 169cm 和 c = 182cm.

已知 c = 273cm, $\beta = 36.9°$, $\gamma = 75.7°$, 求其餘的.結果： b = 169cm, a = 260cm.

直角三角形的弦長 48.5 cm, 一角爲 37.5°; 此角的對邊長多少? 29.5cm.

直角三角形的一邊長 205cm, 所對的角爲 13.9°; 弦長多少? 853cm.

按 $\cos\phi = \sin(90° - \phi)$ 的關係,就可在正弦尺得餘弦的函數.只須先得他的餘角而求其正弦就是.

例：　$\cos 40° = \sin 50° = 0.766$,　　$\cos\alpha = 0.420 = \sin(90° - \alpha)$,

$\cos 35°40' = \sin 54°20' = 0.812$;　　$90° - \alpha = 24°50'$；故 $\alpha = 65°10'$.

T尺,就是對數的正切尺,對應於C,D兩尺的.因C,D兩尺所含爲1……10,所以以範圍論,T尺比S尺更小.用時,D尺的諸數值,當被除於10.右端末綫爲1,相對當爲∢45°;起綫爲0.1,相對爲∢5°43′,更小的角度只得不管,倘使碰到的話,爲權宜之計,可以S尺代之,當沒有大的錯誤.此外T尺的用法,和S尺的很相似,用不到指導的了.

例；　$Ag\,38°40' = 0.800$,　　$Ag\,\alpha = 0.543$, $\alpha = 28°30'$,

$Ag\,40°20' = 0.849$;　　$Ag\,\alpha = 0.435$, $\alpha = 23°30'$.

較45°大的角度的正切值及某角的餘切值,可以下列的關係求得.

$$cAg\phi = \frac{1}{Ag\phi} \text{ 和 } Ag\phi = cAg(90° - \phi) = \frac{1}{Ag(90° - \phi)}.$$

例：　$Ag\,67° = cAg\,23° = \dfrac{1}{Ag23°} = 2.36$, $cAg\,35° = \dfrac{1}{Ag35°} = 1.428$, $cAg\,76° = Ag\,14° = 0.249$ 之類.

角度之小於5°44′者,有一種算尺備有一條正弦和正切共同的尺.——因爲這樣小的角度,正弦和正切值相差極微,差不多相等了.——他和C,D兩尺相對應,所含的函數值在0.01和0.1之間.用法同前述.

例：　$\sin 3° = 0.0523 = Ag\,3°$;　　$\sin\alpha = 0.0345$,　　$\alpha = 1°58,5'$;

$\sin 1°6' = 0.0192 = Ag\,1°6'$;　　$Ag\,\alpha = 0.0294$,　　$\alpha = 1°41'$;

$cAg88° = Ag2° = 0.0349$;　　$Ag\alpha = 0.0736$,　　$\alpha = 4°12'$.

第二章　等分尺

我們知道.D尺的設計,是以長25cm的一段表log10的.尺舌背面有一條記作L的,和D尺等長而等分為10主分段.每主分段又均分為10次分段;每次分段又均分為10(或5)小分段.所以全尺共均分為1000(或500)份.為顯明起見,只主分綫記有數字,其餘亦不難類推.

現在將尺舌翻轉來推進去,那L尺的起綫對D1,末綫對D10.意思就是以含1000個單位的一段表log10. log3=0.477,所以這裏當以含477個單位的一段去表他. log2=0,301,和log5=0.699,當以含301和699單位的一段去表,諸如此類.所以只須徙推片於D3上,就可在L尺上讀得log3的尾數其實我們有了他,和備了一個三位的對數表一樣.

也有不必將尺舌背置就可應用的,在標準位置的時候,L1當對D10,L1000當對D1.例如找log d,當徙C1於Dd上,在右端背面的刻痕那裏,讀logd.

解乘除,總得去用前面四尺,又便利又容易,平常用不到這L尺,所以他的用處算不得十分大.不過碰到高的方根或乘方和含分指數的方根,用A,B兩尺所不能求的,那只好用着他.但是這類算題,差不多只在純粹的算學和力學,熱學裏很狹的範圍以內才有.為說明用法起

見,舉二例如下:

解 $7.38^{2.43}$| 從 C1 於 D7.38 上,在背面的右刻痕得 log 7.38=0.868. 在前面將 0.868 和指數相乘,得積 2.11 置尾數 110 於背面右刻痕,D尺上對 C1 的就是 1.29. 因首數爲 2,故結果爲 129.

解 $\sqrt[3.7]{137}$| log 137=2.137: 2.137: 3.7=0.5775; 他的眞數爲 3.78.

第三章 對數的對數尺

解任意次羃,普通總覺得很麻煩.有一種算尺,另外有特別的設備.以之解任意的羃,手續可和乘除一樣的簡便.他的做法,只須於 A 尺 a 數上刻了 α, 而 a 與 α 之間的關係爲 log α=a. 所以在平常對數尺上的 a, 是表 m.log a 一段的末點,而在這裏, a 所表的,當爲 m.log. log a 一段的末點了.現在假定 A 尺的中綫爲 1, 記此尺爲 P, 則 A, P 兩尺上相應的排列當如下:

A 上:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2..........10
P 上:	1.259	1.585	1.996	2.512	3.162	3.981	5.011	6.31	7.944	10	10^2.........10^{10}

照 A 尺的長度,則 P 尺所含當自 1.259 至 10^{10} 的間隔.但是因爲這麽辦法,在右邊的分綫相距實在窄得不堪,沒有多大價值,所以往往將 P 尺向 A 尺的左方發展,所含大概自 1.1 至 10^3

碰到指數爲整數或分數的乘方或開方,我們應從對對數的原則着手。

$$x=a^{\alpha},\qquad x=\sqrt[\alpha]{a},$$

$$\log x=\alpha\cdot\log a,\qquad \log x=\frac{1}{\alpha}\log a,$$

$$\log\log x=\log\alpha+\log\log a,\qquad \log\log x=\log\log a-\log\alpha,$$

所以解乘方,應以表 $\log\log a$ 的一段和表 $\log\alpha$ 的一段相加;碰到開方自然以減替加就是。

手續:

(一) 乘方.

1) 以推片在P尺上找到基數a的所在,

2) 徙尺舌的起綫於其下,

3) 移推片於B尺的指數 α 上,

4) 相望在P尺上爲結果x.

(二) 開方.

移B尺上的方根指數於基數的下面.減得的結果,就是所求的方根,可在B1的上面讀得. 前章兩例,可以P尺重演一次.不過覺得所得的結果,不及前次精確.這就因爲他右邊的分綫,接近得太快了.所以倘使要精確一些,不消說得,自然用對數妥當.

但是P尺也有他的長處.如有一羣數的對數,求換了別的底數以後的對應諸數,那就用得着他了.例如我們知道$\log a$對於底數g的關係為 $g^x=a$, 得 $x\cdot\log g=\log a$, $x=\frac{\log a}{\log g}$, $\log x=\log\log a-\log\log g$. 所以表已知數的和表基數的兩段應相減;結果不在P尺,而在B尺——從尺舌的起綫於P上減數g的下面;以推片在P上找到被減數a;相望在B尺上的,為所求的對數.——只須移置推片之勞,可得一個屬於任意底數的對數表.

例:試列一個自然對數表.——普通在2.718那裏,有底數e的特別分綫.

數:	3	4	5	10	67.5……
自然對數:	1.10	1.39	1.614	2.31	4.22……

試列底數1.53的對數表:

數:	2	2.5	3	3.5	4 ……
對數:	1.63	2.16	2.59	2.95	3.26……

又如畫對應於$y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$的曲線.我們以所得的結果,列成一表如下為免去非必要的尺舌移動起見,先求第二列,然後再求第三列等等.

$x=0$,	1,	2,	3,	4,	5,	6……
$e^x=1$,	2.72,	7.4,	20.0,	55,	150,	410……

$e^{-x}=1$,	0.37,	0.14,	0.05,	0.02,	——	——......
$2y=2$,	3.09,	7.54,	20.05,	55.02,	150,	410......
$y=1$,	1.55,	3,77,	10.02,	27.51,	75,	2.05......

P尺上的種種演解,雖不能使人滿意,於精確的需求,不過爲工程師計,有很多的地方,已沒有不足之患了,就是對於算學家,如作指數曲線和乘方級數,也未始沒有供獻之處.

附　錄

(一)　小數點的位置

運用算尺並沒有多大困難,不過得了結果,定小數位的時候,非稍費一點腦力不可,但是也很不容易.下面講的幾個方法,也許可濟我們的窮.

表整數位的數目我們叫他前數,像:

2是　24.135 的前數

1是　2.730 的前數

0是　0.583 的前數

−1是　0.079 的前數

(一)乘　倘使所得的積在第一個因數的左方,就是尺舌向左伸的,那麼他的前數爲兩因數的前數之和;倘使在第一個因數的右方,就是尺舌向右伸的,那麼他的前數當爲兩因數的前數之和減一.

例1:　$18\cdot3.5=63$

兩因數的前數之和　　$2+1=+3$

因積居右,應減一	-1
故積的前數爲	$+2$

例 2: $60 \cdot 35 = 2100$

因數前數的和	$2+2=+4$
因積居左,無須減去	-0
故積的前數爲	$+4$

例 3: $0.0014 \cdot 1.7 = 0.00238$

因數的前數和	$-2+1=-1$
積居右,應減一	-1
故積的前數當爲	-2

(二)除　倘所得的商,在被除數的右方,就是尺舌向左伸的,那麽他的前數爲被除數的減去除數的前數;倘在左方的話,就是尺舌向右伸,那麽他的前數照上述所得以外還須加一。

例 1: $1440 : 32 = 45$

兩前數的差	$4-2=+2$
商居右,不加	$+0$

故商的前數　　+2

例 2: $600 : 32 = 18.75$

前數的差　　$3-2=+1$

商居左,應加　　$+1$

故前數為　　$+2$

例 3: $0.0765 : 51 = 0.0015$

兩前數的差　　$-1-2=-3$

商居左,應加　　$+1$

故前數為　　-2

現在將上述的方法歸納起來,得:

	滑尺舌伸於	
	左	右
	結果的前數應為	
乘	兩因數的前數之和	兩因數的前數之和減一
除	被除數的減去除數的前數	被除數的減去除數的前數再加一

有許多算尺.D尺的右端刻有$\frac{\text{Prod}}{-1}$或P−1(積−1);左端刻有$\frac{\text{Quot}}{+1}$或Q+1(商+1),就是這裏的一種簡明記號.兩記號的效力,只限於C,D兩尺的.

(三比例　特別的方法也許還有,不過我們信任,這是最簡便的一個,——第一步手續就是除,得商的前數;以這個商爲因數之一,和別個相乘,照上述的方法,而得結果的前數.

例:　$12:21=30:52.5$

手續一)　12:21,尺舌右伸,前數爲$(2+1)-2=1$.

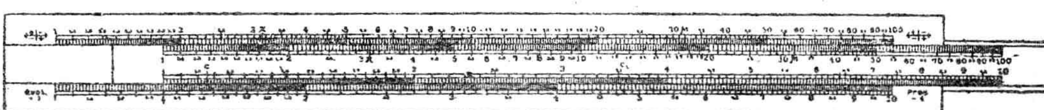
手續二)　商·30,尺舌右伸,前數爲$1+(2-1)=2$,故答數應含兩位整數.

在普通的算題,而特別的在乘除混合的時候,那前數可以循了各數所列的次序依法定出來.例如

$$\frac{71\cdot 21.4\cdot 35\cdot 17}{8.5\cdot 42\cdot 5.8\cdot 20}=21.8$$

結果的前數當爲$1+2-2+2-1-2+1+1=7-5=2$,

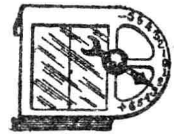
第　十　六　圖



有一種算尺,對於定小數位的設備很完全.D尺兩端刻有Q+1和P−1以外A尺兩端還

有 $\langle\frac{+}{-}\big|\frac{-}{+}\rangle$. 又在推片上,劃了一條弧度,均分12份,度的中線爲0,向上爲負,直至－6,向下爲正,直至＋6。弧度的中心點,有一條可以旋轉的小針,用這小針可指應取的度數.

小針的用法



No. 4086.

例:

$$\frac{12\cdot 8.4\cdot 21\cdot 275}{48\cdot 1.5\cdot 7.7}=1050$$

1) $12:48=25$, 商居右,小針無須移動,仍指0點,

2) $25\cdot 84=21$, 積在左,小針仍留0;

3) $21:15=14$, 商居左,應徙小針於＋1;

4) $14\cdot 21=294$, 積在右,小針移回0;

5) $294:77=382$, 商居右,小針無須移動;

6) $382\cdot 275=105$, 積在左,小針仍留原點,

結果,小針在0點.意思就是答數的前數,等於分子諸因數的前數和減去分母諸因數的前數和。

分子的前數和爲	+8
分母的前數和爲	+4

結果的前數爲　　+4

故我們的答數必爲1050無疑.

在進行中,旣不必顧慮每數的小數點所在,又無須顧慮中間所得結果的前數怎麼樣

這種推片,因恐分度太小,倒不免有紊亂之虞,所以只刻爲12度.但爲普通的演算計,已很夠用了.

$\overset{+}{\underset{-}{\longleftarrow}}\Big|\overset{-}{\underset{+}{\longrightarrow}}$ 的說明

用算尺的上兩尺,倘使我們以其分綫所表的數值爲限,那只能解從1至100以內的數.但是平常所碰到的數值,十九總超過此限的,假使沒有一個簡單的方法能打破這個限制,使無窮的可向兩方發展出去,豈不是算尺的用處太拘束了麼.例以4550而論,我們知道,這實在的數沒有在算尺上;但是45.50,是有的,在這裏我們可以說,這就是所要的數,不過小數點移左兩位罷了.倘就用他和別的數相乘,結果的數位天然小了兩位.所以在手續告終以後,小數位應照數移右;就是在算尺上讀得之數位,和眞正的答數的數位差兩位.再以0.455而論,要在算尺上讀得,可將小數點移右兩位;故所得的結果,應將小數位照數移左.關於除法一方面,手續和乘法相同,不過移除數的小數點於左,就是結果增大,末了應照數移還.把除數的小數位移右,手續反之.

這個記號,是代表一個分數的.中間的直線,指明小數點的所在;兩個箭頭表明從小數點所應顧慮的方向.——因將任意一個數要和算尺上的相合,小數點大概須遷移的——他就是足以代表上述種種方法完全無遺;且上下四尺都可通用,和Q+1,P-1不同.

為簡明起見,列表如下:

	$\overleftarrow{\frac{+}{-}}\Big|\overrightarrow{\frac{-}{+}}$
乘	小數位移左,所得結果上,須照數加還所移的幾位. 小數位移右,所得結果上,須照數減去所移的幾位.
除	除數的小數位移左,結果須照數減去所移的幾位. 除數的小數位移右,結果須照數加還所移的幾位.

雜例

1)　$255\cdot156=39780$

取A2.55,小數點移左了兩位,故應置小針於弧尺+2. 以15,6乘,小數移左了一位,為+1,小針指+3. 得39.78,但因小針指+3,故結果當為39780.

2)　$4680\cdot0.0055=25.74$

取A4.68,小數移左了三位,小針應指+3. 乘以5.5,小數移右了三位,應為-3,故小針回

至0. 得25.74, 因小針指0, 就算了.

3)　　$0.986:425=0.00232$

取A9.86, 小數移右了一位, 因0,986係被除數, 應置小針於 -1. 被除於4.25, 小數移左了兩位, 因係除數, 小針應負兩度. 得結果爲2.32, 但小針位 -3, 故爲0.00232.

4)　　$3425:0.75=4566.6$

取A34.25, 小數移左了兩位, 移針於 $+2$. 被除於7.5, 小數移右了一位, 應 $+1$. 得4.5666, 因小針指 $+3$, 眞的結果爲4566.6.

這裏有一點不能不申明, 就是在乘法, 我們向來以尺舌的1爲出發點; 在除法, 在1讀結果的. 但是在更複雜的算題, 也許以尺舌的100爲出發點那麼所得的積, 須計以100共作幾次的出發點; 應以100乘還幾次. 在除法自然也有同樣的處置. 倘結果在100讀得, 看中間在100讀幾次, 就應以100除幾次. 爲明瞭起見, 與例如下.

5)　　$255\cdot156=39780$

徙尺舌的100於A25.5, 小數點移左了一位, 小針指 $+1$. 但因以100作出發點, 結果應以100乘, 或者說結果的小數點須移右兩位. 因之小針當指 $+3$. B15.6上(小數移左了一位, 爲 $+1$, 而小針指 $+4$), 得3.978, 結果應爲39780.

6) $0.986:425=0.00232$

移 B42,5 於 A9,86. 被除數的小數點右一位,小針至 -1.

除數的小數點左一位,為 -1, 小針指 -2. B100上得23.2,結果應為0.232. 但這裏應被除於100,所以眞的結果為0.00232.

為免去錯誤起見,在讀結果於100以前,可移小針負二度.如在例(6),小針當指 -4.

〔二〕雜題

(1)	$x^2-0.3x-0.14=0.$	$x_1=+0.553.$		$x_2=-0.253.$
(2)	$3x^2+x-1=0.$	$x_1=+0.434.$		$x_2=-0.768.$
(3)	$x^2+x-1=0.$	$x_1=-1.618.$		$x_2=+0.618.$
(4)	$x^2-29x+84=0.$	$x_1=+25.736.$		$x_2=+3.264.$
(5)	$117x^3-27x+1=0.$	$x_1=0.461.$	$x_2=?$	$x_3=?$
(6)	$x^3-27x^2+117=0.$	$x_1=2.17.$	,,	,,
(7)	$x^3+18.5x-29.3=0.$	$x_1=1.426.$	,,	,,
(8)	$x^3-3x-1998=0.$	$x_1=12.675.$	,,	,,

(9) $x^3-300x-950=0.$ $x_1=18.727.$ $x_2=-3{,}285.$ $x_3=-15{,}442.$

(10) $x^4+4x^3-11x^2-48x-12=0.$ $x_1=1{,}79.$ $x_2=-5{,}565.$ $x_3=?$ $x_4=?$

(11) $x^4-8x^3+7x^2+66x-121=0.$ $x_1=4{,}65.$ $x_2=2{,}382.$ $x_3=-2{,}85.$ $x_4=3{,}818.$

(12) $4{,}76\cdot18{,}15^2=1568=39{,}6^2.$ (13) $0{,}724\cdot5{,}36^2=20{,}8=4{,}56^2.$

(14) $0{,}125\cdot0{,}712^2=0{,}0634=0{,}252^2.$ (15) $(4{,}31\cdot0{,}718)^2=9{,}58.$

(16) $(0{,}643\cdot0{,}0708)^2=0{,}00207.$ (17) $(163\cdot0{,}347)^2=3200.$

(18) $7{,}28^{\frac{2}{3}}=3{,}755.$ (19) $11{,}5^{\frac{2}{3}}=5{,}095.$ (20) $0{,}513^{\frac{2}{3}}=64{,}1.$ (21) $14{,}5^{\frac{3}{2}}=55{,}2$

(22) $7{,}84^{\frac{3}{2}}=21{,}9.$ (23) $0{,}946^{\frac{3}{2}}=0{,}92.$ (24) $\frac{500\cdot1{,}04\cdot29{,}8}{1{,}95}=7945.$ (25) $\pi\cdot0{,}445^2\cdot1{,}6=1.$

(26) $\frac{57{,}5\cdot\pi\cdot6370\cdot0{,}921}{180\cdot1{,}852}=3180.$ (27) $\frac{3{,}5\cdot0{,}4\cdot0{,}3}{\pi\cdot0{,}0484}=2{,}79.$ (28) $2000\cdot1{,}045^2=2184.$

(29) $\sqrt{34{,}3}:19{,}65=0{,}298.$ (30) $\sqrt{\pi}:0{,}742=2{,}39.$ (31) $\sqrt{176}:1918=0{,}00692.$

(32) $0{,}774^2:132=0{,}00454.$ (33) $49{,}1^2:0{,}64=3770.$ (34) $1{,}135^2:1{,}05=1{,}226.$

(35) $11{,}75:\sqrt{4{,}53}=5{,}52.$ (36) $0{,}0852:\sqrt{175}=0{,}00644.$ (37) $4{,}23:\sqrt{0{,}078}=15{,}14.$

(38) $44{,}9:18{,}2^2=0{,}1355.$ (39) $0{,}73:0{,}46^2=3{,}45.$ (40) $0{,}145:7{,}36^2=0{,}00268.$

(41) $2\cdot296\cdot333\cdot\cos83^\circ2'=23920.$ (42) $\cos\phi=\frac{0{,}1492}{\sqrt{0{,}0265}};$ $\phi=23\frac{1^\circ}{2}.$ (43) $\frac{37\cdot\sin55^\circ}{\sin12\frac{1}{2}^\circ}=140.$

(44) $\frac{8,7\cdot 4,35}{\cos 65^\circ}=89,6.$ (45) $\frac{85}{\mathrm{Ag}\ 1^\circ 28'}=3320.$ (46) $\sqrt[8]{\frac{926,15}{592\cdot 1,17}}=1,037.$

(47) $15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{12}=1,682.$ (48) $\sqrt[40]{6}=1,0458.$ (49) $\sqrt[60]{5}=1,0272.$ (50) $\sqrt[25]{\frac{112}{30}}=1,0541.$

〔三〕繁複算式的解法

公式	手續		
$\frac{a^2\cdot b}{c}=x$	A		得 x
	B	從 c	在 b 上
	C		
	D	於 a	
	A	於 b	
$\frac{\sqrt{a\cdot b}}{c}=x$	C′		在 c′ 下
	B′	從 a′	
	D		得 x
	A	於 b	
$\frac{a\sqrt{b}}{c}=x$	C′	從 a′	在 c′ 下
	B′		
	D		得 x

	A	於 b			
$c\sqrt{\frac{a\cdot b}{d}}=x$	C′			c 至片	在 1 下
	B′	徙 a′	片至d		
	D				得 x
	A	於 a			
或	B	徙 d	片至b	1 至片	
	C				在 c 下
	D				得 x
	A				
$\frac{\sqrt{a^3}}{c}=x$	C′		在 c′下		
	B′	徙 a′			
	D	於 a	得 x		
	A				
$c\sqrt{b^3}=x$	B		片至b		
	C	徙 1		1 至片	在 c 下
	D	於 b			得 x
	A	於 a	得 x		
$\left(\frac{\sqrt{a\cdot b}}{c}\right)^2=x$	C′	徙 b′	在 c′上		
	B′				
	D				

$$\sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{c}}=x$$

A		
C′	徙 b′	
B′		在 c′ 下
D	於 a	得 x

求比例中項： $a:x=x:b$, 假定 $a<b$.

A		
B	徙 a	於 b′ 下
C		
D	於 a	得 x

化分數爲小數：

C	徙分子	得等值的小數
D	於分母	於 1 上

化小數爲分數：

C	置小數	得等值的分子
D	於 1	得等值的分母

〔四〕 C.D 兩尺上等量種種

幾何

置於

226	圓的直徑
710	圓周

79	圓的直徑
70	等積正方形的一邊

99	圓的直徑
70	內切正方形的一邊

39	圓周
11	等積正方形的一邊

40	圓周
9	內切正方形的一邊

70	正方形的一邊
99	他的對角線

205	單位邊的正方形的面積
161	單位直徑的圓形的面積

322	圓的面積
205	內切正方形的面積

營造尺庫平制及萬國權度通制(密達制)

25=	尺
8=	公尺(米)

250=	里
144=	公里(粁)

400=	方尺
41=	方公尺

7=	畝
43=	公畝(安)

220＝方里

73＝方公里
580＝立方尺

19＝立方公尺
28＝升

29＝公升(竔)

67＝兩

2500＝公分(克)
62＝斤

37＝公斤(兛)

營造尺庫平制及英美權度

50＝寸

63＝吋(Inches)
40＝尺

42＝呎(Feet)
95＝里

34＝哩(Miles)
63＝方寸

100＝方吋

49＝方尺

54＝方呎
320＝方里

41＝方哩
270＝畝

41＝噉(Acres)
1＝立方寸

2＝立方吋

70＝立方尺

81＝立方呎
180＝升

41＝英加倫(Gallons)
95＝升

26＝美加倫

19＝兩

25＝唡(Ounces)
450＝兩

37＝磅(Pounds)
19＝斤

25＝磅

萬國權度通制及英美權度

26＝吋

66＝公分(糎)
82＝碼(Yards)

75＝公尺
4300＝令

865＝公尺
31＝方吋

200＝方公分

82＝呎

25＝公尺
87＝哩

140＝公里
43＝鏈

865＝公尺
140＝方呎

13＝方公尺

61＝方碼

51＝方公尺

42＝噉

17＝公頃([illegible])

22＝方哩

57＝方公里

5＝立方吋

82＝立方公分

600＝立方呎

17＝立方公尺

108＝喱(Gnaius)

7＝公分(克)

75＝磅(Pounds)

34＝公斤

85＝立方碼

65＝立方公尺

6＝立方呎

170＝公升

14＝美咖倫

53＝公升

46＝英咖倫

209＝公升

6＝唡

170＝公分(克)

63＝英噸(Ton)

64＝公鐓

壓力

640＝每方吋的磅數

45＝每方公分的公斤數

51＝每方呎的磅數

249＝每方公尺的公斤數

59＝每方碼的磅數

32＝每方公尺的公斤數

57＝幾吋的水銀

28＝每方吋的磅數

82＝幾吋的水銀

5800＝每方呎的磅數

720＝幾吋的水

26＝每方吋的磅數

74＝幾吋的水

385＝每方呎的磅數

60＝幾呎的水

26＝每方吋的磅數

5＝幾呎的水

312＝每方呎的磅數

15＝幾吋的水銀

17＝幾呎的水

99＝大氣壓力

2960＝幾吋的水銀

34＝大氣壓力

500＝每方吋的磅數

34＝大氣壓力

7200＝每方呎的磅數

30＝大氣壓力

31＝每方公分的公斤數

$\dfrac{23=\text{大氣壓力}}{780=\text{幾呎的水}}$	$\dfrac{29=\text{每方吋的磅數}}{67=\text{幾呎的水}}$
$\dfrac{3=\text{大氣壓力}}{31=\text{幾公尺的水}}$	$\dfrac{1=\text{每方公分的公斤數}}{10=\text{幾公尺的水}}$

合較

$\dfrac{43=\text{每呎幾磅}}{64=\text{每公尺幾公斤}}$	$\dfrac{89=\text{每分鐘幾立方呎}}{42=\text{每秒鐘幾公升}}$
$\dfrac{127=\text{每碼幾磅}}{63=\text{每公尺幾公斤}}$	$\dfrac{700=\text{每分鐘幾英咖倫}}{53=\text{每秒鐘幾公升}}$
$\dfrac{46=\text{每方碼幾磅}}{25=\text{每方公尺幾公斤}}$	$\dfrac{840=\text{每分鐘幾美咖倫}}{53=\text{每秒鐘幾公升}}$
$\dfrac{49=\text{每立方呎幾磅}}{785=\text{每立方公尺幾公斤}}$	$\dfrac{38=\text{淸水的重量}}{39=\text{海水的重量}}$
$\dfrac{27=\text{每立方碼幾磅}}{16=\text{每立方公尺幾公斤}}$	$\dfrac{5=\text{幾立方呎的水}}{312=\text{重幾磅}}$

1 = 幾英咖倫的水

10= 重幾磅

3 = 幾美咖倫的水

25= 重幾磅

50= 每美咖倫幾磅

---

6 = 每公升幾公斤

10= 每英咖倫幾磅

---

1 = 每公升幾公斤

30= 每美咖倫幾磅

25= 每英咖倫幾磅

3 = 幾立方呎的水

85= 重幾公斤

46= 幾英咖倫的水

209= 重幾公斤

14= 幾美咖倫的水

53= 重幾公斤

44= 每秒鐘幾呎

30= 每點鐘幾哩

88= 每分鐘幾碼

---

3 = 每點鐘幾哩

41= 每秒鐘幾呎

750= 每分鐘幾公尺

82= 每分鐘幾呎

25= 每分鐘幾公尺

340= 呎磅

47= 公尺公斤

72= 英馬力

73= 法馬力