Nov. 27, 1888

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XV.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Roret, libraire,	chez Friedländer et Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue Hautefeuille, 10 bis.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, ETC.
ET DE L'ACADÉMIE ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE,

Rue de Louvain, 108.

NOVEMBRE 1888.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XV.

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLIAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez RORET, libraire,
rue Hautefeuille, 10 bis.

BERLIN,
chez FRIEDLÄNDER et Sohn,
Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, ETC.,
ET DE L'ACADÉMIE ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE,
Rue de Louvain, 108.

NOVEMBRE 1888.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XV.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 1er NOVEMBRE 1888.

Bureau.

Président,	M. J. DERUYTS.
Vice-Président,	» JORISSEN.
Secrétaire général,	» LE PAIGE.
Trésorier,	» NEUBERG.
Bibliothécaire,	» FRAIPONT.

Membres effectifs.

1842 LAGUESSE, directeur divisionnaire honoraire des mines, à Liège.

SELYS LONGCHAMPS (baron E. DE), membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

1844 KUPFFERSCHLAEGER, Is., professeur émérite à l'université de Liège.

1853 CANDÈZE, E., membre de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Glain par Liège.

1853 Pâque, A., ancien professeur de mathématiques à l'athénée de Liége (Flémalle-Grande).
1855 Dewalque, G., professeur de minéralogie, de géologie et de paléontologie à l'université de Liége.
1856 Catalan, C. E., professeur émérite à l'université de Liége.
1860 Gillon, A., professeur de métallurgie à l'université de Liége.
1861 Perard, L., professeur de physique à l'université de Liége.
1865 Folie, F., directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1868 Graindorge, L. A. J., professeur à l'université de Liége.
1870 Masius, V., professeur de pathologie et de clinique à l'université de Liége.
Vanlair, C., professeur de pathologie et de thérapeutique à l'université de Liége.
1871 Van Beneden, Éd., professeur de zoologie, de physiologie et d'anatomie comparées à l'université de Liége.
1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université de Liége.
1875 Spring, W., professeur de chimie à l'université de Liége.
Swaen, A., professeur d'anatomie à l'université de Liége.
1876 de Koninck, Lucien, professeur de chimie analytique et de docimasie à l'université de Liége.
1878 Le Paige, Constantin, professeur de géométrie supérieure à l'université de Liége.
1879 Jorissen, A., docteur en sciences, à Liége.
1880 Neuberg, J., professeur à l'université de Liége.
1881 Fraipont, J., professeur à l'université de Liége.
1884 Deruyts, J., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.
Ronkar, Ém., chargé de cours à l'université.
Ubaghs, P., répétiteur à l'École des mines.
1885 Gravis, A., professeur de botanique à l'université de Liége.
1887 Lohest, M., assistant de géologie à l'université de Liége.
Forir, H., répétiteur à l'École des mines.
Deruyts, Fr., docteur en sciences.
Lambotte, Er., docteur en médecine, à Verviers.
De Heen, P., chargé de cours à l'université de Liége.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1843 Stas, J. S., membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Bruxelles.

Steichen, membre de l'Académie, à Bruxelles.

1844 Lecointe, ancien professeur de mathématiques supérieures, à Bruxelles.

1845 Maus, inspecteur général des ponts et chaussées, à Bruxelles.

1847 De Cuyper, A. C., professeur émérite à l'université de Liége, à Bruxelles.

1852 Ettingshausen (baron Constantin von), membre de l'Académie des sciences de Vienne, à Graz.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1854 Petrina, professeur de physique, à Prague (Bohême).

Dutreux, receveur général, à Luxembourg.

Weber, professeur de physique à l'université de Gottingue (Prusse).

Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.

Tchébycheff, P., membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.

1858 Caligny (marquis de), correspondant de l'Institut, à Versailles (France).

1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.

1864 Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Terssen, général d'artillerie, à Anvers.

De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

1866 Ledent, professeur au collége communal de Verviers.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York (États-Unis).
Boncompagni (prince Balthasar), à Rome.
Helmholtz (von), professeur de physique, à Berlin.
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.
1870 Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.
1871 Imschenetski, professeur à l'université de Karkoff (Russie).
Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Durége, professeur à l'université de Prague (Bohême).
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.
Le Boulengé, P., colonel d'artillerie.
1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gênes (Italie).
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).
1873 Bates, H., membre de la Société royale de Londres.
Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.
Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.
1874 Winkler, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).
Van Rysselberghe, aide à l'Observatoire royal, à Bruxelles.
1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.
Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).
Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.
Marie, M., examinateur à l'École polytechnique, à Paris.
Mathieu, Em., membre de l'Académie des sciences (Nancy).
1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.
1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Sylvester, J. J., professeur à l'université d'Oxford.
Czuber, professeur, à Prague.
1880 Cremona, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.
Weyr, Ém., professeur à l'université de Vienne (Autriche).
Ibañez, général, directeur de l'Institut cartographique, à Madrid.
Studnička, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.
Genocchi, Angelo, membre de l'Académie de Turin.
Van der Mensbrugge, Gustave, professeur à l'université de Gand.
Liagre, général, secrétaire perpétuel de l'Académie royale des sciences, etc., à Bruxelles.
De Tilly, J., colonel, membre de l'Académie de Belgique, à Anvers.
Bonnet, Ossian, membre de l'Institut, à Paris.
1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.
Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.
Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.
Planté, G., à Paris.
Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
Quincke, professeur de physique, à Heidelberg.
Giordano, inspecteur du corps des mines, à Rome.
Guiscardi, professeur à l'université de Naples.
Laisant, C. A., député, à Paris.
Beltrami, professeur à l'université de Pavie.
1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.
Bouniakowski, membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
1883 Breithof, N., professeur à l'université de Louvain.
Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.
Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1884 Bierens de Haan, D., professeur à l'université de Leide.
Gerono, C., rédacteur des *Nouvelles Annales de mathématiques,* à Paris.
1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Leipzig.
Halphen, membre de l'Institut, à Paris.
Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.
de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
Vaněček, J. S., professeur, à Jičín (Bohême).
Cesàro, E., professeur à l'université, à Palerme.
1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
Menabrea, marquis de Val-Dora, ambassadeur de S. M. le roi d'Italie, à Paris.
Guccia, docteur en sciences, à Palerme.
Casey, J., professeur à l'université catholique de Dublin.
Wüllner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.
1888 Ocagne (Maurice d'), ingénieur des ponts et chaussées, à Cherbourg (France).

II. — Sciences naturelles.

1842 Van Beneden, J. P., professeur à l'université de Louvain.
1843 Keyserling (comte A. de), membre de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.
1845 Hagen, professeur à l'université de Cambridge (États-Unis).
1848 Klipstein (von), professeur à l'université de Giessen.
1852 Dana, J. D., professeur de géologie et d'histoire naturelle, à New-Haven (États-Unis).
1853 Westwood, professeur de zoologie à l'université d'Oxford (Angleterre).
Waterhouse, conservateur au Musée Britannique, à Londres.

1854 Kölliker (von), professeur à l'université de Wurzbourg (Bavière).
Drouet, H., naturaliste, à Charleville (France).
Stammer, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).
Erlenmeyer, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).
Lucas, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
1855 Geinitz, H.B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
1859 Marseul (abbé de), entomologiste, à Paris.
Beyrich, professeur à l'université de Berlin.
Marcou, J., géologue, États-Unis.
1860 Du Bois-Reymond, professeur à l'université de Berlin.
Brücke, professeur à l'université de Vienne.
1862 Caspary, professeur de botanique à l'université de Königsberg (Prusse).
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Durieu de Maisonneuve, directeur du Jardin Botanique, à Bordeaux (France).
1865 Zeis, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle, à Dresde.
Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg (France).
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.
1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille (France).
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.
1868 Renard (S. Ex. le chevalier), conseiller d'État, président de la Société impériale des naturalistes de Moscou.
1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.
1870 Trautschold, professeur, à Breslau.

1870 Malaise, C., professeur à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Van Hooren, docteur en sciences, à Tongres.

Müller (baron von), botaniste du gouvernement, à Melbourne (Australie).

Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.

Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).

Worthen, A. H., directeur du *Geological Survey* de l'Illinois (États-Unis).

Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

Glaziou, botaniste, directeur des Jardins impériaux, à Rio de Janeiro.

Ladislaõ Netto, botaniste, directeur du Musée impérial de Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Burmeister, H., directeur du Musée national de Buenos-Ayres.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund (Suède.)

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

Huxley, professeur à l'école des mines, à Londres.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

1875 PACKARD, professeur à l'université de Salem (États-Unis).
FLEMMING, W., professeur à l'université de Kiel.
PLATEAU, F., professeur à l'université de Gand.
RÖMER, F., professeur à l'université de Breslau.
SAPORTA (Gaston marquis DE), correspondant de l'Institut de France, à Aix (France).

1876 BALFOUR, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 MAC LACHLAN, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 HERTWIG, R., professeur à l'université de Munich.
STRASBURGER, professeur à l'université de Bonn.
BRONGNIART, Charles, à Paris.

1879 WETTERBY, professeur à l'université de Cincinnati.
BOLIVAR, I., professeur, à Madrid.
RITSEMA, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
RENARD, Alphonse, professeur à l'université de Gand.

1881 KEY, AXEL, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
RETZIUS, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
MENEGHINI, professeur à l'université de Pise.
TARAMELLI, professeur à l'université de Pavie.
GESTRO, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
SALVADORI (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 HULL, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
SANDBERGER, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.

1884 TRINCHESE, professeur à l'université de Naples.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liège. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeur : P. Mansion, professeur à l'université.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche Geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Paris. — *Société géologique de France.*
Société Philomatique.
Muséum d'histoire naturelle.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Societé des sciences physiques et naturelles.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Istituto tecnico.*
Societa di scienze naturali e economiche.
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*

Rome. — *Bullettino di bibliografia delle scienze matematiche,* publié par le prince B. Boncompagni.
Reale Accademia dei Lincei.
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

Delft. — *École polytechnique.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.
Société impériale de minéralogie.

SUÈDE ET NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Dr H. G. Zeuthen, professeur à l'université.
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schafhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

American Association for advancement of sciences.

Baltimore. — *American Journal of mathematics.*
Johns Hopkins University.

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge. — *Museum of comparative zoology.*

Columbus. — *Ohio State agricultural Society.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

Newport. — *Orleans County Society of natural sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Salem. — *The American Naturalist.*
Essex Institute.
Peabody Academy of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

GUATÉMALA.

Guatémala. — *Sociedad economica.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES

PAR

Eugène-Charles CATALAN,

Ancien élève de l'École polytechnique, Professeur émérite à l'Université de Liège;
Associé de l'Académie de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse
et de la Société des sciences de Lille;
Correspondant des Académies de St-Pétersbourg, de Turin, des *Nuovi Lincei;*
Membre de la Société des sciences de Liège,
de la Société mathématique de France et de la Société philomathique de Paris;
Correspondant de la Société mathématique d'Amsterdam,
de l'Institut national génevois, de la Société havraise d'études diverses
et de la Société d'agriculture de la Marne.

« Ceci est mon testament. »

TOME TROISIÈME.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES.

CCXVI. — Section droite du cylindre circonscrit à un ellipsoïde.

(*Avril* 1884.)

I.
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

étant l'équation de l'ellipsoïde; soient f, g, h, les cosinus directifs de l'axe OL du cylindre. L'équation de cette surface est, comme on sait,

$$P^2 - mQ = 0, \tag{2}$$

en posant :

$$\left.\begin{array}{c} P=\dfrac{fx}{a^2}+\dfrac{gy}{b^2}+\dfrac{hz}{c^2}, \quad Q=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1, \\ m=\dfrac{f^2}{a^2}+\dfrac{g^2}{b^2}+\dfrac{h^2}{c^2}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

D'un autre côté, le plan de la section droite est représenté par

$$fx+gy+hz=0. \tag{4}$$

Par conséquent, les carrés des demi-axes de cette courbe sont le maximum et le minimum de

$$u^2=x^2+y^2+z^2, \tag{5}$$

les variables x, y, z satisfaisant aux conditions (2) et (4).

La règle ordinaire donne

$$xdx + ydy + zdz = 0, \tag{6}$$

$$fdx + gdy + hdz = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{P}f - mx}{a^2}dx + \frac{\mathrm{P}g - my}{b^2}dy + \frac{\mathrm{P}h - mz}{c^2}dz = 0. \tag{8}$$

Par la méthode de Bezout, on déduit, des trois dernières équations :

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda f + \mu\frac{\mathrm{P}f - mx}{a^2} = 0, \\ y + \lambda g + \mu\frac{\mathrm{P}g - my}{b^2} = 0, \\ z + \lambda h + \mu\frac{\mathrm{P}h - mz}{c^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si maintenant on multiplie par x, y, z, et qu'on ajoute les produits, on obtient, à cause des relations (3), (4) :

$$u^2 + \mu\left[\mathrm{P}^2 - m(\mathrm{Q} + 1)\right] = 0;$$

ou, par l'équation (2) :

$$\mu m = u^2. \tag{10}$$

De même, en multipliant par f, g, h :

$$\lambda + \mu\left[\mathrm{P}m - m\mathrm{P}\right] = 0,$$

ou

$$\lambda = 0. \tag{11}$$

Ainsi, les équations (9) peuvent être remplacées par :

$$(u^2 - a^2)x = \mathrm{P}\mu f, \quad (u^2 - b^2)y = \mathrm{P}\mu g, \quad (u^2 - c^2)z = \mathrm{P}\mu h. \tag{12}$$

Il résulte, de celle-ci, l'équation demandée :

$$\frac{f^2}{u^2 - a^2} + \frac{g^2}{u^2 - b^2} + \frac{h^2}{u^2 - c^2} = 0. \tag{13}$$

II. *Suite.* — Menons, par le centre de l'ellipsoïde, un plan perpendiculaire à la droite dont les cosinus directifs seraient f', g', h'. Les carrés des demi-axes de la section vérifient l'égalité

$$\frac{a^2 f'^2}{u'^2 - a^2} + \frac{b^2 g'^2}{u'^2 - b^3} + \frac{c^2 h'^2}{u'^2 - c^2} = 0, \qquad (14)$$

due à *Sedley Taylor* (*).

Ces deux équations auront les mêmes racines, si

$$\frac{f}{af'} = \frac{g}{bg'} = \frac{h}{ch'}. \qquad (15)$$

On conclut, de ces proportions :

$$\frac{f'}{\frac{f}{a}} = \frac{g'}{\frac{g}{b}} = \frac{h'}{\frac{h}{c}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2}}}. \qquad (16)$$

La droite OL', dont les cosinus directifs sont f', g', h', est donc déterminée ; et, en conséquence :

III. Théorèmes. — 1° *Toute section d'un ellipsoïde, par un plan diamétral, est égale à la section droite d'un certain cylindre, circonscrit à l'ellipsoïde.*

2° Réciproquement : *Tout ellipsoïde, inscrit à un cylindre, admet une section diamétrale égale à la section droite du cylindre.*

3° *Si deux ellipsoïdes, concentriques, sont inscrits à un même cylindre, une section diamétrale de l'un est égale à une section diamétrale de l'autre.*

4° Réciproquement : *Si deux ellipsoïdes concentriques n'admettent pas de sections diamétrales égales, ils ne sont pas inscriptibles à un même cylindre.*

IV. *Remarque.* — Soient A', B', C' les projections, sur OL',

(*) *Cours d'Analyse*, p. 461 ; *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 115 ; etc.

des sommets A, B, C de l'ellipsoïde (*). Le point M, dont les coordonnées sont

$$x = \mathrm{OA}' = af', \quad y = \mathrm{OB}' = bg', \quad z = \mathrm{OC}' = ch',$$

appartient à cette surface (**). De plus, il appartient à la droite OL.

Donc *ce point* M *est celui où la droite* OL *perce l'ellipsoïde* (***).

Si M' est le point d'intersection de OL' avec la surface, nous dirons que M, M' sont deux *points correspondants*. Il existe, entre ces deux points, une relation simple.

V. Théorème. — *Le centre* O *est également distant du point* M' *et du plan tangent en* M.

Prenons, avec les formules (16), les équations

$$x = uf, \quad y = ug, \quad z = uh; \tag{17}$$

$$x' = u'f', \quad y' = u'g', \quad z' = u'h'; \tag{18}$$

puis la formule connue :

$$\frac{1}{\Delta^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

ou

$$\frac{1}{\Delta^2} = u^2\left(\frac{f^2}{a^4} + \frac{g^2}{b^4} + \frac{h^2}{c^4}\right). \tag{19}$$

Il est visible que

$$u^2 = \frac{1}{\dfrac{f^2}{a^2} + \dfrac{g^2}{b^2} + \dfrac{h^2}{c^2}}, \quad u'^2 = \frac{1}{\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{g'^2}{b^2} + \dfrac{h'^2}{c^2}}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) A cause de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1.$$

(***) Nous prenons, dans la figure, la partie située au-dessus du plan xOy.

Donc

$$\Delta^2 = \frac{\dfrac{f^2}{a^2} + \dfrac{g^2}{b^2} + \dfrac{h^2}{c^2}}{\dfrac{f^2}{a^4} + \dfrac{g^2}{b^4} + \dfrac{h^2}{c^4}};$$

ou, enfin, par les proportions (15) :

$$\Delta^2 = \frac{f'^2 + g'^2 + h'^2}{\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{g'^2}{b^2} + \dfrac{h'^2}{c^2}} = u'^2. \qquad (20)$$

C. Q. F. D.

VI. *Cylindre de révolution.* — Si la section diamétrale de l'ellipsoïde est *circulaire,* la section droite du cylindre circonscrit l'est également : celui-ci est un *cylindre de révolution.* Par la théorie connue (*), on trouve :

$$f = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad g = 0, \quad h = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - c^2}}; \qquad (21)$$

puis, au moyen des formules (16) :

$$f' = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad g' = 0, \quad h' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}. \qquad (22)$$

Par conséquent :

A un ellipsoïde donné, on peut toujours circonscrire un cylindre de révolution (**);

ou, en d'autres termes :

Étant donné un ellipsoïde éclairé par des rayons parallèles, on peut toujours le placer de manière que son ombre, sur un plan perpendiculaire aux rayons, soit un cercle.

(*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée,* de Leroy (p. 165).

(**) Plus exactement, *deux cylindres.*

VII. *Remarque.* — Quand un cylindre de révolution est circonscrit à l'ellipsoïde, il est circonscrit à la sphère concentrique à celui-ci, et dont le rayon serait b. L'ellipse suivant laquelle le cylindre touche l'ellipsoïde est, relativement à cette surface, une *ligne de courbure constante*; et, en outre, une variété de la courbe appelée *polhodie* (*).

CCXVII. — Sur deux théorèmes de M. Laguerre (**).

(*Août* 1884.)

I. Premier théorème. — *On peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe : cette tangente, et les tangentes aux points d'osculation, touchent un même cercle.*

I. Rapportons la courbe à la tangente Cx et à la normale CA (***).

L'équation sera

$$(y - ax)^2 - 2by = 0 \text{ (iv)}. \tag{1}$$

Il en résulte :

$$(y - ax)(y' - a) - by' = 0, \tag{2}$$

$$(y' - a)^2 + (y - ax - b)y'' = 0. \tag{3}$$

Le cercle osculateur en M, qui touche Cx, est représenté par

$$y^2 - 2\rho y + (x - \alpha)^2 = 0; \tag{4}$$

d'où

$$(y - \rho)y' + x - \alpha = 0, \quad (y - \rho)y'' + y'^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

(*) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, p. 34.

(**) Savant Géomètre, plein d'originalité, dont on déplore la perte récente. Je l'ai eu pour élève, au Lycée Saint-Louis, en 1851. (Nov. 1886.)

(***) Le lecteur est prié de faire la figure.

(iv) a est le coefficient angulaire des diamètres; $2b =$ *corde* CA.

Des équations (2), (3), on tire

$$y - ax = \frac{by'}{y' - a} = b - \frac{(y' - a)^2}{y''}.$$

Ainsi

$$(y' - a)^3 + aby'' = 0, \quad y'' = -\frac{(y' - a)^3}{ab}. \tag{6}$$

La première valeur de $y - ax$, substituée dans l'équation (1), donne

$$by'^2 - 2y(y' - a)^2 = 0;$$

puis

$$y = \frac{1}{2} \frac{by'^2}{(y' - a)^2}. \tag{7}$$

L'élimination de $x - \alpha$ et de ρ, entre les équations (4), (5), conduit à

$$y^2 + 2\frac{1 + y'^2}{y''} y - \frac{(1 + y'^2)^2 y'^2}{y''^2} = 0. \tag{8}$$

Donc, par substitution des valeurs (6), (7) :

$$y'^2(y' - a)^2 - 4a(1 + y'^2)(y' - a) - 4a^2(1 + y'^2)^2 = 0;$$

ou, après suppression du facteur y' (*) :

$$y'(y' - a)^2 - 4a(1 + y'^2)(1 + ay') = 0. \tag{9}$$

On simplifie cette équation en posant

$$\frac{y' - a}{1 + ay'} = t \text{ (**)},$$

puis $t - a = s$. On trouve ainsi ;

$$s^3 - 3a^2 s - 2a(2 + a^2) = 0. \tag{10}$$

(*) $y' = 0$ répond à la tangente Cx.

(**) t est la tangente de l'angle que fait MT, tangente à la parabole, avec les diamètres.

Cette équation a *une seule racine réelle*; donc, des trois cercles considérés, *deux sont imaginaires* (*).

II. Second théorème (**). — *Les projections* MP, M'P' *de deux normales* MN, M'N' *à une ellipse, sur la corde* MM', *sont égales entre elles* (***).

Nous supprimons la démonstration, très facile (IV); mais nous énoncerons les propriétés suivantes, conséquences du théorème :

1° *Dans l'ellipse, la projection d'une normale* MN, *sur le demi-diamètre* OM, *a pour expression* $\frac{b^2}{a'}$; a' *désignant ce demi-diamètre;*

2° *Dans l'ellipse, deux cordes parallèles sont entre elles comme les projections, sur ces droites, des intervalles compris entre les pieds des normales correspondantes.*

(*) Nous ne poussons pas plus loin cet *exercice de calcul.* Dans la démonstration donnée par M. Brisse, on lit :

« l'équation

$$y^3 + \frac{3}{4}p^2y + \frac{p^3}{4m} = 0$$

» *dont les racines sont imaginaires.* Il y a donc trois cercles *osculateurs* » *imaginaires d'une parabole,* qui touchent une tangente à cette courbe ». (*N. A.*, 1884, p. 390).

Étonné d'une pareille conclusion, deux fois énoncée, j'écrivis à l'Auteur : « relisez donc la page 390 ». M. B. se contenta de me répondre à peu près ceci : « *je n'écris pas pour les savants; j'écris pour les élèves* ». Ultérieurement, la correction a été faite.

(**) Cité et démontré par *un ancien Élève de Mathématiques spéciales.* (*N. A.*, même tome, pp. 453 et 458). Tout le monde sait que ce pseudonyme désigne un savant Professeur à l'École polytechnique. En 1848, alors qu'il suivait mon cours, au Lycée Charlemagne, il se fût dit : Élève de Mathématiques *supérieures. En ce temps là,* on avait renoncé à la ridicule dénomination de *Mathématiques spéciales,* si justement critiquée par Gergonne.

(***) Le lecteur est prié de faire la figure. (Les points N, N' appartiennent au grand axe.)

(IV) Par l'emploi des coordonnées, elle est *plus courte* que celle que nous venons de mentionner.

CCXVIII. — Remarques sur un théorème de Fermat.

(*Juin* 1884.)

I. Ce théorème, l'un des plus importants de la théorie des Nombres, a été démontré (de la même manière) par Lagrange et Legendre (*). Habituellement, on l'énonce ainsi :

Tout diviseur d'une somme de deux carrés, premiers entre eux, est également une somme de deux carrés, premiers entre eux (**).

Mais ces grands Géomètres, et leurs successeurs, ont négligé de faire observer que *le diviseur* dont il s'agit *peut être la somme de deux carrés fractionnaires* (***).

Par exemple,

$$9^2 + 2^2 = 5 \times 17, \qquad \text{et} \qquad 17 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2.$$

II. De la double identité *classique* :

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha \pm b\beta)^2 + (a\beta \mp b\alpha)^2, \tag{1}$$

on conclut

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (a\alpha^2 \pm 2b\alpha\beta - a\beta^2)^2 + (b\alpha^2 \mp 2a\alpha\beta - b\beta^2)^2,$$

ou

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{a\alpha^2 \pm 2b\alpha\beta - a\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{b\alpha^2 \mp 2a\alpha\beta - b\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2. \tag{2}$$

En général, les fractions entre parenthèses ne sont pas réductibles à des nombres entiers (IV). Conséquemment :

(*) *OEuvres de Lagrange* (publiées par Serret), t. III, p. 211; *Théorie des Nombres*, de Legendre, t. I, p. 205.

(**) Legendre dit, à l'endroit cité : « *tout diviseur de la formule* $t^2 + u^2$... » Je ne pense pas que $t^2 + u^2$ soit *une formule*.

(***) Très probablement, l'omission a été volontaire; la décomposition en deux carrés entiers étant seule efficace.

(IV) α, β sont des entiers *arbitraires*, positifs ou négatifs.

La somme des carrés de deux nombres entiers est décomposable, d'une infinité de manières, en deux carrés fractionnaires.

En particulier :

Tout nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, *est, d'une infinité de manières, égal à la somme de deux carrés fractionnaires.*

Par exemple,

$$5 = 2^2 + 1 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2 = \left(\frac{2}{13}\right)^2 + \left(\frac{29}{13}\right)^2$$

$$= \left(\frac{38}{17}\right)^2 + \left(\frac{1}{17}\right)^2 = \left(\frac{22}{17}\right)^2 + \left(\frac{31}{17}\right)^2; \quad \text{etc.}$$

III. A, B étant deux nombres entiers, premiers entre eux; soient a, b deux nombres entiers, premiers entre eux, et tels, que $a^2 + b^2$ divise $A^2 + B^2$. D'après le théorème de Fermat, *la fraction*

$$\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2},$$

doit être réductible à la forme $a'^2 + b'^2$; a', b' *étant deux nombres entiers, premiers entre eux.* Or, si l'on applique l'identité (1), on trouve

$$a' = \frac{Aa \pm Bb}{a^2 + b^2}, \quad b' = \frac{Ab \mp Ba}{a^2 + b^2};$$

et, par conséquent :

$$\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2} = \left(\frac{Aa \pm Bb}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{Ab \mp Ba}{a^2 + b^2}\right)^2 (^*). \qquad (3)$$

Ainsi, où l'on devrait rencontrer *deux carrés entiers,* on trouve *deux carrés fractionnaires.*

(*) J'ignore s'il existe quelque formule qui donne, sous *forme entière,* la valeur du premier membre.

IV. D'après la *Note* CXCVI, *si*

$$N = (a^2 + c^2)^2 f^2 - 2\left[(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2 b^2\right] fg + (b^2 + c^2)^2 g^2, \quad (4)$$

on a

$$\left.\begin{array}{l}(a^2 + c^2)^2 N = \left\{[(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2 b^2] g - (a^2 + c^2)^2 f\right\}^2 \\ \qquad + 4a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) g^2\end{array}\right\} \quad (5)$$

Supposons que $a^2 + b^2 + c^2$ soit un carré m^2. Alors

$$(a^2 + c^2)^2 N = \left\{(m^2 c^2 - a^2 b^2) g - (a^2 + c^2) f\right\}^2 + 4a^2 b^2 c^2 m^2 g^2$$

est une somme de deux carrés. Donc, en vertu du théorème, N *est,* pareillement, *une somme de deux carrés entiers* (*). Mais l'application de la formule (5) donne deux *carrés fractionnaires* (**).

Soient, par exemple,

$$a^2 = 4, \quad b^2 = 4, \quad c^2 = 1, \quad m^2 = 9, \quad f = 2, \quad g = 3;$$

d'où

$$25\,N = 71^2 + 72^2;$$

puis

$$N = \left(\frac{68}{25}\right)^2 + \left(\frac{501}{25}\right)^2.$$

D'autre part, au moyen de la formule (4) :

$$N = 409 = 20^2 + 3^2 \ (^{**}).$$

V. La formule (4) étant écrite ainsi :

$$N = \left[(a^2 + c^2) f - (b^2 + c^2) g\right]^2 + 4a^2 c^2 fg, \quad (6)$$

on voit que N *est une somme de deux carrés, si* fg *est un carré* (***).

(*) Au moins si les deux parties du second membre sont premières entre elles.

(**) Cette sorte de paradoxe a été l'occasion de la présente Note.

(***) Complément à la *Note* CXCVI.

CCXIX. — Sur une formule attribuée à M. Hermite.

(*Août* 1884.)

I. Dans le *Bulletin de Darboux* (*), on lit, à propos d'une Note de *M. Stieljes :*

« En faisant usage de la relation suivante :

$$q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots = (1 + 2q + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)$$
$$\times\left[\frac{9}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \cdots\right],$$

» qui lui a été communiquée par M. Hermite, l'auteur.... »

Corrigeant la faute typographique, et changeant q en $-q$, on trouve

$$\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} = \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \cdots \quad \text{(A)}$$

Il semblerait donc, d'après M. Stieljes, que cette formule est due à M. Hermite. Or, il n'en est rien (**).

II. *Remarques.* — D'après Jacobi (***), l'égalité (A) peut être remplacée par celle-ci :

$$\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} = \frac{q}{1-q^2} + 2\frac{q^2}{1-q^4} + 3\frac{q^3}{1-q^6} + \cdots; \quad \text{(B)}$$

laquelle est plus simple (IV).

(*) Juillet 1884, p. 105.

(**) Voir, par exemple, mes *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* (pp. 57, 58 ; 1883). Voir aussi les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (p. 92).

(***) *Recherches...*, p. 93.

(IV) On peut voir, dans les *Notes sur la théorie...*, les propriétés qui en résultent.

CCXX. — Courbes ayant même longueur qu'une ellipse donnée.

(*Janvier* 1885.)

I. Soit une ellipse E, tracée sur un cylindre vertical, et représentée par les équations

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad \frac{z}{y} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Soit, en second lieu, une courbe C, à double courbure, ayant pour équations

$$x'^2 + y'^2 = R'^2, \quad x'y' = az'. \tag{2}$$

On peut disposer du rayon R′ et du paramètre a, de manière que, dans les développements des deux cylindres projetants, la transformée E′ de E, et la transformée C′ de C, soient égales. S'il en est ainsi, un arc quelconque de C, et l'arc correspondant de E, auront même longueur.

On satisfait aux équations (1), en prenant

$$x = R\cos\omega, \quad y = R\sin\omega, \quad z = R\operatorname{tg}\alpha\sin\omega. \tag{3}$$

De même :

$$x' = R'\cos\omega', \quad y' = R'\sin\omega', \quad z' = \frac{R'^2}{a}\sin\omega'\cos\omega'. \tag{4}$$

La condition d'égalité, entre les *transformées* E′, C′, donne les relations :

$$R\omega = R'\omega', \quad z = z'; \tag{5}$$

lesquelles sont vérifiées par

$$\omega' = \frac{1}{2}\omega, \quad R' = 2R, \quad a = 2R\cot\alpha.$$

Les équations de la courbe C sont donc :

$$x' = 2R\cos\frac{\omega}{2}, \quad y' = 2R\sin\frac{\omega}{2}, \quad z' = R\operatorname{tg}\alpha\sin\omega. \tag{6}$$

II. *Vérification.* — On a :

$$dx = -\mathrm{R}\sin\omega d\omega, \quad dy = \mathrm{R}\cos\omega d\omega, \quad dz = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\omega d\omega;$$

$$dx' = -\mathrm{R}\sin\frac{\omega}{2}d\omega, \quad dy' = \mathrm{R}\cos\frac{\omega}{2}d\omega, \quad dz' = dz.$$

Par conséquent, s et s' étant les arcs correspondants :

$$ds^2 = \mathrm{R}^2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\omega)\,d\omega^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{\cos^2\alpha}(1 - \sin^2\alpha\sin^2\omega)\,d\omega^2,$$

$$ds'^2 = ds^2;$$

puis

$$s' = s = \frac{\mathrm{R}}{\cos\alpha}\int_0^{\omega} d\omega\sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\omega}. \tag{7}$$

III. *Remarque.* — Le *module* de l'intégrale elliptique est le sinus de l'angle formé par le plan de l'ellipse avec le plan de la *section droite.*

Addition. — (*Novembre* 1884.)

IV. Au lieu des équations (6), prenons, plus généralement :

$$x' = \mathrm{R}n\cos\frac{\omega}{n}, \quad y' = \mathrm{R}n\sin\frac{\omega}{n}, \tag{8}$$

$$z' = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\omega. \tag{9}$$

Il en résulte

$$x'^2 + y'^2 = n^2\mathrm{R}^2; \tag{10}$$

puis, par la formule de Moivre,

$$\left(x' + y'\sqrt{-1}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{-1}\right)^n = 2n^n\mathrm{R}^{n-1}z'\sqrt{-1}\cot\alpha. \tag{11}$$

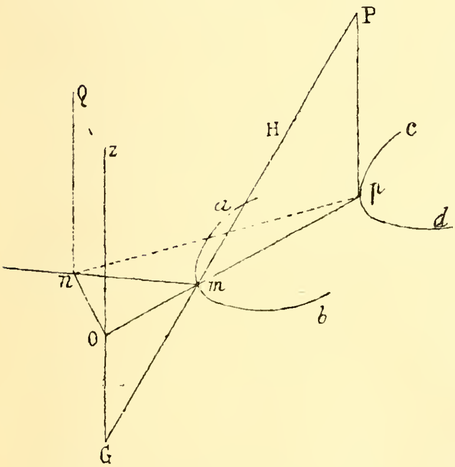
Ainsi, la courbe C, intersection d'un cylindre de révolution avec une certaine surface algébrique S, a même longueur que l'ellipse E.

V. *Remarque.* -- La surface S, représentée par l'équation (11), est *rencontrée, en un seul point, par toute parallèle à l'axe* Oz'. De plus, si l'on adopte, comme coordonnées, z' et ω, elle est déterminée par l'équation (9). Cette surface est donc un *conoïde droit,* dont une génératrice quelconque a pour équations :

$$\frac{y'}{x'}=\operatorname{tg}\frac{\omega}{n},\quad z'=\mathrm{R}\operatorname{tg}\alpha\sin\omega\ (^*). \tag{12}$$

CCXXI. — Sur une classe de surfaces gauches.

(*Novembre* 1886.)



I. *Génération.* — Soient une courbe *amb*, située dans un plan horizontal (**), et une directrice verticale GOz. Si une droite GmH s'appuie sur ces deux directrices, en faisant, avec la seconde, un angle constant (***), cette droite mobile engendre une *surface gauche* Σ (IV).

II. *Ligne de striction.* — C'est la directrice rectiligne (V).

III. *Courbes de niveau.* — Soit p la projection horizontale

(*) Ces résultats, peu importants peut-être, sont beaucoup plus simples que ceux qui ont été trouvés, par Legendre et Serret, relativement à l'intégrale elliptique de première espèce.

(**) Pour fixer les idées.

(***) Nous le supposons égal à 45°, afin d'obtenir des résultats simples.

(IV) *Toute surface réglée, qui admet une directrice rectiligne, est gauche.* (*Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* 1864, seconde partie, p. 72).

(V) *Recherches sur les surfaces gauches,* p. 22.

d'un point P de Σ. A cause de l'hypothèse sur l'angle zGP, les triangles GOm, Ppm, évidemment semblables, sont isoscèles : $mp =$ Pp. Pour une *ligne de niveau*, l'ordonnée Pp est constante; donc $mp = z =$ *const.* Autrement dit : *toutes les lignes de niveau, de la surface* Σ, *se projettent, sur le plan de l'une d'elles, suivant des conchoïdes de celle-ci, relativement au pôle* O (*).

IV. *Équation de la surface.* — Si la directrice *amb* est représentée par $u = af(\omega)$, il est clair que l'équation de Σ est

$$u = af(\omega) + z. \tag{1}$$

V. *Normale.* — La normale à Σ, au point P, étant normale à la ligne de niveau qui passe en P, se projette, horizontalement, suivant la normale, en p, à la conchoïde *cpd*. D'après une propriété connue, cette normale pn passe en un point fixe n, situé sur la perpendiculaire à Omp, menée par le pôle. Donc *les normales à la surface* Σ, *en tous les points d'une même génératrice, rencontrent une droite fixe* nQ, *parallèle à la directrice* Oz.

VI. *Paraboloïde normal.* — Chacune des normales considérées rencontre GH et nQ. En outre, elle est contenue dans un plan perpendiculaire à GH. Conséquemment, le *lieu de ces droites est un paraboloïde hyperbolique*, conformément à un théorème connu.

Addition. — (*Novembre* 1886.)

VII. *Lignes de plus grande pente.* — Elles se projettent, sur le plan horizontal, suivant les trajectoires orthogonales de la directrice *amb* et de ses conchoïdes. D'après la formule (1), dans laquelle z doit être considéré comme un paramètre, l'équation différentielle des conchoïdes est

$$u' = af'(\omega).$$

(*) Quand la directrice *amb* est *rectiligne*, la surface, nommée *hyperboloïde conchoïdal*, est fort intéressante. Le modèle en a été construit par *Bardin* et par M. *Muret*. De plus, au mois de juin 1870, M. *Welsch*, alors *élève à l'École polytechnique*, a publié, sur cette même surface, une étude et une *épure* fort bien faites. J'ignore ce qu'est devenu ce jeune Géomètre.

Une simple considération géométrique, combinée avec le théorème rappelé dans le paragraphe V, donne

$$u\frac{d\omega}{du} = -a\frac{f'(\omega)}{u};$$

ou, par la séparation des variables,

$$a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{k}\right) = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{f'(\omega)}, \tag{2}$$

k étant la constante arbitraire. Telle est l'équation qui était demandée.

VIII. *Application.* — Dans le cas de l'*hyperboloïde conchoïdal*, l'équation (1) est

$$u = \frac{a}{\sin\omega} + z \text{ (*)};$$

et l'équation (2) :

$$a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{k}\right) = -\int_0^{\omega} \frac{\sin^2\omega d\omega}{\cos\omega},$$

ou

$$a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{k}\right) = \sin\omega - \mathcal{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{3}$$

On voit que la constante k est le rayon vecteur répondant à $\omega = 0$.

IX. *Remarques.* — 1° D'après l'équation (2), *le problème des trajectoires orthogonales d'une série de conchoïdes est toujours résoluble* (**).

2° Si, dans l'équation (2), on pose :

$$u = \frac{a^2}{v}, \quad k = \frac{a^2}{l}, \quad \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{f'(\omega)} = \mathrm{F}(\omega), \tag{4}$$

elle devient

$$v = a\mathrm{F}(\omega) + l; \tag{5}$$

(*) Nous prenons l'axe polaire parallèle à la directrice, afin que l'intégrale (2) s'annule avec ω.

(**) En ce sens qu'il est *ramené aux quadratures.*

et celle-ci, de même forme que la proposée (1), représente une nouvelle série de conchoïdes. Conséquemment : *les réciproques* R, R′, R″, ... (ou les inverses) (*) *des trajectoires orthogonales* T, T′, T″, ... *d'une série de conchoïdes* C, C′, C″, ..., *forment une nouvelle série de conchoïdes.*

3° Ce n'est pas tout. Comme les réciproques de deux courbes orthogonales sont orthogonales (**), si nous prenons les réciproques D, D′, D″, ..., des conchoïdes C, C′, C″, ..., ces lignes D, D′, D″, ..., constitueront, avec R, R′, R″, ..., un *système orthogonal.* Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Soient des conchoïdes* C, C′ C″, ..., *leurs réciproques* D, D′, D″, ..., *et les trajectoires orthogonales* T, T′, T″, ... *de* D, D′, D″, ... *Les réciproques* R, R′, R″, ..., *de* T, T′, T″, ..., *sont des conchoïdes, orthogonales aux réciproques* D, D′, D″.

X. *Application.* — Si les courbes C sont les *limaçons de Pascal,* représentés par

$$u = a \sin \omega + z,$$

auquel cas les réciproques D ont pour équation :

$$u = \frac{a^2}{a \sin \omega + z} \ (^{***});$$

alors les trajectoires orthogonales T et leurs réciproques R sont déterminées par les formules :

$$a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{k}\right) = \mathcal{L} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$v = a\mathcal{L} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + l \ (^{\text{IV}}).$$

(*) La relation $uv = a^2$ est celle qui définit deux lignes réciproques.

(**) Propriété connue.

(***) Évidemment, ces réciproques sont des coniques dont l'un des foyers est au pôle.

(IV) Si l'on suppose $l = 0$, on peut écrire ainsi la dernière équation :

$$\text{séc}\, \omega = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{v}{a}} + e^{-\frac{v}{a}}\right).$$

Les conchoïdes R sont donc des *spirales-chaînettes* (?).

CCXXII. — Sur la fonction numérique $\varphi(n)$ (*).

(*Août* 1882.)

I. Problème. — *Δ étant un diviseur quelconque du nombre entier* N, *évaluer* $\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$.

Soit, pour fixer les idées, $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Les valeurs de Δ sont :

$$1, a, a^2, \ldots, a^\alpha, \quad b, b^2, \ldots, b^\beta, \quad c, c^2, \ldots, c^\gamma, \quad ab, a^2b, \ldots, \quad N;$$

et les valeurs de $\varphi(\Delta)$:

$$1;\ a-1,\ a(a-1), \ldots,\ \alpha^{\alpha-1}(a-1),\quad b-1,\ b(b-1), \ldots,\ b^{\beta-1}(b-1),$$
$$c-1,\ c(c-1), \ldots,\ c^{\gamma-1}(c-1);$$
$$(a-1)(b-1),\ a(a-1)(b-1), \ldots,\ b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(b-1)(c-1);$$
$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)(c-1).$$

Donc

$$\sum\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = 1 + \frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{a} + \cdots + \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b} + \cdots + \frac{b-1}{b}$$
$$+ \frac{c-1}{c} + \frac{c-1}{c} + \cdots + \frac{c-1}{c} + \frac{(a-1)(b-1)}{ab} + \cdots$$
$$+ \frac{(a-1)(b-1}{ab} + \cdots + \frac{(a-1)(b-1)}{ab} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}.$$

Dans le second membre, il y a α fois la fraction $\frac{a-1}{a}$, β fois la fraction $\frac{b-1}{b}$, γ fois la fraction $\frac{c-1}{c}$, $\alpha\beta$ fois la fraction $\frac{(a-1)(b-1)}{ab}$; etc. Ainsi l'égalité se réduit à

$$\sum\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = 1 + \frac{\alpha(a-1)}{a} + \frac{\beta(b-1)}{b} + \frac{\gamma(c-1)}{c} + \frac{\alpha\beta(a-1)(b-1)}{ab} + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha\beta\gamma(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}; \qquad (1)$$

(*) Au sujet de cette fonction, déterminée par Euler, on peut consulter le *Journal de Liouville*, t. IV, p. 7.

puis enfin, à

$$\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = \left[1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\right]\left[1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\right]\left[1 + \frac{\gamma(c-1)}{c}\right].$$

La formule cherchée est donc

$$\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = \left[1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\right]\left[1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\right]\left[1 + \frac{\gamma(c-1)}{c}\right]\cdots \quad \text{(A)}$$

II. *Remarque.* — Cette formule, peu élégante, se simplifie quand $N = a^a b^b c^c d^d\,..$ Dans ce cas.

$$\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = abcd.. \quad \text{(B)}$$

Addition. — (*Janvier* 1887.)

III. Problème. — *Évaluer* $\sum \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)}$.

De l'égalité (A), on conclut, sans nouveau calcul :

$$\sum \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)} = \left[1 + \alpha\frac{a}{a-1}\right]\left[1 + \beta\frac{b}{b-1}\right]\left[1 + \gamma\frac{c}{c-1}\right]\cdots; \quad \text{(C)}$$

et, si

$$\alpha = a-1, \quad \beta = b-1, \quad \gamma = c-1, \ldots :$$

$$\sum \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)} = (1+a)(1+b)(1+c)\ldots \quad \text{(D)}$$

IV. Théorème. — *Si* N = abcd ..., *on a*

$$\sum \frac{1}{\varphi(\Delta)} = \frac{N}{\varphi(N)}. \quad \text{(E)}$$

En effet, le premier membre est

$$1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \cdots + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} + \cdots,$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1+\frac{1}{b-1}\right)\left(1+\frac{1}{c-1}\right)\cdots=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\frac{c}{c-1}\cdots,$$

c'est-à-dire $\frac{\mathrm{N}}{\varphi(\mathrm{N})}\cdot$

V. *Remarque.* — Dans le cas général, on trouve ce résultat compliqué :

$$\sum\frac{\Delta}{\varphi(\Delta)}=\left[1+\frac{a^\alpha-1}{(a-1)^2a^{\alpha-1}}\right]\left[1+\frac{b^\beta-1}{(b-1)^2b^{\beta-1}}\right]\left[1+\frac{c^\gamma-1}{(c-1)^2c^{\gamma-1}}\right]\cdots \quad \text{(F)}$$

CCXXIII. — Équivalences de séries.

(*Septembre* 1882.)

I. Théorème. — x *étant égal ou supérieur à l'unité, les séries*

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots,$$

$$\frac{2}{2x+1}+\frac{2}{3(3x+1)^3}+\frac{2}{5(2x+1)^5}+\cdots,$$

ont même limite.

En effet, la première est le développement de

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\mathcal{L}\left(\frac{x}{x+1}\right);$$

et la seconde, celui de

$$\mathcal{L}\frac{1+\dfrac{1}{2x+1}}{1-\dfrac{1}{2x+1}}=\mathcal{L}\frac{x}{x+1}\cdot$$

II. Si, après avoir multiplié par dx, on intègre à partir de $x = 1$, l'on a donc

$$\ell . x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2.3x^2} + \frac{1}{3.4x^3} - \frac{1}{4.5x^4} + \cdots$$

$$= \ell (2x+1) - \left[\frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{4.5(2x+1)^4} + \frac{1}{6.7(2x+1)^6} + \cdots\right] + \mathrm{C}.$$

Pour $x = +\infty$, cette égalité se réduit à

$$0 = \ell . 2 + \mathrm{C}.$$

Ainsi,

$$\left.\begin{aligned} \ell \frac{2x+1}{2x} &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2.3x^2} + \frac{1}{3.4x^3} - \frac{1}{4.5x^4} + \cdots \\ &+ \frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{4.5(2x+1)^4} + \frac{1}{6.7(2x+1)^6} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

III. Le développement du premier membre est

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(2x)^2} + \frac{1}{3(2x)^3} - \frac{1}{4(2x)^4} + \cdots$$

Ainsi encore, au moyen d'une réduction visible :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{4.5(2x+1)^4} + \frac{1}{6.7(2x+1)^6} + \cdots \\ &= \frac{1}{2.3.4}\frac{1}{x^2} - \frac{4}{3.4.8}\frac{1}{x^3} + \frac{11}{4.5.16}\frac{1}{x^4} - \frac{26}{5.6.32}\frac{1}{x^5} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Addition. — (*Janvier* 1887.)

IV. Dans l'égalité (2), changeons x en $\frac{1}{x}$; elle devient, après suppression du facteur x^2 :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2.3(2+x)^2} + \frac{x^2}{4.5(2+x)^4} + \frac{x^4}{6.7(2+x)^6} + \cdots \\ &= \frac{1}{2.3.4} - \frac{4x}{3.4.8} + \frac{11x^2}{4.5.16} - \frac{26x^3}{5.6.32} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Évidemment, la première série est convergente pour *toute valeur positive* de x; mais la seconde est divergente dès que x surpasse 1 (*). Ainsi, l'égalité (3), vraie quand x est compris entre *zéro* et *un* (inclusivement), devient *absurde* pour $x > 1$.

Ce n'est pas tout. Si l'on désigne par S le premier membre, un calcul facile donne, en vertu de ce qui précède,

$$S = \frac{1}{x^2}\left\{ \mathcal{L}\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{1}{x} + 1\right)\mathcal{L}(1 + x) + 1 \right\}. \qquad (4)$$

Par exemple, si $x = 2$:

$$S = \frac{1}{4}\left\{ \mathcal{L}\,2 - \frac{3}{2}\mathcal{L}\,3 + 1 \right\} = 0{,}011\,307\ldots$$

En effet, la somme des trois premiers termes de la série est

$$\frac{1}{96} + \frac{1}{1260} + \frac{1}{10\,752} = 0{,}010\,417 + 0{,}000\,792 + 0{,}000\,093 = 0{,}011\,302.$$

Quant au second membre de l'égalité (3), il devient, pour $x = 2$:

$$\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4} + \frac{11}{4.5.4} - \frac{26}{5.6.4} + \cdots;$$

et cette série est divergente.

V. D'après tout cela, on est conduit à la proposition suivante : *Supposons que, pour les valeurs de* x *comprises entre zéro et un* (**), *on ait :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (A)$$

Soit $z = \varphi(x)$; *et, par suite,*

$$f(x) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (B)$$

(*) Le terme général est

$$u_n = \frac{2^{n+1} - n - 2}{(n+1)(n+2)2^{n+1}}\, x^{n-1}.$$

(**) Afin de fixer les idées.

Si la fonction φ *a été convenablement choisie, il peut arriver que la seconde série reste convergente* (*), *pour des valeurs de* x *supérieures à l'unité; et alors l'égalité*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots, \tag{C}$$

vraie pour x *compris entre* 0 *et* 1, *devient absurde pour* x > 1.

CCXXIV. — Quelques intégrales définies (**).

(*Septembre* 1886.)

I. Soient :

$$A = \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{2\pi x} - 1}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})^2, \tag{1}$$

$$B = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x}xdx}{e^{2\pi x} - 1}, \tag{2}$$

$$C = \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha x}xdx}{e^{2\pi x} - 1}, \tag{3}$$

$$D = \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{2\pi x} - 1} \text{ (***)}. \tag{4}$$

Il est clair que A = B + C — 2D. D'ailleurs, par la formule de Plana (iv),

$$D = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{24}.$$

Donc

$$A = B + C - \frac{1}{12}. \tag{5}$$

(*) Bien entendu, on la suppose convergente quand x est compris entre 0 et 1.

(**) Complément des *Notes* LIII, XCIII, CXXXVIII et CXCII. Dans celle-ci, au lieu de tdt, on a imprimé $t4$ [formule (A)].

(***) On doit avoir $\alpha^2 < \pi^2$, sans quoi ces intégrales ne seraient pas, toutes, *finies*.

(iv) *Note* XXXIII (t. I, p. 95).

II. L'intégrale B, développée en série, devient

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_0^\infty e^{2\alpha x}x\,dx\,e^{-2k\pi x}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_0^\infty e^{-2(k\pi-\alpha)x}x\,dx.$$

Soit

$$2(k\pi-\alpha)x=t,$$

d'où

$$x\,dx=\frac{t\,dt}{4(k\pi-\alpha)^2}.$$

On a donc

$$B=\frac{1}{4}\sum_1^\infty\frac{1}{(k\pi-\alpha)^2}\int_0^\infty e^{-t}t\,dt,$$

ou

$$B=\frac{1}{4}\sum_1^\infty\frac{1}{(k\pi-\alpha)^2}; \tag{6}$$

puis, par le changement de α en $-\alpha$,

$$C=\frac{1}{4}\sum_1^\infty\frac{1}{(k\pi+\alpha)^2}. \tag{7}$$

III. Si l'on fait $\alpha=a\pi(a<1)$, l'égalité (5) devient

$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}(e^{a\pi x}-e^{-a\pi x})^2=\frac{1}{4\pi^2}\left[\sum_1^\infty\frac{1}{(k-a)^2}+\sum_1^\infty\frac{1}{(k+a)^2}\right]-\frac{1}{12}. \tag{A}$$

Il resterait à évaluer les deux sommes :

$$\frac{1}{(1-a)^2}+\frac{1}{(2-a)^2}+\frac{1}{(3-a)^2}+\cdots,$$

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(2+a)^2}+\frac{1}{(3+a)^2}+\cdots\ (^*).$$

IV. Si $a=\frac{1}{2}$, la première série devient

$$\frac{4}{1^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{2};$$

(*) Dans l'état actuel de l'Analyse, ce problème n'est peut-être pas résoluble. Voir la *Note* CXCII.

la seconde :

$$\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{2}-4.$$

Par conséquent :

$$B=\int_0^\infty \frac{xdx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}=\frac{1}{8}, \tag{B}$$

$$C=\int_0^\infty \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}e^{-\pi x}=\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}, \tag{C}$$

$$A=\int_0^\infty \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}\left(e^{\frac{\pi}{2}x}-e^{-\frac{\pi}{2}x}\right)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\,(^*). \tag{D}$$

Addition. — (*Novembre* 1886.)

V. *Relation entre deux intégrales.* — On sait que

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\cdots=\frac{1}{2a}+2\int_0^\infty \frac{xdx}{(a^2+x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}\,(^{**}). \tag{8}$$

D'un autre côté, dans les *Recherches sur la constante* G, nous avons démontré la formule

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\cdots=2\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2(a-1)x}\left[e^{2x}+1\right]}. \tag{9}$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2(a-1)x}\left[e^{2x}+1\right]}-\int_0^\infty \frac{xdx}{(a^2+x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}=\frac{1}{4a}. \tag{E}$$

(*) Dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, je n'ai trouvé aucune de ces trois intégrales. Cependant, il n'est pas probable qu'elles soient *nouvelles*. La première résulte, si l'on veut, du développement de $\frac{1}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$.

(**) Tome II, page 327.

VI. *Remarques.* — 1° Si $a = 1$, cette égalité se réduit à celle-ci, dont la vérification est facile :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1} - \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})} = \frac{1}{4}.$$

En effet, les valeurs de ces intégrales sont, respectivement : $\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}\,2$, $\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}\,2 - \frac{1}{4}$ (*).

2° De même, lorsque $a = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} - 4\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+4x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})} = \frac{1}{2}.$$

La première intégrale a pour valeur $\frac{\pi}{4}$ (**). Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+4x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})} = \frac{1}{16}(\pi - 2). \tag{10}$$

Cette formule est comprise dans celle d'Abel (***).

(*) *Bierens de Haan,* T. 38 et 138.

(**) *Bierens,* T. 38.

(***) *Note* CXCII. — Si l'on part de l'égalité (E), des intégrations ou des dérivations, relatives au paramètre a, feront découvrir d'autres intégrales définies.

CCXXV. — Relations entre deux théorèmes empiriques.

(*Octobre* 1884.)

I. 1° Théorème de Goldbach. — *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers* (*).

2° Postulatum de M. Bertrand. — *Quel que soit un nombre* n, *supérieur à* 6, *il existe toujours un nombre premier, au moins, compris entre* n — 2 *et* $\frac{n}{2}$ (**);

ou, *à plus forte raison :*

Entre n *et* 2n, *il existe, au moins, un nombre premier.*

II. Le théorème de Goldbach consiste en ce que

$$2n = p + q,$$

p et q étant premiers, impairs (***). De ces deux nombres, inférieurs à $2n$, l'un est égal ou inférieur à n. Ainsi :

Entre n *et* 2n, *il existe, au moins, un nombre premier.*

C'est le *postulatum* de M. Bertrand.

(*) Suivant M. *Eneström*, le théorème *empirique* de Goldbach est mentionné, pour la première fois, dans une lettre d'Euler à Goldbach (*Mathesis*, juin 1886, p. 133). M. *Desboves* a complété, ainsi qu'il suit, l'énoncé primitif :

Tout nombre pair, excepté 2, *est la somme de deux nombres premiers, au moins de deux manières.*

(*Nouvelles Annales*, 1855, p. 293.)

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 30e cahier, p. 129. Ce célèbre *postulatum* a été démontré par M. Tchebychef (*Journal de Liouville*, t. XVIII, p. 381).

(***) Je suppose $n > 2$.

III. D'après le *postulatum*, on a :

$$b - 1 < p < 2(b - 1),$$
$$b + 1 < q < 2(b + 1);$$

p, q, étant *premiers, impairs*. De là résulte

$$2b < p + q < 4b.$$

Ainsi, entre $2b$ et $4b$, *il existe au moins un nombre pair*, 2n, *égal à la somme de deux nombres premiers.*

IV. Soit λ un nombre premier, moindre que a. De

$$\lambda = \lambda < 2\lambda,$$
$$a - \lambda \overline{\overline{<}}\, q < 2a - 2\lambda \text{ (*)},$$

on conclut

$$a \overline{\overline{<}}\, \lambda + q < 2a.$$

Par conséquent : 1, 3, 5, ... π *étant les nombres premiers, impairs, qui ne dépassent point un nombre donné,* a, *il existe, entre* a *et* 2a, *des nombres pairs ayant les formes*

$$1 + q, \quad 3 + q, \quad 5 + q, \ldots, \quad \pi + q;$$

q *étant un nombre premier, impair, qui peut varier* (**).

Soit, par exemple, $a = 15$. Les nombres premiers, inférieurs à 15, sont 1, 3, 5, 7, 11, 13. On a :

$$24 = 1 + 23, \quad 26 = 3 + 23, \quad 22 = 5 + 17,$$
$$26 = 7 + 19, \quad 30 = 11 + 19.$$

(*) *Postulatum* de Bertrand.

(**) Si je ne me trompe, cette proposition est un *acheminement* au théorème de Goldbach.

CCXXVI. — Sur une formule de Jacobi (*).

(*Janvier* 1885.)

I. *Transformation.* — Cette formule, aussi remarquable que facile à démontrer, est

$$\left.\begin{aligned}&(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)(1+q^7z)\ldots\\ &=1+\frac{q}{1-q^2}z+\frac{q}{(1-q^2)(1-q^4)}z^2+\frac{q}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}z^3+\ldots\ (^{**}).\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

Soit Q la valeur commune des deux membres. On a

$$\mathcal{L}\,Q=\mathcal{L}(1+qz)+\mathcal{L}(1+q^3z)+\mathcal{L}(1+q^5z)+\ldots$$

Développant chaque logarithme, on trouve, au lieu de cette égalité :

$$\mathcal{L}\,Q=\frac{q}{1-q^2}z-\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4}z^2+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}z^3+\ldots\tag{1}$$

Par suite,

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dz}=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}z+\frac{q^3}{1-q^6}z^2-\ldots,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}z+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}z^2+\ldots\\ &=\left[1+\frac{q}{1-q^2}z+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}z^2+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}z^3+\ldots\right]\\ &\times\left[\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}z+\frac{q^3}{1-q^6}z^2-\ldots\right].\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{B})$$

(*) La plupart des résultats suivants ont été communiqués à M. Hermite, à l'époque indiquée.

(**) *Fundamenta nova...*, p. 180.

II. *Remarque.* — Cette égalité donne lieu aux réductions suivantes :

$$\frac{q}{1-q^2}\cdot\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}=2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)},$$

$$\frac{q}{1-q^2}\cdot\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^2}{1-q^4}\cdot\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^6}=3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)},$$

$$\frac{q}{1-q^2}\cdot\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}-\frac{q^2}{1-q^4}\cdot\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^3}{1-q^6}\cdot\frac{q}{1-q^2}$$
$$-\frac{q^4}{1-q^8}=4\frac{q^{16}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)},$$

etc.

III. *Suite.* — Lorsque $z=\pm 1$, la relation générale (B) produit ces deux-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\\&=\left[1+\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\&\times\left[\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots\right],\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}-2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}-\cdots\\&=\left[1-\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\&\times\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Dans l'égalité (2), le premier facteur est la transcendante β (*).

Donc, dans l'égalité (3), le premier facteur est la transcendante α (**).

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 52; *Notes sur la théorie des fractions continues...*, p. 61.

(**) *Recherches...*, p. 1.

En conséquence :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}+2\,\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\,\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\\&\qquad=\beta\left[\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots\right],\end{aligned}\right\}\quad\text{(C)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}-2\,\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\,\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}-\cdots\\&\qquad=\alpha\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad\text{(D)}$$

IV. *Autres relations.* — Lorsque $z=1$, le produit représenté par Q devient β; lorsque $z=-1$, ce produit devient α (*). Donc, en vertu de l'égalité (1) :

$$\mathcal{L}(\beta)=\frac{q}{1-q^2}-\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots,\qquad\text{(E)}$$

$$-\mathcal{L}(\alpha)=\frac{q}{1-q^2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\qquad\text{(F)}$$

La différence des premiers membres est

$$\mathcal{L}(\alpha\beta)=-\mathcal{L}(\beta')\ (^{**});$$

leur somme est

$$\mathcal{L}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\mathcal{L}\left(k'^{-\frac{1}{4}}\right)(^{***})$$

Par suite :

$$\mathcal{L}(\beta')=\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^8}+\frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^{12}}+\cdots,\qquad\text{(G)}$$

$$-\mathcal{L}(k')=8\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}+\frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots\right](^{\text{IV}}).\qquad\text{(H)}$$

(*) *Note* CLX.

(**) *Ibid.*

(***) En effet,

$$\frac{\beta}{\alpha}=(kk')^{-\frac{1}{\ }}\quad k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}.$$

(*Loc. cit.*).

(IV) *Fundamenta*..., p. 103.

V. *Remarque.* — On a (*)

$$\mathcal{L}(\beta') = \mathcal{L}(1+q^2) + \mathcal{L}(1+q^4) + \mathcal{L}(1+q^6) + \cdots;$$

puis, par le développement de chaque logarithme :

$$\mathcal{L}(\beta') = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} - \cdots \qquad (G')$$

La comparaison des égalités (G), (G′) donne cette *identité*, probablement connue :

$$\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^{12}} + \cdots = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} - \cdots \qquad (4)$$

VI. *Autre identité.* — On sait que

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \\ &= \beta\left[1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots\right] \ (^{**}). \end{aligned}\right\} (C')$$

Donc, si l'on élimine β entre les égalités (C), (C′), et que l'on pose, pour abréger :

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{q}{1-q} + 2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + 3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots, \\ B &= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} - \cdots, \\ A' &= 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots, \\ B' &= 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots; \end{aligned}\right\} (5)$$

on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \qquad (K)$$

(*) *Note* CLX.

(**) *Recherches..*, p. 52, note.

VII. *Suite.* — La *vérification* de cette identité (K) semble difficile : à plus forte raison le serait-il d'effectuer les développements des deux membres. Mais on peut commencer par la réduire. A cet effet, j'observe que :

$$A = B\left[1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \cdots\right], \tag{2}$$

$$A' = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \beta\beta' \ (^*),$$

$$B' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots = \beta' \ (^{**}).$$

Ainsi déjà, par la suppression du facteur B :

$$\left[1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \cdots\right] = \beta;$$

formule connue (***).

Ce n'est pas tout. Dans la relation (K), la valeur commune des deux membres est

$$\frac{B}{B'} = \frac{1}{\beta'}\left[\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} - \cdots\right]. \tag{6}$$

Dans la série, changeons q en $-q$: elle devient

$$-\left[\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} + \cdots\right].$$

c'est-à-dire :

$$-\left[\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots\right] \ (^{\text{IV}}).$$

Il est visible que le développement de cette nouvelle série est

$$\sum_1^\infty N_i(n)\,q^n;$$

(*) *Recherches...*, pp. 48 et 1.

(**) *Ibid.*, p. 1.

(***) *Ibid.*, p. 52.

(IV) *Notes sur la théorie des fractions continues...*, p. 15.

$N_i(n)$ représentant *le nombre des diviseurs impairs de* n (*). L'égalité (6) se transforme donc en

$$\frac{B}{B'} = \frac{1}{\beta'} \sum_1^\infty (-1)^{n+1} N_i(n)\, q^n;$$

puis, à cause de

$$\frac{1}{\beta'} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n} \text{ (**)}:$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n} \times \sum_1^\infty (-1)^{n+1} N_i(n)\, q^n. \qquad \text{(L)}$$

Ainsi, la fonction très complexe, $\frac{A}{A'}$, est, assez facilement, développable suivant les puissances de q.

VIII. *Remarques.* — 1° D'après ce qui précède, l'égalité (C) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q}{1-q^2} + 2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + 3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \\ &\quad = \sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n \times \sum_1^\infty (-1)^{n+1} N_i(n)\, q^n. \end{aligned}\right\} \text{(M)}$$

2° La combinaison des égalités (L), (M) donne cette autre identité, peut-être nouvelle :

$$\sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n} \times \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n. \qquad \text{(N)}$$

IX. *Équations caractéristiques.* — Si l'on pose

$$\varphi(q) = \sum_0^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}, \qquad (7)$$

(*) $N_i(n)$ est aussi le *nombre des diviseurs du plus grand diviseur impair de* n.

(**) *Recherches...*, p. 5. $\varphi_i(n)$ *est le nombre des décompositions de* n *en parties impaires, inégales.*

et que l'on représente par $f(q)$ la *somme de la série de Lambert :*

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots,$$

on a

$$\varphi(q)=f(q)-f(q^2)\ (^*). \tag{8}$$

La série

$$\psi(q)=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots, \tag{9}$$

peut, également, être rattachée à la transcendante $f(q)$.

En effet, il est visible que

$$\psi(q)=\varphi(q)-2\varphi(q^2);$$

ou, à cause de l'égalité (8) :

$$\psi(q)=f(q)-3f(q^2)+2f(q^4). \tag{10}$$

Ainsi, comme nous venons de le dire, la transcendante $f(q)$ étant connue, l'autre le sera aussi. Mais l'on peut aller plus loin. La série de Lambert, ordonnée suivant les puissances de q, est, comme on sait,

$$q+2q^2+2q^3+3q^4+\cdots+\mathrm{N}(n)\,q^n+\cdots; \tag{11}$$

$\mathrm{N}(n)$ représentant le *nombre des diviseurs de* n. Conséquemment,

$$\psi(q)=\sum_1^\infty \mathrm{N}(n)\left[q^n-3q^{2n}+2q^{4n}\right]; \tag{12}$$

puis, si l'on suppose

$$\psi(q)=\sum_1^\infty \mathrm{C}_n q^n: \tag{13}$$

$$\mathrm{C}_n=\mathrm{N}(n)-3\mathrm{N}\left(\frac{n}{2}\right)+2\mathrm{N}\left(\frac{n}{4}\right)\ (^{**}). \tag{14}$$

(*) *Notes sur la théorie...*, p. 14.

(**) Chacun des symboles $\mathrm{N}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{N}\left(\frac{n}{4}\right)$ doit être remplacé par zéro, *quand la fraction correspondante n'égale pas un nombre entier.*

Addition. — (*Novembre* 1886.)

X. On a aussi :

$$f(q) - f(-q) = \left(\frac{q}{1-q} + \frac{q}{1+q}\right) + \left(\frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^3}{1+q^3}\right) + \cdots$$

$$= 2\left[\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} + \cdots\right],$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\left[f(q) - f(-q)\right] = \psi(q). \qquad (16)$$

La comparaison avec la formule (10) donne la relation :

$$f(q) + f(-q) - 4f(q^2) + 2f(q^4) = 0, \qquad (17)$$

qui caractérise la série de Lambert (*).

XI. Soit, comme précédemment,

$$f(q) = \sum_1^\infty \mathrm{N}(n) q^n. \qquad (18)$$

L'égalité (17) devient

$$\sum_1^\infty \mathrm{N}(n)\left[q^n + (-q)^n - 4q^{2n} + 2q^{4n}\right] = 0.$$

Dans le premier membre, le coefficient de q^{2n}, lequel doit être nul, a pour expression :

$$2\mathrm{N}(4n) - 4\mathrm{N}(2n) + 2\mathrm{N}(n).$$

Nous trouvons donc ce petit théorème :

Le nombre des diviseurs de 2n *égale la demi-somme du nombre des diviseurs de* n *et du nombre des diviseurs de* 4n (**).

(*) La sommation de cette série est ainsi ramenée au problème suivant: *Quelle est la fonction* f *qui satisfait à la condition* (17)?

(**) Évident, mais non signalé, je pense, dans les Traités d'Arithmétique. On peut le généraliser ainsi :

Soit p *un nombre premier. Le nombre des diviseurs de* pn *égale la demi-*

XII. On peut remplacer l'équation (17) par une autre, plus simple, et contenant la fonction φ. En effet, de l'égalité

$$\varphi(q) = f(q) - f(q^2), \tag{9}$$

on déduit :

$$\varphi(-q) = f(-q) - f(q^2),$$

$$\varphi(q^2) = f(q^2) \quad - f(q^4);$$

puis

$$\varphi(q) + \varphi(-q) - 2\varphi(q^2) = f(q) + f(-q) - 4f(q^2) + 2f(q^4);$$

ou

$$\varphi(q) + \varphi(-q) = 2\varphi(q^2) \ (^*). \tag{19}$$

Autre addition. — (Février 1887.)

XIII. L'identité

$$\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{1}{2}\,\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1-q^{12}} + \cdots = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\,\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1-q^6} - \cdots \tag{4}$$

peut être généralisée ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{1-x^2} + a\frac{x^2}{1-x^4} + b\frac{x^3}{1-x^6} + c\frac{x^4}{1-x^8} + d\frac{x^5}{1-x^{10}} \\ &\qquad + e\frac{x^6}{1-x^{12}} + f\frac{x^7}{1-x^{14}} + g\frac{x^8}{1-x^{16}} + \cdots \\ &= \frac{x}{1-x} + (a-1)\frac{x^2}{1-x^2} + b\frac{x^3}{1-x^3} + (c-a)\frac{x^4}{1-x^4} + d\frac{x^5}{1-x^5} \\ &\qquad + (e-b)\frac{x^6}{1-x^6} + f\frac{x^7}{1-x^7} + (g-c)\frac{x^8}{1-x^8} + \cdots \end{aligned}\right\} \text{(P)}$$

somme du nombre des diviseurs de n *et du nombre des diviseurs de* p^2n.

Par exemple :

$$N(24) = 8, \quad N(120) = 16, \quad N(600) = 24; \quad \text{et} \quad 16 = \tfrac{1}{2}(8 + 24).$$

(*) Cette égalité résulte, immédiatement, de la *définition* (8).

Par exemple,

$$\frac{x}{1-x^2}+2\frac{x^2}{1-x^4}+3\frac{x^3}{1-x^6}+4\frac{x^4}{1-x^8}+5\frac{x^5}{1-x^{10}}+6\frac{x^6}{1-x^{12}}$$
$$+7\frac{x^7}{1-x^{14}}+8\frac{x^8}{1-x^{16}}+9\frac{x^9}{1-x^{18}}+10\frac{x^{10}}{1-x^{20}}+\cdots$$
$$=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+3\frac{x^3}{1-x^3}+2\frac{x^4}{1-x^4}+5\frac{x^5}{1-x^5}+3\frac{x^6}{1-x^6}$$
$$+7\frac{x^7}{1-x^7}+4\frac{x^8}{1-x^8}+9\frac{x^9}{1-x^9}+5\frac{x^{10}}{1-x^{10}}+\cdots\ (^*).$$

CCXXVII. — Sur les nombres combinatoires (**).

(*Décembre* 1886.)

I. *Développement de* $(x+a)^{n-2}$. — Dans ma démonstration du théorème de Staudt et Clausen, on trouve le lemme suivant : n *étant un nombre premier, supérieur à* k,

$$C_{n-2,k-1}=\mathcal{M}n\mp k, \tag{1}$$

selon que k *est pair ou impair* (***).

Si l'on change k en $k-1$, on a donc

$$C_{n-2,k-2}=\mathcal{M}n\pm(k-1);$$

(*) De cette égalité, on conclut la propriété suivante, qu'il est facile de vérifier et de *généraliser :*

Soit A *la somme des diviseurs d'un nombre entier* N, *donnant des quotients impairs.*

Soit B *la somme des diviseurs donnant des quotients pairs.*

Soit, enfin, C *la somme des diviseurs de* N, *impairs.*

On a

$$A=B+C.$$

(**) Complément à la *Note* CLXXX.

(***) *Note* LXXVI.

et, par conséquent,

$$C_{n-2,\,k-1} + C_{n-2,\,k-2} = \mathfrak{M}\,n \mp 1 \text{ (*)}. \tag{2}$$

Ainsi, *dans le développement de* $(x + a)^{n-2}$ (n premier), *la somme de deux coefficients consécutifs est un multiple de* n, *diminué ou augmenté de l'unité.*

En outre, d'après l'égalité (2) :

La somme des deux premiers coefficients $= \mathfrak{M}\,n - 1$;

La somme des quatre premiers coefficients $= \mathfrak{M}\,n - 2$;

La somme des six premiers coefficients $= \mathfrak{M}\,n - 3$;

. . . .

La somme de tous les coefficients, ou $2^{n-2} = \mathfrak{M}\,n - \dfrac{n-1}{2}$ (**).

Enfin, à cause de

$$C_{n-2,\,k} = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}:$$

Dans le développement de $(x + a)^{n-2}$ (n premier) :

$$1 = \mathfrak{M}\,n + 1, \quad \frac{n-2}{1} = \mathfrak{M}\,n - 2, \quad \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} = \mathfrak{M}\,n + 3, \ldots$$

II. *Remarque.* — *Si* n — 2 *et* n *sont premiers,* on a, simultanément :

$$C_{n-2,\,k-1} + C_{n-2,\,k-2} = \mathfrak{M}\,n \mp 1,$$

$$C_{n-2,\,k-1} + C_{n-2,\,k-2} = \mathfrak{M}\,(n-2);$$

et, par suite, plusieurs solutions de l'équation indéterminée

$$nx - (n-2)y = \pm 1. \tag{3}$$

(*) — 1 si k est *pair.*

(**) Cette dernière égalité équivaut à

$$2^{n-1} = \mathfrak{M}\,(n) + 1;$$

conformément au théorème de Fermat.

Par exemple, pour satisfaire à

$$13x - 11y = \pm 1,$$

on peut prendre :

$$y = \frac{1}{11}\left[C_{11,2} + C_{11,1}\right] = 6, \quad y = \frac{1}{11}\left[C_{11,3} + C_{11,2}\right] = 20,$$

$$y = \frac{1}{11}\left[C_{11,4} + C_{11,3}\right] = 45, \quad y = \frac{1}{11}\left[C_{11,5} + C_{11,4}\right] = 72,$$

$$y = \frac{1}{11}\left[C_{11,6} + C_{11,5}\right] = 84.$$

Les valeurs correspondantes de x sont :

$$5,\ 17,\ 38,\ 61,\ 71.$$

En effet :

$$13.5 - 11.6 = -1, \quad 13.17 - 11.20 = +1, \quad 13.38 - 11.45 = -1,$$

$$13.61 - 11.72 = +1, \quad 13.71 - 11.84 = -1.$$

III. *Développement de* $(x + a)^{n-1}$. — Le premier membre de la relation (2) est réductible à $C_{n-1,k-1}$ (*). Par conséquent :

Dans le développement de $(x + a)^{n-1}$ (n premier), *chaque coefficient est un multiple de* n, *augmenté ou diminué de l'unité.*

De là résulte que l'équation (3) (**) admet, comme solution :

$$x = \frac{1}{n}\left[C_{n-1,k-1} \pm 1\right], \quad y = \frac{1}{n-2} C_{n-1,k-1}. \qquad (4)$$

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège,* p. 43.

(**) Cette équation (3) est vérifiée, selon le signe du second membre, par

$$x = \pm \frac{1}{2}(n-3), \quad y = \pm \frac{1}{2}(n-1).$$

Addition. — (*Février* 1887.)

V. *Propriétés arithmétiques et algébriques.* — De la relation

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}n \text{ (*)},$$

on conclut aisément

$$C_{n-p-1,q} \mp C_{n-q-1,p} = \mathfrak{M}n \text{ (**)},$$

ou

$$C_{n-p-1,\, n-p-q-1} \pm C_{n-q-1,\, n-p-q-1} = \mathfrak{M}n;$$

et, à plus forte raison,

$$\begin{aligned}&(n-p-1)(n-p-2)\ldots(q+1)\\ \mp\,&(n-q-1)(n-q-2)\ldots(p+1) = \mathfrak{M}n.\end{aligned} \tag{6}$$

Soient :

$$p+1=a, \quad q+1=b, \quad n=a+b+c;$$

de manière que

$$a(a+1)\ldots(a+c) \pm b(b+1)\ldots(b+c) = \mathfrak{M}(a+b+c);$$

ou, en appelant $\varphi(a, b, c)$ le quotient, par $a+b+c$, du premier membre,

$$a(a+1)\ldots(a+c) \pm b(b+1)\ldots(b+c) = (a+b+c)\varphi(a,b,c) \text{ (***)}. \tag{A}$$

Cette égalité, obtenue en supposant que a, b, c sont des nombres entiers, dont la somme est un nombre premier, semble prouver, seulement, que $\varphi(a, b, c)$ est un nombre entier. Mais elle est bien plus générale.

En effet a, b, *étant des quantités quelconques,* remplaçons a, dans le premier membre, par $-(b+c)$. Il devient

$$(-1)^{c+1}(b+c)(b+c-1)\ldots b \mp b(b+1)\ldots(b+c);$$

(*) *Note* LXXVI (t. I, p. 324). Le signe —, si q est *pair.*

(**) Le signe — 1, si p et q sont *de même parité.*

(***) D'après les hypothèses précédentes, a et b sont de *même parité* quand c est *impair,* et de *parités contraires,* quand c est *pair.*

ou, selon que c est *pair* ou *impair*,

$$\pm b(b+1)\ldots(b+c) \mp b(b+1)\ldots(b+c) = 0.$$

Ainsi, le premier membre de l'égalité (A) est *algébriquement divisible* par $a+b+c$. Donc, comme on l'a vu, il est *arithmétiquement divisible* par $a+b+c$, quand les lettres a et b sont remplacées par des nombres entiers.

En résumé :

1° *Le polynôme*

$$a(a+1)\ldots(a+c) \pm b(b+1)\ldots(b+c) \ (^*),$$

est divisible, algébriquement, par a + b + c.

2° *Si* a, b *sont des nombres entiers, le nombre entier*

$$a(a+1)\ldots(a+c) \pm b(b+1)\ldots(b+c),$$

est divisible par a + b + c.

3° Soit $\varphi(a, b, c)$ le quotient : *pour toutes valeurs entières de* a, b, *on a*

$$(a+b+c)\varphi(a, b, c) = \mathfrak{M}(1.2.3\ldots\overline{c+1}) \ (^{**}).$$

4° En outre, *si* a + b + c *est un nombre premier,*

$$\varphi(a, b, c) = \mathfrak{M}(1.2.3\ldots\overline{c+1}).$$

VI. *Application.* — Soient

$$a = 6, \qquad b = 2, \qquad c = 5;$$

d'où résulte

$$a+b+c = 13.$$

On trouve

$$\varphi(a, b, c) = \frac{1}{13}(6.7.8.9.10.11 - 2.3.4.5.6.7) = 25\,200;$$

puis

$$25\,200 = \mathfrak{M}(1.2.3.4.5.6).$$

(*) Le signe +, si c est *pair*.

(**) En effet, dans l'égalité (6), le premier membre est divisible par $1.2.3\ldots(n-p-q-1)$, c'est-à-dire, par $1.2.3\ldots(c+1)$.

CCXXVIII. — Application d'un théorème de Binet.

(*Septembre* 1885.)

I. Dans le Mémoire intitulé : *Sur quelques intégrales définies* (*), j'ai démontré que si l'on fait, suivant la notation de Gauss :

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\alpha',x)=1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\alpha+\alpha'}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\alpha')(\alpha+\alpha'+1)}x^2+\cdots, \quad (1)$$

on a

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\alpha',x)=\frac{\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_0^1\frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha'-1}}{(1-\theta x)^\beta}d\theta; \quad (2)$$

relation due à Binet.

Soient

$$\beta=1,\quad \alpha'=\frac{3}{2}\cdot$$

La série (1) devient

$$\left.\begin{aligned} y=1&+\frac{2\alpha}{2\alpha+3}x+\frac{2\alpha(2\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}x^2\\ &+\frac{2\alpha(2\alpha+2)(2\alpha+4)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}x^3+\cdots\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Donc, par le théorème de Binet,

$$y=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^1\frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta x}d\theta. \quad (4)$$

II. Soit A l'intégrale. Il est clair que

$$A=\frac{1}{x^{\alpha-1}}\int_0^1\frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta x}d\theta-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\int_0^1\frac{(\theta x)^{\alpha-1}-1}{\theta x-1}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta;$$

(*) *Académie de Belgique*, octobre 1885.

et, si $\alpha - 1$ est un *nombre entier :*

$$\left.\begin{aligned}&x^{\alpha-1}\mathrm{A} = \\ &\quad\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta x}\,d\theta - \int_0^1 \left[x^{\alpha-2}\theta^{\alpha-2} + \cdots + x\theta + 1\right](1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Le second terme égale

$$-\left[\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}x^{\alpha-2} + \frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}x^{\alpha-3} + \cdots + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Quant au premier, si l'on fait

$$\theta = 1 - \frac{x}{1-x}t^2,$$

il se transforme en

$$2\int_0^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} t^2\,dt}{(1-x)(1+t^2)} = \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\left[t - \operatorname{arc\,tg} t\right]_0^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$$

$$= \frac{2}{x}\left[1 - \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\operatorname{arc\,sin} x\right].$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{A} = {} & \frac{2}{x^{\alpha}}\left[1 - \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\operatorname{arc\,sin} x\right] \\ & - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left\{\frac{2.4\ldots\overline{2\alpha-4}}{5.7\ldots\overline{2\alpha-1}}x^{\alpha-2} + \frac{2.4\ldots\overline{2\alpha-6}}{5.7\ldots\overline{2\alpha-3}}x^{\alpha-3} + \cdots + \frac{2}{5}x + 1\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

III. Si $x = 1$, cette formule se réduit à

$$\mathrm{A} = 2 - \left\{\frac{2.4\ldots\overline{2\alpha-4}}{5.7\ldots\overline{2\alpha-1}} + \frac{2.4\ldots\overline{2\alpha-6}}{5.7\ldots\overline{2\alpha-3}} + \cdots + \frac{2}{5} + 1\right\}. \quad (7)$$

D'ailleurs, par les relations (4) et (2) :

$$y = \mathrm{A}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \quad (8)$$

Donc

$$y = 1 + \frac{2\alpha}{2\alpha+3} + \frac{2\alpha(2\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)} + \frac{2\alpha(2\alpha+2)(2\alpha+4)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)} + \cdots \quad (9)$$

Ainsi : 1° *La série* (2) *reste convergente pour* $x = 1$ (*); 2° *la limite de la série* (9) *est commensurable.*

Addition. — (*Avril* 1887.)

IV. Lorsque $x = 1$, la série (1) se réduit à

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\alpha+\alpha'} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\alpha')(\alpha+\alpha'+1)} + \cdots$$

La condition de convergence est, on le reconnaît facilement,

$$\beta < \alpha'.$$

Quand elle est remplie, on a, comme expression de la somme :

$$s = \frac{\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha'-\beta-1}d\theta;$$

c'est-à-dire :

$$s = \frac{\Gamma(\alpha+\alpha')\Gamma(\alpha'-\beta)}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\alpha+\alpha'-\beta)}. \quad (10)$$

Conséquemment, *si* α, α', β *sont des nombres entiers, la somme* s *est commensurable* (**).

Par exemple, après suppression du premier terme,

$$2.\frac{3}{7} + 3.\frac{3.4}{7.8} + 4.\frac{3.4.5}{7.8.9} + \cdots = 4.$$

(*) Pour démontrer directement cette proposition, il suffit d'appliquer le *théorème* XIV du *Traité élémentaire des séries* (avril 1887).

(**) On suppose $\beta < \alpha'$.

CCXXIX. — Une récréation arithmétique (*).

(*Mai* 1883.)

I. p, q *étant des nombres premiers; soient :* δ *un diviseur de* q — p (**), a *un nombre entier donné, inférieur à* p.

Si l'on considère la progression

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\quad a+3\delta,\ \ldots, \tag{1}$$

qu'on divise par p *les* p *premiers termes, et que l'on prenne les résidus positifs correspondants, ils formeront une suite*

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\ \ldots\ldots,\quad a_n,\ \ldots\ (^{***}). \tag{A}$$

De même, le diviseur q *donnera lieu à une suite*

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\ \ldots\ldots,\quad b_n,\ \ldots \tag{B}$$

Cela posé, si, dans (B), *on supprime les termes égaux ou supérieurs à* p, *on retombera sur la suite* (A).

II. *Exemple :*

$$p=13,\quad q=23.\quad \delta=5,\quad a=2.$$

La progression est

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, ...

Divisant par 13, on trouve les résidus

2, 7, 12, 4, 9, 1, 6, 11, 3, 8, 0, 5, 10, 2, 7, ... (A′)

Divisant par 23, on obtient la suite

$$\left.\begin{matrix} 2,\ 7,\ 12,\ \overset{+}{17},\ \overset{+}{22},\ 4,\ 9,\ \overset{+}{14},\ \overset{+}{19},\ 1,\ 6,\ 11,\ \overset{+}{16},\ \overset{+}{21}, \\ 3,\ 8,\ \overset{+}{13},\ \overset{+}{18},\ 0,\ 5,\ 10,\ \ldots \end{matrix}\right\} \quad (B')$$

(*) Tirée, en partie, du *Bulletin de l'Académie*. Elle a été suggérée par l'un de ces jeux de cartes appelés *patiences*.

(**) On suppose $q > p$.

(***) $a_1 = a$.

Celle-ci contient les termes de la suite (A′), rangés comme ils le sont dans (A′).

III. *Démonstration* — Les termes généraux des suites (A), (B) sont donnés par les formules

$$a + (n - 1)\delta = px + a_n, \quad a + (n' - 1)\delta = qx' + b_{n'}. \qquad (2)$$

Si l'on suppose $x' = x$, $b_{n'} = a_n$, il en résulte

$$(n' - n)\delta = (q - p)x;$$

puis, à cause de

$$q - p = \mathfrak{M}(\delta) = l\delta:$$

$$n' = n + lx,$$

ou

$$a + (n' - 1)\delta = a + (n - 1)\delta + (q - p)x. \qquad (3)$$

Ainsi, *les termes de la progression* (1), *déterminés par cette formule, ont leurs résidus par* q : 1° *inférieurs à* p ; 2° *égaux aux termes de la suite* (A); 3° *rangés dans le même ordre que ceux-ci.*

IV. *Remarque.* — Dans la progression

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102, 107, 112,

les valeurs de x sont

0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8.

A cause de $q - p = 10$, les termes *efficaces* sont donc :

2, 7, 12, 27, 32, 47, 52, 57, 72, 77, 92, 97, 102, 117, 122, 127, 142, 147, 162, 167, 172, 187, 192.

En effet, si l'on divise ceux-ci par 23, on trouve les résidus

2, 7, 12, 4, 9, 1, 6, 11, 3, 8, 0, 5, 10, 2, 7, ...

V. *Généralisation.* — *Les* p *résidus formant une suite telle que* (A) *se reproduiront, sans altération d'ordre, dans toutes les suites, analogues à* (B), *répondant aux diviseurs premiers compris dans la formule*

$$q = p + \mathfrak{M}(\delta).$$

Exemple :

$$p = 7, \quad \delta = 6, \quad a = 2.$$

$$2,\ 1,\ 0,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3.$$

$q = 13$: $2,\ \overset{+}{8},\ 1,\ \overset{+}{7},\ 0,\ 6,\ \overset{+}{12},\ 5,\ \overset{+}{11},\ 4,\ \overset{+}{10},\ 3,\ \overset{+}{9}.$

$q = 19$: $2,\ \overset{+}{8},\ \overset{+}{14},\ 1,\ \overset{+}{7},\ \overset{+}{13},\ 0,\ 6,\ \overset{+}{12},\ \overset{+}{18},\ 5,\ \overset{+}{11},\ \overset{+}{17},\ 4,\ \overset{+}{10},$
$\overset{+}{16},\ 3,\ \overset{+}{9},\ \overset{+}{15}.$

$q = 31$: $2,\ \overset{+}{8},\ \overset{+}{14},\ \overset{+}{26},\ \overset{+}{26},\ 1,\ \overset{+}{7},\ \overset{+}{13},\ \overset{+}{19},\ \overset{+}{25},\ 0,\ 6,\ \overset{+}{12},\ \overset{+}{18},\ \overset{+}{24},$
$\overset{+}{30},\ 5,\ \overset{+}{11},\ \overset{+}{17},\ \overset{+}{23},\ \overset{+}{29},\ 4,\ \overset{+}{16},\ \overset{+}{16},\ \overset{+}{22},\ \overset{+}{28},\ 3,\ \overset{+}{9},\ \overset{+}{15},$
$\overset{+}{21},\ \overset{+}{27}.$

Addition. — (Avril 1887.)

IV. Dans la démonstration ci-dessus (I), rien n'exprime que les nombres p, q *sont premiers*. Cette condition est donc superflue. En outre, a et δ doivent être supposés *premiers entre eux*, sans quoi la progression (1) serait réductible à une progression plus simple (*).

Nous pouvons donc transformer ainsi l'énoncé primitif :

Soit une progression

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \quad a + 3\delta, \ldots,$$

dans laquelle a *et* δ *sont premiers entre eux. Soient* p, q *deux nombres premiers entre eux, et tels que* q $-$ p $= \mathfrak{M}(\delta)$. *Si l'on divise, par* p, *les* p *premiers termes de la progression, on formera une suite de* p *résidus :*

$$a_1\ (^{**}), \quad a_2, \ldots\ldots, \quad a_p. \tag{A}$$

De même, le diviseur q *donnera les* q *résidus :*

$$b_1\ (^{***}), \quad b_2, \ldots\ldots, \quad b_q. \tag{B}$$

Cela posé, si l'on supprime, dans (B), *les termes égaux ou supérieurs à* p, *on retombera sur la suite* (A) (IV).

(*) Après suppression du plus grand commun diviseur entre a et δ.

(**) Afin que $a_1 = a$, on prendra $p > a$.

(***) $b_1 = a_1 = a$.

(IV) Les termes de (B), *barrés*, ou *surmontés d'une croix*, sont au nombre de $q - p$.

CCXXX. — Sur la polhodie.

(*Février* 1885.)

I. Dans les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces,* j'ai donné (p. 59) les équations

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^4}x^2=v^2-\frac{(v^2-b^2)(v^2-c^2)}{v^2}, \quad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^4}y^2=v^2-\frac{(v^2-c^2)(v^2-a^2)}{v^2}, \quad (2)$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^4}z^2=v^2-\frac{(v^2-a^2)(v^2-b^2)}{v^2} \quad (3)$$

de trois surfaces de révolution, contenant la *polhodie* (ligne de courbure constante). *Ces surfaces de révolution sont,* respectivement, *semblables.*

Par exemple, les équations (1) représentent des *ellipsoïdes semblables,* parce que *les coefficients de* x^2, y^2, z^2 *sont indépendants du paramètre* v.

II. La même propriété subsiste pour les projections de la polhodie, sur les plans principaux. En effet, la combinaison des équations (1), (2) donne

$$\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2=1-\frac{c^2}{v^4}; \quad (4)$$

etc.

CCXXXI. — Extrait d'une lettre adressée à M. Miller,
Rédacteur de l'*Éducational Times.*

(*Octobre* 1885.)

I. « M. Neuberg m'a communiqué la curieuse identité due à » M. *Edwards* (*Question* 6113) (*), ainsi que les solutions » données par MM. *Symons* et *Terry*. A ce propos, permettez-» moi de faire la remarque suivante :

» Dans les *Comptes rendus* (t. LIV), et plus tard dans les *Mélanges mathématiques* (**), j'ai donné les formules

$$\pm S_{2k+1} = \cdots, \qquad \pm S_{2k} = \cdots,$$

» relatives aux sommes des puissances $2k+1$ ou $2k$ des » racines de

$$x^3 + px + q = 0.$$

» Au moyen de ces formules, on peut former autant d'identités » que l'on voudra, analogues à celle dont il s'agit. Il suffit, pour » cela, d'éliminer p et q entre trois de mes formules. Par » exemple :

$$25(x^3+y^3+z^3)(x^7+y^7+z^7) = 21(x^5+y^5+z^5)^2,$$

$$5^6.7^3(x^5+y^5+z^5)^2(x^7+y^7+z^7)^2(x^{11}+y^{11}+z^{11})$$
$$= 11\left[5^7(x^7+y^7+z^7)^5 + 7^5(x^5+y^5+z^5)^7\right];$$

» si

$$x+y+z=0. \text{ »}$$

(*) *Si*

$$x+y+z=0,$$

on a

$$50(x^7+y^7+z^7)^2 = 49(x^4+y^4+z^4)(x^5+y^5+z^5)^2.$$

(**) *Note* XLVIII.

Addition. — (*Octobre* 1885.)

II. Lorsque k égale 2 ou 3, les formules citées (*) donnent :

$$S_4 = 2p^2, \quad S_5 = 5pq, \quad S_7 = -7p^2q; \tag{1}$$

équations d'où résultent les systèmes suivants :

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}S_4}, \quad q = \frac{2S_5}{S_4};$$

$$p = -\frac{5}{7}\frac{S_7}{S_5}, \quad q = -\frac{7}{25}\frac{S_5^2}{S_7};$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}S_4}, \quad q = -\frac{2S_7}{7S_4} \quad (^{**}).$$

Au moyen du deuxième, la relation générale

$$S_n + pS_{n-2} + qS_{-3} = 0 \quad (^{***}), \tag{2}$$

devient

$$175\, S_5S_7S_n - 125\, S_7^2S_{n-2} - 49\, S_5^3S_{n-3} = 0. \tag{A}$$

III. *Remarques.* — 1° Cette égalité devient *identique*, si les quantités x, y, z vérifient la condition

$$x + y + z = 0.$$

Ainsi, quels que soient x, y, on a, *identiquement :*

$$\left.\begin{aligned} &175\left[(x+y)^5-x^5-y^5\right]\left[(x+y)^7-x^7-y^7\right]\left[(x+y)^n-x^n-y^n\right] \\ = &125\left[(x+y)^7-x^7-y^7\right]^2\left[(x+y)^{n-2}-x^{n-2}-y^{n-2}\right] \\ + &\;\;49\left[(x+y)^5-x^5-y^5\right]^3\left[(x+y)^{n-3}-x^{n-3}-y^{n-3}\right]. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

2° L'identité (B) ne diffère, qu'en apparence, de celle qui

(*) Tome I, page 186.

(**) Si l'on égale les deux expressions de p, on a l'identité trouvée par M. Edwards.

(***) *Note* XLVIII.

résulte de l'égalité (2), quand on y substitue les valeurs connues :

$$p = -(x^2 + xy + y^2), \qquad q = xy(x + y).$$

Cette seconde forme de (B) est donc

$$S_n = (x^2 + xy + y^2) S_{n-2} + xy(x + y) S_{n-3}. \tag{C}$$

Autre addition. — (*Mai* 1887.)

IV. La première des équations (1) donne une infinité de solutions de ce problème :

Trouver une somme de trois bi-carrés égale au double d'un carré.

Il en résulte, en effet, que, pour satisfaire à l'équation indéterminée

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2u^2, \tag{3}$$

il suffit de prendre

$$z = x + y, \qquad u = x^2 + xy + y^2. \tag{4}$$

V. *Remarques.* — 1° Si, aux deux membres de l'équation (B), on ajoute

$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2),$$

on obtient cette autre équation indéterminée :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2\left[u^2 + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2\right]. \tag{5}$$

D'après ce qui précède, elle est vérifiée par les valeurs (4).

2° Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales* (1874), j'ai donné ou rappelé diverses *identités*, parmi lesquelles je citerai seulement celles-ci :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (b^2 + c^2)^2 + (ab + ac)^2 + (ab - ac)^2 + (a^2)^2, \tag{D}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (c^2 + a^2)^2 + (bc + ab)^2 + (bc - ab)^2 + (b^2)^2. \tag{E}$$

Il en résulte ce théorème, qui n'a peut-être point été remarqué :

Si un nombre N *est la somme de trois carrés, dont deux, au moins, soient inégaux,* N^2 *est la somme de quatre carrés* (*).

CCXXXII. — Sur une propriété numérique.

(*Novembre* 1885.)

1. Problème. — *La somme des diviseurs de* 16 *est* 31 ; *la somme des diviseurs de* 25 *est, pareillement,* 31. *Y a-t-il d'autres couples de nombres jouissant de la même propriété ?*

Très probablement, le problème, pris dans toute sa généralité, est fort difficile. Je me borne à considérer ce cas particulier :

Soit $p = 2^n + 1$, p *étant premier. Pour quelles valeurs de* n *la somme des diviseurs de* p^2 *est-elle égale à la somme des diviseurs de* 4^n ?

La premiere somme est

$$p^2 + p + 1 = (2^n + 1)^2 + 2^n + 2.$$

La seconde est

$$2^{2n} + 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + \dots + 1 = 2^{2n+1} - 1.$$

On a donc l'équation

$$2^{2n} + 2^{n+1} + 2^n + 3 = 2^{2n+1} - 1,$$

ou

$$2^{2n-1} - 2^{2n-2} - 2^{n-1} - 2^{n-2} - 1 = 0.$$

(*) Comme

$$(1 + 1 + 1)^2 = 2^2 + 2^2 + 1,$$

il est clair que

$$(a^2 + a^2 + a^2)^2$$

n'est pas toujours la somme de quatre carrés. Cependant :

$$3.3^2 = 27 = 3^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$3.5^2 = 75 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 1^2,$$
$$3.7^2 = 147 = 12^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$
. . . .

Si n surpasse 2, l'équation est impossible; car tous les termes, excepté le dernier, seraient divisibles par 2. Mais

$$2^3 - 2^2 - 2 - 1 - 1 = 0.$$

Donc *la seule solution* est $p = 3$, $n = 2$.

CCXXXIII. — Trajectoires orthogonales de polhodies.

(*Janvier* 1885.)

1. Une *polhodie* (*), tracée sur un ellipsoïde donné, est déterminée par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{v^2}; \tag{1}$$

v représentant la *distance du centre au plan tangent* (**).

Il en résulte, par la différenciation,

$$\frac{dx}{\frac{b^2 - c^2}{b^4c^4} yz} = \frac{dy}{\frac{c^2 - a^2}{c^4a^4} zx} = \frac{dz}{\frac{a^2 - b^2}{a^4b^4} xy}.$$

La condition d'*orthogonalité* :

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0, \tag{2}$$

devient donc, si l'on remet d au lieu de δ :

$$\sum \frac{b^2 - c^2}{b^4c^4} yzdx = 0;$$

ou, plus simplement,

$$\sum a^4 (b^2 - c^2) \frac{dx}{x} = 0. \tag{3}$$

Telle est l'équation différentielle des trajectoires.

(*) Ligne de courbure constante : le mot *courbure* se rapporte à la surface (*Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*).

(**) *Loc cit.*

II. Soient, pour abréger :

$$a^4(b^2 - c^2) = g, \quad b^4(c^2 - a^2) = h, \quad c^4(a^2 - b^2) = k; \tag{4}$$

et, par conséquent,

$$g\frac{dx}{x} + h\frac{dy}{y} + k\frac{dz}{z} = 0; \tag{5}$$

puis

$$g\,\mathcal{L}\frac{x}{\mathrm{M}} + h\,\mathcal{L}\frac{y}{\mathrm{M}} + k\,\mathcal{L}\frac{z}{\mathrm{M}} = 0; \tag{6}$$

M étant la constante arbitraire.

D'après Bouquet et Serret (*), les surfaces Σ, représentées par cette équation (6), appartiennent à un *système triplement orthogonal*. Essayons de le déterminer.

III. En employant la méthode et les notations rappelées dans la *Note* CXXXV, on a, par l'équation (5) :

$$\mathrm{P} = \frac{g}{x}, \quad \mathrm{Q} = \frac{h}{y}, \quad \mathrm{R} = \frac{k}{z};$$

$$\frac{xdx}{g} = \frac{ydy}{h} = \frac{zdz}{k};$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{h} - \frac{z^2}{k}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{g} - \frac{z^2}{k}\right);$$

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = \frac{y}{h}, \quad \frac{df}{dz} = -\frac{z}{k};$$

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{x}{g}, \quad \frac{df_1}{dy} = 0, \quad \frac{df_1}{dz} = -\frac{z}{k};$$

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha}{h}, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{C} = \frac{\beta}{g};$$

$$\lambda = \frac{h+k}{hk^2}, \quad \mu = \frac{1}{k^2}, \quad \nu = \frac{g+k}{gk^2};$$

$$\mathrm{B}\nu - \mathrm{C}\mu = -\frac{\beta}{k^2g}, \quad \mathrm{A}\mu - \mathrm{B}\lambda = \frac{\alpha}{hk^2},$$

$$\mathrm{C}\lambda - \mathrm{A}\nu = \frac{(h+k)\beta - (g+k)\alpha}{ghk^2}.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XI et XII.

L'équation différentielle cherchée est donc

$$g\alpha d\beta^2 + \left[(h+k)\beta - (g+k)\alpha\right] d\alpha d\beta - h\beta d\alpha^2 = 0 \ (^*). \tag{7}$$

Les surfaces Σ_1, Σ_2 (en nombre infini), définies par cette équation, constituent, avec les surfaces Σ, un système orthogonal triple (**).

IV. *Remarque.* — Les surfaces Σ sont orthogonales à chacun des ellipsoïdes représentés par les équations (1). En effet, il est visible, à cause des valeurs (4), que l'on a

$$\sum \frac{g}{x}\cdot\frac{x}{a^2} = 0, \quad \sum \frac{g}{x}\cdot\frac{x}{a^4} = 0.$$

Addition. — (*Avril* 1887.)

V. Remplaçons les équations (1), (2) par celles-ci :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \mathrm{G}, \tag{8}$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \mathrm{H}; \tag{9}$$

G, H étant des paramètres variables. L'équation (8) représente une infinité d'ellipsoïdes homothétiques; et il en est de même pour l'équation (9). D'ailleurs, les identités :

$$\frac{g}{a^2} + \frac{h}{b^2} + \frac{k}{c^2} = 0, \quad \frac{g}{a^4} + \frac{h}{b^4} + \frac{k}{c^4} = 0,$$

sont indépendantes de G et de H. Donc *les surfaces* Σ, *représentées par l'équation*

$$a^4(b^2 - c^2)\,\mathfrak{L}\frac{x}{\mathrm{M}} + b^4(c^2 - a^2)\,\mathfrak{L}\frac{y}{\mathrm{M}} + c^4(a^2 - b^2)\,\mathfrak{L}\frac{z}{\mathrm{M}} = 0,$$

sont orthogonales aux deux séries d'ellipsoïdes.

(*) Elle ne diffère, de celle qu'a donnée Serret (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 246), que par un simple *changement de lettres*. N'est-ce point là un argument en faveur de ma méthode?

(**) On peut consulter, relativement à l'intégration de l'équation (7), le beau Mémoire de Serret.

VI. Plus généralement : *Soient deux séries de surfaces* S, Σ, *représentées par*

$$f(x, y, z) = \mathrm{G}, \qquad \varphi(x, y, z) = \mathrm{H}.$$

Si une surface S_1, *appartenant à la première série, est orthogonale à une surface* Σ_1, *appartenant à la seconde série; toutes les surfaces* S *sont orthogonales à toutes les surfaces* Σ (*).

CCXXXIV. — Deux intégrales définies.

(*Décembre* 1866.)

I. De la formule

$$\int_0^\infty \frac{e^{p\alpha} - e^{-p\alpha}}{e^{q\alpha} - 1} d\alpha = \frac{1}{p} - \frac{\pi}{q} \cot \frac{p\pi}{q} \text{ (**)},$$

on déduit :

$$\int_0^\infty \frac{e^{4\alpha x} - e^{-4\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} d\alpha = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2} \cot 2x,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - 1} d\alpha = \frac{1}{2x} - \cot 2x;$$

puis

$$\int_0^\infty \left[2\frac{e^{4\alpha x} - e^{-4\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} - \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - 1} \right] d\alpha = 0,$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[2(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}) - (e^{\pi\alpha} + 1) \right] d\alpha = 0,$$

ou encore :

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[2(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}) - 1 \right] d\alpha = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} d\alpha.$$

(*) A-t-on signalé, quelque part, cette propriété *évidente?*

(**) *Bierens de Haan*, T. 27.

D'après une formule due à Poisson, le second membre égale $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Conséquemment,

$$\operatorname{tg} x = 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\left[2(e^{4\alpha x}-e^{-4\alpha x})-(e^{2\alpha x}-e^{-2\alpha x})\right]. \quad \text{(A)}$$

II. Il résulte de cette égalité, au moyen de l'intégration relativement à x :

$$-\,\ell.\cos x = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}\left[e^{4\alpha x}+e^{-4\alpha x}-(e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x})\right],$$

ou

$$-\,\ell.\cos x = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}\left[(e^{2\alpha x}-e^{-2\alpha x})^2-(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})^2\right],$$

ou enfin

$$-\,\ell.\cos x = \int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})^2}{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}\left[e^{2\alpha x}+1+e^{-2\alpha x}\right]d\alpha. \quad \text{(B)}$$

CCXXXV. — Sur les développées gauches.

(*Février* 1885.)

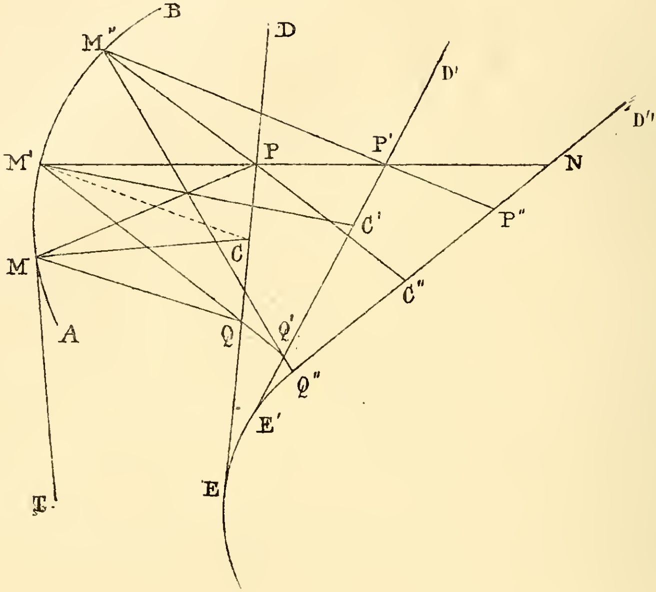
I. AB étant une ligne à double courbure, soient C, C′, C″, ..., les centres des cercles osculateurs, relatifs aux points M, M′, M″, ..., de cette ligne. Soient DE, D′E′, D″E″, ..., les droites polaires correspondantes. Le lieu de ces droites est une développable Δ, enveloppe des plans normaux à BA (*).

Soit pris arbitrairement, sur CD, le point P. Menons M′P, et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre, en P′, avec D′E′, etc. (*).

(*) Voir, par exemple, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure.*

(**) Construction donnée par Monge. (*Application de l'Analyse à la Géométrie*, édition de Liouville, p. 396). L'illustre Auteur, pour désigner l'élément d'une surface développable, dit : une *hèdre*. Je ne connais pas d'autre exemple de l'emploi de ce mot.

Le lieu des points P, P′, P″, ..., est une *développée* de AB. De plus, cette courbe est une *ligne géodésique* de Δ.



En effet (*),

$$\mathrm{MPE} = \mathrm{M'PE} = 2^d - \mathrm{NPE}\ (^{**});$$

PN étant le prolongement de M′P.

II. Le lieu des droites MP, M′P′, M″P″, ... est une développable Σ_1, dont AB *est une ligne de courbure* (***), et dont PP′P″... est l'*arête de rebroussement*.

Remplaçons P par Q, et recommençons la même construction. Il en résulte une nouvelle développable Σ_2, dont AB est une ligne de courbure, et dont QQ′Q″ ... est l'arête de rebroussement. Soit MT la tangente, en M, à la ligne AB.

(*) Démonstration de Monge.

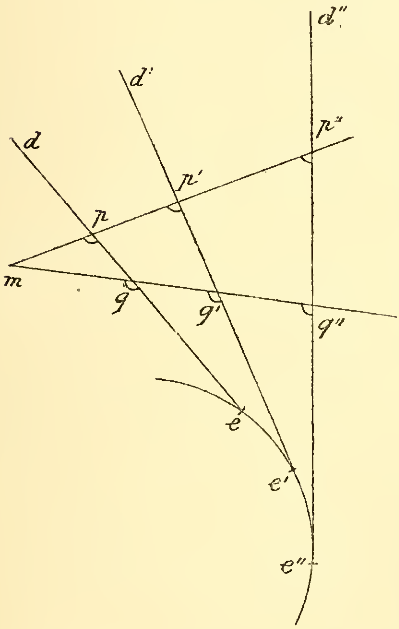
(**) Parce que les triangles *rectangles* PCM, PCM′ sont égaux.

(***) Parce que AMM′... B est une trajectoire orthogonale des génératrices de Σ_1.

Le plan PMT est tangent à Σ_1, et le plan QMT est tangent à Σ_2. De plus, l'angle de ces deux plans est mesuré par PMQ; car les droites PM, QM sont projetées, sur le plan CMT, suivant le *rayon* MC.

Or, lorsque deux surfaces Σ_1, Σ_2 ont une même ligne de courbure, *elles se coupent*, le long de cette ligne, *sous un angle constant*. Donc

$$\mathrm{PMQ} = const. = \mathrm{P'M'Q'} = \mathrm{P''M''Q''}.$$



En résumé :

AB *étant une ligne à double courbure; soient* GH, KL *deux de ses développées. Si, d'un point* M, *pris arbitrairement sur* AB, *on mène, aux deux autres courbes, les tangentes* MR, MS; *l'angle* RMS *est constant.*

Addition. — (*Avril* 1887.)

III. Le dernier théorème, qui est probablement connu, résulte, immédiatement, de la considération suivante :

La surface polaire de AB étant développée dans le plan tangent suivant DE, la développée PP'P'' ... se transforme en une droite $pp'p''$ ..., prolongement de MP. De même, la développée QQ'Q'' ... se transforme en une droite $qq'q''$ ..., prolongement de MQ. Or, dans la figure plane ci-contre, on a :

$$m = \mathrm{M} = q - p = q' - p' = q'' - p'' = \cdots$$

CCXXXVI. — Sur la formule : $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin q\pi}$.

(*Juillet* 1885.)

I. Le premier membre égale

$$\int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{-p}d\theta;$$

ou, par le développement en série :

$$\frac{1}{p} + \frac{p}{1}\frac{1}{p+1} + \frac{p(p+1)}{1.2}\frac{1}{p+2} + \cdots$$

Donc

$$\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + \frac{p}{1}\frac{1}{p+1} + \frac{p(p+1)}{1.2}\frac{1}{p+2} + \cdots \qquad (1)$$

II. La formule ordinaire est

$$\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + 2p\left[\frac{1}{1-p^2} - \frac{1}{4-p^2} + \frac{1}{9-p^2} - \cdots\right]. \qquad (2)$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{p+1} + \frac{p+1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2.3}\frac{1}{p+3} + \cdots\\ &\quad = 2\left\{\frac{1}{1-p^2} - \frac{1}{4-p^2} + \frac{1}{9-p^2} - \cdots\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

CCXXXVII. — Transformation d'une somme en produit.

(*Avril* 1887.)

I. Le Mémoire intitulé : *Sur quelques intégrales définies* (*), contient la formule, très générale,

$$\left.\begin{aligned}&\sum C_{n,p}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)\Gamma(\gamma-\alpha+q)\Gamma(\gamma-\beta+q)}{\Gamma(\gamma+q)}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)},\end{aligned}\right\} \qquad (U)$$

(*) *Académie de Belgique*, octobre 1885.

dans laquelle

$$p + q = n.$$

Posons :

$$\alpha = a + c, \qquad \beta = b + c, \qquad \gamma = a + b + c.$$

La relation (U) devient

$$\left.\begin{array}{l} \sum C_{n,p} \dfrac{\Gamma(a+q)\Gamma(b+q)\Gamma(c+p)}{\Gamma(a+b+c+q)} \\ = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+n)}{\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)\Gamma(a+b+c+n)}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

II. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+q-1), \\ \dfrac{\Gamma(b+q)}{\Gamma(b)} = b(b+1)\ldots(b+q+1), \\ \dfrac{\Gamma(c+p)}{\Gamma(c)} = c(c+1)\ldots(c+p-1), \\ \dfrac{\Gamma(a+b+c+q)}{\Gamma(a+b+c+n)} = \dfrac{1}{(a+b+c+q)(a+b+c+q+1)\ldots(a+b+c+n-1)}, \\ \dfrac{\Gamma(a+c+n)}{\Gamma(a+c)} = (a+c)(a+c+1)\ldots(a+c+n-1), \\ \dfrac{\Gamma(b+c+n)}{\Gamma(b+c)} = (b+c)(b+c+1)\ldots(b+c+n-1) \;(*). \end{array}\right\} \quad (2)$$

(*) D'après la première de ces formules, le produit

$$a(a+1)\ldots(a+q-1)$$

doit être remplaeé par 1, lorsque $q = 0$. D'après la quatrième, le produit

$$(a+b+c+q)(a+b+c+q+1)\ldots(a+b+c+n-1),$$

doit être remplacé par 1, lorsque $q = n$. Etc.

Donc l'égalité (1) se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&\sum C_{n,p}\, a(a+1)\ldots(a+q-1)\times b(b+1)\ldots(b+q-1)\\&\quad\times c(c+1)\ldots(c+p-1)\\&\quad\times(a+b+c+q)(a+b+c+q+1)\ldots(a+b+c+n-1)\\&\quad=(a+c)(a+c+1)\ldots(a+c+n-1)\\&\quad\times(b+c)(b+c+1)\ldots(b+c+n-1).\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

Cette relation permet, on le voit, de *transformer, en produits fort simples, une infinité de sommes* (*). Mais on peut la considérer d'un autre point de vue.

III. Changeons c en z, et appelons $F(a, b, z)$ le premier membre. Nous aurons ce résultat curieux :

Les racines de l'équation

$$F(a, b, z) = 0,$$

sont

$$-a,\quad -(a+1),\quad -(a+2),\ldots,\quad -(a+n-1),$$
$$-b,\quad -(b+1),\quad -(b+2),\ldots,\quad -(b+n-1).$$

De plus, si $a = b$, *ces racines sont égales deux à deux; et* $F(a, b, z)$ *est un carré.*

IV. Lorsque $n = 2$,

$$F(a, b, z) =$$
$$a(a+1)b(b+1) + 2abz(a+b+1+z)$$
$$+ z(z+1)(a+b+z)(a+b+1+z).$$

Lorsque $n = 3$,

$$F(a, b, z) =$$
$$a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2) + 3a(a+1)b(b+1)z(a+b+2+z)$$
$$+ 3abz(z+1)(a+b+1+z)(a+b+2+z)$$
$$+ z(z+1)(z+2)(a+b+z)(a+b+1+z)(a+b+2+z).$$

Etc.

(*) Le lecteur pourra supposer

$$a = 1,\quad a = b,\quad a+b+c = 1, \text{ etc.}$$

V. Afin de mettre en évidence le nombre entier n, désignons par $F_n(a, b, z)$ ce que nous avons appelé $F(a, b, z)$.

D'après la relation (A) :

$$\frac{F_{n+1}(a, b, z)}{F_n(a, b, z)} = (a + n + z)(b + n + z). \qquad (5)$$

Ainsi, *le polynôme* $F_{n+1}(a, b, z)$ *est divisible par le polynôme* $F_n(a, b, z)$.

VI. Si a, b, z sont remplacés par des *nombres entiers, la fraction* (5) *est réductible à un nombre entier.*

Soient, par exemple,

$$a = 1, \quad b = 2, \quad n = 2, \quad z = 1.$$

Le dénominateur est

$$1 . 2 . 2 . 3 + 4 . 5 + 2 . 4 . 5 = 72;$$

le numérateur est

$$2.3.2.3.4 + 3.2.2.3.6 + 3.2.2.5.6 + 2.3.4.5.6 = 1\,440.$$

On doit trouver

$$\frac{1\,440}{72} = 4 . 5.$$

C'est ce qui a lieu.

VII. *Interprétation géométrique.* — Changeons a en x, b en y; de manière que $F_n(a, b, z)$ devienne $F_n(x, y, z)$. A cause de (A) : *l'équation* $F_n(x, y, z) = 0$ *représente* $2n$ *plans, respectivement parallèles à ceux qui sont représentés par*

$$x + z = 0, \quad y + z = 0.$$

VIII. *Cas particulier remarquable.* — Dans (A), supposons

$a = b = c = 1$. Une réduction évidente donne cette autre relation :

$$\left.\begin{aligned}
&(1.2.3\ldots n)^2 + n(n+2)(1.2.3\ldots\overline{n-1})^2\\
&+(n-1)n(n+1)(n+2).(1.2.3\ldots\overline{n-2})^2\\
&+(n-2)(n-1)n.n(n+1)(n+2)(1.2.3..\overline{n-3})^2\\
&+\cdots 1.2.3\ldots n.3.4\ldots\overline{n+2}\\
&\qquad\qquad = (1.2.3.4\ldots\overline{n+1})^2.
\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

Ainsi le premier membre, très complexe, égale un carré fort simple (*).

Soit, par exemple, $n = 5$. On trouve

$$\begin{aligned}
&(1.2.3.4.5)^2 + 5.7(1.2.3.4)^2 + 4.5.6.7(1.2.3)^2\\
&+3.4.5.5.6.7(1.2)^2 + 2.3.4.5.4.5\ 6.7\\
&+1.2.3.4.5.3.4.5.6.7 = (2.3.4.5.6)^2,
\end{aligned}$$

ou

$$120^2 + 35.24^2 + 840.6^2 + 12\,600.2^2 + 120.840 + 120.2\,520 = 720^2;$$

ce qui est exact.

CCXXXVIII. — Représentation des intégrales elliptiques.

(*Mars* 1885.)

I. *Intégrale de première espèce.* — Considérons la surface dont l'équation est

$$(a^2 + z^2)x^2 + (b^2 + z^2)y^2 = a^2b^2. \tag{1}$$

(*) La démonstration directe, de l'égalité (B), n'offre aucune difficulté. Elle résulte de cette remarque :

$$(1.2.3.4\ldots\overline{n+1})^2 - (1.2.3\ldots n)^2 = (1.2.3\ldots n)^2 n(n+2).$$

La formule connue

$$v = \pi \int_0^z \mathrm{AB}dz, \tag{2}$$

donne :

$$v = \pi a^2 b^2 \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}}, \tag{3}$$

$$\mathrm{V} = \lim v = \pi a^2 b^2 \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}}. \tag{4}$$

Prenant

$$z = b \operatorname{tg} \varphi, \tag{5}$$

on transforme ainsi la différentielle :

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\varphi}{a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Par suite,

$$v = \pi a b^2 \mathrm{F}(c, \varphi), \qquad \mathrm{V} = \pi a b^2 \mathrm{F}_1(c). \tag{6}$$

Donc, *si un corps est limité par la surface* (1), *par le plan* xy *et par un plan parallèle à celui-ci, le volume de ce corps est représenté, à un facteur près, par l'intégrale de première espèce.*

II. *Intégrale de deuxième espèce.* — Le problème est un peu moins simple. Après quelques tâtonnements, j'ai été conduit à l'équation

$$\frac{(b^2 + z^2)^2}{f^6} x^2 + \frac{1}{g^2} \frac{b^2 + z^2}{a^2 + z^2} y^2 = 1 \ (^*). \tag{7}$$

Il en résulte :

$$\mathrm{A} = \frac{f^3}{b^2 + z^2}, \qquad \mathrm{B} = g\sqrt{\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2}};$$

puis, par la formule (2),

$$v = \pi f^3 g \int_0^z \frac{dz}{b^2 + z^2} \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2}}. \tag{8}$$

(*) Les *lignes de niveau* de la nouvelle surface sont, comme celles de la première, des ellipses.

La transformation (5) donne ensuite :

$$v = \pi \frac{f^2 ga}{b^2} \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \pi \frac{f^3 ga}{b^2} \mathrm{E}(e, \varphi), \tag{9}$$

$$\mathrm{V} = \lim v = \pi \frac{f^3 ga}{b^2} \mathrm{E}_1(e). \tag{10}$$

III. *Remarques.* — 1° Si l'on prend $f = b$, $g = a$, on a, plus simplement :

$$v = \pi a^2 b \mathrm{E}(e, \varphi). \tag{11}$$

2° Soit

$$s = a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

la longueur d'un arc de l'ellipse dont les demi-axes sont a, b; cet arc étant compté à partir d'une extrémité du petit axe. Il est clair que

$$v = \pi abs. \tag{12}$$

CCXXXIX. — Une intégration.

(*Septembre* 1863.)

I. Soit l'équation du deuxième ordre

$$xyy'' + axy'^2 + byy' = 0. \tag{1}$$

J'emploie la transformation connue :

$$y' = \frac{y}{u}. \tag{2}$$

Il en résulte

$$y'' = \frac{uy' - yu'}{u^2} = \frac{y(1 - u')}{u^2};$$

puis, au lieu de la proposée :

$$u' - \frac{b}{x} u = a + 1. \tag{3}$$

Cette équation, comparée à

$$u' + Pu = Q,$$

suppose

$$P = -\frac{b}{x}, \quad Q = a + 1.$$

Par conséquent, après une réduction évidente,

$$u = cx^b + \frac{a+1}{1+b}x \text{ (*)}; \tag{4}$$

puis :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1-b}{(1-b)cx^b + (a+1)x}, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}\frac{y}{m} = (1-b)\int \frac{dx}{(1-b)cx^b + (a+1)x}. \tag{6}$$

II. Dans une infinité de cas, l'intégrale peut être obtenue sous forme finie. Soient, par exemple,

$$a = 1, \qquad b = 2.$$

Le second membre devient

$$\int \frac{dx}{(cx-2)x} = \frac{1}{2}\int \frac{cdx}{cx-2} - \frac{1}{2}\mathcal{L}x = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{cx-2}{x}.$$

Donc

$$y^2 = m^2\left(c - \frac{2}{x}\right);$$

ou, ce qui est équivalent,

$$y^2 = A + \frac{B}{x}. \tag{7}$$

III. Si $b = 1$, les formules (4), (6) sont illusoires. Mais alors l'intégrale de l'équation (3) est

$$u = x\left[c + (a+1)\mathcal{L}x\right];$$

(*) Comme vérification, on peut multiplier les deux membres par x^{-b}. Si l'on prend ensuite les dérivées, on retrouve l'équation (3).

en sorte que

$$\mathfrak{L}\frac{y}{m} = \int \frac{dx}{x\left[c + (a+1)\mathfrak{L}x\right]};$$

et, sauf le cas de $a = -1$, il est impossible d'intégrer.

IV. La méthode précédente est applicable à

$$x^p yy'' + ax^q y'^2 + ayy' = 0. \tag{8}$$

On en déduit l'équation linéaire

$$u' - \frac{b}{x^p}u = ax^{q-p} + 1, \tag{9}$$

puis

$$u = e^{\frac{b}{p-1}x^{1-p}}\left[c + \int (ax^{q-p} + 1)e^{-\frac{b}{p-1}x^{1-p}}dx\right]. \tag{10}$$

CCXL. — Théorème de Géométrie élémentaire.

(*Août* 1885) (*).

On doit, à Newton, le théorème suivant :

Si, sur les côtés AC, BC *d'un triangle* ACB, *on prend* AD = BE, *et que l'on fasse varier ces distances égales; le point* M, *milieu de la droite* DE, *décrit une ligne droite* (**).

En voici un autre, que l'on peut regarder comme *corrélatif* du premier :

Sur les côtés AC, BC *d'un triangle* ABC, *on prend* AD = BE. *Si, la base* AB *restant fixe, le sommet* C *décrit une circonférence passant par les extrémités de cette base; le point* M, *milieu de la droite* DE, *décrit une circonférence ayant pour centre le milieu de* AB (***).

(*) Complément à la *Note* CXVII.

(**) *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 127.

(***) La démonstration résulte, immédiatement, du Lemme rappelé dans la *Note* CXVII.

CCXLI. — Problème d'Analyse indéterminée.

(*Juin* 1878.)

I Soit l'équation

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + u^3. \qquad (1)$$

Si l'on isole u^3, le premier membre devient

$$3[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz],$$

ou

$$3[(y + z)x^2 + (y + z)^2x + (y + z)yz],$$

ou enfin

$$3(y + z)(z + x)(x + y).$$

Ainsi, la proposée est réduite à

$$3(y + z)(z + x)(x + y) = u^3 \text{ (*)}. \qquad (2)$$

II. Posons $u = 3v$, puis décomposons $9v$ en trois facteurs a, b, c; de manière que

$$abc = 9v^3. \qquad (3)$$

Alors :

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c; \qquad (4)$$

p désignant, suivant l'usage, la demi-somme des nombres a, b, c (**).

Addition. — (*Mai* 1887.)

III. On sait que, n étant *impair*,

$$(x + y + z)^n - (x^n + y^n + z^n) = P(y + z)(z + x)(x + y) \text{ (***)}.$$

(*) C'est uniquement à cause de l'*identité*

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(y + z)(z + x)(x + y),$$

que je mentionne ce Problème.

(**) Si ces nombres ne sont pas tous *pairs*, un seul doit l'être.

(***) *Note* XLVII.

Donc, en particulier,

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = \mathrm{A}(y + z)(z + x)(x + y);$$

A étant une *constante* (*).

Si l'on suppose

$$x = y = z = 1,$$

on trouve

$$\mathrm{A} = 3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

CCXLII. — Une propriété des progressions arithmétiques (**).

Il suffit de l'énoncer :

Soit une progression arithmétique, composée de n *termes.*

Si, de n *fois la somme de leurs carrés, on retranche le carré de leur somme, le reste est constant* (*).

Exemple :

$$5(3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2) - (3 + 7 + 11 + 15 + 19)^2 = 800$$
$$= 5(7^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2 + 23^2) - (7 + 11 + 15 + 19 + 23)^2$$
$$= 5(11^2 + 15^2 + 19^2 + 23^2 + 27^2) - (11 + 15 + 19 + 23 + 27)^2.$$

(*) Parce que l'équation est homogène.

(**) Complément au Mémoire intitulé : *Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce...* (p. 24).

(***) C'est-à-dire, indépendant du premier terme.

CCXLIII. — Application du Théorème de Lancret (*).

(*Septembre* 1873.)

I. Ce théorème est exprimé par l'équation

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}, \tag{1}$$

dans laquelle

$$\frac{1}{L^2} = \frac{\sum (a'b'' - b'a'')^2}{(a'^2 + b'^2 + c'^2)^2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sum (ab' - ba')c''}{a'^2 + b'^2 + c'^2},$$

$$\frac{1}{\rho^2} = a'^2 + b'^2 + c'^2 \text{ (**)}.$$

Il en résulte l'égalité

$$\sum (a'b'' - b'a'')^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)^3 + \left[\sum (ab' - ba')c''\right]^2, \tag{A}$$

qui devient *identique* si les quantités a, a', a'', b, b', ..., satisfont aux conditions connues :

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = -(a'^2 + b'^2 + c'^2) \end{array}\right\} \tag{2}$$

Cette relation (A) permet de *trouver, d'une infinité de manières, une somme de trois carrés égale à la somme d'un cube et d'un carré.*

II. *Exemple.* — On satisfait aux conditions (2) en prenant :

$$a = \frac{9}{25}, \quad b = \frac{12}{25}, \quad c = \frac{20}{25}; \quad a' = \frac{24}{25}, \quad b' = \frac{7}{25}, \quad c' = -\frac{15}{25};$$

$$a'' = \frac{14}{25}, \quad b'' = -\frac{48}{25}, \quad c'' = -\frac{20}{25}.$$

(*) Omise dans la *Théorie analytique des lignes à double courbure.*

(**) *Loc. cit* ; pp. 15 et 16.

Il résulte, de ces valeurs :

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{34}{25};$$

$$a'b''-b'a''=-\frac{1250}{25^2}, \quad b'c''-c'b''=-\frac{860}{25^2}, \quad c'a''-a'c''=\frac{270}{25^2};$$

$$ab'-ba'=-\frac{225}{25^2}, \quad bc'-cb'=-\frac{320}{25^2}, \quad ca'-ac'=\frac{615}{25^2};$$

$$\sum(ab'-ba')c''=\frac{1}{25^3}(225.20-320.14-615.48)=-\frac{1180}{25^2};$$

puis

$$1250^2 + 860^2 + 270^2 = 34^3.25 + 1180^2,$$

ou

$$250^2 + 172^2 + 54^2 = 54^3 + 236^2;$$

conformément à l'énoncé.

Addition. — (*Mai* 1887.)

III. Pour éviter les fractions, on peut remplacer la première des conditions (2) par celle-ci :

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2 \ (^*). \tag{3}$$

Alors (A) devient

$$\sum\left[k(a'b''-b'a'')\right]^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)^3 + \left[\sum(ab'-ba')c''\right]^2. \tag{B}$$

Si, par exemple, on suppose :

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad k = 3;$$
$$a' = -1, \quad b' = 3, \quad c' = -4;$$
$$a'' = -5, \quad b'' = -9, \quad c'' = 2;$$

on trouve

$$(3.24)^2 + (3.30)^2 + (3.22)^2 = 26^3 + 8^2.$$

(*) Prenant a et b arbitrairement, on décompose $a^2 + b^2$ en deux facteurs, de *même parité :* l'un est $k + c$; l'autre, $k - c$; etc.

CCXLIV. — Conséquences du Problème de Malfatti.

(*Octobre* 1874) (*).

I. En évaluant, de deux manières différentes, l'aire du triangle ABC (**), on est conduit à cette proposition :

Si trois quantités f, g, h *satisfont à la condition*

$$fg + gh + hf = 1 \quad (^{***}), \tag{1}$$

elles rendent identique l'équation

$$\sum(1-fg)(1-h)(1+f)(1+g) = (1+f+g+h)\sum f(1-g^2)(1-h^2). \tag{2}$$

II. Dans cette identité (2), dont la vérification est plus longue que difficile :

$$\left.\begin{array}{c} f = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{A}}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{A}}, \quad g = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{B}}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{B}}, \\ h = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{C}}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{C}} \ (^{\mathrm{IV}}). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Elle exprime donc une relation entre

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\mathrm{A}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\mathrm{B}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\mathrm{C}.$$

Toutes réductions faites, cette relation se réduit à celle-ci :

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{A}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{B}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{C} - (\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{A}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{B} + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{B}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{C} + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{C}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{A}) \\ - (\operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{A} + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{B} + \operatorname{tg}\frac{1}{4}\mathrm{C}) + 1 = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

laquelle est connue.

(*) Complément de la *Note* LXXII.

(**) *Loc. cit.*

(***) *Loc cit.*

(IV) *Loc. cit.*

Addition. — (*Février* 1886.)

III. *Théorème d'Arithmétique.* — *Si* f, g, h *sont trois entiers, satisfaisant à la condition* (1), *la quantité*

$$\sum (1 - fg)(1 - h)(1 + f)(1 + g),$$

est divisible par

$$f + g + h + 1.$$

IV. *Application géométrique.* — Remplaçons f, g, h par x, y, z; et considérons les équations :

$$xy + yz + zx = 1, \tag{5}$$

$$\sum (1 - xy)(1 - z)(1 + x)(1 + y) = 0. \tag{6}$$

La combinaison des deux conduit, d'après la proposition ci-dessus (I), à l'équation

$$(1 + x + y + z) \sum x(1 - y^2)(1 - z^2) = 0;$$

laquelle se décompose en

$$x + y + z = -1, \tag{7}$$

$$\sum x(1 - y^2)(1 - z^2) = 0. \tag{8}$$

L'équation (5) représente un hyperboloïde de révolution (à deux nappes), dont l'axe est la droite *isogonale*. L'équation (7) représente un plan perpendiculaire à cette droite, et, par conséquent, parallèle aux plans *cycliques* de l'hyperboloïde. Mais, comme on déduit, des équations (2), (5) :

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1,$$

le plan ne coupe pas l'hyperboloïde.

Quant aux équations (6), (8), elles représentent deux surfaces

S, Σ, telles, que *chacune est située de la même manière, relativement aux trois plans coordonnés.*

On vient de voir que l'équation (8) est une conséquence des équations (5), (6). Donc :

La ligne, suivant laquelle l'hyperboloïde coupe la surface S, *est située sur la surface* Σ (*).

V. *Remarque.* — *Trois quantités* f, g, h *ne peuvent satisfaire, à la fois, aux conditions*

$$fg + gh + hf = 1, \quad f + g + h = -1 \ (^{**}).$$

CCXLV (***). — **Sur la projection stéréographique.**

(*Mars* 1874.)

Théorème I. — *Un ellipsoïde étant donné, on prend pour* TABLEAU *un plan diamétral* AOB, *et, pour* POINT DE VUE V, *l'une des extrémités du diamètre conjugué de* AOB. *Cela posé, les perspectives de toutes les coniques* C, *tracées sur l'ellipsoïde, sont semblables à la section diamétrale* AOB (IV).

Corollaire. — *Si* AOB *est une section circulaire* (auquel cas V est un ombilic), *les perspectives de toutes les coniques* C *sont des cercles* c.

(*) Soit P un plan cyclique de l'hyperboloïde. Il coupe l'angle trièdre des coordonnées positives, suivant un triangle équilatéral; et il coupe les surfaces S, Σ, suivant deux courbes *s*, σ, telles, que *chacune est située de la même manière, relativement aux côtés du triangle.* Cela posé, si M est un point du plan P, commun au parallèle de l'hyperboloïde et à la courbe *c*, M appartient à la courbe σ.

(**) On peut se rappeler qu'à notre point de vue, *les imaginaires ne sont pas des quantités.* (*Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 167).

(***) Tirée des *Comptes rendus.*

(IV) Après l'impression, j'ai appris que ce théorème appartient, en partie, au savant Hachette, mon ancien Professeur.

Théorème II (Mêmes hypothèses que dans le Corollaire). — *Considérons, dans le plan du tableau, un système orthogonal formé d'une infinité de cercles* c *et d'une infinité de cercles* c′ (*) :

1° *les plans* P, *des coniques* C, *dont les perspectives sont les cercles* c, *passent tous par une même droite* D ;

2° *les plans* P′, *des coniques* C′, *dont les perspectives sont les cercles* c′, *passent tous par une même droite* D′ ;

3° *les droites* D, D′ *sont conjuguées, c'est-à-dire que le pôle de chaque plan* P *est situé sur* D′ ; et vice versâ.

Théorème III (Réciproque du précédent). — *Soient* C *les coniques dont les plans passent par une droite* D, *et* C′ *les coniques dont les plans passent par la droite* D′, *conjuguée de* D : *les cercles* c, *perspectives des coniques* C, *et les cercles* c′, *perspectives des coniques* C′, *constituent un système orthogonal.*

Remarques. — I. Le système orthogonal est le plus simple possible quand, les cercles c ayant leurs centres sur l'axe moyen OB, les cercles c' ont les leurs sur le demi-diamètre OD = OB, situé dans le plan principal AOC. Alors les droites D, D′, respectivement parallèles à OB, OD, rencontrent le diamètre OV en des points R, R′. De plus, $OR \cdot OR' = \overline{OV}^2$, absolument comme dans le cas de la sphère.

II. Puisque, à chaque point M, intersection de deux coniques *obliques* (**), correspond un point m, intersection de deux cercles *orthogonaux*, l'ensemble de tous les cercles c, c' (ensemble déterminé par des points fixes, A, B, pris arbitrairement) constitue un nouveau système de coordonnées. Ce système *orthogonal circulaire* pourra, peut-être, s'appliquer à certaines questions relatives à l'ellipsoïde.

(*) *Journal de Liouville*, t. XIX, p. 134.

(**) C'est-à-dire, *se coupant obliquement.* (Mars 1888.)

CCXLVI. — Sur l'Hélice-caténoïdique (*).

(*Août* 1874.)

I. Théorème. — *Soient une chaînette* AC, *située dans le plan* zx, *et une hyperbole équilatère* AH, *située dans le plan* xy (**). *Ces deux courbes ont même axe* OAx, *même sommet* A; *de plus,* Oz *est la directrice de* AC. *Cela posé, la courbe* AMI, *projetée suivant les deux courbes données, est une hélice.*

Les équations de cette courbe sont :

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right), \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Si l'on élimine x, on trouve

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Considérons le cylindre qui contient la chaînette AC et la courbe AMI; soit PM une génératrice de ce cylindre, limitée aux deux courbes. La dernière équation exprime que

$$\mathrm{PM} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Mais, d'après une propriété connue, le second membre représente aussi la longueur de l'arc AP. Donc

$$\mathrm{PM} = arc\,\mathrm{AP}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. Si une hélice-caténoïdique est éclairée par des rayons parallèles, l'*ombre* de cette courbe, sur un certain plan, est une hyperbole équilatère (***).

(*) Réponse (indirecte) à une question proposée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. I, p. 67).

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

(***) N'est-ce point au Professeur Guillery que l'on doit le théorème suivant, attribué parfois à Th. Olivier : *L'ombre de l'hélice ordinaire peut être une cycloïde ?*

CCXLVII. — Un développement de $\dfrac{x}{\sin x}$.

(*Mai* 1874.)

I. On sait que

$$\frac{x}{\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{1+\cos x\sin\alpha}\ (^*); \tag{1}$$

donc

$$\frac{x}{\sin x}=\sum_0^\infty(-1)^n\cos^n x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\alpha\,d\alpha. \tag{2}$$

L'intégrale définie a pour valeur :

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos^n x. \tag{3}$$

Telle est la formule annoncée.

Addition. — (*Mai* 1887.)

II. La somme, développée, est

$$\sqrt{\pi}-\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\cos x+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{1}\cos^2 x-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}\cos^3 x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{1.2}\cos^4 x-\cdots,$$

ou

$$\sqrt{\pi}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos^2 x-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{3}\cos^3 x$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\sqrt{\pi}\cos^4 x-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{2.4}{3.5}\cos^5 x+\cdots$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 595; *Bierens de Haan*, T. 6.

L'égalité (3) devient donc

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{\pi}{1}-\cos x+\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x-\dfrac{2}{3}\cos^2 x+\dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{\pi}{2}\cos^4 x\\ \qquad -\dfrac{2.4}{3.5}\cos^5 x+\cdots;\end{array}\right\}\quad(4)$$

et, lorsque $x=0$:

$$1=\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}-\frac{2.4}{3.5}+\cdots \tag{5}$$

III. Quand $\cos x$ est inférieur à l'unité, les termes de rang *impair*, dans (4), forment une série convergente; et il en est de même pour les termes de rang *pair*. Conséquemment,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{\pi}{2}\left[1+\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\dfrac{1.3}{1.4}\cos^4 x+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cos^6 x+\cdots\right]\\ \qquad -\left[\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x+\dfrac{2.4}{3.5}\cos^5 x+\cdots\right];\end{array}\right\}\quad(6)$$

mais la même *réduction* n'est pas applicable à la série (5) (*).

IV. La démonstration employée dans le paragraphe (I) est peu rigoureuse; mais il serait facile de remédier à ce défaut, en prenant l'expression du *reste :*

$$R_n=\cos^{n+1}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n+1}\alpha\,d\alpha}{1+\cos x\sin\alpha},$$

et en faisant voir que ce reste tend vers zéro, même lorsque $\cos x=1$. Au lieu d'entrer dans ce détail, posons :

$$y=\frac{x}{\sin x},\qquad \cos x=z; \tag{7}$$

de manière que

$$y=\frac{\operatorname{arc}\cos z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\sin z}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{8}$$

(*) Sous le rapport de l'*incommodité*, elle est comparable à l'une de celles que j'ai rencontrées en étudiant la constante G (*Recherches sur la constante* G..., p. 51). De plus, les termes de la série (5) sont les carrés des termes de l'autre.

Tant que z est inférieur à 1,

$$y = \frac{\pi}{2}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}. \qquad (9)$$

Or,

$$\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} = z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2.4}{3.5}z^5 + \cdots \text{ (*)}.$$

Par conséquent,

$$y = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \cdots\right) - \left(z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2.4}{3.5}z^5 + \cdots\right);$$

comme ci-dessus (6). En outre, *en série convergente*,

$$\frac{\arccos z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2} - z + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}z^2 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}z^4 - \cdots;$$

et, *si* $z = 1$:

$$1 = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} - \frac{2.4}{3.5} + \cdots \qquad (5)$$

CCXLVIII. — Sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

(*Mai* 1882.)

I. *Introduction.* — On doit, à Liouville, le théorème suivant :

« *Si parallèlement à la tangente en un point quelconque* M
» *d'une ligne géodésique et à la tangente conjuguée, on conçoit*
» *deux demi-diamètres de l'ellipsoïde, la perpendiculaire* H
» *abaissée de l'extrémité du second de ces demi-diamètres sur le*
» *premier sera constante* (**). »

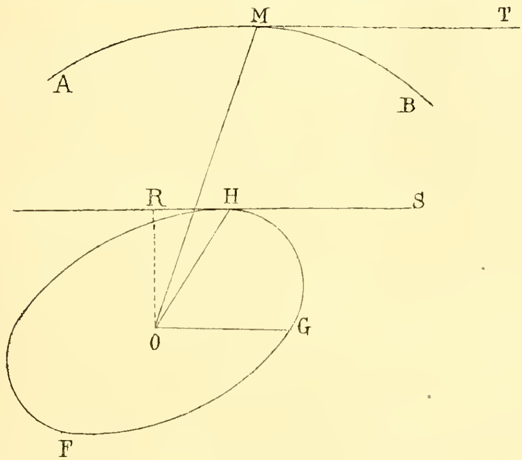
La démonstration géométrique donnée par mon illustre Maître

(*) Voir, par exemple, *Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 14.

(**) *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 22.

me paraît peu satisfaisante (*). En déduisant le théorème de Liouville de celui de Joachimstal (ce qui est naturel et connu), on peut modifier l'énoncé du premier théorème, de manière à rattacher celui-ci, jusqu'à un certain point, à la théorie de la *polhodie*.

II. *Démonstration nouvelle.* — Soit MT la tangente, en M, à une ligne géodésique AMB. Soit FGH la section faite, dans l'ellipsoïde E, par un plan central, parallèle au plan tangent



en M. Soit encore P la distance de ces deux plans. Menons, dans la section centrale, le demi-diamètre OG et la tangente HS, parallèles à MT. Le théorème de Joachimstal consiste en l'équation :

$$OG.P = const. \tag{1}$$

Les demi-diamètres OG, OH, OM sont conjugués deux à deux; donc le parallélipipède, déterminé par ces droites, a un volume constant. Ainsi

$$P.OG.OH \sin GOH = const. \tag{2}$$

(*) Il en est de même de la démonstration publiée, il y a un an, dans les *Nouvelles Annales* (1882, p. 49). Qu'est-ce que le savant auteur appelle *tangentes conjuguées sur la surface?*

Menons OR perpendiculaire à HS : $OR = OH \sin GOH$. L'égalité (2) devient

$$P.OG.R = const. \qquad (3)$$

Comparant avec la relation (1), nous avons donc

$$OR = const.;$$

ce qui est le théorème de Liouville. Mais nous pouvons l'énoncer ainsi :

Soit MT *la tangente, en* M, *à une ligne géodésique* AMB. *Si, par le centre de l'ellipsoïde* E, *on fait passer un plan parallèle au plan tangent en* M, *la tangente* HS *à cette section centrale, parallèle à la tangente* MT, *est à une distance constante du centre.*

III. *Remarques.* — 1° *Le lieu du point* R *est une courbe sphérique.*

2° La droite HS, tangente à l'ellipsoïde E, est tangente à la sphère S ayant O pour centre, et OR pour rayon.

3° Le plan tangent, en H, à l'ellipsoïde, est parallèle au plan GOMT. *Si celui-ci était perpendiculaire à* FGH (*), le premier plan coïnciderait avec celui qui est tangent, en R, à la sphère S; et alors la droite RS serait génératrice d'une développable Σ, circonscrite à l'ellipsoïde et à la sphère. Par suite, le *lieu du point* H *serait une polhodie.* Mais il n'y a pas de lieu du point H, attendu que le mouvement de la droite RS n'est pas déterminé par les conditions du problème.

(*) Cette hypothèse, que rien ne justifie, m'avait paru résulter du texte de Liouville (*loc cit.*). *Naturellement*, elle conduit à des résultats *absurdes*, inutiles à rapporter. (Juin 1887.)

CCXLIX. — Théorème d'Algèbre (*).

(*Mai* 1872.)

1. *Si l'on donne les équations*

$$\frac{ax' + by'}{x - x'} = \frac{bx' + cy'}{y - y'} = z', \tag{1}$$

$$X = b(x - x')^2 - (a - c)(x - x')(y - y') - b(y - y')^2, \tag{2}$$

$$Z = (a + z')(c + z') - b^2 \tag{3}$$

dans lesquelles les inconnues sont

$$x',\ y',\ z',\ X,\ Z;$$

le produit XZ *est indépendant de* x', y', z'.

On tire, des équations (1) :

$$x' = \frac{z'}{Z}\left[(c + z')x - by\right], \quad y' = \frac{z'}{Z}\left[(a + z)y - bx\right]. \tag{4}$$

L'égalité (2) peut être écrite ainsi :

$$Xz'^2 = b(ax' + by')^2 - (a - c)(ax' + by')(bx' + cy') - b(bx' + cy')^2;$$

puis sous cette forme :

$$Xz'^2 = (ac - b^2)\left[bx'^2 - (a - c)x'y' - by'^2\right];$$

puis encore sous celle-ci :

$$Xz'^2 = (ac - b^2)\left[(bx' + cy')x' - (ax' + by')y'\right]. \tag{5}$$

D'après les équations (1), la quantité entre parenthèses égale

$$\left[(y - y')x' - (x - x')y'\right]z';$$

c'est-à-dire

$$(x'y - y'x)z'.$$

(*) Obtenu par une étude sur les *Systèmes triplement orthogonaux* (voir la *Note* CCXXXIII).

Donc

$$Xz' = (ac - b^2)(x'y - y'x). \tag{6}$$

D'ailleurs, par les formules (4),

$$x'y - y'x = \frac{z'}{Z}\left[bx^2 - (a-c)xy - by^2\right].$$

Ainsi

$$XZ = (ac - b^2)\left[bx^2 - (a-c)xy - by^2\right]. \tag{A}$$

Addition. — (*Juin* 1887.)

II. *Interprétation géométrique.* — Au lieu des équations (1), prenons :

$$ax + by + (x - \alpha)z = 0, \quad bx + cy + (y - \beta)z = 0; \tag{7}$$

puis l'équation auxiliaire :

$$\left.\begin{aligned}\left[b(\alpha - x)^2 - (a-c)(\alpha - x)(\beta - y) - b(\beta - y)^2\right]\left[(a+z)(c+z) - b^2\right]\\ = \left[b\alpha^2 - (a-c)\alpha\beta - b\beta^2\right](ac - b^2).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Pour toutes valeurs particulières des paramètres α, β, les équations (7) représentent deux paraboloïdes hyperboliques P, P'; et l'équation (8) appartient à une surface S, du troisième ordre, dont *les lignes de niveau sont des coniques semblables.*

Cela posé, d'après le théorème précédent, si l'on éliminait x et y entre les trois équations, on trouverait une identité. Donc *les trois surfaces se coupent, deux à deux, suivant une même ligne.*

CCL. — Problème trouvé en songe.

(9 *mars* 1886.)

I. *Décomposer une fonction donnée,* f(x, y), *en deux parties* M, N, *de telle sorte que* Mdx + Ndy *soit une différentielle exacte.*

La seconde partie égale $f(x, y) - M$. L'équation du problème est donc

$$M\,dx + \left[f(x, y) - M\right]dy = du. \tag{1}$$

On doit avoir

$$\frac{dM}{dy} = \frac{df}{dx} - \frac{dM}{dx},$$

ou

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} = \frac{df}{dx}; \qquad (2)$$

équation aux dérivées partielles, du premier ordre.

Les équations auxiliaires sont :

$$dx = dy = \frac{dM}{\left(\frac{df}{dx}\right)}; \qquad (3)$$

et leurs intégrales :

$$x = \alpha + y, \qquad M = \int \frac{df}{dx} dx + \beta. \qquad (4)$$

Dans $\frac{df}{dx}$, on doit remplacer x par $\alpha + y$. Ainsi

$$M = \int \frac{df}{dx} dy + \varphi(x - y); \qquad (5)$$

pourvu qu'après l'intégration on suppose α égale x — y.

II. *Exemple :*

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^2;$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 6xy = 3(\alpha + y)^2 - 6(\alpha + y)y;$$

$$\int \frac{df}{dx} dy = (\alpha + y)^3 - 3\alpha y^2 - 2y^3 = x^3 - 3(x - y)y^2 - 2y^3 = x^3 - 3xy^2 + y^3;$$

$$M = x^3 - 3xy^2 + y^3 + \varphi(x - y),$$

$$N = -3x^2y + 3xy^2 + y^2 - y^3 - \varphi(x - y).$$

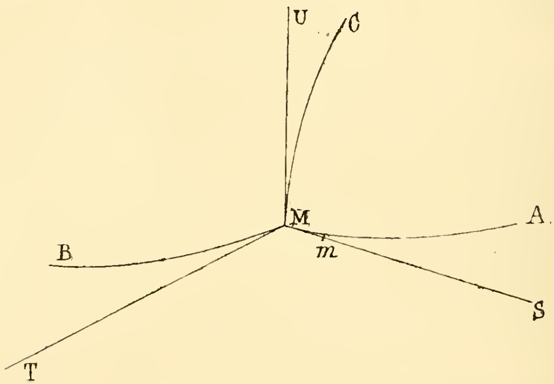
On trouve ensuite :

$$u = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + xy^3 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \psi(x - y).$$

CCLI. — Une propriété des systèmes triplement orthogonaux.

(*Mai* 1872.)

I. Soient trois surfaces appartenant à un pareil système, et se coupant suivant les *lignes de courbure* MA, MB, MC, dont les



tangentes sont MS, MP, MU. Les directions MS, MP sont déterminées par les équations

$$dx = p\,dx + q\,dy, \tag{1}$$

$$\frac{dx + p\,dx}{r\,dx + s\,dy} = \frac{dy + q\,dz}{s\,dx + t\,dy}, \tag{2}$$

dans lesquelles les dérivées se rapportent à la surface AMB.

MS est normale à la surface BMC; donc

$$\frac{dx}{p'} = \frac{dy}{q'} = \frac{dz}{-1}. \tag{3}$$

Cette fois, les dérivées sont relatives à cette seconde surface; et dx, dy, dz sont les projections, sur les axes de coordonnées, d'un élément Mm de MA.

L'angle UMS est droit; donc

$$pp' + qq' + 1 = 0. \tag{4}$$

Au moyen des proportions (3), l'équation (2) devient

$$\frac{rp' + sq'}{p - p'} = \frac{sp' + tp'}{q - q'} = \theta; \tag{5}$$

θ étant une inconnue auxiliaire.

Soit, en outre,

$$\mathrm{P} = [(p'-p)^2 s - (p'-p)(q'-q)(r-t) - (q'-q)^2 s][(r+\theta)(t+\theta) - s^2]. \tag{6}$$

Les équations (5) ont même forme que les équations (1) de la *Note* CCXLIX. De plus, P ne diffère, du produit XZ (*), que par un changement de lettres. Donc, en vertu de la formule (A) (*):

$$\mathrm{P} = [p^2 s - pq(r-t) - q^2 s](rt - s^2). \tag{7}$$

Ainsi, *la fonction* P *dépend, uniquement, de la surface* AMB.

II. On tire, des équations (5) (*) :

$$p' = \theta \frac{(t+\theta)p - qs}{(r+\theta)(t+\theta) - s^2}, \quad q' = \theta \frac{(r+\theta)q - ps}{(r+\theta)(t+\theta) - s^2}; \tag{8}$$

après quoi la substitution dans (4) donne

$$(1 + p^2 + q^2)\theta^2 + [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\theta + rt - s^2 = 0. \tag{9}$$

Si R est le rayon de la section normale, tangente à MA :

$$\left.\begin{aligned}(1+p^2+q^2)^2\frac{1}{\mathrm{R}^2} - [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\mathrm{R}}\\ + rt - s^2 = 0 \ (^{**}).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Donc, abstraction faite du signe, l'auxiliaire θ est donnée par la formule

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\mathrm{R}}. \tag{11}$$

(*) *Loc. cit.*

(**) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée,* de Leroy, p. 314

Autrement dit, $\frac{1}{\theta}$ *est la projection, sur l'axe* Oz, *du rayon principal* R.

III. Si R' est le second rayon principal, on a, par l'équation (10),

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Donc la formule (7) peut être écrite ainsi :

$$P = [p^2 s - pq(r - t) - q^2 s] \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{RR'} \ (^*). \qquad (12)$$

(*) La réduction de la forme (6) aux formes (7) ou (12) doit, sans doute, pouvoir être interprétée géométriquement. J'ai cherché cette interprétation; mais je n'ai rien trouvé de satisfaisant, *même quand les surfaces données sont des* QUARTIQUES *homofocales*. Quand il en est ainsi, on a (*) :

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}, \quad pq = \frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^2},$$

$$r = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2b^2z^5}, \quad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2b^2z^3},$$

$$r - t = \frac{c^4(a^2 - x^2 - b^2 + y^2)}{a^2b^2z^3}, \quad rt - s^2 = \frac{c^6}{a^2b^2z^4}.$$

Donc :

$$p^2s - pq(r - t) - q^2s =$$

$$-\frac{c^8xy}{a^2b^2z^5}\left(\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4}\right) - \frac{c^8xy}{a^4b^4z^5}(a^2 - x^2 - b^2 + y^2) = -\frac{(a^2 - b^2)c^6xy}{a^4b^4z^3};$$

puis

$$P = -\frac{(a^2 - b^2)c^{12}xy}{a^6b^6z^7}.$$

(*) Charles Dupin, *Développements de Géométrie*, p. 203.

CCLII. — Sur la Géométrie de MM. Brocard, Lemoine, Neuberg, de Longchamps, ... (*).

(*Avril* 1886.)

I. Théorème préliminaire. — *Si trois droites* APA', BPB', CPC', *issues des sommets d'un triangle, se coupent en un point* P, *les symétriques de ces droites, relativement aux bissectrices intérieures, se coupent en un point* Q (**).

Appelons γ les angles *égaux* ACC', BCC''.

Dans les triangles ACC', ACC'', BCC'', BCC' :

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin(A+\gamma)}, \quad \frac{AC''}{AC} = \frac{\sin(C-\gamma)}{\sin(B-\gamma)},$$

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{\sin(C-\gamma)}{\sin(A+\gamma)}, \quad \frac{BC''}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin(B+\gamma)}.$$

Donc

$$\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2; \tag{1}$$

relation remarquable (***).

Il en résulte :

$$\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''} \cdot \frac{BA'.BA''}{CA'.CA''} \cdot \frac{CB'.CB''}{AB'.AB''} = 1.$$

(*) La *Nouvelle Géométrie du triangle*, créée, il y a douze ans, par MM. *Brocard* et *Lemoine*, est déjà si féconde et si importante, qu'il est devenu nécessaire d'en écrire l'*histoire*. M. *Émile Vigarié, Élève à l'École des Mines* (Paris), publie en ce moment (juin 1887), dans le *Journal de M. G. de Longchamps*, une *Étude bibliographique et terminologique*, à laquelle nous renvoyons le lecteur.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

(***) Si CMγ est une transversale, passant au centre de gravité M, on peut écrire ainsi l'égalité (1) :

$$\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''} = \frac{A\gamma}{B\gamma};$$

et en déduire d'autres conséquences (*Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 252). (Mars 1888.)

Par hypothèse,

$$AC'.BA'.CB' = BC'.CA'AB'.$$

Conséquemment,

$$AC''.BA''.CB'' = BC''.CA''.AB''. \qquad (2)$$

C Q. F. D.

II. *Remarque.* — On peut dire que les points P, Q sont *associés*. Cela posé : si P est le *centre de gravité*, Q est le *point de Lemoine;* si P est un *point de Brocard*, Q est l'autre *point de Brocard;* etc.

CCLIII. — Problème de Probabilités (*).

(*Novembre* 1884.)

I. *Combien y a-t-il de nombres de* n *chiffres, composés, chacun, de* p *chiffres donnés?* ou encore :

De combien de manières peut-on remplir n *cases données, avec* p *lettres données,* a, b, c, ..., f, g, *chaque arrangement devant contenir les* p *lettres?*

Soit $\varphi(n, p)$ ce nombre de manières. Considérons les arrangements composés de $n-1$ lettres, et contenant, soit les p lettres données, soit seulement $p-1$ de ces lettres.

1° A la droite de chacun des premiers, apportons, successivement, chacune des p lettres $a, b, c, \ldots, f, g$. Nous obtiendrons $p\varphi(n-1, p)$ des arrangements demandés.

2° Parmi les arrangements composés de $n-1$ lettres, il y en a $\varphi(n-1, p-1)$ qui ne contiennent pas a, $\varphi(n-1, p-1)$ qui ne contiennent pas b; etc. A la droite de chacun, écrivons la lettre *manquante :* nous formerons $p\varphi(n-1, p-1)$ nouveaux arrangements, faisant partie de ceux que nous cherchions. L'équation du problème est donc

$$\varphi(n, p) = p\left[\varphi(n-1)p) + \varphi(n-1, p-1)\right] \text{ (**)}. \qquad (1)$$

(*) Extrait d'un *Traité*, inédit.

(**) Dans mon cours à l'Université, j'avais obtenu cette équation (1) au moyen d'un raisonnement *inexact;* et, en conséquence, je la croyais *fausse.* M. *Beaupain*, l'un de mes meilleurs élèves, me communiqua la démonstration précédente.

II. On peut supposer $\varphi(n, 0) = 0$. De plus, il est visible que $\varphi(n, 1) = 1$. Or, dans le *Calcul des différences*, on trouve la formule

$$\Delta^p(o^n) = p\left[\Delta^p(o^{n-1}) + \Delta^{p-1}(o^{n-1})\right], \qquad (2)$$

dont la vérification est facile, et qui a même forme que l'équation (1). On satisfait donc à celle-ci en prenant

$$\varphi(n, p) = \Delta^p(o^n),$$

ou

$$\varphi(n, p) = p^n - \frac{p}{1}(p-1)^n + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^n - \dots \pm \frac{p}{1}(1^n). \qquad (3)$$

III. *Remarque.* — La quantité $\varphi(n, p)$ est le nombre des cas favorables, dans le problème suivant :

Quelle est la probabilité que les p *numéros, contenus dans une urne, sortiront en* n *tirages* (*)?

Le nombre des cas possibles est p^n. En effet, on peut remplacer les n tirages par un seul, effectué au moyen de n urnes (**).

CCLIV. — Quelques décompositions de l'unité (***).

(*Juin* 1886.)

I. Théorème (IV). — *Si* xyz = abc, *on a :*

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \sum \frac{bx}{xy + b(a+x)}, & 1 &= \sum \frac{ay}{xy + a(b+y)},\\
1 &= \sum \frac{ab}{xy + b(a+x)}, & 1 &= \sum \frac{ab}{xy + a(b+y)},\\
1 &= \sum \frac{xy}{xy + b(a+x)}, & 1 &= \sum \frac{xy}{xy + a(b+y)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

(*) A chaque fois, le numéro sorti est remis dans l'urne.

(**) Laplace, *Théorie analytique des Probabilités* (1812), p. 193.

(***) Trouvées en résolvant un problème sur le triangle.

(IV) Ou, plus exactement : *Remarque.*

II. *Application.* — Soient :

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5,$$
$$x = 10, \quad y = 3, \quad r = 2.$$

On doit trouver :

$$\frac{40}{30 + 4.13} + \frac{15}{6 + 5.7} + \frac{6}{20 + 3.7} = 1,$$
$$\frac{9}{30 + 3.7} + \frac{8}{6 + 4.7} + \frac{50}{20 + 5.13} = 1,$$
$$\frac{12}{30 + 3.7} + \frac{20}{6 + 4.7} + \frac{15}{20 + 5.13} = 1,$$
$$\frac{12}{30 + 4.13} + \frac{20}{6 + 5.7} + \frac{15}{20 + 3.7} = 1,$$
$$\frac{30}{30 + 4.13} + \frac{6}{6 + 5.7} + \frac{20}{20 + 3.7} = 1,$$
$$\frac{30}{30 + 3.7} + \frac{6}{6 + 4.7} + \frac{20}{30 + 5.13} = 1;$$

et tous ces résultats sont exacts.

III. *Corollaire.* — *L'équation*

$$(xyz - abc)^2 = 0,$$

peut être écrite sous les six formes (A).

CCLV. — Conséquences du Théorème de Fermat.

(*Septembre* 1886.)

I. Soient p, q deux nombres premiers, impairs et inégaux. *Si* p *ne divise pas* q — 1, on a, par le Théorème de Fermat :

$$(q - 1)^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(p). \tag{1}$$

Mais

$$(q - 1)^{p-1} = q^{p-1} - \frac{p-1}{1} q^{p-2} + \dots - \frac{p-1}{1} q + 1 = \mathfrak{M}(q) + 1.$$

Donc, dans l'égalité (1), le premier membre est divisible par q. Et comme p, q sont premiers entre eux, cette égalité devient :

$$(q-1)^{p-1}-1=\mathfrak{M}(pq). \qquad (A)$$

De même, *si* q *ne divise pas* p — 1 :

$$(p-1)^{q-1}-1=\mathfrak{M}(pq). \qquad (B)$$

Quand les deux conditions ont lieu simultanément :

$$(q-1)^{p-1}-(p-1)^{q-1}=\mathfrak{M}(pq), \qquad (C)$$

ou

$$\left[(q-1)^{\frac{p-1}{2}}+(p-1)^{\frac{q-1}{2}}\right]\left[(q-1)^{\frac{p-1}{2}}-(p-1)^{\frac{q-1}{2}}\right]=\mathfrak{M}(pq). \qquad (D)$$

II. p étant *impair*, $a^{p-1}-1$ est, *algébriquement*, divisible par $a+1$. Donc ce binôme est, *arithmétiquement* aussi, divisible par $a+1$. En conséquence :

p *étant un nombre premier, qui ne divise ni* a *ni* a + 1 :

$$a^{p-1}-1=\mathfrak{M}\left[p(a+1)\right]. \qquad (E)$$

De même : p *étant un nombre premier, qui ne divise ni* a *ni* a — 1 :

$$a^{p-1}-1=\mathfrak{M}\left[p(a-1)\right]. \qquad (F)$$

Enfin, *si le nombre premier*, p, *ne divise ni* a — 1, *ni* a, *ni* a + 1 (*) :

$$a^{p-1}-1=\mathfrak{M}\left[p(a^2-1)\right]. \qquad (G)$$

Soient, par exemple,

$$a=4, \qquad p=7.$$

On doit trouver

$$4^6-1=\mathfrak{M}(105).$$

En effet,

$$4^6-1=65.63=5.13.7.9.$$

(*) Ces trois conditions sont remplies si p surpasse $a+1$.

III. D'après (E) et (F) : *si le nombre premier* p *ne divise pas, à la fois,* q + 1 *et* q — 1 :

$$(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1} = \mathfrak{M}(pq),$$

ou

$$\left[(q+1)^{\frac{p-1}{2}} + (q-1)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[(q+1)^{\frac{p-1}{2}} - (q-1)^{\frac{p-1}{2}}\right] = \mathfrak{M}(pq). \quad \text{(H)}$$

IV. Supposons q *impair*. Alors le premier membre est divisible par 2^{p-1}, nombre premier avec pq. Donc :

$$\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right] = \mathfrak{M}(pq). \quad \text{(K)}$$

V. *Remarques.* — 1° Si p a la forme $4\mu - 1$, le premier facteur égale

$$\left(\frac{q+1}{2}\right)^{2\mu-1} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^{2\mu-1}:$$

il est divisible par q.

2° Si $p = 4\mu + 1$, le second facteur est divisible par q.

VI. Lorsque $q = 3$, l'égalité (K) se réduit à

$$\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) = \mathfrak{M}(3p).$$

Cela posé, d'après un théorème connu (*) :

1° *Si* p $= 8\mu \pm 1$, *le second facteur est divisible par* p ;

2° *Si* p $= 8\mu \pm 3$, *le premier facteur est divisible par* p (**).

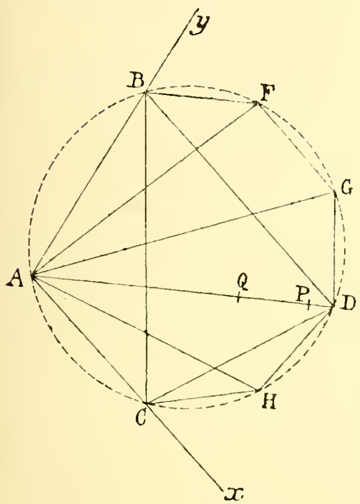
(*) Serret, *Algèbre supérieure,* t. II, p. 109.

(**) Je ne pense pas que, dans le cas général, on puisse, *a priori,* déterminer quel est le facteur divisible par p, même au moyen de la *loi de réciprocité,* de Legendre. (Alors, bien entendu, q doit être supposé *premier.*)

CCLVI. — Systèmes articulés.

(*Avril* 1886.)

I. *Préliminaires.* — Soit BACD un quadrilatère inscrit. Si l'angle BAC est rendu fixe, la diagonale BC est une *droite de longueur constante, glissant entre les côtés de l'angle* xAy. Quant aux côtés, BD, CD, ce sont des cordes dont les longueurs sont données, et qui appartiennent à un cercle mobile, de rayon *constant*. Donc l'*angle* DAx *est constant;* et *le sommet* D *décrit un segment de la droite* DA (*). Les positions extrêmes du point D, savoir : P, Q, sont déterminées par



$$AP = BD, \quad AQ = CD \text{ (**)}.$$

II. Lorsque l'angle A est droit, l'enveloppe de BC est une *hypocycloïde droite.* Dans le cas général, cette enveloppe est une courbe fort compliquée, que nous pouvons appeler *hypocycloïde oblique* (***).

III. Les droites BD, CD ont des longueurs constantes; elles

(*) Théorème connu. Voir, dans mon *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848), une remarquable Note de M. Mannheim.

(**) Quand B vient en A, BD coïncide avec AP; quand C vient en A, CD coïncide avec AQ. Par suite, les points P, Q se confondent, si BD = CD.

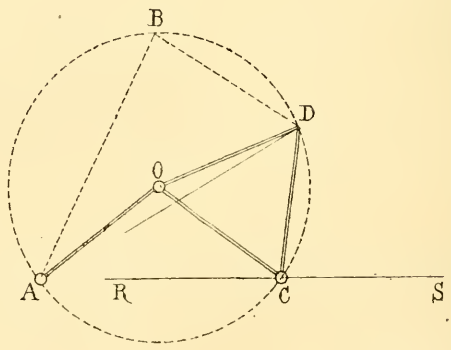
(***) Il n'est pas difficile de prouver que *toute hypocycloïde oblique est parallèle à une certaine hypocycloïde droite.* Voir, dans les *Nouvelles Annales* (1878, p. 321), une autre Note de M. Mannheim.

glissent dans des angles donnés; donc l'enveloppe de chacune est une *hypocycloïde oblique.*

IV. Prenons, sur la circonférence circonscrite au quadrilatère ABCD, des points F, G, H, ... La propriété démontrée pour le point D subsiste pour ces divers points; donc *ils décrivent des droites passant par le sommet* A.

V. De plus, *les cordes* BF, FG, GD, ... *enveloppent des hypocycloïdes obliques.* Et *si ces cordes sont égales, leurs enveloppes le sont.*

VI. *Système articulé.* — O étant le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère ABCD, supposons que les rayons AO, CO, DO soient trois tiges, articulées en A, O, C. Si la corde CD est une quatrième tige, le triangle COD sera invariable de



forme et de grandeur. Par suite, quand l'*anneau* C décrira la droite fixe RS, passant en A, le sommet D décrira également une droite, passant aussi en A; et l'on aura transformé un *mouvement rectiligne alternatif* en un autre *mouvement rectiligne alternatif.*

CCLVII. — Sur des sommes de bi-carrés.

(*Mai* 1886-*Juin* 1887.)

I. D'après l'identité connue :

$$\left.\begin{aligned}&(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4\\&=(2x^2+2y^2+2z^2)^2+(4xy)^2+(4yz)^2+(4zx)^2\ (^*);\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

la somme de quatre bi-carrés peut être égale à la somme de quatre carrés (**).

Soient, par exemple,

$$x=1,\qquad y=2,\qquad z=6.$$

On trouve

$$7^4+5^4+3^4+9^4=82^2+8^2+24^2+48^2,$$

ou

$$2\,401+625+81+6\,561=6\,724+64+576+2\,304=9\,668.$$

II. Une autre identité, à peu près évidente :

$$\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

donne celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}x^4+y^4+z^4+u^4&=\left(\frac{-x^2+y^2+z^2+u^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2+z^2+u^2}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{x^2+y^2-z^2+u^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2+y^2+z^2-u^2}{2}\right)^2;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

au moyen de laquelle on peut résoudre le même problème. Exemple :

$$7^4+5^4+3^4+9^4=33^2+57^2+73^2+1^2$$
$$=1089+3249+5329+1=9668.$$

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 66.

(**) On ne compte pas l'égalité *insignifiante* :

$$a^4+b^4+c^4+d^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2+(d^2)^2.$$

III. Il est visible que

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2. \qquad (3)$$

Ainsi, *la somme de trois bi-carrés,* a^4, b^4, c^4, *est le double d'un carré, lorsque*

$$c = a + b.$$

IV. *Remarque* (*). — Soit

$$\begin{aligned} N = (x^2 + xy + y^2)^2 + (x'^2 + x'y' + y'^2)^2 \\ + (x''^2 + x''y'' + y''^2)^2 + (x'''^2 + x'''y''' + y'''^2)^2. \end{aligned}$$

Alors 2N *est la somme de douze bi-carrés.*

En particulier, *si*

$$\begin{aligned} N = (3x^2 + 3x + 1)^2 + (3x^2 + 9x + 7)^2 \\ + (3x^2 + 15x + 19)^2 + (3x^2 + 21x + 37)^2, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 2N = x^4 + 2(x + 1)^4 + 2(x + 2)^4 + 2(x + 3)^4 + (x + 4)^4 \\ + (2x + 1)^4 + (2x + 3)^4 + (2x + 5)^4 + (2x + 7)^4. \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} 2[7^2 + 19^2 + 37^2 + 61^2] = 1^4 + 2.2^4 + 2.3^4 + 2\ 4^4 \\ + 5^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4, \end{aligned}$$

ou

$$2.5500 = 11\,000.$$

V. *Autres identités.*

$$\left.\begin{aligned} (x - y)^3(x - z) + (y - z)^3(y - x) + (z - x)^3(z - y) \\ = (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2\,(^{**}) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 + (x + y + z)^4 = (x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy)^2 \\ + \big[(x + z)(y + x)\big]^2 + \big[(y + x)(z + y)\big]^2 + \big[(z + y)(x + z)\big]^2. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(*) Peut-elle être utilisée pour la démonstration du théorème empirique de Waring?

(**) Il en résulte que l'*équation*

$$(x - y)^3(x - z) + (y - z)^3(y - x) + (z - x)^3(z - y) = 0$$

représente la droite isogonale.

CCLVIII. — Quelques sommations (*).

(*Juin* 1887.)

IX. Lorsque $c = 1$, le second membre de l'égalité (1) (**) se réduit à

$$\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{ab\Gamma(a+b+n+1)}.$$

En outre,

$$C_{n,p}.\Gamma(1+p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(q+1)}.$$

Donc cette égalité (1) devient

$$\sum_{q=0}^{q=n} \frac{\Gamma(a+q)\Gamma(b+q)}{\Gamma(a+b+1+q)\Gamma(q+1)} = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{ab\Gamma(a+b+n+1)\Gamma(n+1)}. \quad (4)$$

Si, dans celle-ci, on supprime les facteurs communs, et qu'on développe complètement le premier membre, elle prend cette forme remarquable :

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{ab}{(a+b+1)\Gamma(2)} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)\Gamma(3)} + \cdots \\ &+ \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{(a+b+1)(a+b+2)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(b+1)(b+2)(b+n)}{(a+b+1)(a+b+2)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

X. *Remarque.* — Dans la série de Gauss :

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \text{ (***)},$$

supposons :

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = a+b+1, \quad x = 1.$$

(*) Suite de la *Note* CCXXXVII.

(**) Page 65.

(***) *Sur quelques intégrales définies*, p. 14.

Elle se change en

$$1+\frac{ab}{(a+b+1)\Gamma(2)}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)\Gamma(3)}+\cdots \tag{6}$$

Ainsi, *le premier membre de l'égalité* (5) *est la somme des* $n+1$ *premiers termes de la série* (6).

XI. *Étude d'une série.* — Pour plus de simplicité, faisons abstraction du premier terme, et posons :

$$\left.\begin{array}{l} u_1=\dfrac{ab}{(a+b+1)\Gamma(2)}, \quad u_2=\dfrac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)\Gamma(3)}, \cdots \\ u_n=\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{(a+b+1)(a+b+2)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}, \end{array}\right\} \tag{7}$$

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n. \tag{8}$$

D'après l'égalité (5) :

$$1+S_n=\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{(a+b+1)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}. \tag{9}$$

Donc

$$\frac{1+S_n}{u_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{ab};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$S_n=-1+\frac{(a+n)(b+n)}{ab}u_n. \tag{10}$$

Ainsi, *la somme* S_n *s'exprime, fort simplement, au moyen de* u_n.

XII. *Suite.* — On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(a+b+n+1)}. \tag{11}$$

De là résulte que *la série est toujours convergente* (*). En effet,

$$lim\left[(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-n\right]=lim\,\frac{ab-n}{a+b+n+1}=-1 \text{ (**)}.$$

(*) Les constantes a, b sont supposées *positives*.

(**) *Traité élémentaire des séries*, p. 23.

Par suite,

$$lim.\,S_n = S = -1 + \frac{1}{ab}\, lim\left[(a+n)(b+n)u_n\right]. \qquad (12)$$

Pour évaluer cette limite, nous nous servirons d'une proposition auxiliaire.

XIII. Théorème. — *Soient quatre nombres* a, b, a', b', *tels que* a + b = a' + b', *et soit* x *une variable indéfiniment croissante. On a*

$$lim\cdot\frac{\Gamma(a+x)\Gamma(b+x)}{\Gamma(a'+x)\Gamma(b'+x)} = 1. \qquad (13)$$

Posons

$$y = \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(b+x)}{\Gamma(a'+x)\Gamma(b'+x)};$$

ou, ce qui revient au même :

$$y = \frac{B(a+x,\ b+x)}{B(a'+x,\ b'+x)}.$$

Supposons que b' soit le plus grand des quatre nombres donnés. Nous aurons $b' - a = b - a' > 0$.

D'après le théorème d'Euler, exprimé par l'équation

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = \frac{B(p,m+q)}{B(q,m+p)}\ (*),$$

$$y = \frac{B(a+x,\ b'-a)}{B(a'+x,\ b'-a)};$$

(*) Tome I, page 136. En passant, je ferai observer que cette équation revient à celle-ci :

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(m)}{\Gamma(p+m)}\frac{\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(m)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(m+p)},$$

laquelle est évidente.

ou, par une formule connue (*) :

$$y = 1 - \frac{b'-a}{1}\frac{a-a'}{a+x} + \frac{(b'-a)(b'-a-1)}{1.2}\frac{(a-a')(a-a'+1)}{(a+x)(a'+x+1)} + \cdots$$

Donc

$$lim\, y = 1.$$

XIV. Revenons à la formule (12). On a

$$(a+n)(b+n)u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)b(b+1)\cdots(b+n)}{(a+b+1)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)\Gamma(n+1)},$$

et

$$(a+1)+(b+1) = (a+b+1)+1.$$

Donc, en vertu du théorème précédent,

$$lim\left[(a+n)(b+n)u_n\right] = \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}; \tag{14}$$

puis

$$S = -1 + \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}. \tag{15}$$

XV. *Remarque. — Si* a, b *sont des nombres entiers, ou, si l'un des deux étant entier, l'autre est fractionnaire, la limite* S *est commensurable.* Par exemple, pour $a = b = 1$:

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{(1.2)^2}{1.2\times 3.4} + \frac{(1.2.3)^2}{1.2.3\times 3.4.5} + \frac{(1.2.3.4)^2}{1.2.3.4\times 3\ 4.5.6} + \cdots = 1,$$

ou

$$\frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.4} + \frac{1.2.3}{3.4.5} + \cdots = 1.$$

(*) *Loc. cit*

De même, si $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{8} + \frac{2.5}{8.11} + \frac{2.5.8}{8.11.14} + \cdots = \frac{2}{3},$$

et

$$\frac{2}{8} + \frac{2.5}{8.11} + \frac{2.5.8}{8.11.14} = -1 + 22 \cdot \frac{2\ 5.8}{8.11\ 14}.$$

XVI. *Une équation aux différences.* — A cause de

$$(a + n)(b + n)u_n = (n + 1)(a + b + n + 1)u_{n+1}, \qquad (11)$$

l'égalité (10) peut être écrite ainsi :

$$ab(1 + S_n) = (n + 1)(a + b + n + 1)u_{n+1}.$$

Mais

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \Delta S_n = \Delta(1 + S_n).$$

Donc, si l'on remplace $1 + S_n$ par Z_n :

$$abZ_n = (n + 1)(a + b + n + 1)\Delta Z_n, \qquad (16)$$

équation aux différences finies. En vertu de la formule (9), elle est vérifiée par

$$Z_n = \frac{(a + 1) \cdots (a + n)(b + 1) \cdots (b + n)}{(a + b + 1) \cdots (a + b + n)\Gamma(n + 1)}. \qquad (17)$$

CCLIX. — Sur le Postulatum de Bertrand.

(*Juin* 1886.)

I. Lemme. — *Selon que* $\left(\frac{2n}{a}\right)$ *est pair ou impair,*

$$\left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right),$$

égale zéro ou un (*).

II. Considérons le nombre entier

$$\varphi(n) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{1.2\ldots n} \text{ (**)} \tag{1}$$

Soit p un nombre premier qui divise le dénominateur, et soit p^α la plus grande puissance de p qui divise $\varphi(n)$.

Comme

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2},$$

on a

$$\alpha = \left(\frac{2n}{p}\right) + \left(\frac{2n}{p^2}\right) + \cdots - 2\left[\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p^2}\right) + \cdots\right],$$

ou

$$\alpha = \left[\left(\frac{2n}{p}\right) - 2\left(\frac{n}{p}\right)\right] + \left[\left(\frac{2n}{p^2}\right) - 2\left(\frac{n}{p^2}\right)\right] + \left[\left(\frac{2n}{p^3}\right) - 2\left(\frac{n}{p^3}\right)\right] + \cdots \tag{2}$$

D'après le Lemme, *si* l *est le nombre de ceux, des quotients entiers*

$$\left(\frac{2n}{p}\right), \quad \left(\frac{2n}{p^2}\right), \quad \left(\frac{2n}{p^3}\right), \ldots,$$

qui sont impairs,

$$\alpha = l. \tag{3}$$

(*) *Note* LXXXI, § 2.

(**) $\varphi(n) = C_{2n,n} = (n+1)T_{n+2}$.
Voir *Note* CVII.

III. *Exemple*, n = 15. — Les valeurs de p sont 2, 3, 5, 7, 11, 13. Pour $p = 2$, les quotients impairs sont

$$\left(\frac{30}{2}\right), \quad \left(\frac{30}{4}\right), \quad \left(\frac{30}{8}\right), \quad \left(\frac{30}{16}\right) : \alpha = 4.$$

Pour $p = 3$, les quotients impairs sont

$$\left(\frac{30}{9}\right), \quad \left(\frac{30}{27}\right) : \alpha = 2.$$

Pour $p = 5$, le seul quotient impair est

$$\left(\frac{30}{25}\right) : \alpha = 1.$$

Pour $p = 7, 11, 13$, aucun quotient n'est impair.

Donc

$$\varphi(15) = 2^4.3^2.5.\mathrm{E},$$

E *étant un nombre entier, composé des facteurs premiers compris entre* 16 *et* 30.

En effet,

$$\varphi(15) = \frac{16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}$$
$$= \frac{17.2.19.22.23.25.2.27.28.29}{11.14.15}$$
$$= 17.2.19.2.23.5.2.9.2.29 = 2^4.3^2.5 \times 17.19.23.29.$$

IV. Changeons de notation, et appelons $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi$ les nombres premiers qui ne surpassent pas n (*).

Soit a le nombre de ceux, des quotients $\left(\frac{2n}{\alpha}\right), \left(\frac{2n}{\alpha^2}\right), \ldots$, qui sont *impairs;*

Soit b le nombre de ceux, des quotients $\left(\frac{2n}{\beta}\right), \left(\frac{2n}{\beta^2}\right), \ldots$, qui sont *impairs;*

. . . .

(*) $\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 5, \ldots$

Nous aurons, par ce qui précède,

$$\varphi(n) = \alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \pi^p \mathrm{E}, \tag{A}$$

E *étant un nombre entier, composé des facteurs premiers compris entre* n + 1 *et* 2n, *s'il en existe.*

V. *Postulatum de Bertrand.* — D'après M. Bertrand, *entre* n *et* 2n, *il y a, au moins, un nombre premier* (*). Autrement dit, *le nombre* E *surpasse* 1 (**). Ce célèbre *postulatum* équivaut donc à l'inégalité

$$\varphi(n) > \alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \pi^p. \tag{B}$$

VI. *Remarque.* — La Note citée contient (p. 8) cette autre *traduction* du *Postulatum :*

Le nombre entier n, étant supposé compris entre 2^k et $2^{k+2}-1$, soient $\beta, \gamma, \delta, \ldots, \pi$ les nombres premiers impairs, non supérieurs à n. Soient en outre :

l_1, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right), \left(\frac{2n}{\gamma}\right), \ldots,$ *qui sont impairs ;*

l_2, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right), \left(\frac{2n}{\beta\delta}\right), \ldots,$ *qui sont impairs ;*

. . . .

Si, entre n + 1 *et* 2n, *il y a des nombres premiers, on a*

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \ldots > 0;$$

et réciproquement. De plus, le premier membre de cette inégalité est la *quotité* de ces nombres premiers.

Soit, par exemple, $n = 15$; et, par conséquent, $k = 3$.

On a

$$\beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7, \quad \varepsilon = 11, \quad \pi = 13;$$

puis les quotients

$$\left(\frac{30}{3}\right) = 10, \quad \left(\frac{30}{5}\right) = 6, \quad \left(\frac{30}{7}\right) = 4, \quad \left(\frac{30}{11}\right) = 2, \quad \left(\frac{30}{13}\right) = 2,$$
$$\left(\frac{30}{15}\right) = 2, \quad \left(\frac{30}{21}\right) = 1, \quad \left(\frac{30}{35}\right) = 0.$$

(*) Voir les *Notes* LXXXI et CCXXV.

(**) Si n surpasse 1, E surpasse n.

Tous ces quotients sont *pairs,* excepté $\left(\frac{30}{21}\right)$. Donc

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 0, \; \ldots,$$

puis

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots = 4.$$

Effectivement, entre 16 et 30, il y a *quatre* nombres premiers; savoir : 17, 19, 23, 29.

CCLX. — Théorème d'Arithmétique.

(*Juillet* 1886.)

Nous avons cité, fréquemment, la propriété suivante, énoncée dans le *Cours d'Analyse* (*) :

a, b *étant deux nombres entiers, premiers entre eux :*

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (a + b - 1)}{1 \,.\, 2 \ldots a \times 1 \,.\, 2 \ldots b} = \textit{entier.}$$

En voici une autre, du même genre, qui nous paraît curieuse :

n *étant premier avec* 6, *on a :*

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \overline{2n - 4}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \overline{n - 2}} = \textit{entier.} \tag{A}$$

Pour la démontrer, il suffit de vérifier la relation

$$\left(\frac{2n - 4}{p}\right) \overline{\overline{>}} \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n - 2}{p}\right); \tag{1}$$

p étant un nombre premier (**).

1° Soit $p = 2$. A cause de $n = 2n' + 1$, la relation (1) devient

$$\left(\frac{4n' - 2}{2}\right) \overline{\overline{>}} \left(\frac{2n' + 1}{2}\right) + \left(\frac{2n' - 2}{2}\right),$$

(*) Page 48.

(**) En effet, de

$$A \overline{\overline{>}} B + C,$$

on conclut

$$\left(\frac{A}{p^x}\right) \overline{\overline{>}} \left(\frac{B}{p^x}\right) + \left(\frac{C}{p^x}\right).$$

ou

$$2n' - 1 \gtreqless n' + n' - 1;$$

ce qui est exact.

2° Soit $p = 3$. On peut avoir $n = 6n' \pm 1$.

Dans le premier cas, on trouve

$$4n' - 1 \gtreqless (2n') + (2n' - 1);$$

et, dans le second,

$$4n' - 2 \gtreqless (2n' - 1) + (2n' - 1).$$

3° Supposons $p > 3$.

Si $\left(\frac{2n-4}{p}\right)$ est *impair*, on a (*)

$$\left(\frac{2n-4}{p}\right) = 2\left(\frac{n-2}{p}\right) + 1;$$

donc la relation (1) se réduit à

$$\left(\frac{n-2}{p}\right) + 1 \gtreqless \left(\frac{n}{p}\right);$$

et celle-ci est évidente.

Si $\left(\frac{2n-4}{p}\right)$ est *pair*, posons

$$2n - 4 = 2ap + 2b,$$

ou

$$n - 2 = ap + b.$$

La même relation (1) devient

$$2a \gtreqless \left(\frac{ap + b + 2}{p}\right) + a,$$

ou

$$0 = \left(\frac{b+2}{p}\right).$$

Or, cette équation est une conséquence des inégalités

$$b < \frac{p}{2}, \quad 2 < \frac{p}{2}.$$

(*) *Note* CCLIX.

CCLXI. — Sur les Nombres de Segner (*).

(*Août* 1886.)

XVIII. *Relation entre les Nombres de Segner et les Nombres de Catalan* (**).

Le petit Mémoire intitulé: *Sur un développement de l'intégrale elliptique, de première espèce* (***), contient les égalités suivantes:

$$\frac{P_n}{2^{n+2}}=(2n-1)^2T_{n+1}^2-4\frac{n-1}{1}(2n-3)^2T_n^2+4^2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2n-5)^2T_{n-1}^2-\cdots,$$

$$n^2P_n-8(3n^2-3n+1)P_{n-1}+128(n-1)^2P_{n-2}=0 \text{ (IV)}.$$

On en conclut, évidemment, une *équation du premier degré, entre les carrés des Nombres de Segner*. Elle paraît devoir être fort compliquée.

XIX. *Propriétés nouvelles* (V). — 1° *Soit* i *le nombre des termes impairs compris dans la suite :*

$$\left(\frac{n-2}{1}\right),\quad \left(\frac{n-2}{2}\right),\quad \left(\frac{n-2}{4}\right),\quad \left(\frac{n-2}{8}\right),\ \ldots;$$

selon que n *est pair ou impair,* T_n *est ou n'est pas divisible par* 2^i (VI).

(*) Complément à la *Note* CVII. (Congrès de Nancy.)

(**) M. l'Amiral de Jonquières m'a fait l'honneur de proposer cette dénomination, qui n'a point prévalu. Je l'emploie pour abréger.

(***) *Académie de Belgique,* 10 octobre 1885.

(IV) Les nombres *entiers* P_1, P_2, P_3, ..., que M. de Jonquières a bien voulu calculer, ont les valeurs suivantes :

$$P_1=8,\quad P_2=80,\quad P_3=896,\quad P_4=10\,816,\ \ldots$$

(V) Addition au paragraphe XVII.

(VI) Cette proposition résulte de l'égalité

$$nT_{n+1}=C_{2n-2,\,n-1}, \tag{7}$$

2° *Lorsque*

$$n = 3\mu + 1, \qquad T_n = \mathcal{M}\left(\frac{2n-5}{3}\right).$$

Dans les cas contraires,

$$T_n = \mathcal{M}(2n-5).$$

On sait, et il est facile de prouver, que

$$C_{2n,\,n} = \mathcal{M}(2n-1).$$

Or,

$$C_{2n,\,n} = (n+1)\,T_{n+2}.$$

Donc

$$(n+1)\,T_{n+2} = \mathcal{M}(2n-1),$$

ou

$$(n-1)\,T_n = \mathcal{M}(2n-5). \tag{37}$$

Cela posé : si $n = 3\mu + 1$, cette égalité se réduit à

$$\mu T_n = \mathcal{M}(2\mu - 1).$$

Et comme μ et $2\mu - 1$ sont premiers entre eux, on a

$$T_n = \mathcal{M}(2\mu - 1) = \mathcal{M}\left(\frac{2n-5}{3}\right).$$

Soit $n = 3\mu$. Alors

$$(3\mu - 1)\,T_n = \mathcal{M}(6\mu - 5).$$

combinée avec le théorème suivant :

s *étant le nombre des termes impairs compris dans la suite*

$$\left(\frac{n}{1}\right),\quad \left(\frac{n}{2}\right),\quad \left(\frac{n}{4}\right),\quad \left(\frac{n}{8}\right),$$

$C_{2n,n}$ *est divisible par* 2^s, *et le quotient est impair* (*Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 65). Ajoutons que :

1° *Si* n *est impair et égal à* $2^\alpha n' + 1$, $i - \alpha$ *est positif;* 2° T_n *est divisible par* $2^{i-\alpha}$. Enfin, d'après la relation (7) et une propriété démontrée : *Si* n *est premier avec* 6,

$$C_{2n-4,\,n-2} = \mathcal{M}(n^2 - n).$$

Mais, évidemment, $3\mu - 1$ et $6\mu - 5$ sont premiers entre eux; donc

$$T_n = \mathfrak{M}(6\mu - 5) = \mathfrak{M}(2n - 5).$$

Si $n = 3\mu - 1$, on trouve, avec la même facilité,

$$T_n = \mathfrak{M}(6\mu - 7) = \mathfrak{M}(2n - 5).$$

3° *Dans la suite* $T_4, T_5, \ldots, T_n, T_{n+1}, \ldots$, *deux termes consécutifs ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers.*

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le Lemme suivant, à peu près évident :

Si deux fractions équivalentes ont leurs dénominateurs premiers entre eux :

1° *Ces fractions se réduisent à un nombre entier;*

2° *Leurs numérateurs ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers.*

Ceci admis, prenons l'égalité (2) (*), mise sous la forme

$$\frac{T_{n+1}}{4n - 6} = \frac{T_n}{n}. \qquad (38)$$

Si n est premier avec 6, les dénominateurs sont premiers entre eux; donc T_n et T_{n+1} *diffèrent par les facteurs premiers de* n *et de* 4n — 6 (**).

Soit $n = 2^\alpha 3^\beta n'$, n' étant premier avec 6. L'égalité (38) devient, si l'on suppose α et β différents de zéro :

$$\frac{T_{n+1}}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}n' - 1} = \frac{T_n}{2^{\alpha-1}3^{\beta-1}n'};$$

et l'on retombe sur le premier cas.

(*) *Note* CVII.

(**) Soit, par exemple, $n = 13$, ou $4n - 6 = 46$. On a

$$T_{13} = 2.7.13.17.19, \quad T_{14} = 2^2.7.17.19.23,$$

conformément à l'énoncé.

XX. *Groupes relatifs à un nombre premier.* — Soit, comme ci-dessus (XVII, 3°), p un nombre premier, supérieur à 5. On a vu que :

Si T_n *est divisible par* p, *sans que* T_{n-1} *le soit,* p *divise* $2n - 5$.

Les termes

$$T_{\frac{p+5}{2}}, \quad T_{\frac{p+7}{2}}, \ldots, T_p,$$

tous divisibles par p, constituent ce que l'on peut appeler : *le premier groupe relatif au nombre* p.

Après $2n - 5 = p$, on peut prendre

$$2n - 5 = 3p, \quad 2n - 5 = 5p, \ldots,$$

ou

$$n = \frac{3p + 5}{2}. \quad n = \frac{5p + 5}{2}, \quad n = \frac{7p + 5}{2}, \ldots$$

De ces valeurs résultent une infinité d'autres groupes relatifs à p ; savoir :

$$T_{\frac{3p+5}{2}}, \quad T_{\frac{3p+7}{2}}, \ldots, T_{2p};$$
$$T_{\frac{5p+5}{2}}, \quad T_{\frac{5p+5}{2}}, \ldots, T_{3p};$$
$$T_{\frac{7p+5}{2}}, \quad T_{\frac{7p+7}{2}}, \ldots, T_{4p};$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Les Nombres de Segner, compris dans ces groupes, sont les seuls qui soient divisibles par p (*).

Cela posé :

Si T_n appartient au premier groupe, n est compris entre $\frac{p+5}{2}$ et p, inclusivement;

Si T_n appartient au deuxième groupe, n est compris entre $\frac{3p+5}{2}$ et $2p$, inclusivement ;

Si T_n appartient au troisième groupe, n est compris entre $\frac{5p+5}{2}$ et $3p$, inclusivement;

. . . .

(*) On reconnaît aisément que :

1° Les groupes n'*empiètent* pas les uns sur les autres ;

2° T_{p+1}, T_{2p+1}, T_{3p+1}, ... *ne sont pas divisibles par* p.

Les valeurs de p sont ainsi déterminées par les relations suivantes :

$$n \leqq p \leqq 2n - 5,$$

$$\frac{n}{2} \leqq p \leqq \frac{2n-5}{3},$$

$$\frac{n}{3} \leqq p \leqq \frac{2n-5}{5},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

De plus, *tous les nombres premiers*, p, *qui y satisfont, divisent* T_n.

Soit, par exemple, $n = 23$, auquel cas :

$$23 \leqq p \leqq 41, \qquad 11 < p < 14;$$

et, par conséquent,

$$p = 23, \quad p = 29, \quad p = 31, \quad p = 37, \quad p = 41, \quad p = 13.$$

En effet, T_{23} *appartient au premier groupe relatif à* 23, 29, 31, 37, 41, *et au deuxième groupe relatif à* 13.

XXI. *Postulatum.* — Soit p un nombre premier, supérieur à n. *S'il divise* T_n, on a

$$n < p \leqq 2n - 5;$$

car les relations

$$p < \frac{2n-5}{3}, \quad p < \frac{2n-5}{5}, \ldots$$

sont impossibles.

On est donc conduit à la proposition suivante qui ne diffère pas, au fond, du célèbre *postulatum* de M. Bertrand (*) :

Entre un nombre entier; supérieur à 5, et son double diminué de 5, il y a, au moins, un nombre premier (**).

(*) Voir la *Note* CCLIX.

(**) Très probablement, la démonstration rigoureuse doit être fort simple; mais, jusqu'à présent, je n'ai pu la trouver.

CCLXII. — Lettre à M. De Tilly.

Cher et savant Confrère,

Savez-vous, en effet, intégrer

$$\frac{z^{(p)}}{z} = \mathrm{A}x^m, \tag{1}$$

m étant *quelconque?* S'il en est ainsi, la théorie des équations linéaires vous doit un progrès considérable, et je me reproche de n'avoir pas étudié votre méthode. Rappelez-vous que Liouville a cité, *avec éloges,* le procédé au moyen duquel Kummer intégrait, *péniblement,* l'équation

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = x^2 y. \tag{2}$$

Quant à l'équation

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = xy, \tag{3}$$

encore plus simple que la précédente, voici ce que je trouve dans mes notes de mai 1884, et que j'ai donné à mes élèves, *in illo tempore.*

Soit θ_1 une racine *primitive* de $\theta^m - 1 = 0$. Une intégrale particulière est (sauf erreur) :

$$y_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^m}{m}} \left(e^{\alpha x} + e^{\alpha\theta_1 x} + \cdots + e^{\alpha\theta_1^{m-1} x}\right) d\alpha. \tag{4}$$

Ainsi, l'intégrale générale est une *somme de* m — 1 *intégrales définies,* respectivement multipliées par des constantes. Avez-vous la valeur de y, au moins dans eertains cas, sous forme finie? Alors, voilà une vraie *fabrique* d'intégrales!

Soit $m = 2$. Par *ma* (?) méthode,

$$y = \mathrm{A}\int^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})\, d\alpha. \tag{5}$$

Mais il est évident (et *archi*-connu) que :

$$y = Ce^{\frac{\alpha^2}{2}}. \tag{6}$$

On doit donc avoir

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})d\alpha = ke^{\frac{x^2}{2}}. \tag{7}$$

Pour déterminer la *constante* k, je suppose $x = 0$:

$$k = 2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha = \sqrt{2\pi}.$$

En conséquence :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})d\alpha = \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{x^2}{2}}; \tag{8}$$

formule probablement connue (*).

Revenant à l'équation (2), je trouve, comme intégrale *particulière* (toujours sauf erreur de calcul) :

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \\ \displaystyle\int_0^\infty udue^{-\frac{u^{m+1}}{m+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^{m+1}}{m+1}}\left(e^{\alpha ux} + e^{\theta_1 \alpha ux} + \cdots + e^{\theta_1^m \alpha ux}\right)d\alpha; \end{array}\right\} \tag{9}$$

θ_1 étant une racine primitive de $\theta^{m+1} - 1 = 0$.

Je désire, mon cher Confrère, que cette lettre soit de nature à vous intéresser. Puissiez-vous en tirer quelque chose!

Salut affectueux.

E. C.

Spa, 5 juillet 1886.

(*) Bien entendu, je n'ai pas, ici, les Tables de Bierens

CCLXIII. — Sur l'équation $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(*Mai* 1885.)

I. *Une solution.* — Si p désigne un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, on peut prendre $y^2 + z^2 = p$ (*). De plus, la condition $(u + x)(u - x) = p$ donne

$$u + x = p, \quad u - x = 1;$$

puis

$$u = 2\mu + 1, \quad x = 2\mu.$$

Soit, comme application, $p = 73 = 64 + 9$, auquel cas $\mu = 18$. La proposée est vérifiée par

$$u = 37, \quad x = 36, \quad y = 8, \quad z = 3 \text{ (**)}.$$

II. *Autre solution.* — D'après les formules du *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (***), on satisfait, à l'équation

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{1}$$

par les valeurs suivantes :

$$x = 2\alpha\gamma, \quad y = 2\beta\gamma, \quad z = -\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2, \quad u = \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2; \tag{2}$$

α, β, γ étant des nombres entiers quelconques.

En effet, la relation

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = 4\alpha^2\gamma^2 + 4\beta^2\gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 \tag{3}$$

est identique.

(*) D'après le beau théorème de Lagrange : *tout nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, est la somme de deux carrés.*

(**) Comme il arrive souvent en Analyse indéterminée, ce procédé simple, qui donne une *infinité de solutions*, ne donne pas *toutes les solutions* ; par exemple celle-ci :

$$441^2 = 209^2 + 256^2 + 292^2.$$

(***) Pages 10 et suivantes. Ces formules s'appliquent à l'équation générale

$$u^n = x^2 + y^2 + z^2.$$

III. *Remarque.* — Pourvu que α, β, γ soient différents de zéro, et que l'on n'ait pas $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, *le nombre* u², *somme de trois carrés, sera le carré d'une somme de trois carrés* (*).

IV. *Généralités.* — 1° On suppose les nombres x, y, z, u premiers entre eux (**); alors, évidemment, x, y, z *sont premiers entre eux;* x, y, u *sont premiers entre eux;* etc.

2° La somme *algébrique* de trois nombres *impairs* est *impaire; donc il est impossible qu'un seul des quatre nombres* x, y, z, u *soit pair.*

3° Si y *et* z *sont pairs,* u *et* x *sont impairs.*

4° Supposons y *et* z, *impairs.* Alors

$$y^2 + z^2 = u^2 - x^2 = \mathfrak{M}(4) + 2.$$

Des facteurs $u + x$, $u - x$, l'un est *simplement pair,* et l'autre, *impair*; donc u et x ne sauraient être entiers. Conséquemment : *des trois nombres* x, y, z, *un seul est impair.*

5° Relativement au diviseur 3, on établit, avec la même facilité, les propriétés suivantes :

Un, au moins, des nombres x, y, z, u *est divisible par* 3; *si* u *est divisible par* 3, *aucun des nombres* x, y, z *n'est divisible par* 3.

V. *Autre solution.* — A cause de

$$(u + x)(u - x) = y^2 + z^2,$$

si l'on suppose y *et* z *premiers entre eux,* on a, par un théorème connu :

$$u + x = a^2 + b^2, \qquad u - x = c^2 + d^2;$$

puis

$$u = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \quad x = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2),$$

$$y = ac \pm bd, \quad z = ad \mp bc;$$

(*) Dans le Mémoire cité, j'ai démontré ce théorème : *Si* u *est une somme de trois carrés,* u^n *est une somme de trois carrés.*

(**) Afin de n'avoir à considérer que les solutions *primitives.*

ou, ce qui revient au même :

$$\left.\begin{array}{ll} u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, & x = a^2 + b^2 - c^2 - d^2, \\ y = 2(ac \pm bd), & z = 2(ad \mp bc). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

De ces valeurs résulte l'identité connue :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = (a+b^2-c^2-d^2)^2 + 4(ac \pm bd)^2 + 4(ad \mp bc)^2 \text{ (*)}; \qquad (5)$$

d'où nous aurions pu partir.

VI. *Remarques.* — On a vu (IV, 4°) que : *des trois nombres* x, y, z, *un seul est impair.* Conséquemment, dans l'application des formules (4), on devra prendre a, b, c, d de manière que $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ soit *impair.* En d'autres termes : *parmi les indéterminées* a, b, c, d, *une seule doit être paire, ou une seule doit être impaire.*

2° Si l'on admettait que, *des trois nombres* x, y, z, *deux, au moins, sont premiers entre eux,* les formules (4) donneraient, je pense, toutes les solutions de l'équation (1).

CCLXIV. — Nouvelles propriétés des fonctions X_n (**).

(*Janvier* 1887.)

I. *Première propriété.* — Soit

$$A_p = 1 - \frac{2}{3} C_{p,1} + \frac{2^2}{5} C_{p,2} - \cdots \pm \frac{2^p}{2p+1}; \qquad (1)$$

ou, par une sommation facile,

$$A_p = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx. \qquad (2)$$

(*) Elle comprend, comme cas particulier, l'identité (3).

(**) Addition à la *seconde Note sur les fonctions* X_n (*Académie de Belgique*, août 1886).

Si l'on fait $x = \sin\varphi$, on trouve

$$A_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \,.\, \cos\varphi d\varphi. \qquad (3)$$

Cette intégrale est celle qui entre dans la formule (F) (*). Donc

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) dx = A_p, \qquad (A)$$

ou

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) dx = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx. \qquad (A')$$

II. *Deuxième propriété.* — L'intégration par parties, effectuée sur l'égalité (2), donne aisément

$$(2p + 1) A_p - 2p A_{p-1} = (-1)^p. \qquad (4)$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \left[(2p+1) x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) - 2p x^{p-1} (X_{p-1} + X_{p-3} + \cdots)\right] dx = (-1)^p. \quad (B)$$

III. *Troisième propriété.* — Si, dans l'équation (4), on change p en $p - 1$, $p - 2$, ..., 1, on trouve, par addition :

$$(2p + 1) A_p = A_{p-1} + A_{p-2} + \cdots + A_0 + \frac{1}{0}, \qquad (5)$$

selon que p est *pair* ou *impair* (**). Par suite,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \Big[(2p + 1) x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) - x^{p-1} (X_{p-1} + X_{p-3} + \cdots) \\ &- x^{p-2} (X_{p-2} + X_{p-4} + \cdots) - \cdots - X_0\Big] dx = \textit{un ou zéro} \ (^{***}). \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

IV. *Application.* — Soit $p = 4$. On doit trouver

$$\int_0^1 \left[9x^4 (X_4 + X_2 + X_0) - 8x^3 (X_3 + X_1)\right] dx = 1.$$

(*) *Seconde Note sur les fonctions* X_n, p. 9.

(**) A cause de $A_0 = 1$.

(***) On arrive au même résultat en faisant varier p dans la relation (B).

Or :

$$X_0 = 1, \quad X_1 = x, \quad X_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad X_3 = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$X_4 = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \text{ (*)}.$$

Donc

$$\int_0^1 \left[\frac{9}{8}(35x^8 - 18x^6 + 7x^4) - 4(5x^6 - x^4)\right] dx = 1,$$

ou

$$\frac{9}{8}\left(\frac{35}{9} - \frac{18}{7} + \frac{7}{5}\right) - 4\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{5}\right) = 1\,;$$

ce qui est exact.

V. *Suite.* — La relation (5) équivaut à

$$\int_0^1 dx\left[(2p+1)(1-2x^2)^p - (1-2x^2)^{p-1} - \cdots - (1-2x^2) - 1\right] = \frac{1}{0}.$$

Dans la parenthèse, la partie négative égale

$$-\frac{(1-2x^2)^p - 1}{(1-2x^2) - 1}.$$

Si donc la différentielle est représentée par $F(x)dx$, on a

$$F(x) = \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{-2x^2}. \quad (6)$$

La fraction est la dérivée de

$$\frac{1-(1-2x^2)^{p+1}}{2x}.$$

Par conséquent :

$$\int_0^x \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2}\, dx = \frac{(1-2x^2)^{p+1} - 1}{x}, \quad \text{(D)}$$

$$\int_0^1 \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2}\, dx = (-1)^{p+1} - 1. \quad \text{(E)}$$

(*) *Premier Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 10.

VI. *Autres intégrales.* — Faisons, comme précédemment, $x = \sin\varphi$.

Nous aurons :

$$\int_0^{\varphi} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = \frac{\cos^{p+1}2\varphi - 1}{\sin\varphi}, \quad \text{(D')}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = (-1)^{p+1} - 1. \quad \text{(E')}$$

Addition. — (*Juillet* 1887.)

VII. *Remarques.* — 1° Le second membre de (E′) ne change pas, quand on y remplace p par $p + 2$. Conséquemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+5)\cos^3 2\varphi - (2p+6)\cos^2 2\varphi - (2p+1)\cos 2\varphi + 2p + 2}{\sin^2\varphi}\cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi = 0.$$

Le numérateur est divisible par

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi.$$

Donc, sous une forme plus simple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2p + 2 + \cos 2\varphi - (2p+5)\cos^2 2\varphi\right]\cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi = 0. \quad \text{(F)}$$

2° Cette égalité est une conséquence des formules (5) et (4). On peut l'écrire ainsi :

$$\int_0^1 \left[1 - (4p+9)x^2 + (4p+10)x^4\right](1 - 2x^2)^p dx = 0. \quad \text{(G)}$$

VIII. *Autres intégrales.* — 1° Soit

$$\int_0^x \left[1 - (4p+9)x^2 + (4p+10)x^4\right](1 - 2x^2)^p dx = f(x). \quad (7)$$

Le polynôme $f(x)$ a une valeur fort simple. En effet, la quantité entre parenthèses ne diffère pas de

$$(1 - 2x^2)(1 - 3x^2) - 4(p+1)(x^2 - x^4).$$

Donc

$$f'(x) = (1 - 2x^2)^{p+1}(1 - 3x^2) - 4(p+1)(1 - 2x^2)^p(x^2 - x^4);$$

puis

$$f(x) = (1 - 2x^2)^{p+1}(x - x^3). \tag{H}$$

2° La formule (4) équivaut à

$$\int_0^1 (1 - 2x^2)^{p-1}\left[1 - 2(2p+1)x^2\right]dx = (-1)^p.$$

3° On a, plus généralement,

$$\int_0^x (1 - 2x^2)^{p-1}\left[1 - 2(2p+1)x^2\right]dx = (1 - 2x^2)^p x. \tag{K}$$

IX. *Relation combinatoire.* — Dans $f'(x)$, le coefficient de x^{2k} est

$$C_{p,k}(-2)^k - (4p+9)C_{p,k-1}(-2)^{k-1} + (4p+10)C_{p,k-2}(-2)^{k-2},$$

ou

$$-(-2)^{k-1}\left[2C_{p,k} + (4p+9)C_{p,k-1} + (2p+5)C_{p,k-2}\right].$$

Dans $f(x)$, le coefficient de x^{2k+1} est

$$-(-2)^{k-1}\left[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}\right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 2C_{p,k} + (4p+9)C_{p,k-1} + (2p+5)C_{p,k-2} &= \mathfrak{M}(2k+1) \\ &= (2k+1\left[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}\right]\ (^*). \end{aligned} \tag{L}$$

Soient, par exemple, $p = 5$, $k = 3$. On doit trouver

$$2.C_{5,3} + 29.C_{5,2} + 15C_{5,1} = 7\left[2C_{6,3} + C_{6,2}\right],$$

ou

$$2.10 + 29.10 + 15.5 = 7(2.20 + 15),$$

ou

$$385 = 7.55.$$

(*) La propriété exprimée par la *première* équation est assez difficile à démontrer directement.

X. Théorème. — *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$A_p(x^2-1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}=\frac{d\left[(x^2-1)^{p+1}\dfrac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}\right]}{dx}, \qquad \text{(M)}$$

dans laquelle A_p *est un coefficient numérique* (*).

XI. Théorème. — *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$B_p\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}\cdots\int_{-1}^{x}X_n dx=(x^2-1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}; \qquad \text{(P)}$$

p *désignant le nombre des intégrations.*

XII. Théorème (**). — *Si l'on prend les dérivées successives de la fonction* $(x^2-1)^n$, *la dérivée d'ordre* $n-p$ *est divisible, algébriquement, par la dérivée d'ordre* $n+p$: *le quotient égale* $(x^2-1)^p$.

XIII. Théorème $\quad X_1+X_2+\cdots+X_n$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_{1}^{x}\frac{1+\dfrac{dX_n}{dx}-\dfrac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx. \qquad \text{(S)}$$

XIV. Théorème. $\quad (n+1)X_0+nX_1+\cdots+X_n$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_{1}^{x}\frac{\dfrac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx. \qquad \text{(X)}$$

XV. Théorème. — *Si les* $2p+1$ *inconnues* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *satisfont, de toutes les manières possibles, à la condition*

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda=n,$$

on a

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\sum X_\alpha X_\beta\ldots X_\lambda=\frac{d^pX_{n+p}}{dx^p}. \qquad \text{(A')}$$

(*) Pour abréger, nous supprimons les démonstrations de ce théorème et des théorèmes suivants. Elles sont développées dans les deux Mémoires intitulés : *Nouvelles propriétés des fonctions* X_n.

(**) Énoncé, en 1884, par M. Lucien Lévy.

XVI. Théorème. $X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \sin^n\varphi (x \sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi.$ (B′)

XVII. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &1.3.5\ldots\overline{2p-1}\int_{-1}^{+1} dx \sum X_\alpha X_\beta \ldots X_\lambda \\ &= \left[\frac{d^{p-1}X_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{-1}^{+1}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{D}')$$

XVIII. *Remarque.* — Le second membre de l'équation (D′) est réductible à

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+2)}.$$

XIX. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &\sum C_{2\alpha,\alpha}\,.\,C_{2\beta,\beta}\ldots C_{2\lambda,\lambda} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma(n+p+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{F}')$$

XX. Théorème. — *Le produit de* n *termes consécutifs, de la progression*

$$2, \quad 6, \quad 10, \quad 14, \quad 18, \ldots$$

est divisible par le produit des n *premiers nombres entiers.*

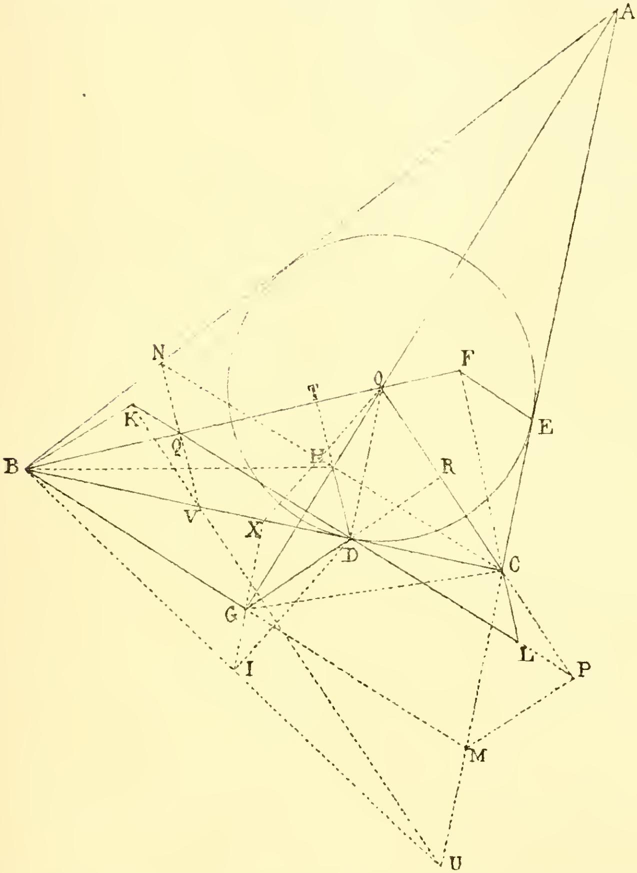
XXI. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^n\varphi(\cos\theta\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n \\ &\times \left[\frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n-1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right] d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin^n\varphi(\cos\alpha\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi. \end{aligned}\right\}$$

XXII. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2zx\cos^2\varphi}{1+4(z-x)z\cos^2\varphi + 4z^2(x^2-1)\cos^4\varphi}\, d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{K}')$$

CCLXV (*). — Théorèmes de Géométrie élémentaire.

(*Novembre* 1884.)

I. *Des sommets* B, C *d'un triangle, on abaisse les perpendi-*



culaires BG, CH, *sur la bissectrice de l'angle* A. D *étant le point où le côté* BC *touche le cercle inscrit, on a*

$$BD \,.\, CD = BG \,.\, GH. \qquad (1)$$

(*) A l'occasion d'une Note de M. Weill.

Il suffit de vérifier que les triangles BDG, CHD sont semblables. Or, à cause des *parallèles* BG, CH :

$$DBG = DCH.$$

D'un autre côté, les angles BDO, BGO étant droits, la circonférence, décrite sur OB comme diamètre, passe en D, G. Donc

$$BDG = BOG = \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Pour une raison semblable,

$$CHD = COD = 1^d - \tfrac{1}{2}C = BDG \ (^*).$$

II. *Soient* R, T *les points où les droites* GD, DH *rencontrent, respectivement,* CO, BO. *La circonférence décrite sur* CG, *comme diamètre, contient les points* H, R ; *et la circonférence décrite sur* BH, *comme diamètre, contient les points* G, T.

On vient de voir que

$$BDG = 1^d - \tfrac{1}{2}C.$$

Donc

$$RDC = 1^d - \tfrac{1}{2}C;$$

ainsi l'angle R est droit; etc.

III. *Soient* BGDK, CHDL *les parallélogrammes déterminés, l'un par* BD, DG ; *l'autre par* CD, DH : *les points* B, K, C, L *appartiennent à une même circonférence.*

En effet, l'égalité (1) revient à

$$BD \,.\, CD = DK \,.\, DL. \tag{2}$$

IV. *Remarque.* — E étant le point de contact de AC avec le cercle inscrit, et F la projection de C sur BO ; *l'hexagone* CDHOFE

(*) La démonstration est encore plus courte au moyen des formules trigonométriques.

est inscrit au cercle décrit sur CO *comme diamètre.* Dans cette figure, CD = CE, DH est perpendiculaire à FO, EF est perpendiculaire à OH; etc.

V. *Valeurs de* GH, GD, HD.

1° Prolongeons BG jusqu'à sa rencontre, en M, avec le prolongement de AC. Il est clair que CM = $c - b$, et que

$$GH = (c - b)\cos\tfrac{1}{2}A.$$

2° L'angle HGD, complément de GOC, égale

$$1^d - \tfrac{1}{2}(A + C) = \tfrac{1}{2}B.$$

De même,

$$GHD = \tfrac{1}{2}C.$$

Par suite,

$$GD = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}C, \qquad HD = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}B.$$

VI. *Si l'on construit les parallélogrammes* DGMP, DHNQ : 1° P *est sur la bissectrice de* C; 2° Q *est sur la bissectrice de* B; 3° *les points* P, L, D, Q, K *sont en ligne droite.*

1° On vient de voir que

$$GD = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}C;$$

donc

$$MP = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}C = MC\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Cette expression représente la distance du point M à la bissectrice de C; donc CP est cette bissectrice.

2° Pour la même raison, le point N, situé sur AB, a pour projection, sur OB, le sommet Q.

3° Les points P, Q appartiennent à la droite KDL. Etc.

VII. *Le centre* O, *du cercle inscrit, et le centre* I, *de la circonférence* BKCL, *sont également distants du côté* BC.

Soit KU perpendiculaire à BK, et rencontrant, en U, le prolongement du côté AC. A cause des angles droits, en K et en C, BU est un diamètre de la circonférence BKCL.

Soit V l'intersection de KU avec BC. On a

$$BV = \frac{BK}{\sin KBV} = \frac{GD}{\cos BDG} = \frac{(c-b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos(1^d - \frac{1}{2}C)} = c - b = BN.$$

Ainsi la droite NQ, prolongée, passe en V.

L'angle CVU, complément de KCV, égale $\frac{1}{2}$C.

De plus,

$$CV = 2CD = 2(p-c).$$

Donc

$$CU = 2(p-c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 2\frac{T}{p},$$

T étant l'aire du triangle ABC. Et comme $OD = \frac{T}{p}$, nous avons, finalement,

$$CU = 2OD;$$

ce qui équivaut à la proposition énoncée.

VIII. *Remarque.* — I étant le centre de la circonférence BKCLU, et X étant le milieu du côté BC, *le quadrilatère* DOXI *est un parallélogramme;* et XGI *est une ligne droite.*

CCLXVI. — Application d'une formule combinatoire.

(*Septembre* 1886.)

I. Cette formule, que nous avons démontrée précédemment (*), est

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} C_{p,1} + \frac{1}{n-1} C_{p,2} - \cdots = \frac{(-1)^p}{(n+1) C_{n,p}}. \tag{1}$$

En supposant p constant, nous représenterons le premier membre par A_{n+1}; de sorte que

$$A_{n+1} = \frac{(-1)^p}{(n+1) C_{n,p}}. \tag{2}$$

II. Soient

$$\mathcal{L}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \tag{3}$$

$$(1+x)^p = 1 + C_{p,1}x + C_{p,2}x^2 + \cdots + x^p; \tag{4}$$

p étant supposé entier, positif.

Dans le produit des seconds membres, il y a une partie *irrégulière,* polynôme du degré p, que nous pouvons appeler P_p. Quant à la partie *régulière,* série commençant par un terme en x^{p+1}, représentons-la, pour un instant, par

$$B_{p+1}x^{p+1} + B_{p+2}x^{p+2} + \cdots$$

Il est clair que :

$$B_{p+1} = (-1)^{p+2}\left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} C_{p,1} + \frac{1}{p+1} C_{p,2} - \cdots\right],$$

$$B_{p+2} = (-1)^{p+3}\left[\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} C_{p+1,1} + \frac{1}{p} C_{p+1,2} - \cdots\right],$$

. . . . ;

(*) Tome II, page 303.

ou, d'après la formule (2) :

$$B_{p+1} = \frac{1}{(p+1)C_{p,p}}, \quad B_{p+2} = -\frac{1}{(p+2)C_{p+1,p}}, \dots$$

Donc

$$(1+x)^p \mathfrak{L}(1+x) = P_p + \sum_{n=p}^{n=\infty} (-1)^{n+p} \frac{x^{n+1}}{(n+1)C_{n,p}}. \tag{5}$$

III. Si l'on prend $p=1$, $p=2$, $p=3$, ... on trouve :

$$P_1 = x, \quad P_2 = x + \frac{3}{2}x^2, \quad P_3 = x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3, \dots$$

expressions dont la loi paraît difficile à saisir. Mais, dans l'égalité (5), le premier terme de la série est $\frac{x^{p+1}}{p+1}$. Par conséquent,

$$P_{p+1} = (1+x)P_p + \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

ou

$$P_p = (1+x)P_{p-1} + \frac{x^p}{p};$$

puis, par un calcul très simple,

$$P_p = (1+x)^{p-1}x + \frac{1}{2}(1+x)^{p-2}x^2 + \frac{1}{3}(1+x)^{p-3}x^3 + \dots + \frac{1}{p}x^p. \tag{6}$$

IV. *Remarque.* — Lorsque $x=1$, les formules (6), (5) deviennent :

$$P_p = 2^{p-1} + \frac{1}{2}2^{p-2} + \frac{1}{3}2^{p-3} + \dots + \frac{1}{p}, \tag{7}$$

$$2^p \mathfrak{L}\, 2 = P_p + \sum_{n=p}^{n=\infty} (-1)^{n+p} \frac{1}{(n+1)C_{n,p}}. \tag{8}$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{L}\, 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p$$
$$+ \frac{1}{2^p}\left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\,\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3}\,\frac{1.2}{(p+2)(p+1)} - \frac{1}{p+4}\,\frac{1.2.3}{(p+3)(p+2)(p+1)} - \dots\right],$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p \\ &+ \frac{1}{(p+1)2^p}\left[1 - \frac{1}{p+2} + \frac{1.2}{(p+3)(p+2)} - \frac{1.2.3}{(p+4)(p+3)(p+2)} + \cdots\right].\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

V. *Développements de* $\mathcal{L}2$. — La dernière formule en donne une infinité. Par exemple, si $p = 3$:

$$\mathcal{L}2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{32}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1.2}{5.6} - \frac{1.2.3}{5.6.7} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8} - \cdots\right].$$

La série est, évidemment, beaucoup plus convergente que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

D'ailleurs, si l'on effectue, on trouve, pour l'ensemble des *quatre* premiers termes, 0,69375. Par conséquent,

$$\mathcal{L}2 > 0{,}69375 - 0{,}00088, \quad \mathcal{L}2 < 0{,}69375 - 0{,}00088 + 0{,}00044;$$

ou

$$\mathcal{L}2 > 0{,}69287, \quad \mathcal{L}2 < 0{,}69331.$$

En effet,

$$\mathcal{L}2 = 0{,}69314\ldots$$

VI. *Remarque*. — La formule (9) donne, en fonction de $\mathcal{L}2$, la somme de la série

$$1 - \frac{1}{p+2} + \frac{1.2}{(p+2)(p+3)} - \frac{1.2.3}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \cdots$$

C'est un résultat auquel on pouvait ne pas s'attendre, en considérant celui-ci :

$$1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1.2}{(p+2)(p+3)} + \frac{1.2.3}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \cdots = \frac{p+1}{p} \ (*)$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 30.

VII. *Une limite.* — Divisons, par $(1+x)^p$, les deux membres de l'égalité (6), puis faisons croître indéfiniment p. Nous trouvons

$$lim\left[\frac{P_p}{(1+x)^p}\right]=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots,$$

ou

$$lim\left[\frac{P_p}{(1+x)^p}\right]=\mathcal{L}(1+x); \tag{10}$$

et, si $x=1$:

$$lim\left[\frac{P_p}{2^p}\right]=\mathcal{L}\,2. \tag{11}$$

VIII. *Suite.* — De l'égalité (5) on déduit, en prenant les dérivées des deux membres,

$$p(1+x)^{p-1}\mathcal{L}(1+x)=-(1+x)^{p-1}+\left(\frac{dP_p}{dx}\right)+\sum_{n=p}^{n=\infty}(-1)^{n+p}\frac{x^n}{C_{n,p}}; \tag{12}$$

et, si $x=1$:

$$2^{p-1}p\,\mathcal{L}\,2=-\,2^{p-1}+\left(\frac{dP_p}{dx}\right)_{x=1}+S_p; \tag{13}$$

en supposant

$$S_p=1-\frac{1}{p+1}+\frac{1.2}{p(p+1)}-\frac{1.2.3}{p(p+1)(p+2)}+\cdots \tag{14}$$

L'égalité (9) revient à celle-ci :

$$2^{p-1}p\,\mathcal{L}\,2-p(P_{p-1})_{x=1}=S_p.$$

Donc, par soustraction,

$$2^{p-1}=\left(\frac{dP_p}{dx}-pP_{p-1}\right)_{x=1}. \tag{15}$$

IX. *Remarque.* — La formule (6) donne, plus généralement,

$$(1+x)^{p-1}=\frac{dP_p}{dx}-pP_{p-1}; \tag{16}$$

relation remarquable, qui caractérise, si l'on veut, les polynômes P.

CCLXVII. — Théorèmes d'Arithmétique.

(*Septembre* 1886.)

I. *Soit un nombre* N, *divisible par un nombre premier* p. *La somme des diviseurs de* N, *qui donnent des quotients indépendants de* p, *égale* p — 1 *fois la somme des diviseurs qui donnent des quotients contenant* p, *augmentée de la somme des diviseurs indépendants de* p (*).

II. a, b, c *étant des nombres entiers, on a*

$$a(a+1)\cdots(a+c) \pm b(b+1)\cdots(b+c)$$
$$= \mathfrak{M}\left[1.2.3\ldots(c+1)(a+b+c)\right] \; (^{**}).$$

En effet : 1° le *polynôme*

$$x(x+1)\cdots(x+c) \pm y(y+1)\cdots(y+c),$$

s'annule quand on y remplace x par $-(y+c)$;

2° Chacune des parties du premier membre est, comme on sait, divisible par $1.2.3\ldots(c+1)$; ainsi

$$\frac{(a+b+c)\varphi(a,b)}{1.2.3\ldots(c+1)} = \textit{entier};$$

puis, $\varphi(a, b)$ désignant un *nombre entier* :

$$a(a+1)\cdots(a+c) \pm b(b+1)\cdots(b+c) = (a+b+c)\varphi(a,b) \; (^{***}).$$

III. *Remarque. — Si* a + b + c *est premier*,

$$\varphi(a,b) = \mathfrak{M}\left[1.2.3\ldots(c+1)\right].$$

(*) Presque évident

(**) Le signe +, si c est *pair*.

(***) Cette propriété généralise celle-ci :

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}(n),$$

que l'on trouve dans ma *Démonstration du théorème de Staudt* (*Note* LXXVI).

CCLXVIII. — Deux intégrales définies.

(*Mars* 1887).

I. Dans la *Note sur une formule de M. Botesu*, on trouve

$$\int_0^1 \left[\frac{x^n}{1-x} + \frac{x^{n-1}}{\mathcal{l}x} + \frac{F(x^n) - x^n}{1+x}\right] dx = 0, \qquad (1)$$

$F(x^n)$ représentant

$$x^n + x^{2n} + x^{4n} + \cdots$$

Si l'on fait $n = 1, 3, 5, \ldots$ et que l'on ajoute, on a donc

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{1}{(1-x^2)\mathcal{l}x} + \frac{F(x)+F(x^3)+\cdots}{1+x} - \frac{x}{(1+x)(1-x^2)}\right] dx = 0.$$

Mais

$$F(x) + F(x^3) + F(x^5) + \cdots = \frac{x}{1-x} \text{ (*)}.$$

Conséquemment, la relation ci-dessus se réduit à

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{x(1+2x-x^2)}{1-x^2} + \frac{1}{\mathcal{l}x}\right] = 0. \qquad (A)$$

Celle-ci est la première des formules annoncées.

II. Pour en conclure la seconde, j'observe qu'un calcul fort simple donne

$$\int_0^1 \frac{x(1-2x+x^2)}{(1-x^2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x)^2} = \mathcal{l}\,2 - \frac{1}{2}\cdot \qquad (2)$$

Donc, par addition :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{\mathcal{l}x}\right] = \mathcal{l}\,2 - \frac{1}{2}\cdot \qquad (B)$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 65; *Sur un tableau numérique...*, etc.

CCLXIX. — Sur le théorème de Wilson.

(*Août* 1887.)

I. Le *théorème de Wilson* (*) peut s'énoncer ainsi : *Le nombre entier* $2n + 1$ *est premier ou composé, selon que le produit* $1.2.3..2n$, *augmenté de l'unité, est ou n'est pas multiple de* $2n + 1$. On y peut joindre les remarques suivantes (**) :

1° *Si* $2n + 1$ *est composé, mais non égal au carré d'un nombre premier,*

$$1.2.3...n = \mathfrak{M}(2n + 1); \qquad (1)$$

2° *Si* $2n + 1$ *est le carré d'un nombre premier,*

$$(1.2.3...n)^2 = \mathfrak{M}(2n + 1); \qquad (2)$$

3° *Si* $2n + 1$ *est composé,*

$$1.2.3...2n = \mathfrak{M}(2n + 1). \qquad (3)$$

Démonstrations. — 1° Soit

$$2n + 1 = ab;$$

a étant supérieur à 2 et inférieur à b; de sorte que l'on ait

$$2n + 1 > 2b, \quad b < n.$$

Les diviseurs *conjugués*, a, b, se trouvent ainsi dans la suite $1.2.3...n$. Donc

$$1.2.3...n = \mathfrak{M}(ab) = \mathfrak{M}(2n + 1);$$

2° Si

$$2n + 1 = p^2,$$

p étant premier, on doit prendre $a = b = p$; le produit

$$1.2.3...n = \mathfrak{M}(p),$$

puis

$$(1.2.3...n)^2 = \mathfrak{M}(2n + 1).$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, pp. 32 et 110.

(**) Elles sont fort simples, mais n'ont peut-être pas été faites.

3° D'après la théorie des Combinaisons :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n = \mathfrak{M}\left[(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2\right] = \mathfrak{M}(2n+1).$$

II. *Autres remarques.* — 1° *Soit un nombre entier* N, *non divisible par* 2, 3, 5, ..., p. *Soit* q *le quotient entier de* N *par* p. *Si*

$$\left[(p+1)(p+2)\ldots q\right]^2 = \mathfrak{M}(\mathrm{N}), \tag{4}$$

le nombre N *est composé.*

L'égalité (2) subsiste si, dans le premier membre, on supprime les facteurs 2, 3, ... p, non diviseurs de $2n + 1$. D'ailleurs, si l'on pose $\mathrm{N} = 2n + 1$, on a $q < n$.

2° *Dans le produit*

$$(p+1)(p+2)\ldots q,$$

on peut supprimer les facteurs non divisibles par 2, *par* 3, ..., *ou par* p.

III. *Application.* — On veut savoir si le nombre 221, non divisible par 2, 3, 5, 7, 11, est premier ou composé. L'égalité (4) est

$$(12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20)^2 = \mathfrak{M}(221);$$

ou, plus simplement,

$$(13 \cdot 17 \cdot 19)^2 = \mathfrak{M}(221).$$

Or, 13 divise 221 (*); donc, etc.

IV. Théorème. — *La somme*

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas un nombre entier.

(*) Ce calcul ne diffère pas de celui que l'on trouve dans tous les Traités d'Arithmétique.

Il y a deux cas à distinguer, selon que n est premier ou composé :

1° n *premier*. Posons

$$S = \frac{A}{B} + \frac{1}{n} = \frac{nA + B}{nB};$$

la fraction $\frac{A}{B}$ étant supposée irréductible.

Tous les facteurs premiers de B sont inférieurs à n; donc B est premier avec n; donc, d'après une propriété connue (*), S est une fraction irréductible.

2° n *composé*. Soit p le plus grand nombre premier compris dans la suite 2, 3, 4, ... n. D'après le *Postulatum* de M. Bertrand, p surpasse $\frac{n}{2}$; donc, p ne divise aucun des nombres $p + 1, \ldots n$. Cela étant, soit

$$S = \frac{A}{B} + \frac{1}{p}\cdot$$

Le dénominateur B est composé de facteurs premiers avec p; donc il est premier avec p; etc.

V. Théorème (**). — *Si* $2n + 1$ *est premier,*

$$C_{2n,n} \pm 1 \doteq \mathfrak{M}(2n + 1) \text{ (***)}. \tag{5}$$

On a

$$C_{2n,n} = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

A cause de

$$2n = \overline{2n+1} - 1,\quad 2n - 1 = \overline{2n+1} - 2, \ldots\quad n + 1 = \overline{2n+1} - n,$$

le numérateur a la forme

$$\mathfrak{M}(2n+1) + (-1)^n 1.2.3\ldots n.$$

(*) *Si deux fractions irréductibles,* $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, *ont leurs dénominateurs premiers entre eux, la fraction* $\frac{AB' + BA'}{BB'}$ *est irréductible.*

(**) Connu.

(***) On doit prendre le signe +, si n est *impair*.

Donc

$$C_{2n,\,n} + (-1)^{n-1} = \frac{\mathfrak{M}(2n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Le premier membre est un nombre entier; donc le numérateur de la fraction est divisible par le dénominateur. Et comme les facteurs 2, 3, ... n sont premiers avec $2n+1$, cette fraction est réductible à la forme $\mathfrak{M}(2n+1)$.

CCLXX. — Conséquences d'une division algébrique.

(*Août* 1887.)

I. Soit à déterminer le quotient entier de x^m par $(x-1)^p$, et le reste de la division; de manière que

$$x^m = (x-1)^p Q + R. \tag{1}$$

Si l'on fait $x = 1 + z$, on a

$$(1+z)^m = z^p Q + R;$$

et, par conséquent :

$$Q = z^{m-p} + C_{m,1} z^{m-p-1} + C_{m,2} z^{m-p-2} + \cdots + C_{m,p},$$

$$R = C_{m,p-1} z^{p-1} + C_{m,p-2} z^{p-2} + \cdots + 1;$$

ou bien :

$$Q = (x-1)^{m-p} + C_{m,1}(x-1)^{m-p-1} + C_{m,2}(x-1)^{m-p-2} + \cdots + C_{m,p}, \tag{2}$$

$$R = C_{m,p-2}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + 1. \tag{3}$$

II. En opérant autrement, on peut développer Q suivant les puissances de x. En effet,

$$\frac{x^m}{(x-1)^p} = x^{m-p}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-p};$$

donc

$$Q = x^{m-p} + C_{p,1} x^{m-p-1} + C_{p+1,2} x^{m-p-2} + \cdots + C_{m-1,m-p}. \tag{4}$$

III. *Identités.* — D'après les formules (2), (4), on a, *identiquement*,

$$\left.\begin{aligned}&(x-1)^{m-p}+C_{m,1}(x-1)^{m-p-1}+C_{m,2}(x-1)^{m-p-2}+\cdots+C_{m,p}\\&\quad=x^{m-p}+C_{p,1}x^{m-p-1}+C_{p+1,2}x^{m-p-2}+\cdots+C_{m-1,m-p};\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

et, en particulier :

$$\left.\begin{aligned}&1+C_{m,1}+C_{m,2}+C_{m,p}\\&=2^{m-p}+C_{p,1}2^{m-p-1}+C_{p+1,2}2^{m-p-2}+\cdots+C_{m-1,m-p}\ (^*),\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{B})$$

$$1-C_{m,1}+C_{m,2}-\cdots\pm C_{m,p}=\cdots\pm C_{m-1,m-p}\ (^{**}).\qquad(\mathrm{C})$$

IV. *Autres identités.* — Après avoir mis (A) sous la forme abrégée :

$$\sum_{q=0}^{q=m-p} C_{m,p}(x-1)^{m-p-q}=\sum_{q=0}^{q=m-p} C_{p+q-1,p-1}x^{m-p-q},\qquad(\mathrm{A}')$$

prenons les dérivées d'ordre r, et divisons par $1.2.3\ldots r$. En observant que les termes de degré inférieur à r ont des dérivées nulles, nous avons

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{q=0}^{q=m-p-r} C_{m,p}\,.\,C_{m-p-q,r}(x-1)^{m-p-q-r}\\&=\sum_{q=0}^{q=m-p-r} C_{p+q-1,p-1}\,.\,C_{m-p-q,r}\,x^{m-p-q-r};\end{aligned}\right\}$$

ou, par un changement de notation,

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{q=0}^{q=s} C_{m,p}\,.\,C_{m-p-q,s-q}\,.\,(x-1)^{s-q}\\&=\sum_{q=0}^{q=s} C_{p+q-1,p-1}\,.\,C_{m-p-q,s-q}\,x^{s-q}\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{D})$$

(*) Le nombre des termes, dans chacun des deux membres, est $m-p+1$.

(**) Cette relation est due à M. Genocchi. Voir la *Note* CXC.

Si, dans cette relation générale, on suppose $x = 0$, puis $x = 1$, on en déduit :

$$\sum_{q=0}^{q=s} C_{m,q} \cdot C_{m-p-q,s-q}(-1)^{s-q} = C_{p+s-1,s}, \qquad \text{(E)}$$

$$\sum_{q=0}^{q=s} C_{p+q-1,p-1} \cdot C_{m-p-q,s-q} = C_{m,s} \qquad \text{(F)}$$

Soient, par exemple,

$$m = 8, \quad p = 2, \quad s = 3.$$

On doit trouver :

$$-C_{6,3} + C_{8,1} \cdot C_{5,2} - C_{8,2} \cdot C_{4,1} + C_{8,3} = C_{4,3},$$

$$C_{6,3} + C_{2,1} \cdot C_{5,2} + C_{3,1} \cdot C_{4,1} + C_{4,1} = C_{8,3};$$

ou

$$-20 + 8.10 - 28.4 + 56 = 4,$$

$$20 + 2.10 + 3.4 + 4 = 56;$$

et ces résultats sont exacts.

V. *Seconde forme du reste.* — Reprenons la formule

$$R = C_{m,p-1}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + 1. \qquad (3)$$

Dans le second membre, le coefficient de x^{p-q} est

$$C_q = (-1)^{q-1}\left\{ C_{m,p-1} \cdot C_{p-1,q-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{p-2,q-2} + \cdots \right\},$$

ou

$$C_q = (-1)^{q-1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (-1)^{\alpha-1} C_{m,p-\alpha} \cdot C_{p-\alpha,q-\alpha}; \qquad (5)$$

mais cette expression peut être considérablement réduite.

En effet :

$$C_{m,p-\alpha} \cdot C_{p-\alpha,q-\alpha} = \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\overline{p-\alpha}.1.2\ldots\overline{m-p+\alpha}} \; \frac{1.2\ldots\overline{p-\alpha}}{1.2\ldots\overline{p-q}.1.2\ldots\overline{q-\alpha}}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\overline{p-q}} \; \frac{1}{1.2\ldots\overline{m-p+\alpha}.1.2\ldots\overline{q-\alpha}}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\overline{p-q}.1.2\ldots\overline{m-p+q}} \; \frac{1.2.3\ldots\overline{m-p+q}}{1.2\ldots\overline{m-p+\alpha}.1.2\ldots\overline{q-\alpha}}$$

$$= C_{m,p-q} \cdot C_{m-p+q,q-\alpha}.$$

Donc

$$C_q = (-1)^{q-1} C_{m,p-q} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (-1)^{\alpha-1} C_{m-p+q,q-\alpha}. \tag{6}$$

Observons maintenant que, par la formule (C) :

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (-1)^{\alpha-1} C_{m-p+q,q-\alpha} = C_{m-p+q-1,m-p}.$$

Conséquemment,

$$C_q = (-1)^{q-1} C_{m,p-q} \cdot C_{m-p+q-1,m-p}; \tag{7}$$

puis

$$R = \sum_{q=1}^{q=p} (-1)^{q-1} C_{m,p-q} \cdot C_{m-p+q-1,m-p} x^{p-q}, \tag{8}$$

ou

$$R = C_{m,p-1} x^{p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} x^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} C_{m-1,m-p}. \tag{9}$$

Telle est l'expression demandée (*).

VI. *Remarques.* — 1° La comparaison des valeurs (5), (9) donne l'identité :

$$\left.\begin{aligned} &C_{m,p-1}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + 1 \\ &= C_{m,p-1} x^{p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} x^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} C_{m-1,m-p}; \end{aligned}\right\} \text{(G)}$$

et, en particulier :

$$C_{m,p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} + C_{m,p-3} \cdot C_{m-p+2,2} - \cdots \pm C_{m-1,m-p} = 1. \tag{H}$$

2° *Si l'exposant* m *est premier, tous les termes de* R, *sauf* $C_{m-1,m-p}$, *sont divisibles par* m.

3° Afin d'avoir un énoncé plus simple, remplaçons x^m par $x^m - 1$. L'égalité (1) devient

$$x^m - 1 = (x-1)^p Q + R', \tag{10}$$

en supposant

$$R' = C_{m,p-1} x^{p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} x^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} C_{m-1,m-p} - 1.$$

(*) Je l'ai trouvée en appliquant la *formule de Poisson* (*Note* LXVIII).

On sait que, m étant *premier*,

$$C_{m-1.m-p} \pm 1 = \mathfrak{M}(m) \text{ (*)}.$$

Conséquemment :

Si l'exposant m *est premier, le reste* R′, *de la division de* $x^m - 1$ *par* $(x - 1)^p$, *a tous ses termes divisibles par* m (**).

VI. *Division arithmétique.* — Dans l'égalité (10), remplaçons x par un nombre entier a, tel que, à partir de $x = a$, on ait constamment

$$Q > R',$$

ou

$$(x-1)^p - \left[C_{m,p-1}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + C_{m,1}(x-1)\right] > 0;$$

ou, après suppression du facteur $x - 1 = z$:

$$z^{p-1} - \left[C_{m,p-1}z^{p-2} + C_{m,p-2}z^{p-3} + \cdots + C_{m,1}\right] > 0. \qquad (11)$$

Il est clair que *les valeurs de* Q *et de* R, *répondant à* $x = a$, *seront le quotient et le reste obtenus en divisant le nombre entier* $a^m - 1$ *par le nombre entier* $(a - 1)^p$. En conséquence :

Si a *est un nombre entier suffisamment grand, et que* m *soit premier, le reste* r, *de la division de* $a^m - 1$ *par* $(a - 1)^p$, *est divisible par* m.

VII. *Remarque.* — Soit λ la racine positive (unique) de

$$z^{p-1} - \left[C_{m,p-1}z^{p-2} + C_{m,p-2}z^{p-3} + \cdots + C_{m,1}\right] = 0. \qquad (12)$$

On a

$$a \overline{\overline{>}} 1 + \lambda. \qquad (13)$$

(*) *Note* LXXX. Cette propriété résulte, d'ailleurs, de l'identité (H).

(**) Cette division se ramène, évidemment, à celle de

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1 \quad \text{par} \quad (x - 1)^{p-1}.$$

Donc, si R″ est le nouveau reste,

$$R' = (x - 1)R''.$$

VIII. *Applications.* — Prenons $m=7, p=2, 3, 4, 5$. L'équation (12) est, dans ces différents cas :

$$z-7=0,\quad z^2-21z-7=0,\quad z^3-35z^2-21z-7=0,$$
$$z^4-35z^3-35z^3-21z-7=0.$$

Les *limites supérieures* correspondantes sont :

$$7,\qquad 22,\qquad 36,\qquad 36.$$

Donc

$$a=8,\quad a=23,\quad a=37,\quad a=37.$$

Ainsi, les restes des *divisions* suivantes :

$$\frac{8^7-1}{7^2},\quad \frac{23^7-1}{22^3},\quad \frac{37^7-1}{36^4},\quad \frac{37^7-1}{36^5},$$

doivent être des multiples de 7.

1° $$\frac{8^7-1}{7^2}=\frac{2\,097\,151}{7^2}=\frac{299\,593}{7}=42\,799;\quad r=0,$$

ce qui devait être, à cause de l'équation $z-7=0$.

2° Si, dans la fraction $\frac{a^7-1}{(a-1)^2}$, on fait $a=10$, elle devient

$$\frac{9\,999\,999}{9^2}=\frac{1\,111\,111}{9}:$$

il est clair que $r=7$.

3° $$\frac{23^7-1}{22^3}=\frac{1+23+23^2+23^3+23^4+23^5+23^6}{22^2}.$$

Le numérateur est

$$1+23+529+12\,167+279\,841+8\,115\,389+186\,653\,947$$
$$=195\,061\,897;$$

donc

$$\frac{23^7-1}{22^3}=\frac{195\,061\,897}{484}.$$

On trouve

$$q=40\,302,\qquad r=217=\mathfrak{M}(7).$$

4° Dans la deuxième fraction, je remplace 23 par 30, 22 par 29 :

$$\frac{30^7 - 1}{29^3} = \frac{21\,869\,999\,999}{24\,389} = \frac{754\,137\,931}{841} = 896\,715 + \frac{616}{841}.$$

Or,

$$616 = 88 \,.\, 7.$$

Etc.

IX. *Généralisation.* — Posons

$$F(x) = f(x)\varphi(x) + \psi(x), \tag{14}$$

de manière que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient le quotient et le reste de $F(x)$ divisé par $f(x)$ (*). *Ordinairement,* si l'on remplace x par un nombre entier a, la division de $F(a)$ par $f(a)$ ne donne pas $\varphi(a)$ pour quotient, et $\psi(a)$ pour reste. En effet, dans cette opération, le reste est inférieur au diviseur. Ainsi, nous devons avoir

$$f(a) > \psi(a).$$

Ce n'est pas tout. Afin que $\psi(a)$ puisse *représenter le reste, pour une infinité de valeurs de* a, nous admettrons que *le coefficient du premier terme de* ψ(x) *est positif* (**).

Ces conventions étant admises, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit a *un nombre entier, supérieur aux racines des équations*

$$F(x) = 0, \quad f(x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad f(x) - \psi(x) = 0.$$

Si l'on divise F(a) *par* f(a), *le quotient entier sera* φ(a), *et le reste,* ψ(a) (***).

(*) On suppose, bien entendu, que F(x) *et* f(x) *sont des polynômes entiers, à coefficients entiers.*

(**) La même hypothèse est étendue aux coefficients des termes initiaux de $F(x)$ et de $f(x)$.

(***) Je pense que cette proposition, presque évidente, est nouvelle.

X. *Exemple :* Si l'on prend

$$F(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1, \qquad f(x) = x^3 + x^2 - x + 2,$$

on trouve

$$\varphi(x) = x^2 + x - 1, \qquad \psi(x) = x^2 - 2x + 3\,;$$

puis

$$a = 1.$$

En effet : 1° pour $x = 1$:

$$5 = 3 \times 1 + 2\,;$$

2° Pour $x = 3$:

$$391 = 35 \times 11 + 6\,;$$

3° Pour $x = 10$:

$$119\,111 = 1\,092 \times 109 + 83\,;$$

etc.

XI. *Autre exemple :*

$$F(x) = x^m - 1, \quad f(x) = x^p - 1\,;$$

puis

$$\varphi(x) = x^{m-p} + x^{m-2p} + \cdots + x^{m'}, \quad \psi(x) = x^{m'} - 1\,;$$

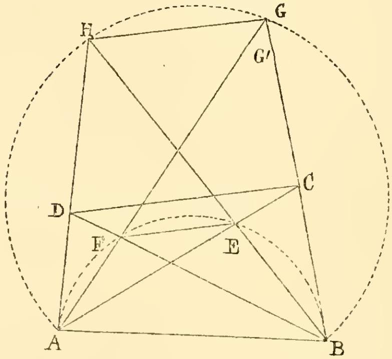
m' désignant le reste de la division de m par p.

Il est clair que $a = 2$. Ainsi, en particulier : *Si l'on divise* $3^{11} - 1$ *par* $3^4 - 1$, *le quotient est* $3^7 + 3^3$, *et le reste,* $3^3 - 1$.

CCLXXI. — Sur un théorème de M. Mannheim (*).

(*Juillet* 1887.)

I. Lemme I. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, ABEF *ayant un côté commun* AB, *et dont les diagonales coïncident* (en direction) : *les derniers côtés* CD, EF *sont parallèles.*



Il suffit de démontrer que les angles AEF, ACD sont égaux. Or, si l'on trace les circonférences ABEF, ABCD, on a

$$\text{AEF} = \text{ABF} = \text{ABD}, \qquad \text{ACD} = \text{ABD}.$$

II. Lemme II. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, ABGH *ayant un côté commun* AB, *et dont les côtés* AD, AH, BC, BG *coïncident deux à deux* (en direction) : *les derniers côtés* CD, GH, *sont parallèles.*

En effet, chacun des angles BCD, BGH est le supplément de BAD.

III. Lemme III. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABEF, ABGH *ayant un côté commun* AB, *et tels, que les*

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires; Question* 254. La présente Note a pour objet la généralisation de ce joli théorème.

côtés AF, BE *de l'un, coïncident* (en direction) *avec les diagonales* AG, BH *de l'autre : les derniers côtés* EF, GH *sont parallèles.*

Même démonstration.

IV. Lemme IV (*Réciproque* du Lemme I). — *Soient deux quadrilatères* ABCD, ABEF *ayant un côté commun* AB, *dont les diagonales coïncident* (en direction), *et dont les derniers côtés* CD, EF *sont parallèles : ces quadrilatères sont, simultanément, inscriptibles ou non inscriptibles.*

Si ABCD est inscriptible, les angles DCA, DBA sont égaux. Mais, à cause des parallèles, DCA = FEA. Donc DBE = FEA, et le quadrilatère AFEB est inscriptible.

V. Lemme V (*Réciproque* du Lemme II). — *Soient deux quadrilatères* ABCD, ABGH *ayant un côté commun* AB, *dont les côtés* AD, AH, BC, BG *coïncident deux à deux* (en direction), *et dont les derniers côtés* CD, GH *sont parallèles : ces quadrilatères sont, simultanément, inscriptibles ou non inscriptibles.*

En effet, les angles correspondants BCD, BGH, sont égaux.

VI. Théorème I. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, ABEF *ayant un côté commun* AB, *et dont les diagonales coïncident* (en direction). *Si l'on prolonge les côtés* BE, AF *jusqu'à ce qu'ils rencontrent, en* H, G, *les côtés* AD, BC; *la droite* GH *sera parallèle à* CD, EF *et le quadrilatère* ABGH *sera inscriptible* (*).

Si HG n'est point parallèle à EF, soit HG′ cette parallèle (**) : ABG′H est inscriptible. Menons AG′, qui rencontre en F′ la droite EF : BEF′A sera inscriptible. Mais, par hypothèse, BEFA est inscriptible; donc F′ coïncide avec F.

VII. *Remarque.* — *Dans l'hexagone* DFECGH : 1° *les côtés* DF, GC, *et la diagonale* HE, *concourent en* B; 2° *les côtés* CE,

(*) Le théorème de M. Mannheim est un cas particulier de celui-ci.

(**) Non tracée sur la figure.

HD, *et la diagonale* GF, *concourent en* A ; 3° *les côtés* EF, GH *sont parallèles à la diagonale* CD.

Ce résultat est d'accord avec le théorème connu (*).

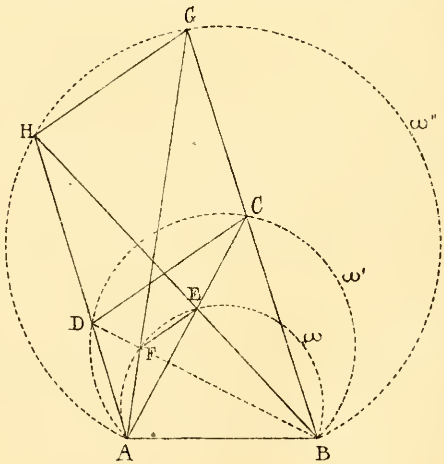
VIII. Théorème II. — *Un quadrilatère inscriptible*, ABCD, *étant donné, on en déduit deux autres*, ABEF, ABGH, *tels que* ADH, AEC, BCG, AFG, BFD, BEH *soient six lignes droites. Cela posé :*

1° *Si l'un de ceux-ci est inscriptible, l'autre l'est aussi, et les côtés* CD, EF, GH *sont parallèles ;*

2° *Si l'un des côtés* EF, GH *est parallèle à* CD, *l'autre l'est aussi, et* ABEF, ABGH *sont inscriptibles.*

Addition. — (*Septembre* 1887.)

IX. Théorème III. — ω, ω′, ω″ *étant trois circonférences décrites sur une corde commune* AB ; *on trace, sucessivement, les*



doubles cordes BCG, CEA, BEH, HDA, GFA, *lesquelles déter-*

(*) Tome II, page 251. Ce théorème est fort ancien ; car on le trouve dans les *Collections mathématiques*, de Pappus. Voir, par exemple, les *Propriétés projectives*, de Poncelet, t. I, pp. 86, 87 (seconde édition).

minent les sommets C, G, E, H, D, F *d'un hexagone. Cela posé :* 1° *Le dernier sommet,* F, *est situé sur la double corde* BD; 2° *les côtés* GH, EF *sont parallèles à la diagonale* CD (*).

X. *Remarque. — Si les diagonales* CD, EH, FG *se coupent en un même point, l'hexagone, appartenant à trois circonférences, est circonscrit à une conique* (**).

CCLXXII. — Sur un théorème d'Abel (***).

(Lettre à M. de Saint-Germain.)

« Hier, 1er mai, votre aimable lettre m'est parvenue : agréez-en
» tous mes remerciements.

» La veille, j'avais reçu la Note annoncée, tirée du dernier
» numéro des *Nouvelles Annales.* Quand il a paru, j'étais à
» l'*Hospice Dubois,* gravement malade. Aussi, la livraison est-elle
» restée non coupée.

» Il n'en est pas de même pour l'*extrait :* bien que ma tête
» soit encore un peu faible (IV), je me suis hâté de la lire (en
» partie); et je viens vous communiquer quelques remarques,
» suggérées par cette lecture.

I.

» De l'équation

$$» \quad F(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \quad (^{V}), \tag{2}$$

(*) Ce théorème, qui nous semble curieux, résume les propriétés précédentes. C'est pourquoi nous en supprimons la démonstration *directe.* D'ailleurs, au moyen d'une projection conique, on pourrait le généraliser encore.

(**) Théorème de Brianchon.

(***) Complément à la *Note* LXVII.

(IV) « Elle l'est encore trop pour que je puisse étudier votre démon-
» stration, bien compliquée ».

(V) « Je pense que vous avez, sous les yeux, ma *Note sur un théorème*
» *d'Abel* ».

» on ne peut, dites-vous, conclure

$$» \quad F(b) = f_n(b) + \varphi_n(b); \tag{3}$$

» b étant la valeur *extrême* de x. Pourquoi ?

» Contestez-vous que *la limite de la somme de deux quantités* » *est égale à la somme des limites de celles-ci?*

II.

» Lorsque, de

$$» \quad F(x) = f(x) + \varphi(x),$$

» on déduit

$$» \quad \lim F(x) = \lim f(x) + \lim \varphi(x),$$

» ou

$$» \quad F(b) = f(b) + \varphi(b),$$

» il est sous-entendu que $\varphi(x)$, par exemple, *varie d'une* » *manière continue*, de $x < b$ à $x = b$. Si, pour $x = b$, $\varphi(x)$ est » discontinue, il n'y a plus, *ni démonstration, ni théorème.*

» Si je ne me trompe, ceci arrive pour l'exemple choisi par » vous, exemple qui ne me semble pas *topique.*

III.

» En effet, x étant inférieur à l'unité, on peut, dans le » développement de $\mathfrak{L}(1 + x)$, grouper *arbitrairement* les » termes, et écrire, par exemple,

$$» \quad \mathfrak{L}(1 + x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} - \frac{x^{2n}}{2n}\right].$$

» Mais, lorsque $x = 1$, ce groupement arbitraire n'est plus » permis (Th. de Dirichlet). Aussi, au lieu de trouver

$$» \quad \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right] = \mathfrak{L}\, 2,$$

» obtenez-vous :

$$» \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right]=\frac{3}{2}\,\mathcal{L}\,2 \ (^*).$$

» Que résulte-t-il de là, sauf erreur? C'est que *la quantité*

$$» f_n(x)=S_n=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}-\frac{x^{2n}}{2n}\right),$$

» *est discontinue pour* x = 1 (**).

IV.

» Vous avez donc, me semble-t-il, appliqué mon (?) théorème » au cas *formellement exclus;* et, trouvant un résultat inadmissible » (ce qui devait arriver), vous en avez conclu que *le théorème* » *est faux.* Est-ce bien raisonné? Je m'en rapporte à vous.

» Si vous pensez, mon cher Collègue, qu'un extrait de cette » lettre puisse intéresser les lecteurs des *N. A.*, je vous prie de » la faire imprimer (avec vos répliques, bien entendu) (***). » *Dans toute discussion, peu importe qui a tort ou qui a raison :* » *le principal est que la vérité se fasse jour* ».

« Votre bien dévoué vieux Collègue,

E. C.

» Liège, 2 mai 1885. »

(*) « N'ayant pas le temps de vérifier ce résultat, je m'en rapporte à » votre affirmation ».

(**) « x étant inférieur à 1, elle est

$$» \mathcal{L}(1+x)-\varepsilon_n;$$

» si $x=1$, elle est

$$» \frac{3}{2}\mathcal{L}(1+x)-\varepsilon_n.$$

» *Ergo*... ».

(***) M. de Saint-Germain m'a répondu dans les *Nouvelles Annales*. A son article, j'ai riposté par une lettre. Le procès est encore pendant. (Mai 1888.)

CCLXXIII. — Remarques sur l'intégrale

$$A = \int_0^\pi \mathfrak{L}(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx \ (^*).$$

(*Septembre* 1887.)

I. Les valeurs de A ont été trouvées par Poisson (*Journal de l'École polytechnique*, 17ième Cahier, p. 617); mais ce grand Géomètre a commis, dans sa démonstration, une singulière inadvertance.

« Soit », dit Poisson,

$$« \quad u = \log(1 - 2a\cos x + a^2); \tag{1}$$

» d'où l'on tire

$$» \quad -a\frac{du}{da} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} - 1. \tag{2}$$

» Pour fixer les idées, supposons $a < 1$; nous aurons, en série » convergente,

$$» \quad \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = 1 + a\cos x + a^2\cos 2x + a^3\cos 3x + \cdots; \tag{3}$$

» et, par conséquent,

$$» \quad -\frac{du}{da} = \cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \cdots \tag{4}$$

» Intégrant par rapport à a, et observant que u est nul en » même temps que a, il vient

$$» \quad -u = a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \cdots; \tag{5}$$

(*) Cette *Note* a éte publiée, en partie, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. I).

» d'où l'on conclut

$$» \int_0^\pi u dx = \int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2) dx = 0.$$

. . . .

II. Le développement (5) est *faux*. En effet, la série a pour somme,

$$\frac{1 - 2a\cos x}{1 - 2a\cos x + x^2},$$

lorsque a est compris entre -1 et $+1$ (exclusivement) (*).

III. La relation (5) est *fausse;* car, pour $x = 0$, elle devient

$$-u = -\mathcal{l}(1-a)^2 = -2\mathcal{l}(1-a) = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots,$$

ou

$$2\mathcal{l}(1-a) = \mathcal{l}(1-a).$$

IV. On peut, ainsi qu'il suit, rectifier le calcul de Poisson.

$$\frac{du}{da} = 2\frac{a - \cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{2}{a}\frac{1 - \frac{1}{a}\cos x}{1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}}.$$

1° Si a surpasse 1, on a, par le paragraphe II :

$$\frac{1 - \frac{1}{a}\cos x}{1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}} = 1 + \frac{1}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\cos 2x + \frac{1}{a^3}\cos 3x + \cdots,$$

ou

$$\frac{du}{da} = 2\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\cos x + \frac{1}{a^3}\cos 2x + \cdots\right], \qquad (6)$$

puis

$$u - C = 2\left[\mathcal{l}a - \frac{1}{a}\cos x - \frac{1}{2a^2}\cos 2x - \frac{1}{3a^3}\cos 3x - \cdots\right]. \qquad (7)$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 77.

Pour déterminer la constante C, faisons $a = 1$ (*); nous aurons

$$u = \mathcal{L}(1 - 2\cos x + 1) = 2\mathcal{L}(2\sin\tfrac{1}{2}x),$$

$$2\mathcal{L}(2\sin\tfrac{1}{2}x) - C = -2[\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \cdots];$$

donc (**) $C = 0$.

La formule (7) se réduit à

$$u = 2\left[\mathcal{L}a - \frac{1}{a}\cos x - \frac{1}{2a^2}\cos 2x - \frac{1}{3a^3}\cos 3x - \cdots\right]. \tag{8}$$

Il en résulte, pour $a \overline{\gtrless} 1$:

$$A = \int_0^\pi u\,dx = 2\pi\,\mathcal{L}a. \tag{9}$$

2° Soit $a < 1$.

De

$$1 + a\cos x + a^2\cos 2x + \cdots = \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2},$$

on tire

$$\cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \cdots = \frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2},$$

puis

$$a\cos x + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}a^3\cos 3x + \cdots = -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}(1 - 2a\cos x + a^2),$$

ou bien

$$a\cos x + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}a^3\cos 3x + \cdots = -\tfrac{1}{2}u. \tag{10}$$

De cette égalité, qui doit remplacer la relation (5), on conclut

$$A = \int_0^\pi u\,dx = 0.$$

(*) Cette hypothèse est permise; car la série (7) est *convergente* quand a reçoit cette valeur limite, bien que la série (6) soit, alors, *indéterminée*.

(**) On sait que

$$\mathcal{L}(2\sin\tfrac{1}{2}x) = -[\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \cdots].$$

(*Traité élémentaire des séries*, p. 106.)

CCLXXIV (*). — Sur la démonstration d'un théorème de Fermat, donnée par Legendre.

(*Septembre* 1887.)

I. On lit, dans la *Théorie des Nombres* (**) :

« Théorème. — *Tout nombre premier* A *est de la forme*
» $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$.

. . . .

» Considérons plus généralement l'équation

$$\text{»}\quad AA' = p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

» dans laquelle chacun des nombres p, q, r, s, sera supposé
» moindre que $\frac{1}{2}A$, on aura $A'A < \frac{4}{4}A^2$, ou $A' < A$ (***).
» Et d'abord si on avait $A' = 1$, il est clair que A serait
» égal à la somme de quatre carrés, et la proposition serait
» démontrée (IV).

» Soit donc $A' > 1$, et parce que A' est diviseur de
» $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, il sera aussi diviseur de la quantité

$$\text{»}\quad (p - \alpha A')^2 + (q - \beta A')^2 + (r - \gamma A')^2 + (s - \delta A')^2,$$

» α, β, γ, δ étant pris à volonté. Supposons qu'on prenne ces
» indéterminées de manière qu'aucun des termes $p - \alpha A'$,
» $q - \beta A'$, etc., n'excède $\frac{1}{2}A'$ (V); alors si l'on fait

$$\text{»}\quad A'A'' = (p - \alpha A')^2 + (q - \beta A')^2 + (r - \gamma A')^2 + (s - \delta A')^2,$$

» on aura $A'A'' < \frac{4}{4}A'A'$ ou $A'' < A'$. Maintenant si au moyen
» de la formule du n° 150 (VI) on multiplie la valeur de AA' par

(*) Addition à la *Note* CCXVIII.

(**) Tome I, page 214, édition de 1830.

(***) Voir la *Remarque* (A).

(IV) Voir la *Remarque* (B).

(V) *Remarque* (C).

(VI) Faute typographique : on doit lire 152. Voir la *Remarque* (D).

» celle de A'A'', on trouvera pour produit une somme de quatre
» carrés dont chacun sera divisible par A'A'; de sorte qu'en
» divisant tout par A'^2, on aura

$$« \ AA'' = (A - \alpha p - \beta q - \gamma r - \delta s)^2 + (\alpha q - \beta p + \gamma s - \delta r)^2 + (\alpha r - \gamma p + \delta q - \beta s)^2 + (\alpha s - \delta p + \beta r - \gamma q)^2.$$

» Cela posé, si on a $A'' = 1$, la proposition sera démontrée;
» mais si on a $A'' > 1$, on procédera de la même manière pour
» obtenir un nouveau produit AA''' exprimé par quatre carrés,
» et dans lequel on aura $A''' < A''$. Continuant ainsi la suite des
» entiers décroissants A, A', A'', A''', etc., on parviendra néces-
» sairement à un terme égal à l'unité; donc alors le nombre
» premier A sera exprimé par la somme de quatre carrés (*). »

(A)

Soit

$$N = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = AA'; \tag{1}$$

et, par conséquent, $A > \sqrt{N}$. Un nombre donné, N, n'admet pas, nécessairement, un diviseur *premier*, supérieur à $\sqrt{N}$. Par exemple, si $N = 27$, le plus grand facteur premier de N est 3.

Legendre ne démontre donc pas le théorème énoncé : il prouve, tout au plus, celui-ci :

Si un nombre N *est la somme de quatre carrés, tout diviseur de* N, *supérieur à* $\sqrt{N}$, *est la somme de quatre carrés.*

(B)

D'après la Remarque (A), *la proposition ne serait pas démontrée.*

(C)

On doit avoir, non

$$p - \alpha A' \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2} A',$$

mais

$$(p - \alpha A')^2 \overline{\overline{<}} (\tfrac{1}{2} A')^2 :$$

il s'agit de la valeur *numérique* de $p - \alpha A'$.

(*) *Remarque* (E).

(D)

La formule citée est celle d'Euler :

$$\left.\begin{aligned}&(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)\\&=(pp'+qq'+rr'+ss')^2+(pq'-qp'+rs'-sr')^2\\&+(pr'-qs'-rp'+sq')^2+(ps'+qr'-rq'-sp')^2.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Si l'on fait :

$$p'=p-\alpha A',\quad q'=q-\beta A',\quad r'=r-\gamma A',\quad s'=s-\delta A',\quad(3)$$

elle devient

$$\begin{aligned}AA'^2A''=&\left[p^2+q^2+r^2+s^2-A'(p\alpha+q\beta+r\gamma+s\delta)\right]^2\\&+\left[p(q-\beta A')-q(p-\alpha A')+r(s-\delta A')-s(r-\gamma A')\right]^2\\&+\left[p(r-\gamma A')-q(s-\delta A')-r(p-\alpha A')+s(q-\beta A')\right]^2\\&+\left[p(s-\delta A')+q(r-\gamma A')-r(q-\beta A')-s(p-\alpha A')\right]^2.\end{aligned}$$

Le second membre égalant

$$\begin{aligned}&\left[AA'-A'(p\alpha+q\beta+r\gamma+s\delta)\right]^2+\left[(\alpha q-\beta p)A'+(\gamma s-\delta r)A'\right]^2\\&+\left[(\alpha r-\gamma p)A'+(\delta q-\beta s)A'\right]^2+\left[\alpha s-\delta p)A'+(\beta r-\gamma q)A'\right]^2,\end{aligned}$$

il reste

$$\left.\begin{aligned}AA''=&(A-\alpha p-\beta q-\gamma r-\delta s)^2+(\alpha q-\beta p+\gamma s-\delta r)^2\\&+(\alpha r-\gamma p+\delta q-\beta s)^2+(\alpha s-\delta p+\beta r-\gamma q)^2,\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

comme l'écrit Legendre.

(E)

On a vu, dans la *Remarque* (A), que le théorème énoncé n'est nullement démontré. Il en est de même, par conséquent, pour le *théorème de Fermat : « Un nombre quelconque est la somme » de quatre ou d'un moindre nombre de carrés »* (*).

(*) *Théorie des Nombres,* t. I, p. 215. L'illustre Auteur se contente de dire : « C'est une conséquence immédiate de la proposition qu'on vien » de démontrer, et du lemme qui la précède. »

Autres Remarques.

I. Lagrange, à qui l'on doit la première démonstration du théorème de Fermat, n'a pas commis les inexactitudes que nous venons de signaler; néanmoins, cette démonstration ne nous semble pas irréprochable. Après avoir énoncé ainsi la proposition préliminaire :

« Si la somme de quatre carrés est divible par un nombre » premier plus grand que la racine carrée de la même somme, » ce nombre sera nécessairement égal à la somme de quatre » carrés (*) », et l'avoir prouvée très péniblement, Lagrange ajoute :

« Corollaire. — *Si un nombre premier quelconque est un » diviseur de la somme de quatre carrés qui n'aient point de » commun diviseur, ce nombre sera aussi la somme de quatre » carrés.*

« Car nommant, comme ci-dessus, A le nombre premier » donné et $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ le nombre composé de quatre » carrés qui est divisible par A, il est clair que, si chacune des » racines p, q, r, s était moindre que $\frac{A}{2}$, on aurait

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 < 4\left(\frac{A}{2}\right)^2 < A^2;$$

» de sorte que A serait plus grand que $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}$ » comme on l'a supposé dans le Théorème précédent; donc, etc. » Or je dis que quels que soient les nombres p, q, ..., on peut » toujours les réduire à être moindres que $\frac{A}{2}$; car soit, par » exemple, $p > \frac{A}{2}$, il est visible que si

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

» est divisible par A,

$$(p - mA)^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

(*) *OEuvres de Lagrange*, publiées par Serret, t. III, p. 193. Les défauts que nous venons de signaler ont été aggravés par Le Besgue, dans ses *Exercices d'Analyse numérique* (pp. 106, 107). Ils me semblent avoir été évités par Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*, troisième édition, t. II, p. 94).

» le sera aussi, de même que

$$(mA - p)^2 + q^2 + r^2 + s^2 \ldots \text{ »}$$

Ceci fait, l'illustre Géomètre établit cet autre théorème auxiliaire :

Étant donné un nombre premier A, *on peut toujours déterminer deux nombre entiers*, a, b, *tels, que* $a^2 + b^2 + 1$ *soit divisible par* A (*).

II. On peut former, bien simplement, la valeur de A''.

En effet, des équations

$$AA' = \sum p^2, \quad A'A'' = \sum (p - \alpha A')^2,$$

on tire

$$A'' = \frac{\sum (p - \alpha A')^2}{A'},$$

ou

$$A'' = A - 2\sum \alpha p + A' \sum \alpha^2. \tag{5}$$

III. Dans l'identité d'Euler (D), changeons de notation, de manière que l'égalité

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 \tag{6}$$

soit vérifiée par :

$$\left.\begin{aligned} p &= \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', \\ q &= -\beta\alpha' + \alpha\beta' - \delta\gamma' + \gamma\delta', \\ r &= -\gamma\alpha' + \delta\beta' + \alpha\gamma' - \beta\delta', \\ s &= -\delta\alpha' - \gamma\beta' + \beta\gamma' + \alpha\delta'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si l'on pose

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A, \tag{8}$$

il résulte, des équations précédentes :

$$\left.\begin{aligned} A\alpha' &= p\alpha - q\beta - r\gamma - s\delta, \\ A\beta' &= p\beta + q\alpha + r\delta - s\gamma, \\ A\gamma' &= p\gamma - q\delta + r\alpha + s\beta, \\ A\delta' &= p\delta + q\gamma - r\beta + s\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*) Legendre commence par là (*Théorie des Nombres*, t. I, p. 211).

puis

$$\left.\begin{aligned}\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2 &= \left(\frac{p\alpha-q\beta-r\gamma-s\delta}{A'}\right)^2+\left(\frac{p\beta+q\alpha+r\delta-s\gamma}{A'}\right)^2\\ &+\left(\frac{p\gamma-q\delta+r\alpha+s\beta}{A'}\right)^2+\left(\frac{p\delta+q\gamma-r\beta+s\alpha}{A'}\right)^2.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Si chaque fraction était réductible à un nombre entier, le théorème suivant serait démontré :

Soit $N = AA'$, *les trois nombres étant entiers. Si* N *et* A *sont, chacun, la somme de quatre carrés entiers, le quotient de* N *par* A *est, également, la somme de quatre carrés entiers.*

Mais cette conclusion (vraie) serait trop précipitée.

Prenons, par exemple,

$$N = 462, \quad A = 66, \quad A' = 7;$$

puis

$$p=21,\quad q=4,\quad r=2,\quad s=1;\qquad \alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=5,\quad \delta=6.$$

Nous trouvons, par les formules (9) :

$$\alpha' = -\frac{3}{66},\quad \beta'=\frac{53}{66},\quad \gamma'=\frac{85}{66},\quad \delta'=\frac{143}{66};$$

et

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2=\frac{3^2+53^2+85^2+143^2}{66^2}$$
$$=\frac{9+2809+7225+20449}{4356}=\frac{30492}{4356}=7\ (*).$$

En conséquence :

1° *Si un nombre* N, *égal à la somme de quatre carrés entiers, est divisible par un nombre* A, *égal à la somme de quatre carrés entiers, le quotient* $\frac{N}{A}$ *peut se présenter sous la forme d'une somme de quatre carrés fractionnaires ;*

(*) Si l'on veut, au moyen des formules (9), trouver des valeurs de α', β', δ', γ', qui soient *entières*, on peut faire

$$p=15,\quad q=-4,\quad r=-5,\quad s=-14,$$

quantités dont la somme des carrés est 462. Il résulte, de ces hypothèses :

$$\alpha'=2,\quad \beta'=1,\quad \gamma'=1,\quad \delta'=1.$$

2° *Un nombre entier peut être la somme de quatre carrés fractionnaires* (*).

Par exemple,

$$7 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$
$$= \left(\frac{29}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{11}\right)^2,$$

etc. (**).

IV. Si *l'on admet* le théorème de Fermat, il en résulte celui-ci, généralisation du théorème d'Euler, employé par Lagrange :

Tout nombre entier est, d'une infinité de manières, égal à la somme de quatre carrés fractionnaires (***).

CCLXXV. — Sur un théorème de Gauss.

(*Septembre* 1887.)

I. A la page 285 du *Journal de Liouville* (tome II, 1837), Le Besgue s'énonce ainsi :

« De là ce théorème de M. Gauss :

» *La quantité*

$$\frac{1}{2}\,\frac{2h(2h-1)\cdots(h+1)}{1.2\ldots h}, \quad (\text{mod. } p)$$

» *est toujours égale à*

$$\pm L\left(< \frac{p}{2}\right),$$

» *en prenant*

$$p = L^2 + 4M^2$$

» *et*

$$\pm L = 1 + 4n \text{ ».}$$

(*) Ces remarques, peut-être nouvelles, complètent ce que l'on a vu dans la *Note* CCXVIII.

(**) Dans chaque décomposition, les numérateurs doivent, bien entendu, être premiers entre eux.

(***) Voir, ci-dessus, les décompositions de 7.

Autrement dit :

« *Soit un nombre premier*

$$p = L^2 + 4M^2.$$

» *En supposant* $L = 1 + 4n$, *on a*

$$\frac{1}{2}\,\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1.2\ldots n} = \mathcal{M}(p) \pm L. \text{ »} \tag{A}$$

Prenons $n=6$, $u=0$, $M=1$; valeurs d'où résultent $L=1$, $p=5$. Nous devons trouver :

$$\frac{1}{2}\,\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} = \mathcal{M}(5) \pm 1,$$

ou

$$11.6.7 = \mathcal{M}(5) \pm 1,$$

ou

$$2 = \mathcal{M}(5) \pm 1;$$

ce qui est *faux*.

Soient $n=6$, $u=-1$, $M=1$; et, par conséquent, $L=-5$, $p=13$. L'égalité (A) devient

$$11.6.7 = \mathcal{M}(13) \pm 3,$$

ou

$$7 = \mathcal{M}(13) \pm 3;$$

ce qui est *faux*.

II. L'énoncé de Le Besgue est donc inexact. Voici celui que donne Jacobi (*) :

« *Sit* p *numerus* $=4k+1$, *atque resolvatur in duo quadrata* » ee + ff, *designante* ee *quadratum impar,* ff *quadratum par,* » *fore* ± e *residuum minimum (quod inter* — $\frac{1}{2}$p *et* + $\frac{1}{2}$p *conti-* » *netur), numeri*

$$\frac{1}{2}\,\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots 2k}{1.2.3\ldots k},$$

» *per* p *divisi; hoc insuper residuum minimum per 4 divisum*

(*) *Journal de Crelle,* t. II, p. 69. C'est à propos d'une recherche particulière que j'ai rencontré, par hasard, les Notes de Le Besgue et de Jacobi. Il ne m'a pas été possible de trouver, dans les *OEuvres de Gauss,* le théorème en question.

» *semper residuum* + 1, *relinquere; ita ut sit aut numerus nega-*
» *tivus formae* — (4n + 3), *aut positivus formae* 4n + 1 ».

Ainsi, le nombre entier h (ou n) n'est point arbitraire : il égale $\frac{p-1}{4}$.

CCLXXVI. — Exercice sur un Problème de Géométrie élémentaire.

(*Octobre-Novembre* 1887.)

I.

Construire un quadrilatère convexe P, *dont le périmètre* l *et les angles* A, B, C, D *sont donnés.*

Fig. 1.

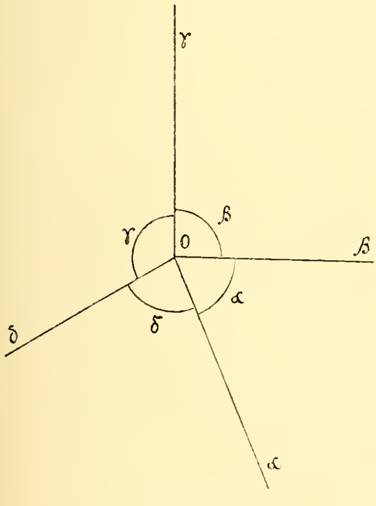
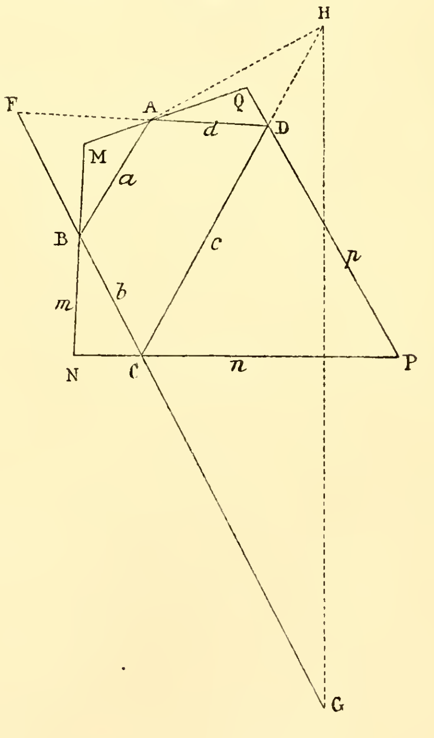


Fig. 2.



1. Soient $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ des parallèles (données) aux bissectrices intérieures des angles A, B, C, D. Soit la droite $GF = l$, faisant, avec $O\gamma$, un angle égal à $\frac{C}{2}$. Prenons, arbitrairement, $FB = a$; puis construisons le point A, symétrique de F, relativement à la droite MN, perpendiculaire à $O\beta$: A est un sommet de P. Menons AH perpendiculaire à $O\delta$, GH perpendiculaire à $O\gamma$: ces droites se coupent en un point H.

Si l'on trace QP perpendiculaire au milieu de AH, PN perpendiculaire au milieu de GH; et qu'enfin, par le sommet A, on mène MQ perpendiculaire à $O\alpha$; on détermine le quadrilatère MNPQ (*), circonscrit au quadrilatère P, dont tous les sommets sont connus (**).

2. *Remarque.* — Le problème est *indéterminé;* ce qui était évident *a priori.*

II.

Équations du problème.

3. Il est visible (et connu) que :

$$M = \frac{A + B}{2}, \quad N = \frac{B + C}{2}, \quad D = \frac{C + D}{2}, \quad Q = \frac{D + A}{2}. \qquad (1)$$

Donc

$$M + P = N + Q :$$

le quadrilatère Q *est inscriptible à une circonférence* (***).

4. *Remarque.* — Si α, β, γ, δ sont les angles consécutifs, indiqués sur la figure 1 :

$$\alpha + M = \pi, \quad \beta + N = \pi, \quad \gamma + P = \pi, \quad \delta + Q = \pi.$$

(*) Nous le désignerons par la lettre Q.

(**) On justifie cette construction en se reportant au problème direct : *Au quadrilatère* Q, *inscrire un quadrilatère* P, *dont le périmètre soit minimum* (Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire, 6e édit., pp. 20 et 21). La théorie du *kaléidoscope* est fondée sur ce problème.

(***) *Loc. cit.*

Mais, par hypothèse, la droite GF fait, avec $O\gamma$, un angle égal à $\frac{C}{2}$. Conséquemment :

$$B = 2(\pi - \beta) - C, \quad A = 2(\pi - \alpha) - B, \quad D = 2(\pi - \delta) - A.$$

Ainsi, la construction indiquée équivaut à l'emploi des angles C, B, A, D.

5. Dans les triangles AMB, BNC :

$$BM = a\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin M}, \qquad BN = b\,\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin N};$$

donc, m, n, p, q étant les côtés consécutifs de Q :

$$m \sin M \sin N = a \sin N \cos\frac{A}{2} + b \sin M \cos\frac{C}{2}, \tag{3}$$

$$n \sin M \sin N = b \sin M \cos\frac{B}{2} + c \sin N \cos\frac{D}{2}, \tag{4}$$

$$p \sin M \sin N = c \sin N \cos\frac{C}{2} + d \sin N \cos\frac{A}{2}, \tag{5}$$

$$q \sin M \sin N = d \sin M \cos\frac{D}{2} + a \sin N \cos\frac{B}{2}. \tag{6}$$

6. Des équations (3), (4), on déduit :

$$\sin M\left(m \cos\frac{B}{2} - n \cos\frac{C}{2}\right) = a \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - c \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \tag{7}$$

Des équations (5), (7) :

$$\left.\begin{aligned} &\sin M \sin N\left(m \cos\frac{B}{2} - n \cos\frac{C}{2} + p \cos\frac{D}{2}\right) \\ &= a \sin N \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + d \sin M \cos\frac{A}{2}\cos\frac{D}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Des équations (6), (8) :

$$m \cos\frac{B}{2} - n \cos\frac{C}{2} + p \cos\frac{D}{2} - q \cos\frac{A}{2} = 0. \tag{9}$$

7. On tire, des équations (3), (7), (6) :

$$b = m\frac{\sin N}{\cos\frac{C}{2}} - a\frac{\sin N\cos\frac{A}{2}}{\sin M\cos\frac{C}{2}}, \tag{10}$$

$$c = \sin M\frac{n\cos\frac{C}{2} - m\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} + a\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}}, \tag{11}$$

$$d = q\frac{\sin N}{\cos\frac{D}{2}} - a\frac{\sin N\cos\frac{B}{2}}{\sin M\cos\frac{D}{2}}; \tag{12}$$

puis, des trois dernières,

$$\left.\begin{aligned} l = {} & m\frac{\sin N}{\cos\frac{C}{2}} + \sin M\frac{n\cos\frac{C}{2} - m\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} + q\frac{\sin N}{\cos\frac{D}{2}} \\ & + \left[1 - \frac{\sin N\cos\frac{A}{2}}{\sin M\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} - \frac{\sin N\cos\frac{B}{2}}{\sin M\cos\frac{D}{2}}\right]a. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

III.

Simplification.

8. L'équation (13) peut être notablement réduite ; car *le coefficient de* a *est nul.* En d'autres termes : *dans tout quadrilatère convexe, dont* A, B, C, D *sont les angles consécutifs, on a*

$$\left.\begin{aligned} & \sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right] \\ & = \sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

En effet, si l'on multiplie par 2, cette égalité devient

$$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right]$$
$$=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{D+A}{2}+\cos\frac{D-A}{2}\right];$$

ou, parce que $A+B+C+D=2\pi$:

$$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right]=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{D-A}{2}\right].$$

Pour la même raison :

$$\frac{C-D}{2}=\left(\frac{A+B}{2}+C\right)-\pi,\quad \frac{A-D}{2}=\left(\frac{B+C}{2}+A\right)-\pi.$$

Donc

$$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right)\right]$$
$$=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\left(\frac{B+C}{2}+A\right)\right];$$

ou, après multiplication par 2 :

$$\sin A+\sin B-\left[\sin(A+B+C)-\sin C\right]$$
$$=\sin B+\sin C-\left[\sin(A+B+C)-\sin A\right];$$

ce qui est identique.

9. *Remarque.* — On sait que

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

Par conséquent, *dans tout quadrilatère convexe :*

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}. \tag{15}$$

10. *Autre remarque.* — *Dans tout quadrilatère convexe :*

1° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}, \tag{16}$$

$$2^{\circ}\qquad \left.\begin{aligned}&\sin\frac{A+B}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}\right]\\&=\sin\frac{B+C}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right],\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

$$3^{\circ}\qquad \left.\begin{aligned}&\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right]\\&=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right].\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

IV.

Équations réduites.

11. L'équation (13) est devenue

$$\left.\begin{aligned}&l\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\left[\sin N\cos\frac{D}{2}-\sin M\cos\frac{B}{2}\right]m\\&\qquad+n\sin M\cos\frac{C}{2}+q\sin N\cos\frac{C}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Mais on peut la simplifier encore. En effet, le coefficient de m est

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{D}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+D}{2}\cos\frac{D}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(D+\frac{A}{2}\right)-\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)\right]=\sin\frac{D-B}{2}\cos\frac{A+B+D}{2}$$

$$=\sin\frac{B-D}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{2B+A+C}{2}-\pi\right)\cos\frac{C}{2}=-\sin(M+N)\cos\frac{C}{2}.$$

Donc, après suppression d'un facteur, et par des permutations tournantes :

$$l\cos\frac{D}{2}=-m\sin(M+N)+n\sin M+q\sin N,\qquad(20)$$

$$l\cos\frac{A}{2}=-n\sin(N+P)+p\sin N+m\sin P,\qquad(21)$$

$$l\cos\frac{B}{2} = -p\sin(P+Q) + q\sin P + n\sin Q, \tag{22}$$

$$l\cos\frac{C}{2} = -q\sin(Q+M) + m\sin Q + p\sin M \text{ (*)}. \tag{23}$$

V.

Valeurs des inconnues.

12. Si l'on suppose $a=0$, le quadrilatère P se réduit à un triangle MCD, dans lequel

$$\frac{b}{\sin D} = \frac{d}{\sin C} = \frac{c}{\sin(C+D)} = \frac{l}{4\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} \text{ (**)}.$$

En conséquence :

$$b = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{D}{2}}{\sin M\cos\frac{C}{2}},\quad d = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin M\cos\frac{D}{2}},\quad c = -\frac{l}{2}\frac{\cos M}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}}. \tag{24}$$

La substitution dans l'équation (3) donne ensuite

$$m = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{D}{2}}{\sin M\sin N}. \tag{25}$$

(*) En passant, il est bon de faire observer que :

$$\sin P = \sin M,\qquad \sin Q = \sin N,\qquad \sin(P+Q) = -\sin(M+N), \text{ etc.}$$

(**) L'identité

$$\sin D + \sin C + \sin(C+D) = 4\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}$$

ne diffère pas de celle-ci :

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C) = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2},$$

que nous avons rappelée précédemment.

13. D'après la nature du problème *direct* (**1**, *note*), on est *porté à croire* que cette valeur de m est *générale*, c'est-à-dire, indépendante de l'hypothèse faite sur a, et que l'on a aussi, par un changement de lettres :

$$n = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin M \sin N},\quad p = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin M \sin N},\quad q = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin M \sin N}. \tag{26}$$

Tout à l'heure, cette espèce de *prévision* sera justifiée. En attendant qu'elle le soit, voyons si les valeurs (25), (26) satisfont aux équations (20), (21), ...

Substituant dans l'équation (20), par exemple, on trouve

$$2\cos\frac{D}{2}\sin M \sin N = -\sin\frac{D}{2}\sin(M+N) + \sin\frac{A}{2}\sin M + \sin\frac{C}{2}\sin N,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &2\cos\frac{D}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\\ &= -\sin\frac{D}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

puis

$$\left.\begin{aligned} &-2\cos\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{A+B+C}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right)\\ &= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Le premier membre égale

$$\begin{aligned} &-\cos\frac{A+B+C}{2}\left[\cos\frac{A-C}{2} - \cos\left(B+\frac{A+C}{2}\right)\right]\\ &+\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right)\\ &= -\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}\\ &+\left[\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\left(B+\frac{A+C}{2}\right) + \sin\frac{A+B+C}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+\frac{B}{2}\right) + \cos\left(C+\frac{B}{2}\right)\right] + \cos\frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Le second membre de l'égalité (28) est

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B}{2}-\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)+\cos\frac{B}{2}-\cos\left(C+\frac{B}{2}\right)\right];$$

donc les deux membres ont même valeur.

14. *Remarques.* — I. *Dans tout quadrilatère convexe, les angles* A, B, C, D *vérifient les relations*

$$\left.\begin{aligned}
&2\cos\frac{D}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\\
&=-\sin\frac{D}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2},\\
&2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}\\
&=-\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{B+D}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

II. Si l'on fait

$$A=2x,\qquad B=2y,\qquad C=2z,$$

l'égalité (28) prend la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(x+y+z)\sin(x+2y+z)-\sin x\sin(x+y)-\sin z\sin(y+z)\\
&=2\cos(x+y+z)\sin(x+y)\sin(y+z).
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

Ainsi, *la fonction contenue dans le premier membre est calculable par logarithmes.*

VI.

Calculs de déterminants.

15. Si le système des équations (20), ... (23) est *déterminé*, nous aurons ce théorème, peut-être nouveau :

Les quadrilatères Q, *circonscrits aux quadrilatères* P *ayant les mêmes éléments* I, A, B, C, D, *sont tous égaux entre eux* (*).

Les coefficients des inconnues, dans ces équations, étant :

$$\begin{array}{cccc}
-\sin(M+N), & \sin M, & 0; & \sin N; \\
\sin M, & -\sin(N+D), & \sin N, & 0; \\
0, & \sin N, & \sin(M+N), & \sin M; \\
\sin N, & 0, & \sin M, & \sin(N+D);
\end{array}$$

il y a lieu de former le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -h, & f, & o, & g \\ f, & -h, & g, & o \\ o, & g, & h, & f \\ g, & o, & f, & h' \end{vmatrix};$$

et d'examiner s'il est différent de zéro quand

$$f = \sin M, \quad g = \sin N, \quad h = \sin(M+N), \quad h' = \sin(N+P). \qquad (31)$$

On a

$$\Delta = -[h\Delta_1 + f\Delta_2 + g\Delta_4], \qquad (32)$$

en supposant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -h', & g, & o \\ g, & h, & f \\ o, & f, & h' \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f, & o, & g \\ g, & h, & f \\ o, & f, & h' \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} f, & o, & g \\ -h', & g, & o \\ g, & h, & f \end{vmatrix}.$$

(*) C'est le théorème *supposé* ci-dessus (13).

Or :

$$\Delta_1 = -h'(hh' - f^2) - g^2h' = -h'(f^2 - g^2 - hh'),$$

$$\Delta_2 = f(hh' - f^2) + fg^2 = -f(f^2 - g^2 - hh'),$$

$$\Delta_4 = f^2g - ghh' - g^3 = g(f^2 - g^2 - hh').$$

Donc, au lieu de la formule (32) :

$$\Delta = (f^2 - g^2 - hh')^2; \tag{33}$$

expression remarquable (*).

16. Revenant aux valeurs (31), nous avons

$$\sqrt{\Delta} = \sin^2 M - \sin^2 N - \sin(M + N)\sin(N + P),$$

ou

$$2\sqrt{\Delta} = -\cos 2M + \cos 2N - \cos(M - P) + \cos(M + 2N + P);$$

et, si $P = \pi - M$:

$$\Delta = 0.$$

Ainsi, *quand le quadrilatère* Q *est inscriptible* (ce qui a lieu), *le déterminant* Δ *est nul.*

(*) D'après une application donnée par M. *Dostor*, dans sa *Théorie des déterminants* (p. 62), on a

$$f^2 - g^2 - hh' = \begin{vmatrix} 0, & 1, & g \\ -1, & 0, & f \\ f, & g, & -hh' \end{vmatrix}.$$

Ainsi : *le déterminant* Δ, *à seize éléments, est le carré d'un déterminant à neuf éléments.* D'ailleurs, par un théorème de Cauchy, Δ *est un déterminant à neuf éléments;* savoir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + g^2, & fg, & g(1 - hh') \\ fg, & 1 + f^2, & -f(1 + hh') \\ g(1 - hh'), & -f(1 + hh'), & f^2 + g^2 + h^2h'^2 \end{vmatrix}.$$

Nous ferons encore observer que, d'après cette formule, ou d'après la formule (33), la valeur de Δ dépend, uniquement, de f, de g, et du *produit* hh'.

17. Comme les équations (20), ... (23) ne sont pas incompatibles, et que le dénominateur Δ est nul, *les numérateurs* des valeurs des inconnues (*) *doivent*, de toute nécessité, *être nuls.* Par exemple, le numérateur de la valeur de m étant (après suppression du facteur l)

$$\mu = \begin{vmatrix} \cos\frac{D}{2}, & f, & o, & g \\ \cos\frac{A}{2}, & -h', & g, & o \\ \cos\frac{B}{2}, & g, & h, & f \\ \cos\frac{C}{2}, & o, & f, & h' \end{vmatrix},$$

il doit se réduire à zéro.

En effet,

$$\mu = \Delta_1\cos\frac{D}{2} - \Delta_2\cos\frac{A}{2} + \Delta_3\cos\frac{B}{2} - \Delta_4\cos\frac{C}{2}$$

$$= (f^2 - g^2 - hh')\left[h'\cos\frac{D}{2} + f\cos\frac{A}{2} - g\cos\frac{C}{2}\right] = 0 \; (^{**}).$$

Les valeurs des inconnues m, n, p, q se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$, on doit, pour démontrer le théorème énoncé (15), recourir à la Géométrie (***).

(*) Dans les formules de Cramer.

(**) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f, & o, & g \\ -h', & g, & o \\ o, & f, & h' \end{vmatrix} = fgh' - h'fg = 0.$$

(***) J'ai essayé de résoudre, directement, les équations (20), (23); mais, à cause de la complication des calculs, cette tentative n'a pas réussi.

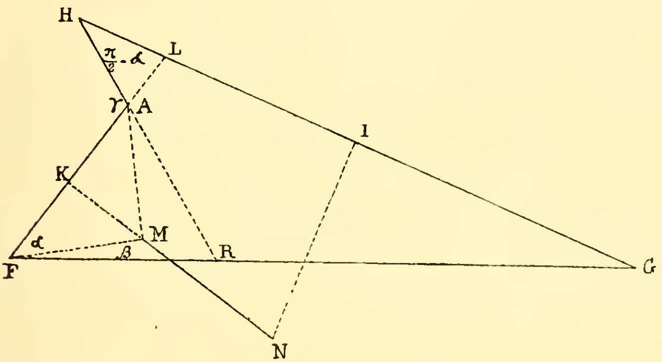
VII.

Propriétés auxiliaires.

18. Si l'on se reporte à la figure 2, on voit que le théorème, dont il s'agit, peut être énoncé en ces termes :

Soit un quadrilatère non convexe, FAHG, *dont la* BASE FG *est donnée, les autres côtés ayant des* DIRECTIONS *données* (*).

Fig. 3.



Au milieu de AF, *on élève la perpendiculaire* KMN ; *au milieu de* GH, *la perpendiculaire* IN. *On trace encore la droite* FM *faisant, avec* NMK, *un angle égal à* H.

Cela posé, MN = *const.* (**).

(*) C'est-à-dire qu'ils sont parallèles à des droites données.

(**) Autrement dit, *quand le point* A *parcourt* FK ; *le point* N *décrit une parallèle à* FM.

Depuis que cette Note est rédigée, un jeune Collègue et ami, M. G. de Longchamps, m'a fait observer que le théorème à démontrer est compris dans celui-ci :

Sur les côtés Ox, Oy *d'un angle donné, on prend* OA = u, OB = v; *on*

Soient :

$$FG = l, \quad FA = 2x, \quad AFM = \alpha, \quad MFG = \beta, \quad FAH = \gamma,$$

$$AHG = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Soit R l'intersection des droites AH, FG.

L'angle $HRG = \pi - (\gamma - \alpha - \beta)$; donc

$$FR = 2x \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)};$$

puis

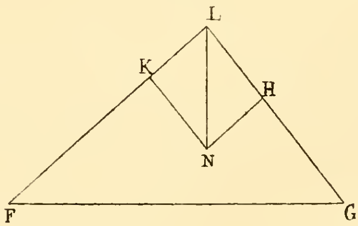
$$RG = l - 2x \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}.$$

Dans le triangle HRG :

$$HG = RG \frac{\sin R}{\sin H} = \left[l - 2x \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)} \right] \frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

19. Pour évaluer KN, je m'appuierai sur le Lemme suivant, facile à vérifier.

Fig. 4.



élève AM *perpendiculaire à* Ox, BM *perpendiculaire à* Oy. *Cela posé, si les variables* u, v *satisfont à une relation ayant la forme*

$$au + bv + C = 0,$$

le point M *décrit une ligne droite.*

Cette remarque est très juste ; mais, dans la question actuelle, il s'agissait, principalement, d'établir la formule $MN = const.$ Le calcul précédent, bien qu'un peu long, n'est donc peut-être pas inutile.

Sur les côtés FL, GL *d'un triangle* FGL, *on prend* $FK = f$, $GI = g$; *puis on trace les perpendiculaires* KN, IN *à ces côtés. Les distances* KN, IN *sont données par les formules :*

$$KN = \frac{1}{\sin L}[f\cos L + l\cos G - g],$$

$$IN = \frac{1}{\sin L}[g\cos L + l\cos F - f] \quad (*).$$

Dans le cas particulier considéré,

$$f = x, \qquad g = \frac{1}{2}\left[l - 2x\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}\right]\frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

En outre, AL étant le prolongement de FA :

$$L = FLG = \frac{3}{2}\pi - \alpha - \gamma,$$

$$\sin L = -\cos(\alpha + \gamma), \qquad \cos L = -\sin(\alpha + \gamma),$$

$$G = -\frac{\pi}{2} + (\gamma - \beta), \quad \sin G = -\cos(\gamma - \beta), \quad \cos G = \sin(\gamma - \beta).$$

Nous avons donc

$$KN = \frac{1}{\cos(\alpha+\gamma)}\left\{x\sin(\alpha+\gamma) - l\sin(\gamma-\beta) + \frac{1}{2}\left[l - 2x\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha-\beta)}\right]\frac{\sin(\gamma-\alpha-\beta)}{\cos\alpha}\right\}.$$

(*) Il en résulte

$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L}[f^2 + g^2 + l^2 - 2gl\cos G - 2fl\cos F - 2fg\cos L];$$

puis

$$\overline{KI}^2 = f^2 + g^2 + l^2 - 2gl\cos G - 2fl\cos F - 2fg\cos L.$$

Par conséquent, si l'on conçoit un angle trièdre O, ayant pour faces F, G, L, et que l'on construise un point M dont les coordonnées soient f, g, l, on aura

$$OM = KI.$$

Il est visible que $KM = x \operatorname{tg} \alpha$. Par conséquent,

$$MN = \frac{1}{2} l \frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos(\alpha + \gamma)} - l \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\alpha + \gamma)} + Kx, \qquad (34)$$

en posant

$$K = \frac{1}{\cos(\alpha + \gamma)}\left[\sin(\alpha + \gamma) - \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}\right] - \operatorname{tg}\alpha.$$

Or,

$$K = \frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha + \gamma)}\left[\sin(\alpha + \gamma)\cos\alpha - \sin\gamma - \sin\alpha\cos(\alpha + \gamma)\right] = 0;$$

donc la formule (34) se réduit à

$$MN = \frac{l}{2\cos\alpha\cos(\alpha + \gamma)}\left[\cos(\gamma - \alpha - \beta) - 2\sin(\gamma - \beta)\cos\alpha\right];$$

ou, plus simplement, à

$$MN = -\frac{l}{2}\frac{\sin(\gamma - \beta + \alpha)}{\cos\alpha\cos(\alpha + \gamma)} \ (*). \qquad (35)$$

Cette quantité étant constante, *le théorème* que nous avions en vue *est démontré.*

20. Soit (fig. 5) ZNYX la parallèle à FM, menée par le point N, c'est-à-dire *le lieu de ce point.* Menons FZ parallèle à MN. Il est clair que, Y étant l'intersection de ZX avec FG :

$$FY = MN\frac{\sin M}{\sin Y} = -\frac{l}{2}\frac{\sin(\gamma - \beta + \alpha)}{\cos(\alpha + \gamma)\sin\beta},$$

$$GY = l + \frac{l}{2}\frac{\sin(\gamma - \beta - \alpha)}{\cos(\alpha + \gamma)\sin\beta} = \frac{l}{2}\frac{\sin(\beta + \alpha + \gamma)}{\cos(\alpha + \gamma)\sin\beta}.$$

(*) En reprenant les notations primitives, on a :

$$\cos\alpha = \sin M, \quad \cos(\alpha + \gamma) = -\sin N, \quad \sin(\gamma - \beta + \alpha) = \sin\frac{D}{2}.$$

Par suite,

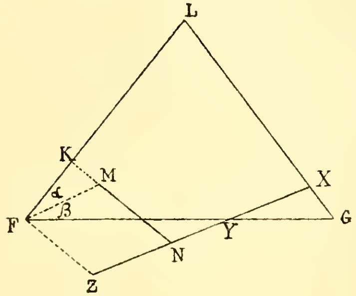
$$MN = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N};$$

ce qui ne diffère pas de la formule (25).

On conclut, de ces deux expressions,

$$\frac{FY}{GY} = \frac{\sin(\beta - \alpha - \gamma)}{\sin(\beta + \alpha + \gamma)}. \tag{36}$$

Fig. 5.



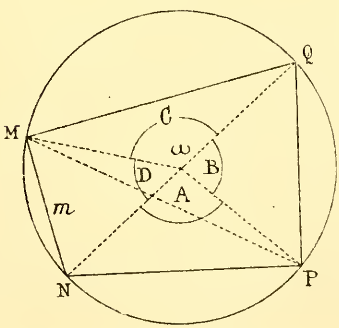
Ainsi, la droite ZX divise FG dans un rapport très simple.

VIII.

Relations entre les quadrilatères P, Q.

21. Soit ω la circonférence, inconnue, circonscrite au qua-

Fig. 6.



drilatère Q circonscrit, lui-même, au quadrilatère P. Formons, autour du centre ω, les angles A, B, C, D. Si le rayon ρ a été pris convenablement, le quadrilatère MNPQ sera celui que l'on cherchait.

En effet, d'après cette construction,

$$A = 2NMP, \quad B = 2QMP;$$

donc

$$A + B = 2NMQ = 2M;$$

etc.

22. Cela posé, on a

$$m = 2\rho \sin\frac{D}{2}.$$

Et comme

$$m = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N}, \tag{25}$$

nous avons ce résultat simple :

$$\rho = \frac{l}{4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}}. \tag{37}$$

23. Si S désigne l'aire du quadrilatère Q, il est visible que

$$S = \tfrac{1}{2}\rho^2\left[\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C)\right].$$

Mais, d'après la formule citée plusieurs fois, la quantité entre parenthèses égale

$$4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2} \text{ (*)}.$$

(*) D'après l'inspection de la figure 6, $\frac{A+C}{2}$ est l'un des deux angles formés par les diagonales MP, NQ; savoir, celui qui a pour mesure

$$\frac{\text{arc} MN + \text{arc} PQ}{2\rho}.$$

Donc, à cause de la relation (37) :

$$S = \frac{l^2}{8} \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}}. \tag{38}$$

Ainsi, *le rayon et l'aire du quadrilatère* Q *dépendent, fort simplement, des éléments du quadrilatère* P.

IX.

PROBLÈME. — *Parmi tous les quadrilatères* P, *de périmètre minimum, inscrits à un quadrilatère* Q (*), *quel est le plus grand en surface?*

24. Les équations (25) et (26) peuvent être écrites ainsi :

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{n} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{p} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{q} = \frac{\sin\frac{D}{2}}{m} = \frac{2}{l}\sin M \sin N.$$

Donc, *si le quadrilatère* Q *est donné, les angles du quadrilatère* P *sont connus* (**).

Si l'on désigne par u l'aire de P, on a

$$2u = ad\sin A + bc\sin C, \tag{39}$$

$$2u = ab\sin B + cd\sin D. \tag{40}$$

Soient a', b', c', d' les dérivées de a, b, c, d, relatives à une variable indépendante t. La condition du maximum, appliquée à l'équation (39), donne

$$(ad' + da')\sin A + (bc' + cb')\sin C = 0. \tag{41}$$

(*) Toujours supposé inscriptible à une circonférence.

(**) Cette remarque préliminaire est importante.

Mais, par les équations (3), (4), (5) :

$$a'\sin N\cos\frac{A}{2} = -b'\sin M\cos\frac{C}{2},$$

$$b'\sin M\cos\frac{B}{2} = -c'\sin N\cos\frac{D}{2},$$

$$c'\sin N\cos\frac{C}{2} = -d'\sin M\cos\frac{A}{2};$$

puis :

$$\left.\begin{aligned} b' &= -a'\frac{\sin N\cos\frac{A}{2}}{\sin M\cos\frac{C}{2}}, \qquad c' = a'\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}}, \\ d' &= -a'\frac{\sin N\cos\frac{B}{2}}{\sin M\cos\frac{D}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Donc l'équation (41) devient, après quelques réductions,

$$\left.\begin{aligned} &\sin\frac{A}{2}\left[-a\sin N\cos\frac{B}{2} + d\sin M\cos\frac{D}{2}\right] \\ &+ \sin\frac{C}{2}\left[b\sin M\cos\frac{B}{2} - c\sin N\cos\frac{D}{2}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

L'équation (40) donnerait, semblablement,

$$\left.\begin{aligned} &\sin\frac{B}{2}\left[-b\sin M\cos\frac{C}{2} + a\sin N\cos\frac{A}{2}\right] \\ &+ \sin\frac{D}{2}\left[c\sin N\cos\frac{C}{2} - d\sin M\cos\frac{A}{2}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Combinant, par soustraction, (43) et (44), on a

$$-a\sin N\sin\frac{A+B}{2} + b\sin M\sin\frac{B+C}{2}$$

$$-c\sin N\sin\frac{C+D}{2} + d\sin M\sin\frac{D+A}{2} = 0,$$

ou

$$a + c = b + d = \tfrac{1}{2} l. \qquad (45)$$

Ainsi, *le quadrilatère cherché est circonscriptible à une circonférence.*

25. Nous avons trouvé l'équation

$$\sin M \left[m \cos \frac{B}{2} - n \cos \frac{C}{2} \right] = a \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - c \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}, \qquad (7)$$

dans laquelle :

$$m = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{D}{2}}{\sin M \sin N}, \quad n = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin M \sin N}.$$

Donc, au lieu de l'équation (7) :

$$\frac{l}{2} \left[\sin \frac{D}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \right] = \sin N \left[a \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - c \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2} \right]. \quad (46)$$

Le multiplicateur de $\frac{l}{2}$ est

$$\frac{1}{2} \left[\sin \frac{D+B}{2} + \sin \frac{D-B}{2} - \sin \frac{A+C}{2} - \sin \frac{A-C}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{D-B}{2} - \sin \frac{A-C}{2} \right] = \sin \frac{D+C-B-A}{4} \cos \frac{A+D-B-C}{4}$$

$$= \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \cos M \sin N.$$

L'équation (46) devient

$$\frac{l}{2} \cos M = a \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - c \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}. \qquad (47)$$

On tire, des équations (45), (47) :

$$a = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}}{\sin N \sin \frac{A+C}{2}}, \quad c = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin N \sin \frac{A+C}{2}}; \qquad (48)$$

après quoi une simple permutation donne

$$b = \frac{l}{2} \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin\frac{A+C}{2}}, \qquad d = \frac{l}{2} \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin M \sin\frac{A+C}{2}}. \tag{49}$$

26. *Remarque.* — Les valeurs (48) devant vérifier les équations (45), (47), il s'ensuit que, *dans tout quadrilatère convexe :*

1° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} = \sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2};$$

2° $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} - \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$= \cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}.$$

27. A cause de

$$ad = \frac{l^2}{4}\frac{\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N \sin^2\frac{A+C}{2}}, \qquad bc = \frac{l^2}{4}\frac{\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N \sin^2\frac{A+C}{2}},$$

la formule

$$2u = ad\sin A + bc\sin C \tag{39}$$

devient

$$u = \frac{l^2}{4}\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N \sin^2\frac{A+C}{2}}\left[\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right],$$

ou

$$u = \frac{l^2}{4}\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}}. \tag{50}$$

Tel est le *maximum des aires des quadrilatères* P.

28. Le rayon r, du cercle inscrit au quadrilatère P, est donné par la formule

$$r = \frac{2u}{l}.$$

Ainsi

$$r = \frac{l}{2} \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}}. \qquad (51)$$

Mais cette expression peut être transformée.

En premier lieu,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} = \frac{mnpq}{16\rho^4}.$$

D'autre part,

$$\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \sin M \sin N = \frac{l}{4\rho}. \qquad (37)$$

Enfin,

$$\sin\frac{A+C}{2} = \frac{1}{4\rho^2}\left[n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2}\right]. \qquad (52)$$

Par conséquent,

$$r = \frac{mnpq}{2\rho\left[n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2}\right]}. \qquad (53)$$

29. *Remarque.* — Un changement de lettres donne

$$n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2} = m\sqrt{4\rho^2 - p^2} + p\sqrt{4\rho^2 - m^2};$$

puis ce théorème, qu'il est facile de vérifier :

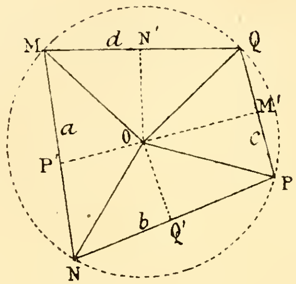
Dans tout quadrilatère inscrit, MNPQ, *dont les apothèmes sont* OM', ON', OP', OQ', *on a*

$$MN.OM' + PQ.OP' = NP.OM' + MQ.OQ';$$

ou bien :

Dans tout quadrilatère inscrit, la somme des rectangles formés *par un côté et l'apothème opposé, est constante, si l'on prend, dans chaque somme, deux côtés opposés.*

Fig. 7.



30. *Propriétés numériques.* — Changeant de notation, appelons a, b, c, d les côtés successifs d'un quadrilatère inscriptible, et R le rayon du cercle. En posant

$$N = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc), \tag{54}$$

$$\Delta = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d), \tag{55}$$

nous avons, par une formule connue,

$$R^2 = \frac{N}{\Delta}. \tag{56}$$

Il n'est pas difficile d'établir ce théorème, assez curieux :

A, B, C, D *étant des quantités rationnelles, on a*

$$\left.\begin{array}{c} 4R^2 - a^2 = \dfrac{A^2}{\Delta}, \quad 4R^2 - b^2 = \dfrac{B^2}{\Delta}, \quad 4R^2 - c^2 = \dfrac{C^2}{\Delta}, \\ 4R^2 - d^2 = \dfrac{D^2}{\Delta}; \end{array}\right\} \tag{57}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$4N - a^2\Delta = A^2, \; 4N - b^2\Delta = B^2, \; 4N - c^2\Delta = C^2, \; 4N - d^2\Delta = D^2. \tag{58}$$

Considérons, par exemple, la dernière égalité.

D'après la formule (54),

$$N = abcd^3 + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2)d^2 + abc(a^2 + b^2 + c^2)d + a^2b^2c^2;$$

et, par la formule (55) :

$$\Delta = d^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^2 - 8abcd + (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2.$$

Conséquemment, après quelques réductions,

$$4N - d^2\Delta = d^6 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^4 - 4abcd^3 + (a^2 + b^2 + c^2)^2d^2 + 4abc(a^2 + b^2 + c^2)d + 4a^2b^2c^2,$$

ou

$$4N - d^2\Delta = \left[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc\right]^2. \tag{59}$$

Ainsi

$$\pm D = d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc \text{ (*)}. \tag{60}$$

31. *Remarques.* — I. Posons

$$N_1 = (ab + cx)(ac + bx)(bc + ax),$$

$$\Delta_1 = (-a + b + c + x)(a - b + c + x)(a + b - c + x)(a + b + c - x).$$

Alors, par le dernier calcul,

$$4N_1 - \Delta_1 x^2 = \left[x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc\right]^2 = X^2. \tag{61}$$

Le polynôme X est celui que l'on rencontre dans la solution d'un problème de Newton, et dans un problème relatif à l'ellipsoïde (**).

(*) Si $d = 0$, le second membre est négatif; il s'annule lorsque $d = 2R$ (voir la note suivante) Donc, si l'on veut que D soit positif, on doit attribuer, au premier membre, le signe *inférieur*.

(**) *Notes* XI et XII. D'ailleurs, si $d = 2R = x$, le triangle ABC est *inscrit à un demi-cercle :* on retombe sur le problème de Newton. L'équation de ce problème est donc

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0,$$

comme nous l'avons rappelé dans la *Note* XI.

II. Si, dans la relation

$$n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2} = m\sqrt{4\rho^2 - p^2} + p\sqrt{4\rho^2 - m^2}, \qquad (53)$$

on fait :

$$\sqrt{4\rho^2 - q^2} = \pm \frac{q^3 - (m^2 + n^2 + p^2)q - 2mnp}{\sqrt{\Delta_2}},$$

$$\sqrt{4\rho^2 - n^2} = \pm \frac{n^3 - (m^2 + p^2 + q^2)n - 2mpq}{\sqrt{\Delta_2}},$$

etc., elle devient *identique;* ce qui devait être.

32. *Suite.* — Dans la formule

$$r = \frac{mnpq}{2\rho\left[n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2}\right]}, \qquad (52)$$

substituons les valeurs précédentes, en supposant, comme nous venons de le faire,

$$\Delta_2 = (-m+n+p+q)(m-n+p+q)(m+n-p+q)(m+n+p+q). \qquad (62)$$

Un calcul facile donne

$$r = \frac{mnpq\sqrt{\Delta_2}}{4\rho(mn + pq)(mq + np)}.$$

Et comme

$$\rho = \sqrt{\frac{N_2}{\Delta_2}}, \qquad (56)$$

il vient, finalement,

$$r = \frac{mnpq\Delta_2}{4(mn + pq)(mq + np)\sqrt{N_2}}. \qquad (63)$$

33. *Remarque.* — On a, entre le rayon r du cercle *inscrit* au polygone P, et le rayon ρ du cercle *circonscrit* au polygone Q, cette relation assez simple :

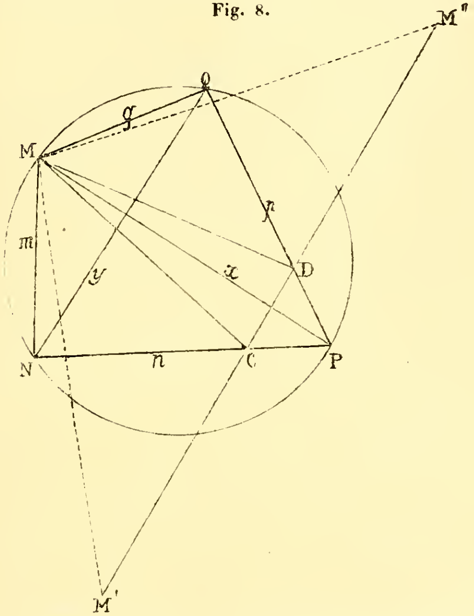
$$r\rho = \frac{mnpq\sqrt{\Delta_2}}{4(mn + pq)(mq + np)}. \qquad (64)$$

X.

Quelques réductions.

84. *Valeur de* l. — Afin de simplifier les relations (53) et suivantes, nous allons exprimer le périmètre du quadrilatère P, en fonction des éléments du quadrilatère inscriptible Q.

Fig. 8.



Supposons $a = 0$. Alors P se réduit au triangle MCD. La construction indiquée (*) donne

$$MM' = 2m\sin N, \qquad MM'' = 2q\sin N,$$

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 + 2MM'.MM''\cos P;$$

donc

$$l^2 = 4\sin^2 N(m^2 + q^2 - 2mq\cos M). \tag{65}$$

Soient $MP = x$, $NQ = y$: nous avons

$$x^2 = \frac{(mp+nq)(mq+np)}{mn+pq}, \qquad y^2 = \frac{(mp+nq)(mn+pq)}{mq+np}. \tag{66}$$

(*) *Problèmes et Théorèmes*, p. 21.

D'autre part, la considération du quadrilatère MNPQ donne ces valeurs connues :

$$\cos M = \frac{m^2 + q^2 - n^2 - p^2}{2(mq + np)}, \tag{67}$$

$$\sin M = \frac{y}{2\rho} = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2(mq + np)}, \tag{68}$$

$$\sin N = \frac{x}{2\rho} = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2(mn + pq)}. \tag{69}$$

Par un calcul facile, on trouve ensuite, au lieu de la relation (65) :

$$l^2 = \Delta_2 \frac{mp + nq}{(mq + np)(mn + pq)}. \tag{70}$$

35. Nous savons que

$$\rho^2 = \frac{(mp + nq)(mq + np)(mn + pq)}{\Delta_2}. \tag{56}$$

Donc

$$l^2\rho^2 = (mp + nq)^2;$$

ou, plus simplement,

$$l = \frac{xy}{\rho}. \tag{71}$$

Ainsi, *le périmètre* l, *des quadrilatères* P, *est une quatrième proportionnelle au rayon et aux diagonales du quadrilatère* Q (*).

36. *Expression d'un cosinus.* — Soient, dans la figure 3 :

$$\text{MON} = \alpha, \qquad \text{QOP} = \gamma.$$

Il est visible que

$$\cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{1}{4R^2}\left[\sqrt{(4R^2 - a^2)(4R^2 - c^2)} - ac\right];$$

(*) Ce théorème ne diffère pas de la propriété démontrée dans la *Note* CCII (première *Remarque*). L'*énoncé* doit être rectifié ainsi : *Chacune de ces quatre distances est une quatrième proportionnelle au diamètre du cercle circonscrit et aux diagonales du quadrilatère.*

ou, avec les notations du paragraphe (**29**) :

$$\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\mathrm{AC}-ac\Delta}{4\mathrm{N}}, \tag{72}$$

valeur rationnelle.

Nous avons trouvé :

$$-\mathrm{A}=a^3-(b^2+c^2+d^2)a-2bcd, \quad -\mathrm{C}=c^3-(a^2+b^2+d^2)c-2abd.$$

De plus, comme on peut le vérifier,

$$\Delta=-\sum a^4+2\sum a^2b^2+8abcd. \tag{73}$$

De là résultent ces deux formules :

$$\mathrm{AC}-ac\,\Delta=2(b^2+d^2-a^2-c^2)(ab+cd)(ad+bc), \tag{74}$$

$$\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{ac+bd}; \tag{75}$$

puis celle-ci :

$$\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{n^2+q^2-m^2-p^2}{mp+nq}. \tag{76}$$

37. *Remarques.* — I. On a vu (**23**, note), que $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}$ est l'angle des diagonales x, y.

Donc, par analogie avec les formules (68), (69) :

$$\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}=\frac{\sqrt{\Delta_2}}{2(mp+pq)}. \tag{77}$$

Cette expression, beaucoup plus simple que celle qui a été donnée ci-dessus (52), s'accorde avec la formule (76). Il en résulte, en effet, l'*identité*

$$\left.\begin{aligned}&4(mp+nq)^2=(n^2+q^2-m^2-p^2)^2\\&+(-m+n+p+q)(m-n+p+q)(m+n-p+q)(m+n+p-q).\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

II. Si $a^2+c^2=b^2+d^2$, *les angles* α, γ *sont supplémentaires :* cette condition est nécessaire et suffisante (*). Quand il en est ainsi,

$$4\mathrm{R}^2=\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}=a^2+c^2. \tag{79}$$

(*) Au moyen du raisonnement dont nous avons fait usage dans la *Note* CCLXV, on rend la proposition évidente, sans calcul.

CCLXXVII. — Lettre à M. Battaglini (*).

Monsieur le Rédacteur,

J'ai reçu, il y a quelques jours, par l'entremise de mon Collègue Mansion, la dernière livraison du *Giornale di Matematiche*. A la page 155, on lit ceci :

« *La serie a termini positivi*

$$» \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

» *è convergente, se tutti i suoi termini decrescono col crescere* » *di* n, *e se è inoltre, per* $\mathrm{n} = \infty$, *lim* $\mathrm{nu_n} = 0$... ».

Autrement dit (si je comprends bien) :

« *La série à termes positifs*

$$» \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

» *est convergente, si tous les termes décroissent quand* n *croît,* » *et si, en outre, pour* $\mathrm{n} = \infty$, *lim* $\mathrm{nu_n} = 0$ ».

Cette proposition, émise, il y a soixante ans, par L. Olivier (*Journal de Crelle,* t. II, p. 34), *est fausse,* ainsi que l'a montré l'illustre Abel (**). Comme son devancier, votre Collaborateur pense que : *la série est convergente, si la somme*

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}$$

tend vers zéro, quand n *augmente.* Or, cette hypothèse n'est pas admissible; car la série (***)

$$\frac{1}{2\mathcal{L}2} + \frac{1}{3\mathcal{L}3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\mathcal{L}(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\mathcal{L}(2n+1)} + \cdots$$

(*) Publiée dans le *Giornale di Matematiche* (septembre 1887).

(**) *OEuvres d'Abel,* publiées par M. Holmboë (1re édition, t. I, p. 111).

(***) Considérée par Abel.

est *divergente,* et cependant

$$Lim\left[\frac{1}{(n+1)\,\mathcal{L}(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\,\mathcal{L}(2n+1)}\right]=0.$$

Agréez, etc.

E. C.

Liège, 23 septembre 1887.

CCLXXVIII. — Lettre à M. Hermite.

Mon cher Monsieur Hermite,

En lisant, l'autre jour, le commencement de votre intéressante Note *Sur les valeurs asymptotiques,* je me disais : « Il me » semble que j'ai fait des recherches analogues à celles-ci ». Comme vous allez en juger, je ne me trompais pas.

I.

Hier, j'ai été à Liège; et, dans un vieux cahier, à la date du 11 avril 1870, j'ai trouvé ce qui suit :

« D'après une citation de l'auteur (*), Clausen a donné la » formule :

$$» \sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^n}=\sum_1^\infty \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{(n^2)} \quad (^{**}).$$

» La vérification est facile.

» Le second membre égale

$$\sum x^{(n^2)}\left[1+2x^n+2x^{2n}+2x^{3n}+\cdots\right]$$
$$=\sum x^{(n^2)}+2\sum x^{n^2+n}+2\sum x^{n^2+2n}+\cdots+2\sum x^{n^2+pn}+\cdots$$

(*) Curtze.

(**) Je crois que la formule de Clausen est, également, dans les *Fundamenta.*

» Soit A_N le coefficient de x^N, et soit $N = n^2 + pn$. On voit » que $A_N = 2$ *fois le nombre des solutions de l'équation précé-» dente, augmenté de* 1 *si* N *est un carré. Mais cette équation » est* $N = n(n + p)$: *le nombre des solutions est celui des divi-» seurs de* N; ce qui fait retomber sur le point de départ. La » formule de Clausen (formule bien remarquable) est donc » démontrée ».

En lisant ce que je viens de souligner, on serait tenté de croire que j'ai voulu vous copier. Heureusement, les dates sont là!

II.

Parmi les centaines de résultats contenus dans mes *Recherches sur quelques produits indéfinis,* permettez-moi de vous rappeler ceux-ci :

$$\sum_1^\infty \frac{q^{3a-2}}{1-q^{4a-3}} = \sum_1^\infty \frac{q^b}{1-q^{4b-1}} \text{ (*) (p. 88)};$$

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_1^\infty (\alpha+1)\frac{q^n}{1-q^{2n}} \text{ (**)}.$$

Si l'on fait $n = di$ (i, *impair*), *le nombre des solutions de l'équation*

$$i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_8^2 = 8n,$$

est égal à la somme des cubes des diviseurs d, etc.

$$q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k} = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^n \text{ (***) (p. 116)}.$$

(*) Si l'on met cette identité sous la forme

$$\sum_1^\infty A_n q^n = \sum_1^\infty B_n q^n,$$

chacun des coefficients A_n, B_n *égale la moitié du nombre des diviseurs de* $4n - 1$.

(**) Le premier membre est la *série de Lambert*. Dans le second membre, $\alpha + 1$ *est le nombre des puissances de* 2 *qui divisent* n.

(***) ε_{4n+1} *est l'excès du nombre des diviseurs de* $4n+1$, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$.

III. — *Sur une formule d'Eisenstein* (mai 1881).

Cette formule, qui donne une transformation de la série de Lambert, est

$$\left.\begin{aligned}&E\left[\frac{z}{1-z}+\frac{z^2}{1-z^2}+\frac{z^3}{1-z^3}+\cdots\right]=\frac{z}{1-z}-2\frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)}\\&+3\frac{z^6}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}-4\frac{z^{10}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}+\cdots(^*),\end{aligned}\right\}\ \text{(A)}$$

$$E=(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)\ldots=1-z-z^2+z^5+z^7-z^{12}-\cdots$$

On peut écrire autrement le second membre. En général,

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}F(n,p)\,z^n; \qquad (1)$$

$F(n, p)$ est *le nombre des décompositions de* n, *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p (*Recherches...*, p. 47). Donc

$$(-1)^{p-1}p\frac{z^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{p-1}pF(n,p)\,z^{n+\frac{p(p+1)}{2}}. \qquad (2)$$

Soit

$$N=n+\frac{p(p+1)}{2},$$

ou

$$n=N-\frac{p(p+1)}{2}.$$

Alors

$$F(n,p)=F\left[N-\frac{p(p+1)}{2},\,p\right]$$

égale le nombre de manières de partager N *en* p *parties inégales* $=$ (N, p) (**).

(*) *Journal de Crelle*, t. XXVII.

(**) *Introduction à l'Analyse*, p. 245; *Recherches...*, p. 54.

Ainsi, le coefficient de z^N est

$$(N, 1) - 2(N, 2) + 3(N, 3) - \cdots \pm N(N, N).$$

Soit maintenant G(N) *le nombre des diviseurs de* N. Il est visible que, dans le premier membre de (A), le coefficient de z^N est

$$G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - G(N-12) - \cdots$$

On a donc cette relation entre deux fonctions numériques, bien différentes :

$$\left.\begin{aligned} &(N, 1) - 2(N, 2) + 3(N, 3) - \cdots \pm N(N, N) \\ &= G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - \cdots \text{ (*)}. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Application. — Soit $N = 19$. On doit trouver

$$\begin{aligned} &(19, 1) - 2(19, 2) + 3(19, 3) - 4(19, 4) + \cdots \\ &= G(19) - G(18) - G(17) + G(14) + G(12) - G(7) - G(5); \end{aligned}$$

ou (**)

$$1 - 2.9 + 3.21 - 4.18 + 5.5 = 2 - 6 - 2 + 4 + 6 - 2 - 3;$$

ce qui est exact.

IV.

Si j'avais sous les yeux les Mémoires de Liouville, je pourrais, peut-être, tirer quelques conséquences de cette égalité (B). En attendant, si $\varpi(N)$ représente chacun des deux membres, on a (sauf erreur de calculs) :

$$\begin{array}{lllll} \varpi(2) = 1, & \varpi(3) = -1, & \varpi(4) = -1, & \varpi(5) = -3, & \varpi(6) = 0, \\ \varpi(7) = -1, & \varpi(8) = 1, & \varpi(9) = 2, & \varpi(10) = 1, & \varpi(11) = 2, \\ \varpi(12) = 4, & \varpi(13) = 1, & \varpi(14) = -1, & \varpi(15) = 4, \ldots, & \varpi(33) = 0. \end{array}$$

Ces coefficients *semblent* osciller entre deux valeurs extrêmes. Qu'en pensez-vous?

(*) Est-elle connue?

(**) *Recherches...*, Table I.

V.

D'après votre obligeante indication, j'ai consulté le Mémoire de Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 443). Notre illustre Maître dit :

$$« \quad (x - x^3)\frac{d^2z}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dz}{dx} - xz = 0,$$

» ou plutôt l'équation plus simple

$$» \quad (5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1 + x^2)^2}{4(x - x^3)^2}y,$$

» que l'on en déduit en posant

$$» \quad z = \frac{y}{\sqrt{x - x^3}} ».$$

Rien de plus. Il ne fait pas observer que, si l'on prend

$$X = \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi},$$

on a

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1 + 3x^2}{4(1 - x^2)x^2}.$$

Somme toute, mon équation

$$\frac{z''}{z} + \frac{1 + 3x^2}{4(1 - x^2)x^2} = 0$$

est un peu plus simple que l'équation (5) ; et l'on en peut écrire, tout de suite, l'intégrale générale.

VI.

Aussitôt après vous avoir envoyé ma vieille formule :

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + x^{2n+1} + \sqrt{1 + x^{4n+2}}} = a,$$

j'ai reconnu (ce qui n'était pas difficile) qu'on peut la généraliser ainsi :

Soit y *une fonction impaire de* x, *telle que la quantité*

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + y^2}}{y},$$

reste finie, quand x *varie entre* — a *et* + a. *Cela posé :*

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + y + \sqrt{1 + y^2}} = a.$$

Voilà donc une infinité d'intégrales ayant même valeur. Je n'ai pas besoin d'ajouter que la proposition est *presque évidente.* A-t-elle été remarquée?

Je vous souhaite, mon cher Monsieur Hermite, la quiétude et la bonne santé dont jouit, à Spa,

Votre bien dévoué très *Ancien,*

E. C.

Spa, 27-28 juin 1886.

CCLXXIX. — Circonférences focales (*).

(*Janvier* 1878.)

I. Quand on identifie l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

avec

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (my + nx + l)^2,$$

on trouve, comme expressions des rayons vecteurs :

$$u = a + \frac{c}{a}x, \quad u' = a - \frac{c}{a}x;$$

puis les équations des deux directrices :

$$x = -\frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

Semblablement, l'équation (1), mise sous la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = (my + nx + l)^2,$$

donne, non seulement l'équation des *circonférences focales* :

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = b^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right) \text{ (**)}; \tag{2}$$

mais encore les équations

$$x = -\frac{a^2}{c^2}\alpha, \quad x = +\frac{a^2}{c^2}\alpha$$

de deux séries de droites, que l'on peut appeler *droites radicales*. Chacune de ces droites est la *corde de contact* (réelle ou imaginaire) commune à l'ellipse donnée et à une circonférence focale (***).

(*) A propos d'une *Note de M. Boset* (Bull. de l'Académie, juin 1887).

(**) *Loc. cit.*

(***) En effet, l'élimination de y^2, entre les équations (1), (2), conduit à

$$\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right)^2 = 0.$$

De plus, *la distance d'un point* M, *de la courbe, à la droite radicale, et la longueur de la tangente correspondante* MT, *sont dans un rapport constant* (*).

II. L'équation générale des courbes algébriques, susceptibles d'admettre des circonférences focales est, évidemment,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=\frac{P^2}{Q^2}; \tag{3}$$

P, Q étant des polynômes entiers (**). Par suite, si une courbe donnée admet de telles circonférences, son équation devra pouvoir être identifiée avec la relation (3).

III. *Application.* — Soit la *conchoïde* représentée par

$$x^2y^2=(b-y)^2(a^2-y^2).$$

Si l'on met cette équation sous la forme

$$x^2+(y-b)^2=a^2\frac{(y-b)^2}{y^2},$$

on voit que l'on peut prendre :

$$\alpha=0, \quad \beta=b, \quad P=a(y-b), \quad Q=y.$$

Donc *la conchoïde a un foyer,* comme l'a trouvé M. Boset.

IV. L'équation (3) permet de généraliser les propriétés des circonférences focales et des droites radicales, relatives aux coniques. En effet, M étant le premier membre de cette équation, soient S la courbe donnée, et L la ligne représentée par

$$P=0. \tag{4}$$

(*) Ce rapport égale celui qui existe entre les distances de M à la directrice et au foyer correspondant.

(**) Ces polynômes peuvent contenir α, β, R. Par exemple, dans le cas de l'ellipse, l'équation (3) est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right)=\left(\frac{a}{c}\alpha-\frac{c}{a}x\right)^2$$

(*Bulletin*, juin 1877.)

L'équation (3) est une conséquence de celle-ci et de

$$M = 0. \tag{5}$$

Donc : *l'intersection de chaque circonférence focale, avec la ligne radicale correspondante, appartient à la courbe donnée.*

CCLXXX. — Sur les nombres parfaits.

(Lettre à M. Mansion.)

Hier, seulement, j'ai pu prendre connaissance de l'intéressante Note de M. Sylvester, relative aux *Nombres parfaits* (*), *impairs*. Il me semble qu'elle peut être abrégée et simplifiée.

Soit

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda;$$

$a, b, c, \ldots$ étant *premiers, impairs,* et rangés par ordre de grandeur *croissante*. Si N est *parfait,* on doit avoir

$$\frac{a}{a-1}\,\frac{b}{b-1}\cdots\frac{l}{l-1} > 2 \text{ (**)}, \tag{1}$$

ou

$$\frac{a-1}{a}\,\frac{b-1}{l}\cdots\frac{l-1}{l} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Soit $P(l)$ le premier membre de la seconde inégalité. La *Théorie des Nombres,* de Legendre, contient une Table des valeurs de $P(l)$, prolongée jusqu'à $l = 1229$ (***). Soit $Q(n)$ le produit de n facteurs, choisis parmi

$$\frac{a-1}{a},\quad \frac{b-1}{b},\ldots,\quad \frac{l-1}{l}.$$

(*) *Mathesis,* mars 1888.

(**) La relation (1), bien connue, a été employée par MM. Servais et Sylvester.

(***) Le produit $P(l)$ a pour limite zéro. (Voir, par exemple, les *Exercices d'Analyse numérique,* de Le Besgue, p. 138.)

Il est visible que :

1° Le minimum de Q(1) est

$$P(a) = \frac{a-1}{a} = \frac{2}{3};$$

2° Le minimum de Q(2) est

$$P(b) = \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15};$$

etc.

En effet, nous avons

$$1 - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{b} < 1 - \frac{1}{c} < \cdots$$

Cela posé :

1° Si N est *composé d'un seul facteur premier* (*), la condition (2) se réduit à

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{2}.$$

Celle-ci n'est pas remplie ; donc *aucun nombre parfait n'est composé d'un seul facteur premier ;*

2° Si N est composé de *deux facteurs,* le minimum de Q(2) est

$$P(5) = \frac{8}{15} > \frac{1}{2};$$

donc *aucun nombre parfait n'est composé de deux facteurs premiers ;*

etc.

Pour arriver à un résultat plus curieux, admettons ce Lemme, dû à M. Sylvester :

Aucun nombre parfait, impair, n'est divisible par 105. Alors,

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdots < \frac{1}{2},$$

(*) On fait abstraction des exposants.

ou

$$P(l) < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7};$$

c'est-à-dire

$$P(l) < \frac{8}{35},$$

ou encore

$$P(l) < 0,228\,5\ldots$$

D'après la Table, cette condition est remplie à partir de $l = 127$.

En conséquence (et c'est par là que je termine, faute de temps) : *Si un nombre* N, *premier avec* 105, *est parfait, il est composé d'au moins vingt-six facteurs premiers, inégaux.*

4 mars 1888.

P. S. Le logarithme du produit

$$11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.53.59.61.67.71.$$
$$73.79.83.89.97.101.103.107.109.113$$

est compris entre 44 et 45. Donc *le plus petit Nombre parfait, impair* (s'il existe), *contient quarante-cinq chiffres.*

CCLXXXI. — Lettre à M. Arthur Cayley.

Monsieur,

Un hasard heureux (je me trouve à Paris en ce moment) me permet de lire l'intéressante Note que vous venez de faire paraître dans les *C. R.* (3 avril 1888). Je vous remercie, vivement, de votre appréciation de mon vieux théorème. La démonstration contenue dans le *Journal de Liouville* (t. VII), *si elle est exacte,* est beaucoup trop longue. Mais, vous le savez : *les choses simples arrivent toujours tard.* Aussi, c'est seulement vers 1866, que, laissant de côté mes anciens calculs, j'ai trouvé une démonstration géométrique, contenue en quelques lignes. Cette démonstration qui, me semble-t-il, diffère peu de la vôtre, a été imprimée dans mes *Mélanges mathématiques* (1re édition), puis dans la seconde édition du même ouvrage (t. I, p. 62).

Agréez, Monsieur, l'expression de mes meilleurs sentiments.

E. C.

Paris, 10 avril 1888.

Vous rappelez-vous que je vous ai fait une petite visite en 1851? Nous étions jeunes, alors!

CCLXXXII. — Sur la courbure des lignes.

(*Mars* 1876.)

I. Problème. — *Trouver la relation qui existe entre les courbures des trois projections orthogonales d'une ligne* L.

Soient MA, MB les projections de L, sur les plans zMy, zMx, perpendiculaires entre eux (*).

Soit, *dans le plan* zMx,

$$z = f(x), \tag{1}$$

l'équation de MB.

De même, *dans le plan* zMy, soit

$$z = \varphi(x), \tag{2}$$

l'équation de MA.

L'ensemble de ces équations représente L, dont la projection, sur le plan xMy, est représentée, elle-même, par

$$f(x) = \varphi(y). \tag{3}$$

Si l'on prend x comme variable indépendante, on tire, de cette équation (3) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'}{\varphi'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''\varphi'^2 - \varphi'' f'^2}{\varphi'^3}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Par conséquent, A, B, C désignant les rayons de courbure des trois projections :

$$A = \frac{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''}, \quad B = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f'^2}, \quad C = \frac{(f'^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''\varphi'^2 - \varphi''f'^2}. \tag{4}$$

Si a, b, c sont les cosinus directifs de la tangente à L :

$$\frac{c}{a} = f', \quad \frac{c}{b} = \varphi'; \tag{5}$$

donc, α, β, γ étant les angles correspondants :

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\sin^3\alpha}{\varphi''\cos^3\beta}, \quad B = \frac{\sin^3\beta}{f''\cos^3\alpha}, \\ C &= \frac{\sin^3\gamma\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta(f''\cos^2\alpha - \varphi''\cos^2\beta)} \quad (^*). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Éliminant f'', φ'', on trouve cette *relation entre les courbures des trois projections :*

$$\frac{\cos\beta\sin^3\beta}{B} - \frac{\cos\alpha\sin^3\alpha}{A} = \frac{\cos\gamma\sin^3\gamma}{C}. \tag{A}$$

II. *Relation entre quatre courbures.* — La formule connue :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{ds^6}\sum(dyd^2z - dzd^2y)^2 \tag{7}$$

devient d'abord, à cause de

$$dy = \frac{f'}{\varphi'}dx, \quad dz = f'dx, \quad d^2x = 0, \quad \text{etc. :}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi'^6}{(f'^2 + \varphi'^2 + f'^2\varphi'^2)^3}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right],$$

(*) On peut abréger ce calcul, mais en le rendant *moins clair.*

puis

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{[f'^2 + \varphi'^2 + f'^2\varphi'^2]^3}\left[(f''\varphi'^2 - \varphi''f'^2)^2 + f''^2\varphi'^6 + \varphi'^2 f'^6\right]. \quad (8)$$

Or :

$$f'^2 + \varphi'^2 + f'^2\varphi'^2 = \left(\frac{c}{ab}\right)^2, \quad \varphi''^2 f'^6 = \frac{c^6(b^2 + c^2)^3}{a^6 b^6 A^2},$$

$$f''^2\varphi'^6 = \frac{c^6(a^2 + c^2)^3}{a^6 b^6 B^2}, \quad (f''\varphi'^2 - \varphi''f'^2)^2 = \frac{c^6(a^2 + b^2)^3}{a^6 b^6 C^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(b^2 + c^2)^3}{A^2} + \frac{(a^2 + c^2)^3}{B^2} + \frac{(a^2 + b^2)^3}{C^2},$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^6\alpha}{A^2} + \frac{\sin^6\beta}{B^2} + \frac{\sin^6\gamma}{C^2}. \quad (B)$$

III. *Remarque.* — Si $\gamma = \frac{\pi}{2}$; les relations (A), (B) deviennent :

$$\frac{\sin^2\alpha}{A} = \frac{\sin^2\beta}{B}, \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^6\alpha}{A^2} + \frac{\sin^6\beta}{B^2}.$$

On conclut, de celles-ci :

$$\rho = A + B. \quad (C)$$

Ainsi : *le rayon de courbure, d'une ligne quelconque, est égal à la somme des rayons de courbure des projections de cette ligne sur deux plans parallèles au premier rayon, et perpendiculaires entre eux* (*).

(*) Charles Dupin, *Développements de Géométrie*, p. 88.

CCLXXXIII. — Théorèmes d'Arithmétique.

(*Mai* 1887.)

I. *Le triple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés.*

Ce théorème résulte, immédiatement, de l'identité

$$\left.\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b-c)^2 &+ (a+d-b)^2\\ +\,(a+c-d)^2 &+ (b+c+d)^2.\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

On peut supposer que les *nombres* a, b, c, d soient rangés par ordre de *grandeur décroissante.* Cela étant, on a

$$a+b>c, \qquad a+d>b, \qquad a+c>d.$$

Donc, dans le second membre de l'identité, *aucun terme n'est nul.*

II. *Le quintuple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés.*

On a, identiquement,

$$5(a^2+b^2+c^2+d^2) = (2a+b)^2+(a-2b)^2+(2c+d)^2+(c-2d)^2. \quad (2)$$

Et comme on peut supposer

$$a \gtreqless b \gtreqless c \gtreqless d,$$

aucun des binômes n'est nul.

III. *Le produit de la somme de quatre carrés, par la somme de deux carrés inégaux, est toujours la somme de quatre carrés.*

Dans l'identité connue

$$\left.\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(f^2+g^2) = (fa+gb)^2 &+ (ga-fb)^2\\ +\,(fc+gd)^2 &+ (gc-fd)^2,\end{aligned}\right\}\quad (3$$

je suppose

$$a \overset{=}{<} b, \quad c \overset{=}{<} d, \quad g < f.$$

Aucun des binômes n'est nul; etc.

IV. Corollaire. — *Si* p *est un nombre premier, ayant la forme* $4\mu + 1$, *le produit d'une somme de quatre carrés, par* p, *est toujours la somme de quatre carrés.*

Addition. — (*Mai* 1888.)

V. *Le produit d'une somme de quatre carrés, par un nombre impair, est la somme de quatre carrés* (*).

VI. *Tout nombre* $8n + 4$ *est la somme de quatre carrés impairs, dont deux, au moins, sont égaux* (**).

(*) Théorème *empirique*.

(**) La première partie est connue (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 99). Quant à la seconde, elle *semble* résulter des décompositions suivantes :

$4 = 1 + 1 + 1 + 1$,	$12 = 9 + 1 + 1 + 1$,	$20 = 9 + 9 + 1 + 1$,
$28 = 25 + 1 + 1 + 1$,	$36 = 25 + 9 + 1 + 1$,	$44 = 25 + 9 + 9 + 1$,
$52 = 25 + 25 + 1 + 1$,	$60 = 25 + 25 + 9 + 1$,	$68 = 49 + 9 + 9 + 1$,
$76 = 49 + 25 + 1 + 1$,	$84 = 81 + 1 + 1 + 1$,	$92 = 81 + 9 + 1 + 1$,
$00 = 81 + 9 + 9 + 1$,	$108 = 81 + 25 + 1 + 1$,	. . . .

CCLXXXIV. — Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution (*).

(*Mars* 1887.)

I.

Remarques sur la Note.

1. Le curieux théorème de M. Jamet résulte de l'équation

$$u^2 d\omega = k ds \ (^{**}), \tag{1}$$

laquelle résulte, elle-même, d'une combinaison convenable des relations

$$\frac{ds}{dt} = \text{const}, \quad u^2 \frac{d\omega}{dt} = \text{const}. \tag{2}$$

La première exprime que *toute ligne géodésique est la trajectoire d'un point matériel animé d'une vitesse constante* (***).

2. D'après la seconde des équations (2) : *Soit une ligne géodésique, tracée sur une surface de révolution. Si l'on projette cette ligne sur un plan perpendiculaire à l'axe, le principe des aires a lieu pour la projection;* ou, ce qui est équivalent :

Soit une surface S, *dont toutes les normales rencontrent une droite fixe,* D; *et soit* C *une ligne géodésique de* S. *Si l'on*

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique* (1887). A l'occasion d'une Note de M. *Jamet* (*Bull.*, avril 1887).

(**) Je modifie un peu la notation adoptée par l'honorable Auteur.

(***) Propriété bien connue. Dans son premier Mémoire sur les lignes géodésiques, Liouville s'énonçait ainsi : « Je prends pour point de départ » ce théorème connu (ou, si l'on veut, cette définition), que la ligne géo- » désique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d'une impul- » sion quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont » le mouvement ne serait altéré par aucune force accélératrice. » (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 401.)

projette C *sur un plan perpendiculaire à* D, *le principe des aires a lieu pour la projection de* C.

En effet, la condition

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q}, \tag{3}$$

déduite des équations

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

prouve que S *est une surface de révolution* (*).

3. Naturellement, M. Jamet a formé les équations (2) en appliquant le *principe des forces vives* et la *théorie des moments* (**). Cette méthode, employée par Liouville (***), est ingénieuse et simple; mais elle a un défaut : elle introduit des éléments étrangers à la question. Or, il est très facile de former, directement, l'égalité (1).

4. En effet, l'équation des lignes géodésiques :

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{p} = \frac{d.\frac{dy}{ds}}{q} \tag{4}$$

devient d'abord, dans le cas où

$$z = \varphi(x^2 + y^2) = f(u): \tag{5}$$

$$ds(yd^2x - xd^2y) - d^2s(ydx - xdy) = 0,$$

(*) Houël, *Calcul infinitésimal*, t. III, p. 168.

(**) Ou plutôt, en employant les relations fondamentales :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{N}\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{N}\cos\mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mathrm{N}\cos\nu;$$

et en ayant égard à la condition (3).

(***) Je viens de le rappeler.

ou

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{d(xdy - ydx)}{xdy - ydx}. \tag{6}$$

L'intégrale immédiate est

$$kds = xdy - ydx; \tag{7}$$

ou, après transformation de coordonnées (*) :

$$kds = u^2 d\omega. \tag{1}$$

5. Au moyen des équations (1), (5), jointes à la formule évidente

$$ds^2 = u^2 d\omega^2 + (1 + f'^2) du^2; \tag{8}$$

le savant Professeur de Nantes forme, sans s'y arrêter, la relation

$$d\omega = \frac{k}{u} du \sqrt{\frac{1 + f'^2}{u^2 - k^2}}, \tag{9}$$

intégrale première de l'équation des lignes géodésiques tracées sur une surface de révolution

J'ignore si cette intégrale, dont la forme est remarquable, était déjà connue (**).

Il en résulte, à cause de l'équation (1) :

$$ds = udu \sqrt{\frac{1 + f'^2}{u^2 - k^2}}. \tag{10}$$

(*) On sait que

$$xdy - ydx = u^2 d . \operatorname{arc tg} \frac{y}{x} = u^2 d\omega.$$

(**) Après coup, je m'aperçois qu'elle a été publiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI, p. 360).

II.

Rayon de courbure d'une ligne géodésique.

6. Remplaçons l'équation (4) par

$$\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{-p}=\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{-q}=\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{1}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=\frac{ds}{\rho\sqrt{1+p^2+q^2}};\qquad(11)$$

ε et ρ désignant l'angle de contingence et le rayon de courbure (*).

A cause de

$$p=f'\cdot\frac{du}{dx}=f'\cdot\frac{x}{u},\qquad q=f'\cdot\frac{du}{dy}=f'\cdot\frac{y}{u},\qquad(12)$$

nous avons

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+f'^2},$$

puis

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{1+f'^2}}{ds}d\cdot\frac{dz}{ds};$$

ou, par la formule (10),

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{u^2-k^2}}{udu}d\cdot\frac{dz}{ds}.\qquad(13)$$

Il ne reste donc plus qu'à développer la différentielle de $\frac{dz}{ds}$.

7. Il est visible que

$$\frac{dz}{ds}=\cos\gamma=\frac{f'}{u}\sqrt{\frac{u^2-k^2}{1+f'^2}}=\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot\frac{\sqrt{u^2-k^2}}{u}.\qquad(14)$$

(*) Il est connu que, α, β, γ étant les angles de la tangente avec les axes rectangulaires, on a

$$\varepsilon^2=(d.\cos\alpha)^2+(d\ \cos\beta)^2+(d.\cos\gamma)^2=\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2;$$

etc.

Pour simplifier le calcul, je pose :

$$f' = \operatorname{tg} \lambda, \qquad u = \frac{k}{\cos \mu} \cdot \tag{15}$$

Il résulte, de ces abréviations :

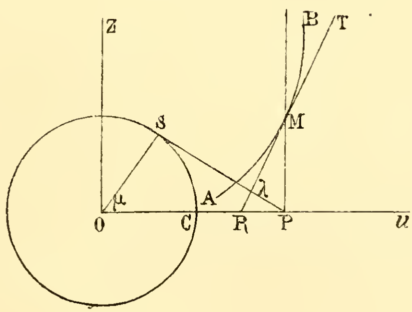
$$\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = \sin \lambda, \qquad \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u} = \sin \mu ; \tag{16}$$

puis

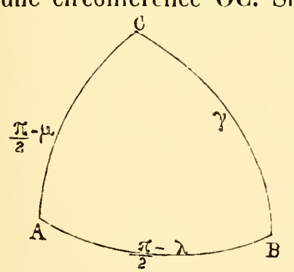
$$\cos \gamma = \sin \lambda \sin \mu. \tag{17}$$

Les formules (15) et (17) peuvent être interprétées géométriquement :

1° M étant un point de la ligne géodésique considérée, soit AMB la section méridienne passant en M. Il est clair que λ est l'angle TRu formé par la tangente RMT et la droite Ou, perpendiculaire à l'axe Oz de la surface ;



2° Du point O comme centre, avec k pour rayon, décrivons une circonférence OC. Si, du pied de l'ordonnée de M, nous menons, à OC, la tangente PS, nous aurons uOS $= \mu$;



3° La relation (17) exprime que γ est l'hypoténuse d'un triangle sphérique, dans lequel les côtés de l'angle droit sont les compléments de λ et de μ.

8. Par les formules (15) et (17) :

$$d\lambda = \frac{f''}{1+f'^2}du, \qquad d\mu = \frac{k}{u}\frac{du}{\sqrt{u^2-k^2}},$$

$$\frac{d(\cos\gamma)}{du} = \sin\mu\cos\lambda\,\frac{f''}{1+f'^2} + \sin\lambda\cos\mu\,\frac{k}{u\sqrt{u^2-k^2}};$$

puis

$$\frac{d(\cos\gamma)}{du} = \frac{\sqrt{u^2-k^2f''}}{u(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k^2f'}{u^2\sqrt{(u^2-k^2)(1+f'^2)}}. \tag{18}$$

Au moyen de cette valeur et de la formule (13), on a, finalement :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(u^2-k^2)f''}{u^2(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} + k^2\frac{f'}{u^3\sqrt{1+f'^2}}. \tag{19}$$

9. Les sections méridiennes, caractérisées par $\omega = const.$, sont, évidemment, des lignes géodésiques. Quand il en est ainsi, $k=0$ (*); et la formule (19) devient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui devait être.

Introduisant le rayon ρ_1, de la méridienne, ainsi que les angles λ et μ (15), on peut donc écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\mu}{\rho_1} + \frac{\sin\lambda\cos^2\mu}{u}; \tag{21}$$

expression assez simple.

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho} = \frac{u^2-k^2}{u^2}\frac{1}{\rho_1} + \frac{k^2f'}{u^3\sqrt{1+f'^2}}.$$

(*) Si l'on cherche dans quel cas le rapport $\frac{\rho_1}{\rho}$ est constant, pour une même ligne géodésique, on trouve que *la surface doit être un ellipsoïde de révolution*. Cette propriété est la réciproque d'un théorème dû à Gudermann. (Lindelöf, *Calcul des variations*, p. 278.)

CCLXXXV. — Une propriété des progressions géométriques.

(*Mai* 1888) (*).

I. Théorème. — *Soit une progression géométrique, composée de* n *termes. Si, de* n *fois la somme des carrés de leurs logarithmes, on retranche le carré du logarithme de leur produit, le reste est constant.*

II. Corollaire :

$$y = n\left[(\ell x)^2 + (\ell qx)^2 + \cdots + (\ell q^{n-1}x)^2\right] - \left[\ell\left(x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)\right]^2$$

représente une parallèle à l'axe des abscisses (**).

CCLXXXVI. — Géométrie de situation.

(*Mai* 1887.)

Problème (***). — *Sur un échiquier de trente-six cases, placer six jetons, de manière qu'aucune ligne et qu'aucune colonne ne contienne un nombre impair de jetons.*

Si une *ligne* contenait *quatre* jetons, deux *colonnes*, au moins, ne contiendraient qu'*un* jeton. Ainsi, les lignes et les colonnes employées doivent contenir, chacune, *deux* jetons. Faisons abstraction des autres lignes et des autres colonnes; il nous reste un échiquier de *neuf* cases, disposé comme ceci, par exemple :

×	×	
	×	×
×		×

(*) Complément à la *Note* CCXLII.

(**) C'est à cause du Corollaire que le Théorème est énoncé.

(***) Proposé par M. *Émile Deliége*.

Les cases non remplies sont au nombre de *trois*. La question peut donc être formulée en ces termes :

		0
0		
	0	

Sur un échiquier de neuf cases, *placer trois jetons, de manière qu'il y en ait un dans chaque ligne, et un dans chaque colonne.*

Ce problème auxiliaire admet (*) $3 . 2 . 1 = 6$ solutions.

Sur l'échiquier primitif, on peut choisir *trois* lignes, de 20 manières, et *trois* colonnes, de 20 manières. Le nombre demandé est donc

$$N = 20 . 20 . 6 = 2\,400.$$

CCLXXXVII. — Sur les sections circulaires de l'ellipsoïde.

(*Février* 1888.)

I. Lemme (**). — OA, OB *étant deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; par l'extrémité* B *du second, on mène une droite* EBF, *perpendiculaire au premier; et l'on prend, sur cette droite, les distances* BE, BF, *égales à ce premier demi-diamètre. On joint les points* E, F *au centre* O.

Cela posé : 1° *La bissectrice de l'angle* EOF *est, en direction, l'un des axes de la courbe;* 2° 2a, 2b *désignant ces axes, on a*

$$OE = a + b, \quad OF = a - b \text{ (***)}.$$

(*) En effet, pour former tous les carrés, il suffit de permuter les trois lignes tracées ci-dessus.

(**) Le lecteur est prié de faire les deux premières figures.

(***) Chasles, *Aperçu historique*, deuxième édition, p. 562.

II. Théorème. — *Soit* MN *une corde de l'ellipse considérée, parallèle au demi-diamètre* OA. *Si, par le milieu* G *de* MN, *on mène la droite* HGK, *perpendiculaire à* MN, *et inscrite à l'angle* EOF; *le quadrilatère* HNKM *est un losange, dont le côté égale* OA. *En outre :*

$$\mathrm{OH} = \frac{y}{b'}(a + b), \quad \mathrm{OK} = \frac{y}{b'}(a - b).$$

A cause des parallèles HGK, EBF, le point G est le milieu de HK; donc HNKM est un losange.

De plus,

$$\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{BF}} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OB}},$$

ou

$$\mathrm{GK} = \frac{a'}{b'} y;$$

puis, à cause de

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1:$$

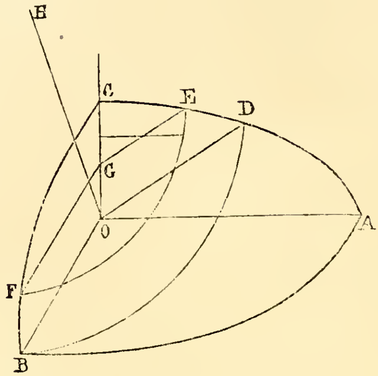
$$\overline{\mathrm{KM}}^2 = \frac{a'^2}{b'^2} y^2 + x^2 = a'^2.$$

III. Théorème (*). — *Une ellipse étant donnée, on construit un losange* HNKM, *dont le côté soit égal à un demi-diamètre* OA, *et dont la diagonale* NM *soit une corde de l'ellipse, parallèle à ce demi-diamètre. Cela posé, les sommets* H, K *décrivent deux diamètres, symétriquement placés par rapport à chacun des deux axes.*

IV. Corollaire. — *Soit, dans un ellipsoïde* E, *une section circulaire centrale* BOD, *et une section circulaire* EGF, *située dans un plan parallèle à celui de la première. Toutes les sections circulaires, telles que* EGF, *appartiennent à des sphères décrites*

(*) Résumé des deux premières propositions.

avec un rayon égal à OD, *et dont les centres sont situés sur un*



diamètre OH *de la section principale* AOC (*).

CCLXXXVIII. — Une application de la Géométrie à l'Algèbre.

(Vers 1840.)

1. *Cordes principales.* — L'équation d'une surface Σ étant

$$\left.\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

considérons un système de cordes parallèles à la direction déterminée par

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \qquad (2)$$

(*) On trouve, par un calcul facile,

$$\operatorname{tg} AOH = -\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tg} AOD = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Donc

$$\operatorname{tg} AOH \cdot \operatorname{tg} AOD = -\frac{c}{a}.$$

puis le plan diamétral conjugué à ces cordes. Celles-ci seront *principales* si les cosinus a, b, c satisfont aux conditions connues :

$$\frac{Aa + B''b + B'c}{a} = \frac{A'B + Bc + B''a}{b} = \frac{A''c + B'a + Bb}{c}. \quad (3)$$

On sait que, s étant la valeur commune des trois rapports,

$$\left.\begin{array}{l}(A - s)(A' - s)(A'' - s) - B^2(A - s) - B'^2(A' - s) \\ \quad - B''^2(A'' - s) + 2BB'B'' = 0 \text{ (*)}.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Cette équation, du troisième degré, a, au moins, une racine réelle. Par conséquent, *dans toute surface du second ordre, il existe, au moins, un système de cordes principales* (**).

II. *Réalité des racines.* — Prenons une de ces droites pour axe des z : les équations (3) devront être vérifiées par $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$; ce qui exige que

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad s = A''. \quad (5)$$

En même temps, l'équation (4) se réduit à celle-ci :

$$s^2 - (A + A')s + AA' - B'^2 = 0, \quad (6)$$

laquelle a ses racines réelles.

Puisqu'il en est ainsi, la surface Σ possède *trois systèmes* de cordes principales (***). Mais le nombre de ces systèmes ne peut dépendre du choix des axes; donc *les trois racines de l'équation* (4) *sont réelles* (IV).

(*) Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, t. IV, p. 141.

(**) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 42.

(***) Pour faire disparaître le terme en xy, on fait tourner les axes Ox, Oy dans leur plan, en les laissant rectangulaires; etc.

(IV) Démonstration donnée à l'École polytechnique. Si je la rappelle, c'est parce que, fréquemment, on en voit paraître d'autres, fort compliquées. (Mai 1888.)

CCLXXXIX. — Équations dont toutes les racines sont imaginaires.

(*Mars* 1869.)

I. Théorème. — *Si l'équation* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ (*) *a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation obtenue en égalant à zéro la seconde dérivée de* $\frac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}$, *a toutes ses racines imaginaires.*

Soit

$$y=\frac{1}{f},$$

et, par conséquent :

$$y'=-\frac{f'}{f^2},\qquad y''=\frac{2f'^2-ff''}{f^3}.$$

L'équation $y''=0$ est donc

$$2f'^2-ff''=0. \tag{1}$$

Or, si l'on suppose

$$f(x)=(x-a)(x-b)\cdots(x-k), \tag{2}$$

on a :

$$\frac{f'}{f}=\sum\frac{1}{x-a},\quad \frac{ff''-f'^2}{f^2}=-\sum\frac{1}{(x-a)^2};$$

ou

$$f'^2-ff''=f^2\sum\frac{1}{(x-a)^2}, \tag{3}$$

puis

$$2f'^2-ff''=f^2\left\{\left[\sum\frac{1}{x-a}\right]^2+\sum\frac{1}{(x-a)^2}\right\}. \tag{4}$$

Le premier membre de l'équation (1) étant une *somme de carrés*, cette équation n'a aucune racine réelle (**).

(*) $f(x)$ est un polynôme entier.

(**) C'est à peu près ainsi que le théorème a été démontré par M. *Agarrat* (*Nouvelles Annales*, 1849, p. 443).

Addition. — (*Mai* 1888.)

II. Théorème. — *Si l'équation* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *a toutes ses racines réelles, l'équation*

$$ff''-f'^2=0, \tag{A}$$

a toutes ses racines imaginaires (*).

III. Théorème. — *Si l'équation*

$$ff''-f'^2=0$$

a des racines réelles, l'équation $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *a des racines imaginaires.*

IV. *Application.* — Soit $f(x)=\mathrm{X}_n$, X_n étant un *polynôme de Legendre*. On sait que toutes les racines de $\mathrm{X}_n=0$ sont réelles. Conséquemment :

L'équation

$$\mathrm{X}_n\frac{d^2\mathrm{X}_n}{dx^2}-\left(\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\right)^2=0 \tag{B}$$

n'a aucune racine réelle.

V. *Remarque.* — On sait que

$$2^n\mathrm{X}_n=(x+1)^n+\left[\frac{n}{1}\right]^2(x+1)^{n-1}(x-1)$$
$$+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(x+1)^{n-2}(x-1)^2+\cdots\ (^{**}).$$

De plus, si l'on fait

$$f(x)=x^n+\left[\frac{n}{1}\right]^2x^{n-1}+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^{n-2}+\cdots+\left[\frac{n}{1}\right]^2x+1, \tag{5}$$

toutes les racines de $f(x)=0$ sont réelles (***). Donc le théorème ci-dessus (II) est applicable.

(*) Évident par la formule (5).

(**) Premier *Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 13.

(***) *Ibid.*, p. 52.

Soit, par exemple, $n = 3$; d'où :

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 1, \quad f'(x) = 3(x^2 + 6x + 3), \quad f'' = 6(x + 3).$$

L'équation (A), développée, est

$$x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 52x + 21 = 0 :$$

elle n'a aucune racine réelle (*).

VI. *Autre application.* — L'équation

$$\frac{a_1}{x - a} + \frac{b_1}{x - b} + \cdots + \frac{k_1}{x - k} = 1,$$

a ses racines réelles et inégales (**).

On peut donc prendre, dans l'équation (A),

$$f(x) = (x - a)(x - b) \cdots (x - k) - \sum a_1 (x - b)(x - c) \cdots (x - k) \ (^{***}).$$

VII. *Remarque.* — On pourrait supposer que, *si la proposée a des racines imaginaires, la transformée a, nécessairement, des racines réelles.* Il n'en est rien. Soit, en effet,

$$f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1).$$

On trouve

$$f'^2 - ff'' = 5x^8 + 10x^4 + 1 ;$$

et ce trinôme ne s'annule pour aucune valeur réelle de x.

(*) Dans les *Nouvelles Annales*, 1848, page 368, on énonce, sous le nom de Gauss, une propriété qui résulte de la *formule de Rodrigues*. En outre, l'équation $f(x) = 0$ (5) étant une simple transformée de $X_n = 0$, le théorème sur la réalité de ses racines ne doit point être attribué à M. H. Laurent.

(**) Voir, par exemple, une Note de Binet (*Journal de Liouville*, t. II, p. 250).

(***) Nous citerons encore, comme équation *proposée*, celle que l'on rencontre dans la *théorie des inégalités séculaires*, et dont un cas particulier fait l'objet de la *Note* CCLXXXV.

CCXC. — Sur une formule de Cauchy.

(*Mai* 1888.)

I. Dans le tome IV des *Anciens Exercices,* on trouve cette relation remarquable, que l'illustre Géomètre démontre au moyen de la théorie des *Résidus :*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{x}{6}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdots\\ =&\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-\cot\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}-\cot\frac{x}{5}\right)+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Il est très facile de la *vérifier.* En effet, elle donne, par intégration,

$$-\mathcal{L}\left[\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{6}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\right]=\mathcal{L}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\frac{\frac{x}{5}}{\sin\frac{x}{5}}\cdots\right],$$

ou

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{6}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}\cdots\qquad(2)$$

Cela posé, soient :

$$P_1=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots,$$

$$P_3=\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{24}\cdots,$$

$$P_5=\cos\frac{x}{10}\cos\frac{x}{20}\cos\frac{x}{40}\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

par une formule d'Euler, bien connue, on a :

$$P_1=\frac{\sin x}{x},\quad P_3=\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}},\quad P_5=\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}},\ldots$$

D'ailleurs (*),

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots = P_1 . P_3 . P_5 \ldots; \tag{3}$$

donc l'égalité (2) est démontrée.

II. On peut se proposer de sommer la série

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n}. \tag{4}$$

Dans l'état actuel de l'Analyse, ce problème n'est peut-être pas résoluble; mais nous pouvons, du moins, le rattacher à la *série de Lambert*.

D'après une formule du Mémoire intitulé : *Sur quelques intégrales définies* (**), on a

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\alpha^{-\frac{x}{\pi}} - \alpha^{\frac{x}{\pi}}}{1-\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \text{ (***)}. \tag{5}$$

Conséquemment,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\alpha^{-\frac{x}{n\pi}} - \alpha^{\frac{x}{n\pi}}}{1-\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}; \tag{6}$$

puis, si l'on fait $\alpha = q^{2n}$:

$$\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(q^{-\frac{2x}{\pi}} - q^{\frac{2x}{\pi}}\right)\frac{dq}{q}\frac{q^n}{1-q^{2n}}. \tag{7}$$

On conclut, de cette formule,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(q^{-\frac{2x}{\pi}} - q^{\frac{2x}{\pi}}\right)\frac{dq}{q}\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}. \tag{8}$$

(*) *Sur un tableau numérique...*, p. 7.

(**) *Académie de Belgique*, octobre 1885.

(***) Elle ne diffère, qu'en apparence, de la célèbre formule, due à Poisson

$$\operatorname{tg} x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\beta x} - e^{-2\beta x}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}}d\beta.$$

De plus, si l'on fait

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots=f(q), \tag{9}$$

on a

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}=f(q)-f(q^2)\ (^*). \tag{10}$$

Donc enfin

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(q^{-\frac{2x}{\pi}}-q^{\frac{2x}{\pi}}\right)\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}. \tag{11}$$

III. La relation (11) peut en faire trouver d'autres. Par exemple celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\ell\left(\cos x\,.\cos\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{3}\,.\cos\frac{x}{4}\,.\cos\frac{x}{5}\cdots\right)\\&=\int_0^1\frac{\left(q^{-\frac{x}{\pi}}-q^{\frac{x}{\pi}}\right)^2}{\ell q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Le changement de x en $\frac{x}{2}$ donne ensuite

$$\begin{aligned}&\ell\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{8}\cdots\right)\\&=\int_0^1\frac{\left(q^{-\frac{x}{2\pi}}-q^{\frac{x}{2\pi}}\right)^2}{\ell q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q};\end{aligned}$$

puis, par soustraction :

$$\left.\begin{aligned}&\ell\left(\cos x\,.\cos\frac{x}{3}\,.\cos\frac{x}{5}\,.\cos\frac{x}{7}\cdots\right)\\&=\int_0^1\frac{\left(q^{\frac{x}{\pi}}+1+q^{-\frac{x}{\pi}}\right)\left(q^{-\frac{x}{2\pi}}-q^{\frac{x}{2\pi}}\right)^2}{\ell q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(*) *Notes sur la théorie des fractions continues*, p. 14.

Une nouvelle soustraction conduit à cette dernière formule, assez curieuse :

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{L}\left(\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{4}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{5}}{\cos\frac{x}{6}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{7}}{\cos\frac{x}{8}}\cdots\right)\\ &=\int_0^1\frac{\left(q^{-\frac{x}{\pi}}+q^{\frac{x}{\pi}}\right)\left(q^{-\frac{x}{2\pi}}-q^{\frac{x}{2\pi}}\right)^2}{\mathcal{L}q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

CCXCI. — Sur une équation d'Abel.

(*Septembre* 1886.)

I. Pour éclaircir un passage de la page 46 (*), Holmboë démontre, d'une manière peu naturelle (**), une propriété de la fonction

$$y=\frac{1}{e^x-1}\ (^{***}).\qquad(1)$$

Voici comment on peut l'établir :

On a

$$y'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2};$$

donc

$$y+y'=-\frac{1}{(e^x-1)^2}.\qquad(2)$$

Soit $y+y'=u$. Alors

$$u'=2\frac{e^x}{(e^x-1)^3},$$

puis

$$2u+u'=2\frac{1}{(e^x-1)^3}.\qquad(3)$$

(*) *OEuvres d'Abel,* t. II, 1re édition.

(**) Page 274.

(***) Nous avons remplacé p et v par y et x.

Soit encore $2u + u' = v$. On trouve

$$v' = -2.3 \frac{e^x}{(e^x - 1)^4};$$

et, par conséquent,

$$3v + v' = -2.3.\frac{1}{(e^x - 1)^4}; \qquad (4)$$

etc.

Ainsi :

$$y + y' = -y^2; \qquad (2')$$

$$2(y + y') + (y' + y'') = 2y^3; \qquad (3')$$

$$6(y + y') + 3(y' + y'') + 2(y' + y'') + (y'' + y''') = -2.3.y^4,$$

ou

$$6(y + y') + 5(y' + y'') + (y'' + y''') = -2.3.y^4; \qquad (4')$$

$$24(y + y') + 20(y' + y'') + 4(y'' + y''')$$
$$+ 6(y' + y'') + 5(y'' + y''') + (y''' + y^{\text{IV}}) = 2.3.4y^5,$$

ou

$$24(y+y')+26(y'+y'')+9(y''+y''')+(y'''+y^{\text{IV}}) = 2.3.4.y5; \qquad (5')$$

. . . .

Chacune de ces équations est vérifiée par $\mathrm{y} = (\mathrm{e}^x - 1)^{-1}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

II. *Remarques.* — 1° Dans ces équations, les coefficients numériques forment la table *à double entrée :*

1					
1	2				
1	3	6			
1	9	26	24		
1	14	71	154	120	

2° Si $N_{p,q}$ désigne le terme placé dans la $p^{\text{ième}}$ *colonne* et dans la $q^{\text{ième}}$ *ligne :*

$$N_{p,q} = N_{p-1,\,q-1} \cdot q + N_{p,\,q-1}.$$

3° *La somme des termes composant la* q$^{\text{ième}}$ *ligne est* $3.4.5\ldots(q+1)$.

4° Les *derniers* termes sont :

$$1, \quad 1.2, \quad 1.2.3, \quad 1.2.3.4, \quad \ldots$$

III. *Une intégration.* — Soit l'équation (3'), ou

$$2(y+y') + (y'+y'') = 2y^3. \tag{A}$$

Quoi qu'elle ne soit pas linéaire, il est facile d'en trouver l'intégrale générale. En effet, multipliant les deux membres par $\lambda(y+y')$, on a

$$2\lambda(y+y')^2 + \lambda(y+y')(y'+y'') = 2\lambda(y+y')y^3. \tag{6}$$

Le premier membre est une dérivée exacte si l'on prend $\lambda = e^{4x}$ (*). D'ailleurs, $2e^{4x}(y+y')y^3$ est la dérivée de $(ye^x)^4$. Donc une intégrale première de (A) est

$$(y+y')^2 e^{4x} = (ye^x)^4 + g,$$

ou

$$(y+y')e^{2x} = \sqrt{(ye^x)^4 + g}, \tag{B}$$

ou encore :

$$e^x(ye^x)' = \sqrt{(ye^x)^4 + g}.$$

Ainsi

$$e^{-x} = \frac{(ye^x)'}{\sqrt{(ye^x)^4 + g}}, \tag{C}$$

(*) La dérivée de $\lambda(y+y')^2$ étant

$$2\lambda(y+y')(y'+y'') + (y+y')\frac{d\lambda}{dx},$$

on doit avoir

$$\frac{\frac{d\lambda}{dx}}{2x} = 2;\ \text{etc.}$$

et enfin :

$$e^{-x} = h - \int \frac{d(ye^x)}{\sqrt{(ye^x)^4 + g}} \text{ (*)} \tag{D}$$

IV. *Suite.* — Pour simplifier l'intégrale (D), qui n'a pas la forme normale, posons

$$ye^x = u. \tag{7}$$

Il vient, immédiatement,

$$y = u\left[h - \int \frac{du}{\sqrt{u^4 + g}}\right], \tag{8}$$

puis

$$x = -\,\mathfrak{L}\left[h - \int \frac{du}{\sqrt{u^4 + g}}\right] \tag{9}$$

Le système de ces deux formules constitue l'intégrale *générale* de l'équation (A).

V. Si la constante g est positive, remplaçons g par g^4; puis posons, comme le fait Legendre,

$$u = g \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi. \tag{10}$$

Il résulte, de cette transformation :

$$du = \frac{g\,d\varphi}{1 + \cos\varphi}, \quad \sqrt{u^4 + g^4} = 2g\,\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{1 + \cos\varphi} \text{ (**)};$$

puis :

$$y = g \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi\left[h - \frac{1}{2g}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right], \tag{11}$$

$$x = -\,\mathfrak{L}\left[h - \frac{1}{2g}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right]. \tag{12}$$

(*) Si la constante g est nulle, cette formule se réduit à

$$y = \frac{1}{1 - he^x}.$$

(**) *Note* CXXXVI (t. II, p. 177).

VI. Si la constante g est négative, on trouve, avec la même facilité :

$$y = \frac{g}{\cos\varphi}\left[h - \frac{1}{2g}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right], \qquad (13)$$

$$x = -\,\mathfrak{L}\left[h - \frac{1}{2g}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right] (*). \qquad (12)$$

Addition. — (*Juin* 1888.)

VII. *Généralisation.* — Dans l'intégrale

$$e^{-x} = h - \int \frac{d(ye^x)}{\sqrt{(ye^x)^4 + g}}, \qquad (D)$$

remplaçons e^x par une fonction f, donnée; de manière que :

$$\frac{1}{f} = h - \int \frac{d(yf)}{\sqrt{(yf)^4 + g}}. \qquad (E)$$

Il résulte d'abord, de cette égalité,

$$\frac{f'}{f^2} = \frac{yf' + fy'}{\sqrt{(yf)^4 + g}},$$

ou

$$(yf)^4 + g = \frac{f^4}{f'^2}(yf' + fy')^2;$$

puis

$$2(yf)^3 = \frac{f^4}{f'^2}(yf'' + 2y'f' + fy'') + (fy' + yf')\frac{2f^3f'^2 - f^4f''}{f'^3};$$

et enfin

$$f^2f'y'' + f(4f'^2 - ff'')y' + 2f'^3y = 2f^3y^3. \qquad (F)$$

Ainsi, *l'intégrale générale de cette équation* (F) *est l'équation* (E).

(*) On fait

$$u = \frac{g}{\cos\varphi}.$$

CCXCII (*). — Une équation aux différences.

(*Février* 1880.)

I. *Première méthode.* — L'équation donnée étant

$$P_{n+1} = nP_n + P_{n-1}, \tag{1}$$

soit y la *fonction générative* de P_n, de manière que

$$y = P_0 + P_1 x + P_2 x' + \cdots + P_n x^2 + \cdots; \tag{2}$$

puis, par un calcul facile,

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = -\frac{P_0}{x^2} - \frac{P_1}{x}. \tag{3}$$

L'intégrale de cette équation linéaire est

$$y = -e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} \int e^{x+\frac{1}{x}} \left(\frac{P_0}{x^2} + \frac{P_1}{x}\right) dx. \tag{4}$$

Malheureusement, la quantité placée sous le signe $\int$ n'est pas intégrable par les procédés connus : on ne peut pas même développer, en série, la fonction $e^{x+\frac{1}{x}}$.

II. *Seconde méthode* (**). — En l'appliquant, on trouve qu'on satisfait à l'équation (1) par

$$P_n = A \int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)} \alpha^{n-1} d\alpha :$$

la vérification est facile (***).

(*) Extraite d'un *Traité* inédit.

(**) Due à Laplace (*Théorie des Probabilités*).

(***) En effet,

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)} \alpha^{n-1} d\alpha = \frac{1}{n}\left[e^{-\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)} \alpha^n\right]_0^\infty + \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-\left(x \quad \frac{1}{\alpha}\right)} (\alpha^n - \alpha^{n-2}) d\alpha,$$

ou

$$P_r = \frac{1}{n}[P_{n+1} - P_{n-1}].$$

III. *Remarque.* — Si l'on suppose $P_1 = 0$, $P_2 = 1$, la formule (1) donne, successivement :

$$P_3 = 2, \quad P_4 = 7, \quad P_5 = 30.$$

Ces nombres sont les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}},$$

étudiée par Amoretti (*). Ce jeune Géomètre (**) considère la série

$$s = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{1}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \cdots$$

Or, d'après Fourier (***) :

$$1 - \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{\alpha^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \cdots = \frac{1}{\pi}\int^{\pi} dx \cos(\alpha \sin x);$$

donc

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx \cos\left(2\sqrt{-1} \sin x\right),$$

ou, sous forme réelle,

$$s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (e^{2 \sin x} + e^{-2 \sin x})dx \text{ (IV)}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1855, p. 40.

(**) Mort à l'âge de *seize* ans !

(***) *Théorie de la Chaleur*, p. 378.

(IV) Pour démontrer directement cette formule, il suffit de développer les exponentielles.

CCXCIII. — Sur une intégrale définie.

(*Février* 1876.)

I. Soit

$$A_m = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)\dots(m+x)}. \tag{1}$$

Au lieu de décomposer, en fractions simples, la quantité

$$\frac{1}{(1+x)(2+x)\dots(m+x)},$$

on peut observer que

$$(1+x)(2+x)\dots(m+x) = \Gamma(m)\frac{\Gamma(m+1+x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(m)} = \frac{\Gamma(m)}{\int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta}.$$

Donc

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 dx \int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta. \tag{2}$$

II. On a

$$(1-\theta)^{m-1} = 1 - \frac{m-1}{\theta}\theta + \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}\theta^2 - \dots \pm \theta^{m-1}.$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta = {} & \frac{1}{x+1} - \frac{m-1}{1}\frac{1}{x+2}\\ & + \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}\frac{1}{x+3} - \dots \pm \frac{1}{x+m};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

puis

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\mathcal{L}\frac{2}{1} - \frac{m-1}{1}\mathcal{L}\frac{3}{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}\mathcal{L}\frac{4}{3} - \dots \pm \mathcal{L}\frac{m+1}{m}\right\},$$

ou

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\mathcal{L}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{m-1}{1}}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3}}\dots\right\}(^*). \tag{4}$$

(*) Le dernier facteur est $\frac{m+1}{m}$ ou $\frac{m}{m+1}$, selon que m est *impair* ou *pair*.

III. L'intégrale double, qui entre dans la formule (2), peut être écrite ainsi :

$$\int_0^1 (1-\theta)^{m-1} d\theta \int_0^1 \theta^x dx.$$

Or,

$$\int_0^1 \theta^x dx = -\frac{1-\theta}{\mathcal{L}\theta};$$

donc

$$\mathrm{A}_m = -\frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{\mathcal{L}\theta} \delta\theta. \qquad (5)$$

IV. La comparaison des valeurs (4), (5) donne

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{\mathcal{L}\theta} d\theta = -\mathcal{L} \left\{ \frac{2}{1} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m-1}{1}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3}} \cdots \right\}. \qquad (6)$$

V. *Remarque.* — On lit, dans les *Tables* de M. Bierens de Haan (1^{re} édition, T. 167) :

$$\int_0^1 (x-1)^a \frac{dx}{\mathcal{L}x} = \sum_0^\infty \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1\,.\,2\ldots n} \mathcal{L}(a-n+1).$$

Même abstraction faite de la faute typographique, dans le premier membre, cette formule est inadmissible; car le facteur $\mathcal{L}(a-n+1)$ devient imaginaire pour $n > a$.

Dans la seconde édition (T. 123), la formule est

$$\int_0^1 (1-x)^p \frac{dx}{\mathcal{L}x} = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{p^{n/-1}}{p^{n/1}} \mathcal{L}(1+n);$$

ce qui équivaut à

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 (1-\theta)^m \frac{d\theta}{\mathcal{L}\theta} \\ &= -\frac{m}{1}\mathcal{L}2 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\mathcal{L}3 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\mathcal{L}4 + \cdots \end{aligned}\right\} (7)$$

Il est facile de voir que celle-ci ne diffère pas de la nôtre, au moins quand m est *entier positif*. Si m n'est pas entier, le second membre de l'égalité (7) devient une série *divergente*, à cause du facteur $\mathfrak{L}(1+n)$.

VI. *Généralisation.* — Soit

$$B_m = \int_0^1 \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(m+1+x)}\, dx; \tag{8}$$

m étant une quantité positive quelconque. Les calculs précédents ne subissent aucune modification; donc *les formules* (4) *et* (6) *sont générales.* Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{L}\theta}\, d\theta = -\mathfrak{L}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1.3}{2.4}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1.3.5}{2.4.6}}\cdots\right\},$$

ou

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{L}\theta}\, d\theta = -\mathfrak{L}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1.3}{2.4}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1.3.5}{2.4.6}}\cdots\right\}(*). \tag{9}$$

VII. *Remarque.* — Comme

$$\int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta = \int_0^1 (1-\theta)^x\theta^{m-1}d\theta,$$

on aurait pu prendre, au lieu de la formule (3) :

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 dx \int_0^1 \theta^{m-1}d\theta\left[1-\frac{x}{1}\theta+\frac{x(x-1)}{1.2}\theta^2-\cdots\right],$$

ou

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{1.(m+1)}\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{1.2(m+2)}\int_0^1 x(x-1)dx-\cdots\right\}. \tag{10}$$

Les intégrales

$$\int_0^1 x\,dx,\quad \int_0^1 x(x-1)dx,\quad \int_0^1 x(x-1)(x-2)dx,\ \ldots,$$

analogues à celles que contient la *série de Binet*, sont toutes commensurables.

(*) On peut comparer ces résultats avec ceux que nous avons indiqués dans les *Recherches sur la constante* G, dans le Mémoire *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*, etc.

CCXCIV. — A propos d'un théorème de M. Oltramare (*).

(*Décembre* 1887.)

I. Ce théorème, *presque évident*, fait *supposer* celui-ci :

Soit n_1 *la somme des diviseurs d'un nombre* n, *inférieurs à* n. *Soit* n_2 *la somme des diviseurs de* n_1, *inférieurs à* n_1, etc. *Ces sommes* n_1, n_2, ... *tendent vers une limite* λ, *laquelle est* 1, *ou un nombre parfait* (**).

La seconde partie de l'énoncé est visible : Si n_4, par exemple, est un *nombre parfait* p, on aura $n_5 = p$, $n_6 = p$, ... Au contraire, la première partie, si elle est exacte, doit être très difficile à démontrer.

II. *Remarque.* — Si le terme u_k est *premier*, u_{k+1} *égale* 1.

III. Si l'on prend $n = 25$, on trouve, tout de suite, $n_1 = 1 + 5 = 6$, *nombre parfait.* $n = 30$ donne les résultats suivants :

$$n_1 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42,$$

$$n_2 = 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 + 21 = 54,$$

$$n_3 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 + 27 = 66,$$

$$n_4 = 1 + 2 + 3 + 6 + 11 + 22 + 33 = 78,$$

$$n_5 = 1 + 2 + 3 + 6 + 13 + 26 + 39 = 90,$$

$$n_6 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 15 + 18 + 30 + 45 = 144,$$

$$n_7 = 1+2+3+4+6+8+9+12+16+18+24+36+48+72=259,$$

$$n_8 = 1 + 7 + 37 = 45,$$

$$n_9 = 1 + 3 + 5 + 9 + 15 = 33,$$

$$n_{10} = 1 + 3 + 11 = 17,$$

$$n_{11} = 1.$$

(*) *Mathesis,* déc. 1887.

(**) Un *nombre parfait* p est celui qui est égal à la somme de ses diviseurs, abstraction faite de p.

CCXCV. — Quelques formules elliptiques.

(*Février* 1887.)

I. Le Mémoire intitulé : *Notes sur la théorie des fractions continues...* contient les égalités suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}+\dfrac{q+4q^4+9q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots}\\ =2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4\ (^*),\end{array}\right\}\quad(1)$$

$$q-4q^4+9q^9-\cdots=\quad\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2\Theta''(0)\ (^*),\qquad(2)$$

$$q+4q^4+9q^9+\cdots=-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2\Theta''(\omega)\ (^*),\qquad(3)$$

$$\Theta''(0)=\left[\omega-E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2k'}{\pi\omega}}\ (^{**}),\qquad(4)$$

$$\Theta''(\omega)=\left[\omega k'^2-E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\ (^{**}).\qquad(5)$$

Il résulte, des quatre dernières :

$$q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots=\frac{\omega}{\pi^2}[\omega-E_1]\sqrt{\frac{k'\omega}{2\pi}},\qquad(6)$$

$$q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots=\frac{\omega}{\pi^2}[E_1-\omega k'^2]\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\cdot\qquad(7)$$

II. Dans l'égalité (1), chassons les dénominateurs. Elle devient

$$\left.\begin{array}{l}(q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\\ +(q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\\ =2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4(1+2q+2q^4+\cdots)(1-2q+2q^4-\cdots).\end{array}\right\}\ (8)$$

On sait que

$$\begin{array}{l}(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q+2q^4+\cdots)(1-2q+2q^4-\cdots)\\ \qquad=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3\ (^{***}).\end{array}$$

(*) Page 55.

(**) Page 57.

(***) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, pp. 106 et 107.

Donc, si l'on fait

$$P = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots), \quad (9)$$

le second membre de l'équation (8) prendra la forme $2qP^3$.

III. D'après deux autres relations connues,

$$P = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^2 \, (^*), \quad (10)$$

$$P^3 = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^6 = (1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2. \quad (11)$$

Ainsi, dans le second membre de cette même équation (8), le multiplicateur de $2q$ est : 1° *un cube;* 2° *une sixième puissance;* 3° *un carré.*

IV. Par les formules (6), (7), jointes à celles-ci :

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \, (^{**}), \quad (11)$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}} \, (^{**}), \quad (12)$$

le premier membre de l'équation (8) a pour valeur :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 [\omega - E_1] \sqrt{\frac{4k'}{\pi^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 [\omega k'^2 - E_1] \sqrt{\frac{4k'}{\pi^2}},$$

ou

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^3 k^2 \sqrt{k'}.$$

Conséquemment

$$P = 2^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} \frac{\omega}{\pi} k^{\frac{2}{3}} k'^{\frac{1}{6}}; \quad (13)$$

comme on le vérifie au moyen des relations (9) ou (10).

V. L'équation (8) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned} & q + 9q^9 + 25q^{25} + 49q^{49} + \cdots \\ & + (q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + 25q^{25} - \cdots)(q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \cdots) \\ & - (q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + 25q^{25} + \cdots)(q - q^4 + q^9 - q^{16} + q^{25} - \cdots) \\ & = qP^3. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

(*) *Recherches.*, p. 8.

(**) *Ibid.*, p. 2.

Posons, pour abréger :

$$q + 9q^9 + 25q^{25} + 49q^{49} + \cdots = \text{A},$$
$$4q^4 + 16q^{16} + 36q^{36} + 64q^{64} + \cdots = \text{A}',$$
$$q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots = \text{B},$$
$$q - q^9 + q^{25} - q^{49} + \cdots = \text{B}'.$$

Le premier membre de l'égalité (13) devient

$$\text{A} + (\text{A} - \text{A}')(\text{B} + \text{B}') - (\text{A} + \text{A}')(\text{B} - \text{B}') = \text{A} + 2(\text{AB}' - \text{BA}').$$

Ainsi

$$\text{A} + 2(\text{AB}' - \text{BA}') = q\text{P}^3.$$

Chaque terme de AB′ a la forme $x^2q^{x^2+y^2}$; (x *imp.*, y *pair*) chaque terme de BA′ a la forme $y^2q^{x^2+y^2}$.

Conséquemment, notre égalité (13) se réduit à

$$\sum x^2q^{x^2} + 2\sum(x^2 - y^2)q^{x^2+y^2} = q\text{P}^3. \tag{14}$$

D'après celle-ci : *dans le développement de* qP³, *chaque exposant est, ou un carré, ou la somme de deux carrés* (*).

(*) Cette propriété, évidente à l'inspection de l'égalité (13), résulte aussi de la formule

$$q\text{P}^3 = q(1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2. \tag{11}$$

En effet, dans la parenthèse, chaque exposant a la forme $2n(n+1)$. Donc, tout terme du premier membre contient une puissance de q marquée par

$$2n(n+1) + 2n'(n'+1) + 1.$$

Or, si l'on multiplie et qu'on divise par 2, ce trinôme devient

$$\frac{1}{2}\left[(2n+1)^2 + (2n'+1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right] = x^2 + y^2.$$

Notons, en passant, que : *le quadruple de la somme de deux nombres triangulaires, augmenté de* 1, *égale une somme de deux carrés* (ou *égale un carré*).

Par exemple,

$$4\left(\frac{5.6}{2} + \frac{9.10}{2}\right) + 1 = 241 = 10^2 + 11^2.$$

VI. La combinaison des égalités (14), (11) donne celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} &q(1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2 \\ &= \sum x^2 q^{x^2} + 2\sum(x^2 - y^2) q^{x^2+y^2} = \sum x^2 q^{x^2} + 2\sum A_n q^n ; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

pourvu que

$$n = x^2 + y^2, \tag{16}$$

$$A_n = \sum(x^2 - y^2)\ (^*). \tag{17}$$

Soit, par exemple,

$$n = 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2;$$

puis

$$A_{85} = 81 + 49 - 4 - 36 = 90.$$

En effet, dans le carré de

$$1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - 11q^{60} + 13q^{84} - \cdots,$$

le coefficient de q^{84} est

$$2(1 \,.\, 13 + 7 \,.\, 11) = 2 \,.\, 90\ (^{**}),$$

VII. *Développement de* P. — Nous avons trouvé

$$P = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^2. \tag{10}$$

Donc, si nous faisons

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \sum_0^\infty (-1)^i q^{3i^2 \mp i} \\ &= 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} \\ &\quad + q^{102} + q^{114} - q^{140} - q^{154} + q^{184} + q^{200} - \cdots\ (^{***}), \end{aligned}\right\} (18)$$

la série P se déduira, de α'^2, par le changement de q en q^2.

(*) La dernière formule résulte, immédiatement, de l'égalité (11); mais la démonstration est moins claire que celle qui vient d'être exposée. De plus, si k est le nombre des solutions de l'équation (16), la valeur de A_n peut être remplacée par l'une ou l'autre de ces deux-ci :

$$A_n = 2\Sigma x^2 - kn, \quad A_n = kn - 2\Sigma y^2,$$

peut-être plus commodes que la première, dans la plupart des cas.

(**) Faisons encore observer que :

$$81 - 4 = 7 \,.\, 11, \quad 49 - 36 = 1 \,.\, 13.$$

(***) *Recherches...*, p. 17.

Or,

$$\left.\begin{aligned}\alpha'^2 = {} & 1 - 2q^2 - q^4 + 2q^6 + q^8 + 2q^{10} - 2q^{12} - 2q^{16} - 2q^{18} + q^{20} \\ & + 2q^{26} + 3q^{28} - 2q^{30} + 2q^{32} - 2q^{38} - 2q^{40} - 2q^{46} - q^{48} + 2q^{52} \\ & + 2q^{54} - 2q^{56} + 2q^{58} + q^{60} + 2q^{62} + 2q^{66} - 2q^{68} - 2q^{70} + 2q^{72} \\ & - 2q^{76} - 4q^{80} + q^{88} - 2q^{90} + 2q^{96} + 2q^{100} + 2q^{102} + q^{104} - 2q^{106} \\ & + 2q^{110} + 2q^{112} - 2q^{118} - 2q^{122} - 2q^{126} + 2q^{128} - 4q^{132} - 2q^{138} \\ & - q^{140} + 2q^{142} + 2q^{146} - 2q^{154} + 2q^{156} + 4q^{158} + q^{160} + 2q^{166} \\ & - 2q^{168} + 2q^{170} - 2q^{172} + 2q^{178} - 2q^{182} - 2q^{186} - 2q^{188} - 2q^{192} \\ & + 2q^{200} + \cdots (^*);\end{aligned}\right\}(19)$$

donc

$$P = 1 - 2q^4 - q^8 + 2q^{12} + q^{16} + 2q^{20} - 2q^{24} - \cdots; \qquad (20)$$

et, d'après ce que l'on a vu ci-dessus (III) :

$$\left.\begin{aligned} & (1 - 2q^4 - q^8 + 2q^{12} + q^{16} + 2q^{20} - 2q^{24} - \cdots)^3 \\ = {} & (1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2 \\ = {} & (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^6 \; (^{**}).\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

VIII. *Loi des coefficients.* — Soient, dans l'égalité (19) :

$$\alpha'^2 = \sum_0^\infty L_n q^{2n}, \qquad (22)$$

$$2n = (3l^2 \mp l) + (3l'^2 \mp l'). \qquad (23)$$

On a

$$(-1)^l q^{3l^2 \mp l} \times (-1)^{l'} q^{3l'^2 \mp l'} = (-1)^{l+l'} q^{2n}.$$

Donc, si l et l' sont *inégaux*,

$$L_n = \sum (-1)^{l+l'}, \qquad (24)$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les solutions, *entières et positives*, de l'équation (23).

(*) *Recherches...*, p. 41. Ce développement a été obtenu de deux manières différentes : il y a donc lieu de le croire exact.

(**) Cette double égalité devient évidente si l'on fait attention que la formule connue :

$$\alpha' = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8)\ldots,$$

donne

$$P = [(1 - q^4)(1 - q^8)(1 - q^{12})(1 - q^{16})\ldots]^2.$$

Mais, si $l' = l$, ou

$$n = 3l^2 \mp l,$$

on doit prendre

$$L_n = 1 + \sum (-1)^{l+l'}, \qquad (24^{bis})$$

pourvu que, dans cette nouvelle formule, l et l' soient supposés *inégaux* (*).

Soit, par exemple,

$$n = 3 \,.\, 5^2 - 5 = 70.$$

L'équation (23) devient

$$140 = (3l^2 \mp l) + (3l'^2 \mp l').$$

Celle-ci est vérifiée par

$$l = l' = 5;\quad l = 0, l' = 7;\quad l = 7,\quad l' = 0.$$

Donc le coefficient de q^{140} doit être

$$1 + 2(-1)^7 = -1;$$

ce qui est exact.

IX. *Suite.* — L'équation (23) peut être remplacée par

$$24n + 2 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2 \text{ (**)}. \qquad (25)$$

Ainsi, sauf le cas où $n = 3\lambda^2 \mp \lambda$, L_n *égale l'excès du nombre des solutions de l'équation* (25), *dans lesquelles* l *et* l' *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces nombres sont de parités contraires* (***). Mais cet énoncé peut être simplifié, au moyen des remarques suivantes :

1° On peut substituer, au second membre de l'équation,

$$(6x + 1)^2 + (6y + 1)^2,$$

x et y étant *positifs* ou *négatifs ;*

(*) *Recherches...*, p. 39.
(**) *Ibid.*, p. 41.
(***) *Loc. cit.*

2° Il est visible (et connu) (*) que

$$(6x+1)^2+(6y+1)^2=2\left[(3x+3y+1)^2+(3x-3y)^2\right]$$

Donc l'équation (23) devient

$$12n+1=(3x+3y+1)^2+(3x+3y)^2,$$

ou, finalement,

$$12n+1=(3u+1)^2+(3v)^2;$$

u, v étant des *quantités entières, positives ou négatives* (**).

Par conséquent : $\frac{1}{2}$ L_n *égale l'excès du nombre des valeurs paires, sur le nombre des valeurs impaires, de* v.

X. *Remarque.* — Ce nouvel énoncé suppose que $12n+1$ *n'est pas un carré parfait* (***). Lorsque $12n+1$ a la forme λ^2, la valeur de L_n, déduite de la règle (23), doit être augmentée d'une unité.

XI. *Autre remarque.* — Si $12n+1$ est un nombre premier, comme il a la forme $4\mu+1$, il est décomposable, d'une seule manière, en une somme de deux carrés : l'un est $(3u+1)^2$; l'autre, $(3v)^2$. On est donc conduit à ce petit théorème d'Arithmétique, à peu près évident :

Tout nombre premier, de la forme $12\mu+1$, *est la somme des carrés d'un multiple de 3, et d'un multiple de 3 augmenté ou diminué de* 1 (IV).

(*) Voir, par exemple, le Mémoire de M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, t. XIII).

(**) De

$$x+y=u, \qquad x-y=v,$$

on conclut que :

Si u et v sont *pairs*, x et y sont *de même parité*;

Si u et v sont *impairs*, x et y sont *de parités contraires*;

etc.

(***) C'est le cas d'exception signalé plus haut.

(IV) Dans le cas considéré, $L_n=\pm 2$, selon que v est *pair* ou *impair*.

CCXCVI (*). — Sur le Problème de Pétersbourg (**).

(*Décembre* 1877.)

I. « *Pierre, se proposant de jeter en l'air une pièce de monnaie, promet de donner à Paul* 1 *ducat si, dès le* 1er *coup, cette pièce étant tombée, montre la face;* 2, *si cela n'arrive qu'au* 2e *coup;* 4, *si ce n'est qu'au* 3e, *et ainsi de suite, en doublant à chaque coup. On demande le sort de Paul.* »

Les probabilités de l'arrivée de *face*, au 1er coup, au 2e, ..., au $n^{\text{ième}}$, sont

$$\frac{1}{2},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad \ldots,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les gains correspondants sont

$$1,\qquad 2,\qquad 4,\qquad \ldots,\qquad 2^{n-1}\ \text{ducats.}$$

Par conséquent, le *sort* de Paul (ou son *espérance mathématique*), est

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2}.$$

« Or (dit Lacroix), puisqu'il n'est pas impossible que *face* » n'arrive qu'après un nombre de coups plus grand que tel » nombre qu'il plaira d'assigner, ne s'ensuit-il pas qu'avant » de commencer le jeu, il faut supposer ce nombre infini? » La mise de Paul doit donc être infinie; mais quel homme » sensé voudra risquer à ce jeu, non pas une somme infinie, » ce qui est absurde, mais même une somme tant soit peu forte? » Voilà le paradoxe que les géomètres ont cherché à expliquer. »

On n'a peut-être pas fait attention à ceci : Pierre, qui promet à Paul de lui donner 1f, 2f, 4f, 8f, ..., doit commencer par établir

(*) Extraite d'un *Traité* inédit.

(**) Proposé à Montmort, par Nicolas Bernoulli (*Mémoires de St-Pétersbourg*, vers 1720; *Analyse des jeux de hasard*).

qu'il est *en état de payer.* Si Pierre disait : « Voilà une somme » de 1024 francs, sur laquelle vous prélèverez 1^f, 2^f, 4^f, 8^f, ..., » si *face* arrive au 1^{er} coup, au $2^{ième}$, au $3^{ième}$, ... Si, au $11^{ième}$ coup, » je n'ai pas amené *face*, la partie sera nulle, et nous retirerons » nos mises »; il n'y aurait plus de paradoxe : l'enjeu de Paul devrait être $\left(\frac{11}{2}\right)^f$ (*).

II. *Variante. — Pierre promet, à Paul, de lui donner* 1^f, 2^f, 3^f, ..., n^f, *si* FACE *arrive au* 1^{er} *coup, au* $2^{ième}$, ..., *au* $n^{ième}$. *Quelle est l'espérance mathématique de Paul?*

$$E = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

Cette quantité E tend, très rapidement, vers 2. D'ailleurs, la probabilité que Paul gagnera (la partie s'arrêtant, au plus tard, au $n^{ième}$ coup) est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n};$$

et la probabilité que Pierre gagnera est seulement $\frac{1}{2^n}$.

Si donc la mise de Pierre est n francs, la mise de Paul doit être, d'après la *règle des paris :*

$$m = n^f \frac{2^n}{2^{n-1}} < 2n^f.$$

Il n'y a plus rien d'*excessif.*

(*) Poisson a fait une remarque analogue à celle-ci (*Recherches sur la Probabilité des jugements,* p. 73).

CCXCVII. — Sur un cas particulier de la formule du binôme.

(*Août* 1888) (*).

I. Soit, en général,

$$S_n = \varphi(p) = 1 + C_{p,1}x + C_{p+1,2}x^2 + \cdots + C_{p+n-2,\,n-1}x^{n-1}, \qquad (1)$$

la somme des n premiers termes du développement de $(1-x)^{-p}$, p étant un *nombre entier*. La multiplication par $1-x$ donne, au moyen d'une propriété bien connue (**),

$$(1-x)\varphi(p) = \varphi(p-1) - C_{p+n-2,\,n-1}x^n; \qquad (2)$$

puis, par le changement de p en $p-1$, $p-2$, ... 3, 2 :

$$\begin{aligned}
(1-x)\varphi(p-1) &= \varphi(p-2) - C_{p+n-3,\,n-1}x^n,\\
(1-x)\varphi(p-2) &= \varphi(p-3) - C_{p+n-4,\,n-1}x^n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(1-x)\varphi(2) &= \varphi(1) - C_{n,\,n-1}x^n.
\end{aligned}$$

Mais

$$\varphi(1) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x};$$

donc, par une élimination facile :

$$\left.\begin{aligned}
(1-x)^{p-1}S_n + \left[C_{n,n-1} + C_{n+1,n-1}(1-x) + \cdots + C_{n+p-2,n-1}(1-x)^{p-2}\right]x^n\\
= \frac{1-x^n}{1-x}.
\end{aligned}\right\}\,(\text{A})$$

Cette relation, que nous croyons nouvelle, ramène le calcul de S_n, à celui d'un polynôme composé de $p-1$ termes : si n est beaucoup plus grand que p, le second calcul sera bien plus simple que le premier.

(*) Addition à la *Note* CCXCVI.

(**) $$C_{m,q} - C_{m-1,\,q-1} = C_{m-1,\,q}.$$

Soit, par exemple, $p=3$, $n=100$. On aura

$$(1-x)^2 S_{100} = \frac{1-x^{100}}{1-x} - \left[100 + 5\,050(1-x) + 171\,700(1-x)^2\right]x^{100}.$$

II. *Remarque.* — *L'équation*

$$\frac{1-x^n}{1-x} - \left[C_{n,n-1} + C_{n+1,n-1}(1-x) + \cdots + C_{n+p-2,n-1}(1-x)^{p-2}\right]x^n = 0 \quad (3)$$

a p — 1 *racines égales à* 1.

III. La relation (A) peut être mise sous une forme plus simple.

On a

$$S_n = (1-x)^{-p} - R_n,$$

R_n étant le *reste*. Donc, en supprimant, dans les deux membres, $\frac{1}{1-x}$:

$$(1-x)^p R_n = \left[C_{n-1,n-1} + C_{n,n-1}(1-x) + \cdots + C_{p+n-2,n-1}(1-x)^{p-1}\right]x^n \ (^*). \quad (B)$$

IV. *Remarque.* — Le *reste* R_n *est le produit de la fonction proposée,* $(1-x)^{-p}$, *par un polynôme entier.*

V. *Autre remarque.* — On a

$$R_n = C_{p+n-1,p-1}x^n + C_{p+n,p-1}x^{n+1} + C_{p+n+1,p-1}x^{n+2} + \cdots;$$

donc la relation (B) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned}&(1-x)^p\left[C_{p+n-1,p-1} + C_{p+n,p-1}x + C_{p+n+1,p-1}x^2 + \cdots\right]\\ &= C_{n-1,n-1} + C_{n,n-1}(1-x) + \cdots + C_{p+n-2,n-1}(1-x)^{p-1} \ (^{**}).\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

(*) Si l'on observe que, pour $p=1$,

$$R_n = x^n + x^{n+1} + \cdots = \frac{x^n}{1-x};$$

on peut démontrer, *directement*, l'égalité (B).

(**) Cette égalité (C) rappelle, jusqu'à un certain point, la formule (6) de la *Note* LV (t. I, p. 218).

Par exemple, comme il est facile de le vérifier :

$$(1-x)^3\left[15 + 21x + 28x^2 + 36x^3 + 45x^4 + \cdots\right]$$
$$= 1 + 4(1-x) + 10(1-x)^2.$$

VI. *Séries logarithmiques.* — Pour abréger, représentons par

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots,$$

la série contenue dans le premier membre de (C), et par

$$B_0 + B_1(1-x) + B_2(1-x)^2 + \cdots + B_{p-1}(1-x)^{p-1},$$

le second membre.

Nous aurons

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$$
$$= B_0(1-x)^{-p} + B_1(1-x)^{-p+1} + \cdots + B_{p-2}(1-x)^{-2} + \frac{B_{p-1}}{1-x};$$

puis, par intégration,

$$A_0x + \frac{1}{2}A_1x^2 + \frac{1}{3}A_2x^3 + \cdots = \frac{B_0}{p-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-1}} - 1\right]$$
$$+ \frac{B_1}{p-2}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-2}} - 1\right] + \cdots + \frac{B_{p-2}}{1}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right] - B_{p-1}\,\mathfrak{L}(1-x);$$

ou

$$\left.\begin{aligned} B_{p-1}\,\mathfrak{L}(1-x) = \frac{B_0}{p-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-1}} - 1\right] + \frac{B_1}{p-2}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-2}} - 1\right] + \cdots \\ + \frac{B_{p-2}}{1}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right] - \left[A_0x + \frac{1}{2}A_1x^2 + \frac{1}{3}A_2x^3 + \frac{1}{4}A_4x^4 + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \text{(D)}$$

Voici donc une *infinité d'infinités* (*) de développements du logarithme népérien de $(1-x)$.

VII. *Application.* — Soient $n = 1$, $p = 2$, auquel cas :

$$A_0 = 2,\quad A_1 = 3,\quad A_2 = 4,\quad A_3 = 5,\quad A_4 = 6,\ \ldots;\quad B_0 = B_1 = 1.$$

(*) Les coefficients A_0, A_1, ..., B_0, B_1, ... sont fonctions de n et de p.

La relation (D) se réduit à

$$\mathcal{L}(1-x) = \frac{x}{1-x} - \left[2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \cdots\right]; \quad (3)$$

ce qui ne diffère, qu'en apparence, de la formule connue (*).

CCXCVIII. — Extraits d'une lettre à M. Hermite.

(16 *mai* 1880.)

... Je suis prédestiné, semble-t-il, à découvrir des théorèmes connus. Sans la chercher, je viens de trouver une démonstration, *simple,* du beau théorème que vous avez donné dans le *Journal de Borchart :*

$$C_{2n+1,\,p-1} + C_{2n+1,\,2p-2} + C_{2n+1,\,3p-3} + \cdots = \mathfrak{M}(p),$$

p *étant un nombre premier, impair.*

(Vous vous rappelez, peut-être, que je n'ai pas saisi votre démonstration ; mais peu importe).

Depuis que j'ai démontré le théorème de Staudt, je m'évertue à en tirer des conséquences : vous allez voir que votre théorème en est une.

Du temps que..., j'ai donné cette relation :

$$2C_{2n+1,\,2}\,B_1 + 2^3 C_{2n+1,\,4}\,B_3 + \cdots + 2^{2n-1} C_{2n+1,\,1}\,B_{2n-1} = n$$

(*Comptes rendus,* t. LIV). Était-elle *nouvelle?* Peu importe encore.

Considérons, dans le premier membre, les Nombres de Ber-

(*) Le second membre égale

$$(1-2)\,x + \left(1-\frac{3}{2}\right)x^2 + \left(1-\frac{4}{3}\right)x^3 + \left(1-\frac{5}{4}\right)x^4 + \cdots,$$

ou

$$-\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right].$$

noulli *admettant la fraction* $\frac{1}{p}$ (Passez-moi cette locution abréviative). Ce sont :

$$B_{p-1-1},\quad B_{2(p-1)-1},\quad B_{3(p-1)-1},\ \ldots$$

Ces quantités admettent, comme coefficients respectifs :

$$2^{p-1}C_{2n+1,\,p-1},\quad 2^{2(p-1)}C_{2n+1,\,2p-2},\quad 2^{3(p-1)}C_{2n+1,\,3p-3},\ \ldots$$

Ainsi, dans le premier membre, *la somme des fractions ayant* p *pour dénominateur* est

$$\frac{1}{p}\left[2^{p-1}C_{2n+1,\,p-1}+2^{2(p-1)}C_{2n+1,\,2p-2}+2^{3(p-1)}C_{2n+1,\,3p-3}+\cdots\right]=\frac{N}{p},$$

N étant un nombre entier.

Le second membre est entier. Or, *les fractions* $\frac{N}{p}$, $\frac{N'}{p'}$, $\frac{N''}{p''}$, ... *ne peuvent se réduire entre elles*; donc *chacune est réductible à un nombre entier*. Autrement dit :

$$2^{p-1}C_{2n+1,\,p-1}+2^{2(p-1)}C_{2n+1,\,2p-2}+2^{3(p-1)}C_{2n+1,\,3p-3}+\cdots=\mathfrak{M}(p);$$

ou, en négligeant des multiples de p (d'après le théorème de Fermat) :

$$C_{2n+1,\,p-1}+C_{2n+1,\,2p-2}+C_{2n+1,\,3p-3}+\cdots=\mathfrak{M}(p).$$

Notez que c'est seulement après être arrivé à ce résultat, que j'ai songé à votre théorème! ...

CCXCIX. — Sur une application du théorème de Bayes, faite par Laplace (*).

(*Août* 1888.)

I. Dans son Mémoire, le jeune et savant Professeur à l'École Militaire (**), énonce ainsi le théorème, sans nommer Bayes :

Principe. — *Si un événement peut être produit par un nombre* n *de causes différentes, les probabilités de ces causes prises de l'événement* (sic) *sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes.*

Il en fait l'application au problème suivant :

Si une urne renferme une infinité de billets blancs et noirs (sic) *dans un rapport inconnu, et que l'on en tire* $p+q$ *billets dont* p *soient blancs et* q *soient noirs ; on demande la probabilité qu'en tirant un nouveau billet de cette urne, il sera blanc.*

Au moyen d'une méthode bien connue aujourd'hui, l'illustre Auteur trouve que « *la probabilité entière de tirer un billet blanc de l'urne* » est

$$E = \frac{p+1}{p+q+2}. \tag{1}$$

Ici, les réflexions et les questions se présentent en foule. Comment Laplace n'a-t-il pas été frappé de la simplicité de ce résultat? Comment ne s'est-il pas aperçu que son calcul, fort simple dans le cas d'une *infinité* de billets, deviendrait prolixe et

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences — Savants étrangers,* 1774.

(**) En 1774, Laplace, qui avait vingt-cinq ans, signait : *de la Place.*

fastidieux si l'on supposait le nombre des billets égal à dix mille, par exemple? Comment ne s'est-il pas demandé si la formule (1) ne subsisterait pas dans le cas d'un *nombre quelconque* de billets, supérieur à $p+q$? etc., etc. (*).

II. Quoi qu'il en soit, nous rappellerons, ici, la solution du problème général suivant :

Une urne A *contenait, primitivement,* s *boules. On en a tiré, au hasard,* m *boules blanches,* m' *boules non blanches. Quelle est la probabilité d'extraire, de l'urne modifiée, une nouvelle boule blanche* (**)?

Après la sortie des $m+m'$ boules, l'urne renferme $s-m-m'$ boules, de diverses couleurs, en *proportion inconnue*. L'*événement attendu* est la sortie d'une boule blanche, de l'urne *modifiée*.

La probabilité P, *de cet événement, ne sera pas altérée, si les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues* (***).

Nous pouvons donc *mettre à part, sans les regarder,* 1 boule, 2 boules, 3 boules, ..., et même $(s-m-m'-1)$ boules : P n'aura pas changé.

Mais alors l'urne A est remplacée par une urne auxiliaire ou *fictive* B, *contenant, primitivement,* m + m' + 1 *boules, et d'où il est sorti* m *boules blanches,* m' *boules non blanches.*

(*) On pourrait faire, aussi, beaucoup de remarques sur la rédaction. Le *futur* admirable écrivain s'énonce ainsi : « *la probabilité de tirer un billet blanc de l'urne en vertu du rapport* x. » — « *Si l'on intègre*

$$\int \left(1-\frac{p+q}{p}z\right)^p \left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^q dz \text{ » :}$$

comme si l'on intégrait une intégrale! Etc., etc.

(**) *Problèmes et théorèmes de Probabilités; Mémoires de l'Académie de Belgique*, 1884, p. 7.

(***) *Journal de Liouville*, t. VI (1841), p. 78; *Un nouveau Principe de probabilités;* etc.

On ne peut faire, sur la composition de B, que *deux* hypothèses :

m *blanches,*	$m+1$ *blanches,*
$m'+1$ *non blanches;*	m' *non blanches.*

Les probabilités de ces hypothèses sont proportionnelles aux nombres

$$m(m-1)\ldots 1\,.(m'+1)\,m'\ldots 2,$$

$$(m+1)m\ldots 2\ \ m'(m'-1)\ldots 1;$$

ou, plus simplement, proportionnelles à

$$m'+1,\quad m+1.$$

Ainsi, ϖ_1, ϖ_2 étant ces probabilités :

$$\varpi_1 = \frac{m'+1}{m+m'+2},\quad \varpi_2 = \frac{m+1}{m+m'+2}.$$

Mais, évidemment : la *première hypothèse est incompatible avec l'événement attendu; la seconde le rend nécessaire.*

En conséquence, *la probabilité cherchée,* P, *est égale à la probabilité* ϖ_2 *de cette seconde hypothèse.* Autrement dit :

$$P = \frac{m+1}{m+m'+2}; \tag{2}$$

et ce résultat s'accorde avec la formule (1).

III. *Remarque.* — Si l'on a tiré, de l'urne A, m boules blanches, m' boules noires, m'' boules rouges, etc.; les probabilités d'extraire, à un nouveau tirage, une boule blanche, *ou* une boule noire, *ou* une boule rouge, etc, sont :

$$\frac{m+1}{m+m'+m''+\cdots+k},\quad \frac{m'+1}{m+m'+m''+\cdots+k},$$

$$\frac{m''+1}{m+m'+m''+\cdots+k},\ \ldots;$$

k étant le nombre des *couleurs* (*).

(*) Ce mot est pris dans son acception *usuelle.*

IV. Dans son Mémoire, Laplace donne une démonstration du théorème de Jacques Bernoulli, absolument *inacceptable*. Du reste, les diverses démonstrations de ce beau théorème, que je connais, pèchent toutes en quelque point : sauf, peut-être, celle que m'a communiquée, autrefois, M. Mangon, Lieutenant d'Artillerie. Malheureusement, elle n'a pas été imprimée.

P. S. Une discontinuité. — *Soit une urne* A, *contenant* b *boules blanches et* n *boules noires. On les répartit, sans les voir ni les toucher, entre* k *urnes auxiliaires,* B, C, D, ... H. *Cela posé, la probabilité d'extraire une boule blanche, soit de* B, *soit de* C, etc., *égale* $\frac{b}{b+n}$, excepté si k *surpasse* b + n.

Spa, 30 août 1888.

Fin des *Mélanges mathématiques*.

ERRATA.

Tome I, page 254, *au lieu de* Alesséides, *lisez* Élassoïdes.

Tome III, page 64, ligne première, *au lieu de* $\frac{\pi}{\sin q\pi}$, *lisez* $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

— — 161, ligne pénultième, *au lieu de* vien, *lisez* vient.

— — 212, *Ajoutez* ceci :

Autre addition. — (*Juillet* 1888.)

VII. *Le produit* $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)(a''^2+b''^2)$ ... *est, généralement, la somme de quatre carrés* (*).

VIII. *Si un nombre impair*, N, *est la somme de deux carrés, chacun des nombres* N^2, N^3, ... *est la somme de quatre carrés.*

(*) Il *peut* y avoir exception, *si* $a=b$, ou *si* $a'=b'$, etc.

LISTE DES PUBLICATIONS DE L'AUTEUR.

Le Géomètre (*).

1. Question proposée au Concours général de 1833.
2. Analyse indéterminée, du premier degré.
3. Développements de $\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \cdots$, etc.

Journal de Liouville.

4. Solution d'un problème de Probabilité, relatif au *jeu de rencontre*. (T. II)
5. Note sur un problème de Combinaisons. (T. III.)
6. Note sur une équation aux différences finies. (*Ibid.*)
7. Addition à cette Note. (T. IV.)
8. Note sur la théorie des nombres. (*Ibid.*)
9. Solution nouvelle de cette question : Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le décomposer en triangles, au moyen de diagonales? (*Ibid.*)
10. Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. (*Ibid.*)
11. Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x\, dx}{(1+x^2)^n}$. (T. V.)
12. Problème de Combinaisons. (*Ibid.*)
13. Solution d'un problème de Combinaisons. (T. VI.)
14. Deux problèmes de Probabilités. (*Ibid.*)
15. Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple (*Ibid.*)
16. Problème de calcul intégral. (*Ibid.*)
17. Autres problèmes. (*Ibid.*)
18. Note sur la sommation de quelques séries. (T. VII.)
19. Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum. (*Ibid.*)
20. Note sur une formule de Combinaisons. (*Ibid.*)
21. Note sur une formule relative aux intégrales multiples. (T. VIII.)
22. Note sur une formule d'Euler. (T. IX.)
23. Note sur un problème de Mécanique. (T. XI.)
24. Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde (T. XII.)
25. Note sur la projection stéréographique. (T. XIX.)

Journal de Resal.

26. Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. (T. I.)

(*) Ce Recueil, dont il n'a paru qu'un *fragment* de volume, était dirigé par Guillard.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.

27. Théorème sur les surfaces développables. (T. XVII.)
28. Démonstration d'un nouveau théorème de Statique. (T. XXIV.)
29. Note sur une surface à courbure moyenne nulle. (T. XLI.)
30. Note sur deux surfaces à courbure moyenne nulle. (*Ibid.*)
31. Mémoire sur les surfaces à courbure moyenne nulle (extrait). (*Ibid.*)
32. Réponse à une réclamation (*). (*Ibid.*)
33. Sur le calcul de la latitude, par la méthode de M. Babinet. (T. XLII.)
34. Note à l'occasion d'un théorème de M. Serret. (*Ibid.*)
35. Sur quelques points de la théorie des séries. (T. XLIII.)
36. Sur la théorie des développées. (T. XLV.)
37. Sur un cas particulier de la formule du binôme. (*Ibid.*)
38. Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes. (T. XLVII.)
39. Note sur la théorie des équations. (*Ibid.*)
40. Note sur une fonction homogène entière. (*Ibid.*)
41. Note sur l'équation du troisième degré. (T. LIV.)
42. Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent. (*Ibid.*)
43. Remarques sur une communication de M. *Le Besgue*, relative aux Nombres de Bernoulli. (T. LVIII.)
44. Sur le calcul des Nombres de Bernoulli. (*Ibid.*)
45. Mémoire sur la transformation des séries, et sur quelques intégrales définies (extrait). (T. LIX.)
46. Sur les Nombres d'Euler. (T. LXVI.)
47. Remarques sur une Note de M. *Darboux*, relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. (T. LXXI.)
48. Sur une communication de M. *Didion*, concernant une expression du rapport de la circonférence au diamètre. (T. LXXIV.)
49. Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. (T. LXXVII.)
50. Sur la projection stéréographique. (T. LXXVIII.)
51. Sur l'addition des fonctions elliptiques. (*Ibid.*)
52. Note sur les surfaces orthogonales. (T. LXXIX.)
53. Note sur les Nombres de Bernoulli. (T. LXXXI.)

Société Philomathique de Paris.

54. Transformation des variables, dans les intégrales multiples (extrait). (Novembre 1839.)
55. Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple. (Juin 1840.)
56. Problème de Combinaisons. (Août 1840.)

(*) Voir, dans l'*Appendice*, la *Lettre à M. Élie de Beaumont.*

57. Sur un cas particulier de la surface dont l'aire est un minimum. (Mai 1841.)
58. Sur certaines séries numériques. (Novembre 1841.)
59. De la surface réglée, dont l'aire est un minimum. (Juin 1842.)
60. Quelques propriétés de l'héliçoïde à plan directeur. (Novembre 1843.)
61. Théorèmes sur les fractions continues périodiques simples. (Novembre 1844.)
62. Sur la théorie des solutions singulières. (Février 1846.)
63. Théorème sur les surfaces gauches. (Février 1847.)
64. Théorèmes sur les surfaces gauches. (Novembre 1848.)
65. Nouvelle formule de quadratures. (Mars 1851.)
66. Sur le dernier Cahier du *Journal de l'École polytechnique.* (Avril 1854.)
67. Propositions sur la théorie des séries. (Mars 1858.)
68. Théorème sur les cycloïdes accourcies. (Mai 1858.)
69. Sur des suites récurrentes. (Avril 1861).
70. Sur l'article 757 du Code civil. (Mars 1862).
71. Sur les normales à certaines surfaces. (Février 1863.)

Nouvelles Annales de Mathématiques (1re série).

72. Lettre sur la parabole. (T. I.)
73. Note sur le rapport de la circonférence au diamètre. (*Ibid.*)
74. Sur les fractions décimales périodiques. (*Ibid.*)
75. Analyse indéterminée, du premier degré. (T. III.)
76. Note sur la toroïde. (*Ibid.*)
77. Rectification d'un article sur les séries trigonométriques. (*Ibid.*)
78. Fractions continues périodiques. (T. IV.)
79. Remarques sur un problème du Concours d'Agrégation. (*Ibid.*)
80. Problème de Malfatti. (T. V.)
81. Sur les sphères tangentes à quatre plans donnés. (T. VI.)
82. Sur un théorème de M. Serret. (*Ibid.*)
83. Théorème sur les pyramides. (*Ibid.*)
84. Sur les foyers des courbes d'intersection de deux surfaces du second degré. (*Ibid.*)
85. Addition à un théorème de M. Paul Serret. (*Ibid.*)
86. Conditions d'équilibre de quatre forces non appliquées en un même point. (T. VII.)
87. Sur la fonction LX + MY + NZ. (*Ibid.*)
88. Sur les normales aux coniques. (*Ibid.*)
89. Lettre sur un *postulatum.* (*Ibid.*)
90. Théorie des fractions continues. (T. VIII.)
91. Sur le problème de la sphère tangente à quatre plans donnés. (T. IX.)
92. Sur l'enveloppe d'une tangente à deux cercles variables. (T. X.)
93. Sur la formule de Simpson. (*Ibid.*)
94. Théorèmes sur les hexagones inscrits ou circonscrits à une conique. (T. XI.)
95. Trigonométrie sphérique. — Théorème de Legendre. (*Ibid.*)
96. Note sur la théorie des roulettes. (T. XV.)

97. Sur les sommes des puissances semblables des nombres naturels. (*Ibid.*)
98. Sur la sommation de certaines séries. (*Ibid.*)
99. Remarques sur une Note de M. *Allégret.* (T. XVI.)
100. Théorèmes sur les aires paraboliques. (*Ibid.*)
101. Sur des formules de *Wronski.* (*Ibid.*)
102. Extraction, abrégée, de la racine carrée. (T. XVII.)
103. Théorème sur la série harmonique. (*Ibid.*)
104. Note sur les séries divergentes. (T. XVIII.)
105. Sur les coefficients binômiaux. (T. XIX.)
106. Sur la sommation de certains coefficients binômiaux. (*Ibid.*)
107. Note sur la solution d'un problème. (*Ibid.*)
108. Une rectification. (*Ibid.*)

Nouvelles Annales (*2e série*).

109. Sur un problème d'Algèbre légale, et sur une transformation de série. (T. II.)
110. Théorème sur les équations dont toutes les racines sont réelles. (*Ibid.*)
111. Sur l'équation du quatrième degré. (*Ibid.*)
112. Lettre sur le problème des *huit dames*. (T. III.)
113. Autres lettres. (*Ibid.*)
114. Sur un problème d'Analyse indéterminée. (T. VI.)
115. Lettre sur un théorème de M. Lemoine, et sur une Note de M. Vallès. (T. IX.)
116. Sur quelques développements en séries. (*Ibid.*)
117. Sur une lettre de M. Le Besgue. (*Ibid.*)
118. Lettre à M. Abel Transon. (T. XII.)
119. Sur l'intégration des différentielles rationnelles. (*Ibid.*)
120. Une démonstration de la formule du binôme. (T. XIII.)
121. Propositions relatives à la théorie des nombres. (*Ibid.*)
122. Lettre sur une Note de M. *Bourguet.* (T. XIV.)
123. Sur une question proposée par M. *Bourguet.* (T. XIV.)
124. Sur deux Notes de M. le capitaine *Moreau.* (T. XVII.)
125. Sur un théorème de *Miquel.* (*Ibid.*)
126. Lettre sur la *conique des neuf points,* et sur le nombre 10. (*Ibid.*)
127. Note sur les aires des courbes paraboliques. (T. XX.)

Nouvelles Annales (*3e série*).

128. Notes diverses. (T. I.)
129. Sur la circonférence des neuf points. (T. II.)
130. Sur quelques développements de sin x et de cos x.
131. Remarques sur une Note de M. *Ibach.* (T. III.)
132. Démonstrations de deux théorèmes d'Arithmétique. (*Ibid.*)
133. Note sur le théorème de Lambert. (*Ibid.*)
134. Démonstration d'un théorème d'Arithmétique. (T. IV.)
135. Savin Realis. (T. V.)

Journal de l'École polytechnique.

136. Mémoire sur les surfaces gauches, à plan directeur. (29e Cahier.)
137. Note sur la théorie des solutions singulières. (31e Cahier)
138. Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires. (37e Cahier.)
139. Mémoire sur la théorie des polyèdres. (41e Cahier.)

Nouvelle Correspondance mathématique.

140. Remarques sur l'intégrale $\int_0^{\pi} l^2(1 - 2a\cos x + a^2)dx$. (T. I.)
141. Bacchus et Silène. (*Ibid.*)
142. Sur le Programme de l'École vétérinaire de Cureghem. (*Ibid.*)
143. Sur un lieu géométrique. (*Ibid.*)
144. Sur la formule du binôme. (*Ibid.*)
145. Décompositions en carrés. (*Ibid.*)
146. Sur les asymptotes des courbes algébriques. (*Ibid.*)
147. Sur un Mémoire de Libri. (T. II.)
148. Sur un théorème d'Arithmétique. (*Ibid.*)
149. Remarques sur un Mémoire de M. *Édouard Lucas.* (*Ibid.*)
150. Sur un produit de sinus. (*Ibid.*)
151. Remarques sur une Note de M. *Laisant.* (*Ibid.*)
152. Sur la transformation des équations. (*Ibid.*)
153. Note sur un lieu géométrique. (*Ibid.*)
154. Solution d'uu problème proposé par M. *Brocard.* (*Ibid.*)
155. Quelques théorèmes sur la courbure des lignes. (*Ibid.*)
156. Sur l'intégration de $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$. (*Ibid.*)
157. Solutions de trois questions proposées. (T. III.)
158. Sur le développement de $1 \pm \sin(2p+1)x$.
159. Centre de gravité d'un arc de cercle. (*Ibid.*)
160. Solution d'un problème proposé pour l'admission à l'École polytechnique. (*Ibid.*)
161. Démonstration d'un théorème relatif à la parabole. (*Ibid.*)
162. Sur la représentation géométrique des intégrales elliptiques. (*Ibid.*)
163. Intégration de $(3 - x)y'' - (9 - 4x)y' + (6 - 3x)y = 0$. (*Ibid.*)
164. Remarques sur divers articles de M. *Mansion.* (*Ibid.*)
165. Sur deux théorèmes de Sturm. (*Ibid.*)
166. Formule combinatoire. (*Ibid.*)
167. Sur des séries analogues à la série de Lambert. (*Ibid.*)
168. L'enseignement des Mathématiques, en Belgique. (*Ibid.*)
169. Quelques questions d'examens. (*Ibid.*)
170. Sur le théorème de Fermat. (T. IV.)
171. Théorème de MM. Smith et Mansion. (*Ibid.*)

172. Une question anglaise. (*Ibid.*)
173. Sur un théorème de M Postula. (*Ibid.*)
174. Démonstration des formules de M. Tchébychef. (*Ibid.*)
175. Décomposition d'un cube en quatre cubes. (*Ibid.*)
176. Sur la méthode des isopérimètres. (*Ibid*)
177. Démonstration d'un théorème sur l'ellipse. (*Ibid.*)
178. Sur les Nombres de Bernoulli (*Ibid.*)
179. Remarques sur une Note de M. *Latars.* (*Ibid.*)
180. Sur le problème des partis. (*Ibid.*)
181. Quelques quadratures. (*Ibid*)
182. Sur certaines locutions incorrectes. (*Ibid.*)
183. Sur les Nombres de Bernoulli. (*Ibid.*)
184. Quelques identités. (T. V.)
185. Sur une suite de nombres impairs (*Ibid.*)
186. Sur la série de Lamé. (*Ibid.*)
187. Solutions de quatorze questions proposées. (*Ibid.*)
188. Une propriété du nombre 365. (*Ibid.*)
189. Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes. (*Ibid.*)
190. Sur la Géométrie de la sphère. (*Ibid.*)
191. Remarque sur une Note de M. *Haerens.* (*Ibid.*)
192. Sur une épure de Géométrie descriptive. (*Ibid.*)
193. Sur les triangles homologiques. (*Ibid.*)
194. Remarques sur une Note de M. *Mansion.* (*Ibid.*)
195. La Loterie de l'Exposition. (*Ibid.*)
196 Sur la notation des Nombres de Bernoulli. (*Ibid.*)
197. Démonstration d'un théorème de M. Hermite. (T. VI.)
198. Lettre à M. Laisant. (*Ibid.*)
199. Un nouveau théorème empirique. (*Ibid.*)
200. Sur un système d'équations linéaires. (*Ibid.*)
201. Sur quelques développements de cos mx et de sin mx. (*Ibid.*)
202. Solutions de sept questions proposées. (*Ibid.*)
203. Lettre à M. J. *Neuberg.* (*Ibid.*)
204. Sur les coniques satisfaisant à quatre conditions. (*Ibid*)
205. Sur une propriété des surfaces du second degré. (*Ibid.*)
206. Sur la cyclide. (*Ibid.*)
207. Sur l'intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$. (*Ibid.*)
208. Remarques sur une série. (*Ibid.*)
209. Sur deux Notes de MM. Radicke et Leinekugel. (*Ibid.*)
210. Sur la série harmonique. (*Ibid.*)
211. Sur une équation d'Abel. (*Ibid.*)
212. Sur la quadrature des courbes paraboliques. (*Ibid.*)
213. L'enseignement des Mathématiques élémentaires, en Belgique. (*Ibid.*)
214. Une nouvelle théorie des tangentes. (*Ibid.*)
215. Lettre à M. Hermite. (*Ibid.*)
216. Lettre à M. Laisant. (*Ibid.*)

Académie de Belgique.

Mémoires.

217. Mémoire sur la transformation des variables, dans les intégrales multiples. 1849. Mémoire couronné. (*Mém. des sav. étr.*, in-4°, t. XIV.)
218. Recherche des lignes de courbure d'une surface. (*Ibid.*, t. XXXII).
219. Sur la transformation des séries, et sur quelques intégrales définies. 1865. (*Ibid.*, t. XXXIII.)
220. Sur les Nombres de Bernouilli et d'Euler. 1867. (*Mém. des memb.*, t XXXVII.)
221. Mémoire sur une transformation géométrique, et sur la surface des ondes. 1868. (*Mém. des memb.*, t. XXXVIII.)
222. Recherches sur quelques produits indéfinis. 1872. (*Ibid* , t. XL.)
223. Notes d'Algèbre et d'Analyse. 1877. (*Ibid.*, t. XLII.)
224. Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes. 1877. (*Ibid*.)
225. Remarques sur la théorie des moindres carrés. 1878. (*Ibid.*, t. XLIII, 1re partie.)
226. Note sur la quadrature des courbes paraboliques. 1880. (*Ibid.*, t. XLIII, 2de partie)
227. Note sur les fonctions X_n, de Legendre. 1880. (*Ibid.*)
228. Mémoire sur une suite de polynômes entiers, et sur quelques intégrales définies. 1880. (*Ibid.*)
229. Sur les fonctions X_n, de Legendre (2e Mém.). 1881. (*Ibid.*, t. XLIV.)
230. Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. 1882. (*Ibid.*, t. XLV.)
231. Notes sur la théorie des fractions continues, et sur certaines séries. 1883. (*Ibid.*, t. XLV.)
232. Quelques théorèmes d'Arithmétique. 1884. (*Mém. des memb.*, t XLVI.)
233. Problèmes et théorèmes de Probabilités. 1884. (*Ibid* , t. XLVI.)
234. Sur un développement de l'intégrale elliptique... (*Ibid.*, t. XLVI.)
235. Sur les fonctions X_n (troisième Mémoire). 1885. (*Ibid.*)
236. Sur quelques intégrales définies. (*Ibid.*)
237. Recherches sur les surfaces gauches. 1866. (*Mém.* in-8°, t. XVIII.)
238. Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. 1874. (*Ibid* , t. XXIV.)
239. Mémoire sur les fonctions X_n, de Legendre. 1879. (*Ibid.*, t. XXXI.)
240. Sur les fonctions X_n (seconde Note). (*Mém.* in-4°.)
241. Sur un tableau numérique, et sur son application à certaines transcendantes. (T. XLVII.)
242. Remarques sur certaines intégrales définies. (*Ibid.*)
243. Propriétés nouvelles des fonctions X_n. (*Ibid.*)
244. Propriétés nouvelles des fonctions X_n (supplément). (*Ibid.*)

Bulletins. (*2e série.*)

245. Recherches sur les déterminants. (T. XIII.)
246. Note sur l'intégration d'un système d'équations homogènes. (T. XXI.)

247. Application d'un problème de Géométrie à une question d'Analyse indéterminée. (T. XXII.)
248. De l'intégrale définie qui représente la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(\alpha+\beta)^m$. (T. XXIII.)
249. Note sur les surfaces orthogonales. (T. XXVI.)
250. Sur les roulettes et les podaires. (XXVII.)
251. Sur l'addition des fonctions elliptiques, de première espèce. (*Ibid.*)
252. Rapport sur la quatrième période du Concours quinquennal (1864-1868, t. XXVIII.)
253. Remarques sur l'équation $x^m - 1 = 0$. (T. XXIX.)
254. Sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde. (T. XXX.)
255. Note sur l'équation de Riccati. (T. XXXI.)
256. Théorème de Géométrie. (T. XXXII.)
257. Note sur une formule de M. Botesu. (T. XXXIII.)
258. Rapport sur un Mémoire de M. Gilbert. (*Ibid.*)
259. Rapport sur un Mémoire de M. Gilbert. (T. XXXVI.)
260. Rapport sur un Mémoire de concours. (T. XXXVIII.)
261. Rapport sur une Note de M. Mansion. (*Ibid.*)
262. Note sur le problème de Malfatti. (*Ibid.*)
263. Rapport sur une Note de M. Reinemund. (T. XXXIX.)
264. Rapport sur deux Mémoires de M. Saltel (*Ibid.*)
265. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (T. XXXIX.)
266. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (T. XL.)
267. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (*Ibid.*)
268. Rapport sur une Note de M. Havrez. (*Ibid.*)
269. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (T XLI.)
270. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (*Ibid.*)
271. Rapport sur les tables de Logarithmes de MM. Namur et Mansion. (*Ibid.*)
272. Note sur les Nombres de Bernoulli. (T. XLII.)
273. Rapport sur plusieurs Notes de M. Saltel. (*Ibid.*)
274. Rapport sur un Mémoire de concours. (*Ibid.*)
275. Rapport sur une Note de M. Ghysens. (T. XLIII.)
276. Rapport sur une Note de M. Reinemund. (*Ibid.*)
277. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (*Ibid.*)
278. Rapport sur une Note de M. Boset. (*Ibid.*)
279. Rapport sur une Note de M. Mansion. (T. XLIII.)
280. Remarques sur un Rapport de M. Folie. (T. XLIV.)
281. Rapport sur un Mémoire de M. Lagrange. (*Ibid.*)
282. Rapport sur une Note de M. Mansion. (*Ibid.*)
283. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (*Ibid.*)
284. Rapport sur une Note de M. Ghyseus. (*Ibid.*)
285. Théorème d'Algèbre. (*Ibid.*)
286. Nouveau principe de Probabilités. (*Ibid.*)
287. Rapport sur deux Notes de M. Mansion. (T. XLV.)
288. Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon. (*Ibid.*)

289. Rapports sur deux Notes de M. Mansion. (T. XLVI.)
290. Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon (*Ibid.*)
291. Rapports sur deux Notes de M. Mansion (T. XLVIII.)
292. Rapport sur un Mémoire de M. Souillart. (*Ibid.*)
293. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (T. XLIX.)
294. Rapport sur une Note de M. Saltel. (*Ibid.*)
295. Rapport sur un Mémoire de concours. (T. L.)

(*3e série*).

296. Carré magique de la *Villa Albani*. (T. II.)
297. Rapports sur des Notes de MM. Folie, Le Paige, Texeira, Mansion. (T. III.)
298. Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (T. IV.)
299. Rapport sur une Note de M. Boblin. (*Ibid.*)
300. Sommaire d'un Mémoire sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries. (T. V.)
301. Rapport sur un Mémoire de M. Mansion. (*Ibid.*)
302. Note sur une série double. (T. VI.)
303. Rapport sur une Note de M. Sautreaux. (*Ibid.*)
304. Rapport sur deux Mémoires de concours. (*Ibid.*)
305. Quelques théorèmes d'Arithmétique. (T. VII.)
306. Rapport sur un Mémoire de M. Neuberg. (*Ibid.*)
307. Application d'un nouveau Principe de Probabilités. (T. VIII.)
308. Rapport sur un Mémoire de concours. (T. VIII.)
309. Note sur un travail de M. Boncompagni. (*Ibid.*)
310. Rapport sur un travail de M. Deruyts. (T. IX.)
311. Question d'Analyse indéterminée. (T. IX.)
312. Une récréation arithmétique. (*Ibid.*)
313. Rapport sur un Mémoire de M. Ernest Cesàro. (T. XI.)
314. Rapport sur un Mémoire de M. Mansion. (*Ibid.*)
315. Sur une classe d'équation différentielles. (T. XII.)
316. Sur le dernier théorème de Fermat. (*Ibid.*)
317. Rapport sur un Mémoire de M. Ch. Lagrange. (*Ibid.*)
318. Lettre à M. De Tilly. (T. XIII.)
319. Remarques sur une équation trinôme. (*Ibid.*)
320. Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. (*Ibid.*)
321. Rapport sur un Mémoire de M. Beaupain. (T. XV.)

Mémoires de la Société des sciences de Liège.

322. Mélanges mathématiques. (T. II.)
323. Théorie analytique des lignes à double courbure. (T. VI.)
324. Théorèmes d'Arithmétique. (*Ibid.*)
325. Problèmes et théorèmes d'Arithmétique. (T. X.)
326. Mélanges mathématiques. (T. I, 1885; t. II, 1887; t. III, 1888.)

Annali di matematica, pura ed applicata.

327. Sur les différences successives de 1^q, et sur les Nombres de Bernoulli. (T. II.)
328. Sur les équations simultanées homogènes. (T. VII.)

Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei.

329. Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. (T. XX, 1867.)
330. Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques (2e Note.) (1873.)
331. Sur quelques sommations et transformations de séries. (T. XXIII.)
332. Extraits de trois lettres adressées au prince Boncompagni. (1881.)
333. Sur quelques décompositions en carrés. (1882.)
334. Mémoire sur certaines décompositions en carrés. (1883.)

Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg.

335. Recherches sur la constante G, et sur les intégrales eulériennes. (1883.)

Association française pour l'Avancement des Sciences.

336. 1872. **Bordeaux.** — Nouvelle formule d'intérêt composé.
337. — — Théorie des polyèdres semi-réguliers.
338. 1874. **Lille.** — Sur les surfaces orthogonales. — Sur la méthode des moindres carrés. — Lieu géométrique. — De l'hélice tracée sur un cylindre dont la base est une chaînette.
339. 1876. **Clermont-Ferrand.** — Sur les fonctions X_n, de Legendre.
340. 1877. **Le Havre.** — Sur la somme des diviseurs d'un nombre n. — Évaluation des nombres premiers compris entre des limites données. — Sur quelques développements de l'intégrale elliptique, de première espèce.
341. 1878. **Paris.** — Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.
342. 1880. **Rheims.** — Sur une décomposition en facteurs.
343. 1883. **Rouen.** — Notes d'Algèbre et d'Arithmétique.

Bullettino du prince Boncompagni.

344. Sur un article du *Journal des savants*. (T. IV, 1871.)
345. Lettre relative à la tombe de Van Cölen (contenant l'extrait d'une lettre de Lakanal) (T. VII, 1874.)
346. Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli. (T. XVIII, 1885.)

Société mathématique de France.

347. Communication sur divers sujets. (T. XVI.)

Mathesis.

348. Carré magique de la *Villa Albani*. (T. I.)

349. Maximum et minimum d'une fraction. (T. II.)
350. Sur la méthode des isopérimètres. (*Ibid.*)
351. Sur un article des *Nouvelles Annales.* (*Ibid.*)
352. Une démonstration du théorème de Pythagore. (*Ibid.*)
353. Sur un théorème de M. *Cambier.* (*Ibid.*)
354. Sur le principe de l'homogénéité. (T. III.)
355. Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (*Ibid.*)
356. Sur un théorème de M. Rocquigny (*Ibid.*)
357. Un curieux théorème. (*Ibid.*)
358. Généralisation de trois propriétés de la cycloïde. (*Ibid.*)
359. Sur un théorème d'Abel. (T. IV.)
360. Sur les ombilics des surfaces. (T. V.)
361. Sur la courbe de Watt. (*Ibid.*)
362. Lettre à M. Mansion. (T. VI.)
363. Lettre à M. Charles Brisse. (*Ibid.*)
364. Sur la divisibilité des nombres. (T. VII.)
365. Sur les nombres parfaits. (T. VII.)

Journal de M. de Longchamps.

366. Sur une limite supérieure des racines. (1880.)
367. Sur deux problèmes d'Arithmétique. (*Ibid.*)
368. Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (1883.)
369. Remarques sur un travail de M. Calinon. (1885.)
370. Sur le pentagone d'Albert Dürer. (*Ibid.*)
371. Théorèmes sur les coniques. (*Ibid.*)
372. Lettre sur une trisectrice. (*Ibid.*)
373. Lettre sur le théorème de Fermat. (1886.)
374. Démonstration d'un théorème de M. *Delbœuf.* (1887.)
375. Extraits de plusieurs lettres. (*Ibid.*)

Bulletin des Sciences.

376. Théorème de Staudt et Clausen. (1880.)
377. Lettre au Rédacteur. (1882.)

Journal de Crelle.

378. Énoncé d'un théorème empirique. (T. XXVII.)

Revue de l'Instruction publique en Belgique.

379. Lettre au Rédacteur. (1869.)
380. Théorèmes empiriques. (1870.)
381. Analyse indéterminée, du premier degré. (1871.)

La Science, journal rédigé par Auguste Blum.

382. Arithmétique. — Théorie des Combinaisons. (Mars et avril 1855.)

L'Avenir, revue hebdomadaire (*).

383. Application de l'Algèbre... à la Théologie (**). (Mai 1855.)

Revue scientifique.

384. *Les dimensions de l'univers visible.* — Conférence donnée aux élèves des Écoles spéciales (Liège). (Juin 1882.)
385. Démonstration d'un théorème de M. *Delbœuf.* (Octobre 1886.)

OUVRAGES PARTICULIERS.

386. Éléments de Géométrie. (Paris, 1843; 2e édit.; Liège, 1865.)
387. Application de l'Algèbre à la Géométrie (Lycée Charlemagne, 1848, in-4°).
388. Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire. (Paris, 1852; Bruxelles, 1879.)
389. Manuel des candidats à l'École polytechnique. (Paris, 1857.)
390. Manuel du Baccalauréat ès-sciences. (Paris, 1852-1872)
391. Traité élémentaire de Géométrie descriptive. (Paris, 1852-1882.)
392. Traité élémentaire des séries. (Paris, 1860; in-8°.)
393. Cours d'Analyse de l'Université de Liège. (Bruxelles, 1870. 2e édition, 1879; in-8°.)
394. Application de l'Algèbre au Code civil : l'article 757. (Paris, 1862.)
395. Histoire d'un concours. Liège, 1865; br. in-8°.
396. Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre.
397. Manuel de Géométrie. (9e édition.)
398. Manuel de Trigonométrie et de Géométrie descriptive. (13e édition.)
399. Manuel de Cosmographie. (13e édition.)
400. Manuel de Mécanique. (13e édition.)
401. Réhabilitation d'un pléonasme. Bruxelles, 1876; in-8°.
402. Notions d'Astronomie. (*Bibliothèque utile.*)
403. Solutions de problèmes proposés au Baccalauréat ès-sciences (Paris, 1855.
404. Notice sur Charles Boileau (*Œuvres choisies de Charles Boileau,* 1873).
405. Labyrinthe de Crête.
406. Quelques lettres. (*Appendice* aux *Mélanges mathématiques*).

(*) Créée et *tuée* en quelques mois.
(**) Analyse d'un ouvrage de l'abbé *Gratry*.

TABLE DES MATIÈRES.

18

MATÉRIAUX

POUR LA

FAUNE ENTOMOLOGIQUE DE LA PROVINCE DE LIÈGE.

COLÉOPTÈRES

QUATRIÈME CENTURIE

PAR

ALFRED PREUDHOMME DE BORRE,

Membre des Sociétés entomologiques de Belgique, Néerlande, Londres, France, Munich, Stettin, St-Pétersbourg, de la Société royale des sciences de Liège, etc.

COLÉOPTÈRES DE LA PROVINCE DE LIÈGE.

CENTURIE IV [1].

FAMILLE DES DYTISCIDES (*suite*).

1. *Colymbetes fuscus,* L. (*striatus,* Aubé). — Taille d'environ 18 millimètres. Ovale allongé, quelque peu rétréci en arrière. Tête noirâtre, avec le labre, l'épistome et deux petites taches vagues au devant du vertex, rougeâtres. Corselet brun, avec les bords latéraux largement testacés, couvert de très petites strioles irrégulières. Élytres à fond testacé disparaissant, sauf sur les bords latéraux et dans le fond des stries, sous une couche de couleur brun-olivâtre; elles sont aussi complètement couvertes de petites stries transversales très rapprochées et anastomosées; sur chaque élytre, trois séries longitudinales de points enfoncés; épipleures testacées. Dessous noir, avec le bord des segments abdominaux brun-rougeâtre, ainsi que les hanches postérieures et toutes les pattes. Antennes et palpes testacés. — RD : Angleur, Fetinne, Cheratte. RG : Liège, Herstal, Saint-Nicolas, Jemeppe, Statte.

2. *Dytiscus punctulatus,* Fabr. — Taille d'environ 30 millimètres. Noir brillant en dessus et en dessous, avec le labre, l'épistome, une bordure latérale au corselet et une autre aux élytres, d'un testacé rougeâtre. Saillies coxales du métasternum arrondies au bout. Élytres du mâle ayant chacune trois lignes

[1] Présenté dans la séance du 22 novembre 1887.

de points ; celles de la femelle profondément creusées de dix sillons dépassant le milieu de chaque élytre. Pattes noirâtres plus ou moins tachées de brun-rougeâtre. — RD : Tilff, Beaufays, Verviers. RG : Liège, Loën.

3. *D. marginalis,* L. — Taille variant entre 30 et 35 millimètres. Ovale un peu élargi en arrière, un peu busqué en avant. Noir-verdâtre ou noir-brunâtre, avec le labre, l'épistome, une tache en V sur le front, les antennes et palpes, tout le pourtour du corselet, une bordure latérale aux élytres, avec une petite ligne oblique avant le sommet, testacé-clair, de même que le dessous du corps et les pattes. Saillies coxales du métasternum en lancettes un peu courtes, mais pointues. Élytres du mâle avec trois lignes de points ; celles de la femelle avec dix forts sillons, dépassant un peu le milieu de chaque élytre. Une forme aberrante de femelles (*conformis,* Kunze) n'a pas ces sillons et ne se distingue des mâles que par l'absence de la dilatation des trois premiers articles des tarses antérieurs. — Commun. RD : Angleur, Colonster, Gomzé. RG : Herstal, Rocour, Waremme.

4. *D. circumcinctus,* Ahrens. — Même taille, même forme. Dessus du corps brun-chocolat, avec les mêmes bordures testacé-rougeâtre au corselet et aux élytres. Une bordure rougeâtre autour de l'œil. Dessous et pattes rougeâtres. Saillies coxales plus allongées et plus aiguës. Les femelles ont, comme les mâles, trois lignes de points sur chaque élytre. Une seconde forme de femelles (var. *dubius*), extrêmement rare, a les élytres sillonnées comme l'espèce précédente. — Très rare. RD : Grivegnée (M. Miedel).

5. *D. circumflexus,* Fabr. — Taille dépassant peu 30 millimètres. Noir-verdâtre ou olivâtre assez brillant en dessus, avec le labre, l'épistome, une tache frontale en V, tout le pourtour du corselet, une bordure latérale et une bande oblique vers le sommet de l'élytre, testacés. Pattes et dessous

du corps également testacés, avec la base des segments abdominaux brun-foncé. Saillies coxales très acuminées. Les deux sexes ont les élytres lisses, avec trois séries de points; mais il existe une variété femelle (*perplexus*), ayant les élytres sillonnées, comme les femelles normales du *marginalis*. — Rare. RD : Liège, Les Aguesses (M. Miedel).

6. *Hydaticus transversalis*, Pontoppid. — Taille de 13 millimètres. Ovale assez régulier. Noir en dessus et en dessous, avec l'abdomen un peu brunâtre. Devant de la tête, centre du front et deux taches sur le vertex, testacés. Corselet avec les bords latéraux testacés, reliés par une bande transversale antérieure. Élytres ayant à la base une fascie transversale ferrugineuse et, sur le côté, une bande de même couleur, s'élargissant et se décomposant en lanières en arrière; trois lignes de petits points sur chaque élytre. Pattes antérieures et intermédiaires testacées, les postérieures rembrunies. — RD : Les Aguesses, Chaudfontaine.

7. *H. grammicus*, Germar. — Taille d'environ 10 millimètres. En ovale régulier. Tête testacée, avec un bord postérieur noirâtre. Corselet testacé, ainsi que tout le dessous et les pattes. Élytres noirâtres, tachetées de testacé vers la base et ayant de plus chacune deux lignes discoïdales testacées, ainsi qu'une bande latérale s'élargissant et se décomposant en lanières vers le sommet. — Très rare. RD : Angleur (coll. Chapuis).

8. *Acilius sulcatus*, L. — Taille d'environ 18 millimètres. Déprimé; ovale, avec la plus grande largeur un peu au delà du milieu des élytres. Tête noire, avec le labre, l'épistome, deux taches juxta-oculaires, une tache frontale en V et deux taches sur le vertex, parfois réunies, jaunâtres. Corselet ponctué, noir, avec le pourtour jaune et une fascie transverse discoïdale de la même couleur, ayant un prolongement en arrière de chaque côté, prolongement qui, chez les femelles, se change en une dépression pleine de poils ferrugineux. Élytres du mâle

jaunâtres, très ponctuées, parsemées d'une multitude de très petits points noirs, se condensant souvent aux trois quarts postérieurs en une sorte de fascie transverse ondulée. Élytres de la femelle ayant chacune cinq côtes longitudinales bien marquées, dont les intervalles sont remplis de longs poils rougeâtres. Dessous du corps noir, à l'exception du prosternum qui est jaune, ainsi que des taches latérales à chaque segment de l'abdomen. Pattes testacées; une tache noire à la base des cuisses postérieures. — Commun. RD : Angleur, Sartilman, Beaufays, Poulseur, Jupille, Visé. RG : Herstal, Rocour, Jemeppe.

9. *Graphoderes cinereus,* L. — Taille de 15 millimètres environ. Ovale un peu bombé. Tête jaunâtre, avec la partie postérieure noire, ainsi que le bord des yeux et deux taches frontales en chevrons, parallèles l'une à l'autre. Corselet testacé, avec la base assez largement noire, sauf près des angles et une assez large tache en trapèze au milieu du bord antérieur; angles postérieurs droits. Élytres brun-olivâtre, couvertes de très petites taches rondes testacées; une ligne suturale et le bord externe de la même couleur. Dessous et pattes d'un testacé rougeâtre. — RD : Les Aguesses (M. Miedel).

10. *Gr. zonatus,* Hoppe. — Taille de 15 millimètres au plus. Même forme, mais moins convexe. Même coloration. Au corselet, les bandes noires transverses sont séparées du bord par un filet de la couleur foncière testacée, et les angles postérieurs sont aigus et dirigés en arrière. Segments abdominaux tachés de brunâtre sur les côtés. — Rare. RD : Les Aguesses (M. Miedel).

11. *Gr. bilineatus,* de Geer. — Taille d'environ 15 millimètres. Ovale un peu déprimé et un peu élargi en arrière. Même coloration que le *Gr. cinereus.* Au front, une ou deux taches noires en chevrons. Au corselet, les bandes noires sont plus étendues, surtout l'antérieure. — RG : Ile Monsin, à Herstal (M. Miedel).

12. *Cybister Roeseli*, Fabr. — Taille de 30 à 35 millimètres. Déprimé, en ovale un peu rétréci sur les deux bouts et notablement dilaté en arrière du milieu. Couleur vert-olivâtre ou brun-chocolat luisant en dessus, testacé brillant en dessous; labre, épistome, bordure latérale du corselet et des élytres, testacés. Pattes testacées, avec les tarses rembrunis. Saillies coxales du métasternum très courtes et fortement arrondies. Élytres du mâle lisses, avec trois lignes de petits points sur chacune; celles de la femelle couvertes de petites strioles anastomosées. — Rare. RD : Prés Saint-Denis (M. Miedel), Les Aguesses (*id.*).

FAMILLE DES CARABIQUES (*addition*).

13. (Après *C. catenulatus*, Centurie I, n° 26.) — *Carabus catenatus*, Panzer. — Taille de 28 à 30 millimètres. Assez large. D'un noir bleuâtre violacé (parfois virant au bronzé verdâtre). Corselet subquadrangulaire, un peu rétréci en arrière, sans être subcordiforme comme chez le *C. catenulatus*. Côtés bien arrondis en avant, les angles antérieurs et postérieurs également; ces derniers formant de courts lobes saillants, dont la rentrée sur la base se fait à angle obtus. Élytres assez convexes, nullement échancrées en arrière; stries ponctuées; interstries un peu relevés et légèrement crénelés en arrière; trois séries de caténations sur chaque élytre. — Cette espèce a pour patrie les parties méridionales de l'empire d'Autriche. Cependant il y en a eu une capture en Belgique. La collection de feu Chapuis renferme un exemplaire qui, au témoignage formel de M. le Dr Candèze, a été pris vivant à Jonckeu, près Verviers. C'est assurément une capture tout accidentelle et que l'on peut conjecturer être le résultat d'une introduction à l'état d'œuf, larve ou nymphe.

FAMILLE DES HALIPLIDES (*addition*).

14. (Après *Haliplus lineatocollis,* Centurie III, n° 57.) — *Cnemidotus cœsus,* Duftschm. — Taille de 4 millimètres environ. Testacé, avec la tête et le corselet plus jaunâtres et une tache brune suturale au milieu des élytres. Corselet présentant en avant une ligne de points médiocres et, en arrière, une dépression transversale, où s'étend une série de très gros points à fond rembruni; de chaque côté, trois de ces gros points sont disposés en triangle. Stries des élytres très fortement ponctuées; leurs points antérieurs très gros et placés dans une sorte de sillon transversal; tous ces points plus foncés que le fond de l'élytre; entre la 2e et la 3e strie, une strie rudimentaire ne dépassant pas le quart de l'élytre. — RD : Jupille (M. Séverin).

FAMILLE DES DYTISCIDES (*addition*).

15. (Après *C. versicolor,* Centurie III, n° 65.) — *Cœlambus impressopunctatus,* Schaller (*picipes,* Sturm, Aubé, Kiesenw.). — Taille de 5 millimètres. Oblong, assez convexe. Brun-noisette clair et luisant, rembruni en dessous, sur le vertex, à la base du corselet et en lignes longitudinales sur les élytres. Base du corselet à ponctuation aciculée, assez dense, surtout au milieu. Élytres grossièrement et densément ponctuées sur le disque, ayant chacune une strie suturale et deux stries centrales assez marquées et fortement ponctuées. Une variété femelle (*lineellus*) a ces stries presque effacées, la ponctuation plus fine et la teinte générale plus mate. — RD : Angleur (M. Miedel).

16. (Après *D. latus,* Centurie III, n° 66.) — *Deronectes duodecimpustulatus,* Fabr. — Taille dépassant 5 millimètres; plus allongé, avec les bords latéraux du corselet et des élytres séparément arrondis et séparés par un angle curviligne ren-

trant. Brun de poix assez foncé, avec les pattes et les antennes rougeâtres, ainsi que la tête, le corselet (sauf une bande antérieure et une macule basilaire bilobée), et douze taches élytrales sur quatre rangées, deux discoïdales et deux contiguës aux bords extérieurs. — RG : Herstal (M. Miedel).

17. (Après le précédent.) — *D. depressus* Fabr. — Taille d'environ 4 $^1/_2$ millimètres. Forme absolument semblable. D'un testacé jaunâtre, avec le corselet bordé de noir en avant et présentant sur la base une grande tache noire bilobée. Suture des élytres noire. Sur chaque élytre, une grande tache noire discoïdale, rattachée à l'angle sutural de la base par un arc noir et envoyant vers la suture deux prolongements et trois autres jusqu'auprès du bord externe, sans le toucher. Ces taches sont parsemées de quelques linéoles testacées et, chez une variété (*elegans*, Panzer), se résolvent en un système de raies noires longitudinales. — RG : Herstal (M. Miedel).

18. (Après *H. halensis*, Centurie III, n° 67.) — *Hydroporus lepidus*, Olivier. — Taille d'environ 5 millimètres. Ovale tant soit peu large, notablement convexe. Noir, avec le bord du corselet testacé, ainsi que le fond des élytres, d'ailleurs largement maculées de noir comme suit : une tache anguleuse vers l'épaule, touchant parfois la base; au milieu de celle-ci une petite bande médiane, la suture tout entière, une vaste tache discoïdale commune, trilobée en avant sur chaque élytre et se réunissant plus ou moins en arrière, par l'élargissement de la bande suturale, à une autre tache transversale, terminée en losange, sur chaque élytre; après cette tache, la bande suturale forme une sorte de trèfle sur le bout de l'élytre; cette maculature varie en étendue et en intensité. Corselet et élytres couverts d'une pubescence assez dense et très courte, d'un flave doré. Épipleure testacée, ainsi que les pattes, sauf les tibias postérieurs et les six tarses, qui sont rembrunis. — Rare. RG : Herstal (M. Miedel).

19. (Après *H. planus*, Centurie III, n° 73.) — *H. Gyllenhalli*, Schiödte (*piceus*, Aubé, Kiesenw.). — Taille de 3 ¹/₂ millimètres. Ovale un peu allongé, un peu acuminé en arrière. Ponctuation forte sur les élytres, ainsi que sur la base et le devant du corselet, affaiblie sur le disque de celui-ci. Brun-marron, avec tout le devant de la tête, les côtés du corselet et le bord externe des élytres, rougeâtres, ainsi que les pattes, les antennes et les palpes. Dessous du corps noir, fortement ponctué sur la poitrine, les hanches et le premier segment abdominal, faiblement sur le reste de l'abdomen. — RD : Beaufays (M. Miedel), Hockay (*id.*), Baraque-Michel (*id.*).

FAMILLE DES GYRINIDES.

20. *Gyrinus minutus*, Fabr. — Taille d'environ 4 millimètres; la plus petite de nos espèces indigènes du genre. En dessus d'un noir bleuâtre brillant, avec le bord externe des élytres et du corselet métallique. Pattes, dessous du corps en entier et épipleures d'un testacé clair. Élytres assez fortement striées-ponctuées ; les stries finissant un peu avant le sommet, qui présente une ellipse irrégulière de points et est tronqué un peu obliquement. Écusson se relevant au centre en une petite carène longitudinale. — Rare. RG : Corphalie (M. Pfaff).

21. *G. natator*, L. — Taille assez variable, de 4 ¹/₂ à 7 millimètres. Noir, en général assez brillant et virant au bronzé vers les bords des élytres. Dessous également noir, avec les pattes, les épipleures, le segment anal et la poitrine, en tout ou en partie, d'un testacé qui va du roux clair au brun rougeâtre très foncé. Élytres à troncature arrondie, striées de séries de points généralement assez petits et assez espacés, surtout sur le disque. Le sommet de l'élytre, qui est plus ou moins retroussé, porte une ellipse irrégulière de points, parfois très forts, parfois très effacés chez les petits exemplaires (var. *Suffriani*). Chez les plus grands exemplaires (var. *colymbus*),

les interstries, sous un très fort grossissement, laissent faiblement percevoir un pointillé. — Très commun et très abondant. RD : Kincampoix, Visé, Herve, Theux, Grandry, Stembert, Baraque-Michel. RG : Loën, Jemeppe, Statte.

22. *G. marinus*, Gyll. — Taille de 5 à 7 millimètres environ. Ovale, avec les troncatures du bout des élytres arrondies. Noir, plus ou moins bronzé, plus ou moins bleuâtre, avec le corselet, la suture et les bords extérieurs des élytres un peu métallescents. Dessous et épipleures noir-bronzé. Pattes testacées. Stries des élytres à points assez forts, assez serrés et égaux; une strie elliptique ponctuée sur le bout un peu relevé de chaque élytre. La variété *dorsalis* a les élytres d'une teinte brun-rougeâtre. On a donné le nom d'*opacus* à de petits exemplaires où les stries, surtout sur le disque, sont plus finement ponctuées. — Moins commun. RG : Loën.

23. *Orectochilus villosus*, Müller. — Taille de 5 à 6 millimètres. Allongé et notablement convexe, presque gibbeux vers la base des élytres, qui sont comprimées latéralement et terminées chacune par une troncature un peu oblique et arrondie. D'un brun assez foncé, médiocrement brillant; testacé en dessous; couvert d'une pubescence grise veloutée. Labre très proéminent. Corselet beaucoup plus large que long. Écusson assez grand. — Rare. RD : Rivière de la Berwinne (Dr Chapuis). RG : Herstal (*id.*), Statte (M. Cluysenaar).

FAMILLE DES LUCANIDES.

24. *Lucanus cervus*, L. — Le plus grand de nos coléoptères indigènes; le mâle atteint parfois une longueur de 5 $^1/_2$ centimètres sans les mandibules, et 7 $^1/_2$ en y comprenant la gigantesque fourche antérieure formée par elles chez les exemplaires bien développés; la femelle n'a généralement qu'une taille de 4 à 4 $^1/_2$ centimètres, qui est aussi celle des petits

mâles à mandibules peu développées (var. *capra*, Oliv.). Couleur noir de poix, avec les mandibules et les élytres d'un brun de poix rougeâtre assez luisant. Tête forte, transversalement quadrangulaire, plus large que le corselet chez les mâles au développement maximum, aussi large seulement dans la variété *capra*. Les crêtes saillantes qui la bordent sur les côtés et surtout aux extrémités de la base chez les grands mâles, s'effacent graduellement chez ceux dont la taille fait la transition à cette variété *capra*, où lesdites crêtes n'existent pas. En avant, les mandibules forment une énorme fourche dont les branches se courbent en s'inclinant et se terminent par une bifurcation en rapprochant leurs bouts; une forte dent, précédée et suivie de quelques denticules, se trouve aux deux tiers de chaque mandibule en dedans. Chez les exemplaires de la variété *capra*, ces organes conservent la même forme, mais sont de proportions plus réduites. La femelle a une tête plus étroite que le corselet, s'abaissant en avant et latéralement, avec des angles antérieurs arrondis et les mandibules, assez fortes d'ailleurs, sont de forme normale, courtes et dentées à leur bord interne et supérieur. Dans les deux sexes, la massue se compose de quatre feuillets. Corselet rugueux, ayant les angles postérieurs remplacés par une large troncature. Élytres beaucoup plus finement granuleuses, avec le bord postérieur un peu déprimé au bout. Pattes longues et fortes; une grande tache oblongue de poils d'un roux doré à la base des cuisses antérieures. — RD : Chênée, Ougrée, Embourg, Chèvremont, Beaufays, Tilff, Sart, Strée. RG : Liège, Bois-l'Évêque, Val-Benoit, Jemeppe.

25. *Dorcus parallelipipedus*, L. — Long d'environ 20 millimètres et large de 9 millimètres; forme assez cylindrique, un peu déprimée. Entièrement d'un noir de poix. Mandibules assez fortes chez le mâle, moins fortes chez la femelle, mais saillantes dans les deux sexes et portant, aux deux tiers de leur longueur, au côté interne, une dent un peu redressée. Corselet et élytres densément ponctués. La femelle a sur le front deux

petits tubercules. — RD : Les Vennes, Wandre. RG : Saint-Gilles, Bois-l'Évêque, Grâce-Berleur, Flémalle-Haute, Hermalle-sous-Argenteau, Glons.

26. *Platycerus caraboïdes*, L. — Taille d'environ 12 millimètres. Coloration variant du bleu au violet et au vert bronzé métallique. Antennes et pattes noires; celles-ci quelquefois rouges (var. *rufipes*, plus fréquente chez les femelles). Tête petite, un peu excavée en avant, fortement ponctuée; les mandibules un peu plus développées chez le mâle que chez la femelle. Corselet à côtés arrondis, densément, mais assez finement ponctué; le bord antérieur à peu près aussi large que la base chez le mâle, plus étroit chez la femelle ; les angles postérieurs droits et même un peu saillants, surtout chez les mâles. Élytres striées-ponctuées; interstries rugueux. — RD : Sartilman, Tilff, Chaudfontaine, Neuville-en-Condroz, Verviers, Aubel, Henri-Chapelle, Hestreux, Baraque-Michel.

27. *Sinodendron cylindricum*, L. — Taille de 12 à 15 millimètres. Noir assez brillant, avec les antennes et les tarses rougeâtres. Forme cylindrique. Tête petite et déprimée, surgissant de dessous le corselet qui, chez le mâle, est cylindrique, avec une forte troncature antérieure, dont la partie supérieure, largement échancrée, a encore au milieu de cette échancrure un second sinus, d'où sort une étroite saillie horizontale; la troncature est parsemée de gros points ombiliqués; le dessus du corselet a un disque lisse, avec un pourtour offrant une ponctuation forte, mais espacée. Chez la femelle, le corselet, très rugueux, est fortement convexe et faiblement creusé de deux fossettes en avant. Le mâle a le devant de la tête relevé en une corne assez longue ; la femelle n'a qu'un petit tubercule frontal. Élytres striées, mais les stries fort oblitérées par la rugosité générale, qui est très forte et très grossière. — RG : Chênée, Embourg, Beaufays, Dalhem, Mouland, Trooz, Theux, Goé, Baraque-Michel, forêt d'Hertogenwald. RD : Liège, Rocour, Loën.

FAMILLE DES SCARABÉIDES.

Sous-famille I : LAPAROSTICTI.

28. *Sisyphus Schäfferi,* L. — Taille de 7 à 10 millimètres. Assez globuleux, mais plus large au corselet et aux épaules qu'en arrière, où les élytres se rétrécissent visiblement. Noir assez mat. Tête granuleuse; chaperon sinué en avant. Corselet très bombé, très densément ponctué. Élytres légèrement striées-crénelées. Pattes antérieures assez courtes, à tibias portant vers l'extrémité trois fortes dents externes. Les pattes intermédiaires et postérieures, remarquablement longues et assez arquées, chez les mâles surtout, servent à ces insectes à rouler les boulettes de bouse de vache où ils renferment leurs œufs. — Très rare. RG : Engis, Loën.

29. *Caccobius Schreberi,* L. — Taille d'environ 5 millimètres. Suborbiculaire et un peu déprimé sur les élytres. D'un noir légèrement violacé, avec deux taches rougeâtres sur chaque élytre, l'une vers le milieu de la base, l'autre au sommet. Pattes rougeâtres. Chaperon retroussé et sinué en avant. Corselet bombé, ayant en avant chez le mâle quatre petites bossettes; en dessous du corselet sont creusées des fossettes recevant au repos les massues des antennes. Élytres striées-crénelées; insterstries ponctués. — Rare. RD : Visé (M. le Dr Jacobs).

30. *Copris lunaris,* L. — Taille d'environ 20 millimètres: Large et ventru. Noir brillant, avec une pubescence rousse sous la tête, sur la poitrine et un peu sur les cuisses antérieures. Tête aplatie, en demi-lune fort large, avec une échancrure en avant et des angles postérieurs pointus. Au centre se dresse, chez le mâle, une corne pointue plus ou moins longue, sur la naissance de laquelle sont deux petites dents postérieures; chez la femelle, cette corne est remplacée par une saillie

bifurquée. Chez le mâle, le corselet est rétus en avant, avec une dépression médiane verticale et, de chaque côté, une aile ou protubérance anguleuse; caractères qui disparaissent chez les mâles peu développés, à corne céphalique rudimentaire (var. *corniculatus*); chez la femelle, l'escarpement antérieur du corselet est très peu marqué et présente trois faibles dépressions. Stries des élytres fortes, mais faiblement ponctuées; interstries très convexes. Pattes fortes et courtes. — RD : Remouchamps (Dr Candèze). RG : Lixhe.

31. *Onthophagus taurus*, L. — Taille de 7 à 10 millimètres. En ovale court et très large, déprimé en dessus. Noir tant soit peu verdâtre. Dans la variété *fuscipennis*, les élytres sont brun-noirâtre. Chaperon plat, avec un bord un peu retroussé, non échancré en avant. Les mâles au maximum de développement ont en arrière du front une arête de peu de hauteur, mais des extrémités de laquelle naissent deux cornes longues, plates et fortement recourbées; on a formé diverses variétés avec les mâles, où les cornes acquièrent moins de développement, diminuent de courbure et finissent par se réduire à de toutes petites saillies (variétés *bos*, *bovillus*, *capra*, *caprellus*); enfin il est des mâles (var. *femineus*) où les derniers vestiges de ces cornes disparaissent et qu'on ne distingue des femelles que parce que celles-ci ont, outre la carène postérieure du front, une autre carène sur la suture frontale. Le corselet est fortement bombé, ayant chez les mâles une dépression antérieure et deux creux latéraux pour recevoir les cornes. Stries des élytres fines et finement ponctuées. Interstries plans, très finement pointillés. Tarses brunâtres. — RD : Huy, Ramet, Tilff. RG : Jemeppe, Flémalle-Haute, Engis.

32. *O. vacca*, L. — Taille de 7 à 12 millimètres. Largement ovalaire. D'un vert noirâtre, plus clair et métallique sur le corselet, avec les élytres testacées et semées d'une foule de taches verdâtres ou noires (var. *medius*) plus ou moins confluentes. Épipleure entièrement testacée. Chaperon ogival chez le mâle, semi-orbiculaire chez la femelle, à bord assez retroussé, sur-

tout en avant chez le mâle. Celui-ci a la suture frontale faiblement saillante, mais le vertex prolongé en une lame qui, chez les grands exemplaires, est quadrangulaire et surmontée d'une corne plate redressée; chez les petits développements, il n'y a qu'une lame plus ou moins triangulaire. La femelle a, sur la suture frontale, une forte arête transversale curviligne et, en avant du vertex, une saillie transversale dont les extrémités se redressent en pointes ou petites cornes. Corselet fort convexe, rétus en avant, avec trois enfoncements chez le mâle et seulement deux chez la femelle, où l'on observe une saillie horizontale médiane surplombant le milieu du vertex; ponctuation dense, granuleuse; angles antérieurs un peu tombants, mais sans que le bord latéral forme sinus en arrière de l'angle. Stries des élytres faibles et très indistinctement ponctuées; interstries plans, portant quelques granulations presque alignées. — RD : Ensival, RG : Grâce-Berleur, Engis, Loën, Statte.

55. *O. cœnobita*, Herbst. — Taille de 7 à 9 millimètres. Largement ovale, assez déprimé sur les élytres. Vert métallique assez brillant, avec les élytres brun-noisette, semées d'un petit nombre de petites taches brunes, non confluentes. Épipleure entièrement testacée. Chaperon semi circulaire, un peu saillant et retroussé en avant chez le mâle, où la suture frontale est peu saillante et où le vertex se relève en une lame anguleuse sur les côtés et portant au milieu une corne plate un peu redressée; chez la femelle, deux carènes, l'une à la suture frontale, l'autre en arrière et sans corne médiane. Corselet convexe, densément et granuleusement ponctué, rétus en avant, avec une dépression médiane, surmontée chez la femelle d'une saillie quelquefois bilobée; bord latéral un peu sinué en arrière de l'angle antérieur. Élytres finement striées; ponctuation des interstries fine. Chez les petits développements des mâles (var. *tricuspis* et *cuspidiusculus*), la corne du vertex s'oblitère graduellement. — RD : Angleur, Embourg, Ramet, Huy, Neuville-sur-Meuse. RG : Val-Benoît, Sclessin, Jemeppe, Glons.

34. *O. fracticornis,* Preyssler. — Taille d'environ 5 à 9 millimètres. Largement ovalaire. Vert assez foncé ou bronzé, avec des élytres testacées, semées de taches d'un noir verdâtre nombreuses et confluentes. Épipleure testacée, rembrunie en avant; le dessous noir-verdâtre. Chaperon semi-circulaire, plus avancé et tronqué chez les mâles, où la suture frontale est très peu saillante et où le derrière de la tête porte une lame inclinée, surmontée d'une petite corne plate redressée; de nombreuses variétés (*subrecticornis, tricuspidus, sublaminatus, similis*) ont été établies sur le plus ou moins grand développement de cette armature; la femelle a deux arêtes saillantes, l'une postérieure, l'autre sur la suture frontale. Corselet convexe, densément ponctué et pubescent, rétus en avant; les angles antérieurs, en plongeant un peu, déterminent un sinus à leur suite sur le bord latéral. Élytres à stries très fines et à ponctuation des interstries fine et presque en séries. — RD : Jupille, Polleur, Hockay. RG : Engis, Loën.

35. *O. nuchicornis,* L. — Taille d'environ 6 à 10 millimètres. Noir, quelquefois avec un assez léger reflet bronzé : élytres testacées, parsemées de taches noires, mieux limitées que chez *O. fracticornis* et dont une, carrée, assez grande, occupe toujours la base du 5ᵉ interstrie. Épipleure à partie antérieure noire. Chaperon semi-orbiculaire, un peu tronqué en avant; chez le mâle, la suture frontale est peu saillante et le vertex se prolonge en une lame anguleuse, portant une petite corne plate qui la continue au milieu ; on a considéré comme variétés les développements moindres (var. *Xiphias* et *trituberculatus*); la femelle a deux arêtes transversales saillantes, l'une en arrière, l'autre sur la suture frontale même. Corselet très convexe, très rétus, granuleux et pubescent, avec une protubérance antérieure chez la femelle; l'angle antérieur ne plongeant pas, le bord latéral n'est pas sinueux à la suite de cet angle. Élytres à stries assez marquées; les interstries avec des points plus ou moins en séries. — RD : Grivegnée, Tihange. RG : Liège.

56. *O. lemur*, Fabr. — Taille de 5 à 9 millimètres. Noir-verdâtre, très pubescent; les élytres testacées, avec une bande longitudinale verte sur la suture et une série de taches allongées de la même couleur formant une série courbe en fer à cheval, allant d'une épaule à l'autre en coupant la suture au milieu. Le chaperon porte chez le mâle une seule arête transversale élevée, placée en arrière du front; chez la femelle cette arête est moins élevée et doublée d'une seconde, sur la suture frontale. Corselet bombé, rétus en avant et présentant quatre bossettes à son point culminant dans les deux sexes; il est fortement granuleux. Élytres à stries fines et à interstries ponctués en séries. Il y a des variétés où les taches des élytres s'agrandissent et se rejoignent, d'autres où elles tendent à s'effacer. — Assez rare. RG : Chokier, Lixhe, Loën.

57. *O. ovatus*, L. — Taille de 4 à 6 millimètres. Subglobuleux. Noir, avec une courte pubescence d'un gris noirâtre. Chaperon semi-circulaire, relevé et assez fortement sinué en avant. Sur le haut du front, une arête transversale assez élevée chez le mâle, moins élevée chez la femelle, où elle se double d'une seconde arête arquée, répondant à la suture frontale. Corselet et élytres densément granuleux; ces dernières finement striées. — Commun. RD : Seraing, Ramet, environs de Visé, Tilff, Méry, Esneux, Huy. RG : Grâce-Berleur, Jemeppe, Flémalle-Haute, Engis, Glons, Lixhe, Loën.

58. *O. furcatus*, Fabr. — Taille d'environ 5 millimètres. De même forme que l'*O. ovatus*. Noir un peu métallique, avec des élytres brun-noirâtre, portant au bout une rangée transverse de taches rouges interstriales assez confluentes; une tache humérale semblable, souvent effacée. Dans la variété *rubellus*, Muls., les élytres sont entièrement rougeâtres. Pubescence générale courte, d'un gris un peu flave. Le mâle a le vertex relevé en une carène dont le milieu saillant est flanqué de chaque côté d'une petite corne cylindrique dressée. Chez la femelle, cette armature est remplacée par une arête assez haute coupée

carrément en dessus. Corselet très densément ponctué. Élytres striées-crénelées, avec les interstries marqués de granules en séries plus ou moins régulières. — Très rare. RD. Bressoux (M. Séverin).

39. *Colobopterus erraticus*, L. — Taille de 6 à 9 millimètres. Noir assez luisant, avec une pubescence flave en dessous; les élytres d'un brun jaunâtre généralement assez clair, avec la suture enfumée, parfois entièrement rembrunies. Ovale un peu large; les élytres un peu déprimées et tronquées en arrière. Tête et corselet densément ponctués. Élytres à stries fines et finement ponctuées. Le mâle a la suture frontale plus marquée et un tubercule à son milieu. — RD : Bressoux, Tilff, Esneux, Coo, Hockay, Huy, Ben-Ahin. RG : Herstal, Jemeppe, Flémalle-Grande, Flémalle-Haute, Engis, Horion-Hozémont, Fallais, Loën.

40. *Coprimorphus subterraneus*, L. — Taille de 6 à 7 millimètres. Cylindrique, très peu déprimé en dessus. Noir de poix assez brillant. Les exemplaires à élytres un peu rougeâtres forment la variété *fuscipennis*. Chaperon semi-circulaire, un peu sinué en avant, avec une saillie jugale en avant de l'œil. Une ligne transverse frontale de trois tubercules, égaux chez la femelle, tandis que, chez le mâle, le médian est plus développé. Corselet parsemé de gros points; une fossette sur le devant de celui du mâle. Écusson enfoncé. Élytres à stries profondes assez crénelées; les interstries internes relevés en côtes saillantes, dont chacune est accompagnée de deux lignes élevées plus petites. — RD : Bressoux, Ramet, Huy, Tihange. RG : Rocour, Glons.

41. *Otophorus hæmorrhoïdalis*, L. — Taille d'environ 4 à 5 millimètres. Ovale un peu large et un peu court. Noir, avec le bout des élytres largement rouge et souvent (var. *sanguinolentus*) une petite tache humérale de la même couleur. La tête et le corselet ponctués; ce dernier plus densément chez la femelle. Chaperon semi-circulaire, très légèrement sinué en

avant et les bords un peu relevés de chaque côté de l'échancrure. Joue formant devant l'œil une saillie bien anguleuse. Suture frontale portant trois tubercules, le médian plus élevé que les latéraux chez les mâles. Écusson grand, atteignant jusqu'au quart de la longueur de la suture. Élytres raccourcies en arrière et laissant à découvert le bout du pygidium. Leurs stries fortes, lisses en arrière, mais crénelées en avant par de gros points allongés transversalement. — RD : Bressoux, Ramet, Quarreux, Sart, Hockay, Baraque-Michel, Hertogenwald. RG : Engis.

42. *Teuchestes fossor,* L. — Taille d'environ 10 à 12 millimètres, parfois plus petit. Ovale, large, convexe. Noir brillant. Une variété à élytres d'un rouge acajou a reçu le nom de *sylvaticus.* Chaperon assez fortement sinué en avant, ayant sur la suture frontale trois tubercules, dont le médian forme chez le mâle une petite corne. Chez le mâle, le corselet est creusé en avant d'une fossette et plus lisse sur le disque; chez la femelle, il est sans fossette et uniformément ponctué. Écusson atteignant le quart de la longueur des élytres. Celles-ci finement striées-ponctuées; interstries lisses. — RD : Jupille, Droixhe, Angleur, Ramet, Esneux, Strivay, Fond de Forêt, Hockay. RG : Val-Benoit, Jemeppe, Engis, Herstal, Fallais, Statte.

43. *Aphodius scybalarius,* Fabr. — Taille d'environ 8 millimètres. Oblong et assez cylindrique, nullement déprimé. Tête, corselet et dessous du corps noirs; jamais de tache aux angles antérieurs du corselet. Élytres d'un testacé jaunâtre, souvent (var. *conflagratus*) avec une grande tache discoïdale mal limitée d'un brun sale, aussi ou plus souvent totalement enfumées ou rembrunies (var. *nigricans*). Chaperon à peu près en trapèze, à côtés faiblement arqués; la suture frontale a trois tubercules, le médian plus fort chez les mâles. Corselet rebordé en arrière, déprimé sensiblement en avant chez le mâle; sa ponctuation forte, mais assez clairsemée, avec une tache lisse sur les côtés. Élytres striées-ponctuées. — RD : Seraing. RG : Liège, Jemeppe.

44. *A. fœtens,* Fabr. — Taille d'environ 8 millimètres. Ovale et large. Brillant ; noir, avec les élytres rouge-cinabre, ainsi que des taches aux angles antérieurs du corselet; pattes rougeâtres; abdomen jaune-rougeâtre. Suture frontale chargée de trois tubercules, dont le médian fort prononcé chez le mâle, où il est précédé d'une saillie arquée assez faible. Corselet rebordé à la base; sa ponctuation clairsemée, avec un espace lisse près des côtés. — RD : Ougrée, Lize, Colonster, Beaufays, Theux, Surister, Hockay, Hertogenwald. RG : Jemeppe, Hollogne-aux-Pierres.

45. *A. fimetarius,* L. — Taille d'environ 5 à 7 millimètres. Ovale, convexe. Noir (tout l'abdomen compris), avec les élytres rouge-cinabre, ainsi que les angles antérieurs du corselet. La variété *autumnalis* a été établie sur des individus immatures, où les parties noires sont restées d'un brun rougeâtre. Chaperon trapézoïdal un peu sinué en avant; suture frontale précédée d'une saillie arquée, assez faible chez la femelle; la suture elle-même porte trois tubercules, égaux chez la femelle, tandis que, chez le mâle, le médian est plus prononcé. Corselet à ponctuation assez forte, mais éparse et laissant un espace lisse sur chaque côté; celui du mâle est creusé en avant d'une fossette. Élytres à stries assez fortement ponctuées. — Extrêmement commun et abondant. RD : Chênée, Beaufays, Tilff, Méry, Strivay, Esneux, Comblain-au-Pont, Aywaille, Martinrive, Coo, Hockay, Jupille, Huy, Tihange. RG : Liège, Val-Benoît, Rocour, Herstal, Jemeppe, Flémalle-Haute, Engis, Lixhe, Loën, Glons.

46. *A. ater,* de Geer (*terrestris,* Fabr.). — Taille d'environ 4 à 5 millimètres. Large, court et convexe. Noir mat. Chaperon peu profondément, mais largement sinué en avant. Suture frontale portant trois tubercules, dont le médian plus fort chez les mâles; en avant, dans les deux sexes, une arête assez longue et faiblement arquée, plus forte chez les mâles. Corselet densément ponctué, surtout sur les côtés, sans espace lisse; un

rebord à la base et sur les côtés. Écusson triangulaire, grand et à base fort large. Élytres assez fortement striées; les points des stries faibles. Mésosternum en lame saillante. Les couronnes de poils des tibias postérieurs formées d'une seule espèce de poils, courts; premier article des tarses postérieurs aussi long que les trois suivants ensemble. La variété *terrenus* a les élytres d'un brun rouge luisant. — Rare. RD : Vaux-sous-Chèvremont (M. Miedel). RG : Liège (*id.*).

47. *A. pusillus* Herbst. — Taille généralement comprise entre 3 et 4 millimètres. Brun de poix foncé, presque noir, sauf le bout des élytres, qui est plus rougeâtre, ainsi que les angles antérieurs du corselet; pattes d'un brun de poix assez foncé. Chez la variété *cœnosus*, les parties latérales du corselet et les élytres sont rougeâtres. Chaperon un peu sinué en avant, à bord plutôt abaissé que relevé. Suture frontale faiblement saillante, un peu plus accusée aux extrémités, mais sans tubercule médian dans les deux sexes. Corselet assez densément ponctué, ne présentant aucun espace lisse sur le milieu des côtés, la base entièrement rebordée. Écusson largement triangulaire; les côtés en ligne droite du sommet à la base. Élytres à stries plus ou moins crénelées. Aux tibias postérieurs, les couronnes de poils sont composées de soies longues et de soies plus courtes, et le premier article des tarses postérieurs, sensiblement égal à l'éperon du tibia, est à peu près aussi long que les deux articles suivants ensemble. Le mâle ne se distingue de la femelle que par une excavation du métasternum et l'éperon des jambes antérieures, qui s'atténue de la base au sommet, tandis que celui de la femelle est uniformément grêle. — RD : Sainval près Tilff, Beaufays, Remouchamps, Quarreux, Coo, Verviers, Huy. RG : Rocour, Bierset, Engis, Loën.

48. *A. granarius*, L. — Taille d'environ 5 millimètres, mais pouvant s'abaisser jusqu'à 3. Brun de poix très foncé et luisant, avec le sommet des élytres et les côtés du corselet vague-

ment rougeâtres. Chaperon largement échancré en avant, ayant la suture frontale relevée chez le mâle en une arête trituberculée, à tubercule médian bien accentué, et, devant cette arête, une autre, courte et arquée ; chez la femelle, cette dernière manque ou n'est qu'à l'état de vestige et celle de la suture frontale n'a qu'un tubercule médian et les extrémités effacées. Corselet à ponctuation de deux sortes de points, médiocrement dense et laissant voir, vers le milieu des côtés, un espace lisse ; la base est entièrement rebordée. Écusson à contour pentagonal, parce que les côtés se brisent au milieu et se rapprochent d'une perpendiculaire sur la base. Élytres à stries crénelées et interstries très faiblement pointillés. Couronnes des tibias postérieurs en brosses courtes d'une seule espèce de poils. — Extrêmement commun. RD : Angleur, Kincampoix, Retinne, Dalhem, Visé, Mouland, Méry, Quarreux, Heusy, Baraque-Michel, Huy, La Sarte, Tihange. RG : Liège, Herstal, Awans, Montegnée, Jemeppe, Chokier, Lixhe, Loën.

49. *A. tristis,* Panzer. — Taille de 3 à 5 millimètres. Proportionnellement un peu court. Noir brunâtre luisant, laissant parfois apercevoir vers le sommet de l'élytre une vague macule rougeâtre. Parfois (var. *cœnosus*) les élytres et les côtés du corselet sont d'un brun rougeâtre clair. Chaperon sans tubercules, mais avec la suture frontale formant une faible arête transversale. Corselet densément ponctué ; point d'espace lisse latéral ; base entièrement rebordée. Écusson aussi de forme pentagonale. Stries des élytres plus fines et moins fortement ponctuées. Couronnes des tibias postérieurs composées de deux longueurs de soies. Premier article des tarses postérieurs moins long que l'éperon terminal du tibia. Le mâle a un caractère remarquable consistant dans la dilatation et l'aplatissement du tibia postérieur en forme de lame de rasoir. — RD : Beaufays, Louveigné, Quarreux, Solwaster, Baraque-Michel.

50. *A. quadrimaculatus*, L. — Taille comprise entre 3 et 3 $^1/_2$ millimètres. Ovale, un peu plus large en arrière. Noir, avec les élytres ornées de deux taches rouges, l'une humérale, sujette à disparaître (var. *a* Mulsant), l'autre placée sur le dernier tiers de l'élytre, sujette à s'étendre en arrière (var. *caudatus*); quelquefois les deux taches se réunissent en une vaste tache discoïdale (var. *prolongatus*). Chaperon sans tubercules; la suture frontale un peu marquée chez le mâle, où son centre forme une bosse. Corselet densément ponctué; la base finement rebordée. Écusson subpentagonal. Élytres à stries fines et faiblement crénelées. Les couronnes de soies des tibias postérieurs composées de deux longueurs de poils. — RD : Embourg, Sainval, Beaufays, Aywaille, Huy. RG : Rocour, Engis, Loën.

51. *A. sanguinolentus*, Panzer. — Taille de 3 à 3 $^1/_2$ millimètres. Ovale-allongé. Noir brillant, avec les élytres rouge de sang et leur suture noir-brunâtre; généralement aussi une tache rouge aux angles antérieurs du corselet. Chaperon non sinué en avant; ses angles jugaux peu proéminents et arrondis ou plutôt émoussés. Suture frontale sans tubercules. Corselet densément ponctué, finement rebordé à la base. Élytres striées-crénelées; interstries plans et finement pointillés. Le mâle a le métasternum excavé et l'éperon terminal des tibias antérieurs pointu et recourbé; il est droit chez la femelle. — Rare. RD : M. Miedel l'a trouvé à Embourg, Beaufays et Ninane.

52. *A. depressus*, Kugelann. — Taille comprise entre 6 et 9 millimètres. Ovale assez large. Noir luisant, avec les élytres rouges chez la forme typique (dont je n'ai pas encore vu d'exemplaires belges), noires chez la variété *nigripes*, Duft. (*atramentarius*, Er.). Chaperon large, semi-orbiculaire, sans sinus antérieur; les joues très anguleuses en avant des yeux; la suture frontale, peu apparente, est transversale, non anguleuse au milieu, mais seulement un peu arquée en arrière; la ponctuation,

extrêmement fine, le rend presque lisse et très luisant. Corselet à ponctuation dense et assez fine. Écusson large et triangulaire. Élytres à stries fines, presque imponctuées; interstries plans, densément ponctués. Le caractère essentiel pour distinguer la variété noire de cette espèce de la variété noire de l'*A. luridus* se trouve dans la cuisse postérieure qui, outre la forte ponctuation générale, a sur son tiers ou ses deux cinquièmes antérieurs seulement, une ligne de gros points ou pores pilifères. L'éperon terminal des tibias antérieurs est plus ou moins cylindrique chez le mâle, complètement en épine chez la femelle. — RD : Coo (feu C. Van Volxem).

55. *A. luridus*, Fabr. — Taille de 6 $^1/_2$ à 10 millimètres. Ovale-allongé. Noir assez brillant, avec les élytres d'un testacé jaunâtre clair, marquées (dans la forme typique) de deux séries transversales arquées de taches noirâtres interstriales rectangulaires, les externes des deux rangées assez souvent réunies; il y a pour ces taches assez de variations, soit qu'elles diminuent en nombre, ou en grandeur, soit qu'elles s'augmentent, s'étendent et se réunissent, surtout vers la base de l'élytre. Une variété, plus commune que le type (*gagates*, Muller ou *nigripes*, Fabr.) a les élytres absolument noires et assez luisantes. Chaperon semi-orbiculaire, sans sinus antérieur, sans protubérances, à peu près lisse, assez fortement rebordé en avant; les joues anguleuses; la suture frontale, peu apparente, forme au milieu un angle bien marqué, dirigé en arrière. Corselet finement et densément ponctué. Écusson triangulaire. Élytres à stries indistinctement ponctuées et à interstries ponctués presque en séries. Dessous plus pubescent que chez l'*A. depressus*. Aux cuisses postérieures, la série de pores pilifères très marqués n'est pas bornée au tiers, mais s'étend sur toute la longueur. Éperons des tibias antérieurs en épines chez la femelle, plutôt cylindriques chez le mâle. — RD : Embourg, Ninane, Esneux, Sprimont, Le Trooz, Hockay, Tihange. RG : Bierset, Hollogne-aux-Pierres, Engis, Loën, Glons.

54. *A. rufipes*, L. — Taille d'environ 10 à 12 millimètres. Ovale-allongé, assez convexe. D'un brun marron brillant, plus ou moins rougeâtre, avec les pattes rougeâtres et les antennes orangées. Chaperon semi-orbiculaire, rebordé, sans autre protubérance qu'une faible gibbosité chez la femelle; joues anguleuses devant les yeux. Corselet fortement rebordé latéralement, sans rebord à la base, lisse, avec quelques points épars sur les côtés. Écusson en triangle curviligne, lisse. Élytres à stries ponctuées; interstries convexes et lisses. L'éperon terminal des tibias antérieurs plus grêle chez les femelles que chez les mâles, qui ont le métasternum un peu creusé. RD : Bressoux, Jupille, Tilff, Strivay, Sprimont, Comblain-au-Pont, Hockay. RG : Liège, Herstal, Chertal, Rocour, Jemeppe, Chokier, Loën, Statte.

55. *A. porcus*, Fabr. — Taille de 4 à 6 millimètres. Ovale. D'un noir brillant, avec les élytres d'un rouge un peu violacé. Chaperon semi-orbiculaire, à bord un peu retroussé, rugueux; suture frontale trituberculeuse; le tubercule médian un peu plus prononcé chez la femelle. Corselet densément ponctué, surtout chez la femelle. Élytres à stries larges et profondes, séparées par des intervalles rugueux et un peu relevés en rebord vers chaque strie. RG : Engis.

56. *A. scrofa*, Fabr. — Taille d'environ 5 millimètres. Noir de poix et couvert d'une courte pubescence flave. Chaperon semi-orbiculaire, tronqué en avant, plus ponctué chez la femelle que chez le mâle; chez la première, une gibbosité frontale. Corselet densément ponctué, à base rebordée seulement auprès des angles. Élytres striées-crénelées; interstries marqués de points en séries. — RD : Verviers (feu Chapuis). RG : Glons, Engis.

57. *A. sordidus*, Fabr. — Taille comprise entre 6 et 8 millimètres. En ovale-allongé assez convexe. Tête noire, tachée de testacé sur le devant du chaperon; corselet noir-brunâtre, avec

tout son pourtour testacé; une tache brune au milieu de la partie testacée des côtés; élytres jaune clair, à suture brunâtre de même que l'écusson; pattes jaunâtres. Chaperon un peu sinué en avant; suture frontale trituberculeuse ; le tubercule médian plus prononcé chez les mâles. Corselet très finement ponctué, à base rebordée. Élytres striées-crénelées; la ponctuation très fine des interstries se groupe le long des stries et cesse un peu avant le sommet de l'élytre. Une variété (*quadripunctatus*) a, sur chaque élytre, deux macules brunes, l'une humérale, la seconde vers le bout et s'effaçant quelquefois. — RD : Droixhe, Strivay, Hockay.

58. *A. rufescens,* Fabr. (*rufus* Moll, Mulsant). — Taille de 5 à 7 millimètres. Ovale-allongé, assez convexe. Brun-rougeâtre, rembruni sur la tête et le disque du corselet; point de tache brune aux côtés de celui-ci; quelquefois les élytres sont aussi rembrunies, ou marquées d'une large tache discoïdale allongée noirâtre. Chaperon tronqué et sinué en avant; suture frontale trituberculeuse; le tubercule médian plus fort chez le mâle. Corselet densément ponctué, mais les points très fins; base tout à fait rebordée. Élytres à stries faiblement crénelées; les interstries plus uniformément ponctués que chez l'espèce précédente et cette ponctuation prolongée jusqu'au bout. — RD : Sprimont, Quarreux, Theux, Huy. RG : Jemeppe.

59. *A. nitidulus,* Fabr. — Taille de 4 $^1/_2$ à 5 $^1/_2$ millimètres. Ovale-allongé un peu cylindrique. Tête noire, avec le devant rougeâtre; le corselet d'un noir brunâtre brillant, n'ayant de testacé que les bords latéraux et une très fine bordure antérieure; élytres généralement fauves, parfois un peu rougeâtres, parfois aussi d'un jaune flave; suture rembrunie. Chaperon trapéziforme; suture frontale à trois tubercules, le médian plus prononcé chez les mâles. Corselet rebordé en arrière, densément et finement ponctué. Stries des élytres fines, très faiblement crénelées; interstries plans et lisses. — RD : Tilff, Esneux, Strivay, Sprimont, Theux, Solwaster. RG : Jemeppe.

60. *A. merdarius,* Fabr. — Taille d'environ 3 à 4 millimètres. Assez étroit. Tête et corselet noirs ; ce dernier a ordinairement une tache testacée aux angles antérieurs, tache qui est sujette à disparaître (var. *foriorum*) ou à s'étendre à tout le bord latéral (var. *quisquilius*); élytres d'un jaune sale, avec la suture et une étroite bordure externe noirâtres. Chaperon trapézoïdal à angles émoussés ; point de tubercule sur la suture frontale. Corselet densément couvert de deux sortes de points; sa base rebordée seulement vers les angles. Élytres à stries assez fines, faiblement crénelées ; interstries ponctués. Le mâle a le métasternum fortement excavé. — RD : Huy, Solwaster. RG : Ans, Rocour, Alleur, Loën, Engis.

61. *A. melanostictus,* Schmidt-Goebel. — Taille de 4 $^1/_2$ à 6 millimètres. Oblong, un peu large et un peu plus robuste que les autres espèces suivantes à élytres mouchetées. Tête toute noire; le corselet noir, avec les côtés rougeâtres. Écusson noir. Élytres à fond testacé fauve assez rougeâtre et assez luisant ; les taches, sujettes d'ailleurs à beaucoup de variations, se ramènent à l'état minimum à deux taches sur le 3^e interstrie, après le premier et le deuxième tiers de la longueur, deux autres sur le 5^e interstrie, l'une tout à la base, l'autre en regard de la 2^e du 3^e interstrie, puis une large tache à la partie médiane du 7^e interstrie. Dessous du corps noir ; les pattes testacées. Chaperon en demi-hexagone ; suture frontale portant trois tubercules, dont le médian plus fort chez les mâles. Corselet à ponctuation dense et inégale ; un rebord à la base, mais très atténué au milieu. Stries des élytres crénelées; interstries faiblement pointillés. — Rare. RD : Aywaille (M. Miedel).

62. *A. inquinatus,* Herbst. — Taille de 3 à 6 millimètres environ. Oblong. Tête noire; corselet noir, avec les angles antérieurs testacés ; élytres testacé-jaunâtre, avec une maculature noire, sujette à de nombreuses variations; dans la forme normale, point de départ de ces variations, il y a : 1° au quart de

la longueur, une tache composée de trois plus petites, sur les 2e, 3e et 4e interstries; 2° à peu près aux trois quarts, les mêmes interstries contiennent trois taches contiguës, dont la médiane devance de toute sa longueur les deux latérales; 3° une petite tache à la base du 5e interstrie; 4° une bande longitudinale occupant toute la partie médiane du 7e interstrie et empiétant le plus souvent sur les 8e et 9e, en se rejoignant plus ou moins à un petit trait oblique plus en arrière et plus extérieur. Chaperon en demi-hexagone; un tubercule au milieu de la suture frontale chez le mâle. Corselet rebordé à la base; sa ponctuation assez dense et inégale. Stries des élytres crénelées; interstries assez indistinctement ponctués. Métasternum plan chez la femelle, excavé chez le mâle. Pattes d'un testacé clair. — RD : Quarreux (feu Chapuis), Sart (*id.*). RG : Laer (M. Van Segvelt).

63. *A. sticticus*, Panzer. — Taille de 4 à 5 millimètres. Ovale. Tête noire, avec une tache rougeâtre de chaque côté du chaperon, qui est semi-hexagonal, arrondi aux angles. Corselet noir-brunâtre, largement bordé de testacé sur les côtés; un rebord latéral bien marqué, un autre à la base, presque effacé au milieu. Élytres testacées, avec des taches brunes, se ramenant normalement au type de deux séries courbées, allant, l'une de la base du 5e interstrie aboutir vers les trois quarts de la longueur du 3e interstrie; l'autre se dirigeant depuis le calus huméral jusqu'entre les 3e et 5e interstries, en arrière de la terminaison de la première. Stries des élytres crénelées, se creusant fort à l'extrémité, où les interstries deviennent convexes. Métasternum plan chez la femelle, excavé chez le mâle. Pattes d'un testacé clair. — RD : Kincampoix, Sartilman, Colonster, Embourg, Boncelles (M. Miedel).

64. *A. tessulatus*, Payk. — Taille de 3 à 5 millimètres. En ovale un peu court, un peu large et un peu convexe. Tête noire, sans taches. Corselet noir, rebordé à la base, parfois à peine teinté de rouge ferrugineux aux angles antérieurs. Élytres d'un testacé ferrugineux luisant, avec deux rangées courbes

de taches assez contiguës et un peu confluentes : la première partant de la base du 5^e interstrie et arrivant un peu avant le milieu du 3^e ; la seconde naissant du calus, s'épanchant largement en dehors du 7^e interstrie sur les interstries externes et se recourbant ensuite par une ligne transverse en échiquier, dont la dernière tache est sur le 2^e interstrie ; parfois toute la base est absolument noire. Cuisses d'un brun assez foncé ; chez le mâle, les postérieures se dilatent et sont tout à fait anguleuses au milieu. La suture frontale a trois tubercules, dont le médian plus accentué chez les mâles. — RD : Hockay, Baraque-Michel. RG : Flémalle-Haute.

65. *A. consputus*, Creutzer. — Taille de 3 à 5 millimètres. Tête noire, avec une tache rouge, parfois assez réduite et assez vague, de chaque côté du chaperon, en avant de l'œil ; les angles jugaux obtus. Corselet noir, assez largement bordé de rougeâtre sur les côtés, plus étroitement en arrière. Élytres d'un flave sale, avec le disque longitudinalement marqué d'une vague tache fauve. Stries légèrement crénelées. Suture frontale du mâle à trois tubercules. — Rare. RG : Flémalle-Haute.

66. *A. punctato-sulcatus*, Sturm. — Taille de 4 à 6 millimètres environ. Tête noire, sans taches ; chapeau à angle jugal plus petit qu'un angle droit ; suture frontale portant trois tubercules, assez apparents chez le mâle, à peu près effacés chez la femelle. Corselet noir, avec les bords et assez souvent la base, plus finement, rougeâtres. Élytres d'un flave sale, avec le disque longitudinalement et vaguement marqué d'une tache plus foncée ; stries ponctuées ; interstries pointillés. Métasternum fortement excavé chez le mâle, sans que le pourtour soit relevé et sans pores pilifères ; chez la femelle, il est plan et creusé d'un fin sillon, terminé en arrière par une petite fossette plus ou moins apparente. Éperon terminal des tibias antérieurs grêle et pointu dans les deux sexes. — RD : Kincampoix, Tilff, Hockay, Baraque-Michel. RG : Flémalle-Haute, Loën.

Note. — C'est à M. le baron de Harold que je dois d'avoir pu établir avec une entière certitude la distinction entre cette espèce et l'espèce suivante, qui en est si voisine, l'*A. prodromus.* Voici ce que m'écrivait, le 15 août 1874, ce savant entomologiste :

« Ce n'est pas la première fois que je suis consulté sur les deux *Aphodius* qui vous occupent actuellement. Il m'a fallu longtemps à moi-même pour me fixer définitivement à leur égard, mais, à l'heure qu'il est, je suis convaincu que nous avons affaire à deux espèces parfaitement distinctes et j'ajouterai même plus faciles à distinguer que certaines autres espèces du même genre.

» Assurons-nous d'abord que nous n'avons devant nous que les deux espèces en question. Une troisième, extrêment voisine, est l'*A. pubescens,* Sturm, mais cette espèce, dont les élytres ont une forme parfaitement ovalaire, semble être des plus rares. Je n'en connais, depuis une vingtaine d'années que je m'occupe du groupe, que trois ou quatre exemplaires authentiques. Enfin, le *pubescens* ne me paraît habiter que l'Autriche et l'Italie, d'où j'ai reçu mes individus par MM. Scheffler et Emery.

» Une quatrième espèce, également voisine, est le *tabidus,* Er.; mais cet insecte est d'une forme beaucoup plus cylindrique et n'a été trouvé jusqu'ici qu'en Dalmatie.

» Le *consputus* avec ses deux petites plaques transparentes de chaque côté du chaperon, d'une taille généralement beaucoup plus petite, ne saurait pas non plus nous inquiéter.

» Quant aux auteurs qui se sont occupés des deux espèces en question, Erichson est toujours le meilleur. Mulsant ne vaut rien; il a pris des femelles du *punctato-sulcatus* pour des mâles du *prodromus,* et Thomson (*Skand. Col.,* X) a tout confondu en admettant une troisième espèce *sabulicola* (voyez *Coleopt. Hefte,* VI, p. 117).

» Je vois, par votre lettre, que vous êtes sur la bonne voie pour la distinction de ces deux *Aphodius;* j'ai donc plutôt à vous confirmer dans celle-ci qu'à vous en indiquer une autre. La *configuration de la plaque métasternale* joue le rôle principal dans la distinction et, quant à moi, je m'en sers seulement et je ne suis *jamais en doute* à quelle espèce rapporter un individu quelconque.

» Vous savez sans doute que cette plaque, que je désignerai, pour être plus court, simplement comme métasternum, est toujours plus ou moins concave dans les mâles, tandis qu'elle est plane ou même convexe dans les femelles.

» En ajoutant aux différentes formes du métasternum quelques autres caractères accessoires et corroboratifs de plus ou moins de valeur, vous obtenez le tableau synoptique suivant :

1. Plaque métasternale non concave dans son milieu, mais largement sillonnée longitudinalement; rebord marginal de la base du corselet parfois indistinct au milieu. . . 2

Plaque non sillonnée largement, mais seulement avec une ligne longitudinale imprimée, ou concave dans son milieu; ligne marginale de la base du thorax toujours distincte; tubercules frontaux et suture frontale toujours accusés; éperons des tibias antérieurs jamais tronqués, toujours pointus 3

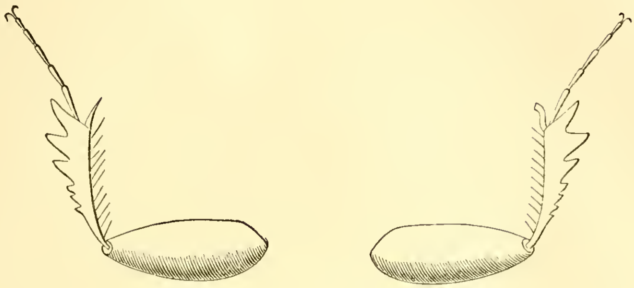
2. Tête sans traces de tubercules; sillon du métasternum large, les contours de la plaque pointillés, les points pilifères; élytres pubescentes; éperon du tibia antérieur robuste, tronqué au bout et légèrement infléchi. . . . . *prodromus* mâle

Tête avec de légères traces de tubercules; sillon métasternal profond, mais moins large, les parties de la plaque à droite et à gauche presque convexes, contours sans points pilifères; élytres non pubescentes; éperon du tibia antérieur acuminé . . . *prodromus* femelle

3. Plaque métasternale très distinctement concave dans son milieu, en outre avec une fine ligne longitudinale; les contours non pointillés; corselet large; tubercules frontaux légèrement apparents sur la suture frontale toujours très distincte; élytres pubescentes . . . . *punctato-sulcatus* mâle

Plaque métasternale antérieurement presque plane, mais postérieurement avec une petite concavité sensible, lisse; corselet atténué antérieurement; suture frontale distincte, tubercules à peine indiqués; occiput et tête en général assez fortement ponctués; élytres glabres . . . . *punctato-sulcatus* femelle

» Voici deux figures représentant les deux formes de tibias antérieurs :



prodromus. ♀
punct.-sulc. ♂ ♀

prodromus. ♂

» Ce caractère est parfaitement constant et suffit à lui seul pour connaître immédiatement le *prodromus* mâle. Il n'y a que les femelles du *prodromus* et du *punctato-sulcatus* qui se ressemblent au point qu'on pourrait les confondre, mais c'est justement la forme tout à fait différente de leur métasternum qui permet de les séparer aisément. Cette différence est difficile à reproduire par une figure; je l'essaie néanmoins :

punct.-sulc. ♀

prodromus. ♀

» Les deux espèces paraissent très répandues partout et se trouvent ici au premier printemps, ensuite en abondance en automne. Le *punctato-sulcatus* varie en ce que la marge jaunâtre du côté du corselet envahit parfois aussi la base de celui-ci; pour le reste les couleurs ne prêtent aucun secours pour la détermination.

» Il est curieux que les femelles du *prodromus* présentent des traces de tubercules frontaux, tandis que les mâles n'en offrent absolument aucune. »

Depuis plus de treize ans que M. de Harold m'a écrit cette lettre, je me suis constamment servi avec le plus grand succès des caractères indiqués par lui, et, dans les diagnoses que je donne ici, on les retrouvera avec l'interprétation que mon expérience m'a suggérée être la plus exacte. Je dois pourtant dire que, lorsque l'on étudie des milliers d'exemplaires, comme j'ai pour principe de le faire quand l'abondance de l'espèce rend la chose possible, on trouve de loin en loin quelque individu aberrant et difficile à classer, où les caractères empruntés à l'éperon du tibia et ceux de la plaque métasternale, pour ne rien dire des autres, moins certains en tous cas, semblent se contredire; mais, dans deux espèces aussi voisines, il n'y a rien d'étonnant qu'en témoignage d'une communauté primitive d'origine, il y ait quelquefois des individus anormaux; leur *extrême* rareté prouve bien que les deux espèces méritent d'être parfaitement distinguées l'une de l'autre.

67. *A. prodromus,* Brahm. — Taille de 5 à 8 millimètres environ. Tête noire, sans taches; les angles jugaux du chaperon plus petits qu'un angle droit; la suture frontale absolument lisse chez le mâle, parfois avec des vestiges de tubercules chez la femelle. Corselet noir, avec les côtés plus ou moins largement testacés. Élytres d'un jaune sale, avec une grande tache fauve-brunâtre à contours vagues sur leur disque, fortement pubescentes en arrière chez les mâles. Métasternum de la femelle marqué à son milieu d'un fort sillon longitudinal, sans fossette postérieure; les parties latérales un peu convexes; chez le mâle, le métasternum, creusé d'un très large sillon médian, a les bords de ce sillon relevés en une ceinture plate ou même un peu creusée et portant un bon nombre de pores pilifères. Éperon terminal du tibia antérieur tronqué au bout chez le mâle, en aiguillon acuminé chez la femelle. — Très commun et très abondant. RD : Embourg, Chênée, Chaudfontaine, Beaufays, Tilff, Martinrive, Quarreux, Spa, Hockay, Hertogenwald, Huy, Tihange, Visé. RG : Saint-Nicolas, Grâce, Bierset, Flémalle-Haute, Hollogne-aux-Pierres, Engis, Antheit, Landen, Glons, Lixhe, Loën.

68. *A. obliteratus*, Panzer. — Taille de 4 $^1/_2$ à 5 $^1/_2$ millimètres environ. Tête d'un noir un peu bronzé, avec les côtés rougeâtres. Chaperon subhexagonal, à angles jugaux un peu plus petits que l'angle droit; un fin rebord en avant et sur les côtés. Corselet noir-verdâtre, avec une bordure latérale testacée, dilatée aux angles antérieurs; les angles postérieurs tout à fait arrondis; le disque, à peu près lisse chez le mâle, ponctué chez la femelle; point de franges de cils sur les côtés. Élytres pubescentes, testacées; deux groupes obliques de trois taches fauves sur les 2e à 4e interstries et une bande longitudinale assez épaisse et assez vague, en prolongement du calus huméral. Métasternum concave chez le mâle. L'éperon terminal des tibias antérieurs assez mince et relevé en crochet chez le mâle, plus mince et dans l'axe du tibia chez la femelle. — RD : Sainval près Tilff (M. Miedel).

69. *Ammœcius brevis,* Erichs. (*elevatus,* Panzer). — Taille de 4 à 5 millimètres. Noir luisant, avec les antennes et les tarses rougeâtres. Ovale court et trapu; le corselet fort bombé, les élytres encore davantage, presque subglobuleusement renflées et tombant très verticalement en arrière. Chaperon légèrement sinué en avant, avec des angles bien arrondis aux deux bouts de cette sinuosité; en dessus un relief faiblement arqué aux deux bouts. Tête à peu près lisse. Corselet ponctué assez densément sur la base et les côtés, moins à la partie antérieure. Élytres striées-ponctuées; points des stries assez rapprochés. Métasternum très faiblement excavé chez le mâle, plan chez la femelle. — Extrêmement rare. Il se trouve, dans la collection de feu Wesmael, un seul exemplaire indiqué comme de la province de Liège.

70. *Heptaulacus testudinarius,* Fabr. — Taille de 3 à 4 millimètres. Ovale et un peu convexe, pubescent. Tête et corselet noirs; élytres d'un brun rougeâtre, à taches noires assez nombreuses pour former ensemble un dessin de bandes transverses un peu onduleuses. Chaperon fortement sinué en avant et s'abaissant dans le centre de cette échancrure. Corselet den-

sément ponctué. Interstries des élytres costiformes, un peu crénelés au sommet par des points pilifères. Le mâle a l'éperon terminal du tibia antérieur recourbé en crochet. — Rare. RD : Les Aguesses (M. Miedel).

71. *Oxyomus porcatus,* Fabr. — Taille d'environ 2 à 3 millimètres. Oblong et presque cylindrique. Noir de poix assez mat et parfois un peu brunâtre. Chaperon en demi-hexagone, très abaissé et un peu sinué en avant. Corselet fortement et grossièrement ponctué, avec une forte rigole longitudinale sur sa base vis-à-vis l'écusson. Élytres striées de dix forts sillons, fortement crénelés; interstries en côtes tranchantes. — RD : Theux, Heusy, Huy. RG : Lixhe.

72. *Rhyssemus germanus,* L. (*asper* Fabr.) — Taille d'environ 3 à 4 millimètres. En ovale allongé, assez parallèle, nullement bombé, ni élargi en arrière des élytres. Noir brunâtre, avec les pattes d'un rouge brun. Chaperon rougeâtre sur son bord antérieur, profondément sinué en avant. Corselet à angles postérieurs amplement tronqués; une bordure de cils jaunes à la base et sur les côtés; sur le disque, quatre rides transversales élevées et lisses, dont les deux postérieures s'interrompent et se réunissent l'une à l'autre au milieu, à la rencontre d'un petit sillon antéscutellaire. Stries des élytres étroites; interstries subcostiformes et couronnés par une ligne de granulations. Cuisses postérieures non renflées. Métasternum du mâle excavé. — RD : Beaufays (M. Miedel). RG : Hollogne-aux-Pierres, Flémalle-Grande, Loën.

73. *Pleurophorus cæsus,* Panzer. — Taille de 3 à 3 $^1/_2$ millimètres. Subcylindrique, allongé et étroit. D'un noir brunâtre ou d'un brun noirâtre, brillant, avec les pattes rougeâtres. Chaperon sinué en avant. Corselet subrectangulaire avec les côtés arqués, parsemé de fort gros points et marqué sur sa moitié postérieure d'un sillon longitudinal. Élytres striées-crénelées. Pattes courtes. — RD : Angleur, Seraing. RG : Liège, Devant-le-Pont près Visé.

74. *Geotrupes Typhœus*, L. — Taille d'environ 20 millimètres, non compris les cornes du mâle. En ovale un peu court, très convexe; d'un noir luisant. La variété *brunneus* est fondée sur des individus plus ou moins immatures, à élytres brunes. Tête rhomboïdale. Corselet transversal, très court et très large chez le mâle, où le bord antérieur, très arrondi aux angles, est un peu plus grand que la base; dans ce sexe, la partie antérieure du disque porte trois cornes : les deux latérales, projetées en avant, dépassant la tête, sauf dans les exemplaires de petit développement (var. *pumilus*), à pointes un peu convergentes et avec une dent plus ou moins marquée aux deux tiers de l'arête supérieure; la corne médiane, plus courte, a la forme d'un cône à large base, dont la pointe se dirige un peu en haut. Chez la femelle, le corselet est moins court, a ses angles antérieurs saillants, et, sur le devant du disque, une forte arête transversale, accompagnée de chaque côté d'une courte arête longitudinale terminée en une pointe. Cette armature s'oblitère notablement dans de petits exemplaires (var. *pusillus*, Muls.). Élytres striées-ponctuées. — Assez rare. RD : Louveigné.

75. *G. stercorarius*, L. (*putridarius* Er.). — Taille d'environ 22 millimètres, ou même davantage, moins variable que celle du *G. spiniger*. Ovale, bombé, d'un noir brillant et plus souvent encore d'un noir virant au vert-bouteille; parfois des reflets bleuâtres ou violâtres en dessus, et toujours de cette teinte en dessous. Corselet lisse, ou présentant à peine quelques points sur son disque, mais fortement et densément ponctué près des bords latéraux. Élytres assez grossièrement striées-ponctuées; les stries au nombre de quatorze, dont sept viennent aboutir vers la base, entre l'écusson et le calus huméral. Abdomen densément couvert de points, de chacun desquels sort un long poil roussâtre; aucune raie médiane dépourvue de points pilifères. Trois arêtes transversales vers le bout du tibia postérieur. — Les mâles ont à la cuisse postérieure une dent plus ou moins forte, vis-à-vis de celle que

forme l'extrémité du trochanter; leur tibia antérieur a la troisième dent (en remontant du bout) de son arête externe un peu en arrière de l'alignement des autres, et, vis-à-vis de cette dent, l'arête inférieure porte un denticule précédé d'un simple renflement de l'arête. — RD : Tihange (M. de Baugnies).

76. *G. foveatus*, Marsham (*putridarius*, Mulsant). — Taille d'au plus 17 millimètres. Même forme. Couleur généralement plus vive, souvent bleuâtre, et l'écusson particulièrement plus bleuâtre et plus métallique. Corselet et élytres se comportant pour la ponctuation et les stries, comme l'espèce précédente, ce qui le différencie du *G. spiniger*, dont il se sépare plus encore par l'abdomen aussi densément ponctué et pilifère sur toute la surface que le *G. stercorarius*. Tibias postérieurs à trois arêtes transversales. Les mâles se distinguent de ceux du *stercorarius* parce qu'ils ont l'arête inférieure du tibia antérieur pluridentée et que l'antépénultième dent de l'arête externe n'est pas en retrait d'alignement; enfin chez ces même mâles, la dent de la cuisse postérieure est très faible et manque quelquefois. On remarquera qu'en définitive les femelles ne se distinguent de celles du *stercorarius* que par leur plus petite taille et par une légère différence dans la coloration. Cette espèce n'est du reste pour quelques auteurs qu'une simple variété de la précédente. — Très rare. RG : J'en ai autrefois pris un exemplaire à Awans. J'en ai vu un autre pris aux environs de Huy par M. Engelmann.

77. *G. spiniger*, Marsham (*stercorarius* Er., *puncticollis*, Mulsant, *mesoleius*, C.-G. Thomson). — Taille assez variable, allant à peu près de 15 à 20 millimètres et plus. Même forme; même couleur. Corselet offrant une ponctuation dense sur les côtés, mais envahissant aussi le disque, moins clairsemée chez la femelle. Élytres à quatorze stries, plus nettes et moins grossières que celles des deux espèces précédentes; les sept premières arrivent aussi sur la base entre l'écusson et le calus huméral. La partie centrale de l'abdomen est dégarnie, sur une raie

longitudinale plus ou moins large, des points pilifères qui couvrent tout le reste; toutefois on en remarque parfois quelques-uns alignés le long des sutures abdominales, premier acheminement à des variétés de l'Europe méridionale se rapprochant par là du *stercorarius*. Trois arêtes transversales sur le tibia postérieur. — Les mâles ont la cuisse postérieure armée, un peu en avant de la base, d'une dent plus ou moins forte, vis-à-vis de celle qui termine le trochanter; leur tibia antérieur a une arête inférieure à plusieurs dents, dont la plus forte, nullement précédée d'un renflement de l'arête, est plus ou moins contiguë à l'antépénultième dent de l'arête externe, fortement sortie de son alignement. — Très commun. RD : Tilff, Méry, Esneux, Strivay, Huy. RG : Jemeppe, Flémalle-Grande, Hollogne-aux-Pierres, Awans, Antheit, Landen.

78. *G. mutator,* Marsham. — Taille approchant en général de 20 millimètres, mais beaucoup inférieure chez certains exemplaires. Ovale, très convexe. Coloration variable, dans les nuances verdâtre, violacée, purpurine et bronzée, souvent fort brillante, surtout le dessous du corps, qui est quelquefois d'un vert doré resplendissant. Corselet fortement ponctué près des bords, à peu près lisse sur le disque. Élytres à dix-huit stries, dont neuf comprises dans l'espace entre l'écusson et le calus huméral. Abdomen parfois densément couvert de points pilifères (comme le *stercorarius*) et plus souvent avec la raie médiane lisse du *G. spiniger*. Trois arêtes transversales vers le bout du tibia postérieur. — Mâles ayant aux cuisses postérieures une dent plus ou moins marquée, faisant paire avec celle qui termine le trochanter; l'arête inférieure du tibia antérieur pourvue de deux dents; l'antépénultième dent de l'arête externe n'est pas, ou est très peu déviée de l'alignement de cette arête. — RD : Tilff, Méry, Huy. RG : Jemeppe, Flémalle-Haute.

79. *G. sylvaticus,* Panzer. — Taille d'environ 14 à 18 millimètres. Ovale court et convexe. D'un noir plus ou moins

violacé ou bleuâtre, rarement avec une nuance verdâtre, quelquefois encore d'un beau bleu foncé luisant. Corselet à côtés fortement ponctués et à disque présentant quelques points, rares chez le mâle, un peu moins clairsemés chez la femelle. Élytres à quatorze stries, dont sept entre la suture et le calus huméral; ces stries sont ponctuées, mais peu profondes et assez peu marquées, l'étant à peine plus que les nombreuses rides transversales qui coupent les interstries et les stries. Tibias postérieurs ne présentant pas plus de deux carènes transversales entières vers leur bout, la troisième étant incomplète. Cuisses postérieures inermes dans les deux sexes. L'arête inférieure des tibias antérieurs est plus fortement dentelée chez le mâle que chez la femelle, mais en même temps sur une moindre étendue. — Espèce extrêmement commune et qu'on trouve en abondance dans beaucoup de forêts. RD : Kincampoix, Tilff, Ramet, Ramioul, Huy, Fonds de Quarreux, Stoumont, Coo, Spa, Sart, Hockay, Goé, bassin de la Gileppe, Hertogenwald. RG : Liège, Jemeppe, Chokier.

80. *G. vernalis*, L. — Taille d'environ 18 millimètres, souvent plus petit. En ovale très court et convexe. D'une couleur noir-violet ou même bleuâtre, dans la forme typique, seule rencontrée en Belgique; brillant. Corselet finement ponctué. Élytres à peu près lisses, présentant quelques vestiges effacés de stries. Tibias postérieurs à deux arêtes transversales. Abdomen densément couvert de points pilifères. — Les mâles ont la tranche inférieure de leurs cuisses postérieures dentelée d'une série de denticules souvent mousses ou tronqués; le tibia des pattes antérieures dans le même sexe a son arête inférieure en rateau de dents aiguës un peu espacées; de plus, la dent terminale de l'arête externe est bifurquée. — Peu commun. RD : Spa. RG : Awans, Hollogne-aux-Pierres.

81. *Trox sabulosus*, L. — Taille d'environ 9 millimètres. En ovale court et convexe. D'un gris noirâtre, se rembrunissant parfois légèrement. Tête rugueusement ponctuée; chaperon

arrondi en avant. Corselet très densément et grossièrement ponctué, arrondi sur les côtés, frangé de cils roux latéralement et à la base; un sillon longitudinal médian assez large, peu profond à son point central; à droite et à gauche de ce sillon, une grande fossette peu profonde, limitée extérieurement par un demi-cercle de trois autres dépressions presque superficielles. Sur les élytres, des séries subcostiformes de taches de poils courts et squameux d'un blanc un peu jaunâtre; dans chaque intervalle de ces séries, une double chaîne de gros points enfoncés; aspect général de l'élytre rugueux. Cuisses postérieures sans denticulations à leur tranche inférieure. — Rare. RD : Strée (coll. Verheggen).

82. *Trox scaber*, L. (*arenarius* Fabr.). — Taille de 5 à 7 millimètres. Ovale un peu allongé, un peu plus large vers l'extrémité des élytres. D'un noir généralement un peu brunâtre, quelquefois assez brun. Tête densément ponctuée; chaperon court et arrondi en avant. Corselet court et transversal, peu convexe, densément ponctué, avec les angles antérieurs bien saillants, cilié de roux sur les côtés et la base; le sillon longitudinal médian faible, ayant de chaque côté une légère dépression. Élytres striées-crénelées, avec les interstries portant des séries de petites touffes de poils roussâtres, qui s'atténuent et disparaissent même souvent sur les intervalles alternes. Pattes postérieures relativement assez longues; leurs cuisses sans denticules sur la tranche inférieure. — Rare. RD : Heusy (coll. Chapuis).

Sous-famille II : MELOLONTHI.

83. *Hoplia philanthus*, Sulzer (*argentea*, Fabr.). — Taille de 7 à 9 millimètres. Ovale, peu rétrécie en arrière. Noire, avec les élytres d'un brun-chocolat quelque peu violacé, plus claires et même rougeâtres chez les femelles et certains mâles. Corselet et élytres parsemés de quelques squamules grises; d'autres, aussi assez clairsemées, un peu bleuâtres, sur le pygidium et l'ab-

domen. Pattes des mâles brun-rougeâtre; celles des femelles testacé-rougeâtre clair. Chaperon séparé du front par une suture droite. Antennes de dix articles, quelquefois réduits à neuf chez la femelle. Corselet sans saillie longitudinale médiane. Tibias antérieurs tridentés extérieurement. Tarses antérieurs à deux ongles, dont l'externe très court et l'interne grand et fendu vers le sommet; tarses intermédiaires aussi à deux ongles inégaux; tarses postérieurs n'ayant qu'un seul grand ongle un peu fendu en dessous de sa pointe. — RD : Bressoux, Jupille, Spa, Goé, Quarreux, Comblain-au-Pont, Huy. RG : Jemeppe, Bas-Oha.

84. *H. farinosa*, L. (*squamosa*, Fabr.). — Taille de 9 à 11 millimètres. Même forme que *H. philanthus*. D'un brun rougeâtre assez clair, densément revêtue de squamules serrées, de couleur variant du cendré plus ou moins roussâtre au vert bleuâtre. Sur le pygidium, ces squamules sont d'un blanc argenté brillant. Le corselet et les élytres parsemés de courts poils jaunâtres. Antennes de neuf articles. Tibias antérieurs bidentés chez le mâle, tridentés chez la femelle. L'ongle unique du tarse postérieur non fissile. — Très rare. RD : Hestreux (M. Miedel), Heusy (coll. Chapuis).

85. *Serica brunnea*, L. — Taille d'environ 8 à 9 millimètres. Allongée et parallèle, convexe. D'un roux clair, le front un peu rembruni. Antennes à massue très grande chez le mâle, un peu plus courte que le funicule chez la femelle. Chaperon retroussé circulairement en avant, grossièrement ponctué; la ponctuation du front plus clairsemée. Corselet transversal, densément ponctué; ses angles postérieurs obtusément arrondis. Élytres faiblement, mais densément ponctuées, à dix stries peu profondes. Pattes grêles. — RD : Stembert (feu Chapuis), Heusy (*id.*).

86. *Rhizotrogus æstivus*, Olivier. — Taille d'environ 16 millimètres. D'un testacé un peu rougeâtre, avec la région suturale

des élytres rembrunie, ainsi qu'une bande longitudinale sur le corselet, sujette à disparaître. Pubescence restreinte à la poitrine et aux cuisses. Tête assez grossièrement ponctuée. Antennes de dix articles, dont les trois derniers forment une massue, allongée chez le mâle, courte chez la femelle. Corselet frangé de cils en avant et sur les côtés, assez densément couvert de gros points, dont les intervalles sont encore remplis par une ponctuation extrêmement fine et dense. Écusson à peine visiblement pointillé. Élytres à suture un peu saillante; sur le disque, deux autres côtes à peine indiquées. Pygidium rugueusement ponctué. Ongles des tarses munis d'une dent à la base. — RD : Tilff, Visé, Heusy, Huy, Vierset-Barse. RG : Jemeppe.

87. *Rh. solstitialis,* L. — Taille d'environ 17 millimètres. Ovale un peu allongé. D'un brun clair, avec les élytres d'un jaune paille très pâle; le chaperon, sauf une mince bordure en avant, les antennes, le corselet et les pattes, d'un jaune rougeâtre. Pubescence générale flave, se concentrant sur le corselet et la poitrine. Chaperon concave, à bord retroussé; tête très rugueuse, un peu bombée en avant du front. Antennes de neuf articles, dont les trois derniers forment une massue, allongée chez les mâles, courte chez les femelles. Corselet densément ponctué, souvent un peu rembruni au milieu. Écusson grand, à côté curvilignes. Élytres ayant la suture relevée, ainsi que quatre faibles côtes ou plis longitudinaux peu réguliers. Pygidium granuleux et pubescent. Pattes longues; les ongles des tarses pourvus d'une dent à la base. — RD : Strivay, Remouchamps, Huy. RG : Liège, Jemeppe, Chokier.

88. *Rh. ruficornis,* Fabr. — Taille d'environ 11 millimètres. Ovale un peu court. Testacé jaunâtre, avec la tête, le corselet, l'écusson, la suture et le bord externe des élytres d'un brun rougeâtre généralement assez foncé. Antennes et pattes rougeâtres. Les premières ont neuf articles; massue allongée chez le mâle, courte chez la femelle. Chaperon concave, très gros-

sièrement ponctué, ainsi que la tête. Ponctuation du corselet assez fine, voilée par une forte pubescence fauve, qui s'étend à la poitrine, mais laisse l'abdomen et les élytres presque glabres. Élytres assez densément ponctuées; la suture et deux faibles côtes saillantes sur chacune. Pygidium densément ponctué. — Très rare. RD : Polleur (coll. Chapuis).

89. *Rh. rufescens,* Latreille. — Taille d'environ 14 millimètres. Ovale, allongé, un peu rétréci en avant. D'un brun rougeâtre assez clair, avec des élytres testacées ; la tête et le corselet entièrement d'un rouge un peu rosé ; les antennes d'un jaune d'ocre. Chaperon à bord retroussé et rembruni, cilié en avant. Tête rugueusement ponctuée. Antennes de neuf articles; massue allongée chez le mâle, courte chez la femelle. Pubescence blond-doré, fine et courte sur le corselet, plus abondante et plus longue sur la poitrine. Corselet très densément, mais très finement pointillé. Écusson à côtés courbes, ponctué. Élytres à ponctuation assez dense, à suture relevée, avec deux autres côtes faiblement indiquées. Pygidium à ponctuation dense, mais peu profonde. — Très rare. Un exemplaire provenant de la province de Liége, sans indication plus précise, se trouve dans la collection de feu Wesmael.

90. *Melolontha vulgaris,* Fabr. — Taille de 25 millimètres environ. Il se rencontre des individus d'une petite taille, ayant environ 20 millimètres seulement. Ovale un peu allongé. Tête d'un noir un peu bronzé, avec le chaperon rougeâtre. Corselet noir bronzé brillant, parfois avec le disque rougeâtre (var. *discicollis*), parfois entièrement rouge (var. *ruficollis*). Écusson noir-verdâtre. Élytres d'un brun rougeâtre sans filet noir le long du bord externe (*caractère essentiel*). Dessous du corps d'un noir brillant, avec une rangée de taches triangulaires en poils blancs sur le côté des segments abdominaux. Antennes, palpes, pattes et pygidium, en tout ou en partie, d'un testacé rougeâtre. Poitrine fortement velue; une assez forte villosité, sujette à disparaître, sur la tête et le corselet; une pubescence

blanchâtre extrêment fine se voit aussi assez souvent sur les élytres, et, lorsqu'elle prend assez d'extension pour que celles-ci paraissent enfarinées, on a la variété *albida*. Quelquefois les élytres, ainsi que les pattes, deviennent plus ou moins d'un brun noirâtre ou violacé, très rarement tout à fait noires; c'est la variété *lugubris* (feu Chapuis a pris à Heusy un exemplaire au summum de cette variété). Ponctuation de la tête assez forte, plus dense sur le chaperon, qui est finement rebordé et très légèrement sinué en avant. Antennes de dix articles; la massue lamellée est très longue et de sept articles chez le mâle, courte et de six articles chez la femelle. Corselet latéralement anguleux au premier tiers de sa longueur, les côtés ensuite redressés et les angles postérieurs pointus. Un sillon médian et, sur les côtés du disque, deux bandes de ponctuation plus fine et plus dense que celle du milieu et des régions latérales. Écusson ponctué au milieu, un peu plus large que long, les côtés amplement courbes. Aux élytres, la suture est saillante, et il y a quatre côtes sur chaque élytre, les deux externes en dehors du calus huméral. Le pygidium se prolonge en une queue plus ou moins longue et plus ou moins large, généralement plus longue chez les mâles. On la trouve parfois échancrée au bout (var. *lunatus*). — Je ne crois pas devoir donner la liste de toutes les localités d'où j'ai pu observer un insecte aussi commun que le Hanneton. On le rencontre évidemment partout chez nous à l'état d'insecte parfait. Mais il serait important d'arriver à connaître s'il en est bien de même à l'état de larve, où la nature du sol doit exercer une grande influence pour le choix de ses lieux de développement.

Sous-famille III : PLEUROSTICTI.

91. *Phyllopertha horticola*, L. — Taille d'environ 10 millimètres. Tête, corselet, écusson, pattes et dessous du corps d'un noir le plus souvent bleuâtre, violacé ou verdâtre métallescent. Élytres d'un testacé rougeâtre luisant, parfois d'un brun très noirâtre (variété *ustulatipennis*). Des poils d'un gris

noirâtre sur le corselet, les élytres et le pygidium, d'autres, blanchâtres, sur le dessous du corps. Tête rugueusement ponctuée ; l'épistome, large en avant, arrondi aux angles, nullement prolongé en museau. Corselet moins densément ponctué ; sa base fortement bisinuée. Stries des élytres grossièrement ponctuées. Le crochet externe des tarses antérieurs très gros chez les mâles. Les femelles ont pour autres caractères distinctifs la moindre dimension de la massue des antennes et l'existence, sur le premier tiers du bord latéral de l'élytre, d'une rigole élargie, extérieurement limitée par un bourrelet noir assez épais. — Espèce des plus communes et des plus abondantes, souvent fort nuisible aux cultures. RD : Jupille, environs de Visé, Kincampoix, Ougrée, Ramet, Comblain-la-Tour, Battice, Coo, Trois-Ponts, Sart, bassin de la Gileppe, Baraque-Michel, Hockay, Huy. RG : Jemeppe, Chokier, Val-Benoit, Lixhe, Glons, Landen, Fallais, Bas-Oha.

92. *Oxythyrea stictica*, L. — Taille d'environ 9 à 12 millimètres. En ovale court un peu large, déprimée en dessus. D'un noir un peu brillant, souvent verdâtre et quelquefois un peu cupreseent, avec des mouchetures blanches; couverte d'une pubescence d'un blanc plus ou moins grisâtre ou plus ou moins flave, beaucoup moins apparente en dessus qu'en dessous. Tête fortement ponctuée, carénée longitudinalement sur le front; chaperon en carré long, rebordé en avant et sur les côtés, un peu sinué antérieurement. Corselet subtrapézoïdal, avec un angle plus ou moins marqué vers le milieu des bords latéraux, densément ponctué, sauf sur la ligne médiane lisse et un tant soit peu saillante; de chaque côté de celle-ci, une série longitudinale de trois points-fossettes remplis de poils blancs. Écusson en triangle très aigu, ponctué sur sa base. Élytres marquées de quelques sillons longitudinaux et de points sur leurs intervalles; la suture est relevée en forme de côte et on voit sur le disque deux autres saillies costiformes, l'interne très courte, l'externe arrivant au calus apical; sur le bord, un peu après l'épaule, une forte échancrure; l'élytre est marquée d'un

grand nombre de petites taches de duvet blanc; celles du bord et du sommet plus grandes que celles du disque; pygidium également marqué de plusieurs taches blanches. Tibias antérieurs bidentés vers le bout dans les deux sexes. Les mâles se distinguent en ce que leur abdomen offre une dépression médiane longitudinale, où les quatre premiers segments présentent une tache de duvet blanc velouté. — Espèce extrêmement commune, parfois d'une abondance nuisible aux arbres fruitiers, dont elle dévore les fleurs. RD : Angleur, Embourg, Huy, Theux, Sprimont, Hestreux, Baraque-Michel. RG : Liége, Glain, Jemeppe, Hollogne-aux-Pierres, Chokier, Statte.

93. *Cetonia aurata*, L. — Longue d'environ 20 millimètres et large de 10; déprimée en dessus. D'un beau vert métallique brillant, très doré en dessous, moins en dessus. Dessous du corps et pattes revêtus de poils roux-doré. Tête carrée, arrondie en avant du chaperon, avec une sinuosité médiane; fortement ponctuée; le front portant des poils jaunes. Corselet presque trois fois aussi large à la base qu'en avant; côtés arrondis; base trisinuée; ponctuation forte et serrée sur les côtés, plus faible et plus espacée sur le disque. Écusson grand, triangulaire, lisse; une ligne de cils devant sa base. Élytres à côtés parallèles; suture lisse et costiforme; les vestiges plus ou moins apparents de deux autres côtes; marquées d'une quantité de points en forme de croissants, disposés presque en séries; outre quelques petites taches accessoires, sujettes à manquer, une sorte de feutre blanc forme sur chaque élytre trois taches rubanées étroites : la première paire après la moitié et touchant presque à la suture; la 3^{e} au quatrième quart et dans la même position; à égale distance entre les deux, la 2^{e} paire, composée de traits plus longs, un peu flexueux, assez éloignés de la suture, mais fort rapprochés du bord externe. Pygidium très rugueux. Le mésosternum forme entre les pattes intermédiaires une saillie en forme de pommeau globuleux, nullement aplati. Les mâles ont l'abdomen sillonné longitudinale-

ment au milieu. — RD : Angleur, Kineampoix, Tilff, environs de Visé, Villers-le-Temple, Huy. RG : Val-Benoît, Jemeppe, Chokier.

94. *C. ænea,* Andersch (*floricola* Herbst, *metallica* Erichs.). — Taille d'environ 18 millimètres. De la même forme et presque de la même couleur que l'espèce précédente; d'une nuance plus bronzée et le dessous plutôt cuivreux-rougeâtre que doré ; la pubescence plus flave que rousse. Le chaperon et le front ont leur partie centrale faiblement relevée en carène obtuse. Ponctuation du corselet relativement plus dense; celle des élytres clairsemée aux abords de l'écusson. Vers le bout, le même système de taches étroites transverses; le disque notablement enfoncé en arrière des deux côtés de la suture. Pygidium rugueux. Saillie mésosternale non plus globuleuse, mais aplatie en un petit disque tronqué en avant, arrondi latéralement, finement ponctué. — Rare. Je n'ai pas d'indications de localités précises pour cette espèce, mais j'en ai sous les yeux des exemplaires pris aux environs de Liège par M. J. Bourdon et par feu Wesmael.

95. *Osmoderma eremita,* L. — Taille d'environ 30 millimètres. Large et très massif. D'un noir brunâtre faiblement violacé et quelque peu métallique. Tête très grossièrement ponctuée; le chaperon arrondi en avant; chez le mâle, les côtés forment une crête saillante avant les yeux. Corselet assez large et assez bombé, ayant sa plus grande largeur au premier tiers antérieur; les angles postérieurs saillants chez le mâle, obtusément arrondis chez la femelle; la base formant un large lobe postérieur; la surface fortement et assez densément ponctuée; un sillon longitudinal médian, dont les bords forment en avant deux petits tubercules, à côté de chacun desquels il en existe un autre extérieur, plus faible et souvent même absent chez la femelle. Écusson triangulaire, très grand, ayant un sillon lisse au milieu, et ailleurs une ponctuation forte. Élytres couvertes entièrement de rugosités et de points assez confus. Le

pygidium et le dessous du corps à ponctuation moins marquée. Chez le mâle, le pygidium est très bombé et son sommet est recourbé en dessous vers l'abdomen; un autre caractère du même sexe est la présence d'une dent saillante sous chacun des quatre premiers articles des tarses antérieurs. — Très rare. RD : Tihange (M. Cluysenaar). RG : Jemeppe, Grâce-Berleur, Waremme (M. de Selys Longchamps).

96. *Gnorimus variabilis*, L. — Taille d'environ 20 millimètres. Noir intense, avec une pubescence blanc-grisâtre en dessous, surtout à la poitrine; sur les élytres, quelques petites taches grises formant deux séries obliquement transversales, se croisant vers le milieu de la suture; des taches semblables aux bords des segments abdominaux et du pygidium. Tête et corselet densément et assez fortement ponctués. Élytres rugueuses. Pygidium couvert de petites rides. Celui du mâle bombé et un peu recourbé en dessous; celui de la femelle échancré au bout. Les mâles ont aussi les tibias intermédiaires fortement recourbés, tandis qu'ils sont à peu près droits chez les femelles. — Très rare. Un exemplaire provenant de la province de Liége, sans autre indication, se trouve dans la collection Wesmael.

97. *Gn. nobilis*, L. — Taille d'environ 17 millimètres. Vert métallique brillant, plus ou moins cuivreux en dessous, où il y a aussi une pubescence gris-jaunâtre. Tête et corselet densément ponctués; les élytres très rugueuses; le pygidium couvert d'aspérités. Caractères sexuels du pygidium et des tibias intermédiaires comme chez l'espèce précédente. — RD : Huy, Tihange, Bleyberg. RG : Jemeppe, Chokier.

98. *Trichius fasciatus*, L. (*succinctus*, Gory et Percheron). — Taille d'environ 13 millimètres. Noir, avec la partie postérieure de la tête, le corselet, le pygidium et tout le dessous du corps revêtus d'une abondante et assez longue villosité d'un blanc plus ou moins jaunâtre. Écusson noir. Élytres

jaunes, avec la suture et le bord externe noirs, ainsi que trois fascies transverses ; la première, généralement étendue à toute la base, peut : 1° être divisée en deux par un trait jaune ; 2° être réduite à une tache humérale, suivie vers l'écusson d'un petit trait noir séparé ; 3° être simplement réduite à une tache humérale, comme celle du *Tr. abdominalis*. La deuxième fascie médiane, généralement contiguë au bord externe, n'atteint que très rarement la suture et présente quelquefois un trait séparé entre son extrémité et la suture. La troisième est constituée par deux taches rondes apicales externes, plus ou moins réunies. Il y a enfin des variétés, où des traits noirs longitudinaux viennent réunir, soit les deux fascies postérieures, soit toutes les trois, et réduire considérablement l'espace jaune. Angles postérieurs du corselet bien arrondis. Tibias intermédiaires pourvus au milieu d'une dent bien apparente. Le mâle a les tibias antérieurs un peu rétrécis vers le sommet, faiblement bidentés au bout extérieurement, tandis que leur éperon terminal interne reste toujours de beaucoup plus court que le premier article du tarse. Au contraire, la femelle a le tibia antérieur élargi et fortement bidenté au bout à l'extérieur, en même temps qu'un fort éperon interne y dépasse le premier article du tarse. — RD : Spa, Sart, Hestreux, Hertogenwald.

99. *Tr. abdominalis*, Ménétriés (*gallicus*, Dej., *fasciatus*, Gory et Pereh.). — Taille de 11 à 14 millimètres. Noir, avec le derrière de la tête, le corselet, tout le dessous du corps densément couverts d'une forte villosité flave ; au pygidium également velu, le centre l'est moins longuement, d'où résulte une sorte de tache ronde. Écusson noir. Élytres jaunes, avec la suture et le bord externe noirs, ainsi que trois paires de taches contiguës au bord externe ; celles de la première paire ne s'étendant jamais en fascie basale ; les deux autres paires parfois prolongées vers la suture, élargies et réunies par des traits longitudinaux. Angles de la base du corselet presque droits. Tibias intermédiaires mutiques ou pourvus seulement d'une

dent assez peu marquée. Caractères sexuels les mêmes que chez l'espèce précédente. — RD : Ougrée, Angleur, Tilff, environs de Visé, Huy. RG : Liège, Val-Benoît, Saint-Nicolas, Jemeppe, Chokier, Ampsin, Landen.

100. *Valgus hemipterus*, L. — Taille d'environ 8 millimètres. Ovale-oblong et d'aspect un peu anguleux, avec la partie centrale des élytres absolument aplatie. Noir et couvert en dessus de squamules noires, entremêlées de squamules d'un blanc sale, formant diverses taches sur la tête, le corselet et les élytres. Squamules blanches couvrant tout le pygidium, sauf deux taches noires chez le mâle. Dessous du corps revêtu de squamules blanchâtres. On trouve quelquefois des exemplaires dont la couleur foncière est brun-rougeâtre. Corselet avec un large sillon médian, s'évasant en arrière et bordé par deux arêtes saillantes. La femelle se reconnaît immédiatement par un caractère exceptionnel, la présence au bout du pygidium d'un ovipositeur ou longue tarière dirigée horizontalement en arrière. — RD : Embourg, Méry, Fond-de-Forêt, Huy. RG : Liège, Val-Benoît, Jemeppe, Flémalle-Grande, Flémalle-Haute, Engis, Hollogne-aux-Pierres, Glain, Loën.

CORRECTIONS

POUR LES CENTURIES PRÉCÉDENTES.

CENTURIE I.

N° 14, *au lieu de :* RG, *lisez :* RD.

CENTURIE III.

N° 25, *au lieu de :* Michel, *lisez :* Miedel.

SUR

LE CALCUL DU RÉSULTAT

D'UN SYSTÈME D'OBSERVATIONS DIRECTES

PAR

P. PIZZETTI,

PROFESSEUR DE GÉODÉSIE A L'UNIVERSITÉ DE GÊNES.

SUR

LE CALCUL DU RÉSULTAT

D'UN SYSTÈME D'OBSERVATIONS DIRECTES (*).

1. Toute théorie des erreurs d'observation se fonde sur le principe que : un système d'observations directes étant donné, la valeur la plus convenable, qui en résulte pour la quantité mesurée, doit être représentée par une certaine fonction $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ *assignable à priori* (**), des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fournis par les observations.

La *moyenne arithmétique,* comme expression de cette valeur plus convenable est presque généralement admise et sert de base à la théorie ordinaire des moindres carrés. Mais, dans une recherche tout à fait générale, il est évident que l'assignation de la fonction φ est extrêmement vague et incertaine, et que tout effort, tendant à démontrer l'acceptabilité générale de la *moyenne arithmétique* ou de toute autre *moyenne,* doit nécessairement échouer.

(*) Présenté à la séance du 22 novembre 1887.

(**) A l'égard de cette *assignabilité à priori* de la fonction φ, on doit faire quelques réserves. On n'entend pas que l'on puisse assigner *à priori* une telle forme de φ qui s'adapte à tous les cas possibles, quelle que soit l'espèce de la quantité mesurée, et quelles que soient les méthodes expérimentales employées et leur précision. Dans une recherche générale on doit retenir seulement que la forme de la valeur la plus convenable de φ puisse être assignée dès que l'on connaît le nombre et le genre des observations et leur précision relative. Rien n'empêche que pour un genre donné d'observations, l'expérience ne puisse démontrer l'imperfection d'une forme de φ précédemment établie, et conduire l'observateur à une autre forme plus convenable.

Les recherches les plus remarquables que l'on ait faites, à l'égard du problème qui nous occupe, sont celles qui s'appuient sur le Calcul des Probabilités. Elles sont très connues. Gauss, dans ses premières études sur la combinaison des observations (*Theoria motus corporum cœlestium*) et Laplace, dans son immortel ouvrage sur la *Théorie analytique des Probabilités* (livre II, chap. IV, n° 23), ont fixé deux différents principes, moyennant lesquels on peut déterminer la valeur la plus convenable, si l'on connaît la *loi de probabilité* des erreurs. Quoique le problème soit ainsi assez bien défini, l'indétermination de ladite *loi de probabilité* nous empêche encore cependant de regarder comme déterminée la forme de la fonction φ. Des principes des Probabilités, on peut tirer seulement cette conclusion presque générale: si les erreurs positives et les erreurs négatives se présentent avec une égale facilité, la *vraie* valeur de la quantité mesurée est donnée par la *moyenne arithmétique,* pourvu que le nombre des observations soit infini. Ce résultat est une conséquence directe du théorème de Jacques Bernoulli sur les épreuves répétées.

Si l'on fait abstraction des méthodes fournies par le Calcul des Probabilités, on peut, de même, arriver à la détermination, ou du moins, à certaines limitations de la forme de la fonction φ. On y parvient en obligeant la valeur la plus convenable à satisfaire à des conditions ou à des *postulats,* qu'on admet *à priori* comme nécessaires en général.

Les plus remarquables entre ces postulats sont les suivants :

a) Le résultat le plus convenable φ est une fonction symétrique des résultats $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fournis par les observations, pourvu que celles-ci soient d'égale précision (*);

b) Lorsque toutes les valeurs observées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont multipliées par un même facteur c, le résultat φ doit être multiplié par c;

c) Lorsqu'on ajoute à toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une même quantité k, le résultat φ doit aussi augmenter de k;

(*) Lorsque la *loi de probabilité* n'est pas connue, on entend par observations d'égale précision, celles dont on doit accepter les résultats avec une égale confiance.

d) Si les observations conduisent à des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ égales entre elles, la fonction φ égale la valeur commune des quantités x (*).

(*) La démonstration donnée par Encke (*Astronomische Nachrichten*, 1834-37) de l'admissibilité générale de la moyenne arithmétique repose sur ce postulat : la valeur la plus convenable du résultat de *deux* observations, est leur moyenne arithmétique. Il n'y a, à notre avis, aucune difficulté à admettre ce postulat, mais la démonstration présente, dans la suite du raisonnement, des imperfections qui en détruisent quasi l'importance. Voir à ce sujet les observations faites par M. G.-V. Schiaparelli dans une Note publiée dans les *Rendiconti dell' Istituto Lombardo*, anno 1868.

Dans cette même Note M. Schiaparelli a donné deux démonstrations différentes et très ingénieuses de la moyenne arithmétique, en admettant les postulats suivants :

Pour la première démonstration, les postulats *a*), *b*), *c*) ci-dessus énoncés, et, de plus, une autre condition qui peut s'énoncer ainsi : Si, en mesurant deux quantités X, Y de la même espèce, on a obtenu les observations d'égale précision $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour la première, $y_1, y_2, \dots, y_n$ pour la seconde, et, si $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$, $\varphi(y_1 y_2 \dots y_n)$ sont les valeurs les plus convenables à choisir pour les quantités X, Y, la valeur la plus convenable de la somme X + Y doit s'exprimer par

$$\varphi(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \dots,\ x_n + y_n).$$

Dans sa seconde démonstration M. Schiaparelli se fonde sur ces deux postulats : 1° la valeur la plus convenable à tirer de *deux* observations est leur moyenne arithmétique ; 2° si l'on appelle $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n valeurs fournies par des observations directes d'égale précision, pour une certaine quantité mesurée, et si $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$ est la valeur la plus convenable, cette valeur peut aussi être exprimée par $\varphi(x'_1 x'_2 \dots x'_n)$, où $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ sont les moyennes arithmétiques suivantes :

$$x'_1 = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n-1}; \qquad x'_2 = \frac{x_3 + x_4 + \cdots + x_n + x_1}{n-1}$$

$$x'_3 = \frac{x_4 + \cdots + x_n + x_1 + x_2}{n-1}; \quad \text{etc.}; \quad x'_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

En d'autres termes, les quantités $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ peuvent être regardées comme des valeurs fournies par des observations directes, auxquelles on peut appliquer la même forme de fonction φ, que l'on applique aux observations $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pourvu qu'on fasse quelques réserves sur l'interprétation à donner au postulat *b*), tous ces postulats peuvent, du reste, à notre avis, être généralement acceptés sans restriction. Mais ils ne suffisent pas, hâtons-nous de le dire, pour déterminer la forme générale de la fonction φ; ils démontrent seulement certaines propriétés analytiques remarquables de cette même fonction. Dans cette note nous avons développé quelques-unes de ces propriétés, dont nous nous sommes, ensuite, servis pour faire une recherche assez simple et commode de la différence qui existe entre la moyenne arithmétique et quelque autre forme que ce soit de la fonction φ, qui obéisse aux postulats *a*), *b*), *c*), *d*) (*).

Nos formules serviront, si nous ne nous trompons pas, à démontrer sous un nouveau point de vue, les avantages que la moyenne arithmétique présente dans la plupart des cas.

2. Une fois admis qu'on puisse assigner *à priori* la fonction $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ qui exprime le résultat le plus convenable d'un système d'observations directes, l'acception du postulat *a*) en résulte comme une conséquence nécessaire. En effet, *à priori*, les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent, indifféremment, indiquer les observations rangées dans un certain ordre ou dans un ordre quelconque. C'est-à-dire, que $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ ne doit pas varier si l'on permute, d'une manière quelconque, les valeurs numériques substituées aux lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La fonction φ est donc symétrique par rapport à ces lettres x.

Lorsque la forme de φ est déduite du Calcul des Probabilités, par le principe de Gauss ou par celui de Laplace, elle est nécessairement symétrique par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Quoique ces principes des deux illustres géomètres soient très connus, nous les rappellerons toutefois en peu de mots.

(*) Nous devons à M. le général G. Ferrero (*Esposizione del Metodo dei minimi quadrati*) l'idée ingénieuse et très instructive de comparer la moyenne arithmétique avec d'autres formes de *moyennes*, à l'aide d'un développement en série. Nos formules simplifient beaucoup cette comparaison.

Soit $\psi(z)$ la probabilité relative de l'erreur z, ou, plus exactement $\psi(z)dz$ la probabilité que l'erreur d'une observation tombe entre les valeurs z et $z+dz$. Si l'on a effectué les observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la probabilité que φ soit la vraie valeur de la quantité mesurée (en vertu du théorème de Bayes sur la probabilité des hypothèses) est propotionnelle au produit

$$\psi(\varphi - x_1) \cdot \psi(\varphi - x_2) \ldots \psi(\varphi - x_n).$$

La valeur la plus convenable pour φ est, selon Gauss, celle qui correspond au maximum de cette probabilité. Si l'on dénote par $F(z)$ la fonction

$$\frac{1}{\psi(z)} \frac{d \cdot \psi(z)}{dz},$$

la fonction φ, est, en conséquence, déterminée par l'équation :

$$F(\varphi - x_1) + F(\varphi - x_2) + \cdots + F(\varphi - x_n) = 0. \tag{1}$$

Il est évident que l'expression (ou les expressions, s'il y a plus d'une solution) qu'on tire de cette équation, pour φ, n'est pas sujette à varier lorsqu'on permute arbitrairement les quantités x.

Les notations étant les mêmes, Laplace détermine la fonction φ de manière que le *risque total d'erreur* soit minimum. Cette condition est vérifiée lorsque φ est déterminé par l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^{\varphi} \psi(y - x_1) \cdot \psi(y - x_2) \ldots \psi(y - x_n) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{b} \psi(y - x_1) \cdot \psi(y - x_2) \ldots \psi(y - x_n) dy, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où a et b sont les limites extrêmes entre lesquelles la vraie valeur de la quantité mesurée peut être comprise (*).

(*) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les valeurs observées, et si l'on suppose que la vraie valeur de la quantité mesurée soit φ, le produit

$$H \cdot \psi(y - x_1) \cdot \psi(y - x_2) \ldots \psi(y - x_n), \tag{α}$$

(où H est une constante) dénote la probabilité que l'hypothèse φ soit affectée de l'erreur : $y - \varphi$. La valeur absolue de la différence $y - \varphi$, mesure, selon

Si l'on indique, respectivement, par x_r, x_s la plus grande et la plus petite des valeurs x observées, et par $-\varepsilon$, ε' les limites de l'erreur d'observation, on a

$$a = x_r - \varepsilon, \quad b = x_s + \varepsilon'.$$

Pour toute valeur de y comprise entre a et b, les facteurs du produit, qui se trouve sous les intégrales dans l'équation (2), sont tous positifs et différents de zéro. Lorsque $y = a$, le facteur $\psi(a - x_r)$ s'annule; lorsque $y = b$, c'est $\psi(b - x_s)$ qui devient égal à *zéro;* car ces deux facteurs expriment les probabilités des erreurs limites $-\varepsilon$, ε'.

L'expression de φ, déterminée par l'équation (2), est, elle aussi, symétrique par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La théorie de Gauss, aussi bien que celle de Laplace, conduisent, comme il est connu, au principe de la moyenne arithmétique, lorsqu'on admet que la loi de probabilité des erreurs est donnée par la fonction :

$$\psi(z) = \mathrm{A}e^{-h^2z^2}.$$

3. Le postulat b) exige que, en multipliant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par un nombre constant c, la valeur φ soit aussi multipliée par ce même nombre. On doit entendre ce postulat à ce titre, que : si l'on fait varier dans le rapport de c à 1 l'unité de mesure

Laplace, la *perte* ou le *désavantage* correspondant à la même erreur. Le *risque mathématique total,* relatif à l'hypothèse $y = \varphi$, s'obtient alors, suivant les principes du Calcul des Probabilités, en multipliant les valeurs numériques de toutes les erreurs possibles par leurs probabilités respectives. Ce risque total est donc

$$\int_a^\varphi (y - \varphi)\,.\,\psi(y - x_1)\ldots\psi(y - x_n)dy + \int_\varphi^b (\varphi - y)\,.\,\psi(y - x_1)\ldots\psi(y - x_n)dy. \quad (\beta)$$

Les limites a et b sont les valeurs de y qui annulent la probabilité (α). Cela posé, il est évident que, en différentiant (β) par rapport à φ, on obtient, comme condition du minimum du risque total, l'équation (2) donnée dans le texte. Nos notations sont quelque peu différentes de celles de Laplace.

adoptée pour la quantité à mesurer, la grandeur absolue de la valeur la plus convenable doit rester inaltérée, de manière que, pendant que les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont multipliées par c, la fonction φ est aussi multipliée par ce même rapport.

Si la fonction φ peut se mettre sous la forme

$$\varphi = x_r \,.\, \mathrm{F}\left(\frac{x_1}{x_r},\ \frac{x_2}{x_r},\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_r}\right), \tag{5}$$

où F est une fonction quelconque, le postulat b est aussitôt vérifié. Si la fonction φ n'est pas réductible à la forme (5), et si, d'autre part, il y a *homogénéité géométrique* entre les différents termes de la relation

$$\varphi = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

il est nécessaire que le second membre de cette relation contienne des constantes $h, k, \ldots$ qui représentent des grandeurs physiques, de la même espèce que la quantité mesurée; de manière que les rapports

$$\frac{\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)}{h},\quad \frac{\varphi(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)}{k},\quad \text{etc.}, \tag{R}$$

soient des nombres abstraits (*). S'il est ainsi, lorsqu'on change l'unité de mesure dans le rapport de c à l'unité, les rapports (R) restent inaltérés, pendant que les $h, k, \ldots$ restent multipliées par c. La φ résulte par conséquence, multipliée par ce même nombre c.

(*) Il est évident, par exemple, que les deux relations

$$\varphi = p(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \frac{q}{k}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

$$\varphi = h\left\{\sin\frac{x_1}{k} + \sin\frac{x_2}{k} + \cdots + \sin\frac{x_n}{k}\right\}$$

seraient absurdes, si les h et k n'expriment pas des grandeurs de la même espèce que les x. Cela posé, ces relations restent inaltérées l'orsqu'on change l'unité de mesure dans le rapport de c à 1, car, pendant que les x sont multipliées par c, les h, k subissent le même sort, et par suite, φ est aussi multipliée par c.

Si pourtant on donne au postulat b) l'interprétation que nous venons d'y attacher, ce postulat n'impose à la fonction $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ nulle autre restriction, que la condition élémentaire de l'homogénéité géométrique entre les différents termes de la relation

$$\varphi = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Mais le même postulat peut, hâtons-nous de l'avouer, recevoir aussi une interprétation différente. Ce postulat peut, en effet, signifier que : si au lieu des grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a observé des quantités de la même espèce, mais c fois plus grandes (en grandeur absolue) $cx_1, cx_2, \ldots, cx_n$, la valeur la plus convenable de la nouvelle quantité à déterminer doit être exactement c fois plus grande que la valeur φ qui convient aux observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on donne cette signification au postulat b), les seules formes de la fonction φ, qui lui satisfont sont celles représentées par l'équation (3). Mais, à notre avis du moins, le postulat b), avec cette nouvelle interprétation, ne peut pas être admis *à priori* en manière générale. Lorsque, en effet, on passe d'un système de mesures $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, qui présentent de certains écarts, à un autre $(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$, qui présentent des écarts c fois plus grands, la *précision* des mesures est tout à fait différente; et on ne peut pas prétendre *à priori* (dans une discussion générale) qu'une même fonction, avec les mêmes constantes numériques, puisse exprimer la valeur la plus convenable, aussi bien dans l'un des cas que dans l'autre.

En négligeant cette seconde interprétation de l'hypothèse b), nous pourrons nous passer, dans ce qui suit, de tenir compte de ce même postulat.

4. Nous venons maintenant au postulat c) qui, à notre avis, n'est sujet à aucune objection. Ce postulat exige que si l'on ajoute aux quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une même quantité k, la valeur la plus convenable s'augmente aussi de k; cela peut s'exprimer analytiquement ainsi :

$$\varphi + h = \varphi(x_1 + h,\ x_2 + h,\ \ldots,\ x_n + h),$$

ou bien, en développant par le théorème de Taylor

$$h = hA + \frac{h^2}{1\,.\,2}B + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}C + \cdots \tag{3}$$

où l'on a fait :

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\\
B &= \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial x_n} = \sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_r^2} + 2\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_r\partial x_s}\\
C &= \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial x_n} = \sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_r^3} + 3\sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_r^2\partial x_s} + 6\sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_r\partial x_s\partial x_n},
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

etc.

L'équation (3) devant se vérifier, quel que soit h, il faut que l'on ait

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \text{etc.}$$

Mais, la première de ces conditions remplie, les autres s'en déduisent identiquement en vertu des formules (4). Donc la relation $A = 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 1, \tag{5}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que le postulat *c*) soit vérifié.

L'intégration de l'équation (5) conduit tout de suite, par les règles élémentaires sur les équations aux dérivées partielles, à l'intégrale générale

$$\Phi(\varphi - x_1,\ \varphi - x_2,\ \ldots,\ \varphi - x_n) = 0, \tag{6}$$

où φ est une fonction arbitraire. Le postulat *c*) exige donc que la fonction φ puisse se déduire en résolvant par rapport à φ une équation de la forme (6).

L'équation (1) établie par Gauss, à l'aide du Calcul des Probabilités, c'est-à-dire :

$$F(\varphi - x_1) + F(\varphi - x_2) + \cdots + F(\varphi - x_n) = 0,$$

est une forme particulière de l'équation (6). Donc les valeurs les plus probables déduites, selon le principe de Gauss, de toute loi de probabilité des erreurs, satisfont toutes, non seulement à la condition d'être des fonctions symétriques des observations, mais encore à l'équation différentielle (5) et, par suite, au postulat *c*). La *moyenne géométrique des observations,* et bien d'autres fonctions symétriques, considérées souvent, ne satisfont pas à l'équation (5) et ne peuvent, en conséquence, convenir à aucune loi de probabilité des erreurs.

Les valeurs de φ que l'on peut calculer suivant le principe de Laplace, mentionné au § 2, satisfont aussi à l'équation (5). Différentions, en effet, les deux membres de l'équation (2) soit par rapport à x_1, soit à x_2, etc , soit à x_n, et ajoutons les dérivées. Dans ces différentiations on doit considérer aussi bien la fonction φ que les a et b comme des fonctions de $x_1, x_2, ..., x_n$; car, lorsque les observations x varient, les limites a et b (voir § 2) doivent aussi varier. Dénotons pour abréger, par P_y la fonction qui se trouve sous les intégrales dans l'équation (2), et par P_φ, P_a, P_b ce que devient la même fonction, lorsqu'on substitue φ, a, b à y. Nous aurons

$$\frac{\partial P_y}{\partial x_1}+\frac{\partial P_y}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial P_y}{\partial x_n}=-\frac{d}{dy}\left\{\psi(y-x_1)\,.\,\psi(y-x_2)\ldots\psi(y-x_n)\right\}.$$

Et, par conséquent, la somme des dérivées partielles de l'équation (2) donnera :

$$\left.\begin{aligned}P_\varphi\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}-P_a\sum\frac{\partial a}{\partial x_r}-\int_a^\varphi\frac{d}{dy}(P_y)dy=\\=\frac{1}{2}P_b\sum\frac{\partial b}{\partial x_r}-\frac{1}{2}P_a\sum\frac{\partial a}{\partial x_r}-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d}{dy}(P_y)dy.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Si l'on observe que, par les remarques faites au § 2, on a

$$P_a=0,\quad P_b=0,$$

et l'équation (7) nous donnera :

$$P_\varphi\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}=P_\varphi.$$

Et puisque φ, comme on doit nécessairement l'admettre, est comprise entre les limites a et b, et que, par suite, elle ne peut pas être *zéro*, on aura

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = 1,$$

ce qui coïncide avec l'équation (5). C. Q. F. D.

5. Nous admettrons encore le postulat d), c'est-à-dire la condition que, si les observations sont toutes égales entre elles, la valeur la plus convenable φ est aussi égale à la valeur commune des observations. Si l'on pose

$$\varphi - x_1 = z_1, \quad \varphi - x_2 = z_2, \quad \text{etc.}, \quad \varphi - x_n = z_n,$$

les postulats a), c), d) sont tous vérifiés, pourvu que la fonction φ soit tirée d'une équation de la forme

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \tag{8}$$

où F est une fonction symétrique par rapport aux lettres z, qui s'annule lorsqu'on y pose

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0.$$

Cette dernière condition correspond, évidemment, au postulat d).

6. Les conditions énoncées au paragraphe précédent étant remplies, il existe des relations remarquables entre les valeurs que les dérivées partielles de la φ prennent, lorsque, après les différentiations, on pose

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Puisque φ est symétrique par rapport aux lettres x, si, après les différentiations, on rend toutes les x égales entre elles, on aura :

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \cdots = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \cdots = \dfrac{\partial^2 \varphi}{d x_r^2} = \cdots; \quad \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \cdots = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} = \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3} = \cdots = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_r^3} = \cdots; \quad \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_3} = \cdots = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_r^2 \partial x_s} = \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_n} = \cdots = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x_r \partial x_s \partial x_n} = \cdots
\end{array}\right\} \tag{9}$$

D'autre part on a, dans notre cas :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 1.$$

En différentiant successivement par rapport à x_1 et à x_2 :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \cdots + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \cdots + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_n} = 0.$$

Si dans ces dérivées on pose

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n,$$

on aura donc, en vertu des équations (9) :

$$n\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + (n-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} + (n-1)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0, \quad 2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (n-2)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 0. \tag{11}$$

Si, en particulier,

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \zeta \tag{12}$$

sont les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_2^2 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3},$$

lorsque, après les dérivations on substitue, à toutes les lettres x_1, x_2, ..., x_n leur moyenne arithmétique X, on aura donc :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n}, & \gamma &= \frac{\beta}{n-1}, \\ \varepsilon &= -\frac{\delta}{n-1}, & \zeta &= \frac{2\delta}{(n-1)(n-2)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

On peut trouver des relations analogues entre les dérivées des ordres successifs.

7. Nous pouvons maintenant, à l'aide d'un développement en série, comparer très commodément avec la *moyenne arithmétique* une autre forme quelconque de φ, qu'on tire d'une équation de la forme (8).

Appelons X la moyenne arithmétique des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et posons

$$x_1 = X + t_1; \quad x_2 = X + t_2; \quad \text{etc.}; \quad x_n = X + t_n.$$

Nous aurons :

$$\Sigma\, t_r = 0; \tag{14}$$

$$\Sigma\, t_r^2 + 2\,\Sigma\, t_r t_s = 0; \tag{15}$$

$$\Sigma\, t_r^3 + \Sigma\, t_r^2 t_s = 0; \quad \Sigma\, t_r^2 t_s + 3\,\Sigma\, t_r t_s t_u = 0. \tag{16}$$

d'où l'on tire

$$\sum t_r^2 t_s = -\sum t_r^3, \qquad \sum t_r t_s t_u = \frac{1}{3}\sum t_r^3. \tag{16bis}$$

On a la formule (15) en élevant au carré l'équation (14) ; la première des équations (16) s'obtient en multipliant $\Sigma\, t_r^2$ par $\Sigma\, t_r$; la seconde des équations (16) en multipliant $\Sigma\, t_r t_s$ par $\Sigma\, t_r$.

Si maintenant

$$\varphi = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

est une relation obtenue en résolvant l'équation (8) par rapport à φ, on aura, par le développement de Taylor :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \varphi(X,\ X \ldots X) + \sum t_r \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} \\
&+ \frac{1}{1\,.\,2}\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + t_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \varphi \\
&+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + t_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^3 \varphi + \text{etc.},
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

où l'on a employé une notation symbolique très connue. On entend, cela va sans dire, que, après les différentiations, on doit mettre la moyenne X à la place des $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En rappelant les notations (12) établies au paragraphe précédent, et en observant que, en vertu du postulat d), on a :

$$\varphi(X, X \ldots X) = X,$$

le développement (17) devient

$$\left.\begin{aligned} \varphi - X = \alpha \sum t_r + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\beta \sum t_r^2 + 2\gamma \sum t_r t_s\right) \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\delta \sum t_r^3 + 3\varepsilon \sum t_r^2 t_s + 6\zeta \sum t_r t_r t_u\right) \\ + \;.\;.\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Le calcul de ce développement, même des deux premiers termes, est, en général, très compliqué. Nos formules le simplifient beaucoup. Éliminons, en effet, de l'équation (18), au moyen des formules (13), (14), (15), (16^{bis}), les quantités

$$\alpha, \quad \gamma, \quad \varepsilon, \quad \zeta, \quad \Sigma\, t_r, \quad \Sigma\, t_r t_s, \quad \Sigma\, t_r^2 t_s, \quad \Sigma\, t_r t_s t_u.$$

En réduisant, on obtiendra :

$$\varphi - X = \frac{1}{2}\,\frac{n}{n-1}\,\beta \sum t_r^2 + \frac{1}{6}\,\frac{n^2}{(n-2)(n-1)}\,\delta \sum t_r^3 + \cdots, \quad (19)$$

où β et δ ont les significations données dans le paragraphe précédent.

8. Si les observations jouissent d'un certain degré de précision, les écarts $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des quantités assez petites pour que les termes écrits dans le second membre de l'équation (15) donnent une expression assez approchée de la différence $\varphi - X$. Il n'est pas difficile cependant de calculer, s'il est nécessaire, les termes des ordres successifs : il suffit, à cet effet, après avoir écrit la forme générale de ces termes, d'éliminer, à l'aide des relations analogues aux équations (13), (14), (16), le plus grand nombre possible des dérivées partielles et des fonctions symétriques des t, qui successivement se présentent. Nous donnons ici les résultats des calculs relatifs au terme du quatrième ordre, sans en donner la démonstration, car elle ne présente aucune difficulté. Soient :

$$\eta, \quad \vartheta, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

les valeurs que prennent les dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^3 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4},$$

lorsque, après les différentiations, on pose X au lieu de chaque lettre x. On a :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta &= -\frac{1}{n-1}\eta, \\
\mu &= \frac{1}{(n-1)(n-1)}\eta - \frac{1}{n-2}\lambda, \\
\nu &= -\frac{3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\eta - \frac{1}{(n-2)(n-3)}\lambda,
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Entre les fonctions symétriques, du quatrième ordre, des écarts t, existent, d'autre part, les relations :

$$\left.\begin{aligned}
\sum t_r^3 t_s &= -\sum t_r^4 \\
\sum t_r^2 t_s t_u &= \frac{1}{2}\sum t_r^4 - \sum t_r^2 t_s^2 \\
\sum t_r t_s t_u t_v &= -\frac{1}{8}\sum t_r^4 + \frac{1}{4}\sum t_r^2 t_s^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Le terme du quatrième ordre du développement (19) peut s'écrire, avec nos notations :

$$\frac{1}{1.2.3.4}\Big\{\eta \sum t_r^4 + 4\vartheta \sum t_r^3 t_s + 6\lambda \sum t_r^2 t_s^2 + 12\mu \sum t_r^2 t_s t_u + 24\nu \sum t_r t_s t_u t_v\Big\}.$$

En éliminant les quantités qui figurent dans les premiers membres des formules (20), (21), ce terme devient :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{1.2.3.4}\left\{\dfrac{n^3-2n^2-3n+9}{(n-1)(n-2)(n-3)}\eta\sum t_r^4+\dfrac{6(n^2-3n+3)}{(n-2)(n-3)}\lambda\sum t_r^2t_s^2\right.\\ \left.\qquad+-\dfrac{6(2n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\eta\sum t_r^2t_s^2-\dfrac{3(2n-3)}{(n-2)(n-3)}\lambda\sum t_r^4\right\}.\end{array}\right\} \quad (22)$$

9. Si l'on admet le principe de Gauss, mentionné dans le § 2, pour la recherche de la valeur la plus probable, la relation

$$\Phi(\varphi-x_1,\ \varphi-x_2,\ ..,\ \varphi-x_n)=0, \qquad (23)$$

dont on doit tirer l'expression de φ en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$, prend la forme

$$F(z_1)+F(z_2)+\cdots+F(z_n)=0, \qquad (24)$$

où l'on a posé :

$$\varphi-x_1=z_1,\quad \varphi-x_2=z_2,\quad ...,\quad \varphi-x_n=z_n, \qquad (25)$$

$$F(z)=\frac{1}{\psi(z)}\,\frac{d\,.\,\psi(z)}{dz},$$

$\psi(z)$ étant toujours la probabilité relative de l'erreur z.

Le postulat d) exige, comme il est évident, que $F(z)$ s'annule pour $z=0$, c'est-à-dire (pourvu que $\psi(z)$ ne soit pas infinie pour $z=0$) que la fonction de la probabilité des erreurs présente un *maximum* (ou un *minimum*) pour $z=0$.

Différentions trois fois successivement la formule (25) par rapport à x_1. Nous aurons :

$$\left.\begin{array}{l}\sum F'(z_r)\,.\,\dfrac{\partial z_r}{\partial x_1}=0\\ \sum F''(z_r)\,.\left(\dfrac{\partial z_r}{\partial x_1}\right)^2+\sum F'(z_r)\dfrac{\partial^2 z_r}{\partial x_1^2}=0\\ \sum F'''(z_r)\,.\left(\dfrac{\partial z_r}{\partial x_1}\right)^3+3\sum F''(z_r)\dfrac{\partial^2 z_r}{\partial x_1^2}+\sum F'(z_r)\dfrac{\partial^3 z_r}{\partial x_1^3}=0.\end{array}\right\} \quad (26)$$

Posons

$$\varphi = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = X,$$

et, par suite,

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0.$$

Les formules (24) nous donneront, en conservant les notations du § 6 :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial z_r}{\partial x_1} = n\alpha - 1; \quad \sum \frac{\partial^2 z_r}{\partial x_1^2} = n\beta; \quad \sum \frac{\partial^3 z_r}{\partial x_1^3} = n\delta,\\
&\sum \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_1^2}\right)^2 = n\alpha^2 - 2\alpha + 1,\\
&\sum \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_1}\right)^3 = n\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Et, puisque la première des formules (13) nous donne $\alpha = \frac{1}{n}$, on aura :

$$\sum \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_1}\right)^2 = \frac{n-1}{n}; \quad \sum \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_1}\right)^3 = -\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}.$$

Cela posé, si (comme nous le supposerons ici) $F'(z)$ ne s'annule pas pour $z=0$, les formules (26), en y posant

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0,$$

nous donneront

$$n\alpha - 1 = 0,$$

$$\frac{n-1}{n} F''(0) + n\beta F'(0) = 0,$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} F'''(0) + n\delta \,.\, F'(0) = 0,$$

dont la première n'est autre que la formule (13), tandis que les deux dernières nous donnent :

$$\beta = -\frac{n-1}{n^2} \frac{F''(0)}{F'(0)}; \quad \delta = \frac{(n-1)(n-2)}{n^3} \frac{F'''(0)}{F'(0)}. \qquad (28)$$

Après cela, le développement (19) devient

$$\varphi - X = -\frac{1}{2n} \frac{F''(0)}{F'(0)} \sum t_r^2 + \frac{1}{6n} \frac{F'''(0)}{F''(0)} \sum t_r^3 + \cdots \qquad (29)$$

En différentiant une fois par rapport à x_1, la troisième des formules (26), et deux fois par rapport à x_2 la deuxième des formules (26) mêmes, on obtient sans difficulté les expressions de η, λ qui figurent dans le terme de quatrième ordre calculé dans le § 8. Ces expressions calculées et substituées dans la formule (22), donnent à ce terme de quatrième ordre, la forme

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{24\,.\,n}\left\{\dfrac{F^{\text{IV}}}{F'}-\dfrac{3}{n}\left(\dfrac{2F''F'''}{(F')^2}-\dfrac{(F'')^3}{(F')^3}\right)\right\}\sum t_r^4 \\ -\dfrac{1}{4n^2}\left(\dfrac{2F''F'''}{(F')^2}-\dfrac{(F'')^3}{(F')^3}\right), \end{array}\right\} \tag{30}$$

où l'on a posé, pour simplifier, F′, F″, etc., au lieu de F′(0), F″(0), etc.

10. Bornons-nous, dans tout ce qui suit, à la considération des cas où la valeur la plus convenable φ est déduite d'une équation de la forme (25), et admettons, par suite, le principe de Gauss, en appliquant les formules du paragraphe précédent à des formes particulières de la fonction $\psi(z)$ qui donne la loi de probabilité des erreurs.

Si $\psi(z)$ prend la forme très répandue :

$$\psi(z)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2z^2}, \tag{31}$$

on a

$$F(z)=-2h^2z,$$

et le développement (29) donne exactement :

$$\varphi-X=0,$$

ce qui devait nécessairement se vérifier, car la formule (31), comme il est très connu, est la loi de probabilité des erreurs qui s'accorde avec le principe de la moyenne arithmétique.

11. Supposons maintenant :

$$\psi(z)=Ae^{k\left(\cos\frac{z}{h}-1\right)}. \tag{32}$$

Nous aurons :

$$F(z) = -\frac{k}{h}\sin\frac{z}{h},$$

$$\frac{F''(0)}{F'(0)} = 0; \quad \frac{F'''(0)}{F'(0)} = -\frac{1}{h^2}; \quad F^{\text{iv}}(0) = 0.$$

Par suite, le développement (29) donne

$$\varphi - X = -\frac{1}{6h^2n}\sum t_r^3 + \cdots \tag{33}$$

Les termes négligés dans le second membre sont du *cinquième* ordre au moins. Dans le cas de l'hypothèse (32), l'expression de φ, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, peut aussi s'obtenir sous forme exacte. En effet, la formule (25) devient en ce cas :

$$\sin\frac{\varphi - x_1}{h} + \sin\frac{\varphi - x_2}{h} + \cdots + \sin\frac{\varphi - x_n}{h} = 0,$$

d'où l'on tire sans difficulté :

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{h} = \frac{\sin\frac{x_1}{h} + \sin\frac{x_2}{h} + \cdots + \sin\frac{x_n}{h}}{\cos\frac{x_1}{h} + \cos\frac{x_2}{h} + \cdots + \cos\frac{x_n}{h}}.$$

12. Supposons que la la loi de probabilité des erreurs soit

$$\varphi(z) = Ae^{-h^2z^2 - h^2k^2z^4}, \tag{34}$$

qui correspond, ainsi que les deux précédentes (31) et (32), à l'hypothèse que chaque erreur positive se présente avec la même facilité que l'erreur négative qui a une égale valeur absolue. La formule (34) doit toutefois être considérée comme beaucoup plus générale que les formules (31), (32). On a dans ce cas :

$$F(z) = -2h^2z - 4h^2k^2z^3,$$

$$\frac{F''(0)}{F'(0)} = 0; \quad \frac{F'''(0)}{F'(0)} = 12 \,.\, k^2; \quad F^{\text{iv}}(0) = 0.$$

Et, par suite, la formule (29) devient

$$\varphi - X = \frac{2k^2}{n} \sum t_r^5 \qquad (35)$$

plus des termes du cinquième ordre.

Si les observations sont assez précises (comme il arrive d'ordinaire) pour que les termes du cinquième ordre soient négligeables, la formule (35) nous démontre combien peu la valeur la plus probable s'écarte de la moyenne arithmétique, toutes les fois que la formule (34) diffère peu de la loi commune de probabilité des erreurs (31). Dans ce cas, en effet, le terme $h^2k^2z^4$, dans l'exposant de e, doit être très petit vis-à-vis du terme h^2z^2, pour toutes les valeurs de z qui sont comprises entre les *limites réelles* (*) de l'erreur d'observation. Pour toutes ces valeurs de z la quantité k^2z^2 doit partant être très petite vis-à-vis de l'unité. Et les produits

$$k^2t_1^2, \quad k^2t_2^2, \quad \ldots, \quad k^2t_n^2,$$

seront des quantités du même ordre que kz^2 ; c'est-à-dire que les produits $k^2t_1^5$, $k^2t_2^5$, etc., $k^2t_n^5$ seront très petits vis-à-vis des écarts t_1, t_2, etc., t_n. Le deuxième membre de la formule (35) est, d'autre part, égal au double de la valeur moyenne de ces produits kt^5. Or, si l'on considère que les erreurs positives se présentent avec la même facilité que les négatives, la valeur moyenne des t^5 tend à s'annuler, et l'on se convaincra facilement de la petitesse de la différence $\varphi - X$.

Appliquons notre formule (35) au calcul de la valeur la plus probable dans l'exemple qui suit. On a fait 93 observations

(*) Il est clair que, bien que la formule (34) ne pose pas des limites *mathématiques* à la grandeur des erreurs, on peut toutefois concevoir, pour chaque système d'observation, une limite ζ qui ne sera jamais surpassée par la valeur absolue de l'erreur. On peut appeler *limites réelles* de l'erreur les deux quantités $-\zeta$, $+\zeta$.

d'égale précision, qui présentent les écarts suivants de leur moyenne arithmétique :

GRANDEUR des écarts.	NOMBRE des écarts.	GRANDEUR des écarts.	NOMBRE des écarts.
— 0	6	»	»
+ 1	4	— 1	10
+ 2	7	— 2	10
+ 3	9	— 3	5
+ 4	6	— 4	0
+ 5	4	— 5	6
+ 6	6	— 6	6
+ 7	2	— 7	3
+ 8	1	— 8	3
+ 9	1	— 9	3
+12	1	»	»

Ces nombres ne sont pas imaginés ; ils ont été réellement observés (*). On a :

$$\frac{\Sigma t^3}{n} = -9,5.$$

(*) Ces nombres sont empruntés au Mémoire de MM. Pisati et Pucci, *Sulla lunghezza del pendolo a secondi* (Memorie della R^a Accademia dei Lincei ; Roma, 1883 ; vol. XV, p. 100). Ils ont été obtenus comme il suit. On a observé 93 fois de suite le passage d'un pendule par la verticale, et puis, en ajoutant ou en soustrayant aux temps observés, des multiples convenables de la durée de l'oscillation, on a obtenu 93 valeurs différentes de l'instant du *passage moyen*. La durée de l'oscillation étant connue avec beaucoup de précision, lesdits *multiples*, que l'on a ajoutés ou soustraits, peuvent se considérer comme affectés par des erreurs tout à fait négligeables vis-à-vis des erreurs propres des observations des passages. Par cela les 93 valeurs différentes, obtenues, comme on l'a dit, pour l'instant du passage moyen, peuvent se considérer comme les résultats de 93 observations directes d'égale précision. Les nombres de notre tableau sont les écarts entre ces observations et leur moyenne. Le centième de *seconde* de temps est pris comme unité.

En calculant le coefficient k^2 par la méthode que nous donnerons au § 15, on trouve :

$$k^2 = 0,001657.$$

Cette valeur substituée dans le second membre de la formule (35) donne :

$$\varphi - X = -0,031 \text{ environ.}$$

Cette quantité est tout à fait négligeable, non seulement vis-à-vis des écarts des observations considérées, mais bien aussi par rapport à l'erreur accidentelle qui peut affecter la moyenne arithmétique des observations mêmes.

13. Nous considérerons maintenant le cas très commun et bien plus général que les précédents, où la fonction de probabilité des erreurs est seulement obligée à la condition

$$\psi(-z) = \psi(z). \tag{36}$$

Nous supposerons, de plus, que la fonction ψ ne soit pas *zéro* pour $z = 0$, et que la même fonction avec toutes ses dérivées soit finie et continue pour $z = 0$. Enfin, admettons encore que, en désignant comme ci-dessus, par $F(z)$ la fonction $\frac{1}{\psi(z)}\frac{d.\psi(z)}{dz}$, la première dérivée de $F(z)$ par rapport à z ne s'annule pas pour $z = 0$. Dans ces circonstances, il est évident qu'on aura, d'après la formule (36), ces autres relations :

$$\left.\begin{aligned} F\,(-z) &= -F\,(z) \\ F'(-z) &= \quad F'(z) \\ F''(-z) &= -F''(z) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

et ainsi de suite, de manière que toute dérivée d'ordre pair sera une fonction *impaire* et s'annulera pour $z = 0$, et toute dérivée d'ordre impair sera une fonction *paire*. Il n'est pas difficile de démontrer, à l'aide de ces considérations, que si la fonction $\psi(z)$ satisfait à la formule (36), le développement (29) perd nécessairement tous les termes d'ordre pair. Mais cette même propriété peut se démontrer d'une manière indirecte et fort simple, comme il suit.

A cause de la formule (37), la relation (25), c'est-à-dire

$$F(\varphi - x_1) + F(\varphi - x_2) + \cdots + F(\varphi - x_n) = 0, \qquad (25)$$

est encore vérifiée, si l'on change de signe aux lettres x de même qu'à φ. Une relation tirée de la formule (25), pour exprimer φ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ doit donc être telle, que φ se change identiquement en $-\varphi$ lorsqu'on change le signe des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mais si les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se changent en $-x_1$, $-x_2, \ldots, -x_n$, leur moyenne arithmétique X se change en $-$X et le premier membre de la formule (26) change, lui-même, seulement de signe. D'autre part, après cette transformation, les écarts t_1, $t_2, \ldots, t_n$ deviennent $-t_1, -t_2, \ldots, -t_n$. Il faut partant que, en changeant les signes des écarts t, chaque terme du deuxième membre de la formule (29) change, lui aussi, seulement de signe. Or cette condition est bien remplie par les termes de degré *impair* par rapport aux écarts t, pendant que, au contraire, les termes de degré *pair* ne changent ni de valeur ni de signe lorsqu'on change le signe des écarts t (*). Il est donc nécessaire que ces derniers termes s'annulent identiquement dans le développement. Ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, dans toute hypothèse, pour laquelle les erreurs positives et les négatives se présentent avec une égale facilité, la formule (29) devient :

$$\varphi - X = \frac{1}{6n} \frac{F''(0)}{F'(0)} \sum t_r^3 + \Omega, \qquad (38)$$

où l'on a réuni dans le symbole Ω les termes du cinquième degré par rapport aux écarts t, et tous les termes de degré *impair* supérieur au cinquième.

(*) Il faut bien se souvenir que les différents termes du développement (29) ne contiennent que les écarts t, le nombre n, et les valeurs $F'(0)$, $F''(0)$, etc., que les dérivées successives $F(z)$ prennent pour $z = 0$. Ces dernières valeurs ne sont pas sujettes à varier, lorsqu'on exécute les changements de signe dont il s'agit dans notre théorème.

Nous ne pouvons rien dire en général (*) à l'égard de la convergence du développement (38). Mais on peut cependant prévoir que dans tous les cas où les observations jouiront d'un certain degré de précision, les termes de ce développement, à partir du premier, diminueront rapidement, à cause de la petitesse des écarts t, et, le plus souvent, même le premier terme sera très petit, comme on l'a vérifié pour l'exemple numérique du paragraphe précédent.

En donnant à la fonction ψ des formes particulières (qui ne s'écartent pas trop des lois qui se vérifient expérimentalement dans la distribution des erreurs d'observation) on peut facilement se persuader que la différence $\varphi - X$ entre la valeur la plus probable et la moyenne arithmétique est fort petite, même si le nombre des observations est très limité. Dans la pratique, si l'on applique nos formules à des nombres donnés par l'expérience, il arrivera le plus souvent que cette différence $\varphi - X$ sera négligeable. On pourra affirmer dans ces cas, que la fonction $\psi(z)$ ne diffère pas sensiblement de $Ae^{-h^2z^2}$ pour toutes les valeurs de z qui correspondent à des erreurs possibles d'observation.

14. Si l'on a un système quelconque d'observations actuelles d'égale précision, et si l'on fait une hypothèse quelconque à l'égard de la forme de la fonction $\psi'(z)$, les formules des articles précédents peuvent nous servir à l'un de ces deux buts :

Soit à obtenir, par des calculs assez simples, la valeur la plus probable de la quantité mesurée;

(*) Nous nous passons de la considération du cas théorique où le nombre des observations croît sans limites. Si n est infini, et si, comme on suppose ici, $\psi(z) = \psi(-z)$, la moyenne arithmétique X donne la *vraie* valeur de la quantité observée, en vertu du Théorème de J. Bernoulli. Les écarts t sont alors les vraies erreurs d'observations, et ils tendent, en vertu de ce même théorème de Bernoulli, à se présenter de manière à être deux à deux égaux et de signe contraire. Par suite, les sommes $\Sigma\, t_r^3$, $\Sigma\, t_r^5$, $\Sigma\, t_r^4 t_s$, etc., de degré *impair*, qui figurent dans le deuxième membre de l'équation (38), deviennent *zéro*, pour n infini, et l'équation (38) donne $\varphi = X$, ce qui devait arriver.

Soit (ce qui arrivera le plus souvent) à démontrer que la différence entre cette valeur probable et la moyenne arithmétique est tout à fait négligeable vis-à-vis de l'erreur moyenne du résultat.

Dans tous les cas, une fois que l'on a choisi une certaine forme pour $\psi(z)$, l'assignation des constantes numériques qui figurent dans cette fonction n'est pas arbitraire, mais doit être faite en accord avec les résultats de l'expérience. Naturellement, c'est de la loi de la distribution des erreurs, telle qu'elle se présente dans le système d'observations qu'on traite, que doivent ressortir les *criteriums* pour la détermination approximative desdites constantes numériques. Il n'est pas possible de donner des règles générales sur les voies à suivre dans ces recherches, et, d'autre part, on ne peut espérer de parvenir qu'à des résultats d'une grande approximation, comme la nature du problème le comporte. Toutefois, nous ajoutons ici (comme exemple) des formules qui peuvent servir à une détermination très simple des constantes, lorsque la fonction choisie est la formule

$$\psi(z) = Ae^{-h^2z^2 - h^2k^2z^4}, \tag{34}$$

dont nous nous sommes occupé dans le paragraphe 12.

Pour beaucoup d'autres formes de $\psi(z)$, on peut aisément obtenir des formules semblables à celles que nous allons exposer pour la formule (34). Du reste, la formule (34) présente une généralité si grande vis-à-vis de la forme plus commune $Ae^{-h^2z^2}$, que l'étude de celle-là peut se considérer comme très intéressante pour un grand nombre de cas.

15. Dénotons par M_2 la moyenne arithmétique des carrés de toutes les erreurs dans un nombre infini d'observations. La racine carrée de M_2 sera ce que l'on appelle, suivant Gauss, l'*erreur moyenne* des observations.

Soient, de même, M_4, M_6, etc., les moyennes arithmétiques des quatrièmes, des sixièmes, etc., puissances des erreurs. On aura, en posant, pour simplifier :

$$e^{-h^2z^2-h^2k^2z^4} = \mathrm{Z},$$

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\mathrm{Z}dz, \tag{39}$$

$$\mathrm{M}_4 = \mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty} z^4\mathrm{Z}dz, \tag{40}$$

$$\mathrm{M}_6 = \mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty} z^6\mathrm{Z}dz, \tag{41}$$

et ainsi de suite.

La probabilité que l'erreur d'observation tombe entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ étant 1, on aura :

$$\mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Z}dz = 1. \tag{42}$$

La formule (35) donne, d'autre part :

$$\mathrm{M}_2 = \frac{\mathrm{A}}{2h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} z(2h^2z + 4h^2k^2z^3)\mathrm{Z}dz - 2\mathrm{A}k^2\int_{-\infty}^{+\infty} z^4\mathrm{Z}dz$$

$$= -\frac{\mathrm{A}}{2h^2}\Big[z\mathrm{Z}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\mathrm{A}}{2h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Z}dz - 2k^2\mathrm{M}_4.$$

De là, en tenant compte de la formule (42), et en observant que le produit $z\mathrm{Z}$ s'annule aux limites $z = \pm\infty$:

$$\mathrm{M}_2 = \frac{1}{2h_2} - 2k^2\mathrm{M}_4.$$

De même on peut écrire :

$$\mathrm{M}_4 = \frac{\mathrm{A}}{2h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} z^3(2h^2z + 4h^2k^2z^3)\mathrm{Z}dz - 2\mathrm{A}k^2\int_{-\infty}^{+\infty} z^6\mathrm{Z}dz$$

$$= \frac{3}{2h^2}\mathrm{M}_2 - 2k^2\mathrm{M}_6.$$

De la même manière, si n est un nombre *pair* quelconque, on obtient sans difficulté :

$$M_n = \frac{n-1}{2h^2} M_{n-2} - 2k^2 M_{n+2}. \tag{43}$$

Appelons ensuite M_1, M_3, M_5, etc., les moyennes arithmétiques des erreurs, de leurs troisièmes, cinquièmes puissances, etc., supposé qu'on ne considère que les valeurs absolues des erreurs mêmes. Si le nombre des observations est infini, comme précédemment, on aura :

$$M_1 = 2A \int_0^{\infty} zZdz; \quad M_3 = 2A \int_0^{\infty} z^3 Zdz, \quad \text{etc.,} \tag{44}$$

Il est facile de se persuader que la relation (43) subsiste aussi entre ces nouvelles moyennes; c'est-à-dire qu'elle est encore vérifiée pour n *impair;* le cas $n = 1$ fait, lui seul, exception. On a, en effet :

$$M_1 = \frac{A}{h^2} \int_0^{\infty} (2h^2 z + 4h^2k^2z^3) Zdz - 4Ak^2 \int_0^{\infty} z^3 Zdz = \frac{A}{h^2} - 2k^2 M_3.$$

Résumons maintenant les relations trouvées, en les rangeant par ordre, comme il suit :

$$\left.\begin{array}{ll} M_1 = \dfrac{A}{h^2} - 2k^2 M_3, & M_2 = \dfrac{1}{2h^2} = 2k^2 M_4, \\[2ex] M_3 = \dfrac{1}{h^2} M_1 - 2k^2 M_5, & M_4 = \dfrac{3}{2h^2} M_2 - 2k^2 M_6, \\[2ex] \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\[2ex] \multicolumn{2}{c}{M_n = \dfrac{n-1}{2h^2} M_{n-2} - 2k^2 M_{n+2}.} \end{array}\right\} \tag{45}$$

Il est clair que, si l'on connaissait les valeurs de six, au moins, des moyennes M, on pourrait calculer $\frac{1}{h^2}$ et k^2, par la résolution d'un certain nombre d'équations du premier degré. Soient, en effet, M_r, M_s, ..., M_w (où les nombres r, s, ..., w sont rangés par ordre croissant) les six quantités connues. Que l'on considère les relations, de la forme (43), pour toute valeur de n depuis

$n = r + 2$ jusqu'à $n = w - 2$, et l'on aura $w - r - 3$ équations entre autant d'inconnues (les quantités $\frac{1}{h^2}$ et k^2 y comprises), d'où l'on pourra déduire $\frac{1}{h^2}$ et k^2. Mais cette détermination a lieu de la manière la plus simple, si l'on connaît les valeurs des cinq quantités M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Dans ce cas, on fera usage de deux équations :

$$M_2 = \frac{1}{2h^2} - 2k^2 M_4; \quad M_3 = \frac{1}{h^2} M_1 - 2k^2 M_5,$$

qui donnent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= \frac{2M_2M_5 - 2M_3M_4}{M_5 - 2M_1M_4}, \\ k^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{2M_1M_2 - M_3}{M_5 - 2M_1M_4}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Pour ce qui regarde la détermination des valeurs moyennes M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, elles peuvent se tirer, par voie d'approximation, des écarts t, si le nombre des observations est très grand, et pourvu qu'il soit présumable *à priori* que l'*erreur moyenne de la moyenne arithmétique* soit suffisamment petite vis-à-vis des mêmes écarts. Dans ces circonstances, on peut prendre, comme valeurs approchées des M, les rapports :

$$\frac{1}{n}\sum \tau, \quad \frac{1}{n}\sum t^2, \quad \frac{1}{n}\sum \tau^3, \quad \frac{1}{n}\sum t^4, \quad \frac{1}{n}\sum \tau^5, \tag{48}$$

où τ dénote la valeur absolue de t.

Hâtons-nous de dire que, si le nombre des observations n'est pas considérable, nos formules ne peuvent pas conduire aux résultats attendus. En effet, les valeurs approchées (48) qu'on prend pour les M ne sont douées d'aucune précision, si le nombre des observations est petit. Surtout dans le calcul de M_3, M_4, M_5, les puissances des *grandes* erreurs sont très grandes vis-à-vis de celles des *petites* erreurs, et la présence d'une seule erreur, de grandeur considérable, décide presque elle seule du résultat. La détermination de ces moyennes est partant très incertaine. Il serait préférable alors de se tenir, pour la détermination de h et k, à des méthodes qui n'exigent que l'emploi de deux quantités M_1 et M_2, qui restent assez bien déterminées, comme l'expérience le démontre, même si le nombre des observations n'est pas très grand.

Il serait nécessaire, pour notre but, d'exprimer directement les M_1, M_2 en fonctions de h et k au moyen des formules (39), (43), et d'en éliminer ensuite A moyennant la formule (42). Mais l'impossibilité d'exprimer les intégrales en termes finis, ou par des développements en séries simples et convergents à la fois, rend inapplicable cette méthode. Toutefois, si la formule (39) peut être, par approximation, remplacée par cette autre fonction (*)

$$\psi(z) = A(1 - h^2k^2z^4)e^{-h^2z^2}, \tag{49}$$

les intégrations s'exécutent tout de suite et l'on a :

$$\frac{1}{A} = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{k^2}{h^2}\right), \tag{51}$$

$$M_1 = \frac{A}{h^2}\left(1 - 2\frac{k^2}{h^2}\right), \quad M_2 = \frac{A\sqrt{\pi}}{2h^3}\left(1 - \frac{15}{4}\frac{k^2}{h^2}\right). \tag{52}$$

Que l'on pose :

$$1 - \frac{2M_2}{\pi M_1^2} = \varepsilon,$$

et les deux équations (52), d'où l'on aura éliminé A, moyennant la formule (51), nous donnent

$$\frac{k^2}{h^2} = \frac{2\varepsilon}{1 + 8\varepsilon} + \frac{8\varepsilon - \frac{19}{8}}{1 + 8\varepsilon}\left(\frac{k^2}{h^2}\right)^2,$$

équation du deuxième degré dont on peut tirer $\frac{k^2}{h^2}$.

(*) Les fonctions (34) et (50) sont nulles pour $z = 0$, et tendent rapidement vers *zéro* lorsque z croît. Pour que ces deux fonctions puissent, par approximation, se substituer l'une à l'autre, il faut et il suffit que les deux fonctions diffèrent peu entre elles pour toutes les valeurs de z qui sont comprises entre les *limites réelles* de l'erreur. En dehors de ces limites les deux fonctions peuvent avoir entre elles des rapports très différents de l'unité, mais les valeurs, tant de l'une que de l'autre, peuvent être tout à fait négligeables. Ces conditions doivent être vérifiées, après le calcul de h et k.

Ce rapport connu, on calculera h au moyen de l'une des deux relations (32). Pour ce qui regarde les valeurs des moyennes M_1, M_2 en fonction des écarts, on fera usage des expressions

$$M_1 = \frac{\Sigma \tau}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}, \quad M_2 = \frac{\Sigma t^2}{n-1},$$

qui sont bien plus approchées que les $\frac{\Sigma r}{n}$, $\frac{\Sigma t^2}{n}$ citées plus haut.

Dans notre exemple numérique du § 12, on a :

$$M_1 = 4{,}211, \quad M_2 = 21{,}25.$$

Et, par suite :

$$\varepsilon = 0{,}2571, \qquad \frac{k^2}{h^2} = 0{,}1708,$$

$$h^2 = 0{,}009701, \quad k^2 = 0{,}001657.$$

16. Jusqu'ici, dans nos applications de la formule (29), nous avons considéré des cas où la loi de probabilité des erreurs satisfait à la condition

$$\psi(z) = \psi(-z). \tag{32}$$

L'étude des formes de $\psi(z)$, qui ne satisfont pas à la condition (36), et qui correspondent à l'hypothèse que les erreurs positives et les erreurs négatives ne se présentent pas avec une égale facilité n'est pas moins intéressante et peut se faire avec la même facilité que les recherches précédentes.

Mais afin que cette étude puisse conduire à des formules et à des règles, qui soient, elles aussi, applicables à la discussion pratique des résultats d'un système donné d'observation, il serait nécessaire d'ajouter à ce qui précède une série de considérations nouvelles qui nous porteraient bien au delà des limites que nous nous sommes imposées. Mais nous espérons de revenir sur ce sujet.

RAPPORT DE M. C. LE PAIGE.

M. Pizzetti s'occupe, après beaucoup d'autres Géomètres, d'un problème qui doit se présenter à tous ceux qui ont à calculer le résultat d'une nombreuse série d'observations : je veux dire, la détermination de la valeur la plus convenable de la quantité qui a été mesurée.

Le travail qui nous est présenté se distingue néanmoins des divers Mémoires que nous avons eu l'occasion de lire sur cette question.

M. Pizzetti reconnaît immédiatement l'impossibilité de démontrer le principe de la moyenne arithmétique et il est, en cela, d'accord avec un de nos Confrères, très compétent en tout ce qui touche à la philosophie de mathématiques, M. De Tilly.

Cependant, en présence de la nécessité absolue où l'on se trouve de déterminer une valeur spéciale, dépendant des observations, pour la grandeur observée, M. Pizzetti rappelle les axiomes que l'on se voit obligé d'admettre lorsqu'on veut obtenir une fonction analytique représentant la valeur spéciale dont il vient d'être question.

Ces axiomes sont les suivants :

1° Le résultat le plus convenable φ est une fonction symétrique des résultats $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donnés par les observations, pourvu que celles-ci soient d'égale précision ;

2° Lorsque toutes les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont multipliées par un même facteur, c, le résultat le plus probable φ doit être multiplié par c ;

3° Lorsqu'on ajoute à toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, une même quantité k, le résultat φ doit être augmenté de k ;

4° Si les observations conduisant à des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, égales entre elles, φ doit être égal à la valeur commune.

Après avoir discuté le sens de ces axiomes, M. Pizzetti essaie d'en tirer quelques conséquences analytiques.

C'est notamment l'axiome 3 qui le conduit au résultat le plus intéressant.

Admettant que φ soit développable par la série de Taylor, on en déduit l'équation aux dérivées partielles

$$\sum \frac{d\varphi}{dx_i} = 1, \quad i = 1, 2, ., n;$$

d'où l'on tire une relation

$$F(\varphi - x_1, \varphi - x_2, ..., \varphi - x_n) = 0.$$

F étant arbitraire.

L'auteur montre que les principes admis par Gauss ne sont qu'une application très spéciale de cette condition.

Il en est de même des principes admis par Laplace.

C'est ici que vient se placer l'innovation heureuse due à M. Pizzetti. L'auteur calcule la différence qui existe entre la moyenne arithmétique des valeurs observées $x_1, x_2, ..., x_n$ et une valeur φ satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles qui vient d'être écrite.

Pour calculer cette différence, l'auteur est entré dans des développements analytiques assez longs et qui supposent toujours que φ soit développable par la série de Taylor.

Nous devons cependant dire que la longueur des calculs était inévitable et que l'hypothèse de l'applicabilité de la série de Taylor paraît justifiée, sans qu'il soit possible d'en donner une démonstration rigoureuse.

L'honorable professeur de Gênes suppose ensuite que la relation

$$F\big((\varphi - x_1) + \varphi - x_2, ..., \varphi - x_n\big) = 0,$$

prenne la forme plus simple

$$\sum_{i=1}^{n} F(\varphi - x_i) = 0,$$

où l'on a :

$$F(z) = \frac{d \,.\, l\psi(z)}{dz},$$

$\psi(z)$ étant la facilité de l'erreur.

Dans ce cas, en supposant

$$\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2},$$

on trouve

$$\varphi - \frac{\Sigma x_i}{n} = 0,$$

comme on devait s'y attendre, puisque la loi admise conduit au principe de la moyenne; mais ce résultat justifie, en même temps, l'exactitude des formules de M. Pizzetti.

L'examen des hypothèses particulières

$$\psi(z) = Ae^{k\left(\cos \frac{z}{h} - 1\right)},$$

$$\psi(z) = Ae^{-h^2z^2 - h^2k^2z^4},$$

conduit aux expressions suivantes :

$$\varphi - X = -\frac{1}{6h^2 n} \sum \Delta_r^3$$

plus des termes du cinquième ordre ;

$$\varphi - X = \frac{2k^2}{n} \sum \Delta_r^3$$

plus des termes du cinquième ordre.

On a, en général,

$$X = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

et

$$\Delta_i = X - x_i.$$

L'auteur fait usage de ces formules dans le cas d'une série d'observations instituées pour déterminer la longueur du pendule à secondes.

Le Mémoire se termine par l'examen de l'hypothèse plus générale où l'on a simplement

$$\psi(z) = \psi(-z).$$

Dans tous les cas, l'écart entre la moyenne arithmétique et la valeur φ déduite de la forme particulière de ψ est extrêmement faible, et il y a, par suite, tout avantage à employer la moyenne qui donne lieu à des calculs simples et qui conduit, pour la fonction ψ, à la forme généralement admise

$$\psi = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}.$$

C'est la conclusion qui ressort du travail de M. Pizzetti.

Ce Mémoire pourrait être développé et conduirait peut-être à des résultats intéressants sur les conditions d'existence de la fonction φ et de la fonction ψ.

Tel qu'il est, il nous semble une contribution intéressante à l'étude du problème fondamental du calcul des probabilités appliqué aux sciences d'observation et nous en proposons l'insertion dans les Mémoires de la Société.

20 décembre 1887.

Je me rallie aux conclusions de mon savant Confrère.

E. CATALAN.

SUR

LES SEMI-INVARIANTS DE FORMES BINAIRES;

PAR

JACQUES DERUYTS,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

SUR

LES SEMI-INVARIANTS DE FORMES BINAIRES (*).

I. Représentons par

$$k = k_0 x_1^m + \binom{m}{1} k_1 x_1^{m-1} x_2 + \cdots + k_m x_2^m,$$

$$k' = k'_0 x_1^{m'} + \binom{m'}{1} k'_1 x_1^{m'-1} x_2 + \cdots + k_{m'} x_2^{m'},$$

. . . .

des fonctions isobariques et homogènes des variables x et des coefficients de formes binaires; nous supposerons ces fonctions égales à leurs transformées par la substitution $x_1 = X_1 + \lambda X_2$, $x_2 = X_2$ et nous les désignerons, pour abréger, sous le nom de *semi-covariants,* comme nous l'avons fait dans un travail antérieur (**).

La quantité k_0 est un semi-invariant et l'on a :

$$\frac{dko}{d\zeta} = 0, \quad \frac{dk_i}{d\zeta} = ik_{i-1}; \tag{A}$$

les coefficients k', ... satisfont à des égalités du même genre.

Soit S un semi-invariant contenant au degré p les coefficients

(*) Note présentée à la Société des Sciences le 22 novembre 1887.

(**) *Développements sur la théorie des formes binaires* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, juillet 1887).

de k, de manière que chaque terme de S a pour facteur un produit de la forme

$$P = k_0^a . k_1^b . k_2^c \dots k_m^h, \dots (a+b+c+\dots+h=p),$$

ou

$$P = \left(\frac{1}{1.2\dots m}\right)^p \left(\frac{d^m k}{dx_1^m}\right)^a \left(\frac{d^m k}{dx_1^{m-1}dx_2}\right)^b \dots \left(\frac{d^m k}{dx_2^m}\right)^h.$$

La substitution $x_1 = X_1 + \lambda X_2$, $x_2 = X_2$ donne lieu à des transformations linéaires de même module pour les produits de dérivées

$$\left(\frac{d^m}{dx_1^m}\right)^a \left(\frac{d^m}{dx_1^{m-1}dx_2}\right)^b \dots \left(\frac{d^m}{dx_2^m}\right)^h$$

et pour les dérivées

$$\frac{d^{mp}}{dx_1^{mp-\theta}dx_2^\theta}, \quad (\theta = 1.b + 2.c + \dots + mh).$$

Il en résulte que l'on déduira de S un semi-covariant Z en remplaçant les produits P par les dérivées $\frac{d^{mp}l}{dx_1^{mp-\theta}dx_2^\theta}$ d'un semi-covariant quelconque :

$$l = l_0 x_1^\mu + \binom{\mu}{1} l_1 x_1^{\mu-1} x_2 + \dots$$

Dans tout semi-covariant, et en particulier dans Z, le coefficient de la plus haute puissance de x_1 est un semi-invariant. En recherchant ce coefficient pour Z, on voit que l'*on obtient un semi-invariant en remplaçant dans* S *les produits* $k_0^a k_1^b \dots k_m^h$ *par* l_θ, $(\theta = b + 2c + \dots + mh)$.

On pourra, en même temps, remplacer dans S les produits $k_0'^\alpha k_1'^\beta \dots k_m'^\rho$, par les coefficients l'_θ, de $x_2^{\theta'}$ dans un semi-covariant l' : θ' étant égal à $\beta + 2\gamma + \dots + m'\rho$; l'expression de S ainsi transformée sera encore un semi-invariant et on pourra continuer ainsi de suite.

On remarque immédiatement que les indices θ, θ', ... sont les poids des produits P, P', ... par rapport aux coefficients k, k', ...

Applications. — 1° $(k_0 k_1' - k_1 k_0')^p$ est un semi-invariant : en appliquant la transformation précédente aux coefficients k et k', on obtient le semi-invariant

$$k_0k'_p - \binom{p}{1} k_1k'_{p-1} + \binom{p}{2} k_2k'_{p-2} - \cdots + (-1)^p k_p k'_0,$$

que nous avons déjà obtenu par une voie différente. (Voir le travail cité plus haut.)

2° La quantité

$$\delta = \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \\ k'_0 & k'_1 & k'_2 \\ k''_0 & k''_1 & k''_2 \end{vmatrix} = (kk'k'')$$

est un semi-invariant; pour le vérifier, il suffit de prendre la dérivée $\frac{d}{d\zeta}$, en tenant compte des formules (A). On en déduit le semi-invariant

$$\delta^{p)} = (kk'k''_{\,\prime}{}^{p)},$$

dans lequel l'exposant symbolique p indique que dans δ^p les produits de la forme $k_0^a k_1^b k_2^c$ doivent être remplacés par k_{b+2c} et de même pour les coefficients k', k''.

3° Du semi-invariant

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k'_0 & k'_1 & k'_2 \end{vmatrix},$$

on déduit un autre, $\delta_1^{p)}$, en remplaçant dans δ_1^p les produits $k_0'^a k_1'^b k_2'^c$ par k'_{b+2c}.

Il est visible que ces résultats sont susceptibles de plusieurs généralisations.

II. Les coefficients d'un semi-covariant k sont déterminés par le dernier d'entre eux, k_m. On a, en effet, d'après la formule (A) :

$$k_i = \frac{1}{m(m-1)\ldots(i+1)} \frac{d^{m-i}k_m}{d\zeta^{m-i}}.$$

Le dernier coefficient k_m permet encore d'écrire le semi-covariant sans l'emploi direct de la dérivée symbolique $\frac{d}{d\zeta}$. En effet, soit

$$K_0X_1^m + \binom{m}{1}K_1X_1^{m-1}X_2 + \cdots + K_mK_2^m$$

la transformée de k par la substitution $x_1 = X_1 + \lambda X_2$, $x_2 = X_2$; on a

$$K_0X_1^m + \cdots + K_mX_2^m = k_0(X_1 + \lambda X_2)^m + \binom{m}{1}k_1(X_1 + \lambda X_2)^{m-1}X_2 + \cdots + k_mX_2^m,$$

d'où

$$K_m = k_0\lambda^m + \binom{m}{1}k_1\lambda^{m-1} + \cdots + k_m. \tag{B}$$

Si le coefficient k_m dépend des coefficients a_i de formes telles que

$$f = a_0x_1^n + \binom{n}{1}a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots,$$

K_m dépend de la même manière des coefficients A_i de leurs transformées

$$F = A_0X_1^n + \binom{n}{1}A_1X_1^{n-1}X_2 + \cdots,$$

dans lesquelles on a

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= a_0, \\ A_1 &= a_0\lambda + a_1, \\ A_2 &= a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

La comparaison des formules (B) et (C) montre qu'*à part une puissance de* x_2, *tout semi-covariant se déduit de son dernier coefficient en remplaçant les coefficients* a_i *par les dérivées* $\frac{1}{n(n-1)\dots(i+1)}\frac{d^{n-i}f}{dx_1^{n-i}}$, *qui sont elles-mêmes des semi-covariants.*

Remarque. — D'après la propriété précédente, toute quantité homogène et isobarique L peut être considérée comme le dernier coefficient d'un semi-covariant. D'autre part, tout semi-covariant est une somme de produits de puissances de x_2 par des expressions de la forme

$$C_0x_1^p + \binom{p}{1}C_1x_1^{p-1}x_2 + \binom{p}{2}C_2x_1^{p-2}x_2^2 + \cdots,$$

$C_0, C_1, C_2, \ldots,$ étant les coefficients d'un covariant

$$C_0 x_1^{\mu} + \binom{\mu}{1} C_1 x_1^{\mu-1} x_2 + \cdots \text{ (*)}.$$

Il résulte de là que L est une somme de coefficients de covariants; nous écrirons $L = \Sigma C_i$. Par une propriété des covariants on a $\frac{d}{d\zeta} C_{i+1} = (i+1) C_i$; il en résulte que *l'on peut toujours obtenir pour l'équation* $\frac{dT}{d\zeta} = L$, *une solution particulière homogène et isobarique :* $T = \Sigma \frac{C_{i+1}}{i+1}$. Cette remarque est utilisée ci-dessous.

III. Étudions actuellement les semi-covariants d'ordre m, qui ont en commun les p premiers termes

$$k_0 x_1^m + \binom{m}{1} k_1 x_1^{m-1} x_2 + \cdots + \binom{m}{p-1} k_{p-1} x_1^{m-p+1} x^{p-1}.$$

Désignons par w le poids de k_0 et par $r, r_1, \ldots$ les degrés d'homogénéité de k_0 par rapport aux coefficients de formes binaires d'ordres $n, n_1, \ldots$; les coefficients k_i seront de poids $w+i$. Le coefficient k_p doit satisfaire à l'équation

$$\frac{dk_p}{d\zeta} = p k_{p-1};$$

soit λ_p une valeur particulière de k_p; on pourra prendre comme solutions linéairement indépendantes les valeurs suivantes de k_p

$$\lambda_p, \quad \lambda_p + S_1, \quad \lambda_p + S_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p + S_t, \tag{D}$$

si l'on désigne par t le nombre des semi-invariants linéairement indépendants de caractéristiques $w+p, r, r_1, \ldots; n, n_1, \ldots$ et si l'on représente par $S_1, S_2, \ldots, S_t$ ces semi-invariants.

De même, les solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$\frac{dk_{p+1}}{d\zeta} = (p+1) k_p \tag{E}$$

(*) Voir notre travail déjà cité (p. 8).

seront représentées par

$$\lambda_{p+1},\quad \lambda_{p+1} + S'_1,\quad \lambda_{p+1} + S'_2,\quad \ldots,\quad \lambda_{p+1} + S'_{t'},$$

si l'on désigne par λ_{p+1} une solution particulière de l'équation (E) : les lettres S' désignent des semi-invariants linéairement indépendants de caractéristiques $w + p + 1, r, r_1, \ldots n, n_1, \ldots$; l'indice t' représente le nombre maximum de ces semi-invariants.

Les valeurs de k_p fournies par la suite (D) donneront pour λ_{p+1} une série de $t + 1$ expressions linéairement indépendantes. On peut voir par là que les valeurs de k_{p+1} linéairement indépendantes sont en nombre

$$t + t' + 1.$$

En continuant de la même manière, on verrait que le coefficient k_m peut avoir

$$t + t' + \cdots + t^{m-p} + 1,$$

valeurs linéairement indépendantes, si l'on désigne par t^i le nombre de semi-invariants linéairement indépendants de caractéristiques $w + p + i, r, r_1, \ldots n, n_1, \ldots$

Pour $p = 0$, on aura, à l'unité près, le nombre de semi-covariants d'ordre m linéairement indépendants. Il faudra toutefois remarquer que nous avons supposé k_0 différent de zéro.

IV. M. Sylvester a déterminé, par une analyse ingénieuse, le nombre exact de semi-invariants linéairement indépendants de poids et de degrés donnés (*). La méthode suivante présentera peut-être quelque intérêt, à cause de sa simplicité.

Nous supposerons qu'il s'agit des semi-invariants de poids w et de degré r par rapport à une forme d'ordre n : la généralisation s'indiquera d'elle-même pour le cas de plusieurs formes.

Désignons par L l'expression la plus générale de caracté-

(*) *Journal de Crelle*, t. LXXXV.

ristiques $w-1, r, n$ et contenant $(w-1, r, n)$ termes; cherchons à déterminer une quantité C par la condition

$$\frac{dC}{d\zeta} = L. \tag{F}$$

Écrivons pour C l'expression la plus générale de caractéristiques w, r, n contenant (w, r, n) termes. L'égalité (F) fournira $(w-1, r, n)$ équations de conditions entre les coefficients de C et les coefficients de L. Ces équations de conditions sont linéaires et indépendantes entre elles, puisque les coefficients de L sont supposés quelconques. Il en résulte que l'équation (F) aura $(w, r, n)-(w-1, r, n)+1$ solutions linéairement indépendantes. On pourra prendre pour ces solutions

$$C_0, \quad C_0 + S_1, \quad C_0 + S_2, \ \ldots, \ C_0 + S_l,$$

si l'on désigne par C_0 une solution particulière de l'équation (F) et si l'on désigne par les lettres S des semi-invariants linéairement indépendants et en nombre $l = (w, r, n)-(w-1, r, n)$; en effet, M. Cayley a établi qu'il existe au moins l pareils semi-invariants. Établissons qu'il existe seulement l semi-invariants linéairement indépendants.

Soit S_{l+1} un semi-invariant différent de $S_1, S_2, \ldots, S_l$; la quantité $C = C_0 + S_{l+1}$ est évidemment une solution de l'équation (F). D'après ce qui précède, on doit avoir une relation linéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\lambda_0 C_0 + \lambda_1[C_0 + S_1] + \lambda_2[C_0 + S_2] + \cdots \\ + \lambda_l[C_0 + S_l] + \lambda_{l+1}[C_0 + S_{l+1}] = 0.\end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation contient un multiple de C_0 et une somme de semi-invariants. La quantité C_0 n'étant pas un semi-invariant, on doit avoir

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \cdots + \lambda_l S_l + \lambda_{l+1} S_{l+1} = 0:$$

cette relation démontre le théorème de M. Sylvester.

V. D'après ce que nous avons vu ci-dessus, les coefficients d'un semi-covariant k résultent du dernier d'entre eux. Dans le travail que nous avons déjà eu l'occasion de citer, nous avons rencontré des semi-covariants dans lesquels le dernier coefficient k_m et par conséquent tous les autres, sont des dérivées symboliques du premier coefficient k_0. En terminant cette Note, nous indiquerons la généralisation d'un de ces résultats.

Prenons

$$\frac{dT'}{d\omega} = \sum_\sigma \left[a_1 \frac{dT}{da_0} + a_2 \frac{dT}{da_1} + \cdots + a_{n+1} \frac{dT}{da_n} + \cdots \right],$$

en désignant par $a_0, a_1, \dots a_n \dots$ les coefficients d'une forme binaire. Le signe Σ_σ indique que la sommation s'étend à un système σ de formes.

Si T est homogène et du degré h par rapport au système σ, on a

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{dT}{d\omega} - \frac{d}{d\omega}\frac{dT}{d\zeta} = hT \text{ (*)}. \tag{G}$$

Nous représenterons par $h_1, h_2, \dots h_m$ les degrés d'homogénéité d'un semi-invariant k_0, par rapport à des systèmes de formes $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ qui ont des éléments communs ou non ; nous désignerons par $\frac{d}{d\omega_1}, \frac{d}{d\omega_2}, \dots \frac{d}{d\omega_m}$ les dérivées $\frac{d}{d\omega}$ correspondantes.

On peut prendre pour valeur du dernier coefficient k_m *d'un semi-covariant, l'expression* $\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_m} \frac{d^m k_0}{d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_m}$, *le premier coefficient étant* k_0.

Nous le prouverons par la méthode récurrente, en observant que la proposition est exacte pour $m=1$, d'après la formule (G).

En prenant $S = \frac{d^m k_0}{d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_m}$, on a

$$\frac{d^m S}{d\zeta^m} = \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \frac{d}{d\omega_1} \frac{d^{m-1} k_0}{d\omega_2 d\omega_3 \dots d\omega_m} \right\};$$

(*) Voir une Note que nous avons publiée *Sur quelques propriétés des semi-invariants* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, mars 1887).

ou bien, d'après la formule (G) pour $\mathrm{T} = \frac{d^{m-1}k_0}{d\omega_2 \ldots d\omega m}$:

$$\frac{d^m\mathrm{S}}{d\zeta^m} = \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \left\{ h_1 \frac{d^{m-1}k_0}{d\omega_2 \ldots d\omega_m} \right\} + \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \frac{d}{d\omega_1} \frac{d}{d\zeta} \frac{d^{m-1}k_0}{d\omega_2 \ldots d\omega_m}.$$

La proposition énoncée étant supposée exacte, quand m est remplacé par $m - 1$, on a :

$$\frac{d^m\mathrm{S}}{d\zeta^m} = \overline{m - 1}\,!\, h_1 h_2 \ldots h_m . k_0 + \frac{d^m}{d\zeta^{m-1} d\omega_1} \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{d^{m-1}k_0}{d\omega_2 \ldots d\omega_m} \right].$$

La dernière partie du second membre s'écrira de même, d'après la formule (G) :

$$\frac{d^m}{d\zeta^{m-1} d\omega_1} \left[h_2 \frac{d^{m-2}k_0}{d\omega_3 \ldots d\omega_m} + \frac{d}{d\omega_2} \frac{d}{d\zeta} \frac{d^{m-2}k_0}{d\omega_3 \ldots d\omega_m} \right]$$

$$= \overline{m - 1}\,!\, h_1 h_2 \ldots h_m . k_0 + \frac{d^{m+1}}{d\zeta^{m-1} d\omega_1 d\omega_2} \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{d^{m-2}k_0}{d\omega_3 \ldots d\omega_m} \right].$$

En continuant ainsi de suite, on vérifie la formule

$$\frac{d^m\mathrm{S}}{d\zeta^m} = m\,!\, h_1 h_2 \ldots h_m k_0 ;$$

comme cas particulier, on retrouve l'un de nos résultats antérieurs, en supposant les systèmes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ identiques.

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME DE VON STAUDT;

PAR

C. LE PAIGE.

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME DE VON STAUDT (*).

On sait de quelle importance est, pour la géométrie projective, ce théorème, dû à von Staudt, que, par des constructions répétées de groupes harmoniques, on peut, en partant de trois éléments donnés d'une ponctuelle, atteindre, soit directement, soit comme points limites, tous les éléments de la ponctuelle.

Je ne ferai que mentionner les travaux consacrés à ce théorème par MM. Klein, Zeuthen, Lüroth, Darboux, Thomae, Schur, de Paolis, sans discuter les théories exposées.

C'est le rôle essentiel de cette proposition dans la géométrie moderne qui nous a engagé à essayer une démonstration peut-être un peu différente des autres quant à la forme, sinon quant aux principes sur lesquels elle s'appuie (**).

Nous emploierons, sans les démontrer, les théorèmes connus

(*) Note présentée à la Société royale des Sciences de Liège le 20 décembre 1887.

(**) Depuis la présentation de cette Note, nous avons communiqué à l'Académie royale de Belgique une exposition entièrement différente des théorèmes fondamentaux de la Géométrie projective; cette exposition fait l'objet d'un petit Mémoire pour la rédaction duquel nous avons été grandement aidé par l'un de nos anciens élèves, M. le Dr Fr. Deruyts.

sur les groupes harmoniques et, pour simplifier le discours, nous ferons usage de la dénomination suivante : nous dirons que deux points A et B sont *distincts* lorsque A ne coïncide pas avec B ou ne tend pas vers une position limite X coïncidant avec B.

Les deux lemmes suivants découlent presque immédiatement de la construction des groupes harmoniques.

Lemme I. — *Soient trois points* A, B, C, *distincts l'un de l'autre ; le conjugué harmonique de chacun d'eux par rapport aux deux autres est distinct de ceux-ci.*

Cette proposition s'énonce souvent de la manière suivante :

Lorsque, dans un groupe harmonique, deux éléments coïncident, un troisième vient coïncider avec eux.

Lemme II. — *Soient deux groupes harmoniques*

$$AP, \quad BQ;$$
$$AP', \quad BQ';$$

lorsque P *tend vers* P', Q *tend nécessairement vers* Q'.

Théorème I. — *Si l'on construit les groupes harmoniques successifs*

$$AC_1,\ BC;\quad AC_2,\ BC_1,\ \ldots,\ AC_n,\ BC_{n-1},\ \ldots$$

le point C_n *aura pour limite* B.

En effet C_1 est situé entre B et C ; C_2 entre B et C_1, etc.

Donc C_i se rapproche de B.

Le point C_i tend donc vers un point limite qui est B, ou un point B_1, distinct de B et situé entre B et C.

Or, si nous imaginons le groupe harmonique

$$AK_1,\ BB_1,$$

le point K_1, qui existe, bien que nous ne puissions l'atteindre actuellement par la loi harmonique employée, sera distinct de B et de B_1 et situé entre ces points.

Nous voyons que AK_1, BB_1 est le groupe limite vers lequel tend le groupe variable

$$AC_i, \ BC_{i-1}.$$

Il en résulterait que le point C_i tendrait vers deux limites distinctes K_1 et B_1; ce qui est impossible.

Théorème II. — *Soient trois points* A, B, C. *Si l'on construit les groupes harmoniques*

$$AB_1, \ BC; \quad AC_1, \ BC; \quad AB_2, \ B_1C_1, \ldots$$

tels que dans la suite

$$A(BCB_1C_1B_2C_2 \ldots B_nC_n \ldots)$$

chaque point soit conjugué harmonique de A *par rapport aux deux points qui le précèdent* B_i *et* C_i *tendent vers une même limite, située entre* B *et* C.

Il résulte des propriétés des groupes harmoniques que les points B_i marchent dans le sens ABC, et les C_i dans le sens CBA.

Ils tendent vers des limites L, L_1 que nous supposerons distinctes. Considérons deux groupes successifs :

$$AB_n, \ C_{n-1}B_{n-1};$$
$$AC_n, \ C_{n-1}B_n.$$

Il résulte alors du lemme II, que B_n et C_n ne peuvent pas tendre vers des limites distinctes L, L_1.

Abordons maintenant la démonstration du théorème de von Staudt.

Soient trois points A, B, C pris sur une droite u. Il s'agit de faire voir que, par des constructions répétées de groupes harmoniques, on pourra atteindre un élément quelconque de u.

S'il n'en est pas ainsi, soient deux points distincts EF, situés, par exemple, entre B et C, et entre lesquels il ne serait pas possible de placer des points de la série.

Construisons les groupes harmoniques successifs

$$\begin{gathered} AW,\ \ CB; \\ AW_1,\ CW; \\ \cdots\cdots \\ AW_n,\ CW_{n-1}, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

Il est impossible que tous les points W_i soient situés entre B et E, car W_n a pour limite C en vertu du théorème I.

Donc, ou W sera dans l'espace FC, ou deux éléments successifs W_k, W_{k+1} seront le premier dans BE, le second dans FC.

Dans la première hypothèse servons-nous de W comme nous nous sommes servis de C.

Nous aurons ainsi, ou un point W' situé entre F et W, ou deux éléments successifs W'_l, W'_{l+1}, comprenant EF.

Si la première hypothèse pouvait se réaliser perpétuellement, nous aurions des groupes

$$\begin{gathered} AW,\ \ BC; \\ AW',\ BW; \\ AW'',\ BW'; \\ \cdots \end{gathered}$$

et les points W, W', W'', ... seraient tous compris dans FC, ce qui est impossible puisque $W^{(i)}$ a pour limite B.

Par suite nous aurons nécessairement des groupes tels que W_kW_{k+1} qui renferment EF.

Si nous employons W_k, W_{k+1} au lieu de B et C, nous pourrons répéter le même raisonnement.

Appelons B_1C_1; B_2C_2; B_3C_3 ... les différents groupes analogues à W_kW_{k+1} que nous obtenons, en désignant par B_i les points situés entre B et E, par C_i ceux qui sont situés entre F et C.

B_i et C_i tendent vers des limites distinctes β, γ.

Construisons les groupes harmoniques

$$AX_i,\ B_iC_i.$$

Le point X_i est distinct de B_i et C_i, mais, en outre, il est impossible que les points X_1, X_2, ... reproduisent une des séries B ou C, par exemple.

Nous ne pouvons avoir une série analogue à celle dont il est question dans le théorème II ; car alors en vertu de ce théorème les points B_i et C_i tendraient vers une même limite.

Il est également impossible que les points X_i appartiennent tantôt à la série des B, tantôt à celle des C.

Imaginons en effet que l'on ait

$$X_i = B_{i+k} \quad \text{ou} \quad X_i = C_{i+k'} ;$$

de l'existence des groupes harmoniques

$$AB_{i+k},\ B_iC_i \quad \text{ou} \quad AC_{i+k'},\ B_iC_i,$$

on déduirait encore, en vertu du premier lemme, que les B_i et les C_i tendent à se confondre.

Il résulte de là que les points X_i ont une limite ξ, distincte de β et de γ.

Nous avons donc

$$lim\,(AX_i,\ B_iC_i) = A\xi,\ \beta\gamma.$$

Supposons que β et γ soient distincts de EF.

ξ est situé entre β et γ.

Supposons qu'il soit entre β et E. Alors X_i devant s'approcher autant qu'on le veut de ξ pénétrerait dans cet intervalle. Mais X_i est donné par la même loi que les points B_i et C_i. Donc β ne serait pas un point limite.

La même démonstration prouve que ξ ne peut être entre F et γ.

Comme il ne peut être entre E et F, il en résulte que l'hypothèse des points β, γ distincts de EF est inadmissible.

Mais si l'on a

$$lim\,(AX_i,\ B_iC_i) = A\xi,\ EF,$$

il en résulterait que X_i finirait par pénétrer dans EF.

La contradiction cesse si l'on suppose que les points EF ne sont pas distincts.

Mais alors, il n'existe aucun point de BC (et par suite de u) que l'on ne puisse atteindre, soit directement, soit comme point limite.

SUR

LES SEMI-INVARIANTS DE FORMES BINAIRES

(2e COMMUNICATION);

PAR

Jacques DERUYTS,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

SUR

LES SEMI-INVARIANTS DE FORMES BINAIRES.

I. Nous avons établi précédemment (*) que tout semi-covariant

$$k = k_0 x_1^m + \binom{m}{1} k_1 x_1^{m-1} x_2 + \cdots + k_m x_2^m,$$

peut s'exprimer sous la forme :

$$k = \sum x_2^{m-p} \left[C_0^{(p)} x_1^p + \binom{p}{1} C_1^{(p)} x_1^{p-1} x_2 + \cdots + C_p^{(p)} x_2^p \right], \qquad \text{(A)}$$

si l'on désigne par les lettres $C^{(p)}$ les coefficients d'un covariant

$$C^{(p)} = (C_0^{(p)} C_1^{(p)} \ldots C_\mu^{(p)}) (x_1 x_2)^{\mu_p}.$$

Soient r, r', ... les degrés d'homogénéité du semi-covariant k par rapport aux formes

$$f = (a_0 a_1 \ldots a_n)(x_1 x_2)^n, \qquad \varphi = (\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n'})(x_1 x_2)^{n'}, \ ..$$

les covariants $C^{(p)}$ *peuvent être supposés des degrés* r, r', ... *par rapport aux formes*

$$f_s = (a_0 a_1 \ldots a_{n+s})(x_1 x_2)^{n+s}, \qquad \varphi_t = (\alpha_0 \ldots \alpha_{n'+t})(x_1 x_2)^{n'+t}, \ \ldots$$

s, t, ... *ayant des valeurs quelconques, nulles ou positives.*

En effet, on a par la formule (A), $C_0^{(0)} = k_0$ et il en résulte

(*) *Développements sur la théorie des formes binaires* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, juillet 1887).

que le covariant $C^{(0)}$ est des degrés $r, r', \ldots$ par rapport à $f_s, \varphi_t, \ldots$
On a encore

$$\binom{m}{1} k_1 = \binom{m}{1} C_1^{(0)} + C_0^{(1)},$$

donc $C_0^{(1)}$, et par suite $C^{(1)}$ satisfait à la condition indiquée : on obtiendra le même résultat pour $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, ...

On peut démontrer aussi que *l'ordre du covariant* $C^{(p)}$ *n'est pas inférieur à* m — p *quelles que soient les valeurs de* s, t, ...

Il suffira de le prouver pour $C^{(0)}$; l'ordre de $C^{(0)}$ est

$$\mu_0 = r(n+s) + r'(n'+t) + \cdots - 2w, \tag{B}$$

si w est le poids du premier coefficient $C_0^{(0)} = k_0$. D'autre part, du semi-covariant k, on déduit facilement le semi-invariant

$$I = k_0 b_m - \binom{m}{1} k_1 b_{m-1} + \binom{m}{2} k_2 b_{m-2} \ldots \pm k_m b_0,$$

pour les formes f_s, φ_t, ... et pour la forme $f' = (b_0 b_1 \ldots)(x_1 x_2)$; le poids de I est $w + m$ et ce poids est au plus égal à

$$\frac{r(n+s) + r'(n'+t) + \cdots + m}{2}:$$

on a donc

$$r(n+s) + r'(n'+t) + \cdots + m \overline{\overline{>}} 2(w+m). \tag{C}$$

Des formules (B) et (C), on déduit la relation que nous voulions obtenir : $\mu_0 \overline{\overline{>}} m$.

Si l'on divise par x_2 la partie de l'expression (A), qui est indépendante de $C^{(0)}$, on obtient un semi-covariant k' d'ordre $m - 1$. Les considérations précédentes, appliquées à k', conduisent à $\mu_1 \overline{\overline{>}} m - 1$; etc.

II. Nous nous servirons de ces derniers résultats, pour compléter l'étude, que nous avons faite précédemment de l'équation :

$$\frac{dT}{d\zeta} = L, \tag{D}$$

L étant une fonction isobarique et homogène des degrés $r, r', \ldots$ par rapport aux coefficients de f, φ, ...

En remplaçant les coefficients a_i, α_j, ... par

$$a_0 x_1^i + \binom{i}{1} a_1 x_1^{i-1} x_2 + \cdots + a_i x_2^i,$$

$$\alpha_0 x_1^j + \binom{j}{1} \alpha_1 x_1^{j-1} x_2 + \cdots + \alpha_j x_2^j, \text{ etc.},$$

on déduit de L un semi-covariant k, dont le dernier coefficient k_m est égal à L.

D'après la formule (A), on aura

$$L = \sum C_p^{(p)}.$$

On peut toujours donner aux nombres s, t, ... *des valeurs telles que* $C_p^{(p)}$ *ne soit pas le dernier coefficient du covariant* $C^{(p)}$ et alors, on aura comme solution particulière de l'équation (D) :

$$T^{(0)} = \sum \frac{C_{p+1}^{(p)}}{p+1} \ (^*).$$

En effet, soit W le poids de L ; la valeur du poids est respectivement W pour $C_p^{(p)}$, $W - p$ pour $C_0^{(p)}$, et

$$r(n+s) + r'(n'+t) + \cdots - (W-p)$$

pour le dernier coefficient de $C^{(p)}$. On voit par là que $C_p^{(p)}$ n'est pas le dernier coefficient de $C^{(p)}$, si l'on a

$$r(n+s) + r'(n'+t) + \cdots - (W-p) > W :$$

cette condition est toujours réalisable par un choix convenable des valeurs de s, t, ...

Pour le cas particulier de $s = 0$, $t = 0$, ..., on a cette propriété : *Si* W *est inférieur à* $\frac{rn + r'n' + \cdots}{2}$, *on peut obtenir pour l'équation* $\frac{dT}{d\zeta} = L$ *une solution* $T^{(0)}$ *de caractéristiques* $W + 1$, r, r', ... n, n', ...

Dans notre première Note *Sur les semi-invariants de formes*

(*) Il suffit d'observer que l'on a

$$\frac{d}{d\zeta} C_{p+1} = (p+1) C_p.$$

binaires, nous avons rencontré quelques applications de la dernière propriété qui vient d'être indiquée; nous pensons qu'il n'est pas inutile de reprendre directement les applications dont il s'agit :

1° Nous avons cherché les solutions de l'équation $\frac{dT}{d\zeta} = qk_{q-1}$ en supposant connus les p premiers termes du semi-covariant k, d'ordre m.

Soient comme précédemment $w, r, r', \ldots n, n' \ldots$ les caractéristiques du premier coefficient k_0 : la quantité k_{q-1} a pour poids $W = w + q - 1$. Dans le cas actuel, si nous avons

$$w + m \leqq \frac{rn + r'n' + \cdots}{2} \ (^*),$$

nous pourrons obtenir pour k_q une solution particulière et il en résultera pour ce coefficient $1 + t + t' + \ldots + t^{q-p}$ solutions linéairement indépendantes, si t^i est le nombre des semi-invariants linéairement indépendants de caractéristiques $w + p + i, r, r', n, n', \ldots$

2° Pour étudier les semi-invariants de caractéristiques $w, r, r', \ldots n, n' \ldots$, nous avons considéré l'équation $\frac{dT}{d\zeta} = L$, en supposant les caractéristiques de L égales à $w - 1, r, r', \ldots n, n', \ldots$: on a actuellement $w \leqq \frac{rn + r'n' + \cdots}{2}$, comme condition de l'existence des semi-invariants. On a par suite

$$W = w - 1 < \frac{rn + r'n' + \cdots}{2};$$

on peut donc affirmer qu'il existe, pour l'équation $\frac{dT}{d\zeta} = L$, une solution de caractéristiques $w, r, r', \ldots n, n', \ldots$: c'est le résultat que nous avions indiqué.

III. Dans le premier paragraphe de la présente Note, nous avons déduit du semi-covariant k le semi-invariant

$$I = k_0 b_m - \binom{m}{1} k_1 b_{m-1} + \cdots \pm k_m b_0.$$

(*) Précédemment, nous n'avions pas indiqué cette restriction.

En remplaçant dans la formule (A) les produits $x_1^i x_2^{m-i}$ par $(-1)^{m-i} b_i$, on obtient

$$\mathrm{I} = \sum (-1)^{m-p} \left[\mathrm{C}_0^{(p)} b_p - \binom{p}{1} \mathrm{C}_1^{(p)} b_{p-1} + \cdots + (-1)^p \mathrm{C}_p^{(p)} b_0 \right].$$

Cette relation jointe aux remarques indiquées ci-dessus, donne le théorème suivant :

Tout semi-invariant du premier degré en f′ *et des degrés* r, r′, ... *par rapport à* f, φ ... *est réductible à une somme de semi-invariants provenant de transvections* (Ueberschiebungen) *de la forme* f′ *sur des covariants des degrés* r, r′, ... *par rapport à* f, φ, ...

On en déduit facilement, cet autre théorème donné par M. Gordan : *Tout covariant de degré* r + 1 *par rapport à une forme* f, *est une somme de transvections de* f *sur des covariants du degré* r (*).

On peut établir un résultat du même genre en faisant usage de la propriété suivante, que nous avons démontrée antérieurement (Première Note, p. 6) :

Tout semi-covariant k *des formes* f, φ, ... *est à part une puissance de* x_2 *une fonction entière de* f, φ ... *et de leurs dérivées par rapport à* x_1.

En remplaçant $x_1^i x_2^{m-i}$ par $(-1)^{m-i} b_i$, on voit que tout semi-invariant I linéaire par rapport à f' est une fonction entière des semi-invariants

$$a_0 b_p - \binom{p}{1} a_1 b_{p-1} + \binom{p}{2} a_2 b_{p-2} + \cdots \pm a_p b_0,$$

$$\alpha_0 b_q - \binom{q}{1} \alpha_1 b_{q-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots \pm \alpha_q b_0, \text{ etc.,}$$

si l'on convient de remplacer les produits $b_h b_k b_l$ ... par $b_{h+k+l+\cdots}$.

(*) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, p. 102.

Donc : *pour obtenir les semi-invariants de* f, φ, ... *linéaires par rapport à la forme indéfinie* $f' = (b_0 b_1 \ldots)(x_1 x_2)$, *on remplacera les produits* $b_h b_k b_l$ ... *par* $b_{h+k+l+\ldots}$ *dans les fonctions entières des semi-invariants, qui proviennent des transvections de* f' *sur* f, φ, ...

Ce résultat se généralise pour les semi-invariants de degré quelconque, par rapport à f'.

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA

DÉTERMINATION DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

DE LIÉGE;

PAR

C. LE PAIGE,

Professeur ordinaire à l'Université de Liége,
Membre correspondant de l'Académie royale de Belgique.

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA

DÉTERMINATION DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

DE LIÉGE (*).

En parcourant, il y a quelques temps déjà, un manuscrit d'astronomie appartenant à la Bibliothèque de notre Université, nous y avons rencontré une détermination, fort ancienne, de la latitude de Liége. C'est cette découverte qui nous a inspiré la pensée de réunir les données analogues que l'on trouve à différentes époques et d'en faire l'objet du petit travail que nous avons l'honneur de présenter à la Société. Ce sera, en même temps, une contribution à l'histoire des sciences dans notre pays, contribution de bien peu d'importance, il est vrai, mais peut-être de quelque intérêt à cause de l'époque à laquelle elle nous reporte, bien loin de cette brillante période où Liége voyait dans ses écoles Rudolf, Franco, Engelbert et dans les abbayes voisines, Heriger de Lobbes, Helbert de S[t]-Hubert, et bien d'autres sans doute, abacistes ou astronomes dont les travaux faisaient de notre cité le centre intellectuel qui rayonnait au loin sur la Lotharingie et la Germanie tout entière [1].

Le manuscrit auquel je viens de faire allusion contient différents ouvrages; entre autres une traduction latine du célèbre voyage de Jean de Mandeville; ce n'est pas sur ce point que je

(*) Présentée à la séance du 19 juin 1888.

veux appeler l'attention, mais bien sur la partie astronomique. J'en donnerai, en note, l'analyse, parce que le rédacteur du catalogue de nos manuscrits semble ne point avoir découvert l'auteur des principaux traités qui y sont contenus (2).

Ces ouvrages astronomiques ont été transcrits vers 1424. C'est à cette date qu'on peut rapporter la partie liégeoise du travail : calcul du calendrier et de nombreuses éclipses de lune et de soleil ; les autres parties ont été composées à une date antérieure, comme nous le verrons.

Aux feuillets 194 v°, 195 r° de notre manuscrit, en tête d'une table intitulée :

Tabula ad sciendum locum solis de quinto ad quintum diem, se trouve la ligne suivante :

Hec tabula composita fuit Leodij ad latitudinem 50 *graduum* 6 *minutorum procedens de quinario ad quinarium.*

La latitude, telle qu'elle résulte des données actuelles est de 50°37'56" (*). L'erreur, qui s'élève à 31'56" paraît donc

(*) J'emprunte ces données à l'*Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles.* On verra probablement avec intérêt les résultats suivants que je dois à une obligeante communication de notre savant confrère M. Folie.

La latitude de l'Observatoire de l'Université de Liége (Cointe) a été déterminée le 24 et le 26 janvier 1885, par deux observations du passage de α Persée dans le premier vertical.

Ces deux observations ont donné respectivement

$$\begin{array}{rr} & 50^\circ\ 37'\ 5'',8 \\ & 50^\circ\ 37'\ 5'',05 \\ \hline \text{Moy.} & 50^\circ\ 37'\ 5'',4 \end{array}$$

La longitude du même point, par rapport à Bruxelles, résulte de 28 déterminations faites au chronomètre de poche, de juin 1886 à juin 1887. Elle est de $4^m46^s,6$, en temps, avec une erreur probable moindre que $0^s,1$.

L'Observatoire de Cointe étant situé à 3,150 m. S. de la façade du Palais, et à 700 m. W. de l'horloge, on doit ajouter aux coordonnées de Cointe, en latitude et en longitude, respectivement, 1'42", et $2^s,4$.

Les coordonnées de l'horloge du Palais seraient donc

Lat.	50° 38' 48"	
Long.	$4^m 49^s$	E. de Bruxelles
ou	3° 14' 19"	E. de Paris.

considérable. Cependant, si l'on songe au peu de précision des instruments en usage au XV^e siècle, et si l'on observe que même à une date postérieure, la latitude de villes bien plus importantes que Liége, a été déterminée avec des erreurs beaucoup plus considérables, on se montrera indulgent pour l'astronome qui nous a laissé cette première détermination, — au moins à ma connaissance — de la hauteur du pôle dans notre cité.

Quant à la longitude de Liége, il n'en est fait aucune mention dans notre manuscrit.

On y rencontre bien, comme je l'ai dit, une table des éclipses de soleil et des éclipses de lune, entre 1424 et 1462, avec l'indication du commencement et de la durée de l'éclipse. Mais comme on ignore à l'aide de quels éléments ces nombres ont été calculés et que, d'ailleurs, l'on y trouve des erreurs assez considérables, si l'on compare avec les tables de v. Oppolzer, il nous semble oiseux d'essayer d'en déduire la longitude attribuée à Liége.

Le manuscrit que je viens de citer appartenait autrefois au monastère des Croisiers de Huy. D'après un livre, imprimé, provenant de cette même maison, il semble que jusqu'en 1513 au moins, la latitude 50°6′ continua à passer pour exacte et qu'on ne fit, sans nul doute, aucun effort pour corriger cette première détermination.

Le livre dont je veux parler est l'*Elucidatio fabricæ ususque astrolabii,* de J. Stoefler, imprimé à Oppenheym, par J. Köbel, à la fin de l'année 1512 [5].

Au feuillet 5 r°, se trouve une table des latitudes des principaux lieux de l'Europe. On y a ajouté à la main les lignes suivantes :

Leodium 50 ~~6~~ 51

6 min.

Un premier annotateur a donc indiqué la latitude d'après les données de l'auteur anonyme du manuscrit.

Plus tard, on a biffé le chiffre 6 pour le remplacer par le chiffre 51. Cette modification a probablement été faite après 1530, lorsque eut paru le « *De Principiis astronomiæ et cosmographiæ* » de Gemma Frisius (4).

Si d'ailleurs on avait voulu, à la fin du XVe siècle, déterminer à l'aide des cartes construites à cette époque, la longitude et la latitude de Liége, on aurait certainement obtenu un résultat bien moins exact que celui qui avait été donné primitivement par le cosmographe liégeois.

Pour s'en convaincre, que l'on recoure, par exemple, aux cartes de la cosmographie de Ptolémée, publiées à Ulm en 1482 et où figure *Liege*, on obtiendra certainement des nombres bien moins satisfaisants (5).

Il faut laisser s'écouler un siècle environ pour trouver une nouvelle détermination des coordonnées géographiques de Liége.

Cette fois, c'est au célèbre professeur de Tübingen, J. Stoefler, que nous l'empruntons.

Elle figure dans son *Calendarium Romanum Magnum*, imprimé à Oppenheym, par J. Köbel, en 1518 (6).

Dans l'*Abacus regionum*, qui fait partie de cet ouvrage, on trouve (feuillet Aij v°) :

Leodium, vulgo Ludige aut Lutich. M. | 0. | 16. | 51.

Ce qui signifie : Latitude 51°; long. occidentale de Tübingen, 16 min. en temps.

La longitude, par rapport à Paris, qui en résulterait pour Liége, serait donc de 2°42′51″, nombre trop faible de 29′58″.

Quelques années plus tard, en 1524, parut la *Cosmographie*, si connue, de P. Apian (7).

Ce géographe, protégé de Charles-Quint, eut de nombreuses relations avec les Pays-Bas où sa Cosmographie fut réimprimée un grand nombre de fois, à partir de 1529, avec les additions et les corrections de Gemma Frisius.

Il fixe la latitude de Liége à 50°50′. L'erreur n'est plus que de 12′4″.

Quant à la longitude, elle est donnée moins exactement que par J. Stoefler, car si on la rapporte à Tübingen, elle est trop faible de 1°10′38″; si on la rapporte à Leipzig, l'erreur s'élève à 1°19′34″.

Par rapport à Leysnig, ville où l'auteur est né et que l'on peut regarder comme centre de ses travaux cartographiques, l'erreur est du même ordre 1°10′ environ.

En 1530, R. Gemma Frisius, dans son livre intitulé : *De principiis astronomiæ et cosmographiæ* (8), que nous avons déjà cité, modifie légèrement les données de P. Apian.

Il indique, comme mesure de la latitude, 50°51′ et comme longitude, 28.

Si l'on rapporte cette longitude à celle de Louvain où opérait Gemma, l'erreur n'est que de 1′52″.

La distance entre les deux villes est, il est vrai, extrêmement faible, et c'est sans nul doute à cela qu'est due, en partie, la petitesse de l'erreur.

D'un autre côté, on peut croire que Gemma, en ce qui concerne notre pays, a pu mettre en pratique ses procédés géodésiques : notamment, sa méthode topographique et sa méthode par la comparaison des heures.

Si, au contraire, on prend comme point de départ le méridien de Paris, la longitude de Liége aurait été de 4°40′, en erreur de 1°28′ environ.

Pendant de longues années, les données d'Apian continuèrent à être les seules employées.

Il faut arriver à la fin du XVIe siècle, au règne d'Ernest de Bavière, pour trouver un nouvel essai de détermination de la position de Liége.

Ce prince, fort épris, comme l'on sait, d'astronomie et de chimie, avait attiré à Liége deux astronomes, Stempel et Zelst, qui firent des observations dans le palais.

On trouve des traces de ces observations dans un petit livre imprimé à Liége, en 1602, et intitulé : *Utriusque Astrolabii fabrica et vsus* (9).

Dans tout le cours de cet ouvrage, la latitude employée est

51°; mais on peut croire que les auteurs ne donnent ce nombre que pour simplifier les calculs.

En effet, ils disent quelque part (1^{re} pag., p. 38) que les coordonnées de Liége, sont, d'après P. Apian : Long., 26.40; lat., 50.40.

Nous ignorons dans quelle édition de P. Apian, ces nombres ont été puisés. Ils sont, dans tous les cas, remarquablement exacts.

Si l'on adopte, en effet, la longitude de Paris, généralement acceptée à cette époque, 23°20', les coordonnées de Liége seraient :

Long.	3° 20',	lat.	50° 40'
Erreurs. +	7' 11'',	+	2' 4''

Dans une table des longitudes et des latitudes, contenue dans ce même ouvrage, on trouve (2^{e} pag., p. 39).

Liége. Long. 22.. Lat. 50.46.

La longitude attribuée à Liége, dans ce passage, est totalement inexplicable.

En effet, les latitudes de Gand, de Louvain et d'Anvers sont respectivement 22°, 20°36', 24°30'; celle de Paris 24°30', de manière qu'il est absolument impossible de faire état des nombres qui figurent dans cette partie de la table.

Quant à la latitude, c'est probablement celle que les auteurs avaient déduites de leurs observations.

Nous pouvons faire remarquer, pour justifier notre opinion, qu'ils rapportent deux observations de passages méridiens du soleil, faites à Liége, le 22 juin et le 22 décembre 1599, et qu'ils en déduisent pour la latitude de Liége 50°45' « *quæ proximè vera est Poli elevatio Leodij.* » (2^{e} pagin., pag. 98).

Ajoutons que l'on pourrait déduire graphiquement, de l'Atlas de Mercator [10], pour la longitude de Liége, 27°; Paris ayant, en long., d'après certaines cartes du même atlas, 23°30'40'', et d'après d'autres 23°15', on devrait attribuer à Liége la longitude de 3°29'20'' ou 3°45'; la latitude, d'après le même atlas, serait 50°39'30''.

Dans les tables Rudolphines ([11]), l'immortel Kepler donne aussi les coordonnées de Liége : 50°36′ en latitude, — 0^h26^m par rapport à Uranibourg ou + 14^m par rapport à Paris, ce qui nous conduit à une longitude orientale de 3°30′.

Sur l'exemplaire de notre Université, une main liégeoise probablement, a remplacé les nombres primitifs par 50°40′ (*), et — 0^h23^m.

J'ajouterai, pour finir cette longue nomenclature, que les tables de La Hire, publiées pour la première fois en 1702, fixent la longitude de Liége à 3°45′, et sa latitude à 50°40′06″.

Je ne me propose pas de discuter les résultats divers que j'ai mentionnés.

Sauf les données de 1424 et de 1599, il serait difficile d'affirmer qu'elles proviennent directement d'observations faites à Liége. D'un autre côté, cependant, il se pourrait parfaitement que P. Apian, et surtout Gemma Frisius et La Hire aient eu de pareilles observations.

Quoi qu'il en soit, la moyenne des valeurs attribuées à la latitude conduit au nombre 50°38′12″, et celle des valeurs attribuées à la longitude 3°34′32″.

Je ne donne évidemment ces deux nombres que comme simple renseignement, surtout en ce qui concerne la longitude; nous pouvons faire observer toutefois que la combinaison des résultats mentionnés conduit à des valeurs plus exactes que celles qui ont pu être déterminées directement, au commencement du XVIII[e] siècle, par un observateur de la valeur de Philippe de La Hire.

(*) Ajoutons que dans un *Tractatus de horologiis,* dû au P. François Linus ou Hall, professeur au Collège des Jésuites anglais de Liége — où il mourut en 1675 — cette latitude de 50°40′ semble déduite d'une observation de hauteur du soleil. Voir, à l'Univ. de Liége, ms. 377 (n° 457 du Cat. imprimé), p. 10-11. Ce n'est pas, d'ailleurs, la seule observation faite à ce Collège. Nous pouvons signaler des observations d'une comète, du 11 au 16 avril 1665 (v. *Corresp. de Sluse,* Lettre à Chr. Huygens, du 17 avril 1665, p. 143).

NOTES.

(1) Cf. Cantor, *Vorles. über Geschichte der Math.,* I, S. 761 : Als grosse Astronomen werden genannt Engelbert von Lüttich, Gilbert Maminot von Lisieux, Odo Stiftsherr von Tournai. Ueber den Abacus schrieben Heriger von Lobbes, einem bei Lüttich gelegenen vielgerühmten Kloster, Helbert von St-Hubertus in den Ardennen, Franco von Lüttich, den wir schon als Geometer kennen lernten. Auch Rudolf von Lüttich und Regimbold von Coeln werden aus der unmittelbar auf Gerbert folgenden Zeit als Mathematiker gerühmt. Viele, ja die meisten Pflanzstätten mathematischer Bildung, von welchen die hier genannten Persönlichkeiten ihren Namen, aus welchen sie ihr Wissen erhielten, liegen in ziemlich engem Kreise um Lüttich herum, damals dem geistigen Mittelpunkte von Lothringen und bestätigen so ein Wort des Bernelinus : bei den Lothringern blühe die Kunst des Abacus.

Voyez également Wattenbach, *Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter,* 2ter Bd., S. 127 : Die Lüttieher Schule, welche schon in dem vorigen Zeitraume sich zu bedeutendem Ansehen erhob, erreichte in dem gegenwärtigen (d. h. im XIten Jahrh.) ihren Höhepunkt; sie war der Leben ausströmenden Mittelpunkt nicht für Lothringen allein, über ganz Deutschland und bis nach England erstreckte sich ihre Wirksamkeit, auch wohl nach Frankreich.

(2) Ce manuscrit porte le n° 354 (v. Catalogue des manuscrits de l'Université de Liége, p. 260, n° 454); il est composé de 79 feuillets, de papier, numérotés à la mine de plomb, dans l'angle droit supérieur du recto, 167-245.

Le feuillet 167 contient les nombres relatifs à la position des signes du zodiaque et quelques données numériques dont l'emploi devait être fréquent, entre autre la déclinaison maxima 23°33'30''.

Les feuillets 168-174 et la première colonne du recto du feuillet 175 comprennent un traité commençant ainsi : *Cuiuslibet arcus propositi sinum rectum invenire,* et finissant par ces mots : *Et est finis canonum primi mobilis magistri Jo. de lineriis.*

L'auteur du premier traité est donc Jean de Linières (sur cet astronome, voir plusieurs mémoires insérés dans le tome XII du *Bullettino,* publié par

M. le prince B. Boncompagni); les suivants semblent également devoir lui être attribués.

Les feuillets 175 (à partir de la seconde colonne) jusqu'au feuillet 190 r° sont occupés par un traité commençant ainsi : *Priores astrologi motus corporum celestium diligentissimis consideracionibus observantes eosdem alio et altero tempore sub diversis principibus diversarum nacionum posterioribus descripserunt* et finissant par *et est finis, deo gracias.*

A la suite de ces mots, on trouve le passage suivant : *Nota quod a tempore consideracionis ptholemei de lat. augium et stellarum fixarum usque ad tempus consideracionis alfonsij de eijsdem mota est* 8ª *spera et per consequens stelle fixe et auges per* 17 *gradus et* 8 *minuta. Et de consideracione alfonsij usque ad finem anni xri* 1368 *mota est per unum gradum* 22 *minuta* 8 *secunda et* 43 3ª. *Et sic a tempore consideracionis ptholemei usque ad finem anni xri* 1368 *motus est zodiacus mobilis et ymagines ipsius per* 18 *gradus* 30 *minuta* 18 2ª *et* 43 *tercia. Et cum tempore consideracionis ptholemei stella antecedens que est in cornu arietis et a qua incipit ymago arietis fuerit distans a puncto zodiaci fixi per* 6 *gradus* 40 *minuta, sequitur quod perfecto anno xri* 1368° *distabit ab eodem puncto arietis zodiaci fixi per* 25 *grad.* 10 *min.* 18 2ª 43 3ª *etc.*

Ce traité, relatif au calcul des éclipses, a probablement été remanié vers 1368.

Les feuillets 190 r° à 197 r° contiennent différentes tables.

Les feuillets 197 v° à 199 v° sont occupés par la description d'un instrument analogue à l'astrolabe. C'est probablement l'*Equatorium* de Jean de Linières.

Ce traité commence ainsi :

Equatorium planetarum facilis compositionis paruarum expensarum non minoris utilitatis omnibus quam instrumentum Campani per quod ad omne tempus datum certa loca planetarum infaillibiliter reperiuntur.

Les feuillets 200-218 sont occupés par un calendrier.

Dans les feuillets 219, 220 r°, se trouvent figurées 14 éclipses de soleil, du 26 juin 1424 au 20 novembre 1462 et 31 éclipses de lune, du 5 décembre 1424 au 11 juin 1462.

Comparées aux tables de v. Oppolzer, les dates assignées à ces éclipses sont généralement exactes.

Différentes tables et écrits de peu d'importance complètent le manuscrit.

Nous le supposons écrit vers 1424, parce que 1° le calcul des éclipses commence à cette année; 2° différentes tables sont calculées pour cette même année.

(3) Elucidatio fabricæ vsusque astrolabii a Joanne Stoflerino Justingensi. Impressum Oppenheym anno 1513, f°. Univ. Leod. I, 132, 2bis.

([4]) Gemma Phrysius de principiis Astronomiæ & Cosmographiæ, Deque usu Globi ab eodem editi. 4°. Imprimé à Anvers par J. Grapheus en octobre 1530. Univ. Gand. Acc. 8546[1].

([5]) Claudii Ptholemei viri Alexandrini Cosmographia. A la fin : Anno MCCCCLXXXII. Augusti vero Kalendas XVII impressum Vlme per ingeniosum virum Leonardum Hol prefati oppidi civis (sic). In-f°. Univ. Leod. XVII, 101, 10. Voir la 6e carte de cet atlas.

([6]) Calendarium Romanum magnum Cæsareæ Maiestati dicatum, D. Ioanne Stoeffler Iustingensi mathematico authore. A la fin : Impressum in Oppenheym per Jacobum Köbel, die 24 martij mensis anno 1518. Univ. Leod. I, 122, 3. Un autre exempl. fait partie de ma biblioth.

([7]) Cosmographicus liber Petri Apiani mathematici studiose collectus. A la fin : Excusum Landshutæ typis ac formulis D. Joannis Weyssenburgers : impensis Petri Apiani. Anno Christi saluatoris omnium millesimo quingentesimo vicesimo quarto mense janu : Phebo Saturni domicilium possedente. 4°. Univ. Gand. Acc. 8546.

Pour les nombreuses éditions faites par Gemma Frisius, voir l'article P. Apian, dans la *Bibliotheca belgica* de M. Ferd. Vander Haeghen.

([8]) V. ci-dessus, note 4.

([9]) Vtrivsqve astrolabii tam particvlaris qvam vniversalis fabrica et vsvs. Leodii, typis Chr. Ouvverx, M. D. CII. 4°. Univ. Leod. Coll. Capitaine, 3907. Univ. Gand. *Math.* 1003. C'est par erreur que l'on cite parfois une édition de 1609.

([10]) Atlas sive cosmographicæ meditationes de fabrica mundi et fabricali figura. Sumptibus et typis Henrici Hondij. Anno 1607. Univ. Leod. XX, 53, 1.

([11]) Tabulæ Rudolphinæ. 1627, p. 34. Univ. Leod. I, 115, 1.