DEGLI ARCHI
E
DELLE VOLTE

LIBRI SEI

DI

LEONARDO SALIMBENI

Capitano Ingegnere, Professore di Matematica e delle Fortificazioni nel Collegio Militare, e de' Quaranta della Società Italiana.

IN VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

MDCCLXXXVII.

Itaque Architecti, qui sine litteris contenderunt, ut manibus essent exercitati, non potuerunt efficere, ut haberent pro laboribus auctoritatem. Qui autem ratiocinationibus & litteris solis confisi fuerunt, umbram non rem persequuti videntur. Vitr. Cap. I.

AGLI AMPLISSIMI SENATORI

ANDREA QUERINI
ZACCARIA VALLARESSO
FRANCESCO PESARO K.R P.R

RIFORMATORI DELLO STUDIO DI PADOVA

LEONARDO SALIMBENI.

SE io riguardo quali e quante pellegrine virtù adornino l' animo vostro, Eccellentissimi Signori, e quanto siate di tutte le bell' arti e più profonde scienze veri conoscitori, m' avveggo di essere troppo ardito col dedicarvi quest' opera mia; ma se considero all' opposito Voi di singolare bontà ripieni, e delle lettere Promotori e Mecenati amplissimi, trovo di averla collocata in quel luogo che più le si conveniva: imperciocchè quando essa per avventura ritrovamenti *contenesse meritevoli della vostra approvazione, Voi la sapreste proteggere e sollevare; e la soffrireste eziandio se fosse men che degna, giacchè siete soliti d' animare gli autori sì mediocri che sublimi, questi in ricompensa delle loro onorate fatiche, quelli per incamminarli a lodevoli imprese. Per la qual cosa io prendo cuore ad offerirvi questi sei Libri* degli Archi e delle Volte, *argomento nobile del pari e difficile, maneggiato da me in guisa che la teoria dalla pratica, e questa da quella, riceva a vicenda maggior sostentamento e chiarezza.*

Quando la Matematica non rivolge la mira ad oggetti di pubblica utilità, infruttuose si rimangono le sue scoperte, non servendo che a pascere la speculativa di pochi: ma se al contrario succeda, non può dirsi quanto illumini quella Scienza la pratica, ed oltre i confini la spinga, a' quali per se medesima non sarebbe pervenuta giammai. Questo ho io tentato di fare, impiegando la teoria in una parte dell' Architettura ch' è di tanto uso, poichè non v' è quasi edifizio nè pubblico, nè privato, nè civile, nè militare, in cui non si trovino Archi o Volte: ma se vi sia riuscito, lo giudicheranno i dotti, lo giudicherete Voi, che alla nobiltà del sangue, e alla celebrità della fama acquistata negl' importantissimi impieghi sostenuti in Patria, o fuori, accoppiate, come io rammemoro con rispetto, maturo giudizio e fino discernimento.

Verona il dì primo Agosto 1787.

PREFAZIONE.

IN due ſtati ſi vogliono conſiderare gli Archi e le Volte, cioè a dire, quando ſi fabbricano ſopra le centine, e quando dopo fabbricati ſi diſarmano delle centine medeſime, ſtati che fra loro di molto differiſcono, e varj argomenti preſentano alle ricerche de' Matematici, ed Architetti. Del primo ſtato, che io mi ſappia, non trovaſi nulla di ſcritto, fuor ſolamente una ſemplice proprietà ſcoperta da *Couplet* nelle Volte e negli Archi interi circolari: del ſecondo all' incontro trattarono aſſai valent' uomini, *de la Hire*, *Couplet*, *Belidor* ed altri, e ultimamente il non mai abbaſtanza celebrato Sig. Brigadier *Lorgna*, e il chiariſſimo Sig. Profeſſor *Maſcheroni* di Pavia. Io mi progongo di verſare ſopra ambedue queſti ſtati degli Archi e delle Volte, non ſupponendo nè gli uni nè l' altre di quella forma ch' eſigerebbe il calcolo per ſerbare ne' cunei certi equilibrj, ma piuttoſto di quella che lor danno gli Architetti, che trovata prima in ogni edifizio la più acconcia ſimmetria delle parti in ordine principalmente alle regole della proſpettiva, v' adattano poi ſecondo l' uopo le forze e le reſiſtenze. Per giugner al mio intento muovo da alcuni principj di *Couplet*, battendo però una ſtrada differente, che mi conduce a nuove ed importanti verità; ed ho meſtieri di partire tutta l' opera in ſei Libri.

Dopo di aver diſcuſſe nel primo Libro alcune propoſizioni fondamentali di queſta materia, paſſo nel ſecondo ad eſaminare la preſſione de' cunei ſulle centine degli Archi circolari, ſieno interi, ſieno ſcemi, o a ſeſto acuto, e formati di un numero qualſivoglia finito di cunei, o veramente infinito; e cerco di poi i loro punti d' equilibrio, cioè dove comincino a naſcere gli sfiancamenti; procedendo ſempre con metodo ſintetico, e col calcolo finito. Nel terzo dimoſtro per ſimil guiſa, come, dopo levate le centine, agiſcano le gravità de' cunei sì fra loro, e sì contro a' pilaſtri degli Archi pure circolari. Le indagini da me fatte nel ſecondo e nel terzo Libro intorno agli Archi circolari eſtendo ne' due sussseguenti agli Archi di qualsisia interiore ed esterior curvatura, di modo che il quarto corrisponde al secondo, e suppone per anche i cunei sopra le centine; e al terzo corrisponde il quinto, e s' intendono gli Archi delle lor centine disarmati. In questi due Libri però non posso far senza del calcolo infinitesimale e del metodo analitico, ma non ommetto impertanto di dimostrare cogli esempli applicati agli Archi in ispecie circolari, essere i loro risultamenti affatto uniformi a' ritrovati ne' due Libri innanzi, quando si supponeva infinito il numero de' cunei, e infinitesimo di grandezza ogni cuneo onde l' Arco è composto, il che serve pur anche a' tanti miei calcoli di prova. Applico nel sesto ed ultimo Libro la teoria degli Archi a due specie di Volte, a quelle che si dicono a mezza botte, caricate da qualsivoglia scala di pesi, ed alle cupole, proponendo la risoluzione di diversi pratici problemi, i quali mostrano ad evidenza l' accordo, sì strettamente che nulla più, fra la teoria e la pratica.

PROSPETTO DELL' OPERA.

LIBRO PRIMO.

LIBRO SECONDO.

LIBRO TERZO.

LIBRO QUARTO.

LIBRO QUINTO.

LIBRO SESTO.

LIBRO PRIMO

PRINCIPJ DELLA TEORIA DEGLI ARCHI E DELLE VOLTE.

Diffinizioni.

I.

ARco propriamente ſi chiama dagli Architetti quella copertura de' vani, che abbia figura curvilinea.

II.

Pilaſtri dell' Arco ſono quella ſpecie di colonne ſulle quali poſano gli Archi, e che loro ſervono di ſoſtegno.

III.

Gli Archi ſono circolari, elittici, iperbolici ecc. ſecondo la natura del loro interiore incurvamento; ma quando non ſi aggiugne loro alcun nome dinotante determinata curvatura, s' intende ſempre parlare di Archi circolari.

IV.

Siccome di rado o non mai ſi poſſono far gli Archi di un pezzo ſolo, così ſi compongono mediante il congiungimento di più pezzi insieme, che si sostengono vicendevolmente, e che vengono chiamati Cunei o Conj.

V.

Que' cunei dell' Arco, che da una parte e dall' altra stanno abbasso appoggiati su i pilastri, si dicono con nome particolare Mosse.

VI.

I conj poi dell' Arco si sogliono fare di numero impari, affine di poter mettere di sopra nel rigoglio un conio, che si chiama Serraglio, il quale serra e unisce tutti i conj che compongono l' Arco.

VII.

Impostatura degli Archi è quel luogo appunto dove posano gli Archi.

VIII.

Centina è l' armadura di legname sopra la quale si fabbricano gli Archi, e che serve di mezzo per congiugnere insieme tutti i cunei. Questi congiunti, si toglie affatto dall' Arco la centina.

IX.

Ma degli Archi circolari Arco intero o a tutto ſeſto è quello, che rappreſenta nella faccia la metà dello ſpazio compreſo tra due cerchj concentrici, e che ha la ſaetta uguale alla metà della corda.

X.

Arco ſcemo è quello che rappreſenta una parte minore della metà dello ſpazio compreſo fra due cerchj concentrici, e che ha la ſaetta minore della metà della corda.

XI.

Arco compoſto o a ſeſto acuto è quello che rappreſenta due archi ſcemi, i quali hanno i loro centri nella corda dell' Arco, e fra di loro ſcambievolmente ſi ſegano.

XII.

Similmente negli Archi circolari Raggio interiore ſi dice la linea, che partendo dal centro dell' Arco va fino ad un punto preſo nella circonferenza interiore.

XIII.

E Raggio eſteriore s' intende eſſere la linea, che dal centro dell' Arco si conduce ad un punto della circonferenza esteriore.

XIV.

Si chiama ancora, benchè impropriamente, dagli Architetti Arco piano quella copertura, che si distende in linea retta fra le sue impostature.

XV.

Sfiancamento di un cuneo si chiamerà quella forza, quando vi sia, la quale cerca disgiugnere il cuneo dai contigui e cacciarlo fuori dell' Arco.

XVI.

Forza o spinta relativa di un cuneo è quella forza con cui esso preme il cuneo inferiore secondo una direzione alla loro comune commessura perpendicolare. E spinta relativa della mossa è quella forza che similmente impiega la mossa contro l' impostatura dell' Arco.

XVII.

Punto d' equilibrio in un Arco, a cui sta ancora sottoposta la centina, è quel punto della centina sul qual poggia un cuneo, che nè preme la centina, nè sfianca.

DOMANDE.

I.

CHe tutti i cunei componenti un Arco non sieno legati fra di loro con calce, nè vi sia alcun soffregamento nelle commessure, ma che liberi e levigatissimi gravitino col loro proprio peso, vicendevolmente premendosi.

II.

Che tutti i conj componenti un Arco circolare sieno uguali e simili fra di loro, eccettochè il serraglio dell' Arco composto, che debbe necessariamente avere una forma differente dagli altri.

III.

Che i pilastri sieno fatti di un pezzo solo, e talmente collocati colla loro base sulle fondamenta, che non possano essere mossi che d' intorno alle linee esterne della base medesima.

IV.

Che sia permesso di supporre adattate esternamente da ambe le parti di un Arco di qualsivoglia curvatura, dalle impostature in su, due ſopraccentine, le quali ſieno attaccate fermamente a' pilaſtri, e ſecondino la forma eſteriore dell' Arco, per quel tratto che ſi determinerà a ſuo luogo, dove ſi renderà anche ragione della fatta domanda.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

COstruire una figura, che indichi un Arco intero, composto di un dato numero di cunei, di cui sia data la corda, la grossezza, e la larghezza.

Debba essere la corda dell' Arco uguale alla linea *K*, la grossezza uguale alla *H*; *I* poi indichi la sua larghezza, e sia proposto farlo di cinque cunei. Fig. I. Tav. I.

Si esponga una retta orizzontale *AB* uguale alla *K*, e divisa per mezzo la *AB* in *C*, si descriva il semicerchio *ADB*; indi si facciano le *AE BF* uguali alla *H*, e col centro medesimo *C* e coll' intervallo di una delle *CE CF* si descriva l' altro semicerchio *EMF*. Di nuovo si divida la circonferenza interiore *ADB* in cinque parti uguali, e condotte dai punti delle divisioni linee rette al centro, si prolunghino finchè intersechino la circonferenza esteriore *EMF*; e tutta la superficie *EMFBDA* mostrerà la faccia dell' Arco intero diviso in cinque cunei, di cui li due *EG SF* dinoteranno le mosse, e quel di mezzo *aQ* sarà il serraglio. Dif. 9

E se alla superficie *EMFBDA* si aggiugnerà la dimensione *FT* ad angoli retti, la qual sia uguale alla larghezza *I* dell' Arco, di modo che *AP* sia il solido prodotto dal movimento del piano *EMFBDA* parallelo a se stesso e per la direzione *FT*, si sarà costruita la figura dell' Arco a tutto sesto, e le inclinate superficie *TbGc NO PQ RS*, che indicano le commessure de' conj, prolungate concorreranno nella retta *CZ* uguale e parallela a *FT*, e però ad angoli retti, anch' essa, al piano medesimo *EMFBDA*; il che ecc.

S C O L I O.

E' chiaro, che la risoluzione del Problema presente richiede di poter dividere la semicirconferenza di un cerchio in quante parti uguali si vogliano di numero impari, il che quantunque sia quasi sempre superiore alle forze della Geometria, ciò nulla ostante si può far praticamente usando il compasso o qualche altro strumento, e *si possono determinare i punti delle divisioni col mezzo di formole trigonometriche.*

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Data la corda, la saetta, e la grossezza di un Arco scemo, non meno che la larghezza e il numero de' cunei, costruire la figura.

Fig. II. Tav. I. Sia la corda dell'Arco scemo uguale alla linea *K*, la saetta
Dif. 10 uguale a *L*, che sarà minore della metà della *K*; l' Arco poi debba essere grosso quanto *H*, e largo quanto *I*; e sia proposto farlo di nove cunei.

Si esponga la retta orizzontale *AB* uguale alla *K*, e divisa per mezzo la *AB* nel punto *G* si conduca la *GC* ad angoli retti alla *AB* ed uguale alla *L*; indi per li punti *A C B* si faccia passare un segamento minore di cerchio, il cui centro *E* sarà nella *CG* prolungata, e si tirino le *EAD EBM*. Di nuovo si prendano le *AD BM* uguali alla grossezza *H* dell' Arco, e col centro *E* ed intervallo della *ED* si descriva l'altro segamento *DOM*; indi divisa la circonferenza interiore in nove parti uguali, e dai punti delle divisioni conducendo
Dif. 10 rette linee al centro *E*, dipoi prolungandole finchè incontrino la circonferenza esteriore *DOM*, sarà descritta la faccia dell' Arco scemo e de' suoi cunei.

E se finalmente al piano *DOMBCA* sarà aggiunta ad angoli retti un'altra dimensione *MN* uguale alla larghezza *I* dell' Arco, sarà descritta la figura solida *AR* dinotante l' Arco scemo, e le superficie inclinate de' cunei, o le loro commessure, concorreranno nella retta *EF* parallela ed uguale alla *MN*; il che ecc.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Data la corda, la saetta, e la grossezza di un Arco composto, insieme colla larghezza e col numero de' conj, costruire la figura.

Debba

Debba essere la corda dell' Arco uguale alla linea *K*, la saetta uguale alla *L*, la grossezza uguale a *H*, la larghezza uguale a *I*, e sia proposto di formarlo con tredici cunei. Fig. III. Tav. I.

Espongasi la retta orizzontale *AB* uguale alla corda *K*, e si divida per mezzo nel punto *D*, da cui si conduca la *DC* ad angoli retti alla *AB* ed uguale alla saetta *L*: poscia si congiunga la *AC* e si seghi per mezzo e ad angoli retti colla *OE*, che intersechi la corda nel punto *E*; e fatto centro in *E* coll' intervallo di una delle *EA EC* si descriva l' arco *AC*. Lo stesso si faccia dall' altra parte descrivendo col centro *F* l' arco *BC*, e ad amendue si assegnino le grossezze *AQ BR* uguali alla *H*. Di nuovo si dividano le circonferenze interiori *AC BC* in sei parti uguali, e dai punti delle divisioni si tirino linee rette ai rispettivi loro centri *E F*, e si prolunghino finchè incontrino le circonferenze esteriori *QP RP*, e sarà descritta la faccia dell' Arco composto; alla quale aggiugnendo la dimensione *RZ* ad angoli retti al piano *QPRBCA* e uguale a *I*, si compirà la figura solida dell' Arco diviso in tredici cunei, le di cui commessure concorreranno nelle rette *EH FG* uguali e parallele alla *RZ*; il che ecc. Dif. 11

Corollario.

E perchè l' Arco composto debbe avere i centri de' due Archi scemi, che lo compongono, nella corda *AB*, uno di essi *E* o cadrà in *B*, o tra *B* e *D*. Nel primo caso sarà la corda *AB* uguale alla *BC*, e il triangolo *ABC* equilatero: ma nel secondo caso (ch' è appunto l' espresso nella figura) essendo la *CE* uguale alla *EA*, posta comune la *EB*, saranno le due *CE EB* uguali alla *AB*; le due poi *CE EB* sono maggiori della *BC*; dunque anche la *AB* sarà in questo secondo caso maggiore della *BC*: quindi unendo insieme i due casi, si potrà sempre dire, che in un Arco composto la corda *AB* non ha mai da essere minore della retta *BC*, che congiugne il rigoglio *C* dell' Arco con un' estremità *B* della corda; e questo è un limite a cui bisogna aver riguardo nell' assegnare la saetta di un Arco composto. Dif. 11

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Costruire la figura di un Arco piano, del quale sia data la corda, la grossezza, la larghezza, e il numero de' cunei.

Fig. XIV. Tav. I. Sia l' orizzontale *AB* la corda dell' Arco piano; e si divida la *AB* in tante parti uguali quanti cunei si vogliono nell' Arco, per esempio in sette. Dipoi si seghi la *AB* per mezzo nel punto *E*, dal quale si conduca la *ED* ad angoli retti alla *AB*, e nella *ED* si prenda qualsisia punto *D*; indi si tiri la *CG* parallela alla *AB* ad una distanza *EF* uguale alla grossezza, che all' Arco piano dee darsi; e finalmente dai punti di divisione *A m K L N g h B* della corda si tirino linee rette al punto *D*, che prolungate fino alla *CG* somministreranno le commessure de' cunei, e la figura *CABG* dinoterà la faccia dell' Arco piano, a cui aggiugnendo la dimensione della larghezza, s' avrà la figura intera dell' Arco medesimo; il che ecc. Dif. 14.

S c o l i o.

In altro modo si può costruire l' Arco piano, come vedesi ne' libri d' Architettura, ch' è inutile di trascrivere in questo luogo. Basti sapere che d' ordinario si prende il punto D *per modo che* ADB *sia un triangolo equilatero.*

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

A una figura qualsivoglia, dinotante Arco circolare o Arco piano, aggiugnere la costruzione de' pilastri, de' quali sia data l' altezza e la grossezza.

Fig. I. Tav. I. Sia primieramente l' Arco intero *AP*, e *A B* sieno i punti primi dell' impostatura. Si conduca pertanto dal punto *A* la *AW* ad angoli retti alla *AB* ed uguale all' altezza, che debbe avere il pilaſtro: poi ſi faccia la *WX* uguale alla groſſezza del pilaſtro medeſimo e parallela alla *AB*, e ſi compia il rettangolo *AX*, che indicherà la faccia del pilaſtro, a cui aggiugnendo la dimenſione *AÆ* uguale alla larghezza ſteſſa dell' Arco, sarà coſtruita tutta la figura ſolida di un pilaſtro; e lo ſteſſo ſi faccia all' altra impoſtatura *B*.

Ma in ſecondo luogo, ſe l' Arco ſia ſcemo, preſe le *AW* *WX* uguali all' altezza e alla groſſezza del pilaſtro, conviene condurre dal punto *X* la *XV* parallela alla *AW*, e dal punto *D* la *DV* parallela alla *AB* per avere la faccia del pilaſtro, al quale ſi aſſegnerà, come prima, una larghezza *AÆ* uguale alla larghezza dell' Arco ſcemo; e lo ſteſſo ſi farà dall' altra parte. Fig. II. Tav. I.

I pilaſtri degli Archi compoſti ſi coſtruiſcono come quelli degl' interi, e quelli degli Archi piani come i pilaſtri de' ſcemi: per altro trovandoſi alle volte alcuni Archi, che ſporgono di dentro uſcendo del piombo de' loro pilaſtri, s' è voluto rappreſentarli nella *Fig. III.* il che rieſce facile quando ſia dato l' aggetto *AT*; e però ecc. Fig. III. e XIV. Tav. I.

S C O L I O.

S' è fatta la larghezza del pilaſtro uguale alla larghezza dell' Arco, perchè così ſi uſa ordinariamente; ma volendo che ſia maggiore, baſta collocare la differenza metà per parte affinchè l' Arco impoſti nel mezzo della larghezza del pilaſtro medeſimo.

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Trovare il centro di gravità della ſuperficie piana *ABCFRE* compreſa da due parti *ABC* *ERF* di circonferenze, che hanno lo ſteſſo centro *D*, e dalle rette *AE* *CF* dirette al centro medeſimo. Fig. IV. Tav. I.

Si prenda il centro di gravità *G* del ſettore *ADC*, e il centro di gravità *H* dell' altro ſettore *EDF*, i quali centri di gravità cadranno nella retta *DB*, che divide per mezzo l' angolo ADC: indi si faccia come la superficie $ABCFRE$ al settore EDF, così reciprocamente la HG alla GI, sarà il punto I centro di gravità della superficie $ABCFRE$ per le cose che si dimostrano nella Statica.

Sia pertanto il raggio maggiore $DA = c$, il minore $DE = b$, r il raggio delle Tavole, e sia l' angolo $ADC = 2\mu$; ovvero 2μ indichi l' arco, che nel cerchio del raggio r corrisponde all' angolo ADC; e si congiungano le corde AC EF.

E perchè la distanza del centro di gravità di un settore dal centro del cerchio è subsesquialtera della quarta proporzionale tra l' arco, che gli serve di base, la corda, e il raggio, sarà la $DH = \frac{2.EF.DE}{3.ERF}$, e similmente $DG = \frac{2.AC.DA}{3.ABC}$. Ora nel triangolo rettangolo ADL essendo dato l' angolo $ADL = \mu$, e la $AD = c$, si troverà $AL = \frac{c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}$, e però la corda $AC = \frac{2c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}$: nella stessa guisa si troverà la corda $EF = \frac{2b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}$. Di nuovo perchè come il raggio r al raggio DA, così è l' arco 2μ all' arco ABC, sarà l' arco $ABC = \frac{2c\mu}{r}$; e per la stessa ragione sarà l' arco $ERF = \frac{2b\mu}{r}$. Per la qual cosa sostituendo nell' espressioni di DG DH i valori ritrovati, si avrà $DH = \left(\frac{4b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}\,.\,b\right) : \frac{6b\mu}{r} = \frac{2b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu}$, e $DG = \left(\frac{4c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}\,.\,c\right) : \frac{6c\mu}{r} = \frac{2c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu}$; e però la rimanente $HG = \frac{2c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu} - \frac{2b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu} = \frac{2(c-b)\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu}$.

Oltre a ciò perchè il settore $DAC = ABC\,.\,\frac{DA}{2} = \frac{2c\mu}{r}\,.\,\frac{c}{2} = \frac{c^2\mu}{r}$, e il settore $EDF = ERF\,.\,\frac{DE}{2} = \frac{2b\mu}{r}\,.\,\frac{b}{2} = \frac{b^2\mu}{r}$, sarà la rimanente superficie $ABCFRE = \frac{c^2\mu}{r} - \frac{b^2\mu}{r} = \frac{\mu(c^2-b^2)}{r}$;

ſicchè eſſendo come la ſuperficie medeſima $ABCFRE$ al ſettore EDF, così la HG alla GI, ovvero $\frac{\mu(c^2 - b^2)}{r} : \frac{b^2\mu}{r} :: \frac{2(c - b) . \text{sen.} \mu}{3\mu} : GI$, ſarà $GI = \frac{2b^2(c - b) . \text{sen.} \mu}{3\mu(c^2 - b^2)} = \frac{2b^2 . \text{sen.} \mu}{3\mu(c + b)}$.

S' è poi dimoſtrata la $DG = \frac{2c . \text{sen.} \mu}{3\mu}$, dunque tutta la $DI = \frac{2c . \text{sen.} \mu}{3\mu} + \frac{2b^2 . \text{sen.} \mu}{3\mu(c + b)} = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} . \frac{\text{sen.} \mu}{\mu}$; e così ſarà determinata la diſtanza tra il centro di gravità I della ſuperficie $ABCFRE$ e il centro D delle circonferenze ABC, ERF; il che ecc.

Corollario I.

Quindi la ſuperficie $ABCFRE = \frac{\mu(c^2 - b^2)}{r}$, dove c dinota il raggio della circonferenza maggiore, b il raggio della minore, r il raggio delle Tavole, e μ la metà dell' arco, che nel cerchio del raggio r corriſponde all' angolo ADC.

Corollario II.

Per conſeguenza ſe l' angolo ADC, ovvero l' arco 2μ ſia una quantità infiniteſima, ſarà ancora $\mu = \text{sen.} \mu$, onde la ſopraddetta diſtanza DI diventerà in queſto caſo medeſimo $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)}$; e chiamata $AE = g$, ſicchè $c = b + g$, ſarà $DI = \frac{2b^2 + 4bg + 2g^2 + 2b^2 + 2bg + 2b^2}{3(2b + g)}$

$$= \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b + g)}.$$

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Preſentare tutte l' eſpreſſioni generali del calcolo de' ſeni e coſeni, di cui s' avrà maggior uopo nel corſo di queſt' Opera, onde facilitare l' intendimento de' calcoli.

Si dimoſtrano nell' analiſi, ſe π φ ſieno due archi quali ſi vogliano preſi nel cerchio del raggio $= r$, di cui π ſia il maggiore e φ il minore, ſi dimoſtrano, dico, le ſeguenti equazioni.

$$\text{I. } \operatorname{sen.}(\pi + \varphi) = \frac{\operatorname{sen.}\pi \,.\, \cos.\varphi}{r} + \frac{\cos.\pi \,.\, \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{II. } \operatorname{sen.}(\pi - \varphi) = \frac{\operatorname{sen.}\pi \,.\, \cos.\varphi}{r} - \frac{\cos.\pi \,.\, \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{III. } \cos.(\pi + \varphi) = \frac{\cos.\pi \,.\, \cos.\varphi}{r} - \frac{\operatorname{sen.}\pi \,.\, \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{IV. } \cos.(\pi - \varphi) = \frac{\cos.\pi \,.\, \cos.\varphi}{r} + \frac{\operatorname{sen.}\pi \,.\, \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

dalle quali quattro equazioni ſe ne poſſono ricavare altrettante ſommando prima, poi ſottraendo fra di loro le due prime, poſcia facendo lo ſteſſo delle ſuſſeguenti. Sarà pertanto

$$\text{V. } \operatorname{sen.}(\pi + \varphi) + \operatorname{sen.}(\pi - \varphi) = \frac{2 \,.\, \operatorname{sen.}\pi \,.\, \cos.\varphi}{r}$$

$$\text{VI. } \operatorname{sen.}(\pi + \varphi) - \operatorname{sen.}(\pi - \varphi) = \frac{2 \,.\, \cos.\pi \,.\, \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{VII. } \cos.(\pi + \varphi) + \cos.(\pi - \varphi) = \frac{2 \,.\, \cos.\pi \,.\, \cos.\varphi}{r}$$

$$\text{VIII. } \cos.(\pi - \varphi) - \cos.(\pi + \varphi) = \frac{2 \,.\, \operatorname{sen.}\pi \,.\, \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

Similmente fatto nella terza equazione $\varphi = \pi$ ſi conſeguirà $\cos. 2\pi = \frac{(\cos.\pi)^2}{r} - \frac{(\operatorname{sen.}\pi)^2}{r}$: ma $r^2 = (\operatorname{sen.}\pi)^2 + (\cos.\pi)^2$; dunque avremo altre due equazioni

$$\text{IX. } r \,.\, \cos. 2\pi = r^2 - 2 \,.\, (\operatorname{sen.}\pi)^2$$

$$\text{X. } r \,.\, \cos. 2\pi = 2 \,.\, (\cos.\pi)^2 - r^2$$

Quando però nel corso dell' Opera vorrassi citare una di queste dieci equazioni, si darà loro il nome di equazione prima, seconda, terza ecc. come sono marcate da' numeri romani in questo luogo.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Ritrovare la somma generale della serie (A) sen. d, sen. $(d+b)$, sen. $(d+2b)$ ecc. .... sen. $(d+nb)$; e dell' altra serie (B) cos. d, cos. $(d+b)$, cos. $(d+2b)$ ecc. . . . cos. $(d+nb)$; nelle quali $n+1$ indica il numero de' termini.

La prima serie (A) sen. d, sen. $(d+b)$, sen. $(d+2b)$ ecc..... sen. $(d+nb)$ sommata dall' *Eulero Introductio in Anal. infin. Tom.* 1. *n.°* 259 dà per somma generale

$$\frac{\text{sen.}\left(d+\frac{1}{2}nb\right).\,\text{sen.}\,(n+1)\frac{b}{2}}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}b}$$; la seconda poi (B) cos. d, cos. $(d+b)$, cos. $(d+2b)$ ecc. . . . . cos. $(d+nb)$ sommata al numero susseguente 260 dà per somma generale

$$\frac{\text{cos.}\left(d+\frac{1}{2}nb\right).\,\text{sen.}\,(n+1)\frac{b}{2}}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}b}$$; dunque ecc.

COROLLARIO.

Dimandisi per esempio un numero di termini q della serie cos. $(2x+1)\mu$, cos. $(2x-1)\mu$, cos. $(2x-3)\mu$ ecc. Si faccia $d=(2x+1)\mu$, $b=-2\mu$, e $q=n+1$, onde $n=q-1$: sarà, sostituendo, la somma ricercata

$$=\frac{\text{cos.}\,(2x\mu+\mu-q\mu+\mu).\,\text{sen.}\,-q\mu}{\text{sen.}\,-\mu}$$

$$=\frac{\text{cos.}\,(2x-q+2)\mu.\,\text{sen.}\,q\mu}{\text{sen.}\,\mu}.$$

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Ritrovare il centro di gravità di uno de' cunei componenti un Arco circolare, purchè non ſia il ſerraglio dell' Arco compoſto.

Fig. V. Tav. I. Sia *BP* un conio di Arco circolare, non però il ſerraglio dell' Arco compoſto, e s' intenda prodotto il conio *BF* dal movimento parallelo della ſuperficie *ABCO* per la direzione *BF* ad eſſa perpendicolare. Sia poi *D* il centro delle circonferenze concentriche *AB OC*, e *G* centro dell' oppoſte *EF PQ*, coſicchè la linea *DG* che uniſce i punti *D G* ſia uguale e parallela alla *BF*, e inſieme colla *BF* perpendicolare ai piani de' triangoli *ABD EFG*; ed è manifeſto che in eſſa *DG* concorreranno ancora le ſuperfizie *AOPE FBCQ*: domandaſi pertanto il centro di gravità del cuneo *BP*.

Si dividano per mezzo le circonferenze *AB EF* ne' punti *K I*, e ſi uniſcano le rette *KD IG*, nelle quali ſi prendano i centri di gravità *M L* delle ſuperficie *ABCO EFQP*, e unita (Prop. 6) la *ML* ſi divida per mezzo in *N*: dico che *N* è centro di gravità del cuneo *BP*.

Imperciocchè ſi divida per mezzo anche la *DG* in *H*, e ſi giunga *NH*.

E perchè l' angolo *BDM* è uguale all' angolo *FGL*, e la *BD* è parallela alla *FG*, ſiccome ancora il piano *ADB* è parallelo all' altro piano *EGF*, ſarà la *DM* parallela alla *GL*; e ſono uguali; laonde ſarà pure la *ML* uguale e parallela alla *DG*: ma la *DG* è perpendicolare al piano delle ſuperficie *ABCO EFQP*, dunque anche la *ML* ſarà ad eſſi piani perpendicolare, di modo che *ML* ſarà quella linea retta, che deſcrive il centro di gravità *M* della ſuperficie *ABCO* nel ſuo movimento parallelo a ſe ſteſſa e per la direzione *BF*: per conſeguenza nella *ML* v' ha il centro di gravità sì delle ſuperficie medeſime *ABCO EFQP*, che di tutte l' altre, che nel ſolido *BP* ſono ad eſſe ſuperfizie parallele, e però nella *ML* vi dee eſſere il centro di gravità del ſolido *BP*. Di nuovo perchè il ſolido *BP* è figura analoga ad un rettangolo (prendendo il ſenſo dell' analogia ſecondo la diffinizione de' Meccanici),

Meccanici), ed il centro di gravità di un rettangolo giace nel mezzo della libra, quindi anche il centro di gravità del cuneo *BP* sarà nel mezzo della libra *ML*, o nel punto *N*; il che ecc.

Corollario I.

E poichè *LMDG* è parallelogrammo rettangolo, e il punto *N* è nel mezzo della *LM*, come il punto *H* è nel mezzo della *DG*, sarà la *NH* uguale ad una delle *DM GL*, e perpendicolare alla *DG*; e però è tanto distante il centro di gravità *N* del cuneo circolare dalla retta *DG*, quanto lo è il centro di gravità *M* della superficie *ABCO* dal punto *D*.

Corollario 2.

Per il che chiamato il raggio esteriore *DB* del cuneo $= c$, l' interiore $DC = b$, r il raggio delle Tavole, e l' angolo *ADB* al centro del cuneo $= 2\mu$, sarà per le cose dimostrate $DM = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$; e però anche la distanza *HN* del centro di gravità di un cuneo dalla retta *DG* sarà uguale alla grandezza medesima $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$; e se l' angolo al centro del cuneo sia infinitesimo, diverrà allora la $HN = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)}$, ovvero fatta la grossezza *CB* del cuneo $= g$, onde $c = b + g$, sarà $HN = \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)}$.

Prop. 6

Cor. 2 Prop. 6

Domanda V.

Per non confondere la mente con inviluppate Figure sia lecito d' indi in poi presentare in piano gli Archi sì circolari, che di qualunque altra curvatura; e questo piano s' intenda essere quello, che passa per li centri di gravità di tutti i cunei e de' pilastri: e sia lecito ancora esprimere le gravità de' cunei colle rispettive superficie dedotte dal piano segante.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

Trovare il centro di gravità de' cunei componenti un Arco piano.

Fig. XIV. Tav. I. Sia *CGAB* un Arco piano, *ILNM* il suo serraglio, e *ILKH* un altro cuneo qualunque.

Si dividano per mezzo le *HI IM* ne' punti *S F*, e si giungano le rette *SD FD*; poi si tolgano le *SR FO* uguali al terzo delle *SD FD*, e le *xQ EP* al terzo delle *xD ED*, cosicchè i punti *R O Q P* sieno centri di gravità de' triangoli *HID IMD KLD LND*: poi si faccia come il trapezio *HKLI* al triangolo *KLD* così la *QR* alla *RT*, e come il trapezio *ILNM* al triangolo *LND* così la *PO* alla *OV*; ed i punti *T V* saranno centri di gravità de' cunei *HKLI ILNM*; il che ecc.

COROLLARIO I.

Unite le *TV RO QP*, perchè la *SD* è tripla di *SR* come la *FD* di *FO*, sarà la *RO* parallela alla *CG* o alla *AB*; e per la stessa ragione la *QP* è parallela alla *AB*; laonde anche le *RO QP* sono fra di loro parallele. Di nuovo essendo come il trapezio *HKLI* al triangolo *KLD* così il trapezio *ILNM* al triangolo *LND*, sarà anche come *QR* a *RT* così *PO* a *OV*, dunque la *TV* è parallela alle *QP RO*, e perciò anche alla *AB*; per conseguenza i centri di gravità de' cunei sono nell' Arco piano collocati in una linea parallela alla corda.

COROLLARIO 2.

Si chiami ora la perpendicolare *ED* del triangolo isoscele *ADB* $= e$, e la grossezza *EF* dell' Arco piano $= g$, onde tutta la $DF = e + g$, e $FO = \frac{e+g}{3}$: ma la *EP* sarà $= \frac{e}{3}$, e $FP = FE + EP = g + \frac{e}{3} = \frac{e+3g}{3}$, dunque $PO = FP - FO$

$= \frac{e+3g}{3} - \frac{e+g}{3} = \frac{2g}{3}$. Perchè poi come il trapezio $ILNM$ al triangolo LND, ovvero come la differenza de' quadrati delle DF DE al quadrato della DE, così la PO alla OV, sarà sostituendo $(e+g)^2 - e^2 : e^2 :: \frac{2g}{3} : OV$, o riducendo $2eg + g^2 : e^2 :: \frac{2g}{3} : OV$, e però $OV = \frac{2e^2 g}{3(2eg+g^2)} = \frac{2e^2}{3(2e+g)}$. In oltre essendo $EO = FO - FE = \frac{e+g}{3} - g = \frac{e-2g}{3}$, se si sottragga EO da OV si conseguirà la rimanente $EV = OV - EO = \frac{2e^2}{3(2e+g)} - \frac{e-2g}{3} = \frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}$: quindi i centri di gravità de' cunei nell' Arco piano sono in una linea retta parallela alla corda alla distanza di $\frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}$.

SCOLIO.

Dopo aver trovato prima i centri di gravità de' cunei degli Archi circolari, poi quelli degli Archi piani, resterebbe ora a cercare il centro di gravità del serraglio di un Arco composto; ciò nulla ostante s' è pensato di ommetterne l' indagine, prima perchè non se ne fa alcun uso nel corso dell' Opera, e poi perchè essa riesce tanto per sè evidente quanto lunghi e nojosi i calcoli.

TEOREMA I. PROPOSIZIONE II.

Se fra due pilastri sia collocata la centina di un Arco intero, poi vi si ponga da una parte la sola mossa; questa non premerà la centina quando la verticale condotta dal suo centro di gravità cada nell' impostatura.

Sia la centina ADC collocata fra i pilastri AN CR per potere col di lei mezzo gittar l' Arco intero ALC; poi si pon- Fig. VI. Tav. I.

ga sul pilastro *AN* la mossa *EKAF*, della quale sia *I* il centro di gravità, e si tiri la verticale *IA*, che cada nell' impostatura *AK*; dico che la mossa *EKAF* non preme la centina.

Poichè sopra la superficie orizzontale *AK* s' appoggia la mossa *EKAF*, e dal suo centro di gravità *I* condotta la verticale *IA* cade essa in un punto della base, per le cose dimostrate nella Statica, la mossa starà ferma, nè potrebbe cadere anche rimossa la centinatura; e però nessuna pressione sostiene la centina per conto della sola mossa; il che ecc.

COROLLARIO.

Quindi se le mosse dell' Arco intero non sieno maggiori del conio *EKAF*, il di cui centro di gravità *I* è in una direzione verticale col punto *A*, le mosse non comprimeranno la centina.

PROBLEMA 11. PROPOSIZIONE 12.

Dati i raggi esteriore ed interiore di un Arco intero, ritrovare la massima grandezza, che può assegnarsi alla mossa, perchè collocata sul pilastro non comprima la centina.

Fig. VI. Tav. I. Cor. dell' ant. Sia il raggio esteriore $BK = c$, l' interiore $BA = b$, r il raggio delle Tavole, e l' angolo $KBE = 2\mu$. Sia poi *EKAF* una mossa avente il suo centro di gravità *I* in direzione verticale col punto *A*, cosicchè *EKAF* sia la massima grandezza che le si può assegnare onde non prema la centina *ADC*.

Cor. 2 Prop. 9. Sarà pertanto la *BI* o sia la distanza del centro di gravità della mossa dal centro dell' Arco $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$, cioè (fatta $m = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)}$) sarà $BI = \frac{m \cdot \text{sen.}\,\mu}{\mu}$. E perchè nel triangolo rettangolo *IAB* sta come la *BI* alla *BA*, così il seno tutto al coseno dell' angolo *IBA*, sarà sostituendo,

$\frac{m.\text{sen.}\mu}{\mu} : BA :: r : \text{cos.}\mu$, laonde $BA = \frac{m.\text{sen.}\mu.\text{cos.}\mu}{r\mu}$: ma BA è anche $= b$, dunque $\frac{m.\text{sen.}\mu.\text{cos.}\mu}{r\mu} = b$. Di nuovo (fatto $\pi = \varphi = \mu$ nell' equazione I.) essendo $r.\text{sen.}2\mu =$ Prop. 7
$2.\text{sen.}\mu.\text{cos.}\mu$, e $\text{sen.}\mu.\text{cos.}\mu = \frac{r.\text{sen.}2\mu}{2}$, sarà sostituendo $\frac{m.\text{sen.}2\mu}{2\mu} = b$; e però $2\mu : \text{sen.}2\mu :: m : b$. Per il che se si prenda nel semicerchio *ADC* un arco *AF* tale ch' ei abbia al suo seno *FO* quella stessa proporzione, che ha $m : b$, ovvero $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} : b$, unita la *BFE*, sarà *EKAF* la massima grandezza che puossi assegnare alla mossa affinchè non prema la centina; e così si è ridotto il Problema ad altro già noto, e che al primo aspetto si manifesta di natura trascendente da risolversi con qualcuno de' soliti metodi di approssimazione; il che ecc.

SCOLIO I.

Potrebbe cader sospetto non esser in ogni caso risolubile il Problema; imperciocchè siccome debbe stare l' arco AF *al suo seno* FO *in ragione di* m *a* b, *e l' arco è sempre maggiore del suo seno, così, per poter sempre risolvere il Problema, bisognerebbe provare che* m *è maggiore di* b. *Ma per togliere ogni obbiezione lo faremo nel seguente modo. Essendo il raggio esteriore* c *maggiore di* b, *cioè* $c > b$, *sarà pure* $2c > c + b$, *e* $2c.c > b(c + b)$, *ovvero* $2c^2 > bc + b^2$, *e aggiugnendo da ambe le parti* $2bc + 2b^2$, *sarà* $2c^2 + 2bc + 2b^2 > 3bc + 3b^2$, *e però* $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} > b$, *ossia* $m > b$.

COROLLARIO I.

Quindi se fosse la grossezza dell' Arco intero uguale al raggio interiore, o $c = 2b$, sarà $m : b :: \frac{14b^2}{9b} : b :: 14 : 9$; dunque anche l'arco *AF* al suo seno *FO* debbe avere la proporzione di 14:9. Ma secondo le cose dimostrate da *Archimede* il quadrante *AD* al raggio *DB* ha prossimamente la ragione di 11:7, e la ragione di 11:7 è bensì maggiore della ragione di 14:9, ma però sono vicinissime fra di loro; laonde anche la ragione del quadrante *AD* al raggio *DB* è bensì maggiore della ragione di *AF* a *FO*, ma però prossimamente uguale, e il punto *F* cadrà quasi sul punto *D*. Per conseguenza in un Arco intero, che avesse la sua grossezza uguale al raggio interiore, si potrebbe fare la mossa quasi uguale alla metà dell' Arco senza ch' essa premesse la centina. Ed accrescendo la grossezza dell' Arco oltre il raggio sopraddetto, è chiaro che si farebbe maggiore la proporzione di $m:b$, e però si potrebbe costruire la mossa maggiore del mezzo Arco senza aggravarne la centina, proposizione che parrà paradossa a chi non abbia ben colto il principio, sul quale si fonda.

SCOLIO 2.

Non si assegna per altro in Architettura agli Archi una grossezza uguale al raggio interiore, ma ne hanno ordinariamente una di gran lunga minore; ed inoltre la divisione dell' Arco si fa a bella posta in un numero sì grande di cunei, che puossi fondatamente assumere in avvenire, che negli Archi interi soliti farsi dagli Architetti le mosse CW *non aggravano mai la centina, ma tutto il loro peso è impiegato a premere l' impostature de' pilastri; vale a dire che la perpendicolare* PQ *condotta dal centro di gravità* P *della mossa all' impostatura* CM *cade sulla* CS.

COROLLARIO 2.

Doman. 2 Ed essendo tutti i cunei componenti un Arco circolare uguali fra loro, così sarà vero che ne' cunei degli Archi circolari, per esempio nel cuneo *WT*, la linea *XV* condotta dal centro di gravità *X* perpendicolare ad uno de' suoi lati *ZW*, cadrà in un punto del lato medesimo, non mai di fuori.

TEOREMA 2. PROPOSIZIONE 13.

Se due forze, impiegate a muovere o a resistere al moto di qualche corpo, si compongano insieme, e si prenda un punto qualsivoglia fuori dell' angolo dalle loro direzioni compreso; i momenti delle due forze rispetto al punto preso sono uguali al momento della forza composta.

Due forze proporzionali alle linee *AB BD* sieno impiegate a muovere o a resistere al moto di qualche corpo per le direzioni *BA BD*, che s' incontrino insieme nel punto *B*, e compiuto il parallelogrammo *BAED* si tiri la diagonale *BE*, ch' esprima la forza composta di esse due: si prenda poi fuori dell' angolo *ABD* un punto *C*: dico che i momenti delle forze *BA BD* rispetto al punto *C* sono uguali al momento della forza composta *BE*. Fig. VII. Tav. I.

Dal punto *C* alle direzioni *BA BD BE* si conducano le perpendicolari *CI CH CG*; si prolunghino poscia le *IC ED*, quando occorra, sino al loro comune concorso in *F*, e si uniscano le *CB CA CE CD*: sarà il momento della forza *AB* uguale al prodotto di *AB* in *CI*, il momento della forza *BD* uguale al prodotto di *BD* in *CH*, e il prodotto di *BE* in *CG* esprimerà il momento della forza composta *BE*.

E poichè il triangolo *EDC* è uguale alla metà del rettangolo di *ED* in *CF*, e il triangolo *ABC* è uguale alla metà del rettangolo di *AB* o di *ED* in *CI*, saranno i due triangoli *EDC ABC* uguali alla metà dei rettangoli di *ED* in *CF* e di *ED* in *CI*, e però saranno uguali alla metà del rettangolo di *ED* in *IF*: ma anche il triangolo *EBD* è uguale alla metà del rettangolo di *ED* in *IF*; dunque il triangolo *EBD* è uguale ai triangoli *EDC ABC*. Pongasi comune il triangolo *BDC*, sarà il quadrilatero *EBCD* uguale ai triangoli *EDC ABC BDC*: il quadrilatero poi *EBCD* è uguale ai triangoli *EDC EBC*, laonde i triangoli *EDC EBC* sono uguali ai triangoli *EDC ABC BDC*; e tolto il triangolo comune *EDC*, resterà il triangolo *EBC* uguale ai triangoli *ABC BDC*: e però anche i prodotti di *AB* in *CI* e di *BD* in *CH* ſono uguali al prodotto di *BE* in *CG*; e per conſeguenza i momenti delle forze *AB BD* ſono uguali al momento della forza compoſta *BE*; il che ecc.

TEOREMA 3. PROPOSIZIONE 14.

Se due forze, impiegate a muovere o a reſiſtere al moto di qualche corpo, ſi compongano inſieme, e ſi prenda un punto qualſivoglia collocato dentro le loro direzioni, ma non nella direzione della forza compoſta; ſarà la differenza de' momenti delle due forze riſpetto al punto preſo uguale al momento della forza compoſta.

Fig. VIII. Tav. I. Due forze proporzionali alle linee rette *BA BD* ſieno impiegate a muovere o a reſiſtere al moto di qualche corpo per le direzioni *BA BD*, le quali ſi compongano inſieme, e ſia *BE* la forza compoſta: ſi prenda poi un punto *C* fra le direzioni *BA BD*, ma non nella direzione *BE* della forza compoſta: dico che la differenza de' momenti delle forze *BA BD* riſpetto al punto *C* è uguale al momento della forza *BE*.

Imperciocchè dal punto *C* alle direzioni *BA BD BE* ſi conducano le perpendicolari *CI CH CG*, e ſi prolunghino le *IC ED*, quand' occorra, ſino al loro concorſo in *F*; ſi tirino poi le *CB CA CE CD*: ſarà il prodotto di *BA* in *CI* uguale al momento della forza *BA*, il prodotto di *BD* in *CH* uguale al momento della forza *BD*, e al momento della forza compoſta *BE* ſarà uguale il prodotto di *BE* in *CG*.

Si dimoſtrerà pertanto, come nell' antecedente, che i triangoli *ABC EDC* ſono uguali al triangolo *EBD*; e tolto da una parte e dall' altra il triangolo *EDC*, reſterà il triangolo *ABC* uguale al quadrilatero *BECD*, o ſia ai triangoli *ECB BCD*; laonde il triangolo *ECB* ſarà uguale alla differenza de' triangoli *ABC BCD*; e quindi anche la differenza de' prodotti ti di *BA* in *CI* e di *BD* in *CH* è uguale al prodotto di *BE* in *CG*; e per conseguenza la differenza de' momenti delle forze *BA BD* è uguale al momento della forza composta *BE*; il che ecc.

COROLLARIO 1.

Se il punto *C* fosse nella direzione *BE* della forza composta, dico che il momento della forza *BA* è uguale al momento della forza *BD*. Perchè essendo i due triangoli *ACB ECD* uguali al triangolo *EBD*, tolto da ambe le parti il triangolo *ECD*, resterà il triangolo *ACB* uguale al triangolo *BCD*; e però anche il prodotto di *BA* in *CI*, cioè il momento della forza *BA*, sarà uguale al prodotto di *BD* in *CH*, ovvero al momento della forza *BD*. Fig. IX. Tav. I.

COROLLARIO 2.

E perchè s' è dimostrato, che il triangolo *ABC* è uguale ai triangoli *ECB BCD*, sarà il triangolo *BCD* minore del triangolo *ABC*, e però il momento della forza *BD* minore del momento della forza *BA*, e ciò perchè nella Figura s' è preso il punto *C* da quella parte della *BE*, ov' è collocata la forza *BD*: viceversa prendendo il punto *C* dalla parte della *BA*, si dimostrerà il momento della forza *BA* minore del momento della forza *BD*; dunque da quella parte della direzione *BE* sta il momento minore, dalla quale vien preso il punto *C*. Fig. VIII. Tav. I.

TEOREMA 4. PROPOSIZIONE 15.

Se quante forze si vogliano situate nel medesimo piano si compongano insieme, e sieno esse forze impiegate a muovere, o a resistere al moto di qualche corpo; preso un punto fuori dello spazio fra tutte le loro direzioni compreso, saranno i momenti delle forze rispetto al punto preso uguali al momento della forza composta,

Fig. X. Tav. I. Siano tre forze *AB BD FG* situate nello stesso piano, impiegate per le direzioni *BA BD FG* a muovere o a resistere al moto di qualche corpo, e fuori di esse direzioni si prenda il punto *C*: si compongano poi le forze *BA BD*, le cui direzioni si uniscano insieme nel punto *B*, e la loro forza composta sia *BE*; e di nuovo la direzione *FG* della terza forza *FG* concorra colla *BE* in *I*, e fatte le *IK IL* uguali alle *BE FG* si compia il parallelogrammo *IKHL* per avere nella sua diagonale *IH* la forza composta delle tre *BA BD FG*: dico pertanto che i momenti delle tre forze suddette rispetto al punto *C* sono uguali al momento della forza composta *IH*.

Imperciocchè essendo *BA BD* due forze qualunque, e *BE* la loro forza composta, fuori poi delle direzioni *BA BD* giace Prop. 13 il punto *C*, saranno i momenti delle forze *BA BD* rispetto a *C* uguali al momento della forza composta *BE*, ossia della *IK*. Per la stessa ragione i momenti delle forze *IK IL* ovvero delle *IK FG* sono uguali al momento della forza composta *IH*: ma si è dimostrato il momento della *IK* uguale a' momenti delle *BA BD*; laonde i momenti delle tre forze *BA BD FG* sono uguali al momento della forza composta *IH*. E nella stessa maniera si proverà l' assunto se il numero delle forze componenti sia più di tre.

TEOREMA 5. PROPOSIZIONE 16.

Se quante forze si vogliano situate nel medesimo piano si compongano insieme, e sieno esse forze impiegate a muovere o a resistere al moto di qualche corpo; preso un punto fra esse direzioni, il quale però non cada nè sopra le direzioni delle forze semplici, nè sopra la direzione della forza composta, sarà la differenza de' momenti di quelle, che sono da una parte del punto preso, da' momenti di quelle che sono dall' altra, uguale al momento della forza composta.

Sieno le tre forze *BA BD FG* ſituate nel medeſimo piano, ed impiegate per le direzioni *BA BD FG* a muovere o a reſiſtere al moto di qualche corpo; e ſi trovi, come nell' antecedente, la forza compoſta *BE* delle due *BA BD*, indi la forza compoſta *IH* delle tre *BA BD FG*. Si prenda poi un punto *C* tra le direzioni *BA BD FG*, ma che non cada nè ſu di eſſe, nè ſulla direzione della forza compoſta di tutte; e reſti il punto *C* fuori dell' angolo dalle direzioni *BA BD* compreſo, ma fra le direzioni *IK FG* e da quella parte della direzione *IH* della comune forza compoſta, dalla quale ſi trova la direzione *FG*: dico che l' eccesſo de' momenti delle forze *BA BD* ſul momento della forza *FG*, tutti riſpetto al punto *C*, ſarà uguale al momento della forza compoſta *IH*. Fig. XI. Tav. I.

Imperciocchè il momento di *BA* inſieme col momento di *BD* è uguale al momento della loro riſpettiva forza compoſta *BE* ovvero *IK*, concioſſiachè il punto *C* ſia fuori delle direzioni *BA BD*: ma eſſendo eſſo punto *C* fra le direzioni *IK FG* e dalla ſteſſa parte della *IH* in cui è la *FG*, avviene che l' eccesſo del momento della *IK* ſul momento della *FG* è uguale al momento della forza compoſta *IH*; dunque anche l' eccesſo de' momenti delle forze *BA BD* ſul momento della forza *FG* è uguale al momento della loro comune forza compoſta *IH*. Lo ſteſſo ſi dimoſtrerà di qualunque altro numero di forze. Prop. 13 Prop. 14 Corol. 2

Corollario I.

Se il punto *C* ſia nella direzione *IH* della forza compoſta di tutte, ſarà la ſomma de' momenti delle forze, che ſono da una parte della *IH*, uguale alla ſomma de' momenti di quelle che ſono dall' altra.

Corollario 2.

E ſe il punto *C* cadeſſe ſopra una delle direzioni delle forze ſemplici, allora il momento di queſta forza riuſcirebbe uguale a zero; ma ſarebbe però ſempre vero (per le coſe dette in queſta e nell' antecedente propoſizione) che la ſomma de' momenti delle forze componenti, ovvero la differenza de' momenti di quelle che ſono da una parte del punto *C* da' Fig. X. e XI. Tav. I.

momenti dell' altre collocate dalla parte contraria, uguaglierebbe il momento della loro comune forza composta.

Corollario 3.

Fig. XI. Tav. I. E' pure evidente, che se, date quante forze si vogliano *BA BD FG*, si prenda la loro comune forza composta *IH*, da quella parte della *IH* in cui sarà collocato il punto *C*, dalla medesima riuscirà la somma de' momenti minore: come nella Figura, in cui s'è provato che il momento della *FG* è minore della somma de' momenti delle forze *BA BD*.

Scolio.

Forse non disdirebbe inserire in un corso di elementi di Statica questi ultimi Teoremi sì per la loro importanza, come per la facile loro dimostrazione.

TEOREMA 6. PROPOSIZIONE 17.

Se un corpo collocato sopra di un piano immobile orizzontale o inclinato all' orizzonte sia tirato da una forza semplice o composta, la di cui direzione sia perpendicolare al piano, e incontri in un punto la base sulla quale s' appoggia il corpo, starà esso fermo, e tutta la pressione della forza sarà sostenuta dalla reazione del piano immobile.

Veggasi la dimostrazione di questo Teorema nella *Nouvelle Mécanique de Varignon Tom. I. pag.* 34 *e* 35, il quale più alla distesa e più chiaramente d' ogni altro ha trattata la dottrina delle pressioni de' corpi sulle superficie immobili.

Corollario I.

Fig. XII. Tav. I. Se dal centro di gravità *C* del grave *MB* collocato sul piano orizzontale *EF*, non più immobile, ma mobile d' intorno al sostegno *A*, si conduca la verticale *CD*, la quale incontri la base *EB*, si potrà con una forza *G* applicata dall' altra parte del sostegno contrappesare la pressione del grave *MB*, purchè stia come il suo peso alla forza *G*, così reciprocamente la distanza *AH* alla distanza *AD*.

Corollario 2.

Ma il piano mobile *EF* sia inclinato all' orizzonte, e oltre la forza *CD* della gravità siavi altra forza *PQ*, che tiri il grave *MB* per la direzione *PQ*; dal concorso poi *L* di esse direzioni *CD PQ* prese le rette *LI LO* proporzionali alle forze, si compia il parallelogrammo *LIKO*. Pertanto se la diagonale *LK* sia perpendicolare al piano *EF* e incontri la base *EB* in qualche punto *N*, sarà vero che con una forza *G* applicata dall' altra parte del sostegno *A* si potrà equilibrare la pressione della forza composta, purchè qual ragione ha la forza *LK* alla forza *G*, la medesima reciprocamente abbia la *AH* alla *AN*. Fig. XIII. Tav. I.

TEOREMA 7. PROPOSIZIONE 18.

Se un corpo collocato sopra di un piano immobile orizzontale o inclinato sia tirato da una forza qualunque, semplice o composta, per una direzione inclinata ad esso piano, non potrà il corpo star fermo, ma si muoverà strisciando o rotolando lungo al piano.

Veggasi similmente la dimostrazione di questo Teorema negli Autori di *Meccanica*, e particolarmente in *Varignon* al luogo citato.

Corollario.

Per la qual cosa se il piano, per esempio *EF*, non sia immobile, ma mobile d' intorno al sostegno *A*, non si po- Fig. I. Tav. II.

trà mai con una forza *G* applicata dall' altra parte bilanciare la forza semplice o composta *CD* , ed impedire il movimento del corpo *MB*, quando la direzione *CD* di essa forza sia inclinata al piano sopraddetto *EF*, anche se incontri la base *EB*.

TEOREMA 8. PROPOSIZIONE 19.

Fig. II. Tav. II.

Siano due superficie immobili qualunque *SV XY* piane o curve, fra le quali giaccia il grave *EOQF*, dico

I. Che il grave *EOQF* non può restar fermo fra le superficie *SV XY*, quando ei sia di tal figura e collocato in tal posizione, che nella direzione *LC* del suo peso non abbiavi qualche punto *A* dentro o fuori della sua massa, da cui possansi condurre alle superficie medesime *SV XY* due perpendicolari *AO AQ* , le quali incontrino in qualche punto le basi per mezzo delle quali ei s' appoggia alle superficie.

II. Ma quando da qualche punto *A* della direzione *LC* si possano condurre le due perpendicolari *AO AQ* alle superficie *SV XY*, che incontrino le basi, starà allora fermo il grave *EOQF* da esse sole superficie sostenuto.

III. Finalmente che se in questo stato di quiete del grave *EOQF*, presa nella direzione *LC* del suo peso una retta qualunque *AC* come diagonale, si compia il parallelogrammo *ABCD*, che abbia i lati *AB AD* perpendicolari alle superficie *SV XY* , sarà il peso di esso grave *EOQF* alla sua pressione da ambe le parti, come la diagonale *AC* ai lati *AB AD*.

La dimostrazione del Teorema trovasi per esteso dichiarata nel *Tom. II. pag.* 94 del citato corso di *Meccanica* del *Varignon*.

COROLLARIO.

Quello che si è detto del corpo *EOQF* tirato al centro della terra dalla sua gravità, vale ancora se fosse tirato da altre quante si vogliano forze per altrettante direzioni, cosicchè *LC* non più la direzione della sola forza della gravità, ma la direzione della forza composta di tutte esprimesse.

SCOLIO.

Non è inutile l' avvertire, che la direzione LC *della forza semplice o composta debbe necessariamente essere di mezzo alle perpendicolari* AQ AO , *altrimenti non potrebbe essere il corpo* EOQF *dalle due superficie insieme* SV XY *sostenuto; per la stessa ragione bisogna che le direzioni* AQ AO *non sieno per diritto fra loro; le quali cose sono dal citato Autore bensì tacitamente supposte, ma non espresse nell' enunciazione.*

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 20.

Dato un cuneo sostenuto da due piani immobili e inclinati all' orizzonte, o da un piano inclinato e dalla centina pure immobili, ritrovare la pressione ch' esercita il cuneo contro ciascuno de' piani, o contro il piano e la centina.

Sia il cuneo *FP* sostenuto primieramente da' due piani immobili *EL GH* inclinati all' orizzonte, i quali si combacino co' lati del cuneo: si domanda la pressione contro l' uno e l' altro de' piani *EL GH*. Fig. III. Tav. II.

Prendasi il centro di gravità *A* del cuneo, da cui si conducano le linee *AB AC* perpendicolari ai piani *EL GH*, le quali cadranno in un punto de' lati del cuneo: poi dallo stesso Cor. 2. Prop. 12

punto A si tiri la verticale AD, ch' esprima la gravità del cuneo, e si compia il parallelogrammo $ABDC$. Essendo pertanto espressa la gravità del cuneo per la retta AD, le AB AC esprimeranno le pressioni dallo stesso esercitate su' piani EL GH.

Prop. antec.

Fig. IV. Tav. II.

Ma sia in secondo luogo sostenuto il cuneo FP dal piano inclinato EL e dalla centina PH amendue immobili; e condotta dal centro di gravità A la verticale AD e le AB AC perpendicolari al piano inclinato EL ed alla centina PH, si compia il parallelogrammo $ABDC$. Sarà vero, come prima, che se AD esprima la gravità del cuneo, AB dinoterà la pressione sul piano EL, ed AC quella sulla centina PH; il che ecc.

Luog. cit.

COROLLARIO I.

Fig. V. e VI. Tav. II.

Se oltre la forza AD della gravità vi fosse altra forza, come AR, la quale tirasse il cuneo per la direzione AR che incontri la AD in un punto A, si compia prima il parallelogrammo $ARVD$ per avere la forza composta AV equivalente alle due AD AR, e indi l' altro parallelogrammo $ABVC$ sulle linee AB AC perpendicolari ai piani, e allora le AB AC esprimeranno le pressioni su due piani immobili, o sopra il piano immobile e la centina.

COROLLARIO 2.

Quanto s' è detto intorno ad un cuneo collocato fra due piani inclinati immobili vale anche quando uno di essi sia piano verticale immobile; cioè a dire si troveranno nello stesso modo le pressioni sul piano inclinato e sul verticale fra' quali giace il cuneo.

COROLLARIO 3.

E se il piano EL della *Fig. III.* fosse piano mobile d' intorno al punto L, per contrappesare la pressione del cuneo sul piano medesimo converrebbe mettere dall' altra parte del sostegno la forza T, il cui momento uguagliasse il momento della

della forza *AB*, com' è manifesto. Lo stesso vale per la *Fig. V.*, e varrebbe anche per le *Fig. IV.* e *VI.* se la centina non fosse al piano mobile attaccata.

TEOREMA 9. PROPOSIZIONE 21.

Se sopra il pilastro di un Arco intero sia collocata la mossa, la quale prema verticalmente il pilastro, e sia tirata da altra forza inclinata esternamente all' orizzonte, non istarà ferma la mossa sul pilastro senza un qualche rattenimento; e questo apposto, si potranno contrabbilanciare le forze sopraddette e la gravità del pilastro con certa forza messa dalla parte opposta del punto d' appoggio del pilastro medesimo.

Sia collocata la mossa *GF* sopra il pilastro *FI* di un Arco intero, e sia il pilastro mobile d' intorno al punto estremo *I* della sua base, e premuto da tutto il peso della mossa: siavi poi la forza *BD* che per la direzione *BD* inclinata all' orizzonte tiri dalla parte esteriore la mossa medesima, e passi la *BD* o no pel centro di gravità *B*: dico primieramente che la mossa *GF* non potrà star ferma sul pilastro senza esser in qualche modo rattenuta. Fig. VII. Tav. II. Dom. 3

Imperciocchè dal centro di gravità *B* della mossa si conduca la verticale *BC*, e nelle direzioni *BC BD* prese dal punto del loro concorso le linee *BC BD* proporzionali alle forze si costruisca il parallelogrammo *BDEC*: la diagonale *BE* esprimerà dunque una forza equivalente all' altre due, e la sua direzione *BE* diverrà inclinata al piano orizzontale *QF*. Pertanto essendo il piano *QF* mobile d' intorno al punto *I* premuto dalla forza *BE* per una direzione inclinata ad esso piano, non si potrà mai con altra forza applicata dall' altra parte del sostegno *I* contenere la mossa *GF* e impedire il suo movimento lungo al piano *FQ*. Havvi dunque necessità di apporvi un qualche rattenimento; e siccome questo può farsi in varie Corol. Prop. 18

forme e maniere, così, per preparare la mente a quanto si vuol esporre ne' Libri susseguenti, supporremo che il ratteni-
Dom. IV. mento sia la centina esteriore *QG* attaccata fermamente al pilastro *FI* e con esso formante una cosa sola.

Dico dunque di nuovo, che ciò supposto si potranno contrabbilanciare la gravità della mossa, la forza *BD*, e la gravità del pilastro con altra forza collocata dalla parte opposta del sostegno *I*.

Imperciocchè dal centro di gravità *M* del pilastro si conduca la verticale *MO*, che concorra in *O* colla *BE*; indi fatta la *OP* uguale alla *BE* e la *ON* proporzionale alla gravità del pila-
Prop. 14 stro, si compia il parallelogrammo *OPRN* e si tiri la diagonale *OR*. Sarà il momento della forza composta *OR* rispetto al punto *I* uguale alla differenza de' momenti delle forze *OP ON*, ovvero *BE ON*, la prima delle quali cerca rovesciare il pilastro mentre l' altra lo sostiene; e però colla forza *S* collocata dall' altra parte del sostegno *I* si potranno contenere esse forze *BE ON* in equilibrio, purchè il momento della forza *S* sia uguale al momento della forza composta *OR*; il che ecc.

COROLLARIO.

Se la *BE* seghi la base inferiore *QF* della mossa, come nella Figura, per poco che sia grande la sopraccentina *QG* sarà atta a sostenere la mossa, poichè nella *BE* vi sarà sempre un
Prop. 19 punto da cui si possano condurre due perpendicolari al piano *QF* del pilastro e alla sopraccentina; ma se la *BE* non segasse la base, e tagliasse la sopraccentina, per la stessa ragione è manifesto, bastare che resti la sopraccentina più alta del punto d' intersecazione, perchè la mossa sia rattenuta e obbligata a star ferma sul pilastro *FI*.

SCOLIO.

Veramente tirata la linea BH *perpendicolare alla centina esteriore* QG, *che serve di rattenimento*, *e compiuto il parallelogrammo*
Prop. cit. BHEL, *la forza* BE *dividesi nelle due* BH BL, *una diretta a premere la centina e a girare il pilastro*, *l' altra all' incontro che*

preme il pilastro, e cerca di sostenerlo insieme colla terza forza ON: *ma torna lo stesso o si consideri la sola forza* BE, *o si considerino le due* BH BL. *Di fatto essendo il momento di* OR *d' intorno al punto* I *uguale alla differenza de' momenti delle* BE ON, *e il momento di* BE *uguale alla differenza de' momenti* BH BL, *sarà il momento della forza* OR *uguale altresì alla differenza del momento della forza* BH *da' momenti delle forze* BL ON; *quindi se la forza* S *collocata dall' altra parte del sostegno* I *sarà atta ad equilibrarsi con* OR, *si equilibrerà ancora colle tre* BH BL ON. Prop. 14

Fine del Libro Primo.

LIBRO SECONDO

DELLA PRESSIONE DE' CUNEI SULLE CENTINE DEGLI ARCHI CIRCOLARI COMPOSTI DI UN NUMERO QUALSIVOGLIA DI CUNEI.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

SE fra i pilastri di un Arco intero sia messa la centina, poi da una parte la mossa e un cuneo; si domanda la pressione del cuneo sulla centina, e la forza e direzione colla quale ei preme la mossa.

Fig. VIII. Tav. II. Fra i pilastri di un Arco intero sia posta la centina *AD*, poi da una parte sopra il pilastro *AR* la mossa *AF*, e il cuneo *FD*; si ricerca la pressione del cuneo *FD* sulla centina *AD*, e la forza e direzione con cui egli preme la mossa *AF*.

Si prendano i centri di gravità *G L* del conio *FD* e della mossa *AF*, e si conducano le verticali *GI LN* uguali fra loro, le quali esprimano le loro rispettive gravità, poi si unisca *GL* che sarà perpendicolare a *FZ*. Si giungano poi i raggi della Figura, e si compia il parallelogrammo *GKIH*.

Prop. 20 Lib. I. E' manifesto pertanto, ch' esprimendo *GI* la gravità assoluta del cuneo *FD*, *GH* esprimerà la sua pressione sulla centina *AD*, e *GK* sarà la forza e direzione colla quale ei opera contro il piano superiore della mossa; il che ecc.

COROLLARIO I.

Prop. 21 Lib. I. Si prolunghi *GL* in *M* finchè *LM* sia uguale a *GK*. E perchè oltre la forza *LN* della sua gravità la mossa soffre ancora la pressione *LM*, la cui direzione passa pel centro di gravità *L*, ed è inclinata all' orizzonte, non istarebbe ferma la mossa senza un qualche rattenimento: ed ecco che si principia a palesar la ragione della Domanda IV, ed in progresso sempre più. Lib. I.

COROLLARIO 2.

Per conseguenza fatto prima il parallelogrammo $LMQN$, poi l' altro $LPQO$, dinoterà LP la pressione della mossa sulla sopraccentina, o quella forza con cui la mossa è spinta dalla parte esteriore dell' Arco, che in altro luogo abbiamo chiamata sfiancamento. Ed è manifesto ancora che la sopraccentina dee arrivare ad un punto per poco superiore a C, se la linea LQ seghi la base AC della mossa; ma quando seghi la sopraccentina, dovrà questa essere un poco più alta del punto d' intersecazione. Dif. 15 Corol. Prop. 21

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Date le stesse cose come nell' antecedente, ritrovare il valore analitico della pressione del cuneo sulla centina, e dello sfiancamento della mossa.

Sieno le gravità GI LN del cuneo FD e della mossa AF uguali ad a, il raggio delle Tavole $= r$; e l' angolo ABZ $= ZBD$ si chiami 2μ. Fig. VIII. Tav. II.

E poichè gli angoli GVB GXB sono retti, il semicerchio descritto sul diametro GB passerebbe per amendue i punti V X, dunque gli angoli VGX VBX sono uguali; ma l' angolo VBX $= 2\mu$, laonde anche l' angolo VGX, o vogliasi dirlo KGI $= 2\mu$. Di nuovo essendo come il seno dell' angolo IKG, ovvero dell' angolo KGH, al seno dell' angolo KGI, così la GI alla IK o alla GH; il seno poi dell' angolo KGH è uguale al coseno dell' angolo GBF, ch' è la metà di DBZ; e però sostituendo i valori analitici sarà $\cos.\mu : \text{sen.}\, 2\mu :: a : GH$, quindi GH o la pressione del cuneo FD sulla centina è $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\,\mu}$. Prop. ant.

In oltre perchè come il ſeno dell' angolo IKG al ſeno dell' angolo KIG o dell' alterno IGH, così è la GI alla GK; ed è il ſeno dell' angolo IGH uguale al coſeno del ſuo complemento GBX, cioè a cos. 3μ; dunque ſarà cos. μ : cos. 3μ :: $a : GK$, e per conſeguenza la preſſione GK del cuneo ſulla moſſa, o LM, o ancora NQ ſarà $= \frac{a \cdot \cos. 3\mu}{\cos. \mu}$. Si conduca pertanto dal punto Q la QW perpendicolare alla LO: e perchè l' angolo QNW è uguale all' angolo MLN, ovvero a KGI cioè a VBX, l' angolo poi VBX è $= 2\mu$; dunque anche l' angolo QNW $= 2\mu$; laonde eſſendo nel triangolo rettangolo QNW come il raggio al ſeno dell' angolo QNW, così la QN alla QW, ſarà ſoſtituendo $r : \text{sen.} 2\mu :: \frac{a \cdot \cos. 3\mu}{\cos. \mu} : QW = \frac{a \cdot \text{sen.} 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{r \cdot \cos. \mu}$: e ſimilmente eſſendo $QN : NW :: r : \cos. QNW$, o ſoſtituendo $\frac{a \cdot \cos. 3\mu}{\cos. \mu} : NW :: r : \cos. 2\mu$, ſarà $NW = \frac{a \cdot \cos. 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{r \cdot \cos. \mu}$; la LN poi è $= a$, dunque tutta la $LW = a + \frac{a \cdot \cos. 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{r \cdot \cos. \mu}$. Per la qual coſa ſarà l' ipotenuſa $LQ = \sqrt{\left((QW)^2 + (LW)^2 \right)}$ $= \sqrt{\left(\left(\frac{a \cdot \text{sen.} 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{r \cdot \cos. \mu} \right)^2 + \left(a + \frac{a \cdot \cos. 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{r \cdot \cos. \mu} \right)^2 \right)}$, e queſta quantità facciaſi $= b$; ſicchè avendoſi l' analogia $LQ : QW :: r : \text{sen.} QLW$, cioè $b : \frac{a \cdot \text{sen.} 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{r \cdot \cos. \mu} :: r : \text{sen.} QLW$, ſarà $\text{sen.} QLW = \frac{a \cdot \text{sen.} 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{b \cdot \cos. \mu}$.

Ma il ſeno dell' angolo PLW è uguale al ſeno di WLB, ovvero al coſeno di LBX, cioè a cos. μ, onde l' altra analogia $\text{sen.} PLW : \text{sen.} QLW :: QL : LP$ darà $LP = \frac{a \cdot \text{sen.} 2\mu \cdot \cos. 3\mu}{(\cos. \mu)^2}$ e così ſarà noto lo sfiancamento della moſſa; il che ecc.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Se fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, poi da una parte la moſſa e due cunei, ritrovare la preſſione eſercitata dall' uno e dall' altro cuneo ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo cuneo ſulla moſſa.

Fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina *Aa*, Fig. IX.
poi ſopra un pilaſtro *AT* la moſſa *AB* e i due cunei *BC CD*: Tav. II.
biſogna ritrovare la preſſione dell' uno e dell' altro cuneo *BC* Dif. XVI.
CD ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo cuneo ſul- Lib. I.
la moſſa.

Si prendano i centri di gravità *I G F* della moſſa e de' cunei, e ſi giungano i raggi tutti della Figura, e le *FG GI* che ſaranno perpendicolari alle *EX EB*: indi dai punti *F G I* ſi tirino le verticali *FK GN IZ* uguali fra loro, ch' eſprimano le gravità de' cunei e della moſſa. E' manifeſto che terminato il parallelogrammo *FLKV*, eſprimerà *FV* la preſſione
del cuneo *CD* ſulla centina *Aa*, e *FL* la ſua preſſione ſul Prop. 20
cuneo inferiore *BC*. Si prolunghi pertanto la *FG* in *O*, e fat- Lib. I.
ta *GO* uguale a *FL* ſi compia il parallelogrammo *GOMN*, e ſi uniſca *GM*: dico in prima che *GM* cade tra le *GI GE*.

Imperciocchè, compiuto il parallelogrammo *FLbK*, eſſendo l' angolo *LFV* maggiore dell' angolo *KFV*, e amendue minori di un retto, ſarà il ſeno dell' angolo *LFV*, ovvero dell' angolo *FLK*, maggiore del ſeno dell' angolo *KFV*, o dell' angolo *LKF*; ma come il ſeno dell' angolo *FLK* al ſeno dell' angolo *LKF*, così è la *FK* alla *FL*; dunque la *FK* è maggiore della *FL*, cioè della *Kb*; e per conſeguenza anche l' angolo *FbK*, cioè *LFb*, è maggiore dell' angolo *bFK*; laonde l' angolo *LFb* è maggiore della metà dell' angolo intero *LFK*. In oltre eſſendo la *OG* uguale e per diritto alla *FL*, e la *Lb* uguale e parallela alla *OM*, ſarà la *Fb* uguale e parallela alla *GM*, e l' angolo *LFb* ſarà uguale all' angolo *OGM*; dunque l' angolo *OGM* ſarà pure maggiore della metà dell' angolo *LFK*, ovvero dell' angolo *OGN*. Di nuovo perchè l' uno e l' altro degli angoli *GcE GdE* è retto, ſaranno uguali a due retti gli angoli rimanenti *cEd cGd* del quadrilatero *cEdG*; ma ſono uguali a due retti anche gli angoli *OGc cGd*; laonde, tolto il comune, reſterà l' angolo *OGc* uguale all' angolo *cEd*. Perchè poi l' angolo retto *Gch* è uguale all' angolo retto *hmE*, e l' angolo al vertice *chG* è uguale all' angolo al vertice *mhE*, ſarà l' angolo rimanente *cGh* uguale all' angolo *hEm*, ovvero all' angolo *cEd*: ma anche l' angolo *OGc* s' è provato uguale all' angolo medeſimo *cEd*; dunque l' angolo *OGc* è uguale all' angolo *cGh*; e perciò l' angolo *OGc* è la metà dell' angolo *OGN*: ſi è poi antecedentemente dimoſtrato, che l' angolo *OGM* è maggiore della metà dell' angolo *OGN*; laonde l' angolo *OGM* è maggiore dell' angolo *OGc*, e per conſeguenza la *GM* cade fra le rette *GI GE*.

Quindi, compiuto il parallelogrammo *GHMP*, eſſendo il cuneo *BC* tirato dalla forza compoſta *GM* per una direzione, che ſta di mezzo alle *GI GE*, che ſono perpendicolari alla ſuperficie ſuperiore *Bb* della moſſa e alla centina *Aa*, reſterà il cuneo fra eſſe ſuperficie appoggiato; e però eſprimerà *GP* la preſſione eſercitata dal cuneo *BC* ſulla centina, e *GH* la ſpinta relativa con cui vien caricata la moſſa.

Prop. 19 Lib. I. e Cor.

COROLLARIO.

Anche da queſta propoſizione la neceſſità appariſce della Domanda IV, avvegnachè fatta *IQ* uguale a *GH*, ſarà la moſſa *AB* premuta dalla forza *IQ*, oltre a quella della propria gravità *IZ*; onde non potrebbe ſtar ferma la moſſa ſenza un qualche rattenimento, per eſempio ſenza la ſopraccentina. Ma queſta ſuppoſta ſe ſi prolunghi la *EI* in *n*, e ſi formino i parallelogrammi *IQeZ Ineg*, dinoterà *Ig* la ſpinta relativa della moſſa, e *In* la quantità dello ſfiancamento della moſſa, o la ſua preſſione ſulla ſopraccentina; che baſterà ſia per poco ſuperiore al punto *k* ſe la *Ie* paſſi per la baſe *Ak* della moſſa, e altrimenti dovrà eſſere la ſopraccentina un poco più alta del punto d' interſecazione.

Prop. 21 Lib. I.

Prop. 20 Lib. I.

Corol. Prop. 21 Lib. I.

PROBLEMA

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Date le cose come nell' antecedente, si domanda il valore analitico della pressione de' due cunei sulla centina, e dello sfiancamento della mossa.

Siano come nella Prop. 2. le gravità *IZ GN FK* de' cunei *AB BC CD* uguali ad a; l' angolo *BEA* al centro di un cuneo $= 2\mu$; e il raggio delle Tavole $= r$: dimostrerassi come nella Proposizione suddetta, che l' angolo *LFK* è uguale all' angolo *CEA* o sia a 4μ, e l' angolo *IGS* uguale a *BEA*, ovvero a 2μ. Fig. IX. Tav. II.

E poichè sta come il seno dell' angolo *KLF*, o dell' angolo *LFV* al seno dell' angolo *LFK*, così la *FK* alla *FV*, sarà, sostituendo le lettere, $\cos.\mu : \text{sen.}\,4\mu :: a : FV$, dunque la pressione *FV* del primo cuneo *CD* sulla centina è $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\cos.\mu}$. Di nuovo essendo come il seno dell' angolo *LFV* al seno dell' angolo *KFV*, così la *FK* alla *FL*; il seno poi dell' angolo *KFV* è uguale al coseno dell' angolo *FEA*, cioè a $\cos.5\mu$; laonde sarà $\cos.\mu : \cos.5\mu :: a : FL$; e però $FL = GO = MN = \frac{a\,.\,\cos.5\mu}{\cos.\mu}$. Ora si conduca dal punto *M* la *MS* perpendicolare a *Gm*: e perchè come il seno tutto al seno dell' angolo *MNS*, così è la *MN* alla *MS*, e l' angolo *MNS* è uguale all' angolo *OGN*, o sia all' angolo *LFK* o a 4μ; dunque $r : \text{sen.}\,4\mu :: \frac{a\,.\,\cos.5\mu}{\cos.\mu} : MS = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu\,.\,\cos.5\mu}{r\,.\,\cos.\mu}$. Similmente essendo come il seno tutto al coseno dell' angolo *MNS*, così la *MN* alla *NS*, ovvero $r : \cos.4\mu :: \frac{a\,.\,\cos.5\mu}{\cos.\mu} : NS$, sarà $NS = \frac{a\,.\,\cos.4\mu\,.\,\cos.5\mu}{r\,.\,\cos.\mu}$, la *GN* poi è $= a$, dunque tutta $GS =$

$a + \frac{a \,.\, \cos. 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{r \,.\, \cos. \mu}$. Per la qual cosa $GM = \sqrt{((MS)^2 + (GS)^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{a \,.\, \text{sen.} 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{r \,.\, \cos. \mu}\right)^2 + \left(a + \frac{a \,.\, \cos. 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{r \,.\, \cos. \mu}\right)^2\right)}$, la qual quantità si chiami $= b$, sicchè $GM = b$: onde nel triangolo rettangolo GMS avendosi come GM a GS, così il seno tutto al coseno dell' angolo MGS, ovvero sostituendo $b : a + \frac{a \,.\, \cos. 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{r \,.\, \cos. \mu} :: r : \cos. MGS$, sarà $\cos. MGS = \frac{ar}{b} + \frac{a \,.\, \cos. 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{b \,.\, \cos. \mu}$; e allo stesso modo coll' analogia $GM : MS :: r : \text{sen.} MGS$, cioè $b : \frac{a \,.\, \text{sen.} 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{r \,.\, \cos. \mu} :: r : \text{sen.} MGS$, si troverà $\text{sen.} MGS = \frac{a \,.\, \text{sen.} 4\mu \,.\, \cos. 5\mu}{b \,.\, \cos. \mu}$. Avvertasi ancora che il seno dell' angolo NGP è uguale al coseno dell' angolo GEA, e viceversa il coseno di NGP è uguale al seno di GEA; dunque $\text{sen.} NGP = \cos. 3\mu$, e $\cos. NGP = \text{sen.} 3\mu$: sicchè essendo dati i seni e i coseni degli angoli MGS NGP, si troverà per

Prop. 7 Lib. I.

l' equazione I. il seno della loro somma MGP, e però sarà $\text{sen.} MGP = \frac{\text{sen.} MGS \,.\, \cos. NGP}{r} + \frac{\cos. MGS \,.\, \text{sen.} NGP}{r} = \frac{a.\, \text{sen.} 3\mu.\, \text{sen.} 4\mu.\, \cos. 5\mu}{br \,.\, \cos. \mu} + \frac{a.\, \cos. 3\mu}{b} + \frac{a.\, \cos. 3\mu. \cos. 4\mu. \cos. 5\mu}{br \,.\, \cos. \mu}$:

Luog. cit.

ma per l'equazione IV si ha ancora $\cos. \mu = \frac{\cos. 3\mu \,.\, \cos. 4\mu}{r} + \frac{\text{sen.} 3\mu \,.\, \text{sen.} 4\mu}{r}$; laonde $\text{sen.} MGP = \frac{a \,.\, \cos. 3\mu}{b} + \frac{a.\, \cos. \mu.\, \cos. 5\mu}{b \,.\, \cos. \mu}$ $= \frac{a}{b}(\cos. 3\mu + \cos. 5\mu)$.

Di nuovo essendo l' angolo HGN uguale all' angolo BEA $= 2\mu$, sarà $\text{sen.} HGN = \text{sen.} 2\mu$, e $\cos. HGN = \cos. 2\mu$; quindi per l' equazione II dati i seni e coseni degli angoli HGN MGS si troverà il seno della loro differenza HGM; e sarà

$\text{sen.}\,HGM = \frac{\text{sen.}\,HGN.\text{cos.}\,MGS}{r} - \frac{\text{cos.}\,HGN.\text{sen.}\,MGS}{r} = \frac{a.\text{sen.}\,2\mu}{b}$
$+ \frac{a.\text{sen.}\,2\mu.\text{cos.}\,4\mu.\text{cos.}\,5\mu}{br.\text{cos.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}\,2\mu.\text{sen.}\,4\mu.\text{cos.}\,5\mu}{br.\text{cos.}\,\mu}$: ma per l' equazione medesima si ha $\text{sen.}\,2\mu = \frac{\text{sen.}\,4\mu.\text{cos.}\,2\mu}{r} - \frac{\text{cos.}\,4\mu.\text{sen.}\,2\mu}{r}$; però $\text{sen.}\,HGM = \frac{a.\text{sen.}\,2\mu}{b} - \frac{a.\text{sen.}\,2\mu.\text{cos.}\,5\mu}{b.\text{cos.}\,\mu}$.

Poste queste cose perchè sta come il seno dell' angolo HGP al seno dell' angolo HGM, così la GM alla GP; il seno poi dell' angolo HGP è uguale al coseno di GEc, starà ancora, sostituendo, $\text{cos.}\,\mu : \frac{a.\text{sen.}\,2\mu}{b} - \frac{a.\text{sen.}\,2\mu.\text{cos.}\,5\mu}{b.\text{cos.}\,\mu} :: b : GP$; e però $GP = \frac{a.\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} - \frac{a.\text{sen.}\,2\mu.\text{cos.}\,5\mu}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, e per tal modo sarà data la pressione del secondo cuneo BC sulla centina. Oltre a ciò essendo $\text{sen.}\,HGP : \text{sen.}\,MGP :: GM : GH$, s' avrà $\text{cos.}\,\mu : \frac{a(\text{cos.}\,3\mu + \text{cos.}\,5\mu)}{b} :: b : GH$, laonde $GH = IQ = eZ = \frac{a(\text{cos.}\,3\mu + \text{cos.}\,5\mu)}{\text{cos.}\,\mu}$; ed è la $IZ = a$, e l' angolo $QIZ = HGN = 2\mu$, dunque operando allo stesso modo si troverà prima la Ie e poi lo sfiancamento In della mossa, e sarà $In = \frac{a.\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,3\mu + \text{cos.}\,5\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$; il che ecc.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Se fra i pilastri di un Arco intero sia posta la centina, poi da una parte si pongano la mossa e tre conj; ritrovare le pressioni esercitate da ciascuno di essi sulla centina, e la spinta relativa dell' ultimo cuneo sulla mossa.

Fig. X. Tav. II. Fra i pilastri di un Arco intero sia collocata la centina *MX*, poi sul pilastro *MZ* la mossa *MV* e i tre conj *VQ QS SX*: bisogna determinare la pressione de' cunei *VQ QS SX* sulla centina, e la spinta relativa dell' ultimo cuneo sulla mossa.

Si prendano i centri di gravità *A D F R* de' cunei e della mossa, e si giungano i raggi della Figura e le rette *AD DF FR*, le quali saranno perpendicolari ai raggi *OS OQ OV*. Si conducano poscia le verticali *AB DE FN RT* uguali fra loro, le quali esprimano le gravità de' cunei e della mossa, e si compia il parallelogrammo *ACBY*. Per le cose dimostrate (Prop. 20 Lib. I.) la retta *AY* dinoterà la pressione del cuneo superiore *SX* sulla centina, e *AC* la sua pressione sull' inferiore *QS*.

Si prolunghi pertanto la *AD* e sia il prolungamento *DH* uguale alla *AC*, e dalle rette *DH DE* sia costruito il parallelogrammo *DHGE*. Si dimostrerà come nella Prop. 3 che l' angolo *HDG* è maggiore della metà dell' angolo *HDE*; laddove essendo l' angolo *QOS* ovvero *HDF* il terzo dell' angolo *SOM*, o di *CAB*, cioè di *HDE*, diventa *HDF* minore della metà di *HDE*; dunque l' angolo *HDG* è maggiore dell' angolo *HDF*, e per conseguenza la retta *DG* cade fra le *DF DK*; onde compiuto il parallelogrammo *DIGK*, esprimerà *DK* la pressione del secondo cuneo *QS* sulla centina, e *DI* la sua spinta relativa sul terzo cuneo *VQ* (Corol. Prop. cit.). Ora si prolunghi la *DI* in *L* facendo *FL* uguale a *DI*, e dalle *FL FN* si costruisca il parallelogrammo *FLWN*, del quale *FW* sia la diagonale.

Tre casi qui possono accadere, cioè o la *FW* cade fuori dell' angolo *RFO*, o di mezzo alle *FR FO*, o finalmente sulla stessa *FR*. Se cade di fuori, come nella Figura, compiuto il parallelogrammo *FPWa*, il punto *P* cadrà nella *OF* prolungata, e sarà segno che il terzo cuneo non preme la centina, ma all' incontro sfianca, e sarà espressa da *FP* la quantità dello sfiancamento il quale verrà sostenuto dalla sopraccentina: se poi la *FW* cade di mezzo alle *FR FO*, compiuto al solito il parallelogrammo, cadrà il punto *P* tra *F O*, e si troverà la pressione del terzo cuneo sulla centina; ed in amendue i casi *Fa* esprimerà la spinta relativa dell' ultimo cuneo sulla mossa. Se finalmente la *FW* cade precisamente sulla *FR*, vorrà dire che il cuneo *VQ* nè preme la centina nè sfianca o passa a premere la sopraccentina, ma che tutta la forza *FW* si esercita contro la mossa e diventa spinta relativa del cuneo medesimo *VQ*; il che ecc.

COROLLARIO.

Prolungando la *Fa* in *b* finchè *Rb* sia uguale a *Fa*; essendo la mossa *MV* tirata dalle due forze *Rb RT* e sostenuta dalla sopraccentina e dal pilastro, farà d' uopo prima comporre insieme queste forze, e poi dividere la forza composta nel modo solito, per trovare la spinta relativa della mossa sul pilastro, e il suo sfiancamento o la sua pressione nella sopraccentina. Questa sopraccentina poi nel primo de' tre casi contemplati nella Proposizione non dovrà essere inferiore al punto *V* se *FW* seghi la base *Vz* del cuneo *VQ*, e se tagliasse la sopraccentina sopra *V* converrebbe farla più alta del punto d' intersecazione: ma negli altri due casi, o dovrà la sopraccentina essere solo alquanto superiore al punto *e*, o non al di sotto del suo concorso colla direzione della forza composta delle *Rb RT*, secondo che essa direzione incontri o no la base inferiore *eM* della mossa. Quindi dal fin qui detto, come ancora dalle cose che si diranno in appresso, la ragione apparisce della Domanda IV, senza la quale, cioè senza la supposizione delle sopraccentine attaccate solidamente a' pilastri e secondanti la curvatura esteriore dell' Arco, togliendosi ogni equilibrio, e succedendo necessariamente un movimento ne' cunei inferiori e nella mossa, si leva l' occasione e l' adito di soggettare al calcolo le pressioni de' superiori sulla centina. Egli è il vero che qualche volta esse riescono inutili; ma quando ciò sia lo vedremo a suo luogo.

Corol. Prop. 21 Lib. I.

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Date le stesse cose come nell' antecedente, si domanda il valore analitico delle pressioni de' cunei sulla centina, e degli sfiancamenti o delle pressioni sulla sopraccentina.

Fig. X. Tav. II. Si ritengano le solite denominazioni, cioè l' angolo $VOM = 2\mu$, il raggio delle Tavole $= r$, e le linee AB DE FN RT ch' esprimono le gravità rispettive de' cunei $= a$: si proverà come nella Prop. 2, che l' angolo CAB è $= 6\mu$, l' angolo $FDE = 4\mu$, e l' angolo $RFN = 2\mu$.

E poichè sen. CAY : sen. CAB : : AB : AY, sarà sostituendo cos. μ : sen. 6μ : : a : $AY = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{\cos.\, \mu}$, e questa sarà l' espressione della forza ch' impiega il primo cuneo superiore SX per premere la centina: similmente essendo sen. CAY : sen. BAY : : AB : AC, ossia cos. μ : cos. 7μ : : a : AC, s' avrà la pressione AC sul secondo cuneo, ovvero $DH = \frac{a \,.\, \cos.\, 7\mu}{\cos.\, \mu} = GE$. Ora, condotta la perpendicolare Gh, perchè sta $GE : Gh : : r :$ sen. GEh, e l' angolo $GEh = HDE = DAB = 6\mu$, sarà $\frac{a \,.\, \cos.\, 7\mu}{\cos.\, \mu} : Gh : : r :$ sen. 6μ; e però $Gh = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}$; ma la Eh si troverà $= \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}$, onde la $Dh = a + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}$; e per conseguenza sarà l' ipotenusa $DG = \sqrt{\left((Dh)^2 + (Gh)^2 \right)}$ $= \sqrt{\left(\left(a + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu} \right)^2 + \left(\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu} \right)^2 \right)}$, e questa quantità sia $= b$, cioè $DG = b$. Di nuovo perchè DG : $Dh : : r :$ cos. GDh, sarà $b : a + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu} : : r :$ cos. GDh $= \frac{ar}{b} + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{b \,.\, \cos.\, \mu}$; e allo stesso modo l' analogia DG : $Gh : : r :$ sen. GDh dà sen. $GDh = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{b \,.\, \cos.\, \mu}$. Ritrovato il seno e il coseno dell' angolo GDh, siccome è dato ancora il seno e il coseno dell' angolo EDK (avvegnachè sen. EDK

$= \cos. 5\mu$, e $\cos. EDK = \text{sen}. 5\mu$) così si determinerà col mezzo della equazione I. il seno della loro somma GDK: sarà dunque $\text{sen}. GDK = \frac{a . \text{sen}. 5\mu . \text{sen}. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} + \frac{a . \cos. 5\mu}{b}$ Prop. 7 Lib. I.

$+ \frac{a . \cos. 5\mu . \cos. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu}$; ma per l' equazione IV. si ha $\text{sen}. 5\mu . \text{sen}. 6\mu + \cos. 5\mu . \cos. 6\mu = r . \cos. \mu$, laonde $\text{sen}. GDK = \frac{a . \cos. 5\mu}{b} + \frac{a . \cos. 7\mu}{b} = \frac{a . (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu)}{b}$. Così dati i seni ed i coseni degli angoli FDE GDb, si troverà il seno della loro differenza IDG, onde sarà $\text{sen}. IDG = \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b}$

$+ \frac{a . \text{sen}. 4\mu . \cos. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} - \frac{a . \cos. 4\mu . \text{sen}. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} =$

$\frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b} + \frac{a . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} . (\text{sen}. 4\mu . \cos. 6\mu - \cos. 4\mu . \text{sen}. 6\mu) =$

$\frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b} - \frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 7\mu}{b . \cos. \mu}$. Per la qual cosa essendo certo, che $\text{sen}. IDK : \text{sen}. IDG :: DG : DK$, ovvero $\cos. \mu : \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b} -$

$\frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 7\mu}{b . \cos. \mu} :: b : DK$, s' avrà DK o la pressione del secondo cuneo QS sulla centina $= \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{\cos. \mu} - \frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 7\mu}{(\cos. \mu)^2}$: sta poi ancora $\text{sen}. IDK : \text{sen}. GDK :: DG : DI$, cioè $\cos. \mu :$ $\frac{a(\cos. 5\mu + \cos. 7\mu)}{b} :: b : DI$, dunque $DI = \frac{a(\cos. 5\mu + \cos. 7\mu)}{\cos. \mu}$ $= FL = WN$.

Passando col calcolo sul terzo cuneo VQ, si supporrà essersi verificato il primo de' tre casi contemplati nella Proposizione precedente, cioè che la FW cada fuori dell' angolo RFO, nel qual caso si è provato che il cuneo non preme la centina, ma sfianca ossia preme in suo luogo la sopraccentina. Si conduca pertanto la Wg perpendicolare alla direzione FN: e perchè sta $WN : Wg :: r : \text{sen}. WNg$, ed è l' angolo $WNg = FDE =$

4μ, sarà sostituendo $\frac{a(\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{\text{cos. } \mu} : Wg :: r : \text{sen. } 4\mu$; e però $Wg = \frac{a \,.\, \text{sen. } 4\mu\, (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{r \,.\, \text{cos. } \mu}$: ma la Ng si troverà $= \frac{a \,.\, \text{cos. } 4\mu (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{r \,.\, \text{cos. } \mu}$; e per conseguenza tutta la $Fg = a + \frac{a \,.\, \text{cos. } 4\mu\, (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{r \,.\, \text{cos. } \mu}$: dati poi i lati Wg Fg del triangolo rettangolo FgW sarà data anche l' ipotenusa FW, che si chiami $= d$, sicchè l' analogia di $FW : Wg :: r :$ sen. WFg ci darà sen. $WFg = \frac{a \,.\, \text{sen. } 4\mu\, (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{d \,.\, \text{cos. } \mu}$, e l' altra $FW : Fg :: r : \text{cos. } WFg$ somministrerà cos. $WFg = \frac{ar}{d} + \frac{a \,.\, \text{cos. } 4\mu (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{d \,.\, \text{cos. } \mu}$. E poichè sen. $NFO = \text{cos. } 3\mu$, e cos. $NFO = \text{sen. } 3\mu$, e si è testè ritrovato anche il seno e il coseno dell' angolo WFg, dunque sarà il seno della loro somma WFO, o sen. $WFP = \frac{a.\, \text{sen. } 3\mu \,.\, \text{sen. } 4\mu\, (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{dr \,.\, \text{cos. } \mu} + \frac{a \,.\, \text{cos. } 3\mu}{d} + \frac{a \,.\, \text{cos. } 3\mu \,.\, \text{cos. } 4\mu\, (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{dr \,.\, \text{cos. } \mu} = \frac{a \,.\, \text{cos. } 3\mu}{d} + \frac{a(\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{dr \,.\, \text{cos. } \mu} \,.\, (\text{sen. } 3\mu \,.\, \text{sen. } 4\mu + \text{cos. } 3\mu \,.\, \text{cos. } 4\mu)$, o $= \frac{a \,.\, \text{cos. } 3\mu}{d} + \frac{a(\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{d}$, o finalmente sen. $WFP = \frac{a(\text{cos. } 3\mu + \text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{d}$. Di nuovo perchè sen. $RFN =$ sen. 2μ, e cos. $RFN = \text{cos. } 2\mu$, ed è dato anche il seno e il coseno dell' angolo WFg, dunque sarà il seno della loro differenza, cioè sen. $WFa = \frac{a \,.\, \text{cos. } 2\mu \,.\, \text{sen. } 4\mu\, (\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu)}{dr \,.\, \text{cos. } \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu}{d} - \frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu \,.\, \text{cos. } 4\mu (\text{cos.} 5\mu + \text{cos.} 7\mu)}{dr \,.\, \text{cos. } \mu} = - \frac{a.\text{sen.} 2\mu}{d}$

$+ a \,.\, \text{sen. } 2\mu$

$+ \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{d \,.\, \cos.\, \mu}$. Si faccia ora quest' analogia sen. PFa ($=$ sen. $aFO = \cos.\, \mu$) : sen. $WFa :: FW : FP$, per avere FP o lo sfiancamento del terzo cuneo VQ uguale a $- \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} + \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$.

Se nella Figura si verificasse il secondo caso, e la retta FW cadesse fra le FR FO, si troverebbe allora in simil guisa la pressione del terzo cuneo sulla centina $= \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} - \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$, come calcolando si può riconoscere; cioè la stessa quantità di prima ma co' segni cangiati. Per la qual cosa unendo insieme i due casi si potrà dire che la pressione del terzo cuneo sulla centina è $= - \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} + \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$, con quest' avvertenza però che quando la quantità negativa di questo binomio supera la positiva, allora sarà indizio che la pressione del terzo cuneo sulla centina è negativa, ovvero ch' egli sfianca, e il suo sfiancamento sarà uguale alla differenza delle quantità suddette, o al binomio, co' segni cangiati.

Si determinerà poi la spinta relativa Fa dell' ultimo cuneo facendo come sen. PFa : sen. $WFP :: FW : Fa$, ovvero $\cos.\, \mu : \dfrac{a (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{d} :: d : Fa$, onde sarà $Fa = Rb = \dfrac{a (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{\cos.\, \mu}$; e indi seguitando ad operare, come si è fatto finora, si troverà finalmente lo sfiancamento della mossa $= \dfrac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$; il che ecc.

COROLLARIO.

Quando la FW cade fuori dell' angolo RFO, cioè nel caso primo, s' è trovata la $FP = -\frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} + \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$; e nel caso secondo quando cade fra le FR FO diventa la $FP = \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, cioè la stessa quantità di prima, ma coi segni cangiati: laonde quando la FP sia $= 0$ e la linea WF cada sopra Fa avrassi il terzo caso contemplato nell' antecedente Proposizione. Perchè dunque possa un tal caso verificarsi dovrà certo valere quest' equazione $\frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} = \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, ovvero, dividendo l' uno e l' altro membro per $\frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, dovrà essere $\text{cos.}\,\mu =$
Prop. 7 Lib. I. $\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu$: ma per l' equazione VII. $\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu = \frac{2.\,\text{cos.}\,\mu\,.\,\text{cos.}\,6\mu}{r}$; e però $\text{cos.}\,\mu = \frac{2.\,\text{cos.}\,\mu\,.\,\text{cos.}\,6\mu}{r}$, vale a dire $\text{cos.}\,6\mu = \frac{r}{2}$: ma l' angolo il di cui coseno è uguale alla metà del raggio è di $60°$; dunque $6\mu = 60°$, e però $2\mu = 20°$; quindi l' angolo al centro del cuneo debbe essere in questo caso di $20°$; e per conseguenza il numero de' pezzi componenti l' Arco intero debbe essere nove, cioè due mosse, tre conj per parte, e il serraglio nella sommità. E siccome il serraglio dell' Arco (per le cose che si diranno in appresso) è tutto sostenuto dalla centina, e non aggrava per nessun conto i cunei laterali; così sarà certa questa notabile verità, cioè che adattati alla centina i nove pezzi costituenti un Arco a tutto sesto, i primi cinque cunei superiori, compreso il serraglio, aggravano la centina, i due susseguenti uno per parte nè premono la centina nè sfiancano, e le sole mosse soffrono sfiancamento.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Se fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, poi da una parte la moſſa e quattro conj; ritrovare la preſſione eſercitata da queſti ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo.

Tra i pilaſtri di un Arco a tutto ſeſto ſia collocata la centina *Aq*, poi ſul pilaſtro *AZ* la moſſa *AB*, indi i quattro cunei *BC CD DE EF*: biſogna ritrovare le preſſioni da eſſi eſercitate ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo *BC* ſulla moſſa *AB*. Fig. XI. Tav. II.

Si prendano i centri di gravità *H I K L W* de' cunei e della moſſa, e ſi uniſcano le *HI IK KL LW* e tutti i raggi della Figura: indi ſi tirino le verticali *HM IN KO LP Wp* uguali fra loro, che rappreſentino le gravità de' cunei, e ſi compia il parallelogrammo *HQMR*.

Sarà *HR* uguale alla preſſione del primo cuneo ſuperiore *EF* ſulla centina *Aq*, e *HQ* eſprimerà la ſua preſſione ſul ſecondo cuneo *DE*. Si prolunghi dunque *HI* in *S*, e fatta *IS* uguale a *HQ*, ſi compia il parallelogrammo *ISTN* di cui *IT* ſia la diagonale. Si dimoſtrerà come nella Prop. 3 l' angolo *SIT* maggiore della metà dell' angolo *SIN*: all' incontro eſſendo l' angolo *SIK* uguale a *DGE*, e l' angolo *KIN* uguale a *DGA*, l' angolo poi *DGE* è la terza parte dell' angolo *DGA*, ſarà ancora l' angolo *SIK* il terzo dell' angolo *KIN*, e però il quarto di tutto *SIN*; laonde l' angolo *SIT* è maggiore di *SIK*, e per conſeguenza la *IT* cade di mezzo alle *IK IN*, e però anche alle *IK Ix*: onde compiuto il parallelogrammo *IVTx* eſprimerà *Ix* la preſſione eſercitata dal ſecondo cuneo *DE* ſulla centina, e *IV* la ſua ſpinta relativa ſul terzo cuneo *CD*. Di nuovo ſi prolunghi la *IK* in *Y*, e fatta *KY* uguale alla *IV*, ſi coſtruiſca il parallelogrammo *KYaO*, e ſi tiri la ſua diagonale *Ka*. Si proverà nello Scolio I della Prop. ſuſſeguente che la *Ka* cade di mezzo alle *Kb Kc*, ſicchè compiuto il parallelogrammo *Kbac*, dalla *Kc* ſarà eſpreſſa la preſ- Prop. 20 Lib. I.

ſione del terzo cuneo CD ſulla centina, e dalla Kb la ſua ſpinta relativa ſul quarto cuneo BC. Ora ſi faccia Ld uguale a Kb, e dalle Ld LP ſi coſtruiſca il parallelogrammo $LdeP$ e ſi giunga la diagonale Le, la quale cadrà fuori dell' angolo WLG (per quanto ſi dimoſtrerà nello Scolio 2 della ſuſſeguente Prop.) indi ſi compia il parallelogrammo $Lnem$: dinoterà Ln lo sfiancamento del quarto cuneo BC, e Lm la ſua ſpinta relativa ſulla moſſa AB; il che ecc.

COROLLARIO.

Prolungando Lm in k finchè Wk ſia uguale a Lm, ſe ſi comporranno inſieme le due forze Wk Wp, e poi ſi divideranno al ſolito, troveraſſi la quantità dello sfiancamento della moſſa AB.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Date le coſe medeſime dell' antecedente, ritrovare i valori analitici della preſſione de' tre cunei ſuperiori ſulla centina, e gli sfiancamenti del quarto cuneo e della moſſa.

Fig. XI. Tav. II. Sieno al ſolito le gravità de' cunei e della moſſa, cioè le HM IN KO LP Wp uguali ad a, il raggio delle Tavole $= r$, e l' angolo BGA al centro di un cuneo $= 2\mu$: ſarà per la riſoluzione del triangolo HQM, la QM ovvero la preſſione HR del primo cuneo ſuperiore EF ſulla centina $= \frac{a . \text{sen. } 8\mu}{\text{cos. } \mu}$, e la $HQ = IS = TN = \frac{a . \text{cos. } 9\mu}{\text{cos. } \mu}$. Riſolvendo poi il triangolo rettangolo TNb ſi troverà $Nb = \frac{a . \text{cos. } 8\mu . \text{cos. } 9\mu}{r . \text{cos. } \mu}$, e però tutta la Ib $= a + \frac{a . \text{cos. } 8\mu . \text{cos. } 9\mu}{r . \text{cos. } \mu}$, ma la Tb ſarà $= \frac{a . \text{sen. } 8\mu . \text{cos. } 9\mu}{r . \text{cos. } \mu}$, quindi sen. TIb (fatta la $IT = b$) sarà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 8\mu \,.\, \text{cos.}\, 9\mu}{b \,.\, \text{cos.}\, \mu}$; e cos. $TIb = \frac{ar}{b} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 8\mu \,.\, \text{cos.}\, 9\mu}{b \,.\, \text{cos.}\, \mu}$. Il seno poi dell' angolo $NIx =$ cos. 7μ, e cos. $NIx =$ sen. 7μ; laonde dati i seni e i coseni degli angoli TIb NIx si troverà il seno della loro somma, e sarà sen. $TIx = \frac{a(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{b}$. Di nuovo essendo sen. $KIb =$ sen. 6μ, e cos. $KIb =$ cos. 6μ, e s' è trovato anche il seno e il coseno dell' angolo TIb, dunque si potrà ottenere anche il seno della loro differenza; e però sarà sen. $VIT = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{b} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \text{cos.}\, 9\mu}{b \,.\, \text{cos.}\, \mu}$.

Per la qual cosa essendo cogniti i seni degli angoli VIx VIT, colla risoluzione del triangolo VIT si troverà la pressione Ix esercitata dal secondo cuneo DE sulla centina, e sarà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{\text{cos.}\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \text{cos.}\, 9\mu}{(\text{cos.}\, \mu)^2}$, ma la di lui spinta relativa sul terzo cuneo CD, cioè la $IV = KY = Oa$, si renderà $= \frac{a(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{\text{cos.}\, \mu}$. Ora si risolva il triangolo Oag per avere la $Og = \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 6\mu(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$, dipoi tutta la $Kg = a + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 6\mu\,(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$, indi il lato rimanente $ag = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu\,(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$: e però, fatta $Ka = d$, si conseguirà cos. $aKg = \frac{ar}{d} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 6\mu\,(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{d \,.\, \text{cos.}\, \mu}$, e sen. $aKg = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu\,(\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{d \,.\, \text{cos.}\, \mu}$; ma sen. $gKG =$ cos. 5μ, e cos. $gKG =$ sen. 5μ; dunque dati i seni e i coseni degli angoli aKg gKG si troverà il seno della loro somma $aKc = \frac{a(\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{d}$. In oltre essendo sen. $LKg =$

sen. 4μ e cos. $LKg =$ cos. 4μ, e s' è trovato anche il ſeno e il coſeno dell' angolo aKg, dunque ſarà dato anche il ſeno della loro differenza, quindi s' avrà sen. $bKa = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{d} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{d \,.\, \text{cos.}\, \mu}$. Eſſendoſi pertanto ora determinati i valori de' ſeni degli angoli aKc bKa, con due analogie ſi determineranno pure le Kc Kb, per conſeguenza s' avrà la preſſione Kc del terzo cuneo CD ſulla centina $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{\text{cos.}\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{(\text{cos.}\, \mu)^2}$, e la ſua ſpinta relativa Kb ſul quarto cuneo BC, ovvero $Ld = Pe = \frac{a(\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{\text{cos.}\, \mu}$.

Fa d' uopo poi paſſare alla riſoluzione del triangolo Per onde avere $Pr = \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu\, (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$, tutta la Lr $= a + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu\, (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$, e il lato $er =$ $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu\, (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$; quindi ſe ſi faccia Le $= m$, ſarà cos. $eLr = \frac{ar}{m} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{m \,.\, \text{cos.}\, \mu}$, e sen. $eLr = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu\, (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{m \,.\, \text{cos.}\, \mu}$: ma sen. $rLG =$ cos. 3μ, e cos. $rLG =$ sen. 3μ; laonde dati i ſeni e i coſeni degli angoli eLr rLG, ſi troverà colla ſolita equazione I. il ſeno della loro ſomma, cioè sen. $eLG =$ sen. $eLn =$
Prop. 7 Lib. I.
$\frac{a(\text{cos.}\, 3\mu + \text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{m}$: e ſimilmente eſſendo sen. $WLP =$ sen. 2μ e cos. $WLP =$ cos. 2μ, ſi determinerà il ſeno della differenza degli angoli eLr WLP, e ſarà sen. $eLm = -\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{m} + \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{m\, \text{cos.}\, \mu}$.

Per fine dati i ſeni degli angoli eLn eLm ſi troverà il valore dello sfiancamento Ln del quarto cuneo $BC = -\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\text{cos.}\, \mu} +$ $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{(\text{cos.}\, \mu)^2}$; ma la sua spinta relativa Lm sulla mossa sarà $= \frac{a(\text{cos.}\, 3\mu + \text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{\text{cos.}\, \mu}$: e allo stesso modo operando sarà lo sfiancamento della mossa $= \frac{a.\, \text{sen.}\, 2\mu(\text{cos.}\, 3\mu + \text{cos.}\, 5\mu + \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{(\text{cos.}\, \mu)^2}$; il che ecc.

S c o l i o I.

Ci eravamo riservati nella Proposizione settima di dimostrare che la Ka *cade fra le* Kb Kc, *e per far questo basterà provare che il valore della* Kc, *testè ritrovato, è positivo. In fatti supponendosi che la mossa e i quattro cunei sieno tutti posti da una parte, sarà* $\text{cos.}\, 2\mu > \text{cos.}\, 8\mu$ *(poichè negli angoli acuti all' angolo minore corrisponde il coseno maggiore); e però anche* $\frac{2 \,.\, \text{cos.}\, \mu\ \text{cos.}\, 2\mu}{r} >$ $\frac{2 \,.\, \text{cos.}\, \mu \,.\, \text{cos.}\, 8\mu}{r}$ *: ma per l' equazione VII* $\frac{2 \,.\, \text{cos.}\, \mu \,.\, \text{cos.}\, 8\mu}{r} =$ Prop. 7 Lib. I. $\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu$, *laonde* $\frac{2 \,.\, \text{cos.}\, \mu \,.\, \text{cos.}\, 2\mu}{r} > \text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu$; *e moltiplicando amendue i membri per* $\text{sen.}\, 2\mu$, *sarà pure vero che* $\frac{2 \,.\, \text{cos.}\, \mu \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \text{cos.}\, 2\mu}{r} > \text{sen.}\, 2\mu\, (\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)$ *: è poi per l' equazione I* $\frac{2 \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \text{cos.}\, 2\mu}{r} = \text{sen.}\, 4\mu$, *dunque* $\text{cos.}\, \mu \,.$ $\text{sen.}\, 4\mu > \text{sen.}\, 2\mu \,.\, (\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)$, *e per conseguenza anche* $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{\text{cos.}\, \mu} > \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{(\text{cos.}\, \mu)^2}$ *; e però la quantità* $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{\text{cos.}\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\text{cos.}\, 7\mu + \text{cos.}\, 9\mu)}{(\text{cos.}\, \mu)^2}$, *che s' è provata nella Proposizione uguale a* Kc, *è positiva.*

Scolio 2.

Resta da provare all' incontro, come abbiamo accennato nella Proposizione settima, che la retta Le *cade fuori dell' angolo* WLG*; ovvero, procedendo nello stesso modo dello Scolio antecedente, converrà provare che la* Ln *cade dall' altra parte della* LG*; cioè che il valore della* Ln*, in questa supposizione determinato, sia positivo. E di fatto poichè la mossa e i quattro cunei si sono intesi tutti collocati da una parte dell' Arco, sarà l' Arco formato di più di nove pezzi; e per conseguenza l' angolo al centro di un cuneo, cioè* 2μ, *sarà minore di* $20°$; *e perciò* $6\mu < 60°$, *laonde* $\cos. 6\mu > \cos. 60°$ *o* $> \frac{r}{2}$, *e* $\frac{r}{2} < \cos. 6\mu$: *quindi anche* $r . \text{sen}. 4\mu < 2 . \text{sen}. 4\mu . \cos. 6\mu$. *Ma per l' equazione VI*, $2 . \text{sen}. 4\mu . \cos. 6\mu = r . \text{sen}. 10\mu - r . \text{sen}. 2\mu$, *dunque* $r . \text{sen}. 4\mu < r . \text{sen}. 10\mu - r . \text{sen}. 2\mu$; *e trasportando s' avrà* $r . \text{sen}. 2\mu < r . \text{sen}. 10\mu - r . \text{sen}. 4\mu <$

$$\begin{aligned} & r . \text{sen}. 6\mu - r . \text{sen}. 4\mu \\ + & r . \text{sen}. 8\mu - r . \text{sen}. 6\mu \\ + & r . \text{sen}. 10\mu - r . \text{sen}. 8\mu \end{aligned}$$

Si ha poi per la suddetta equazione $r . \text{sen}. 6\mu - r . \text{sen}. 4\mu = 2 . \text{sen}. \mu . \cos. 5\mu$, $r . \text{sen}. 8\mu - r . \text{sen}. 6\mu = 2 . \text{sen}. \mu . \cos. 7\mu$, *e* $r . \text{sen}. 10\mu - r . \text{sen}. 8\mu = 2 . \text{sen}. \mu . \cos. 9\mu$; *dunque* $r . \text{sen}. 2\mu < 2 . \text{sen}. \mu \, (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu + \cos. 9\mu)$, *ovvero* $\frac{r . \text{sen}. 2\mu}{\cos. \mu} < \frac{2 . \text{sen}. \mu . \cos. \mu \, (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{(\cos. \mu)^2}$, *o finalmente* $\frac{a . \text{sen}. 2\mu}{\cos. \mu} < \frac{a . \text{sen}. 2\mu \, (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{(\cos. \mu)^2}$. *Per il che* $- \frac{a . \text{sen}. 2\mu}{\cos. \mu} + \frac{a . \text{sen}. 2\mu \, (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{(\cos. \mu)^2}$, *ch' è il valore di* Ln *ritrovato nella Proposizione, è quantità positiva.*

TEOREMA I. PROPOSIZIONE 9.

Se dopo d' aver adattati alla centina tutti i cunei da una parte e dall' altra, si fermi col serraglio un Arco intero o scemo; non saranno no premuti dal ſerraglio i due cunei contigui, ma tutto il ſuo peſo graverà ſulla centina.

Imperciocchè ſe non vi foſſero adattati i cunei ſulla centina, ma ſolo nella ſommità dell' Arco ſi collocaſſe il ſerraglio, queſto ſtarebbe immobile ſulla centina premendola con tutto il ſuo peſo ſenza biſogno di laterali ſoſtegni, avvegnachè la direzione della forza, che lo tira al centro de' gravi, rieſca perpendicolare alla centina e incontri la baſe del cuneo, dunque dovrà ſuccedere lo ſteſſo anche ſe vi ſieno da una parte e dall' altra dell' Arco meſſi tutti i cunei, e però il ſerraglio non farà che toccare i due laterali ſenza premerli; il che ecc.

S c o l i o.

Pure è certo, che in pratica non ſi verifica ſempre sì fatta Propoſizione ſpecialmente in grazia del metodo praticato dagli artefici nel porre in opera gli ultimi cunei ſuperiori di qualche grand' Arco. Soglìono eſſi metterli prima a ſecco ſtrignendolì fortemente con biette di legno ſpinte a colpi di maglio fra panconcelli inſaponati, e poi laſciano cadere i cunei e lì cacciano dentro con calciſtruzzo; ſicchè gli ultimi cunei ſuddetti cominciano a ſoſtenerſi fra di loro, nè la centina può fare riſpetto ad eſſi l' uffizio ſuo. Nulladimeno ſtando alla ſola teoria, e preſcindendo da queſta pratica inventata per diminuire l' abbaſſamento delle centine, e per poterle disfare più facilmente, non può rivocarſi in dubbio l' enunciata Propoſizione.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 10.

Se fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, poi da una parte la moſſa e quanti cunei ſi vogliano, determinare l' eſpreſſione algebraica generale della preſſione di uno qualunque di eſſi cunei ſulla centina, o del ſuo sfiancamento o preſſione ſulla ſopraccentina.

Fig. VIII. Tav. II. Allora quando erasi supposto, che sopra la mossa vi stesse un cuneo solo, s' era trovata la pressione GH del cuneo sulla centina $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu}$; e lo sfiancamento LP della mossa $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos.\, 3\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$, ed è la stessa cosa che dire, essere negativa la pressione della mossa suddetta sulla centina, ed $= - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos.\, 3\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$.

Prop. 2 di questo

Fig. IX. Ma quando i cunei sulla mossa erano due, s' è veduto, che la pressione FV del primo cuneo è $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{\cos.\, \mu}$; la pressione GP del secondo cuneo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos.\, 5\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$; e lo sfiancamento della mossa ridotto a pressione negativa della centina $= - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$.

Prop. 4 di questo

Fig. X. Similmente se i cunei sulla mossa sieno tre, diventa la pressione AY del primo cuneo superiore $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{\cos.\, \mu}$; la pressione DK del secondo cuneo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos. 7\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$; la pressione del terzo cuneo (o siasi sfiancamento a pressione negativa ridotto) sarà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$: ma lo sfiancamento della mossa ridotto a pressione negativa della centina sarà $= - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos. 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$.

Prop. 6 di questo

Fig. XI. Finalmente se i cunei sulla mossa sieno quattro, la pressione HR del primo cuneo è $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 8\mu}{\cos.\, \mu}$; la pressione Ix del secondo cuneo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos.\, 9\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$; la pressione Kc del terzo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 7\mu + \cos.\, 9\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$; lo

Prop. 8 di questo

sfiancamento Ln del quarto cuneo ridotto a pressione negativa $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a . \text{sen.}\, 2\mu (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu + \cos.\, 9\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$; e per ultimo la pressione negativa della mossa si ritrovò essere $= - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu + \cos.\, 9\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$.

Per la qual cosa attentamente esaminando l' ordine e la legge secondo la quale progrediscono le pressioni positive e negative de' cunei ne' casi soprammentovati, dove è dato il numero de' cunei soprapposti alle mosse, sarà lecito dedurre generalmente, che, chiamato x il loro numero sulla mossa, sarà la pressione del primo cuneo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\cos.\, \mu}$; quella del secondo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, (2x - 2)\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos.\, (2x + 1)\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$; similmente la pressione del terzo cuneo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, (2x - 4)\mu}{\cos.\, \mu}$ $- \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \left(\cos.(2x + 1)\mu + \cos.(2x - 1)\mu\right)}{(\cos.\, \mu)^2}$; la pressione poi del quarto cuneo sulla centina si ritrova $= \frac{a \,.\, \text{sen.}(2x - 6)\mu}{\cos.\, \mu} -$ $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \left(\cos.(2x + 1)\mu + \cos.(2x - 1)\mu + \cos.(2x - 3)\mu\right)}{(\cos.\, \mu)^2}$, di modo che generalmente la pressione positiva o negativa del cuneo m^{esimo} sarà uguale al binomio $\frac{a . \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a . \text{sen.}\, 2\mu}{(\cos.\, \mu)^2}$. $(\cos.\, (2x + 1)\mu + \cos.\, (2x - 1)\mu + \cos.\, (2x - 3)\mu$ ecc.....$)$. Si avverta però, che nella serie implicata nella seconda quantità del binomio si debbe prendere un numero di termini $= m - 1$, avvegnachè dal secondo cuneo cominci ad aver origine la quantità suddetta. Ma la somma di un numero di termini $m - 1$ della serie medesima $\cos.\, (2x + 1)\mu$, $\cos.\, (2x - 1)\mu$, $\cos.\, (2x - 3)\mu$ ecc....., è uguale alla quantità $\frac{\text{sen.}\, (m - 1)\mu \,.\, \cos.\, (2x - m + 3)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$: laonde generalmente la pres- Prop. 8 Lib. I.

ſione del cuneo m^{esimo} diventerà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 2)\mu}{\cos.\,\mu} -$

$$\frac{a.\text{sen.}\,2\mu.\text{sen.}(m-1)\mu.\cos.(2x-m+3)\mu}{\text{sen.}\,\mu\,.\,(\cos.\,\mu)^2} = \frac{a.\text{sen.}(2x-2m+2)\mu}{\cos.\,\mu}$$

$- \frac{2a\,.\,\text{sen.}\,(m-1)\mu\,.\,\cos.\,(2x-m+3)\mu}{r\,.\,\cos.\,\mu}$: con queſto però, che ſe queſt' ultimo binomio, adattato a' caſi particolari, rieſca poſitivo, la preſſione è poſitiva e il cuneo realmente preme la centina; e all' incontro quando dal binomio ne riſulti una quantità negativa vorrà dire, che la preſſione di quel tal cuneo è negativa, ovvero che il cuneo sfianca, e lo sfiancamento ſarà uguale allo ſteſſo binomio co' ſegni cangiati; il che ecc.

Corollario.

Se nella formola generale eſprimente le preſſioni poſitive e negative de' cunei ſi faccia $m = x + 1$, ſi conſeguirà la preſſione negativa della moſſa $= - \frac{2a\,.\,\text{sen.}\,x\mu\,.\,\cos.\,(x+2)\mu}{r\,.\,\cos.\,\mu}$; e però lo sfiancamento della moſſa medeſima diventerà $= \frac{2a\,.\,\text{sen.}\,x\mu\,.\,\cos.\,(x+2)\mu}{r\,.\,\cos.\,\mu}$.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 11.

Date le ſteſſe coſe dell' antecedente propoſizione, trovare ſe uno qualſivoglia de' cunei prema la centina, o soffra sfiancamento, ovvero nè prema nè sfianchi.

Fig. XII. Tav. II. Sia armata la centina fra i pilaſtri dell' Arco intero, poi da una parte ſia collocata la moſſa *AB* e quanti cunei ſi vogliano *BC CD DE EF FG GH HM* ecc., che ſieno x di numero: fa duopo ritrovare ſe uno di eſſi cunei per eſempio *EF*, che ſia m^{esimo} in ordine, principiando dal primo ſuperiore *NI*, prema la centina, o soffra sfiancamento, ovvero nè prema nè sfianchi.

Sia K il punto di mezzo della base del cuneo EF, r quello della mossa, e Q il centro dell' Arco: la gravità poi di un cuneo sia $= a$, il suo angolo al centro $= 2\mu$, e il raggio delle Tavole $r = QA$. Per le cose dette nell' antecedente sarà la pressione positiva o negativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{a . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu}$ $- \frac{2a . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu}{r . \cos. \mu}$, con questo però, che quando il binomio riesce positivo, positiva è ancora la pressione sulla centina, e viceversa s' è negativo, la pressione è negativa, e diventa sfiancamento se si cangino al binomio medesimo i segni: laonde quando mai accadesse che il primo termine del binomio fosse uguale al secondo, sarebbe questo un segno evidente, che quel cuneo m^{esimo} nè preme la centina, nè soffre sfiancamento. In questo caso dunque sarà $\frac{a . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} = \frac{2a . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu}{r . \cos. \mu}$; cioè $r . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu = 2 . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu$; ma per l' equazione VI (non essendo mai x minore di m nè però $2x > 2m - 4$, laonde $2x - m + 3 > m - 1$) si ricava $2 . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu = r . \text{sen.} (2x + 2)\mu - r . \text{sen.} (2x - 2m + 4)\mu$; dunque sarà $r . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu = r . \text{sen.} (2x + 2)\mu - r . \text{sen.} (2x - 2m + 4)\mu$, e trasportando, $r . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu + r . \text{sen.} (2x - 2m + 4)\mu = r . \text{sen.} (2x + 2)\mu$. E' poi, per l' equazione V, $r . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu + r . \text{sen.} (2x - 2m + 4)\mu = 2 . \cos. \mu . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu$; onde finalmente, affinchè il cuneo m^{esimo} nè prema nè sfianchi, converrà che sia $2 . \cos. \mu . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu = r . \text{sen.} (2x + 2)\mu$, e però $\text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu = \frac{r . \text{sen.} (2x + 2)\mu}{2 . \cos. \mu}$. Ora essendo x il numero de' cunei senza la mossa, se s' aggiunga la mossa, saranno in tutti $x + 1$; l' arco poi AL è $= 2\mu$, dunque tutto l' arco $AI = (x + 1)2\mu = (2x + 2)\mu$; e però condotta dal punto I la IV perpendicolare al diametro, sarà la retta $IV = \text{sen.} (2x + 2)\mu$. Di nuovo perchè il cuneo EF è m^{esimo} in ordi-

Prop. 7 Lib. I.

ne, sarà l' arco $IE = 2m\mu$, e per conseguenza l' arco $Ik = 2m\mu - \mu$: l' arco poi AI s' è trovato $= (2x + 2)\mu$, laonde l' arco rimanente $Ak = (2x + 2)\mu - 2m\mu + \mu = (2x - 2m + 3)\mu$; quindi, tirate le ku rs parallele a IV, s' avrà sen. $(2x - 2m + 3)\mu = ku$, siccome cos. $\mu = Qs$. Sicchè se il cuneo EF nè debba premere nè sfiancare, dovrà riuscire la $ku = \frac{QA . IV}{2 . Qs}$. Laonde se si faccia come $2Qs : QA :: IV$ ad una quarta proporzionale VO, e si conduca dal punto O la OP parallela alla AQ, se essa OP incontri il punto di mezzo della base di un cuneo EF, onde sia $ku = VO = \frac{QA . IV}{2 . Qs}$, sarà segno, che il cuneo medesimo nè preme la centina nè sfianca.

Ma se il punto di mezzo della base di un cuneo cadesse sopra la linea retta OP tirata dal punto O dove VO è $= \frac{QA . IV}{2 . Qs}$, come avviene del punto di mezzo Z della base del cuneo HM, ciò indicherà che il seno ZY dell' arco AZ è maggiore di VO, cioè sen. $(2x - 2m + 3)\mu > \frac{r . \text{sen.} (2x + 2)\mu}{2 . \cos. \mu}$, ovvero, invertendo il calcolo superiore, $\frac{a . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} > \frac{2a . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu}{r . \cos. \mu}$, e però il binomio $\frac{a . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} - \frac{2a . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu}{r . \cos. \mu}$ riuscirà positivo; e in conseguenza la pressione del cuneo HM non meno di quelle de' cunei superiori sarebbe pressione positiva, ed i cunei premerebbero di fatto la centina.

Per fine se il punto di mezzo della base di un cuneo come DE cadesse sotto la OP, il binomio $\frac{a . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} - \frac{2a . \text{sen.} (m - 1)\mu . \cos. (2x - m + 3)\mu}{r . \cos. \mu}$ riuscirebbe negativo; onde tanto esso cuneo che gl' inferiori sarebbero ad un reale sfiancamento soggetti; il che ecc.

COROLLARIO 1.

Havvi dunque nella circonferenza *AI* del cerchio interiore un punto *k*, dove la *OP* lo ſega, che dinota il paſſaggio dalla preſſione allo sfiancamento; di modo che tutti i cunei aventi i punti di mezzo delle loro baſi ſopra quel punto premeranno la centina, e tutti gli altri di ſotto sfiancheranno; e ſe ve ne foſſe alcuno per eſempio *EF* il di cui punto di mezzo della baſe cadeſſe nel punto medeſimo *k*, non premerà il cuneo *EF* la centina nè sfiancherà; quindi il punto *k* ſarebbe un punto d' equilibrio. Dif. 17 Lib. I.

COROLLARIO 2.

Il punto d' equilibrio, quando vi ſia, dee ancora variare di mano in mano, che ſi vanno mettendo ſulla centina da ciaſcuna parte dell' Arco intero nuovi cunei: ma la regola per ritrovarlo ſarà per ogni numero di cunei la ſteſſa, cioè di fare $VO = \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs}$, dipoi tirare la *OP* parallela alla corda ſino a che incontri la circonferenza *AI*. Imperciocchè ſe nella *OP* s' incontrerà il punto di mezzo *k* della baſe di qualche cuneo *EF*, ſarà *k* un punto d' equilibrio.

COROLLARIO 3.

Se con queſto metodo ſi determini il punto *k* della centina, il quale non cada nel mezzo della baſe di un qualche cuneo, non vi ſarà punto d' equilibrio nella centina, ma *k* ſarà ſempre un punto, che ſervirà *di norma* per conoſcere, che tutti i cunei aventi i punti di mezzo delle loro baſi ad eſſo ſuperiori premono la centina, mentre gl' inferiori, che avranno i punti di mezzo ſotto *k*, sfiancheranno, e premeranno la ſopraccentina.

COROLLARIO 4.

E però ſe il numero de' cunei componenti la parte AI di un Arco intero ſia infinito, e infinitamente picciolo ognuno di eſſi come AB, è manifeſto che l' archetto AL, come anche la ſua metà Ar ſarà un infinitamente piccolo; e perciò il ſuo coſeno Qs non differirà dal raggio QA; per conſeguenza s' avrà $VO = \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs} = \frac{IV}{2}$, cioè VO ſarà uguale alla metà di IV. Diviſa dunque per mezzo la IV in O e condotta la OP parallela alla AQ, vi ſarà, nella ſuppoſizione che i cunei ſieno infinitamente piccioli, in k il punto d'equilibrio.

COROLLARIO 5.

Fig. XIII. Tav. II. E ſe ſulla centina foſſero collocati i cunei dell' Arco fino al ſerraglio; in queſto caſo diventando il numero di tutti i pezzi componenti l' Arco $= 2x + 3$, ſarà la ſemicirconferenza $= (2x + 3)2\mu$, e il quadrante $= (2x + 3)\mu$: onde gli archi $(2x + 2)\mu$ e μ ſono inſieme uniti uguali al quadrante, quindi sen. $(2x + 2)\mu = \cos.\ \mu$. Sia pertanto FC il ſerraglio dell' Arco e dal punto T ſi tiri la TN parallela a CQ; e però fatta $ND = \frac{r \cdot \text{sen.}\ (2x + 2)\mu}{2 \cdot \cos.\ \mu} = \frac{r}{2} = \frac{QA}{2}$, e condotta la DP parallela a QA che interſechi la centina nel punto E, ſarà E il punto di norma, che diventerà anche punto d' equilibrio, ſe corriſponda al punto di mezzo della baſe di un cuneo come nella Figura. E poichè il ſeno EV dell' arco AE è uguale alla metà del raggio QA, l' arco AE ſarà di 30°, e di 60° il ſuo complemento EZ: per la qual coſa venendo il peſo del ſerraglio ſoſtenuto dalla centina nè eſercitando eſſo alcuna preſſione ſu' due cunei laterali, ſarà vera l' aſſerzione, che poſti tutti i cunei di un Arco intero ſulla centina, di qualunque numero ne ſia egli formato, que' ſuperiori, ch' avranno la linea che uniſce il punto di mezzo della loro baſe col centro dell' Arco meno inclinata di 60 gradi alla ſaetta, premeranno la centina; i due cunei, che da una parte e dall' altra avranno eſſa linea inclinata alla ſaetta per

Prop. 9 di queſto

per 60 gradi (quando pure ve ne siano) non premeranno la centina nè sfiancheranno; ma gl' inferiori, ne' quali la sopraddetta linea sia più inclinata di gradi 60 alla saetta, sfiancheranno, ed avranno bisogno di essere sostenuti dalla sopraccentina, o da altro rattenimento.

SCOLIO I.

Sia per esempio l' Arco intero composto di 81 *pezzi, cioè di* 2 *mosse,* 1 *serraglio, e* 39 *cunei per parte. Sarà pertanto in ciascuna parte da' ventisei cunei superiori, insieme colla metà del serraglio, occupato un angolo di* $58^\circ.\ 53'\frac{1}{3}$; *e a questo aggiungendo* $1^\circ.\ 6'\frac{2}{3}$, *ch' è la metà dell' angolo al centro di un de' cunei, si conseguiranno in somma precisamente* 60°; *laonde i cunei ventisettesimi (cominciando il novero in ciascuna parte da' cunei laterali al serraglio) hanno le linee, che uniscono i punti di mezzo delle loro basi col centro dell' Arco, inclinate alla saetta per gradi* 60; *e però essi cunei nè premono nè sfiancano. All' incontro i ventisei superiori da ciascuna parte, in tutti cinquantatre col serraglio, premono la centina; mentre i tredici inferiori pure da ciascuna parte dell' Arco, comprese le mosse, soffrono uno sfiancamento; e sono in tutti ottant' uno.*

SCOLIO 2.

Sia per secondo esempio formato l' Arco intero di 95 *cunei, cioè* 2 *mosse,* 1 *serraglio, e* 46 *cunei per parte: si domanda quanti cunei superiori premano la centina, e dove nascano gli sfiancamenti. Sarà dunque l' angolo al centro di un cuneo* $= 1^\circ.\ 53'\frac{13}{19}$; *e però da ciascuna parte i* 30 *cunei superiori, insieme colla metà del serraglio, occuperanno un angolo di* $57^\circ.\ 47'\frac{7}{19}$; *e a questo aggiugnendo* $56'\frac{16}{19}$, *ch' è la metà dell' angolo al centro di un cu-*

neo, s' avrà in somma $58°. 44' \frac{4}{19}$, *e di tal grandezza sarà l' angolo che fa colla saetta quella linea, che dal punto di mezzo della base del trentunesimo si conduce al centro dell' Arco; e per conseguenza ne' cunei trentaduesimi quest' angolo sarà di* $60°. 37' \frac{17}{19}$; *il primo minore, maggiore il secondo di gradi 60. Nessun cuneo dunque ha in questo caso la linea, che unisce il suo centro di gravità col centro dell' Arco, inclinata alla saetta per gradi 60; laonde non v' ha alcun punto d' equilibrio, e i primi sfiancamenti succedono ne' cunei trentaduesimi; quindi li 63 cunei superiori, compreso il serraglio, premeranno la centina, e li 16 inferiori da ciascuna parte saranno a sfiancamento soggetti.*

COROLLARIO 6.

Fig. XIII. Tav. II. E se il numero de' pezzi, che formano l' Arco intero totalmente riempiuto, fosse infinito, è manifesto che il punto d'equilibrio cadrà da ciascuna parte come in E, dove l' angolo EQZ sia di $60°$, e il quadrante AZ sesquialtero dell' arco ZE; e però anche il numero de' cunei collocati sul quadrante AZ sarà sesquialtero di quelli che sono collocati nell' arco ZE; laonde essendo per le prese denominazioni il numero de' cunei collocati sull' intero semicerchio AZG uguale a $2x + 3$, o dicasi $2x$ (poichè in questo caso x è infinito), saranno quelli del quadrante AZ di numero x, e gli altri dell' arco ZE uguali a $\frac{2x}{3}$: e di questa nozione ci varremo a luogo opportuno.

PROBLEMA 11. PROPOSIZIONE 12.

Se fra i pilastri di un Arco scemo sia gittata la centina, poi da una parte si pongano la mossa e quanti cunei si vogliano, determinare l' espressione generale delle pressioni e degli sfiancamenti de' cunei.

Fra i pilaſtri di un Arco ſcemo ſia gittata la centina ABC, e da una parte ſi pongano la moſſa AM e quanti cunei ſi vogliano, il ſuperiore de' quali ſia GE. Facciaſi poi al ſolito la gravità di ciaſcun cuneo $= a$, il ſuo angolo al centro $= 2\mu$; indi condotta l'orizzontale DK ſia l'angolo $EDK = n\mu$, indicando n qualunque numero intero o rotto e anche irrazionale: ricercaſi l'eſpreſſione generale della preſſione o dello sfiancamento del cuneo RF, ch' è m^{esimo} in ordine. Fig. I. Tav. III.

Facendo ſulla Figura una coſtruzione ſimile a quelle che ſi ſon fatte per gli Archi interi, poſcia calcolando ſi troverà, che la preſſione del primo cuneo ſuperiore GE diventerà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(n-2)\mu}{\cos.\,\mu}$; quella del ſecondo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(n-4)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \cos.(n-1)\mu}{(\cos.\,\mu)^2}$; la preſſione del terzo $= \frac{a \,.\, \text{sen.}(n-6)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \left(\cos.\,(n-1)\mu + \cos.\,(n-3)\mu\right)}{(\cos.\,\mu)^2}$; e in ſimil guiſa la ſuſſeguente del quarto cuneo ſi renderà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(n-8)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \left(\cos.\,(n-1)\mu + \cos.\,(n-3)\mu + \cos.\,(n-5)\mu\right)}{(\cos.\,\mu)^2}$; e così in progreſſo: per conſeguenza la preſſione del cuneo m^{esimo} in ordine ſi farà uguale a queſto binomio $\frac{a \,.\, \text{sen.}\,(n-2m)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu \,.\, \left(\cos.\,(n-1)\mu + \cos.\,(n-3)\mu + \cos.\,(n-5)\mu \text{ ecc.} \ldots\right)}{(\cos.\,\mu)^2}$.

Si avverta in prima, che nella ſerie inviluppata nel ſecondo termine del binomio debbeſi prendere un numero di termini $= m - 1$, poichè nel ſecondo cuneo ſolamente ha origine la ſerie e il ſecondo termine medeſimo; e ſi avverta in ſecondo luogo, che ſe il binomio è poſitivo, la preſſione è realmente preſſione ſulla centina, ma ſe foſſe negativo, eſſa diventa preſſione negativa, o sfiancamento.

Reſta ora da ſimplificare il ſecondo termine di eſſo binomio, o da ſommare un numero di termini $m - 1$ della ſerie $\cos.\,(n-1)\mu$, $\cos.\,(n-3)\mu$, $\cos.\,(n-5)\mu$ ecc.: ma que-

Prop. 8 Lib. I. sta somma è $= \frac{\text{sen.}(m-1)\mu \,.\, \text{cos.}(n-m+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$; dunque riducendo sarà la pressione del cuneo $m^{esimo} = \frac{a\,.\,\text{sen.}(n-2m)\mu}{\text{cos.}\,\mu}$ $- \frac{2a\,.\,\text{sen.}(m-1)\mu\,.\,\text{cos.}(n-m+1)\mu}{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}$; il che ecc.

Corollario 1.

Se l' Arco scemo si accrescesse di sotto fino a diventare intero, e si chiamasse x il numero de' cunei posti da una parte sulla centina, non compresa la mossa, sicchè colla mossa fossero $x+1$; allora K sarebbe il punto dell' impostatura, e l' angolo EDK diventerebbe $=(x+1)2\mu$; laonde $(x+1)2\mu = n\mu$, e $n = 2(x+1)$; quindi sostituendo $2(x+1)$ in luogo di n nel binomio di sopra ritrovato, si avrà per la pressione del cuneo m^{esimo} in un Arco intero, sulla centina del quale sieno stati collocati da una parte un numero $x+1$ di cunei, la quantità $\frac{a.\text{sen.}(2x-2m+2)}{\text{cos.}\,\mu} - \frac{2a.\text{sen.}(m-1)\mu.\text{cos.}(2x-m+3)\mu}{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}$, dove x m sono numeri interi; e questa formola conviene con quella, che s' è in altro luogo trovata. Prop. 10 di questo

Corollario 2.

Egli è per se stesso evidente, che se il binomio fosse uguale a zero, quel tal cuneo m^{esimo} nè premerebbe la centina nè sfiancherebbe, e però egli corrisponderebbe ad un punto d' equilibrio nella centina medesima. Ma fatto il binomio $=0$, diventa $\frac{a\,.\,\text{sen.}(n-2m)\mu}{\text{cos.}\,\mu} = \frac{2a\,.\,\text{sen.}(m-1)\mu\,.\,\text{cos.}(n-m+1)\mu}{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}$, la qual equazione sviluppata dà $2.\text{cos.}\,\mu\,.\,\text{sen.}(n-2m+1)\mu = r.\text{sen.}\,n\mu$, dunque $\text{sen.}(n-2m+1)\mu = \frac{r\,.\,\text{sen.}\,n\mu}{2\,.\,\text{cos.}\,\mu}$. Oltre a ciò prendendo la ED per raggio, la ES è $=\text{sen.}\,EDK = \text{sen.}\,n\mu$; e se si dividano per mezzo gli archetti AL RI in N H, l' angolo EDH sarà $=2m\mu - \mu$, ma $EDK = n\mu$, laonde il rimanente HDK

$= (n - 2m + 1)\mu$; e però sen. $(n - 2m + 1)\mu = HZ$; la DP poi sarà $= \cos.\mu$: per conseguenza $HZ = \frac{ED \,.\, ES}{2 \,.\, DP}$, le quali ED ES DP sono quantità cognite. Quindi se fatta $DO = \frac{ED \,.\, ES}{2 \,.\, DP}$, e condotta la OH parallela alla DK, il punto H cada nel mezzo della base di un cuneo, sarà H un punto d' equilibrio nella centina; altrimenti non sarà che un punto di norma: ma nell' uno e nell' altro caso sarà vero che tutti i cunei che hanno i punti di mezzo delle loro basi sopra H premeranno la centina, e viceversa sfiancheranno quelli che gli hanno di sotto.

COROLLARIO 3.

E però se fosse riempiuto di cunei tutto l' Arco scemo fino al rigoglio B, sarà $HZ = DO = \frac{ED \,.\, QV}{2 \,.\, DP}$, ma $QV = DP$, perchè amendue sono coseni degli angoli uguali BDQ ADN, dunque $DO = \frac{ED}{2} = \frac{BD}{2}$; laonde l' angolo HDB sarà di 60 gradi. Quindi negli Archi scemi totalmente riempiuti succede lo stesso che negli Archi interi, cioè che tutti i cunei ne' quali la linea, che unisce il centro dell' Arco col punto di mezzo della loro base, sia meno inclinata di 60° alla saetta, premono la centina; quelli che l' avessero inclinata di 60° nè premono nè sfiancano, e corrisponderebbero ad un punto d' equilibrio; e gli altri all' incontro che l' abbiano inclinata oltre li 60° sfiancheranno: per conseguenza i punti di norma o d' equilibrio sono ugualmente dal rigoglio lontani tanto negli Archi interi totalmente riempiuti che negli scemi, purchè siano uguali i raggi; e ne segue ancora che possono assegnarsi Archi scemi, ne' quali tutti i cunei, niuno eccettuato, premano la centina. Corol. 5 Prop. 11 di questo

Corollario 4.

E se i cunei fossero infiniti di numero, allora DP si rende $= DA = DE$, dunque nell' Arco scemo non interamente riempiuto sarà $HZ = DO = \frac{ES}{2}$; per conseguenza nel riempiuto sarà $DO = \frac{DE}{2}$, cioè DO uguale alla metà del raggio: lo stesso si dica de' cunei che sono collocati dall' altra parte.

Corol. 2.

Scolio.

Dopo di aver trattato degli Archi interi e degli scemi vorrebbe l' ordine, che si parlasse de' composti; ma il modo con cui siamo proceduti negli Archi interi ci libera da questa necessità. In fatti nelle antecedenti Proposizioni non abbiamo supposto l' Arco intero totalmente costruito, ma solo una di lui parte composta di un certo numero di cunei, e nelle formole generali, quindi ricavate, delle pressioni e de' punti d' equilibrio o di norma bisognava sostituire il numero de' cunei soprapposti alla mossa per conseguire il determinato e particolar valore di quelle: e però essendo l' Arco composto formato da due Archi scemi che hanno il loro centro nella corda dell' Arco, o diremmo piuttosto, di due porzioni d' Archi interi aventi il loro centro nella corda, le quali porzioni in un punto s' intersecano, succederanno negli Archi composti, quando si costruiscono e dopo interamente compiuti, le stesse cose da ciascuna parte, come se si fabbricasse sulla centina un Arco intero senza condurlo al suo termine d' integrità. Il serraglio del composto non può pure, teoricamente parlando, produrre alcuna variazione, venendo esso tutto dalla centina sostenuto.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 13.

Se sopra la centina di un Arco scemo sieno da una parte adattati quanti cunei si vogliano, si domanda la somma delle pressioni di un numero m de' ſuperiori, i quali premano tutti la centina ſteſſa.

Si faccia come nell' antecedente la gravità di un cuneo $= a$, il ſuo angolo al centro $= 2\mu$, e l'angolo $EDK = n\mu$: ſi domanda la ſomma delle preſſioni poſitive de' cunei dal ſuperiore GE fino al cuneo RF incluſivamente, ch'è $m^{eſimo}$ in ordine. Fig. I. Tav. III.

Si è veduto, che $\frac{a.\text{sen.}(n-2m)\mu}{\text{cos.}\,\mu} - \frac{2a.\text{sen.}(m-1)\mu.\text{cos.}(n-m+1)\mu}{r.\text{cos.}\,\mu}$ Prop. ant.

$= \frac{a}{r.\text{cos.}\,\mu}\left(r.\,\text{sen.}(n-2m)\mu - 2.\,\text{sen.}(m-1)\mu.\,\text{cos.}(n-m+1)\mu\right)$

è una formola generale ch' eſprime la preſſione del cuneo $m^{eſimo}$: trattaſi dunque di trovare una ſomma di termini m di cui la ſopraddetta formola ſia il termine generale.

Ora eſſendo, per l'equazione VI, $2.\,\text{sen.}\,(m-1)\mu.\,\text{cos.}\,(n-m+1)\mu = r.\,\text{sen.}\,n\mu - r.\,\text{sen.}\,(n-2m+2)\mu$; il termine generale ſi ridurrà in queſto $\frac{a}{r.\,\text{cos.}\,\mu}\left(r.\,\text{sen.}(n-2m)\mu + r.\,\text{sen.}(n-2m+2)\mu - r.\,\text{sen.}\,n\mu\right) =$ (per l'equazione V) $\frac{a}{r.\,\text{cos.}\,\mu}$. $\left(2.\,\text{sen.}\,(n-2m+1)\mu.\,\text{cos.}\mu - r.\,\text{sen.}\,n\mu\right) = \frac{2a.\,\text{sen.}(n-2m+1)\mu}{r} - \frac{a.\,\text{sen.}\,n\mu}{\text{cos.}\,\mu}$, dove tutto è coſtante fuori di m. Pertanto ſe dalla ſomma generale della ſerie, nella quale il termine generale ſia $\frac{2a.\,\text{sen.}\,(n-2m+1)\mu}{r}$, ſi ſottragga la quantità $\frac{a.\,\text{sen.}\,n\mu}{\text{cos.}\,\mu}$ ripetuta un numero m di volte, ſi conſeguirà certamente la ſomma generale ricercata. Ma ſe ſi faccia in eſſo termine generale prima $m=1$ poi $m=2$, ſi avranno i due primi termini della ſerie, indi la ſua ſomma generale che ſarà uguale a $\frac{2a.\,\text{sen.}\,(n-m)\mu.\,\text{sen.}\,m\mu}{r.\,\text{sen.}\,\mu}$; dunque finalmente la ſomma delle

Prop. 7 Lib. I.

Prop. 8 Lib. I.

pressioni di un numero m di cunei sarà $= \frac{2a.\text{sen.}(n-m)\mu.\text{sen.}m\mu}{r.\text{sen.}\mu}$ $- \frac{am.\text{sen.}n\mu}{\text{cos.}\mu} =$ (per l' equazione VIII) $\frac{a.\text{cos.}(n-2m)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a.\text{cos.}n\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{am.\text{sen.}n\mu}{\text{cos.}\mu}$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Per conseguenza se s' accrescesse di tanto l' Arco scemo *ER* fino a ridurlo intero, per modo che la sua impostatura fosse in *K*, e si chiamasse x il numero de' cunei sulla mossa, in questo caso s' avrebbe $n = 2(x+1)$; e però la somma delle pres- Cor. 1 Prop. ant. sioni di un numero m di cunei in una parte dell' Arco intero sarà uguale $\frac{a.\text{cos.}(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+2)\mu}{\text{sen.}\mu} -$ Scolio Prop. ant. $\frac{am.\text{sen.}(2x+2)\mu}{\text{cos.}\mu}$. E quest' equazione può servire anche per gli Archi composti, i quali non sono che parti dell' Arco intero non totalmente riempiuto.

COROLLARIO 2.

E se gli Archi scemi fossero interamente riempiuti, allora l' angolo *QDK* cioè $n\mu$ diventerà complemento dell' angolo *QDB* ovvero dell' angolo *ADN*; e però sen. $n\mu =$ cos. μ, e cos. $n\mu =$ sen. μ, dunque la somma delle pressioni de' cunei sarà $= \frac{a.\text{cos.}(n-2m)\mu}{\text{sen.}\mu} - a - am = \frac{a.\text{cos.}(n-2m)\mu}{\text{sen.}\mu} - a(m+1)$. Se l' Arco poi fosse intero diventerà la sopraddetta somma $= \frac{a.\text{cos.}(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\mu} - a(m+1)$.

PROBLEMA

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 14.

Se ſopra la centina di un Arco intero ſieno poſti tutti i cunei, quanti eſſi ſiano; ritrovare la ſomma delle preſſioni di tutti i cunei che gravano ſulla centina.

S' è dimoſtrato, che chiamato il peſo di un cuneo $= a$, il ſuo angolo al centro $= 2\mu$, x il numero de' cunei meſſi da una parte e dall' altra dell' Arco intero, non compreſe le moſſe e il ſerraglio, s' è dimoſtrato, dico, che la ſomma delle preſſioni di un numero m di eſſi ſulla centina è $=$ Corol. 2 dell' antec.

$$\frac{a \cdot \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - a(m+1).$$

Quindi ſuppoſto che m ſia preciſamente il numero totale de' cunei, che da ciaſcuna parte del ſerraglio premono la centina, ſarà la ſomma delle loro preſſioni inſieme con quella del ſerraglio uguale a $\dfrac{2a \cdot \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - 2a(m+1)$

$$+ a = \frac{2a \cdot \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - a(2m+1).$$

Ora ſieno tre ſolamente i pezzi componenti l' Arco intero, coſicchè $x = 0$, $m = 0$, e l' angolo al centro di un cuneo o ſia $2\mu = 60°$: ſarà, ſoſtituendo, la preſſione ſulla centina $= \dfrac{2a \cdot \cos. 60°}{\text{sen.}\, 30°} - a$; ma $\cos. 60° = \text{sen.}\, 30°$; laonde detta preſſione ſarà uguale a $2a - a = a$: e così ſi doveva ritrovare. Imperciocchè nel caſo in cui ſieno ſolo tre i pezzi coſtituenti l' Arco, il ſerraglio preme con tutto il ſuo peſo la centina, niente la premono le moſſe, che gravitano con tutto il loro peſo ſui pilaſtri, ponendoſi che le linee verticali tirate dal loro centro di gravità cadano dentro le baſi.

Siano in ſecondo luogo 9 di numero i pezzi che compongono l' Arco a tutto ſeſto, nel qual caſo s' è dimoſtrato, che i cinque ſuperiori, compreſo il ſerraglio, premono la centina, niente gli altri: onde ſarà $m = 2$, $x = 3$, e 2μ Corol. Prop. 6 di queſto

$= 20°$; e però la somma delle pressioni sulla centina $=$ $\frac{2a.\cos. 40°}{\text{sen.} 10°} - 5a = \frac{2a.7660444}{1736482} - 5a = a.\frac{6638478}{1736482} = a.\frac{3823}{1000}$.

Scol. 1 Prop. 11 di questo

Ma si prenda per terzo esempio il caso in cui 81 sieno i suddetti pezzi: sarà $x = 39$, $m = 26$, $2\mu = 2°.\ 13'\frac{1}{3}$; onde, sostituendo, sarà la somma delle pressioni sulla centina $= \frac{2a.\cos. 31°.\ 6'\frac{2}{3}}{\text{sen.} 1°.\ 6'\frac{2}{3}} - 53a = \frac{2a.8561669}{193913} - 53a = a.\frac{6845949}{193913}$ $= a.\frac{35304}{1000}$.

Scol. 2 della cit. Prop.

Per fine sieno 95 i pezzi componenti l' Arco intero, e $x = 46$, $m = 31$, $2\mu = 1°.\ 53'\frac{13}{19}$; e però mediante la sostituzione delle quantità medesime s' avrà la somma delle pressioni contro la centina $= \frac{2a.\cos. 30°.\ 18'\frac{12}{19}}{\text{sen.} 56'\frac{16}{19}} - 63a = \frac{2a.8632565}{165340}$ $- 63a = a.\frac{6848710}{165340} = a.\frac{41422}{1000}$. E collo stesso metodo si determinerà la somma delle pressioni sulla centina in un Arco intero formato di qualsivoglia numero di cunei; il che ecc.

Corollario I.

Cor. 2 Prop. ant.

Similmente se m indichi il numero totale de' cunei che da ciascuna parte del serraglio premono la centina di un Arco scemo interamente riempiuto, poichè la somma delle pressioni di quelli che sono da una parte è $= \frac{a.\cos.(n - 2m)\mu}{\text{sen.}\ \mu}$ $- a(m + 1)$, ne segue che la somma delle pressioni di tutti, compreso il serraglio, debba essere $= \frac{2a.\cos.(n - 2m)\mu}{\text{sen.}\ \mu} -$ $a(2m + 1)$.

Ma supponendo che m in un Arco composto indichi il numero de' cunei che da ciascuna parte premono la centina, poichè si è dimostrata la somma delle pressioni di quelli da una parte $= \frac{a.\cos.(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\cos.(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$ Cor. 1 Prop. cit.

$-\frac{am.\,\text{sen.}(2x+2)\mu}{\cos.\,\mu}$, ſarà la ſomma totale delle preſſioni dell' Arco compoſto ſulla centina (fatto il peſo del ſerraglio $=Q$) $=$
$$\frac{2a.\cos.(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{2a.\cos.(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{2am.\text{sen.}(2x+2)\mu}{\cos.\,\mu} + Q.$$

SCOLIO I.

Veramente il metodo ſuppone che ſia cognito nell' Arco intero, e nello ſcemo, o compoſto, il numero totale m *di cunei laterali al ſerraglio, che da ciaſcuna parte premono la centina; ma ſiccome ſi è altrove moſtrato il modo di determinarlo, così non vi può eſſere difficoltà nell' adattar la regola a' caſi particolari.*

COROLLARIO 2.

E poichè s' è trovato, che quando i cunei componenti l' Arco intero ſiano tre, la preſſione eſercitata ſulla centina diventa $=a$, mentre il peſo de' tre conj componenti tutto l' Arco è $=3a$; dunque in queſto caſo ſtarà il peſo di tutto l' Arco intero alla preſſione ſulla centina come $3a:a$, o proſſimamente come $1000:333$.

Ma nel caſo che foſſero 9 i pezzi dell' Arco la ſomma delle preſſioni ſulla centina è riſultata $=a.\frac{3823}{1000}$, laddove il peſo di tutto l' Arco è $=9a$; laonde ſta il peſo di tutto l' Arco alla ſomma delle preſſioni ſulla centina come $9a:a.\frac{3823}{1000}$, o proſſimamente come $1000:425$.

E quando i pezzi componenti l' Arco foſſero 81 di numero, ſtarà il peſo totale dell' Arco alle preſſioni ſulla centina come $81a:a.\frac{35304}{1000}$, o come $1000:435\frac{4}{5}$. E finalmente eſſendo 95, il peſo dell' Arco alle preſſioni ſulla centina ſtarà come $95a$:

$a \cdot \frac{41422}{1000}$, o come $1000 : 436\frac{2}{95}$; e così degli altri. Anzi generalmente quando il numero de' pezzi componenti l' Arco intero sia $= 2x + 3$, avrà il peso di tutto l' Arco alla somma delle pressioni sulla centina la stessa ragione di $a(2x+3)$: $\frac{2a \cdot \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - a(2m+1)$, o come $2x + 3$: $\frac{2 \cdot \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - 2m - 1$, se pure m esprima il numero de' cunei che da ciascuna parte premono la centina.

Corollario 3.

E però se il numero de' cunei componenti l' Arco sia infinito, onde $x = \infty$, diventando in questo caso $m = \frac{2x}{3}$, e
Corol. 6 Prop. 11 di questo
sen. $\mu = \mu$, starà il peso totale dell' Arco alla somma delle pressioni sulla centina in ragione di $2x : \frac{2}{\mu} \cdot \cos. \frac{2x\mu}{3} - \frac{4x}{3}$ ovvero come $2x\mu : 2 . \cos. \frac{2x\mu}{3} - \frac{4x\mu}{3}$. Ma in questa supposizione essendo il semicerchio $AZG = 2x \cdot 2\mu$, sarà il quadrante
Fig. XIII. Tav. II.
$AZ = 2x\mu$, l' arco $ZE = \frac{4x\mu}{3}$, e l' arco $AE = \frac{2x\mu}{3}$, dunque $\cos. \frac{2x\mu}{3} = EI$; laonde il peso dell' Arco alle pressioni sulla centina come $AZ : 2 . EI - ZE$. Per il che fatto il raggio $= 1000$, essendo il quadrante AZ prossimamente $= 1571$, l' arco $ZE = 1047$, e il coseno $EI = 866$; starà finalmente il peso alle pressioni in proporzione di $1571 : 685$, ovvero come $1000 : 436$, che ridotta a numeri bassi s' avvicina di molto a quella di $9 : 4$; per conseguenza supposto l' Arco intero formato di un numero infinito di cunei, la centina sostiene quattro noni circa del peso totale di tutto l' Arco.

SCOLIO 2.

Anche Couplet negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1729 *con un' ingegnosa maniera dimostrò l' ultima verità accennata nel fine del Corollario antecedente; ch' è quella sola Proposizione, che intorno alla pressione de' cunei sulle centine mi venne fatto di vedere nell' Opere degli Autori, che hanno scritto sugli Archi e sulle Volte. Io ho però mostrato il modo di trovare la somma delle pressioni sulla centina, di qualunque numero finito di cunei sia formato l' Arco a tutto sesto, ch' è certamente una quistione molto più difficile dell' altra, la quale suppone infinito il numero stesso de' cunei. Di più l' ho estesa agli Archi scemi, e composti, e nel Lib. IV la risolverò anche per gli Archi di qualunque curvatura dotati, benchè in questo caso, per adattarmi alle forze del calcolo, sia stato in necessità d' intendere l' Arco diviso in un infinito numero di cunei, come* Couplet *nell' Arco intero circolare.*

SCOLIO 3.

Farò ancora riflettere avanti di dar termine a questo Libro, che variando il numero de' cunei componenti un Arco intero, cangia eziandio la proporzione tra il peso dell' Arco e la pressione sulla centina, come s' è veduto negli esempli del Corollario 2 *di questa, dove quando i cunei erano* 3 *la pressione diventava* $\frac{333}{1000}$ *del peso di tutto l' Arco, se* 9 *s' accresceva a* $\frac{425}{1000}$, *se* 81 *a* $\frac{435\frac{4}{5}}{1000}$, *e a* $\frac{436\frac{2}{95}}{1000}$ *se l' Arco era di* 95 *cunei formato: e ciò contro quello che hanno creduto alcuni Autori, i quali applicavano la regola dei* $\frac{4}{9}$ *del* Couplet, *ch' è solo vera nell' ipotesi de' cunei infinitesimi, anche agli Archi interi formati di un numero finito di cunei. Appena per approssimazione si può valersene quando il numero de' cunei passa il cinquanta circa. Hanno poi questi stessi Autori errato molto più, quando l' hanno applicata agli Archi scemi. Imperocchè quando ancora fosse sempre vero, che nell' Arco a tutto se-*

sto la centina sostenesse quattro noni di tutto il suo peso, nell' Arco scemo sosterrebbe essa quattro noni non del suo proprio peso, ma dell' Arco intero di cui quello fosse scemo.

SCOLIO 4.

Da un valente scarpellino ho fatto tagliare undici cunei di marmo formanti un Arco intero, nelle loro commessure oltremodo politi, affine di verificare coll' esperienza alcune verità dimostrate in questo Libro. L' Arco aveva 2 piedi di diametro, 3 pollici di grossezza e altrettanta larghezza, il tutto in misura di Francia. Aveva fatta ancora costruire una centina semicircolare di legname di larice tutta solida e grossa quanto l' Arco, acciocchè i cunei vi poggiassero sopra comodamente: ma per poter sostenere le basi inferiori delle mosse, v' erano in vece di pilastri alla centina attaccate da ciascuna parte due alette del legname medesimo, i di cui piani superiori stavano nel piano orizzontale condotto per il diametro. Per diminuire poi gli attriti aveva fatto incastrare nella centina quasi per tutta la sua grossezza e ne' luoghi corrispondenti al mezzo delle basi de' cunei, alcuni cilindretti di metallo girevoli d' intorno ai loro assi e sormontanti insensibilmente la superficie esteriore della centina stessa; due poi ve n' erano da ciascuna parte con ugual direzione ne' piani dell' alette sulle quali dovevano gravare le mosse: e nell' atto di sperimentare ungeva d' olio tutte le commessure de' cunei.

Se da una parte si adattava alla centina la mossa e un solo cuneo, cominciavasi già a riconoscere qualche sfiancamento nella mossa. Ma mettendone due sulla mossa, allora sì che essa non poteva più star ferma a suo luogo senza una mano che applicata esternamente ne impedisse lo sfiancamento. Se poi sulla mossa collocavansi tre cunei, molto maggiore diventava il di lei sfiancamento; e ancora più quand' erano quattro, e in questo caso si manifestava pure altro sfiancamento nel cuneo alla mossa contiguo; le quali cose tutte s' accordano colle nostre dimostrazioni. Ma a che servono queste sperienze in modello? Si esamini in grande la natura, e legganſi per esempio l' accurate osservazioni del Ch. Sig. Perronet negli Atti dell' Accademia delle Scienze per l' anno 1752 *fatte su tre Ponti costrutti in Francia sotto i suoi occhi medesimi, e si rileverà come di mano in mano che fabbricavasi sulle centine da ciascuna parte,* *nascevano in certo luogo dell' Arco alcune separazioni o aperture in prima poco distanti dal piombo interiore delle impostature*, & ensuite successivement plus haut à mesure, que l' on élève la voûte; *vale a dire v' era un passaggio dalla pressione allo sfiancamento, il qual passaggio cangiava di posizione quanto più si sollevava l' Arco. L' Autore lo attribuisce all' abbassamento che soffrono le centine in forza della pressione de' cunei: ciò sarà vero in parte, ma la principal cagione dell' effetto debbesi certamente attribuire a quegli sfiancamenti che abbiamo dimostrato succedere ne' cunei inferiori degli Archi. Se la centina fosse inflessibile, per esempio un macigno, pure si vedrebbero quelle separazioni osservate dal dotto Autore ne' tre Ponti accennati.*

Fine del Libro Secondo.

LIBRO TERZO

DEGLI ARCHI CIRCOLARI FORMATI DI UN NUMERO QUALSIVOGLIA DI CUNEI, DOPO DISARMATE LE CENTINE.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

Se un Arco intero ſia di tre ſoli pezzi formato, cioè di due moſſe e del ſerraglio; ritrovare le ſpinte relative e gli ſfiancamenti delle moſſe, dopo che dall' Arco è ſtata tolta la centina.

Fig. III. Tav. III. Sia l'Arco a tutto ſeſto *QSKXHN* formato delle moſſe *QH IK* e del ſerraglio *HL*, e dopo la ſua coſtruzione ſi ſupponga eſſergli ſtata tolta di ſotto la centinatura: domandanſi le ſpinte relative, e gli ſfiancamenti delle moſſe.

Si prendano i centri di gravità *B A C* de' cunei *QH HL LX*, e ſi uniſcano le *BA AC*, che ſaranno perpendicolari alle *MH IL*; poi ſi giungano i raggi della Figura e ſi tiri la verticale *BP*; indi nella retta *AD* ſi prenda una linea qualunque *AE* che eſprima la gravità del ſerraglio *HL*, e ſi compia il parallelogrammo *AFEG*: finalmente fatta la *BR* uguale alla *AF* e per diritto alla *AB*, ſi compia l' altro parallelogrammo *BORP*.

Pertanto poichè il ſerraglio *HL* s' appoggia alle moſſe per mezzo delle ſuperficie loro ſuperiori *MH LI*, ſe la *AE* eſprima la gravità del ſerraglio, la *AF* o *BR* eſprimerà la ſua ſpinta relativa ſul cuneo inferiore *QH*: ma la *BR* è inclinata all' orizzonte, laonde la forza *BR* ſi divide nelle due *BO BP*, di cui la prima *BO* eſprimerà lo ſfiancamento della moſſa o la ſua preſſione ſulla ſopràccentina, e l' altra *BP* ſi unirà

Prop. 20 Lib. I.

rà col di lei peso per premere il pilastro, sicchè la loro somma dinoterà la spinta relativa della mossa medesima. Lo stesso si troverà dall' altra parte dell' Arco; il che ecc.

S C O L I O.

Se esternamente non vi fosse la sopraccentina adattata all' Arco intero, o altro ritegno, come abbiamo domandato, le mosse ubbedendo alla forza sfiancante sarebbero trascinate al di fuori, e tutto l' Arco andrebbe sossopra. Siccome dunque è necessario di supporre adattate le sopraccentine nel primo stato degli Archi, cioè quando si costruiscono; così le si debbono anche supporre nel secondo loro stato, ovvero dopo tolte le centinature: anzi in questo ve n' ha, per così dire, maggior uopo che nel primo; poichè quando si mettono i cunei sulle centine, ne resta almeno una parte superiore dalle centine sostenuta, laddove dopo di essere state disarmate, ogni cuneo, dal serraglio in fuori, sfianca ed ha bisogno di essere sostenuto affinchè tutto l' Arco non rovini. Ma ciò apparirà ancora più chiaro nelle susseguenti Proposizioni. Dom. IV. Lib. I.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Date le stesse cose come nell' antecedente, ritrovare l' espressioni analitiche delle spinte relative e degli sfiancamenti delle mosse.

Si faccia la gravità di ogni cuneo QH HL $LX = a$, onde abbiasi $AE = a$, il raggio delle tavole si dica $= r$, e l' angolo $HDN = 2\mu$. Fig. III. Tav. III.

Sarà pertanto AE ad AF, come il seno dell' angolo FAG al seno dell' angolo EAG; ma il seno dell' angolo FAG è uguale al seno del suo supplimento HDI, e il seno dell' angolo EAG è uguale al coseno dell' angolo ADI o al seno dell' angolo IDN; dunque sostituendo le lettere sarà $a : AF :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 4\mu$; e perciò la spinta relativa AF del serraglio $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,.\,\text{cos.}\,2\mu}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\,2\mu = BR$. E questo valore di BR può ancora, volendo, rendersi più semplice, perchè essendo l' angolo HDN o 2μ di $60°$, sarà cos. 2μ uguale alla metà del raggio cioè $= \frac{r}{2}$; e però $BR = \frac{2a}{r}. \cos. 2\mu = \frac{2a}{r} . \frac{r}{2} = a$: pure mi piace tener la prima forma composta $\frac{2a}{r}. \cos. 2\mu$, perchè si vegga più facilmente, paragonando questo caso dell' Arco intero formato di tre soli cunei colle risoluzioni de' Problemi susseguenti, ove di mano in mano accresco il numero de' cunei componenti l' Arco, l' ordine col quale procedono le spinte relative. In oltre l' angolo PBD è uguale all' angolo FBD; ma l' angolo PBD è uguale all' interiore ROB e l' angolo FBD è uguale all' opposto al vertice RBO, dunque l' angolo ROB sarà uguale all' angolo RBO, e perciò la retta RB è uguale alla RO o alla BP; laonde anche $BP = \frac{2a}{r}. \cos. 2\mu$; e per conseguenza la spinta relativa della mossa sul pilastro $= BV + a = a + \frac{2a}{r}. \cos. 2\mu$. Di nuovo come BR a BO, così sta il seno dell' angolo OBP al seno dell' angolo RBP; ma il seno dell' angolo OBP è uguale al seno del suo supplimento PBD, ed il seno di RBP è uguale al seno di PBF o di NDH; dunque starà $BR : BO ::$ sen. PBD : sen. RBP, cioè $\frac{2a}{r}. \cos. 2\mu : BO :: \cos. \mu : \text{sen}. 2\mu :: r . \cos. \mu : 2 . \text{sen}. \mu . \cos. \mu :: r : 2 . \text{sen}. \mu$; quindi lo sfiancamento BO della mossa $= \frac{4a . \text{sen}. \mu}{r^2} . \cos. 2\mu$, la qual quantità può anche facilmente mostrarsi uguale ad a cioè alla gravità di un cuneo; il che ecc.

S c o l i o.

De la Hire *e* Belidor *fondano i loro calcoli sugli Archi, di qualunque curvatura essi sieno, nella supposizione, che l' Arco sia in tre parti diviso, e che le parti inferiori sieno attaccate fermamente a' pilastri, e con esse costituenti un pezzo solo. Per tal modo* *si liberano dalla necessità di considerare gli sfiancamenti de' cunei e delle mosse, e possono procedere nelle risoluzioni con metodo facile e spedito: ma la loro supposizione non regge al fatto, nè spiega la vera natura degli Archi, e l' intime loro proprietà, come noi tentiamo di fare.*

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Se un Arco intero sia formato di cinque pezzi, cioè di due mosse, del serraglio, e di un cuneo per parte collocato fra le mosse e il serraglio; trovare le spinte relative de' cunei e gli sfiancamenti dopo disarmate le centine.

Sia l' Arco a tutto sesto *AEbVFB* composto dalle mosse *AD Vb*, dal serraglio *EH*, e da' cunei *DE Hb*: si ricercano le spinte relative e gli sfiancamenti de' cunei dopo il disarmamento delle centine. Fig. IV. Tav. III.

Si prendano i centri di gravità *L K I c* de' cunei *AD DE EH Hb*, e si uniscano le *LK KI Ic*, le quali saranno perpendicolari a' raggi *CZ EZ GZ*, e si tirino ancora gli altri raggi *IZ KZ LZ*; poi da' punti *I K L* si conducano le verticali *IM KN Ld* uguali fra di loro, che rappresentino le gravità rispettive del serraglio *EH*, del conio *DE*, e della mossa *AD*; e si compiano i parallelogrammi *IOMP KSNR*.

E poichè il serraglio *EH* sta appoggiato alle superficie superiori de' cunei *DE Hb*, se la *IM* rappresenti la gravità del serraglio, rappresenterà *IO* la pressione del serraglio sul cuneo *DE*. Per la stessa ragione essendo espressa dalla retta *KN* la gravità del cuneo *DE*, esprimerà *KR* la sua pressione sul serraglio superiore *EH*, e *KS* la sua pressione sulla mossa inferiore *AB*: il peso poi della mossa medesima non si divide ma tutto gravita sul pilastro. Di nuovo perchè come la *IO* alla *IM*, ovvero alla *KN*, così è il seno dell' angolo *MIO* al seno dell' angolo *OIP*; ma l' angolo *MIO* è complemento dell' angolo *IZF*, e perciò uguale all' angolo *FZB*; laonde come la *IO* alla *KN*, così è il seno dell' angolo *FZB* al seno dell' angolo *OIP* cioè al seno dell' angolo *SKR*. In simil guisa si proverà che come la KN alla KR, così è il seno dell' angolo SKR al seno dell' angolo SKN, ovvero DZB; onde per ugualità ordinata sarà come la IO alla KR, così il seno dell' angolo FZB al seno dell' angolo DZB; il seno poi dell' angolo FZB è maggiore del seno dell' angolo DZB; dunque sarà anche la IO maggiore della KR. Prolunghisi la IK in T e facciasi il prolungamento KT uguale all' eccesso onde la IO supera la KR.

Ora essendo dal serraglio premuto il cuneo DE per la direzione IK con una forza uguale a IO, ed essendo viceversa dal cuneo premuto il serraglio con una forza KR minore di IO e per la direzione KI direttamente contraria alla direzione IK, impiegherà il serraglio una parte della forza IO uguale a KR per contrabbilanciare la forza medesima KR, e la rimanente KT dinoterà la spinta relativa del serraglio. La KT poi è inclinata alla superficie superiore CD della mossa, laonde, compiuto il parallelogrammo $KQTa$, esprimerà KQ lo sfiancamento del cuneo DE e Ka la pressione, che per conto della forza KT egli esercita sulla mossa; ma s' è dimostrato superiormente esservi un' altra forza KS che preme la mossa; e però prolungata la KL e fatta Lf uguale a KS e fg uguale a Ka, dinoterà Lg l' intera spinta relativa del cuneo DE; la quale essendo di nuovo inclinata all' impostatura AB bisognerà compiere il parallelogrammo $Lhgi$ per avere lo sfiancamento Lh della mossa, e nella somma delle Li Ld la spinta relativa, ch' essa esercita sul pilastro. E lo stesso si troverà operando dall' altra parte della figura; il che ecc.

Corollario.

E poichè TK è uguale alla differenza delle IO KR, sarà TR uguale a IO. Si prolunghino le QT NS finchè concorrano in k e si prolunghi KT finchè concorra in e colla ke parallela a KN; indi si unisca la Kk e si termini il parallelogrammo $KQkp$. Sarà dunque la TR uguale a kN; ma la TR è uguale alla IO come la kN alla eK, laonde anche eK è uguale a IO: ed essendo il triangolo KQT simile ed uguale al triangolo Skp, sarà la linea Sp uguale a Ka, e però la retta Kp è uguale alla somma delle KS Ka. In luogo dunque di trovare lo sfiancamento e la ſpinta relativa del cuneo DE come nel Problema s' è detto, potevaſi procedere con altra coſtruzione, cioè prendere la Ke per diritto a IK e uguale a IO poi compiere prima il parallelogrammo $KekN$ indi l' altro $KQkp$, poichè allora KQ dinoterebbe lo sfiancamento di eſſo cuneo DE e Kp la ſua ſpinta relativa. Di nuovo portando dal punto L nella KL prolungata la linea Lg uguale a Kp, e compiendo i parallelogrammi $Lgmd$ $Lhmn$, ſi troverebbe ſimilmente lo sfiancamento Lh della moſſa e la di lei ſpinta relativa Ln, che ſarà uguale alla ſomma delle Li Ld.

S c o l i o.

Tuttavolta s' è voluto ſeguire in queſta Propoſizione, come ſi farà nelle ſuſſeguenti, la prima coſtruzione piuttoſto che la ſeconda del Corollario, sì perchè eſſa è più all' operar della natura conforme, come per far conoſcere le reciproche preſſioni de' cunei nelle loro commeſſure.

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Date le coſe medeſime dell' antecedente, ritrovare l' eſpreſſioni analitiche delle ſpinte relative e degli sfiancamenti.

Si ritengano le ſolite denominazioni cioè $IM = KN = Ld = a$, l' angolo DZB al centro di un cuneo $= 2\mu$, r il raggio delle Tavole; e ſi dimoſtrerà come nella Prop. 2 di queſto la KT uguale a Ka, e la Lg uguale alla Li. E perchè come $IM : IO :: \text{sen.}\, FZH : \text{sen.}\, MIO$, e il ſeno dell' angolo MIO è uguale al ſeno dell' angolo FZB ovvero dell' angolo HZB, dunque $IM : IO :: \text{sen.}\, FZH : \text{sen.}\, HZB$; e ſoſtituendo $a : IO ::$ $\text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 6\mu$; e però $IO = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$. Di nuovo ſta come $KN : KR :: \text{sen.}\, SKR : \text{sen.}\, DZB$, e il ſeno dell' angolo SKR è uguale al ſeno del ſuo ſupplimento FZD, laonde ſarà $a : KR ::$ $\text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 2\mu$, quindi $KR = a$: dipoi l' altra analogia KN:

KS : : sen. SKR : sen. NKR (= sen. FZB) ci darà $a : KS$: : sen. 2μ : sen. 4μ, e per conseguenza $KS = \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{\text{sen}. 2\mu} = \frac{2a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 2\mu}{r . \text{sen}. 2\mu}$ $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$. Ora essendo $IO = \frac{a . \text{sen}. 6\mu}{\text{sen}. 2\mu}$ e $KR = a$, sarà $KT = IO - KR = \frac{a . \text{sen}. 6\mu}{\text{sen}. 2\mu} - a$; è poi per l' equazione VI

Prop. 7 Lib. I. sen. 6μ — sen. $2\mu = \frac{2 . \text{sen}. 2\mu . \cos. 4\mu}{r}$, e però $\frac{\text{sen}. 6\mu}{\text{sen}. 2\mu} - 1$ $= \frac{2}{r} . \cos. 4\mu$, dunque $KT = \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu$; e così sarà determinata la spinta relativa del serraglio. In oltre essendo come KT a KQ, così il seno dell' angolo QKa al seno dell' angolo TKa, ovvero il seno dell' angolo aKZ al seno dell' angolo SKR, sarà, sostituendo, $\frac{2a}{r} . \cos. 4\mu : KQ$: : cos. μ : sen. 2μ : : r : 2 . sen. μ, e però lo sfiancamento KQ del cuneo $DE = \frac{4a . \text{sen}. \mu}{r^2}$. cos. 4μ : indi si troverà la spinta relativa Lg di esso cuneo facendo $Lg = Lf + fg = KS + Ka = KS + KT = \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu + \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu)$. Finalmente si risolva il triangolo Lgh per avere $Lg : Lh$: : sen. iLZ : sen. iLK, o $\frac{2a}{r}$. $(\cos. 2\mu + \cos. 4\mu)$: Lh : : cos. μ : sen. 2μ : : r : 2 . sen. μ, dalla quale analogia si ricava lo sfiancamento Lh della mossa $= \frac{4a . \text{sen}. \mu}{r^2} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu)$; mentre essendo $Lg = Li$, e $Ld = a$, si ha già nella somma delle Li Ld la sua spinta relativa sul pilastro $= \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu) + a$; il che ecc.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Se un Arco a tutto ſeſto ſia di ſette pezzi formato, cioè delle moſſe, del ſerraglio, e di due cunei per parte tra le moſſe e il ſerraglio; determinare le ſpinte relative de' cunei ed i loro sfiancamenti dopo tolta la centina.

Sia l' Arco a tutto ſeſto *ACEFDB* compoſto di due moſſe, di cui una è la *AB*, del ſerraglio *DE*, e di due cunei per parte, come da una parte ſono li *BC CD*: ſi domandano le ſpinte relative e gli sfiancamenti dopo diſarmate le centine. Fig. V. Tav. III

Si prendano i centri di gravità *L K I H G* e ſi congiungano le *LK KI IH HG* e i raggi della Figura: ſaranno eſſe *LK KI IH HG* perpendicolari alle commeſſure de' cunei. Si conducano poſcia dai punti *L K I H* le verticali *Lb KP IN HM* uguali fra loro, che rappreſentino le gravità de' riſpettivi cunei, e ſi compiano i parallelogrammi *KXPV ITNS HQMR*.

Pertanto eſprimerà *HQ* la preſſione del ſerraglio ſul cuneo *CD*, e viceverſa *IS* eſprimerà la preſſione di queſto contro il ſerraglio: ſimilmente *IT* dinoterà la preſſione del cuneo ſuperiore *CD* contro l' inferiore *BC*, e viceverſa *KV* la preſſione dell' inferiore contro il ſuperiore. Nella *KX* poi ſi ha la preſſione del cuneo *BC* contro la moſſa; ed eſſa graviterà con tutto il ſuo peſo ſul pilaſtro nè niente opererà contro il ſuo cuneo ſuperiore.

Ora eſſendo come la *HQ* alla *HM* ovvero alla *IN*, così il ſeno dell' angolo *QHM* al ſeno dell'angolo *QHR*, ovvero come il ſeno dell' angolo *DOA* al ſeno dell'angolo *TIS*; e parimenti eſſendo come *IN* a *IS* così il ſeno dell' angolo *TIS* al ſeno dell' angolo *COA*; ſarà per ugualità ordinata come la *HQ* alla *IS*, così il ſeno dell' angolo *DOA* al ſeno dell' angolo *COA*; ma il ſeno dell' angolo *DOA* è maggiore del ſeno dell' angolo *COA*, dunque ancora la *HQ* ſarà maggiore della *IS*. Nello ſteſſo modo ſi proverà, che come la *IT* alla *KV* così è il ſeno dell' angolo *DOA* al ſeno dell' angolo *BOA*;

e la retta *IT* maggiore della *KV*. Si prenda la *IW* per diritto alla *HI* e uguale all' eccesso onde la *HQ* supera la *IS*, e la *KY* per diritto alla *IK* uguale all' eccesso onde la *IT* supera la *KV*.

E perchè il serraglio preme il cuneo inferiore *CD* con una forza uguale a *HQ*, e all' incontro questo preme il serraglio con una forza *IS* minore di *HQ* e direttamente contraria, una parte della forza *HQ* sarà impiegata a resistere alla pressione del cuneo sottostante, e colla rimanente seguiterà a premerlo per la direzione *HI* : ma la *IW* è per diritto alla *HI* ed è uguale alla differenza delle forze *HQ IS*; e però la *IW* dinoterà la forza e la direzione colla quale dal serraglio resta premuto il cuneo *CD* e per conseguenza la spinta relativa del serraglio. Per la stessa ragione *KY* esprimerà la differenza delle forze *IT KV*, o la forza che resta per questo conto al cuneo *CD* contro l' inferiore *BC*. In oltre essendo la direzione *IW* obbliqua alla commessura fra i cunei *BC CD*, a cui la *IK* è perpendicolare, se si compia il parallelogrammo *IZWÆ*, rappresenterà *IZ* lo sfiancamento del cuneo *CD*, e *IÆ* altra forza, che impiega il cuneo superiore *CD* contro l' inferiore *BC* : ma evvi ancora la forza *KY*; dunque fatta la *Ya* uguale alla *IÆ*, *Ka* dinoterà l' intera spinta relativa del cuneo *CD*. Di nuovo perchè la direzione *Ka* è obbliqua alla commessura fra la mossa *AB* e il cuneo *BC*, compiuto il parallelogrammo *Kcab*, s' avrà prima lo sfiancamento *Kc* del cuneo *BC*, poi altra forza *Kb* diretta contro la mossa, oltre la *KX*, che s' è in prima ritrovata: sicchè prolungata la *KL* in *e*, e fatta *Ld* uguale a *KX* e *de* uguale a *Kb*, in tutta la *Le* si conseguirà la spinta relativa del cuneo *BC*. Finalmente, compiuto il parallelogrammo *Lfeg*, sarà *Lf* lo sfiancamento della mossa, e la somma delle *Lg Lh* la di lei spinta relativa sul pilastro. Lo stesso si troverà per l' altra parte dell' Arco intero; il che ecc.

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Ritrovare nell' Arco dell' antecedente l' espressioni algebraiche delle spinte relative e degli sfiancamenti.

Si

Si facciano al ſolito le gravità de' cunei o le HM IN KP Lb uguali ciaſcuna ad a, l' angolo al centro di un cuneo $= 2\mu$, e r il raggio delle Tavole; e proveraſſi come nelle Prop. 2 e 4 di queſto la $IÆ$ uguale alla IW, la Kb uguale alla Ka, e la Lg uguale alla Le. Fig. V. Tav. III.

E perchè come $HM : HQ :: \text{sen.}\, QHR : \text{sen.}\, DOA$ ($= \text{sen.}\, uOA$), sarà ſoſtituendo $a : HQ :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 8\mu$, e $HQ = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 8\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$: parimenti eſſendo $IN : IS :: \text{sen.}\, TIS : \text{sen.}\, COA$, ovvero $a : IS :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 4\mu$, s' avrà $IS = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 4\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$; e nello ſteſſo modo ſi troverà la $IT = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$, la $KV = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 2\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} = a$, e la $KX = Ld = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 4\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$: quindi la $IW = HQ - IS = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 8\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 4\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$, e la $KY = IT - KV = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - a$. Di nuovo eſſendo per l'equazione VI $\text{sen.}\, 8\mu - \text{sen.}\, 4\mu = \dfrac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\, 2\mu\,.$ Prop. 7 Lib. I.
$\text{cos.}\, 6\mu$, e $\text{sen.}\, 6\mu - \text{sen.}\, 2\mu = \dfrac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\, 2\mu\,.\,\text{cos.}\, 4\mu$, ſiccome per l' equazione I $\text{sen.}\, 4\mu = \dfrac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\, 2\mu\,.\,\text{cos.}\, 2\mu$, sarà $IW = \dfrac{a.\text{sen.}8\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 4\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} = \dfrac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\, 6\mu$, $KY = \dfrac{a\,.\,\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - a = \dfrac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\, 4\mu$, e la $KX = Ld = \dfrac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\, 2\mu$.

Per la qual coſa eſſendoſi trovata la ſpinta relativa IW del ſerraglio $= \dfrac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\, 6\mu$, la proporzione di $IW : IZ :: \text{sen.}\, ZIÆ : \text{sen.}\, WIÆ$, o di $\dfrac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\, 6\mu : IZ :: \text{cos.}\, \mu : \text{sen.}\, 2\mu :: r : 2\,.\,\text{sen.}\, \mu$, ſomminiſtrerà lo sfiancamento IZ del cuneo $CD = \dfrac{4a.\text{sen.}\, \mu}{r^2}$.

$\cos. 6\mu$: ma la ſpinta relativa Ka di eſſo cuneo, ch'è $= KY + Ya = KY + IÆ = KY + IW$, ſarà $= \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu + \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu = \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$. Similmente l' analogia $Ka : Kc :: \text{sen.}\ cKb : \text{sen.}\ aKb :: \cos. \mu : \text{sen.}\ 2\mu :: r : 2 . \text{sen.}\ \mu$ darà lo sfiancamento Kc del cuneo $BC = \frac{4a . \text{sen.}\ \mu}{r^2} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$, la di cui ſpinta relativa $Le = Ld + de = Ld + Kb = Ld + Ka$ diventerà $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu + \frac{2a}{r} (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu) = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$; e allo ſteſſo modo colla riſoluzione del triangolo Lfe ſi troverà lo sfiancamento Lf della moſſa $= \frac{4a . \text{sen.}\ \mu}{r^2} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$, e la ſua ſpinta relativa ſul pilaſtro $= Lg + Lh = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu) + a$; il che ecc.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Se un Arco intero ſia di nove pezzi compoſto, cioè delle moſſe, del ſerraglio, e di tre cunei per parte tra le moſſe e il ſerraglio; ſi domandano le ſpinte relative de' cunei ed i loro sfiancamenti dopo tolta la centinatura.

Fig. VI. Tav. III. Sia l' Arco intero *RKGEAÆ* ecc. compoſto del ſerraglio *A*, di due moſſe una delle quali è la *R*, e di tre cunei per parte come da una parte ſono gli *E G K*: ſi domandano le ſpinte relative de' cunei ed i loro sfiancamenti.

Si prendano i centri di gravità *R K G E A Æ* de' cunei, e ſi tirino le rette *RK KG GE EA AÆ* ed i raggi, poi ſi conducano le verticali *Rm KQ GH EF AB* uguali fra di loro, le quali rappreſentino le gravità de' riſpettivi loro cunei, e si compiano i parallelogrammi *KSQW GIHP EMFO ACBD*. Si proverà similmente come nelle Proposizioni 3 e 5 antecedenti, che la *AC* è maggiore della *EO*, la *EM* maggiore della *GP*, e la *GI* maggiore della *KW*. Portinsi pertanto in direzione della *AE* la *ET* uguale alla differenza delle *AC EO*, in direzione della *EG* la *Gb* uguale alla differenza delle *EM GP*, e per fine in direzione della *GK* la *Kd* uguale alla differenza delle *GI KW*.

Si proverà come nelle citate Proposizioni, che la forza della gravità del serraglio si divide nelle due *AC AD*, delle quali la forza *AC* è diretta contro il cuneo inferiore *E*; che la gravità di esso cuneo *E* si divide nella forza *EO* contro il serraglio e nella *EM* diretta contro il secondo cuneo *G*; che la gravità del secondo *G* si divide nelle due *GP GI*, la prima rivolta all' insù contro il cuneo *E*, all' ingiù l' altra contro il cuneo *K*; che similmente la gravità del terzo cuneo *K* si divide nelle due *KW KS*; e per ultimo che il peso *Rm* della mossa preme tutto sul pilastro nè niente opera contro il cuneo superiore *K*: sicchè delle forze *AC EO*, *EM GP*, *GI KW*, tolte quelle quantità che fra di loro vicendevolmente si distruggono, resteranno le forze *ET Gb Kd* (oltre la forza *KS* che non vien da alcuna forza contraria diminuita) le quali per le direzioni *ET Gb Kd KS* agiranno contro i cunei e la mossa. E però *ET* esprime la spinta relativa del serraglio, e compiuto il parallelogrammo *ELTp*, dinoterà *EL* lo sfiancamento del primo cuneo *E*, ed *Ep* la forza che si unisce con *Gb* a premere il secondo cuneo: per conseguenza se si faccia la *bY* uguale alla *Ep* s' avrà in tutta la *GY* la spinta relativa del cuneo medesimo *E*. Di nuovo compiuto il parallelogrammo *GXYZ*, il lato *GX* rappresenterà lo sfiancamento del secondo cuneo *G*, e *GZ* la forza che si unisce con *Kd* a premere il terzo cuneo *K*; dunque, presa la *db* uguale alla *GZ*, tutta la *Kb* esprimerà la spinta relativa del cuneo *G*. Similmente, se si compia il parallelogrammo *Kcba*, si troverà lo sfiancamento *Kc* del terzo cuneo *K*, e prolungata la *Rf* per diritto alla *KR* sicchè sia la *Re* uguale alla *KS* e la *ef* uguale alla *Ka*, sarà data nella *Rf* la spinta relativa di esso cuneo *K*. Finalmente, compiuto il parallelogrammo *Rgfq* s' avrà in *Rg* lo sfiancamento della mossa e nella somma delle *Rq Rm* la ſua ſpinta relativa ſul pilaſtro. Lo ſteſſo ſuccede dall' altra parte dell' Arco intero; il che ecc.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Date le ſteſſe coſe come nell' antecedente, ritrovare i valori analitici delle ſpinte relative e degli sfiancamenti.

Fig. VI. Tav. III. Siano al ſolito le gravità AB EF GH KQ Rm de' cunei uguali ciaſcuna ad a, r il raggio delle Tavole, e 2μ l' angolo al centro di un cuneo: ſarà come nelle Prop. 2, 4, e 6 la Ep uguale alla ET, la GZ alla GY, la Ka alla Kb, e la Rq alla Rf.

Si riſolva il triangolo ACB, e ſi troverà la $AC = \frac{a.\,\text{sen.}\,10\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; poi ſi riſolva il triangolo EFO per conſeguire la linea $EO = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ e la FO o la $EM = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,8\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$: ſimilmente la riſoluzione del triangolo GHP darà la $GP = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ e la $GI = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; ſiccome colla riſoluzione del triangolo KQW ſi avrà $KW = a$ e $KS = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,.\,\text{cos.}\,2\mu}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\,2\mu$. Quindi $ET = AC - EO = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,10\mu}{\text{sen.}\,2\mu} - \frac{a.\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, la $Gb = EM - GP = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,8\mu}{\text{sen.}\,2\mu} - \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, e la $Kd = GI - KW = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu} - a$: ma $\text{sen.}\,10\mu - \text{sen.}\,6\mu = \frac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,.$

Equaz. VI Prop. 7 Lib. I $\text{cos.}\,8\mu$, $\text{sen.}\,8\mu - \text{sen.}\,4\mu = \frac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,.\,\text{cos.}\,6\mu$, e $\text{sen.}\,6\mu - \text{sen.}\,2\mu = \frac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,.\,\text{cos.}\,4\mu$; dunque la ſpinta relativa ET

del ſerraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu = Ep$, la $Gb = \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu$, e la $Kd = \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu$.

E perchè la $ET = \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu$, e come la $ET : EL :: \text{sen. } LEp : \text{sen. } TEp :: \cos. \mu : \text{sen. } 2\mu :: r : 2 . \text{sen. } \mu$, ſarà lo sfiancamento EL del primo cuneo $E = \frac{4a . \text{sen. } \mu}{r^2} . \cos. 8\mu$. Di nuovo eſſendo la ſpinta relativa di eſſo cuneo $E = GY = Gb + bY = Gb + Ep$, ſarà ſoſtituendo $GY = \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu + \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu = \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$: e però colla riſoluzione del triangolo GXY ſi troverà lo sfiancamento GX del ſecondo cuneo $G = \frac{4a . \text{sen. } \mu}{r^2} . (\cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$, ma la ſpinta relativa del cuneo medeſimo ſarà $= Kb = Kd + db = Kd + GZ = Kd + GY = \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu + \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 8\mu) = \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$. Si paſſi ora a riſolvere il triangolo Kcb per avere lo sfiancamento Kc del terzo cuneo $K = \frac{4a . \text{sen. } \mu}{r^2} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$, la di cui ſpinta relativa $Rf = Re + ef = KS + Ka = KS + Kb$, diventerà $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu + \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu) = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$. Finalmente ſi riſolva il triangolo Rgf, e ſi conſeguirà lo sfiancamento Rg della moſſa $= \frac{4a . \text{sen. } \mu}{r^2} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$, ſiccome la ſua ſpinta relativa ſul pilaſtro $= Rq + Rm = Rf + Rm = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu) + a$; dunque ecc.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Qualunque ſia il numero de' cunei componenti un Arco intero, trovare la ſpinta relativa del cuneo m^{esimo} dopo tolta la centina.

Si ſupponga un Arco intero compoſto di due moſſe, di un ſerraglio, e di un numero x di cunei da ciaſcuna parte tra le moſſe e il ſerraglio collocati, ſicchè il numero di tutti i pezzi componenti l' Arco ſia $= 2x + 3$: ricercaſi in eſſo Arco la ſpinta relativa del cuneo m^{esimo} in ordine preſo da una o dall' altra parte incominciando l' enumerazione dal cuneo laterale al ſerraglio.

Fig. III. Tav. III. Quando i pezzi componenti l' Arco intero erano tre, cioè due moſſe e il ſerraglio, s' è trovata la ſpinta relativa AF

Prop. 2 di queſto o BR del ſerraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$, e la ſpinta relativa della moſſa $= a + \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$.

Fig. IV. Tav. III. Se poi i pezzi foſſero cinque, vale a dire il ſerraglio, le moſſe, e un cuneo per parte tra le moſſe e il ſerraglio, di-

Prop. 4 di queſto venta la ſpinta relativa KT del ſerraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu$, così la ſpinta relativa Lg del cuneo inferiore $= \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$, e la ſpinta relativa della moſſa $= a + \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. V. Tav. III. Suppoſti poi ſette i pezzi dell' Arco, cioè il ſerraglio, le moſſe, e due cunei per parte tra le moſſe e il ſerraglio, la

Prop. 6 di queſto ſpinta relativa IW del ſerraglio era $= \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu$, quella del primo cuneo o la $Ka = \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$, quella del secondo cioè $Le = \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$, e la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Per fine quando l' Arco sia composto di nove pezzi, ovvero due mosse, il serraglio, e tre cunei per parte, s'è trovata la spinta relativa ET del serraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu$, quella del primo cuneo o la $G\Upsilon = \frac{2a}{r} (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu)$, la Kb del secondo $= \frac{2a}{r} . (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$, la Rf del terzo $= \frac{2a}{r} . (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$, e la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r} . (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. VI. Tav. III

Prop. 8 di questo

Quindi chiamato x il numero de' cunei posti da ciascheduna delle due parti tra la mossa e il serraglio, sarà la spinta relativa del serraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. (2x + 2)\mu$, la spinta del primo cuneo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu \right)$, quella del secondo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu \right)$, quella del terzo cuneo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu + \cos. (2x - 4)\mu \right)$, e così in progresso; laonde la spinta relativa del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu \text{ ecc...} \right)$. Ed è chiaro che nella serie contenuta in quest' espressione si debbono prendere tanti termini quanto è il numero $m+1$; ma un numero $m+1$ di termini di essa serie

Prop. 8 Lib. I. è $= \frac{\cos.(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$; laonde la spinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m + 1)\mu$. Oltre a ciò perchè il numero de' cunei componenti l' Arco intero è $= 2x + 3$, sarà l' angolo retto $= 2x\mu + 3\mu$; e però i due angoli $2x\mu - m\mu + 2\mu$, e $m\mu + \mu$ insieme uniti sono uguali ad un retto, in conseguenza $\cos.(2x - m + 2)\mu = \text{sen.}\,(m + 1)\mu$, e la spinta relativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{2a}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu} \,.\, \text{sen}^2.(m + 1)\mu$; il che ecc.

Corollario 1.

Laonde se si faccia $m = x$, s' avrà la spinta relativa dell' ultimo cuneo, cioè di quello collocato immediate sopra la mossa, $= \frac{2a}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.(x+2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu$; e però quella della mossa medesima sarà $= a + \frac{2a}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.(x + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x + 1)\mu$, poichè è uguale a quella del cuneo antecedente insieme col peso della mossa, la qual grandezza ridotta si converte nell' altra $\frac{a\,.\,\text{sen.}\,(2x + 3)\mu}{\text{sen.}\,\mu} = \frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}$.

Corollario 2.

Se si chiami il raggio interiore dell' Arco intero $= b$, Corol. 1 Prop. 6 Lib. I. l' esteriore $= c$, essendo già l' angolo al centro di un cuneo $= 2\mu$, sarà la superficie che lo rappresenta $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r}$; ma Dom. V Lib. I. la superficie esprime il peso del cuneo, laonde $a = \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r}$; e però la spinta relativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{(c^2 - b^2)2\mu}{r^2.\,\text{sen.}\,\mu} \,.\, \text{sen}^2.(m + 1)\mu$; e quella della mossa $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$.

Corollario

COROLLARIO 3.

E se il numero de' cunei componenti l' Arco intero sia infinito, e 2μ infinitesimo, diventerà, per le cose dette nell' antecedente Corollario, la pressione relativa del cuneo m^{esimo} $= \frac{2(c^2 - b^2)}{r^2} . \text{sen}^2 . m\mu$. Sia ora AFG l' Arco intero formato di un numero infinito di cunei e OX il cuneo m^{esimo}, sarà l' angolo $ZQE = m . 2\mu = 2m\mu$, e l' angolo retto $ZQA = 2x\mu$; e però la $QI = \frac{b}{r} . \cos. 2m\mu$, e la $ZI = b - \frac{b}{r} . \cos. 2m\mu$, laonde $\frac{r^2 . ZI}{b} = r^2 - r . \cos. 2m\mu$: ma per l' equazione IX risulta $2 . \text{sen}^2 . m\mu = r^2 - r . \cos. 2m\mu$, dunque anche $\frac{r^2 . ZI}{b} = 2 . \text{sen}^2 . m\mu$; quindi la spinta relativa del cuneo m^{esimo}, o del cuneo al punto $E = \frac{c^2 - b^2}{r^2} . \frac{r^2 . ZI}{b} = \frac{c^2 - b^2}{b} . ZI$. Ma la spinta relativa della mossa risulterà, quando i cunei sieno infinitesimi, $= c^2 - b^2$.

Fig. XIII. Tav. II.

Prop. 7 Lib. I.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

Trovare in un Arco intero, da cui sia stata tolta la centina, lo sfiancamento del cuneo m^{esimo}, qualunque sia il numero de' cunei che compongano l' Arco stesso.

Sia, come nell' antecedente, il numero de' cunei tra la mossa e il serraglio da ciascuna parte $= x$; bisogna ritrovare lo sfiancamento del cuneo m^{esimo} collocato da una o dall' altra parte cominciando l' enumerazione dal laterale al serraglio.

Se i pezzi componenti l' Arco intero sieno tre, cioè due

Fig. III. Tav. III. mosse e il serraglio, s' è trovato lo sfiancamento BO della

Prop. 2 di questo mossa $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 2\mu$.

Se sieno cinque, ovvero due mosse, il serraglio, e un cu-

Fig. IV. Tav. III. neo per parte, diventa lo sfiancamento KQ del cuneo $=$

Prop. 4 di questo $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 4\mu$, e lo sfiancamento Lb della mossa $=$ $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. V. Tav. III. Ma posto che i cunei sieno sette, o due mosse, il serraglio, e due cunei per parte, riesce lo sfiancamento IZ del

Prop. 6 di questo primo cuneo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 6\mu$, lo Kc del secondo $=$ $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$, e quello Lf della mossa $=$ $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. VI. Tav. III. Finalmente supposti nove i pezzi dell' Arco intero, cioè due mosse, il serraglio, e tre cunei per parte tra le mosse

Prop. 8 di questo e il serraglio, si ha lo sfiancamento EL del primo cuneo $=$ $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 8\mu$, lo GX del secondo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu)$, lo sfiancamento Kc del terzo cuneo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$; e per ultimo lo sfiancamento Rg della mossa $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Per la qual cosa chiamato x il numero de' cunei tra la mossa e il serraglio, sarà lo sfiancamento del primo cuneo $=$ $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. (2x + 2)\mu$, quello del secondo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu\right)$, quello del terzo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu\right)$, e così successivamente; per conseguenza lo sfiancamento del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \left(\cos.(2x+2)\mu + \cos.\, 2x\mu + \cos.(2x-2)\mu \text{ ecc...}\right)$.

E perchè della serie $\cos.(2x+2)\mu + \cos.\, 2x\mu + \cos.(2x - 2)\mu$ ecc. si debbe prendere la somma di un numero m di termini, e la somma di un numero m di termini diventa $= \frac{\cos.(2x - m + 3)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\, \mu}$, dunque sarà lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \frac{\cos.(2x - m + 3)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\, \mu} = \frac{4a}{r^2} \,.\, \cos.(2x - m + 3)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$. Di nuovo essendo intero l' Arco, e l' angolo $2x\mu + 3\mu$ uguale ad un retto, s' avrà $\cos.(2x - m + 3)\mu = \text{sen.}\, m\mu$; per conseguenza lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{sen}^2.\, m\mu$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Dunque se si faccia $m = x + 1$ si conseguirà lo sfiancamento della mossa e sarà $= \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{sen}^2.(x+1)\mu$.

COROLLARIO 2.

Ma sia il raggio interiore dell' Arco a tutto sesto $= b$, l' esteriore $= c$, e il peso di un cuneo $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r} = a$, essendo già l' angolo al centro di un cuneo $= 2\mu$: si troverà pertanto lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{(c^2 - b^2)4\mu}{r^3} \,.\, \text{sen}^2.\, m\mu$; e quello della mossa $= \frac{(c^2 - b^2)4\mu}{r^3} \,.\, \text{sen}^2.(x+1)\mu$.

COROLLARIO 3.

E supposto infinito il numero de' cunei componenti l' Arco intero, ma finito l' angolo ZQE; poichè è esso angolo
Fig. XIII. Tav. I. $ZQE = 2m\mu$, sarà sen. $m\mu$ quantità finita, e anche il suo quadrato sen^2. $m\mu$ sarà finito, ma μ è infinitesimo, dunque anche gli sfiancamenti de' cunei e della mossa espressi dalla formola $\frac{(c^2 - b^2)4\mu}{r^3}$. sen^2. $m\mu$ saranno infinitesimi di quell' ordine, di cui è μ: ma di questo caso si parlerà ancora in altro luogo.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE II.

Dato un Arco scemo formato del serraglio, delle mosse, e di un numero qualsivoglia x di cunei posti da ciascuna parte tra le mosse e il serraglio; trovare la spinta relativa del cuneo m^{esimo} in ordine, da una parte o dall' altra dell' Arco scemo, dopo disarmate le centine.

Fig. II. Tav. III. Chiamisi al solito la gravità di un cuneo $= a$, e il suo angolo al centro $= 2\mu$: ma l' angolo retto BDX si dica $= q\mu$, essendo q qualunque numero intero o rotto, razionale o irrazionale. Si divida poi l' Arco scemo in tre pezzi, indi in cinque, appresso in sette e nove, e ritrovisi l' ordine col quale procedono le spinte relative del serraglio e de' cunei; finalmente si cerchi la loro espression generale per qualunque numero di pezzi. Si troverà pertanto, che (fatto il numero de' cunei tra la mossa e il serraglio $= x$, onde il numero di tutti i pezzi componenti l' Arco scemo sia $= 2x + 3$) la spinta relativa del serraglio riesce $= \frac{2a}{r}$. cos. $(q - 1)\mu$, quella del primo cuneo ad esso laterale $= \frac{2a}{r}$. $(\text{cos.}\,(q - 1)\mu + \text{cos.}\,(q - 3)\mu)$, la spinta relativa del secondo cuneo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (q - 1)\mu + \cos. (q - 3)\mu + \cos. (q - 5)\mu \right)$, e così successivamente; laonde la spinta relativa del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (q - 1)\mu + \cos. (q - 3)\mu + \cos. (q - 5)\mu \text{ ecc.} \ldots \right)$. E poichè è manifesto che nella serie di quest' espressione fa d' uopo assumere tanti termini quante unità sono in $m + 1$, e la somma di un numero $m + 1$ di termini della serie medesima si ritrova $= \frac{\cos. (q - m - 1)\mu . \text{sen.} (m + 1)\mu}{\text{sen.} \mu}$, dunque sarà la spinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r . \text{sen.} \mu} . \cos. (q - m - 1)\mu . \text{sen.} (m + 1)\mu$. Prop. 8 Lib. I.

Di nuovo essendo retto l' angolo $q\mu$, i due angoli $(q - m - 1)\mu$ e $(m + 1)\mu$ insieme uniti uguaglieranno un retto, e però $\cos. (q - m - 1)\mu = \text{sen.} (m + 1)\mu$, dunque finalmente la spinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r . \text{sen.} \mu} . \text{sen}^2. (m + 1)\mu$; il che ecc.

Corollario I.

Procedendo nello stesso modo si potrà ritrovare lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a}{r^2} . \text{sen}^2. m\mu$. Ovvero in altro modo, sia RF il cuneo m^{esimo} dell' Arco scemo ABC, e sia la linea hk, condotta dal suo centro di gravità h in direzione perpendicolare a FI, uguale alla spinta relativa del cuneo ad esso immediatamente superiore; dunque, sostituendo $m - 1$ in luogo di m, s' avrà per la Proposizione la $hk = \frac{2a}{r . \text{sen.} \mu} . \text{sen}^2. m\mu$. Si tiri poi la hn perpendicolare alla commessura RO e si compia il parallelogrammo $hmkn$; dinoterà hm lo sfiancamento del cuneo m^{esimo} RF: ma come $hk : hm :: \text{sen.} mhn : \text{sen.} khn :: \cos. \mu : \text{sen.} 2\mu$, dunque starà $\frac{2a}{r . \text{sen.} \mu}$: Fig. II. Tav. III.

$\text{sen}^2. m\mu : hm :: \cos. \mu : \text{sen}. 2\mu :: r : 2 . \text{sen}. \mu$; e però lo sfiancamento hm del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{4a}{r^2} . \text{sen}^2. m\mu$, come prima.

Corollario 2.

Se si prenda $m = x + 1$ s' avrà lo sfiancamento della mossa $= \frac{4a}{r^2} . \text{sen}^2. (x + 1)\mu$: ma per avere la di lei spinta relativa bisognerà operare nella seguente maniera. Facciasi $m = x$; dunque sarà la spinta relativa del cuneo che giace sopra la mossa $= \frac{2a}{r . \text{sen}. \mu} . \text{sen}^2. (x + 1)\mu$. Ora sia ug la gravità della mossa e condotte le up uf perpendicolari alle sue commessure si compia al solito il parallelogrammo $ufgp$: è manifesto per le cose dette nell' antecedenti, ancora applicabili agli Archi scemi, che se alla spinta relativa del cuneo superiore alla mossa si aggiunga la uf avrassi nella somma la spinta relativa della mossa medesima. E perchè vi ha in tutto l' Arco scemo un numero $2x + 3$ di cunei, sarà l' angolo $ADB = (2x + 3)\mu$, e però l' angolo $LDB = (2x + 1)\mu$, e $\cos. LDB = \cos. (2x + 1)\mu$: ma come $ug : uf :: \text{sen}. fup : \text{sen}. gup$, ed il seno dell' angolo fup è uguale a $\text{sen}. 2\mu$, e parimenti il seno dell' angolo gup è uguale al seno di LDX o al coseno di LDB, dunque $a : uf :: \text{sen}. 2\mu : \cos. (2x + 1)\mu$, laonde $uf = \frac{a}{\text{sen}. 2\mu} . \cos. (2x + 1)\mu$, e la spinta relativa della mossa $=$

Fig. cit.

$$\frac{2a}{r . \text{sen}. \mu} . \text{sen}^2. (x + 1)\mu + \frac{a}{\text{sen}. 2\mu} . \cos. (2x + 1)\mu.$$

In oltre essendo, per l' equazione IX, $2 . \text{sen}^2. (x + 1)\mu = r^2 - r . \cos. (2x + 2)\mu$, sarà ancora

Prop. 7 Lib. I.

$$\frac{2a}{r . \text{sen}. \mu} . \text{sen}^2. (x + 1)\mu + \frac{a}{\text{sen}. 2\mu} . \cos. (2x + 1)\mu = \frac{ar}{\text{sen}. \mu} - \frac{a . \cos. (2x + 2)\mu}{\text{sen}. \mu} + \frac{a . \cos. (2x + 1)\mu}{\text{sen}. 2\mu} =$$

$$\frac{ar}{\text{sen}. \mu} - \frac{2a . \cos. \mu . \cos. (2x + 2)\mu}{r . \text{sen}. 2\mu} + \frac{a . \cos. (2x + 1)\mu}{\text{sen}. 2\mu} = \frac{ar}{\text{sen}. \mu}$$

$$-\frac{a\,.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}-\frac{a\,.\cos.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}+\frac{a\,.\cos.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}=$$

$\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{a\,.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; quindi nell' Arco ſcemo, tanto dalle quantità $\frac{2a}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen}^2.(x+1)\mu+\frac{a}{\text{sen.}\,2\mu}\,.\cos.(2x+1)\mu$, che dall'altre $\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{a\,.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ ſarà eſpreſſa la ſpinta relativa della moſſa, reſtando ſempre il numero de' cunei componenti l' Arco ſcemo $=2x+3$.

Corollario 3.

E perchè s' è trovata la ſpinta relativa del cuneo *meſimo* $=\frac{2a}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen}^2.(m+1)\mu$, e lo sfiancamento di eſſo cuneo $=\frac{4a}{r^2}\,.\,\text{sen}^2.\,m\mu$ sì nell' Arco ſcemo, che nell' intero; e ſimilmente ſe nell' eſpreſſione $\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{a\,.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ della ſpinta relativa della moſſa nell' Arco ſcemo, ſi ſupponga l' angolo $(2x+3)\mu$ uguale ad un retto, diviene allora $\cos.(2x+3)\mu=0$ ed eſſa ſpinta $=\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}$, come appunto s' è trovato nell' Arco intero: ſi potrà dunque dire che le ſteſſe identiche formole ſervono per gli Archi ſcemi e per gl' interi.

Prop. 9 e 10 Prop. 11 e ſuo Cor. 1 di queſto

Cor. antec.

Corol. 1 Prop. 9 di queſto

Corollario 4.

Laonde ſi proverà che anche negli Archi ſcemi lo sfiancamento de' cunei (ſuppoſto infiniteſimo l' angolo μ e infinito il numero de' cunei) è una quantità infiniteſima dello ſteſſo ordine di cui è μ; che la ſpinta relativa del cuneo infiniteſimo RF è $=\frac{c^2-b^2}{b}\,.\,BT$, dove c eſprime il raggio eſte-

Fig. II. Tav. III.

riore dell' Arco ſcemo, b l' interiore; e finalmente che la ſpinta relativa della moſſa diventa $= \frac{c^2 - b^2}{b} . BE$.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 12.

Se tra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, e da una parte ſieno collocati ſulla centina la moſſa e quanti cunei ſi vogliano, che non giungano però alla ſommità, indi ſi adatti alla ſuperficie ſuperiore del più alto cuneo un piano immobile e poi ſi diſarmi la centina; determinare la preſſione del cuneo ſul piano immobile, le ſpinte relative eſercitate da ogni cuneo ed i loro riſpettivi sfiancamenti.

Fig. VII. Tav. III. Tra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina ASC, poi da una parte la moſſa AG e quanti cunei ſi vogliano di numero x, il ſuperior de' quali HB non giunga al ſerraglio; ſi ſupponga dopo ciò adattato al piano ſuperiore del primo cuneo HB il piano EF immobile, cioè capace di reſiſtere ad ogni sforzo, e ſi diſarmi la centina; biſogna trovare la preſſione del cuneo HB ſul piano EF, le ſpinte relative e gli sfiancamenti de' cunei.

Sia la gravità de' cunei $= a$, e il loro angolo al centro $= 2\mu$; ſarà l' angolo $ADB = (x + 1)2\mu = (2x + 2)\mu$, e però l' angolo $ADN = 2x\mu$. Pertanto è certo che ſe ſi conduca dal centro di gravità I del primo cuneo ſuperiore la linea verticale $IK = a$, poi ſi tirino le IL IM perpendicolari alle EF HN e ſi compia il parallelogrammo $IMKL$, eſprimerà IL la preſſione ſul piano immobile EF; ma come $IK : IL :: \text{sen.}\, MIL : \text{sen.}\, MIK$, e $\text{sen.}\, MIL = \text{sen.}\, BDN = \text{sen.}\, 2\mu$, e $\text{sen.}\, MIK = \text{sen.}\, ADN = \text{sen.}\, 2x\mu$, dunque come $a : IL :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 2x\mu$; per conſeguenza

guenza la pressione IL sul piano immobile è $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$.

Di nuovo dagli altri centri di gravità de' rispettivi cunei si tirino linee rette uguali ad IK, poi si costruiscano parallelogrammi aventi esse rette per diagonali ed i loro lati perpendicolari alle commessure, onde dividere le forze della gravità e poter sottrarre le parti delle nuove forze, che fra loro scambievolmente si distruggono, e finalmente determinare le spinte relative e gli sfiancamenti de' cunei col metodo descritto nelle prime Proposizioni di questo Libro. Sarà dunque la spinta relativa del primo cuneo $HB = \frac{2a}{r} \,.\, \text{cos.}\, 2x\mu$, quella del secondo $= \frac{2a}{r} \,.\, (\text{cos.}\, 2x\mu + \text{cos.}\, (2x - 2)\mu)$, la spinta relativa del terzo $= \frac{2a}{r} \,.\, (\text{cos.}\, 2x\mu + \text{cos.}\, (2x - 2)\mu + \text{cos.}(2x - 4)\mu)$, e così in progresso; dunque la spinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r} \,.\, (\text{cos.}\, 2x\mu + \text{cos.}\, (2x - 2)\mu + \text{cos.}\, (2x - 4)\mu$ ecc. ....). E perchè della serie implicata nell' espressione della spinta relativa va preso un numero di termini m, e la somma generale di un numero m di termini di essa serie è $= \frac{\text{cos.}\, (2x - m + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\, \mu}$, diverrà la spinta relativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \text{cos.}\, (2x - m + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$.

Allo stesso modo essendo per le cose dette lo sfiancamento del primo cuneo $HB = 0$, quello del secondo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.$ $\text{cos.}\, 2x\mu$, quello del terzo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\text{cos.}\, 2x\mu + \text{cos.}\, (2x - 2)\mu)$, lo sfiancamento del quarto $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\text{cos.}\, 2x\mu + \text{cos.}\, (2x - 2)\mu + \text{cos.}\, (2x - 4)\mu)$, e così successivamente, sarà lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \Big(\cos.\, 2x\mu +$ $\cos.\,(2x - 2)\mu + \cos.\,(2x - 4)\mu$ ecc. .... $\Big)$; e nella ſerie di queſt' eſpreſſione farà d'uopo prendere un numero di termini $m - 1$; ma la ſomma di un numero di termini $m - 1$ della ſerie ſuddetta è $= \frac{\cos.\,(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$; e però lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a}{r^2} \,.\, \cos.\,(2x - m + 2)\mu \,.$ $\text{sen.}\,(m - 1)\mu$; laonde ſi è determinato, ne' cunei coſtituenti una parte di Arco intero e ſoſtenuti ſuperiormente da un piano immobile, la preſſione del primo cuneo ſul piano, le loro ſpinte relative, e gli sfiancamenti; il che ecc.

COROLLARIO.

E perchè la ſpinta relativa della moſſa come negli Archi interi così nelle loro parti è uguale a quella del cuneo che immediate la precede inſieme col proprio ſuo peſo, che gravita tutto ſulla moſſa, ſarà la ſpinta della moſſa $AG = a + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \cos.\,(x + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu = a + \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x + 1)\mu}{\text{sen.}\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{\text{sen.}\, \mu} = \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x + 1)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$.

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 13.

In un Arco compoſto trovare le ſpinte relative, e gli sfiancamenti de' cunei, qualunque ne ſia il loro numero, dopo tolta la centina.

Fig. VIII. Tav. III. Sia l' Arco compoſto *ABC* compreſo dal ſerraglio *D*, da due moſſe, e da un numero x di cunei tra ciaſcuna delle moſſe e il ſerraglio; ſia poi da una parte *VX* il cuneo m^{esimo} in ordine cominciando dal laterale al ſerraglio: ſi domanda la ſpinta relativa e lo sfiancamento del cuneo *VX* dopo diſarmata la centina.

Si prenda il centro di gravità M del cuneo laterale al ferraglio, e si tiri la retta MD perpendicolare alla commessura EB de' due cunei la quale concorra in D colla saetta Bm prolungata; poi si conduca ancora la DK perpendicolare all' altra commessura del serraglio; e fatta DI proporzionale alla di lui gravità si compia il parallelogrammo $DILK$: esprimerà DI la pressione del serraglio sul cuneo laterale, e sia $DI = p$. Di nuovo se in luogo del serraglio dell' Arco composto si adattasse alla superficie superiore del primo cuneo SB un piano immobile EF, poichè AB è parte di Arco intero, sarebbe la pressione di esso cuneo sul piano $EF = \frac{a \,.\, \text{sen.}\ 2x\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$, Prop. antec. dove a dee rappresentare il peso di un cuneo, e 2μ il suo angolo al centro. Pertanto o p è uguale alla stessa quantità $\frac{a \,.\, \text{sen.}\ 2x\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$, o maggiore, ovvero minore.

Sia primieramente $p = \frac{a \,.\, \text{sen.}\ 2x\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$. E poichè il serraglio dell' Arco composto preme tanto il cuneo laterale SB quanto da esso viene premuto, torna lo stesso pe' calcoli delle spinte relative e degli sfiancamenti, o porre il piano immobile EF, ovvero in suo luogo il serraglio dell' Arco, e però sarà la spinta relativa del cuneo m^{esimo} $VX = \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\ \mu} \,.\, \text{cos.}\,(2x - m + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$, e il suo sfiancamento $= \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{cos.}\,(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu$. Prop. cit.

Ma sia in secondo luogo $p > \frac{a \,.\, \text{sen.}\ 2x\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$, e si faccia $p - \frac{a \,.\, \text{sen.}\ 2x\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} = q$, poi al centro di gravità M del primo cuneo SB si ponga la linea retta $MN = q$ per diritto alla MD, la qual MN esprimerà la spinta relativa del serraglio. Sia poi MR perpendicolare alla ST e di tal grandezza che valga ad esprimere la spinta relativa che avrebbe il primo cuneo SB se al piano immobile e non al serraglio s' appoggiasse; e prolungata QM in O, si compia il parallelogrammo $MONP$. Dunque in questo caso vi passa qualche differenza dal surrogare il serraglio al piano EF, e la differenza consiste in esservi ora un' altra forza MN, o la spinta relativa del serraglio, che col piano non vi sarebbe, la quale necessariamente debbe in qualche parte alterare i risultamenti. In fatti MO mostra lo sfiancamento del primo cuneo, che nell' ipotesi del piano EF non n' aveva di sorte; così, essendo MN uguale a MP, la spinta relativa del cuneo SB non sarà più MR, ma $MN + MR$, vale a dire che alla MR bisogna aggiungere la spinta relativa del serraglio. Lo stesso si proverà nel secondo, terzo, quarto cuneo e successivamente; laonde essendosi trovato, che la spinta relativa del cuneo m^{esimo} VX nell' ipotesi del piano EF è $= \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \cos.(2x - m + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$, s' avrà la spinta relativa del cuneo m^{esimo} $VX = q + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \cos.(2x - m + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$. E passando alla ricerca del di lui sfiancamento, si prenda la spinta relativa Zb del cuneo immediate superiore ad VX e si metta dal suo centro di gravità Z in direzione perpendicolare a XY, poi prolungata QZ, si compia il parallelogrammo $Zabc$: sarà (sostituendo nell' espressione generale delle spinte relative $m - 1$ in luogo di m) la $Zb = q + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \cos.(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu$; ma come $Zb : Za :: \text{sen.}\, aZc : \text{sen.}\, bZc :: \cos.\, \mu : \text{sen.}\, 2\mu :: r : 2 \,.\, \text{sen.}\, \mu$; e però $Za = \frac{2q}{r} \,.\, \text{sen.}\, \mu + \frac{4a}{r^2} \,.\, \cos.(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu$, e così sarà determinato lo sfiancamento del cuneo VX.

Sia finalmente in terzo luogo $p < \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$, e sia di nuovo $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - p = q$; e per diritto alle DI DK si pongano le Di Dk uguali ciascuna a q. Non vi sarà altro divario, com' è manifesto, tra la supposizione del piano e quella del serraglio, se non che in questa vi sarà dalla parte del cuneo VX

una forza Di, che spinge all' insù il serraglio medesimo, ma le spinte relative e gli sfiancamenti de' cunei resteranno invariati. Lo stesso accaderà dall' altra parte dell' Arco composto, e $Dk = Di$ esprimerà altra forza che spigne all' insù il serraglio; quindi compiuto il parallelogrammo $Dilk$, la diagonale Dl, che riuscirà per diritto alla DB e verticale, mostrerà la direzione e la forza con cui il serraglio è spinto all' insù, la qual forza debbe essere sostenuta dalle sopraccentine, o in altro modo, dunque ecc.

Corollario 1.

Per conseguenza negli Archi composti dove accada il primo o il terzo caso considerato nella Proposizione, sarà la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu$ Equaz. VI Prop. 7 Lib. I

$= \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$: ma nel secondo caso sarà $= q + a +$

$\frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu = q + \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$.

Corollario 2.

Similmente sarà lo sfiancamento della mossa nel primo e terzo caso $= \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu$, e nel secondo sarà $= \frac{2q}{r} \,.$

$\text{sen.}\, \mu + \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu$.

Corollario 3.

Si dica il raggio interiore QV di una e dell' altra parte dell' Arco composto $= b$, e l' esteriore $QÆ = c$; sarà il peso di un cuneo rappresentato da $\frac{(c^2 - b^2)\mu}{r} = a$. Si supponga ora infinito il numero de' cunei formanti l' Arco e 2μ infinitesimo, ma finito l' arco BY, sarà la spinta relativa del cuneo m^{esimo} VX nel primo e terzo caso, dopo fatte le sostituzioni, $= \frac{2\mu.(c^2-b^2)}{r^2.\text{sen.}\,\mu}.\cos.(2x-m)\mu.\,\text{sen.}\,m\mu = \frac{2(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.\,\text{sen.}\,m\mu$; e nel secondo $= q + \frac{2(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.\,\text{sen.}\,m\mu$: ma lo sfiancamento nel primo e terzo caso sarà $= \frac{4\mu(c^2-b^2)}{r^3}.\cos.(2x-m)\mu.\,\text{sen.}\,m\mu$, e nel secondo $= \frac{2q\mu}{r} + \frac{4\mu(c^2-b^2)}{r^3}.\cos.(2x-m)\mu.\,\text{sen.}\,m\mu$. Anzi perchè nella supposizione de' cunei infinitamente piccioli diventa la pressione $\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ del primo cuneo contro il serraglio $= \frac{c^2-b^2}{2r}.\,\text{sen.}\,2x\mu$, e però $p - \frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu} = p - \frac{c^2-b^2}{2r}.\,\text{sen.}\,2x\mu = q$, s' avrà nel secondo caso la spinta relativa del cuneo $m^{esimo} = p - \frac{c^2-b^2}{2r}.\,\text{sen.}\,2x\mu + \frac{2(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.$

Equaz. VI Prop. 7 Lib. I. $\text{sen.}\,m\mu = p - \frac{c^2-b^2}{2r}.\,\text{sen.}\,2x\mu + \frac{c^2-b^2}{r}.(\text{sen.}\,2x\mu - \text{sen.}\,(2x-2m)\mu) = p + \frac{c^2-b^2}{2r}.\,\text{sen.}\,2x\mu - \frac{c^2-b^2}{r}.\,\text{sen.}\,(2x-2m)\mu$. E poichè ne' cunei infinitesimi l' angolo $BQA = 2x\mu$, e l' angolo $BQY = 2m\mu$, onde l' angolo $YQA = (2x-2m)\mu$; sarà $\text{sen.}\,2x\mu = \frac{r.Bm}{b}$, e $\text{sen.}\,(2x-2m)\mu = \frac{r.Ye}{b}$; laonde la spinta relativa del cuneo infinitesimo VX sarà nel secondo caso $= p + \frac{c^2-b^2}{2b}.Bm - \frac{c^2-b^2}{b}.Ye$; e similmente operando si troverà essere essa negli altri due casi $= \frac{c^2-b^2}{b}.(Bm-Ye)$. Fatta poi osservazione sui valori poco prima ritrovati degli sfiancamenti, si vedrà che in tutti e tre i casi sono quantità infinitesime dello stesso ordine di cui è μ.

SCOLIO.

Se il punto D (*dove la* MD, *condotta dal centro di gravità* M *del primo cuneo* SB *perpendicolarmente alla commessura* EB, *incontra la saetta* Bm *prolungata*) *sia anche centro di gravità del serraglio, allora tutti gli sfiancamenti e le spinte relative de' cunei dell' Arco composto partiranno da' loro rispettivi centri di gravità. Ma se così non fosse, bisognerebbe dal centro di gravità del serraglio tirare una linea perpendicolare alla* EB, *e dal centro di gravità* M *del primo cuneo* SB *una linea verticale per avere nel loro concorso il punto donde partirebbero lo sfiancamento e la spinta relativa di esso cuneo* SB; *e similmente da questo nuovo punto condotta una perpendicolare alla commessura* ST *e dal centro di gravità del secondo cuneo una verticale, s' avrebbe nel loro concorso il punto da cui partirebbero lo sfiancamento e la spinta relativa del secondo cuneo; e così continuando si troverebbero gli altri punti pe' cunei inferiori. La cagione di ciò apparisce ancora più chiaramente quando, in luogo di procedere col metodo delle distruzioni delle forze da noi in preferenza seguito, si passasse all' altro accennato nel Corollario della prop. 3 di questo. In siffatta supposizione adunque i punti da' quali partono le forze saranno posti in direzione verticale co' centri di gravità de' cunei, e da questi ugualmente distanti, cioè per quanto importa la grandezza della verticale del primo cuneo, la quale vien determinata dalla perpendicolare tirata dal centro di gravità del serraglio alla loro comune commessura. Quantunque però i punti donde partono le forze non sieno gli stessi, nulladimeno tirando da questi linee ai centri dell' arco e operando al solito si troveranno le forze suddette.*

PROBLEMA 14. PROPOSIZIONE 14.

In un Arco scemo formato di un numero qualsivoglia di cunei, dal quale sia stata tolta la centina, determinare il momento dello sfiancamento di un dato cuneo.

Sia l' Arco ſcemo ABC formato di due moſſe, del ſerraglio, e di un numero x di cunei per parte tra il ſerraglio e le moſſe, di modo che tutti i pezzi componenti l' Arco ſieno $2x + 3$ di numero: ſi domanda il momento dello sfiancamento del cuneo RF m^{esimo} in ordine. Si chiami il raggio interiore $DA = b$, la groſſezza del pilaſtro $= G$, e la ſua altezza $Ab = a$. Fig. II. Tav. III.

Il pilaſtro AW non può eſſere mobile che d' intorno al punto W, e lo sfiancamento del cuneo viene dalla sopraccentina ſoſtenuto, la quale ſi ſuppone ſolidamente attaccata a' pilaſtri: dunque il momento dello sfiancamento ſarà uguale al di lui prodotto per la perpendicolare WQ condotta dal punto W alla DH, che paſſa pel centro di gravità del cuneo RF. E perchè RF è il cuneo m^{esimo} in ordine cominciando l' enumerazione dal laterale al ſerraglio, ſarà l' angolo $NDR = 2m\mu$; ma l' angolo NDR è uguale all' angolo BDH; dunque anche l' angolo BDH è $= 2m\mu$; e però sen. $BDH =$ sen. $2m\mu =$ cos. HDZ, e cos. $BDH =$ cos. $2m\mu =$ sen. HDZ. Di nuovo eſſendo l' angolo $ADB = 2x\mu + 3\mu$, ſarà sen. $ADe =$ cos. ADB $=$ cos. $(2x + 3)\mu$; la AD poi è $= b$, laonde s' avrà $Ae = \frac{b\,.\,\text{cos.}\,(2x + 3)\mu}{r}$, e $De = \frac{b\,.\,\text{sen.}\,(2x + 3)\mu}{r}$: ma tutta la Ab $= a$, dunque la rimanente $eb = XW = a - \frac{b\,.\,\text{cos.}\,(2x + 3)\mu}{r}$. Dom. III. Dom. IV. Lib. I.

In oltre perchè ſta come $XW : XZ ::$ cos. XWZ : sen. XWZ, e l' angolo XWZ è uguale all' angolo HDZ, ſarà come $a - \frac{b\,.\,\text{cos.}\,(2x + 3)\mu}{r} : XZ ::$ sen. $2m\mu$: cos. $2m\mu$; per conſeguenza la $XZ = \frac{a\,.\,\text{cos.}\,2m\mu}{\text{sen.}\,2m\mu} - \frac{b\,.\,\text{cos.}\,(2x + 3)\mu\,.\,\text{cos.}\,2m\mu}{r\,.\,\text{sen.}\,2m\mu}$: in ſimil modo perchè ſta $XW : WZ ::$ cos. $XWZ : r$, ſi conſeguirà $WZ = \frac{ar}{\text{sen.}\,2m\mu} - \frac{b\,.\,\text{cos.}\,(2x + 3)\mu}{\text{sen.}\,2m\mu}$. Sicchè eſſendo l' intera $DX = De + eX = \frac{b\,.\,\text{sen.}\,(2x + 3)\mu}{r} + G$, ſe dalla DX ſi tolga la XZ, ſi troverà la rimanente $DZ = \frac{b\,.\,\text{sen.}\,(2x + 3)\mu}{r} + G -$

a . cos. $2m\mu$

$\frac{\ae . \cos. 2m\mu}{\text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r . \text{sen}. 2m\mu}$. Per il che avendo DZ a ZQ la ſteſſa ragione del ſeno tutto al ſeno dell' angolo HDZ, ſarà $DZ : ZQ :: r : \cos. 2m\mu$, dunque la retta $ZQ = \frac{b . \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r^2} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} - \frac{\ae . \cos^2. 2m\mu}{r . \text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos^2. 2m\mu}{r^2 . \text{sen}. 2m\mu}$; s' è poi dimoſtrata la $WZ = \frac{\ae r}{\text{sen}. 2m\mu} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{\text{sen}. 2m\mu}$, laonde tutta la $WQ = \frac{\ae r}{\text{sen}. 2m\mu} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{\text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r^2} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} - \frac{\ae . \cos^2. 2m\mu}{r . \text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos^2. 2m\mu}{r^2 . \text{sen}. 2m\mu}$: ma $\cos^2. 2m\mu = r^2 - \text{sen}^2. 2m\mu$, dunque riducendo s' avrà la $WQ = \frac{\ae . \text{sen}. 2m\mu}{r} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \text{sen}. 2m\mu}{r^2} + \frac{b . \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r^2}$; e ſoſtituendo in luogo di $-\cos.(2x + 3)\mu . \text{sen}. 2m\mu + \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu$ l' equivalente valore $r . \text{sen}. (2x - 2m + 3)\mu$, ſarà finalmente la perpendicolare Equ. II. Prop. 7 Lib. I.

$$WQ = \frac{\ae . \text{sen}. 2m\mu}{r} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} + \frac{b . \text{sen}. (2x - 2m + 3)\mu}{r}.$$

Sicchè eſſendo lo sfiancamento del dato cuneo $m^{\text{esimo}}\ RF = \frac{4a}{r^2}$. Cor. 1 Prop. 11 di queſto

$\text{sen}^2. m\mu = \frac{2a}{r^2} . 2 . \text{sen}^2. m\mu = \frac{2a}{r^2} . (r^2 - r . \cos. 2m\mu) = 2a - \frac{2a}{r} . \cos. 2m\mu$, s' avrà il momento di eſſo sfiancamento $= \left(2a - \frac{2a}{r} . \cos. 2m\mu\right) . \left(\frac{\ae . \text{sen}. 2m\mu}{r} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} + \frac{b}{r} . \text{sen}. (2x - 2m + 3)\mu\right)$; il che ecc. Equ. IX. Prop. 7 Lib. I.

PROBLEMA 15. PROPOSIZIONE 15.

In un Arco ſcemo formato di qualſivoglia numero di cunei, trovare la ſomma de' momenti degli sfiancamenti in un numero m di cunei, dopo diſarmata la centina.

Poſte le ſteſſe coſe dell' antecedente eſſendoſi dimoſtrato che il momento dello sfiancamento del cuneo m^{esimo} è $= \left(2a - \frac{2a}{r}.\cos.2m\mu\right).\left(\frac{\alpha.\text{sen}.2m\mu}{r} + \frac{G.\cos.2m\mu}{r} + \frac{b}{r}.\text{sen}.(2x - 2m + 3)\mu\right)$, chiamiſi queſto momento $= (Z)$. E perchè l' enumerazione de' cunei comincia dal cuneo laterale al ſerraglio, ſi avrà la ſomma dei momenti fino al cuneo m^{esimo} in ordine, tolto incluſivamente, quando ſi giunga a conſeguire la ſomma di un numero m di termini della ſerie di cui (Z) ſia il termine generale. Fatta pertanto la moltiplicazione diventerà $(Z) = \frac{2a\alpha.\text{sen}.2m\mu}{r} + \frac{2aG.\cos.2m\mu}{r} + \frac{2ab}{r}.\text{sen}.(2x - 2m + 3)\mu - \frac{2a\alpha}{r^2}.\text{sen}.2m\mu.\cos.2m\mu - \frac{2aG}{r^2}.\cos^2.2m\mu - \frac{2ab}{r^2}.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x - 2m + 3)\mu$. Di nuovo ſi ha per l' equazione I, $2.\text{sen}.2m\mu.\cos.2m\mu = r.\text{sen}.4m\mu$, e per la X, $2.\cos^2.2m\mu = r^2 + r.\cos.4m\mu$. In oltre ſe ſia l' angolo $2m\mu$ maggiore di $(2x - 2m + 3)\mu$ ſi ha per l' equazione VI, $2.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x - 2m + 3)\mu = r.\text{sen}.(2x + 3)\mu - r.\text{sen}.(-2x + 4m - 3)\mu$, laddove ſe foſſe minore, riuſcirà per la V, $2.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x - 2m + 3)\mu = r.\text{sen}.(2x + 3)\mu + r.\text{sen}.(2x - 4m + 3)\mu = r.\text{sen}.(2x + 3)\mu - r.\text{sen}.(-2x + 4m - 3)\mu$, nel qual ultimo binomio l' angolo del ſecondo termine ſarà negativo, ma il binomio è lo ſteſſo che nel primo caſo; unendo dunque amendue i caſi ſi dirà che $2.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x - 2m + 3)\mu$ è ſempre $= r.\text{sen}.(2x + 3)\mu - r.\text{sen}.(-2x + 4m - 3)\mu$. Ora ſe ſi facciano queſte ſoſtituzioni nel valor di (Z), ſarà $(Z) = \frac{2a\alpha}{r}.\text{sen}.2m\mu +$

Prop. 7 Lib. I.

$\frac{2aG}{r}.\cos.2m\mu + \frac{2ab}{r}.\text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu - \frac{a\ae}{r}.\text{sen.}4m\mu - aG$

$- \frac{aG}{r}.\cos.4m\mu - \frac{ab}{r}.\text{sen.}(2x + 3)\mu + \frac{ab}{r}.\text{sen.}(-2x + 4m - 3)\mu.$

Dividasi il moltinomio (Z) in altrettanti termini generali quante sono le quantità semplici che lo compongono, come gli (A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) registrati qui sotto, che hanno tutte le quantità costanti eccetto m.

$$\begin{cases} (A)\ \text{T. G.} + \frac{2a\ae}{r}.\text{sen.}2m\mu \\ (P)\ \text{S. G.} + \frac{2a\ae}{r.\text{sen.}\mu}.\text{sen.}(m+1)\mu.\text{sen.}m\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} (B)\ \text{T. G.} + \frac{2aG}{r}.\cos.2m\mu \\ (Q)\ \text{S. G.} + \frac{2aG}{r.\text{sen.}\mu}.\cos.(m+1)\mu.\text{sen.}m\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} (C)\ \text{T. G.} + \frac{2ab}{r}.\text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu \\ (R)\ \text{S. G.} + \frac{2ab}{r.\text{sen.}\mu}.\text{sen.}(2x - m + 2)\mu.\text{sen.}m\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D)\ \text{T. G.} - \frac{a\ae}{r}.\text{sen.}4m\mu \\ (S)\ \text{S. G.} - \frac{a\ae}{r.\text{sen.}2\mu}.\text{sen.}(2m+2)\mu.\text{sen.}2m\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} (E)\ \text{T. G.} - aG \\ (T)\ \text{S. G.} - amG \end{cases}$$

$$\begin{cases} (F)\ \text{T. G.} - \frac{aG}{r}.\cos.4m\mu \\ (V)\ \text{S. G.} - \frac{aG}{r.\text{sen.}2\mu}.\cos.(2m+2)\mu.\text{sen.}2m\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} (G)\ \text{T. G.} - \frac{ab}{r}\,.\,\text{sen.}\,(2x+3)\mu \\ (X)\ \text{S. G.} - \frac{amb}{r}\,.\,\text{sen.}\,(2x+3)\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} (H)\ \text{T. G.} + \frac{ab}{r}\,.\,\text{sen.}\,(-2x+4m-3)\mu \\ (Y)\ \text{S. G.} + \frac{ab}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{sen.}\,(-2x+2m-1)\mu\,.\,\text{sen.}\,2m\mu \end{cases}$$

Poi si trovino delle serie, di cui gli (A) (B) (C) (D) (E)
Prop. 8 Lib. I. (F) (G) (H) sono i termini generali, le rispettive loro somme generali (P) (Q) (R) (S) (T) (V) (X) (Y) che sono messe di sopra appresso i loro termini generali; indi si raccolgano insieme le somme parziali per avere la somma generale di un numero m di termini della serie, che ha (Z) per termine generale, e la cui somma si chiami ancora $=$ (I). Sarà dunque $(I) = \frac{2ax}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen.}\,(m+1)\mu\,.\,\text{sen.}\,m\mu + \frac{2aG}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{cos.}\,(m+1)\mu\,.\,\text{sen.}\,m\mu + \frac{2ab}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen.}\,(2x-m+2)\mu\,.\,\text{sen.}\,m\mu - \frac{ax}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{sen.}\,(2m+2)\mu\,.\,\text{sen.}\,2m\mu - amG - \frac{aG}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{cos.}\,(2m+2)\mu\,.\,\text{sen.}\,2m\mu - \frac{amb}{r}\,.\,\text{sen.}\,(2x+3)\mu + \frac{ab}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{sen.}\,(-2x+2m-1)\mu\,.\,\text{sen.}\,2m\mu$; laonde si è determinata la somma de' momenti degli sfiancamenti di un numero m di cunei; il che ecc.

Corollario.

E però fatto $m = x+1$ si troverà la somma de' momenti di tutti gli sfiancamenti de' cunei fino alla mossa inclusivamente $= \frac{2ax}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen.}\,(x+2)\mu\,.\,\text{sen.}\,(x+1)\mu + \frac{2aG}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{cos.}\,(x+2)\mu\,.\,\text{sen.}\,(x+1)\mu + \frac{2ab}{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen.}^2\,(x+1)\mu -$

$\frac{a\alpha}{r . \text{sen.} 2\mu} . \text{sen.}(2x + 4)\mu . \text{sen.}(2x + 2)\mu - aG(x+1) - \frac{aG}{r. \text{sen.} 2\mu}$. $\cos. (2x + 4)\mu . \text{sen.} (2x + 2)\mu - \frac{ab}{r} . (x + 1) . \text{sen.} (2x + 3)\mu + \frac{ab}{r . \text{sen.} 2\mu} . \text{sen.} \mu . \text{sen.} (2x + 2)\mu$; e riducendo si troverà la somma intera de' momenti fino alla mossa $= \frac{a\alpha}{\text{sen.} \mu} . \cos. \mu - \frac{a\alpha}{\text{sen.} \mu} . \cos. (2x + 3)\mu + \frac{aG}{\text{sen.} \mu} . \text{sen.} (2x + 3)\mu - aG + \frac{abr}{\text{sen.} \mu} - \frac{ab}{\text{sen.} \mu} . \cos. (2x + 2)\mu - \frac{a\alpha}{2 . \text{sen.} 2\mu} . \cos. 2\mu + \frac{a\alpha}{2 . \text{sen.} 2\mu} . \cos. (4x + 6)\mu - aG(x + 1) - \frac{aG}{2 . \text{sen.} 2\mu} . \text{sen.} (4x + 6)\mu + \frac{aG}{2} - \frac{ab}{r} . (x + 1) . \text{sen.} (2x + 3)\mu + \frac{ab}{2 . \text{sen.} 2\mu} . \cos. (2x + 1)\mu - \frac{ab}{2 . \text{sen.} 2\mu} . \cos. (2x + 3)\mu$. Prop. 7 Lib. I

PROBLEMA 16. PROPOSIZIONE 16.

Ritrovare in un Arco scemo formato di un numero qualsivoglia di cunei la somma de' momenti delle forze che tendono a rovesciare uno de' pilastri d' intorno al punto estremo della sua base, dopo disarmate le centinature.

Supponendosi adattate esternamente da ambe le parti dell' Arco scemo ABC, dalle impostature in su, due sopraccentine, le quali sieno attaccate fermamente a' pilastri e secondino la forma esteriore dell' Arco, ne avviene che tutte le forze sfiancanti del mezzo Arco AB, quante esse sono, premeranno la sopraccentina attaccata al pilastro AW, e però tenderanno a rovesciarlo d' intorno al punto W con una somma di momenti $= \frac{a\alpha}{\text{sen.} \mu} . \cos. \mu - \frac{a\alpha}{\text{sen.} \mu} . \cos. (2x + 3)\mu$ Fig. II. Tav. III. Dom. IV Lib. I. Corol. Prop. ant.

$+ \frac{aG}{\text{sen.}\,\mu} \cdot \text{sen.}\,(2x + 3)\mu - \frac{aG}{2}(2x + 3) + \frac{abr}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{ab}{\text{sen.}\,\mu} \cdot \cos.(2x + 2)\mu - \frac{a\alpha}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \cdot \cos.\,2\mu + \frac{a\alpha}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \cdot \cos.\,(4x + 6)\mu - \frac{aG}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \cdot \text{sen.}\,(4x + 6)\mu - \frac{ab}{r}(x + 1) \cdot \text{sen.}(2x + 3)\mu + \frac{ab}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \cdot \cos.(2x + 1)\mu - \frac{ab}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \cdot \cos.(2x + 3)\mu$. In oltre se dal centro di gravità u della mossa AM si conduca la ud perpendicolare al raggio DA o alla commessura inferiore della mossa, e dal punto W la Wd ad essa DA parallela, è manifesto, che moltiplicando per Wd la spinta relativa della mossa, si conseguirà il di lei momento, di cui bisogna ancora tener conto nella ricerca de' momenti delle forze che operano sul pilastro AW. Imperciocchè se la direzione ud cada oltre il punto W dalla parte esteriore, come nella Figura, si dovrà alla somma de' momenti delle forze sfiancanti aggiugnere il momento di essa spinta relativa, che pure s' impiegherebbe contro il pilastro; e viceversa lo si dovrà sottrarre dalla somma se la ud incontri la base, e si sforzi di sostenere il pilastro; per fine se la ud passasse pel punto W, il momento della spinta relativa della mossa sarebbe uguale a zero, e però di niun valore contro al pilastro. Suppongasi che cada dalla parte esteriore oltre il punto W. E perchè è dato l' angolo 2μ al centro del cuneo, il raggio interiore $= b$, e l' esteriore DM che dico $= c$, sarà eziandio data la distanza Du

Corol. 2. Prop. 9 Lib. I.

dal centro dell' Arco al centro di gravità del cuneo, e sarà $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$, per conseguenza $Dt = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu \,.\, \cos.\,\mu}{r\mu}$ che si faccia $= \Delta$; poi dal punto W si tiri la Wω parallela alla ud. Oltre a ciò perchè l' altezza Ab del pilastro $= \alpha$, e s' è trovato nella Prop. 14 $Ae = \frac{b}{r} \cdot \cos.\,(2x + 3)\mu$, dunque $eb =$ XW $= \alpha - \frac{b}{r} \cdot \cos.\,(2x + 3)\mu$: similmente perchè $De = \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu$, e la grossezza del pilastro $= G$, sarà $DX = G + \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu$. Per il che essendo come $XW : XS :: \text{cos.}\,XWS : \text{sen.}\,XWS :: \text{sen.}\,BDA : \text{cos.}\,BDA$, s' avrà sostituendo $\ae - \frac{b}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu : XS :: \text{sen.}(2x+3)\mu :$ $\text{cos.}(2x+3)\mu$; e però $XS = \frac{\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}(2x+3)\mu}.\left(\ae - \frac{b}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu\right)$; quindi la rimanente $DS = G + \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu - \frac{\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}(2x+3)\mu}.\left(\ae - \frac{b}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu\right)$: come poi $DS : D\omega ::$ $r : \text{cos.}\,SDA :: r : \text{sen.}(2x+3)\mu$, laonde $D\omega = \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu$ $+ \frac{b}{r^2}.\text{sen}^2.(2x+3)\mu - \frac{\ae}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu + \frac{b}{r^2}.\text{cos}^2.(2x+3)\mu =$ $\frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu - \frac{\ae}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu + b$; ma la $Dt = \Delta$, dunque la rimanente $\omega t = Wd = \Delta - \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu +$ $\frac{\ae}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu - b$. Sicchè essendo la spinta relativa della mossa nell' Arco scemo $= \frac{ar}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, sarà il suo momento $= \left(\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\right).\left(\Delta - \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{\ae}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu - b\right) = \Delta\left(\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\right)$ Corol. 2 Prop. 11 di questo

$$- \frac{aG}{\text{sen.}\,\mu}.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{a\ae}{\text{sen.}\,\mu}.\text{cos.}(2x+3)\mu - \frac{abr}{\text{sen.}\,\mu} +$$

$$\frac{aG}{r.\text{sen.}\,2\mu}.\text{sen.}(2x+3)\mu.\text{cos.}(2x+3)\mu - \frac{a\ae}{r.\text{sen.}\,2\mu}.\text{cos}^2.(2x$$

$+3)\mu + \frac{ab}{\text{sen. } 2\mu} . \cos. (2x+3)\mu = \Delta \left(\frac{ar}{\text{sen. } \mu} - \frac{a . \cos.(2x+3)\mu}{\text{sen. } 2\mu} \right)$
$- \frac{aG}{\text{sen. } \mu} . \text{sen. } (2x + 3)\mu + \frac{a\alpha}{\text{sen. } \mu} . \cos. (2x + 3)\mu - \frac{abr}{\text{sen. } \mu} +$
Equaz. X. Prop. 7. Lib. I. $\frac{aG}{2 . \text{sen. } 2\mu} . \text{sen. } (4x + 6)\mu - \frac{a\alpha r}{2 . \text{sen. } 2\mu} - \frac{a\alpha}{2 . \text{sen. } 2\mu} . \cos. (4x +$
$6)\mu + \frac{ab}{\text{sen. } 2\mu} . \cos. (2x + 3)\mu$. Se pertanto si aggiunga a questo momento la somma de' momenti delle forze sfiancanti, sarà, riducendo, la somma totale de' momenti contro al pilastro $= \Delta \left(\frac{ar}{\text{sen. } \mu} - \frac{a . \cos. (2x+3)\mu}{\text{sen. } 2\mu} \right) - \frac{a\alpha r}{2 . \text{sen. } 2\mu} + \frac{ab}{2.\text{sen.} 2\mu}$.
$\cos. (2x + 3)\mu + \frac{a\alpha . \cos. \mu}{\text{sen. } \mu} - \frac{aG}{2} . (2x + 3) - \frac{ab}{\text{sen. } \mu} . \cos. (2x +$
$2)\mu - \frac{a\alpha . \cos. 2\mu}{2 . \text{sen. } 2\mu} - \frac{ab}{r} . (x + 1) . \text{sen. } (2x + 3)\mu + \frac{ab}{2 . \text{sen. } 2\mu}$.
$\cos. (2x + 1)\mu$. Ma $- \frac{a\alpha r}{2 . \text{sen. } 2\mu} + \frac{a\alpha . \cos. \mu}{\text{sen. } \mu} - \frac{a\alpha . \cos. 2\mu}{2 . \text{sen. } 2\mu} =$
Equaz. X. $\frac{-a\alpha}{2r . \text{sen. } 2\mu} . (r^2 + r . \cos. 2\mu) + \frac{a\alpha . \cos. \mu}{\text{sen. } \mu} = \frac{-a\alpha . \cos^2 . \mu}{2 . \text{sen} . \mu . \cos. \mu} +$
$\frac{a\alpha . \cos. \mu}{\text{sen. } \mu} = \frac{a\alpha . \cos. \mu}{2 . \text{sen. } \mu}$; parimenti $\frac{ab}{2 . \text{sen. } 2\mu} . \cos. (2x + 3)\mu$
$- \frac{ab}{\text{sen. } \mu} . \cos. (2x + 2)\mu + \frac{ab}{2 . \text{sen. } 2\mu} . \cos. (2x + 1)\mu =$
Equaz. VII. $\frac{ab}{2 . \text{sen. } 2\mu} . \left(\cos. (2x + 3)\mu + \cos. (2x + 1)\mu \right) - \frac{2ab}{r . \text{sen. } 2\mu}$.
$\cos. (2x + 2)\mu . \cos. \mu = \frac{ab}{r . \text{sen. } 2\mu} . \cos. (2x + 2)\mu . \cos. \mu -$
$\frac{2ab}{r . \text{sen. } 2\mu} . \cos. (2x + 2)\mu . \cos. \mu = - \frac{ab}{r . \text{sen. } 2\mu} . \cos. \mu . \cos. (2x$
$+ 2)\mu = - \frac{ab}{2 . \text{sen. } \mu} . \cos. (2x + 2)\mu$; dunque finalmente la somma de' momenti contro al pilastro è $= \Delta \left(\frac{ar}{\text{sen. } \mu} - \right.$

a . cos. (2x

$\left.\frac{a.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen. }2\mu}\right)+\frac{a\alpha.\cos.\mu}{2.\text{sen. }\mu}-\frac{ab.\cos.(2x+2)\mu}{2.\text{sen. }\mu}-\frac{aG}{2}(2x$ $+3)-\frac{ab}{r}.(x+1).\text{sen.}(2x+3)\mu$. Allo stesso modo calcolando allorchè la direzione *ud* della spinta relativa della mossa incontri la base del pilastro (nel qual caso la $D\omega$ diventa maggiore della Dt) si troverà la stessa identica formola pel risultamento de' momenti delle forze, che operano contro il pilastro; sicchè servirà per amendue i casi e conseguentemente anche per il terzo, in cui si pone che la *ud* passi pel punto W.

Corollario I.

E poichè il raggio interiore $=b$, e l' esteriore $=c$, sarà la faccia di un cuneo $=\frac{(c^2-b^2)\mu}{r}=a$, perchè alla faccia è proporzionale il peso; è poi $\Delta=\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(c+b)}.\frac{\text{sen.}\mu\cos.\mu}{r\mu}$; laonde sostituendo, si conseguirà la somma medesima de' momenti contro al pilastro $AW=\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(c+b)}.\frac{\text{sen.}\mu\cos.\mu}{r\mu}.$
$\left(\frac{(c^2-b^2)\mu}{\text{sen.}\mu}-\frac{\mu(c^2-b^2).\cos.(2x+3)\mu}{r.\text{sen. }2\mu}\right)+\frac{\alpha\mu(c^2-b^2).\cos.\mu}{2r.\text{sen.}\mu}-$
$\frac{b\mu(c^2-b^2).\cos.(2x+2)\mu}{2r.\text{sen.}\mu}-\frac{G(c^2-b^2)}{2r}.(2x\mu+3\mu)-\frac{b(c^2-b^2)}{r^2}.$
$(x\mu+\mu).\text{sen.}(2x+3)\mu=(c^2-b^2).\left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3r(c+b)}.\left(\cos.\mu\right.\right.$
$\left.-\frac{1}{2}.\cos.(2x+3)\mu\right)+\frac{\alpha\mu.\cos.\mu}{2r.\text{sen.}\mu}-\frac{b\mu.\cos.(2x+2)\mu}{2r.\text{sen.}\mu}-\frac{G}{2r}.$
$\left.(2x+3)\mu-\frac{b}{2r^2}.(2x+2)\mu.\text{sen.}(2x+3)\mu\right).$

COROLLARIO 2.

Fig. II. Tav. III. Ma ſia infinito il numero de' cunei componenti l' Arco ſcemo e 2μ infinitamente picciolo: in queſto caſo l' angolo $ADB = (2x+3)\mu$ diventa $= 2x\mu$, così $\mu =$ sen. $\mu = 0$, e cos. $\mu = r$; dunque la ſomma de' momenti diverrà $= (c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \left(r - \frac{1}{2} . \cos. ADB\right) + \frac{æ}{2} - \frac{b}{2r} . \cos. ADB - \frac{G}{2r} . 2x\mu - \frac{b}{2r^2} . 2x\mu . \text{sen.} ADB\right)$. Perchè poi la $AD = b$, sarà la $AE = \frac{b}{r}$. sen. ADB, la $DE = \frac{b}{r}$. cos. ADB, e l' arco $AB = \frac{b}{r} . 2x\mu$; e però fatta la ſaetta $BE = n$ e la ſemicorda $AE = p$, ſarà sen. $ADB = \frac{rp}{b}$, cos. $ADB = \frac{r}{b} . (b - n)$, e $2x\mu = \frac{r}{b} . AB$; per conſeguenza la ſomma ſteſſa de' momenti $= (c^2 - b^2)$.

$$\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3b(c+b)} . \left(b - \frac{1}{2}(b-n)\right) + \frac{æ}{2} - \frac{1}{2}(b-n) - \frac{G}{2b} . AB - \frac{p}{2b} . AB\right) = (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} + \frac{æ}{2} - \frac{1}{2}(b - n) - \frac{AB}{2b} . (G+p)\right)$$

: è poi

$$\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} - \frac{1}{2}(b - n) = \frac{3bc + 3b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} + \frac{2c^2 - bc - b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} - \frac{1}{2}(b-n) = n + \frac{2c^2 - bc - b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2}$$

, dunque la ſomma de' momenti

$$= (c^2 - b^2 . \left(\frac{(2c^2 - bc - b^2) . (b+n)}{6b(c+b)} + \frac{æ}{2} + n - \frac{AB}{2b}(G+p)\right)$$

ch' è una quantità finita come manifeſtamente appariſce; e ſe la groſſezza dell' Arco ſia $= g$, ſicchè $c = b + g$, ſoſtituendo ſi otterrà allora la ſomma de' momenti $= (2bg + g^2)$.

$$\left(\frac{(3bg + 2g^2) . (b+n)}{6b(2b+g)} + \frac{æ}{2} + n - \frac{AB}{2b}(G+p)\right).$$

PROBLEMA 17. PROPOSIZIONE 17.

In un Arco intero compreso da un qualsivoglia numero di cunei, determinare la somma de' momenti delle forze che tendono a rovesciare i pilastri, dopo tolta la centina.

Negli Archi scemi s' è trovato, che la somma totale de' momenti delle forze che tendono a rovesciare i pilastri è $=$ $(c^2 - b^2) \cdot \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} \cdot \left(\cos.\mu - \frac{1}{2} \cdot \cos.(2x+3)\mu \right) + \frac{a\mu \cdot \cos.\mu}{2r \cdot \text{sen}.\mu} - \frac{b\mu \cdot \cos.(2x+2)\mu}{2r \cdot \text{sen}.\mu} - \frac{G}{2r} \cdot (2x+3)\mu - \frac{b}{2r^2} \cdot (2x+2)\mu \cdot \text{sen}.(2x+3)\mu \right)$, dove b indica il raggio interiore, c l' esteriore, a l' altezza del pilastro, G la sua grossezza, 2μ l' angolo al centro di un cuneo, e $2x+3$ il numero de' cunei componenti l' Arco scemo. Per il che se l' Arco scemo s' accrescesse fino ad essere intero, allora $(2x+3)\mu$ sarebbe angolo retto; e però $\cos.(2x+3)\mu = 0$, $\cos.(2x+2)\mu = \text{sen}.\mu$, e $\text{sen}.(2x+3)\mu = r$; dunque la somma de' momenti contro a' pilastri sarà nell' Arco intero $= (c^2 - b^2) \cdot \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} \cdot \cos.\mu + \frac{a\mu \cdot \cos.\mu}{2r \cdot \text{sen}.\mu} - \frac{b\mu}{2r} - \frac{G}{2r} \cdot (2x+3)\mu - \frac{b}{2r} \cdot (2x+2)\mu \right)$ $= (c^2 - b^2) \cdot \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} \cdot \cos.\mu + \frac{a\mu \cdot \cos.\mu}{2r \cdot \text{sen}.\mu} - \frac{G+b}{2r} \cdot (2x+3)\mu \right)$. Di nuovo perchè $(2x+3)\mu$ è uguale all' angolo retto, sarà $\frac{b}{r} \cdot (2x+3)\mu$ uguale al quadrante del raggio b, che si chiami $= Q$, sicchè se AZG sia l' arco intero riesca il quadrante $AZ = Q$, e però sostituendo, sarà la somma de' momenti contro a' pilastri $= (c^2 - b^2) \cdot \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} \right.$.

Corol. 1 Prop. ant.

Fig. XIII. Tav. II.

$$\cos.\mu + \frac{\alpha\mu \,.\, \cos.\mu}{2r \,.\, \text{sen.}\,\mu} - \frac{(G+b)Q}{2b}\Big)$$; il che ecc.

Corollario 1.

Per conseguenza se il numero de' cunei componenti l' Arco intero sia infinito e 2μ infinitesimo, sarà la somma de' momenti contro a' pilastri uguale alla quantità finita $(c^2 - b^2)$.

$$\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} + \frac{\alpha}{2} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right);$$ ovvero fatta la grossezza dell' Arco $= g$, onde $c = b + g$, sarà essa somma $= (2bg + g^2)$.

$$\left(\frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)} + \frac{\alpha}{2} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right).$$

Corollario 2.

Se poi il numero de' pezzi che compongono l' Arco intero sia uguale all' unità, onde l' Arco sia tutto di un pezzo solo, sarà l' angolo 2μ uguale a due retti, e μ uguale ad un retto; e però $\cos.\mu = 0$, e $\text{sen.}\,\mu = r$; quindi la somma de' momenti d' intorno al punto W sarà $= (c^2 - b^2) . - \frac{(G+b)Q}{2b}$, ch' è una quantità negativa. E perchè la $QA = b$, e la $AL = G$, sarà la $QL = WH = b + G$, la quantità poi $\frac{(c^2 - b^2)Q}{2b}$ è uguale alla metà della superficie di tutto l' Arco AFG o alla metà del suo peso, laonde in questo caso lo sforzo dell' Arco non è diretto a rovesciare il pilastro d' intorno al punto W, ma anzi lo sostiene con un momento uguale al prodotto della metà del peso dell' Arco nella somma del raggio interiore colla grossezza del pilastro, come dovevasi trovare. Imperciocchè poggiando l' Arco fra due superficie orizzontali, ei premerà ugualmente ciascuna di esse, e le premerà colla metà del suo peso per la direzione verticale ZH; e per conseguenza l' uno, e l' altro pilastro sarà sostenuto con un momento uguale al prodotto della metà del

Fig. cit.

peso dell' Arco per la distanza WH dal centro del moto, come viene dalla formola somministrato.

Similmente se nella somma de' momenti contro al pilastro di un Arco scemo si faccia uguale all' unità il numero de' pezzi che lo compongono, cioè $2x + 3 = 1$, e però $x = -1$, s' avrà il momento della spinta contro al pilastro $= (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c + b)} . \frac{\cos.\mu}{2} + \frac{\alpha\mu . \cos.\mu}{2r . \text{sen.}\mu} - \frac{b\mu}{2 . \text{sen.}\mu} - \frac{G\mu}{2r} \right)$. Corol. 1. dell' ant.

E in fatti se dal centro di gravità di tutto il pezzo formante l' Arco scemo si conduca una linea in direzione perpendicolare alla DA, e si trovi la parte del peso che s' impiega a premere il pilastro secondo essa direzione, apparirà, che l' espressione algebraica sopraccennata è precisamente uguale al momento di questa pressione, ovvero al prodotto di essa per la linea condotta dal punto W perpendicolarmente alla perpendicolare prima. Fig. II. Tav. III.

PROBLEMA 18. PROPOSIZIONE 18.

In un Arco a sesto acuto, diviso in qualsivoglia numero di cunei, trovare il momento dello sfiancamento del cuneo m^{esimo}, dopo disarmata la centina.

Sia ABC un Arco composto, e sia AG la mossa del pilastro da una parte, e x il numero de' cunei collocati dalla parte medesima tra la mossa e il serraglio; suppongasi che la retta MD, condotta dal centro di gravità M del primo cuneo SB perpendicolarmente alla commessura EB, incontri il prolungamento della saetta Bm nel punto D centro di gravità del serraglio; sia poi VX il cuneo m^{esimo} in ordine; si domanda il momento dello sfiancamento del cuneo VX. Fig. VIII. Tav. III.

Si dica al solito il raggio interiore $QA = b$, la faccia di un cuneo o il suo peso $= a$, il suo angolo al centro $= 2\mu$, la grossezza Ad del pilastro $= G$, l' altezza $Wd = \alpha$; e condotta dal centro di gravità Z del cuneo VX al centro Q la retta ZQ, ad essa ZQ si tiri perpendicolare la WH: sarà l' angolo

$BQA = 2x\mu + 2\mu$, l' angolo $BQZ = 2m\mu - \mu$, e però il rimanente $AQZ = (2x - 2m + 3)\mu$.

Pertanto o il serraglio preme il cuneo laterale SB quanto da esso è premuto, o il preme di più, o meno. Nel primo e terzo caso s' è trovato lo sfiancamento del cuneo m^{esimo}

Prop. 13 di questo $VX = \frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.} (m - 1)\mu$: ma nel secondo egli è $= \frac{2q}{r} . \text{sen.} \mu + \frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.} (m - 1)\mu$, dove (supponendo la pressione del serraglio sul suo cuneo laterale $= p$, ed essendo già quella del cuneo sul serra-

Prop. citat. glio $= \frac{a . \text{sen.} 2x\mu}{\text{sen.} 2\mu}$) debbe essere $q = p - \frac{a . \text{sen.} 2x\mu}{\text{sen.} 2\mu}$.

E poichè $Wd : dp :: \cos. dWp : \text{sen.} dWp$, e l' angolo dWp è uguale all' angolo AQZ, sarà $\alpha : dp :: \cos.(2x - 2m + 3)\mu : \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu$; dunque $dp = \frac{\alpha . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu}$;

e allo stesso modo si troverà $Wp = \frac{\alpha r}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu}$: tutta poi la $dQ = b + G$, laonde la rimanente $Qp = b + G - \frac{\alpha . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu}$. Di nuovo essendo nel triangolo QpH

come $Qp : pH :: r : \text{sen.} AQZ$, s' avrà $pH = \frac{b + G}{r} . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu - \frac{\alpha . \text{sen.}^2 (2x - 2m + 3)\mu}{r . \cos.(2x - 2m + 3)\mu}$; e per conseguenza la

$$WH = Wp + pH = \frac{\alpha r}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu} + \frac{b + G}{r} . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu - \frac{\alpha . \text{sen.}^2 (2x - 2m + 3)\mu}{r . \cos.(2x - 2m + 3)\mu} = \frac{b + G}{r} . \text{sen.} (2x - 2m + 3)\mu + \frac{\alpha}{r} . \cos.(2x - 2m + 3)\mu.$$

Per la qual cosa essendo il momento dello sfiancamento del cuneo m^{esimo} VX uguale al prodotto della forza sfiancante per la perpendicolare WH, imperocchè ponendosi che la retta MD incontri la saetta Bm prolungata nel centro di gravità D del serraglio, dal punto Z partirà la forza sfiancante medesima; e però sarà esso momento pel primo e terzo caso $= \frac{4a}{r^2}.\cos.(2x - m + 2)\mu.$ Scolio Prop. cit.

$\text{sen.}(m - 1)\mu.\left(\frac{b+G}{r}.\text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{a}{r}.\cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$, ma nel secondo sarà $= \left(\frac{2q}{r}.\text{sen.}\mu + \frac{4a}{r^2}.\cos.(2x - m + 2)\mu.\text{sen.}(m - 1)\mu\right).\left(\frac{b+G}{r}.\text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{a}{r}.\cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$; il che ecc.

S C O L I O.

Se la retta MD *non incontri il centro di gravità del serraglio, allora la forza sfiancante non può partire dal punto* Z, *ma da altro punto collocato in direzione verticale con esso. Anzi tirata dal centro di gravità* M *del primo cuneo una linea verticale, e dal centro di gravità del serraglio una linea perpendicolare alla* EB, *finchè concorra con quella e la determini, bisognerà portare sopra o sotto* Z *la grandezza della prima verticale per avere il punto donde veramente parte la forza sfiancante del cuneo* VX: *cosicchè se la verticale prima cada per esempio sopra* M, *si porterà la sua grandezza sopra* Z, *come* Zδ, *e si conseguirà il punto* δ *ricercato. E poichè sono date le* Zδ ZQ *e l' angolo* δZQ, *si troverà anche l' angolo* δQZ; *è poi dato l' angolo* ZQA, *dunque sarà pure dato l' angolo* δQA; *indi si proceda come nella proposizione per trovare il valore della perpendicolare tirata dal punto* W *sopra* δQ. *Per conseguenza moltiplicando essa perpendicolare per la forza sfiancante del cuneo* VX, *che si dee ritrovare col metodo insegnato nello scolio citato, si determinerà il di lei momento. In questa supposizione però il calcolo riesce ancora più laborioso che nell' altra, e per questo l' abbiamo ommesso, bastandoci di aver indicato il modo da tenersi nell' intraprenderlo.* Scol. cit.

PROBLEMA 19. PROPOSIZIONE 19.

Trovare in un Arco a ſesto acuto la ſomma de' momenti degli sfiancamenti di un numero m di cunei, dopo tolta la centina, di qualunque numero ne ſia l' Arco formato.

Fig. VIII. Tav. III. Suppoſte le ſteſſe coſe dell' antecedente, poichè il momento della forza sfiancante del cuneo m^{esimo} VX nel primo e terzo caſo, cioè quando il ferraglio preme ugualmente il cuneo laterale o meno di quello che da eſſo vien premuto, è uguale alla quantità $\frac{4a}{r^2}.\cos.(2x-m+2)\mu.\text{sen}.(m-1)\mu.\left(\frac{b+G}{r}.\right.$ $\text{sen}.(2x-2m+3)\mu+\frac{a}{r}.\cos.(2x-2m+3)\mu\Big)$, che chiamiſi $=(I)$, la ſomma de' momenti di un numero m di cunei ſarà uguale alla ſomma di un numero m di termini della ſerie di cui (I) rappreſenti il termine generale: ma $\frac{4a}{r^2}.\cos.(2x$

Equaz. VI. Prop. 7 Lib. I. $-m+2)\mu.\text{sen}.(m-1)\mu=\frac{2a}{r}.\text{sen}.(2x+1)\mu-\frac{2a}{r}.\text{sen}.(2x$ $-2m+3)\mu$; dunque $(I)=\frac{a(b+G)}{r^2}.\big(2.\text{sen}.(2x+1)\mu.$ $\text{sen}.(2x-2m+3)\mu-2.\text{sen}^2.(2x-2m+3)\mu\big)+\frac{aa}{r^2}.\big(2.$ $\text{sen}.(2x+1)\mu.\cos.(2x-2m+3)\mu-2.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu.$

Equaz. VIII. $\cos.(2x-2m+3)\mu\big)$. Di nuovo eſſendo $2.\text{sen}.(2x+1)\mu.$ $\text{sen}.(2x-2m+3)\mu=r.\cos.(2m-2)\mu-r.\cos.(4x-2m+$

Equaz. IX. $4)\mu$, $2.\text{sen}^2.(2x-2m+3)\mu=r^2-r.\cos.(4x-4m+6)\mu$,

Equaz. V. $2.\text{sen}.(2x+1)\mu.\cos.(2x-2m+3)\mu=r.\text{sen}.(4x-2m+4)\mu$ $+r.\text{sen}.(2m-2)\mu$, e per fine $2.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu.\cos.(2x$

Equaz. I. $-2m+3)\mu=r.\text{sen}.(4x-4m+6)\mu$, ſarà $(I)=\frac{a(b+G)}{r}.$ $\big(\cos.(2m-2)\mu-\cos.(4x-2m+4)\mu-r+\cos.(4x-4m$ $+6)\mu\big)$

$+6)\mu) + \frac{a\alpha}{r}(\text{sen.}(4x - 2m + 4)\mu + \text{sen.}(2m - 2)\mu - \text{sen.}(4x - 4m + 6)\mu)$. Per la qual cosa spezzando questo termine generale in tanti termini quante sono le quantità semplici che lo compongono, poi prendendo le somme di un numero m di termini delle serie parziali a cui corrispondono, e unendole insieme, il tutto col metodo adoperato nella Proposizione 15 di questo, si conseguirà per la somma di un numero m di termini dell' intera serie che ha (I) per termine generale, la quantità $\frac{a(b + G)}{r} \cdot \left(\frac{\cos.(m - 1)\mu \cdot \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\cos.(4x - m + 3)\mu \cdot \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} - rm + \frac{\cos.(4x - 2m + 4)\mu \cdot \text{sen.}\, 2m\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}\right) + \frac{a\alpha}{r}\left(\frac{\text{sen.}(4x - m + 3)\mu \cdot \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} + \frac{\text{sen.}(m - 1)\mu \cdot \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{sen.}(4x - 2m + 4)\mu \cdot \text{sen.}\, 2m\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}\right)$.

Ma nel secondo caso, vale a dire quando il serraglio preme più il cuneo laterale che da lui non è premuto, poichè il momento della forza sfiancante del cuneo mesimo è $= \left(\frac{2q}{r} \cdot \text{sen.}\,\mu + \frac{4a}{r^2} \cdot \cos.(2x - m + 2)\mu \cdot \text{sen.}(m - 1)\mu\right) \cdot \left(\frac{b + G}{r} \cdot \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{\alpha}{r} \cdot \cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$, sarà esso uguale alla quantità (I) insieme con $\frac{2q}{r} \cdot \text{sen.}\,\mu \left(\frac{b + G}{r} \cdot \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{\alpha}{r} \cdot \cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$, ovvero $= (I) + \frac{2q(b + G)}{r^2} \cdot \text{sen.}\,\mu \cdot \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{2q\alpha}{r^2} \cdot \text{sen.}\,\mu \cdot \cos.(2x - 2m + 3)\mu$ $= (I) + \frac{q(b + G)}{r} \cdot (\cos.(2x - 2m + 2)\mu - \cos.(2x - 2m + 4)\mu) + \frac{q\alpha}{r} \cdot (\text{sen.}(2x - 2m + 4)\mu - \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu)$. Ora se si Prop. ant.

dica $\frac{q(b+G)}{r} \cdot \left(\text{cos.}\,(2x - 2m + 2)\mu - \text{cos.}\,(2x - 2m + 4)\mu \right)$

$+ \frac{q\alpha}{r} \cdot \left(\text{sen.}\,(2x - 2m + 4)\mu - \text{sen.}\,(2x - 2m + 2)\mu \right) = (L)$, ſicchè il momento della forza sfiancante ſia $= (I) + (L)$, è manifeſto, che ſe alla ſomma di un numero m di termini della ſerie, che ha (I) per termine generale, ſi aggiunga la ſomma di un ugual numero di termini di altra ſerie, che abbia (L) per termine generale, ſi otterrà la ſomma de' momenti delle forze sfiancanti nel ſecondo caſo per un numero m di cunei. La ſomma poi di un numero m di termini della ſerie che ha per termine generale (I) s' è già di ſopra ritrovata, e l' altra che ha per termine generale (L) è $=$

Prop. 8 Lib. I.

$$\frac{q(b+G)}{r} \cdot \left(\frac{\text{cos.}(2x - m + 1)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - \frac{\text{cos.}(2x - m + 3)\mu.\ \text{sen.}\,m\mu}{\text{sen.}\ \mu} \right)$$

$$+ \frac{q\alpha}{r} \cdot \left(\frac{\text{sen.}(2x - m + 3)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - \frac{\text{sen.}(2x - m + 1)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} \right);$$

laonde nel ſecondo caſo sarà la ſomma de' momenti delle forze sfiancanti di un numero m di cunei $= \frac{a(b+G)}{r}$.

$$\left(\frac{\text{cos.}\,(m-1)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - \frac{\text{cos.}\,(4x - m + 3)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - rm + \right.$$

$$\left. \frac{\text{cos.}\,(4x - 2m + 4)\mu.\ \text{sen.}\ 2m\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} \right) + \frac{a\alpha}{r} \cdot \left(\frac{\text{sen.}\,(4x - m + 3)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} \right.$$

$$\left. + \frac{\text{sen.}\,(m-1)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - \frac{\text{sen.}\,(4x - 2m + 4)\mu.\ \text{sen.}\ 2m\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} \right) +$$

$$\frac{q(b+G)}{r} \cdot \left(\frac{\text{cos.}(2x - m + 1)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - \frac{\text{cos.}(2x - m + 3)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} \right)$$

$$+ \frac{q\alpha}{r} \cdot \left(\frac{\text{sen.}(2x - m + 3)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} - \frac{\text{sen.}(2x - m + 1)\mu.\ \text{sen.}\ m\mu}{\text{sen.}\ \mu} \right);$$

il che ecc.

Scolio.

Avvertaſi che queſta ſomma de' momenti vale ſolo nella ſuppoſizione che la retta MD *incontri il centro di gravità del ſerraglio;*

altrimenti farà d' uopo trovare prima il momento della forza sfiancante come nello Scolio dell' antecedente proposizione, poi come in questa la somma de' momenti.

COROLLARIO.

Quindi fatto $m = x + 1$, si troverà nel primo e terzo caso la somma de' momenti delle forze sfiancanti de' cunei fino alla mossa inclusivamente $= \frac{a(b+G)}{r} . \left(\frac{\text{cos.}\, x\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \right.$

$$\left. \frac{\text{cos.}(3x+2)\mu.\text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - r(x+1) + \frac{\text{cos.}(2x+2)\mu.\text{sen.}(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,2\mu} \right)$$

$$+ \frac{a\text{æ}}{r} . \left(\frac{\text{sen.}\,(3x+2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} + \frac{\text{sen.}\,x\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} \right.$$

$$\left. - \frac{\text{sen}^2.(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,2\mu} \right) = \frac{a(b+G)}{r} . \left(\frac{r\,.\,\text{sen.}\,(2x+1)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} + \frac{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} \right.$$ Prop. 7 Lib. I

$$\left. - \frac{r.\,\text{sen.}(4x+3)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} + \frac{r.\,\text{sen.}(2x+1)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} - r(x+1) + \frac{r.\,\text{sen.}(4x+4)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \right)$$

$$+ \frac{a\text{æ}}{r} . \left(\frac{r\,.\,\text{cos.}\,(2x+1)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} - \frac{r\,.\,\text{cos.}\,(4x+3)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} + \frac{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} - \right.$$

$\left. \frac{r\,.\,\text{cos.}\,(2x+1)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} - \frac{r^2}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} + \frac{r\,.\,\text{cos.}\,(4x+4)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \right)$; che ridotta diventerà $= \frac{a(b+G)}{r} . \left(\frac{r\,.\,\text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{r}{2}(2x+1) - \right.$

$$\left. \frac{r\,.\,\text{sen.}\,(4x+2)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} \right) + \frac{a\text{æ}}{r} \left(\frac{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{cos}^2.\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu} \right).$$

Ma nel secondo caso sarà la somma de' momenti delle forze sfiancanti de' cunei fino alla mossa uguale alla quantità suddetta insieme con $\frac{q(b+G)}{r} . \left(\frac{\text{cos.}\,x\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \right.$

$$\left. \frac{\text{cos.}\,(x+2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} \right) + \frac{q\text{æ}}{r} . \left(\frac{\text{sen.}\,(x+2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} \right.$$

$\left. - \frac{\text{sen.}\,x\mu \,.\, \text{sen.}\,(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} \right)$, ovvero insieme con $\frac{q(b+G)}{r}$.

$$\left(\frac{r\,.\,\text{sen.}\,(2x+1)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}+\frac{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}-\frac{r\,.\,\text{sen.}(2x+3)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}+\frac{r\,.\,\text{sen.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}\right)$$

$$+\frac{qx}{r}\,.\left(\frac{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}-\frac{r\,.\,\text{cos.}\,(2x+3)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}-\frac{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}+\frac{r\,.\,\text{cos.}\,(2x+1)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}\right),$$ o ancora con $\frac{q(b+G)}{r}\,.(r-\text{cos.}\,(2x+2)\mu)$ $+\frac{qx}{r}\,.\,\text{sen.}\,(2x+2)\mu$; e per conseguenza sarà nel caso medesimo la sopraccennata somma de' momenti $=\frac{a(b+G)}{r}\,.$

$$\left(\frac{r\,.\,\text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{r}{2}(2x+1)-\frac{r\,.\,\text{sen.}\,(4x+2)\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\right)+\frac{ax}{r}\,.$$

$$\left(\frac{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}{2\,.\,\text{sen.}\,\mu}-\frac{\text{cos.}^2\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\right)+\frac{q(b+G)}{r}\left(r-\text{cos.}\,(2x+2)\mu\right)$$

$$+\frac{qx}{r}\,.\,\text{sen.}\,(2x+2)\mu\,.$$

PROBLEMA 20. PROPOSIZIONE 20.

In un Arco a sesto acuto formato di quanti cunei si vogliano, trovare la somma de' momenti delle forze che tendono a rovesciare i pilastri dopo disarmate le centine.

Fig. VIII. Tav. III. Sia l' Arco a sesto acuto *ABC* formato da due mosse, dal serraglio, e da un numero x di cunei per parte: bisogna determinare la somma de' momenti delle forze che cercano rovesciare uno de' pilastri come *AW* d' intorno al punto estremo *W* della sua base.

Pertanto o il serraglio preme il cuneo laterale dalla parte *AW* quanto da esso è premuto, o lo preme di più, o finalmente lo preme meno. Nel primo caso poichè la somma de' momenti delle forze sfiancanti è $=\frac{a(b+G)}{r}\,.\left(\frac{r\,.\,\text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}\right.$ Corol. Prop. ant.

$$-\frac{r}{2}(2x+1)-\frac{r.\text{sen.}(4x+2)\mu}{2.\text{sen.}2\mu})+\frac{a\alpha}{r}(\frac{r.\cos.\mu}{2.\text{sen.}\mu}-\frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}2\mu})$$

egli è manifesto che se da questa quantità si sottragga il momento della spinta relativa della mossa, la quale sostiene il pilastro, si conseguirà nella differenza la somma de' momenti che operano contro il pilastro medesimo. Sia dunque il punto q centro di gravità della mossa, da cui si conduca la verticale qn, e si chiami Δ la retta $Qr = Qt$; laonde, essendo il raggio interiore $QA = b$, e la grossezza Ad del pilastro $= G$, sarà $Wn = dr = b + G - \Delta$. La spinta poi relativa della mossa è $= \frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}$, dunque il suo momento sarà $= (b + G - \Delta).\frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} = a(b+G).\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - a\Delta.\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}$; conseguentemente, sottratta questa quantità dalla prima, si troverà la ricercata somma de' momenti contro al pilastro $= a\Delta.\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a(b+G)}{r}(\frac{r}{2}(2x+1)+\frac{r.\text{sen.}(4x+2)\mu}{2.\text{sen.}2\mu})+\frac{a\alpha}{r}(\frac{r.\cos.\mu}{2.\text{sen.}\mu}-\frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}2\mu})$. Cor. 1 Prop. 13 di questo

Ma pel secondo caso in cui il serraglio preme il cuneo laterale più che da esso non è premuto, poichè la spinta relativa della mossa è $= q + \frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}$, sarà il suo momento $= (b+G-\Delta).(q+\frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}) = q(b+G) + a(b+G).\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - \Delta(q+\frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu})$; laddove la somma de' momenti delle forze sfiancanti riesce nel caso suddetto $= \frac{a(b+G)}{r}(\frac{r.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}-\frac{r}{2}(2x+1)-\frac{r.\text{sen.}(4x+2)\mu}{2.\text{sen.}2\mu}) + \frac{a\alpha}{r}(\frac{r.\cos.\mu}{2.\text{sen.}\mu}-\frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}2\mu})+\frac{q(b+G)}{r}.(r-\cos.(2x$ Luog. cit. Corol. Prop. ant.

$+2)\mu) + \frac{q\alpha}{r} . \text{sen.} (2x+2)\mu$; e però tolto da questa quantità il momento della spinta relativa della mossa, resteranno contro al pilastro stesso AW i momenti $\Delta(q + \frac{a . \text{sen.} (2x+1)\mu}{\text{sen.} \mu}) - \frac{a(b+G)}{r} . (\frac{r}{2} (2x+1) + \frac{r . \text{sen.} (4x+2)\mu}{2 . \text{sen.} 2\mu}) + \frac{a\alpha}{r} (\frac{r . \cos. \mu}{2 . \text{sen.} \mu} - \frac{\cos^2. (2x+1)\mu}{\text{sen.} 2\mu}) - \frac{q(b+G)}{r} . \cos. (2x+2)\mu + \frac{q\alpha}{r} . \text{sen.} (2x + 2)\mu$.

Sia finalmente la pressione del serraglio sul cuneo laterale minore della pressione del cuneo contro di esso. In questo terzo caso tutto procede secondo l' ordine del primo, con questa sola differenza, ch' essendosi provato, che nel caso terzo vi sono due forze *Dk Di* uguali all' eccesso delle pressioni de' cunei laterali al serraglio sulla pressione del serraglio, le quali spingono questo all' insù, ch' è quanto dire essere il serraglio spinto all' insù colla loro forza composta *Dl*, che nel primo caso non v' è, fa d' uopo tener conto ancora di essa forza. E perchè viene la forza *Dl* sostenuta dalle due sopraccentine a destra e a sinistra, vi sarà altra ed altra forza, da cui saranno premute; e però bisogna ritrovare il momento di quella che preme la sopraccentina dalla parte del pilastro *AW*, e aggiungerlo alla quantità somministrata dal caso primo, per avere tutti i momenti delle forze che dalla parte medesima cercano rovesciare il pilastro *AW*.

Prop. 13 di questo

Ora si passi alla Figura nona per non confondere l' ottava, e dal centro di gravità *D* del serraglio si tirino due linee perpendicolari alle sopraccentine, vale a dire dirette a' centri de' due Archi minori, che l' Arco composto comprendono: è manifesto che se si formi su di esse un parallelogrammo *Dulf*, che abbia *Dl* per diagonale, si conseguirà nella linea *Du* la forza sopraddetta; e quindi moltiplicandola per la perpendicolare condotta dal centro del moto sulla direzione *QD*, sarà dato il momento da aggiugnersi. E poichè l' angolo $BQA = (2x+2)\mu$, la $QB = b$, la $Bm = \frac{b}{r} . \text{sen.} (2x +$

Fig. IX. Tav. III.

$2)\mu$, la $Qm = \frac{b}{r}.\cos.(2x+2)\mu$, e in oltre la $Qt = \Delta$, sarà la $Bt = \Delta - b$; come poi la Bm alla BQ, così è la Bt alla BD, dunque $BD = \frac{r.(\Delta - b)}{\text{sen.}(2x+2)\mu}$; e però tutta la $Dm = \frac{r.(\Delta - b)}{\text{sen.}(2x+2)\mu} + \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+2)\mu = \frac{r^2\Delta - b.\cos^2.(2x+2)\mu}{r.\text{sen.}(2x+2)\mu}$; per conseguenza nel triangolo rettangolo DmQ essendo dati i cateti Dm Qm sarà data anche l' ipotenusa DQ. Per facilità di calcolo si faccia la $DQ = z$, la $Dm = y$, e le Dk Di restino come nella Prop. 13 di questo uguali a q. E perchè l' angolo IDB o BDK ovvero kDl è uguale all' angolo BQm, sarà come BQ a Qm così la Dk alla metà della Dl, ma sono date le BQ Qm Dk, dunque $Dl = \frac{2q}{r}.\cos.(2x+2)\mu$: in oltre essendo come la linea Dm alla DQ così la metà della Dl alla Du, s' avrà la forza $Du = \frac{zq}{yr}.\cos.(2x+2)\mu$, e così sarà determinata la forza superiore che preme la sopraccentina. Laonde ripassando alla Figura ottava si cerchi la perpendicolare condotta dal centro W del moto sulla linea che unisce i punti D Q, e si troverà $= \frac{y}{z}(b+G) + \frac{\text{æ}b}{zr}.\cos.(2x+2)\mu$; e però il momento di essa forza sarà $= \frac{q}{r}(b+G).\cos.(2x+2)\mu + \frac{\text{æ}bq}{yr^2}.\cos^2.(2x+2)\mu$; ma è $y = \frac{r^2\Delta - b.\cos^2.(2x+2)\mu}{r.\text{sen.}(2x+2)\mu}$; conseguentemente il momento medesimo sarà $= \frac{q}{r}(b+G).\cos.(2x+2)\mu + \frac{\text{æ}bq.\text{sen.}(2x+2)\mu.\cos^2.(2x+2)\mu}{r^3\Delta - br.\cos^2.(2x+2)\mu}$; quindi la somma de' momenti che cercano rovesciare il pilastro AW sarà nel terzo caso $= \frac{a\Delta.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a(b+G)}{r}.\left(\frac{r}{2}(2x\right.$

Fig. VIII. Tav. III.

$$+1) + \frac{r \,.\, \text{sen.}\,(4x+2)\mu}{2 \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}\Big) + \frac{a\alpha}{r} \,.\, \Big(\frac{r \,.\, \cos.\,\mu}{2 \,.\, \text{sen.}\,\mu} - \frac{\cos^2.\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}\Big)$$

$$+ \frac{q(b+G)}{r} \,.\, \cos.\,(2x+2)\mu + \frac{\alpha bq \,.\, \text{sen.}\,(2x+2)\mu \,.\, \cos^2.\,(2x+2)\mu}{r^3\Delta - br \,.\, \cos^2.\,(2x+2)\mu};$$

e così sarà risoluto il Problema in tutti i suoi casi.

Per ajuto della memoria si ripeterà, che in tutte e tre le formole, derivanti da' tre casi considerati nella proposizione, b dinota il raggio interiore di una e dell' altra parte dell' Arco composto, 2μ l' angolo al centro di un cuneo, $x+1$ il numero de' cunei da ciascuna parte, a il peso di un cuneo che può esprimersi anche per $\frac{(c^2-b^2)\mu}{r}$ quando si faccia il raggio esteriore $= c$, G la grossezza del pilastro, α la sua altezza, ma Δ è uguale alla Qt; ovvero essendo la distanza QM dal punto Q al centro di gravità di un cuneo $=$ $\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)} \,.\, \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$, e l' angolo $MQt = \mu$, sarà la Qt cioè la $\Delta = \frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)} \,.\, \frac{\text{sen.}\,\mu \,.\, \cos.\,\mu}{r\mu}$. Vi ha solo questa differenza ne' tre casi suddetti, che chiamata p la pressione del serraglio sopra un cuneo laterale, e diventando quella del cuneo sul serraglio $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$, si ha nel primo caso $p = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$; ma nel secondo $p > \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$ e $p - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} = q$; così nel terzo caso riesce $p < \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$ e $\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - p = q$.

Corol. 2 Prop. 9 Lib. I.

Corollario.

Si supponga infinito il numero de' cunei componenti una e l' altra parte dell' Arco composto. Sarà nel primo caso la somma de' momenti delle forze contro al pilastro $= a\Delta$.

sen. $2x\mu$

$\frac{\text{sen. } 2x\mu}{\mu} - \frac{a(b+G)}{r} . \left(rx + \frac{r . \text{sen. } 4x\mu}{4\mu}\right) + \frac{aa}{r}\left(\frac{r^2}{2\mu} - \frac{\cos^2 . \, 2x\mu}{2\mu}\right)$.

Ora si dica la saetta Bm dell' Arco $= b$, e la semicorda $Am = e$: e perchè nel triangolo rettangolo BQm la $BQ = b$, e l' angolo $BQA = (2x + 2)\mu$, che in questa ipotesi si fa $= 2x\mu$ come l' arco $AB = \frac{2bx\mu}{r}$, sarà la $Bm = \frac{b}{r}$. sen. $2x\mu$, e la $Qm = \frac{b}{r}$. cos. $2x\mu$; e però la rimanente $Am = b - \frac{b}{r}$. cos. $2x\mu$; laonde $\frac{b}{r}$. sen. $2x\mu = b$, e $b - \frac{b}{r}$. cos. $2x\mu = e$; quindi sen. $2x\mu = \frac{br}{b}$, $x = \frac{r.AB}{2b\mu}$, e cos. $2x\mu = \frac{(b-e)r}{b}$. E poichè r. sen. $4x\mu =$ 2. sen. $2x\mu$. cos. $2x\mu$, sarà r. sen. $4x\mu = \frac{2br}{b} . \frac{(b-e)r}{b} = \frac{2br^2(b-e)}{b^2}$; parimenti si troverà $r^2 - \cos^2 . 2x\mu = \text{sen}^2 . 2x\mu = \frac{b^2r^2}{b^2}$. Sicchè sostituendo questi valori, e $\frac{(c^2-b^2)\mu}{r}$ in luogo di a, e $\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}$ in luogo di Δ, sarà la somma de' momenti $= (c^2-b^2) . \left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)} . \frac{b}{b} - \frac{b+G}{2b^2} . \left(b . AB + b(b-e)\right) + \frac{xb^2}{2b^2}\right)$; e in questo caso sarà $p = \frac{a . \text{sen. } 2x\mu}{\text{sen. } 2\mu} = \frac{(c^2-b^2)\mu}{2r\mu} . \frac{br}{b} = \frac{(c^2-b^2)b}{2b}$.

Ma quando accada il secondo caso e sia $p - \frac{a.\text{sen. } 2x\mu}{\text{sen. } 2\mu} = q$, ovvero $q = p - \frac{(c^2-b^2)b}{2b}$, riuscirà, sostituendo, la somma de' momenti contro al pilastro $= \frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)} . q + (c^2-b^2) . \left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)} . \frac{b}{b} - \frac{b+G}{2b^2} . \left(b . AB + b(b-e) + \frac{xb^2}{2b^2}\right)\right)$

$-\frac{q.(b+G).(b-e)}{b}+\frac{\text{æ}qb}{b}$. Per ultimo se si verificasse il terzo caso e fosse $\frac{a.\text{sen. }2x\mu}{\text{sen. }2\mu}-p=q$, o $q=\frac{(c^2-b^2)b}{2b}-p$ sarà la somma di essi momenti nella supposizione de' cunei infinitesimi $=(c^2-b^2).\left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.\frac{b}{b}-\frac{b+G}{2b^2}.\left(b.AB+b(b-e)+\frac{\text{æ}b^2}{2b^2}\right)+\frac{q.(b+G).(b-e)}{b}+\left(\text{æ}bq.\frac{br}{b}.\frac{(b-e)^2r^2}{b^2}\right)\right):\left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.r^3-br.\frac{(b-e)^2.r^2}{b^2}\right)=(c^2-b^2).\left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.\frac{b}{b}-\frac{b+G}{2b^2}.\left(b.AB+b(b-e)+\frac{\text{æ}b^2}{2b^2}\right)+\frac{q(b+G).(b-e)}{b}+\left(\text{æ}qb.(b-e)^2\right)\right):\left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.b^2-b.(b-e)^2\right)$.

LEMMA.

Se φ sia un angolo qualsivoglia, non però maggiore del quadrante, e si prenda la formola $\frac{\varphi.\cos.\varphi}{r.\text{sen. }\varphi}$; dico che quanto più piccolo è l' angolo φ, tanto si fa maggiore il valore della formola medesima.

Sia π un altro angolo minore di φ: dico che $\frac{\pi.\cos.\pi}{r.\text{sen. }\pi}$ è maggiore di $\frac{\varphi.\cos.\varphi}{r.\text{sen. }\varphi}$.

E poichè l' angolo minore al maggiore ha maggior ragione della tangente dell' angolo minore alla tangente dell' angolo maggiore, avrà $\pi:\varphi>\text{tan. }\pi:\text{tan. }\varphi$; e però $\frac{\pi}{\text{tan. }\pi}>\frac{\varphi}{\text{tan. }\varphi}$; e $\frac{r\pi}{r.\text{tan. }\pi}>\frac{r\varphi}{r.\text{tan. }\varphi}$: ma $\frac{r}{\text{tan. }\pi}=\frac{\cos.\pi}{\text{sen. }\pi}$, e $\frac{r}{\text{tan. }\varphi}$

$= \frac{\cos.\varphi}{\text{sen.}\,\varphi}$; dunque ſarà ancora $\frac{\pi.\cos.\pi}{r.\text{sen.}\,\pi} > \frac{\varphi.\cos.\varphi}{r.\text{sen.}\,\varphi}$; il che ecc.

TEOREMA. PROPOSIZIONE 21.

In un Arco intero, quanto maggiore è il numero de' cunei ne' quali è l' Arco diviſo, tutte l' altre coſe pari, tanto maggiore ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri.

Si faccia il raggio interiore $= b$, l' eſteriore $= c$, l' altezza del pilaſtro $= \alpha$, la ſua groſſezza $= G$, 2μ l' angolo al centro di un cuneo, e ſia il quadrante $AZ = Q$: per le coſe dimoſtrate ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri $= (c^2 - b^2).\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)} . \frac{\cos.\mu}{r} + \frac{\alpha\mu.\cos.\mu}{2r.\text{sen.}\,\mu} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right) = \frac{(2c^2 + 2bc + 2b^2).(c^2 - b^2)}{3(b+c)} . \frac{\cos.\mu}{r} + \frac{\alpha(c^2 - b^2)}{2} . \frac{\mu.\cos.\mu}{r.\text{sen.}\,\mu} - \frac{(c^2 - b^2).(G+b)Q}{2b}$. Ora di queſto trinomio l' ultimo termine è ſempre lo ſteſſo qualunque ſia l' angolo 2μ, ovvero qualunque ſia il numero de' cunei che l' Arco a tutto ſeſto coſtituiſcono; ma il ſecondo termine all' incontro ſi fa pel lemma antecedente tanto più grande quant' è minore l' angolo μ; e ſimilmente il primo perchè tanto più creſce il valore di $\frac{\cos.\mu}{r}$ quanto minore è μ. I due primi termini ſono poi uniti col ſegno poſitivo, e il ſolo terzo è del ſegno negativo affetto; dunque la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri creſce tanto più quanto minore è l' angolo μ o il ſuo doppio 2μ, cioè l' angolo al centro de' cunei: ma quando gli angoli al centro de' cunei ſono minori, in un maggior numero di cunei vien l' Arco intero diviſo; laonde finalmente quanto maggiore è il numero de' cunei, tutte l' altre coſe pari, tanto maggiore ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri; il che ecc.

Fig. XIII. Tav. II.

Prop. 17 di queſto

COROLLARIO.

Dunque quando l' Arco intero è diviso in un numero infinito di cunei massima è la somma de' momenti contro a' pilastri.

SCOLIO.

Questo Teorema merita per la sua novità qualche osservazione. Io ne aveva dubbio molto prima di scuoprir l' ordine con cui procedono le cose negli Archi circolari. Quando l' Arco intero, diceva, è composto di un solo pezzo e senza centina, i pilastri non soffrono alcuna forza che tenda a rovesciarli, ma anzi sono dal peso dell' Arco rattenuti; all' incontro se il si divida in cunei, vengono essi da questo peso sollecitati; la natura poi non procede per isbalzi ma ordinatamente; dunque il numero de' cunei in cui è l' Arco diviso dee entrare come elemento nel calcolo de' momenti delle spinte contro a' pilastri, e una maggior o minor divisione debbe far variare la quantità de' momenti medesimi. Questa riflessione, che pure non è che una ragionevole riflessione, non una dimostrazione, l' abbiamo verificata ne' calcoli di questo Libro. Potrebbe però alcuno dubitare, che, posto vero l' enunciato Teorema, diventi la somma de' momenti contro a' pilastri infinita, quando infinito sia il numero de' cunei che compongono l' Arco intero, ma non è così, e si è dimostrato esser tale la natura della formola esprimente essa somma de' momenti, che nel caso che sia 2μ *infinitesimo e infinito il numero de' cunei, si riduce necessariamente uguale alla quantità finita* $(c^2 - b^2)$.

Corol. 1. Prop. 17 di questo

$$\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)} + \frac{\alpha}{2} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right).$$

Fine del Libro terzo.

LIBRO QUARTO

DELLA PRESSIONE DE' CUNEI SULLA CENTINA, E DE' PUNTI D' EQUILIBRIO IN UN ARCO DOTATO DI QUALSIVOGLIA CURVATURA.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

DAta in un Arco di qualsivoglia curvatura, e di uniforme grossezza, l' equazione alla curva interiore, ritrovare quella alla curva esteriore.

Sia data nell' Arco *BQTSAO* l' equazione alla curva interiore *OAS*: si ricerca l' equazione alla curva esteriore *BQT* dell' Arco stesso, supposta uniforme la grossezza dell' Arco. Fig. I. Tav. IV.

Sia *AM* la saetta dell' Arco, e si ordini qualunque retta *ND* ad essa perpendicolare, poi si faccia l' ascissa *AN* della curva interiore $= x$, l' ordinata $ND = y$; e condotta dal punto *D* la *DH* perpendicolare alla curva *AD*, si chiami la grossezza uniforme *DH* dell' Arco $= g$. Si tiri dipoi la *CL* infinitamente prossima a *ND*, la *RDE* parallela ad *AM*, e la *HRF* parallela a *ND*; indi si dica l' ascissa *AF* della curva esteriore $= z$, e l' ordinata $FH = u$; sarà certamente la $NL = DE = dx$, la $CE = dy$, l' archetto $DC = \surd(dx^2 + dy^2)$, e sia anche per brevità di calcolo $= ds$; finalmente si prolunghi la *HD* finchè incontri la *AM* in *I*.

E poichè il triangolo *CDE* è simile al triangolo *DNI*, e il triangolo *DNI* all' altro *DHR*, sarà il triangolo *CDE* simile al triangolo *DHR*; e perciò come $CD : CE :: HD : DR$, ovvero $ds : dy :: g : DR = \frac{gdy}{ds} = FN$; quindi la $AF = AN - FN$ darà l' equazione prima (I) $z = x - \frac{gdy}{ds}$. Di nuovo per la stessa ſimilitudine de' triangoli CDE HDR come $CD:DE::DH:HR$, o $ds:dx::g:\frac{gdx}{ds}=HR$; ma $FH=FR+RH$, dunque s' avrà queſta ſeconda equazione $(II)\ u=y+\frac{gdx}{ds}$. Data pertanto l' equazione alla curva interiore OAS (ſia eſſa algebraica o traſcendente) ſarà data ancora la relazione tra x y o tra le loro fluſſioni; onde ſi potranno determinare per x y i valori di $\frac{gdy}{ds}$ e $\frac{gdx}{ds}$, poi ſoſtituirli nell' equazioni (I) e (II), e così conſeguire due nuove equazioni: ma è data altresì come abbiamo detto la relazione tra x e y; date dunque tre equazioni per quattro incognite x y u z ſi debbe cercare di eliminare a forza di calcolo le due x y per reſtare con un' equazione ove vi ſieno ſolamente le due u z, che ſarà l' equazione alla curva eſteriore BQT; il che ecc.

Corollario.

Sia propoſto per eſempio di ritrovare la curva eſteriore BQT di un Arco circolare o di un Arco, del quale la curvatura interiore OAS ſia circonferenza di cerchio del raggio $ID=a$. Eſſendo dunque $y=\surd(2ax-x^2)$, ſarà $dy=\frac{dx(a-x)}{\surd(2ax-x^2)}$, $ds=\surd(dx^2+dy^2)=\surd\left(dx^2+\frac{dx^2(a-x)^2}{2ax-x^2}\right)=\frac{adx}{\surd(2ax-x^2)}$; e però $\frac{gdy}{ds}=\frac{gdx(a-x)}{\surd(2ax-x^2)}:\frac{adx}{\surd(2ax-x^2)}=\frac{g(a-x)}{a}$, e $\frac{gdx}{ds}=gdx:\frac{adx}{\surd(2ax-x^2)}=\frac{g}{a}\surd(2ax-x^2)$; laonde l' equazioni (I) e (II) ſi cangieranno in queſte due altre $(III)\ z=x-\frac{g(a-x)}{a}$, $(IV)\ u=y+\frac{g}{a}\surd(2ax-x^2)$. Dall' equazione (III) ſi ricava $z=\frac{ax-ag+gx}{a}$, e $x=\frac{a(z+g)}{a+g}$; e però $2a-x=2a-$

$\frac{az + ag}{a + g} = \frac{2a^2 + ag - az}{a + g} = \frac{a}{a + g} . (2a + g - z)$; onde $2ax - x^2 = x(2a - x) = \frac{a}{a+g}(z + g) . \frac{a}{a+g} . (2a + g - z) = \frac{a^2}{(a+g)^2} . (2az + gz - z^2 + 2ag + g^2 - gz) = \frac{a^2}{(a+g)^2} . (2az - z^2 + 2ag + g^2)$. In oltre per l' equazione (*IV*), sostituendo in luogo di y la quantità equivalente $\sqrt{(2ax - x^2)}$, s' avrà $u = \sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{g}{a}\sqrt{(2ax - x^2)} = \frac{a+g}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$; e quadrando sarà $u^2 = \frac{(a+g)^2}{a^2}(2ax - x^2)$: ma s' è superiormente dimostrato che $2ax - x^2 = \frac{a^2}{(a+g)^2} . (2az - z^2 + 2ag + g^2)$, dunque $u^2 = \frac{(a+g)^2}{a^2} . \frac{a^2}{(a+g)^2} . (2az - z^2 + 2ag + g^2) = 2az - z^2 + 2ag + g^2$, e trasportando, $u^2 - 2az + z^2 = 2ag + g^2$, ch' è un' equazione data solamente per l' incognite u z, o per le coordinate della curva esteriore BQT. Perchè poi aggiugnendo a^2 nell' uno e nell' altro membro dell' equazione si ha $u^2 + a^2 - 2az + z^2 = a^2 + 2ag + g^2$, sarà $u^2 + (a - z)^2 = (a + g^2)$; per la qual cosa fatta $AQ = g$, sarà $IQ = a + g$, la FI poi è $= IA - AF = a - z$, e $FH = u$; laonde sarà $(FH)^2 + (FI)^2 = (IQ)^2$; ma $(FH)^2 + (FI)^2$ è ancora uguale a $(IH)^2$, e però $(IH)^2 = (IQ)^2$, e $IH = IQ$; e così sempre si proverà; per conseguenza la curva esteriore BQT sarà la circonferenza del cerchio, che ha IQ per raggio, e lo stesso centro I della circonferenza interiore; come è anche noto per la Geometria.

S C O L I O.

Da questo semplice esempio e da altri, che può ognuno a piacimento proporsi, apparisce la difficoltà di eliminare le incognite x y *per avere un' equazione in cui vi restino le due sole* u z. *Alle volte riesce il calcolo così implicato, che non è possibile di condurlo* *a termine, e richiede ſempre ſomma fatica e induſtria nel calcolatore. Tuttavolta queſta difficoltà non apporta alcun diſcapito alle Teorie che ſiamo per preſentare, perchè ſi farà ſempre uſo della curva interiore dell' Arco, non mai dell' eſteriore. Per formarſi poi una qualche idea di eſſa curva eſteriore relativamente all' interiore, baſterà avvertire che sì l' una che l' altra naſcono dalla medeſima evoluta, e che i di loro raggi oſculatori differiſcono ſempre di una retta coſtante, ch' è appunto la groſſezza dell' Arco.*

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Se fra i pilaſtri di un Arco dotato di qualſivoglia curvatura interiore e di uniforme groſſezza, ſia meſſa la centina, poi ſu di eſſa s' intendano collocati i cunei da una parte fino a qual punto ſi voglia; determinare la preſſione di uno qualunque de' cunei ſulla centina, ſuppoſti però i cunei infiniteſimi di grandezza.

Fig. II. Tav. IV. Tra i pilaſtri di un Arco ſia poſta la centina $AB\Omega$ di qualſivoglia incurvamento, poi s' intendano collocati ſulla centina da una parte i cunei infiniteſimi di uniforme groſſezza ſino in B; biſogna ritrovare la preſſione del cuneo $opzn$ ſu di eſſa.

Si ſupponga diviſa la parte riempiuta dell' Arco ne' ſuoi cunei infiniteſimi ſopra le baſi uguali BC CD DE EL ecc...., e i primi quattro ſuperiori ſieno quelli ſulle baſi BC CD DE EL, e alla curva Bz ſi tirino dai punti B C D E L ecc..... n z i raggi oſculatori. E perchè i quattro archetti contigui BC CD DE EL ſono infiniteſimi, converranno i raggi oſculatori BW CW DW EW LW nello ſteſſo punto W; ma i raggi oſculatori $n\AE$ $z\AE$ condotti dalle eſtremità n z della baſe del cuneo $opzn$ concorrano inſieme nel punto $\AE$.

Si prendano pertanto i centri di gravità G H I K ecc.... q de' cunei, ſi congiungano le rette GH HI IK ecc., e ſi conducano le verticali GO HS IZ Kb ecc..... qu proporzionali alle riſpettive gravità de' cunei, poi ſi compia il parallelogrammo

rallelogrammo *GMON*: esprimerà *GN* la pressione del primo cuneo superiore sulla centina, e *GM* la sua spinta relativa sul secondo. Quindi fatta *HP* uguale e per diritto a *GM* si termino i parallelogrammi *HPTS HVTX*, e dinoterà *HX* la pressione del secondo cuneo sulla centina, come *HV* la spinta relativa sul terzo cuneo. Similmente presa *IY* uguale e per diritto alla *HV* e compiuti i parallelogrammi *IYaZ Ibad*, verrà dalla *Id* espressa la pressione del terzo cuneo sulla centina, e dalla *Ib* la spinta relativa sul quarto. E conducendo di nuovo alle basi de' susseguenti cunei i raggi osculatori, e così continuando ad operare fino al cuneo *opzn* si perverrà a conseguire la sua pressione sulla centina. Prop. 2. Lib. I. Corol 1 Prop. cit.

Sia però *qr* la spinta relativa del cuneo immediate superiore a *opzn* su di esso, e tirata *qy* perpendicolare alla commessura inferiore *pz*, si compiano i due nuovi parallelogrammi *qrku qykt* per ritrovare la pressione *qt* di *opzn* sulla centina: e si avverta che siccome le direzioni *GM HV Ib* ecc. delle spinte relative sono respettivamente perpendicolari alle commessure superiori de' cunei premuti, così anche la direzione *lqr* della spinta relativa del cuneo superiormente contiguo a *opzn* dee essere necessariamente perpendicolare alla commessura *on*.

Ora dai punti *P Y* ecc..... *r* si conducano le linee *Pg Vf* ecc. ....*rs* parallele alle *HI IK* ecc......*qy* finchè incontrino le linee rette *WH WI* ecc........*Æq* ne' punti *f g* ecc. ....*s*, e si compiano ancora i parallelogrammi *HQSR IcZe* ecc. *qεuφ*: esprimeranno le *HR Ie* ecc....... *qφ* le pressioni che sarebbero esercitate da' respettivi cunei sulla centina se non avessero il gravamento de' superiori, e se ciascuno di essi fosse il primo in ordine; così le *HQ Ic* ecc..... *qε* le pressioni che senza il suddetto gravamento eserciterebbero su' cunei immediate inferiori. Ed essendo sì li due angoli *PHI IHG*, che li due *IHG DWC* uguali a due retti, saranno gli angoli *PHI IHG* uguali agli angoli *IHG DWC*; e tolto il comune *IHG*, resterà l' angolo *PHI*, ovvero *HPg*, uguale all' angolo *DWC*: in simil guisa si proverà l' angolo *IYf* uguale all' angolo *EWD*, e così in progresso fino all' angolo *qrs* che sarà uguale all' angolo *zÆn*. Di nuovo l' angolo *IHW* è uguale all' angolo *GHW*; ma perchè l' angolo *IHW* è uguale all' interiore *PgH*, e l' angolo *GHW* all' opposto al vertice *PHg*, sarà l' angolo *PgH* uguale all' angolo *PHg*; dunque la *PH* è uguale alla *Pg*; l' angolo poi *HPg* si è provato uguale all' angolo *DWC*, laonde il triangolo equicrure *PgH* sarà simile al triangolo equicrure *WDC*. Nello stesso modo si proverà la *YI* uguale alla *Yf*, e il triangolo isoscele *YfI* simile al triangolo isoscele *WED*, e così successivamente; sicchè la *qr* sarà uguale alla *rs*, e il triangolo *rqs* simile al triangolo *zÆn*.

E poichè la *PH* è parallela alla *TS*, la *Hg* alla *Si*, e la *Pg* alla *Ti*, sarà il triangolo *PgH* simile al triangolo *TiS*; ma è ancora la *PH* uguale alla *TS*, come lati opposti del parallelogrammo *HPTS*, dunque sarà la *Hg* uguale alla *Si*, o alla *XR*; e però *HX* è uguale alla differenza tra le *HR Hg*. La *HR* poi dinota la pressione ch' eserciterebbe sulla centina il secondo cuneo se non fosse gravato dal superiore, siccome *HX* dinota la pressione che difatto esso cuneo vi esercita; laonde il peso del primo cuneo produce l' effetto di togliere dalla natural pressione del secondo cuneo sulla centina una quantità uguale a *Hg*. Nella stessa maniera si dimostrerà che la *Id* è uguale alla differenza tra le *Ie If*, e che per conseguenza il peso de' due cunei superiori toglie dalla natural pressione del terzo cuneo sulla centina una quantità uguale a *If*; e così si potrà dire de' susseguenti cunei fino al cuneo *opzn*, dove sarà la *qt* uguale alla differenza tra le *qφ qs*; onde il peso di tutti i cunei superiori al cuneo *opzn* fa l' effetto di diminuire la sua natural pressione *qφ* sulla centina di una quantità uguale a *qs*.

E perchè i triangoli *PgH TiS* sono uguali, sarà la *Ti* o la *VQ* uguale alla *Pg*, e però sarà la *HV* uguale alla somma delle *Pg HQ*; la *Pg* poi è uguale alla *PH* cioè alla *GM*; laonde la spinta relativa *HV* con cui il secondo cuneo preme il terzo è uguale alla somma delle forze *GM HQ*, delle quali *HQ* è appunto la forza che eserciterebbe il secondo cuneo sul terzo senza il sopraccarico del primo, e *GM* la pressione del primo sul secondo. Similmente essendo *am* o *bc* uguale alla *YI*, cioè alla *HV*, sarà tutta la *Ib* uguale alla somma delle *HV Ic*; ma s' è dimostrata la *HV* uguale alla somma delle *GM HQ*, dunque la spinta relativa *Ib* del terzo cuneo sul quarto è uguale alla somma delle pressioni *GM HQ Ic* ch' eserciterebbe riſpettivamente ciaſcun de' tre primi cunei ſull' inferiore, ſe, come il primo, non foſſero anche gli altri due da' ſuperiori aggravati: e così progredendo ſi proverà finalmente, che la ſpinta relativa qr, che ſoffre il cuneo $opzn$ dal ſuo ſuperiore, è uguale alla ſomma delle preſſioni, che tutti i cunei allo $opzn$ ſuperiori eſerciterebbero riſpettivamente ſugl' inferiori, ſe ognuno foſſe il primo in ordine.

Premeſſe queſte coſe ſi paſſi alla generale riſoluzione del problema. Si tiri dunque dal punto B la $B\Sigma$ parallela alla ſaetta dell' Arco, e dai punti n z le $n\pi$ $z\delta$ parallele alla corda; così gli angoli ai punti π δ riuſciranno retti. Si ponga poi l' aſciſſa $B\pi = x$, l' ordinata $n\pi = y$, e la relazione tra l' incognite x y ſarà data, perchè ſi ſuppone data la natura della curva $AB\Omega$: ſarà poi $\pi\delta = dx = n\mu$, e $z\mu = dy$, ma l' archetto $nz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſi faccia $= ds$; e ſi prenda la formola del raggio oſculatore dove ds ſia coſtante per avere $n\text{Æ} = z\text{Æ} = \frac{dyds}{ddx}$; e però, fatta la groſſezza uniforme dell' Arco $= g$, ſarà la $o\text{Æ} = p\text{Æ} = \frac{dyds}{ddx} + g$.

E perchè ſta $n\text{Æ} : o\text{Æ} :: nz : op$, o ſia $\frac{dyds}{ddx} : \frac{dyds}{ddx} + g :: ds : op$, ſarà $op = ds + \frac{gddx}{dy}$; e però ſarà il ſettore $\text{Æ}op = \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) \cdot \left(\frac{ds}{2} + \frac{gddx}{2dy}\right)$, ſiccome l' altro ſettore $\text{Æ}nz$ è $= \frac{dyds}{ddx} \cdot \frac{ds}{2}$; laonde lo ſpazio rimanente $opzn = \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) \cdot \left(\frac{ds}{2} + \frac{gddx}{2dy}\right) - \frac{dyds}{ddx} \cdot \frac{ds}{2} = \frac{dyds^2}{2ddx} + \frac{gds}{2} + \frac{gds}{2} + \frac{g^2ddx}{2dy} - \frac{dyds^2}{2ddx} = gds + \frac{g^2ddx}{2dy}$: ma collo ſpazio $opzn$ ſi può eſprimere la gravità del cuneo $opzn$, che ſi è ancora ſuppoſta proporzionale alla qu, dunque $qu = gds + \frac{g^2ddx}{2dy}$. E poichè la $n\mu$ è parallela alla qu, e la nz alla $q\varepsilon$ (eſſendo verticali amendue le prime ret- Dom. V. Lib. I te, e amendue le seconde perpendicolari al raggio osculatore $\text{Æ}zp$), sarà l' angolo $zn\mu$ uguale all' angolo εqu; ma ancora l' angolo $q\varepsilon u$, supplemento a due retti dell' angolo $\varepsilon q\text{Æ}$, non differendo dall' angolo retto che di una quantità infinitesima, è uguale all' angolo retto $n\mu z$; dunque il triangolo $q\varepsilon u$ è simile al triangolo $n\mu z$, e sarà come $nz : n\mu :: qu : q\varepsilon$, o sostituendo $ds : dx :: gds + \frac{g^2 ddx}{2dy} : q\varepsilon = gdx + \frac{g^2 dxddx}{2dsdy}$: perchè poi ds è costante e $ds^2 = dx^2 + dy^2$, sarà differenziando $dxddx + dyddy = 0$, e $dxddx = - dyddy$; quindi $q\varepsilon = gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}$.

In simil guisa essendo $nz : z\mu :: qu : \varepsilon u$, o $ds : dy :: gds + \frac{g^2 ddx}{2dy} : \varepsilon u$, si conseguirà $\varepsilon u = q\varphi = gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$.

Per la qual cosa essendosi ritrovato, che la pressione $q\varepsilon$ che eserciterebbe un cuneo $opzn$ sull' inferiore, se non avesse egli il sopraccarico de' superiori, è $= gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}$, sarà la somma di dette pressioni da B fino al cuneo medesimo $opzn = \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$; ma a questa somma si è di sopra dimostrata uguale la spinta relativa qr del cuneo superiore allo $opzn$, dunque $qr = \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$: e preso l' integrale nel caso di ds costante, sarà $qr = gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$ (A è una costante finita ch' è facile a determinarsi avvertendo che quando l' ascissa x sia $= 0$, la sopraddetta somma qr delle pressioni debbe diventare uguale all' infinitesima GM cioè uguale a zero); laonde essendo il triangolo $\text{Æ}nz$ simile al triangolo rsq, starà come $\text{Æ}n : nz :: qr : qs$, ovvero $\frac{dyds}{ddx} : ds :: gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A : qs$;

dunque la $qs = \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2ddx}{2ds} + \frac{Addx}{dy}$. Per fine essendosi provata la reale pressione qt del cuneo $opzn$ sulla centina uguale alla differenza tra la pressione $q\varphi$, ch' ei eserciterebbe senza il carico de' superiori, e la qs, sarà detta pressione qt $= gdy + \frac{g^2ddx}{2ds} - \frac{gxddx}{dy} + \frac{g^2ddx}{2ds} - \frac{Addx}{dy}$, e riducendo $qt =$ $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$; il che bisognava fare.

SCOLIO.

E' manifesto, che dal carico de' cunei superiori sugl' inferiori vengono prodotte le forze Hg If ecc..... qs *che cercano di allontanare i cunei dalla centina, le quali se saranno sempre minori delle pressioni* HR Ie ecc....... qφ, *ch' eserciterebbero rispettivamente i cunei se non fossero da' superiori aggravati, lascieranno in ogni cuneo un residuo di forza che sarà impiegata a premere la centina; di modo che tutti i cunei dell' Arco dal punto* B *all' impostatura* A *premeranno realmente la centinatura sottostante. Ma se si facessero maggiori, le pressioni diventerebbero negative, ovvero da quel luogo in poi i cunei sfiancherebbero, nè sussisterebbe l' Arco senza le sopraccentine. Negli Archi può accadere ora uno ed ora l' altro di questi casi secondo la natura del loro incurvamento, e le dimensioni di cui sono forniti. Intanto si osservi che le soprammentovate linee* Hg If ecc....... *sono ne' primi cunei infinitesime del secondo ordine, perchè le* PH YI ecc......*sono infinitesime del primo; ma quando l' arco* Bn *diventa finito, essendo la* qr, *cioè la somma delle* GM HQ Ic ecc...., *una quantità finita, la* qs *diventa infinitesima del primo ordine, come lo è ancora la* qφ.

COROLLARIO I.

Se la tangente al vertice B dell' ascisse fosse parallela all' ordinate, è manifesto, per le cose che si dimostrano nel calcolo differenziale, che tanto la ragione di dy a dx, che la ragione di ds a dx nel punto B, è quella che ha la quantità infinita alla finita; e che ancora $ds = dy$: dunque nel punto B, cioè quando $x = 0$, sarà $ds = dy$, e $\frac{-g^2 dy}{2ds} = -\frac{g^2}{2}$; ma nel caso in cui $x = 0$, debbe essere $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = 0$; e però sarà $-\frac{g^2}{2} + A = 0$, e $A = \frac{g^2}{2}$; conseguentemente la pressione reale del cuneo $opzn$ sulla centina, quando la tangente al punto B sia parallela all' ordinate, diverrà $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$.

Corollario 2.

La spinta relativa che soffre il cuneo $opzn$ dal suo immediate superiore, vale a dire la qr, sarà $= gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$, dove A, come abbiamo detto, è una quantità costante, che si determina facendo nel caso di $x = 0$, la spinta suddetta pure $= 0$; laonde data l' equazione alla curva interiore $AB\Omega$, o la relazione tra x y, si potrà ritrovare la pressione soprammentovata per ogni qualunque punto n. Se poi la tangente al punto B fosse parallela all' ordinate, allora essendo $A = \frac{g^2}{2}$, riuscirà questa spinta $= gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + \frac{g^2}{2}$.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Poste le cose come nell' antecedente, e supposta una forza esteriore uguale a Q la quale prema il primo cuneo per una direzione perpendicolare alla commessura superiore; ritrovare la pressione esercitata da qualsivoglia cuneo infinitesimo sulla centina.

Si faccia la Figura e costruzione dell' antecedente colla sola differenza di prendere la *HP* non uguale alla sola pressione *GM* del primo cuneo sul secondo, come colà s' è fatto, ma alla *GM* insieme colla forza *Q*, che si suppone premere la commessura superiore *FB* del primo cuneo per una direzione ad essa *FB* perpendicolare. E qui si avvertirà, che siccome il peso del cuneo *FC* vien espresso dallo spazio *FC*, così per *Q* si dee intendere certa superficie che collo spazio *FC* sia in quella proporzione che ha la forza esteriore premente il primo cuneo alla rispettiva gravità di lui. Giugnendo pertanto colla costruzione sino al cuneo *opzn*, sia *qr* la forza con cui è egli premuto dal superiore contiguo; e il resto come nella citata proposizione. Fig. II. Tav. IV.

Si proverà similmente essere la pressione *HX* del secondo cuneo sulla centina uguale alla differenza delle *HR Hg*, la pressione *Id* del terzo cuneo uguale alla differenza delle *Ie If*, e così successivamente; di modo che la pressione del cuneo *opzn* sarà uguale alla differenza delle $q\varphi$ qs, esprimendo *HR Ie* ecc.... $q\varphi$ le pressioni, che sarebbero esercitate da' cunei sulla centina senza il carico de' superiori, e se ognuno fosse il primo in ordine.

E' chiaro ancora, ch' essendo la *PH*, o la forza con cui il primo cuneo preme il secondo, uguale a $Q+GM$, sarà pure $Pg = Q+GM$. La *HV* poi o la *IY* è uguale alla somma delle *Pg HQ*, dunque la spinta relativa *IY* del secondo cuneo sul terzo è $= Q + GM + HQ$. Allo stesso modo si dimostrerà che la spinta relativa del terzo cuneo sul quarto è $= Q + GM + HQ + Ic$, e così successivamente; laonde la spinta relativa *qr*, che soffre il cuneo *opzn* dal superiore contiguo, è uguale alla quantità *Q* insieme colle pressioni *GM HQ Ic* ecc.... fino ad esso *opzn*, che ogni cuneo eserciterebbe sull' inferiore senza il gravamento de' superiori.

Sicchè chiamata, come nell' antecedente, la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la grossezza uniforme dell' Arco $= g$, si troverà la superficie del cuneo *opzn*, o il suo peso, o vogliamo dire la $qu = gds + \frac{g^2 ddx}{2dy}$; la pressione $q\varphi$ che detto cuneo eserciterebbe sulla centina senza il carico de' superiori $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$; e la pressione $q\varepsilon$ che in simil caso sarebbe esercitata sull' inferiore contiguo $= gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}$; laonde per le cose dimostrate sarà la $qr = Q + \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$; e preso l' integrale nell' ipotesi di ds costante, sarà $qr = Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$ (A è la costante che si aggiugne all' integrale, e ch' è facile a determinarsi, perchè nel punto B, o quando $x = 0$, la spinta relativa qr diventa $= Q$) : ma come $\mathcal{E}n : nz :: qr : qs$, dunque $\frac{dyds}{ddx} : ds :: Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A : qs = \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2 ddx}{2ds} + (A + Q)\frac{ddx}{dy}$; e per conseguenza la ricercata reale pressione del cuneo $opzn$ sulla centinatura, che debbe essere uguale a $q\varphi - qs$, diventerà $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{gxddx}{dy} + \frac{g^2 ddx}{2ds} - (A + Q) . \frac{ddx}{dy}$ $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - (A + Q)\frac{ddx}{dy}$; il che ecc.

COROLLARIO.

E però la spinta relativa del cuneo superiormente contiguo allo $opzn$, cioè la qr, è $= Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$, dove A si determina facendo la suddetta spinta $qr = Q$ nel caso di $x = 0$.

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Se fra i pilastri sia messa una centina dotata di quell' incurvamento interiore, che debbe avere l' Arco di uniforme grossezza, poi sienvi collocati sopra da una parte i cunei fino a un un certo determinato luogo; si domanda il punto d' equilibrio, quando vi sia, cioè il punto a cui corrisponde un cuneo che nè preme nè sfianca.

Sia la centina $AB\Omega$ di qualsivoglia curvatura collocata tra i pilastri di un Arco, e vi sieno adattati sopra i cunei fino in B: bisogna ritrovare il punto d' equilibrio, quando vi sia, o un punto n, dove il cuneo corrispondente $opzn$ nè prema la centina nè sfianchi. Fig. II. Tav. IV. Diff. 17 Lib. I.

Facciasi come nella proposizione 2 di questo l' ascissa $B\pi = x$, l' ordinata $\pi n = y$, $\pi\delta = n\mu = dx$, $z\mu = dy$, $nz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, e la grossezza uniforme no dell' Arco $= g$: sarà per le cose dimostrate la pressione impiegata dal cuneo $opzn$ sulla centina $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, nella qual formola A è una costante, che bisogna aggiugnere alla quantità $gx - \frac{g^2 dy}{2ds}$ affinchè la loro somma $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$, nel caso di $x = 0$, diventi essa pure uguale a zero. Ora è manifesto, che se il cuneo $opzn$ nè preme la centina nè sfianca, conviene che il valore della sua pressione sia $= 0$; e però Prop. 2 di questo

$$gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy} = 0.$$

Se pertanto si differenzierà l' equazione alla curva $AB\Omega$ (quando essa sia algebraica), e si faranno le debite sostituzioni, troverassi un' equazione determinata, che bisognerà svolgere e risolvere per aver noto il valor dell' ascissa $B\pi$, o dell' ordinata $n\pi$, corrispondenti al punto d' equilibrio n. Gli esempli delle proposizioni susseguenti renderanno la cosa più chiara.

S C O L I O.

Se il calcolo darà il valor di X *reale, positivo, e non maggiore di* $B\Sigma$, *sarà segno che v' ha realmente nella centina il punto d' equilibrio; ma se all' incontro la* $B\pi$ *si trovasse immaginaria, o* *negativa, o maggiore di* $B\Sigma$, *non vi sarebbe alcun punto d' equilibrio. Può poi ancora accadere che l' equazione determinata, che somministra il modo di trovare il punto d' equilibrio, dia più di un valore di* x *reale, positivo, e non maggiore di* $B\Sigma$, *e allora vorrà dire che nella centina vi sono più punti d' equilibrio, e tanti ve ne saranno, quanti i valori di* x *delle sopraddette proprietà forniti.*

COROLLARIO I.

E se la tangente al punto B sia parallela all' ordinate, essendosi provato che $A = \frac{g^2}{2}$, dovrassi fare in questo caso (Corol. 1 Prop. 2 di questo) $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy} = 0$ per conseguire il punto d'equilibrio; e però il calcolo riuscirà più spedito, perchè non vi sarà bisogno di determinare la costante A.

COROLLARIO 2.

Quando il primo cuneo FC sia esternamente premuto con una forza $= Q$ per una direzione perpendicolare alla sua commessura superiore FB, s' è dimostrato che la pressione del cuneo $opzn$ sulla centina è (Prop. 3 di questo) $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - (A + Q)\frac{ddx}{dy}$; quindi se la x o la $B\pi$ sia quell' ascissa a cui corrisponde il punto d' equilibrio, dovrà essere $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - (A + Q)\frac{ddx}{dy} = 0$; e la costante A si determinerà (Luog. cit.) sulla cognizione che quando sia $x = 0$ dee valere l' equazione $Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = Q$, o $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = 0$.

COROLLARIO 3.

Per determinare il centro di gravità q del cuneo $opzn$ che nè preme nè sfianca, sarà d' uopo avere prima il punto d' equilibrio n, poi condurre il raggio osculatore $n Æ$, e chiamata $n Æ = b$, porre $q Æ = \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b + g)}$; e sarà determinato il centro di gravità q; e ciò per la ragione che il cuneo infinitesimo $opzn$ si può considerare come cuneo di Arco circolare del raggio interiore $= b$, e della grossezza $= g$. Anzi confondendosi fra di loro i punti q l, basterà fare la $Æl = \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b + g)}$, e il punto l sarà il centro di gravità del cuneo $opzn$ che al punto d' equilibrio corrisponde. Corol. 2 Prop. 9 Lib. I.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Ritrovare da una o dall' altra parte il punto d' equilibrio in un Arco intero circolare, nel quale sieno stati posti sulla centina tutti i cunei e il serraglio.

Il punto Z, dove cominciano i cunei infinitesimi a premere la mezza centina AZ, sarà nella sommità del semicerchio AZG, la tangente del punto Z sarà parallela all' ordinate, e ZQ sarà saetta e raggio, onde fatta $ZI = x$, $IE = y$, e il raggio $ZQ = b$, s' avrà l' equazione $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$; e supposto che E sia il punto d' equilibrio, e la grossezza AM dell' Arco $= g$, dovrà verificarsi l' equazione $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy} = 0$. Fig. XIII. Tav. II. Corol. 1 Prop. ant.

Si differenzj l' equazione al cerchio per avere $dy = \frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, e $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{dx^2(b - x)^2}{2bx - x^2}\right)} = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; laonde $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$; e di nuovo differenziando nell' ipotesi di ds costante, si ritroverà $\frac{ddx}{ds} =$

$\frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$: per conseguenza $\frac{ddx}{ds}.ds = ddx = \frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$. $\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = \frac{dx^2(b-x)}{2bx-x^2}$; è poi la $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; dunque $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx^2(b-x)}{2bx-x^2} : \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$.

Per il che essendo nel punto d' equilibrio $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + \frac{g^2}{2}).\frac{ddx}{dy} = 0$, sarà, sostituendo i valori ritrovati di sopra, $\frac{gdx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{g^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - (gx + \frac{g^2}{2}).\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = 0$, e levando i denominatori e dividendo per dx, si conseguirà $2bg(b-x) + 2g^2(b-x) - 2bgx - bg^2 = 0$, cioè $2b(b-x) + 2g(b-x) - 2bx - bg = 0$, ovvero $2b^2 - 2bx + 2bg - 2gx - 2bx - bg = 0$; e però $x = \frac{2b^2 + bg}{4b + 2g} = \frac{b}{2}$; laonde fatta la ZI uguale alla metà del raggio ZQ, e tirata l' ordinata IE, sarà E il punto d' equilibrio da una parte dell' Arco intero, affatto come s' era con metodo sintetico dimostrato al corollario 4 della prop. 12 del Libro II.

Corollario I.

Qualunque sia la grossezza $AM = g$ dell' Arco intero, s' è trovata la $ZI = \frac{b}{2}$; dunque per quanto si assottiglino o s' ingrossino i cunei di un Arco intero, fermo il raggio interiore, non si cangierà mai l' ascissa alla quale corrisponde da una parte e dall' altra il punto d' equilibrio dell' Arco medesimo, ma sarà sempre uguale alla metà del raggio interiore.

Corollario 2.

Se AZG fosse un Arco circolare scemo, in cui fossero stati posti tutti i cunei, si ritroverà, come nella proposizione, che l' ascissa ZI, alla quale corrisponde il punto d' equilibrio da ciascuna parte, debbe essere uguale alla metà del raggio, che appartiene al cerchio del segamento minore AZG. Per il che se la saetta fosse uguale alla metà del raggio medesimo, il punto d' equilibrio cadrà da ciascuna parte nell' imposte; e se fosse della metà del raggio minore, non vi sarà nell' Arco alcun punto d' equilibrio; e sì nell' uno che nell' altro caso tutti i cunei dal serraglio all' imposte premeranno la centinatura.

COROLLARIO 3.

Essendosi dimostrato, che qualunque sia la curvatura della centina, quando la tangente al punto Z è parallela all' ordinate, la spinta relativa del cuneo corrispondente alle coordinate $x\ y$ è $= gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + \frac{g^2}{2}$; sarà detta spinta nell' Arco circolare AZG, sia egli scemo o intero, uguale a $gx - \frac{g^2 dx(b-x)}{2\sqrt{(2bx - x^2)}} : \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{g^2}{2} = gx - \frac{g^2(b-x)}{2b} + \frac{g^2}{2}$. Corol. 2 Prop. 2 di questo

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Trovare il punto d' equilibrio in un Arco intero o scemo circolare riempiuto inferiormente di cunei da una parte fino a certo dato segno, non fino al serraglio.

Nell' Arco intero CBH o scemo ABG sieno da una parte collocati i cunei non fino al serraglio B, ma fino ad un punto qualunque I: bisogna ritrovare il punto d' equilibrio nella centina CI o AI, che serve di base alla parte riempiuta dell' Arco. Fig. III. Tav. IV.

Si conduca dal punto I la IV parallela alla corda, e la IK parallela alla saetta, e presa nella IK qualsivoglia ascissa IP, si tiri l' ordinata PQ e si prolunghi fino in M. Indi si faccia la $IP = x$, la $PQ = y$, la $BV = a$, la $IV = PM = m$, e il raggio $RB = b$; e s' avrà la seguente equazione $(y+m)^2 = b^2 - (b-a-x)^2$. Ma differenziando sarà $2dy(y+m) = 2dx(b-a-x)$, e $dy = \frac{dx(b-a-x)}{y+m}$; è poi $y+m = \sqrt{(b^2 - (b-a-x)^2)}$; dunque $dy = \frac{dx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$; e però $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{dx^2(b-a-x)^2}{b^2-(b-a-x)^2}\right)} = \frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$: per conseguenza $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}$; e di nuovo differenziando nell' ipotesi di ds costante si otterrà $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(b-a-x)}{b\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$; onde $\frac{ddx}{ds}.ds = ddx = \frac{dx(b-a-x)}{b\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$. $\frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} = \frac{dx^2(b-a-x)}{b^2-(b-a-x)^2}$; e però $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx^2(b-a-x)}{b^2-(b-a-x)^2} : \frac{dx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$.

E perchè la tangente al punto I non è parallela all' ordinate, fa d' uopo prendere pel punto d' equilibrio l' equazione $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx+A)\frac{ddx}{dy} = 0$, e prima determinare la costante A onde poter svolgere l' equazione suddetta. Ma nel caso di $x = 0$ debbe essere $gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = 0$, e sostituendo i valori di dy e ds, $gx - \frac{g^2dx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} : \frac{2bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} + A = 0$, ovvero $gx - \frac{g^2(b-a-x)}{2b} + A = 0$, dunque fatta effettivamente $x = 0$ si conseguirà $-\frac{g^2(b-a)}{2b} + A = 0$; e però la costante $A = \frac{g^2(b-a)}{2b}$. Pertanto poichè nel punto d' equilibrio riesce $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx$

Prop. 4 di questo

Luog. cit.

$+ A)\frac{ddx}{dy} = 0$, fatte le sostituzioni, s'avrà $\frac{gdx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$
$+ \frac{g^2dx(b-a-x)}{b\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} - (gx + \frac{g^2(b-a)}{2b}) \cdot \frac{dx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} = 0$,
e levando i denominatori e dividendo per gdx, sarà $(2b + 2g).(b-a-x) - 2bx - bg + ag = 0$, ovvero $2b^2 - 2ab - 2bx + 2bg - 2ag - 2gx - 2bx - bg + ag = 0$, e però $2b^2 - 2ab + bg - ag = 4bx + 2gx$; laonde $x = \frac{2b^2 - 2ab + bg - ag}{4b + 2g}$
$= \frac{b-a}{2}$. E poichè la $BR = b$, e la $BV = a$, sarà la rimanente $VR = b - a$; quindi $x = \frac{VR}{2}$; sicchè supponendo che la VR sia divisa per mezzo nel punto M, dal quale sia condotta l' ordinata MQ, s' avrà in Q il punto d' equilibrio ricercato nella porzione CI o AI d' Arco intero o scemo, come s' era ritrovato nel corol. 4 della prop. 12 del Libro II., ove dai cunei finiti si era passato agl' infinitesimi.

COROLLARIO I.

E' chiaro ancora, che qualunque sia la grossezza de' cunei, fermo il raggio interiore b e la linea IK di grandezza e di posizione, l' ascissa a cui corrisponde il punto d' equilibrio nella parte riempiuta CI o AI è sempre la stessa, e uguale alla metà della VR.

COROLLARIO 2.

Di mano in mano che si continua da una parte ad empiere l' Arco intero o scemo, s' innalza il punto d' equilibrio, cosicchè riempiuto fino al serraglio si trova il punto medesimo tanto alto, quanto lo può mai essere.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Determinare il punto d' equilibrio in un' ovale architettonica composta di più archi circolari, dopo di avere collocati tutti i cunei sulla centina, supposta però uniforme la grossezza dell' ovale.

Fig. IV. Tav. IV. Sogliono gli Architetti costruire le ovali col mezzo di più archi di cerchio, i quali quando sieno ben combinati non lasciano distinguere se l' Arco sia formato con più Archi circolari, ovvero con una curva di altra natura. Di queste costruzioni ne prenderemo una molto elegante, ch' è del chiarissimo *Leonardo Ximenes*, e che servirà alla risoluzione del problema.

Si divida la corda CD in sei parti uguali ne' punti M H E h m; e sulla Hb si costruisca inferiormente il triangolo equilatero HBh, i di cui lati BH Bh si prolunghino di sopra ne' punti F f: poi divise per mezzo esse BH Bh ne' punti L l si conducano le linee LMZ lmz; indi si faccia la saetta AE uguale a un terzo della corda, o uguale alla Hb, e col centro B ed intervallo BA si descriva l' arco FAf. Di nuovo coi centri L l ed intervalli LF lf si descrivano gli archi FZ fz; e finalmente coi centri M m, ed intervalli MZ mz gli archi ZC zD, che si dimostrerà convenire ne' punti C D. A tutti gli archi suddetti si assegni una grossezza uniforme, che sia $= g$, e sarà costruita la faccia CGD dell' ovale architettonica. Si domanda pertanto il punto d' equilibrio da una o dall' altra parte dell' ovale medesima, supposti collocati sulla centina tutti i cunei e il serraglio.

Sia la corda $CD = 6c$, sicchè $CM = MH = HE = Eh = hm = mD = HL = LB = c$, e la $Hb = BH = AE = 2c$: sarà per la ragione del triangolo rettangolo BHE, la $BE = \sqrt{3c^2} = c\sqrt{3}$, e però tutta la $AB = BF = 2c + c\sqrt{3}$: sta poi come $HB : BE :: BF : BR$, ovvero $2c : c\sqrt{3} :: 2c + c\sqrt{3} : BR$; laonde $BR = c\sqrt{3} + \frac{3}{2}c$, e però la rimanente $AR = AB - BR = 2c +$

$c\sqrt{3}$

$c\sqrt{3} - c\sqrt{3} - \frac{3}{2}c = \frac{c}{2}$: ma $\frac{c}{2}$ è minore della metà di $2c + c\sqrt{3}$; dunque ancora AR sarà minore della metà del raggio AB dell' Arco FAf. Vi ha dunque un Arco scemo circolare FAf la di cui saetta è minore della metà del raggio, laonde non vi può essere in esso Arco alcun punto d'equilibrio, e tutti i cunei, che lo compongono, premeranno da ciascuna parte la centinatura. Si passi ora ad esaminare se il punto d'equilibrio dalla parte AC dell' ovale cada nel secondo Arco circolare FZ; ma prima si avverta, che siccome nell' Arco AF (che ha la tangente del vertice A parallela all'ordinate) presa qualunque ascissa $AO = x$, e chiamato il raggio $AB = b$, succede che la spinta relativa del cuneo infinitesimo corrispondente al punto P si fa $= gx - \frac{g^2(b-x)}{2b} + \frac{g^2}{2}$; così, sostituendo in luogo di x la $AR = \frac{c}{2}$, e in luogo di b la grandezza $2c + c\sqrt{3}$, sarà vero, che la spinta relativa esercitata dall' ultimo cuneo infinitesimo dell' Arco AF sul primo dell' Arco susseguente FZ per una direzione perpendicolare alla comune commessura FK è $= \frac{cg}{2} - \frac{g^2(2c + c\sqrt{3} - \frac{c}{2})}{2(2c + c\sqrt{3})} + \frac{g^2}{2} = \frac{cg}{2} - \frac{g^2(3c + 2c\sqrt{3})}{8c + 4c\sqrt{3}} + \frac{g^2}{2}$; e riducendo tutto sotto un comun denominatore, diventerà la suddetta spinta ridotta $= \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{8 + 4\sqrt{3}}$. Per il che fatta detta forza premente il primo cuneo dell' Arco $FZ = Q$, s'avrà $Q = \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{8 + 4\sqrt{3}}$.

Corol. 2 Prop. 5 di questo

Corol. 3 Prop. cit.

Ora si termini l' Arco FZ fino al suo incontro in N colla retta LN parallela alla AB, e si tirino le FV ZY parallele alla medesima AB, e la ZX parallela alla corda CD. E perchè $FL = BF - LB = 2c + c\sqrt{3} - c = c + c\sqrt{3}$, sarà anche $ZL = c + c\sqrt{3}$; ma la $RE = FV = BR - BE$ sarà $= c\sqrt{3} + \frac{3c}{2}$

$-c\sqrt{3} = \frac{3c}{2}$. In oltre sarà la HW uguale alla metà della HE, o $= \frac{c}{2}$, e la $ML = \sqrt{((MH)^2 + (HL)^2 + 2MH \cdot HW)}$ $= \sqrt{(c^2 + c^2 + \frac{2c^2}{2})} = c\sqrt{3}$, la ZL poi riesce $= FL = c + c\sqrt{3}$, dunque la rimanente $ZM = c = CM$, come nella costruzione ci eravamo riservati di dimostrare. E poichè la LW è uguale alla metà della EB, sarà $LW = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, e però la $LI = LW +$ $RE = \frac{c}{2}\sqrt{3} + \frac{3c}{2}$; ma tutta la $LN = FL = c + c\sqrt{3}$, dunque la rimanente $NI = c + c\sqrt{3} - \frac{c}{2}\sqrt{3} - \frac{3c}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{3} - \frac{c}{2}$. Finalmente essendo come $ML : LW :: ZM : ZY$, sarà sostituendo $c\sqrt{3} :$ $\frac{c}{2}\sqrt{3} :: c : ZY = \frac{c}{2} = XV$, laonde $FX = FV - XV = \frac{3c}{2} - \frac{c}{2}$ $= c$; e però se a qualche ascissa FS dee corrispondere nell' Arco FZ il punto d' equilibrio dell' ovale architettonica, bisogna che la FS sia minore di FX o di c, altrimenti esso punto non cadrebbe più nell' Arco sopraddetto FZ.

Determinate pertanto queste linee, si rifletta essere FZ una parte di Arco scemo circolare il di cui primo cuneo è superiormente premuto da una forza $= Q$ con direzione perpendicolare alla sua commessura superiore FK; onde fatta la $FS = x$, la $ST = y$, la grossezza dell' Arco $= g$, se in esso FZ vi sia punto d' equilibrio, dovrà essere $g dy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gx ddx}{dy} - (A +$ $Q)\frac{ddx}{dy} = 0$, e A una quantità costante da ritrovarsi facendo nel caso di $x = 0$, $Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = Q$. Chiamata poi per facilità di calcolo la $NI = b$, il raggio $LN = a$, e la $FI = m$, si ha l'equazione $(y + m)^2 = a^2 - (a - b - x)^2$ all' Arco

Corol. 2 Prop. 4 di questo

FZ, dalla quale si ricava $dy = \frac{dx(a-b-x)}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$, $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}$, $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(a-b-x)}{a\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{a}(a-b-x)$, $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$; dunque $Q + gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = Q + gx - \frac{g^2}{2a}(a-b-x) + A$; ma nel caso di $x = 0$ vale l' equazione $Q + gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = Q$, laonde $Q - \frac{g^2}{2a}(a-b-x) + A = Q$, e però $A = \frac{g^2}{2a}(a-b)$: per conseguenza se nell' Arco FZ vi ha punto d' equilibrio, sarà $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2a}(a-b) + Q\right)\frac{ddx}{dy} = 0$, ovvero $\frac{gdx(a-b-x)}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}} + \frac{g^2dx(a-b-x)}{a\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}} - \left(gx + \frac{g^2}{2a}(a-b) + Q\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}} = 0$; quindi $g(a-b-x) + \frac{g^2}{a}(a-b-x) - gx - \frac{g^2}{2a}(a-b) - Q = 0$, cioè $\frac{ag+g^2}{a} \cdot (a-b-x) - gx - \frac{g^2}{2a}(a-b) - Q = 0$, oppure sarà $\frac{ag+g^2}{a} \cdot (a-b) - gx - \frac{g^2x}{a} - gx - \frac{g^2}{2a}(a-b) - Q = 0$, che ridotta dà l' altra equazione $\frac{2ag+g^2}{2a} \cdot (a-b) - \frac{2ag+g^2}{a} \cdot x - Q = 0$, e $x = \frac{a-b}{2} - \frac{aQ}{2ag+g^2}$. Ma il raggio LN, che per calcolare con maggiore speditezza si è chiamato $= a$, è di fatto $= c + c\sqrt{3}$, così la NI o il $b = \frac{c}{2}\sqrt{3} - \frac{c}{2}$, e il Q

$= \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{(1 + \sqrt{3}) . (2 + 2\sqrt{3})}$; dunque sostituendo questi valori s' avrà $x = \frac{1}{2}(c + c\sqrt{3} - \frac{c}{2}\sqrt{3} + \frac{c}{2}) - \frac{c + c\sqrt{3}}{2cg + 2cg\sqrt{3} + g^2} . \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{(1 + \sqrt{3}) . (2 + 2\sqrt{3})} = \frac{3c + c\sqrt{3}}{4} - \frac{4c^2 + 2c^2\sqrt{3} + cg}{(2c + 2c\sqrt{3} + g) . (2 + 2\sqrt{3})}$; e però ancora $x = \frac{3c + c\sqrt{3}}{4} - \frac{2c^2 + 2c^2\sqrt{3} + cg}{(2c + 2c\sqrt{3} + g) . (2 + 2\sqrt{3})} - \frac{2c^2}{(2c + 2c\sqrt{3} + g) . (2 + 2\sqrt{3})} = \frac{3c + c\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{2 + 2\sqrt{3}} - \frac{c^2}{(2c + 2c\sqrt{3} + g) . (1 + \sqrt{3})} = \frac{6c + 6c\sqrt{3} + 2c\sqrt{3} + 6c - 4c}{8 + 8\sqrt{3}} - \frac{c^2}{8c + 4c\sqrt{3} + g + g\sqrt{3}}$, o finalmente $x = c - \frac{c^2}{8c + 4c\sqrt{3} + g + g\sqrt{3}}$: è poi manifestamente questo valore di x minore di c, dunque all' ascissa $FS = c - \frac{c^2}{8c + 4c\sqrt{3} + g + g\sqrt{3}}$ corrisponde nell' Arco FZ un punto d' equilibrio dell' ovale architettonica: similmente si troverà dall' altra parte il punto d' equilibrio; dunque ecc.

COROLLARIO.

Il progresso del calcolo instituito per l' ovale CGD di cinque archi circolari mostra ad evidenza come si debbano cercare i punti d' equilibrio se fosse di un maggior numero di Archi formata e di differente costruzione.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Ritrovare il punto d' equilibrio in un Arco, la di cui convessità abbia la forma di una catenaria comune, e la grossezza sia uniforme.

Fatta $BC = x$, $CD = y$, l' equazione alla catenaria comune è $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$, ove a è certa quantità che si ritrova facendo la metà AB della catenaria $= s$, e la saetta $BF = q$, poi $a = \frac{s^2 - q^2}{2q}$, e ciò per le cose dimostrate dal celebre *Giovanni Bernoulli Tom. III. pag.* 491 *Edit. Lausannæ & Genevæ*; dunque $ds^2 = dx^2 + \frac{a^2dx^2}{2ax + x^2} = \frac{(a + x)^2 . dx^2}{2ax + x^2}$, e però $ds = \frac{dx(a + x)}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$, e $\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{(2ax + x^2)}}{a + x}$; e differenziando nell' ipotesi di ds costante si conseguirà $\frac{ddx}{ds} = \left(\frac{dx(a + x)^2}{\sqrt{(2ax + x^2)}} - dx\sqrt{(2ax + x^2)}\right) : (a + x)^2 = \frac{a^2dx}{(a + x)^2 . \sqrt{(2ax + x^2)}}$: per conseguenza $ddx = \frac{ddx}{ds} . ds = \frac{a^2dx}{(a + x)^2 . \sqrt{(2ax + x^2)}} . \frac{dx(a + x)}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = \frac{a^2dx^2}{(a + x) . (2ax + x^2)}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{a^2dx^2}{(a + x) . (2ax + x^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = \frac{adx}{(a + x) . \sqrt{(2ax + x^2)}}$. E perchè la tangente al punto B è parallela all' ordinate, se nella catenaria ABE havvi punto d' equilibrio da ciascuna parte, dovrà valere l' equazione $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2ddx}{2dy} = 0$, cioè, sostituendo, $\frac{agdx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} + \frac{a^2g^2dx}{(a + x)^2 . \sqrt{(2ax + x^2)}} - \frac{\left(gx + \frac{g^2}{2}\right) . adx}{(a + x) . \sqrt{(2ax + x^2)}} = 0$; e però $2(a + x)^2 + 2ag - (2x + g) . (a + x) = 0$, ovvero $2a^2 + 4ax + 2x^2 + 2ag - 2ax - ag - 2x^2 - gx = 0$, dalla qual equazione si ricava $x = \frac{2a^2 + ag}{g - 2a}$, ch' è una quantità reale. E però se essa quantità sia ancora positiva e minore della saetta BF, vi

Fig. V. Tav. IV.

Corol. I Prop. 4 di questo

sarà dall' una e dall' altra parte della catenaria comune un punto d' equilibrio che corrisponderà all' ascissa $BC = \frac{2a^2 + ag}{g - 2a}$; il che ecc.

COROLLARIO.

Sia la mezza catenaria AB sesquidecima della saetta BF, cioè sia $s = \frac{11q}{10}$, s' avrà $a = \frac{s^2 - q^2}{2q} = \frac{1}{2q}\left(\frac{121}{100}q^2 - q^2\right) = \frac{21}{200}q$: sia poi la grossezza g dell' Arco $= \frac{5a}{2} = \frac{105}{400}q$; sarà, sostituendo, $\frac{2a^2 + ag}{g - 2a} = \left(2a^2 + \frac{5a^2}{2}\right) : \left(\frac{5a}{2} - 2a\right) = 9a = \frac{189}{200}q$; laonde presa l' ascissa $BC = \frac{189}{200}q$, o a cento ottanta nove ducentesimi della saetta, e ordinata la CD, vi sarà in D un punto d' equilibrio da una parte dell' Arco; e lo stesso succederà dall' altra parte.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Trovare i punti d' equilibrio negli Archi iperbolici e negli elittici di grossezza uniforme.

Fig. VII. Tav. IV.

Nell' Arco iperbolico o elittico FBG, fatta la $BC = x$, la $CD = y$, l' asse primario $= 2a$, e il conjugato $= 2b$, s' avrà l' equazione $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax \pm x^2)}$, dove il segno superiore vale quando la curva interiore FBG sia un' iperbole, e l' inferiore allora che sia un' elissi. Dunque differenziando si troverà $dy = \frac{bdx(a \pm x)}{a(2ax \pm x^2)^{1:2}}$, e però $ds = \frac{dx}{a}\left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{1:2}$, e $\frac{dx}{ds} = a\left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{-1:2}$; e di nuovo differenziando nell' ipotesi di ds costante s' avrà $\frac{ddx}{ds} = \frac{a^3b^2dx(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{3:2}}$,

e $\frac{ddx}{ds} \cdot ds = ddx = \frac{a^3b^2dx(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{3:2}} \cdot \frac{dx}{a}\left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{1:2} = \frac{a^2b^2dx^2(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)}$; e per conseguenza $\frac{ddx}{dy} = \frac{a^2b^2dx^2(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)} : \frac{bdx(a \pm x)}{a(2ax \pm x^2)^{1:2}}$

$= \frac{a^3bdx}{(2ax \pm x^2)^{3:2} \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)}$. Essendo pertanto la tangente al punto B parallela all' ordinate, se nell' Arco FBG vi sia punto d' equilibrio da ciascuna parte, dovrà essere $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2ddx}{2dy} = 0$, esprimendo la lettera g la grossezza uniforme dell' Arco medesimo; quindi sostituendo s' avrà $\frac{bgdx(a \pm x)}{a(2ax \pm x^2)^{1:2}} +$

$$\frac{a^3b^2g^2dx(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{3:2}} - \frac{a^3bdx\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)}{(2ax \pm x^2)^{3:2} \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)} = 0,$$

e trasportando e riducendo sarà $\frac{2a^4bg(a \pm x)}{\sqrt{\left(a^2(2ax \pm x^2) + b^2(a \pm x)^2\right)}}$ $= a^4(2x + g) - 2(a \pm x) \cdot \left(a^2(2ax \pm x^2) + b^2(a \pm x)^2\right)$. Per la qual cosa se da questa equazione risoluta si ricavi un valor di x reale, positivo, e minore della saetta BE, sarà data l' ascissa a cui corrisponde nell' Arco iperbolico, o nell' elittico dall' una e dall' altra parte un punto d' equilibrio; il che ecc.

COROLLARIO.

Sia per esempio proposto di trovare il punto d' equilibrio in un Arco iperbolico la cui grossezza g sia $= 2a$, e l' asse conjugato $2b = 6a$, e però $b = 3a$: sarà sostituendo questi valori nell' equazione ora determinata e prendendo i segni superiori, $\frac{12a^6(a+x)}{\sqrt{(a^2(2ax+x^2)+9a^2(a+x)^2)}} = 2a^4.(a+x) - 2(a+x).(a^2(2ax+x^2)+9a^2(a+x)^2)$, ovvero $\frac{6a^3}{\sqrt{(9a^2+20ax+10x^2)}} = a^2 - (9a^2+20ax+10x^2)$; laonde se si dica $\sqrt{(9a^2+20ax+10x^2)} = z$, sarà ancora $\frac{6a^3}{z} = a^2 - z^2$, e $6a^3 = a^2 z - z^3$, che è un' equazione del terzo grado dotata di una sola radice reale, ed è $z = -2a$, dunque $\sqrt{(9a^2+20ax+10x^2)} = -2a$, e $x^2 + 2ax = -\frac{a^2}{2}$. Ora se da questa nuova equazione del secondo grado si cavi il valor di x, sarà questo $= -a \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, quantità bensì reale ma sempre negativa, qualunque de' due segni si prenda, de' quali è affetto il radicale $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$: laonde nel proposto Arco iperbolico non v' ha alcun punto d' equilibrio, e tutti i cunei premono la centina.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

In un Arco di qualsivoglia curvatura interiore e di uniforme grossezza, in cui sieno stati posti tutti i cunei, o parte, ritrovare la somma delle pressioni esercitate da' cunei superiori sulla centinatura sino a un determinato segno.

Fig. II. Tav. IV. Sia $A\Omega$ un Arco di qualsivoglia curvatura su di cui sieno stati collocati i cunei da una parte sino in B: bisogna ritrovare

vare la somma delle pressioni di un numero di cunei superiori sulla centina; per esempio di quelli che sono fra i punti $B\ n$, supponendo però che tutti essi realmente la premano, nè v' abbia alcuno sfiancamento nella parte Bn dell' Arco. Prop. 2 di questo

Si è in altro luogo provato, che fatta l' ascissa $B\pi = x$, l' ordinata $\pi n = y$, e la grossezza uniforme dell' Arco $= g$, diventa la pressione del cuneo $opzn$ sulla centina $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, nella qual formola A si trasforma in $\frac{g^2}{2}$ se la tangente al vertice B sia parallela all' ordinate; altrimenti A si determina facendo nel caso di $x = 0$ la quantità $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = 0$. Dunque la somma delle pressioni da B in z o in n sarà $= \int\left(gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}\right)$; ma ds è costante, laonde essa somma sarà $= gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int(gx + A)\frac{ddx}{dy}$; il che ecc. Corol 1

Corollario.

E perchè si è ancora dimostrato essere lo spazio $opzn$, che esprime il peso del cuneo $opzn$, uguale a $gds + \frac{g^2 ddx}{2dy}$, ne segue che il peso assoluto di tutto l' Arco da B in n è $= \int\left(gds + \frac{g^2 ddx}{2dy}\right) = gs + \int\frac{g^2 ddx}{2dy}$; e però starà il peso assoluto dell' Arco da B in n alla somma delle pressioni ch' esercitano i cunei, che stanno sopra la centina Bn, come $gs + \int\frac{g^2 ddx}{2dy} : gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int(gx + A)\frac{ddx}{dy}$, nella qual ragione si sostituirà $\frac{g^2}{2}$ in luogo di A, quando la tangente al vertice B sia parallela all' ordinate, e si dovranno a ciascun termine aggiungere opportunamente le costanti. Prop. cit.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE II.

Determinare la ſomma delle preſſioni de' cunei ſulla centina in una parte di Arco circolare intero, o ſcemo.

Fig. III. Tav. IV. Sia CBH o ABG la centina di un Arco intero o ſcemo, ſopra la quale ſienvi ſtati poſti ſolamente da una parte i cunei dall' impoſtatura fino al punto I; e Q ſia altro punto ſulla centina preſo in modo che tutti i cunei ſuperiori da I fino in Q premano realmente la centina: biſogna determinare la ſomma delle preſſioni medeſime.

Si conduca la linea IK parallela alla ſaetta BR, e ſi ordini la QPM. Poi ſi faccia la $IP = x$, la $PQ = y$, la $IV = m$, la $BV = a$, e la $RB = b$ per avere l' equazione al cerchio CBH $(y + m)^2 = b^2 - (b - a - x)^2$, dalla quale ſi cava (come nella prop. 6 di queſto) $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$. E poichè, fatta la groſſezza dell' Arco $= g$, la ſomma delle preſſioni da I fino in Q, che dico S, è $= gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, ſe ſi ſoſtituiſcano i valori di ds, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{ddx}{dy}$, e in vece di A la quantità $\frac{g^2(b - a)}{2b}$, a cui nella ſteſſa prop. 6 s' è dimoſtrata uguale, ſi conſeguirà $S = gy + \frac{g^2}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)} - \int\left(gx + \frac{g^2(b - a)}{2b}\right) . \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}} = gy + \frac{g^2}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)} - \int \frac{2bgx + bg^2 - ag^2}{2b^2} . \frac{bdx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$ $= gy + \frac{g^2}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)} + \int \frac{gdx(b - a - x)}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$

Prop. ant.

$-\frac{(2bg+g^2).(b-a)}{2b^2}.\int\frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$. Ma si ha $\int\frac{gdx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}=g\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}$, siccome ancora $\int\frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}=\int ds=s$; dunque $S=gy+\frac{g^2}{b}(y+m)+g(y+m)-s.\frac{(2bg+g^2).(b-a)}{2b^2}+B$, ch' è la costante da determinarsi. E perchè quando $x=0$ tutto dee svanire, e se $x=0$ diventa tanto l' ordinata y, che l' arco s uguali a zero; dunque $\frac{g^2m}{b}+gm+B=0$, e però $B=-\frac{g^2m}{b}-gm$; per conseguenza la somma delle pressioni da I in Q, cioè $S=2gy+\frac{g^2y}{b}-s.\frac{(2bg+g^2).(b-a)}{2b^2}=\frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2by-s(b-a))$. Ovvero essendo $y=PQ$, $b-a=VR$, e $s=IQ$, sarà la somma S delle pressioni $=\frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2b.PQ-IQ.VR)$; il che ecc.

COROLLARIO I.

E poichè s' è determinata la somma delle pressioni de' cunei che s' appoggiano sull' arco IQ, è manifesto, che quando il punto Q sia punto d' equilibrio dell' Arco CI o AI, presenterà la somma sopraccennata la massima somma delle pressioni che i cunei dell' Arco medesimo esercitano sulla centina; e ciò perchè tutti i cunei inferiori a Q non premono la centina, ma sfiancano. Il punto d' equilibrio poi dell' Arco CI o AI si ha facendo l' ascissa $IP=\frac{b-a}{2}=\frac{VR}{2}$; laonde Prop. 6 di questo posto che la MQ parallela alla corda seghi per mezzo la VR in M, se si cercherà il valore della PQ e quello dell' arco IQ, poi si sostituiscano nella formola $\frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2b.PQ-IQ.VR)$, ſi determinerà la ſomma delle preſſioni di tutti i cunei dell' Arco CI o AI, i quali premono la centina.

Corollario 2.

Quindi ſe l' Arco intero CBH, o lo ſcemo ABG ſia tutto compiuto, cadrà il punto I in B, la PQ ſi cangierà in QM, la VR nel raggio $RB = b$, e l' arco IQ in BQ; dunque ſuppoſto che i cunei da B in Q premano la centina ſarà la ſomma delle preſſioni dal ſerraglio fino in Q, cioè $S = \frac{2bg+g^2}{2b^2} . (2b . QM - BQ . b) = \frac{2bg+g^2}{2b} . (2QM - BQ)$, vale a dire ſarà uguale al prodotto di $\frac{2bg+g^2}{2b}$ nel doppio ſeno QM dell' arco BQ diminuito dell' arco medeſimo BQ.

Corollario 3.

Se tutto l' Arco intero CBH, o lo ſcemo ABG ſia interamente compiuto, cioè ſe ſiano collocati tutti i cunei ſulla centina, il punto d' equilibrio Q cadrà a due terzi del quadrante BC, e la QM ſarà $= \frac{b}{2}\sqrt{3}$; e però fatto il quadrante $BC = q$, ſarà la ſomma di tutte le preſſioni da una parte della centina $= \frac{2bg+g^2}{2b} . \left(b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}\right)$, e quella di ambe le parti $= \frac{2bg+g^2}{b} . \left(b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}\right)$. Di nuovo perchè il raggio eſteriore $RN = b + g$, ſarà lo ſpazio $CBHEND$, o il peſo di tutto l' Arco intero, $= \frac{(b+g)^2}{b} . q - bq = \frac{2bg+g^2}{b} . q$; dunque il peſo di tutto l' Arco intero ſta alla preſſione da eſſo eſercitata ſulla centina, come $\frac{2bg+g^2}{b} . q : \frac{2bg+g^2}{b} . \left(b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}\right)$, ovvero come $q : b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}$, la qual proporzione ridot-

Prop. 5 di queſto Corol. 2

ta in numeri s'approssima di molto a quella del 9 al 4; dunque l' Arco intero *CBH* impiega quattro noni del suo peso a premere la centina; e similmente l' Arco scemo *ABG* impiegherà nella pressione sulla centina quattro noni del peso ch' ei avrebbe, ridotto che fosse alla sua integrità. Ecco come con metodo analitico si è pervenuto a dimostrare quella stessa verità che prima si era nel corol. 3 della prop. 14 del Libro II. con metodo sintetico ritrovata.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 12.

In un Arco parabolico di uniforme grossezza interamente costruito ritrovare la somma delle pressioni di certa quantità di cunei superiori sulla centina.

Nell' Arco parabolico *FBG* si prenda l' ascissa $BC = x$, l'ordinata $CD = y$, e si supponga che il punto *D* non sia inferiore al punto d' equilibrio dell' Arco parabolico, se pur ve ne ha: si domanda ora la somma delle pressioni de' cunei collocati da una parte dell' Arco da *B* sino in *D*. Fig. VII. Tav. IV.

Chiamato il parametro della parabola $= p$, $y^2 = px$ diventa l' equazione alla curva *FBG*, che differenziata dà $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, $ds = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{p^2dx^2}{4px}\right)} = \frac{dx\sqrt{(4x+p)}}{2\sqrt{x}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+p)}}$; laonde calcolando si troverà $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx\sqrt{px}}{x(4x+p)}$. Per il che essendo la somma delle pressioni de' cunei da *B* fino in *D*, che dico *S*, $= gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$, stante che la tangente al punto *B* è parallela all'ordinate, s'avrà, sostituendo, $S = gy + 2g^2\sqrt{\frac{x}{4x+p}} - \int\left(gx + \frac{g^2}{2}\right).\frac{dx\sqrt{px}}{x(4x+p)}$: ma $px = y^2$, e $dx = \frac{2ydy}{p}$; dunque $gy + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \int\left(\frac{gy^2}{p} + \frac{g^2}{2}\right)$. Prop. 10 di questo

$\frac{2pdy}{4y^2+p^2} = gy + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \int\left(\frac{2gy^2dy}{4y^2+p^2} + \frac{g^2pdy}{4y^2+p^2}\right) = gy$ $+ \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \int\left(\frac{gdy}{2} - \frac{gp^2dy}{2(4y^2+p^2)} + \frac{g^2pdy}{4y^2+p^2}\right) = gy +$ $\frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \frac{gy}{2} - \int\frac{2g^2p - gp^2}{2}.\frac{dy}{4y^2+p^2} = \frac{gy}{2} + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}}$ $+ \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right).\int\frac{\frac{p^2}{4}dy}{y^2+\frac{p^2}{4}}$. E' poi noto pel calcolo integrale, che

$\int\frac{\frac{p^2}{4}dy}{y^2+\frac{p^2}{4}}$ è uguale all' arco di cerchio il cui raggio sia $\frac{p}{2}$, e la tangente y, il qual arco chiamo $= D$; dunque $S = \frac{gy}{2} +$ $\frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} + \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right).D + C$. Per ritrovare il valore della costante C avverto, che quando x ovvero $y = 0$, debbe essere anche $S = 0$; ma fatta $y = 0$ l' equazione si converte in questa $C = 0$, svanendo tutti gli altri termini; e però sarà finalmente $S = \frac{gy}{2} + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} + \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right).D$, dove D significa l' arco di cerchio che ha $\frac{p}{2}$ per raggio, e per tangente y, ovvero $\sqrt{px}$; il che ecc.

Corollario.

E poichè $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx\sqrt{px}}{x(4x+p)} = \frac{2pdy}{4y^2+p^2} = \frac{2}{p}.\frac{\frac{p^2}{4}dy}{y^2+\frac{p^2}{4}}$, sarà

$\int \frac{ddx}{dy}$ uguale a $\frac{2}{p}$ moltiplicato nell' arco di cerchio del raggio $\frac{p}{2}$ e della tangente y: ma questo arco si è chiamato D, dunque $\int \frac{ddx}{dy} = \frac{2D}{p}$, e $\int \frac{g^2 ddx}{2dy} = \frac{g^2 D}{p}$: la somma poi de' pesi assoluti de' cunei che sono addossati all' Arco parabolico da B in D s' è in altro luogo dimostrata $= gs + \int \frac{g^2 ddx}{2dy}$, dove s esprime la grandezza dell' arco BD; dunque essa somma sarà $= gs + \frac{g^2 D}{p}$, nè v' ha bisogno di aggiugnere costante, perchè tutto svanisce se x, ovvero y sia $= 0$; quindi sarà la somma de' pesi assoluti de' cunei che stanno sopra BD alla somma delle loro pressioni sulla centina come $gs + \frac{g^2 D}{p} : \frac{gy}{2} + \frac{2g^2 y}{\sqrt{(4y^2 + p^2)}} + \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right) . D$. Corol. Prop. 10 di questo

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 13.

Si domanda una maniera di formarsi una chiara idea delle pressioni, degli sfiancamenti, e de' punti d' equilibrio in un Arco dotato di qualsivoglia incurvamento interiore e di uniforme grossezza.

Sia $G\text{Æ}Q$ un Arco di qualunque curvatura riempiuto interamente di cunei, e sia l' ascissa $\text{Æ}B = x$, l' ordinata $BH = y$, e la grossezza uniforme dell' Arco $= g$; e si tiri la KI infinitamente prossima a BH. Fig. I. Tav. V.

E perchè si è dimostrato che la pressione o lo sfiancamento del cuneo KR è $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, e potendosi esprimere essa pressione o sfiancamento con una superficie, sia espressa dall' area infinitesima $BLPI$ della curva VLC la di cui ascissa sia la $\text{Æ}B$, e la BL l' ordinata; dunque chiamata Prop. 2 di questo e Scol.

l' ordinata BL di questa nuova curva $= Z$, essendo $\text{Æ}B = x$, e $BI = dx$, s' avrà l' area suddetta $BLPI = Zdx = gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$; e però $Z = \frac{1}{dx}\left(gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}\right)$, nella qual equazione ds è costante, e la A diviene $= \frac{g^2}{2}$ se la tangente al punto Æ sia all' ordinate parallela. Ma è nota la relazione tra $x\ y$, dunque si tolga co' soliti metodi dall' equazione medesima ds, dy, ddx, e sarà data un' altra equazione tra $Z\ x$, cioè sarà data l' equazione alla curva VLC, della quale converrà esaminare la natura e l' andamento.

Ora se la curva VLC continuata in MO intersecherà l' asse $\text{Æ}T$ in uno o più punti, per esempio ne' punti $C\ D$, tirate le ordinate $CE\ DF$, sarà segno certo che ne' punti $E\ F$ v' ha altrettanti punti d' equilibrio dell' Arco $\text{Æ}G$; se la parte CMD di essa curva cada dall' altro lato della $\text{Æ}T$ o dal lato delle negative, vorrà dire che tutti i cunei tra $E\ F$ sfiancano; se dopo D essa ritorna dal lato primiero, i cunei sotto F torneranno a premere la centina: ma se la curva incontrasse la $\text{Æ}T$ in uno o più punti $C\ D$ senza far passaggio al lato opposto, vi sarebbero bensì uno o più punti d' equilibrio, ma non sfiancamenti di sorte: in somma l' andamento della curva $VLCMDO$ darà norma per conoscere i luoghi delle pressioni, e degli sfiancamenti, oltre i punti d' equilibrio dell' Arco $\text{Æ}G$. Similmente si troverà la natura e l' andamento della curva $uCmDo$ per l' Arco $\text{Æ}Q$; e se l' Arco $\text{Æ}Q$ non formasse coll' altro $\text{Æ}G$ che una sola curva, il di cui asse fosse la $\text{Æ}T$, è manifesto che la curva $uCmDo$ non sarebbe che un secondo ramo della prima $VLCMDO$, e ad essa uguale, simile, e similmente posta rispetto al loro asse comune $\text{Æ}T$; e così sarà risoluta in tutte le sue parti la proposta quistione.

Corollario I.

E perchè $Zdx = gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A).\frac{ddx}{dy}$, sarà $\int Zdx$

$= gy +$

$= gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$; ma $\int Zdx =$ all' area *ÆNVLB*, o alla somma delle pressioni de' cunei da *Æ* in *H*, dunque *ÆNVLB* $= gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$. E qui conviene fare qualche riflessione sul valore di essa area *ÆNVLB* espressa per una quantità integrale. Imperciocchè finchè la curva *VLC* cada dalla parte delle quantità positive l' espressione integrale $gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$,presa per tal modo che tutto svanisca quando $x = 0$, dinoterà certamente la somma delle pressioni sulla centina che succedono nell' Arco *ÆH*, cosicchè sostituendo dopo l' integrazione in luogo di x la *ÆC*, si troverà la somma di tutte le pressioni sino al punto d' equilibrio *E*. Ma se dopo il punto *E* i cunei sfiancassero e la curva *VLC* passasse dalla parte delle quantità negative come *CMD*, allora condotta da uno de' suoi punti l' ordinata *lbh*, e fatta $x =$ *Æb* ,la quantità integrale $gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$ tolta in maniera che tutto svanisca quando $x = 0$, esprimerebbe la differenza dell' aree *ÆNVC Cbl*; e però se si amasse di avere la sola area *Cbl*, o la somma degli sfiancamenti da *E* in *h*, o le pressioni sulla sopraccentina, bisognerà prendere così la quantità integrale $gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$, che fatta $x =$ *ÆC* tutto svanisca; e in tal guisa operando se nella quantità integrata in luogo di x si metta di poi la *ÆD*, otterrassi la somma di tutti gli sfiancamenti fra i due punti d' equilibrio *E F*. Similmente se la curva *VLCMD* facesse di nuovo passaggio dalla parte delle positive , e si volesse ritrovare la somma delle pressioni sotto il punto *F*, farà d' uopo prendere la quantità integrale per modo che fatta $x =$ *ÆD*, tutto svanisca. Questo avvertimento, che pare essere solamente proprio per un Arco a cui corrisponda una curva *VCMDOuCmDo* di quell' andamento che si vede nella Figura, può facilmente applicarsi a qualsivoglia altro Arco , e alla sua conseguente *curva delle pressioni e degli sfiancamenti*, che così si potrebbe ragionevolmente chiamare la curva *VCMDOuCmDo*.

Corollario 2.

Fig. VI. Tav. IV. Sia per esempio l' Arco circolare intero *ACG* del raggio $CQ = b$ riempiuto di cunei fino al serraglio. E poichè la tangente al punto C è parallela all' ordinate, sarà $A = \frac{g^2}{2}$, $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; quindi, fatta l' ordinata *PR* della curva delle pressioni e degli sfiancamenti $= Z$, essendo $Z = \frac{1}{dx}\left(gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}\right)$, s' avrà $Z = \frac{g(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{g^2(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - \frac{2gx+g^2}{2\sqrt{(2bx-x^2)}} = (2b^2g - 2bgx + 2bg^2 - 2g^2x - 2bgx - bg^2) : 2b\sqrt{(2bx-x^2)} = \frac{2b^2g - 4bgx + bg^2 - 2g^2x}{2b\sqrt{(2bx-x^2)}}$. Ora esaminando la natura di questa equazione si troverà che la curva è composta di due rami *HDF BDI* uguali, simili, e similmente posti rispetto al loro asse comune *CT*, i quali fra di loro s' intersecano nel punto D dove $CD = \frac{b}{2}$. Se poi si prenda la $CT = 2b$, e dai punti C T si conducano le rette *ML NO* perpendicolari alla *CT*, saranno le rette *ML NO* assintoti de' rami medesimi dall' una parte e dall' altra. Ommettendo pertanto il ramo *BDI* che serve per li cunei che sono dalla parte del mezzo Arco *CG*, è evidente che il ramo *HDF* dimostra che i cunei da C in E premono la centina, perchè la curva da H in D cade dalla parte delle quantità positive; che in E v' ha un punto d' equilibrio, perchè la curva sega in D il suo asse; e che finalmente da E in A tutti i cunei sfiancano, avvegnachè la curva da D in giù cade dalla parte delle quantità negative. In oltre poichè $\int Zdx = gy + \frac{g^2 dx}{ds} -$

Prop. 5 di questo

$\int\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$; e $gy+\frac{g^2dx}{ds}-\int\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$ si è provato uguale a $\frac{2bg+g^2}{2b}$ moltiplicato nel doppio seno KP dell' arco CK diminuito dell' arco medesimo CK; laonde ancora $\int Zdx$, ovvero l' area $MHRPC$ sarà $=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2KP-CK)$; e però la somma $MHDC$ delle pressioni sino al punto d' equilibrio E sarà $=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2ED-CE)$. Ma se x sia maggior di CD o di $\frac{b}{2}$, per esempio $=Cp$, la quantità $\frac{2bg+g^2}{2b}.(2kp-Ck)$ riuscirà uguale alla differenza dell' aree $MHDC$ Dpr; cosicchè per conseguire la sola area Dpr bisognerà prendere l' integrale di $gy+\frac{g^2dx}{ds}-\int\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$ in modo che fatta $x=\frac{b}{2}$ tutto svanisca; ovvero per iscansare una nuova integrazione, poichè $MHDC=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2ED-CE)$, e parimenti $MHDC-Dpr=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2kp-Ck)$, sarà $Dpr=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2ED-2kp-CE+Ck)=\frac{2bg+g^2}{2b}.(-2kV+Ek)$: conseguentemente la somma di tutti gli sfiancamenti de' cunei da E fino in A o la somma delle loro pressioni sulla sopraccentina sarà $=\frac{2bg+g^2}{2b}.(-2AX+EA)$.

Corol. 2 Prop. 11 di questo

PROBLEMA 14. PROPOSIZIONE 14.

Determinare le pressioni de' cunei sulla centina in un Arco di qualsivoglia curvatura e di non uniforme grossezza.

Fig. II. Tav. IV. Sia l' Arco $AB\Omega$ appoggiato alla centina $AB\Omega$ di qualsivoglia curvatura, ma non sia l' Arco di uniforme grossezza, e però sia data la curva esteriore dell' Arco medesimo, il quale sia riempiuto di cunei fino in B: si domanda la pressione sulla centina di un cuneo qualunque $opzn$.

Si supponga diviso l' Arco AB ne' suoi cunei infinitesimi, i primi quattro de' quali sieno quelli sulle basi BC CD DE EL; e di tutti i cunei fino allo $opzn$ si prendano i centri di gravità G H I K ecc. q, da cui si conducano le verticali GO HS IZ Kh ecc. qu proporzionali a' rispettivi pesi de' cunei, e si faccia il resto come nella proposizione 2 di questo.

Si dimostrerà come nella citata prop. che la spinta relativa qr del cuneo immediate superiore allo $opzn$ è uguale alla somma delle pressioni, che ogni cuneo eserciterebbe respettivamente sull' inferiore s' ei fosse il primo in ordine; e si dimostrerà ancora similmente che, prolungato il raggio $Æq$ in s, e condotta la rs perpendicolare alla commessura pz, il peso de' cunei superiori produce l' effetto di togliere dalla natural pressione $q\varphi$ del cuneo $opzn$ sulla centina una quantità uguale a qs; cosicchè la reale pressione del cuneo sulla centina è uguale a $q\varphi - qs$.

Ciò posto si faccia la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, $\pi\delta = n\mu = dx$, $z\mu = dy$, $nz = ds$ e la grossezza no dell' Arco al punto n sia $= g$, esprimendo g una quantità variabile data in qualunque modo per le coordinate x y della curva $AB\Omega$. E poichè il raggio osculatore $nÆ$ nell' ipotesi di ds costante trovasi $= \frac{dyds}{ddx}$, sarà $oÆ = \frac{dyds}{ddx} + g$, la nz poi è $= ds$, dunque facendo come $nÆ : oÆ :: nz : op$, si troverà $op = ds + \frac{gddx}{dy}$; e però lo spazio $opzn$, ovvero la gravità qu del cuneo $opzn$, diventerà

$$= \frac{oÆ \,.\, op}{2} - \frac{nÆ \,.\, nz}{2} = \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) . \left(\frac{ds}{2} + \frac{gddx}{2dy}\right) - \frac{dyds}{ddx} . \frac{ds}{2}$$

$= gds + \frac{g^2 ddx}{2dy}$. Di nuovo il triangolo $q\varepsilon u$ essendo simile al triangolo $n\mu z$, s' avrà come $nz : n\mu :: qu : q\varepsilon$, e come $nz : z\mu ::$

$qu : \varepsilon u \, (= q\varphi)$; e per conseguenza si determinerà la $q\varepsilon = gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}$, e la $q\varphi = gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$; il tutto come nella propos. citata.

Ora essendo la spinta relativa qr uguale alla somma di tutte le pressioni $q\varepsilon$, che da B fino in n eserciterebbe ogni cuneo sull' inferiore senza il carico de' superiori, sarà $qr = \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$, dove non si può prendere l' integrale, come in essa prop., perchè g è quantità variabile, ma però sempre l' integrale dovrà torsi in modo che tutto svanisca nel caso di $x = 0$. In oltre essendo il triangolo $\text{Æ}nz$ simile al triangolo rsq, e come $\text{Æ}n : nz :: qr : qs$, ovvero $\frac{dyds}{ddx} : ds :: \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right) : qs$, sarà $qs = \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$: la $q\varphi$ poi s' è provata $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$; dunque $q\varphi - qs$, cioè la reale pressione qt del cuneo $opzn$ sulla centina, è $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$; il che ecc.

Corollario 1.

Conseguentemente nel punto d' equilibrio dovrà essere $gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right) = 0$; ed ecco la formola che serve per trovare i punti d' equilibrio negli Archi di qualunque curvatura interiore ed esteriore.

Corollario 2.

Ne segue ancora che se da B in n tutti i cunei premano la centina, sarà la somma delle loro pressioni sulla centina medesima $= \int \left(gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) \right)$: e qui si rende manifesto il modo di determinare anche negli Archi di variabile grossezza la curva delle pressioni e degli sfiancamenti, come nella prop. antecedente si è fatto per quelli che sono di una costante grossezza forniti.

Corollario 3.

Fig. II. Tav. V. Sia per esempio *ABCKIH* un Arco di non uniforme grossezza e costrutto in modo che la curva interiore *ABC* sia di figura semicircolare e del raggio $= b$; presa poi nella saetta *BF* l' ascissa $BD = x$, e l' ordinata $DE = y$, si unisca *FE* e si prolunghi in *G* facendo la $EG = \frac{1}{2}\sqrt{(bx + 5b^2)} - b$; e pe' punti *G* così determinati passi la curva esteriore dell' Arco: si domandano i punti d' equilibrio, se ve ne sono, e la quantità delle pressioni sulla centina.

E poichè l' equazione al semicerchio *ABC* è $2bx - x^2 = y^2$, sarà $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{ddy}{ds} = \frac{-dx}{b}$, $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx - x^2)}}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; ma $g = \frac{1}{2}\sqrt{(bx + 5b^2)} - b$, e $g^2 = \frac{bx}{4} + \frac{9b^2}{4} - b\sqrt{(bx + 5b^2)}$; laonde $\int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) = \int \left(\frac{dx}{2}\sqrt{(bx + 5b^2)} - bdx + \frac{bxdx}{8b} + \frac{9b^2 dx}{8b} - \frac{dx}{2}\sqrt{(bx + 5b^2)} \right) = \int \left(\frac{b^2 dx}{8b} + \frac{bxdx}{8b} \right) = \frac{bx}{8} + \frac{x^2}{16}$, nella qual quantità integrata tutto svanisce quando $x = 0$. Per conseguenza $gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) = \frac{1}{2}\sqrt{(bx + sb^2)} \cdot \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{bdx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{bxdx(b-x)}{8b\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{9b^2 dx(b-x)}{8b\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{1}{2}\sqrt{(bx + 5b^2)} \cdot \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} \cdot \left(\frac{bx}{8} + \frac{x^2}{16} \right) =$

$$\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot\left(-b(b-x)+\frac{x}{8}(b-x)+\frac{9b}{8}(b-x)-\frac{bx}{8}-\frac{x^2}{16}\right)$$

$$=\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(2b^2-2bx-3x^2).$$

Premessi questi calcoli, perchè nel punto d' equilibrio debbe essere $gdy+\frac{g^2ddx}{2ds}-\frac{ddx}{dy}\int\left(gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}\right)=0$, sarà in esso punto $\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(2b^2-2bx-3x^2)=0$, e però $2b^2-2bx-3x^2=0$, cioè $x^2+\frac{2b}{3}x=\frac{2b^2}{3}$; dalla qual equazione si ricava $x=-\frac{b}{3}+\frac{b}{3}\sqrt{7}$, ch' è una quantità reale, positiva, e minore della saetta $BF=b$; dunque presa sulla saetta BF l' ascissa $BD=-\frac{b}{3}+\frac{b}{3}\sqrt{7}$, poi condotta l' ordinata DE, s' avrà in E il punto d' equilibrio da una parte dell' Arco $ABCKIH$; e similmente quello si troverà dall' altra.

Di nuovo perchè la somma delle pressioni sulla centina corrispondenti all' ascissa x è generalmente $=\int\left(gdy+\frac{g^2ddx}{2ds}-\frac{ddx}{dy}\int\left(gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}\right)\right)$, sarà essa somma nell' Arco $ABCKIH$ $=\int\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(2b^2-2bx-3x^2)=\int\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(8b^2-8bx+6bx-3x^2-6b^2)=\int\frac{bdx(b-x)}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{3}{16}\int dx\sqrt{(2bx-x^2)}-\frac{3}{4}\int\frac{b^2dx}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}$: ma $\int dx\sqrt{(2bx-x^2)}=$ all' area BDE, e $\int\frac{b^2dx}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}=$ al settore BFE; dunque la somma delle pressioni de' cunei da B fino in E è $=\frac{b}{2}\sqrt{(2bx-x^2)}$

$+ \frac{3}{16} . BDE - \frac{3}{4} . BFE = \frac{b}{2} \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{3}{16} . BDE -$
$\frac{3}{16} . BFE - \frac{9}{16} . BFE = \frac{b}{2} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{3}{16} . EDF - \frac{9}{16} . BFE$
$= \frac{b}{2} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{3}{2 . 16} . (b - x) . \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{9}{16} . BFE,$
o finalmente $= \frac{13b + 3x}{32} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{9}{16} . BFE$, ſenza aggiunger coſtante all' integrale perchè tutto ſvaniſce quando $x = 0$. E ſe in queſta formola ſi ſoſtituiſca in luogo di x il valore $- \frac{b}{3} + \frac{b}{3}\sqrt{7}$ dell' aſciſſa corriſpondente al punto d' equilibrio, ſi troverà, dopo la ſoſtituzione, la ſomma di tutte quante ſono le preſſioni de' cunei da una parte dell' Arco *ABCKIH*.

E ſe ſi voleſſe determinare l' equazione alla curva eſteriore *HIK*, biſognerà operare così. Si conduca dal punto *G* la *GL* parallela alla *ED*, e ſi chiami l' aſciſſa *FL* della curva eſteriore $= u$, e l' ordinata $GL = z$. Pertanto eſſendo la $EG = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} - b$, ſarà tutta $FG = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)}$, e la *DF* è $= b - x$; dunque facendo come $FE : FG :: DF : FL$, ovvero $b : \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} :: b - x : u$, s' avrà $(b - x) . \sqrt{(bx + 5b^2)} = 2bu$, e quadrando, $(b - x)^2 . (bx + 5b^2) = 4b^2u^2$: ſimilmente la proporzione $FE : FG :: DE : GL$ darà, quadrando, l' altra equazione $(2bx - x^2) . (bx + 5b^2) = 4b^2z^2$, che aggiunta alla prima ſomminiſtra la terza $b^2(bx + 5b^2) = 4b^2u^2 + 4b^2z^2$, e però $bx + sb^2 = 4u^2 + 4z^2$, $x = \frac{4u^2 + 4z^2 - 5b^2}{b}$, e $b - x = \frac{6b^2 - 4u^2 - 4z^2}{b}$, ſiccome $(b - x)^2 = \left(\frac{6b^2 - 4u^2 - 4z^2}{b}\right)^2$. In oltre poichè per la prima equazione $(b - x)^2 . (bx + 5b^2) = 4b^2u^2$, e s' è provato che $bx + 5b^2 = 4u^2 + 4z^2$, dunque

$(b - x)^2$.

$(b-x)^2 \cdot (4u^2 + 4z^2) = 4b^2u^2$, e $(b-x)^2 = \frac{b^2u^2}{u^2+z^2} = \left(\frac{6b^2 - 4u^2 - 4z^2}{b}\right)^2$, ch' è l' equazione fra le coordinate $u\ z$ della curva esteriore.

S C O L I O.

Sarebbe ſtata difettoſa queſta nuova e generale Teoria delle preſſioni de' cunei ſulle centine, ſe non ſi foſſe dichiarato il modo di adattarla anche agli Archi, che non ſono di uniforme groſſezza forniti.

Fine del Libro Quarto.

LIBRO QUINTO

DEGLI ARCHI DOTATI DI QUALSIVOGLIA INCURVAMENTO, DOPO DISARMATE LE CENTINE.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

IN un Arco dotato di uniforme grossezza ma di qualunque curvatura interiore, da cui sia stata tolta la centina, ritrovare la differenza delle scambievoli pressioni esercitate da due cunei infinitesimi contigui, senza però far conto del carico de' superiori.

Fig. III. Tav. V. Sia *AmB* un Arco di qualsivoglia incurvamento interiore e di uniforme grossezza, dal quale sia stata tolta la centinatura. Sia poi esso esternamente armato di sopraccentine, e si prendano i due cunei infinitesimi contigui *bLeZ ZeTa* sopra basi uguali *Le eT*; si domanda la differenza delle pressioni che questi cunei esercitano fra di loro, non tenendo però conto delle pressioni de' cunei superiori e supponendoli come primi in ordine.

Dai punti *T* e *L* si conducano i raggi osculatori *Tn eQ LQ* che concorrano insieme ne' punti *n Q*; indi presi i centri di gravità *C D* de' cunei suddetti, si conducano le linee verticali *CE DF* che siano in ragione de' loro rispettivi pesi; poi, tirate le *CK DG* perpendicolari alle commessure *aT bL*, si unisca *CD* e si compiano i parallelogrammi *CKEI DHFG*. Dinoterà *DH* la pressione del cuneo superiore *bLeZ* sull' inferiore *ZeTa*, e reciprocamente *CI* la pressione dell' inferiore sul superiore: ora fa d'uopo esprimere analiticamente la differenza tra esse DH CI.

Si tirino le ordinate LO ef Tk, poscia le Lg eu parallele all'asse mp, e dal punto T la TSN parallela alla CK, e perpendicolare alla aT, come dal punto L la SLq parallela alla DG, e perpendicolare alla bL: sarà dunque l'angolo KCE ovvero CEI uguale all'angolo SNM, e l'angolo FDG uguale all'angolo OMq. In oltre si finisca la figura e si chiami al solito l'ascissa $mO = x$, l'ordinata $LO = y$, la grossezza uniforme bL dell'Arco $= g$; e sarà $Of = Lg = dx$, $eg = dy$, $fk = eu = dx + ddx$, $Tu = dy + ddy$, $Le = eT = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, e finalmente il raggio osculatore LQ (nell'ipotesi di ds costante) $= \frac{dyds}{ddx}$, o per facilità di calcolo $= z$, e però il raggio osculatore $Tn = \frac{dyds}{ddx} + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = z + dz$. Per conseguenza sarà l'area del cuneo $bLeZ$ e il suo peso $= gds + \frac{g^2ds}{2z} = DF$, e quella dell'altro $ZeTa$ e il suo peso $= gds + \frac{g^2ds}{2z + 2dz} = CE$, ovvero trascurando gl'infinitesimi di ordine superiore al secondo $= gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}$; dal che apparisce che i pesi de' due cunei differiscono fra loro di una quantità infinitesima del secondo ordine.

E perchè sta come eL al seno tutto, così eg al seno dell'angolo eLg, cioè $ds : r :: dy :$ sen. eLg, sarà sen. $eLg = \frac{rdy}{ds}$; parimente essendo come $ds : r :: dx :$ cos. eLg, sarà cos. $eLg = \frac{rdx}{ds}$. E perchè $(SQ)^2 = (LQ)^2 + (SL)^2$, e SL è $= Le = ds$, riuscirà $SQ = \sqrt{(z^2 + ds^2)} = z + \frac{ds^2}{2z}$, e però $Se = SQ - Qe = \frac{ds^2}{2z}$; laonde risolvendo il triangolo SLe si troverà sen. $SLe =$

$\frac{rds}{2z}$, e cos. $SLe = r$. Per conseguenza dati i seni e i coseni degli angoli SLe eLg, sarà anche dato il seno della loro somma SLg, ovvero LMO, e sarà $= \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$. Di nuovo la risoluzione del triangolo eTu somministrerà sen. $eTu = \frac{rdx}{ds} + \frac{rddx}{ds}$, e cos. $eTu = \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds}$: ma la Sn sarà $= \sqrt{((Tn)^2 + (ST)^2)} = \sqrt{((z + dz)^2 + ds^2)} = z + dz + \frac{ds^2}{2z + 2dz}$; e però la rimanente $Se = \frac{ds^2}{2z + 2dz}$; e qui per maggior chiarezza avverto che il punto dove la TS perpendicolare alla aT concorre con Zn non è lo stesso del punto dove la LS perpendicolare alla bL sega essa Zn, ma ciò non ostante per non confondere la Figura si sono amendue posti in S, nel calcolo poi se ne marca la differenza. Oltre a ciò risolvendo il triangolo STe si troverà sen. $STe = \frac{rds}{2z + 2dz}$; e cos. $STe = r$. Dati pertanto i seni e i coseni degli angoli STe eTu, sarà il coseno della loro somma STu, cioè il seno di $TNO = \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} - \frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$. E' manifesto ancora che sen. $LQe =$ sen. $HDG = \frac{rds}{z}$, e sen. $Tne =$ sen. $KCI = \frac{rds}{z + dz}$.

Equaz. I. Prop. 7 Lib. I. — Equaz. III.

Ciò posto perchè come $DF : DH :: \text{sen.} HDG : \text{sen.} FDG = \text{sen.} OMq = \text{sen.} LMO$, sarà sostituendo $gds + \frac{g^2 ds}{2z} : DH :: \frac{rds}{z} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$, dunque $DH = \left(gds + \frac{g^2 ds}{2z}\right) \cdot \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds}\right)$. In simil guisa essendo $CE : CI :: \text{sen.} KCI : \text{sen.} KCE$ ($= \text{sen.} TNO$), s' avrà in lettere $gds + \frac{g^2 ds}{2z} - \frac{g^2 dsdz}{2z^2} : CI :: \frac{rds}{z + dz} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} -$

$\frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$, laonde $CI = \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{dzddy}{ds^2} - \frac{dx + ddx}{2ds}\right)$, cioè, ommettendo nel secondo moltiplicatore i termini infinitesimi, sarà $CI = \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} - \frac{dx}{2ds}\right)$; quindi la ricercata differenza tra le pressioni DH CI sarà $= \left(gds + \frac{g^2ds}{2z}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds}\right) - \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} - \frac{dx}{2ds}\right)$ $= gdx + \frac{g^2dx}{2z} - \frac{gzddy}{ds} - \frac{g^2ddy}{2ds} - \frac{gdydz}{ds}$ negletti gl' infinitesimi di secondo ordine: ma perchè ds è costante sarà differenziando l' equazione $dy^2 + dx^2 = ds^2$, $dyddy + dxddx = 0$, e $ddy = \frac{-dxddx}{dy}$, laonde $-\frac{gzddy}{ds} = \frac{-g}{ds}.\frac{dyds}{ddx}.\frac{-dxddx}{dy} = gdx$, e $+ \frac{g^2dx}{2z} = g^2dx : \frac{2dyds}{ddx} = \frac{g^2dxddx}{2dyds} = \frac{-g^2ddy}{2ds}$; dunque finalmente $DH - CI = 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; il che ecc.

Corollario.

E poichè come DF a DH, così il seno dell' angolo infinitesimo LQe al seno dell' angolo finito FDG; e il seno dell' angolo LQe è infinitamente minore del seno dell' angolo FDG; dunque sarà pure DF infinitamente minore di DH: ma la DF che rappresenta la gravità del cuneo $bLeZ$ è un infinitesimo del primo ordine, dunque DH è una quantità finita. Similmente si proverà CI quantità finita; ciò nulla ostante la differenza tra le DH CI, testè ritrovata, diventa uguale a una quantità infinitesima del primo ordine perchè le quantità finite si distruggono nella sottrazione scambievolmente tra di loro. E siccome allo stesso modo si possono provare finite anche le quantità *DG CK*, così sarà vero in generale, che le gravità de' cunei, quantunque infinitesime, dividendosi nelle forze laterali che abbiano le loro direzioni perpendicolari alle commessure, danno nella divisione forze finite: bisogna però eccettuare il solo caso in cui la commessura inferiore riesca orizzontale, perchè allora non può dividersi la gravità del cuneo, ma s' impiega tutta, infinitesima com' è, a premere il piano sottostante secondo una direzione verticale. La *DH* poi per le cose trovate nella prop. sarà, ommettendo gl' infinitesimi, uguale alla quantità finita $\frac{gzdy}{ds} + \frac{g^2dy}{2ds} = \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$; e ad essa quantità si troverà facilmente uguale anche la *HF* o la *DG*, che dalla *HD* non differisce che di una quantità infinitesima.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Ritrovare la differenza delle pressioni esercitate fra di loro da due cunei infinitesimi di un Arco di qualunque curvatura interiore ed esteriore, dal quale sia stata levata la centina, non contando come nell' antecedente le pressioni de' cunei superiori.

Fig. V. Tav. V. Nell' Arco *ALm* di qualunque curvatura interiore ed esteriore bisogna trovare le differenze delle pressioni fra i due cunei infinitesimi *bLeZ ZeTa*, dopo disarmata la centina.

Si faccia la stessa costruzione dell' antecedente, e di più essendo la grossezza *Lb* quantità variabile, col centro *Q* e intervallo *Qb* si descriva l' archetto *bq*, e col centro *n* intervallo *nq* l' altro archetto *qt*.

Prese le solite denominazioni si troverà come nella citata proposizione l' area $bLeq = gds + \frac{g^2ds}{2z}$, e l' area $qeTt = gds$

$+\frac{g^2ds}{2z}-\frac{g^2dsdz}{2z^2}$. Ed è manifesto che la differenza qZ tra le Lb eZ diventerà $= dg$, ed $eZ = g + dg$, e così la differenza tra le eZ Ta sarà $= dg + ddg$, e per conseguenza la differenza at tra la prima Lb e la terza Ta sarà $= 2dg + ddg$. Ora se si faccia come $QL : Qb :: Le : bq$, ovvero $z : z + g :: ds : bq$, si avrà $bq = ds + \frac{gds}{z}$; e però il triangolo $bqZ = \frac{dg}{2} . \left(ds + \frac{gds}{z} \right) = \frac{dsdg}{2} + \frac{gdsdg}{2z}$. Similmente, escludendo gl' infinitesimi del terzo ordine, si troverà il trapezoide $Zqta = \frac{3dsdg}{2} + \frac{3gdsdg}{2z}$. Aggiugnendo pertanto allo spazio $bLeq$ il triangolo bqZ, e allo spazio $qeTt$ il trapezoide $Zqta$, si conseguirà l' intero spazio $bLeZ = DF = gds + \frac{g^2ds}{2z} + \frac{dsdg}{2} + \frac{gdsdg}{2z}$, e lo spazio $ZeTa = gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2} + \frac{3dsdg}{2} + \frac{3gdsdg}{2z}$. Risolvendo poi i parallelogrammi $DHFG$ $CKEI$ si conoscerà il lato DH $= \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} + \frac{dsdg}{2} + \frac{gdsdg}{2z} \right) . \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds} \right)$, e il lato CI $= \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2} + \frac{3dsdg}{2} + \frac{3gdsdg}{2z} \right) . \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} - \frac{dx}{2ds} \right)$; e però la differenza ricercata fra le pressioni DH CI sarà (ommettendo gl' infinitesimi superiori) $= gdx + \frac{g^2dx}{2z} + \frac{g^2dydz}{2zds} - \frac{gzddy}{ds} - \frac{g^2ddy}{2ds} - \frac{gdydz}{ds} - \frac{g^2dydz}{2zds} - \frac{zdydg}{ds} - \frac{gdydg}{ds}$, e riducendo come nell' antecedente, sarà essa differenza $= 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}$; il che ecc.

COROLLARIO.

Per conseguenza, ommettendo i termini infinitesimi, sarà la $DH = \frac{gzdy}{ds} + \frac{g^2dy}{2ds} = \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$, ch' è la quantità medesima ritrovata pel caso in cui l' Arco sia di uniforme grossezza; dunque generalmente la pressione DH del cuneo superiore sull' inferiore negli Archi di uniforme o non uniforme grossezza e di qualsivoglia curvatura interiore sarà espressa dalla quantità sopraddetta.

Corol. dell' ant.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Data la saetta e la corda di un Arco di qualsivoglia curvatura interiore ed esteriore, e data l' altezza e la grossezza de' pilastri, trovare il momento della differenza delle pressioni, che eserciterebbero due cunei contigui fra di loro senza il carico de' superiori.

Fig. III. Tav. V.

Sieno $bLeZ$ $ZeTa$ due cunei contigui nell' Arco AmB, il quale sia primieramente dotato di uniforme grossezza; e si divida al solito la gravità DF del cuneo $bLeZ$ nelle due forze DH DG, e la gravità CE del cuneo $ZeTa$ nelle due CI CK: poi in direzione della DC si prenda Cc uguale alla differenza delle DH CI. Sia poi R il punto estremo del pilastro vicino AR: bisogna trovare il momento di Cc.

Si prolunghi la DC in V, e dal punto R si conduca la RV perpendicolare alla DV: il prodotto di Cc per RV dinoterà il momento ricercato: resta dunque da esprimere analiticamente esso prodotto.

Si tirino dal punto Q le Qd QP, l' una perpendicolare alla mb, l' altra alla mb parallela: si prolunghi di poi la RY (quand' occorra) nel punto X. Si faccia in oltre $mO = x$, $OL = y$, $Of = Lg = dx$, $eg = dy$, $Le = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, la grossezza uniforme Lb dell' Arco $= g$: sarà il raggio osculatore

tore $LQ = \frac{dyds}{ddx}$, e il triangolo QLP simile al triangolo eLg darà il co-raggio $LP = \frac{dxdy}{ddx}$, e il co-raggio $PQ = \frac{dy^2}{ddx}$. Finalmente si chiami la saetta $mp = n$, la semicorda $Ap = b$, l' altezza YR del pilastro $= a$, e la sua grossezza $AY = G$: sarà per le cose dimostrate la differenza Ce tra le forze DH CI nell' Arco AmB di uniforme grossezza $= 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. Prop. 1 di questo

E perchè $LQ = \frac{dyds}{ddx}$, $Lb = g$, e l' angolo eQL al centro del cuneo $bLeZ$ è infinitamente picciolo, sarà la distanza $QD = \left(\frac{6dy^2ds^2}{ddx^2} + \frac{6gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right)$. Di nuovo non differendo l' angolo retto dall' angolo QDd che dell' angolo infinitesimo DQZ, sarà l' angolo QDd uguale all' angolo retto egL; similmente non differendo l' angolo DQd dall' angolo LQd che dell' angolo infinitesimo DQL, sarà l' angolo DQd uguale all' angolo LQd, o all' alterno PLQ, cioè all' angolo eLg; dunque il triangolo QDd è simile al triangolo egL, e come $Lg . Le :: QD . Qd$, ovvero come $dx . ds :: \left(\frac{6dy^2ds^2}{ddx^2} + \frac{6gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) . Qd$; e per conseguenza sarà $Qd = \left(\frac{6dy^2ds^3}{dxddx^2} + \frac{6gdyds^2}{dxddx} + \frac{2g^2ds}{dx}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right)$. Oltre a ciò perchè $pb = mO + PQ - mp$, sarà pb o $Yr = x + \frac{dy^2}{ddx} - n$; ma la $YR = a$, dunque la rimanente $Rr = a - x - \frac{dy^2}{ddx} + n$: così essendo $Yp = rb = Ya + Ap = G + b$, e $PO = LO - LP = y - \frac{dxdy}{ddx} = bQ$, sarà la rimanente $Qr = G + b - y + \frac{dxdy}{ddx}$; Corol 2 Prop. 9 Lib. I.

e però sottratto il valore di Qr dal valore di Qd superiormente determinato, s' avrà $dr = \left(\frac{6dy^2ds^3}{dxddx^2} + \frac{6gdyds^2}{dxddx} + \frac{2g^2ds}{dx}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) - G - b + y - \frac{dxdy}{ddx}$.

Di nuovo ancora essendo la Xd parallela alla Le, la Xr alla Lg, e la dr alla eg, sarà il triangolo Xdr simile al triangolo Leg, e però come $eg : gL :: dr : rX$, dunque sostituendo sarà $rX = \left(\frac{6dyds^3}{ddx^2} + \frac{6gds^2}{ddx} + \frac{2g^2ds}{dy}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) - \frac{dx^2}{ddx} - \frac{dx}{dy}(G + b - y)$, e aggiunta la Rr, sarà tutta $XR = \left(\frac{6dyds^3}{ddx^2} + \frac{6gds^2}{ddx} + \frac{2g^2ds}{dy}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) - \frac{dx^2}{ddx} - \frac{dy^2}{ddx} + a + n - x - \frac{dx}{dy}(G + b - y) = \left(\frac{3gds^2}{ddx} + \frac{2g^2ds}{dy}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + a + n - x - \frac{dx}{dy}(G + b - y)$. Per fine il triangolo XVR simile al triangolo Xrd o al triangolo Lge ci darà l' analogia $Le : eg :: XR : RV$, da cui si ricaverà la $RV = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$: laonde il momento di Cc d' intorno al punto R sarà $= \left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) \cdot \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$.

Fig. V. Tav. V. Ed è manifesto ancora, che se l' Arco Am non sia di uniforme grossezza, ma di qualsivoglia curvatura esteriore, essendo in questo caso la differenza $Cc = 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} -$
Prop. 2 di questo $\frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}$, e restando la perpendicolare RV

espressa come nel caso primo, sarà il momento di $Cc =$
$$\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right).\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right):\left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a+n-x) - \frac{dx}{ds}(G+b-y)\right);$$
dalla qual formola, fatta g costante e $dg = 0$, si ricava la prima formola indicante il momento di Cc quando l' Arco sia di uniforme grossezza; e però ecc.

COROLLARIO.

Dunque essendo negli Archi di qualunque curvatura interiore ed esteriore la perpendicolare RV condotta dal punto estremo R del pilastro sulla direzione $DV = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right): \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a+n-x) - \frac{dx}{ds}(G+b-y)$; ed essendosi dimostrato che la pressione DH del cuneo superiore sull' inferiore è $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$; sarà il momento di essa pressione $DH = \left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}\right).\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right):\left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a+n-x) - \frac{dx}{ds}(G+b-y)\right)$, e riducendo $= \frac{g^2dy^2}{2ddx} + \frac{g^3dy}{3ds} + \left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}\right).\left(\frac{dy}{ds}(a+n-x) - \frac{dx}{ds}(G+b-y)\right)$.

Fig. V.

Corol. Prop. I di questo

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Ritrovare lo sfiancamento de' cunei in un Arco dotato di qualsivoglia curvatura interiore ed esteriore, da cui sia stata tolta la centina.

In un Arco, di cui ABC è la curva interiore e KHD l' esteriore, sia IK un cuneo infinitesimo: fa d' uopo ritrovare lo

Fig. IV. Tav. V.

sfiancamento del cuneo *IK* dopo disarmata la centina, vale a dire la sua pressione sulla sopraccentina.

Sieno *DE EF FG GH* ecc..... *OI IK KA* i cunei infinitesimi componenti l' Arco fino al contiguo inferiore ad *IK*; e si prendano i loro centri di gravità *W V a e* φ ecc.... *k P* μ, e si uniscano le linee *WV Va ae e*φ ecc..... *kP P*μ; poi si prolunghino una dopo l' altra facendo i prolungamenti *VX am en* $\varphi\delta$ ecc..... *Pl* $\mu\varepsilon$ uguali alla differenza con cui li cunei superiori premono gl' inferiori contigui più di quello sieno da essi premuti secondo il senso delle due prime prop. di questo Libro; cioè sia la *VX* uguale alla differenza delle pressioni esercitate da' cunei *DE EF* fra di loro; *am* uguale alla differenza delle pressioni fra i cunei *EF FG*, facendo sempre astrazione da' superiori, e come se fossero i primi in ordine; *en* uguale alla differenza fra le pressioni de' cunei *FG GH*, e così in appresso, finchè *Pl* sia uguale alla differenza delle pressioni de' cunei *OI IK*, e $\mu\varepsilon$ a quella de' cunei *IK KA*. Finalmente da' punti *E Æ I M* si conducano i raggi osculatori *ET ÆT I*Ω *M*Ω, e si congiungano le *TV* Ω*P*.

E poichè la direzione della forza *VX* con cui il secondo cuneo *EF* preme il terzo è inclinata alla loro comune commessura *FÆ*, il cuneo *EF* non potrebbe restare nella sua rispettiva posizione senza l'appoggio della sopraccentina; quindi prolungata la *TV* in *Y* e compiuto il parallelogrammo *VYXZ*, esprimerà *VY* lo sfiancamento del cuneo *EF*, e *VZ* insieme con *am* la sua spinta relativa sul cuneo inferiore *FG*. Di nuovo perchè l' angolo *ZVT* è uguale all' angolo *WVT*, l' angolo poi *ZVT* è uguale all' interiore *XYV*, e l' angolo *WVT* all' opposto al vertice *XVY*, sarà l' angolo *XYV* uguale all' angolo *XVY*, e però la *XY* o la *VZ* è uguale alla *XV*: laonde fatta la *mc* uguale alla *VX*, sarà tutta *ac* la spinta relativa del cuneo medesimo *EF*, o la forza con cui esso realmente preme il cuneo *FG* spignendolo contro l' altro *GH*. Ma questa forza opera per una direzione *ac* inclinata alla comune commessura de' cunei *FG GH*; e perciò condotta dal punto *a* al centro dell' archetto *GÆ* una linea retta e prolungata fino in *b*, indi compiuto il parallelogrammo *abcd*, dinoterà *ab* la pressione del cuneo *FG* sulla sopraccentina o il suo sfiancamento, e *ad* insieme con *en* la sua spinta relativa. Nello ſteſſo modo poi col quale ſi è dimoſtrata la *VX* uguale alla *VZ* ſi proverà ancora la *ac* uguale alla *ad*; dunque la ſpinta relativa del cuneo *FG* è uguale ad *ac* con *en*, ovvero alla ſomma delle *VX am en*. Similmente fatta la *nf* uguale alla *ac* o alla ſomma delle *VX am*, e compiuto il parallelogrammo *ebfg*, ſi dimoſtrerà che *eb* eſprime lo ſfiancamento del cuneo *GH*, e che la ſua ſpinta relativa è uguale alla ſomma delle *VX am en* $\varphi\delta$, e così ſucceſſivamente.

Per la qual coſa fatta la *PR* uguale alla ſomma delle *VX am en* $\varphi\delta$ ecc..... *Pl*, e prolungata la ΩP in *Q*, ſe ſi termini il parallelogrammo *PQRS*, dinoterà *PQ* lo ſfiancamento del cuneo propoſto *IK*, e la ſomma delle *PS* $\mu\varepsilon$ o la ſomma delle *VX am en* $\varphi\delta$ ecc..... *Pl* $\mu\varepsilon$ moſtrerà la ſpinta relativa del cuneo medeſimo. E perchè gli angoli *RPS SPk* ſono uguali a due retti, ſaranno eſſi uguali agli angoli *SPk* $M\Omega I$, e tolto il comune *SPk*, reſterà l' angolo *RPS* o il ſuo alterno *PRQ* uguale all' angolo $M\Omega I$, laonde il triangolo iſoſcele $M\Omega I$ è ſimile al triangolo iſoſcele *PRQ*, e come ΩM a *MI*, così ſarà *PR* a *PQ*.

Sicchè fatta $BL = x$, $IL = y$, $LN = Ip = dx$, $Mp = dy$, $IM = ds$, la groſſezza variabile dell' Arco in $I = g$, e il raggio oſculatore $\Omega M = \frac{dyds}{ddx}$, eſſendo la *Pl*, o la differenza delle preſſioni de' cunei *OI IK* fra di loro ſenza tener conto de' cunei ſuperiori, $= 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}$, ſarà la *PR* o la ſomma delle *VX am en* $\varphi\delta$ ecc..... *Pl* Prop. 2 di queſto

$$= \int\left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right) = PR;$$ ma

ſi è dimoſtrato che come $\Omega M : MI :: PR : PQ$; ovvero $\frac{dyds}{ddx} : ds :: PR : PQ$; per conſeguenza lo ſfiancamento *PQ* del cuneo *IK* ſarà $= \frac{ddx}{dy} \int\left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$; il che ecc.

Corollario 1.

Finchè i cunei sono infinitamente prossimi al punto B e l' ascissa x infinitesima, gli sfiancamenti VY ab ecc. sono infinitesimi del secondo ordine; ma quando l' ascissa x sia finita, come si suppone la BL, lo sfiancamento PQ del cuneo IK diventa infinitesimo del primo ordine. Imperciocchè qual ragione ha la $TÆ$ alla $ÆE$, la stessa ha ancora la XV alla VY; ma la $TÆ$ alla $ÆE$ ha la ragione della quantità finita all' infinitesima di primo ordine, dunque essendo la XV quantità infinitesima del primo ordine, sarà la VY infinitesima del secondo; e la stessa dimostrazione vale per tutti gli altri cunei al punto B infinitamente prossimi. Ma se la BL sia finita, allora si dimostrerà similmente essere la PR alla PQ nella ragione della quantità finita all' infinitesima di primo ordine, la PR poi, come uguale ad una somma infinita delle quantità VX am en $\varphi\delta$ ecc.... Pl del primo ordine, è quantità finita; laonde PQ è infinitesima dell' ordine primo, come si doveva dimostrare.

Corollario 2.

Si è dimostrato che la spinta relativa del cuneo IK è uguale alla somma di PS e di $\mu\varepsilon$, ma PS è uguale a PR cioè alla somma di VX am en $\varphi\delta$ ecc..... Pl, e $\mu\varepsilon$ è una quantità infinitesima, dunque la spinta relativa del cuneo IK è uguale a PR o alla somma delle VX am en $\varphi\delta$ ecc. $Pl =$ $\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$. Così di ogni cuneo fuorchè della mossa, dove bisognerà operare in altro modo per conseguire la spinta relativa. Sia per esempio AK la mossa, e si tiri la verticale $\mu\alpha$ dinotante il suo peso, e la μt perpendicolare all' impostatura $A\pi$: è chiaro pertanto che presa εs uguale a PR, o alla somma delle VX am en $\varphi\delta$ ecc.... Pl, e compiuto il parallelogrammo μrst, poi l' altro $\mu\Gamma\alpha u$, si avrà in μr lo sfiancamento, e nella somma delle μt $\mu\Gamma$ la spinta relativa della mossa; delle quali la $\mu\Gamma$ non è trascurabile che nel solo caso in cui l' impostatura sia orizzontale, riuscendo allora infinitesima di grandezza, ed uguale al peso $\mu\alpha$ della mossa stessa. Per il che essendo la pressione $\mu\Gamma = \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$, e la $\mu t = \mu s = \varepsilon s = PR = \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$, sarà la spinta relativa della mossa $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$, dove converrà, dopo l' integrazione, fare l' ascissa x uguale alla saetta dell' Arco. Corol. Prop. 1 di questo

COROLLARIO 3.

E se vi fosse una forza $= q$ che si unisce alla VX del serraglio per premere secondo la direzione medesima il primo cuneo EF, allora le differenze VX am en ecc. s' ingrandirebbero ciascuna della quantità q, e però anche PR riuscirebbe uguale a q unita alle stesse quantità VX am en $o\delta$ ecc.... PI, e sarebbe $= q + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$. Per conseguenza l' analogia di $\Omega M : MI :: PR : PQ$ somministrerebbe nel caso suddetto lo sfiancamento $PQ = \frac{qddx}{dy} + \frac{ddx}{dy}\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$. La spinta poi relativa di tutti i cunei senza la mossa riuscirebbe $= q + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$, e quella della mossa diventerebbe $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + q + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$ facendo dopo l' integrazione x uguale alla saetta dell' Arco.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Data la curvatura interiore ed esteriore di un Arco da cui sia stata disarmata la centina, e date la saetta e la corda coll' altezza e grossezza de' pilastri, ritrovare la somma de' momenti di tutte le forze che cercano rovesciare i pilastri medesimi.

Fig. IV. Tav. V.

Sia ABC un Arco disarmato delle sue centine, e di qualsivoglia incurvamento interno ed esterno, e AZ il suo pilastro: bisogna trovare la somma de' momenti delle forze impiegate contro il pilastro AZ.

Si divida l' Arco dalla sommità sino alla mossa AK ne' suoi cunei infinitesimi, e si determinino gli sfiancamenti VY ab eh ecc..... ki PQ μr, o le pressioni loro sulla sopraccentina, l' ultima delle quali μr sia quella della mossa. Sieno poi le VX am en $\varphi\delta$ ecc...... Pl $\mu\varepsilon$ quelle linee ch' esprimono la differenza delle pressioni che due cunei contigui eserciterebbero fra di loro senza il carico de' superiori e se fossero i primi in ordine; e la gravità $\mu\alpha$ della mossa si divida nelle due forze laterali $\mu\Gamma$ μu che abbiano le loro direzioni $\mu\Gamma$ μu perpendicolari una all' impostatura $A\pi$, l' altra alla linea KM. Dunque per le cose dimostrate nell' antecedente sarà la spinta relativa del serraglio DE uguale a VX, quella del primo cuneo EF uguale alla somma delle VX am cioè alla ac, quella del cuneo $FG = VX + am + en = ef$, e così successivamente, sicchè la spinta relativa del cuneo OI sarà $= VX + am + en + \varphi\delta$ ecc.... $+ kx + Pl = PR$, quella del cuneo $IK = VX + am + en + \varphi\delta$ ecc..... $+ kx + Pl + \mu\varepsilon = \mu s = \mu t$, e per fine la spinta relativa della mossa sarà $= \mu s + \mu\Gamma$, delle quali la $\mu\Gamma$ è solo trascurabile quando l' impostatura $A\pi$ sia orizzontale. Sia pertanto essa impostatura in primo luogo orizzontale: s' avrà dunque in μs o in μt la spinta relativa della mossa, e suppongasi altresì che la direzione μt prolungata passi fuori della base del pilastro.

Le gravità dunque de' cunei dalla sommità alla mossa divise

vise nelle forze laterali, e maneggiate col solito metodo si riducono a dare gli sfiancamenti *VY ab eb* ecc.... *ki PQ* μr, o le pressioni de' cunei sulla sopraccentina, e resta in oltre la spinta relativa μt della mossa sul pilastro. Le prime forze tendono manifestamente in ogni caso a rovesciare il pilastro d' intorno al punto *z*, e nella presente supposizione, che la direzione μt prolungata cada fuori della base, anche la forza μt tende all' effetto medesimo; quindi sarà sciolto il Problema se si potrà determinare la somma de' momenti di tutte le forze soprammentovate. Ora poichè la somma de' momenti delle forze μt μr operanti per le direzioni μt μr d' intorno al punto *z* è uguale al momento della forza composta μs per la direzione μs, e la μs è uguale alle $\mu \varepsilon$ εs cioè alle $\mu \varepsilon$ *PS*, saranno i momenti delle forze μt μr uguali a' momenti delle forze $\mu \varepsilon$ *PS*; e aggiunto da ambe le parti il momento di *PQ*, si avranno i momenti delle forze μt μr *PQ* uguali ai momenti delle $\mu \varepsilon$ *PS PQ*. Ma i momenti delle *PS PQ* d' intorno al punto *z* sono uguali al momento della forza composta *PR*, cioè delle forze *Pl lR*, ovvero *Pl ko*; laonde i momenti delle forze μt μr *PQ* sono uguali ai momenti delle $\mu \varepsilon$ *Pl ko*. Di nuovo aggiunto il momento della *ki*, si dimostreranno i momenti delle forze μt μr *PQ ki* uguali a' momenti delle $\mu \varepsilon$ *Pl kx xy*; e così continuando la dimostrazione si giugnerà finalmente a provare che i momenti delle μt *VY ab eb* ecc..... *ki PQ* μr sono uguali a' momenti delle *VX am en* $\varphi \delta$ ecc....... *kx Pl* $\mu \varepsilon$, che dinotano gli eccessi con cui ogni cuneo superiore premerebbe l' inferiore contiguo più che non sarebbe da esso premuto, non contando il peso de' superiori; per conseguenza la somma de' momenti delle *VX am en* $\varphi \delta$ ecc..... *kx Pl* $\mu \varepsilon$ esprimerà la somma de' momenti che tendono a rovesciare il pilastro *Az*. Prop. 13 Lib. I.

Si chiami al solito un' ascissa $BL = x$, l' ordinata $LI = y$, la grossezza uniforme o non uniforme dell' Arco $= g$, la saetta $= n$, la semicorda $= b$, l' altezza del pilastro $= a$, la sua grossezza $= G$: sarà il momento dell' eccesso *Pl* con cui il cuneo superiore *OI* preme l' inferiore *IK* più di quello sia da esso premuto $= \left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \right.$ Prop. 3 di questo

$\frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\Big) \cdot \Big(\Big(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\Big) : \Big(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\Big) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\Big)$; e però la somma de' momenti degli eccessi suddetti dalla sommità alla mossa, cioè la somma de' momenti delle forze *VX am en* $\varphi\delta$ ecc..... *kx Pl* $\mu\varepsilon$ riuscirà $= \int\Big(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\Big(\frac{dyds}{ddx}\Big) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\Big) \cdot \Big(\Big(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\Big) : \Big(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\Big) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\Big)$ che chiamo $= (R)$, purchè dopo l' integrazione si sostituisca in luogo di x il valore n della saetta, e l' integrazione sia fatta in modo che quando x e y siano uguali a zero, tutto svanisca.

Anche se (restando orizzontale l' impostatura $A\pi$) la direzione μt prolungata passasse sotto il punto z, cosicchè la forza μt s' impiegasse a sostenere non a rovesciare il pilastro, e negativo fosse il suo momento, si troverà similmente che
Prop. 14 Lib. I. la differenza de' momenti delle forze *VY ab eb* ecc..... *ki PQ* μr dal momento della forza medesima μt è uguale a' momenti delle forze *VX am en* $\varphi\delta$ ecc..... *kx Pl* $\mu\varepsilon$, de' quali i superiori riuscirebbero positivi, e negativi gl' inferiori vicini all' impostatura, e che però la formola sopraddetta (R) serve anche in questo caso a dinotare il totale sforzo contro il pilastro. E lo stesso si dica se la direzione della forza μt prolungata passi pel punto z, o pel centro del moto, in modo che il suo momento fosse nullo, e non valesse nè ad accrescere nè a diminuire lo sforzo contro al pilastro.

Se poi l' impostatura $A\pi$ non sia orizzontale, egli è chiaro, che alla quantità (R) bisogna aggiugnere il momento della forza $\mu\Gamma$ quando la direzione $\mu\Gamma$ passi sopra z, e toglierlo se passa di sotto, la qual forza $\mu\Gamma$ nella prima supposizione di $A\pi$ orizzontale era infinitesima e però trascurabile, non così in questa. E perchè generalmente dividendo la gravità di un cuneo nelle
Corol. Prop. 3 di questo forze perpendicolari alle commessure, risulta il momento della inferiore d' intorno al centro del moto $= \frac{g^2 dy^2}{2ddx} + \frac{g^3 dy}{3ds} + \Big(\frac{gdy^2}{ddx}$

$+\frac{g^2dy}{2ds}\Big)\cdot\Big(\frac{dy}{ds}(\alpha+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\Big)$, sarà il momento di $\mu\Gamma$ uguale alla quantità medesima purchè in luogo di x si sostituisca la saetta n, e in luogo di y la semicorda b. E semplificando sarà il momento di $\mu\Gamma$, che chiamo (D), $=\frac{g^2dy^2}{2ddx}+\frac{g^3dy}{3ds}+\Big(\frac{gdy^2}{ddx}+\frac{g^2dy}{2ds}\Big)\cdot\Big(\frac{\alpha dy}{ds}-\frac{Gdx}{ds}\Big)$: quindi la somma de' momenti contro al pilastro $Az=(R)$ $+(D)=\int\Big(2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}\cdot d\Big(\frac{dyds}{ddx}\Big)-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}\Big)\cdot$ $\Big(\Big(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\Big):\Big(\frac{6dyds}{ddx}+3g\Big)+\frac{dy}{ds}(\alpha+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+$ $b-y)\Big)+\frac{g^2dy^2}{2ddx}+\frac{g^3dy}{3ds}+\Big(\frac{gdy^2}{ddx}+\frac{g^2dy}{2ds}\Big)\cdot\Big(\frac{\alpha dy}{ds}-\frac{Gdx}{ds}\Big)$, sostituendo dopo le opportune operazioni in luogo di x la saetta n, e la semicorda b in luogo di y, e avvertendo di fare l' integrazione della quantità sotto il segno integrale sì che quando x e y siano uguali a zero tutto svanisca; il che ecc.

COROLLARIO.

Ma se nell' Arco di uniforme grossezza o no vi fosse una forza $=q$ che si unisse colla forza VX del serraglio per premere il primo cuneo, allora, come abbiamo detto, le differenze VX am en $\varphi\delta$ ecc....... s' ingrandirebbero ciascuna di una quantità $=q$; laonde retrocedendo, come nella proposizione, si dimostrerà che la somma de' momenti contro al pilastro Az diventa uguale al momento di essa forza q applicata secondo la sua prima direzione VX insieme co' momenti delle VX am en $\varphi\delta$ ecc. kx Pl $\mu\varepsilon$. Di nuovo perchè la perpendicolare condotta dal punto z sulla direzione della forza Pl del cuneo IK corrispondente all' ascissa x è $=\Big(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\Big)$: $\Big(\frac{6dyds}{ddx}+3g\Big)+\frac{dy}{ds}(\alpha+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)$, fatta $x=0$ e $y=0$, sarà la perpendicolare condotta dal punto

Corol. 3 Prop. 4 di questo

Corol. Prop. 3 di questo

medesimo z sulla direzione $VX = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right)$ $+ \frac{dy}{ds}(a + n) - \frac{dx}{ds}(G + b)$; e però il momento della forza q per la direzione VX sarà $= q\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n) - \frac{dx}{ds}(G + b)\right)$ in cui dopo le opportune sostituzioni bisognerà far di nuovo $x = 0$, e $y = 0$. Per la qual cosa aggiunto questo momento alla somma de' momenti trovata nella proposizione, sì pel caso nel quale sia l' impostatura orizzontale, che per l' altro quando sia all' orizzonte inclinata, sarà data la totale somma de' momenti contro al pilastro di un Arco di uniforme o non uniforme grossezza spinto superiormente da una forza q per una direzione perpendicolare alla commessura inferiore del serraglio.

S C O L I O.

Ecco pertanto risoluto il tanto ventilato Problema che domanda la somma de' momenti delle forze che operano contro i pilastri di un Arco, e risoluto nella maniera la più generale di quante altre mai, poichè si sono supposte di qualsivoglia natura le curve interiore ed esteriore che l' Arco comprendono. Non resta dunque che mostrare l' applicazione delle nostre formole a qualche caso particolare, e di dar loro qualche prova affine di facilitarne l' intendimento e di convincere anche con un metodo a posteriori *della sicurezza de' loro risultamenti.*

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Si domanda la somma de' momenti delle pressioni esercitate contro a' pilastri di un Arco scemo circolare da cui sia stata tolta la centina.

Sia l' Arco scemo circolare ABC disarmato di centina, e la saetta $BE = n$, la semicorda $AE = b$, la grossezza uniforme dell' Arco $= g$, l' altezza Ab del pilastro $= \alpha$, e la sua grossezza $= G$. E perchè l' impostatura non è orizzontale, sarà per le cose dimostrate nell' antecedente la somma ricercata de' momenti $= (R) + (D)$ essendo $(R) = \int \left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds} \right) . \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2 \right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g \right) + \frac{dy}{ds} (\alpha + n - x) - \frac{dx}{ds} (G + b - y) \right)$, e $(D) = \frac{g^2 dy^2}{2ddx} + \frac{g^3 dy}{3ds} + \left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2 dy}{2ds} \right) . \left(\frac{\alpha dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds} \right)$. Ora essendo ABC un circolo, chiamata x la ascissa, y l' ordinata, e r il raggio AD, sarà $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ l' equazione alla curva interiore, il di cui raggio osculatore $\frac{dyds}{ddx}$ diventa quantità costante com' è anche la grossezza g dell' Arco; dunque $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$, e $dg = 0$; e perciò $(R) = \int \left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} \right) . \left(\frac{3gr + 2g^2}{3(2r + g)} + \frac{dy}{ds} (\alpha + n - x) - \frac{dx}{ds} (G + b - y) \right)$.

Differenziando pertanto l' equazione al cerchio si troverà $dy = \frac{dx(r - x)}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, $ds = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{r - x}{r}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r} \sqrt{(2rx - x^2)}$, $\frac{ddy}{ds} = \frac{-dx}{r}$, e $\frac{dy^2}{ddx} = \frac{dyds}{ddx} . \frac{dy}{ds} = r . \frac{r - x}{r} = r - x$; e sostituendo questi sì fatti valori in (R) si conseguirà $(R) = \int \left(2gdx + \frac{g^2 dx}{r} \right) . \left(\frac{3rg + 2g^2}{3(2r + g)} + \frac{r - x}{r} (\alpha + n - x) - \frac{1}{r} \sqrt{(2rx - x^2)} . \left(G + b - \sqrt{(2rx - x^2)} \right) \right) = \frac{2gr + g^2}{r}$.

Fig. II. Tav. III.

Prop. ant.

$\int\left(\frac{dx(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} + \frac{dx(r-x)}{r}.(æ+n) - \frac{xdx(r-x)}{r} - \frac{dx(G+b)}{r}.\right.$ $\left.\sqrt{(2rx-x^2)} + \frac{dx(2rx-x^2)}{r}\right)$: ma $\frac{-xdx(r-x)}{r} + \frac{dx(2rx-x^2)}{r}$ $= xdx$, e $\frac{-dx(G+b)}{r}.\sqrt{(2rx-x^2)} = \frac{-dx(G+b).(2rx-x^2)}{r\sqrt{(2rx-x^2)}}$ $= \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{r\sqrt{(2rx-x^2)}} - (G+b).\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}}$ $+ \frac{r^2dx(G+b)}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{dx(G+b).(2rx-x^2)}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - (G+b).\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ e finalmente $= \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{dx(G+b).\sqrt{(2rx-x^2)}}{2r}$ $- \frac{G+b}{2}.ds$; dunque $(R) = \frac{2gr+g^2}{r}.\int\left(\frac{dx(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} + \right.$ $\frac{dx(r-x)}{r}.(æ+n) + xdx + \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{dx(G+b).\sqrt{(2rx-x^2)}}{2r}$ $\left. - \frac{ds(G+b)}{2}\right)$: laonde integrando coll' aggiunta della costante (P), sarà $(R) = \frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{x(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} - (r-x)^2.\frac{æ+n}{2r}\right.$ $\left. + \frac{x^2}{2} + \frac{G+b}{2r}.(r-x).\sqrt{(2rx-x^2)} - \frac{s(G+b)}{2}\right) + (P)$: quando poi $x=0$, tutto dee svanire; dunque $(P) = \frac{r^2(æ+n)}{2r}$, e $(R) = \frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{x(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} + (2rx-x^2).\frac{æ+n}{2r} + \frac{x^2}{2}\right.$ $\left. + \frac{G+b}{2r}.(r-x).\sqrt{(2rx-x^2)} - \frac{s(G+b)}{2}\right)$.

Di nuovo passando a sostituire i valori differenziali nell' altra quantità (D) in prima menzionata, si troverà essa $(D) = \frac{g^2(r-x)}{2} + \frac{g^3(r-x)}{3r} + \left(g(r-x) + \frac{g^2(r-x)}{2r}\right).\left(\frac{æ(r-x)}{r}\right.$ $\left. - \frac{G}{r}\sqrt{(2rx-x^2)}\right) = \frac{(3rg^2+2g^3).(r-x)}{6r} + \frac{2rg+g^2}{r}.\left(\frac{æ(r-x)^2}{2r}\right.$

$-\frac{G(r-x)}{2r}\cdot\sqrt{(2rx-x^2)}\Big)=\frac{2gr+g^2}{r}\cdot\Big(\frac{(3rg+2g^2)\cdot(r-x)}{6(2r+g)}+$ $\frac{\ae(r-x)^2}{2r}-\frac{G(r-x)}{2r}\cdot\sqrt{(2rx-x^2)}\Big)$; e però $(R)+(D)=$ $\frac{2gr+g^2}{r}\cdot\Big(\frac{(3rg+2g^2)\cdot(r+x)}{6(2r+g)}+\frac{\ae r^2}{2r}+\frac{n(2rx-x^2)}{2r}+\frac{x^2}{2}+$ $\frac{b(r-x)}{2r}\cdot\sqrt{(2rx-x^2)}-\frac{s(G+b)}{2}\Big)$; ficchè, fatta finalmente $x=n$, $y=\sqrt{(2rx-x^2)}=b$, e s uguale all' arco AB, sarà la somma de' momenti contro al pilastro AW uguale a $\frac{2gr+g^2}{r}\cdot\Big(\frac{(3rg+2g^2)\cdot(r+n)}{6(2r+g)}+\frac{\ae r}{2}+\frac{nb^2}{2r}+\frac{n^2}{2}+\frac{b^2(r-n)}{2r}-$ $\frac{AB(G+b)}{2}\Big)=\frac{2gr+g^2}{r}\cdot\Big(\frac{(3rg+2g^2)\cdot(r+n)}{6(2r+g)}+\frac{\ae r}{2}+\frac{n^2+b^2}{2}$ $-\frac{AB(G+b)}{2}\Big)=\frac{2gr+g^2}{r}\cdot\Big(\frac{(3rg+2g^2)\cdot(r+n)}{6(2r+g)}+\frac{\ae r}{2}+nr$ $-\frac{AB(G+b)}{2}\Big)$, avvegnachè $n^2+b^2=2nr$; il che ecc.

SCOLIO.

Confrontando questa formola della somma de' momenti contro al pilastro di un Arco scemo circolare con quella ritrovata con metodo sintetico al corol. 2 della prop. 16 del Lib. III. e avendo riflessione alla diversità delle lettere in esse formole impiegate, si conoscerà facilmente la loro identità; e questo confronto può servire di una nuova prova convincente de' nostri principj.

COROLLARIO.

Quindi nell' Arco intero AFG sarà la somma de' momenti contro al pilastro AW (fatto il quadrante $AC=Q$, e la saetta $ZQ=r=b=n$) $=\frac{2bg+g^2}{b}\cdot\Big(\frac{3b^2g+2bg^2}{3(2b+g)}+\frac{\ae b}{2}+b^2$ Fig. XIII. Tav. II.

$$-\frac{Q(G+b)}{2}\Big)\Big)=\frac{2bg+g^2}{b}\cdot\Big(\frac{6b^3+6b^2g+2bg^2}{3(2b+g)}+\frac{ab}{2}-\frac{Q(G+b)}{2}\Big).$$

E la stessa formola si sarebbe in altro modo potuta ritrovare, vale a dire prendendo la somma generale de' momenti contro al pilastro di un Arco d' impostatura orizzontale ch' è

$$=\int\Big(2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}\cdot d\Big(\frac{dyds}{ddx}\Big)-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}\Big).\Big(\Big(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\Big):\Big(\frac{6dyds}{ddx}+3g\Big)+\frac{dy}{ds}(a+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\Big)$$

e facendovi poi le opportune sostituzioni. E anche qui è da osservarsi che la detta formola esprimente la somma generale de' momenti contro al pilastro di un Arco intero circolare è identica con quella sinteticamente ritrovata al corol. 1 della prop. 17 del Lib. III. per indicare la somma medesima.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Determinare la somma de' momenti contro a' pilastri di un Arco circolare composto.

Fig. VII. Tav. III.

Sia *ABC* l' Arco a sesto acuto circolare, e della circonferenza *AS* sia centro il punto *D*: bisogna determinare la somma de' momenti del semiarco *AS* contro il pilastro *AW*.

Si faccia al solito la semicorda $Am=b$, la saetta $Sm=n$, l' ascissa $SV=x$, e la sua corrispondente ordinata $=y$, la grossezza uniforme dell' Arco $=g$, l' altezza del pilastro $=a$, e la di lui grossezza $=G$. Si conduca poi dal punto *S* la *SQ* parallela alla *AC*, e si compia il quadrante *ARD*: si prolunghi ancora la *PV* in *O*, e si unisca la retta *SD*.

Sarà pertanto il raggio $AD=\frac{(Am)^2+(Sm)^2}{2\,.\,Am}=\frac{b^2+n^2}{2b}$, che per facilità di calcolo chiamo $=r$; e sarà ancora $AD-Am=Dm=VO=r-b$, e la $DO=Sm-SV=n-x$, così la $PO=PV+VO=y+r-b$; laonde i quadrati delle *PO DO* uguali al quadrato della *AD* somministreranno l' equazione alla curva interiore $(y+r-b)^2+(n-x)^2=r^2$, dalla quale si ricava $y=-r+b+\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}$; e differenziando

renziando sarà $dy = \frac{(n-x)dx}{\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}}$, $ds = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{n-x}{r}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r}\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}$, $\frac{ddy}{ds} = -\frac{dx}{r}$, $\frac{dyds}{ddx} = r$, $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$, e per fine $\frac{dy^2}{ddx} = n - x$.

S' intenda poi divisa la gravità del serraglio nelle due forze prementi li cunei contigui, e sia ciascuna di esse forze $= p$. Oltre a ciò perchè dividendo la gravità del cuneo corrispondente all' ascissa x in due forze, che agiscano per direzioni perpendicolari alle commessure superiore ed inferiore, una e l' altra di esse vien espressa dal binomio $\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$, se si sostituiscano i valori differenziali di sopra ritrovati, sarà certo che il binomio $g(n-x) + \frac{g^2}{2r}(n-x)$ esprimerà la pressione di esso cuneo contro il superiore contiguo; per conseguenza fatta $x = 0$, si troverà la pressione del cuneo contiguo al serraglio contro il serraglio $= gn + \frac{g^2n}{2r}$. Ora tre casi possono qui accadere, cioè o il serraglio preme tanto il cuneo laterale quanto viene da esso premuto e allora $p = gn + \frac{g^2n}{2r}$, o il serraglio lo preme di più e p diventa $>$ di $gn + \frac{g^2n}{2r}$, o finalmente il preme di meno e p si fa $<$ di $gn + \frac{g^2n}{2r}$.

Corol. Prop. 1 di questo

Pel primo caso poichè il cuneo laterale è tanto premuto dal serraglio, quanto questo da quello, non altererà il serraglio le pressioni de' cunei inferiori; sicchè essendo orizzontale l' impostatura del pilastro AW, sarà la somma de' momenti contro di esso, che dico $(R) = \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}\cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right.$

$-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}).\left((\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2):(\frac{6dyds}{ddx}+3g)+\frac{dy}{ds}(æ+\right.$

Prop. 5 di questo $\left.n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\right)$: ma g costante dà $dg=0$, e si è trovato $\frac{dyds}{ddx}=r$, e $d(\frac{dyds}{ddx})=0$; dunque $(R)=\int(2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}).$ $\left(\frac{3gr+2g^2}{6r+3g}+\frac{dy}{ds}(æ+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\right)$; o sostituendo sarà $(R)=\int(2gdx+\frac{g^2dx}{r}).\left(\frac{3gr+2g^2}{6r+3g}+\frac{n-x}{r}.(æ+n-x)\right.$ $\left.-\frac{1}{r}\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}.(G+b+r-b-\sqrt{(r^2-(n-x)^2)})\right)$ $=\frac{2gr+g^2}{r}.\int\left(\frac{(3gr+2g^2)dx}{6r+3g}+\frac{ædx(n-x)}{r}+\frac{(n-x)^2dx}{r}+rdx-\right.$ $\left.\frac{(n-x)^2dx}{r}-\frac{G+r}{r}.dx\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}\right)=\frac{2gr+g^2}{r}.\int\left(\frac{(3gr+2g^2)dx}{3(2r+g)}\right.$ $\left.+\frac{ædx(n-x)}{r}+rdx-\frac{G+r}{r}.dx\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}\right)$: ma $\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}$ è $=PO$, e $\int dx\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}=$ allo spazio $SPOQ$; dunque integrando coll' aggiunta della costante T, si avrà $(R)=\frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{(3gr+2g^2)x}{3(2r+g)}+\frac{ænx}{r}-\frac{æx^2}{2r}+rx\right.$ $\left.-\frac{G+r}{r}.SPOQ\right)+T$. Quando poi x è $=0$, anche (R) debbe essere $=0$, e però $T=0$; conseguentemente $(R)=$ $\frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{(3gr+2g^2)x}{3(2r+g)}+\frac{ænx}{r}-\frac{æx^2}{2r}+rx-\frac{G+r}{r}.SPOQ\right)$; e finalmente fatta x uguale alla saetta n, e lo spazio $SPOQ$ allo spazio $SADQ$, ovvero all' arco $AS.\frac{SD}{2}$ insieme con $\frac{Dm.Sm}{2}$, si avrà $(R)=\frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{3gnr+2g^2n}{3(2r+g)}+\frac{æn^2}{2r}+rn-\right.$

$$\frac{G+r}{2r}\left(r.AS+(r-b)n\right)\Big)=\frac{2gr+g^2}{r}.\Big(\frac{6gnr+6r^2n+2g^2n}{3(2r+g)}$$
$$-\frac{G+r}{2r}\left(r.AS+n(r-b)\right)+\frac{\text{æ}n^2}{2r}\Big).$$

Di nuovo nel secondo caso dove il serraglio preme più il cuneo laterale di quello che vien da esso premuto, cioè dove $p>gn+\frac{g^2n}{2r}$, si faccia $p-gn-\frac{g^2n}{2r}=q$. E poichè vi ha una forza $=q$ che preme il primo cuneo, bisognerà alla formola superiormente ritrovata aggiugnere la quantità $q\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\right):\left(\frac{6dyds}{ddx}+3g\right)+\frac{dy}{ds}(\text{æ}+n)-\frac{dx}{ds}(G+b)\right)$ in cui x e y debbono essere uguali a zero, per avere l' intera somma de' momenti contro al pilastro: ma quest' aggiunta si trova colle sostituzioni $=q\left(\frac{3gr+2g^2}{6r+3g}+\frac{n-x}{r}(\text{æ}+n)-\frac{G+b}{r}.\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}\right)$, ovvero, fatte x e $y=0$ e $\sqrt{(r^2-n^2)}=r-b$, sarà essa $=q\left(\frac{3gr+2g^2}{3(2r+g)}+\frac{\text{æ}n}{r}+\frac{n^2}{r}-\frac{(G+b).(r-b)}{r}\right)=q\left(\frac{3gr+2g^2}{3(2r+g)}+\frac{\text{æ}n}{r}+\frac{n^2}{r}-\frac{(G+r).(r-b)}{r}+\frac{(r-b)^2}{r}\right)=q\left(\frac{3gr+2g^2}{3(2r+g)}+r+\frac{\text{æ}n}{r}-\frac{(G+r).(r-b)}{r}\right)=q\left(\frac{6r^2+6gr+2g^2}{3(2r+g)}+\frac{\text{æ}n}{r}-\frac{(G+r).(r-b)}{r}\right)$; laonde sarà la somma de' momenti contro al pilastro dell' Arco composto circolare $=\frac{6r^2+6gr+2g^2}{3(2r+g)}.q+\frac{\text{æ}qn}{r}-\frac{q(G+r).(r-b)}{r}+\frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{6gnr+6r^2n+2g^2n}{3(2r+g)}-\frac{G+r}{2r}.\left(r.AS+n(r-b)\right)+\frac{\text{æ}n^2}{2r}\right)$: e queste formole ricavate pel primo e secondo caso

Corol. Prop. 5 di questo

ſono preciſamente uniformi, ſe ſi voglia tener conto del vario modo con cui ſi ſono eſpreſſe le quantità medeſime, all' altre formole del corol. della prop. 20 del Lib. III., dove abbiamo con metodo analitico riſoluto lo ſteſſo Problema.

Finalmente pel terzo caſo nel quale il ſerraglio reſta ſpinto all' insù colla differenza tra la forza $gn + \frac{g^2 n}{2r}$ e la forza p, chiamata eſſa differenza $= q$, sarà d' uopo ricorrere a quanto è ſtato detto per queſto caſo medeſimo alla prop. citata e ſuo corollario onde conſeguire la ſomma de' momenti contro al pilaſtro, non potendo le noſtre formole generali ſervire di alcun uſo per calcolare anche l' effetto delle forze che lateralmente ſpingono all' insù il ſerraglio; ſarà per conſeguenza eſſa ſomma $= \frac{2gr + g^2}{r} . \left(\frac{6gnr + 6r^2 n + 2g^2 n}{3(2r+g)} - \frac{G+r}{2r} . (r . AS + n(r-b)) + \frac{\alpha n^2}{2r} \right) + \frac{q(G+r).(r-b)}{r} + \alpha qn . (r-b)^2 : \left(\frac{6gr + 6r^2 + 2g^2}{3(2r+g)} . r^2 - r(r-b)^2 \right)$; dunque ecc.

Corol. Prop. 20 Lib. III.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Data la curva interiore di un Arco, trovare qual curva eſteriore gli ſi debba aſſegnare, affinchè tutti i cunei ſi ſoſtengano ſcambievolmente fra di loro in equilibrio.

Fig. V. Tav. V.

Sia ALm la curva interiore di un Arco, ſi ricerca qual debba eſſere la eſteriore perchè tutti i cunei ſieno in equilibrio fra loro; ſicchè uno qualunque di eſſi per eſempio $bLeZ$ prema l' inferiore $ZeTa$ quanto da eſſo è a vicenda premuto.

Facciaſi l' aſciſſa $mO = x$, l' ordinata $OL = y$, la groſſezza Lb dell' Arco al punto $L = g$, eſſendo g quantità variabile: ſarà per le coſe dimoſtrate uguale a $2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$

$-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}$ la differenza delle pressioni de' due cunei *bLeZ ZeTa* fra di loro. Ma i cunei debbono per condizione del problema restare in equilibrio; dunque questa differenza ha da essere uguale a zero; e per conseguenza $2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}\,.\,d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}=0$, dalla qual equazione col mezzo delle sostituzioni e de' modi soliti si ricaverà il valor di g dato per le coordinate $x\ y$, e quindi anche la natura e l'equazione della curva esteriore dell' Arco; il che ecc. Prop. 2 di questo

COROLLARIO I.

Sia, per esempio, circolare la curvatura *AIC* e *B* il suo centro, e domandisi l' esteriore. Fatta $IG=x$, $GF=y$, il raggio $BI=r$, sarà $y^2=2rx-x^2$; e perciò $\frac{dy}{ds}=\frac{r-x}{r}$, $\frac{ddy}{ds}=-\frac{dx}{r}$, $\frac{dy^2}{ddx}=r-x$, $\frac{dyds}{ddx}=r$, e $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)=0$; laonde sostituendo questi valori nell' equazione $2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}\,.\,d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}=0$, si avrà $2gdx+\frac{g^2dx}{r}-dg(r-x)-\frac{gdg(r-x)}{r}=0$; dunque $2rgdx+g^2dx=(r-x)\,.\,(rdg+gdg)$, e $\frac{dx}{r-x}=\frac{dg(r+g)}{2gr+g^2}$, e integrando coll' aggiunta della costante, sarà $-l.(r-x)=\frac{1}{2}l.(2gr+g^2)+l.Q$; e passando dai logaritmi a' numeri s' avrà $\frac{1}{r-x}=Q(2gr+g^2)^{1:2}$. Per determinare la costante Q, supporremo che si voglia la grossezza dell' Arco in sommità, o la $IK=m$; e però quando $x=0$ dovrà essere $g=m$; ma fatta $x=0$ e $g=m$ l' equazione si Fig. VI. Tav. V.

converte in $\frac{1}{r} = Q(2mr + m^2)^{1:2}$; laonde $Q = \frac{1}{r(2mr + m^2)^{1:2}}$;

per conseguenza la nostra equazione sarà questa $\frac{r}{r-x} =$

$V \frac{2gr + g^2}{2mr + m^2}$, da cui risulta $g = -r + V\left(\frac{r^2(2mr + m^2)}{(r-x)^2} + r^2\right)$

$= FN$. D' onde è manifesto che nel caso che l' ascissa IG sia $=$ $IB = r$, la grossezza in C diventa infinita; dunque la curva esteriore KNM dell' Arco debbe aver per asintoto la retta BD prolungata.

Corollario 2.

Si supponga in secondo luogo che la grossezza dell' Arco sia infinitesima di grandezza, cosicchè tutto il peso de' cunei resti concentrato nelle loro basi. Pertanto sarà nel caso d' equilibrio $2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds} = 0$:

ma g è quantità infinitesima, dunque i termini $-\frac{g^2ddy}{ds}$, $\frac{-dgdy^2}{ddx}$, $\frac{-gdydg}{ds}$ svaniscono per essere infinitesimi rispetto agli altri; laonde dividendo per g sarà $2dx - \frac{dy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$; e integrando $2x - \frac{dy}{ds} . \frac{dyds}{ddx} + \int \frac{dyddyds}{dsddx} + B = 0$, ovvero $2x - \frac{dy^2}{ddx} - \int dx + B = x - \frac{dy^2}{ddx} + B = 0$. Di nuovo essendo $\frac{-dy^2}{ddx}$ $= \frac{-dy}{ddx} . dy = \frac{dx}{ddy} . dy = \frac{dxdy}{ddy}$, s' avrà $x + \frac{dxdy}{ddy} + B = 0$; e però $xddy + dxdy + Bddy = 0$; e integrando ancora $xdy + Bdy + Cds = 0$, quindi $dy = \frac{-Cds}{x+B}$, e $dy^2 = \frac{C^2ds^2}{(x+B)^2} = \frac{C^2dx^2 + C^2dy^2}{(x+B)^2}$; dunque $dy^2\left((x+B)^2 - C^2\right) = C^2dx^2$, e per conseguenza $dy =$

$\frac{-Cdx}{\sqrt{((x+B)^2-C^2)}}$. Per trovare il valore di una coſtante dato per l' altra, rimarco che eſſendoſi dimoſtrata l' equazione $xdy+Bdy+Cds=0$, ſarà $x+B+\frac{Cds}{dy}=0$; ma quando $x=0$ debbe eſſer la tangente al rigoglio dell' Arco parallela all' ordinate e però $dy=ds$; laonde $B+C=0$, e $C=-B$; quindi $dy=\frac{Bdx}{\sqrt{((x+B)^2-B^2)}}$ oſſia $dy=\frac{Bdx}{\sqrt{(x^2+2Bx)}}$, ch' è l' equazione alla catenaria comune; dunque ſuppoſta infiniteſima la groſſezza dell' Arco, biſogna ch' eſſo abbia la forma di una catenaria comune affinchè tutti i cunei ſi ſoſtentino fra di loro in equilibrio.

COROLLARIO 3.

Si ſupponga in terzo luogo coſtante e finita la groſſezza de' cunei, e ſi ricerchi la curva del loro equilibrio. E perchè g è coſtante, ſarà $dg=0$; dunque ſarà $2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)=0$, cioè $2dx-\frac{gddy}{ds}-\frac{dy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)=0$, e integrando ſarà $2x-\frac{gdy}{ds}-\frac{dy}{ds}.\frac{dyds}{ddx}+\int\frac{dyddyds}{dsddx}+B=0$, ovvero $2x-\frac{gdy}{ds}-\frac{dy^2}{ddx}-\int dx+B=x-\frac{gdy}{ds}-\frac{dy^2}{ddx}+B=x-\frac{gdy}{ds}+\frac{dxdy}{ddy}+B=xddy-\frac{gdyddy}{ds}+dxdy+Bddy=0$; e di nuovo integrando avremo $xdy-\frac{gdy^2}{2ds}+Bdy+Cds=0$, cioè $2xdyds-gdy^2+2Bdyds+2Cds^2=0$; ch' è l' equazione alla curva ricercata.

Sarà pertanto $ds^2+\frac{x+B}{C}.dyds=\frac{gdy^2}{2C}$, e $ds=-\frac{x+B}{2C}.dy$

$-\frac{dy}{2C}\sqrt{(2gC+(x+B)^2)}$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2\Big(\frac{(x+B)^2}{2C^2}$ $+\frac{g}{2C}+\frac{x+B}{2C^2}.\sqrt{(2gC+(x+B)^2)}\Big)$; e finalmente si conseguirà

$$(Q)\ldots dy = \frac{-2Cdx}{\sqrt{(2(x+B)^2 + 2gC - 4C^2 + 2(x+B).\sqrt{(2gC+(x+B)^2)})}}$$

ed è manifesto ch' essendo $2x - \frac{gdy}{ds} + 2B + \frac{2Cds}{dy} = 0$, e nel caso di $x = 0$ anche $dy = ds$, sarà $-g + 2B + 2C = 0$, dunque $2C = g - 2B$, e così sarà dato il valor di una costante per il valore dell' altra. Se in quest' equazione (Q) si faccia la grossezza g dell' Arco $= 0$, si conseguirà $dy = \frac{-Cdx}{\sqrt{((x+B)^2 - C^2)}}$; ma in questo caso $2C = -2B$, e $-C = B$, dunque $dy = \frac{Bdx}{\sqrt{(x^2 + 2Bx)}}$, ch' è la stessa equazione alla catenaria comune ritrovata nel corollario antecedente. L' equazione poi (Q) può dirsi della famiglia delle catenarie, ma non però la comune, quando la grossezza g dell' Arco sia finita. Non è dunque vero quanto asseriscono alcuni Autori dicendo che la curva interiore de' cunei in equilibrio, supposta costante e finita la grossezza dell' Arco, debba essere la catenaria comune; questa curva lo è solo nel caso ch' essa grossezza sia infinitesima, come si è dimostrato.

SCOLIO.

Dopo di aver trattato generalmente della spinta degli Archi, forniti di qualsivoglia curvatura interiore ed esteriore contro a' pilastri, sarà bene additare come si debba ritrovare questa spinta negli Archi piani, i quali avendo una singolar costruzione non possono essere soggetti a' canoni generali da noi superiormente proposti.

TEOREMA

TEOREMA 1. PROPOSIZIONE 9.

In un Arco piano ſenza centina tanto un cuneo è premuto da' cunei contigui da una, e dall' altra parte, quanto e' li preme dalla parte medeſima, vale a dire che tutti i cunei ſono in equilibrio fra di loro, nè vi ha biſogno di ſopraccentina per ſoſtenerli.

Imperciocchè nell' Arco piano *CABG* ſi prendano i centri di gravità *V T* del ſerraglio *MNLI* e del cuneo contiguo *ILKH*. Fig. XIV. Tav. I.

Pertanto poichè la gravità del ſerraglio *MNLI* operando per la direzione verticale *VD* viene ſoſtenuta da' piani *MN LI*, la preſſione del ſerraglio ne' piani ſi farà per direzioni alle *ID MD* perpendicolari. Dunque a queſte direzioni ſono perpendicolari le rette medeſime *ID MD*, ſiccome alla direzione *VD* della gravità è perpendicolare la *LN*; laonde il triangolo *LDN* è compreſo da rette linee perpendicolari alle direzioni di tre forze in equilibrio; quindi, per la Statica, ſe *LN* eſprima la gravità del ſerraglio, eſprimerà *LD* la ſua preſſione ſul piano *IL*. Allo ſteſſo modo ſi proverà che ſe *KL* eſprima la gravità del cuneo *ILKH*, la *LD* eſprimerà la preſſione di lui ſul piano medeſimo *IL*: ma le *KL LN* ſono uguali fra loro, adunque tanto il ſerraglio *MNLI* preme il cuneo *ILKH*, quanto da eſſo è premuto. Similmente ſi dimoſtrerà di tutte le altre preſſioni de' cunei sì dall' uno che dall' altro lato; laonde tutti i cunei componenti un Arco piano ſi premono fra di loro ugualmente, nè hanno d' uopo di ſopraccentine che li tengano obbligati al loro luogo; il che ecc. Prop. 4 Lib. I.

TEOREMA 2. PROPOSIZIONE 10.

Un Arco piano impiega ſempre la ſteſſa forza contro a' pilaſtri, di qualſivoglia numero di cunei ſia eſſo formato.

Fig. XIV. Tav. I. Abbiasi l' Arco piano $CABG$, dico che di qualsivoglia numero di cunei sia esso formato agirà sempre colla stessa forza contro a' pilastri.

Sia $CAmp$ l' ultimo cuneo o la mossa del pilastro AX. E perchè tutti i cunei dell' Arco piano si premono fra di loro ugualmente, il pilastro AX non può soffrire altra pressione che quella esercitata dalla mossa medesima $CAmp$ contro di esso lui; e per le cose dette nell' antecedente se Am esprima la gravità del cuneo $CAmp$, la AD esprimerà la pressione di lui sulla impostatura AC. Ma se Am esprime il peso del cuneo $CAmp$, la AB esprime il peso di tutto l' Arco $CABG$; dunque il peso di tutto l' Arco sta alla pressione sul pilastro come AB ad AD; laonde di qualunque numero di cunei sia l' Arco piano formato, sarà sempre vero che il peso di tutto l' Arco sta alla pressione contro un pilastro nella costante ragione della retta AB alla AD; e per conseguenza l' Arco piano preme i suoi pilastri sempre ugualmente di qualunque numero di cunei sia esso formato, anche se fossero infiniti di numero; il che ecc.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 11.

Ritrovare il momento della pressione de' cunei di un Arco piano contro i pilastri, di qualunque numero di cunei sia esso formato.

Fig. XIV. Tav. I. Nell' Arco piano $CABG$ sia la $AB = 2b$, la perpendicolare $ED = e$, la $AD = \sqrt{(b^2 + e^2)} = d$, la grossezza EF dell' Arco $= g$, l' altezza AW del pilastro $= a$, e la sua grossezza $WX = G$. Sarà la distanza EV della linea oV, che passa pel centro di gravità de' cunei, dalla $AB = \frac{3eg + 2g^2}{3(2e + g)}$; e però la

Corol. 2 Prop. 10 Lib. I.

$$DV = DE + EV = e + \frac{3eg + 2g^2}{3(2e + g)} = \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e + g)}$$: sia poi diviso l' Arco piano in un numero n di cunei, onde il numero de' cunei da ciascuna parte del serraglio sia $= \frac{n - 1}{2}$.

E poichè qualunque ſia il numero de' cunei ne' quali è l' Arco piano diviſo egli impiega ſempre la ſteſſa forza contro il pilaſtro, ſe ſi faccia come la AB alla AD così la gravità dell' Arco piano $CABG$ ad un quarto proporzionale, ſi conſeguirà eſſa forza quando l' Arco ſia un pezzo ſolo, e però anche ſe ſia diviſo in un numero n di cunei. In oltre eſſendo $DE:DF::AB:CG$, ovvero $e:e+g::2b:CG$, s' avrà $CG=\frac{2b}{e}(e+g)$; e però $AB+CG=2b+\frac{2b}{e}(e+g)$: dunque l' area $CABG$ o il peſo dell' Arco piano $=(AB+CG)\cdot\frac{EF}{2}=\frac{g}{2}\left(2b+\frac{2b}{e}(e+g)\right)=\frac{2beg+bg^2}{e}$. Ma ſi è dimoſtrato che come la AB alla AD oſſia $2b:d$, così ſta la gravità dell' Arco piano $CABG$ alla forza contro il pilaſtro; dunque ſarà queſta forza $=\frac{2deg+dg^2}{2e}=\frac{dg}{2e}(2e+g)$: reſta ora che determiniamo il momento della forza medeſima, e primieramente la direzione con cui ella agiſce. Prop. ant.

Se l' Arco piano foſſe tutto di un pezzo ſolo $CABG$, è chiaro ch' eſſendo egli in queſto caſo appoggiato alle ſuperficie CA GB, ſe dal centro di gravità V ſia condotta una perpendicolare alla CA, queſta nuova linea diſegnerebbe la direzione con cui la forza ſoprammentovata opererebbe contro il piano CA e il pilaſtro AX. Ma ſe i cunei componenti l' Arco piano foſſero i tre HL LM Mg, coſicchè in HK v' aveſſe un' impoſtatura, allora ſi dovrebbe condurre dal centro di gravità V del ſerraglio la retta Vs perpendicolare alla commeſſura IL, e prolungarla fino al concorſo in s colla verticale Ts tirata dal centro di gravità T del cuneo HL; poi condurre anche la linea sz perpendicolare alla commeſſura HK per conſeguire nella sz la direzione colla quale il cuneo HL preme la centina e il pilaſtro. Imperciocchè eſſendo le sz sV perpendicolari alle HK IL, ſe ſi prolunghi Ts, facendo il prolungamento proporzionale alla gravità del cuneo HL, e ſi compia un parallelogrammo ſopra eſſe direzioni sV sz, ſi troverà che la preſſione del cuneo HL per sV contro il ſerraglio è uguale e direttamente contraria alla preſſione del ſerraglio contra di eſſo, e che nella ſola direzione sV poſſono esse pressioni riuscire direttamente opposte: quindi sz dinoterà la direzione, con cui il cuneo HL o l' Arco piano spignerebbe l' impostatura HK e il pilastro. Similmente dove la sz sega la verticale qz condotta dal centro di gravità q del cuneo pK, bisognerà condurre la zy perpendicolare a pm per avere la direzione zy con cui il cuneo o l' Arco piano premerebbe l' impostatura pm e il pilastro, se pK fosse l' ultimo cuneo. Ma essendovene un altro Cm, si condurrà dal suo centro di gravità r la verticale ry che intersechi la zy nel punto y, e da y la retta $y\varphi$ perpendicolare all' impostatura CA; esprimerà allora $y\varphi$ la direzione con cui il cuneo Cm preme la reale impostatura CA e il pilastro AX. E in questo modo si continuerà ad operare se vi fosse un maggior numero di cunei nell' Arco piano.

Ora dai punti s z si tirino le rette st zk parallele alla AB. E perchè si suppone l' Arco piano diviso in un numero n di cunei, e la AB è $= 2b$, saranno le Am mK KL LN ecc. uguali ciascuna a $\frac{2b}{n}$; dunque $EL = \frac{b}{n}$, $EK = \frac{3b}{n}$, $Em = \frac{5b}{n}$ ecc. Siano ancora ciascuna delle VT Tq qr ecc. uguali a m, il qual valore di m si determinerà poi colle altre quantità date. Si dimostrerà facilmente il triangolo DEL simile al triangolo VTS, e come $DE : EL :: VT : Ts$; allo stesso modo la simiglianza del triangolo DEK al triangolo stz darà l' analogia $DE : EK :: st : tz$; e la somiglianza de' triangoli DEm zky darà l' altra $DE : Em :: zk : ky$, e così successivamente se vi fossero altri cunei dalla parte medesima. In oltre dalla prima analogia, sostituendo le lettere, si ricava $e : \frac{b}{n} :: m : Ts = \frac{bm}{en}$; dalla seconda $e : \frac{3b}{n} :: m : tz = \frac{3bm}{en}$, la qt poi è $= Ts = \frac{bm}{en}$, dunque tutta $qz = \frac{bm}{en} + \frac{3bm}{en} = \frac{4bm}{en}$; parimenti dalla terza analogia si ha $e : \frac{5b}{n} :: m : ky = \frac{5bm}{en}$; laonde tutta $ry = rk + ky = qz + ky = \frac{4bm}{en} + \frac{5bm}{en} = \frac{9bm}{en}$; e proseguendo, se vi fosse un altro cuneo dalla stessa parte, si troverebbe la verticale condotta dal suo centro di gravità determinata allo stesso modo che si è esposto per l' altre antecedenti $= \frac{16bm}{en}$; e così successivamente: dunque essendo $\frac{n-1}{2}$ il numero de' cunei per ogni parte del serraglio, sarà generalmente la ry uguale al termine $\frac{n-1}{2}$ della serie $\frac{bm}{en}$, $\frac{4bm}{en}$, $\frac{9bm}{en}$, $\frac{16bm}{en}$ ecc.; ma il termine della serie suddetta è $= \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{en}$; e però $ry = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{en}$.

Di nuovo perchè $AE : ED :: or : r\varepsilon$ ovvero $b : e :: \frac{m}{2} : r\varepsilon$, s' avrà $r\varepsilon = \frac{em}{2b}$; e da questa quantità togliendo il valore di ry si conseguirà la rimanente $y\varepsilon = \frac{em}{2b} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{en}$: come poi $AD : DE :: y\varepsilon : \varepsilon\varphi$ per la somiglianza de' triangoli $ADE\ y\varepsilon\varphi$, ovvero $d : e :: \frac{em}{2b} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{en} : \varepsilon\varphi$; dunque $\varepsilon\varphi = \frac{e^2m}{2bd} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{dn}$. Ancora la proporzione $DE : EV :: DA : Ao$, cioè $e : \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)} :: d : Ao$, somministra $Ao = \frac{d}{e} . \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$, siccome l' altra proporzione $AE : AD :: ro : o\varepsilon$ dà $o\varepsilon = \frac{dm}{2b}$, dunque la rimanente $A\varphi = o\varepsilon - \varepsilon\varphi - Ao = \frac{dm}{2b} - \frac{e^2m}{2bd} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{dn} - \frac{d}{e} . \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$.

Si tirino pertanto le $X\mu$ $W\pi$ perpendicolari alla AD, la WY perpendicolare alla $X\mu$, e la $X\delta$ parallela alla AD che interſechi la direzione $y\varphi$ prolungata in δ. S' avrà per la ſomiglianza de' triangoli ADE $AW\pi$ come $AD : DE :: AW : A\pi$, e però la linea retta $A\pi = \frac{e\ae}{d}$; e per la ſomiglianza de' triangoli XWY ADE ſarà $DA : AE :: XW : WY$, e però la retta $WY = \frac{bG}{d} = \mu\pi$; laonde $A\mu = A\pi - \mu\pi = \frac{e\ae}{d} - \frac{bG}{d}$; s' è poi ſuperiormente determinata anche la $A\varphi$; per conſeguenza $A\mu - A\varphi = \varphi\mu = X\delta = \frac{e\ae}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{dm}{2b} + \frac{e^2 m}{2bd} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 . \frac{bm}{dn} + \frac{d}{e} . \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$. Oltre a ciò perchè ſino dal principio s' è trovata la $DV = \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)}$, e come $DE : Ex\,(= LN) :: DV : VT$, ovvero $e : \frac{2b}{n} :: \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)} : m$, ne ſeguirà che $m = \frac{2b}{en} . \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)}$; quindi $X\delta = \frac{e\ae}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{d^2 - e^2}{den} . \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)} - \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 . \frac{2b^2(6e^2 + 6eg + 2g^2)}{3de(2e+g)} + \frac{d}{e} . \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$; cioè per eſſere $d^2 - e^2 = b^2$, ſarà $X\delta = \frac{e\ae}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{b^2}{n} . \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3de(2e+g)} - \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 . \frac{2b^2(6e^2 + 6eg + 2g^2)}{3de(2e+g)} + \frac{d}{e} . \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)} = \frac{e\ae}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{(n^2+1)b^2}{2n^2 de} . \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)} + \frac{d}{e} . \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$. Per fine riaſſumendo tutta la riſoluzione, poichè la forza contro il pilaſtro AX è $= \frac{dg}{2e}(2e+g)$, e ſi è ancora trovata la perpendicolare $X\delta$ condotta dal centro del moto X alla direzione $y\delta$ per cui opera la forza medeſima; ſarà dunque il ſuo momento uguale al prodotto di eſſa forza nella perpendicolare $X\delta = \frac{2eg + g^2}{2e} . (e\ae - bG) - \frac{(n^2+1)b^2 g}{6n^2 e^2} . (3e^2 + 3eg + g^2) + \frac{d^2 g^2}{6e^2} . (3e + 2g)$; il che ecc.

COROLLARIO.

E però quando l' Arco piano ſia tutto di un pezzo, e $n = 1$, ſarà il momento della forza contro il pilaſtro $= \frac{2eg + g^2}{2e} \cdot (e\alpha - bG) - \frac{b^2 g}{3e^2}(3e^2 + 3eg + g^2) + \frac{d^2 g^2}{6e^2}(3e + 2g)$. Se poi eſſo Arco ſia di un infinito numero di cunei formato, ſarà il momento contro al pilaſtro $= \frac{2eg + g^2}{2e} \cdot (eg - bG) - \frac{b^2 g}{6e^2}(3e^2 + 3eg + g^2) + \frac{d^2 g^2}{6e^2}(3e + 2g)$.

SCOLIO.

Belidor *calcola in altro modo la ſpinta dell' Arco piano e il ſuo momento contro il pilaſtro, come ſi rileva dalla* Prop. troiſième Chap. III. Liv. II. Science des Ingenieurs. *Suppone prima diviſo l' Arco in due parti, e trova la ſpinta che in queſta ſuppoſizione riſulta contro il pilaſtro, e fin qui egli procede bene; biſognava però prima dimoſtrare, come noi abbiamo fatto, che ſe anco i cunei non foſſero due ma di un numero qualſivoglia, ciò nulla oſtante la ſpinta contro a' pilaſtri reſta la ſteſſa. Trova dipoi il momento della ſpinta ſupponendo di nuovo ch' eſſa agiſca ſecondo una direzione tirata dal punto* A *perpendicolare all' impoſtatura* CA, *e qui pare che non s' appigli al vero, perchè abbiamo dimoſtrato che il numero de' cunei ne' quali è l' Arco diviſo entra come elemento nella ricerca del punto* φ, *da cui parte la direzione perpendicolare all' impoſtatura, nè ſo vedere qual ragione l' abbia indotto a preferire il punto eſtremo* A *dell' impoſtatura ſopra ogni altro.*

Fine del Libro Quinto.

LIBRO SESTO

APPLICAZIONE DELLA TEORIA ALLA PRATICA.

DEFINIZIONI.

I.

Volta è una copertura degli edifizj, che si sostiene in aria mediante la connessione di più ordini di cunei, uno appresso all' altro, che la compongono. In ciò differiscono le Volte dagli Archi, che questi sono composti di un solo ordine di cunei, e di più d' uno le Volte.

II.

Volte a mezza botte sono quelle che posano sopra piante parallelogramme rappresentando internamente una cavità uniforme in tutta la loro lunghezza. Ovvero ancora Volte a mezza botte sono quelle comprese da più ordini di cunei o da più Archi uguali e simili; e si dicono intere, sceme, o composte, conforme sono gli Archi che le comprendono.

III.

Cupola è una Volta che rigirandosi intorno ad un medesimo centro rappresenta sì internamente

mente che esternamente superficie di sfera o di sferoide. Si danno anche altre sorta di Volte, come Volte a spigoli, a vela ecc.; ma non facendosene parola nel presente Libro, è inutile diffinirle.

IV.

Come gli Archi, così le Volte si costruiscono sopra centine, che poi si allentano e si tolgono affatto; non così le cupole, le quali essendo composte di andari, come cornici, non hanno bisogno di armadura.

Domanda I.

Se sopra un Arco o una Volta *BGCΣFD* di qualunque curvatura interiore ed esteriore vi sieno collocati altri materiali, come quelli contenuti nello spazio *XΣDA* che terminano nella linea retta o curva *AX*, si domanda che possasi considerare lo spazio *XΣDA* come composto di tanti spazj minori *KopI IpFH* ecc. compresi fra le rette verticali *Ko Ip HF* ecc. condotte dai punti estremi delle basi esteriori *op pF* ecc... di ciascun cuneo; di modo che tutto il materiale sudderto sia diviso in tanti pezzi quanti sono i cunei componenti l' Arco o la Volta; e che in oltre i pezzi medesimi debbansi intendere non uniti con calce, nè aventi alcun soffregamento nelle loro commessure. Fig. I. Tav. VI.

Domanda II.

Che i muri delle Volte siano talmente costrutti, che dopo disarmate le centine debba la resistenza di essi equilibrarsi colla somma de' momenti delle forze che cercano rovesciarli.

Scolio.

Si prenderà sempre questa somma nell' ipotesi che sia infinito il numero de' cunei componenti un ordine o un Arco della Volta. E siccome i soffregamenti e la calcina, che tendono a strettamente unire i cunei fra loro e coll' impostature, diminuiscono di molto la somma de' momenti delle forze che, prescindendo da tali ostacoli, cercano rovesciare la muraglia; così quando questa sia in modo costrutta, che la sua resistenza equivalga alla detta somma, saremo sicuri di averla messa superiore in fatto ed in pratica ai momenti delle forze che realmente cercano rovesciarla, come a maggior cautela conviene che sia.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

DEterminare il momento della resistenza di un muro.

Siavi un muro AD della grossezza di un piede (parlerò sempre in misure di Francia), il quale non possa essere mosso che d' intorno alla retta CQ; bisogna ritrovare il momento della resistenza del muro AD, ovvero il momento delle forze con cui resiste ad essere mosso d' intorno alla linea esteriore CQ. Fig. VIII. Tav. IV.

Si supponga, per dare al Problema una maggior generalità, che il muro sia a scarpa dalla parte esteriore AQ; e del muro AD preso il centro di gravità E, si conduca la verticale EF, che sarà perpendicolare al piano della base CD: sia poi $GHIL$ un piano parallelo ai piani opposti AB MQ, il quale passi per la retta EF.

Resistendo primieramente la muraglia AB col suo proprio peso al movimento d' intorno alla linea CQ, è chiaro, che moltiplicando il peso per la linea LF, si conseguirà nel prodotto il momento della resistenza del peso del muro medesimo. Sicchè posta l'altezza KB di piedi $æ$, la grossezza AK alla sommità di piedi D, la grossezza CB alla base di piedi G, e il peso di un piè cubico di muro di libbre P, si troverà colle regole della Meccanica la $LF = \frac{2G^2 + 2GD - D^2}{3(G + D)}$, e il peso del muro $AD = \frac{æP}{2}(G + D)$; laonde il momento del suo peso sarà $= \frac{æP}{2}(G + D) . \frac{2G^2 + 2GD - D^2}{3(G + D)} = \frac{æP}{6}(2G^2 + 2GD - D^2)$.

In secondo luogo il muro resiste ancora per la coerenza o legame, ch' egli ha col fondamento; e però fa d' uopo ritrovare il momento di tale coerenza e unirlo col momento di sopra determinato per avere il momento della totale resistenza della muraglia. Sia pertanto nota col mezzo di accurate sperienze la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro, o il peso in libbre ad essa coerenza equivalente, e si dica $= R$; e perchè $CB = G$ e la $BD = 1$, sarà l' area $CD = G$, e quindi la coerenza assoluta della base $CD = GR$. Di nuovo essendo la coerenza ugualmente distribuita per tutta la base CD, si potrà essa supporre concentrata nel centro di gravità della base CD; e però il suo momento d' intorno alla linea CQ sarà uguale al prodotto della coerenza di CD nella metà di LI o di CB; quindi sarà $= GR \cdot \frac{G}{2} = \frac{G^2R}{2}$; laonde il totale momento della resistenza del muro AD sarà $= \frac{æP}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2}$; il che ecc.

Corollario.

Se il muro AD non fosse esternamente a scarpa ma in un piano verticale, onde $G = D$, sarà il totale momento della sua resistenza $= \frac{æPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$.

Scolio.

La coerenza assoluta della base di una muraglia debbe variare secondo la natura della calce e il modo d' intriderla nella rena, secondo la qualità de' materiali che s' adoperano nella costruzione, e finalmente secondo il tempo che s' è lasciato alla calce per unirsi e rassodarsi co' materiali medesimi; e le variazioni sono di necessità così irregolari, ch' è impossibile metterle tutte sotto un canone comune. In oltre se nell' alzare le muraglie si procedesse con tal ordine, che li suoli o le spianate non cordeggiassero in piano orizzontale, come si suol fare, ma in piano inclinato all' orizzonte, come fabbricava il Barone di Coëhorn *nelle Piazze dell' Olanda; oppure se si facessero a denti le spianate quantunque orizzontali, cosicchè ognuna di esse fosse legata alle superiori, e all' inferiori contigue o con la calce e col materiale della muraglia, allora si accrescerebbe la coerenza delle sezioni orizzontali, e quella della base, e vi sarebbe una nuova difficoltà volendo ridurla a calcolo. Per queste ragioni io consiglierei, ogni volta che si debbe soggettare una mura-*

glia a qualche forza, di ritrovare prima con acconcia sperienza qual sarebbe la coerenza di un piè quadrato di muro costruito nello stesso modo e cogli stessi materiali dopo il tempo che si vuol lasciar alla calcina per disseccarsi, indi fare la ritrovata coerenza $= R$ *e sostituirla nelle formole.*

Pure negli esempj pratici e nel concreto farò uso delle sperienze del dottissimo Sig. Cap. Delanges *Professore di Matematica nel Collegio Militare registrate nel suo libro che ha per titolo* Esperienze ed Osservazioni sulle resistenze ecc., *stampato in Verona nell' anno* 1779. *Questi esperimenti sono stati fatti sul principio stabilito dal Celeberrimo Sig.* Cav. Lorgna *Brigadiere degl' Ingegneri Veneti, in un suo Opuscolo inserto negli Atti di Siena per l' anno* 1763, *di dover tener conto nel calcolo delle resistenze de' muri anche della coerenza della loro sezione al fondamento. Giusta il primo citato Autore la coerenza assoluta di un pollice quadrato di pietra legata con calce a pietra simile, dopo tre mesi di tempo, s' è trovata di libbre* $12\frac{2}{7}$ *; quella di un pollice quadrato di mattone legato con altro mattone di libbre* $9\frac{2}{21}$ *; e quella della pietra col mattone di libbre* $7\frac{2}{7}$*; dal che ne deriva che la coerenza assoluta di un piè quadrato di pietra con pietra può prendersi prossimamente uguale a libbre* 1769, *quella di un piè quadrato di mattone con mattone di libbre* 1310, *e di libbre* 1049 *la coerenza assoluta di un piè quadrato di pietra unita col mattone. Il peso poi di un piè cubo di pietra secondo* Belidor *è di libbre* 166 *circa, e quello di un piè cubo di mattone di libbre* 130: *ma a notabili differenze è soggetto il peso di queste materie.*

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Ritrovare la resistenza di un muro guernito di contrafforti.

Sia il muro *DB* a scarpa grosso 1 piede e guernito di contrafforti come nella Figura, che mostra il profilo e la pianta Fig. V. Tav. VI.

del muro medesimo. Sia poi come nell' antecedente la DE $=$ piedi d, la $AB =$ piedi g, l' altezza $EB =$ piedi $æ$, il peso di un piè cubico di muro $=$ libbre P, e la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro $=$ libbre R: si troverà similmente che il momento della resistenza del muro DB,

Prop. ant. non compresi i contrafforti, è $= \frac{æP}{6}(2g^2 + 2gd - d^2) + \frac{g^2R}{2}$.

Sia inoltre $HLNO$ un trapezoide che indichi la pianta di un contrafforte, e si ponga la $HL = h$, la $ON = p$, la $GK = q$, e l' altezza del contrafforte sia uguale all' altezza $æ$ del muro, ma la distanza KM dal mezzo di un contrafforte al mezzo dell' altro sia $= n$. Preso poi il centro di gravità I della figura $HLON$, si tiri la IP parallela alla BM, e colle regole della Statica si trovi la retta KI che sarà $= \frac{2pq + hq}{3(h+p)} = BP$; dunque tutta la $AP = g + \frac{2pq + hq}{3(h+p)}$.

E perchè lo spazio $HLON = (HL + ON) . \frac{GK}{2} = \frac{q(h+p)}{2}$, sarà la solidità di un contrafforte $= \frac{æq}{2}(h+p)$, e il suo peso $= \frac{æqP}{2}(h+p)$; e però moltiplicando il peso per la AP si conseguirà il momento del peso medesimo $= \frac{æqP}{2}(h+p)$. $\left(g + \frac{2pq + hq}{3(h+p)}\right) = \frac{æqP}{6}\left(3g(h+p) + 2pq + hq\right)$; quindi distribuendo questo momento per tutta la lunghezza del muro, cioè dividendolo per la distanza n dal mezzo di un contrafforte al mezzo dell' altro, sarà certo che il momento della resistenza del muro DB si accrescerà per ogni piede di lunghezza in virtù del peso de' contrafforti della quantità $\frac{æqP}{6n}\left(3g(h+p) + 2pq + hq\right)$. Di nuovo essendo lo spazio $HLON = \frac{q(h+p)}{2}$, sarà la coerenza assoluta della sezione $HLON =$

$\frac{qR(b+p)}{2}$), la coerenza poi è uniformemente divisa per tutta la sezione, dunque moltiplicandola per la distanza *IT* o *AP* tra il suo centro di gravità e l' estremità del muro, s' avrà il momento della coerenza medesima $= \frac{qR(b+p)}{2} \cdot \left(g + \frac{2pq + bq}{3(b+p)}\right) = \frac{qR}{6}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; per conseguenza distribuito per tutta la lunghezza del muro diventerà per ogni piè di lunghezza $= \frac{qR}{6n}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; laonde i contrafforti aggiungono al muro per ogni piè di lunghezza il momento $\frac{\alpha qP}{6n}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right) + \frac{qR}{6n}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right) = \frac{\alpha qP + qR}{6n} \cdot \left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; dunque il totale momento della resistenza del muro *BD* guernito di contrafforti sarà $= \frac{\alpha P}{6}\left(2g^2 + 2gd - d^2\right) + \frac{g^2R}{2} + \frac{\alpha qP + qR}{6n} \cdot \left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; il che ecc.

Corollario.

Se dato un muro senza contrafforti si volesse trovare la grossezza di altro muro della stessa gravità specifica, e della stessa coerenza, guernito di contrafforti di date dimensioni, e ugualmente alto e resistente del primo, si farà così. Poichè è costante in amendue i muri l' altezza α, il peso *P* di un piè cubico, e la coerenza *R* di un piè quadrato, sarà il momento della resistenza del primo $= \frac{\alpha P}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2}$, e quello del secondo come in questa proposizione; e però Prop. ant. $\frac{\alpha P}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2} = \frac{\alpha P}{6}\left(2g^2 + 2gd - d^2\right) + \frac{g^2R}{2} + \frac{\alpha qP + qR}{6n}$.

$(3g(h+p)+2pq+hq)$, nella qual equazione tutto è dato fuorchè la groſſezza g del muro con contrafforti, quindi riſolvendo l' equazione medeſima ſi troverà il valor di g. Viceverſa dato il muro con contrafforti, ſi potrà colla ſteſſa equazione determinare la groſſezza di altro muro che non ne ha, e che ſia della medeſima reſiſtenza. Riuſcirà in oltre più ſpedita la riſoluzione ſe i due muri non ſieno eſternamente a ſcarpa, nel qual caſo $G=D$, e $g=d$.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Sia data la corda di piedi 120 di una Volta ſcema a mezza botte, la ſaetta di 30 piedi, la groſſezza di 5 piedi, e la lunghezza di piedi 45; ſia poi fabbricata di tal pietra che peſi libbre 165 per piè cubo: biſogna ritrovare il totale gravamento ſoſtenuto dalla centina dopo terminata la coſtruzione della Volta.

Fig. III. Tav. IV. Si determinerà co' ſoliti metodi il prolungamento FR della ſaetta ſino al centro di piedi 45, il raggio interiore RI di piedi 75, e l'eſteriore RT di 80; e però, facendo uſo della proporzione d'Archimede, ſe ſi prenda come 14 : 11, così la differenza de' quadrati delle doppie RT RI ad un quarto proporzionale, ſi troverà il doppio valore dello ſpazio $DNEHBC$ compreſo fra le due circonferenze concentriche DNE HBC; dunque lo ſpazio $DNEHBC = \frac{11.(160^2-150^2)}{2.14} = \frac{34100}{28} = \frac{8525}{7}$; ma la Volta è lunga piedi 45, laonde la ſua ſolidità, ſe foſſe intera, aſcenderebbe a piedi cubici $\frac{8525}{7}.45$; ogni piè cubico poi peſa libbre 165; quindi la Volta, ſe foſſe intera, peſerebbe libbre $\frac{8525}{7}.45.165 = 9042589\frac{2}{7}$.

Di

Di nuovo perchè una Volta a mezza botte può considerarsi come l' aggregato di molti Archi uniti insieme, così tutte le cose, che ne' Libri antecedenti si sono dimostrate negli Archi, sì rispetto alla pressione de' cunei sulle centine che agli sfiancamenti ed altro, potranno legittimamente applicarsi anche alle Volte a mezza botte e alle loro centine; di modo che in questo luogo sarà lecito dire, come s'è provato per gli Archi circolari nella supposizione che il numero de' cunei da cui sono formati sia infinito, che nelle Volte circolari sceme a mezza botte il peso totale che aggrava la centinatura è quattro noni circa del peso ch' avrebbe la Volta se fosse intera; per conseguenza la pressione della Volta scema *ANG* sarà uguale a libbre $9042589\frac{2}{7}.\frac{4}{9} = $ lib. 4018928 prossimamente; il che ecc.

Diff. 2 di questo

Corol. 3 Prop. 14 Lib. II.

SCOLIO.

Il Ch. Sig. Perronet *avendo fatto costruire a Neuilly un Ponte di cinque Volte precisamente delle dimensioni anzidette, calcolò poi nella sua Dissertazione inserita negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi, da noi in altro luogo menzionata, il carico sostenuto dalle centine loro dopo la soprapposizione de' cunei, e lo ha fatto ascendere a libbre* 2,400,000 *per ciascuna Volta, non comprendendo però il peso de' serragli, compresi i quali diventerebbe di libbre* 3,000,000 *circa, non di libbre* 4,018,928 *come l' abbiamo noi trovato nella proposizione. Questa differenza tanto notabile deriva dall' aver egli creduto che questo carico dovesse prendersi uguale a quattro noni del peso della Volta scema, e non a quattro noni del peso della Volta intera di cui quella fosse scema, come si è provato doversi fare. In oltre essendo le Volte del detto Ponte di Neuilly caricate superiormente da altri pesi, come appajono nel Disegno presentato dal citato Autore, anche per questa ragione non è loro adattabile la regola de' quattro noni, imperocchè quanto i carichi messi sopra le Volte possano far cangiare la somma delle loro pressioni sulle centinature il si vedrà nella seguente proposizione.*

Scol. 4 Prop. cit.

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

In una Volta a mezza botte di uniforme grossezza, caricata da qualsivoglia scala di pesi, trovare i punti d' equilibrio della centinatura, e la somma totale de' carichi su di essa prementi.

Fig. I. Tav. VI. Sia *BGC* la curva interiore di una Volta *CGBDFΣ* a mezza botte di uniforme grossezza che giace ancora sulla sua centina; sia poi la Volta caricata da una scala di pesi disegnati dall' area *AHXΣFD*; bisogna determinare la somma totale de' pesi sostenuti dalla centina, e i punti d' equilibrio, se pure ve n' abbia.

Sieno *opzn pFGz* due de' cunei infinitesimi contigui componenti la Volta e siano sopra basi uguali *nz zG*; e da' punti Dom. I. di questo *o p F* si alzino le verticali *oK pI FH*; dunque è lecito supporre che sopra i cunei suddetti gravitino i due pezzi *KopI IpFH*: si tirino poi l' orizzontali *oL YpR*, e la *Ko* si prolunghi in *R*.

E perchè il peso *KopI* sta appoggiato alli due piani *Ip po*, preso il suo centro di gravità *M*, e condotte la *MN* verticale, e le *MO MQ* perpendicolari alle *Ip op*, se nella *MN* si prenda qualsivoglia punto *N*, poi si compia il parallelogrammo *MONP*, dinoterà *MN* la gravità del pezzo *KopI*, *MO* la pressione sul piano *Ip*, e *MP* quella ch' egli esercita contro al cuneo sottostante *opzn*; ovvero, essendo le *Lo Lp op* perpendicolari rispettivamente alle *MN MO MP*, se *Lo* esprime la gravità di *KopI*, *Lp* esprimerà la pressione sul piano *Ip*, e *op* quella contro il cuneo medesimo *opzn*. Ma operando quest' ultima forza per una direzione *MQ* non solo perpendicolare ad *op*, ma ancora alla centina (imperocchè per essere infinitesimo il cuneo e uguali le grossezze *on pz*, le curve *op zn* diventano parallele fra loro), sarà la forza stessa sostenuta interamente dalla centina, nè potrà ella accrescere o diminuire per alcun conto la spinta relativa del cuneo *opzn* contro l' inferiore contiguo *pFGz*. Similmente essendo la pressione *MO* diretta per una linea perpendicolare alla direzione della gravità del pezzo *IpFH*, non potrà ella produrre alcuna alterazione alla quantità della pressione del peso *IpFH* sul proprio cuneo esercitata, e il peso premerà il cuneo nello stesso modo come se non fosse sollecitato dalla forza *MO*, lo stesso si proverà anche pe' cunei inferiori e superiori. Quindi basterà sommare la pressione che propriamente eserciterebbe ciascun cuneo contro la centina, quando non soffrisse il carico di alcun peso superiore, con la nuova pressione esercitata dal pezzo superiore contro il cuneo e la centina, per avere nella somma la quantità intera della pressione di un cuneo sulla centina.

Ora si ponga col nostro solito modo la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$, e la grossezza uniforme della Volta $= g$; si dica in oltre la oK condotta dal punto o fino alla linea AX, che determina la scala de' pesi, $= z$: sarà la pressione che il cuneo $opzn$ eserciterebbe sulla centina, se non avesse il carico superiore, $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \cdot \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right)$. Di nuovo perchè il raggio osculatore $n\text{Æ}$, presa costante ds, è $= \frac{dyds}{ddx}$, e la $on = g$, sarà tutta la $o\text{Æ} = g + \frac{dyds}{ddx}$; e però facendo come $n\text{Æ} : nz :: o\text{Æ} : op$, si troverà $op = ds + \frac{gddx}{dy}$. Sta poi come $nz : z\mu :: op : pR$, ovvero $ds : dy :: ds + \frac{gddx}{dy} : pR$, dunque $pR = Lo = dy + \frac{gddx}{ds}$; laonde la superficie $KopI = Ko \cdot Lo = zdy + \frac{gzddx}{ds}$, colla qual quantità sarà anche espresso il peso del pezzo $KopI$. Si è poi dimostrato che come Lo a op, o sia $z\mu : nz$, così è il peso di $KopI$ alla sua pressione sul cuneo $opzn$ e sulla centina; dunque facendo $dy : ds :: zdy + \frac{gzddx}{ds}$ ad un quarto proporzionale, si conseguirà questa seconda pressione $= zds + \frac{gzddx}{dy}$; per con-

Prop. 14 Lib. IV.

ſeguenza la preſſione totale eſercitata dal cuneo *opzn* ſulla centina ſarà $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) + zds + \frac{gzddx}{dy}$; ed integrando ſarà la ſomma delle preſſioni di tutti i cunei poſti da B in $z = \int \left(gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} + zds + \frac{gzddx}{dy} \right) - \int \frac{ddx}{dy} \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right)$.

Siccome poi ne' punti d' equilibrio, quando ve n' abbia, non vi debbe eſſere alcuna preſſione ſulla centina, così in queſto caſo ſarà $gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) + zds + \frac{gzddx}{dy} = 0$; e però ſe cavati dall' equazione alla curva BC gli opportuni valori ſi ſoſtituiſcano poi nell' equazione teſtè ritrovata onde avere il valore di x, e accada che queſto valore ſia unico, reale, poſitivo, e minor della ſaetta Bx, ſarà ſegno che tra B e C v' ha un punto d' equilibrio; e più d' uno ſe x abbia parecchi ſiffatti valori.

Corollario I.

Ma eſſendo la groſſezza g della volta uniforme e coſtante, e però $\int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) = gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$, e $\frac{ddx}{dy} \int \left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) = - \frac{g^2 ddx}{2ds} + \frac{ddx}{dy} (gx + A)$, ſarà ancora la totale preſſione eſercitata dal cuneo *opzn* ſulla centina $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} + zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy} (gx + A)$; la ſomma delle preſſioni di tutti i cunei da B in $z = gy + \frac{g^2 dx}{ds} + \int \left(zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy} \right.$.

$(gx+A))$; e per avere il punto d'equilibrio si potrà far uso dell' equazione $gdy+\frac{g^2ddx}{ds}+zds+\frac{gzddx}{dy}-\frac{ddx}{dy}(gx+A)=0$. E la costante A si ritrova avvertendo che nel caso di $x=0$ diventa $gx-\frac{g^2dy}{2ds}+A=0$; nel caso poi in cui la tangente del vertice B sia parallela all' ordinate facendo a dirittura $A=\frac{g^2}{2}$. Prop. 2 Corol. 1 Lib. IV.

COROLLARIO 2.

Ed essendo come Lo a Lp, o come $z\mu$ a $n\mu$, così il peso MN di $KopI$ alla pressione MO sul contiguo $IpFH$, sarà $dy:dx::zdy+\frac{gzddx}{ds}:MO$, e però $MO=zdx+\frac{gzdxddx}{dyds}=zdx-\frac{gzddy}{ds}$. E' manifesto però che le forze suddette MO, per cui ogni pezzo $KopI$ preme il contiguo $IpFH$, e le quali, come abbiamo detto, non sono valevoli ad alterare le pressioni della scala di tutti i pezzi su' loro rispettivi cunei, si uniscono tutte a premere il muro $X\Gamma ZWC\Sigma$, e cercano di muoverlo d' intorno al punto Z.

COROLLARIO 3.

Ricerchinsi per esempio i punti d' equilibrio e la somma de' carichi contro la centina di una Volta intera a mezza botte AEC, di uniforme grossezza, compresa tra i due semicerchj concentrici ABC DEF, e caricata dalla scala de' pesi $GIMFED$ per tal modo che le rette verticali EI HK ecc. sieno tutte uguali ad una retta q e fra di loro. E' evidente che GIM sarà un altro semicerchio che ha per diametro il lato GM del rettangolo $GDFM$, essendo l' altro lato $DG=q$. E perchè fatta $BL=x$, $LN=y$, il raggio $BO=b$, s' ha l' equazione $y=\sqrt{(2bx-x^2)}$, sarà $dy=\frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $ds=$ Fig. II. Tav. VI.

$\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}$, $\frac{ddx}{ds}=\frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $\frac{ddx}{dy}$ $=\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; e per l' ipotesi sarà $z=q$, e g costante.

Corol. 1 Quindi dovendo essere nel punto d' equilibrio $gdy+\frac{g^2ddx}{ds}$ $+zds+\frac{gzddx}{dy}-\frac{ddx}{dy}\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)=0$, s' avrà colle sostituzioni $\frac{gdx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{g^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{bqdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{gqdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$ $-\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}=0$, cioè $2bg(b-x)+2g^2(b-x)$ $+2b^2q+2bgq-2bgx-bg^2=0$, ovvero $2b^2g-2bgx+2bg^2$ $-2g^2x+2b^2q+2bgq-2bgx-bg^2=0$; e però si conseguirà $x=$ $\frac{2b^2g+bg^2+2b^2q+2bgq}{4bg+2g^2}$; e per conseguenza se questo valore, ch' è reale e positivo, sia anche minore della saetta *BO*, sarà segno che da ciascuna parte della saetta v' ha un punto d' equilibrio, anzi tanti punti d' equilibrio nella Volta da una parte e dall' altra, quanti sono gli Archi o gli ordini de' cunei che la compongono. Sia la grossezza g della Volta $=\frac{b}{8}$, e la verticale costante $EI=q=\frac{b}{32}$, sarà $x=\left(\frac{b^3}{4}\right.$ $\left.+\frac{b^3}{64}+\frac{b^3}{16}+\frac{b^3}{128}\right):\left(\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{32}\right)=\frac{43b^3}{128}:\frac{17b^2}{32}=\frac{43}{68}b$; ma $\frac{43}{68}b$ è una quantità minore della saetta b, dunque presa BL $=\frac{43}{68}b$, e tirata l'ordinata *NLP*, vi saranno ne' punti *N P* della Volta due punti d' equilibrio; e similmente si determineranno altri ed altri punti d' equilibrio in tutti gli Archi che compongono la Volta. All' incontro se $g=q=\frac{b}{8}$, sarà

$$x = \left(\frac{b^3}{4} + \frac{b^3}{64} + \frac{b^3}{4} + \frac{b^3}{32}\right) : \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{32}\right) = \frac{35b^3}{64} : \frac{17b^2}{32} = \frac{35}{34}b,$$

ch' è una quantità maggiore della saetta b, laonde in questa seconda supposizione non vi sarà alcun punto d' equilibrio nella Volta, e tutti i cunei premeranno la centinatura.

Perchè poi la somma de' carichi de' cunei corrispondenti all' ascissa x è $= gy + \frac{g^2dx}{ds} + \int\left(zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy}\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\right)$, sarà essa somma $= g\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{g^2}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} + qs + \frac{gq}{b}\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - g\int\frac{xdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{g^2}{2b}\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{bg + g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b+g)qs}{b} - g\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + g\int\frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{g^2s}{2b} = \frac{bg + g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b+g)qs}{b} - gs + g\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{g^2s}{2b} + T$ (T è la quantità costante aggiunta all' integrale): ovvero sarà la somma anzidetta $= \frac{bg + g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b+g)qs}{b} - s + g\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{g^2s}{2b}$, perchè dovendo svanire quando x e però anche $s = 0$, diventa $T = 0$; o per fine sarà essa somma $= \frac{2bg + g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b+g)qs}{b} - \frac{(2b+g)gs}{2b}$, dove bisogna fare $x = BL$, e $s =$ all' arco BN, nel caso in cui N sia il punto d' equilibrio, per ritrovare la somma di tutte le pressioni che gravano la mezza centina BA. Quando poi tutti i cunei dalla sommità B all' impostatura A premano la centina, nè vi sieno punti d' equilibrio, si farà $x =$ alla saetta BO, e $s =$ all' arco BA onde determinare la somma sopraddetta.

COROLLARIO 4.

Fig. III. Tav. VI. Sia proposto per secondo esempio di cercare i punti d' equilibrio, e la somma delle pressioni in una Volta intera a mezza botte *AEC* compresa fra due semicerchj concentrici, la di cui scala de' pesi messi sopra a' cunei termini nella retta orizzontale *EK* che tocca il semicerchio superiore. Essendo pertanto l' equazione al semicerchio interiore precisamente la stessa che quella dell' esempio antecedente, si avranno gli stessi valori di ds, dy, $\frac{dx}{ds}$ ecc. che in quello. Perchè poi sta come la HO alla OR, così la ZO alla OV, e la HO è uguale alla EO, e la ZO alla OB, sarà come la EQ alla OR, così la OB alla OV, e convertendo come $EO:ER::OB:BV$; ma la ER è uguale alla HK cioè a z, dunque $b+g:z::b:x$, e però $z=\frac{x(b+g)}{b}$; laonde sostituendo gli opportuni valori nell' equazione de' punti d' equilibrio, dovrà essere $\frac{gdx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{g^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$ $+\frac{xdx(b+g)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{gxdx(b+g)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}-\left(gx+\frac{g^2}{2}\right).\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}=0$, cioè $(2bg+2g^2).(b-x)+(2bx+2gx).(b+g)-2bgx-bg^2=0$, e riducendo sarà $2b^2g+bg^2+2b^2x=0$; onde $x=-\frac{2bg+g^2}{2b}$, ch' è una quantità bensì reale, ma negativa: per conseguenza non v' ha nella Volta alcun punto d' equilibrio, e tutti i cunei dalla sommità B all' impostatura A premono la centina.

Di nuovo perchè la somma delle pressioni de' cunei corrispondenti all' ascissa x è $=gy+\frac{g^2dx}{ds}+\int\left(zds+\frac{gzddx}{dy}-\frac{ddx}{dy}\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\right)$, sarà essa somma $=g\sqrt{(2bx-x^2)}+\frac{g^2}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}+\int\left(\frac{xdx(b+g)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{gxdx(b+g)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}-\frac{2gxdx+g^2dx}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}\right)=$ Corol. 1

$\frac{bg+g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx-x^2)}+\int\Big(2bx(b+g)+2gx(b+g)-2bgx$
$-bg^2\Big)\cdot\frac{dx}{2b\sqrt{(2bx-x^2)}}=\frac{bg+g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx-x^2)}+(2b^2+2bg$
$+2g^2)\cdot\int\frac{xdx}{2b\sqrt{(2bx-x^2)}}-\frac{g^2}{2b}\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}=\frac{bg+g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx}$
$\overline{-x^2)}+\frac{2b^2+2bg+2g^2}{2b}\cdot\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}-\frac{2b^2+2bg+2g^2}{2b}\cdot$
$\int\frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}-\frac{g^2}{2b}\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; ovvero integrando e aggiugnendo la costante R, sarà la somma de' carichi sulla centina $=\frac{bg+g^2}{b}\cdot\sqrt{(2bx-x^2)}+\frac{2b^2+2bg+2g^2}{2b}\cdot\big(s-\sqrt{(2bx-x^2)}\big)-\frac{g^2s}{2b}+R$; ma quando $x=0$, e però anche $s=0$, tutto dee svanire, dunque $R=0$; e però posta $x=$ alla saetta BO, e $s=$ al quadrante $AB=Q$, sarà finalmente la pressione totale de' cunei sulla centina dalla sommità all'impostatura $=bg+g^2+\frac{2b^2+2bg}{2b}\cdot Q+\frac{2g^2Q}{2b}-b^2-bg-g^2-\frac{g^2Q}{2b}$ $=(b+g)\cdot Q+\frac{g^2Q}{2b}-b^2$. E bastino i due esposti esempli per conoscere il modo che si dee tenere anche ne' casi più composti.

SCOLIO.

Quanto giovamento possano apportare e le cose dimostrate nel secondo e quarto Libro, e quest' ultime, a chi vuole ben proporzionare la resistenza de' legnami, che compongono le centine, colla pressione che debbono sostenere, egli è per se stesso evidente. Noi però non facciamo qui che accennarlo per non allontanarci dalla materia di cui abbiamo intrapreso a trattare; per la qual cosa lasciate da parte le centinature, parleremo ora delle Volte disarmate di quelle.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Ritrovare la grossezza da darsi alle muraglie verticali di una Volta intera circolare a mezza botte, che abbia la corda di 24 piedi, e la grossezza di 3, essendo l' altezza delle muraglie medesime di piedi 15.

Chiamata la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro $= R$, il peso di un piè cubico $= P$, l'altezza della muraglia verticale $= \ae$, e la ricercata grossezza $= G$, si è provato che il momento della resistenza della muraglia per la

Corol. Prop. 1 di questo

spessezza di un piede è $= \frac{\ae PG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$. Di nuovo si faccia il raggio interiore $12 = b$, l' esteriore $12 + 3 = 15 = c$, il quarto della circonferenza del cerchio interiore $= Q$, e la grossezza della muraglia, come prima, $= G$, per avere la somma de' momenti esercitati contro al muro $= (c^2 - b^2)$.

Corol. 1 Prop. 17 Lib. III.

$\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{\ae}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$, ma questo nella supposizione che i pesi sieno rappresentati dalla faccia; dunque dando alla faccia la spessezza di 1 piede, e introducendo il peso di un piè cubo di muro, sarà la somma de' momenti de' pesi contro alla muraglia grossa 1 piede $= P(c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{\ae}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$. Per la qual cosa dovendo la resistenza uguagliare lo sforzo onde poter ottenere l' e-

Dom. II. di questo

quilibrio, sarà vera l' equazione $= \frac{\ae PG^2}{2} + \frac{G^2R}{2} = P(c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{\ae}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$; laonde sostituendo i numeri, e supponendo ancora che il muro sia fatto di tal pietra che ogni piè cubico pesi lib. 180, cosicchè $P = 180$ (che tal peso aveva la pietra impiegata in uno de' tre ponti descritti dal Sig. *Perronet*), e di più facendo $R =$ lib. 1769, e il quarto Q della circonferenza interiore $= \frac{132}{7}$, si conseguirà l' equazione $\frac{2700G^2}{2} + \frac{1769G^2}{2} = 14580\left(\frac{122}{9} + \frac{15}{2} - \frac{11G}{14} - \frac{66}{7}\right)$; e riducendo sarà $31283G^2 + 160380G = 2373300$, da cui si ricava il valor ricercato di $G = -\frac{80190}{31283} + \sqrt{\left(\frac{2373300}{31283} + \left(\frac{80190}{31283}\right)^2\right)} = 6\frac{16144}{31283}$, ovvero di piedi 6, e pollici 6 prossimamente; il che ecc.

S c o l i o.

Anche col metodo del de la Hire *seguito dal* Belidor *si trova, che una Volta delle dimensioni del problema ha d' avere la muraglia grossa 6 piedi e 6 pollici, veggasi* Belidor Prop. prémiere Chap. II. Liv. II. Science des Ingenieurs, *sicchè in questo caso conviene appuntino il mio metodo con quello di questi Autori. Sì l' uno che l' altro s' accordano poi qui con la pratica degli Architetti, i quali ad una Volta delle suddette dimensioni darebbero certamente la grossezza di piedi 6 e mezzo nè più nè meno. E questa cosa è vera così, che debbesi giudicar superfluo l' accrescimento di mezzo piede proposto dal* Belidor *alla calcolata grossezza di piedi 6 e mezzo per ridurre, com' ei si esprime nel luogo citato, la resistenza superiore alla spinta.*

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Supposte le stesse cose dell' antecedente proposizione, trovare la grossezza superiore ed inferiore da darsi alle muraglie laterali della Volta, quando siano esternamente a scarpa di un quinto dell' altezza.

Essendo l' altezza della muraglia di piedi 15, sarà la sua scarpa di 3 piedi, e però chiamata la sua grossezza in sommità $= D$, e quella alla base $= G$, s' avrà $D + 3 = G$, e

Prop. I di questo

$D = G - 3$. In un muro poi a scarpa il momento della resistenza è $= \frac{\text{æ}P}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2}$, dunque sostituendo $G - 3$ in luogo di D, sarà la resistenza medesima $= \frac{\text{æ}P}{6}(2G^2 + 2G^2 - 6G - G^2 + 6G - 9) + \frac{G^2R}{2} = \frac{\text{æ}P}{6}(3G^2 - 9) + \frac{G^2R}{2}$: ma il momento totale contro al muro è $= P(c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{\text{æ}}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$; laonde uguagliando la

Dom. II. di questo

resistenza del muro collo sforzo contro di esso, s' avrà l' equazione $\frac{\text{æ}P}{2}(G^2 - 3) + \frac{G^2R}{2} = P(c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{\text{æ}}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$. In oltre per istare a' dati dell' antecedente essendo $\text{æ} = 15$, $b = 12$, $c = 15$, $R = 1769$, $P = 180$, $Q = \frac{132}{7}$, s' avrà colla sostituzione e riduzione $31283G^2 + 160380G = 2430000$; laonde $G = -\frac{80190}{31283} + \sqrt{\left(\frac{2430000}{31283} + \left(\frac{80190}{31283}\right)^2\right)} = \frac{206948}{31283}$ prossimamente, e però sarà G di piedi 6 e pol. 8, e questa sarà la grossezza della muraglia in base; per conseguenza quella della sommità sarà di piedi 3 e pol. 8; il che ecc.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Ritrovare la grossezza da darsi alle muraglie laterali di una Volta a mezza botte e a sesto acuto della comune costruzione, la cui corda sia di piedi 24, la grossezza di piedi 3, e l' altezza delle muraglie verticali di piedi 15.

Si chiami la semicorda $Am = 12 = b$, il raggio interiore AD del semiarco $AS = r$, la grossezza $SX = 3 = g$; il peso di un piè cubo della materia della Volta e de' muri = lib. $180 = P$; e la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro = lib. $1769 = R$. E perchè la mD nell' ordinaria costruzione delle Volte composte è la metà della Am, sarà $AD = DS = r =$ piedi 18, e tutta la $DX = DZ =$ piedi 21; sicchè nel triangolo rettangolo SmD essendo data l' ipotenusa DS e il cateto Dm di piedi 6, sarà l' altro cateto Sm, o la saetta della Volta uguale prossimamente a piedi 17: e sia $Sm = 17 = n$, l' altezza del muro $AW = a$, e la sua grossezza $= G$; e si supponga ciascun ordine della Volta diviso in un numero infinito di cunei. Si troverà in prima che nella spessezza di un piede la resistenza del muro diventa $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$.

Fig. VII. Tav. III.

Scol. Prop. 1 di questo

Si sono nella prop. 7 Lib. V. distinti tre casi nel determinare la somma de' momenti delle forze che operano contro al pilastro o al muro AW, e sono questi: o il serraglio preme tanto il cuneo laterale quanto da esso è premuto, o il preme più, o finalmente meno. Per ciascun caso si è ritrovata una formola differente data per le cognite che in questa proposizione si è avuto l' avvertenza di nominare colle stesse lettere della citata; onde innanzi a tutto bisogna rintracciare a qual de' tre appartenga la Volta ASC. Suppongasi però che il serraglio sia dello stesso materiale de' cunei, e dello stesso peso specifico, cioè che il suo peso assoluto sia proporzionale all' area che lo rappresenta.

Pertanto risoluto il triangolo SmD, si avrà l' angolo SDm di 70°, 32', e l' angolo $mSD = 19°$, 28' circa; e però il supplemento a due retti $DSZ = 160°$, 32'. E perchè la circonferenza del cerchio del raggio AD secondo la proporzione di Archimede è $= \frac{36 . 22}{7}$, facendo come 360° all' angolo SDm di 70°, 32', così la circonferenza medesima ad un quarto proporzionale, ſarà queſto uguale all' arco AS, e però $AS = \frac{399}{18}$ proſſimamente. Ora nel triangolo DSZ eſſendo data la DS di piedi 18, la DZ di 21, e l' angolo DSZ di 160°, 32', ſi troverà l' angolo ZDS di 2°, 52', e la ZS di piedi 3,151^{IV}: laonde moltiplicando la ZS per la metà della Dm s' avrà l' area del triangolo ZDS di piè quadrati 9,453^{IV}. Di nuovo perchè l' area del cerchio del raggio DZ è $= \frac{11 . 42 . 42}{14} = 1386$, ſe ſi farà come 360° all' angolo ZDS di 2°, 52', così la detta area ad un quarto proporzionale, ſi conſeguirà il ſettore $ZDX = \frac{172 . 1386}{360 . 60} = 11, 036^{IV}$; da cui togliendo l' area del triangolo ZDS già determinata, reſterà lo ſpazio $ZSX = 1, 583^{IV}$; per conſeguenza tutta l' area XSY del ſerraglio, ch' è doppia di ZSX, ſarà $= 3, 166^{IV}$: ſicchè ponendoſi all' area proporzionale il peſo, s' avrà il peſo del ſerraglio $XSY = 3, 166^{IV}$. In oltre riſolvendo queſto peſo al ſolito modo, ſi conoſcerà ch' eſſo ſta alla preſſione ſu' cunei laterali, come il ſeno del doppio angolo SDm al ſeno dell' angolo medeſimo SDm; laonde con queſta analogia ſi determinerà la preſſione del ſerraglio ſopra uno de' cunei laterali e ſarà $= 4\frac{3}{4}$. Per conſeguire poi quella del cuneo ſopra di eſſo ſi farà uſo dell' eſpreſſione $gn + \frac{g^2 n}{2r}$, che la uguaglia per le coſe provate nella ſoprammentovata prop. 7 Lib. V., e che ſoſtituendo i numeri ſi farà $= 3 . 17 + \frac{9 . 17}{2 . 18} = 51 + \frac{17}{4} = 55\frac{1}{4}$; ma ſi è trovata la preſſione del ſerraglio ſul cuneo laterale ſolo $= 4\frac{3}{4}$; ſi conchiuderà dunque che il ſerraglio preme meno il cuneo laterale di quello ſia da eſſo premuto, e che qui ſi verifica il terzo de' caſi contemplati; per conseguenza riuscirà la differenza delle stesse pressioni $= 55\frac{1}{4}$ $- 4\frac{3}{4} = 50\frac{1}{2}$.

Se fermo il raggio interiore *DA* di 18 piedi si aumenti o si diminuisca la grossezza dell' Arco, vedremo verificarsi sempre il caso suddetto; e lo stesso accaderà se fermo il raggio interiore e la grossezza, si faccia uguale ad un numero finito la somma de' cunei da ciascuna parte dell' Arco, non infinita come in prima si è supposto; tutte cose che possono praticamente riscontrarsi. Dal che apparisce dover sempre accadere il terzo de' casi contemplati nella prop. 7 Lib. V. quando il serraglio sia della stessa gravità specifica de' cunei; per la qual cosa non potranno accadere gli altri due casi, se non quando per avventura fosse il serraglio caricato superiormente da qualche peso straniero, che accrescendo la pressione di esso su' cunei laterali giungesse o ad uguagliar l' altra de' cunei contro di esso, o ancora a superarla. Quindi nella Volta *ASC* si dovrà fare la trovata differenza $50\frac{1}{2}$ tra le pressioni del serraglio e del cuneo laterale $= q$; poi sostituire questo valore e gli altri nella formola appartenente al caso terzo, ch' è $\frac{P(2gr + g^2)}{r} \cdot \left(\frac{6gnr + 6r^2n + 2g^2n}{3(2r + g)} - \frac{G + r}{2r} \cdot (r \cdot AS + n(r - b)) + \frac{\ae n^2}{2r}\right) + \frac{qP(G + r) \cdot (r - b)}{r} + \ae qnP(r - b)^2 : \left(\frac{6gr + 6r^2 + 2g^2}{3(2r + g)} \cdot r^2 - r(r - b)^2\right)$ per avere la somma de' momenti contro al muro *AW*; indi farla uguale alla resistenza $\frac{\ae PG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$ del muro medesimo, fin dal bel principio determinata, per ottenere l' equazione ridotta $4469G^2 + 26505G = 611295$, che risoluta darà la grossezza G della muraglia di piedi 9 prossimamente. Ma siccome la pratica insegna essere alquanto soverchia questa grossezza, così conviene ricercarne la cagione.

Nel ſecondo ſtato degli Archi e delle Volte, cioè dopo che ſono ſtate diſarmate le centine, ſi è dimoſtrato che tutti i cunei laſciati in balía di ſe ſteſſi sfiancano, ed hanno biſogno della ſopraccentina che li ſoſtenga; il ſolo ſerraglio non è a sfiancamento ſoggetto ſempre che la tangente al rigoglio ſia all' ordinate parallela. Ma ſe ciò non ſia, può ancora accadere che lo ſteſſo ſerraglio ſia ſpinto fuori dell' Arco, come appunto ſi è dimoſtrato per gli Archi compoſti nell' ipoteſi che il ſerraglio ſia della ſteſſa gravità ſpecifica de' cunei. E queſta forza che lo ſpigne all' insù da una parte e dall' altra non è sì picciola, imperciocchè nella Volta *ASC* eſſa è proporzionale a $50\frac{1}{2}$ piè quadrati, e però nella groſſezza di un piede ſarà di $50\frac{1}{2}$ piè cubi, che a ragione di lib. 180 per piè cubo importano lib. 9090. Quindi è che avendo noi voluto ſoſtenere queſta forza colla ſopraccentina collocata dalla parte medeſima, abbiamo di tanto accreſciuta la ſomma de' momenti contro a' muri, che queſto accreſcimento portò una groſſezza alquanto eccedente il biſogno. Pertanto ſe, in luogo di ſoſtenere lo sfiancamento del ſerraglio colla ſopraccentina, s' intendeſſe meſſo ſopra di eſſo tal peſo ſtraniero, che giugneſſe ad equilibrarſi preciſamente colla forza sfiancante; allora il ſerraglio premerebbe tanto il cuneo laterale, quanto da eſſo è premuto; e però biſognerebbe ricorrere alla formola pel caſo primo della citata prop. 7 Lib. V. Così in fatti facendo, ci avvicineremo di più alla pratica e al vero; e per conſeguenza negli Archi e nelle Volte compoſte ſarà bene d' introdurre un' eccezione alla regola generale di ſoſtenere tutti gli sfiancamenti colla ſopraccentina; e giacchè un peſo ſtraniero collocato di ſopra può impedire che il ſerraglio non isfianchi, ſiaci permeſſo di ſupporre queſto peſo, e di preſcindere dalle ſopraccentine per conto ſuo. Quindi valendoci di queſta ſuppoſizione e della formola pel caſo primo, ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri $= \frac{P(2gr+g^2)}{r} \cdot \left(\frac{6gnr + 6r^2n + 2g^2n}{3(2r+g)} - \frac{G+r}{2r} \cdot \left(r.AS + n(r-b) \right) \right)$

$+ n(r - b)) + \frac{an^2}{2r}\Big)$, la qual somma fatta uguale alla resistenza del muro $\frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$, somministrerà un' equazione in cui sostituiti i valori delle cognite, ed eseguite le opportune riduzioni si avrà l'equazione del secondo grado $4469G^2 + 32565G = 472845$; laonde $G = -\frac{32565}{8938} + \sqrt{\left(\frac{472845}{4469} + \left(\frac{32565}{8938}\right)^2\right)} = \frac{64970}{8938}$ = piedi 7 e pollici 3 prossimamente; questa e non altra dovrà dunque essere la grossezza da assegnarsi alle muraglie della proposta Volta a sesto acuto.

S C O L I O.

Belidor prop. seconde Chap. III. Liv. II. *non trova pe' muri di questa Volta composta che la grossezza di piedi 5 pol. 3, anzi di piedi 5 pol. 9. stante la solita sua aggiunta di pol. 6 oltre la misura data dal calcolo, ch' è ancora minore della nostra di piedi 7 pol. 3 per piedi 1 e mezzo. Giudicheranno gli architetti colla scorta dell' esperienza se più di esso al vero m' avvicino.*

C O R O L L A R I O.

E' manifesto però che negli Archi o nelle Volte composte il serraglio o i serragli vengono spinti all' insù con una forza notabile che bisognerà sostenere con qualche peso superiore, perchè l' Arco o la Volta non rovini.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Data una Volta a mezza botte di qualsivoglia curvatura e di uniforme grossezza, ritrovare la scala de' pesi da mettersi sopra i cunei, affinchè le pressioni loro s' equilibrino rispettivamente cogli sfiancamenti proprj de' cunei.

Fig. I. Tav. VI. Sia $CGBDF\Sigma$ una Volta a mezza botte di qualunque curvatura interiore BGC, e di uniforme grossezza: bisogna trovare la scala $AX\Sigma D$ de' pesi per tal modo che ogni cuneo della Volta sia tanto premuto dal peso superiore, quant' è la grandezza del suo sfiancamento, sicchè dalla serie de' pesi superiori sieno obbligati i cunei a star fermi nella loro situazione senza bisogno di alcuna sopraccentina.

Sia $opzn$ un cuneo qualsivoglia, e $KopI$ il peso, che lo preme; e si faccia al solito la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la grossezza uniforme della Volta $= g$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$; sarà $dg = 0$, e lo sfiancamento del cuneo medesi-

Prop. 4 Lib. V. mo $opzn = \frac{ddx}{dy}\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}\cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) = \frac{ddx}{dy}\left(2gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy}{ds}\cdot\frac{dyds}{ddx} + \int\frac{gdsdyddy}{dsddx} + A\right) = \frac{ddx}{dy}\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$, dove A è la costante aggiunta all' integrale. Ma chiamata l' altezza $Ko = z$, risulta la pressione del peso $KopI$ sul

Prop. 4 di questo piano inclinato $op = zds + \frac{gzddx}{dy}$; dunque dovendo essere equilibrio costante in ogni cuneo tra la pressione e lo sfiancamento, s' avrà $zds + \frac{gzddx}{dy} = \frac{ddx}{dy}\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$, dalla qual equazione si ricava $z = \frac{ddx}{dsdy + gddx}\cdot\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$; e la costante A si determinerà sul fondamento, che quando sia $x = 0$, debbe essere $\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} -\right.$

Corol. 2 Prop. 4 Lib. V. $\left.\frac{gdy}{ds}\cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$, ovvero la quantità $gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$, che esprime la spinta relativa, uguale essa pure a zero.

Per la qual cosa se dalla sommità interiore B della Volta si conduca la BV parallela alla corda, e si faccia l' ascissa Br corrispondente al punto K della linea $AX = t$, e l' ordinata $Kr = u$, si determinerà l' equazione alla linea medesima AX nel seguente modo. Poichè il triangolo $nz\mu$ è simile al triangolo ons, sarà come $nz:z\mu::on:os$, ovvero $ds:dy::g:\frac{gdy}{ds}=os$; e però aggiunta la Ko, sarà tutta la $Ks=z+\frac{gdy}{ds}=\frac{ddx}{dsdy+gddx}\cdot\left(gx-\frac{g^2dy}{ds}-\frac{gdy^2}{ddx}+A\right)+\frac{gdy}{ds}=\frac{ddx}{dsdy+gddx}\cdot(gx+A)$; ma $B\pi=rs=x$, dunque la rimanente Kr ovvero $u=\frac{ddx}{dsdy+gddx}\cdot(gx+A)-x$. Di nuovo perchè come $zn:n\mu::on:ns$, s' avrà $ns=\frac{gdx}{ds}$, laonde la πs, o l' ascissa $Br=t=\frac{gdx}{ds}+y$. Essendo date pertanto le t u per funzioni di x y, ed essendo data la natura della curva BC, o sia la relazione tra le x y, potremo, sviluppando le due ritrovate equazioni, ridurci ad una finale equazione tra t u, che sarà l' equazione alla linea ricercata AX; il che ecc.

Corollario I.

Essendo infinitesimi del secondo ordine gli sfiancamenti proprj de' cunei infinitamente vicini al serraglio, la linea AX debbe necessariamente passare pel punto D della sommità della curva esteriore, e ivi incontrare la Volta. Corol. 1 Prop. 4 Lib. V.

Corollario 2.

Gioverà qui per maggior chiarezza proporre un esempio. Sia CBR una Volta semicircolare a mezza botte; bisogna ritrovare la scala de' pesi da mettersi sulla Volta, perchè le pressioni loro sieno in equilibrio co' rispettivi sfiancamenti de' cunei. Chiamata la semicorda e la saetta $=b$, s' avrà l' equazione $y=\sqrt{(2bx-x^2)}$ alla curva interiore, dalla quale risulta $dy=\frac{(b-x)dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $ds=\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $\frac{dy}{ds}=\frac{b-x}{b}$, $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}$, $dsdy=\frac{(b-x)bdx^2}{2bx-x^2}$, $ddx=\frac{(b-x)dx^2}{2bx-x^2}$, Fig. IV. Tav. VI.

$\frac{dy^2}{ddx} = b - x$, $\frac{ddy}{ds} = -\frac{dx}{b}$; e però $\frac{ddx}{dsdy + gddx} = \frac{(b-x)dx^2}{2bx - x^2}$: $\left(\frac{(b-x)bdx^2}{2bx - x^2} + \frac{(b-x)gdx^2}{2bx - x^2}\right) = \frac{b-x}{(b+g).(b-x)} = \frac{1}{b+g}$. Diverrà ancora $gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A = gx - \frac{g^2(b-x)}{b} - bg + gx + A$; ma quando $x = 0$, tutto dee svanire, laonde la costante $A = g^2 + bg$; quindi $gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A = 2gx + \frac{g^2x}{b} = \frac{(2bg + g^2)x}{b}$; e però $z = \frac{ddx}{dyds + gddx}.\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right) = \frac{1}{b+g}.\frac{(2bg + g^2)x}{b} = \frac{2bgx + g^2x}{b^2 + bg}$.

In oltre sarà $u = \frac{ddx}{dsdy + gddx}.(gx + A) - x = \frac{1}{b+g}.(gx + g^2 + bg) - x = \frac{g^2 + bg - bx}{b+g}$; e parimenti sostituendo sarà $t = \frac{gdx}{ds} + y = \frac{g}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} + \sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{b+g}{b}.\sqrt{(2bx - x^2)}$. E poichè $u = \frac{g^2 + bg - bx}{b+g}$, sarà $x = \frac{(b+g).(g-u)}{b}$: ma $t = \frac{b+g}{b}.\sqrt{(2bx - x^2)}$, dunque sostituendo nel valore di t il valore di x dato per u, si conseguirà un' equazione tra t e u, che sarà $t = \frac{b+g}{b}.\sqrt{\left(2(b+g).(g-u) - \frac{(b+g)^2.(g-u)^2}{b^2}\right)}$; e quadrando e riducendo s' avrà $\frac{b^2t^2}{(b+g)^2} = 2(b+g).(g-u) - \frac{(b+g)^2.(g-u)^2}{b^2}$; e però $b^2 - \frac{b^2t^2}{(b+g)^2} = b^2 - 2(b+g).(g-u) + \frac{(b+g)^2.(g-u)^2}{b^2} = \left(b - \frac{(b+g).(g-u)}{b}\right)^2$; e $\frac{b^4}{(b+g)^2} - \frac{b^4t^2}{(b+g)^4} = \left(\frac{b^2}{b+g} - (g-u)\right)^2$; e risolvendo in analogia sarà $\left(\frac{b^2}{b+g}-(g-u)\right)^2 : (b+g)^2 - t^2 :: \frac{b^4}{(b+g)^2} : (b+g)^2$, il che dimostra che la scala de' pesi dee terminare ad un' elissi GDX da costruirsi nel seguente modo.

Sopra il centro F si prenda nella saetta la $FE = \frac{2bg+g^2}{b+g}$, e si compia il rettangolo OX, indi co' semiassi GE ED si costruisca la mezza elissi GDX: dico che se la scala de' pesi terminerà all' elissi suddetta, le loro pressioni saranno rispettivamente in equilibrio cogli sfiancamenti de' cunei. Imperciocchè tirata dalla sommità interiore B la BH parallela alla corda, e la IHP perpendicolare alla BH; poi fatta $BH = EP = t$, $HI = u$, essendo la retta $DF = b+g$, e la $FE = \frac{2bg+g^2}{b+g}$, sarà il semiasse minore $DE = \frac{b^2}{b+g}$, e il maggiore GE sarà uguale alla $FO = b+g$: ma sarà la $KI = DB - HI = g - u$; laonde $IP = DE - KI = \frac{b^2}{b+g} - (g-u)$; quindi essendo per proprietà dell' elissi $(IP)^2 : (GE)^2 - (EP)^2 :: (DE)^2 : (GE)^2$, sarà, sostituendo, $\left(\frac{b^2}{b+g}-(g-u)\right)^2 : (b+g)^2 - t^2 :: \frac{b^4}{(b+g)^2} : (b+g)^2$ come di sopra; dunque ecc.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Posto che sopra una Volta a mezza botte di uniforme grossezza sia collocata una scala di pesi secondo il senso dell' antecedente proposizione, trovare la somma de' momenti contro a' muri laterali della Volta medesima.

Sia la Volta a mezza botte $CGBDF\Sigma$ di uniforme grossezza caricata da una scala di pesi terminati alla linea AX secondo il senso dell' antecedente proposizione; e sia ancora al so- Fig. I. Tav. VI.

lito la saetta $Bx = n$, l' altezza interiore CW della muraglia $= \alpha$, la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la grossezza costante $on = g$, la $Ko = z$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, e la $nz = ds$:

Prop. ant. sarà $z = \frac{ddx}{dyds + gddx} \cdot \left(gx - \frac{g^2 dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$.

Pertanto la gravità MN del pezzo $KopI$ appartenente ad essa scala de' pesi si divide in due forze, una MP che s' impiega a premere il cuneo corrispondente $opzn$, e che in questa supposizione viene equilibrata dallo sfiancamento proprio del cuneo, l' altra MO che opera per una direzione perpendicolare alla Zq, e cerca muovere il muro $X\Gamma ZWC\Sigma$ d' intorno al punto Z. In oltre perchè la detta pressione MO contro il muro si fa per la direzione Mq, ponendosi iu M il centro di gravità di $KopI$, sarà il suo momento uguale al prodotto di MO per la retta Zq. Di nuovo perchè la MT è prossimamente uguale alla MN, e la MT è la metà della ST o della Ko, sarà $MN = \frac{z}{2}$: la somiglianza poi de' triangoli osn $nz\mu$ dà la $os = \frac{gdy}{ds}$; ed è altresì la retta $\pi x = n - x$, e la $CW = \alpha$; laonde tutta $Zq = MN + os + \pi x + CW = \frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \alpha$:

Corol. 2 Prop. 4 di questo

ma la pressione MO del pezzo $KopI$ sull' inferiore $IpFH$ e sul muro è $= zdx - \frac{gzddy}{ds}$; dunque il momento di lei sarà $= \left(zdx - \frac{gzddy}{ds}\right) \cdot \left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \alpha\right)$; e però la somma di tutti i momenti contro al muro, che chiamo (S), sarà $= \int\left(zdx - \frac{gzddy}{ds}\right) \cdot \left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \alpha\right)$; facendo dopo l' integrazione $x =$ alla saetta n.

Oltre a ciò supponendosi esser tale la scala de' pesi, che tutte le loro pressioni su i cunei sieno rispettivamente in equilibrio cogli sfiancamenti, sarà essa scala l' uffizio di sopraccentina sostenendo gli sfiancamenti medesimi: resterà però la spinta relativa della mossa in libertà di operare sul pilaſtro o ſul muro; e però conviene tener conto anche del momento di lei. E poichè eſſa ſpinta relativa nel caſo di g coſtante diventa $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{dy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$, ſarà integrando $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{ds} + gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A = gx + A$; la perpendicolare poi condotta dal punto Z ſulla direzione della ſpinta relativa della moſſa è $= \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right).\left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(\ae + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$, purchè ſi faccia $x =$ alla ſaetta n, e $y =$ alla ſemicorda b, ovvero $= \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{\ae dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}$; dunque ſarà il momento della ſpinta relativa medeſima, che dico $= (T)$, $= (gx + A).\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{\ae dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}\right)$, dove dopo di avere colle ſoſtituzioni fatto ſvanire tutte le quantità differenziali, ſi farà di nuovo $x = n$, e $y = b$. E queſta eſpreſſione del momento della ſpinta relativa può riuſcire e poſitiva, e negativa, ſecondo che la ſua direzione paſſi fuori della baſe del muro, o cada dentro di eſſa. In qualſivoglia di queſti due caſi però biſognerà unirla co' ſuoi proprj ſegni alla ſomma de' momenti delle forze MO onde avere in $(S) + (T)$ la ſomma totale de' momenti delle forze che operano ſul muro $X\Gamma ZWC\Sigma$; il che ecc.

Corol. 2 Prop. 4 Lib. V.

Prop. 3 Lib. V.

Corollario I.

Sia pertanto la Volta a mezza botte ſemicircolare CBR caricata di peſi che terminino alla mezza eliſſi GDX deſcritta nel modo che ſi è inſegnato nel corol. 2 della prop. antecedente, affinchè le loro riſpettive preſſioni ſi equilibrino cogli ſfiancamenti proprj de' cunei; e domandiſi la ſomma de' momenti contro il muro CZ. Sarà dunque per le coſe dette nel luogo citato $z = \frac{2bgx + g^2x}{b^2 + bg}$; laonde preſa la ſaetta $n = b$,

Fig. IV. Tav. VI.

e fatte le opportune sostituzioni, sarà $(S) = \int \Big(\frac{2bgxdx + g^2xdx}{b^2 + bg} + \frac{2bg^2xdx + g^3xdx}{b^3 + b^2g} \Big) . \Big(\frac{2bgx + g^2x}{2(b^2 + bg)} + \frac{g(b-x)}{b} + b - x + \alpha \Big) = \frac{(2bg + g^2).(b + g)}{b^2(b + g)} . \int xdx . \Big(\frac{2bgx + g^2x}{2(b^2 + bg)} + \frac{b + g}{b} . (b - x) + \alpha \Big) = \frac{(2bg + g^2)^2}{2b^2(b^2 + bg)} . \int x^2dx + \frac{(2bg + g^2).(b + g)}{b^3} . \int (bxdx - x^2dx) + \frac{(2bg + g^2)\alpha}{b^2} . \int xdx = \frac{(2bg + g^2)^2 . x^3}{6b^2(b^2 + bg)} + \frac{(2bg + g^2).(b + g)}{b^3} . \Big(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big) + \frac{(2bg + g^2)\alpha x^2}{2b^2}$, nè aggiungo costante perchè tutto svanisce quando $x = 0$; quindi fatta $x = b$, s' avrà finalmente $(S) = \frac{(2bg + g^2)^2}{6(b + g)} + \frac{(2bg + g^2).(b + g)}{6} + \frac{(2bg + g^2)\alpha}{2} = \frac{2bg + g^2}{6} . \Big(\frac{2bg + g^2}{b + g} + b + g + 3\alpha \Big)$. Di nuovo, sostituendo, si conseguirà $(T) = (gx + g^2 + bg) . \Big(\frac{3bg + 2g^2}{6b + 3g} + \frac{\alpha(b - x)}{b} - \frac{G}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} \Big)$, e fatta $x = b$, sarà $(T) = (2bg + g^2) . \Big(\frac{3bg + 2g^2}{3(2b + g)} - G \Big) = \frac{3bg^2 + 2g^3}{3} - G(2bg + g^2)$: quindi $(S) + (T)$, o la somma totale de' momenti contro al muro CZ, riuscirà $= \frac{2bg + g^2}{6} . \Big(\frac{2bg + g^2}{b + g} + b + g + 3\alpha - 6G \Big) + bg^2 + \frac{2g^3}{3}$; il che ecc.

Corollario 2.

Fig. cit. Ma si passi dalla teoria a qualche pratica, e si ricerchi qual grossezza debba avere il muro di una Volta semicircolare a mezza botte CBR, su cui superiormente sia stata collocata tale scala de' pesi, che le loro pressioni s' equilibrino

rispettivamente

rispettivamente cogli sfiancamenti proprj de' cunei; la quale scala per le cose dimostrate terminerà alla mezza elissi GDX. Sia poi la semicorda CF di piedi 12, la grossezza della Volta di piedi 3, l' altezza interiore della muraglia, che suppongo da ambe le parti verticale, $= 15$, il peso di un piè cubo del materiale sia $=$ lib. 180, e la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro sia $=$ lib. 1769; sicchè $b = 12$, $g = 3$, $\text{æ} = 15$, $P = 180$, $R = 1769$. Oltre a ciò si faccia la grossezza ZW della muraglia in base $= G$; e si supponga nel muro l' alzamento GV per renderlo atto a sostenere più facilmente i pesi superiori della Volta; e perchè $OG = FE = \frac{2bg + g^2}{b + g}$, e la $OV = G - g$, sarà il momento dell' alzamento GV ridotto a peso $= P \cdot \frac{2bg + g^2}{b + g} \cdot (G - g) \cdot \frac{G - g}{2} = P \cdot \frac{2bg + g^2}{2(b + g)} \cdot (G - g)^2$: il momento poi della resistenza del muro $CVZW$ è $= \frac{\text{æ}PG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$; dunque il muro resiste colla somma de' momenti $\frac{\text{æ}PG^2}{2} + \frac{G^2R}{2} + P \cdot \frac{2bg + g^2}{2(b + g)} \cdot (G - g)^2$: ma questa resistenza debbe essere uguale alla somma de' momenti che operano contro il muro; per conseguenza s' avrà $\frac{\text{æ}PG^2}{2} + \frac{G^2R}{2} + P \cdot \frac{2bg + g^2}{2(b + g)} \cdot (G^2 - 2Gg + g^2) = \frac{P(2bg + g^2)}{6} \cdot \left(\frac{2bg + g^2}{b + g} + b + g + 3\text{æ} - 6G \right) + bg^2P + \frac{2g^3P}{3}$; laonde sostituendo i numeri sarà $\frac{15 \cdot 180\, G^2}{2} + \frac{1769\, G^2}{2} + \frac{180 \cdot 81 \cdot G^2}{30} - \frac{180 \cdot 81 \cdot 6G}{30} + \frac{180 \cdot 81 \cdot 9}{30} = \frac{180 \cdot 81}{6} \cdot \left(\frac{81}{15} + 12 + 3 + 45 - 6G \right) + 12 \cdot 9 \cdot 180 + \frac{2 \cdot 27 \cdot 180}{3}$, la qual equazione ridotta dà $5441G^2 + 23328G = 354456$, quindi $G = -\frac{11664}{5441}$

Corol. 2 Prop. ant.

Corol. cit.

Corol. Prop. 1 di questo

Dom. II. di questo

$+V\left(\frac{354456}{5441}+\left(\frac{11664}{5441}\right)^2\right)=\frac{33774}{5441}$, cioè sarà G di piedi 6, pol. 3 prossimamente.

SCOLIO I.

Fig. IV. Tav. VI. *Si è trovato in altro luogo, che a una Volta semicircolare a mezza botte non caricata esternamente di pesi, ma delle stesse dimensioni di quella del corol. antecedente, dovevasi assegnare a' mu-*
Prop. 5 di questo *ri la grossezza di piedi* $6\frac{1}{2}$; *e però il profilo del muro veniva ad essere di piedi quadrati* $97\frac{1}{2}$. *Nel caso poi che la Volta sia caricata di pesi, che cogli sfiancamenti proprj de' cunei si equilibrino, sarà pel corol. medesimo la parte* CVZW *del muro alta piedi* 15 *e grossa piedi* $6\frac{1}{4}$, *onde la superficie del profilo sarà di piedi quadrati* $93\frac{3}{4}$; *ma l' altra parte* GV *del muro avendo l' altezza*

$$GO=FE=\frac{2bg+g^2}{b+g}=\frac{81}{15}=\frac{27}{5},$$

e la grossezza OV *di piedi* $3\frac{1}{4}$, *avrà la sua superficie di piedi quadrati* $17\frac{11}{20}$; *laonde la superficie di tutto il profilo del muro sarà di piedi quadrati* $111\frac{3}{10}$: *per conseguenza si potrà pronunziare, che la scala de' pesi addossati alla Volta semicircolare* CBR, *e terminanti all' elissi* GDX, *ha prodotto la necessità di accrescere la superficie del profilo del muro dai piedi* $97\frac{1}{2}$ *fino a'* $111\frac{3}{10}$, *cioè di piedi quadrati* $13\frac{8}{10}$.

SCOLIO 2.

Nell' antecedente proposizione si è determinata la scala de' pesi, che debbe soprapporsi a una Volta a mezza botte per sostenere gli *sfiancamenti proprj de' cunei; e s' è veduto che la curva della scala de' pesi addossati doveva necessariamente toccare la Volta nella sua sommità esteriore: ora si passerà a cercare la scala de' pesi da mettersi sopra la Volta, affinchè sia impedita ogni sorta di sfiancamento, e passi in oltre la curva della scala ad una data distanza dalla sommità esteriore; la qual indagine quantunque sia quasi la stessa della prima, e si possa collo stesso metodo risolvere, ciò nulla ostante altro se ne adoprerà per farci strada ad ulteriori ritrovamenti.*

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

Determinare la scala de' pesi da soprapporsi a una Volta a mezza botte di uniforme grossezza e di qualunque curvatura interiore, sicchè sia impedito ogni sfiancamento e passi la curva della scala per un punto dato sopra la sommità esteriore della Volta.

Siano $opzn$ $pFGz$ due cunei infinitesimi contigui della Volta a mezza botte $CGBDF\Sigma$ di uniforme grossezza, e sieno superiormente aggravati dai pesi $KopI$ $IpFH$ della scala AKX, i quali annullino ogni sfiancamento; sieno poi gli archetti nz zG uguali fra di sè, e i punti a b sieno centri di gravità de' due cunei, e debba la curva AKX passare pel punto A posto sopra D alla distanza $AD = c$. Fig. I. Tav. VI.

Se le linee verticali uguali ac bd esprimano le gravità de' cunei, si è provato che il cuneo superiore $opzn$, prescindendo da' pesi che superiormente caricano la Volta, preme più l' inferiore contiguo $pFGz$ di quello sia da esso premuto; e chiamata la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$, e la grossezza uniforme on della Volta $= g$, questa differenza di pressione vien espressa dalla quantità $2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. Affinchè dunque i pesi superiori della Volta annullino ogni sfiancamento, conviene che sieno tali da proccurare, prescindendo dal peso de' cunei, una nuova Prop. I Lib. V.

pressione del cuneo inferiore sopra il superiore contiguo maggiore della nuova pressione del superiore sull' inferiore, e che la differenza di esse pressioni sia precisamente uguale alla prima differenza $2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; poichè essendo queste differenze dirette da parti contrarie, si premeranno allora ugualmente sulla comune commessura i cunei fra di loro; e per conseguenza non potrà restare alcuna forza nella Volta che produca sfiancamento.

Ora sia $nÆ$ il raggio osculatore del punto n, e $zæ$ quello del punto vicino z; sarà $nÆ = \frac{dyds}{ddx}$, e $zæ = \frac{dyds}{ddx} + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$.

E perchè la $on = g$, s' avrà la $pÆ = \frac{dyds}{ddx} + g$, e la $pæ = \frac{dyds}{ddx} + g + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; ma la zE sarà $= dx + ddx$, e la $EG = dy + ddy$; onde la $z\delta = y + dy$, e la $G\varphi = y + 2dy + ddy$; quindi fatta la $Ko = z$, è manifesto, che sarà similmente la $Ip = z + dz$, e la $FH = z + 2dz + ddz$.

E poichè la superficie $KopI$ o il peso del pezzo $KopI$ è $= \frac{Ko + Ip}{2} . Lo$; e come il peso di $KopI$ alla sua pressione sull' archetto op, così è la Lo alla op, sarà la sopraddetta pressione $= \frac{Ko + Ip}{2} . op$; e nella stessa guisa si proverà che la pressione dell' altro pezzo $IpFH$ sull' archetto pF è $= \frac{Ip + HF}{2} . pF$. In appresso facendosi le pressioni de' pezzi $KopI$ $IpFH$ sulla curva esteriore oF della Volta per direzioni perpendicolari agli archetti op pF, si potranno esse supporre dirette a' punti $Æ$ $æ$; laonde se si prendano dai centri di gravità a b sulle $aÆ$ $bæ$, la $af = \frac{Ko + Ip}{2} . op$, e la $be = \frac{Ip + HF}{2} . pF$, dalle linee medesime af be saranno espresse le quantità e le direzioni delle pressioni de' pezzi sopra a' cunei. Di nuovo egli è noto, che unita la abg, e condotta dal punto a la ah perpendicolare alla commessura on, poi terminato il parallelogrammo $agsh$, esprimerà la ag la pressione con cui, dividendosi la forza af, vien premuto per suo conto il cuneo inferiore $pFGz$ dal superiore $opzn$; ed allo stesso modo compiuto il parallelogrammo $bmel$, esprimerà bl la pressione con cui il cuneo inferiore preme il superiore in grazia del peso addossato $IpFH$; e però la differenza tra le bl ag debbe essere uguale a $2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$.

In oltre essendo il triangolo gaf simile al triangolo $\mathcal{E}po$, sarà come $op:p\mathcal{E}::af:ag$, ovvero $op:p\mathcal{E}::\frac{Ko+Ip}{2}.op;ag$; e però la $ag = \frac{Ko+Ip}{2}.p\mathcal{E}$, o sostituendo le lettere sarà essa $ag = \left(z + \frac{dz}{2}\right).\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$: similmente l' analogia della pF alla $p\alpha$, come la be alla bl somministrerà la $bl = \frac{Ip+HF}{2}$. $p\alpha = \left(z + \frac{3dz}{2} + \frac{ddz}{2}\right).\left(\frac{dyds}{ddx} + g + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$; dunque $bl - ag = \left(z + \frac{3dz}{2} + \frac{ddz}{2}\right).\left(\frac{dyds}{ddx} + g + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) - \left(z + \frac{dz}{2}\right).\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$, ovvero riducendo e trascurando tutti gl' infinitesimi d' ordine superiore al primo sarà $bl - ag = dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) + z.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; per conseguenza $dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) + z.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; e integrando coll' aggiunta della costante A, sarà $z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$;

e la A si determinerà facendo nel caso di $x = 0$, z o la Ko uguale alla AD ovvero $= c$; il che ecc.

Corollario 1.

E' manifesto ancora che la pressione ag, con cui ogni cuneo superiore $opzn$ premerebbe l' inferiore $pFGz$ pel solo conto del carico $KopI$ che porta, quando non fusse da esso contropremuto, è $= \left(z + \frac{dz}{2}\right) \cdot \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$.

Corollario 2.

Fig. IV. Tav. VI. Sia per esempio CDR una Volta semicircolare a mezza botte, che ha $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$ per equazione alla curva interiore; debba poi passare la curva gAx della scala de' pesi addossati alla Volta pel punto A distante dalla sommità esteriore D per la linea $AD = c$. Sarà $dy = \frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{b - x}{b}$, $\frac{dyds}{ddx} = b$, e $\frac{dy^2}{ddx} = b - x$. Si prenda pertanto l'equazione $z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$, e si sostituiscano i valori superiori per avere $z(b + g) = gx - \frac{g^2(b - x)}{b} - g(b - x) + A$; ma quando $x = 0$, dee essere $z = c$, dunque $c(b + g) = -g^2 - bg + A$; e però $A = c(b+g) + g^2 + bg$; quindi $z(b + g) = gx - \frac{g^2(b - x)}{b} - g(b - x) + c(b + g) + g^2 + bg$, ossia $z(b + g) = 2gx + \frac{g^2x}{b} + c(b + g)$; laonde $z = \frac{2bgx + g^2x}{b(b + g)} + c$. Ora per ritrovare l' equazione alla curva gAx si tiri dalla sommità interiore B l' orizzontale $B\delta$, e fatta la $BH = t$, e la $Hi = u$, si avranno le due equazioni $t = y + \frac{gdx}{ds}$, $u = z + \frac{gdy}{ds} - x$, vale a dire $t = \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{g}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{b+g}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)}$, e $u = \frac{2bgx + g^2x}{b(b+g)} + c + \frac{g(b-x)}{b} - x = c + g - \frac{bx}{b+g}$. Sicchè essendo data la relazione tra t u per x e le cognite, co' metodi soliti si passerà a trovare l' equazione tra le coordinate della curva gAx, e sarà per appunto la seguente $t^2 = \frac{(b+g)^2}{b^2} \cdot \left(2(b+g) \cdot (c+g-u) - \frac{(b+g)^2 \cdot (c+g-u)^2}{b^2}\right)$, ovvero $(b+g)^2 - t^2 = \left(b + g - \frac{(b+g)^2 \cdot (c+g-u)}{b^2}\right)^2$, che somministra l' analogia $\left(\frac{b^2}{b+g} - (c+g-u)\right)^2 : (b+g)^2 - t^2 :: \frac{b^4}{(b+g)^2} : (b+g)^2$; e però la curva gAx è un' elissi da costruirsi così. Si prenda sul raggio FB la $Fe = c + \frac{2bg + g^2}{b+g}$, e compiuto il parallelogrammo rettangolo Ox, co' semiassi Ae ge si descriva la mezza elissi gAx che determinerà la scala de' pesi.

Prop. 8 di questo

COROLLARIO 3.

Egli è poi manifesto, che da qualunque mezza elissi gAx sia determinata la scala de' pesi addossati alla Volta semicircolare a mezza botte, purchè l' asse gx sia uguale e parallelo alla retta OY, sempre accaderà che le pressioni de' pesi della scala saranno in equilibrio co' rispettivi sfiancamenti de' cunei sottoposti.

Fig. cit.

Corollario 4.

Fig. I. Tav. VI. E se la curva AX non sia quella che fa nascere l' equilibrio ne' cunei, ma di qualunque natura, allora si potrà dire, che la differenza totale delle pressioni ch' esercitano due cunei contigui $opzn$ $pFGz$ fra di loro nella comune commessura è $= 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$.

Corollario 5.

Quando la AD sia $= 0$, e il punto A debba cadere in D, s' avrà per l' equilibrio $z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = gx - \frac{g^2 dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$, cioè la medesima equazione di prima, solo la costante A si determinerà in questo caso facendo, quando x sia $= 0$, anche $z = 0$, la qual equazione poi in tutto conviene coll' altra trovata nella proposizione 8 in cui erasi domandata la scala de' pesi da soprapporsi alla Volta a mezza botte, affinchè le pressioni di loro si equilibrassero cogli sfiancamenti proprj de' cunei. Non vi passa dunque altra differenza tra il problema della presente e quello della proposizione ottava, se non che ivi la curva della scala de' pesi passava per la sommità esteriore D della Volta, e qui per un punto A collocato ad una data distanza dal punto medesimo D. Solo in amendue questi stati pertanto la Volta e i pesi superiori possono reciprocamente sostenersi senza bisogno di sopraccentina; non così se la scala de' pesi non abbia quella relazione colla curva interiore, ch' è additata dall' equazioni di sopra ritrovate; anzi se non saranno i pesi sostenuti da una sopraccentina, si romperà ogni equilibrio, nè potrà sussistere la Volta; laonde per poter soggettare al calcolo il caso in cui la Volta a mezza botte sia caricata da una scala di pesi di qualsivoglia forma, converrà al solito supporre che vi sia esternamente adattata su di essa scala la sopraccentina, ed attaccata fermamente dall' una parte e dall' altra alle muraglie laterali.

Corollario

Corollario 6.

Per qualsivoglia punto A passi poi la curva della scala de' pesi, col metodo della prop. 9 e suo corol. 1 si potrà trovare la somma de' momenti delle forze che cercano rovesciare le muraglie d' intorno al punto Z, supposta però sempre uniforme la grossezza della Volta a mezza botte.

Scolio.

Non sono immeritevoli di qualche spezial riflessione queste tre ultime proposizioni sì per la loro novità, che per la generalità che abbracciano.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE II.

Data la curvatura interiore di una Volta a mezza botte di uniforme grossezza caricata esternamente da una scala di pesi di qualsivoglia forma, trovare la somma de' momenti delle forze che operano contro le muraglie laterali.

Sieno $opzn$ $pFGz$ due cunei infinitesimi sopra basi uguali nz zG, e $KopI$ $IpFH$ i pesi di cui sono caricati, sia poi qualsivoglia la curvatura interiore della Volta di uniforme grossezza, non che la scala de' pesi; conviene determinare la somma de' momenti delle forze che agiscono contro la muraglia $X\Gamma ZWC\Sigma$. Fig. I. Tav. VI.

Sia pertanto at uguale alla differenza delle pressioni ch' esercitano fra di loro i due cunei contigui $opzn$ $pFGz$ caricati da' pesi $KopI$ $IpFH$. Si dimostrerà collo stesso metodo della proposizione 4 del Lib. V e suo corollario 2, che la spinta relativa di ciascun cuneo, eccettuata quella della mossa, è uguale alla somma o all' integrale di tutte le at dalla sommità fino a quella che corrisponde all' ascissa x; e si dimostrerà poi come nella prop. 5 del Libro medesimo che la somma de' momenti contro il muro laterale, risultanti dagli sfiancamenti e dalla spinta relativa della mossa, è uguale alla somma de' momenti delle at, insieme col momento della forza colla quale la mossa $\omega\Sigma C\lambda$ preme l' impostatura per conto del solo suo proprio peso e del carico esteriore $X\Sigma\omega k$, che le sta sopra, niente computando i cunei e carichi superiori. In questo caso però vi sono ancora le forze MO che sono dirette contro lo stesso muro laterale; e però sarà d' uopo aggiugnere anche la somma de' momenti di queste alle due quantità in prima mentovate per avere la totale somma de' momenti contro al muro $X\Gamma ZWC\Sigma$.

1.° Sia dunque al solito la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la $Ko = z$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$, la grossezza uniforme $on = g$, la saetta $Bx = n$, la semicorda $Cx = b$, l' altezza $CW = a$, e la grossezza ZW in base della muraglia $= G$; sarà la differenza at delle pressioni ch' esercitano fra di

Corol. 4 Prop. ant. loro i cunei $opzn\ pFGz = 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. Di nuovo se dal punto Z si conduca la retta Zu perpendicolare alla at prolungata, sarà

Prop. 3 Lib. V. essa $Zu = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right):\left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$; e però la somma de' momenti di tutte le forze at riuscirà $= \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right).\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right):\left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$; dove dopo l' integrazione si farà $x = n$, $y = b$.

2.° Per trovare poi la pressione ch' esercita la mossa $\omega\Sigma C\lambda$ sull' impostatura $C\Sigma$ per conto del solo suo proprio peso e del carico esteriore $X\Sigma\omega k$, indi il momento di detta pressione, sarà d' uopo procedere in una maniera simile a quella del corol. 2 prop. 4 Lib. V., se non che in questo caso bisognerà calcolare anche l' effetto che produce l' ultimo peso

$X\Sigma\omega k$ della scala sulla mossa medesima. Pertanto la pressione del solo peso della mossa sull' impostatura è $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$ ch' è solo trascurabile quando l' impostatura sia orizzontale, come si dimostra nel luogo citato. In oltre perchè la forza con cui un cuneo superiore premerebbe l' inferiore, se non fosse da esso contropremuto, per la sola cagione del carico che gli sta sopra è $= z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$, sarà la pressione esercitata dalla mossa $\omega\Sigma C\lambda$ sull' impostatura $C\Sigma$, pel solo conto del carico $X\Sigma\omega k$, uguale alla quantità medesima; laonde la pressione della mossa per conto del suo proprio peso e del carico esteriore $X\Sigma\omega k$ è uguale a $\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$, purchè dopo l' opportune sostituzioni si renda x uguale alla saetta Bx, e y uguale alla semicorda Cx, cioè $x = n$, $y = b$; quindi moltiplicando questa pressione per la perpendicolare $Z\beta$ condotta dal punto Z sulla linea retta $\xi\beta$, che dal centro di gravità ξ della mossa si tira perpendicolare all' impostatura $C\Sigma$, la qual $Z\beta$ è $= \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(\ae + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y) = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{\ae dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}$, si avrà nel prodotto il momento ricercato della pressione suddetta, quando dopo le necessarie operazioni si faccia $x = n$, e $y = b$. Questo momento può riuscire positivo e negativo secondo che la direzione $\xi\beta$ cada fuori o dentro della base; sempre però si dovrà unire co' proprj segni alla quantità somministrata dal numero antecedente. Corol. 1 Prop. ant.

3°. Finalmente essendo la $MO = zdx - \frac{gzddy}{ds}$, e la $Zq = \frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \ae$, sarà il momento della forza MO d' intor- Prop. 9 di questo no al punto $Z = \left(zdx - \frac{gzddy}{ds} \right) . \left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \alpha \right)$; e la somma de' momenti di tutte le $MO = \int \left(zdx - \frac{gzddy}{ds} \right) . \left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \alpha \right)$, purchè dopo l' integrazioni ed altro si faccia $x = n$, $y = b$. Per conseguenza aggiungendo questa quantità a quelle ricavate ne' due numeri antecedenti, si conseguirà il totale risultamento de' momenti delle forze dirette contro al muro $X\Gamma ZWC\Sigma$; il che ecc.

Scolio.

Fig. VI. Tav. VI.

Quando i pesi che stanno sopra a' cunei non annullino gli sfiancamenti, e la scala de' pesi non sia quella, che si è insegnato a determinare nelle proposizioni 8 *e* 10 *di questo, ma di qualsivoglia natura, egli è evidente che v' ha bisogno di una sopraccentina per impedire la rovina della Volta a mezza botte; supposta poi questa, sarà bene dichiarare in qual modo si distribuiscano le forze. Sia dunque* aA *la spinta relativa del cuneo* opzn *che per le cose dette in questa proposizione, quando egli non sia la mossa, è* $= \int \left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx} \right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g \right) - z . d\left(\frac{dyds}{ddx} \right) \right)$, *e si compia il parallelogrammo* aBTA, *la cui diagonale* aT *sia perpendicolare alla commessura* on, *e il lato* aB *diretto al centro* P: *esprimerà* aB *lo sfiancamento del cuneo* opzn, *ovvero la forza e la direzione colla quale vien premuto il pezzo superiore* KopI; *quindi condotta la* CD *uguale e per diritto alla* aB, *la* CE *verticale, e la* DE *perpendicolare alla* Ip, *è certo che la forza* aB *o la* CD *si divide nelle due* DE CE, *che la* ED *s' impiega contro il piano* Ip *e aggiugne sforzo contro la muraglia della Volta, e che la* CE *dinota la forza con cui è spinto all' insù il pezzo* KopI: *ma questa forza viene poi sostenuta dalla sopraccentina* HK *e dal piano* Ko, *dunque condotta dal centro di gravità* Q *del pezzo medesimo la verticale* QL *uguale alla* CE, *poi le linee rette* QR QV *perpendicolari alla curva* IK *e alla retta* Ko, *indi compiuto il pa-*

rallelogrammo QRLV, *esprimerà* QR *la pressione del pezzo* KopI *sulla sopraccentina*, *e* QV *la sua pressione sul piano* Ko, *la qual ultima forza toglie parte delle pressioni de' pezzi superiori contro la muraglia*, *e le riesce di benefizio. Perchè poi il punto* Z *sta di mezzo alle direzioni* QV QR *prolungate*, *sarà il momento della forza composta* QL *d' intorno al punto* Z *uguale alla differenza de' momenti delle forze* QR QV; *ma il momento di* QL *è lo stesso che il momento di* CE, *dunque il momento di* CE *è uguale alla differenza de' momenti delle forze* QR QV; *e aggiunto da ambe le parti il momento di* ED, *riusciranno i momenti delle* CE ED, *o il momento di* CD, *o di* aB, *uguali alla differenza de' momenti delle forze* QR ED *dal momento della forza* QV. *Per conseguenza tanto fa il tener conto dell' effetto della sola forza* aB, *che degli effetti delle tre* QR ED QV; *ed ecco perchè noi abbiamo considerato nella proposizione solo i momenti degli sfiancamenti e della spinta relativa della mossa*, *niente badando agli effetti che producono i primi ne' pezzi che soprastanno a' cunei.* Prop. 14 Lib. I.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 12.

In un magazzino da polvere dell' ordinaria costruzione determinare la grossezza delle muraglie laterali.

I magazzini da polvere si costruiscono di ordinario in modo che la Volta sia semicircolare a mezza botte, e la scala de' pesi sia terminata da ciascuna parte da una retta DK che tocca la curva esteriore nel punto E della metà della mezza Volta. Sia ora dato il raggio interiore $AI = b$, la grossezza uniforme della Volta $= g$, l' altezza IN de' muri laterali $= a$, sarà la saetta AL essa pure $= b$, e per facilità di calcolo si chiami il raggio esteriore $AE = b + g = c$. Fig. VII. Tav. VI.

Si dica dipoi al solito l' ascissa $LF = x$, l' ordinata $FB = y$, e la verticale GO che dal punto G, dove il raggio AB prolungato sega la curva esteriore, si conduce fino alla linea DK sia $= z$: s' avrà l' equazione $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$, sicchè $dy = \frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, $\frac{dy}{ds} =$

$\frac{b-x}{b}$, $\frac{ddy}{ds}=\frac{-dx}{b}$, $\frac{dy^2}{ddx}=b-x$, e il raggio osculatore $\frac{dyds}{ddx}$ $=b$; laonde $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)=0$. Perchè poi come $BA:AF::GA:AQ$, ovvero $b:b-x::c:AQ$, sarà $AQ=\frac{c}{b}(b-x)$; e similmente l' analogia di $AB:BF::AG:GQ$, o $b:y::c:GQ$, darà $GQ=OH=\frac{cy}{b}$: ma essendo semiretto l' angolo EDA, la retta OH è uguale alla DH, dunque anche $DH=\frac{cy}{b}$; la AD poi è $=c\sqrt{2}$; per conseguenza $GO=HQ=AD-AQ-DH$ somministrerà l' equazione $z=c\sqrt{2}-\frac{c}{b}(b-x)-\frac{cy}{b}=\frac{c}{b}(b\sqrt{2}-b+x-y)$; e differenziando s' avrà $dz=\frac{c}{b}(dx-dy)=\frac{c}{b}\left(dx-\frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}\right)$.

Fatte tali preparazioni conviene applicare questo caso particolare alla generale risoluzione della proposizione antecedente, parte per parte, affine di trovare la somma de' momenti che operano contro alla muraglia IZ. E quanto alla prima parte, si troverà colle sostituzioni, $\int\left(2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)-dz.\left(\frac{dyds}{ddx}+g\right)-z.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right).\left(\left(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\right):\left(\frac{6dyds}{ddx}+3g\right)+\frac{dy}{ds}(\alpha+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\right)$, il qual integrale chiamo ancora (R), $=\int\left(2gdx+\frac{g^2dx}{b}-\frac{c^2dx}{b}+\frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}\right).\left(\frac{3bg+2g^2}{6b+3g}+\frac{b-x}{b}.(\alpha+b-x)-\frac{G+b}{b}.\sqrt{(2bx-x^2)}+\frac{2bx-x^2}{b}\right)=\int\left(\frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}-bdx\right).\left(\frac{6b^2+6bg+2g^2}{3(2b+g)}\right.$

$+ \frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b} . \surd(2bx - x^2)) = (\frac{c^2}{b}\surd(2bx - x^2) - bx)$. $\frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)} + \int(\frac{c^2dx(b-x)}{b\surd(2bx-x^2)} - bdx).(\frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b}.\surd(2bx-x^2))$. Inoltre è certo che $\int(\frac{c^2dx(b-x)}{b\surd(2bx-x^2)} - bdx).(\frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b}.\surd(2bx-x^2)) = \int(\frac{\ae c^2dx(b-x)^2}{b^2\surd(2bx-x^2)} - \ae dx(b-x) - \frac{G+b}{b^2}.c^2dx(b-x) + dx(G+b).\surd(2bx-x^2)$; ma $\int dx\surd(2bx - x^2) =$ allo spazio LBF, e $\int\frac{bdx}{\surd(2bx-x^2)} =$ all' arco LB; laonde $\int(\frac{c^2dx(b-x)}{b\surd(2bx-x^2)} - bdx).(\frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b}.\surd(2bx-x^2)) = \frac{\ae c^2}{b}.LB - \frac{\ae c^2}{b^2}.LBF - \ae bx + \frac{\ae x^2}{2} - \frac{c^2(G+b)}{2b^2}.(2bx - x^2) + (G+b).LBF$, senza aggiungere costante, perchè quando $x = 0$, tutto svanisce; dunque fatta $x = AL = b$, il quarto di circonferenza $LI = Q$, e il quadrante $LAI = \frac{bQ}{2}$, sarà finalmente $(R) = (c^2 - b^2).\frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)} + \frac{\ae c^2Q}{b} - \frac{\ae c^2Q}{2b} - \ae b^2 + \frac{\ae b^2}{2} - \frac{c^2(G+b)}{2} + \frac{(G+b).bQ}{2}$; e riducendo sarà $(R) = \frac{2c^3}{3} - \frac{2b^3}{3} + \frac{\ae c^2Q}{2b} - \frac{\ae b^2}{2} - \frac{c^2G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b).bQ}{2}$.

E passando alla seconda parte dell' antecedente proposizione, sarà $(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + z(\frac{dyds}{ddx} + g)).((\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2):(\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{\ae dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}))$, che chiamo (S), $= (g(b -$

$x) + \frac{g^2(b-x)}{2b} + \frac{c^2}{b}\left(b\sqrt{2} - b + x - \sqrt{(2bx - x^2)}\right)\right).\left(\frac{3bg + 2g^2}{3(2b+g)}\right.$ $\left. + \frac{ae(b-x)}{b} - \frac{G}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; e fatta $x = b$, sarà $(S) =$ $(c^2\sqrt{2} - c^2).\left(\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - G\right) = (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)}$ $- c^2G\sqrt{2} + c^2G$.

Finalmente per la terza parte risulterà $\int\left(zdx - \frac{gzddy}{ds}\right).\left(\frac{z}{2}\right.$ $\left. + \frac{gdy}{ds} + n - x + ae\right)$, che dico (T), $= \int\frac{c}{b}\left(b\sqrt{2} - b + x - \right.$ $\left.\sqrt{(2bx - x^2)}\right).\left(dx + \frac{gdx}{b}\right).\left(\frac{c}{2b}\left(b\sqrt{2} - b + x - \sqrt{(2bx - }\right.\right.$ $\left.\left. x^2)\right)\left(+ \frac{g}{b}(b-x) + b - x + ae\right)\right) = \frac{c^2}{b^2}\int\left(bdx\sqrt{2} - dx(b-x)\right.$ $\left. - dx\sqrt{(2bx - x^2)}\right).\left(\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2b}(b-x) - \frac{c}{2b}\sqrt{(2bx - x^2)} + ae\right)$ $= \frac{c^2}{b^2}\int\left(bcdx - \frac{cdx}{\sqrt{2}}(b-x) - \frac{cdx}{\sqrt{2}}\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{cdx}{\sqrt{2}}(b-x)\right.$ $- \frac{cdx}{2b}(b-x)^2 - \frac{cdx}{2b}(b-x).\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{cdx}{\sqrt{2}}\sqrt{(2bx - }$ $x^2) + \frac{cdx}{2b}(b-x).\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{cdx}{2b}(2bx - x^2) + aebdx\sqrt{2}$ $\left. - aedx(b-x) - aedx\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; e riducendo sarà $(T) =$ $\frac{c^2}{b^2}\int\left(bcdx - cdx\sqrt{2}.\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{cdx}{2b}(b^2 - 4bx + 2x^2) + \right.$ $\left. aebdx\sqrt{2} - aedx(b-x) - aedx\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; e integrando sarà $(T) = \frac{c^2}{b^2}\left(bcx - c\sqrt{2}.LBF - \frac{cbx}{2} + cx^2 - \frac{cx^3}{3b} + aebx\sqrt{2} - \right.$ $\left. aebx + \frac{aex^2}{2} - ae.LBF\right)$: quindi riducendo di nuovo dopo di

aver

aver fatta $x = b$, e lo spazio $LBF = \frac{bQ}{2}$, sarà finalmente

$$(Y) = \frac{7}{6}c^3 - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + \text{æ}c^2\sqrt{2} - \frac{\text{æ}c^2}{2} - \frac{\text{æ}c^2 Q}{2b}.$$

Unendo pertanto insieme tutte le tre quantità antecedenti e moltiplicandole pel peso P di un piè cubo del materiale, sarà la somma de' momenti

$$P\big((R) + (S) + (Y)\big) = P\Big(\frac{2c^3}{3} - \frac{2b^3}{3} + \frac{\text{æ}c^2 Q}{2b} - \frac{\text{æ}b^2}{2} - \frac{c^2 G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - c^2 G\sqrt{2} + c^2 G + \frac{7}{6}c^3 - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + \text{æ}c^2\sqrt{2} - \frac{\text{æ}c^2}{2} - \frac{\text{æ}c^2 Q}{2b}\Big) = P\Big(\frac{11c^3}{6} - \frac{2b^3}{3} - \frac{\text{æ}b^2}{2} + \frac{c^2 G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - c^2 G\sqrt{2} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + \text{æ}c^2\sqrt{2} - \frac{\text{æ}c^2}{2}\Big).$$

Di nuovo il momento della resistenza del muro $IRZN$ è $= \frac{\text{æ}PG^2}{2} + \frac{G^2 R}{2}$; ma sopra esso muro $IRZN$ havvi ancora il muro triangolare WMK che aggiugne resistenza al muro medesimo; dunque bisognerà aggiugnere il momento di questa resistenza, ovvero, condotta dal centro di gravità V del triangolo WMK la verticale VT, il prodotto del peso del triangolo WMK per la distanza RT, onde avere la somma totale de' momenti delle forze che sostengono il muro. Quindi essendo $KM = MW = c\sqrt{2} - c$, sarà il triangolo $WMK = \frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}$; ma la MT, ch' è la terza parte di KM, sarà $= \frac{c\sqrt{2}}{3} - \frac{c}{3}$; e però $RT = AR - AM - MT = b + G - c - \frac{c\sqrt{2}}{3} + \frac{c}{3} = b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}$; laonde il momento del triangolo WMK — Corol. Prop. I di questo ridotto in peso diventerà $= P\left(b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}\right).\left(\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}\right) = P\left(\frac{3bc^2}{2} + \frac{3c^2G}{2} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2} - c^2G\sqrt{2}\right)$; e per conseguenza la somma totale de' momenti delle resistenze del muro che sostiene la Volta sarà $= P\left(\frac{aG^2}{2} + \frac{3bc^2}{2} + \frac{3c^2G}{2} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2} - c^2G\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2}$, la qual quantità si dee fare uguale alla somma de' momenti delle forze che cercano di rovesciarlo, il che dà l' equazione del secondo grado

$$P\left(\frac{aG^2}{2} + \frac{3bc^2}{2} + \frac{3c^2G}{2} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2} - c^2G\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2} = P\left(\frac{11c^3}{6} - \frac{2b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{c^2G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - c^2G\sqrt{2} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2}\right),$$

che ridotta diventerà $P\left(\frac{aG^2}{2} + 2bc^2 + c^2G - \frac{13c^3}{6} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2} = P\left(-\frac{2b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2}\right)$, da cui si ricaverà il valore di G, o la ricercata grossezza delle muraglie laterali del magazzino da polvere; il che ecc.

COROLLARIO I.

Sia per esempio la semicorda b della Volta $= 12\frac{1}{2}$ piedi $= \frac{25}{2}$, la sua grossezza $= 3$ piedi onde poter resistere all' urto delle bombe, l' altezza a delle muraglie laterali $= 8$ piedi, che sono appunto le ordinarie dimensioni che si sogliono dare a' magazzini da polvere: sarà $c = 15\frac{1}{2} = \frac{31}{2}$, $\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} =$ $\frac{87}{56}$, e il quadrante Q del raggio di piedi $12\frac{1}{2}$ sarà uguale a $\frac{275}{14}$. Siano poi la Volta e i muri fabbricati di mattoni, sicchè il peso P di un piè cubo diventi $= 130$ lib., e la coerenza R di un piè quadrato sia di lib. 1310; e si sostituiscano tutti questi valori numerici nell' equazione superiore onde avere $\frac{130.8G^2}{2} + \frac{130.25.31^2}{4} + \frac{130.31^2G}{4} - \frac{130.31^3.13}{8.6}$ $+ \frac{130.31^3\sqrt{2}}{8.6} - \frac{130.25.31^2\sqrt{2}}{2.4} + \frac{1310G^2}{2} = - \frac{130.2.25^3}{3.8} -$ $\frac{130.8.25^2}{2.4} + \frac{130.25.275G}{2.2.14} + \frac{130.25^2.275}{2.4.14} + \frac{130.87.31^2\sqrt{2}}{4.56} -$ $\frac{130.31^2.87}{4.56} - \frac{130.31^3.2.275}{8.14.25\sqrt{2}} + \frac{130.8.31^2\sqrt{2}}{4} - \frac{130.8.31^2}{2.4}$; e fatte le moltiplicazioni e raddoppiati i termini sarà $1040G^2 + 1561625 + 62465G - 2097784 + 228208 - 1104236 + 1310G^2 = - 338542 - 162500 + 31919G + 398995 + 137241 - 97044 - 1075841 + 706711 - 249860$; quindi ridotti i termini fra di loro si passerà all' equazione del secondo grado $2350G^2 + 30546G = 731347$; e però sarà $G = - \frac{15273}{2350} + \sqrt{\left(\frac{731347}{2350} + \left(\frac{15273}{2350}\right)^2\right)}$, ovvero $G = \frac{28908}{2350} =$ piedi 12 e pollici 4 prossimamente.

Scol. Prop. I di questo

Corollario 2.

Ma solendosi guernire le muraglie di questi magazzini con contrafforti messi dalla parte esteriore alti quanto le muraglie medesime, sarà bene rintracciare l' equazione che determina la loro grossezza anche in questa supposizione. Sia pertanto $RbaZ$ lo spaccato di un contrafforte, in cui ab mostra la sua altezza uguale all' altezza IN della muraglia, e Za

Fig. I. Tav. VII.

quella che dicesi lunghezza del contrafforte. Sia ancora la $Za =$ piedi q, e giacchè questi contrafforti si fanno di pianta rettangolare, si chiami la loro grossezza $=$ piedi m, e la distanza dal mezzo di un contrafforte al mezzo dell' altro $=$ piedi n. E' manifesto che il centro del moto, tanto delle forze che operano contro la muraglia che dell' altre che ad esse resistono, il quale prima era in Z, ora passa in a. Quindi chiamata non più NZ, ma tutta Na cioè la distanza del punto a dalla $IN = G$, resteranno i momenti delle forze che operano contro il muro espressi dalle stesse quantità della proposizione; non così i momenti delle forze resistenti. E perchè $Na = G$, e $Za = q$, sarà la $NZ = G - q$, e la metà della $NZ = \frac{G-q}{2}$, a cui aggiunta la $Za = q$, s' avrà in $\frac{G-q}{2} + q = \frac{G+q}{2}$ la distanza del punto a dalla linea verticale condotta dal centro di gravità del muro $IRZN$; e però il momento della resistenza del peso di esso muro riuscirà $=$ $P\alpha(G - q) \cdot \frac{G+q}{2} = P\left(\frac{\alpha G^2}{2} - \frac{\alpha q^2}{2}\right)$: ma il momento della sua coerenza $= R(G - q) \cdot \frac{G+q}{2} = \frac{G^2R}{2} - \frac{q^2R}{2}$. Di nuovo essendo la $MT = \frac{c\sqrt{2}}{3} - \frac{c}{3}$, e la $IM = c - b$, sarà la retta IT $= \frac{c\sqrt{2}}{3} - \frac{c}{3} + c - b = \frac{c\sqrt{2}}{3} + \frac{2c}{3} - b$, la qual linea sottratta dalla $Na = G$, darà la distanza del punto a dalla verticale VT, condotta dal punto V centro di gravità del triangolo WMK, $= G + b - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}$; il triangolo poi WMK è $\frac{3c^2}{2}$ $- c^2\sqrt{2}$; laonde il momento del peso del triangolo WMK sarà $= P\left(b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}\right)$. Si passi ora a cercare la resistenza de' contrafforti. E perchè il contrafforte Zb ha la lunghezza $Za = q$, l'altezza $ab = \alpha$, e la sua grossezza $= m$, sarà il momento del suo peso d' intorno al punto $a = P.\,æmq.\frac{q}{2} = \frac{Pæmq^2}{2}$, e il momento della coerenza della sua base $= mq.R.\frac{q}{2} = \frac{mq^2R}{2}$: i contrafforti poi si suppongono collocati alla distanza n dal mezzo di uno al mezzo dell' altro; sarà dunque il di loro momento per la spessezza di un piede $= \frac{Pæmq^2}{2n} + \frac{mq^2R}{2n}$: quindi sommate tutte le resistenze de' muri, saranno esse uguali a $P\left(\frac{æG^2}{2} - \frac{æq^2}{2}\right) + \frac{G^2R}{2} - \frac{q^2R}{2} + P\left(b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}\right).\left(\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}\right) + \frac{Pæmq^2}{2n} + \frac{mq^2R}{2n}$, le quali fatte uguali a' momenti delle forze che cercano rovesciarli daranno dopo le riduzioni l' equazione $P\left(\frac{æG^2}{2} - \frac{æq^2}{2} + 2bc^2 + c^2G - \frac{13c^3}{6} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2} - \frac{q^2R}{2} + \frac{Pæmq^2}{2n} + \frac{mq^2R}{2n} = P\left(-\frac{2b^3}{3} - \frac{æb^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + æc^2\sqrt{2} - \frac{æc^2}{2}\right)$ che quasi è la stessa equazione ritrovata nella proposizione, se non che qui vi sono quattro termini di più, e G non esprime la grossezza della muraglia, ma la somma di questa grossezza colla lunghezza de' contrafforti.

Sia pertanto come nel corollario antecedente la semicorda b della Volta $=$ piedi $12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$, la grossezza $= 3$, sicchè $c = 12\frac{1}{2} + 3 = 15\frac{1}{2} =$ piedi $\frac{31}{2}$, e il quadrante $Q = \frac{275}{14}$; poi $P = 130$, $R = 1310$, e $\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} = \frac{87}{56}$; e sia inoltre la lunghezza q de' contrafforti $= 4$, la grossezza $m = 6$, e la distanza $n = 18$, l' altezza delle muraglie laterali e de' contrafforti cioè $æ =$ piedi 8, che sono precisamente tutte le misure che *Vauban* dava ai Magazzini da polvere da esso fatti fabbricare: veggasi *Belidor* Chap. IX. Liv. IV. *Science des Ingenieurs*. Sarà dunque, sostituendo i numeri, $\frac{130.8G^2}{2} - \frac{130.8.4^2}{2} + \frac{130.25.31^2}{4}$ $+ \frac{130.31^2G}{4} - \frac{130.31^3.13}{8.6} + \frac{130.31^3\sqrt{2}}{8.6} - \frac{130.25.31^2\sqrt{2}}{2.4} +$ $\frac{1310G^2}{2} - \frac{4^2.1310}{2} + \frac{130.8.6.4^2}{2.18} + \frac{6.4^2.1310}{2.18} = - \frac{130.2.25^3}{3.8} -$ $\frac{130.8.25^2}{2.4} + \frac{130.25.275G}{2.2.14} + \frac{130.25^2.275}{2.4.14} + \frac{130.31^2.87\sqrt{2}}{4.56} -$ $\frac{130.31^2.87}{4.56} - \frac{130.31^3.2.275}{8.14.25\sqrt{2}} + \frac{130.8.31^2\sqrt{2}}{4} - \frac{130.8.31^2}{2.4}$; e raddoppiando tutto, poi riducendo termine per termine, s' avrà $1040G^2 - 16640 + 1561625 + 62465G - 2097784 + 228208 - 1104236 + 1310G^2 - 20960 + 5546 + 6986 = - 338542 - 162500 + 31919G + 398995 + 137241 - 97044 - 1075841 + 706711 - 249860$, e riducendo i termini fra loro si conseguirà $2350G^2 + 30546G = 756415$; per conseguenza sarà $G = - \frac{15273}{2350} + \sqrt{\left(\frac{756415}{2350} + \left(\frac{15273}{2350}\right)^2\right)}$, cioè $G = Na =$ piedi 12 e pollici 7 prossimamente, da cui sottratta la lunghezza $Za = 4$ del contrafforte, resterà la grossezza NZ della muraglia di piedi 8 e pollici 7.

S c o l i o 1.

Vauban *da una lunga e ragionata sperienza condotto, era solito dare a' muri laterali dei magazzini guerniti di contrafforti in tutto delle soprammentovate dimensioni, la grossezza di 8 a 9 piedi secondo la qualità de' materiali (veggasi* Belidor *nel luogo citato) il che perfettamente s' accorda co' risultamenti de' nostri calcoli. Il medesimo* Belidor *col metodo da esso seguito trova pe' muri laterali, la sola grossezza di piedi 7 e pollici 8, e ciò ancora senza contrafforti, nè so perchè egli ommetta di dire questa essenziale circostanza. Ciò nulla ostante passa dipoi a magnificare non l' esattezza del suo metodo, di cui non sapeva muover dubbio, ma piuttosto l' abilità di* Vauban *che colla scorta della sola pratica aveva trovato la vera* *grossezza da darsi a' muri de' magazzini, cioè quella stessa che insegnava la sua teoria. Ma non veggo come piedi 7 e oncie 8 di muraglia senza contrafforti equivalgano a piedi 8 o 9 di muraglia oltre i contrafforti. Nel primo corollario noi abbiamo dimostrato che la muraglia senza contrafforti capace di resistere allo sforzo della Volta doveva essere di piedi 12 e pollici 4, non di 7 e pollici 8 come* Belidor. *All' incontro apparisce manifestamente la somma e quasi incredibile convenienza della pratica colle nostre teorie.*

Corollario 3.

Sia per secondo esempio la semicorda $b = 15$, $c = 18$, $a = 13\frac{1}{2} = \frac{27}{2}$, $P = 130$, $R = 1310$, e però il quadrante $Q = \frac{165}{7}$, e $\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(b+c)} = \frac{17}{11}$; e si ricerchi la grossezza da darsi alle muraglie senza contrafforti: sarà dunque sostituendo i valori numerici nell' equazione di questa proposizione $\frac{130.27G^2}{2.2} + 130.30.18^2 + 130.18^2G - \frac{130.18^3.13}{6} + \frac{130.18^3\sqrt{2}}{6} - 130.15.18^2\sqrt{2} + \frac{1310G^2}{2} = -\frac{130.2.15^3}{3} - \frac{130.27.15^2}{2.2} + \frac{130.15.165G}{2.7} + \frac{130.15^2.165}{2.7} + \frac{130.17.18^2\sqrt{2}}{11} - \frac{130.18^2.17}{11} - \frac{130.18^3.165}{7.15\sqrt{2}} + \frac{130.27.18^2\sqrt{2}}{2} - \frac{130.27.18^2}{2.2}$; ovvero fatte le moltiplicazioni e raddoppiati i termini sarà $1755G^2 + 2527200 + 84240G - 3285360 + 357400 - 1787000 + 1310G^2 = -585000 - 394875 + 45964G + 689464 + 184115 - 130189 - 1684885 + 1608301 - 568620$, cioè $3065G^2 + 38276G = 1306071$; e però la grossezza del muro $G = -\frac{19138}{3065} + \sqrt{\left(\frac{1306071}{3065} + \left(\frac{19138}{3065}\right)^2\right)} = \frac{46963}{3065}$ = piedi 15 e pollici 3 prossimamente.

Ma si ricerchi la grossezza della muraglia supponendola guernita di contrafforti lunghi piedi 4, grossi piedi 6, e alla distanza da mezzo a mezzo di piedi 18, sicchè $q = 4$, $m = 6$, $n = 18$. Sarà pertanto, sostituendo nella formola del corollario antecedente i valori numerici, $\frac{130.27G^2}{2.2} - \frac{130.27.4^2}{2.2}$

$$+ 130.30.18^2 + 130.18^2G - \frac{130.18^3.13}{6} + \frac{130.18^3\sqrt{2}}{6} -$$

$$130.15.18^2\sqrt{2} + \frac{1310G^2}{2} - \frac{4^2.1310}{2} + \frac{130.27.6.4^2}{2.2.18} + \frac{6.4^2.1310}{2.18}$$

$$= - \frac{130.2.15^3}{3} - \frac{130.27.15^2}{2.2} + \frac{130.15.165G}{2.7} + \frac{130.15^2.165}{2.7}$$

$$+ \frac{130.17.18^2\sqrt{2}}{11} - \frac{130.18^2.17}{11} - \frac{130.18^3.165}{7.15\sqrt{2}} + \frac{130.27.18^2\sqrt{2}}{2}$$

$- \frac{130.27.18^2}{2.2}$, dove l' incognita G indica la somma della grossezza della muraglia colla lunghezza del contrafforte; laonde radoppiando tutto e facendo le moltiplicazioni s' avrà $1755G^2 - 28080 + 2527200 + 84240G - 3285360 + 357400 - 1787000 + 1310G^2 - 20960 + 9360 + 6986 = - 585000 - 394875 + 45964G + 689464 + 184115 - 130189 - 1684885 + 1608301 - 568620$, cioè $3065G^2 + 38276G = 1338765$; per conseguenza $G = - \frac{19138}{3065} + \sqrt{\left(\frac{1338765}{3065} + \left(\frac{19138}{3065}\right)^2\right)}$ $= \frac{47717}{3069} =$ piedi 15 e pollici 7, da cui tolta la lunghezza di 4 piedi del contrafforte, resteranno piedi 11 e pollici 7 per la grossezza della muraglia della Volta.

S c o l i o 2.

Riferisce Frezier *nel suo Trattato di Stereotomia Tom.* 3 *pag.* 348, *ch' essendo stato eretto in Francia un magazzino delle misure sopra esposte, ch' eccedono alquanto le comuni, a' di cui muri laterali non s' era però data che la sola grossezza di* 9 *piedi, benchè co' soliti contrafforti, non poterono essi muri resistere allo sforzo* *zo della Volta, e rovinò tutto l' edifizio. Se pertanto si fosse loro assegnata la grossezza di piedi* 11 *e pollici* 7 *oltre i contrafforti, come ci ha somministrato il nostro calcolo, è probabile che non sarebbe accaduta tale rovina. Il metodo del de la* Hire *dà, come dice* Frezier *nel luogo citato, piedi* 11 *circa per la grossezza de' muri, ma senza contrafforti. Quanto dunque si allontani dal vero quel metodo, che pure è il comunemente adottato, e dalle cose qui dette e dall' altre dello scolio antecedente manifestamente apparisce; e ciò tanto più quanto posso assicurare (ed ognuno può da se stesso riscontrare il vero) che quella grossezza, che* Frezier *facendo uso di una lunga costruzione geometrica dice di aver trovata di piedi* 11, *io la ho sempre esattamente calcolandola conseguita ben di un piede inferiore di questa misura.*

SCOLIO 3.

Si è trattato fin qui delle Volte a mezza botte di uniforme grossezza in tutta la loro estensione: in maniera simile si possono calcolare gli effetti di esse Volte anche se la grossezza sia variabile e termini a una curva di qualsivoglia natura. Passiamo ora ad un' altra specie di Volte.

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 13.

Determinare la solidità di un cuneo in una cupola compresa tra le superficie di due mezze sfere concentriche.

Siano *AMI ONI* due quadranti, che abbiano il loro centro in *I*, e l' asse *AI* verticale, e dal rivolgimento dello spazio *AMNO* d' intorno all' asse *AI* sia generato il solido della cupola. Sia poi *EDFG* la superficie anteriore di un cuneo, e intanto che lo spazio *AMNO* si rivolge per l' arco *NL* del cerchio orizzontale della base onde formare uno spicchio della cupola, sia descritto dalla superficie *EDFG* il cuneo *FB*: bisogna ritrovare la solidità del cuneo *FB*. Fig. VIII. Tav. VI.

E' manifesto, che il cuneo *FB* è compreso da sei superficie, due delle quali solamente, cioè la *EDFG* e la sua opposta *BCKH* sono piane; le *BCDE HKFG* sono convesse, e contenute fra gli archi *BE CD HG KF*, i due primi de' quali, cioè li *BE CD*, hanno lo stesso polo in *A*, e gli altri *HG KF* lo stesso polo in *O*; e per fine la superficie *BEGH* e la sua opposta *CDFK* sono una concava, l'altra convessa, e formano parte delle superficie de' coni tronchi generati dalle rette *EG DF* nell'atto della rivoluzione.

Si dica ora il raggio esteriore *IA* della cupola $= c$, l' interiore $IO = b$, l' angolo $OIF = \pi$, l' angolo $OIG = \mu$; e la proporzione del diametro di un cerchio alla sua circonferenza, ovvero quella del quadrato del raggio all' area del cerchio, le quali proporzioni sono le medesime, sia come $m:n$, e il numero de' cunei per ogni andare orizzontale della Volta sia $= p$.

E poichè nel triangolo isoscele *IAD* sta come il seno tutto r al seno della metà dell' angolo *AID*, così la *AI* alla metà della *AD*, cioè $r : \text{sen.} \frac{\pi}{2} :: c : \frac{AD}{2}$, sarà $AD = \frac{2c}{r} . \text{sen.} \frac{\pi}{2}$; e però il cerchio descritto dal raggio *AD*, ovvero la superficie del segamento di sfera descritta dall' arco *AD* nella rivoluzione, sarà $= \frac{4c^2 n}{mr^2} \left(\text{sen.} \frac{\pi}{2} \right)^2$; quindi dividendo questa superficie pel numero p di cunei che vi sono in ogni andare orizzontale, si ritroverà la superficie sferica $ACD = \frac{4c^2 n}{mpr^2} \left(\text{sen.} \frac{\pi}{2} \right)^2$. Similmente si troverà la superficie sferica $ABE = \frac{4c^2 n}{mpr^2} \left(\text{sen.} \frac{\mu}{2} \right)^2$; laonde la rimanente $BCDE = \frac{4c^2 n}{mpr^2} \left(\left(\text{sen.} \frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\text{sen.} \frac{\mu}{2} \right)^2 \right)$: per conseguenza moltiplicando essa superficie per la terza parte del raggio *ID*, s' avrà la solidità della piramide, che ha per base essa *BCDE* e per vertice il punto $I = \frac{4c^3 n}{3mpr^2} \left(\left(\text{sen.} \frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\text{sen.} \frac{\mu}{2} \right)^2 \right)$. Nello stesso modo operando si conseguirà la solidità della piramide che ha per base la superficie *HKFG* e per vertice il

punto $I = \frac{4b^3n}{3mpr^2}\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$; e però la solidità del cuneo FB, ch' è uguale alla differenza di esse piramidi, riuscirà $= \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2} . \left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$. Essendo poi $\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r}{2}.\cos.\pi - \frac{r^2}{2} + \frac{r}{2}.$ Equaz. IX. Equaz. VIII. Prop. 7 Lib. I.
$\cos.\mu = \frac{r}{2}.\cos.\mu - \frac{r}{2}.\cos.\pi = \text{sen.}\frac{\pi+\mu}{2}.\text{sen.}\frac{\pi-\mu}{2}$, sarà finalmente la solidità del cuneo $FB = \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}.\text{sen.}\frac{\pi+\mu}{2}.$ $\text{sen.}\frac{\pi-\mu}{2}$, cioè uguale al prodotto della quantità $\frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}$ nel seno della metà della somma degli angoli OIF OIG, e nel seno della metà della loro differenza; il che ecc.

Corollario I.

E perchè la solidità del cuneo FB s' è determinata $= \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}.\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$, e quella della piramide interiore $= \frac{4b^3n}{3mpr^2}.\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$; sarà la solidità del cuneo a quella piramide interiore, ovvero ancora le loro rispettive gravità, come $c^3 - b^3 : b^3$.

Corollario 2.

Per la qual cosa fatta la $OP = x$, la $PG = y$, e il cuneo FB infinitesimo di grandezza, sicchè $PQ = GR = dx$, $FR = dy$, $FG = ds$, poi diviso per mezzo l' angolo FIG dalla retta IS, e ordinata la ST, sarà la $GS = \frac{ds}{2}$, e la $ST = y + \frac{dy}{2}$; ma l' angolo SIG sarà $= \frac{\pi - \mu}{2}$, e l' angolo $OIS = \frac{\pi+\mu}{2}$. E perchè sta il seno tutto al seno dell' angolo OIS, come la SI alla ST, ovvero r : sen. $\frac{\pi+\mu}{2} :: b : y + \frac{dy}{2}$, s' avrà sen. $\frac{\pi+\mu}{2} = \frac{r}{b}\left(y+\frac{dy}{2}\right)$: e similmente la proporzionalità del seno tutto al seno dell' angolo SIG, come IS alla GS, darà sen. $\frac{\pi-\mu}{2} = \frac{rds}{2b}$: quindi sostituendo, sarà la solidità del cuneo $FB = \frac{4n(c^3-b^3)}{3mpr^2} \cdot \frac{r^2 ds}{2b^2} \cdot \left(y+\frac{dy}{2}\right)$, vale a dire, non trascurando gl' infinitesimi del secondo ordine, si conseguirà $FB = \frac{4n(c^3-b^3)}{6b^2mp} \cdot \left(yds + \frac{dyds}{2}\right)$. Anzi perchè si ha per proprietà del quadrante ON la quantità $yds = \sqrt{(2bx-x^2)} \cdot \frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = bdx$, $\frac{dyds}{ddx} = b$, e $dyds = bddx$, sarà la solidità del cuneo infinitesimo $FB = \frac{2n(c^3-b^3)}{3bmp} \cdot \left(dx + \frac{ddx}{2}\right)$.

Corollario 3.

Ma se XC sia il cuneo inferiormente contiguo allo FB, e l' arco FX uguale all' arco GF, condotta dal punto V della metà dell' arco FX l' ordinata VZ, sarà essa uguale a $y + \frac{3dy}{2}$, e l' arco FV sarà $= \frac{ds}{2}$; quindi operando come prima si troverà la solidità del cuneo $XC = \frac{4n(c^3-b^3)}{3mpr^2} \cdot \frac{r^2ds}{2b^2} \cdot \left(y + \frac{3dy}{2}\right) = \frac{2n(c^3-b^3)}{3bmp} \cdot \left(dx + \frac{3ddx}{2}\right)$.

COROLLARIO 4.

E supposto $= u$ l' arco interiore NL della base orizzontale NV di uno spicchio della cupola, poichè la circonferenza del raggio IN è $= \frac{2bn}{m}$, e il numero de' cunei per ogni andare orizzontale $= p$, sarà $u = \frac{2bn}{pm}$, e però $p = \frac{2bn}{mu}$; laonde, sostituendo, sarà la solidità del cuneo $FB = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} . \left(dx + \frac{ddx}{2}\right)$ e quella del contiguo inferiore $XC = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} . \left(dx + \frac{3ddx}{2}\right)$.

PROBLEMA 14. PROPOSIZIONE 14.

Trovare il centro di gravità di un cuneo infinitesimo di una cupola.

Sia ADC un piano che divida in parti uguali e simili il cuneo infinitesimo di una cupola, e sia $AEFC$ il profilo del cuneo: il raggio esteriore DA della cupola si dica $= c$, e l' interiore $DE = b$. Si prenda poi nell' asse DB il punto G centro di gravità della piramide che ha per base la superficie esteriore del cuneo e per vertice il punto D, il quale cadrà alla distanza DG dal punto D uguale a $\frac{3c}{4}$ per le cose che si dimostrano nella Statica; e similmente il centro di gravità H della piramide, che ha per base la superficie interiore del cuneo e per vertice il punto medesimo D, lascierà la distanza $DH = \frac{3b}{4}$; dunque la retta rimanente HG sarà $= \frac{3c}{4} - \frac{3b}{4}$. Quindi facendo come la solidità del cuneo alla piramide interiore, ovvero $c^3 - b^3 : b^3$, così la HG alla GI, si tro- Fig. IV. Tav. I. Corol. 1 Prop. ant.

verà la $GI = \frac{3b^3(c-b)}{4(c^3-b^3)} = \frac{3b^3}{4(c^2+bc+b^2)}$, e il punto I sarà centro di gravità del cuneo; e però, aggiunta alla GI la DG, si avrà $\frac{3b^3}{4(c^2+bc+b^2)} + \frac{3c}{4}$ per la distanza tra il centro D della cupola e il punto I centro di gravità del cuneo; il che ecc.

PROBLEMA 15. PROPOSIZIONE 15.

Ritrovare in una cupola, compresa fra le superficie di due emisferi concentrici, la differenza delle pressioni che esercitano fra di loro due cunei infinitesimi contigui, senza tener conto degli altri cunei, e trovare in oltre il momento di essa differenza.

Fig. III. Tav. V. Sia AZm il profilo di una cupola, il quale passi pel centro di gravità de' cunei componenti uno spicchio, e sia AR il profilo del muro del tamburo, e R il centro del moto. Indichino poi i due spazj infinitesimi $bZeL$ $ZaTe$ due cunei contigui sopra basi uguali Le eT, e i punti D C i loro rispettivi centri di gravità. Se dunque da' punti D C si tirino le verticali DF CE rappresentanti le solidità e gravità de' cunei suddetti, e si compiano i parallelogrammi $DHFG$ $CKEI$ sopra linee perpendicolari alle commessure de' cunei, dinoterà DH la pressione del cuneo $bZeL$ sull' inferiore $ZaTe$, e CI quella di $ZaTe$ contro $bZeL$: bisogna primieramente trovare la differenza delle DH CI.

Si faccia la $mO = x$, la $OL = y$, la $Lg = dx$, la $ge = dy$, la $Le = eT = ds$, la $eu = dx + ddx$, la $Tu = dy + ddy$; poi il raggio esteriore della cupola $= c$, l' interiore $= b$: indi si chiami l' altezza YR del tamburo $= a$, la sua grossezza $AY = G$, l' arco interiore del cerchio orizzontale della base di uno spicchio $= u$. Sarà, per le cose dimostrate nel corollario 4. dell' antecedente, la solidità o la gravità del cuneo $bZeL = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} . (dx + \frac{ddx}{2}) = DF$; e la solidità o la gravità del cuneo $ZaTe = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} . (dx + \frac{3ddx}{2}) = CE$; laonde fatta per facilità di calcolo $e = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2}$, diventerà $DF = edx + \frac{eddx}{2}$, e $CE = edx + \frac{3eddx}{2}$.

Se ATm fosse una curva qualunque, non in ispezialità un quadrante, e mp fosse il suo asse, condotti i raggi osculatori LQ en Tn, e chiamato il raggio $LQ = \frac{dyds}{ddx} = z$, si proverebbe nello stesso modo della proposizione 1 del Libro V., che sen. $HDG = \frac{rds}{z}$, sen. $KCI = \frac{rds}{z + dz}$, sen. $FDG = \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$, e per fine sen. $KCE = \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} - \frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$. E poichè sta come $DF : DH ::$ sen. HDG : sen. FDG, ovvero $edx + \frac{eddx}{2} : DH :: \frac{rds}{z} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$, sarà $DH = (edx + \frac{eddx}{2}) . (\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds})$.

Di nuovo la proporzionalità di $CE : CI ::$ sen. KCI : sen. KCE, ovvero di $edx + \frac{3eddx}{2} : CI :: \frac{rds}{z + dz} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} - \frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$, darà $CI = (edx + \frac{3eddx}{2}) . (\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dzddy}{ds^2} - \frac{dx}{2ds} - \frac{ddx}{2ds})$, cioè ommettendo nel secondo moltiplicatore i termini trascurabili, sarà $CI = (edx + \frac{3eddx}{2}) . (\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} - \frac{dx}{2ds})$: laonde la differenza tra le DH CI sarà $= (edx + \frac{eddx}{2}) . (\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds}) - (edx + \frac{3eddx}{2}) . (\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} -$

$\frac{dx}{2ds}) = \frac{edx^2}{ds} - \frac{edxdydz}{ds^2} - \frac{ezdxddy}{ds^2} - \frac{ezdyddx}{ds^2}$ negligendo i termini infinitesimi di secondo ordine. Nella cupola poi $z = \frac{dyds}{ddx} = b$, e $dz = 0$, dunque $DH - CI = \frac{edx^2}{ds} - \frac{edxdyddy}{dsddx} - \frac{edy^2}{ds} = \frac{edx^2}{ds} + \frac{edx^2}{ds} - \frac{edy^2}{ds} = \frac{2edx^2}{ds} - \frac{edy^2}{ds}$. Oltre a ciò perchè $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$, $dy = \frac{(b-x)dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dx^2}{ds} = \frac{dx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, e $\frac{dy^2}{ds} = \frac{(b-x)^2 dx}{b\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{dx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, sarà finalmente $DH - CI = \frac{2edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$.

Prop. ant. In secondo luogo poichè la distanza QD dal centro della cupola al centro di gravità del cuneo $bZeL$ è $= \frac{3b^3}{4(c^2 + bc + b^2)} + \frac{3c}{4}$, fatta questa distanza per abbreviare il calcolo $= k$, si avrà, operando nel resto come nella prop. 3 del Libro V., la perpendicolare RV tirata dal punto R sulla direzione DH prolungata $= k + \frac{ædy}{ds} - \frac{dx}{ds}(G + b) = k + \frac{æ(b-x)}{b} - \frac{G+b}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)}$; per conseguenza il momento della differenza delle pressioni di due cunei infinitesimi contigui riuscirà $= \left(\frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}\right) \cdot \left(k + \frac{æ(b-x)}{b} - \frac{G+b}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; il che ecc.

COROLLARIO

COROLLARIO I.

Essendosi provato che la differenza tra le pressioni di due cunei infinitesimi contigui è $= \frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, nel caso che $y = \sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{b}{\sqrt{3}}$, cioè y uguale alla terza parte del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio del raggio b, e però $x = b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$, riuscirà allora $DH - CI = \frac{3edx}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} - \frac{bedx\sqrt{3}}{b} = edx(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$; quindi ricaveremo questa elegante proprietà della cupola, che quando l' ascissa OQ sia $= b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$, e l' ordinata $QF = \frac{b}{\sqrt{3}}$, i cunei infinitesimi contigui al punto F si premono ugualmente a vicenda, non computando però l' effetto degli altri cunei dello spicchio. Se poi sia y, o $\sqrt{(2bx - x^2)} < \frac{b}{\sqrt{3}}$, vale a dire l' ascissa x minore della OQ, sarà anche, quadrando, poi dividendo tutto per $\sqrt{(2bx - x^2)}$, pure $\frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} < \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; laonde $\frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, cioè la differenza delle pressioni è una quantità negativa, e la pressione del cuneo inferiore è più grande di quella del superiore; e però nella parte OF dello spicchio i cunei inferiori premono più i superiori di quello siano da essi premuti, e la differenza positiva delle loro pressioni è $= \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)}$. Allo stesso modo si dimostrerà che se sia $y > \frac{b}{\sqrt{3}}$, e l' ascissa x maggiore della OQ, la differenza delle pressioni resterà una quantità positiva, e però nella parte FN dello spicchio i cu-

Fig. VIII. Tav. VI.

nei superiori premono più gl' inferiori di quello sieno da essi premuti.

Corollario 2.

Poichè il punto F, in cui i cunei contigui si premono ugualmente a vicenda, corrisponde all' ordinata $QF = \frac{b}{\sqrt{3}}$, e all' ascissa $OQ = b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$, sarà, levando l' asimetria, la $QF = \frac{5773}{10000}b$ per approssimazione, e la $OQ = \frac{1835}{10000}b$, onde la rimanente QI fino al centro $= \frac{8165}{10000}b$; e però la risoluzione del triangolo rettangolo FQI somministrerà l' angolo OIF di $35°, 15', 52''$, poi l' arco $OF = \frac{6155}{10000}b$; dunque se fermo l' asse OI si giri la retta IF ad esso inclinata per $35°, 15', 52''$, finchè ritorni dove cominciò a girarsi, descriverà il punto F una circonferenza orizzontale, che mostrerà in ogni spicchio il sito dove i cunei contigui si premono ugualmente a vicenda: i superiori a quel cerchio avranno poi una tendenza di pressioni verso la sommità della cupola, e gl' inferiori verso l' impostatura.

Scolio.

Questa nuova proprietà delle cupole era troppo interessante, perchè io non ne cercassi una conferma nel calcolo finito, alla qual cosa mi faceva strada la proposizione 13, *dove si è mostrato il modo di trovare la solidità di un cuneo quantunque finito di grandezza. Sieno pertanto* XC FB *due cunei contigui finiti di uno spicchio della cupola, e si faccia l' angolo* $\mathrm{OIG} = \mu$, *l' angolo* $\mathrm{OIF} = \pi$; *e tutto il resto come nella citata proposizione: sarà dunque la solidità del cuneo* FB, *o la sua gravità*, $= \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}$.

sen. $\frac{\pi+\mu}{2}$. sen. $\frac{\pi-\mu}{2}$, *cioè fatta* $\frac{4n(c^3-b^3)}{3mpr^2} = e$, *saranno esse* $= e$. sen. $\frac{\pi+\mu}{2}$. sen. $\frac{\pi-\mu}{2}$. *Perchè poi l' angolo* OIG $= \mu$, *e l' angolo* OIF $= \pi$, *sarà l' angolo rimanente* GIF $= \pi - \mu =$ FIX, *che aggiunto all' angolo* OIF, *darà tutto l' angolo* OIX $= 2\pi - \mu$, *e però dati gli angoli* OIF OIX *si troverà, come prima, la solidità o la gravità del cuneo* XC $= e$. sen. $\frac{3\pi-\mu}{2}$. sen. $\frac{\pi-\mu}{2}$. *Di nuovo si prenda il centro di gravità del cuneo* FB, *che cadrà in qualche punto della* IS *prolungata, e da esso centro si conduca una linea verticale rappresentante la gravità del cuneo* FB, *e si compia per fine nel solito modo un parallelogrammo sopra direzioni perpendicolari alle commessure* EG DF; *si proverà che sta la gravità del cuneo alla pressione sul cuneo inferiore* XC, *come il seno dell' angolo* FIG *al seno dell' angolo* GIN *o al coseno di* GIO; *dunque* $\frac{e \cdot \cos.\mu}{\text{sen.}(\pi-\mu)}$. sen. $\frac{\pi+\mu}{2}$. sen. $\frac{\pi-\mu}{2}$ *dinota la pressione del cuneo* FB *sull' inferiore* XC. *Similmente operando si troverà che come la gravità del cuneo* XC *alla sua pressione sul superiore* FB, *così sta il seno dell' angolo* FIX *al seno dell' angolo* XIN, *o al coseno di* OIX, *e che per conseguenza* $\frac{e \cdot \cos.(2\pi-\mu)}{\text{sen.}(\pi-\mu)}$. sen. $\frac{3\pi-\mu}{2}$. sen. $\frac{\pi-\mu}{2}$ *esprime la pressione di* XC *contro* FB. *Affinchè dunque possano questi due cunei premersi a vicenda ugualmente, levati i moltiplicatori e divisori comuni, sarà d' uopo che sia* cos. μ. sen. $\frac{\pi+\mu}{2} = \cos.(2\pi-\mu)$. sen. $\frac{3\pi-\mu}{2}$.

In oltre essendo $\pi > \mu$, *e però* $\frac{\pi+\mu}{2} > \mu$, *e* $2\pi - \mu > \frac{3\pi-\mu}{2}$, *sarà* cos. μ. sen. $\frac{\pi+\mu}{2} = \frac{r}{2}$. sen. $\frac{\pi+3\mu}{2} + \frac{r}{2}$. sen. $\frac{\pi-\mu}{2}$, *e* Equaz. V. Prop. 7 Lib. I.

Equaz. VI. $\cos.(2\pi - \mu).\text{sen}.\frac{3\pi - \mu}{2} = \frac{r}{2}.\text{sen}.\frac{7\pi - 3\mu}{2} - \frac{r}{2}.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}$;

laonde sostituendo queste quantità nella superior equazione avremo

Equaz. VI. $r.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2} = \frac{r}{2}.\text{sen}.\frac{7\pi - 3\mu}{2} - \frac{r}{2}.\text{sen}.\frac{\pi + 3\mu}{2} = \cos.2\pi.$

Equaz. IX. $\text{sen}.\frac{3\pi - 3\mu}{2}$: *ma* $\cos.2\pi = r - \frac{2}{r}.(\text{sen}.\pi)^2$, *e* $\text{sen}.\frac{3\pi - 3\mu}{2}$

Equaz. I. $= \frac{1}{r}.\text{sen}.(\pi - \mu).\cos.\frac{\pi - \mu}{2} + \frac{1}{r}.\cos.(\pi - \mu).\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}$

Equaz. I. X. $= \frac{2}{r^2}.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}.\left(\cos.\frac{\pi - \mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{r^2}.\left(\cos.\frac{\pi - \mu}{2}\right)^2.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}$

$- \text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}$; *dunque* $r.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2} = \left(r - \frac{2}{r}.(\text{sen}.\pi)^2\right).$

$\left(\frac{2}{r^2}.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}.\left(\cos.\frac{\pi - \mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{r^2}.\left(\cos.\frac{\pi - \mu}{2}\right)^2.\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}\right.$

$\left.- \text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}\right)$, *ovvero dividendo tutto per* $\text{sen}.\frac{\pi - \mu}{2}$ *e riducendo*,

s' avrà $r^4 = \left(r^2 - 2.(\text{sen}.\pi)^2\right).\left(4.\left(\cos.\frac{\pi - \mu}{2}\right)^2 - r^2\right)$; *e però*

$$\frac{r^4}{4.\left(\cos.\frac{\pi - \mu}{2}\right)^2 - r^2} = r^2 - 2.(\text{sen}.\pi)^2$$

; *quando dunque accada esser tali gli angoli* π μ *che si verifichi la detta equazione, i due cunei si premeranno ugualmente a vicenda; ma se il primo membro sia minore del secondo, invertendo, si proverà che anche* $\cos.\mu.\text{sen}.\frac{\pi + \mu}{2} < \cos.(2\pi - \mu).\text{sen}.\frac{3\pi - \mu}{2}$, *e che il cuneo superiore preme meno l' inferiore di quello sia da esso premuto; e viceversa sarà, quando il primo membro sia maggiore del secondo.*

Siano per esempio infinitesimi i cunei di uno spicchio della cupola, nel qual caso è infinitesima la differenza tra gli angoli π μ, *e però* $\cos.\frac{\pi - \mu}{2} = r$; *sarà dunque* $\frac{r^4}{4r^2 - r^2} = r^2 - 2.(\text{sen}.\pi)^2$, *cioè* $\frac{r}{\sqrt{3}} = \text{sen.}\,\pi = \text{sen. FIQ}$, *e risolvendo il triangolo* FIQ, *che ha l' ipotenusa* $\text{FI} = \text{b}$, *si troverà la* $\text{FQ} = \frac{b}{\sqrt{3}}$; *per conseguenza se l' angolo* FIQ *abbia il suo seno* $= \frac{r}{\sqrt{3}}$, *o se l' ordinata* FQ *sia* $= \frac{b}{\sqrt{3}}$, *al punto* F *corrisponderanno due cunei, i quali si premeranno ugualmente. Ma sopra il punto* F *restando costante l' angolo infinitesimo* $\frac{\pi - \mu}{2}$ *al centro de' cunei, e l' angolo* π *facendosi minore, sarà* $\frac{r^4}{4(\cos.\frac{\pi-\mu}{2})^2 - r^2} < r^2 - 2.(\text{sen.}\,\pi)^2$; *dunque tutti i cunei superiori premeranno meno gl' inferiori di quello sieno da essi premuti; e all' incontro accaderà ne' cunei sotto il punto* F; *tutte verità già dimostrate superiormente col calcolo degl' infinitesimi.*

PROBLEMA 16. PROPOSIZIONE 16.

In uno spicchio di una cupola compresa tra le superficie di due emisferi concentrici trovare la somma de' momenti delle forze che operano per rovesciare la muraglia del tamburo.

Sia *AVMNLO* uno spicchio di una cupola, e sia *F* il punto che corrisponde all' ascissa $OQ = b - b\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1835}{10000}b$, all' ordinata $QF = \frac{5773}{10000}b$, e all' arco $OF = \frac{6155}{10000}b$; sicchè *F* sia il punto dove i cunei infinitesimi contigui dello spicchio si premono ugualmente. Si faccia poi $\frac{1835}{10000}b = q = OQ$, $\frac{5773}{10000}b = b$ Fig. VIII. Tav. VI.

$= QF$, $\frac{6155}{10000} b = l = OF$; e le altre cose date si nominino come nell' antecedente, cioè il raggio interiore $= b$, l' esteriore $= c$, l' arco NL della base dello spicchio $= u$, l' altezza NW del tamburo $= a$, la sua grossezza $W\mathit{Æ} = G$, la distanza dal centro della cupola al centro di gravità di un cuneo $= \frac{3b^3}{4(c^2 + bc + b^2)} + \frac{3c}{4} = k$, e per fine $e = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2}$.

Per le cose colà dette nel corollario 1, dal punto F fino all' impostatura N ogni cuneo superiore preme per se stesso l' inferiore contiguo più di quello sia da esso premuto, e la differenza delle pressioni è $= \frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; tutto all' opposto succede ne' cunei posti tra F e la sommità O, e la differenza delle pressioni è $= \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)}$. Per la qual cosa se col metodo della proposizione 4 del Libro V. si prenda nella figura da F in N dal centro di gravità di ciascun cuneo inferiore all' ingiù una linea retta uguale alla differenza di esse pressioni, e in direzione perpendicolare alla comune commessura dell' inferiore col superiore; poi da F in O si prenda dal centro di gravità di ogni cuneo superiore all' insù una retta uguale alla differenza delle pressioni, e perpendicolare alla comune commessura de' due cunei, indi si compongano, si risolvano queste rette, e si faccia il resto per avere gli sfiancamenti e le spinte relative de' cunei, si vedrà manifestamente la necessità di una sopraccentina che sostenga gli sfiancamenti medesimi; ed in oltre che da F in N e da F in O partiranno due serie di spinte relative, delle quali le prime termineranno all' impostatura, le altre al serraglio della cupola. Ciò accaderà in ogni spicchio, sicchè il serraglio resterà in equilibrio fra l' ugual contrasto delle spinte relative de' cunei ad esso contigui e le ammorzerà. Anzi integrando la differenza fra le pressioni di due cunei contigui, s' avrà per l' ultima citata proposizione e suo corollario 2 la spinta relativa di ciascun cuneo da F in N (non eccettuata quella della mossa, perchè l' impostatura è orizzontale) $= \int \left(\frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} \right)$: ma per non errare nell' integrazione di essa quantità, converrà far uso di qualche artifizio analitico, imperciocchè la spinta del cuneo in F corrispondente al punto Q è $= 0$, laddove l'origine dell'ascisse x è in O non in Q. Si prenda dunque essa origine in Q facendo la $QZ = z$, e cada il punto Z sotto Q, e si ordini la ZV: s' avrà $x = q + z$, $dx = dz$, poi fatte le sostituzioni la quantità integrale si cangierà in questa nuova $\int \left(\frac{3edz}{b} \sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)} - \frac{bedz}{\sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}} \right)$: ma $\sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}$ è uguale all' ordinata ZV, $\int dz \sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}$ è uguale allo spazio $QFVZ$, e $\int \frac{bdz}{\sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}}$ uguale all' arco FV; laonde l' integrale ricercato, senza aggiugnere la costante perchè quando $z = 0$ tutto svanisce, diventerà $= \frac{3e}{b} . QFVZ - e . FV$; e però la spinta relativa della mossa sarà $= \frac{3e}{b} . QFNI - e . FN$. Conseguentemente se si prenda dalla parte dell' ascisse negative la $QT = z$, e si ordini TS, riuscirà la spinta negativa del cuneo in $S = \frac{3e}{b} . QFST - e . FS$; sicchè, cangiando i segni, sarà la spinta di esso cuneo tolta positivamente $= - \frac{3e}{b} . QFST + e . FS$; e quella del cuneo in O contiguo al serraglio $= - \frac{3e}{b} . QFO + e . OF$.

E' costume di mettere nella sommità delle cupole una lanterna per dar ornamento e lume all' interiore della Volta. Queſte lanterne pertanto rieſcono anche utili per la fermezza della cupola, imperciocchè per le coſe dimoſtrate eſſendovi ne' cunei ſuperiori al punto F una tendenza di forze verſo la ſommità, può eſſere ella ammorzata dalla preſſione contraria della lanterna. E chi non vede che per ottenere un perfetto equilibrio in tutti i cunei da F in ſu, baſta che s' appoggi la lanterna ſu' cunei che reſtano i ſommi, sì che la ſua preſſione ſopra ogni cuneo equivalga a quella ſpinta relativa che ad eſſo compete, e che poco fa abbiamo determinata? Si ſupponga che ciò ſia così: reſta dunque da calcolare l' effetto de' cunei da F in N, ne' quali accadono ſfiancamenti, che biſognerà intendere ſoſtenuti da una ſopraccentina.

Ora procedendo nella ſteſſa maniera della propoſizione 5 del Lib. V, ſi proverà, ch' eſſendo orizzontale l' impoſtatura, la ſomma de' momenti degli ſfiancamenti de' cunei da F in N col momento della ſpinta relativa della moſſa (la qual ſomma rinchiude i momenti di tutte le forze che operano ſul muro) è uguale alla ſomma o all' integrale de' momenti delle differenze fra le preſſioni di due cunei contigui; dunque ſaranno i momenti di tutte le forze che operano ſul

Prop. ant. muro uguali a $\int\left(\frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}-\frac{bedx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}\right).\left(k+\frac{a(b-x)}{b}\right.$ $\left.-\frac{G+b}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}\right)$, coll' avvertenza poi che queſta quantità integrale ſvaniſca nel cuneo F corriſpondente al punto Q. Per far queſto adopreremo l' anteriore artifizio prendendo ſotto il punto Q la $QZ=z$, e ordinando la ZV, indi ſoſtituendo in luogo di x il binomio $q+z$, e dz in luogo di dx nella quantità integrale; e ſarà la ſomma de' momenti fino in $V=\int\left(\frac{3edz}{b}\sqrt{\left(2b(q+z)-(q+z)^2\right)}-\right.$ $\left.\frac{bedz}{\sqrt{\left(2b(q+z)-(q+z)^2\right)}}\right).\left(k+\frac{a(b-q-z)}{b}-\frac{G+b}{b}\sqrt{\left(2b(q+z)\right.}\right.$ $\left.\left.-(q+z)^2\right)\right)$; onde fatta la moltiplicazione e l' integrazione di termine per termine, e aggiunta la coſtante E, riuſcirà rà essa somma de' momenti fino in $V = \frac{3ek}{b} . QFVZ - ek . FV$ $+ \frac{ea}{b^2} . (ZV)^3 - ea . ZV - \frac{3e(G+b)}{b^2} . \left(2bqz + bz^2 - \frac{1}{3}(q+z)^3\right)$ $+ ez(G+b) + E$. In oltre perchè nel cuneo F corrispondente al punto Q o all' ascissa $z = 0$, tutto dee svanire, e quando $z = 0$, ZV si cangia in QF che abbiamo in principio chiamata $= b$; e però sarà la costante $E = - \frac{eab^3}{b^2} + eab - \frac{eq^3(G+b)}{b^2}$: quindi fatta $z = QI = b - q$, e la $ZV = IN = b$, s' avrà la somma de' momenti da F in $N = \frac{3ek}{b} . QFNI - ek . FN + eab - \frac{eab^3}{b^2} - \frac{eq^3(G+b)}{b^2} - \frac{3e(G+b)}{b^2} . \frac{2b^3 - 3bq^2}{3} + e(b - q) . (G+b) = \frac{3ek}{b} . QFNI - ek . FN + eab - \frac{eab^3}{b^2} - e(q^3 + b^3 - 3bq^2 + b^2q) . \frac{G+b}{b^2}$. Per semplificare ancora di più siffatto valore chiamo il quadrante ON del raggio b uguale a Θ, e richiamo alla memoria che abbiamo in principio fatto l' arco $OF = l$, e che q è $= b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$: sarà dunque $\frac{3ek}{b} . QFNI - ek . FN = \frac{3ek}{b}(ONI - OFI + QFI) - ek(ON - OF) = \frac{3ek}{b} . \left(\frac{b\Theta}{2} - \frac{bl}{2} + \frac{b(b-q)}{2}\right) - ek(\Theta - l) = \frac{ek\Theta}{2} - \frac{ekl}{2} + \frac{3ebk(b-q)}{2b}$; ma $q^3 + b^3 - 3bq^2 + b^2q$ riuscirà $= 2(b-q)^3$, come si può riscontrare; laonde sarà la somma de' momenti delle forze de' cunei che operano contro il muro, ch' era la cosa domandata dalla proposizione, $= \frac{ek\Theta}{2} - \frac{ekl}{2} + \frac{3ebk(b-q)}{2b} + eab - \frac{eab^3}{b^2} - 2e(b-q)^3 . \frac{G+b}{b^2}$, e sostituendo in luogo di e il

ſuo valore $\frac{u(c^3-b^3)}{3b^2}$, riuſcirà finalmente $= \frac{u(c^3-b^3)}{3b^2} . \left(\frac{k(\Theta-l)}{2}\right.$
$\left. + \frac{3bk(b-q)}{2b} + ab - \frac{ab^3}{b^2} - 2(b-q)^3 . \frac{G+b}{b^2}\right)$; il che ecc.

PROBLEMA 17. PROPOSIZIONE 17.

Dati i raggi interiore ed eſteriore di una cupola compreſa fra le ſuperficie di due emisferi concentrici, e data l' altezza del muro del tamburo, ritrovare la groſſezza ch' ei debbe avere.

Fig. IX. Tav. VI. Sia il raggio interiore $= b$, l' eſteriore $= c$, l' altezza del tamburo $= a$, la ſua groſſezza $= G$, P il peſo in libbre di un piè cubo del materiale della Volta, R la coerenza aſſoluta di un piè quadrato. Sia in oltre FR un pezzo del tamburo corriſpondente a uno ſpicchio della cupola, e l' arco orizzontale AF ſi chiami come nell' antecedente $= u$, il quadrante $= \Theta$; dunque ſe ſi faccia $\frac{3b^3}{4(c^2+bc+b^2)} + \frac{3c}{4} = k$, dipoi ſi prenda $\frac{1835}{10000} b = q$, $\frac{5773}{10000} b = h$, e $\frac{6155}{10000} b = l$, ſarà la ſomma de' momenti delle forze contro il muro del tamburo $= \frac{Pu(c^3-b^3)}{3b^2}$.

Prop. ant. $\left(\frac{k(\Theta-l)}{2} + \frac{3bk(b-q)}{2b} + ab - \frac{ab^3}{b^2} - 2(b-q)^3 . \frac{G+b}{b^2}\right)$. Di nuovo è manifeſto che FR è un priſma che ha per altezza la AD, e per baſe lo ſpazio $CRDL$ compreſo fra gli archi concentrici CR LD, e le rette linee CL RD concorrenti nel centro B, che corriſponde verticalmente al centro E della cupola; laonde condotta dal centro di gravità G dello ſpazio $CRDL$ la verticale GT, paſſerà queſta anche pel punto S centro di gravità del priſma FR.

Per il che fatta la groſſezza DR del muro $= G$, eſſendo $BD = b$, $BR = BO = b + G$, e l' arco $AF = DL = u$, ſarà la distanza BG dal punto B al centro di gravità G dello spazio $CRDL = \frac{6b^2 + 6bG + 2G^2}{3(2b+G)} \cdot \frac{2.\text{sen.}\frac{u}{2}}{u}$; ovvero perchè l' arco u, e molto più $\frac{u}{2}$ è sempre piccolissimo, avvegnachè molti sono sempre gli spicchi che compongono la cupola, sarà la $BG = \frac{6b^2 + 6bG + 2G^2}{3(2b+G)}$. Chi non volesse far siffatta supposizione, l' ommetta, poi segua il calcolo. Dunque la rimanente $OG = b + G - \frac{6b^2 + 6bG + 2G^2}{3(2b+G)} = \frac{3bG + G^2}{3(2b+G)}$. Di nuovo poichè $DL = u$, sarà lo spazio $CRDL$, come uguale alla differenza de' due settori CBR LBD, uguale pure a $\frac{u(b+G)}{b} \cdot \frac{b+G}{2} - \frac{bu}{2} = \frac{u(2bG + G^2)}{2b}$; per conseguenza il prisma $FR = \frac{\alpha u(2bG + G^2)}{2b}$, e il momento della resistenza del suo peso ridotto a libbre $= P \cdot \frac{\alpha u(2bG + G^2)}{2b} \cdot \frac{3bG + G^2}{3(2b+G)} = \frac{\alpha Pu(3bG^2 + G^3)}{6b}$.

Si ha in oltre il momento della coerenza della sezione $CRDL = R \cdot \frac{u(2bG + G^2)}{2b} \cdot \frac{3bG + G^2}{3(2b+G)} = \frac{Ru(3bG^2 + G^3)}{6b}$; quindi la totale resistenza del prisma FR riuscirà $= \frac{1}{6b}(\alpha Pu + Ru) \cdot (3bG^2 + G^3)$; dunque dovendo esservi equilibrio tra i momenti delle forze che operano contro il muro, e i momenti delle forze resistenti, s' avrà l' equazione del terzo grado $\frac{Pu(c^3 - b^3)}{3b^2} \cdot \left(\frac{k(\Theta - l)}{2} + \frac{3bk(b-q)}{2b} + \alpha b - \frac{\alpha b^3}{b^2} - 2(b-q)^3 \cdot \frac{G+b}{b^2}\right) = \frac{1}{6b}(\alpha Pu + Ru) \cdot (3bG^2 + G^3)$, cioè $2P(c^3 - b^3)$.

Corol. 2 Prop. 9 Lib. I.

Dom. II. di questo

$$\left(\frac{k(\Theta-l)}{2}+\frac{3bk(b-q)}{2b}+\alpha b-\frac{\alpha b^3}{b^2}-2(b-q)^3 \cdot \frac{G+b}{b^2}\right)=$$

$(\alpha bP+bR).(3bG^2+G^3)$, in cui tutto è cognito eccetto che G; laonde essa risoluta co' metodi noti, si avrà il valor di G, o la grossezza ricercata della muraglia; il che ecc.

Corollario.

Scol. Prop. 1 di questo.

Passiamo ad un esempio. Sia il raggio interiore b della cupola di piedi 14, l' esteriore c di piedi 16, il peso P di un piè cubo del materiale $=$ lib. 180, $R=$ lib. 1769, l' altezza α della muraglia $=15$. Sarà per conseguenza $\frac{1835}{10000}b$ $=\frac{2569}{1000}=q$, $\frac{5773}{10000}b=\frac{8082}{1000}=b$, $\frac{6155}{10000}b=\frac{8617}{1000}=l$, Θ $=22$, $\Theta-l=\frac{13383}{1000}$, $b-q=\frac{11431}{1000}$, $c^3-b^3=1352$, la distanza k dal centro della cupola al centro di gravità di un cuneo $=\frac{3b^3}{4(c^2+bc+b^2)}+\frac{3c}{4}=\frac{15044}{1000}$, e per fine $\alpha bP+$ $bR=15.14.180+14.1769=62566$. Sicchè sostituendo questi valori nella finale equazione della proposizione s' avrà

$$360.1352\left(\frac{15044.13383}{2.1000^2}+\frac{3.8082.15044.11431}{28.1000^3}+\frac{15.8082}{1000}\right.$$
$$\left.-\frac{15.8082^3}{14^2.1000^3}-\frac{2.11431^3.G}{14^2.1000^3}-\frac{2.11431^3}{14.1000^3}\right)=62566(42G^2+G^3);$$

e però fatta $G=\frac{y}{12}$ per avere la ricercata grossezza in pollici, e moltiplicando tutto per $\frac{12^3}{62566}$, ci ridurremo a questa equazione $\frac{360.1352.12^3}{62566}.\left(\frac{15044.13383}{2.1000^2}+\frac{3.8082.15044.11431}{28.1000^3}\right.$

$$\left.+\frac{15.8082}{1000}-\frac{15.8082^3}{14^2.1000^3}-\frac{2.11431^3.y}{14^2.1000^3.12}-\frac{2.11431^3}{14.1000^3}\right)=$$

$42.12y^2+y^3$; quindi fatte le moltiplicazioni nel primo membro col mezzo de' logaritmi se ne avrà un' altra $1353229 + 2001770 + 1629651 - 543095 - 17074y - 2868397 = 504y^2 + y^3$, ovvero riducendo $1573158 - 17074y = 504y^2 + y^3$, la di cui radice positiva è prossimamente uguale a 40 pollici, e però $G = \frac{y}{12} =$ piedi 3 e pollici 4; ch'è la grossezza, che la pratica insegna di dare al tamburo di una Volta di tali dimensioni.

SCOLIO I.

Ho trattato del caso più semplice delle cupole, cioè di quelle comprese fra le superficie di due emisferi concentrici e che però hanno una grossezza uniforme; non sarebbe però difficile applicare il metodo anche a quelle che sono meno grosse nella sommità che nell' impostature, come sogliono fabbricarle gli Architetti, e ciò pure se la curva interiore o l' esteriore, ovvero amendue non fossero superficie di sfera. E siccome abbiamo fatto per le Volte a mezza botte, così per le cupole si potrebbe calcolare l' effetto che producono i pesi soprapposti, qualunque fosse la natura della curva a cui terminassero.

SCOLIO 2.

La Teoria, che abbiamo applicata in questo Libro alle Volte a mezza botte e alle cupole affine di determinare il loro sforzo contro alle muraglie, può di leggieri applicarsi anche a qualsivoglia altra forma di Volte. Consiste la principal operazione nel ricercare la differenza fra le pressioni reciproche ch' esercitano due cunei contigui fra loro, senza computar le pressioni che soffrono dagli altri; poi il momento di questa differenza d' intorno al centro del moto, indi la somma o l' integrale di essi momenti. Nè si dee ommettere di tener conto delle pressioni che esercitano le mosse da per se stesse sull' impostature, quando queste non siano orizzontali, e nemmeno dell' altre avvertenze indicate in questo Libro, quando peravventura fossero le Volte da qualche scala di pesi caricate.

Il Fine del Sesto ed Ultimo Libro.

		ERRORI	CORREZIONI
pag. 199	l. 1	*Quarto*	*Quinto*
200	10	*AZ*	*Az*
	12	*AZ*	*Az*
283	15	a quella	a quella della

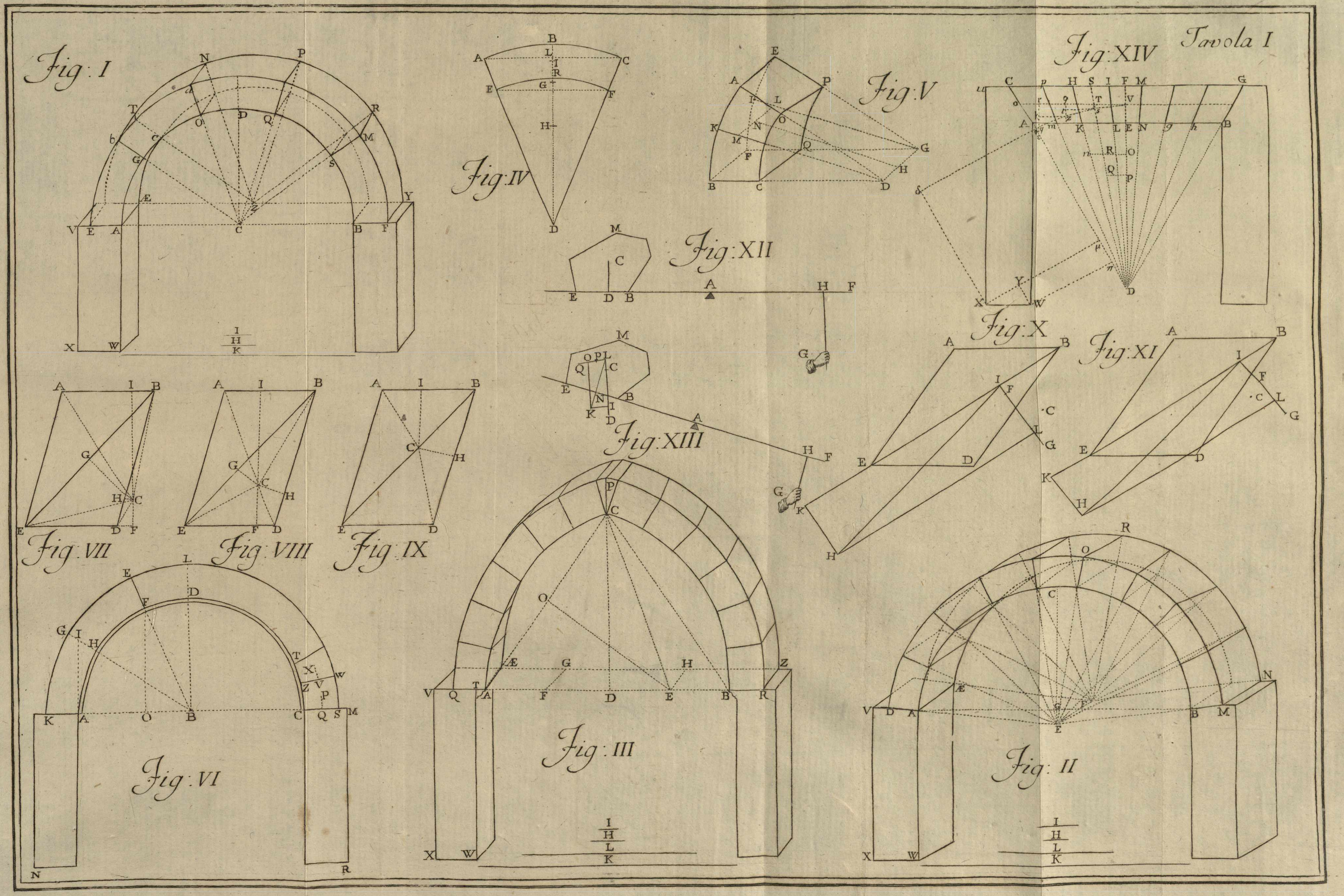


Tavola I
Fig: I
Fig: IV
Fig: V
Fig: XIV
Fig: XII
Fig: X
Fig: XI
Fig: XIII
Fig: VII
Fig: VIII
Fig: IX
Fig: VI
Fig: III
Fig: II

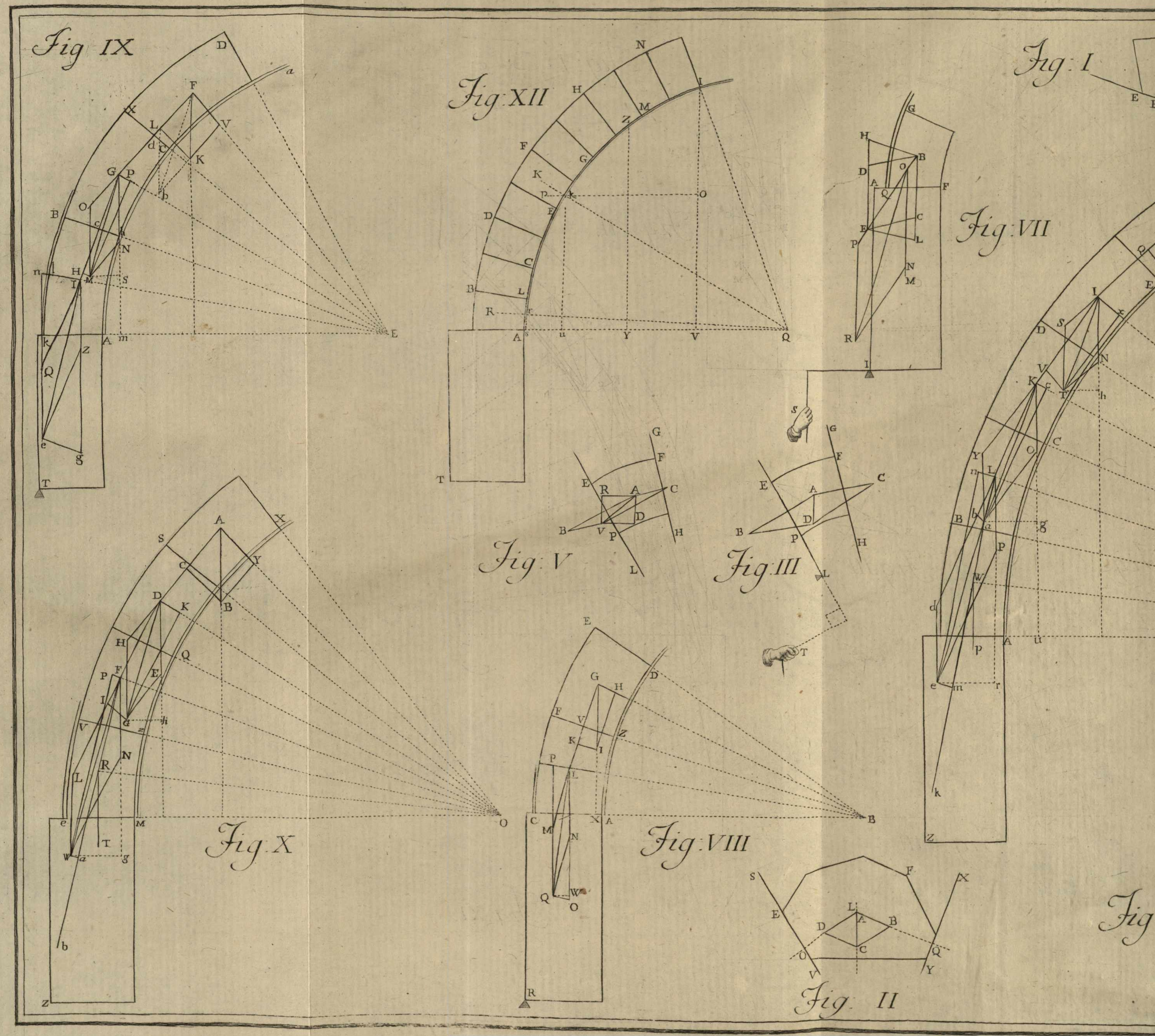
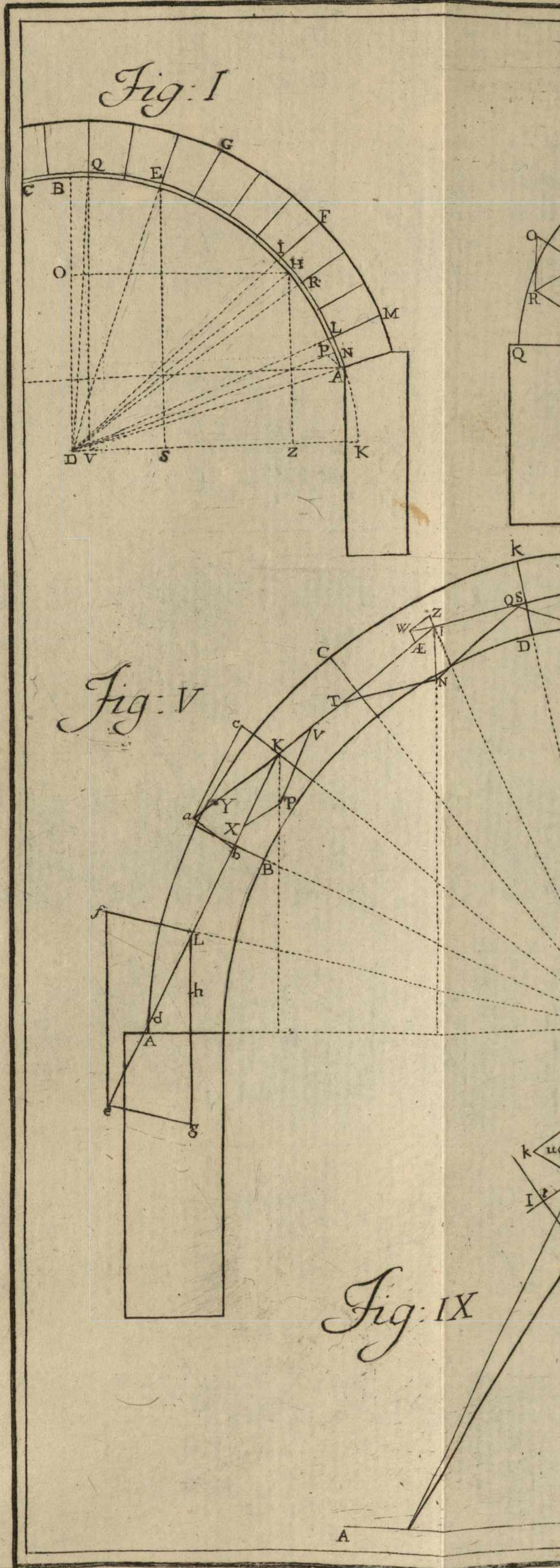


Tavola II
Fig IX
Fig XII
Fig I
Fig IV
Fig VII
Fig VI
Fig V
Fig III
Fig XI
Fig X
Fig VIII
Fig XIII
Fig II

Tavola: III



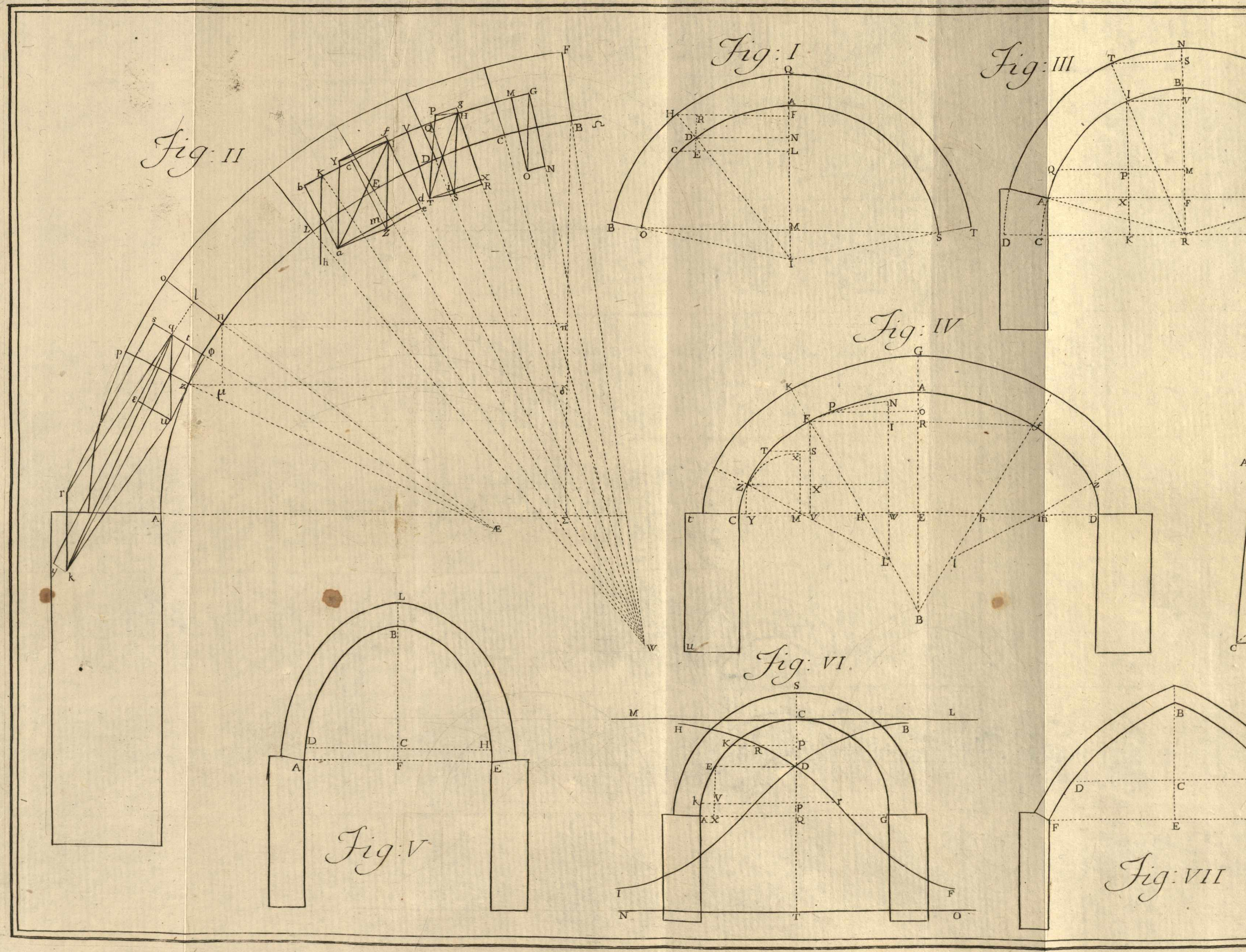


Tavola IV
Fig: I
Fig: II
Fig: III
Fig: IV
Fig: V
Fig: VI
Fig: VII
Fig: VIII

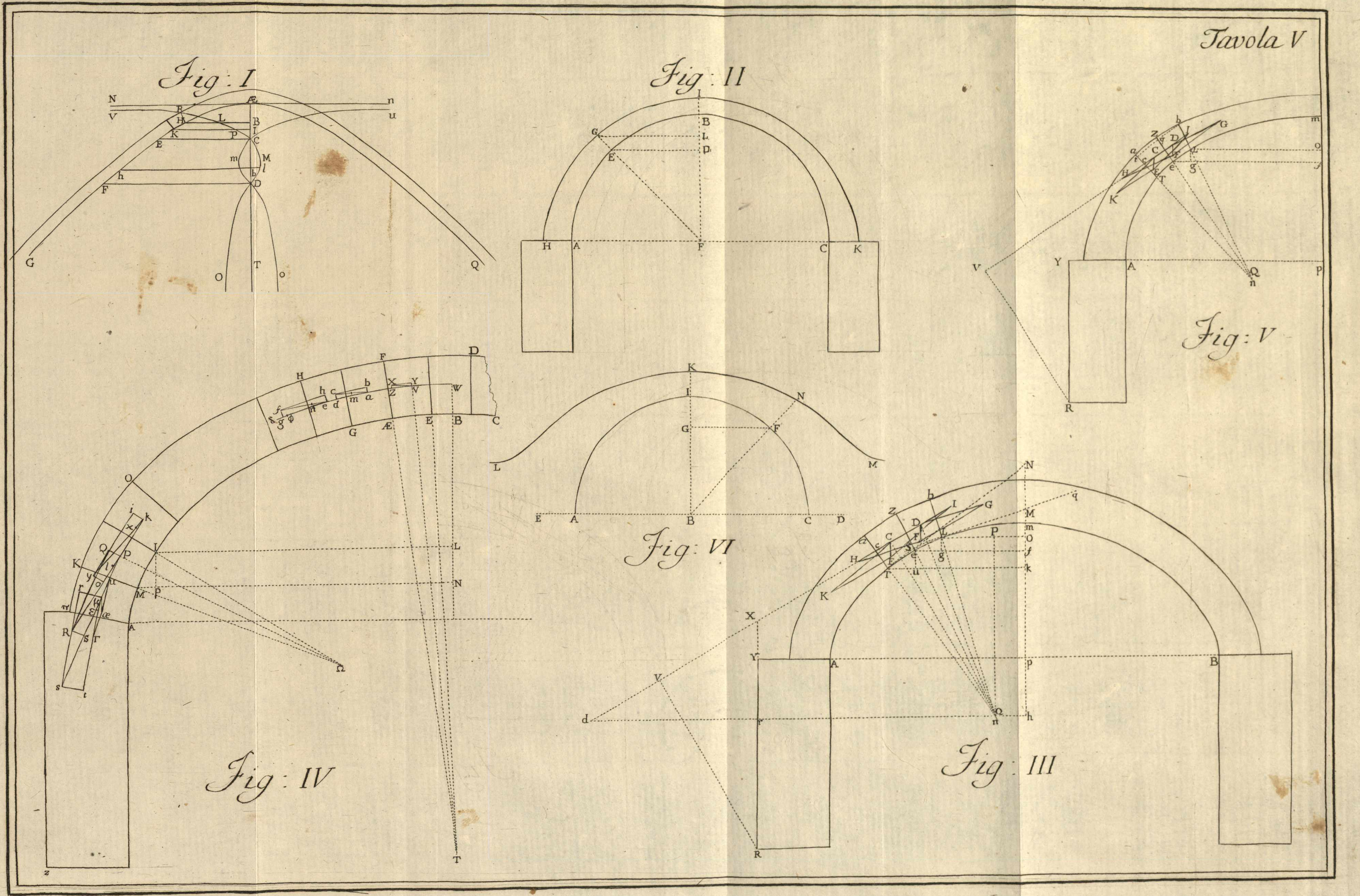


Tavola V
Fig: I
Fig: II
Fig: V
Fig: VI
Fig: IV
Fig: III