Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 18

Aufgabe 18.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige

$$D(f^n) = nf^{n-1}D(f)$$

für jedes $f \in A$.

Aufgabe 18.2. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige

$$D(f_1 \cdots f_r) = f_2 \cdots f_r D(f_1) + f_1 f_3 \cdots f_r D(f_2) + \cdots + f_1 \cdots f_{r-1} D(f_r)$$

für $f_1, \ldots, f_r \in A$.

Aufgabe 18.3. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Es sei

$$x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \in A.$$

Zeige

$$D(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) = n_1 x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r} D(x_1) + \cdots + n_r x_1^{n_1} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r-1} D(x_r)$$

Aufgabe 18.4. Es sei A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Zeige, dass die Menge der Derivationen von R nach M ein R-Modul wird, wenn man $f\delta$ durch

$$(f\delta)(a) = f\delta(a)$$

definiert.

Aufgabe 18.5. Es sei R eine kommutative K-Algebra und $W \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $D\colon R \to R$ eine K-Derivation. Zeige, dass durch

$$D\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2}$$

eine Derivation auf der Nenneraufnahme R_W gegeben ist, die D fortsetzt.

Aufgabe 18.6.*

Es sei A eine kommutative R-Algebra über einem kommutativen Ring R. Zu $f \in A$ bezeichne
$$\mu_f \colon A \longrightarrow A,\, x \longmapsto fx,$$
die R-lineare Multiplikationsabbildung und zu zwei R-linearen Abbildungen
$$\varphi_1, \varphi_2 \colon A \longrightarrow A$$
bezeichne
$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1 .$$
Es sei $\delta \colon A \to A$ eine R-Derivation. Zeige, dass zu jedem $g \in A$ die Abbildung $[\delta, \mu_g]$ eine Multiplikationsabbildung ist.

Aufgabe 18.7. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Zeige, dass die universelle Derivation
$$A \longrightarrow \Omega_{A|R},\, f \longmapsto df,$$
eine Derivation ist.

Aufgabe 18.8. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$.

Aufgabe 18.9. Sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Zeige $\Omega_{L|K} = 0$.

Aufgabe 18.10. Bestimme $\Omega_{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]|\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 18.11. Es sei R ein kommutativer Ring und
$$A = R[X_1, \ldots , X_n]/(X_n - f(X_1, \ldots , X_{n-1}))$$
mit einem Polynom $f \in R[X_1, \ldots , X_{n-1}]$ (die Nullstellenmenge ist also der Graph zu f). Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass $\Omega_{A|R}$ ein freier A-Modul vom Rang $n - 1$ ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf das Tensorprodukt von Moduln und von Algebren, siehe auch den Anhang.

Aufgabe 18.12. Berechne $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(5)$.

Aufgabe 18.13. Berechne das Tensorprodukt
$$\left(\mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/(2))^2 \oplus \mathbb{Z}/(3)\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(4)\right) .$$

Aufgabe 18.14. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige die R-Modulisomorphie

$$R^n \otimes_R R^m \cong R^{nm}.$$

Aufgabe 18.15. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ seien Ideale. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} = R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Aufgabe 18.16. Es sei R ein kommutativer Ring und $S, T \subseteq R$ seien multiplikative Systeme. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R_S \otimes_R R_T = R_{S \cdot T}.$$

Aufgabe 18.17. Es seien M und N kommutative Monoide und R ein kommutativer Ring. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R[M \times N] \cong R[M] \otimes_R R[N].$$

Aufgabe 18.18.*

Es sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige

$$\Omega_{A_S|A} = 0.$$

Aufgabe 18.19. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann

$$\Omega_{A_S|R} \cong \left(\Omega_{A|R}\right)_S$$

gilt.

Aufgabe 18.20. Diskutiere Lemma 18.8 im Fall, dass $R = K$ ein Körper der positiven Charakteristik p, $A = K[X]$ und $I = (X^p)$ ist.

Aufgabe 18.21. Beschreibe für $A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ den Modul der Kähler-Differentiale mit Erzeugern und Relationen.

Aufgabe 18.22. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$ mit Hilfe von Korollar 18.9.

Aufgabe 18.23. Sei p eine Primzahl. Wir betrachten die Körpererweiterung, die durch

$$K = \mathbb{Z}/(p)(U) \subseteq \mathbb{Z}/(p)(Y) = L$$

mit $U \mapsto Y^p$ gegeben ist. Zeige, dass Lemma 18.14 in dieser Situation nicht gilt.

Aufgabe 18.24. Sei p eine Primzahl und

$$K = \mathbb{Z}/(p)(U) \subseteq R = K[Y]/(Y^p - U).$$

Zeige, dass $R \cong K(Y)$ ist, dass R regulär ist und dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ nicht frei ist.

Aufgabe 18.25. Sei $R = \mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$. Zeige, dass der R-Modul der Kählerdifferentiale

$$\Omega_{R|\mathbb{R}} = RdX \oplus RdY \oplus RdZ/(XdX + YdY + ZdZ)$$

eingeschränkt auf die offenen Mengen $D(X)$, $D(Y)$, $D(Z)$ (also $\left(\Omega_{R|\mathbb{R}}\right)_X = \Omega_{R_X|\mathbb{R}}$ etc.) frei ist und dass damit $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ lokal frei ist.

Abbildungsverzeichnis