始

PLANE GEOMETRY

H. TERAO
K. YOSHIDA

大正七年版

中學教科

平面幾何

理學博士 寺尾壽
理學士 吉田好九郎
合編

冨山房發兌

目次

大正六年版

中學教科

平面幾何

第一編　緒論

1.　定義

物體ヲ其形,大サ及ビ位置ノミニ就テ考フルトキハ,之ヲ**立體**ト名ヅク.

立體ノ境界ヲ**表面**或ハ**面**トイヒ,面ノ境界ヲ**線**トイヒ,線ノ境界ヲ**點**トイフ.

二ツノ面ガ出會フ所モ亦線ニシテ,二ツノ線ガ出會フ所モ亦點ナリ.

2. 定義

立體,面,線及ビ點或ハ此等ノ若干ノ集合ヲ**圖形**トイフ.

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ,其スベテノ部分ガ合スル樣ニ重ネ得ルトキ,此二ツノ圖形ハ**相等シ**トイフ.

3. 直線及ビ曲線

直線トハ眞直ナル線ノコトナリ.

例ヘバ緊張シタル絲,良ク作ラレタル定規ノ線ナドニヨリテ直線ノ觀念ヲ得ベシ.

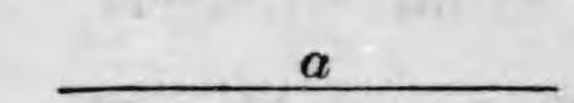
直線ハ雙方ヘ限リナキ者トス.

直線ヲ,其上ノ或一點ニテ二ツニ分チ,其一方ダケヲ考フルトキ,之ヲ**半直線**トイヒ,其點ヲ其**原點**トイフ.

直線上ニ二點ヲ取リ,之ヲ兩端トスル部分ヲ限リテ考フルトキハ之ヲ**線分**又ハ**有限直線**トイヒ,其殘リノ部分ヲ其**延長**トイフ.

直線ヲ唱フルニハ,通例其上ノ任意ノ二點(線分ナラバ其兩端,半直線ナラバ其原點ト尚其上ノ任意ノ一點)ノ名ヲ續ケテ呼ブ,例ヘバ直線AB ナドノ如シ. 但シ半直線ノ場合ニハ原點ノ名ヲ必ズ先ニ唱フル者トス.

時トシテハ唯一ツノ羅馬字ノ名ニテ直線(半直線又ハ線分)ヲ唱フルコトアリ,例ヘバ直線aト呼ブガ如シ.



直線ニアラザル線ヲ**曲線**トイフ.

【注意1】 線分及ビ半直線ヲモ直線トイフコトアリ.

【注意2】以後一ツノ點ヨリ引キタル直線トハ其點ヲ原點トスル半直線ノコトナリト知ルベシ.

4. 定義

吾人ノ常識又ハ經驗ニヨリテ其眞ナルコトヲ知リ得ベク,何故ニ夫ガ眞ナルカヲ證據立テズシテ(卽チ證明セズシテ)承認スル事柄ヲ**公理**トイフ.

5. 公理

二定點ヲ通ル直線ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

從テ二定點ヲ通ル直線ヲ幾ツ引キテモ此等ハ全ク相合ス.

因テ 全ク相合セザル二直線ガ一點ヲ共有スルトキハ其他ノ點ヲ共有セズ.

定義 唯一點ノミヲ共有スル二直線ヲ**相交ル**トイフ.

【注意】以後單ニ二ツ以上ノ線トアルトキハ,全ク相合セザル線ノコトナリト知ルベシ.

6. 定義

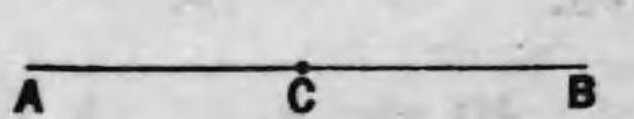
二點間ノ距離トハ此二點ヲ兩端トスル線分ノ長サノコトナリ.

二點ヲ兩端トスル線分ヲ作ルコトヲ**此二點ヲ結ビ付クル**トイフ.

7. 定義

線分ノ**中點**(或ハ**二等分點**)トハ其線分上ニアリテ兩端ヨリ相等シキ距離ニアル點ノコトナリ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ AC = BC ナルトキハ,點 C ハ線分 AB ノ中點ナリ.



8. 定義

平面トハ一ツノ面ニシテ,其上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其面上ニアル(其面ニ密合スル)者ヲイフ.

例ヘバ善ク削リタル板ノ面ナドニヨリテ平面ノ觀念ヲ得ベシ.

9. 公理

一定直線ヲ含ミ,且ツ其上ニアラザル一定點ヲ通ル平面ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

從テ次ノ事柄ハ成リ立ツ.

同一直線上ニアラザル三定點ヲ通ル平面ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

相交ル二直線ヲ含ム平面ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

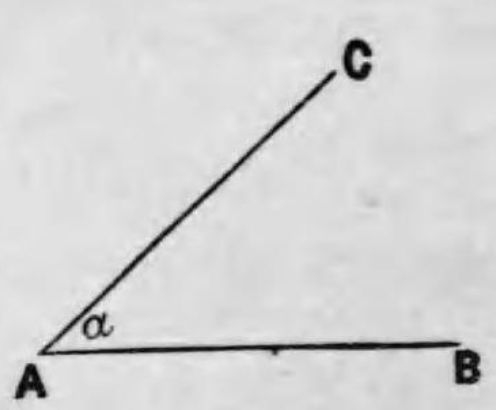
10. 定義

圖形ノ各部分ガ同一平面上ニアルトキ,之ヲ**平面圖形**トイフ.

第二編
多角形及ビ作圖題
第一章　角及ビ垂線

11.　定義

同一點ヨリ引キタル二ツノ半直線ハ角ヲナス或ハ角ヲ夾ムトイヒ,其點ヲ角ノ頂點,其半直線ノ各ヲ角ノ邊トイフ.



圖ニ於テAハ二直線AB, ACガナス角ノ頂點, AB, ACハ何レモ角ノ邊ナリ.

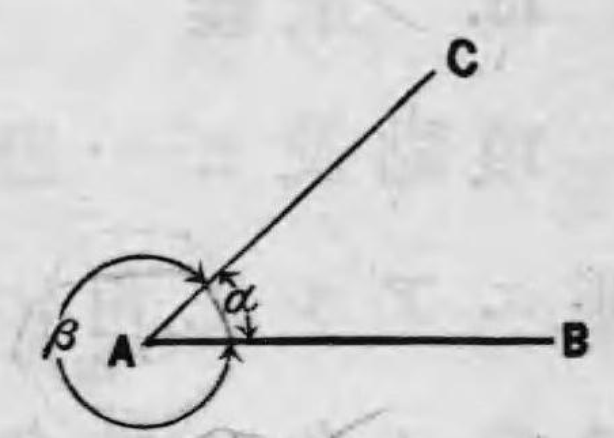
角ヲ示スニハ通例頂點ヲ示ス文字ノ名ヲ各邊上ノ其他ノ一點ヲ示ス二ツノ文字ノ名ノ間ニオキテ之ヲ呼ブ. 例ヘバ上圖ノ角ヲ角BAC或ハ角CABト呼ブ.

但シ紛レナキ場合ニハ唯頂點ヲ示ス文字ノミヲ用フルカ,若クハ角内ニ一ツノ文字ヲ書キテ之ヲ示ス. 例ヘバ前圖ノ角ヲ角A若クハ角αト呼ブガ如シ.

角トイフ文字ノ代リニ符號∠ヲ用フルコトアリ. 例ヘバ∠BAC, ∠αノ如シ.

12.　角ノ大サ

角BACノ頂點Aヨリ引キタル半直線ガ其角ノ平面上ヲ,頂點Aノ周リニ同ジ向キニ廻轉シテABノ位置ヨリACノ位置マデ來ルトキ,其廻轉ノ多少ニヨリテ其角ノ大サヲ計ルナリ.



從テ角ノ大小ハ其邊ノ長サニ無關係ナリ.

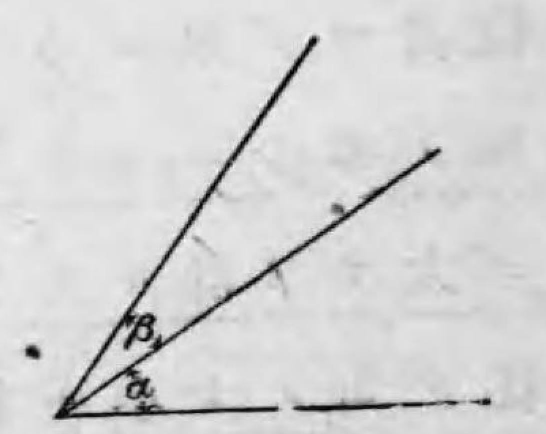
直線ガABノ位置ヨリACノ位置マデ廻轉スル仕方ハ,上圖ニ於テ矢ノ向キニテ示ス如ク二通リアリ,從テAB, ACガナス角モ亦二ツアリト考ヘラル.

箇様ニ頂點及ビ二邊ヲ共有シテ相合セザル位置ニアル二ツノ角ハ**互ニ共軛ナリ**トイフ,而シテ其中ノ大ナル者(圖ニ於ケルβ)ヲ**優角**,小ナル者(圖ニ於ケルα)ヲ**劣角**トイフ.

【注意】以後單ニ角トアルハ劣角ノコトナリト知ルベシ.

13. 定義

頂點及ビ一邊ヲ共有シ,其邊ノ兩側ニアル二角ノ各ヲ他ノ角ノ**接角**トイフ.

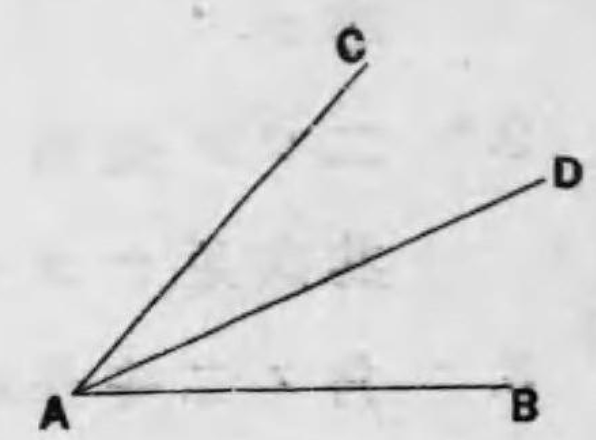


例ヘバ右ノ圖ニ於ケルα, βハ互ニ接角ナリ.

14. 定義

角ノ頂點ヨリ,角内ニ引キタル直

線ガ,其角ヲ相等シキ二ツノ接角ニ分ツトキハ,此直線ヲ其角ノ**二等分**線トイフ.



例ヘバ右ノ圖ニ於テ

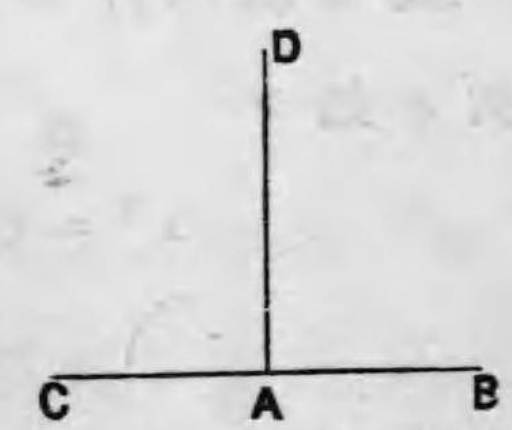
$\angle BAD = \angle CAD$

ナルトキハ, AD ハ $\angle BAC$ ノ二等分線ナリ.

15. 定義

角ノ一邊ガ他ノ邊ノ延長ナルトキ,其角ヲ**平角**トイフ.

平角ノ半分ヲ**直角**トイフ.



例ヘバ右ノ圖ニ於テ $\angle BAC$ ハ平角ナリ.

又 $\angle BAD = \angle CAD$ ナルトキハ,其各ハ直角ナリ.

直角ヲ表スニ符號 $\angle R$ ヲ用フルコトアリ.

問題

1.* 直線上ノ一點ヨリ一ツノ直線ヲ引クトキニ生ズル二ツノ接角ノ和ハ二直角ニ等シ.

2.* 二ツノ接角ノ和ガ 2∠R ニ等シケレバ其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス.

3. 角ノ二等分線ノ延長ハ其共軛角ヲ二等分ス.

16. 實用上ニ於ケル角ノ單位

實用上ニ於テ角ヲ測ルニハ,通例直角ノ $\frac{1}{90}$ ヲ基本單位トシ,之ヲ1度ト名ヅク.

從テ　1直角＝90度

ナリ,其補助單位ハ分,秒ニシテ,此等ノ間ノ關係ハ次ノ如シ.

$$1^{度}=60^{分}$$

$$1^{分}=60^{秒}$$

度,分,秒トイフ文字ノ代リニ,夫々 °, ′, ″ ナル符號ヲ用フルコトアリ.

例ヘバ 58度 47分 23秒ヲ 58° 47′ 23″ ト記ス

ガ如シ.

問題

1. 75°ヲ直角ノ分數ニテ表セ.

75/90

2. 0.75 直角ハ幾度ナルカ.

0.75×90

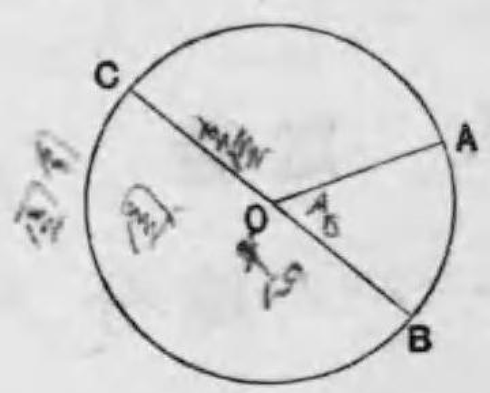
17. 定義

一ツノ線分ノ一端ヲ固定シオキ,此線分ヲ含ム一ツノ平面上ニ於テ其固定シタル端ノ周リニ始終同ジ向キニ廻轉シテ再ビ元ノ位置ニ來ラシムルトキ,他ノ端ガ畫ク線ヲ**圓周**トイヒ,圓周ニテ圍マルル其平面ノ部分ヲ**圓**トイフ. 始メ固定シオキタル端ヲ圓ノ**中心**トイヒ,中心ヨリ圓周マデ引キタル線分ヲ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ其兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ**直徑**トイフ.

次ノ圖ニ於テハ, O ハ中心, OA, OB, OC ハ何レモ半徑, BC ハ直徑ナリ.

兩脚規(コンパス)ニテ圓ヲ畫キタル場合ニハ其兩脚ノ尖端間ノ距離ガ其半徑ナリ.

圓ヲ呼ブニハ,通例其中心ノ名ヲ示ス文字ヲ唱フルカ又ハ圓周上ノ三點ノ名ヲ示ス文字ヲ續ケテ唱フルナリ,例ヘバ上圖ノ圓ヲ圓O又ハ圓ABCト呼ブガ如シ.



【注意】圓周ハ線ニシテ圓ハ面ナレドモ,時トシテハ圓ナル語ヲ圓周ノ意ニ用フルコトアリ.

問題

圓内ノ一點ヨリ中心ニ至ル距離ト半徑トハ何レガ大ナルカ. 圓外ノ點ナラバ如何. 圓周上ノ點ナラバ如何.

18. 前節ニ述ベタル圓ノ定義ヨリ直チニ次ノ事柄ガ分カル.

(1) 半徑ガ相等シキ二ツノ圓ハ相等シ.

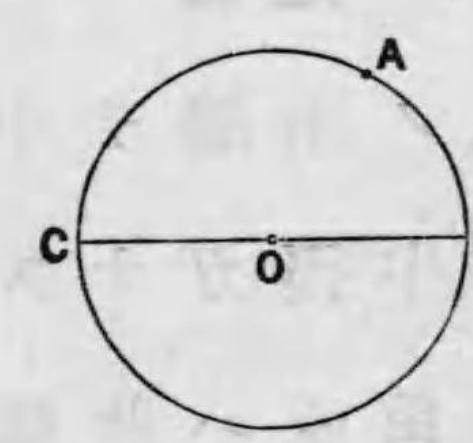
(2) 相等シキ二ツノ圓ノ半徑ハ相等シ.

(3) 一ツノ圓ヲ其中心ノ周リニ廻シテモ常ニ全ク元ノ位置ニ合ス.

19. 定義

圓周ノ一部分ヲ弧トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル圓周ノ部分 AB ノ如シ.



弧 AB ト書ク代リニ $\overset{\frown}{AB}$ ト書クコトアリ.

直徑 BC ヲ折リ目トシテ圓ノ一部BACヲ他部ノ上ニ折リ重ヌルトキハ,此二ツノ部分ハ全ク相合ス. 即チ

直徑ハ圓周及ビ圓ヲ二等分ス,而

シテ其各部分ヲ夫々**半圓周**及ビ**半圓**トイフ.

例ヘバ前ノ圖ニ於テ弧 BAC ハ半圓周ニシテ,弧 BAC ト直徑 BC トニテ圍マルル圖形ハ半圓ナリ.

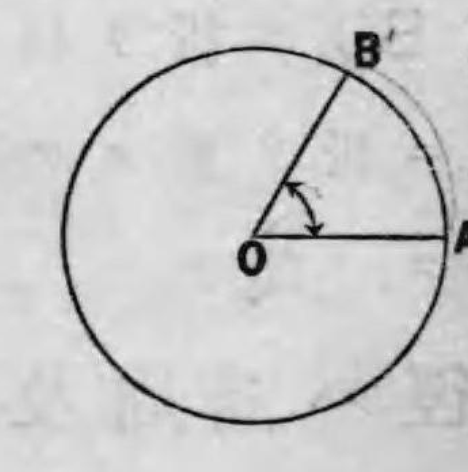
問題

圓內ノ一點ヨリ,其點ヲ通ル直徑ト其兩側ニ於テ相等シキ角ヲナス線分ヲ引キ,圓周ニ終ラシムルトキハ,此二ツノ線分ハ相等シ.

6

20. 定義

弧ノ兩端ヲ中心ニ結ビ付クル二ツノ半徑ガナス角ヲ此**弧ニ對スル中心角**或ハ此**弧ノ上ニ立ツ中心角**トイフ.



右ノ圖ニ於ケル角 AOB ハ弧 AB ニ對スル中心角ナリ.

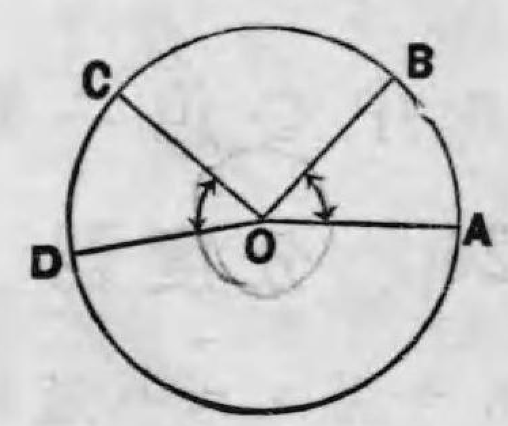
21. 定義

已知ノ事柄ヨリ其眞ナルコトヲ證明シ得ル事柄ヲ**定理**トイフ.

公理或ハ定理ヨリ容易ニ推定シ得ラルル事柄ヲ**系**トイフ.

22. 定理

同一ノ圓(或ハ相等シキ圓)ニ於テ相等シキ弧ニ對スル中心角ハ相等シ.



例ヘバ圓 O ニ於テ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ナルトキハ $\angle AOB=\angle COD$ ナルベシ.

【證明】中心 O ノ周リニ圓ヲ廻セバ,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ナルニヨリ,$\overset{\frown}{AB}$ ヲ $\overset{\frown}{CD}$ ノ元ノ位置ニ全ク合セシムルコトヲ得.

從テ $\angle AOB=\angle COD$

系　同一ノ圓(或ハ相等シキ圓)ニ於テ大ナル弧ニ對スル中心角ハ小ナル弧ニ對スル中心角ヨリ大ナリ.

23.　前節ト同樣ノ方法ニヨリテ次ノ定理ヲ證明スルコトヲ得ベシ.

定理　同一ノ圓(或ハ相等シキ圓)ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シ.

系　同一ノ圓(或ハ相等シキ圓)ニ於テ大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大ナリ.

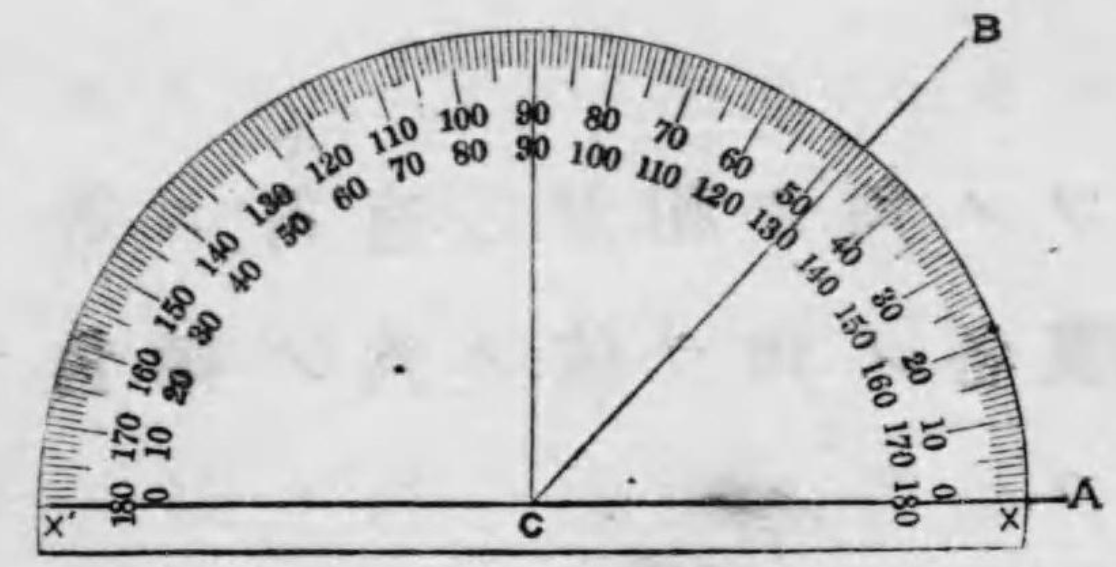
24.　分度器

角ヲ測ルニハ通例分度器ヲ用フ.

分度器ハ半圓形ニシテ半圓周ヲ180ニ等分シテ目盛リヲ附シアリ. 今之ニテ一ツノ角ノ大サヲ測ルニハ,其中心Cヲ角ノ頂點ニオキ,其底CXヲ角ノ一邊上ニ重ネ他ノ邊ガ目盛リノ

幾度ノ所ヲ通ルカヲ見レバヨシ.

例ヘバ次ノ圖ニ於ケル角ACBハ48°ナルコトヲ知ルガ如シ.



25.　定義

直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**トイヒ, 直角ヨリ大ニシテ二直角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ.

例ヘバ次ノ圖ニ於テ$\angle\alpha$ハ鋭角ニシテ, $\angle\beta$ハ鈍角ナリ.

26. 定義

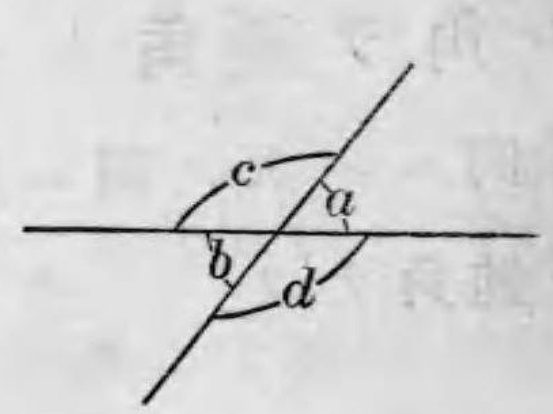
二ツノ角ノ和ガ直角ニ等シキトキ,其各ノ角ヲ他ノ角ノ**餘角**ナリトイフ.

二ツノ角ノ和ガ二直角ニ等シキトキ,其各ノ角ヲ他ノ角ノ**補角**ナリトイフ.

27. 定義

相交ル二直線ガナス四ツノ角ノ中,相隣ラザル二ツノ角ヲ**對頂角**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ$\angle a$ト$\angle b$トハ對頂角ナリ. 又$\angle c$ト$\angle d$トハ對頂角ナリ.

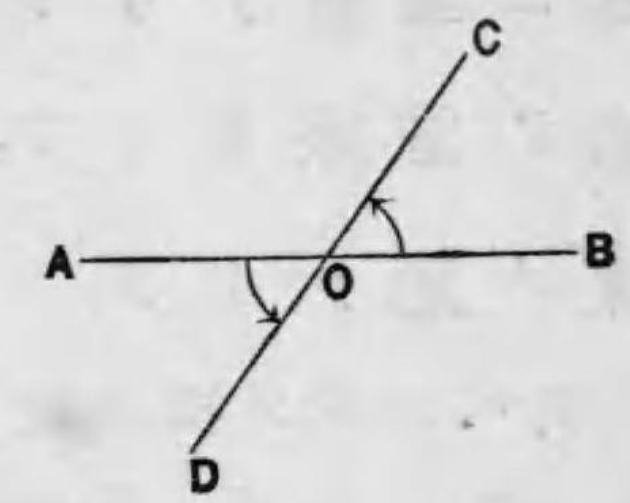


28. 定理

對頂角ハ相等シ.

例ヘバ點Oニ於テ相交ル二直線AB,CDガナス對頂角AOD及ビBOCハ相等シカルベシ.

【證明】 直線ABヲOノ周リニ矢ノ向キニ廻轉シテ半直線OBヲ半直線OCノ上ニ重ヌレバOBノ延長OAハOCノ延長ODノ上ニ重ナル,從テ其時OBガ廻轉シタル角BOCトOAガ廻轉シタル角AODトハ相等シ.

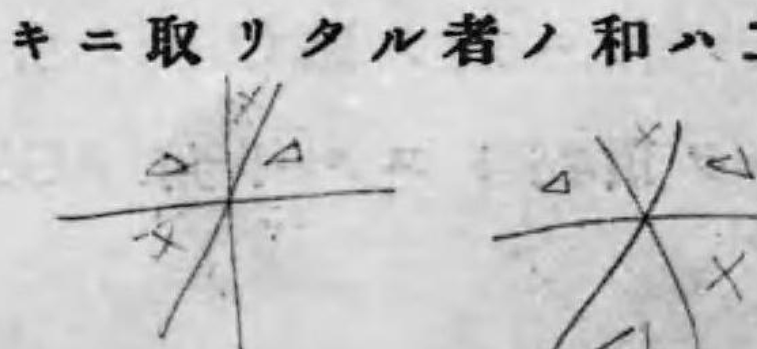


問題

1.* 二直線ガ相交リテナス四ツノ角ノ中,一ツガ直角ナラバ其他ノ三ツノ角モ皆直角ナリ.

2.* 對頂角ノ一方ノ二等分線ノ延長ハ亦他方ヲ二等分ス.

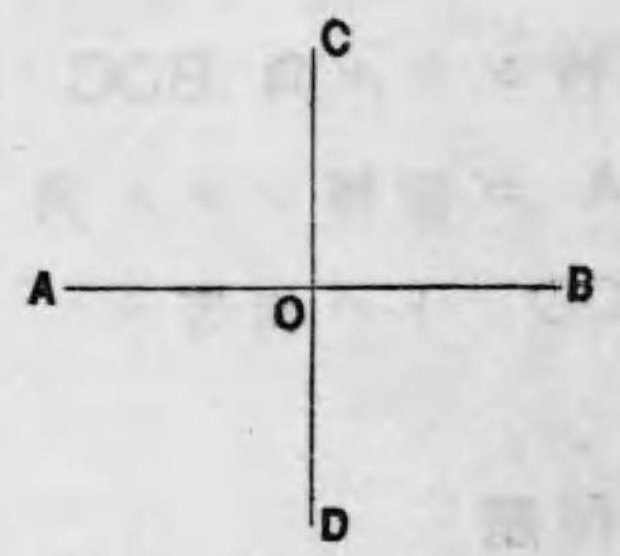
3. 同一點ニ於テ交ル三直線ガナス六ツノ角ヲ一ツオキニ取リタル者ノ和ハ二直角ニ等シ.



29. 定義

二直線ガ相交リテナス四ツノ角ガ何レモ直角ナルトキ,此二直線ハ**互ニ垂直**ナリトイヒ,其中ノ一ツヲ他ノ**垂線**トイフ,而シテ其交點ヲ垂線ノ**足**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ AB ハ CD ノ垂線ニシテ, CD ハ AB ノ垂線ナリ,而シテ其足ハ何レモ O ナリ.



二直線 AB, CD ガ互ニ垂直ナルコトヲ此二直線ハ**直角ニ交ル**トモ又ハ**直交スル**トモイフコトアリ.

二直線 AB, CD ガ直交スルコトヲ AB⊥CD ト書ク.

上ノ圖ニ於テ點 O ヨリ引ケル AB ノ垂線 OC ハ O ヲ頂點トスル平角 AOB ノ二等分線ニシ

テ, OD ハ其延長ナリ.

然ルニ角ノ二等分線ハ唯一ツニ限ル.

仍テ次ノ定理ヲ得.

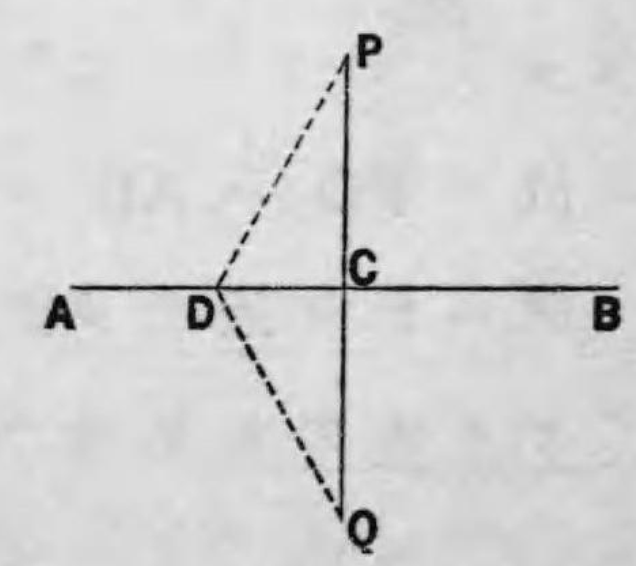
定理 直線上ノ一定點ヲ通リ此直線ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

30. 定理

定直線外ノ一定點ヲ通リ此直線ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

例ヘバ定直線 AB 上ニアラザル一定點 P ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアリテ二ツハ決シテナカルベシ.

【證明】AB ヲ折リ目トシテ AB ト P トヲ合ム平面ノ P ノアル側ヲ他ノ側ノ上ニ折リ返ストキ P ガ落ツベキ位置



ヲ Q トシ, P ト Q トヲ結ビ付ケ, ソレト AB トノ交點ヲ C トセヨ.

サスレバ實際折リ返セバ P ハ Q ニ重ナルユヱ線分 PC ハ線分 QC ニ重ナルベク, 從テ

$$\angle PCB = \angle QCB$$

$$\therefore \quad \angle PCB = \angle R$$

$$\therefore \quad PC \perp AB$$

故ニ P ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアリ.

次ニ AB 上ニ C ノ外ニ任意ノ一點 D ヲ取リ, P, Q ノ各ト D トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ實際折リ返セバ PD ハ QD ニ重ナルベク, 從テ

$$\angle PDC = \angle QDC$$

ニシテ, PD ト QD トハ一直線ナラザルユヱ, ∠PDQ ハ平角ナラズ, 因テ ∠PDC ハ直角ナラズ.

故ニ PD ハ AB ニ垂直ナラズ.

故ニ P ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアルノミナリ.

31. 定義

直線外ノ一點ヨリ此直線ヘ引キタル垂線ノ長サトハ, 此點ト垂線ノ足トノ間ノ距離ノコトナリ, 而シテ其長サヲ**其點ト其直線トノ距離**トイフ.

32. 定義

互ニ垂直ナラザル相交ル二直線ノ各ヲ他ノ直線ノ**斜線**トイヒ, 其交點ヲ斜線ノ**足**トイフ.

問題

1. 時計ガ三時三十分ヲ指ストキ, 其兩針ノ夾ム角ハ幾直角ナルカ. 又幾度ナルカ. 九時三十六分ヲ指ストキハ如何.
2. 正南ノ方向ト東南ノ方向トガナス角ハ幾直角ナルカ. 又幾度ナルカ.

帝國圖書館收入

3.* 直線AB上ノ一點Cヨリ其兩側ニ一ツ宛直線CD, CEヲ引キ, $\angle ACD=\angle BCE$ナラシムルトキハ此二ツノ直線ハ一直線ヲナス.

4.* 對頂角ノ各ノ二等分線ハ一直線ヲナス.

5.* 一直線上ノ一點ヨリ一ツノ直線ヲ引クトキニ生ズル二ツノ接角ノ各ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

6. 相交ル二直線ガナス四ツノ角ヲ夫々二等分スル四ツノ直線ハ互ニ垂直ナル二直線ヲナス.

第二章　多角形

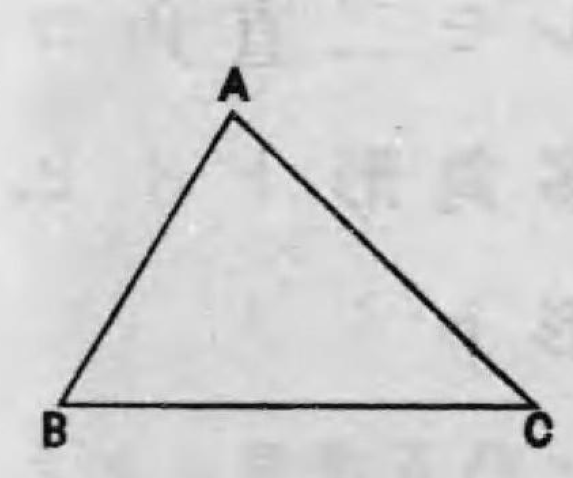
33. 定義

相接續スル若干ノ線分ニテ圍マレタル平面ノ部分ヲ**多角形**トイフ.

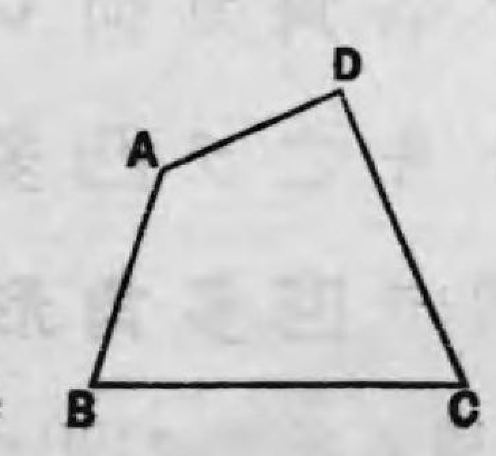
多角形ヲ組ミ立ツル所ノ線分ノ各ヲ其**邊**トイヒ,相隣レル二邊ガナス形內ノ角ヲ多角形ノ**角**トイヒ,其頂點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ.

三ツノ線分ニテ圍マレタル多角形ヲ**三角形**トイヒ,四ツノ線分ニテ圍マレタル者ヲ**四邊形**(又ハ**四角形**)トイフ. 其他モ之ニ準ズ.

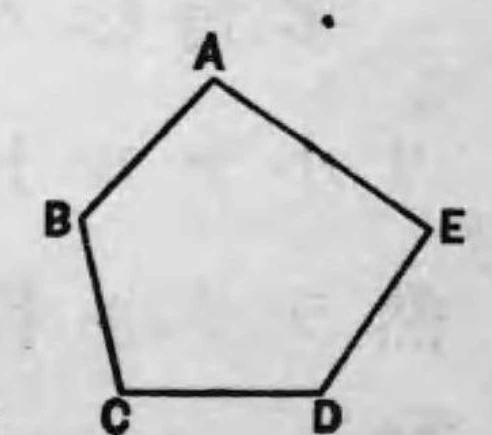
(三角形)



(四邊形)



(五邊形)



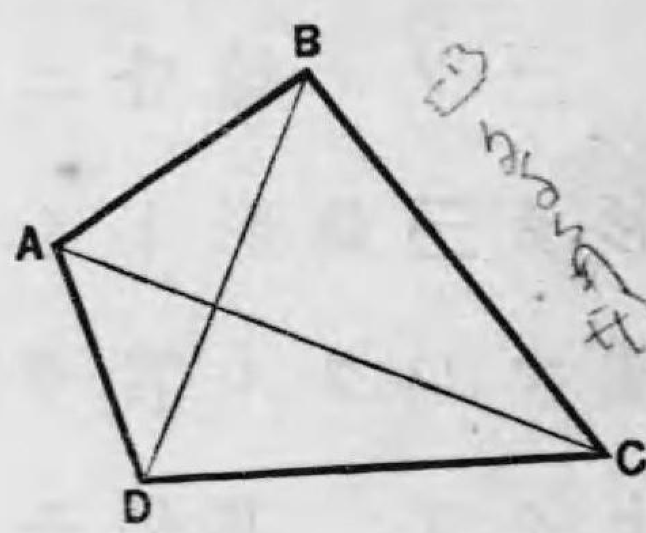
多角形ヲ呼ブニハ其各頂點ノ文字ヲ順次ニ續ケテ唱フル者トス. 例ヘバ五邊形 ABCDE ノ如シ.

三角形トイフ文字ノ代リニ符號△ヲ用フルコトアリ. 例ヘバ △ABC ノ如シ.

34. 定義

多角形ノ相隣ラザル二ツノ頂點ヲ結ビ付クル線分ヲ**對角線**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ, 二ツノ線分AC, BDハ何レモ四邊形ABCDノ對角線ナリ.



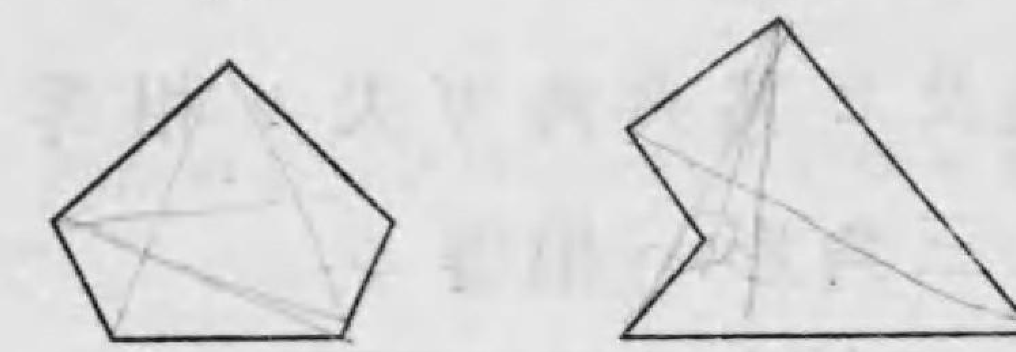
35. 定義

多角形ノ各角ガ何レモ二直角ヨリ小ナルトキ之ヲ**凸多角形**トイヒ, 然ラザル者ヲ**凹多角形**トイフ.

例ヘバ次ノ圖ニ於ケル(甲)ハ凸五邊形ニシテ

(乙)ハ凹五邊形ナリ.

(甲)　(乙)



【注意】以後單ニ多角形トアルハ凸多角形ノコトナリト知ルベシ.

36. 定義

スベテ定理ハ二ツノ部分ヨリ成ル. 第一ハ始メヨリ假定シテアル事柄ニシテ之ヲ**假設**トイヒ, 第二ハ此假定ノ結果トシテ必ズ起リ來ルベシト主張スル事柄ニシテ之ヲ**終結**トイフ.

例ヘバ

對頂角ハ相等シ　(第28節)

トイフ定理ニ於テハ「對頂角ハ」ハ假設ニシテ「相

等シ」ハ終結ナリ,

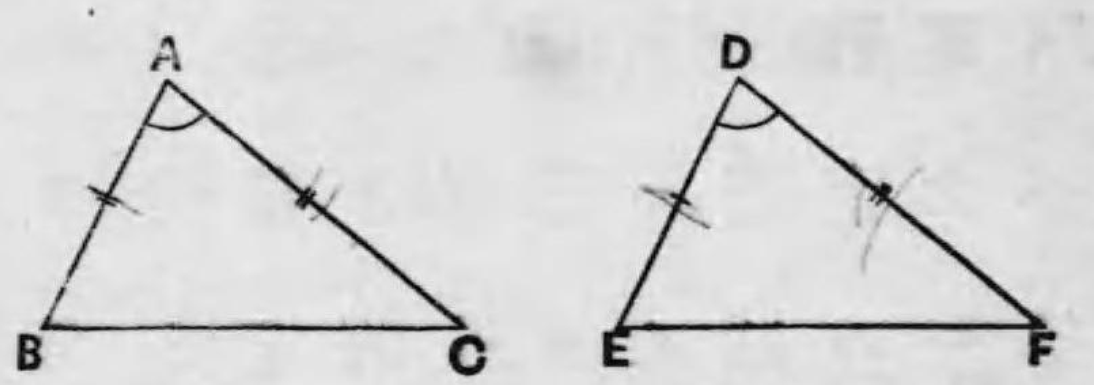
37. 定理

二邊及ビ其夾角ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ相等シ.

【假設】 △ABC 及ビ △DEF ニ於テ

AB = DE, AC = DF, ∠A = ∠D

【終結】 △ABC ≡ △DEF



【證明】先ヅ AB = DE ナルヲ以テ △DEF ヲ △ABC ノ上ニ重ヌルニ,DE ガ AB ニ重ナリ(卽チ D ハ A ニ重ナリ,E ハ B ニ重ナリ),而シテ兩三角形ガ何レモ AB ノ一方ニアル樣ニ置クコトヲ得. サスレバ ∠D = ∠A ナルヲ以テ邊 DF ハ邊 AC ノ上ニ重ナルベク,尙 DF = AC ナルヲ以テ點 F ハ點 C ニ重ナルベシ.

因テ邊 EF ハ邊 BC ニ重ナル,卽チ △DEF

ト △ABC トハ全ク相合ス.

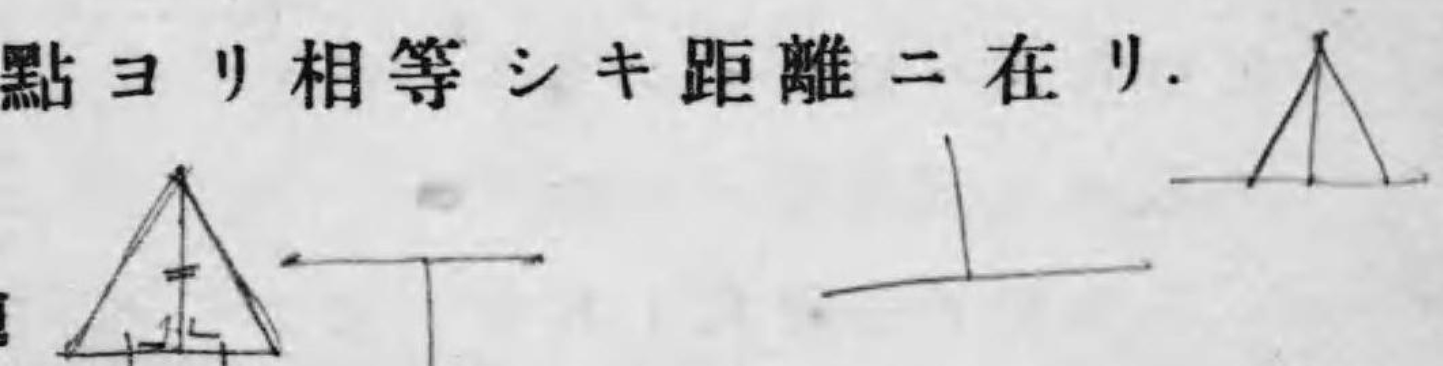
∴ △ABC ≡ △DEF

從テ又

BC = EF, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F

ナリ.

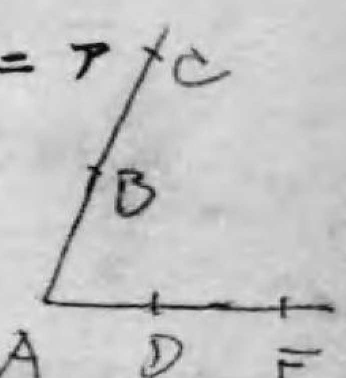
系 二點ヲ結ビ付クル線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ニアル點ハ此二點ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

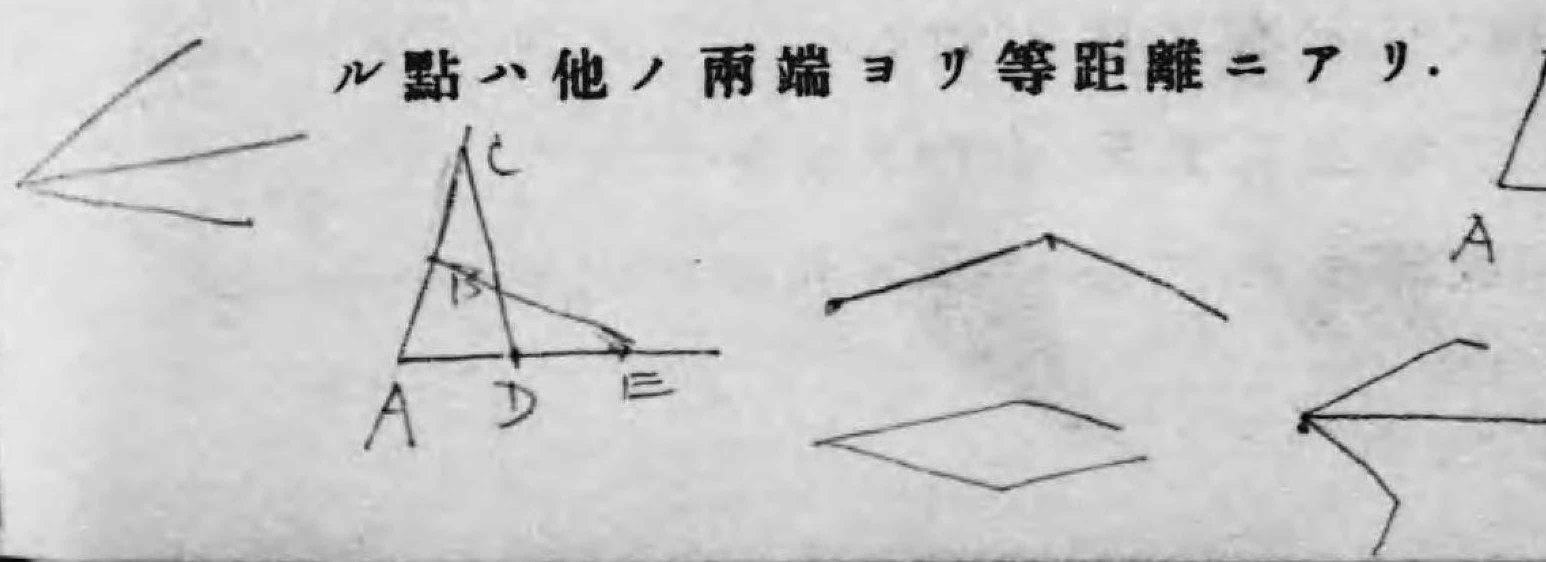


問題

1. 頂點 A ナル角ノ一邊上ニ二點 B, C ヲ取リ,他ノ邊上ニ二點 D, E ヲ取リテ AD = AB, AE = AC ナラシムレバ,二ツノ線分 BE, CD ハ相等シ.

2. 一直線ヲナサザル二ツノ線分ガ一端ヲ共有スルトキ,其夾角ノ二等分線上ニアル點ハ他ノ兩端ヨリ等距離ニアリ.

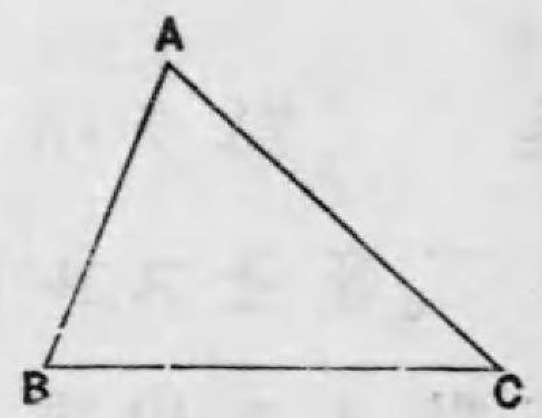




38. 定義

三角形ノ任意ノ邊ヲ其底邊ト稱スルコトアリ,此場合ニハ底邊ノ兩端ニアル角ヲ**底角**,其他ノ角ヲ**頂角**トイヒ,頂角ノ頂點ヲ三角形ノ**頂點**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テBCヲ底邊ト考フルトキハ,二角B,Cハ底角,角Aハ頂角ニシテ,點Aハ三角形ノ頂點ナリ.



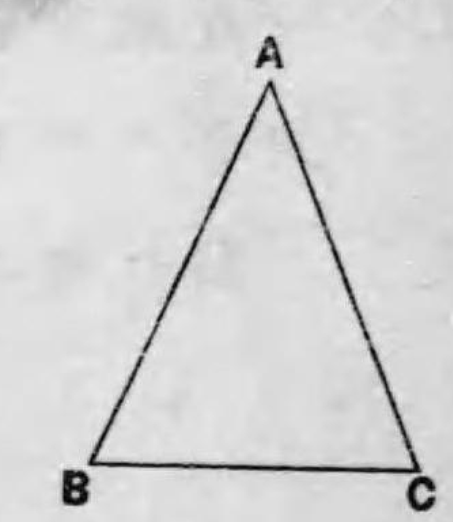
三角形ノ各内角ト,其角ノ邊ナラザル三角形ノ殘リノ邊トハ**相對ス**トイフ.

例ヘバ上圖ニ於ケル∠Aト邊BCトノ如シ.

39. 定義

二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ノ如シ.



二等邊三角形ニアリテハ其相等シキ二邊ガナス角ヲ

頂角トイヒ,之ニ對スル邊ヲ底邊トイフ.

例ヘバ前ノ圖ニ於ケル∠Aハ頂角,BCハ底邊ナリ.

40. 定理

二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ.

【假設】△ABC ニ於テ

AB = AC

【終結】 ∠B = ∠C

【證明】頂角Aノ二等分線ヲ作リ,底邊BCト點Dニ於テ交ラシメヨ.

サスレバ△ABD及ビ△ACDニ於テ

AB = AC (設假)

AD ハ共通

∠BAD = ∠CAD (作圖)

∴ △ABD ≡ △ACD

從テ ∠B = ∠C

系 三邊ガ相等シキ三角形ノ三ツノ角ハ相等シ.

問題

1.* 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス.

2. 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ビ付クル線分ハ底邊ニ垂直ニシテ且ツ頂角ヲ二等分ス.

3. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ト之ニ對スル邊ノ中點トヲ結ビ付クル二ツノ線分ハ相等シ.

41. 定理

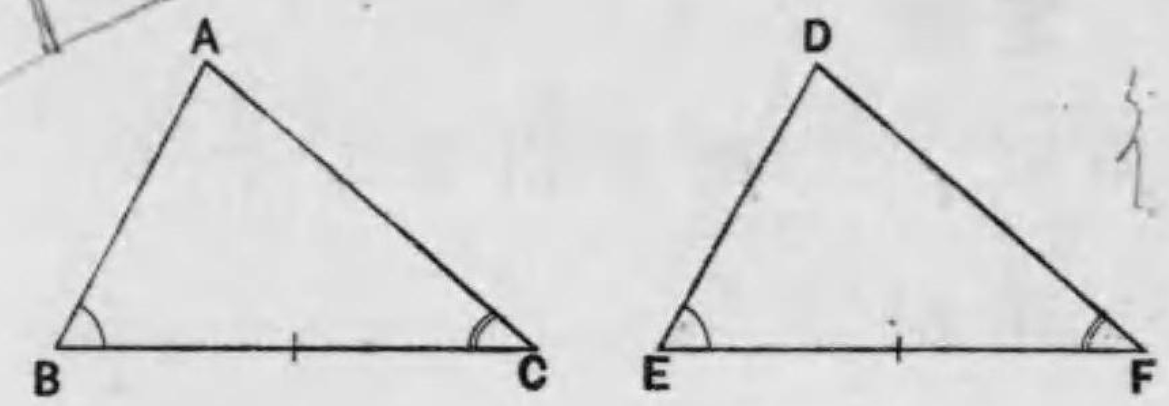
二角及ビ其頂點間ノ邊ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ相等シ.

【假設】 △ABC 及ビ △DEF ニ於テ

$\angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F,\ BC = EF$

【終結】 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

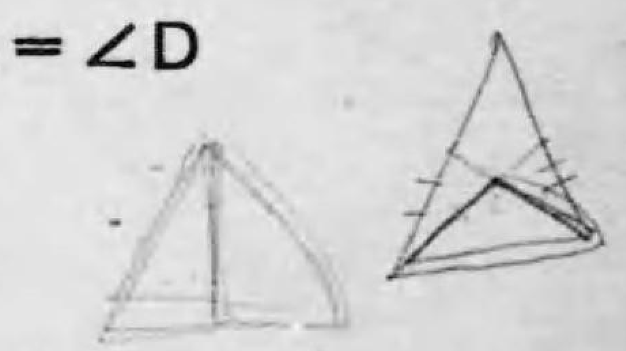
【證明】 先ヅ BC＝EF ナルヲ以テ △DEF ヲ △ABC ノ上ニ重ヌルニ, EF ガ BC ニ合シ, 而シテ兩三角形ガ何レモ BC ノ同ジ側ニアル



樣ニ置クコトヲ得ベシ. サスレバ ∠E＝∠B ナルヲ以テ ED ハ BA ノ上ニ重ナルベク,又 ∠F＝∠C ナルヲ以テ FD ハ CA ノ上ニ重ナル,從テ點 D ハ點 A ニ合ス. 因テ △DEF ト △ABC トハ全ク相合ス.

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

從テ $AB = DE,\ AC = DF,\ \angle A = \angle D$



問題

1. 頂角ノ二等分線ガ底邊ニ垂直ナル三角形ハ二等邊三角形ナリ.

2. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ガ其對邊ニ交ルマデノ部分ノ長サハ相等シ.

42. 定理

三角形ノ二角ガ相等シケレバ其對邊モ亦相等シ.

【假設】 $\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B = \angle C$

【終結】 $AC = AB$

【證明】 $\triangle ABC$ ヲ裏返シニシタルトキ, A ガ A' ニ, B ガ B' ニ, C ガ C' ニ來リタリトセヨ.

サスレバ $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle A'C'B'$ ニ於テ

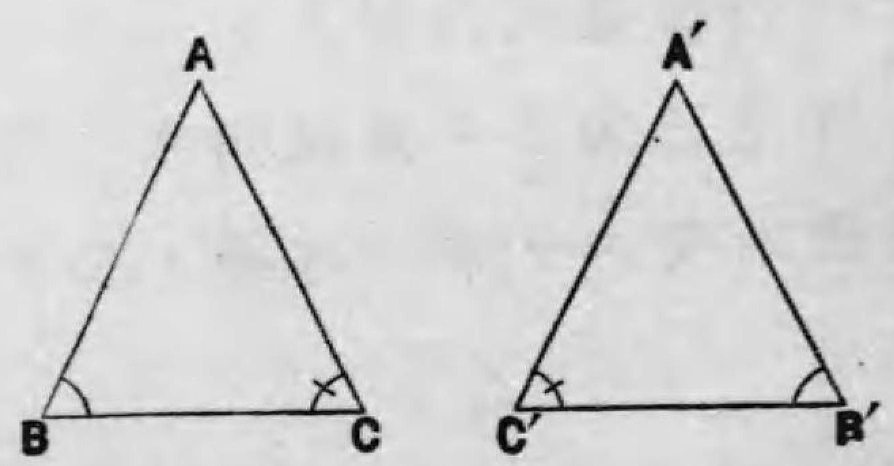
$\angle B = \angle C'$ 〔$\because \angle B = \angle C,\ \angle C = \angle C'$〕

$\angle C = \angle B'$ 〔$\because \angle C = \angle B,\ \angle B = \angle B'$〕

$BC = C'B'$

$\therefore\quad \triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$ 〔第41節〕

從テ $AB = A'C'$



然ルニ $A'C' = AC$

$\therefore\quad AB = AC$

系 三ツノ角ガ相等シキ三角形ノ三邊モ亦相等シ.

問題

二等邊三角形ノ底邊ト其兩底角ノ二等分線トニテ生ズル三角形ハ亦二等邊三角形ナリ.

43. 定義

三邊ガ相等シキ,從テ三ツノ角モ亦相等シキ三角形ヲ**正三角形**トイフ.

一般ニ總テノ邊ガ相等シク,且ツ總テノ角ガ相等シキ多角形ヲ**正多角形**トイフ.

【注意】 四邊以上ヲ有スル多角形ニアリテ

ハ,總テノ邊ガ相等シクトモ其總テノ角ハ必ズシモ相等シカラズ,又其總テノ角ガ相等シクトモ其總テノ邊ハ相等シトハ限ラズ.

44. 定義

第40節ノ定理,即チ

二等邊三角形(ABC)ノ兩底角(B及ビC)ハ相等シ.

ニ於テハ

【假設】　AB＝AC

【終結】　∠C＝∠B

ナリ.

又第42節ノ定理,即チ

三角形(ABC)ノ二角(B及ビC)ガ相等シケレバ,其對邊(AC及ビAB)モ亦相等シ.

ニ於テハ

【假設】　∠B＝∠C

【終結】　AC＝AB

ナリ.

此二ツノ定理ヲ比較スルニ,第二ノ定理ノ假設ハ第一ノ定理ノ終結ニシテ,第二ノ定理ノ終結ハ第一ノ定理ノ假設ナリ.箇樣ニ

一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ交換シタル者ヲ此定理ノ逆トイフ.

【注意】　或定理ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ.

例ヘバ　　直角ハ相等シ.

トイフコトハ眞ナレドモ,其逆即チ

相等シキ角ハ直角ナリ.

ハ眞ナラズ,何トナレバ直角ニアラズトモ相等シキ角ハ在リ得ベケレバナリ.

故ニ或定理ノ逆ハ必ズ之ヲ證明シテ其眞否ヲ決定セザルベカラズ.

45. 定理

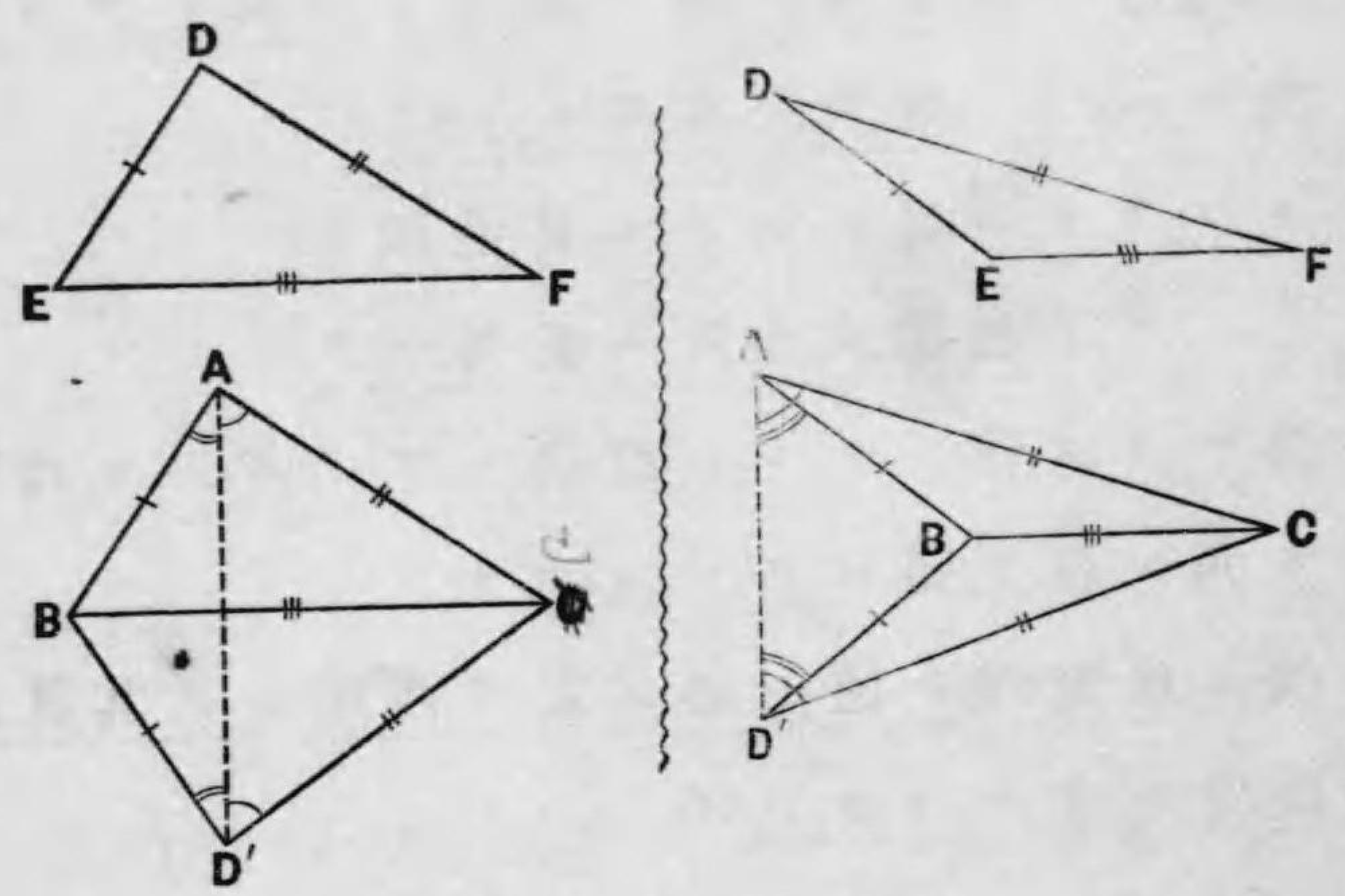
三邊ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ相等シ.

【假設】△ABC及ビ△DEFニ於テ

AB＝DE, AC＝DF, BC＝EF

【終結】　△ABC≡△DEF

【證明】 先ヅ EF＝BC ナルヲ以テ, △DEF ヲ EF ガ BC ニ合シ,而シテ BC ニ對シテ △ABC ノ反對ノ側ニアル樣ニ置クコトヲ得. 此時 D ガ D′ ノ位置ニ來リタリトシ, A ト D′ トヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ △BAD′ ニ於テ

$$BA = BD'$$

∴ $\angle BAD' = \angle BD'A$ （第 40 節）

又 △CAD′ ニ於テ

$$CA = CD'$$

∴ $\angle CAD' = \angle CD'A$ （第 40 節）

∴ $\angle BAC = \angle BD'C$

然ルニ $\angle BD'C = \angle EDF$

∴ $\angle BAC = \angle EDF$

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ （第 37 節）

從テ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

問題

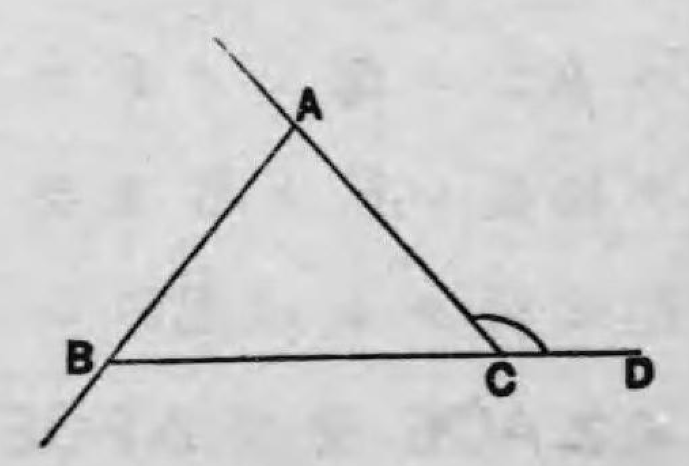
1.* 一邊ガ相等シキ二ツノ正三角形ハ相等シ.

2. 同ジ底邊ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ通ル直線ハ其底邊ヲ垂直ニ二等分ス. 6

46. 定義

多角形ノ一邊ト其隣邊ノ延長トガナス角ヲ多角形ノ**外角**トイヒ,外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ**內角**トイフコトアリ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル ∠ACD ハ △ABC ノ一ツノ外角ナリ.



三角形ノ一ツノ外角ニ接セザル二ツノ内角ノ各ヲ其外角ノ**内對角**トイフ.

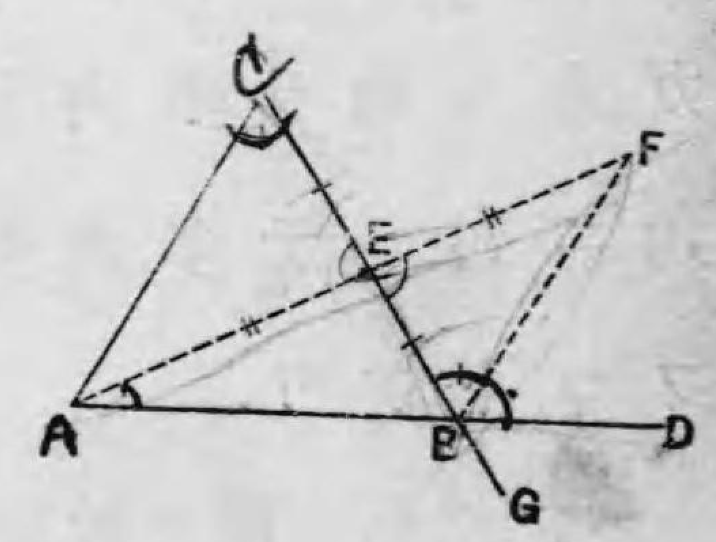
例ヘバ前ノ圖ニ於テ $\angle A$ 及ビ $\angle B$ ハ外角 ACD ノ内對角ナリ.

47. 定理

三角形ノ外角ハ其内對角ノ何レヨリモ大ナリ.

【假設】 $\triangle ABC$ ニ於テ, $\angle CBD$ ヲ一ツノ外角トセヨ.

【終結】 $\angle CBD > \angle A$, $\angle CBD > \angle C$



【證明】 BC ノ中點ヲ E トシ, A ト E トヲ結ビ付ケ, 之ヲ E ノ方ヘ AE ニ等シク F マデ延長シ, F ト B トヲ結ビ付クレバ BF ハ $\angle CBD$ ノ内ニアリ.

$\triangle ACE$ 及ビ $\triangle FBE$ ニ於テ

$$EA = EF$$
$$EC = EB$$
$$\angle CEA = \angle BEF \quad (\text{對頂角})$$
$$\therefore \quad \triangle ACE \equiv \triangle FBE$$

從テ $\angle C = \angle EBF$

然ルニ $\angle CBD > \angle EBF$

$$\therefore \quad \angle CBD > \angle C$$

次ニ CB ヲ B ノ方ヘ延長シ, 之ヲ BG トセヨ.

サスレバ上ト同理ニヨリ

$$\angle ABG > \angle A$$

然ルニ $\angle ABG = \angle CBD$ (對頂角)

$$\therefore \quad \angle CBD > \angle A$$

系 1. 三角形ノ何レノ二角ノ和モ二直角ヨリ小ナリ.

系 2. 三角形ノ一角ガ直角若クハ鈍角ナレバ, 他ノ二角ハ何レモ鋭角ナリ.

問題

1. 二等邊三角形ノ底角ニ接スル外角ハ鈍角ナリ.

2.* 三角形内ノ一點ヲ底邊ノ兩端ニ結ビ付クル二線分ノナス角ハ此三角形ノ頂角ヨリ大ナリ.

48. 定義

一ツノ角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,其直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ.

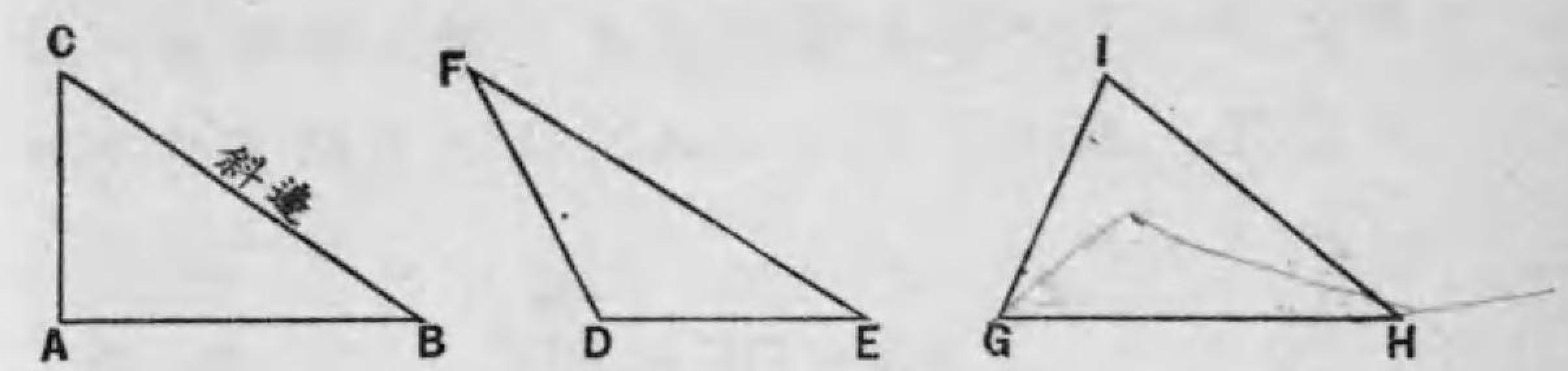
例ヘバ甲圖ノ如シ.

一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ.

例ヘバ乙圖ノ如シ.

三ツノ角ガ何レモ銳角ナル三角形ヲ**銳角三角形**トイフ.

例ヘバ丙圖ノ如シ.



(甲) (乙) (丙)

49. 定理

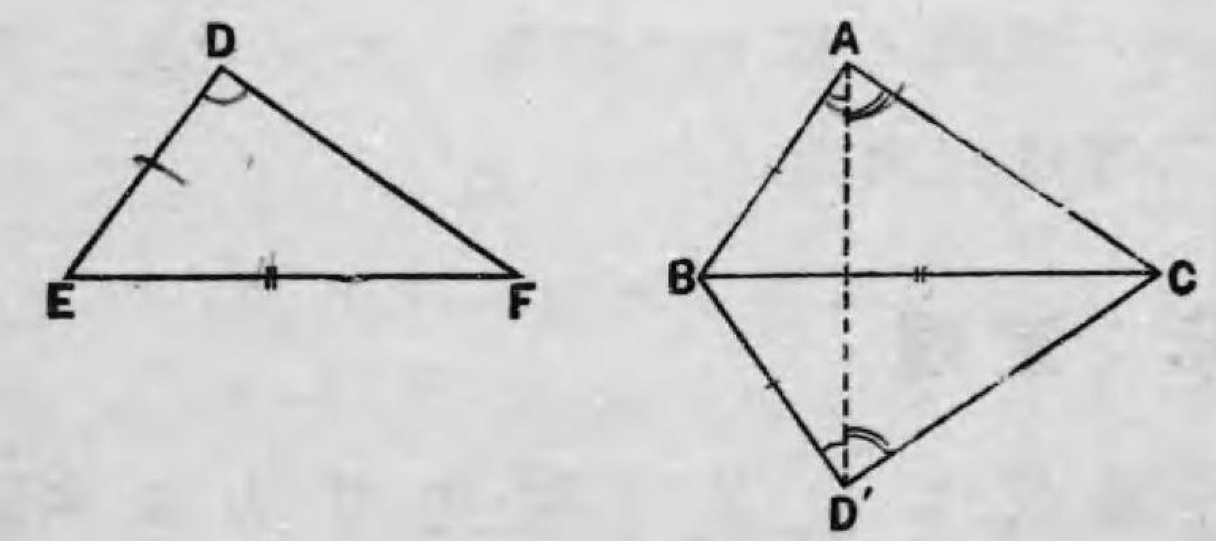
斜邊及ビ其他ノ一邊ガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ相等シ.

【假設】 $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle DEF$ ニ於テ

$\angle A = \angle D = \angle R$, $BC = EF$, $AB = DE$

【終結】 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

【證明】



先ヅ $EF = BC$ ナルヲ以テ, $\triangle DEF$ ヲ EF

ガ BC ニ合シ,而シテ BC ニ對シ △ABC ノ反對ノ側ニアル樣ニ置クコトヲ得. 此時 D ガ D′ ノ位置ニ來リタリトシ,A ト D′ トヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ

$$AB = DE = BD' \qquad (假設)$$

$$\therefore \quad \angle BAD' = \angle BD'A \qquad (第40節)$$

然ルニ $\angle BAC = \angle BD'C = \angle R$ （假設）

$$\therefore \quad \angle D'AC = \angle AD'C$$

$$\therefore \quad AC = D'C = DF \qquad (第42節)$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF \qquad (第45節)$$

從テ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

問題

三角形ノ底邊ノ中點ヨリ他ノ二邊ニ引ケル二ツノ垂線ノ長サガ相等シケレバ,此三角形ハ二等邊三角形ナリ.

50. 定理

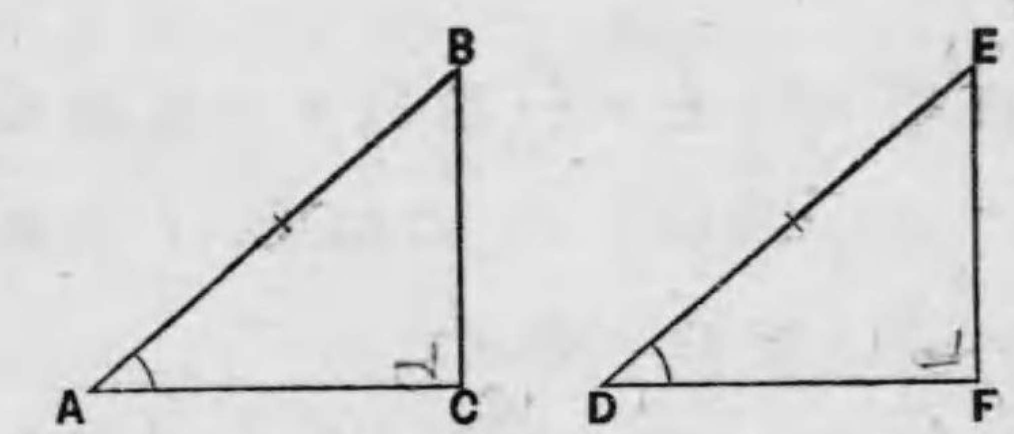
斜邊及ビ一ツノ鋭角ガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ相等シ.

【假設】 △ABC 及ビ △DEF ニ於テ

$\angle C = \angle F = \angle R$, $AB = DE$, $\angle A = \angle D$

【終結】 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

【證明】



先ヅ DE = AB ナルヲ以テ, △DEF ヲ, DE ガ AB ニ合シ,而シテ AB ニ對シ點 F ガ點 C ト同ジ側ニアル樣ニ置クコトヲ得. サスレバ $\angle D = \angle A$ ナルヲ以テ直線 DF ハ直線 AC ニ合ス.

然ルニ BC ハ B ヨリ直線 AC ニ引ケル垂線,又 EF ハ E ヨリ直線 DF ニ引ケル垂線ナリ.

而シテ一點ヨリ一直線ニ引ケル垂線ハ唯一ツニ限ル.

故ニ EF ハ BC ニ合セザルベカラズ.

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

系 角ノ二等分線上ノ任意ノ點ハ其二邊ヨリ等距離ニアリ.

問題

1. 直線 AB 上ノ一點 O ヨリ直線 OC ヲ引ケバ ∠BOC ハ ∠AOC ト其共軛角トノ差ノ半分ニ等シ.

2. 二ツノ直角 AOB, COD ガ其頂點ヲ共有スルトキハ,二角 AOC, BOD ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ナリ.

3. 正三角形ノ三邊ノ中點ハ亦一ツノ正三角形ノ三ツノ頂點ヲナス.

4. 二等邊三角形ノ兩底角ニ接スル外角ノ二等分線ト底邊トハ又一ツノ二等邊三角形ヲナス.

5.* 二定點ヨリ等距離ニアル點ハ其二定點ヲ結ビ付クル線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ニ在リ.

6.* 角ノ二邊ヨリ等距離ニアル點ハ此角ノ

二等分線上ニ在リ.

7. 三ツノ線分 AA′, BB′, CC′ ガ同一點 O ニ於テ交リ,O ガ各線分ノ中點ナレバ △ABC ト △A′B′C′ トハ相等シ. 若シ三點 A, B, C ガ同一直線上ニアレバ A′, B′, C′ モ亦同一直線上ニアリ.

第三章 作 圖 題

51. 定義

作圖題トハ與ヘラレタル條件ニ適合スル圖形ヲ書クコトヲ要求スル問題ノコトナリ.

作圖ヲナス爲ニハ器械ヲ用フ. 初等幾何學ニ於テ用フルコトヲ許ス器械ハ**定規**及ビ**兩脚規**ニ限リ,定規ハ二定點ヲ結ビ付クル線分ヲ引ク爲メ,及ビ線分ヲ延長スル爲ニ用ヒ,兩脚規ハ任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓ヲ書ク爲ニ用フル者トス.

乃チ初等幾何學ニ於テ最初ヨリナシ得ルト認ムル作圖ハ次ノ三ツニ限ル.

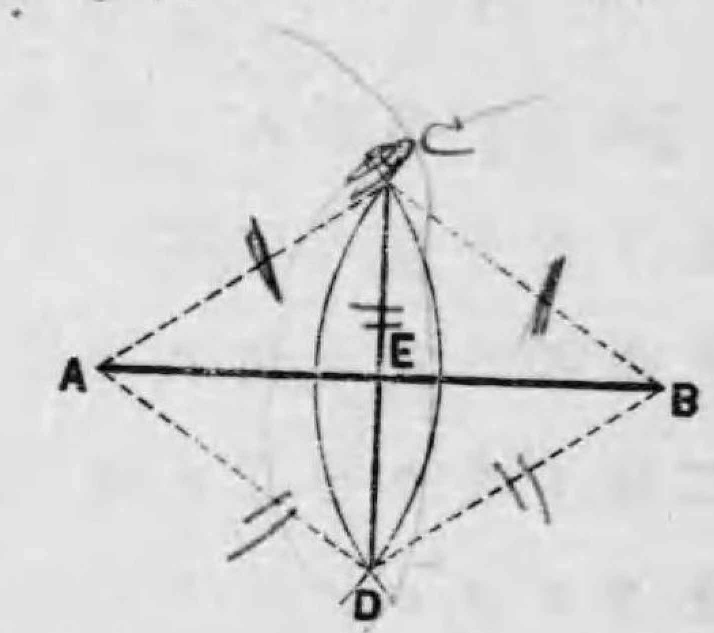
(第一) 二定點ヲ通ル直線ヲ引クコト.

(第二) 線分ヲ任意ニ延長スルコト.

(第三) 任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓ヲ書クコト.

52. 作圖題

定線分(AB)ヲ二等分スルコト.



【作圖】 A及ビBヲ夫々中心トシ, ABノ半分ヨリ大ナル相等シキ半徑ニテ二ツノ圓弧ヲ書キ,二點 C,D ニテ交ラシメ, CトDトヲ結ビ付ケヨ. サスレバ ABトCDトノ交點EガABノ中點ナリ.

【證明】 A, C, B, D ヲ順次ニ結ビ付ケヨ.

サスレバ△ACD及ビ△BCD ニ於テ

AC = BC

AD = BD

CDハ共通

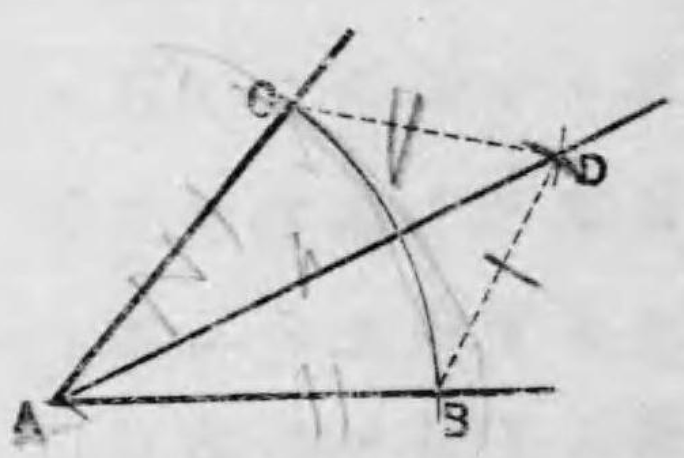
$\therefore \quad \triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (第45節)

從テ $\angle ACD = \angle BCD$

故ニ CE ハ AB ヲ垂直ニ二等分ス. (第40節,問題1)

53. 作圖題

定角(A)ヲ二等分スルコト.



【作圖】 頂點Aヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,角Aノ二邊ト夫々B,Cニテ交ラシメヨ.

次ニB,Cノ各ヲ中心トシ,相等シキ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,弧BCニ對シ點Aト反對ノ側ニ於ケル圓弧ノ交點ヲDトシ,直線ADヲ作レバ是ガ∠Aノ二等分線ナリ.

【證明】 B,Cノ各トDトヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (第45節)

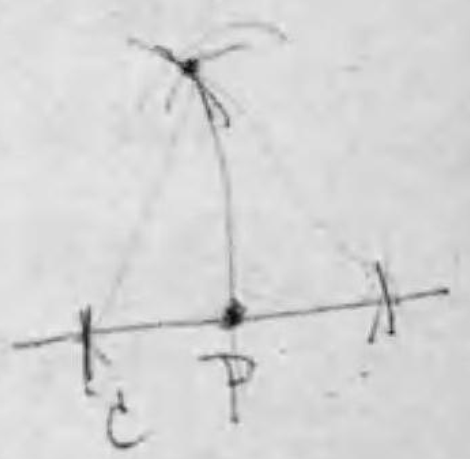
從テ $\angle BAD = \angle CAD$

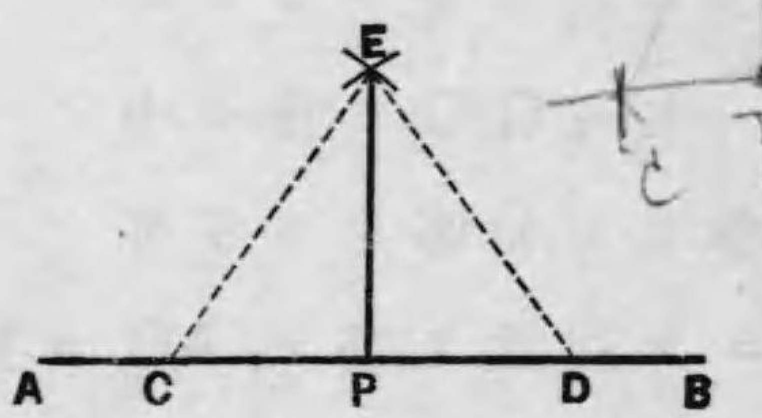
問題

定角ヲ四等分スルコト.

54. 作圖題

定直線(AB)上ノ定點(P)ヲ通リ,此直線ニ垂線ヲ引クコト.





【作圖】 直線AB上ニ於テ點Pノ兩方ニ,Pヨリ任意ノ相等シキ距離ニアル二點C,Dヲ取リ,

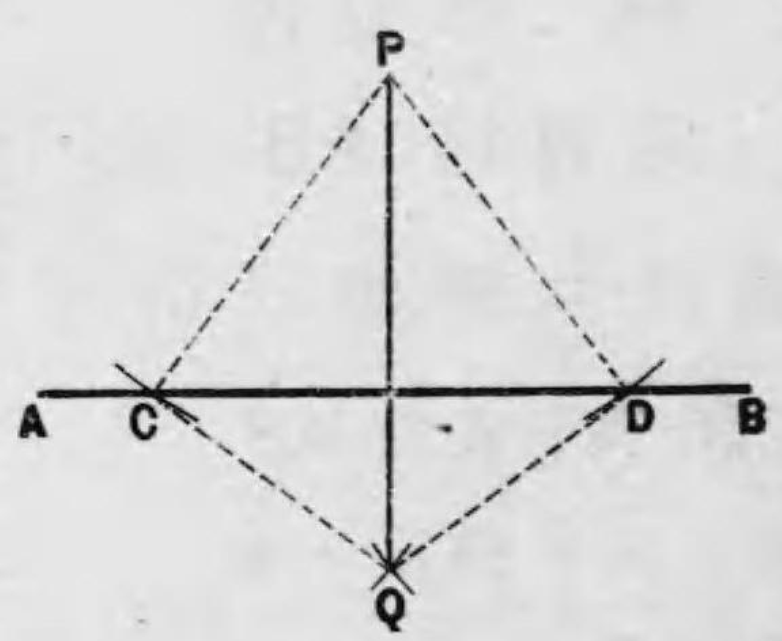
次ニC,Dヲ夫々中心トシ,PCヨリ大ナル任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,其一ツノ交點ヲEトシ,EトPトヲ結ビ付ケヨ. サスレバPEガ所要ノ垂線ナリ.

【證明】 略ス.

55. 作圖題

定直線(AB)外ノ一定點(P)ヨリ此直線ニ垂線ヲ引クコト.

【作圖】點Pヲ中心トシ,ABニ對シPト反對ノ側ニアル任意ノ點トPトノ間ノ距離ヲ半徑トシテ圓弧ヲ畫キ,直線ABト二點C,Dニ於テ交ラシメヨ.



次ニC,Dノ各ヲ中心トシ,相等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ,ABニ對シPト反對ノ側ニ於ケル其圓弧ノ交點ヲQトシ,直線PQヲ作レバ是ガ所要ノ垂線ナリ.

【證明】C,Dノ各トPトヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ$\triangle CPD$ハ二等邊三角形ニシテ,PQハ其頂角Pノ二等分線ニ外ナラズ.

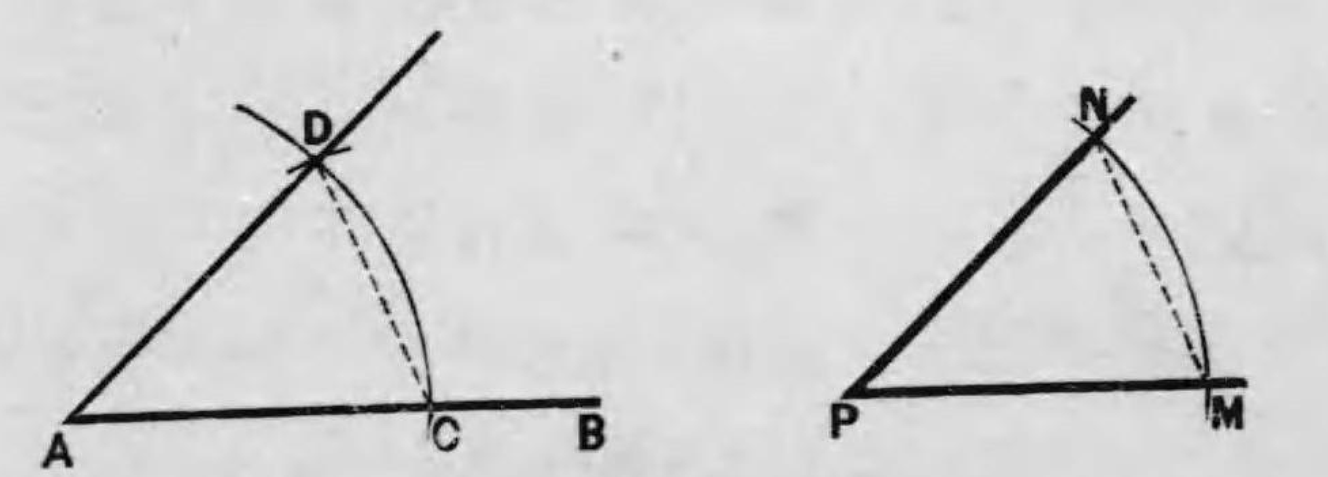
$\therefore\quad PQ \perp AB$ (第40節,問題1)

56. 作圖題

定マレル半直線(AB)ノ原點(A)ヨリ其定マレル側ニ直線ヲ引キ,此二直線ガナス角ヲ,與ヘラレタル角(P)ニ等シカラシムルコト.

【作圖】角Pノ頂點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ,二邊ト夫々M, Nニ於テ交ラシメヨ.

次ニAヲ中心トシ,前ト同ジ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ,ABトCニ於テ交ラシメヨ. Cヲ中心トシ, M, N間ノ距離ニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ,ABノ定マレル側ニ於テ前ノ圓弧トDニ於テ交ラシメ,直線ADヲ作レバ是ガ所要ノ直線ナリ.



【證明】略ス

問題

1. 二邊及ビ其夾角ガ與ヘラレタル三角形ヲ作ルコト.

2. 二角及ビ其頂點間ノ邊ガ與ヘラレタル三角形ヲ作ルコト.

3. 斜邊ト一鋭角トガ與ヘラレタル直角三角形ヲ作ルコト.

4. 斜邊ト他ノ一邊トガ與ヘラレタル直角三角形ヲ作ルコト.

第四章　三角形ノ續キ

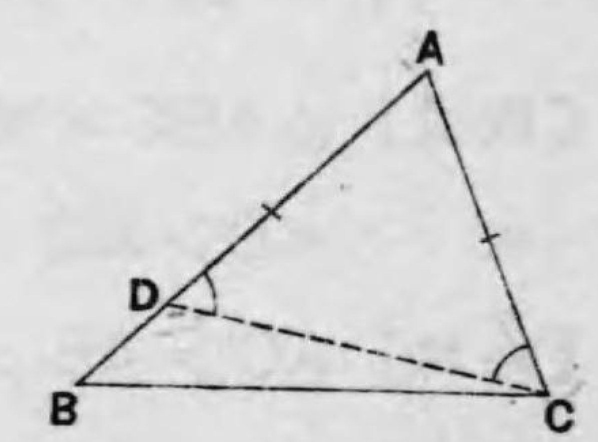
57. 定理

三角形ノ二邊ガ相等シカラザルトキハ,其大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.

【假設】$\triangle ABC$ ニ於テ

$AB > AC$

【終結】$\angle C > \angle B$



【證明】$AB > AC$ ナルヲ以テ, AB 上ニ於テ AC ニ等シキ線分 AD ヲ取リ, D ト C トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ CD ハ $\angle ACB$ ノ内ニアリ.

$\therefore \quad \angle ACB > \angle ACD$

又 $\quad \angle ADC > \angle B$ 　(第47節)

然ルニ $\quad AD = AC$ 　(作圖)

$\therefore \quad \angle ACD = \angle ADC$ 　(第40節)

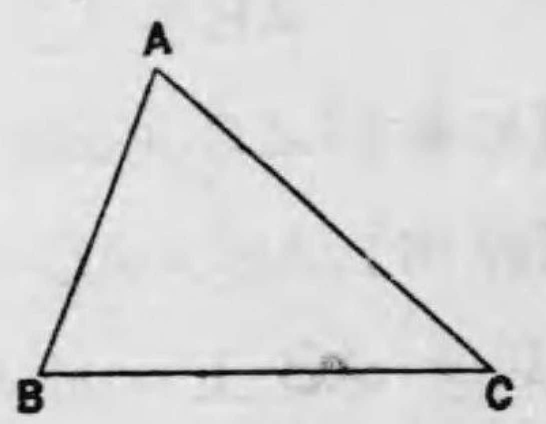
$\therefore \quad \angle ACB > \angle ABC$

問題

底邊ガ他ノ邊ヨリ小ナル二等邊三角形ハ鋭角三角形ナリ.

58. 定理

三角形ノ二角ガ相等シカラザルトキハ,其大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ.



【假設】 $\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B > \angle C$

【終結】 $AC > AB$

【證明】 若シ $AC = AB$

ナランニハ $\angle B = \angle C$ (第40節)

トナリテ $\angle B > \angle C$

ナル假設ト矛盾ス.

$\therefore \quad AC \neq AB$

又若シ $AC < AB$

ナランニハ $\angle B < \angle C$ (第57節)

トナリテ是亦 $\angle B > \angle C$

ナル假設ト矛盾ス.

$\therefore \quad AC \nless AB$

$\therefore \quad AC > AB$

【注意】 上ノ如キ證明法ヲ歸謬法ト名ヅク.

系 1. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ. 又鈍角三角形ニアリテハ,鈍角ノ對邊ガ最モ大ナリ.

系 2. 直線外ノ一點ヨリ,此直線ヘ引キタル線分ノ中,垂線ハ最モ短シ.

問題

1. 二等邊三角形ノ頂點ト底邊上ノ(兩端ナラザル)一點トヲ結ビ付クル線分ハ相等シキ邊ノ各ヨリ小ナリ.

2. 直角三角形ノ直角ノ二邊上ニ一ツ宛取リタル(其端ナラザル)點ヲ結ビ付クル線

分ハ斜邊ヨリ小ナリ.

3.* 定直線外ノ一定點ヨリ此直線ヘ引キタル斜線ノ中,相等シキ者ハ二ツヨリ多クハナシ.

4.* 圓ノ中心ト直線トノ距離ガ

(1) 半徑ヨリ大ナレバ此圓周ト直線トニハ共通點ナシ.

(2) 半徑ニ等シケレバ唯一點ヲ共有ス.

(3) 半徑ヨリ小ナレバ二點ヲ共有ス.

59. 定理

三角形ノ二邊ノ和ハ第三邊ヨリ大ナリ.

【證明】$\triangle ABC$ ニ於テ,邊 BA ヲ A ノ方ヘ邊 AC ニ等シク D マデ延長シ,C ト D トヲ結ビ付ケヨ.

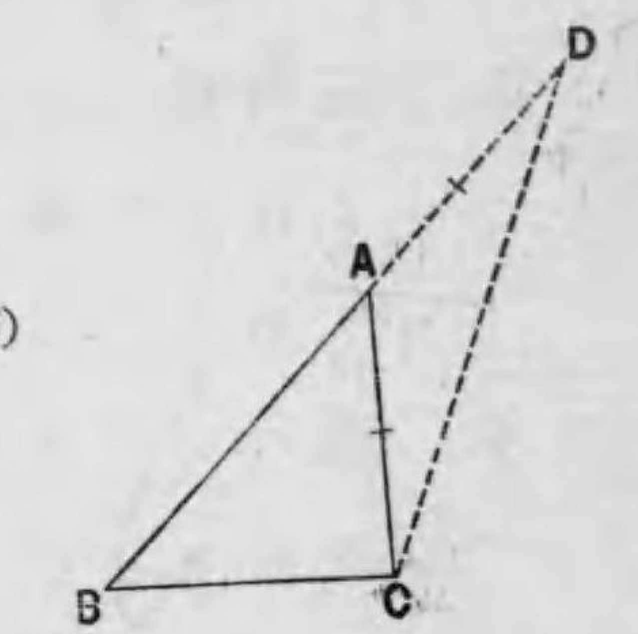
サスレバ $\triangle ACD$ ハ二等邊三角形ナリ.

$\therefore \quad \angle ACD = \angle D$

然ルニ AC ハ $\angle BCD$ ノ内ニアリ.

$\therefore \quad \angle BCD > \angle ACD$

$\therefore \quad \angle BCD > \angle D$



故ニ $\triangle BCD$ ニ於テ

$BD > BC$ (第 58 節)

然ルニ

$$BD = BA + AD$$
$$= AB + AC$$

$\therefore \quad AB + AC > BC$

同樣ニシテ

$$BC + AB > AC$$
$$AC + BC > AB$$

ナルコトヲ證明スルヲ得.

系　三角形ノ二邊ノ差ハ第三邊ヨリ小ナリ.

問題

1. 三角形内ノ一點ト一邊ノ兩端トヲ結ビ付クル二線分ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ.

2. 四邊形ノ周ハ其兩對角線ノ和ヨリ大ニ

シテ其和ノ二倍ヨリ小ナリ.

3. 三角形ノ一頂點ト其對邊ノ中點トヲ結ビ付クル線分ハ他ノ二邊ノ和ノ半分ヨリ小ナリ.

4. 與ヘラレタル三ツノ線分ニ等シキ三邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコト.

5. 一邊ヲ與ヘテ正三角形ヲ作ルコト.

60. 定理

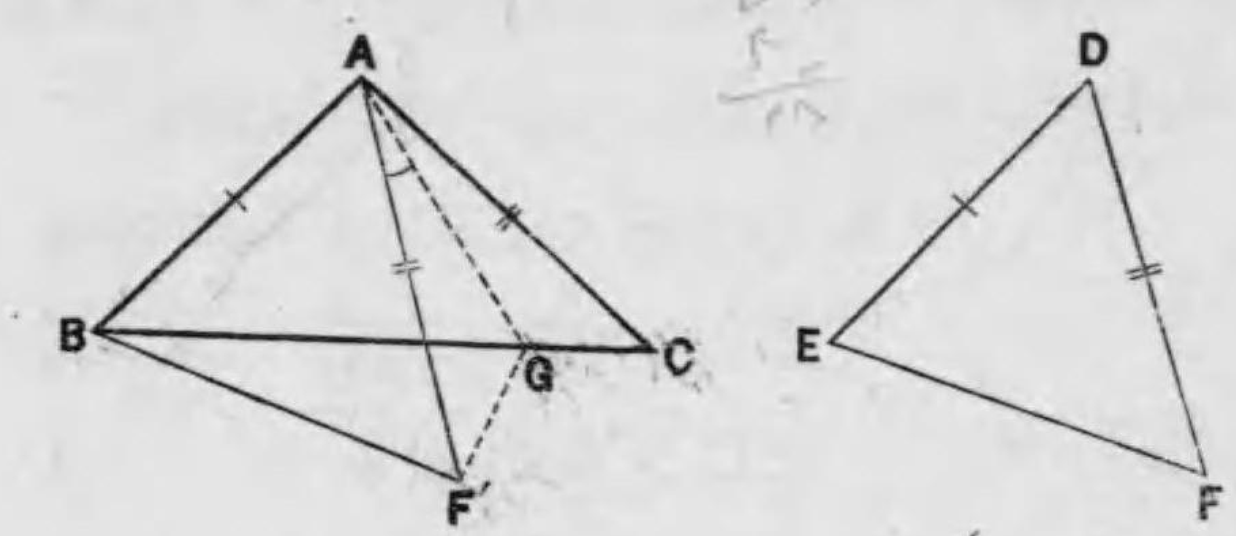
二ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ夫々相等シク,其夾角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル夾角ノ對邊ハ小ナル夾角ノ對邊ヨリ大ナリ.

【假設】 $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A>\angle D$$

【終結】 $BC>EF$

【證明】 先ヅ $DE=AB$ ナルヲ以テ, $\triangle DEF$ ヲ, DE ガ AB ニ合シ,而シテ此三角形ガ AB ニ對シ $\triangle ABC$ ト同ジ側ニアル樣ニオクコトヲ得.



此時 F ガ F′ ノ位置ニ來リタリトセヨ. サスレバ

$$AF'=DF,\quad BF'=EF$$

然ルニ $\angle A>\angle D$ ナルヲ以テ, AF′ ハ $\angle BAC$ ノ內ニアリ.

ソコデ $\angle F'AC$ ノ二等分線ヲ引キ,邊 BC ト點 G ニ於テ交ラシメ, G ト F′ トヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ $\triangle AF'G$ 及ビ $\triangle ACG$ ニ於テ

$$AF'=AC$$

AG ハ共通

$$\angle GAF'=\angle GAC \quad \text{(作圖)}$$

$$\therefore\quad \triangle AF'G\equiv\triangle ACG$$

從テ $GF'=GC$

$$\therefore\quad BC=BG+GC=BG+GF'$$

然ルニ點F′ガ邊BC上ニアルトキハ勿論,然ラザルトキニテモ

$$BG+GF' > BF' \quad (第59節)$$

$$\therefore \quad BC > BF'$$

$$\therefore \quad BC > EF$$

問題

1.* 線分ノ中點ヲ通リ之ニ垂直ニ引キタル直線外ノ任意ノ點ヨリ此線分ノ兩端ニ至ル距離ハ相等シカラズ.

2. 三角形ABCノ邊BCヲCノ方ヘ延長シ,其上ニABニ等シクCDヲ取リ,AトDトヲ結ビ付クレバ AD＞BC ナリ.

61. 定理

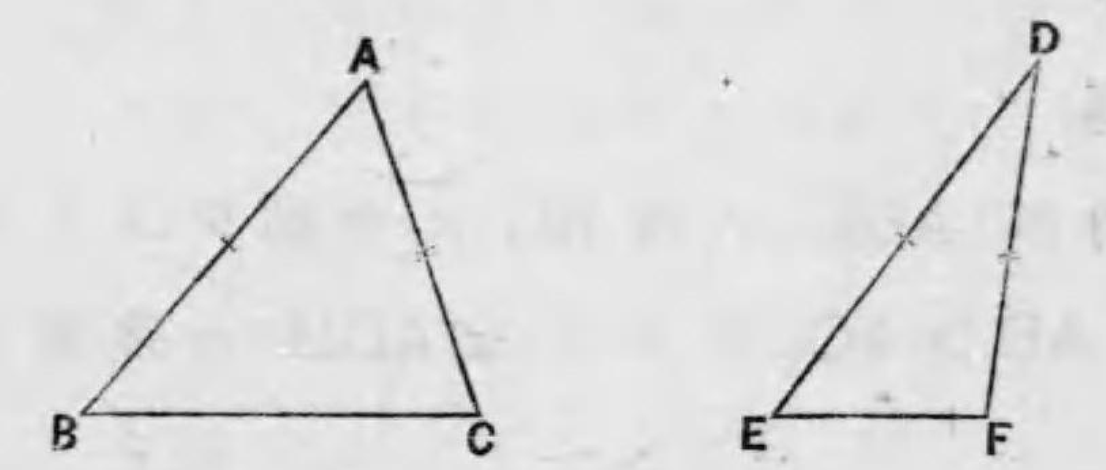
二ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ夫々相等シク,第三邊ガ相等シカラザルトキハ,其大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.

【假設】 △ABC及ビ△DEFニ於テ

$$AB=DE,\ AC=DF,\ BC > EF$$

【終結】 $\angle A > \angle D$

【證明】



若シ $\angle A = \angle D$ ナランニハ

$$AB=DE,\ AC=DF$$

ナルヲ以テ

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

從テ $BC = EF$

トナリテ $BC > EF$ ナル假設ト矛盾ス.

$$\therefore \quad \angle A \neq \angle D$$

又若シ $\angle A < \angle D$ ナランニハ

$$BC < EF \quad \text{(第 60 節)}$$

トナリテ,是亦假設ト矛盾ス.

$$\therefore \quad \angle A \nless \angle D$$

$$\therefore \quad \angle A > \angle D$$

問題

三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トスルトキ, $AB > AC$ ナレバ $\angle ADB$ ハ鈍角ナリ.

問題

1. 定直線外ノ一定點ヨリ此直線ニ引ケル數多ノ斜線ノ中

   (1) 其足ガ同ジ點ヨリ引ケル垂線ノ足ヨリ等距離ニアル者ハ相等シク,大ナル距離ニアル者ハ小ナル距離ニアル者ヨリ大ナリ.

   (2) 同ジ點ヨリ引ケル垂線ト等角ヲナス者ハ相等シク,大ナル角ヲナス者ハ小ナル角ヲナス者ヨリ大ナリ.

2. ABCD ヲ四邊形トシ,O ヲ對角線ノ交點ナラザル任意ノ點トスレバ,四ツノ線分 OA, OB, OC, OD ノ和ハ兩對角線 AC, BD ノ和ヨリ大ナリ.

3. 二等邊三角形ノ底邊ノ一端ト其對邊上ニアル任意ノ一點トヲ結ビ付クル線分ハ,後ノ點ト底邊上ノ(兩端ナラザル)任意ノ一點トヲ結ビ付クル線分ヨリ大ナリ.

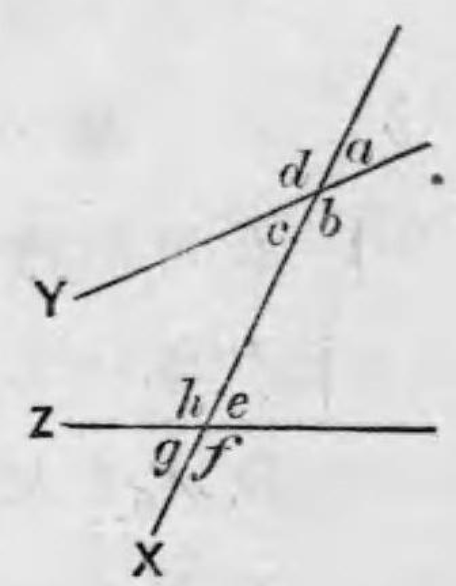
4. 三角形内ノ一點ヨリ各頂點ニ至ル距離ノ和ハ三角形ノ周ヨリ小ニシテ,周ノ半分ヨリ大ナリ.

5. 各邊ガ相等シカラザル四邊形 ABCD ニ於テ AD ガ最大邊, BC ガ最小邊ナルトキハ, $\angle ABC$ ハ $\angle ADC$ ヨリ大ニシテ, $\angle BCD$ ハ $\angle BAD$ ヨリ大ナリ.

第五章　平行直線

62. 定義

下圖ノ如ク直線Xガ二直線Y及ビZニ交ルトキハ, a, b, c, d, e, f, g, h ナル文字ニテ表サルル八ツノ角ヲ生ズ,而シテ此等ノ角ノ位置ノ相互ノ關係ニヨリテ次ノ如キ名稱アリ.



(第一)　$\angle b, \angle c, \angle e, \angle h$ ヲ**內角**トイフ.

(第二)　$\angle a, \angle d, \angle f, \angle g$ ヲ**外角**トイフ.

(第三)　$\angle b$ 及ビ $\angle h$; $\angle c$ 及ビ $\angle e$ ノ各組ヲ**錯角**トイフ.

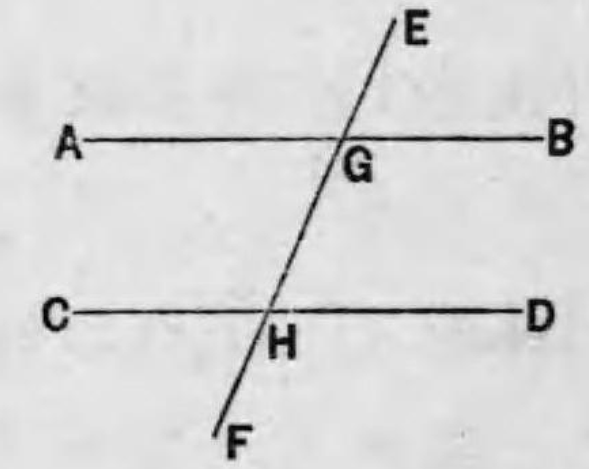
(第四)　$\angle a$ 及ビ $\angle e$; $\angle b$ 及ビ $\angle f$; $\angle d$

及ビ $\angle h$; $\angle c$ 及ビ $\angle g$ ノ各組ヲ**同位角**トイフ.

63. 定理

一直線ガ他ノ二直線ト交リテナス同位角ガ相等シケレバ,此二直線ハ相交ラズ.

【證明】直線 EF ガ二直線 AB, CD ト夫々G, H ニ於テ交リ且ツ $\angle$EGB $=$ $\angle$GHD ナリトセヨ.



若シ AB, CD ガ半直線GB, HD ノ側ニ於テ交ランニハ,其交點ヲ M トスレバ $\triangle$MGH ノ頂點G ニ於ケル外角 EGB ハ其內對角 GHD ヨリ大ナリ(第47節),而シテ之ハ $\angle$EGB $=$ $\angle$GHD ナル假設ト矛盾ス.

故ニ AB, CD ハ半直線 GB, HD ノ側ニ於テハ交ルコトナシ.

同様ニ AB, CD ハ半直線 GA, HC ノ側ニ於テモ交ラザルコトヲ證明スルコトヲ得.

故ニ AB, CD ハ相交ラズ.

64. 定義

同一平面上ニアリテ相交ラザル二直線ヲ**互ニ平行ナリ**トイフ.

二直線 AB, CD ガ互ニ平行ナルコトヲ

$$AB \parallel CD$$

ト記スコトアリ.

【注意1】 平行直線ヲ略シテ平行線トイフコトアリ.

【注意2】 平行二直線ノ各ノ上ニ取リタル二ツノ線分ヲモ互ニ平行ナリトイフ.而シテ二ツノ線分 EF, GH ガ互ニ平行ニシテ且ツ等長ナルコトヲ $EF \perp GH$

ト記スコトアリ.

65. 平行線ノ定義ト第63節ノ定理トニヨリテ次ノ定理ヲ得.

定理 一直線ガ他ノ二直線ト交リテナス同位角ガ相等シケレバ,此二直線ハ互ニ平行ナリ.

系 1. 一直線ガ他ノ二直線ト交リテナス錯角ガ相等シケレバ,此二直線ハ互ニ平行ナリ.

系 2. 同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.

問題

一直線ガ他ノ二直線ニ交リテナス内角ノ中,第一ノ直線ニ對シ同ジ側ニアル二ツガ互ニ補角ヲナセバ,後ノ二直線ハ互ニ平行ナリ.

66. 公理

定點ヲ通リ定直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル.

系 1. 同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.

系 2. 平行二直線ノ中ノ一ツニ交ル直線ハ他ノ直線ニモ交ル.

問題

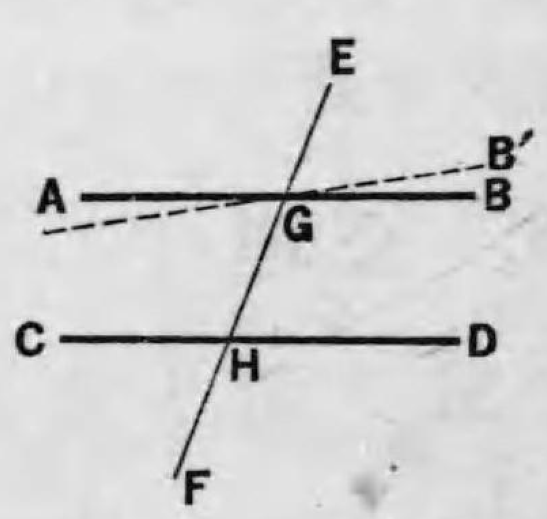
相交ル二直線ニ夫々平行ナル二直線ハ相交ル.

67. 定理

一直線ガ平行二直線ニ交リテナス同位角ハ相等シ.

【證明】直線 EF ガ平行二直線 AB, CD ト夫々 G, H ニ於テ交ルトセヨ.

G ヲ通リ EF ト ∠EHD ニ等シキ角ヲナス直線 GB′ ヲ,直線 EF ニ對シ,



HD ト同ジ側ニ引ケ.

サスレバ　GB′ ∥ HD　(第 65 節)

然ルニ　GB ∥ HD　(假・設)

故ニ GB′ ト GB トハ相合ス　(前節公理)

∴　∠EGB = ∠EHD

系 1. 一直線ガ平行二直線ニ交リテナス錯角ハ相等シ.

系 2. 一直線ガ平行二直線ノ一ツニ垂直ナレバ,他ノ直線ニモ垂直ナリ.

問題

1. 一直線ガ平行二直線ニ交リテナス內角ノ中,初メノ直線ニ對シ同ジ側ニアル二ツハ互ニ補角ヲナス.
2. 二ツノ平行線ニ夫々垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.
3. 二等邊三角形ノ頂點ヲ通リ底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於ケル外角ヲ二等分

ス.

4. 一直線ガ二ツノ平行線ニ交リテナスー組ノ同位角(又ハ錯角)ノ二等分線ハ互ニ平行ナリ.

5.* 一直線ガ他ノ二直線ニ交リテナス同位角(若クハ錯角)ガ相等シカラザレバ此二直線ハ相交ル.

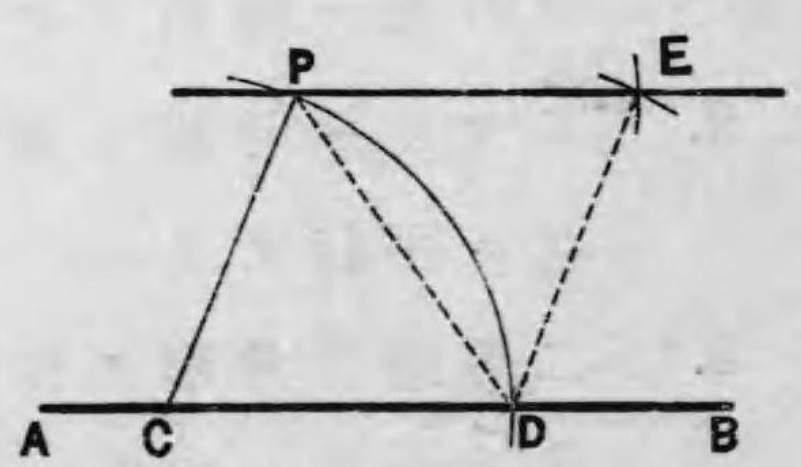
6.* 同一直線ノ垂線ト斜線トハ相交ル.

7.* 相交ル二直線ニ夫々垂直ナル二直線ハ相交ル.

68. 作圖題

一定點(P)ヲ通リテ定直線(AB)ニ平行ナル直線ヲ引クコト.

【作圖】 AB上ノ任意ノ點Cヲ中心トシ,C,P間ノ距離ニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ書キABト



ノ交點ノ一ツヲDトセヨ. P及ビDノ各ヲ中心トシ,前ト同ジ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,直線PDニ對シ,Cト反對ノ側ニ於ケル交點ヲEトセヨ.

サスレバ直線PEガ所要ノ平行線ナリ.

【證明】 C,D,Eノ各トPトヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ $\triangle PDC \equiv \triangle DPE$

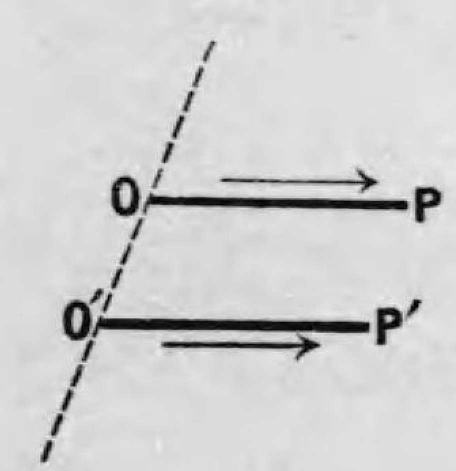
從テ $\angle CDP = \angle EPD$

$\therefore \quad PE \parallel AB$

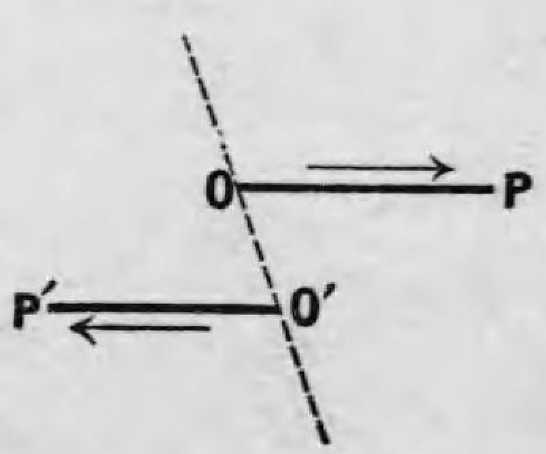
69. 定義

二ツノ半直線ガ,其等ノ原點ヲ通ル直線ノ同ジ側ニアリテ互ニ平行ナルトキ,此等ノ半直線ハ同方向ヲ有ストイヒ(甲圖),原點ヲ通ル直線ノ

(甲)



(乙)



兩側ニ一ツ宛アリテ互ニ平行ナルトキ此等ノ半直線ハ正反對ノ方向ヲ有ストイフ(乙圖).

【注意】半直線 OP ノ延長ハ上ノ(乙圖)ノ點 O′ ガ點 O ニ合シタル特別ノ場合ナリ.

問題

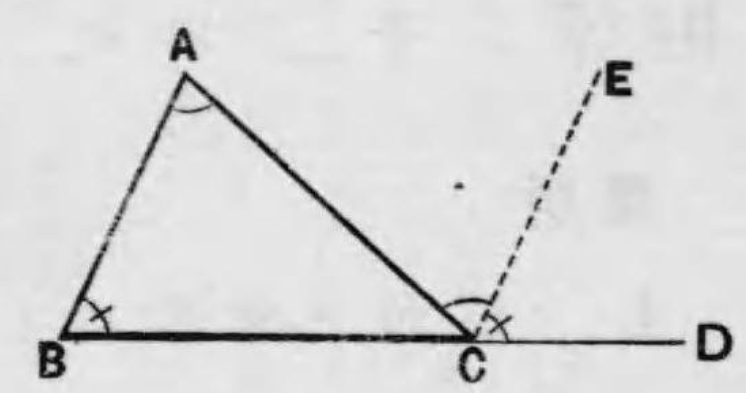
二邊ガ夫々平行ナル二ツノ角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ナリ.

第六章　多角形ノ角ノ和

70. 定理

三角形ノ三ツノ角ノ和ハ二直角ニ等シ.

【證明】△ABC ノ邊 BC ヲ C ノ方ヘ延長シ之ヲ CD トス. C ヨリ邊 BA ト同方向ヲ有スル直線 CE ヲ引ケ. サスレバ



$\angle A = \angle ACE$　(第67節系1)

$\angle B = \angle DCE$　(第67節)

$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C = \angle ACE + \angle DCE + \angle ACB$

然ルニ BCD ハ一直線ナルヲ以テ

$\angle ACE+\angle DCE+\angle ACB = 2\angle R$

$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C = 2\angle R$

系 1.　三角形ノ外角ハ其二ツノ

內對角ノ和ニ等シ.

系 2. 二角ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ノ第三ノ角モ亦相等シ.

系 3. 二角ガ夫々相等シク且ツ其一組ノ相等シキ角ニ對スル邊ガ相等シキ二ツノ三角形ハ相等シ.

問題

1. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ヲナス.

2.* 四邊形ノ四ツノ角ノ和ハ四直角ニ等シ.

3. 三角形ノ一角ガ他ノ二角ノ和ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ,其角ハ鋭角,直角或ハ鈍角ナリ.

4. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行ナリ.

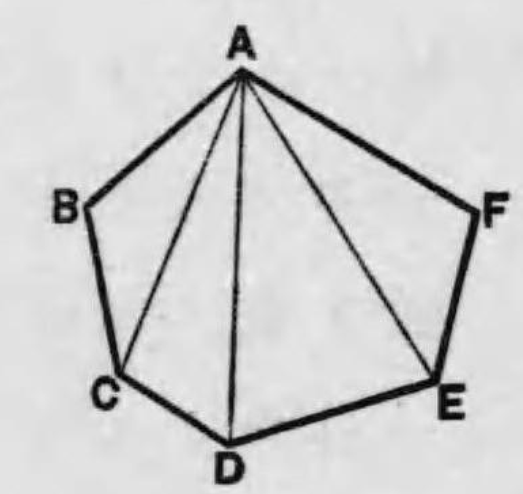
5. 三角形ノ二角ガ與ヘラレタルトキ殘リノ一角ヲ求ムルコト.

71. 定理

多角形ノ各內角ノ和ハ邊數ヨリ2少ナキ數ヲ二直角ニ掛ケタル者ニ等シ.

例ヘバ六邊形 ABCDEF ノ各內角ノ和ハ $2\angle R\times(6-2)$ 即チ $8\angle R$ ナルベシ.

【證明】一ツノ頂點Aヨリ對角線ヲ引ケバ六邊形ハAヲ頂點トスル $(6-2)$ 個即チ4個ノ三角形ニ分タル,而シテ此等ノ三角形ノ各內角ノ和ハ此六邊形ノ各內角ノ和ニ等シ.



然ルニ各三角形ノ內角ノ和ハ $2\angle R$ ニ等シ.

故ニ六邊形ノ各內角ノ和ハ

$$2\angle R\times(6-2)=8\angle R$$

ニ等シ.

系 1. 邊數ガ同ジキ二ツノ正多

角形ノ各內角ハ相等シ.

系 2. 多角形ノ各邊ヲ順次ニ延長スルトキニ生ズル各外角ノ和ハ四直角ニ等シ.

問題

1. 正三角形ヨリ正十邊形マデノ各正多角形ノ一ツノ內角ノ大サヲ計算セヨ.
2. 一角ノ大サガ 157°.5 ナル正多角形ノ邊數ヲ求メヨ.
3. 一外角ノ大サガ 30° ナル正多角形ノ邊數如何.

問題

1.* 一角ガ 60° ナル二等邊三角形ハ正三角形ナリ.

2. 二等邊三角形ノ底邊ニ垂直ナル直線ト他ノ二邊又ハ其延長トニテナス三角形ハ亦二等邊三角形ナリ.

3. 底邊ト頂角トガ夫々相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ相等シ.
4. 三角形ノ二ツノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガナス角ハ,今一ツノ頂點ニ於ケル外角ノ半分ニ等シ.
5. 或正多角形ノ一內角ガ一外角ノ三倍ニ等シトイフ. 此正多角形ノ邊數ヲ求メヨ.
6. 五邊形及ビ六邊形ノ各ノ對角線ノ數ヲ求メヨ.

一般ニ n 邊形ノ對角線ノ數如何.

第七章　平行四邊形

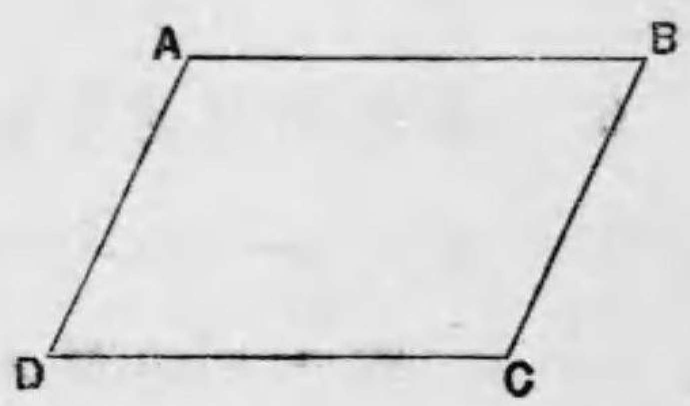
72. 定義

四邊形ノ二組ノ對邊ガ夫々互ニ平行ナルトキ,之ヲ**平行四邊形**トイフ.

右ノ圖ニ於テ

AB∥CD, AD∥BC

ナルトキ,ABCD ハ平行四邊形ナリ,而シテ



∠A ト∠C; ∠B ト ∠D ヲ何レモ**對角**トイフ.

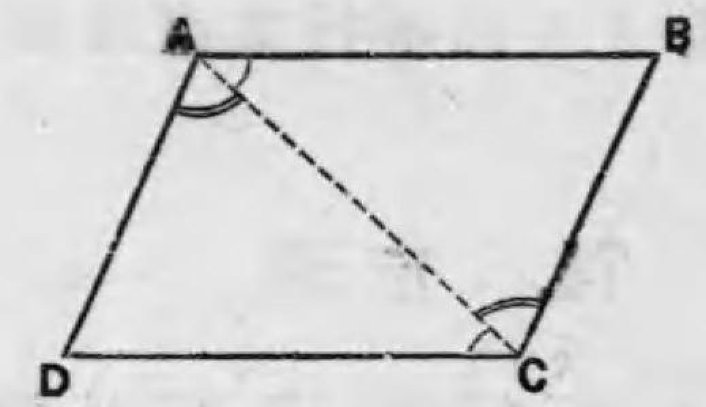
問題

1. 相隣レル二邊ト其夾角トガ夫々相等シキ二ツノ平行四邊形ハ相等シ.
2. 相隣レル二邊ト其夾角トヲ知リテ平行四邊形ヲ作ルコト.
3. 同一直線上ニ在ラザル三定點ヲ三ツノ頂點ニ有スル平行四邊形ヲ作ルコト.

73. 定理

平行四邊形ノ對邊ハ相等シ.

【證明】　平行四邊形 ABCD ニ於テ對角線 AC ヲ作レ. サスレバ △ABC 及ビ △CDA ニ於テ



$$\angle CAB = \angle ACD \quad (\because AB /\!/ CD)$$

$$\angle ACB = \angle CAD \quad (\because BC /\!/ AD)$$

AC ハ共通

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

從テ　$AB = CD,\quad BC = AD$

系 1. 平行四邊形ノ相隣レル二邊ガ相等シケレバ四邊ハ皆相等シ.

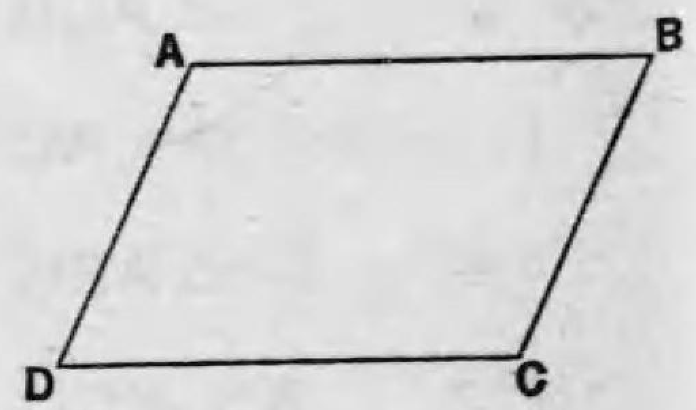
系 2. 平行二直線中ノ一ツノ上ニアル任意ノ點ヨリ他ノ直線ニ引ケル垂線ノ長サハ一定ナリ.

定義 平行二直線中ノ一ツノ上ノ點ヨリ他ノ直線ニ下シタル垂線ノ長サ(卽チ此平行二直線ニ共通ナル垂線ガ其間ニ夾マレタル部分ノ長サ)ヲ此平行二直線間ノ距離トイフ.

74. 定理

平行四邊形ノ對角ハ相等シ.

【證明】 平行四邊形 ABCD ニ於テ



$BC \parallel AD$

$\therefore \angle A+\angle B=2\angle R$

又 $AB \parallel CD$

$\therefore \angle B+\angle C=2\angle R$

$\therefore \angle A+\angle B=\angle B+\angle C$

$\therefore \angle A=\angle C$

同樣ニ $\angle B=\angle D$

系 平行四邊形ノ一ツノ角ガ直角ナレバ他ノ三ツノ角モ亦直角ナリ.

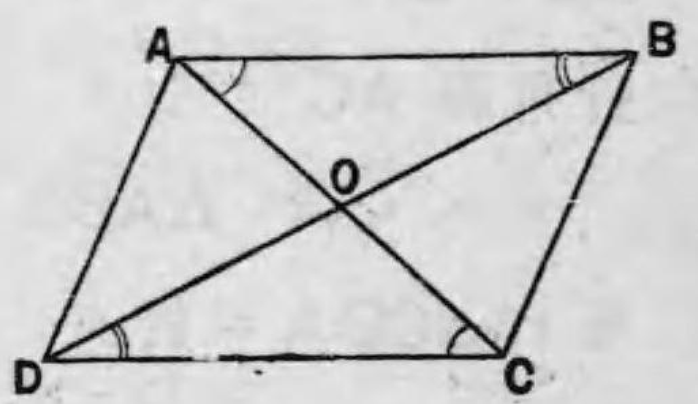
問題

1. 平行四邊形ノ相隣レル二角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.
2. 平行四邊形ノ對角ノ二等分線ハ互ニ平行ナリ.

75. 定理

平行四邊形ノ對角線ハ互ニ二等分ス.

【證明】 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC,BD ノ交點ヲ O トセヨ.



△AOB 及ビ △COD ニ於テ

$AB=CD$ (第73節)

$\angle OAB=\angle OCD$ $(\because AB \parallel CD)$

$\angle OBA=\angle ODC$ $(\because AB \parallel CD)$

$\therefore \triangle AOB \equiv \triangle COD$

從テ $AO=CO,\ BO=DO$

問題

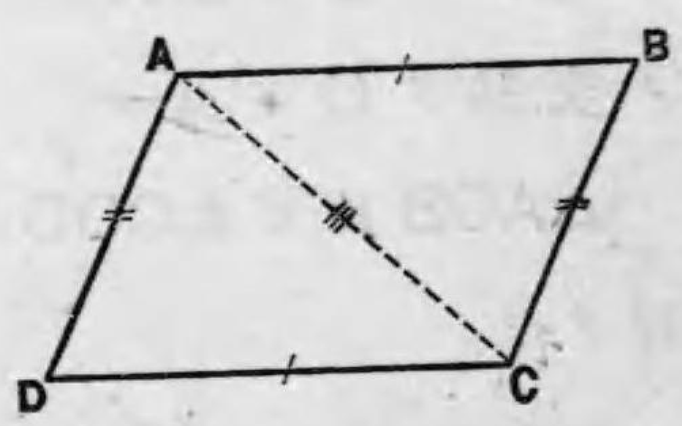
平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通リ一組ノ對邊ニ終ル線分ハ,對角線ノ交點ニ於テ二等分セラル.

76. 定理

二組ノ對邊ガ夫々相等シキ四邊形ハ平行四邊形ナリ.

【證明】 四邊形 ABCD ニ於テ $AB = CD$, $BC = DA$ トセヨ.

對角線 AC ヲ引ケ.



サスレバ $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle CDA$ ニ於テ

$AB = CD$ (假設)

$BC = DA$ (假設)

AC ハ共通

$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle CDA$

從テ $\angle ACB = \angle CAD$

$\therefore \quad BC \parallel AD$ (第65節系1)

又 $\angle CAB = \angle ACD$

$\therefore \quad AB \parallel CD$ (第65節系1)

即チ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

問題

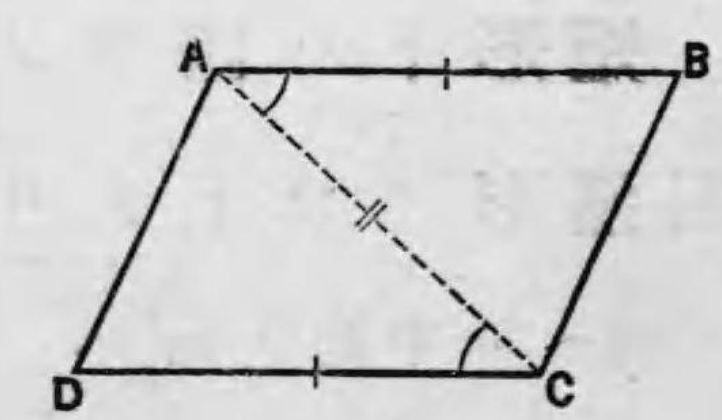
平行四邊形 ABCD ノ四邊 AB, BC, CD, DA ノ各ノ上ニ,夫々相等シキ線分 AK, BL, CM, DN ヲ取レバ,四邊形 KLMN モ亦平行四邊形ナリ.

77. 定理

一組ノ對邊ガ相等シク且ツ互ニ平行ナル四邊形ハ平行四邊形ナリ.

【證明】 四邊形 ABCD ニ於テ $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$ トセヨ.

對角線 AC ヲ引ケ.



サスレバ $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle CDA$ ニ於テ

$AB = CD$ (假設)

AC ハ共通

然ルニ　　$AB \parallel CD$　　（假設）

$\therefore$　　$\angle CAB = \angle ACD$　　（第67節系1）

$\therefore$　　$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

從テ　　$\angle ACB = \angle CAD$

$\therefore$　　$BC \parallel AD$　　（第65節系1）

卽チ　ABCD ハ平行四邊形ナリ.

問題

1. 平行四邊形ABCDノ相對スル二邊 AB, CD ノ各ノ中點ヲ,其對邊ノ兩端ニ結ビ付クル四ツノ線分ハ平行四邊形ヲナス.

2. 對角線ガ互ニ二等分スル四邊形ハ平行四邊形ナリ.

78. 定義

矩形トハ四ツノ角ガ皆直角ナル四邊形ノコトナリ.

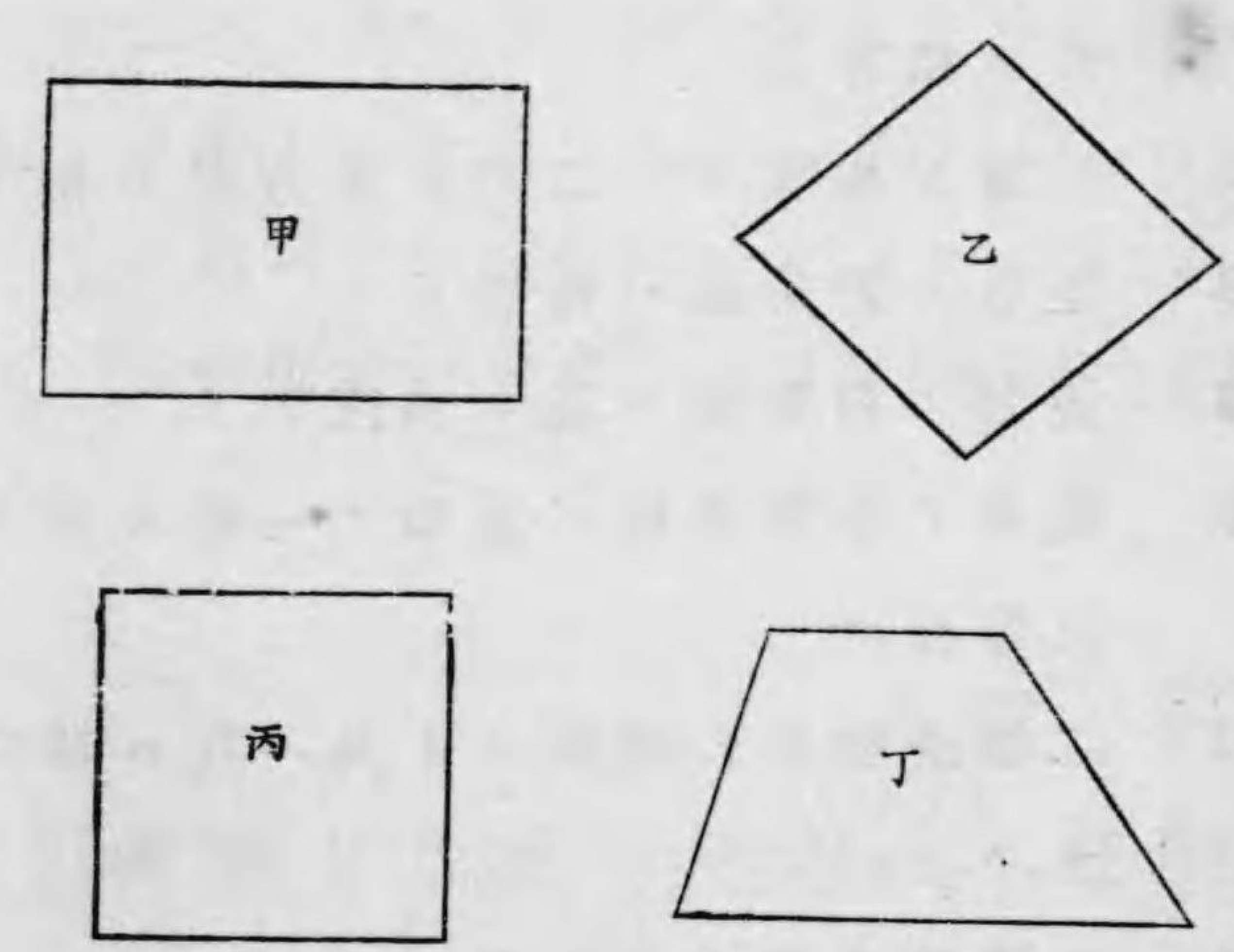
例ヘバ甲圖ノ如シ.

菱形トハ四邊ガ相等シキ四邊形ノコトナリ.

例ヘバ乙圖ノ如シ.

正方形トハ四邊ガ相等シク,且ツ四ツノ角ガ皆直角ナル四邊形ノコトナリ.

例ヘバ丙圖ノ如シ.



梯形トハ一組ノ對邊ダケガ互ニ平行ナル四邊形ノコトナリ.

例ヘバ丁圖ノ如シ.

梯形ノ互ニ平行ナル二邊ノ各ヲ梯形ノ底邊トイフ.

梯形ノ互ニ平行ナラザル二邊ガ相等シキトキハ,之ヲ二等邊梯形トイフ.

問題

1.* 相隣レル二邊ガ夫々相等シキ二ツノ矩形ハ相等シ.

2.* 一邊ガ相等シキ二ツノ正方形ハ相等シ.

3.* 矩形ノ對角線ハ相等シ.

4.* 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ナリ.

5. 菱形ノ各對角線ハ菱形ノ一組ノ對角ヲ二等分ス.

6. 二等邊梯形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス.

7. 二隣邊ヲ與ヘテ矩形ヲ作ルコト.

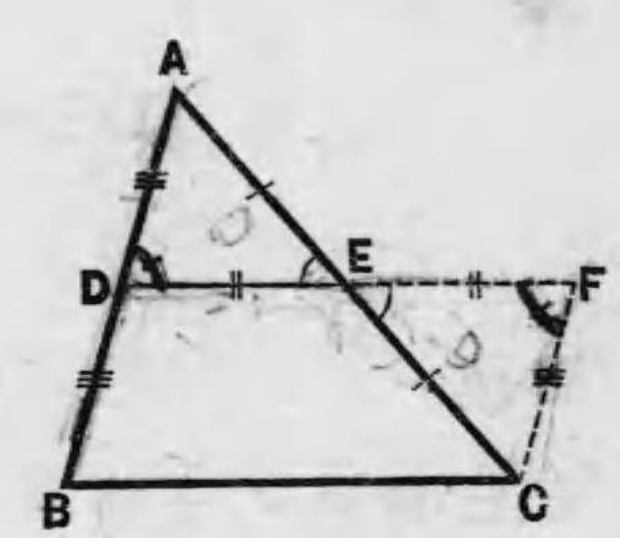
8. 一邊ヲ與ヘテ正方形ヲ作ルコト.

79. 定理

三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ハ,第三邊ニ平行ニシテ且ツ其半分ニ等シ.

【證明】 △ABCノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トセヨ.

線分 DE ヲ作リ,之ヲEノ方ヘ延長シ,其上ニ於テ DE ニ等シク EF ヲ取リ,F ト C トヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ △ADE 及ビ △CFE ニ於テ

$$AE = CE \quad \text{(假設)}$$

$$DE = EF \quad \text{(作圖)}$$

$$\angle AED = \angle CEF \quad \text{(對頂角)}$$

$$\therefore \quad \triangle ADE \equiv \triangle CFE$$

從テ $\angle ADE = \angle CFE$

∴　　$AD \parallel\!\!= CF$

卽チ　　$BD \parallel CF$

然ルニ　　$AD = BD$　　（假　設）

∴　　$BD \parallel\!\!= CF$

DBCF

故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ（第77節）

∴　　$DE \parallel BC$

且ツ　　$DF = BC$　　（第73節）

然ルニ　　$DE = \frac{1}{2}DF$　　（作　圖）

∴　　$DE = \frac{1}{2}BC$

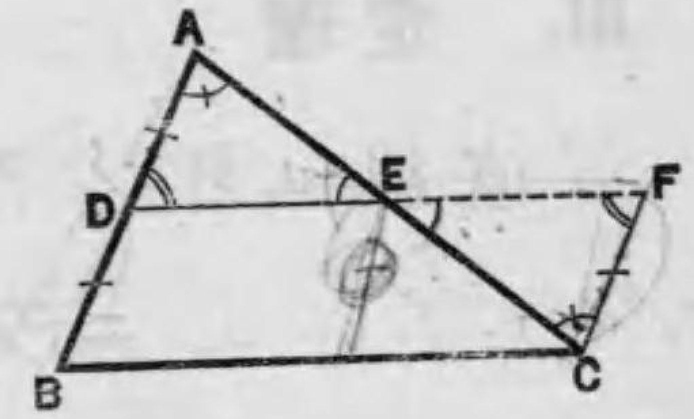
問題

正三角形ノ三邊ノ中點ハ亦一ツノ正三角形ノ三ツノ頂點ヲナス.

80. 定理

三角形ノ一邊ノ中點ヨリ他ノ一邊ニ平行ニ引キタル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.

【證明】 △ABC ニ於テ AB ノ中點 D ヨリ BC ニ平行ニ引キタル直線ト AC トノ交點ヲ E トセヨ. C ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ DE ノ延長ト F ニ於テ交ラシメヨ.



サスレバ BCFD ハ平行四邊形ナリ.

∴　　$BD = CF$　　（第73節）

然ルニ　　$BD = AD$　　（假　設）

∴　　$AD = CF$

又　　$\angle DAE = \angle FCE$　　（∵ $AB \parallel CF$）

$\angle ADE = \angle CFE$　　（∵ $AB \parallel CF$）

∴　　$\triangle ADE \equiv \triangle CFE$

從テ　　$AE = CE$

卽チ E ハ AC ノ中點ナリ.

問題

平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AD, BC ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ AF, CE ハ對角線

BD ヲ三等分ス.

81. 定理

二直線(a, b)ノ各ガ若干ノ平行線$(c, d, e, f, \dots\dots)$ニ交ルトキ,第一直線(a)上ニ生ズル相接續スル線分(CD, DE, EF,……)ガ相等シケレバ,第二直線(b)上ニ生ズル相接續スル線分(C'D', D'E', E'F',…)モ亦相等シ.

【證明】 點Cヨリ直線bニ平行線ヲ引キ二直線d, eト夫々D'', E''ニ於テ交ラシメヨ.

サスレバ

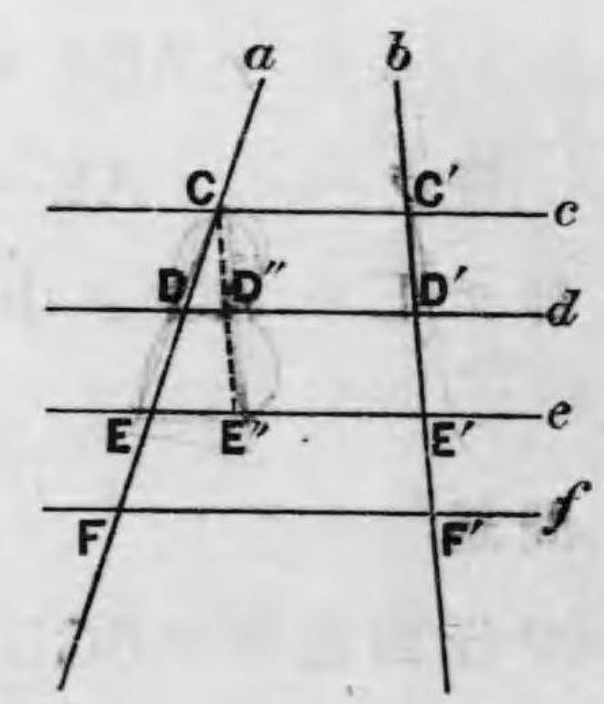
$C'D' = CD''$ (第73節)

$D'E' = D''E''$ (第73節)

然ルニ $\triangle CEE''$ニ於テ

$CD = DE$ (假設)

$DD'' \parallel EE''$ (假設)



$\therefore$ $CD'' = D''E''$ (第80節)

$\therefore$ $C'D' = D'E'$

同樣ニシテ $D'E' = E'F'$ 等

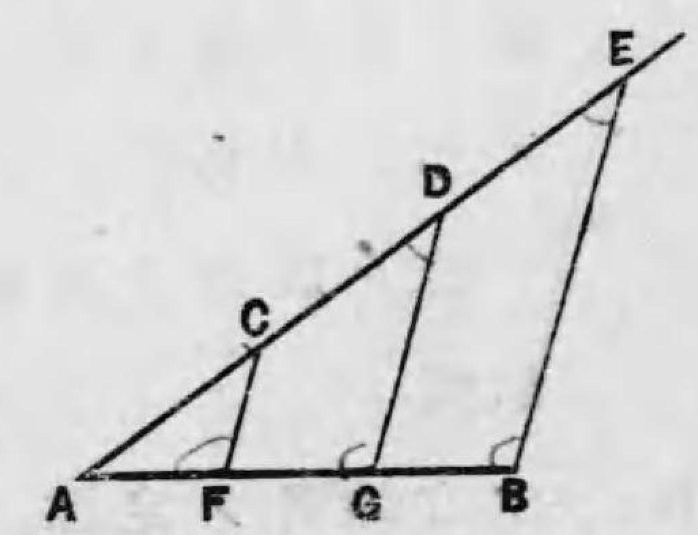
從テ $C'D' = D'E' = E'F' = \dots\dots$

82. 作圖題

定線分(AB)ヲ若干等分(例ヘバ三等分)スルコト.

【作圖】 定線分ABノ一端Aヨリ任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ任意ノ相等シキ線分AC, CD, DEヲ取リ,最後ノ端EトBトヲ結ビ付ケヨ.

次ニC, Dノ各ヨリEBニ平行線ヲ引キABト夫々F, Gニ於テ交ラシメヨ. サスレバF, GガAB ヲ三等分スル點ナリ.



【證明】 略ス.

問題

1.* 對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ.

2.* 對角線ガ互ニ垂直ナル平行四邊形ハ菱形ナリ

3. 二組ノ對角ガ夫々相等シキ四邊形ハ平行四邊形ナリ.

4.* 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クルトキ生ズル四邊形ハ平行四邊形ナリ.

5. 二等邊三角形ノ底邊上ニアル任意ノ點ヨリ夫々他ノ二邊ニ平行ニ引キタル直線ガ他ノ邊ト交リテ出來ル二ツノ線分ノ和ハ不易ナリ.

若シ底邊ノ延長上ノ一點ヨリナラバ如何.

6. 定直線外ノ定點ト此直線上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル線分ノ中點ハ此直線ニ平行ナル一ツノ直線上ニ在リ.

雜題

1. 三角形ノ底邊ト其底角ノ二等分線トニテナス三角形ハ鈍角三角形ナリ.

2.* 線分ノ中點ヨリ此線分ニ交ラザル他ノ直線ニ至ル距離ハ,此線分ノ兩端ヨリ此直線ニ至ル距離ノ和ノ半分ニ等シ.

3.* 直角三角形ノ斜邊ノ中點ト直角ノ頂點トヲ結ビ付クル線分ハ斜邊ノ半分ニ等シ.

4. 直角三角形ノ一ツノ銳角ガ $60°$ (從テ今一ツノ銳角ガ $30°$) ナルトキハ,其斜邊ハ最小邊ノ二倍ニ等シ.

5. 正方形 ABCD ノ相對スル頂點 A, C ヨリ他ノ頂點 B ヲ通ル任意ノ直線ヘ下セル垂線ノ足ヲ夫々 A', C' トスレバ $AA'=BC'$ ナリ.

6. $\triangle ABC$ ノ角 B ノ二等分線ト頂點 C ニ於ケル外角ノ二等分線トノ交點ヲ D トス

レバ角 BDC ハ角 A ノ半分ニ等シ.

7.* 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ垂直ナレバ,二ツノ角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲナス.

8. 直線 CD ノ同ジ側ニ二點 P, Q アリ, A ハ CD 上ノ一點ニシテ直線 PA, QA ガ CD トナス角ハ相等シトス. 今 B ヲ CD 上ノ他ノ任意ノ點トスレバ PA+QA ハ PB+QB ヨリ小ナリ.

9. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル二ツノ線分ト各對角線ノ中點ヲ結ビ付クル線分トハ同一ノ點ヲ通ル.

10. 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ハ,其平行ナル邊ニ平行ニシテ且ツ平行ナル二邊ノ和ノ半分ニ等シ.

11. 四邊形ノ各ノ角ノ二等分線ニテ出來ル四邊形ノ對角ハ互ニ補角ヲナス.

若シ第一ノ四邊形ガ平行四邊形(若クハ矩形)ナルトキハ第二ノ四邊形ハ如何ナル形トナルカ.

12. 一定點ヲ通リテ直線ヲ引キ,ソレガ定マレル平行二直線ノ間ニ夾マルル部分ヲシテ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

13. 直角ヲ三等分スルコト.

14. 定角內ノ一定點ヲ通リ其兩端ガ此角ノ二邊ノ上ニアルベキ線分ヲ引キ,ソレガ此定點ニテ二等分セラルル樣ニスルコト.

15. △ABC ノ一邊 AC ノ上ニ一點 P ヲ求メ,之ヨリ夫々 AB, BC ニ平行線ヲ引キ, BC, AB ト夫々點 X, Y ニ於テ交ラシムルトキ, PX＝PY ナル樣ニスルコト.

第三編　面　積

83.　定義

相等シキ面積ヲ有スル二ツノ圖形ハ**等積ナリ**トイフ.

全ク重ネ合ハスルコトヲ得ル二ツノ圖形ハ必ズ等積ナリ,サレドモ等積ナル二ツノ圖形ハ必ズシモ全ク重ネ合ハスルコトヲ得ズ.

二ツノ圖形,例ヘバ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トガ等積ナルコトヲ　$\triangle ABC = \triangle DEF$　ト記ス.

問題

1.* 一邊ガ相等シクシテ之ニ隣レル邊ガ相等シカラザル二ツノ矩形ハ等積ナラズ,隣邊ノ大ナル方ノ面積ガ其小ナル方ノ面積ヨリ大ナリ.

2.* 等積ニシテ其一邊ガ相等シキ二ツノ矩形ハ相等シ.

3.* 等積ナル二ツノ正方形ノ邊ハ相等シ.

84.　面積ノ單位

實用上ニ於テ面積ヲ測ルトキノ單位ニハ,一邊ノ長サガ長サノ單位ニ等シキ正方形ノ面積ヲ用フル者トス.

例ヘバ長サノ單位ヲ1寸トスレバ,之ヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシ,之ヲ1平方寸トイフ.

1平方尺,1平方米等モ亦之ニ準ズ.

85.　定理

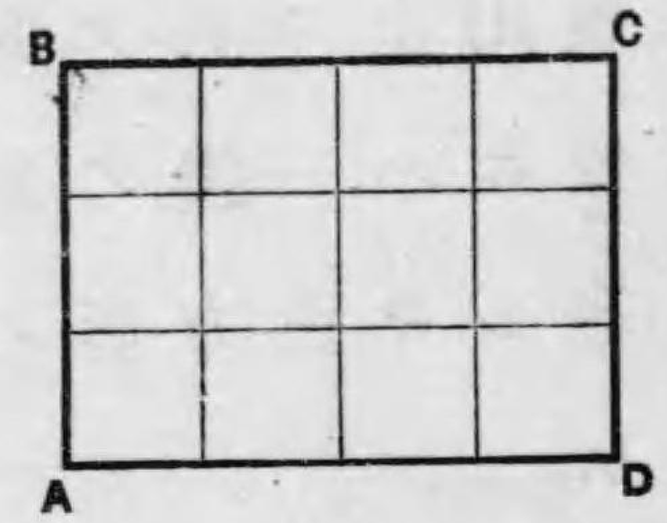
矩形ノ面積ヲ表ス數 (S) ハ其相隣レル二邊ヲ表ス數 (l, m) ノ相乘積ニ等シ.

即チ　$S = l.m$　ナリ.

【證明】 (第一) l, m ガ何レモ整數ナルトキ.

矩形 ABCD ニ於テ,例ヘバ AB＝3寸, AD＝4寸,從テ $l=3,\ m=4$ ナリトセン.

AB ヲ三等分シ, AD ヲ四等分シ,各分點ヲ通リ夫々相隣レル邊ニ平行線ヲ引ケバ,此矩形ハ三ツ宛四列,卽チ12



箇ノ相等シキ正方形ニ分タル,而シテ此正方形ノ邊ノ長サハ1寸ナルヲ以テ,其面積ハ1平方寸ナリ. 從テ矩形 ABCD ノ面積ハ12平方寸ナリ.

$$\therefore \qquad S = 3\times4\ (=l\times m)$$

l, m ガ他ノ整數ナルトキモ之ト同樣ニシテ

$$S = l.m$$

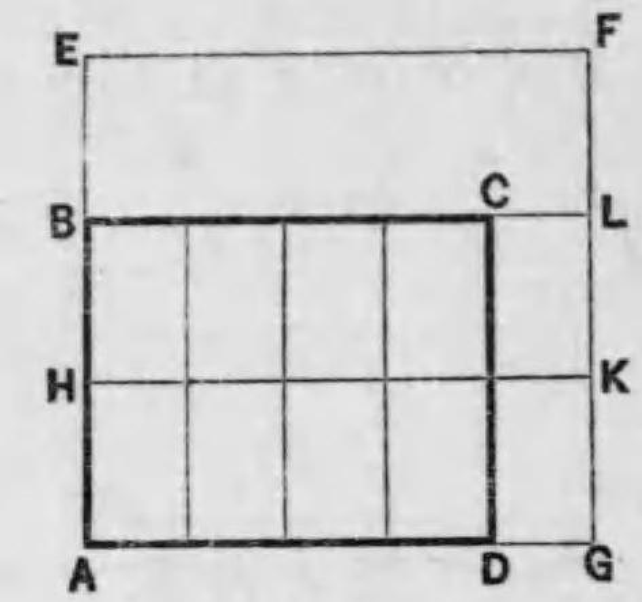
ナルコトヲ證明スルコトヲ得.

(第二) l, m ガ何レモ分數ナルトキ.

例ヘバ AB＝$\frac{2}{3}$寸, AD＝$\frac{4}{5}$寸,從テ $l=\frac{2}{3}$,

$m=\frac{4}{5}$ ナリトセン.

AB 及ビ AD ヲ夫々 B, D ノ方ヘ E, G マデ延長シテ AE 及ビ AG ヲ各1寸ニ等シク取リテ正方形 AEFG ヲ作レ. AB ヲ H ニテ



二等分シ,H ヲ通リ AG ニ平行線ヲ引キ,FG ト K ニ於テ交ラシメ,又 BC ノ延長ト FG トノ交點ヲ L トスレバ,正方形 AEFG ハ BL 及ビ HK ニヨリテ相等シキ三ツノ矩形ニ分タル.

故ニ矩形 ABLG ノ面積ハ正方形 AEFG ノ面積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シ.

次ニ AD ヲ四等分シ,各分點ヲ通リ AB ニ平行線ヲ引ケバ矩形 ABLG ハ此等ノ平行線及ビ CD ニヨリテ五ツノ相等シキ矩形ニ分タル.

故ニ矩形 ABCD ノ面積ハ矩形 ABLG ノ面積ノ $\frac{4}{5}$ ニ等シ.

故ニ矩形 ABCD ノ面積ハ正方形 AEFG ノ面積ノ $\frac{2}{3}$ ノ $\frac{4}{5}$ 卽チ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$ ニ等シ,而シテ正

方形 AEFG ノ邊ノ長サハ 1 寸,從テ其面積ハ 1 平方寸ナルヲ以テ,矩形 ABCD ノ面積ハ 1 平方寸ノ $\frac{8}{15}$ 卽チ $\frac{8}{15}$ 平方寸ナリ.

$$\therefore \quad S=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} \quad (=l.m)$$

l, m ガ他ノ分數ナルトキニモ之ト同樣ニシテ

$$S=l.m$$

ナルコトヲ證明スルコトヲ得.

又 l, m ガ何レモ帶分數ナルトキ,又一ツガ整數,一ツガ分數ナルトキハ,帶分數若クハ整數ヲ假分數ニ直セバ此場合ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得.

系 1. 正方形ノ面積ヲ表ス數ハ其一邊ヲ表ス數ノ平方(二乘)ニ等シ.

系 2. 矩形ノ一邊ヲ表ス數ハ,其面積ヲ表ス數ヲ其隣邊ヲ表ス數ニテ除シテ得ル商ニ等シ.

系 3. 正方形ノ一邊ヲ表ス數ハ其面積ヲ表ス數ノ平方根ニ等シ.

86. 定義

相隣レル二邊ガ二ツノ與ヘラレタル線分 AB, CD ニ等シキ矩形ヲ略シテ此**二線分ノ包ム矩形**トイヒ,其面積ヲ此**二線分ノ積**ト名ヅク,而シテ之ヲ AB·CD ニテ表スコトニ定ム.

又線分 EF ニ等シキ各邊ヲ有スル正方形ヲ其**線分 EF ノ上ノ正方形**トイヒ,其面積ヲ **EF ノ平方**ト名ヅケ,之ヲ EF^2 ニテ表スコトニ定ム.

87. 定義

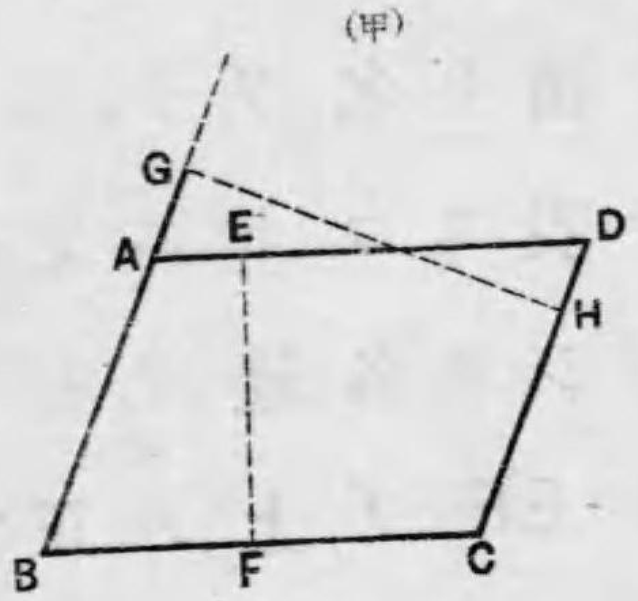
平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ特ニ**平行四邊形ノ底邊**ト稱スルコトアリ,此場合ニハ底邊ト其對邊トノ間ノ距離ヲ此**平行四邊形ノ高サ**トイフ.

次ノ(甲圖)ニ於テ BC ヲ底邊トスレバ EF ハ其高サナリ,又 AB ヲ底邊トスレバ GH ハ其高サナリ.

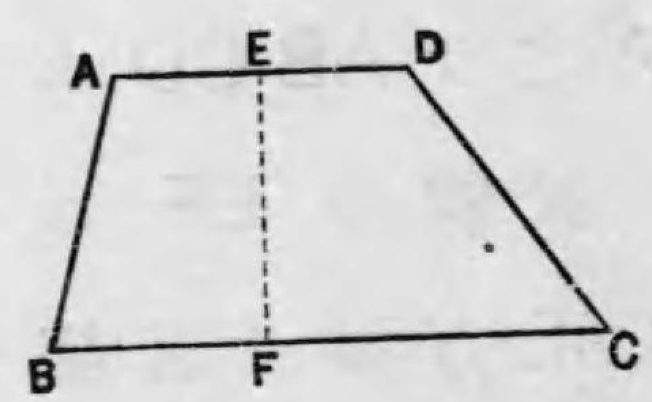
梯形ノ場合ニハ其二ツノ底邊ノ間ノ距離ヲ**其高サ**トイフ.

次ノ(乙圖)ニ於ケル EF ハ梯形 ABCD ノ高サナリ.

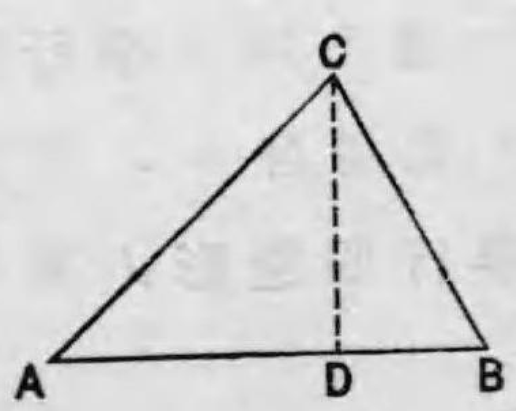
(甲)

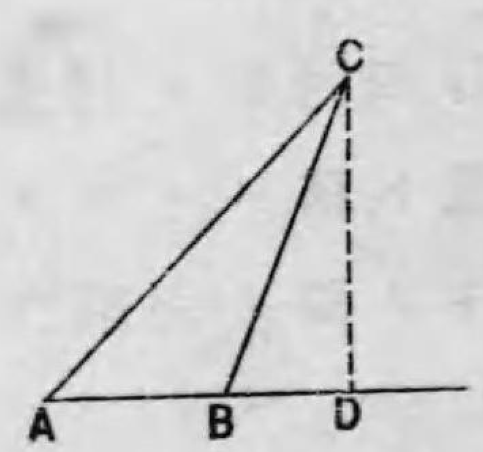


(乙)



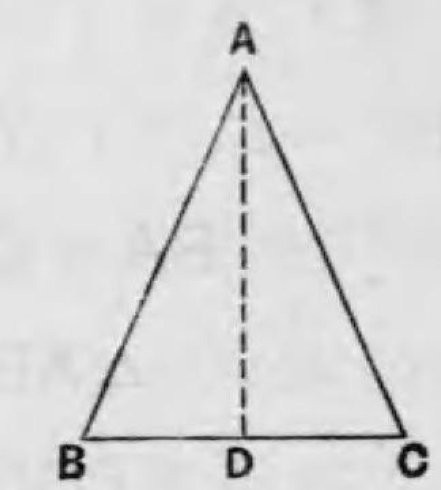
三角形ノ底邊ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲ**此三角形ノ高サ**トイフ.





例ヘバ前ノ圖ニ於テ AB ヲ底邊トスレバ CD ハ其高サナリ.

二等邊三角形ノ場合ニアリテハ其底邊ト頂點トノ間ノ距離ヲ其高サトイフ.

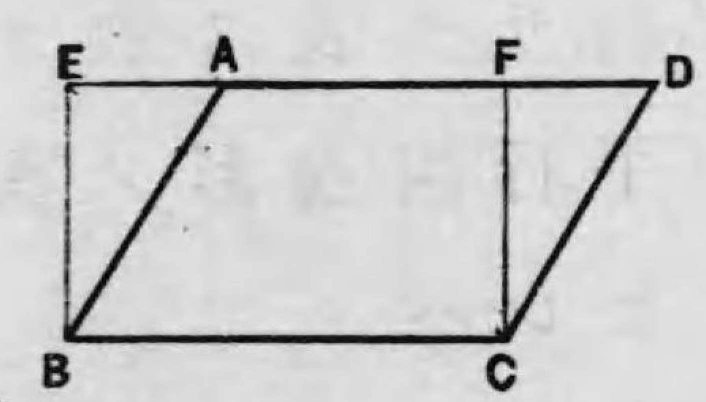


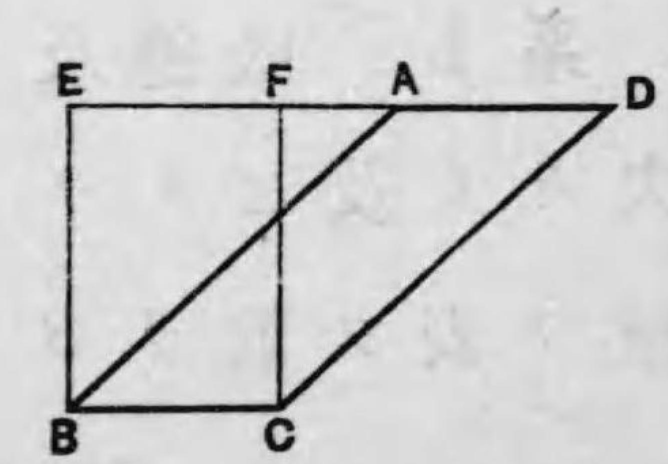
右ノ圖ニ於ケル AD ハ二等邊三角形 ABC ノ高サナリ.

88. 定理

平行四邊形ハ其底邊ト高サトノ包ム矩形ト等積ナリ.

【證明】 平行四邊形ABCDノ底邊BCノ兩端ヨリ之ニ垂線ヲ引キ,其對邊若クハ其延長ト





夫々E, F ニ於テ交ラシメヨ. サスレバ四邊形 BCFE ハ平行四邊形ノ底邊 BC ト其高サ CF トノ包ム矩形ナリ.

然ルニ二ツノ直角三角形 ABE, DCF ニ於テ

$BA = CD,\ BE = CF$ (第73節)

$\therefore\quad \triangle ABE \equiv \triangle DCF$ (第49節)

サテ四邊形 BCDE ヨリ △ABE ヲ取リ去リタル殘リハ平行四邊形 ABCD ニシテ,四邊形 BCDE ヨリ △DCF ヲ取リ去リタル殘リハ矩形 BCFE ナリ.

故ニ平行四邊形 ABCD ト矩形 BCFE トハ等積ナリ.

【注意】 以後或圖形,例ヘバ四邊形 ABCD ノ面積ト書ク代リニ單ニ四邊形 ABCD 又ハ ABCD ト書クコトアリ.

系 1. 底邊及ビ高サヲ表ス數ガ夫々 b 及ビ h ナル平行四邊形ノ面積ヲ表ス數ヲ S トスレバ

$S = b.h$ ナリ.

系 2. 底邊及ビ高サガ夫々相等シキ二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ.

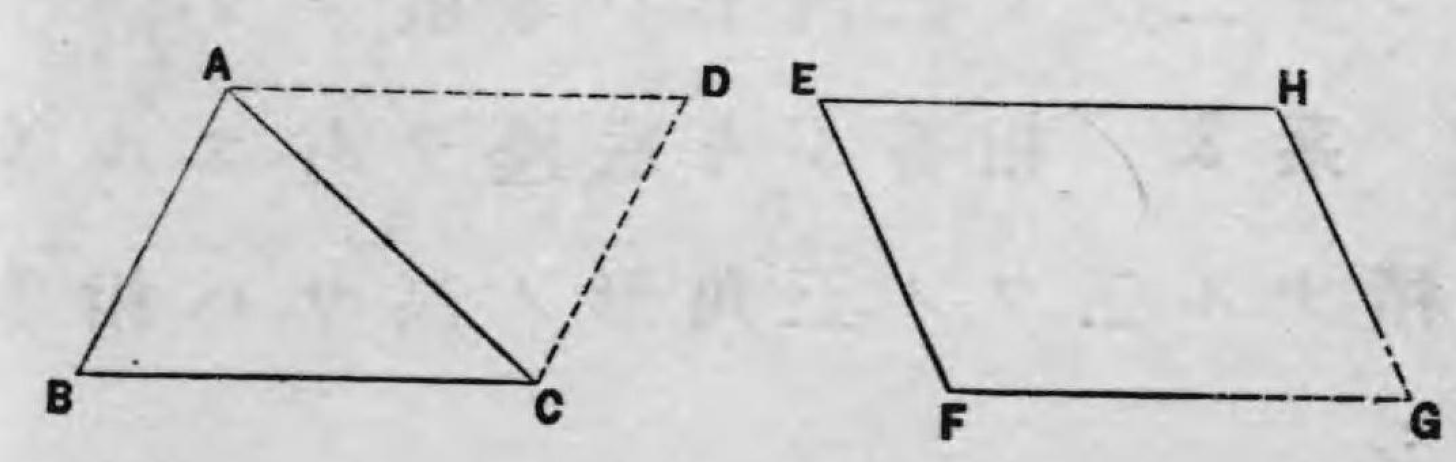
問題*

等積ナル二ツノ平行四邊形ノ底邊(或ハ高サ)ガ相等シケレバ,其高サ(或ハ底邊)モ亦相等シ.

89. 定理

三角形ノ面積ハ,之ト等シキ底邊及ビ高サヲ有スル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ.

【證明】 △ABC ノ二ツノ頂點 A, C ヨリ夫々邊 BC, BA ニ平行線ヲ引キ,其交點ヲ D トセヨ.



サスレバ ABCD ハ平行四邊形ニシテ,其底邊及ビ高サハ夫々 △ABC ノ底邊及ビ高サニ等シ.

然ルニ　　$\triangle ABC = \triangle ADC$

$\therefore$　　$\triangle ABC = \frac{1}{2}(ABCD)$

然ルニ平行四邊形 EFGH ノ底邊及ビ高サハ夫々 △ABC ノ底邊及ビ高サニ等シク,從テ平行四邊形 ABCD ノ底邊及ビ高サニ等シ.

$\therefore$　　$EFGH = ABCD$

$\therefore$　　$\triangle ABC = \frac{1}{2}(EFGH)$

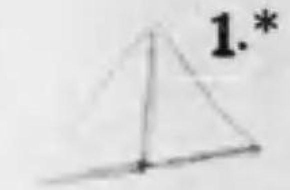
系 1.　三角形ノ面積 (S) ハ其底邊 (b) ト高サ (h) トノ積ノ半分ニ等シ.

即チ　　$S = \frac{1}{2}b.h$

系 2.　底邊及ビ高サガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ等積ナリ.

系 3.　相等シキ底邊ヲ有スル等積ナル二ツノ三角形ノ高サハ相等シ.

問題



1.* 等積ナル二ツノ三角形ノ高サガ相等シケレバ,其底邊モ亦相等シ.

2.* 同一ノ底邊(又ハ同一直線上ニ相等シキ底邊)ヲ有シ,且ツ其直線ノ同ジ側ニアリテ等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ通ル直線ハ底邊ニ平行ナリ.

3. 同一ノ底邊ヲ有シ,其兩側ニアル等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル線分ハ,底邊若クハ其延長ニヨリテ二等分セラル.

4. 平行四邊形ノ二ツノ對角線ハ之ヲ等積ナル四ツノ三角形ニ分ツ.

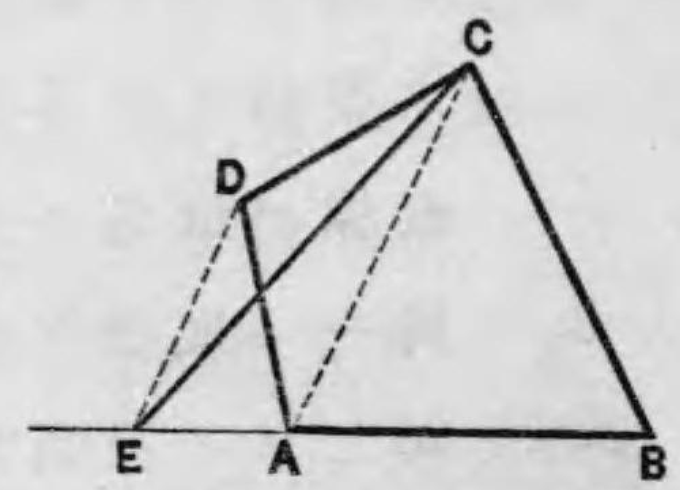
5. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスルトキ, △AOD ト △BOC トガ等積ナレバ, AB ト CD トハ互ニ平行ナリ.

6. 二邊ガ定長ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノハ如何.

90. 作圖題

與ヘラレタル四邊形(ABCD)ト等積ナル一ツノ三角形ヲ作ルコト.

【作圖】 對角線ACヲ引キ,點DヨリACニ平行線ヲ引キテABノ延長ト點Eニ於テ交ラシメ,CトEトヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ △BCE ハ所要ノ三角形ナリ.

【證明】 略ス.

問題

1* 與ヘラレタル多角形ト等積ニシテ,邊ノ數ガ元ヨリモ一ツダケ少ナキ一ツノ多角形ヲ作ルコト,從テ與ヘラレタル多角形ト等積ナル一ツノ三角形ヲ作ルコト.

2* 與ヘラレタル多角形ト等積ナル一ツノ矩形ヲ作ルコト.

91. 定理

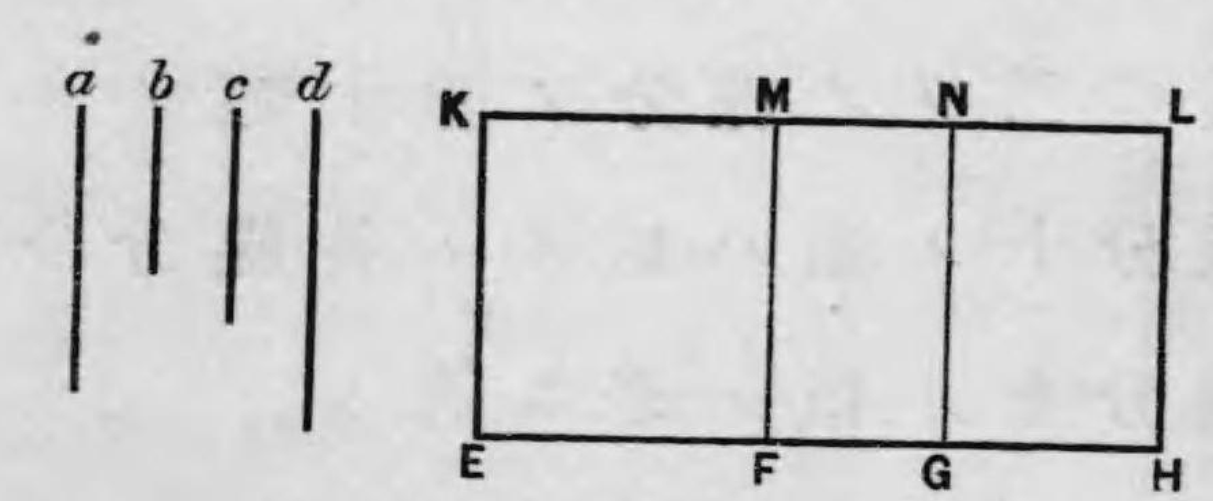
若干ノ線分ノ和ト他ノ一ツノ線分トノ積ハ,始メノ各線分ト後ノ線分トノ積ノ和ニ等シ.

例ヘバ a, b, c, d ヲ四ツノ線分トスレバ

$$(a+b+c).d = a.d+b.d+c.d$$

ナルベシ.

【證明】



a ニ等シキ線分 EF ヲ引キ,之ヲFノ方ヘ延長シテ其上ニ b ニ等シク FG ヲ取リ,尚ホ引キ續キ c ニ等シク GH ヲ取レ. 次ニEヨリEHニ垂線ヲ引キ,其上ニ d ニ等シク EK ヲ取リ,EH, EK ガ包ム矩形EKLHヲ作レバ,其面積ハ

$$(a+b+c).d$$

ニテ表サル.

次ニF及ビGヨリEKニ平行線ヲ引キKLト夫々M及ビNニ於テ交ラシムレバ,三ツノ矩形EKMF, FMNG, GNLHノ面積ハ夫々

$$a.d,\quad b.d,\quad c.d$$

ニテ表サル. 而シテ矩形EKLHノ面積ハ後ノ三ツノ矩形ノ面積ノ和ニ等シ.

$$\therefore\quad (a+b+c).d=a.d+b.d+c.d$$

系 二ツノ線分ノ差ト他ノ一ツノ線分トノ積ハ,始メノ各線分ト後ノ線分トノ積ノ差ニ等シ.

問題

一直線上ニ四點A, B, C, Dヲ此順ニ取レバ

AC·BD = AB·CD + BC·AD ナリ.

92. 定理

二ツノ線分ノ和ノ平方ハ,其各ノ平方ト其積ノ二倍トノ和ニ等シ.

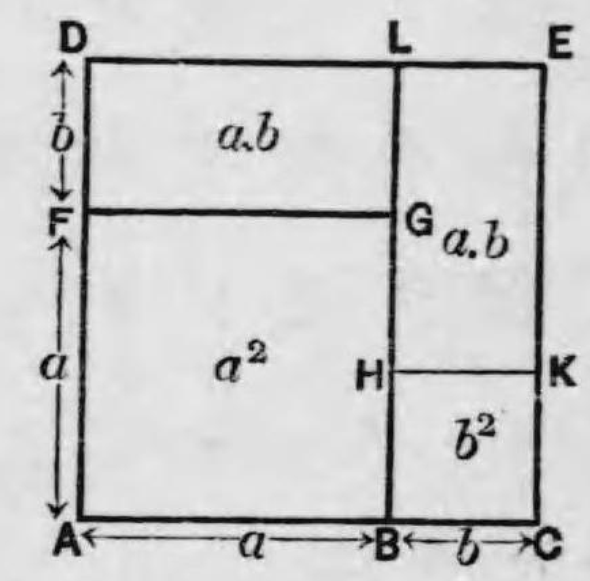
例ヘバa, bヲ二ツノ線分トスレバ

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2.a.b$$

ナルベシ.

【證明】 aニ等シキ線分ABヲ引キ,之ヲBノ方ヘCマデ延長シ, BCヲbニ等シクセヨ.

サスレバACハaトbトノ和ニ等シ.



ソコデACノ上ニ正方形ヲ作リ,ACニ對シ其正方形ト同ジ側ニAB, BCノ上ニ夫々正方形ABGF, BCKHヲ作レバ,F,H,Kハ夫々直線AD, BG, CEノ上ニ來ル.

次ニBGヲ延長シテDEトLニ於テ交ラシメヨ. サスレバ

$$FG=HL=a$$

$$DF = HK = b$$

$$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 + FG.DF + HL.HK$$

卽チ $$(a+b)^2 = a^2+b^2+a.b+a.b$$
$$= a^2+b^2+2.a.b$$

問題

一線分ノ平方ハ其半分ニ等シキ線分ノ平方ノ四倍ニ等シ.

93. 定理

二ツノ線分ノ差ノ平方ハ,其各ノ平方ノ和ヨリ此二ツノ線分ノ積ノ二倍ヲ減ジタル者ニ等シ.

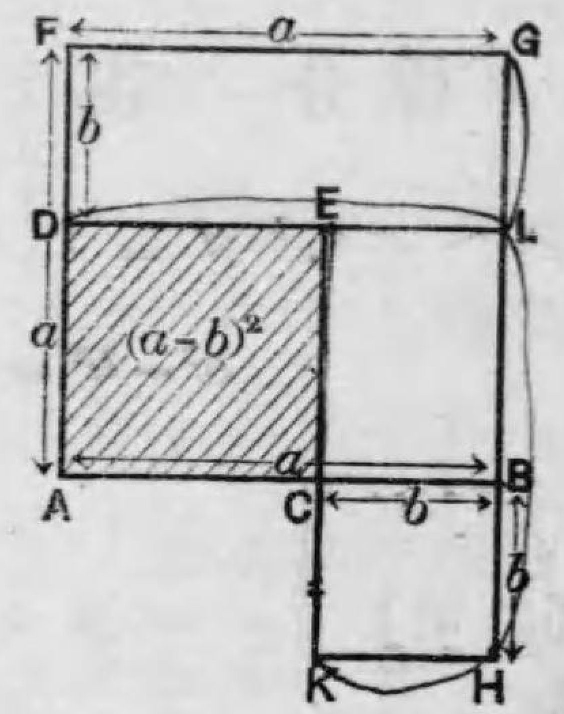
例ヘバ a, b ガ二ツノ線分ニシテ $a > b$ トスレバ

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2.a.b$$

ナルベシ.

【證明】 a ニ等シキ線分 AB ヲ引キ,其上ニ於テ BC ヲ b ニ等シク取リ, AC, AB ノ上ニ夫

々正方形 ACED, ABGF ヲ AB ノ一方ノ側ニ作レバ點 D ハ AF ノ上ニ來ル.



次ニ今作リタル正方形トハ AB ノ反對ノ側ニ, BC ノ上ニ正方形 BCKH ヲ作レバ CK ト CE トハ同一直線ヲナシ, BG ト BH トハ同一直線ヲナス.

ソコデ DE ヲ延長シテ BG トLニ於テ交ラシメヨ. サスレバ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - (DL.LG + HL.HK)$$

然ルニ $$AC = a-b$$
$$DL = HL = a$$
$$LG = HK = b$$

$$\therefore \quad (a-b)^2 = a^2+b^2-(a.b+a.b)$$
$$= a^2+b^2-2.a.b$$

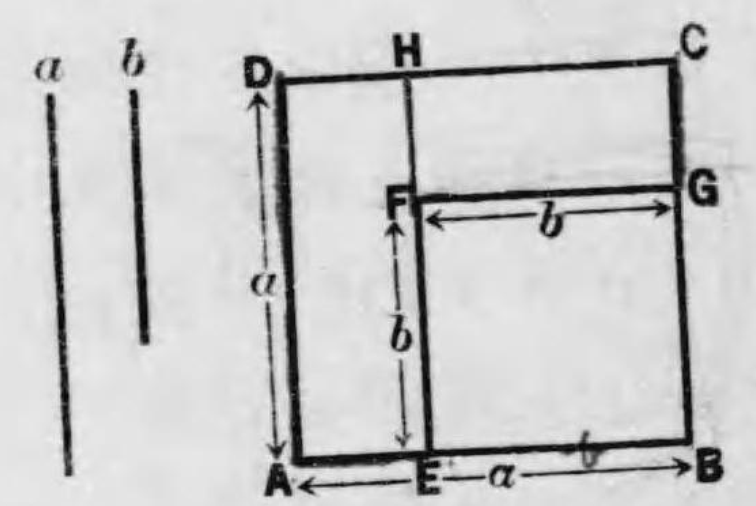
94. 定理

二ツノ線分ノ各平方ノ差ハ,此二ツノ線分ノ和ト差トノ積ニ等シ.

例ヘバa,bガ二ツノ線分ニシテ$a>b$ナレバ

$$a^2-b^2=(a+b).(a-b)$$

ナルベシ.



【證明】 aニ等シキ線分ABヲ引キ,其上ニ於テBEヲbニ等シク取リ,ABノ同ジ側ニ夫々AB, BEヲ邊トスル二ツノ正方形ABCD, BEFGヲ畫キ,EFノ延長トCDトノ交點ヲHトセヨ.

サスレバ

$$AB^2-BE^2=AE\cdot AD+GC\cdot GF$$

然ルニ $$AE=GC=a-b$$

$$\therefore\ AE\cdot AD+GC\cdot GF=AE\cdot(AD+GF)$$

$$\therefore\ a^2-b^2=(a-b).(a+b)$$

問題

1. 二線分ノ和ノ平方ト差ノ平方トノ差ハ,此二線分ノ積ノ四倍ニ等シ.

2. 一線分ヲ其上ノ任意ノ點ニテ二ツノ部分ニ分ツトキ,其二ツノ部分ノ平方ノ差ハ,中點ト分點トヲ兩端トスル線分ト全線分トノ積ノ二倍ニ等シ.

3.* 一線分ヲ其上ノ任意ノ點ニテ二ツノ部分ニ分ツトキ,其二ツノ部分ノ包ム矩形ノ面積ハ,其線分ノ半分ノ平方ト,中點ト分點トノ間ノ距離ノ平方トノ差ニ等シ.

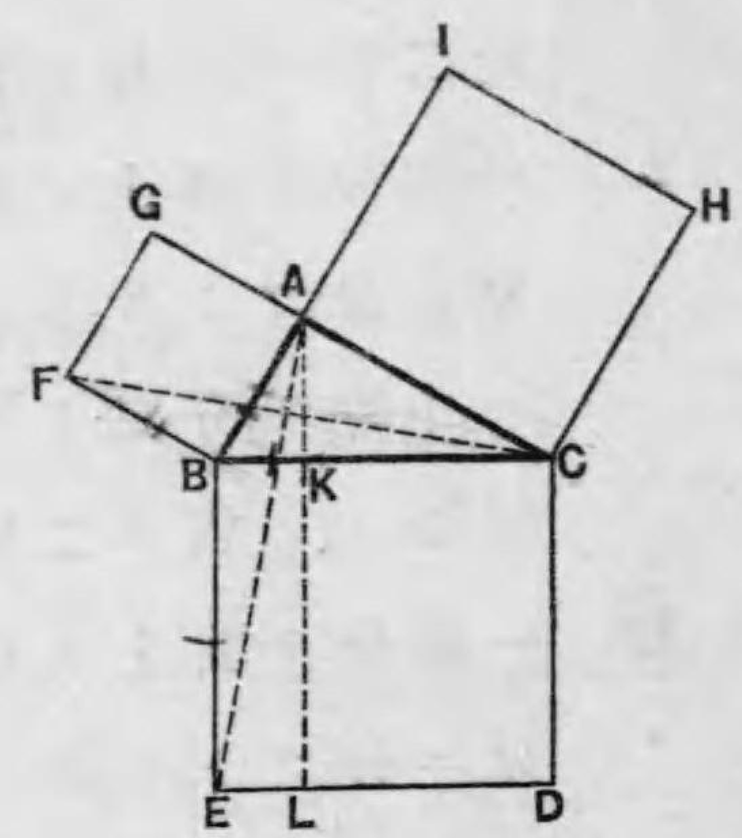
4. 一線分(又ハ其延長)ノ上ニ任意ノ一點ヲ取レバ,此點ヨリ原線分ノ兩端ニ至ル距離ノ平方ノ和ハ,原線分ノ半分ノ平方ト其點ト原線分ノ中點トノ距離ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ.

95. 定理

直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ,其他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ.

【證明】 △ABC ニ於テ ∠A ヲ直角トセヨ.

△ABC ノ外側ニ於テ各邊ノ上ニ夫々正方形 BCDE, ABFG, ACHI ヲ畫キ,頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AK ヲ引キ,之ヲ延長シテ ED トL ニ於テ交ラシメヨ.



C ト F ト; A ト E トヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ △ABE 及ビ △FBC ニ於テ

$$BE = BC$$

$$AB = BF$$

$$\angle ABE = \angle FBC$$

$$\therefore \quad \triangle ABE \equiv \triangle FBC$$

然ルニ $\quad BK \cdot BE = 2 \cdot \triangle ABE$

$$AB^2 = 2 \cdot \triangle FBC$$

$$\therefore \quad AB^2 = BK \cdot BE$$

同樣ニ $\quad AC^2 = CK \cdot CD$

$$\begin{aligned} \therefore \quad AB^2 + AC^2 &= BK \cdot BE + CK \cdot CD \\ &= BK \cdot BC + CK \cdot BC \\ &= BC \cdot (BK + CK) \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

系 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ノ平方ハ,斜邊ノ平方ヨリ他ノ邊ノ平方ヲ引キタル者ニ等シ.

問題

1. 一邊ノ長サ a ナル正方形ノ對角線ノ長サハ $\sqrt{2}a$ ナリ.

2. 一邊ノ長サ a ナル正三角形ノ高サハ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ナリ.

3.* 四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,一組ノ對邊ノ平方ノ和ハ他ノ組ノ對邊ノ平方ノ和ニ等シ.

4.* △ABC ノ頂點 A ヨリ邊 BC ニ垂線 AD ヲ引ケバ $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ ナリ.
但シ $AB > AC$ トス.

5. 與ヘラレタル二ツノ正方形ノ面積ノ和(又ハ差)ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作ルコト.

96. 定義

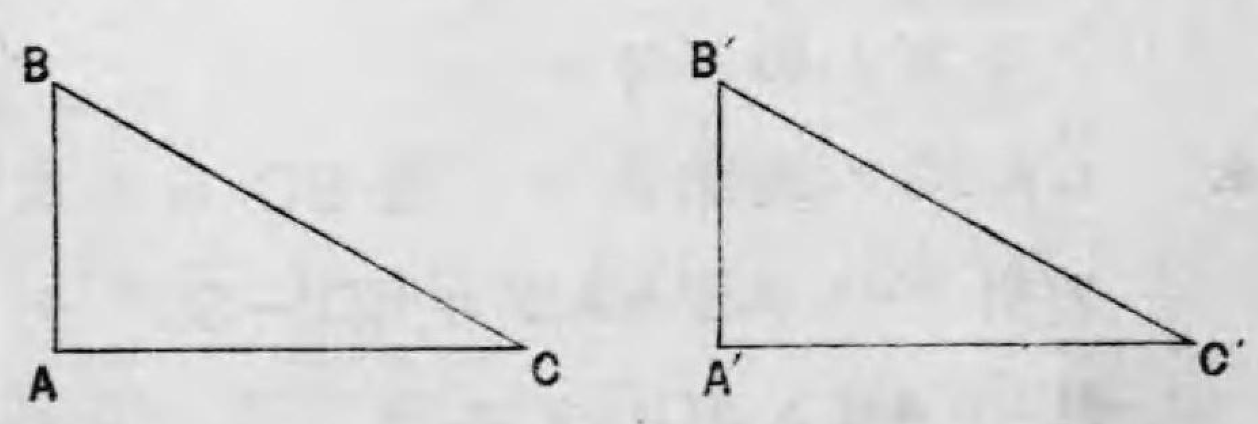
一邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シキ三角形ハ直角三角形ナリ.

【證明】 $\triangle ABC$ ニ於テ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

トセヨ.

今二邊 $A'B'$ 及ビ $A'C'$ ガ夫々 AB, AC ニ等シク,其夾角 A' ガ直角ニ等シキ直角三角形 $A'B'C'$ ヲ作レ. サスレバ



$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 \quad (\text{前節})$$

$$= AB^2 + AC^2 \quad (\text{作圖})$$

然ルニ $BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{假設})$

$\therefore \quad B'C'^2 = BC^2$

$\therefore \quad B'C' = BC$

$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

從テ $\angle A = \angle A'$

然ルニ $\angle A' = \angle R$

$\therefore \quad \angle A = \angle R$

卽チ $\triangle ABC$ ハ直角三角形ナリ.

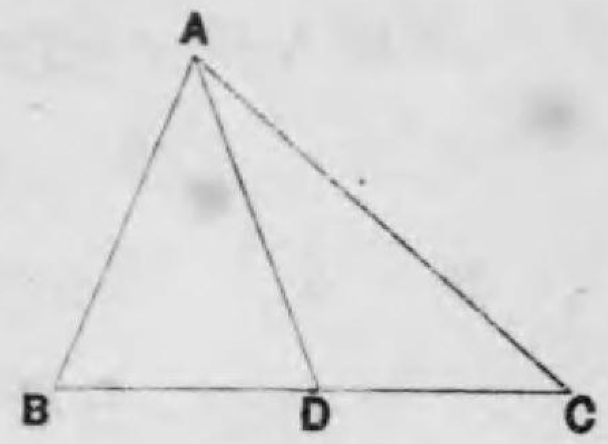
問題

m, n ガ任意ノ整數ニシテ $m > n$ ナレバ三邊ガ夫々 $m^2+n^2, 2mn, m^2-n^2$ ナル値ヲ有スル三角形ハ直角三角形ナリ.

97. 定義

三角形ノ一ツノ頂點ト其對邊ノ中點トヲ結ビ付クル線分ヲ三角形ノ中線トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テDヲ邊BCノ中點トスレバ,ADハ頂點Aヨリ引ケル中線ナリ.



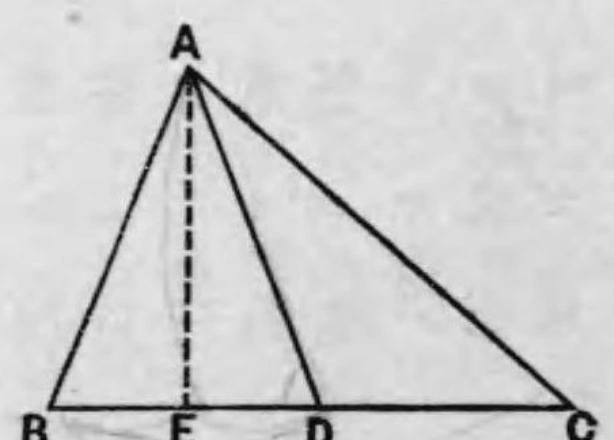
98. 定理

三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ,第三邊ノ半分ノ平方ト其邊ヘノ中線ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ.

【證明】 $\triangle ABC$ ニ於テ D ヲ邊 BC ノ中點トセヨ.

$AB^2+AC^2=2(BD^2+AD^2)$

頂點AヨリBCニ下シタル垂線ノ足ヲEトセヨ. 而シテ例ヘバ $\angle ADB < \angle R$ トセヨ.



サスレバ點Eハ線分BDノ上ニアリ.

直角三角形ABE及ビACEヨリ

$$AB^2 = AE^2+BE^2$$

$$AC^2 = AE^2+CE^2$$

$$\therefore\ AB^2+AC^2 = 2\cdot AE^2+(BE^2+CE^2)$$

$$= 2\cdot AE^2+2\cdot(BD^2+DE^2)$$ (第119頁問題4)

$$= 2\cdot(AE^2+DE^2)+2\cdot BD^2$$

$$= 2\cdot(AD^2+BD^2)$$

若シ $\angle ADB = \angle R$ ナレバ

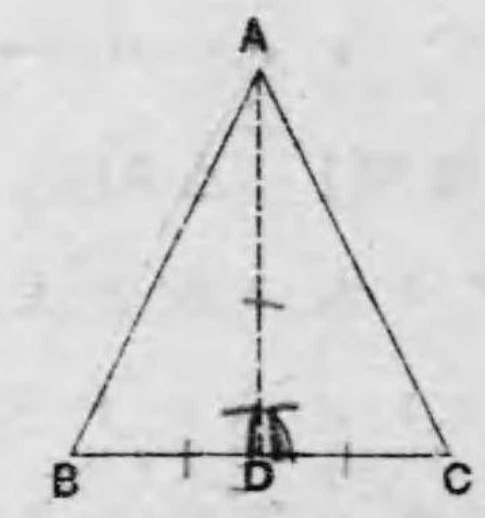
$$AB = AC$$

而シテ

$$AB^2 = AD^2+BD^2$$

$$\therefore\ 2\cdot AB^2 = AB^2+AC^2$$

$$= 2\cdot(AD^2+BD^2)$$



問題

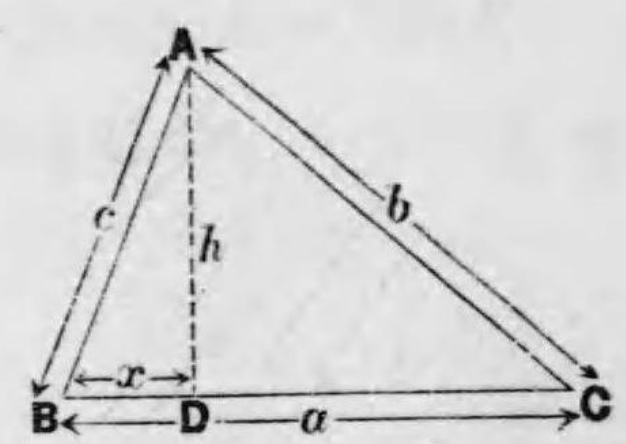
1.* 平行四邊形ノ各邊ノ平方ノ和ハ其對角線ノ平方ノ和ニ等シ.

2. 定直線上ニ於テ,其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ最小ナル點ヲ求ムルコト.

99. 定理

三角形ノ三邊ヲ表ス數ヲ a, b, c トシ,周ノ半分ヲ表ス數,即チ $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ヲ s トスレバ,三角形ノ面積ヲ表ス數ハ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ナリ.

【證明】 $\triangle$ABC ニ於テ三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ表ス數ヲ夫々 a, b, c トシ,A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トシ,AD, BD ノ長サヲ表ス數ヲ夫々 h, x トセヨ.



サスレバ $\triangle ABC = \frac{1}{2} a.h$

サテ $CD = BC - BD = a - x$

$$c^2 - x^2 = h^2$$

$$b^2 - (a-x)^2 = h^2$$

$$\therefore \quad c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$$

$$\therefore \quad x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$\therefore \quad h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$\therefore \quad 4a^2h^2 = (2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$

$$= \left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a-c)^2\right]$$

$$= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

$$= 16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$[\because \quad a+b+c = 2s]$$

$$\therefore \quad ah = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

問題

三邊ノ長サガ夫々13寸, 14寸, 15寸ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

問題

1.* 三角形ノ中線ハ其面積ヲ二等分ス.

2. 平行四邊形ノ一對角線上ノ任意ノ一點ヲ通リ二邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ之

ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ツトキ,前ノ對角線ノ部分ヲ對角線トセザル二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ.

3. 四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ得ル平行四邊形ノ面積ハ,原四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ.

4. 三角形ノ一角ニ對スル邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大ナルカ,和ニ等シキカ,或ハ和ヨリ小ナルカニ從テ,此角ハ鈍角ナリ,或ハ直角ナリ,或ハ鋭角ナリ.

5.* 梯形ハ其兩底邊ノ和ノ半分ト其高サトノ包ム矩形ト等積ナリ.

6.* 與ヘラレタル周ヲ有スル矩形ノ中デ其面積ノ最大ナル者ハ正方形ナリ.

雜題

1. 三角形ノ一角ノ頂點ヨリ引キタル中線ガ其角ノ二邊ノ各トナス角ノ中,小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大ナリ.

2. 二ツノ高サガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ.

3. 二等邊三角形ノ底邊(或ハ其延長)上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和(或ハ差)ハ不易ナリ.

4. 四邊形ノ面積ハ,其二ツノ對角線ヲ二邊トシ且ツ對角線ガ交點ニ於テナス角ヲ其夾角トスル三角形ノ面積ニ等シ.

5. 四邊形ノ一組ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ガ其四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツトキハ,其二邊ハ互ニ平行ナリ.

6. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ和ハ,相對スル

邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ.

7. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 D ヨリ任意ノ一直線 DEF ヲ引キ,邊 BC ト E ニ於テ, AB ノ延長ト F ニ於テ交ラシムレバ,二ツノ三角形 ABE, CEF ハ等積ナリ.

8. ABCD ハ正方形ニシテ E ハ對角線 BD 上ノ任意ノ點トスレバ

$$2 \cdot AE^2 = BE^2 + ED^2$$ ナリ.

9. 平行四邊形 ABCD 內ノ(對角線上ニ在ラザル)任意ノ一點 E ヲ通リ,二邊 AB, BC ニ夫々平行ナル直線ヲ作レバ,二ツノ平行四邊形 DE, BE ノ面積ノ差ハ △AEC ノ面積ノ二倍ニ等シ.

10. 三角形ノ底邊上ニアル一定點ヨリ直線ヲ引キ,之ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

11. 四邊形ノ一ツノ頂點ヨリ直線ヲ引キ,此四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

12. 定角內ノ一定點ヲ通リテ直線ヲ引キ,此直線ト此角ノ二邊トニテ生ズル最小面積ノ三角形ヲ作ルコト.

第四編　圓

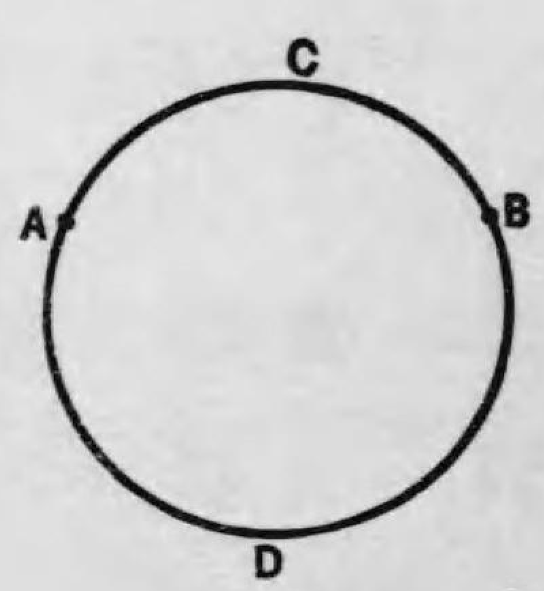
第一章　弧,弦及ビ中心角

100. 定義

二ツ加ヘ合ハスレバ全圓周トナルベキ弧ヲ互ニ**共軛ナリ**トイフ.

相等シカラザル共軛弧ノ中,大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル弧ACBハ劣弧ニシテ,弧ADBハ優弧ナリ.



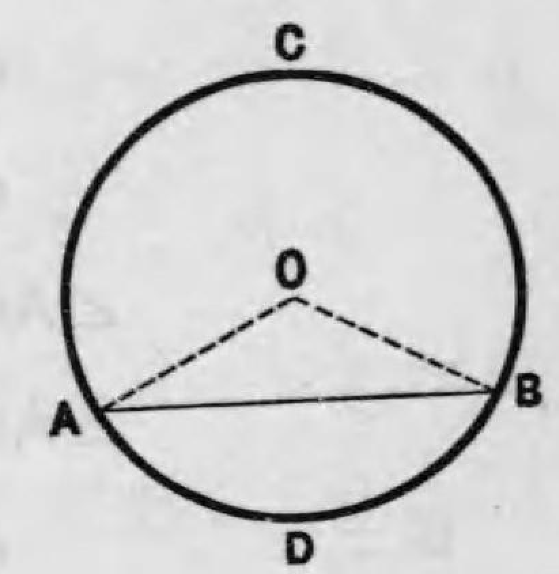
弧 AB ト書ク代リニ $\overset{\frown}{AB}$ ト書クコトアリ.

101. 定義

圓周上ノ二點ヲ結ビ付クル線分ヲ**弦**トイフ.

弧ノ兩端ヲ結ビ付クル弦ヲ此弧ヲ**張ル弦**トイフ.

右ノ圖ニ於ケル二ツノ共軛弧 ACB, ADB ノ各ヲ張ル弦ハ AB ナリ.



弧ノ上ニ立ツ**中心角**ト此弧ヲ張ル弦トハ相對ストイフ.

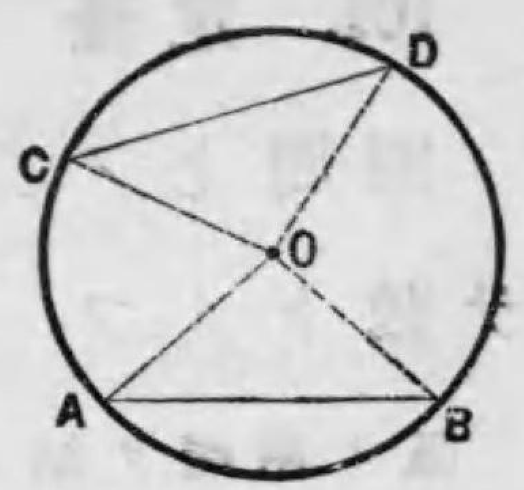
例ヘバ上ノ圖ニ於ケル中心角 AOB ト弧 AB トノ如シ.

102. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シキ弧ニ對スル弦ハ相等シ.

【證明】 圓 O ニ於テ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ トセヨ.

弧AB,CDノ兩端ト中心Oトヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ (假設)

∴ $\angle AOB=\angle COD$ (第22節)

故ニ △AOB 及ビ △COD ニ於テ

$OA=OC$

$OB=OD$

$\angle AOB=\angle COD$

∴ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$

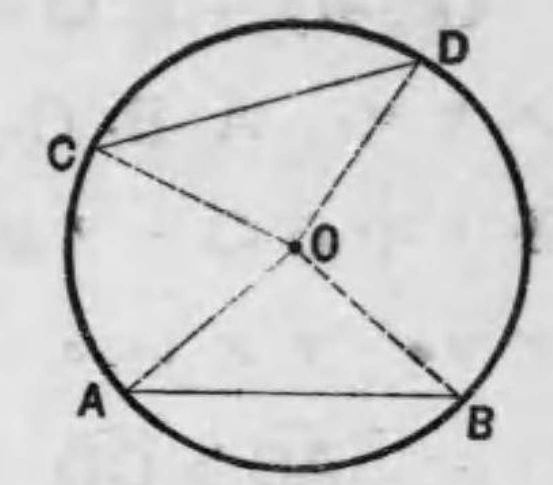
從テ $AB=CD$

103. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シキ弦ガ張ル劣弧(又ハ優弧)ハ相等シ.

【證明】 圓Oニ於テ $AB=CD$ トセヨ. AB及ビCDノ兩端ト中心Oトヲ結ビ付ケヨ. サスレバ △AOB 及ビ △COD ニ於テ

$AB=CD$



$OA=OC$

$OB=OD$

∴ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$

從テ $\angle AOB=\angle COD$

∴ 劣弧AB＝劣弧CD

從テ 優弧AB＝優弧CD

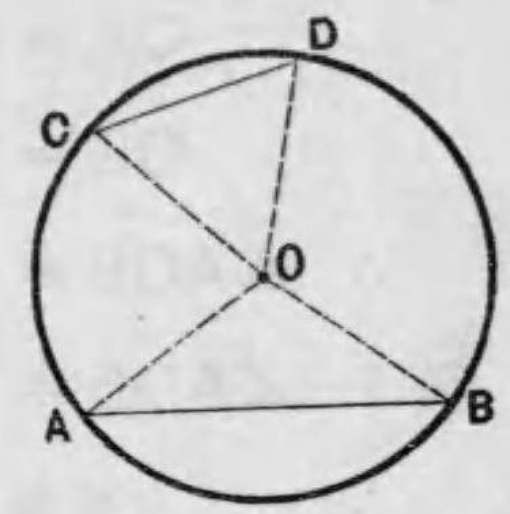
問題

PQ, QR, RS, ST ガ一ツノ圓ニ於テ相等シキ四ツノ弦ナレバ,三ツノ弦 PR, QS, RT モ亦相等シ.

104. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シカラザル劣弧ニ對スル弦ノ中,大ナル劣弧ニ對スル弦ハ小ナル劣弧ニ對スル弦ヨリ大ナリ.

【證明】 圓Oニ於テ 劣弧 AB > 劣弧 CD トセヨ. A, B, C, D ノ各トヲ中心Oトヲ結ビ付ケヨ. サスレバ



$\widehat{AB} > \widehat{CD}$ (假設)

$\therefore \angle AOB > \angle COD$ (第22節系)

故ニ △AOB 及ビ △COD ニ於テ

$OA = OC$

$OB = OD$

$\angle AOB > \angle COD$

$\therefore \quad AB > CD$ (第60節)

【注意】 同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シカラザル二ツノ優弧ノ中,大ナル優弧ニ對スル弦ハ小ナル優弧ニ對スル弦ヨリ小ナリ.

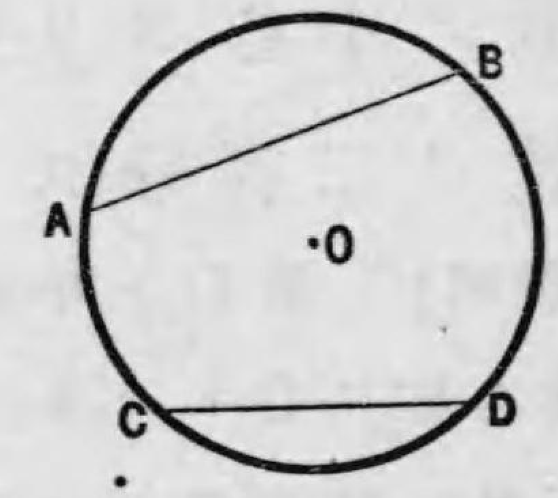
問題

同一ノ圓ニ於テ一ツノ弧ガ他ノ弧ノ二倍ニ等シケレバ,第一ノ弧ニ對スル弦ハ第二ノ弧ニ對スル弦ノ二倍ヨリ小ナリ.

105. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シカラザル二ツノ弦ノ中,大ナル弦ガ張ル劣弧ハ小ナル弦ガ張ル劣弧ヨリ大ナリ.

【證明】 圓Oニ於テ AB > CD トセヨ.



若シ $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

ナランニハ

$AB = CD$

トナリテ

$AB > CD$

ナル假設ト矛盾ス.

$\therefore \quad \widehat{AB} \neq \widehat{CD}$

又若シ $\widehat{AB} < \widehat{CD}$

ナランニハ $AB < CD$

トナリテ是亦假設ト矛盾ス.

$\therefore \quad \widehat{AB} \nless \widehat{CD}$

$\therefore \quad \widehat{AB} > \widehat{CD}$

【注意】 優弧ノ場合ニテハ其大小ノ關係ハ

劣弧ノ場合ト反對ナリ.

問題*

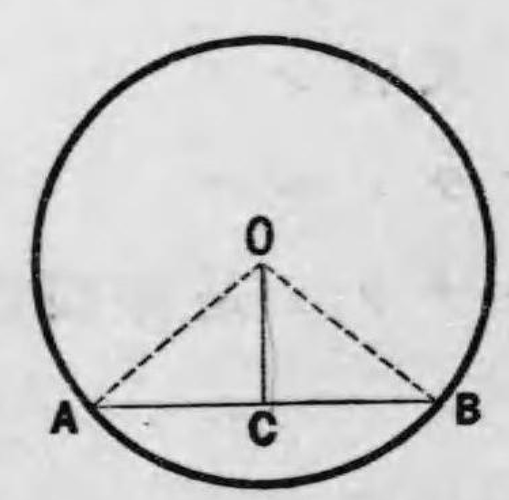
同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シキ弦ハ相等シキ中心角ニ對ス. 相等シカラザル弦ノ中ノ大ナル者ハ大ナル中心角ニ對ス.

106. 定理

圓ノ中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ハ其弦ヲ二等分ス.

【證明】 圓Oノ中心ヨリ弦ABヘ引キタル垂線ノ足ヲCトセヨ.

A, Bノ各トOトヲ結ビ付クレバ,△AOC 及ビ △BOC ニ於テ



OA = OB

OC ハ共通

∠OCA = ∠OCB = ∠R

∴ △AOC ≡ △BOC

從テ AC = BC

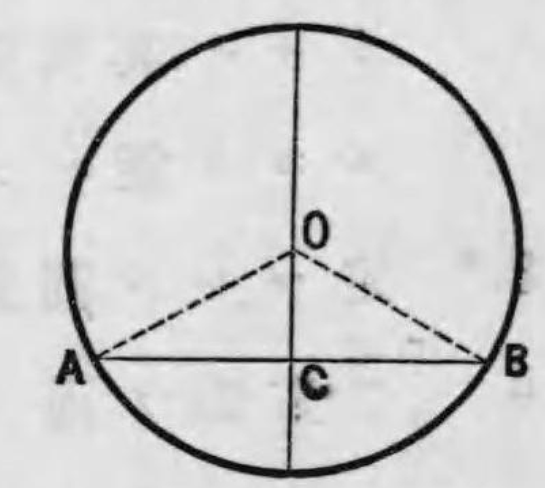
系 中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ノ延長ハ,此弦ニ對スル二ツノ共軛弧ノ各ヲ二等分ス.

107. 定理

圓ノ中心ト直徑ナラザル弦ノ中點トヲ通ル直線ハ其弦ニ垂直ナリ.

【證明】 圓Oノ直徑ナラザル弦ヲ AB トシ,其中點ヲCトセヨ.

A, Bノ各トOトヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ △ACO 及ビ △BCO ニ於テ

AC = BC

OA = OB

OC ハ共通

∴ △ACO ≡ △BCO

從テ ∠ACO = ∠BCO

∴ OC ⊥ AB

系　弦ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

問題

1. 二定點ヲ通ル總テノ圓ノ中心ハ,皆此二點ヲ結ビ付クル線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ニ在リ.
2. 圓ノ中心ヲ通ラザル二ツノ弦ガ相交ルトキハ,其交點ハ同時ニ各ノ弦ノ中點ナルコト能ハズ.

3.* 定マレル圓弧ヲ二等分スルコト.

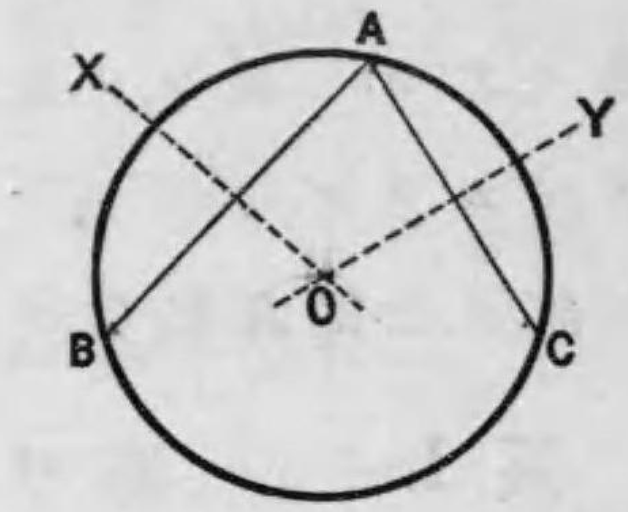
4. 二定點ヲ通リ與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

108. 定理

同一直線上ニ在ラザル三點ヲ通ル圓周ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

【證明】 A,B,Cヲ同一直線上ニ在ラザル三

點トセヨ.



線分ABヲ垂直ニ二等分スル直線Xト線分ACヲ垂直ニ二等分スル直線Yトハ,相交ル二直線ニ夫々垂直ナルガユヱニ相交ル. ソコデ其交點ヲOトセヨ. Oハ直線X上ニアルガユヱニ,二點A,Bヨリ等距離ニ在リ. (第37節系)

又Oハ直線Y上ニ在ルガユヱニ,二點A,Cヨリ等距離ニ在リ.

故ニOハ三點A,B,Cヨリ等距離ニアリ.

因テOヲ中心トシ,OAヲ半徑トスル圓周ハ三點A,B,Cヲ通ル. 故ニ此三點ヲ通ル圓周ハ一ツハ必ズアリ.

次ニ三點A,B,Cヲ通ル圓ノ中心ハ弦ABノ垂直二等分線X上ニアルト同時ニ,弦ACノ垂直二等分線Y上ニモアラザルベカラズ. (前節系)

然ルニ二直線X,Yハ唯一點Oヲ共有スル

ノミナリ.

故ニ三點A, B, Cヲ通ル圓ノ中心ハOヨリ他ニナシ. 而シテ其半徑ハOAニ等シカラザルベカラズ.

故ニ三點A, B, Cヲ通ル圓周ハ唯一ツニ限ル.

系 1. 三點ヲ共有スル二ツノ圓周ハ全ク相合ス.

系 2. 全ク相合セザル二ツノ圓周ハ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコト能ハズ.

系 3. 三角形ノ三項點ヲ通ル圓周ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

109. 定義

三角形ノ三項點ヲ通ル圓ヲ此三角形ノ**外接圓**トイヒ,其中心ヲ三角形ノ**外心**トイフ.

問題

1. 圓内ノ一點ヨリ圓周ヘ引ケル三ツノ線分ガ互ニ相等シケレバ,此點ハ此圓ノ中心ナリ.

2.* 定マレル圓弧ガ屬スル圓ノ中心ヲ求ムルコト.

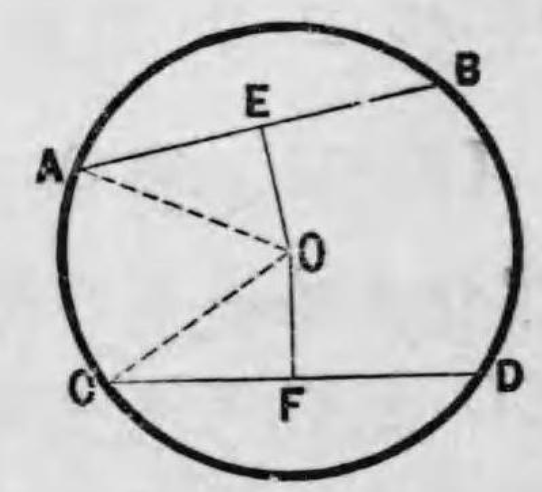
110. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニアリ.

【證明】 圓Oニ於テ

$$AB = CD$$

トシ,OヨリAB, CDニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々E, Fトセヨ.



A, Cノ各トOトヲ結ビ付クレバ,二ツノ直角

三角形 OAE 及ビ OCF ニ於テ

$$OA = OC$$

$$AE = CF \quad (\because AB = CD)$$

$$\therefore \quad \triangle OAE \equiv \triangle OCF \quad (第49節)$$

從テ $\quad OE = OF$

問題

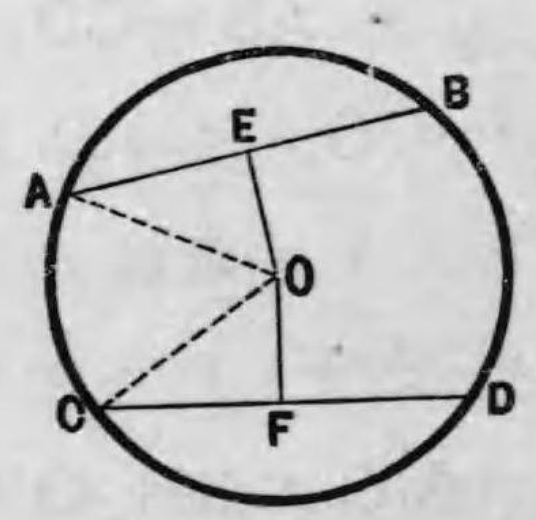
一ツノ圓ニ於テ,相等シキ二ツノ弦若クハ其延長ノ交點ヨリ弦ノ兩端マデノ距離ハ二ツ宛相等シ.

111. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,中心ヨリ等距離ニアル弦ハ相等シ.

【證明】 圓 O ニ於テ中心ヨリ二ツノ弦 AB, CD ニ引キタル垂線ノ足ヲ夫々 E, F トシ,且ツ

$$OE = OF$$



トセヨ.

A, C ノ各トOトヲ結ビ付クレバ,二ツノ直角三角形 OAE 及ビ OCF ニ於テ

$$OA = OC$$

$$OE = OF \quad (假\ 設)$$

$$\therefore \quad \triangle OAE \equiv \triangle OCF \quad (第49節)$$

從テ $\quad AE = CF$

然ルニ $\quad AB = 2 \cdot AE$

$$CD = 2 \cdot CF$$

$$\therefore \quad AB = CD$$

問題

1. 相等シキ二ツノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル線分ニ平行ナル一ツノ直線ヨリ,此二ツノ圓ガ截リ取ル弦ハ相等シ.

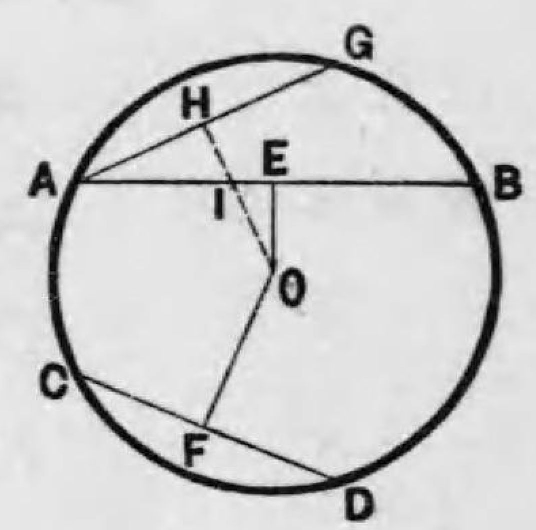
2. 一ツノ圓ノ相交ル二ツノ弦ガ,其交點ヲ通ル直徑ト相等シキ角ヲナストキ,此等ノ二ツノ弦ハ相等シ.

112. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリモ中心ニ近シ.

【證明】 圓Oノ中心ヨリ二ツノ弦 AB, CD ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 E, F トシ,且ツ

$$AB > CD$$



トセヨ.

サスレバ　劣弧 AB > 劣弧 CD

ソコデ劣弧 AB 上ニ劣弧 CD ニ等シキ弧 AG ヲ取リ,A ト G トヲ結ビ付クレバ,弦 AG ト中心 O トハ弦 AB ニ對シテ反對ノ側ニアリ,從テ AG ノ中點 H ト O トヲ結ビ付クル線分ハ弦 AB ニ交ル. 其交點ヲ I トスレバ

$$OH \perp AG \qquad \text{(第 107 節)}$$

$$OI < OH$$

然ルニ　$OE < OI$　(第58節系2)

$\therefore \quad OE < OH$

然ルニ　$AG = CD$　(第 102 節)

$\therefore \quad OH = OF$　(第 109 節)

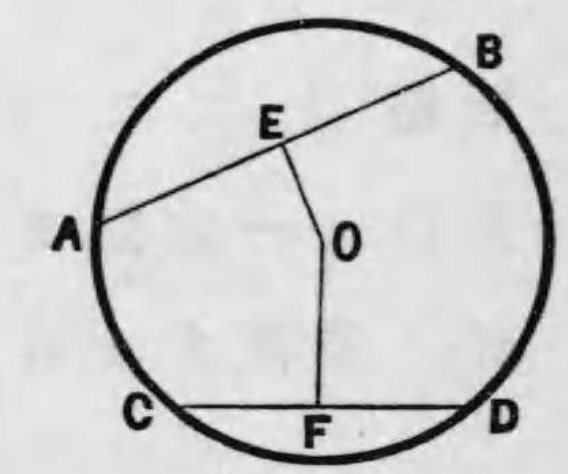
$\therefore \quad OE < OF$

113. 定理

同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,中心ニ近キ弦ハ中心ニ遠キ弦ヨリ大ナリ.

【證明】 圓Oニ於テ中心ヨリ二ツノ弦 AB, CD ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 E, F トシ,且ツ

$$OE < OF$$



トセヨ.

若シ　$AB = CD$

ナランニハ

$$OE = OF \qquad \text{(第 109 節)}$$

トナリテ

$$OE < OF$$

ナル假設ト矛盾ス.

$$\therefore \quad AB \neq CD$$

又若シ　$AB < CD$

ナランニハ

$$OE > OF$$

トナリテ是亦假設ト矛盾ス.

$$\therefore \quad AB \nless CD$$

$$\therefore \quad AB > CD$$

系　直徑ハ最大ナル弦ナリ.

問題

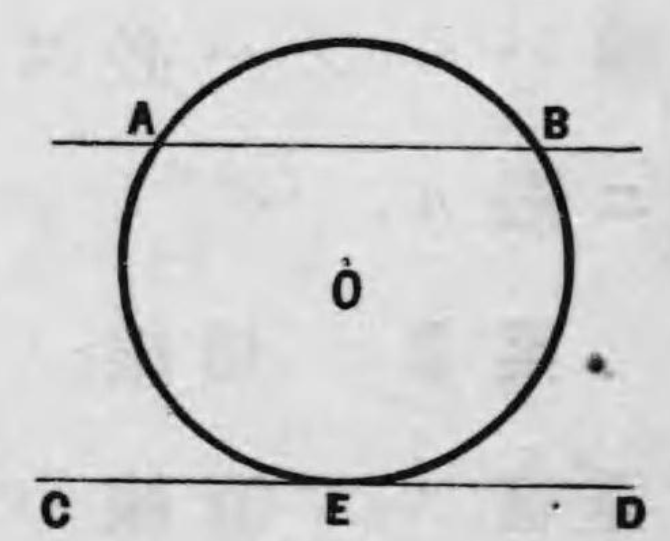
圓內ノ一定點ヲ通ル弦ノ中デ,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル者ガ最小ナリ.

第二章　割線及ビ切線

114. 定義

圓周ト直線トガ二點ヲ共有スルトキ,此直線ヲ此圓ノ**割線**(或ハ**圓ニ交ル直線**)トイフ.

圓周ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキ,此直線ヲ此圓ノ**切線**トイヒ,又此圓ト此直線トハ**互ニ相切ス**トイフ,而シテ其共通點ヲ**切點**トイフ.



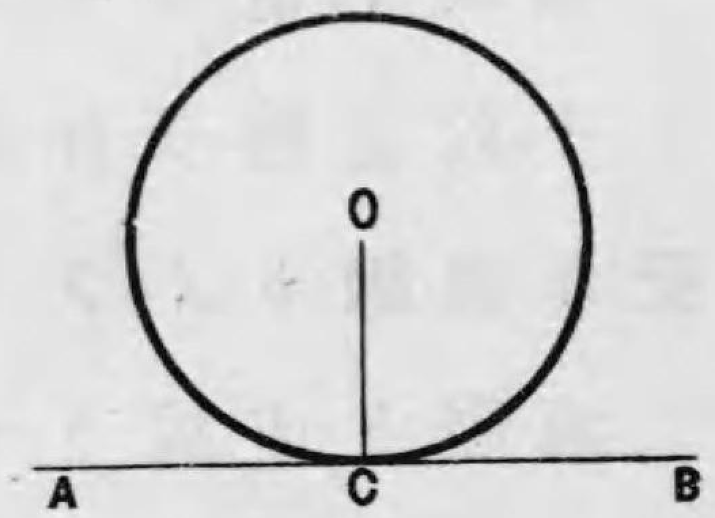
右ノ圖ニ於テ直線ABハ圓Oノ割線ナリ.

又直線CDハ圓Oノ切線ニシテ,Eハ其切點ナリ.

115. 定理

圓ノ切線ト,其切點ヘノ半徑トハ互ニ垂直ナリ.

【證明】 圓Oニ於テABヲ切線,Cヲ其切點トセヨ.



サテ直線AB上ノCヨリ他ノ各點ハ圓Oノ外ニアルヲ以テ,

OCハ中心Oト直線ABトノ最短距離ナリ.

∴ $OC \perp AB$ (第58節系2)

系 1. 圓周上ノ一點ニ於ケル切線ハ一ツハ必ズアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

系 2. 切線ノ切點ヲ通リ,切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

問題

1. 圓內ノ一點ヲ通ル直線ハ此圓ノ割線ナリ.

2.* 圓ニ出會ハザル直線ト此圓ノ中心トノ距離ハ半徑ヨリ大ナリ. 圓ノ切線ト中心トノ距離ハ半徑ニ等シ. 圓ノ割線ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ小ナリ.

3. 一ツノ圓ニ於テ互ニ相等シキ總テノ弦ハ,皆此圓ト同心ナル(同ジ中心ヲ有スル)他ノ一ツノ圓ノ周ニ切ス.

4. 定圓ニ切シ,定直線ニ平行ナル直線ヲ引クコト.

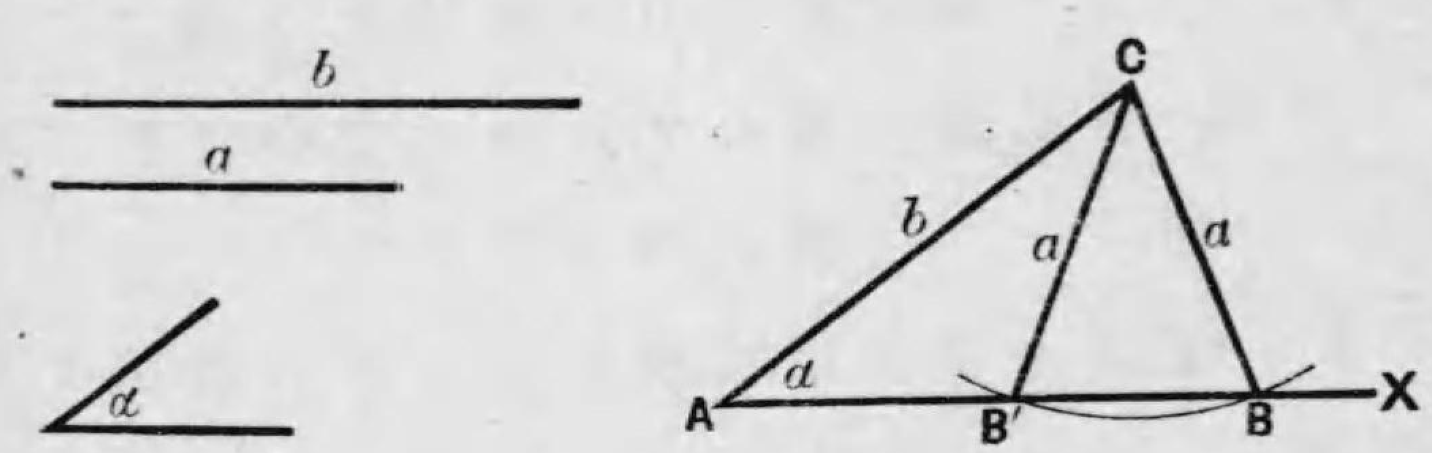
5.* 定直線上ノ一定點ニ於テ此直線ニ切シ,且ツ此直線上ニ在ラザル他ノ一定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

116. 作圖題

二邊(a, b)及ビ其中ノ一邊ノ對角(α)トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

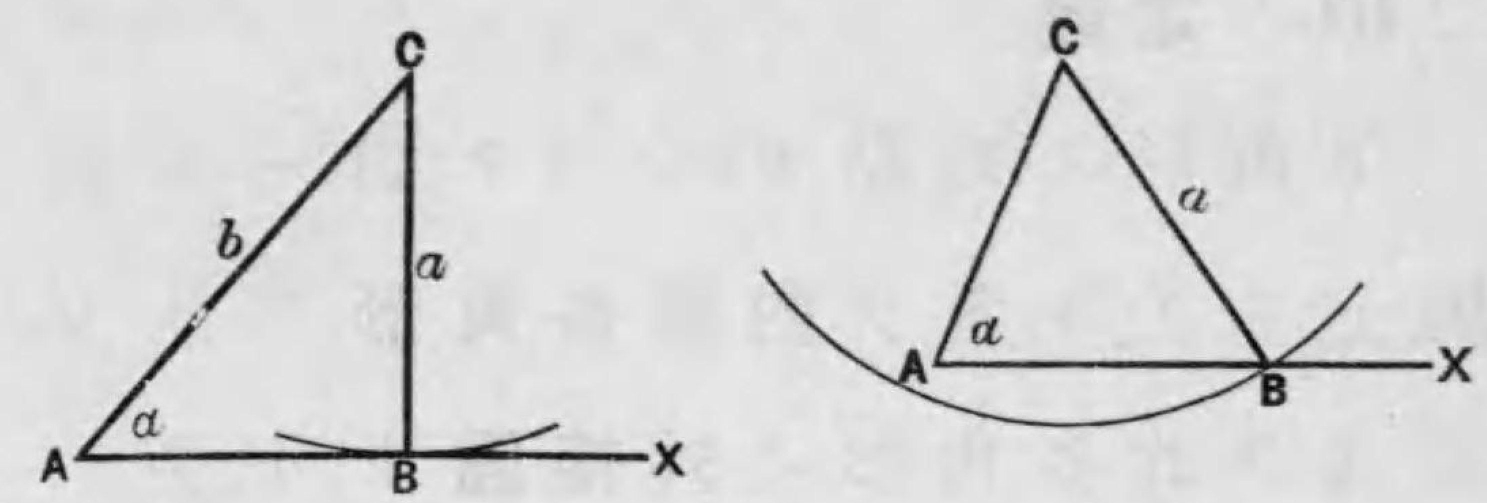
【作圖】 b ニ等シキ線分 AC ヲ引キ,其直線ト a ニ等シキ角ヲナス直線 AX ヲ引ケ. C ヲ中心トシ,a ニ等シキ半徑ニテ圓周ヲ書ケ. 此圓周ト角 CAX ノ邊 AX トノ交點 B ヲ C ニ結ビ付ケヨ. サスレバ ABC ガ所要ノ三角形ナリ.

【證明】 略ス.

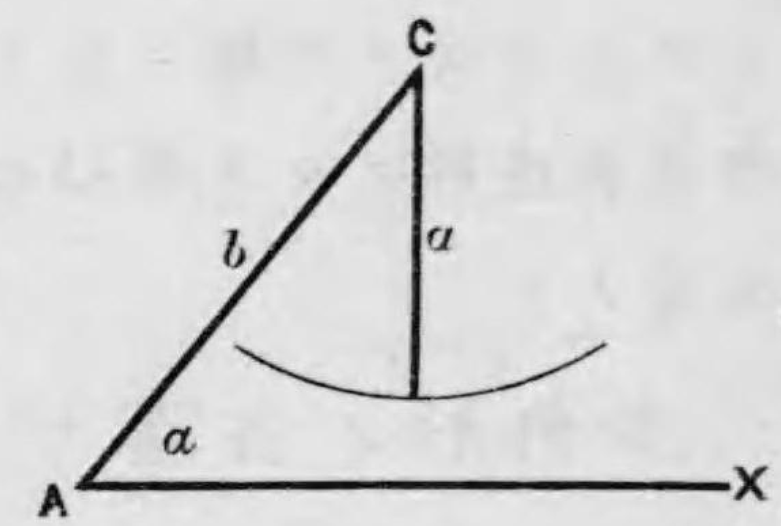


【注意】 圓 C ノ周ト邊 AX トガ A ノ他ノ二點ニ於テ相交ルトキハ所要ノ三角形ハ二ツアリ,卽チ上圖ニ於ケル △ABC 及ビ △AB′C 是レナリ. 而シテ ∠ABC ト ∠AB′C トハ互ニ補角ヲナス.

又圓 C ノ周ト邊 AX トガ A ノ他ノ一點ニ於テノミ出會フトキハ,次ノ圖ノ如ク所要ノ三角形ハ唯一ツアリ.



又圓 C ノ周ガ邊 AX ニ出會ハザレバ本問題ハ成リ立タズ.



問題

1. 上ノ作圖題ニ於テ α ガ直角又ハ鈍角ナルトキハ所要ノ三角形ヲ二ツ得ルコト決シテ無シ.

2.* 一ツノ三角形ノ二邊ト其中ノ大ナル者ニ對スル角トガ,夫々他ノ一ツノ三角形ノ二邊ト其中ノ大ナル者ニ對スル角トニ等シキトキハ,此二ツノ三角形ハ相等シ.

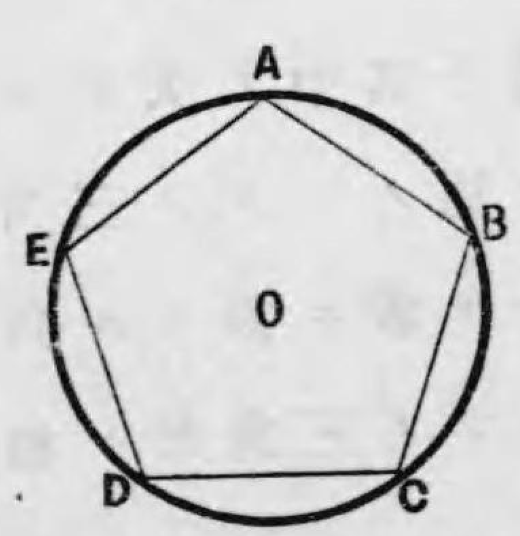
117. 定義

多角形ノ頂點ガ,スベテ同一ノ圓周上ニアル者ヲ**內接多角形**トイヒ,此圓ヲ此多角形ノ**外接圓**トイフ.

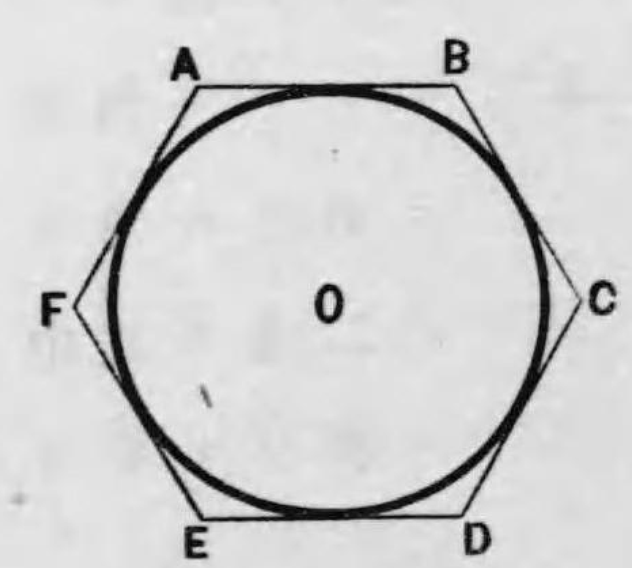
例ヘバ次ノ(甲圖)ニ於ケル ABCDE ハ圓 O ノ內接五邊形ニシテ,圓 O ハ五邊形 ABCDE ノ外接圓ナリ.

多角形ノ各邊ガ(其延長ニアラズ)同一ノ圓周ニ切スル者ヲ**外接多角形**トイヒ,此圓ヲ此多角形ノ**內接圓**トイフ.

(甲)



(乙)



例ヘバ前ノ(乙圖)ニ於ケル ABCDEF ハ圓 O ノ外接六邊形ニシテ,圓 O ハ六邊形 ABCDEF ノ內接圓ナリ.

問題

多角形ノ各邊ヲ垂直ニ二等分スル直線ガ皆同一ノ點ニ於テ出會ヘバ,此多角形ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

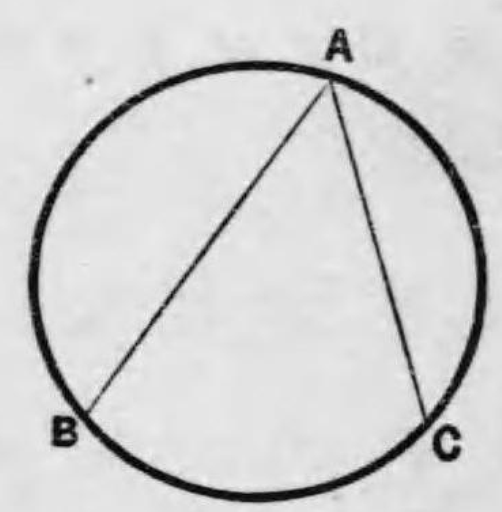
第三章　弓形及ビ圓周角

118.　定義

圓周上ノ一點ヨリ引キタル二ツノ弦ガナス角ヲ**圓周角**トイフ.

圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マルル弧ノ上ニ立ツトイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル角BACハ弧BCノ上ニ立ツ圓周角ナリ.



119.　定義

弧ト其兩端ヲ結ビ付クル弦トニテ圍マルル圓ノ部分ヲ**弓形**トイフ.

スベテ弦ハ圓ヲ二ツノ弓形ニ分ツ.

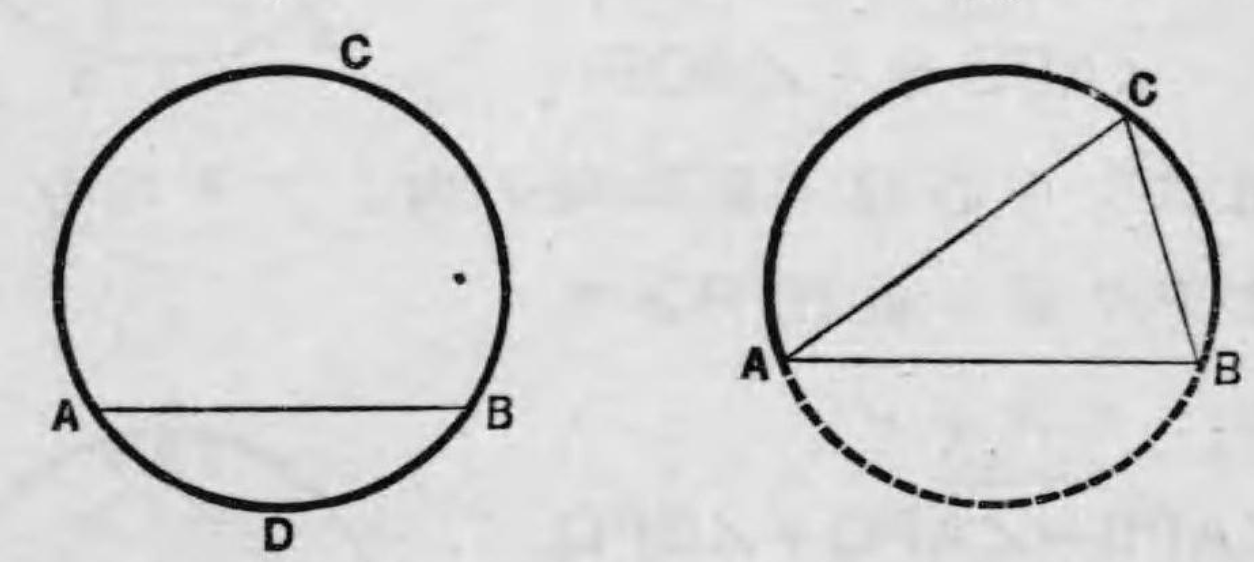
例ヘバ次ノ(甲圖)ニ於ケル二ツノ弓形 ACB, 及ビ ADB ノ如シ.

弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲ其弧ノ兩端ニ結ビ付クル二ツノ弦ガナス角ヲ**弓形ニ於ケル角**或ハ**弓形ガ含ム角**トイフ.

即チ弓形ニ於ケル角トハ此弓形ノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角ノコトナリ.

例ヘバ次ノ(乙圖)ニ於ケル角CハACBガ含ム角ナリ.

(甲)　(乙)



120.　定理

一ツノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ.

【證明】 圓Oニ於テ弧ABノ上ニ立ツ圓周角ヲAPBトシ,中心角ヲAOBトセヨ.

(第一) 中心Oガ圓周角ノ一邊,例ヘバPBノ上ニアル場合.

$\angle AOB$ ハ $\triangle AOP$ ノ外角ナリ.

$$\therefore \quad \angle AOB = \angle OAP + \angle APO$$

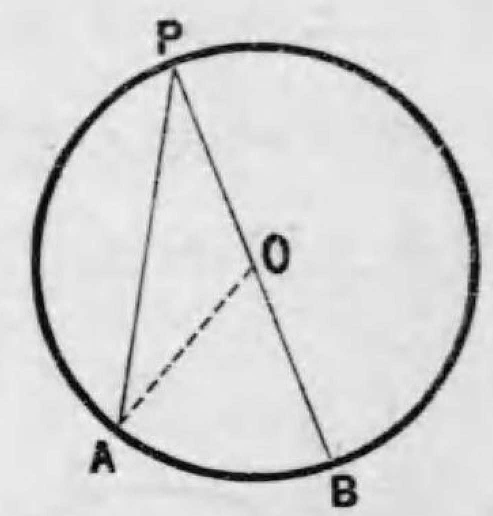
然ルニ $\triangle AOP$ ニ於テ

$$OA = OP$$

$$\therefore \quad \angle OAP = \angle APO$$

$$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle APB$$

$$\therefore \quad \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$



(第二) 中心Oガ圓周角ノ內ニアル場合.

點Pヲ通ル直徑PQヲ引ケ. サスレバ

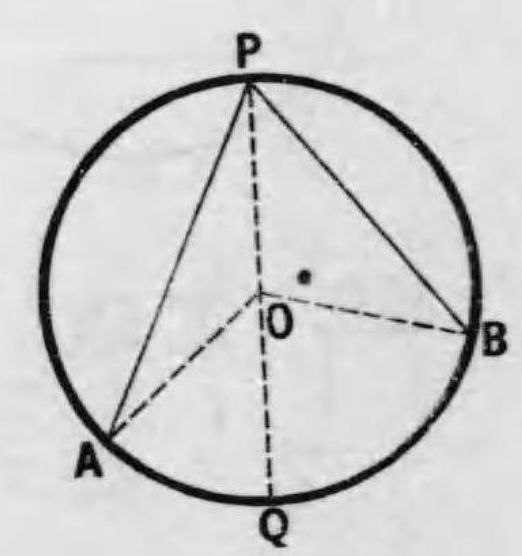
$$\angle APB = \angle APQ + \angle BPQ$$

然ルニ

$$\angle APQ = \frac{1}{2}\angle AOQ$$

$$\angle BPQ = \frac{1}{2}\angle BOQ$$

$$\therefore \quad \angle APQ + \angle BPQ = \frac{1}{2}(\angle AOQ + \angle BOQ)$$



卽チ $\quad \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

(第三) 中心Oガ圓周角ノ外ニアル場合.

點Pヲ通ル直徑PQヲ引ケ. サスレバ

$$\angle APB = \angle APQ \sim \angle BPQ$$

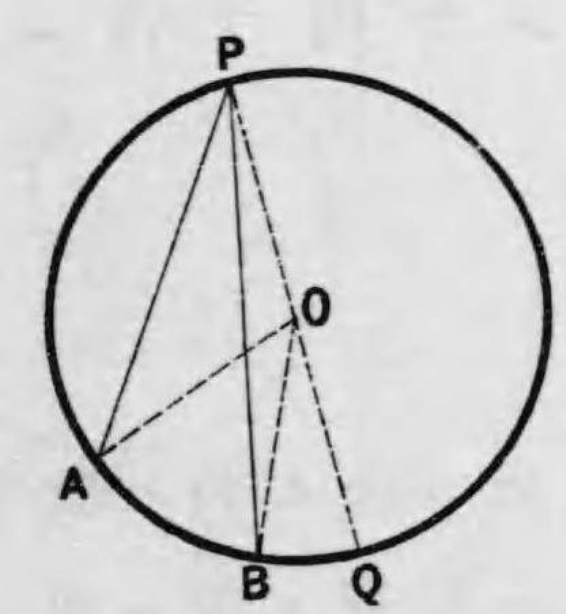
然ルニ $\quad \angle APQ = \frac{1}{2}\angle AOQ$

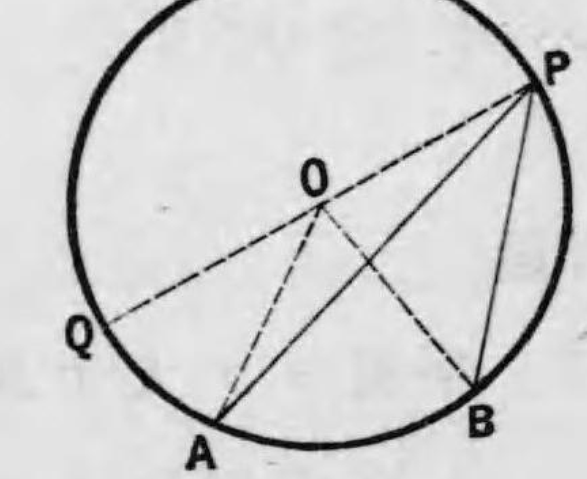
$$\angle BPQ = \frac{1}{2}\angle BOQ$$

$$\therefore \quad \angle APQ \sim \angle BPQ$$

$$= \frac{1}{2}(\angle AOQ \sim \angle BOQ)$$

卽チ $\quad \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$





系 1. 同一ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ. 從テ同一ノ弓形ガ含ム總テノ角ハ相等シ.

系 2. 同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ.

系 3. 同一ノ圓(又ハ相等シキ圓)ニ於テ,相等シキ圓周角ニ對スル弧ハ相等シ.

系 4. 半圓ガ含ム角ハ直角ニ等シ. 逆ニ直角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ハ半圓ナリ.

問題

1.* 半圓ヨリ大ナル弓形ガ含ム角ハ銳角ニシテ,半圓ヨリ小ナル弓形ガ含ム角ハ鈍角ナリ. 而シテ其逆モ亦眞ナリ.

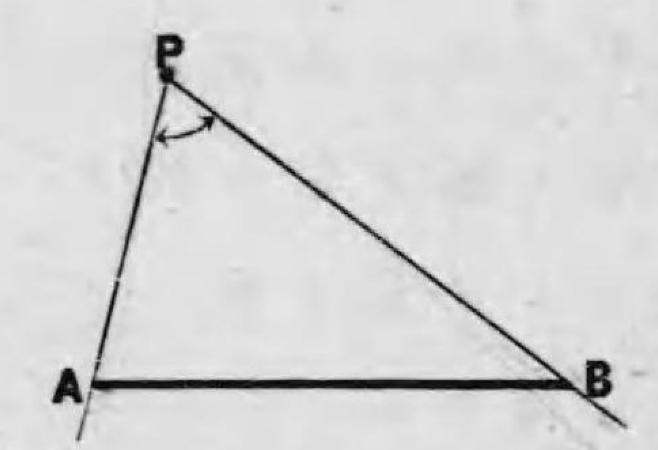
2. 一ツノ圓ノ互ニ平行ナル二ツノ弦ニヨリテ夾マルル二ツノ弧ハ相等シ.

3. 一ツノ圓ノ二ツノ弦 AB, CD (又ハ其延長)ガ其交點 E ニ於テナス角 AEC ハ弧 AC 及弧 BD ノ上ニ立ツ中心角ノ和(又ハ差)ノ半分ニ等シ.

121. 定義

一點ニ於テ一ツノ**線分ヲ見込ム角**トハ,其線分ノ兩端ヲ通ル樣ニ,其點ヨリ引ケル二直線ガナス角ノコトナリ.

例ヘハ右ノ圖ノ角 P ハ點 P ニ於テ線分 AB ヲ見込ム角ナリ.

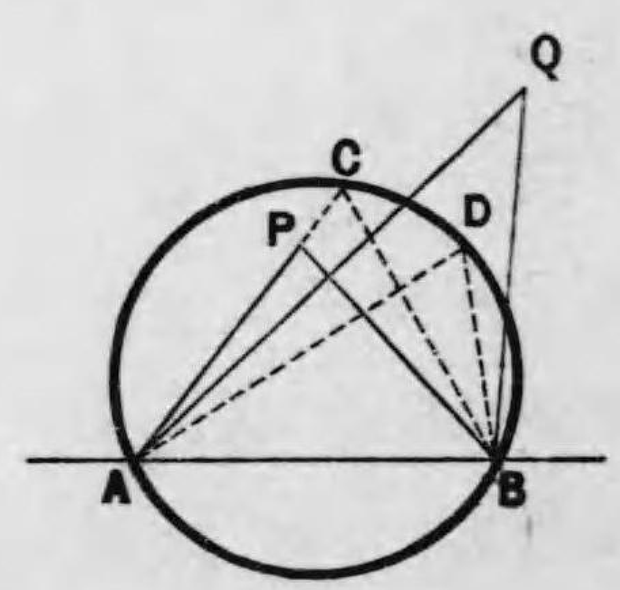


122. 定理

弓形內ノ一點ニ於テ其弦ヲ見込ム角ハ弓形ニ於ケル角ヨリ大ナリ，又弓形ノ外ニアリテ弦ニ對シテ弓形ト同ジ側ニアル點ニ於テ其弦ヲ見込ム角ハ弓形ニ於ケル角ヨリ小ナリ.

【證明】 AB ヲ弓形ノ弦，P ヲ其弓形內ノ點トシ，Q ヲ其弓形外ニアリテ直線 AB ニ對シ其弓形ト同ジ側ニアル點トセヨ.

∠APB ノ一邊 AP ヲ P ノ方へ延長シテ弓形ノ弧ト C ニ於テ交ラシメ，C ト B トヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ

$$\angle APB > \angle ACB$$

次ニ ∠AQB ノ二邊ノ間ニ夾マルル弓形ノ

弧ノ上ニ其兩端ナラザル任意ノ一點 D ヲ取リテ，A, B ノ各ト D トヲ結ビ付ケヨ.

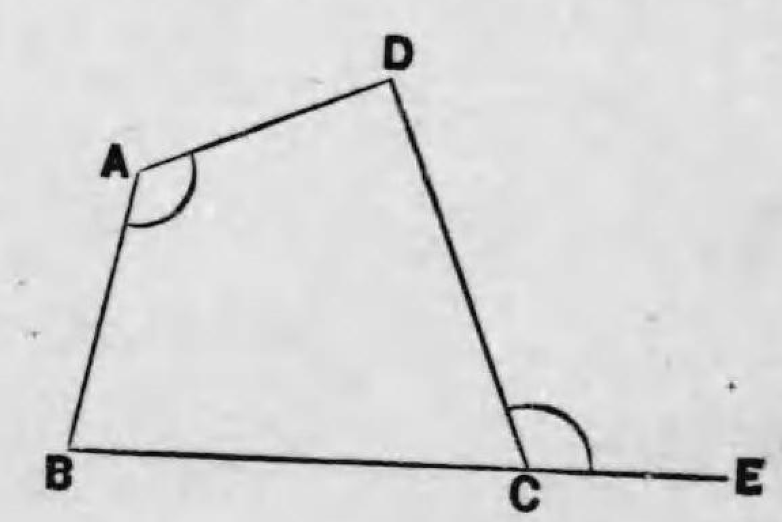
サスレバ $\angle AQB < \angle ADB$ (第44頁問題2)

系 同一ノ底邊ノ上ニ其同ジ側ニ相等シキ頂角ヲ有スル若干ノ三角形ガ立ツトキハ，其一ツノ三角形ノ外接圓ノ周ハ亦其他ノ總テノ三角形ノ頂點ヲ通ル.

123. 定義

四邊形ノ一ツノ外角ニ接スル內角ニ對スル角ヲ其外角ノ**內對角**トイフ.

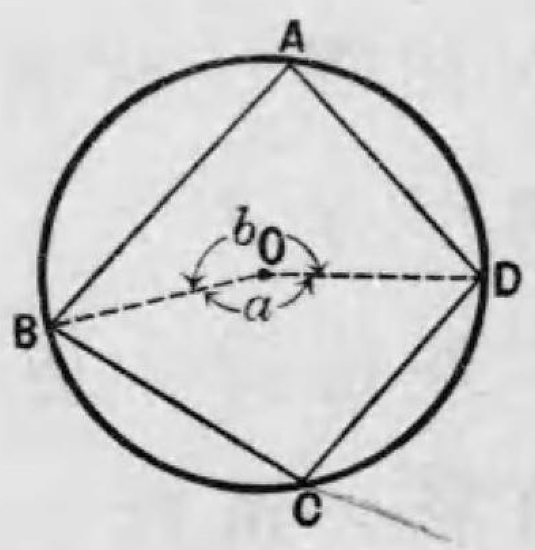
右ノ圖ニ於テ ∠A ハ外角 DCE ノ內對角ナリ.



124. 定理

内接四邊形ノ對角ハ互ニ補角ヲナス.

【證明】 ABCD ヲ圓 O ノ内接四邊形トセヨ.



B, D ノ各トOトヲ結ビ付ケテ生ズルニツノ中心角ノ中,弧 BCD ニ對スル者ヲ $\angle a$ ト名ヅケ,弧 BAD ニ對スル者ヲ $\angle b$ ト名ヅクレバ

$$\angle A = \frac{1}{2}\angle a$$

$$\angle C = \frac{1}{2}\angle b$$

$$\therefore \quad \angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\angle a + \angle b)$$

然ルニ $\quad \angle a + \angle b = 4\angle R$

$$\therefore \quad \angle A + \angle C = 2\angle R$$

同樣ニ $\quad \angle B + \angle D = 2\angle R$

系 内接四邊形ノ外角ハ其内對角ニ等シ.

問題

1. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形ナリ.
2. 圓ニ内接スル六邊形ノ内角ヲ一ツ置キニ取リタル三ツノ角ノ和ハ4直角ニ等シ.

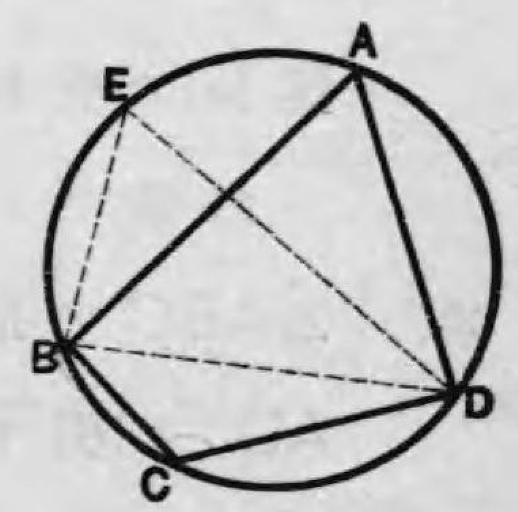
125. 定理

四邊形ノ對角ガ互ニ補角ヲナストキハ,此四邊形ハ圓ニ内接シ得ベキ四邊形ナリ.

【證明】 四邊形 ABCD ニ於テ

$$\angle A + \angle C = 2\angle R$$

トセヨ.



△BCD ノ外接圓ヲ畫キ,弧 BCD ノ共軛弧ノ上ノ任意ノ點 E ヲ取ルトキハ,四邊形 EBCD ハ

圓ニ內接スルヲ以テ

$$\angle E+\angle C=2\angle R \quad \text{(前節)}$$

然ルニ $\angle A+\angle C=2\angle R$ (假設)

$\therefore$ $\angle A=\angle E$

故ニ $\triangle BCD$ ノ外接圓周ハ點 A ヲ通ル.

(第122節系)

卽チ ABCD ハ內接四邊形ナリ.

系 四邊形ノ外角ガ其內對角ニ等シケレバ,此四邊形ハ圓ニ內接シ得ベキ四邊形ナリ.

問題

1. $\triangle ABC$ ノ二頂點 B, C ヨリ夫々其對邊ヘ垂線 BE, CF ヲ引キ,其二垂線(又ハ其延長)ノ交點ヲ H トスレバ,四邊形 AEHF ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

2. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ヨリ對邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ,其足 D ヨリ邊 AB, AC ヘ夫夫垂線 DE, DF ヲ引クトキハ,四邊形

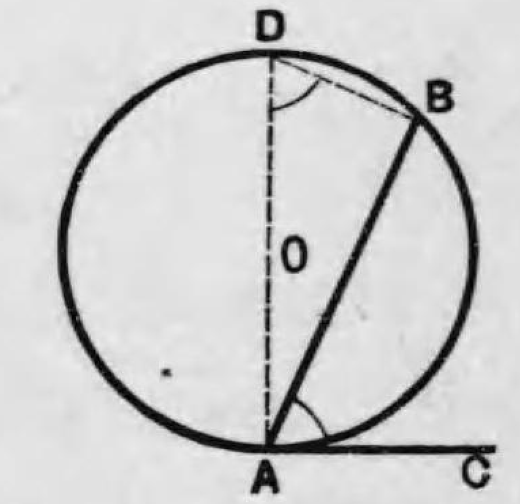
BEFC ハ圓ニ內接シ得ベキ四邊形ナリ.

126. 定理

圓ノ弦ト其一端ヨリ引ケル圓ノ切線トガナス角ハ,其角ノ內ニ含マルル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ.

【證明】 AB ヲ圓 O ノ弦, AC ヲ A ヨリ引ケル切線トセヨ.

(第一) $\angle BAC$ ガ銳角ナル場合.



點 A ヲ通ル直徑 AD ヲ引キ, B ト D トヲ結ビ付クレバ

$OA \perp AC$ (第115節)

$\therefore$ $\angle BAC+\angle BAD=\angle R$

然ルニ $\angle ABD=\angle R$ (第120節系4)

$\therefore$ $\angle D+\angle BAD=\angle R$

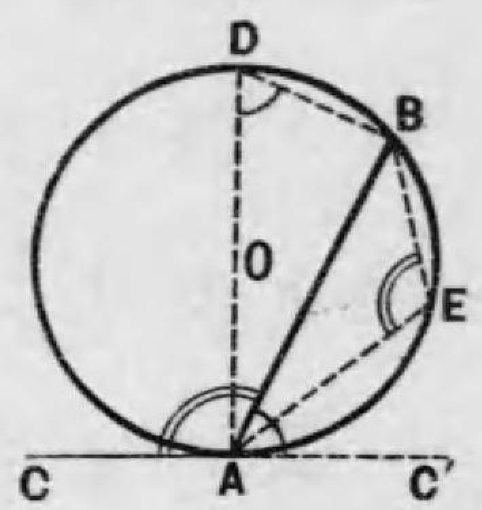
$\therefore$ $\angle BAC+\angle BAD=\angle D+\angle BAD$

$\therefore$ $\angle BAC=\angle D$

（第二） ∠BAC ガ鈍角ナル場合.

直線 AC ノ A ヲ超エテノ延長ヲ AC′ トセヨ.

∠C′AB 内ニ含マルル弧ノ上ニ其兩端ナラザル任意ノ一點 E ヲ取リ, A ヲ通ル直徑 AD ヲ引キ,而シテ内接四邊形 ADBE ヲ作レ.



サスレバ　$\angle D + \angle E = 2\angle R$　（第124節）

然ルニ　$\angle D = \angle BAC'$　（第一ノ場合）

$\therefore\quad \angle BAC' + \angle E = 2\angle R$

然ルニ　$\angle BAC' + \angle BAC = 2\angle R$

$\therefore\quad \angle BAC = \angle E$

系　一ツノ弦ノ一端ヨリ直線ヲ引キ,之ト弦トガナス角ヲ,此弦ニ對シ此直線トハ反對ノ側ニアル弓形ガ含ム角ニ等シクナストキハ,此直線ハ圓ノ切線ナリ.

問題

1. 圓周上ノ一點ヨリ其圓ニ切線ト弦トヲ引ケバ,其弦ガ張ル弧ノ中點ハ切線及ビ弦ヨリ等距離ニアリ.

2. 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ直徑トスル圓周ガ斜邊ト交ル點ニ於テ此圓ニ切スル直線ハ,他ノ邊ヲ二等分ス.

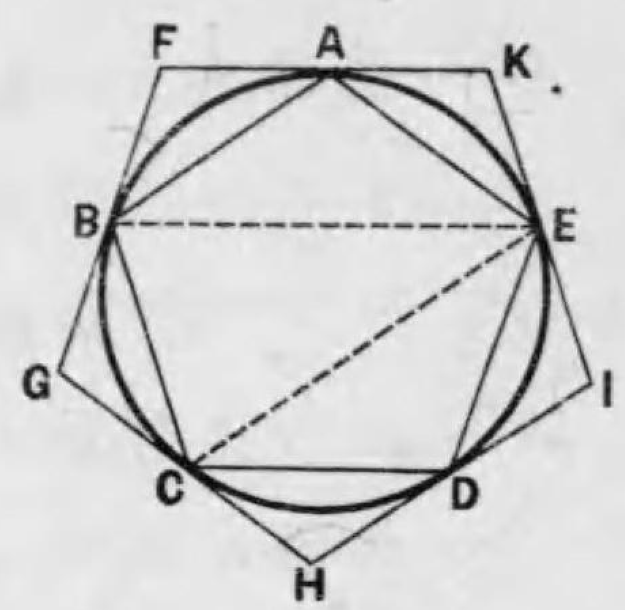
3.* 定線分ヲ弦トシ,與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ作ルコト.

127. 定理

圓周ヲ若干等分シ,其各分點ヲ順次ニ結ビ付クレバ内接正多角形ヲ生ズ. 又其各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ此等ノ切線ハ邊數ガ同ジキ外接正多角形ヲ生ズ.

【證明】 例ヘバ圓周ヲ A, B, C, D, E ニテ五等分シタリトセヨ.

此等ノ分點ヲ順次ニ結ビ付クレバ五邊形 ABCDE ヲ得.



サテ此五邊形ノ各邊ハ何レモ全圓周ノ $\frac{1}{5}$ ニ等シキ弧ヲ張ル弦ナルヲ以テ相等シ.

又此五邊形ノ各角ハ,何レモ全圓周ノ $\frac{3}{5}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ナルヲ以テ相等シ.

故ニ ABCDE ハ内接正五邊形ナリ.

次ニ B 及ビ C ノ各ト E トヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ △AFB 及ビ △BGC ニ於テ

$$AB = BC$$

$$\angle FAB = \angle AEB = \angle FBA \quad \text{(第 126 節)}$$

$$\angle GBC = \angle BEC = \angle GCB \quad \text{(同\quad上)}$$

然ルニ $\angle AEB = \angle BEC$ (第 120 節系 2)

$$\therefore \angle FAB = \angle FBA = \angle GBC = \angle GCB$$

$$\therefore \triangle AFB \equiv \triangle BGC$$

同理ニテ

$$\triangle BGC \equiv \triangle CHD \equiv \triangle DIE \equiv \triangle EKA$$

$$\therefore \angle F = \angle G = \angle H = \angle I = \angle K$$

即チ FGHIK ノ各角ハ皆相等シ.

又 $FA = FB$ (第 42 節)

同理ニテ $GB = GC,\quad HC = HD$ 等

然ルニ $\triangle AFB \equiv \triangle BGC \equiv \triangle CHD \equiv \cdots\cdots$

$$\therefore FA = FB = GB = GC = \cdots\cdots$$

$$\therefore FG = GH = HI = \cdots\cdots$$

即チ FGHIK ノ各邊ハ皆相等シ.

因テ FGHIK ハ外接正五邊形ナリ.

問題

1. 圓ニ内接スル正方形ヲ畫クコト.

2. 圓ノ半徑ヲ R トスレバ,其内接正方形ノ一邊ハ $\sqrt{2}R$ ナリ.

3. 圓ニ内接スル正六邊形ノ一邊ハ此圓ノ半徑ニ等シキコトヲ證明シ,之ニヨリテ圓ニ内接スル正六邊形ヲ畫ク方法ヲ求メヨ.

4. 圓ニ内接スル正三角形ヲ畫クコト.

5. 圓ニ内接スル正八邊形ヲ畫クコト.

6. 圓ノ半徑ヲ R トスレバ,其内接正三角形ノ一邊ハ $\sqrt{3}$ R ナリ.

問題

1. 圓ノ切線ニ平行ナル弦ガ張ル一ツノ弧ハ,其切線ノ切點ニヨリ二等分セラル.
2. 相等シキ二ツノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル線分ノ中點ヲ通ル,各ノ圓ノ割線ノ上ニ生ズル二ツノ弦ハ相等シ.
3. 一直線ガ二ツノ同心圓ノ各ノ周ト交ルトキ,此二圓周ノ間ニ夾マルル其直線上ノ二ツノ線分ハ相等シ.
4. 圓 O ノ周上ノ任意ノ點 A ヨリ,定マレル二ツノ直徑ニ垂線 AB, AC ヲ引ケバ線分 BC ノ長サハ不易ナリ.
5. 定マレル圓ヨリ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルコト.

第四章　二ツノ圓

128. 定義

二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ヲ此等ノ圓ノ**中心線**トイフ.

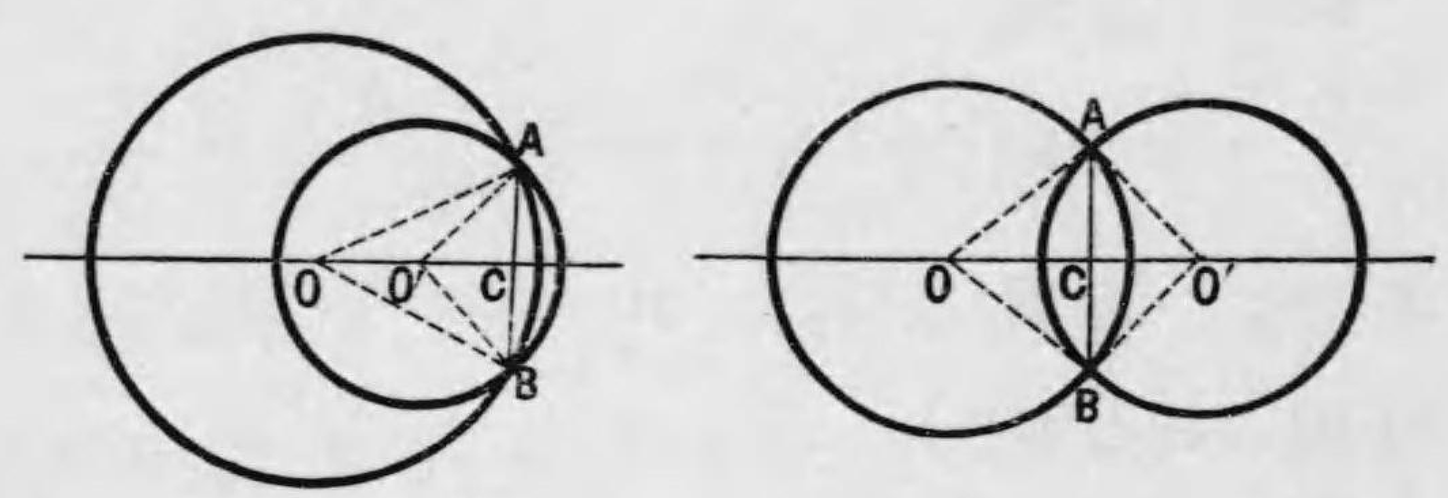
129. 定理

二ツノ圓周ガ,其中心線上ニアラザル一點ヲ共有スルトキハ,此等ノ圓周ハ亦他ノ一點ヲ共有ス(卽チ相交ル),而シテ其二交點ヲ結ビ付クル線分ハ中心線ニヨリテ垂直ニ二等分セラル.

【證明】 二ツノ圓ノ中心ヲ夫々 O, O′ トシ, A ヲ中心線 OO′ 上ニアラザル,此兩圓周ノ共有點トセヨ. A ヨリ中心線 OO′ ニ垂線 AC ヲ下シ,之ヲ延長シテ AC ニ等シク CB ヲ取レバ

$$OA = OB,\quad O'A = O'B$$ (第37節系)

然ルニ OA, $O'A$ ハ夫々圓 O, O' ノ半徑ナリ.
故ニ OB, $O'B$ モ亦夫々圓 O, O' ノ半徑ナリ.
故ニ點 B ハ二ツノ圓 O, O' ノ周ノ共有點ナリ.
故ニ此二ツノ圓周ハ二點 A, B ニ於テ相交ル.
而シテ線分 AB ハ中心線 OO' ニヨリテ垂直ニ二等分セラル.



【注意】 二ツノ圓ガ相交ルトキハ,其中心間ノ距離ハ其半徑ノ和ヨリハ小ニシテ其差ヨリハ大ナリ.

130. 定理

相合セザル二ツノ圓周ガ其中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,此二ツノ圓周ハ其他ノ點ヲ共有セズ.

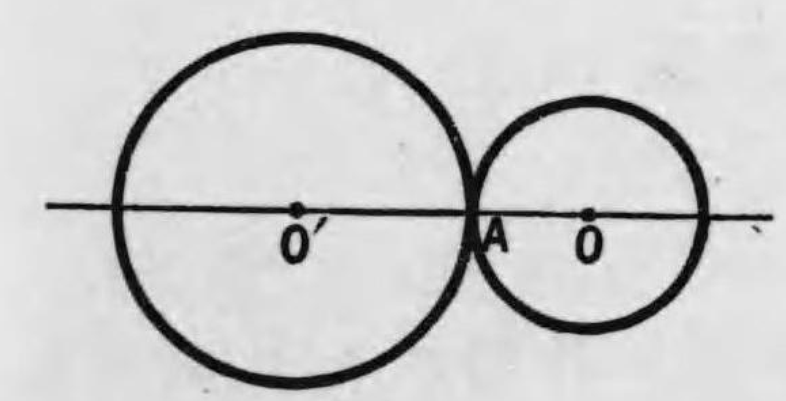
【證明】 二ツノ圓 O, O' ノ周ガ其中心線上ノ一點 A ヲ共有スルトセヨ.

今假リニ二ツノ圓周ニ A ヨリ他ノ共通點アリトセンニ,若シ夫ガ中心線 OO' 上ノ點ナランニハ二ツノ圓ハ同ジ直徑ヲ有スル圓ニシテ相合ス.

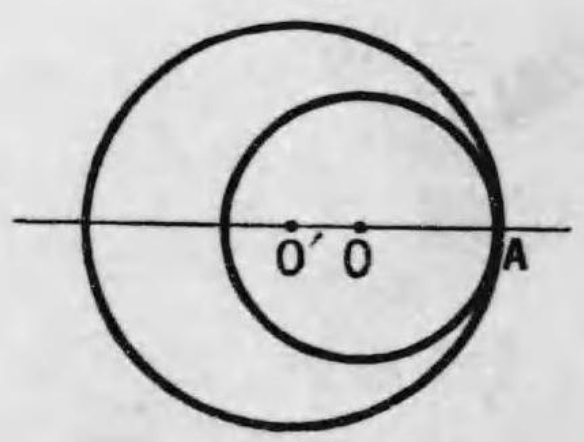
若シ夫ガ OO' 上ニアラザル點トスレバ,此二圓周ハ OO' 上ニアラザル他ノ一點ヲ共有セザルベカラズ(前節),從テ三點ヲ共有スルガユヱニ,此二ツノ圓周ハ相合セザルベカラズ.(第108節系1)

故ニ此二ツノ圓ガ相合スルニ非レバ A ヨリ他ノ點ヲ共有スルコトナシ.

(甲)



(乙)



定義　二ツノ圓周ガ唯一點ヲ共有スルトキ,此二ツノ圓周(或ハ圓)ハ**相切ス**トイヒ,其共有點ヲ其**切點**トイフ.

此場合ニ於テ前ノ(甲圖)ノ如ク一ツノ圓ガ他ノ圓ノ外ニアレバ二ツノ圓ハ互ニ**外切ス**トイヒ,(乙圖)ノ如ク一ツノ圓ガ他ノ圓ノ内ニアレバ二ツノ圓ハ互ニ**内切ス**トイフ.

系 1.　二ツノ圓ガ相切スルトキハ,其切點ハ二ツノ圓ノ中心線上ニ在リ.

系 2.　二ツノ圓ガ相切スルトキハ,二ツノ圓ハ其切點ニ於テ一ツノ切線ヲ共有ス.

【注意】　二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキハ其中心間ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シク,互ニ内切スルトキハ其中心間ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シ.

問題

1.* 二ツノ圓ノ中心間ノ距離ガ

(第一) 半徑ノ和ヨリ大ナルトキハ,各ノ圓ハ他ノ圓ノ外ニアリテ,二ツノ圓周ニハ共通點ナシ.

(第二) 半徑ノ和ニ等シキトキハ,二ツノ圓周ハ互ニ外切ス.

(第三) 半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナルトキハ,二ツノ圓周ハ相交ル.

(第四) 半徑ノ差ニ等シケレバ,二ツノ圓周ハ互ニ内切ス.

(第五) 半徑ノ差ヨリ小ナルトキハ,一ツノ圓ハ他ノ圓ノ内ニアリテ,此二ツノ圓周ニハ共通點ナシ.

2.* 同一直線上ノ同一ノ點ニ於テ此直線ニ切スル二ツノ圓ハ互ニ相切ス.

3. 一ツノ圓ノ半徑ガ他ノ圓ノ直徑ナレバ,二ツノ圓周ハ互ニ内切ス.

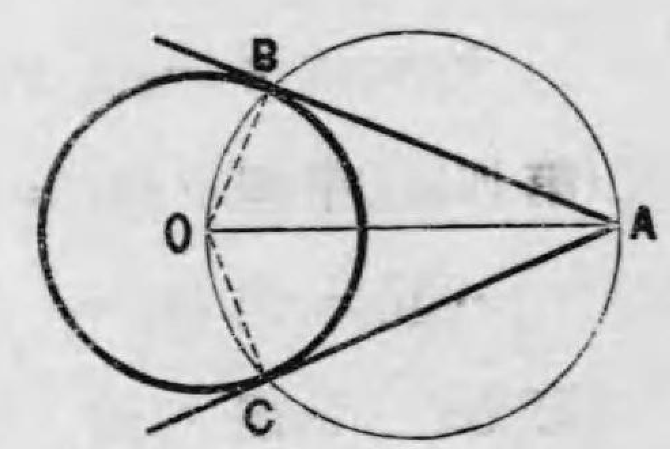
4. 三角形ノ一ツノ邊ノ中點ヲ中心トシ他ノ二邊ノ和ノ半分ヲ半徑トスル圓周ハ,

他ノ二邊ヲ各直徑トスル二ツノ圓周ニ切ス.

131. 作圖題

定圓(O)外ノ一定點(A)ヲ通リ,此圓ニ切線ヲ引クコト.

【作圖】 OトAトヲ結ビ付ケ,之ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,此圓周ト定圓Oノ周トノ交點ヲB, CトシB及ビCノ各トAトヲ通ル二直線ヲ引クバ之ガ所要ノ切線ナリ.



【證明】 B及ビCノ各トOトヲ結ビ付ケヨ.サスレバ

$$\angle OBA = \angle R, \quad \angle OCA = \angle R$$

故ニAB, ACハ何レモ圓Oノ切線ナリ.

定義 圓外ノ一點ヨリ引キタル切線ノ長サトハ,其點ト切點トノ間ノ距離ノコトナリ.

問題

1.* 圓外ノ一點ヨリ此圓ヘ引キタル二ツノ切線ノ長サハ相等シク,此點ト圓ノ中心トヲ結ビ付クル線分ト各切線トガナス二ツノ角ハ相等シ.

2. 圓Oノ互ニ平行ナル二ツノ切線ガ任意ノ第三ノ切線ト夫々A, Bニ於テ交レバ角AOBハ直角ナリ.

3. 定圓外ノ一定點ヨリ割線ヲ引キ,其上ニ生ズル弦ヲ,與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

問題

1. 相交ル二圓周ノ交點ノ中ノ一ツヲ一端トスル,各ノ圓ノ直徑ノ他ノ端ヲ通ル直線ハ他ノ交點ヲ通ル.

2. 二ツノ圓周ノ交點A, Bノ各ヲ通リテ二

ツノ線分 PAQ, RBS ヲ引キ,夫々圓周ニ於テ終ラシムレバ,弦 PR ハ弦 QS ニ平行ナリ.

3. 前問題ニ於テ兩圓周ガ相切スル場合ニテモ PR ハ QS ニ平行ナリ.

4. 互ニ相切スル二ツノ圓周ノ切點ヲ通ル直線ガ此圓周ノ各ニ交ル點ヲ,其圓ノ中心ニ結ビ付クル二ツノ線分ハ互ニ平行ナリ.

5. 二定圓周ノ各ニ切スル任意ノ圓ノ中心ヨリ此二定圓ノ中心マデノ距離ノ和或ハ差ハ,二定圓ノ半徑ノ和ニ等シキカ若クハ其差ニ等シ.

6. 圓ニ外接スル四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ハ,他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シ.

7. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ.

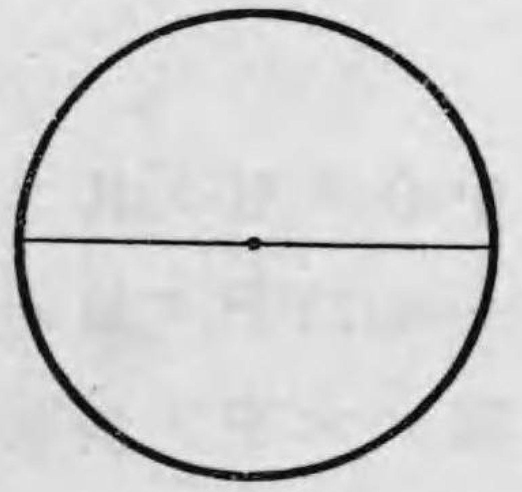
8. 定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,與ヘラレタル長サノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

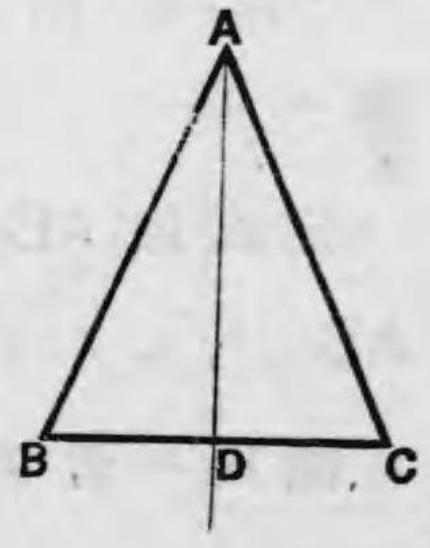
第五章　對稱圖形

132. 定義

一直線ノ兩側ニ一ツ宛圖形アリテ,此直線ヲ折リ目トシテ此平面ヲ折リ返ストキ,一ツノ圖形ガ他ノ圖形ニ全ク合スレバ,此等ノ圖形ヲ此**直線ニ付テ對稱ナリ**トイヒ,此直線ヲ**對稱ノ軸**トイフ.

例ヘバ圓ヲ其直徑ニテ分ツトキニ生ズル二ツノ半圓ハ其直徑ヲ軸トスル對稱圖形ナリ.





又二等邊三角形 ABC ヲ其頂角 A ノ二等分線ニテ分ツトキニ生ズル二ツノ三角形 ABD, ACD ハ其二等分線 AD ヲ軸トスル對稱圖形ナリ.

或直線ヲ軸トスル二ツノ對稱圖形ノ**對應點**(卽チ軸ヲ折リ目トシテ折リ返ストキ相合スベキ二點)ヲ結ビ付クル線分ハ對稱ノ軸ニヨリテ垂直ニ二等分セラル.

問題

1.* 一點 P ヨリ定直線 AB ニ垂線 PM ヲ引キ,之ヲ延長シテ MP ニ等シク MQ ヲ取レバ,二點 P, Q ハ直線 AB ニ關シテ對稱ナリ.

2. 一定直線 AB 上ニ中心ヲ有シ,且ツ直線 AB 上ニアラザル一定點 P ヲ通ル總テノ圓周ハ皆 AB ニ關スル P ノ對稱ノ點ヲ通ル.

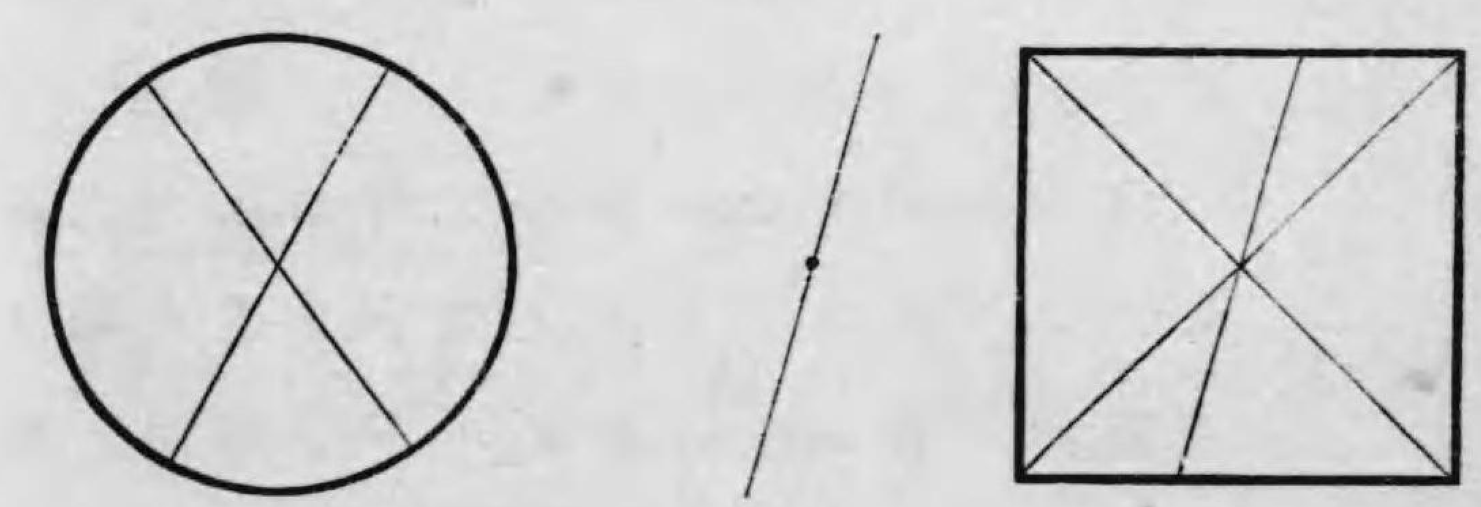
3. 菱形ハ其何レノ對角線ニ付テモ對稱ナリ.

4. 何レノ對角線ニ付テモ對稱ナル四邊形ハ菱形ナリ.

133. 定義

一定點ヲ通リ,或圖形上ニ兩端ヲ有スル總テノ線分ガ,何レモ其點ニ於テ二等分セラルルトキ,此圖形ハ**其點ニ關シテ對稱ナリ**トイヒ,其點ヲ**對稱ノ中心**トイフ.

例ヘバ圓ハ其中心ニ關シテ對稱ナリ.



又線分ノ兩端ハ其線分ノ中點ニ關シテ對稱ナリ.

又正方形ハ其對角線ノ交點ヲ中心トスル對稱圖形ナリ.

問題

平行四邊形ハ其對角線ノ交點ヲ中心トスル對稱圖形ナリ.

第六章 軌跡

134. 第17節ニ述ベタル圓ノ定義ニヨリテ

(第一) 圓周上ノ總テノ點ト其中心トノ距離ハ一定ナリ,卽チ其半徑ノ長サニ等シ.

(第二) 圓周上ニ在ラザル點ハ,或ハ圓外ニアルカ,或ハ圓內ニアルヲ以テ,其點ト中心トノ距離ハ或ハ半徑ヨリ大ナルカ,或ハ半徑ヨリ小ニシテ決シテ半徑ニ等シカラズ.

仍テ圓周ハ一定點(卽チ其中心)ヨリノ距離ガ一定(卽チ半徑ニ等シキ長サ)ナリトイフ條件ニ適スル點ヲ悉ク含ミ,其條件ニ適セザル點ハ一ツモ含マザル線ナリ.

定義

或線(或ハ線ノ群)アリテ

(1) 其線上ノ點ハ或與ヘラレタル條件ニ適ス.

(2) 其上ニアラザル點ハ其條件ニ適セズ.

トイフ二定理ガ成リ立ツトキハ,此線(或ハ線ノ群)ヲ,與ヘラレタル條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ.

【注意1】 軌跡トイフ言葉ヲ用フルトキハ圓ノ定義ヲ次ノ如クニ述ブルコトヲ得.

圓周ハ一定點(卽チ中心)ヨリ一定ノ距離ニアル同一平面上ノ點ノ軌跡ナリ.

【注意2】 或線ガ與ヘラレタル條件ニ適スル點ノ軌跡ナルコトヲ確カムル爲ニ證明スベキ上ノ二定理中ノ(1)ノ代リニ

(1)′ 其條件ニ適セザル點ハ其線上ニアラズ.

トイフ定理ヲ證明シテモヨク,又(2)ノ代リニ

(2)′ 其條件ニ適スル點ハ總テ其

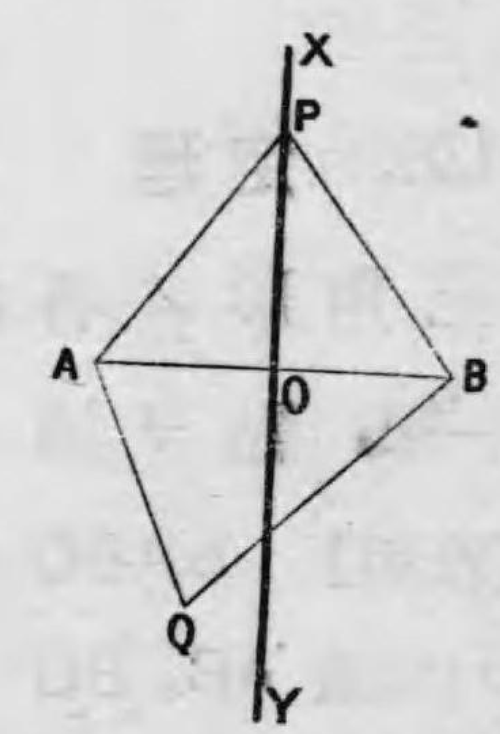
線上ニ在リ.

トイフ定理ヲ證明シテモヨシ.

135. 軌跡題

二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,此二定點ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分線ナリ.

【證明】 A, B ヲ二定點トシ,線分 AB ヲ其中點 O ニ於テ垂直ニ二等分スル直線ヲ XY トセヨ.



(1) P ヲ XY 上ノ任意ノ點トセヨ.

サスレバ

PA = PB (第37節系)

卽チ XY 上ノ任意ノ點ハ A, B ヨリ等距離ニアリ.

(2) Q ヲ XY 上ニアラザル任意ノ點トセヨ.

サスレバ

$$QA \neq QB$$ (第64頁問題)

卽チ XY 上ニアラザル任意ノ點ハ A, B ヨリ等距離ニアラズ.

故ニ XY ハ A, B ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナリ.

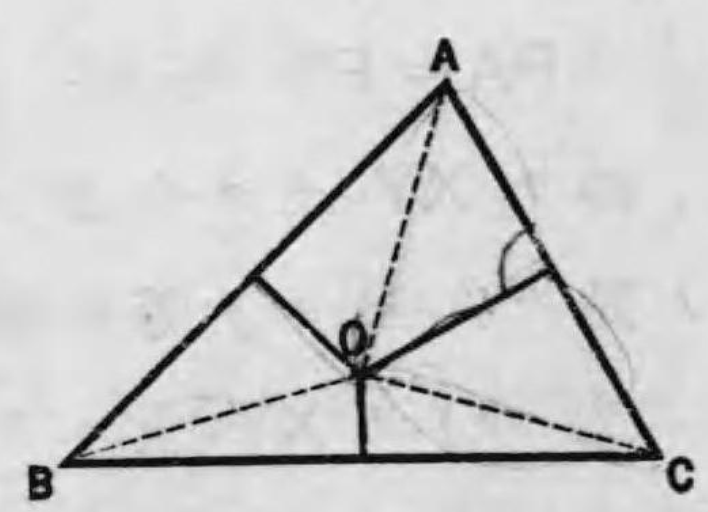
問題

1. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡如何.
2. 二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ定直線上ニ求メヨ.

136. 定理

三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

【證明】 △ABC ニ於テ二邊 AB, BC ハ相交ルヲ以テ,其各ノ垂直二等分線ハ相交ル. (第74頁問題7)



今其交點ヲ O トシ,

之ヲ各頂點ニ結ビ付ケヨ. サスレバ

$$OA = OB$$
$$OB = OC$$
$$\therefore \quad OA = OC$$

故ニ點 O ハ亦邊 AC ノ垂直二等分線上ニ在リ(前節),卽チ邊 AC ノ垂直二等分線ハ點 O ヲ通ル.

因テ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

【注意】 OA = OB = OC ナルニヨリ,點 O ハ △ABC ノ外心ニ外ナラズ.

137. 定理

三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル三垂線ハ同一ノ點ヲ通ル.

【證明】 △ABC ノ各頂點ヲ通リ其對邊ニ平行線ヲ引ケバ,右ノ圖ノ如ク △A′B′C′ ヲ得,而シテ三點 A, B, C ハ夫々三