GESAMMELTE
MATHEMATISCHE WERKE

VON

ERNST SCHERING.

HERAUSGEGEBEN

VON

ROBERT HAUSSNER UND KARL SCHERING.

ZWEITER BAND.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1909.

VORREDE.

Dieser zweite Band enthält bis Seite 157 die mathematischen und mathematisch-physikalischen Arbeiten von Ernst Schering von März 1879 an (Nr. XXIII bis XXXII).

Dann folgen die Arbeiten biographischen Inhalts von Nr. XXXIII bis XXXXIII und darauf die zahlreichen in den Gaussischen Werken enthaltenen Bemerkungen zu den Abhandlungen von Gauss.

Hiermit sind alle von E. Schering selbst veröffentlichten Arbeiten wieder zum Abdrucke gelangt.

Sein umfangreicher Nachlass enthält ausser den Vorarbeiten und Handschriften der von ihm selbst zum Drucke gegebenen Abhandlungen noch zahlreiche Blätter mit Berechnungen, die sich teils auf die gehaltenen Vorlesungen beziehen, teils Anfänge und Entwürfe neuer Arbeiten bilden. Diejenigen Teile des Nachlasses, die im Sinne des Verfassers als druckfertig angesehen werden konnten, sind in diesem Bande unter den Nrn. XXXXV bis LI veröffentlicht. Besonders sei auf die zahlentheoretische Arbeit vom Jahre 1856 (Nr. XXXXV) und auf die Bemerkungen dazu hingewiesen.

Ueber die Veröffentlichung der von E. Schering an der Göttinger Universität gehaltenen Vorlesungen, von denen zum Teil sorgfältig geführte Hefte vorhanden sind, ist zur Zeit noch keine Entscheidung getroffen.

Auf den »Nachlass« folgen »Bemerkungen« zu den einzelnen Arbeiten; diejenigen zu Nr. XXXXVI enthalten manche, bisher wohl nicht allgemein bekannte Angaben über die Jugendzeit und über die letzten Lebensjahre von B. Riemann.

Die Herausgeber haben sich nach dem gleichen Plane, wie auf S. III im ersten Bande angegeben ist, in die Vorbereitungen zum Wiederabdrucke der einzelnen Abhandlungen geteilt. Darnach hat R. Haussner diese Arbeit für die Nummern XXIII bis XXIX einschliesslich, XXXXIV und Nachlass, XXXXV, L, LI, LII sowie für die »Bemerkungen« dazu, K. Schering für die übrigen Nummern, sowie die Zusammenstellung des »Lebenslaufes« übernommen.

Robert Haussner
Jena

Karl Schering
Darmstadt

im Februar 1909.

INHALTS-VERZEICHNISS DES ZWEITEN BANDES.

XXIII.

DAS ANSCHLIESSEN EINER FUNCTION AN ALGEBRAISCHE FUNCTIONEN IN UNENDLICH VIELEN STELLEN.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. März 1879
[und veröffentlicht in den »Abhandlungen« derselben, Bd. XXVII. Mathematische Classe, S. 1—63.
Göttingen, 1880.]

INHALT.

Herr Weierstrass hat in seiner der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 16. October 1876 vorgelegten Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*)« diese Functionen in Bezug auf die Art und Weise, wie sie unendlich klein und unendlich gross werden, untersucht. Die hervorragende Wichtigkeit, welche die dort bewiesenen Lehrsätze besitzen, wird nicht nur unmittelbar erkannt, sondern zeigt sich auch darin, dass sie die wesentlichen Hülfsmittel zur Aufstellung von solchen Functionen bieten, für welche die Weise, wie die Function unendlich gross und unendlich klein werden soll, vollständig vorgegeben ist.

Eine ausgedehnte Anwendung hat bis jetzt schon der Lehrsatz erfahren, welcher angiebt, wie man eine für alle complexen Werthe des Argumentes eindeutige analytische Function von solcher Beschaffenheit bestimmen kann dass sie für eine unbegrenzte Anzahl beliebig gegebener Werthe des Argumentes unendlich klein oder unendlich gross von beliebig gegebenem endlichen Grade wird, dass sie ferner für alle übrigen endlichen Werthe des Argumentes weder unendlich gross noch unendlich klein wird und dass sie nur für den unendlich grossen Argumentwerth unendlich gross von unbegrenztem Grade werden darf.

Herr Mittag-Leffler hat diese von Herrn Weierstrass gefundene Lösung benutzt, um eine solche Function noch weiter dahin zu bestimmen dass sie in der Umgebung jeder der beliebig gegebenen Stellen sich von je einer beliebig gegebenen eindeutigen analytischen Function nur um eine Function unterscheiden darf, welche für die Stelle selbst unendlich klein

*) [Weierstrass, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 77—124.]

von einem beliebig gegebenen endlichen Grade wird. Herr Mittag-Leffler hat den betreffenden Lehrsatz in anderer Form ausgesprochen und mit zwei Hülfssätzen nebst einer Skizze der Beweise veröffentlicht in den Abhandlungen:

En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlighets punkter, hvilkas konstanter äro på förhand angifna. (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm. 1876 Juni 7. No. 6, pag. 3—16);

Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner utaf rationel karakter. Pars 1. (A. a. O. 1877 Januari 10. No. 1, pag. 17—32);

Till frågan om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter genom quoten af två beständigt konvergerande potensserier. (A. a. O. 1877 Mars 14. No. 3, pag. 5—13);

Extrait d'une lettre à M. Hermite. (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques réd. par M. M. Darboux, Hoüel et Tannery. Serie II, t. III, 1879).

Schon im August 1878 hatte Herr Mittag-Leffler auf Marieholm am Wenersee die Freundlichkeit gehabt, mir seine ausführliche handschriftliche deutsche Abhandlung mit den von ihm gegebenenen Lösungen für die in diesen Lehrsätzen enthaltenen Aufgaben und mit allen von ihm gefundenen Beweisen anzuvertrauen.

Für die in jenen Lehrsätzen enthaltenen Aufgaben habe ich noch neue Lösungen nebst den Beweisen und für die von Herrn Mittag-Leffler gegebenen Lösungen andere von seinen Beweisen verschiedene Beweise gefunden.

Eine Reihe der von mir aufgestellten neuen Lehrsätze, welche mit diesem für die Theorie der analytischen Functionen so wichtigen Gegenstande in enger Beziehung stehen, hatte ich in einer Abhandlung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. März 1879 vorgelegt. Da in dieser Schrift auch meine Lösungen für die Aufgaben, welche Herr Mittag-Leffler in seiner eben erwähnten deutschen Abhandlung ausführlich untersucht hat, enthalten sind, so habe ich den Druck meiner Arbeit verschoben, bis ich jetzt (am 1. August 1880) Gewissheit erhalten habe, dass die Veröffentlichung der Untersuchungen des Herrn Mittag-Leffler unmittelbar bevorsteht. Die Verzögerung des Druckes benutzte ich, um noch Hinweisungen auf die von Anderen inzwischen veröffentlichten oder mir mitgetheilten Arbeiten einzufügen.

Bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand habe ich auch Verallgemeinerungen mehrerer Lehrsätze gefunden, welche in den folgenden Arbeiten von Laurent, den Herren Hermite und Mittag-Leffler enthalten sind:

Laurent, Extension du théorème de Mr. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable. (Comptes rendus, t. XVII, pag. 348. Paris 21. Août 1843; Rapport de Mr. Cauchy, t. XVII, pag. 938—942. Paris 30. Oct. 1843.);

Hermite, Sur la formule d'interpolation de Lagrange. 5 juillet 1877. (Borchardt's Journal für Mathematik, Band 84, Seite 70.);

Mittag-Leffler, Funktionsteoretiska Studier. I. En ny serie-utveckling för funktioner af rationel karakter. (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XI, pag. 275—293. Helsingfors 1879.);

Mittag-Leffler, Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt. (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm. 1877 Januar 10. No. 1, pag. 33.);

Mittag-Leffler, Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett ändligt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter. (A. a. O. 1877 Februar 14. No. 2, pag. 31.);

Mittag-Leffler, Om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter utaf flere oberoende variabler. Pars I, II. (A. a. O. 1877 December 12. No. 10, pag. 3 und 17.).

An dieser Stelle will ich noch hervorheben, dass die Interpolations-Formel, welche man jetzt die Lagrangesche zu nennen pflegt, schon vor Lagrange (1794) von Waring 1779 aufgestellt worden ist. Diese Formel kann bekanntlich durch einfache Multiplication mit einem Factor aus der Eulerschen Zerlegung einer algebraischen Function in Partial-Brüche abgeleitet werden, welche Bemerkung sich aber weder bei Euler noch bei Waring und Lagrange findet:

Euler, Institutiones Calculi Integralis, 3 vol., Petrop. 1768—70. (T. II, pag. 432.)

Waring, Problems concerning Interpolations. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the Year 1779. Vol. LXIX, Part. I, pag. 59—67. Read Jan. 9, 1779.)

Lagrange, Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École normale en 1795. (Oeuvres de Lagrange publiées par les soins de M. Serret, t. VII, pag. 285—287. Der Herausgeber bemerkt in t. VII, pag. 183:

> »Les Leçons ont paru d'abord dans les deux éditions des Séances de l'École normale an III (1794—1795).
>
> Dix-sept ans plus tard sur l'avis de Lagrange on a réimprimé ces Leçons dans le Journal de l'École Polytechnique (1812), VII^e et VIII^e cahiers, t. II, p. 417.«)

1.

Anschluss-Function.

Die complexen Grössen will ich, um die verschiedenen für sie zu betrachtenden Beziehungen übersichtlich ausdrücken zu können, in derselben Weise geometrisch dargestellt denken, wie es von Gauss 1799 in seiner Doctor-Dissertation »Omnem functionem algebraicam etc.« (vgl. Gauss' Werke, Band III, Seite 25, 74, 114), später ausführlicher von Argand (Gergonne's Annalen 1813, 1815) und Gauss (1831 April 23; vgl. Gauss' Werke, Bd. II, Seite 171) geschehen ist.

Es sei x eine Grösse, welche alle complexen Werthe annehmen und also, wenn ihr reeller Theil als Abscisse und der Factor der imaginären Einheit ihres imaginären Theiles als zugehörige rechtwinklige Ordinate aufgefasst wird, jedem Punkte der Ebene entsprechen kann. Ferner seien $\mathrm{F}(x)$ und $\mathfrak{p}(x)$ zwei gegebene Functionen, welche in solcher Weise von x abhängen, dass nach Elimination von x die Function $\mathrm{F}(x)$ durch eine Reihe darstellbar ist, die nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ mit ganzzahligen wachsenden Exponenten fortschreitet und innerhalb eines den Werth $\mathfrak{p}(x) = 0$ umgebenden Bereiches gleichmässig convergent ist; mithin hat dort $\mathrm{F}(x)$ die Form

$$(1.)\qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+\infty} A_\mu\, \mathfrak{p}(x)^\mu,$$

worin m eine endliche ganze positive oder negative Zahl oder die Null sein kann, μ die ganzen Zahlen $-m, -m+1, -m+2, \ldots, +\infty$ zu durchlaufen hat, jedes A_μ eine von dem Werthe von $\mathfrak{p}(x)$ unabhängige Grösse bedeutet und endlich $\mathfrak{p}(x)$ mit etwaiger Ausnahme des Werthes Null alle complexen Werthe, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, bedeuten kann.

Bezeichnet n eine ganze positive oder negative Zahl oder die Null, so will ich mit

$$\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,n]$$

die Summe derjenigen Glieder der Reihe (1.) bezeichnen, welche die Potenzen mit nicht grösserem als dem n^{ten} Exponenten enthalten, also

$$\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,n] = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+n} A_\mu\, \mathfrak{p}(x)^\mu \tag{2.}$$

setzen.

Diese mit Hülfe der Gleichungen (1.) und (2.) definirte ganze oder gebrochene rationale algebraische Function $\mathfrak{P}$ will ich die zum Argumente $\mathfrak{p}(x)$, zur Ordnung n und zu dem die Gleichung $\mathfrak{p}(x) = 0$ erfüllenden Werthe $x = x_0$ gehörende Anschluss-Function der Function $\mathrm{F}(x)$ nennen.

Für den Fall, dass A_{-m} nicht zu Null wird, also $\mathfrak{p}(x)^m\mathrm{F}(x)$ für verschwindendes $\mathfrak{p}(x)$ weder unendlich gross noch unendlich klein wird, will ich

(3.) $1+n+m$ die Anzahl der Glieder der Anschluss-Function $\mathfrak{P}$ und

(4.) $1+n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}|m|$ die Anzahl der gegebenen Coëfficienten der Anschluss-Function $\mathfrak{P}$ nennen, indem ich nach Herrn Weierstrass den absoluten Betrag einer reellen oder complexen Grösse $\alpha+\beta i$, also den Werth $+\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}$ mit $|\alpha+\beta i|$ bezeichne.

Wenn bei der genaueren Bezeichnung der Anschluss-Function das Argument $\mathfrak{p}(x)$ nicht besonders genannt wird, so soll

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}(x) = x - x_0 \text{ für einen endlichen Werth } x_0, \text{ aber} \\ \mathfrak{p}(x) = \dfrac{1}{x} \text{ für } x_0 = \dfrac{1}{0} \end{array}\right. \tag{5.}$$

vorausgesetzt sein.

In der vorliegenden Abhandlung beschränke ich mich auf solche Functionen $\mathfrak{p}(x)$, welche nur für einen Werth von x zu Null werden.

Die durch Gleichung (2.) definirte Anschluss-Function lässt den Ausdruck

$$(6.)\qquad \mathfrak{p}(x)^m\,\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,n]$$

eine ganze rationale algebraische Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$ von nicht höherem als dem $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade werden und denselben also für jeden Werth von $\mathfrak{p}(x)$ eine Bedeutung behalten, auch dort wo die zu Grunde gelegte Reihen-Entwickelung (1.) für $\mathrm{F}(x)$ nicht mehr gilt.

(7.) Die Anschluss-Function nimmt für $n<-m$ beständig den Werth Null an.

Es ist

$$(8.)\qquad \mathrm{F}(x) = \mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,n]+\mathfrak{p}(x)^{1+n}\,\mathfrak{P}^*(\mathfrak{p}(x)),$$

worin $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{p}(x))$ eine, nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ mit nicht negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitende, innerhalb desselben Convergenz-Bereiches wie (1.) unbedingt summirbare Reihe bezeichnet.

Indem ich die von Herrn Weierstrass in seiner Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen« gebrauchte Benennungsweise benutze, bezeichne ich eine Function $\mathrm{F}(x)$, wenn sie in der Form (1.) darstellbar ist und m darin einen endlichen Werth besitzt, als eine im Convergenz-Bereiche des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$

(9.) sich rational verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$.

Um von den sich rational verhaltenden Functionen (im allgemeinen Sinne) die rationalen Functionen — im gewöhnlichen Sinne — durch eine kurze Ausdrucksweise zu unterscheiden, nenne ich die letzteren rationale algebraische Functionen.

Hat in der Reihen-Entwickelung (1.) für eine Function $\mathrm{F}(x)$ die Zahl m keinen grösseren Werth als Null, so ist $\mathrm{F}(x)$ eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$

(10.) sich regulär verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$ zu nennen.

Bei den vorliegenden Untersuchungen kommt es sehr häufig in Betracht, ob die Function für denjenigen Argument-Werth, für dessen Umgebung die Function sich regulär verhält, einen von Null verschiedenen Werth hat. Zur Abkürzung des Ausdrucks will ich die Function in solchem Falle als eine in der Umgebung des betreffenden Argumentwerthes

(11.) sich vollständig regulär verhaltende Function bezeichnen.

Besteht also die Entwickelung (1.) entweder für $\mathfrak{p}(x) = x - x_0$ oder für $\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{x}$, und wird $m = 0$, aber verschwindet A_0 nicht, so ist beziehungsweise entweder x_0 oder $\frac{1}{0}$ derjenige Werth des Argumentes, für dessen Umgebung die Function $\mathrm{F}(x)$ eine sich vollständig regulär verhaltende Function des Argumentes x genannt wird.

Besitzt eine Function $\mathrm{F}(x)$ Reihen-Entwickelungen von der Form (1.) für $\mathfrak{p}(x) = x - a$ und für jeden innerhalb eines bestimmten zusammenhängenden Gebietes befindlichen Werth a und zwar der Art, dass den von a abhängigen Coëfficienten A_μ für jeden besonderen Werth a ein einziges Werthesystem zukommt, so heisst sie eine in diesem Gebiete sich rational verhaltende Function des Argumentes x.

Wird unter jener Voraussetzung ferner kein mit einem negativen Index μ behaftetes A_μ von Null verschieden, so heisst die Function eine in jenem Gebiete sich regulär verhaltende Function. Nimmt sie endlich darin auch nicht den Werth Null an, so soll sie eine in jenem Gebiete sich vollständig regulär verhaltende Function genannt werden. Umfasst das in Rede stehende Gebiet auch einen unendlich entfernten Punkt der Ebene x, so muss eine Reihen-Darstellung von der Form (1.) für $\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{x}$ gelten.

Lässt man in (1.) und (2.) die Beschränkungen fallen, dass die Zahl m eine endliche ganze Zahl sei und dass μ nur ganzzahlige Werthe bedeute, behält aber die Voraussetzung bei, dass die Reihen für jeden Werth des complexen Argumentes $\mathfrak{p}(x)$, dessen absoluter Betrag $|\mathfrak{p}(x)|$ unter einer beliebig gegebenen Grösse und über einer beliebig klein wählbaren positiven Grösse liegt, gleichmässig und unbedingt convergiren, so entstehen Functionen $\mathfrak{P}$, welche auch Anschluss-Functionen genannt werden mögen.

Eine in einem gegebenen Gebiete sich rational verhaltende Function besitzt in diesem Gebiete nur rationale algebraische Anschluss-Functionen.

Ist die Function in dem Gebiete eine sich regulär verhaltende, so besitzt sie darin auch nur ganze rationale algebraische Anschluss-Functionen.

Wird die Function in dem Gebiete eine sich vollständig regulär verhaltende, so sind ihre Anschluss-Functionen darin ganz rational algebraisch, und jede derselben enthält ein additives von Null verschiedenes constantes Glied.

Sind für eine eindeutige analytische Function in einem gegebenen Gebiete alle Anschluss-Functionen, deren Ordnungszahlen n unter einer beliebig angenommenen endlichen positiven Grenze bleiben, entweder gebrochene rationale algebraische oder ganze rationale algebraische Functionen, so verhält sich die analytische Function in dem Gebiete beziehungsweise rational unstetig oder regulär. Wird von den betrachteten Anschluss-Functionen in dem Gebiete jede ganz rational algebraisch und besitzt jede ein additives von Null verschiedenes constantes Glied, so ist die eindeutige analytische Function auch eine in dem Gebiete sich vollständig regulär verhaltende.

Mit Hülfe der hier eingeführten Anschluss-Function lassen sich manche analytische Betrachtungen in einfacher Form ausdrücken. An dieser Stelle will ich nur auf die Partialbruch-Zerlegung algebraischer Functionen, ferner auf die Abhandlung »Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi« von Gauss 1814 (Vergl. G. W., Bd. III, Seite 165) und auf die sehr merkwürdigen Untersuchungen von Mr. Hermite »Sur la fonction exponentielle« (Comptes rendus, t. LXXVII a, b, Paris 1873, juillet 7 et août 4)*) hinweisen.

2.

Anwendung der Taylorschen Reihe.

Lehrsatz. Sind $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\mathfrak{p}(x)$ Functionen von x, welche so beschaffen sind, dass durch Elimination von x die Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ sich rational verhaltende Functionen vom Argumente $\mathfrak{p}(x)$ werden, sind ferner k_1, k_2 beliebige ganze positive oder negative Zahlen, sind endlich a_1, a_2 beliebige von x unabhängige und b_1, b_2 von x ebenfalls unabhängige, aber auch von 0 und $\frac{1}{0}$ verschiedene Grössen, so ist

$$(12.)\quad \mathfrak{P}[(a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n] = a_1 \mathfrak{p}(x)^{-k_1} \mathfrak{P}[\mathfrak{p}(x)^{+k_1} F_1(x) \,|\, b_1 \mathfrak{p}(x) \,|\, n + k_1] \\ + a_2 \mathfrak{p}(x)^{-k_2} \mathfrak{P}[\mathfrak{p}(x)^{+k_2} F_2(x) \,|\, b_2 \mathfrak{p}(x) \,|\, n + k_2].$$

*) [Vgl. auch Borchardt's Journal für d. r. u. a. Math., Bd. 76, S. 303.]

Bedeuten m, m_1, m_2 diejenigen ganzen Zahlen, welche jeden der drei Ausdrücke

$$\mathfrak{p}(x)^m (a_1 \mathrm{F}_1(x) + a_2 \mathrm{F}_2(x)), \quad \mathfrak{p}(x)^{m_1} \mathrm{F}_1(x), \quad \mathfrak{p}(x)^{m_2} \mathrm{F}_2(x)$$

zu einer in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ sich vollständig regulär verhaltenden Function von dem Argumente $\mathfrak{p}(x)$ machen, so ist m nicht grösser als die grösste der beiden Zahlen m_1 und m_2. Die nach der Vorschrift (3.) zu bestimmende Anzahl der Glieder beträgt für die Anschluss-Function auf der linken Seite, für die erste und für die zweite Anschluss-Function auf der rechten Seite der Gleichung (12.) beziehungsweise

$$1 + n + m, \quad 1 + n + m_1, \quad 1 + n + m_2.$$

Wendet man solche ganzzahlige k_1, k_2 an, welche keinen der beiden Ausdrücke

$$\mathfrak{p}(x)^{k_1} \mathrm{F}_1(x), \quad \mathfrak{p}(x)^{k_2} \mathrm{F}_2(x)$$

für die der Null sich nähernde Grösse $\mathfrak{p}(x)$ unendlich gross werden lassen, so kann jede der beiden auf der rechten Seite der Gleichung (12.) stehenden Anschluss-Functionen mit Hülfe der Taylorschen Reihe dargestellt werden, wie unmittelbar aus (2.) ersichtlich ist.

Ist nämlich

$$\mathrm{F}_1(x) = \sum_{\mu=-m_1}^{\mu=+\infty} C_{1,\mu}\, \mathfrak{p}(x)^\mu, \quad \mathrm{F}_2(x) = \sum_{\mu=-m_2}^{\mu=+\infty} C_{2,\mu}\, \mathfrak{p}(x)^\mu$$

worin $C_{1,\mu}$, $C_{2,\mu}$ von x unabhängige Coëfficienten bedeuten, ist ferner, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, m_* gleich der grösseren der beiden Zahlen m_1, m_2 und setzen wir:

$$C_{1,\mu} = 0 \text{ für } \mu < -m_1, \quad C_{2,\mu} = 0 \text{ für } \mu < -m_2,$$

so erhalten wir für beliebige ganzzahlige k_1, k_2 unmittelbar aus der Definition (2.) die Gleichungen

$$\mathfrak{P}[(a_1 \mathrm{F}_1(x) + a_2 \mathrm{F}_2(x)) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n] = \sum_{\mu=-m_*}^{\mu=n} (a_1 C_{1,\mu} + a_2 C_{2,\mu}) \cdot \mathfrak{p}(x)^\mu$$

$$\mathfrak{P}[a_1 \mathfrak{p}(x)^{k_1} \mathrm{F}_1(x) \,|\, b_1 \mathfrak{p}(x) \,|\, n + k_1] = \sum_{\nu=-m_1+k_1}^{\nu=n+k_1} (a_1 C_{1,\nu-k_1} \cdot b_1^{-\nu}) \cdot (b_1 \mathfrak{p}(x))^\nu$$

$$\mathfrak{P}[a_2 \mathfrak{p}(x)^{k_2} \mathrm{F}_2(x) \,|\, b_2 \mathfrak{p}(x) \,|\, n + k_2] = \sum_{\nu=-m_2+k_2}^{\nu=n+k_2} (a_2 C_{2,\nu-k_2} \cdot b_2^{-\nu}) \cdot (b_2 \mathfrak{p}(x))^\nu.$$

Hieraus folgt die Gleichung (12.).

Für die erste dieser drei Anschluss-Functionen kann sich die nach Vorschrift (3.) zu bestimmende Anzahl der Glieder, d. i. die Zahl $1+n+m$ kleiner als $1+n+m_*$ ergeben. Dies tritt ein, wenn der Coëfficient $a_1 C_{1,\mu} + a_2 C_{2,\mu}$ für $\mu = -m_*$ zu Null wird.

3.

Umwechselung der Argumente.

Lehrsatz. Bedeutet in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ der Ausdruck

(13.) $\frac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)}$ eine sich vollständig regulär verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$, und die Function

$\mathrm{F}(x)$ eine sich rational verhaltende Function des Argumentes $\mathrm{p}(x)$,

so ist

$$\mathfrak{P}\big[\{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathrm{p}(x)\,|\,n]\}\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,k\big] = \mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,k] \tag{14.}$$

für jede ganze Zahl k, welche die willkürlich gewählte ganze Zahl n nicht übertrifft. Dieser Satz gilt also auch für den Fall, dass von den Anschluss-Functionen eine jede eben so viele Glieder besitzt wie jede andere.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich mit Hülfe der Theorie der analytischen Functionen, wenn man dabei Folgendes beachtet. Entwickelt man $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$, indem man $\mathrm{F}(x)$ zunächst nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ und dann $\mathrm{p}(x)$ nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ entwickelt, so hängen die nicht über die k^{te} Potenz des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$ hinausgehenden Glieder in der Entwickelung von $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ auch nur von den nicht über die k^{te} Potenz des Argumentes $\mathrm{p}(x)$ hinaus gehenden Gliedern in der Entwickelung von $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ ab.

4.

Multiplications-Satz.

Lehrsatz. Bedeutet in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ jeder der drei Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)}, \quad \mathrm{p}(x)^h . \mathrm{H}(x), \quad \mathrm{p}(x)^k . \mathrm{K}(x) \tag{15.}$$

eine sich vollständig regulär verhaltende Function beziehungsweise des Argumentes

$$\mathfrak{p}(x), \quad \mathrm{p}(x), \quad \mathrm{p}(x),$$

so ist

$$
\begin{aligned}
(16.)\quad \mathfrak{P}[\{\mathrm{H}(x).\mathrm{K}(x)\}|\mathfrak{p}(x)|n] &= \mathfrak{P}\big[\{\mathrm{H}(x).\mathfrak{P}[\mathrm{K}(x)|\mathrm{p}(x)|\varkappa+h]\}|\mathfrak{p}(x)|n\big] \\
&= \mathfrak{P}\big[\{\mathrm{K}(x).\mathfrak{P}[\mathrm{H}(x)|\mathrm{p}(x)|\eta+k]\}|\mathfrak{p}(x)|n\big] \\
&= \mathfrak{P}\big[\{\mathfrak{P}[\mathrm{H}(x)|\mathrm{p}(x)|\eta+k].\mathfrak{P}[\mathrm{K}(x)|\mathrm{p}(x)|\varkappa+h]\}|\mathfrak{p}(x)|n\big],
\end{aligned}
$$

wenn die ganzen Zahlen $\varkappa$ und η nicht unter der beliebig gewählten ganzen Zahl n liegen, also auch wenn von den Anschluss-Functionen jede einzelne ebenso viele Glieder, nämlich $1+n+h+k$, besitzt wie jede andere.

Für denjenigen besonderen Fall dieses Lehrsatzes, welcher sich auf einander gleiche Argumente $\mathfrak{p}(x)$ und $\mathrm{p}(x)$ bezieht, ergiebt sich der Beweis, wenn man beachtet, dass das Glied, welches die n^{te} Potenz des Argumentes $\mathrm{p}(x)$ in der Reihen-Entwickelung des Productes $\mathrm{H}(x).\mathrm{K}(x)$ enthält, nur von den Gliedern mit nicht höherer als der $(n+h)^{\text{ten}}$ Potenz in der Reihen-Entwickelung von $\mathrm{K}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ und von den Gliedern mit nicht höherer als der $(n+k)^{\text{ten}}$ Potenz in der Reihen-Entwickelung von $\mathrm{H}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ abhängt. Nachdem der für diesen besonderen Fall geltende Lehrsatz gefunden ist, braucht auf denselben nur der Satz von der Umwechselung der Argumente (Art. 3) angewendet zu werden, damit die obige allgemeine Form (16.) entsteht.

5.

Functionen von Functionen.

Lehrsatz. Bedeuten die Ausdrücke

$$(17.)\qquad \frac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)}, \quad \mathrm{p}(x)^f.\mathrm{F}(x), \quad \mathrm{p}(x)^k.\mathrm{K}(x)$$

in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x)=0$, für ganze Zahlen f, k sich vollständig regulär verhaltende Functionen beziehungsweise des Argumentes

$$\mathfrak{p}(x), \quad \mathrm{p}(x), \quad \mathrm{p}(x),$$

bedeutet ferner der Ausdruck

$$(18.)\qquad \mathrm{H}(\mathrm{K}(x))$$

eine nach Potenzen von $\mathrm{K}(x)$ mit ganzzahligen wachsenden Exponenten fortschreitende Reihe, für welche in dem Falle, dass sie unendlich viele Glieder enthält, der Bereich der gleichmässigen und unbedingten Convergenz auch die Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ mit enthält, also dadurch positive Werthe von k ausschliesst,

und bezeichnet endlich die positive oder negative Zahl

(18.*) $\mathfrak{h}$ denjenigen in dieser Reihen-Entwickelung der H-Function vorkommenden Exponenten der Potenz des Argumentes $\mathrm{K}(x)$, welcher unter den von Null verschiedenen Exponenten für den Fall eines negativen k den kleinsten Werth und für den Fall eines positiven k den grössten Werth hat, so ist

$$(19.)\qquad \mathfrak{P}[\{\mathrm{F}(x).\mathrm{H}(\mathrm{K}(x))\}|\mathfrak{p}(x)|n] = \mathfrak{P}\Big[\{\mathrm{F}(x).\mathrm{H}\{\mathfrak{P}[\mathrm{K}(x)|\mathrm{p}(x)|\varkappa]\}|\mathfrak{p}(x)|n\Big]$$

für jede ganze Zahl $\varkappa$, welche nicht unter der beliebig gewählten ganzen Zahl $n+f+\mathfrak{h}k-k$ liegt.

Der Beweis dieses Lehrsatzes kann daraus hergeleitet werden, dass in dem Ausdrucke $\mathrm{F}(x).\mathrm{H}(\mathrm{K}(x))$ das Glied mit der n^{ten} Potenz von $\mathrm{p}(x)$, welches sich durch die Ausführung der Reihen-Entwickelung von $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ und durch die Einsetzung der Reihen-Entwickelung von $\mathrm{K}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ in die Reihen-Entwickelung von $\mathrm{H}(\mathrm{K}(x))$ nach Potenzen von $\mathrm{K}(x)$ ergiebt, ausser von den Gliedern in der Entwickelung der Function $\mathrm{F}(x)$ nur von den Gliedern bis zur $(n+f+\mathfrak{h}k-k)^{\text{ten}}$ Potenz in der Entwickelung der Function $\mathrm{K}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ abhängt. Auf diese Weise entsteht der Lehrsatz für den Fall, dass die drei Anschluss-Functionen für dasselbe Argument $\mathrm{p}(x)$ gebildet werden. Um die äusseren Anschluss-Functionen wie in (19.) für das andere Argument $\mathfrak{p}(x)$ zu erhalten, braucht man die gefundene Gleichung nur der Umwechselung der Argumente nach Vorschrift (14.) in Art. 3 zu unterwerfen.

Die wiederholte Anwendung der durch die Gleichungen (16.) und (19.) dargestellten Sätze ergiebt den folgenden

Lehrsatz. Bedeuten die Ausdrücke

$$(20.)\qquad \frac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)},\quad \mathrm{p}(x)^{f}.\mathrm{F}(x),\quad \mathrm{p}(x)^{k_\varrho}.\mathrm{K}_\varrho(x),\quad \text{für } \varrho = 1, 2, 3, \ldots$$

in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ für ganze Zahlen $f, k_1, k_2, \ldots$ sich vollständig regulär verhaltende Functionen beziehungsweise des Argumentes

$$\mathfrak{p}(x), \quad \mathrm{p}(x), \quad \mathrm{p}(x),$$

bedeutet ferner jeder der Ausdrücke

$$\text{(21.)} \qquad \mathrm{H}_\varrho(\mathrm{K}_\varrho(x)) \quad \text{für jedes } \varrho = 1, 2, 3, \ldots$$

eine nach Potenzen von $\mathrm{K}_\varrho(x)$ mit ganzzahligen wachsenden Exponenten fortschreitende Reihe, für welche in dem Falle, dass sie unendlich viele Glieder enthält, der Bereich ihrer gleichmässigen und unbedingten Convergenz auch die Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ mit umfasst und dadurch positive Werthe von $k_1, k_2, \ldots$ ausschliesst,

bezeichnet noch

(22.) h_ϱ für den Fall eines negativen Werthes von k_ϱ den niedrigsten in dieser Reihe $\mathrm{H}_\varrho(\mathrm{K}_\varrho(x))$ vorkommenden Exponenten der Potenz des Argumentes $\mathrm{K}_\varrho(x)$ und für den Fall eines positiven Werthes von k_ϱ den höchsten Exponenten, aber

(23.) $\mathfrak{h}_\varrho$ denjenigen in dieser Reihe vorkommenden Exponenten der Potenz des Argumentes $\mathrm{K}_\varrho(x)$, welcher unter den von Null verschiedenen Exponenten für den Fall eines negativen k_ϱ den kleinsten Werth hat und für den Fall eines positiven k_ϱ den grössten Werth hat,

und ist endlich

$$\text{(24.)} \qquad g = \sum_\varrho h_\varrho k_\varrho,$$

so wird

$$\text{(25.)} \quad \mathfrak{P}\big[\mathrm{F}(x) \,.\, \prod_\varrho (\mathrm{H}_\varrho\{\mathrm{K}_\varrho(x)\}) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n\big] = \mathfrak{P}\big[\mathrm{F}(x) \,.\, \prod_\varrho (\mathrm{H}_\varrho\{\mathfrak{P}[\mathrm{K}_\varrho(x) \,|\, \mathrm{p}(x) \,|\, \varkappa_\varrho]\}) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n\big],$$

wenn die ganzen Zahlen $\varkappa_\varrho$ die Bedingung

$$\text{(25.*)} \qquad \varkappa_\varrho \geqq n + f + g - h_\varrho k_\varrho + \mathfrak{h}_\varrho k_\varrho - k_\varrho \quad \text{für } \varrho = 1, 2, 3, \ldots$$

erfüllen.

Auf der rechten Seite der Gleichung (25.) kann man, anstatt von jeder

Function $K_\varrho(x)$ die Anschluss-Function zu nehmen, auch nur von einer beliebigen Anzahl derselben die Anschluss-Functionen bilden.

Die Gleichung (25.) enthält auch den Fall, dass man statt eines Factors $F(x)$ mehrere Factoren $F_r(x)$ hat, von denen man einige durch ihre Anschluss-Functionen ersetzen will; in der That man braucht nur

$$H_r(K_r(x)) = K_r(x) = F_r(x)$$

und

$$h_r = \mathfrak{h}_r = 1, \quad k_r = f_r$$

anzunehmen.

6.
Gegebene Anschluss-Functionen.

Eine Anschluss-Function bezieht sich auf die Umgebung eines einzelnen Punktes. Für vorgeschriebene Anschluss-Functionen, welche sich auf die Umgebungen verschiedener Punkte beziehen, ist von besonderer Wichtigkeit die Auflösung der folgenden

Aufgabe. Innerhalb eines beliebig gegebenen zusammenhängenden, nicht die ganze Ebene, aber doch im Allgemeinen den Werth ∞ umfassenden Gebietes der veränderlichen complexen Grösse x soll die Function $\mathfrak{L}(x)$ bestimmt werden von der Eigenschaft,

dass sie für die Umgebung des Werthes $a_0 = \frac{1}{0}$ und eines jeden der innerhalb des genannten Gebietes beliebig vorausbestimmten Werthe $a_1, a_2, \ldots a_t$ von x eine sich rational verhaltende Function von x sei und zwar dass von ihrer Entwickelung nach Potenzen beziehungsweise von $\frac{1}{x}$, $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $\ldots$, $(x-a_t)$ die Glieder mit nicht höherer als der n_0^{ten}, n_1^{ten}, n_2^{ten}, $\ldots$, n_t^{ten} Potenz, also die Anschluss-Functionen

$$(26.)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathfrak{P}\left[\mathfrak{L}(x)\left|\frac{1}{x}\right|n_0\right] = \sum_{\mu=-m_0}^{\mu=+n_0} A(0,\mu)\left(\frac{1}{x}\right)^\mu = G(0,x) \\ \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)\,|\,x-a_r\,|\,n_r] = \sum_{\mu=-m_r}^{\mu=+n_r} A(r,\mu)(x-a_r)^\mu = G(r,x) \\ \text{für } r = 1, 2, 3, \ldots, t \end{array}\right.$$

mit den von x unabhängigen Coëfficienten $A(0,\mu)$ und $A(r,\mu)$ gegeben seien; dass die Function $\mathfrak{L}(x)$ aber sich für die Umgebung eines jeden, von $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_t$ verschiedenen im Innern des vorgegebenen Gebietes liegenden Werthes des x regulär verhalte.

Eine noch mehr beschränkende Aufgabe wird diejenige sein, worin dies zuletzt geforderte reguläre Verhalten der Function $\mathfrak{L}(x)$ auch ein vollständig reguläres sein soll.

Auflösung. Ausserhalb des für die Function $\mathfrak{L}(x)$ vorgegebenen Gebietes will ich die Werthe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ beliebig von einander verschieden oder zum Theil oder auch alle einander gleich angenommen denken. Für den Fall, dass der Werth $\frac{1}{0}$ nicht innerhalb des gegebenen Gebietes liegt, will ich $\alpha = \frac{1}{0}$ annehmen und, weil in diesem Falle eine Anschluss-Function für die Umgebung des Werthes $x = \frac{1}{0}$ nicht gegeben ist, so will ich dann $a_0 = 0$ setzen, wenn nämlich für die Umgebung des Werthes $x = 0$ die Anschluss-Function gegeben ist; anderen Falls sollen in den nachfolgenden Ausdrücken die Glieder mit dem Index 0 auszulassen sein. Es sind also $a_0, a_1, a_2, \ldots a_t$ alle von einander und von sämmtlichen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ verschieden;

(27.) es ist a_ϱ nicht gleich $\frac{1}{0}$, wenn $\varrho > 0$;

es sind in

$$(28.)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathfrak{P}\left[\mathfrak{L}(x)\left|\frac{1}{x}\right|n_0\right] = \sum\limits_{\mu=-m_0}^{\mu=+n_0} A(0,\mu)\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu} = \mathrm{G}(0,x) \\ \text{für } a_0 = \frac{1}{0} \text{ und } \alpha_0 \text{ nicht gleich } \frac{1}{0} \end{array}\right.$$

die von x unabhängigen Coëfficienten $A(0,\mu)$ gegeben. Für den Fall aber, dass, während der Werth $x = \frac{1}{0}$ sich in dem vorgegebenen Gebiete befindet (also α_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$ ist), dennoch eine Anschluss-Function für die Umgebung des Werthes $\frac{1}{0}$ nicht vorgegeben ist, würde die Gleichung (28.) nicht in Betracht kommen und in jeder folgenden auf die Lösung sich beziehenden Formel das Glied mit dem Index 0 auszulassen sein.

Es sind nach obiger Annahme in

$$(29.)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)\,|\,x\,|\,n_0] = \sum\limits_{\mu=-m_0}^{\mu=+n_0} A(0,\mu)\,x^{\mu} = \mathrm{G}(0,x) \\ \text{für } \alpha_0 = \frac{1}{0},\ \ a_0 = 0 \end{array}\right.$$

die von x unabhängigen Coëfficienten $A(0,\mu)$ gegeben. Für den Fall aber, dass, während der Werth $\frac{1}{0}$ sich nicht in dem für die Function $\mathfrak{L}(x)$ vorgegebenen Gebiete befindet (also α_0 gleich $\frac{1}{0}$ angenommen ist), eine Anschluss-Function für die Umgebung des Werthes 0 nicht vorgegeben ist, würde die Gleichung (29.) nicht in Betracht kommen und in jeder folgenden auf die Lösung sich beziehenden Formel das Glied mit dem Index 0 auszulassen sein.

Um für die verschiedenen in Betracht kommenden Fälle eine gemeinsame Form der Lösung zu erhalten, setze ich

(30.) $\mathfrak{q}(r,x) = \frac{1}{x-\alpha_r}$, wenn α_r nicht gleich $\frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist;

(31.) $\mathfrak{p}(r,x) = \frac{x-\alpha_r}{x-\alpha_r} = 1-\frac{\alpha_r-\alpha_r}{x-\alpha_r} = 1-\frac{\mathfrak{q}(r,x)}{\mathfrak{q}(r,a_r)}$, wenn α_r nicht gleich $\frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist;

(32.) $\mathfrak{p}(0,x) = \frac{1}{x-\alpha_0} = \mathfrak{q}(0,x)$, wenn α_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes $a_0 = \frac{1}{0}$ eine Anschluss-Function (28.) vorgegeben ist;

(33.) $\mathfrak{p}(0,x) = 1 = \mathfrak{q}(0,x)$, wenn α_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes $\frac{1}{0}$ eine Anschluss-Function nicht vorgegeben ist;

(34.) $\mathfrak{q}(r,x) = x$, wenn $\alpha_r = \frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist;

(35.) $\mathfrak{p}(r,x) = 1-\frac{x}{a_r} = 1-\frac{\mathfrak{q}(r,x)}{\mathfrak{q}(r,a_r)}$, wenn $\alpha_r = \frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist;

(36.) $\mathfrak{p}(0,x) = x = \mathfrak{q}(r,x)$, wenn $\alpha_0 = \frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes $\alpha_0 = 0$ eine Anschluss-Function (29.) vorgegeben ist;

(37.) $\mathfrak{p}(0,x) = 1 = \mathfrak{q}(0,x)$, wenn $\alpha_0 = \frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes 0 eine Anschluss-Function nicht vorgegeben ist.

Ferner bedeute

(38.) $\varphi(\varrho,x)$ eine sich in der Umgebung jedes endlichen, einem innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegenden x entsprechenden, Werthes $\mathfrak{p}(\varrho,x)$ regulär und in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(\varrho,x) = 0$ vollständig regulär verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(\varrho,x)$, (39.) $\psi(\varrho, x)$ eine in der Umgebung jedes endlichen, einem innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegenden x entsprechenden, Werthes $\mathfrak{p}(\varrho, x)$ sich regulär verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(\varrho, x)$,

(40.) $\mathfrak{W}(\varrho, s, x)$, $\mathfrak{V}(\sigma, x)$ in der Umgebung jedes endlichen, einem innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegenden x entsprechenden, Werthes beziehungsweise von $\mathfrak{p}(s, x)$, $\mathfrak{p}(\sigma, x)$, je eine sich vollständig regulär verhaltende Function dieser Grössen als Argumente.

Schliesslich setze ich

$$(41.)\qquad \mathfrak{W}(\varrho, x) = \prod_{s=0}^{s=t} \mathfrak{p}(s, x)^{1+m_s+n_s}\, \mathfrak{W}(\varrho, s, x)$$

$$(42.)\qquad \mathfrak{V}(x) = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=t} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma}\, \mathfrak{V}(\sigma, x)$$

$$(43.)\quad \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{V}(x)\,\Phi\left\{\sum_{\varrho=0}^{\varrho=t} \mathfrak{W}(\varrho, x)\left\{\varphi(\varrho, x)\,.\,\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\varrho, x)\,.\,\varphi(\varrho, x)}\,\Psi\left(\frac{G(\varrho, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\}\left|\mathfrak{p}(\varrho, x)\right|-1\right] + \psi(\varrho, x)\right\}\right\},$$

worin

(44.) $\Psi\frac{G(\varrho, x)}{\mathfrak{V}(x)}$ für ein innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegendes x eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(\varrho, x) = 0$ sich regulär verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(\varrho, x)$ von solcher Beschaffenheit bedeutet, dass zu ihr die Function

(45.) Φ invers ist, also

$$\Phi\left\{\Psi\left(\frac{G(\varrho, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\} = \frac{G(\varrho, x)}{\mathfrak{V}(x)}$$

wird und zwar dass die Function

(46.) Φ eine nach Potenzen des unter ihr in Formel (43.) stehenden Argumentes mit wachsenden nicht negativen Exponenten fortschreitende Reihe bedeutet, welche die erste Potenz enthält und für alle in dem vorgegebenen Gebiete liegende x gleichmässig und unbedingt convergirt.

Die in den Nummern (1.) und (2.), und (30.) bis (46.) ausgesprochenen Bestimmungsweisen für die einzelne Anschluss-Function $\mathfrak{P}$ und für die übrigen auf der rechten Seite der Gleichung (43.) vorkommenden Functionen genügen, wie ich im nachfolgenden Artikel beweisen werde, um durch die Formel (43.) die zu Eingang des laufenden Artikels gestellte erste Aufgabe für den Fall einer endlichen Anzahl t oder $t+1$ von Anschluss-Stellen allgemein zu lösen.

Die zweite Aufgabe fordert noch, dass die zu suchende Function in dem gegebenen Gebiete ausser bei den Anschluss-Stellen sich vollständig regulär verhalte; für sie bietet die Formel (43.) ebenfalls die allgemeine Lösung in dem Falle einer endlichen Anzahl t oder $t+1$ von Anschluss-Stellen, wenn noch die Bedingung erfüllt wird, dass die Function

(47.) Φ für keinen Werth des in (43.) unter ihr stehenden Argumentes, welcher einem im vorgegebenen Gebiete liegenden Werthe von x entspricht, den Werth Null annimmt.

Für den Fall einer unbegrenzt wachsenden Anzahl von gegebenen Anschluss-Stellen tritt noch die Bedingung hinzu, dass die Functionen $\mathfrak{W}(\varrho, s, x)$, $\mathfrak{V}(\sigma, x)$ die Convergenz der in den Gleichungen (41.), (42.) vorkommenden unendlich vielgliedrigen Producte und die Functionen $\varphi(\varrho, x)$, $\psi(\varrho, x)$ die Convergenz der in (43.) vorkommenden unendlich vielgliedrigen Summe bewirken.

Damit der Umstand, von welchem jene Convergenz abhängt, besonders hervortritt, will ich die Functionen in den Formen

$$(48.)\quad \mathfrak{W}(\varrho, s, x) = \mathrm{W}(\varrho, s, x) \,.\, \Phi_{\varrho, s}\left\{\mathfrak{P}\left[\Psi_{\varrho, s}\left(\mathfrak{p}(s, x)^{-1-m_s-n_s}\right) \mid \mathfrak{q}(s, x) \mid k_s\right]\right\}$$

$$(49.)\quad \mathfrak{V}(\sigma, x) = \mathrm{V}(\sigma, x) \,.\, \Phi_\sigma\left\{\mathfrak{P}\left[\Psi_\sigma\left(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{+m_\sigma}\right) \mid \mathfrak{q}(\sigma, x) \mid h_\sigma\right]\right\}$$

$$(50.)\quad \varphi(\varrho, x) = \varphi(0, \varrho, x)\, \mathrm{Q}(\varrho, x)^{\varkappa_\varrho} \,.\, \mathfrak{P}\left[\mathrm{Q}(\varrho, x)^{-\varkappa_\varrho} \mid \mathfrak{p}(\varrho, x) \mid m_\varrho + n_\varrho\right]$$

$$(51.)\quad \mathrm{R}(\varrho, x) = \varphi(\varrho, x) \,.\, \mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\varrho, x) \,.\, \varphi(\varrho, x)} \,.\, \Psi \frac{\mathrm{G}(\varrho, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right\} \mid \mathfrak{p}(\varrho, x) \mid -1\right]$$

$$(52.)\quad \psi(\varrho, x) = \psi(0, \varrho, x) - \mathfrak{P}\left[\mathrm{R}(\varrho, x) \mid \mathfrak{q}(\varrho, x) \mid \lambda_\varrho\right]$$

darstellen.

Hier haben die Functionen

(53.) $\varphi(0, \varrho, x)$, $\psi(0, \varrho, x)$, $\mathrm{W}(\varrho, s, x)$, $\mathrm{V}(\sigma, x)$ dieselben allgemeinen Eigenschaften, welche beziehungsweise für $\varphi(\varrho, x)$, $\psi(\varrho, x)$, $\mathfrak{W}(\varrho, s, x)$, $\mathfrak{V}(\sigma, x)$ unter Nr. (38.), (39.), (40.) ausgesprochen sind;

die Functionen

(54.) $\Psi_{\varrho,s}$, Ψ_σ mit den unter ihnen in (48.), (49.) stehenden Argumenten sind in der Umgebung beziehungsweise von $\frac{\mathfrak{q}(s,x)}{\mathfrak{q}(s,a_s)} = \frac{1}{\infty}$, $\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)} = \frac{1}{\infty}$, sich regulär verhaltende Functionen beziehungsweise von den Argumenten $\mathfrak{q}(s,x)$, $\mathfrak{q}(\sigma,x)$;

(55.) $\Phi_{\varrho,s}\Phi_\sigma$ sind die inversen Functionen beziehungsweise von $\Psi_{\varrho,s}\Psi_\sigma$, also ist

$$\Phi_{\varrho,s}\Psi_{\varrho,s}(\mathfrak{p}(s,x)^\gamma) = \mathfrak{p}(s,x)^\gamma, \quad \Phi_\sigma\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^\gamma) = \mathfrak{p}(\sigma,x)^\gamma$$

für jede ganze Zahl γ, und zwar bedeuten

(56.) $\Phi_{\varrho,s}$, Φ_σ nach Potenzen der unter ihnen beziehungsweise in (48.), (49.) stehenden Argumente mit wachsenden nicht negativen Exponenten fortschreitende Reihen, welche für alle in dem vorgegebenen Gebiete liegende x gleichmässig und unbedingt convergiren; dieselben werde ich Convergenz-Factoren in Producten (nämlich der Ausdrücke (41.) und (42.)) nennen;

(57.) $Q(\varrho,x)$ ist eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(\varrho,x) = 0$ sich vollständig regulär verhaltende Function von dem Argumente $\mathfrak{p}(\varrho,x)$, und für das vorgegebene Gebiet eine eindeutige analytische, nicht unendlich gross werdende Function von x.

Die Function $Q(\varrho,x)$ dividirt durch ihre eingliedrige für das Argument $\mathfrak{p}(\varrho,x)$ gebildete Anschluss-Function giebt bei genügend grossem ϱ einen Werth, dessen absoluter Betrag ein echter Bruch ist. Besonders einfache Formen von $Q(\varrho,x)$ sind $1-\mathfrak{p}(\varrho,x)$ und $e^{1-\mathfrak{p}(\varrho,x)}$.

Den ganzen von $Q(\varrho,x)$ abhängigen Factor, mit welchem die Function $\varphi(0,\varrho,x)$ auf der rechten Seite der Gleichung (50.) multiplicirt ist, werde ich Convergenz-Factor in einer Summe (nämlich des Ausdruckes (43.)) nennen;

(57*.) die auf der rechten Seite der Gleichung (52.) mit $\psi(0,\varrho,x)$ durch Subtraction verbundene Anschluss-Function werde ich Convergenz-Subtrahend in einer Summe (nämlich des Ausdrucks (43.)) nennen.

(58.) k_s, h_σ, $\varkappa_\varrho$, λ_ϱ sind ganze Zahlen, deren genügend gross gewählte Werthe die Convergenz der Producte und der Summen für $t = \infty$ hervorbringen sollen.

In manchen Fällen kann es vorteilhaft sein, die Lösung der zu Anfang dieses Artikels bezeichneten Aufgabe durch den Ausdruck

$$(59.)\quad \mathfrak{L}(x) = \mathfrak{B}(x)\prod_{\varrho=0}^{\varrho=t}\Theta_\varrho\left\{\mathfrak{W}(\varrho,x)\left\{\varphi(\varrho,x)\,.\,\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\varrho,x)\,.\,\varphi(\varrho,x)}\,.\,\mathrm{T}_\varrho\left(\frac{\mathrm{G}(\varrho,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\right\}\left|\mathfrak{p}(\varrho,x)\right|-1\right]+\psi(\varrho,x)\right\}\right\}$$

darzustellen, worin die Functionen

(60.) T_ϱ und Θ_ϱ die gleichen Bedingungen wie nach (44.), (45.), (46.) beziehungsweise die Functionen Ψ und Φ, also auch die Gleichung

$$(60^*.)\qquad \Theta_\varrho\left\{\mathrm{T}_\varrho\left(\frac{\mathrm{G}(\varrho,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\right\} = \frac{\mathrm{G}(\varrho,x)}{\mathfrak{B}(x)}$$

erfüllen,
aber ausserdem noch die Reihe für

(61.) Θ_ϱ das Glied mit der nullten Potenz des Argumentes und zwar in der besonderen Form der positiven Einheit enthält.

Für einige einfache Formen der in den Convergenz-Factoren (48.), (49.), (50.) noch willkürlich gelassenen Functionen und für die Convergenz-Subtrahenden (52.) werde ich die Möglichkeit, die gleichmässige und unbedingte Convergenz der Producte und der Summen für $t = \infty$ zu erreichen, nachweisen.

Anstatt der in den Convergenz-Factoren und Convergenz-Subtrahenden der Formeln (48.) bis (52.) angewendeten Anschluss-Functionen $\mathfrak{P}$ können zu demselben Zwecke auch geeignet gewählte ganze algebraische Functionen, insbesondere Interpolations-Functionen benutzt werden.

7.

Endliche Anzahl von Anschluss-Stellen.

Um für den Fall einer endlichen Anzahl t oder $t+1$ vorgegebener Anschluss-Stellen zu beweisen, dass die rechten Seiten der Gleichungen (43.) und (59.) die in den beiden Aufgaben des Artikel 6 zu suchenden Functionen darstellen, hat man zunächst unmittelbar aus den unter Nr. (30.) bis (61.) ausgesprochenen Voraussetzungen zu schliessen, dass die eben bezeichneten Ausdrücke für die in dem vorgegebenen Gebiete befindlichen Werthe von x

eindeutige analytische Functionen des Argumentes x werden und in jenem Gebiete nur an den gegebenen Anschluss-Stellen unendlich grosse Werthe annehmen können.

Zur Untersuchung der Frage, ob die in den Gleichungen (26.), (28.), (29.) vorgeschriebenen Formen der einzelnen Anschluss-Functionen den Ausdrücken (43.) und (59.) zukommen, setzen wir, um dabei die verschiedenen Fälle nicht gesondert behandeln zu müssen,

(62.) $\pi(r, x) = x - a_r$ für $r > 0$, wenn die Gleichung (26.) erfüllt sein soll;

(63.) $\pi(r, x) = \frac{1}{x}$ für $r = 0$, wenn die Gleichung (28.) erfüllt sein soll;

(64.) $\pi(r, x) = x$ für $r = 0$, wenn die Gleichung (29.) erfüllt sein soll.

Die unter Nr. (30.) bis (36.) für $\mathfrak{p}(r, x)$ getroffenen Bestimmungen lassen ersehen, dass in allen den Fällen, in welchen eine Anschluss-Function durch die Aufgabe vorgegeben ist,

(65.) $\frac{\mathfrak{p}(r, x)}{\pi(r, x)}$ eine in der Umgebung des Werthes $\pi(r, x) = 0$ sich vollständig regulär verhaltende Function des Argumentes $\pi(r, x)$ wird.

Die gesuchte Anschluss-Function

$$\mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x) \,|\, \pi(r, x) \,|\, n_r] \tag{66.}$$

worin $\mathfrak{L}(x)$ den durch die zweite Seite der Gleichung (43.) dargestellten Ausdruck bedeutet, können wir mit Hülfe der Gleichung (19.) bestimmen, wenn wir n in n_r, $\mathfrak{p}(x)$ in $\pi(r, x)$, $\mathrm{p}(x)$ in $\mathfrak{p}(r, x)$, $\mathrm{F}(x)$ in $\mathfrak{B}(x)$, f in m_r, die H-Function in die Φ-Function, $\mathfrak{h}$ in $+1$, und $\mathrm{K}(x)$ in den Ausdruck:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=t} \left\{ \mathfrak{W}(\varrho, x) \cdot \varphi(\varrho, x) \cdot \mathfrak{P}\left[\left\{ \frac{1}{\mathfrak{W}(\varrho, x) \cdot \varphi(\varrho, x)} \cdot \Psi\left(\frac{\mathrm{G}(\varrho, x)}{\mathfrak{B}(x)} \right) \right\} \,|\, \mathfrak{p}(\varrho, x) \,|\, -1 \right] + \mathfrak{W}(\varrho, x) \cdot \psi(\varrho, x) \right\} \tag{67.}$$

übergehen lassen.

Von dem Ausdrucke (67.) haben wir also nun die zur Ordnung $n_r + m_r$, zum Argument $\mathfrak{p}(r, x)$ und zu der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(r, x) = 0$ zugehörige Anschluss-Function zu finden. Da die Anschluss-Function einer Summe von Functionen gleich der Summe der von den einzelnen Functionen gebildeten Anschluss-Functionen ist, so erhalten wir hier für die aufzusuchende Anschluss-Function von (67.) die Summe der Glieder

$$(68.)\quad \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{W}(\varrho,x).\varphi(\varrho,x).\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\varrho,x).\varphi(\varrho,x)}.\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(\varrho,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\right\}\middle|\mathfrak{p}(\varrho,x)\middle|-1\right]\right\}\middle|\mathfrak{p}(r,x)\middle|n_r+m_r\right]$$

und der Glieder

$$(69.)\quad \left\{\begin{array}{c}\mathfrak{P}[\{\mathfrak{W}(\varrho,x).\psi(\varrho,x)\}\,|\,\mathfrak{p}(r,x)\,|\,n_r+m_r]\\ \text{für } \varrho=0,1,2,3,\ldots,t.\end{array}\right.$$

Aus der Definition der Anschluss-Function $\mathfrak{P}$ durch Gleichung (1.) und (2.), aus der Bestimmung der Function $\mathfrak{W}(\varrho,x)$ durch Gleichung (41.), und aus den unter Nr. (38.), (39.) aufgestellten Eigenschaften von $\varphi(\varrho,x)$ und $\psi(\varrho,x)$ ist unmittelbar ersichtlich, dass jedes Glied (69.) und jedes zu einem von r verschiedenen ϱ zugehöriges Glied (68.) gleich Null wird. Die gesuchte Anschluss-Function von dem ganzen Ausdrucke (67.) zieht sich also zu

$$(70.)\quad \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{W}(r,x).\varphi(r,x).\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(r,x).\varphi(r,x)}.\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(r,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\right\}\middle|\mathfrak{p}(r,x)\middle|-1\right]\right\}\middle|\mathfrak{p}(r,x)\middle|n_r+m_r\right]$$

zusammen und wird weiter nach dem Multiplications-Satze in Nr. (16.) gleich

$$(71.)\quad \mathfrak{P}\left[\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(r,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\middle|\mathfrak{p}(r,x)\middle|n_r+m_r\right].$$

Der Ausdruck (71.) tritt also bei der oben ausgeführten Anwendung der Gleichung (19.) auf die zu bestimmende Anschluss-Function (66.) an die Stelle von

$$\mathfrak{P}[\mathrm{K}(x)\,|\,\mathrm{p}(x)\,|\,\varkappa],$$

und wir erhalten

$$(72.)\quad \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)\,|\,\pi(r,x)\,|\,n_r] = \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{B}(x).\Phi\left\{\mathfrak{P}\left[\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(r,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\middle|\mathfrak{p}(r,x)\middle|n_r+m_r\right]\right\}\right\}\middle|\pi(r,x)\middle|n_r\right].$$

Auf die zweite Seite dieser Gleichung wenden wir wieder die Transformations-Gleichung (19.) an, indem wir jetzt $\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(r,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)$ für $\mathrm{K}(x)$ setzen, aber im Uebrigen die oben gebrauchten Beziehungen beibehalten. Wir finden dadurch

$$(73.)\quad \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)\,|\,\pi(r,x)\,|\,n_r] = \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{B}(x).\Phi\left\{\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(r,x)}{\mathfrak{B}(x)}\right)\right\}\right\}\middle|\pi(r,x)\middle|n_r\right]$$

oder, weil nach (45.) die Function Φ und Ψ zu einander invers sind,

$$(74.)\quad \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)|\pi(r,x)|n_r] = \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{V}(x)\,.\,\frac{\mathrm{G}(r,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right\}|\pi(r,x)|n_r\right] = \mathfrak{P}[\mathrm{G}(r,x)|\pi(r,x)|n_r] = \mathrm{G}(r,x),$$

so dass also der in Gleichung (43.) aufgestellte Ausdruck für $\mathfrak{L}(x)$ die unter Nr. (26.), (28.), (29.) geforderten Bedingungen für $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, t$ erfüllt.

Dass diesen Bedingungen auch der in Gleichung (59.) für $\mathfrak{L}(x)$ dargestellte Ausdruck genügt, wird auf entsprechende Weise mit Hülfe der Gleichung (25.) dargethan. Es kommt dabei in Betracht, dass für jedes von r verschiedene ϱ die Gleichung

$$(75.)\quad \Theta_\varrho \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{W}(\varrho,x)\,.\,\varphi(\varrho,x)\,.\,\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\varrho,x)\,.\,\varphi(\varrho,x)}\,.\,\mathrm{T}_\varrho\left(\frac{\mathrm{G}(\varrho,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\}|\mathfrak{p}(\varrho,x)|-1\right]+\mathfrak{W}(\varrho,x)\,.\,\psi(\varrho,x)\right\}\Big|\pi(r,x)\Big|m_r+n_r\right] =$$

wegen der unter (60.) und (61.) für die Functionen Θ_ϱ und T_ϱ geforderten Eigenschaften gilt.

8.

Convergenz-Factoren in Producten.

Die Anzahl t oder $t+1$ der Anschluss-Stellen a_r kann in der Weise unbegrenzt wachsen, dass dieselben in unbegrenzter Nähe der Werthe α_r, wo die gesuchte Function $\mathfrak{L}(x)$ aufhören darf, sich rational zu verhalten, unbegrenzt zahlreich neben einander liegen. Es wird dann für ein unendlich grosses r der Ausdruck $\mathfrak{q}(r, a_r)$, welcher nach (30.) und (34.) bei einem endlichen Werthe von α_r gleich $\frac{1}{a_r-\alpha_r}$, aber bei $\alpha_r = \frac{1}{0}$ gleich a_r ist, einen unendlich grossen Werth annehmen.

Der einfacheren Uebersicht wegen wollen wir die Indices $r = 1, 2, 3, \ldots$ — also mit Ausnahme des Index 0, über welchen wir schon in (32.) und (36.) verfügt haben — auf solche Weise angebracht denken, dass die absoluten Beträge von $\mathfrak{q}(r, a_r)$ wachsen oder doch nicht abnehmen, wenn r zunimmt, also dass, nach der von Herrn Weierstrass eingeführten Bezeichnungs-Weise der absoluten Beträge,

$$(76.)\quad \left\{\begin{aligned} &|\mathfrak{q}(r, a_r)| \leqq |\mathfrak{q}(r+1, a_{r+1})| \qquad \text{für } r \geqq 1 \\ &\lim_{r=\infty} |\mathfrak{q}(r, a_r)| = \infty \end{aligned}\right.$$

wird.

Es ist nun zu beweisen, dass bei geeigneter Wahl der noch willkürlich gelassenen Functionen die unendlich vielgliedrigen Summen und Producte gleichmässig und unbedingt convergiren.

Wir wollen zunächst für das durch (42.) und (49.) definirte Product $\mathfrak{B}(x)$, nämlich für

$$(77.)\quad \mathfrak{B}(x) = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=t} \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma^\sigma}.\mathrm{V}(\sigma,x).\Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\,|\,h_\sigma]\},\quad t=\infty$$

geeignete Convergenz-Factoren Φ_σ zu bestimmen suchen.

Nach dem Satze über Functionen von Anschluss-Functionen (Gleichung (19.)) und nach den unter (55.) getroffenen Bestimmungen wird

$$(78.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\Big[\big\{\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}.\Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma'(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\,|\,h_\sigma]\}\big\}\Big|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\Big|\,h_\sigma\Big] \\ \quad = \mathfrak{P}\Big[\big\{\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}.\Phi_\sigma\{\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma})\}\big\}\,|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\,|\,h_\sigma\Big] = 1. \end{cases}$$

Nach der Definition der Anschluss-Function durch (1.) und (2.) folgt also, dass für genügend kleine Werthe von $\mathfrak{q}(\sigma,x)$ die Gleichung

$$(79.)\quad \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}.\Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\,|\,h_\sigma]\} = 1+\mathfrak{q}(\sigma,x)^{1+h_\sigma}.\mathfrak{P}^*(\mathfrak{q}(\sigma,x))$$

besteht, wenn $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{q}(\sigma,x))$ eine, nach Potenzen von $\mathfrak{q}(\sigma,x)$, mit wachsenden ganzzahligen, nicht negativen Exponenten fortschreitende Reihe, welche für genügend kleine absolute Beträge von $\mathfrak{q}(\sigma,x)$ gleichmässig und unbedingt convergirt, bedeutet. Die Gleichungen (31.) und (35.) haben die gemeinsame Form

$$(80.)\qquad \mathfrak{p}(\sigma,x) = 1-\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\quad \text{für } \sigma \geqq 1,$$

also kann man die Gleichung (79.) für $\sigma \geqq 1$ vortheilhafter in der Form

$$(81.)\quad \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}.\Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\,|\,h_\sigma]\} = 1+\left(\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right)^{1+h_\sigma}.\mathfrak{P}^{**}\left(\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right)$$

darstellen, wenn man mit $\mathfrak{P}^{**}\left(\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right)$ eine für genügend klein gewählte Werthe von $\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}$ sich regulär verhaltende Function von dem Argumente $\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}$ bezeichnet.

Es wird daher für $\sigma \geqq 1$ und $h_\sigma \geqq 0$

$$(82.)\quad \log\{\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x))^{m_\sigma} | \mathfrak{q}(\sigma, x) | h_\sigma]\} = \sum_{\eta = 1+h_\sigma}^{\eta=+\infty} C(\eta, \sigma) . \left\{\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}\right\}^\eta,$$

worin die von der Form der Function Ψ_σ und von den Grössen $\eta, a_\sigma, \alpha_\sigma, m_\sigma, h_\sigma$ abhängigen, von x aber unabhängigen Coëfficienten $C(\eta, \sigma)$, welche in der über die unbegrenzt wachsenden positiven ganzen Zahlen η auszudehnenden Summe auftreten, eine für genügend kleine Werthe der absoluten Beträge von $\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}$ geltende gleichmässige und unbedingte Convergenz gestatten.

Um die Untersuchung der Convergenz des Ausdrucks (77.) zu vereinfachen, will ich nur diejenigen Glieder eingehender betrachten, für welche σ gross genug ist, damit $|\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \geqq e$ werde. Zu diesen Zahlen σ will ich die positiven ganzen Zahlen ε_σ durch

$$(83.)\qquad e \leqq e^{\varepsilon_\sigma} \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| < e^{\varepsilon_\sigma + 1}$$

in Beziehung setzen. Es sei

(84.) $e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a}}$ eine absolute Grösse, welche von der Anzahl der Werthe a_σ, die der Bedingung (83.) für ein beliebig gegebenes ε_σ genügen, nicht übertroffen wird, und es sei dabei $\mathfrak{a}$ eine von σ und ε_σ unabhängig bestimmbare Grösse.

Ich will nun die Annahme machen, die Functionen Ψ_σ seien von der Beschaffenheit gewählt, dass für jedes ε_σ, für jedes der hierzu nach (83.) zugehörigen σ, für jedes der zu diesen σ zugehörigen h_σ und für jede ein solches h_σ übertreffende ganze Zahl η die Bedingung

$$(85.)\qquad |C(\eta, \sigma)| \leqq e^{\gamma\eta + c h_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m} + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma + \mathfrak{c}}$$

erfüllt wird und zwar in der Weise, dass

(86.) $\gamma, c, \mathfrak{m}_\sigma, \mathfrak{m}, \mathfrak{c}_\sigma, \mathfrak{c}$ unabhängig von η und h_σ bestimmt werden können und dass

(87.) $\gamma, \mathfrak{c}$ auch noch von m_σ unabhängig bestimmt werden können.

Die Grössen

(88.) $\mathfrak{c}_\sigma, \mathfrak{c}$ will ich unabhängig von m_σ bestimmt denken, so dass in den Fällen, wo jeder Coëfficient $C(\eta, \sigma)$ die Grösse m_σ nur in der Form eines allein von m_σ abhängigen Factors enthält, die Grössen $\mathfrak{m}_\sigma$ und $\mathfrak{m}$ und auch nur diese allein als von m_σ abhängig gewählt werden können. Zur Abkürzung will ich den von σ unabhängigen reellen Werth ξ durch die Bedingung

$$e^{\xi} \geqq |\mathfrak{q}(\sigma, x)| \tag{89.}$$

einführen, welche für jedes der Nr. (83.) genügenden σ erfüllt sein soll.

Von der weiteren Untersuchung der Convergenz des Ausdrucks (77.) will ich nun auch noch diejenige endliche Anzahl von Gliedern ausschliessen, für welche σ zu klein wäre, um die Bedingungen

$$\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma \geqq 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c \geqq 1 \tag{90.}$$

erfüllen zu können.

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=\infty} |C(\eta, \sigma)| \cdot \left|\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}\right|^\eta &\leqq \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=\infty} e^{\gamma\eta + ch_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m} + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma + \mathfrak{c} + \xi\eta - \varepsilon_\sigma \eta} \\ &\leqq e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c) + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \varepsilon_\sigma c_\sigma - c + \mathfrak{m} + \mathfrak{c}} . \left\{1 - e^{-(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma)}\right\}^{-1} \\ &< e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c) + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma - c + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} + 1}, \end{aligned}\right. \tag{91.}$$

weil nämlich $1 - e^{-(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma)} \geqq 1 - e^{-1} > e^{-1}$ ist. Führen wir noch die Grösse

$$\mathfrak{k}_\sigma = 1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{c}_\sigma}{1 + h_\sigma} \tag{92.}$$

ein und berücksichtigen Nr. (84.), so können wir aus der zuletzt gefundenen Ungleichung (91.) auch die folgende ableiten

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma=+\infty} \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=+\infty} |C(\eta, \sigma)| \cdot \left|\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}\right|^\eta &< \sum_{\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1}}^{+\infty} e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a} - (1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c) + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma - c + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} + 1} \\ < \sum_{\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1}}^{+\infty} e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma \mathfrak{k}_\sigma - \xi - \gamma - c) + \mathfrak{a} + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} - c + 1} &\leqq e^{\mathfrak{a} + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} - c + 1} . \sum_{\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1}}^{+\infty} e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma \mathfrak{k}_\sigma - \xi - \gamma - c)}, \end{aligned}\right. \tag{93.}$$

worin jede der letzten drei Summationen über die ganzen Zahlen $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma_1}$, $1 + \varepsilon_{\sigma_1}$, $2 + \varepsilon_{\sigma_1}$, $\ldots$, $+\infty$ zu erstrecken ist und worin dem, unter diesen Summen bei $\mathfrak{a}_\sigma$, h_σ, $\mathfrak{m}_\sigma$, $\mathfrak{c}_\sigma$, $\mathfrak{k}_\sigma$ vorkommenden, σ derjenige nach Vorschrift (83.) zum jedesmaligen ε_σ zugehörige Zahlenwerth zu ertheilen ist, welcher die Zahl h_σ am kleinsten werden lässt. Hieraus erhalten wir den Lehrsatz:

Giebt man der Veränderlichen x nur solche Werthe, welche keinen der Ausdrücke $\mathfrak{q}(\sigma, x)$ für $\sigma = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$ unendlich gross werden lassen, bestimmt man ferner

$$(94.) \qquad \prod_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} \mathrm{V}(\sigma, x)$$

als eine für solche x sich vollständig regulär verhaltende Function,
wählt man weiter die Functionen Φ_σ und Ψ_σ so, dass die Bedingungen (54.), (55.), (56.), (82.), (85.), (86.), (87.) erfüllt werden,
und nimmt man endlich die nicht negativen Zahlen h_σ so gross, dass bei den in (83.) und (84.) getroffenen Festsetzungen der Ausdruck

$$(95.) \qquad 1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{c}_\sigma}{1 + h_\sigma}$$

für die über einem beliebig gewählten Werthe liegenden σ eine positive nicht verschwindend kleine Grösse wird,
so convergirt der Logarithmus des Ausdrucks (77.) für $t = \infty$ rascher als eine gleichmässig und unbedingt convergirende Reihe, deren Glieder sich rational verhaltende Functionen von x sind.

In der That man braucht in (82.) und (93.) die endlich bleibende Zahl σ_1 nur gross genug zu nehmen, um für jedes nicht unter ihr liegende σ die schon genannten Bedingungen (83.), (90.), (95.) und auch die Bedingung

$$(96.) \qquad \varepsilon_\sigma > \frac{\xi + \gamma + c}{\mathfrak{k}_\sigma}$$

zu erfüllen, und um damit die unter Nr. (93.) auftretende Summe, welche über die ganzen Zahlen ε_σ von ε_{σ_1} bis $+\infty$ zu erstrecken ist, rascher als eine unbedingt convergirende geometrische Reihe convergiren zu lassen.

Die hier geforderten Eigenschaften der in den Convergenz-Factoren auftretenden Functionen ergeben sich zum Beispiel für

$$(97.) \qquad \Psi_\sigma(1-v) = \log(1-v) = -v - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3 - \cdots = u,$$

also

$$\Phi_\sigma(u) = e^u = 1 + u + \frac{1}{1\,.\,2}u^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}u^3 + \cdots = 1 - v$$

und auch für

$$(98.)\qquad \Psi_\sigma(1-v) = \log\{1+\frac{1}{m_\sigma h_\sigma}\log(1-v)\} = u,$$

also

$$\Phi_\sigma(u) = e^{m_\sigma h_\sigma(-1+e^u)} = 1-v,$$

wenn $\sigma \geqq 1$ ist, denn in beiden Fällen bleibt $\left|\frac{1}{m_\sigma h_\sigma} C(\eta, \sigma)\right|$ unterhalb eines von η und σ unabhängig bestimmbaren Werthes.

9.

Weierstrass' Convergenz-Factoren.

Nimmt man für Ψ_σ und Φ_σ die unter Nr. (97.) genannten Functionen und setzt noch $\alpha_\sigma = \frac{1}{0}$, $m_\sigma = -1$, so wird

$$(99.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma}.\,\Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]\} \\ \qquad = \left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right).\,e^{\mathfrak{P}\left[\log\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)^{-1} |\, x \,|\, h_\sigma\right]} \\ \qquad = \left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right).\,e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=h_\sigma} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a_\sigma}\right)^\lambda}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke

$$(100.)\qquad E\left(\frac{x}{a_\sigma}, h_\sigma\right) = \left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)\cdot e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=h_\sigma} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a_\sigma}\right)^\lambda}$$

hat Herr Weierstrass eingeführt und mit deren Hülfe zuerst Functionen gebildet, welche

(101.) nur vorgeschriebene Null-Stellen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\sigma, \dots$

unter Erfüllung der Bedingung

$$(101^*.)\qquad \lim_{n=\infty} |a_n| = \infty$$

besitzen, und welche überall mit Ausschluss der Umgebung des Werthes $\frac{1}{0}$

sich regulär verhalten. Herr Weierstrass hat derartigen Functionen die Form

$$x^k \cdot e^{G(x)} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, h_\nu\right) \tag{102.}$$

gegeben und gezeigt, dass hierdurch jede Function mit den vorgenannten Eigenschaften dargestellt wird, wenn $G(x)$ eine sich für jeden endlichen Werth von x regulär verhaltende, geeignet gewählte Function bedeutet und wenn, verschieden von der in der vorliegenden Abhandlung gemachten Annahme, so viele a_σ einander gleich vorausgesetzt sind, wie der Grad des Nullwerdens an der betreffenden Stelle Einheiten enthalten soll.

Herr Weierstrass hat diesen Satz erst in seiner, der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 16. October 1876 vorgelegten Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen« veröffentlicht, aber bereits im Herbst 1874 in seinen Universitäts-Vorlesungen vorgetragen.

Der Ausdruck

$$e^{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=h_\sigma} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a_\sigma}\right)^\lambda} \tag{103.}$$

dürfte als der Weierstrass'sche Convergenz-Factor für die Function $\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)$, in einem Producte unendlich vieler solcher Functionen $\left(1-\frac{x}{a_1}\right)$, $\left(1-\frac{x}{a_2}\right)$, ..., $\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)$, ... zu bezeichnen sein.

10.

Newton's Interpolations-Formel.

Die zu der Umgebung des Werthes 0 für das Argument z und zu der Ordnung n gehörende Anschluss-Function einer sich dort regulär verhaltenden Function $f(z)$ kann man als den Grenzfall des aus $n+1$ Argumentwerthen gebildeten Newton'schen Interpolations-Ausdruckes betrachten, nämlich wenn alle $n+1$ Argumentwerthe unendlich klein werden. Als eine entsprechende Eigenschaft dieser Interpolations-Ausdrücke kann man es ansehen, dass dieselben unter Umständen anstatt der Anschluss-Functionen benutzt werden dürfen, wenn nicht die genauen Werthe der letzteren, sondern nur Näherungswerthe die wesentlichen Eigenschaften der aufzustellenden Formen, wie z. B.

der Convergenz-Factoren und der Convergenz-Subtrahenden, bedingen. Es kommt dabei also auf die Grösse des Werth-Unterschiedes der beiden Functionen an. Um dieselbe so weit zu bestimmen, wie es für den vorliegenden Zweck erforderlich ist, will ich von einem einfachen Beweise des Fundamental-Theorems für die Interpolations-Function ausgehen.

Newton benutzt die Quotienten der Differenzen von Functions-Werthen dividirt durch die Differenzen der entsprechenden Argument-Werthe. Um die Eigenschaften solcher Quotienten übersichtlich darstellen zu können, will ich dieselben durch ein Operations-Zeichen $\mathfrak{D}$ ausdrücken und zwar, wenn

(104.) zu den Argument-Werthen $z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \ldots$
die Functions-Werthe $\mathrm{f}(z_1), \mathrm{f}(z_2), \mathrm{f}(z_3), \ldots$
gehören sollen,

will ich für jeden Index ν und für jede nicht unter ν liegende Zahl μ,

$$\mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu] = \mathrm{f}(z_\nu) \tag{105.}$$

$$\mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu, \nu+1, \ldots, \mu, \mu+1] = \frac{\mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu, \nu+1, \ldots, \mu-1, \mu] - \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu+1, \nu+2, \ldots, \mu, \mu+1]}{z_\nu - z_{\mu+1}} \tag{106.}$$

setzen. Die Gleichung (106.) kann man auch in der Form

$$\mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu, \nu+1, \ldots, \mu] = \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu+1, \ldots, \mu+1] + (z_\nu - z_{\mu+1})\,\mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu, \ldots, \mu+1] \tag{107.}$$

darstellen. Wendet man hier statt der beliebigen Zahl μ die Zahl $\mu+\eta$ an und multiplicirt beide Seiten der Gleichung mit

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta}(z_\nu - z_{\mu+\varkappa}),$$

so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu, \ldots, \mu+\eta] \,.\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta}(z_\nu - z_{\mu+\varkappa}) \\ &\qquad = \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu+1, \ldots, \mu+\eta+1] \,.\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta}(z_\nu - z_{\mu+\varkappa}) \\ &\qquad\quad + \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_\mathfrak{b})\,|\,\nu, \ldots, \mu+\eta+1] \,.\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta+1}(z_\nu - z_{\mu+\varkappa}). \end{aligned}\right. \tag{108.}$$

Lässt man hier η der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3, 4, \ldots, \lambda-1, \lambda$

annehmen und addirt die entsprechenden Seiten der dadurch entstehenden Gleichungen und der Gleichung (107.), so findet man

$$(109.)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{d}})\,|\,\nu,\ldots,\mu] = \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{d}})\,|\,\nu+1,\ldots,\mu+1] \\ \qquad + \sum\limits_{\eta=1}^{\eta=\lambda} \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{d}})\,|\,\nu+1,\ldots,\mu+\eta+1] \prod\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta}(z_\nu - z_{\mu+\varkappa}) \\ \qquad + \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{d}})\,|\,\nu,\ldots,\mu+\lambda+1] \prod\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda+1}(z_\nu - z_{\mu+\varkappa}) \end{cases}$$

und also für den besonderen Fall, dass μ mit ν identisch wird, nach Anwendung von (105.) und Einführung der Bezeichnung

$$(110.)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}[\mathrm{f}(z_\nu)\,|\,z_{\mathfrak{n}}\,|\,\nu+1,\nu+2,\ldots,\nu+\lambda+1] \\ \qquad = \mathrm{f}(z_{\nu+1}) + \sum\limits_{\eta=1}^{\eta=\lambda} \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{d}})\,|\,\nu+1,\ldots,\nu+\eta+1] \prod\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta}(z_\nu - z_{\nu+\varkappa}) \end{cases}$$

die Gleichung

$$(110^*.)\quad \begin{cases} \mathrm{f}(z_\nu) = \mathfrak{R}[\mathrm{f}(z_\nu)\,|\,z_{\mathfrak{n}}\,|\,\nu+1,\nu+2,\ldots,\nu+\lambda+1] \\ \qquad + \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{d}})\,|\,\nu,\ldots,\nu+\lambda+1] \prod\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda+1}(z_\nu - z_{\nu+\varkappa}). \end{cases}$$

Geht $\mathrm{f}(z)$ in eine Potenz von z mit ganzzahligem positiven Exponenten k über, so entsteht

$$(111.)\qquad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^k\,|\,\nu] = z_\nu^k$$

$$(112.)\qquad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^k\,|\,\nu,\nu+1] = \frac{z_\nu^k - z_{\nu+1}^k}{z_\nu - z_{\nu+1}} = \sum_\gamma z_\nu^{\gamma_\nu} z_{\nu+1}^{\gamma_{\nu+1}},$$

worin die Summation über sämmtliche ganzzahligen nicht negativen Werthe von γ_ν und $\gamma_{\nu+1}$, welche die Bedingung

$$(112^*.)\qquad \gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} = k-1$$

erfüllen, zu erstrecken ist. Die folgeweise Anwendung der Definitions-Gleichung (106.) und der Gleichung (112.) ergiebt, nach Benutzung des Schlusses der vollständigen Induction, die Gleichung

$$(113.)\qquad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^k\,|\,\nu,\nu+1,\ldots,\mu-1,\mu] = \sum_\gamma z_\nu^{\gamma_\nu} z_{\nu+1}^{\gamma_{\nu+1}} \ldots z_{\mu-1}^{\gamma_{\mu-1}} z_\mu^{\gamma_\mu}$$

für

$$0 \leqq \mu - \nu \leqq k,$$

worin die Summation über alle ganzzahligen, nicht negativen Werthe der $\gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}, \ldots, \gamma_{\mu-1}, \gamma_\mu$ zu erstrecken ist, welche die Gleichung

$$(113^*.) \qquad \gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} + \cdots + \gamma_{\mu-1} + \gamma_\mu = k-(\mu-\nu)$$

erfüllen. Für $\mu = \nu+k-1$ wird

$$(114.) \qquad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^k \,|\, \nu, \nu+1, \ldots, \nu+k-2, \nu+k-1] = z_\nu + z_{\nu+1} + \cdots + z_{\nu+k-1}$$

und hieraus mit Hülfe der Definitions-Gleichung (106.) auch

$$(115.) \qquad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^k \,|\, \nu, \nu+1, \ldots, \nu+k-1, \nu+k] = 1$$

$$(117.) \qquad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^k \,|\, \nu, \nu+1, \ldots, \nu+k, \nu+k+\varkappa] = 0, \text{ für } \varkappa \geqq 1.$$

Die Definition der Differenzen-Quotienten zeigt unmittelbar, dass die Differenzen-Quotienten einer Summe von Functionen gleich der Summe der Differenzen-Quotienten der Functionen sind. Wendet man also die Gleichung (110*.) auf eine ganze rationale algebraische Function $\mathfrak{f}(z)$ von niedrigerem als dem $(g+1)^{\text{ten}}$ Grade an, berücksichtigt (117.), setzt $\lambda = g$, $\nu = 0$ und $z_0 = z$, so erhält man für jeden Werth von z unter Benutzung der Bezeichnung

$$(118.) \qquad \mathfrak{N}[\mathfrak{f}(z) \,|\, z_{\mathfrak{n}} \,|\, 1, 2, 3, \ldots, g+1] = \mathfrak{f}(z_1) + \sum_{\mu=1}^{\mu=g} \mathfrak{D}[\mathfrak{f}(z_{\mathfrak{d}}) \,|\, 1, 2, \ldots, \mu, \mu+1] \prod_{\mu=1}^{\varkappa=\mu} (z-z_\varkappa)$$

die Gleichung

$$(118^*.) \qquad \mathfrak{f}(z) = \mathfrak{N}[\mathfrak{f}(z) \,|\, z_{\mathfrak{n}} \,|\, 1, 2, 3, \ldots, g+1],$$

wenn $\mathfrak{f}(z)$ eine ganze rationale algebraische Function des Argumentes z von nicht höherem als dem g^{ten} Grade ist und das Operations-Zeichen $\mathfrak{D}$ sich durch die Gleichungen (105.) und (106.) bestimmt.

Die rechte Seite von (118.) ist mit der Formel gleichbedeutend, welche Newton in seinen »Philosophiae naturalis principia mathematica, Lib. III. Propositio XL. Lemma V« (Lond. 1687) zur Auflösung der Aufgabe »invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit« aufgestellt hat.

Die Gleichung (118*.) enthält den Lehrsatz:

Eine ganze rationale algebraische Function ist mit ihrer

Newton'schen Interpolations-Function identisch, wenn die Anzahl der bei der letzteren in Anwendung gebrachten Functional-Werthe grösser ist als der Grad der algebraischen Function.

11.
Verallgemeinerung von Newton's Interpolations-Formel.

Die hier durchgeführte Ableitung der Newton'schen Interpolations-Formel zeigt unmittelbar, wie die letztere zu verallgemeinern ist, damit nicht nur zu gegebenen Argument-Werthen beliebig gegebene Werthe der Function, sondern auch beliebig gegebene Werthe der Derivirten der letzteren dargestellt werden. Sind nämlich für die beliebig gegebenen Argument-Werthe

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_\sigma,\ \ldots$$

die Werthe der Function sowie ihrer Derivirten und zwar

$$\text{(119.)}\quad \left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{f}(z_1), & \mathrm{f}'(z_1), & \mathrm{f}''(z_1), & \ldots, & \mathrm{f}^{(n_1)}(z_1) \\ \mathrm{f}(z_2), & \mathrm{f}'(z_2), & \mathrm{f}''(z_2), & \ldots, & \mathrm{f}^{(n_2)}(z_2) \\ \mathrm{f}(z_3), & \mathrm{f}'(z_3), & \mathrm{f}''(z_3), & \ldots, & \mathrm{f}^{(n_3)}(z_3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{f}(z_\sigma), & \mathrm{f}'(z_\sigma), & \mathrm{f}''(z_\sigma), & \ldots, & \mathrm{f}^{(n_\sigma)}(z_\sigma) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

willkürlich vorgeschrieben, so giebt es immer eine und nur eine solche ganze rationale algebraische Function $\mathrm{f}(z)$, welche eine unter der Zahl

$$(1+n_1)+(1+n_2)+(1+n_3)+\cdots$$

liegende Gradzahl besitzt und welche mit ihren Derivirten die zu den Argument-Werthen $z_1, z_2, z_3, \ldots$ zugehörenden vorgeschriebenen Werthe annimmt. Diese Function kann in der Form

$$\text{(120.)}\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{f}(z) = f_{1,0}+(z-z_1)f_{1,1}+(z-z_1)^2 f_{1,2}+\cdots+(z-z_1)^{n_1} f_{1,n_1} \\ \qquad +(z-z_1)^{1+n_1}\{f_{2,0}+(z-z_2)f_{2,1}+(z-z_2)^2 f_{2,2}+\cdots+(z-z_2)^{n_2} f_{2,n_2}\} \\ \qquad +(z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{1+n_2}\{f_{3,0}+(z-z_3)f_{3,1}+(z-z_3)^2 f_{3,2}+\cdots+(z-z_3)^{n_3} f_{3,n_3}\} \\ \qquad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

dargestellt werden. Die constanten Factoren der ersten Zeile bestimmen sich unmittelbar durch

$$(121.)\qquad f_{1,0} = \mathrm{f}(z_1),\quad f_{1,\varkappa} = \frac{1}{\Pi(\varkappa)}\mathrm{f}^{(\varkappa)}(z_1),\quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, n_1,$$

wo die Function Π die ihr von Gauss beigelegte Bedeutung besitzt. Bezeichnen wir mit

$$(122.)\qquad \mathrm{f}(z\,|\,n_1),\quad \mathrm{f}(z\,|\,1+n_1,\lambda),\quad \mathrm{f}(z\,|\,1+n_1, 1+n_2, \mu),\quad \ldots$$

die Summe der Glieder der rechten Seite der Gleichung (120.) der Reihe nach genommen und zwar vom ersten Gliede $f_{1,0}$ an beziehungsweise bis zum Gliede

$$(z-z_1)^{n_1} f_{1,n_1},\quad (z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{\lambda} f_{2,\lambda},\quad (z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{1+n_2}(z-z_3)^{\mu} f_{3,\mu},\quad \ldots$$

einschliesslich, so wird

$$(123.)\quad \begin{cases} f_{2,0} = (z_2-z_1)^{-1-n_1}\{\mathrm{f}(z_2)-\mathrm{f}(z_2\,|\,n_1)\} \\ f_{2,\lambda} = \dfrac{1}{\Pi(\lambda)}(z_2-z_1)^{-1-n_1}\{\mathrm{f}^{(\lambda)}(z_2)-\mathrm{f}^{(\lambda)}(z_2\,|\,1+n_1,\lambda-1)\} \text{ für } 1 \leqq \lambda \leqq n_2 \\ f_{3,0} = (z_3-z_1)^{-1-n_1}(z_3-z_2)^{-1-n_2}\{\mathrm{f}(z_3)-\mathrm{f}(z_3\,|\,1+n_1, n_2)\} \\ f_{3,\mu} = \dfrac{1}{\Pi(\mu)}(z_3-z_1)^{-1-n_1}(z_3-z_2)^{-1-n_2}\{\mathrm{f}^{(\mu)}(z_3)-\mathrm{f}^{(\mu)}(z_3\,|\,1+n_1, 1+n_2, \mu-1)\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{für } 1 \leqq \mu \leqq n_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Zur numerischen Berechnung der constanten Coëfficienten giebt es vortheilhaftere Ausdrücke als die in (123.) aufgestellten; ich werde jene bei einer anderen Veranlassung vorlegen.

Hier will ich nur bemerken, dass die Coëfficienten mit Hülfe von Determinanten unmittelbar durch die vorgeschriebenen Werthe ausgedrückt werden können. Es ist nämlich in dem allgemeinen Gliede

$$(124.)\qquad (z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{1+n_2}\ldots(z-z_{\sigma-1})^{1+n_{\sigma-1}}(z-z_\sigma)^{\mu} f_{\sigma,\mu},\quad 0 \leqq \mu \leqq n_\sigma$$

des Ausdrucks (120.) der von z unabhängige Coëfficient $f_{\sigma,\mu}$ gleich dem Quotienten zweier Determinanten. Bezeichnen allgemein $N_{h,k}$, beziehungsweise $Z_{h,k}$ die Elemente der im Nenner und im Zähler stehenden Determinanten, so durchlaufen h und k die ganzen Zahlen von 1 bis

$$(1 + n_1) + (1 + n_2) + \cdots + (1 + n_{\sigma-1}) + (1 + \mu) = \mu^* \tag{125.}$$

und ist für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots, \mu^*$ das Element

$$\left\{\begin{array}{ll} N_{h,k} = \dfrac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h)} z_1^{k-h}, & \text{für } h = 1, 2, 3 \ldots (1+n_1) \\ N_{h,k} = \dfrac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h_2)} z_2^{k-h_2}, & \text{für } h = 1+n_1+h_2;\ h_2 = 1, 2, 3 \ldots (1+n_2) \\ N_{h,k} = \dfrac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h_{\sigma-1})} z_{\sigma-1}^{k-h_{\sigma-1}}, & \text{für } h = 1+n_1+1+n_2+\cdots+1+n_{\sigma-2}+h_{\sigma-1},\ 1 \leqq h_{\sigma-1} \leqq 1+n_{\sigma-1} \\ N_{h,k} = \dfrac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h_\sigma)} z_\sigma^{k-h_\sigma}, & \text{für } h = 1+n_1+1+n_2+\cdots+1+n_{\sigma-1}+h_\sigma,\ 1 \leqq h_\sigma \leqq 1+n_\sigma, \end{array}\right. \tag{126.}$$

ferner für $k = \mu^*$ das Element

$$\left\{\begin{array}{lrl} Z_{h,\mu^*} = \mathfrak{f}^{(-1+h)}(z_1) & \text{für } h = & 1, 2, 3, \ldots, (1+n_1) \\ Z_{h,\mu^*} = \mathfrak{f}^{(-1+h_2)}(z_2) & \text{für } h = & 1+n_1+h_2;\ h_2 = 1, 2, 3, \ldots, (1+n_2) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ Z_{h,\mu^*} = \mathfrak{f}^{(-1+h_{\sigma-1})}(z_{\sigma-1}) & \text{für } h = & 1+n_1+1+n_2+\cdots+(1+n_{\sigma-2})+h_{\sigma-1} \\ & h_{\sigma-1} = & 1, 2, 3, \ldots, (1+n_{\sigma-1}) \\ Z_{h,\mu^*} = \mathfrak{f}^{(-1+h_\sigma)}(z_\sigma) & \text{für } h = & 1+n_1+1+n_2+\cdots+(1+n_{\sigma-1})+h_\sigma \\ & h_\sigma = & 1, 2, 3, \ldots, (1+\mu), \end{array}\right. \tag{127.}$$

während für jedes von μ^* verschiedene $k = 1, 2, 3, \ldots, (\mu^*-1)$ und für jedes $h = 1, 2, 3, \ldots, \mu^*$ das Element

$$Z_{h,k} = N_{h,k} \tag{127*.}$$

wird. Hierbei ist die nullte Derivirte einer Function als mit der Function identisch und die Π-Function nach Gauss, als durch die Gleichung

$$\Pi(x) = \prod_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n}{n+x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \tag{127**.}$$

definirt, vorausgesetzt.

12.

Werthe-Grenze der Interpolations-Formel.

Bedeutet $\mathrm{F}(z)$ eine in der Umgebung des Argumentwerthes 0 sich regulär verhaltende Function des Argumentes z, ist also in

$$(128.)\qquad \mathrm{F}(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} z^{\mu} F_{\mu}$$

jedes F_{μ} unabhängig von z und die Summe für genügend kleine absolute Beträge von z gleichmässig und unbedingt convergent, so wird nach der Definition der Anschluss-Function

$$(129.)\qquad \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)\,|\,z\,|\,k] = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} z^{\mu} F_{\mu}$$

und daher

$$(130.)\qquad \mathrm{F}(z) - \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)\,|\,z\,|\,k] = \sum_{\mu=1+k}^{\mu=+\infty} z^{\mu} F_{\mu}.$$

Sind $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{k+1}$ Argumentwerthe, welche sich im Convergenzbereiche der Summe (128.) befinden, und bilden wir für jene Werthe die Newton'sche Interpolations-Function von beiden Seiten der Gleichung (130.), — indem wir dabei berücksichtigen, dass die Interpolations-Function von der Differenz zweier Functionen gleich der Differenz der Interpolations-Functionen von den einzelnen Functionen ist, ferner, dass die Interpolations-Function von einem ganzen rationalen Ausdrucke mit geringerer Gradzahl k als die Anzahl $k+1$ der Interpolations-Werthe gleich ist dem ganzen rationalen Ausdrucke, und endlich, dass die Interpolations-Function von einer Function multiplicirt in einen constanten Factor gleich dem Producte des constanten Factors multiplicirt in die Interpolations-Function von jener Function ist — so erhalten wir

$$(131.)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}[\mathrm{F}(z)\,|\,z_{\mathfrak{n}}\,|\,1, 2, 3, \ldots, k+1] - \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)\,|\,z\,|\,k] = \sum\limits_{\mu=1+k}^{\mu=+\infty} F_{\mu}\, \mathfrak{N}[z^{\mu}\,|\,z_{\mathfrak{n}}\,|\,1, 2, 3, \ldots, k+1] \\ \qquad = \sum\limits_{\mu=1+k}^{\mu=\infty} F_{\mu} \Big\{ z_1 + \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^{\mu}\,|\,1, 2, \ldots, (1+\varkappa)] \,.\, (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\varkappa}) \Big\}. \end{cases}$$

Aus Gleichung (113.) folgt

$$(132.)\quad \mathfrak{D}[z_{\mathfrak{d}}^{\mu}\,|\,1, 2, 3, \ldots, (1+\varkappa)] = \sum_{\gamma} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \ldots z_{\varkappa}^{\gamma_{\varkappa}} z_{\varkappa+1}^{\gamma_{\varkappa+1}} \quad \text{für } 0 \leqq \varkappa \leqq \mu,$$

worin die Summation über alle Werthesysteme der ganzzahligen nicht negativen, die Gleichung

$$(132^*.)\qquad \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_\varkappa+\gamma_{\varkappa+1}=\mu-\varkappa$$

erfüllenden Werthe der $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\varkappa+1}$ zu erstrecken ist. Die Anzahl der Summations-Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (132.) beträgt — wie unmittelbar zu sehen ist — μ für den Fall, dass $\varkappa$ gleich 1 wird.

Durch dasselbe Schlussverfahren, durch welches man von Gleichung (112.) zu Gleichung (113.) gelangte, findet man leicht, dass die Anzahl der Summations-Glieder der rechten Seite von (132.) im allgemeinen Falle gleich

$$(133.)\qquad \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}$$

ist. Lassen wir nun ζ eine Grösse bedeuten, welche von dem absoluten Betrage keines der Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$ übertroffen wird,

$$(134.)\qquad \zeta \geqq |z_\lambda| \quad \text{für } \lambda = 1, 2, 3, \ldots, k+1,$$

so erhalten wir für den absoluten Betrag der ersten Seite der Gleichung (132.) die Werthe-Grenze

$$(135.)\qquad |\mathfrak{D}[z_\mathfrak{b}^\mu|1, 2, 3, \ldots (\varkappa+1)]| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}\,\zeta^{\mu-\varkappa}.$$

Bedeutet daher $\mathfrak{z}$ eine Grösse, welche die Bedingung

$$(136.)\qquad \mathfrak{z} \geqq |z-z_\lambda| \quad \text{für } \lambda = 1, 2, 3, \ldots, k, k+1$$

erfüllt, also zum Beispiel $\mathfrak{z} = |z|+\zeta$, so wird

$$(137.)\qquad |\mathfrak{D}[z_\mathfrak{b}|1, 2, 3, \ldots, (\varkappa+1)](z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\varkappa)| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}\,\zeta^{\mu-\varkappa}\mathfrak{z}^\varkappa.$$

Die rechte Seite dieser Beziehung ergiebt für $\varkappa = 0$ den Werth ζ^μ, welcher nach (134.) nicht kleiner als $|z_1|^\mu$ ist; demnach folgt

$$(138.)\qquad |\mathfrak{R}[z^\mu|z_\mathfrak{n}|1, 2, 3, \ldots, k+1]| \leqq \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=k} \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}\,\zeta^{\mu-\varkappa}\mathfrak{z}^\varkappa$$

oder, weil

$$(139.)\qquad \Pi(\mu-\varkappa) \geqq \Pi(\mu-k)\,.\,\Pi(k-\varkappa) \quad \text{für } \mu-k \geqq 0,\ k-\varkappa \geqq 0$$

ist, auch

$$|\mathfrak{N}[z^\mu | z_n | 1, 2, 3, \ldots, k+1]| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(k)\,\Pi(\mu-k)}\,\zeta^{\mu-k} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=k} \frac{\Pi(k)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(k-\varkappa)}\,\zeta^{k-\varkappa}\,\mathfrak{z}^\varkappa$$

oder

$$(140.) \qquad |\mathfrak{N}[z^\mu | z_n | 1, 2, 3, \ldots, k+1]| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(k)\,\Pi(\mu-k)}\,\zeta^{\mu-k}(\zeta+\mathfrak{z})^k$$

$$\text{für } \mu = k+1,\, k+2,\, \cdots +\infty,$$

während aus dem Satze (118*.) unmittelbar

$$(141.) \qquad |\mathfrak{N}[z^\mu | z_n | 1, 2, 3, \ldots, k+1]| = |z|^\mu \quad \text{für} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots, k$$

folgt.

Bezeichnen wir mit γ und F absolute von μ unabhängige Werthe, welche die Bedingung

$$(142.) \qquad \gamma^\mu . F \geqq |F_\mu| \quad \text{für jedes } \mu \geqq k+1$$

erfüllen, und wenden wir die Relation (140.) auf (131.) an, so erhalten wir

$$(143.) \left\{ \begin{aligned} &|\{\mathfrak{N}[\mathrm{F}(z) | z_n | 1, 2, 3, \ldots, k+1] - \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z) | z | k]\}| = |\sum_{\mu=k+1}^{\infty} F_\mu \mathfrak{N}[z^\mu | z_n | 1, 2, 3, \ldots, k+1]| \\ &\leqq \sum_{\mu=k+1}^{\mu=+\infty} \gamma^\mu \cdot F \cdot \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(k)\,\Pi(\mu-k)}\,\zeta^{\mu-k}(\zeta+\mathfrak{z})^k \\ &\leqq F.(k+1).\zeta.\gamma^{k+1}(\zeta+\mathfrak{z})^k \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\Pi(\nu+k+1)}{\Pi(k+1).\Pi(\nu)}(\gamma\zeta)^\nu \\ &\leqq F.(k+1).\zeta\gamma^{k+1}(\zeta+\mathfrak{z})^k(1-\gamma\zeta)^{-k-2} \\ &\leqq F.(k+1).\zeta\gamma^{k+1}(2\zeta+|z|)^k(1-\gamma\zeta)^{-k-2}, \end{aligned} \right.$$

wenn $\gamma\zeta < 1$ ist.

Die Relation (143.) bestimmt die Werthe-Grenze für den Unterschied zwischen der Newton'schen Interpolations-Function und der Anschluss-Function, wenn beide von derselben in der Umgebung des Argument-Werthes 0 sich regulär verhaltenden Function $\mathrm{F}(z)$ und von gleich hohem Grade k gebildet sind und wenn die nach Potenzen von z mit nicht negativen Exponenten fortschreitende Reihen-Entwickelung von $\mathrm{F}(z)$ auch noch für den grössten in Anwendung gebrachten Interpolations-Werth des Argumentes bedingungslos wie eine geometrische Reihe convergirt.

Die in (143.) vorkommenden Bezeichnungen sind unter (118.), (105.), (106.), (128.), (129.), (134.), (142.) definirt. Die hier angewendete Bestimmungsweise der Differenzen-Quotienten in (132.) zeigt, dass die vorstehende Ableitung der Relation (143.) auch für den Fall gilt, wenn mehrere Interpolations-Werthe des Argumentes einander gleich sind, also wenn die Newton'sche Interpolations-Formel in ihre Verallgemeinerung, Artikel 11, übergegangen ist.

13.

Interpolirte Convergenz-Factoren.

Der in dem letzten Artikel gefundene Lehrsatz bietet das Hülfsmittel, um zu beweisen, dass es Functionen Φ_σ und Interpolations-Werthe der Argumente $\mathfrak{q}(\sigma, x)$ giebt, welche die Convergenz des Productes in (42.) für $t = \infty$ auch dann bestehen lassen, wenn in (49.) die Anschluss-Functionen durch Newton'sche Interpolations-Functionen ersetzt werden.

Es handelt sich also darum, die bis zu unendlich grossen Zahlenwerthen des Summations-Zeigers σ auszudehnende Summe der Glieder von der Form

$$(144.)\qquad \log\left\{\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} \cdot \Phi_\sigma \mathfrak{N}\left[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots, (1+h_\sigma)\right]\right\}$$

unbedingt und gleichmässig convergent zu machen durch geeignete Wahl der Interpolationswerthe

$$(145.)\qquad \mathfrak{q}_1(\sigma, x), \quad \mathfrak{q}_2(\sigma, x), \quad \ldots, \quad \mathfrak{q}_{(1+h_\sigma)}(\sigma, x)$$

und der Functionen Φ_σ, welche ausserdem noch die Bedingungen (54.), (55.), (56.) zu erfüllen haben.

Hier will ich mich darauf beschränken, den Nachweis dieser Möglichkeit bei den in Nr. (97.) gewählten Functionen Φ_σ durchzuführen.

Der Ausdruck (144.) erhält für $\sigma \geqq 1$ dann die Form

$$(146.)\qquad \log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma}) + \mathfrak{N}\left[\log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots, (1+h_\sigma)\right].$$

Entwickelt man den unter der Interpolations-Function $\mathfrak{N}$ vorkommenden log nach Potenzen von $\mathfrak{q}(\sigma, x)$, ersetzt ferner die Interpolations-Function einer

Summe von Functionen durch die Summe der Interpolations-Functionen von den einzelnen Functionen und wendet den Fundamental-Satz für die Newton'sche Interpolations-Formel (118*.) an, so findet man, dass der Ausdruck (146.) gleich

$$(146^*.)\quad \left\{\begin{aligned} &\log(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma})+\mathfrak{P}[\log(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}(\sigma,x)\,|\,h_\sigma]\\ &\quad+\sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty}\frac{-m_\sigma}{\eta}\cdot\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta}.\,\mathfrak{N}[\mathfrak{q}(\sigma,x)^{\eta}\,|\,\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma,x)\,|\,1,2,3,\ldots,(1+h_\sigma)]\end{aligned}\right.$$

und, wenn man noch den ersten log entwickelt, auch gleich

$$(147.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty}\frac{m_\sigma}{\eta}\,\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta}\,\mathfrak{q}(\sigma,x)^{\eta}\\ &\quad+\sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty}\frac{-m_\sigma}{\eta}\cdot\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta}.\,\mathfrak{N}[\mathfrak{q}(\sigma,x)^{\eta}\,|\,\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma,x)\,|\,1,2,3,\ldots,(1+h_\sigma)]\end{aligned}\right.$$

ist. Der absolute Betrag dieses Ausdruckes ergiebt sich nach Anwendung des Lehrsatzes (143.) kleiner oder gleich

$$(148.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty}\frac{1}{\eta}\cdot|m_\sigma|.|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-\eta}.|\mathfrak{q}(\sigma,x)|^{\eta}\\ &\quad+|m_\sigma|.\mathfrak{q}(\sigma^*).|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1-h_\sigma}.\{2\mathfrak{q}(\sigma^*)+|\mathfrak{q}(\sigma,x)|\}^{h_\sigma}.\{1-|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1}.\mathfrak{q}(\sigma^*)\}^{-2-h_\sigma},\end{aligned}\right.$$

also auch kleiner oder gleich

$$(148^*.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1+h_\sigma}\cdot|m_\sigma|.|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1-h_\sigma}.|\mathfrak{q}(\sigma,x)|^{1+h_\sigma}.\{1-|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1}.|\mathfrak{q}(\sigma,x)|\}^{-1}\\ &\quad+|m_\sigma|.\mathfrak{q}(\sigma^*).|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1-h_\sigma}.\{2\mathfrak{q}(\sigma^*)+|\mathfrak{q}(\sigma,x)|\}^{h_\sigma}.\{1-|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1}.\mathfrak{q}(\sigma^*)\}^{-2-h_\sigma},\end{aligned}\right.$$

wenn nämlich die $\mathfrak{q}(\sigma^*)$ solche Werthe bedeuten, welche die Bedingungen

$$(149.)\qquad \mathfrak{q}(\sigma^*)\geqq|\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma,x)|\ \text{ für jedes }\mathfrak{n}=1,2,3,\ldots,(1+h_\sigma)$$

erfüllen, und wenn

$$(150.)\qquad |\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|>|\mathfrak{q}(\sigma,x|,\quad |\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|>\mathfrak{q}(\sigma^*)\ \text{ ist.}$$

Die über die ganzen Zahlen σ zu erstreckende Summe des Ausdrucks (148*.) können wir zum Zwecke der Untersuchung ihrer Convergenz für endliche Werthe der $\mathfrak{q}(\sigma, x)$, indem wir nur eine endliche Anzahl von Summen-Gliedern erforderlichen Falles ausscheiden, auf diejenigen σ beschränken, welche $|\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \geqq e$ werden lassen. Indem ich die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Nr. (83.), (84.), (89.) beibehalte, nehme ich specieller als in Nr. (85.), (86.), (87.) an, dass für jede über einem gross genug gewählten endlichen $\varepsilon_{\sigma_1} - 1$ liegende ganze positive Zahl ε_σ und für jedes dazu nach Nr. (83.) zugehörige σ die reellen Grössen $\mathfrak{m}_\sigma$ und die von σ ganz unabhängige reelle Grösse $\mathfrak{m}$ die Bedingung

$$e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m}} \geqq |m_\sigma| \tag{151.}$$

erfüllen sollen.

Für dieselben Zahlen ε_σ und σ will ich, indem ich für die Interpolations-Werthe $\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)$ die Grenzen noch enger als in (149.) und (150.) ziehe, die reellen Grössen ν_σ und die von σ ganz unabhängige reelle Grösse ν der Art gewählt denken, dass

$$|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)| \leqq \mathfrak{q}(\sigma^*) \leqq e^{\varepsilon_\sigma(1-\nu_\sigma)-\nu} \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \,.\, e^{-\varepsilon_\sigma \nu_\sigma - \nu} < |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \,.\, e^{-2} \tag{152.}$$

für jedes $\mathfrak{n} = 1, 2, 3, \ldots, (1 + h_\sigma)$ wird.

Zur Abkürzung setze ich noch

(153.) $\mathfrak{n}_\sigma$ gleich der kleineren der beiden Grössen

$$(1 - e^{-h})(1 + h_\sigma) - \mathfrak{a}_\sigma - \mathfrak{m}_\sigma \text{ und } \left(\nu_\sigma + \frac{\nu - 2}{\varepsilon_\sigma}\right)(1 + h_\sigma) - \mathfrak{a}_\sigma - \mathfrak{m}_\sigma$$

und nehme an, dass diese Grössen, für einen im voraus beliebig festgesetzten positiven Werth von h, in Folge genügend gross gewählter nicht negativer Zahlen h_σ und σ immer positiv und für $\sigma = \infty$ nicht unendlich klein werden.

Beachtet man, dass

$$1 - e^{-1-b} \geqq 1 - e^{-1} > e^{-1} \text{ für } b \geqq 0, \quad e = 2{,}71828\ldots \text{ ist,} \tag{154.}$$

so erhält man aus der zwischen dem Ausdrucke (146.) und dem Ausdrucke (148*.) schon gefundenen Beziehung unter Anwendung von Nr. (83.), (84.), (89.), (151.), (152.), (153.) auch

$$(155.)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{\sigma}\left|\left\{\log(\mathfrak{p}(\sigma,x))^{-m_\sigma}+\mathfrak{R}\left[\log(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma,x)\,|\,1,2,3,\ldots,(1+h_\sigma)\right]\right\}\right|\\&\qquad\leqq\sum_{\varepsilon_\sigma}\frac{1}{1+h_\sigma}\cdot e^{\varepsilon_\sigma\mathfrak{m}_\sigma+\mathfrak{m}}\cdot e^{-(\varepsilon_\sigma-\xi)(1+h_\sigma)}\cdot e\cdot e^{\varepsilon_\sigma\mathfrak{a}_\sigma+\mathfrak{a}}\\&\qquad+\sum_{\varepsilon_\sigma}e^{\varepsilon_\sigma\mathfrak{m}_\sigma+\mathfrak{m}}\cdot e^{-\varepsilon_\sigma\nu_\sigma-\nu}\cdot\left\{2e^{-\varepsilon_\sigma\nu_\sigma-\nu}+e^{\xi-\varepsilon_\sigma}\right\}^{h_\sigma}\cdot e^{2+h_\sigma}\cdot e^{\varepsilon_\sigma\mathfrak{a}_\sigma+\mathfrak{a}}\\&\qquad<e^{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}+1}\sum_{\varepsilon_\sigma}e^{-\varepsilon_\sigma\mathfrak{n}_\sigma}.\end{aligned}\right.$$

Hier ist die auf σ sich beziehende Summation über die Zahlen

$$\sigma=\sigma_1,\ 1+\sigma_1,\ 2+\sigma_1,\ 3+\sigma_1,\ \ldots,\ +\infty$$

auszudehnen, worin die endliche Zahl σ_1 gross genug gewählt sein soll, damit die vorgenannten Bedingungen und auch noch die Bedingung

$$(156.)\qquad \varepsilon_\sigma>(\xi+3)\,e^{+h}$$

für jene Werthe des σ erfüllt sind.

Die in Nr. (155.) auf ε_σ sich beziehenden Summationen sind über die Zahlen

$$\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1},\ 1+\varepsilon_{\sigma_1},\ 2+\varepsilon_{\sigma_1},\ 3+\varepsilon_{\sigma_1},\ \ldots,\ +\infty$$

zu erstrecken und dem im nämlichen Summations-Gliede bei h_σ, $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ, $\mathfrak{n}_\sigma$ vorkommenden σ ist derjenige, nach Vorschrift (83.) zum jedesmaligen ε_σ zugehörige, Zahlenwerth zu geben, welcher die Zahl h_σ am kleinsten werden lässt.

Die letzte in Nr. (155.) vorkommende Summe convergirt in Folge der Annahme unter Nr. (153.) stärker als eine gleichmässig und unbedingt convergirende geometrische Reihe.

Wir haben also bewiesen, dass, unter Beibehaltung der letzten in (76.) ausgesprochenen Voraussetzung, wir das unendlich vielgliedrige Product

$$(157.)\quad \mathfrak{B}(x)=\prod_{\sigma=0}^{+\infty}\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}.\mathrm{V}(\sigma,x).\Phi_\sigma\left\{\mathfrak{R}\left[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma})\,|\,\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma,x)\,|\,1,2,3,\ldots,(1+h_\sigma)\right]\right\}$$

für endliche Werthe aller $\mathfrak{q}(\sigma,x)$, nach etwaiger Ausscheidung einer endlichen Anzahl von Gliedern, gleichmässig und unbedingt convergiren lassen können, wenn wir die sich vollständig regulär verhaltenden Functionen V und Φ mit den zu den letzteren inversen Functionen Ψ auf geeignete Weise, wie zum Beispiel in Nr. (94.), (97.), wählen und wenn wir die Interpolations-Werthe $\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma, x)$ innerhalb gewisser Grenzen wie bei Nr. (152.) und auch in genügender Anzahl $1 + h_\sigma$ wie nach (153.) nehmen.

14.

Euler's interpolirte Producte.

Euler beginnt in seinem Werke »Institutiones calculi differentialis etc. Petropol. 1755. Caput XVI: De differentiatione functionum inexplicabilium«, den § 367 mit den Worten »Functiones inexplicabiles hic voco, quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt; ita ut non solum non sint algebraicae, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant. Huiusmodi functio inexplicabilis est

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

quae utique ab x pendet, at nisi x sit numerus integer nullo modo explicari potest. Simili modo haec expressio

$$1 . 2 . 3 \ldots x$$

erit functio inexplicabilis ipsius x, quoniam si x sit numerus quicunque, eius valor non solum non algebraice, sed ne quidem per ullum certum quantitatum transcendentium genus exprimi potest. Generatim ergo talium functionum inexplicabilium notio ex seriebus derivari potest«.

Die von Euler gegebene Lösung der hierin angedeuteten Aufgabe ist mit dem Gegenstande des folgenden Capitels übereinstimmend. Dieses Caput XVII: De interpolatione serierum, § 389, hat die folgende Einleitung. »Series interpolari dicitur, dum eius termini assignantur, qui respondent indicibus fractis vel etiam surdis. Si igitur seriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem; cum quicunque numerus loco indicis x substituatur, ista expressio praebeat terminum respondentem«.

Um die Uebersicht der Formeln zu erleichtern, will ich Functions-Zeichen anwenden. Das allgemeine Glied der Summe sei $\mathrm{F}(x)$ und werde als ein für jeden Werth von x bekannter Ausdruck vorausgesetzt.

Indem ich das Operations-Zeichen Δ im selben Sinne wie Euler gebrauche, bilde ich die Differenzen

$$\text{(158.)} \quad \begin{cases} \Delta \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x) \\ \Delta^2 \mathrm{F}(x) = \Delta \mathrm{F}(x+1) - \Delta \mathrm{F}(x) \\ \Delta^3 \mathrm{F}(x) = \Delta^2 \mathrm{F}(x+1) - \Delta^2 \mathrm{F}(x) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ferner sei für ein ganzzahliges x

$$\text{(159.)} \quad \mathfrak{F}(x) = \mathrm{F}(1) + \mathrm{F}(2) + \mathrm{F}(3) + \cdots + \mathrm{F}(x-1) + \mathrm{F}(x).$$

Die von Euler in § 396 gegebene Bestimmung der als »inexplicable Function« oder als »interpolirte Reihe« betrachteten Grösse $\mathfrak{F}(x, \omega)$ für ein ganzzahliges x und ein beliebiges ω können wir, wenn wir nur in der Bezeichnungsweise von Euler abweichen, aber in der Anordnung der Glieder ihm folgen, durch die Formel darstellen:

$$\text{(160.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{F}(x, \omega) = \\ \qquad \mathfrak{F}(x) + \mathrm{F}(x+1) + \mathrm{F}(x+2) + \mathrm{F}(x+3) + \text{etc.} \\ \qquad - \mathrm{F}(x+\omega+1) - \mathrm{F}(x+\omega+2) - \mathrm{F}(x+\omega+3) - \text{etc.} \\ \qquad + \omega \{ \mathrm{F}(x+1) + \Delta \mathrm{F}(x+1) + \Delta \mathrm{F}(x+2) + \Delta \mathrm{F}(x+3) + \text{etc.} \} \\ \qquad + \dfrac{\omega(\omega-1)}{1.2} \{ \Delta \mathrm{F}(x+1) + \Delta^2 \mathrm{F}(x+1) + \Delta^2 \mathrm{F}(x+2) + \Delta^2 \mathrm{F}(x+3) + \text{etc.} \} \\ \qquad + \dfrac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} \{ \Delta^2 \mathrm{F}(x+1) + \Delta^3 \mathrm{F}(x+1) + \Delta^3 \mathrm{F}(x+2) + \Delta^3 \mathrm{F}(x+3) + \text{etc.} \} \\ \qquad + \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Euler fügt die Worte hinzu: »Sufficit, uti iam notavimus, tot huiusmodi series adiecisse, donec ad terminorum infinitesimorum differentias evanescentes perveniatur«. Nachdem er dann x gleich 0 und $\mathfrak{F}(0)$ gleich 0 gesetzt hat, ordnet er den Ausdruck so, dass er die hier vertikal unter einander stehenden Theile zu einem Gliede einer Summe, welche über alle ganzen Zahlen von $x+1$ an zu erstrecken ist, zusammenfasst. Er giebt auch mehrere Beispiele zu jener Formel, stellt aber keine Betrachtungen über deren Convergenz an.

Eine Interpolation der Producte findet Euler, indem er in der obigen Formel (160.) die Functionen F und $\mathfrak{F}$ als Logarithmen von anderen Functionen auffasst. Ich will für ein ganzzahliges nicht negatives $\mathfrak{e}$ und für ein ganzzahliges positives x die Bezeichnungen

$$\text{(161.)}\qquad \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,0\,|\,0\,|\,\mathfrak{e}] = 1$$

$$\text{(162.)}\qquad \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,0\,|\,\mathfrak{e}] = \mathrm{E}(1).\mathrm{E}(2).\mathrm{E}(3)\ldots\mathrm{E}(x)$$

anwenden, ferner für ein ganzzahliges positives $\mathfrak{e}$ und für beliebige x und ω die Gleichungen

$$\text{(163.)}\qquad \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,0] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,0\,|\,0]\,.\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}(n+x+\omega)}$$

$$\text{(164.)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}] = \\
&\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,0\,|\,\mathfrak{e}]\,.\,\mathrm{E}(x+1)^{\omega}\,.\left\{\frac{\mathrm{E}(x+2)}{\mathrm{E}(x+1)}\right\}^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}.\left\{\frac{\mathrm{E}(x+1)\,\mathrm{E}(x+3)}{\mathrm{E}(x+2)\,\mathrm{E}(x+2)}\right\}^{\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}}\cdots\cdots\cdots \\
&\times e^{\frac{\omega(\omega-1)\ldots(\omega-\mathfrak{e}+1)}{1.2\ldots\mathfrak{e}}\Delta^{\mathfrak{e}-1}\log \mathrm{E}(x+1)} \\
&\times\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}(n+x+\omega)}\,.\left\{\frac{\mathrm{E}(n+x+1)}{\mathrm{E}(n+x)}\right\}^{\omega}.\left\{\frac{\mathrm{E}(n+x)\,.\,\mathrm{E}(n+x+2)}{\mathrm{E}(n+x+1)\,.\,\mathrm{E}(n+x+1)}\right\}^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}\cdots\cdots\\
&\times e^{\frac{\omega(\omega-1)\ldots(\omega-\mathfrak{e}+1)}{1.2\ldots\mathfrak{e}}\Delta^{\mathfrak{e}}\log \mathrm{E}(n+x)}\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

zwischen den $\mathfrak{E}$-Functionen voraussetzen.

Euler stellt in § 398 die Formel (163.) für den Fall $x = 0$ auf, nachdem er bemerkt hat: »Quodsi ergo ponamus huius seriei« [$\log \mathrm{E}(1)$, $\log \mathrm{E}(2)$, …, $\log \mathrm{E}(n)$, …] »terminos infinitesimos evanescere … erit …«. Im § 399 sagt er: »Quodsi autem terminorum infinitesimorum seriei« [$\mathrm{E}(1)$, $\mathrm{E}(2)$, …, $\mathrm{E}(n)$, …] »logarithmi non evanescant, sed habeant differentias evanescentes, erit …« und giebt dann die Formel, in welche (164.) für $x = 0$, $\mathfrak{e} = 1$ übergeht. Nach derselben fährt er fort: »At si illorum logarithmorum infinitesimorum differentiae demum secundae evanescant, erit« und lässt dann die Formel folgen, welche aus (164.) für den Fall $x = 0$, $\mathfrak{e} = 2$ sich ergiebt.

Als Beispiel für den hier mit $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,0\,|\,\omega\,|\,0]$ bezeichneten Ausdruck (163.) nimmt Euler die Function

$$\text{(165.)}\qquad \mathrm{E}(x) = \frac{a-c+xc}{b-c+xc}.$$

Dass dadurch ein gleichmässig und unbedingt convergirendes Product für nicht unendlich grosse ω und $\frac{1}{c}$ entsteht, kann man aus dem bei (95.) ausgesprochenen Lehrsatze schliessen, wenn man die Gleichung

$$(165^*.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{E}(n+1)}{\mathrm{E}(n+1+\omega)} &= \left\{1+\frac{a}{cn}\right\}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{a}{c}} \\ &\times\left\{1+\frac{b}{cn}\right\}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{b}{c}} \\ &\times\left\{1+\left(\frac{a}{c}+\omega\right)\frac{1}{n}\right\}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{a}{c}+\omega} \\ &\times\left\{1+\left(\frac{b}{c}+\omega\right)\frac{1}{n}\right\}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{b}{c}-\omega} \end{aligned}\right.$$

beachtet. Lässt man nämlich in dem Artikel 13 die Grössen α_σ, $\mathfrak{q}_1(\sigma, x)$, $\mathfrak{q}_2(\sigma, x)$ und a_σ beziehungsweise in $\frac{1}{0}$, 0, 1 und σ übergehen, so kann man $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ, h_σ beziehungsweise gleich 1, 0, $\frac{3}{4}$, 1 annehmen und findet dadurch die fragliche Convergenz für die unendlich vielgliedrigen Producte jeder der vier in besonderer Zeile stehenden Factoren.

Den hier mit $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|1]$ bezeichneten Ausdruck (164.) wendet Euler auf die Function

$$(166.)\qquad \mathrm{E}(x) = a-b+bx$$

an. Dass das unendliche Product für einen gegebenen Werth von ω eine bestimmte Grenze besitzt, hat Gauss zuerst bewiesen in Art. 20 seiner Abhandlung »Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ Gottingae 1812 Jan. 30« (Gauss Werke, Bd. III, S. 145). Deshalb sagt er in der Selbst-Anzeige dieser Abhandlung, 1812 Februar 10, bei der Anführung einer in jener vorkommenden Formel: »wo die Charakteristik Π eine eigene Art transcendenter Functionen andeutet, deren Erzeugung der Verfasser auf ein unendliches Product gründet. Diese in der ganzen Analyse höchst wichtige Function ist im Grunde nichts anders als Euler's inexplicable Function

$$\Pi z = 1.2.3.4 \ldots z;$$

allein diese Erzeugungsart oder Definition ist, nach des Verfassers Urtheil, durchaus unstatthaft, da sie nur für ganze positive Werthe von z einen klaren Sinn hat. Die vom Verfasser gewählte Begründungsart ist allgemein anwendbar und giebt selbst bei imaginären Werthen von z einen eben so klaren Sinn, wie bei reellen, und man läuft dabei durchaus keine Gefahr, auf solche Paradoxen und Widersprüche zu gerathen wie ehedem Hr. Kramp bei seinen numerischen Facultäten, die sich, wie man leicht zeigen kann, auf obige Function zurückführen lassen, aber zur Aufnahme in die Analyse weniger geeignet scheinen, als diese, da jene von drei Grössen abhängig sind, diese nur von Einer abhängt, und doch als eben so allgemein betrachtet werden muss. Der Verfasser wünscht dieser transcendenten Function Πz in der Analyse das Bürgerrecht gegeben zu sehen, wozu vielleicht die Wahl eines eigenen Namens für dieselbe am beförderlichsten sein würde: das Recht dazu mag demjenigen vorbehalten bleiben, der die wichtigsten Entdeckungen in der Theorie dieser der Anstrengungen der Geometer sehr würdigen Function machen wird.« (Gauss Werke, Bd. III, S. 200).

Ein Beweis der Convergenz des Ausdrucks $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|1]$ für $\mathrm{E}(x) = a-b+bx$ ergiebt sich auch unmittelbar aus dem Lehrsatze des obigen Artikel 13, weil nämlich in (153.) die Zahl $h_\sigma = 1$ wird und nach (83.), (84.), (151.), (152.) die Zahlen $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ beziehungsweise gleich 1, 0, $\frac{3}{4}$ angenommen werden können.

Das allgemeine Glied in dem unendlich vielgliedrigen Producte des Ausdrucks (164.) für $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|2]$, also des schon von Euler unter Anwendung einer anderen Bezeichnungsweise aufgestellten Ausdruckes geht, wenn ich

$$\mathrm{E}(n) = \nu\Lambda + n \tag{167.}$$

setze, in

$$\frac{\nu\Lambda+n}{\nu\Lambda+n+\omega}\cdot\left\{\frac{\nu\Lambda+n+1}{\nu\Lambda+n}\right\}^{\omega}\cdot\left\{\frac{\nu\Lambda+n}{\nu\Lambda+n+1}\cdot\frac{\nu\Lambda+n+2}{\nu\Lambda+n+1}\right\}^{\frac{1}{2}\omega(\omega-1)} \tag{168.}$$

über. Bildet man nun hiervon nicht nur, wie Euler es bei seinen Producten gethan, das Product für alle reellen positiven Werthe von n, sondern auch noch für alle reellen ganzen nicht negativen Zahlen als Werthe des ν, so folgt aus dem Lehrsatze des Artikel 13, dass dieses doppelt unendliche Product für jedes gegebene ω gleichmässig und unbedingt convergirt, wenn die complexe Grösse Λ einen nicht verschwindenden imaginären Theil enthält. Es können nämlich die dort mit α_σ, a_σ, $\mathfrak{q}_1(\sigma, x)$, $\mathfrak{q}_2(\sigma, x)$, $\mathfrak{q}_3(\sigma, x)$, h_σ, $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ, ν bezeichneten Grössen der Reihe nach gleich $\frac{1}{0}$, $\nu\Lambda + n$, 0, 1, 2, 2, 2, 0, $\frac{5}{6}$, 2 angenommen werden.

Zwischen den doppelt unendlichen Producten, welche auf die angegebene Weise aus dem allgemeinen Gliede (168.) gebildet sind, und den ganzen elliptischen Functionen bestehen ähnliche Beziehungen, wie zwischen den Π-Functionen und den trigonometrischen Functionen.

Die Functionen $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}]$, welche in der Gleichung (164.) mit Hülfe der unendlich vielgliedrigen Producte bestimmt werden, wenn letztere für jeden gegebenen Werth von ω gleichmässig und unbedingt convergiren, besitzen bemerkenswerthe Eigenschaften, von welchen ich bei dieser Gelegenheit nur einige andeuten will.

Lehrsatz 1. Convergirt das unendlich vielgliedrige Product in (164.) gleichmässig und unbedingt für jeden gegebenen Werth von ω und für einen bestimmten Zahlenwerth $\mathfrak{e}$, so convergirt das Product auch gleichmässig und unbedingt für grössere Zahlenwerthe des $\mathfrak{e}$ und es wird

$$\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}+1]. \tag{169.}$$

Lehrsatz 2. Convergirt das unendlich vielgliedrige Product für jeden gegebenen Werth von ω gleichmässig und unbedingt, so erhält der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (164.) bei der Zunahme von x um $+1$ denselben Werth wie bei der Zunahme von ω um $+1$, und es ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x+1\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega+1\,|\,\mathfrak{e}] &= \mathrm{E}(x+1+\omega)\,.\,\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}] \\ &= \mathrm{E}(1)\,.\,\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x+1)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}].\end{aligned} \tag{170.}$$

Lehrsatz 3. Wird $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,z\,|\,0\,|\,\mathfrak{e}]$ für ein nicht ganzzahliges z gleich $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,0\,|\,z\,|\,\mathfrak{e}]$ gesetzt und ist das unendlich vielgliedrige Product auf der rechten Seite der Gleichung (164.) für ein gewisses, einen nicht negativen ganzzahligen Werth von x enthaltendes, Gebiet stetig veränderlicher complexer Werthe des x und für ein gewisses Gebiet stetig veränderlicher complexer

Werthe des ω eine eindeutige und stetige analytische Function von x und von ω, so bleibt der Werth des Ausdruckes auf der rechten Seite der Gleichung (164.) ungeändert, wenn x und ω innerhalb der erwähnten bezüglichen Gebiete sich zugleich derartig ändern, dass der Werth von $x+\omega$ ungeändert bleibt, also

$$(171.)\qquad \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x\,|\,\omega\,|\,\mathfrak{e}] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)\,|\,x+\delta\,|\,\omega-\delta\,|\,\mathfrak{e}].$$

Lehrsatz 4. Ist $\mathrm{E}_\nu(n+x)$ eine Function, welche für ein gewisses Werthegebiet von x ebenso wie $\mathrm{E}(n+x)$ und für keine endliche positive ganze Zahl n unendlich gross oder unendlich klein wird, welche ferner die Summe

$$(172.)\qquad \sum_{n=1}^{n=+\infty} \Delta^\nu \log \frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}_\nu(n+x)}$$

unbedingt und gleichmässig convergiren lässt und welche den Grenzwerth

$$(173.)\qquad \lim_{n=+\infty} \Delta^{\nu-1} \log \frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}_\nu(n+x)} = 1$$

ergiebt, so können in dem Ausdrucke (164.) sämmtliche $\mathrm{E}(x+m)$, welche mit dem Exponenten

$$\frac{\omega\,.\,(\omega-1)\ldots(\omega-\nu+1)}{1\,.\,2\ldots\nu}$$

behaftet vorkommen, zugleich durch die Functionen $\mathrm{E}_\nu(x+m)$ ersetzt werden, ohne dass der Ausdruck (164.) dadurch seinen Werth ändert.

Den speciellen, auf die in (166.) genannte Function sich beziehenden, Fall dieses Lehrsatzes hat Euler mehrfach angewendet, sowohl in dem schon genannten letzten Capitel (XVII) seines Werkes Calcul. different., als auch in den folgenden Abhandlungen:

De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1\,.\,2\,.\,3\ldots x$. Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XIII (pro anno 1768) pag. 3—66. Petrop. 1769.

Dilucidationes in capita postrema Calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus. Conventui exhib. die 13 Martii 1780. Mémoires de l'académie de St. Pétersbourg, t. IV, p. 88—119. Pétersbourg 1813.

Einen entfernteren Zusammenhang mit diesem Gegenstande hat die Abhandlung:

De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina. Leonhardi Euleri Opuscula analytica. Tomus I, pag. 157—210. Petrop. 1783. In derselben findet sich in § 10, pag. 165 auch schon die sogenannte Lagrangesche Interpolations-Formel.

Nach den hier mitgetheilten Lehrsätzen für die interpolirten Producte (164.) lassen sich die entsprechenden Lehrsätze für interpolirte Summen leicht aufstellen.

15.
Zusammengesetzte Convergenz-Factoren.

Die Convergenz der hier in Betracht kommenden unendlich vielgliedrigen Producte und Summen ist wesentlich dadurch bedingt, dass der Werth von $\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)$ mit σ unbegrenzt wächst. In denjenigen Anschluss-Functionen, welche nur zum Zwecke der Erreichung der Convergenz angewendet worden sind, lassen sich daher die von x unabhängigen Glieder durch ganze Functionen von $\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1}$ ersetzen, wenn diese ganzen Functionen in ihrer Entwickelung nach wachsenden Potenzen dieses Argumentes bis einschliesslich der h_σ^{ten} Potenz mit jenen Gliedern übereinstimmen und die noch höheren Potenzen die durch die vorgenannten Glieder erreichte gleichmässige und unbedingte Convergenz nicht wieder zerstören. Auf diese Weise erhält man für die gesuchte Function $\mathfrak{B}(x)$ auch eine Darstellung in der Form

$$(174.)\qquad \mathfrak{B}(x) = \prod_{\sigma=0}^{\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} \mathrm{V}(\sigma, x)\, \Phi_\sigma \left\{ \sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)) \right\},$$

wenn

$$(175.)\qquad \sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta\, \mathfrak{P}[\chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1} \,|\, h_\sigma] = \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]$$

ist und wenn weder die Factoren $\mathrm{V}(\sigma, x)$ noch die Glieder mit höheren als der h_σ^{ten} Potenzen von $\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1}$ in der Reihen-Entwickelung der Functionen $\chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma))$ die nach Artikel 8 schon erreichte gleichmässige und unbedingte Convergenz beeinträchtigen.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass für $\eta \geqq 1$ und für genügend grosse σ die Functionen

$$(176.)\quad \begin{cases} \Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma}) = m_\sigma \log \mathfrak{p}(\sigma,x) = m_\sigma \log\left(1-\dfrac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right) \\ \qquad = -m_\sigma \sum\limits_{\eta=1}^{\infty} \dfrac{1}{\eta}\,\mathfrak{q}(\sigma,x)^\eta \,.\, \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta} \end{cases}$$

$$(177.)\quad \begin{cases} \chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)) = -m_\sigma \sum\limits_{\varkappa} \log\left\{1+\dfrac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa} L_\varkappa\, \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\varkappa\eta}\right\} \\ \qquad = m_\sigma \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\sum\limits_{\varkappa} \dfrac{1}{\lambda}\left(-\dfrac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa} L_\varkappa\right)^{\lambda} \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\lambda\varkappa\eta} \\ \qquad = m_\sigma \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-n\eta} \sum\limits_{\delta} \dfrac{\delta}{n}\left(-\dfrac{1}{\delta}(-\eta)^{-\delta} L_\delta\right)^{\frac{n}{\delta}} \\ \qquad = -m_\sigma \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(-\eta)^{-n}\,\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-n\eta} \sum\limits_{\delta} (-\delta)^{1-\frac{n}{\delta}} (L_\delta)^{\frac{n}{\delta}} \end{cases}$$

angewendet werden, worin die $L_\varkappa$ allein von η und $\varkappa$ abhängige Zahlen-Coëfficienten bedeuten, worin ferner $\varkappa$ alle positiven ganzen Zahlen, welche nicht grösser als $\frac{1}{\eta}h_\sigma$ sind, durchläuft und endlich δ alle diejenigen ganzen positiven Theiler von n, die Einheit und n selbst nicht ausgeschlossen, bedeutet, welche nicht grösser als $\frac{1}{\eta}h_\sigma$ sind.

Um die Bedingungs-Gleichung (175.) zwischen den Anschluss-Functionen zu erfüllen, hat man für jeden Werth von η den Coëfficienten

$$(178.)\qquad L_1 = -1$$

zu setzen und für $n>1$ die Coëfficienten L_n durch die Recursions-Gleichungen

$$(179.)\qquad \sum_{\delta} (-\delta)^{1-\frac{n}{\delta}} (L_\delta)^{\frac{n}{\delta}} = 0,$$

in welchen die Summe über alle Theiler δ eines jeden n (1 und n eingeschlossen) zu erstrecken ist, zu bestimmen. Es wird also L_n von η unabhängig und bleibt nur von n abhängig. Ich finde

(180.) für die zu $n = 2\ldots 19$ zugehörigen Coëfficienten L_n die Werthe:

n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

L_n = 1, 1, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{13}{12}$, 1, $\frac{27}{16}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{91}{80}$, 1, $\frac{1213}{1152}$, 1, $\frac{505}{448}$, $\frac{1919}{2025}$, $\frac{2955}{2048}$, 1, $\frac{24557}{23328}$, 1.

Bei der hier getroffenen Wahl der Functionen Ψ und χ können wir also die gesuchte Function in der Form

$$(181.)\quad \mathfrak{B}(x) = \mathfrak{p}(0,x)^{-m_0} \prod_{\sigma=1}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}.\mathrm{V}(\sigma,x).\prod_{\eta}\prod_{\varkappa}\left\{1+\frac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa}L_\varkappa.\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta\varkappa}\right\}^{-m_\sigma.\mathfrak{q}(\sigma,x)^\eta}$$

darstellen. Hier sind diejenigen Glieder

$$(181^*.)\qquad 1+\frac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa}L_\varkappa.\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta\varkappa},$$

welche den Werth Null annehmen würden — was nach (76.) nur für endliche Zahlen σ möglich ist — durch die Einheit zu ersetzen. Die Grösse η hat alle positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen, welche nicht grösser als h_σ sind, während die Grösse $\varkappa$ nur alle positiven ganzen Zahlen, welche nicht grösser als $\frac{1}{\eta}h_\sigma$ sind, als Werthe anzunehmen hat.

Die Untersuchung der Convergenz des Ausdrucks (181.) ist ganz entsprechend der Untersuchung des aus interpolirten Convergenz-Factoren gebildeten Ausdruckes im Artikel 13 zu führen, so dass es hier genügen mag, das Resultat anzugeben.

Der Ausdruck (181.) wird für die Umgebung solcher Werthe von x, welche von jedem der $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ um eine nicht unendlich kleine Grösse verschieden und, falls unter den α sich $\frac{1}{0}$ befindet, auch nicht unendlich gross sind, entweder selbst schon oder, wenn der Werth von x mit einem a_σ zusammenfällt, nach Multiplication mit $\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma}$ eine sich vollständig regulär verhaltende Function von x, wenn man das Product der $\mathrm{V}(\sigma,x)$ für die bezeichneten Werthe von x eine sich vollständig regulär verhaltende Function werden lässt und wenn man bei den für $\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{a}, \mathfrak{m}_\sigma, \mathfrak{m}$ in (84.), (151.) ausgesprochenen Voraussetzungen die positiven Zahlen h_σ der Bedingung unterwirft, dass der Ausdruck

$$(182.)\qquad 1-\frac{\mathfrak{a}_\sigma+\mathfrak{m}_\sigma}{1+h_\sigma}$$

für alle σ, welche über einem im Voraus beliebig gewählten Werthe liegen, eine positive nicht verschwindend kleine Grösse wird.

16.

Betti's Convergenz-Factoren.

Für den Fall, dass die Grössen $\mathfrak{a}_\sigma$ und $\mathfrak{m}_\sigma$ vorgegebene endliche Werthe nicht überschreiten und dass man — wie es dann gestattet ist — auch die Grösse h_σ einen bestimmten Werth nicht überschreiten lässt, vereinfacht sich die Untersuchung der Convergenz des Ausdruckes (181.) noch erheblich.

Lehrsatz 1. Geht der Abstand zwischen zwei Grössen a_ϱ und a_σ für kein ϱ und kein σ unter eine beliebig gewählte endliche Grenze herab,
sind die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle von 0 und -1 verschieden,
liegen die den Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ entsprechenden Punkte alle auf einer solchen Curve, deren Längsabschnitte zu den entsprechenden Sehnen immer in einem endlichen Verhältnisse stehen,
und wächst der absolute Betrag von m_σ für zunehmende Zahlen σ nicht rascher als eine Potenz von σ mit beliebig bestimmten echt gebrochenen Exponenten,
so wird der Ausdruck

$$x^{-\mu_0}(1+x)^{-\mu_1}\prod_{\sigma=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma}\left(1+\frac{1}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma x} \tag{183.}$$

für die Umgebung eines endlichen Werthes von x entweder selbst oder, wenn jener endliche Werth beziehungsweise die Null, die negative Einheit, ein Werth a_r ist, nach Multiplication beziehungsweise mit x^{μ_0}, $(1+x)^{\mu_1}$, $\left(1-\frac{x}{a_r}\right)^{m_r}$ eine sich vollständig regulär verhaltende Function von x.

Lehrsatz 2. Geht der Abstand zwischen zwei Grössen a_ϱ und a_σ für kein ϱ und kein σ unter eine beliebig gewählte endliche Grenze herab,
sind die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle von $0, -1, \pm\sqrt{\frac{-1}{2}}$, verschieden
und wächst die Quadratzahl $m_\sigma m_\sigma$ für zunehmende Zahlen σ nicht rascher als eine Potenz von σ mit beliebig bestimmten echt gebrochenen Exponenten,
so wird der Ausdruck

$$(184.)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{-\mu_0}(1+x)^{-\mu_1}(1-x\sqrt{-2})^{-\mu_2}(1+x\sqrt{-2})^{-\mu_3} \\ \times\prod_{\sigma=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma}\left(1+\frac{1}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma x}\left(1+\frac{1}{2a_\sigma a_\sigma}\right)^{-m_\sigma x}\left(1+\frac{1}{2a_\sigma a_\sigma}\right)^{-m_\sigma xx}\end{array}\right.$$

für die Umgebung eines jeden endlichen Werthes von x entweder selbst schon oder, wenn jener endliche Werth beziehungsweise gleich

$$0, \quad -1, \quad +\frac{1}{\sqrt{-2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{-2}}, \quad a_r$$

ist, nach Multiplication beziehungsweise mit

$$x^{\mu_0}, \quad (1+x)^{\mu_1}, \quad (1-x\sqrt{-2})^{\mu_2}, \quad (1+x\sqrt{-2})^{\mu_3}, \quad \left(1-\frac{x}{a_r}\right)^{m_r}$$

eine sich vollständig regulär verhaltende Function von x.

Die Beweise dieser beiden Lehrsätze ergeben sich aus dem Obigen, wenn man beachtet, dass hier jede der Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gleich $\frac{1}{0}$, also nach (34.), (35.), (36.)

$$\mathfrak{p}(0,x) = x = \mathfrak{q}(0,x) = \mathfrak{q}(r,x), \quad \mathfrak{p}(r,x) = 1-\frac{x}{a_r} \quad \text{für } r>0$$

wird, und dass die den Bedingungen (84.), (151.), (182.) zu unterwerfenden Werthe

$$(185.)\quad \mathfrak{a}_\sigma = 1, \quad \mathfrak{m}_\sigma < 1, \quad h_\sigma = 1, \quad \text{im vorletzten Lehrsatze } 1,$$
$$(186.)\quad \mathfrak{a}_\sigma = 2, \quad \mathfrak{m}_\sigma < 1, \quad h_\sigma = 2, \quad \text{im letzten Lehrsatze } 2$$

angenommen werden können.

Diese beiden Lehrsätze sind für den Fall, dass $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, $m_1 = m_2 = m_3 = \cdots = m_\sigma = \cdots = -1$ und dass die beim vorletzten Lehrsatze in Anwendung kommende Curve eine gerade Linie wird, zuerst von Herrn Betti aufgestellt und bewiesen. Siehe »Annali di Matematica pura e applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da Betti, Brioschi, Genochi e Tortolini«. Tomo III, Anno 1860: *La Teorica delle Funzioni ellittiche.* Monografia del Professore Enrico Betti. (Questa teorica è stata esposta nelle Lezioni di Analisi superiore date nella R. Università di Pisa nell' anno scolastico 1859—60). Introduzione No. 6, pag. 81 und 82.

Herr Betti bezeichnet diese von ihm aufgestellten Functionen als ganze Functionen, für welche die sämmtlichen Werthe $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\sigma, \dots$ und nur diese die Wurzeln bilden.

17.

Vorgegebene Null- und Unendlichkeits-Stellen.

Lehrsatz. Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ beliebig vorgegebene Werthe, welche entweder von einander verschieden oder theilweise oder sämmtlich einander gleich sein können; ferner seien $a_0, a_1, a_2, \dots$ von einander und von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ verschiedene vorgegebene Werthe, welche zusammen die Bedingung

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{a_n-\alpha_n}\right| = \infty, \text{ wenn } \alpha_n \text{ nicht gleich } \frac{1}{0} \text{ ist,}$$

$$\lim_{n=\infty}|a_n| = \infty, \text{ wenn } \alpha_n = \frac{1}{0} \text{ ist,}$$

erfüllen.

Befindet sich unter den vorgegebenen Grössen das Werthe-Paar $\alpha_r = \frac{1}{0}$ und $a_r = 0$, so will ich $r = 0$ angenommen denken.

Befindet sich unter den vorgegebenen Grössen $a_0, a_1, a_2, \dots$ der Werth $\frac{1}{0}$, so will ich annehmen, dass $a_0 = \frac{1}{0}$ sei; von den Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ kann dann keine gleich $\frac{1}{0}$ sein.

Ich setze

$\mathfrak{q}(r,x) = \frac{1}{x-\alpha_r}$, wenn α_r nicht gleich $\frac{1}{0}$ ist;

$\mathfrak{p}(r,x) = \frac{x-a_r}{x-\alpha_r} = 1 - \frac{a_r-\alpha_r}{x-\alpha_r} = 1 - \frac{\mathfrak{q}(r,x)}{\mathfrak{q}(r,a_r)}$, wenn weder α_r noch a_r gleich $\frac{1}{0}$ ist;

$\mathfrak{q}(r,x) = x$, wenn $\alpha_r = \frac{1}{0}$ ist;

$\mathfrak{p}(r,x) = -\frac{x}{a_r} = -\frac{\mathfrak{q}(r,x)}{\mathfrak{q}(r,a_r)}$, wenn $\alpha_r = \frac{1}{0}$ und a_r von 0 verschieden ist;

$\mathfrak{p}(r,x) = x = \mathfrak{q}(r,x)$, wenn $\alpha_r = \frac{1}{0}$ und $a_r = 0$, also $r = 0$ ist;

$\mathfrak{p}(r,x) = \frac{1}{x-\alpha_r} = \mathfrak{q}(r,x)$, wenn $a_r = \frac{1}{0}$, also $r = 0$ ist.

Sind noch

$$m_0, m_1, m_2, \dots, m_\sigma, \dots$$

ganze positive oder negative, für ein endliches σ nicht unendlich gross werdende, vorgegebene Zahlen so kann man in dem Ausdrucke

$$\mathfrak{B}_1(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma, x) . \Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]\}$$

die $\mathrm{V}(\sigma, x)$ als für alle von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ verschiedenen Werthe von x sich vollständig regulär verhaltende Functionen,

ferner die Φ_σ-Functionen als für alle endlichen Werthe ihrer bezüglichen Argumente sich vollständig regulär verhaltende Functionen,

und weiter die Ordnungs-Zahlen h_σ der Anschluss-Functionen $\mathfrak{P}$, welche von den zu den Φ_σ-Functionen inversen Ψ_σ-Functionen und mit den bezüglichen Argumenten $\mathfrak{q}(\sigma, x)$ zu bilden sind,

auf solche Weise bestimmen,

dass für die Umgebung eines jeden von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ verschiedenen Werthes x der Ausdruck $\mathfrak{B}_1(x)$, dass aber für die Umgebung des a_r als des Werthes von x der Ausdruck $\mathfrak{p}(r, x)^{m_r} \mathfrak{B}_1(x)$ eine sich vollständig regulär verhaltende Function von x wird.

Die gleichen allgemeinen Eigenschaften kann man dem Ausdrucke

$$\mathfrak{B}_2(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma, x) . \Phi_\sigma\{\mathfrak{N}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x))^{m_\sigma} \,|\, \mathfrak{q}_n(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots (1 + h_\sigma)]\}$$

geben, wenn man noch die Interpolations-Werthe

$$\mathfrak{q}_1(\sigma, x), \quad \mathfrak{q}_2(\sigma, x), \quad \mathfrak{q}_3(\sigma, x), \quad \ldots, \quad \mathfrak{q}_{(1+h_\sigma)}(\sigma, x)$$

der Newton'schen Interpolations-Formel innerhalb genügender Grenzen und in genügender Anzahl $(1 + h_\sigma)$ wählt.

Auch dem Ausdrucke

$$\mathfrak{B}_3(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma, x) . \Phi_\sigma\left\{\sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \chi_{\sigma, \eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma))\right\}$$

kann man die für $\mathfrak{B}_1(x)$ geltenden allgemeinen Eigenschaften geben, wenn man die den Bedingungen

$$\sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \, \mathfrak{P}[\chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1} \,|\, h_\sigma] = \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]$$

unterworfenen $\chi_{\sigma,\eta}$-Functionen auf geeignete Weise bestimmt.

Die hier gebrauchten Benennungen: Anschluss-Functionen und vollständig regulär sich verhaltende Functionen, sind unter Nr. (2.) und (11.) erklärt.

Beispielsweise kann man die V-Functionen derartig wählen, dass das über alle nicht negativen ganzen Zahlen σ auszudehnende Product $\prod V(\sigma, x)$ für jeden Werth der Veränderlichen x, welcher von allen Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ verschieden ist, eine sich vollständig regulär verhaltende Function des Argumentes x wird.

Es giebt Functionen $\Phi_\sigma(u)$, welche für jeden endlichen Werth ihres Argumentes u sich vollständig regulär verhaltende Functionen sind, welche ferner für den verschwindenden Argument-Werth u der positiven Einheit gleich werden und welche als inverse Functionen solche Ψ_σ-Functionen besitzen, die für genügend kleine Werthe von $|1-\Phi_\sigma(u)|$ sich regulär verhaltende Functionen von dem Argumente $1-\Phi_\sigma$ sind. Für eine solche Φ_σ Function ist

$$\log\left\{(1-w)^{-m_\sigma} . \, \Phi_\sigma\left\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma((1-w)^{m_\sigma}) \,|\, w \,|\, h_\sigma]\right\}\right\} = \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty} C(\eta, \sigma) . \, w^\eta,$$

wo $C(\eta, \sigma)$ von w unabhängige Coëfficienten sind. Die hierin vorkommende Summe, welche von $1+h_\sigma$ an über alle positiven ganzen Zahlen η auszudehnen ist, convergirt für genügend kleine Werthe $|w|$ gleichmässig und unbedingt.

Um die Eigenschaften einiger der in dem Lehrsatze anwendbaren Functionen Φ_σ und Gradzahlen h_σ der Anschluss-Functionen in einfacher Form aussprechen zu können, will ich annehmen, die Indices $r = 1, 2, 3, \dots$ seien in solcher Weise gewählt, dass immer

$$|\mathfrak{q}(r, a_r)| \leqq |\mathfrak{q}(r+1, a_{r+1})|$$

wird. Zu den genügend gross gewählen σ sollen die positiven ganzen Zahlen ε_σ durch

$$e \leqq e^{\varepsilon_\sigma} \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| < e^{1+\varepsilon_\sigma}$$

in Beziehung gesetzt sein; die reelle Grösse $\mathfrak{a}_\sigma$ und die reelle von σ unabhängige Grösse $\mathfrak{a}$ sollen derartig bestimmt sein, dass die absolute Grösse

$$e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a}}$$

nicht von der Anzahl derjenigen σ übertroffen wird, welche zu einem bestimmten ε_σ gehören. In dem vorstehenden Lehrsatze sind nach (85.) solche Φ_σ-Functionen zulässig, für welche bei jeder die h_σ übertreffenden ganzen Zahl η und bei jedem zu einem ε_σ zugehörigen σ die Bedingung

$$|C(\eta, \sigma)| \leqq e^{\gamma\eta + c h_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m} + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma + \mathfrak{c}}$$

in der Weise erfüllt wird, dass

γ, c, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{c}$ unabhängig von σ

γ, c, $\mathfrak{m}_\sigma$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{c}_\sigma$, $\mathfrak{c}$ unabhängig von η und h_σ

γ, c auch noch unabhängig von m_σ

sich bestimmen lassen. Den Anforderungen des Lehrsatzes genügt es also nach (95.), die nicht negativen Zahlen h_σ so gross zu nehmen, dass der Ausdruck

$$1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{c}_\sigma}{1 + h_\sigma}$$

für die Zahlen σ, welche über einem im Voraus beliebig gewählten endlichen Werthe liegen, eine positive Grösse und für unendlich grosse σ nicht unendlich klein wird.

Nach (97.) und (98.) sind die beiden Functionen

$$\Phi_\sigma(u) = e^u \quad \text{und} \quad \Phi_\sigma(u) = e^{m_\sigma h_\sigma(-1+e^u)}$$

zulässig. Es werden nämlich, wenn man die reelle Grösse $\mathfrak{m}_\sigma$ und die von σ unabhängige Grösse $\mathfrak{m}$ derartig bestimmt, dass für alle die zu einem ε_σ zugehörigen Indices σ immer

$$e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m}} \geqq |m_\sigma|$$

ist, die vorgenannten Bedingungen für $C(\eta, \sigma)$ erfüllt, und zwar kann $\mathfrak{c}_\sigma$ durch genügend gross gewählte σ beliebig klein gemacht werden.

Was die Grenzen der bei Anwendung der Functionen $\Phi_\sigma(u) = e^u$ zulässigen Interpolations-Werthe $\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)$ in der Newtonschen Function $\mathfrak{N}$ betrifft, so genügt es nach (152.) für jede über einem geeignet gross gewählten Werthe liegende Zahl σ und für jedes $\mathfrak{n} = 1, 2, 3, \ldots, (1+h_\sigma)$ die Bedingung

$$|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)| < |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \cdot e^{-2}$$

zu erfüllen. Wenn ν_σ eine reelle Grösse und ν eine reelle von σ unabhängige Grösse bedeuten, welche für jedes zu einem genügend gross gewählten ε_σ zugehörige σ immer

$$|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)| \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \cdot e^{-\varepsilon_\sigma \nu_\sigma - \nu} < |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \cdot e^{-2}$$

werden lassen, und wenn man $\mathfrak{a}_\sigma$ in der bisher gebrauchten und $\mathfrak{m}_\sigma$ in der zuletzt angegebenen speciellen Bedeutung anwendet, so kann man nach (153.) als die in dem Lehrsatze genügende Anzahl $1+h_\sigma$ der Interpolations-Werthe diejenigen betrachten, welche die beiden Ausdrücke

$$1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma}{1+h_\sigma} \quad \text{und} \quad \left(\nu_\sigma + \frac{\nu - 2}{\varepsilon_\sigma}\right)(1+h_\sigma) - \mathfrak{a}_\sigma - \mathfrak{m}_\sigma$$

für wachsende σ beständig positiv und für unendlich grosse σ nicht unendlich klein werden lassen.

Ein Beispiel der in dem Lehrsatze anwendbaren $\chi_{\sigma,\eta}$-Functionen enthält der Artikel 15.

VORLÄUFIGER ABSCHLUSS.

Von den im Artikel 6 angedeuteten Lehrsätzen habe ich noch die Gültigkeits-Bedingungen und meine Beweise derjenigen Sätze mitzutheilen, welche die Convergenz der die Functionen mit gegebenen Anschluss-Functionen darstellenden Ausdrücke bestimmen. Auch ist noch die Beziehung der letztgenannten Ausdrücke zu den oben im Vorwort genannten von Herrn Mittag-Leffler gelösten Problemen so wie zu derjenigen von Herrn Weierstrass für die gesuchten Functionen angewandten Darstellung anzugeben, welche in der Abhandlung »Ueber einen functionstheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler*)« (Monatsberichte, Berlin 1880, August 5, S. 707—717) während des Druckes der vorstehenden Artikel veröffentlicht ist.

An der Drucklegung dieser meiner Untersuchungen bin ich gegenwärtig durch die unaufschiebbare Arbeit der Berechnung der Bilanz der Göttinger Professoren-Wittwen-Casse gehindert.

*) [Weierstrass, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 189—199.]

XXIV.

LA FORMULE D'INTERPOLATION DE M. HERMITE EXPRIMÉE ALGÉBRIQUEMENT.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.
[Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, T. 92, p. 510—513.
Paris. 7 mars 1881.]

Vous avez donné, dans votre Lettre adressée à Borchardt, datée du 5 juillet 1877 (Borchardt, Journal, Bd. 84, p. 70), l'expression d'une fonction algébrique, dont la valeur et celles de plusieurs de ses dérivées sont assignées. Cette expression contient une intégrale qui est aussi, en forme généralisée, appliquée par M. Mittag-Leffler dans son Mémoire imprimé dans les *Acta Societatis Scientiarum fennicae*, t. XI, p. 280. Pour obtenir une forme purement algébrique, j'applique des fonctions que l'on peut appeler fonctions de contact d'une fonction donnée. Soit $F(x)$ une fonction développable suivant les puissances descendantes et ascendantes de $(x-a)$ (ou de la valeur réciproque de x) pour des valeurs du module de $(x-a)$ (ou du module de la valeur réciproque de x) qui ne possèdent aucune limite inférieure assignable différente de zéro.

$$(1.)\qquad F(x) = \sum_{\mu=-M}^{\mu=+N} A_\mu (x-a)^\mu \quad \text{ou} \quad F(x) = \sum_{\mu=-\mathfrak{m}}^{\mu=+\mathfrak{n}} B_\mu \left(\frac{1}{x}\right)^\mu .$$

J'applique la désignation

$$(2.)\qquad \mathfrak{P}[F(x)\,|\,x-a\,|\,n] = \sum_{\mu=-M}^{\mu=\nu} A_\mu (x-a)^\mu, \qquad \mathfrak{P}\left[F(x)\left|\frac{1}{x}\right|n\right] = \sum_{\mu=-\mathfrak{m}}^{\mu=\nu} B_\mu \left(\frac{1}{x}\right)^\mu,$$

où ν signifie la valeur la plus grande que l'exposant μ dans la série correspondante (1) peut recevoir sans surpasser la valeur de n. Par exemple, si les exposants sont des nombres entiers et si l'on a choisi n entier non inférieur à $-M$ (ou à $-\mathfrak{m}$), on aura $\nu = n$. Mais si n est moindre que $-M$ (ou que $-\mathfrak{m}$), la seconde partie de la première (ou de la seconde) équation (2.) devient identiquement zéro.

J'appelle cette fonction $\mathfrak{P}$ dans le n^0 (2.) la fonction de contact pour la fonction $F(x)$ et plus précisément cette fonction de contact qui appartient à l'argument $x-a$ (ou à l'argument de la valeur réciproque de x), aux environs de la valeur $x = a$ (ou de la valeur $x = \infty$), et à l'ordre n. La fonction de contact $\mathfrak{P}$ conserve son sens pour chaque valeur de x, excepté, en quelque cas, pour $x = a$ (ou $x = \infty$) et pour $x = \infty$ (ou $x = 0$), pendant que chacun des développements (1.) peut n'être valable que sous des conditions bien plus restreintes.

Le problème que je me propose de résoudre ici est le suivant: Trouver une fonction $F(x)$ uniforme, qui soit développable en série de puissances de $x-a_\sigma$ pour $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, t$, avec des exposants entiers croissants, et qui contienne dans chacune de ces séries les premiers termes donnés, savoir les termes.

$$(3.) \qquad \sum_{\mu=-m_\sigma}^{\mu=+n_\sigma} A_{\sigma,\mu}(x-a_\sigma)^\mu \quad \text{pour} \quad \sigma = 1, 2, 3, \ldots, t,$$

où les $A_{\sigma,\mu}$ soient des valeurs données arbitrairement, où les $a_1, a_2, \ldots, a_t$ soient des valeurs données différentes entre elles et où les m_σ, n_σ soient des nombres entiers donnés positifs ou négatifs ou zéro, soumis seulement à la condition que le nombre $1+n_\sigma+m_\sigma$ des termes dans chacune des expressions (3.) ne soit pas moindre que l'unité.

Pour la solution de ce problème, j'emploie les fonctions

$$(4.) \qquad F_\sigma(x) = \sum_{\mu=-m_\sigma}^{\mu=+\infty} A_{\sigma,\mu}(x-a_\sigma)^\mu, \qquad \sigma = 1, 2, 3, \ldots, t,$$

dans lesquelles les valeurs des constantes $A_{\sigma,\mu}$ pour $\mu > n_\sigma$ soient arbitraires, mais permettent la convergence de la série (4.) pour des valeurs assez petites du module de $(x-a_\sigma)$. Ensuite je mets

$$(5.)\qquad \Phi_\sigma(x) = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=t}(x-a_\varrho)^{t+n_\varrho}\varphi_{\sigma,\varrho}(x),$$

où les fonctions uniformes arbitraires $\varphi_{\sigma,\varrho}(x)$ ne s'annulent pour aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et soient développables suivant des puissances de chaque $(x-a_r)$ avec des exposants non négatifs, pour des valeurs assez petites du module de $(x-a_r)$. La forme générale de la fonction $F(x)$ à trouver est la suivante:

$$(6.)\qquad F(x) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=t}\Phi_\sigma(x)\left\{\mathfrak{P}\left[\frac{F_\sigma(x)}{\Phi_\sigma(x)}\,|\,x-a_\sigma\,|-1\right]+\Psi_\sigma(x)\right\},$$

où les fonctions uniformes arbitraires $\Psi_\sigma(x)$ sont développables suivant les puissances de chaque $(x-a_r)$ avec des exposants non négatifs pour des valeurs assez petites du module de $(x-a_r)$.

Si l'on met toutes les fonctions $\varphi_{\sigma,\varrho}(x) = 1$, $\Psi_\sigma(x) = 0$, la fonction $F(x)$ de la solution (6.) du problème deviendra la fonction algébrique la plus simple possible, c'est-à-dire la fonction rationnelle algébrique, dont le dénominateur possède le moindre degré, et, parmi les fonctions d'un tel dénominateur, elle sera celle dont le numérateur possédera le moindre degré.

La solution du n^0 (6.) pour ce cas peut être regardée comme une application de la partition d'une fonction rationelle en fractions partielles. En effet, si $R(x)$ est une fonction uniforme qui ne devient infinie que pour les pôles différents entre eux $\infty, a_1, a_2, \ldots, a_t$ et en nombre fini, la fonction $R(x)$ sera

$$R(x) = \mathfrak{P}\left[R(x)\left|\frac{1}{x}\right|0\right]+\sum_{s=1}^{s=t}\mathfrak{P}[R(x)\,|\,x-a_s\,|-1].$$

L'algorithme que l'on applique pour trouver cette fonction algébrique entière du plus haut degré, laquelle divise deux fonctions entières algébriques données $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$, peut être représenté sous la forme

$$Q_{n-1}(x) = Q_n(x)\,\mathfrak{P}\left[\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}\left|\frac{1}{x}\right|0\right]+Q_{n+1}(x)\quad\text{pour}\quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Un tel algorithme sert à la solution de l'équation

$$A(x)\,P(x)+B(x)\,Q(x)+A(x)\,B(x)\,S(x) = C(x),$$

où les $\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{C}(x)$ désignent des fonctions entières algébriques données et où les $\boldsymbol{P}(x), \boldsymbol{Q}(x), \boldsymbol{S}(x)$ désignent les fonctions entières algébriques du moindre degré possible à chercher. Si les valeurs de x, qui annulent les deux fonctions $\boldsymbol{A}(x)$ et $\boldsymbol{B}(x)$ sont données, la solution de la dernière équation peut être représentée sous la forme suivante: désignant par $\boldsymbol{D}(x)$ la fonction entière du plus haut degré, qui divise la fonction $\boldsymbol{A}(x)$ et la fonction $\boldsymbol{B}(x)$, désignant de plus par $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ les valeurs différentes entre elles qui annulent le quotient de la fonction $\boldsymbol{A}(x)$ divisée par $\boldsymbol{D}(x)$, désignant enfin par $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ les valeurs différentes entre elles qui annulent le quotient de la fonction $\boldsymbol{B}(x)$ divisée par $\boldsymbol{D}(x)$, on aura

$$S = \mathfrak{P}\left(\frac{C}{AB}\,\middle|\,\frac{1}{x}\,\middle|\,0\right),$$

$$Q = \frac{A}{D}\sum_{r=1}^{r=\alpha}\mathfrak{P}\left(\frac{CD}{AB}\,|\,x-a_r\,|-1\right),$$

$$P = \frac{B}{D}\sum_{s=1}^{s=\beta}\mathfrak{P}\left(\frac{CD}{AB}\,|\,x-b_s\,|-1\right),$$

où, pour les fonctions A, B, C, D, P, Q, S, la variable x est omise pour abréger.

Mes recherches sur la théorie ouverte par M. Weierstrass dans son Mémoire: Sur les fonctions analytiques uniformes (dont la traduction faite par M. Picard se trouve dans les Annales de l'École Normale supérieure, II[e] série, t. VIII, p. 111), et poursuivie par M. Mittag-Leffler dans la Lettre qu'il vous a adressée (imprimée dans le Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1879, II[e] série, t. III, p. 269) m'ont donné bien des fois l'occasion d'appliquer les fonctions de contact.

XXV.

ZUR THEORIE DER QUADRATISCHEN RESTE.

[Acta mathematica, Bd. I, S. 153—170. Stockholm, 1883].

Gauss hat durch seine Disquisitiones Arithmeticae die Lehre von den ganzen Zahlen zu einer systematischen Wissenschaft erhoben. In diesem Werke giebt es wohl nur eine Stelle, von welcher man behaupten kann, dass die systematische Anordnung durchbrochen ist, nämlich jene, wo Gauss zwischen die Untersuchung der Congruenzen ersten Grades und der Congruenzen zweiten Grades die Untersuchung der höheren Potenzreste einschaltet. Es erscheint mir — anstatt die höheren Potenzreste als das allgemeinere Gebiet, zu welchen die quadratischen Reste gehören, dort zu untersuchen — natürlicher, die quadratischen Congruenzen nicht nur für Primzahl-Moduln, welche von Gauss fast ausschliesslich behandelt werden, sondern auch für zusammengesetzte Moduln vollständig zu erledigen.

Auf solche Weise erhält man nicht nur eine Reihe neuer Lehrsätze, sondern man gelangt auch unmittelbar zu der Charakteristik einer Zahl im Gebiete der quadratischen Reste in Bezug auf einen zusammengesetzten Modul; auf dieselbe Charakteristik wurde Gauss bei seinem ersten Beweise für das Reciprocitäts-Gesetz in der Theorie der quadratischen Reste erst aufmerksam, nachdem er das Reciprocitäts-Gesetz durch Induction gefunden hatte.

Die Wichtigkeit dieses ersten Beweises, welchen Gauss am 8. April 1796 gefunden hat (Vergl. meine Bemerkungen zu Gauss' Werken Band I, Seite 475), ist von Dirichlet auch dadurch anerkannt, dass er der Wiedergabe desselben Beweises in übersichtlicher Form eine eigene Abhandlung gewidmet hat (Crelle's Journal Bd. 47, Berlin 1854, Seite 139 bis 150)*). Es mag mir deshalb gestattet sein, auf einigen Blättern den unmittelbaren Beweis eines von mir gefundenen für jene von Gauss eingeführte Charakteristik geltenden besonders einfachen Satzes zusammenzustellen; eines Satzes, welcher sich dem grossen Meister bei Abfassung seiner Disquisitiones Arithmeticae wie auch später entzogen zu haben scheint, wohl deshalb, weil er in jenem Werke die Behandlung der quadratischen Reste für zusammengesetzte Moduln vermieden hat.

Da für die Vergleichung der verschiedenen Beweise des Reciprocitäts-Satzes der Umfang der benutzten Theorien von besonderer Bedeutung ist, so will ich hervorheben, dass im Folgenden von dem Inhalte der Disquisitiones Arithmeticae nichts weiter vorausgesetzt wird als die erste Section, welche im Allgemeinen von den Congruenzen der Zahlen handelt, und die zweite Section (von den Congruenzen des ersten Grades) bis einschliesslich des Artikel 36**).

Der in diesem Artikel bewiesene Lehrsatz lässt sich, mit Hinzufügung einer leicht zu erledigenden Vervollständigung so aussprechen: Ist zu jedem von mehreren mit einander theilerfremden Moduln A, B, C, D, ... eine beliebige Zahl, beziehungsweise $a, b, c, d, \ldots$ vorgegeben, so lässt sich zum Producte der Moduln ABCD... als neuer Modul immer ein und nur ein Rest z finden, welcher den einzelnen vorgegebenen Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ nach den bezüglichen Moduln A, B, C, D congruent ist: $z \equiv a$ (mod. A), $z \equiv b$ (mod. B), $z \equiv c$ (mod. C), ...

Ausserdem wird nur noch der Artikel 38 vorausgesetzt. Dieser bestimmt die Eulersche Function $\varphi(A)$, nämlich die Anzahl der positiven Zahlen, welche zu einer gegebenen positiven Zahl A theilerfremd und nicht grösser als diese sind. Der Ausdruck für die Eulersche Function wird im Folgenden nicht benutzt, sondern nur der Begriff derselben.

Zunächst wollen wir für den Fall, dass der Modul m eine zusammengesetzte Zahl und die Zahl a zu m theilerfremd ist, die Anzahl der Wurzeln x in der Congruenz

$$xx \equiv a \pmod{m}$$

*) [Dirichlet, Ges. Werke, Bd. II, S. 121—138.]

**) [Gauss' Werke, Bd. I, S. 9—27 und 30—31.]

bestimmen. Einige hierzu in enger Beziehung stehende bekannte Sätze will ich der Vollständigkeit wegen mit aufnehmen.

I. Die ungerade Zahl a ist dann und nur dann quadratischer Rest zum Modul 4, wenn sie die Form $a = 4k+1$ hat. Für diesen Fall besitzt die Congruenz $xx \equiv a$ (mod. 4) zwei von einander verschiedene Auflösungen, nämlich

$$(1.) \qquad x \equiv +1 \text{ und } x \equiv -1 \pmod{4}.$$

II. Die ungerade Zahl a ist dann und nur dann quadratischer Rest zu einer die Zahl 4 übertreffenden Potenz von 2, wenn sie die Form $a = 8k+1$ hat. In der That, besteht die Congruenz $a \equiv x_s x_s$ (mod. 2^s), bestimmt man h durch die Congruenz

$$x_s h \equiv \frac{a - x_s x_s}{2^s} \pmod{2^{s-2}}$$

und setzt man ferner

$$x_\sigma = x_s + h 2^{s-1}$$

so wird $x_\sigma x_\sigma \equiv a$ (mod. 2^{2s-2}). Von der Potenz $2^s = 2^3$ gelangt man durch Wiederholung dieses Verfahrens zu allen höheren Potenzen von 2 als Moduln.

III. Für eine Zahl a von der Form $8k+1$ hat die Congruenz $xx \equiv a$ (mod. 2^{π_0}), wenn $\pi_0 > 2$ ist, vier Auflösungen; bezeichnet x_0 eine derselben, so sind

$$(2.) \qquad x \equiv +x_0, \quad x \equiv -x_0, \quad x \equiv +x_0 + 2^{\pi_0 - 1}, \quad x \equiv -x_0 - 2^{\pi_0 - 1} \pmod{2^{\pi_0}}$$

jene vier von einander verschiedenen Wurzeln. Die Zahl $xx - x_0 x_0$ wird nämlich, weil x und x_0 ungerade sind, nur dann durch 2^{π_0} theilbar, wenn entweder $x - x_0$ oder $x + x_0$ durch $2^{\pi_0 - 1}$ theilbar ist.

IV. Ist p eine ungerade Primzahl und die durch p nicht theilbare Zahl a quadratischer Rest zu p, so ist a auch quadratischer Rest zu jeder Potenz von p als Modul. In der That besteht die Congruenz $a \equiv x_s x_s$ (mod. p^s), bestimmt man h durch die Congruenz

$$2 x_s h \equiv \frac{a - x_s x_s}{p^s} \pmod{p^s}$$

und setzt dann

$$x_\sigma = x_s + h p^s,$$

so wird $x_\sigma x_\sigma \equiv a$ (mod. p^{2s}). Auf solche Weise gelangt man von der Potenz $p^s = p$ durch Wiederholung zu jeder Potenz von p.

V. Ist p_λ eine ungerade Primzahl und die durch p_λ nicht theilbare Zahl a quadratischer Rest zu p_λ, so hat die Congruenz $xx \equiv a \pmod{p_\lambda^{\pi_\lambda}}$ zwei Auflösungen; ist x_λ eine derselben, so sind

$$(3.) \qquad x \equiv +x_\lambda \text{ und } x \equiv -x_\lambda \pmod{p_\lambda^{\pi_\lambda}}$$

die beiden von einander verschiedenen Wurzeln, weil $xx - x_\lambda x_\lambda$ nur für diese beiden Fälle durch $p_\lambda^{\pi_\lambda}$ theilbar wird.

VI. Bezeichnet m eine zusammengesetzte positive Zahl, also von der Form

$$(4.) \qquad m = 2^{\pi_0} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu}$$

worin $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\mu$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen und $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_\mu$ positive Zahlen bedeuten, während π_0 auch der Null gleich sein kann,

bezeichnet ferner a eine zu m theilerfremde Zahl,

so hat die Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ entweder keine oder $\psi(m)$ von einander verschiedene Auflösungen, wenn nämlich

$$(5.) \qquad \begin{aligned} \psi(m) &= 2^\mu & \text{für } \pi_0 &< 2, \\ \psi(m) &= 2^{\mu+1} & \text{für } \pi_0 &= 2, \\ \psi(m) &= 2^{\mu+2} & \text{für } \pi_0 &> 2 \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Das Bestehen der Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ erfordert, dass a quadratischer Rest zu jeder der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\mu$ und dass

wenn $\pi_0 = 2$ ist, noch $a \equiv 1 \pmod{4}$,
wenn aber $\pi_0 > 2$ ist, auch $a \equiv 1 \pmod{8}$ ist.

Umgekehrt reichen diese Bedingungen auch zur Möglichkeit der Erfüllung jener Congruenz aus, denn man braucht nur mit Hülfe des oben angegebenen Satzes aus dem Art. 36 der Disquisitiones Arithmeticae die Zahl x so zu bestimmen,

(6.) dass sie je einer der beiden Congruenzen (3.) für jedes $\lambda \equiv 1, 2, 3, \ldots, \mu$,
und, wenn $\pi_0 = 1$ ist, noch der Congruenz $x \equiv 1 \pmod{2}$,
wenn aber $\pi_0 = 2$ ist, einer der beiden Congruenzen (1),
wenn endlich $\pi_0 > 2$ ist, einer der vier Congruenzen (2.) genügt.

Zugleich erkennt man unmittelbar, dass verschiedene Verbindungen der für x erforderlichen linearen Congruenzen auch nach dem Modul m einander incongruente Werthe für x ergeben, so dass also die Anzahl der verschiedenen Verbindungen der linearen Congruenzen gleich der Anzahl der Wurzeln der quadratischen Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ ist, wie es der Lehrsatz zu Anfang dieser Nummer VI ausspricht.

Beispiel. Es ist $\psi(60) = \psi(4.3.5) = 2^3 = 8$; in der That die Wurzeln der Congruenz $xx \equiv 1 \pmod{60}$ sind $x \equiv \pm 1, \pm 11, \pm 19, \pm 29$ und von der Congruenz $xx \equiv -11 \pmod{60}$ sind $x \equiv \pm 7, \pm 13, \pm 17, \pm 23$ die Wurzeln, während jede zu 60 theilerfremde Zahl a, welche weder congruent $+1$ noch congruent -11 ist, quadratischer Nichtrest zum Modul 60 ist.

VII. Die Anzahl der zum Modul m theilerfremden quadratischen Reste ist $= \frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$. Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man jeden der $\varphi(m)$ zum Modul m gehörenden theilerfremden Reste quadrirt und den Rest Modulo m bildet; denn es entsteht dadurch nach dem Lehrsatze in VI aus je $\psi(m)$ der $\varphi(m)$ Reste immer wieder derselbe quadratische zu m theilerfremde Rest.

VIII. Die Anzahl der zum Modul m theilerfremden quadratischen Nichtreste ist demnach $= \varphi(m) - \frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$. Beispiel: Es ist $\varphi(60) = 16$, $\psi(60) = 8$ und, wie unter VI gefunden, giebt es zum Modul 60 nur die zwei theilerfremden quadratischen Reste $+1$ und -11, die übrigen 14 theilerfremden Reste -1, $+11$, ± 7, ± 13, ± 17, ± 19, ± 23, ± 29 sind quadratische Nichtreste zum Modul 60.

IX. Die quadratische Congruenz $a \equiv xx \pmod{m}$ kann man als speciellen Fall der bilinearen Congruenz $a \equiv yz \pmod{m}$ auffassen. Benutzt man die letztere Congruenz, um für ein gegebenes a, welches zu einem die Zahl 2 übertreffenden Modul m theilerfremd ist, sämmtliche $\varphi(m)$ theilerfremden Reste als Werthe der y und z anzuordnen, so ergiebt sich, dass dies für alle Reste, mit Ausschluss der Wurzeln x, möglich ist. Will man aber jene Anordnung auf sämmtliche $\varphi(m)$ Reste ausdehnen, so braucht man die quadratische Congruenz nur in die Form $a \equiv -x(m-x)$ zu setzen und erhält dann

$$(7.)\qquad \left.\begin{cases} a \equiv -\alpha_1 . \alpha'_1 \\ a \equiv -\alpha_2 . \alpha'_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a \equiv -\alpha_{\frac{1}{2}\psi} . \alpha'_{\frac{1}{2}\psi} \\ a \equiv +\alpha_{\frac{1}{2}\psi+1} . \alpha'_{\frac{1}{2}\psi+1} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a \equiv +\alpha_{\frac{1}{2}\varphi} . \alpha'_{\frac{1}{2}\varphi} \end{cases}\right\} \pmod{m}$$

wenn nämlich

$$(8.)\qquad \pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \ldots,\ \pm\alpha_{\frac{1}{2}\psi}$$

die $\psi(m)$ von einander verschiedenen Wurzeln x der Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ bedeuten und

$$(8^*.)\qquad \alpha'_1 = m-\alpha_1,\quad \alpha'_2 = m-\alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha'_{\frac{1}{2}\psi} = m-\alpha_{\frac{1}{2}\psi}$$

gesetzt ist. Die Zahl $\alpha_{\frac{1}{2}\psi+1}$ wird als irgend ein von $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \ldots, \alpha_{\frac{1}{2}\psi}, \alpha'_{\frac{1}{2}\psi}$ verschiedener zum Modul m theilerfremder Rest ausgewählt, wenn solche noch vorhanden sind. Die durch die obige Congruenz bestimmte Zahl $\alpha'_{\frac{1}{2}\psi+1}$ muss dann offenbar von $\alpha_{\frac{1}{2}\psi+1}$ und von den vorgenannten $\psi(m)$ Resten verschieden sein. Sind damit noch nicht alle theilerfremden Reste berücksichtigt, so sei $\alpha_{\frac{1}{2}\psi+2}$ einer der übrigen. Der durch die obige Congruenz bestimmte Rest $\alpha'_{\frac{1}{2}\psi+2}$ ist dann ein von allen $2\left(\frac{1}{2}\psi+1\right)+1$ vorher schon in Betracht gezogenen Resten verschiedener, zum Modul m theilerfremder Rest. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens werden alle $\varphi(m)$ Reste in der Weise erschöpft werden, dass die in den vorstehenden Congruenzen (7.) auftretenden α und α' zusammen das vollständige System der $\varphi(m)$ zum Modul m theilerfremden Reste

$$(9.)\qquad r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_{\varphi(m)}$$

ausmachen.

Multipliciren wir die entsprechenden Seiten der obigen Congruenzen (7.) mit einander, so erhalten wir

$$(10.)\qquad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} . r_1 r_2 r_3 \ldots r_{\varphi(m)} \pmod{m},$$

wobei a als quadratischer Rest vorausgesetzt war.

Die Zahl 1 ist quadratischer Rest zu m, wendet man sie als Werth von a an, so erhält man aus der letzten Congruenz den folgenden Lehrsatz.

X. Das Product der sämmtlichen $\varphi(m)$, zum Modul m theilerfremden Reste ist congruent $(-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)}$,

$$(11.)\qquad r_1 . r_2 . r_3 \ldots r_{\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} \quad (\text{mod. } m).$$

Der entstehende Rest ist (zufolge VI) nur dann gleich -1, wenn m entweder gleich 4 oder gleich irgend einer Potenz einer ungeraden Primzahl oder endlich gleich dem Doppelten einer solchen Potenz ist. Für alle andere Zahlen m entsteht der Rest $+1$. In dieser Form hat Gauss die Verallgemeinerung des Wilson'schen Satzes ausgesprochen; vgl. Disquisitiones Arithmeticae, Art. 78*). Von dem Beweise hat er eine Andeutung gegeben.

Beispiel. Es ist $1 \equiv -1.59 \equiv -11.49 \equiv -19.41 \equiv -29.31 \equiv 7.43 \equiv 13.37 \equiv 17.53 \equiv 23.47$ (mod. 60) und $49 \equiv -7.53 \equiv -13.47 \equiv -17.43 \equiv -23.37 \equiv 1.49 \equiv 11.59 \equiv 19.31 \equiv 29.41$.

XI. Wendet man die bilineare Congruenz $b \equiv y.z$ (mod. m) auf einen zu m theilerfremden quadratischen Nichtrest b an, um entsprechend wie in IX das vollständige System der theilerfremden Reste für den Modul m zu ordnen, so treten keine Ausnahmefälle wie bei einem quadratischen Reste a ein, sondern in allen Congruenzen ist dasselbe Vorzeichen anzuwenden, und man erhält

$$(12.)\qquad \left.\begin{cases} b \equiv \beta_1 . \beta'_1 \\ b \equiv \beta_2 . \beta'_2 \\ b \equiv \beta_3 . \beta'_3 \\ \;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b \equiv \beta_{\frac{1}{2}\varphi} . \beta'_{\frac{1}{2}\varphi} \end{cases}\right\} \quad (\text{mod. } m)$$

Hier bilden die $\beta_1, \ldots, \beta_{\frac{1}{2}\varphi}, \beta'_1, \ldots, \beta'_{\frac{1}{2}\varphi}$ wieder in einer besonderen Anordnung das vollständige System der zum Modul m theilerfremden Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{\varphi(m)}$. Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser Congruenzen mit einander und berücksichtigt Nr. X, so erhält man

$$(13.)\qquad b^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \beta_1 \ldots \beta_{\frac{1}{2}\varphi} . \beta'_1 \ldots \beta'_{\frac{1}{2}\varphi} \equiv r_1 . r_2 . r_3 \ldots r_{\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} \quad (\text{mod. } m).$$

*) [Gauss' Werke, Bd. I, S. 61.]

Beispiel: Es ist (modulo 60): $7 \equiv 1.7 \equiv 11.17 \equiv 13.19 \equiv 23.29 \equiv 31.37 \equiv 41.47 \equiv 43.49 \equiv 53.59$ und $11 \equiv 1.11 \equiv 7.53 \equiv 13.47 \equiv 17.43 \equiv 19.29 \equiv 23.37 \equiv 31.41 \equiv 49.59$.

Die Vergleichung von IX, X und XI giebt den Lehrsatz

XII. Ist a zum Modul m theilerfremder quadratischer Rest, so wird

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \pmod{m}. \tag{14.}$$

Ist a zum Modul m theilerfremder quadratischer Nichtrest, so wird

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} \pmod{m}. \tag{15.}$$

Hat die bilineare Congruenz $a \equiv y.z \pmod{m}$ in ganzen positiven, unter m liegenden Zahlen y und z, von welchen y kleiner als z ist, $\frac{1}{2}\varphi(m)$ Auflösungen, so muss a quadratischer Nichtrest zu m sein.

Beträgt die Anzahl jener Auflösungen aber weniger als $\frac{1}{2}\varphi(m)$ und ist a theilerfremd zu m, so muss a quadratischer Rest zum Modul m sein und die Anzahl jener Auflösungen $\frac{1}{2}\varphi(m)-\frac{1}{2}\psi(m)$ betragen. Beispiel: Wenn jede der zum Modul 60 theilerfremden Zahlen quadrirt wird, so entsteht entweder der Rest 1 oder 49, also ist 7 quadratischer Nichtrest zu 60. Es ist $\frac{1}{2}\varphi(60) = 8$, $\frac{1}{2}\psi(60) = 4$, $7^8 \equiv (-11)^4 = 14641 \equiv 1 \equiv (-1)^4 \pmod{60}$.

Es ist (mod. 50):

$1 \equiv -1.49 \equiv 3.17 \equiv 7.43 \equiv 9.39 \equiv 11.41 = 13.27 \equiv 19.29 \equiv 21.31 \equiv 23.37 \equiv 33.47$; $3 \equiv 1.3 \equiv 7.29 \equiv 9.17 \equiv 11.23 \equiv 13.31 \equiv 19.37 \equiv 21.43 \equiv 27.39 \equiv 33.41 \equiv 47.49$; ferner ist $\frac{1}{2}\varphi(50) = 10$, $\frac{1}{2}\psi(50) = 1$, $11^5 = 161051 \equiv 1 \pmod{50}$, also $11^{10} \equiv +1$ und $11 \equiv 19^2 \pmod{50}$, aber $3^{10} = 59049 \equiv -1 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(50)}$.

XIII. Ausser der bilinearen Congruenz $a \equiv y.z \pmod{m}$ bietet für eine auf die Zahl a sich beziehende Anordnung der Reste zum Modul m die lineare Congruenz mit a als constanten Factor, zum Beispiel $a.u \equiv v \pmod{m}$, Gelegenheit. Wählt man der Einfachheit halber für u der Reihe nach die positiven unter den absolut kleinsten, zum Modul m theilerfremden Resten — sie mögen mit $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ bezeichnet werden — so werden die zugehörigen v zum Modul m theilerfremd und einander weder unmittelbar noch nach theilweiser Aenderung des Vorzeichens congruent sein. Nimmt man für v auch absolut kleinste Reste und setzt man

$$\text{(16.)}\qquad \left.\begin{cases} a\,.\,r_1 \equiv \eta_1 r_1' \\ a\,.\,r_2 \equiv \eta_2 r_2' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a\,.\,r_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)} r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \end{cases}\right\} \pmod{m},$$

wo $r_1', r_2', \ldots, r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ absolut kleinste positive Reste sind und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ keine anderen Werthe als $+1$ oder -1 annehmen, so sind also die Zahlen $r_1', r_2', \ldots, r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ abgesehen von der Reihenfolge dieselben wie $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$. Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser Congruenzen mit einander, dividirt dann die beiden Seiten der entstehenden Congruenz durch das zum Modul m theilerfremde Product $r_1 . r_2 \ldots r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ oder $r_1'.r_2' \ldots r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$, so erhält man

$$\text{(17.)}\qquad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \eta_1 . \eta_2 \ldots \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}$$

und demnach unter Benutzung von Nr. XII den Lehrsatz

XIV. Die Anzahl $\eta(a, m)$ der absolut kleinsten negativen Reste, welche sich aus den Producten von a multiplicirt in die absolut kleinsten positiven, zum Modul m theilerfremden Reste für den Modul m ergeben, oder die Anzahl der in absolut kleinsten positiven Resten u, v dargestellten Lösungen der Congruenz $a\,.\,u+v \equiv 0$ (mod. m) ist eine gerade Zahl, wenn a zum Modul m theilerfremder quadratischer Rest, das heisst die Congruenz $a \equiv xx$ (mod. m) lösbar ist; wenn dagegen diese Congruenz nicht lösbar, sondern a zum Modul m theilerfremder quadratischer Nichtrest ist, so wird jene Anzahl $\eta(a, m)$ mit $\frac{1}{2}\psi(m)$, das heisst mit der Anzahl der in absolut kleinsten positiven Resten dargestellten Lösungen w der Congruenz $aa \equiv ww$ (mod. m) gleichzeitig gerade oder ungerade.

(18.) $a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \equiv (-1)^{\eta(a,m)} \pmod{m}$, wenn a theilerfremder quadratischer Rest zu m;

(19.) $a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} \equiv (-1)^{\eta(a,m)} \pmod{m}$, wenn a theilerfremder quadratischer Nichtrest zu m.

Für den besonderen Fall, dass m eine ungerade Primzahl ist, geht dieser Satz in den von Gauss im Januar 1808 aufgestellten Lehrsatz über, auf welchen er seinen dritten Beweis des Reciprocitäts-Gesetzes gegründet hat (Gauss' Werke Band II, Seite 4, Art. 3). Mein in der hier vorliegenden Abhandlung geführter Beweis geht für jenen besonderen Fall in den Beweis über, welchen Dirichlet für den Gaussschen Satz in seinen frühesten Universitäts-Vorlesungen zu geben pflegte.

Beispiel. Für den Modul 60 ist 49 theilerfremder quadratischer Rest, aber 7 theilerfremder quadratischer Nichtrest, $\frac{1}{2}\varphi(60) = 8$, $\frac{1}{2}\psi(60) = 4$, $49^8 \equiv 11^8 \equiv (11^4)^2 \equiv (14641)^2 \equiv 1$, $7^8 \equiv 11^4 \equiv 1$, $\eta(49, 60) = 8$, $\eta(7, 60) = 4$; $49.1 \equiv -11$, $49.7 \equiv -17$, $49.11 \equiv -1$, $49.13 \equiv -23$, $49.17 \equiv -7$, $49.19 \equiv -29$, $49.23 \equiv -13$, $49.29 \equiv -19$; $7.1 \equiv 7$, $7.7 \equiv -11$, $7.11 \equiv 17$, $7.13 \equiv -29$, $7.17 \equiv -1$, $7.19 \equiv 13$, $7.23 \equiv -19$, $7.29 \equiv 23$. Für den Modul 50 ist $11 \equiv 19^2$, also 11 theilerfremder quadratischer Rest aber 7 theilerfremder quadratischer Nichtrest, $\frac{1}{2}\varphi(50) = 10$, $\frac{1}{2}\psi(50) = 1$, $11^{10} \equiv 11^{5 \cdot 2} \equiv 161051^2 \equiv 1$, $7^{10} \equiv (-1)^5 \equiv -1$, $\eta(11, 50) = 6$, $\eta(7, 50) = 5$; $11.1 \equiv 11$, $11.3 \equiv -17$, $11.7 \equiv -23$, $11.9 \equiv -1$, $11.11 \equiv 21$, $11.13 \equiv -7$, $11.17 \equiv -13$, $11.19 \equiv 9$, $11.21 \equiv -19$, $11.23 \equiv 3$; $7.1 \equiv 7$, $7.3 \equiv 21$, $7.7 \equiv -1$, $7.9 \equiv 13$, $7.11 \equiv -23$, $7.13 \equiv -9$, $7.17 \equiv 19$, $7.19 \equiv -17$, $7.21 \equiv -3$, $7.23 \equiv 11$.

XV. Multiplicirt man beide Seiten so wie den Modul m in den Congruenzen (16.) mit derselben positiven Zahl δ, setzt $M = \delta m$ und beachtet, dass die Gesammtheit der Producte

$$\delta . r_1,\ \delta . r_2,\ \delta . r_3,\ \ldots,\ \delta . r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$$

die vollständige Reihe derjenigen $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{M}{\delta}\right)$ zum Modul M gehörenden, absolut kleinsten positiven Reste bilden, welche mit M den grössten gemeinsamen Theiler δ besitzen, so erhält man den folgenden Satz.

Die zu Eingang von XIV definirte Anzahl $\eta(a, m)$ oder $\eta\left(a, \frac{M}{\delta}\right)$ ist auch gleich der Anzahl der absolut kleinsten negativen Reste, welche sich für den Modul M aus den Producten der zu M theilerfremden Zahl a multiplicirt in die $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{M}{\delta}\right)$ zum Modul M gehörenden, mit ihm den grössten gemeinsamen Theiler δ besitzenden absolut kleinsten positiven Resten ergeben.

XVI. Die zum Modul M gehörenden, absolut kleinsten nothwendig positiv zu nehmenden Reste, also die natürliche Zahlenreihe

entweder (20.) $1, 2, 3, 4, \ldots, \frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade ist,

oder (21.) $1, 2, 3, 4, \ldots, \frac{M}{2}-1$, wenn M gerade ist,

kann auch aufgefasst werden als die Gesammtheit derjenigen zum Modul M gehörenden, absolut kleinsten positiven Reste, welche mit M je einen von allen unter $\frac{M}{2}$ liegenden Theilern δ der Zahl M als grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Multiplicirt man mit der zu M theilerfremden Zahl a jede Zahl des obigen Reste-Systems (20.) oder (21.), bildet von diesen Producten die absolut kleinsten Reste für den Modul M, wendet die hier angedeutete Gruppirung jener Zahlen nach ihrem jedesmaligen mit M gemeinsamen grössten Theiler an und benutzt den in XV aufgestellten Satz, so findet man den Lehrsatz

XVII. Die Anzahl $\mathrm{H}(a, \mathrm{M})$ der absolut kleinsten negativen Reste, welche in Bezug auf den Modul M den Producten

entweder $a.1, a.2, a.3, \ldots, a\frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade,

oder $a.1, a.2, a.3, \ldots, a\left(\frac{M}{2}-1\right)$, wenn M gerade,

congruent sind, wird, wenn die Zahl a zu M theilerfremd ist, gleich

$$(22.)\quad \mathrm{H}(a, \mathrm{M}) = \sum_{\delta}\eta\left(a, \frac{\mathrm{M}}{\delta}\right) = \sum_{m}\eta(a, m), \quad 1 \leqq \delta < \frac{\mathrm{M}}{2}, \quad 2 < m \leqq \mathrm{M} = m\delta,$$

wo die eine Summation über die sämmtlichen unter $\frac{M}{2}$ liegenden Theiler δ des Modul M und die andere Summation über die sämmtlichen die Zahl 2 übersteigenden Theiler m des Modul M auszudehnen ist

Wählt man in diesem Satze die Zahl $a = -1$ und berücksichtigt, dass $\eta(-1, m) = \frac{1}{2}\varphi(m)$ ist, so erhält man den Eulerschen Summations-Satz für die φ-Function. Von diesem Satze werden wir hier aber keinen Gebrauch zu machen haben.

Beispiel. Es ist $H(7, 60) = 13$, $\sum_{\delta} \eta\left(7, \frac{60}{\delta}\right) = \eta(7, 60) + \eta(7, 30) + \eta(7, 20) + \eta(7, 15) + \eta(7, 12) + \eta(7, 10) + \eta(7, 6) + \eta(7, 5) + \eta(7, 4) + \eta(7, 3) = 4 + 2 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 13$. Ferner ist $H(7, 45) = 9$, $\sum_{\delta} \eta\left(7, \frac{45}{\delta}\right) = \eta(7, 45) + \eta(7, 15) + \eta(7, 9) + \eta(7, 5) + \eta(7, 3) = 4 + 2 + 2 + 1 + 0 = 9$.

XVIII. Ist M gerade, so wird für ein ungerades a

$$\text{entweder}\quad as \equiv +s' > 0 \quad\text{und}\quad a\left(\frac{M}{2} - s\right) \equiv \frac{M}{2} - s' > 0 \pmod{M}$$

$$\text{oder}\quad as \equiv -s' < 0 \quad\text{und}\quad a\left(\frac{M}{2} - s\right) \equiv -\frac{M}{2} + s' < 0 \pmod{M},$$

worin s und s' positive unter $\frac{M}{2}$ liegende Zahlen bedeuten.

Die absolut kleinsten negativen Reste werden also nicht anders als paarweise auftreten können, wenn jedes s von $\frac{M}{2} - s$ verschieden, also $\frac{M}{2}$ ungerade ist.

Für ein geradzahliges $\frac{M}{2}$ wird

$$a\frac{M}{4} \equiv +\frac{M}{4} \pmod{M}, \quad\text{wenn } a \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist},$$

$$a\frac{M}{4} \equiv -\frac{M}{4} \pmod{M}, \quad\text{wenn } a \equiv 3 \pmod{4} \text{ ist}.$$

Wir erhalten demnach den Satz:

Für einen geradzahligen Modul M und für ein ungerades a wird die Anzahl $H(a, M)$ der den Producten

$$a.1,\ a.2,\ a.3,\ \ldots,\ a.\left(\frac{M}{2} - 1\right)$$

nach dem Modul M congruenten absolut kleinsten negativen Reste eine gerade Zahl sein, also $H(a, M) \equiv 0 \pmod{2}$, wenn $M \equiv 2 \pmod{4}$

oder wenn zugleich $M \equiv 0$ und $a \equiv 1 \pmod{4}$ ist;

dagegen wird sie ungeradzahlig, also $H(a, M) \equiv 1 \pmod{2}$, wenn zugleich $M \equiv 0$ und $a \equiv 3 \pmod{4}$ ist.

Beispiele. $H(7,30) = 8$, $H(5,12) = 2$, $H(7,60) = 13$.

XIX. Aus der Verbindung der Lehrsätze in XVII und XIV folgt

$$H(a, M) = \sum_m \eta(a, m) \equiv \sum_m{}' \tfrac{1}{2}\psi(m) \pmod{2} \tag{23.}$$

worin $\sum\limits_m$ sich auf alle die Zahl 2 übertreffenden Theiler m von M, dagegen $\sum\limits_m{}'$ sich nur auf diejenigen die Zahl 2 übertreffenden im Modul M enthaltenden Theiler m bezieht, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist.

Wir haben also den Lehrsatz: Die Anzahl $H(a, M)$ derjenigen absolut kleinsten negativen Reste, welche nach dem Modul M

entweder den Producten $a.1,\ a.2,\ a.3,\ \ldots,\ a\frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade ist,

oder den Producten $a.1,\ a.2,\ a.3,\ \ldots,\ a\left(\frac{M}{2}-1\right)$, wenn M gerade ist,

congruent sind, wird für ein zu M theilerfremdes a gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Gesammt-Anzahl aller in absolut kleinsten positiven Resten modulo m dargestellten Lösungen w der Congruenzen $1 \equiv ww \pmod{m}$ für die ganze Reihe derjenigen Moduln m, welche grösser als 2 und Theiler von M sind und zu welchen a quadratischer Nichtrest ist.

Beispiel. Es ist $7 \equiv 1.1$ (mod. 6 und mod. 3); für alle anderen Theiler von 60 ist 7 quadratischer Nichtrest. Ferner ist $1 \equiv 1.1$ (mod. 4 und mod. 5 und mod. 10), $1 \equiv 1.1 \equiv 5.5 \pmod{12}$, $1 \equiv 1.1 \equiv 4.4 \pmod{15}$, $1 \equiv 1.1 \equiv 9.9 \pmod{20}$, $1 \equiv 1.1 \equiv 11.11 \pmod{30}$, $1 \equiv 1.1 \equiv 11.11 \equiv 19.19 \equiv 29.29 \pmod{60}$; also ist $\sum\limits_m{}' \frac{1}{2}\psi(m) = \frac{1}{2}\psi(4) + \frac{1}{2}\psi(5) + \frac{1}{2}\psi(10) + \frac{1}{2}\psi(12) + \frac{1}{2}\psi(15) + \frac{1}{2}\psi(20) + \frac{1}{2}\psi(30) + \frac{1}{2}\psi(60)$ $= 1+1+1+2+2+2+2+4 = 15$ und endlich $H(7,60) = 13 \equiv 15 \pmod{2}$.

XX. Wir beschränken jetzt unsere Untersuchung auf den Fall eines ungeraden M; dasselbe kann also in der Form

$$M = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \ldots P_\lambda^{e_\lambda} \ldots P_\nu^{e_\nu} \tag{24.}$$

dargestellt werden, worin $P_1, P_2, \ldots, P_\lambda, \ldots, P_\nu$ von einander verschiedene positive Primzahlen und $e_1, e_2, \ldots, e_\lambda, \ldots, e_\nu$ irgend welche positive Zahlen bedeuten. Aus der Congruenz (23.) folgt dann, wenn wir auch noch die in VI gefundene Bestimmung von $\psi(m)$ und die übrigen dort ausgesprochenen Lehrsätze anwenden, die Congruenz

$$(25.)\quad \mathrm{H}(a, \mathrm{M}) = \sum_m \eta(a, m) \equiv \sum_m{}' \tfrac{1}{2}\psi(m) \equiv \sum_m{}'' \tfrac{1}{2}\psi(m) = \sum_\lambda{}''' e_\lambda \pmod{2}.$$

Hierin erstreckt sich die Summation $\sum\limits_m$ über alle Theiler m von M; die Summation $\sum\limits_m{}'$ über alle diejenigen Theiler m von M, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist; die Summation $\sum\limits_m{}''$ über alle Theiler m von M, welche je einzeln keine verschiedene Primzahlen enthalten und zu welchen a quadratischer Nichtrest ist; endlich die Summation $\sum\limits_\lambda{}''' e_\lambda$ über die in der Darstellung (24.) von M vorkommenden Exponenten derjenigen Primzahlen P_λ, zu welchen die Zahl a quadratischer Nichtrest ist.

Diese letzte Summe $\sum\limits_\lambda{}''' e_\lambda$ bedeutet auch die Anzahl aller derjenigen gleichen und ungleichen in M enthaltenen Primfactoren, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist. Die Congruenz (25.) giebt also den folgenden Lehrsatz.

Die Anzahl $\mathrm{H}(a, \mathrm{M})$ derjenigen Producte

$$a.1,\ a.2,\ a.3,\ \ldots,\ a\frac{\mathrm{M}-1}{2}$$

welche absolut kleinsten negativen Resten für den ungeradzahligen Modul M congruent sind, wird für ein zu M theilerfremdes a gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Anzahl aller derjenigen gleichen und ungleichen in M enthaltenen Primfactoren, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist.

Beispiel. Für $a = 7$, $\mathrm{M} = 45$ ist $\mathrm{H}(7, 45) = 9$, $\sum' \frac{1}{2}\psi(m) = \frac{1}{2}\psi(5) + \frac{1}{2}\psi(15) + \frac{1}{2}\psi(45) = 1+2+2 = 5$; $\sum'' \frac{1}{2}\psi(m) = \frac{1}{2}\psi(5) = 1 \equiv 5 \equiv 9$ (mod. 2). Für $a = 11$, $\mathrm{M} = 45$ dagegen ist $\mathrm{H}(11, 45) = 10$, $\sum' \frac{1}{2}\psi(m) = \frac{1}{2}\psi(3) + \frac{1}{2}\psi(9) + \frac{1}{2}\psi(15) + \frac{1}{2}\psi(45) = 1+1+2+2 = 6$; $\sum'' \frac{1}{2}\psi(m) = \frac{1}{2}\psi(3) + \frac{1}{2}\psi(9) = 1+1 = 2 \equiv 6 \equiv 10$ (mod. 2).

XXI. Es mag noch bemerkt werden, dass die oben benutzten Potenzen von a und b mit den Exponenten $\frac{1}{2}\varphi(m)$ für diese Untersuchung nicht wesentlich sind, sondern hier nur gebraucht wurden, um an die üblichen Betrachtungen anzuschliessen. Ohne Herbeiziehung derselben wird die Entwickelung noch einfacher. Man hat dann den folgenden Lehrsatz aufzustellen.

Die Anzahl aller Lösungen der Congruenzen

(26.) $-x\left(\frac{M}{\delta}-x\right)\equiv a \left(\text{mod. } \frac{M}{\delta}\right)$ in ganzen positiven unter $\frac{M}{2\delta}$ liegenden Zahlen x,

(27.) $1\equiv -x'\left(\frac{M}{\delta}-x'\right) \left(\text{mod. } \frac{M}{\delta}\right)$ in ganzen positiven unter $\frac{M}{2\delta}$ liegenden Zahlen x',

(28.) $au\equiv -v$ (mod. M) in solchen ganzen positiven Zahlen u und v, welche unter $\frac{M}{2}$ liegen und mit M denselben beliebigen grössten Theiler δ gemeinsam haben,

zusammengenommen ist für ein zu M theilerfremdes a immer eine gerade Zahl.

Es ist leicht zu sehen, dass man u und v anstatt sie aus dem System der absolut kleinsten positiven Reste des Modul M zu nehmen, auch aus irgend einem vollständigen halben Restesystem für den Modul M wählen kann, wenn man unter einem solchen ein System aller solchen Reste versteht, von denen keine zwei eine durch den Modul M theilbare Differenz oder Summe ergeben. Für den Fall, dass a und M ungerade Zahlen bedeuten, ist es häufig von Vortheil, entweder die sämmtlichen unter M liegenden positiven geraden oder ungeraden Zahlen als ein solches vollständiges halbes Restesystem für den Modul M zu benutzen.

Der Beweis des Lehrsatzes ergiebt sich aus der Multiplication der entsprechenden Seiten aller Congruenzen, welche entstehen, wenn man sämmtliche Lösungen in jene Congruenzen (26.), (27.), (28.) einsetzt, nachdem man die beiden Seiten und den Modul der Congruenz $au\equiv -v$ (mod. M) für jede Lösung durch δ dividirt hat,

und ferner aller Congruenzen, welche entstehen, wenn man in die Congruenzen

(29.) $y.z\equiv a \left(\text{mod. } \frac{M}{\delta}\right)$ ihre Lösungen durch ganze positive, unter $\frac{M}{\delta}$ liegende und die Bedingung y kleiner als z erfüllende Zahlen y, z einsetzt, ebenso in

(30.) $1 \equiv y'.z' \left(\text{mod. } \frac{M}{\delta}\right)$ ihre Lösungen durch ganze positive, unter $\frac{M}{\delta}$ liegende und die Bedingung y' kleiner als z' erfüllende Zahlen y', z' einsetzt und schliesslich in

(31.) $au \equiv v$ (mod. M) ihre Lösungen durch ganze positive, unter $\frac{M}{2}$ liegende und jenen grössten mit M gemeinsamen Theiler δ enthaltende Zahlen u, v einführt und beide Seiten und den Modul M dieser Congruenz für jede Lösung durch δ dividirt.

Die beiden Seiten der durch diese Multiplication sich ergebenden Congruenz besitzen nämlich, wie unmittelbar aus den Congruenz-Systemen (7.), (12.) und (16.) hervorgeht, gleiche absolute zu $\frac{M}{\delta}$ theilerfremde Zahlenwerthe und müssen, da der Modul $\frac{M}{\delta}$ dieser Congruenz grösser als 2 ist, auch gleiche Vorzeichen haben.

XXII. Die Begriffe der beiden Anzahlen, welche durch den Lehrsatz in XX zu einander in Beziehung gesetzt werden, sind schon von Gauss aufgestellt. Nachdem er im März 1795 (wie er selbst in sein Handexemplar der Disquisitiones Arithmeticae eingeschrieben, vgl. meine Bemerkungen in Gauss' Werken, Bd. I, Seite 476) das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste durch Induction gefunden hatte, welches er in Art. 131 der im Jahre 1801 herausgegebenen Disquisitiones Arithmeticae unter verschiedenen Formen darstellt, gerieth er am 29. Apr. 1796 (Gauss' Werke Bd. I, Seite 476) auf die Betrachtung der Anzahl der in einer gegebenen ungeraden Zahl P enthaltenen gleichen und verschiedenen Primfactoren, zu welchen eine andere gegebene Zahl Q quadratischer Nichtrest ist. In Art. 133 der Disquisitiones Arithmeticae zeigt er, dass, wenn zwischen allen in der einen gegebenen ungeraden Zahl Q enthaltenen Primzahlen einerseits und allen in der anderen gegebenen ungeraden Zahl P enthaltenen Primzahlen andererseits das Reciprocitäts-Gesetz für die quadratischen Reste besteht, dann auch das analoge Reciprocitäts-Gesetz für die eben definirte Anzahl (Q, P) und für die entsprechende Anzahl (P, Q) gilt, welche sich auf dieselben beiden gegebenen, aber mit einander vertauschten Zahlen bezieht. Der Begriff der hier definirten Anzahl ist dann für Gauss ein wesentliches Hülfsmittel, um in den Artikeln 134 bis 136 den vollständigen Beweis für das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste durchzuführen.

Jacobi hat im Jahre 1837 (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin Seite 135 »Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie«*)), wie es scheint ohne sich der betreffenden Stelle bei Gauss bewusst zu sein, die gleichbedeutende Characteristik $\left(\frac{Q}{P}\right)$ eingeführt, welche den Werth entweder -1 oder $+1$ besitzt, je nachdem Q entweder zu einer ungeraden oder zu einer geraden Anzahl von gleichen und verschiedenen in P enthaltenen Primfactoren quadratischer Nichtrest ist. Jacobi nennt dies das verallgemeinerte Legendresche Zeichen und definirt es als das Product von allen Legendreschen Zeichen $\left(\frac{Q}{p_1}\right)\left(\frac{Q}{p_2}\right)\left(\frac{Q}{p_3}\right)\cdots\left(\frac{Q}{p_\nu}\right)$, worin die $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ die Gesammtheit aller derjenigen gleichen und verschiedenen Primfactoren ausmachen, deren Product gleich P ist.

Auch der Begriff der anderen in dem Lehrsatze des Abschnittes XX vorkommenden Anzahl, nämlich der Anzahl derjenigen absolut kleinsten negativen Reste, welche sich für eine zusammengesetzte ungerade Zahl M als Modul aus den Producten einer zu M theilerfremden Zahl a multiplicirt in jeden einzelnen absolut kleinsten positiven Rest ergeben, ist von Gauss untersucht und dafür der Reciprocitäts-Satz bewiesen in Art. 2 der Abhandlung »Theorematis Fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae«, Febr. 1817 (Gauss' Werke, Bd. II, S. 52).

Von dem in XX ausgesprochenen Satze hat Gauss den speciellen Fall, in welchem M eine Primzahl bedeutet, aufgestellt und darauf schon seinen dritten Beweis des Reciprocitäts-Satzes gegründet; aber der allgemeine Lehrsatz für eine zusammengesetzte Zahl M scheint sich ihm entzogen zu haben.

Meine Auffindung dieses Satzes ist in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, Seite 330*) veröffentlicht. Herr Kronecker**) hat hieran mehrere Entwickelungen angeschlossen, in welcher er auch ausspricht, dass er vor meiner Mittheilung diesen Satz selbst gefunden habe. Er stützt seinen Beweis des Satzes auf die Kenntniss des vorausbewiesenen Reciprocitäts-Satzes.

XXIII. Die in XXI aufgestellte Form des Lehrsatzes halte ich deshalb für beachtenswerth, weil in ihr und in dem Beweise wesentlich nur

---

*) [Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. VI, S. 254—274.]

**) [Siehe Bd. I, S. 285—286.]

die Abzählung der Auflösungen von bilinearen und von linearen Congruenzen auftritt und weil in meinem Beweise (1879) des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste*) keine andere Untersuchung als die Abzählung der Lösungen von linearen Congruenzen in Anwendung gebracht wird. Eine genaue Vergleichung dieses Beweises mit dem dritten (1808) und dem fünften (1817) Beweise von Gauss**), dem geometrischen Beweise von Eisenstein (1844)***), dem Beweise von Herrn Zeller****) (1872), dem arithmetischen Beweise von Herrn Kronecker†) (1876) und den beiden Beweisen von Sign. Genocchi††) (1852 und 1880) zeigt unter Benutzung des auf Seite 45 meiner Abhandlung »Bestimmung des quadratischen Rest-Characters«, Göttingen 1879†††), ausgesprochenen Lehrsatzes, dass alle diese Beweise auf die Betrachtung der Anzahl verschiedenartiger Lösungen linearer Congruenzen zurückgeführt werden können.

XXIV. Es ist bemerkenswerth, dass diejenigen Gleichungen, welche den obigen bilinearen Congruenzen (7.) entsprechen, schon von Euler mehrfach, wenn auch nur für den Fall einer Primzahl m, angewendet worden sind: Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos, § 20, § 30, Op. anal., I, 1772. — Disquisitio accuratior circa residua ex divisione quadratorum altiorumque potestatum per numeros primos relicta, § 29, § 50, Op. anal. Exhib., 1772, Maji 18. — Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia, § 25, N. comment. Petrop. XVIII, 1773, Exhib., 1772, Maji 18. — Diese Abhandlungen sind abgedruckt in Euleri commentationes arithmeticae collectae, Edit. Fuss, Petrop. 1849, Tom. I, pag. 480, 482, 494, 505, 519. — Euler nennt für den Fall $a = 1$ und $m = p$ in der Gleichung $\alpha\alpha' = 1 + np$ die Zahlen α und α' residua sociata.

Göttingen, 1882 November 9.

---

*) [Siehe Bd. I, S. 331—336.]

**) [Gauss' Werke, Bd. II, S. 1—8 und 51—54.]

***) [Crelle's Journal für d. r. u. a. Math., Bd. 38, S. 246.]

****) [Monatsber. der Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1872, S. 846—847.]

†) [Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1876, S. 331—341 und Kronecker's Werke, Bd. II, S. 11—23.

††) [Mém. cour. et mém. des savants étrang., T. 25, Paris 1852 und Comptes rendus, T. 90, S. 300, Paris 1880.]

†††) [Siehe Bd. I, S. 383.]

XXVI.

[ANZEIGE VON]

NIEUWE BEWYZEN VOOR DE ASWENTELING DER AARDE, DOOR HEIKE KAMERLINGH ONNES.

II und 288 Seiten, IV Figuren-Tafeln. Groningen, J. B. Wolters. 1879.

[Göttingische gelehrte Anzeigen vom 17. u. 24. Januar 1883, S. 65—72.]

In der Entwickelung der Lehre von dem Einflusse der Drehung der Erde auf die Bewegung eines Pendels bildet die von Herrn Kamerlingh Onnes in dem oben genannten Werke aufgestellte Theorie und die von ihm ausgeführten zahlreichen Messungen einen bedeutenden Abschnitt. Für die Anregung zu dieser Arbeit spricht der Verfasser in der Vorrede dem Herrn Prof. G. Kirchhoff seinen Dank aus.

Herr Onnes ersetzt den bei den vorhergehenden Versuchen zur Aufhängung des schwingenden Körpers nach Foucault erforderlich gewesenen langen dünnen Draht durch die Cardanische Aufhängung eines festen Pendels. Es wird hierdurch nicht nur der Vortheil erreicht, dem Apparate gegen die früheren sehr lästigen Maassverhältnisse solchen geringen Umfang geben zu können, dass alle seine Theile dem Beobachter leicht unmittelbar zugänglich sind, sondern auch der weitere Vortheil, die auf die Bewegung einwirkenden von der Gestalt des Pendels abhängigen Umstände genau messbar zu machen.

Schon P. A. Hansen hat 1853 in seiner Preisschrift »Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde« darauf hingewiesen, dass der Erfolg des Foucaultschen Pendel-Versuches vollständig verdeckt wird, wenn die schwingende Kugel bei der Aufhängung an einem langen dünnen Drahte eine auch nur sehr geringe eigene Drehbewegung besitzt, welche bei der Ausführung des Versuches schwer vermieden werden kann. Hansen empfiehlt, um diesen Uebelstand zu vermeiden, das obere Ende des Drahtes nicht einzuklemmen, sondern mit Hülfe einer Kugel auf einer horizontalen Fläche aufzuhängen und einen zur Vermeidung der Torsion genügend starken Draht anzuwenden. Jene störende Ursache fällt aber bei der Cardanischen Aufhängung vollständig fort.

Zugleich hat Herr Onnes ein Hülfsmittel gefunden, um den Einfluss, welchen die Verschiedenheit der Trägheits-Momente des Pendels bezüglich der beiden in der Ruhelage horizontal gerichteten Drehungs-Axen auf die Bewegung des Pendels ausübt, mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Er wendet ein Verfahren an, ähnlich demjenigen, welches Gauss zur Ermittelung der Trägheits-Momente der Magnete bei der Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maasse benutzte. Herr Onnes befestigte bei einem seiner beiden Apparate mit dem Pendel auf geeignete Weise eine ebene Platte und setzt auf verschiedene Stellen derselben ein Gewicht. Bei einem anderen Apparate wendet er einen getheilten Stab mit Laufgewicht an. Die für ungleiche Orte des Gewichtes sich ergebenden Bewegungen des Pendels sind sehr ungleichartig und müssen, um für Berechnungen eine Grundlage liefern zu können, vollständig gemessen werden. Herr Onnes lässt zu diesem Zwecke von der unteren Spitze des Pendels mit Hülfe eines optischen Apparates auf eine in gleiche Quadrate getheilte Ebene ein Bild projicieren.

Wenn die Schwingungen des Pendels klein genug sind, so weicht die Bahn des Bildes für eine einzelne Schwingung nur wenig von einer Ellipse ab. Bei fortgesetzten Schwingungen können die grosse und die kleine Axe der Ellipse sowohl ihre Länge, wie ihre Lage ändern. Von den für die Beobachtungen wichtigsten Arten der Bewegung betrachtet Herr Onnes die folgenden sechs Fälle.

1. Unter den entstehenden Schwingungs-Curven kommen Kreise, aber keine gerade Linien vor;

2. es kommen geradlinige Schwingungs-Bahnen vor und die grosse Axe

der einzelnen Schwingungs-Curven bewegt sich immer in demselben Sinne weiter;

3. es kommen geradlinige Schwingungs-Bahnen vor und die grosse Axe der einzelnen Schwingungs-Curven schwingt um eine bestimmte Richtung hin und zurück;

4. Schwingungen, die nicht geradlinig werden können und deren grosse Axe um eine bestimmte Richtung hin und zurück schwingt;

5. Schwingungen, die nicht geradlinig werden können und deren grosse Axe sich immer in demselben Sinne weiter bewegt;

6. unter den entstehenden Schwingungs-Bahnen kommen Kreise und gerade Linien vor.

Die Drehung der Erde um ihre Axe macht sich durch ihren Einfluss auf die Fortbewegung oder auf die Hin- und Her-Bewegung der grossen Axe der einzelnen Schwingungs-Bahnen durch die Formänderung der Bahncurven, oder endlich auch durch die vollständige Stabilität gewisser elliptischer Bahnen bemerkbar.

Den Luftwiderstand vermindert Herr Onnes dadurch, dass er das Pendel und den Cardanischen Ring sich innerhalb eines sehr luftverdünnten Raumes bewegen lässt. In Folge dieses Umstandes wird eine besondere Einrichtung erforderlich, mit deren Hülfe der Beobachter eine willkürliche Anfangsbewegung hervorbringen kann, wobei noch besondere Vorsorge getroffen ist, dass kein Gleiten der Schneiden auf ihren Unterlagen verursacht wird.

Neben der nicht zu vermeidenden Reibung zwischen den beiden Schneiden-Paaren und ihren Unterlagen wird noch eine besondere Dämpfung eingerichtet, welche aber nach Willkür des Beobachters verschieden ist für die verschiedenen Bewegungen des Pendels. Es ist nämlich in der Nähe der Aufhängung eine in Oel eintauchende Scheibe mit dem Pendel der Art befestigt, dass bei der Gleichgewichts-Lage die Scheibe in dem Oele vertical steht. Der Widerstand, welcher dadurch gegen die Bewegung des Pendels hervorgebracht wird, besteht aus einem unveränderlichen Theile, entsprechend der Drehbewegung der Scheibe um eine zu ihrer Ebene normale Axe, und aus einem von den verschiedenen Bewegungen des Pendels abhängigen veränderlichen Theile, entsprechend der Parallelbewegung der Scheibe. Die

Lage des Schwerpunktes des Cardanischen Ringes wird mit Hülfe eines Laufgewichtes genau reguliert. Durch die gewählte besondere Form des Cardanischen Ringes erreicht man mit Sicherheit, dass die beiden Drehungs-Axen in einer Ebene liegen, welche bei der Ruhelage des Pendels horizontal ist.

Der Winkel zwischen den beiden Drehungs-Axen wird so nahe wie möglich gleich einem rechten gemacht und nachher noch genau gemessen.

Nach Anwendung aller dieser sorgfältigen Vorsichts-Maassregeln und nach sorgfältigster Ermittelung der Corrections-Grössen erreicht Herr Onnes einen derartig hohen Grad der Genauigkeit, dass er mit einem solchen verhältnismässig kleinen Apparate die Drehung der Erde sicherer bestimmt, als es mit den längsten bis jetzt ausgeführten Foucaultschen Pendeln möglich war.

Um diesen Erfolg zu erzielen, ist es aber nothwendig, dass die Theorie der Bewegung eines durch den Cardanischen Ring mit der sich drehenden Erde verbundenen festen Körpers vollständig entwickelt wird. Dieser theoretische Theil des Werkes bildet nicht nur eine Ergänzung zu dem experimentellen Abschnitte, sondern besitzt eine beachtenswerthe Bedeutung durch die Vollständigkeit, in welcher dies Werk die bisherigen Untersuchungen auf diesem Gebiete übertrifft, durch die Berichtigung eines principiellen Fehlers in der Preisschrift von P. A. Hansen »Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestaltung und Bewegung der Erde«, Danzig 1853, § 4: »Fernere Annäherungen zur Integration der Gleichungen der Bewegung des zusammengesetzten Pendels«, Art. 21, 24. Diese fehlerhafte Angabe ist auch mehrfach wiederholt in der Abhandlung von Lehmann »Ueber den Einfluss der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Bewegung des freihängenden Pendels«, Potsdam 1854, Sept. (Astronomische Nachrichten, No. 925, Bd. 39, S. 193).

Auch eine in Bravais' Abhandlung sich findende Unklarheit wird hier erörtert und die betreffende Frage erledigt. Siehe Bravais »Mémoire sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques. Note sur une formule de Lagrange, relative au mouvement pendulaire«, Paris 1851, Août (Liouville Journal de Mathématiques, T. XIX, pag. 1—50).

Mit Hülfe der in dem hier besprochenen Werke entwickelten Formeln giebt Herr Onnes in einer Abhandlung im »Nieuw Archief voor Wiskunde« die Erklärung für eine von Foucault bemerkte Erscheinung, welche bei den Schwingungen eines an einem Drahte aufgehängten Pendels eintritt, wenn der obere Punkt des Drahtes eine vorgeschriebene Drehung macht (Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault, publié par Madame veuve Foucault sa mère, mis en ordre par C. M. Gariel et précédé d'une notice sur les oeuvres de L. Foucault par J. Bertrand, Paris 1878, pag. 392—400: »Sur l'expérience de la verge vibrante«).

Entsprechend dem Lagrangeschen Satze, dass für ein der Schwerkraft unterworfenes, an einem Punkte befestigtes Pendel die Bewegung vollständig und allgemein mit Hülfe elliptischer Functionen bestimmt werden kann, wenn eine Hauptaxe der Trägheits-Momente durch den Aufhängungs-Punkt und durch den Schwerpunkt geht und wenn zugleich die beiden anderen Haupt-Trägheits-Momente einander gleich sind, hat Herr Onnes den Satz gefunden, dass die Bewegung eines der Schwerkraft unterworfenen festen Körpers mit zwei zu einander rechtwinkeligen und bei der Ruhelage in Einer Horizontalebene sich befindenden Drehungs-Axen, welche zugleich Hauptaxen der Trägheitsmomente sind, vollständig und allgemein mit Hülfe elliptischer Functionen bestimmt werden kann, wenn die beiden genannten Trägheits-Momente unter einander und auch dem Trägheits-Momente in Bezug auf die zugehörige dritte Hauptaxe gleich sind.

In der That, das Werk des Herrn Onnes ist so reich an neuen Untersuchungen, dass eine Wiedergabe desselben in einer mehr verbreiteten Sprache viele dankbare Leser finden würde.

Ich kann diese Anzeige nicht schliessen, ohne die Bemerkung hinzuzufügen, dass auch Gauss zur Darlegung der Drehbewegung der Erde ein Pendel mit Cardanischer Aufhängung hat anfertigen lassen. Augenscheinlich beabsichtigte er, die Beobachtungen mit Fernrohr, Spiegel und verticaler Scala auszuführen. Zu diesem Zwecke ist die Pendel-Stange über den Cardanischen Ring auch nach oben hin verlängert und an ihrem äussersten Ende mit einem bedeutenden Gewichte versehen, so dass eine für diese Beobachtungs-Art genügende Länge der einzelnen Schwingungsdauer erreicht wird. Das obere und das untere Gewicht am Pendel sind linsenförmig, so wie häufig die Pendel-Gewichte an Uhren gestaltet zu sein pflegen; nur sind bei dem hiesigen Apparat die Aequator-Ebenen der beiden Linsen rechtwinkelig zur Pendel-Stange, um den Luftwiderstand nach allen Richtungen gleich und möglich klein zu machen. Ueber die Einrichtung eines solchen Pendels oder über die Theorie desselben hat Gauss bekanntlich nichts veröffentlicht; aber es findet sich auch in seinem handschriftlichen Nachlasse keine darauf bezügliche Bemerkung und keine Angabe von etwa ausgeführten Beobachtungen, welche als Grundlage zu Berechnungen dienen könnten. Die Untersuchung des Herrn Onnes ist also durchaus selbständig und ihm eigenthümlich.

Es mag mir noch gestattet sein, hier eine Pendel-Einrichtung vorzuschlagen, welche, wenn sie auch für das Endergebnis nicht ganz die Genauigkeit der Cardanischen Aufhängung bietet, doch die Correctionen der Schneiden-Stellungen des Cardanischen Ringes vermeidet. Ein festes Pendel mit unterem und oberem Gewichte zur Erreichung einer für die Beobachtung zweckmässig langsamen Bewegung, würde mit Hülfe einer Kugel auf einer festen horizontalen Fläche aufzuhängen und mit zwei zu einander rechtwinkeligen bei der Ruhelage vertical stehenden Spiegeln zu versehen sein. Die vermittelst zweier Fernrohre und zweier verticaler Scalen gleichzeitig gemessenen Schwingungs-Bogen würden in ihrem Verhältnisse diejenige Grösse geben, welche mit der Zeit sich in Folge des Einflusses der Umdrehung der Erde am meisten ändert. Die Theorie der Bewegung dieses Pendels werde ich an einem anderen Orte veröffentlichen.

XXVII.

ZUR LÖSUNG DER KEPPLERSCHEN GLEICHUNG.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 5. Juli 1884 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 23. Juli 1884, S. 248—255, sowie in den »Astronomischen Nachrichten«, Nr. 2665, Bd. 109, S. 193—200, Kiel 1884.]

Nachdem Gauss in seiner *Theoria motus corporum coelestium* 1809 gezeigt hat, wie die Kepplersche Gleichung durch eine bestimmte folgeweise Annäherung an den gesuchten Werth der excentrischen Anomalie aufgelöst werden kann, art. 11,

oder wie die entsprechende Aufgabe für solche Bahntheile, welche wenig von einer parabolischen Bahn verschieden sind, auf die Anwendung der für letztere vorhandenen Tafeln zurückgeführt werden kann, art. 37—42*),

ist wiederholt der Versuch gemacht worden, ein Verfahren aufzustellen, welches namentlich für kleinere Excentricitäten rascher zum Ziele führt als die schon bekannten Methoden.

Encke hat 1850 in den Astronomischen Nachrichten Nr. 714, Bd. 30 mit Benutzung eines ähnlichen Gedankens, wie der von Lalande 1792 in seiner Astronomie Edit. III, t. II, § 1247 angewendete, ein Verfahren angegeben, welches rasch zum Ziele führt, welches aber für die Rechnung mit Logarithmen etwas weitläufig ist. Bemerkenswerth erscheint hierbei der von Herrn Herz 1880 in den Astr. Nachr., Nr. 2354, Bd. 99 hervorgehobene Umstand, dass man den gesuchten Werth, wenn man von kleinen Grössen wie die siebente Potenz der Excentricität absieht, durch eine Summe von sechs sehr einfach zu bildenden Gliedern darstellen kann.

*) [Editio Ernesti Schering. Gothae sumtibus Frid. Andr. Perthes, 1871. S. 19—21 und S. 43—48.]

Grunert findet in seiner »neuen näherungsweisen Auflösung der Kepplerschen Gleichung« Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien 1856, Januar, Bd. XIX, Heft I, Seite 3 die zu berechnenden Ausdrücke in einer für die Anwendung der Logarithmentafel vortheilhafteren Form, indem er einen Hülfswinkel benutzt, welcher selbst einen Näherungswerth für die excentrische Anomalie bildet und sich von ihr nur um kleine Grössen von der Ordnung der dritten Potenz der als sehr klein angenommenen Excentricität unterscheidet.

Herr Howe hat 1880 in den Astr. Nachr., No. 2322, Bd. 97 und 1884 in den Astr. Nachr., No. 2592, Bd. 108 unter Benutzung des von Grunert angewendeten Hülfswinkels eine einfache Formel aufgestellt zur Berechnung eines noch weiter angenäherten Werthes, welcher sich von der gesuchten excentrischen Anomalie nur um Grössen wie die fünfte Potenz der Excentricität unterscheidet.

Im Folgenden will ich die einfache Ableitung einer Formel mittheilen, welche für die Rechnung mit logarithmisch trigonometrischen Tafeln vortheilhaft ist und welche für Excentricitäten bis etwas über $\frac{1}{2}$ bei allen Orten in der Bahn, dagegen für grosse Excentricitäten bei Orten in der Gegend des Aphels, wo also die Zurückführung auf die Parabel nicht möglich ist, aber auch eine directe Berechnung der wahren Anomalie sich empfiehlt, schneller zur Lösung der Kepplerschen Gleichung führt als die bisher bekannten Methoden.

Die Kepplersche Gleichung

$$E - e \sin E = M \tag{1.}$$

kann in der Form

$$e \sin E - \sin(E - M) = e \sin E - \sin(e \sin E) \tag{2.}$$

dargestellt werden.

Für jeden Werth von E wird

$$e \sin E - \sin(E - M) = \sin M \cos E - (\cos M - e) \sin E = \frac{\sin M}{\sin E_2} \sin(E_2 - E), \tag{3.}$$

wenn E_2 auf geeignete Weise durch e und M bestimmt ist.

Setzen wir in Gleichung (3.) für die darin von e, M, E_2 unabhängige Grösse E der Reihe nach die Werthe 0, 90°, M, $90^\circ + M$, $\frac{1}{2} M$, $90^\circ + \frac{1}{2} M$, so erhalten wir

$$(3^*.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e\sin E-\sin(E-M)}{\sin(E_2-E)} = \frac{\sin M\cos E-(\cos M-e)\sin E}{\sin E_2\cos E-\cos E_2\sin E} = \frac{\sin M}{\sin E_2} = \frac{\cos M-e}{\cos E_2} = \\ &= e\frac{\sin M}{\sin(E_2-M)} = \frac{1-e\cos M}{\cos(E_2-M)} = (1+e)\frac{\sin\frac{1}{2}M}{\sin(E_2-\frac{1}{2}M)} = (1-e)\frac{\cos\frac{1}{2}M}{\cos(E_2-\frac{1}{2}M)}.\end{aligned}\right.$$

Die zur Berechnung von E_2 geeignetste ist also die auch schon von Grunert angewendete Gleichung

$$(4.)\qquad \operatorname{tang}(E_2-\tfrac{1}{2}M) = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M$$

oder für $e = \sin\varphi$

$$(5.)\qquad \operatorname{tang}(E_2-\tfrac{1}{2}M) = (\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi))^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M.$$

Verbindet man die Gleichung (3.) mit der zweiten Form der Kepplerschen Gleichung (2.), so erhält man, mit Benutzung der durch (4.) oder (5.) eingeführten Hülfsgrösse E_2, als dritte Form der Kepplerschen Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{\sin M}{\sin E_2}\sin(E_2-E) = e\sin E-\sin(e\sin E)$$

oder

$$(7.)\qquad \sin(E_2-E) = \frac{1}{6}\,\frac{\sin E_2}{\sin M}(e\sin E)^3\,\mathfrak{K}(e\sin E),$$

worin

$$(8.)\qquad \mathfrak{K}(e\sin E) = 6\,\frac{(e\sin E)-\sin(e\sin E)}{(e\sin E)^3}$$

gesetzt ist.

Da die rechte Seite der Gleichung (7.) für kleine Excentricitäten e eine Grösse von der gleichen Ordnung wie e^3 ist, so folgt, dass E_2 einen Werth bedeutet, welcher von der durch die Kepplersche Gleichung zu bestimmenden excentrischen Anomalie E nur um Grössen von höherer Ordnung als e^2 abweicht.

Wollte man die goniometrische Auflösung der Gleichungen dritten Grades anwenden, so könnte man, indem man in $\mathfrak{K}(e\sin E)$ die excentrische Anomalie E durch den Näherungswerth E_2 ersetzt, aus der Gleichung (7.) unmittelbar für E einen neuen Näherungswerth berechnen, welcher sich von dem wahren E nur um eine Grösse von der Ordnung wie e^8 unterscheidet.

Diese Rechnung würde aber nicht nur wegen der dabei vorkommenden dreigliedrigen Summen ziemlich umständlich sein, sondern würde auch eine sehr genaue Zwischenrechnung erfordern, um zu einem genügenden Näherungswerthe von E zu gelangen.

Aus dem Umstande, dass die rechte Seite der Gleichung (7.) eine Grösse von der Ordnung wie e^3 ist, folgt auch, dass, wenn E_ν einen Werth bedeutet, welcher von der gesuchten excentrischen Anomalie nur um Grössen höherer Ordnung als e^ν abweicht, die Grösse $E_{\nu+3}$, welche durch eine der Gleichungen

$$(9.)\qquad \sin(E_2-E_{\nu+3}) = \frac{1}{6}\frac{\cos(E_2-\frac{1}{2}M)}{(1-e)\cos\frac{1}{2}M}(e\sin E_\nu)^3\,\mathfrak{K}(e\sin E_\nu),$$

wenn der Planet sich in der Gegend des Perihels befindet, oder

$$(10.)\qquad \sin(E_2-E_{\nu+3}) = \frac{1}{6}\frac{\sin E_2}{\sin M}(e\sin E_\nu)^3\,\mathfrak{K}(e\sin E_\nu),$$

wenn der Planet sich in der Gegend der mittleren Entfernung von der Sonne befindet, oder

$$(11.)\qquad \sin(E_2-E_{\nu+3}) = \frac{1}{6}\frac{\sin(E_2-\frac{1}{2}M)}{(1+e)\sin\frac{1}{2}M}(e\sin E_\nu)^3\,\mathfrak{K}(e\sin E_\nu),$$

wenn der Planet sich in der Gegend des Aphels befindet, für

$$(12.)\qquad \mathfrak{K}(e\sin E_\nu) = 6\,\frac{(e\sin E_\nu)-\sin(e\sin E_\nu)}{(e\sin E_\nu)^3}$$

oder

$$(13.)\qquad \mathfrak{K}(e\sin E_\nu) = 1-\frac{1}{4.5}(e\sin E_\nu)^2+\frac{1}{4.5.6.7}(e\sin E_\nu)^4-\frac{6}{\Pi(9)}(e\sin E_\nu)^6+\cdots$$

zu bestimmen ist, von der gesuchten Grösse E nur um einen Werth von höherer Ordnung als $e^{\nu+3}$ abweicht.

Ist die Excentricität e nicht sehr klein, sondern liegt sie der Einheit nahe, so bedarf es einer eingehenderen Untersuchung über die Anwendbarkeit der Gleichungen (9.), (10.), (11.).

Ist allgemein $E_{\nu+3}$ eine solche Function von E_ν, dass, wenn man für E_ν den gesuchten Werth E setzt, auch $E_{\nu+3} = E$ wird, und bezeichnen nun E_ν und $E_{\nu+3}$ zwei solche Näherungswerthe für die gesuchte Grösse E, dass man, mit jenen beginnend, durch Anwendung des von Newton angegebenen

Interpolations-Verfahren der indirecten Auflösung einer Gleichung zu beständig mehr genäherten Werthen für E gelangt, dann wird der aus E_ν und $E_{\nu+3}$ zunächst sich ergebende weitere Näherungs-Werth $E'_{\nu+3}$

$$(14.)\qquad E'_{\nu+3} = E_{\nu+3} + \frac{E_\nu - E_{\nu+3}}{1 - \dfrac{\partial E_\nu}{\partial E_{\nu+3}}}$$

sein.

Damit der Werth $E_{\nu+3}$ dem gesuchten E näher als der Werth E_ν liegt, muss im vorliegenden Falle der absolute Betrag der rechten Seite der Gleichung

$$(15.)\quad 1 - \frac{\partial E_\nu}{\partial E_{\nu+3}} = 1 + \frac{\cos(E_2 - E_{\nu+3})}{\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin E_2}{\sin M} e^3 \sin E_\nu^2 \cos E_\nu \left\{\mathfrak{K}(e \sin E_\nu) + \frac{1}{3} e \sin E_\nu \dfrac{\partial \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)}{\partial (e \sin E_\nu)}\right\}}$$

die Zahl 2 übertreffen.

Die Untersuchung kann auf Werthe von M, E, E_2, E_ν, $E_{\nu+3}$ in den ersten beiden Quadranten beschränkt werden, denn befindet M sich dort, so werden die zugehörigen E, E_2, E_ν, $E_{\nu+3}$ dort auch liegen, ferner werden zu $360^\circ - M$ die Werthe $360^\circ - E$, $360^\circ - E_2$, $360^\circ - E_\nu$, $360^\circ - E_{\nu+3}$ gehören.

Der Werth der Grösse $\frac{\sin E_2}{\sin M}$ nimmt beständig ab, wenn M innerhalb der beiden ersten Quadranten beständig zunimmt und zwar wird

$$\begin{array}{llll}
\text{für} & M = 0: & E_2 = 0, & \dfrac{\sin E_2}{\sin M} = \dfrac{1}{1-e}, \\[2ex]
\text{für} & 0 < M = 90^\circ - \arcsin e \leqq 90^\circ: & E_2 = 90^\circ, & \dfrac{\sin E_2}{\sin M} = \dfrac{1}{\sqrt{1-ee}}, \\[2ex]
\text{für} & 0 < M = 90^\circ - \arcsin \dfrac{e}{2} \leqq 90^\circ: & E_2 = 180^\circ - M, & \dfrac{\sin E_2}{\sin M} = 1, \\[2ex]
\text{für} & M = 180^\circ: & E_2 = 180^\circ, & \dfrac{\sin E_2}{\sin M} = \dfrac{1}{1+e},
\end{array}$$

wie sich unmittelbar aus den Gleichungen (3*.) ergiebt.

Eine einfache Untersuchung der übrigen Theile der rechten Seite der Gleichung (15.) führt zu der Ueberzeugung, dass, wenn der Werth von e nicht erheblich über $\frac{1}{2}$ hinausgeht, für alle Orte des Himmelskörpers in seiner Bahn oder, wenn e der Einheit näher kommt, doch noch für Orte in entsprechender Nähe des Aphels eine der Gleichungen (9.), (10.), (11.) rascher die Berechnung von E ergiebt als die Gleichung

$$E_{\nu+1} = M + e \sin E_\nu,$$

welche dem von Gauss in art. 11 der *Th. M. C.* aufgestellten Verfahren zu Grunde liegt.

Benutzt man die bei der Rechnung nach einer der Gleichungen (9.), (10.), (11.) unmittelbar vorliegenden Differenzen der Functionalwerthe in den angewendeten Logarithmen-Tafeln, nämlich unter Zugrundelegung von z Decimalstellen die Grössen

$$(16.) \quad 10^z \log \sin (1'' + E_2 - E_{\nu+3}) - 10^z \log \sin (E_2 - E_{\nu+3}) = \Delta \log \sin (E_2 - E_{\nu+3})$$

$$(17.) \quad 10^z \log \sin (1'' + E_\nu) - 10^z \log \sin E_\nu = \Delta \log \sin E_\nu,$$

so wird der nach Anwendung der Newtonschen Interpolations-Methode auf (9.) (10.) oder (11.) sich ergebende weiter genäherte Werth $E'_{\nu+3}$ durch die zu dem vorliegenden Zwecke hinreichend genaue Formel

$$(18.) \quad E'_{\nu+3} = E_{\nu+3} + \frac{E_\nu - E_{\nu+3}}{1 + \dfrac{\Delta \log \sin (E_2 - E_{\nu+3})}{[3 + 2 \log \mathfrak{K} (e \sin E_\nu)] . \Delta \log \sin E_\nu}}$$

dargestellt.

Entspricht dieser Werth von $E'_{\nu+3}$ noch nicht der für die gesuchte excentrische Anomalie geforderten Genauigkeit, so hat man denselben als E_μ in eine der Gleichungen (9.), (10.), (11.) statt E_ν einzuführen und einen neuen genäherten Werth $E_{\mu+3}$ zu berechnen. Weichen E_μ und $E_{\mu+3}$ noch merklich von einander ab, so sind dieselben an Stelle von E_ν und $E_{\nu+3}$ in der Gleichung (18.) wieder zur Berechnung eines $E'_{\mu+3}$ anzuwenden.

Die Anzahl der bei der Berechnung von E_2 nach Gleichung (4.) zu berücksichtigenden Decimalstellen der Logarithmentafel muss vollständig der für E geforderten Genauigkeit entsprechen.

Für die Bestimmung von $E_2 - E$ durch die nöthigen Falls wiederholte Anwendung einer der Gleichungen (9.), (10.), (11.) genügt in den meisten Fällen eine geringe Anzahl z von Decimalstellen der Logarithmentafeln. In Bezug hierauf kann man, wenn man E auf $0,''01$ genau erhalten will, Folgendes bemerken.

Es genügen 4 Decimalstellen ($z = 4$), zugleich kann $\mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ durch die Einheit, ferner $\sin(E_2 - E_{\nu+3})$ durch den Bogen ersetzt werden, wenn entweder die Excentricität $e \leqq 0{,}08$ ist oder wenn bei grossen Werthen der Excentricität noch $\log(e \sin E_\nu) \leqq 8{,}9030 - 10$ wird und zugleich

$$(19.) \qquad 0^0 \leqq 90^0 - \operatorname{arc} \sin \tfrac{1}{2} e \leqq M \leqq 270^0 + \operatorname{arc} \sin \tfrac{1}{2} e \leqq 360^0.$$

Es genügen 6 Decimalstellen ($z = 6$) und zugleich kann

$$(20.) \qquad \log \mathfrak{K}(e \sin E_\nu) \text{ durch } -(e \sin E_\nu)^2 \times \operatorname{num}(\log = 8{,}336754 - 10)$$

ersetzt werden,
wenn entweder die Excentricität $e \leqq \frac{2}{5}$ ist,
oder wenn bei grossen Werthen der Excentricität noch $\log(e \sin E_\nu) \leqq 9{,}522 - 10$ und zugleich die Bedingung (19.) erfüllt ist.

Die Tafel für $\log \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ wird man mit $\log(e \sin E_\nu)$ als Argument aufstellen. Die Berechnung kann nach der Reihen-Entwickelung von $\mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ (13.) oder von $\log \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ oder auch mit Benutzung der Tabula I in Gauss *Th. Mot. Corp.* ausgeführt werden. Setzt man nämlich in art. 37 und art. 40 *)

$$(21.) \qquad \sqrt{T} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2} \sin E_\nu),$$

so wird

$$(22.) \qquad e \sin E_\nu = 2 \,.\, B \,.\, \sqrt{A} \,.\, \left(1 + \frac{1}{15} A\right)$$

$$(23.) \qquad \mathfrak{K}(e \sin E_\nu) = \frac{1}{BB \,.\, \left(1 + \frac{1}{15} A\right)^3} .$$

Will man auch noch Tafeln mit zwei Argumenten anwenden, wie Sig. de Gasparis solche mit den Argumenten M und E für die Functional-Werthe von e aufgestellt hat, so würden die Argumente M und $E_2 - M$ für die Functional-Werthe $E_2 - E$ sehr zweckmässig erscheinen.

Zur Auflösung der Kepplerschen Gleichung hat man also aus der gegebenen Excentricität e und der gegebenen mittleren Anomalie M nach Gleichung (4.) oder (5.) den Hülfswinkel E_2 zu berechnen.

Es liegt E_2 immer zwischen M und 180^0.

Es wird E zwischen M und E_2 liegen.

*) [A. a. O. S. 43 u. 47.]

Das gefundene E_2 ist ein sehr brauchbarer Werth für E_ν in Gleichung (9.), (10.) oder (11.), wenn e kleiner als $\frac{4}{5}$ ist, oder wenn für grössere Excentricitäten e noch die Bedingung (19.) erfüllt ist.

Der auf solche Weise sich ergebende Werth von $E_{\nu+3}$ gleich E_{2+3} wird näher an E liegen als der Winkel E_2.

Befindet sich E_2 im ersten oder im vierten Quadranten, und liegt ein E_ν nicht weiter von E ab als E_2, so wird E zwischen E_ν und dem zugehörigen $E_{\nu+3}$ liegen.

Befindet sich M im zweiten oder dritten Quadranten, und liegt ein E_ν nicht weiter von E ab als E_2, so wird das zu diesem zugehörige $E_{\nu+3}$ zwischen E und E_ν liegen.

Göttingen, 1884 Juli 3.

XXVIII.

UEBER DIE VON MITTAG-LEFFLER HERAUSGEGEBENEN „ACTA MATHEMATICA“.

[Vorgelegt in den Sitzungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 6. Januar 1883, (s. »Nachrichten«, 1883, S. 1) und am 2. August 1884 (s. »Nachrichten«, 1884, S. 337) und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 10. December 1884, S. 508—509.]

Eine der erfreulichsten Erscheinungen im Gebiete der mathematischen Wissenschaften bildet das Entstehen der neuen Zeitschrift »Acta mathematica«, welche unmittelbar von ihrem Beginn in gleichem Rang mit den ersten wissenschaftlichen Journalen steht.

Es bleibt unvergessen, dass es der grosse Norweger Abel war, dessen zeitweiliger Aufenthalt in Deutschland wesentlich die Veranlassung bot, dass hier diejenigen wissenschaftlichen Blätter entstanden, welche noch heute und zwar gegenwärtig unter besonders günstigen Aussichten für die Zukunft an Gediegenheit des Inhaltes unübertroffen dastehen. Nach einem halben Jahrhundert ist nun die Zahl der Mathematiker so gross geworden, dass ausser anderen Zeitschriften mit besondern Zielen und in verschiedenen Ländern, jetzt in Skandinavien diese »Acta Mathematica« mit den höchsten Zielen der Wissenschaft und zugleich mit dem glücklichsten Erfolg entstanden sind.

Der munificenten Protection des für die Wissenschaften begeisterten Königs haben sie ihre Existenz zu danken. Von diesem hohen Beispiel angeregt brachten bedeutende Männer des Inlandes und auch des Auslandes grosse Donationen dar. Der Hauptredactor, der berühmte Mathematiker Professor Doctor Gösta Mittag-Leffler, bietet durch seinen Namen die

Bürgschaft, dass die aufgestellten hohen Ziele der Zeitschrift immer erreicht werden. Mit seiner ungewöhnlichen Arbeitskraft bewältigt er nicht nur die grosse Masse der Redactions-Geschäfte, sondern bereichert auch selbst die Wissenschaft mit neuen hervorragenden und fruchtbringenden eigenen Werken.

Zahlreiche Mitarbeiter, nicht nur die in deutscher, französischer und englischer Sprache schreibenden Schweden, Norweger, Dänen und Finnländer, sondern auch Deutsche, Franzosen und Italiener haben für die schon erschienenen und die ferner erscheinenden Bände Abhandlungen eingesendet. Diese Autoren und diejenigen, welche ausserdem noch ihre Mitwirkung zusagten, bekunden den grossen Erfolg, welchen der Redactor erreicht hat; sie zeigen auch, dass die Gründung einer neuen mathematischen Zeitschrift eine Nothwendigkeit geworden war.

Aber nicht nur der Production erwies sie sich als unentbehrlich, sondern auch der Reception war sie sehr willkommen, wie sich äusserlich besonders dadurch zu erkennen giebt, dass das auf das Alter ihrer Wissenschaft mit Recht so stolze Frankreich die Bibliotheken aller ihrer wissenschaftlichen Schulen mit dieser im Auslande herausgegebenen Zeitschrift schmückt, und dadurch die von ihrem Meister ausgehenden so hervorragenden Arbeiten der Heimath wieder zuführt.

Mit gleicher Freude sind die »Acta Mathematica« in Deutschland, Italien, England und Nordamerika begrüsst, und allgemein herrscht die Ueberzeugung, dass dieser Erfolg ein dauernder sein wird.

XXIX.

ZUM DRITTEN GAUSSISCHEN BEWEISE DES RECIPROCITÄTSSATZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 15. Januar 1885 und veröffentlicht in den »Sitzungsberichten« derselben, Physikal.-Mathem. Classe, vom 5. Februar 1885, S. 113—118.]

Unter den bis jetzt veröffentlichten Beweisen des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste sind diejenigen sehr einfach, welche dem fünften Gaussischen Beweise entsprechen, wie der von mir in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1879, Januar 4, S. 217*) und der von Herrn Kronecker in den Sitzungsberichten der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mai 1884, S. 519 gegebene Beweis**).

An Einfachheit und Neuheit der dabei gewonnenen Hülfsätze ragt die von Herrn Kronecker am 12. Juni 1884 der Akademie vorgelegte Entwickelung hervor, welche zu der Classe des dritten Gaussischen Beweises gehört***).

Eine andere, auch dem dritten Gaussischen Beweise entsprechende Ableitung, habe ich im Sommer-Semester 1883 in den hiesigen akademischen

*) [Siehe Bd. I, S. 331—336.]

**) [Kronecker's Werke, Bd. II, S. 497—522.]

***) [Kronecker's Werke, Bd. II, S. 527—532.]

Vorlesungen vorgetragen; ich erlaube mir dieselbe nach Einführung der Kroneckerschen Bezeichnungsweise hier vorzulegen.

In der genannten Untersuchung bezeichne ich mit $\underset{\mu,\nu,\dots}{\mathfrak{Anz\,Pos}}\,F(\mu,\nu,\dots)$, mit $\underset{\mu,\nu,\dots}{\mathfrak{Anz\,Null}}\,F(\mu,\nu,\dots)$ und mit $\underset{\mu,\nu,\dots}{\mathfrak{Anz\,Neg}}\,F(\mu,\nu,\dots)$ die Anzahl der positiven, die Anzahl der verschwindenden und die Anzahl der negativen Werthe der Function $F(\mu,\nu,\dots)$, wenn darin $\mu,\nu,\dots$ gegebene Werthesysteme durchlaufen, ferner mit $\mathfrak{AB}x$, oder wie Herr Kronecker in der genannten Untersuchung mit $\mathrm{R}x$, den absolut kleinsten Bruchrest von x.

In meiner »analytischen Theorie der Determinanten«*), (Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1878), setze ich

$$\mathfrak{Z}x = +1 \text{ für } x>0,\quad \mathfrak{Z}x = 0 \text{ für } x=0,\quad \mathfrak{Z}x = -1 \text{ für } x<0.$$

Herr Kronecker setzt in der obengenannten Abhandlung

$$\operatorname{sgn} x = +1 \text{ für } x>0,\quad \operatorname{sgn} x = -1 \text{ für } x<0.$$

Ist m eine ungerade positive Zahl und n zu m theilerfremd, bedeutet μ eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots \frac{m-1}{2}$, bezeichnet q_μ die nächste an $\frac{n\mu}{m}$ liegende ganze Zahl und r_μ den absoluten Betrag des absolut kleinsten Restes von $n\mu$ modulo m, so wird entweder

$$\text{(I, 1)}\qquad n\mu = q_\mu m + r_\mu,$$

also

$$\text{(I, 2)}\qquad 0 < \frac{n\mu}{m} - q_\mu = \frac{r_\mu}{m} < +\frac{1}{2}$$

und demnach, wenn noch n positiv ist,

$$\text{(I, 3)}\qquad \left\{\begin{array}{l} q_\mu = \underset{\nu}{\mathfrak{Anz\,Pos}}\left(\frac{n\mu}{m}-\nu\right) = \underset{\nu}{\mathfrak{Anz\,Neg}}\left(\nu-\frac{n\mu}{m}\right) \qquad (\nu = 1,2,3,\dots+\infty) \\ \text{für } \mathfrak{Z}\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn}\mathrm{R}\frac{n\mu}{m} = +1; \end{array}\right.$$

oder es wird

$$\text{(II, 1)}\qquad n\mu = q_\mu m - r_\mu,$$

also dann

$$\text{(II, 2)}\qquad +\frac{1}{2} < \frac{n\mu}{m} - (q_\mu - 1) = 1 - \frac{r_\mu}{m} < +1$$

*) [Siehe Bd. I, S. 295.]

und, wenn noch n positiv ist,

$$
(\mathrm{II}, 3.)\qquad \left\{\begin{aligned} & q_\mu - 1 = \mathop{\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}}_{\nu}\left(\frac{n\mu}{m} - \nu\right) = \mathop{\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}}_{\nu}\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty) \\ & \text{für } \mathfrak{ZAB}\,\frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn}\mathrm{R}\,\frac{n\mu}{m} = -1. \end{aligned}\right.
$$

Aus den Gleichungen (I, 3) und (II, 3) folgt die gemeinsame Form

$$
(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} & (-1)^{q_\mu} \,.\, \mathfrak{ZAB}\,\frac{n\mu}{m} = (-1)^{q_\mu} \,.\, \operatorname{sgn}\mathrm{R}\,\frac{n\mu}{m} = (-1)^{\mathop{\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}}_{\nu}\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right)} \\ & \qquad = \mathfrak{Z}\prod_{\nu}\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right) = \mathfrak{Z}\prod_{\nu}\left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) = \operatorname{sgn}\prod_{\nu}\left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) \end{aligned}\right.
$$

unter der Voraussetzung, dass m und n positiv und theilerfremd zu einander sind, m ungerade und $1 \leqq \mu \leqq \frac{m-1}{2}$ ist.

Wie schon Gauss auf elementarem Wege gezeigt hat, durchlaufen die Zahlen r_μ in den Gleichungen (I, 1) und (II, 1), wenn μ die Werthe $1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$ annimmt, ebenfalls die Werthe $1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$ in einer eigenen Reihenfolge; es ist also

$$
(5.)\qquad \sum_{\mu} r_\mu = \sum_{\mu} \mu = \frac{mm-1}{8} \qquad \left(\mu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)
$$

und daher ergiebt sich aus jenen Gleichungen noch

$$
(6.)\qquad \sum_{\mu} q_\mu \equiv \sum_{\mu} \mu - \sum_{\mu} r_\mu \equiv 0 \pmod{2}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist,}
$$

$$
(7.)\qquad \sum_{\mu} q_\mu \equiv \sum_{\mu} r_\mu \equiv \frac{mm-1}{8} \pmod{2}, \text{ wenn } n \text{ gerade ist.}
$$

Multiplicirt man die Gleichungen von der Form (4.) für alle die angegebenen Werthe des μ mit einander, benutzt von nun an nur die Kroneckersche Bezeichnung und berücksichtigt die grössten von ν in Betracht kommenden Werthe, so erhält man hiernach, wenn n ungerade ist

$$
(8.)\qquad \operatorname{sgn}\prod_{\mu}\mathrm{R}\,\frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn}\prod_{\mu,\nu}\left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right)
$$

und also

$$
(9.)\qquad \operatorname{sgn}\prod_{\mu}\mathrm{R}\,\frac{-n\mu}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sgn}\prod_{\mu,\nu}\left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right); \qquad \left\{\begin{aligned} & \mu = 1, 2, 3, \cdots, \frac{m-1}{2} \\ & \nu = 1, 2, 3, \cdots, \frac{n-1}{2} \text{ für } n > 1 \\ & \nu = 1 \text{ für } n = 1 \end{aligned}\right\}
$$

dagegen, wenn n gerade ist,

$$(10.)\qquad \operatorname{sgn}\prod_{\mu} \mathrm{R}\frac{n\mu}{m} = (-1)^{\frac{mm-1}{8}} \operatorname{sgn}\prod_{\mu,\nu}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{\mu}{m}\right),$$

also

$$(11.)\qquad \operatorname{sgn}\prod_{\mu} \mathrm{R}\frac{-n\mu}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{mm-1}{8}} \operatorname{sgn}\prod_{\mu,\nu}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{\mu}{m}\right).\qquad \left(\begin{array}{l}\mu = 1, 2, 3, \cdots, \frac{m-1}{2}\\ \nu = 1, 2, 3, \cdots, \frac{n}{2}\end{array}\right)$$

Für die Kroneckerschen Producte ist der allgemeine Reciprocitätssatz

$$(12.)\qquad \operatorname{sgn}\prod_{\mu,\nu}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{\mu}{m}\right) = (-1)^{MN} \operatorname{sgn}\prod_{\mu,\nu}\left(\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)\qquad \left(\begin{array}{l}\mu = 1, 2, 3, \ldots, M\\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, N\end{array}\right)$$

unmittelbar ersichtlich. Für $N = 1$ und $n = 1$ oder $n = 2$ nimmt das Kroneckersche Vorzeichenproduct der linken Seite in der Gleichung (12.) den Werth $+1$ an, wenn, wie hier, m ungerade grösser als 1 und $M < \frac{m}{2}$ vorausgesetzt wird.

Definirt man das Legendresche Zeichen durch die Gaussische Charakteristik, setzt also

$$(13.)\qquad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}_{\mu}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{m}} = \mathfrak{Z}\prod_{\mu}\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn}\prod_{\mu}\mathrm{R}\frac{n\mu}{m},$$

so erhält man aus (8.), (9.), (10.), (12.) das bekannte Fundamental-Theorem

$$(14.)\qquad \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}},\qquad \left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}},\qquad \left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{mm-1}{8}}$$

für ganze positive, ungerade und zu einander theilerfremde Zahlen m und n.

Bemerkungen.

Bei der vorstehenden Ableitung des Reciprocitäts-Gesetzes für quadratische Reste ist auf eine genügend einfache Weise gezeigt, dass $\sum q_{\mu}$ für ungerade m und n einen geradzahligen Werth erhält. In der Abhandlung »Bestimmung des quadratischen Rest-Charakters*)« (Abhandlungen d. K. G.

*) [Siehe Bd. I, S. 341—386.]

d. W., Göttingen 1879, Februar, Bd. XXIV), habe ich für den halben Werth der Summe der q_μ einen solchen Ausdruck gefunden, dass man mit dessen Benutzung nach den obigen Gleichungen (I, 3) und (II, 3), wenn man die an x zunächst liegende ganze Zahl durch $\mathfrak{NG}x$ bezeichnet, den Lehrsatz

$$(15.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{n\mu}{m} + \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right) = \sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{m} = \underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{n\mu}{m}+\frac{1}{2}-\nu\right)\\
&= \underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(1-\frac{2\mu-1}{m}-\frac{2\nu-1}{n}\right) = 2\,\underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(1-\frac{2\mu-1}{m}-2\,\frac{2\nu-1}{n}\right)\\
&= 2\,\underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{n\mu}{2m}+\frac{1}{2}-\nu\right) = 2\sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{2m} = \underset{\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{m\nu}{n} + \underset{\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{\mu}{m}\right)\\
&= \sum_\nu \mathfrak{NG}\,\frac{m\nu}{n} = \underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{m\nu}{n}+\frac{1}{2}-\mu\right) = \underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}-\frac{1}{2}\right)\\
&= 2\,\underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(1-2\,\frac{2\mu-1}{m}-\frac{2\nu-1}{n}\right) = 2\,\underset{\mu,\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{m\nu}{2n}+\frac{1}{2}-\mu\right) = 2\sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{m\nu}{2n}\\
&\qquad\qquad\left(\mu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2};\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}\right)
\end{aligned}\right.$$

aufstellen kann.

Hieraus ergeben sich, wenn noch mit $[x]$ die grösste ganze Zahl bezeichnet wird, welche nicht grösser als x ist, sowohl die Reciprocitäts-Theoreme

$$(16.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} &= \sum_\mu\left[\frac{n\mu}{m}\right] + \sum_\nu\left[\frac{m\nu}{n}\right]\\
&= 4\sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{2m} - \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{n\mu}{m} - \underset{\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{m\nu}{n}\\
&= \sum_\mu\left[\frac{2n\mu}{m}\right] - \underset{\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{m\nu}{2n} = \sum_\nu\left[\frac{2m\nu}{n}\right] - \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{n\mu}{2m}\\
&= \sum_\mu\left[\frac{n(2\mu-1)}{m}\right] + \underset{\nu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{m\nu}{2n} = \sum_\nu\left[\frac{m(2\nu-1)}{n}\right] + \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Reg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{n\mu}{2m},
\end{aligned}\right.$$

$$(17.)\quad \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{2m} = \sum_\mu\left[\frac{2n\mu}{m}\right] + \sum_\nu\left[\frac{m\nu}{2n}\right] = \sum_\nu\left[\frac{2m\nu}{n}\right] + \sum_\mu\left[\frac{n\mu}{2m}\right],$$

wie auch, wenn mit $\underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Ung}\,\mathrm{F}(\mu)$ die Anzahl der ungeradzahligen Werthe bezeichnet wird, welche $\mathrm{F}(\mu)$ annimmt, während μ ein gegebenes Werthesystem durchläuft, die neuen Gleichungen

$$
(18.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{n\mu}{m} = \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\,\frac{n\mu}{2m} = \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Ung}\left[\frac{n\mu}{m}\right] = \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Ung}\left[\frac{n.2\mu}{m}\right]\\
&\quad = \underset{\mu}{\mathfrak{Anz}}\,\mathfrak{Ung}\left[\frac{n(2\mu-1)}{m}\right] = \sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{m} - \sum_\mu\left[\frac{n\mu}{m}\right] = 2\sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{2m} - \sum_\mu\left[\frac{n\mu}{m}\right]\\
&\quad = \sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{2m} - \sum_\mu\left[\frac{n\mu}{2m}\right] = 2\sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{m} - \sum_\mu\left[\frac{n.2\mu}{m}\right]\\
&\quad = 2\sum_\mu \mathfrak{NG}\,\frac{n\mu}{m} + \sum_\mu\left[\frac{n(2\mu-1)}{m}\right] - \frac{1}{2}(m-1)(n-1).\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\mu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Die der Mehrzahl dieser Gleichungen entsprechenden Congruenzen modulo 2 waren schon bekannt und sind als verschiedene Ausgangspunkte zu Beweisen für das Reciprocitätsgesetz benutzt worden.

XXX.

BEOBACHTUNGEN IN GAUSS' ERDMAGNETISCHEM OBSERVATORIUM DER KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

WÄHREND DER POLAREXPEDITIONEN 1882 UND 1883, AUSGEFÜHRT UNTER DER LEITUNG VON ERNST SCHERING UND KARL SCHERING.

[zuerst veröffentlicht in dem Werke: Die internationale Polarforschung 1882—1883: Die Beobachtungs-ergebnisse der Deutschen Stationen, herausgegeben im Auftrag der Deutschen Polar-Kommission von Prof. Dr. Neumayer und Prof. Dr. Börgen. Band I. S. 627—737. Berlin 1886.]

INHALT.

EINLEITUNG.

Das erdmagnetische Observatorium in Göttingen ist im Jahre 1833 von Gauss und Weber begründet. Durch die hier ausgeführten Entdeckungen in der Theorie des tellurischen Magnetismus, durch die Konstruktion der magnetischen Präzisionsinstrumente, durch die Erfindung und erste Ausführung des electrischen Telegraphen haben die Begründer den Ruhm dieses neuen wissenschaftlichen Instituts in kurzer Zeit über die ganze Erde verbreitet.

Das erdmagnetische Observatorium in Göttingen durfte daher bei den Beobachtungen, welche durch die internationale Polar-Commission angeregt und gleichzeitig mit den internationalen Polar-Expeditionen in den Jahren 1882 und 1883 ausgeführt wurden, nicht fehlen.

Seine Excellenz, der Königliche Staatsminister und Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten Herr Dr. von Gossler bewilligte deshalb im Interesse der Wissenschaft die Kosten zur Herstellung und Ausrüstung eines bis dahin noch fehlenden unterirdischen Beobachtungsraums.

Dieser vom Universitäts-Bauinspector Herrn Kortüm geleitete Bau wurde innerhalb sehr kurzer Zeit fertig gestellt und erwies sich dem vorgegebenen Zwecke vollkommen entsprechend.

Hier wurden die Variationen der Declination und der Vertical-Intensität beobachtet, während die Bestimmungen der Variationen der Horizontal-Intensität, sowie die absoluten Messungen der drei erdmagnetischen Elemente in den von Gauss dazu eingerichteten Observations-Räumen stattfanden.

Auf diese Weise konnten die im Programm für die Polarexpeditionen vorgesehenen Beobachtungen an den 26 Terminstagen mit allen Korrektions-Bestimmungen in vollem wünschenswerthen Umfange ausgeführt werden.

Die benutzten Instrumente sind theils die von Gauss und Weber erfundenen und durch ihre musterhafte Genauigkeit berühmt gewordenen Apparate, welche sich auch bei dieser Gelegenheit vollkommen bewährten, theils neue nach unseren eigenen Ideen in den Jahren 1878 bis 1882 construirte Magnetometer, welche ebenfalls ganz den zum Voraus gehegten Erwartungen entsprachen.

Zunächst mögen hier die Resultate, welche aus den Variations-Beobachtungen an den 26 Terminstagen und aus den von Anfang August 1882 bis Ende August 1883 an jedem Tage des Morgens um 8 Uhr, des Nachmittags um 1 Uhr und des Abends um 10 Uhr ausgeführten magnetischen Beobachtungen, abgeleitetworden sind, ihren Platz finden.

Darnach folgen die Endergebnisse der absoluten Bestimmungen, die Beschreibungen der bei den verschiedenen Beobachtungen und bei den Berechnungen der Beobachtungszahlen angewendeten Methoden, sowie Angabe der Litteratur über Construction und Theorie der Instrumente.

Nach einigen Bemerkungen über die bei einzelnen Beobachtungen vorgekommenen Unregelmässigkeiten bildet ein ausführliches Inhaltsverzeichniss den Schluss dieser Mittheilungen über die im erdmagnetischen Observatorium während der internationalen Polar-Expeditionen 1882 und 1883 ausgeführten Beobachtungen.

[In der Original-Veröffentlichung vom Jahre 1886 folgen hier:

1) von S. 630 bis S. 655 die Werthe der erdmagnetischen Deklination, Horizontal-Intensität und Vertikal-Intensität in Göttingen von 5 zu 5 Minuten an den 26 verabredeten »Terminstagen«, d. h. an dem 1. und 15. eines jeden Monats von 1882 August 1 bis 1883 August 15. Die Beobachtungen an diesen Tagen begannen an allen Stationen der Erde jedes Mal um $0^h\ 0^m\ 0^s$ Göttinger mittlerer Zeit und wurden 24 Stunden hindurch fortgesetzt.

2) von S. 656 bis S. 661 die Werthe der Deklination in Göttingen von 20 zu 20 Secunden während je einer Stunde der genannten 26 Terminstage.

3) von S. 662 bis S. 667 die an den Terminstagen abgelesenen Temperaturen.

4) von S. 668 bis S. 671 die Stunden-, Tages- und Jahres-Mittel der erdmagnetischen Elemente berechnet aus den Beobachtungen an den 26 Terminstagen.

5) von S. 672 bis S. 713 die Werthe der erdmagnetischen Elemente und der Temperaturen an allen Tagen von 1882 August 15 bis 1883 August 19 um 8^h *am*, 1^h *pm*, 10^h *pm*.

6) S. 670, S. 714 und S. 715 die Resultate magnetischer Beobachtungen in Göttingen bei Polarlichtern und magnetischen Stürmen an den Tagen 1882 Oktober 2. November 15, 17, 20. December 15. 1883 Februar 2.

Von den genannten, 87 Seiten einnehmenden, Zahlen-Tabellen sollen hier nur die auf S. 668 bis S. 671 stehenden Endresultate, nämlich die Mittelwerthe der 26 Terminstage wieder abgedruckt werden.

Aus diesen Mittelwerthen ergiebt sich, dass die erdmagnetischen Elemente in Göttingen zur Zeit 1883,10 die Werthe hatten:

Westliche Deklination:	$12^\circ\,56',47$	
Nördliche Inklination:	$66^\circ\,28',94$	
Horizontale Intensität:	1,8647	in Gauss' Einheiten: $(mgr)^{\frac{1}{2}}(mm)^{-\frac{1}{2}}(sec)^{-1}$].
Vertikale Intensität:	4,2849	
Ganze Intensität:	4,6731	

Stundenmittel des Complements der Deklination[1]) = 346° +

Göttingen. Göttinger Zeit.

Termin	Tag			0^h $27^m 30^s$ *am*	1^h $27^m 30^s$ *am*	2^h $27^m 30^s$ *am*	3^h $27^m 30^s$ *am*	4^h $27^m 30^s$ *am*	5^h $27^m 30^s$ *am*	6^h $27^m 30^s$ *am*	7^h $27^m 30^s$ *am*	8^h $27^m 30^s$ *am*	9^h $27^m 30^s$ *am*	10^h $27^m 30^s$ *am*	11^h $27^m 30^s$ *am*
I.	1882.	August	1	68'45	70'08	73'51	62'46	62'86	60'22	60'54	56'79	60'03	55'21	53'20	50'86
II.		„	15	63.23	61.89	61.88	61.56	65.35	65.55	67.09	67.06	65.13	62.47	59.29	55.34
III.		September	1	63.11	64.32	63.76	63.57	63.77	64.43	64.96	64.56	63.89	62.60	59.63	56.14
IV.		„	15	62.13	58.75	62.09	62.09	62.44	62.98	62.88	64.50	64.94	62.99	58.63	54.10
V.		October	1	61.95	61.97	61.89	61.91	61.34	61.15	62.62	64.48	65.27	63.18	60.01	56.47
VI.		„	15	64.22	65.27	64.47	61.37	62.07	63.96	63.50	64.30	61.40	59.27	56.56	53.99
VII.		November	1	63.41	62.48	61.74	61.43	62.66	62.25	62.70	62.54	62.78	61.74	60.68	58.76
VIII.		„	15	62.02	64.02	64.75	65.11	63.26	64.75	63.07	64.82	68.52	67.83	63.46	60.96
IX.		December	1	66.71	65.19	65.18	65.97	63.84	65.73	64.90	64.81	65.79	65.45	64.02	61.72
X.		„	15	64.00	63 94	63.45	62.94	63.06	62.84	62.85	63.25	64.25	64.90	64.18	61.66
XI.	1883.	Januar	2	65.73	64.47	64.09	67.20	65.49	64.87	64.78	65.02	64.96	63.79	62.55	62.05
XII.		„	15	64.80	64.63	64.52	64.29	64.53	64.62	64.24	64.53	64.82	63.78	62.23	61.35
XIII.		Februar	1	65.96	68.38	67.31	63.95	65.06	64.28	64.47	65.08	65.77	65.47	62.71	60.47
XIV.		„	15	68.73	63.19	63.64	63.71	62.23	62.92	63.02	63.83	64.05	63.62	62.45	61.22
XV.		März	1	66.34	64.16	68.27	66.31	67.18	66.90	66.81	63.94	64.88	61.91	59.74	57.91
XVI.		„	15	64.76	64.67	64.66	64.88	63.51	63.36	64.39	64.98	66.13	65.48	64.21	60.80
XVII.		April	1	65.36	65.28	62.92	63.67	65.02	66.59	66.31	67.62	67.36	66.91	64.58	61.17
XVIII.		„	15	66.27	66.63	66.86	67.35	67.67	67.87	68.55	69.73	71.00	70.28	66.73	64.38
XIX.		Mai	1	66.95	67.85	68.34	69.41	69.71	70.06	68.26	68.72	66.41	65.24	63.11	60.45
XX.		„	15	65.58	65.82	66.06	66.05	66.33	—	68.48	69.28	68.91	67.10	64.11	60.69
XXI.		Juni	1	66.78	66.32	66.76	69.34	69.22	70.44	70.39	69.36	69.22	67.41	63.66	59.92
XXII.		„	15	64.88	65.43	65.24	66.16	68.51	71.94	72.72	72.77	71.42	67.98	64.28	59.96
XXIII.		Juli	1	71.24	76.96	72.11	74.73	71.04	67.44	70.80	74.28	68.64	65.14	62.84	60.24
XXIV.		„	15	66.83	67.21	67.61	68.06	69.47	70.60	70.59	70.59	70.51	70.10	67.13	63.29
XXV.		August	1	76.48	79.56	77.20	71.71	70.85	71.42	72.41	72.10	71.22	66.11	60.31	58.02
XXVI.		„	15	71.80	66.54	69.11	69.77	70.81	71.00	71.85	71.65	70.86	68.56	63.86	60.84
Mittel	für	1883.1004 + *h		66.07	65.96	66.05	65.58	65.66	65.93	66.28	66.56	66.47	64.79	62.08	59.34

Stundenmittel der Horizontal-Intensität = 1.8000.0 +

Termin	Tag			0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h
I.	1882.	August	1	602.5[2])	620.9	642.7	652.1	635.3	620.2	587.0	576.7	550.6	556.0	559.5	561.5
II.		„	15	651.3	652.2	655.2	653.2	650.5	640.5	632.4	624.4	617.5	610.9	609.3	616.2
III.		September	1	663.1	662.6	655.1	654.6	653.4	650.6	644.3	636.7	631.4	628.8	626.1	630.1
IV.		„	15	656.5	658.5	654.1	651.5	651.7	649.7	643.1	630.2	615.4	605.7	611.8	617.2
V.		October	1	670.7	670.0	669.1	669.1	669.5	671.5	670.1	662.4	650.7	643.7	634.7	633.3
VI.		„	15	664.7	664.2	660.9	648.8	660.9	654.6	640.8	631.4	608.1	610.9	612.7	618.7
VII.		November	1	648.7	645.8	647.2	645.5	650.6	649.3	651.6	649.6	641.3	632.7	627.6	635.2
VIII.		„	15	631.0	627.8	614.7	603.9	619.0	636.5	638.3	642.4	614.1	620.3	640.0	634.9
IX.		December	1	635.5	633.3	634.1	636.5	633.5	637.9	635.7	635.3	633.4	631.1	626.1	623.9
X.		„	15	656.0	656.5	656.8	659.1	660.5	663.6	666.4	666.3	666.0	660.7	654.6	665.7
XI.	1883.	Januar	2	659.2	659.0	658.3	654.7	655.1	657.6	658.4	655.9	653.7	650.8	649.3	651.5
XII.		„	15	633.7	634.9	633.7	635.6	636.3	637.9	638.4	639.8	638.6	630.4	629.8	629.8
XIII.		Februar	1	646.2	648.6	644.9	642.5	646.2	648.3	651.7	652.4	646.7	640.2	638.7	634.3
XIV.		„	15	652.2	641.3	641.9	643.9	643.7	646.3	646.8	645.7	639.4	630.8	629.1	627.2
XV.		März	1	633.0	636.7	624.6	625.2	633.8	634.8	628.8	625.2	623.6	616.4	607.3	616.1
XVI.		„	15	658.5	651.2	650.0	650.8	649.7	650.0	650.5	655.8	645.8	641.9	631.3	627.8
XVII.		April	1	655.5	651.9	651.0	652.9	653.4	657.3	654.0	652.1	649.1	639.1	636.8	634.0
XVIII.		„	15	656.9	656.4	655.7	654.5	653.0	653.0	651.7	646.8	641.8	634.5	629.1	619.7
XIX.		Mai	1	652.0	653.0	654.4	654.2	651.5	652.0	661.4	643.5	639.7	639.0	640.0	642.5
XX.		„	15	668.0	667.4	665.9	665.5	663.2	665.1	665.2	660.2	652.8	648.4	650.3	650.4
XXI.		Juni	1	686.2	684.9	687.6	683.2	681.5	683.1	674.7	672.9	668.4	661.3	665.0	672.1
XXII.		„	15	687.9	683.5	684.1	685.5	685.4	680.9	675.1	677.2	679.3	673.8	670.7	673.5
XXIII.		Juli	1	671.5	646.8	654.2	655.0	629.8	631.9	628.0	624.6	617.1	603.1	611.0	618.0
XXIV.		„	15	643.5	642.2	640.0	638.1	637.7	633.5	625.6	618.2	611.2	612.0	615.6	626.5
XXV.		August	1	629.1	629.0	624.5	637.2	633.5	632.6	614.7	602.9	597.9	581.8	567.9	586.3
XXVI.		„	15	655.8	655.2	649.7	643.5	642.9	640.3	636.6	633.0	634.2	635.9	650.9	655.8
Mittel	für	1883.1004 + *h		652.7	651.3	650.4	649.9	649.3	649.2	645.1	640.8	633.4	628.5	627.9	630.9

1) Mit Complement der Deklination ist der von astronomisch Nord über Ost, Süd, West nach dem magnetischen Norden gerechnete Winkel bezeichnet.

2) Horizontal-Intensität 1.8000.0 + 602.5 bedeutet den Werth 1.86025.

0h 27m 30s pm	1h 27m 30s pm	2h 27m 30s pm	3h 27m 30s pm	4h 27m 30s pm	5h 27m 30s pm	6h 27m 30s pm	7h 27m 30s pm	8h 27m 30s pm	9h 27m 30s pm	10h 27m 30s pm	11h 27m 30s pm	Tages-mittel	Tag	Termin
49′34	47′87	48′10	50′29	53′07	55′64	57′57	58′62	59′17	60′29	57′10	56′91	57′84	1882. August 1	I.
53.29	52.06	53.54	57.04	60.95	62.03	61.40	61.54	61.59	62.13	62.95	61.99	61.09	„ 15	II.
53.82	53.44	54.48	57.38	58.70	58.63	59.50	60.03	60.69	60.96	61.34	61.68	60.64	September 1	III.
51.70	51.95	54.93	57.84	61.76	62.22	61.85	61.81	61.63	62.69	62.00	62.24	60.47	„ 15	IV.
52.38	53.91	53.91	56.69	58.54	58.87	59.61	60.42	61.00	61.13	61.46	61.44	60.05	October 1	V.
52.01	52.32	54.65	56.02	59.84	60.10	60.62	61.70	62.40	62.72	62.64	63.14	60.36	„ 15	VI.
58.16	57.90	58.10	59.73	58.45	59.64	60.88	61.31	62.93	64.79	65.89	63.09	61.42	November 1	VII.
60.11	59.85	60.63	60.88	61.19	62.13	61.34	61.68	63.79	64.71	64.66	65.00	63.27	„ 15	VIII.
60.95	58.94	60.80	60.99	62.06	63.14	63.83	64.15	64.74	65.65	65.91	68.54	64.13	December 1	IX.
60.42	60.61	60.48	60.64	61.26	61.12	61.85	62.38	63.64	71.50	69.52	67.71	63.44	„ 15	X.
61.13	61.75	61.61	62.15	63.37	63.94	69.01	65.77	64.06	64.66	65.49	65.03	64.29	1883. Januar 2	XI.
60.31	60.69	61.16	63.35	63.28	63.82	61.86	62.44	64.49	68.13	67.26	64.70	63.74	„ 15	XII.
59.83	59.70	60.16	60.93	61.32	59.38	58.94	58.69	65.21	75.21	79.35	72.51	64.59	Februar 1	XIII.
60.02	59.07	59.12	60.85	61.84	62.44	62.27	62.68	62.84	63.07	63.18	63.07	62.62	„ 15	XIV.
54.93	56.00	52.92	62.96	60.38	64.22	64.88	77.17	65.98	65.00	62.53	60.91	63.43	März 1	XV.
58.29	58.03	58.34	60.34	62.47	63.50	63.92	64.03	63.90	63.83	63.99	64.10	63.18	„ 15	XVI.
58.84	56.56	57.22	59.35	61.82	62.82	64.06	63.35	63.10	63.63	64.83	63.94	63.43	April 1	XVII.
60.85	58.46	58.15	60.18	62.29	62.09	63.06	63.78	64.02	64.36	64.77	67.61	65.08	„ 15	XVIII.
59.92	61.36	62.39	62.76	62.90	62.74	64.44	64.57	65.14	64.34	64.17	63.97	65.13	Mai 1	XIX.
58.88	60.34	61.14	63.30	65.10	66.10	67.79	66.35	65.69	65.63	64.99	65.70	65.19	„ 15	XX.
58.25	59.58	59.41	59.82	60.95	62.33	63.67	65.82	66.91	66.45	67.33	67.48	65.29	Juni 1	XXI.
57.00	56.79	58.17	61.45	64.22	65.79	66.32	66.57	66.86	65.93	65.60	65.56	65.46	„ 15	XXII.
60.76	57.70	55.96	59.98	66.46	64.66	64.12	64.76	65.64	65.45	65.88	65.96	66.39	Juli 1	XXIII.
60.73	60.40	60.48	60.72	63.33	63.48	68.84	64.07	63.16	64.10	64.40	66.14	65.91	„ 15	XXIV.
57.80	57.23	59.92	64.20	64.06	65.45	67.91	65.90	68.14	69.37	73.56	65.90	67.80	August 1	XXV.
58.51	57.37	58.70	63.84	68.38	70.71	70.94	70.38	69.27	67.20	66.75	66.65	67.31	„ 15	XXVI.
57.62	57.30	57.86	60.14	61.85	62.58	63.48	63.84	64.08	65.11	65.29	64.65	63.53	für 1883.1017	Mittel

Stundenmittel der Horizontal-Intensität = 1.8000.0 +

0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	Tages-mittel	Tag	Termin
582.8	602.7	611.2	633.0	626.4	640.0	641.5	637.8	634.0	636.5	636.6	638.9	611.9	1882. August 1	I.
628.0	636.1	633.4	635.3	640.0	653.9	657.8	661.2	657.3	658.4	664.7	653.7	641.4	„ 15	II.
637.1	645.9	652.0	653.2	652.9	654.1	654.9	661.4	664.1	666.3	665.1	664.9	650.4	September 1	III.
625.3	635.9	646.0	655.9	660.3	661.0	661.1	658.4	657.7	658.6	656.4	658.3	645.0	„ 15	IV.
648.5	657.0	661.1	658.2	657.7	664.0	670.4	673.9	674.6	676.0	675.3	674.7	662.7	October 1	V.
622.4	628.0	623.5	624.1	619.5	629.9	645.5	651.9	655.1	653.4	656.2	654.5	639.2	„ 15	VI.
641.2	642.2	631.0	621.4	635.9	649.8	652.8	646.5	644.4	650.4	652.4	656.7	643.8	November 1	VII.
630.6	642.7	646.8	655.1	654.6	656.1	653.1	640.0	643.7	643.1	644.4	643.6	636.5	„ 15	VIII.
628.5	631.9	627.2	631.7	628.1	636.3	636.7	637.3	638.7	640.1	637.2	628.9	633.3	December 1	IX.
666.4	669.2	670.3	668.3	668.4	674.4	669.7	665.8	660.6	649.5	648.7	651.3	662.3	„ 15	X.
654.8	652.9	654.4	649.9	655.8	660.1	660.7	662.8	655.8	656.2	655.2	652.7	655.7	1883. Januar 2	XI.
630.6	629.0	635.8	638.3	634.4	625.6	627.8	634.7	630.7	630.6	635.7	630.8	633.5	„ 15	XII.
633.6	637.7	648.6	656.7	658.1	667.3	629.8	588.5	622.5	599.0	595.4	615.8	637.3	Februar 1	XIII.
630.1	636.7	642.1	641.7	642.1	643.0	645.6	647.5	648.0	648.8	651.3	649.5	642.3	„ 15	XIV.
607.7	608.6	627.3	627.2	628.0	616.4	624.2	641.5	627.6	625.8	644.6	643.6	626.2	März 1	XV.
629.5	625.5	634.5	640.7	647.5	651.2	653.8	651.3	656.0	656.3	658.1	657.1	646.9	„ 15	XVI.
633.5	642.4	645.7	647.8	645.4	650.9	655.1	660.5	662.3	658.7	655.8	656.9	650.1	April 1	XVII.
632.2	641.2	648.8	649.4	654.4	658.5	671.1	670.0	671.7	670.3	670.6	673.3	652.7	„ 15	XVIII.
640.7	643.9	644.6	653.8	656.9	653.7	658.6	660.2	655.6	648.4	635.5	640.4	649.0	Mai 1	XIX.
649.7	654.3	664.8	665.4	669.7	679.5	686.8	686.7	684.2	679.3	680.6	679.7	666.8	„ 15	XX.
674.2	685.3	697.2	698.5	689.5	686.7	694.0	690.5	695.8	696.5	693.6	686.6	683.7	Juni 1	XXI.
674.1	678.5	687.6	688.5	684.5	688.3	693.7	698.3	699.0	699.9	698.1	695.4	685.1	„ 15	XXII.
623.5	627.4	635.6	641.5	654.7	661.9	671.0	661.1	644.8	639.0	634.6	649.1	639.0	Juli 1	XXIII.
642.9	659.1	664.1	686.3	679.3	679.6	662.1	650.0	656.8	654.5	654.6	673.4	646.1	„ 15	XXIV.
627.2	632.2	605.9	629.6	640.8	618.9	624.2	635.9	646.5	653.4	636.0	648.4	622.4	August 1	XXV.
657.6	653.0	653.5	649.3	645.6	645.1	651.8	655.3	657.9	649.5	649.6	649.4	648.0	„ 15	XXVI.
636.6	642.3	645.9	650.0	651.2	654.1	655.9	655.0	655.6	653.8	653.3	654.9	646.6	für 1883.1017	Mittel

Stundenmittel der Vertikal-Intensität = 4.2000.0 +

Göttingen. Göttinger Zeit.

Termin	*)	Tag			0^h $27^m 30^s$ *am*	1^h $27^m 30^s$ *am*	2^h $27^m 30^s$ *am*	3^h $27^m 30^s$ *am*	4^h $27^m 30^s$ *am*	5^h $27^m 30^s$ *am*	6^h $27^m 30^s$ *am*	7^h $27^m 30^s$ *am*	8^h $27^m 30^s$ *am*	9^h $27^m 30^s$ *am*	10^h $27^m 30^s$ *am*	11^h $27^m 30^s$ *am*
I.	V	1882.	August	1	865.3	855.6	846.1	839.2	848.8	856.3	867.5	868.5	872.2	874.8	873.1	876.6
II.	V		„	15	843.4	834.4	827.8	826.7	830.0	834.1	832.3	833.1	833.9	829.1	828.2	831.5
III.	V		September	1	841.9	846.7	851.7	854.3	860.0	863.2	866.3	870.0	866.0	857.7	849.4	840.0
IV.	V		„	15	831.0	830.7	830.9	833.2	831.5	830.6	831.7	835.7	836.8	827.5	810.2	796.4
V.	V		October	1	855.5	855.2	853.6	852.9	853.3	854.2	856.0	859.1	863.2	859.7	859.5	853.8
VI.	V		„	15	870.3	863.0	859.1	855.6	849.1	855.8	862.2	864.2	865.9	855.5	851.8	849.5
VII.	V		November	1	854.8	857.0	858.0	860.3	861.6	863.5	864.6	867.8	869.2	869.0	865.1	859.2
VIII.	V		„	15	889.3	888.2	886.4	890.4	888.0	889.2	887.8	893.8	903.8	915.1	900.6	895.2
IX.	V		December	1	869.5	868.1	867.6	869.6	868.5	869.0	870.7	872.7	872.4	873.4	870.3	869.4
X.	V		„	15	888.8	888.4	885.7	884.9	885.8	885.2	882.8	881.6	880.8	882.4	879.3	872.3
XI.	Q	1883.	Januar	2	891.7	896.0	895.9	895.2	896.4	894.9	896.8	891.9	893.1	889.0	891.3	895.5
XII.	Q		„	15	830.3	825.6	825.9	821.5	827.2	824.5	827.5	823.6	828.3	825.9	832.7	831.1
XIII.	Q		Februar	1	855.4	852.2	851.4	847.7	849.2	846.4	849.0	847.9	850.0	843.1	843.7	844.7
XIV.	Q		„	15	834.9	840.1	840.6	837.6	837.0	838.1	842.0	838.0	838.8	838.3	839.1	837.3
XV.	Q		März	1	859.4	863.7	868.1	869.1	864.4	864.2	868.6	865.1	868.8	865.3	863.1	862.7
XVI.	Q		„	15	853.3	855.9	858.6	857.1	857.0	856.0	855.1	852.3	855.8	853.8	853.8	846.4
XVII.	Q		April	1	858.6	856.6	859.9	850.1	847.7	845.5	849.9	851.0	850.6	843.4	839.0	834.4
XVIII.	Q		„	15	836.6	832.4	830.1	828.4	827.9	825.0	823.8	824.6	819.6	807.7	803.0	799.0
XIX.	Q		Mai	1	831.5	829.5	827.7	826.1	824.1	823.4	823.1	824.6	819.3	804.9	793.6	795.5
XX.	Q		„	15	837.1	834.7	835.9	832.4	833.0	830.7	829.4	832.1	829.8	829.2	809.0	806.3
XXI.	V		Juni	1	887.8	885.9	886.8	881.5	882.3	877.9	876.2	874.6	873.8	871.2	865.8	867.5
XXII.	V		„	15	875.6	869.1	866.6	868.2	871.2	870.8	867.1	865.9	857.8	852.6	858.6	853.9
XXIII.	V		Juli	1	791.5	797.3	782.2	790.5	798.1	798.3	798.7	805.1	793.8	790.8	781.0	795.1
XXIV.	Q		„	15	831.4	822.5	815.9	810.8	804.8	800.2	793.8	782.9	788.4	777.7	777.7	777.7
XXV.	Q		August	1	815.5	811.2	803.1	799.9	783.2	784.7	793.2	800.1	799.9	796.1	786.8	791.2
XXVI.	Q		„	15	796.2	786.2	786.2	787.1	789.3	790.3	793.5	798.0	798.4	786.2	775.4	763.7
Mittel für 1883.1004 + $*^h$					849.9	847.9	846.2	845.0	845.0	845.1	846.5	847.1	847.3	843.1	838.5	836.4

*) V bedeutet, dass die den Stundenmitteln zu Grunde gelegten Beobachtungen der Vertikal-Intensität und dementsprechend auch die, welche für die betreffenden Termine weiter oben mitgetheilt sind, an den Vertikal-Deflektoren angestellt worden sind; Q bedeutet, dass für diesen Zweck die Beobachtungen am Quadrifilar hier zur Anwendung gelangten.

Erklärung der Zeichen für die täglichen Beobachtungen.

Die Zeichen, welche den nachfolgenden**) täglichen Beobachtungen beigesetzt sind, beziehen sich auf die Bewegung, welche die Instrumente während der Beobachtungszeit zeigten. Für die Deklination sind zu jeder der drei Tageszeiten 8^h *am*, 1^h *pm*, 10^h *pm* im Durchschnitt fünf Beobachtungssätze gemacht, für die Horizontal-Intensität zwei, wie das den später folgenden Erläuterungen beigefügte Beobachtungs-Schema [S. 118] weiter erklärt. Den Unterschied der Mittel, welche aus diesen Beobachtungssätzen gezogen sind, sollen die beigefügten Zeichen (mit Ausnahme des später zu erläuternden?) darstellen.

**) [hier nicht wieder abgedruckten]

Stundenmittel der Vertikal-Intensität = 4.2000.0 +

Göttinger Zeit. Göttingen.

0^h 27^m 30^s *pm*	1^h 27^m 30^s *pm*	2^h 27^m 30^s *pm*	3^h 27^m 30^s *pm*	4^h 27^m 30^s *pm*	5^h 27^m 30^s *pm*	6^h 27^m 30^s *pm*	7^h 27^m 30^s *pm*	8^h 27^m 30^s *pm*	9^h 27^m 30^s *pm*	10^h 27^m 30^s *pm*	11^h 27^m 30^s *pm*	Tages-mittel	Tag	*)	Termin
881.0	885.8	907.8	911.9	915.7	915.5	908.3	901.2	888.3	878.0	862.0	851.8	876.1	1882. August 1	V	I.
829.1	832.6	846.0	849.8	849.3	844.7	839.0	836.1	834.6	834.6	830.2	833.6	835.1	„ 15	V	II.
834.6	836.7	833.3	834.1	836.1	835.9	836.1	837.1	837.3	837.4	838.1	838.8	846.0	September 1	V	III.
790.6	792.6	797.2	797.4	799.0	798.0	798.3	801.5	804.2	811.6	821.1	827.2	815.3	„ 15	V	IV.
846.8	849.7	857.2	866.1	868.4	862.9	861.7	860.9	859.3	859.0	858.8	858.5	857.8	October 1	V	V.
854.8	861.1	872.6	877.4	883.7	875.8	872.6	868.8	866.4	866.4	864.7	865.9	864.0	„ 15	V	VI.
857.0	860.3	866.9	872.0	864.2	861.9	859.4	865.5	865.6	863.4	861.5	853.9	862.6	November 1	V	VII.
867.3	880.4	906.9	901.8	909.8	910.5	912.3	916.5	918.2	913.1	908.0	906.4	898.9	„ 15	V	VIII.
868.2	869.9	874.2	877.3	876.4	874.8	873.9	874.1	873.7	873.5	875.1	877.9	872.4	December 1	V	IX.
871.9	874.4	876.8	876.1	877.7	876.8	880.0	882.0	886.1	899.7	899.0	897.4	883.5	„ 15	V	X.
895.0	894.5	903.7	905.7	898.6	895.0	897.4	896.8	900.1	899.2	899.7	896.6	896.3	1883. Januar 2	Q	XI.
829.2	829.3	836.3	835.2	835.9	834.1	835.4	831.1	834.8	829.6	829.8	824.8	829.6	„ 15	Q	XII.
846.8	847.9	853.4	854.3	851.4	847.8	859.1	880.0	873.7	883.2	882.3	860.8	855.1	Februar 1	Q	XIII.
835.8	841.5	848.0	853.4	849.0	845.5	845.2	840.3	839.7	840.4	839.4	839.2	840.8	„ 15	Q	XIV.
871.0	876.9	885.0	901.9	908.8	906.6	899.9	891.0	882.0	874.6	869.1	853.2	875.2	März 1	Q	XV.
851.0	859.6	867.8	873.9	879.5	878.5	878.2	872.1	868.1	866.5	863.3	865.8	861.6	„ 15	Q	XVI.
834.0	837.3	848.8	856.9	859.5	857.2	858.7	856.2	853.0	850.3	849.8	847.3	849.8	April 1	Q	XVII.
799.2	803.9	813.2	820.5	828.9	826.7	827.2	833.9	827.6	826.2	824.1	823.8	821.4	„ 15	Q	XVIII.
799.7	804.0	807.0	811.3	817.0	815.9	824.2	824.5	823.5	818.0	816.8	812.7	816.6	Mai 1	Q	XIX.
812.9	819.6	823.7	832.6	844.8	847.0	851.9	852.5	852.3	849.2	844.3	844.3	833.9	„ 15	Q	XX.
870.0	877.8	893.0	893.0	901.4	902.9	906.8	907.4	905.4	903.2	898.4	899.7	887.1	Juni 1	V	XXI.
854.9	855.9	859.8	868.7	875.3	875.0	876.5	878.3	878.9	876.2	873.5	872.8	867.7	„ 15	V	XXII.
800.1	799.0	802.7	819.6	825.2	827.7	832.3	827.6	827.8	822.3	818.6	809.1	806.4	Juli 1	V	XXIII.
777.4	794.1	802.4	807.2	827.6	843.3	866.0	853.1	846.9	830.2	824.2	819.2	811.1	„ 15	Q	XXIV.
788.8	793.9	814.1	814.9	832.2	839.7	840.4	829.0	824.3	827.4	833.9	837.4	810.0	August 1	Q	XXV.
773.2	775.3	787.2	800.7	809.3	803.6	805.9	805.7	800.1	796.1	789.4	793.6	791.9	„ 15	Q	XXVI.
836.2	840.5	849.4	854.4	858.6	857.8	859.5	858.6	856.6	855.0	852.9	850.5	848.7 für 1883.1017			Mittel

Erklärung der Zeichen für die täglichen Beobachtungen.

	Charakter	Zeichen	C. Deklination	Hor.-Int.
Gruppe 1.	Ruhe	z	0′ bis 1′	0.0000 bis 0.0002
Gruppe 2.	Ansteigend } continuirlich	↑	1′ bis 3′	0.0002 bis 0.0005
	Absteigend } continuirlich	↓		
	Ansteigend } oscillirend		1′ bis 3′	
	Absteigend } oscillirend			
	Oscillirend ohne ausgeprägte Richtung		1′ bis 3′	
Gruppe 3.	Stark ansteigend } continuirlich		3′ bis 6′	0.0005 bis 0.0010
	Stark absteigend } continuirlich			
	Stark ansteigend } oscillirend		3′ bis 6′	
	Stark absteigend } oscillirend			
	Starke Bewegung ohne ausgeprägte Richtung		3′ bis 6′	
Gruppe 4.	Sehr stark ansteigend } continuirlich		über 6′	über 0.0010
	Sehr stark absteigend } continuirlich			
	Sehr stark ansteigend } oscillirend		über 6′	
	Sehr stark absteigend } oscillirend			
	Sehr starke Bewegung ohne ausgeprägte Richtung		über 6′	

Die Zeitfolge der Ablesungen für die täglichen Beobachtungen.

I. Bis 1882 Oktober 17 8^h *am*.

Bifilar	Hülfsnadel	Unifilar I	Unifilar II	Vert.-Deflektoren
		$0^h\ 44^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$		
		$0^h\ 45^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$		
				$0^h\ 48^m\ 44^s\ 52^s$
		$0^h\ 49^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$	$0^h\ 49^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 49^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$
		$0^h\ 50^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$	$0^h\ 50^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$	$0^h\ 50^m\ 44^s\ 52^s$
		$0^h\ 54^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$		$0^h\ 51^m\ 0^s\ 8\ 16^s$
		$0^h\ 55^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$		
	$0^h\ 57^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s\ 36^s\ 47^s\ 58^s$			
$0^h\ 58^m\ 19^s\ 28^s\ 37^s\ 46^s\ 55^s$				
$0^h\ 59^m\ 5^s\ 14^s\ 23^s\ 32^s\ 41^s$		$0^h\ 59^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$		
$1^h\ 0^m\ 19^s\ 28^s\ 37^s\ 46^s\ 55^s$		$1^h\ 0^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$		
$1^h\ 1^m\ 5^s\ 14^s\ 23^s\ 32^s\ 41^s$				
	$1^h\ 2^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s\ 36^s\ 47^s\ 58^s$			
		$1^h\ 4^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$		
		$1^h\ 5^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$		$1^h\ 8^m\ 44^s\ 52^s$
		$1^h\ 9^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$	$1^h\ 9^m\ 38^s\ 49^s$	$1^h\ 9^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$
		$1^h\ 10^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$	$1^h\ 10^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$	$1^h\ 10^m\ 44^s\ 52^s$
		$1^h\ 14^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$		$1^h\ 11^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$
		$1^h\ 15^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$		

II. Die Reihenfolge der Beobachtungen für den Zeitraum von 1882 Oktober 17 1^h *pm* bis Dezember 31 10^h *pm* ist aus der folgenden Anordnung ersichtlich, wenn man an die Stelle der Ablesungen des Quadrifilar noch gleichzeitige der Vertikal-Deflektoren setzt.

III. Von 1883 Januar 1 8^h *am*.

Bifilar	Hülfsnadel	Unifilar I	Unifilar II	Quadrifilar	Vert.-Deflektoren
		$0^h\ 44^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$			
		$0^h\ 45^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$			
				$0^h\ 48^m\ 40^s\ 50^s$	
		$0^h\ 49^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$	$0^h\ 49^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 49^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$	
		$0^h\ 50^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$	$0^h\ 50^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$		$0^h\ 50^m\ 44^s\ 52^s$
					$0^h\ 51^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$
	$0^h\ 52^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s$ $36^s\ 47^s\ 58^s$				
$0^h\ 54^m\ 19^s\ 28^s\ 37^s\ 46^s\ 55^s$		$0^h\ 54^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$			
$0^h\ 55^m\ 5^s\ 14^s\ 23^s\ 32^s\ 41^s$		$0^h\ 55^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$			
	$0^h\ 57^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s$ $36^s\ 47^s\ 58^s$				
				$0^h\ 58^m\ 40^s\ 50^s$	
		$0^h\ 59^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$	$0^h\ 59^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 59^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$	
		$1^h\ 0^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$	$1^h\ 0^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$		$1^h\ 0^m\ 44^s\ 52^s$
					$1^h\ 1^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$
	$1^h\ 2^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s$ $36^s\ 47^s\ 58^s$				
$1^h\ 4^m\ 19^s\ 28^s\ 37^s\ 46^s\ 55^s$		$1^h\ 4^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$			
$1^h\ 5^m\ 5^s\ 14^s\ 23^s\ 32^s\ 41^s$		$1^h\ 5^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$			
	$1^h\ 7^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s$ $36^s\ 47^s\ 58^s$				
				$1^h\ 8^m\ 40^s\ 50^s$	
		$1^h\ 9^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$	$1^h\ 9^m\ 38^s\ 49^s$	$1^h\ 9^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$	
		$1^h\ 10^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$	$1^h\ 10^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$		$1^h\ 10^m\ 44^s\ 52^s$
					$1^h\ 11^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$
		$1^h\ 14^m\ 23^s\ 30^s\ 37^s\ 44^s\ 51^s\ 58^s$			
		$1^h\ 15^m\ 5^s\ 12^s\ 19^s\ 26^s$			

DIE INSTRUMENTE UND DIE BEOBACHTUNGS-METHODEN IN GÖTTINGEN.

Die Lage des Göttinger Observatoriums kann man aus dem Situationsplane ersehen, welcher als Tafel III den »Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins von Gauss und W. Weber, 1836,« beigegeben ist.

In dem eisenfreien Gebäude sind seit 1834 die Bestimmungen der absoluten Deklination und Intensität ausgeführt und zwar für die Mitte des Magneten jetzt an einem Orte, welcher 68.955^{m} westlich und 23.007^{m} nördlich von dem Anfangspunkte der Gauss'schen Koordinaten, der Mitte des Reichenbach'schen Meridiankreises der Göttinger Sternwarte, liegt.

Auf diesen Meridiankreis beziehen sich die Koordinaten:

51^{0}	$31'$	$47''9$	nördliche Breite,
0^{h}	13^{m}	$48^{\mathrm{s}}.5$	westliche Länge von Berlin,
0^{h}	39^{m}	$46^{\mathrm{s}}.5$	östliche Länge von Greenwich.

Die Höhe der Mitte des Magneten über dem mittleren Stande der Ostsee beträgt 158.232^{m}, wenn die von der Königl. Preussischen Landes-Triangulation für die Höhenmarke der Göttinger Sternwarte gefundene Höhe über dem mittleren Stande der Ostsee zu 159.198^{m} in Anwendung gebracht wird.

In dem eisenfreien Gebäude sind seit 1878 die Inklinations-Messungen mit Hülfe eines Erd-Induktors ausgeführt, dessen Mitte 23.105^{m} nördlich und 61.466^{m} westlich von der Mitte des Reichenbach'schen Meridiankreises der Sternwarte und 158.078^{m} über dem mittleren Stande der Ostsee liegt.

Von denselben Anfangspunkten an gerechnet liegt, in Metern ausgedrückt, die Mitte des Magneten

von dem Bifilar	3.570	nördlich	6.755	westlich	162.070	hoch
von der Hülfsnadel	3.570	»	6.755	»	160.955	»
von dem Unifilar II	10.258	»	12.038	»	158.582	»
von dem Quadrifilar	14.292	»	12.060	»	158.549	»
von den Vertikal-Deflektoren	18.215	»	13.824	»	158.765	»

I. Absolute Bestimmung der erdmagnetischen Kraft in Göttingen.

1. Deklination.

Das zur Bestimmung derselben benutzte Instrument ist mit »Unifilar I« bezeichnet; der wesentliche Theil desselben (2200 gr schwer) besteht aus zwei halbcylindrischen Magneten, welche in einer cylindrischen Messinghülse mit einander fest verbunden sind und zwar so, dass zwischen den beiden ebenen Flächen der Magnete sich ein freier Raum befindet, welcher an den beiden Enden durch Objektiv-Linsen geschlossen ist und auf solche Weise die Ablesung einer in der Brennebene der Linsen und zwischen den beiden Magneten befestigten Glasskala gestattet. Letztere ist von einem Theodoliten aus sichtbar, welcher auch auf einen Kirchturm (Albani) in der Stadt gerichtet werden kann.

In der Regel ist zwei Tage nach jedem Termine der Azimut-Unterschied zwischen der magnetischen Axe und der Turmspitze gemessen, ausserdem ist zweimal im Laufe des Terminsjahres 1882/83 das Azimut der Turmspitze durch Beobachtungen des Polarsterns mit einem von Reichenbach und Ertel (Horizontalkreis 345mm Durchmesser) angefertigten Universal-Instrumente bestimmt.

Durch die oben angegebene Konstruktion des Magneten ist eine Vereinfachung der Beobachtungen ermöglicht im Vergleich mit dem von Gauss in der Abhandlung »Ueber die Anwendung des Magnetometers zur Bestimmung der absoluten Deklination« auseinandergesetzten Verfahren. (Resultate aus den B. d. magn. V. herausgegeben von Gauss und Weber im Jahre 1841, Seite 1 bis 9 und Gauss' Werke Bd. V, Seite 436 bis 443). Uebrigens ist zu vergleichen die genannte Zeitschrift:

im Jahre 1837: No. VII. W. Weber, Ueber die Reduktion der Magnetometer-Beobachtungen auf absolute Deklinationen, Seite 104—129, im Jahre 1836: No. I. W. Weber, Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente, Seite 13 bis 33*).

Um absolute Bestimmungen der Deklination in den Terminen zu erhalten, ist an jedem derselben eine grosse Anzahl von Ablesungen des Unifilar I ausgeführt. Die betreffenden Resultate sind in dem Abdruck der Termins-Beobachtungen durch ein u kenntlich gemacht. Die Beobachtungen an dem Variations-Instrument, nämlich am Unifilar II, sind alle auf Unifilar I reduzirt und zwar die gleichzeitigen genau, dagegen die übrigen durch eine aus jenen Beobachtungen abgeleitete Interpolation.

Die verschärften Beobachtungen mit Zwischenräumen von nur 20 Sekunden sind nur im I. Termine am Unifilar II ausgeführt, während die entsprechenden in allen übrigen Terminstagen II bis XXVI am Unifilar I angestellt sind und demnach die Bedeutung von absoluten Deklinations-Bestimmungen besitzen. Die zuweilen auftretenden Abweichungen in den Angaben der Termins-Beobachtungen und der verschärften Beobachtungen beruhen darauf, dass die Mittelwerthe von mehreren Beobachtungen am Unifilar I zur Vergleichung zwischen den beiden Instrumenten benutzt worden sind.

2. Horizontal-Intensität.

Die vollständige Beschreibung der zur Ermittelung dieser Grösse benutzten Instrumente, die Methoden der Berechnung und die Untersuchung der Genauigkeit der erhaltenen Resultate findet man in der Arbeit:

Karl Schering: »Bestimmung der Horizontal-Intensität«. (Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1881, Seite 133—176.)

An jedem Termine wurde zuerst die Schwingungsdauer des Hauptmagneten von Unifilar I (Länge 477^{mm}; Gewicht 2200 gr) beobachtet, dann die Ablenkungen ermittelt, welche derselbe nach dem von Gauss definirten »modus secundus« (Gauss: Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata, 1832. Gauss' Werke, Band V, [Seite 79 bis 118, und] Seite 293 bis 304, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, redigirt von Ernst Schering) auf einen zweiten Magneten (Länge 232^{mm}) in zwei verschiedenen Entfernungen, nämlich:

*) [W. Weber's Werke, herausgegeben von d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. II. Besorgt durch E. Riecke. S. 3 bis 19.]

1500.9^{mm} (Lage II) und 2001.0^{mm} (Lage I) nördlich
1500.7^{mm} (Lage III) und 2001.1^{mm} (Lage IV) südlich

vom Hauptmagneten ausübt; diese Ablenkungs-Beobachtungen wurden dann zur Kontrolle wiederholt und alle Beobachtungen eines Tages mit Hülfe der gleichzeitigen Ablesungen der Variations-Instrumente auf dieselbe Deklination und Intensität reduzirt.

Die Bestimmung des Trägheits-Momentes K des Haupt-Instruments »Unifilar I« ist dreimal ausgeführt, sie ergab als mittleren Werth bei der Temperatur τ:

$$K = 435188.10^5 (1 + 0.000028\,\tau)\,(\mathrm{mm})^2\,\mathrm{mgr}$$

und als mittleren Fehler 0.02 pCt. dieses Betrages.

In der folgenden Tabelle sind zunächst die einzelnen durch Beobachtung gefundenen Grössen zusammengestellt, nämlich

t die Schwingungsdauer des Hauptmagneten in Sekunden,

S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, die doppelten Ablenkungen des zweiten Magneten in Skalentheilen auf gleiche Deklination und Intensität sowie auf die Tangente der Ablenkungs-Winkel reduzirt.

Die Abstände zwischen Skala und Spiegel sind auf die gemeinsamen Maasse

$$\varrho_I = 4537.2^{mm},\quad \varrho_{II} = 4036.7^{mm},\quad \varrho_{III} = 4024.0^{mm},\quad \varrho_{IV} = 4523.8^{mm}$$

zurückgeführt. Beim Beobachten konnten die Abstände nicht in allen Terminen genau gleich hergestellt werden, da die Skalen mit den Fernrohren inzwischen für andere Zwecke verwandt werden mussten. Die bei den einzelnen Beobachtungen 1 bis 2^{mm} betragenden Abweichungen von jenen Werthen wurden unter Anwendung von Senkeln, welche von der Decke herunterhingen, gemessen, und sind bei der Berechnung berücksichtigt.

Ferner bedeutet

τ die Temperatur,

T die absolute Horizontal-Intensität,

M das magnetische Moment des Hauptmagneten,

T_0 diejenige Horizontal-Intensität, welche dem Nullpunkte des mit der Ablesung der Hülfsnadel und mit der Deklination korrigirten Standes des Bifilar entsprechen würde.

Intensitäts-Einheit $= (\text{mgr})^{\frac{1}{2}} (\text{mm})^{-\frac{1}{2}} (\text{sec})^{-1}$

1882		t	S_I	S_{II}	S_{III}	S_{IV}	τ	Göttinger Zeit	T	$M.10^{-4}$	T_0	Bifilar Skalentheil	Hülfsnadel Skalentheil
August	1	20.9227	631.82	1330.26	1315.98	626.28	+ 16°1	$4^h 35^m$ *pm*	1.8627	52113	1.8078	478.34	435.36
August	15	20.9355	631.44	1329.82	1316.00	626.89	20.2	9 45 *am*	1.8608	52108	1.8090	444.85	433.05
September	1	20.9125	632.11	1330.03	1321.61	627.92	14.6	9 40	1.8628	52159	1.8086	491.28	464.33
September	15	20.9153	632.32	1331.58	1322.73	629.20	14.3	10 35	1.8612	52190	1.8095	476.13	456.75
Oktober	1	20.9084	631.82	1331.43	1323.27	629.10	12.7	11 10	1.8630	52172	1.8104	492.92	466.89
Oktober	15	20.9149	632.63	1333.98	1325.50	630.36	10.1	10 25	1.8611	52188	1.8101	500.28	480.58
November	1	20.8931	632.84	1332.12	1324.77	629.46	8.6	9 30	1.8631	52239	1.8116	533.85	504.57
November	15	20.8761	632.94	1334.68	1326.71	630.81	3.9	10 0	1.8643	52285	1.8098	561.06	530.53
Dezember	1	20.8782	636.61	1341.72	1327.51	630.34	3.3	10 20	1.8625	52322	1.8092	560.10	533.19
Dezember	15	20.8493	634.58	1338.97	1325.47	629.81	1.9	11 10	1.8672	52333	1.8103	595.60	542.93
1883													
Januar	2	20.8823	634.42	1338.84	1324.41	629.26	+ 7.4	10 10	1.8648	52244	1.8104	557.21	522.91
Januar	15	20.8545	636.83	1341.29	1326.75	630.81	— 0.7	10 30	1.8630	52422	1.8077	606.15	561.49
Februar	1	20.8650	635.88	1339.99	1326.63	630.24	+ 2.9	10 10	1.8639	52349	1.8086	592.11	551.73
Februar	15	20.8736	635.70	1339.05	1326.35	630.13	4.4	10 15	1.8630	52333	1.8084	577.10	540.06
März	1	20.8952	635.92	1340.12	1327.39	630.64	5.2	10 20	1.8608	52288	1.8091	561.56	535.61
März	15	20.8645	636.25	1341.66	1327.19	630.88	0.7	10 40	1.8633	52366	1.8095	606.12	571.00
April	1	20.8752	636.01	1339.98	1325.30	629.46	4.8	11 15	1.8634	52314	1.8092	571.93	536.60
April	15	20.8781	635.55	1337.95	1323.32	628.82	7.0	10 20	1.8631	52311	1.8080	564.46	531.51
Mai	1	20.8878	635.71	1336.78	1321.23*	628.03	10.8	11 15 *am*	1.8618*	52305*	1.8061*	535.46	494.01
Mai	15	20.8966	630.87	1326.92	1312.62	623.92	18.9	5 5 *pm*	1.8676	52109	1.8090	514.44	467.97
Juni	1	20.8960	629.79	1327.90	1314.96	624.52	20.5	3 30	1.8699	52051	1.8110	493.66	439.45
Juni	15	20.8953	630.33	1329.26	1313.35	623.91	21.4	9 10	1.8701	52050	1.8111	483.10	436.57
Juli	1	20.9328	630.01	1327.65	—	623.72	26.1	4 55	1.8652*	52008*	1.8093*	436.82	409.54
Juli	15	20.9075	629.93	1328.93	—	622.86	20.0	6 30	1.8702*	51986*	1.8135*	454.93	428.17
August	1	20.9277	633.25	1334.29	1319.71	627.38	18.4	5 5 *pm*	1.8615	52124	1.8089	451.52	438.53
August	15	20.9227	632.41	1330.83	1316.32	625.43	+ 20.6	9 5 *am*	1.8635	52096	1.8083	464.69	444.46

Den mit * bezeichneten Werthen ist geringeres Gewicht beizulegen als den übrigen.

3. Inklination.

Die Inklinations-Bestimmungen sind mit einem von uns abgeänderten Weberschen Erdinduktor von beträchtlich grossen Dimensionen (Durchmesser des Kreises der Drahtwindungen im Mittel = 890$^{\text{mm}}$) in Verbindung mit einem empfindlichen Galvanometer nach einer neuen seit 1878 im erdmagnetischen Observatorium zu Göttingen gebräuchlichen Methode ausgeführt. Die Begründung derselben ist in den folgenden Arbeiten gegeben:

Karl Schering: [Ueber eine neue Methode der Anwendung des Erdinduktors zur Bestimmung der magnetischen Inklination], Tageblatt der Naturforscher-Versammlung in Cassel, 1878, September 12, Seite 42.

Karl Schering: Magnetische Inklination und allgemeine Theorie des Erdinduktors. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1882, Seite 345—392.

Hier sei nur erwähnt, dass die Drehungsaxe des Erdinduktors unter einem Neigungs-Winkel a' gegen den Horizont festgestellt wird und dann in der üblichen Weise nach der Muliplikations-Methode die Ausschläge des Magneten im Galvanometer beobachtet werden. Gleichzeitig wird der Winkel a' mit optischen Hülfsmitteln gemessen. Dieselben Beobachtungen werden dann für einen andern Neigungs-Winkel a'' der Drehungsaxe ausgeführt.

Bei den im Jahre 1882/83 ausgeführten Beobachtungen wurden die Winkel a' und a'' so gewählt, dass der eine, z. B. a' um 15 bis 20 Bogen-Minuten kleiner, a'' um 15 bis 20 Bogen-Minuten grösser als die Inklination war.

Wenn dann bei der Neigung a' der Magnet unter dem Einflusse der multiplizirend wirkenden Induktionsströme die Bogen

$$l'_1,\, l'_2,\, l'_3,\, \ldots,\, l'_\nu,\, \ldots$$

beschreibt, welche in Skalentheilen, auf Bogen reduzirt, ausgedrückt sind, dagegen bei der Neigung a'' die Bogen

$$l''_1,\, l''_2,\, l''_3,\, \ldots,\, l''_\nu,\, \ldots,$$

so werden, wie in der genannten Abhandlung in den Göttinger Nachrichten, 1882, Seite 354 gezeigt ist, die einzelnen jedem ν entsprechenden Werthe der Inklination i nach der Näherungs-Formel

$$i_\nu - \frac{1}{2}(a'+a'') = \frac{l''_\nu - l'_\nu}{l''_\nu + l'_\nu}\,\frac{1}{2}(a'-a'')$$

berechnet. Der Fehler, welcher dadurch entstand, dass hier die Galvanometer-Ausschläge l_ν den Winkeln $a'-i$ und $a''-i$ statt den $\sin(a'-i)$ und $\sin(a''-i)$ proportional gesetzt sind, beträgt weniger als 0.04 Bogen-Sekunden.

Der Abstand der Skala von dem Spiegel des Galvanometers war 1882/3 gleich: 5100$^{\mathrm{mm}}$. Zur Bestimmung von a', a'' und der Werthe l'_ν und l''_ν war nur ungefähr eine halbe Stunde erforderlich.

Der Mittelwerth $i^* = \frac{1}{\nu}\sum i_\nu$ ist dann mit Hülfe der Angaben der Variations-Instrumente wegen der Aenderung der Inklination während dieser Bestimmungen korrigirt und zwar auf den Werth i_0^* derselben zur Zeit der Beobachtungen mit der Neigung a'' reduzirt. In der Regel ist auch noch eine dritte Beobachtung mit einer Neigung a''', welche ungefähr wieder gleich a' war, ausgeführt und so ein zweiter ebenfalls auf die Zeit des zweiten Satzes reduzirter Werth i_0^{**} erhalten. Der definitive Werth

$$i = \frac{1}{2}(i_0^* + i_0^{**}) - 35''$$

worin (35″) im Wesentlichen den Lokaleinfluss des in demselben Gebäude befindlichen Magneten im Unifilar I darstellt [s. Göttinger Nachrichten, 1882, S. 384], ist in der folgenden Tabelle angegeben. Die mit δ'' bezeichnete Grösse giebt in Sekunden den Unterschied der beiden Werthe i_0^* und i_0^{**} an; ihr geringer Betrag gestattet ein Urtheil über die grosse Genauigkeit dieser Methode.

				$i = 66^0 +$	δ''
1882.	August	1	$1^h 32^m$ *am*	30′ 28″	—
			5 8	30 18	8
			9 28 *am*	35 45	—
			9 30 *pm*	30 44	—
			10 51 *pm*	29 50	4
	August	15	0 52 *am*	28 34	10
			1 30	28 3	13
			3 17	28 12	8
			7 0 *am*	29 46	0
			5 3 *pm*	28 52	5
			9 0	27 42	10
			10 32 *pm*	26 47	27
	September	1	0 47 *am*	27 17	8
			1 35	27 46	—
			4 57 *am*	28 31	1
			4 47 *pm*	27 52	5
			10 45 *pm*	27 13	4
	September	15	0 55 *am*	27 49	7
			4 57	28 21	4
			10 15 *am*	30 39	—
			10 59 *pm*	27 29	6
	Oktober	1	1 19 *am*	27 34	6
			7 5 *am*	27 46	1
			2 40 *pm*	28 5	12
			10 50 *pm*	27 21	0
	Oktober	15	1 13 *am*	28 0	11
			9 15 *am*	31 39	15

				$i = 66^0 +$	δ''
1882.	Oktober	15	$3^h 10^m$ *pm*	31′ 20″	3
			10 43 *pm*	28 35	1
	November	1	0 52 *am*	29 0	3
			0 34 *pm*	29 18	6
			10 51 *pm*	28 35	1
	November	15	1 5 *am*	31 28	1
			0 45 *pm*	30 1	4
			10 53 *pm*	29 42	3
	Dezember	1	1 6 *am*	30 20	9
			1 3 *pm*	30 27	1
			10 50 *pm*	30 33	11
1882.	Dezember	15	1 13 *am*	29 19	3
			1 20 *pm*	28 14	7
			11 7 *pm*	30 19	0
1883.	Januar	2	1 5 *am*	29 46	1
			1 0 *pm*	29 47	12
			11 38 *pm*	29 48	—
	Januar	15	1 11 *am*	29 3	1
			1 8 *pm*	29 36	3
			10 48 *pm*	29 18	—
	Februar	1	1 34 *am*	28 52	—
			1 6 *pm*	29 50	0
			11 4 *pm*	32 16	5
	Februar	15	2 46 *am*	29 21	4
			1 5 *pm*	29 22	1
			10 55 *pm*	28 24	2
	März	1	0 56 *am*	30 51	5

				$i = 66^0 +$	δ''
1883.	März	1	$0^h 39^m$ *pm*	31′ 55″	1
			10 47 *pm*	28 31	3
	März	15	0 56 *am*	28 47	6
			0 48 *pm*	29 50	4
			10 50 *pm*	28 43	0
	April	1	0 30 *am*	28 37	—
			5 32 *pm*	28 51	1
	April	15	3 2 *am*	27 55	0
			2 3 *pm*	27 59	5
			10 33 *pm*	26 47	3
	Mai	1	2 21 *am*	28 10	1
			10 55 *pm*	29 19	13
	Mai	15	1 15 *am*	27 14	4
			0 41 *pm*	28 8	3
			10 53 *pm*	26 36	1
	Juni	1	2 19 *am*	27 21	6
			11 31 *am*	27 55	7

				$i = 66^0 +$	δ''
1883.	Juni	1	$10^h 44^m$ *pm*	27′ 7″	3
	Juni	15	1 39 *am*	27 4	2
			11 35 *am*	27 7	5
			11 33 *pm*	26 34	4
	Juli	1	1 30 *am*	28 5	15
			0 34 *pm*	29 15	12
			10 36 *pm*	29 2	5
	Juli	15	1 40 *am*	28 4	11
			0 50 *pm*	26 47	11
			10 38 *pm*	27 22	5
	August	1	1 10 *am*	29 9	5
			11 51 *am*	32 32	10
			11 12 *pm*	29 37	13
1883.	August	15	0 34 *am*	27 22	10
			11 52 *am*	26 52	10
			10 51 *pm*	26 50	3
			11 47 *pm*	26 48	—

In der folgenden Tabelle sind, wenigstens von einigen Terminen, die sämmtlichen beobachteten Grössen l_v und die berechneten i_v zusammengestellt. Die Schwingungsdauer des Galvanometers betrug etwa 42^s, die Zeit für die Umdrehung des Erdinduktors ungefähr 2^s.

Die Vorzeichen vor l_1 deuten die Richtung an, nach welcher die Nadel bei dem ersten Induktions-Stoss abgelenkt wurde; wenn diese Vorzeichen bei den Neigungen a' und a'' entgegengesetzt sind für gleiche Richtung der Drehung des Induktors, so liegt i zwischen a' und a''.

1882.		a $= 66^0 +$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	i_1	i_2 $= 66^0 25' +$	i_3	i_4	i_5
November 1.	$0^h 33^m$ *am*	38′ 19″	— 38.9	56.8	72.2	83.6	93.0	266″	274″	273″	274″	273″
	0 52	15 27	+ 61.3	91.6	116.1	135.0	149.4	283	285	288	290	287
	1 10	37 50	— 34.9	51.8	65.1	75.2	83.9					
	0 16 *pm*	37 46	— 35.2	50.6	64.7	73.8	82.9	291	297	294	299	295
	0 34	22 37	+ 32.1	47.4	59.8	69.7	77.0	309	304	304	306	305
	0 53	38 22	— 35.0	52.9	66.5	76.9	85.3					
	10 30 *pm*	38 27	— 37.3	56.1	70.0	81.0	89.8	264	267	270	272	271
	10 51	19 28	+ 40.9	62.2	78.5	91.3	101.1	236	243	244	247	247
	11 9	38 35	— 41.7	61.8	77.9	89.7	99.2					
November 15.	0 46 *am*	39 5	— 27.7	43.6	54.6	64.1	67.9	443	433	433	430	441
	1 5	23 51	+ 35.3	53.1	66.5	77.2	85.5	418	416	412	410	406
	1 25	39 12	— 31.5	47.8	60.9	71.1	80.3					
	0 25 *pm*	39 9	— 36.5	53.1	69.6	82.7	90.1	344	354	340	338	339
	0 45	21 54	+ 38.3	58.0	71.9	84.8	92.6	315	333	320	326	320
	1 13	39 10	— 40.8	57.7	75.4	86.9	96.8					

1882.		a = 66° +	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	i_1	i_2	i_3 = 66° 25′ +	i_4	i_5
November 15.	10h 35m *pm*	39′ 8″	— 38.1	56.1	71.1	82.2	92.5	313″	325″	322″	327″	324″
	10 53	20 35	+ 41.2	63.3	79.4	93.4	104.1	311	318	318	321	324
	11 10	39 10	— 38.5	57.8	72.4	84.2	92.8					
Dezember 1.	0 48 *am*	39 19	— 34.9	52.7	66.8	77.8	87.1	363	365	361	362	359
	1 6	19 51	+ 47.2	71.7	90.0	105.1	116.1	344	346	347	347	348
	1 24	39 20	— 37.3	56.4	70.4	82.2	90.6					
	0 43 *pm*	39 24	— 36.3	53.7	66.6	78.0	86.0	360	365	369	367	369
	1 3	23 21	+ 33.0	50.0	63.0	73.2	81.2	358	360	361	361	362
	1 18	39 41	— 37.8	56.7	71.3	82.6	91.5					
	10 35 *pm*	39 42	— 35.6	53.9	68.0	78.1	86.3	376	376	373	379	378
	10 52	21 24	+ 41.7	63.0	78.7	92.2	101.8	376	370	374	375	372
	11 10	39 42	— 35.6	55.0	67.8	79.2	88.3					
Dezember 15.	0 50 *am*	39 50	— 42.8	64.4	80.7	94.0	104.2	295	293	296	295	293
	1 13	23 57	+ 25.8	38.3	48.8	56.5	62.0	290	289	293	294	293
	1 35	37 55	— 35.4	53.0	66.0	76.1	84.1					
	0 58 *pm*	37 54	— 38.7	58.8	75.0	86.4	96.0	223	224	223	227	226
	1 20	19 38	+ 38.2	58.3	74.2	86.8	95.8	222	225	229	236	233
	1 37	33 51	— 21.7	32.7	40.6	45.9	51.5					
	10 45 *pm*	33 41	— 13.4	19.6	26.1	29.7	33.8	337	340	335	338	334
	11 7	20 49	+ 42.8	64.3	82.2	95.8	105.8	344	342	346	345	342
	11 26	37 27	— 29.0	43.9	55.3	64.6	72.1					

Die absoluten Bestimmungen sämmtlicher erdmagnetischer Komponenten sind von 1882 August 1 bis 1883 April 1 von Ernst und Karl Schering ausgeführt, von da an bis 1883 August 15 von Ernst Schering und von Herrn Demuth. Karl Schering hat sämmtliche Beobachtungen berechnet.

II. Instrumente zur Bestimmung der Variationen der erdmagnetischen Kraft in Göttingen.

1. Deklination.

Die Aenderungen der Deklination wurden am »Unifilar II« beobachtet, welches im Juli 1882 im unterirdischen Beobachtungsraum aufgestellt ward. Der Magnet (Länge 50mm) hing in einem Kupferdämpfer an einem ungefähr 2m langen an dem Gewölbe des Raumes befestigten Messingdrahte. Der Abstand von Skala und Spiegel betrug 5162.2mm, so dass der Werth eines Skalentheils gleich 19″.979 war. Die Aenderungen ($U^*-U_0^*$) der Deklination in Bogenminuten sind nach der Formel:

$$U^* - U^*_0 = w_1 (U_{\prime\prime} - U^0_{\prime\prime})$$

zu berechnen, worin $(U_{\prime\prime} - U^0_{\prime\prime})$ die Aenderung am Unifilar II in Skalentheilen bezeichnet und der Koeffizient w die Zahlenwerthe hatte:

$$w_1 = \frac{1}{2.9875} \text{ bis 1883 Februar 4,}$$

$$w_1 = \frac{1}{2.977} \text{ von 1883 Februar 4 bis 1883 Juni 30,}$$

$$w_1 = \frac{1}{2.933} \text{ von 1883 Juli 1 an.}$$

Die Verschiedenheit der Werthe von w_1 entstand dadurch, dass nach und nach stärkere Drähte, deren Torsions-Koeffizienten 0.0087 resp. 0.0105 resp. 0.0244 betrugen, für das Unifilar II genommen wurden, da die feineren in der feuchten Kellerluft bald durchrosteten und zerrissen.

Die Schwingungsdauer des Magneten ohne Dämpfung war 4.25^s, das Dämpfungsverhältnis war 1 zu 2.11, demnach betrug die Schwingungsdauer T' im Dämpfer 4.37 und $5\,T' = 21.85^s$. Als Beobachtungs-Schema wurde daher das Folgende gewählt:

Zeit	Ablesung	Berechnung
$0^h 4^m 38^s$	a_1	
49	a_2	
5^m 0	a_3	$U_{\prime\prime} = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} + \frac{1}{63}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_4 + a_5}{2}\right)$
11	a_4	
22	a_5	

Unter der Voraussetzung, dass sich die Deklination während des Beobachtungssatzes proportional der Zeit ändert, giebt der Werth $U_{\prime\prime}$ die Deklination zur Zeit $0^h 5^m 0.4^s$. (Gauss: Das in den Beobachtungs-Terminen anzuwendende Verfahren [Resultate aus den Beob. d. magn. Vereins], 1836 [Seite 34 bis 50]; Gauss' Werke, Bd. V, Seite 541 bis 556 und: Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel, Resultate aus den Beob. d. magn. Vereins 1837, Seite 58 bis 80; Gauss' Werke, Bd. V, Seite 374 bis 394.)

Es zeigte sich bald, dass die elastische Nachwirkung des mehrere Male wieder erneuten Messingdrahtes den Stand des Unifilar II nach und nach änderte, deshalb wurden zur Kontrolle an jedem Termine und ausserdem fast täglich mehrere gleichzeitige Ablesungen am Unifilar I und Unifilar II ausgeführt und mit Hülfe derselben alle Beobachtungen auf Unifilar I reduzirt. Dieses Instrument, welches schon länger als 10 Jahre an demselben Drahte hängt, zeigte keine derartige Standänderung. Zu den Zeitpunkten, an welchen in den Terminen gleichzeitig beide Instrumente beobachtet worden sind, ist, wie schon oben bemerkt, den mitgetheilten Resultaten ein u beigesetzt.

2. Die Variationen ($10000\,\delta T$) der Horizontal-Intensität wurden aus den Ablesungen am Bifilar ($B-B_0$), an der Weberschen Hülfsnadel ($H-H_0$) und aus den Aenderungen ($U^*-U^*_0$) der Deklination in Bogenminuten nach der Formel:

$$10000\,\delta T = B^*-B^*_0 = 1.8107\,(B-B_0)-2.0084\,(H-H_0)+2.7125\,(U^*-U^*_0)+\theta'$$

berechnet, worin

$$\theta' = 0.177\,(t_0-\tau^0)-0.112\,(t-\tau^0)-0.066\,(t_u-\tau^0)$$

eine, dem Betrage nach, sehr geringe Temperatur-Korrektion bedeutet, welche aus den Temperaturen

t_0 des oberen Verbindungsstücks der Drähte
t_u des unteren » » »
t der Drähte selbst

berechnet werden kann. An den mitgetheilten Resultaten für die Horizontal-Intensität ist sie noch nicht angebracht.

Nach einer ganz analogen Formel, nämlich

$$-10000\,T\cdot\frac{\delta M}{M} = 0.1693\,(B-B_0)-2.0084\,(H-H_0)+2.7125\,(U^*-U^*_0)-\theta''$$
$$\theta'' = 0.177\,(t_0-\tau^0)-0.112\,(t-\tau^0)+0.606\,(t_u-\tau^0)$$

ist auch die Aenderung δM des magnetischen Moments des Magneten im Bifilar ermittelt. Die den obigen Gleichungen zu Grunde liegenden Konstanten sind im Juli 1882 bestimmt. Die Aenderungen des Nullpunkts des Bifilars während des Terminsjahres 1882/83 sind oben (Seite 123) in der Tabelle unter T_0 aufgeführt. Den mitgetheilten Termins-Beobachtungen ist der für jeden Termin gefundene Werth von T_0 zu Grunde gelegt, nur für Termin XIX. und XXIV. ist eine Ausnahme gemacht. Hier ist jedesmal das Mittel aus dem Werthe von T_0 im vorhergehenden und folgenden Termin angenommen,

also für Termin XIX: $T_0 = 1.8085$
und für Termin XXIV: $T_0 = 1.8091$.

Das Bifilar ist noch das von Gauss selbst im westlichen Saal der Sternwarte aufgestellte Instrument. (Gauss: Ueber ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument, [Resultate aus den Beob. d. magnet. Vereins] 1837 [Seite 1 bis 19]; Gauss' Werke, Bd. V, Seite 357 bis 373 und: Zur Bestimmung der Konstanten des Bifilar-Magnetometers, [Resultate aus den Beob. d. magnet. Vereins] 1840 [Seite 1 bis 25]; Gauss' Werke, Bd. V, Seite 404 bis 426. — W. Weber: Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers, in »Resultate aus d. Beob. d. magn. Vereins herausgegeben von Gauss und Weber im Jahre 1837«, Seite 20 bis 37 mit Abbildungen*).)

Im Jahre 1882 wurde das untere Verbindungsstück der Drähte geändert, so dass jetzt der Apparat ausser an den beiden ungefähr 5^m langen Drähten noch an zwei anderen, von nur 5^{mm} Länge hängt, deren Ebene senkrecht zu derjenigen der langen Drähte ist. In Folge dessen befindet sich der Schwerpunkt immer in der Vertikalen, in welcher sich jene beiden Ebenen schneiden. Durch eine analoge Einrichtung am oberen Ende der Drähte wurde zugleich erreicht, dass die Erschütterungen des Daches, mit welchem die obere Suspension verbunden ist, sich dem Instrument kaum noch merkbar mittheilen.

Das Gewicht des Magneten im Bifilar beträgt 11870^g; die Schwingungsdauer ist 46.304^s, der Dämpfungs-Koeffizient 1.365, also die Schwingungsdauer im Dämpfer 46.53^s. Die Ablesungen geschahen demgemäss nach dem Schema:

---

*) [W. Weber's Werke, herausgegeben von d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. II. Besorgt durch E. Riecke. S. 43 bis 57.]

	Ablesung	Berechnung
$0^h 4^m 19^s$	a_1	
28	a_2	
37	a_3	$m_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{10} \cdot 2$
46	a_4	
55	a_5	
$0^h 5^m 5^s$	a_6	
14	a_7	
23	a_8	$m_2 = \frac{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{10} \cdot 2$
32	a_9	
41	a_{10}	$\mathrm{B} = \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_2 - m_1}{13}.$

Das Mittel B giebt unter der Voraussetzung einer der Zeit proportionalen Aenderung während des Beobachtungssatzes die Intensität für die Zeit $0^h 5^m 0.9^s$.

Die Hülfsnadel hängt, gemäss der Weberschen Konstruktion, an dem Hauptmagneten in einer Entfernung von 1115^{mm}. (W. Weber: Vorschlag die Variationen des Stabmagnetismus beim Bifilar-Magnetometer unabhängig von der Kenntniss der Temperatur zu bestimmen. Resultate a. d. Beob. d. magnet. Vereins von Gauss und Weber im Jahre 1840, Seite 35 bis 45 mit Abbildungen*). W. Weber: Bestimmung der rechtwinkeligen Komponenten der erdmagnetischen Kraft in Göttingen. Abhandlungen d. K. G. d. Wiss. in Göttingen, 1855, Band VI**)).

Die Ablesungen an der Hülfsnadel sind nach dem folgenden Schema ausgeführt:

	Ablesung	
$2^m 3^s$	a_1	
14	a_2	
25	a_3	$\mathrm{H} = \frac{a_1 + 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6}{10}$
36	a_4	
47	a_5	
58	a_6	

*) [W. Weber's Werke. Bd. II. S. 190 bis 199.]
**) [W. Weber's Werke. Bd. II. S. 333 bis 373.]

Der Spiegel des Bifilars ist von der Skala 4709.4^{mm} und derjenige der Hülfsnadel von derselben Skala 4643^{mm} entfernt. Die beiden betreffenden Fernrohre stehen auf demselben Steinpfeiler; an diesem ist auch die Skala befestigt.

3. Vertikal-Intensität.

A. Bis zu Ende des Jahres 1882 wurden die Aenderungen der vertikalen Komponente mit einem nach dem Lloydschen Prinzipe, aber in beträchtlich grösserem Maassstabe im Juli 1882 konstruirten Instrumente, nämlich mit dem »Vertikal-Deflektoren-Unifilar«, bestimmt. Die Länge eines jeden der beiden vertikalen Eisenstäbe betrug 745^{mm}.

Die Einrichtungen des Instruments erkennt man aus einer Abbildung, welche sich in den Göttinger Nachrichten, 1886, Februar 6 auf der Tafel zu dem von Karl Schering vorgelegten Aufsatze über »das Deflektoren-Bifilar« Seite 185 findet.

Hier sei nur das Verfahren erwähnt, nach welchem an diesem Instrumente die winkelrechte Stellung des Magneten zu der Hauptebene der Eisenstäbe erreicht worden ist. Es dient dazu ein System zweier mit einer Messinghülse befestigter und gegen letztere durch Mikrometer-Schrauben verstellbare Spiegel, welche unter Benutzung eines Theodoliten in eine solche Lage gebracht werden, dass ihre Normalen genau senkrecht auf einander stehen. Vermittelst einer Klemmschraube wird dann die Messinghülse in feste Verbindung mit dem Holzrahmen gebracht, welcher als Träger der beiden vertikalen, je um eine horizontale Axe drehbaren Eisenstäbe dient. Der Winkel, um welchen der zwischen den Eisenstäben und zwar in der Höhe der Pole derselben hängende Magnet aus dem Meridian abgelenkt worden ist, kann gemessen werden, ohne die Eisenstäbe zu entfernen.

Die Aenderung der Vertikal-Intensität $(V^* - V^*_0)$ ist aus den Ablesungen an den Vertikal-Deflektoren $(V - V_0)$, den Aenderungen der Horizontal-Intensität $(B^* - B^*_0)$ und der Deklination $(U^* - U^*_0)$ nach der folgenden Formel berechnet:

$$10000\,(V^* - V^*_0) = 2.7210\,(B^* - B^*_0) + W_3\,(S),$$

worin

$$W_3(S) = 134472 \cos\left(47^0 + \frac{S}{2}\right) \sin\left(\frac{S}{2} - 2^0\right)$$

und

$$S = \varphi - 45^0 - (U^* - U_0^*) + v_1(V - V_0), \quad v_1 = \begin{cases} 0.3537 \text{ bis } 1883 \text{ Juli } 23, \\ 0.3614 \text{ von } » \quad » \quad » \text{ an} \end{cases}$$

zu setzen ist.

φ bedeutet den Winkel, welchen der abgelenkte Magnet mit dem magnetischen Meridian bildet. In Folge von Aenderungen am Instrumente, welche im Laufe des Terminsjahres sich als nothwendig erwiesen, ist auch der Werth von φ ein anderer geworden; es war auf den Skalentheil 500 des Unifilar I und der Vertikal-Deflektoren reduzirt:

am Tage			
1882 August 7	$\varphi = 47^0 11'2$	geltend bis 1882 August 9.	
August 30	$\varphi = 47\ 49.2$	» von 1882 August 9 bis 1882 Oktober 16.	
Oktbr. 30	$\varphi = 48\ 23.7$		
1883 März 12	$\varphi = 48\ 25.6$	im Mittel $48^0 26'1$ geltend von 1882 Oktbr. 16 an.	
Oktbr. 13	$\varphi = 48\ 29.0$		

Das Verhältniss $\frac{m}{M}$ des permanenten Moments der Eisenstäbe zu dem induzirten Moment ist im Laufe des Terminsjahres von 0.1639 bis 0.1999 gewachsen.

Um den Stand V für den in dem obigen Druck neben dem Mittelwerthe angegebenen Zeitpunkt, zum Beispiel für $0^h 5^m$ zu erhalten, sind

zu den Zeiten	die Ablesungen ausgeführt
$0^h 4^m 44^s$	a_1
52	a_2
5 0	a_3
8	a_4
16	a_5

$$V = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} + \frac{1}{31}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_4 + a_5}{2}\right)$$

B. Von 1883 Januar 1 an wurde ausser den Vertikal-Deflektoren regelmässig das Quadrifilar abgelesen, dessen Beschreibung und Abbildung in den Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1884, p. 306—312 und in den Annalen der Physik, herausg. v. Wiedemann, Bd. XXIII, S. 686 gegeben ist.

Das Instrument ward im Jahre 1882 konstruirt. Der Magnet desselben besteht aus einer (ungefähr 30^{g} schweren, 300^{mm} langen) magnetischen Röhre von Stahlblech, welche an vier Drähten hängt, von denen zwei über eine an der nördlichen Wand festen Rolle von 15^{mm} Durchmesser, die beiden anderen Drähte über eine an der südlichen Wand des Beobachtungs-Raumes festen Rolle von ebenfalls 15^{mm} Durchmesser gehen. Jeder der vier Drähte ist ungefähr 5^{m} lang und erhält seine Spannung durch das Gewicht des Magneten und dessen Schiffchen in der Weise, dass jeder Draht mit der Horizontal-Ebene einen Winkel von ungefähr $13^{\circ}20'$ bildet.

Die magnetische Axe der glasharten Stahlröhre ist von West nach Ost gerichtet und nahezu horizontal. Auf diese Weise ruft eine Aenderung der Vertikal-Intensität eine Drehung der magnetischen Röhre um eine horizontale, von Nord nach Süd gerichtete, Drehungs-Axe hervor. Um diese Drehung zu messen, ist mit dem Schiffchen ein Spiegel verbunden. Das von demselben reflektirte Bild einer vertikalen Skala, die von dem Spiegel etwa 6474^{mm} entfernt ist, wird mit einem Fernrohr beobachtet. Diejenige Aenderung q der vertikalen Intensität, welche eine Standänderung des Quadrifilars um 1 Skalentheil verursacht, ist aus den Ablenkungen berechnet, welche ein Magnet von bekanntem Momente auf die magnetische Röhre im Quadrifilar in gemessenen Entfernungen hervorruft.

Die Aenderung $(V^* - V^*_0)$ der vertikalen Intensität berechnet sich dann, abgesehen von einer Temperatur-Korrektion, nach der Formel

$$10000\,(V^* - V^*_0) = -q\,(Q - Q_0)$$

wenn $(Q - Q_0)$ die Standänderung am Quadrifilar bedeutet. In Folge einer zweimaligen am Instrumente vorgenommenen Aenderung hat sich auch q geändert. Es ergab sich aus den Bestimmungen

am Tage	der Werth von q zu	
1883 Januar 10	+ 4.137	geltend von Januar 1 bis Februar 3,
März 19	+ 4.338	„ „ Februar 12 bis Juni 14,
August 13/14	+ 4.678	„ „ Juli 1 an.

Um den Stand Q des Quadrifilar für die Zeit $12^{h}\,5^{m}$ zu erhalten, sind

zu den Zeiten	die Ablesungen auszuführen
$12^h 4^m 40^s$	a_1
50	a_2
5 0	a_3
10	a_4
20	a_5

Dann ist

$$Q = \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + a_5).$$

Die Korrektionen ΔV, welche wegen Zunahme des permanenten Magnetismus der Eisenstäbe, der elastischen Nachwirkung des Aufhängungsdrahtes und der Veränderung der Temperatur im Beobachtungsraume während eines Termines an die aus den Beobachtungen an den Vertikal-Deflektoren berechneten Vertikal-Intensitäten angebracht worden sind, waren aus den an den Terminstagen angestellten Inklinations-Messungen und den damit gleichzeitigen Beobachtungen der Horizontal-Intensität an Bifilar, Hülfsnadel und Unifilar ermittelt. Im Anfang der Beobachtungszeit, wo diese Korrektion einen grösseren Werth hat als später, wurde für dieselbe aus den zahlreichen Inklinations-Bestimmungen für jeden Termin eine besondere Interpolations-Formel hergeleitet. Dieselben lauten für

Termin I, 1882 August 1:

$$\Delta V = 0.00000 - 0.00050\,(t - 1.50) + 0.00003\,(t - 1.50)\,(t - 7.30) \\ - 0.000003\,(t - 1.50)\,(t - 7.30)\,(t - 21.50)$$

Termin II, 1882 August 15:

$$\Delta V = 0.00000 - 0.001569\,(t - 0.87) + 0.000107015\,(t - 0.87)\,(t - 2.40) \\ - 0.00000574\,(t - 0.87)\,(t - 2.40)\,(t - 7.00) \\ + 0.00000016\,(t - 0.87)\,(t - 2.40)\,(t - 7.00)\,(t - 17.05) \\ + 0.000000014\,(t - 0.87)\,(t - 2.40)\,(t - 7.00)\,(t - 17.05)\,(t - 21.00)$$

Termin III, 1882 September 1:

$$\Delta V = 0.00000 - 0.000499\,(t - 5.00) + 0.000015\,(t - 5.00)\,(t - 16.78)$$

Termin IV, 1882 September 15:

$$\Delta V = 0.00000 - 0.0004218\,(t - 0.92) - 0.00001146\,(t - 0.92)\,(t - 4.95) \\ + 0.00000157\,(t - 0.92)\,(t - 4.95)\,(t - 10.25)$$

Hier bedeutet t die Zeit in Stunden, welche seit Beginn des Termins 0^h *am* verflossen ist. Statt der vorletzten Formel gilt für $0^h \leqq t \leqq 5^h$ der Werth $\Delta V = 0$.

In allen anderen Terminen, für welche die Vertikal-Intensität hier nach Ablesungen an den Vertikal-Deflektoren steht — es sind dies ausser Termin I bis X im Jahre 1882 noch Termin XXI, XXII und XXIII im Jahre 1883 — ist die betreffende Korrektion aus den, meistens zu drei verschiedenen Zeiten in jedem Termin bestimmten, Werthen der Inklination und aus dem der gleichzeitig beobachteten Horizontal-Intensität abgeleitet. Für die Zeit zwischen diesen Beobachtungen wurde sie durch lineare Interpolation hergeleitet.

Für die Korrektion ΔQ, welche wegen elastischer Nachwirkung der Aufhängungsdrähte und wegen Veränderung der Temperatur des Magneten an die aus den Ablesungen am Quadrifilar berechnete Vertikal-Intensität angebracht wurde, ist ein im Wesentlichen dem vorigen ähnliches Verfahren eingeschlagen. Den Beobachtungen am Quadrifilar sind die Variationen der Vertikal-Intensität für die Termine des Jahres 1883 mit Ausnahme von Termin XXI, XXII, XXIII, während welcher das Quadrifilar verletzt war, entnommen.

Für jeden dieser Termine ist die Korrektion meistens zu drei verschiedenen Zeitpunkten bestimmt. Die in der zwischenliegenden Zeit geltende Korrektion ergab sich aus diesen Bestimmungen durch Interpolation. Die folgenden Tabellen stellen die durch die Beobachtungen gefundenen Werthe von ΔV und ΔQ dar.

Einheit $= (mgr)^{\frac{1}{2}}(mm)^{-\frac{1}{2}}(sec)^{-1} . 10^4$

ΔV

1882. August 1.	Termin I.
am $1^h 30^m$	0
7 20	— 29
pm 9 30	— 92
10 50	— 109

August 15.	Termin II.
am $0^h 52^m$	0
2 24	— 24
7 0	— 66
pm 5 3	— 137
9 0	— 183
10 32	— 195

ΔV

1882. September 1.	Termin III.
am $0^h 47^m$	0
1 35	0
5 0	0
pm 4 57	— 59
10 45	— 73

September 15.	Termin IV.
am $0^h 55^m$	0
4 57	— 17
10 55	— 45
pm 10 59	— 59

ΔV

1882. Oktober 1.	Termin V.
am $1^h 19^m$	0
7 5	— 14
pm 2 20	— 18
10 50	— 46

Oktober 15.	Termin VI.
am $1^h 13^m$	0
9 15	— 35
pm 3 10	— 18
10 43	— 31

ΔV

1882.

November 1.	Termin VII.
am $0^h\,52^m$	0
pm 0 34	+ 14
10 51	+ 7

November 15.	Termin VIII.
am $1^h\,5^m$	0
pm 0 45	— 20
10 53	— 19

Dezember 1.	Termin IX.
am $1^h\,6^m$	0
pm 1 3	— 3
10 50	— 6

Dezember 15.	Termin X.
am $1^h\,13^m$	0
pm 1 20	— 10
11 7	— 2

ΔQ

1883.

Januar 2.	Termin XI.
am $1^h\,5^m$	0
pm 1 0	+ 15
11 38	+ 34

Januar 15.	Termin XII.
am $1^h\,11^m$	0
pm 1 6	+ 18
11 4	+ 5

Februar 1.	Termin XIII.
am $1^h\,34^m$	0
pm 1 6	+ 19
11 4	+ 20

ΔQ

1883.

Februar 15.	Termin XIV.
am $2^h\,46^m$	0
pm 1 5	+ 17
10 55	+ 6

März 1.	Termin XV.
am $0^h\,56^m$	0
pm 0 39	+ 27
10 47	+ 21

März 15.	Termin XVI.
am $0^h\,56^m$	0
pm 0 48	+ 32
10 50	+ 41

April 1.	Termin XVII.
am $0^h\,30^m$	0
pm 5 32	+ 19

April 15.	Termin XVIII.
am $3^h\,2^m$	0
pm 2 3	+ 3
10 33	+ 18

Mai 1.	Termin XIX.
am $2^h\,21^m$	0
pm 10 55	— 5

Mai 15.	Termin XX.
am $1^h\,15^m$	0
pm 0 41	+ 10
10 53	+ 30

ΔV

1883.

Juni 1.	Termin XXI.
am $2^h\,19^m$	0
11 31	— 17
pm 10 44	— 19

Juni 15.	Termin XXII.
am $1^h\,39^m$	0
11 35	— 18
pm 11 33	— 14

Juli 1.	Termin XXIII.
am $1^h\,30^m$	0
pm 0 34	— 12
10 36	— 9

ΔQ

Juli 15.	Termin XXIV.
am $1^h\,40^m$	0
pm 0 50	+ 20
10 38	+ 68

August 1.	Termin XXV.
am $1^h\,10^m$	0
pm 10 51	+ 8
11 12	+ 33

August 15.	Termin XXVI.
am $0^h\,34^m$	0
11 52	+ 25
pm 10 51	+ 10
11 47	+ 12

III. Anordnung der Termins-Beobachtungen in Göttingen.

Sämmtliche 26 Termins-Beobachtungen, welche in dem Programm für die während 1882 und 1883 ausgeführten internationalen Polar-Expeditionen vorgeschrieben waren, sind im erdmagnetischen Observatorium in Göttingen vollständig ausgeführt.

Von einem Beobachter wurden die im westlichen Saale der Sternwarte befindlichen Instrumente, das Bifilar-Magnetometer und die zugehörige Hülfsnadel, abgelesen und zwar, um die Mittelwerthe für die in dem Programme vorgeschriebenen Zeitpunkte zu erhalten, bei den folgenden Sekunden-Schlägen:

Bifilar	
$11^h\ 59^m\ 19^s\ 28^s\ 37^s\ 46^s\ 55^s$	$0^h\ 0^m\ 5^s\ 14^s\ 23^s\ 32^s\ 41^s$
$0^h\ 4^m\ 19^s\ 28^s\ 37^s\ 46^s\ 55^s$	$0^h\ 5^m\ 5^s\ 14^s\ 23^s\ 32^s\ 41^s$

Hülfsnadel
$11^h\ 57^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s\ 36^s\ 47^s\ 58^s$
$0^h\ 2^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s\ 36^s\ 47^s\ 58^s$
$0^h\ 7^m\ 3^s\ 14^s\ 25^s\ 36^s\ 47^s\ 58^s$ u. s. f.

Ein anderer Beobachter hatte im unterirdischen Beobachtungsraume die Instrumente »Unifilar II« und »Vertikal-Deflektoren« in den Terminen 1882 August 1 bis 1882 Dezember 15 bei den folgenden Sekunden-Schlägen abzulesen:

Unifilar II	
$11^h\ 59^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 0^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$
$0^h\ 4^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 5^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$

Vertikal-Deflektoren		
$11^h\ 58^m\ 44^s\ 52^s$	$11^h\ 59^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$	
$0^h\ 0^m\ 44^s\ 52^s$	$0^h\ 1^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$	
$0^h\ 3^m\ 44^s\ 52^s$	$0^h\ 4^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$	
$0^h\ 5^m\ 44^s\ 52^s$	$0^h\ 6^m\ 0^s\ 8^s\ 16^s$	u. s. f.

Vom 1. Januar 1883 an geschahen die Ablesungen bei folgenden Sekunden-Schlägen:

Quadrifilar	
$11^h\ 58^m\ 40^s\ 50^s$	$11^h\ 59^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$
$0^h\ 3^m\ 40^s\ 50^s$	$0^h\ 4^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$
$0^h\ 8^m\ 40^s\ 50^s$	$0^h\ 9^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$

Unifilar II	
$11^h\ 59^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 0^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$
$0^h\ 4^m\ 38^s\ 49^s$	$0^h\ 5^m\ 0^s\ 11^s\ 22^s$
u. s. f.	

Vertikal-Deflektoren	
$0^h\ 0^m\ 44^s\ 52^s$	$0^h\ 1^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$
$0^h\ 5^m\ 44^s\ 52^s$	$0^h\ 6^m\ 0^s\ 10^s\ 20^s$

Da nicht die genügende Anzahl von Beobachtern vorhanden war, um alle vier oder fünf Instrumente gleichzeitig zu beobachten, so wurden nur das Unifilar und das Bifilar bei solchen Sekunden-Schlägen beobachtet, so dass die nach den oben Seite 128 u. 130 gegebenen Vorschriften berechneten Mittelwerthe der einzelnen Sätze für die programmmässigen Zeitpunkte gelten. Die Hülfsnadel wurde, wie aus vorstehender Zusammenstellung ersichtlich ist, bei solchen Sekunden-Schlägen beobachtet, so dass die nach obiger Vorschrift Seite 131, berechneten Mittelwerthe der einzelnen Sätze für die zwischen den programmmässigen Zeitpunkten in der Mitte liegenden Zeitmomente gelten. Aus zwei auf einander folgenden Mittelwerthen der Sätze wurde das Mittel genommen, um einen für den programmmässigen Zeitpunkt geltenden Stand der Hülfsnadel zu erhalten. Mit Anwendung dieses Werthes wurde nach der Formel auf Seite 129 die Korrektion berechnet, welche wegen der Aenderung des Stabmagnetismus im Bifilar berücksichtigt werden muss. Da dieser Stabmagnetismus sich nur langsam ändert, so erhält man einen genaueren Werth für die anzuwendende Korrektion, wenn man, um die zufälligen Fehler, welche aus der Abweichung von der Gleichzeitigkeit der Beobachtungen am Bifilar und an der Hülfsnadel entstehen, auszugleichen, aus je fünf der zunächst berechneten Werthe des Stabmagnetismus das Mittel nimmt und davon wieder aus je fünf so erhaltenen Werthen von Neuem das Mittel aufstellt.

Auch die Instrumente für die Variation der Vertikal-Intensität in den Terminen konnten nicht gleichzeitig mit den übrigen für $(5\varkappa)$ Minuten abgelesen werden; es war also nöthig, durch Interpolation die Ablesungen auf diese Zeit zurückzuführen. Deshalb ist bei den Beobachtungen an den Vertikal-Deflektoren im Jahre 1882 das Mittel aus den Ablesungen für $(5\varkappa-1)$ Minuten und $(5\varkappa+1)$ Minuten für $(5\varkappa)$ Minuten als giltig angenommen und dieses der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt. Die Ablesungen an den Vertikal-Deflektoren im Jahre 1883, welche um $(5\varkappa+1)$ Minuten stattfanden, und die am Quadrifilar um $(5\varkappa-1)$ Minuten sind für sich durch Interpolation auf $(5\varkappa)$ Minuten zurückgeführt. Hierdurch erklärt es sich, dass die Variation der Vertikal-Intensität, welche aus Ablesungen an den Vertikal-Deflektoren berechnet worden ist, keinen solchen kontinuirlichen Verlauf zeigt, wie die, welche die Resultate am Quadrifilar ergeben. Denn während letztere die Aenderungen der vertikalen Komponente allein darstellen, waren die ersteren noch zu diesem Zweck mit den Korrektionen zu versehen, welche aus der nicht genau gleichzeitig beobachteten Variation der Deklination und der Horizontal-Intensität hervorgehen. Dieser Umstand macht sich naturgemäss in den Terminen, wo grosse Bewegung herrscht, am meisten bemerkbar.

Die beiden Beobachter, im westlichen Saale der Sternwarte und im unterirdischen Observatorium wurden immer nach zwei Stunden von zwei anderen Beobachtern abgelöst. Bei dieser Ablösung beobachteten Ernst und Karl Schering die als Miren dienenden festen Kontroll-Spiegel sämmtlicher Magnetometer, sowie die zugehörigen Thermometer. Es befand sich je ein Thermometer

- in der Nähe der oberen Suspensions-Vorrichtung des Bifilar-Magnetometer (unter dem Dache des westlichen Theiles der Sternwarte);
- an der Saaldecke, durch welche die Drähte des Bifilar-Magnetometer hindurchgehen;
- im östlichen Theile (No. I) des Luftkastens für das Bifilar-Magnetometer;
- im westlichen Theile (No. II) des Luftkastens für das Bifilar-Magnetometer;
- an der östlichen Wand des unterirdischen Observatoriums;
- in dem mit Wasser gefüllten Kupferkasten, welcher um den unteren Eisenstab der Vertikal-Deflektoren gesetzt war;
- in dem mit Wasser gefüllten Kupferkasten, welcher um den oberen Eisenstab der Vertikal-Deflektoren gesetzt war;
- am oberen Ende des oberen Eisenstabes der Vertikal-Deflektoren;
- im Innern des Luftkastens des Quadrifilar unten bei dem Magneten;
- ausserhalb des Luftkastens des Quadrifilar unten bei dem Magneten;
- an der südlichen Suspension des Quadrifilar im Luftkasten, welcher die Drähte umgab;
- an der nördlichen Suspension des Quadrifilar im Luftkasten, welcher die Drähte umgab*);
- im Freien an der nördlichen Wand des eisenfreien Magnetischen Observatorium, 1.4 Meter über dem Erdboden.

Die Skala für die Stärke des Windes, sowie die für die Bewölkung des Himmels geht von 0 bis 10.

Die Namen der an den Termins-Beobachtungen betheiligten Herren, damals Studirende der Mathematik in Göttingen, sind: O. Apel, H. Bodenstedt, F. Bühring, W. Demuth, M. Düpow, W. v. Glümer, E. Götting, L. Hacker, H. Hogrebe, L. Holborn, H. Kahle, R. Krüger, G. Kurz, A. Langenbeck, E. Meyer, H. Priess, H. Wagner, W. Wickmann.

*) Um die Temperatur-Aenderung an den Variations-Instrumenten während eines Termins in möglichst engen Grenzen zu halten, brannten die Lampen zur Beleuchtung der Skalen und der Uhr seit Termin IX 1882 December 1 16 Stunden, an späteren Terminen 40 Stunden und schliesslich in der Regel 64 Stunden vor Beginn des Termins.

Die in dem Programme vorgeschriebenen Ablesungen des Deklinations-Magnetometer, welche an jedem Termine während einer Stunde, alle 20^s, auszuführen waren, haben im I. Termin am Unifilar II, in allen folgenden Terminen am Unifilar I stattgefunden und sind von Karl Schering bis 1883 April und nach dieser Zeit bis 1883 August 15 von Herrn W. Demuth ausgeführt.

Um die Reduktion der Termins-Beobachtungen zu erleichtern, wurden für sämmtliche auszuführende Rechnungs-Operationen vierzehn verschiedene Tabellen in dem nöthigen Umfange aufgestellt und autolithographirt.

Mit Hülfe dieser Tabellen sind dann aus den Ablesungen der Variations-Instrumente die schliesslichen Werthe für die Aenderungen der erdmagnetischen Elemente von den folgenden Herren, damals Studirende der Mathematik in Göttingen, berechnet worden: G. Ackermann, A. Angersbach, G. Bartels, G. Bender, F. Bennecke, H. Bodenstedt, F. Bohnert, F. Bühring, P. Dietel, P. Drude, E. Eckhardt, W. Fauser, J. Feller, W. Freise, M. Frohberg, W. v. Glümer †, R. Haussner, H. Hogrebe, L. Holborn, A. Hornickel, R. Krüger, H. Kuhn, G. Kurz, A. Langenbeck, C. Parrhysius, K. Rengel, G. Sack, F. Schumann, L. Stockheim, E. Stremme, J. Westermann.

IV. Anordnung der täglichen Beobachtungen in Göttingen.

Die Variations-Instrumente sind täglich um 8^h *am*, 1^h *pm* und 10^h *pm* von 1882 August bis 1883 April 1 durch Ernst und Karl Schering, von dieser Zeit an bis Ende August 1883 durch Ernst Schering und durch Herrn Demuth abgelesen. Die genauere Reihenfolge für die Ablesungen an den einzelnen Instrumenten ist oben Seite 118 ausführlich dargestellt. Die Beobachtungen am Unifilar I in der dort beschriebenen Art sind während der Zeit von August bis Dezember 1882 mindestens jeden Tag einmal, später jeden dritten Tag einmal angestellt, so dass gleichzeitige Beobachtungen an den beiden Unifilaren in der erforderlichen Anzahl stattfanden, um die Ablesungen am Unifilar II durch Interpolation auf absolute Werthe zurückführen zu können. Die Ablesungen am Unifilar I zu den Zeiten 15^m vor und nach der vollen Beobachtungsstunde geschahen dann, wenn Unifilar I und Unifilar II nicht gleichzeitig abgelesen wurden.

Unmittelbar nach Beendigung der magnetischen Beobachtungen sind die Thermometer abgelesen worden.

Die täglichen Beobachtungen wurden nach denselben Formeln, wie sie oben Seite 128 bis 134 für die Termins-Beobachtungen angegeben sind, von Herrn Assistenten Holborn berechnet.

Bei der Reduktion der aus Beobachtungen von Bifilar, Hülfsnadel und Unifilar berechneten Horizontal-Intensität auf den absoluten Werth wurde überall der gleiche Betrag $T_0 = 1.8090$ zu Grunde gelegt, um bei der Vergleichung der aufeinander folgenden täglichen Beobachtungen die Stetigkeit nicht zu unterbrechen. Das geringe Korrektionsglied θ' ist auch hier nicht angebracht.

Die Vertikal-Intensität ist hier nur nach Beobachtungen an den Vertikal-Deflektoren unter Anwendung der aus Unifilar, Bifilar und Hülfsnadel sich ergebenden Korrektionen mitgetheilt. Diese vier Instrumente konnten nicht genau gleichzeitig abgelesen werden, deshalb wurde das Mittel aus allen für die jedesmalige Tageszeit vorhandenen Ablesungssätzen als Stand des einzelnen Instrumentes angenommen.

Aus diesem Verfahren erklärt es sich, dass für einige Tage, an welchen grössere Bewegungen während der Beobachtungszeit stattfanden, unter einander sehr abweichende Werthe für die vertikale Komponente auftreten.

Bei den hier mitgetheilten Werthen derselben sind noch nicht angebracht die Korrektionen wegen elastischer Nachwirkung des Aufhängungsdrahtes, wegen der besonders anfänglich nach Aufstellung des Instrumentes raschen Zunahme des permanenten Magnetismus der Deflektoren und wegen Temperatur-Aenderung. Ebenso sind noch nicht berücksichtigt die Veränderungen, welche der Nullpunkt des Instruments in Folge der Erneuerung des Aufhängungsdrahtes erlitt. Das Zerreissen der Drähte und der Ersatz durch neue trat mehrere Male ein, nämlich: 1882, September 21, Oktober 16, Oktober 30, November 7, Dezember 18; 1883, Februar 27, April 14, Juni 29, Juli 19.

Die einzelnen täglichen Beobachtungen der Deklination und Horizontal-Intensität, wie sie sich unmittelbar aus der Reduktion der Mittel aus den

Ablesungssätzen ergaben, sind hier wegen Raummangel nicht mitgetheilt. Von der Variation der Deklination waren zu jeder der drei Tageszeiten im Durchschnitt für fünf Zeitpunkte Bestimmungen vorhanden, von der Variation der Horizontal-Intensität nur für zwei Zeitpunkte. Aus diesen ist zunächst das arithmetische Mittel gebildet, welches man als Viertelstunden-Mittel betrachten kann. Aus je drei auf einander folgenden Viertelstunden-Mitteln für die Zeiten 8^h *am*, 1^h *pm*, 10^h *pm*, 8^h *am*, 1^h *pm* u. s. f. wurde wiederum das Mittel genommen. Dieses wurde als das Tagesmittel angesehen, welches für die Zeit der mittleren der drei zusammengefassten Beobachtungsreihen gilt, nämlich für 1^h *pm*, 10^h *pm*, 8^h *am*. Jedes dieser Tagesmittel ist von dem Viertelstunden-Mittel, welches für den betreffenden Zeitpunkt gilt, abgezogen und unter der Bezeichnung »Abweichung vom Tagesmittel« angegeben.

Um die Bewegungen zwischen den einzelnen Beobachtungssätzen darzustellen, welche zu je einer der Stunden 8^h *pm*, 1^h *pm*, 10^h *pm* gehören, sind den »Abweichungen vom Tagesmittel« Zeichen beigesetzt, deren Erklärung oben Seite 117 gegeben ist. Bei der Deklination deuten diese Zeichen den Unterschied an, welchen die Mittel der im Durchschnitt über einen Zeitraum von 30 Minuten vertheilten Ablesungssätze erkennen lassen, bei der Horizontal-Intensität wird von 1882, August 15 bis Oktober 17 durch das Zeichen nur die Bewegung innerhalb 4 Minuten, von da ab die innerhalb 12 Minuten dargestellt.

Für die Horizontal-Intensität ist nur die Veränderung im Stande des Bifilar maassgebend gewesen, da erfahrungsmässig der Stabmagnetismus des Magneten während der kurzen Beobachtungszeit nur geringe Aenderungen erleidet im Vergleich zu den Variationen der erdmagnetischen Kraft. Auch fallen hier die Zeichen, welche eine oscillirende Bewegung bedeuten, fort, da nur zwei Beobachtungssätze gemacht sind.

Für die Vertikal-Intensität sind die Zeichen fortgelassen, weil dieselbe aus den einzelnen Ablesungen an den Vertikal-Deflektoren bei der oben beschriebenen Reduktions-Methode nicht getrennt berechnet wurden, die Bewegungen aber, welche dieses Instrument zeigt, zum grossen Theil der Variation der Deklination und der Horizontal-Intensität ihren Ursprung verdanken.

Die Tagesmittel und die Abweichungen von den Tagesmitteln hat Herr Assistent L. Holborn aus den täglichen Beobachtungen berechnet, auch die Formeln für ihren periodischen Verlauf aufgestellt und wird diese Untersuchungen bei einer anderen Gelegenheit veröffentlichen. [Siehe L. Holborn, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1887.]

Die Revision sämmtlicher auf die Variations-Beobachtungen bezüglichen Berechnungen sowie der Hauptheil der Revision bei dem Drucke dieser Schrift ist von Herrn Assistenten L. Holborn ausgeführt worden.

Eine vollständige Beschreibung und Theorie der im Göttinger erdmagnetischen Observatorium benutzten Apparate werden wir in einem besonderen Werke veröffentlichen*).

*) [Die im Originale folgenden und eine Seite füllenden »Bemerkungen« sind, soweit sie allgemeinere Bedeutung haben, unter dem Texte der vorhergehenden Seiten verteilt; die übrigen auf einzelne Ablesungsfehler bei den Beobachtungen sich beziehenden Bemerkungen sind hier fortgelassen.

Das im Original am Schlusse stehende »Inhaltsverzeichniss« ist ersetzt durch eine Inhaltsangabe auf S. 110, die dem hier abgedruckten Theile der Arbeit Nr. XXX entspricht.]

XXXI.

SUR LES INCLINOMÈTRES A INDUCTION.

Note présentée par M. Hermite.
[Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, T. 113, p. 258, 259.
Paris, 3 août 1891.]

A l'Observatoire magnétique de Göttingue, fondé par C. F. Gauss, nous avons construit, mon frère Charles Schéring et moi, un nouvel inclinomètre à induction. En perfectionnant la méthode inventée par W. Weber, nous avons donné à l'axe de rotation de l'inducteur des inclinaisons très voisines de la direction de la force totale du magnétisme terrestre; d'une part, une inclinaison d'à peu près un demi-degré au-dessous de cette direction; d'autre part, la même inclinaison au-dessus de la même direction. Au moyen d'un galvanomètre assez sensible, nous avons obtenu, dans la mesure absolue de l'inclinaison, une exactitude telle que, à une variation de l'inclinaison magnétique ne surpassant pas $4'', 2$, correspondait un déplacement de $0^{mm}, 1$ de l'image, sur l'échelle divisée en millimètres qui sert à mesurer l'élongation des aimants du galvanomètre. La description de cette méthode et des observations faites avec cet instrument a été publiée par Charles Schéring dans le *Rapport du Congrès des Naturalistes à Cassel* le 12 septembre 1878 (p. 42).

Conservant le principe de cette méthode de mesure, M. H. Wild a fait des observations avec un inclinomètre à induction dans lequel, à une variation de $21'', 82$ de l'inclinaison, correspondait un déplacement de $0^{mm}, 1$

sur l'échelle. Le *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XXVII, p. 320—333, mai 1881, contient la description de l'instrument de M. Wild, et celui-ci renvoie (p. 324, note) à notre méthode. MM. Mascart et Joubert font aussi mention de notre méthode, dans leur célèbre *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, art. 1169, en citant le rapport de M. Wild, dont un extrait a paru dans les *Comptes rendus*, t. XCVIII, p. 91; Paris, 1884.

En employant un galvanomètre plus sensible, M. Wild a construit, en 1890, un inclinomètre à induction dans lequel, à une variation de 13″, 0 de l'inclinaison, correspond un déplacement de $0^{mm}, 1$ de l'image sur l'échelle divisée. M. Wild a décrit cet instrument et ses observations dans les *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 7^e série, t. XXXVIII, n° 3, 1891, et il a donné un extrait de cet article dans les *Comptes rendus*, t. CXII, p. 990, 4 mai 1891.

Les faits que nous venons de citer montrent donc que la sensibilité (déterminée par le nombre 4″, 2) de l'inclinomètre que nous avons construit en 1878 est trois fois plus grande que la sensibilité (déterminée par le nombre 13″, 0) de l'inclinomètre construit, en 1890, par M. Wild.

Bien que l'exactitude des mesures obtenues par notre appareil surpassât tout ce qu'on avait obtenu jusqu'alors, et bien que l'observation ne demandât qu'une seule personne et fort peu de temps (voir à cet égard la notice publiée par M. Charles Schéring dans les *Göttinger Nachrichten der K. Gesellschaft d. Wiss.*, p. 345—392; 7 Juni 1882), nous avons construit, au mois de mars 1886, un nouveau galvanomètre possédant un système à peu près astatique de quatre aimants, en forme de minces lamelles. Ce second inclinomètre à induction est d'une sensibilité telle que, à une variation de 1″, 2 dans l'inclinaison magnétique, correspond un déplacement de $0^{mm}, 1$ de l'image sur l'échelle divisée, qui sert à mesurer les élongations des aimants du galvanomètre.

XXXII.

[UEBER DIE BESTIMMUNG DER MAGNETISCHEN INKLINATION MIT DEM ERDINDUCTOR.]

[Elektrotechnische Zeitschrift, 1891, S. 415—416 und S. 683—684.]

1.

Göttingen, den 18. Juli 1891.

An Herrn F. Uppenborn, Chefredakteur der »Elektrotechnischen Zeitschrift«.

Hochgeehrter Herr!

Ihre werthgeschätzte Zeitschrift hat im Heft 24 vom 12. Juni 1891 Seite 319 einen Brief von Herrn Staatsrath Wild, Direktor des physikalischen Central-Observatoriums in St. Petersburg, veröffentlicht. Am Schlusse dieses Schreibens sagt Herr Wild von sich selbst wörtlich:

»Ich wiederhole also: Herr Dr. Schering hat eine Methode zur »Erzielung einer etwas höheren Empfindlichkeit, ich aber habe eine »Methode zur Beseitigung des grossen, aus der Inkonstanz der Multi- »plikatorfunktion sich ergebenden Fehlers des Induktionsinklinatoriums, »den ich auch überhaupt zuerst nachgewiesen habe, angegeben und »jetzt nach dieser Methode mit einem dazu besonders konstruirten »Induktor eine bis dahin noch nicht erreichte Genauigkeit der Inkli- »nationsbestimmung erzielt«.

Die hier von Herrn Staatsrath Wild ausgesprochenen Behauptungen stehen mit den wirklichen Thatsachen in so grossem Widerspruche, dass dieselben, wenn sie nicht berichtigt würden, dem Fortschritte der Wissenschaft in diesem Gebiete schaden könnten, indem sie bei der Herstellung neuer Instrumente den Beobachter leicht irre führen möchten.

Aus den vorhandenen Veröffentlichungen ergiebt sich nämlich als ganz unzweifelhaft der folgende wahre Sachverhalt:

Das von meinem Bruder Karl Schering auf der Naturforscherversammlung in Cassel am 12. September 1878 (Tageblatt Seite 42) beschriebene, von ihm und von mir konstruirte, Induktionsinklinatorium war das erste Instrument dieser Art, mit welchem überhaupt in Stellungen der Drehungsaxe des Induktors ausser der lothrechten und der waagerechten Richtung beobachtet worden ist. Das Instrument lieferte, wie aus den dort mitgetheilten Beobachtungen hervorgeht, selbst bei seiner damaligen nur »provisorischen Aufstellung« eine solche Genauigkeit »sodass (also) bei genauer Ablesung auch eines Zehntel Skalentheiles (am Galvanometer) ein Schwanken der Inklination von 4″ bis 5″ beobachtet werden kann«.

Diese Stelle des Vortrages wird von Herrn Staatsrath Wild nicht erwähnt, obwohl gerade sie geeignet ist, eine Vergleichung der Genauigkeit des genannten Instrumentes mit dem Wild'schen zu gestatten. Dagegen führt Herr Wild aus der Einleitung jenes Vortrages eine längere Stelle an, welche sich aber auf die besondere Empfindlichkeit unseres Instrumentes gar nicht bezieht.

Wir wendeten schon damals für die Drehungsaxe des Induktors zwei Lagen auf beiden Seiten der Inklinationsrichtung und einander sehr nahe liegend an, weil wir uns bewusst waren, dass der Fehler, welcher aus der ungleichmässigen Wirkung des Multiplikators auf die Magnete im Galvanometer entsteht, nicht nur näherungsweise proportional dem Unterschiede der beiden Winkel ist, den die Inklinationsrichtung mit den Richtungen der Drehungsaxe in den beiden Lagen einschliesst, sondern ferner auch noch näherungsweise proportional dem Winkel zwischen den Richtungen der Drehungsaxe in den beiden Lagen ist. Bei genügender Kleinheit des letzteren Winkels kann man also auch für eine zum Voraus festgesetzte Zeit die Inklinationsbestimmung ausführen, ohne vorläufige Versuche anstellen zu müssen, um für die Inklination einen genäherten Werth zu erhalten, welcher erforderlich sein würde, wenn man allein durch die fast vollständig erreichte Gleichheit der beiden Winkel zwischen der Richtung der Inklination und den Richtungen der Drehungsaxe in den beiden Lagen die aus der ungleichmässigen Wirkung des Multiplikators auf die Magnete des Galvanometers entstehenden Fehler unschädlich machen wollte.

Bei der Hinweisung auf die Abhandlung von Karl Schering über die Dämpfungsfunktion wird ein ihrem eigenen Zwecke gerade entgegengesetzter Sinn von Herrn Staatsrath Wild untergelegt. Dieser sagt in dem oben erwähnten Briefe:

> »Dass Herr Schering selbst in seiner Methode kein Mittel zur »Beseitigung dieses Hauptfehlers sah, beweist wohl am besten, dass »er — — die Gesetze der Bewegung eines Magnets innerhalb eines »Multiplikators unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Funktion »des letzteren vom Ablenkungswinkel mathematisch entwickelte«.

Der Zweck dieser Untersuchung war vielmehr ein ganz selbstständiger und es wurde darin ausser anderen Anwendungen der gefundenen Theorie nur deshalb als Zahlenbeispiel eine frühere, schon im September 1877 beendete, nach Weber's Methode angestellte Inklinationsmessung berechnet, um zu zeigen, wie umständlich durch die Berücksichtigung der erst besonders aufzusuchenden Kenntniss der »Multiplikatorfunktion« sich die Auswerthung der Ergebnisse jener älteren Beobachtungsmethode gestaltet.

Auf den Einfluss, welchen die Abhängigkeit der Dämpfung von der Ruhelage und von der Bewegung des Magneten im Galvanometer bei den Messungen ausübt, hat zuerst Herr Professor F. Kohlrausch bei Gelegenheit seiner absoluten Widerstandsmessungen 1869 (Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband 6) [S. 18, 1874] hingewiesen. Dieser Einfluss war uns durch frühere eigene Beobachtungen wohl bemerkbar geworden, derselbe wurde aber in dem Vortrage von Karl Schering nicht erwähnt, weil dieser die betreffende unabhängige und umfangreiche Untersuchung sich selbst womöglich vorbehalten und zu einer späteren Habilitationsschrift benutzen wollte. Die Fortlassung einer Hinweisung auf den Einfluss der oben besprochenen Eigenschaft der Galvanometer erschien unbedenklich, weil in dem Vortrage unsere Beobachtungsart genügend klar beschrieben wird, sodass derjenige, der mit galvanometrischen Messungen vertraut ist, erkennen kann, dass hier alle nachtheiligen Einflüsse der Veränderlichkeit der Dämpfungsfunktion vermieden werden.

Die Neigung der Drehungsaxe des Induktors wird bei dem von Karl Schering hergestellten und beschriebenen Inklinatorium direkt und zwar mit Hülfe von Spiegelung durch einen isolirt stehenden genügend genauen Theodolit mit Vertikalkreis gemessen. Die Abweichungen der Neigungswinkel der Drehungsaxe des Induktors von der erdmagnetischen Inklination werden auf beiden Seiten der letzteren, einander nahezu gleich und klein genug gewählt, damit die ganze Empfindlichkeit des Galvanometers verwerthet werden kann, und zwar sowohl zu der Bestimmung des Unterschiedes der Wirkungen der beiden angewendeten Stellungen der Drehungsaxe des Induktors wie auch zu der Bestimmung der Aenderung der Neigung jener Axe bei einer Aenderung des Ausschlages der Galvanometermagnete um ein Zehntel Skalentheil. Die Empfindlichkeit des Galvanometers war eine so grosse, dass die 1500 mm lange Skale bei Weitem nicht ausgereicht haben würde, um die Ausschläge der Magnete im Galvanometer zu messen, wenn die Induktion bei senkrechter Lage der Drehungsaxe ausgeführt worden wäre.

Durch die Veröffentlichung dieses von meinem Bruder am 12. September 1878 gehaltenen Vortrages hat Herr Staatsrath Wild sich veranlasst gesehen, einen in dem Haupttheile ähnlichen Apparat herzustellen. Bei der Beschreibung desselben im »Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg 1881 mai. Tome XXVII. p. 320 bis 333 spricht Herr Staatsrath Wild über die Abhängigkeit des Fehlers in der Bestimmung der Inklination von der Grösse des Winkels zwischen der Drehungsaxe des Induktors und der Inklinationsrichtung und er fügt in der Note auf Seite 224 wörtlich hinzu:

> »Auf diesen Umstand hat auch schon Dr. Schering aufmerksam »gemacht (Tageblatt der 51. Versammlung Deutscher Naturforscher in »Cassel, 1878, Seite 42) und zur Erhöhung der Empfindlichkeit des »Erdinductors mit demselben Messungen in der Nähe der Inklinations»richtung angestellt«.

Die von Herrn Staatsrath Wild beschriebene eigene Konstruktion des Induktionsinklinatoriums, womit er im Juni und Juli 1880 Messungen ausgeführt hat, muss gegen das von Karl Schering konstruirte im Sommer 1878 benutzte und beschriebene Instrument dennoch als ein Rückschritt betrachtet werden. Herr Wild macht stillschweigend die Annahme, dass die Neigungsänderung desjenigen Rahmens, welcher die Lager für die Zapfen der Drehungsaxe des Induktors trägt, genau gleich der Neigungsänderung der Drehungsaxe des Induktors ist und zwar bis zu einer Neigung von 40°; eine Annahme, deren Zulässigkeit bei jenem Instrumente, wie auch bei seinem neueren Induktor vom Jahre 1890, gar nicht untersucht werden kann und bei einem Gewichte der Drahtrolle von mehr als 8,5 kg nicht unbedenklich erscheint.

Ausserdem ist das von Herrn Staatsrath Wild angewendete Galvanometer erheblich weniger empfindlich, wie das schon frühere Göttinger.

Bei dem Petersburger Instrumente vom Jahre 1880 entspricht einer Aenderung des Ausschlages am Galvanometer um 0,1 Skalentheil eine Aenderung der Inklination um 21,82″, während der im gleichen Sinne genommene Winkel bei dem Göttinger Instrumente vom Jahre 1878 nur 4,2″ betrug. Das neueste von Herrn Staatsrath Wild hergestellte Induktionsinklinatorium, mit welchem er seit dem Juni 1890 beobachtet und welches er jetzt in der Abhandlung*) beschrieben hat, leidet ebenfalls an dem eben erwähnten Mangel einer direkten Bestimmung der Neigung der Drehungsaxe. Ausserdem hat bei den Beobachtungen mit diesem Instrumente der Winkel zwischen der Drehungsaxe und der Inklinationsrichtung nahe ± 19° 20′ betragen. Hierdurch wird aber nicht nur die Genauigkeit der Ablesung beeinträchtigt, sondern auch der Einfluss der Inkonstanz der »Multiplikatorfunktion« vergrössert und die Anwendung eines genügend genauen Galvanometers vollständig verhindert. Das hierbei von Herrn Staatsrath Wild angewendete Galvanometer giebt erst bei einer Aenderung der erdmagnetischen Inklination um 13,0″ nach Wild's Mittheilungen (auf Seite 28) eine Aenderung der Ablesung am Galvanometer um 0,1 Skalentheil, während das von Karl Schering im Jahre 1878 im Göttinger Erdmagnetischen Observatorium aufgestellte Instrument bei einer Aenderung der Inklination um 4,2″ schon eine Aenderung der Galvanometerablesung um 0,1 Skalentheil hervorbringt.

*) Induktionsinklinatorium neuer Konstruktion von H. Wild. Mémoires de l'Académie Imp. de St. Pétersbourg, Série VII, Tome XXXVIII, No. 3, 1890, Nov. 20.

Es ist also auch der letzte Theil der von Herrn Staatsrath Wild ausgesprochenen Behauptung, dass er »eine bis dahin noch nicht erreichte Genauigkeit der Inklinationsbestimmung erzielt« habe, wesentlich abzuändern, und es muss heissen, dass das von Herrn Staatsrath Wild im Jahre 1890 konstruirte Induktionsinklinatorium nur den dritten Theil der Genauigkeit der Inklinationsbestimmung bieten kann, wie das von Karl Schering im Jahre 1878 ausgeführte Induktionsinklinatorium des Göttinger Erdmagnetischen Observatoriums.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebenster

Ernst Schering.

2.

Göttingen, den 29. November 1891.

An Herrn F. Uppenborn, Chefredakteur der »Elektrotechnischen Zeitschrift«.

Hochgeehrter Herr!

Ihre werthgeschätzte Zeitschrift veröffentlicht in Heft 47, vom 20. November 1891 [S. 644] einen Brief von Herrn Staatsrath Wild, worin er meine Berichtigung vom 18. Juli 1891 (Heft 31. Seite 415) seiner im Briefe vom 12. Juni 1891 (Heft 24. Seite 319) enthaltenen unrichtigen Behauptungen eine »gröbliche Anklage« nennt. Nichtsdestoweniger fährt er aber auch in diesem Briefe fort, unrichtige Behauptungen aufzustellen und wesentliche Thatsachen zu verschweigen.

Herr Staatsrath Wild citirt in dem neuesten Briefe aus dem Referate des Vortrages von Karl Schering auf der Naturforscherversammlung von 1878:

> »Die einzelnen Resultate, welche sämmtlich für nahe gleiche »Tageszeiten gelten, stimmen mit nur einer Abweichung von 30″ von »dem Mittelwerthe überein und sprechen für die Genauigkeit der »Methode, welche noch erhöht werden kann durch die Berücksichti»gung der zu gleicher Zeit gemachten Ablesungen am Bifilarmagneto»meter«.

Weiter unten im Briefe sagt dann Herr Staatsrath Wild:

»es habe auch hier Herr Ernst Schering an Stelle der von ihm »selbst angeführten thatsächlichen Unsicherheit von 30″ seiner fak- »tischen Messungen . . .«.

Da aber die obigen 30″ wesentlich aus den täglichen Variationen der Inklination bestehen, wie dort angedeutet wird, während die einzelnen Beobachtungen viel genauer sind, »eine Aenderung der Inklinationsrichtung um 42,5″ reicht hin, eine Aenderung des Ausschlages um einen Skalentheil hervorzubringen«, so ist die Darstellung des Herrn Staatsrath Wild eine wesentlich unrichtige.

Wenn derselbe in Bezug auf jene Stelle sagt:

»Warum Herr Ernst Schering in seinem Citat den ersten Theil »des ganzen auf die Genauigkeit seiner Messungen sich beziehenden »Passus weggelassen hat, überlasse ich der Beurtheilung des denkenden »Lesers«,

so wird wohl jeder »denkende Leser« einsehen, dass jene von der täglichen Aenderung der erdmagnetischen Kräfte beeinflussten 30″ gar keine Beziehung zu der besonderen Empfindlichkeit unseres Instrumentes haben.

In meinem Briefe vom 12. Juni 1891 erwähnte ich, dass Herr Professor F. Kohlrausch 1869 auf den Einfluss, welchen die Abhängigkeit der Dämpfung von der Ruhelage und von der Bewegung des Magneten im Galvanometer bei den Messungen ausübt, aufmerksam gemacht hat und dass wir auch diesen Einfluss bei den Inklinationsmessungen*) bemerkt haben, dass aber die Fortlassung des Hinweises auf jenen Umstand bei dem Vortrage in der Naturforscherversammlung unbedenklich erschienen sei, weil derjenige, welcher mit galvanischen Messungen vertraut ist, aus der Darlegung unserer Beobachtungsart erkennen könne, dass jener schädliche Einfluss vermieden werde. An diese Stelle knüpft Herr Staatsrath Wild die seinem eigenthümlichen Geschmacke entsprechende Bemerkung, welche mit den Worten schliesst:

»während jetzt angesichts der wirklich vorhandenen Vorlagen als

*) Nämlich bei zahlreichen besonders zu diesem Zwecke angestellten vergleichenden Beobachtungen im August und September 1877, wie Karl Schering in seiner Abhandlung »Allgemeine Theorie der Dämpfung«, Wiedemann's Ann. IX, S. 481, im Juni 1879 mitgetheilt hat.

»alleinige Thatsache besteht, was ich in meiner Berichtigung als »solche angegeben und am Schlusse derselben kurz resumirt habe«.

Jene meine Stelle bezieht sich aber garnicht auf die angebliche Berichtigung des Herrn Wild, sondern, wie ich dort ausdrücklich hervorgehoben habe, wendet sie sich gegen Herrn Wild's anderen falschen Ausspruch:

»Dass Herr Schering selbst in seiner Methode kein Mittel zur »Beseitigung dieses Hauptfehlers sah, . . .«.

Herr Staatsrath Wild giebt also auch hier wieder eine unrichtige Darstellung.

Derselbe sagt in seinem letzten Briefe:

»In meiner fraglichen Abhandlung ist dagegen der thatsächliche »Beweis auf Grundlage der mitgetheilten zahlreichen über 7 Monate »sich ausdehnenden Messungen von drei verschiedenen Beobachtern »gegeben, dass mit meinem Instrument nach meiner Methode eine »absolute Genauigkeit der Inklinationsmessung von $\pm 4{,}5''$ erzielt worden »ist, und in einem im diesjährigen Juni-Heft der Zeitschrift für In»strumentenkunde erschienenen Auszug aus jener habe ich sogar eine »Steigerung dieser Genauigkeit bis $\pm 2{,}5''$ bei späteren Messungen kon»statiren können«.

Herr Staatsrath Wild übergeht an dieser Stelle sowie überhaupt in den beiden ganzen Briefen den folgenden wesentlichen Umstand mit Stillschweigen, nämlich dass in seiner Abhandlung steht: »die 0,1 Skalentheile bei guter Beleuchtung noch sicher schätzen zu können«, und an einer anderen Stelle der Abhandlung, dass, wenn die Inklination i_1 mit einem mittleren Fehler von höchstens $\pm 3''$ gefunden werden soll, man den Ausschlag des Multiplikatormagneten auf $\pm 0{,}023$ Skalentheile genau ablesen müsste.

In Wirklichkeit kann ja nur 0,1 Skalentheil durch Schätzung abgelesen werden, und einem 0,1 Skalentheil entsprechen bei dem Wildschen Instrumente $13{,}0''$ in der Inklination. Dass man aber mit solchem Instrumente keine Genauigkeit bis $\pm 2{,}5''$ erreichen kann, das darf man nicht eine »vage Behauptung« nennen.

Die bei den Ablesungen am Multiplikator entstehenden Fehler häufen sich mit den Fehlern, welche aus den Ablesungen des Vertikalkreises am Induktor und der Variationsinstrumente für die vertikalen und horizontalen erdmagnetischen Kräfte sich ergeben. Hierzu kommt noch diejenige Schwankung der Einstellung der Induktoraxe, welche in Folge des Stosses zum Umdrehen um 180° entsteht.

Herr Staatsrath Wild wird bei einigem Nachdenken einsehen, dass man mit diesem Instrumente eine solche behauptete Genauigkeit bis $\pm 2{,}5''$ nicht erreichen kann, ebenso wie er durch Karl Schering's Nachweis (Exner's Repertorium der Physik, Band 20, Seite 430, 1884) von Wild's Fehlschluss bei den Erdstromuntersuchungen (Exner's Repertorium der Physik, Band 20, Seite 167, 1883) seinen Irrthum erkannt und auch (Mémoires de St. Pétersbourg, Sér. VII, t. XXXIII, No. 5, 1885, S. 32) mit den Worten zugestanden hat:

»In der fraglichen Abhandlung habe ich ferner eine Methode »angegeben, durch verschiedene Kombinationen der 4 Erdplatten die »elektromotorische Differenz der letzteren von der Potentialdifferenz »der Erdelektricität an denselben, die wir eigentlich kennen lernen »wollen, zu trennen. Dieselbe beruht indessen auf einem Versehen, »sodass die Gleichungen S. 11 für die resultirenden Grössen X, Y und Z »nicht bloss zu magnetisch ruhigen Zeiten, wie ich aus den Beobach»tungen erschloss, sondern überhaupt stets die Werthe 0 ergeben »müssen«.

Welche Genauigkeit würde Herr Staatsrath Wild mit unserem Erdinduktor und Galvanometer von 1878 erzielen können, wobei letzteres eine solche Empfindlichkeit hatte, dass dem 0,1 Skalentheil, welcher noch genau geschätzt werden kann, $4{,}2''$ in der Inklination entsprechen, statt der $13{,}0''$ bei dem Wildschen Instrumente?

Damit Herr Staatsrath Wild nun nicht wieder sagen kann, »jeder Leser wird mit uns bedauern, dass Herr Schering die Mittheilung seiner Idee unterlassen habe«, so will ich ihm statt seiner Formel [Mém. de St. Pétersbourg, Sér. VII, T. XXXVIII, Nr. 3, S. 30, 1890]

$$\operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg} z + \frac{S_1 - S_2 - k(m_1 - m_2) S_1}{S_2 \sin 2z},$$

nach welcher alle Berechnungen der Beobachtungen gemacht worden sind, die gleich genaue aber zum Rechnen bequemere Formel

$$\operatorname{tg}(i_1 - z) = \left\{ \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} - \tfrac{1}{2} k (m_1 - m_2) \right\} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} O$$

angeben. In diesen Formeln ist

$$z = 90^0 - \tfrac{1}{2} O$$

wo O die Differenz der Ablesungen am Vertikalkreis bei der vertikalen und geneigten Lage der Drehungsachse der Induktorrolle repräsentirt; ferner S_1 die Differenz der konstanten Maximalelongationen beiderseits in Skalentheilen bei geneigter Drehungsachse, i_1 die alsdann stattfindende absolute Inklination und m_1 den am Bifilarmagnetometer Wild-Edelmann zu dieser Zeit im unterirdischen Pavillon abgelesenen mittleren Stand, endlich S_2 und m_2 die entsprechenden Grössen zur Zeit der Beobachtung in der vertikalen Lage der Drehungsachse darstellen. Die Zahl $k = 0{,}0001548$ ist der zur Zeit gültige Empfindlichkeitskoëfficient des erwähnten Bifilars.

Nach der von Herrn Staatsrath Wild benutzten Formel muss man wenigstens mit sechsstelligen Logarithmen rechnen, während zu meiner Formel vierstellige Logarithmen ausreichen, um auf Sekunden genau zu rechnen. Auch braucht man nach meiner Formel eine geringere Anzahl Tafelwerthe.

Wenn Herr Staatsrath Wild in die Theorie seines Instrumentes bis zu der ihm hier mitgetheilten Formel eingedrungen wäre, so würde er auch wohl den Vortheil unserer Methode, der Anwendung kleiner Winkel zwischen der Drehungsachse des Induktors und der Richtung der ganzen erdmagnetischen Kraft, erkannt haben.

Herr Staatsrath Wild sagt am Schlusse seines zweiten Briefes von sich:

»ich denke aber, das vorstehende wird genügen, mich von dem Ver-
»dachte, als habe ich zu meinem Vortheil Thatsachen entstellt oder
»absichtlich unberücksichtigt gelassen, zu reinigen«.

Die Worte

»zu meinem Vortheil Thatsachen entstellt«
»absichtlich unberücksichtigt gelassen«

braucht Herr Staatsrath Wild. Jedenfalls habe ich im Vorstehenden nachgewiesen, dass Herr Staatsrath Wild in seinem letzten Briefe fortfährt, wesentliche Thatsachen unrichtig darzustellen oder ganz auszulassen, und nur dadurch zu seinen unrichtigen Behauptungen gelangt.

Indem ich Sie, sehr geehrter Herr Uppenborn, bitte, den vorstehenden Brief in Ihre geschätzte »Elektrotechnische Zeitschrift« aufzunehmen, bleibe ich mit vorzüglicher Hochachtung für Sie

Ihr ergebenster

Ernst Schering.

ARBEITEN BIOGRAPHISCHEN INHALTS.

XXXIII.

BERNHARD RIEMANN

ZUM GEDÄCHTNISS.

[Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1867, Juni 19, S. 305—314 und im Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von J. A. Grunert, Theil 48, Literarischer Bericht 191, S. 1—7, 1868.]

Zwischen der Ueberfülle an Nachrichten politischer Ereignisse traf uns die wenn auch nicht ganz unerwartete doch so schmerzliche Nachricht von dem allzufrühen Tode des hoch geschätzten Mathematikers, des sehr verehrten Mitgliedes unserer Gesellschaft der Wissenschaften. Bernhard Riemann hatte am 20. Juli 1866 die grossen Hoffnungen, die auf ihm für die Bereicherung der menschlichen Gedankenwelt noch ruhten, mit ins Grab genommen, war innerhalb des kurzen Zeitraums von elf Jahren seinen beiden grossen Vorgängern Gauss und Dirichlet gefolgt.

Worte ihm zur Erinnerung, hat die K. Gesellschaft d. W. mir gestattet, in ihrer öffentlichen Sitzung am 1. December v. Js. zu sprechen. Die Bände ihrer Abhandlungen werden diese aufnehmen aber die Gedächtnissrede auf Gauss, der geschichtlichen Entwickelung der Wissenschaft entsprechend, vorausgehen lassen*). Um nun inzwischen dem Wunsche nach

*) [Die von Ernst Schering gehaltenen Gedächtnissreden auf Gauss und auf Riemann sind bisher nicht veröffentlicht; sie werden in diesem Bande im »Nachlass« nach dem noch vorhandenen Manuscript gedruckt werden.]

Kenntniss seiner Lebensumstände entgegen zu kommen, erlaube ich mir, hier einen kurzen Auszug zu geben.

Georg Friedrich Bernhard Riemann als Predigers Sohn geboren am 17. September 1826 in Breselenz, einem Dorfe an der Elbgrenze der Lüneburger Heide, erhielt zusammen mit mehreren Geschwistern seinen ersten Unterricht vom Vater und zeigte schon damals besonderes Interesse für Lösung von Zahlenaufgaben. In seinem vierzehnten Jahre ging er auf das Lyceum in Hannover, erwarb dort nach Ueberwindung einer Missstimmung, die durch die Befähigung des Schülers, den Lehrer in seinem mathematischen Vortrag berichtigen zu können, entstanden war, die besondere Freundschaft dieses Lehrers. Dennoch war es für Riemann von grosser Bedeutung, dass er nach zwei Jahren auf das Johanneum in Lüneburg unter die Leitung des Herrn Director Schmalfuss kam. Dieser beschäftigte ihn nicht nur während der mathematischen Schulstunden mit für ihn eigens ausgewählten Problemen, sondern gab ihm auch Bücher über Gegenstände der höheren Mathematik zum Selbstudium, die dann immer in unerwartet kurzer Zeit zurück gebracht wurden. So Legendre's Theorie der Zahlen, deren Inhalt er während einer Woche zu seinem bleibenden Eigenthum machte.

Gleich lebhaft interessirte sich für den Schüler der Lehrer, bei dem er wohnte, der auch mein Religionslehrer gewesen, Herr Seffer; ihm verdanke ich über seinen Character in jener Zeit noch diese Bemerkung, an der wir unsern Freund sogleich wieder erkennen, er lobt ihn als still, bescheiden und anspruchslos.

Nachdem so vier Jahre in den beiden obersten Classen des Johanneums zugebracht waren, begab er sich mit den besten Zeugnissen versehen Ostern 1846 auf die Universität Göttingen und liess sich dem Wunsche des Vaters gemäss für Theologie inscribiren. Hier hatte er das Glück Gauss' Vorlesungen zu hören, beschäftigte sich auch vorzugsweise mit dessen Untersuchungen über complexe Grössen so wie über Gegenstände der mathematischen Physik und brachte dadurch dem von Ostern 1847 bis 1849 in Berlin unter Jacobi betriebenen Studium der elliptischen und Abelschen Functionen einen fruchtbaren Gedanken entgegen. Seiner befreundeten Stellung zu Dirichlet dankt er aus jener Zeit das von diesem in ihm erweckte Interesse für die Fourierschen Reihen und die partiellen Differential-Gleichungen.

Der Umstand, dass ihm Göttingen die heimathliche Universität war, machte es seinem Vater wünschenswerth, dass er Ostern 1849 wieder hieher kam. Neben der Ausarbeitung seiner von Gauss so wohl gewürdigten Doctordissertation beschäftigte er sich nun auch angelegentlich mit psychologischen metaphysischen und pädagogischen Studien.

Riemann machte in seiner ersten Schrift bei der Untersuchung der Eigenschaften der im Allgemeinen stetigen Functionen von einer Methode Anwendung, die bis dahin in einer ganz heterogenen Disciplin der Mathematik ihrer Ausbildung entgegengewachsen war. Die von Lagrange zuerst angewandte, von Laplace und Poisson in sehr wesentlichen Eigenschaften untersuchte, dann durch Gauss von einem ganz neuen Gesichtspunkte betrachtete und mit dem Namen Potentialfunction belegte veränderliche Grösse*) war zuletzt durch Dirichlet nach einer Methode behandelt worden, die auf einem Satze beruht, welchem Riemann wegen seiner grossen Bedeutung und vielfachen Anwendbarkeit einen eigenen Namen gegeben, den des Dirichletschen Princips. Mit Zuhülfenahme desselben gelang es ihm, seine neuen Fundamentalsätze über die Bestimmbarkeit einer Function mit complexem Argument durch ihre Unstetigkeitswerthe oder durch gegebene Werthe an Grenzlinien zu beweisen. Die Wichtigkeit der Untersuchung der Functionen für complexe Werthe des Arguments war wohl zuerst von Gauss in ihrer ganzen Grösse erkannt, als er seit Beginn des Jahres 1797 sich mit den lemniscatischen Functionen beschäftigte. Die Bedeutung der imaginären Grössen hatte noch nach seinen eigenen fruchtreichen Anwendungen bei der Aufstellung der Fundamentalsätze für die rationalen algebraischen Functionen, für die cubischen und biquadratischen Potenzreste und für die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung von Flächen auf einander auch noch neues Licht gewonnen durch die von Abel und Jacobi eingeführten elliptischen Functionen und durch die von Dirichlet und den Herrn Kummer und Kronecker entdeckten arithmetischen Eigenschaften gewisser homogener Formen beliebigen Grades. Die Bestimmung des reellen und imaginären

*) [Siehe die »Bemerkungen« am Schlusse dieses Bandes.]

Theils des Werthes einer Function nach dem Dirichletschen Princip erforderte nun noch die Berücksichtigung eines schon bei den Gebilden mit zwei Dimensionen auftretenden bis dahin noch nicht untersuchten Umstandes, nämlich, geometrisch ausgedrückt, der Einfachheit oder Vielfältigkeit im Zusammenhang einer einzelnen Fläche.

Damit legte Riemann die Grundlage zu einer Methode, welche ohne die umfangreichen Entwickelungen, (durch die Goepel und Herr Rosenhain [für] jene nach Art der Jacobischen einfachen Reihen gebildeten zweifachen Reihen die zum Voraus geahnten Sätze bewiesen und damit die Theorie der vierfach periodischen Abelschen Functionen erschlossen hatten), auf anderem Wege als dem Herrn Weierstrass eigenthümlichen, (durch den das ganze Gebiet der inversen Functionen zweiwerthiger Abelscher Integrale erst zugänglich geworden war), die Lehrsätze für die allgemeinen Abelschen Functionen und für die mehrfachen Reihen, aus denen jene durch Multiplication und Division gebildet werden können, mit einem verhältnissmässig geringen analytischen Apparate aus ihrer Eigenschaft der Periodicität und ihren Unstetigkeits-Werthen beweist.

Mit gleichem Erfolge wandte Riemann diese Methode auf die hypergeometrischen Reihen an, deren wesentliche Eigenschaften schon durch Herrn Kummer und in einer Abhandlung des Gaussschen handschriftlichen Nachlasses aufgestellt waren; ebenso auf die Verallgemeinerung dieser Reihen, Untersuchungen die er vollständig aufgezeichnet aber der Oeffentlichkeit nicht übergeben hat; zuletzt noch bei der Ableitung der Gleichungen für die Minimalflächen zwischen geradlinigen Grenzen, indem er hier wieder mit Herrn Weierstrass gleichzeitig dasselbe wissenschaftliche Gebiet betrat. Durch jene hypergeometrische Reihe stellte er auch die den Kugelfunctionen entsprechenden Ringfunctionen dar, bestimmte durch sie auch die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, nachdem er die bei diesem Problem auftretende Differentialgleichung einem ähnlichen Verfahren unterworfen hatte, wie dasjenige ist, welches dem Greenschen Satze zum Grunde liegt.

Der Hauptvortheil bei Riemann's Methode beruht darauf, dass die Functionen unabhängig von ihren etwaigen analytischen Darstellungen z. B. als Reihen oder Integrale, die häufig nur für begrenzte Gebiete Bedeutung haben, betrachtet werden. Die Erweiterung von Functionen, die bis dahin nur in dem Umfange der Gültigkeit ihres bekannten analytischen Ausdrucks untersucht waren, bildete für ihn den Ausgangspunkt zu neuen Entdeckungen, so bei der Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse in einer Abhandlung, die er als Danksagung für die Aufnahme unter die Correspondenten der Berliner Akademie eingesandt hatte. Eine der wichtigsten hier angewandten Hülfsmittel ist der Fouriersche Satz; mit der diesem zu Grunde liegenden und von Dirichlet zu ihrer ganzen Bedeutung erhobenen Reihenentwickelung hat Riemann sich schon zuvor erfolgreich beschäftigt. Er führt die Eigenschaften einer durch eine trigonometrische Reihe darstellbaren Function zurück auf die einer anderen, welche mit der zweiten Integralfunction derselben im Zusammenhang steht und zeigt dabei auch, wie es nach der besonders von Dirichlet zur Geltung gebrachten Definition der Integrale selbst Integrale solcher Functionen geben könne, die für jedes noch so klein angenommene Intervall des Arguments unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen. Neben dieser Abhandlung, die er als Probeschrift zur Erwerbung des Akademischen Lehrrechts benutzte, diente ihm zu gleichem Zwecke als Vorlesung vor der Facultät eine Ausarbeitung über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Die Wahl dieses Gegenstandes hatte Gauss veranlasst, wohl wegen des eigenen Interesses, das er an demselben nahm, mit welchem er sich schon in frühen Jahren beschäftigt und dabei alsbald erkannt hatte, dass ebenso wie in der Mechanik die Richtigkeit der Grundsätze wesentlich auf der Erfahrung beruhen. Von den Resultaten in diesen Untersuchungen hatte er nur das veröffentlicht, was sich auf die, von der Beschaffenheit des eine Fläche umgebenden Raumes unabhängige, Bestimmung des Krümmungsmaasses der Fläche bezieht. Dieser Satz bildet wesentlich das Fundament für Riemanns eigene Betrachtungen der von dem Euklidischen Raume verschiedenen nicht ebenen Raumarten. Es wird dabei aufmerksam gemacht auf die Verschiedenheit der Begriffe der Unbegrenztheit und der Unendlichkeit einer Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen; hervorgehoben, wie unsere empirische Kenntniss des die Körperwelt enthaltenden Raumes keine Schlussfolgerungen gestattet auf Verhältnisse, die erst merklich werden für bis jetzt unmessbar grosse und unmessbar kleine geometrische Gebilde. In

Bezug auf den letzteren Umstand wird angedeutet, dass die dadurch offen gelassene Frage nach der stetigen oder discreten Construction des Raumes nicht ohne Einfluss sein darf auf unsere durch Newton's Naturphilosophie begründeten Anschauungen über Naturgesetze. Mit den betreffenden Problemen hat Riemann sich auch wiederholt eingehend beschäftigt und mir während des Ausbaues der Untersuchungen seine Gedanken häufig mitgetheilt.

Die Vielseitigkeit Riemanns zeigt sich nun noch darin, dass er, angeregt durch Herrn Helmholtz' Theorien der Combinationstöne, der Wirbelbewegungen und der Tonempfindungen, neue Seiten abgewann dem Probleme ebener Luftwellen, dem Dirichletschen Probleme des flüssigen Ellipsoids, und der Lehre von der Mechanik des Ohres. Letztere ist freilich vom neidischen Geschick in dem wesentlichen Theile uns vorbehalten geblieben*).

Selbst während seines Lebens können wir manche zufällige Umstände wohl als der Bereicherung der Wissenschaft durch ihn hinderlich anklagen. Vergegenwärtigt man sich, dass ihn seit dem Beginn der Universitätsstudien eine Krankheit verfolgte, die am wenigsten eine bewegungslose allein dem Denken gewidmete Lebensweise duldet; die die Sorgen noch steigern musste, welche sein ungünstiges äusseres Geschick hervorrief, das ihm z. B. erst in seinem zweiunddreissigsten Lebensjahre sichere Existenzmittel als Extraordinarius verschaffte; bedenkt man noch, dass er in sich die Spuren einer anderen Krankheit wahrnahm, welche ihm schon in der Jugend die Mutter geraubt hatte, dann eine Schwester und nach dem Tode des Vaters den damals die Sorgen für die Familie tragenden jüngern Bruder und fast gleichzeitig eine andere Schwester und zuletzt noch kurz vor dem eigenen Tode eine dritte Schwester, so kann man sich nicht ohne schmerzliches Mitleid in die Stimmungen versetzen, die ihn in den wohl seltenen Augenblicken, während welcher er sich nicht mit seinen mathematischen und philosophischen Problemen beschäftigte, beschleichen mussten.

Eine bedeutende Besserung in seiner Gemüthsstimmung trat ein, als seit 1858 die beiden damals noch lebenden Geschwister ihm hier dauernde

*) [Siehe die »Bemerkungen« am Schlusse dieses Bandes.]

Gesellschaft leisteten, und als er später im Jahre 1862 sich zu einer sehr glücklichen Ehe mit Elise Koch verband, die ihm für eine nur so kurze Reihe von Jahren eine Lebensgefährtin sein sollte, welche mit Verständniss und ausgiebiger Geduld die seiner schweren und langwierigen Krankheit entspringenden Eigenheiten wohlthuend zu behandeln verstand. Auch noch dadurch musste sie zur Milderung seiner kummervollen Stimmung beitragen, dass die Trauer, sie zu verlassen, ihn nicht dem Gedanken ganz allein übergab, der so sehr auf ihm lastete, dass es ihm nicht gestattet sein sollte, die begonnenen und die im Geiste schon ans Ziel geführten Arbeiten zur Vollendung zu bringen.

In voller Voraussicht des nahen Todes verlangte er vom Arzte wiederholt und dringend eine Angabe der ihm noch übrig gebliebenen Lebensfrist, um darnach die Arbeit auszuwählen, die in solchem Zeitraume abgeschlossen werden könnte. Am Morgen des 20. Juli früh 7 Uhr verschied er, nachdem er noch Tags zuvor sich mit seinen Untersuchungen über das Gehörorgan beschäftigt und dann seine Umgebung auf die nahe Scheidungsstunde vorbereitet hatte. Es war in Selasca bei Intra am Lago maggiore; schon im vierten Jahre hielt er sich zur Milderung seiner Krankheit in Italien auf. Ermöglicht war ihm dieses durch die Liberalität des Königlichen Curatorium und die theilnahmsvolle Verwendung seiner hiesigen früheren Lehrer; es mag mir gestattet werden, dies hier zu erwähnen, weil Riemann so oft von seiner Pflicht der Dankbarkeit gesprochen, so sehr bedauert hat, ausser Stande zu sein, den Dank durch die That zu erweisen. Auch an die grosse Gastfreundschaft und das Zuvorkommen, welche er in Italien so vielfach erfahren, darf ich wohl erinnern. Nicht nur die Hochachtung für seine wissenschaftliche Bedeutung, wie vor allen bei den Herrn Betti und Felici, giebt sich darin zu erkennen, sondern auch, wie bei dem Herrn Jaeger in Messina und anderen, der Dank gegen den Freund Riemann's*), der den Vulcanen ihres Landes so viel Studien gewidmet und mit seinem geometrischen Netze den Etna umsponnen hatte.

*) [Dieser Freund Riemann's war Sartorius von Waltershausen, Professor der Geologie in Göttingen; geb. 1809, gest. 1876. Ihm hatte Riemann es hauptsächlich zu verdanken, dass die Regierung die Geldmittel zu den Reisen nach Italien zur Verfügung stellte. Empfehlungsbriefe von S. v. Waltershausen trugen wesentlich dazu bei, dass mehrere Familien in Italien Riemann die weitgehendste Gastfreundschaft gewährten.]

Der Aufenthalt in diesem Lande ist durch das Interesse, das er an den Geschichts- und Kunstmonumenten und den landschaftlichen Schönheiten nahm, noch ein wahrer Lichtpunkt für seine Gemüthsstimmung geworden, zu deren Hebung die intime Freundschaft des Herrn Betti und die in dem Anerbieten der durch Mossotti's Tod erledigten Professur*) ausgesprochene Hoffnung auf Besserung seiner Gesundheit auch wesentlich beigetragen hat.

Das Andenken an Riemann bleibt auf immer durch seine wissenschaftlichen Entdeckungen begründet. Seine Schüler erinnern sich mit besonderer dankbarer Liebe der Freigebigkeit in Mittheilungen wichtiger neuer und von ihm selbst gar nicht veröffentlichter Untersuchungen, der Unermüdlichkeit des Lehrers im Bestreben, die ganze Wahrheit des Vorgetragenen zu voller Ueberzeugung des Lernenden zu bringen.

---

*) [Mossotti, Prof. der Mathematik an der Universität zu Pisa, starb am 20. März 1863.]

XXXIV.

ZUR FEIER DER HUNDERTSTEN WIEDERKEHR VON GAUSS' GEBURTSTAGE.

Oeffentliche Sitzung [der Kön. Ges. d. Wissenschaften in Göttingen] am 30. April [1877].

[Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vom 16. Mai 1877, S. 229 bis 237.]

Die Königliche Gesellschaft hatte zur Gaussfeier die auswärtigen Mitglieder und die Correspondenten ihrer mathematischen Classe eingeladen.

Die öffentliche Festsitzung fand in dem Promotions-Saale der Aula statt und begann 11 Uhr Morgens. Sie wurde von dem derzeitigen Vorsitzenden der Gesellschaft, dem Herrn Prof. Wüstenfeld eröffnet. Derselbe bewillkommnete die zahlreich erschienenen auswärtigen Gäste, ertheilte sodann dem Herrn Prof. Dr. Borchardt das Wort, und dieser verlas die Begrüssungsschrift der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin:

»An die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

»Mit freudiger Theilnahme begrüssen wir die Königliche Gesellschaft »der Wissenschaften bei der Feier des Tages, an dem vor hundert Jahren »der ausserordentliche Mann geboren wurde, dessen unvergleichliches Genie »als unmittelbare Zeugin seines Schaffens zu bewundern fast fünf Decennien »lang unserer Schwester-Akademie vergönnt gewesen ist.

»Carl Friedrich Gauss ist von den Zeitgenossen Princeps Mathemati-

»corum genannt worden, und die Geschichte wird seinen Anspruch auf diesen »Namen bestätigen. In höherem Masse als irgend einen der grossen Geometer »der letzten beiden Jahrhunderte kennzeichnet ihn die seltene Vereinigung, »in welcher er zugleich die erschöpfende Tiefe speculativer Forschung und »die Fähigkeit, das theoretisch Erkannte bis in das feinste Detail der Anwen- »dung fruchtbar zu verwerthen, besass, eine Vereinigung, die es begreifen »lässt, dass der Verfasser der Disquisitiones arithmeticae und der Abhand- »lungen über die quadratischen und biquadratischen Reste auch die Theoria »motus corporum coelestium schreiben, als praktischer Astronom und Geodät »zu den seiner Zeit vorangehenden Führern gehören, die Theorie des Erd- »magnetismus begründen und an der Ausbildung der elektrischen Telegraphie »einen entscheidenden Antheil nehmen konnte. Ebenso charakteristisch für »ihn und nicht minder bewundernswerth als der glänzende Erfolg seiner »Thätigkeit ist die frühe Reife seines Geistes, die Fülle fruchtbarer Gedanken, »in deren Besitz wir ihn schon beim Beginn seiner Laufbahn sehen, und die »vollendete Form, in welcher er dem Grundsatze »Pauca sed matura« folgend, »die Ergebnisse seiner Forschungen der Welt darbot. Waren doch schon »seine Erstlingsarbeiten Meisterwerke von unvergänglichem Werthe, aus denen »man mit Erstaunen erkannte, dass der jugendliche Verfasser bereits auf der »Höhe seiner Wissenschaft stehe und seines Ziels sich klar bewusst sei. Vor »allem aber offenbart sich seine geistige Ueberlegenheit in dem bestimmenden »Einfluss, den er auf Richtung und Gang der mathematischen Forschung »seiner und unserer Zeit dadurch ausgeübt hat, dass er bei seinen Unter- »suchungen überall zu den Prinzipien durchzudringen, die Grundbegriffe der »exakten Wissenschaften zu reinigen und zu erweitern, vereinzelt und uner- »klärt dastehende Thatsachen mit allgemeinen Gesetzen in Zusammenhang zu »bringen, und mit der Freiheit der Bewegung, welche die neuere Analysis »dem mathematischen Forscher gestattet, die Strenge der antiken Methoden »zu vereinigen verstand.

»Möge die von der Societät veranstaltete Feier, zu welcher, wie wir »hoffen, zahlreiche Vertreter der verschiedenen mathematischen Disciplinen »in Göttingen sich einfinden werden, der Welt kundgeben, dass die heutige »Generation mit derselben ehrfurchtsvollen Bewunderung wie die dahin- »gegangene zu Gauss als ihrem Meister und leuchtendem Vorbild empor-

»blickt, und in seinem Geiste an dem Weiterbau der Wissenschaft mitzu-»arbeiten gesonnen ist.

Berlin den 26. April 1877.

Die Königliche Akademie der Wissenschaften.

Th. Mommsen. E. E. Kummer. E. du Bois Reymond.«

Danach erhielt Herr Francesco Brioschi, Professor und Senatore del Regno aus Mailand das Wort zur Mittheilung der Begrüssungsschreiben und der Vollmachten, durch welche er von den Körperschaften »Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere« in Mailand, »Reale Accademia dei Lincei« in Rom, »Regia Università di Pavia« zu deren Stellvertreter bei dem Gaussfeste ernannt ist.

Der Vorsitzende, Herr Professor Wüstenfeld macht ferner die Mittheilung, wie Se. Excellenz der Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten schriftlich sein Bedauern ausgedrückt habe, dass Amtsgeschäfte ihn verhinderen, seine Verehrung für den Geist und die Leistungen des berühmten Mannes, dessen langjähriger Besitz für die Gesellschaft der Wissenschaften ebenso wie für die Universität Göttingen einen Gegenstand berechtigten Stolzes bilde, durch persönliche Gegenwart bei dem Erinnerungsfeste zu bezeugen.

Nachdem der Vorsitzende noch das von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest an die hiesige Gesellschaft gerichtete Begrüssungsschreiben vorgelesen hatte, forderte er den unterzeichneten Berichterstatter zu einer Darstellung der wissenschaftlichen Thätigkeit des gefeierten Mannes auf*).

Es wurde in dieser Rede, welche vollständig in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften erscheint [siehe S. 176 dieses Bandes], hervorgehoben, wie Gauss' grosse Begabung in der Erkennung der Eigenschaften der Zahlen so ausserordentlich frühzeitig sich zu erkennen gab, dass, ausser anderen durch mündliche Mittheilungen, durch seine Briefe

*) [Bis hierher auch in den: »Annali di Matematica«, diretti dal Prof. Fr. Brioschi, Ser. II, T. IX, p. 221—222. Siehe auch in diesem Bande S. 176.]

und durch den handschriftlichen Nachlass bekannt gewordenen Leistungen, er im noch nicht vollendeten 19. Lebensjahre am 30. März 1796 als eine Anwendung seiner Theorie der Zahlen diejenige Entdeckung machte, welche in der Geschichte der Wissenschaften immer eine der glänzendsten Erscheinungen bilden wird und welche er mit den Worten veröffentlichte *):

»Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordent- »liche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Viereck, Funfzehneck und die, »welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben ent- »stehen, sich geometrisch construiren lassen.

»So weit war man schon zu Euklid's Zeit, und es scheint, man habe »sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie »sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, »ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

»Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass »ausser jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, »z. B. das Siebenzehneck einer geometrischen Construction fähig »ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht »ganz vollendeten Theorie von grösserm Umfange, und sie soll, sobald diese »ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.

C. F. Gauss, a. Braunschweig,
Stud. der Mathematik zu Göttingen.«

Er zeigte seinem Studienfreunde Wolfgang von Bolyai die Formel, welche die durch Kreis und gerade Linie ausführbare Zeichnung des regulären Siebenzehnecks bestimmt und bemerkte dabei, dass sie allein schon seinen Grabstein zieren könne, wie der des Archimedes dessen bekannteste Entdeckung gezeigt habe **).

Die Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen war Gauss' früheste wissenschaftliche Thätigkeit, sie blieb auch seine Lieblingsbeschäftigung, und über die Art, wie er in diesem Gebiete Entdeckungen machte, spricht er sich auch am lebhaftesten aus, so in einem bemerkenswerthen Briefe vom

---

*) [Siehe auch Seite 178 dieses Bandes.]

**) [Siehe die »Bemerkungen« am Schluss dieses Bandes.]

3. September 1805 an den Astronomen und Arzt Wilhelm Olbers in Bremen:

»Sie erinnern sich vielleicht noch von unseren Gesprächen in Bremen »her, namentlich an dem schönen Nachmittage, den wir auf der Vahr zu»brachten, dass ich schon seit längerer Zeit eine sehr beträchtliche Sammlung »von Untersuchungen nicht sowohl im Pult als in petto habe, die hinreichenden »Stoff zu einem zweiten Bande der Disq. Arith. geben, und die, wenigstens »meinem Urtheile nach, ebenso merkwürdig sind, wie die im ersten ent»haltenen.

»Sie erinnern sich aber auch vielleicht zu gleicher Zeit meiner Klagen, »über einen Satz, der theils schon an sich sehr interessant ist, theils einem »sehr beträchtlichen Theile jener Untersuchungen als Grundlage oder als »Schlussstein dient, den ich damals schon über 2 Jahr kannte, und der alle »meine Bemühungen, einen genügenden Beweis zu finden, vereitelt hatte.....*) »Dieser Mangel hat mir alles übrige, was ich fand, verleidet; und seit 4 Jahren »wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen oder den an»deren vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte — be»sonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, »alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder »niederlegen müssen.

»Endlich vor ein Paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem müh»samen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes mögte ich sagen. »Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht »im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, »womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, — und dem, wodurch es »gelang, nachzuweisen.

»Sonderbar genug erscheint die Lösung des Räthsels jetzt leichter als »manches andere, was mich wohl nicht so viele Tage aufgehalten hat als »diese Jahre, und gewiss wird niemand, wenn ich diese Materie einst vor»trage, von der langen Klemme, worin es mich gesetzt hat, eine Ahnung »bekommen«.

Von den vielen epochemachenden Entdeckungen, welche wir Gauss in

*) [Siehe auch Seite 187 dieses Bandes.]

den übrigen Theilen der Mathematik, der Geometrie, der Mechanik, der Astronomie und der Physik verdanken, mag hier nur noch diejenige hervorgehoben werden, welche von grösster praktischer Bedeutung ist. Ueber diese meldet er Olbers am 20. Novbr. 1833:

»Ich weiss nicht, ob ich Ihnen schon früher von einer grossartigen Vor»richtung, die wir hier gemacht haben, geschrieben habe. Es ist eine »galvanische Kette zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Kabinet »durch Drähte in der Luft über die Häuser weg oben zum Johannisthurm »u. so wieder herab gezogen. Die ganze Drahtlänge wird etwa 8000 Fuss sein.

»An beiden Enden ist sie mit einem Multiplicator verbunden, bei mir »von 170 Gewinden, bei Weber im phys(ikalischen) Kab(inet) etwa 50 Ge»winde, beide um 1 Pfündige Magnetnadeln geführt, die nach meinen Ein»richtungen aufgehängt sind..... Ich habe eine einfache Vorrichtung ausge»dacht, wodurch ich augenblicklich die Richtung des Stromes umkehren kann, »die ich einen Commutator nenne.

»Wenn ich so tactmässig an meinen Platten operire, so wird in sehr »kurzer Zeit (z. B. in 1 oder 1 $^1/_2$ Minuten) die Bewegung der Nadel im phys. »Kabinet so stark, dass sie an eine Glocke anschlägt, hörbar in einem an»dern Zimmer. Dies ist jedoch mehr Spielerei. Die Absicht ist, dass die »Bewegungen gesehen werden sollen, wo die äusserste Accuratesse erreicht »werden kann.

»Wir haben diese Vorrichtung bereits zu telegraphischen Versuchen ge»braucht, die sehr gut mit ganzen Wörtern oder kleinen Phrasen gelungen »sind.

»Diese Art zu telegraphiren hat das Angenehme, dass sie von Wetter »und Tageszeit ganz unabhängig ist; jeder, der das Zeichen gibt und der »dasselbe empfängt, bleibt in seinem Zimmer, wenn er will bei verschlossenen »Fensterläden. Ich bin überzeugt, dass unter Anwendung von hinlänglich »starken Drähten auf diese Weise auf Einen Schlag von Göttingen nach »Hannover oder von Hannover nach Bremen telegraphirt werden könnte«.

Von der räumlich geringen Ausdehnung der ersten Draht-Leitung hat der elektrische Telegraph sich schon jetzt zu einem grossen Umfange erweitert. Aus den von dem General-Telegraphen-Amt zur Verfügung gestellten literarischen Hülfsmitteln ergiebt sich, dass auf der ganzen Erde in einem einzigen Jahre (1874) eine Depeschen-Anzahl von über 101 Millionen, das ist etwa der 35. Theil der während derselben Zeit geschriebenen Briefzahl befördert worden sind, und dass die Gesammtlänge der Drähte schon damals beinahe das Vierfache der Entfernung des Mondes von der Erde betrug.

Der Schluss der Rede hob hervor, wie Gauss' Seele von dem Streben, die Wahrheit zu suchen, erfüllt war, wie seinen wesentlichen Charakterzug die Gerechtigkeit bildete!

Die Nachwelt wird auch gerne die Pflicht erfüllen, ihm, dem grossen Meister, gerecht zu sein.

Ernst Schering.

XXXV.

CARL FRIEDRICH GAUSS' GEBURTSTAG NACH HUNDERTJÄHRIGER WIEDERKEHR.

FESTREDE.

Vorgetragen in der öffentlichen Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 30. April 1877 [und veröffentlicht in den »Abhandlungen« derselben, Bd. 22, Mathematische Classe, S. 1 bis 40, Göttingen 1877. — Italienische Uebersetzung besorgt von Maria Schering, revidirt von Prof. Beltrami in: »Annali di Matematica«, diretti dal Prof. Fr. Brioschi, Ser. II, T. IX; dal marzo 1878 all' agosto 1879, p. 210—239. Milano.]

Verehrte Anwesende!

Wir sind hier zusammen gekommen, um durch unsere Gegenwart der Ehrerbietung für einen der grössten Denker der Menschheit Ausdruck zu geben*).

An dieser Stätte, welche der Erforschung der Wahrheit gewidmet ist, wirkte während des Zeitraumes von fast einem halben Jahrhundert der schöpferische Geist des Meisters der Zahlen,

Carl Friedrich Gauss.

Heute vor hundert Jahren hatte er das Licht der Welt erblickt.

Aufgewachsen in den beschränkten Verhältnissen seiner in Braunschweig lebenden Eltern**), erhielt er seine Erziehung von dem thätigen, äusserst gewissenhaften aber auch strengen und willensfesten Vater, von der fleissigen,

*) [Siehe die Zusätze zur Festrede von Seite 191 an; Zusatz 1.]

**) [Siehe Zusatz 2.]

sorgsamen, mit heiterem Sinne begabten, Mutter. — Die früh entwickelten geistigen Anlagen traten so auffällig hervor*), dass dem Knaben von seinem 14. Jahre an die Unterstützung des Landesfürsten, Herzogs Karl Wilhelm Ferdinand, zur wissenschaftlichen Ausbildung zu Theil wurde.

Gauss' Studentenzeit vom Herbst 1795 bis zum Sommer 1798 gehört unserer Universität Göttingen**).

Während dieser kurzen Spanne Zeit, in seinem 19., 20. und 21. Lebensjahre, machte dieser Heros der Mathematik seine genialsten Entdeckungen***), erblickte er die Keime zu einem grossen Theile seiner späteren so tiefsinnigen Schöpfungen auf wissenschaftlichen Gebieten, die zu den schwierigsten gehören, in welche die menschliche Denkkraft einzudringen vermag.

Wie alle wahrheitssuchenden Geister, fesselten auch ihn die schon gestellten aber noch nicht gelösten Aufgaben am lebhaftesten.

Pierre Fermat hatte ein Jahrhundert zuvor sehr merkwürdige Lehrsätze für die ganzen Zahlen aufgestellt, Lehrsätze, deren Richtigkeit für einzelne Zahlen leicht zu prüfen war, deren allgemeine Beweise sich aber lange Zeit den angestrengtesten Bemühungen der Forscher entzogen haben.

Der grosse Leonhard Euler betrachtete es als seine Lebensaufgabe, die Fermatschen Sätze zu beweisen; er war erst, nach verschiedenen vergeblichen Versuchen, durch mehrjähriges Studium, glücklich genug in Bezug auf den ersten Fermatschen Satz für die Reste, welche entstehen, wenn eine Zahl wiederholt mit sich selbst multiplicirt und durch eine andere Zahl dividirt wird.

Sogar 23 Jahre gebrauchte Euler†), um von seinem ersten Angriffe auf den anderen Fermatschen Satz, welcher die Zerlegbarkeit der Primzahlen in die Summe zweier Quadrat-Zahlen bestimmt, zu der schliesslichen Besiegung aller dem Beweise dieses Theorems sich entgegenstellenden Schwierigkeiten zu gelangen.

Bei diesen Untersuchungen hat Euler, durch Induction, eine beim ersten Anblick sehr räthselhafte Eigenschaft zweier solcher Zahlen gefunden, von welchen die eine sich als Rest ergeben kann, wenn man mit der anderen Zahl die Quadrat-Zahlen theilt.

---

*) [Siehe Zusatz 3.] **) [Siehe Zusatz 4.] ***) [Siehe Zusätze 5 und 6.] †) [Siehe Zusatz 7.]

Trotz aller Anstrengungen ist es Euler nicht gelungen, für diesen Satz einen Beweis zu finden, und er erreichte doch sein 76stes Lebensjahr.

Auch Legendre, der, wie es scheint, selbständig auf den Satz durch Induction gekommen ist, war nicht glücklicher.

Gauss fand, wiederum selbständig, diese geheimnissvolle Eigenschaft der Zahlen, nämlich im März 1795, aber ihm war es beschieden, auch die Begründung, und zwar schon in seinem 19. Lebensjahre am 29. April 1796 zu entdecken.

Er zeichnete für sich selbst das Datum dieser Entdeckung auf*), wie er ein Gleiches bei anderen seiner grossen Schöpfungen gethan hat. Eine Eigenthümlichkeit, die Gauss fast ausschliesslich angehört und die wir nur natürlich finden können**).

Er hatte ohne Zweifel die erste Zeit seines Aufenthalts als Studirender in Göttingen dazu benutzt, um in dem hier vorhandenen reichen Bücherschatze sich mit den über jenen Gegenstand schon ausgeführten Arbeiten bekannt zu machen***).

Euler's Anstrengungen, um Beweise für jenen Satz und für die vorher erwähnten einfacheren Eigenschaften der Zahlen zu finden, haben augenscheinlich die Mühen, welche diesem Geometer die grossen, namentlich auch während der oben erwähnten 23 Jahre geglückten, Schöpfungen in allen anderen Gebieten kosteten, um so Viel übertroffen, dass Gauss nicht umhin konnte, die volle Bedeutung seiner eigenen Entdeckung zu fühlen, und deren Tag als einen für ihn selbst wichtigen zu betrachten. —

Um zu einem Beweise dieses von ihm als fundamental erkannten Theorems zu gelangen, durchforschte er die Mysterien der Zahlen nach den verschiedensten Richtungen, und fand dabei seine so berühmt gewordenen Sätze der Kreistheilung.

Gauss kündigt eine specielle Anwendung derselben in der allgemeinen Literaturzeitung im April des Jahres 1796 mit folgenden Worten an†):

---

*) [Siehe Gauss' Werke, Band I, Seite 476.]

**) [Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814 ist inzwischen von F. Klein herausgegeben in der: Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901, S. 1—44.]

***) [Siehe Zusatz 8.]

†) [Siehe: Intelligenzblatt der Allgem. Literatur-Zeitung, Nr. 66; den 1. Iunius 1796, Seite 554, Jena und Leipzig.]

»Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordent-»liche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Viereck, Funfzehneck und die, »welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben ent-»stehen, sich geometrisch construiren lassen.

»So weit war man schon zu Euklid's Zeit, und es scheint, man habe »sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementar-Geometrie »sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Ver-»such, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

»Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, »dass ausser jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, »z. B. das Siebenzehneck einer geometrischen Construction fähig »ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium zu einer noch »nicht ganz vollendeten Theorie von grösserem Umfange, und sie soll, sobald »diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.

C. F. Gauss a. Braunschweig,
Stud. der Mathematik zu Göttingen«*).

Aus Cicero's Tusculanischen Gesprächen wissen wir, dass die von Archimedes entdeckte Bestimmung der Rauminhalte von Cylinder, Kugel und Kegel als Inschrift auf seinem Grabsteine angebracht war.

Dem grossen Geometer von Syracus, in seinem abstracten Forschersinne, in seinem glücklichen practischen Bestreben, in seiner hervorragenden arithmetischen Richtung, musste schon der jugendliche Gauss sich geistesverwandt fühlen**).

Als er nach jener Entdeckung am Abend des 30. März 1796 im vorletzten Monat seines 19. Lebensjahres bei seinem Studienfreunde, dem Ungarn Wolfgang von Bolyai, sich von der anstrengenden Arbeit seiner abstracten Forschungen ausruhte, zeigte er diesem die Formel, welche die mit Kreis und gerader Linie auszuführende Zeichnung des Siebenzehnecks bestimmt,

---

*) [Im »Intelligenzblatt« folgt an der oben genannten Stelle nach der Unterschrift von Gauss noch der Satz:

»Es verdient angemerkt zu werden, dass Hr. Gauss jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich »hier in Braunschweig mit eben so glücklichem Erfolg der Philosophie und der classischen »Litteratur als der höhern Mathematik gewidmet hat.

»Den 18. April 96. E. A. W. Zimmermann, Prof.«]

**) [Siehe Zusatz 9.]

und bemerkte, dass sie allein seinen Grabstein zieren könnte, wenn es nicht wehe thäte, so vieles auszulassen, — zu viel für einen Grabstein*).

Die Gaussische Theorie der Kreistheilungs-Functionen wurde eins der fruchttragendsten Felder für ihren Entdecker selbst.

Sie lieferte ihm schon einen anderen Beweis des zuvor erwähnten Fundamental-Theorems, sie wurde ihm zum Ariadne-Faden bei seinem weiteren Eindringen in das geheimnissvolle Labyrinth der Zahlen, sie wurde ihm auch das Tageslicht, das ihm ein Gebiet der gesammten Grössen-Lehre klar beleuchtete, welches man unendlich mal grösser als das bis dahin schon bekannte Gebiet nennen darf.

Die Kreistheilungs-Functionen verschafften den vielfach ungerecht zurückgesetzten sogenannten imaginären Grössen das volle Bürgerrecht in der Mathematik.

Diese, nun in der menschlichen Wissenschaft vollgültig geworden, statteten ihrem Schutz-Herrn sogleich den vielseitigsten Dank ab, sie führten ihn in seinem zweiten Studentenjahre zu den so wichtigen, neue Bahnen eröffnenden, Entdeckungen der Eigenschaften der elliptischen und der algebraischen Functionen.

Mit dem glücklichen Blick für neue Entdeckungen, verband Gauss den kritischen Verstand, das feine Unterscheidungs-Vermögen, durch welches er dasjenige, was der menschliche Geist ganz allein aus sich selbst als wahr und richtig zu erkennen vermag, genau zu trennen wusste von demjenigen, was der Mensch von seiner äusseren Umgebung mit Hülfe seiner sinnlichen Wahrnehmungen gelernt hat.

Die von Euklid so musterhaft schön dargestellte und folgerecht geordnete Wissenschaft der Geometrie war 2000 Jahre lang als richtig, als absolut wahr, gehalten worden.

Man hatte wohl bemerkt, dass unter den Grundgesetzen, welche darin als ohne Beweis selbstverständlich vorausgesetzt werden, sich Eins befindet, welches weniger einfach als die übrigen ist, und das Vorhandensein paralleler gerader Linien annimmt.

---

*) [Siehe die »Bemerkungen« am Schlusse dieses Bandes.]

Die absolute Richtigkeit scheint aber dennoch von Niemand vor Gauss in Zweifel gezogen zu sein.

Wie er schon damals hierüber dachte, ersehen wir am besten aus seinen Worten in einem Briefe an Wolfgang von Bolyai, an denjenigen einzigen Studien-Genossen, mit welchem Gauss in lebhafterem wissenschaftlichen Verkehr gestanden hat.

Bolyai war nach Beendigung seiner mathematischen Studien auf der Georgia Augusta am 5. Juni 1799 von Göttingen abgereist.

Gauss schreibt aus Helmstedt zu Ende des Jahres*) an jenen in Klausenburg:

»Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht »benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der »Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche »Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein, als jemand, wie ich, es »sein kann, so lange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desi»deriren ist.

»Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewol »mir meine anderen ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen) »allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem »Ziele, das man wünscht, ... als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geo»metrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was »bei den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen »Augen so gut wie nichts beweiset.

»Zum Beispiel, wenn man beweisen könnte, dass ein geradlinigtes Dreieck »möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre, als eine jede gegebene Fläche, so »bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen.

»Die meisten würden nun wol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich »nicht; es wäre ja wol möglich, dass, so entfernt man auch die drei Eck»punkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt »immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre.

»Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in Keinem finde ich etwas »Befriedigendes«.

*) [am 16. December 1799. Siehe: Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai, mit Unterstützung der Ungarischen Akad. d. Wiss. herausgegeben von Fr. Schmidt und P. Stäckel, Leipzig 1899.]

In Bezug auf denselben Gegenstand äusserte er zu Bessel im Jahre 1829*):

»Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, »habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht; ich »meine die ersten Gründe der Geometrie; ich weiss nicht, ob ich Ihnen je »über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich »manches noch weiter consolidirt, und meine Ueberzeugung, dass wir die »Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist wo möglich »noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu »kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffent- »lichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei »meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Boeater scheue, »wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.

»Seltsam ist es aber, dass ausser der bekannten Lücke in Euklid's »Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat, und nie aus- »füllen wird, es noch einen andern Mangel in derselben gibt, den meines »Wissens niemand bisher gerügt hat, und dem abzuhelfen keineswegs leicht »(obwohl möglich) ist. Diess ist die Definition des Planum, als einer Fläche, »in der die irgend zwei Punkte verbindende gerade Linie ganz liegt.

»Diese Definition enthält mehr, als zur Bestimmung der Fläche nöthig »ist, und involvirt tacite ein Theorem, welches erst bewiesen werden muss«.

Später**) fügt Gauss noch hinzu:

»Wahre Freude hat mir die Leichtigkeit gemacht, mit der Sie in meine »Ansichten über die Geometrie eingegangen sind, zumal da so wenige offenen »Sinn dafür haben. Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre »zu unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Grössen- »lehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige »Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten »Wahrheit) ab, die der letztern eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, »dass, wenn die Zahl bloss unseres Geistes Product ist, der Raum auch »ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht »vollständig vorschreiben können«.....

*) [am 27. Januar 1829. Siehe: Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel; herausgegeben auf Veranlassung d. Königl. Preuss. Akad. der Wiss., Leipzig 1880, S. 490].

**) [am 9. April 1830. Siehe Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel u. s. w., Seite 497.]

Da Gauss jenen wichtigen von so vielen Geometern für unbezweifelbar gehaltenen Satz, als nur auf der Erfahrung beruhend erkannt hatte, musste das von ihm gefundene Gesetz, wonach man aus den Beobachtungen die zuverlässigsten Bestimmungen ableitet, ihm in einem um so helleren Lichte erscheinen.

In der That, durch die schon in seinem 18ten Lebensjahre entdeckte Methode sind die beobachtende Astronomie und die messende Physik erst zu systematischen Wissenschaften erhoben, ist die bis dahin gebrauchte Geometrie als so lange noch anwendbar erwiesen worden, bis die Fernrohre und die Microscope eine erhebliche Vervollkommnung erfahren oder unser Planeten-System mit der Sonne einen viel grösseren Weg im Weltenraume durchlaufen hat.

So war Gauss schon damals glücklich im Aufsuchen der sicheren Wege zur Erforschung der Natur und auf jene Zeit schon dürfen wir die Worte anwenden, welche er später unter sein Bild schrieb:

Du Natur sei meine Göttin,
Deinen Gesetzen mein Leben geweiht!*)

Sein Bestreben, die abstracteste Wissenschaft auch auf die von der äusseren Natur gestellten Probleme anzuwenden, bethätigte sich ferner in einer seit Keppler's Zeiten als besonders schwierig anerkannten Aufgabe.

Gauss selbst schreibt darüber im Jahre 1802**) an den ihn mit väterlicher Fürsorge liebenden Freund, den durch die Auffindung der einfachsten Methode zur Berechnung der Kometen-Bahnen und durch die Entdeckung von Kometen und Planeten so berühmt gewordenen Bremer Arzt Wilhelm Olbers:

»(Meine Methode der Berechnung der Bahn eines Himmels-Körpers).... »ist gewissermaassen das Pendant zu der Ihrigen....

»Dass es ausser der Ihrigen Formel noch eine ähnliche geben müsse, »hatte ich vor 5 Jahren geahnt, da ich zum ersten Male Ihre Bestimmung »der Kometen-Bahn las; ich äusserte damals etwas darüber gegen den »sel. Lichtenberg, der mich sehr aufmunterte, mich in die Untersuchung

*) [nach Shakespeare: König Lear, I. Aufzug, 2. Scene.]

**) [am 6. August 1802. Siehe: W. Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von Prof. Dr. C. Schilling in Bremen, Band II, Berlin 1900, Seite 65.]

»einzulassen, allein meine damaligen sehr eifrigen Beschäftigungen mit der »höheren Arithmetik, sowie mit Untersuchungen aus einem anderen Fache »der Analyse, worüber ich Ihnen in Zukunft einmal schreibe, brachten »mir den Gegenstand bald wieder aus dem Sinne.

»Als ich im vorigen Jahre ganz unvermuthet auf die Formel gerieth, »sah ich sogleich, von welchem Werthe sie zur Abkürzung der ersten An»näherungsversuche bei einer von Hypothesen unabhängig sein sollenden »Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers sein müsse. Glücklicherweise »erhielt ich um die Zeit gerade die Piazzischen Beobachtungen . . . (des neu »entdeckten Planeten), . . . an denen ich mich sogleich eine Probe der Me»thode zu machen entschloss« . . . .

Gauss' Lieblings-Beschäftigung aber war, und blieb, die Theorie der Zahlen; den ersten Theil seiner Arbeiten konnte er der Oeffentlichkeit im Juli 1801 übergeben.

Er erhob dadurch ein Gebiet von Untersuchungen, welches schon durch Euklid und Diophant theilweise, dann besonders durch Fermat, Euler, Lagrange und Legendre angebaut war, plötzlich zu einer vollständigen systematisch geordneten Wissenschaft.

Der Druck dieses Buches war durch äussere Hindernisse so verzögert worden, dass er sich über mehrere Jahre erstreckte.

Schon im November 1798 klagte Gauss seinem Freunde Bolyai:

»Mit meinem Werke geht es noch sehr langsam, . . . den 8^{ten} (Bogen) »erwarte ich heute zur Correctur. Da es indess einmal doch sich nicht »ändern lässt, so habe ich die Saumseligkeit benutzt und einen Abschnitt »(den 5., aus 8 besteht das Ganze) noch einmal ganz umgearbeitet. Mit »diesem Abschnitt, welcher der stärkste im ganzen Werke ist habe ich schon »viele fata gehabt; die gegenwärtige Bearbeitung ist schon die vierte, bei »jeder folgenden ist es mir geglückt die Sache auf eine solche Art auszu»führen als bei der vorhergehenden meine kühnsten Hoffnungen überstieg »und in ein paar Tagen werde ich das zum vierten male vollendet haben, »was ich im ganzen vorigen Sommer zum dritten male ausarbeitete« . . . .

Wir sehen hier, dass Gauss die Mühe einer sogar viermaligen Umarbeitung nicht scheuete, um Inhalt und Form einer Veröffentlichung auf die möglich grösste Vollendung zu bringen.

Er handelte schon damals nach dem Grundsatze:

Wenig aber reif!

ein Wahlspruch, den er später gern auf sich anwandte, dessen zweiter Theil, die Reife, für Gauss' Arbeiten gewiss gilt; dessen erster Theil, das Wenig, mehr bescheiden als richtig in Gauss' Munde klingen muss.

Was er aber als reif betrachtete, dafür sind seine Worte an Bessel sehr bedeutsam*):

»Es war mir sehr erwünscht, Ihre Ansicht über die Unvollständigkeit »von Laplace's Theorie der Capillaraction mit der meinigen in Ueberein- »stimmung zu wissen.

»Ich habe durch diess Bewusstsein mehr Muth zur Ausarbeitung meiner »eignen Behandlung gewonnen. Diese hat mir sehr viel Zeit gekostet; »ich werde aber meine Arbeit für desto gelungener halten, je weniger man »bei manchen Theilen gewahr wird, wie viel Mühe es mir erst gekostet »hat, sie in ihre jetzige Gestalt zu bringen«.

Der geniale Astronom Bessel wusste diese Vollendung in der Darstellung auch wohl anzuerkennen; in Bezug auf die Untersuchung über die Fernrohre**) bemerkt er an Gauss***):

»Ihre meisterhafte Behandlung darf ich nicht hervorheben; sie ist in der »Ordnung, denn niemand hat bis jetzt entscheiden können, ob der wesent- »liche Inhalt, oder die Form in welcher er erscheint, in Ihren Arbeiten am »meisten hervortreten«.

Aber Bessel betrachtete diese Art zu arbeiten auch von einem anderen Gesichtspunkte.

Er schreibt an Gauss im Jahre 1837†):

»So wenig ich berechtigt bin, zu hoffen, dass mein Wunsch einiges Ge- »wicht habe, so verschweige ich dennoch nicht, dass er, in Beziehung auf »Ihre jetzigen Beschäftigungen, ganz zu der möglichst baldigen Bekannt- »machung derselben gerichtet ist.

»Sie haben nie die Verpflichtung anerkannt, durch zeitige Mittheilung

*) [im Briefe vom 9. April 1830. Siehe Briefwechsel u. s. w., Seite 496.]

**) [»Dioptrische Untersuchungen«. Gauss' Werke, Bd. V, S. 243—276.]

***) [im Briefe vom 20. Januar 1841.]

†) [am 28. Mai 1837.]

»eines dem Ganzen angemessenen Theils Ihrer Forschungen, die gegenwärtige »Kenntniss der Gegenstände derselben zu befördern; Sie leben für die Nachwelt. ».... Wo würden die mathematischen Wissenschaften, nicht allein in Ihrer »Wohnung, sondern in ganz Europa jetzt sein, wenn Sie alles ausgesprochen »hätten, was Sie aussprechen konnten!

»Es ist nicht nöthig, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen; auch fürchte »ich, nur zu wiederholen, was Ihnen hundert Mal gesagt ist«.

Und Bessel kommt nach zwei Jahren auf denselben Gegenstand zurück*): ».... Ich habe auch oft genug Gelegenheit gehabt, das Maximum von »Sorgfalt zu bewundern, welches Sie auf Darstellungsart und Form wenden, »und auch wohl eingesehen, dass solche Reife nicht mit schneller Aufeinander»folge der Bekanntmachungen vereinbar ist«.

Wenn so auch die Reife von Gauss' Arbeiten anerkannt wurde, so scheint doch der Umfang der letzteren nicht hinreichend geschätzt zu sein.

Jetzt da wir die Werke gesammelt vor uns sehen, ist es leichter, ein richtiges Urtheil zu bilden.

Die von Gauss selbst zur Veröffentlichung ganz fertig hergestellten Schriften sind durch die grosse Sorgfalt bei der Ausarbeitung auf so engen Raum zusammengedrängt, wie der Inhalt solches nur irgend erlaubt.

Für jeden Gedanken ist der angemessenste und kürzeste Ausdruck gesucht.

Was aber die von Gauss zur Veröffentlichung nicht vorbereiteten und nur in handschriftlichen Aufzeichnungen erhaltenen Arbeiten betrifft, so befinden sich dieselben in einer Weise kurz zusammengedrängt, dass man sich solche nur erklären kann, wenn man Gauss' Worte an Bessel (vom December 1816) beachtet:

»Ich werde jetzt nur so viel davon (von den Untersuchungen über die »Theorie der biquadratischen Reste) aufschreiben, dass die neuen noch in der »Luft schwebenden Ideen wenigstens meinem Gedächtnisse erhalten werden«.

Sehr bemerkenswerth spricht sich Gauss auch über die Stimmung aus, die ihn beherrscht, wenn ihm eine Entdeckung im Gebiete der Zahlentheorie gelingt; so zum Beispiel gegen seinen Freund Olbers im September 1805.

*) [im Briefe vom 28. Juni 1839.)

»Ich bin durch verschiedene Umstände — theils durch einige Briefe »von Le Blanc in Paris, der meine Disq. Arith. mit wahrer Leidenschaft »studirt, sich ganz mit ihnen vertraut gemacht, und mir manche recht artige »Kommunikationen darüber gemacht hat — .... theils auch durch eine Art »von Ueberdruss oder wenigstens Ermüdung an dem todten mechanischen »Kalkül (Berechnung der Bahnen der neuen Planeten) verleitet worden, in »diesem einmal eine Pause zu machen und meine geliebten arithmetischen »Untersuchungen wieder vorzunehmen.

»Sie erinnern sich vielleicht noch von unsern Gesprächen in Bremen »her, namentlich an dem schönen Nachmittage, den wir auf der Vahr zu»brachten, dass ich schon seit längerer Zeit eine sehr beträchtliche Sammlung »von Untersuchungen nicht sowol im Pult, als in petto habe, die hinreichenden »Stoff zu einem zweiten Bande der Disq. Arith. geben, und die, wenig»stens meinem Urtheile nach, ebenso merkwürdig sind, als die im ersten »enthaltenen.

»Sie erinnern sich aber auch vielleicht zu gleicher Zeit meiner Klagen »über einen Satz, der theils schon an sich sehr interessant ist, theils einem »sehr beträchtlichen Theile jener Untersuchungen als Grundlage oder als »Schlussstein dient, den ich damals schon über 2 Jahr kannte, und der alle »meine Bemühungen, einen genügenden Beweis zu finden, vereitelt hatte. »Dieser Satz ist schon in meinen Disq. pg. 636*) angedeutet, ...(und betrifft) »die Bestimmung des Wurzelzeichens, ... (sie) hat mich immer gequält.

»Dieser Mangel hat mir alles Uebrige, was ich fand, verleidet; und seit »4 Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen »oder den anderen vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht »hätte — besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles »Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die »Feder wieder niederlegen müssen.

»Endlich vor ein Paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem müh»samen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen.

»Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst: ich selbst wäre »nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste,

*) [Gauss' Werke; Band I, Seite 442—443.]

»dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, — und dem, wodurch »es gelang, nachzuweisen.

»Sonderbar genug erscheint die Lösung des Räthsels jetzt leichter als »manches andere, was mich wol nicht so viele Tage aufgehalten hat als »dieses Jahre, und gewiss wird niemand, wenn ich diese Materie einst vor- »trage, von der langen Klemme, worin es mich gesetzt hat, eine Ahnung »bekommen.

»Jetzt kann ich mich nun nicht enthalten, mich mit Niederschreibung »und Ausarbeitung einiger dieser Materien mit zu beschäftigen. Indess sollen »meine astronomischen Arbeiten darüber nicht ganz vernachlässigt werden«.

Unter dem Namen M. Le Blanc verbarg sich, wie Gauss später erfuhr, die bekannte Mathematikerin Sophie Germain*).

Auch über die eigenthümliche Art, in der Theorie der Zahlen Forschungen anzustellen, äussert sich Gauss gegen Bessel im Jahre 1816**):

»Seit mehreren Monaten sind es gewisse Untersuchungen aus der höheren »Arithmetik, auf die ich wiederum zurückgekommen bin, und die mich schon »seit beinahe 12 Jahren geplagt haben. Sie gehören zu der Gattung der- »jenigen, wo man nicht im Voraus sagen kann: diess will ich thun, sondern »wo, vielleicht nach 999 misslungenen Versuchen, eine glückliche 1000ste »Combination zum Ziele führt. Jetzt habe ich zwar das Ziel erreicht, doch »immer noch auf einem nicht ganz kurzen Wege.

»Der Gegenstand ist die Theorie der biquadratischen Reste, deren ich vielleicht schon mehrere Male gegen Sie erwähnt habe«.

Aus der reichen Fülle seiner übrigen epoche-machenden Entdeckungen, in der theoretischen und der practischen Astronomie***), in der messenden und rechnenden Geodäsie†), in der analytischen Geometrie und in der mathematischen Physik††), will ich hier nur noch die eine Entdeckung hervorheben, welche von der grössten practischen Bedeutung geworden ist.

Ueber diese meldet er Olbers am 20. November 1833:

»Ich weiss nicht, ob ich Ihnen schon früher von einer grossartigen Vor- »richtung, die wir hier gemacht haben, geschrieben habe. Es ist eine gal-

*) [Siehe Zusatz 10.]

**) [im Briefe vom 23. December 1816.]

***) [Siehe Zusatz 11.] †) [Siehe Zusatz 12.] ††) [Siehe Zusatz 13.]

»vanische Kette zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Kabinet durch »Drähte in der Luft über die Häuser weg oben zum Johannisthurm u. so »wieder herab gezogen. Die ganze Drahtlänge wird etwa 8000 Fuss sein.

»An beiden Enden ist sie mit einem Multiplicator verbunden, bei mir »von 170 Gewinden, bei Weber im phys(ikalischen) Kab(inet) etwa 50 Ge-»winde, beide um 1 Pfündige Magnetnadeln geführt, die nach meinen Ein-»richtungen aufgehängt sind .... Ich habe eine einfache Vorrichtung aus-»gedacht, wodurch ich augenblicklich die Richtung des Stromes umkehren »kann, die ich einen Commutator nenne.

»Wenn ich so tactmässig an meinen Platten operire, so wird in sehr kurzer »Zeit (z. B. in 1 oder 1 $^1/_2$ Min.) die Bewegung der Nadel im phys. Kabinet so »stark, dass sie an eine Glocke anschlägt, hörbar in einem andern Zimmer. »Dies ist jedoch mehr Spielerei. Die Absicht ist, dass die Bewegungen ge-»sehen werden sollen, wo die äusserste Accuratesse erreicht werden kann.

»Wir haben diese Vorrichtung bereits zu telegraphischen Versuchen ge-»braucht, die sehr gut mit ganzen Wörtern oder kleinen Phrasen gelungen sind.

»Diese Art zu telegraphiren hat das Angenehme, dass sie von Wetter »und Tageszeit ganz unabhängig ist; jeder, der das Zeichen gibt und der »dasselbe empfängt, bleibt in seinem Zimmer, wenn er will bei verschlossenen »Fensterläden. Ich bin überzeugt, dass unter Anwendung von hinlänglich »starken Drähten auf diese Weise auf Einen Schlag von Göttingen nach »Hannover oder von Hannover nach Bremen telegraphirt werden könnte«.

Welche grosse Bedeutung der Telegraph für die menschliche Gesellschaft schon gewonnen hat, wie viel er zur Förderung der allgemeinen Wohlfahrt beiträgt, welchen wissenschaftlichen Unternehmungen er Dienste leistet, das haben wir lebhaft vor Augen.

Es dürfte daher von Interesse sein, den äusseren Umfang dieser grossartigen Einrichtung kennen zu lernen. Aus dem reichen Material, welches mir das General-Telegraphen-Amt zur Verfügung gestellt hat, berechne ich: dass in einem einzigen Jahre (1874) für nahe 90 Millionen Mark Gebühren eine Depeschen-Anzahl von über 101 Millionen, das ist etwa der 35$^{\text{ste}}$ Theil der während derselben Zeit geschriebenen Brief-Zahl befördert worden sind, während die Gesammtlänge der Drähte schon damals nahe 1460 Millionen Meter, das ist beinahe das Vierfache der Entfernung des Mondes von der Erde, betrug.

Aus dem reichen Kranze, welcher dies vor vielen Anderen hoch beglückte Denkerhaupt schmückt, haben wir heute nur wenige Blumen betrachtet, die übrigen reihen sich als ebenso schön und werthvoll in grosser Zahl ihnen an.

So hell die Entdeckungen des Denkers glänzen, so rein und klar ist ihre Quelle: das unbeschränkte Streben, die Wahrheit zu suchen! —

Er selbst spricht dies seinem Studienfreunde mit den Worten aus*):

»Macht Dir das Nachforschen der Wahrheit noch eben so viel Freude »wie sonst?

»Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Be»sitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hin-Kommen, »was den grössten Genuss gewährt.

»Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so »wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehen«.

So tief eindringend Gauss' geistige Schöpfungen dastehen, so einfach und natürlich war der leitende Gedanke:

jede Willkür zu vermeiden, um volle Gerechtigkeit zu üben!

Gerecht zu sein, forderte Gauss auch, den einzelnen Beobachtungen gegenüber.

Gerecht zu werden den einzelnen freien Bewegungen, soweit es die unabänderlich vorgeschriebenen Beschränkungen gestatten, stellte er als das Grundgesetz der Mechanik auf.

Gerechtigkeit erwies er seinen Nebenmenschen; mehr als Gerechtigkeit, wirklich thatkräftiges Wohlwollen, erzeigte er den jungen wissenschaftlichen Kräften**), denen er sich bemühete, angemessene Wirkungskreise zu verschaffen.

Wie sehr wir,

verehrte Anwesende,

von dem Wunsche beseelt sind, auch ihm, dem grossen Meister, gerecht zu werden, haben wir dadurch bewiesen, dass wir alle hieher kamen***)!

---

*) [im Briefe von Gauss an Bolyai vom 2. September 1808.]

) [Siehe Zusatz 14.] *) [Siehe Zusätze 15 und 16.]

ZUSÄTZE ZUM ABDRUCK DER FESTREDE.

[1]. Seite 3, Zeile 2. [In diesem Bande Seite 176, Zeile 13.]

Ueber die zur Feier der hundertsten Wiederkehr von Gauss' Geburtstage abgehaltene öffentliche Sitzung habe ich im Auftrage der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen einen Bericht in deren Nachrichten vom 16. Mai 1877 Nr. 11, Seite 229—237 erstattet*).

[2]. Seite 3, Zeile 10. [In diesem Bande Seite 176, Zeile 20.]

Das Thatsächliche, was sich in Bezug auf Gauss' Eltern und Voreltern noch feststellen lässt, ist in einem Aufsatze der diesjährigen April- und Mai-Hefte der Braunschweigischen Anzeigen, überschrieben »Carl Friedrich Gauss und Braunschweig« und »Hn« unterzeichnet, sehr sorgfältig gesammelt**).

[3]. Seite 3, Zeile 14. [In diesem Bande Seite 177, Zeile 2.]

Ueber die Zeichen der frühen Reife von Gauss haben wir nur solche Nachrichten, die von ihm selbst mitgetheilt worden sind. Sartorius von Waltershausen hat hiernach in seiner Schrift »Gauss zum Gedächtniss***)« einige Züge wiedererzählt.

Ein von Gauss an Olbers mit der Ueberschrift »Braunschweig 1802, April 20, 6 Uhr Nachm.« gerichteter Brief enthält auch ein Beispiel.

»Meinen innigsten Dank, theuerster Freund! für Ihre beiden verehrtesten

---

*) [In diesem Bande S. 169 bis 175.]

**) [Herr Dr. H. Mack am Stadt-Archiv in Braunschweig hat den Herausgebern auf Anfrage Folgendes mitgeteilt: Der in der Tageszeitung: »Braunschweigische Anzeigen« vom 24.—29. April (Nr. 94—99) und vom 2.—6. Mai 1877 (Nr. 101—105) veröffentlichte Aufsatz über Gauss ist von dem (am 22. März 1904 verstorbenen) Stadtarchivar Prof. Dr. Ludwig Hänselmann verfasst und stimmt im wesentlichen überein mit dessen Schrift: Karl Friedrich Gauss. Zwölf Kapitel aus seinem Leben. Leipzig 1878. 8°. 106 S.]

***) [Leipzig 1856.]

»Briefe vom 13. und 18. d. und Ihre Beobachtungen Ihrer mir mit jedem »Tage merkwürdiger werdenden Pallas. Fahren Sie doch ja fort, mir diese »Beobb. ferner mitzutheilen.

»Ich hatte bald nach Empfang Ihrer ersten Beobb. einen Versuch ge»macht, einen Kreis durch die Oerter vom 29. März und 1. April zu legen, »und dasselbe Schicksal gehabt wie Sie, die Bewegung immer zu schnell zu »finden. Ebenso ging es mir, als ich am 14. d. die von Zach'schen Beobb. »vom 4, 5, 7. Apr. erhielt und mit Ihrer vom 29. März verbinden wollte. »Ich versuchte nach meiner Methode, den Kegelschnitt durch die Beobb. vom »29. März, 4. u. 7. April unabhängig von Hypothesen zu bestimmen — und »fand sogleich, dass dies bei diesen so nahen Beobb. ganz unmöglich sei. Ich »hielt es also für's Beste, die Sache vorerst noch ruhen zu lassen, und erst »fernere Beobb. abzuwarten. Vielleicht hätte ich dies von neuem nach Em»pfang Ihres vorletzten Briefes versucht (den 17. April), wenn mich nicht »einige zufällige Abhaltungen verhindert hätten. Als ich aber gestern Abend »Ihre letzte Beobb. erhielt, konnte ich nicht länger widerstehen.

»Ich wählte ihre Beob. vom 29. März, die Zach'sche vom 7. April und »das Mittel aus Ihren beiden letzten vom 19. April (begreiflich ist die Ungleich»förmigkeit der Bewegung in ein Paar Stunden gar Nichts gegen die mög»lichen Fehler der Beobb.), und fand sogleich, beim ersten Versuch, folgende »Elemente, die ich aber bloss für Sie schicke und als ein Zeichen meiner »warmen Verehrung und des ausserordentlichen Interesses, das ich an Ihrer »ewig merkwürdigen Entdeckung nehme, anzusehen bitte. Ich hoffe zwar, »in der Rechnung nichts übereilt zu haben; aber der Einfluss der geringsten »Aenderung der Beobb. ist noch so gross, dass die wahren Elemente den fol»genden wohl noch ziemlich unähnlich sein könnten. Indessen bringt uns jetzt »fast jeder Tag der Wahrheit näher, und ich hoffe, Ihnen bald verbesserte »Resultate zur beliebigen Disposition schicken zu können. . . . . Sollten die »vorhergehenden Elemente, die doch gewiss möglich sind, den wahren ähnlich »sein, so würde man wohl kein Bedenken tragen, die Pallas noch einen Pla»neten zu nennen. Zwar ist die grösste Distanz von der Sonne doppelt so »gross als die kleinste, aber beim Mercur ist es ja auch wie 3 : 2, und die »Bahn der Pallas wäre von einem Kreise noch wenig verschieden, nur läge »die Sonne nicht in der Mitte. Aber das bekannte von Bode vorzüglich in

»Schwung gebrachte Gesetz, das die Ceres erst so schön zu bestätigen schien, »wäre auf einmal zertrümmert? — Darüber würde ich mich gar nicht wundern. »Ich habe, im Vertrauen gesagt, nie viel darauf gegeben, und muss Ihnen »doch hier eine Anmerkung mittheilen, die ich schon seit 12 Jahren in petto »habe und wovon ich mich wundere, dass man sie nicht längst gemacht hat. »Sie ist kurz diese: Die Reihe

$$4,\ 4+3,\ 4+6,\ 4+12,\ 4+24,\ 4+48,\ 4+96,\ 4+192$$

»ist keine continuirliche Reihe. Man braucht bloss darauf aufmerksam »gemacht zu werden, um zu sehen, dass vor $4+3$ nicht 4 sondern $4+1\frac{1}{2}$ vor»hergehen sollte, dass also Mercur nicht in die Reihe passt, oder dass zwischen »Mercur und Venus noch unendlich viele Planeten sein sollten. Die wird »man wohl nicht erwarten. Ich mögte wohl Ihr Urtheil darüber hören«.

Als Gauss jene Anmerkung fand, war er, wie aus seiner Zeitangabe hervorgeht, erst 13 Jahre alt.

In den hier gebrauchten Worten »das Mittel aus Ihren beiden letzten vom 19. April« bezieht sich die Zeitangabe auf den Empfang des Olbers'schen Briefes*). Die Beobachtungen sind 17. Apr. 10 Uhr und 17. Apr. 13 Uhr angestellt und durch Olbers in einem Briefe vom 18. Apr. 1802 mitgetheilt**). Am 19. Apr. hat Olbers nur eine Beobachtung um 11 Uhr ausgeführt und in einem Briefe vom 23. April 1802 mitgetheilt, darin spricht er auch seinen Dank für Gauss' Brief vom 20. Apr. aus. Die ersten Elemente der Pallas veröffentlichte Gauss, nachdem er noch Beobachtungen bis zum 1. Mai 1802 benutzen konnte***).

[4]. Seite 3, Zeile 18. [In diesem Bande Seite 177, Zeile 6.]

Der zuvor erwähnte Aufsatz in den Braunschweigischen Anzeigen enthält das Einzelne über die Vorstudien auf dem Carolinum in Braunschweig und über die von der herzoglichen Regierung gewährte Unterstützung für

---

*) [Das Datum »19 April«, das im Original steht, ist in den auf S. 183 citirten Werken von W. Olbers, Bd. II, S. 23 durch »17 April« ersetzt, wohl in der Annahme, dass die »19« ein Schreibfehler war.]

**) [W. Olbers' Werke, Bd. II, S. 22.]

***) [Siehe Gauss' Werke, Bd. VI, Seite 213.]

den Aufenthalt in Göttingen. Ausser diesen Nachrichten beziehen sich auf jene Zeit noch die folgenden Stellen in Gauss' Briefen.

Gauss an »Herrn v. Bolyai ... Göttingen«.

»Braunschweig, den 29^{ten} September 1797.

»Verzeihe lieber Bolyai dass Du erst jetzt einen Brief von mir erhältst; »die Tage die ich bisher hier zugebracht habe sind mir in einer vegetirenden »Zerstreuung entflohen. Was für ein tristes Wetter der ungnädige Himmel »meiner Reise geschenkt hat wirst Du wol selbst als Augenzeuge wissen, und »nach meiner Ankunft schien er ein Paar Tage bloss deswegen sich besänf»tigen zu wollen, damit ich Zeit hätte zu bereuen, dass ich meine Reise nicht »noch einen Tag verschoben habe. Und diese Tage haben mir Ceremonien»visiten und Mediciniren gestolen. Denique sind die Aequinoctialstürme und »die Regenzeit eingetreten, vermuthlich damit die nach Haus gewanderten »Musensöhne desto ungestörter studiren können. Unter welchen Umständen »also dieses Sendschreiben Dich gewiss noch in Göttingen treffen wird. Aber »lieber Wolfgang, das wird sich schon geben; zuverlässig haben wir nächsten »Monat das lieblichste Wetter und dann musst Du gleich nach Braunschweig »kommen. Du must à tout prix unsren Braunschweigischen Menschenschlag »und unsre qualiacunque Produkte der Kunst und Natur kennen lernen. »Unser Herzog ist jetzt nicht hier; ich weiss auch nicht ob er früh genug »zurückkommt um von dir gesehen zu werden. Er ist gewiss einer der ersten »Menschen seines Landes. Wenn du kannst so schreib mir die Zeit wann »Du hier einzutreffen denkst. Zu Fuss kannst Du die 11 Meilen bequem »in 2 Tagen machen. . . . Du addressirst an mich Charles Frederic G. »Candid. en Philos. abzugeben bei Gebhard Dietrich Gauss am Wenden»graben, Braunschweig. Schliesslich habe noch zu melden dass wir viel»leicht mit einander zurückreisen können; denn soviel von mir abhängt wird »meines Bleibens hier so gar viel nicht sein, und ich sehne mich, der keuschen »Jungfrau Geometria und so Gott will der geistreichen Demoiselle, Musica »zu opfern.

»Adieu lieber Bolyai, ich sage Dir nicht wie sehr ich mich schon im »voraus darauf freue Dich hier zu haben. Ewig Dein Gauss«.

In einem Briefe aus Braunschweig vom 21^{ten} April 1798, schreibt Gauss an Bolyai in Göttingen, dass trotz der Gefahren und Widerwärtigkeiten der letzten Fussreise, er doch wieder eine solche unternehmen wird:

»Ich wollte dir nemlich melden, dass ich volente deo nächsten Montag als den 23ten April von hier abzureisen und Dienstag den 24ten nach Göttingen zu kommen denke«.

[5]. Seite 3, Zeile 21. [In diesem Bande Seite 177, Zeile 8.]

Auch Herr Kronecker spricht sich in ähnlichem Sinne über die Genialität einer jener Zeit angehörigen Entdeckung aus.

Er gibt in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1876 eine neue Definition des von Gauss eingeführten Begriffs des Rest-Characters, welchen Jacobi durch den Werth des von ihm verallgemeinerten Legendreschen Zeichens bestimmt, und schliesst den Aufsatz (Seite 341) mit den Worten: »Es tritt dabei an die Stelle dieses (Gaussschen) Lemma's (Art. 106 der Disqu. Arithm.) die wichtigste von den Betrachtungen, auf denen der erste Gausssche Beweis beruht; und dass es durch diese gerade ermöglicht wird, die in jenem Lemma vorkommenden Congruenzen höheren Grades zu vermeiden, giebt neuen Aufschluss über die tiefe Bedeutung jener merkwürdigen und scharfsinnigen Deduction, welche überhaupt zum ersten Male zu einer strengen Begründung des Reciprocitätsgesetzes geführt hat, und welche ganz direct mit Ueberwindung aller Schwierigkeiten auf das Ziel losgehend fast wie eine Art Kraftprobe Gaussschen Geistes erscheint«.

[6]. Seite 3, Zeile 22. [In diesem Bande Seite 177, Zeile 8.]

Die Entdeckungen in dieser Zeit gehören vorzugsweise dem Gebiete der Zahlentheorie, der Theorie der algebraischen und der elliptischen Functionen an: die einzelnen habe ich in meinen »Bemerkungen« zu Gauss Werken, also namentlich im ersten, zweiten und dritten Bande angegeben.

[7]. Seite 4, Zeile 17. [In diesem Bande Seite 177, Zeile 24.]

Es ist Herrn Kronecker's Verdienst, hervorgehoben zu haben, dass in der That schon Euler das Reciprocitäts-Gesetz für die quadratischen Reste dem ganzen Umfang nach, freilich nur durch Induction gefunden hat. »Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes« Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, im Jahre 1875. Seite 267 bis 274.

[8]. Seite 5, Zeile 3. [In diesem Bande Seite 178, Zeile 16.]

Gauss hat sich von Mathematischen Zeitschriften und Werken sehr sorgfältig geschriebene Inhaltsverzeichnisse und mit kritischen Bemerkungen versehene Auszüge verfertigt. Innere Gründe lassen mich vermuthen, dass sie grössten Theils schon einer früheren als jener Zeit des Göttinger Aufenthalts angehören, sonst würde man auch an Helmstedt denken können, worüber die folgenden Stellen in seinen Briefen sich aussprechen:

Gauss an »Herrn Wolfgang von Bolyai in Göttingen«.

»Braunschweig d. 30ten September 1798.

»Lieber Bolyai. Ich bin vorigen Diensstag hier angekommen. Am »zweiten Tage meiner Reise muste ich ziemlich lange im Regen fahren. »Dieses und der Umstand dass ich Montag mit halb leeren Magen abfuhr, »und die Nacht ganz durch unter freiem Himmel zubrachte, und zwar nicht »gehend, sondern fahrend zog mir eine kleine Unpässlichkeit zu, welcher zu »gefallen ich bis jetzt noch wenig ausgekommen bin. Jetzt hat mich die »liebe vaterländische Luft schon ganz wieder curirt. Von meinen ältern »Freunden habe ich ausser Zimmermann noch keinen gesehen: den Herzog »denke ich in einigen Tagen zu besuchen. Von meinen künftigen Schick»salen weiss ich also noch wenig Bestimmtes: wenn ich indessen von meinen »Gesinnungen auf deine schliesse, so wird dir auch dies Wenige nicht »gleichgültig sein. Von meinem Herzog habe ich Ursache zu hoffen, dass »er seine Unterstützung auch in der Folge noch fortsetzen werde, bis ich »eine bestimmte Lage erhalte. Eine gewisse lucrative Beschäftigung habe »ich verfehlt. Es hält sich hier ein russischer Gesandte auf dessen zwei »junge sehr geistreiche Töchter ich in der Mathematik und Astronomie hatte »unterrichten sollen. Weil ich aber zu lange ausblieb, so hat ein fran»zösischer Emigrant das Geschäft schon übernommen. Allein ein anderes »mir sehr angenehmes Geschäft erwartet mich. Der Generalmajor von Stam»ford den ich dir schon öfters als einen vortrefflichen Menschen, einsichts»vollen Kenner und warmen Freund der Mathematik genannt habe, wünscht »mit mir gewisse Theile derselben gemeinschaftlich durchzugehen. Was für »welche und auf welchen Fuss weiss ich noch nicht, da ich ihn selbst noch »nicht besucht habe. Ich denke dass dieses zu meiner Subsistenz hinreichend

»sein, und dass also fast meine ganze Zeit mir selbst angehören werde. Das »ist das Wigtigste was ich bis jetzt dir schreiben kann. . . . In etwa acht »Tagen denke ich nach Helmstedt zu reisen. . . .

»P. S. 3. Empfiel mich meinen dortigen Bekannten: Ide, Simonis, »Eichhorn, Seyffer, Lichtenberg, Kaestner, Persoon oder wen Du »sonst siehst«.

Gauss an Bolyai.

»Braunschweig, den 29. Nov. 1798.

»Meine Lage ist noch immer sehr precair, und wird vielleicht es bleiben »bis meine Disquisitiones Analyt: vollendet sind. Ich habe den Herzog noch »nicht gesprochen: v. Zimmermann hat gleich nach meiner Ankunft »schriftlich bei ihm angefragt, ob er mich sprechen wolle und darauf noch »keine Antwort bekommen. Im Fall binnen einigen Tagen noch keine Ant- »wort erfolgt, oder Z. mündlich mit ihm sprechen kann, welches vielleicht der »Fall sein kann, werde ich einen Versuch machen zu ihm zu kommen, ob ich »gleich fast so gut als gewiss weiss dass es bloss ein Versuch sein wird, »weil selten jemand zu ihm gelassen wird der nicht gerufen ist. So nöthig »mir indess jetzt eine Unterstützung von ihm wäre — ich lebe jetzt grossen »Theils auf Credit, da meine Finanzaussichten alle gescheitert sind; der von »Stamford ist nicht mehr hier sondern bekleidet diesen Winter einen »Gesandschaftsposten in Berlin, verschiedne andere Anträge etwas zu ver- »dienen habe ich abgelehnt, theils weil es mir wirklich an Zeit fehlt theils »aus anderen Gründen — so habe ich doch sehr gute Gründe, keine jetzt »bei ihm zu suchen, Gründe welche ich dir entweder mündlich oder erst in »der Folge werde mittheilen können.

»Mit meinem Werke geht es noch sehr langsam; der Drucker ist ein »sehr phlegmatischer Mann bei dem alle Vorstellungen und Bitten wenig »helfen; erst 7 Bogen sind ganz abgedruckt (5 waren fertig ehe ich zurückkam)«. Hiernach folgt die oben in der Rede aufgenommene Stelle, Seite 11 Zeile 5 bis 15 [in diesem Bande Seite 184 Zeile 22 bis 31], dann heisst es weiter: »der sechste (Abschnitt) ist von keinem grossen Umfange, der 7te (der die »Theorie der Polygone enthält) etwas grösser aber im Wesentlichen schon »fertig, und nur der letzte wird mich noch eine beträchtliche Zeit beschäftigen

»da er die schwersten Materien enthält. Ich werde indess vor Ostern (wenn »ich gesund bleibe, was ich jetzt ziemlich bin) gewiss fertig; ich will wünschen »dass auch der Drucker es wird.

»In Helmstedt bin ich gewesen und habe da sowohl bei Pfaff, als bei »dem Aufseher der Bibliothek eine sehr gute Aufnahme gefunden. Pfaff »hat meinen Erwartungen entsprochen. Er zeigt dass untrügliche Kennzeichen »des Genies, eine Materie nicht eher zu verlassen als bis er sie wo möglich »ergrübelt hat. Er hat mir mit grosser Gefälligkeit den Gebrauch seiner »Bibliothek angeboten und ich werde in einigen Tagen an ihn schreiben um »mir verschiedenes auszubitten«.

Januar 9, 1799. Gauss an »Herrn von Bolyai in Göttingen«.

»In meiner Lage sind seit meinem letzten Briefe einige günstige Ver»änderungen vorgegangen: ich habe zwar den Herzog noch nicht selbst ge»sprochen, allein er hat erklärt, dass ich die Summe die ich in Göttingen »genossen habe auch künftig behalten solle (welche sich auf 158 Thaler be»läuft jährlich und zu meinen Bedürfnissen jetzt ziemlich hinreichend ist). »Er wünscht ferner dass ich Dr. der Philosophie werde, ich werde es aber »so lange aufschieben bis mein Werk fertig ist, wo ich es hoffentlich ohne »Kosten, und ohne die gewöhnliche Harlequinerie werde werden können. »(Dies habe ich bloss Dir gesagt, ...) Ich habe hier die Bekanntschaft »einiger trefflicher Männer gemacht unter andern eines Bergraths Volkmar »der sehr vorzügliche Einsichten in Mathem. und Physik besitzt. Vor einiger »Zeit habe ich das Glück gehabt aus einer hier verauctionirten Bibliothek »des verstorbenen Abts Häseler viele schöne Werke anzukaufen unter andern »die Originalausgaben von Euler Introd. Differ. et Integr.

»Mit dem Abdruck meines Buches gehts noch immer langsam, in einigen »Tagen erwarte ich die Correctur des 11ten Bogens, so dass es schwerlich »möglich sein wird auf Ostern 30 oder vielleicht noch mehrere Bogen fertig »zu haben . . . . .

»Unser Hofrath Eschenburg hat vorgestern seine Frau verloren in »einem Alter von 47 Jahren. Sie war ein herrliches Weib und ich zweifle »ob in ganz Braunschweig seit langer Zeit Jemand in seiner Familie so »glücklich gewesen ist als Eschenburg. Es ist gewiss dass das Glück was »die Liebe feiner gestimmten Seelen geben kann das höchste ist, was einem

»Sterblichen zu Theil werden kann: aber wenn ich mich in die Stelle des »Mannes setze der nach einigen Zwanzig seligen Jahren nun auf einmal sein »Alles verliert, so mögte ich behaupten er sei der unglücklichste Sterbliche »und es sei besser jenes Glück nie gekannt zu haben. So gehts auf dieser »elenden Erde, »auch die reinste Freude findet in dem Schlund der Zeit ihr »Grab«. Was sind wir ohne die Hoffnung einer bessern Zukunft? Lass »uns die Freiheit unsers Herzens behaupten, so lange es gehen will und »unser Glück vorzüglich in uns selbst suchen. Empfiel mich allen meinen »Bekannten und sei immer glücklich. Gauss«.

Gauss an Bolyai.

»Helmstedt, den 16ten December 1799 .....

»Du erinnerst dich dass ich schon damals als wir uns in Clausthal zum »letzten male sahen einen Aufsatz an die philosophische Facultät zu Helm»stedt eingesandt hatte, um damit den Namen eines Doctors zu erwerben. »Dieses Geschäft hat seitdem seinen Fortgang gehabt u. die Facultät hat mir »diesen Namen am 16 Julius ertheilt ohne mich mit den meisten sonst »üblichen Formalitäten zu belästigen. Unser guter Fürst hat die Kosten »dazu übernommen. Jene Schrift ist gedruckt und schon im August fertig »geworden.... Der Titel »Demonstratio nova theorematis, omnem functionem »algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi »vel secundi gradus resolvi posse« (etc.) 1799 gibt ganz bestimmt die Haupt»absicht der Schrift an, indessen ist zu dieser nur ungefähr der 3te Theil »des Ganzen gebraucht, das übrige enthält vornemlich Geschichte und Kritik »der Arbeiten anderer Mathematiker (namentlich d'Alembert, Bougain»ville, Euler, de Foncenex, Lagrange und die Compendienschreiber — »welche letztere aber wol eben nicht sehr zufrieden sein werden) über den»selben Gegenstand, nebst mancherlei Bemerkungen über die Seichtigkeit »die in unserer heutigen Mathematik so herrschend ist. Gewiss wird Dich »diese Schrift wenigstens als der Erstling Deines Freundes interessiren. »Oeffentliche Urtheile darüber sind meines Wissens noch nirgends erschienen. »Ausgetheilt habe ich bis jetzt einige dreissig Exemplare, theils an Mathe»matiker theils an solche denen ich aus Höflichkeit eines schuldig war. »Nach Frankreich hat es mir bis jetzt noch an Gelegenheit dazu gefehlt. »Von Privaturtheilen die zu meiner Wissenschaft gekommen sind ist mir

»nur vorzüglich das von General von Tempelhoff in Berlin wichtig, und »hat mich um so mehr gefreut, da er einer der besten deutschen Mathematiker »ist und besonders, da meine Vorwürfe ihn selbst, als den Verfasser eines »Compendiums, mit trafen. Aus der dritten Hand habe ich erfahren, dass »er so darüber geurtheilt hat: (es sind seine eignen Worte) »der Gauss ist »ein ganz verzweifelter Mathematiker; er gibt auch nicht eine Handbreit »Terrain nach, er hat brav und gut gefochten und das Schlachtfeld voll»kommen behauptet«. Von Kästner, dem ich vor drei Wochen zwei Exem»plare geschickt habe um eins der göttingischen Societät vorzulegen erwarte »ich in diesen Tagen Antwort, wahrscheinlich wird er die Schrift auch bald »in den götting. gelehrt. Anzeigen recensiren.... Der Druck meines grösseren »Werks ist leider mehr als ein Halbjahr ganz unterbrochen gewesen; und »hat erst vor drei Wochen wieder angefangen. Posttäglich erwarte ich wieder »einen Correcturbogen, welches der 18 seyn wird.

»P. S. Noch vor Abgang dieses Briefes ist er wirklich angekommen.

»Dass meine Reise nach Gotha rückgängig geworden ist, daran ist vor»nehmlich eine schwere Krankheit des von Zach schuld, an deren Folgen »er noch jetzt leidet. Gegenwärtig ist es mir selbst lieb, weil ich nun erst »mit Eifer meine Disquisitiones Arithmeticae zu vollenden wünsche. Vielleicht »gehe ich alsdann auf eine Zeitlang nach Gotha, vielleicht auch nicht, je »nachdem die Umstände sein werden und mir eine Fertigkeit in der prak»tischen Astronomie wünschenswerth oder gleichgültig machen.

»Da ich vor der Hand wol noch nicht bald in die Ketten eines Amts »treten werde u. in Braunschweig zu meinen Arbeiten zu wenig Hülfsmittel »hatte so fasste ich den Entschluss mich eine Zeitlang hieher nach Helmstedt »zu begeben, wo ich wol bis zu Ostern bleiben werde. Deine Briefe kannst »Du nach Belieben hieher oder nach Braunschweig schicken, indem ich die »Verfügung getroffen habe, dass alle an mich gerichtete Briefe die dahin »kommen mir sogleich übersandt werden.

»Ich wohne hier bei dem Professor Pfaff, den ich eben so sehr als »einen trefflichen Geometer, wie als einen guten Menschen und meinen »warmen Freund verehre; ein Mann von einem arglosen kindlichen Karakter, »ohne alle die Leidenschaften die den Menschen so sehr entehren.... Da »ich noch nicht einmal 8 Tage hier bin so kann ich noch nicht entscheiden

»wie ich übrigens hier zufrieden sein werde; der Ort selbst ist affreux, die »Gegenden umher werden gerühmt: Bequemlichkeiten des Lebens muss man »manche entbehren; .... unter den Professoren die ich habe kennen lernen »sind artige Männer....

»Schwerlich wird Dir dieser Brief noch in diesem Jahre zu Händen »kommen, melde mir in Deinem nächsten, wann Du ihn empfangen hast; »der letzte December, der wenigstens der letzte Tag sein wird, wo wir »siebzehn Hundert nennen (wenn gleich mikrologischere Ausleger das Ende des »Jahrhunderts noch ein Jahr weiter hinaus setzen) wird mir besonders heilig »sein, merke Dirs doch dass wenn wir hier Mitternacht haben, bei euch Mitter- »nacht schon Eine Stunde vorbei ist. Bei solchen feierlichen Gelegenheiten »geräth mein Geist in eine höhere Stimmung, in eine andere geistige Welt; »die Scheidewände des Raumes verschwinden, unsere kothige kleinliche Welt »mit allem was uns hier so gross dünkt, uns so unglücklich und so glücklich »macht verschwindet, und ein unsterblicher reiner Geist stehe ich vereinigt »mit allen den Guten und Edlen die unsern Planeten zierten und deren »Körper Raum oder Zeit von dem meinigen trennten, und geniesse das höhere »Leben die besseren Freuden, die ein undurchdringlicher Schleier jetzt bis »zu dem entscheidenden Augenblicke unserm Auge verbirgt.

»Schreibe mir bald und ausführlich .... — und höre nicht auf zu lieben

»Deinen unwandelbaren Freund

»C. F. G.«

Gauss an Bolyai in Clausenburg.

»Braunschweig, den 3 Decbr. 1802.

».... Ich lebe seitdem ich 1800 Ostern Helmstedt wieder verlassen habe »bisher beständig in Braunschweig hauptsächlich für meine Göttinnen die »Wissenschaften. Bis im Sommer 1801 hat mich die Arbeit an meinem »grossen Werke beschäftigt welches Michael 1801 herausgekommen ist... »Disquisitiones Arithmeticae.... Seitdem haben mich hauptsächlich die »beiden neuen Planeten Ceres und Pallas beschäftigt.... Liesest Du von »Zach's Monatliche Correspondenz (die wie ich weiss wenigstens in Hungarn »gelesen wird) so wirst Du schon daraus wissen (Maystück 1802) dass meine »Arbeit über die Ceres die Ursache einer Ansehnlichen Verbesserung meiner »äussern Lage ist: unser grossmüthige Fürst hat mich durch eine Pension

»von 400 Rthl. vor der Hand in eine unabhängige sorgenfreye Lage gesetzt. »Jedoch ist es noch sehr ungewiss ob ich diese Lage noch lange geniessen »werde. Gerade jetzt stehe ich in Unterhandlung wegen eines Rufes nach »St. Petersburg als Director der Kays. Sternwarte und ausserdem ist sogar »eine Aussicht da, dass ich vielleicht zwischen diesem Rufe und einem andern »die Wahl haben könnte: aber diess alles sage ich dier, wie Du leicht siehst »im allerengsten Vertrauen. Wenn sich mein Schicksal entscheidet sollst »Du es sogleich erfahren. . . .

»Kästner's Stelle ist eigentlich nicht wieder besetzt und wird vielleicht »nicht besetzt werden. Mayer aus Erlangen, der an Lichtenberg's Stelle »gekommen ist liest auch mathemat. Collegia u. Thibaut ist wenn ich »nicht irre zum Professor Extraord. gemacht. Ich stehe überhaupt mit Göttingen »in weniger Verbindung. Nur erst vor ein Paar Wochen hat mich die Societät »der Wissenschaften zu ihrem Correspondenten ernannt. . . .

»Nun lebe wohl Du Guter. Möge der Traum den wir das Leben nennen »dir ein süsser seyn, ein Vorschmack des wahren Lebens in unsrer eigent- »lichen Heymath, wo den erwachten Geist nicht mehr die Ketten des trägen »Leibes, die Schranken des Raums, die Geissel der irdischen Leiden und »das Necken unserer kleinlichen Bedürfnisse und Wünsche drückt. Lass uns »muthig und ohne Murren die Bürde bis ans Ende tragen, aber nie jenes »höhere Ziel aus den Augen verlieren. Freudig werden wir dann wenn »unsre Stunde schlägt die Last niederlegen und den dichten Vorhang fallen »sehen«. . . .

Gauss an Bolyai. »Braunschweig den 20 Jun 1803.

»Dein Brief, mein Theurer Bolyai, vom 27 Februar hat mich erfreuet. . . . »Die Annäherung einer befreundeten Seele aus der Ferne ist mir immer wie »ein Festtag, wie ein Lichtblick aus jener bessern uns hier in Nebel ge- »hüllten Welt. Ach warum müssen uns auf dieser unsere seltenen und »kärglichen Freudentage so oft durch nichtswürdige Insektenstiche vergiftet »werden! . . . .

»Die Vokation nach St. Petersburg hat mich nicht von hier weggezogen, »unser Herzog liess mich nicht fort und hat mir meine hiesige Lage noch »angenehmer gemacht. Ich habe sogar Hoffnung zu einer kleinen hiesigen »Sternwarte — falls nicht der leidige Krieg von neuem unsere Projekte

»hemmt — Astronomie und Reine Grössenlehre, sind einmahl die Magnetischen »Pole nach denen sich mein Geisteskompass immer wendet . . .«.

Gauss an Bolyai. »Göttingen 20 May 1808

»Dein Brief vom 18 Dec. vorigen Jahrs, lieber Bolyai, hat mich aus »einer grossen Unruhe gerissen, in die ich durch das 3jährige Ausbleiben »aller Antwort auf meine letzten Briefe gesetzt war. Wie angenehm ist es, »nach diesen 3 verhängnissreichen Jahren, dass wir dadurch nicht weiter »auseinander gezogen sind, dass wir uns wieder wie nach langer Trennung »die Hände reichen und sagen können: Wir sind die Alten geblieben. Du »wirst mit Theilnahme hören, wie es mir in dieser Zeit gegangen ist.

»Meine Lage in Braunschweig hatte ich von jeher nur als eine »interimistische betrachtet, die sich über kurz oder lang verändern müsste. »Dass aber solche Katastrophen mich von da so bald wegtreiben würden, »ahndete ich freilich nicht. Du kennst die unglückliche Geschichte des »Herbstes 1806. Wenige Tage vorher noch im Genuss von allen Segnungen »des Friedens sahen wir auf einmal unsere Fluren zum Schauplatze des Krieges »werden, sahen wir unsern geliebten Fürsten tödtlich verwundet, kaum ein »Paar Tage Ruhe in seinem Lande findend, den Verfolgungen der Feinde »fliehend, um bald in fremder Erde eine Ruhestatt zu finden. Nie habe ich »lebendiger gefühlt, wie nichtig alles hienieden ist, dass nur die Aussicht »in eine höhere Existenz die grellen Mistöne des Erdenlebens in Harmonie »auflösen kann, als in jenen schrecklichen Tagen, wo wir Zeuge von dem »unglücklichen Ende eines der edelsten Menschen waren! . . .«.

[9]. Seite 6, Zeile 8. [In diesem Bande Seite 179, Zeile 23.]

Der Vergleichung von Gauss mit Archimedes hat Jacobi in seinem aus Königsberg am 29. Juni 1840 an Hausmann gerichteten Schreiben in welchem er für seine Ernennung zum auswärtigen Mitgliede der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen dankt, die beredten Worte geliehen: ». . . In der That kann ich ein Recht zu einer solchen Auszeichnung »nur in dem anhaltenden Bemühen erblicken, in den Geist der Schriften des »ausserordentlichen Mannes einzudringen, welchen d. K. S. zur Zeit an ihrer »Spitze sieht, und dessen wunderbarer Genius unwillkürlich an den des »Archimedes erinnert. Denn wir finden in seinen Schriften bei Ueber-

»lieferung des Vollgehaltes gleich tiefsinniger Entdeckungen auch die voll»endete Form und ideale wissenschaftliche Strenge jenes Alten wieder, und »wie dieser weit über alle praktische Anwendungen, welche ihn im Munde »des Alterthums zur Fabel werden liessen, den rein mathematischen Ge»danken stellte, so hat auch Gauss bei aller Bewunderung, welche die »grössere Menge der Vollendung seiner Praxis zollt, selber an sich immer »nur den Maassstab der Tiefe seiner Gedanken gelegt«.

[10]. Seite 15, Zeile 4. [In diesem Bande Seite 188, Zeile 12.]

»A Monsieur le docteur Gauss logé chez Ritter-Steinweg Nr. 1917 à Brunsvick.

»Monsieur. L'intérêt dû aux hommes supérieurs suffit pour expliquer »le soin que j'ai pris, de prier le général Pernetty de faire savoir à qui il »jugeroit convenable, que vous avez droit à l'estime de tout gouvernement »éclairé.

»En me rendant compte de l'honorable mission dont je l'avois chargé »Mr. Pernetty m'a mandé qu'il vous avoit fait connoître mon nom: cette »circonstance me détermine à vous avouer que je ne vous suis pas aussi par»faitement inconnue que vous le croyez: mais que, craignant le ridicule »attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois emprunté le nom de Mr. »Le Blanc pour vous écrire et vous communiquer des notes qui, sans doute, »ne méritoient pas l'indulgence avec laquelle vous avez bien voulu y répondre.

»La reconnaissance que je vous dois pour l'encouragement que vous »m'avez accordé, en me témoignant que vous me comptiez au nombre des »amateurs de l'arithmétique sublime dont vous avez développé les mystères, »étoit pour moi un motif particulier de m'informer de vos nouvelles, dans un »moment ou les troubles de la guerre pouvoient inspirer quelques craintes, »et j'ai appris avec une véritable satisfaction que vous êtes resté dans vos »foyers aussi tranquille que les circonstances le permettoient. Je crains ce»pendant que les suites de ces grands événemens ne nous privent encore »longtems des ouvrages que vous préparez sur l'astronomie et, surtout de la »continuation de vos recherches arithméthiques; car cette partie de la science »a pour moi un attrait particulier et j'admire toujours avec un nouveau plaisir »l'enchaînement des vérités exposées dans votre livre: malheuresement la faculté

»de penser avec force, est un attribut reservé à un petit nombre d'esprits »privilégiés et je suis bien sûre de ne rencontrer aucun des développemens »qui, pour vous, semblent une suite inévitable de ce que vous avez fait »connoître.

»Je joins à ma lettre une note destinée à vous témoigner que j'ai con»servé pour l'analyse le gout qu'a developpé en moi la lecture de votre ouvrage »et qui m'a autrefois inspiré la confiance de vous adresser mes faibles essais, »sans autre recommandation auprès de vous que la bienveillance accordée par »les savans aux admirateurs de leurs traveaux.

»J'espère que la singularité dont je fais aujourd'hui l'aveu ne me privera »pas de l'honneur que vous m'avez accordé sous un nom emprunté et que »vous ne dédaignerez pas de consacrer quelques instans à me donner direc»tement de vos nouvelles; croyez Monsieur, à l'intérêt que j'y attache et recevez l'assurance de la sincère admiration avec laquelle j'ai l'honneur d'être,

»Votre très humble servante

»Sophie Germain.

»Paris le 20 février 1807.

»P. S. Mon adresse est: Mlle. Germain chez son père. Rue St. Croix »de la Bretonnerie No. 23. à Paris«.

[11]. Seite 15, Zeile 17. [In diesem Bande Seite 188, Zeile 25.]

Bessel an Gauss. »Königsberg, 15. Juni 1818.

»Vor allem andern, mein theuerster, verehrtester Freund, sage ich Ihnen »meinen herzlichsten Dank für das gütige Urtheil, welches Ihr vor 2 bis 3 »Tagen bei mir eingegangener Brief vom 10. May über meine Bemühungen »mit Bradley's Beobb. ausspricht. Ich gestehe Ihnen, dass die Schärfe »Ihres Urtheils von jeher den grössten Einfluss auf mich gehabt hat; wenn »ich sie auch, wegen Ihrer Freundschaft gegen mich, nur angenehm empfunden »habe, so schwebte mir doch bei allen meinen Arbeiten immer der Wunsch »vor, Sie einigermassen zu befriedigen. Wir verdanken Ihnen den grössten »Theil der heutigen Verfeinerung der Astronomie, nicht nur wegen Ihrer »kleinsten Quadrate, sondern auch wegen der Erweckung des Sinns für Feinheit, »der seit Bradley's Zeit von der Erde verschwunden zu sein schien, und »erst seit 18 Jahren wieder erschien. Wir sind erst jetzt auf den Punkt

»gekommen, kleinen Fehlern oder Abweichungen ausser den Grenzen der »Wahrscheinlichkeit mit derselben Aufmerksamkeit nachzuspüren als früher »grossen; — beiden muss ein physischer Grund (in der Natur selbst, in den »Instrumenten oder dem Beobachter) zugehören und die Entdeckung dieses »Grundes, die allein der praktischen Astronomie bedeutend forthelfen kann, »sehen wir erst jetzt für eine ebenso bedeutende wissenschaftliche Entdeckung »an, als früher*) eine mehr augenfällige angesehen worden sein mag.

»Um auf mein Buch zurückzukommen, muss ich Ihnen gestehen, dass »mir es vorzüglich erfreulich ist, wenn Sie der ganzen Art der Bearbeitung »Ihren Beifall nicht versagen; in den einzelnen Theilen kann manches Mangel»hafte Ihrem Scharfblicke nicht entgehen, und ich habe keineswegs darauf »gerechnet, Sie darin ganz zu befriedigen.

»Nun meinen herzlichsten Glückwunsch zu der endlichen Vollendung »Ihrer Sternwarte und der Aufstellung des Repsoldischen Kreises! — — »welche reiche Ausbeute wird der Astronomie wieder zu Theil werden! — — »und wie wird die Astronomie in Deutschland dadurch aufblühen, dass Sie »gegenwärtig einer Sternwarte vorstehen! Wenn ich Ihnen die Arbeit etwas »erleichtern kann, wird es immer mein grösstes Vergnügen sein. . . .

»*) ich meine eigentlich in der Zwischenzeit zwischen Bradley und »uns. Denn dass Bradley die nirgends gestörte Uebereinstimmung nur durch »Zufall erhalten haben sollte, ist, nach den neueren Erfahrungen, ganz un»wahrscheinlich; auch spricht Bradley in der berühmten Abhandlung der »Philos. Transact. deutlich aus, dass er die Schwierigkeiten kannte, die die »Anstellung ganz genauer und sicherer Beobb. mit sich führt«.

[12]. Seite 15, Zeile 18. [In diesem Bande Seite 188, Zeile 26.]

Bessel an Gauss. [1823]**).

»Ich hätte kaum geglaubt, dass noch eine andere, gänzlich verschiedene »Methode vorhanden wäre, die geodätischen Messungen zu berechnen, — aber »von Ihren stets abweichenden, originalen Ideen haben wir schon so viele

**) [Der Brief ist ohne Datum. Er ist in dem, oben (Seite 182) citierten »Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel« eingeordnet zwischen einem Briefe von Bessel an Gauss vom 16. December 1822 und einem Briefe von Gauss an Bessel vom 14. März 1823, der mit den Worten beginnt: »Ihr letzter Brief (ohne Datum)« . . . . .].

»Proben, dass ich mir gar nicht die Mühe geben mag, ein wahrscheinlich »fruchtloses Rathen zu versuchen.

»Wie begierig ich auf die dereinstige Kenntniss Ihrer Ansichten bin, »darf ich Ihnen nicht erst sagen«.

[13]. Seite 15, Zeile 19. [In diesem Bande Seite 188, Zeile 27.]

Die erste Andeutung, dass Gauss daran dachte, sich einmal mit dem Erdmagnetismus zu beschäftigen, findet sich in seinem Briefe an Olbers vom 1. März 1803.

In Bezug auf die in einer Zeitungs-Notiz angekündigte Entdeckung, welche die Ortsbestimmung durch magnetische Beobachtungen ermöglichen soll, bemerkt Gauss: »Ich bin dagegen etwas misstrauisch, ob ich gleich »glaube, dass über die magnetische Kraft der Erde noch viel zu entdecken »sein möchte, und dass sich hier noch ein grösseres Feld für Anwendung »der Mathematik finden wird, als man bisher davon cultivirt hat«.

[14]. Seite 17, Zeile 22. [In diesem Bande Seite 190, Zeile 24.]

Dirichlet an Gauss.

»Hochzuverehrender Herr Hofrath!

»Ew. Hochwohlgeboren habe ich die Ehre, für die gütige Nachsicht »womit Sie meinen ersten mathematischen Versuch aufgenommen und für »das Wohlwollen, womit Sie mich in Berlin empfohlen haben, meinen innigsten »Dank darzubringen. Ich fühle nur zu sehr, wie wenig Ansprüche mir meine »bisherigen Leistungen auf die Fürsprache Ew. Hochwohlgeboren geben und »werde alle meine Kräfte aufbieten, um Ihrem gütigen Vertrauen, so weit »es meine geringen Anlagen erlauben, zu entsprechen.

»Unser Ministerium hat mir vor Kurzem eine jährliche Remuneration »von 400 Thalern angeboten, wenn ich meine akademische Laufbahn als »Privatdocent zu Breslau beginnen wollte, und mir zugleich die Aussicht auf »eine baldige Beförderung zum ausserordentlichen Professor der höhern Analysis »eröffnet, für welches Fach der Lehrstuhl an der dortigen Universität seit »dem Abgange des Professors Brandes erledigt ist. Ich habe diesen Antrag »angenommen und denke gegen das Ende des künftigen Monats nach Breslau »abzugehen. Wenn es mir nur irgend möglich ist, werde ich meinen Weg

»über Göttingen nehmen, um Ew. Hochwohlgeboren persönliche Bekanntschaft »machen und Ihnen auch mündlich für Ihre Güte danken zu können.

»Mit der lebhaftesten Freude habe ich aus dem Schreiben ersehen, womit »Ew. Hochwohlgeboren mich beehrt haben, dass Sie das schon früher dem »mathematischen Publikum gegebene Versprechen erfüllen und die vollständige »Theorie der cubischen und biquadratischen Reste bald bekannt machen wollen. »Die Freunde der unbestimmten Analysis sehen mit Ungeduld einer Bekannt- »machung entgegen, welche in der Geschichte dieses Zweigs der Mathematik »Epoche machen wird. Wie gross erscheint nicht der zur Begründung dieser »neuen Lehren nöthige Aufwand von Scharfsinn, wenn man bedenkt, welche »Schwierigkeiten sich den Mathematikern in den Weg gestellt haben, die »vor der Erscheinung der Disquisitiones arithmeticae die Theorie der qua- »dratischen Reste bearbeitet haben. —

»Ich verharre mit den Empfindungen der innigsten Verehrung und tiefsten »Bewunderung

»Ew. Hochwohlgeboren gehorsamer

»Düren den 31. Jan. 1827. G. Lejeune Dirichlet«.

[15]. Seite 17, Zeile 27. [In diesem Bande Seite 190, Zeile 29.]

Für die Beurtheilung von Gauss' Persönlichkeit ist seine eigene Meinung über sich selbst von grosser Bedeutung. In einem Briefe an seinen Schüler und Freund, Professor Gerling in Marburg, schreibt er, am 8. Februar 1834, indem er diesen einen guten Rathgeber nennt, »einen »besseren als ich selbst sein kann, der ich 56 Jahre alt noch immer das »Gefühl habe, in der äusseren Welt wie ein Fremdling zu stehen«.

[16]. Seite 17, Zeile 27. [In diesem Bande Seite 190, Zeile 29.]

Den Lesern der jetzt so viel veröffentlichten Privatschriften wird Gauss' Urtheil darüber beachtenswerth erscheinen. Er schreibt am 30. December 1852 an Gerling:

»Ich kann dies Jahr nicht ausklingen lassen, ohne Ihnen, lieber Ger- »ling, erst noch in einigen Zeilen ein Lebenszeichen gegeben zu haben. »Im laufenden halben Jahre muss ich leider wieder Collegia lesen und muss »sonach abermal auf Ausführung einer grösseren Arbeit verzichten. Zu einer

»solchen fehlt Möglichkeit und Muth, wenn ich nicht eine längere Zeit als »ganz mein eigen vor mir habe.

»Vor Kurzem habe ich den Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel »erhalten und, ehe ich das Buch zum Buchbinder schicke, flüchtig durch- »blättert. Es enthält vieles interessante: ich glaube jedoch, dass Olbers mit »dem Abdruck von vielem sehr unzufrieden gewesen sein würde, wenn er »ihn hätte voraussetzen können. Namentlich manche unreife unüberlegte »Urtheile; manches indiscrete Ausplaudern von vertraulichen Mittheilungen; »manche factische Dinge, die durch ihre Unvollständigkeit falsche Vor- »stellungen erzeugen.

»Den Apparat für den Foucault'schen Versuch, wovon ich Ihnen früher »geschrieben habe, denke ich ausführen zu lassen. Ich hoffe, dass dadurch »das Phänomen in jedem Local allemahl schon nach sehr kurzer Zeit bestimmt »hervortretend gemacht werden kann. Die Fallversuche nach Guglielmini »u. a. sind eigentlich wenig geeignet, die Drehungsbewegung der Erde er- »kennbar zu machen, da sie nach den kostspieligsten Zurüstungen doch immer »nur höchst rohe Resultate geben können. Die Versuche von Hook und »selbst die von Guglielmini beweisen eigentlich gar nichts, da bei letztern »das Loth erst $\frac{1}{2}$ Jahr nach den Fallversuchen angewandt wurde. Wenn man »übrigens sagt, alle Versuche hätten eine Bewegung nach Süden ergeben, »wofür die Theorie keine Rechenschaft hätte, so verstehe ich diess nicht. »Benzenberg's*) Versuche in Hamburg geben zwar eine solche, aber so, »dass dies Resultat gar keinen Werth hatte, wie er selbst nicht verkannte »und deshalb unternahm er ja eben die neuen Versuche in einem Schacht »im Bergischen, und diese gaben keine Abweichung nach Süden, sondern »eine nach Norden (sein Buch p. 425). Bei Veranlassung der obigen Aeusse- »rung habe ich übrigens die Reich'schen**) Versuche wieder angesehen;

*) [Dr. Benzenberg's Versuche über die Umdrehung der Erde, 8°, 542 S., 1804. Benzenberg giebt auf S. 264 an, dass über die Versuche von Hook (1679) wenig bekannt ist und beschreibt von S. 269 bis S. 289 die Versuche von Guglielmini in Bologna (1791). Die spätere, Gauss gewidmete, Arbeit von Benzenberg: »Versuche über die Umdrehung der Erde«, 8°, 48 S., 1845, enthält keine neuen Versuche, sondern Berechnungen der älteren Versuche und der östlichen Fall-Abweichungen für verschiedene Punkte der Erde.]

**) [F. Reich: Fallversuche über die Umdrehung der Erde in dem [158 Meter tiefen] Drei Brüderschachte bei Freiberg, 8°, 48 S., V Taf., 1832.]

»derselbe findet nach seiner Rechnung (p. 46) eine Abweichung nach Süden »von 4,374 Millimeter mit einem wahrscheinlichen Fehler von 2^{mm}700. Auch »diess als richtig angenommen würde ich doch seine folgenden Zeilen »Was »die letztere betrifft . . . nach Süden« nicht billigen können. Von einem Re- »sultate dessen absolute Grösse nur $1\frac{1}{2}$ mahl so gross ist als der wahrschein- »liche Fehler, darf man nicht sagen, dass sie »noch nicht ausser allen Zweifel »gesetzt sei« sondern nur 1) in dem Fall, wo man gar nichts weiter davon »weiss als den Ausfall der Versuche, — dass daraus für die Realität der »Grösse nur erst eine mässige Wahrscheinlichkeit resultire, hingegen 2) in »dem Fall, wo andere gewichtige Gründe gegen die Realität sprechen, würde »ich sagen, dass auf den Ausfall nur wenig zu geben sei und 3) wenn wie »hier seit 50 Jahren durch strenge Theorie bewiesen ist, dass eine Abweichung »nach Süden gar nicht stattnehmig sei, würde man sagen müssen, dass gar »nichts darauf zu geben sei. Was den letzten Theil von Reich's Phrase »betrifft, so finde ich die Sache ungefähr ebenso sonderbar, wie den Umstand, »dass alle 3 jetzigen Kaiser am 2. December ihren Thron bestiegen haben, »und zwar Franz Joseph 4 Jahr, Nicolaus 27 Jahr früher als Nap. 3. (ein »Mathematiker könnte die Sonderbarkeit noch erhöhen, wenn er die Zahlen »so schriebe $4 = 2^2$, $27 = 3^3$). Mit solchen Phantasiespielen belustigt man »sich wohl, aber niemand legt ihr eine ernsthafte Bedeutung bei.

»[Nachschrift:] (Die obige Merkwürdigkeit des 2. Decemb. hatte ich aus »einer Zeitung, ich weiss nicht mehr welcher, entnommen. In unserem Staats- »kalender ist die Thronbesteigung des Kaisers Nicolaus als auf den 1. Dec. »fallend angesetzt.)

»Nun aber kommt noch ein Hauptpunkt. Ich finde Reich's Rechnung »falsch. Wie er es angefangen hat, obige Zahlen herauszubringen, weiss ich »nicht: aber eine richtige Rechnung gibt anstatt der Zahlen p. 45 folgende

»Hauptresultat für die östliche Abweichung	28^{mm}527	anstatt	28,282
»wahrscheinlicher Fehler	3,481	—	2,703
»Hauptresultat für die südliche Abweichung	3,540	—	5,061
»wahrscheinlicher Fehler	3,400	—	2,700

»Nach Correction der falschen Orientirung erhalte ich hieraus

»Abweichung nach Osten	28^{mm}605
— — Süden	2,874

»Also die vermeintliche Abweichung nach Süden noch kleiner als der »wahrscheinliche Fehler darin.

»Wenn das »Desiderium wegen des Foucault'schen Versuchs noch immer »fortbesteht«, so kann ich darauf nur erwidern, dass meiner Ueberzeugung »nach der Grund der Statt findenden Dunkelheit darin liegt, dass man die »Aufgabe für leichter ansieht als sie ist, und erwartet, dass sie sich durch »ein Aperçu (um ein Wort zu gebrauchen, was Goethe so oft zu seinem »Cheval de bataille machte) beantworten lasse, zu welcher Erwartung man »gar kein Recht hat. Es gibt sehr viele Fälle, wo sich durch ein Aperçu »in eine intricate Frage ein helles Licht bringen lässt, aber auch andere, wo »dies Licht nur ein Irrlicht ist, und höchstens die Wirkung hat, dass mancher »sich einbildet nun die Sache zu verstehen, obwohl er eigentlich sich darin »bloss täuscht. Ich rechne dahin den Versuch in den A. N. No. 838*), der »kein elementarer Beweis ist, sondern gar kein Beweis. Der Hergang der »Sache im absoluten Raume kann so gedacht werden.

»Ein materieller Punkt A wird nach einem festen Punkt C angezogen, »zugleich aber ist er genöthigt von einem dritten Punkt B immer in einer »unveränderlichen Entfernung zu bleiben; man sucht die Bewegung des »Punktes A im Raume. Ist nun B gleichfalls fest, und nimmt man die »Stärke der Anziehung nach C zu wie constant an, auch überhaupt AB wie »verschwindend gegen AC, so ist die Aufgabe eine sehr leichte und zusammen»fallend mit der Aufgabe der Pendelschwingungen auf nicht rotirender Erde. »Sobald man aber B nach gegebenem Gesetz als beweglich betrachtet, so »verhält es sich ganz anders, die Aufgabe ist eine gleichsam specifisch »verschiedene und sehr schwere. Erleichtert wird sie allerdings sehr, wenn »man die Art der Bewegung von B so annimmt, dass sie gleichförmig in »einem Kreise geschieht, dessen Planum durch eine von C dagegen gezogene »Normale im Centrum des Kreises getroffen wird.

»Das erstere ist der Fall wo der Foucault'sche Versuch unter dem »Pole gemacht wird, das andere unter jeder anderen Breite. Wer aus dem »Umstande, dass im ersteren Fall die Auflösung so leicht ist, sich zu der

---

*) [Dr. F. Schaub: Elementarer Beweis der Wirkung der Umdrehung der Erde auf die Schwingungsebene des Pendels. (Astronom. Nachr., Bd. 35, Nr. 838, S. 354, 1852, December 17.)]

»Erwartung verleiten lässt, auch im zweiten (specifisch ganz verschiedenen) »Fall ebenso leicht, oder fast eben so leicht, fertig werden zu können, täuscht »sich; es gibt keinen andern Rath, als in einer oder der anderen Form die »strenge Behandlung durchzumachen. Plana's*) Abhandlung habe ich leider »alles Suchens ungeachtet noch immer nicht wiederfinden können. Eine andere »im ganzen ähnliche Behandlung der Aufgabe, gestützt auf meine Grund- »formeln**) in Benzenberg's Buch hat Clausen***) in den Bulletins der »Petersburger Akademie gegeben, die ich aber auch in diesem Augenblick »nicht genauer nachweisen kann.

»Die Beilage zu 837 und 838 der A. N. werden Sie auch erhalten haben. »Es ist ein sehr werthvolles Verzeichniss von 2060 Nummern. Wissen Sie »vielleicht, wer der letzte Besitzer gewesen ist? Mit Verwunderung sehe »ich, dass von vielen meiner Denkschriften die Originalhandschriften darunter »sind. Ich habe allerdings solcher Handschriften viele oder die meisten an »gute Freunde verschenkt, aber nicht in der Absicht, dass sie einmahl in »Einer Hand vereinigt in der Auction versteigert werden sollten.

»Lassen Sie mich nun mit den herzlichsten Wünschen für Ihr und Ihrer »ganzen Familie Wohlbefinden im herannahenden Jahre schliessen«.

Das im Eingang des Briefes erwähnte Colleg betraf die Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendungen. Ich selbst war mit Zuhörer und würde, wenn Gauss bei meiner Anmeldung nicht den Wunsch, dass die Vorlesung nicht zu Stande kommen möge, hätte erkennen lassen, bei der Lebhaftigkeit seines Vortrages, der eine ebensolche Frische des Geistes, wie der vorstehende Brief, darthat, nie auf den Gedanken gekommen sein, dass er die Vorlesung ungern halte.

Die Gauss'handschriften, welche in dem Verzeichnisse werthvoller Ma-

*) [Plana: Note sur l'expérience communiquée par Mr. Léon Foucault, le 3 février dernier à l'Académie des Sciences de Paris. (Lue dans la séance du 16 mars 1851.) Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino, Ser. II, T. XIII, p. 1—18, Torino 1853.]

**) [Gauss' Werke, Bd. V, S. 498—503.]

***) [Clausen (Dorpat): Ueber den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben (Lu le 13 juin 1851). Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, T. X, Nr. 2, p. 18—32, Emis le 29 septembre 1851.]

thematischer und Astronomischer Bücher genannt werden, nemlich Nr. 674. 889. 890. 1503. 1504. 1505, sind in die Astor-Bibliothek gelangt: Catalogue or alphabetical Index of the Astor Library. New York 1857.

»Gauss. Theoria Motus Corporum Coelestium. Hamburg 1809. With a Manuscript of 321 pages in Folio of Explanations and Commentary upon the Theoria Motus Corporum Coelestium.

Also a Manuscript of 300 pages in Folio of Astronomical Calculations illustrating the Orbits of Juno, Pallas, Ceres and Vesta, and one of 13 pages of Formulae.

— Determinatio Attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita. Gottingae 1818.

With an Autograph Manuscript by Professor Gauss of this Memoir, 28 pages in 4to.

Also a Manuscript of Illustrations and Remarks on the Memoir, 58 pages in 4to.

— Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampl. Gott. 1817.

With an Autograph Manuscript in Prof. Gauss's handwriting. 29 pp. 4to.«

Es wäre vielleicht nicht ohne Nutzen, wenn von kundiger Seite diese Handschriften darauf hin untersucht würden, ob sie ausser dem schon Gedruckten etwas zur Veröffentlichung Geeignetes enthalten.

Zu dem von Seiten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen ausgesprochenen Danke für übersendete Gaussische Briefe oder Abschriften von solchen erlaube ich mir die Bitte um weitere Mittheilungen hinzuzufügen, damit von dem Inhalte geeigneter Gebrauch für die Nachträge zu Gauss' Werken und für eine vollständige Darstellung seines Lebens und Wirkens gemacht werden kann.

XXXVI.

NACHRICHT ÜBER BRIEFE VON GAUSS.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 7. Juli 1877 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 25. Juli 1877, S. 432.]

Für die Sammlung des Gaussischen Nachlasses sind durch die grosse Güte des Herrn Bertrand, Sekretär der Academie der Wissenschaften in Paris, Abschriften mehrerer Briefe von Gauss an Bouvard, Delambre und an Andere übersendet worden. Die Originale der Briefe gehören den Sammlungen der Herrn Chasles, Boutron und Dubrunfaut an, welche im Interesse der Wissenschaft die Mitteilung des Inhaltes gestattet haben.

Herr Oscar Ulex in Altona besitzt sieben an verschiedene Gelehrte und Beamte gerichtete Briefe von Gauss und hat die dankenswerthe Güte gehabt, Abschriften dieser zum Theil wissenschaftliche Gegenstände betreffenden Briefe der Sammlung des Gaussischen Nachlasses zu übergeben.

XXXVII.

BEMERKUNGEN ÜBER GAUSS' BRIEF VOM 30. APRIL 1807 AN SOPHIE GERMAIN.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. November 1879 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 19. November 1879, S. 381—384.]

Dieser Brief ist ausser durch seinen wissenschaftlichen Inhalt noch durch einen Umstand bemerkenswerth; es war der erste Brief, welchen Gauss an Sophie Germain schrieb, nachdem er in Erfahrung gebracht hatte, dass in einer mit ihm seit 1804 geführten wissenschaftlichen Correspondenz unter dem Namen Monsieur Le Blanc eine Dame sich verborgen gehalten habe.

Der General Pernetty hatte der Sophie Germain mitgetheilt, dass er mit Gauss von ihren lebhaften Bemühungen in Paris zur Erleichterung dessen durch den Krieg verursachten ungünstigen Lage gesprochen habe. Dadurch sah Sophie Germain sich veranlasst, Gauss zu erklären, dass jene von Pernetty ihm genannte Dame nicht so vollständig fremd für ihn, sondern kein Anderer als sein bisheriger Correspondent Mr. Le Blanc sei. Den betreffenden Brief habe ich mit meiner bei der Feier von Carl Friedrich Gauss' Geburtstag am 30. April 1877 gehaltenen Festrede im 22. Bande der Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen veröffentlicht*). Sophie Germain schreibt darin unter dem 20. Febr. 1807 »que, craignant le ridicule attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois emprunté le nom de Mr. Le Blanc pour vous écrire, et vous communiquer des notes qui, sans doute, ne méritoient pas l'indulgence avec laquelle vous avez bien voulu y répondre«.

*) [Siehe S. 204 dieses Bandes.]

Damals hatte sie, die am 1. April 1776 geboren war, noch keine wissenschaftliche Arbeit veröffentlicht; dies geschah erst, nachdem sie im Jahre 1816 den von der Academie der Wiss. [in Paris] gestellten Preis für Untersuchungen über die Theorie der elastischen Flächen gewonnen hatte. Gauss' Antwort auf jenen Brief mit solcher überraschenden Aufklärung ist bis vor Kurzem vergeblich gesucht worden, selbst die von Seiten der Academie der Wissenschaften in Paris ergangene Aufforderung zur Mittheilung von Briefen von Gauss hatten hierin nicht zum Ziele geführt.

Erst dem erfolgreichen Eifer des Principe Baldassare Boncompagni gelang es, diesen Brief aufzufinden; mit seiner bekannten zu Opfern für die Wissenschaft bereiten Handlungsweise veröffentlichte er dieses Schreiben von Gauss als Autographie*). Unsere K. Ges. d. Wiss. hat ihm für die gütige Uebersendung eines Exemplares derselben zu danken.

Der Briefwechsel mit Sophie Germain war für den Schöpfer der Disquisitiones Arithmeticae von so grosser Bedeutung, weil überhaupt in den sechs Jahren seit dem Erscheinen jenes berühmten Werkes ausser diesem Correspondenten sich sonst Niemand erfolgreich mit dem so abstracten Gegenstande beschäftigte. Bekanntlich hat Gauss später noch zwanzig Jahre warten müssen, bis er einen anderen Mitarbeiter auf diesem seinem Lieblingsfelde der Mathematik fand. Die Bewunderung, welche Gauss der Dame in dem vorliegenden Briefe vom 30. April 1807 ausspricht, erscheint daher sehr wohl begründet. Nachdem er seinen Dank für ihre Versuche, die Leiden des Kriegs von ihm fern zu halten, ausgesprochen, schreibt er unter Anderem: »Le goût pour les sciences abstraites en général et surtoût pour les mystères des nombres est fort rare: on ne s'en étonne pas; les charmes enchanteux de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos meurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches

*) Lettera inedita di Carolo Federico Gauss a Sofia Germain publicata da B. Boncompagni. Firenze. Calcografia e autografia Achille Paris. 1879. [Das Original dieses Briefes ist inzwischen aus dem Nachlasse des Principe B. Boncompagni für das Gauss-Archiv erworben. Siehe F. Klein: Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Zweiter Bericht. (Göttinger Nachrichten, Geschäftliche Mittheilungen, 1899, Nr. 1).]

épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur«.

Den wissenschaftlichen Inhalt, der sich auf die Theorie der Komposition der binären quadratischen Formen bezieht, wird wohl jeder am liebsten aus dem Briefe selbst entnehmen.

Ich erlaube mir nur noch die folgende für die Geschichte der Wissenschaft so ausserordentlich wichtige Stelle hervorzuheben. Seiner Mittheilung, dass die astronomischen Arbeiten in den letzten Jahren ihn sehr in Anspruch genommen, aber ihn doch nicht ganz von der höheren Arithmetik abgezogen haben, fügt Gauss hinzu: »Même dans ce dernier hiver j'ai réussi à y ajouter une branche entièrement nouvelle. C'est la théorie des résidus cubiques et des résidus biquarrés, portée à un degré de perfection égal à celui, qu'a atteint la théorie des résidus quarrés. Je mets cette théorie qui répand un nouveau jour sur les résidus quarrés parmi les recherches les plus curieuses dont je me sois jamais occupé«.

Durch diese Angabe wird der Zeitpunkt für die darin genannten Entdeckungen viel genauer festgesetzt, als es durch die Veröffentlichungen und durch die handschriftlichen Aufzeichnungen von Gauss bisher geschehen konnte. Es war nicht möglich mehr über die Zeit jener Entdeckungen mit Bestimmtheit zu sagen, als dass einige Lehrsätze aus seiner Theorie der biquadratischen Reste vor der Ausarbeitung der Theoria motus corporum coelestium niedergeschrieben seien, wie ich dieses ausführlicher in den Bemerkungen Seite 375 des II. Bandes meiner Redaction von Gauss' Werken angegeben habe.

Ich kann diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne auf die Wichtigkeit der Aufsuchung der Briefe von Gauss an Eisenstein aufmerksam zu machen. In einem derselben soll Gauss, wie Eisenstein mündlich an Riemann, und Letzterer wieder mir mündlich mitgetheilt hat, die Grundzüge seines eigenen Beweises des biquadratischen Reciprocitäts-Satzes mit Hülfe der Kreistheilung angegeben haben.

XXXVIII.

GESCHENK FÜR DIE GAUSS-BIBLIOTHEK.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. Mai 1880 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 12. Mai 1880, S. 342—343.]

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, habe ich die Ehre, ein grossartiges Geschenk vorzulegen, welches der Principe Baldassare Boncompagni ihr mit der Bestimmung zur Aufstellung in der Gaussischen Bibliothek gewidmet hat. Es besteht dieses in den seit 1868 bis jetzt erschienenen 11 Bänden und 8 Heften des Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche pubblicato da B. Boncompagni, Socio ordinario dell' accademia Pontificia dei nuovi Lincei, socio correspondente dell' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna e delle R. accademie delle scienze di Torino, e di scienze lettere ed arti di Modena, e socio onorario della R. accademia delle scienze di Berlino. Diese Zeitschrift ist anerkannter Weise, besonders durch die grosse Zahl der sorgfältig ausgearbeiteten Lebensbeschreibungen der Wissenschafts-Männer der neueren Zeit und durch die Herausgabe der zuvor nicht veröffentlichten wissenschaftlichen und biographischen Schriften und Briefe der hervorragenden Mathematiker und Physiker früherer Zeit, so ausserordentlich werthvoll für die Wissenschaft. Die grossen Opfer, welche der Herausgeber noch über seine Thätigkeit als Redactor und als Autor hinaus darbringt, erwerben ihm den ganz besonderen Dank der vielen Verehrer der mathematischen und physikalischen Wissenschaften.

Das geschenkte Exemplar habe ich in der Gaussischen Bibliothek aufgestellt und in den Catalog unter Nr. 5008 A bis M eingetragen.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften beauftragt ihr Mitglied E. Schering, ihren Dank für dies so werthvolle Geschenk dem Pr. B. Boncompagni auszusprechen.

XXXIX.

BRIEFE DER SOPHIE GERMAIN AN GAUSS, IN PHOTOGRAPHIE VERÖFFENTLICHT VON B. BONCOMPAGNI.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 5. Juni 1880 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 23. Juni 1880, S. 367—369.]

Der Principe Baldassare Boncompagni hat der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften wiederum ein sehr werthvolles Geschenk gemacht, welches ich die Ehre habe hier vorzulegen, nämlich die durch seine für die Wissenschaft allzeit bereite grossartige Opferwilligkeit photographisch veröffentlichten fünf ersten Briefe von Sophie Germain an Gauss. Diese Briefe haben ein hervorragend biographisches Interesse nicht nur für die mit so hoher mathematischer Befähigung begabte Dame, sondern auch für Gauss, weil jetzt die von ihm geschriebenen Antworten aufgefunden und veröffentlicht sind.

Von den beiden ersten Briefen der Sophie Germain an Gauss besitzt man auch die Concepte, nämlich, wie Mr. de Courcel dem Principe B. Boncompagni mitgetheilt hat, auf der Bibliothèque Nationale de Paris, Fonds français Nr. 9118. Gedruckt sind diese beiden Brouillons in dem Werke: Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, par H^te^ Stupuy, Paris 1879 pag. 298—302, pag. 308—311. Im Anschluss hieran sind in demselben Werke auch drei Briefe von Gauss an Sophie Germain abgedruckt. Die Originale dieser drei Briefe finden sich in der Bibliothèque nationale de Paris, Fonds français Nr. 9118, welche Mr. Aristide Marre im Jahre 1879 auf Wunsch des Pr. B. Boncompagni zum Zweck der Berichtigung eines Irrthums in dem Buche von H[te] Stupuy durchgesehen hat. Der durch den wissenschaftlichen Inhalt und durch seine Bedeutung für die Geschichte der Mathematik wichtigste Brief von Gauss an Sophie Germain ist im Besitze des Pr. B. Boncompagni. Dieser hat den Brief photographisch veröffentlicht und der Königlichen Gesellschaft der Wiss. ein Exemplar geschenkt, welches ich im vorigen Jahre die Ehre hatte zu überreichen*). Das Original gehörte früher der Autographen-Sammlung des Guillaume Libri an, kam von dort an Mr. Tommaso Montanari, Ingénieur zu Mailand, von welchem es im Jahre 1878 durch Kauf an den Pr. B. Boncompagni gelangte und Dank der Opferwilligkeit dieses um die Wissenschaft so hoch verdienten Mannes gerettet und den Mathematikern zugänglich gemacht ist. Dieser Brief von Gauss ist ein solches Zeugniss für Sophie Germain, dass es allein schon eine genügende Veranlassung zu der Absicht der Stadt Paris hätte bieten können, nämlich, wie Mr. Aristide Marre mir mitzutheilen so gütig war, an der Façade des neu zu erbauenden Hôtel de Ville die Statue der Sophie Germain neben anderen um die Wissenschaft verdienten Persönlichkeiten Frankreichs zu errichten.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften beauftragt ihr Mitglied E. Schering dem Pr. B. Boncompagni ihren verbindlichen Dank auszusprechen.

*) [Siehe Seite 217 dieses Bandes.]

XXXX.

BRIEFE VON LAGRANGE AN EULER, LAPLACE UND CANTERZANI IN PHOTOLITHOGRAPHIEN VERÖFFENTLICHT VON B. BONCOMPAGNI.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 7. August 1880 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 20. Oktober 1880, S. 489—491.]

Der Principe Baldassare Boncompagni hat wiederum die grosse Güte gehabt, der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ein sehr werthvolles Geschenk zu machen, welches in den folgenden von ihm photolithographisch veröffentlichten Schriften besteht:

1. *Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler tirées des archives de la salle des conférences de l'académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg. Saint-Pétersbourg, Expédition pour la confection des papiers de l'état. Atelier héliographique dirigé par G. Scamoni.* 1877.

Die Briefe sind theils in lateinischer Sprache geschrieben und tragen die Datierungen: Taurini: 4to cal. Julii, — die 20 Novembrij 1755, — die 19 Maii 1756, — die 4 Augusti 1758, — die 28 Julii 1759, theils sind sie in französischer Sprache geschrieben mit den Datirungen Turin 24 Novembre 1759, — 26 Décembre 1759, — 1 Mars 1760, — 14 Juin 1762, — 3 Octobre 1762. Der Inhalt betrifft verschiedene Gegenstände aus der Integral-Rechnung, der Variations-Rechnung, der analytischen Geometrie, der analytischen Mechanik und der Theorie der Differential-Gleichungen.

2. *Deux Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange tirées de la bibliothèque royale de Berlin (Collection Meusebach, Portefeuille* Nr. 21 *et Collection Radowitz.* Nr. 4952). *Berlin. Imprimerie de Gustav Schade (Otto Francke)* 1878.

Der eine Brief ist datiert: Paris le 25 nivose an 9, und trägt von anderer Hand die Bemerkungen: Paris le 15. Janv. 1801, La Grange rep. le 21 Mars 1801. Der Inhalt betrifft auch die damals beabsichtigte Fortsetzung von Montucla, l'Histoire des Mathématiques. Der andere Brief trägt kein Datum, aber von Humboldt's Hand die Aufzeichnung: »Lettre de M. de la Grange à M. Laplace écrite de Berlin. Elle m'a été donnée par Mad. la Marquise de Laplace (à Paris, Janv. 1843) A. Humboldt«.

3. *Lettera inedita di Giuseppe Luigi Lagrange tratta dalla biblioteca universitaria di Bologna* (*Corrispondenza Canterzani, Mss.* N. 2096. *Scatola IV*) *Firenze. Calcografia e Litografia Achille. Paris* 1879.

Der Brief ist aus Berlin vom 6. April 1773 datirt und an Canterzani gerichtet.

4. *Sessioni VI e VII. Accademia Pontificia dei nuovi Lincei. Anno XXXIII* (*1880*)*).

---

*) [Der Vollständigkeit wegen möge hier noch das Folgende zusammengestellt werden:

1. In den Göttinger Nachrichten, 1881, S. 343 steht in der Liste der im Mai 1881 bei der Kön. Ges. d. Wiss. eingegangenen Druckschriften:

   »B. Boncompagni, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze mathemat. e fisiche, »T. XIII, Roma 1880, 4⁰.

   »Nach einer brieflichen Mittheilung, die betreffende Widmung steht auf dem Exemplare selbst, »ist dies Geschenk für die Gauss' Bibliothek bestimmt«.

   E. Schering.

2. In dem Verzeichnis der in der Sitzung der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen am 5. November 1881 vorgelegten Arbeiten steht: (s. Gött. Nachr., 1881, S. 345)

   »Schering: Ueber Geschenke des Princ. Boncompagni an Gauss' Bibliothek«.

   In den »Nachrichten« ist über diese Geschenke nicht weiter berichtet. Aber in einem Briefe aus Rom vom 8. Oktober 1881 schreibt der Princ. Boncompagni an Ernst Schering, dass er an die Kön. Ges. d. Wiss. in Göttingen »un exemplaire d'un tirage-à-part intitulé: Testamento inedito di Nicolo Tartaglia etc., Milano etc., 1881« abgesandt habe. Er fügt hinzu: »Vous verrez que dans une note qui occupe les pages 3–48 du même tirage-à-part on »démontre que Nicolas Tartaglia est mort le 13 décembre 1557 et non pas en 1559 comme »Libri, Hankel et d'autres l'avaient dit«.]

XXXXI.

TODES-ANZEIGE.

[Astronomische Nachrichten, Bd. 108, Nr. 2573, S. 66—67.]

Ernst Friedrich Wilhelm Klinkerfues ist geboren den 29. März 1827 in Hofgeismar in Hessen und verschied plötzlich den 28. Januar 1884 3 1/4 Uhr Nachmittags in der Sternwarte zu Göttingen. Seine Eltern gehörten einer gering besoldeten Beamtenfamilie an, so dass seine Lage von klein auf eine bedürftige war, wozu auch noch andere sehr schmerzliche Verhältnisse hinzutraten. Er machte seine Studien am Polytechnicum in Cassel und arbeitete dann als Geometer bei der Main-Weser-Bahn. Als er in Marburg war, fand er Gelegenheit, zu dem verdienstvollen Astronomen Gerling in Beziehung zu treten. Dieser erkannte die Begabung des jungen Klinkerfues, nahm sich seiner mit Interesse an, und begann ihn in die theoretische und praktische Astronomie einzuführen. Zur weiteren Ausbildung in diesem Gebiete veranlasste Gerling Klinkerfues, nach Göttingen zu gehen, und sandte zuvor eine Empfehlung an Gauss. Letzterer lehnte zunächst in einem Briefe vom 14. März 1851 ab, ein Privatissimum zu geben, erwiderte aber am 10. Mai 1851 auf einen zweiten Brief von Gerling Folgendes: »Ich will Ihnen aber, mein alter treuer Freund, im engen Vertrauen, »nicht verhehlen, dass ich zum Theil aus dem Grunde entschiedene Schritte »unterlassen habe, weil ich gerne erst sehen wollte, ob vielleicht für die »Zukunft auf H. Klinkerfues mit reflectirt werden könnte. Sie rühmen »seine Anstelligkeit, seine Talente, seine Kenntnisse und was ebenso wichtig »ist wie alles übrige, seine moralischen Eigenschaften. Es würde nun darauf

»ankommen, ob er für die praktischen Geschäfte des Beobachters (auch des »Calculs) einen feurigen Eifer und unverdrossene Ausdauer besässe, ohne »welche Eigenschaften jene trocken und lästig sind, sowie mit ihnen reizend »und geliebt. Ganz an Schulkenntnissen fehlt es ihm wohl nicht, da er, »wie Sie erwähnen, meine Theoria M. studirt hat. Zeigte er jene Eigen-»schaften mit einer gefälligen Persönlichkeit eine Zeitlang hindurch in hohem »Grade, so würde ich nicht abgeneigt sein, mich eine Zeitlang ohne bestimmten »Gehülfen zu behelfen, bis ich ihn (vielleicht stufenweise) zu weiterem in »Vorschlag bringen könnte.

»Da das lange Ausbleiben seiner Ankunft mich wirklich etwas besorgt »zu machen anfängt, ob er in seinem Vorsatz vielleicht wankend geworden »sein könne, so bedaure ich fast, Ihnen diesen Gedanken nicht schon früher »angedeutet zu haben. Ich unterliess es, weil Ihr Brief vom 18. März sich »so positiv erklärt hatte und weil ich wünschte, dass in die Motive seiner »Herkunft sich keine Erwartungen mischen sollten, die doch nur eine Mög-»lichkeit involviren«.

Diese Möglichkeit wurde zur Verwirklichung. Klinkerfues wurde im Jahre 1851 Assistent, nach Gauss' Tode 1855 Observator an der K. Sternwarte zu Göttingen, erwarb sich den Doctorgrad mit einer Dissertation über eine allgemeine Methode zur Berechnung der Doppelsternbahnen und wurde noch im selben Jahre 1855 zum Assessor der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen gewählt. Er trat 1859 in die provisorische Direction der Sternwarte ein, wurde 1863 zum ausserordentlichen Professor in der philosophischen Facultät und 1868 zum Director der Sternwarte für die Abtheilung der praktischen Astronomie ernannt. Die R. Astr. Soc. in London wählte ihn 1882 zu ihrem Mitgliede.

Schon im Jahre 1849 begannen seine in den Astr. Nachr. veröffentlichten Beobachtungen und zwar der Mondfinsterniss, des Neptun, der Sternbedeckungen, der Cometen und der kleinen Planeten, der erdmagnetischen Variation während Nordlichter etc. Er entdeckte die Cometen 1853 III, 1854 I, 1854 III, 1854 IV, 1855 II und 1857 V. Er beobachtete die Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860 zu Cullera*) in Spanien. Er berechnete die Elemente der Eunomia, des

*) [bei Valencia.]

Cometen 1851 IV, der Melpomene, der Psyche für 1854 und 1855, der Cometen 1854 I und 1854 III, der Circe für 1854, der Doppelsternbahnen ω Leonis, p Ophiuchi.

Klinkerfues' theoretische Arbeiten beziehen sich auf verschiedene Aufgaben der sphärischen Astronomie, auf die Berechnung der Bahnen von Doppelsternen, von Planeten und Cometen, auf die Bestimmung der absoluten Störungen für die Bahnen der kleinen Planeten und für Bahnen von grosser Excentricität und Neigung (in den Abhandlungen der K. Gesellschaft d. Wiss. in Göttingen). Ihm eigenthümlich sind die Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Cometen und Sternschnuppenschwärmen, sowie die Untersuchung über den Einfluss der Bewegung der Lichtquelle auf die Brechbarkeit eines Strahls. Besondere Anerkennung hat sein Werk: »Theoretische Astronomie« gefunden.

Von den Zonenbeobachtungen, welche Klinkerfues in Gemeinschaft mit dem unterzeichneten Professor Schering in den Jahren 1855—63 ausgeführt hat, kündigt Klinkerfues in den Nachrichten der K. Gesellschaft d. Wiss. in Göttingen vom 13. Juli 1864 die erste Hälfte des Catalogs, enthaltend 6000 mittlere Oerter von Fixsternen auf 1860.0 reducirt, als zum Druck bereit an, andere 6000 Beobachtungen seien noch der Reduction bedürftig. Es darf gewiss als wünschenswerth betrachtet werden, dass jene beabsichtigte, aber bis jetzt nicht zur Ausführung gelangte Veröffentlichung noch ermöglicht wird*).

Klinkerfues' academische Vorlesungen erstreckten sich auf sphärische und theoretische Astronomie und auf die Theorie der Störungen.

Während der letzten Jahre beschäftigte sich Klinkerfues mit der Construction eines selbstthätigen Gaszünders und eines Distanzmessers, sowie mit Erfindungen im Gebiete der Meteorologie.

Bei Anerkennung des grossen Werthes der oben angedeuteten Thätigkeit wird mancher Fachmann es bedauern, dass eine mit so vielen Ideen und Talenten reich begabte Natur durch gedrückte Lage und durch trübe Ver-

*) [Diese Veröffentlichung ist inzwischen erfolgt: Stern-Catalog, enthaltend 6900 Sternwörter für 1860.0. Nach den von Professor Klinkerfues in den Jahren 1858 bis 1863 angestellten Zonenbeobachtungen . . . abgeleitet von Dr. W. Schur. Astronomische Mittheilungen von der Kön. Sternwarte zu Göttingen, Zweiter Theil, 1891, gr. Fol., XXVIII u. 77 S.]

hältnisse in der Jugend nicht zur vollständigen Entfaltung und nicht zur ganz ausgiebigen Kraftleistung hat gelangen können.

Zahlreiche Freunde und dankbare Schüler bewahren dem Dahingeschiedenen ein ehrendes und liebevolles Andenken.

Göttingen 1884 Febr. 3. E. Schering.

XXXXII.

BRIEFWECHSEL ZWISCHEN G. LEJEUNE DIRICHLET UND HERRN LEOPOLD KRONECKER.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 4. Juli 1885 und veröffentlicht in den »Nachrichten« derselben vom 16. December 1885, S. 361—382.]

Herr Kronecker hat die Güte gehabt, mir die von Dirichlet an ihn geschriebenen Briefe zuzusenden, um dieselben der Königlichen Universitäts-Bibliothek in Göttingen als Geschenk zu übergeben.

Diese Briefe gehören, ausser dem ersten, der Zeit von Dirichlet's Aufenthalt in Göttingen an und haben durch diese örtliche Beziehung ein besonderes Interesse für uns. Da dieselben auch eine grosse geschichtliche Bedeutung für die mathematische Wissenschaft besitzen, so habe ich Herrn Kronecker um die Erlaubniss gebeten, diese Briefe sowie auch einige von Herrn Kronecker an Dirichlet gerichtete Briefe abdrucken zu lassen, auf welche die oben erwähnten sich beziehen, und von welchen ich wusste, dass Dirichlet's Sohn dieselben nach des Vaters Tode an den Verfasser zurückgegeben hatte. Diese Erlaubniss hat Herr Kronecker gütigst gewährt und auch gestattet, dass seine Briefe an Dirichlet mit dessen Antworten auf dieselben der hiesigen Universitäts-Bibliothek übergeben werden.

[Es folgen dann in den Göttinger Nachrichten 1885 S. 362—382 zehn Briefe des oben genannten Briefwechsels aus der Zeit von Mai 1853 bis August 1858.]

XXXXIII.

CARL FRIEDRICH GAUSS UND DIE ERFORSCHUNG DES ERDMAGNETISMUS.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 2. Juli 1887 und veröffentlicht in] dem zur Jubelfeier der Georgia Augusta ausgegebenen vierunddreissigsten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
[Mathematische Classe, S. 1—79. Göttingen, 1887.]

Indem die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften sich an der Feier des ein hundert und fünfzig jährigen Bestehens der Georgia Augusta betheiligt, liegt es ihr nicht nur aus äusseren Gründen nahe, sich die Umstände ihrer letzten Jubelfeier zu vergegenwärtigen, sondern einige ganz ausserordentlich hoch stehende Gelehrte, welche damals mitwirkten, ziehen auch unsere besondere Aufmerksamkeit auf sich.

Carl Friedrich Gauss hielt in einer öffentlichen Sitzung der Gesellschaft der Wissenschaften*) auf den ausgesprochenen Wunsch des hier anwesenden auswärtigen Mitgliedes der Gesellschaft, Alexander von Humboldt, einen Vortrag. Er berichtete über das von ihm in jener Zeit construirte neue Instrument zur Bestimmung der Variationen der horizontalen erdmagnetischen Kraft**) und über die Benutzung dieses Bifilar-Magnetometers bei dem von ihm und von unserem verehrten gegenwärtigen Senior Wilhelm Weber vier Jahre zuvor hergestellten electrischen Telegraphen***).

*) [Am 19. September 1837. Siehe Göttingische gelehrte Anzeigen, 1837, Bd. III, S. 1721.]
**) [Siehe Gauss' Werke Band V, S. 357.]
***) [Siehe Gauss' Werke, Band V, S. 370.]

In jener Zeit hatte der Magnetische Verein seine Wirksamkeit begonnen und häufte das grosse Beobachtungs-Material an, aus welchem schon damals so wichtige Gesetze für die erdmagnetischen Erscheinungen abgeleitet wurden und aus welchen durch die Verbindung mit späteren Beobachtungen noch wichtigere Ergebnisse zu erhoffen sind.

Auch jetzt wieder haben wir neues und ausserordentlich umfangreiches Material erdmagnetischer Beobachtungen, nämlich das der internationalen Polar-Expeditionen und der damit gleichzeitigen Arbeiten in Göttingen und auf den übrigen erdmagnetischen Observatorien.

Zur Zeit der Jubelfeier des hundertjährigen Bestehens unserer Universität wurde die Errichtung der Magnetischen Observatorien in den Englischen Colonieen vorbereitet; ein Unternehmen, welches durch die umfangreiche Veröffentlichung der ungezählten Beobachtungen einzig in ihrer Art dasteht und einer vollständigeren, freilich auch sehr mühevollen, Bearbeitung noch bedeutungsvolle Resultate verspricht.

Auch gegenwärtig wird das öffentliche Interesse für erdmagnetische Untersuchungen wieder lebhafter, wie aus den Berathungen des Römischen Parlamentes im März dieses Jahres über die Gründung eines magnetischen Observatoriums in Italien hervorgeht, für welches der Name Cassini-Observatorium in Vorschlag gebracht ist zur Erinnerung an den grossen Astronomen, welcher vor hundert Jahren ausgedehnte Untersuchungen über die jährlichen Variationen der horizontalen Richtung der erdmagnetischen Kraft anstellte.

Die mehrfachen Vergleichs-Punkte, welche für die allgemeinere Betheiligung an der Thätigkeit in diesem wissenschaftlichen Gebiete zwischen der Jetztzeit und der Zeit des letzten Jubiläums bestehen, rufen das Interesse hervor, die persönliche Stellung kennen zu lernen, welche Gauss, Alexander von Humboldt und ihre Freunde zu jener Thätigkeit einnahmen.

Die Beziehungen, in welche Humboldt zu Gauss trat, knüpften an Personen, Sachen und Untersuchungs-Gebiete sich für Humboldt schon in der Zeit seines ersten hiesigen Aufenthaltes, also vor etwa hundert Jahren an. Wir erfahren dieses am besten durch die beiden inhaltsreichsten Briefe, welche aus Humboldt's Studienzeit in Göttingen von ihm noch erhalten sind.

Bei dem Lesen der Humboldt'schen Briefe müssen wir uns seine Character-Eigenthümlichkeiten vergegenwärtigen. Unvorbereitet gelesen erhält man davon leicht einen entsprechenden Eindruck, wie ihn Schiller zu Anfange seiner Bekanntschaft mit Alexander von Humboldt in Bezug auf dessen Persönlichkeit in sich aufnahm. Schiller schreibt seine harte und gewiss ungerechte Beurtheilung am 6. August 1797 seinem Freunde Körner*), aber dieser erkannte sehr wohl die grosse Begabung Humboldt's sowie auch für dessen zuweilen Widerspruch erregendes Wesen den wahren Grund in der ausserordentlichen Lebhaftigkeit der Auffassung und der Ausdrucksweise, in der enthusiastischen Vertheidigung der selbstgewonnenen Ueberzeugungen, in der Vielseitigkeit der Studien zum Zwecke der Ausbildung für die beabsichtigten grossen naturwissenschaftlichen Reisen.

Humboldt's Lehrer der Mathematik, Ernst Gottfried Fischer, war in freundschaftliche Beziehungen zu Johann Friedrich Pfaff getreten, als dieser sich während des Sommers 1787 in Berlin aufhielt, um unter Bode's Leitung sich mit practischer Astronomie zu beschäftigen, nachdem er bis dahin an der Universität Göttingen Mathematik studirt hatte.

Pfaff war im März 1788 in seinem 22. Lebensjahre Professor der Mathematik an der Universität Helmstedt als Nachfolger von Klügel, und zwar auf die Empfehlung des Göttinger Physikers Lichtenberg geworden.

Zu Pfaff ist auch Gauss in mehrfache Beziehung getreten; Gauss' Doctor-Dissertation ist von Pfaff in der philosophischen Facultät zu Helmstedt 1799 beurtheilt. Im Jahre 1800 wohnte Gauss einige Monate bei Pfaff, um die Universitäts-Bibliothek zu benutzen**). Zwischen beiden Gelehrten bestand eine ausgedehnte Correspondenz über mathematische Untersuchungen und über neu erschienene wissenschaftliche Werke.

Für das grosse Ansehen, welches Pfaff in dieser Zeit genoss, giebt die bekannte Erzählung Zeugniss, dass Laplace, als er gefragt wurde, wer der grösste Mathematiker in Deutschland sei, geantwortet haben soll, das sei Pfaff. Auf die Bemerkung, ob man nicht Gauss als solchen zu betrachten

*) [Siehe: Alexander von Humboldt. Eine wissenschaftliche Biographie, im Verein mit [mehreren Gelehrten] herausgegeben von Karl Bruhns. In drei Bänden. Leipzig 1872. Band I. S. 211—214.]

**) [Siehe Seite 200 dieses Bandes.]

habe, soll Laplace erwidert haben, Gauss sei der grösste Mathematiker in Europa, aber Pfaff in Deutschland*).

Humboldt hatte in seinem zwanzigsten Lebensjahre auf seiner Reise nach Göttingen mit seines Lehrers Empfehlung den Professor Pfaff in Helmstedt besucht und schrieb von Göttingen am 11. Mai 1789 seinem neu gewonnenen Freunde Pfaff**):

»So entfernt auch immer die Verhältnisse sind, in welche die Natur »uns beide gesetzt hat, so wenig ich auch auf alle die vorzüglichen Eigen»schaften Ausspruch machen darf, die Sie in der literarischen Welt, wie in »dem glücklichen Zirkel Ihrer näheren Bekannten, auszeichnen, so wage ich »es dennoch, Sie mit unter der Zahl meiner Freunde zu nennen. Mein Herz »spricht zu laut dafür, als dass ich ihm diesen Sieg über Zeremoniel und »falsche Höflichkeit nicht lassen sollte. Wenn Dienstfertigkeit, liebreiche »Aufnahme, Antheil an meinem Wohl, Vertraulichkeit im Umgang, wenn dies »alles Zeichen ächter Freundschaft sind, wer hat dann mehr Recht zu meiner »dankbarsten Zuneigung als Sie, der Sie mich und meinen ehemaligen Führer »während unseres Aufenthalts in Helmstädt mit so vielen Beweisen Ihrer »Güte und Theilnehmung überhäuften? Ich fühle nur zu sehr das Unange»nehme meiner Lage, die mich auf so kurze Zeit das Vergnügen Ihres lehr»reichen Umgangs geniessen liess. Eine Freude, die man nur kostet, ist oft »schlimmer, als eine, die man ganz entbehrt. Dennoch rechne ich jene Tage »meiner Reise unter die frohesten meines Lebens. Die Bekanntschaft so »vieler gelehrten Männer, die mehr als dies, die auch gebildet zum gesell»schaftlichen Leben sind, war mir viel, überviel werth. Es ist für mich ein »niederschlagender Anblick, Menschen von Genie zu sehen, die oft auf der »höchsten Stufe intellektueller Cultur stehen, und dabei keine andere Mit»theilung als durch die Feder oder vom Katheder kennen. Sie, theuerster »Herr Professor, der Sie lange Zeit hier in Göttingen gelebt haben, müssen

---

*) [Diese Erzählung steht in dem Vorworte S. VII der: »Sammlung von Briefen, gewechselt zwischen Johann Friedrich Pfaff und ..... Anderen«. Herausgegeben von [seinem Sohne] Dr. Carl Pfaff. Leipzig 1853.]

**) [Dieser Brief steht in der eben genannten Sammlung von Briefen von J. F. Pfaff auf S. 231—237.]

»diesen Anblick aus eigener Erfahrung kennen. Gott, wenn ich Ihren Clubb »und den unsrigen vergleiche! Ich schätze Sie glücklich, dass Sie in Helm- »städt leben. Ich würde mir eben diesen Aufenthalt wünschen, wenn er »sonst für den individuellen Zweck meines Studiums vortheilhafter wäre. Ein- »samkeit des Orts, armselige Bauart und dergleichen äussere Verhältnisse »müssen die Freude eines verständigen Menschen nicht stören. Wer in der »Lebens-Philosophie noch nicht soweit gekommen ist, sich von allem diesem »loszureissen, der wird seiner Glückseligkeit lange nachjagen, ehe er sie »findet. Eben diese Ruhe, diese Zufriedenheit mit Ihrer Lage, diese Hei- »terkeit, die sich, wie ein helles Licht, über alle Ihre Ideen zu verbreiten »scheint, und die Ihnen gewiss bei Ihren tiefsinnigen Speculationen so sehr »zu statten kommt, war es, was mir Ihre persönliche Bekanntschaft so vor- »züglich interessant machte, da ich (was Ihnen freilich gleichgiltig sein muss) »schon vorher für Ihr mathematisches Verdienst eine so grosse Hochachtung »hatte. — Doch ich fange gar an, mir Untersuchungen über Ihren Charakter »zu erlauben! Wenn Sie mich näher kennten, würden Sie sehen, wie mich »meine jugendliche Offenheit noch oft zu ähnlichen Ausschweifungen ver- »leitet. Möge dies aufrichtige Geständniss meiner Fehler mir eher Ver- »zeihung bei Ihnen bewirken!

»Die kleine Abschrift aus Cramer hätte ich Ihnen gern schon eher »geschickt, wenn mich Kästner nicht, wegen der Feierung des Dankfestes, »eine Zeit lang hätte warten lassen. Ich wünschte, dass sich öfter eine solche »Gelegenheit fände, durch die ich Ihnen einen, wiewohl geringen, Beweis »meiner Dankbarkeit und Freundschaft geben könnte. Für Ihren Brief an »Kästner bin ich Ihnen sehr verbindlich. Ihre Güte lässt mich nur fürchten, »Sie möchten bei ihm grössere Erwartungen erregen, als ich mit meinen ein- »geschränkten Kenntnissen und Kräften leisten kann. Kästner hat mich »überaus gütig aufgenommen. Ich habe ihn mehrmals besucht, und sein »Umgang ist mir sehr lehrreich. Wer wollte bei so einem wahrhaft grossen »Mann sich an das Aeussere stossen.

»Da ich bestimmt bin, meinem Vaterland im Fabrikfache zu dienen, »so kann ich die Mathematik nur als Hülfswissenschaft treiben. Leider er- »fordert jenes, sonst überaus angenehme, Fach so viele andere botanische, »mineralogische, chemische und statistische Kenntnisse, dass man all seine

»Kräfte zusammennehmen muss, um auch nur etwas Mittelmässiges zu leisten. »Doch bleibt mathematisches Studium, besonders mechanisches, die Haupt»basis davon. Was ist aber Mechanik ohne höhere Analysis? Wer mit dem »Maschinenwesen in den Manufakturen und beim Bergbau nur ein wenig »bekannt ist, wird bald aus deren Anwendung, bald aus dem Mangel ge»wisser Einrichtungen die Vortheile der höheren Mechanik, den Schaden, den »Unkunde darin bringt, einsehen lernen. Die Boulton'sche Dunstmaschine*) »und die Höll'sche Wassersäulenmaschine**) sind, deucht mich, die besten »Apologien der theoretischen Mechanik, wenn so etwas noch einer Apologie »bedürfte. Bei meinen so geringen mathematischen Kenntnissen habe ich »genug erfahren, wie wichtig jenes Studium dem Kameralisten sei. So viel »Zeit ich meinen anderen Beschäftigungen entziehen kann, widme ich der »Mathematik, und besonders der Analysis des Unendlichen, worin ich noch »grosse Lücken bei mir verspüre. Ich arbeite daher den Tempelhof durch, »den ich schon in Berlin anfing. Dabei aber übe ich mich immer im Ma»schinenzeichnen und im Erfinden eigener Zusammensetzungen. So weit ich »von der Eitelkeit entfernt bin zu glauben, dass ich etwas Neues ent»decken werde, so haben mir diese Uebungen doch viel genützt, weil man »dabei so viel über die Mittel räsonniren muss, gewisse Zwecke zu erreichen. »Ich habe oft mit Fischer herzlich gelacht, wenn er anfangs meine Angaben »anstaunte und hernach fand, dass durch die vielen Verbindungen Kraft und »Last an einem Punkt angebracht waren und sich hemmten.

»Doch indem ich mich gegen alle mechanischen Erfindungen sträube, »muss ich nur aufrichtig gestehen, dass ich in einem anderen Theile der »Mathematik auf eine Entdeckung ausgegangen bin, in der ich (wann ist ein »junger Mensch wohl unzufrieden mit sich selbst?) mir Genüge geleistet habe. »So unartig es auch ist, den Anfang meiner Correspondenz mit Ihnen, ver»ehrungswerther Freund, mit einem so weitschichtigen Briefe zu machen, so

---

*) [In der Metallwaaren-Fabrik von Matthew Boulton in Soho bei Birmingham wurden von 1775 an die ersten Watt'schen Dampfmaschinen gebaut (s. Matschoss: Geschichte der Dampfmaschine. Berlin 1901).]

**) [Die von dem Oberkunstmeister Höll in Chemnitz von 1749 an erbauten Wassersäulenmaschinen sind in Delius: Anleitung zu der Bergbaukunst, Wien 1773, S. 379—388; Tafel 17, und in Hederich: Die hydraulischen Motoren, Jena 1899 (zugleich dritter Band von Meissner: Hydraulik) S. 98—99: Tafel 28 beschrieben.]

»will ich mich doch vorläufig etwas näher erklären. Die Sache liegt mir zu »sehr am Herzen. Bei meinen kleinen analytischen Arbeiten empfand ich »einmal sehr lebhaft die Unbequemlichkeit, dass man in Gleichungen, wo »Summen und Faktoren vorkommen, nicht den ganzen Werth durch Loga- »rithmen darstellen kann. Ich dachte über die Möglichkeit nach, dem Uebel »abzuhelfen und fand zwei Wege, entweder alle Summen und Differenzen »zweier Grössen in Produkte zu verwandeln, oder eine Art Logarithmen zu »finden, mit denen man wirklich addiren und subtrahiren könnte. — — —

»Ich erwarte von Ihnen die Frage, ob mein System aber auch brauchbar »sei, ob es Schwierigkeiten des analytischen Calcul's löse? Ich antworte offen- »herzig, dass ich in sofern das εὕρηκα noch nicht anstimmen mag. Ich glaube »sogar, dass meine Logarithmen immer zu wenig kleiner wie die dazu ge- »hörigen Zahlen bleiben werden, als dass sie in Rechnungen vortheilhaft sein »sollten. Aus der Natur der Grundzahlen denke ich es vielleicht gar zu »erweisen. Aber wenn dies auch erste Veranlassung war, so war es doch »nicht Zweck meiner Untersuchung. Ich wollte blos nach der Methode der »Alten verfahren, die mehr auf Ebenmaass, Gleichheit in der Ausführung, »auf Zusammenhang der Sätze unter einander, als auf ihre Anwendung hin- »arbeiteten. Und darin werden Sie mich gewiss nicht tadeln, der Sie (es ist »nicht mein Urtheil, das ich schreibe) unter die wenigen Mathematiker »Deutschlands gehören, die den Alten an Präcision und Schärfe so nahe ge- »treten sind. — — — — — — — — — — — — — —

»Wenn Sie, theuerster Freund, mir die Erlaubniss ertheilen, so wage »ich, das kleine System Ihnen vorzulegen. Aber ehe ich diese Erlaubniss »nicht habe, will ich mich begnügen, es für mich selbst noch mehr auszu- »arbeiten. Ich setze in die Nachsicht weniger Menschen so vieles Vertrauen, »als in die Ihrige. Darum wage ich Sie zuerst um etwas zu bitten, was ich »von keinem anderen fordern möchte.

»Es liegt mir daran, dass unser lieber Fischer, dem ich nicht genug »für Ihre Bekanntschaft danken kann, von jener kleinen Arbeit bis jetzt »nichts wisse. Ich ersuche Sie daher (was freilich bei einer so gering- »fügigen Sache kaum zu fürchten wäre), dass Sie ihm nichts davon schreiben.

»Ich bin nicht im Stande, mich über die Weitschweifigkeit dieses Briefes »zu vertheidigen. Wenn aber einige Achtung und Vertrauen auf höhere

»Einsicht, Lust sich von dem Meister in der Kunst belehren zu lassen, Eifer »für das mathematische Studium und jugendliche Offenherzigkeit entschul- »digen können, so darf ich Anspruch auf Ihre Nachsicht machen.

»Ob ich gleich billig fürchten sollte, dass dieser erste Brief Sie von »aller weiteren Correspondenz abschrecken wird, so bin ich doch unverschämt »genug, Sie um die Gewogenheit zu bitten, mich durch ein Paar Zeilen »wissen zu lassen, ob ich Ihnen mein Logarithmensystem vorlegen darf »oder nicht.

»Ich bin mit den Empfindungen der tiefsten Hochachtung und dank- »barsten Zuneigung u. s. w.

»Lichtenberg, Gmelin, Spittler, Kästner und der junge Professor »Buhl empfehlen sich ihnen alle und danken für Ihr freundschaftliches Andenken. Kästner wird Ihnen nächstens die verlangten Bücher übersenden. »Er las gestern eine Abhandlung in der hiesigen Sozietät vor. Ich habe »nichts davon gehört, als dass ich sehe, es müsse etwas über achromatische »Fernröhre sein«.

Die hier angedeuteten Gedanken Humboldt's über eine Erleichterung der Berechnung der Logarithmen von Summen und Differenzen blieben ohne Erfolg*), aber die Erwähnung derselben mag hier Platz gefunden haben, weil sie eine sachliche Beziehung zu Gauss bilden. Dieser construirte später die jetzt in so ausgedehntem Gebrauche angewendete Tafel zur bequemeren Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind; er veröffentlichte dieselben, nachdem er sie schon viele Jahre zu seinen umfangreichen astronomischen Berechnungen benutzt hatte, im November 1812**).

Alexander von Humboldt schreibt 1789 an den jungen Theologen Wegener — der 1837 in Züllichau als Superintendent gestorben ist — Folgendes über dieselbe Reise nach Göttingen***).

»Ich glaube wir reisten den 10. April von Berlin ab. — — — — —

»— — — Von Magdeburg aus bereiste ich die Salzwerke von Schö-

*) [Karl Bruhns in der oben S. 235 genannten Biographie von A. von Humboldt, Band III, S. 4 geht näher auf diese Gedanken Humboldts ein.]

**) [Siehe Gauss' Werke. Bd. III. S. 244.]

***) [Siehe K. Bruhns: Biographie von A. v. Humboldt, Band I. S. 62 und 78.]

»nebeck, Grossensalza und Frosen, auch in Sachsen die neue Colonie von »Herrnhutern, Gnadau. So gross auch meine Erwartungen davon waren, »so fand ich sie doch übertroffen. Die Bauart der Häuser, ihre Rein- »lichkeit, die Sorge für ihre Erhaltung, die Armenpflege, die Industrie der »Einwohner, alles, die ganze Einrichtung der Colonie ist ein Ideal eines »kleinen wohlgeordneten Staats.

»Göttingen, eine Universität, i. e. Vernunfthaus (wo die Vernunft zu »holen ist, sollte sie billig wohnen), wo vielleicht sechsmal Physik gelesen »wird, hat selbst auf seiner Bibliothek gar keinen Ableiter — und Gnadau, »eine Colonie abergläubischer Schwärmer, hat deren fünf, obgleich die ganze »Stadt nur aus etlichen zwanzig Häusern besteht!!! Und dazu ist ein Ab- »leiter auf der Kirche«.

Dasselbe Gebäude also, welches während Humboldt's erster Anwesenheit in Göttingen bei ihm so grossen Anstoss erregte, weil es noch der von Franklin achtzehn Jahre zuvor gemachten Erfindung zum Schutze gegen die gewaltthätigen Zerstörungen des Blitzes entbehren musste, war 1837 zur Zeit von Humboldt's Gegenwart bei der Jubelfeier der Universität einer der ersten Träger für die von Gauss und Weber vier Jahre zuvor hergestellten Leitungen derjenigen wohlthätigen Blitze geworden, welche die Gedanken der Menschen auf die grössten Entfernungen augenblicklich zu vermitteln im Stande sind.

Zur Darstellung der Entwicklung der Lehre vom Erdmagnetismus vor Gauss mag uns der Brief dienen, welchen Alexander von Humboldt zur Empfehlung der Errichtung von magnetischen Observatorien in den Englischen Colonieen an den Herzog von Sussex schrieb. Dieser für die Förderung der Wissenschaften begeisterte Herr war Praesident der Royal Society of London; er hatte als Prinz Augustus Frederic von 1786 bis 1791 in Göttingen studirt und bethätigte sein Wohlwollen für diese Universität unter Anderem auch dadurch, dass er im Jahre 1826 der Sternwarte eine von Hardy verfertigte ausgezeichnete astronomische Pendel-Uhr schenkte, welche noch gegenwärtig die Haupt-Uhr in Göttingen ist.

Alexander von Humboldt an den Herzog von Sussex*):

*) [Dieser Brief steht in den: Astronomischen Nachrichten herausgegeben von H. C. Schumacher. Band 13. Nr. 306. Seite 281—292. Altona 1836 Mai 9. Schumacher fügt S. 281 einige einleitende

»Monseigneur,

»Votre Altesse Royale, noblement interessée aux progrès des connoissances »humaines, daignera agréer, je m'en flatte, la prière que j'énonce avec une »respectueuse confiance. J'ose fixer Son attention sur des travaux propres à »approfondir, par des moyens précis et d'un emploi presque continu, les va»riations du *Magnétisme terrestre.* C'est en sollicitant la coopération d'un »grand nombre d'observateurs zélés et munis d'instrumens de construction »semblable, que nous avons réussi, depuis huit ans, Mr. ARAGO, Mr. KUPFFER »et moi, à étendre ces travaux sur une partie très-considérable de l'hémisphère »boréal. Des *stations magnétiques* permanentes étant établies aujourd'hui depuis »PARIS jusqu'en CHINE, en suivant vers l'est les parallèles de 40^0 à 60^0, je »me crois en droit, Monseigneur, de solliciter par Votre organe le concours »puissant de la Société Royale de LONDRES pour favoriser cette entreprise et »pour l'agrandir en fondant de nouvelles stations, tant dans le voisinage de »l'équateur magnétique que dans la partie tempérée de l'hémisphère austral.

»Un objet aussi important pour la Physique du Globe et pour le per»fectionnement de l'art nautique est doublement digne de l'intérêt d'une »Société qui, dès son origine, avec un succès toujours croissant, a fécondé le »vaste champ des sciences exactes. Ce seroit avoir peu suivi l'histoire du »développement progressif de nos connoissances sur le *Magnétisme terrestre* »que de ne pas se rappeler le grand nombre d'observations précieuses qui »ont été faites à différentes époques et qui se font encore dans les Iles BRI»TANNIQUES et dans quelques parties de la zone équinoxiale soumises au même »Empire. Il ne s'agit ici que du désir de rendre ces observations plus utiles,

---

Worte hinzu. ».......Wir glauben unsern Lesern einen angenehmen Dienst zu erweisen, wenn wir »ihnen den Auszug eines Briefes (in der Ursprache) mittheilen, den derselbe hochberühmte Gelehrte [A. v. »Humboldt] vor kurzem an den Herzog von Sussex, Praesidenten der Königlichen Societät zu London, »gerichtet hat«. Dann steht der Brief, englisch, in: The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science, 3 series, Vol. 9. July 1836. p. 42—53. Auf S. 42 heisst es dort in der Anmerkung: »We »translate this letter from Schumacher's Astronomische Nachrichten. Nr. 306, which has been kindly commu„nicated to us for the purpose«. Ausserdem findet man den Brief in dem Werke: De la Roquette: »Humboldt. Correspondance scientifique et littéraire etc.«. Paris. 1865, p. 338—357 und zwar aus dem Philosophical Magazine etc. wieder in das Französische übersetzt, wie aus einer Bemerkung auf S. 446 des Werkes von de la Roquette hervorgeht. Daher weicht dort der Text an vielen Stellen etwas von dem in den Astronom. Nachr. ab. De la Roquette hat die Astronom. Nachr. Nr. 306 nicht gesehen, denn er fragt S. 446, in welcher Sprache ursprünglich der Brief geschrieben sei.]

»c'est-à-dire plus propres à manifester de grandes lois physiques, en les »coordonnant d'après un plan uniforme et en les liant aux observations qui »se font sur le continent de l'EUROPE et de l'ASIE boréale.

»Ayant été vivement occupé dans le cours de mon voyage aux Régions »équinoxiales de l'AMÉRIQUE, pendant les années 1799—1804, des phénomènes »de l'intensité des forces magnétiques, de l'inclinaison et de la déclinaison »de l'aiguille aimantée, je conçus, au retour dans ma patrie, le projet »d'examiner la marche des *variations horaires de la déclinaison* et les *pertur-»bations* qu'éprouve cette marche, en employant une méthode que je croyois »n'avoir point encore été suivie sur une grande échelle. Je mesurai à BERLIN »dans un vaste jardin, surtout à l'époque des solstices et des équinoxes, »pendant les années 1806 et 1807, d'heure en heure (souvent de demi-heure »en demi-heure) sans discontinuer pendant quatre, cinq ou six jours et autant »de nuits, les changemens angulaires du méridien magnétique. Mr. OLTMANNS, »avantageusement connu des astronomes par ses nombreux calculs de positions »géographiques, voulut bien partager avec moi les fatigues de ce travail. »L'instrument dont nous nous servions, étoit une *lunette aimantée* de PRONY, »susceptible de retournement sur son axe, suspendue d'après la méthode de »COULOMB, placée dans une cage de verre et dirigée sur une mire très-»éloignée dont les divisions, éclairées pendant la nuit, indiquoient jusqu'à »six ou sept secondes de variation horaire. Je fus frappé en constatant la »régularité habituelle d'une *période nocturne*, de la fréquence des perturbations, »surtout de ces oscillations dont l'amplitude dépassoit toutes les divisions de »l'échelle, qui se répétoient souvent aux mêmes heures avant le lever du »soleil et dont les mouvemens violents et accélérés ne pouvaient être attribués »à aucunc cause mécanique accidentelle. Ces *affollemens* de l'aiguille dont »une certaine périodicité a été confirmée récemment par Mr. KUPFFER d'après »le récit de son *Voyage au* CAUCASE, me paroissoient l'effet d'une réaction de »l'intérieur du Globe vers sa surface, j'oserois dire des *orages magnétiques*, qui »indiquent un changement rapide de tension. Je désirois dès lors d'établir »à l'est et à l'ouest du méridien de BERLIN, des appareils semblables aux »miens pour obtenir des observations correspondantes faites à de grandes »distances et aux mêmes heures; mais la tourmente politique de l'ALLEMAGNE »et un prompt départ pour la FRANCE, où je fus envoyé par mon Gouver-

»nement, entravoient pour longtems l'éxécution de ce projet. Heureusement »mon illustre ami, Mr. ARAGO, entreprit, je crois vers l'an 1818, après son »retour des côtes d'AFRIQUE et des prisons d'ESPAGNE, une série d'observations »de déclinaisons magnétiques à l'Observatoire de PARIS, qui, faites journelle-»ment à des intervalles uniformément fixés, et continuées, d'après un même »plan, jusqu'à ce jour, l'emportent par leur nombre et leur liaison mutuelle, »sur tout ce qui a été tenté dans ce genre d'investigations physiques. L'ap-»pareil de GAMBEY dont on se sert, est d'une exécution parfaite. Muni de »micromètres à microscopes, il est d'un emploi plus commode et plus sûr »que la lunette de PRONY, attachée à un fort barreau aimanté de $20\frac{1}{4}$ pouces »de longueur.

»C'est dans le cours de ce travail que Mr. ARAGO a découvert et constaté »par de nombreux exemples un phénomène qui diffère essentiellement de »l'observation faite par OLOF HIORTER à UPSAL en 1741: il a reconnu non »seulement que les aurores boréales troublent la marche régulière des décli-»naisons horaires là où elles ne sont pas visibles, mais aussi que dès le »matin, souvent dix ou douze heures avant que le phénomène lumineux se »développe dans un lieu très-éloigné, ce phénomène s'annonce par la forme »particulière que présente la courbe des variations diurnes, c. a. d. par la »valeur des *maxima* d'élongation du matin et du soir. Un autre fait nouveau »se manifesta dans les perturbations. Mr. KUPFFER, ayant établi à KASAN, »presque aux limites orientales de l'EUROPE, une boussole de GAMBEY, entièrement »semblable à celle dont se sert Mr. ARAGO à PARIS, les deux observateurs »purent se convaincre par un certain nombre de mesures correspondantes de »déclinaison horaire, que, malgré une différence de longitude de plus de 47°, »les perturbations étoient isochrones. C'étoient comme des signaux qui de »l'intérieur du Globe arrivoient simultanément à sa surface, vers les bords »de la SEINE et du WOLGA.

»Lorsque en 1827 je me fixai de nouveau à BERLIN, mon premier soin »étoit de reprendre le cours des observations faites à de petits intervalles »pendant plusieurs jours et plusieurs nuits, dans les deux années de 1806 »et 1807. Je tâchai en même tems de généraliser les moyens d'observations »simultanées dont l'emploi accidentel venoit de donner des résultats si im-»portans. Une boussole de GAMBEY fut placée dans le *pavillon magnétique*,

»entièrement dépourvu de fer que je fis construire au milieu d'un Jardin. »Le travail régulier ne put commencer que dans l'automne de 1828. Appelé, »au printemps de l'année 1829, par S. M. l'Empereur de RUSSIE pour faire »un voyage minéralogique dans le nord de l'ASIE et à la Mer CASPIENNE, j'eus »occasion d'étendre rapidement la ligne des stations vers l'est. A ma prière »l'Académie Impériale et le Curateur de l'université de KASAN firent con-»struire des *maisons magnétiques* à St. PETERSBOURG et à KASAN. Au sein de »l'Académie Impériale, dans une commission que j'ai eu l'honneur de présider, »on discutoit les avantages immenses que pouvoit offrir à la connaissance des »lois du magnétisme terrestre, la vaste étendue de pays limitée d'un côté par »la courbe sans déclinaison de DOSKINO (entre MOSCOU et KASAN ou plus »exactement, d'après Mr. ADOLPHE ERMAN, entre OSABLIKOWO et DOSKINO, par »lat. 56^0 0′ et long. 40^0 36′ à l'est de PARIS) et de l'autre par la courbe sans »déclinaison d'ARSENTCHEWA près du LAC BAIKAL que l'on croit identique avec »celle de DOSKINO par une différence de méridiens de 63^0 21′. Le départe-»ment Impérial des Mines ayant généreusement concouru au même but, des »*stations magnétiques* ont été établies successivement à MOSCOU, à BARNAOUL »dont j'ai trouvé la position astronomique au pié de l'ALTAI par lat. 53^0 19′ 21″; »long. 5^h 27′ 20″ (à l'est de PARIS) et à NERTSCHINSK. L'Académie de St. PE-»TERSBOURG a fait plus encore: elle a envoyé un astronome courageux et habile, »Mr. GEORGE FUSS, frère de son secrétaire perpétuel, à PEKING et y a faite »construire, dans le jardin du couvent des moines de rite grec, un *pavillon »magnétique*. On ne peut faire mention de cette entreprise sans se rappeler »que (selon le *Penthsaoyani**), histoire naturelle médicale, composée sous la »dynastie des SOUNG, presque 400 ans avant CHRISTOPHE COLOMB et avant que »les Européens eussent la moindre notion de la déclinaison magnétique), les »CHINOIS suspendoient leurs aiguilles au moyen d'un fil pour leur donner le »mouvement le plus libre et qu'ils savoient que ainsi suspendues *à la Coulomb* »(comme dans l'appareil du Jesuite LANA au 17^{me} siècle) les aiguilles décli-»noient au sud-est et ne s'arrêtoient jamais au véritable point sud. Depuis »le retour de Mr. FUSS un jeune officier des mines, Mr. KOWANKO que j'ai

---

*) [Ueber Penthsaoyani siehe die Bemerkung auf S. 446—447 des oben, S. 242, genannten Werkes von de la Roquette.]

»eu le plaisir de rencontrer dans l'OURAL, continue en CHINE les observations »de déclinaison horaires correspondantes à celles d'ALLEMAGNE, de St. PETERS-»BOURG, de KASAN et de NICOLAJEFF en KRIMMÉE, où l'Amiral GREIGH à fait »établir une boussole de GAMBEY, confiée au directeur de l'Observatoire, Mr. »KNORRE. J'ai obtenu aussi que dans les mines de FREIBERG en SAXE, dans »une galerie d'écoulement, à 35 toises de profondeur un appareil magnétique »ait été placé. Mr. REICH auquel on doit un excellent travail sur la tem-»pérature moyenne de la terre à différentes profondeurs, y observe assidument »et à des époques convenues. De l'AMÉRIQUE du Sud Mr. BOUSSINGAULT qui »n'a rien négligé de ce qui peut avancer les progrès de la Physique du Globe, »nous a envoyé des observations de déclinaison horaires faites à MARMATO »dans la province d'ANTIOQUIA, par les $5^{0}\ 27'$ de latitude boréale, dans un lieu »où la déclinaison est orientale comme à KASAN et à BARNAOUL en ASIE, »tandisque sur les cotes nord-ouest du Nouveau Continent, à SITKA dans »l'AMÉRIQUÊ RUSSÈ, le Baron DE WRANGÊL, également muni d'une boussole de »GAMBÊY, a pris part aux observations simultanées faites à l'époque des »solstices et des équinoxes. Un Amiral espagnol, Mr. DE LABORDE, ayant eu »connoissance d'une prière que j'avois adressée à la *Société patriotique* de la »HAVANE, eut la bonté de me charger, de son propre mouvement, de lui »envoyer les instrumens qui serviroient à déterminer avec précision l'in-»clinaison, la déclinaison absolue, les variations horaires de déclinaison et »l'intensité des forces magnétiques. Ces précieux instrumens entièrement »semblables à ceux que possède l'Observatoire de PARIS, sont heureusement »arrivés à l'Ile de CUBA, mais le changement du commandement maritime à »la HAVANE et d'autres circonstances locales n'ont point encore permis d'établir »la station magnétique sous le tropique du CANCER et de faire usage des in-»strumens. Il en a été de même jusqu'ici de la boussole de GAMBEY que Mr. »ARAGO a fait construire à ses frais pour obtenir des observations de l'in-»térieur du MÉXIQUË où le sol s'élève à plus de 6000 piés au dessus du »niveau de la mer. Enfin, pendant mon dernier séjour à PARIS, j'ai eu »l'honneur de proposer à Mr. l'Amiral DUPERRÉ, Ministre de la Marine, de »fonder une station magnétique en ISLANDÉ. Cette demande a été accueillie »avec l'empressement le plus bienveillant, et l'instrument, déjà commandé, »sera déposé cet été même au port de REIKIAWIG, lorsque l'expédition qui

»avait été dirigée vers le nord à la recherche de Mr. DE BLOSSEVILLE et de »ses compagnons d'infortune, retournera en ISLANDE pour y continuer ses »travaux scientifiques. On peut être sûr que le gouvernement DANOIS qui »protège avec une si noble ardeur l'astronomie et les progrès de l'art nautique, »daignera favoriser l'établissement d'une station magnétique dans une de ses »possessions voisine du cercle polaire. Au CHILI Mr. GAY a fait aussi un »grand nombre d'observations horaires correspondantes, d'après les instructions »de Mr. ARAGO.

»Je suis entré dans ce long et minutieux détail historique pour faire »voir jusqu'où j'ai réussi, conjointement avec mes amis, à étendre le concours »d'observations simultanées. Après mon retour de SIBÉRIE, nous avons publié, »Mr. DOVE et moi, en 1830 le tracé graphique des courbes de déclinaisons »horaires de BERLIN, FREIBERG, PETERSBOURG et NICOLAJEFF en KRIMMÉE, pour »faire voir le parallélisme qu'affectent ces lignes, malgré le grand éloignement »des stations et sous l'influence de perturbations extraordinaires. Dans la »comparaison des observations de St. PETERSBOURG et de NICOLAÏEFF on a pu »faire usage d'observations faites dans des intervalles très-rapprochés de 20 »en 20 minutes. Il ne faut pas se persuader cependant que ce parallélisme »d'inflexions existe toujours dans les courbes horaires. Nous avons éprouvé »que même dans des lieux très-voisins, par exemple à BERLIN et dans les »mines de FREIBERG, les réactions magnétiques de l'intérieur de la terre vers »la surface ne sont pas constamment simultanées, que l'une des aiguilles »présente des perturbations considérables, tandis que l'autre continue cette »marche régulière qui, sous chaque méridien, est fonction du tems vrai du »lieu. J'ai proposé aussi dans le mémoire publié en 1830, pour le concours »d'observations simultanées les époques suivantes: 20 et 21 Mars; 4 et 5 Mai; »21 et 22 Juin; 6 et 7 Août; 23 et 24 Septembre; 5 et 6 Novembre; 21 et »22 Décembre depuis 4^h du matin du premier jour jusqu'à minuit du second »jour, en observant pour le moins, dans chaque *station magnétique*, jour et »nuit, d'heure en heure. Comme plusieurs observateurs placés sur la ligne »des stations, ont trouvé ces époques trop rapprochées les unes des autres, »on a dû insister de préférence sur le seul tems des solstices et des »équinoxes.

»L'ANGLETERRE, depuis les travaux anciens de WILLIAM GILBERT, GRAHAM

»et HALLEY jusqu'aux travaux modernes de Mrs. GILPIN, BEAUFOY (à BUSHY »HEATH), BARLOW et CHRISTIE, a offert une riche collection de matériaux »propres à découvrir les lois physiques qui règlent les variations de la »déclinaison magnétique, soit dans un même lieu selon la différence des »heures et des saisons, soit à différentes distances de l'équateur magnétique »et des lignes sans déclinaison. Mr. GILPIN a observé chaque jour douze »heures, pendant plus de seize mois. Les nombreuses observations du Colonel »BEAUFOY ont été régulièrement publiées dans les ANNALES DE THOMSON. De »mémorables expéditions dans les régions les plus inhospitalières du nord ont »fait cueillir à Mrs. SABINE, FRANKLIN, HOOD, PARRY, HENRY FOSTER, BEECHEY »et JAMES CLARK ROSS une riche moisson d'observations importantes. C'est »sous le rapport du magnétisme terrestre et de la météorologie que la géo»graphie physique doit un accroissement considérable de connoissances aux »tentatives faites récemment pour déterminer la forme du *Détroit* ou *Passage »du Nord-Ouest*. Elle en doit aussi aux périlleuses explorations des côtes »glacées d'ASIE par les Capitaines WRANGEL, LÜTKE et ANJOU. Pendant le »cours de ces nobles efforts une impulsion inattendue a été donnée aux »sciences physiques. Une partie de la philosophie naturelle dont les progrès »théoriques avoient été si lents depuis deux siècles, a jeté un vif éclat et »fecondé d'autres sciences. Tel a été l'effet des grandes découvertes d'OERSTED, »ARAGO, AMPÈRE, SEEBECK et FARADAY sur la nature des forces électromagné»tiques. Excités par ce concours de talens et de travaux ingénieux de savans »voyageurs, Mrs. HANSTEEN, DUE et ADOLPHE ERMAN ont exploré dans toute »l'immense étendue de l'ASIE boréale, par la réunion heureuse de moyens »astronomiques et physiques très-exacts, presque pour une même époque, »la trace des courbes isoclines, isogones et isodynamiques. En parlant de »ce grand travail que Mr. HANSTEEN avoit conçu et proposé depuis longtems, »je devrois peut-être passer sous silence les observations d'inclinaison magné»tique que j'ai faites sur la frontière peu visitée de la DZOUNGARIE chinoise »et sur les bords de la MER CASPIENNE, observations publiées dans le deuxième »volume de mes *Fragmens asiatiques*. Mon savant compatriote, Mr. ADOLPHE »ERMAN, embarqué au KAMTSCHATKA et retournant en EUROPE par le CAP HORN, »a eu le rare avantage de continuer, pendant une longue navigation, la »mesure des trois manifestations du Magnétisme terrestre à la surface du

»Globe. Il a pu employer les mêmes instrumens et les mêmes méthodes qui »lui avoient servi de BERLIN à l'embouchure de l'OBI et de cette embouchure »à la MER d'OKHOTSK.

»Ce qui caractérise notre époque, dans un tems marqué par de grandes »découvertes d'optique, d'électricité et de magnétisme, c'est la possibilité de »lier les phénomènes par la généralisation de lois empiriques, c'est le secours »mutuel que se rendent des sciences restées longtems isolées. Aujourd'hui de »simples observations de déclinaison horaire ou d'intensité magnétique faites »simultanément dans des endroits très-éloignés les uns des autres, nous »révèlent pour ainsi dire, ce qui se passe à de grandes profondeurs dans »l'intérieur de notre planète, ou dans les régions supérieures de l'atmosphère. »Ces émanations lumineuses, ces explosions polaires qui accompagnent l'orage »magnétique, semblent succéder à de grands changemens qu'éprouve la *tension* »habituelle ou moyenne du magnétisme terrestre.

»Il seroit, Monseigneur, d'un vif intérêt pour l'avancement des sciences »mathématiques et physiques, que sous Votre Présidence et sous Vos auspices »la Société Royale de LONDRES, à laquelle je me fais gloire d'appartenir »depuis vingt ans, voulut bien exercer sa puissante influence en étendant la »*ligne d'observations simultanées* et en fondant des *stations magnétiques permanentes* »soit dans la région des tropiques, des deux côtés de l'équateur magnétique »dont la proximité diminue nécessairement l'amplitude des déclinaisons horaires, soit dans les hautes latitudes de l'hémisphère austral et au CANADA. »J'ose proposer ce dernier point parceque les observations de déclinaisons »horaires faites dans la vaste étendue des ETATS-UNIS sont encore très rares. »Celles de SALEM (de 1810), calculées par Mr. BOWDITCH et comparées par »Mr. ARAGO aux observations de CASSINI, GILPIN ET BEAUFOY, méritent cependant »beaucoup d'éloges. Elles pourront guider les observateurs du CANADA pour »examiner si, contrairement à ce qui arrive dans l'EUROPE occidentale, la »déclinaison n'y diminue pas dans l'intervalle entre l'équinoxe du printemps »et le solstice d'été. Dans un mémoire que j'ai publié, il y a cinq ans, j'ai »désigné, comme *stations magnétiques* extrêmement favorables pour les progrès »de nos connoissances: la Nouvelle HOLLANDE, CEYLAN, l'ile MAURITIUS, le Cap »de BONNE-ESPÉRANCE (illustré de nouveau par les travaux de Sir JOHN HERSCHEL), l'ile St. HÉLÈNE, quelque point sur la côte orientale de l'AMÉRIQUE DU

»Sud et Quebec. Déjà dans le siècle passé, en 1794 et 1796, un voyageur »anglais, Mr. Macdonald, avoit fait des observations nouvelles et importantes »sur la marche diurne de l'aiguille à Sumatra et à St. Hélène, observations »qui ont été confirmées et étendues sur une grande échelle dans les expé»ditions scientifiques des Capitaines Freycinet et Duperrey, l'un commandant »(1817—1820) la corvette l'Uranie, l'autre qui a coupé six fois l'équateur »magnétique, commandant (1822—1825) la corvette la Coquille. Pour »avancer rapidement la théorie des phénomènes du magnétisme terrestre ou »du moins pour établir avec plus de précision des lois empiriques, il faudroit »à la fois prolonger et varier les lignes *d'observations correspondantes*, distinguer »dans les observations de variations horaires ce qui est dû à l'influence des »saisons, au tems serein et au tems couvert et de pluyes abondantes, aux »heures du jour et de la nuit, au tems vrai de chaque lieu, c'est à dire à »l'influence du soleil et ce qui est isochrone sous des méridiens différens: il »faudroit réunir à ces observations de déclinaison horaire celles de la marche »annuelle de la *déclinaison absolue*, de *l'inclinaison de l'aiguille* et de *l'intensité* »*des forces magnétiques* dont l'accroissement depuis l'équateur magnétique aux »poles est inégal dans l'hémisphère occidental américain et dans l'hémisphère »oriental asiatique. Toutes ces données, bases indispensables d'une théorie »future, ne peuvent acquérir de l'importance et de la certitude que par le »moyen d'établissemens qui restent permanens pendant un grand nombre »d'années, *Observatoires de physique* dans lesquels on répète la recherche des »élémens numériques à des intervalles de tems convenus et par des instru»mens semblables. Les voyageurs qui traversent un pays dans une seule »direction et à une seule époque, ne font que préparer un travail qui doit »embrasser le tracé complet des lignes sans déclinaison à des intervalles »également espacés, le déplacement progressif des noeuds ou points d'inter»section des équateurs magnétique et terrestre, les changemens de forme dans »les lignes isogones et isodynamiques, l'influence qu'exerce indubitablement »la configuration et l'articulation des continens sur la marche lente ou accé»lerée de ces courbes. Heureux si les essais isolés des voyageurs, dont il »m'appartient de plaider la cause, ont contribué à vivifier un genre de re»cherches qui est l'ouvrage des siècles et qui exige à la fois le concours de »beaucoup d'observateurs distribués d'après un plan mûrement discuté, et une

»direction qui émane de plusieurs grands centres scientifiques de l'EUROPE. »Cette direction ne se renfermera pas et pour toujours dans le cercle étroit »des mêmes instructions; elle saura les varier librement d'après l'état pro»gressif des connoissances physiques et les perfectionnemens apportés aux in»strumens et aus méthodes d'observation.

»En suppliant Votre Altesse Royale de daigner communiquer cette lettre »à la Société illustre que Vous présidez, il ne m'appartient aucunement, »d'éxaminer quelles sont les *stations magnétiques* qui méritent la préférence »pour le moment et que les circonstances locales permettent d'établir. Il me »suffit d'avoir réclamé le concours de la Société Royale de LONDRES pour »donner une nouvelle vie à une entreprise utile et dont je m'occupe depuis »un grand nombre d'années. J'ose simplement hazarder le voeu que dans le »cas où ma proposition fût accueillie avec indulgence, la Société Royale »voulût bien entrer directement en communications avec la *Société Royale de »Göttingue*, l'*Institut Royal de France* et l'*Académie Impériale de Russie* pour »adopter les mesures les plus propres à combiner ce que l'on projette d'établir »avec ce qui existe déjà sur une étendue de surface assez considérable. Peut»être voudroit-on aussi se concerter d'avance sur le mode de publication des »*observations partielles* et (si le calcul n'éxige pas trop de tems et ne retarde »pas trop les communications) sur la publication des *résultats moyens*. C'est »un des heureux effets de la civilisation et des progrès de la raison qu'en »s'adressant aux Sociétés savantes, on peut compter sur le concours général »des volontés, dès qu'il s'agit de l'avancement des sciences ou du développe»ment intellectuel de l'humanité.

»Des travaux d'une surprenante précision ont été exécutés, depuis quel»ques années, dans un pavillon magnétique de l'Observatoire de GÖTTINGUE »avec des appareils d'une force extraordinaire. Ces travaux, bien dignes de »fixer l'attention des physiciens, offrent un mode plus précis de mesurer les »variations horaires. Le barreau aimanté est d'une dimension beaucoup plus »grande encore que le barreau de la *lunette aimantée de* PRONY: il est muni »à son extrémité d'un miroir dans lequel se réfléchissent les divisions d'une »mire plus ou moins éloignée selon la valeur angulaire qu'on désire donner »à ses divisions. Par l'emploi de ce moyen perfectionné l'observateur n'a pas »besoin d'approcher du barreau aimanté et (en évitant les courans d'air que

»peuvent faire naître la proximité du corps humain ou, pendant la nuit, »celle d'une lampe) on parvient à observer dans les plus petits intervalles de »tems. Le grand géomètre, Mr. GAUSS, auquel nous devons ce mode d'obser»vation, de même que le moyen de réduire à une mesure absolue l'intensité »de la force magnétique dans un lieu quelconque de la terre et l'invention »ingénieuse d'un *magnétomètre* mis en mouvement par un *multiplicateur d'in»duction*, a publié dans les années 1834 et 1835 des séries d'observations si»multanées faites de 5 en 5 ou de 10 en 10 minutes, avec des appareils sem»blables à GÖTTINGUE, COPENHAGUE, ALTONA, BRUNSVIC, LEIPZIG, BERLIN, où près »du Nouvel Observatoire royal Mr. ENCKE a déjà établi une maison magné»tique très spacieuse, MILAN et ROME. L'Ephémeride allemande (*Jahrbuch für* »1836) de Mr. SCHUMACHER prouve graphiquement, et par le parallélisme des »plus petites inflexions des courbes horaires, la simultanéité des perturbations »à MILAN et à COPENHAGUE, deux villes dont la différence de latitude est de »$10^0\,13'$. Mr. GAUSS a d'abord observé aux époques que j'avois proposées en »1830, mais dans l'intérêt de rapporter les mesures angulaires de déclinaison »magnétique aux plus petits intervalles de tems (le 7 Février 1834 des chan»gemens de 6 minutes en arc correspondoient à une seule minute de tems), »Mr. GAUSS a réduit les 44 heures d'observations simultanées à la durée de »24 heures: il a préscrit pour les stations qui sont munies de ses nouveaux »appareils, six époques de l'année, c'est-à-dire les derniers samedis de chaque »mois à nombre de jours impairs. Les barreaux aimantés qu'il employe »comme Magnétomètres sont, les petits, d'un poids de 4 livres, les grands »de 25 livres. Le curieux *appareil d'induction* propre à rendre sensibles et »mesurables les mouvemens d'oscillation que prédit une théorie, fondée sur »l'admirable découverte de Mr. FARADAY, est composé de deux barreaux »accouplés, chacun d'un poids de 25 livres. J'ai dû rappeler les beaux tra»vaux de Mr. GAUSS pour que ceux des membres de la *Société Royale de »Londres* qui ont le plus avancé l'étude du magnétisme terrestre, et qui »connoissent la localité des établissemens coloniaux, veuillent bien prendre »en considération, si dans les nouvelles stations à établir on doit employer »des barreaux d'un grand poids munis d'un miroir et suspendus dans un pa»villon soigneusement fermé, ou si l'on doit faire usage de la boussole de »GAMBEY dont jusqu'ici on s'est uniformément servi dans nos anciennes stations

»d'EUROPE et d'ASIE. En discutant cette question on évaluera sans doute les »avantages qui naissent, dans l'appareil de Mr. GAUSS de la moindre mobilité »des barreaux par des courans d'air, comme de la lecture aisée et rapide des »divisions angulaires en de très petits intervalles de tems. Mon désir n'est »que de voir s'étendre les lignes de stations magnétiques, quelques soyent les »moyens par lesquels on parvienne à obtenir la précision des observations »correspondantes. Je dois rappeler aussi que deux voyageurs instruits, Mrs. »SARTORIUS et LISTING, munis d'instrumens de petites dimensions et très-por»tatifs, ont employé avec beaucoup de succès la méthode du grand Géomètre »de GÖTTINGUÈ dans leurs excursions à NAPLES et en SICILE.

»Je supplie Votre Altesse Royale d'excuser l'étendue des développemens »que renferment ces lignes. J'ai pensé qu'il seroit utile de réunir sous un »même point de vue ce qui a été fait ou préparé dans les divers pays pour »atteindre le but d'un grand travail simultané sur les lois du Magnétisme »terrestre.

»Agréez, Monseigneur, l'hommage du plus profond respect, avec lequel »j'ai l'honneur d'être

»De V. A. R.

»BERLIN, en Avril 1836. etc. etc.

»ALEXANDRE DE HUMBOLDT«.

Nachdem wir hier durch Humboldt selbst erfahren haben, wie er sich an der Erweiterung der Kenntniss vom Erdmagnetismus betheiligt hat, wollen wir nun sehen, wie Gauss an dieses Gebiet der Wissenschaft herantrat.

Die erste Andeutung, dass Gauss daran dachte, sich einmal mit der genaueren Erforschung des Erdmagnetismus zu beschäftigen, findet sich in seinem Briefe an Olbers vom 1. März 1803. In Bezug auf die in einer Zeitungs-Notiz angekündigte Entdeckung, welche die Ortsbestimmung durch magnetische Beobachtungen ermöglichen soll, bemerkt Gauss*):

»Ich bin dagegen etwas misstrauisch, ob ich gleich glaube, dass über »die magnetische Kraft der Erde noch viel zu entdecken sein möchte, und »dass sich hier noch ein grösseres Feld für Anwendung der Mathematik finden »wird, als man bisher davon cultivirt hat«.

*) [Siehe: Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von Prof. Dr. C. Schilling in Bremen, Bd. II, Berlin 1900, S. 128.]

Die weitere Anregung dazu, dass Gauss sich mit erdmagnetischen Messungen beschäftigte, wurde durch Humboldt bei Gelegenheit der Naturforscher-Versammlung in Berlin 1828 gegeben. A. v. Humboldt schrieb an Gauss*):

»Es nahet jetzt die Zeit, wo die Versammlung deutscher und nordischer »Naturforscher, Physiker und Astronomen sich in Berlin eröffnen wird. Die »gesetzlichen Tage sind 18—26. Sept., aber wen wir recht zu geniessen »wünschen, laden wir ein, ja früher zu kommen und später zu bleiben. Mit »dem Könige so eben von Teplitz zurückkehrend, bin ich nun gewiss, ruhig »in Berlin bis October zu bleiben und den Monarchen nicht auf der bloss »militärischen Reise in Schlesien zu begleiten. Darf ich, Verehrungswerthester »Freund (erlauben Sie mir einen Ausdruck für den mir Ihre Nachsicht Ver»zeihung gewährt) darf ich den Wunsch erneuern, Sie nicht bloss zum Glanz »dieser Versammlung hier zu besitzen, sondern Sie auch in meinem Hause »zu bewirthen. — — — Sie werden in meinem Hause viel guten Willen, »wenn auch (meiner innern häuslichen Einsamkeit wegen) wenig Geschick »finden. Je länger Sie bleiben desto mehr wird es mich freuen und ehren.

»Und es ist vortheilhaft, den Genius
»Bewirthen; giebst du ihm ein Gastgeschenk
»So lässt er dir ein schöneres zurück**).

»Die Zeit der Ferien ist da; einige Zerstreuung wird Ihnen wohlthätig »sein und Ihr grosser, allgemein gefeierter Name würde meiner Vaterstadt »einen Glanz geben, den ich dauernd wünschte. Erfreuen Sie mich, wenn »es irgend Ihre Lage und Ihre Arbeiten es erlauben, mit einer bejahenden »Antwort und nennen Sie mir bald den festlichen Tag, an dem ich Sie er»warten kann.

»Mit der innigsten Verehrung und Freundschaft,
»Sans-Souci bei Potsdam Ihr gehorsamster
»den 14. Aug. 1828. Al. Humboldt.

»Ich bin auf einige Tage hier mit dem Kronprinzen. Wir hoffen hier »allgemein den trefflichen Blumenhagen zu sehen«.

*) [Siehe: K. Bruhns, Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss, Leipzig 1877, S. 20 bis 22.]
**) [Goethe: Torquato Tasso, 1. Aufzug, 1. Auftritt.]

Unter die an Gauss gerichtete gedruckte Einladung zur Naturforscherversammlung in Berlin 1828 hat A. v. Humboldt geschrieben: »Ich lebe »noch der angenehmen Hoffnung, den ersten Mathematiker Europas, den tief»sinnigen Astronomen in meinem Hause in Berlin zu empfangen, ihn zu »beherbergen und (wie ich kann) zu pflegen. Diese Bitte behalte ich mir »eigens bei Ihnen vor.

»Teplitz, 18. Juli. A. Humboldt«.

Humboldt an Gauss.

»Mit unendlicher Freude habe ich Ihr theures Versprechen gewiss bis »zum 15. September uns mit Ihrer Gegenwart zu beglücken empfangen. Ich »fühle den ganzen Werth Ihrer Aufopferung! Ihren Wagen werden wir »hier zu stellen wissen. Für Bedienung ist hier gesorgt. Schreiben Sie mir »ja gütigst, welchen Tag ich hoffen darf Sie zu umarmen. Möchte es vor »dem 15. sein können, damit wir Sie etwas ruhiger geniessen. Babbage »freut sich unendlich Ihrer Ankunft. Den 18. halte ich meine Eröffnungsrede »und den 18. Abends 6—9 Uhr, müssen Sie einem kleinen Feste beiwohnen, »welches ich 600 Freunden, im Concertsaal des Schauspielhauses geben »werde! Der König und der Kronprinz haben mir versprochen dabei zu »sein. Mit innigster Anhänglichkeit

»Berlin, d. 8. Sept. 1828. Ihr gehorsamster

»Al. Humboldt«.

Die einzelnen Schritte, mit denen Gauss in der Vervollkommnung seiner magnetometrischen Apparate vorwärts ging, erkennen wir am besten aus den Briefen zwischen ihm und seinen Freunden Olbers, Bessel, Schumacher, Encke und Gerling. Die hochverdienten Gelehrten Olbers, Encke und Gerling haben den Wunsch ausgesprochen, dass ihre Briefwechsel nicht veröffentlicht würden, aber sie haben es statthaft erklärt, dass ihre und die an sie gerichteten Briefe von Gauss, soweit einzelne Theile derselben für die Wissenschaft nützlich seien, auch zur Verwerthung gelangen könnten. Die Erben dieser grossen Gelehrten haben deshalb in hochherziger Weise die an letztere von Gauss geschriebenen Briefe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zur angemessenen Benutzung anvertraut. Hier mögen nun einige auf den vorliegenden Gegenstand sich beziehende Stellen folgen, wobei die übrigen Theile durch Striche — — angedeutet sind und wenn es der Zusammenhang erfordert, durch Einschaltungen [] ersetzt sind.

Gauss an Gerling.

»— — — Es freut mich, dass Sie die magnetische Declination Ihrer »Bemühung werth gehalten haben. Ich vermisse nur noch in Ihrem Aufsatz »ein Verfahren, wie Sie — — [die Neigung der magnetischen Axe gegen »die Horizontal-Ebene] kennen lernen [wollen]. Meine Meinung war, dass »dies durch ein Beobachtungsdatum jedesmahls eliminirt werden soll, indem »Sie eigentlich nicht voraussetzen sollen, dass dies in jedem Versuche das»selbe sei. Das Beobachtungsdatum ist die Zenithdistanz des Bildes selbst, »die jedesmahl wenn auch nur auf 1 Minute mit dem Höhenkreis des Theo»dolithen mitgemessen werden soll. — — Ich habe mich in der letzten Zeit »etwas mit dem Magnetismus überhaupt beschäftigt, namentlich auch die »Intensität des Erdmagnetismus auf eine absolute, klar verständliche Einheit »zu bringen gesucht. Ich finde, dass sie immer die Form hat — — —. Nach »meinen Versuchen ist in Göttingen, wenn ein Zoll — — [als Länge bei »diesem Intensitäts-Maasse zu Grunde gelegt wird, das in Betracht kommende »Gewicht] nur einige Milligramm gross. Die Zeit ist heute zu kurz, »mich weiter darüber zu erklären, zumahl da meine Rechnungen noch nicht »reif sind.

»Stets von Herzen der Ihrige

»Göttingen, den 14. Februar 1832. C. F. G.«

Gauss an Olbers.

»Ihr Brief vom 12. Februar mein geliebter Olbers hat mich in eine »Traurigkeit versetzt, die mich keinen Augenblick verlässt. Sie selbst zwar »stehen hoch über dem Leben, wenngleich im Besitz von allem was dasselbe »schmücken kann, innigst geliebt und verehrt von Allen die das Glück haben »Ihnen nahe zu stehen: Aber Alle von diesen, die einst nach Ihnen zurück»bleiben sollen werden sich als Verwaisete fühlen, denen Nichts einen solchen

»Verlust ersetzen kann. Wende doch der Himmel ein solches Unglück noch »lange von uns ab! — — —

»Ich beschäftige mich jetzt mit dem Erdmagnetismus, namentlich mit »einer absoluten Bestimmung von dessen Intensität. Freund Weber macht »nach meiner Angabe die Versuche. So wie man z. B. von Geschwindigkeit »nur durch Ansetzung einer Zeit und eines Raumes einen klaren Begriff »geben kann, so, finde ich, muss zur vollständigen Bestimmung der Intensität »des Erdmagnetismus angegeben werden ein Gewicht und eine Linie. — — »Es scheint dass wenn man für — [die Linie] einen Zoll nimmt, — [das »Gewicht] nur wenige Milligramm beträgt. Die Versuche sind aber noch »nicht vollständig. Ich werde, wenn es Sie interessirt, Ihnen gern demnächst »etwas Näheres mittheilen und bemerke nur, dass man dabei zwei Nadeln »A und B nöthig hat, die eine ist übrigens ein Stab, dass die Wirkung des »Erdmagnetismus auf B mit der Wirkung von A auf B vergleichbar ist, »insofern man letztere in bestimmter nicht zu kleiner Entfernung spielen »lässt, deren Cubus die letztere Wirkung umgekehrt proportional ist; die »Wirkung des Erdmagnetismus auf A hingegen ist mit dem Momente eines »Gewichts, Product des letztern in eine Linie, vergleichbar, was dann ent- »weder durch die Wage indem man ein kleines Gewicht jene Wirkung auf- »heben lässt, oder durch Beobachtung der Schwingungszeiten, ausgemittelt »werden kann.

»Auch für Declination und Inclination hoffe ich, mehrere neue Ver- »besserungen mit Webers Hülfe angeben zu können.

»Doch ich will Sie jetzt nicht länger mit meinem Geplauder ermüden. »Gebe doch Gott, dass ich bald beruhigendere Nachrichten erhalte, dass die »Gefahr, nicht von Ihrem, sondern von unserm Haupte abgewehrt ist.

»Ewig, aber hoffe ich auch noch lange in der Zeitlichkeit der Ihrige

»Göttingen, den 18. Februar 1832. C. F. Gauss«.

Gauss an Schumacher*).

»— — Jetzt lassen Sie mich Ihnen noch einiges Wissenschaftliche »schreiben. Ich bin, wie Sie leicht denken können, zu wissenschaftlichen

*) [Siehe: C. A. F. Peters, Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, Altona, 1860, Bd. II, S. 295—298.]

»Arbeiten lange Zeit wenig aufgelegt gewesen, habe aber doch in der letzten »Zeit ein ziemlich lebhaftes Interesse für einen Gegenstand gewonnen, oder »vielmehr erneuert, denn von jeher habe ich denselben als einen sehr reich»haltigen betrachtet, aber erst jetzt ist mir alles, was mir früher darin dunkel »war, in grosse Klarheit getreten. Dies ist der Erdmagnetismus, und ich »möchte wohl Ihre Verwendung ansprechen, um einen Wunsch in Erfüllung »gehen zu sehen. Der vortreffliche Hansteen hat uns vor einiger Zeit eine »Karte der isodynamischen Linien geliefert, und hoffentlich haben wir von »demselben auch bald neue Declinations- und Inclinationskarten zu erwarten. »Dadurch werden dann die magnetischen Erscheinungen vollständig dargestellt, »und für die meisten Personen wird die Darstellung in dieser Form am ange»nehmsten sein. Allein — was Ihnen vielleicht anfangs paradox scheinen »wird — für denjenigen, der versuchen will, das Ganze der Erscheinungen »einer möglichst einfachen Theorie unterwürfig zu machen, ist diese Dar»stellung nicht die zweckmässigste, sondern eine andere wäre zu diesem »Zweck von viel unmittelbarerer Brauchbarkeit. Nämlich durch drei Karten, »die die drei partiellen Intensitäten vor Augen legten. — — Wären die drei »Karten für — — [die nach Norden gerichtete horizontale, für die nach »Westen gerichtete horizontale und für die verticale erdmagnetische Kraft] »vorhanden, so wäre ich geneigt, einen Versuch der oben angedeuteten Art »zu machen; vielleicht entschlösse sich Herr Hansteen dazu solche zu liefern, »oder allenfalls auch nur Eine derselben. Meine theoretische Untersuchung »zeigt sogar, dass eine vollständige Darstellung Einer partiellen Kraft an sich »zureichend ist die andere a priori abzuleiten. Selbst solche Karten erst zu »entwerfen, werde ich mich nicht entschliessen, da dazu eine längere innige »kritische Bekanntschaft mit den Quellen erforderlich ist. Die Zurückführung »auf eine kleine Anzahl von Polen, z. B. 4, halte ich übrigens für nicht »naturgemäss; solche Pole sind nur Symptome in den Erscheinungen, die »keine scharfe Bedeutung haben, und wenn wir erst im Besitz der allgemeinen »alles auf einmahl umfassenden Formel sind, ergeben sich diese sogenannten »Pole, wenn man sie wissen will, von selbst mit. Vielleicht wird Ihnen, »was ich damit sagen will, durch ein analoges Beispiel deutlicher. Die Zeit»gleichung bietet im Jahre mehrere Maxima und Minima dar, aber man »würde Unrecht haben, diesen eine ganz besondere Bedeutung beizulegen.

»Mit einer andern und wohl an sich nicht viel weniger wichtigen Seite »des Gegenstandes habe ich mich in den letzten Wochen viel, und wie mir »deucht nicht ohne Erfolg beschäftigt, nämlich mit einem Mittel, die In»tensität des Erdmagnetismus auf eine absolute Einheit zurückzuführen. Wenn »ich nicht irre, hat Poisson zuerst ein Verfahren angegeben, und ich finde »auch in Poggendorf's Annalen*) einen Versuch, solches zur Anwendung zu »bringen. Allein ich finde dabei verschiedenes, was ich durchaus für unzu»lässig halten muss, und halte mich überzeugt, dass durch solche Behandlung »auch nicht einmahl ein grob genähertes Resultat erhalten werden kann. Ich »habe mehrere Reihen Versuche, aber unter andern Umständen, gemacht, »deren schärfere Berechnung, wie ich schon jetzt erkenne, eine ziemliche »Annäherung geben werden, deren Resultat aber himmelweit von dem in »Poggendorf's Annalen verschieden ist. — — —**). Allein ich bin auf »ein anderes Verfahren gekommen, welches ein viel reineres Resultat geben »kann, und ich halte es für möglich, selbst die Genauigkeit des Resultats, »wenn man alle nöthigen Vorkehrungen macht, so weit zu treiben, dass sie »derjenigen, durch vergleichende Beobachtungen mit Einer Nadel an die »Seite gestellt werden kann, oder sie vielleicht noch überbietet. Schon jetzt »geben die Versuche, die hauptsächlich Freund Weber nach meinen An»gaben gemacht hat, eine Genauigkeit, worin wohl schwerlich mehr, als einige »Procent Ungewissheit zurückbleiben; man wird es aber viel weiter treiben »können. Es ist gewiss in zwiefacher Rücksicht sehr wichtig, dass wir hierin »in's Klare kommen. Ist die Möglichkeit erst da, wenn auch unter Anwen»dung von einigen Vorkehrungen, die absolute Grösse des Erdmagnetismus »zu bestimmen, so soll man sich dies an einer Anzahl Oerter über der ganzen »Erde angelegen sein lassen; reisende Beobachter führen invariable Nadeln »bei sich, womit sie die Verhältnisse anderer Oerter unter sich bestimmen, »und indem sie von Zeit zu Zeit solche Punkte berühren, wo die absolute »Intensität ausgemittelt ist, versichern sie sich der bleibenden Invariabilität »ihrer Nadeln, und führen ihre Resultate auf absolutes Maass. Aber noch

*) [L. Moser und P. Riess: Ueber die Messung der Intensität des tellurischen Magnetismus. Poggendorff's Annalen, Bd. 18, p. 226—239, 1830.]

**) »— — — Es ist in dem fraglichen Aufsatze nicht klar ausgesprochen, was die Einheit eigentlich bedeutet, womit die magnetische Intensität gemessen werden soll. — — — Eine kleine Ungewissheit wird bei der Uebersetzung immer bleiben, da die Herren Riess und Moser ihre Nadeln nicht gewogen haben«.

»wichtiger ist es für künftige Jahrhunderte, in denen eben so bedeutende »Aenderungen in der absoluten Intensität zu erwarten sind, wie wir lange »bei der Declination und Neigung kennen. Ich habe immer diese unge- »heuren Aenderungen, wie etwas höchst merkwürdiges betrachtet. Ohne »Zweifel ist die magnetische Erdkraft nicht das Resultat von ein Paar grossen »Magneten in der Nähe des Erdmittelpunkts, die nach und nach viele Meilen »weit sich von ihrem Platze bewegen, sondern das Resultat aller in der Erde »enthaltenen polarisirten Eisentheile, und zwar mehr derjenigen, die der »Oberfläche, als der, die dem Mittelpunkte näher liegen. Allein was soll »man von den ungeheuren Aenderungen, die seit ein Paar Jahrhunderten »Statt gefunden haben, denken? Mir hat immer diese Erscheinung eine be- »sondere Gunst für die von Cordier besonders hervorgehobene Hypothese zu »erwecken geschienen, wonach die feste Erdrinde vergleichungsweise nur dünn »ist. Natürlich können dann nur in dieser die magnetischen Kräfte ihren »Sitz haben, und die allmählige Verdickung dieser Rinde durch Erstarren »vorher flüssig gewesener Schichten erklärt dann die eintretende grosse Ver- »änderung in dem Erdmagnetismus auf das ungezwungenste, die sonst ein »grosses Räthsel bleibt. Auch der Umstand, dass die sogenannten magne- »tischen Hauptpole der Erde in die kältesten Gegenden fallen, wo vermuthlich »die Erdrinde am dicksten ist, scheint darauf hinzudeuten.

»Doch ich breche hier ab, und bitte Sie, recht bald wieder mit einigen »Zeilen zu erfreuen Ihren ganz eigenen

»Göttingen, den 3. März 1832. C. F. Gauss«.

Gauss an Gerling.

»Theuerster Freund.

»— — — Ich habe seit etwa einem Monat mich recht viel mit dem »Magnetismus beschäftigt, und angefangen nicht bloss diejenigen Ideen, die »ich Ihnen Weihnachten mittheilte selbst (unter vielfachen Beistande von »Freund Weber) auszuführen, sondern alles noch viel weiter auszudehnen. »Ich komme fast täglich noch auf eine neue Idee und muss nur bedauern, »dass die Ausführung, wobei anfangs bald dies bald jenes erst weitläufig »herbeigeschafft werden muss, nicht so schnell damit Schritt halten kann.

»Aber auch wie es jetzt steht, ist meine Erwartung weit übertroffen. Die »tägliche Variation kann ich schon fast von Minute zu Minute verfolgen und »wenige Bogensecunden (sage z. B. 2 oder 3) sicher sichtbar machen. Ich »hoffe in allen einzelnen Momenten, nämlich Intensität, Declination, Incli- »nation und den Variationen dieser drei Elemente die bisherige Schärfe weit »überbieten zu können. Die Schwingungsdauer bestimme ich schon jetzt »mit einer fast unglaublichen Schärfe.

»Ich muss heute eilig schliessen, indem ich mich Ihnen und den lieben »Ihrigen herzlich empfehle.

»Göttingen, den 2. April 1832. G.«

Gauss an Schumacher*).

»— — — Mit meinen magnetischen Beschäftigungen hat es guten Fort- »gang. Ich habe mir eigenthümliche Apparate ausgesonnen, die sich durch »Einfachheit, Sicherheit und eine, den astronomischen Beobachtungen gleich- »kommende Schärfe — endlich auch durch Wohlfeilheit empfehlen. Ich »hoffe, dass solche in Zukunft stehende Stücke auf allen Sternwarten aus- »machen werden. Es ist eine wahre Lust, damit absolute Declination, ihre »Intensität und die stündlichen und täglichen Variationen von beiden zu »beobachten. In den Zeitansetzungen ist nie von Zehntheilen der Secunde »Fehler die Rede, es handelt sich stets nur um wenige Hunderttheile. Auch »mit der Zurückführung der Intensität auf absolute Einheit geht es vor- »trefflich. Uebrigens ist alles noch nicht zur vollkommensten Reife gebracht, »aber bald hoffe ich es dahin gebracht zu haben, dass ich öffentlich etwas »darüber bekannt machen kann. Späterhin denke ich auch das letzte Ele- »ment, die Inclination vorzunehmen, wozu ich aber besonders sorgfältig aus- »gearbeiteter Aufhängungsaxen bedarf, die Herr Laporte in Petersburg an- »fertigen und hieher schicken wird.

»Stets mit freundschaftlichster Ergebenheit

»Göttingen, den 12. Mai 1832. der Ihrige

»C. F. Gauss.«

*) [Siehe: Peters, Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, Bd. II, S. 302—303.]

Gauss an Encke.

»Ich kann nicht unterlassen, mein theuerster Freund, bei Gelegenheit »der Reise des H. Professors Rudberg nach Berlin mein Andenken bei »Ihnen zu erneuern und Ihnen den schon so lange schuldigen Dank für so »manche Ihrer gütigen Zusendungen und Mittheilungen abzustatten. Mein »langes Stillschweigen entschuldigen Sie freundlich mit den harten Schicksals- »schlägen, die, wie Ihnen nicht unbekannt geblieben sein wird, seit zwei »Jahren mich getroffen haben.

»Seit Anfang dieses Jahrs habe ich mich sehr viel mit dem Erdmagne- »tismus beschäftigt, sowohl von theoretischer als praktischer Seite, zu letzterer »Beziehung ist es mir schon jetzt gelungen durch Anwendung neuer Ein- »richtungen, die sich durch Einfachheit, Sicherheit, Schärfe — und Wohl- »feilheit empfehlen — meine Erwartungen nicht bloss erfüllt sondern weit »übertroffen zu sehn; die Messungen die sich auf die absolute Declination, »die Intensität, und die täglichen und stündlichen Variationen von beiden »beziehen erhalten eine Genauigkeit, die der der astronomischen Beobach- »tungen fast gleich kommt. Auch die Zurückführung der Intensität auf eine »absolute Einheit denke ich zu einer Vergleichungsweise grossen Schärfe zu »bringen und späterhin mich auch mit der Inclination zu beschäftigen, wozu »aber sehr gut gearbeitete Aufhängungs-Axen (aber sonst nichts) erforderlich »sein werden. Bald hoffe ich diese Dinge zu einer solchen Reife zu bringen, »dass ich öffentlich etwas darüber bekannt machen kann. Einstweilen habe »ich am 4. und 5. Mai viele Aufzeichnungen der täglichen Variation ge- »macht; in Zukunft soll dies aber vollständiger geschehen.

»Aus den Zeitungen sehe ich, dass H. von Humboldt aus Paris zurück- »gerufen sei; ist dies gegründet und ist er schon in Berlin angekommen? »Ich würde dann mit Vergnügen ihm einige vorläufige Mittheilungen von »jenen Beschäftigungen machen.

»Erlauben Sie mir noch eine geringfügige Bemerkung zu Ihrem treff- »lichen Jahrbuche. Sie setzen in den Sternpositionen bei Castor immer die »Mitte der beiden Sterne an; dieses schreibt sich wohl ursprünglich von der »Zeit her wo Bessel mit einem schwachen Instrumente observirte, wer ein »kräftiges Fernrohr hat, wird glaube ich immer vorziehen Einen Stern (sequens)

»antreten zu lassen. Wer nun in diesem Fall ist, findet in Ihrem Jahr»buch nicht das Mittel, die Beobachtung zu benutzen. Allerdings weiss wer »täglich observirt, die Reduction auswendig; allein wessen Beobachtungen »oft längere Unterbrechungen erleiden, kommt dadurch in den Fall das kleine »Reductionselement erst anderswo zu suchen, was immer mit vielem Zeit»verlust geschieht. Ich komme gewiss jährlich einigemale in den Fall wo »mir das Element aus dem Gedächtniss gekommen ist wie z. B. neulich am »Tage des Mercursdurchganges. Mein unmassgeblicher Vorschlag wäre also, »insofern Sie fortwährend Ihre Ephemeride auf das Mittel der Sterne zu »stellen fortfahren, wogegen ich übrigens nichts habe, doch vorher wie 1832 »p. 159 in jedem Jahrgange hinzuzusetzen, der zweite hellere Stern hat 0″18 »grössere Rectasc. als das Mittel. Da Sie mehr als irgend ein anderer Heraus»geber von Ephemeriden den Gesichtspunkt fest halten, dass Ihr Jahrbuch »in sich selbstständig sei, so werden Sie diese kleine Bemerkung nicht übel »deuten.

»Mit dem Wunsche recht bald einmal wieder durch einige Zeilen von »Ihnen erfreut zu werden

»Ihr herzlich ergebener

»Göttingen, den 12. Mai 1832. C. F. Gauss«.

»P. S. Ich erbreche den Brief noch einmahl, weil ich erst jetzt be»denke gar nichts in Beziehung auf Ihre Aeusserungen über Weber gesagt »zu haben. Im Grunde ists freilich überflüssig da Sie auch wohl von Rud»berg hören werden, in wie engem freundschaftlichem Verhältnisse wir stehen. »In der That ist mir mein Leben in Göttingen durch sein Hiersein viel lieber »geworden. Er ist ebenso liebenswürdig von Charakter als talentreich«.

Gauss an Gerling.

»— — — Ich habe mich seit meinem letzten Briefe noch anhaltend »mit dem Magnetismus beschäftigt. — Meine Apparate haben nun eine Voll»kommenheit, die nichts zu wünschen lässt, als ein schickliches Local, wo »theils die Theodolithe solider aufgestellt werden können als auf hölzernen »Stativen und in gedielten Zimmern, theils die besonders in der Sternwarte »sehr beträchtlichen Einflüsse des vielen Eisenwerkes vermieden werden. Ich

»habe ein halb Dutzend Magnetstäbe die schwersten gegen 1 Pfund schwer »und zwei ganz gleiche vollständige Apparate anfertigen lassen. Das letzte »ist durchaus wesentlich, da die stündlichen Aenderungen schon in ein Paar »Zeitminuten sehr gut zu bemerken sind. Morgen und übermorgen sind »verabredete Tage in Humboldts Plan, wo ich zwar nicht 44 Stunden en »suite aber doch recht häufig die Aufzeichnungen machen werde. Meine »Zurückführung der Intensität auf absolute Einheit, wozu ich schon mehrere, »obwohl erst als vorläufige anzusehende Versuche gemacht habe, gelingen »ganz unvergleichlich. Aber das von Moser und Riess aus den Beobach»tungen in Berlin berechnete Resultat ist nur $\frac{1}{5}$ des meinigen also ganz un»brauchbar (mein Resultat bestätigt sich auch durch Versuche an Nadeln »von den verschiedensten Dimensionen, obwohl kleine Nadeln wenig Genauig»keit geben können). Jener enorme Fehler hat übrigens seinen Grund haupt»sächlich in einer ganz unzulässigen Berechnungsweise und nach richtigen »Principien finden sich, so gut es geht, Resultate, die wenigstens Annähe»rungen sind, und sogar mein Resultat zwischen sich haben. Möchten Sie »doch recht bald mich mit einem Besuche erfreuen; diese Beobachtungen »gehören alle zu den schönsten die ich kenne; Sie werden gewiss viel Genuss »davon haben. — —

»Erfreuen Sie lieber Gerling mich doch recht bald mit einigen Zeilen, »deren Empfang mir stets ein grosser Genuss ist.

»Stets von Herzen

»der Ihrige

»Göttingen, den 20. Junius 1832. C. F. G.«

Encke an Gauss.

»Berlin d. 21. Juni 1832.

»Hochgeehrter Herr Hofrath.

»Die so wichtige und hocherfreuliche Nachricht welche Sie die Güte »hatten mir in Ihrem letzten geehrten Briefe mitzutheilen dass Sie zur gründ»lichen Untersuchung der magnetischen Kraft sich hingewendet beeilte ich »mich sogleich dem Herrn von Humboldt mitzutheilen der Ihnen auf das »wärmste dafür danken lässt und der näheren Angabe welche Sie ihn hoffen

»liessen über die Mittel sowohl für Deklination als Inklination und besonders »auch für Intensität mit gespannter Erwartung entgegen sieht. Möchten Sie »die Güte haben uns und der gelehrten Welt die Früchte Ihrer Untersuchungen »nicht allzulange vorzuenthalten. Es liegt diesem Wunsche bei mir noch »das Privat-Interesse zum Grunde dass da ich durch Herrn von Humboldt »in der Zukunft wohl mehr veranlasst werden werde auch Bestimmungen über »die Richtung des Erdmagnetismus hier in Berlin zu machen es von der »grössten Wichtigkeit für mich wäre Ihres Unterrichtes mich zu erfreuen. »Für die Deklination ist jetzt ein kleines Passageninstrument bei Pistor hier »fertig geworden womit ich so bald es in meinen Händen ist Versuche an- »stellen werde. Es hat zugleich die Einrichtung dass man es bequem auch »zu Beobachtungen der täglichen Variation wird anwenden können und wenn- »gleich in dieser Beziehung es im ersten Augenblicke als ich hörte dass Sie »ein neues Verfahren besässen es mir halb und halb leid that dass ich ein »solches Instrument schon in anderer Form bestellt hatte, so hoffe ich doch »auf jeden Fall mit demselben als Theodolit auch dann noch beobachten zu »können wenn Ihr Instrument den eigentlichen Gebrauch überflüssig macht. »Die Theilung hatte ich zu diesem Endzwecke schon genau genug machen »lassen.

»Für die Inklination erwarte ich in diesen Tagen ein Instrument von »Gambey nach der Ihnen bekannten Construktion. Fast möchte ich glauben »dass eine Verbesserung dieses Instrumentes noch mehr Bedürfniss ist als »das der Deklination denn nach einigen Erfahrungen scheint es als ob selbst »die Gambeyschen Instrumente ziemlich starke constante Fehler haben oder »vielmehr als ob man bei ihnen um weit grössere Theile unsicher ist als man »selbst bei der nicht sehr genauen Art der Ablesung noch sehen kann.

»Von dem was Sie über die Zurückführung der Intensität auf eine be- »stimmte Einheit bemerken habe ich durchaus keine Vorstellung, es müsste »denn etwa eine Vergleichung mit der Schwerkraft sein. Gerade dieser Punkt »würde Herrn von Humboldt, dem wir ja die ersten Versuche der Art ver- »danken von dem grössten Interesse sein. — — —

»Noch habe ich eine sehr angelegentliche Entschuldigung hinzuzufügen »da ich trotz des Auftrags des Herrn von Humboldt so sehr spät erst Ihren »gütigen Brief beantworte. — — —

»— — — Die Nachrichten über Herrn Professor Weber haben seine »hiesigen Bekannten höchst erfreut. Dürfte ich bitten mich ihm bestens zu »empfehlen. — — —

»Mit der Bitte um die Fortdauer Ihres bisher so unwandelbar gebliebenen »gütigen Wohlwollens

»Ihr gehorsamster Diener

»Encke«.

Gauss an Olbers.

»Ihr Brief, mein geliebter Olbers, hat mir die grösste Freude gemacht, »um so grössere, da die verschiedenen zum Theil sich ganz widersprechenden »Nachrichten, welche mir von Zeit zu Zeit auf indirecten Wegen über Ihr »Befinden zukommen mich in fortwährender Unruhe erhielten. Möchte doch »die Erleichterung die Sie jetzt fühlen immer fester und grösser werden. — — —

»Von jeher schien mir, dass die Apparate, deren man sich für die magne- »tischen Bestimmungen bedient, sehr unvollkommen, und in einem schreienden »Misverhältnisse gegen die Schärfe unsrer astronomischen und geodätischen »Messungen sind. Ich habe mir seit etwa 5 Monaten angelegen sein lassen »diesem Uebelstande abzuhelfen, wobei ich gleich anfangs von einigen schon »seit vielen Jahren gehabten Ideen ausging, aber freilich fast jede Woche »noch auf etwas Neues gekommen bin. Gegenwärtig habe ich zwei Apparate »fertig (ganz gleiche), womit absolute Declination und ihre Aenderungen, »Schwingungsdauer etc. mit einer Schärfe gemessen werden können, die gar »nichts zu wünschen übrig lässt, ausgenommen für mich, ein angemesseneres »Local, wo kein Eisen in der Nähe ist und jeder Luftzug abgehalten ist. »Beides fehlt mir in der Sternwarte und in meinem Hause, obwohl man den »Einfluss davon auch nicht überschätzen darf; auch sowie es jetzt ist über- »bieten, meine ich, meine Messungen alles frühere sehr weit. Es ist hier »aber eine sehr grosse Erndte zu halten, und da ich (wenn der Himmel mir »Leben und Kraft erhält) nicht abgeneigt wäre, diesen Gegenständen ein »eignes Werk zu widmen, so wird es damit, da ich stets alles Eilen mit »Unreifem gehasst habe, wohl nicht so ganz schnell gehen. Inzwischen habe »ich die Absicht doch gleich eine Anwendung, und zwar die allerwichtigste,

»in einer Societätsvorlesung bekannt zu machen, nämlich die Bestimmung der »absoluten Intensität des Erdmagnetismus. Ich habe schon, sowie meine »Apparate sich nach und nach vervollkommneten, eine beträchtliche Anzahl »vorläufiger Versuche gemacht, und die letzten werden der Wahrheit (so weit »es in meinem Local möglich ist) schon sehr nahe kommen, doch habe ich »erst neulich wieder neue Vervollkommnungen hinzugesetzt, nämlich Vor»kehrungen, um alle Distanzmessungen dabei mit mikroskopischer Schärfe »auszuführen. Auch hiebei ist mir Freund Weber durch Mittheilung seiner »Hülfsmittel äusserst hülfreich gewesen.

»Jene Vorlesung hoffe ich binnen einigen Monaten ausarbeiten zu können, »und einen kleinen Anfang habe ich bereits damit gemacht, indem ich eine »Einleitung aufgeschrieben habe, die das Wesentliche der Grundideen in »einer mehr populären Darstellung entwickelt. Es scheint, dass wenige Per»sonen hiervon bisher eine klare Vorstellung haben. Da es Sie vielleicht »interessirt, diese Einleitung zu lesen, so habe ich meinen Brouillon ab»schreiben lassen (Harding hat die Gefälligkeit gehabt) und ich lege solche »Abschrift hier bei. Bei der Bestimmung, welche der Aufsatz, wozu diese »Einleitung gehört, haben soll ist es unnöthig zu bemerken, dass ich diese »Mittheilung als bloss für Sie bestimmt betrachten muss. Finden Sie, »mein theurer Olbers, sich aufgelegt, diesem Aufsatz Ihre Aufmerksamkeit »zu schenken, und wünschen über eines oder andere darin weitere Aufklärung, »so wird es mir die grösste Freude sein, jeden Wink zu befolgen. Diesmahl »noch ein Paar Worte über die Schärfe meines Apparats.

»Die absolute Declination wird mit grösster Leichtigkeit erhalten. Zwei »Secunden sind eine bestimmt sichtbar gemachte Grösse. Luftzug kann aber »allerdings bedeutend grössere Anomalien hineinbringen. Die tägliche Va»riation kann man besonders in den Vormittagsstunden, wo sie am schnellsten »ist, schon nach einigen Zeitminuten sicher erkennen.

»Bei Beobachtung der Schwingungsdauer einer Nadel lässt sich eine »Schärfe erreichen, die ich selbst früher für unglaublich gehalten haben »würde. Die Momente (wo eine Dauer zu Ende ist) haben nie einen Fehler »von $\frac{1}{10}$ Secunde sondern stets nur einige Hunderttheile. Ich beobachte nur »kleine Schwingungen, d. i. ich fange ungefähr da an, wo man sonst auf»hörte, und doch schwingt meine Nadel so dass ich nach 6 oder 8 Stunden

»noch die Momente mit grosser Sicherheit observire; habe ich eine neue »Nadel eingehängt, deren Schwingungsdauer noch unbekannt ist, so observire »ich nur einige wenige Schwingungen zu Anfang und kann dann getrost auf »einige Stunden in die Stadt gehen, wo nach meiner Zurückkunft von einer »Ungewissheit, wie viele Schwingungen unterdessen gemacht sind, gar keine »Rede sein kann. Ich habe sogar schon zuweilen bei Nacht etwas grössere »Schwingungen eingeleitet, aber nicht wie H. Quetelet von 60° sondern z. B. »von 10°, wo ich die Nadel bei Nacht ihrem Schicksal überlassen habe, und »nach dem Aufstehen am andern Morgen mit Sicherheit habe angeben können, »wie viele Schwingungen unterdessen gemacht sind.

»Nichts desto weniger ist der modus prior (pag. 3) der Anlage dem zweiten »bei weiten nachzusetzen, und zwar deswegen, weil jener eine viel längere »Zeit erfordert, während welcher die Veränderlichkeit des Erdmagnetismus »sich auf das Entschiedenste bemerklich macht. Ich habe zwar auch mehrere »Versuche nach dem Modus prior gemacht (die nahe dieselben Resultate »gaben), werde aber bei denen die gelten sollen mich nur auf den zweiten »Modus beschränken. Vielleicht interessirt es Sie die Resultate meiner letzten »Versuche, obwohl solche immer erst als vorläufige zu betrachten sind, kennen »zu lernen.

»Als Einheiten angenommen

»1) das Gewicht (i. e. die Masse) die man ein Milligramm nennt

»2) den Millimeter

»3) diejenige beschleunigende Kraft, die in der Zeitsekunde einen doppelten »Fall von Millimeter hervorbringt (wobei also die Schwere in Göttingen = »9812 ist) ist die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in »Göttingen nach Versuchen vom 22—26. Julius mit

»Nadel 1 . . . . . . = 1,7762

»mit Nadel A . . . . . . = 1,7780

»im Mittel 1,7771*)

»wovon also die beiden einzelnen Resultate nicht vielmehr als den 2000sten »Theil abweichen. Die Veränderung der Intensität während eines Tages »ist öfters 4 mal so gross.

---

*) »Die Zahl bleibt dieselbe wenn man respective das Gramm und den Meter als Einheit ansieht«.

»Ein früherer Versuch mit fast gleichen Attentionen gemacht gab 1,7670 »aber in einem andern Local, wo eben die Localität sehr gut $\frac{1}{2}$ p. c. Unter- »schied leicht erklärt, da überall Eisen nicht zu vermeiden war. Ich werde »demnächst auf das Verhältniss der Intensität am erstern Local zu der ganz »in Freien zu bestimmen suchen.

»Nach früheren Versuchen, wobei aber mehr Cautelen z. B. auch wegen »Torsion der Fäden noch nicht genug berücksichtigt waren, mit andern Nadeln »und in andern Localen gaben

»am 21. Mai 1,788
»24. Mai 1,777
»4. Junius 1,779.

»Eine Menge von Untersuchungen habe ich mir noch vorgesetzt, die »aber einen grossen Aufwand von Zeit kosten werden. z. B. über den Ein- »fluss der Temperatur auf die Nadeln, über das allmählige Abnehmen der »magnetischen Kraft in den Nadeln, wenn sie anfangs so stark wie möglich »magnetisirt sind und dann theils nicht, theils ohne Armatur aufbewahrt »werden, über das Verhalten anderer Körper ganz besonders des Argentans etc. »Bei allen diesen Geschäften wird mir die Hülfe des trefflichen Weber »äusserst schätzbar sein. — Vielleicht wird unser Gouvernement, wenn die »Geldklemme nicht zu gross ist demnächst nicht abgeneigt sein, ein eignes »magnetisches Häuschen, worin gar kein Eisen ist zu errichten. Ich werde »aber nicht eher darauf antragen, als bis alle meine Vorarbeiten gehörig reif »sind. — — —

»Ich werde zunächst noch eine Anzahl Stäbe aus Englischen Gussstahl »verfertigen lassen, die, wie meine Erfahrungen zeigen, nicht bloss stärkeren »Magnetismus annehmen, sondern ihn auch zäher an sich halten, als Nadeln »aus Cementstahl.

»Doch es ist jetzt wohl Zeit, für diesmahl hievon abzubrechen. — —

»Nun noch meinen innigsten Wunsch für Ihr Befinden mein theurer »Olbers. Wie sehr jede Zeile von Ihnen mich beglückt, wissen Sie; wo »es Sie aber zu sehr angreift, selbst die Feder zu nehmen, wird auch eine »jeweilige dictirte Mittheilung mir stets schon grosse Freude machen.

»Ewig Ihr ganz ergebenster

»Göttingen, den 2. August 1832. G.«

Gauss an Encke.

»Hochgeschätzter Freund.

»Durch beigehende kleine Schrift*), die vor nicht gar langer Zeit die »Presse verlassen hat, und ein besonderer Abdruck aus dem nächstens er- »scheinenden neuen Bande der hiesigen Commentationen ist, wünsche ich »mein Andenken bei ihnen zu erneuern. Wenn Sie auch an dem Gegen- »stande im Ganzen kein specielles Interesse nehmen, so lesen Sie doch wohl »die freilich nur in nuce gegebenen Andeutungen über meine Vorstellung »von den imaginären Grössen noch einmahl nach da ich mich erinnere dass »Sie dem was ich Ihnen vor vier Jahren mündlich darüber sagte viele Auf- »merksamkeit schenkten, so wie Sie auch die Anzeige in den G. G. A. von »1831**), die im Grunde mehr darüber enthält als die Abhandlung selbst, »zu ihrer Zeit gelesen haben. Von den übrigen Exemplaren bitte ich das »eine nebst angeschlossenem Briefe an Hrn. von Humboldt; zwei resp. an »Hrn. Crelle und Dirichlet nebst bestem Empfehl, zu geben und das »fünfte gelegentlich einmahl nach Königsberg zu befördern.

»Meine Beschäftigungen mit dem Magnetismus haben seit meinem letzten »Briefe fortgedauert; meine Apparate, die ich in Duplo fertigen zu lassen »für nöthig gehalten habe, sind in sehr vielen Stücken weiter vervollkommnet, »und es bleibt jetzt eigentlich gar nichts weiter zu wünschen übrig als ein »gegen Eisennähe und Luftzug ganz geschütztes Local. Mein Hauptaugen- »merk ist noch auf die absolute Intensität gerichtet, und ich habe die Ab- »sicht über diesen Theil der Untersuchungen zuerst etwas öffentlich zu sagen, »wahrscheinlich in einer Societätsvorlesung. Binnen einigen Monaten wird »sich vielleicht die Ausarbeitung mit der ich bereits einen kleinen Anfang »gemacht habe, vollenden lassen. Bestimmt kann ich aber darüber nichts »sagen. Ich hasse alles übereilte Publiciren und wünsche immer nur reifes »zu geben, und da trifft es sich dann nicht selten, dass wegen dieses oder »jenen Umstandes, der, nachdem er erledigt ist, wenige Zeilen füllt, ein »wochen- oder monatelanger Aufenthalt entsteht. In dem bisherigen Vortrag

*) [Wahrscheinlich: »Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda«; siehe: Gauss' Werke, Bd. II, S. 93 bis 148.]

**) [Siehe: Gauss' Werke, Band II, S. 169 bis 178.]

»der Lehre vom Magnetismus findet sich aber so viel Vages, Nichtssagendes, »Unlogisches (auch selbst bei Biot), dass hier erst ganz von vorne an auf»gebaut werden muss. Es gehört dahin der Begriff der Pole. Dann der »schreiende Widerspruch, dass man einmahl annimmt, in jedem Theilchen »einer Nadel sei eben so viel nördlicher als südlicher Magnetismus, und »nachher doch immer so spricht als sei an einem Ende der Nadel bloss der »Eine am andern der andere Magnetismus. Mich hat diese Verworrenheit »bei Biot im vorigen Herbst als ich erst anfing mich mit diesen Dingen zu »beschäftigen erst lange gequält. Ich konnte mit seinem freien Magnetismus »gar keinen klaren Sinn verbinden. Durch die Beziehung auf die Electricität »hat Biot die Sache nur verwirrter gemacht. Ich bin nun freilich in diesen »Dingen schon zu völliger Klarheit gekommen, allein es gehören dazu mehrere »neue höchst interessante Lehrsätze die sehr tief liegen, deren Entwick»lung die Grenzen der mir zunächst vorgesetzten Abhandlung weit, sehr »weit überschreiten würden, und die ich daher in dieser nur mit wenigen »Zeilen anzudeuten haben werde. Allein ist von jeher mein gewissenhaft »befolgter Grundsatz gewesen solche Andeutungen, die aufmerksame Leser »in jeder meiner Schriften in grosser Menge finden (sehen Sie z. B. meine »Disquiss. Arithmet. art. 335) stets dann erst zu machen, wenn ich den Gegen»stand für mich selbst ganz abgemacht habe, und so werden Sie übersehen, »dass der oben erwähnte Fall öfters vorkommen kann, wo um mit gutem »Gewissen Eine Zeile schreiben zu können, eine, Monate erfordernde Medi»tation erfordert wird. Diese Art zu arbeiten kann zuweilen die Folge haben, »und hat sie zuweilen gehabt, dass auf Dinge die ich schon seit vielen Jahren »besessen habe, später ihrerseits auch andere kommen, und in der Bekannt»machung mir zuvorkommen; sie wird vielleicht auch die Folge haben können, »dass manches einmahl mit mir ganz untergeht, und ich weiss, dass einige »meiner Freunde wünschen, dass ich weniger in diesem Geiste arbeiten möchte: »das wird aber nie geschehen; ich kann einmahl an lückenhaftem keine rechte »Freude haben, und eine Arbeit an der ich keine Freude habe ist mir nur »eine Qual. Möge doch jeder in dem Geiste arbeiten, der ihm am meisten »zusagt. Was übrigens den gegenwärtigen speciellen Fall betrifft, so hoffe »ich dass sich bei der Ausarbeitung nicht so sehr viel finden wird, was noch »lange aufhält.

»Nach Vollendung dieser ersten Arbeit bin ich nicht abgeneigt, an ein »ausführlicheres Werk in deutscher Sprache über alle mit meinen Apparaten »anzustellenden Beobachtungen zu denken, worin denn auch diese Apparate »selbst vollständig beschrieben werden würden, was in der That allein schon »ein kleines Werkchen nöthig macht und von jener Abhandlung ausgeschlossen »bleiben muss, zumahl da es ohne Zeichnungen gar nicht geschehen könnte. »Alle Beobachtungen dieser Art gehören übrigens zu den reizendsten die ich »kenne, sie übertreffen in dieser Beziehung noch die astronomischen, denen »sie an Präcision fast gleich kommen, ja in einiger Rücksicht noch über- »treffen. Bei den Winkelmessungen kann man 2″ entschieden sichtbar machen, »und es ist hauptsächlich nur der schwer ganz zu vermeidende Luftzug »welcher hindert, dass man von dieser Genauigkeit entfernt bleibt, was in- »dessen durch Vervielfältigungen wieder ersetzt werden kann. Bei allen »Zeitansetzungen in Beziehung auf Schwingungen hingegen ist die Schärfe »entschieden weit grösser als an Beobachtungen am Passage-Instrument. Es »handelt sich immer nur von Hunderttheilen der Secunde; nie, bei einiger »Einübung, von Zehntheilen. Ich würde selbst diese Schärfe für unglaublich »gehalten haben, wenn ich sie nicht seit Monaten, täglich vor mir sähe. Ich »glaube, Sie würden es nicht bereuen, um dies selbst zu sehen, eine Reise »nach Göttingen gemacht zu haben, was man ja jetzt in 40 Stunden kann. »Wie sehr Sie mich durch einen solchen Besuch erfreuen würden, brauche »ich Ihnen nicht zu sagen.

»Mit dem Wunsche, bald wieder durch einige Zeilen von Ihnen erfreuet »zu werden stets

»Ihr freundschaftlich ergebenster

»Göttingen, den 18. August 1832. C. F. Gauss.«

Gauss an Schumacher*).

»— — — Ich bin fortdauernd mit dem Magnetismus beschäftigt. Einen »ganz kleinen Anfang, eine Abhandlung über die absolute Intensität des**) »Erdmagnetismus auszuarbeiten, habe ich bereits gemacht, werde aber freilich

*) [Briefwechsel . . . . Bd. II, S. 304.]

**) [Im Briefwechsel . . . . steht: »als Erdmagnetismus«.]

»durch immer neue sich darbietende Experimente sehr abgehalten. Ich kenne »nichts interessanteres von praktischen Geschäften, als diese magnetischen »Beobachtungen. Meine früher geäusserten Erwartungen realisiren sich voll»kommen. Ich meine den absoluten Magnetismus mit derselben Schärfe be»stimmen zu können, wie man früher nur comparative Bestimmungen gemacht »hat. Jetzt bin ich unter andern mit Versuchen beschäftigt, theils die Sätti»gungsmethoden zu vervollkommnen, theils den Grad der Beharrlichkeit, oder »vielmehr die decrescirende Geschwindigkeit der allmähligen Abnahme der »Stärke der Nadeln zu prüfen. Im Winter werde ich den Einfluss der Tem»peratur untersuchen. Möchten Sie mich nicht einmahl mit einem Besuche »erfreuen, wenn Sie mit meiner Witwerwirthschaft vorlieb nehmen mögen. »Es würde gewiss viel Interesse für Sie haben, meine Apparate und die damit »erreichbare Schärfe, die den feinsten astronomischen Beobachtungen nahe »kommt, kennen zu lernen.

»Stets der Ihrige

»Göttingen, den 31. August 1832. C. F. Gauss«.

Encke an Gauss.

»Berlin, d. 9. Novbr. 1832.

»Hochgeehrtester Herr Hofrath.

»Ihr so überaus gütiger Brief vom 18. Aug., den ich mit dem Packete »von Herrn Inspektor Rumpf etwas später erhielt, hat mich um so mehr »erfreut, als ich aus dem ganzen Inhalte desselben die ununterbrochene Fort»dauer Ihres mir überalles werthen Wohlwollens ersah. Die Exemplare Ihrer »wiederum eine ganz neue Bahn eröfnenden Abhandlung, habe ich sogleich »Ihrem Auftrage zu Folge vertheilt. Namentlich war Herr von Humboldt »auch über den begleitenden Brief hocherfreut, wie er es Ihnen vielleicht »schon selbst geschrieben hat, da er daraus die Gewissheit geschöpft hat, »dass Sie dem Magnetismus eine anhaltendere Beschäftigung zugewendet »haben, welche bisher noch bei keinem Zweige, dem Sie Ihre Aufmerksamkeit »schenkten, ohne eine völlige Restauration und Erneuerung geblieben ist. »Professor Dirichlet scheint sich sogleich mit grossem Eifer auf die neue »Ansicht von imaginären Primzahlen geworfen zu haben.

»Der übrige Inhalt Ihres Briefes hat mir lebhaft eine sehr frühe Unter»haltung in das Gedächtniss zurückgerufen, auf der Reise im Jahre 1814 »nach Seeberg, wohin Sie die Güte hatten mich mitzunehmen, eine Reise, »die auch für mein ganzes künftiges Leben so wichtig geworden ist. Sie »erklärten sich damals über Ihre Weise der Arbeit ganz auf gleiche Weise; »wie Ihnen die Art von Euler nicht zusage, sogleich die Resultate Ihres »Nachdenkens in der Form wie sie sich vielleicht zuerst darböten, zu publi»ciren, mit dem Vorbehalte später häufig und wiederholt darauf zurück»zukommen, sondern wie Sie immer erst eine Vollendung und innere Zu»friedenheit sowohl der Sache als der Form nach beabsichtigten. Schon damals »und noch mehr jetzt kann ich mir leicht erklären, wie einem Geiste, dem »die Sache an sich, der rein mathematische Genuss die Hauptsache ist, die »äussere Anerkennung nur eine unmittelbar daran geknüpfte Folge, dieser »Sinn nothwendig einwohnen muss, und wie unangenehm und selbst empfindlich »es Ihnen seyn muss, wenn Ihre feinen Untersuchungen, ehe Sie selbst noch »den völligen Abschluss bekannt gemacht haben, in gewöhnliche und meisten»theils rohe Hände kommen, welche den Kern vielleicht ganz übersehen, und »ihn oder seine Schale nach Jedes Gefallen bearbeiten. In der That darf es »auch wohl Niemand einfallen, diese Art der Vollendung nicht vollkommen »recht zu finden. Höchstens, und ich will nicht läugnen, dass auch bei mir »sich manchmal der Gedanke regt, kann die Furcht geweckt werden, dass, »wie es schon bei manchen grossen Geometern gegangen ist, Vieles und sehr »wichtiges was Sie besitzen, Gefahr läuft eine Zeitlang verloren zu gehen, »und wie es auch bei den elliptischen Funktionen der Fall gewesen ist, erst »weit später, vielleicht nicht einmal in der Form, mit welcher Sie selbst für »sich noch nicht sich begnügen zu können glaubten, durch irgend welche »Veranlassung an das Licht gefördert zu werden.

»Ueberhaupt aber hat sich, sowohl bei der Betrachtung des jetzigen »Studiums der Astronomie, als auch der Physik, häufig sich bei mir die Be»merkung aufgedrängt, dass wahrscheinlich in praktischer Hinsicht mehr »geleistet werden würde, wenn Jeder, der auch in keiner Hinsicht zu den »schaffenden seltenen Geistern gehört, nur immer sich unterrichten könnte, »wie er seine Kräfte und Zeit anzuwenden habe. Kaum wage ich es zu »äussern, aus Furcht misverstanden zu werden, dass sowohl in der Astronomie,

»als in der Physik, mir eine grosse Menge von sogenannten Beobachtungen »ganz nutzlos gemacht zu werden scheinen, weil sie weder die Wissenschaft »reell fördern, noch auch dem Beobachter als Vorbereitung dienen weiter »fortzuschreiten, und sich selbst klarer zu werden. Wenn nun vollends wie »bei dem Magnetismus noch so wenig geschehen ist, und deshalb auch zu »vermuthen steht, dass das Wesen desselben noch erst zur völligen Klarheit »eine grosse Menge von Beobachtungen, an verschiedenen Orten und unter »verschiedenen Bedingungen, bedarf, und dann die schöne Aussicht sich er»öffnet, dass die wahre Ansicht und Methode gefunden sey, so regt sich so »lebhaft bei mir der Wunsch diese algemeiner verbreitet zu wissen, dass »ich mit der grössten Spannung dieser Eröfnung entgegen sehe, und vielleicht »in Ihrem Sinne, durch die algemeine und freudige Benutzung einen Ersatz »für möglich hielte, in Bezug auf das Unangenehme, von roheren und unge»schickten Behandlungsweisen eines Gegenstandes, den Sie mit Vorliebe be»handelt haben.

»Ihrer überaus gütigen Einladung, auf welche ich kaum gehoft hatte, »wenngleich ein Besuch in Göttingen schon längere Zeit mein lebhafter »Wunsch war, würde ich gewiss in diesen Ferien Folge geleistet haben, »wenn nicht gerade in dieser Zeit die Erbauung einer neuen Sternwarte in »das Leben getreten wäre. — — — Ich konnte voraussehn, und die Erfah»rung hat es bestätigt, dass meine beständige Anwesenheit hier nothwendig »sey, und musste mir die Freude Ihnen mich zu nähern, auf passendere und »freyere Zeit, vielleicht im kommenden Jahre wenn Ihre Geschäfte es dann »erlauben, versparen.

»In den letzten Monaten habe ich hier, mit den Instrumenten welche »Herr Inspektor Rumpf bei mir sah, die magnetische Inklination und De»klination zu bestimmen versucht. Die erste mit einer der von Humboldt»schen ganz ähnlichen Inklinationsnadel von Gambey. — — —

»Die Deklination ward mit einem Pistorschen Instrumente bestimmt. »In die Pfannenlager eines Theodoliten wird ein Cylinder gelegt, der zwei »senkrecht auf seine Axe stehende Mikroskopen so trägt, dass die Linie, »welche durch beide Visirpunkte geht, ebenfalls senkrecht auf die Axe ist, »was durch ein Loth geprüft werden kann. Unter der Mikroskope schwingt »an einem Coconfaden aufgehängt die Deklinations-Nadel, und durch Drehung

»der Axenträger wird auf dem Theodoliten die Deklination abgelesen, wenn »die Nadel zur Ruhe gekommen ist. Sie wurde dabei immer umgehängt. »Die zwey ersten Tage konnte die Deklination nicht auf das Maximum reducirt »werden, weil gleichzeitige Beobachtungen fehlten. An den zwey letzten »wurde gleichzeitig an einer Gambeyschen Nadel den ganzen Tag über von »Stunde zu Stunde beobachtet, so dass das wahre Maximum erhalten werden »konnte. — — — Auch einen Gambeyschen Schwingungsapparat hat Humboldt mitgebracht, welchen ich indessen weder selbst angewendet habe »noch habe anwenden lassen, da theils die Nadeln noch nirgends anderswo »geschwungen haben, theils hauptsächlich Ihre Methoden erst abgewartet »werden sollten.

»In dem beigehenden Packet befindet sich ein Buch von Babbage, »welches South mir bei seiner Durchreise vor vierzehn Tagen gab. Der »letztere bedauerte sehr, dass der Zustand seiner Gesundheit ihm nicht erlaubte »auch nach Göttingen zu gehen. Er war sehr leidend, und eilte nach England »zurück. Ausserdem sind darin ein paar Sachen von mir, die ich, wenn ich »sie mit Ihren gütigen Geschenken vergleiche, immer nur mit grosser Scheu »abschicke. Sollten Sie das was in dem Jahrbuch über die Methode der »kleinsten Quadrate gesagt ist ansehen, und finden dass wenigstens die Darstellung nicht ganz verfehlt ist, so würden alle meine Wünsche erfüllt sein. »Es schien mir passend zu seyn, sie elementar so viel als möglich vorzutragen. — — —

»Herr Professor Weber steht hier so wohl bei seinen jüngeren Freunden »Dirichlet und Poggendorf, welche beide jetzt verheyrathet sind, als auch »bei Herrn von Humboldt fortwährend in so frischem Andenken, dass Ihre »gütigen Aeusserungen hier die grösste Freude erregt haben. Indem ich Sie »ersuchen möchte mich ihm bestens zu empfehlen bitte ich zugleich Ihr »ferneres Wohlwollen mir nicht zu entziehen.

»Ihr

»dankbarer Schüler

»Encke«.

Gauss an Schumacher*).

»— — — Ich gehe damit um, bei unserm Ministerium auf die »Errichtung eines eigenen von Eisen freien Gebäudes für fortwährende »magnetische Beobachtungen anzutragen und habe bereits den Baumeister »um einen Kostenanschlag ersucht. Ob dies reussiren wird, muss ich »erwarten, die Kosten werden allerdings beträchtlich sein. — — — Bei »Einreichung des Antrags würde ich zur Abkürzung gern einen Abdruck »des fraglichen Aufsatzes beilegen, die kleine Anzahl von Extraabdrücken, »welche ich erhalten habe, ist aber schon bis auf Einen erschöpft, daher »ich Ihnen, falls Sie eine neue Auflage machen, Dank wissen würde, wenn »Sie ausser dem gewöhnlichen Exemplar, womit ihre Güte mich versorgt, »mir noch einen oder ein Paar Abdrücke des betreffenden Blatts beilegen »möchten **).

»Ich komme noch einmahl auf die Schärfe der Beobachtung der Antritte, »behuf Bestimmung der Schwingungsdauer zurück, da ich kürzlich eine »grosse Anzahl solcher Beobachtungen discutirt habe. Ich finde (Beobachtung »am Chronometer) mittlern Fehler eines beobachteten Antritts 0″051, oder »wahrscheinlichen Fehler 0″034, und doch waren dies Beobachtungen, wo »grösstentheils das Auge schon sehr ermüdet war.

»Auf das Detail Ihrer Abwägungen bin ich sehr begierig. Vielleicht »ist es nicht ganz überflüssig auch gegen den Einfluss des Magnetismus bei »sehr feinen Abwägungen auf seiner Hut zu sein. Kräftig magnetisirte Stahl»stücke kann ich auf meiner Wage gar nicht mit einiger Schärfe abwägen, »die Schrauben im Gestell üben dann eine exorbitante Kraft aus; solche »Stäbe müssen vorher, ehe sie magnetisiert sind, gewogen werden; allein »auch dann ist das Resultat immer etwas unsicher, da jeder Stahlstab immer

*) [Briefwechsel u. s. w. Bd. II, S. 320—321.]

**) [Aus den im Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher vorhergehenden Briefen ersieht man, dass die obigen Worte sich auf den von Schumacher vorgeschlagenen Abdruck der »Anzeige« (in Gött. gel. Anz. 1832, Decbr. 24 und Gauss' Werke, Bd. V, S. 293—304) der Gauss'schen Abhandlung: »Intensitas vis magneticae etc.« in den »Astronomischen Nachrichten« (Bd. X, Nr. 238, S. 349—360, Altona 1833, Febr. 12) beziehen.]

»schon einigen schwachen Magnetismus hat. Glücklicherweise sind meine »Methoden — — — aber von der Kenntniss des Gewichts der Stahlnadeln »ganz unabhängig. — — — — — — Stets und ganz der Ihrige

»Göttingen, den 6. Jan. 1833. C. F. Gauss«.

Encke an Gauss.

»Berlin d. 21. Januar 1833.

»Hochgeehrtester Herr Hofrath.

»Ihren so überaus gütigen Brief vom 25. Decbr. würde ich schneller »und befriedigender beantwortet haben wenn nicht seit Ende Novembers »meine Frau schwer und seit einigen Tagen hofnungslos darniederläge so »dass ich ihr Ende in kurzer Zeit befürchten muss. Bei der Ungewissheit »ob ich in den nächsten Tagen Ruhe genug haben möchte beehre ich mich »wenigstens in Bezug auf die Erkundigungen welche Sie die Güte haben »von mir zu verlangen so viel zu sagen als ich jetzt weiss und vertraue fest »auf Ihre gütige Nachsicht bei diesen drückenden Verhältnissen.

»Die vortrefliche Anzeige*) habe ich sogleich an Humboldt abgegeben »und sie auch der Akademie vorgelegt wo sie besonders von Erman mit »lebhaftem Interesse aufgenommen ist. Dass Humboldt eigenhändig eine »Uebersetzung davon in französischer Sprache zur schnellen Publikation in »Paris gemacht hat wird er Ihnen selbst geschrieben haben. Ihre Abhand»lung muss wohl von Jedem mit gespannter Begierde erwartet werden, da »sie in einer sehr dunkeln Partie der mathematischen Physik ein neues Licht »in jeder Beziehung aufgehen lässt. Möchten Sie in dem unbezweifelten »Nutzen den sie gewähren wird, einen reichlichen Ersatz für die kostbare »Zeit finden welche Sie auf diese Untersuchungen gewandt. — — —

»Indem ich hier schliesse hoffe ich in nicht zu langer Zeit mehr Ruhe »zu gewinnen um über den Magnetismus nachzuhohlen und wenn Sie es er»lauben wollten mich bei Ihnen zu unterrichten so viel als möglich. Möchten »Sie diese Zeilen mit der im Eingange angegebenen etwas ermattenden und

*) [»Anzeige« der Gauss'schen Abhandlung: Intensitas vis magneticae . . . .]

»niederschlagenden Veranlassung entschuldigen und Ihr Wohlwollen ungetrübt bewahren

»Ihrem

»stets dankbaren

»Encke.

»Eine von Plana für Sie mir eingesandte Abhandlung über die Störungen »der Venus (worin aber wiederum eine kleine Uebereilung später verbessert »ist) sende ich mit der nächsten Fahrpost ab«.

Humboldt an Gauss*).

»Ich darf es nicht wagen, mich vor Ihnen zu rechtfertigen, mein theurer, »Hochverehrter Freund. Meine Schuld ist gross und weder die zunehmenden »rheumatischen Leiden meines rechten Arms, noch der Wunsch rechte Musse »zu finden, um Ihnen ausführlich zu schreiben und Sie lebhaft fühlen zu »lassen, welche Bewunderung in mir die von Ihnen für den Magnetismus »eröffnete Bahn in mir erregt hat und wie diese Bewunderung sich (weil Sie »der Gegenstand derselben sind) an die fröhlichsten Erinnerungen der in »Ihrer Nähe vollbrachten Tage anreiht, können mein langes Stillschweigen »auf die Beweise Ihres Wohlwollens entschuldigen. Es bleibt mir also nur »übrig Ihre Grossmuth in Anspruch zu nehmen. Wer so hoch als Sie steht »ist leicht zur Nachsicht in den schwach-menschlichen Dingen geneigt. Um »mich nun aber selbst in Ihren Augen wieder etwas zu heben, will ich zu»gleich aber auch von meinen Verdiensten reden, ja von Verdiensten die bei »meiner lahmen Hand Sie anerkennen müssen. Ihre Anzeige der Entdeckung »die Intensität auf ein bestimmtes Maass zu reduciren, hat mich dergestalt »erfreut, dass ich (sobald ich gewiss war, von der Methode recht durch»drungen zu sein) mich selbst an das Uebersetzen gemacht habe. Obgleich »unsere deutschen Zeitungen uns periodisch mit der Idee schmeicheln, dass »unsere vaterländische Sprache in dem grossen Babylon wuchere, so hat »mich ein 20 jähriger Aufenthalt fast das Gegentheil gelehrt. — — — — »— »— — —. In dem Institute ist fast alles verloren, was man deutsch ohne

*) [Siehe: K. Bruhns, Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss, Leipzig 1877, S. 22.]

»Auszug und Erläuterung einsendet. Meine Uebersetzung ist mit Encke »durchdisputirt worden, denn bei der edlen Concision Ihres Styls, ist es immer »zuletzt leicht den anfangs aufstossenden Zweifel zu lösen. Dann habe ich »(das ist mein Verdienst) das Ganze noch einmal abgeschrieben und etwas »leserlicher als diese Zeilen, und mit einem erläuternden Briefe über das »Vielumfassende Ihres Unternehmens an Arago, dem Institute übersandt. Die »Sendung ist (wie Ihnen unser Freund Encke wird schon gemeldet haben) »etwa 10—12 Tage nach dem Empfang Ihrer Arbeit, von hier abgegangen. »Wenn wir in den Zeitungen von Paris hier noch nichts darüber gehört, so »liegt dies wohl in Arago's Abwesenheit, der Anfang Januars alle Jahre »auf 2 bis 3 Wochen nach Metz geht zum Examen der polytechnischen »Schüler auf der Ecole d'application du Génie et de l'Artillerie. Die Ueber»einstimmung Ihrer Beobachtungen unter einander werden überall Bewunderung »erregen und doch sind sie wohl noch nicht von den Wirkungen der Wärme »und der veränderten Inclination befreit. Da ich über die stündlichen Ver»änderungen der Inclination und Intensität selbst in Poggendorf*) vor meiner »Abreise nach Sibirien etwas bekannt gemacht, so ist es Ihnen, Verehrtester, »vielleicht angenehm, wenn ich Ihnen aus einem alten Briefe von Arago »an mich (Paris 13. Dec. 1827) etwas über die Pariser Epoche abschreibe: »en »reprenant**) par une nouvelle methode les observations diurnes d'Inclinaison, »dont tu m'avois vu occupé, j'ai trouvé, non pas seulement par des moyennes »mais chaque jour, une variation régulière. L'inclinaison est plus grande »le matin à 9^h que le soir à 6^h. Tu sois que l'intensité, mesurée avec une »aiguille horizontale est au contraire***) à son minimum à la première époque »et qu'elle atteint son maximum entre 6^h et 7^h du soir. La variation totale »étant très petite, on pouvait supposer, qu'elle n'étoit due qu'au seul change»ment d'inclinaison et en effet la plus grande portion de la variation appa»rente d'intensité depend de l'altération diurne de la composente horizontale; »mais toute correction faite, il reste cependent une petite quantité comme†)

*) [Siehe: A. v. Humboldt, Ueber die Mittel, die Ergründung einiger Phänomene des tellurischen Magnetismus zu erleichtern. Poggendorff's Annalen, Bd. 15, S. 319—336, 1829.

**) [Bei K. Bruhns, Briefe u. s. w. steht: »reduisant«.

***) [ebenda: »au certain«.

†) [ebenda: »connu«.

»indice d'une variation réelle d'intensité«. Die Methode, welche Arago an- »wendet um die Veränderungen der Inclination zu messen ist diese. An die »untere Spitze der Gambeyschen Nadel wird ein dünner Glasfaden geklebt. »Das Instrument überlässt man sich selbst und richtet ein kleines Fernrohr »zugleich auf Faden und Eintheilung, so dass man dann einzelne Minuten »schätzen kann. Sie, mein edler Freund, haben alles zugleich mit neuen »Mitteln ergriffen und der ganze Magnetismus verdankt Ihrem Geiste eine »Revolution. Auch über das Streichen sehe ich in Ihrem ersten so wohl- »wollenden von einer Schrift begleitendem Schreiben, die wie so vieles über »meinem (deprimirten) Horizonte liegt, nun ganz neue Dinge. Die von Kupfer »so verschiedentlich gegebenen Temperatur-Correctionen und die absolute Be- »stimmung der Inclination liegen ganz im Argen und harren Ihres wohl- »thätigen Lichtes. Der Uebergang von hohen Temperaturen (50°—60° R.) zu »niedrigen + 5° und — 8° R. befolgt engere Curven der Intensitätszunahme »und bisher hat man wie mir es scheint sehr unglücklich geschlossen von »Versuchen bei 60° auf die Temperaturen bei denen wir arbeiten 5°—20° R. »Bei der Inclin. beunruhigen mich die Erfahrungen mit scheinbar ganz gleich »vollkommen gearbeiteten Gambeyschen Nadeln. Ich besass sonst welche »bei denen es mir glückte nach Anwendung aller Correctionen durch 2 Nadeln »Resultate zu erlangen die nicht um eine Bogenminute differirte[n]. Jetzt »habe ich in Paris eben so schöne Gambeysche Nadeln gesehen deren 2 »keine Uebereinstimmung von 4—5—6 Minuten gab[en], ein Gräuel wenn »man die so langsam mit den Jahren abnehmende Inclination untersuchen »will. Sollte der Grund allein daran liegen dass bei Umkehrung der Pole »man eine andere Kraft (Intensität) erhält? Ihr bereits mit so schönem Er- »folge gekröntes Unternehmen befriedigt meine Eitelkeit auf eine sehr indi- »viduelle Weise. Ich träume dass meine Bitten, die Versuche die Sie in »meinem Hause mit Auffindung der Inclin. durch 3 und 6 Extra-Meridian- »Beobachtungen machten, mitgewirkt haben zu dem Entschlusse diesen ver- »worrenen Theil der Physik aufzuklären. Die von Ihnen bekannt gemachte »jetzige Inclination zu Göttingen (an ganz freiem Orte?) scheint auch wieder »die sonderbare Anomalie der bei Ihnen so langsamen Abnahme der Inclin. »zu confirmiren (meine Relat. histor. 4°. T. III. p. 625). Sie erinnern sich »dass in Göttingen Incl. war Dec. 1805 — 69°29′ und Sept. 1826 — 68°29′26″

»(eine Nadel 68°30′7″ die andere 68°28′45″ mit Ihnen)*). In Paris war »Abnahme von 1798—1810 jährlich 5′ aber nur 3′,3 von 1810 bis 1825. »Doch ich ermüde Ihre Geduld. Clausens neuer Fund hat mich sehr er- »freut**). Wie eine Entdeckung immer eine andere herbeiführt, weil man »besser sucht und weiss was man finden kann. So war es mit den Aerolithen, »mit den kleinen (Taschen) Planeten, mit den Comètes à courtes periodes. »Aber das hemmende Fluidum scheint mir das grosse physikalische Räthsel »und sein Dasein ist doch wohl nothwendig anzunehmen. Sollte der vielleicht »zwischen Venus und Mars schwebende Ring des Zodiakalscheins den wir »durchkreuzen dasselbe Fluidum verdichtet und selbstleuchtend sein? Sollten »Cometen wenn sie diesen Ring um dessen Grenzen und Lage man sich so »wenig kümmert, durchwandeln auch von ihm nicht gehemmt werden? Auch »die begrenzte und unbegrenzte irdische Atmosphäre ist ein Uebel an dem »unsere Physik erkrankt. Und doch beweiset denke ich, die so wunderbar »erhöhte Intensität der Crepuscula 1831 wo man von Irkutz bis Berlin bei »Nacht lesen konnte, dass in den Schichten wo Barometer Druck $0^{\text{lin}},00001$ ist, »auch noch meteorologische Veränderungen vorgehen***). Lichterscheinungen »und Widerstand sind ja die einzigen Zeichen die uns an das Dasein solcher »Weltfluiden können glauben lassen! Ich habe mehrere Tage hier, unter »den zeitraubendsten Zerstreuungen des Hoflebens, mit Ihrem heitern und »guten Herzog von Cambridge zugebracht und da der Magnetismus bei mir »eine seit 40 Jahren eingebürgerte Krankheit ist, ihm einen Begriff von »Ihren Entdeckungen gegeben. Ich habe mich gefreut zu erfahren wie er »weiss was er an Ihnen, Theurer, besitzt. »Man schreit oft (sagt er in seiner »lebendigen Art sich auszudrücken) gegen Göttingen, so lange wir die Biblio- »thek und Gauss besitzen, können wir schimpfen lassen«. Ich bin einver-

*) [Die später in Göttingen beobachteten Werte der Inclination sind in den Göttinger Nachrichten, 1882, S. 385 zusammengestellt.]

**) [Diese Worte werden sich wahrscheinlich auf das Schreiben von Th. Clausen aus München 1832, Decbr. 11, an Olbers beziehen, das in den Astronomischen Nachrichten, Nr. 237, Band X, S. 345—348; 1833, Januar 29, veröffentlicht ist und mit den Worten beginnt: »Ich bin so glücklich, Ihnen einen neuen Fund melden zu können, den ich in der Cometentheorie gemacht habe, dass nämlich die beiden Cometen von 1743 Jan. und 1819 Novbr. sehr wahrscheinlich identisch sind ....«]

***) [In der »Meteorologischen Zeitschrift«, 1899, S. 260 wird diese Bemerkung von Humboldt erwähnt und J. Maurer giebt eine Zusammenstellung der Beobachtungen nächtlicher Helligkeit: »Erdlicht«.]

»standen, aber meine Pflicht ist es Ew. kön. Hoheit zu bitten, die Rang-»ordnung der Schätze umzukehren und den ersten Mathematiker unseres Zeit-»alters, den grossen Astronomen, den geistreichen Physiker zuerst zu nennen. »Der Herzog bittet mich, seines Alters wegen zu verheimlichen, dass wir »1790!! zugleich in Göttingen studirt. Mit dankbarer Verehrung und noch-»maliger Bitte, dem Freunde nicht zu schmähen

»Ihr

»Berlin, den 17. Febr. 1833. Al. Humboldt.

»Meine freundlichsten Grüsse Herrn Prof. Weber den ich um Ihre »Nähe beneide.«

Encke an Gauss.

»Berlin d. 16. August 1833.

»Hochgeehrtester Herr Hofrath.

»Schon längere Zeit war es mein fester Vorsatz Ihnen für Ihr gütiges »Geschenk Ihrer letzten magnetischen Abhandlung*) meinen ergebensten Dank »zu sagen, immer verschob ich es von Tage zu Tage je häufiger ich zur »Durchlesung derselben zurückkehrte. Es bedarf gewiss keiner Versicherung »wie hoch der Werth derselben mir erschien, fast möchte ich sagen ich »scheue mich bei Ihren Arbeiten so mich auszudrücken. Auf der andern »Seite erregte es bei mir ein fast wehmüthiges Gefühl zu sehen welch' ein »Feld auch für die Genauigkeit der Beobachtung sich hier öffnet und wie »ich bei meinen astronomischen Beschäftigungen kaum hoffen darf mich »jemals dahinein zu wagen. Schon bei Ihrer Anzeige in den Göttinger ge-»lehrten Anzeigen schien es mir als setzten Sie voraus dass die darin ent-»haltenen Andeutungen Jeden in den Stand setzen würden den nöthigen »Apparat sich zu construiren. Indessen wenn man aus der neuen Abhandlung »so klar es heraustreten sieht, welche grosse Vor- und Umsicht erfordert »wird so wie welche Materialien an Instrumenten Magnetstäben und localen »Einrichtungen nöthig sind um die Genauigkeit zu erreichen von der Sie »das Muster aufgestellt (von der besonderen individuellen Geschicklichkeit »des Beobachters abstrahire ich hier ganz) so fürchte ich fast dass es noch

*) [Gauss: Intensitas vis magueticae terrestris etc. Gauss' Werke, Bd. V, S. 79—118.]

»längere Zeit dauern wird ehe Ihr Vorschritt in dem gewöhnlichen Treiben »der Beobachter sich merklich macht. Die nöthigen Rechnungen würden »mich zwar nicht abschrecken aber so sehr ich hofte dass es mir vielleicht »möglich seyn würde durch eigene Versuche recht mit Ihrem Gange vertraut »zu werden so habe ich doch für längere Zeit jetzt darauf verzichtet, ja die »Einrichtung des kleinen magnetischen Häuschens die ich mir schon ent- »worfen hatte noch bei Seite gelegt in der Hofnung vorher noch wenn es »irgend möglich wäre durch eigene Anschauung in Göttingen mich zu be- »lehren. Der plötzliche Tod von Rumpf wenn ich anders nicht falsch be- »richtet bin raubt für das erste auch die Aussicht vollständige Apparate sich »verschaffen zu können. In der That kann ich Ihnen nicht genug ausdrücken »wie niederschlagend die Betrachtung auf mich wirkte dass mein festes hiesiges »Geschäft von so höchst interessanten wenn auch nur Hülfsleistungen im »Sammeln von Erfahrungsdaten für das erste mich entfernt hält. Immer »erinnere ich mich indessen schon früher bei jedem Gegenstande der leb- »hafter mich ergriff ähnliches empfunden zu haben und häufig weicht dieses »Gefühl wenn ernstlich Hand angelegt werden muss.

»Aus einer Anmerkung*) glaube ich übrigens zu sehen dass Sie auf einen »Gegenstand wegen der Drehung auch Ihre Aufmerksamkeit gerichtet mit »dem ich anfangs hofte bei meinem hiesigen Deklinationsinstrumente besser »als man bisher gethan fertig zu werden. Die Fäden an denen die Nadel »aufgehängt wird sind schon bearbeitet wenn man sie auch einfach nennt. »Ich wandte mich deshalb schon vor längerer Zeit an eine hiesige Seiden- »fabrik um ganz einfache Fäden zu erhalten allein auch der Chef des Hauses »selbst konnte sie mir nicht verschaffen so dass eine Anzahl derselben stark »genug wären die Nadel zu tragen und nach vielem Zeitaufwand aus den »Cocons selbst etwas dem Zwecke entsprechendes zu ziehen musste ich zu »den alten Fäden zurückkehren. Für das hiesige Instrument hatte die me- »chanische Entfernung der Drehkraft um so mehr Interesse als eine genaue »Ermittelung der Torsion bei ihnen nicht wohl möglich ist.

»Herr von Humboldt ist gegenwärtig mit dem Könige in Töplitz. »Wenn er nicht schon selbst Ihnen geantwortet haben sollte so möchte ich

*) [Gauss' Werke, Bd. V, S. 95.]

»Sie sehr dringend ersuchen auf seine hiesigen Verhältnisse etwas Rücksicht »zu nehmen. Seine Zeit wird von verschiedenen Seiten her so unmässig in »Anspruch genommen dass mir es immer noch ein wahres Wunder ist wie »er wenn auch nur die leichteren geschichtlichen und geographischen Unter»suchungen fortzusetzen vermag, wie er es doch sehr ernstlich thut. Ge»wöhnlich gehe ich drey- bis viermal vergeblich ehe ich ihn sprechen kann »obgleich ich weiss dass er sich nicht wie sonst wohl geschehen mag ver»leugnen lässt weil sein Zimmer fast nicht leer wird und er nicht einmal »seines nächsten Augenblickes sicher ist wenn er bei Hofe verlangt wird. — —

»Indem ich Sie ersuche Ihr gütiges Wohlwollen mir auch ferner nicht »zu entziehen

»verbleibe ich

»Ihr ergebenster

»Encke«.

Gauss an Encke.

»Indem ich mich niedersetze, um einige dem Herrn Professor Hill aus »Lund (welcher sich hier einige Wochen aufgehalten hat, und im Begriff »ist über Berlin nach Schweden zurückzureisen) an Sie mitzugebende Zeilen »aufzusetzen, erhalte ich Ihr gütiges Schreiben vom 16. d., und kann mich »nicht enthalten, sofort einiges darauf zu erwiedern.

»So sehr es mich freuet, dass Sie, wie es scheint, den Arbeiten über »den Magnetismus Ihr Interesse nicht versagen, so leid thut es mir, wenn »mein Schriftchen ganz gegen meine Absicht Sie von der Theilnahme an »ähnlichen Arbeiten gewissermassen abgeschreckt und entmuthigt hat. Sie »stellen Sich gewiss alles viel schwerer und verwickelter vor, als es wirklich »ist, und ich bin fest überzeugt, dass es nur der eignen Anschauung und »einer kurzen Einübung bedürfen wird, Ihre Ansicht zu berichtigen und Ihr »Interesse noch viel mehr zu beleben. In Abrede will ich dabei nicht stellen, »dass es dabei mancherlei Kleinigkeiten gibt, die wie geringfügig sie an sich »auch sind, doch den, der bloss durch eigne Erfahrung ans Ziel strebt, einiges »Lehrgeld kosten. Allein dies ist nur ein Grund mehr, da über solche »Dinge sich nicht wohl schreiben lässt, dass Sie selbst hieher kommen müssen.

»Sie brauchen ja zur Reise von Berlin nach Göttingen weniger als zweimahl »24 Stunden, und meine Arme sind zu Ihrem Empfang immer offen. Ich »muss Ihnen diess um so mehr ans Herz legen, da ich mit Fug und Recht »die erste Nachfolge auf meine Einrichtungen von Berlin und von Ihnen »erwarte, da nirgends die Umstände günstiger sein können, als dort, wo Ihr »Humboldt sich so lebhaft für den Gegenstand interessirt und wo die doch »am Ende sehr unbedeutende Kosten gar nicht in Betracht kommen.

»Unser magnetisches Observatorium schreitet im Bau langsam fort; es »ist unter Dach aber seit 14 Tagen ruht die Arbeit ganz, vermuthlich damit »die Wände, und die Fussbodenausfüllung erst gehörig austrocknen, was bei »dem feuchten Wetter langsam vor sich geht. Ich hoffe aber doch noch »immer schon in diesem Herbst darin zu beobachten. Dies ist inzwischen »kein Grund Ihre Reise zu verschieben, denn alle Vorrichtungen darin werden »sehr einfach sein, den bisher in der Sternwarte bestehenden im Wesentlichen »gleichen, und nur durch grössere Dimensionen sich unterscheiden, und nach »letzteren von Ihnen eben so vollständig verstanden werden, als wenn sie »schon selbst da ständen.

»Die Probestähle aus Uslar sind vortrefflich ausgefallen; Freund Weber »ist vor einigen Tagen selbst an der Hütte gewesen, um eine Art Contract »festzumachen, und in ein Paar Wochen hoffe ich schon die erste Lieferung »von etwa 1 Centner trefflicher glasharter wenigstens 4 pfündiger Stahlstäbe »zu erhalten. Meine Manipulationen Stäbe mit Leichtigkeit aufs stärkste zu »magnetisiren werden Sie mir bald ablernen; Beschreibungen sind freilich weit-»läufig und kaum thunlich, da so mancherlei Kleinigkeiten zu bemerken sind.

»Unsre grosse galvanische Kette (6000—7000 Fuss Draht) ist schon lange »ungestört bestehend und schon oft haben wir mit besten Erfolg ganze kleine »Phrasen einander telegraphisch signalisirt. Ganz besonders merkwürdig und »anfangs für mich überraschend (obwohl es nach richtiger Theorie hätte »vorhergesehen werden können) war der Umstand, dass es dabei gar keiner »grossen Platten oder starker Säuren bedarf; eine Kupfer- und Zinkplatte »etwa wie ein preussischer Thaler gross, und Tuchscheibe mit reinem »Brunnenwasser genetzt, ja sogar destillirtes Wasser ist vollkommen »hinreichend, ja sogar für die bisherigen Einrichtungen (die ursprünglich »nicht diesen Zweck hatten) noch zu stark; die grössten Platten (in sofern

»man nur Ein Paar nimmt) und starke Säure würde nur etwa eine doppelt »so grosse Wirkung geben.

»— — — Indem ich Ihnen also meine Bitte nochmals wiederhole be»harre ich wie immer

»in freundschaftlichster Ergebenheit

»Göttingen den 20. August 1833. der Ihrige

»C. F. G.«

Gauss an Olbers.

»Es ist sehr lange, mein theuerster Freund, dass ich von Ihnen keine »Nachrichten, und, wie ich besorge, noch länger dass ich Ihnen nicht ge»schrieben habe theils durch wirklich recht überhäufte und zeitversplitternde »Arbeiten, theils (oder noch mehr) durch mancherlei Bekümmernisse und »Sorgen bin ich in aller Correspondenz zurückbleibend geworden. Ich darf »jedoch nicht länger anstehen, Ihnen wenigstens ein Lebenszeichen zu geben.

»Mit meiner Vorlesung über die Intensität des Erdmagnetismus, von »welcher ausnahmsweise schon jetzt, also mehrere Jahre vor dem muthmass»lichen Erscheinen des betreffenden Bandes der Comm[entationen], ein beson»derer Abdruck ausgegeben ist, komme ich bei Ihnen zu spät: inzwischen »hoffe ich, dass Sie das beikommende Exemplar, wenn auch nur des vielleicht »bessern Papiers wegen noch freundlich annehmen werden. — — —

»Das magnetische Observatorium ist bis auf einige innere Einrichtungen »vollendet, und ich habe bereits vorläufig einen der bisherigen Apparate »hineingestellt, und angefangen die Berichtigungen Behuf Nullpunkt der »Fadentorsion, besten Platzes der Aufstellung etc. vorzunehmen, wobei ich, »durch die Kürze und Dunkelheit der Tage, von denen das Meiste oder oft »das Ganze durch zwei Collegia und anderweitere nie endende Störungen »absorbirt wird, sehr gehemmt werde, so dass diese Operationen, die an hellen »Sommertagen und freier Disposition über die Zeit in 1—2 Tagen absolvirt »werden könnten, jetzt mehrere Wochen erfordern werden. Gar viel verloren »ist jedoch dabei nicht; denn definitiv wird eine circa 4 Pfund schwere »(2 Fuss lange) Nadel aufgehängt werden, wozu die Hülfsapparate (Spiegel»(halter, Schiffchen etc. etc.) erst angefertigt werden müssen.

»Ich weiss nicht ob ich Ihnen schon früher von einer grossartigen Vor»richtung die wir hier gemacht haben, geschrieben habe*). Es ist eine galva»nische Kette zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Kabinet durch »Drähte in der Luft über die Häuser weg oben zum Johannisthurm und so »wieder herab gezogen. Die ganze Drahtlänge wird etwa 8000 Fuss sein. »An beiden Enden ist sie mit einem Multiplicator verbunden, bei mir von »170 Gewinden bei Weber im phys. Kab. etwa 50 Gewinden, beide um »1 pfündige Magnetnadeln geführt die nach meinen Einrichtungen aufgehängt »sind. Es sind daraus manche imposante zum Theil anfangs überraschende »Versuche und Erfahrungen hervorgegangen. Zu den letzten gehört (was »freilich hätte vorausgesehen werden können) dass gar keine grossen Platten »oder starke Säuren erforderlich sind, um eine doch sehr grosse in die Augen »fallende Wirkung zu geben. Wir nehmen stets nur reines Brunnen»wasser und ein mässiges Plattenpaar, zuweilen nur wie ein pr. Thaler »gross, und die Wirkung bleibt doch nicht sehr viel kleiner, als wenn noch »so starke Säure und noch so grosse Platten genommen werden (vorausgesetzt, »dass man nur Ein Paar anwendet). Ich habe eine einfache Vorrichtung »ausgedacht, wodurch ich augenblicklich die Richtung des Stromes umkehren »kann, die ich einen Commutator nenne. Wenn ich so tactmässig an meinen »Platten operire, so wird in sehr kurzer Zeit (z. B. in 1 oder $1\frac{1}{2}$ Min.) die »Bewegung der Nadel im phys. Kabinet so stark, dass sie an eine Glocke »anschlägt hörbar in einem andern Zimmer. Dies ist jedoch mehr Spielerei. »Die Absicht ist, dass die Bewegungen gesehen werden sollen, wo die »äusserste Accuratesse erreicht werden kann. Wir haben diese Vorrichtung »bereits zu telegraphischen Versuchen gebraucht, die sehr gut mit ganzen »Wörtern oder kleinen Phrasen gelungen sind. Diese Art zu telegraphiren »hat das Angenehme, dass sie von Wetter und Tageszeit ganz unabhängig »ist; jeder der das Zeichen gibt und der dasselbe empfängt, bleibt in seinem »Zimmer, wenn er will bei verschlossenen Fensterläden. Ich bin überzeugt, »dass unter Anwendung von hinlänglich starken Drähten auf diese Weise »auf Einen Schlag von Göttingen nach Hannover oder von Hannover nach »Bremen telegraphirt werden könnte. — — —

*) [Siehe S. 188 dieses Bandes.]

»Möchte ich doch bald einmahl wieder durch einige Zeilen von Ihnen »erfreuet werden.

»Mit inniger Liebe

»G. den 20. November 1833. Ihr C. F. Gauss«.

Encke an Gauss.

»Berlin d. 4. Okt. 1834.

»Einliegend hochgeehrter Herr Hofrath beehre ich mich Ihnen die Be- »obachtungen der magnetischen Variation vom Spt. 23. und 24. mit dem »bisherigen Apparat von 5 zu 5 Minuten angestellt zu übersenden. — — —

»Die Zeichnung der Junibeobachtungen bei dem vollständigen Parallelismus »hat hier grosse Sensation gemacht. Um die gelegentliche Mittheilung der »Septemberbeobachtungen ersuche ich Sie ergebenst. — — —

»Ich komme jetzt noch mit zwey Bitten die mir von Wichtigkeit sind »für meine künftige hiesige Thätigkeit und deren Erwägung ich Ihnen des- »halb vertrauensvoll überlasse.

»Die Methode der partiellen Störungen welche Sie mir im Jahre 1811 »vorzutragen die Güte hatten, hatten Sie mir damals unter der Aeusserung »mitgetheilt, dass Sie sie nicht verbreitet zu sehen wünschten da Sie selbst »etwas darüber mittheilen wollten. Ich habe sie seitdem beständig angewandt »und bin jetzt durch das Jahrbuch genöthigt sie auf die vier kleinen Planeten »und ausserdem noch auf den Cometen von kurzer Umlaufszeit fortwährend »anzuwenden. Heiligenstein's*) Tod hat es auch für Ceres nothwendig »gemacht, was in diesen Ferien geschehen ist. Indessen sehe ich voraus, »dass es mir in Zukunft allein nicht mehr möglich sein wird und dass selbst »wenn ein oder der andere Ihrer Schüler einen oder den anderen Planeten »übernehmen wollte mir damit nicht geholfen seyn würde. — — — Ich »möchte Sie deswegen ersuchen mir zu erlauben diese Mittheilung Ihrer »Methoden Jedem machen zu dürfen dem ich eine solche Arbeit anvertraue »— — und noch mehr würden Sie mich beglücken, wenn Sie mir erlauben

*) [Anton von Heiligenstein (Privatdocent an der Univ. zu Heidelberg) berechnete 1829 die Elemente der Ceres (s. Astronomische Nachrichten, Bd. VII, S. 413—416); er starb 1834, April 24, 29 Jahre alt.]

»wollten etwa in einem Anhange des Jahrbuchs die Methode ausführlich »vorzutragen. Es würde ganz gewiss namentlich in England dadurch eine »beständige Fortsetzung der Rechnung für die kleinen Planeten verbunden »seyn weswegen mich der Herausgeber des Nautical Almanac schon vielfach »angegangen hat und bei welcher Anfrage ich immer in einige Verlegenheit »gekommen bin, da eine so vieljährige Verschweigung der Einzelheiten etwas »für den Anfragenden befremdendes hat. — — —

»Mit der Bitte um die Fortdauer Ihres gütigen Wohlwollens

»Ihr dankbarer Schüler

»Encke«.

Gauss an Encke.

»— — Was endlich meine Methode der speziellen Perturbationsrechnung »anlangt, so lasse ich mir gern gefallen, dass Sie solche öffentlich bekannt »machen, da ich vorerst noch nicht weiss, wann oder ob ich selbst dazu »kommen könnte. Meine Zahlen für die frühern Pallasoppositionen werde »ich Ihnen aufsuchen, sowie die Beiträge der entsprechenden Elementen- »störungen: seit langer Zeit sind aber die darauf bezüglichen Papiere mir »nicht durch die Hände gegangen. — — —

»Stets von Herzen

»Göttingen den 13. October 1834.

der Ihrige

»C. F. G.«

Die in diesem Briefe angedeuteten Untersuchungen hat Encke in der Abhandlung »Ueber mechanische Quadratur« (Berliner astronomisches Jahrbuch für 1837, Seite 251 bis Seite 287) und in der Abhandlung »Ueber die Berechnung der speziellen Störungen« (Berliner astronomisches Jahrbuch für 1837, Seite 288 bis 330 und Jahrbuch für 1838, Seite 264 bis 286) veröffentlicht. Encke sagt auf Seite 291:

»Die Berechnung der speciellen Störungen wird am leichtesten und »sichersten erhalten, durch die Anwendung des in der Mechanik so wichtigen »Princips der Variation der Constanten auf die Bewegung der Planeten«.

Später hat Encke mit einigen anderen Autoren diese Gausssche Methode der Berechnung der Störungen nämlich durch die Bestimmung der

Variation der Bahn-Elemente verlassen und sich der unmittelbaren Darstellung der Störungen der Coordinaten zugewendet.

Aber Theodor von Oppolzer ist wieder zur Erkenntniss der hervorragenden Bedeutung der Gaussschen Methode gelangt, er sagt in seinem 1880 herausgegebenen umfangreichen und ausführlichen Werke*) Seite 257:

»Mit Rücksicht auf die oben gemachten Einschränkungen möchte ich »als Resultat der hier gemachten Betrachtungen den Satz hinstellen, dass »von den in diesem Werke entwickelten Methoden der strengen Störungs»rechnung die Methode der Variation der Constanten in der Anwendung den »unbedingten Vorzug verdient«.

Die hier erwähnten Einschränkungen beziehen sich auf den Fall, dass man die Störungen nur für einen sehr beschränkten Zeitraum, etwa für die Erscheinung eines Kometen oder für einen Planeten für die Zeit einer Opposition zu ermitteln hat; dann werde die Methode der Coordinatenstörungen den Vorzug verdienen.

Auch in anderen Gebieten ist man, nachdem die von Gauss eingeführten Methoden verlassen worden waren, doch wieder zu denselben zurückgekehrt. So hat die Kaiserlich Deutsche Normal-Aichungs-Commission in ihrem allseitig wissenschaftlichen Bestreben die Gausssche Wägungsart, welche von Anderen der Bordaschen nachgestellt worden ist, zur Geltung gebracht. Mit dieser Bemerkung wollen wir uns nun wieder zu den Briefen wenden.

Gauss an Schumacher**).

»— — — Eine Hauptabweichung bei meiner Wägungsart von der ge»wöhnlichen ist, dass ich Borda's Manier habe fahren lassen. Ich begreife »in der That nicht, warum man sich an diese gehalten hat, in den Fällen, wo »man die grösste Genauigkeit verlangt, also oft wiederholte Wägungen macht. »Es ist sehr klar, dass wenn Sie gar nicht tariren, sondern die beiden zu »vergleichenden Gewichte auf den Schalen umtauschen, ihre Ungleichheit »einen doppelt so grossen Ausschlag giebt, wie bei Borda's Art, und dass man

*) [Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, erster Band 1870, zweiter Band 1880.]

**) [Siehe: Briefwechsel u. s. w., Bd. III, Altona 1861, S. 100.]

»also mit einer gegebenen Wage bei meiner Wägungsart mit 20 Wägungen »gerade eben so weit kommt, wie mit 80 Wägungen nach Borda's Art (eine »doppelt so scharfe Operation hat nämlich bekanntlich das 4 fache Gewicht). »Welch enormer Gewinn! Freilich müssen noch einige Nebenumstände dabei »berücksichtigt werden (die zu erwähnen hier zu weitläufig sein würde), die »aber nicht die geringste Schwierigkeit haben. — —

»Verzeihen Sie die Eile, womit ich diesen Brief habe schreiben müssen.

»Stets der Ihrige

»Göttingen, den 24. Julius 1836. C. F. Gauss«.

Humboldt an Gauss*).

»Sie werden verzeihen, mein hochverehrter Freund, dass ich so spät erst »Ihnen für Ihren höchst interessanten freundlichen Brief meinen innigen »Dank darbringe. Eine ungewöhnliche Anhäufung von Geschäften und Pflichten »in der Umgebung des Königs haben mich allein davon abhalten können. »Die Zeichnungen so vieler übereinstimmender Orte haben durch den Pa»rallelismus in den kleinsten Krümmungen mich unendlich interessirt. Solche »Resultate in den kleinsten fast zu Längenbestimmungen reizbaren Zeiträumen »sind freilich nur durch Ihre vortreffliche catoptrische Methode zu erreichen. »Sie wissen dass seitdem mein magnetisches Häuschen in der Leipziger Strasse »abgerissen ist (wegen Verkauf des Grundstückes) wir in der Neuen Stern»warte nur Ihre Methode anwenden. Ich dringe darauf, dass wir bald einen »unter Ihrer Leitung gearbeiteten Apparat erhalten mögen. Es freut mich »dass der Anstoss den ich durch meinen magnetischen Brief**) an den Herzog »von Sussex in London gegeben, die königl. Societät endlich — — — — »— — — — — — — — — — — — erweckt hat. Der Antrag ist sehr »sehr freundlich aufgenommen und der lange schon gedruckte Bericht von »Airy an Christie den mir der englisch deutsche Herr König unter dem »8. d. M. schickt, schlägt weit mehr Stationen in der Südsee, Ost- und »Westindien vor als ich zu erwarten wagte. — — —

»Teplitz, den 30. Juli 1836.

Al. Humboldt«.

---

*) [Siehe: K. Bruhns: Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss, S. 26.]

**) [Siehe S. 242—253 dieses Bandes.]

Humboldt an Gauss*).

»Verehrungswerther Freund! Ich erhielt Ihre wichtige, langersehnte »Schrift über den tellurischen Magnetismus in den letzten Tagen meines »Aufenthalts in Potsdam**). Erst von hier aus, wohin ich den König, wie »immer, begleitet habe, kann ich Ihnen meinen innigsten Dank für Ihren »liebevollen Brief und für die vielfache Belehrung, welche mir jene Schrift »gegeben, darbringen. Ihr grosser Name und die völlige Umgestaltung der »Beobachtungen, welche Sie geschaffen und verbreitet haben, hat jetzt eine »Association zu Stande gebracht, deren Früchte allmälig die Entzifferung »»jener geheimnissvollen Hieroglyphenschrift«***) sein wird. Auf mehr als »zwanzig Punkten sind jetzt schon Ihre Instrumente aufgestellt und der »Vorzug, in Zwischenräumen von so wenigen Minuten mit bewunderns- »würdiger Genauigkeit die Winkel messen zu können, ist ein Gewinn den »niemand verkennen kann. Was bei mir bloss Wunsch und schwaches, »unvollkommenes Beginnen war, ist durch Sie, hochverehrter Freund, jetzt »in's Leben gerufen. Das Auge ruht mit einem besonderen Genusse auf »diesen Tafeln, denn, wie Sie so schön und beredt sagen »ein eigenthümlicher »Zauber umgiebt das Erkennen von Maass und Harmonie im anscheinend »Regellosen«†). Von ganz besonderer Wichtigkeit sind mir p. 90—103††) »gewesen, wo Sie manche Winke über den tiefen Zusammenhang gleichzeitig »wirkender einzelner Kräfte geben. Die Beschreibung der Apparate und »ihrer Behandlung ist klar und lichtvoll, wie alles was unserem Wilhelm »Weber†††) aufgetragen wird. — — —

»Verzeihen Sie das Unleserliche dieser Zeilen. Mein kranker Arm ge-

---

*) [Briefe u. s. w., S. 29.]

**) [Diese Worte werden sich auf den ersten Jahrgang der Zeitschrift beziehen: »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins«, 1836, Göttingen 1837.]

***) [Gauss in den »Resultaten« u. s. w., 1836, S. 98.]

†) [Siehe: Gauss in »Einleitung« für die Zeitschrift: »Resultate« u. s. w., 1836, S. 11 und Gauss' Werke, Bd. V, S. 350.]

††) [Gauss: »Erläuterungen zu den Terminszeichnungen und den Beobachtungszahlen«, in den »Resultaten« 1836, S. 90—103.]

†††) [W. Weber in den »Resultaten . . . .« 1836, S. 13—33 und S. 63—89.]

»hört schon zu den vorweltlichen Resten. Erhalten Sie mir ein Wohlwollen »das mein Stolz ist. Mit alter unverbrüchlicher Verehrung und Liebe.

»Teplitz, den 27. Juli 1837. Ihr ganz gehorsamster

»Al. Humboldt.

»Ich werde mit meinem Könige gegen den 2. August in Berlin zurück sein«.

Humboldt an Gauss*).

»Berlin, den 30. Sept. 1837.

»Wenn auch nur in flüchtigen Zeilen, kann ich mir doch die Freude »nicht versagen, Ihnen, theurer hochverehrter Freund, vorläufig den Ausdruck »meiner innigsten Dankgefühle für die auf Ihrer Sternwarte verlebten schönen »Tage darzubringen. Sie sind mir nicht bloss, wie immer, geistig gross und »alles was Sie kühn und tief angreifen beherrschend, erschienen: Sie waren »auch voll Milde und Herzlichkeit und Wärme des Characters, Züge die »Ihnen den so gelungenen, anmuthigen, sinnigen Eingang Ihrer Societätsrede**) »inspirirt haben. Es ist etwas Grosses im Leben, so dem Grossen seiner »Zeit haben nahe treten zu können. — — —

»Mit inniger Verehrung und Dankbarkeit

»Ihr

»Al. Humboldt«.

Humboldt an Gauss***).

»Paretz, im Havellande d. 18. Juni 1839.

»Ich muss fast besorgen, mein innigst verehrter Freund und College, »in den bösen Verdacht der Undankbarkeit zu gerathen; wenn nicht eine »auch Ihnen unerfreuliche Ursache mein auffallend langes Stillschweigen »rechtfertigte. Meine Gesundheit gewöhnlich wunderbar fest bei einem so »mannichfach angestrengten Körper, war sehr gewichen seit einem arbeit-

*) [Briefe u. s. w., S. 30.]

**) [Siehe S. 233 dieses Bandes.]

***) [Briefe u. s. w., S. 40.]

»samen und langen Aufenthalte in Paris. Ich habe besonders den halben »April und ganzen Mai von anhaltendem Husten und Grippe (eine ziemlich »sinnlose, systematische Bezeichnung des pathologischen x!*)) gelitten. Erst »seit 14 Tagen finde ich mich ganz wieder ermuthigt und ich befinde mich »seit 4 Tagen mit meinem Könige in der ländlichen Einsamkeit des Havel-»landes (in Paretz). Ich wollte Ihnen nicht eher meinen wärmsten Dank »wie den Ausdruck meiner Bewunderung und Liebe darbringen, als bis »ich recht frischen Geistes über das Gelingen einer Arbeit schreiben könnte, »die zu den grossartigsten und umfassendsten gehört, welche ich unter meinen »Zeitgenossen erlebt. Meine Freude über ein solches Gelingen entspricht »der Anhänglichkeit die ich für den Entdecker der wahren Theorie des Erd-»magnetismus (und eine Theorie die unabhängig von allen besondern Hypo-»thesen über die Vertheilung der magnetischen Flüssigkeit in der Erdmasse »ist) in meinem Busen bewahre. Was ich von dem tieferen algebraischen »Zusammenhang nicht gleich verstand, hat mir Jacobi, mit dem ich selbst »schriftlich darüber verhandelt und den ich stets bei meinem Aufenthalte »in Potsdam besuche, zur Intuition**) gebracht. Zuversicht und Glaube er-»leichtern die Einsicht und stärken das Fassungsvermögen. Die grossen »Geister üben eine anziehende Kraft aus. Ihre »allgemeine Theorie«***) hat »mich nun seit 6 Wochen fast ununterbrochen beschäftigt. Das Büchlein »ist mir überall gefolgt und ich lebe in der frohen Täuschung dass ich die »Theorie besitze, ja vollkommen verstehe, wie in derselben die Mittel liegen »eine Menge specieller physikalischer Nebenfragen auf das gründlichste be-»antworten zu können. Siebenzigjährig im nächsten September versteinere »ich langsam und (wie es sich für einen alten Geognosten geziemt) von den »Extremitäten beginnend. Das Herz ist noch nicht erhärtet und schlägt »mit erhöhter Wärme für den, der des Blitzes Helle in das geheimnissvolle »Dunkel verwickelter Naturerscheinungen sendet. Wenn Lagrange über »die ewige Vergleichung zwischen sich und dem Verfasser der Mécanique »céleste in menschlicher Anwandlung mislaunisch wurde, so pflegte er mir zu

*) [In der Ausgabe der »Briefe« steht hier: etc. statt x].

**) [In den »Briefen« steht »Induction«.]

***) [Gauss: Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus in der Zeitschrift: »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins« 1838, S. 1—57 und in Gauss' Werken, Bd. V, S. 119—193.]

»sagen: »Man sieht klar nur durch ein ganz geöffnetes Thor. Le grand »Géomètre sait*) donner un seul coup et la porte est ouverte, Mr. Laplace »donne successivement de petits coups, il en donne trois ou quatre. La »porte ne cède qu'un peu et l'on voit mal ou rien par une porte à moitié »ouverte!«

»Der Riesenschlag ist nun von Göttingen ausgegangen. Die Forderung »von Lagrange ist erfüllt.

»Ich habe seitdem ich angefangen mich, durch Borda angetrieben, mit »magnetischen Beobachtungen zu beschäftigen, zwei vage aber richtige Inspi»rationen gehabt: Hass gegen die Multiplication der magnetischen Erdpole »und der Gabelung (Bifurcation) isogonischer Linien, grosse Vorliebe für die »Messung der Intensität. Ich erkannte empirisch die Zunahme der totalen »Intensität vom magnetischen Aequator gegen die magnetischen Pole hin; »es ist ganz ungerecht und unhistorisch, dass Sabine dies Erkennen dem »Admiral De Rossel zuschreibt, dieser hat früher als ich schwingen lassen »unter sehr verschiedenen Breiten, ist aber erst durch mich veranlasst worden, »als ich von meiner Reise zurückkam, in seinen Manuscripten nachzusehen. »Er hatte nicht einmal seine Beobachtungen publicirt, geschweige das gesetz»mässige darinnen erkannt. Die Aufstellung der kleinen Magnete, die von »Biot aufgewärmte und modificirte Hypothese von Tobias Mayer, die »schwerfälligen Versuche von Hansteen waren mir zuwider: ich wünschte »die goldene Zeit heran, wo ein Newtonianischer Geist uns von den Fesseln »gehäufter Epicykeln befreien und alle Elemente aus einem Princip herleiten »würde. Dies Wunder haben Sie vollbracht, mein theurer, hochverehrter »Freund: meine Augen haben es noch gesehen. Aus Ihrer Theorie habe ich »nun erst einsehen gelernt, welchen Werth die horizontalen Schwingungen »haben, wie unrecht ich hatte, sie ehemals nur in Verbindung mit Incli»nationsbeobachtungen zu schätzen »weil, wenn nach einem halben Jahr»hundert die horizontale Kraft an einem Orte verändert gefunden würde, »man nicht wisse, ob die Veränderung Folge der abnehmenden totalen In»tensität oder Folge der veränderten Inclination oder beider physicalischen »Elemente zugleich sei«. Aus Ihrem Buche ist mir nun klar geworden, wie

*) [In den »Briefen« steht: »fait«.]

»wenn die Beobachtungen zahlreich »und genau« genug wären, die Richtung »der Horizontalnadel, aus der blossen Horizontalintensität abgeleitet werden »könnte. Das ist in der That die Blüthe der Sache, da durch ein solches »Unternehmen, die mathematische Verbindung, die zufolge des Attractions»gesetzes, zwischen den drei Componenten statt finden muss, klar nachzu»weisen ist. Aus Ihrem Buche habe ich erst ein richtiges Verständniss über »die sogenannte magnetische Axe erhalten, wie über die Bedeutung der »Pole, und die von der vierfachen unzertrennlichen sechsfachen Zahl!*) Die »graphische Darstellung von V/R**) hat mich bei dem Empfang Ihrer vor»trefflichen Schrift in grosse Verlegenheit gesetzt. Ich sah bald ein dass »sie zwar von der grössten physikalischen Bedeutung sei, aber keine ein»fache Kraftäusserung darstellt. Wenn ein incompensibles Fluidum einen »magnetischen Kern umgäbe und man das Fluidum in viele couches de niveau »sich getheilt denkt so würde die Resultante aller Kräfte in jedem Punkte »senkrecht auf der durch ihn hindurchgehenden couche stehen. Die ganze »Erde wäre dann ein Pol, überall wäre die Kraft vertical. Aber die wirk»liche Erde durchschneidet ein System jener couches; V/R ist das Bild der »Schneidungscurven und zwei Pole bleiben nur als Berührungspunkte übrig. »In den Zahlwerthen der 24 Coefficienten § 26 und der schauderhaften Formel »von 71 Gliedern für die Sie Ihre sinnreichen Hülfstafeln construirt, liegt »demnach die ganze Frucht, ja auch der Saamen und Keim zu allem was »die künftigen Jahrhunderte zur Verbesserung der numerischen Werthe von »V/R liefern werden. Wäre der Ausdruck für V/R nicht jetzt schon der »Wahrheit so nahe, so würde für die ausgewählten 91***) Punkte von so un»gleicher Gültigkeit, die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobach»tung nicht so bewundernswürdig zufriedenstellend sein. In dieser Ueber»einstimmung liegt der Lohn für eine so ungeheure numerische Arbeit. Ihre »Betrachtungen, wie bei grösserer Vervollkommnung der Daten die Theorie »selbst lehren wird, welcher Theil der Anziehung, welcher der Erde zugehört,

---

*) [Siehe: Gauss' Werke, Bd. V, S. 136 und Figur 1 der Tafel nach S. 176.]

**) [Die Worte »von V/R« fehlen in den »Briefen«. Siehe die beiden ersten Tafeln in den »Resultaten« u. s. w. 1838.]

***) [In den »Briefen« steht hier unrichtig: »71«.]

»hat meine grösste Neugierde erregt. Aber wenn im Innern des Erdkörpers »eine Hitze herrscht, welche den Erdmagnetismus ausglüht (vernichtet), wenn »nur die obere Erdrinde magnetisch ist, so wird das wundersame Resultat »»von einem Achtel Cubikmeter« (§ 31) ja noch wundersamer d. h. die Erde »erscheint zwar noch anziehender, aber noch mehr im Verkehr mit atmo- »sphärischen oder welträumlichen Einflüssen? (§ 36 und 40). Es wird mir eine »grosse Beruhigung sein, wenn ich in den ferneren Entwickelungen Ihrer »schönen Theorie künftig einmal etwas über Ihre Ansicht vom glühenden »Erdkerne und dem ausschliesslichen(?) Sitze der Kraft in der dünnen Erd- »rinde finde. Eine bedeutende Fraction des Ganzen kann ja dann wohl »über der fingirten Fläche liegen. Was Brewster von Kältepolen und über »Zusammenhang der magnetischen Linien mit meinen Isothermen aufgestellt »und Moser selbst numerisch zu entwickeln gewagt hat, scheint mir unreif »und voreilig. Schon der Urvater Gilbert*) (da er die Tugend hatte, keinen »magnetischen Kern oder Ring im Innern der Erde anzunehmen, sondern alle »ihm bekannte Erscheinungen der Anziehung der Erde selbst zuzuschreiben) »wollte die Richtung der Linien ohne Abweichung aus der Form der Con- »tinental-Massen erklären. — —

»Mit dankbarer Verehrung Ihr

»Al. Humboldt.«

Mit den Eigenschaften solcher Functionen V, welche für die von Newton erkannte allgemeine Schwerkraft und für die nach gleichem Gesetze wirkenden Kräfte bestehen, hatte Gauss sich schon länger beschäftigt und sehr wichtige gerade hier in Betracht kommende Lehrsätze dafür gefunden. Diese allgemeinen Lehrsätze hat er im Jahre 1839 veröffentlicht**) und bei der Gelegenheit den Namen Potential-Function eingeführt, in merkwürdiger Ueber-

*) [Gilbert: De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellure. Londini 1600. In »Wissenschaftliche Klassiker in Facsimile-Drucken«, Bd. VI, Berlin (Mayer & Müller) 1892.]

**) [Gauss: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. »Resultate etc.«, 1839, S. 1 bis 51, Gauss' Werke, Bd. V, S. 195—242.

einstimmung mit George Green, welcher dieselbe Benennung in einer, 1828 in Nottingham gedruckten und nur an wenige Subscribenten vertheilten Abhandlung*) anwandte, aber in einer späteren Abhandlung 1835 über die Anziehung der Ellipsoide**) schon wieder verliess. Von dieser letzteren Abhandlung hat Green ein Exemplar an Gauss gesendet, aber die zuvor genannte ist erst durch den von William Thomson in Crelle's Journal 1849***) veranstalteten Abdruck zu Gauss' Kenntniss gelangt.

Die erste Aufstellung von Potential-Functionen pflegt auf eine Abhandlung von Lagrange aus dem Jahre 1777 zurückgeführt zu werden, in Wirklichkeit findet sich solche aber schon bei Clairault in seiner Théorie de la figure de la terre 1743. Während diese Potential-Function bei Lagrange hauptsächlich dazu diente, besonders einfache analytische Ausdrücke zu ergeben, hatte sie bei Clairault eine sachliche Bedeutung. Er fand nämlich, dass nur der Umstand des Vorhandenseins einer solchen Function für die Schwerkraft und für die Centrifugalkraft diejenige Bewegung des auf der Erde befindlichen Wassers ermögliche, welche die gleiche Form hat, wie wenn diese Flüssigkeit ein starrer Körper bildete. Dieser wichtige Satz ist zunächst von Euler, dann von Lagrange erweitert worden und hat seine grösste Verallgemeinerung in den wichtigen Abhandlungen von Helmholtz über Wirbelbewegungen und von Dirichlet über die Rotation flüssiger Ellipsoide gefunden.

Für die Anwendung der Potential-Function auf die erdmagnetischen Kräfte ist noch besonders wichtig die Darstellung derselben durch Kugelfunctionen. Auch diese Benennung ist von Gauss eingeführt und zwar im Jahre 1828 bei der Besprechung einer Abhandlung von Poisson über diese

---

*) [George Green: An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. In Ferrers: Mathematical Papers of the late George Green, London 1871, p. 1—115, und in »Wissenschaftliche Klassiker in Facsimile-Drucken«, Bd. III, Berlin (Mayer & Müller) 1890.]

**) [George Green: On the Determination of the exterior and interior Attractions of Ellipsoids of variable Densities. Read May 6, 1833, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 5, 1835. Bei Ferrers, London 1871, p. 185 bis 222.]

***) [Crelle's Journal, Bd. 39, S. 73 bis 89, 1850; Bd. 44, S. 356 bis 374, 1852; Bd. 47, S. 161 bis 221, 1854. A. J. von Oettingen und A. Wangerin haben in Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 61, Leipzig 1895 eine deutsche Uebersetzung der Arbeit von G. Green vom Jahre 1828 herausgegeben.]

Functionen*). In allgemeiner Form sind dieselben von Legendre zuerst aufgestellt, die einfachste derselben ist schon von Clairault im Jahre 1743 angewendet worden. Sein berühmter Satz über die Beziehung zwischen der Schwerkraft auf der Erde an den Polen, der Schwerkraft am Aequator, der Centrifugalkraft und der Abplattung der Erde beruht wesentlich auf der Form der Kugelfunction erster Ordnung. Clairault hat also von dieser einfachsten Function auch schon eine rechnungsmässige Anwendung gemacht, während die Kugelfunctionen höherer Ordnung mit bestimmten Zahlenwerthen erst durch Gauss und zwar in seiner Theorie des Erdmagnetismus zur Benutzung gelangt sind. Es ist wahrscheinlich dieser Gesichtspunkt, welchen Gauss bei der hier abgedruckten Stelle seines Briefes an Olbers vom Jahre 1803 im Auge hatte**).

Das neueste grössere Unternehmen zur genaueren Erforschung des Erdmagnetismus wird durch die nach einem gemeinsamen Plane auf den internationalen Polar-Expeditionen der Jahre 1882 und 1883, sowie auf den erdmagnetischen Observatorien damit gleichzeitig ausgeführten Beobachtungen gebildet. Der lebhafteste Vorkämpfer für die Ausführung dieses grossartigen Gedanken des wissenschaftlichen Zusammenwirkens der verschiedenen Nationen auf diesem Gebiete, der Linienschiffs-Lieutenant Karl Weyprecht, sagte in seinem vor der Versammlung deutscher Naturforscher in Graz am 20. September 1875 gehaltenen Vortrage:

»Nur die Untersuchung gleichzeitiger gründlicher Beobachtungen an mehr »oder weniger weit von einander entfernten Orten kann bei dem Studium »der von dem Inneren der Erde ausgehenden Naturkräfte entscheiden.

»Als Gauss und Weber die gleichzeitigen magnetischen Termintage »eingeführt hatten, da trat schon nach kurzer Zeit die Lehre vom Erdmagne»tismus aus dem engen Rahmen heraus, in den sie bis dahin eingezwängt »war. Angeregt durch ihre Erfolge, errichtete England seine Colonial-Obser»vatorien. Keine der Stationen reichte aber bis in das arktische Gebiet, die »höchste lag auf dem 61. Breitengrade. So interessant und wichtig deren »Beobachtungen auch sind, vermögen sie doch nicht, uns das für eine voll-

*) [Siehe Gauss' Werke, Bd. VI, S. 648.]

**) [Siehe diesen Band S. 253.]

»ständige Theorie unumgänglich nothwendige Bild von der Gesammtwirkung »des Erdmagnetismus in den hohen Breiten, der weiten Heimat der Störungen, »zu geben«.

Deutschland, Dänemark, Frankreich, Holland, Norwegen, Oesterreich, Russland und Schweden traten dem Gedanken der Ausführung jenes Planes näher und sendeten ihre Delegirten zur Conferenz nach Hamburg im October 1879 und nach Bern im August 1880. Auf der dritten Conferenz im August 1881 zu St. Petersburg wurde das Arbeits-Programm beschlossen. Darin finden sich folgende Bestimmungen:

»§ 1. Die internationalen Polarstationen sollen möglichst früh nach dem »1. August 1882 die Beobachtungen beginnen und dieselben möglichst spät »vor dem 1. September 1883 beendigen.

»§ 2. Die stündlichen magnetischen und meteorologischen Beobachtungen »können nach einer beliebigen Zeit angestellt werden, nur die magnetischen »Beobachtungen an den Termintagen sollen durchaus nach Göttinger Zeit »gemacht werden.

»§ 20. Die Variationsinstrumente müssen mit kleinen Nadeln versehen »sein, und die Variationen der Horizontal-Intensität sollen wenigstens bei »dem einen Systeme an Unifilarapparaten mit Deflectoren beobachtet werden.

»§ 36. In Bezug auf die Berechnung der magnetischen Beobachtungen »wird die Anwendung der metrischen Einheiten von Gauss empfohlen«.

Dem Programm am meisten entsprechend wurden die Beobachtungen im Kaiserlich Russischen Observatorium zu Pawlowsk unter der Leitung des Directors, des Herrn Staats-Rath Wild ausgeführt und zwar nicht nur mit zwei Systemen von Variations-Instrumenten, sondern auch noch mit einem dritten, mit dem Magnetographen. Die mit ganz besonderer Sorgfalt behandelten Reductionen der zahlreichen Beobachtungen, so wie die umsichtige Beurtheilung der Abweichungen zwischen den Angaben der verschiedenen Instrumente geben Herrn Wild Veranlassung zu dem Ausspruch:

»Unser Vergleich der beiderlei Systeme von Variations-Apparaten führt »uns also zu dem Schluss, dass das System: Unifilar, Bifilar und Lloydsche »Wage dem Lamontschen System: Unifilar mit Deflector-Magneten »und Unifilar mit Eisenstäben in Bezug auf Leistungsfähigkeit vorzu-

»ziehen ist und dass insbesondere das letztere Instrument bedeutend hinter »der Lloydschen Wage zurücksteht«.

Hierbei mag es mir gestattet sein zu bemerken, dass jeder Magnet der drei Unifilare des zweiten hier genannten Systems etwa ein Zehntel des Gewichtes des von Herrn Wild beim Unifilar und des beim Bifilar angewendeten Magneten des ersten Systems beträgt, dass ferner der Magnet dieses Wildschen Unifilars etwa ein sechzigstel des von Gauss bei seinem definitiven Declinatorium benutzten Magneten, und dass der Magnet des Wildschen Bifilars etwa den dreihundert und sechzigsten Theil von dem Gaussschen Bifilar-Magneten wiegt.

Das erdmagnetische Observatorium zu Göttingen war in der vortheilhaften Lage, die von Gauss und Weber construirten magnetischen Apparate zu besitzen, so dass die Declination und ihre Variation mit Hülfe des Unifilar, die horizontale Intensität durch das Gausssche Magnetometer nach absolutem Maasse, und die Variation der horizontalen Intensität durch das Gausssche Bifilar in Verbindung mit dem Weberschen Corrections-Magneten in der allen Ansprüchen genügenden Schärfe gemessen werden konnten.

Im Interesse der Wissenschaft bewilligte Seine Excellenz, der Königliche Staatsminister und Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten Herr Dr. von Gossler die Kosten zur Herstellung eines bis dahin noch fehlenden unterirdischen Beobachtungs-Raumes, und zur Ausführung derjenigen neuen Apparate, welche mit den schon vorhandenen ein vollständiges System zur Bestimmung sämmtlicher Theile der an einem Orte wirkenden erdmagnetischen Kraft bilden.

Durch die von Gauss und Weber construirten Magnetometer war alle wünschenswerthe Genauigkeit für die auf den horizontalen Theil sich beziehenden Messungen erreicht. Für den vertikalen Theil hatten bis dahin die Ansprüche auf Genauigkeit sich nicht unerheblich einschränken müssen. Die Verbindung des Weberschen Inductions-Inclinatorium mit einem genauen vertical-beweglichen Winkelmess-Instrumente, welches die Neigung des Inductors nach der von Gauss 1846 angegebenen Methode der Selbstspiegelung des Fernrohres bestimmt, sowie die gleichzeitige Anwendung unserer von Karl Schering in der Versammlung der Naturforscher zu Cassel am 12. September 1878 vorgetragenen neuen Methode der Beobachtung mit dem Erdinductor bot uns ein Hülfsmittel, die Inclination und also durch die Vereinigung mit den Ergebnissen der anderen Messungen die verticale Intensität nun ebenfalls in der wünschenswerthen Genauigkeit nach absolutem Maasse zu bestimmen. Dieser Grad der Genauigkeit konnte noch erhöht werden durch Einrichtungen, welche die Festigkeit des Apparates verstärkten und welche erst zur Ausführung zu gelangen vermochten, nachdem die Kosten dafür besonders bewilligt waren.

Es fehlte also nur noch ein Instrument zur genauen Bestimmung der Variationen der vertikalen erdmagnetischen Kraft.

Aber auch hierfür gelang es Karl Schering und mir, mit den bewilligten Hülfsmitteln unser Quadrifilar-Magnetometer zu construiren, welches den wünschenswerthen Grad der Empfindlichkeit besitzt.

Von den Stationen der Polar-Expeditionen haben die folgenden ihre magnetischen Beobachtungen veröffentlicht:

I. Kingua-Fjord an der Davis-Strasse, nördliche Inclination etwa 83° 52′, Expedition des Deutschen Reiches unter der Führung von Doctor Giese.

II. Fort Rae, am Grossen Sklaven-See, nördliche Inclination etwa 82° 54′, Expedition der Britischen Regierung und der Regierung des Dominium von Canada unter Commando des Captain of the Royal Artillery Dawson. Die Reductions-Rechnungen sind unter Leitung von G. M. Whipple, Superintendent des Kew Observatory ausgeführt.

III. Point Barrow, Alaska, nördliche Inclination etwa 81° 23′, Expedition der Vereinigten Staaten, unter Commando von Ray, Chief Signal Officer, United States Army.

IV. Jan Mayen, nördliche Inclination etwa 79° 2′. Oesterreichische Expedition ausgeführt durch Graf Wilczek, befehligt vom Corvetten-Capitän von Wohlgemuth. Die magnetischen Beobachtungen wurden speciell geleitet vom Linienschiffs-Lieutenant Gratzl.

V. Moltke-Hafen auf Süd-Georgien, südliche Inclination etwa 48° 53′, Expedition des Deutschen Reiches unter der Führung von Doctor Schrader.

VI. Cap Horn, südliche Inclination etwa 52° 55′, Expedition der Französischen Regierung, geleitet von F. O. Le Cannellier, Lieutenant de vaisseau, officier d'académie.

Die aus diesen Beobachtungen schon gewonnenen Resultate lassen die Veröffentlichungen der übrigen Stationen: 1) der anderen amerikanischen auf Fort Conger im Discoveryhafen in Lady-Franklin-Bay; 2) der dänischen in Godthaab auf Westgrönland; 3) der schwedischen auf Cap Thordsen auf Spitzbergen; 4) der russischen in Sagastyr an der Lena-Mündung; 5) der anderen russischen in Karmakuly an der Möller-Bay auf Nowaja Semlja; 6) der holländischen bei der Waigatsch-Insel im Karischen Meere; 7) der norwegischen in Bossekop in Alten; 8) der finnischen in Sodankylä im finnischen Lapplande, mit grosser Spannung erwarten.

Ausser den beiden schon genannten erdmagnetischen Observatorien

VII. Pawlowsk, nördliche Inclination etwa 70° 45′, und

IX. Göttingen, nördliche Inclination etwa 66° 22′, haben

VIII. Wilhelmshafen, nördliche Inclination etwa 67° 57′, Director Professor Börgen

X. Breslau, Declinations-Beobachtungen, Director Prof. Galle

XI. Tiflis, nördliche Inclination etwa 55° 34′, Director Mielberg

ihre Termins-Beobachtungen veröffentlicht. Das Bekanntwerden von weiteren Beobachtungen in Bombay, Bordeaux, Budapest, Clausthal, Cordoba in Argentinien, Coimbra, Greenwich, Havanna, Helsingfors, Kasan, Kautokeino in Finmarken, Kew, Lissabon, Lund, Lyon, Melbourne, Moncalieri, Montevideo in Uruguay, Moskau, München, Nantes, Neapel, Nertschinsk, Paris, Peking, Perpignan, Pola, Prag, Rio Janeiro, Rom, San Diego in Californien, San Fernando, Stonyhurst, Toronto, Upsala, Utrecht, Velletri, Washington, Wien, Zikawei sind aufs lebhafteste zu hoffen. Ueberhaupt haben alle magnetischen Beobachtungen aus jener Zeit, besonders wenn sie längere Reihen bilden, eine erhöhte Wichtigkeit gegenüber den Beobachtungen, welche ausserhalb jener Zeit liegen.

Aus der Vergleichung der Orte der magnetischen Stationen mit dem Gauss-Weberschen Atlas für den Erdmagnetismus ergiebt sich unmittelbar, dass es wünschenswerth gewesen wäre, statt zwei Stationen so nahe bei einander neben die Südspitze von America zu legen, eine Station möglich weit südlich von Australien einzurichten. Dieser Umstand wurde schon bei der Auswahl der Stationen bemerkt, aber äussere Hindernisse insbesondere die

Kürze der verfügbaren Zeit liessen eine andere Anordnung als die getroffene nicht wohl möglich erscheinen.

Die Erfahrungen, welche mit den benutzten Instrumenten gemacht worden sind, lassen für zukünftige derartige Unternehmungen grossen Gewinn erhoffen. Die Variationen der erdmagnetischen Kraft an Orten in der Nähe der magnetischen Pole der Erde sind so sehr gross, dass sie das Spiegelbild der Skala oft aus dem Fernrohr herausfallen lassen. Diesem Uebelstande lässt sich durch ein Verfahren begegnen, welches ich bei einem zu Erdstrom-Messungen benutzten Galvanometer eingeführt habe, nämlich der Anwendung von zwei Seitenspiegeln neben dem Hauptspiegel. Immer einer dieser beiden Seitenspiegel beginnt in Wirksamkeit zu treten, wenn bei der Bewegung des Magneten das Skalenbild vom Hauptspiegel im Begriff ist, aus dem Fernrohre herauszutreten. Das Bild des einen Seitenspiegel ist höher, das andere niedriger als das Hauptbild und jedes wird durch besondere Horizontalfäden im Fernrohre kenntlich gemacht.

Die Anwendung des neuen Inductions-Inclinatorium und des Quadrifilars auf Observatorien und Stationen auch ausserhalb Göttingen wird sehr dazu beitragen, das Beobachtungs-Material für eine weitere Ausbildung der Theorie des Erdmagnetismus zu vervollkommnen. Auch lassen sich jene beiden Constructionen in solchen Maassverhältnissen ausführen, dass sie die bei Polar-Expeditionen so sehr eingeschränkten Räumlichkeiten nicht überschreiten und dennoch sehr genaue Resultate ergeben. Bei der absoluten Declinations-Messung gelangt man zu einer grösseren Schärfe, wenn man den Theodoliten, welcher vorher auf den Polarstern oder auf ein entferntes Object mit bekanntem Azimute gerichtet ist, auf die eigne Reflexion im Spiegel des Magneten mit Hülfe eines Gaussschen Ocular einstellt, und auf ein gegebenes Zeichen einen anderen Beobachter den Skalenstand im Ablesungsfernrohr bestimmen lässt. Auch den Collimationsfehler kann man nach der entsprechenden Methode am genauesten erhalten.

Der von Gauss und Weber angeregte Magnetische Verein hatte sich zunächst die Aufgabe gestellt, in genauer Uebereinstimmung und vollständig gleichzeitig mit den Göttinger Termins-Beobachtungen an möglich vielen Orten der Erde gleiche Arbeiten auszuführen. Solche Termine sind zustande gekommen in Bellsund (Spitzbergen), Havösund (finmarkische Küste), Hammerfest, Alten (Finmarken), Kuopio (Finland), Kierisvara (Lappland), Petersburg, Christiania, Upsala, Stockholm, Katharinenburg, Kopenhagen, Makerstown, Altona, Dublin, Barnaul, Berlin, Hannover, Haag, Breda, Göttingen, Greenwich, Leipzig, Nertschinsk, Breslau, Brüssel, Seeberg, Freiberg, Marburg, Prag, Krakau, Heidelberg, Augsburg, München, Kremsmünster, Genf, Mailand. An diese schliessen sich die von der Royal Society of London hervorgerufenen erdmagnetischen Stationen an: Toronto (Canada), Bombay, Lucknow, Simla, Madras, Trevandrum, Singapore, Borneo, St. Helena, Cap der guten Hoffnung, Hobarton (Van Diemens Land), so wie einzelne Expeditionen nach Kerguelen Land und Aucklands Insel.

An der Mehrzahl dieser Orte sowie auch noch an einigen anderen Orten, wie in Philadelphia, Clausthal (Harz) sind lange Reihen von solchen Termins-Beobachtungen ausgeführt, überall nach Gauss' Vorschriften und genau nach Göttinger Zeit.

Die Vergleichung dieser früheren mit den jetzt zur Veröffentlichung gelangten Beobachtungen von 1882 und 1883 gestatten nun für Eine Erscheinung, nämlich für die periodischen täglichen mittleren Aenderungen der erdmagnetischen Kräfte schon eine allgemeine Regel aufzustellen. Eine eingehendere Untersuchung zeigt auch hier, dass die Maxima und Minima der Werthe der Declination, der Inclination und der Intensität nicht die eigentliche Charakteristik derselben, sondern dass schon ein wesentlicheres Merkmal die raschesten Bewegungen bilden. In Bezug auf diese finde ich nun folgende Regel:

Bei der täglichen Drehung der Erde um ihre Axe dreht sich an einem in mittlerer geographischer Breite befindlichen Orte, welcher der Sonne entgegengeht, also Morgenzeit hat, der in der horizontalen Ebene bewegliche Magnet mit seinem der Sonne zugewendeten Ende auch nach der Sonne hin. In dieser Bewegung beharrt der Magnet bis etwas über die Mittagszeit hinaus, so dass also dann das Süd-Ende eines Magneten auf der nördlichen Halbkugel sowie das Nord-Ende eines Magneten auf der südlichen Halbkugel ihre östlichste Lage erreicht haben. Während jenes Zeit-Abschnittes nimmt die Neigung eines im Schwerpunkte unterstützten Magneten gegen die Horizontal-Ebene zu, ein solcher Magnet erreicht aber seine äusserste Lage etwas früher als der horizontal bewegliche Magnet. Die Intensität der horizontalen erdmagnetischen Kraft nimmt während jenes Zeitraumes ab, erreicht aber ihren kleinsten Werth etwas vor der Mittags-Zeit, ebenso nimmt die ihrem absoluten Werthe nach gerechnete verticale erdmagnetische Kraft auch ab, der kleinste Werth desselben fällt aber auf eine für die verschiedenen Orte etwas ungleiche Tageszeit.

Der Umfang der täglichen erdmagnetischen Schwankung wächst im Allgemeinen mit der höheren geographischen Breite des Ortes, ebenso wächst derselbe in der Jahreszeit mit der zunehmenden Declination der Sonne auf derjenigen Seite des Aequators, auf welcher der Beobachtungs-Ort sich befindet, erreicht aber seinen grössten Werth erst nach der Sonnenwende.

Für Orte, welche auf geringer geographischer Breite liegen, stimmt der Sinn der täglichen Schwankungen mit denjenigen Orten überein, die auf der gleichen Seite vom Aequator sich befinden wie die Sonne. Für Orte, deren geographische Breite diejenige der magnetischen Pole erheblich übertrifft, liegen noch keine Beobachtungs-Ergebnisse vor, um die bezüglichen Fragen zu entscheiden.

Auf der nördlichen Halbkugel sind die Bewegungen im Allgemeinen grösser als auf der südlichen Halbkugel.

Mit Benutzung der hier ausgesprochenen Regel für die Bewegung der Magnete an denjenigen Orten, welche sich mit der Drehung der Erde um ihre Axe nach der Sonne hin bewegen, lässt sich in Bezug auf diejenigen Orte, welche sich bei der Drehung der Erde um ihre Axe von der Sonne entfernen, die Regel einfach so aussprechen, dass die hier stattfindenden Aenderungen der erdmagnetischen Kräfte im entgegengesetzten Sinne zu dem Sinne der Schwankungen an den vorgenannten Orten gehen.

Hiermit ist es in Uebereinstimmung, dass zur Nachtzeit die mittleren täglichen Bewegungen der Magnete geringer sind; dagegen überwiegen dann, wie Gauss bemerkt hat, die plötzlichen grösseren aber kürzere Zeit dauernden und ihre Richtung rasch wechselnden Bewegungen der Magnete.

Diese täglichen Aenderungen der erdmagnetischen Kräfte haben eine auffällige Beziehung zu den täglichen Schwankungen der Temperatur an denselben Orten. Meine hierauf bezüglichen theoretischen Untersuchungen werde ich bei anderer Gelegenheit veröffentlichen. An dieser Stelle war mein Zweck, die Erinnerung an die hohe Bedeutung der Forschungen wach zu rufen, durch welche Gauss die Lehre vom Erdmagnetismus in epochemachender Weise gefördert hat, die ausserordentliche Anerkennung hervorzuheben, mit welcher Gauss von den in diesem Gebiete am meisten verdienten Männern verehrt wurde, und die allgemeine und lebhafte Thätigkeit anzudeuten, mit welcher diese Gelehrten sich bemühten, die von dem grossen Göttinger angeregten neuen Forschungen zu fördern.

INHALT.

Zur Raumersparniss sind hier bei den Briefen die Namen Encke, Gauss, Gerling, Humboldt, Olbers, Schumacher durch E. G. Gg. H. O. S. bezeichnet.

XXXXIV.

[BEMERKUNGEN ZU ABHANDLUNGEN VON CARL FRIEDRICH GAUSS.]

[Abgedruckt aus Carl Friedrich Gauss' Werken, herausgegeben von Ernst Schering im Auftrage der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.]

[In dieser Nummer sind nicht alle Bemerkungen, die Ernst Schering den Gaussschen Werken hinzugefügt hat, wieder abgedruckt. Es sind vielmehr alle Bemerkungen, die nur redaktioneller Natur sind, Richtigstellungen oder Gausssche Tagebuchaufzeichnungen betreffen, ausgeschieden und nur diejenigen aufgenommen, die eigene mathematische Entwicklungen Ernst Schering's enthalten. Die Herausgeber haben sich die Bedenken, die gegen einen Wiederabdruck der Bemerkungen in diesem Bande und gegen diese Teilung der Bemerkungen geltend gemacht werden können, nicht verhehlt und waren deshalb erst zweifelhaft, ob sie nicht lieber diese Bemerkungen von der Aufnahme in die gesammelten mathematischen Werke Ernst Schering's ganz ausschliessen sollten. Wenn sie sich schliesslich doch zum teilweisen Abdruck entschlossen, so taten sie es, weil sie es als eine Pflicht der Pietät empfanden, die ausserordentlich grosse geistige Arbeit, die Ernst Schering auf die Herausgabe der Gaussschen Werke verwandt hat, auch in seinen gesammelten Werken zum Ausdruck zu bringen.

Von dem Hinzufügen erläuternder Zusätze zu diesen Anmerkungen musste abgesehen werden, da dies bei der gedrängten Kürze der betreffenden Mitteilungen aus dem Gaussschen Nachlasse auf eine Wiedergabe dieser selbst hätte hinauslaufen müssen.]

1. BEMERKUNGEN

[zu Gauss: Zur Theorie der biquadratischen Reste, (I)—(VI).
Gauss' Werke, Bd. II (Zweiter Abdruck), S. 375—385, Göttingen 1876.]

Die Bruchstücke, die hier im Druck mit I und II bezeichnet sind, gehören nach dem Orte zu urtheilen, den die betreffenden Handschriften in einem Notizbuche einnehmen, dem Jahre 1811 oder der zunächst folgenden Zeit an. Von den vorangehenden Versuchen, den Beweis des Fundamentaltheorems für biquadratische Reste nach den hier für den Rest $1+i$ angewandten Methoden durchzuführen, ist eine Aufzeichnung vorhanden, welche den speciellen Fall des Restes $1+2i$ erledigt und von derjenigen Bestimmung des biquadratischen Charakters ausgeht, die man als Note dem Art. 6 des Bruchstücks III beigefügt hat. Im übrigen lassen sich die historischen Angaben, die Gauss in den Anzeigen seiner arithmetischen Abhandlungen veröffentlicht hat, mit Hülfe des Nachlasses dahin ergänzen, dass die in den Artt. 15 bis 20 der *Theoria residuorum biquadrat.* aufgenommenen Lehrsätze schon vor der Ausarbeitung der *Theoria motus corporum coel.* niedergeschrieben sind*). Die in den Anzeigen erwähnten Untersuchungen über cubische Reste werden wohl nicht zur Ausarbeitung gelangt sein; aufgezeichnet finden sich davon die mit den Hülfsmitteln, welche die Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* bietet, durchgeführten Beweise der Reciprocitätssätze für zwei Primzahlen, von denen die eine reell ist.

Die Bruchstücke III bis VI bilden in der Handschrift besondere Hefte und für die drei ersten derselben weist die Form der Schriftzüge auf eine Zeit, die der für die Bruchstücke I und II nicht fern liegt, während für das letzte, Nr. VI, ein bedeutend späterer Zeitpunkt angenommen werden muss.

---

*) [Siehe auch: Ernst Schering, Bemerkungen über Gauss' Brief vom 30. April 1807 an Sophie Germain, S. 219 dieses Bandes.]

(I.) Art. 10. Die Bestimmung der Anzahl der Ganzepunkte in $(z, z', z'+\zeta, z+\zeta)$ ergibt sich aus dem Satze: bedeuten a und b relative Primzahlen, so geht die von $\xi+\eta i$ nach $\xi+\eta i+a+bi$ gezogene Gerade durch Einen Ganzepunkt, wenn der imaginäre Theil von $(\xi+\eta i).(-a+bi)$ eine ganze Zahl ist.

(I.) Art. 17. Die erste Umformung des letzten S in dem Ausdrucke für ΔS erhält man, wenn man das betreffende Flächenstück in solche drei Theile zerlegt, dass jenes S in

$$\begin{aligned} &S(\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(+)})\\ -&S(\tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)\\ -&S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)\end{aligned}$$

übergeht, und wenn man dann die Ganzepunkte in dem ersten Flächentheile mit Hülfe des Satzes in Art. 10 auszählt und ferner berücksichtigt, dass in dem zweiten Flächentheile sich kein Ganzepunkt befindet.

Die zweite Umformung erhält man, wenn man die den Eckpunkten des dritten Flächentheils entsprechenden Grössen mit i multiplicirt und um die ganze Zahl $(1-i)\frac{m-1}{2}$ vermehrt, endlich die dritte Umformung, wenn man mit der zuletzt entstandenen Figur nach Vorschrift des Art. 16 diejenige vergleicht, die gegen jene die Ortsverschiedenheit $\frac{-1}{1+i}$ hat.

(I.) Art. (18). Eine Erläuterung zum ersten Schema findet man in dem später niedergeschriebenen hier mit (II) bezeichneten Bruchstücke Art. 1 bis 6.

(I.) Art. 18 (2). Die geometrische Deutung ergibt mit Zuhülfenahme der beiden Systeme von Ganzepunkten

$$[-2iQ-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},iQ] = [-2iQ+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},iQ] = \mathrm{IV}^*$$

und

$$-[-2iQ+\tfrac{1}{2}i,-\tfrac{1}{2}i,iQ] = -[-2iQ-\tfrac{1}{2}i,-\tfrac{1}{2}i,iQ] = \mathrm{X}^*$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{IV}-\mathrm{IV}^*+[-2iQ, \tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}] &= -\mathrm{X}+\mathrm{X}^*+[-iQ, \tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}]\\
\mathrm{XIII}+\mathrm{IV}^* = [-2iQ, 1, iQ] &= -I(-2iQ)+I(-iQ)\\
\mathrm{V}+\mathrm{X}^* = -[-2iQ, -i, iQ] &= R(-2iQ)-R(-iQ)
\end{aligned}$$

wenn allgemein Rx und Ix die grössten Ganzen des reellen Theils und des Coefficienten des imaginären Theils von x bedeuten.

$\left[-2iQ, \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\right]$ ist aber die Anzahl der Ganzepunkte in dem Quadrate, dessen Mittelpunkt sich in $-2iQ-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ befindet und zwischen dessen Eckpunkten die Ortsunterschiede $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}i$ Statt haben.

$\left[-iQ, \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\right]$ oder $\left[-2iQ, -\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}\right]$ ist die Anzahl der Ganzepunkte in einem gleichen Quadrate mit dem Mittelpunkte $-2iQ+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

(I.) Art. 18 (3). Mit Zuhülfenahme der Ganzepunkte $\left[0, \frac{1}{2}i, -iQ\right] = -\left[-\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i, -iQ\right] = \mathrm{I}^*$ erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{VII}-\mathrm{XII} &= \mathrm{I}-\mathrm{I}^*+[-iQ, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i]-[0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i] = \mathrm{I}-\mathrm{I}^*+[-2iQ, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i]\\
\mathrm{II}-\mathrm{I}^* &= [0, -i, -iQ] = -R_0+R(-iQ)\\
\mathrm{IX}-\mathrm{I} &= [0, -1, -iQ] = I_0-I(-iQ)\\
\mathrm{VI}-\mathrm{XII} &= -[\tfrac{1}{2}i, -1, -iQ] = -I(\tfrac{1}{2}i)+I(-iQ+\tfrac{1}{2}i)\\
\mathrm{VIII}-\mathrm{XIV} &= -[\tfrac{1}{2}, -1-i, \tfrac{1}{2}im_{(-)}] = \frac{a-1}{2}+\frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

(II.) Art. 10. Es ist

$$YP' \equiv -Y(-iP'+\tfrac{1}{2}im),\quad YP'' \equiv -1-Y(P''-\tfrac{1}{2}im),\quad YP''' \equiv 1+Y(-iP''') \pmod{4}$$

und $-iP'+\frac{1}{2}im$, $P''-\frac{1}{2}im$ sind die um $\frac{1}{2}i$ vermehrten Ganzepunkte resp. in I, VI.

(III.) Art. 6. Die in der Note angegebenen Regeln für die Bestimmung des Dec. $\frac{M}{m}$ habe ich der vorliegenden Abhandlung aus einem andern Orte der Handschriften beigefügt. Die erste dieser beiden Regeln, die wie leicht zu sehen mit der zweiten übereinstimmt, folgt aus der des Art. 6 weil

$$k \equiv f \,.\, i^{-n} (\text{mod.}\, m), \quad n = \Theta \frac{2fM}{m}, \quad p = mm', \quad \left[\frac{2km'}{p}\right]^2 \equiv \Theta \frac{2km'}{p} (\text{mod.}\, 2+2i)$$

ist.

(III.) Art. 8 enthält in der Handschrift ein Beispiel zu Art. 7 nemlich die Bestimmung des Decidenten von $-1+2i$ für den Modulus $-11+4i$.

(III.) Art. 10. In Bezug auf die Bemerkung »anders auszudrücken« kann man Art. 3 des folgenden Bruchstücks (IV) vergleichen.

(IV.) Die Art. 1. 2. 4 enthalten in der Handschrift ausser dem hier Abgedruckten noch die Anwendung auf die beiden Beispiele für $m = 5+8i$, $M = 9+4i$ und für $m = 9+4i$, $M = 5+8i$.

(V.) Art. (7). Es bezeichnet hier Dec. $\frac{m}{M}$, wie in Art. 1 des vorhergehenden Bruchstücks (IV), den Werth von

$$\sum (-1)^X \sum (-1)^Y \text{Int} p$$

worin die Summation über alle ganze Zahlen X und Y auszudehnen ist, für welche die zugehörigen ξ und η innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen.

Die Formeln für den Decidenten in Art. 7 und 15 sind nach der Angabe des Textes auf zwei besondern Wegen gefunden, um aber diese Erläuterungen nicht zu sehr auszudehnen werden sie hier aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet.

Indem X irgend einen bestimmten ganzzahligen Werth annimmt, sei Y^* das kleinere Y^{**} das grössere der beiden Y, welche den Grenzwerthen von ξ, η entsprechen. Die zu Y^* und Y^{**} zugehörigen Werthe von p seien p^* und p^{**}, die ebenso wie Y^* und Y^{**} einander nicht gleich werden können, weil die Summe $\sum$ sich nicht über die Grenzwerthe von ξ und η erstreckt.

Führt man auf dieselbe Weise wie in den beiden vorhergehenden Aufsätzen (III) und (IV) die Summation über alle bei demselben X Statt habenden Werthe von Y aus, setzt dabei für die Anzahl der zwischen Y' und Y'' liegenden ungeraden Zahlen $\left[\frac{1}{2}Y''-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}Y'-\frac{1}{2}\right]$ und fügt die Intensoren, die sich auf die Grenzen $\xi = 0$ und $=\frac{1}{2}$ beziehen, zwei Mal aber mit entgegengesetzten Zeichen hinzu, so erhält man für $\sum(-1)^Y \operatorname{Int} p$ den aus sieben Theilen bestehenden Ausdruck

$$-\sum\{-\operatorname{Int}(p-\mu\omega i)+\operatorname{Int}(p+\mu\omega i)\},\ \text{worin alle } p \text{ aufzunehmen, für welche}$$
$$[Y] \text{ gerade, } x \text{ oder } y \text{ ganz, incl. } \xi = 0 \text{ und } \tfrac{1}{2}, \text{ excl. } \eta = 0 \text{ und } \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\operatorname{Int}(p^*-\mu\omega i), & \text{wenn } [Y^*] \text{ gerade} \\ +\operatorname{Int}(p^{**}+\mu\omega i), & \text{wenn } [Y^{**}] \text{ gerade} \end{array}\right\} \xi = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2},\ 0<\eta<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\operatorname{Int}(p^*+\mu\omega i), & \text{wenn } [Y^*] \text{ gerade} \\ +\operatorname{Int}(p^{**}-\mu\omega i), & \text{wenn } [Y^{**}] \text{ gerade} \end{array}\right\} 0<\xi<\tfrac{1}{2},\ \eta = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\operatorname{Int}(p^*+\mu\omega i), & \text{wenn } [Y^*] \text{ gerade} \\ +\operatorname{Int}(p^{**}-\mu\omega i), & \text{wenn } [Y^{**}-\omega] \text{ gerade} \end{array}\right\} \xi = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2},\ \eta = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

welcher mit $(-1)^X$ multiplicirt und über alle ganzzahligen X summirt den Decidenten $\frac{m}{M}$ ergibt.

Aus dem ersten Theil des Ausdrucks entsteht auf diese Weise von den nach Art. 2 Vorschrift I gebildeten ε

$$\sum\varepsilon, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade}$$
$$-4\sum\varepsilon, \text{ wo ausserdem } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade.}$$

Für die folgenden Theile kann

$$\left.\begin{array}{ll} -(B)\operatorname{Int}(p-B\mu\omega i), & \text{wenn } \xi = 0 \\ +(B)\operatorname{Int}(p+B\mu\omega i), & \text{wenn } \xi = \tfrac{1}{2} \end{array}\right\} X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } 0<\eta<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -(A)\operatorname{Int}(p+A\mu\omega i), & \text{wenn } \eta = 0 \\ +(A)\operatorname{Int}(p-A\mu\omega i), & \text{wenn } \eta = \tfrac{1}{2} \end{array}\right\} X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } 0<\xi<\tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}\{(A')+(B')\}\operatorname{Int}(p+A'\mu\omega i), \text{ wenn X ganz, } [Y+A'\omega] \text{ gerade, } \xi \text{ und } \eta = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

gesetzt werden, worin $A' = +A$ oder $-A$ ist, wenn $\eta = 0$ oder $\frac{1}{2}$, $B' = +B$ oder $-B$ wenn $\xi = 0$ oder $\frac{1}{2}$, und worin z. B. (A): $+1$ oder -1 bezeichnet, jenachdem A positiv oder negativ ist.

Multiplicirt man mit $(-1)^X$, führt die Summation über X aus, lässt dabei in diesen Ausdrücken und zwar im

ersten $p-B\mu\omega i,\ P-BD\omega i,\ \pi-AB\omega i-BB\omega,\ X,\ [Y]$ bez. in $ip,\ iP,\ i\pi,\ -Y,\ [X]$
zweiten $p+B\mu\omega i,\ P+BD\omega i,\ \pi+AB\omega i+BB\omega,\ X,\ [Y]\ \ldots\ldots\ p,\ P,\ \pi,\ X,\ [Y]$
dritten $p+A\mu\omega i,\ P+AD\omega i,\ \pi+AA\omega i+AB\omega,\ X,\ [Y]\ \ldots\ldots\ p,\ P,\ \pi,\ X,\ [Y]$
vierten $p-A\mu\omega i,\ P-AD\omega i,\ \pi-AA\omega i-AB\omega,\ X,\ [Y]\ \ldots\ldots\ im-ip,\ iM-iP,$
$i-i\pi,\ Y-B,\ A-1-[X]$

übergehen und bezeichnet das aus dem fünften Ausdruck sich ergebende Resultat mit Q_1, so entsteht

$$\begin{aligned}
&-\sum(-1)^Y(B)\operatorname{Int}ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } \eta=\omega,\ 0<\xi<\tfrac{1}{2}\\
&+\sum(-1)^X(B)\operatorname{Int}p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } \xi=\tfrac{1}{2}+\omega,\ 0<\eta<\tfrac{1}{2}\\
&-\sum(-1)^X(A)\operatorname{Int}p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } \eta=\omega,\ 0<\xi<\tfrac{1}{2}\\
&+\sum(-1)^Y(A)\operatorname{Int}(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } \xi=\tfrac{1}{2}+\omega,\ 0<\eta<\tfrac{1}{2}\\
&+Q_1.
\end{aligned}$$

Die Untersuchung der einzelnen Fälle lässt erkennen, dass unter der Voraussetzung $M\equiv 1 \pmod{2+2i}$

$$\begin{aligned}
Q_1 = &-\operatorname{Int}\mu\omega i \text{ ist, wenn } M \text{ im 1. Quadranten liegt}\\
&-\operatorname{Int}(\tfrac{1}{2}mi+\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}\\
&+\operatorname{Int}(\tfrac{1}{2}mi-\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 4. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}
\end{aligned}$$

indem man eine complexe Zahl gerade oder ungerade nennt, je nachdem sie durch 2 theilbar ist oder nicht.

Hiernach wird also bei Anwendung der in den Vorschriften II und IV bestimmten ε

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dec}\frac{m}{M} = \text{I},\ &\sum\varepsilon, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade}\\
&-4\sum\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade}\\
\text{II},\ &-\sum\varepsilon\operatorname{Int}ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade}\\
\text{IV},\ &+\sum\varepsilon\operatorname{Int}p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade}\\
\text{II},\ &+\sum\varepsilon\operatorname{Int}p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade}\\
\text{IV},\ &+\sum\varepsilon\operatorname{Int}(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade}\\
&+Q_1.
\end{aligned}$$

In einer andern Form erhält man den Ausdruck für den Decidenten, wenn man zuerst nach X summirt und dabei die Anzahl der zwischen X' und X'' liegenden ungeraden Zahlen durch $\left[\frac{1}{2}X''+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}X'+\frac{1}{2}\right]$ darstellt, nemlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dec}\frac{m}{M} = \mathrm{I},\quad & \textstyle\sum\varepsilon, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
& -4\textstyle\sum\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\
\mathrm{II},\ & -\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,ip, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\
\mathrm{IV},\ & +\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,p, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
\mathrm{II},\ & +\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,p, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
\mathrm{IV},\ & +\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,(im-ip), \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
& +Q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & -\mathrm{Int}(-\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr.} \\
& +\mathrm{Int}\left(\tfrac{1}{2}m-\mu\omega\right), \text{ wenn } M \text{ im 1. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \\
& -\mathrm{Int}\left(\tfrac{1}{2}m+\mu\omega\right), \text{ wenn } M \text{ im 3. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

Führt man die Summation nach Y zuerst aus, wählt aber die zweite so eben angewandte Art der Bestimmung der Anzahl der zwischen zwei Werthen liegenden ungeraden Zahlen, so wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dec}\frac{m}{M} = \mathrm{I},\quad & \textstyle\sum\varepsilon, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
& -4\textstyle\sum\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\
\mathrm{II},\ & -\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
\mathrm{IV},\ & +\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
\mathrm{II},\ & +\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
\mathrm{IV},\ & +\textstyle\sum\varepsilon\,\mathrm{Int}\,(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
& +Q_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 = & -\mathrm{Int}(-\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 3. Quadr.} \\
& -\mathrm{Int}\left(\tfrac{1}{2}mi+\mu\omega i\right), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \\
& +\mathrm{Int}\left(\tfrac{1}{2}mi-\mu\omega i\right), \text{ wenn } M \text{ im 4. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

Summirt man zuerst nach X und gebraucht dabei die erste Art der Darstellung der Anzahl der zwischen zwei Werthen liegenden ungeraden

Zahlen, so erhält man die in (V.) Art. 15 angegebene Form für den Decidenten, wo die Grösse q auch durch folgende Gleichung definirt werden kann

$$\begin{aligned} q = & -\mathrm{Int}\,\mu\omega \text{ wenn } M \text{ im 4. Quadr.} \\ & +\mathrm{Int}\,(\tfrac{1}{2}m-\mu\omega) \text{ wenn } M \text{ im 1. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \\ & -\mathrm{Int}\,(\tfrac{1}{2}m+\mu\omega) \text{ wenn } M \text{ im 3. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser vier Ausdrücke für den Decidenten bildet das in (V) Art. 7 aufgestellte Resultat, weil $\mathrm{Int}\,ip - \mathrm{Int}\,p$ gleich 3 wird für $[x]$ gerade $[y]$ ungerade sonst aber gleich 1, ferner $\mathrm{Int}\,(im-ip)+\mathrm{Int}\,p$ gleich 0 für $[x]$ gerade $[y]$ gerade in den übrigen Fällen aber gleich 4.

(V.) Art. (7). Die erste Tafel für das Beispiel gibt in der ersten Spalte die zu jedem ganzzahligen P zugehörigen Werthe von $\frac{37.P}{M}$ oder $37(\xi+\eta i)$ wenn $0<\xi<\frac{1}{2}$, $0<\eta<\frac{1}{2}$ ist, in der zweiten $\frac{37.Pm}{M}$ oder $37.p$ in der dritten, die in p enthaltene grösste ganze Zahl, in der vierten $\pm\mathrm{Int}\,p$, wo das obere Zeichen gilt, wenn P durch $1+i$ theilbar, das untere wenn P nicht durch $1+i$ theilbar ist.

(V.) Art. (9). (12). Die verbesserte Bezeichnungsweise der θ ist nur bei der zweiten und dritten Classe Artt. 9, 10 angedeutet, aber auch auf die erste und vierte Artt. 8, 11 auszudehnen. Hiernach wird ein $\theta^\lambda = T+Ui$ denjenigen Index $\lambda = 0, 1, 2$ oder 3 haben, für welchen die durch die Gleichungen

$$i^\lambda M = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}i, \qquad i^{-\lambda}\mu = \varrho+\sigma i$$
$$\begin{aligned} \sigma\varphi^0 &= -\text{Coëff. Img. } \theta^\lambda(a-bi) = +bT-aU \\ \sigma\Phi^0 &= +\text{Coëff. Img } \theta^\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}i) = -\mathfrak{B}T+\mathfrak{A}U \end{aligned}$$

bestimmten Grössen φ^0 und Φ^0 zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen.

Um nach den Andeutungen in Art. 9 (3) zu beweisen, dass, wenn T, U zwei ganze reelle Zahlen sind, welche die so eben aufgestellten Bedingungen erfüllen, $T+Ui$ sich auch in dem bei einer der vier Combinationen Artt. 8. 11

bestimmten Complexus θ^λ befindet, bezeichne man mit φ', Φ' diejenigen ganzen complexen Zahlen, für welche die Gleichung

$$T+Ui = \varphi' i^\lambda M + \Phi' m$$

Statt hat und für welche eine der vier Grössen $\pm \frac{\varphi'-\varphi^0}{m}$, $\pm i \frac{\varphi'-\varphi^0}{m}$ so beschaffen, dass der reelle Theil und der Coefficient des imaginären Theils zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen (*Theoria residuorum biquadr.* artt. 45, 46). Die betreffende Grösse ist dann, wie man aus der Untersuchung der in den vier Combinationen enthaltenen sechzehn einzelnen Fälle leicht ersieht, $\frac{p}{m}$ und die ihr entsprechende Grösse unter $\pm \frac{\Phi'-\Phi^0}{m}$, $\pm i \frac{\Phi'-\Phi^0}{M}$ ist $\frac{P}{M}$, weil $\frac{\Phi'-\Phi^0}{M} = -\frac{\varphi'-\varphi^0}{m} i^\lambda$ wird.

Aus dieser Art der Darstellung der Grössen $\frac{p}{m}$ oder $\frac{P}{M}$ folgt auch, dass I, $\sum \varepsilon$ von allen aus $\Theta+\Theta'+\Theta''+\Theta'''$ besteht, worin Θ^λ die Summe derjenigen ε bedeutet, die für jeden Ganzepunkt θ innerhalb des Parallelogramm $0, \frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}i^\lambda M$, $\frac{1}{2}i^\lambda M$,

$= +1$ zu setzen sind, wenn θ durch $1+i$ theilbar und Coeff. Imag. $\mu i^{-\lambda}$ positiv oder wenn keine Bedingung gilt, dagegen
$= -1$ wenn nur eine gilt.

(V.) Art. 13. Die Bestimmung von Θ^λ kann entweder durch die oben für Dec $\frac{m}{M}$ angewandten vier verschiedenen Summationsarten oder, was im Wesentlichen dasselbe ist, nach den in (II) Art. 11 angedeuteten Methoden ausgeführt werden, bei welchen dann die vier Constructionen zu Grunde zu legen sind, die durch Verbindung der Punkte, deren θ ein Vielfaches von $1+i$ ist, resp. mit den Punkten $\theta+1$, $\theta+i$, $\theta-1$, und $\theta-i$ entstehen.

Lässt man in der Begrenzung des zuvor erwähnten Parallelogramms allen den Punkten ein θ entsprechen, für welche der reelle oder imaginäre Theil von θ eine ganze Zahl wird, bezeichnet mit θ^0 die nächste durch $1+i$ theilbare Grenze bei θ, mit l die Ortsverschiebung von einem Punkte des geraden Begrenzungsstückes, das den Punkt θ enthält, bis zu irgend einem nachfolgenden Punkte derselben Geraden, also z. B. bei jenem Parallelogramm der Reihe nach die Grössen m, Mi^λ, $-m$, $-Mi^\lambda$, und setzt

$\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von $\frac{l}{\theta - \theta^0}$, so ergibt die Vereinigung der auf die eine oder andere Weise erhaltenen vier Resultate $4\theta^\lambda = -\sum \varepsilon$.

Die gesonderte Bestimmung der den Eckpunkten entsprechenden θ und ε wird umgangen, wenn man dies Parallelogramm durch ein anderes ersetzt, dessen Begrenzungen den Begrenzungen des erstern unendlich nahe sind, und welches die beiden Punkte 0 und $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}i^\lambda M$ nicht einschliesst. Die Begrenzung eines solchen Parallelogramms erhält man, wenn man sie an die positiven Seiten der Linien

$$0 \ldots \tfrac{1}{2}m, \quad \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}i^\lambda M \ldots \tfrac{1}{2}m, \quad \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}i^\lambda M \ldots \tfrac{1}{2}i^\lambda M, \quad 0 \ldots \tfrac{1}{2}i^\lambda M$$

legt. Lässt man den vier so entstandenen Geraden der Reihe nach die unendlich kleinen positiven Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ entsprechen, so kann man für die auf ihnen liegenden Punkte θ

$$\left.\begin{array}{l} \theta = p = m(\xi + \omega_1 i), \quad -\theta i^\lambda + \tfrac{1}{2}mi^\lambda + \tfrac{1}{2}M = P = M(\xi + \omega_2 i) \\ -\theta + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}Mi^\lambda = p = m(\xi + \omega_3 i), \quad \theta i^{-\lambda} = P = M(\xi + \omega_4 i) \end{array}\right\}, \text{ wenn } \lambda \text{ gerade}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = p = m(\xi + \omega_1 i), \quad \theta i^{1-\lambda} - \tfrac{1}{2}mi^{1-\lambda} + \tfrac{1}{2}M = P = M(\tfrac{1}{2} + \omega_2 + \eta i) \\ \theta i + \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}Mi^{1+\lambda} = p = m(\tfrac{1}{2} + \omega_3 + \eta i), \quad \theta i^{-\lambda} = P = M(\xi + \omega_4 i) \end{array}\right\}, \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade}$$

setzen, worin ξ und η auch theilweise zur Schliessung der Figur das Gebiet der reellen Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}$ um unendlich kleine Grössen überschreiten.

Bezeichnen G, g, H, h die Summen der resp. nach den Vorschriften II, III, IV, V (in Artt. 3 bis 6) gebildeten ε, und umfassen G' oder $G_,$ und g' oder $g_,$ diejenigen ε, welche für die beim zweiten Parallelogramm etwa auftretenden unendlich kleinen Werthe von ξ Statt haben, im Uebrigen aber resp. nach den Vorschriften II und III gebildet sind, beziehen sich ferner G'' oder $G_{,,}$ und g'' oder $g_{,,}$ ebenso auf dieselben Vorschriften aber auf die unendlich kleinen Werthe von $\frac{1}{2} - \xi$, und endlich $H', h_,, H'', h_{,,}$ resp. auf die Vorschriften IV, V, IV, V und die unendlich kleinen Werthe resp. von $\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} - \eta, \eta, \eta$ so wird

$$4\theta^\lambda = -(g + g' + g'') - i^\lambda(G + G' + G'') + i^\lambda(g + g_, + g_{,,}) + (G + G_, + G_{,,}), \text{ wenn } \lambda \text{ gerade}$$
$$4\theta^\lambda = -(g + g' + g'') - i^{1-\lambda}(H + H' + H'') - i^{\lambda-1}(h + h_, + h_{,,}) + (G + G_, + G_{,,}), \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade.}$$

Für denjenigen Eckpunkt θ des Parallelogramms, welcher dem Punkte 0 zunächst liegt, bezeichne ξ_1 den zugehörigen Werth von dem ξ der ersten Seite, ξ_4 den zugehörigen Werth von dem ξ der vierten Seite, so dass

$$\theta = m(\xi_1 + \omega_1 i) = i^\lambda M(\xi_4 + \omega_4 i)$$

wird, dann ergibt sich dasjenige ξ, welchem auf der ersten Seite oder deren Verlängerung ein Punkt p mit dem reellen Theile gleich 0 entspricht, aus der Gleichung

$$(\text{Real.}\, p = 0), \quad \xi - \xi_1 = \sigma a \mathfrak{A} \omega_1 - \sigma \omega_4$$

worin die positiven Factoren der unendlich kleinen positiven Grössen durch die Einheit ersetzt sind und $\sigma, \mathfrak{A}$ die durch

$$\varrho + \sigma i = i^{-\lambda}(\alpha + \beta i), \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} i = i^\lambda (A + Bi)$$

bestimmten reellen Grössen bedeuten. Dieser Punkt p liegt auf der ersten Seite selbst, wenn $\xi - \xi_1$ positiv, also, indem man ω_1 unendlich klein gegen ω_4 annimmt, wenn σ negativ ist. Der dem Punkte p zunächst liegende Punkt p^0, dessen darstellende Zahl durch $1+i$ getheilt wird, ist der Punkt 0, also hat $\text{Imag.}\frac{m}{p-p^0}$ oder $\text{Imag.}\frac{1}{\xi+\omega_1 i}$ das Minuszeichen. Man erhält daher für Real. $p = 0$:

$$\varepsilon = -1 \text{ wenn } (\sigma) = -1, \quad \varepsilon = 0 \text{ wenn } (\sigma) = +1, \quad \text{d. i. } \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma)$$

und auf dieselbe Weise für Imag. $p = 0$

$$\xi - \xi_1 = \sigma b \mathfrak{B} \omega_1 - \sigma \omega_4, \quad \text{Imag.}\frac{m}{p-p^0} = \text{Imag.}\frac{1}{\xi + \omega_1 i}, \quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma)$$

also $g' = -1 + (\sigma)$.

In Bezug auf die vierte Seite wird

$$P^0 = 0, \quad \text{Imag.}\frac{M}{P - P^0} = \text{Imag.}\frac{1}{\xi + \omega_4 i}$$

also für

$$\text{Real.}(i^\lambda P) = 0; \quad \xi - \xi_4 = -\sigma a \mathfrak{A} \omega_4 + \sigma \omega_1, \quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma a \mathfrak{A})$$

und für

$$\text{Imag.}(i^\lambda P) = 0; \quad \xi - \xi_4 = -\sigma b \mathfrak{B} \omega_4 + \sigma \omega_1, \quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma b \mathfrak{B})$$

demnach

$$G_1 = -1 + \tfrac{1}{2}(\sigma a \mathfrak{A}) + \tfrac{1}{2}(\sigma b \mathfrak{B})$$

oder, weil $\varrho = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B}$ ist,

$$G_1 = -1 + \tfrac{1}{2}(\varrho\sigma) + \tfrac{1}{2}(\varrho\sigma ab\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Der Theil R_1^λ von $4\theta^\lambda$, der aus dem unendlich nahe bei dem Punkte 0 liegenden Stücke der Begrenzung entsteht, ist also

$$R_1^\lambda = +G_1 - g' = -(\sigma) + \tfrac{1}{2}(\varrho\sigma) + \tfrac{1}{2}(\varrho\sigma ab\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man für die Theile $R_2^\lambda, R_3^\lambda, R_4^\lambda$, welche ebensolche Beziehungen resp. zu den Punkten $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}Mi^\lambda$, $\frac{1}{2}Mi^\lambda$ haben wie R_1^λ zum Punkte 0, bei geradem λ

$$\begin{aligned}
R_2^\lambda &= -g'' - i^\lambda G'' = -\tfrac{1}{2}(b) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B})\\
R_3^\lambda &= -i^\lambda G' + i^\lambda g_1 = i^\lambda(\sigma) - \tfrac{1}{2}i^\lambda(\varrho\sigma) - \tfrac{1}{2}i^\lambda(\varrho\sigma ab\mathfrak{A}\mathfrak{B})\\
R_4^\lambda &= +i^\lambda g_{11} + G_{11} = \tfrac{1}{2}i^\lambda(b) + \tfrac{1}{2}i^\lambda(\mathfrak{B})
\end{aligned}$$

bei ungeradem λ

$$\begin{aligned}
R_2^\lambda &= -g'' - i^{1-\lambda}H'' = -\tfrac{1}{2}(b) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B})\\
R_3^\lambda &= -i^{1-\lambda}H' - i^{\lambda-1}h_1 = 0\\
R_4^\lambda &= -i^{\lambda-1}h_{11} + G_{11} = \tfrac{1}{2}i^{\lambda+1}(a) + \tfrac{1}{2}i^{\lambda+1}(\mathfrak{A}).
\end{aligned}$$

(V.) Art. (14). Die Auswerthung der Summen von den nach Vorschrift III gebildeten ε ergibt sich aus der durch die Definition der ε leicht zu verificirenden Gleichung

$$\begin{aligned}
&\text{III.} \textstyle\sum \varepsilon \text{ von allen } -4\sum \varepsilon \text{ von denen, wo } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade}\\
&\quad = \text{III.} \textstyle\sum \{-\operatorname{Int}(p - m\omega) + \operatorname{Int}(p + m\omega)\}
\end{aligned}$$

worin p alle Werthe annimmt, die den unter Vorschrift III angegebenen Bedingungen genügen. Diese Intensoren lassen sich nämlich mit Ausnahme der beiden dem kleinsten (ξ^*) und dem grössten zulässigen Werthe (ξ^{**}) von ξ entsprechenden Intensoren, welche resp. gleich

$$-\operatorname{Int}(p^* - m\omega) \text{ und } +\operatorname{Int}(p^{**} + m\omega) \text{ oder } -\operatorname{Int}(\omega m) \text{ und } +\operatorname{Int}(\tfrac{1}{2} - \omega)m$$

sind, immer zu je zweien $+\operatorname{Int}(p' + m\omega)$ und $-\operatorname{Int}(p'' - m\omega)$ so zusammen ordnen, dass zwischen ξ' und ξ'', welche den Grössen p' und p'' entsprechen, kein Werth von ξ liegt, der den reellen oder imaginären Theil von p zu einer ganzen Zahl macht, so dass also die zwei Intensoren sich stets gegenseitig annulliren.

(V.) Art. (15). Es ist

$$\text{II.} + \sum \varepsilon \operatorname{Int} ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } - \sum \varepsilon \operatorname{Int} ip, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade}$$
$$= \sum \{-\operatorname{Int} i(p - m\omega) + \operatorname{Int} i(p + m\omega)\} \text{ für diejenigen } p, \text{ für welche } x \text{ oder } y \text{ ganz,}$$
$$[X] \text{ gerade, } [Y] \text{ ungerade, } 0 < \xi < \tfrac{1}{2},\ \eta = \omega$$
$$+ \operatorname{Int} i(p^* - m\omega), \text{ wenn } [X^*] \text{ gerade, } [Y^*] \text{ ungerade}$$
$$- \operatorname{Int} i(p^{**} + m\omega), \text{ wenn } [X^{**}] \text{ gerade, } [Y^{**}] \text{ ungerade}$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man auf der zweiten Seite der Gleichung die Summation nach dem in der vorhergehenden Note angewandten Verfahren über jedes so kleine Intervall von ξ_1 bis ξ_{11} ausführt, dass es zwischen ξ_1 und ξ_{11} kein ξ gibt, welches in dem zugehörigen P den reellen Theil oder imaginären Theil zu einer ganzen Zahl macht. Die Anwendung der nach Vorschrift III. gebildeten ε lässt die zweite Seite dieser Gleichung die in Art. 15 aufgestellte Form annehmen.

(V.) Art. (15). Die Verwandlung der Summen von den nach Vorschrift IV gebildeten $\lambda'\varepsilon$ in die Summen der ε aus V ergibt sich durch eben solche Betrachtungen wie die in der letzten Note angewandten, wenn noch die Gleichung

$$\text{V.} \sum \varepsilon \text{ von allen } - 4 \sum \varepsilon, \text{ wo } x \text{ ganz, } [y] \text{ gerade}$$
$$= + \operatorname{Int}(\tfrac{1}{2} im + m\omega) - \operatorname{Int}(\tfrac{1}{2} im + \tfrac{1}{2} - \omega m)$$

zu Hülfe gezogen wird, die der zuvor ermittelten Auswerthung der Summe von den ε in Vorschrift III entspricht.

(V.) Art. (17). Bestimmt man die Hülfsgrössen U, T, L, V durch die Gleichungen

$$U = 1 - 2(B) - (AB) + (\alpha a) + (\beta b) + (\alpha b) - (\beta a) + (\alpha\beta ab) - (\alpha\beta abAB) \text{ oder}$$
$$U = (1 + (A))(1 - (B))(1 - (\alpha\beta) + (b\beta) + (\alpha\beta))$$
$$\text{weil } (\alpha a) + (\beta b) = (A) + (A\alpha\beta ab),\quad (\alpha b) - (\beta a) = (B) - (B\alpha\beta ab) \text{ ist,}$$
$$T = -2 + (a) + (b) - (\beta) - 2(B) - (\alpha ab) \text{ oder}$$
$$T = -2 + (a) + (b) - (\beta) - 2(B) - (aA) + (bB) - (\beta AB)$$
$$L = (1 + (A))(1 + (B))(1 + (\beta)) - (1 - (A))(1 - (B))(1 - (\beta))$$
$$V = (1 + (A))(1 - (B))(-2(a) + 2(\beta) + (ab) + (\alpha\beta)) \text{ oder}$$
$$V = (1 + (A))(1 - (B))(-(a) + (b) + (\beta) + (ab) - (\beta ab) + (\alpha\beta))$$
$$\text{weil } (a) + (b) = (\beta) + (\beta ab), \text{ wenn } A \text{ positiv } B \text{ negativ,}$$

und bezeichnet mit W', S', Q' die Grössen, in welche die W, S, Q des Ausdrucks für den Dec. $\frac{m}{M}$ in Art. 14 übergehen, wenn man darin m mit M also $\alpha+\beta i$ mit $\alpha-\beta i$ vertauscht, so wird

$$2W' = -5(B)-(AB), \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2W' = -(B)-(AB), \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$2S' = -(\alpha\beta abAB)-(\beta)-(B)+(b)$$

$$2Q'+2S'+2W' = 2T+U, \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2Q'+2S'+2W' = -4+4(a)+U, \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$8\psi = 8(q+r+s+w)-(2Q'+2S'+2W').$$

Ersetzt man hier $8(q+r+s+w)$ durch dessen in Art. 15 aufgestellten Werth, bringt ihn aber unter die Form

$$2T+4L+V, \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}, \quad \frac{m-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2T-16+16(A)+V, \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}, \quad \frac{m-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$-4+4(a)+V, \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}, \quad \frac{m-1}{2} \text{ gerade}$$

$$-20+4(a)+V, \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}, \quad \frac{m-1}{2} \text{ ungerade}$$

und beachtet, dass

$$V-U = -\tfrac{1}{2}(1+(a))(1+(A))(1+(\alpha))(1-(b))(1-(B))(1-(\beta))$$

ist, so erhält man für ψ die in Art. 17 angegebene Bestimmungsart.

(VI.) Art. (3.) Das unvollständige Citat kann auf Art. 4 des Bruchstücks III bezogen werden.

2. BEMERKUNGEN

[zu Gauss: Zur Theorie der komplexen Zahlen.
Gauss' Werke, Bd. II (Zweiter Abdruck), S. 398, Göttingen 1876.]

Die hier unter der gemeinsamen Ueberschrift, zur Theorie der complexen Zahlen, zusammengestellten Untersuchungen bilden zerstreute Notizen in der Handschrift. Sie enthalten die wesentlichen Momente des Beweises vom Fermatschen Satze für die dritte und fünfte Potenz. Die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen sind in unvollständigen hier nicht abgedruckten Aufzeichnungen sowohl mit Hülfe der Theorie der binären quadratischen Formen, als auch der Kreistheilung untersucht. Bei Gelegenheit der Anwendung der letztern und zwar während der Ausarbeitung der Abhandlung »*Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio*« ist noch die ternäre cubische Form aufgestellt, in welche $27\frac{x^n-1}{x-1}$ für eine Primzahl $n \equiv 1$ mod. 3 verwandelt werden kann, und zugleich die Theorie der Composition der mit jener verwandten Form $X^3+mY^3+mmZ^3-3mXYZ$ entwickelt.

Die in den Untersuchungen des Bruchstück (I) vorausgesetzte Eigenschaft der aus dritten Wurzeln der Einheit gebildeten ganzen Zahlen, dass jede nur auf Eine Weise in Primfactoren zerlegt werden kann, ergibt sich aus dem Euclidischen Verfahren, die gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu bestimmen, wenn dabei der unter (II) abgeleitete Satz über die nächste ganze Zahl für irgend eine vorgegebene Bruchzahl in Anwendung gebracht wird.

Dass dieselbe Fundamentaleigenschaft auch den aus fünften Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen zukommt, folgt daraus, dass der nach einer ganz analogen Regel wie in (II) gebildete Bruchrest entweder von m oder doch von m multiplicirt in eine geeignete Einheitszahl E so beschaffen ist, dass er durch Subtraction von der vorgegebenen Zahl mE eine ganze Zahl entstehen lässt und dass sein Determinant die Einheit nicht übertrifft. Die Einheitszahlen lassen sich aber, wie in (III) angedeutet, aus der Theorie der binären quadratischen Formen vom Determinant 5 in Verbindung mit der Zerlegung irgend einer reellen Primzahl in vier Factoren (z. B. $11 =$ Det. $(2+\varepsilon)$) ableiten, nämlich als Producte der Potenzen von ε und $1+\varepsilon$.

3. BEMERKUNGEN

[zu verschiedenen zahlentheoretischen Tafeln von Gauss.

Gauss' Werke, Bd. II, Zweiter Abdruck, S. 520—526, Göttingen 1876.]

Die *Tafel des quadratischen Charakters der Primzahlen* ist nach der Weise der in Art. 99 beschriebenen und (in Art. 331) zur Zerlegung der Zahlen vorzugsweise angewandten Tabula II der Disqu. Arithm. gedruckt. Die Handschrift unter dem Titel »*Quadratorum numeris primis divisorum residua lateralia*« hat in den Schriftzügen am meisten Aehnlichkeit mit der des zweiten Theiles der Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche, sie enthält an der Stelle der den quadratischen Rest anzeigenden horizontalen Striche kleine Kreise, von denen immer diejenigen durch Linien verbunden sind, die in benachbarten horizontalen oder verticalen Reihen vorkommen. Bei der Correctur wurde ich auf mehrere Fehler aufmerksam, habe dann bei einer einmaligen Vergleichung mit Jacobi's *Canon Arithmeticus* 190 Abweichungen in den Angaben der Charactere und nach directer Bestimmung diese in Uebereinstimmung mit jenen gedruckten Tafeln gefunden, dem entsprechend ist hier die Ausgabe berichtigt.

Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabula III der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^π, welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2), ..., (0) der Decimalbrüche von $\frac{10.r}{p^\pi}$, $\frac{10.rr}{p^\pi}$, ..., $\frac{10}{p^\pi}$, worin r die Einheit bedeutet, also $(1) = (2) = \ldots (0)$ wird, wenn 10 Primitivwurzel von p^π ist, sonst aber r die kleinste unter denjenigen Primitivwurzeln von p^π bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von r habe ich zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 420 der Tafel beigefügt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verschiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voraufzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^π zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbrüche von $\frac{100}{p^\pi}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender

Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October 11. 1795.* Im Drucke ist beim Theiler 191 Periode (1) die 71ˢᵗᵉ Ziffer hinzugefügt und beim Theiler 829 eine zwischen der 151ˢᵗᵉⁿ und 152ˢᵗᵉⁿ Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Die von Gauss selbst in einem Briefe (Seite 444) erläuterte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* besteht für ihren ersten Theil, welche die Anzahl der Primzahlen in jedem der 1000 ersten Chiliaden gibt, in einer Handschrift von Gauss; es finden sich im Nachlass aber nicht die in dem Briefe angedeuteten Abzählungen der der ersten Million angehörenden Hunderte, die eine bestimmte Anzahl von Primzahlen enthalten. Der andere Theil der Tafel nämlich für die zweite und dritte Million ist einer von Goldschmidt allein herrührenden Handschrift entlehnt. Herr Meissel hat durch Abzählung und durch seine Formel die folgenden Berichtigungen zu Seite 436 und 437 gefunden:

Chilias	Gauss	Wahrer Werth	Chilias	Gauss	Wahrer Werth
20	102	104	546	68	69
159	87	77	601	75	76
199	96	86	625	68	78
206	85	83	668	73	74
245	78	88	675	69	73
289	85	77	784	74	75
290	84	85	800	81	71
334	80	81	879	68	78
352	80	81	985	74	70
501	78	79			

Die in dem Briefe von Gauss an Encke erwähnte Formel Encke's scheint die folgende

$$\frac{n}{\log n}\sqrt[2\log n]{10}$$

zu sein, welche Encke in einem Briefe an Gauss vom 4. Dec. 1849 mittheilt.

Die *Tafel der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen* gibt die Anzahl der Genera und Classen so wie den Index der Irregularität für die negativen Determinanten in den Hunderten 1 bis 30, 43, 51, 61, 62, 63, 91 bis 100, 117 bis 120, dann noch in einer besondern Zusammenstellung für die des 1^en^ 3^ten^ und 10^ten^ Tausend, für die 800 ersten von der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$, sowie für einige sehr grosse Determinanten, ferner für die positiven Determinanten des 1. 2. 3. 9. 10^ten^ Hundert und für einige andere. Die Handschrift besteht aus einzelnen Zetteln, auf denen die Tafeln verschiedenartig eingerichtet sind, z. B. ist bei den ältern das Wort Ordo statt Genus gebraucht, so bei den einzelnen Centaden mit Ausnahme der 9. und 10. positiver Determinanten, dann aber auch bei einzelnen vorläufigen Zusammenstellungen in Chiliaden. Zur leichtern Uebersicht ist hier überall die Bezeichnung der Disqu. Arithm. gewählt, auch die grössten und kleinsten Quotienten aus der Anzahl der Classen dividirt durch den Determinanten, sowie die Anzahl der Determinanten, für welche der Quotient innerhalb gewisser Grenzen fällt, sind wegen Mangel an Raum nicht unter die einzelnen Centaden gesetzt sondern am Ende der Tafel für die negativen Determinanten zusammengestellt. Aus einigen übrig gebliebenen Aufzeichnungen scheint hervorzugehen, dass Gauss zuerst die Classen für die Determinanten berechnet hat, die demselben Hundert und demselben Reste bei dem Theiler 15 angehören. Die Determinanten dieser Abtheilungen sind dann nach der Anzahl der Genera und Classen und zuletzt alle die demselben Hundert angehörigen auf die hier wiedergegebene Weise geordnet. Den Tafeln der einzelnen Centaden sind manche spätere Berichtigungen eingefügt, nicht aber den Zusammenstellungen in Tausenden. Zeitbestimmungen enthalten nur die beiden Tafeln mit den Determinanten der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$ nämlich resp. »*Expl. In. Febr. 1801*« und »*Expl. 27 Febr. 1807*«.

In diesen Tafeln habe ich unter anderen die folgenden Fehler bemerkt, denen ich hier zur leichtern Controle die Periodenzahlen der Fundamentalclassen wie z. B. 4. 4. 2 bei dem Determinanten -11713 und die durch Formen der resp. Fundamentalclassen dargestellten Zahlen wie 31. 37. 2 beifüge, indem, wie in meiner Abhandlung Band 14 der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*), als Fundamentalclassen solche Classen genommen werden, die in Vereinigung mit den Classen ihrer Perioden durch Composition jede eigentlich primitive Classe des Determinanten einmal und nur einmal hervorbringen.

*) [Diese Werke, Band I, S. 135—148.]

Es sind schon die Angaben fortgelassen: und hinzugefügt:

Centas 9.	G. IV...	3...	–	827[21::3]	Centas 9.	G. IV...	3...	–	828[6.2::31.23]
26	IV	14	–	2587[24::11]	26	IV	14	–	2586[28.2::7.2]
26	VIII	6	–	2564[56::3]	26	VIII	6	–	2565[12.2.2::7.2.5]
91	I	111	–	9059[117::5]	91	I	117	–	9059[117::5]
120	IV	32	–	11956*2*[36.2::11.49]	120	IV	32	–	11966*2*[32.4::5.83]
1	I	2	+	37[3::3]	1	I	3	+	37[3::3]
2	I	2	+	101[3::4]	2	I	3	+	101[3::4]

Bei der Tafel für Centas 3 und der letzten auf Seite 476, welche in der Handschrift mit einer von der hier abgedruckten äusserlich verschiedenen Aufzeichnung der Centas 1 und 2 vereinigt vorkommen, sind die zwölf Abtheilungen statt mit I. Ordo unicus. 1; I. O. 2; I. O. 3; I. O. 4; II. Ordines duo. 1. 1; II. O. 1. 2; II. O. 2. 2; II. O. 3. 3; III. Ordines quatuor. 1. 1. 1. 1; III. O. 1. 1. 2. 2; III. O. 2. 2. 2. 2; IV. Ordines octo 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1; hier auf die sonst angewandte Weise mit G. I. 1; G. I. 3; G. I. 5; G. I. 7; G. II. 1; G. II. 2; G. II. 3; G. II. 5; G. IV. 1; G. IV. 2; G. IV. 3; G. VIII. 1; bezeichnet. Die Rechnung ergibt nämlich z. B. 269. I. 3[3::4]; 235. IV. 3[6.2::3.5]; 401. I. 5[5::9]; 577. I. 7[7::3]; 727. II. 5[10::3].

In Folge von Druckfehlern ist auszulassen: und hinzuzufügen:

Centas 27.	G. IV...	16...	–	2624*3*	Centas 27.	G. IV...	16...	–	2624*2*[16.4::3.16]
93	IV	16	–	9216	93	IV	16	–	9216*2*[16.4::5.9]
118	VIII	4	–	11713*3*	118	VIII	4	–	11713*2*[4.4.2::31.37.2]

Nach meiner Berechnung ist noch auszulassen: und hinzuzufügen:

Centas 10.	G. II...	9...	–	972[6.3::7.13]	Centas 10.	G. II...	9...	–	972*3*[6.3::7.13]
17	IV	4	–	1660[10.2::11.5]	17	IV	12	–	1700[24.2::3.17]
20	IV	12	–	1982[24::3]	20	IV	12	–	1937[24.2::7.2]
21	IV	6	–	2096[30.2::3.4]	21	IV	6	–	2097[12.2::47.2]
23	IV	9	–	2221[18::10]	23	IV	9	–	2224[18.2::5.16]
24	IV	12	–	2376[12.2.2::5.8.8]	24	IV	12	–	2366[24.2::3.2]
29	IV	9	–	2887[25::8]	29	IV	9	–	2885[18.2::3.5]
61	IV	7	–	6028[12.2::13.4]	61	IV	6	–	6028[12.2::13.4]
96	VIII	13	–	9594[20.2.2::31.2.13]	96	VIII	13	–	9546[26.2.2::5.3.37]
118	IV	25	–	11780[16.4.2::3.8.19]	118	IV	25	–	11750[50.2::3.47]

118	VIII	16	−11780[16.4.2::3.8.19]	118	VIII	16	−11780*2*[16.4.2::3.8.19]
119	VIII	16	−11840[24.2.2::5.9.7]	119	VIII	16	−11840*2*[16.4.2::3.16.5]
Milias I. G.	II...	3...	− 541[10::11]	Milias I. G.	II...	5...	− 415[10::13]
I	II	4	− 415[10::13]	I	II	5	− 541[10::11]
I	II	8	− 527[18::3]	I	II	9	− 459*3*[6.3::5.9]
I	II	8	− 722[18::3]	I	II	9	− 527[18::3]
I	II	9	− 194[20::5]	I	II	9	− 722[18::3]
I	II	9	− 459[6.3::5.9]	I	II	9	− 972*3*[6.3::7.13]
I	II	9	− 972[6.3::7.13]	I	II	10	− 194[20::5]
I	II	11	− 842[26::13]	I	II	13	− 842[26::13]
I	IV	3	− 784[8.2::5.4]	I	IV	2	− 532[4.2::13.7]
I	IV	4	− 532[4.2::13.7]	I	IV	4	− 784[8.2::5.4]
I	IV	5	− 425[12.2::3.17]	I	IV	6	− 425[12.2::3.17]
I	IV	5	− 608[12.2::13.27]	I	IV	6	− 608[12.2::13.27]
I	IV	5	− 629[18.2::5.2]	I	IV	9	− 629[18.2::5.2]
III	II	15	−2578[16::13]	III	II	15	−2518[30::19]
X	I	111	−9059[117::5]	X	I	117	−9059[117::5]
formae $-(15n+13)$	IV	4	−2788*2*[8.2::19.17]	formae $-(15n+13)$	IV	4	−2788[8.2::19.17]

Die Tafeln *zur Cyklotechnie* geben für 2452 Zahlen von der Form $aa+1$, $aa+4$, $aa+9$, ..., $aa+81$ die sämmtlichen ungeraden Primtheiler p neben den zugehörigen a und zwar in solchen Fällen, wo die Primtheiler alle unter 200 liegen, nur dann werden $aa+1$ u. s. f. zerlegbar genannt.

Zur leichtern Uebersicht beim Gebrauche hat Gauss für jede Tafel, aus der sich die vollständigen Zerlegungen von Zahlen einer der besonderen Formen bestimmen lassen, eine Hülfstafel aufgestellt, die neben jeder Primzahl p solche Zahlen a enthält, deren um 1 oder 4 ... vermehrtes Quadrat die Zahl p zum grössten Primtheiler hat.

Der Hauptzweck der Tafeln ist die Erleichterung, die sie für die genaue Berechnung der Bögen gewähren, deren Cotangenten gegebene rationale Zahlen sind. Zunächst können nämlich mit ihrer Hülfe die Bögen für kleine Cotangenten aus den Bögen für grosse Cotangenten zusammengesetzt und dadurch die noch erforderlichen Berechnungen der Reihen, welche die Bögen in ihren Cotangenten ausdrücken, auf ein sehr geringes Maass beschränkt werden. Die hierauf hinzielenden Entwickelungen, die sich in dem handschriftlichen Nachlass finden, sind wenig ausgedehnt, die folgende ist die am weitesten fortgeführte. Es bezeichnen darin

$$[2]\,[5]\,[13]\,[17]\,[29]\,[37]\,[41]\,[53]\,[61]\ldots[197]\,(18)\,(57)\,(239)\left(\frac{79}{3}\right)\cdots$$

die Bögen der Cotangenten

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ 4,\ \frac{5}{2},\ 6,\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{2},\ \frac{6}{5},\ \cdots,\ 14,\ 18,\ 57,\ 239,\ \frac{79}{3},\ \cdots$$

Mit Hülfe der Tafeln ist durch Zerlegung von $18+i$, $57+i$, $239+i$ in ihre complexe Primfactoren

$$\begin{aligned}(18) &= 2[2]-2[5]-[13]\\ (57) &= -[2]+3[5]-[13]\\ (239) &= 3[2]-4[13]\end{aligned}$$

gefunden und hieraus

$$\begin{aligned}[2] &= 12(18)+8(57)-5(239)\\ [5] &= 7(18)+5(57)-3(239)\\ [13] &= 9(18)+6(57)-4(239)\end{aligned}$$

ferner mit Hülfe der Tafeln

$$\begin{aligned}(268) &= -2[5]+2[13]-[17]\\ (38) &= -[5]+2[17]\end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination von [17] und Einsetzen der zuvor erhaltenen Werthe von [5], [13]

$$(38)+2(268) = (18)-(57)-(239).$$

Die Elimination von (18) hat dann die neue Bestimmung ergeben

$$\begin{aligned}[2] &= 12(38)+20(57)+7(239)+24(268)\\ [5] &= 7(38)+12(57)+4(239)+14(268)\\ [13] &= 9(38)+15(57)+5(239)+18(268)\\ [17] &= 4(38)+6(57)+2(239)+7(268)\end{aligned}$$

Nach folgeweiser Anwendung der Cotangenten 117, 327, 882, 18543, 307, 278, 378, 829, 993, 2943, 447, 606, 931, 1143, 1772, 6118, 34208, 44179, 85353, 485298, 17772, 9466, 330182, 5257, 114669, 12943 sind endlich [2], [5], ..., [61] durch (5257), (9466), ..., (485298) ausgedrückt und deren Coëfficienten in den folgenden Spalten zusammengestellt:

	5257	9466	12943	34208	44179	85353	114669	330182	485298
2	+ 2805	− 398	+ 1950	+ 1850	+ 2021	+ 2097	+ 1484	+ 1389	+ 808
5	+ 1656	− 235	+ 1151	+ 1092	+ 1193	+ 1238	+ 876	+ 820	+ 477
13	+ 2100	− 298	+ 1460	+ 1385	+ 1513	+ 1570	+ 1111	+ 1040	+ 605
17	+ 875	− 124	+ 608	+ 577	+ 630	+ 654	+ 463	+ 433	+ 252
29	+ 1359	− 193	+ 945	+ 896	+ 979	+ 1016	+ 719	+ 673	+ 391
37	+ 590	− 84	+ 410	+ 389	+ 425	+ 441	+ 312	+ 292	+ 170
41	+ 2410	− 342	+ 1675	+ 1589	+ 1736	+ 1802	+ 1275	+ 1193	+ 694
53	+ 994	− 141	+ 691	+ 655	+ 716	+ 743	+ 526	+ 492	+ 286
61	+ 2481	− 352	+ 1725	+ 1637	+ 1788	+ 1855	+ 1313	+ 1229	+ 715

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen, welche zur Bestimmung von [2], [5], ..., [61] dienen können, überzeugt man sich unmittelbar durch die aus obigen Tafeln sich ergebenden Zerlegungen

$$\begin{aligned}
(5257) &= [2]+2[5]-[13]+[17]-[41]-[61]\\
(9466) &= 2[2]-[29]-3[37]-[61]\\
(12943) &= [2]-4[5]+3[13]-[61]\\
(34208) &= 2[2]-[5]-2[13]+[17]+[29]-2[53]\\
(44179) &= 3[2]-3[13]-2[17]-[29]+[53]\\
(85353) &= -[2]-[5]+[13]-[17]-[37]+2[41]-[53]\\
(114669) &= -3[2]+[17]+[37]+2[53]+2[61]\\
(330182) &= -4[2]+5[5]+[13]+[29]-[37]-[41]+[61]\\
(485298) &= -2[2]-[5]+4[13]-2[29]+[37]+[53]
\end{aligned}$$

Die von den Rechnern bis jetzt angewandten Arten zur Bestimmung von $\frac{\pi}{4} = (1)$ stellt Gauss in der folgenden Uebersicht zusammen:

Machin $(1) = 4(5)-(239)$ auch Clausen,
Euler $= (2)+(3)$ (Euler à Goldbach, 1746, Mai 28),
Vega $= 5(7)+2\left(\frac{79}{3}\right)$ (Vega, Thesaurus logar., p. 633),
Vega $= 2(3)+(7)$ auch Clausen (Astr. Nachr., B. 25, S. 209),
Rutherford $= 4(5)-(70)+(99)$ (Philos. Trans., 1841, p. 283),
Dase $= (2)+(5)+(8)$ (Crelle, Journal, B. 27, S. 198),
Gauss, 1. $= 12(18)+8(57)-5(239)$,
Gauss, 2. $= 12(38)+20(57)+7(239)+24(268)$.

Die ersten Rechnungen für die Tafeln gehören der Zeit der Ausarbeitung der *Disquiss. Arr.* an, sie sind dann besonders in den Jahren 1846 und 47 gefördert. Am 21. Juli 1847 waren 2283 Zerlegungen nach der hier wieder-gegebenen Ordnung in Tafeln gebracht, die übrigen 169 sind später berechnet, und ich habe sie diesem Abdruck (der sich vom Original in der Einrichtung nur durch die des leichtern Satzes wegen statt der Potenzen angewandte Schreibweise der Wiederholung der Factoren unterscheidet) mit eingeordnet.

Die Manuscripte mit diesen letzten Rechnungen scheinen die Resultate in der Form zu enthalten, wie sie unmittelbar gefunden wurden. Die Reihenfolge, in welcher dabei die Zahlen a auftreten, lässt vermuthen, dass nur für die kleinern die Theiler von $aa+1$ u. s. f. aufgesucht wurden, und dass die grössern Zahlen sich aus diesen durch Anwendung besonderer Kunstgriffe ergeben haben. Aufgezeichnet ist aber nur folgende Regel: Aus drei Zahlen a, $2a-n$, $2a+n$ findet sich eine vierte

$$\frac{4a^3-(nn-3)a}{nn+1}.$$

Diese ist immer eine ganze Zahl für $n=0$ und $n=1$, sonst nur

$$\text{für } a \equiv 0 \text{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \bmod (nn+1), \text{ wenn } n \text{ gerade,}$$
$$\text{und für } a \equiv 0 \text{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \bmod \frac{nn+1}{2}, \text{ wenn } n \text{ ungerade.}$$

Beispiele:	$a = 253,$	$n = 6,$	1750507
	$a = 294,$	$n = 11,$	832902
	$a = 119,$	$n = 1,$	3370437
	$a = 57,$	$n = 3,$	74043
	$a = 123,$	$n = 9,$	90657

Zu der vierten Zahl gehören nämlich keine andern Primtheiler als zu den ersten dreien und davon sind auch nur diejenigen ungeraden Primtheiler ausgeschlossen, welche der Zahl n zugehören.

4. BEMERKUNGEN

[zu Gauss: Theoria interpolationis methodo nova tractata.
Gauss' Werke, Bd. III (Zweiter Abdruck), S. 328—330, Göttingen 1876.]

Die vorliegende Abhandlung über die Interpolation ist die wiederholte Ausarbeitung einer Untersuchung, von welcher ein früherer Entwurf im Oktober 1805 begonnen zu sein scheint. Sie enthält die Methoden, die bei der Berechnung der Ausdrücke für die durch Störungskräfte hervorgebrachten Aenderungen der Elemente einer Planetenbahn vielfach angewandt worden sind. Dieser Ausmittelung der Störungen steht ein anderes Verfahren zur Seite, das direct die Werthe der Bahnelemente für einzelne Zeitpunkte ergibt und das, wie aus den im vorgefundenen handschriftlichen Nachlasse aufgezeichneten schliesslichen Formeln hervorgeht, auf folgenden Principien beruht.

Bilden die Werthe des Arguments, für welche die Werthe der Funktion gegeben sind, eine arithmetische Reihe, und hat man ein Argument x eingeführt, das bei jenen Werthen wie die ganzen Zahlen fortschreitet, bezeichnet die gegebenen Werthe mit fx, führt deren auf einander folgende Differenzenreihen ein:

$$f(x+1)-fx = f^1(x+\tfrac{1}{2}),\quad f^1(x+\tfrac{1}{2})-f^1(x-\tfrac{1}{2}) = f^2x,\quad f^2(x+1)-f^2x = f^3(x+\tfrac{1}{2}) \text{ u. s. f.}$$

ferner deren mit beliebigen Anfangsgliedern beginnende Summenreihen $f^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $f^{-2}x$, $f^{-3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ u. s. f. für welche

$$fx = f^{-1}(x+\tfrac{1}{2})-f^{-1}(x-\tfrac{1}{2}),\quad f^{-1}(x+\tfrac{1}{2}) = f^{-2}(x+1)-f^{-2}x \text{ u. s. f.}$$

endlich die Mittelwerthe der aufeinander folgenden Glieder der so entstandenen Reihen nämlich

$$\ldots f^{-1}x = \tfrac{1}{2}f^{-1}(x+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f^{-1}(x-\tfrac{1}{2}),\quad f(x+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}f(x+1)+\tfrac{1}{2}f(x),$$
$$f^1x = \tfrac{1}{2}f^1(x+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f^1(x-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

also in übersichtlicher Anordnung zusammengestellt folgendes System von gegebenen und daraus zunächst berechneten Werthen

M. W.	II. Summe	M. W.	I. Summe	gegeb.W.	M. W.	I. Differ.	M. W.	II. Differ.	M. W.
.	.	.	.		.	.	.	.	.
	$f^{-2}(x-1)$	$f^{-1}(x-1)$		$f(x-1)$			$f^1(x-1)$	$f^2(x-1)$	
$f^{-2}(x-\frac{1}{2})$			$f^{-1}(x-\frac{1}{2})$		$f(x-\frac{1}{2})$	$f^1(x-\frac{1}{2})$			$f^2(x-\frac{1}{2})$
	$f^{-2}x$	$f^{-1}x$		fx			f^1x	f^2x	
$f^{-2}(x+\frac{1}{2})$			$f^{-1}(x+\frac{1}{2})$		$f(x+\frac{1}{2})$	$f^1(x+\frac{1}{2})$			$f^2(x+\frac{1}{2})$
	$f^{-2}(x+1)$	$f^{-1}(x+1)$		$f(x+1)$			$f^1(x+1)$	$f^2(x+1)$	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

so gibt Art. 4, wenn man

1) für $t, a, b, c, d, e, \ldots$ resp. $x+t, x, x+1, x-1, x+2, x-2, \ldots$
2) für $t, a, b, c, d, e, \ldots$ resp. $x+t, x, x-1, x+1, x-2, x+2, \ldots$ setzt,
3) aus den entsprechenden Seiten der beiden so erhaltenen Gleichungen die halbe Summe bildet,
4) aus denselben Gleichungen, nachdem zuvor in der zweiten $x+1$ und $t-1$ resp. für x und t gesetzt ist, die halbe Summe bildet, und
5) in der zuletzt erhaltenen Gleichung $t=\frac{1}{2}$ macht,

folgende Gleichungen für die durch Interpolation zu bestimmenden Werthe $\varphi(x+t)$ und $\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)$ derjenigen Function φx, die bei jedem ganzzahligen Werthe von x der gegebenen Grösse fx gleich wird:

$$\varphi(x+t) = fx+t.f^1(x+\tfrac{1}{2})+\frac{t.t-1}{1.2}f^2x+\frac{t.t-1.t+1}{1.2.3}f^3(x+\tfrac{1}{2})+\cdots$$
$$+\frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi 2n.\Pi(t-n-1)}f^{2n}x+\frac{\Pi(t+n)}{\Pi(2n+1).\Pi(t-n-1)}f^{2n+1}(x+\tfrac{1}{2})+\cdots$$

$$\varphi(x+t) = fx+t.f^1(x-\tfrac{1}{2})+\frac{t.t+1}{1.2}f^2x+\frac{t.t+1.t-1}{1.2.3}f^3(x-\tfrac{1}{2})+\cdots$$
$$+\frac{\Pi(t+n)}{\Pi 2n.\Pi(t-n)}f^{2n}x+\frac{\Pi(t+n)}{\Pi(2n+1).\Pi(t-n-1)}f^{2n+1}(x-\tfrac{1}{2})+\cdots$$

$$\varphi(x+t) = fx+t.f^1x+\frac{t.t}{1.2}f^2x+\frac{t.t-1.t+1}{1.2.3}f^3x+\cdots$$
$$+\frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi 2n.\Pi(t-n)}tf^{2n}x+\frac{\Pi(t+n)}{\Pi(2n+1).\Pi(t-n-1)}f^{2n+1}x+\cdots$$

$$\varphi(x+t) = f(x+\tfrac{1}{2})+(t-\tfrac{1}{2})f^1(x+\tfrac{1}{2})+\frac{t.t-1}{1.2}f^2(x+\tfrac{1}{2})+\frac{t.t-1}{1.2.3}(t-\tfrac{1}{2})f^3(x+\tfrac{1}{2})+\cdots$$
$$+\frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi 2n.\Pi(t-n-1)}f^{2n}(x+\tfrac{1}{2})+\frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi(2n+1).\Pi(t-n-1)}(t-\tfrac{1}{2})f^{2n+1}(x+\tfrac{1}{2})+\cdots$$

$$\varphi(x+\tfrac{1}{2}) = f(x+\tfrac{1}{2})-\frac{1}{8}f^2(x+\tfrac{1}{2})+\frac{3}{128}f^4(x+\tfrac{1}{2})-\frac{5}{1024}f^6(x+\tfrac{1}{2})+\frac{35}{32768}f^8(x+\tfrac{1}{2})+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{\Pi 2n}{\Pi n.\Pi n}2^{-4n}f^{2n}(x+\tfrac{1}{2})+\cdots$$

Die Coefficienten von f^m in der dritten, vierten und fünften Gleichung sind gleich den Coefficienten von $(2i\sin\omega)^m$ in den Reihenentwickelungen resp. für $\cos 2t\omega+i\frac{\sin 2t\omega}{\cos\omega}$, $\frac{\cos(2t-1)\omega}{\cos\omega}+i\sin(2t-1)\omega$ und $\frac{1}{\cos\omega}$ nach Potenzen der Grösse $2i\sin\omega$.

Setzt man nun:

$$\Phi(x+\tfrac{1}{2}) = f^{-1}(x+\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}f^1(x+\tfrac{1}{2}) - \frac{17}{5760}f^3(x+\tfrac{1}{2}) + \frac{367}{967680}f^5(x+\tfrac{1}{2})$$
$$- \frac{27859}{464486400}f^7(x+\tfrac{1}{2}) + \frac{1295803}{122624409600}f^9(x+\tfrac{1}{2}) - \cdots$$

$$\Phi x = f^{-1}x - \frac{1}{12}f^1x + \frac{11}{720}f^3x - \frac{191}{60480}f^5x + \frac{2497}{3628800}f^7x$$
$$- \frac{14797}{95800320}f^9x + \frac{92427157}{2615348736000}f^{11}x - \cdots$$

$$\Psi x = f^{-2}x + \frac{1}{12}fx - \frac{1}{240}f^2x + \frac{31}{60480}f^4x - \frac{289}{3628800}f^6x$$
$$+ \frac{317}{22809600}f^8x - \cdots$$

$$\Psi(x+\tfrac{1}{2}) = f^{-2}(x+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{24}f(x+\tfrac{1}{2}) + \frac{17}{1920}f^2(x+\tfrac{1}{2}) - \frac{367}{193536}f^4(x+\tfrac{1}{2}) + \cdots - \cdots,$$

indem man als Coëfficienten von f^m in diesen vier Gleichungen die Coëfficienten nimmt, die bei den Entwicklungen resp. für $\frac{1}{2i\omega}$, $\frac{1}{2i\omega\cos\omega}$, $-\frac{1}{4\omega\omega}$, $-\frac{1}{4\omega\omega\cos\omega}$ nach Potenzen von $2i\sin\omega$ entstehen, so sind $\Phi\left(x+\frac{1}{2}\right)$, Φx, Ψx $\Psi\left(x+\frac{1}{2}\right)$ die besonderen Werthe solcher Functionen $\Phi(x+t)$, $\Psi(x+t)$, für welche die Gleichungen

$$\Phi(x+t) - \Phi(x+t_0) = \int_{t_0}^{t}\varphi(x+t)\,dt; \quad \Psi(x+t) - \Psi(x+t_1) = \int_{t_1}^{t}\Phi(x+t)\,dt$$

Statt haben; sie werden also bestimmten Integralen von $\varphi(x+t)\,dt$ und $\varphi(x+t).dt.dt$ gleich, wenn man die Anfangswerthe der Summenreihen $f^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, ..., $f^{-2}x$, $f^{-2}(x+1)$, ... auf geeignete Weise auswählt.

Die Ableitung der Reihen für Φ und Ψ aus der dritten und vierten der obigen Gleichungen für $\varphi(x+t)$ erhält man unmittelbar, wenn man die Integrationen so ausführt, dass zunächst die Ausdrücke für $\Phi\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $\Phi(x+1) - \Phi x$, $\Psi(x+1) - 2\Psi x + \Psi(x-1)$ und $\Psi\left(x+\frac{3}{2}\right) - 2\Psi\left(x+\frac{1}{2}\right) + \Psi\left(x-\frac{1}{2}\right)$ entstehen.

5. BEMERKUNGEN

[zu Gauss: Tafeln zur Bestimmung des Zeitwerthes von einfachen Leibrenten und von Verbindungsrenten.

Gauss' Werke, Bd. IV, Zweiter Abdruck, S. 184—188, Göttingen 1880.]

Den Zahlenangaben dieser Tafeln liegen die von Brune im 16. Bande des Crelleschen Journals für Mathematik zusammengestellten Erfahrungen über die in der k. Preussischen allgemeinen Witwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1834 successive aufgenommenen 31500 Ehepaare zu Grunde. Es sind hier angegeben die Logarithmen der Anzahl der Frauen ($\log fm$) und der Männer ($\log FM$), welche unter 10000, die das vollendete 20^ste^ Lebensjahr erreichten, bis zu dem Ende des in der Mitte bemerkten Altersjahres (m oder M) gelangten, jedoch mit der Abweichung von Brune, dass das Absterben der Männer über 80 Jahren nach demselben Verhältnisse gerechnet ist, welches jenen Erfahrungen gemäss bei dem weiblichen Geschlechte gilt; weil wie in der Bilanzrechnung von 1845 erwähnt wird, die Registratur der Preussischen Witwenkasse zur directen Bestimmung des Absterbens der Männer im hohen Alter keine hinreichende Daten enthält. Neben den Logarithmen der Lebenden stehen unter der Ueberschrift decr. die absoluten Werthe der Unterschiede jener Logarithmen $\left(\log gm = \log\frac{f(m-1)}{fm}\right.$ und $\left.\log GM = \log\frac{F(M-1)}{FM}\right)$ in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt. Mit Hülfe der so erhaltenen Tafel für die Sterblichkeit hat Gauss die einfachen und die Verbindungsrenten bei dem Zinsfuss von $3\,^1/_2$ Proc. und von 4 Proc. berechnet.

Die sowohl in Logarithmen als in Zahlen ($\varphi m, \Phi M$) dargestellten einfachen Leibrentenwerthe gelten für das Ende des in der Mitte angegebenen Lebensjahres der Frau (m) oder des Mannes (M) als jetzigen Zeitmoment und unter der Voraussetzung, dass für den Fall des Erlebens des Endes jedes der nachfolgenden Jahre dann die Münzeinheit gezahlt wird, so dass also

$$\varphi m.fm = \varrho f(m+1) + \varrho\varrho f(m+2) + \varrho^3 f(m+3) + \cdots$$
$$\Phi M.FM = \varrho F(M+1) + \varrho\varrho F(M+2) + \varrho^3 F(M+3) + \cdots$$

ist, wenn ϱ den Discontofactor $\left(= \frac{200}{207}\right.$ bei $3\,^1/_2$ Proc. und $\left.= \frac{25}{26}\right.$ bei 4 Proc.$\Big)$ bezeichnet.

Die Tafel der Verbindungsrenten enthält die Logarithmen der Werthe $\psi(m, M)$, welche für den Zeitpunkt des zur Seite stehenden Alters (M) des Mannes solchen Renten, die am Schlusse jedes der folgenden Jahre im Falle des gleichzeitigen Lebens des Mannes (vom jetzigen Alter $= M$) und der Frau (vom Altersunterschiede $= m - M$) mit der Münzeinheit gezahlt werden, gleich kommen und also durch die Formel bestimmt sind:

$$\psi(m, M).fm.FM = \varrho f(m+1).F(M+1) + \varrho\varrho f(m+2).F(M+2) + \varrho^3 f(m+3).F(M+3) + \cdots$$

Werthe von Leibrenten und Lebensversicherungen für Männer.

Die Tafel für die Leibrenten der Männer hat Gauss zu einer genauen Berechnung des Einflusses benutzt, den diejenige Bestimmung der Statuten, dass ein Wiederaustritt des lebenden Mitgliedes nicht gestattet sein solle, haben würde. Er findet, dass für die 42 verheiratheten Mitglieder der Bilanzrechnung vom 1. Oct. 1845 der Zeitwerth der Beiträge sich dadurch um 898 Thl. bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und um 665 Thl. bei 4 Proc. vermehren würde. Ausserdem hat er mit Hülfe dieser Tafel einige Rechnungen über die Werthe von Lebensversicherungen ausgeführt und dabei für ein jetziges Mannesalter von M Jahren $\varrho - (1-\varrho)\Phi M$ als Zeitwerth der am Ende des Todesjahres auszuzahlenden Münzeinheit genommen.

Werth der bestehenden Witwenpension Pm.

„*) *m jetziges Alter der Witwe.*

φm Werth der Pension, wenn jährlich und nur an noch Lebende gezahlt wird.

ϱ Discontofactor $\left(= \frac{25}{26}\right.$ für 4 Proc., $= \left.\frac{200}{207}\right.$ für $3\frac{1}{2}$ Proc.$\left.\right)$ oder der Zinsfuss so verstanden, dass ϱ nach einem Jahre auf 1 anwächst.

fx Lebende des Alters x nach Angabe der Mortalitätstafel.“

Die Bilanz wird für den 1. October eines bestimmten Jahres berechnet und dieser Zeitpunkt hier überall nur kurz der jetzige genannt. Nach dem Regulative vom 11. October 1833 und den später ergangenen Verfügungen die Professoren-Witwenkasse betreffend wird die Pension in halbjährigen am

*) [Die von Gauss herrührenden Worte und Formeln sind auf den Seiten 339 bis 343 durch *cursiven* Druck und durch Anführungszeichen („. . . . . .“) kenntlich gemacht.]

1. April und am 1. October jeden Jahres fälligen Raten ausbezahlt und erlischt bei Witwen mit dem Sterbemonate, welcher zu voll bezahlt wird. Mit Rücksicht hierauf ist für den wahrscheinlichen Jetztwerth Pm einer mit der Münzeinheit jährlich auszuzahlenden Witwenpension:

$$„fm.Pm = \frac{1}{12}\varrho^{\frac{1}{2}}\left\{fm + f\left(m+\frac{1}{12}\right) + f\left(m+\frac{2}{12}\right) + \cdots + f\left(m+\frac{5}{12}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{12}\varrho\left\{\quad f\left(m+\frac{6}{12}\right) + f\left(m+\frac{7}{12}\right) + \cdots + f\left(m+\frac{11}{12}\right)\right\}$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

oder

$$fm.Pm = \frac{1}{2}\varrho^{\frac{1}{2}}f\left(m+\frac{5}{24}\right) + \frac{1}{2}\varrho f\left(m+\frac{17}{24}\right) + \frac{1}{2}\varrho^{\frac{3}{2}}f\left(m+\frac{29}{24}\right) + \text{u. s. w.}$$

wofür genommen werden kann

$$= \varrho^{\frac{3}{4}}f\left(m+\frac{11}{24}\right) + \varrho^{\frac{7}{4}}f\left(m+\frac{35}{24}\right) + \text{u. s. w.}$$

Die Tafel gibt

$$fm.\varphi m = \varrho f(m+1) + \varrho\varrho f(m+2) + \cdots$$

also

$$Pm = \varrho^{-\frac{1}{4}}.\frac{f\left(m-\frac{13}{24}\right)}{fm}\cdot\varphi\left(m-\frac{13}{24}\right) = \varrho^{-\frac{1}{4}}.g\left(m+\frac{11}{48}\right)^{\frac{13}{24}}\cdot\varphi\left(m-\frac{13}{24}\right)“$$

wenn man die in obiger Tafel unter decr. in Einheiten der siebenten Decimale enthaltenen Werthe von $\log f(m-1) - \log fm$ mit $\log.gm$ bezeichnet. Eine zur Berechnung von Hülfstafeln etwas bequemere Formel entsteht, wenn man bei jeder ganzen Zahl n und jedem echten Bruche k für $f(n+k)$ die Grösse $(1-k)fn + kf(n+1)$ setzt, nämlich:

$$„Pm = A + B.\varphi m$$

wo

$$48A = 19\varrho^{\frac{1}{2}} + 7\varrho, \quad 48B = 5\varrho^{-\frac{1}{2}} + 17 + 19\varrho^{\frac{1}{2}} + 7\varrho$$

und nahe genug

$$A = \frac{13}{24}\varrho^{\frac{33}{52}}, \quad B = \varrho^{\frac{7}{24}}$$

für $3^1/_2$ *Proc.* $\log\frac{1}{\varrho} = 0.0149403$ *Genau* $A = 0.52998474$, $\log B = 9.9956901$

die Näherungsformel gibt $A = 0.5299694$, $\log B = 9.9956424$.

Gerechnet war nach $\frac{13}{24}+\varphi m = P^0$, *man kann also setzen*

$$P = \varrho^{\frac{7}{24}} P^0 - \frac{13}{24}\left(\varrho^{\frac{7}{24}} - \varrho^{\frac{3}{4}}\right) = P^0 - \frac{7}{24}(1-\varrho)P^0 - \frac{143}{576}(1-\varrho)$$

also für $3^1/_2$ *Proc.* $P = P^0 - \frac{49}{4968}P^0 - \frac{1001}{119232}$, *für 4 Proc.* $P = P^0 - \frac{7}{624}P^0 - \frac{11}{1152}$.

Beispiel: Nr. 65. H... 4 Proc. $m = 53.784$

		Verbesserung des früheren Werthes P^0
$\log\varphi\left(m-\frac{13}{24}\right)$..... 1.05488	$\log\varphi m$..... 1.04830	
comp. $\log\varrho^{\frac{1}{4}}$....... 0.00426	$\log\varrho^{\frac{7}{24}}$... − 0.00497	$P^0 - \frac{1}{90}\,\frac{105}{104}P^0 - \frac{11}{1152}$
	$B\varphi m$....... 11.0492	$\frac{13}{24}+\varphi m = 11.7179$
$\log g\left(m+\frac{11}{48}\right)^{\frac{13}{24}}$... 0.00440	$\frac{13}{24}\varrho^{\frac{3}{4}}$....... 0.5260	− 0.1314 5
1.06354		− 0.0095 5“
$P =$ 11.5755	11.5752	11.5769

Stehende Ehe.

„*Alter des Mannes M, der Frau m zur Zeit von Oct. 1. Sterblichkeitstafel, lebende Männer vom Alter x gleich Fx, Werth der Witwenpension* $= R-Q$.“

Nach den Statuten nimmt die Pension mit dem Ablaufe des Gnadenquartals ihren Anfang, wird in halbjährigen am 1. April und am 1. October jeden Jahres fälligen Raten ausgezahlt und erlischt mit dem Schlusse des Sterbemonats. Für den Zeitwerth $R-Q$ einer etwa eintretenden Witwenpension welche jährlich die Münzeinheit beträgt ist demnach

$$\begin{aligned}(R-Q).fm.FM = {} & \frac{1}{12}\varrho\left\{FM - F\left(M+\frac{1}{4}\right)\right\}\left\{f\left(m+\frac{6}{12}\right)+f\left(m+\frac{7}{12}\right)+f\left(m+\frac{8}{12}\right)\right\}\\ & +\frac{1}{12}\varrho\left\{FM - F\left(M+\frac{2}{4}\right)\right\}\left\{f\left(m+\frac{9}{12}\right)+f\left(m+\frac{10}{12}\right)+f\left(m+\frac{11}{12}\right)\right\}\\ & +\frac{1}{12}\varrho^{\frac{3}{2}}\left\{FM - F\left(M+\frac{3}{4}\right)\right\}\left\{f\left(m+\frac{12}{12}\right)+f\left(m+\frac{13}{12}\right)+f\left(m+\frac{14}{12}\right)\right\}\\ & +\frac{1}{12}\varrho^{\frac{3}{2}}\left\{FM - F\left(M+\frac{4}{4}\right)\right\}\left\{f\left(m+\frac{15}{12}\right)+f\left(m+\frac{16}{12}\right)+f\left(m+\frac{17}{12}\right)\right\}\\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

oder:

$$„R.fm = \frac{1}{2}\varrho f\left(m+\frac{17}{24}\right)+\frac{1}{2}\varrho^{\frac{3}{2}}f\left(m+\frac{29}{24}\right)+\frac{1}{2}\varrho\varrho f\left(m+\frac{41}{24}\right)+\cdots$$

$$= \varrho^{\frac{5}{4}}f\left(m+\frac{23}{24}\right)+\varrho^{\frac{9}{4}}f\left(m+\frac{47}{24}\right)+\cdots$$

$$R = \frac{1}{24}\varrho^{\frac{5}{4}}+\varrho^{\frac{7}{24}}\varphi m$$

$$Q.fm.FM = \varrho^{\frac{5}{4}}f\left(m+\frac{23}{24}\right)\cdot F\left(M+\frac{5}{8}\right)+\varrho^{\frac{9}{4}}f\left(m+\frac{47}{24}\right)F\left(M+\frac{13}{8}\right)+\cdots“$$

Werthe der noch zu zahlenden Beiträge S.

Regulativ vom 11. October 1833 und 24. November 1846. Jeder Theilnehmer an der Witwenkasse hat postnumerando jährlich am 17. September den Beitrag an den Rechnungsführer zu entrichten, und werden diese Beiträge von Michaelis zu Michaelis gerechnet. — Wenn ein Mitglied der Witwenkasse in der ersten Hälfte des Beitragsjahres, mithin in den Monaten vom Oktober bis incl. März stirbt, so haben die Erben für das betreffende Jahr den Beitrag nicht mehr einzuzahlen; stirbt dagegen ein Mitglied in der zweiten Hälfte des Jahres, so muss von den Erben am 17. September des Sterbejahres noch der volle Beitrag entrichtet werden. — Die Aufkündigung von Seiten der Theilnehmer muss mittelst schriftlicher Erklärung vor dem 17. September des von Michaelis zu Michaelis laufenden Beitrittsjahres geschehen, der an diesem Tage fällig werdende jährliche Beitrag jedoch noch einmal zu voll bezahlt werden; wer diese Frist nicht einhält, muss für das ganze folgende Beitrittsjahr noch Zahlung leisten, bleibt dann aber bis dahin auch noch Mitglied.

Für den Zeitwerth S der jährlich als Beitrag zu zahlenden Münzeinheit erhält man daher:

$$„S.fm.FM = \varrho.fm.F(M+\tfrac{1}{2})+\varrho\varrho.f(m+1).F(M+\tfrac{3}{2})+\cdots$$

Bezeichnet man also

$$\psi(m,M).fm.FM = \varrho f(m+1)F(M+1)+\varrho\varrho f(m+2)F(M+2)+\cdots$$

so ist

$$Q = \frac{f\left(m-\frac{1}{24}\right)}{fm} \cdot \frac{F\left(M-\frac{3}{8}\right)}{FM} \cdot \varrho^{\frac{1}{4}} \psi\left(m-\frac{1}{24},\, M-\frac{3}{8}\right)$$

$$S = \frac{f(m-1)}{fm} \cdot \frac{F\left(M-\frac{1}{2}\right)}{FM} \cdot \psi\left(m-1,\, M-\frac{1}{2}\right).$$

Schreibt man noch

$$\frac{f(m-1)}{fm} = gm$$

$$\frac{F(M-1)}{FM} = GM$$

so wird

$$R = \frac{1}{24}\varrho^{\frac{5}{4}} + \varrho^{\frac{7}{24}}\varphi m$$

$$Q = g\left(m+\frac{23}{48}\right)^{\frac{1}{24}} \cdot G\left(M+\frac{5}{16}\right)^{\frac{3}{8}} \cdot \varrho^{\frac{1}{4}} \cdot \psi\left(m-\frac{1}{24},\, M-\frac{3}{8}\right)$$

$$S = gm \,.\, G\left(M+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} . \psi\left(m-1,\, M-\frac{1}{2}\right).$$

Beispiel: Nr. 138 *Conradi*. $M = 65.02$, $m = 46.08$

	4 Proc.	$3^1/_2$ Proc.
$\log \varphi m$	1.12875	1.15233
$\frac{7}{24}\log\varrho$	-497	-436
	13.2979	14.0594
$\frac{1}{24}\varrho^{\frac{5}{4}}$	0.0397	399
$R =$	13.3376	14.0993
für Q, $\log\psi$	0.80912	0.82183
$\log gG$ ...	$+897$	$+897$
$\frac{1}{4}\log\varrho$ ...	-426	-374
$Q =$	6.5137	6.7150
$R-Q =$	6.8239	7.3843
für S, $\log\psi$	0.81325	0.82606
$\log gG$ ...	$+1744$	$+1744$
$S =$	6.7716	6.9743 “

$\log\varrho = -0.0170333393$ für 4 Proc.

$\log\varrho = -0.0149403498$ für $3^1/_2$ Proc.

für Q				für S		
$\psi(46.04;\, 64.65)$		18.61	$\psi(45.08;\, 64.52)$		19.44
	18.61			19.44	
64	0.82079	0.83374		0.82251	0.83552
65	0.80284	0.81540		0.80470	0.81732
$g(46.56)^{\frac{1}{24}}$ ...		25	$g(46.08)$		588
$G(65.33)^{\frac{3}{8}}$ ...		872	$G(65.27)^{\frac{1}{2}}$ ...		1156

Bei der Aufstellung dieser Tafeln hat Gauss sich seiner fünfstelligen Tafel zur Berechnung des Logarithmus der Summe von Grössen, die nicht selbst, sondern nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, bedient, und deshalb bei jedem Zinsfuss und jedem Altersunterschiede mit der Bestimmung der Rentenwerthe für die höchsten Lebensjahre den Anfang gemacht. Die einzelnen Zahlenangaben können aus diesem Grunde auch abgesehen von der Verbesserung, welche die Sterblichkeitstafel durch erweiterte Erfahrungen der Preussischen Witwenkasse schon seither erlitten hat, um einzelne Einheiten in der fünften Decimale der Logarithmen ungenau sein.

Einige Rechenfehler, auf die ich durch Bildung der Quotienten zwischen den $3\frac{1}{2}$ und 4 procentigen Rentenwerthen und der Differenzen der auf einander folgenden Quotienten aufmerksam geworden bin, habe ich beim Abdruck berichtigt. In Einheiten der fünften Decimale des Logarithmus betragen diese Fehler an den Orten ihres Entstehens: $+20$ für das 77. Jahr der Frau in deren Leibrentenwerthen bei 4 Proc. ferner für das 71. und 93. Jahr des Mannes und die resp. Altersunterschiede der Frau von $+1$ und 0 Jahr bei $3\frac{1}{2}$ Proc.; $+10$ für das 76. Jahr des Mannes in dessen Leibrentenwerth bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und ebenso viel für das 79. Jahr des Mannes und den Altersunterschied der Frau von -9 Jahr bei 4 Proc.; -10 für das 28. 68. 91. 94. und 94. Jahr des Mannes und die resp. Altersunterschiede von -8, -13, -11, -2 und -14 Jahr bei den resp. Procenten $4 . 4 . 3\frac{1}{2} . 4$ und $3\frac{1}{2}$. Diese und einige andere Rechenfehler von geringerem Betrage haben auf die Bestimmung der Rentenwerthe für die zunächst jüngeren Altersjahre einigen Einfluss gehabt, der allmählich und im äussersten Falle erst für das Ende des zweiten Jahrzehnts verschwindet. Die Angaben der einfachen Leibrenten in Zahlen sind aus den Logarithmen abgeleitet und haben nach der angegebenen Berichtigung derselben hier auch eine entsprechende Abänderung erfahren müssen.

Die bei den Anwendungen der Tafeln zu gebrauchenden Formeln und die Rechnungsbeispiele zu denselben sind den zerstreuten Notizen auf einzelnen Handblättchen entlehnt und hier durch einige Einschaltungen erläutert.

6. BEMERKUNGEN

[zu Gauss: Allgemeines Coordinaten-Verzeichniss.

Gauss' Werke, Bd. IV, S. 446—448, Göttingen 1873].

Der Einheit der Coordinaten so wie den verschiedenen Reductionen der Messung sollten vermuthlich die von Walbeck gefundenen Erddimensionen zu Grunde gelegt werden.

Walbeck et Brummer, De forma et magnitudine telluris, Aboae 1819 pag. 16: »Gradus medius seu $\frac{1}{90}$ pars Quadrantis Meridiani $= 57009^t,76$. Ellipticitas $= \frac{1}{302,78}$« (Handschriftliche Bemerkung von Gauss: mittlere Meridiangrad) $=$ »$57009^t,7584$. Der Meter also $= 443^l,307885$, Verhältniss $=$ 37299 : 37300 Logarithm $=$ 0,00001164.«

Gauss, Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, Göttingen 1828, Art. 20. — »Wenn man meine Dreiecke als auf der Oberfläche eines elliptischen Sphaeroids liegend, dessen Dimensionen die von Walbeck aus der Gesammtheit der bisherigen Gradmessungen abgeleiteten sind, und welches nach unsrer besten gegenwärtigen Kenntniss sich am vollkommensten an die wirkliche Gestalt im Ganzen anschliesst (Abplattung $\frac{1}{302,76}$, der dreihundertsechzigste Theil des Erdmeridians $=$ 57009,746 Toisen) berechnet, und dabei von der Polhöhe von Göttingen $= 51^\circ 31' 47'' 85$ ausgeht« ...

Hienach scheint Gauss mehrfach mit der Abplattung $\frac{1}{302,76}$ statt mit der Walbeckschen $\frac{1}{302,78}$ gerechnet zu haben und in der That liegt auch mehreren der noch im handschriftlichen Nachlass vorhandenen Hülfstafeln die erstere Zahl zu Grunde.

Gauss an Schumacher, Göttingen 1830, April 18, Zweite Hülfstafel, Anmerkung: »Bei früher von mir mitgetheilten Coordinaten ist die Einheit $\frac{1}{10000000}$ des Erdquadranten nach Walbeck's Dimensionen; um jene also in solche zu verwandeln, bei denen die Einheit $\frac{1}{10000000}$ des Erdquadranten nach Schmidt's neuesten zum Grunde liegt, müssen jene erst mit $\frac{57009758}{57008551}$ oder mit $1 + \frac{1}{47245}$ multiplicirt werden.«

Gauss, Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona, Art. 19. »Nach der trigonometrischen Verbindung der Sternwarten von Göttingen und Altona liegt letztere 115163,725 Toisen nördlich, 7,211 Toisen westlich von jener. Diese Zahlen beziehen sich auf die Plätze der Meridiankreise; sie gründen sich auf den Werth der Dreiecksseite Hamburg-Hohenhorn 13841,815 Toisen, und diese auf die von Hrn. Prof. Schumacher in Holstein im Jahre 1820 gemessene Basis. Da jedoch die Vergleichung der dabei gebrauchten Messstangen mit der Normaltoise noch nicht definitiv vollendet ist, so wird obige Entfernung in Zukunft noch in demselben Verhältniss abzuändern sein, wie die Basis selbst, welche Veränderung aber jedenfalls nur sehr gering sein kann«.

Herr Geheimer Etatsrath Andrae in Copenhagen bemerkt über die Revision der Basis in einem Schreiben vom 5. März 1865 abgedruckt im Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1864 Seite 6. 7. »Die von Schumacher angegebene Länge der Braacker Basis: 3014,5799 Toisen, welche bei den früheren Berechnungen sowohl der Dänischen als auch der Hannöverischen unter der Leitung von Gauss ausgeführten Triangulationen angewendet wurde, konnte nur als ein vorläufiges Resultat der Basismessung angesehen werden, da die Reduction auf den Meeresspiegel und mehrere andere Correctionen noch nicht berücksichtigt waren. Da diese Reductionen an Grösse beträchtlich die Unsicherheiten der Messungen selbst, die mit grosser Sorgfalt ausgeführt sind, übersteigen, war eine neue Bestimmung nothwendig und Herr Professor Dr. Peters in Altona hat auch die Güte gehabt, eine ausführliche, mit der grössten Genauigkeit durchgeführte Berechnung sämmtlicher Correctionen vorzunehmen, durch welche die Länge der Basis sich nun stellt wie folgt:

a.	Die Länge von 1505 Messstangen ohne Correction	3010,00000 Toisen
b.	Summe der mit den Glaskeilen gemessenen Intervalle und der in Betracht kommenden ganzen und halben Durchmesser der Ablöthungs-Cylinder	+ 3,58389 T.
c.	Länge der Ergänzungsstange	+ 1,22106 T.
d.	Correction wegen Neigung der Ablöthungs-Cylinder gegen die Lothlinie	− 0,00008 T.

e. Correction wegen Abweichung der Stangen vom Alignement	— 0,00051 T.
f. Correction wegen fehlerhafter Längen der Messstangen	— 0,10245 T.
g. Correction wegen Abweichung der Temperatur der Messstangen von 13° R.	— 0,19906 T.
h. Reduction auf die Oberfläche des Meeres . . .	— 0,02264 T.
Länge der Braacker-Basis nach der neuen Berechnung	= 3014,48021 Toisen.

Es findet sich aber auch in dieser Berechnung ein schwacher Punkt, nämlich die sub g angeführte Correction wegen der Temperatur der Messstangen. Eine mit Abbildungen versehene Beschreibung des bei der Basismessung angewandten Apparats hat Schumacher in der Schrift: »Schreiben an Dr. Olbers in Bremen etc. etc., Altona 1821« veröffentlicht, und man wird daraus ersehen, dass die Temperaturen nicht durch Metallthermometer, sondern durch gewöhnliche, eingelegte Thermometer bestimmt sind. Dies ist nun an und für sich ein misslicher Umstand, aber viel schlimmer stellt sich die Sache, da die Ausdehnbarkeit der Stangen nur aus einigen im Felde vorgenommenen Messungen der Stangenlängen am Abend und am Morgen abgeleitet wird. Es kann aber diesem Uebel abgeholfen werden. Im Jahre 1853 wurde nämlich die Stange No. IV des Schumacherschen Basisapparats nach Pulkowa gebracht, um direct mit den dort gesammelten Etalons verglichen zu werden. Bei dieser Gelegenheit wurde nun auch die Ausdehnung dieser Stange für 100° erhalten, und wenn man den von Struve (Siehe »Arc du méridien entre le Danube et la mer glaciale« pag. 51) angegebenen Werth der Ausdehnungscoefficienten berechnet, dann erhält man für die Correction sub g: — 0,22812 statt — 0,19906.

Mit dieser Berichtigung, welche auch von Professor Peters adoptirt wird, findet man dann die Länge der Braacker Basis:

$$= 3014{,}451 \text{ Toisen,}$$

und dieser Werth muss als der definitive betrachtet werden. Ich füge nur hinzu, dass die Angabe in Toisen auf der Vergleichung mit der Pulkowaer Fortin beruhe; da diese aber mit der Besselschen Toise bis auf eine verschwindende Kleinigkeit übereinstimmt, kann die Länge auch füglich als in Besselschen Toisen ausgedrückt angesehen werden«.

Obiges Coordinaten-Verzeichniss ergiebt für die Länge der Basis 5875,3614 der dort angewandten Einheiten oder 3014,5757 Toisen bei einem Erdmeridian von $360 \times 57009,746$ Toisen.

Eduard Schmidt. Gauss an Schumacher: Göttingen 1830 April 30. »Um Ihr Vertrauen zu Schmidt's Rechnung zu vergrössern, bemerke ich, dass er die zwei Hauptelemente der Erddimensionen viermal berechnet hat, — — Das Resultat (IV) ist mir von ihm handschriftlich mitgetheilt und dasselbe was meinen neuen Hülfstafeln zum Grunde liegt, nämlich Abplattung $\frac{1}{297,732}$; $\frac{\text{Erd-Quadrant}}{90} = 57008^{\mathrm{T}}551$«.

Bessel. »Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde«. Astronomische Nachrichten, Nr. 438, Band 19, Seite 116, 1841, December 2. »Mittlerer Grad des Meridians = 57013,109 Toisen, halbe grosse Axe a = 3272077,14 Toisen, halbe kleine Axe b = 3261139,33 Toisen, $a:b = 299,1528 : 298,1528$«.

Bei der Anwendung der in obigen Verzeichnissen angegebenen Coordinaten hat man diese also vorläufig, ehe die Basis und die Verbindungsdreiecke bis Hamburg—Hohenhorn von Neuem gemessen sind, mit folgendem Correctionsfactor zu multipliciren:

$\frac{3014,48021}{3014,5757} = \text{num}(\log = -0,00001376)$ für die Basislänge nach Peters und für die von Gauss in der »Breitenbestimmung« wie oben angegebenen Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} = \text{num}(\log = -0,00001797)$ für die Basislänge nach Peters und Andrae und für die von Gauss in der »Breitenbestimmung« wie oben angegebenen Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57009,7584} = \text{num}(\log = -0,00001386)$ für die Basislänge nach Peters und für Walbeck's Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57009,7584} = \text{num}(\log = -0,00001806)$ für die Basislänge nach Peters und Andrae und für Walbeck's Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57008,551} = \text{num}(\log = -0,00000466)$ für die Basislänge nach Peters und für Schmidt's IV. Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57008,551} = \text{num}\,(\log = -0,00000887)$ für die Basislänge nach Peters und Andrae und für Schmidt's IV. Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57013,109} = \text{num}\,(\log = -0,00003938)$ für die Basislänge nach Peters und für Bessel's Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57013,109} = \text{num}\,(\log = -0,00004359)$ für die Basislänge nach Peters und Andrae und für Bessel's Erddimensionen.

Die von Schmidt und die von Bessel berechneten Erddimensionen setzen die Längenangabe von Schumacher über dessen Braacker Basis voraus, eine neue Berechnung der von ihnen in Betracht gezogenen Gradmessungen würde bei dieser berichtigten Basislänge etwas abweichende Zahlen für die Erddimensionen ergeben, die aber durch die bald zu erwartende Beendigung mehrerer neuen Gradmessungen auch in kurzer Zeit durch bessere Bestimmungen ersetzt werden müssen.

Die hier im Abdruck aus den Partial-Verzeichnissen noch besonders aufgenommenen Coordinaten sind entweder dieselben wie im General-Verzeichniss oder beruhen auf weniger genauen Bestimmungen, können aber zur Erläuterung der nachfolgenden »Abrisse« dienen. In Gauss' Nachlass befinden sich von den Partial-Verzeichnissen nur Nro. 1—11. Eine neue Vergleichung ergab mir die Berichtigungen:

im General-Verzeichniss steht:	− 26619,9	− 12689,5	Lauenberge
im Partial-Verzeichniss (3) steht:	− 26619,9	+ 12689,5	Lauenberge

− 233491,171	+ 181317,782	Norden Thürmchen auf hoher Kirche. Nr. 12.
− 249451,172	+ 162280,007	Langeoog F. J. Paul's Haus östlicher Giebelstock. Nr. 12.

Zur leichteren Wiedererkennung der in dem Coordinaten-Verzeichniss angegebenen Punkte kann man die auf diese Vermessung gegründete »Papensche Karte vom Königreich Hannover« mit Vortheil benutzen.

Die Ueberschriften + südlich und + westlich habe ich, um den Rechner ein Missverstehen der Zeichen sicherer vermeiden zu lassen, hinzugefügt.

7. BEMERKUNGEN

[zu Gauss Werke, Bd. V, S. 637—640, 1867. Zweiter Abdruck, Göttingen 1877].

Die hier unter 21 Nummern zusammengestellten bruchstücksweise aufgezeichneten Untersuchungen*) gehören ziemlich weit auseinanderliegenden Zeiten an. Nr. 1 und 2 befinden sich in einem Tagebuche zwischen den Protocollen von Beobachtungen, die im März, Juni und Juli 1833 über die durch Magnete inducirten Galvanischen Ströme angestellt sind. Nr. 6, 12, 18, 21 stehen auf besondern Blättern und lassen ausser 18, welches ein Datum trägt, keine besondere Zeitbestimmung zu. Die übrigen Nummern mit Ausschluss des Briefes (20) sind hier in gleicher Reihenfolge wieder gegeben, wie sie sich in einem Handbuche befinden, wo sie aber zahlreiche ganz heterogene Entwickelungen zwischen sich enthalten. Die letzte jener Nummern mit dem Beweise von Ampère's Fundamentalsatz ist erst nach 1843 eingetragen, die andern scheinen der Zeit von 1833 bis 1836 anzugehören.

Die verschiedenen Formen, welche hier für das Gesetz der Wechselwirkungen zwischen Galvanischen Stromelementen angenommen werden, ergeben sich alle aus dem besonders in Nr. 20**) hervorgehobenen Princip der Umtauschbarkeit des Magnetismus mit galvanischen Strömen. Die in diesem Briefe angedeuteten Untersuchungen von Wilhelm Weber bilden die Vorarbeiten zu der (im Jahre 1846, in der ersten Abhandlung über Electrodynamische Maassbestimmungen***), vollendeten) Aufstellung einer Theorie, nach welcher die ganze Wechselwirkung zwischen zwei (mit dem entsprechenden Vorzeichen versehenen e, e') electrischen Theilchen, in der gegenseitigen Entfernung r, durch

$$ee'\left(\frac{1}{rr} - \frac{1}{cc}\frac{1}{rr}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{cc}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

*) [»Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen«, Gauss' Werke, Bd. V, S. 601—630.]

**) [Brief von C. F. Gauss an W. Weber vom 19. März 1845.]

***) [W. Weber's Werke, Bd. III, S. 25—214.]

gemessen wird und ein positiver Werth dieser Grösse eine Abstossung, ein negativer eine Anziehung bedeutet. In dem Ausdrucke bezeichnet t die Zeit, c eine Geschwindigkeit, welche Kohlrausch und Weber durch Untersuchungen (1855) zur Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass gleich $439450.10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$ gefunden haben*).

Dem Lehrsatze in Nr. 4**) ist eine rein geometrische Einkleidung gegeben; wegen seiner Wichtigkeit für die Theorie der galvanischen Ströme glaubte ich ihm diese Stelle zuweisen zu müssen. Das Integral, durch welches die Anzahl der Umschlingungen der geschlossenen Curve s mit dem System geschlossener Curven s' bestimmt wird, giebt nämlich, wenn statt ds' die Elemente aller im Raume vorhandenen geschlossenen galvanischen Ströme gesetzt werden, die algebraische Summe der Intensitäten derjenigen unter diesen Strömen, welche eine von s begrenzte aber im übrigen beliebig bestimmt angenommene Fläche durchdringen. Das Integral selbst ist aber nach dieser Deutung der ds' gleich $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V}{\partial s}\,\mathrm{d}s$, wenn V die Potentialfunction für die magnetischen Wirkungen der Ströme s' wie in Nr. 9 bezeichnet. Der Satz bildet also das Analogon zu dem von Gauss in der Abhandlung über die Attraction der Ellipsoide***) aufgestellten, welcher die innerhalb einer geschlossenen Fläche (ω) befindliche Masse aus den zur Fläche nach innen gerichteten Normalkräften ihrer Attraction $\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)$ durch $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V}{\partial N}\,\mathrm{d}\omega$ bestimmt.

Die Ermittelung des angedeuteten Werthes des obigen Integrals $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V}{\partial s}\,\mathrm{d}s$ ergiebt sich z. B. wenn man die Integral-Ausdrücke für die Derivirten von V

---

*) [W. Weber's Werke, Bd. III, S. 652.]

**) [Der Gausssche Lehrsatz in Nr. 4 lautet:]

»*Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiet der Geometria situs und der Geometria Magnitudinis wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.*

»*Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z; der zweiten x', y', z' und*

$$\int\int\frac{(x'-x)(dy\,dz'-dz\,dy')+(y'-y)(dz\,dx'-dx\,dz')+(z'-z)(dx\,dy'-dy\,dx')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

»*dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt $= 4m\pi$, und m die Zahl der Umschlingungen*«.

***) [Diese Gausssche Abhandlung wurde der Gött. Ges. d. Wiss. 1813 März übergeben; s. Gauss' Werke, Bd. V, S. 1—22.]

nach den Coordinaten verwandelt in Integrale, welche sich über irgend beliebig bestimmt angenommene von den einzelnen Stromleitern s' begrenzte Flächen ω erstrecken. Die dadurch erhaltene Form für die Derivirte von V nach s lässt nach einem im Art. 38*) der allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus angedeuteten Satze, welcher den Unterschied der Werthe der Potentialfunction für eine auf beiden Seiten mit entgegengesetztem magnetischem Fluidum in geeigneter Weise belegte Fläche und zwar der Werthe an entsprechenden Stellen der beiden Seiten der Fläche angiebt, unmittelbar erkennen, dass das gesuchte Integral gleich ist der algebraischen Summe der Intensitäten der Ströme, welche in den Begrenzungslinien der von der Curve s durchsetzten Flächen ω' sich bewegen.

Die Verwandlung der über eine geschlossene Curve s ausgedehnten Integrale in solche, die sich auf eine von s begrenzte Fläche ω beziehen, kann mit Hülfe des Satzes ausgeführt werden, dass für irgend welche rechtwinklige gerad- oder krummlinige Coordinaten ξ, η, ζ, die also das Quadrat des Längenelements allgemein durch einen Ausdruck von der Form

$$\xi'\xi' d\xi^2 + \eta'\eta' d\eta^2 + \zeta'\zeta' d\zeta^2$$

darstellen, und für beliebige mit ihren ersten Derivirten in den Punkten der Fläche ω stetig veränderliche Functionen λ, μ, ν der Coordinaten ξ, η, ζ immer

$$\int\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial s} + \mu\frac{\partial\eta}{\partial s} + \nu\frac{\partial\zeta}{\partial s}\right)ds$$
$$= \int\left\{\left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta} - \frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right)\frac{\xi'}{\eta'\zeta'}\frac{\partial\xi}{\partial n} + \left(\frac{\partial\nu}{\partial\xi} - \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right)\frac{\eta'}{\zeta'\xi'}\frac{\partial\eta}{\partial n} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\eta} - \frac{\partial\mu}{\partial\xi}\right)\frac{\zeta'}{\xi'\eta'}\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right\}d\omega$$

ist, wenn ξ, η, ζ im ersten Integral die Coordinaten eines Punktes des Längenelements ds, im zweiten ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes des Flächenelements $d\omega$ und n die Normale zu diesem Flächenelement bedeuten. Die positive Richtung der Normale ist so zu wählen, dass, wenn dt das erste Element einer von einem Punkte des ds zu diesem selbst normal, aber in der Fläche ω liegenden Curve bezeichnet, die positiven Richtungen der $\xi' d\xi$, $\eta' d\eta$, $\zeta' d\zeta$ durch stetige Verschiebung der Lage des Coordinatensystems im

*) [Gauss' Werke, Bd. V, S. 171.]

Raume der Reihe nach mit den positiven Richtungen der $\mathrm{d}n$, $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}t$ zur Deckung gebracht werden können.

Dieser Satz giebt durch wiederholte Anwendung auch den Beweis von Ampère's Fundamentalsatz in der allgemeinen Form, dass unmittelbar die Potentialfunction für die Wechselwirkung zwischen den auf bestimmte Weise mit magnetischem Fluidum belegten Flächen zurückgeführt wird auf die Potentialfunction für die Wechselwirkung zwischen galvanischen Strömen, die nach Lage und Intensität durch jene Flächen und die Magnetisirung bestimmt sind.

Dem in Nr. 9 aufgestellten Beweise für die Gleichheit der Werthe der verschiedenen Ausdrücke für die [electromagnetische] Potentialfunction V kann man eine symmetrische Form geben, wenn man die Function

$$R = xx \operatorname{arc\,tang}\frac{yz}{xr} + yy \operatorname{arc\,tang}\frac{zx}{yr} + zz \operatorname{arc\,tang}\frac{xy}{zr} + 2yzi \operatorname{arc\,tang}\frac{xi}{r}$$
$$+ 2zxi \operatorname{arc\,tang}\frac{yi}{r} + 2xyi \operatorname{arc\,tang}\frac{zi}{r},$$

worin i statt $\sqrt{-1}$ gesetzt ist, einführt und berücksichtigt, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial\partial R}{\partial x^2} = 2 \operatorname{arc\,tang}\frac{yz}{xr}, \quad \frac{\partial\partial R}{\partial y\,\partial z} = 2i \operatorname{arc\,tang}\frac{xi}{r}$$
$$\frac{\partial\partial R}{\partial y^2} = 2 \operatorname{arc\,tang}\frac{zx}{yr}, \quad \frac{\partial\partial R}{\partial z\,\partial x} = 2i \operatorname{arc\,tang}\frac{yi}{r}$$
$$\frac{\partial\partial R}{\partial z^2} = 2 \operatorname{arc\,tang}\frac{xy}{zr}, \quad \frac{\partial\partial R}{\partial x\,\partial y} = 2i \operatorname{arc\,tang}\frac{zi}{r}$$
$$\frac{\partial\partial R}{\partial x^2} + \frac{\partial\partial R}{\partial y^2} + \frac{\partial\partial R}{\partial z^2} = (2m+1)\pi, \quad \frac{\partial^3 R}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = -2\frac{1}{r}$$

Statt haben. Durch die Derivirten der Function $R(x, y, z)$ können in endlicher Form auch die Potentialfunctionen für die magnetische Wirkung solcher galvanischer Ströme dargestellt werden, deren Leiter aus geradlinigen den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems parallelen linearen Theilen bestehen*).

*) [Ueber diese Function R handelt auch die, auf Anregung von Ernst Schering entstandene Dissertation von Wilhelm Kind: »Zur Potentialfunction der electromagnetischen Kräfte, mit Anwendung auf Multiplicatoren, deren Stromwindungen rechteckig geformt sind«, Göttingen 1878.]

Die von Gauss bei der Bestimmung einer Abtheilung eines getheilten Maassstabes in Theilen des ganzen Maassstabes angewandte Anordnung der Längen-Comparirungen danken wir der Aufzeichnung, die sich der Herr Geh. Hofrath Weber im Jahre 1839 oder 1840 gemacht hat.

Die über die Beugungserscheinungen angestellten theoretischen Untersuchungen sind wahrscheinlich durch das von F. M. Schwerd im Jahre 1835 herausgegebene diesen Gegenstand betreffende Werk veranlasst. Die beiden für die Wirkung eines leuchtenden Punkts P auf einen Punkt p aufgestellten allgemeinen Formeln sind nicht identisch; die allgemeine Verwandlung solcher Flächen-Integrale, deren Elemente von der Lage der durch einen Punkt des zugehörigen Flächentheilchens ds und durch die Punkte P und p gehenden Ebene nicht abhängen, in solche Curven-Integrale, deren Elemente ebenfalls von der Lage der durch einen Punkt des zugehörigen Theilchens der Begrenzungslinie u und durch die Punkte P und p gehenden Ebene nicht abhängen, deren Differentiale aber eine Aenderung allein des Winkels θ bedeuten, welchen jene Ebene mit einer durch P und p gelegten festen Ebene einschliesst, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\int Q\,d\theta = \int \frac{h.Q.\sin v.du}{rR\sin w} = \int \frac{h}{rR}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}w^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial(R-r)}\cdot\frac{\partial(R+r)}{\partial\varrho}\cdot ds$$
$$-\int \frac{h}{rR}\cdot\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}w^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial(R+r)}\cdot\frac{\partial(R-r)}{\partial\varrho}\cdot ds,$$

die einen speciellen Fall des in der vorhergehenden Bemerkung erwähnten Satzes bildet, wenn nämlich Q eine von R und r allein abhängige mit ihren nach $R+r$ und $R-r$ genommenen partiellen Derivirten für die Punkte der Fläche s stetig veränderliche Grösse bedeutet, ferner w genauer als im Text dahin bestimmt ist, dass es den Winkel zwischen R und r bezeichnet, den die mit den Richtungen des fortschreitenden Lichtstrahls übereinstimmend angenommenen positiven Richtungen jener Linien einschliessen*).

*) [Ferner ist, wie bei Gauss, h = Entfernung des Punktes p von P; r und R = Entfernungen des Punktes p und P von dem Curvenelement du in dem Curven-Integral, von dem Flächenelement ds in dem Flächen-Integral; v = Winkel zwischen du und der Ebene, in der r, R, h liegen; $d\varrho$ = Element der Normale auf ds.]

HANDSCHRIFTLICHER NACHLASS.

XXXXV.

BEWEIS DES DIRICHLETSCHEN SATZES, DASS DURCH JEDE EIGENTLICH PRIMITIVE QUADRATISCHE FORM UNENDLICH VIELE PRIMZAHLEN DARGESTELLT WERDEN.

(1856.)

Ist $A, B, \ldots, E$ ein vollständiges System von Fundamental-Classen der Determinante D, sind resp. $\frac{a}{1}, \frac{a}{b}, \ldots, \frac{a}{e}$ ihre Periodenzahlen, ist $\omega = \frac{2\pi}{a}$ und bezeichnet f irgend eine ungerade Primzahl, die durch eine Form der Determinante D dargestellt werden kann, g eine solche, für welche dies durch keine Form geschehen kann, dann ergiebt sich für ein positives, die Einheit übertreffendes s durch Ausführung der Producte

$$2\prod \frac{1}{1-\frac{1}{g^{2s}}} \cdot \prod \frac{1}{1-2\frac{\cos(\alpha\alpha'+\beta\beta' b+\cdots+\varepsilon\varepsilon' e)\,\omega}{f^s}+\frac{1}{f^{2s}}} =$$

$$= 2\sum \frac{1}{(g'^{l'} g''^{l''} \ldots)^{2s}} \cdot \frac{\cos\{\cdots+(N-M)(\alpha\alpha'+\beta\beta' b+\cdots+\varepsilon\varepsilon' e)+\cdots\}\,\omega}{\ldots(f'^{n'+m'} f''^{n''+m''})^s \ldots},$$

worin sich das erste Multiplicationszeichen auf alle g, das zweite auf alle f bezieht und $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ Zahlen sind, für welche das jedesmalige f durch eine Form der Classe $\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E$ dargestellt wird. Der Nenner jedes Gliedes der Reihe auf der anderen Seite besteht aus partiellen Producten, unter welchen $(f'^{n'+m'} . f''^{n''+m''})^s$ dasjenige bezeichnet, in dem sämmtliche durch eine Form der Classe $\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E$ darstellbaren Primzahlen vorkommen. Der Factor von ω im Argument des Cosinus ist eine Summe von Zahlen, die einzeln den partiellen Producten des Nenners entsprechen, wie z. B.

$$(N-M)(\alpha\alpha'+\beta\beta' b+\cdots+\varepsilon\varepsilon' e)$$

dem zuvor genannten Producte, wobei N für $n'+n''+\cdots$ und M für $m'+m''+\cdots$ gesetzt worden ist. Die Summation $\sum$ erstreckt sich über alle ganzen Zahlen von 0 bis $+\infty$ als Werthe der $l', l'', \ldots, \ldots n', m', n'', m'', \ldots$.

Nach dem zuvor bewiesenen Lehrsatze*) ist der Gesammtnenner (mit Einschluss des $(g^{l''}.g^{nl'''}\ldots)^{2s}$) durch eine Form der Classe

$$\cdots+(N-M)(\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E)+\cdots$$

darstellbar. Wenn diese Classe für verschiedene $\ldots n', m', n'', m'', \ldots$ dieselbe bleibt, so hat auch der Cosinus denselben Werth. Für denselben Nenner tritt dieselbe Classe so oft auf, als sie

$$=\cdots+(N-M)(\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E)+\cdots$$

ist, also nach jenem Satze so oft als derselbe Nenner durch dieselbe Classe zu verschiedenen Wurzeln gehörig dargestellt werden kann. Führt man demnach die Summation in der Reihenfolge aus, dass man zunächst alle Glieder addirt, in welchen die Nenner durch dieselbe Form Φ_φ (oder durch Formen derselben Classe φ angehörig) dargestellt werden, und zwar jedes Glied doppelt so oft als sein Nenner zu verschiedenen Wurzeln gehörig dargestellt werden kann (nämlich für jede Wurzel durch die beiden entgegengesetzten Werthesysteme von x und y); multiplicirt man dann jede Partialreihe (jeder Form Φ_φ angehörig) mit $\cos\omega_\varphi = \cos(\alpha\alpha'+\beta\beta' b+\cdots+\varepsilon\varepsilon' e)\,\omega$, worin $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ so zu nehmen sind, dass $\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E$ die Classe der Φ_φ bedeutet, so erhält man

$$2\prod\frac{1}{1-\frac{1}{g^{2s}}}\cdot\prod\frac{1}{1-2\frac{\cos\omega_f}{f^s}+\frac{1}{f^{2s}}} = \sum\cos\omega_\varphi\sum\frac{1}{(\Phi_\varphi)^s}.$$

Hierin ist $\cos\omega_f = \cos(\alpha\alpha'+\beta\beta' b+\cdots+\varepsilon\varepsilon' e)\,\omega$, $\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E$ die Classe des jedesmaligen f und erstreckt sich die erste Summation $\sum$ über alle positiven Zahlen resp. von 1 bis a, von 1 bis $\frac{a}{b}$, ..., von 1 bis $\frac{a}{e}$ als Werthe der

*) [Bd. I, S. 145, Satz am Schlusse von Art. 7.]

$\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$; nach dem Lehrsatze über die Fundamentalclassen entsteht daher jede eigentlich primitive Classe $\alpha A+\beta B+\cdots+\varepsilon E$ der Determinante D nur einmal, aber es entsteht auch jede dieser Classen.

Setzt man in der letzten Gleichung zur Abkürzung

$$2\prod \frac{1}{1-\frac{1}{g^{2s}}} = G$$

und bezeichnet die rechte Seite mit L, nimmt dann die Logarithmen von beiden Seiten und entwickelt jeden der Logarithmen, welche f enthalten, nach der bekannten Formel

$$-\frac{1}{2}\log(1-2z\cos\alpha+z^2) = \frac{z}{1}\cos\alpha+\frac{z^2}{2}\cos 2\alpha+\cdots,$$

so erhält man

$$\sum\frac{\cos\omega_f}{f^s}+\tfrac{1}{2}\sum\frac{\cos 2\omega_f}{f^{2s}}+\cdots = -\tfrac{1}{2}\log G+\tfrac{1}{2}\log L, \tag{1.}$$

worin sich die Summationen über alle durch die Formen der Determinante D darstellbaren Primzahlen f erstrecken. Diese allgemeine Gleichung enthält wie die frühere $a\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{e}$ besondere Gleichungen, die den verschiedenen Werthen

$$\alpha' = 1, 2, 3, \ldots, a;\quad \beta' = 1, 2, 3, \ldots, \frac{a}{b};\quad \ldots;\quad \varepsilon' = 1, 2, 3, \ldots, \frac{a}{e} \tag{2.}$$

entsprechen.

Nun ist:

$$\begin{aligned}\sum\cos(\alpha\alpha'+\beta\beta' b+\cdots+\varepsilon\varepsilon' e)\,\omega\,.\cos(\alpha_1\alpha'+\beta_1\beta' b+\cdots+\varepsilon_1\varepsilon' e)\,\omega\\ = \tfrac{1}{2}\sum\cos\left\{\alpha'(\alpha_1+\alpha)+\beta'(\beta_1+\beta)b+\cdots+\varepsilon'(\varepsilon_1+\varepsilon)e\right\}\omega\\ +\tfrac{1}{2}\sum\cos\left\{\alpha'(\alpha_1-\alpha)+\beta'(\beta_1-\beta)b+\cdots+\varepsilon'(\varepsilon_1-\varepsilon)e\right\}\omega,\end{aligned}$$

die Summationen ausgedehnt über die Werthe (2.) von $\alpha', \ldots, \varepsilon'$,

$= a\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{e}$, das heisst gleich der Classenzahl h, wenn sowohl sämmtliche $\alpha_1+\alpha, \beta_1+\beta, \ldots, \varepsilon_1+\varepsilon$ als auch $\alpha_1-\alpha, \beta_1-\beta, \ldots, \varepsilon_1-\varepsilon$ resp. durch ihre Periodenzahlen theilbar sind, aber

$= \frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{e} = \frac{1}{2}h$, wenn jene beiden Bedingungen nicht zugleich sondern nur eine derselben stattfindet, und endlich

$= 0$, wenn keine derselben Statt hat. Dies lässt sich auch so aussprechen: es ist

$$\sum \cos\omega_c \,.\, \cos\omega_{c_1} = h, \; = \tfrac{1}{2}h, \; = 0,$$

je nachdem die beiden Classen $C = \alpha A + \beta B + \cdots + \varepsilon E$ und $C_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \cdots + \varepsilon_1 E$ gleiche Anceps-Classen oder gleiche Nichtanceps-Classen oder aber verschiedene Classen sind.

Multiplicirt man also jede der besonderen Gleichungen für $\log L$ mit dem entsprechenden $\cos(\alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' b + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon' e)\,\omega$ und addirt sämmtliche, so erhält man

$$(3.)\qquad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{f^{2s}} + \cdots = \frac{1}{h}\sum \cos\omega_c \,.\, \log L_c.$$

In dieser Formel bezieht sich auf der linken Seite die erste Summation auf Primzahlen f, die durch eine Form der Nichtanceps-Classe $\alpha_1 A + \beta_1 B + \cdots + \varepsilon_1 E$, die zweite Summation auf alle f, die durch $2\alpha_1 A + 2\beta_1 B + \cdots + 2\varepsilon_1 E$ dargestellt werden, u. s. f.; auf der rechten Seite bedeutet L_c denjenigen Werth von L, für welchen $\alpha' A + \beta' B + \cdots + \varepsilon' E$ gleich der Classe C wird, ist ferner $\cos\omega_c = \cos(\alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' b + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon' e)\,\omega$ und erstreckt sich die Summation über das ganze System der Werthe (2.) von $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$.

Für Primzahlen f die durch Formen einer von der Hauptclasse verschiedenen Anceps-Classe $\alpha_1 A + \beta_1 B + \cdots + \varepsilon_1 E$ dargestellt werden, ergiebt sich

$$(4.)\qquad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{f^{2s}} + \cdots + = \frac{1}{2h}\sum \cos\omega_c \log L_c.$$

Für Primzahlen endlich, die durch die Hauptform dargestellt werden, erhält man

$$(5.)\quad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{f^{2s}} + \cdots = -\frac{1}{2}\log G + \frac{1}{2h}\{\log L_0 + \cdots + \log L_c + \log L_{-c} + \cdots + \log L_\chi + \cdots\};$$

hierin bedeutet L_0 denjenigen Werth von L, für welchen $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ resp. gleich $a, \frac{a}{b}, \ldots, \frac{a}{e}$ sind, L_c und L_{-c} zwei Werthe, die zu zwei einander entgegengesetzten aber verschiedenen Classen $C = \alpha' A + \beta' B + \cdots + \varepsilon' E$ und $-C = (a - \alpha')A + \left(\frac{a}{b} - \beta'\right)B + \cdots + \left(\frac{a}{e} - \varepsilon'\right)E$ gehören, und gehört L_χ zu einem Werthesystem von $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$, für welches $\alpha' A + \beta' B + \cdots + \varepsilon' E$ eine Anceps-Classe ist.

Zur Bestimmung des Werthes der Reihe für positive bis gegen die Eins hin abnehmende Werthe von s gebrauchen wir die Kenntniss der Art und Weise, wie die zu Anceps-Classen gehörigen L_χ in die Reihen $\sum\frac{1}{f^s}$ für die durch Formen des Hauptgenus darstellbaren Primzahlen f eingehen, und wollen daher diese hier im Zusammenhange entwickeln.

Eine Primzahl, die durch irgend eine Form dargestellt wird, wird es auch durch die ihr entgegengesetzte; gehört diese nun zur selben Classe, also zu einer Anceps-Classe, so kommt die Primzahl nur in einer der Gleichungen (4.) vor. Gehört aber die entgegengesetzte Form zu einer anderen Classe als die erste Form, so gehören beide zu entgegengesetzten Nichtanceps-Classen, aber diese doch zu demselben Genus. Man erhält daher in $\sum \frac{1}{f^s}$ jede durch eine Form des Hauptgenus darstellbare Primzahl ein und nur ein Mal, wenn man diejenigen Gleichungen (4.) und diejenigen mit $\frac{1}{2}$ multiplicirten Gleichungen (3.), welche sich auf Primzahlen des Hauptgenus beziehen, und noch die Gleichung (5.) addirt. Dabei erscheint jedes L in der Gestalt

$$\frac{1}{2h} \cdot \log L_c \cdot \sum \cos(\alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' b + \cdots + \varepsilon_1 \varepsilon' e)\, \omega,$$

worin C die Classe $\alpha' A + \beta' B + \cdots + \varepsilon' E$ ist und die Summation sich über alle Werthesysteme $\alpha_1 = 1, 2, 3, \ldots, a$; $\beta_1 = 1, 2, 3, \ldots, \frac{a}{b}$; $\ldots$; $\varepsilon_1 = 1, 2, 3, \ldots, \frac{a}{e}$, für welche die Classe $\alpha_1 A + \beta_1 B + \cdots + \varepsilon_1 E$ sich im Hauptgenus befindet, erstreckt. Damit diese letzte Bedingung erfüllt wird, müssen diejenigen von $\alpha_1, \beta_1, \ldots$, für welche $a, \frac{a}{b}, \ldots$ gerade sind, also $A, B, \ldots$ nach dem zweiten Satze über die Fundamental-Classen*) nicht zum Hauptgenus gehören, auch gerade sein. Ist C eine Anceps-Classe, so müssen zufolge desselben Satzes noch $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ resp. durch die Hälften ihrer geraden**) und durch ihre ganzen ungeraden Periodenzahlen $a, \frac{a}{b}, \ldots, \frac{a}{e}$ theilbar sein, also $\cos \omega_c = 1$ und daher $\sum \cos \omega_c$ gleich der Anzahl der Classen im Hauptgenus, das ist gleich $\frac{h}{2^\delta}$ werden. Für eine Nichtanceps-Classe annullirt sich $\sum \cos \omega_c$. Demnach ist

$$(6.)\quad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{f^{2s}} + \cdots = -\frac{1}{2} \log G + \frac{1}{2^{\delta+1}} \{\log L_0 + \cdots + \log L_x + \cdots\},$$

worin sich die erste Summation über jede durch eine Form des Hauptgenus darstellbare Primzahl erstreckt, die zweite über die Primzahlen, die durch die Formen der Classen dargestellt werden, welche aus vierfacher Compo-

*) [Bd. I, S. 147—148.]

**) [Die Anzahl dieser geraden Periodenzahlen ist im Folgenden mit δ bezeichnet.]

sition entstehen können, jede multiplicirt in die Anzahl der im Hauptgenus vorkommenden Classen von der Periodenzahl 2, u. s. f.

Aus den von Dirichlet (Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des Nombres*), § 1 und § 6, II und III) bewiesenen Sätzen:

»Bilden

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \ldots$$

eine unbegrenzte Anzahl positiver, von Null verschiedener, ungleicher oder theilweise einander gleicher Constanten und ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe, welche die positive veränderliche Grösse t nicht übertreffen, gleich

$$ct + t^\gamma . \psi(t),$$

worin c irgend eine positive, γ eine unter der Einheit liegende positive Constante bezeichnet und $\psi(t)$ eine selbst für unendlich wachsende Werthe von t nicht aus bestimmten Grenzen heraustretende Function ist, so wird für positive Werthe von ϱ

$$\frac{1}{l_1^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_2^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_3^{1+\varrho}} + \cdots = \frac{c}{\varrho} + c' + \varrho\varphi(\varrho),$$

wo c dieselbe Constante bezeichnet wie zuvor, c' eine andere und $\varphi(\varrho)$ eine selbst für gegen die Null sich nähernde positive Werthe von ϱ nicht unendlich wachsende Function ist«,

und

»Die Anzahl der den positiven Werth σ nicht übertreffenden Zahlen, die durch irgend eine und dieselbe Form dargestellt werden und zwar jede Zahl doppelt so oft gezählt, als es zu verschiedenen Wurzeln gehörige eigentliche und uneigentliche Darstellungen der Zahl durch jene Form giebt, ist

$$\Delta\sigma + \sigma^\gamma \psi(\sigma),$$

worin Δ eine nur von der Determinante der Form abhängige Grösse bezeichnet, γ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, und $\psi(\sigma)$ eine immer endlich bleibende Function ist«

*) [Dirichlet's Werke, Bd. I, S. 411—496.]

ergiebt sich

$$\sum \frac{1}{(\Phi_\varphi)^{1+\varrho}} = \frac{\Delta}{\varrho} + \Delta' + \varrho\psi(\varrho).$$

Setzt man $s = 1+\varrho$, so wird also

$$L_0 = \frac{\Delta h}{\varrho} + F(\varrho)$$

und jedes andere $L = \Delta_1 + \varrho\psi(\varrho)$, worin $F(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ immer endlich bleibende Functionen von ϱ und Δ_1 eine von ϱ unabhängige Grösse darstellt. Für immer gegen die Null hin abnehmende positive Werthe von ϱ wächst $\log L_0$ über jede positive Grenze hinaus, jedes andere $\log L$ bleibt endlich. Würde Δ_1 zu Null, also ein $\log L_c$ gleich $-\log\frac{1}{\varrho} + \log\psi(\varrho)$, so entstände für eine Nichtanceps-Classe C, da $L_c = L_{-c}$ ist, in der Gleichung (5.) das Glied $-2\log\frac{1}{\varrho} + 2\log\psi(\varrho)$, welches gegen $\log L_0$ so sehr überwiegt, dass, da G einer bestimmten endlichen von Null verschiedenen Grenze sich nähert, die rechte Seite negativ würde, was absurd ist. Dasselbe fände Statt und sogar in noch höherem Masse, wenn für mehr als eine Classe C die Grösse Δ_1 zu Null würde; es kann dies also für keine Nichtanceps-Classe geschehen. Aus demselben Grunde ergiebt sich, dass Δ_1 wenigstens nicht für mehr als eine Anceps-Classe x zu Null werden kann. Da $\sum\frac{1}{f^{2s}}$ für jeden die Einheit übertreffenden Werth von s endlich bleibt, weil f grösser als 1 ist, so folgt aus Gleichung (6.)

$$\sum \frac{1}{f^{1+\varrho}} = \frac{1}{2^{\delta+1}}\log\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2^{\delta+1}}\sum \log L_x + \text{einer endlich bleibenden Grösse,}$$

worin sich die Summation über alle durch Formen des Hauptgenus darstellbaren Primzahlen erstreckt.

Einen anderen Weg, $\sum\frac{1}{f^{1+\varrho}}$ zu bestimmen, bietet Dirichlet's Satz über die arithmetische Progression*). Darnach ist bekanntlich für gegen die Null hin abnehmende positive Werthe von ϱ

$$\sum \frac{1}{q^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varphi(D)}\log\frac{1}{\varrho} + \text{einer endlich bleibenden Grösse,}$$

*) [Dirichlet's Werke. Bd. I, S. 313—342.]

worin sich die Summation über alle in irgend einer und derselben zu D primitiven Linearform $(mD+n)$ enthaltenen Primzahlen q erstreckt und $\varphi(D)$ die Anzahl der relativen Primzahlen zu D angiebt.

Ist die Determinante D durch 8 theilbar und 2^{δ} die Anzahl ihrer Genera, so ist nach Art. 231, I und 261 der *Disquisitiones Arithmeticae* *) die Anzahl der verschiedenen ungeraden Primfactoren in D gleich $\delta-1$; es wird also die Anzahl der quadratischen Reste zu D, die mit D keinen Factor gemeinschaftlich haben, gleich $\frac{\varphi(D)}{4.2^{\delta-1}} = \frac{\varphi(D)}{2^{\delta+1}}$. Dieser Zahl ist aber die Anzahl der Reste gleich, denen die Primzahlen q, für welche qRD und DRq zugleich stattfindet, nach dem Modul D congruent sein müssen.

Wird D durch 4, aber nicht durch 8 getheilt, so ist die Anzahl der verschiedenen ungeraden Primfactoren von D gleich δ und die Anzahl der Reste zu D, so wie die Anzahl der Linearformen der durch Formen des Hauptgenus darstellbaren Primzahlen gleich $\frac{\varphi(D)}{2.2^{\delta}} = \frac{\varphi(D)}{2^{\delta+1}}$. Dasselbe ergiebt sich für die durch 2, aber nicht 4 theilbaren D und für $D \equiv 3 \pmod{4}$.

Für $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist $\delta+1$ die Anzahl der verschiedenen Primdivisoren von D und $\frac{\varphi(D)}{2^{\delta+1}}$ die Anzahl der gesuchten Linearformen.

In jedem Falle ist also $\frac{\varphi(D)}{2^{\delta+1}}$ die Anzahl der Primzahlen, die durch binäre quadratische Formen des Hauptgenus der Determinante D darstellbar sind; daher ist nach dem erwähnten Satze auch

$$\sum \frac{1}{f^{1+\varrho}} = \frac{\varphi(D)}{2^{\delta+1}} \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \log \frac{1}{\varrho} + \text{einer endlich bleibenden Grösse.}$$

Dieses verglichen mit dem zuvor gefundenen Ausdrucke für $\sum \frac{1}{f^{1+\varrho}}$ zeigt, dass $\log L_x$ eine endlich bleibende Grösse ist, w. z. b. w.

Es ergiebt sich daher für die durch Formen einer Nichtancepsclasse darstellbaren Primzahlen f

$$\sum \frac{1}{f^{1+\varrho}} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{\varrho} + \text{einer endlichen Grösse}$$

und für die durch eine Ancepsclasse darstellbaren Primzahlen f

*) [Gauss' Werke, Bd. I, S. 234, 291.]

$$\sum \frac{1}{f^{1+\varrho}} = \frac{1}{2h} \log \frac{1}{\varrho} + \text{einer endlichen Grösse,}$$

und folglich, dass durch jede Form jeder eigentlich primitiven Classe unendlich viele Primzahlen dargestellt werden.

Das ist der Satz, den Lejeune Dirichlet der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 5. März 1840 vorgelesen hat*).

*) [Dirichlet's Werke, Bd. I, S. 497—502.]

XXXXVI.

ZUM GEDÄCHTNISS AN B. RIEMANN*).

Das grosse wissenschaftliche Gebäude der Geometrie, dessen in schon so früher Zeit der menschlichen Cultur gelegter Grund uns durch Euclid in seinen Elementen überbracht ist, sollte nach zweitausendjähriger Arbeit noch eine unerwartete Erweiterung durch die von Gauss entdeckte geometrische Siebenzehntheilung des Kreises erfahren, zu gleicher Zeit aber in den Grundfesten erschüttert werden.

Diese Wissenschaft, die so lange in dem Ansehen gestanden hatte, die sicherste der menschlichen Kenntnisse zu sein und aller Erfahrung entbehren zu können, sie wurde von eben demselben Manne auf ihre richtige Stelle zurückversetzt und als eine Wissenschaft erkannt, die auf einer geringen Zahl von Voraussetzungen sich aufbaut, von Voraussetzungen, die wie bereitwillig sie sich der Erkenntniss als richtig darbieten, immer Annahmen bleiben, selbst wenn wir sie dem Raume anbequemen wollen, welcher die von uns wahrgenommene (Körper) Welt umfasst und der nach den bisherigen feinsten und sorgfältigsten Messungen noch keine Abweichung von denselben erkennen lässt.

---

*) [Diese Rede wurde von Ernst Schering in der öffentlichen Sitzung der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen am 1. Dezember 1866 gehalten (s. Nachr. v. d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1866, S. 339). Die Absicht, die Rede über Gauss und dann die über Riemann in den Göttinger Abhandlungen zu veröffentlichen (s. S. 161 dieses Bandes), ist nicht zur Ausführung gekommen.

Zum Vergleich sei auch auf: »Bernhard Riemann's Lebenslauf« von R. Dedekind in den von H. Weber 1876 (II. Auflage: 1892) herausgegebenen gesammelten mathematischen Werken B. Riemann's hingewiesen.]

Leider hat Gauss diese seine Forschungen nicht selbst der Oeffentlichkeit übergeben, auch diese wie so viele andere seiner Entdeckungen mussten von Neuem gemacht werden. Sie nun gab Veranlassung, dass schon in jugendlichen Jahren sich Riemann als selbsständigen und unabhängigen Denker erweisen konnte.

Aber auch hier waltet derselbe Unstern für diese Wissenschaft, nicht ihm selbst war es vergönnt, seine dort gesammelten Resultate in abgeschlossener Form der Nachwelt zu überlassen. Wenn nun hier die Entdeckung grossen Theils nur eine Wiederholung von Gauss' Arbeiten bleiben musste, so bildete Riemann's übrige Thätigkeit eine sehr glückliche Weiterführung der Grenzen, vorzugsweise des von Gauss in der reinen Analysis schon so weit erschlossenen Gebietes. Der Wunsch Riemann's, die wissenschaftliche Thätigkeit dieses fast in jeder der auf Grössenbegriffen beruhenden menschlichen Erkenntniss reformatorisch wirkenden Geistes darzustellen in ihrer geschichtlichen Entwickelung, ist ihm von der neidischen Zeit so wenig gegönnt worden wie dem Manne, der sich jahrelang mit demselben Gedanken getragen, Dirichlet, der der erste war, welcher die von Gauss in einem anderen Gebiete gemachten Entdeckungen so sehr zu bereichern wusste.

Sollte es auch nun mir vergönnt sein, diese Aufgabe zu vollenden, so will ich doch, bevor ich mit meinen schwachen Kräften an die geschichtliche Untersuchung der gesammten wissenschaftlichen Wirksamkeit jener übermächtigen Grösse mich wage, jetzt erst mit der Darstellung der Entwickelung derjenigen Lehren beginnen, die von Riemann weiter ausgebildet sind, und werde hiebei besonders die Thätigkeit dieses Mannes, dem ich persönlich so nahe gestanden, Ihnen vorzuführen suchen.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, als Predigers Sohn geboren am 17. September 1826 in Breselenz, einem Dorfe (der früher wendischen Elbmarsch) an der Elbgrenze der Lüneburger Heide, erhielt seinen ersten Unterricht vom Vater und zeigte schon damals besonderes Interesse für Lösung von Zahlenaufgaben. In seinem vierzehnten Jahre ging er auf das Lyceum in Hannover, erwarb dort nach Ueberwindung einer Missstimmung, die, durch die Befähigung des Schülers den Lehrer in seinem mathematischen Vortrag berichtigen zu können entstanden war, die besondere Freundschaft dieses Lehrers. Dennoch war es für Riemann sehr günstig, dass er nach zwei

Jahren auf das Johanneum in Lüneburg unter die Leitung des Directors Schmalfuss kam. Dieser beschäftigte ihn nicht nur während der mathematischen Schulunterrichtsstunden mit für ihn besonders gewählten Problemen, sondern gab ihm auch Bücher über Gegenstände der höheren Mathematik zum Selbststudium, die dann immer in unerwartet kurzer Zeit zurückgebracht wurden. So Legendre's Theorie der Zahlen, deren Inhalt er innerhalb einer Woche zu seinem lebenslänglichen Eigenthum machte.

Herr Schmalfuss interessierte sich so lebhaft für ihn, dass er manche jenem sich darbietenden Schwierigkeiten zu beseitigen sich bemühte. Solche ergaben sich aus einem Umstande, der sich auch später in gewissem Grade geltend machte und deshalb hier erwähnt zu werden verdient. Die ungewöhnlich grosse Sorgfalt, die Riemann bei der Aufzeichnung seiner Gedanken übte, die Beseitigung jedes Zweifels an der Richtigkeit seiner Behauptung nach irgend einer Seite hin, die Ueberwindung aller aufzustellenden Bedenken über die Anordnung und Entwickelung seiner Gedanken, nahmen so viel Zeit in Anspruch, dass die von der Schule gesetzten Termine für die Aufsätze nicht innegehalten wurden. Die dadurch eintretenden Uebelstände konnten nicht anders beseitigt werden, als dass einer der Lehrer, Herr Seffer, sich seiner mit persönlicher Aufopferung in der Weise annahm, dass er sich von ihm den Gedankengang mündlich entwickeln liess und die immer von Neuem auftauchenden Zweifel bekämpfen half*).

Herrn Seffer, in dessen Hause Riemann zu jener Zeit wohnte, der auch mein Religionslehrer war, verdanke ich noch diese Bemerkung über seinen Character, an den wir unsern Freund augenblicklich wieder erkennen, er lobt ihn als still, bescheiden und anspruchslos*).

Nachdem so vier Jahre in den beiden obersten Classen des Johanneums zugebracht waren, begab er sich mit den besten Zeugnissen versehen Ostern 1846 auf die Universität Göttingen und liess sich dem Wunsche des Vaters gemäss für Theologie inscribiren. Hier hatte er das Glück Gauss' Vorlesungen zu hören, beschäftigte sich auch vorzugsweise mit dessen Untersuchungen im Gebiete der mathematischen Physik und brachte dadurch dem von Ostern 1847 bis 1849 in Berlin unter Jacobi betriebenen Studium der

*) [Siehe die »Bemerkungen« am Schlusse dieses Bandes.]

elliptischen und Abelschen Functionen einen fruchtbaren Gedanken entgegen. Seiner befreundeten Stellung zu Dirichlet dankt er aus jener Zeit das von diesem in ihm erweckte Interesse für die Fourierschen Reihen und die partiellen Differentialgleichungen.

Das in der bewegten Stadt erlebte politische Jahr 1848 scheint, nach seinen Erzählungen der eigenen Begegnisse, für ihn ausser dem allgemeinen dramatischen Interesse noch ein besonders psychologisches gehabt zu haben durch die Beobachtung des Verhaltens der verschiedenen Charactere gegenüber unerwarteten und erschütternden Ereignissen.

Das besondere Intersse, das sein Vater an der heimathlichen Universität nahm, wurde für ihn Veranlassung Ostern 1849 wieder nach Göttingen zu gehen. Hier beschäftigten ihn nun neben der Ausarbeitung seiner Doctor-Dissertation auch sehr psychologische, metaphysische und pädagogische Studien, die letzteren unter Leitung von Carl Friedrich Hermann.

Riemann's erste Schrift bildet den Vereinigungs-Punkt zweier Disciplinen der Mathematik, die bis dahin einander ganz fremd jede für sich ihrer Ausbildung entgegengewachsen waren. Die eine nimmt ihren Ursprung in den drei Gesetzen, die Kepler aus Tycho de Brahe's und seinen eigenen Beobachtungen der Planeten nach einer Methode abgeleitet hat, die für alle exacten Forschungen mustergültig bleibt. Diese drei Gesetze mit den von Galilei für die Fallbewegungen aufgestellten, vereinigte Newton zu einem allgemeineren auf sämmtliche ponderable Körper sich beziehenden Gesetze. Die hiebei durch feste Begriffsbestimmungen eingeführten Maasse der Kräfte wurden dann von Lagrange nach seinen allgemeinen analytischen Methoden aus der Veränderung einer für jeden Punkt des Raumes gegebenen Grösse, welche später Gauss die Potentialfunction genannt hat, abgeleitet, und dadurch die Probleme der Mechanik des Himmels, welche sich auf die gegenseitige Einwirkung der Himmelskörper beziehen, in eine so allgemeine übersichtliche Form gebracht, dass sich damit die Entdeckungen vorbereiteten, durch welche Laplace sich der Astronomie unvergesslich gemacht hat. Aber auch für die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Potentialfunction that derselbe Geometer noch einen wichtigen Schritt, er fand die Bedingungsgleichung, welcher die zweiten Abgeleiteten der Function an jedem von ponderabler Masse nicht erfüllten Raumtheile genügen, und erschloss sich damit die für ihn schon so fruchtbare Quelle zu den analytischen Ausdrücken, die wir seit Gauss mit dem Namen Kugelfunctionen bezeichnen. Die verallgemeinerte Form der Laplaceschen Gleichung, in welcher sie sich so wohl auf leere als mit Masse erfüllte Raumtheile bezieht, stellte Poisson auf und schaffte damit das Hülfsmittel zur Lösung mehrerer wichtigen Probleme der mathematischen Physik, insbesondere der Lehre von der statischen Electricität. Eine ganz besondere Bedeutung gewannen die Eigenschaften der Potentialfunction unter Gauss' Händen, den zu ihrem Studium wohl vorzugsweise seine magnetischen Untersuchungen veranlassten. Nicht nur vervollständigte er die Beweise der schon bekannten Lehrsätze, sondern fügte eine Reihe neuer und sehr allgemeiner Sätze hinzu. Ein häufig benutztes Hülfsmittel gewährte ein ihm eigenthümliches, schon früher bei Gelegenheit der Bestimmung der Anziehung der Ellipsoide zur Ableitung einiger allgemeiner geometrischen Hülfssätze angewandtes, Verfahren der Transformation der über Raumtheile auszudehnenden Integrale. Für die Weiterbildung dieses Zweiges der Mathematik ist die Methode fruchtbringend gewesen, durch welche der auf den Zweck der von Gauss veröffentlichten Abhandlung sich beziehende Hauptlehrsatz bewiesen wird, dass die ausserhalb irgend eines überall einfach zusammenhängenden Raumtheils beliebig gegebenen Massen in Hinsicht ihrer Wirkung auf einen Punkt jenes Raumes durch eine Massenvertheilung an dessen Grenzfläche ersetzt werden kann, und dass diese nur dann, und zwar auch nur in ihrer Gesammtmenge, noch nicht vollständig bestimmt ist, wenn das Raumgebiet die wirkende Masse nicht ganz umgiebt.

Diese hier zum ersten Male in der Wissenschaft auftretende Methode erregte Dirichlet's Interesse so sehr, dass er derselben eine rein analytische Form gab und dem entsprechend als Hauptsatz aufstellte: die vollständige Bestimmung einer Potentialfunktion in einem Raumtheil durch ihre Werthe an der Grenzfläche. Das wesentliche Moment in dem Beweise des Satzes ist die Zurückführung der Bedingung, dass eine Function einer gewissen Art von Differentialgleichungen genügen soll, auf die Bedingung, dass entsprechende Integrale Minimalwerthe annehmen, ein Princip, das bei den Untersuchungen der mathematischen Physik sich zuerst dargeboten, aber in mehreren Disciplinen der Mathematik von solcher fruchtbringenden Bedeutung werden sollte, dass Riemann ihm einen besonderen Namen, nämlich den des Dirichletschen Princips gegeben hat.

Inzwischen war nun auch die reine Analysis zu einem Punkte vorgeschritten, dass sie davon Gebrauch machen konnte. Nachdem für die Elliptischen Integrale durch Euler der Fundamentalsatz, das Additionstheorem, gefunden war und Legendre darauf ein weitschichtiges Gebäude gegründet hatte, wandte sich Gauss diesem Gebiete zu, untersuchte zuerst die inversen Functionen jener Integrale und zwar zunächst die lemniscatischen Sinus und Cosinus. Nach den unter seinen Handschriften enthaltenen Rechnungen scheint er sogleich das Wesen dieser Functionen in den besonderen Werthen, die sie für bestimmte, sogenannte imaginäre Werthe ihrer Argumente annehmen, erkannt zu haben. Die Bedeutung dieser Entdeckung wurde ihm bald so einleuchtend, dass er den Tag derselben, den 8. Januar 1797, sich aufzeichnete; da er sie aber für sich behielt, ward sie der Wissenschaft nur indirect nützlich. Durch diesen Fall nämlich auf die Wichtigkeit der imaginären Grössen aufmerksam gemacht, wandte er dieselben auch in anderen Gebieten an und noch im October desselben Jahres mit Erfolg auf die algebraischen rationalen Functionen und fand den in seiner Doctordissertation veröffentlichten, ersten strengen Beweis für die Zerlegbarbeit derselben in lineare Factoren. Wenige Jahre später führte er die imaginären Grössen in die Zahlentheorie ein und zeigte, dass nur sie die Hülfsmittel darbieten, welche eine Theorie der cubischen, biquadratischen und höheren Potenzreste ermöglichen. Auf eine vierte Anwendung wurde Gauss durch die bei seiner practischen Beschäftigung mit der Gradmessung sich darbietenden Aufgabe geführt: eine gegebene Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen Statt findet.

Da Gauss (wie schon bemerkt) seine Entdeckungen über die Elliptischen Functionen nicht veröffentlicht hatte, so mussten sie von Neuem gemacht werden; dies gelang ein viertel Jahrhundert später sowohl Abel als Jacobi, beide führten die Theorie der Integrale algebraischer Functionen so weit, dass auch noch einige Sätze über höhere Integrale als die elliptischen gefunden wurden. Insbesondere gelang es Jacobi's Schülern, Rosenhain

---

*) [Siehe Gauss' Werke, Bd. III, S. 493.]

und Goepel nach seinen Methoden durch Erweiterung der von Jacobi zuerst veröffentlichten und auf Dirichlet's Vorschlag nach ihm benannten einfachen Reihen zu zweifachen Reihen auch noch die Theorie der über den Elliptischen Functionen zunächst stehenden vierfach periodischen Functionen zu erledigen.

Die Beweise der schon zuvor geahnten Gesetze beruhten auf so ausgedehnten Entwickelungen, dass sich das Bedürfniss neuer Beweismethoden geltend machte. Diese aufzufinden ist Riemann's Lebensaufgabe gewesen. Er wandte die imaginären Grössen in einer neuen Art an und bemerkte alsbald, dass die eben erwähnten Functionen, wenn man ihre Argumente aus reellen und imaginären Grössen zusammengesetzte veränderliche Werthe annehmen lässt, sich, allgemein zu reden, in eingegrenzten Gebieten stetig und eindeutig ändern. Auf die Untersuchung der allgemeinen Functionen, welche diese Eigenschaft haben, wandte er nun seine ganze Mühe. Der Umstand, dass der reelle sowohl wie der imaginäre Theil des Werthes der Function als abhängig betrachtet von dem reellen Theil und dem Factor des imaginären Theils des Arguments veränderliche Grössen sind, die einer speziellen Form der Laplaceschen Differentialgleichung für die Potentialfunction genügen, bietet die Möglichkeit dar, die von Gauss und Dirichlet im Gebiete der mathematischen Physik gefundenen Methoden auch hier anzuwenden. Dabei macht sich ein Mangel unsrer Sprache fühlbar, den ich hier nicht unerwähnt lassen kann. Bis zur Zeit hat die menschliche Erkenntniss ausser bei dem Raume und in unvollständigerer Weise etwa bei den Farben niemals Veranlassung gehabt, sich mit Begriffsbestimmungen zu beschäftigen, die sich auf zwei- oder mehrfach ausgedehnte Gebiete beziehen. Treten uns also Untersuchungen entgegen, bei denen wir die Bestimmungen in zwei- oder dreifach ausgedehnten Gebieten nothwendig auszuführen haben, so bleibt uns bis jetzt nichts anderes übrig als die für den Raum üblichen Ausdrucksweisen zu benutzen, wodurch unter anderen häufig der Nachtheil entsteht, dass die Darstellung des Gedankenganges formell an Allgemeinheit einbüsst.

Die von Gauss so vielfach angewandte Betrachtungsweise der complexen Grössen, indem er sie auf eine bestimmte Art durch Punkte einer Euclidischen Ebene darstellt, bietet nicht nur den Vortheil, dass sich eine grosse Zahl von Beziehungen zwischen ebenen Gebilden in sehr durchsichtigen analytischen Formen darstellen lässt, sondern verschafft uns auch durch das sich darauf gründende Verfahren der in den kleinsten Theilen ähnlichen Abbildung zweier Ebenen auf einander ein anschauliches Hülfsmittel, um die das Gesetz der Abbildung bestimmende Function in ihren allgemeinen Eigenschaften zu untersuchen. Schon bei algebraischen Functionen wird es erforderlich nicht nur die Bestimmung der Punkte der einen Ebene im Auge zu haben, die je einem Punkte der anderen Ebene entsprechen, sondern auch und vorzugsweise in Betracht zu ziehen den Zusammenhang zwischen den einzelnen Werthesystemen. Um nun dies anschaulich zu machen, denkt Riemann sich die zu übertragende Ebene, in welcher die Werthe der Funktion sind, als dehnbare mehrfach wiederholte unendlich dünne Scheibe, deren Theile so verschoben und dabei, wenn erforderlich, an gewissen Stellen von einander getrennt und in einer neuen Anordnung wieder verbunden werden, dass nach geeigneter Orientierung dies Gebilde in der Weise auf die andere Ebene gelegt werden kann, dass über jedem Punkte dieser Ebene alle die Punkte zu liegen kommen, welche in dem Gebilde aus den jenem Punkte entsprechenden Punkten der anderen Ebene hervorgegangen sind. Die Gestalt dieser ebenen Flächen bestimmt die wesentlichen Eigenschaften der Function; ihre Untersuchung und insbesondere die der Art ihres Zusammenhanges und der daraus sich ergebenden Zerschneidung in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück musste Riemann ausführen, bevor er von dem Dirichletschen Principe eine Anwendung auf die allgemeinen Functionen complex veränderlicher Grössen machen konnte. Die Bestimmung einer Function innerhalb eines Gebietes durch die Werthe ihres positiven Theils hängt dann nur noch von den Unstetigkeitsstellen ab, und bei der Ueberwindung der dadurch entstehenden Schwierigkeiten zeigte sich der ganze Werth von Riemann's Sorgfalt und Bedenklichkeit, denn nicht gering war für ihn die Mühe überall den richtigen Ausdruck für diese complicirten Verhältnisse zu wählen. Ueber diese Arbeit, die er als Doctordissertation der hiesigen philosophischen Facultät eingereicht hat, spricht sich auch Gauss in voller Werthschätzung aus, auch unmittelbar ihm selbst gegenüber, wie aus der folgenden Stelle eines Briefes an den Bruder hervorgeht: »Als ich »bei Gauss war, hatte er meine Abhandlung noch nicht gelesen, sagte mir »aber, dass er seit Jahren eine Schrift vorbereite (und gerade jetzt damit be-

»schäftigt sei), deren Gegenstand derselbe oder doch zum Theil derselbe sei, »wie der von mir behandelte. Er hatte auch wirklich schon in seiner Doctor- »dissertation vor nun 52 Jahren die Absicht angedeutet über diesen Gegen- »stand zu schreiben.« So weit Riemann. Aus Gauss' handschriftlichem Nachlass hatte ich, schon bevor mir diese Aeusserung bekannt war, ersehen, dass er die in der Abhandlung über die Potentialfunctionen in physikalischer Ausdrucksweise dargestellten Methoden auf rein analytischem Wege gefunden und dabei auch die Anwendung auf Functionen complexer Veränderlichen angedeutet hat. Der Fall, dass ein Mann, wie Gauss über eine solche Arbeit als Promotionsschrift zu urtheilen hat, ist ein so seltener, dass die Worte hier wohl einen Platz verdienen: »Die von Herrn Riemann einge- »reichte Schrift legt ein bündiges Zeugniss ab von den gründlichen und tief »eindringenden Studien des Verfassers in demjenigen Gebiete, welchem der »darin behandelte Gegenstand angehört, von einem strebsamen, ächt mathe- »matischen Forschungsgeiste und von einer rühmlichen productiven Selb- »ständigkeit. Der Vortrag ist umsichtig und concis, theilweise selbst elegant: »der grösste Theil der Leser möchte indess wohl in einigen Theilen noch »eine grössere Durchsichtigkeit der Anordnung wünschen. Das Ganze ist »eine gediegene, werthvolle Arbeit, das Maass der Anforderungen, welche »man gewöhnlich an Probeschriften zur Erlangung der Doctorwürde stellt, »nicht bloss erfüllend, sondern weit überragend«. — Man sieht, es ist das eine aufrichtige vollständige Würdigung, nicht etwa beeinflusst durch die angenehme Vorstellung, welche beim Lesen einer guten Arbeit in der Erinnerung der eigenen Production des grösseren Geistes hervorgerufen wird.

Auch durch seine zunächst folgenden Untersuchungen sollte Riemann in eine nähere Beziehung zu Gauss treten. Schon im ersten Studiensemester hatte er sich mit den Fragen über die Bedeutung der Euklidischen Grundsätze der Geometrie beschäftigt, wohl auf Anregung der von Gauss in seinen Abhandlungen über biquadratische Reste gegebenen Darlegung der Begriffsbestimmungen, welche den allgemeinen mehrfach ausgedehnten Gebieten angehören. Selbst auf die Richtung der späteren Studien scheint der dort mit eingefügte Ausspruch nicht ohne Einfluss gewesen zu sein: »Der Unterschied »zwischen rechts und links ist, so bald man vorwärts und rückwärts in »der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der

»Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn »wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes anderen nur durch Nach»weisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können. »Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie »dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, »dass der Raum nur Form unserer äusseren Anschauung sei, zu finden glauben »konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig »von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset«*).

Hieraus schon geht Gauss' Stellung gegenüber der bis dahin gebräuchlichen Ansicht von den Grundsätzen der Geometrie hervor, um so klarer, wenn man noch beachtet, dass durch Kant der Satz, dass wir die Dinge an sich nicht zu erkennen vermögen, seine bleibende Bedeutung errungen hatte. Sehr eingehend hat Gauss sich auch mit dem Studium eines solchen Raumes beschäftigt, für welchen die Euklidischen Grundsätze alle bis auf den berühmten elften erfüllt sind. Ist der uns umgebende Raum wirklich ein solcher, so werden wir, nach unseren bisherigen Erfahrungen bei optischen Beobachtungen zu urtheilen, doch erst dann uns Aussicht machen können, eine positive Bestätigung dafür zu finden, wenn unser Planetensystem solche Wegstrecken im Weltraume zurückgelegt hat, die mit den uns bekannten Entfernungen der Fixsterne vergleichbar sind. Das wird der Grund gewesen sein, weshalb Gauss die von ihm ausgebildete Lehre Astralgeometrie genannt hat**). Veröffentlicht sind von diesen Untersuchungen nur der Inhalt der Disquisitiones generales circa superficies curvas. Dort wird zuerst der Begriff des Krümmungsmaasses der Flächen in die Wissenschaft eingeführt und dann der wichtige Satz aufgestellt, durch den man dasselbe bestimmen kann, ohne über den umgebenden Raum eine andere Voraussetzung zu machen, als dass er überall stetig ist und einfach zusammenhängt. Der Satz ist die Grundlage geworden für die Entwickelungen, welche Riemann in seiner Probevorlesung zur Erwerbung der *venia legendi* der philosophischen Facultät in Gauss' Gegenwart vorgetragen hat. Er stellt zuerst die Begriffe der mehrfach ausgedehnten Grössengebiete fest, zeigt dann in welcher

*) [Siehe Gauss' Werke, Bd. II, S. 177.]

**) [Gauss schrieb am 28. November 1846 an Schumacher (s. Briefwechsel, Bd. V, S. 247), dass Schweikart die nicht-euklidische Geometrie Astralgeometrie nannte.]

Weise die Abweichung der Beschaffenheit eines solchen allgemeinen Raumes von einem ebenen Raume durch die Krümmungen der nach verschiedenen Richtungen gelegenen Flächen bestimmt wird. Besonders hebt er noch hervor, wie unsere empirische Kenntniss des die Körperwelt enthaltenden Raumes durchaus keine Schlussfolgerungen gestattet auf Verhältnisse, die erst merklich werden für unmessbar grosse und unmessbar kleine geometrische Gebilde, und macht dabei auf die Verschiedenheit der Begriffe der Unbegrenztheit und der Unendlichkeit aufmerksam. Die durch unsere Nichtkenntniss des unmessbar Kleinen offen gelassene Frage nach der stetigen oder discreten Construction des Raumes wird angedeutet und ebenso der Einfluss, den dieselbe auf unsere durch Newton's Naturphilosophie begründeten Anschauungen von Naturgesetzen ausüben muss. Mit den betreffenden Problemen hat Riemann sich auch eingehend beschäftigt und mir seine Resultate mitgetheilt. Zunächst eliminirt er aus allen Gesetzen für Wechselwirkungen diejenigen Bestimmungsweisen, die sich auf Distanzwirkungen beziehen, weil solche immer abhängig von der Beschaffenheit des umgebenden Raumes sind und deshalb ein darin ausgesprochenes Gesetz schon die nicht mit ausgesprochene Raumconstruction involviret. Für die Wirkung der Massen, der freien Electricität und der geschlossenen galvanischen Ströme erreicht er die nöthige Transformation der bekannten Gesetze, indem er die Kräfte als den physischen Ausdruck gewisser Bewegungsformeln eines den dreifach ausgedehnten Raum im Allgemeinen gleichmässig erfüllenden Mediums betrachtet. Die Punkte des Raumes, an welchen sich die wirkenden Körper befinden, werden dabei als unendlich verdichtete Stellen des Mediums betrachtet oder anschaulicher als Orte, an welchen das Medium aus dem bestimmten dreifach ausgedehnten Raum in den ihn überall umgebenden mehrfach ausgedehnten Raum austritt. Das hierbei angewandte analytische Hülfsmittel kann man nach der jetzt üblichen Bezeichnungsweise als die Pfaffsche Transformation des Ausdrucks der virtuellen Momente der Kräfte bezeichnen. Die Wechselwirkung zwischen ponderablen unvollkommen leitenden Körpern und zwischen der in sie eindringenden Electricität, zu deren Erforschung er durch die neuen Beobachtungen von Kohlrausch veranlasst wurde, führte er, indem er sich der Franklinschen Hypothese anschloss, auf das Bestreben der Körper zurück, in einem bestimmten electrischen Zustande zu verharren.

Die aus diesem Princip abgeleiteten Folgerungen sind theilweise in der Göttinger Naturforscher-Versammlung vom Jahre 1854 vorgetragen und in deren Bericht veröffentlicht. — Die durch das Webersche Fundamentalgesetz ermöglichte Zurückführung der Wirkungen galvanischer Ströme auf Wechselwirkungen bewegter electrischer Theilchen erreicht Riemann durch Annahme einer allmähligen Verbreitung der von einem Punkte ausgehenden Kräfte, indem er zeigt, dass so weit Beobachtungen jetzt reichen, alle Erscheinungen genügend genau erklärt werden. Eine Ausarbeitung der Untersuchung hat er der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingereicht, aber später seine Befriedigung geäussert, dass sie damals nicht gedruckt sei, weil er inzwischen eine Präcisirung seines Gesetzes gefunden, in Folge dessen es gewissen allgemeinen Principien wie die übrigen Fundamental-Gesetze für Kräfte genügt. Die von Cauchy zuletzt bearbeitete Theorie der die Lichterscheinungen darstellende Bewegung des Aethers hat er auf die Minimalbedingung des Werthes eines bestimmten Integrals basirt. Durch Hinzufügung einiger einfachen Glieder zu der in diesem Integral vorkommenden Function giebt er ihm eine solche Gestalt, dass die Minimalbedingung die Gesetze aller der zuvor genannten Kräfte mit umfasst, und zwar in einer Form, die derjenigen des Gaussischen Princips des kleinsten Zwanges analog ist.

Während der Zeit dieser Untersuchungen beschäftigte sich Riemann noch mit einem davon sehr verschiedenen Gegenstande, nämlich der Frage nach der Darstellbarkeit einer Function durch eine Fourier'sche Reihe und benutzte die Arbeit als Probeschrift für die Habilitation. Er widmet der betreffenden Literatur ein eingehendes Studium und bespricht die verschiedenen Beweismethoden mit sorgfältiger Kritik. Der neue Gesichtspunkt ist hier eine Erweiterung des Begriffs des Integrals, so dass er z. B. das Integral von einer solchen Function aufstellt, welche in jedem noch so kleinen Intervall ihres Arguments unendlich oft unstetig wird. Zur Erläuterung stellt er durch sehr einfache Hülfsmittel eine specielle derartige bis dahin noch nirgends betrachtete Function auf, die für jeden rationalen Werth des Arguments einen endlichen Sprung macht. Die durch eine Fouriersche Reihe gegebene Function wird nun nicht nach ihren eigenen Eigenschaften untersucht, sondern nach der viel einfacheren Beschaffenheit einer mit ihr im bestimmten

Zusammenhange stehenden Function, die, wenn das zweite Integral der ursprünglichen Function existirt, damit gleichbedeutend sein würde. Der Gegenstand hatte für Riemann deshalb besonderes Interesse, weil diese Reihen von Dirichlet mit so vielem Glücke bei Beweisen von zahlentheoretischen Sätzen benutzt waren, die in der Lehre der ganzen Zahlen vorkommenden Funktionen aber so hohe Ansprüche an die Zulässigkeit von Unstetigkeiten machen, dass man auf Functionen gefasst sein muss, die noch grössere Complicationen darbieten als die schon angewandten, welche innerhalb endlicher Grenzen unendlich viele Maxima und Minima haben. In der That hat Riemann auf dem Gebiete der Zahlentheorie durch Anwendung seiner allgemeinen analytischen Methoden Früchte geerntet, freilich ohne dabei die von ihm erwiesene Erweiterung der Anwendbarkeit jener Reihen zu bedürfen. Seine Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse durch analytische Functionen beruht darauf, dass Reihen von Potenzen rationaler Zahlen als Functionen des complex veränderlichen Exponenten betrachtet werden, und da die Reihen aufhören summirbar zu sein, wenn der Exponent gewisse Grenzen überschreitet, so kam es darauf an, Ausdrücke für dieselbe Function aufzustellen, die auch bei den anderen Werthen des Exponenten eine Bedeutung behalten.

Inzwischen hatte Riemann aber schon (im Jahre 1857) die sich selbst gestellte Hauptaufgabe gelöst, nämlich die Erforschung der Abelschen Functionen. Nichts ist geeigneter, sich die ganze Bedeutung dieser Entdeckungen zu vergegenwärtigen, als die Worte zu wiederholen, mit denen Dirichlet in seiner Gedächtnissrede auf Jacobi das bespricht, um was es sich hier handelt, und zwar bevor die Entdeckungen gemacht waren im Jahre 1852.

Dirichlet erwähnt die Bewunderung, welche Abel durch Aufstellung des nach ihm benannten Theorems hervorgerufen hat, und fügt hinzu:*)

»Jacobi bezeichnet denselben Satz, »»wie er in einfacher Gestalt und »ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen »Gedanken ausspreche, als die grösste mathematische Entdeckung unserer »Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grosse Arbeit ihre ganze »Bedeutung aufweisen könne.««

*) [Siehe Abhandl. d. Kön. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1852 und Jacobi's Gesammelte Werke, Bd. I, S. 15, Berlin 1881.]

»Diese Arbeit hat bereits begonnen und Jacobi selbst hat daran den »wesentlichsten Antheil gehabt.

»Der nahe liegende Versuch, die umgekehrten Functionen der Abelschen »Integrale auf dieselbe Weise, wie es bei den elliptischen mit so grossem »Erfolge geschehen war, in die Analysis einzuführen, erwies sich bald als »unausführbar und verwickelte in unauflöslichen Widerspruch, denn Jacobi »erkannte sogleich, dass diese umgekehrten Functionen vier- oder mehrfach »periodisch sein müssten, während doch eine analytische Function, wenn sie »wie die elliptischen und Kreisfunctionen einwerthig und, wo sie nicht un»endlich wird, stetig sein soll, nur zwei Perioden zulässt. Es bedurfte also »hier eines neuen verborgenen Gedankens, wenn das Abelsche Theorem nicht »unfruchtbar bleiben, wenn es die Basis einer grossen analytischen Theorie »werden sollte.

»Nachdem Jacobi mehrere Jahre hindurch den Gegenstand nach allen »Seiten erwogen hatte, fand er endlich die Lösung des Räthsels darin, dass »hier gleichzeitig vier oder mehr Integrale zu betrachten, und aus ihnen »durch Umkehrung zwei oder mehr Functionen von eben so vielen Argu»menten zu bilden sind. Diese Divination machte er in einer Abhandlung »von 10 Seiten bekannt, der zwei Jahre später eine umfangreichere folgte, »in welcher die analytische Natur dieser umgekehrten Functionen im hellsten »Lichte erscheint.

»Gehört auch die später gefundene Darstellung dieser Functionen nicht »Jacobi, sondern zwei jüngeren Mathematikern von ungewöhnlichem Talente, »so muss ich doch auch dieses wichtigen Fortschrittes hier insofern erwähnen, »als Jacobi's Einfluss unverkennbar darin hervortritt. Goepel und Rosen»hain haben beide Jacobi's (später durch seine Vorlesungen bekannt ge»wordene) Behandlungsweise der Theorie der elliptischen Functionen zum »Vorbilde nehmend, ihren schönen Arbeiten die Betrachtung von unendlichen »Reihen zu Grunde gelegt, deren Bildungsgesetz allgemeiner aber von der»selben Art wie das der Reihe ist, durch welche die Jacobische Function »ausgedrückt wird.«

Dirichlet führt hier die Geschichtserzählung bis zu den Arbeiten von Goepel und Rosenhain. Die von ihnen angewandten Methoden haben wir schon zuvor besprochen und erwähnt, dass sich ihre Untersuchungen auf die zweifach unendlichen Reihen beziehen. Hienach fällt die Veröffentlichung von Riemann's Doctordissertation und es sollte ihm selbst vorbehalten bleiben, von seinen neuen Methoden die ersten wichtigen Anwendungen zu machen. Wenn auch inzwischen diejenigen Abelschen Functionen, die den allgemein zweiwerthigen Integralen algebraischer Functionen entsprechen, vollständig explicite dargestellt wurden, so betrat doch der Entdecker, Herr Weierstrass, noch einen eigenen Weg und nahm seinen Ausgangspunkt von einer Bemerkung Abel's, die durch dessen Brief an Legendre bekannt geworden ist und sich auf eine gewisse Darstellungsform der elliptischen Transcendenten bezieht, welche auch Gauss neben seinen anderen Methoden angewandt hat. Herr Weierstrass stützt seine Beweise auf die Möglichkeit der Entwickelung der Functionen in Reihen, die nach Potenzen der Unterschiede des Arguments von bestimmten Grössen fortschreiten, und auf die Verschiedenheit der Formen der Reihen bei verschiedenen Werthen der angewandten bestimmten Grössen. Riemann's Methode umfasst nun nicht nur den ganzen allgemeinen Fall mit derselben Uebersichtlichkeit wie alle bis dahin betrachteten speciellen Fälle, sondern bedarf auch fast gar keiner Rechnung mit Formeln, und ist fast nur eine Entwickelung der Gedanken.

— — —

Gauss' hypergeometrische Reihe. 1857. —

Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coëfficienten. —

Ringfunctionen. —

Zweifache Kugelfunctionen. —

Linsenfunctionen. —

Lamé's Ellipsoidfunctionen. —

Theorie der Nobilischen Ringe. 1855. —

Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. 1860. —

Helmholtz. —

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. —*)

— — —

*) [Aus dem vorhandenen Manuscript ist nicht mehr zu ersehen, ob in der Rede über alle die hier angedeuteten Arbeiten Riemann's gesprochen ist.]

Dirichlet's Theorie der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids war durch seinen Tod unvollständig geblieben. Besonderes Gewicht hatte er in seiner mündlichen Besprechung darauf gelegt, dass er selbständig die drei sehr allgemeinen hydrodynamischen Integrale gefunden habe, welche inzwischen durch Herrn Helmholtz' feine Untersuchungen über die Wirbelbewegung der Flüssigkeiten bekannt wurden, und denen Riemann den sehr angemessenen Namen des Helmholtzschen Princips der Erhaltung der Rotation gegeben hat. Die Andeutung dieser Entdeckung ist in der Berichtigung eines von Lagrange begangenen und darnach in allen Lehrbüchern der Mechanik fortgepflanzten Irrthums niedergelegt, in seiner Vorlesung über partielle Differentialgleichungen aber mit den übrigen Untersuchungen, die sich vorzugsweise auf ein specielles Beispiel beziehen, nicht mit behandelt, wegen der dazu erforderlichen etwas umständlichen Entwickelung. Riemann hat dies Problem von neuem aufgenommen und die Ordnung der noch zur Lösung übrig bleibenden Differentialgleichung um mehrere Einheiten erniedrigt, auch die Integration für eine Reihe specieller Fälle vollständig erledigt und dadurch auch seine Fruchtbarkeit in den auf analytischen Entwickelungen beruhenden Untersuchungen in glänzender Weise an den Tag gelegt.

Noch in den letzten Tagen der ihm gegönnten allzu kurzen Lebensfrist hat ihn ein hiermit scheinbar in geringem Zusammenhange stehendes Problem beschäftigt, die Mechanik des Ohres. Angeregt durch das Studium des classischen Werkes von Helmholtz über Tonempfindungen bemühte er sich, das darin noch unerledigt gelassene mathematische Problem dieses bis jetzt noch räthselvollen Sinnesorgans zu bewältigen. Die Hauptschwierigkeit bestand für ihn in der geringen Kenntniss der anatomischen Verhältnisse, mit aufopfernder Hülfsleistung haben aber die Herren Ober-Medicinalrath Henle und Professor Krause ihn mit dem betreffenden Zweige der Anatomie bekannt zu machen sich bemüht.

Aufgezeichnet hat er zunächst einige Bemerkungen über die bei solchen Untersuchungen anzuwendenden Methoden, wobei er es als besonders wichtig betrachtet, dass von einer bestimmten möglich einfachen Hypothese ausgehend alle Folgerungen derselben gezogen und dann mit Beobachtungen der Natur verglichen werden, eine Operation, die man in gewissem Sinne ein Nacherfinden des von der Natur construirten Mechanismus nennen kann.

In Bezug auf den Gegenstand selbst hat er nur die für sein Problem wichtigen Momente an den Muskeln und Knöchelchen der Paukenhöhle hervorgehoben, und hieraus so wie aus den Aeusserungen über die physikalische Beschaffenheit der Weichtheile, welche die beiden Treppen in der Gehörschnecke trennen, wird man schliessen dürfen, dass er die zu lösende Aufgabe als eine wesentlich der Hydraulik angehörende betrachtet hat*).

Somit glaube ich die Hauptpunkte der mir bekannt gewordenen Arbeiten berührt zu haben, und hier noch auf den bedeutenden Umfang der oben besprochenen und im handschriftlichen Nachlass wohl geordnet sich vorfindenden Abhandlungen aufmerksam machen zu müssen. Zu diesen kommt noch eine Untersuchung aus der Theorie der krummen Flächen hinzu, von welcher er die Formeln selbst aufgeschrieben und mit mündlichen Bemerkungen erläutert hat. Wir können es demnach eine sehr glückliche Idee nennen, die Herr Geheimer Hofrath Weber, der für Riemann stets in väterlicher Freundschaft besorgt gewesen, ausgesprochen hat, nämlich dessen Schriften in einer Gesammtausgabe zu vereinigen.

Solche würde auch noch deshalb von Bedeutung sein, weil für Riemann's wissenschaftliche Richtung, besonders auch die vollkommene Strenge und Evidenz der Methoden und Beweise, durch die er seine Resultate begründet, charakteristisch ist, eine Eigenschaft, welche, wie Herr Kummer bemerkt**), »zwar nur einer im Wesen der Mathematik selbst liegenden Forderung entspricht, aber dessen ungeachtet auch bei den grössten Mathematikern nur selten in vollkommener Reinheit gefunden wird, welche namentlich in dem Gebiete der Analysis erst durch Gauss zur Geltung gekommen, und seitdem noch so wenig Allgemeingut geworden ist, dass selbst Jacobi's Schriften an gewissen Stellen den Mangel derselben zeigen, den dieser auch offen eingestand«.

Vergegenwärtigt man sich, dass ihn seit dem Beginn der Universitätsstudien . . . .***).

*) [Siehe die »Bemerkungen« am Schlusse dieses Bandes.]

**) [Siehe Abhandl. d. Kön. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1860 und Dirichlet's Werke, Band II, S. 342, Berlin 1897.]

***) [Im Manuscript folgt dann der in diesem Bande von S. 166 Z. 17 von oben bis zum Schluss auf S. 168 abgedruckte Text, der deshalb hier fortgelassen werden kann.]

[Mitteilungen über Riemann's letzte Lebensjahre siehe bei den »Bemerkungen« am Schlusse dieses Bandes.]

XXXXVII.

ZUM GEDÄCHTNISS AN GAUSS*).

Archimedes, Newton, Gauss, wenn wir diese drei Namen nennen, so vergegenwärtigen wir uns damit Geister, welche der Wissenschaft, die den Begriff der Grösse seinem ganzen Umfange nach zu erforschen sich bemüht, Wege zu neuen Gebieten von solcher Fruchtbarkeit zu eröffnen wussten, wie sie bis jetzt keinem anderen Sterblichen sich dargeboten haben.

Der Mann des Alterthums tritt uns entgegen als der Begründer der Lehre vom Gleichgewicht der festen und der flüssigen Körper, als Erfinder der Erschöpfungs-Methode zur Ausmittelung der räumlichen Inhalte geometrischer Gebilde.

Der Gesetzgeber der Bewegung der Himmelskörper hat das Beharrungsvermögen und die Kraft der gegenseitigen Anziehung der Körper der Natur, so wie die eigene Brechbarkeit der farbigen Lichtstrahlen erkannt; er ist der Begründer der Lehre vom Unendlich Grossen und Unendlich Kleinen, der Lehre von der Darstellung einer abhängigen Grösse durch eine unendliche Reihe von Potenzen der zugehörigen unabhängigen Grösse.

*) [Diese Rede wurde von Ernst Schering in der öffentlichen Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 7. December 1867 gehalten, s. Nachrichten von der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1867, S. 529. Die Rede musste wohl so kurz gefasst werden, weil in der gleichen Sitzung Ewald über die i. J. 1867 gestorbenen Bopp und Tuch und darauf Curtius über die im gleichen Jahre gestorbenen Boeckh und Brandis Gedächtnissreden gehalten haben und ausserdem Wöhler den ordnungsmässigen Jahresbericht erstattet hat. Diese vier Gedächtnissreden und dieser Jahresbericht nehmen im Druck 36 Seiten der Göttinger Nachrichten ein. Daher wird nur wenig Zeit für die Gedächtnissrede auf Gauss zur Verfügung gestanden haben und daher wird Ernst Schering sich auf »die Entdeckungen des noch nicht ganz einundzwanzigjährigen Gauss« beschränkt, und beabsichtigt haben, die Rede in den Abhandlungen der Ges. d. Wiss. zu Göttingen in grösserem Umfange zu veröffentlichen.]

Dem Manne, der in unserer Zeit gelebt hat, möge mir gestattet sein, heute einige Worte zu widmen. So gering ich auch meine Kräfte für diese Aufgabe fühlen mag, einem Geiste gegenüber zu treten, der nicht nur unserer Zeit sondern der ganzen Zukunft angehört, so sei dennoch der Versuch gewagt mit der Bitte um Ihre Nachsicht insbesondere derjenigen Männer, die mit Ihm in Ideenaustausch standen, eine Reihe von Jahren Theil nahmen an Seinem vielseitigen Wirken.

Sein Leben und sein Character haben an einem begeisterten Schüler einen beredten Erzähler gefunden*), so dass es der Ideengang in seinen wissenschaftlichen Schöpfungen ist, dem eine in allgemeinen Umrissen gezeichnete Darstellung noch zu widmen bleibt.

Wohl keine Jahre, die nach Maassgabe der äusseren Umstände als den Akademischen Studien gewidmet betrachtet werden, sind für die Wissenschaft so unmittelbar fruchtbringend gewesen als Gauss' Studentenjahre. Seine früheste Entdeckung gehört, wie es durch eigene Aufzeichnung des Datums verbürgt ist, dem Monat März des Jahres 1795 an**), seiner Schulzeit in dem Collegium Carolinum der Vaterstadt Braunschweig, wo er am 30. April 1777 geboren war. Es ist das Fundamental-Theorem für die Quadratischen Reste: dass nämlich zwei ungerade Primzahlen, von denen die eine positiv, die andere negativ ist und wenigstens Eine in Bezug auf den Theiler Vier den Rest Eins hat, immer in solcher Relation zu einander stehen, dass wenn in Bezug auf eine derselben als Theiler die andere Primzahl einen, von den Resten aller Quadratzahlen verschiedenen, Rest giebt, dass dann das Gleiche für die andere Primzahl als Theiler und die erstere als Rest gilt. Er fand den Satz, wie er selbst sagt, durch Induction und dieser Umstand zeigt, dass er nicht nur ohne die äussere Anregung durch einen Lehrer war, sondern dass er auch der erforderlichen Litteratur in diesen höchsten Theilen der Mathematik entbehren musste. Ohne Zweifel während seines Aufenthaltes in Göttingen und in Helmstedt vom Herbst des Jahres 1795 bis Ende des Jahres 1798 hat er die sorgfältig geschriebenen Inhaltsverzeichnisse der Berliner, der Petersburger, der Turiner und der Pariser Akademieschriften mit Auszügen und

*) [Wolfgang Sartorius von Waltershausen in seiner Schrift: »Gauss zum Gedächtniss«, Leipzig 1856.]

**) [Siehe Gauss' Werke, Bd. I, S. 476.]

kritischen Bemerkungen der darunter befindlichen wichtigeren Abhandlungen für sich zusammengestellt, die ihm bei der Herausgabe seiner Doctor-Dissertation und der *Disquisitiones Arithmeticae* die nothwendige Grundlage zu den historischen Notizen boten, und noch heute ein Zeugniss des jugendlichen Fleisses und des frühen selbständigen Urteils liefern können. Erst zu dieser späteren Zeit wird er in Legendre's Memoiren den von ihm selbst gefundenen so wichtigen Satz gelesen haben. Schon eine Reihe von Jahren hatte Legendre sich vergeblich bemüht, einen Beweis für diesen Lehrsatz aufzustellen. Der kurze Zeitraum, während welchem sich Gauss mit der Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen beschäftigt haben konnte und der ihm genügt hatte, den so schwer zugänglichen Satz aufzufinden, sollte ihm eine glückliche Vorbedeutung sein, auch bald zu dem Beweise zu gelangen. Innerhalb Jahresfrist am letzten Tage seines 19. Lebensjahres waren alle Schwierigkeiten überwunden, nachdem am 8. April*) zuvor das grösste Hinderniss durch den Beweis des Satzes aus dem Wege geräumt war, dass zu jeder Primzahl, welche für den Theiler Vier den Rest Eins hat, eine kleinere Primzahl vorhanden ist, durch welche getheilt sie keinen solchen Rest wie irgend eine Quadratzahl ergeben kann.

Das ist ein Theil der Früchte, die das erste Semester von Gauss' Aufenthalt an der Universität Göttingen im Winter von 1795/6 getragen hat, der allein schon den Entdecker unsterblich gemacht haben würde. Gleichzeitig beschäftigte er sich auch mit einem anderen Gebiete der Theorie der Zahlen und dessen Anwendung auf die zweigliedrigen algebraischen Gleichungen und fand — es war am 30. März 1796**) — als einen speciellen Fall seiner allgemeinen Sätze, dass der Kreis durch geometrische Construction unter alleiniger Anwendung von Kreisen und geraden Linien in 17 gleiche Theile zerlegt werden könne. Ein Resultat, das ihm selbst wohl Anfangs Staunen erregte, da seit der Euklidischen Zweitheilung von Kreisbögen und Drei- und Fünftheilung der Kreise in einem Zeitraum von über 2000 Jahren Niemand eine Vermuthung ausgesprochen zu haben scheint, ob noch andere geometrische Theilungen des Kreises möglich seien.

Auf diesem Standpunkte etwa wird sich Gauss befunden haben, als er

*) [Siehe Gauss' Werke, Bd. I, S. 475.]

**) [Siehe Gauss' Werke, Bd. I, S. 476.]

dem Plane eine feste Gestalt gab, ein Werk zu veröffentlichen, welches die Eigenschaften der Zahlen behandelt und welches, entsprechend der schon eroberten Materie, den Namen *Analysis Residuorum* führen sollte. Das Manuscript von nicht geringem Umfang ist auch zum Abschluss gelangt und das achte Capitel desselben ist als selbst dem Inhalte nach für die Wissenschaft noch neu erst nach Gauss' Tode der Oeffentlichkeit übergeben*).

Es war wohl während der Ausarbeitung dieses Werkes, nämlich am 22. Juni jenes glücklichen Jahres 1796**), als er auf die grosse Bedeutung der binären quadratischen Formen aufmerksam wurde, ohne Zweifel geleitet durch die schon tief eindringenden Untersuchungen von Lagrange und Legendre. Aus den Eigenschaften der quadratischen Formen ergiebt sich eine Reihe von Lehrsätzen, die sich ohne grosse Vorbereitung in wenig Worten aussprechen lassen, die in der Geschichte der Mathematik eine grosse Rolle spielen, weil sie leicht durch Induction gefunden aber erst nach vielen Anstrengungen bewiesen worden sind. So hat zum Beispiel der Satz, dass jede Primzahl, welche durch Vier getheilt den Rest Eins giebt, immer auf eine und nur auf Eine Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden kann, den grossen Euler während 30 Jahren beschäftigt, ehe er sich einem Beweise unterwarf. Eine ähnliche Bedeutung hat der Satz, dass jede ganze Zahl sich in die Summe von vier Quadratzahlen zerlegen lässt, gewonnen.

Bei der Behandlung dieses Gegenstandes zeigte sich sogleich Gauss' Meisterschaft durch den von ihm eingeschlagenen selbständigen Weg; er trennte im Gegensatz zu seinen Vorgängern auch diejenigen Formen von einander und schied sie in verschiedene Classen, welche einander nur uneigentlich äquivalent sind, und machte dadurch, wie er es selbst sagt, den Zugang zu den höheren Untersuchungen allein möglich. Die Ideen zu diesen höheren Untersuchungen müssen sich ihm ausserordentlich rasch dargeboten haben, da er schon nach wenigen Wochen, am 27. Juli***), die darin vor-

*) [Siehe Gauss' Werke, Bd. II, S. 212—240.]

**) [Siehe Gauss' Werke, Bd. I, S. 476.]

***) [Nach einer handschriftlichen Notiz von Gauss in seinem Handexemplar der Disq. arith.; siehe Gauss' Werke, Bd. I, S. 476. In »Gauss' wissenschaftlichem Tagebuch«, herausgegeben von F. Klein in der Festschrift zur Feier des 150jähr. Bestehens d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 ist das Datum 27. Juni 1796 angegeben. Da im Tagebuche diese Angabe zwischen zwei Eintragungen vom Juni 22 und Juli 3 steht, so wird sie die richtige sein.]

handenen Hülfsmittel zu einem zweiten Beweise des Fundamental-Theorems für die Quadratischen Reste erkannte. Dieser Beweis hat dadurch noch ein besonderes Interesse gewonnen, dass er nach länger als einem halben Jahrhundert der Idee Entstehung gab, einen nach analogen Betrachtungen geführten und der Zeit nach ebenfalls zweiten Beweis aufzustellen für die Lehrsätze, welche sich auf die allgemeinen Potenzreste für die idealen Zahlen beziehen.

Die binären quadratischen Formen mussten Gauss nothwendig wie auch seine Vorgänger bald auf die ternären quadratischen Formen führen, und diese zeigten seinem für die Erkennung der Gesetze der Natur so glücklichen Blick auch das Wesen der Crystallinischen Körper. Es beruht das auf einer geometrischen Deutung einer grossen Abtheilung der ternären quadratischen Formen, deren Analogie für die binären quadratischen Formen wir als Grundlage unserer Erzählung der Gaussischen Entdeckungen benutzen wollen. Die Zahlen, welche als Werthe einer bestimmten binären quadratischen Form in der einen hier zu betrachtenden Abtheilung dargestellt werden, entsprechen den Knotenpunkten eines ebenen Netzes, welches von zwei Systemen geradliniger unter sich paralleler und in gleichen Abständen von einander entfernt liegender Fäden gebildet wird und welches also die Ebene in gleiche rautenförmige Maschen theilt und zwar von solcher Gestalt, dass die Quadrate der Seiten und der Diagonalen zu einander ganzzahlige Verhältnisse bilden. Sämmtliche Knotenpunkte eines bestimmten derartigen Netzes lassen sich als Knotenpunkte von unendlich vielen anderen Netzen betrachten, welche alle Maschen von derselben Grösse haben und je einer besonderen binären quadratischen Form entsprechen. Solche Formen nennt Gauss einander eigentlich äquivalent, dagegen zum Beispiel zwei solche Formen einander uneigentlich äquivalent, für welche die zugehörigen Netze des einen als auf der einen Seite einer Ebene, das andere als auf der anderen Seite derselben Ebene liegend betrachtet werden aber im Uebrigen identisch sind. Schon Lagrange hatte bewiesen, dass einer bestimmten Zahl, deren Quadratwurzel das Verhältnis des Inhalts einer Raute zur Flächen-Einheit darstellen soll, und die Gauss die mit dem negativen Zeichen versehene Determinante der Form nennt, nur eine endliche Anzahl von wesentlich verschiedenen Netzen und also auch eine endliche Anzahl von nicht äquivalenten Formen entspricht. Gauss fasst alle eigentlich äquivalenten Formen in eine Classe zusammen und hat demnach den Satz, dass jeder bestimmten Determinante nur eine endliche Anzahl von Classen zugehören.

Aehnliche Sätze hat Gauss auch für die andere Abtheilung der binären quadratischen Formen aufgestellt, die einer derartigen geometrischen Deutung nicht fähig sind und die als Determinanten positive Werthe haben. Nur specielle Fälle von diesen Formen fand er von seinen Vorgängern durchforscht, die eigentlichen Schwierigkeiten waren noch zu überwinden und es gelang ihm, indem er den Eulerschen Algorithmus anwandte zur Aufstellung genäherter Werthe für die Quadratwurzel der Determinante.

Eine ganz elementare Eigenschaft der binären quadratischen Formen bot ihm Aussicht auf einen zweiten Beweis seines Fundamental-Theorems, dass nämlich die Zahlen, welche durch Eine solche Form und also auch durch Formen Einer Classe dargestellt werden, gleiches Verhalten als quadratische Reste oder Nichtreste in Bezug auf die Primfactoren der Determinante als Theiler zeigen. Auch giebt dieser Satz Veranlassung, die Classen in einzelnen Abtheilungen zusammen zu fassen, welche Gauss *Genera* nennt und welche er der Anzahl nach in eine Grenze einschliesst, indem er für irgend eine Zahl die Anzahl der Charaktere bestimmt, die aus dem verschiedenen Verhalten der Zahl als quadratischer Rest oder Nichtrest in Bezug auf gegebene Divisoren folgen.

Hierauf beschäftigte er sich im Herbst 1798*) zur Zeit seines Fortganges von der Universität Göttingen mit einem, wie er selbst sagt, äusserst wichtigen und bis dahin von Niemandem berührten Gegenstande, der Composition der Formen. Legt man die geometrische Deutung der binären quadratischen Formen von negativer Determinante zu Grunde, so kann man die Composition zweier Formen mit gleicher Determinante auf folgende Weise definieren. Es werden zu den Knotenpunkten, welche in zwei Ebenen den zwei gegebenen Formen entsprechen, zunächst solche zwei Netze konstruirt, so dass eine Masche des einen Netzes dieselben Winkel enthält, wie eine Masche des anderen Netzes, und dass die Verhältnisse, in welchen die Quadrate des einen Paares entsprechender Seiten in den beiden Maschen zu den

*) [Siehe Gauss' Werke, Bd. I, S. 476.]

Flächen-Einheiten stehen, ausgedrückt werden durch Zahlen ohne gemeinsame Theiler. Aus solchen zwei Netzen ergiebt sich das Compositions-Netz mit einer solchen Masche, welche denselben Flächeninhalt und dieselben Winkel hat, wie jede der beiden zuvor gefundenen, ferner eine Seite, deren Quadrat zur Flächen-Einheit in einem aus den Verhältnissen der Quadrate der beiden genannten Seiten zu den Flächen-Einheiten zusammengesetzten Verhältnisse steht.

Als denjenigen Satz, welcher das Fundament der Lehre von der Composition bildet, hat Gauss den Satz gefunden und bewiesen, dass die Lage der durch die Composition erhaltenen Knotenpunkte ganz unabhängig ist von den sehr verschiedenen Netzen, die man für die beiden gegebenen Systeme von Knotenpunkten in der Konstruktion angewandt hat. Hieraus ergiebt sich dann auch, dass man den Begriff der Composition von den Formen auf die Classen derselben übertragen kann, und von diesen wieder auf die Genera.

Für die weiteren Untersuchungen spielen die Formen und deren Classen eine wichtige Rolle, welche sich selbst eigentlich und uneigentlich äquivalent sind. Gauss nennt sie Anceps-Formen und findet die Zahl ihrer Classen gleich der halben Anzahl der für ihre Determinante angebbaren Charaktere. Auch beweist er leicht, dass die Anzahl der Genera für eine Determinante nicht die Anzahl der Anceps-Classen übersteigen kann, und gewinnt dadurch das Hülfsmittel zu seinem zweiten Beweise des Fundamental-Theorems, im Frühjahr 1800, nach vierjähriger angestrengter Arbeit. Wie ich schon erwähnt habe, giebt Gauss an, dass er am 27. Juli 1796 auf die Principien dieses Beweises aufmerksam geworden sei und erst in den Herbst 1798 der Anfang seiner Beschäftigung mit der Composition der binären Formen falle. Man wird also annehmen dürfen, dass der leitende Gedanke für ihn darin bestanden habe, dass der aus dem Fundamentalsatze und aus den elementaren Betrachtungen leicht aufzustellende Beweis für die enge Grenze der Anzahl der Genera einer Umkehrung fähig sei. —

Somit habe ich Ihnen berichtet von einem Theile nur und zwar solchem, der nach dem äusseren Umfange nur wenig mehr als die Hälfte der im Jahre 1801 erschienenen *Disquisitiones Arithmeticae* ausmacht. Die Besprechung des anderen Theiles gewinnt noch dadurch ein besonderes Interesse, dass aus Gauss' Aufzeichnungen der Daten der Entdeckung hervorgeht, dass die

Lehrsätze in einer ganz anderen Reihenfolge und auch mit ganz anderen Beweisen ursprünglich gefunden sein müssen als sie schliesslich in dem Werke dargestellt sind, wo sie doch alle so aus einander folgen, dass die vorhandene Ordnung nicht aufgehoben werden kann, ohne dass die Beweise aufhören gültig zu sein.

Die hier besprochenen Entdeckungen von Gauss fallen fast sämmtlich in die Zeit seiner Studentenjahre, aber sie sind es nicht allein, welche diesen Jahren ihre Entstehung verdanken. Schon dem Jahre 1795 gehört sein Princip an, welches dem menschlichen Geiste erst das Hülfsmittel verschafft hat, um die Erforschung der Natur durch Messungen systematisch ausführen zu können. Ein Princip, dem später so vielfache Untersuchungen gewidmet sind, dass sie den Umfang einer eigenen Wissenschaft erworben haben*).

Auf den 8. Januar 1797**) fällt der Anfang seiner Beschäftigung mit den Lemniscatischen Funktionen und er erntete dabei die ersten Früchte seiner konsequenten Einführung der imaginären Grössen. Diese Untersuchungen sind der Wissenschaft nur mittelbar nützlich geworden, sie selbst blieben verborgen, bis andere Männer sie unabhängig von Gauss wieder aufnahmen.

Ein zweiter Erfolg, den ihm die imaginären Grössen verschafften, bestand in dem anfangs Oktober 1797***) gefundenen ersten Beweise des Fundamentalsatzes für die algebraischen Functionen.

Das sind die Entdeckungen des noch nicht ganz einundzwanzigjährigen Gauss.

---

*) [Gauss schreibt in der Anzeige (in den Göttingischen gelehrten Anzeigen, 1809, Junius 17) zu seiner Theoria motus . . .: »Die Grundsätze, welche hier ausgeführt werden, und welche von dem Verfasser schon seit 14 Jahren angewandt . . . waren« (siehe Gauss' Werke, Bd. VI, S. 59). — In dem von der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen im Jahre 1900 herausgegebenen VIIIten Bande von Gauss' Werken sind S. 136—141 die Angaben »zur Geschichte der Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate« zusammengestellt.]

**) [Siehe Gauss' Werke, Bd. III, S. 493.]

***) [Siehe Gauss' Werke, Bd. III, S. 30.]

XXXXVIII.

[ÜBER EIN UNVERÄNDERLICHES PENDEL ZUR BESTIMMUNG DER BESCHLEUNIGUNG DER SCHWERKRAFT.]

[I.]

[Bericht über die Verhandlungen der vom 30. September bis 7. Oktober 1867 zu Berlin abgehaltenen allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung, S. 80.]

Herr Schering: Meine Mittheilungen in der Commission schlossen sich an eine Bemerkung des Herrn Lindhagen an, dass, anstatt der Bestimmung der absoluten Pendellänge diejenige der relativen Länge für solche astronomische Stationen, welche nicht Sternwarten sind, wegen der bedeutenden Zeitersparniss mit Vortheil anzuwenden sei. In Bezug hierauf theilte ich einige Andeutungen mit über die mir von Herrn Professor Weber angegebenen Principien zur Construction eines Pendels, wie solches in Göttingen auszuführen beabsichtigt wird, und das seiner Ansicht nach auch zur Vergleichung von Pendellängen wohl Alles leisten wird, was mit den jetzigen grossen Hülfsmitteln der Mechanik zu erreichen erwartet werden darf.

Um den Vortheil der grossen Genauigkeit, welche die durch Berührung ausgeführten Längenmessungen haben, auch bei dem Pendel zu erlangen, werden nicht die zur Aufhängung benutzten Schneiden als Endpunkte der zu messenden Länge gewählt, sondern die Enden der ganzen Länge des Hauptkörpers des Pendels, eines von zwei Ebenen begrenzten Cylinders.

Damit der Ort der Schneide den möglichst geringsten Einfluss auf die Schwingungsdauer ausüben kann, wird dieselbe an einer solchen Stelle angebracht, dass die Schwingungsdauer einen besonderen Werth erhält, der in diesem Falle ein Minimalwerth ist*). Zur Berücksichtigung des Temperatur-Einflusses wendet man entweder zwei Pendel von verschiedenem Metall, oder ein Pendel an, welches aus einem hohlen Cylinder und darin concentrisch befindlichem Cylinder von anderem Metall besteht. Zur Längenvergleichung der Pendel in der natürlichen durch die Aufhängung gegebenen Lage wird ein Fühlhebel dienen, dessen Stand mit Hülfe von Spiegel, Glasscala und Fernrohr abzulesen ist. Die Vergleichung der Pendel an zwei verschiedenen Orten der Erde bezieht sich auf die Schwingungsdauer desselben Pendels an beiden Orten und wird mit zweien solchen unter einander verglichenen Apparaten an beiden durch electrische Telegraphen verbundenen Orten gleichzeitig ausgeführt, um sich von dem Gange einer etwa zu benutzenden Uhr unabhängig zu machen.

[II.]

[Brief von Ernst Schering an A. Repsold und Söhne in Hamburg.]

Göttingen 1869, Aug. 1.

— — — — — — Es handelt sich um die Aufgabe, für einen gegebenen Stab denjenigen Ort der Drehungsaxe (bei einer zum Behuf der Herstellung dieser Drehungsaxe erforderlichen an dem Stabe anzubringenden Verstärkung) zu suchen, für welchen die Schwingungsdauer ein Minimum wird.

Bezeichnungen: t Schwingungsdauer des ganzen Pendels,

x Abstand des Schwerpunkts des (schwingenden) Stabes von der Drehungsaxe,

---

*) [W. Weber hat später in der Arbeit: »Ueber Konstruktion des Bohnenbergerschen Reversionspendels« (Berichte der sächs. Akad. d. Wiss., 1883; W. Weber's Werke, Bd. I, S. 553—562) eine andere Konstruktion vorgeschlagen, nämlich die Abstände x' und x''' der beiden einander parallelen Drehungsachsen von dem Schwerpunkte so zu wählen, dass $\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx'''}{dt}\right)^2$ ein Minimum ist, wenn t die Schwingungsdauer bedeutet.]

ξ der (gegebene) Abstand des Schwerpunkts der Verstärkung von der Drehungsaxe,

m Masse des Stabes,

μm Masse der Verstärkung,

kkm Trägheitsmoment des Stabes um eine Axe, die durch den Schwerpunkt desselben geht und der Drehungsaxe parallel ist,

$\varkappa\varkappa\mu m$ Trägheitsmoment der Verstärkung bezogen auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt der Verstärkung geht und der Drehungsaxe parallel ist.

Voraussetzung: Der Schwerpunkt des Stabes, der Schwerpunkt der Verstärkung und die Drehungsaxe befinden sich in Einer Ebene und jene beiden Punkte liegen an verschiedenen Seiten dieser Drehungsaxe.

Aufgabe: Den Werth von x zu bestimmen, für welchen t ein Minimum wird.

Nach den Gesetzen für die Pendelbewegung ist

$$g(xm-\xi\mu m)tt = (kkm+xxm+\varkappa\varkappa\mu m+\xi\xi\mu m)\pi\pi,$$

oder wenn zur Abkürzung

$$+\sqrt{kk+\varkappa\varkappa\mu+\xi\xi\mu(1+\mu)} = h$$

gesetzt wird,

$$g(x-\xi\mu)tt = \{h-(x-\xi\mu)\}^2\pi\pi+(2h+2\xi\mu)(x-\xi\mu)\pi\pi,$$

also ist t ein Minimum für

$$x = \xi\mu+h, \text{ und dann wird } gtt = 2x\pi\pi,$$

also die Länge eines mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer wird gleich $2x$ sein. Ist der Stab ein Cylinder von der Länge l und dem Durchmesser δ, so ist

$$kk = \frac{1}{12}ll+\frac{1}{16}\delta\delta$$

und die Entfernung der Drehungsaxe von einem Ende des Stabes

$$= \frac{1}{2}l-\xi\mu-\sqrt{\frac{1}{12}ll+\frac{1}{16}\delta\delta+\varkappa\varkappa\mu+\xi\xi\mu(1+\mu)}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

[III.]

[Brief von Ernst Schering an A. Repsold und Söhne in Hamburg.]

Göttingen 1870, Mai 19.

— — — — — —

Pendel, dessen Bewegung mit dem Rollen eines Kreises auf einer horizontalen Ebene übereinstimmt.

Es sei g = Fallgeschwindigkeit am Ende der ersten Secunde.

λ = Länge des Secundenpendels (= 994,2339$^{\text{mm}}$ für Berlin).

t = Zeitdauer in Secunden für einen ganzen Schwingungsbogen des Pendels.

Sg = [Grösster Wert des] Drehungsmoment[s] für das Pendel, bezogen auf die Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Zapfen (oder Kugeln) verbindet, als Drehungsaxe.

T = Trägheitsmoment des Pendels bezogen auf die Linie, welche die beiden Berührungspunkte der Zapfen mit ihren Unterlagern beim Ruhestande des Pendels verbindet, als Drehungsaxe.

M = Masse des undurchbrochenen cylindrischen Hauptstabes des Pendels.

$M+m$ = Masse des ganzen beweglichen Pendels.

KKM = Trägheitsmoment des undurchbrochenen Stabes, bezogen auf die Gerade, die durch dessen Schwerpunkt geht und parallel zur Schwingungsaxe liegt, als Drehungsaxe.

kkm = Trägheitsmoment der durch die Suspensionsvorrichtung zum undurchbrochen gedachten Stabe hinzugefügten Masse, bezogen auf die Gerade, welche durch den Schwerpunkt dieser Masse geht und parallel zur Schwingungsaxe liegt, als Drehungsaxe.

H = Abstand des Schwerpunkts des undurchbrochenen Stabes von der Geraden, welche die Auflagepunkte der beiden Zapfen beim Ruhestande des Pendels verbindet.

h = Abstand des Schwerpunkts der zum undurchbrochen gedachten Stabe zur Ermöglichung der Suspension hinzugefügten Masse m von der Verbindungsgeraden der Auflagepunkte der Zapfen beim Ruhestande des Pendels.

Es ist h von dieser Verbindungsgeraden nach der entgegengesetzten Seite gerichtet angenommen als wie die Entfernung H des Schwerpunkts des undurchbrochen gedachten Stabes von derselben Verbindungsgeraden und vorausgesetzt, dass diese selbe Gerade mit den beiden Schwerpunkten der Massen M und m in Einer Ebene liegt.

η = einer durch die Natur des Materials und durch die äusseren Dimensionen bestimmten zur leichteren Uebersicht der Formeln (mittels Gleichung 4) eingeführten Hülfs-Grösse.

ϱ = Halbmesser der (kugelförmigen oder cylindrischen) Zapfen, die an den beiden Stellen, wo sie auf der Unterlage sich bewegen, als gleich vorausgesetzt werden.

Unter der Voraussetzung, dass die Construction des Pendels der Art ist, dass die Schwingungsdauer für unendlich kleine Schwingungsbögen sich einer bestimmten Grenze t nähert, wird

$$tt = \frac{T}{Sg}\pi\pi = \frac{1}{\lambda}\frac{T}{S}. \tag{1.}$$

Es ist nun:

$$S = (\varrho+H)M+(\varrho-h)m, \tag{2.}$$
$$T = (KK+HH)M+(kk+hh)m; \tag{3.}$$

bestimmt man also die Grösse η durch die Gleichung

$$\left\{\eta+\varrho+(\varrho-h)\frac{m}{M}\right\}^2 = KK+\left\{\varrho+(\varrho-h)\frac{m}{M}\right\}^2+(kk+hh)\frac{m}{M}, \tag{4.}$$

so wird:

$$\lambda tt = 2\eta+\frac{(H-\eta)^2 M}{S}. \tag{5.}$$

Ihre Construction des Pendels ist der Art, dass man annehmen kann:

die Durchbohrung des Pendelstabes zur Ermöglichung der Befestigung der Suspension ist ein Rotationskörper,

die ganze Masse der Suspensions-Vorrichtung ist ebenfalls ein Rotationskörper,

die Axen dieser beiden Rotationskörper fallen also zusammen und können parallel der Geraden angenommen werden, die durch die beiden Auflagepunkte der Zapfen hindurch geht, es ist demnach

$$h = \varrho,$$

und Gleichung (4) vereinfacht sich zu

$$(4^*.) \qquad (\eta + \varrho)^2 = KK + \varrho\varrho + (kk + \varrho\varrho)\frac{m}{M}.$$

Meine Abmessungen an Ihrer Zeichnung ergeben:

$\varrho = h = 2{,}25^{\mathrm{mm}}$, $L = 1000^{\mathrm{mm}}$, Länge des ganzen Pendels.

$D = 26{,}3^{\mathrm{mm}}$, Durchmesser des cylindrischen Stabes.

$l = 52{,}2^{\mathrm{mm}}$, angenommene Länge des zur näherungsweisen Berechnung als Cylinder vom Durchmesser $d = 5{,}5^{\mathrm{mm}}$ betrachteten Suspensionskörpers.

Bezeichnet

M' das specifische Gewicht des Pendelstabes,

m' das specifische Gewicht des Suspensionskörpers,

so ist:

$$M = \tfrac{1}{4}\pi DDLM'; \qquad m = \tfrac{1}{4}\pi ddlm' - \tfrac{1}{4}\pi ddDM'$$

näherungsweise,

$$\frac{m}{M} = \frac{dd}{DD}\frac{D}{L}\left(\frac{l}{D}\frac{m'}{M'} - 1\right),$$

also, weil nach Ihren Vorschlägen das Material des Suspensionskörpers kein schwereres wird, als das des Pendelstabes, so hat die Massenänderung, die durch Hinzutreten der Suspensionsvorrichtung hervorgebracht wird, den grössten Einfluss, wenn $m' = M'$ ist, dann ergiebt sich $\log\frac{m}{M} = \overline{7}{,}05411$.

Ferner ist:

$$KK = \frac{1}{12}LL + \frac{1}{16}DD; \qquad K = 288{,}75^{\mathrm{mm}}; \qquad kk = \frac{1}{8}dd.$$

Zur Bestimmung von η kann man statt Gleichung (4*) mit hinreichender Genauigkeit auch setzen:

$$\eta + \varrho = \sqrt{KK + \varrho\varrho} + \frac{kk + \varrho\varrho}{2K}\cdot\frac{m}{M}.$$

Meine Rechnung giebt:

$$\sqrt{KK + \varrho\varrho} = 288{,}7582^{\mathrm{mm}}; \qquad \frac{kk + \varrho\varrho}{2K}\frac{m}{M} = 0{,}0000173^{\mathrm{mm}}.$$

Der Einfluss der Masse der Suspensionsvorrichtung auf die Schwingungszeit kommt also nicht in Betracht. Es folgt ferner $\eta = 286{,}5082^{\mathrm{mm}}$.

Nach Gleichung (5) muss man, damit das Pendel so genau wie möglich seine Schwingungszeit beibehalten kann, die Suspension an solcher Stelle anbringen, dass

$$H = \eta = 286{,}5082^{\mathrm{mm}}, \text{ also } t = \sqrt{\frac{2\eta}{\lambda}} = 0{,}75917 \text{ Secunden},$$
$$\tfrac{1}{2}L - H = 213{,}4918^{\mathrm{mm}}, \qquad \tfrac{1}{2}L + H = 786{,}5082^{\mathrm{mm}}$$

wird, das heisst, wenn man Ihre Bezeichnungsweise und meine Messung des Radius der beiden kugelförmigen Zapfen, welche für jeden $2{,}25^{\mathrm{mm}}$ ergab, beibehält, müssen statt der beiden Zahlen

$$788{,}75^{\mathrm{mm}} \text{ und } 211{,}25^{\mathrm{mm}}$$

diese:

$$786{,}5082 \text{ und } 213{,}4918$$

gesetzt werden. Die Richtigkeit meiner übrigen Abmessungen schliesse ich daraus, dass ich die von Ihnen [in der Zeichnung] aufgeschriebenen Zahlen [788,75 und 211,25] erhalte, wenn ich die durch die untersten Punkte der Zapfen gehende Gerade als eine ruhende Drehungsaxe bei der Bewegung des Pendels ansehe.

XXXXIX.

[ZWEI AUFGABEN AUS DER RENTENRECHNUNG.]

[1877 December.]

I. Aufgabe:

Für eine stehende Ehe soll die Aenderung des Capital-Werthes der noch zu zahlenden Beiträge bestimmt werden.

Voraussetzungen:

Nach den *bisherigen* Bestimmungen wird der Jahresbeitrag $= b$ am 1. Juli des laufenden, vom vorhergehenden 1. October beginnenden und bis zum nachfolgenden 30. September endenden Rechnungs-Jahres, eingezahlt; nach den *neuen* Bestimmungen wird am 1. Januar 1878 beschlossen, dass die bisherigen Bestimmungen nur bis zum 30. Sept. 1878 bestehen bleiben sollen, dass vom 1. October an gerechnet der Vierteljahres-Beitrag $= \frac{1}{4}\beta$ praenumerando eingezahlt wird.

Nach den *bleibenden* Bestimmungen mache ich die Annahme, dass der Beitrag nur bis zum Ablauf desjenigen Rechnungs-Jahres (vom 1. Oct. bis 30. Sept.) bezahlt wird, in welchem die Frau stirbt und in welchem durch Kündigung ein Austritt des Mannes erwartet werden kann. In Wirklichkeit wird dieses nicht *immer* ausgeführt, sondern auch, wenn weder Kinder unter 20 Jahren vorhanden sind noch eine Wieder-Verheirathung beabsichtigt zu sein scheint, aus Gründen des Anstandes der Beitrag bis zum Ableben des Mannes fortbezahlt.

Den Fall des Fortganges des Mitgliedes von der Universität ziehe ich nicht in Rechnung. Theils kommt dies bei Professoren in Göttingen weniger vor als auf anderen kleinen Universitäten, theils gleichen sich diese Fälle mit dem Verbleiben als Mitglied bei der Casse für solche Professoren aus, bei denen keine Nachkommen vorhanden sind, welche die Vortheile der Pensions-Casse geniessen könnten.

Beim Tode des Ehemannes endigt die Beitrag-Pflicht mit dem Sterbe-Quartal.

Bezeichnungen:

Als Zeiteinheit gilt das Jahr.

ϱ ist der Discontirungs-Factor $\left(= \frac{100}{103,5}\right.$ bei $3\,{}^1/_2$ Procent, $= \frac{100}{104}$ bei 4 Proc.$\left.\right)$,

m Alter der Frau für 1878 Januar 0,

M Alter des Mannes für 1878 Januar 0,

$f(m')$ Anzahl (nach Brune*) unter 10000, welche das 20ste Jahr erreichen,) der an das Lebens-Alter m' gelangenden Frauen,

$F(M')$ Anzahl der (nach Brune) das Lebens-Alter M' erreichenden Männer. Für hohe Lebens-Alter von Männern sind die von Brune benutzten Erfahrungen wenig zahlreich, also seine Tabellen für diesen Abschnitt sehr wenig zuverlässig; es wird deshalb das Absterben der Männer dann dem der Frauen als gleich angenommen. Für diese sind die Daten, welche Brune benutzen konnte, viel zuverlässiger.

$g\left(m'+\frac{1}{2}\right) = \frac{f(m')}{f(m'+1)}$ = Logarithmisches Decrement in den Lebens-Tabellen für Frauen,

$G\left(M'+\frac{1}{2}\right) = \frac{F(M')}{F(M'+1)}$ = Logarithmisches Decrement in den Lebens-Tabellen für Männer,

$\psi(m, M)$ = Zeit-Werth einer Verbindungs-Rente für eine Frau vom Alter m und Mann vom Alter M, wenn nach jedem Jahre beim Leben beider die Rente $= 1$ gezahlt wird, also:

$$\psi(m, M).f(m).F(M) = \varrho.f(m+1).F(M+1) + \varrho^2.f(m+2).F(M+2) + \varrho^3.f(m+3).F(M+3) + \cdots$$

Die Functionen $f(m')$, $F(M')$, $g(m')$, $G(M')$, $\psi(m', M')$ sind in Ta-

*) [Genauere Angaben über die Tafeln von Brune stehen auf S. 338 dieses Bandes.]

bellen gegeben, es soll mit deren Hülfe die obige Aufgabe gelöst werden.

$B(1, b, m, M)$ = dem Capital-Werth des Beitrages eines Mitgliedes der Professoren-Witwen-Casse nach den bisherigen Bestimmungen.

$B\left(\frac{1}{4}, \beta, m, M\right)$ = dem Capital-Werth des Beitrages eines Mitgliedes der Professoren-Witwen-Casse nach den jetzt zu beschliessenden Bestimmungen.

Bei Untersuchungen, welche sich auf Lebens-Renten beziehen, kann man auf die zu behandelnden Functionen $\Phi(x, y, z)$ den Fundamental-Satz der Interpolation anwenden:

Bezeichnen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ positive echte Brüche, welche die Bedingung

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_\nu = 1$$

erfüllen, sind ferner $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ irgend welche echte Brüche und setzt man

$$\begin{aligned} \theta_1 \xi_1 + \theta_2 \xi_2 + \cdots + \theta_\nu \xi_\nu &= \xi \\ \theta_1 \eta_1 + \theta_2 \eta_2 + \cdots + \theta_\nu \eta_\nu &= \eta \\ \theta_1 \zeta_1 + \theta_2 \zeta_2 + \cdots + \theta_\nu \zeta_\nu &= \zeta \end{aligned}$$

so kann man

$$\begin{aligned} \theta_1 . \Phi(x+\xi_1, y+\eta_1, z+\zeta_1) + \theta_2 . \Phi(x+\xi_2, y+\eta_2, z+\zeta_2) + \cdots + \theta_\nu . \Phi(x+\xi_\nu, y+\eta_\nu, z+\zeta_\nu) \\ = \Phi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \end{aligned}$$

setzen.

Nach der Definition des Zeit-Werthes oder Capital-Werthes der Beiträge für die bisherigen Bestimmungen der Casse ergiebt sich:

$$\begin{array}{l|c} B(1, b, m, M) . f(m) . F(M) & \begin{array}{c}\text{im}\\ \text{Kalender-Jahr}\end{array} \\ = \frac{1}{4} b . \varrho^{\frac{2}{4}} . f(m) \cdot \left\{ F(M) + F\left(M+\frac{1}{4}\right) + F\left(M+\frac{2}{4}\right) \right\} + \frac{1}{4} b . \varrho^{\frac{6}{4}} . f\left(m+\frac{3}{4}\right) \cdot F\left(M+\frac{3}{4}\right) & 1878 \\ + \frac{1}{4} b . \varrho^{\frac{6}{4}} . f\left(m+\frac{3}{4}\right) \cdot \left\{ F\left(M+\frac{4}{4}\right) + F\left(M+\frac{5}{4}\right) + F\left(M+\frac{6}{4}\right) \right\} + \frac{1}{4} b . \varrho^{\frac{10}{4}} . f\left(m+\frac{7}{4}\right) \cdot F\left(M+\frac{7}{4}\right) & 1879 \\ + \frac{1}{4} b . \varrho^{\frac{10}{4}} . f\left(m+\frac{7}{4}\right) \cdot \left\{ F\left(M+\frac{8}{4}\right) + F\left(M+\frac{9}{4}\right) + F\left(M+\frac{10}{4}\right) \right\} + \frac{1}{4} b . \varrho^{\frac{14}{4}} . f\left(m+\frac{11}{4}\right) \cdot F\left(M+\frac{11}{4}\right) & 1880 \\ + \cdots & \end{array}$$

oder wenn man nach Potenzen von ϱ ordnet und auf deren Factoren den obigen Fundamental-Satz der Interpolation anwendet

$$B(1, b, m, M) . f(m) . F(M) = \frac{3}{4} b . \varrho^{\frac{2}{4}} . f(m) . F\left(M+\frac{1}{4}\right) + b \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \varrho^{\sigma+\frac{6}{4}} . f\left(m+\sigma+\frac{3}{4}\right) \cdot F\left(M+\sigma+\frac{18}{16}\right) \cdot$$

Die Definition von $\psi(m, M)$ ergiebt auch:

$$f(m-\tfrac{1}{4}).F(M+\tfrac{1}{8}).\psi(m-\tfrac{1}{4}, M+\tfrac{1}{8}) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \varrho^s.f(m+s-\tfrac{1}{4}).F(M+s+\tfrac{1}{8}),$$

also wird:

$$B(1, b, m, M).f(m).F(M)$$
$$= \tfrac{3}{4}.b.\varrho^{\frac{1}{2}}.f(m).F(M+\tfrac{1}{4}) + b.\varrho^{\frac{1}{2}}.\psi(m-\tfrac{1}{4}, M+\tfrac{1}{8}).f(m-\tfrac{1}{4}).F(M+\tfrac{1}{8})$$

oder

$$B(1, b, m, M) = \tfrac{3}{4}.b.\varrho^{\frac{1}{2}}.\frac{F(M+\frac{1}{4})}{F(M)} + b.\varrho^{\frac{1}{2}}.\frac{f(m-\frac{1}{4})}{f(m)}.\frac{F(M+\frac{1}{8})}{F(M)}.\psi(m-\tfrac{1}{4}, M+\tfrac{1}{8}).$$

Für den Zeit-Werth der Beiträge, welche nach dem am 1. Januar 1878 zu fassenden Beschlusse vom 1. October 1878 an gerechnet vierteljährlich praenumerando eingezahlt werden sollen, ergiebt sich auf gleiche Weise

$$B\left(\frac{1}{4}, \beta, m, M\right).f(m).F(M)$$
$$= \frac{1}{4}b.\varrho^{\frac{2}{4}}.f(m)\cdot\left\{F(M)+F\left(M+\frac{1}{4}\right)+F\left(M+\frac{2}{4}\right)\right\} + \frac{1}{4}\beta.\varrho^{\frac{3}{4}}.f\left(m+\frac{3}{4}\right)\cdot F\left(M+\frac{3}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\beta.f\left(m+\frac{3}{4}\right)\cdot\left\{\varrho^{\frac{4}{4}}\cdot F\left(M+\frac{4}{4}\right)+\varrho^{\frac{5}{4}}.F\left(M+\frac{5}{4}\right)+\varrho^{\frac{6}{4}}\cdot F\left(M+\frac{6}{4}\right)\right\} + \frac{1}{4}\beta.\varrho^{\frac{7}{4}}.f\left(m+\frac{7}{4}\right).F\left(M+\frac{7}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\beta.f\left(m+\frac{7}{4}\right)\cdot\left\{\varrho^{\frac{8}{4}}.F\left(M+\frac{8}{4}\right)+\varrho^{\frac{9}{4}}.F\left(M+\frac{9}{4}\right)+\varrho^{\frac{10}{4}}.F\left(M+\frac{10}{4}\right)\right\} + \frac{1}{4}\beta.\varrho^{\frac{11}{4}}.f\left(m+\frac{11}{4}\right).F\left(M+\frac{11}{4}\right)$$
$$+\cdots$$

Fasst man die ersten drei Glieder der zweiten Seite dieser Gleichung nach dem Fundamental-Satze der Interpolation zusammen und darnach immer je vier Glieder, so entsteht:

$$B(\tfrac{1}{4}, \beta, m, M).f(m).F(M) = \tfrac{3}{4}b.\varrho^{\frac{1}{2}}.f(m).F(M+\tfrac{1}{4}) + \beta\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}\varrho^{\sigma+\frac{9}{8}}.f(m+\sigma+\tfrac{3}{4}).F(M+\sigma+\tfrac{9}{8}),$$

oder wenn wie vorhin die ψ-Function eingeführt wird:

$$B(\tfrac{1}{4}, \beta, m, M) = \tfrac{3}{4}b.\varrho^{\frac{1}{2}}.\frac{F(M+\frac{1}{4})}{F(M)} + \beta.\varrho^{\frac{1}{8}}.\frac{f(m-\frac{1}{4})}{f(m)}.\frac{F(M+\frac{1}{8})}{F(M)}.\psi(m-\tfrac{1}{4}, M+\tfrac{1}{8}),$$

also

$$B(\tfrac{1}{4}, \beta, m, M) - B(1, b, m, M) = \left(\beta.\varrho^{\frac{1}{8}} - b.\varrho^{\frac{1}{2}}\right).\frac{f(m-\frac{1}{4})}{f(m)}.\frac{F(M+\frac{1}{8})}{F(M)}.\psi(m-\tfrac{1}{4}, M+\tfrac{1}{8}).$$

Dieser Ausdruck giebt die gesuchte Aenderung des Capital-Werthes des Beitrags. Für die Rechnung kann man ihn noch übersichtlicher machen, wenn man die genügend genaue Interpolations-Formel

$$\frac{f(m+\mu)}{f(m+\nu)} = \left\{\frac{f(m+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2})}{f(m+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})}\right\}^{\nu-\mu} = \left\{g(m+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu)\right\}^{\nu-\mu}$$

anwendet, dadurch wird

$$B\left(\frac{1}{4}, \beta, m, M\right) - B(1, b, m, M)$$

$$= \left(\beta . \varrho^{\frac{1}{8}} - b . \varrho^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left\{g\left(m-\frac{1}{8}\right)\right\}^{\frac{1}{4}} \cdot \left\{G\left(M+\frac{1}{16}\right)\right\}^{-\frac{1}{8}} \cdot \psi\left(m-\frac{1}{4},\, M+\frac{1}{8}\right).$$

II. Aufgabe:

Für eine bestehende Ehe soll die Aenderung des Capital-Werthes der etwaigen Witwen-Pension, nach ihrem festen Theile zu p Mark jährlich, berechnet werden.

Voraussetzungen:

Nach den bisherigen Bestimmungen sei die Pension halbjährlich postnumerando am 1. April und 1. Oct. ausgezahlt.

Nach den neuen Bestimmungen wird am 1. Januar 1878 beschlossen, dass die bisherigen Bestimmungen nur bis zum 30. Sept. 1878 bestehen bleiben, dass aber vom 1. October 1878 an gerechnet die Pension vierteljährlich postnumerando am 1. Januar, 1. April, 1. Juli, 1. October ausgezahlt werden.

Bleibend ist, dass die Pensions-Berechtigung mit dem Tage nach Ablauf des Gnaden-Quartals beginnt und mit dem Schlusse des Sterbemonates der Witwe endet.

Bezeichnungen wie bei Aufgabe I und ausserdem:

$\varphi(m')$ = Zeit-Werth einer einfachen Rente für eine Witwe vom Alter m', wenn nach jedem Jahre beim Leben der Witwe die Münz-Einheit gezahlt wird, also:

$$\varphi(m) . f(m) = \varrho . f(m+1) + \varrho^2 . f(m+2) + \varrho^3 . f(m+3) + \varrho^4 . f(m+4) + \cdots$$

Es sei $\varphi(m)$ durch Tabellen gegeben.

$W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)$ = dem Capital-Werth des festen Theiles der etwaigen Pension für das etwaige Witthum der Ehefrau, nach den bisherigen Bestimmungen.

$W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right)$ = der Capital-Werth des festen Theiles der etwaigen Witwen-Pension der Ehefrau, nach den neu einzuführenden Bestimmungen.

Ordnet man die Zeit-Werthe der einzelnen etwaigen Pensions-Bezüge nach deren Zahlungs-Terminen und nach den Kalender-Jahren, nämlich $1878+\frac{3}{4}$, $1878+\sigma+\frac{5}{4}$, $1878+\sigma+\frac{7}{4}$, so erhält man

$$W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right).f(m).F(M)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}p.\varrho^{\frac{3}{4}}.\left\{F(M)-F\left(M+\frac{1}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\frac{6}{12}\right)+f\left(m+\frac{7}{12}\right)+f\left(m+\frac{8}{12}\right)\right\}\\
&+p\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}\left|\begin{array}{l}
\frac{1}{12}\varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}.\left(\begin{array}{l}\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{9}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{10}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{11}{12}\right)\right\}\\
+\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{3}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{12}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{13}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{14}{12}\right)\right\}\end{array}\right)\\
+\frac{1}{12}\varrho^{\sigma+\frac{7}{4}}.\left(\begin{array}{l}\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{4}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{15}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{16}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{17}{12}\right)\right\}\\
+\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{5}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{18}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{19}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{20}{12}\right)\right\}\end{array}\right)
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

und ebenso bei den neuen Zahlungs-Terminen $1878+\frac{3}{4}$, $1878+\sigma+\frac{4}{4}$, $1878+\sigma+\frac{5}{4}$, $1878+\sigma+\frac{6}{4}$, $1878+\sigma+\frac{7}{4}$

$$W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right).f(m).F(M)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}p.\varrho^{\frac{3}{4}}.\left\{F(M)-F\left(M+\frac{1}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\frac{6}{12}\right)+f\left(m+\frac{7}{12}\right)+f\left(m+\frac{8}{12}\right)\right\}\\
&+p\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}\left|\begin{array}{l}
\frac{1}{12}\varrho^{\sigma+\frac{4}{4}}.\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{9}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{10}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{11}{12}\right)\right\}\\
+\frac{1}{12}\varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}.\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{3}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{12}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{13}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{14}{12}\right)\right\}\\
+\frac{1}{12}\varrho^{\sigma+\frac{6}{4}}.\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{4}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{15}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{16}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{17}{12}\right)\right\}\\
+\frac{1}{12}\varrho^{\sigma+\frac{7}{4}}.\left\{F(M)-F\left(M+\sigma+\frac{5}{4}\right)\right\}.\left\{f\left(m+\sigma+\frac{18}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{19}{12}\right)+f\left(m+\sigma+\frac{20}{12}\right)\right\}
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

also:

$$\left\{W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right) - W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)\right\}\cdot f(m) . F(M)$$

$$= \frac{1}{12} p \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \left| \begin{array}{l} \left(\varrho^{\sigma+\frac{4}{4}} - \varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}\right)\cdot\left\{F(M) - F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right)\right\}\cdot\left\{f\left(m+\sigma+\frac{9}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{10}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{11}{12}\right)\right\} \\ + \left(\varrho^{\sigma+\frac{6}{4}} - \varrho^{\sigma+\frac{7}{4}}\right)\cdot\left\{F(M) - F\left(M+\sigma+\frac{4}{4}\right)\right\}\cdot\left\{f\left(m+\sigma+\frac{15}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{16}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{17}{12}\right)\right\} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).p.\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}\cdot\left\{F(M) - F\left(M+\sigma+\frac{3}{4}\right)\right\}\cdot f\left(m+\sigma+\frac{13}{12}\right),$$

wenn man nämlich den Fundamental-Satz der Interpolation anwendet.

Die so eben erhaltene Gleichung können wir auch in der Form

$$\left\{W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right) - W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)\right\}\cdot f(m) . F(M)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).p.F(M).\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}.f\left(m+\sigma+\frac{13}{12}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).p.\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}.f\left(m+\sigma+\frac{13}{12}\right).F\left(M+\sigma+\frac{3}{4}\right)$$

schreiben, oder, nach Einführung der Functionen $\varphi(m')$, $\psi(m', M')$, in der Form:

$$\left\{W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right) - W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)\right\}\cdot f(m) . F(M)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).p.F(M).\varrho^{\frac{1}{4}}.f\left(m+\frac{1}{12}\right).\varphi\left(m+\frac{1}{12}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).p.\varrho^{\frac{1}{4}}.f\left(m+\frac{1}{12}\right).F\left(M-\frac{1}{4}\right).\psi\left(m+\frac{1}{12}, M-\frac{1}{4}\right).$$

Dividirt man auf beiden Seiten der Gleichung durch $f(m).F(M)$ und nimmt die Functionen g und G zu Hülfe, so erhält man

$$W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right) - W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot p.\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).\varrho^{\frac{1}{4}}\cdot\left\{g\left(m+\frac{1}{24}\right)\right\}^{-\frac{1}{12}}\cdot\varphi\left(m+\frac{1}{12}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot p.\left(1-\varrho^{\frac{1}{4}}\right).\varrho^{\frac{1}{4}}\cdot\left\{g\left(m+\frac{1}{24}\right)\right\}^{-\frac{1}{12}}\cdot\left\{G\left(m-\frac{1}{8}\right)\right\}^{+\frac{1}{4}}\cdot\psi\left(m+\frac{1}{12}, M-\frac{1}{4}\right)$$

als Lösung der Aufgabe II.

Bemerkung: Die Anwendbarkeit der Interpolations-Formel zum Beispiel auf die Gleichung

$$\left\{W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right) - W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)\right\} \cdot f(m) . F(M)$$

$$= \frac{1}{12} p \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \left| \begin{aligned} &\left(\varrho^{\sigma+\frac{4}{4}} - \varrho^{\sigma+\frac{5}{4}}\right) \cdot \left\{F(M) - F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right)\right\} \cdot \left\{f\left(m+\sigma+\frac{9}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{10}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{11}{12}\right)\right\} \\ +&\left(\varrho^{\sigma+\frac{6}{4}} - \varrho^{\sigma+\frac{7}{4}}\right) \cdot \left\{F(M) - F\left(M+\sigma+\frac{4}{4}\right)\right\} \cdot \left\{f\left(m+\sigma+\frac{15}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{16}{12}\right) + f\left(m+\sigma+\frac{17}{12}\right)\right\} \end{aligned} \right.$$

kann man noch etwas plausibler machen, wenn man die zweite Seite dieser Gleichung zuvor in die Form bringt:

$$= \frac{1}{12} . p . \left(1 - \varrho^{\frac{1}{4}}\right) . F(M) \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \left\{ \begin{aligned} &\varrho^{\sigma+\frac{12}{12}} . f\left(m+\sigma+\frac{9}{12}\right) + \varrho^{\sigma+\frac{12}{12}} . f\left(m+\sigma+\frac{10}{12}\right) + \varrho^{\sigma+\frac{12}{12}} . f\left(m+\sigma+\frac{11}{12}\right) \\ +&\varrho^{\sigma+\frac{18}{12}} . f\left(m+\sigma+\frac{15}{12}\right) + \varrho^{\sigma+\frac{18}{12}} . f\left(m+\sigma+\frac{16}{12}\right) + \varrho^{\sigma+\frac{18}{12}} . f\left(m+\sigma+\frac{17}{12}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$- \frac{1}{12} . p . \left(1 - \varrho^{\frac{1}{4}}\right) . \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \left\{ \begin{aligned} &\varrho^{\sigma+1} . f\left(m+\sigma+\frac{9}{12}\right) . F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right) + \varrho^{\sigma+1} . f\left(m+\sigma+\frac{10}{12}\right) . F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right) \\ &\qquad + \varrho^{\sigma+1} . f\left(m+\sigma+\frac{11}{12}\right) . F\left(M+\sigma+\frac{2}{4}\right) \\ +&\varrho^{\sigma+\frac{6}{4}} . f\left(m+\sigma+\frac{15}{12}\right) . F(M+\sigma+1) + \varrho^{\sigma+\frac{6}{4}} . f\left(m+\sigma+\frac{16}{12}\right) . F(M+\sigma+1) \\ &\qquad + \varrho^{\sigma+\frac{6}{4}} . f\left(m+\sigma+\frac{17}{12}\right) . F(M+\sigma+1) \end{aligned} \right.$$

führt man statt der einzelnen Summen in Bezug auf σ die Functionen φ und ψ ein, so wird diese zweite Seite zu

$$= \frac{1}{2} \cdot p . \left(1 - \varrho^{\frac{1}{4}}\right) . F(M) . \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{6} f\left(m - \frac{3}{12}\right) \cdot \varphi\left(m - \frac{3}{12}\right) + \frac{1}{6} f\left(m - \frac{2}{12}\right) \cdot \varphi\left(m - \frac{2}{12}\right) + \frac{1}{6} f\left(m - \frac{1}{12}\right) \cdot \varphi\left(m - \frac{1}{12}\right) \\ +&\frac{1}{6} \varrho^{\frac{1}{2}} f\left(m + \frac{3}{12}\right) \cdot \varphi\left(m + \frac{3}{12}\right) + \frac{1}{6} \varrho^{\frac{1}{2}} f\left(m + \frac{4}{12}\right) \cdot \varphi\left(m + \frac{4}{12}\right) + \frac{1}{6} \varrho^{\frac{1}{2}} f\left(m + \frac{5}{12}\right) \cdot \varphi\left(m + \frac{5}{12}\right) \end{aligned} \right.$$

$$- \frac{1}{2} \cdot p . \left(1 - \varrho^{\frac{1}{4}}\right) . \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{6} \cdot f\left(m - \frac{3}{12}\right) . F\left(M - \frac{1}{2}\right) . \psi\left(m - \frac{3}{12}, M - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} \cdot f\left(m - \frac{2}{12}\right) . F\left(M - \frac{1}{2}\right) . \psi\left(m - \frac{2}{12}, M - \frac{1}{2}\right) \\ +&\frac{1}{6} \cdot f\left(m - \frac{1}{12}\right) . F\left(M - \frac{1}{2}\right) . \psi\left(m - \frac{1}{12}, M - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} \cdot f\left(m + \frac{3}{12}\right) . F(M) . \varrho^{\frac{1}{2}} . \psi\left(m + \frac{3}{12}, M\right) \\ +&\frac{1}{6} \cdot f\left(m + \frac{4}{12}\right) . F(M) . \varrho^{\frac{1}{2}} . \psi\left(m + \frac{4}{12}, M\right) \qquad + \frac{1}{6} \cdot f\left(m + \frac{5}{12}\right) . E(M) . \varrho^{\frac{1}{2}} . \psi\left(m + \frac{5}{12}, M\right) \end{aligned} \right.$$

Wendet man auf $\varrho^x . f(y) . \varphi(y)$ und $\varrho^x . f(y) . F(z) . \psi(y, z)$ als besondere Fälle den allgemeinen Interpolations-Satz an, so erhält man die zuvor gefundene Formel. — Würde man auf die einzelnen Functionen $W\left(\frac{1}{2}\right)$ und $W\left(\frac{1}{4}\right)$ vor der Bildung ihrer Differenz die Interpolation angewandt haben, so hätte man den weniger genauen aber immerhin genügenden Ausdruck

$$W\left(\frac{1}{4}, m, M, p\right) - W\left(\frac{1}{2}, m, M, p\right)$$

$$= p\left(1 - \varrho^{\frac{1}{8}}\right) . \varrho^{\frac{3}{8}} . \left\{g\left(m + \frac{5}{48}\right)\right\}^{-\frac{5}{24}} \left\{\varphi\left(m + \frac{5}{24}\right) - \left[G\left(M - \frac{1}{16}\right)\right]^{+\frac{1}{8}} . \psi\left(m + \frac{5}{24}, M - \frac{1}{8}\right)\right\}$$

erhalten.

L.

ARTIKEL 18 DER ABHANDLUNG XXIII: DAS ANSCHLIESSEN EINER FUNCTION AN ALGEBRAISCHE FUNCTIONEN IN UNENDLICH VIELEN STELLEN.

[Die Abhandlung XXIII war vorgelegt am 1. März 1879.]

Artikel 18.

Absoluter Betrag der Anschluss-Function.

Ist $\mathrm{F}(\zeta)$ eine in Bezug auf das von ζ abhängige Argument z und für die Umgebung des Werthes $z = 0$ rational sich verhaltende Function, also von der Form

$$\mathrm{F}(\zeta) = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+\infty} z^{\mu}.F_{\mu}, \tag{187.}$$

worin m eine ganze positive oder negative Zahl oder die Null bedeutet, so will ich mit $\mathfrak{SG}[\mathrm{F}(\zeta)|z]$ die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder dieser Reihen-Entwickelung bezeichnen, also

$$\mathfrak{SG}[\mathrm{F}(\zeta)|z] = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+\infty} |z^{\mu}.F_{\mu}| = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+\infty} |z|^{\mu}.|F_{\mu}| \tag{188.}$$

setzen. Für die Anschluss-Functionen werde ich hier nur die absoluten Beträge derjenigen Glieder gebrauchen, welche den Potenzen des bei der Entwickelung der Anschluss-Function schon benutzten Argumentes entsprechen und deshalb das Argument für $\mathfrak{SG}$ nicht noch besonders andeuten. Demnach wird

$$(189.)\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|n] = \sum_{\nu=-m}^{\nu=+n} |z^\nu . F_\nu| = \sum_{\nu=-m}^{\nu=+n} |z|^\nu . |F_\nu|.$$

Aus dem Satze, dass der absolute Betrag einer Summe von Grössen nicht die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Grössen übertrifft, folgt für unsere Ausdrücke

$$(190.)\qquad |\mathrm{F}(\zeta)| \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{G}[\mathrm{F}(\zeta)|z]$$

$$(191.)\qquad |\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|n]| \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|n] \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{G}[\mathrm{F}(\zeta)|z].$$

Aus (25.) in dem Artikel 5 folgt, dass die Gleichung

$$(192.)\qquad \mathfrak{P}[\{\prod_\lambda \mathrm{F}_\lambda(\zeta)\}|z|n] = \mathfrak{P}[\{\prod_\lambda \mathfrak{P}[\mathrm{F}_\lambda(\zeta)|z|n_\lambda]\}|z|n]$$

besteht, wenn jede einzelne Function $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$, ... eine in der Umgebung des Werthes $z = 0$ rational sich verhaltende Function des von ζ abhängigen Argumentes z ist und wenn man die Ordnungszahlen $n, n_1, n_2, \ldots$ der einzelnen Anschluss-Functionen der Art gewählt hat, dass die Anzahl der wesentlichen Glieder in jeder Anschluss-Function dieselbe Zahl ist. Bilden wir nun von jeder der beiden Seiten der letzten Gleichung die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder und wenden auf die erste und auf die zweite Seite der dadurch entstandenen Gleichung beziehungsweise die erste und die zweite Relation in (191.) an, so erhalten wir

$$(193.)\qquad |\mathfrak{P}[\{\prod_\lambda \mathrm{F}_\lambda(\zeta)\}|z|n]| \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\{\prod_\lambda \mathrm{F}_\lambda(\zeta)\}|z|n] \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{G}\prod_\lambda \mathfrak{P}[\mathrm{F}_\lambda(\zeta)|z|n_\lambda].$$

Führt man das Product von Summen einzelner Grössen aus, fasst die dadurch erhaltenen Producte der einzelnen Grössen auf irgend eine Weise in Gliedern zusammen und bildet die Summe der absoluten Beträge dieser Glieder, so erhält man einen Werth, welcher denjenigen nicht übertrifft, den man erhält, wenn man statt der Summen der einzelnen Grössen die Summen von den absoluten Beträgen der einzelnen Grössen bildet und diese Summen mit einander multiplicirt. Hieraus ergiebt sich

$$(194.)\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{G}\prod_\lambda \mathfrak{P}[\mathrm{F}_\lambda(\zeta)|z|n_\lambda] \leqq \prod_\lambda \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}_\lambda(\zeta)|z|n_\lambda]$$

und demnach

$$(195.)\qquad |\mathfrak{P}[\{\prod_\lambda \mathrm{F}_\lambda(\zeta)\}|z|n]| \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\{\prod_\lambda \mathrm{F}_\lambda(\zeta)\}|z|n] \leqq \prod_\lambda \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}_\lambda(\zeta)|z|n_\lambda].$$

Das ist der Lehrsatz: Der absolute Betrag einer Anschluss-Function von einem Producte mehrerer gegebener Functionen übertrifft nicht die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder derselben Anschluss-Function. Die letztere Summe übertrifft auch nicht das Product aller derjenigen Factoren, von welchen jeder einzelne die Summe der absoluten Beträge der Glieder von der aus einer einzelnen gegebenen Function gebildeten Anschluss-Function darstellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Anschluss-Functionen für dasselbe Argument z und mit gleicher Anzahl von Gliedern gebildet worden sind. Für genügend kleine Werthe des Argumentes z müssen die gegebenen Functionen rational sich verhaltende Functionen von z sein, während in den Anschluss-Functionen, auf welche dieser Lehrsatz und die Relationen (190.) bis (195.) sich beziehen, der Werth von z ganz unbeschränkt ist.

Für den Fall, dass die gegebenen Functionen einander gleich werden, folgt aus diesem Lehrsatze noch

$$(196.) \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)^k|z|n-km] \leqq \{\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|n-m]\}^k,$$

wenn k eine ganze positive Zahl ist und $\mathrm{F}(\zeta)$ für einen genügend eingeschränkten Bereich von z in der Form (187.) dargestellt werden kann. Uebertrifft der Exponent k die Anzahl n der Glieder der Anschluss-Function, so kann man für den absoluten Betrag eine niedrigere Grenze als die in (196.) gefundene durch einen einfachen Ausdruck bestimmen. Die Ableitung desselben ist sehr ähnlich derjenigen für die Werthe-Grenze, welche bei einem negativen Exponenten besteht. Der letztere ist für unsere Untersuchung von besonderer Wichtigkeit; ich will deshalb für denselben die Untersuchung hier durchführen. Aus (187.) folgt

$$(197.) \qquad F_{-m}.z^{-m} = \mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m] \qquad \text{(vgl. (2) in Artikel 1)}$$

$$(198.) \qquad \mathrm{F}(\zeta) = F_{-m}.z^{-m}.\{1-\beta(z)\},$$

worin $\beta(z)$ die Form

$$(199.) \quad \beta(z) = \beta_1 z+\beta_2 z^2+\beta_3 z^3+\cdots = \mathfrak{P}[\beta(z)|z|n]+\beta_{n+1}z^{n+1}+\beta_{n+2}z^{n+2}+\cdots$$

hat. Beschränken wir nun die Werthe von z nicht nur auf solche, für welche die Reihe $\beta(z)$ unbedingt convergirt, sondern weiter auf einen so engen, den Punkt $z = 0$ einschliessenden Bezirk, dass darin der absolute Betrag von $\beta(z)$ immer ein echter Bruch wird, so finden wir

$$\{1-\beta(z)\}^{-k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \frac{\Pi(\mu+k-1)}{\Pi(\mu)\,\Pi(k-1)} (\beta(z))^{\mu}, \tag{200.}$$

also für jeden Werth von z auch

$$\mathfrak{P}[(1-\beta(z))^{-k}|z|n] = \mathfrak{P}\left[\left\{\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{\Pi(\mu+k-1)}{\Pi(\mu).\Pi(k-1)} \mathfrak{P}[\beta(z)|z|n]^{\mu}\right\}|z|n\right]. \tag{201.}$$

Es ist für jeden Werth von z

$$\mathfrak{P}[\beta(z)|z|n]^{\mu} = \sum_{(\mu)} \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu_1)\,\Pi(\mu_2)\dots\Pi(\mu_n)} (\beta_1 z)^{\mu_1} (\beta_2 z^2)^{\mu_2} \dots (\beta_n z^n)^{\mu_n}, \tag{202.}$$

wenn μ eine endliche ganze nicht negative Zahl bedeutet, und wenn die Summation über alle Werthesysteme der die Gleichung

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n \tag{203.}$$

erfüllenden nicht negativen ganzen reellen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ erstreckt wird. Aus den beiden Gleichungen (201.) und (202.) folgt

$$\mathfrak{P}[(1-\beta(z))^{-k}|z|n] = \sum_{(\mu)}{}' \frac{\Pi(\mu+k-1)}{\Pi(k-1).\Pi(\mu_1)\,\Pi(\mu_2)\dots\Pi(\mu_n)} (\beta_1 z)^{\mu_1} (\beta_2 z^2)^{\mu_2} \dots (\beta_n z^n)^{\mu_n}, \tag{204.}$$

worin μ durch (203.) bestimmt ist und die Summation jetzt über alle Werthesysteme der nicht negativen ganzen reellen und die Bedingung

$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \dots + n\mu_n \leqq n \tag{205.}$$

erfüllenden Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ auszudehnen ist. Denken wir auf der zweiten Seite der Gleichung (204.) diejenigen Summanden, welche Potenzen von z mit gleich hohen Exponenten $\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \dots + n\mu_n$ enthalten, zu Gliedern zusammengefasst und bilden wir dann von jeder Seite dieser Gleichung die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder, so erhalten wir unter Benutzung des oben schon angewendeten für absolute Beträge von Summen geltenden Fundamental-Satzes die Relation

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[(1-\beta(z))^{-k}|z|n] \leqq \sum_{(\mu)}{}' \frac{\Pi(\mu+k-1)}{\Pi(k-1).\Pi(\mu_1)\,\Pi(\mu_2)\dots\Pi(\mu_n)} \cdot |\beta_1 z|^{\mu_1}.|\beta_2 z^2|^{\mu_2}\dots|\beta_n z^n|^{\mu_n}. \tag{206.}$$

Beachten wir, dass

$$\Pi(\mu+k-1) \leqq \frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n-\mu)} \tag{207.}$$

ist, wenn die Argumente dieser Π-Functionen nicht negativ sind, erweitern wir ferner die Summation auf alle Werthesysteme der die Bedingung

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots+\mu_n \leqq n \tag{208.}$$

erfüllenden nicht negativen ganzen reellen Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so finden wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[(1-\beta(z))^{-k}|z|n] &\leqq \frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n).\Pi(k-1)}\sum_{(\mu)}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-\mu).\Pi(\mu_1)\Pi(\mu_2)\ldots\Pi(\mu_n)}\cdot|\beta_1 z|^{\mu_1}.|\beta_2 z^2|^{\mu_2}\ldots|\beta_n z^n|^{\mu_n}\\ &\leqq \frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n).\Pi(k-1)}\{1+|\beta_1 z|+|\beta_2 z^2|+|\beta_3 z^3|+\cdots+|\beta_n z^n|\}^n\\ &\leqq \frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n).\Pi(k-1)}\{\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[(1-\beta(z))|z|n]\}^n.\end{aligned} \tag{209.}$$

Mit Rücksicht auf die beiden Gleichungen (197.) und (198.) erhalten wir demnach

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m]}\right\}^{-k}|z|n\right] \leqq \frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n).\Pi(k-1)}\left\{\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}\left[\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m]}|z|n\right]\right\}^n, \tag{210.}$$

also den Lehrsatz: Dividirt man eine vorgegebene für den Nullwerth des Argumentes rational sich verhaltende Function durch ihre eingliedrige dem Nullwerthe des Argumentes angehörende Anschluss-Function, bildet für den auf diese Weise erhaltenen Quotienten die Summe der absoluten Beträge der Glieder von der $n+1$ gliedrigen, zum Nullwerth des Argumentes gehörenden Anschluss-Function der $(-k)^{\text{ten}}$ Potenz jenes Quotienten, so ist, welchen Werth man auch dem Argumente beilegt, diese Summe nicht grösser, als das Product des in der $(n+k-1)^{\text{ten}}$ Potenz eines Binomiums auftretenden $(n+1)^{\text{ten}}$ Binominal-Coëfficienten multiplicirt mit der n^{ten} Potenz der Summe der absoluten Beträge der Glieder von der $n+1$ gliedrigen und zum Nullwerthe des Argumentes gehörenden Anschluss-Function des genannten Quotienten.

Aus der letzten Relation ergiebt sich unter Benutzung der Gleichung (12.) auch

$$|\mathrm{F}(\zeta)|^k.\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)^{-k}|z|n+km] \leqq \frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n).\Pi(k-1)}\cdot\left|\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m]}\right|^k\cdot\left\{\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}\left[\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m]}|z|n\right]\right\}^n \tag{211.}$$

für jeden Werth von z, für welchen $\mathrm{F}(\zeta)$ bestimmbar ist, aber ohne dass die obige Darstellung $\mathrm{F}(\zeta)$ dann noch Gültigkeit zu haben braucht.

Wendet man die hier durchgeführten Untersuchungen auf Potenzen der gegebenen Function mit positiven Exponenten an, so findet man, dass die obige Relation (196.) auch für gebrochene positive Werthe von k gültig ist, ferner, dass

$$\text{(212.)}\quad \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m]}\right\}^k |z|n\right] \leqq \frac{\Pi(k)}{\Pi(n).\Pi(k-n)}\left\{\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}\left[\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(\zeta)|z|-m]}|z|n\right]\right\}^n$$

für $k \geqq n$ wird.

Die Definition der Anschluss-Function liesse sich dahin erweitern, dass für eine Summe von absoluten Beträgen der nach Potenzen des Arguments geordneten Glieder auch eine Anschluss-Function bestimmbar würde. Die Anwendung der letzteren würde dann noch niedrigere Werthegrenzen ergeben als die hier aufgestellten.

Für besonders einfache Functionen lässt sich die Summe der absoluten Beträge der Glieder der Anschluss-Functionen von den negativen Potenzen dieser Functionen in besonders einfacher Form darstellen. So ist zum Beispiel

$$\text{(213.)}\quad \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[(1-z)^{-k}|z|n] \leqq (n+1)k^n|z|^n \quad \text{für } |z| \leqq 1,$$

$$\text{(214.)}\quad \mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{P}[e^{-kz}|z|n] \leqq k^n e^{|z|}.$$

LI.

NEUE LÖSUNG DER KEPPLERSCHEN GLEICHUNG.

[Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 4. Juli 1891; s. Gött. Nachr., 1891, S. 223.]

Die Kepplersche Gleichung

$$M = E - e\sin E$$

zwischen der mittleren Anomalie M, der excentrischen Anomalie E und der Excentricität e einer elliptischen Bahn kann unter Zuhülfenahme einer beliebigen Grösse ε auch in der Form

$$e\sin\varepsilon - e\sin E - \sin(e\sin\varepsilon + M - E) = (e\sin\varepsilon - e\sin E) - \sin(e\sin\varepsilon - e\sin E)$$

dargestellt werden. Um dieser Gleichung eine zu ihrer Auflösung nach der als Unbekannte betrachteten Grösse E geeignete Form zu geben, setzen wir zur Abkürzung

$$\varepsilon_0 = M + e\sin\varepsilon$$

und bestimmen die Grösse ε_1 auf solche Weise durch e und ε_0, dass der Ausdruck

$$\frac{e\sin x + \sin(\varepsilon_0 - x)}{\sin(\varepsilon_1 - x)},$$

dessen Werth wir mit

$$\frac{e\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$$

bezeichnen wollen, unabhängig von x wird. Setzen wir der Reihe nach für x die Werthe E, $E-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\varepsilon_1$, $\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}$, ε_0, $\varepsilon_0 - \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\varepsilon_0$, $\frac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$\frac{e\sin x+\sin(\varepsilon_0-x)}{\sin(\varepsilon_1-x)}=\frac{e\sin E+\sin(\varepsilon_0-E)}{\sin(\varepsilon_1-E)}=\frac{-e\cos E+\cos(\varepsilon_0-E)}{+\cos(\varepsilon_1-E)}=\frac{\sin\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_1}=$$

$$=\frac{-e+\cos\varepsilon_0}{+\cos\varepsilon_1}=-e\cos\varepsilon_1+\cos(\varepsilon_0-\varepsilon_1)=\frac{e\sin\frac{1}{2}\varepsilon_1+\sin(\varepsilon_0-\frac{1}{2}\varepsilon_1)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon_1}=$$

$$=\frac{-e\cos\frac{1}{2}\varepsilon_1+\cos(\varepsilon_0-\frac{1}{2}\varepsilon_1)}{\cos\frac{1}{2}e_1}=\frac{e\sin\varepsilon_0}{\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}=\frac{-e\cos\varepsilon_0+1}{\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}=$$

$$=\frac{(1+e)\sin\frac{1}{2}\varepsilon_0}{\sin(\varepsilon_1-\frac{1}{2}\varepsilon_0)}=\frac{(1-e)\cos\frac{1}{2}\varepsilon_0}{\cos(\varepsilon_1-\frac{1}{2}\varepsilon_0)}=\frac{e\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}.$$

Benutzt man diese Gleichungen, so kann man die oben aufgestellte zweite Form der Kepplerschen Gleichung in die folgende

$$e\sin\varepsilon-\frac{e\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\sin(\varepsilon_1-E)=(e\sin\varepsilon-e\sin E)-\sin(e\sin\varepsilon-e\sin E)$$

verwandeln.

Die bei meiner im Jahre 1884 gegebenen Lösung schon eingeführte Function*)

$$\mathfrak{K}(\xi)=6\,\frac{\xi-\sin\xi}{\xi^3}=1-\frac{1}{4.5}\,\xi\xi+\frac{1}{4.5.6.7}\,\xi^4-\frac{1}{4.5.6.7.8.9}\,\xi^6+\cdots$$

gestattet es, die letzte Gleichung auch in der Form

$$\frac{\sin(\varepsilon_1-E)}{\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}=1-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{e\sin\varepsilon}(e\sin\varepsilon-e\sin E)^3\,\mathfrak{K}(e\sin\varepsilon-e\sin E)$$

zu schreiben.

Wenn ε von dem richtigen Werthe des E nur um Grössen von der Ordnung wie $e^{\nu+1}$ verschieden ist, und wenn für dieses ε und für die gegebenen Werthe von e und M nach den obigen Formeln die Werthe der ε_0, ε_1 und ε_2 berechnet werden, so erkennt man aus der letzten Formel, dass das so erhaltene ε_2 sich von dem wahren Werthe E nur um Grössen von der Ordnung wie $e^{3\nu+5}$ unterscheiden kann.

Wie aus der Definition von ε_0 hervorgeht, wird ε_0 sich von E nur um Grössen von der Ordnung wie $e^{\nu+2}$ unterscheiden können, während $\varepsilon-\varepsilon_0$ eine Grösse von der Ordnung wie e ist. Dies ergiebt sich durch die Gleichung

$$\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_0)=e\sin\varepsilon_1,$$

*) Siehe S. 95 dieses Bandes.

welche aus dem oben betrachteten von dem Werthe des x unabhängigen Bruche hervorgeht, wenn darin $x = \varepsilon_1$ gesetzt wird.

Ebenso ist $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ eine Grösse von der Ordnung wie e, weil aus den verschiedenen oben aufgestellten Formen für den von dem Werthe des x unabhängigen Bruch sich unmittelbar

$$\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = e \frac{\sin\varepsilon \sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_0}$$

ergiebt. Hiernach lässt die zuletzt für die Kepplersche Gleichung erhaltene Form erkennen, dass $\varepsilon_1 - E$ auch eine Grösse von der Ordnung wie e ist.

Wollte man aus gegebenen Werthen von e und M und mit einem zusammengehörigen Werthesystem der $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ aus einem angenäherten Werthe E der excentrischen Anomalie E einen genaueren Werth E berechnen, so könnte man, indem man

$$\eta = \frac{\sin(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0)}{(1+e)\sin\frac{1}{2}\varepsilon_0} = \frac{\cos(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0)}{(1-e)\cos\frac{1}{2}\varepsilon_0} = \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{e\sin\varepsilon}$$

$$\xi_\mu = 2e\sin\tfrac{1}{2}(E_\mu - \varepsilon)\cos\tfrac{1}{2}(E_\mu + \varepsilon)$$

setzt, die Kepplersche Gleichung in der Form

$$\sin(\varepsilon_1 - E_\lambda) - \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \tfrac{1}{6}.\eta.\xi_\mu^3.\mathfrak{K}(\xi_\mu)$$

anwenden.

Als besonderen Fall kann man aus den vorstehenden Gleichungen diejenigen Werte herleiten, welche ich im Jahre 1884 veröffentlicht habe, indem man nämlich ε den Werth 0 annehmen lässt, dann werden auch $\varepsilon_0 - M$ und $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ zu Null und ε_1 wird gleich dem dort mit E_2 bezeichneten Näherungs-Werthe für die excentrische Anomalie.

In dem allgemeinen Falle eines willkürlichen Werthes von ε könnte man mit einem angenäherten Werthe der excentrischen Anomalie beginnen, z. B. mit dem Werthe M oder $M + \varrho e \sin M$, welcher von dem richtigen sich um Grössen derselben Ordnung wie $e \sin M$ beziehungsweise wie $ee \sin M$ unterscheidet. Vortheilhafter würde ein Werth sein, welcher aus einer Tabelle entnommen ist, auch wenn man denselben ohne Interpolation für e und M entlehnt.

Aus gegebenem e und M und dem geeignet gewählten ε berechnet man die Werthe ε_0, ε_1, ε_2 nach den Formeln

$$\varepsilon_0 = M + \varrho e \sin\varepsilon, \quad \operatorname{tang}(\varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0) = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon_0$$

$$\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{e\sin\varepsilon}{1+e}\cdot\frac{\sin(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon_0} = \frac{e\sin\varepsilon}{1-e}\cdot\frac{\cos(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0)}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon_0}.$$

BEMERKUNGEN.

An die Spitze der zu den Abhandlungen des zweiten Bandes nötigen Bemerkungen stellen die Herausgeber als Nr. LII einen von Ernst Schering gegebenen Beweis für eine Formel, die C. J. Malmsten in seiner Abhandlung Zur Theorie der Leibrenten (Acta mathematica, Bd. I, S. 63—74. Stockholm, 1882) aufgestellt hat; diese Abhandlung ist von Ernst Schering in das Deutsche übersetzt und um die den erwähnten Beweis enthaltende Nachschrift (a. a. O. S. 75—76) vermehrt worden.

Dass die Herausgeber diesen Beweis nicht unter die Abhandlungen selbst eingeordnet, ihn vielmehr an diese Stelle gestellt haben, hat seinen Grund darin, dass der Beweis ohne Kenntniss der Malmstenschen Abhandlung und ihrer Bezeichnungsweise ganz unverständlich ist. Es erschien daher den Herausgebern das Vortheilhafteste zu sein, die aus der Malmstenschen Abhandlung nötigen Mitteilungen, die an Umfang dem Beweise Ernst Scherings gleichkommen, diesem unmittelbar voranzustellen, wodurch ihm zugleich seine Stelle in diesem Bande angewiesen war.

LII.

ZUR THEORIE DER LEIBRENTEN.

C. J. Malmsten benutzt die folgenden Bezeichnungen:

(1.) $W(x_k; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, welche gegenwärtig das Alter x_k hat, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre noch lebt.

(2.) $W(x_1, x_2, \ldots, x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass n Personen, welche gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haben, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre alle noch leben.

Hier und überhaupt im Folgenden wird vorausgesetzt, dass für alle Personen eine und dieselbe Lebenstabelle gilt.

(3.) ${}^{v}W(x_1, x_2, \ldots, x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen, welche gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haben, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre wenigstens v Personen noch leben.

(4.) $P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem n bestimmte Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haben, alle noch leben.

(5.) ${}^vP(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von n bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haben, wenigstens v Personen noch leben.

Das Problem, dessen Lösung Malmsten giebt, ist folgendes:

Den Werth von

$${}^vP(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zu bestimmen.

Hierfür ermittelt Malmsten zunächst ${}^vW(x_1, x_2, \ldots, x_n; i)$:

$$(9.) \qquad {}^vW(x_1, x_2, \ldots, x_n; i) =$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i).W(x_2; i)\ldots W(x_k; i).(1-W(x_{k+1}; i)).(1-W(x_{k+2}; i))\ldots(1-W(x_n; i))$$

und

$$(10\,\text{a.}) \qquad {}^vW(x_1, x_2, \ldots, x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1; i).W(x_2; i)\ldots W(x_{v+p}; i),$$

wo mit $\sum$ die Summe aller derjenigen Ausdrücke bezeichnet ist, die man erhält, wenn man in dem Producte unter dem Summationszeichen alle möglichen k-, bezw. $(v+p)$-gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausführt, und wo $z_p(v)$ einen noch zu bestimmenden Zahlenfaktor bezeichnet. Aus der Formel (10 a.) findet dann Malmsten

$${}^vP(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v).\sum P(x_1, x_2, \ldots, x_{v+p}).$$

An Stelle des von Malmsten zur Ermittelung des Werthes von $z_p(v)$ eingeschlagenen Weges geht Ernst Schering unmittelbar von der Vergleichung der beiden Formeln (9.) und (10 a.) aus.

[Nachschrift zu der Abhandlung mit dem gleichen Titel von C. J. Malmsten. Acta mathematica, Bd. I, S. 75 u. 76. Stockholm, 1882.]

In der Gleichung (10 a.), mit (9.) verglichen, nämlich

$$
(1.)\qquad {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots, x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) \ldots
$$
$$
\ldots W(x_k; i) . (1 - W(x_{k+1}; i)) . (1 - W(x_{k+2}; i)) \ldots (1 - W(x_n; i))
$$
$$
= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) . \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) \ldots W(x_{v+p}; i)
$$

die Coëfficienten $z_p(v)$ zu bestimmen.

Zu dem Zwecke benutzen wir die folgende, nach Potenzen von θ geordnete Reihenentwickelung

$$
(2.)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum_{\xi'} t W(\xi_1'; i) . t W(\xi_2'; i) \ldots t W(\xi_k'; i) . (1 + \theta W(\xi_{k+1}'; i)) . (1 + \theta W(\xi_{k+2}'; i)) \ldots
$$
$$
\ldots (1 + \theta W(\xi_n'; i))
$$
$$
= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} . \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v+p, \varphi) . t^{v+p-\varphi} . \theta^{\varphi} . \sum_{\xi} W(\xi_1; i) . W(\xi_2; i) \ldots W(\xi_{v+p}; i)
$$
$$
= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} . Z(v, p, t, \theta) . \sum_{\xi} W(\xi_1; i) . W(\xi_2; i) \ldots W(\xi_{v+p}; i).
$$

Hier ist zu bemerken:

1. $$\xi_1' \ldots \xi_k',\ \xi_{k+1}' \ldots \xi_n'$$
sollen mit den Werthen
$$x_1 \ldots x_k,\ x_{k+1} \ldots x_n,$$
abgesehen von der Reihenfolge, aber ohne Wiederholung zuzulassen, übereinstimmen.

2. $\sum\limits_{\xi}$ soll die Summation über alle solche Werthesysteme bedeuten, bei denen aber Platzveränderung weder der $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_k'$ unter sich, noch der $\xi_{k+1}', \xi_{k+2}', \ldots, \xi_n'$ unter sich zulässig ist.

3. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{v+p}$ sollen irgend welche $v+p$ der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten, aber ohne eine Wiederholung unter diesen zuzulassen.

4. $\sum\limits_{\xi}$ soll die Summation über alle solche Werthesysteme bedeuten, aber ohne eine Platzveränderung der Grössen ξ zuzulassen, also die Summation über alle $(v+p)$-gliedrigen Combinationen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ohne Wiederholung und ohne Versetzung.

5. $C(v+p, \varphi)$ sind zu bestimmende ganze Zahlen-Coëfficienten, abhängig von $v+p$ und φ.

Es ist

$$Z(v, p, t, \theta) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v+p, \varphi) \, . \, t^{v+p-\varphi} \theta^{\varphi}$$

gesetzt, und es ist offenbar

$$z_p(v) = Z(v, p, t, \theta) \text{ für } t = +1, \ \theta = -1. \tag{3.}$$

Nun bedeutet $C(v+p, \varphi)$ augenscheinlich die Anzahl der mit dem Factor $t^{v+p-\varphi}\theta^{\varphi}$ versehenen Glieder, welche entstehen, wenn man in dem ersten Theil der Doppelgleichung (2.) durch Multiplication die Klammer-Ausdrücke $(1+\theta W(\xi'_\lambda; i))$ auflöst; also ist

$C(v+p, \varphi) =$ der Anzahl der φ-gliedrigen Combinationen, ohne Wiederholung und ohne Versetzung, von $v+p$ Elementen, das heisst

$$C(v+p, \varphi) = \frac{(v+p)(v+p-1)\ldots(v+p+1-\varphi)}{1 \, . \, 2 \ldots \varphi} = (v+p)_{\varphi}$$

daher

$$Z(v, p, t, \theta) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (v+p)_{\varphi} \, . \, t^{v+p-\varphi} \, . \, \theta^{\varphi},$$

und demnach

$$Z(v, p, t=1, \ \theta=-1) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \, . \, (v+p)_{\varphi}$$

das heisst, zufolge (3.),

$$z_p(v) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \, . \, (v+p)_{\varphi} = (-1)^{p} \, . \, (v+p-1)_{p},$$

ebenso wie in Formel (29.) [der Malmstenschen Abhandlung].

Zu XXIII: DAS ANSCHLIESSEN EINER FUNCTION AN ALGEBRAISCHE FUNCTIONEN IN UNENDLICH VIELEN STELLEN (S. 63).

Für die auf Seite 63 von Ernst Schering in Aussicht gestellten weiteren Untersuchungen fanden sich in seinem Nachlasse ausser ganz wenigen Andeutungen nur zahlreiche Rechnungen vor, die aber noch nicht so weit gediehen waren, daß ihre Bearbeitung für die vorliegenden gesammelten Werke gerechtfertigt gewesen wäre. Deshalb haben sich die Herausgeber darauf beschränkt, den Artikel 18 »*Absoluter Betrag der Anschluss-Function*«, der sich als fast druckfertiges Manuscript vorfand, unter dem handschriftlichen Nachlasse als Nr. L auf den Seiten 411—416 dieses Bandes zum Abdruck zu bringen.

Zu XXIX: ZUM DRITTEN GAUSSISCHEN BEWEISE DES RECIPROCITATSSATZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE (S. 103—108).

Dieser Mitteilung Ernst Schering's, mit der man auch seinen Brief an Kronecker in Bd. 1, S. 410—412 vergleiche, fügte letzterer wiederum eine Bemerkung hinzu, in der er in sehr einfacher Weise nachwies, dass das Vorzeichen seines Doppelproductes mit dem Legendreschen Symbole übereinstimmt*).

Zu XXXIII: BERNHARD RIEMANN ZUM GEDACHTNISS (S. 161).

1) Zu S. 163. In der Gedächtniss-Rede auf Riemann (s. auch im Nachlass, S. 370) ist die Literatur zur Theorie der Potentialfunktionen nur angedeutet, vollständiger ist sie auf S. 299 angegeben.

Auf diese Literatur bezieht sich auch ein Teil des folgenden Briefes, den Ernst Schering an Heine am 18. October 1878 richtete:

»Sie haben mich durch das so schöne und werthvolle Geschenk**) »sehr erfreut. In der That es ist ein grosser Gewinn für die Wissen- »schaft, wenn in einem ihrer Gebiete der Meister nicht nur neue Er- »weiterungen ihres Umfanges schafft, sondern auch eine vollständige syste- »matische Darstellung des ganzen Inhalts derselben den dankbaren Lesern »übergiebt. Die grosse von Ihnen aufgewandte Mühe und Arbeit wird »jeder Mathematiker zu schätzen wissen. Der Zeitaufwand, welchen die »Vollständigkeit und Genauigkeit der geschichtlichen Bemerkungen und »der sachlichen Hinweise auf andere Schriften und Abhandlungen in

*) Kronecker's Werke, Bd. II, S. 539—540. (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1885, S. 117—118.)

**) [Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Auflage, Band I, 1878.]

»Anspruch nahm, war gewiss ein sehr bedeutender und bildet ein dankens-»wertes Opfer, das Sie der wissenschaftlichen Welt gebracht haben. — —

»Bei dem in der That so grossem Umfange der von Ihnen in Be-»tracht gezogenen Schriften ist es nur natürlich, dass Sie vielleicht nicht »an jeder Stelle den frühesten Autor getroffen haben.

»Im § 1 sagen Sie: »die beschleunigende Kraft .... lässt sich nach »einem folgenreichen Satze von Laplace (Mémoires etc., Année 1782, »Paris 1785) durch Differentialquotienten einer einzigen Function .... »analytisch ausdrücken«.

»Dieser Satz ist schon früher von Lagrange in grösster Allgemein-»heit und in der Erkenntniss dessen voller Bedeutung aufgestellt:

»Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui »s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances«. Nou-»veaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles Lettres, »de Berlin, année 1777. Lu le 2 Octobre 1777.

»— — —

»Nr. 1. Soient $M, M', M'' \ldots$ les masses des corps qui composent »le système donné; x, y, z les coordonnées rectangles de M, x', y', z' celle »de M', ... Qu'on fasse, pour abréger

$$»\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{MM''}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \frac{M'M''}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}} + \cdots$$

»on aura

$$\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dx},\ \frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dy},\ \frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dz}$$

»pour les forces avec lesquelles le corps est attiré par les autres corps »M', M'' .... suivant les directions des trois coordonnées x, y, z, de même

$$\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dx'},\ \frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dy'},\ \frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dz'}.$$

»...... Cette manière de représenter les forces est comme l'on voit »extrêmement commode par sa simplicité et par sa généralité; .....

»— — —

»Sie sagen: »Green nennt sie das Potential ...... und Gauss

»behält diese Bezeichnung im wesentlichen bei«. Dieser letztere Aus»druck könnte bei dem Leser leicht die Vorstellung hervorrufen, dass »Sie vermuthen, Gauss habe Kenntniss von jener Arbeit Green's ge»habt, während aus inneren wie aus äusseren Gründen sich nachweisen »lässt, dass Gauss dieselbe nicht gelesen hat.

»Im § 10 gebrauchen Sie die Worte:

»Mit Herrn Carl Neumann (Ueber die Entwickelung einer Function »mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen, Halle 1862) »drücken wir den Inhalt der letzten [Formel] durch den Satz aus: Der »geometrische Ort aller Punkte $x = a+bi$, für welche $M(x+\sqrt{x^2-1})$ »constant bleibt, ist eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1. Der con»stante Modulus stellt sich als Summe der grossen und kleinen Halb»axe dar«.

»Hiergegen könnte ich doch wohl Prioritätsrechte erheben:

»Es ist offenbar

$$
\begin{aligned}
»M(x+\sqrt{x^2-1}) &= M\{\cos(\operatorname{arc}\cos x) - i\sin(\operatorname{arc}\cos x)\} = M\{e^{-i\operatorname{arc}\cos x}\} \\
&= e^{i\,.\,\text{imaginären Theil von arc}\cos x} \\
&= \cos(\text{des imag. Theiles von arc}\cos x) \\
&\qquad - i\sin(\text{des imag. Theiles von arc}\cos x).
\end{aligned}
$$

»In meiner Preisschrift vom 4. Juni 1858: Ueber die conforme »Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene habe ich im Art. 7 gezeigt, »dass wenn der imaginäre Theil iQ von $\operatorname{arc}\cos x$ eine Constante ist, die »complexe Grösse x durch die Punkte einer Ellipse mit der halben »grossen Axe $\cos iQ$ und mit der Excentricität $= 1$ also mit der halben »kleinen Axe $= \frac{1}{i}\sin iQ$ dargestellt wird*)«.

Heine dankte in einem Briefe, datirt: Halle an der Saale, 20. October 1878 für diese Mitteilungen und hat die erste und die letzte in den »Zusätzen zum ersten Bande« am Schlusse von Bd. II des Handbuchs der Kugelfunctionen, 1881, S. 342 und S. 345 berücksichtigt.

Auf die Arbeiten von Clairaut, 1740 und 1743 (im Poggendorff' Lexikon steht Clairault) und von Lagrange 1777 über die jetzt Potential genannte Function weisen auch hin Baltzer, Zur Geschichte des Potentials (Giessen, 1878, August) in Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 86, S. 213—216, Berlin 1879 und Bacharach, Abriss der Geschichte der Potentialtheorie, Inaugural-Dissertation, Würzburg 1883.

---

*) [Siehe Band I dieser Werke, S. 80.]

2) Zu Seite 166 (und Nachlass S. 383). Die in Riemann's Nachlass vorgefundenen Untersuchungen über die »Mechanik des Ohres« sind von Henle und Ernst Schering in der Zeitschrift für rationelle Medicin, 3. Reihe, Bd. 29 veröffentlicht. In den von H. Weber herausgegebenen mathematischen Werke Riemann's stehen sie in der 1. Aufl., 1876, S. 316—328, in der 2. Aufl., 1892, S. 338—350.

3) Zu Seite 166, Zeile 21 von oben. In den Göttinger Nachrichten, 1867, S. 312 steht: ... »das ihm z. B. erst in seinem zwei und dreissigsten Lebensjahre nicht eigene Existenzmittel »als Extraordinarius verschaffte«. Die Herausgeber haben die nicht ganz klaren Worte »nicht eigene Existenzmittel«, trotzdem sie sich auch in dem Manuscripte finden, durch die ihnen zutreffender erscheinenden Worte »sichere Existenzmittel« ersetzt.

Zu XXXIV: ZUR FEIER DER HUNDERTSTEN WIEDERKEHR VON GAUSS' GEBURTSTAGE

und

zu XXXV: CARL FRIEDRICH GAUSS' GEBURTSTAG NACH HUNDERTJÄHRIGER WIEDERKEHR. FESTREDE.

Den Worten auf S. 172 Z. 9 bis 5 v. u. und auf S. 179 Z. 5 v. u. bis 180 Z. 2 v. o. wird zum Teil ein Brief als Grundlage gedient haben, den Kreil aus Wien am 24. April 1855 an Sartorius von Waltershausen in Göttingen richtete. Dieser Brief enthält die Abschrift eines von Wolfgang Bolyai in Maras-Vasarhely in Ungarn am 12. April 1855 an Kreil gesandten Schreibens, zu welchem Bolyai durch die Nachricht von Gauss' Tode am 23. Februar 1855 veranlasst war. Bolyai teilt in diesem Schreiben verschiedene Jugenderinnerungen an Gauss mit, darunter auch Folgendes:

»*Allein seine epochalische Dissertation war schon im August gedruckt,* »*und er wurde im 16. Julii doctorirt; und (im Disquisit. Arith. pag. 662)* »$\cos\frac{P}{17} = \ldots$ *war noch vor 1797 erfunden, weil er es bei mir dann* »*an einem Abende in Göttingen sagte. Eine Gleichung die allein seinen* »*Grabstein zieren könnte, wenn es nicht Wehe thäte so vieles auszulassen;* »*— zu viel für einen Grabstein, in seinen Werken bleiben sie (unleserlich.* »*Kr[eil]).*

So steht diese Stelle jetzt in dem gedruckten »Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai« ... herausgegeben von Franz Schmidt und Paul Stäckel, Leipzig 1899, S. 144.

Wenn aber Ernst Schering 1877 in dem Originale des 22 Jahre vorher verfassten und sehr undeutlich geschriebenen Briefe die Worte so las:

»... weil er bei mir dann am Abende in Göttingen sagte: Eine Gleichung, die allein »seinen Grabstein zieren könnte ...«

dann ergab sich die oben S. 172 und S. 180 vorausgesetzte Auffassung dieser Stelle, besonders wenn man noch die in einem Briefe von Bolyai an von Waltershausen am 13. Juli 1856 vorkommenden Worte hinzunimmt:

»Hierauf ruhte er [Gauss] von seiner anhaltenden stillen Arbeit meistens »bei mir aus —; sprach nie in voraus, selbst bey fertigen schweigend —; »nur einmal sah ich an ihm eine mässige Freude, wo er die kleine Tafel »auf welcher er das 17 eck Disqu. Ar. p. 662 berechnet hat zum Andenken »mir gab, ...«

(Briefwechsel zwischen Gauss und Bolyai ... S. 152.)

Es konnte hierdurch leicht bei Ernst Schering die (allerdings, wie man jetzt weiss, nicht richtige) Annahme entstehen, dass Gauss und Bolyai auch am Abend der Entdeckung der Konstruktion des 17 ecks (30. März 1796, s. Gauss' Werke, Bd. I, S. 476) in Göttingen zusammenkamen, denn er hatte wohl nicht erst in den Göttinger Matrikeln nach dem Datum der Immatrikulation von Bolyai: 11. October 1796 (s. Schmidt u. Stäckel S. 177) nachsehen lassen. Jedenfalls verdient aber diese Annahme nicht die scharfe sarkastische Kritik, welche die Herren Fr. Schmidt und P. Stäckel auf S. 199 des oben genannten Werkes geübt haben, wenn sie sagen: »Hieraus und aus der vorliegenden Aeusserung Bolyais' hat Schering in seiner »Festrede folgende Erzählung componiert: (folgen in sechs Zeilen die Worte, die hier S. 179 Z. 5 v. u. bis S. 180 Z. 2 v. o. stehen). Soviel Zeilen, soviel Irrtümer«.

Man kann sich bei dem Lesen dieser Kritik des Gedankens nicht erwehren, dass die Herren Herausgeber des Briefwechsels zwischen Gauss und Bolyai dabei von einer gereizten Stimmung gegen Ernst Schering sich beeinflussen liessen, weil dieser sich lange einer vollständigen Veröffentlichung jenes Briefwechsels widersetzte, in dem so zahlreiche ganz private Mitteilungen über schmerzliche und schwierige Familienverhältnisse vorkommen. Ihm war hierbei Gauss' eigene Ansicht massgebend, wie sie sich in seinem Urteile über die vollständige Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Olbers und Bessel kundgiebt. (S. diesen Band S. 209.) Auch Sartorius von Waltershausen schreibt an Herrn Schmidt am 30. December 1872: »Die Briefe von Gauss an Bolyai sind ein Vermächtnis des letzteren, und mir zur **discreten** Veröffentlichung anvertraut. (S. Briefwechsel zwischen Gauss und Bolyai S. 163.)

Zu XXXV: CARL FRIEDRICH GAUSS' GEBURTSTAG NACH HUNDERTJÄHRIGER WIEDERKEHR. FESTREDE (S. 182).

Herr P. Stäckel sagt in der »Theorie der Parallelen von Euklid bis auf Gauss«, Leipzig 1895, S. 217: »Die beiden Briefe von Gauss waren bereits 1877 im 22. Bande der Göttinger Abhandlungen, jedoch ungenau veröffentlicht worden«. Diese Worte sollen sich auf die »Festrede« von Ernst Schering beziehen, aber die Bezeichnung »ungenau« lässt wohl grössere

Abweichungen vom Original vermuten, als tatsächlich vorkommen. Diese beschränken sich nämlich auf folgende:

Göttinger Abhandlungen Bd. 22, 1877:	Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel 1880:	In diesem Bande S. 182 Zeile von oben:
Ueber ein Thema	Auch über ein anderes Thema	2
von meinen Ansichten	über meine Ansichten	5
Gegner	Boeoter*)	11
der Ebene	des Planum	17
Die Definition	diese Definition	19
schliesst stillschweigend ein	involvirt tacite	20
der selbstverständlichen Wahrheiten	a priori	25
als die reine Grössenlehre	wie die reine Grössenlehre	25

Es sind daher für die Rede im Wesentlichen nur die Fremdwörter durch deutsche Worte ersetzt. Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass bei dem jetzigen Abdrucke der Festrede für alle darin vorkommenden Briefstellen der Wortlaut der inzwischen veröffentlichten Briefwechsel massgebend gewesen ist. In der Festrede selbst waren manche Auszüge aus Briefen von Gauss, wohl um das Verständnis der Zuhörer zu erleichtern, etwas abgeändert.

Zu XXXXII: BRIEFWECHSEL ZWISCHEN G. LEJEUNE DIRICHLET UND HERRN LEOPOLD KRONECKER (S. 231).

Dieser Briefwechsel ist in Dirichlet's Werken, Band II, S. 388—411, Berlin 1897 wieder abgedruckt.

Zu XXXXIV: [BEMERKUNGEN ZU ABHANDLUNGEN VON CARL FRIEDRICH GAUSS].

1) Bei der Durchsicht dieser Bemerkungen sind einige Druckfehler gefunden, die hier zusammengestellt sind:

Gauss' Werke, Band	Dieser Band, Seite
II, S. 382, Z. 4 v. u. für $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}i \equiv i^{\lambda}(A+Bi)$ lies $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}i = i^{\lambda}(A+Bi)$	322, Z. 11 v. o.
III, S. 329, Z. 7 v. u. für $\frac{t.t-1}{1.2}(t-\frac{1}{2})f^3(x+\frac{1}{2})$ lies $\frac{t.t-1}{1.2.3}(t-\frac{1}{2})f^3(x+\frac{1}{2})$	336, Z. 8 v. u.
IV, S. 184, Z. 12 v. o. für $\log Gm$ lies $\log GM$	338, Z. 13 v. u.
IV, S. 184, Z. 1 v. u. für $\psi(m, M) fm . Fm$ lies $\psi(m, M) fm . FM$ ebenso ist an mehreren Stellen der Seiten 186. 187 des IV. Bandes von Gauss' Werken Fm durch FM zu ersetzen.	339, Z. 7 v. o.
IV, S. 186, Z. 8 v. o. für $\frac{1091}{119232}$ lies $\frac{1001}{119232}$	341, Z. 3 v. o.

*) S. 182 ist leider der Druckfehler »Boeater« stehen geblieben.

IV, S. 186, Z. 11 v. o. für $P^0-\frac{1}{99}\frac{105}{104}P^0-\frac{11}{1152}$ lies $P^0-\frac{1}{90}\frac{105}{104}P^0-\frac{11}{1152}$		341, Z. 6 v. o.
IV, S. 186, Z. 13 v. o. für $\log g\left(m+\frac{11}{49}\right)^{\frac{13}{28}}$ lies $\log g\left(m+\frac{11}{48}\right)^{\frac{13}{24}}$		341, Z. 8 v. o.
IV, S. 186, Z. 8 v. u. für $f\left(m+\frac{12}{11}\right)$ lies $f\left(m+\frac{12}{12}\right)$		341, Z. 3 v. u.
IV, S. 188, Z. 9 v. o. für $g(46.56)$ lies $g(46.56)^{\frac{1}{24}}$		343, Z. 8 v. u.
IV, S. 188, Z. 10 v. o. für $G(65.33)$ lies $G(65.33)^{\frac{3}{8}}$		343, Z. 7 v. u.
IV, S. 188, Z. 10 v. o. für $G(65.27)$ lies $G(65.27)^{\frac{1}{2}}$		343, Z. 7 v. u.
IV, S. 446, Z. 13 v. o. für 51°31′37″85 lies 51°31′47″85		345, Z. 20 v. o.
IV, S. 446, Z. 20 v. u. für $\frac{1}{47245}$ lies $\frac{1}{47232}$		345, Z. 1 v. u.

2) Erst bei dem Druck dieser »Bemerkungen« sind die Herausgeber auf die »Verbesserung«[en] an einer leicht übersehbaren Stelle ganz am Schluss der Abhandlung von Gauss: Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen .... Göttingen und Altona, Göttingen 1828 aufmerksam geworden. Danach sind sowohl in Gauss' Werken, wie auch in diesem Bande noch folgende Fehler zu verbessern:

Gauss' Werke, Band	Dieser Band, Seite
IV, S. 446, Z. 11 v. o. für Abplattung $\frac{1}{302{,}76}$ lies $\frac{1}{302{,}78}$	345, Z. 13 v. u.
IV, S. 446, Z. 11 v. o. für 57009,746 lies 57009,758	345, Z. 12 v. u.

(In dem Wiederabdruck jener Gaussischen Abhandlung in Gauss' Werken, Bd. IX, S. 49 sind diese Verbesserungen berücksichtigt.)

Wenn die Zahl 57009,746 unrichtig ist, so muss sie auch in Gauss' Werken, Bd. IV, S. 447, Z. 12 v. u. uud S. 448 in den Correktionsfaktoren, sowie in diesem Bande, S. 348, Z. 3 v. o. und an den übrigen Stellen auf S. 348 u. 349 durch 57009,758 ersetzt werden.

Zu XXXXV: BEWEIS DES DIRICHLETSCHEN SATZES, DASS DURCH JEDE EIGENTLICH PRIMITIVE QUADRATISCHE FORM UNENDLICH VIELE PRIMZAHLEN DARGESTELLT WERDEN (S. 357—365).

Der hier zum ersten Male zum Abdruck gebrachte Beweis des Dirichletschen Satzes bildet den mittleren Teil eines Manuscriptes, welches zahlentheoretische Untersuchungen enthält und das Datum »Göttingen im Juni 1856« trägt. Das Entstehen dieser Untersuchungen darf wohl auf Anregungen zurückgeführt werden, die Ernst Schering in der von Dirichlet im Winter-Semester 1855/6 gehaltenen Vorlesung über Zahlenlehre erhalten hatte.

Die in dem ersten und dritten Teile des Manuscriptes enthaltenen Untersuchungen sind von Ernst Schering zu selbständigen Abhandlungen umgearbeitet worden und zwar die des ersten Teiles zu der unter Nr. VII im ersten Bande (S. 135—148) wieder abgedruckten Arbeit »*Die Fundamental-Classen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen*«, die des dritten Teiles auf

Dirichlet's Wunsch (vgl. den Brief Schering's an Herrn Bachmann, S. 433) zu der Abhandlung Nr. IV des ersten Bandes (S. 87—102) »*Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres*«. Da diese Abhandlungen als die endgültige Fassung, die Ernst Schering jenen Untersuchungen geben wollte, angesehen werden müssen, so ist in den gesammelten Werken von dem Abdrucke des ganzen Manuscriptes Abstand genommen worden.

Dass er den Beweis des Dirichletschen Satzes habe, erwähnt Ernst Schering zuerst in einem Briefe an Kronecker vom 14. Mai 1863, der unter Nr. V im ersten Bande, S. 103 u. 104, wieder abgedruckt ist, und dann in der oben genannten Arbeit über die Fundamental-Classen (Bd. 1, S. 137). In dieser letzteren Arbeit findet sich nur wenig später noch die Bemerkung, dass sich mit Hülfe der Eigenschaften der Fundamental-Classen auch der Dirichletsche Satz mit dem Zusatze beweisen läßt, den Dirichlet in seiner Notiz in den Comptes rendus hebdomadaires d. J. 1840 hinzugefügt hat*); dieser Zusatz besagt, dass unter den, durch eine eigentlich primitive quadratische Form darstellbaren, Primzahlen unendlich viel solche sich befinden, die zugleich in irgend einer mit den Charakteren der quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform enthalten sind.

Dirichlet gab in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1840**) den Beweis seines ursprünglichen Satzes, dass durch jede eigentlich quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellbar sind, nur für den Fall, dass die Determinante der quadratischen Form regulär und eine negative Primzahl, deren absoluter Betrag $\equiv 3 \pmod 4$, ist. Von dieser Beschränkung lässt sich zwar der Dirichletsche Beweis mit Hülfe der Sätze, die von Ernst Schering in den Artikeln 4—7 seiner Abhandlung über die Fundamental-Classen entwickelt sind, leicht befreien, wie H. Weber in seiner Abhandlung in den Math. Ann., Bd. 20, S. 301—329, 1882 hervorhebt; aber der Dirichletsche Beweis bedurfte noch in seinem wesentlichsten Punkte einer Ergänzung, die zuerst H. Weber in der genannten Arbeit veröffentlicht hat. Der Vollständigkeit wegen sei bemerkt, dass den Dirichletschen Satz in der späteren Fassung zuerst A. Meyer streng bewiesen hat***). Vgl. auch die Darstellung, die P. Bachmann in seiner *Analytischen Zahlentheorie*†) dem Beweise des Dirichletschen Satzes gegeben hat.

Ueber den befremdlichen Umstand, dass Ernst Schering wohl den ersten und dritten Teil seiner Untersuchungen, nicht aber den mittleren Teil mit seinem Beweise des ursprünglichen Dirichletschen Satzes veröffentlicht hat, gibt nachstehend abgedruckter Brief von Ernst Schering an Herrn Professor Paul Bachmann in Weimar Aufklärung. Letzterer wünschte für den zweiten Teil seines grossen zahlentheoretischen Werkes, die schon genannte *Analytische Zahlentheorie*, den Beweis des Dirichletschen Satzes, dessen Ernst Schering in seiner Abhandlung über die Fundamental-Classen Erwähnung tut, kennen zu lernen und hatte sich deshalb an ihn mit der Anfrage, ob und wo dieser Beweis veröffentlicht sei, gewandt. Auf diese Anfrage antwortete Ernst Schering:

---

*) Dirichlet's Werke, Bd. 1, S. 619—623.

**) Dirichlet's Werke, Bd. 1, S. 497—502.

***) J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 103, 1888, S. 98—117, unterzeichnet: Zürich, Septbr. 1886.

†) Leipzig 1894, S. 272—307.

Sternwarte Göttingen, 1893 Mai 10.

Geehrter Herr Kollege!

Entschuldigen Sie, dass ich erst jetzt zur Beantwortung Ihres Briefes gelange. In demselben stellen Sie mir die Frage, ob mein Beweis des Satzes, dass jede primäre quadratische Form zweier Veränderlichen unendlich viele Primzahlen darstellt, veröffentlicht worden ist. Das ist leider bis jetzt nicht geschehen! Meinen Beweis in ausführlicher Bearbeitung habe ich Dirichlet vorgelegt. Derselbe sagte, dass er seinen Beweis dieses Satzes veröffentlichen wolle; deshalb möge ich selbst nur meine Benutzung dieses Lehrsatzes zum Beweise des Satzes, dass Formen, welche die gleichen Zahlen darstellen, einander eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind, ihm in französischer Bearbeitung mitgeben; er wolle nach Paris reisen, um seinen Freund Liouville zu besuchen, der könne dies in seinem Journal veröffentlichen.

Dirichlet ist nicht zur Ausarbeitung seines Beweises gelangt. Nach seinem Tode wurde mir die Herausgabe der Gaussschen Werke übertragen, so dass ich keine Zeit übrig behielt, eigene Schriften zur Veröffentlichung zu bringen. Später ist diese Arbeit, wie noch andere, im Schranke liegen geblieben. Leider, leider!

Ihre Frage darnach, deren ich mich dankbar erinnern werde, soll mir eine Mahnung sein, die Sache doch noch zum Druck zu bringen!

Kronecker hat in seinem Journal Band 100 einen Hilfssatz daraus ohne Beweis zur Veröffentlichung gebracht.

Mit den besten Grüssen

Ihr ergebener

E. Schering.

Auch in einem späteren Briefe vom 17. Februar 1895, in dem sich Ernst Schering bei Herrn Bachmann für die Uebersendung seiner *Analytischen Zahlentheorie* bedankt, bemerkt er, dass er seine Abhandlung über die Darstellung von Primzahlen durch eigentlich primitive quadratische Formen jetzt nicht werde veröffentlichen können, da er mit der Herausgabe von Gaussischem Nachlass beschäftigt sei und sich deshalb wohl bis auf Weiteres mit den bereits veröffentlichten Teilen seiner Untersuchungen werde begnügen müssen.

Herrn Professor Bachmann sei an dieser Stelle der herzlichste Dank für die grosse Liebenswürdigkeit gesagt, mit der er sowohl die obigen Briefe den Herausgebern zur Verfügung stellte, als auch das Manuscript des Scheringschen Beweises seinerseits ebenfalls einer genauen Durchsicht unterzog.

Berichtigungen.

Auf S. 360, Z. 11 v. o. statt »auf alle f, die durch $2\alpha_1 A + 2\beta_1 B + \cdots + 2\varepsilon_1 E$ dargestellt werden«
lies »auf alle f, deren Quadrate durch $\alpha_1 A + \beta_1 B + \cdots + \varepsilon_1 E$ darstellbar sind«.

Auf S. 364, Z. 18 v. o. statt »die Anzahl der Primzahlen«
lies »die Anzahl der Linearformen der Primzahlen«.

Zu XXXXVI: ZUM GEDÄCHTNISS AN B. RIEMANN.

1) Zu Seite 369: Ernst Schering wandte sich 1866 an zwei frühere Lehrer von Riemann am Gymnasium Johanneum in Lüneburg: G. H. Seffer (später Oberschulinspektor in Hannover) und C. Schmalfuss (später Oberschulrat in Hannover), mit der Bitte um Mitteilungen über Riemann. Aus diesem Briefwechsel möge das mitgeteilt werden, was für den Lebenslauf und die Charakter-Entwickelung von Riemann von Interesse ist.

Ernst Schering an G. H. Seffer.

[Göttingen 1866.]

Sie werden sich meiner als Ihren Schüler im Winter 1845 auf 46 in der Quinta des Lüneburger Johanneum wohl nicht mehr erinnern, dagegen werden Sie den zu jener Zeit bei Ihnen im Hause wohnenden Riemann gewiss noch lebhaft im Gedächtniss haben. Sein für die Ausbildung der mathematischen Wissenschaften leider zu früh erfolgter Tod zwingt mich, dem Gebrauche gemäss in der hiesigen Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, der wir beide seit einigen Jahren angehört haben, ihm eine Gedächtnissrede zu halten und zwar schon am Sonnabend d. 7. December d. J. Da es bei einem so bedeutenden Mathematiker immer von Interesse ist, wie er sich schon in der Schule den verschiedenen Wissenschaften gegenüber verhalten hat .... so erlaube ich mir mit der Bitte um die betreffenden Mittheilungen Sie zu behelligen.

— — — — — —

G. H. Seffer an Ernst Schering.

Hannover, 23. Nov. 1866.

Herzlich gern bin ich zwar bereit, Ihnen die gewünschten Notizen über den leider so früh verstorbenen, berühmten Riemann zu geben, so gut ich vermag, fürchte aber, dass sie Ihnen weniger Ausbeute bieten werden, als Sie erwartet haben.

Die Veranlassung, die ihn in mein Haus in Lüneburg brachte (ich meine Ostern 1844) war eben die Eigenthümlichkeit — oder Schwäche — beim Anfertigen schriftlicher Aufsätze, von der er selbst Ihnen gesagt hat. Er konnte mit der Vollendung derselben durchaus nicht fertig werden — und eben aus dem Ihnen bekannten Grunde. Sie genügten ihm nicht, — bald Zweifel gegen das bereits Niedergeschriebene — bald neue Gedanken, die ihm kamen, und die dann nothwendig — seiner Meinung nach — noch eingeschaltet werden mussten, dann aber häufig die ganze, ursprüngliche Anlage der Arbeit wieder änderten etc. etc.

So kam es, dass er mit seinen deutschen und lateinischen Aufsätzen immer im Rückstande blieb und endlich so sehr darin war, dass die Lehrer-Conferenz den Schulgesetzen gegenüber seinetwegen in Verzweiflung war. Nun kannten wir andere Lehrer ihn wohl als guten Schüler, mein Freund Schmalfuss aber interessierte sich ganz besonders für ihn, eben seiner mathematischen Gaben wegen. Auf Schmalfuss' Bitte nahm ich ihn deshalb gegen ein ermässigtes Kostgeld zu meinen übrigen Pensionären in mein Haus und verpflichtete mich gegen die Lehrer-Conferenz, für die prompte Ablieferung seiner Aufsätze von nun an sorgen zu wollen. Diese Verpflichtung habe ich erfüllt, aber freilich auch manchen Abend bis in die Nacht bei ihm gesessen, um den Schluss seines — dem Gedankengange nach mir von ihm bereits mitgetheilten — Aufsatzes abzuwarten, bis dann schliesslich regelmässig doch nichts anderes übrig blieb, als dass er auf mein Verlangen und seines Sträubens ungeachtet mit einem immerhin noch nicht recht vorbereiteten und etwas gewaltsamen Schlusse endigen musste.

Ob er damals geringes Interesse für Sprachen gezeigt hat, darüber wird Schmalfuss besser urtheilen können; ich habe ihm nur Unterricht im Hebräischen ertheilt. (Er war ja ursprünglich zum Theologen bestimmt.) Im

Hebräischen gehörte er aber, allerdings ohne gerade besondere Gaben dafür zu zeigen, doch zu meinen besten Schülern. Und dabei will ich als curiosum noch mittheilen und als solches nicht verschweigen, dass der grosse Mathematiker auch einen gewissen Antheil hat an der Abfassung meines damals erscheinenden »Elementarbuchs der hebräischen Sprache«, das jetzt auf den Gymnasien Deutschlands und der Schweiz verhältnissmässig viel gebraucht wird. Ich hatte mir nämlich die Aufgabe gestellt, die Uebungsstücke, welche zur Einübung der jedesmal vorhergehenden grammatischen Lehre und Regel dienen sollten, nur aus Stellen des alten Testaments zusammenzusetzen, zugleich aber doch dahin zu sehen, dass sie bei dieser Zusammensetzung doch wenigstens möglichst oft auch wieder ein zusammenhängendes Ganze bildeten. Das war dann freilich zu Zeiten eine etwas schwierige Aufgabe, für die sich eben Riemann lebhaft interessierte. Er hat oft Stunden lang gesessen und mir solches Material zu den Uebungsstücken aus dem alten Testamente zusammengesucht. So kann ich denn allerdings sagen, dass mein hebräisches Elementarbuch mehrere seiner Uebungsstücke zum grossen Theil dem grossen Mathematiker Riemann zu verdanken hat.

Was seine religiöse Richtung betrifft, so war er damals meiner Ueberzeugung nach fromm-kirchlich. (Ich gab auch den Religionsunterricht in Prima.) Später als er schon Privatdocent war, hat er mir einmal bei einem Besuche in Göttingen viel von einer philosophischen Arbeit erzählt, die ihn damals beschäftigte, bei der er von irgend einer mathematischen Basis ausgehend schliesslich (oder vielleicht auch gelegentlich) dahin kam die biblische Schöpfungsgeschichte und andere christliche Grundlehren als richtig und nothwendig zu beweisen. Eben deshalb explicierte er sie mir so lebhaft. Ich muss freilich gestehen, dass ich ihm keineswegs folgen konnte, ja so gut wie gar nichts davon verstand, aber doch die Grossartigkeit seiner Ziele bewundern musste. Er scheint die Arbeit wohl nicht vollendet zu haben; sie hätte Aufsehen erregen müssen.

Im häuslichen Leben bei uns war Riemann still, bescheiden, anspruchslos, treu der Hausordnung sich fügend. Er hat uns nie zu irgend einem Tadel oder einer Klage über sein Verhalten Anlass gegeben und machte uns insofern unsere Aufsichts-Pflicht gar leicht. — — —

Ernst Schering an C. Schmalfuss.

[Göttingen 1866.]

— — —

Der leider so früh verstorbene Riemann, einer der ersten Mathematiker seiner Zeit, hatte das Glück Ihr Schüler gewesen zu sein; er gedenkt dieses Umstandes in seiner bei der Promotion am 14. November 1851 eingereichten Vita mit den Worten:

Tenebar imprimis mathematicorum studio, in quo magna cum liberalitate me adjuvebat Schmalfuss, Iohannei director, vir optime de me meritus . . .

— — — — — Ueber diese Gegenstände [mathematische Bücher, die Riemann schon auf dem Gymnasium las und über Riemann's damals schon geäusserte Ansichten über die Axiome der Geometrie] erlaube ich mir nun, Sie um Mittheilungen zu bitten. — — —

C. Schmalfuss an Ernst Schering.

Hannover, 27. Novbr. 1866.

— — — Riemann wurde, nachdem er einige Jahre das hiesige Lyceum besucht hatte, Secundaner auf dem Johanneum in Lüneburg. Von hier aus, wo er schon als guter Mathematiker unter seinen Mitschülern etwas galt, habe ich nur eine charakteristische (ein ex ungue leonem) Sache in Erfahrung gebracht: er bespricht als 11 bis 12 jähriger Knabe mit Altersgenossen die Weihnachtsgeschenke, die sie ihren Eltern machen wollen. Weil sie Pappen gelernt haben, wollen sie Proben ihrer darin erworbenen Geschicklichkeit geben. Der eine liefert dies, der andere das. Ich, sagt Riemann, habe mir einen immerwährenden Kalender ausgedacht Er wird verlacht, aber er hat sein Werk vollbracht nicht bloss zum Erstaunen seiner kleinen Freunde, sondern auch zur Verwunderung urtheilsfähiger Erwachsener. Es sei, höre ich, nicht eine mechanische Nachahmung, sondern eine aus eigenem Nachdenken hervorgegangene Arbeit gewesen. Mein Gewährsmann ist einer von den kleinen Freunden, jetzt Regierungsassessor Busse.

Die Fassungskraft für mathematische Gegenstände gab sich mir sofort kund; und es bedurfte bei Riemann nur der Andeutung eines mathematischen

Gesetzes, um dasselbe mit den weitesten Consequenzen zur Klarheit und in feste Form gebracht zu sehen, und zwar in grösster Allgemeinheit. Aus pädagogischen oder psychologischen Gründen beschäftigte ich ihn nur mit Elementarmathematik, damit er nicht, zu früh eingeführt in transcendente Kreise, die Form für das Wesentliche nähme, obwohl bei ihm solche Vorsicht wohl nicht erforderlich gewesen wäre. Alles, was ich besitze an Euklidischen Dingen mit den Commentaren von Joannes Hernagius und dem Jesuiten Clavius (Clavig) an bis zu Pfleiderer und Camerer und Hauber; was ich von der Archimedischen Literatur besass, Apollonius Pergaeus etc. alles dies las er, und unter dem Lesen ward Alles sein sicheres Eigenthum. Newton's Arithmetica universalis und des Cartesius' Geometrie interessierten ihn nicht minder; doch bemerke ich, dass, wenn ich in meiner Wahrnehmung nicht geirrt habe, Riemann am wenigsten Interesse an der sog. rechnenden Geometrie fand. (Die mechanische Methode war ihm nicht zusagend.) Was ihn selbst auszeichnete, eine fast unglaubliche Gabe der Anschauung, construierender Phantasie und zugleich der abstrahierendsten Verallgemeinerung, das zog ihn auch im Studium an. Er war noch nicht lange Primaner, als er aus eigener Kraft Alles, was die Meyer-Hirschsche Sammlung enthält, durchgearbeitet hatte und nur ein, ich weiss nicht mehr welches Gesetz, als ihm noch nicht klar bezeichnete. In den ersten Stunden, in denen er ebene Trigonometrie lernte, hatte er schon sämmtliche trigonometrische Aufgaben (in systematischem Sinne) ohne Beihülfe selbst gelöst. Eine mathematische Stunde hat er nie versäumt, wenn er nicht krank war; aber ich verlangte natürlich nicht von ihm, dass er seine Mitschüler bloss begleitete, während er allen voranfliegen konnte, vielmehr sann ich darauf, ihm in jeder Stunde etwas zu bieten, was seinen Kräften angemessen war, und jedesmal ist er über die Grenze, die ich als seine Schranke und auch wohl als meine betrachte, hinausgegangen und brachte regelmässig eine Fülle von Ergebnissen, die ich nicht in solchem Maasse erwartet hatte. Von mathematischem Unterricht ist er dispensiert gewesen. Im ersten Jahre seines Primabesuches (irre ich nicht, so war es Pfingsten) bat er mich um mathematische Lectüre: »wenn sie nicht zu leicht wäre«, fügte er in seinem bescheidenen Tone hinzu, »so wäre es mir recht lieb!« — Ich wies ihn an mein Bücherbrett. Da kam er dann mit Legendre: Theorie der Zahlen.

»Versuchen Sie«, war meine Antwort, »was Sie verstehen«. Das war am Freitag Nachmittag. Am Donnerstag darauf brachte er mir das Buch wieder: »Wie weit sind Sie darin gekommen?« — »Das ist ja ein wundervolles Buch; ich weiss es auswendig!« — Bei der Reifeprüfung, bis wohin er das Werk nicht wieder vor Augen gehabt hat, bewies er, dass ihm alles, worauf ich als Examinator mich nicht ohne Mühe vorbereitet hatte, um angemessene Aufgaben nach Legendre zu stellen, geläufig war, als habe er sich speciell auf diesen Prüfungsgegenstand vorbereitet. — Zahlentheorie zog ihn besonders an. — Ich hatte mit meinem Buchhändler die Verabredung getroffen, dass er mir womöglich alle in Deutschland erscheinenden mathematischen Werke vorlegen sollte. Da geschah es denn oft, dass er eines, das charakteristisch und für ihn fasslich war, kennen lernte. Dass er Sachen wie Legendre's Geometrie und eine unzählige Menge von geometrischen Aufgaben aus meiner Bibliothek kennen lernte und verarbeitete, brauche ich nicht besonders zu erwähnen. Im letzten Jahre nur, wo er lateinische Aufsätze und deutsche nicht zur rechten Zeit abgeliefert und mich als Director und sich als meinen Liebling blossgestellt hatte, führte ich zu meinem eigenen Schmerze die Drohung aus, dass ich eine ziemlich lange Zeit mich gar nicht um seine mathematischen Studien bekümmerte. In der Prüfungscommission, die über Riemann's Censur abzustimmen hatte, konnte ich mit Recht, als ich über seine mathematischen Leistungen mein Urtheil abgeben sollte, mich dahin aussprechen, dass ich Riemann ungleich mehr verdanke, als er mir. Als Nebenarbeit hatte er im letzten Jahre neben anderm die ganze Sphärik für sich gewissermassen erfunden; denn er kannte die Werke von Pohl und Schultze etc. zufällig gar nicht und war ganz, wie ersterer, davon ausgegangen, die ebene Geometrie, so viel wie möglich, auf die Kugel zu übertragen. Ich bedaure sehr, dass mir nichts geblieben ist von der Sinnigkeit und Einfachheit seiner Beweisführungen und Formelentwicklungen. Schon damals war er ein Mathematiker, neben dessen Vermögen der Lehrer sich arm fühlte. — Seine Abstractionen über die räumlichen Dimensionen fallen nicht in seine Schulzeit, sondern in sein erstes Studienjahr.

Aus persönlicher Bekanntschaft mit Riemann wissen Sie selbst, wie schwer es ihm wurde, in fliessendem Vortrage seine Gedanken zu entwickeln. Dazu kam, dass kein Ausdruck ihm genügte, der nicht alles umfasste, was er bezeichnen sollte, und dass er ungemein zaghaft war, eine Darstellung, die nicht, wie eine allgemeine, alle einzelnen Fälle umfassende Formel von untadeliger Präcision war, als richtig anzuerkennen: deshalb schrieb er, deutsch wie lateinisch, unter logischen Wehen und unter beständigen Hindernissen und verwarf, was er eben nach scharfem Denken gefunden hatte, etc. So kam er schwer zur Abfassung. Schlecht hat er nie geschrieben, aber auch nie rasch und mit Leichtigkeit. Zum Verständniss der Schriftsteller besass er hinreichende grammatische und sprachliche Kenntnisse; im Uebersetzen fehlte ihm leichter Fluss und Gewandtheit; aber bei schweren Stellen war er dem Klügsten gleich und liess nichts sitzen als unverstanden, gerade weil es schwer war. Dass seine Mitschüler im Sophokles, Thucydides und Plato, wenn sie eine Stelle nicht zum Verständniss hätten bringen können, ihn zu Rathe gezogen haben, wurde mir in Lüneburg s. Z. erzählt; einer seiner Mitschüler, der hier ist und über diesen Punkt von mir befragt worden ist, kann dies nicht bestätigen. — Ich für meinen Theil habe es immer für ein grosses Glück angesehen, dass ich einen solchen Schüler, wie Riemann gehabt habe, und bin ihm noch heute für die vielfache Anregung, die er mir gegeben hat, und für die Freude, die ich an seiner wunderbaren Begabung und Entwickelung gehabt habe, für meine ganze Lebenszeit dankbar.

Habe ich Ihnen durch vorstehende, nothgedrungen in grosser Eile geschriebenen Mittheilungen einen kleinen Dienst geleistet, so bin ich sehr erfreut.

Mit vorzüglicher Hochachtung

ergebenst

C. Schmalfuss.

Zu XXXXVI: ZUM GEDÄCHTNISS AN B. RIEMANN.

2) Zu Seite 383: Ernst Schering bat im Jahre 1866 Frau Professor Riemann, ihm Nachrichten über die letzten Lebensjahre ihres Mannes, besonders über den Aufenthalt in Italien, mitzuteilen, um diese entweder in der Gedächtnissrede oder in einer beabsichtigten Biographie Riemann's benutzen zu dürfen. Sie hat darauf die folgenden Notizen niedergeschrieben und an Ernst Schering gegeben. Als sie bei ihrer letzten Anwesenheit in Göttingen im Sommer 1898 erfuhr, dass dessen Werke herausgegeben würden, hat sie darum gebeten, dass jene Notizen in diesen Werken veröffentlicht würden, »da überhaupt so wenig über Riemanns Leben gedruckt sei«.

Frau Professor Riemann ist inzwischen im Alter von $68^3/_4$ Jahren am 3. Januar 1904 bei ihrer einzigen Tochter Ida in Bremen gestorben, die seit 1884 mit Herrn Prof. Dr. C. Schilling, Direktor der dortigen Seefahrtschule, verheiratet ist.

Die Herausgeber haben sich nicht für befugt gehalten, an der Form der folgenden Notizen etwas zu ändern; sie sind vielmehr genau in dem knappen Stil des Originals gelassen.

[Notizen von Frau Professor Riemann (1866) über die letzten Lebensjahre ihres Mannes].

»Im Juli 1862 Krankheit, später Vorlesungen im Hause gehalten, fort- »während angegriffene Gesundheit, Anregung durch Herrn von Walters- »hausen zu einer Reise nach Italien, Befürwortung durch Baum und Lan- »genbeck, freundliche Verwendung von den Herren Weber, Walters- »hausen, Wöhler, Helferich, Griesebach. Bewilligung von 500 Thalern »zur Reise; Ausstattung durch Herrn von Waltershausen mit den schönsten »Empfehlungsschreiben für Sicilien, wodurch uns unendliche Erleichterung »und Annehmlichkeit in jeder Hinsicht zu Theil wurde, Creditbrief besorgt »und überhaupt nach jeder Seite hin für Riemanns Wohl gesorgt und die »grösste Theilnahme bethätigt.

»Erste Reise angetreten Mitte November 1862.

»Seereise von Marseille nach Messina, grosse Freude Riemanns darüber, »er kam nicht vom Verdeck trotz schlechten Wetters, Ankunft in Messina »d. 25. November. Theures Leben im Gasthause, freundliches Anerbieten »des Consul Wilhelm Jaeger — (jetzt todt) seine Villa in Gazzi eine halbe »Stunde von Messina zu beziehen. Uebersiedlung dahin am 4ten Decbr. »Von der Schwiegertochter Johanna Jaeger geb. Tobler auf's freundlichste

»mit allem versehen, was wir brauchten. Freundschaftlicher Verkehr mit der »ganzen Familie von Jaeger, Klostermanns, Camps, Gonsenbachs, »Loefflers, Jaegers junior und mit den Herren Dr. Schubring und Pastor »Hartwig.

»Die grösseste Freude waren Riemann weite Ausflüge in's Land hinein, »oft des Morgens 8 Uhr schon aufgebrochen, den Mittag in einer Bauernhütte »verbracht und erst bei Mondschein zurückgekehrt, viel Freude fand er daran, »mit den Landleuten zu reden, ihre Sitten und Anschauungen kennen zu »lernen; die höchsten Punkte wurden, wenn auch Anfangs mit Mühe, er»klommen, um die herrliche Fernsicht zu geniessen, die man bei der unendlich »klaren Luft hatte. Tour zu Esel mit Schubring und den Jaegerschen »Knaben, Fahrt nach dem Faro. Auf dem Monte Cappucino das Kloster be»sehen. Auf die Citadelle bei Messina gestiegen, von dort wundervolle Aus»sicht auf ganz Messina, den Hafen, das gegenüber liegende Calabrien, die »Stadt Reggio. Den Dom besehen bei grossartiger Erleuchtung am Weih»nachtsabend. Mit Jaegers in's Theater. Besondere Freude hatte Riemann »unmittelbar am Strande sich aufzuhalten, hauptsächlich beim Scirocco, wir »haben oft Stunden dort gesessen und uns vom Schaum der Wellen bespritzen »lassen.

»Besserung im Befinden, aber immer noch Auswurf und Husten, Weih»nachtsabend sehr froh in der Familie Jaeger verbracht, auch Sylvesterabend. »Im Januar einige kalte Tage, sonst den ganzen Winter das herrlichste »Wetter, Jaeger meinte sich kaum eines so günstigen Winters zu erinnern »während der 50 Jahre, die er schon in Sicilien lebe. Anfang März Reise »nach Syracus zu Lande über Aci Reale nach Taormina, grosse Freude über »die herrliche Natur, die Reste des Alterthums, griechisches Theater besehen, »Anblick des Aetna. Führer Don Cicio. Nacht in Giardini, den folgenden »Tag nach Catania, Abend zugebracht in der Familie Jacob, Verwandte von »Jaeger's. Besuch bei der Baronessa Bruca, grosse Freude über Walters»hausens etwas zu hören. Von dem Mathematiker Maddem umhergeführt, »alle Universitäts Gebäude besehen, Bibliothek, u. s. w. Kloster der Cassinesen, »Prior Tornabene (Botaniker) schönen botanischen Garten angelegt, die Erde »dazu vom Aetna herunter holen lassen. Cassinese Joeni Riemann allent»halben im Kloster umhergeführt, sprach gut deutsch, uns die Kirche gezeigt

»und uns die Orgel vorspielen lassen, in Catania vier Tage, dann zu Schiff »nach Syracus, durch Herr Dr. med. Rizzo in seinem Wagen umhergeführt »nach den Steinbrüchen, das Ohr des Dionysios u. s. w. wir luden ihn mit seiner »Nichte in's Hotel zu Mittag, froh verbrachter Tag.

»Abreise von Messina 19 März von Jaeger mit Empfehlungsbriefen für »Palermo und Neapel versehen. Bekanntschaften der Professoren Albeg»giani, Cannizzaro in Napoli; letzterer sprach etwas deutsch. Zusammen»treffen mit Bessel, mit ihm einen Abend beim Consul Delkescamp. Bota»nischen Garten besehen, Fahrt nach Monreale, herrliches Kloster Santa Maria »nuova. Dom besehen. Palazzo reale. Zisa. Grab des Grafen Butera.

»Fahrt nach Neapel. Sternwarte besehen. Director nicht zu Hause, von »Professor Fergola freundlich umhergeführt, er besuchte Riemann öfter, holte »ihn auch ab, ihm die zweite Sternwarte auf St. Elmo zu zeigen, wo Rie»mann noch mehrere kennen lernte, deren Namen ich nicht mehr weiss, ich »habe die Briefe von damals nachgesehen, Riemann schreibt über die Bekannt»schaften in Neapel: »ich lernte mehrere Mathematiker kennen und wurde »am Tage vor meiner Abreise von einem der Aelteren eingeladen, einen Tag »mit den dortigen Mathematikern zu verleben, er wollte sie alle einladen »gemeinschaftlich eine Tour nach dem Camaldolenser Kloster zu machen, »dessen Prior mit ihnen sehr befreundet ist. Ich lehnte aber ab, weil es zu »kurz vor der Abreise und ich E. nicht allein lassen wollte«.

»Besuch beim Geologen Prof. ? Botanischen Garten besehen, freundliche »Aufnahme von Prof. ?

»Von Neapel aus viele Ausflüge gemacht, nach Camaldoli zurück über »Antignano, Grotta dei cani, nach Herculanum und Pompeji. Häufiger Besuch »des Museo Borbonico. Pozzuoli. Fahrt nach Capri, mehrere Tage auf»gehalten, Riemann ganz entzückt über die schöne Fernsicht von den »höchsten Spitzen der Insel, die von uns ohne Beschwerden auf kleinen »schnellen Pferden erklommen wurde. Anacapri. Tiberiusfelsen. Ruinen »der Barbarossaburg. Blaue Grotte beim schönsten Sonnenschein gesehen.

»Ruderfahrt von Capri nach Sorrent in einer Barke. Von Sorrent nach »Neapel zu Wagen. Wohnung Santa Lucia 4 Treppen hoch, von da herr»lichste Aussicht auf Vesuv, Hafen, Stadt und das weite Meer.

»Ankunft in Rom d. 11ten April. Bekanntschaft mit Padre Secchi und

»seinem Assistenten Scarpellini, beide an der Sternwarte auf dem Capitol. »— Prof. Brunn und Prof. Hensen, am archäologischen Institut angestellt, »Riemann eingeladen. Prior des Jesuiter Collegiums Trudi giebt das Haupt-»Journal für Mathematik heraus. Dr. Kunde freundliche Theilnahme.

»Riemann hatte grosse Freude an den Kunstschätzen, die in Rom auf-»gehäuft sind, besonders zogen ihn die Alterthümer an, er machte auch viele »Ausflüge in die Umgebungen, um Ueberreste alter Bauten zu sehen, fast »täglich im Vatican, grosse Freude über die Gruppe des Laokoon, stunden-»lang davor gesessen; sehr gefiel ihm das Fresco-Gemälde in den Stanzen »— die Schule von Athen. Aufenthalt in Rom 7 Wochen. Dann von Civita-»vecchia nach Livorno, von da nach Pisa.

»Bekanntschaft mit Betti erneuert, durch ihn bekannt gemacht mit den »Prof. Scolari, D'Ancona, Leonardi, De Benedetti, Felici. Besuch mit »Betti bei der Familie Novi. Prof. Betti sprach davon, ob Riemann, »da er doch im Süden leben müsse, sich wohl entschliessen würde, die durch »Mossotti's Tod erledigte Professur anzunehmen. Riemann antwortete darauf, »dass er darüber ihm noch nichts sagen könne, er wolle sich mit seinen Göt-»tinger Freunden berathen. Darauf bot Betti, der inzwischen mit dem Unter-»richtsminister Amari gesprochen, Riemann die Stelle geradezu an, den »Brief haben Sie mitgenommen; einen zweiten vom 22. Juli 1863 füge ich »bei, ich habe die betreffende Stelle etwas übersetzt. Betti bittet Riemann »sich so rasch wie möglich zu entscheiden.

»»Geliebter Freund!

»Ich habe die Sache in der Weise geordnet, dass wenn Ihre An-»nahme erfolgt ist, keine Schwierigkeit mehr sein kann, zu Ihrer Ernen-»nung als Professor der Universität Pisa. Es ist aber Beschleunigung »durchaus nöthig, da, wenn Sie gegen meine und meiner Collegen Wünsche »nicht annehmen wollen, wir es sofort wissen müssen, weil wir dann »daran denken müssten, uns anderweitig zu versehen. Deshalb sehe ich »mich genöthigt Sie um Ihren Entschluss zu bitten, welchen ich günstig »hoffen will, obgleich die Verzögerung mich ein wenig fürchten lässt«.

»Hierauf antwortete Riemann:

»»Mon très cher ami!

»Hier au soir j'ai reçu votre lettre du 22 Juillet et je me hâte de »vous écrire en réponse. Bien que l'offre, qui m'a été faite par vous, »m'ouvre une perspective assez belle, je n'y peux répondre en ce moment »que négativement, l'état de ma santé n'étant pas assez bon pour que je »puisse m'engager à présent à faire des leçons l'hiver prochain. J'espère »que vous me pardonnerez de ne vous avoir pas fait savoir plus promp»tement ma résolution quand je vous aurai rapporté comment nous avons »passé le temps depuis votre départ de Milan, etc.«

»Mit Betti zusammen noch längeren Aufenthalt in Florenz gemacht, »durch ihn die Bekanntschaft des Herrn Bischiera und Familie, des Prof. »Tardi aus Genua, des Direktors der Sternwarte in Florenz, Donati, des »Mediciners Tommasi, Florenz, des Prof. Villari, Prorektor der Savonarola, »Direktor der Scuola normale in Pisa. Mit diesen Herren trafen wir Abends »häufig in Café Donnei zusammen. Rückreise nach Göttingen über den »Splügen, Comer See. Heftige Erkältung in Göttingen, Heiserkeit, schlechtes »Befinden, freundliche Verwendungen der Herren von Waltershausen und »Weber.

»Zweite Reise angetreten d. 21. August 1863. Helene*) mitgenommen. »Reise über München, Innsbruck, Botzen nach Meran; von Meran zurück »nach Botzen, über Verona nach Venedig. Eine Woche Aufenthalt dort vom »20—27. Sept., dann weiter nach Florenz. Zusammentreffen mit Betti. »Grosse Bereitwilligkeit von Betti uns in allen Stücken behülflich zu sein, »eine Wohnung für uns in Pisa besorgt, durch seine Hauswirthin Signora »Bardeloni uns ein Mädchen gemiethet u. s. w.; er war Riemann wirklich »ein intimer Freund, mit dem er sich stets mit dem grössten Vertrauen über »seine Arbeiten aussprach, die er noch auszuführen hatte. Betti's Umgang »Riemann sehr angenehm. Betti hatte schon früher grosses Interesse für »Riemann gezeigt, seine sämmtlichen Arbeiten ins Italienische übersetzt und »Riemann schon in Göttingen aufgesucht.

»Winter in Pisa sehr ungünstig, heftige Kälte, Arno zugefroren. Schwere

*) [Schwester Riemanns.]

»Krankheit von Helene. Geburt der kleinen Ida.*) Galileifeier. — Be»kanntschaft mit einer deutschen Familie Jakobi, viele Freundlichkeit er»wiesen, Augsburgische allgemeine Zeitung mitgetheilt u. s. w. Familie Felici »ganz besonders freundlich gegen uns benommen. Freundschaftlicher Verkehr »mit der Familie des Prof. Novi, Mathematiker, Tassinari, Chemiker. Ein »deutscher Club durch den Bruder von Kronecker arrangiert.

»Im Sommer vor's Thor gezogen in eine Villa. Riemann's Befinden »ziemlich gut, angestrengtes Arbeiten, die ϑ-Functionen sind in dem Sommer »1864 fertig geworden. Tod von Helene.**) Schlechtes Befinden von Rie»mann. Er bekam die Gelbsucht, musste in Folge ableitenden Brunnen »trinken. Verschlimmerung des Zustandes. Bekanntschaft des Advokaten »Chiesi, Vorsteher der Waldenser Gemeinde, der uns durch sein uneigen»nütziges Entgegenkommen grosse Erleichterung bei der Beerdigung [der »Schwester Helene] u. s. w. verschaffte.

»Den Winter 64/65 wieder in Pisa zugebracht. Aufenthalt von Prym »bei uns, fortwährend die intimsten Beziehungen zu Betti und Felici. Aerzte »Prof. Bachetti und Prof. Marcacci. In März 1865 Besuch von Betti mit »Brioschi.

»Mai, Juni in Livorno zugebracht, von da über Genua an den Lago »Maggiore, Juli Villa in Selasca bei Intra, August in San Mauritius bei Intra, »September nach Pegli bei Genua. Gastrisches Fieber. Freundliches Ent»gegenkommen von Consul Leutpold. Lebhafte Wünsche Riemanns nach »Göttingen zurückzukehren. Die Absicht war den Winter auf Sardinien in »Cagliari zuzubringen.

»Reise über Marseille, Lyon, Genf sehr beschwerlich für Riemann. »Ankunft in Göttingen d. 3ten Oktober. — Winter erträglich. Geburt des »kleinen todten Sohnes, was Riemann noch recht schmerzlich berührte. »Wunsch Riemanns sich den Sommer über etwas zu erholen, um den Winter »womöglich noch einige seiner Arbeiten zu vollenden. Die Hoffnung auf »Genesung hatte Riemann mit dem Sommer 1864 aufgegeben.

»Den 16ten Juni [1866] Antritt der dritten Reise nach Italien. Unter-

---

*) [22. Dezember 1863; nach freundlicher Mitteilung von Herrn Prof. Dr. C. Schilling.]

**) [28. August 1864.]

»brechung durch die Kriegsereignisse. Glückliche Fahrt über den St. Gott- »hard. Ankunft am Lago Maggiore, grosse Freude Riemann's, die ihm so »liebe Gegend noch einmal zu sehen. In den letzten Tagen noch mit der »Arbeit über die Mechanik des Ohres beschäftigt. Rasches Abnehmen der »Kräfte, vollständig vorbereitet auf sein Ende, gestorben bei vollem Bewusst- »sein am 20ten Juli in Selasca bei Intra, Villa Pisoni. Freundliche Theil- »nahme der Familien Güller und Gventer, Schweizer; für die Bestattung »Sorge getragen und mir vieles erleichtert, das Manuscript zurückgeschickt »u. s. w. Die Leichenrede hielt ein italienischer Geistlicher, Signor de Scoc- »cia aus Mailand von der englischen Missionsgesellschaft«.

Ich bitte sehr mich zu entschuldigen, Herr Professor, aber in der Kürze der Zeit konnte ich es nicht besser zusammenstellen. Wählen Sie nun gütigst das Ihnen tauglich erscheinende aus.

Ich weiss nicht, ob wir eingehend genug über die Freundschaft zwischen Betti und Riemann gesprochen haben und besonders hervorgehoben, wie offen und rückhaltlos Riemann sich gegen Betti über seine wissenschaftlichen Forschungen ausgesprochen, Riemann hat besonders in Florenz oft mehrere Stunden mit ihm über Mathematik gesprochen, ich meine hauptsächlich über die Fortsetzung oder weitere Ausführung seiner Arbeit über Abel'sche Functionen, für die Betti sich sehr interessierte. Betti's grosse Freundlichkeit für Riemann und die vielen Gefälligkeiten, die Riemann ihm verdankte, müssten vielleicht besonders hervorgehoben werden, und dass Riemanns Arbeiten fast alle von Betti in's Italienische übersetzt sind.

Zu XXXXVIII: [ÜBER EIN UNVERÄNDERLICHES PENDEL . . . .] (S. 393—399).

Die Zahlen auf S. 398 beziehen sich auf eine von Repsold ausgeführte und am 13. Nov. 1869 an E. Schering übersandte Zeichnung des Pendels, insbesondere der Arretirungsvorrichtung der Achse des Pendels.

Aus dem Briefwechsel zwischen E. Schering und A. Repsold und Söhne ergiebt sich, dass zwei cylindrische Pendelstäbe, einer aus Stahl, der andere aus Messing, von den auf S. 398 angegebenen Dimensionen von Repsold im Januar 1871 an die »Königl. Sternwarte in Göttingen, Abteilung für Geodaesie und Mathematische Physik« geliefert sind.

Zu XXXXIX: [ZWEI AUFGABEN AUS DER RENTENRECHNUNG.]

Bei der Aufstellung der Formeln für $B(1, b, m, M)$ auf S. 403 und für $B(\frac{1}{4}, \beta, m, M)$ auf S. 404 ist der für das vergangene letzte Quartal des Jahres 1877 am 1. Juli 1878 zu zahlende Beitrag, dessen Kapitalwert am 1. Januar 1878 $\frac{1}{4} b \cdot \varrho^{\frac{1}{2}}$ war, nicht berücksichtigt. Da aber bei der Bildung der Differenz

$$B(\tfrac{1}{4}, \beta, m, M) - B(1, b, m, M)$$

alle Glieder, die den Kapitalwert der am 1. Juli 1878 zu zahlenden Summe angeben, herausfallen, so würde das Resultat nicht geändert, wenn jener Beitrag noch in Betracht gezogen würde.

LEBENSLAUF.

Ernst Christian Julius Schering wurde am 13. Juli 1833 im Forsthause Sandbergen geboren, das mitten im Walde etwa 2 km südlich vom Flecken Bleckede an der Elbe in dem damaligen Königreich, der jetzigen Provinz, Hannover lag. Sein Vater Ernst Christian August Schering, der zweitälteste Sohn des 1834 gestorbenen Predigers Ernst Philipp Schering in Bühlitz bei Lüchow, war seit 1824 in Sandbergen als Förster angestellt, nachdem er als Freiwilliger im Hannoverschen Kielmanseggeschen Jägercorps in den Freiheitskriegen mitgekämpft, insbesondere i. J. 1813 die Gefechte der Hannoverschen Truppen gegen die Franzosen und i. J. 1815 die Schlacht bei Waterloo und den darauf folgenden Einzug in Paris mitgemacht hatte. Er war in zweiter Ehe seit dem 10. April 1831 mit Emilie Langermann verheiratet, der ältesten Tochter des Amtsvoigts Langermann in Dreunhausen an der Elbe, im Amte Winsen an der Luhe.

Aus Ernst Schering's frühester Kindheit sei eines Ereignisses Erwähnung getan: In einem strengen Winter fuhr ein Verwandter seine Mutter, die den Kleinen auf dem Schoosse hielt, im Schlitten über die zugefrorene Elbe und geriet dabei in eine nicht bemerkte offene Stelle hinein. Nur mit großer Mühe konnten Mutter und Kind den kalten Fluten noch entrissen werden.

Den ersten Unterricht erhielt er mit seinen beiden, $1^1/_2$ und 3 Jahr jüngeren Brüdern Emil und August im Elternhause von einem Hauslehrer.

Im Jahre 1845 wurde der Vater nach Scharnebeck, einem Pfarrdorfe etwa 7 km östlich Lüneburg versetzt; (er wurde 1859 zum Oberförster ernannt und hat dort bis zum Jahre 1870 im Hannoverschen und später Preußischen Forstdienste gestanden.) Die Försterei Sandbergen wurde später nach Bleckede verlegt und das Wohnhaus und die Nebengebäude 1863 auf Abbruch verkauft. Das ganze Gelände wurde aufgeforstet und ist jetzt mit etwa 40jährigen Kiefern bestanden, zwischen denen nur einige ältere Linden und Syringenbüsche die Stelle der früheren Försterei andeuten.

Von Michaelis 1845 an besuchte Ernst Schering das Gymnasium Johanneum in Lüneburg und verließ es im Juni 1850 mit dem Abgangszeugnisse aus der ersten Realklasse. Schon frühe zeigte sich seine besondere Vorliebe und Begabung für die mathematischen Fächer; auch aus den Schulzeugnissen ist das zu ersehen; sein Lehrer Kühns, Inspektor der Realschule des Johanneum, erzählte noch später, daß er ihm einen neuen Beweis eines Satzes aus der Lehre der Kettenbrüche verdanke.

Mit der Absicht, sich dem Baufache zu widmen, studierte er vom Herbste 1850 bis zum Herbste 1852 an der „Polytechnischen Schule“ in Hannover und hörte die Vorlesungen von Franke (Differential- und Integral-Rechnung, analytische Geometrie), Heeren (Physik, Chemie), Karmarsch (Technologie), Rühlmann (angewandte Mathematik und Maschinenlehre). Dieser Zeit scheinen seine ersten Versuche selbständiger Arbeiten anzugehören. In einer Liste seiner Abhandlungen, die wahrscheinlich i. J. 1887 zusammengestellt ist, sind als erste Arbeiten zwei Aufsätze angegeben (»Kleinste Summe der Entfernungen eines Punktes von drei gegebenen Punkten« und: »Berührungsebene einer stetig gekrümmten Fläche«), die 1851 und 1852 in einer studentischen Zeitschrift veröffentlicht sind. In dem Nachlasse hat sich nichts mehr aus diesen Jahren gefunden, auch eine Nachfrage bei der Bibliothek der Techn. Hochschule in Hannover war ohne Erfolg.

Während des Studiums in Hannover hat er offenbar bald seine Pläne für die Zukunft geändert, und es hat ihm wohl schon der akademische Beruf als das schönste Ziel vorgeschwebt: »Indubitabilibus ac splendentibus matheseos veritatibus victus vinctusque spem, quam per longum »temporis spatium apud me foveram huic scientiae me totum devovendi, vanam diutius ducere, nunc jam omnino non ferre poteram«, schrieb er später (1853) in der dem Gesuche um Zulassung zum Maturitäts-Examen beigelegten vita. Schon im Januar 1851 teilt er den Eltern mit, daß er sich fest vorgenommen habe, sich später der Maturitätsprüfung zu unterziehen, und daß er daher neben den mathematischen Studien eifrig Geschichte und Latein treibe. Im Jahre 1852 gaben die Eltern ihre Zustimmung, daß er seine Studien an der Universität Göttingen fortsetze.

Am 16. Oktober 1852 wurde er in Göttingen als Studierender der Mathematik immatriculiert. Im Winter-Sem. 1852 auf 1853 hörte er:

Methode der kleinsten Quadrate bei Gauss,
Auflösung numerischer Gleichungen bei Stern,
Experimentalphysik bei W. Weber,
Deutsche Geschichte bei Waitz.

Welche Bewunderung und Ehrfurcht er vor Gauss empfand, erkennt man aus einem Briefe an die Eltern vom Oktober 1852:

»— — — Viel freundlicher war der Hr. Geh. Hofrath Gauss, der berühmteste Mann »dieses Jahrhunderts, der Humboldt noch weit überstrahlt. Nie war ich glücklicher als »Montag vor acht Tagen, da ich hörte, Gauss würde wahrscheinlich lesen; die Nacht dar»auf schlief ich wenig und welche Gefühle durchdrangen mich, da ich mit meinem Anmel»dungsbuche bei ihm eintrat und ihn erblickte. Meine Anmeldung [1]) bei ihm hatte ich aus»wendig gelernt, um nicht vor Bewunderung stumm zu werden. Montag und heute hat er »schon gelesen; diesen Morgen erzählte er uns von seiner Erfindung dieser Wissenschaft, die »in das Ende des vorigen Jahrhunderts fällt.«

Wahrscheinlich geschah die Anmeldung des damals neunzehnjährigen Studenten in Gauss' Arbeitszimmer der Sternwarte, das 16 Jahre später Ernst Schering für die Herausgabe der Gauss'schen Werke überwiesen wurde.

Die Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate wird die letzte gewesen sein, die

---

*) Diese Anmeldung ist auch S. 212 dieses Bandes erwähnt.

Gauss gehalten hat; die für das Sommer-Semester 1853 angekündigte über höhere Geodaesie scheint nicht durchgeführt zu sein.

Ernst Schering konnte sich den mathematischen Studien und den physikalischen Arbeiten im Seminar, über die er unter der Leitung von W. Weber vom Sommer 1853 an das Tagebuch geführt hat, erst vollständig widmen, nachdem er am 22. September 1853 am Lyceum in Hannover das Maturitäts-Examen abgelegt hatte. Da Gauss keine Vorlesungen mehr hielt, so brachte er den Sommer 1854 im Elternhause in Scharnebeck zu, mit dem Studium der Disquis. arithm. und der Jacobi'schen Fundamenta beschäftigt. Im November 1854 kehrte er nach Göttingen zurück. Am 24. Februar 1855 schrieb er den Eltern über den Tod von Gauss:

»Ihr werdet wol schon von dem grossen Unglück gehört haben, das die hiesige Universität gestern traf: Es ist der grösste Mathematiker der Welt, wie ihn der berühmteste »Mathematiker in Frankreich*) in einer Unterredung mit Napoleon nannte, Freitag 23. Februar Morgens 1 Uhr im Schlafe verschieden. Der Ruhm dieses Mannes ist fast ohne »Gleichen. . . . . . .«

Am 27. April 1855 konnte er nach Hause mitteilen:

»Etwas ganz ausserordentlich Wichtiges hat sich in den letzten Tagen hier entschieden. »Dirichlet in Berlin, der grösste jetzt lebende Mathematiker, hat den Ruf nach der Universität Goettingen angenommen und wird nächsten Michaelis hier eintreffen und seine Vorlesung anfangen. Es ist dies Ereignis für mich von um so grösserer Wichtigkeit, da ich »nun nicht nach Berlin zu gehen brauche. Der Verlust der Berliner Universität an Dirichlet ist . . . . ohne Gleichen und fast unglaublich.«

Dirichlet begann seine Lehrtätigkeit in Göttingen mit den Vorlesungen über »Zahlenlehre« und »partielle Differentialgleichungen« im Winter-Semester 1855—1856. E. Schering hörte beide; die letztere Vorlesung veranlasste ihn zu eignen Untersuchungen: C. A. Bjerknes in Christiania, der damals auch in Göttingen unter Dirichlet studierte, hat später in der Arbeit: »Geschichtliche Notizen über das Dirichlet'sche Kugel- und Ellipsoidproblem« in den Göttinger Nachrichten 1873 S. 439—460 darüber berichtet. Dieser Arbeit ist das Folgende entnommen:

»In seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, die im Wintersemester »1855—56 in Göttingen gehalten wurden, trug Dirichlet sein bekanntes Problem vor über »die Kugel in einer bewegten, unelastischen und unbegrenzten Flüssigkeit. Er äusserte gelegentlich, dass ebenso das entsprechende Problem von dem Ellipsoid sich lösen liesse; was »er zwar auch früher angegeben hatte, indem er in seiner Mitteilung an die Berliner Akademie, im Anfange des Jahres 1852, „über einige Fälle, in welchen sich die Bewegung »eines festen Körpers in einem incompressiblen, flüssigen Medium theoretisch bestimmen »lässt“ **), als solche Fälle, wo ihm die Lösung gelungen war, bezeichnete: dass der eingesenkte Körper eine Kugel oder ein Ellipsoid wäre. In diesem kleinen Aufsatze hat er sich »doch allein auf die Behandlung des Problems für die Kugel beschränkt.

»Die Lösung des Problems von dem Ellipsoid ist leider niemals von Dirichlet

*) Laplace, siehe S. 236 dieses Bandes.

**) [Dirichlet; Berichte über die Verhandlungen der Berliner Akademie 1852 S. 12—17. Dirichlet's Werke. Bd. II S. 117—120.]

»veröffentlicht worden. Doch hat er schon früh darüber Mittheilungen gemacht, — wie er »auch später die Jüngeren anzuregen suchte, indem er auf die Möglichkeit, das erweiterte »Problem zu behandeln, ihre Aufmerksamkeit hingeleitet hat. In einer Abhandlung des »Herrn Hoppe vom Widerstande der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper, »welche im Jahre 1854 in Poggendorffs Annalen erschien*), kommt auch eine bezeichnende »Bemerkung vor, die offenbar solche Mittheilungen in Beziehung auf die Lösung des genannten »Problems voraussetzt: ist der starre Körper, sagt an der betreffenden Stelle der Verfasser, »eine Kugel oder ein Ellipsoid, so würde die Bewegung eine beliebige sein können, da dessen »Verhalten durch Dirichlet's Berechnung bekannt ist.**) — — —

Jedenfalls hat also Dirichlet das Problem des Ellipsoids bis 1852 vollständig ge»löst. Wenn er also, wird dann am Schluss, und wie ich glaube mit Recht, hinzugefügt, »manchmal Andeutungen über die Lösung gegeben hat, so war man nicht berechtigt, daraus »zu schliessen, die Ausführung habe ihm noch gefehlt; und diese Missdeutung scheint in der »Tat obgewaltet zu haben.

Während Herr Hoppe in einer ganz anderen Richtung den neuen Dirichlet'schen »Gedanken weiter verfolgt hat, indem er die Bewegung von Rotationskörpern nach der Rich»tung ihrer Rotationsaxen untersucht, — — — — haben zwei jüngere Mathematiker, völlig »unabhängig von einander, und zum Teil in verschiedener Weise das Problem von dem »Ellipsoid gelöst. Es waren dies die zwei späteren Göttinger Professoren, die Herren »Clebsch und Schering.

Die schöne Abhandlung des Herrn Clebsch, des so früh hinweggegangenen, be»rühmten Geometers, ist datirt Danzig im August 1854; sie ist aber erst viel später er»schienen; zwei Jahre nachher in dem zweiten Hefte von Crelles Journal für das Jahr »1856.***) — — — —

Von Clebsch unabhängig, hat Hr. Schering, der zusammen mit mir unter Di»richlet studirte, durch die Aeusserungen seines grossen Lehrers angeregt, die Lösung des »Problems von dem Ellipsoid verfolgt, und auch glücklich gefunden. Das Kugelproblem »hatte Dirichlet schon in der Mitte des genannten Wintersemesters 1855—56 vorgetragen; »und nicht lange nachher, spätestens im Anfange des folgenden Semesters, wie es auch aus »gewissen äussern Kennzeichen hervorgeht, hat mir Hr. Schering seine Lösung des erwei»terten Problems gezeigt. Die Abhandlung von Clebsch, von deren Existenz ich erst »aus späteren Zeiten Erinnerung habe, war allerdings damals abgefasst worden; wegen der »eintretenden langen Verzögerung mit der Veröffentlichung war sie aber noch nicht erschienen; »selbst nicht, als ich späterhin, in Erwiderung auf die mir von Herrn Schering mitgetheilte »Lösung, ihm eine kleine, aus seinen übersichtlichen Formeln übrigens ganz einfach und »natürlich hervorgehende Verallgemeinerung gezeigt hatte, wo die Anzahl der Variabeln statt »3 gleich n gesetzt war.

---

*) [R. Hoppe: in Pogg. Annal. Bd. 93. Drittes Stück; geschlossen am 24. October 1854. S. 321—343.]

**) [R. Hoppe: ebenda, S. 334.]

***) [Clebsch: Crelle's Journal Bd. 52, S. 103—132.]

Im Gegensatz zu Herrn Clebsch, und in genauerem Anschluss zu dem bei der ›Behandlung des Kugelproblems eingeschlagenen Wege, hat ausserdem Schering das ruhende ›Ellipsoid in der bewegten Flüssigkeit betrachtet. — — — —

Die von Schering gegebene Lösung ist niemals veröffentlicht worden. Weil sie aber »den Ausgangspunkt für die folgende daraus so ganz unmittelbar gezogene Verallgemeinerung ›für n Variable bildet, so glaube ich hier wiedergeben zu müssen, was er mir in dieser Be›ziehung mitgetheilt hat. Ich füge doch schliesslich hinzu, dass die mir gegebene Mitthei›lung nur ganz gelegentlich hingeschrieben war; sie war deswegen auch nicht mit grösserer ›Vollständigkeit abgefasst worden, als für den augenblicklichen Zweck nothwendig.

Das Problem mit seiner Lösung lautet dann wörtlich, wie folgt:

»Ein dreiaxiges (α, β, γ) Ellipsoid in einer sich bis ins Unendliche erstreckenden unelastischen Flüssigkeit. Gleichung des Ellipsoids

$$E = \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} + \frac{z_0^2}{\gamma^2} = 1,$$

σ sei die positive Wurzel in

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$$

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

$$v' = \pi \int\limits_{s=0}^{s=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+s} - \frac{y^2}{\beta^2+s} - \frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

$$v = \pi \int\limits_{s=\sigma}^{s=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+s} - \frac{y^2}{\beta^2+s} - \frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

dann ist:

$$\varphi = \lambda\frac{\partial v'}{\partial x} + \mu\frac{\partial v'}{\partial y} + \nu\frac{\partial v'}{\partial z} + l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z} \text{«.*)}$$

Hierzu war noch später die Bedingungsgleichung gefügt, die sich auf die Oberfläche bezieht

*) [φ genügt der Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$, wenn die Größen $\lambda, \mu, \nu, l, m, n$ constant sind, oder nur von der Zeit abhängen. Zwischen ihnen müssen die Gleichungen

$$2l = (\lambda+l)\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D}\,;\quad 2m = (\mu+m)\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2+s)D}\,;\quad 2n = (\nu+n)\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(\gamma^2+s)D}$$

bestehen, die aus der oben angegebenen Bedingungsgleichung für die Oberfläche folgen; siehe auch Bjerknes in den Goettinger Nachrichten 1873, S. 454.]

$$u\,\frac{\partial E}{\partial x}+v\,\frac{\partial E}{\partial y}+w\,\frac{\partial E}{\partial z}=0,$$

wo selbstverständlich u, v, w durch die Gleichungen;

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

»gegeben sind u. s. w.

»Schliesslich werde ich mir jetzt erlauben, nachdem ich die Schering'sche Lösung »wiedergegeben habe, aus dieser selbst ein Kennzeichen der Zeit auszuziehen, wo sie schon »muss gefunden sein. Doch beabsichtige ich hiermit keinen für sich allein vollgültigen Beweis »zu liefern, was wohl als solcher ungenügend angesehen werden könnte, um zu zeigen, dass »die auch auf die bestimmteste Aussage meines geehrten Freundes: dass die erwähnte Ver»allgemeinerung seiner Auflösung früher war als die Erscheinung der Clebsch'en Abhandlung, »gestützte Behauptung in Beziehung auf den Zeitpunkt, mit dem Resultate der Untersuchungen »hier ganz zusammenfällt.

Die oben benutzten und übrigens von früher aus bekannten Gleichungen, welche die »Potentiale v' und v bestimmen, wurden kurz nach Anfang des folgenden Sommersemesters »1856 von Dirichlet in seinen Vorlesungen über die Potentialtheorie aufgestellt; und er »zeigte dann, doch ohne anzugeben, wie sie naturgemäss gefunden werden könnten, dass sie »den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi$$

»und

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

»genügen. Die mir mitgetheilte Schering'sche Lösung habe ich aber, wie es aus meinen »Aufzeichnungen hervorgeht, in dieser Beziehung mittelst eigener Nachrechnung verificiert; »was ja von da aus selbstverständlich nur eine überflüssige Mühe gewesen wäre, als ich die »bessere Dirichlet'sche Verification schon sorgfältig redigiert hatte. Die von Schering »gegebene Lösung des Problems von dem Ellipsoid muss sodann, am spätesten, kurz nach »Ostern gefunden sein; während die im zweiten Hefte des Journal von Crelle 1856 erschei»nende Abhandlung von Clebsch wohl erst im Juli desselben Jahres für die Oeffentlichkeit »vorlag. *)«

Den Jahren 1855 und 1856 gehört auch die erste zahlentheoretische Arbeit von E. Schering an. Er schreibt darüber am 2. April 1857 an Bjerknes, der im October 1856 von Göttingen nach Paris gereist war, um dort die mathematischen Studien fortzusetzen:

»Bitte ... schicken Sie mir Liouville's Adresse, ich denke ihm für sein Journal

---

*) [Siehe auch C. A. Bjerknes: Remarques historiques sur la théorie du mouvement d'un ou de plusieurs corps .... dans un fluide incompressible .... Comptes rendus. Paris 1877. T. 94, p. 1222.]

»einen Auszug aus der Arbeit über Zahlentheorie zu senden, die, wie Sie sich vielleicht er-»innern, ich im Anfang des letzten Sommers machte und Dirichlet zeigte; Dirichlet »sagte, er habe mit Liouville davon gesprochen.«

In einem Briefe an Bjerknes vom 1. Februar 1858 heisst es:

„Meine Arbeit über einen Gegenstand der Zahlentheorie habe ich ins Französische »übersetzt und im November an Dirichlet gegeben, er sagt mir, wenn ich sie veröffent-„lichen wollte, müsste ich sie viel ausführlicher darstellen."

Die in dem ersteren Brief vom 2. April 1857 erwähnte Arbeit ist sehr wahrscheinlich identisch mit einem im Nachlasse vorgefundenen Manuscript, welches das Datum „Goettingen im Juni 1856" trägt. In den „Bemerkungen" auf S. 431 dieses Bandes ist angegeben, dass die in diesem Manuscript durchgeführten Untersuchungen im Wesentlichen schon die Resultate der Arbeiten Nr. IV und Nr. VII in Band I und Nr. XXXXV (Nachlass) in Band II enthalten.

Im Sommer 1856 hörte E. Schering bei Dirichlet die Vorlesungen „Ueber die Newton'schen Kräfte" und „Ueber die Kugelfunctionen", und im W. 1856/7 über „Zahlentheorie" und „Bestimmte Integrale". Er schreibt darüber an Bjerknes am 2. Decbr. 1856:

„Das Colleg über bestimmte Integrale ist sehr interessant, besonders für denjenigen, „der selbst lehren will. Dirichlet geht darin häufig auf die Grundbegriffe der Differential-„rechnung und Integralrechnung zurück und macht selbst Bemerkungen über Methoden, diese „zu lehren: so sagte er:

„„Es ist vorteilhaft, die Integralrechnung gleichzeitig mit der Differentialrech-„„nung zu behandeln, dadurch fallen die Schwierigkeiten heraus, die sonst entstehen, „„um zu beweisen, dass gewisse Functionen Derivirte haben, z. B. für die Exponen-„„tialfunction c^x, dass in $\frac{c^{x+h}-c^x}{h} = c^x \cdot \frac{c^h-1}{h}$ der Ausdruck $\frac{c^h-1}{h}$ eine Grenze hat „„für abnehmende Werte von h, was ohne Anwendung von Reihen schwierig, wenigstens „„weitläufig ist. Die Reihen müssen aber nach meiner Ansicht bei der Behandlung „„der Differentialrechnung noch nicht vorausgesetzt werden, wenn gleich sie eine gute „„Vorübung abgeben wie Eulers Introductio.""

Das in dieser Vorlesung von Ernst Schering nachgeschriebene Heft ist noch vollständig vorhanden und enthält auch noch manche Notizen aus späterer Zeit.

Ueber den Inhalt dieses Heftes schreibt E. Schering an Bjerknes am 2. April 1857:

„Das Heft bei Dirichlet hoffe ich Ihnen bald schicken zu können. Es enthält: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Euler'sche Integrale sehr ausführlich, „mehrfache Integrale, Transformation der Variablen in denselben, Anwendung auf die Be-„stimmung der Oberfläche des Ellipsoids und Attraction des Ellipsoids, die Auflösung des-„selben Problems nach Gauss' Methode, Dirichlet's Discontinuitätsfactor und Anwendung „desselben auf eine Verallgemeinerung von Eulers Formel der Zurückführung seines Inte-„grals der ersten Art auf das der zweiten Art, Bestimmung der Attraction des Ellipsoids mit „Hülfe des Discontinuitätsfactors. — Von Dirichlet ist jetzt eine ausgezeichnete Litho-„graphie hier zu haben."

Von Interesse ist auch das Urteil von Bjerknes in seinem Briefe aus Paris vom 1. Jan. 1857:

„Ich sehe, dass Göttingen eben soviel bieten kann als das grosse Paris oder vielleicht

»noch ein wenig mehr, denn hier hat man bei weitem keinen solchen Vortragenden wie »Dirichlet und keiner behandelt die Mathematik auf eine so originelle Weise wie Riemann« . . . und im Briefe aus Paris vom 16. April 1857 . . . . »hier in Paris existiert gar »keiner, der als Lehrer sich mit Dirichlet messen kann. —«

Bei Riemann hat E. Schering die folgenden Vorlesungen gehört:

Im W.S. 1854/5: Partielle Differentialgleichungen,
S.S. 1855: Bestimmte Integrale,
W.S. 1855/6: Abel'sche Funktionen,
S.S. 1856: Theorie der Elasticität und Abel'sche Funktionen II,
W.S. 1856/7: Hypergeometrische Reihe.

Seine Nachschriften der letzteren Vorlesung sowie die der Abel'schen Funktionen sind von Riemann selbst bei der endgültigen Redaction seiner Abhandlungen zu Grunde gelegt. Sie sind dann im Jahre 1898 der Göttinger Universitäts-Bibliothek für den dort deponierten Riemann'schen Nachlass (als Akt. Nr. 37) überwiesen (s. F. Klein: Gött. Nachr. Geschäftl. Mitt. 1898 Heft I S. 133 und: Chronik der Univ. zu Göttingen für das Rechnungsjahr 1897 bis 1898 S. 21) und bei der Herausgabe der Nachträge zu B. Riemann's gesammelten mathematischen Werken, her. von M. Noether und W. Wirtinger (i. J. 1902) benutzt. (Siehe dort auf den Seiten V. 68. 110. 115.)

Ueber die Riemann'sche Vorlesung vom Winter 1856/7 schreibt E. Schering am 2. December 1856 an Bjerknes:

»Riemann, wie Sie wissen, trägt die Theorie der Functionen complexer Grössen »mit besonderer Anwendung auf die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und verwandte »Transcendenten vor, bis jetzt ist er noch bei den allgemeinen Sätzen über Funktionen complexer Grössen, die er auch vor zwei Semestern zu Anfang behandelte. Statt der damals »angewandten Herleitung aus dem Dirichlet'schen Princip, beweist er jetzt die Sätze mit »Hülfe der Reihenentwicklung. — Riemann hat versprochen, in diesem Colleg die Lösung »des Problems der Vertheilung der Electricität auf den Kugeln zu geben. Die ein- und »mehrwerthigen Functionen sind in ein- und mehränderige übergegangen, die durch Querschnitte entstandenen Flächenstücke der Function in Zweigwerthe derselben, die Windungspunkte in Verzweigungsstellen u. s. f. In der letzten Zeit sind von seinen Zuhörern mehrere »ausgeblieben . . . . so dass Miethoff, Sommer und ich die einzigen sind, die sein Colleg »belegt haben.«

Im Brief an Bjerknes vom 2. April 1857 heisst es:

»Die Vorlesungen hat man hier vor drei Wochen beendigt. Riemann hat das »Hauptproblem, was er zu Anfang versprach, nicht mitgegeben, es wurde die Zeit zu »kurz.« —

Inzwischen war E. Schering mit der Bearbeitung der am 4. Juni 1856 von der philosophischen Facultät der Göttinger Universität gestellten Preisaufgabe über elektrische Ströme beschäftigt. Am 29. März 1857 lieferte er die Arbeit ein, wie er am 2. April an Bjerknes mitteilte; am 13. Juni 1857 wurde ihm der Preis zuerteilt*).

»Am meisten habe ich mich gefreut,« schreibt er am 27. Juni 1857 an Bjerknes,

*) s. Band I dieser Werke S. 1.

»dass Dirichlet mich besuchte, um mir zu gratuliren. Für das nächste Mal hat er eine »Preisaufgabe gestellt, die Integration der Differentialgleichung für die Abbildung des Ellip»soids in der Ebene; die letzte Aufgabe hatte Weber gestellt.«

Am 20. Juni 1857 reichte er die genannte Preisarbeit als Doktor-Arbeit der philosophischen Facultät der Göttinger Universität ein und wurde darauf nach bestandener mündlicher Prüfung am 22. Juli 1857 unter dem Decanat von Dirichlet zum Doctor promovirt.

Auch seine am 31. März 1858 eingereichte Bearbeitung der oben genannten von Dirichlet gestellten Preisaufgabe erhielt am 4. Juni 1858 den Preis der Facultät.*)

Auf Grund dieser Preisarbeit als Habilitations-Schrift bewarb er sich bei der Göttinger philosophischen Facultät um die venia legendi für Mathematik und erhielt diese nach der Probevorlesung am 26. Juni 1858.

Im Winter-Semester 1858/59 begann er seine akademische Lehrtätigkeit mit den Vorlesungen über Elemente der Astronomie und über Zahlentheorie; unter den fünf Zuhörern der ersteren Vorlesung waren: A. Auwers, C. Adolph, F. Tietjen. Die letztere Vorlesung hielt er auf Wunsch des schon erkrankten Prof. Dirichlet.

Während der gleichen Jahre, in denen E. Schering die oben erwähnten mathematischen Arbeiten schrieb, hatte er auch astronomische Beobachtungen auszuführen. Im Winter von 1856 auf 1857 hatte er eine Assistentenstelle an der Göttinger Sternwarte übernommen; vom 27. Februar 1857 an wohnte er im östlichen Flügel der Sternwarte. Schon am 13. Februar 1857 schrieb er an die Eltern, dass er mit Klinkerfues eine grössere astronomische Arbeit begonnen habe, die sie Jahre lang beschäftigen werde. Sehr wahrscheinlich werden dies die am Reichenbach'schen Meridiankreise ausgeführten Zonenbeobachtungen gewesen sein, an denen sich E. Schering wahrscheinlich bis zum 15. Oktober 1858 beteiligte, und die dann Klinkerfues mit einigen Unterbrechungen und mit anderen Mitarbeitern bis zum Jahre 1863 fortsetzte. Die Resultate dieser Beobachtungen sind erst von W. Schur veröffentlicht: »Goettinger Stern-Catalog für 1860«. Astronomische Mitteilungen von der Kön. Sternwarte zu Goettingen. II. Teil. Goettingen 1891. gr. 4⁰. XXVIII und 77 S.

Im Jahre 1859 begann für E. Schering diejenige wissenschaftliche Tätigkeit, welcher er bis an sein Lebensende die meiste Zeit gewidmet hat: die Bearbeitung des Gauss'schen Nachlasses und die Herausgabe der Gauss'schen Werke. Auch schon zu Lebzeiten Dirichlet's hatte er einen genauen Einblick in den Gauss'schen Nachlass gewonnen. So schreibt er am 27. Juni 1857 an Bjerknes:

»Gauss' Bibliothek ist von der Universität angekauft, und Dirichlet hat die Her»ausgabe der hinterlassenen Schriften übernommen. In den Notizbüchern findet sich eine »grosse Zahl kleiner angefangener Aufsätze über höchst verschiedenartige Gegenstände. »Gauss hat vieles schon gehabt, was erst später von andern gefunden und veroeffentlicht »ist; darunter die Fundamentalsätze über Θ-Functionen, die Bestimmung der Anzahl der »Classen der binären quadratischen Formen mit negativer Determinante ganz nach denselben »Principien, wie Dirichlet es in der Zahlentheorie vorgetragen hat. Aeusserst interessant »ist sein Handexemplar der Disquisit. Arithm., worin er das Letztere notirt und das Datum »des Findens der Hauptsätze, woraus hervorgeht, dass er mit ungeheurer Geschwindigkeit in

*) siehe Band I dieser Werke. S. 49.

»jener Zeit gearbeitet hat, und dass er vieles auf total verschiedenem Wege gefunden haben »muss, als es im Werke steht, da die Zeitmomente nicht mit dem dortigen Zusammenhang »fortschreiten. Gauss' Werke, Abhandlungen und hinterlassene Schriften sollen in einer Ge- »sammtausgabe gedruckt werden.«

In einem Briefe vom 2. Decbr. 1856 an Bjerknes heisst es:

»Da ich gerade von Dirichlet spreche, so will ich Ihnen sagen, dass er mit der »Gedächtnissrede auf Gauss nicht fertig geworden ist; Sie wissen, dass er beabsichtigte, eine »solche in der diesjährigen Societätssitzung (im November) zu halten.«

In einem späteren Bericht aus dem Jahre 1868 an die vorgesetzten Behörden schrieb E. Schering:

»Leider ist Dirichlet gestorben, ohne dass von ihm auch nur die geringste münd- »liche oder schriftliche Notiz [über den handschriftlichen Nachlass von Gauss] vorhanden wäre, »welche einem andern Bearbeiter irgend wie hätte dienen können.«

Nach dem am 5. Mai 1859 erfolgten Tode von Dirichlet übernahmen Riemann und E. Schering die Aufgabe, den Gauss'schen Nachlass zu bearbeiten. Als E. Schering in der Sitzung der Kön. Societät der Wissenschaften in Göttingen am 18. Februar 1860 einstimmig zum Assessor in der mathematischen Classe ernannt war, schrieb ihm Wöhler, der damalige beständige Secretär, bei der Mitteilung von dieser Ernennung:

»Indem die K. Societät die Verdienste, die Sie sich durch die Ordnung des Gauss'- »schen Nachlasses bereits erworben haben, dankbar anerkennt, hofft sie durch die Wahl eines so ausgezeichneten Mathematikers eine neue Kraft für die ihr obliegende wichtige Aufgabe der Herausgabe der Gauss'schen Werke gewonnen zu haben.«

E. Schering arbeitete dann einen »Prospectus über die zu veranstaltende Gesammtausgabe der Gauss'schen Werke« aus, der im April 1860 den vorgesetzten Behörden eingereicht*) und der auch dem im Januar 1862 gedruckten und versandten Prospekt zu Grunde gelegt wurde. Ende 1862 erschien der erste Band von Gauss' Werken; Wöhler legte ihn am 6. Decbr. 1862 der Kön. Soc. d. Wiss. in Göttingen vor**).

»Mein Freund Riemann,« so schrieb E. Schering später (1873), »machte mich »[damals] darauf aufmerksam, dass ich darauf bestehen müsse, dass mein Name als Redacteur »auf dem Titel des ersten Bandes gedruckt werde.«

Aber das ist nicht geschehen.

Inzwischen war E. Schering am 23. März 1860 zum ausserordentlichen Professor für Mathematik und mathematische Physik in Göttingen ernannt, nachdem er im Februar 1860 einen Ruf als ausserordentlicher Professor an die Giessener Universität abgelehnt hatte.

In der Sitzung der Societät der Wissenschaften in Göttingen am 22. Novbr. 1862 wurde er »zum ordentlichen Mitgliede in der mathematischen Classe« ernannt. Wöhler schrieb an ihn:

»Indem die K. Societät hofft, durch diese Wahl eine neue Kraft zur Erreichung ihrer »Zwecke gewonnen zu haben, wünscht sie andererseits Ihnen hierdurch ein Zeichen der An- »erkennung für Ihre Verdienste um die Herausgabe der Gauss'schen Werke zu geben.«

---

*) Siehe auch hier Band I S. 153.

**) Siehe Nachr. d. K. Soc. d. Wiss. Goettingen 1862. S. 542.

Fünfunddreissig Jahre lang hat er der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen als ordentliches Mitglied angehört, in deren Nachrichten und Abhandlungen sind die meisten seiner wissenschaftlichen Arbeiten veröffentlicht. Zahlreich sind auch die Arbeiten anderer Gelehrter, die ihm zur Vorlage in den Sitzungen jener Gesellschaft eingesandt wurden.

Im Anfang der sechziger Jahre begann für E. Schering noch eine andere Tätigkeit: Schon im Juli 1861 waren Riemann und er zu einem Gutachten aufgefordert, ob und in welcher Weise die Hannoversche Regierung sich an der von dem Kön. Preussischen General-Leutnant z. D. Baeyer angeregten Unternehmen einer »mitteleuropäischen Gradmessung« beteiligen könne. Während Riemann's Erkrankung wurde E. Schering im Decbr. 1862 mit dessen Vertretung in dieser Angelegenheit betraut und im Oktober 1864 als »Commissar der Kön. Hannoverschen Regierung« beauftragt, an der »General-Conferenz der Bevollmächtigten an der mitteleuropäischen Gradmessung« in Berlin vom 15. bis 22. October 1864« Teil zu nehmen.

In gleicher Eigenschaft beteiligte er sich an der »Versammlung der permanenten Commission der mitteleuropäischen Gradmessung« in Neuenburg in der Schweiz vom 6. bis 10. April 1866, in Wien Ende April 1867, in Gotha im October 1868, in Florenz vom 22. bis 29. September 1869, sowie an der allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung in Berlin vom 30. September bis 7. October 1867.

In diesen Versammlungen berichtete er wiederholt über die Veröffentlichung der Gauss'schen Untersuchungen über höhere Geodaesie, sowie über eigene Arbeiten aus diesem Gebiete. Da diese letzteren zum Teil nicht gedruckt sind, so mögen hier einige Auszüge aus den Sitzungsprotokollen folgen.

Sitzung in Neuenburg am 7. April 1866.

— — — — Auf Ersuchen des Herrn Präsidenten [Feldmarschall-Leutnant v. Fligely aus Wien] machte Herr Schering einige Mitteilungen aus seinen Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Dieselben betrafen eines Theils zwei besondere Systeme von Curven auf der geodätischen Fläche: nämlich das eine System von Curven, deren jede einzelne alle die Punkte jener Fläche enthält, welche gleiche Länge haben und das andere System von Curven, deren jede einzelne die Punkte gleicher Breite enthält. Dabei sind Länge und Breite eines Ortes im astronomischen Sinne verstanden. Diese Curven, die bei einer um ihre Rotationsaxe sich drehenden Rotationsfläche, beziehungsweise mit den auf die gebräuchliche Weise definirten Meridianlinien und Parallelen zusammenfallen würden, besitzen ein mehrfaches Interesse. Unter den ihnen eigenthümlichen Eigenschaften hebt der Vortragende eine besonders einfache Relation hervor, die zwischen dem von Gauss zuerst definierten Krümmungsmass der Fläche an einem bestimmten Orte, zwischen der Polhöhe daselbst und zwischen den drei Grössen besteht, welche als Factoren der beiden Quadrate und des doppelten Products der Differentiale der Breite und Länge eines Ortes in dem allgemeinen Ausdruck für das Quadrat eines in der geodätischen Fläche liegenden Längenelements auftreten. Ein anderer Gegenstand der Bemerkungen bildete [. . . . die in der Arbeit Nr. VIII im ersten Bande enthaltene Erweiterung des Gaussischen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümmten Flächen, veröffentlicht im November 1868].

Berlin, den 4. October 1867.

[Bericht des Prof. Dr. Herr aus Wien über die Arbeiten der zweiten Kommission, die sich mit den Intensitätsbestimmungen der Schwere und mit den Loth-Ablenkungen beschäftigt hatte.]

— — — — Ich erlaube mir weiter noch mitzutheilen, dass Herr Schering darauf hinwies, dass die durch die Gauss'schen Schöpfungen in der Geodäsie gewonnenen richtigen Gesichtspunkte für die Auswahl der Stationen, wo astronomische Beobachtungen anzustellen sind, schon in den Verhandlungen der allgemeinen Conferenz im Jahre 1864 sich angegeben finden, dass aber seiner Meinung nach die vierte Frage des diesjährigen Programms jenen Standpunkt zu verlassen scheine. Er glaubt nun die Innehaltung jener Vorschläge um so mehr empfehlen zu dürfen, da er gefunden hat, dass, wenn die Beobachtungen in der dort gewünschten Weise ausgeführt worden sind, die Vergleichung astronomischer Ortsbestimmungen mit den geodätischen ohne Schwierigkeit so hergestellt werden kann, dass keine zum Voraus bestimmte, sondern nur eine näherungsweise bekannte Gestalt der geodätischen Fläche angenommen wird. Das Princip der Vergleichung beruhe auf einigen allgemeinen, seit kurzem gefundenen geometrischen Lehrsätzen, welche solche Gleichungen zwischen geodätischen und astronomischen Bestimmungen geben, die ganz unabhängig sind, sowohl von der wirklichen Gestalt der zu bestimmenden Fläche, als auch von der hypothetischen, den geodätischen Reductionsrechnungen zu Grunde gelegten Fläche.

Der eine dieser Sätze ist eine Verallgemeinerung des bekannten von Laplace aufgestellten Satzes, der die Azimuths- und Längen-Unterschiede für die Endpunkte einer Linie betrifft, die auf einer von der Kugel nur wenig abweichenden Fläche liegt, eine Verallgemeinerung, die auch Gauss bekannt gewesen zu sein scheint, wie aus seiner im Jahre 1830 gegebenen Anzeige des Werkes über die am Südabhange der Alpen ausgeführten astronomischen und geodätischen Operationen geschlossen werden darf.*)

Der andere Satz bezieht sich auf die durch astronomische Beobachtungen gefundenen Längen und Polhöhen an drei und mehreren Orten der Fläche in ihrer Vergleichung mit den aus geodätischen Messungen gewonnenen Resultaten.

— — — — Die Commission hat diese Mittheilungen des Herrn Schering dankend entgegengenommen und glaubt zu ihnen auch wohl ein Motiv erblicken zu müssen, welches für den schon vor drei Jahren aufgestellten Wunsch, dass an möglichst vielen, gleichmässig vertheilten Punkten alle drei astronomischen Bestimmungen [Azimuthe der Dreiecksseiten, Polhöhe und Länge] gemacht werden sollen, sprechen.

In der Sitzung der Conferenz der europäischen Gradmessung am 3. October 1867 in Berlin sprach E. Schering über »ein unveränderliches Pendel« (s. hier Band II, S. 393).

Im August 1869 war er mit Prof. Sartorius von Waltershausen in Catania, um auf dem Aetna geodätische Messungen vorzunehmen; auch an den Sitzungen des Congresses italienischer Naturforscher in Catania beteiligte er sich. Auf der Rückreise traf er nach längerem Aufenthalte in Rom am 21. September 1869 in Florenz ein zur Teilnahme an der oben genannten Versammlung der Kommission der europäischen Gradmessung. Die Mitglieder derselben wurden auch zur Einweihung der neuen Sternwarte bei Florenz am 26. September und zur Besichtigung des Hauses, in dem Galilei seine letzten Jahre verbracht hatte, eingeladen.

Ende März 1870 hob der Minister die Stelle eines Bevollmächtigten der früheren Hannoverschen Regierung bei der Kommission der europäischen Gradmessung mit Rücksicht auf die Kosten auf, da »der preussische Staat schon ausreichend« vertreten sei.

An dieser Stelle mögen auch die Ziele anderer Reisen von E. Schering kurz erwähnt werden: Im October 1863 war er in Paris, um die dortigen Mathematiker kennen zu lernen, im November 1864 und December 1867 in Petersburg, Ostern 1867 in Venedig, im September 1875 in Stockholm und Upsala.

Auch einer anderen Arbeit, die E. Schering schon 1859 übernahm, sei hier gedacht: Durch Verfügung des Universitäts-Curatorium vom 23. December 1859 wurde ihm »die Fortführung der von dem weiland Geheimen Hofrath Gauss aufgestellten Bilanzrechnung der dortigen »Professoren Wittwen-Casse übertragen«, anfangs gegen eine besondere Vergütung, die aber schon im folgenden Jahre bei der Ernennung zum ausserordentlichen Professor am 23. März 1860 wieder fortfiel. Die Bilanzrechnung hat er im Ganzen sechs mal durchgeführt: für den 1. October 1860, den 1. October 1865, für den 1. Januar 1871, für den 1. Januar 1876, für den

---

*) [Gauss' Werke Bd. IV. S. 377.]

1. Januar 1878 zur Ermittelung der wahrscheinlichen Folgen einer beabsichtigten Aenderung der Statuten*) und zuletzt für den 1. Januar 1881.

Um ein Urteil über den Umfang dieser Arbeit zu gewinnen, sei hier nur angegeben, dass auf Grund der von Gauss gegebenen Vorschriften (siehe dessen Werke, Band IV, Nachlass S. 119—188) für jedes Mitglied der Wittwencasse (ihre Zahl war 71 im Jahre 1876) der wahrscheinliche Kapitalwert seiner sämmtlichen Beiträge, sowie der an seine Wittwe wahrscheinlich zu zahlenden Pensionen berechnet wurde, ebenso für alle wahrscheinlich künftig eintretenden Mitglieder und ferner für jede vorhandene Wittwe (19 im Jahre 1876) der wahrscheinliche Kapitalwert ihrer Pension. In E. Schering's Nachlasse nehmen daher seine Rechnungen und seine Berichte über die Professoren-Wittwen-Casse nicht weniger als 300 Folioseiten im Manuscript ein. Im Jahre 1880 entstand zwischen der Direction der Professoren-Wittwen-Casse und E. Schering eine Meinungsverschiedenheit darüber, ob nach dem § 22 der Statuten, der verlangte, dass »von 5 zu 5 Jahren« eine Bilanzrechnung zu wiederholen sei, eine solche für den 1. Januar 1880 oder 1881 auszuführen sei. Es soll hier nicht auf die Einzelheiten dieses Streites eingegangen, sondern nur erwähnt werden, dass E. Schering seinen Standpunkt und seine Anträge in einer im Drucke 28 Quartseiten einnehmenden Denkschrift vom 7. Juni 1881 darlegte. Das Resultat ist schliesslich gewesen, dass E. Schering unter ausdrücklicher Anerkennung seiner Verdienste um die Wittwencasse und seiner mit Sorgfalt und Eifer ausgeführten Bilanzrechnungen durch ein Schreiben des Curatorium vom 29. Juli 1881 von der Aufgabe, ferner solche Berechnungen durchzuführen, befreit wurde.

Die Jahre von 1860 bis etwa 1873 wird er vorzugsweise der Herausgabe der Gauss'schen Werke, von denen in dieser Zeit sechs Bände erschienen, und dem Studium des Gauss'schen Nachlasses gewidmet haben, sowie den dadurch veranlassten Untersuchungen, wie zum Beispiel die umfangreiche Arbeit über das arithmetisch-geometrische Mittel (Nr. VI in Band I, S. 105—135) beweist und wie die sehr zahlreichen im Manuscripte vorhandenen Berechnungen zu den im Gauss'schen Nachlass enthaltenen Notizen erkennen lassen.

Inzwischen war er am 6. Juni 1868 zum ordentlichen Professor in der philosophischen Facultät der Universität Göttingen und am 26. Juni zum Direktor derjenigen Abteilung der Göttinger Sternwarte ernannt, welche »die Arbeiten des verewigten Gauss über Gradmessung, »Masssystem, Magnetismus und Geodäsie fortzuführen haben wird«, übertragen. Als Dienstwohnung wurde ihm von October 1868 an die frühere Gauss'sche Wohnung im Westflügel der Göttinger Sternwarte überwiesen.

Wie die Arbeiten Nr. X und XII bis XVI erkennen lassen, wandte er sich in den Jahren von 1870 bis 1873 wieder mehr eigenen Arbeiten zu. Im Sommer 1873 hatte er die ihn sehr schmerzende Kränkung zu erleiden, dass die Kommission für die Herausgabe der Gauss'schen Werke ohne sein Beisein beschloss, dass der IV. Band sofort herauszugeben sei, »ohne dass zu dem bereits Gedruckten etwas weiteres hinzugefügt werden soll«. Dieser Beschluss war leider durch Geldmangel in der Kasse der Societät veranlasst. Es konnte daher die von E. Schering beabsichtigte Veröffentlichung der Gauss'schen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie und

*) Diese Aenderung war die Veranlassung, die allgemeinen Formeln abzuleiten, welche im Nachlasse sich vorfanden und hier in Band II S. 401—409 stehen.

über die hannoversche Gradmessung nicht mehr im IV. Bande geschehen. Seine Vorarbeiten dazu sind dann später bei der Herausgabe des achten Bandes der Gauss'schen Werke (1900) benutzt*). In ähnlicher Weise wurde auch ein rascher Abschluss von Band VI verlangt, sodass die Pallasstörungen nicht mehr darin aufgenommen werden konnten.

Ueber die Zeit der Ausgabe der einzelnen Bände der Gauss'schen Werke giebt die folgende Tabelle Auskunft, in welcher die, aus den Büchern der Dieterich'schen Universitäts-buchdruckerei in Göttingen (W. Fr. Kaestner) erhaltenen Daten, den Druck des letzten Bogens des betreffenden Bandes angeben.

	Gauss' Werke
30. December 1862 . . .	Band I
22. October 1864 . . .	Band II
30. October 1867 . . .	Band V
25. November 1868 . . .	Band III
16. Mai 1870	Band I. Zweiter Abdruck
Juli 1873	Band IV
15. Januar 1875	Band VI
28. März 1876	Band II. Zweiter Abdruck
29. Juli 1876	Band III. Zweiter Abdruck
19. April 1877	Band V. Zweiter Abdruck
24. August 1880	Band IV. Zweiter Abdruck.

Bei der Herausgabe von Band II sind auch die Herren Dedekind und Stern beteiligt gewesen, da die Bemerkungen auf S. 242, 265, 268, 303 deren Unterschrift tragen.

In dem von Wöhler, dem Sekretär der Kön. Ges. d. Wiss. in Göttingen am 4. December 1875 erstatteten Jahresbericht heisst es (s. Gött. Nachr., 1875, S. 633):

»Die K. Gesellschaft ergreift mit Vergnügen diese Gelegenheit, ihrem Mitgliede, dem »Herrn Professor Schering für die mühevolle, schwierige Arbeit, der er sich als Redacteur »bei der Herausgabe dieser Werke unterzogen hat, ihren Dank auszusprechen und sich der »Hoffnung hinzugeben, dass er mit gleichem Eifer seine Thätigkeit auch den neuen Auflagen »widmen wird«.

Im September 1871 wurde der Abdruck der Gauss'schen »Theoria motus ...« beendet, der von E. Schering herausgegeben wurde, und der, ebenso wie die Original-Ausgabe von 1809, im Verlage von Perthes erschien.

Wie man in mathematischen Kreisen über die Herausgabe der Gauss'schen Werke urteilte, ist aus folgenden Auszügen aus Briefen an E. Schering zu ersehen.

Kronecker schreibt am 8. März 1866:

»Ich hoffe nun freier zu sein und werde bei den ersten Einleitungen des qu. Unter-»nehmens [der Herausgabe der Dirichlet'schen Werke] schon mich nochmals an Sie »wenden, da Sie ebenso als Kenner der Dirichlet'schen Sachen, wie als Herausgeber der »Gauss'schen Werke ein competentes Urteil über die Angelegenheit haben«.

Derselbe schrieb am 8. Juni 1868:

*) Siehe auch die Berichte von Herrn F. Klein über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken in den Göttinger Nachrichten (Geschäftliche Mitteilungen) von 1898 an.

»Sie bringen ja Ihre zahlentheoretische Schärfe, Ihr Streben nach Strenge und Prä-
»cision, Ihre genaue und umfassende Kenntniss aller von Gauss und Dirichlet bearbeiteten
»mathematischen Disciplinen mit. Was Ihre Verdienste betrifft, welche Sie sich durch die
»Herausgabe der Gauss'schen Werke erworben haben, — jeder Mathematiker weiss, welchen
»Dienst Sie mit Ihrer Selbstverleugnung der Wissenschaft geleistet haben. Wir haben auch
»stets die ungemein grosse Schwierigkeit der Herausgabe anerkannt und die Ausdauer, Um-
»sicht und Sachkenntniss bewundert, mit der Sie diese Schwierigkeit bewältigt haben«.

Aus einem Briefe von Kummer vom 4. Juni 1868 sei folgendes entnommen:

»Ich würde es für recht und billig halten, dass Ihre Arbeiten für die Herausgabe
»von Gauss' Werken, bei welcher Sie eine so allseitige und gediegene mathematische Bildung
»und Gelehrsamkeit bewährt haben und durch welche Sie den mathematischen Wissenschaften
»einen so grossen Dienst erwiesen haben, in der Verbesserung Ihrer Stellung eine gebührende
»Anerkennung erhalten möchten.«

Borchardt schrieb am 9. Februar 1872:

»Nehmen Sie zunächst meinen . . . . herzlichen Dank für die gütige Uebersendung
»Ihrer interessanten Abhandlung über die Schwerkraft im Gauss'schen Raume und für die
»schöne Ausgabe der Theoria motus, für welche die mathematische Welt Ihnen ebenso, wie
»für die Göttinger Ausgabe seiner sämmtlichen gedruckten und nachgelassenen Werke ver-
»pflichtet ist.«

In einer Aufforderung zum Beitrag für das Gauss-Denkmal sagte Borchardt am 9. Februar 1877:

»Nachdem Göttingen mit der mustergültigen Ausgabe von Gauss' Werken voran-
»gegangen ist, in welchem er selbst sich ein monumentum aere perennius gesetzt hat, ist es
»hocherfreulich zu sehen . . . .«

In einem Briefe von Borchardt vom 22. März 1877 heisst es:

»Ich hoffe, dass wenn der Briefwechsel [von Gauss und Bessel] gedruckt vorliegt,
»derselbe sich an Ihre vortreffliche und von allen Seiten anerkannte Ausgabe von Gauss'
»Werken als erwünschtes Supplement anschliessen wird«.

Hermite äussert sich brieflich am 22. Januar 1875 so:

»La publication des oeuvres de Gauss vous fait le plus grand honneur, l'intérêt de
»Lagrange me semble avoir un peu pali tandis que Gauss grandit toujours. . . . . En
»vous félicitant d'être rendu à vos recherches personnelles après avoir terminé la publication
»des oeuvres de Gauss, je ne puis m'empêcher de vous dire, que n'eussiez vous fait d'autre
»travail dans toute votre carrière, vous auriez encore le privilège de cet artiste d'Athènes,
»qui ayant travaillé à la statue de Minerve, grava son nom dans l'immortel ouvrage sous
»le bouclier de la déesse«.

In einem Briefe von Mittag-Leffler heisst es:

»Je sais qu'il [Mr. Hermite] éprouve pour vous une estime profonde et quand il
»me consultait à passer à Goettingen le premier temps de mon séjour en Allemagne il me
»parlait bien souvent de son grand égard pour l'éditeur célèbre des ouvrages de Gauss«.

Als es sich um die Herausgabe von Cauchy's Werken handelte, schrieb Hermite am 1. April 1877:

»Je vous remercie beaucoup encore des renseignements que vous me donnez sur les

»conditions de la publication des oeuvres de Gauss, ... Le sentiment de la difficulté »ne doit point cependant servir de prétexte pour s'abstenir, et dussions nous moins réussir »pour Cauchy, que vous pour Gauss, je donnerai de grand coeur ma part d'efforts à une »oeuvre qui même imparfaite sera utile«.

Dreizehn Jahre später, am 13. November 1890 bat Hermite um zwei Briefe von Lagrange an Gauss zur Veröffentlichung in den gesammelten Werken des ersteren, und fügte dann hinzu:

»Les soins dévoués que vous avez donnés à l'admirable édition des oeuvres de Gauss »qui vous a mérité la reconnaissance du monde mathématique, me permettent peut-être de »croire que vous ne ferez pas un accueil défavorable à la demande des éditeurs de Lagrange«.

Auch die italienischen Mathematiker Betti, Brioschi, Beltrami, Casorati und Cremona sprachen ihre Anerkennung der Verdienste E. Schering's um die Herausgabe der Gauss'schen Werke in ihren Briefen aus.

Bei der neuen Ausgabe von Abel's Werken, bei den vorbereitenden Arbeiten zur Herausgabe der Werke von Jacobi und Dirichlet wurde E. Schering's Rat vielfach erbeten, wie aus dem Briefwechsel ersichtlich ist und wie es zum Teil auch in den betreffenden Vorreden angedeutet ist. Man darf wohl sagen, die Gauss'schen Werke haben hierbei als Muster und Vorbild gedient.

Die akademische Lehrtätigkeit Ernst Schering's war eine sehr vielseitige, wie aus der folgenden Uebersicht der von ihm an der Universität Göttingen wirklich gehaltenen Vorlesungen zu ersehen ist:

Differential- und Integral-Rechnung: 86 (4); 88 (4 + 2)*). Elementare Einleitung in die Integralrechnung: 75 (4). Ueber Integrale: 92 (4). Variationsrechnung: 73 (4). Ueber die Hypothesen, welche der Euklidischen Geometrie zu Grunde liegen: 74 (1).

Ueber Zahlentheorie oder ausgewählte Kapitel derselben oder Anwendungen der Infinitesimalrechnung oder der elliptischen Functionen auf die Theorie der Zahlen hat er 19 Vorlesungen gehalten: 58/9 (4); 59/60 (4); 63 (4); 66 (1); 66/7 (4+1); 67/8 (1); 69/70 (4); 71/2 (4); 73/4 (4); 76 (4); 78/9 (4); 79/80 (4); 81 (4); 82/3 (4); 84/5 (4); 88 (4+2); 89/90 (4); 91 (4); 93/4 (4).

Ueber Functionentheorie, oder analytische, elliptische, Riemann'sche, Abel'sche Functionen oder ausgewählte Teile derselben, oder über die Gauss'sche hypergeometrische Reihe: 22 Vorlesungen: 63/4 (4); 64/5 (4); 66 (4); 69/70 (4); 70 (4); 71 (4); 72 (4); 72/3 (1); 73/4 (4); 74 (4); 75 (5); 75/6 (4); 76/7 (4); 79/80 (4); 81 (4); 81/2 (4); 82/3 (4); 85 (4); 85/6 (4); 87/8 (4); 92/3 (4); 93 (4).

Analytische Mechanik, oder Teile derselben, insbesondere Hamilton'sche Theorie: 11 Vorlesungen: 62 (4); 63/4 (4); 75/6 (4 + 1); 78 (4 + 1); 80 (4); 82 (4); 84/5 (4); 85/6 (4); 88/9 (4); 89 (4); 94 (4).

Hydrodynamik, Hamilton-Jacobi'sche Methode: 3 Vorl.: 76/7 (4); 80/1 (4); 86 (4).

Molecular-Mechanik; Constitution der Molecüle: 90 (4); 90/1 (4).

*) 88 (4 + 2) bedeutet: Diese Vorlesung wurde im Sommer-Semester 1888 vier Stunden wöchentlich gehalten und 2 Stunden wöchentlich fanden im mathematisch-physikalischen Seminar Uebungen darüber statt.

Partielle Differentialgleichungen, deren Anwendungen auf die Lehre von der Elasticität, vom Schall, Wärme, Licht und electrische Ströme: 11 Vorl.: 63 (1); 64 (4); 65/6 (4+1); 68 (4); 73 (4); 75/6 (4); 77 (4); 79 (4); 82 (4); 83/4 (4); 86/7 (4).

Theorie der Potentialfunctionen, Anwendung auf die Lehre von der Schwerkraft, des Magnetismus, Erdmagnetismus, der Electricität, der galvanischen Ströme, der Theorie der electrodynamischen Maschinen (diese letztere nur 92 (4)): 16 Vorl.: 64 (1); 64/5 (1); 65 (4); 67 (4+1); 68/9 (4); 69 (4); 70/1 (4); 72/3 (4); 73/4 (1); 74/5 (4+1); 77/8 (4); 81/2 (4); 82/3 (4); 85 (4); 91/2 (4); 92 (4).

Kugelfunctionen, Anwendung auf die Lehre vom Erdmagnetismus: 65 (1); 87 (1).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Methode der kleinsten Quadrate: 62/3 (1); 63/4 (1); 70/1 (1); 71/2 (1); 72/3 (1); 73 (1).

Höhere Geodäsie und geodätische Uebungen: 68 (1); 79/80 (1); 80/1 (1); 81 (1).

Mathematische, oder allgemeine Astronomie, oder Elemente derselben, Theorie der planetarischen Störungen, oder astronomische Beobachtungen: 58/9 (4); 59 (2); 60/1 (4); 84 (4+2); 84/5; 85.

Ein Teil dieser Vorträge wurde im »mathematisch-physikalischen Seminar« gehalten, dessen Vorstand er seit Mai 1861 angehörte.

Eine »mathematische Societät«, in der die Studierenden Vorträge hielten, leitete er in den 10 Jahren von 1873 bis 1883.

Eine kurze Inhaltsangabe einiger der oben angegebenen Vorlesungen möge hier folgen:

Functionentheorie. S.-S. 1875:

I. Imaginäre und complexe Grössen. Rechnungsoperationen mit denselben. Functionen complexer Grössen. Riemann'sche Differentialgleichung. Umwandlung eines Flächen- in ein Randintegral.

II. Unstetigkeitspunkte. Cauchy'scher Satz. Logarithmus; die $H\,[=\vartheta_3]$-Function.

III. Reihen: Laurent's und Taylor's Reihe.

IV. Periodische Functionen. Convergenz von $H(z)$.

V. Die vier ϑ-Functionen ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ_{11}. Gleichungen zwischen denselben. Nullwerte.

VI. Quotienten von ϑ-Functionen $=\psi$-Functionen sind doppelt periodisch. Quadrate der ψ-Functionen sind linear von einander abhängig. Differentialgleichung zwischen den ϑ-Functionen.

VII. Elliptische Integrale und Functionen und ihre Beziehung zu den ϑ-Functionen. Legendre's Gleichung zwischen den ganzen elliptischen Integralen I. u. II. Gattung. Zurückführung eines allgemeinen elliptischen Integrals auf Integrale der drei Gattungen.

VIII. Producte zweier ϑ-Functionen. Additionstheorem der elliptischen Functionen. (Im Seminar: Das arithmetisch-geometrische Mittel und Berechnung der Integrale erster Gattung.)

IX. Abel'scher Fundamentalsatz. Zweiwertige Abel'sche Integrale.

X. Unstetigkeit und Mehrdeutigkeit der Integrale algebraischer Functionen. Riemann'sche Fläche. Windungspunkte. Querschnitte.

XI. Inverse Functionen der Abel'schen Integrale. Abbildung der Riemann'schen Fläche in der Ebene der Integralwerte.

XII. Allgemeine ϑ-Reihen: Riemann'sche Functionen. Aenderungen an den Querschnitten. Nullpunkte.

XIII. Darstellung eines zweiwertigen Abel'schen Integrals dritter Gattung durch den Logarithmus eines Quotienten zweier allgemeiner ϑ-Reihen.

Analytische Mechanik (1875/6):

Den Ausgangspunkt bildete das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Daraus wurde das d'Alembert'sche Princip abgeleitet, dann die allgemeine Bewegung eines festen Körpers untersucht und die verallgemeinerte Hamilton-Jacobi'sche Methode behandelt. Als Beispiel für diese Methode wurde die Bewegung zweier Massenpunkte und die Störung durch einen dritten untersucht.

Zahlentheorie (1889/90):

I. Kongruenzen ersten Grades. Teilbarkeit der Zahlen. Grösster gemeinschaftlicher Teiler. Sätze von Fermat und Wilson.

II. Quadratische Reste. Legendre'sches Reciprocitätsgesetz. Verallgemeinertes Legendre'sches Zeichen. Bestimmung des quadratischen Restcharakters sehr grosser Zahlen.

III. Binäre quadratische Formen. Transformation. Aequivalenz zweier Formen. Reducirte Formen. Einteilung in Classen und Genera.

IV. Geometrische und krystallographische Deutung der positiven ternären quadratischen Formen. Transformation derselben. Anzahl der für eine Determinante vorhandenen Classen.

V. (in anderen Semestern) Lehre von der Kreisteilung.

VI. Biquadratische Reste.

Potentialtheorie (1885):

Gauss'scher Satz über den Integralwert der auf eine geschlossene Fläche wirkenden Normalkräfte. Laplace-Poisson'sche Differentialgleichung in beliebigen krummlinigen rechtwinkeligen Coordinaten. Green'scher Satz. Potential eines Ellipsoids. Potential flächenförmiger Massen. Magnetische Doppelflächen und galvanische Linearströme. Umschlingungen geschlossener Curven.

Der Inhalt der im Sommer 1892 gehaltenen Vorlesung über die »Mathematische Theorie der electrodynamischen Maschinen mit Multiphasenströmen«, war nach eigener Angabe E. Schering's (für den Semesterbericht des Göttinger mathematischen Vereins) folgender:

»Diese Anwendung der Potentialfunction schloss sich an die im vorhergehenden Winter- »semester vorgetragene Theorie der Gleichstrom-Maschinen an. Die Strom-Vertheilungen »wurden nach den Gauss'schen Sätzen über den electrodynamischen Druck ermittelt. Als »Beispiel zur angenäherten Bestimmung der magnetoelektrischen und der elektromagnetischen »Kräfte und ihrer Abhängigkeit von der Zeit, sowie der Magnetisierung der einzelnen Stellen »der Feldmagnete und der Ankermagnete wurden vorzugsweise die Siemens'schen Maschinen »gewählt«.

Zu diesen Untersuchungen gab die elektrotechnische Ausstellung in Frankfurt am Main im Sommer und Herbst 1891, die er von Darmstadt aus wiederholt besuchte, die äussere Veranlassung. Zahlreiche Skizzen von Ankerwickelungen, sowie Schaltungsschemata finden sich im Nachlass, ferner drei Autolithographien: »Zweipolige Dreiphasenstrom-Maschine; Transformatoren für Drehströme; Formeln zur Theorie dieser Transformatoren«, die er zu Vorträgen in einem Feriencursus vom 6. bis 15. October 1892 für Lehrer höherer Schulen benutzt hat. —

Aus dem Briefwechsel mit seinen zahlreichen früheren Zuhörern und Schülern ersieht man, dass er sich ihrer mit grossem Wohlwollen annahm, stets bemüht war, ihnen zu passenden Stellen zu verhelfen und auch bei ihren späteren Arbeiten immer den erbetenen Rat gern erteilte; sie sprechen daher in den Briefen ihrem früheren Lehrer oft ihren herzlichen Dank und ihre Verehrung aus.

In dem Gauss'schen erdmagnetischen Observatorium, zu dessen Direktor E. Schering, wie oben angegeben, ernannt war, gab er den Studierenden Gelegenheit, sich in magnetischen Beobachtungen zu üben.

»Leider war der Etat dieses Instituts anfangs auf nur 150 Thaler jährlich festgesetzt, »auch konnte zunächst weder die Anstellung eines Assistenten noch eines Wärters erreicht »werden«. So schreibt er in dem Berichte über das erdmagnetische Observatorium in der »Chronik der Universität Göttingen« für 1889 bis 1890 S. 77 *).

In Folge seiner Anregung und unter seiner Mitwirkung wurden dort die in den Göttinger Nachrichten 1881 und 1882 veröffentlichten Messungen der Horizontal-Intensität und der Inclination ausgeführt; die letztere nach der neuen Nullmethode, bei der die Drehachse des Erdinductors nahe parallel den erdmagnetischen Kraftlinien gestellt wurde.

Seinem Antrage gemäss gewährte das preussische Unterrichtsministerium 1882 die Mittel zur Erweiterung des erdmagnetischen Instituts, so dass dieses in den Jahren 1882 und 1883 an dem vollen Arbeitsprogramm sich beteiligen konnte, das für die magnetischen Beobachtungen der zahlreichen in diesen Jahren ausgesandten Polarexpeditionen verabredet war. Im Göttinger Observatorium wurde damals für die Ermittelung der Variationen der Vertikal-Intensität das neue Quadrifilar-Magnetometer konstruirt und benutzt. Ein Auszug aus diesen im »Deutschen Polarwerk« veröffentlichen Beobachtungen ist oben auf S. 109 bis 144 wiedergegeben. Ueber diese Beobachtungen berichtete er auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Berlin in der Sektion für Mathematik und Astronomie am 23. September 1886.

»Ueber die Ergebnisse der in den Jahren 1882 und 1883 ausgeführten Polarexpeditionen für die Theorie des Erdmagnetismus« hielt er im »Elektrotechnischen Verein« in Berlin, dessen »technischem Ausschusse« er angehörte, am 22. Februar 1887 einen Vortrag **) und legte dabei eine grosse Sammlung von Tafeln erdmagnetischer Curven sowie Photographien der Göttinger erdmagnetischen Apparate vor. Auf seine Veranlassung wurden in verschiedenen Dissertationen die magnetischen Beobachtungsresultate auch anderer Observatorien und Beobachtungsstationen während der Jahre 1882 und 1883 bearbeitet, so von E. Garthe die Beobachtungen in Südgeorgien, L. Haasemann: Point Barrow, L. Holborn: Göttingen, Breslau, Pawlowsk, Cap Horn, sowie die Deklinationsbeobachtungen von Klausthal 1844—1886; A. Hornickel: Jan Mayen; Ph. Huff: Tiflis; W. Kind: Fort Raë; H. Meldau: Wilhelmshaven; G. Sack: Greenwich. Besonderen Wert legte er auf eine Darstellung der Resultate durch trigonometrische Reihen und liess deshalb zum Gebrauch für die Studierenden ein Formular zur Berechnung der ersten 9 Coefficienten dieser Reihe aus 24 Werten vervielfältigen.

---

*) Solche Berichte von E. Schering über das unter seiner Leitung stehende Institut finden sich seit der Einführung dieser Chroniken in den Jahrgängen für die Rechnungsjahre 1886/7 bis 1896/7.

**) Siehe »Elektrotechnische Zeitschrift« 1887, S. 97.

Während der Zeit vom Tode des Prof. Klinkerfues am 28. Januar 1884 bis zur Berufung von Prof. Schur im Februar 1886 stand auch die astronomische Abteilung der Göttinger Sternwarte unter seiner Leitung; während dieser Zeit hielt er eine Vorlesung über Astronomie und leitete die astronomischen Uebungen*).

Im erdmagnetischen Observatorium liess er die im Jahre 1882 begonnenen regelmässigen Beobachtungen fortsetzen und noch durch Erdstrom-Messungen erweitern. Hierzu wurden vom Reichs-Post-Amt Telegraphenleitungen an vier Nächten jeder Woche von 10 bis 2 Uhr zur Verfügung gestellt, teils geschlossene Drahtleitungen von Göttingen über Hannover, Magdeburg, Dresden, Halle nach Göttingen zurück, und von dort über Cassel, Frankfurt, Strassburg, Metz, Trier, Köln, Hannover nach Göttingen zurück, teils einfache Leitungen, die in Göttingen und an der anderen End-Station Strassburg oder Berlin an Erde lagen. So konnten sowohl Inductionsströme wie Erdströme beobachtet werden. Als Instrument diente ein Galvanometer mit S-förmigen Magneten, deren Enden in der Mitte der mit der Telegraphenleitung verbundenen Drahtrollen sich befanden. Gleichzeitig wurden die erdmagnetischen Variations-Instrumente abgelesen.

Ueber diese Untersuchungen berichtete er in einer Versammlung der auf Anregung des Staatssekretärs Dr. v. Stephan zusammengetretenen Kommission für Erdstrommessungen in Berlin am 22. Januar 1888.

Bei diesen Messungen und bei der Einübung von Studierenden zu den Terminsbeobachtungen wurde er sehr wesentlich von Dr. L. Holborn unterstützt, der, nachdem endlich im Jahre 1884 dem erdmagnetischen Observatorium ein Assistent bewilligt war, diese Stellung von März 1884 bis Oktober 1889 einnahm; dann war Dr. L. Felgenträger bis August 1895 und darauf Dr. A. Nippoldt bis 1. April 1898 Assistent.

Neben dieser beobachtenden Tätigkeit war E. Schering unablässig für die Vervollkommnung seines Instituts bemüht. Ausser der schon oben erwähnten Erweiterung desselben im Jahre 1882 erreichte er 1887 einen für die Zwecke des Instituts sehr wertvollen vom Bauinspektor Breymann geleiteten Umbau des »Bifilar-Saals«, des westlichen Saals im Hauptgebäude der Sternwarte**). Dieser letztere Umbau, der sich durch eine Arbeitseinstellung der Bauhandwerker bis Ende 1888 hinzog, verhinderte ihn allerdings an der Beteiligung der British Association in Manchester im August 1887, für die er schon einen Vortrag über eine Vergleichung der neueren erdmagnetischen Beobachtungen mit denen unter Sabine zugesagt hatte.

Seine Pläne gingen aber beträchtlich weiter: er hoffte das Gauss'sche erdmagnetische Observatorium, das älteste seiner Art, zu einem deutschen Central-Institut für Erdmagnetismus erweitern zu können, und er fand hierbei auch manche wertvolle Unterstützung.

In einer Eingabe an den Preussischen Kultusminister vom 16. Mai 1884 schrieb Herr W. Foerster als Vorsitzender des elektrotechnischen Vereins:

»Der Vorstand des elektrotechnischen Vereins wagt es auf Grund aller dieser Er-
»wägungen, nachdem ihm überdies von kompetenter Stelle in Göttingen eine unmittelbare
»Bestätigung derselben gegeben worden ist und nachdem ihm andererseits bekannt geworden
»ist, dass eine neue Organisation des auch für andere Aufgaben der Praxis wichtigen

*) Er war Mitglied der »Astronomischen« Gesellschaft seit dem 29. August 1887.

**) Siehe auch Bauinspektor Wever: Umbau der Sternwarte zu Göttingen (Zeitschr. d. Architekten- u. Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. 39, 1893).

»erdmagnetischen Beobachtungsdienstes in Preussen bereits in Aussicht genommen worden ist, »Ew. Excellenz zu bitten, dem magnetischen Observatorium in Göttingen alle irgend tunlich »erscheinende Förderung geneigtest zuwenden zu wollen«.

In einem Briefe vom 23. März 1884 spricht W. Siemens seine Ansicht dahin aus:

. . . . »dass der Ruhm der Göttinger Sternwarte in den magnetischen und elektrischen »Arbeiten derselben liegt, und dass es eine Art Vandalismus wäre, wenn man nicht in erster »Linie die Fortdauer dieser Richtung sicher stellte . . . . Es giebt nur ein Göttinger mag- »netisches Observatorium in der Welt. . . . . Vielleicht wird die Bildung eines magnetischen »Centralobservatorium in Göttingen neben der Sternwarte als eine Lösung betrachtet. Meiner »Ansicht nach gehören aber beide zusammen wenigstens in Göttingen, dem alten Sitze des »Erdmagnetismus.«

Aber schliesslich sind diese Pläne nach manchen vielverheissenden Anfangs-Erfolgen doch nicht in Erfüllung gegangen. E. Schering hat an dieser Enttäuschung schwer gelitten, und noch in seinen letzten Lebensjahren hatte er gegen eine Verlegung seines Instituts in ungeeignete Räumlichkeiten zu kämpfen.

An äusseren Ehrungen sind noch folgende zu nennen: Am 27. Februar 1875 ernannte ihn die Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala zu ihrem Mitgliede. Die Akademie der Wissenschaften in Berlin wählte ihn am 8. Juli 1875 zum korrespondierenden Mitgliede der mathematisch-physikalischen Klasse.

Das Dekanat der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen verwaltete er vom 1. Juli 1881 bis 30. Juni 1882, das Amt eines Direktors der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom Herbst 1887 bis dahin 1888 und vom Herbst 1890 bis 1891; diese Gesellschaft wählte ihn nach dem Tode von Wilhelm Weber 1891 zum Vorsitzenden der Kommission für die Herausgabe von dessen Werken.

Er war wiederholt (im Ganzen 15 Jahre lang) Mitglied der Königl. wissenschaftlichen Prüfungskommission für das Fach der Mathematik, und von April 1888 bis 1889 deren Direktor.

Am 15. Mai 1876 wurde ihm das Ritterkreuz des Kön. Schwedischen Nordsternordens, am 21. December 1886 der Kön. Preussische Rothe Adler-Orden IV. Classe verliehen, am 1. Juni 1889 der Charakter als Geh. Regierungsrat erteilt.

Am 19. October 1876 vermählte er sich in Mariestad in Schweden mit Maria Heliodora Malmsten, der am 2. Mai 1848 geborenen zweiten Tochter des früheren Professors der Mathematik in Upsala und Staatsrats im schwedischen Reichs-Ministerium Carl Johan Malmsten. Diesen hatte er im Jahre 1875 auf einer Reise nach Stockholm besucht, und dort seine spätere Frau kennen gelernt.

Er legte durch diese Heirat den Grund zu einem gesegneten Familienleben, dessen Glück er mit seiner Gattin im Kreise dreier heranwachsender Kinder in dem behaglichen Heim der Göttinger Sternwarte noch 21 Jahre geniessen konnte.

Gleichzeitig waren dies die Jahre der erfolgreichsten wissenschaftlichen Tätigkeit: Alle von Nr. XVIII bis XXXXIII (mit Ausnahme von Nr. XXXIII) in diesen gesammelten Werken enthaltenen wissenschaftlichen Arbeiten gehören dieser Zeit an.

Seine Gattin stand ihm im Uebersetzen der Arbeiten in das Französische und Italienische sowie bei dem Lesen der Korrekturen und bei der ausgedehnten Korrespondenz als treue Helferin zur Seite.

Er hatte sich stets körperlicher Gesundheit zu erfreuen gehabt und war nie ernstlich krank gewesen. Auch sein regelmässiges Leben, das zwischen geistiger Tätigkeit und körperlicher Arbeit in dem von ihm geschaffenen Obst- und Rosen-Garten der Sternwarte in angemessener Weise eingeteilt war, liess auf ein hohes Alter hoffen. Da ergriff auch ihn die Influenza-Epidemie des Jahres 1892 und besonders schwer im Februar und wieder im November 1893; als Folgeerscheinung ist wohl das Nierenleiden anzusehen, das er nicht mehr überwinden sollte. Im Winter-Semester 1893/94 hat er die letzte Vorlesung über Zahlentheorie gehalten, später wohl nur noch die Uebungen im Seminar und im erdmagnetischen Observatorium geleitet. Auch ein Kuraufenthalt in Baden-Baden 1895 brachte wohl vorübergehende Besserung, konnte aber leider die fortwährende Abnahme der Körperkräfte nicht mehr aufhalten. Seit dem 23. August 1897 war er dauernd bettlägerig; und am 2. November 1897 erlöste ihn, im Alter von 64 Jahren, ein sanfter Tod von seinen Leiden, die ihm zwar weniger körperliche Schmerzen verursachten, aber so sehr quälten, da er fühlte, dass seine Arbeitskraft durch die Krankheit mehr und mehr abnahm und schliesslich ganz vernichtet wurde.

Sein Sterbelager umstanden in tiefem Schmerze seine trauernde Gattin, seine 19jährige Tochter Ingrid, und seine beiden Söhne Harald und Walther im Alter von 17 und 14 Jahren. Sein von Darmstadt herbeieilender 21 Jahre jüngerer Bruder Karl, der in ihm nicht nur den geliebten Bruder, sondern auch nach dem frühen Verluste der Eltern den väterlichen Berater und wohlwollenden Lehrer verlor, traf ihn nicht mehr am Leben.

Am 5. November 1897 begleiteten die Seinen, sowie Freunde, Kollegen und Schüler seine sterbliche Hülle zur letzten Ruhestätte auf dem Centralfriedhofe bei Göttingen.

Sein allzufrüher Tod verhinderte die Ausführung vieler von ihm gefassten Pläne. Auch der jahrelangen, der Herausgabe der Gauss'schen Werke gewidmeten, Tätigkeit hat er die Durchführung mancher wissenschaftlichen Gedanken geopfert. Soweit er selbst seine Pläne ausgesprochen hat, mögen sie hier angegeben werden:

In einem Berichte vom 23. April 1868 wird eine Arbeit: »Fundamentalgleichungen für die Bewegung der Elektricität in körperlichen Leitern erwähnt« (siehe auch hier Band I S. 160). Am Schluss der Arbeit Nr. XII auf S. 175 im Band I behält er sich: »die Mittheilung von Untersuchungen über die höhere Geometrie in einem homogenen Raume, zunächst über die Kummer'sche Fläche und Strahlensysteme in denselben . . . . für eine andere Gelegenheit vor; (1873 Januar 4)«.

In der Sitzung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften am 1. November 1873 kündigte er an: »Fundamentalsatz des Pfaff'schen Problems« *) und am 20. August 1884: »Neue Form der Berechnung der speciellen Störungen: Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung« **).

Im Februar 1875 frug er bei Borchardt an, ob er bereit sei, seine Arbeit über »die Differential-Determinanten und ihre Anwendung auf die analytische Mechanik und auf das Pfaff'sche Problem« in das Journal für reine und angewandte Mathematik aufzunehmen; schon am Tage darauf kam die zusagende Antwort.

*) Siehe Goettinger Nachrichten 1873. S. 743.

**) ebenda 1884. S. 337.

Bei Besprechung der Arbeit von Onnes über die Drehung der Erde deutet er (Januar 1883) den Plan an, die Theorie der Bewegung eines Pendels zu veröffentlichen, das: »mit Hülfe einer Kugel auf einer festen horizontalen Ebene aufgehängt ist« (siehe hier Band II, S. 92).

Aus dem Briefwechsel geht hervor, dass er sich mit dem Gedanken beschäftigte, ein grösseres Werk über Mechanik einschliesslich Hydrodynamik zu schreiben. Auch der 1886 ausgesprochene Plan: »eine vollständige Beschreibung und Theorie der im Goettinger erdmagnetischen Observatorium befindlichen Apparate zu geben« (s. hier Band II, S. 144) ist leider nicht zur Ausführung gekommen; umfangreiche Vorarbeiten dazu befinden sich im Nachlass.

Mit dem Gedanken »in einer besonderen Schrift .... eine Geschichte der gesammten wissenschaftlichen Tätigkeit von Gauss« zu geben, hat er sich lange beschäftigt (s. hier Band I, S. 153; Band II, S. 385 und Gauss' Werke Band III, S. 496) und einen grossen Teil seiner Vorarbeiten dazu in der Festrede zu »Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr« (s. hier S. 176) benutzt, sowie in der zur Jubelfeier der Georgia Augusta 1887 geschriebenen Arbeit: »Carl Friedrich Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus« (s. hier S. 223). In dieser Arbeit sagt er am Schluss (s. hier S. 307), dass er seine Untersuchungen über eine auffällige Beziehung zwischen den täglichen Aenderungen der erdmagnetischen Kraft und den täglichen Schwankungen der Temperatur bei einer anderen Gelegenheit veröffentlichen werde.

Noch in dem letzten Vierteljahr seines Lebens hat er mit seinem astronomischen Kollegen Schur über eine Herausgabe der Gauss'schen Arbeiten über die Pallasstörungen gesprochen — aber die Krankheit nahm ihm die Kraft, und der Tod die Feder aus der Hand.

Umfangreich ist sein mathematischer Nachlass: zahlreiche Blätter, fast nur Berechnungen, wenig Text enthaltend lassen erkennen, dass er noch mit manchen anderen wissenschaftlichen Arbeiten, als den von ihm veröffentlichten, beschäftigt war; aber eine Herausgabe in diesem Zustande wäre wohl nicht im Sinne des Verfassers, der nach dem Vorbilde des grossen Geisteshelden, dessen Werke er herausgegeben, auch nur »Reifes« bringen wollte.*)

---

*) Nachrufe auf E. Schering stehen: in der Chronik der Univ. Göttingen für 1897/98 von F. Klein und W. Schur; im Journal f. d. reine u. angew. Math. her. von L. Fuchs, Bd. 119, S. 86; in der Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, Jahrgang 33, 1898, S. 1—5, sowie in den Astronomischen Nachrichten Nr. 3458 von W. Schur; in der »Leopoldina« 1897 Decbr. S. 161; in der Nature Nr. 1479, Vol. 57 vom 3. März 1898 von W. H. and G. Chisholm Joung; im Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, her. von Prof. Loria in Genua, Fascicolo Gennaio-Marzo 1898. In W. Schur: »Beiträge zur Geschichte der Astronomie in Hannover« (Festschrift zur Feier des 150 jähr. Bestehens der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen) steht S. 148—149 eine kurze Lebensbeschreibung von E. Schering.