平面几何

學生用

平面幾何

二十年六月
教育部審定

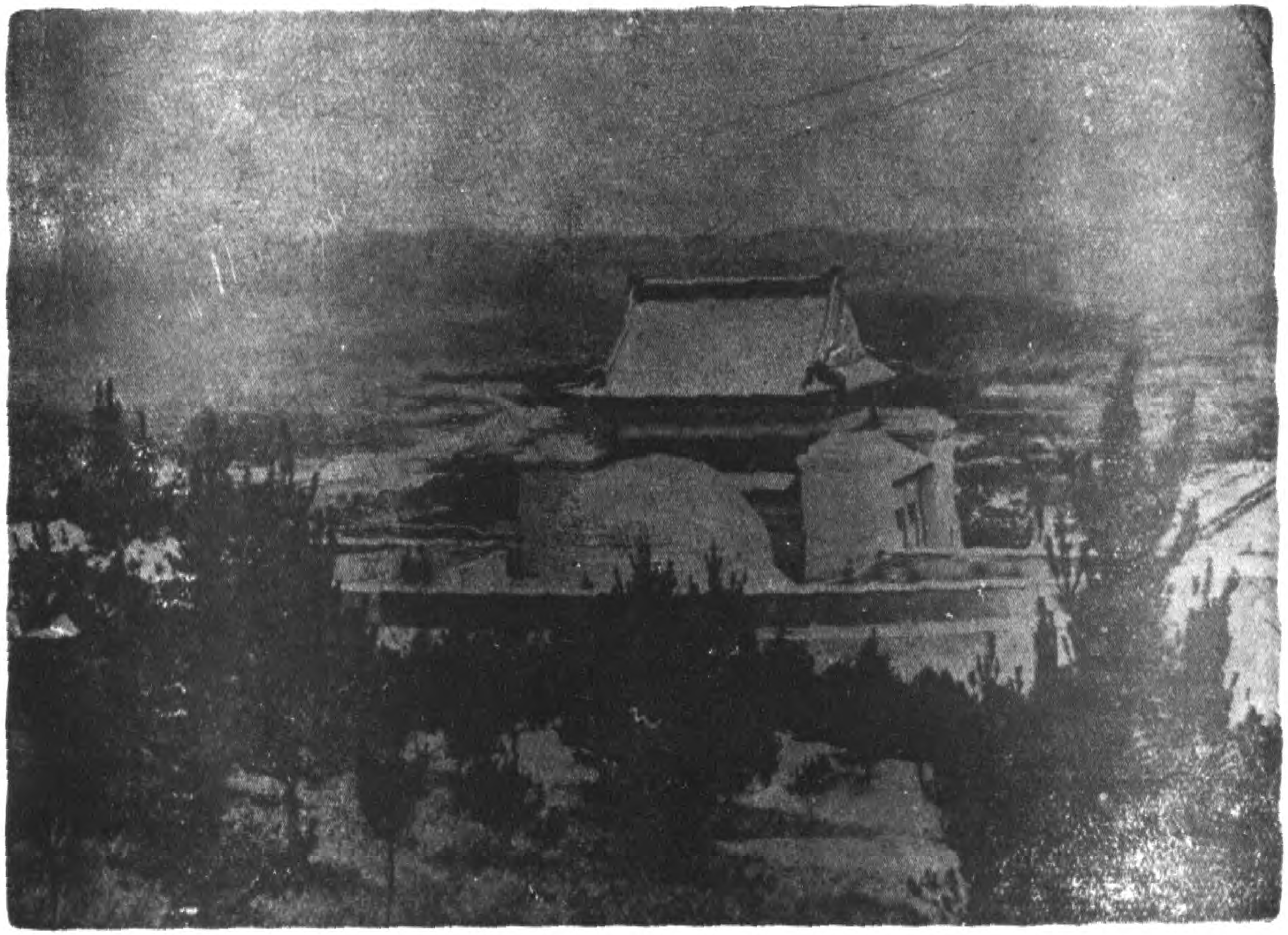
長沙勞啓祥編

學生用

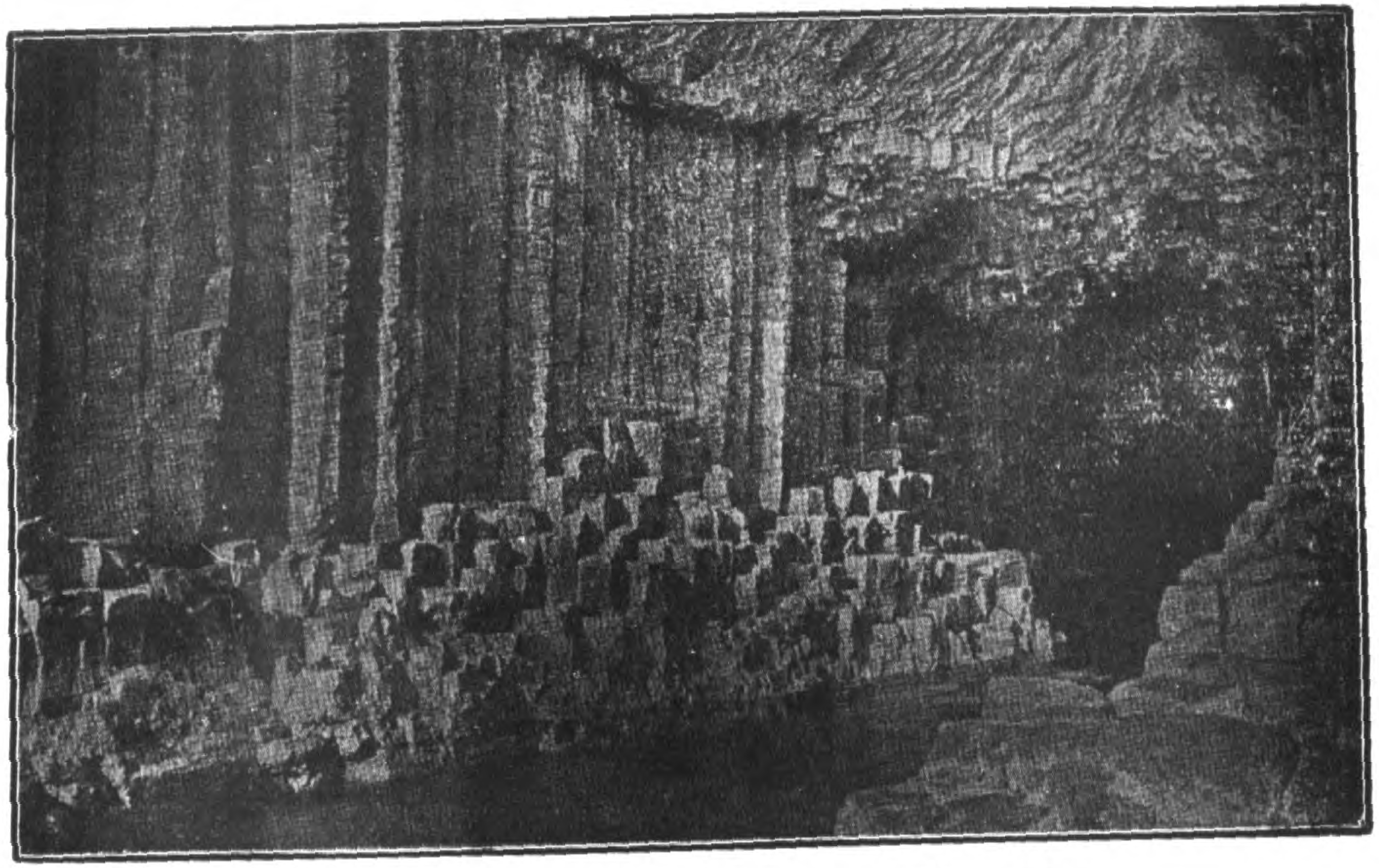
二十年八月
教育部審定

平面幾何

長沙勞啓祥編



人爲的幾何形體



自然的幾何形體

56209

序

語云工欲善其事必先利其器算學者自然科學之一也而算學之中其與自然界各種現像關係密切者又以幾何爲最如光之直進水之成平日月之作球形食鹽之成正方顆粒雪花之成正六角形其餘如蜂房珠網之構造以及種種物質之結晶均莫非與人類以幾何學之暗示則吾人對於幾何學之了解當較他種科學爲明瞭確切宜矣然常人之於幾何恒視爲一種神秘奧妙之術在初學者尤以此爲畏途不但興趣毫無且甚有習完數十頁尚未知其意義之所在者此無他未得相當利器也

西人性好進取非惟科學機械日益發明即其各項教本編制之法亦時有改進務以求教者學者之便利我國自清末以來輸入歐西文化不少而對於幾何一門獨乏良好之書作者執教鞭垂二十年常以己身感受痛苦

而發生解除同業者痛苦之志願乃因平生教學之經驗
採用西方良本以充楷模根據我國學制作爲材料支配
之標準費年餘之光陰而成是書冀以排除教學前途之
障碍銷滅智海之暗礁化崎嶇爲康莊闢羊腸爲坦途惟
是學力棉薄錯誤之處自知難免海內宏達尙祈賜以糾
正爲幸

民國十八年七月長沙勞啓祥作於雅禮中學校

平面幾何

例言

(1)本書專備中等學校的應用，全書共有二百五十六頁，分做五編，裏面包含命辭一百二十條，係九十條，習題約八百條，恰足十個學分之用。

(2)本書內容豐富，文字淺顯，定義切實，證法簡明，雖初學者自習，也很容易了解。

(3)凡本書的命辭，多數是從頁面的第一行列起，使學者可以一目了然，若是一頁的地位不足必須翻頁時，便在次頁另備同樣圖形，以免學者翻頁困難。

(4)本書對於各種比較深奧的名稱，都用歸納法解釋。先有實例，然後附以定義。所以緒論極短，開課十小時以後，學生便有練習證題的機會。

(5)本書材料的排列，純粹依照心理的秩序，現在外面的各種幾何教本，多用「凡平角皆等」做他的命辭第一條。這是最大的錯誤，因爲這種定理，表

面上雖然好像簡單，其實極難推證。從算學方面看來，好像沒有再簡的理，但是從教育方面看來，這些學生既然沒有證題的經驗，胸中又缺乏應用的材料，並且不能感覺這種定理存在的必要，興趣一點也沒有，所以覺得極難，這種編制方法，偏重論理而忽略心理，實在是幾何教本的一大弊端。本書對於這一類的定理概不證明，只稱他們做「簡單定理」。地位大約和幾何公理相等。又因爲全等三角形的各命辭了解比較容易，他們的應用也很廣大，所以本書便將這幾個命辭列在最首。

(6)幾何學裏面的極限論一章，實在是一個大難關。現有的教本，多半拿這章放在第三編或第四編開始的地方，隨後便有種種命辭的推證，利用這極限論做根據。教者若將極限論删去，便破壞了全書的聯絡，若不删去，則對於性情不近於算學的學生，耗費許多的腦力來記憶這種不能完全了解的理論，實在太不經濟，所以本書將這極限論列在全書的最末。若時間有餘，自可陸續教完。否則就是删去，也和

全書大體無碍。

(7)軌跡一章，對於初學的人，也是極難了解，其實這種理論並不高深，不過名稱新奇，所以人不明白，以前教本。多用幾何話語解釋軌跡的意義。愈解釋愈不明瞭。本書對於軌跡，先用事實說明，附以揷畫，次用種種合於事實的問題來引起學生的興趣，確定學生對於軌跡的認識，最後乃述軌跡的理論。

(8)本書習題雖多，但不是集中一處，每一二個命辭以後，便有習題數條。那些習題的推證，都是應用最近所習的定理，又在每編的末了作總練習一次。這種編制方法，學生最易進功；並且命辭和習題相間，可免去學生疲勞厭倦的弊病。又本書習題雖多，原是預備教師的選擇餘地，並不是要學者全部作完。普通初中學生，若能每人選作三百六十題，便爲足够。

(9)本書習題種類很多，都能切合實用，繁簡的進度，極其均勻，大都容易證解。中間偶有含理較深

的，就附有略圖，步驟較繁的，就加以說明或略解，所以很能引起學生研究的興趣。

(10)本書所用各項名詞，都是採用最新審定的；且在種種名詞的後面，附有英文原名，使學者日後研究西書，可以減少困難。

平面幾何目次

頁數

頁數

平面幾何

緒論

第一章 幾何學大意

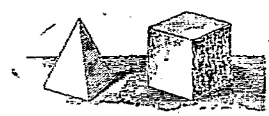
1. 幾何學的來源 埃及人發明幾何最早，紀元前一千七百年時所著的書，便含有幾何學。因爲那個國裏有一條大河，名叫尼羅河。這河每年漲水一次，把兩岸的田地完全淹沒，水退的時候，遺下泥沙不少，田地的界限，都被泥沙淹埋了，當時的人想要恢復，並且確定他們的地界，好讓政府計算各人應出的賦稅，所以發明一種簡單的測量法，用這種測量做職業的人，稱爲幾何學者。這個名稱的意思，就是牽繩子的人，因爲他們測量的時候，是用三根繩子聯成直角三角形，然後再來計算。

2. 希臘人的幾何 古時研究幾何的人除埃及人外，還有巴比倫人。他們的發明也很早，而且他們利用幾何的地方不僅限於測量，就是航海建築諸事，也有應用幾何的。但是埃及人和巴比倫人的幾何，都是偏重計算，忽略了推證；對於各種定則，只曉得當然，不曉得所以然。這些定則都是積多年的經驗而得的。後來出了希臘人，他們把埃及人的

幾何拿來，用科學方法去研究，發明了許多新理。他們中間有一個最著名的人，叫做歐幾立得。他生在紀元前三百年，他的書叫做幾何原本，內容有一十三編，他可以算做幾何界的始祖，我們今天所用的幾何教科書材料，大部份是從他得來的。自從希臘人以後，幾何學便成爲一種正式科學。

3. 幾何學的目的 現在的幾何，不僅專爲計算，最大目的，是要明瞭體、面、線、點的性質，和他們彼此間的關係。所以我們未研究幾何之先，必須明瞭體、面、線、點的意義。

4. 體 空間的有限部份叫做體。比如教室裏面的空氣，四週以牆爲限，上下以樓板和地板爲限；所以這室內的空氣叫做體，或稱立體 (Solid)。若是將牆折去一方，這室內的空氣對於這方便沒有限制，就不能稱爲體了。



5. 面,線,點 體的界限叫做面 (Surface)。有平面(Plane Surface or Plane)，有曲面(Curved Surface)；兩個面相交的地方叫做線 (Line)，有直線 (Straight Line)，有曲線 (Curved Line)；兩線相交的地方叫做點 (Point)。

體的長，寬，高叫做他的三個向度 (Dimensions)。

（見上圖）

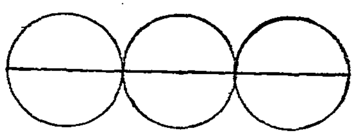
面有長和寬，沒有高，所以只有兩個向度。線沒有寬，也沒有高，所以只有一個向度。——那就是他的長。點沒有向度，只有地位。

6. 幾何學的價值　幾何學的用途很大。譬如工程，建築，測繪，物理，天文，航海等等實用科學，應用幾何原理的地方很多。但是幾何頂要緊的作用，是要訓練人的思想，養成人對空間的觀念，利用精確的言語，論理的秩序，表示種種眞理；並且要使學他的人，常常有一種科學的態度，來應付一切問題。所以他的用途，不僅限於算學一方面。

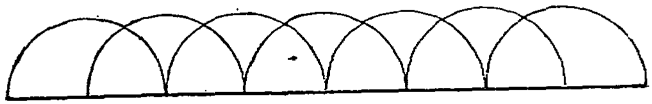
7. 幾何學的方法　古人發明幾何，都是根據實際經驗。我們現在研究，便利用前人實驗的結果，來推求他的理由，並且用這種方法，進而求其他種種眞理。前法容易，後法雖然稍難，但是在科學上的價值，比較重要。

習題 1　試作下列的圖

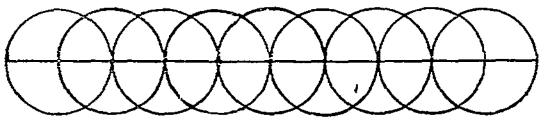
習題 2　試作下列的圖



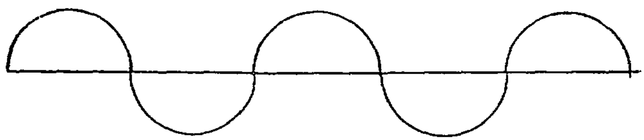
習題 3 試作下列的圖



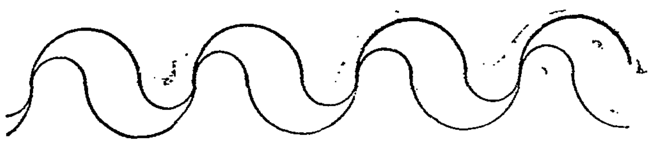
習題 4 試作下列的圖



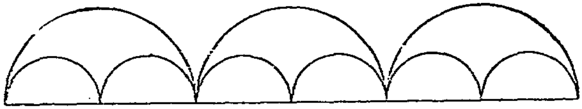
習題 5 試作下列的圖



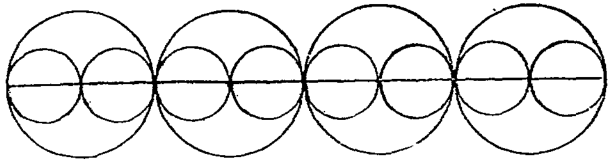
習題 6 試作下列的圖



習題 7　試作下列的圖



習題 8　試作下列的圖



第二章　定義

8 定義　利用比較簡單的名稱，來說明一種名稱的意義，使他和別的名稱有區別，這句話便叫做定義 (Definition)。本章和下章的各段都是種種名稱的定義。

9. 直線　若是一根線處處都在同一的方向，這線便叫做直線 (Straight Line)，直線的長是無限的。

本書以後對於直線有時也簡稱爲「線」

10. 曲線　若是一根線的方向處處改變，這線便叫做曲線 (Curved Line or Curve)。

11. 平面　在面內任取兩點聯成一直線，若這線全在面內，這面便叫做平面 (Plane)。平面的長和

寬都是無限。

12. **曲面** 若一面沒有一部份是平的這面便叫做曲面(Curved Surface)。

13. **幾何圖形** 體，面，線，點合成的形，叫做幾何圖形(Geometric Figure)。

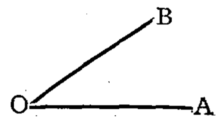
14. **幾何學** 研究幾何圖形的形狀大小和位置的科學叫做幾何學(Geometry)。

15. **平面形和平面幾何** 若幾何圖形的各部份都在一平面內，這形便叫做平面形 (Plane Figure) 幾何學中研究平面形的部份，叫做平面幾何(Plane Geometry)。

16. **線段** 直線的有限部份，叫做線段 (Line Segment)。

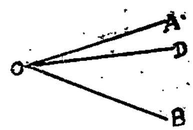
17. **直線形** 平面形用直線做界限的叫做直線形(Rectilinear Figure)；各直線是這形的邊(Sides)。

18. **角** 由一點引兩直線，這個圖形叫做角。(Angle) 這點叫做頂點 (Vertex)。這兩直線是角的兩邊。角的符號是∠；譬如附圖讀爲∠O, 或∠AOB 或∠BOA。角的兩邊的長短，對於角的大小沒有關係。

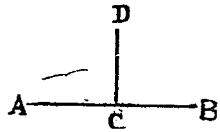


19. **鄰角** 設兩個角中間有一公共邊，並且有一公共頂點

這兩角便叫做鄰角 (Adjacent Angles)。譬如右圖的∠AOD和∠DOB就是鄰角。



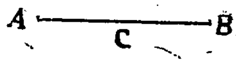
20. **直角** 設兩直線相遇所成的兩鄰角相等，這角叫做直角(Right Angle)；如圖∠DCA和∠DCB。



21. **垂線** 若兩線相交成直角，這兩線便互相垂直，每一線是他線的垂線 (Perpendicular) 如圖中角DCA是直角，則 DC 垂直於AB, AB也垂直於DC。

22. **垂足** 垂線遇他線的點，(如 C 點) 叫做垂足 (Foot of Perpendicular)。

23. **平角** 設角的兩邊，由頂點引在兩反對方向，恰成一直線，這角就叫做平角 (Straight Angle)，如下圖∠ACB。由這定義，可知一個平角等於兩個直角。



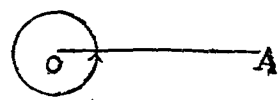
24. **銳角** 小於一直角的角叫做銳角 (Acute Angle)，如圖∠A。

25. **鈍角** 大於直角，小於平角的角，叫做鈍角(Obtuse Angle)。

26. 反角 大於一平角，而小於兩平角的角，叫做反角(Reflex Angle)；如角 DOA 用虛線表明的部份。

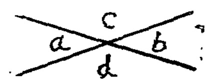
27. 斜角 非直角又非平角的角，叫做斜角(Oblique Angle)。又不相垂直的兩相交線，叫做斜線(Oblique Lines)。

28. 週角 在一平面內，繞一點的角的全量，叫做一週角(Perigon)。

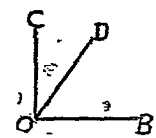


29. 偶角 設兩角的和，等於一個週角，這兩角就叫做共軛角；又叫做偶角(Conjugate Angles)。

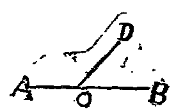
30. 對頂角 設兩角有公共頂點，並且一角的兩邊，爲他一角兩邊的引長線。這兩角叫做對頂角(Vertical Angles)；如兩角 a 和 b, c 和 d。



31. 餘角 設兩角的和等於一直角，這兩角便互爲餘角(Complementary Angles)；如兩角 DOB 和 DOC。

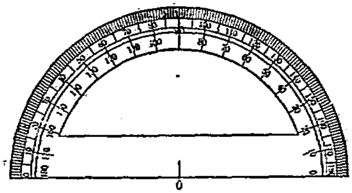


32. 補角 設兩角的和，等於一平角，這兩角便互爲補角



(Supplementary Angles)，如兩角 DOB 和 DOA。

33. **角的單位**　將週角分爲三百六十等份，每一份叫做度(Degree)。一度等於六十分(Minutes)，一分等於六十秒(Seconds)，度，分，秒，都是角的單位，可用符號表明。如有12度11分52秒。可寫 12° 11′ 52″。由此可知一週角含有 360°，一平角含有 180°，一直角含有 90°。



34. **平分**　設一直線或一平面，分一幾何量爲兩等份，這線或平面就叫做這量的平分線(Bisecting Line)，或平分面(Bisecting Plane)。

習題 9　設一角爲 50° 11′ 8″，求他的餘角和補角。

習題 10　某角等於他的餘角的四倍，求這角的大小。

習題 11　某角等於他的補角的一半，求這角。

習題 12　某角的補角等於他的餘角的三倍，求這角。

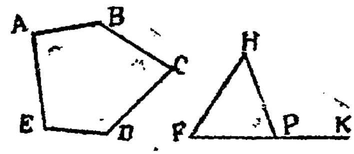
習題 13　問 135° 的角，叫做甚麼角？

第三章　定　義 [續]

35. **三角形**　直線形的邊數爲三的，叫做三角形(Triangle)；各邊叫做三角形的邊(Sides)，各邊

的和，叫做三角形的週界 (Perimeter)；各兩邊所夾的角，叫做三角形的角 (Angles)；各角的頂點。叫做三角形的頂點 (Vertices)。

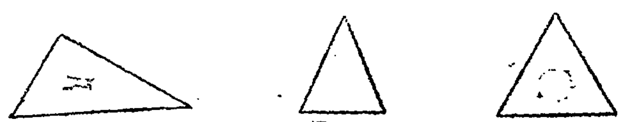
36. 直線形的鄰角 在一直線形中若兩角公共一邊，這兩角叫做鄰角 (Adjacent Angles)。



右圖 ∠A 和 ∠B, 是鄰角，並且 AB 是公共邊。

37. 外角 三角形一邊和他邊引長線間的角，是外角(Exterior Angle)；如圖∠HPK便是，又圖中∠F和∠H,都是∠HPK的內對角(Opposite Interior Angles)。

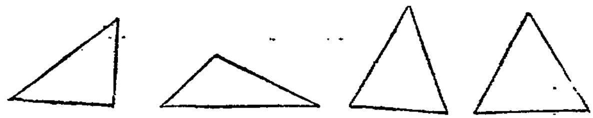
38. 三角形用邊分類 三角形各邊都不相等的叫做不等邊三角形 (Scalene Triangle)；有兩邊相等的，叫做等腰三角形 (Isosceles Triangle)；三邊都等的，叫做等邊三角形 (Equilateral Triangle)。



不等邊三角形　　等腰三角形　　等邊三角形

39. 三角形用角分類 三角形有一角為直角的，叫做直角三角形(Right Triangle)；有一角為鈍角的，叫做鈍角三角形 (Obtuse Triangle)；三角都

爲銳角的，叫做銳角三角形(Acute Triangle)；三角都等的，叫做等角三角形(Equiangular Triangle)。



直角三角形　鈍角三角形　銳角三角形　等角三角形

40. 斜邊和腰　直角三角形內，對直角的邊，叫做斜邊(Hypotenuse)，其餘兩邊叫做腰(Legs)。

41. 底　拿三角形任一邊，並設想這個三角形站立在這邊上，這邊便叫做底(Base)。等腰三角形的兩等邊爲腰，餘一邊爲底。

42. 頂角　三角形的角和他的底相對的，叫做頂角(Vertex Angle)。

43. 高　由三角形的頂角的頂點到底，或底的引長線上的垂線，叫做三角形的高(Altitude)，又叫做頂垂線。

44. 分角線　三角形各角的平分線，叫做三角形的分角線(Angle Bisectors)。

45. 相當角相當邊　設兩個三角形的角，彼此各相等，這等角叫做相當角(Corresponding Angles)；對等角的邊，叫做相當邊(Corresponding Sides)。

第一編　直線形

第一章　三角形

46. 證　利用比較簡單的理，來顯明一種理的眞確，叫做證 (Proof)。

47. 公理　根據吾人經驗，不待證而自明的理，叫做公理 (Axiom)。

公理既是最簡單的理，按照上段的定義看來，我們不但是不必證他，實在也是不能證他，因爲沒有比較他更簡單的理來供我們利用的緣故。

48. 命辭　申述一理，來求證明，或標明一事來求實現，叫做命辭 (Proposition). 命辭屬於前一類的，叫做定理 (Theorem)，屬於後一類的，叫做作圖題 (Problem)

49. 定理的推證　古埃及人的幾何偏重實用，如今則並重理論：就是對於一定理，不但求其當然也要研究他的所以然，推證定理的步驟有三段：叫做假設 (Hypothesis)，終結 (Conclusion)，和證。假設是終結眞確的條件，終結是假設眞確必要的結果，證是顯明假設和終結的關係。

50. 疊置　拿一個圖形，安放在另一個圖形上面，叫做疊置 (Superposition)。當疊置時，我們僅

移動圖形的地位，但不改變他的大小或形狀。

51. 全等　兩個幾何量疊置後，若能處處密合，叫做全等(Congruent)。

52. 普通公理

(1) 和同量或等量相等的諸量，彼此必等。

(2) 等量加等量，其和必等。

(3) 等量減等量，其差必等。

(4) 不等量加等量，他們的和不等；本爲大量的，還是大量。不等量加不等量，若是大量加大量，小量加小量，他們的和不等；本爲大量的，還是大量。

(5) 不等量減等量，他們的差不等，本爲大量的，還是大量，等量減不等量，他們的差不等，所減爲大量的，所餘爲小量，所減爲小量的，所餘爲大量。

(6) 同量或等量的倍必等，不等量的倍不等。

(7) 同量或等量的半必等，不等量的半不等。

(8) 全量大於他的分量。

(9)全量等於他的諸分量的和

53. 幾何公理　公理的性質屬於幾何的，叫做幾何公理。現在把幾何公理列舉在下面：

(1) 經過一點，可作無量數的直線。

(2) 兩直線僅能相交於一點。

(3) 兩點間僅可作一直線。

(4) 兩直線若有兩個公共點，這兩線必密合，成爲一線；若兩線段的端彼此密合，這兩線段完全密合。

(5) 兩直線不能圍合地位。

(6) 若有兩個同類量 a 和 b,他們中間的關係必爲下列三種之一:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

(7) 經過一點，可作一直線，使他和已知線成爲任意角。

(8) 兩點間的直線，爲這兩點中間的最短線。

54. 簡單定理 除幾何公理以外，還有種種極簡單的定理，雖有證明的可能，實無證明的必要；現在也列來出，做將來推證的基礎:

(1) 凡周角都相等。

(2) 凡平角都相等。

(3) 凡直角都相等。

(4) 同角或等角的餘角相等。

(5) 同角或等角的補角相等。

(6) 對頂角相等。

(7) 若兩鄰角的外邊成一直線，這兩角互爲補角。

(8) 若兩鄰角互爲補角，他們的外邊成一直線。

55. 符號和略字　幾何上種種性質和關係，常常用符號和略字表示，以省地位。下列各項都是本書內常用的：

$+$	加	$\angle$	角
$-$	減	$\angle s$	諸角
$=$	等	$\triangle$	三角形
$\neq$	不等	$\triangle s$	諸三角形
$>$	大於	▱	平行四邊形
$<$	小於	▱s	諸平行四邊形
$\cong$	全等	○	圓
$\sim$	相似	ⓢ	諸圓
$\therefore$	所以	rt$\angle$	直角
$\perp$	垂直，垂線	st$\angle$	平角
$\perp s$	諸垂線	rt$\triangle$	直角三角形
$\parallel$	平行，平行線		弧
$\parallel s$	諸平行線		

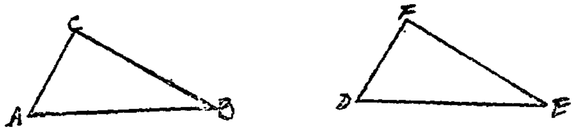
a.s.a.　兩個三角形，有兩角和夾邊相等。

s.a.s.　兩個三角形，有兩邊和夾角相等。

s.s.s.　兩個三角形的三邊相等。

命辭一 定理

56. 設三角形的兩角和他們的夾邊同另一個三角形的兩角和他們的夾邊各各相等，這兩個形必全等。



設 ABC 和 DEF 是兩個三角形，其中 $AB=DE$, $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$,

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

證 放$\triangle ABC$在$\triangle DEF$上，使 AB 和 DE 相合，又使 A 點落在 D 點上，且 C 和 F 落在 DE 的同側。

則 B 必落在 E 上

(因$AB=DE$)

又 AC 必落在 DF 上

(按假設 $\angle A=\angle D$)

同理 BC 必落在 EF 上

(按假設 $\angle B=\angle E$)

∴ C 必落在 F 上 § 53(2)

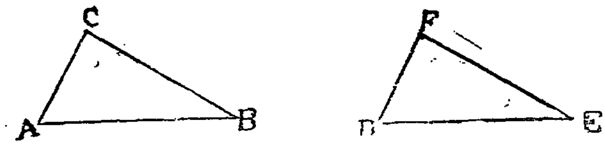
(兩直線僅能相交於一點)

即 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ § 51

註 按上命辭的定理，常用 a.s.a. 來表示

命辭二　定理

57. 設三角形有兩邊和他們的夾角同另一個三角形的兩邊和他們的夾角各各相等，這兩個形必全等。



設　ABC和DEF是兩個三角形，其中 AB＝DE, AC＝DF，$\angle A=\angle D$;

求證　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證　放$\triangle ABC$在$\triangle DEF$上，使AB和DE相合，A點落在D點上，並且C點和F點落在DE的同側。

則　B點必落在E點上

（按假設 AB＝DE）

又　AC必落在DF上

（按假設 $\angle A=\angle D$）

又　C點必落在F點上

（按假設 AC＝DF）

$\therefore$　CB必和FE相密合　§ 53(4)

（兩端密合）

$\therefore$　$\triangle ABC$和$\triangle DEF$相密合

即　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　§ 51

註　按上命辭的定理，可以用 s.a.s. 來表示。

58. 兩個全等三角形，既能完全密合，他們的相當部份，也自能密合。所以得定理如下：

全等三角形的相當部份必等。

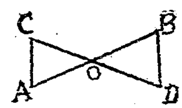
習題14　若圖中設 AB 和 CD 互相平分於 O 點，

求證　$AC=BD$

證　$AO=BO$　假設

　　$CO=DO$　假設

又　$\angle AOC=\angle BOD$　對頂角



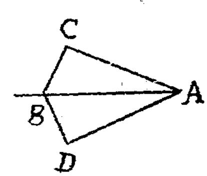
∴　$\triangle AOC=\triangle BOD$　s. a. s.

∴　$AC=BD$　§ 58

習題15　上圖中，設 O 是 CD 的中點，又 $\angle C=\angle D$，

求證　O 也是 AB 的中點

習題16　右圖中



設　AB 線平分 $\angle CAD$

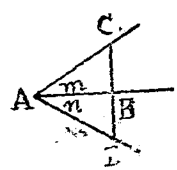
　　又平分 $\angle CBD$

求證　$\angle C=\angle D$

習題17　在上題圖中，設 AB 線平分 $\angle CAD$，又 $AC=AD$，

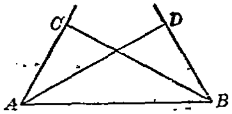
求證　$BC=BD$

習題18　右圖中，設



$\angle m=\angle n$，　$AC=AD$，

求證　$BC=BD$



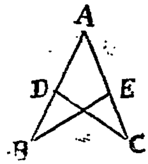
習題 19　在右圖中,設 AC=BD,

又　$\angle CAB=\angle DBA$,

求證　BC=AD

習題 20　上題的圖,設$\angle CAB=\angle DBA$,又$\angle CAD=\angle DBC$,

求證　BC=AD



習題 21　右圖中,設 AC=AB,

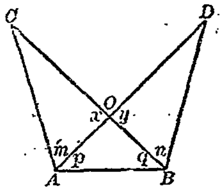
又　AD=AE

求證　BE=CD

習題 22　在上題圖中,設

AC=AB, 又 $\angle B=\angle C$,

求證　$\angle BDC=\angle CEB$



習題 23　在右圖中,設 AC=BD

$\angle CAB=\angle DBA$

求證　DO=CO

解析　按這個題不能直接根據命辭 1. 2.求得結果,所以要先利用 ABC 和 ABD 兩個三角形。證法如下:

證	$\triangle ABC=\triangle ABD$	s. a. s.
因	AC=BD	假設
又	AB 爲公共	
且	$\angle CAB=\angle DBA$	假設
	$\angle C=\angle D$	§ 58

$\angle p=\angle q$ § 58

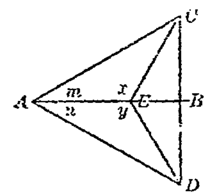
然則 $\angle CAB-\angle p=\angle DBA-\angle q$ 公理 3

卽 $\angle m=\angle n$

∴ $\triangle COA\equiv\triangle DOB$ a. s. a.

∴ $CO=DO$ § 58

習題 24 在附圖中，

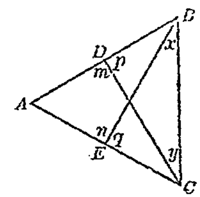


設 $\angle m=\angle n$

$\angle x=\angle y$

求證 $CB=BD$

習題 25 在附圖中，



設 $\angle DBC=\angle ECB$

又 $\angle x=\angle y$

求證 $AB=AC$

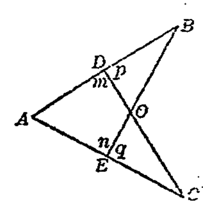
習題 26 上題的圖，

設 $AB=AC,\quad AD=AE$

求證 $\angle ABC=\angle ACB$

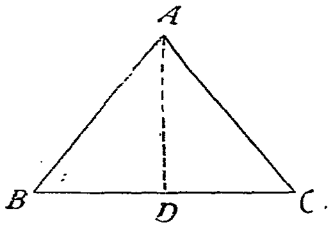
習題 27 在附圖中，設 $AB=AC,\ AD=AE,$

求證 $BO=CO$



命辭三　定理

59. 設三角形的兩邊相等，他們所對的角也相等。



上圖，設 ABC 是一個三角形，其中 $AB=AC$,

求證　$\angle B=\angle C$

證　作 AD 線，使平分 $\angle A$, 則 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 中

$AB=AC$　假設

$\angle BAD=\angle DAC$　作圖意

AD 共用

$\therefore$　$\triangle BAD\equiv\triangle DAC$　s. a. s.

所以　$\angle B=\angle C$　§ 58

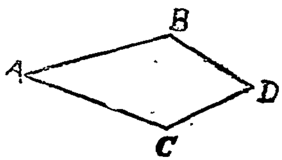
60. 定義　比較簡明的理，可由已知的理而推得的，叫做系 (Corollary)。

61. 系　凡等邊三角形，也必等角。

習題28　右圖中，$AB=AC$

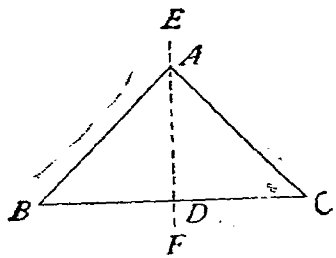
$BD=CD$

求證　$\angle B=\angle C$,



命辭四　定理

62. <u>設三角形有兩角相等，他們所對的邊也相等。</u>



設　ABC 是一個三角形，其中 $\angle B=\angle C$，

求證　　　　$AB=AC$

證　在 BC 中點 D，作 BC 的垂線 EF；用 EF 做軸，將圖對折，則 BD 必落在 DC 上。(因 $\angle EDB=\angle EDC$)

B 點必落在 C 點上，(因 $BD=DC$)，

所以　　　　AB 必和 AC 密合。

(按假設 $\angle B=\angle C$)

則　　　　AB, AC 必交 EF 在同一點，　　§ 53(2)

就是　　　　EF 必過 A 點。

$\therefore$　　　　$AB=AC$　　§ 53(4)

63. 系　<u>等角三角形也必等邊。</u>

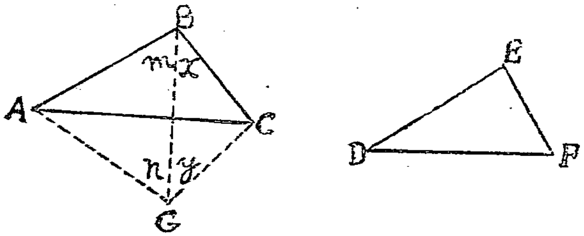
64. **逆定理**　將定理的假設和終結交換地位，所得結果，叫做<u>逆定理</u>(Converse Theorem)。比如

命辭四，便是命辭三的逆定理。凡定理雖已眞確，他的逆定理不一定眞確。

例如　「凡湖南人都是中國人」爲眞確，他的逆定理「凡中國人都是湖南人」便不眞確了。

命辭五　定理

65. <u>設三角形的三邊，和另一個三角形的三邊各各相等，這兩個形必全等。</u>



設　ABC 和 DEF 是兩個三角形，其中 $AB=DE$, $AC=DF$,　$BC=EF$,

求證　　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證　在 AC 邊的他側，作$\triangle AGC$, 使他和$\triangle DEF$全等。

(按這種作法，就是因爲$AC=DF$,又作$\angle CAG=\angle D$, $\angle ACG=\angle F$)

又作 BG 線，

因爲　　　$AB=AG$　　　§ 58

∴　$\angle m=\angle n$　命辭 3

依同理　$\angle x=\angle y$

∴　$\angle ABC=\angle AGC$　公理 2

∴　$\triangle ABC\equiv\triangle AGC$　s. a. s.

就是　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　公理 1

習題29　在習題28的圖中,設 AB=AC, 又 $\angle B=\angle C$,

求證　BD=CD (作 BC 線)

習題30　要證明兩線相等,須用甚麼方法?

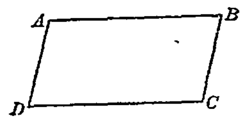
習題31　要證明兩角相等,須用甚麼方法?

習題32　要證明兩個三角形相等,須用甚麼方法?

習題33　在附圖中,設 ABCD 是一個四邊形, AD=BC,

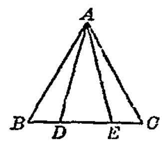
又　AB=CD,

求證　$\angle A=\angle C$。



習題34　附圖中的 $\triangle ABC$, 是等腰三角形,其中 BD=CE,

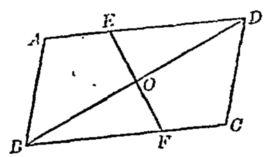
求證　AD=AE



習題35　右附圖中,設 AB=CD

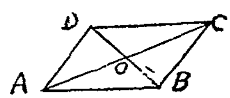
又　AD=BC,　BO=OD

求證　EO=OF

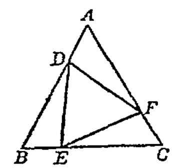


習題36　在右圖的四邊形,

設　AO=CO,　BO=DO



求證　AD=BC, 並且 AB=DC。



習題 37　在上題的圖中,

設　AD=BC,　AB=DC

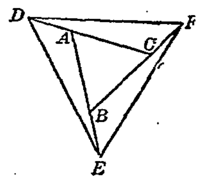
求證　AC, BD 彼此平分,

習題 38　附圖中,設

△ABC 是等邊,

又　AD=BE=CF,

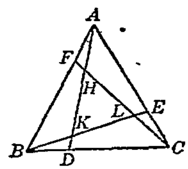
求證　△DEF 也是等邊。



習題 39　附圖中, △ABC 是等邊, 各邊依次延長,使

AD=BE=CF;

求證　△DEF 也是等邊,



習題 40　附圖的△ABC 是等邊,

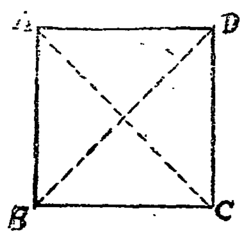
又　AF=BD=CE,

求證　△HKL 也是等邊,

習題 41　四邊形的各邊相等,各角都是直角的,叫做正方形。

附圖　ABCD 是正方形。

求證　AC=BD



第二章　簡單作圖

66. 圓和圓心 平面內的封閉曲線，各點都和面

內一定點的距離相等的，叫做圓 (Circle)；那定點叫做圓心 (Centre)；那曲線的長叫做圓周 (Circumference)。

67. 半徑，直徑 由圓心到圓的距離叫做半徑 (Radius)；經過圓心，兩端以圓爲止的線段，叫做直徑 (Diameter)。

68. 關於圓的公理：

a. 同圓的半徑都相等，同圓的直徑都相等。

b. 若兩圓的半徑相等，這兩圓必等，且能密合。

c. 若兩圓的直徑相等，這兩圓必等，且能密合。

d. 用任何點做圓心，任何距離做半徑，可作一圓。

69. 補助線 證幾何題，有時在原有圖形以外，須另加種種的線，叫做補助線 (Auxiliary Lines)。

70. 基本作圖法和作圖器具 幾何上作圖器具，祇能用兩脚規，和無分度的尺，而基本作法，不外下列三種：

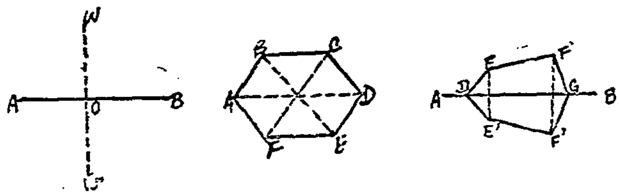
【甲】用直線聯兩點；

【乙】無限延長一線段；

【丙】用任意點做圓心，用已知線段做半徑，作圓。

利用上列三法，可定種種的點或爲兩直線的交點，或爲直線和圓的交點；或爲兩圓的交點；但我們作圖，不但要說明他的作法，並且要利用種種定理，證明所作圖的眞確。下列命辭，是最便於作圖用的。(§ 73)

71. 對稱　設聯兩點的直線，被第三點所平分，這兩點對於這平分點，叫做對稱 (Symmetry)；這平分點叫做對稱中心 (Centre of Symmetry)。



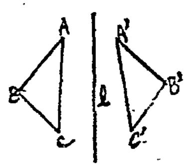
設聯兩點的直線，被一直線所垂直平分，這兩點對於這垂直平分線，叫做對稱；這直線叫做對稱軸 (Axis of Symmetry)。

如點 O 平分 ww'，則 w,w' 對於 O 爲對稱，O 是對稱中心，又線 AB 垂直平分 ww'，則 w,w' 對於 AB 爲對稱，AB 是對稱軸。

72. 對稱形　設過一點，以一圖形爲界，所作的諸直線，被這點所平分，這圖形對於這點叫做對稱，這點叫做對稱中心。

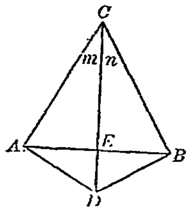
設用一直線做軸，摺轉一圖形，他的兩部份點點都能密合，這圖形對於這直線爲對稱，這直線爲對稱軸。

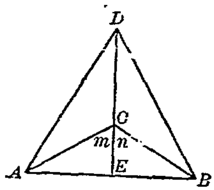
設兩形內各相當點，對於一軸爲對稱點，這兩形對於這軸爲對稱；如兩形 ABC 和 A'B'C' 內各點對於軸 l 爲對稱點，則 ABC 和 A'B'C' 對於 l 叫做對稱。



命辭六　定理

73. 設兩個等腰三角形，同作在一底上，聯結他們的頂點的直線，必定垂直平分公共底。





上圖中，設ABC和ABD是兩個等腰三角形，AB是他們的公共底，又CD線交AB於E點。

求證　　CE垂直平分AB

證1　設各頂點在公共底的兩側，

則　　$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$　　s. s. s.

(因AC=BC，又AD=BD，並且CD共用)。

∴　　$\angle m = \angle n$　　相當角

∴　　$\triangle AEC \equiv \triangle BCE$　　s. a. s.

可知　　AE=BE　　相當邊

$\angle AEC = \angle BEC$

∴　　CE垂直平分AB　　§ 20

證2　設兩頂點在公共底的同側

則　　$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$　　s. s. s.

國內教育界對於勞著平面幾何之批評

敬啓者敝所發行勞著平面幾何歷經國內各地採用學校當局先後來函批評甚多謹將原函擇要摘錄於后敬乞察閱爲荷此頌

校長先生台安

長沙勞著平面幾何發行所謹啓

(一)廣東省欽縣省立第十二中學校來函

敬啓者敝校自採用尊著以來諸生進步甚速成績斐然可觀蓋以大作編制新穎材料豐富分配章節甚爲得宜故諸生學之極感其便誠非坊間出售者所可比擬也

(二)福建省廈門私立集美中學校來函

該書編制及內容均能適合學童心理爲教育界增一教科善本爲學童闢一新捷徑實深欽佩

(三)安徽省太平縣立初級中學校來函

敝校初中二三年級幾何均已採用尊著爲教本易教易學無怪實至名歸風行遐邇

(四)湖北省立第四中學校李君達先生來函

敬啓者弟擔任中學數理講席歷十八載深恨中學幾何教本之良善者不多自先生編著之平面幾何出版以來敝省各校(如武昌中學中華大學附中第三中學第二中學等校)凡係弟所擔任者均係採用以尊著體裁新穎嘉惠教學實多無怪乎其洛陽紙貴風行一時也

(五)安徽省蕪湖私立萃文中學校教務處來函

大著平面幾何敝校已經兩度採用深覺編制妥善遠勝坊間諸本

(六)安徽省立安慶女子中學校教務處來函

敝校數學教本自大著出版後即儘量採用以其材料豐富淺明新穎教者稱便學者易學實深感激

(七)江蘇省無錫縣立女子中學校李志函先生來函

尊著平面幾何學確能迎合學童心理教學二方均覺便利

(八)浙江省臨海私立東山中學校教務處來函

敝校採用該教本歷有數年教者學者均感便利獲益非淺

(九)湖南孔道學校教務處來函

該書內容深合學生程度收效頗大

(十)湖南省立第三中學校呂鶗秋先生來函

大著平面幾何一書深以編制精當無任歡迎

(十一)安徽省潁上縣立初級中學校數學教員張君青先生來函

敝校自採用尊著勞編平面幾何以來收效甚鴻學者教者均獲益良多

(十二)浙江省嘉興私立秀州中學校教務處來函

尊著平面幾何敝校已採用教授材料編制均臻上乘

(十三)安徽省立潁州中學校來函

敝校暑期間託南京京華書局代購尊書七十部備兩班初中之用據擔任教員所談書中理解明晰次序合度教學未久已收成效

敬啓者拙著平面幾何自出版以來歷在國內各校試用多承教育界同志加以贊許二十年八月十四日蒙

國民政府教育部頒給審定執照一紙認定此書爲適合初級中學之用並與刊登教育部公報第三卷第三十三期佈告全國同年九月蒙 湖南省教育廳通令湖南全省各中等學校採用二十一年十月十二日 蒙湖北省政府教育廳通令湖北全省各中學校採用同年十二月二十二日又蒙 南京市社會局通令全市各中學校採用現在湘鄂京滬蘇皖川浙粵等處之中學採用此書者已達二百餘校且皆獲有相當成績蓋因其編制新穎內容豐富材料分配適宜迎合學童心理故教者學者均覺其便也茲爲使 先生明瞭此書內容起見特奉上說明單一紙倘承函索樣本即當如命奉贈此書暫時係由長沙私立雅禮中學校發行 貴校如須購用可託就地之書店代辦或逕函 鄙人 購買每本實價一元一角二分函購時請先付定金兩成其書即當由郵奉上不誤此頌

台安

勞啓祥謹啓

勞著平面幾何內容說明

(1)本書專備**中等學校的應用**，全書共有二百五十六頁，分做五編，裏面包含命辭一百二十條，系九十一八百零二條，恰足十個學分之用。

(2)本書內容豐富，文字淺顯，定義切實，證法簡明，**雖初學者自習，也很容易了解**。

(3)凡本書的**命辭多數是從頁面的第一行列起**，使學者可以一目了然，若是一頁的地位不足必須翻在次頁另備同樣圖形，以免學者翻頁困難。

(4)本書對於各種比較深奧的名稱**都用歸納法解釋**。先有實例，然後附以定義所以緒論極短，開課十小時便有練習證題的機會。

(5)本書材料的排列，**純粹依照心理的秩序**，現在外面的各種幾何教本，多用「凡平角皆等」做他的命。這是最大的錯誤，因爲這種定理，表面上雖然好像簡單，其實極難推證。從算學方面看來，好像沒有再簡的從教育方面看來，這些學生既然沒有證題的經驗，胸中又缺乏應用的材料，並且不能感覺這種定理存在的必要點也沒有，所以覺得極難，這種編制方法，偏重論理而忽略心理，實在是幾何教本的一大弊端，本書對於這一概不證明，只稱他們做「簡單定理」。地位大約和幾何公理相等。又因爲全等三角形的各命辭了解比較容易，用也很廣大，所以本書便將這幾個命辭列在最首。

(6)幾何學裏面的極限論一章，實在是一個大難關。現有的教本，多半拿這章放在第三編或第四編開始的地方，隨種命辭的推證，利用這極限論做根據。教者若將極限論删去。便破壞了全書的聯絡，若不删去則對於性情不近學生，耗費許多的腦力來記憶這種不能完全了解的理論，實在太不經濟，**所以本書將這極限論列在的最末**。若時間有餘，自可陸續教完。否則就是删去，也和全書大體無礙。

(7)軌跡一章，對於初學的人，也是極難了解，其實這種理論並不高深，不過名稱新奇；所以人不明白，以前教本何話語解釋軌跡的意義，愈解釋愈不明瞭，**本書對於軌跡，先用事實說明**，附以插畫，次用種實的問題來引起學生的興趣，確定學生對於軌跡的認識，最後乃述軌跡的理論。

(8)本書習題雖多但不是集中一處，每一二個命辭以後，便有習題數條。那些習題的推證。都是應用最近所習的定每編的末了作總練習一次，**這種編制方法，學生最易進功**；並且命辭和習題相間，可免去學生的弊病。

(9)本書習題種類很多，**都能切合實用**，繁簡的進度，極其均勻，大都容易證解，中間偶有含理較深的，就附，步驟較繁的，就加以說明或略解，所以很能引起學生研究的興趣。

(10)本書所用各項名詞，都是採用最新審定的；且在種種名詞的後面，**附有英文原名**，使學者日後研究西書，少困難。

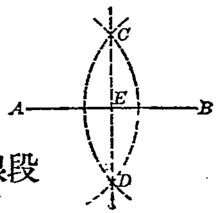
∴	$\angle ACD = \angle BCD$	§ 58
∴	$\angle m = \angle n$	§ 54(5)
∴	$\triangle AEC \equiv \triangle BEC$	s. a. s.
可知	$AE = BE$, 且 $\angle AEC = \angle BEC$	§ 58
∴	CE 垂直平分 AB	§ 20

74. 系 1　若兩點各和一線段的兩端距離相等，這兩點可定這線段的垂直平分線。

75. 系 2　設兩個等腰三角形成作在一底上所同的形必是對稱形.聯接兩形頂點的直線，就是對稱軸。

命辭七　作圖題

76. 求平分一已知線段。



設　AB 是已知線段

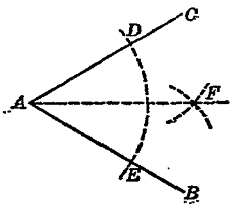
求　平分 AB

作圖法：　用 A 點 B 點做圓心，用大於 $\frac{1}{2}$ AB 的等半徑作兩弧，相遇於 C 點和 D 點，又聯結 C,D, 則 CD 線必定平分 AB。

證	C,D 兩點都和 A,B 有等距離	作圖意
∴	CD 是 AB 的垂直平分線	§ 74

命辭八 作圖題

77. 求平分已知角。



設 ∠BAC 是一個已知角，

求 平分 ∠BAC

作圖法：用 A 做圓心，用任意半徑作弧，交 AB, AC 於 D 點和 E 點又用 D,E 做圓心，用大於 $\frac{1}{2}$ DE 的等半徑作兩弧，交於 F 點，又聯結 A,F,

則 AF 必定平分 ∠A。

證 設作 DF 和 EF, 則 △DAF≡△FAE, s. s. s.

∴ ∠DAF=∠FAE § 58

78. **中線** 由三角形的一頂點，到他的對邊中點的直線，叫做這邊上的中線 (Median)。

習題 42 求分已知角為八個等份。

習題 43 求證等腰三角形底邊上的中線必垂直於他的底。

習題 44 設三角形底上的中線垂直於他的底，這個

三角形必定是等腰。

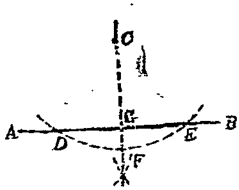
習題45　求證等腰三角形兩腰上的中線相等。

習題46　求證全等三角形的相當中線相等。

習題47　求證等腰三角形頂角的平分線垂直平分他的底。

命辭九　作圖題

79. 求從線外一已知點，作一直線，垂直於這線。



設AB是已知線，C是已知點，求從C點作AB的垂線。

作圖法：用C做圓心，用相當半徑作弧，交AB線於D點和E點。

然後用D,E做圓心，用大於$\frac{1}{2}$DE的等半徑作兩弧，相交於F點，又聯接C,F,

則　　CF是AB的垂直線。

證　C,F兩點都和D,E有等距離　　作圖意

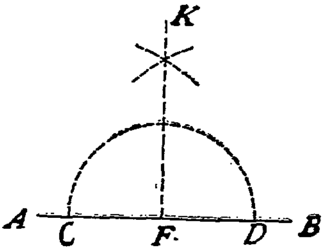
∴　　CF⊥DE，即是CF⊥AB　　§ 74

習題48　求作四十五度的角。

習題49　求作$22\frac{1^\circ}{2}$的角。

命辭十　作圖題

80. 求在線內已知點，作一直線，垂直於這線。



設　AB 是已知線，F 是線內一點，

求過 F 作 AB 的垂直線。

作圖法：　用 F 做圓心，用任意半徑做弧，交 AB 於 C,D 兩點；用 C,D 做圓心，用大於 $\frac{1}{2}$ CD 的等半徑作弧，相交於 K 點，聯接 K,F，

則 KF 是 AB 的垂直線。

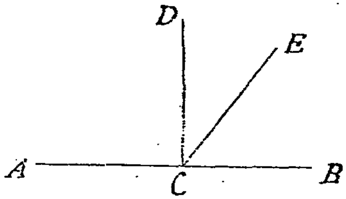
證	K,F 兩點都和 C,D 有等距離，	作圖意
∴	$KF \perp CD$	§ 74
即	$KF \perp AB$	

註：上三命辭的作角，很關重要；因爲我們既能作直角，則凡 $45°$，$22\frac{1°}{2}$ 以至於 $90° \div 2^n$ 的角，都可用幾何方法作出。

習題 50　過線內一點，求作一線，使他和已知線成 $22\frac{1°}{2}$ 的角。

命辭十一　定理

81. 由線內已知點，僅可作一直線垂直於這線。



上圖，設　　DC⊥AB

求證　過C點的任意他線，像EC這樣的，必不能垂直於AB。

證　假設　EC也⊥AB

則　∠ECB和∠DCB都是直角，　§ 21

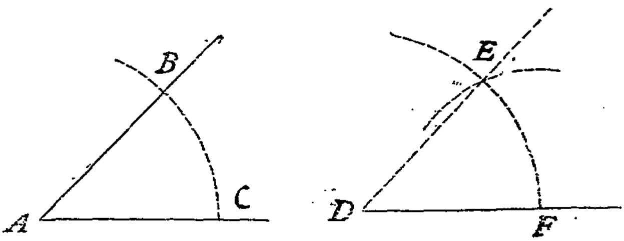
但是　∠DCB>∠ECB　公理 8

若這樣看來，便是有一直角大於他直角。但是這和§54(3)的理相反。

故知　EC必定不⊥AB。

命辭十二　作圖題

82. 求由線內已知點作一角，等於一個已知角。



設 $\angle A$是已知角，D是已知點，DF是已知線，

求 由D作一角，等於$\angle A$

作圖法：用A做圓心，用任意半徑作弧，交$\angle A$的兩邊於B,C兩點。

又用D做圓心，AB做半徑，作弧交DF於F點。

又用F做圓心，BC做半徑，作弧交EF弧於E點。

作DE線

則 $\angle EDF$便是所求的角。

證： 設作BC, EF兩線，

則 $\angle BAC = \angle EDF$ s. s. s. § 58

習題51 求作角,使等於兩個已知角的和。

習題52 求作角,使等兩個已知角的差。

習題53 求作角,使等於已知角的二倍。

習題54 已知兩角 a 和 b 求作 $3a+2b$

習題55 已知角 a 求作 $a+45°$。

習題56 求作 $67\frac{1°}{2}$ 的角。

習題57 求作角使等於某已知角的四分之一。

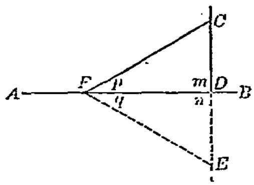
習題58 求作三角形,使其中有兩角和兩個已知角各各相等。

習題59 求作$\triangle ABC$,使

$$\angle A=45°$$
$$\angle B=67\frac{1°}{2}$$

命辭十三　定理

83. 由線外一點，僅可作一直線，垂直於這線。



設　AB是直線，C是線外一點，CD是從C到AB的垂線。

求證　由C到AB的任意他線，像CF這樣的，必不垂直於AB。

證：　延長CD到E，使DE＝CD，又作EF，

則	$\triangle CDF \equiv \triangle EDF$	s. a. s.
∴	$\angle p = \angle q$	§ 58
今已知	CDE 爲一直線	作圖意
∴	CFE 不是一直線	§ 53(3)
即	$\angle CFE$ 不是一平角	§ 23
	$\angle p$ 既爲 $\angle CFE$ 之半	
∴	$\angle p$ 不是一直角	§ 23

換句話說，就是CF或除CD外，由C到AB的任意直線，都不垂直於AB。

84. 系　一個三角形只能有一角爲直角。

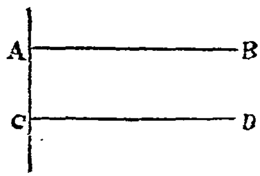
第三章

平行線

85. 定義　兩直線在一平面內，雖引到極遠，終不相遇的，叫做兩平行線 (Parallel Lines)。

命辭十四　定理

86. 設兩直線在一平面內，同垂直於一直線，這兩線必平行。



設　AB和CD都垂直於AC

求證　　　　AB ∥ CD。

證：設AB不平行於CD，則引長他們終必相遇；這樣，便是由相遇點，可作兩直線，垂直於同一直線，這是不合理的。　§ 83

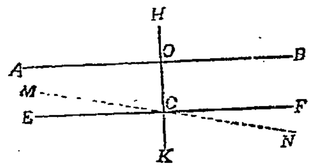
∴　　　　AB ∥ CD。　§ 85

87. 公理　過一已知點，僅可作一直線和一已知線平行。

88. 系　設兩直線在一平面內，各和第三直線平行，這兩線也必平行。

命辭十五 定理

89. 設一直線，垂直於兩平行線中的一線，也必垂直於他一線。

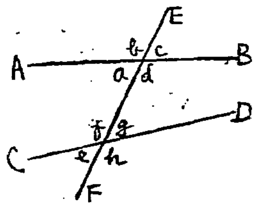


設 AB 和 EF 是兩平行線，並設 HK 垂直於 AB，截 EF 於 C，

求證	HK 也 ⊥ EF	
證	設過 C 作 MN ⊥ HK	
則	MN ∥ AB	§ 86
但	EF ∥ AB	假設
∴	EF 和 MN 重合	§ 87
又	MN ⊥ HK	作圖意
∴	EF ⊥ HK	
即是	HK ⊥ EF	

90. **截線**　一直線和他兩直線或數線相交，這直線稱爲其餘兩線或數線的截線(Transversal)。

91. 設截線 EF 和兩任意直線 AB 同 CD 相交成 a, b, c, d, e, f, g, h 等八角，其中 a, d, g, f 叫做內角



(Interior Angles)，而其餘的 b, c, e, h 等四角，便叫做外角 (Exterior Angles)；d 和 f 叫做內錯角 (Alternate Interior Angles)， 又 a 和 g 也叫做內錯角， b 和 h 或 c 和 e 都叫做外錯角 (Alternate Exterior Angles)，b 和 f 叫做同位角 (Corresponding Angles)，又叫做內外角 (Exterior Interior Angles)，又 c 及 g, a 及 e, h 及 d 都是同位角。

這八個角中間互相的關係很多，看了下列的習題和各命辭，自然明白。

習題 60　設一截線垂直於數平行線中的一線，也必垂直於其餘各線。

習題 61　指出上圖相等的各角，和相補的各角。

習題 62　設上圖 $\angle b=\angle h$，則其餘各角那幾個相等那幾個相補？

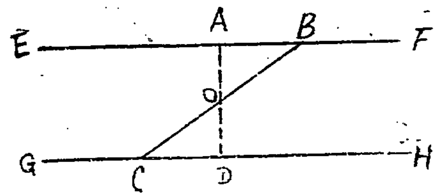
習題 63　設圖中 $\angle a=\angle f=\angle d$，則截線 EF 對於直線 AB 和 CD 的關係如何？

習題 64　上圖中設 $\angle d=\angle a+30°$，
求 $\angle d$ 和 $\angle a$ 的度數。

習題 65　設圖中 $\angle f$ 等於 $\angle g$ 的二倍，求 e 角的大小。
又設圖中 $\angle f=3\angle g$，求 e 角的大小。

命辭十六　定理

92. 若兩平行線被一截線所截，他們的內錯角必定相等。



設 EF 和 GH 兩平行線，被一截線 BC 所截，

求證　$\angle EBC = \angle BCH$

證　過 BC 的中點 O，作 $AD \perp GH$

則　AD 也必 $\perp$ EF　§ 89

即　CD 和 BA 都 $\perp$ AD。

放 $\angle COD$ 在 $\angle BOA$ 上，使 OD 落在 OA 上，

則　OC 落在 OB 上，

（因 $\angle BOA$ 和 $\angle COD$ 是對頂角）

且　點 C 落在點 B 上，

（因 $OC = OB$）

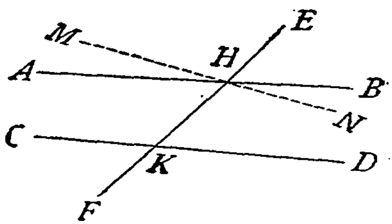
則　CD 落在 AB 上，　§ 83

∴　$\angle OCD$ 和 $\angle OBA$ 密合，並且相等。　§ 51

習題 66　設兩平行線被一截線所截，則他們的外錯角必定相等。

命辭十七　定理

93. 逆定理 若兩直線在一平面內，被一截線所截，他們的內錯角若相等，這兩線必定平行。



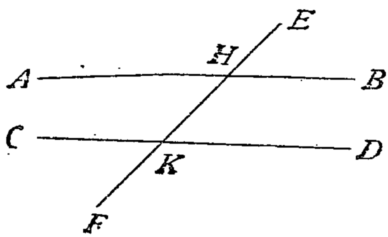
設　截線 EF，截 AB 和 CD 於兩點 H 和 K，並設兩角 AHK 和 HKD 相等。

求證	$AB \parallel CD$	
證	設過 H 作 $MN \parallel CD$	
則	$\angle MHK = \angle HKD$	§92
但是	$\angle AHK = \angle HKD$	假設
∴	$\angle MHK = \angle AHK$	公理 1
∴	MN 和 AB 重合	
但	$MN \parallel CD$	作圖意
∴	AB 也 $\parallel$ CD	

習題67　設兩直線在一平面內，被一截線所截，若他們的外錯角相等，這兩線必定平行。

命辭十八　定理

94. 若兩平行線被一截線所截，他們的同位角必定相等。



設 AB 和 CD 兩平行線，被截線 EF 所截於 H 點和 K 點，

求證　$\angle EHB = \angle HKD$

證　$\angle EHB = \angle AHK$　（對頂角相等）

$\angle AHK = \angle HKD$　§ 92

∴　$\angle EHB = \angle HKD$　公理 1

依同理　$\angle EHA = \angle HKC$

95. 系　在上命辭中兩外錯角 EHB 和 CKF 相等，又兩外錯角 AHE 和 DKF 也相等。

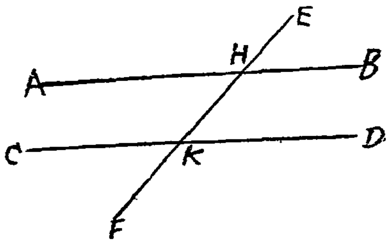
命辭十九　定理

96. 逆定理　若兩直線在一平面內，被一截線所截，他們的同位角若相等，這兩線必定平行。

（學者自證之）

命辭二十　定理

97. 若兩平行線被一截線所截，在截線同側的兩內角互為補角。

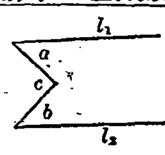


設　AB和CD兩平行線，被截線EF截於H點和K點，

求證	∠BHK和∠HKD互為補角	
證	∠EHB+∠BHK=1st∠	§54(7)
但是	∠EHB=∠HKD	§94
∴	∠BHK+∠HKD=1st∠	
∴	∠BHK和∠HKD互為補角	§32

命辭二十一　定理

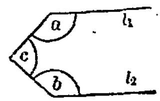
98. **逆定理**　若兩直線在一平面內，被一截線所截，在截線同側的兩內角若互為補角，這兩線必平行。　(學者自證之 §96)



習題68　設附圖的 l_1 和 l_2 平行

求證　∠a+∠b=∠c

習題69　上題圖中設∠a+∠b=∠c，求證 l_1 和 l_2 平行。



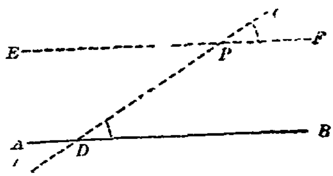
習題70　附圖中,設 l_1 和 l_2 平行

求證　$\angle a+\angle b+\angle c=2st\angle s$

習題71　試述上題的逆定理,並證明出來。

命辭二十二　作圖題

99. <u>經過已知點，求作直線，和一已知直線平行。</u>



設 AB 是已知線，P 是線外一已知點，求過 P 作 AB 的平行線。

作圖法:　過 P 點作直線，截 AB 線於 D 點。

作　$\angle CPF=\angle CDB$　§ 82

則　EF 便和 AB 平行。

證　$\angle CPF=\angle CDB$　作圖意

∴　EF 和 AB 平行。　§ 96

習題72　過三角形的頂,求作一線和底平行。

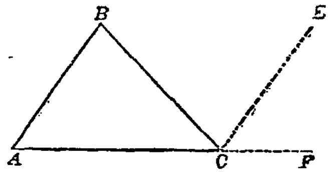
習題73　若一角的兩邊,和他角的兩邊各各平行,這兩角必相等或相補。

習題74　若一個三角形的邊和他三角形的邊各各相平行,並且有一相當邊相等,這兩形必全等。

第四章　多邊形的角

命辭二十三　定理

100. <u>三角形各內角的和，等於兩個直角</u>。



設　$\angle A$, $\angle B$, $\angle BCA$ 是 $\triangle ABC$ 的三個角，

求證　$\angle A+\angle B+\angle BCA=2rt\angle s$

證　作 $CE \parallel AB$ 並且引長 AC 到 F

則　$\angle ECF+\angle ECB+BCA=2rt\angle s$

但是　$\angle A=\angle ECF$　（同位角）

$\angle B=\angle BCE$　（內錯角）

今用 $\angle A$ 和 $\angle B$,代他們的相等值 $\angle ECF$, $\angle BCE$,

則得　$\angle A+\angle B+\angle BCA=2rt\angle s$

101. 系一　<u>三角形內任何兩個角的和，小於兩個直角</u>。

102. 系二　<u>從兩個直角內．減去三角形任何兩個角的和，所餘的就等於第三個角</u>。

103. 系三　<u>設兩個三角形，有兩個角彼此各相等，他們的第三個角也必相等</u>。

104. 系四　設兩個直角三角形，有一個銳角彼此相等　則其他一個銳角也相等。

105. 系五　凡三角形僅能有一個直角或鈍角。

106. 系六　直角三角形內，兩個銳角的和，等於一個直角或90°。

107. 系七　等角三角形內，每一個角等於兩個直角的三分之一或60°。

108. 系八　三角形的一個外角，等於兩個內對角的和，所以大於兩角中的任一角。

109. 系九　設兩個三角形，有兩個相當角和一相當邊彼此各相等　這兩個形必全等。

110. 系十　設兩個直角三角形，有一腰和一相當銳角彼此各相等，這兩個形必全等。

習題75　在△ABC中，∠A等於∠B的四倍，∠C比A,B兩角的和多30°；求各角。

習題76　在△ABC中，∠A=∠B，又∠C=∠A+∠B；求各角的大小。

習題77　直角三角形的一銳角，等於他一銳角的四倍；求各角的大小。

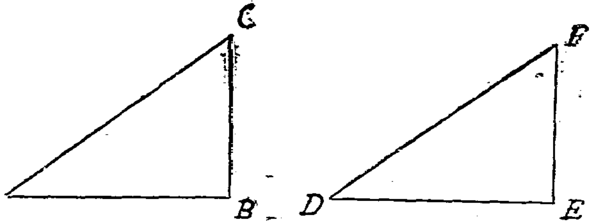
習題78　等腰三角形的頂角，比他的每一底角多30°；求各角的大小。

習題79　等腰三角形的頂角等於他的兩個底角的

和,求各角。

命辭二十四 定理

111. 若兩個直角三角形，有斜邊和一銳角各各相等這兩個形全等。



設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是兩個直角三角形，其中 $\angle A=\angle D$, 又 $AC=DF$,

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$。

證 $\angle C=\angle F$ § 104

∴ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ a. s. a.

註：按上命辭的定理普通用 rt△h a. 來表示。

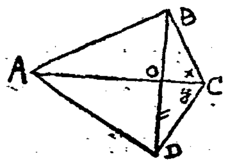
習題80 已知直角三角形的一個銳角,求作他一銳角。

習題81 附圖中 $\angle x=\angle y$,

$\angle ABC=\angle ADC$,

$=rt\angle$

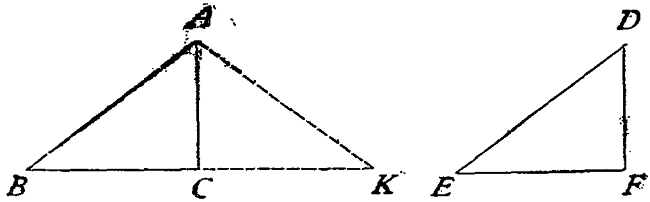
求證 $BO=DO$



習題82 上題中,又求證 $\angle ABO=\angle ADO$.

命辭二十五　定理

112.　若兩個直角三角形，有斜邊和一腰各各相等，這兩個形必全等。



設　$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是兩個直角三角形，其中

$$AB = DE$$

$$AC = DF$$

求證　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證　將 $\triangle DEF$ 反放在 $\triangle ABC$ 的旁邊，使 DF 和 AC 密合，則 $\angle BCK$ 必等於一平角。(因平角等於兩直角)

即是　BCK 成一直線　§ 23

又因爲　$AB = DE$

$\therefore$　$\triangle ABK$ 是一個等腰三角形。

$\therefore$　$\angle B = \angle K$　§ 59

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle ACK$　§ 111

即　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　公理 1

習題 83　若三角形的高，平分他的底，這個形必是等腰。

習題84　若三角形的高,平分他的頂角,這個形必是等腰。

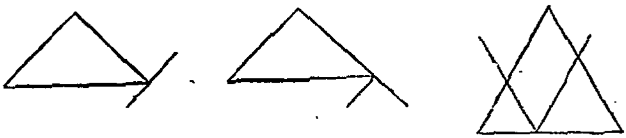
習題85　從等腰三角形兩腰中點,到他底上的垂線相等。

習題86　等腰三角形,兩腰上的高相等。

習題87　全等三角形的兩相當高相等。

習題88　全等三角形,相當角的平分線相等。

習題89　利用下列各圖,求證命辭二十三的定理。



習題90　三角形的任一角,等於其他兩個角的和的補角。

習題91　附圖中,設

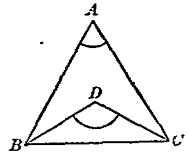
$\angle a+\angle b=st\angle$ 問這個三角形是甚麼三角形?

習題92　鈍角三角形兩個銳角的和,還是一個銳角。

習題93　等腰三角形兩個底角平分線交成的角,必和任一底角互為補角。

習題94　設一個角的兩邊,和他個角的兩邊互成垂直,這兩角必相等,或為補角。

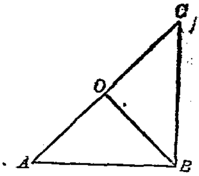
習題95　由直角三角形直角頂點,到他的斜邊上的垂線必分這形為兩個直角三角形,他們的銳角彼此相等。



習題96　由角的平分線上任意點,到兩邊所作的垂直線,必和這平分線成等角。

習題97　附圖中,

求證　　$\angle D$大於$\angle A$。



習題98　附圖$\triangle AOB$為等腰三角形,延長AO到C,使

$$OC=AO$$

求證　$\triangle ABC$為直角三角形。

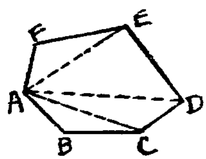
113. 定義　平面形以直線為界的，叫做直線形(Rectilinear Figures)，又叫做多邊形(Polygon)。多邊形的邊，角，周界，頂點，等等定義，和三角形的各項相同。

多邊形的邊數為四的，叫做四邊形(Quadrilateral)；邊數為五的，叫做五邊形(Pentagon)：邊數為六的，叫做六邊形(Hexagon)；以下如此類推。

多邊形中。連接兩個不相鄰角的頂點的直線，叫做對角線(Diagonal)。

命辭二十六 定理

114. <u>多邊形各內角的和，等於用邊數減二乘兩個直角的積。</u>



設 ABCDEF 是一個多邊形，他的邊數是 n,

求證 $\angle A+\angle B+\angle C\cdots\cdots=(n-2)2rt\measuredangle$

證 從A點作許多對角線；則各三角形內角的和，等於這多邊形內角的和。

今共有 $(n-2)$ 個三角形，

而每一個三角形內角的和，是 $2rt\measuredangle$。 §100

∴ 各三角形的內角總和，是 $(n-2)2rt\measuredangle$，

即是多邊形的各內角的和，是 $(n-2)2rt\measuredangle$。

習題99 三角形諸內角的和,共多少度?

習題100 四邊形五邊形六邊形各內角的和各爲多少度?

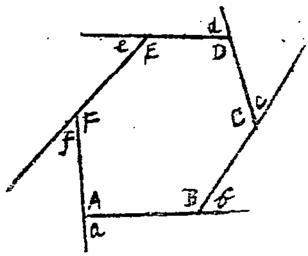
習題101 八邊形和十邊形各內角的和各多少度?

習題102 某五邊形的各角相等,問每一角多少度?

習題103 某十邊形的各角相等,問每一角多少度?

命辭二十七 定理

115. 順次延長多邊形各邊所成各外角的和，等於四個直角。



設 ABCDEF 是一個多邊形，順次延長他的各邊。

求證 各外角的和是 4rt$\angle$s

證 用 A,B,C,D,E,F, 表這多邊形的各內角，又用 a, b, c, d, e, f, 表他們的相當外角，

則 $\angle A+\angle a=2$rt$\angle$s,

依同理 $\angle B+\angle b=2$rt$\angle$s,

$\angle C+\angle c=2$rt$\angle$s,

其餘各角也是這樣。

$\therefore$ n邊的多邊形各內角外角的總和，是 2nrt$\angle$s。

但是 按上題曉得各內角的和$=(n-2)2$rt$\angle$s

$=2n$rt$\angle$s-4rt$\angle$s

$\therefore$ 各外角的和是 4rt$\angle$s。

116. 定義 多邊形各角相等的，叫做等角多邊形(Equiangular Polygon)；各邊相等的，叫做等邊多邊形(Equilateral Polygon)；各邊相等各角也相等的，叫做正多邊形(Regular Polygon)。

習題104 四邊形有三個角是直角，求證第四角也是直角。

習題105 四邊形的三個角是70°,80°和100°求第四角。

習題106 若四邊形有兩個對角互為補角，求證其餘二角也互為補角。

習題107 若兩平行線被一截線所截，則各內角的平分線必互相垂直。

習題108 等腰三角形底角的平分線，和底上兩外角的平分線圍成四邊形，這形的兩個對角必互為補角。

習題109 問九邊形各內角的和是多少度？

習題110 問正十邊形的一個內角是多少度？

習題111 多邊形各內角的和是20rt$\angle$s，求邊數。

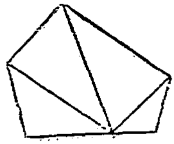
習題112 某多邊形各內角的和，等於各外角的和的五倍，求這形的邊數。

習題113 多邊形內角的和，比他的外角的和多8rt$\angle$s，求這形的邊數。

習題114 正多邊形的一個內角和他的一個外角的比為3:2求這形的邊數。

習題115　正多邊形的一個外角是20°,求這形的邊數。

習題116　利用附圖證明命辭二十六的定理。



習題117　從五邊形的一頂點可作幾根對角線?又問五邊形內共可作幾根對角線?

習題118　從 n 邊形的一頂點,可作幾根對角線?又問在 n 邊形內共可作幾根對角線?

習題119　銳角三角形或直角三角形的一個外角必定不是銳角。

習題120　若三角形兩個角的和,等於第三角,這形必是直角三角形。

習題121　若兩個等腰三角形的頂角,互為補角,則甲形的一底角,必和乙形的一底角互為餘角。

習題122　若三角形底邊上的中線,等於底的一半,這形必是直角三角形。

習題123　若四邊形有兩邊平行,其餘兩邊相等,(不必平行)這個形內兩個對角的和,必等於其餘兩個角的和。

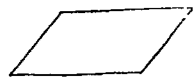
習題124　從三角形底的兩端所作他兩邊的垂線必交成一角,這個角和頂角成補角。

第五章　四邊形

117. 四邊形 直線形的邊數爲四的，叫做四邊形(Quadrilateral)。各邊叫做四邊形的邊，每兩邊所成的角叫做四邊形的角。各角的頂點，叫做四邊形的頂點。

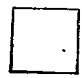
118. 梯形 四邊形有兩邊相平行的，叫做梯形(Trapezoid)。

119. 平行四邊形 四邊形每兩對邊相平行的叫做平行四邊形(Parallelogram)。

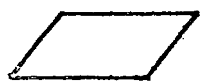


120. 矩形 平行四邊形各角都是直角的，叫做矩形，又叫做長方形(Rectangle)。

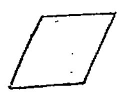
121. 正方形 矩形的各邊相等的，叫做正方形(Square)。



122. 斜矩形 平行四邊形的角都是斜角的，叫做斜矩形(Rhomboid)。



123. 菱形 平行四邊形的各邊相等的，叫做菱形(Rhombus)。

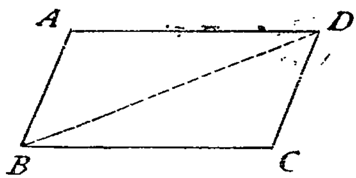


124. 底　平行四邊形的上下兩邊都叫做<u>底</u>。

125. 平行線間的距離　兩平行線在一公共垂線上所截的線段，叫做<u>這兩線間的距離</u>。

命辭二十八　定理

126. <u>平行四邊形的各對邊相等</u>。



設　ABCD是一個平行四邊形，

求證　$AB=CD$

又　$AD=BC$

證　作對角線 BD

則　$\triangle ABD \equiv \triangle BCD$　a. s. a.

因　$\angle ABD=\angle CDB$　內錯角

$\angle BDA=\angle DBC$

BD 爲共用

∴　$AB=CD$

$AD=BC$　§ 58

127. 系一　<u>平行四邊形的各兩對角相等</u>。

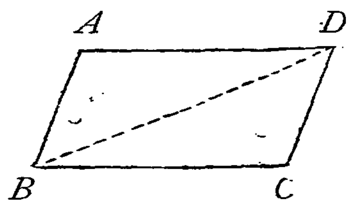
128. 系二　平行線界在兩平行線間的必相等。

129. 系三　兩平行線的距離處處相等。

130. 系四　平行四邊形的兩鄰角互爲補角。

命辭二十九　定理

131. 若四邊形的兩對邊各各相等，這形必是平行四邊形。



設　ABCD是一個四邊形，其中

$AB = CD$,

$AD = BC$,

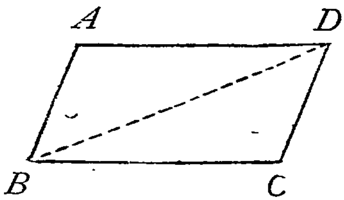
求證　ABCD是一個平行四邊形。

證	作對角線BD	
則	$\triangle ABD \cong \triangle DBC$	s. s. s.
因	$AB = CD$	假設
	$AD = BC$	假設
$\therefore$	$\angle ABD = \angle BDC$	§ 58
$\therefore$	$AB \parallel DC$	§ 93
依同理	$\angle ADB = \angle DBC$	
$\therefore$	$AD \parallel BC$	§ 93

∴　ABCD是一個平行四邊形。　§ 119

命辭三十　定理

132. 若四邊形有兩邊平行且相等，這形必是平行四邊形。



設　ABCD是一個四邊形，其中

AB＝CD,

又　AB ∥ CD,

求證　ABCD是一個平行四邊形。

證　作對角線BD

則　△ABD≡△CBD　s. a. s.

因　AB＝CD

BD爲共用

∠ABD＝∠BDC　(內錯角)

∴　AD＝BC

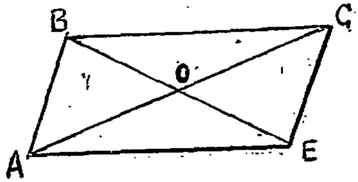
∴　ABCD是一個平行四邊形。　§ 131

習題125　曉得兩邊和夾角,求作平行四邊形。

習題126　若四邊形有兩邊平行且相等,其餘兩邊也必平行且相等。

命辭三十一 定理

133. <u>平行四邊形的對角線必彼此平分。</u>



設 ABCE 是一個平行四邊形，他的對角線 AC, BE 相交於 O 點。

求證 $AO = CO$

$BO = EO$

證 $AB = CE$ § 126

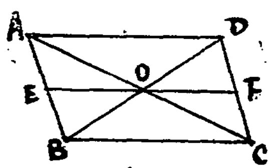
$\angle ABO = \angle CEO$

$\angle BAO = \angle ECO$ （內錯角）

$\therefore$ $\triangle AOB \equiv \triangle COE$ a. s. a.

$\therefore$ $AO = CO$

$BO = EO$ § 58



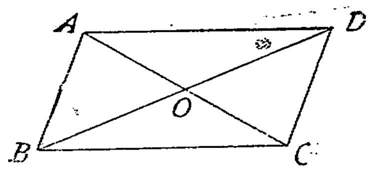
習題127 在□ABCD 中, AE=EB, EO 的延長線交 DC 於 F, 求證 DF=FC

習題128 在上題中, 又求證 EF 和 AD 平行且相等。

習題129 設 E 是 AB 邊上的任意點, 求證 EO=OF

命辭三十二　定理

134. 若四邊形的對角線彼此平分，這形必是平行四邊形。



設　ABCD是一個四邊形，AC和BD是他的對角線。

若　　$AO=OC$,

　　$BO=OD$,

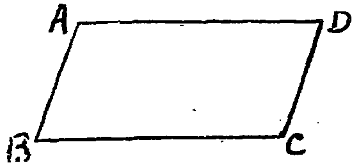
求證　ABCD是一個平行四邊形。

證	$AO=OC$	
	$BO=OD$	假設
	$\angle AOB=\angle DOC$	對頂角
∴	$\triangle AOB\equiv\triangle DOC$	s. a. s.
∴	$\angle BAO=\angle DCO$	§ 58
∴	$AB\parallel DC$	§ 93
又	$AB=DC$	§ 58
∴	ABCD是一個平行四邊形。	§ 132

習題130　在$\triangle ABC$中，設AB的延長線$BD=AB$，又CB的延長線$BE=CB$，求證$DE\parallel AC$。

命辭三十三 定理

135. <u>若四邊形的兩對角各各相等，這形必是平行四邊形。</u>



設 ABCD 是一個四邊形，其中 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$,

求證 ABCD 是一個平行四邊形。

證 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(4-2)2\text{rt}\angle s$

$=4\text{rt}\angle s$ § 114

今 $\angle A=\angle C$

$\angle B=\angle D$ 假設

∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$

$=\angle A+\angle B+\angle A+\angle B$

$=2(\angle A+\angle B)=4\text{rt}\angle s$ 公理 1

即 $\angle A+\angle B=2\text{rt}\angle s$ 公理 7

∴ $AD \parallel BC$ § 98

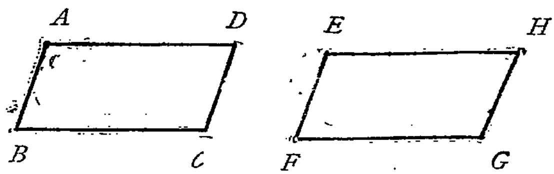
依同理 $AB \parallel DC$

∴ ABCD 是一個平行四邊形。 § 119

習題 131. 若四邊形的任意兩鄰角都相補，這形必是一個平行四邊形。

命辭三十四　定理

136. 若兩個平行四邊形有兩邊和一個夾角彼此各相等，這兩形必全等。



設　ABCD 和 EFGH 是兩個平行四邊形，其中 AD＝EH,　AB＝EF,　∠A＝∠E,

求證　▱ABCD≡▱EFGH

證　放 ▱ABCD 在 ▱EFGH 的上面，使 A 點落在 E 點上，且 AB 落在 EF 上。

則　B 點必落在 F 點上，
(因 AB＝EF)
AD 必落在 EH 上，
(因 ∠A＝∠E)
D 點必落在 H 點上，
(因 AD＝EH)

∴　DC 和 HG 密合　§ 87

依同理　BC 和 FG 也密合

∴　C 點落在 G 點上，　§ 53(2)

∴　▱ABCD≡▱EFGH　§ 51

習題 132 求證菱形的對角線互相垂直。

習題 133 若平形四邊形有一個角是直角，求證其餘三個角都是直角。

習題 134 求證矩形的對角線相等。

習題 135 設平行四邊形的對角線相等，求證這形必是矩形。

習題 136 設平行四邊形的對角線互相垂直，求證這形是等邊。

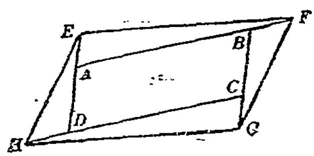
習題 137 求證菱形的對角線，必平分其所經過的角。

習題 138 設平行四邊形，有一對角線平分他所經過的角，這形必是等邊。

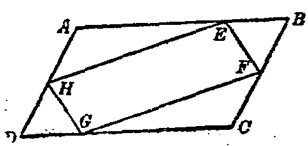
習題 139 設右圖 ▱ABCD 的邊依次延長，使

AE＝CG, BF＝DH,

求證 EFGH 也是平行四邊形。



習題 140 設 ABCD 是平行四邊形，又 DH＝DG＝BE＝BF，求證 EFGH 也是平行四邊形。

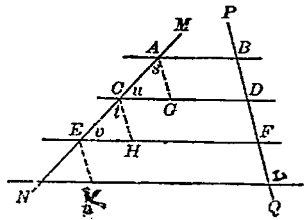


習題 141 要證兩線相等，共有幾種方法？

習題 142 要證兩角相等，共有幾種方法？

命辭三十五　定理

137. 設數平行線在一截線上截等份，他們在任一他截線上也必截等份。



設　AB, CD, EF 數平行線在截線 MN 上截等份，

求證　這些平行線在任一他截線像 PQ 這樣的上面也截等份。

證　作 AG, CH, 兩線使他們都和 PQ 平行，

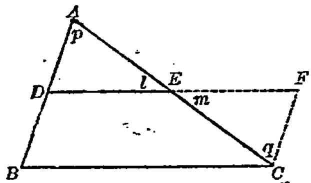
則	$AG \parallel CH$	§ 88
∴	$\triangle ACG \equiv \triangle CEH$	a. s. a.
∴	$AG = CH$	§ 58
又	ABDG 是平行四邊形	§ 119
∴	$AG = BD$	§ 126
	CHFD 是平行四邊形	
∴	$CH = DF$	§ 126
即	$BD = DF$	公理 1

依同理：　若作 $EK \parallel PQ$, 也可證明 $BD = FL$。

138. 系　過三角形的一邊中點，和第二邊平行的線，必平分他的第三邊。

命辭三十六 定理

139. 連接三角形兩邊中點的線，必和第三邊平行，且等於第三邊的一半。



設 在 $\triangle ABC$ 中，DE 線平分 AB 和 AC 兩邊

求證 $DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$。

證 作 $CF \parallel AB$, 且引長 DE, 遇 CF 於 F 點。

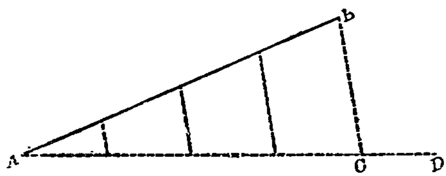
則	$\triangle AED \equiv \triangle ECF$	a s. a.
因	$AE = EC$	
	$\angle l = \angle m$	對項角
	$\angle p = \angle q$	§ 92
∴	$AD = FC$	§ 58
但	$AD = DB$	假設
∴	$FC = DB$	公理 1
如今曉得	$FC \parallel DB$	作圖意
∴	DFCB 是一個平行四邊形。	§ 132
∴	$DF \parallel BC$,	
即是	$DE \parallel BC$。	
且	$DF = BC$	§ 126

但　　$DE=EF$　　§ 58

即　　$DE=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}BC$

命辭三十七　作圖題

140. 求分一已知線段爲數等份。



設　AB 是已知線段，

求分 AB 爲若干等份。

作圖法　過 A 點作任意線 AD，又在 AD 線上取任意長的若干倍 AC，使這倍數等於所求等分 AB 的份數，連結 B,C 二點，經過 AC 上各分點，作 BC 的平行線。這幾根平行線必分 AB 爲所求的等份。

證　這些平行線既然在 AC 線上截等份　作圖意

所以他們必也在 AB 線上截等份　§ 137

141. **梯形的底和腰**　梯形的兩平行邊叫做兩底 (Bases)，其餘兩邊叫做腰 (Legs)。

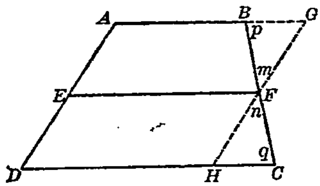
142. **等腰梯形**　梯形的兩腰相等者，叫做等腰梯形 (Isosceles Trapezoid)。

143. **梯形的中線**　連結梯形兩腰中點的直線，

叫做梯形的中線(Mid-line)。

命辭三十八 定理

144. 梯形的中線必和兩底平行，並且等於兩底的和的一半。



設 ABCD是一個梯形，EF是他的中線，

求證 $EF \parallel AB$ 和 CD

又 $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

證 過F作點GH線，使他和AD平行，並且和CD交於H點，和AB的延長線交於G點。

則	$\triangle BFG \equiv \triangle HFC$	a. s. a.
但是	AGHD是平行四邊形	定義
∴	$AD = GH$	§ 126
所以曉得	$AE = GF$	公理 7
∴	AGFE是平行四邊形	§ 132
依同理	EFHD也是平行四邊形	
∴	$EF \parallel AG$　　$EF = AG$	§ 126
	$EF \parallel DH$　　$EF = DH$	

$$\therefore \quad EF=\frac{1}{2}(AG+DH)$$
$$=\frac{1}{2}(AB+BG+DH)$$
$$=\frac{1}{2}(AB+CD)$$

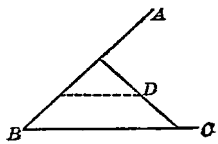
145. 系　若一直線和梯形的底平行，並且平分他的一腰，這直線也必平分其餘一腰。

習題 143　連接四邊形各邊中點的直線，必圍成平行四邊形。（作對角線）

習題 144　連接矩形各邊中點的直線，必圍成菱形。

習題 145　連接菱形各邊中點的直線，必圍成矩形。

習題 146　連接三角形各邊中點的直線，必分這形爲四個全等三角形。



習題 147　設附圖中 D 是 ∠ABC 內的一點求過 D 點作一線，到 ∠ABC 的兩邊爲止，並且被 D 點所平分。

習題 148　試分一直線成兩段，使兩段長度的比爲 3 : 5。

習題 149　求證等腰梯形的對角線相等。

習題 150　若梯形的底角相等，求證這形是等腰。

習題 151　若梯形的對角線相等，求證這形是等腰。

習題 152　已知兩底和兩腰，求作梯形。

習題 153　已知兩底和兩底角，求作梯形。

第六章 不等式

146. 不等式 若是一量比他量大些，或比他量小些，這二量間的關係，叫做不等式（Inequality）。

關於不等式公理，已在第52段詳舉；現在爲便利推證起見，再加述下列四條：

a. 若第一量比第二量大些，又第二量比第三量大些，第一量必定比第三量大些。

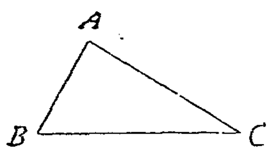
b. 三角形的外角，必定比他的任一內對角大些。

c. 在直角三角形或鈍角三角形中，那直角或鈍角必是三角形中最大的角。

d. 凡一量可用他的等量來代替。

命辭三十九 定理

147. 三角形任意兩邊的和必定比第三邊大些。



設	ABC是一個三角形	
求證	AB+AC>BC	
證	BC是一直線	§ 17
∴	BAC 不是直線	§ 53(3)
∴	BAC>BC	§ 53(9)

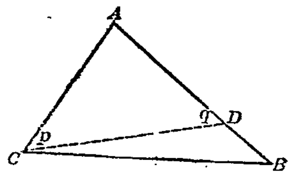
即是　　$AB+AC>BC$

148. 系一　三角形任意兩邊的差，必定比第三邊小些。

149. 系二　多邊形的任一邊，必定比其餘各邊的和小些。

命辭四十　定理

150. 若三角形的兩邊不等，他們所對的角也必不等，大邊必對大角。



設　$\triangle ABC$中，AB比AC大些，

求證　$\angle C>\angle B$。

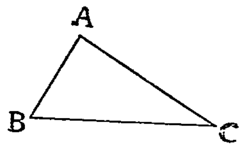
證　在AB上，拿$AD=AC$，

連接C,D兩點，

則	$\angle p=\angle q$	§ 59
今	$\angle ACB>\angle p$	公理 8
∴	$\angle ACB>\angle q$	§ 146(*d*)
又	$\angle q>\angle B$	§ 146(*b*)
∴	$\angle ACB>\angle B$	§ 146(*a*)
就是	$\angle C>\angle B$。	

命辭四十一　定理

151. 若三角形的兩角不等，他們所對的邊也必不等，大角必對大邊。



設　ABC 爲三角形，其中 $\angle B > \angle C$

求證　$AB < AC$

證　AB 或比 AC 大些，或等於 AC，或比 AC 小些。　§ 53(6)

設　$AB = AC$

則　$\angle C = \angle B$　§ 59

但這和假設相反。

設　$AB > AC$,

則　$\angle C$ 必大於 $\angle B$,　§ 150

但這也和假設相反。

$AB < AC$。

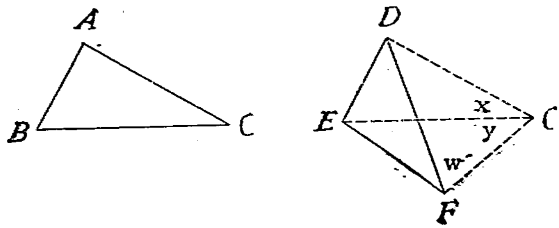
152. 系一　直角三角形的斜邊，必定比他的任一腰大些。

153. 系二　垂線是從一點到一直線的最短的線

習題154　矩形的一對角線，必定比他的任一邊大些。

命辭四十二　定理

154. 設兩個三角形，有兩邊彼此各相等，但甲形的夾角比乙形的夾角大些，則甲形的第三邊也必比乙形的第三邊大些。



設　ABC 和 DEF 是兩個三角形，其中

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

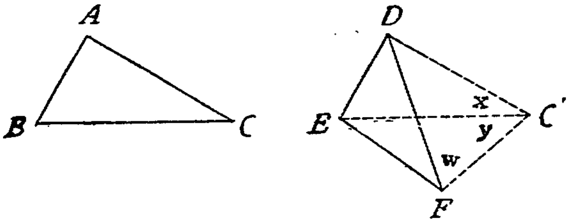
$$\angle A > \angle D,$$

求證　$BC > EF$。

證　在 DE 邊上，作 $\triangle DEC'$，使他和 $\triangle ABC$ 全等。

作 $C'F$ 線，

則	DC' 必落在 $\angle EDF$ 的外邊。	假設
今	$DC' = AC$	§ 58
	$AC = DF$	假設
∴	$DC' = DF$	公理 1
∴	$\angle w = \angle x + y$	§ 59
但	$\angle EFC' > \angle w$	公理 8



∴ $\angle EFC' > \angle x+y$ § 146(*d*)

∴ $\angle EFC' > \angle y$ § 146(*a*)

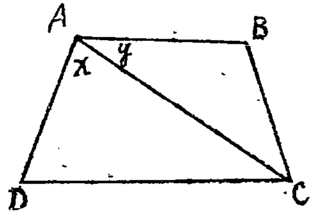
∴ $EC' > EF$ § 151

即 $BC > EF$ § 146(*d*)

習題155 在右圖中,設

$AB=AD$, $\angle x > \angle y$,

求證 $DC > BC$。



習題156 上題中,設

$\angle x = \angle y$,

則DC和BC間的關係當如何?

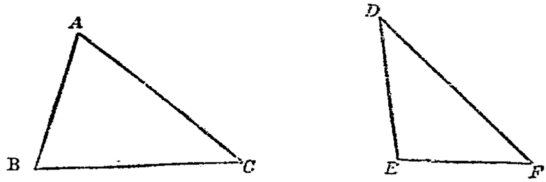
習題157 同圖中,設$\angle x$等於$\angle y$的二倍,則DC是否也是BC的二倍?

試用量角器作圖,並用尺量二線,來核驗這答案。

習題158 又設$\angle x$等於$\angle y$的三倍,用上題作圖法來核驗所答。

命辭四十三　定理

155. 設兩個三角形，有兩邊彼此各相等，但甲形的第三邊比乙形的第三邊大些，則甲形中第三邊所對的角，也必比乙形中第三邊所對的角大些。



設　$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$AB = DE$$
$$AC = DF$$

但　$BC > EF$

求證　$\angle A > \angle D$。

證　$\angle A$ 或比 $\angle D$ 大，或等於 $\angle D$，或比 $\angle D$ 小。　§ 53(6)

設　$\angle A < \angle D$，

則　$BC < EF$　§ 154

但這和假設相反。

設　$\angle A = \angle D$，

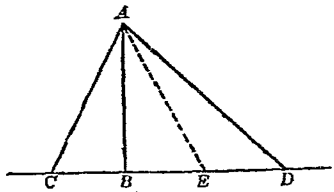
則　$BC = EF$　§ 58

但這也和假設相反。

$\therefore$　$\angle A > \angle D$。

命辭四十四　定理

156. <u>由已知線的垂直線內一點，作兩直線，那截已知線的點到垂足的距離若是不等，則距離較遠的線必較長。</u>



設	$AB \perp CD$	
又	$BD > BC$	
求證	$AD > AC$	
證	在 BD 上，拿 $BE = BC$	
又	作 AE 線，	
則	AE 必落在 $\angle BAD$ 以內。	
	$(BE < BD)$	
且	$\triangle ABC \equiv \triangle ABE$	s. a. s.
∴	$AE = AC$	
	今知 $\angle AEB$ 是銳角	§ 105
∴	$\angle AED$ 是鈍角	公理 5
∴	$\angle AED > \angle D$	§ 146(*c*)
∴	$AD > AE$	§ 151

即是　　　　AD>AC　　　　§ 146(*d*)

157. 系　由一點到一直線，僅可作兩根相等的直線，若是作兩根不等的直線，則長線截直線的點，對於垂足的距離必定較遠。

158. 兩點間的距離　兩點間的距離，就是聯接這兩點的線段的長。

159. 由點到直線的距離　由點到直線的距離，就是由這點到這直線所作垂直線的長。

160. 平行四邊形的高　平行四邊形兩底間的垂直距離，叫做這形的高。

161. 梯形的高　梯形兩底間的垂直距離，叫做這形的高。

習題159　三角形中最大邊兩端的角，必都是銳角。

習題160　若等腰三角形中，有一角是鈍角，他的底必是最長邊。

習題161　若平行四邊形的對角線不等，這四邊形的角必是斜角。

習題162　在 ▱ABCD 中已知 AB>BC，作對角線 AC，

求證　$\angle ACB>\angle ACD$。

習題163　在 △ABC 中設 AB>AC，又設 ∠B 和 ∠C 的平分線相交於 P 點，

求證　BP>CP。

習題164 在三角形 ABC 中,設 AB>AC,又由 B,C 二頂點所作的頂垂線相交於 O 點,

求證 OB>OC,

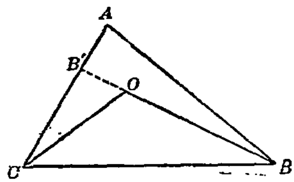
習題165 求證三角形一邊上的中線,必定比其餘兩邊的和的一半小些。(注意:延長這中線到二倍長)。

習題166 由等腰三角形的頂,到他底邊延長線上任一點的直線,必定比一腰大些。

習題167 由等腰三角形的頂,到他的底上任一點的直線,必定比一腰小些。

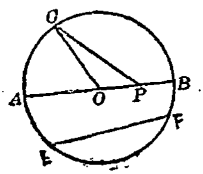
習題168 四邊形的周界,必定比對角線的和大些。

習題169 右圖中,O 是 △ABC 中的一點。



求證 OB+OC<AB+AC

習題170 附圖中,設 AB 是圓的直徑,



求證 AB>EF。

習題171 在上題中,求證 AP>CP,又證 CP>PB。

習題172 三角形一邊上的高,必定比其餘二邊的和的一半小些。

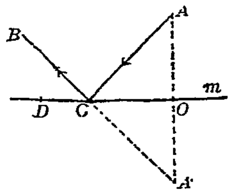
習題173 三角形各高的和,必定比周界小些。

習題174 按照物理學定理,凡光線被平面鏡反射時,

那投射角必等於反射角,(投射角就是投射的光線和鏡面的垂線所成的角,反射角就是反射的光線和鏡面垂線所成的角)。

設附圖中,m是平面鏡,有光線從A射入鏡面,又反射到B點;問光線入鏡是在甚麼地方?試用幾何方法定他的所在。

(註:延AO到A'又作A'B)。



習題175　設光線所行的路是AC+CB,又D是鏡面上的任一他點,求證AC+CB<AD+DB。

習題176　在三角形ABC中,設AC>AB又在BA邊上拿BD,在CA邊上拿CE,使CE=BD,求證CD>BE。

習題177　在三角形ABC中,設D為BC邊的中點,又AB>AC,求證∠ADC是一銳角。(§155)

習題178　設三角形ABC是銳角三角形,其中AB>AC,又AD是BC邊上的中線,AE是BC邊上的高求證E點必在C,D二點中間。(用間接法和習題177的理)

習題179　設P是△ABC內的一點,作PB,PC二線,

求證　∠BPC>∠BAC。

習題180　設DEFH是四邊形,其中DH=EF,

又　∠H>∠F,求證DF>EH。

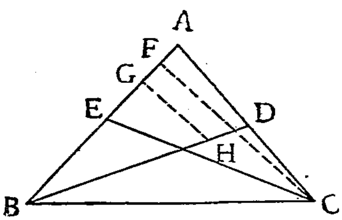
習題181　設DEFH是四邊形,其中DH=EF,又DF>EH,

求證 $\angle H > \angle F$。

習題182 設 $\triangle ABC$ 內的一點為 P，求證 $PA+PB+PC$ 必小於這三角形的週界，但大於週界的一半。

習題183 設 P 是四邊形內的一點，求證由 P 到各頂點距離的和，必定比這四邊形週界的一半大些。

習題184 設三角形有兩角的平分線相等，這形必是等腰。



設 $\triangle ABC$ 中，二角 B,C 的分角線是 BD, CE 而

$$BD=CE,$$

求證 $AB=AC$。

證 若 $AB \neq AC$

則必 $AB>AC$， 或 $AB<AC$。 § 53(6)

現在設 $AB>AC$

則得 $\angle B<\angle C$， （大邊對大角）

因是 他們的半角 $\angle ABD<\angle ACE$ （普通公理 7）

作 $\angle ECF=\angle ABD$，

因原設 $\angle BCE>\angle CBD$，

∴　$\angle BCF > \angle ABC$。　(普通公理 4)

故在　$\triangle FBC$ 中 $BF > CF$，　(大角對大邊)

在　BF 上拿 $BG = CF$，

過 G 點，作 $GH \parallel CF$，

則　$\triangle BGH \equiv \triangle CEF$，　a. s. a.

故得　$BH = CE$。

然　$BH < BD$，

即　$CE < BD$。

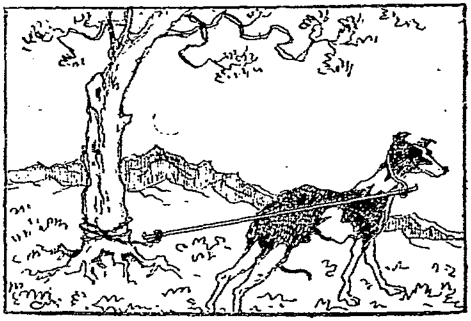
這和假設不符，所以 AB 不能比 AC 大。

依同理，得證明 AB 不能比 AC 小。

所以　$AB = AC$。

第七章 點的軌跡

162. 軌跡 有一個鄉裏人，在外面買了一隻狗路上怕被他咬，所以用一根五尺長的木棍，把狗繫在一端，把他端握在手裏。到家的時候，便把用手握着的一端，拿短繩拴在平地上的樹下，使狗可繞樹行走。但被木棍所限，他對於樹的距離常爲五尺，不能太遠，也不能太近。他能到的地方是一個圓，樹做圓心，五尺長的木棍做半徑。這圓就叫做狗的軌跡(Locus)。凡這軌跡上的點狗都能到，並且狗所能到的點都在這軌跡上。由這個說明，我們便得軌跡的定義如下：——



設幾何圖形所含各點，都適合一定的條件，並且凡適合那種條件的點，都在這圖形上；這圖形便是適合那種條件的點的軌跡。

習題185 上段所述例中，設用五尺長的繩代木棍，則狗的軌跡當如何？

習題186　若還是用木棍,但不拴在樹上,却拴在靠牆的電桿上,這狗的軌跡當如何?

習題187　甲乙兩人的家相距五里,每日因事相會,這相會地點,對於兩家距離要相等,求相會地點的軌跡。

習題188　汽車路和鐵路相交,某人要築屋,使他對於兩路的距離相等,求這屋的軌跡。

163. 反定理和對定理　拿定理的假設和終結交換地位,結果成爲逆定理。這種意思前面業已說明;若是將假設反改或將終結反改,所得的結果,叫做反定理(Contradictory Theorem)。

比如原定理是:　設 $A=B$　則 $C=D$

那反定理就是:　設 $A=B$　則 $C\neq D$

這樣看來原定理和反定理是不能並眞的。又我們若是拿定理的假設和終結都反改過來,那所得的結果,就叫做對定理(Opposite Theorem)。比如命辭四十一就是命辭四的對定理,又命辭四十是命辭三的對定理。

164. 證題的方法　證定理有三個方法,叫做綜合法(Synthetic Method),解析法(Analytic Method),間接法(Indirect Method)。

綜合法就是利用以前證過的定理併合起來,求得一條新理。本書以前各命辭,多半是用這法證明的。

解析法與綜合法相反;若要證明終結爲眞確,必

先證明別的命辭是眞確的，並且必循序證明直到求得一已知的理爲止。他的例在後面再詳說。

間接法便是證明反定理的錯誤，可使人曉得原定理必眞。如命辭四十一和命辭四十三，都是間接證法的例。

165. 軌跡的證法 要證明一定線是適合一定條件的點的軌跡，必用下列二法之一：

(1) 證明在這線內的點適合於這條件，不在這線內的點不適合於這條件；或

(2) 證明在這線內的點適合於這條件，而適合於這條件的點必在這線內。

換一句話說就是

a. 證明原定理和對定理都是眞確；或

b. 證明原定理和逆定理都是眞確。

若說上面 §162 中的狗的軌跡是一個圓，必證明

(1) 凡這個圓上的點狗都能到，

(2) 不在這個圓上的點，狗都不能到。

若用第二證法則當顯明

(1) 凡這個圓上的點狗都能到，

(2) 凡狗能到的點都在這個圓上。

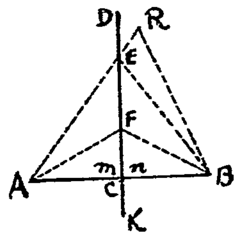
設狗完全不能移動，則第一證法和第二證法的前半都不能成立；又若不用木樁拴住狗，他便可以任意行動，第一證法和第二證法的後半都不能成立。所以若要證明軌跡的存在，不僅要證明原定理，還

要有逆定理或對定理來陪襯。

166. 垂直平分線　在線段中點所作的垂直線，叫做這線段的<u>垂直平分線</u>(Perpendicular Bisector)。

命辭四十五　定理

167. 一線段的垂直平分線，是和這線段兩端有<u>等距離的點的軌跡</u>。



設　AB是一線段，DK是他的垂直平分線，F點在DK線內，又R點不在DK線內，

求證　$FA=FB$,　又 $RA \neq RB$。

證1　作 FA, FB, RA, RB,

則因　$\triangle AFC \equiv \triangle BFC$　s. a s.

$\therefore$　$FA=FB$　§ 58

證2　R點既不在DK線內，則AR或BR必截DK。

設　AR截DK於E點，作EB線，

依前證法，可知　$EA=EB$。

但　$RB<RE+EB$　§ 147

$\therefore$　$RB<RE+EA$　§ 146(*d*)

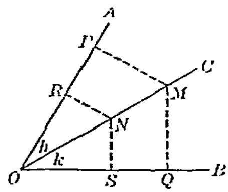
即　　　　RB<RA

∴　DK 是 A 和 B 有等距離的點的軌跡。

（註：按上面命辭的證法是用第一法證明原定理和對定理都是眞確。下列命辭則用第二法證明。）

命辭四十六　定理

168. 角的平分線，是和這角的兩邊有等距離的點的軌跡。



這題的證法應分二部份，如下：

1 設　OC 是 ∠AOB 的平分線，N 是 OC 線內的任一點。

求證　N 對於 OA, OB 的距離相等。

證　　作 NR⊥OA

NS⊥OB

△ORN≡△OSN　　§ 111

∴　　NR=NS　　§ 58

2 設　M 點對於 OA, OB 的距離相等，

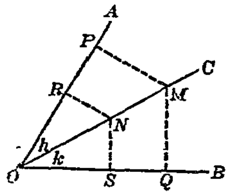
求證　M 點必在 ∠AOB 的平分線上。

證　　作 OM

又作 MP⊥OA

$$MQ \perp OB$$

則　$\triangle MOP \equiv \triangle MOQ$　§ 112



∴　$\angle h = \angle k$　§ 58

就是　MO 是 $\angle AOB$ 的平分線

或　M點在 $\angle AOB$ 的平分線上

∴ $\angle AOB$ 的平分線，是和這角的兩邊有等距離的點的軌跡。

習題 189　試用第二法證明命辭四十五。

習題 190　試用第一法證明命辭四十六。

習題 191　兩路相交成直角，如今要植樹，使他距兩路等遠，求這樹的軌跡。

習題 192　已知三角形 ABC，試作對於 AB 和 AC 兩邊有等距離的點的軌跡。

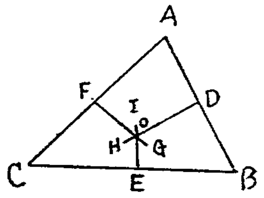
習題 193　上題中，又求對於 AB 和 BC 兩邊有等距離的點的軌跡。

習題 194　上兩題中所作的軌跡，設交在 O 點，則 O 點對於三邊的距離當若何？

習題 195　又作 AC 和 BC 兩邊有等距離的點的軌跡求證這軌跡必過上題的 O 點。

命辭四十七 定理

169. 三角形各邊的垂直平分線必遇在一點，這點到三頂點的距離相等。



設 ABC 是一個三角形，DH, FG, EI 是 AB, AC, BC 各邊的垂直平分線，

求證 DH, FG, EI, 必交在一點，這點對於 A, B, C 三點的距離相等。

證 DH 和 FG 必相交於一點。

否則 AB, AC 必是一直線

設 交點是 O

則 O 到 A 和 B 的距離相等， § 167

且 O 到 A 和 C 的距離亦等， § 167

∴ O 到 B 和 C 的距離相等， 公理 I

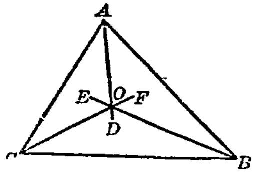
∴ O 點必在 EI 線上 § 167

所以曉得 DH, FG, EI 必交在 O 點。

並且這 O 點到 A, B 和 C 的距離相等。

命辭四十八 定理

170. 三角形各角的平分線，必交在一點，這點到三邊的距離相等。



設 ABC 是一個三角形，AD, BE, 和 CF 是各角的平分線，

求證 AD, BE, CF 三線必交在一點，並且這點到三邊的距離相等。

證　AD 和 BE 必相交

（因 ∠DAB＋∠EBA 比兩直角小些）

設　交在 O 點

則　O 到 AC, AB 的距離相等，　§ 168(*1*)

又　O 到 AB, BC 的距離相等，　§ 168(*1*)

∴　O 到 AC, BC 的距離相等，　公理 1

∴　O 點必在 CF 上。　§ 168(*2*)

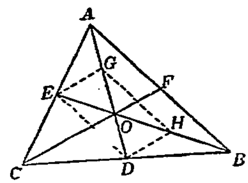
換句話說，就是 AD, BE, CF 交在 O 點，

並且這 O 點到三邊的距離相等。

習題 196　等邊三角形各邊的垂直平分線，必交在一點，這點到各邊的距離相等。

命辭四十九　定理

171. 三角形的三中線，必遇在一點，這點到每一頂點的距離，等於由這頂點到他的對邊中點的距離的三分之二。



設　ABC 是一個三角形，AD, BE, CF 是他的中線。

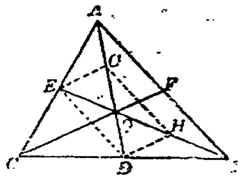
求證　這三中線必交在一點，這點到每一頂點的距離，等於由這頂點到對邊中點距離的三分之二。

證　　設 AD, BE 相交在 O 點。

又　　設 G 是 AO 的中點，H 是 BO 的中點，

作　　ED, GH, EG, DH 各線

則	$DE \parallel AB$	§ 139
且	$DE = \frac{1}{2}AB$	§ 139
依同理	$GH \parallel AB$	
	$GH = \frac{1}{2}AB$	
∴	$DE \parallel GH$	§ 88
	$DE = GH$	公理 1



$\therefore$ EGHD是一個平行四邊形　§ 132

即　$EO = OH = \frac{1}{2}OB$　§ 133

而　$OB = 2OE = \frac{2}{3}BE$

依同理　$AO = \frac{2}{3}AD$

依同理　可證明 CF 和 AD 兩線的交點到 A 點和 C 點的距離，也等於$\frac{2}{3}$AD 和 $\frac{2}{3}$CF。換句話說，就是 CF 必過 O 點，所以曉得 AD, BE, CF 必交在一點，這點到各頂點的距離，等於由這頂點到他的對邊中點的距離三分之二。

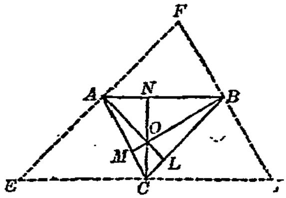
習題 197　設 △ABC 的各中線相交在 O 點，並且 AO=6, BO=8, CO=10 求各中線的長。

習題 198　設上題的各中線 AD=12, BE=15, CF=21; 求 OD, OE, OF 的長。

習題 199　在等邊三角形中，各角的平分線必交在一點，這點到每一頂點的距離，等於平分線的三分之二。

命辭五十 定理

172. 三角形的各頂垂線必交在一點。



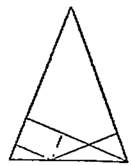
設 ABC 是一個三角形，AL, BM, CN 是他的頂垂線，

求證 AL, BM, CN 必交在一點，

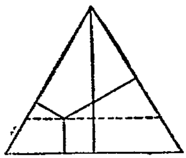
證 過 A, B, C 各點，作 EF, FD, DE 各線，使和 BC, AC, AB 平行。

因	FBCA 是一個▱	定義
∴	FB＝AC	§ 126
又	BDCA 是一個▱	定義
∴	BD＝AC	§ 126
∴	FB＝BD	公理 1
現在曉得	BM⊥AC	
∴	BM⊥FD	§ 89
即	BM 是 FD 的垂直平分線	
依同理	AL 是 EF 的垂直平分線	
	CN 是 ED 的垂直平分線	
∴	AL, BM, CN 必交在一點。	§ 169

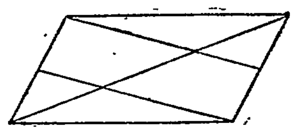
習題200　由等腰三角形底邊的中點,到兩腰上所作的垂線必相等。



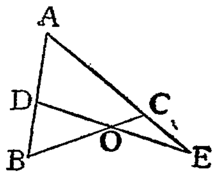
習題201　由等腰三角形底邊上任一點到兩腰的垂線的和,必等於一腰上的頂垂線。(見附圖)



習題202　由等邊三角形內任一點所作三邊的垂線的和,必等於這形一邊上的頂垂線。(見附圖)



習題203　過平行四邊形兩對角的頂點,到他的對邊中點的直線,必分這形的一對角線爲三等份。(見附圖)



習題204　設右圖的 $\triangle ABC$ 是等腰,

且　　　　$BD = CE$,

求證　　　$DO = OE$。

習題205　由三角形兩邊中點到第三邊的垂線必等。

習題206　若三角形有兩中線相等,這個形必是等腰。(見 § 171)

習題207　若三角形兩邊上的頂垂線相等,這個形必是等腰。

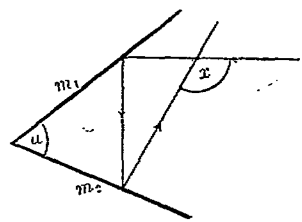
習題208　連接梯形兩對角線中點的直線,必等於兩

底的差的一半。

習題209 設一個三角形,有一邊和這邊上的中線及頂垂線,等於另一個三角形的一邊,和這邊上的中線及頂垂線,這兩形必全等。

習題210 三角形兩個外角的平分線所成的角,必等於他的第三個外角的一半。

習題211 設附圖中,m_1, m_2是兩個平鏡,他們相交成銳角a,有光線先射入m_1又被反射二次最後的方向和原來的方向成x角,



求證 $x = 2a$

習題212 若四邊形各角的平分線相交在一點,這個形兩對邊的和必等於其餘兩邊的和。

習題213 若兩個梯形的邊各各相等,這兩個梯形必全等。

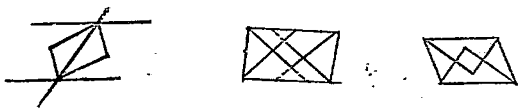
習題214 順次連接等腰梯形各邊中點的直線,必圍成一個正方形或菱形。

習題215 設四邊形各內角的平分線,不交在一點,則必圍成一個四邊形,這形的對角互爲補角。

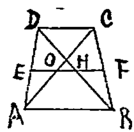
習題216 平行四邊形各角的平分線,必圍成矩形。

習題217 矩形各角的平分線,必必成正方形。

習題218　設兩平行線被一截線所截,則其各內角的平分線必圍成一矩形。



習題219　梯形的中線,必平分他的各對角線。



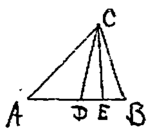
解　$EF \parallel AB$　(§ 144)

EF 平分 AC　(§ 138)

依同理　EF 平分 DB

習題220　設梯形兩對角互爲補角,這形必是等腰。

習題221　右圖設 ABC 是任意三角形, CD 是 $\angle C$ 的平分線, CE 是 AB 上的高,



求證　$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A$。

解:　設 $\angle B$ 比 $\angle A$ 大,

因爲　ACE 是一直角三角形,所以

$\angle DCE=90^\circ-\angle A-\angle ACD$;　(§ 106)

今　$\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB$,

$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle A)$

$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A$

∴　$\angle DCE=90^\circ-\angle A-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A)$

$=\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A$。

第二編　圓

第一章　圓和直線

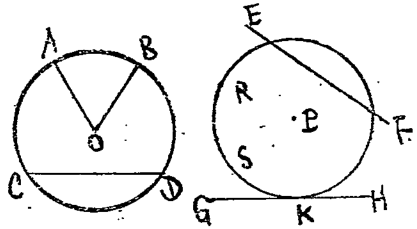
173. 定義

a. 無限長的直線，和圓相交於兩點的，叫做割線(Secant)(如圖EF)

b. 無限長的直線，和圓僅相遇於一點的，叫做圓的切線(Tangent)。(如圖 GH) 那相遇點叫做切點(Point of Contact)。(如圖中K點)

c. 連接圓上兩點的線段叫做弦(Chord)(如圖 CD)

d. 圓的一部份叫做弧(Arc)。(如圖 RS)



e. 等於圓的一半的弧，叫做半圓(Semicircle)；等於圓的四分之一的弧，叫做象限(Quadrant)。

f. 兩弧的和等於一個圓的叫做偶弧(Conjugate Arcs)。兩偶弧中，大於半圓的叫做優弧(Major Arc)。小於半圓的叫做劣弧(Minor Arc)，普通所謂弧，多指劣弧而言。

g. 若一弦是連接弧的兩端的線段，這弧便是這弦所對的弧 (Subtended Arc)。

h. 兩半徑間所成的角，叫做圓心角 (Central Angle)。(如圖 ∠AOB)。

i. 若多邊形的各頂點都在圓上，這個形叫做圓的內接多邊形 (Inscribed Polygon)；這個圓便是這多邊形的外接圓 (Circumscribed Circle)。

j. 若多邊形的各邊，都和一圓成切線，這個形叫做圓的外切多邊形 (Circumscribed Polygon)；這個圓便是這多邊形的內切圓 (Inscribed Circle)。

k. 設兩圓的心在同一點，但他們的半徑不等，這兩個圓叫做同心圓 (Concentric Circles)。

l. 圓心角的度數，常和他的兩邊所截弧的度數相等。所以若曉得弧的大小，便知道角的大小，換句話說，就是圓心角可用他的兩邊間所截的弧來度量 (Measure)。

174. 簡單定理 關於圓的種種公理，和簡單定理，以前曾經略述，現在爲證題便利，特將各簡單定理詳列於下：

(1) 用已知線做半徑，用任一點做圓心，可作一個圓。

(2) 同圓的半徑都相等。

(3) 若兩個圓的半徑相等，這兩個圓必等。若兩個圓相等，他們的半徑必等。

(4) 從一點到圓心的距離，若大於半徑，等於半徑，或小於半徑，則這點必在圓外，圓上，或圓內。

(5) 一割線和圓至多只能交於兩點。

(6) 若兩個圓的圓心相隔的距離小於兩圓半徑的和，大於兩圓半徑的差，這兩個圓必交於兩點，且僅交於兩點。

(7) 在同圓或等圓中：

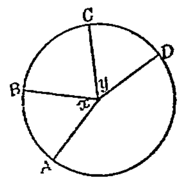
(甲)若兩個圓心角相等，他們的邊所截的弧必等；

(乙)若兩個圓心角的邊截成等弧，這兩個角必等；

(丙)等弦必對等弧； (丁)等弧必對等弦。

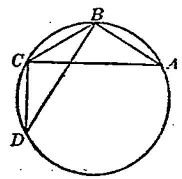
(8) 圓心角用他的兩邊間的截弧來度量。§173(i)

(9) 在同圓或等圓中，若圓心角大，他的兩邊所截的弧也大，若所截的弧大，則圓心角也大。



習題222 在右圖中，$\angle x=\angle y$,

求證 弧ABC=弧BCD。

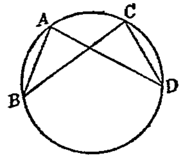


習題223 在右圖中，

設 弦AB=弦BC=弦CD,

求證 弦AC=弦BD

習題224 上題中，求證 $\angle A=\angle D$



習題225　在右圖中,設BC=AD,

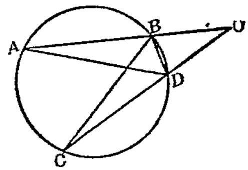
求證　　　　CD=AB

習題226　在右圖中,

設　　　　AB=CD,

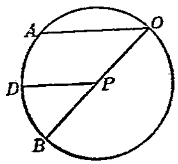
求證　　△ABD=△CBD,

且　　　△AOD=△COB



習題227　在上題中,

求證　　△BOD為等腰。

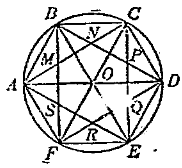


習題228　在右圖中,設O是圓上的一點,OA是一弦,OB是直徑,DP是平行於OA的半徑,

求證　　弧AD=弧DB。(作PA線)

習題229　設兩等弦相交,則一弦所成的部份,必和他弦所成的部份各各相等。

習題230　設圓的內接多邊形的各邊相等他們的各角也必等。



習題231　右圖中,ABCDEF為圓的內接等邊六邊形,求證他的對角線,

AC=BD=CE=DF=AE=FB。

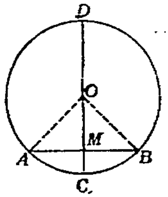
習題232　上題中,設AC=BD=CE=DF=EA=FB,又設AD=BE=CF,求證六邊形ABCDEF為等邊。

習題233　上題中,求證∠ACB=∠DBC。

第二章 弦和割線

命辭一 定理

175. 垂直於弦的直徑，必平分這弦和他所對的弧。



設上圖O圓中，直徑DC垂直於弦AB，並且截AB於M點，截AB優弧於D點，截AB劣弧於C點；

求證 AM＝BM，

且 弧AC＝弧CB，

弧AD＝弧DB。

證 作半徑OA, OB

則 rt△AOM≡rt△BOM § 112

∴ AM＝BM § 58

又 ∠AOM＝∠BOM § 58

∴ ∠AOD＝∠BOD § 54(5)

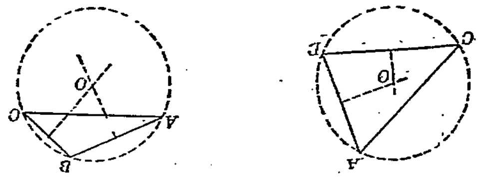
∴ 弧AC＝弧CB § 174(7)

弧AD＝弧DB § 174(7)

176. 系一 平分弦的直徑，必垂直於這弦。

177. 系二 弦的垂直平分線必過圓心。

178. 求作已知三角形的外接圓。



設　ABC是一個已知三角形

求　　作他的外接圓

作圖法　作任意兩邊的垂直平分線，且延長使他們相交於O點，用O點做圓心，用OB做半徑作一圓，這便是所求的圓。

證　O點對於A,B,C三點的距離相等　§ 169

∴　這圓必定經過A,B C三點　§ 174(4)

換句話說　這個圓必是△ABC的外接圓　§ 173(2)

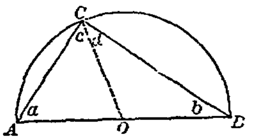
179. 系一　三角形僅能有一個外接圓。

180. 系二　經過不在同一直線上的三點，可作一個圓，並且僅可作一個圓。

181. 系三　經過在同一直線上的三點，不能作一個圓。§ 174(5)

182. 定義　若三角形的一頂點在半圓上，而他的對邊是半圓的直徑，這個三角形便是半圓的內接三角形。

183. 系四　<u>半圓的內接三角形，必是直角三角形他的斜邊就是半圓的直徑</u>。

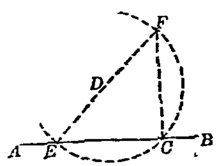


證：　$OA=OB=OC$

∴　$\angle a=\angle c,\ \angle b=\angle d$

∴　$\angle c+\angle d=90^\circ$

184. 系五　<u>從線內一點，求作這線的垂直線</u>。



設　AB是已知線，C是這線內的一點，求在C點作AB的垂直線。

作圖法　用線外任一點D做圓心，DC做半徑，作圓，交AB於C,E兩點。

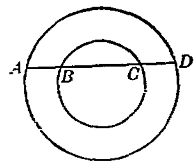
作　　DE,並且延長到F,又作CF,

則　　CF 就是所求的垂直線。　　§ 183

（因上段已證明 △ECF 是直角三角形）

習題234　已知一弧,求他的圓心。（在弧中任作兩弦且作他們的垂直平分線）。

習題235　內接多邊形各邊的垂直平分線,必交於一點。



習題236　右圖是兩個同心圓，
求證　　AB＝CD

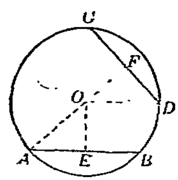
習題237　等腰梯形，可作一外接圓。

習題238　設兩弦都在第三弦的兩端和第三弦垂直這兩弦必等。

習題239　等邊三角形外接圓的半徑等於他的高的三分之二。

命辭三　定理

185. **在同圓或等圓中，等弦對於圓心的距離必等，又和圓心等距離的弦必等。**



1. 設　AB和CD是O圓的兩根等弦，

求證　AB和CD對於圓心的距離相等。

證　　作 $OE \perp AB$

　　　作 $OF \perp CD$

又　　作 OA, OD 各半徑

則　　$\triangle OFD \equiv \triangle OEA$　　§ 112

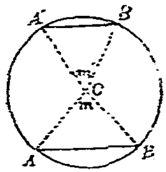
$\therefore$ OE＝OF § 58

2. 設 AB和CD對於圓心的距離相等，

求證 AB＝CD 證（請學者自擬）

命辭四 定理

186. <u>在同圓或等圓中，若兩弧不等，則大弧必對大弦，又大弦必對大弧。</u>



1. 在O圓中，設 弧AB＞弧A'B'，

求證 弦AB＞弦A'B'。

證 作 OA, OB, OA', OB', 各半徑

則在 $\triangle$OAB和$\triangle$OA'B'中

OA＝OA' OB＝OB' § 174(b)

又 $\angle$m＞$\angle$m' § 174(g)

$\therefore$ AB＞A'B' § 154

2. 設 弦AB＞弦A'B'

求證 弧AB＞弧A'B'

證 作 OA, OB, OA', OB', 各半徑

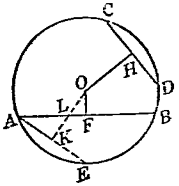
則在 $\triangle$OAB和$\triangle$OA'B'中

OA＝OA' OB＝OB' § 174(b)

但	AB > A'B'	假設
∴	∠AOB > ∠A'OB'	§ 155
∴	弧AB > 弧A'B'	§ 174(9)

命辭五　定理

187. 在同圓或等圓中，若兩弦不等，則對於圓心的距離也不等，弦較大的距圓心較近。



上圖：設AB和CD是O圓的兩弦，其中AB大於CD；又OF是AB的垂線，OH爲CD的垂線。

求證	OF < OH	
證	劣弧CD < 劣弧AB	§ 186
今在	劣弧AB上拿E點使	
	弧AE = 弧CD	
	作AE弦	
又作	OK ⊥ AE	
則因	AE = CD	§ 174(7)
∴	OK = OH	§ 185

如今曉得　弧AE上各點，都在AB的外側，

故　　OK 必和 AB 相交於 L 點

則　　$OL < OK$　　公理 8

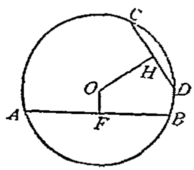
但是　　$OF < OL$　　§ 152

∴　　$OF < OK$　　§ 146(*a*)

即是　　$OF < OH$　　§ 146(*d*)

命辭六　定理

188. 在同圓或等圓中，若兩弦對於圓心的距離不等，那距圓心較近的弦，必定較大。



設　AB 和 CD 是 O 圓的兩弦，OF 是 AB 的垂線，OH 是 CD 的垂線並且 $OF < OH$.

求證　　$AB > CD$

證　AB或大於CD,或小於CD,或等於CD。§ 53(*6*)

設　　$AB < CD$

則必　　$OF > OH$　　§ 187

但是　　這和假設相反。

設　　$AB = CD$

則　　$OF = OH$　　§ 185

但是　　這也和假設相反。

$$\therefore \qquad AB > CD$$

習題240　若內接多邊形各邊,對於圓心的距離相等,這個多邊形必為等邊。

習題241　兩弦相交,過他們的交點作一直徑,若兩弦和這直徑成等角,這兩弦必等。

習題242　若圓心在已知角的平分線上,且圓和這角的兩邊相交,這圓必在角的兩邊上截等弦。

習題243　設OB, OC,是圓的兩半徑,由劣弧BC上任一點D,到此兩半徑的中點EF作直線,若DE=DF,

求證　　弧CD=弧DB　(作OD)

習題244　過圓內一點所作的各弦,那垂直於過這點的直徑的一弦便是最短。

習題245　直徑是圓的最大弦。

習題246　若一弦和一直徑平行,這兩直線中間所截的弧必等。(注意:過弦的兩端作半徑。)

習題247　在同圓上二平行的弦必截等弧。(見上題)

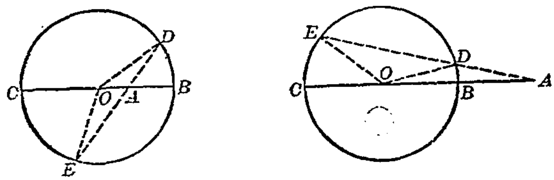
習題248　設A是圓上的一點,過A點作兩等弦,這兩弦所成的角的平分線,必過圓心。

習題249　設兩弦相交於圓上的一點,並且他們所成的角的平分線通過圓心,這兩弦必等。

習題250　求證圓的內接等邊多邊形各角的平分線必交於一點

命辭七　定理

189. <u>由已知點到圓所作的最長線和最短線，都在聯接已知點和圓心的直線上。</u>



設　O是一個已知圓，A是已知點，AC和AB是過A點和圓心O所作直線的長短二線段，

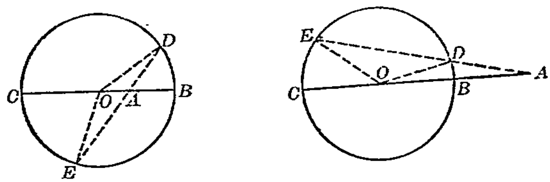
求證　AC是由A點到圓的最長線AB是最短的線。

證1.　　設A在圓內，(左圖)

過A作任意他線，交圓於D,E兩點，又設AE是DE的長部份，AD是他的短部份。

又作	OE, OD 兩半徑	
則在	$\triangle OAD$ 中 $OA+AD>OD$	§ 147
今	$OB=OD$	§ 174(2)
∴	$OA+AD>OB$	§ 146(d)
即	$OA+AD>OA+AB$	§ 146(d)
∴	$AD>AB$	公理 5

所以曉得AB必短於由A點到圓的任意他線。



又在　$\triangle OAE$ 中，$OA+OE>AE$,　§ 147

$\therefore$　$OA+OC>AE$,　§ 174(2)

即　$AC>AE$。

所以曉得 AC 必大於從 A 到圓所作的任意他線。

總起來說，就是 AC 是由 A 點到圓的最長線，AB 是最短線。

證 2.　設 A 點是在圓外，（上右圖）

作 AE, OE, OD 各線，

則　$AO+OE>AE$　§ 147

或　$AO+OC>AE$　§ 146(d)

即　$AC>AE$

又　$AO<AD+DO$　§ 147

或　$AB+BC<AD+DO$　§ 146(d)

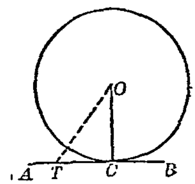
今　$BO=DO$　§ 174(2)

$\therefore$　$AB<AD$　公理 5

190. **定義**　由一點到一圓的距離，就是從這點到圓的最短線。

命辭八 定理

191. 在半徑外端所作半徑的垂線，必爲圓的切線。



設 O 是一個圓，OC 是他的半徑，AB 是 OC 的垂線，並且經過 C 點。

求證 AB 是 O 圓的切線。

證 由 O 到 AB 作任意他線，像 OT 這樣的

則 OT > OC § 153

∴ T 點必在圓的外面。 § 174(4)

所以曉得除 C 外，AB 線上任何他點都在這圓外面。

即 AB 爲 O 圓的切線。 § 173(b)

192. 系一 圓的切線必垂直於過切點的半徑。

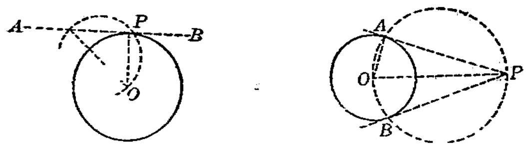
(因 OC 是由 O 到 AB 的最短線)

193. 系二 在切點上垂直於切線的直線，必過圓心。(因在切點所作半徑，必垂直於切線；所以若在切點作切線的垂線，必和這半徑密合。)

194. 系三 由圓心到切線所作的垂直線，必過切點。

命辭九　作圖題

195. 求過一已知點作一已知圓的切線。



設　O 是已知圓，P 是已知點，求過 P 點作 O 圓的切線。

1. 設 P 點，是在圓上。（左圖）

作圖法　　作半徑 OP,

又　過 P 點，作 OP 的垂線 AB,（作法見 §184）

則　AB 便是所求的切線。

證　$AB \perp OP$, 故 AB 是 O 圓的切線。　§191

2. 設 P 點在圓的外面。（右圖）

作圖法　作 OP 線，用 OP 做直徑作圓，和已知圓相交於 A,B 二點。

作　PA, PB 二線，這二線都是 O 圓的切線。

證　　作半徑 OA,

則　$\triangle OAP$ 是半圓的內接三角形

故　$\triangle OAP$ 是一個直角三角形　§183

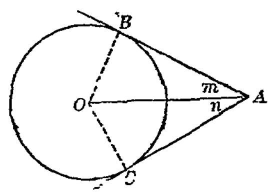
$\therefore$　$PA \perp OA$

$\therefore$　PA 是 O 圓的切線。　§191

依同理　也可證明 PB 的 O 圓的切線。

命辭十　定理

196. 自圓外一點所作圓的兩切線必相等，並且和聯這點到圓心的線成等角。



設 A 是已知點，AB, AC 是 O 圓的切線，AO 是聯已知點到圓心的線。

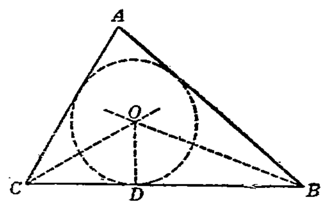
求證	$AB = AC$	
且	$\angle m = \angle n$	
證	作 OB, OC, 兩半徑	
則	$\triangle AOB \cong \triangle AOC$	§ 112
∴	$AB = AC$	§ 58
	$\angle m = \angle n$	§ 58

習題 251　由圓心到兩切線的交點的直線必垂直平分聯接這兩切點的弦。

習題 252　設由 A 點到 O 圓作兩截線，則平分 ∠A 的直線必過圓心。(§ 168)

命辭十一 作圖題

197. 求作三角形的內切圓。



設 ABC是一個已知三角形，求作他的內切圓。

作圖法 平分∠B和∠C。

設他們的平分線交於O點，

作 OD ⊥ BC

用 OD 做半徑，O 做圓心，作一個圓，這個圓便是所求的內切圓。

證 O點對於AB, AC, BC的距離都相等。 § 170

∴ AB, AC, BC, 各和上述圓的半徑成垂直。

∴ AB, AC, BC, 都是這圓的切線。 § 191

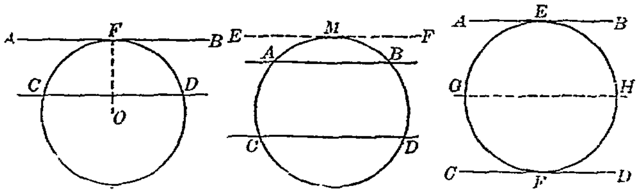
換句話說，就是O圓為△ABC的內切圓。 § 173(j)

習題253 求作圓,使和已知角的兩邊相切,並且他的圓心到角的頂點的距離,等於一已知線段。

習題254 在§197的圖中,設△ABC為等邊,問他的內切圓心O點可作幾種不同的求法?

命辭十二　定理

198. <u>平行線在一圓上截等弧。</u>



設　AB, CD 是兩根平行線，O 是一個圓，

求證　AB, CD 在 O 圓上截等弧。

1. 設 AB 是切線，CD 是割線，F 是 AB 的切點。

(左圖)　　作半徑 OF

則　　$OF \perp AB$　　§ 192

∴　　$OF \perp CD$　　§ 89

∴　　弧CF＝弧DF　　§ 175

2 設 AB 和 DC 都是割線（中圖）

作　EF 切線，使他和 AB 平行。

設　M 是 EF 的切點

則　　$MA = MB$　　已證

　　$MC = MD$　　已證

∴　　$AC = BD$　　公理 3

3. 設 AB 和 CD 都是切線。(右圖)

作割線　GH ∥ AB。（餘證請學者自擬）

習題255　求作已知圓的切線,使他和一已知線平行。

習題256　求作已知圓的切線,使他和已知直線成垂直。

習題257　若兩圓同心,則凡外圓的弦切於內圓的都相等,並且都被切點所平分。

習題258　菱形內可作一內切圓。

習題259　圓的外切四邊形兩對邊的和,等於其他兩邊的和。

習題260　圓的外切六邊形的第一,第三,第五,各邊的和,等於他的第二,第四,第六,各邊的和。

習題261　等邊三角形內切圓的半徑,等於這三角形的高的三分之一。

習題262　直角三角形的斜邊,等於他的兩腰的和減去兩倍內切圓的半徑。

習題263　圓的外切平行四邊形必是等邊。

習題264　若從直徑的兩端到一切線作垂直線,這兩垂線的和,必等於一直徑。

習題265　圓的內接梯形,必是等腰。

習題266　設在圓心的同側作兩平行弦,一弦等於內接正六邊形的一邊,他弦等於內接正十邊形的一邊,問這兩弦間所夾的弧等於多少度?

習題267　設上題的圓心在兩弦的中間,則這兩弦所夾的弧是多少度數?

第三章　兩圓的關係

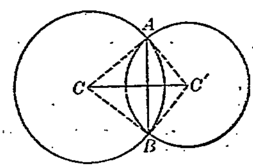
199. 圓心線段　聯接兩圓圓心的線段，叫做圓心線段 (Centre Segment)。

200. 相切的兩圓　若是兩個圓的圓心線段，等於他們的半徑的和，這兩個圓叫做互相外切 (Tangent Externally)；若是等於他們的半徑的差，這兩個圓便是互相內切 (Tangent Internally)。

201. 公共切線　若一直線同時和兩個圓相切，這直線叫做這兩圓的公共切線，若這公共切線和圓心線段相交，便叫做內公切線 (Common Internal Tangent)；若不和圓心線段相交，便叫做外公切線 (Common External Tangent)。

命辭十三　定理

202. 若兩圓相交，他們的圓心線必垂直平分公共弦。



設　C 圓和 C′ 圓相交於 A 點和 B 點，AB 是公共弦，CC′ 是圓心線段。

求證　　CC′ 垂直平分 AB

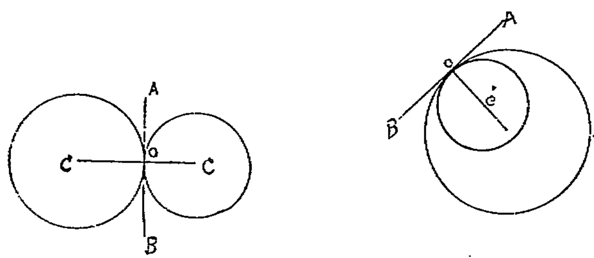
證　作 CA, CB, C'A, C'B 各半徑

則　CA＝CB,　C'A＝C'B　§ 174(2)

∴　CC' 爲 AB 的垂直平分線。　§ 74

命辭十四　定理

203. 若兩圓互切，他們的圓心線必過切點。



設　C,C' 兩圓互切於 O 點，CC' 是圓心線，AB 是公共切線，

求證　CC' 必過 O 點。

證　設在 O 點，作 AB 的垂線

則　這線必過 C, 且過 C'　§ 193

所以這線必定和 CC' 密合　§ 53(4)

∴　O 點必在 CC' 直線上。

習題268　求作三個等圓,使每一個都和他兩圓相切。

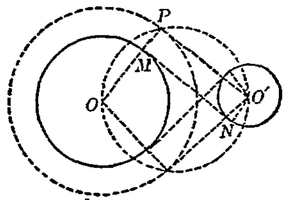
習題269　求在已知圓內,作四個相等的小圓,都和已知圓相切並且每一個小圓,必和其他兩個小圓相切。

習題270　求作三個圓,使都和已知線在已知點相切。

習題 271 求作三個等圓,使每一圓都經過其餘兩圓的圓心。

命辭十五 作圖題

204. 求作兩個圓的公共切線。



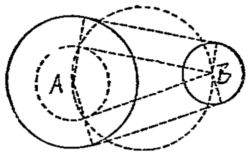
1. 設 O,O' 是兩個圓，求作他們的內公切線。

作圖法 用兩圓半徑的和做半徑，用 O 點做圓心作第三圓；又用 OO' 做直徑，作圓，使他在 P 點和第三圓相交；又作OP,使在M點和 O 圓相交，作O'P

作 $O'N \parallel OP$, 聯接MN，這 MN 便是 O,O' 兩個圓的切線。

證	$PM = O'N$	作圖意
	$PM \parallel O'N$	作圖意
∴	PMNO' 爲平行四邊形	§ 132
故	$MN \parallel O'P$	§ 119
今	$O'P \perp OP$	§ 183
∴	$MN \perp OP$	§ 89

又	$O'N \parallel OP$	作圖意
	$MN \perp O'N$	§ 89
∴	MN 是 O,O' 兩圓的切線	§ 191



2. 設　有 A,B 兩個圓，求作他們的外公切線。

作圖法　用兩圓半徑的差做半徑，用 A 點做圓心，作第三圓。(這題作法和證法，請學者自己完成。)

習題 272　用已知三角形的各頂點做圓心,求作三個圓,使每一個圓都和其餘兩個圓成外切。(先作內切圓)

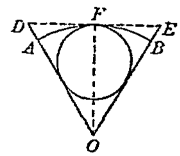
習題 273　若是上題三角形的三邊是 4. 5. 6. 問所作各圓的半徑當爲多少?

習題 274　若作兩個圓的兩根外公切線,那界在切點間的兩線段必定相等。

習題 275　若作兩個圓的內公切線,那界在切點間的兩線段必定相等。

習題 276　兩個圓相等,但不相交,求作外公切線。

習題 277　求作圓,使和已知弧相切,且和過弧兩端所作的半徑相切。(注意:在弧的中點作切線,使和兩半徑成三角形,然後作這三角形的內切圓)。



習題278 在已知正方形內,求作四個圓,使每一圓和正方形兩邊相切,且和他兩圓相切。(先分這正方形為四個相等正方形。)

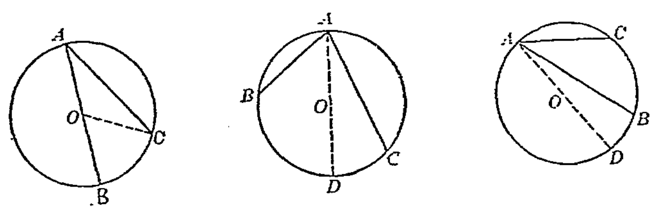
習題279 在已知正方形內,求作四個等圓,使每一個圓都和一邊相切,並且和另外兩個圓相切。

第四章 關於圓的各角

205. 定義 設角的頂點在圓上,並且他的邊是圓的兩弦,這角便是圓的內接角(Inscribed Angle);又叫做圓周角。設角的頂點在一弧上,並且他的兩邊過弧的兩端,這個角便是這弧的內接角。

命辭十六 定理

206. 圓周角可用他的兩邊間所截的弧的一半來度量。



設 $\angle BAC$ 是 O 圓的圓周角,

求證 $\angle BAC$ 可以用 $\frac{1}{2}$ 弧 BC 度量。

證1. 設有一邊經過圓心,(左圖)作半徑 OC。

則　$\angle A=\angle C$　§ 59

但是　$\angle BOC=\angle A+\angle C$　§ 108

∴　$\angle BOC=2\angle A$

又曉得　$\angle BOC$ 是用弧 BC 度量。　§ 174(8)

∴　$\angle A$可以用$\frac{1}{2}$弧BC度量。

證 2. 設圓心 O 在兩邊的中間，(如中圖)作 AD 徑。(證法請學者自擬)。

證 3. 設圓心 O 在角外(如右圖)也作 AD 直徑。(證法請學者自擬)。

207. 系一　內接於半圓的角，必定是直角。

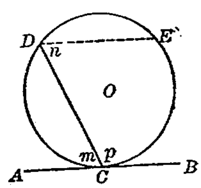
208. 系二　大於半圓的弧的內接角必定是銳角。

209. 系三　小於半圓的弧的內接角必定是鈍角。

210. 系四　在一圓內同弧或等弧內接的角必等。內接等角的弧，也必相等。

命辭十七　定理

211. 由切點所作的弦，與切線所成的角，可用這弦所截弧的一半來度量。



設　AB 和 O 圓在 C 點相切，DC 是過 C 點的弦，

m是AB和DC所成的角。

求證　$\angle m$可以用$\frac{1}{2}$弧CD來度量。

證　過D點，作DE使和AB平行，則弧CD＝弧CE。

又曉得　　$\angle m=\angle n$　　§ 92

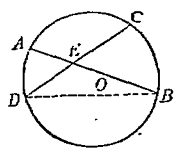
今　　$\angle n$可以用$\frac{1}{2}$弧CE來度量。　　§ 206

∴　　$\angle m$可以用$\frac{1}{2}$弧CD來度量。　　§ 146(d)

且　　$\angle P$可以用$\frac{1}{2}$優弧CED來度量。（因爲$\angle P$是$\angle m$的補角）

命辭十八　定理

212. 設兩弦在圓內相交，他們所成的角，可用他們所截弧的和的一半來度量。



設　AB, CD兩弦交於O圓內的E點，

求證　$\angle AED$可以用$\frac{1}{2}$(弧AD＋弧CB)來度量

證　　作DB線，

則　　$\angle AED=\angle D+\angle B$　　§ 108

今　　$\angle D$可以用$\frac{1}{2}$弧CB來度量，　　§ 206

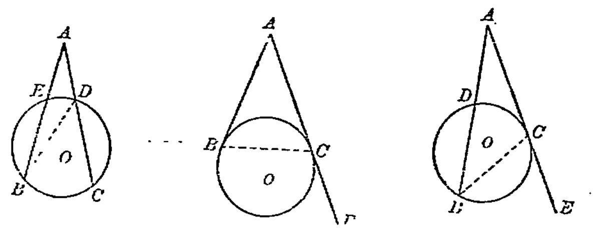
　　$\angle B$可以用$\frac{1}{2}$弧AD來度量，　　§ 206

∴　$\angle AED$可以用$\frac{1}{2}$(弧AD+弧CB)來度量。

習題280　上命辭的圖中,設$\angle CEB$是58°,又弧CB是86°,求弧AD的度數。

命辭十九　定理

213.　設由圓外一點到圓作兩割線，或兩切線，或一割線，一切線．那兩線所成的角，可用兩截弧的差的一半來度量。



設　AB,AC是O圓的兩割線(左圖)

求證　$\angle A$可以用$\frac{1}{2}$(弧BC－弧ED)來度量。

證　　作BD線

則　$\angle B$可以用$\frac{1}{2}$弧ED來度量。　§ 206

而　$\angle BDC$可以用$\frac{1}{2}$弧BC來度量。　§ 206

今　$\angle A=\angle BDC-\angle B$　§ 108

∴　$\angle A$可以用$\frac{1}{2}$(弧BC－弧ED)來度量。

2. 設　AB,AC是兩根切線．(如中圖)

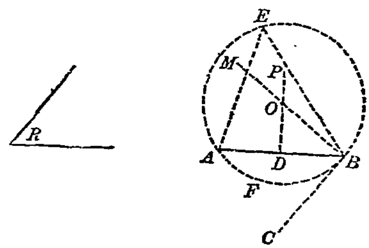
(證法請學者自擬)

3. 設　AB是割線，AC是切線。（如右圖）

（證法請學者自擬）

命辭二十　作圖題

214. 用已知直線做弦，求作一弧，使他的內接角等於一個已知角。



設　AB是一直線，R是已知角，求在AB線上作一弧，使他內接的角和R相等。

作圖法　　作∠ABC使等於∠R，

作AB的垂直平分線PD，

過B點作BC的垂直線BM。

設　PD和BM交於O點，

用O做圓心，用OB做半徑，作圓，這個圓必過A點，並且弧AEB就是所求的弧。

證　　O點對於A,B的距離相等，　　§ 167

∴　　這圓必過A點。　　§ 174(4)

又　　BC⊥BO　　作圖意

∴　　BC是O圓的切線，　　§ 191

∴　$\angle ABC$可以用$\frac{1}{2}$弧AFB來度量。　§ 211

但　弧AEB的任意內接角，像$\angle AEB$這樣的，也可以用$\frac{1}{2}$弧AFB來度量。

∴　弧AEB的任一內接角都等於$\angle R$。　公理 1

習題 281　試根據命辭十六的定理,證明三角形各內角的和是兩直角。

習題 282　在同圓或等圓中,若一個內接三角形的角,和他個內接三角形的角各各相等,這兩形必全等。

習題 283　在同一弧中,各內接角的平分線必交於一點。

習題 284　內接四邊形的對角互爲補角。

習題 285　圓的內接三角形各邊所對的弧,是100°,120°,140°,問這三角形的角各是若干度。

習題 286　內接三角形各邊所對的弧,成1:2:3的比,問這三角形是那一種三角形?

習題 287　內接四邊形各邊所對的弧,成3:5:7:9的比,問那個形的角各多少度?

習題 288　過內接三角形的各頂點,作圓的切線,便得外切三角形,設內接三角形的各角是40°,60°,及80°,求外切三角形的各角。

習題 289　內接等腰三角形的頂角是100°,問這形各邊所對的弧各有多少度?

習題 290　內接等腰梯形兩底所對的弧是100°和120°,

求此形各角的大小。

(a) 設兩底都在圓心的同側;

(b) 設圓心在兩底中間。

習題291 內接四邊形各邊所對的弧,成3:4:5:8的比,求這形兩對角線所成的角。

習題292 由一點到一個圓作兩切線,所成的角是100°,設切點爲A和B,問AB優弧和AB劣弧各有多少度?

第五章 軌跡

215. 定義 設幾何圖形所含各點,都能適合一定條件,且並凡適合那種條件的點,都在這個圖形上,這個圖形就是適合那種條件的點的軌跡。§162

216. 定理 下列七條是平面軌跡中的基本定理:

定理 1 對於已知點P,有一定距離d的點的軌跡,是一個圓,他的圓心是P,半徑是d。

習題293 距離本校一英哩的房屋在那裡?

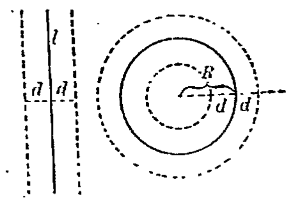
習題294 距離你家十英哩的房屋在那裡?

習題295 聲的速度每秒鐘1000英呎,設在平地發砲,問三秒鐘後砲聲所到地面如何?

習題296 樓梯斜靠在牆邊,有人站在梯的中點,設梯沿牆溜下,求這人的脚的軌跡。

定理 2 對於一已知直線l有一定距離d的點的軌跡,是兩平行直線,在l兩側各線對l的距離是d。

定理 3　設已知圓的半徑是R對於這個圓有一定距離d的點的軌跡，是兩個和已知圓同心的圓，他們的半徑是 R+d 和 R−d。



定理 4　和兩已知平行線距離相等的點的軌跡是一直線，在兩平行的中間並且和兩線的距離相等。

定理 5　對於兩個同心圓距離相等的點的軌跡，是一個圓，和兩個已知圓同心他的半徑等於兩個已知圓的半徑的和的一半。

定理 6　對於兩個已知點有等距離的點的軌跡是連接這兩點的線段的垂直平分線。　§ 167

定理 7　對於兩相交線有等距離的點的軌跡，是這兩線所成的兩鄰角的平分線。

習題 297　有船在運河中心,順流而下,求這船的軌跡。

習題 298　鐘面長短二針的尖端,行走的時候成兩個同心圓,求對於這兩圓有等距離的點的軌跡。

習題 299　某人要在距離鐵路 100 尺的地方建屋,求這屋的軌跡。

習題 300　求距離本街 1 里的點的軌跡。

習題 301　有圓形的亭子,如今要在距離亭子10尺的地方植樹,求樹的軌跡。

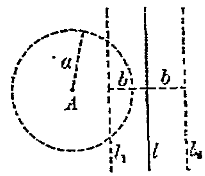
習題 302　有空心大鐵球,求距球面一吋的點的軌跡。

習題 303　裝設街燈要使他對於兩屋的距離相等,問這燈的軌跡在那裡?

習題 304　兩路互相垂直如今要設路燈,使對於兩路都能同等照耀,求這路燈的軌跡。

217. 軌跡的相交　若求一點，使他適合兩種或多種條件，這點就是這兩種或多種軌跡的交點。

例：設 l 是已知直線，A是已知點；設 x點對於A的距離是 a吋，對於 l 是 b 吋，求 x 的軌跡。



解：應用上舉的定理 1 和定理 2 則所得 l_1 和圓的交點，即是所求的點。

討論：　(1)設 l_1 和圓成切線，結果當如何?
(2)設 l_1 和 l_2 都和圓相交，結果當如何?
(3)設 A 點在 l 線上當如何?

習題 305　求作一點,使他對於某已知點的距離等於 2 吋,對於一已知直線的距離等於三吋。(在甚麼條件下,這題爲不可能?)

習題 306　在已知直線內,求一點使他對於兩個已知點的距離相等。

習題 307　設 AB 二線相交,求點 P,使他對於 A,B 的距離相等,並且對於 A 的距離爲 d。

習題308　求一點,使他對於已知角的兩邊的距離相等,並且對於這角的頂點的距離爲3吋。

習題309　屋前植一樹,使他距牆8呎,距正門中央11呎,求這樹的地點。

習題310　求作一圓,使他對於兩已知點的距離相等。

習題311　求一點,使他和兩同心圓的距離相等,並且和兩已知直線的距離相等。

習題312　求圓心的軌跡;設這圓(a)過兩已知點,(b)和兩已知平行線相切,(c)和已知線AB相切於P點。

習題313　求作一圓,使他經過兩已知點,並且使圓心在一已知線上。

習題314　求作一圓使他經過兩已知點,並且使圓心和兩已知相交線的距離相等。

習題315　求一點,使他和已知圓的距離爲a,又和這圓上一已知割線的距離爲b。

習題316　求一點,使他和兩平行線及其截線的距離相等。

習題317　求作一圓,使他和一已知直線相切於一已知點,並且使他的圓心在另一已知線上。

習題318　已知三角形的底和高,求他的頂點的軌跡

習題319　已知直角三角形的斜邊,求他的直角頂點的軌跡。

習題320 已知三角形的底和頂角,求頂點的軌跡。

習題321 已知三角形的底和頂角,求這形內切圓的圓心的軌跡。(求頂角兩邊在外接圓所截弧的中點用這點做圓心,用這點到底一端的距離做半徑,作弧。)

習題322 由一已知點到已知直線,任作若干直線,求所作各直線的中點的軌跡。

習題323 在已知圓內求已知長的弦的中點的軌跡。

習題324 自已知圓內一點,作弦,求這弦中點的軌跡。

習題325 已知菱形的底,求他的對角線交點的軌跡。

習題326 求對於兩已知等圓有等距離的點的軌跡。

習題327 求作一點,使他對於已知角的兩邊距離相等,並且對於某已知點的距離爲一已知長。

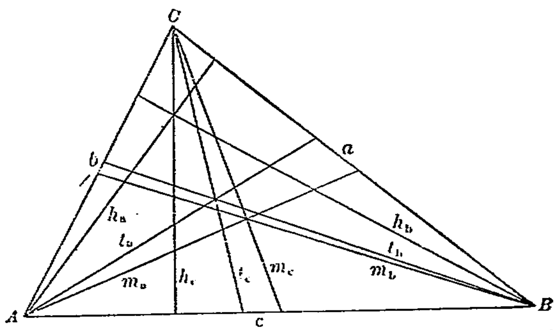
習題328 求作點,使他對於某已知圓的距離爲3吋,而對於某已知線的距離爲4吋。

習題329 求作點,使他對於兩個同心圓的距離相等並且對於圓內已知弦的距離等於已知長。

第六章　幾何圖形的作法

218. 判定部份　第一編的種種定理和本編中關於軌跡的各定理，都可以供作圖的材料。凡幾何圖形的線、角、點、等項，叫做這形的部份。若是只曉得各部份中的少數部份，便能夠決定全圖的形狀大小。這少數部份就叫做判定部份(Determining Parts)。

219. 三角形　三角形的主要部份有六，就是三邊和三角。除主要部份以外，其餘中線，角的平分線，頂垂線，內切圓的半徑等等，都叫做輔助部份(Secondary Parts)。



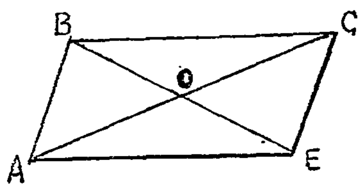
上圖是用 A, B, C 表示這三角形的各角，a, b, c 表示他的各邊 h_a, h_b, h_c. 表示他的頂垂線，m_a m_b m_c. 表示各中線 t_a, t_b, t_c, 表示各角的平分線。

各部份中既然有種種的關係，所以只要曉得三部份，並且其中有一部份為直線，便能夠決定全圖的

大小形狀，間接又可以決定其餘的各部份。但是已知的部份各有不同，所以解法有時也受種種的限制。

220. **解析證題法** 證幾何題共有三法，叫做<u>綜合法</u>，<u>間接法</u>，<u>解析法</u>。除前二法已在第一編舉例說明外，現在把解析法舉例說明於下：

例：求證平行四邊形的對角線彼此平分，§ 133



設 ABCE 是平行四邊形，

求證 $AO=CO$

$BO=EO$

證 要曉得 $AO=CO, BO=EO$，因爲 $\triangle AOB\equiv\triangle COE$；

要曉得這兩個三角形全等，必要其中成立 a s. a. 或 s. a s. 或 s. s. s. 的關係。

現在知道 $AB=CE$ § 126

∴ $\triangle AOB\equiv\triangle COE$ 的成立，必因爲

$\angle ABO=\angle CEO$

$\angle BAO=\angle ECO$ a s. a.

要這諸角成等式，必因爲

$AB \parallel CE$ § 92

已經曉得 $AB \parallel CE$ §119

$\therefore$ $\triangle AOB \equiv \triangle COE$

$\therefore$ $AO = CO$

$BO = EO$

221. **作圖題的解法** 我們推證種種問題，用筆寫的時候，雖然用綜合法方式，但在腦中思考時，初必循解析法的秩序，由假設的事實，達到一已知的眞理。古人對於種種定理的推證，都是靠這法求得的，我們演算作圖題時，這種解析更加重要。現在且把那演算作圖題的步驟，分列在下面：

a. 假設已得作法，先作略圖，以表題的大意；

b. 在略圖中，將已知各部份記出；

c. 研究從已知部份可能判定多少別的部份；

d. 如必要時，作種種補助線，來顯明各部份的關係；

e. 完全判定的部份，普通是一個三角形，作圖的方法，就是從這個三角形入手；

f. 根據各補助線的大意，完成所要作的圖；

g. 證明所作的圖，能適合題中條件；

h. 討論本題解法的可能範圍，和有無二個或二個以上的解法。

222. 根據三角形全等的定理可知凡三角形能有

下列各項之一的，就可完全判定，並且僅有一個解答：

a. 曉得兩角和他們的夾邊；

b. 曉得兩邊和他們的夾角；

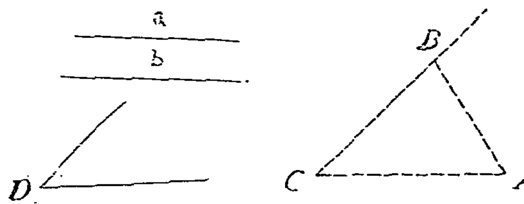
c. 曉得三邊；

d. 曉得直角三角形的斜邊和一銳角；

e. 曉得直角三角形的斜邊和一腰。

命辭二十一 作圖題

223. 曉得三角形的兩邊，和他們的夾角，求作這個三角形。



設 a, b 是三角形的兩邊，$\angle D$ 是他們的夾角，求作這個三角形。

作圖法 作 CA 線，使他的長等於 b，在 C 點作角，等於 $\angle D$（§82）截 CB，使等於 a，聯接 A,B 二點。

則 $\triangle ABC$ 便是所求的三角形。

證 $\triangle ABC$ 和所求作的三角形有兩邊及一夾角相等

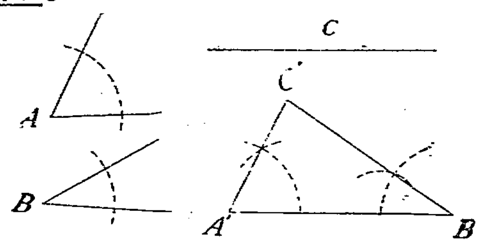
$\therefore$ $\triangle ABC$ 即全等於所求作的三角形。 § 57

習題 330 直角三角形的兩腰是 2 吋和 3 吋，求作這個三角形。

習題331　某三角形的兩邊是1吋和2吋，他們的夾角是45°，求作這個形。

命辭二十二　作圖題

224. 已知三角形的兩角，和他們的夾邊，求作這個三角形。



設　∠A, ∠B, 是三角形的兩個角，c 是他們的夾邊，求作這個三角形。

作圖法　　作 A'B' 線，使等於已知邊 c,

在 A'點作角，使等於 ∠A,

在 B'點作角，使等於 ∠B;

則 ∠A', ∠B' 二角的他邊交於 C' 點，△A'B'C' 就是所求的三角形。

證　　　　（請學者自證之）

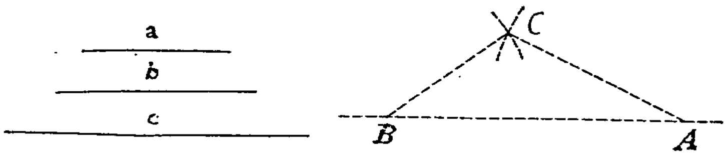
習題332　等腰三角形的底長 $2\frac{1}{2}$ 吋，每一底角是45°求作這形。

習題333　等腰三角形底長3吋，頂角45°，求作這形。

習題334　三角形的兩角是45°和30°，他們所夾的邊長 $1\frac{1}{2}$ 吋，求作這形。

命辭二十三　作圖題

225. 曉得三角形的三邊求作這個三角形。



設　a. b. c 是三角形的三邊，求作這個三角形。

作圖法　作 AB 線，使等於 c,

用 A 做圓心，用 b 做半徑，作弧，

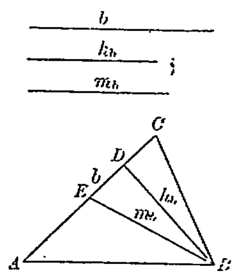
又用 B 做圓心，用 a 做半徑，作弧，使他和第一弧相交於 C 點。

作 CA, CB 二線，

則　△ABC 便是求作的三角形

證　（請學者自證之）

習題 335　曉得 b h_b m_b, 求作 △ABC



解析：假設這圖業已完成，則直角三角形 EBD 便可判定，又 AE 和 EC 都能判定。

作圖法　先用 m_b 做斜邊，用 h_b 做一腰作直角三角形 EBD，並且拿 DE 向兩端無限延長。

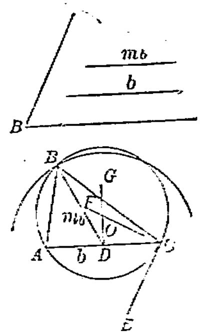
拿 $EC=AE=\frac{1}{2}b$,

作 AB, BC 二線

則　　$\triangle ABC$ 便是所求作的三角形。

討論　這種作圖,必須 $m_b>h_b$ 才為可能。

習題336　曉得 $\angle B$, b 和 m_b 求作 $\triangle ABC$。



解析:　假設圖已作完,觀圖可曉得已知各部份不能判定任一三角形,但是 B 點對於 AC 中點 D 的距離是 m_b,所以曉得 B 的軌跡是一個圓,這圓的半徑是 m_b 而圓心是 D。

又因 $\angle B$ 的兩邊必定經過 A, C 二點,所以 B 點的又一軌跡是一弧,他的弦是 AC, 而其中可內接一個和已知 $\angle B$ 相等的角,

這兩個軌跡交於兩點,兩點中任一點都可作為 B 點,

作圖法　取 $AC=b$ 又在 C 點作 $\angle ACE=\angle B$, 又在 C 點作 $CF\perp CE$, 在 AC 的中點 D,作 $DG\perp AC$,且和 CF 相交於 O 點;用 O 做圓心,用 OC 做半徑,作圓。

又用 D 做圓心, m_b 做半徑,作一弧,使他和 O 圓相交於 B 點,作 BA 和 BC; 這 $\triangle ABC$ 就是所求的三角形。

證　　　　(請學者自擬)

習題337　已知三角形的兩邊和一邊的對角($a, b, \angle A$)求作三角形。

解　作AC線,使等於b,在A點作$\angle CAE$,等於已知$\angle A$,用C做圓心,用a做半徑,作圓和AE相交於B點。

討論:　設$\angle A$爲直角,則a和b長短的比較當如何?又設$\angle A$爲鈍角,或銳角,則a和b長短的比較當如何?此題應如何才有兩個解答?

在下列338—341各題中,求作等邊三角形已知部份如下:

習題338　垂頂線(即高);

習題339　高與一邊的和,(解析時先作一線,表示這和)

習題340　外接圓的半徑;

習題341　內接圓的半徑。

在下列342—352各題中,求作直角三角形已知部份如下:

習題342　一腰和所對的銳角;

習題343　一腰和斜邊上的高;

習題344　一腰和他腰上的中線;

習題345　一銳角和斜邊上的高;

習題346　一腰和直角的平分線;(這兩已知線所成的角是多少度?)

習題347　兩腰的和及斜邊;

習題348　兩腰的差及斜邊;

習題349　一銳角及兩腰的和;

習題350　一腰和內切圓的半徑;

習題351　斜邊和內切圓的半徑;

習題352　內切圓的半徑和外接圓的半徑。

在下列自 353-357 各題中,求作等腰三角形已知部份如下:

習題353　底和高;

習題354　底和頂角;

習題355　底和一腰上的高;

習題356　頂角和底上的高;

習題357　一底角又底與一腰的和。

在下列自 358-375 各題中求作三角形 ABC (a, b, c); 已知部份如下:

習題358　a, b, h_b;

習題359　a, b, m_b;

習題360　a, b, h_c;

習題361　a, m_a, h_a;

習題362　a, h_a, $\angle A$;

習題363　a, m_a, $\angle C$;

習題364　a, h_a, h_c;

習題365　a, h_a, $\angle B$;

習題366　a, h_a, $\angle A$;

習題367　h_a, $\angle B$, $\angle C$;

習題368　h_a, h_c, $\angle C$;

習題369　a, m_b, c;

習題370　a, m_b, $\angle C$;

習題371　$a+b$, c, $\angle B$;

習題372　$a+b+c$, $\angle A$, $\angle C$;

習題373　$a+b$, c, h_a;

習題374　a, m_b, m_c;

習題375　m_a, m_b, m_c。

按: 四邊形的輔助部份,就是他的對角線,平行四邊形的輔助部份;就是他的對角線,和高;梯形的輔助部份是中線和高。

習題376　若是要作正方形,至少須知道幾部份?

習題377　若是要作梯形,至少須知道幾部份?

習題378　若是要作四邊形,至少須知道幾部份?

習題379　曉得一邊與一對角線的和,求作正方形。

習題380　曉得兩對角線,求作菱形。

習題381　曉得一角和一對角線,求作菱形。

習題382　曉得底和高,求作菱形。

習題383　曉得一邊和一對角線,求作矩形。

習題384　曉得他的周界,和一對角線,求作矩形。

習題385　曉得對角線所成的角,和這角所對的邊求作矩形。

習題386　曉得兩底和兩對角線,求作梯形。

習題387　曉得兩鄰邊和一邊上的高,求作平行四邊形

習題388　曉得兩對角線和一邊求作平行四邊形。

習題389　曉得兩對角線和他們所夾的角,求作平行四邊形。

習題390　曉得兩底和一對角線,求作等腰梯形。

習題391　曉得兩底和高,求作等腰梯形。

習題392　曉得兩底和一底角,求作等腰梯形。

習題393　曉得三邊和兩夾角,求作四邊形。

習題394　求作一圓,使他的半徑等於R,並且和兩根相交的直線成切線。

習題395　求作一圓,使他的半徑等於R,並且和一已知直線相切,又和一個已知圓相切。

習題396　求作一個圓使他經過一已知點,並且和兩已知平行線相切。

習題397　求作一個圓,使他在已知點和一已知直線相切,並且經過線外一已知點。

習題398　求作圓,使他的半徑爲R,經過一已知點,並且和一已知圓相切。

習題399　有兩線段不平行,但是沒有相交,設延長他們,必交成一角;如今要求這角的平分線,但不可把已知二線實行延長,試說明作法。

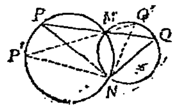
習題400　過已知三角形的兩邊,作一線,和第三邊平行,並且使他的長等於一已知線段。

(以下是第二編的總練習)。

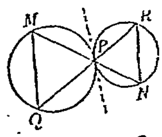
習題401　設兩等弦相交,他們必定和過交點所作的直徑成等角。(從圓心到弦作⊥)

習題402　圓的外切梯形的中線,等於梯形周圍的四分之一。

習題403　若從圓上一點作一弦,和一切線,從弦所截的弧的中點到這兩線所作的垂線必相等。(連接已知點和截弧的中點)。

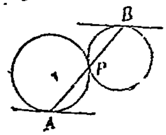


習題404　兩圓相交於 MN 二點,過M點作 PQ 線,使他和兩圓相交於P點和Q點;又過M點作P'Q'線,求證 $\angle PNQ = \angle P'NQ'$。

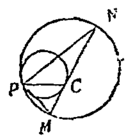


習題405　兩圓相切於P點,過P作一線,過兩圓於M,N二點,又過P作一線,過兩圓於Q,R二點,

求證　　$MQ \parallel NR$



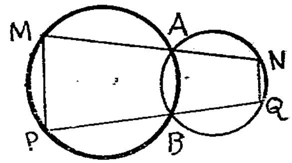
習題406　兩圓相切於P點,過P作一線,過兩圓於A,B二點,求證在A,B二點所作的切線必彼此平行



習題407　兩圓互相內切於P點,MN 是大圓的弦,並且和小圓相切

於 C 點,求證 $\angle MPC=\angle CPN$。(過 P 作切線)

習題408　兩圓相交於A,B 二點過 A 作直線,遇兩圓於M,N 二點,又過 B 作直線與兩圓相遇於 P,Q 二點。



求證　　MP ∥ NQ。

習題409　兩圓相交於二點,若過這二點作兩平行線,各端到圓為止,則此兩平行線必相等。

習題410　有正方形,每邊長三吋,某點對於此正方形的距離常為二吋,求此點的軌跡。

習題411　正方形的一邊為四吋,有長三吋的直線兩端常在正方形的周界上;設其兩端循周界移動,求這直線中點的軌跡。

習題412　在已知底上作三角形,使一底角為他底角的二倍,今設大底角的平分線,遇其對邊於 P 點,求 P 點的軌跡。

習題413　自已知圓上的一點,作一切線,等於一已知長,求這切線外端的軌跡。

習題414　用已知半徑作一圓,使他和已知圓相切,求所作圓心的軌跡。

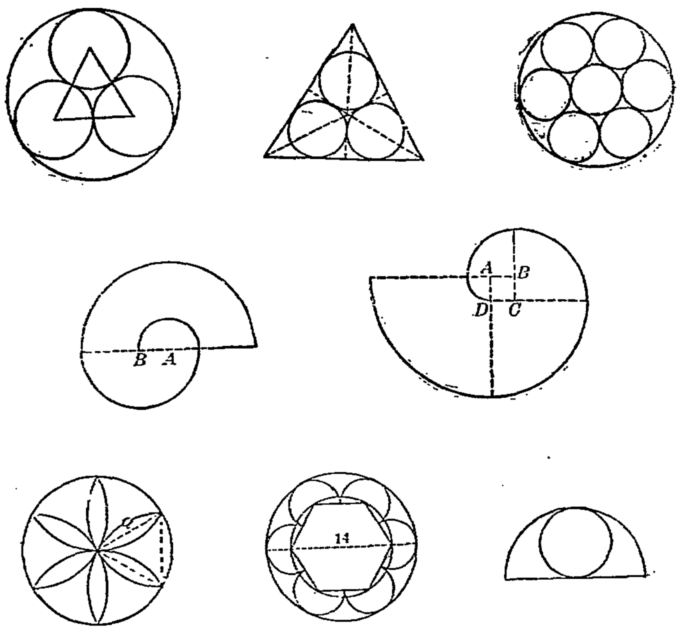
習題415　由一已知點到數個同心圓作切線,求各切點的軌跡。

習題416　作一圓,使他和兩個已知同心圓相切,求所作圓心的軌跡。

習題417　有60°的角其兩邊和一個半徑5呎的圓相切,求這個角的頂點的軌跡。

習題418　過圓上的一定點,作一弦,求這弦的中點的軌跡。

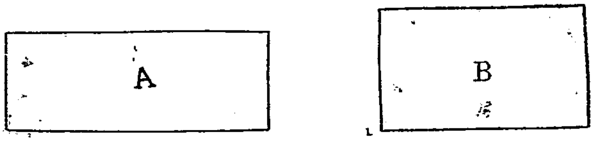
習題419　試作下列各圖,並說明作法:



第三編　面積

第一章　簡單圖形的面積

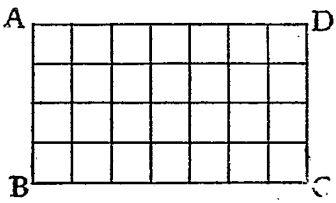
226. 定義　若要曉得平面形的大小，必先定面積的單位。這種單位，普通是一個正方形，他的邊是長的單位。比如平方呎，平方米，等等便是。一個圖形所含這種單位的數目，叫做這形的面積。凡二個或數個平面形面積相等，但不必能密合的，叫做等積形。如下圖A和B爲等積:



照這定義，可以曉得全等形也是等積形的一種。

關於以下各命辭中的幾何圖形，若僅說兩形相等，但沒有全等字樣的，便是等積的意思。

在右圖矩形ABCD中，他的邊 $AB=4$, $BC=7$, 其中所含的單位正方形是28個，因 $4\times7=28$, 所以得下的定理:



227.　設矩形的邊爲 a 單位和 b 單位，他的面積

必爲 $a\times b$ 平方單位。

228. 設正方形的一邊爲 a 單位，他的面積爲a^2平方單位。

229. **比及比例**　設 a, b 是兩個同類量，則$\frac{a}{b}$叫做 a 和 b 的比，這二量叫做比的二項(Terms)；a 爲前項(Antecedent)，b 爲後項 (Consequent)；a, b 的關係，也可用 $a:b$ 表示。

因　$3:4=\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20}=15:20$

且　$8:6=\frac{8}{6}=\frac{8\div2}{6\div2}=\frac{4}{3}=4:3$

所以曉得，凡比的兩項，用同一個數來乘，或同一個數來除，他的價値終不變，

若二量的比和另外二量的比相等，這關係叫做比例(Proportion)。如 $a:b$ 等於 $c:d$ 寫法如下：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

或是　　$a:b=c:d$

或是　　$a:b::c:d$

這種列式　讀法都是「a：b 等於 c：d」

習題 420　求將下列各比化簡：

$8:24$,　$3\frac{1}{2}:7$,　$0.4:0.03$,　$(a+b)^2:(a+b)$

習題 421　甲作工八日，乙作工三日，共得工資 44 元，問每人應得多少?

習題 422　將 48 分為兩部份,使他們的比等於 3 : 13。

習題 423　試將 50 分為兩部份,使他們的比等於 m : n。

習題 424　三角形的周界是 30 吋,他的各邊的比是 3 : 5 : 7 求各邊的長。

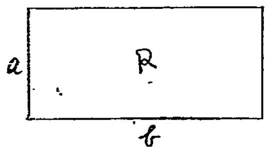
習題 425　將 180° 的角分為五部份,使各部份成 1 : 2 : 3 : 4 : 5 的比。

習題 426　有兩個矩形,甲形長 27 吋,寬 12 吋,乙形長 20 吋,寬 18 吋,求這兩形面積的比。

習題 427　有兩個正方形,甲形的一邊等於乙形的一對角線,求這兩形面積的比。

習題 428　有甲乙兩矩形,甲形的底是 10 吋,高是 x,乙形的底是 12 吋,高也是 x,求此兩形面積的比。

230. 矩形的面積　由上段的例，可得以下的基本原則: 矩形的面積，等於他的底和高相乘的積。



設上圖用 a 表矩形的高，b 表他的底，R 表他的面積；按上段的例，可知 $R=a\times b$。

231. 系一　兩個矩形面積的比，等於他們的底乘高的積的比。

因　　$R=ab$,　　$R'=a'b'$,

所以　　$$\frac{R}{R'}=\frac{ab}{a'b'}$$

232. 系二 <u>等底矩形面積的比，等於他們的高的比</u>。

$$\frac{R}{R'}=\frac{a}{a'}(b=b')$$

233. 系三 <u>等高矩形面積的比，等於他們的底的比</u>。

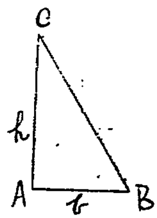
$$\frac{R}{R'}=\frac{b}{b'}(a=a')$$

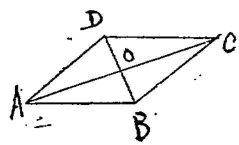
234. 系四 <u>等底等高的矩形面積相等</u>。

$$R=R'\begin{pmatrix}a=a'\\b=b'\end{pmatrix}$$

235. 系五 <u>直角三角形的面積，等於他的兩腰的乘積的一半</u>。

236. 系六 <u>菱形的面積，等於他的兩對角線的乘積的一半</u>。





237. 系七 <u>兩個正方形面積的比，等於他們的一邊平方的比</u>。

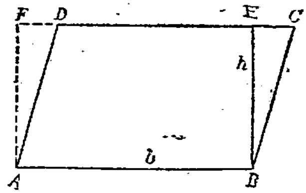
習題 429 直角三角形兩腰是 4 吋和 5 吋，求面積。

習題 430 正方形的一對角線是 4 吋求面積。

習題 431 菱形的兩對角線是 4 吋和 7 吋，求面積。

命辭一 定理

238. 平行四邊形的面積，等於他的底乘高的積。



設 ABCD是一個平行四邊形，BE是他的高，AB是他的底，如今用 b.h 代表他的底和高。

求證 $\square ABCD = b \times h$

證 作AF ∥ BE, 並且和CD的延長線交於F點，

則 ABEF 是一個矩形。

又 $\triangle ADF \equiv \triangle BCE$ § 112

∴ 面積ABED＋△ADF＝面積ABED＋△BCE 公理 2

就是 $\square ABCD$＝矩形ABEF

但矩形 ABEF 的面積是 $b \times h$ § 230

∴ $\square ABCD$ 的面積是 $b \times h$ 公理 1

239. 系一 兩個平行四邊形面積的比，等於他們的底乘高的積的比。

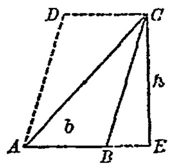
240. 系二 兩個等底平行四邊形面積的比，等於他們的高的比。

241. 系三 兩個等高平行四邊形面積的比，等於他們的底的比。

242. 系四 兩個等底等高平行四邊形面積相等。

命辭二 定理

243. 三角形的面積，等於他的底乘高的積的一半。



設上圖 $\triangle ABC$ 的底是 b，他的高是 h，

求證 $\triangle ABC$ 的面積等於 $\frac{1}{2}b\times h$。

證 完成 ▱ABCD，用 AB 和 BC 做兩鄰邊，

則 ▱ABCD 和 $\triangle ABC$ 有同一的底和同一的高。

但是 $▱ABCD = b\times h$ §238

又 $\triangle ABC = \triangle ADC = \frac{1}{2}▱ABCD$

∴ $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}b\times h$

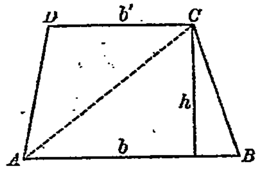
244. 系 設用 T 和 T' 代表兩個三角形的面積，b, b' 代表他們的底，h, h' 代表他們的高，則得下列的關係。

(1) $\frac{T}{T'} = \frac{b}{b'}\,\frac{h}{h'}$ (3) $\frac{T}{T'} = \frac{h}{h'}\ (b=b')$

(2) $\frac{T}{T'} = \frac{b}{b'}\ (h=h')$ (4) $T = T'\ \left(\begin{matrix} b=b' \\ h=h' \end{matrix}\right)$

命辭三　定理

245. 梯形的面積，等於他的高乘兩底的和的一半。



設上圖梯形 ABCD 的高是 h, 他的兩底是 b 和 b',

求證　梯形 ABCD 的面積 $=\frac{1}{2}h(b+b',)$

證　　作對角線 AC,

則　$\triangle ABC$, $\triangle ADC$, 和梯形 ABCD 的高都是 h。

但是　$\triangle ABC=\frac{1}{2}b\times h$　　§ 243

$\triangle ADC=\frac{1}{2}b'\times h,$　　§ 243

$\therefore$ 梯形 ABCD 的面積爲 $\frac{1}{2}h(b+b')$

246. 系　梯形的面積等於他的高乘他的中線的積。

習題 432　立方體的一稜是 4 吋,求他的面積。

習題 433　正方形的對角線長 10 吋,求這形的面積。

習題 434　菱形的對角線長 8 吋和 7 吋,求他的面積。

習題 435　梯形高 8 吋上底長 $7\frac{1}{2}$ 吋,下底 $10\frac{1}{2}$ 吋,求面積。

習題 436　梯形的面積是 341 平方吋,已經曉得他的高是 11 吋,上底 24 吋,求他的下底。

習題437　連接平行四邊形各邊中點的直線,必分這形為四個相等的平行四邊形。

習題438　有矩形的公園,長600呎,寬400呎,馬路由園中穿過,和園邊成斜角,所截園內的地成為平行四邊形,這平行四邊形的兩鄰邊為50呎和450呎,求馬路的寬。

習題439　長方形的箱子,長82公分,寬50公分,高32公分,求他的面積。

習題440　三角形的一中線,必分這形成為兩個等積三角形。

習題441　平行四邊形的對角線,必把這形分成四個等積三角形。

習題442　經過平行四邊形兩對角線,交點的直線,必把這形分成兩個等積的部份。

習題443　由三角形各中線的交點到各頂點所作的直線必把這三角形分成三個等積三角形。

習題444　等腰直角三角形的面積,等於他斜邊平方的四分之一。

習題445　連接三角形兩邊中點的直線,必和這兩邊成三角形,他的面積等於原三角形的四分之一。

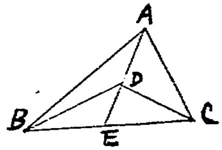
習題446　圓的外切多邊形的面積,等於圓的半徑乘多邊形周界的積的一半。

習題447　用已知直線做底,作三角形使他的面積等

於已知面積,求這三角形頂點的軌跡。

習題448　在右圖 $\triangle ABC$ 中,D 是中線 AE 上的任一點,

求證　$\triangle ABD=\triangle ADC$。



習題449　有梯形高12呎,他的兩底是17呎和19呎,求這梯形的面積。

習題450　梯形的面積是 144 方丈,他的底是20丈和16丈,求他的高。

習題451　梯形的面積是 400 方丈,高16丈,他的一底長30丈,求其餘一底。

習題452　設 P 和 P' 爲兩個平行四邊形的面積,他們的各底是 b 和 b',他們的高是 h 和 h',求證下列各式:

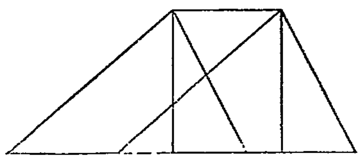
(1)　$\frac{P}{P'}=\frac{bh}{b'h'}$

(2)　$\frac{P}{P'}=\frac{h}{h'}\ (b=b')$

(3)　$\frac{P}{P'}=\frac{b}{b'}\ (h=h')$

(4)　$P=P'\ (b=b',\ h=h')$

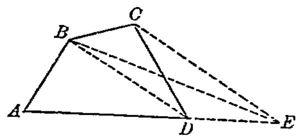
習題453　利用下圖證明平行四邊形的面積,和他的角的大小沒有關係。



第二章 變形

命辭四 作圖題

247. 求變已知四邊形成一個三角形。



設 ABCD 是一個四邊形，

求作一個三角形，使他的面積和四邊形ABCD相等。

作圖法： 連接B,D兩點，過C點作BD的平行線，使和AD的延長線相遇於E點。

作BE線，

則 $\triangle AEB$便是所求的三角形。

證 $\triangle BDE = \triangle BDC$ § 244

$\therefore$ $\triangle ADB + \triangle BDE = \triangle ADB + \triangle BDC$

即 $\triangle AEB =$ 四邊形ABCD

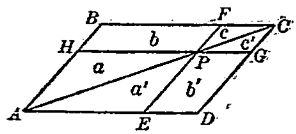
習題454 求將已知五邊形變作三角形。

(按：這題要先照上法將五邊形變作四邊形，然後將四邊形變作三角形)。

習題455 要將四邊形變作三角形共有幾個方法？試作圖說明。

命辭五　定理

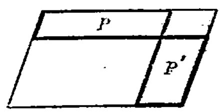
248. 若過平行四邊形的對角線上任一點，對各邊作平行線，則對角線兩旁所成的平行四邊形必相等。



設上圖ABCD是一個平行四邊形，P是對角線AC上任一點，EF是過P點平行於AB的線，GH是過P點平行於AD的線，b, b' 是所成的平行四邊形，而a,a', c,c', 都是三角形。

求證	▱b＝▱b'	
證	△ABC≡△ADC	a. s a.
即	△a＋▱b＋△c＝△a'＋▱b'＋△c'	
又	△a≡△a'	a. s. a.
	△c≡△c'	a. s. a.
∴	▱b＝▱b'	公理 3

習題456　求將已知平行四邊形變作另一個平行四邊形，使他的底等於一已知直線，而他的角等於已知四邊形的各角。(延長平行四邊形的底使延長部份等於已知線，照圖完成，則P＝P'。)

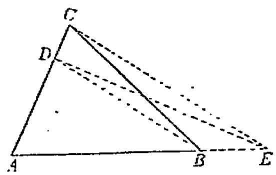


習題457 求變已知正方形爲等腰三角形。

習題458 求變已知三角形爲另一個三角形,使他的底的長等於一巳知直線。

(注意:這題也可照習題 456 的法來解。)

解 附圖 $\triangle ABC$ 是巳知三角形,延長他的底邊 AB 到 E,使 AE 等於巳知直線的長。



連接 CE,

又過 B 點作 $DB \parallel CE$,

連接 DE,

則 $\triangle ADE = \triangle ABC$。

習題459 求變已知正方形爲三角形,使他的底等於巳知正方形一邊的三分之四。

習題460 求變巳知三角形爲另一個三角形,使他的底等於巳知三角形的底二倍。

習題461 求變巳知三角形爲等腰三角形,使他的底的長短不變。

習題462 求變巳知三角形爲另一個三角形,使他有兩邊等於兩根巳知線段。

習題463 求作三角形,使他的面積等於巳知三角形的五倍。

習題464 過平行四邊形的一頂點作數直線,使分這形爲五個等份。

習題 465　求變已知平行四邊形為菱形。

習題 466　已知 △ABC，求變這形為另一個三角形，使他的底在 AB 直線上，頂點在 AC 的中點上。

習題 467　求變已知矩形為另一個矩形，使他的底等於一已知線段。

習題 468　求變已知矩形為一個平行四邊形，使他的底等於一已知線段，並且有一個角等於一個已知角。

習題 469　求變已知矩形為平行四邊形，使他有一邊等於一個已知線段。

習題 470　求變已知矩形為三角形，使他的底等於已知線段。

習題 471　求變已知矩形為同高的梯形，並且有一底等於已知長。

習題 472　求變已知平行四邊形為已知高的矩形。

習題 473　求變平行四邊形為已知高的另一個平行四邊形。

習題 474　求變已知平行四邊形為已知高的三角形。

習題 475　求變平行四邊形為同高的梯形。

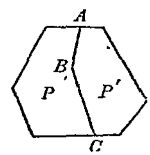
習題 476　過三角形的一頂點，求作直線，分這形為兩部份這兩部份的比等於 3 : 2。

習題477　過三角形的一頂點,求作直線,使分這形為三個相等的部份。

習題478　過平行四邊形的一頂點,作一直線,分這形為兩部份,使這兩部份的比等於 3 : 2。

習題479　求分已知梯形為三個相等的梯形。

習題480　右圖的多邊形被折線 ABC 分做 P 和 P' 兩部份;今要作一直線來代替ABC,並且不變 P 或 P' 的面積,試說明這直線的作法。



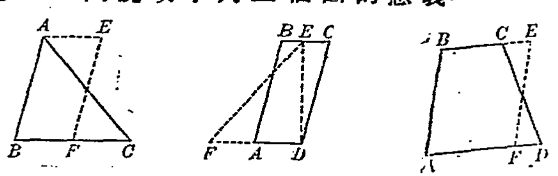
習題481　過四邊形的一頂點作直線,使分這形為三等份。(注意: 先作一對角線)

習題482　求變已知五邊形為矩形。

習題483　求作三角形使等於兩個已知三角形的和(注意: 先將兩形變為同高,然後加他們的底。)

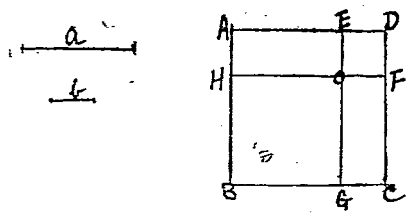
習題484　求作平行四邊形,使他等於兩個已知平行四邊形的和。

習題485　試說明下列三個圖的意義:



命辭六　定理

249. <u>兩線段的和的平方，等於各線段平方的和，加他們的積的二倍</u>。



上圖中，設 a,b 是兩已知線段，

求證　　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

證　　作直線 AED

使　　$AE=a$

　　　$ED=b$

用 AD 做一邊，作正方形 ABCD

過 E 點作 $EG \parallel DC$

在 DC 上拿 F 點，使 $DF=DE$

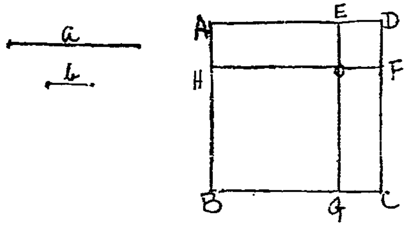
過 F 作　$HF \parallel AD$

則　矩形　$AHOE=ab$

　　矩形　$OGCF=ab$

　　正方形　$HBGO=a^2$

　　正方形　$EOFD=b^2$



今 $(a+b)^2=(AE+ED)^2$

$=AD^2$

$=$正方形 ABCD

$=$矩形 AHOE$+$矩形 OGCF$+$

正方形 HBGO$+$正方形 EOFD

$=ab+ab+a^2+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$

$\therefore \quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

250. 系一 兩線段的差的平方，等於兩線段平方的和，減去他們的積的二倍。

251. 系二 兩線段的和乘他們的差的積，等於大線段的平方，減去小線段的平方。

註： 根據上列各定理，可求種種數目的平方，

如：$(26)^2=(20+6)^2$

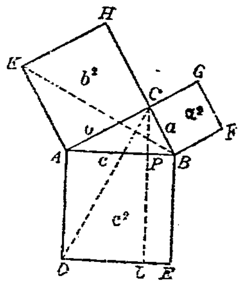
$=20^2+2\times20\times6+6^2$

$=676$

第三章　派脫加拉的定理〔Theorem of Pythagoras〕

命辭七　定理

252.　<u>直角三角形兩腰平方的和，等於斜邊的平方</u>。



設上圖 $\triangle ABC$ 是一個直角三角形，其中 a,b 是兩腰，c 是斜邊，又 AE 是斜邊上所作的正方形，CF 和 CK 是兩腰上所作的正方形。

求證　$c^2=a^2+b^2$

證　作　$CL \parallel AD$

又作　BK 和 CD

已知　ACG 和 BCH 都是直線　§ 23

∴　$\triangle ACD \equiv \triangle AKB$　s. a. s.

因　$AC=AK,\quad AB=AD$　§ 121

而　$\angle CAD=\angle KAB$　公理 2

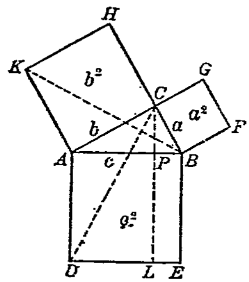
但　$\square AL=2\times\triangle ACD$　（同底等高）

$\square CK=2\times\triangle AKB$　（同底等高）

$\therefore$　　$\square AL=\square CK$　　公理 1

依同理；　若作CE和AF兩線，可證明

$\square BL=\square CF$。



但　正方形AE＝矩形AL＋矩形BL　　公理 9

$\therefore$　正方形AE＝正方形CK＋正方形CF　公理 1

即　　$c^2=a^2+b^2$

253. 系　<u>直角三角形一腰的平方，等於斜邊的平方減去其他一腰平方的差。</u>

54. 派氏定理　命辭七的定理，叫做派脫加拉氏的定理 (Theorem of Pythagoras)，實爲平面幾何中唯一最要的定理，相傳是派氏發明的。但派氏生於西曆前第六世紀，而印度人和埃及人發明這理，實遠在派氏以先。這定理既然這樣重要，所以證的方法也不僅一種；古今算學家，對於這題有特別貢獻的也很有人。命辭七所用的證法，大約是<u>歐幾立得</u>氏的方

法；派氏本人所用的證法，是根據下面的圖得來的。

設　ABCD 是一個正方形

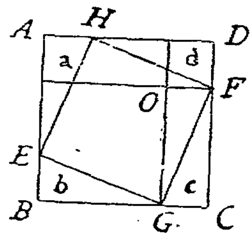
取　DF＝CG＝BE＝AH

又作　OF ∥ AD, OG ∥ DC

則　□ABCD－△a－△b
－△c－△d＝□EGFH

又　□ABCD－□AO－□CO
＝□BO＋□DO

∴　□EF＝□BO＋□DO



255 加爾非氏的證法:

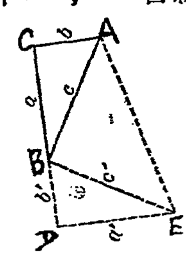
美國總統加爾非氏，也創了一種證法，如下：

設　ABC是一個已知直角三角形，延長他的 a 邊，使 b'＝b, 又作 a' 垂直於 b', 且 a'＝a；作 AE, BE 各線。

$$\text{則梯形 } ACDE=\frac{(a+b')\ (a'+b)}{2}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}$$

$$=ab+\frac{a^2+b^2}{2}$$



但又知梯形 ACDE＝△ABC＋△a'b'c'＋△ABE

$$=\frac{ab}{2}+\frac{a'b'}{2}+\frac{cc'}{2}$$

$$=ab+\frac{c^2}{2}$$

$\therefore \quad a^2+b^2=c^2$

習題486 矩形的兩邊是8和15,求他的對角線。

習題487 圓的直徑是13,他的內接平行四邊形的一邊是5,求其他一邊。

習題488 等腰三角形的底是4,他的每一腰是5,求這形的面積。

習題489 菱形的兩根對角線是6和8,求周界。

習題490 有弦長84吋,他對圓心的距離是4吋,求這圓的半徑。

習題491 圓的半徑是37吋,有一弦距離圓心12吋,求這弦的長。

習題492 兩圓的圓心距離是13吋,他們的半徑是8吋和10吋求他們的外公切線的長。

習題493 兩圓的圓心距離是13吋,他們的半徑是3吋和2吋,求他們內公切線的長。

習題494 直立的桿長12呎,在平地上的影長35呎,求從影端到桿上端的距離。

習題495 氣球高1000呎,有石子自氣球落下,所落地方和某人相距750呎,求這人對於氣球的距離。§252

習題496 長25呎的梯斜靠在牆邊,這梯的上端距地24呎,問梯的下端距離牆脚多少呎?

習題497 兩電桿相距60呎,其一高30呎,他桿高40呎,

求連這兩桿上端的電線的長。

習題498 有正方形的池子,每邊寬10呎,池的中心生蘆葦一根,他的上部高出水面1呎,被風吹動時,蘆葦的上端適與池邊的中點相觸,求這池的深(假設池中水滿)

習題499 海邊有防守大砲一尊,火力可達十里;有敵艦在距岸8里處沿岸而行,速率每小時十八里;問這艦有幾小時是在大砲火線以內。(假設海岸為直線)

習題500 有樹折斷了,那折處離地24呎,折後兩部份尙未完全脫離,樹尖觸地處適離樹脚7呎,求全樹的高。

習題501 矩形的對角線長13呎。他的一邊長5呎,求其餘一邊。

習題502 正方形的對角線長10呎,求他的一邊。

習題503 直立的電桿高35呎,今由上端引鐵絲到地面,若鐵絲長37呎,求鐵絲下端和電桿下端的距離。

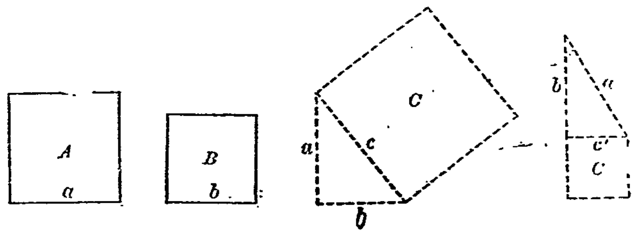
習題504 若上題的桿高11呎,又桿的下端和鐵絲的下端相距60呎,求鐵絲的長。

習題505 若上題鐵絲長17呎,他的下端和電桿下端相距8呎,求電桿的高。

習題506 有人立在平地上,他的影長24呎,但知從他的頭頂到影端的距離是25呎,求這人的高。

命辭八　作圖題

256. <u>求作正方形，使等於兩個已知正方形的和或差。</u>



設A和B是兩已知正方形，他們的一邊是a和b。求作正方形c, 使等於A+B; 又作正方形C' 使等於A−B。

作圖法　用a, b做兩腰，作直角三角形，那斜邊上的平方，便是所求的C。

又用a, b中較大的邊做斜邊，較小的邊做一腰，作直角三角形，則他一腰上的平方，便是所求的C'。

證　　　　(請學者自擬之)　　　§252, §253

習題507　求作正方形,使他的每一邊等於$\sqrt{5}$吋。

解　設所求正方形的一邊是x, 則

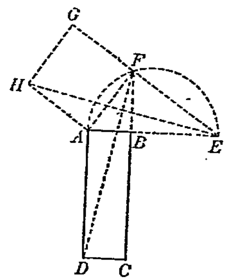
$$x=\sqrt{5}$$

$$x^2=5=4+1=2^2+1^2$$

習題508　求作正方形,使他的每一邊等於$\sqrt{10}$吋。

命辭九　作圖題

257. 求作正方形，使等於一個已知矩形。



設　ABCD 是一個已知矩形，

求作一個正方形，使他和矩形 ABCD 相等。

作圖法：延長這矩形的短邊 AB 到 E，使 $AE=AD$，用 AE 做直徑，作半圓。

作　$BF \perp AE$' 並且和半圓相交於 F 點，又作 AF，

則　在 AF 上所作的正方形，便是所求的正方形。

證　　作 HE 及 DF

則　　$\triangle ADF \equiv \triangle AHE$　　s. a. s.

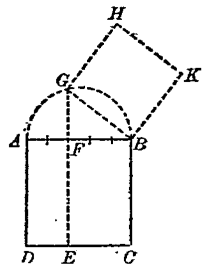
但　　矩形 $AC = 2 \times \triangle ADF$　　同底等高

又　　正方形 $HF = 2 \times \triangle AHE$

∴　　矩形 ABCD ＝ 正方形 HF　　公理 1

命辭十　作圖題

258. 求作正方形，使等於已知正方形的已知部份。



設　ABCD 是一個已知正方形，

求作一個正方形，使等於 ABCD 的 $\frac{3}{5}$。

作圖法　在 AB 線上，拿 $BF=\frac{3}{5}AB$,

作 $EF \parallel AD$

按命辭九的方法，將矩形 EFBC 變成正方形 BH.

則　BH 便是所求的正方形。

證　(請學者自擬。)

習題 509　求作正方形,使等於三個已知正方形的和。

習題 510　設 a, b, c 是三已知線段,求作 $x=\sqrt{a^2+b^2}$; 又求作 $y=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

習題511　求作正方形,使等於已知正方形的三倍。

習題512　三角形的高是7公分,底是5公分,求作正方形,使他和這三角形相等。

習題513　求作$\sqrt{21}$。

解　　設　$\sqrt{21}=x$

則　　$x^2=21$

$=7\times 3$ 然後用命辭九作成。

習題514　求作$\sqrt{12}$（這題不僅一法。）

習題515　求作$x^2=\frac{3}{4}a^2$（注意：　$x^2=\frac{3}{4}a, a$）

習題516　求變已知五邊形爲正方形。

習題517　求變已知等腰三角形爲正方形。

習題518　求作正方形,使等於已知六邊形的$\frac{4}{5}$。

習題519　求作正方形,使等於兩個已知三角形的和

習題520　設正方形的一邊是a,他的對角線爲d,

求證　$d=a\sqrt{2}$

$a=\frac{d}{\sqrt{2}}$

習題521　設正方形的對角線是28,求他一邊的長。

習題522　等腰直角三角形的斜邊是c,求證他的面積爲$\frac{c^2}{4}$。

習題523　等腰直角三角形一腰的長是7,求他的斜

邊和面積。

習題524　等腰直角三角形的斜邊是10,求他的一腰和面積。

習題525　等邊三角形的一邊是a,求證他的面積是$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

習題526　等邊三角形的高是h,求他的面積。

習題527　等邊三角形的一邊是6,求他的高和面積。

習題528　等邊三角形的一邊是8,求他的面積。

習題529　角柱體的高是10吋,他的底是一個等邊三角形每一邊四吋,求他的全面積。

習題530　角柱體的底是正方形,每邊5吋,體高是7吋,求他的全面積。

習題531　凡立體由四個全等等邊三角形圍合而成的叫做正四面體。某正四面體的一稜是10公分,求他的全面積。

習題532　直角三角形的兩腰是6公分和8公分,求他斜邊上的高。

習題533　菱形的對角線是12吋和18吋,求他的高。

習題534　菱形的一邊是5吋,有一對角線是8吋,求他的面積。

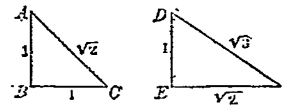
習題535　求作$\sqrt{2}$吋和$\sqrt{3}$吋的線段。

解　作等腰直角三角形ABC,使每腰爲一吋,他的

斜邊 AC 便等於 $\sqrt{2}$。

又作 $\triangle$DEF 使 DE=1

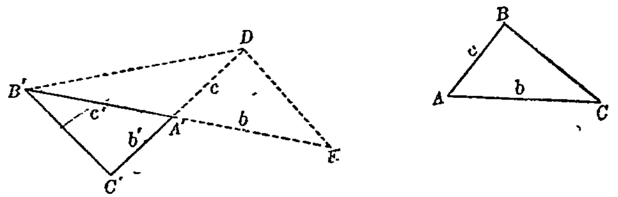
EF=$\sqrt{2}$ 則 DF=$\sqrt{3}$



習題 536　求作 $\sqrt{5}$ 時和 $\sqrt{7}$ 時的線段。

命辭十一　定理

259. 設兩個三角形有一角相等，他們的面積的比，必等於這角兩邊的積的比。



設 ABC 和 A'B'C' 是兩個已知三角形，其中

$$\angle A = \angle A'$$

求證　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{bc}{b'c'}$

證　延長A'B'至E，使A'E=AC,

又　延長C'A'至D，使A'D=AB。

作DE和B'D

則　$\triangle A'DE \equiv \triangle ABC$　s. a. s.

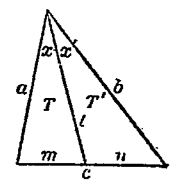
今曉得　$\dfrac{\triangle ADE}{\triangle A'DB'} = \dfrac{b}{c'}$　§ 244

又　$\dfrac{\triangle A'DB'}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c}{b'}$　§ 244

$\therefore$ $\dfrac{\triangle A'DE}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{bc}{b'c'}$ 公理 6

即 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{bc}{b'c'}$ § 146(*a*)

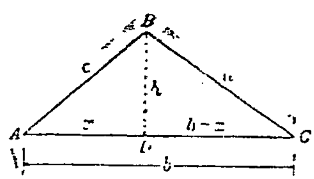
260 系 三角形一內角的平分線，必分他的對邊爲兩部份使他們和其餘兩邊成正比例。



$\left(\dfrac{\triangle T}{\triangle T'}=\dfrac{at}{bt}=\dfrac{a}{b}\text{又}\dfrac{\triangle T}{\triangle T'}=\dfrac{m}{n}\right)$

命辭十二 定理

261. 設a,b,c是三角形的各邊，又 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$. 這形的面積便是 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。



設 ABC是已知三角形，其中∠A是一個銳角，

求證 △ABC的面積爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

證 作 BD 高，並且用 h 來表示。

則 △ABC的面積當爲 $\dfrac{1}{2}\times bh$ § 243

今已知 $h^2=c^2-x^2=a^2-(b-x)^2$

所以 $x=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2b}$

但是　$h^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)$

$$\therefore\quad h=\left(c+\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)\left(c-\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)$$

$$=\frac{2bc+c^2+b^2-a^2}{2b}\cdot\frac{2bc-c^2-b^2+a^2}{2b}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2}$$

令　$a+b+c=2s$

$\therefore\quad b+c-a=2s-2a=2(s-a)$

依同理:　$a+b-c=2(s-c),\ a-b+c=2(s-b)$

$$\therefore\quad h^2=\frac{2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c)}{4b^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2}$$

$$\therefore\quad h=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

所以曉得　$\triangle ABC$的面積必定是

$$\frac{1}{2}b.h=\frac{1}{2}b.\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

習題537　三角形的各邊是10,17,21,求他的面積。

習題538　三角形的各邊是104, 111, 175, 求他的面積。

習題539　設三角形的面積是A,他的三邊是a, b, c,

又他的 a 邊上的高是 h_a，求證 $h_a=\frac{2A}{a}$。

習題 510 三角形的各邊是 26, 35, 51，求他的面積。

262. 重要公式 種種幾何圖形求面積的方法，和圖中各部的關係，都可用簡單公式表示，現在分列於下：

矩形	$A=a\times b$
正方形	$A=a^2$
平行四邊形	$A=b\times h$
菱形	$A=\frac{d\times d'}{2}$
三角形	$A=\frac{1}{2}b\times h=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
等邊三角形	$A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
梯形	$A=\frac{1}{2}h(b+b')$
外切多邊形	$A=\frac{1}{2}P\times R$
正方形	$d=a\sqrt{2}$ $\quad a=\frac{d}{\sqrt{2}}$
三角形	$h_b=\frac{2A}{b}$
等邊三角形	$h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$
直角三角形	$h_c=\frac{a\times b}{c}$

習題541　某矩形的面積和已知等邊三角形的面積相等,但知矩形的邊是4吋和5吋,求這三角形的高。

習題542　菱形和正方形的面積相等,但知菱形的對角線是7和8求正方形的一邊。

習題543　直角三角形的一腰是4,這腰的對角是30°,求這三角形的面積。(完成等邊三角形。)

習題544　梯形的兩底是13和10,他的面積和等腰直角三角形相等,但知三角形的斜邊是10,求這梯形的高。

習題545　有三個正方形,他的一邊是5吋,12吋,和84吋,設有第四正方形,他的面積等於三個已知正方形面積的和,求第四正方形的一邊。

習題546　三角形的各邊是20,34,和42,設他的最大角的平分線分這形爲兩部份,求各部份的面積。§260

習題547　求變已知正方形爲等邊三角形。

(註:　先變爲有一角爲60°的三角形。)

習題548　圓的半徑是20呎,他的外切五邊形的周圍是150呎,求這五邊形的面積。

習題549　正四面體的一稜是7吋,求他的全面積和垂直高。

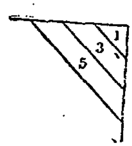
習題550　設正八邊形的一邊是a,求證他的面積是$2a^2(\sqrt{2}+1)$。(注意:　分此八邊形爲矩形和三角形。)

習題551　三角形的各邊是9吋,10吋,和17吋,求變這

形爲正方形,並求這正方形每邊的長。

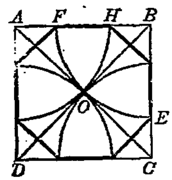
習題552　已知正方形的每一邊是2a,若依次連接這形各邊的中點,則得一內接正方形,又用同法,拿第二正方形各邊的中點用線連接,則得第三正方形;求這三個正方形面積的和。

習題553　用方形紙的一角,照右圖摺疊,使各摺縫間的距離都相等,且每一摺縫的兩端對於角頂的距離也相等,求證各摺縫間的面積的比是



1 : 3 : 5 : 7……………。

習題554　右圖是一種作正八邊形的方法,ABCD是正方形,用各頂點做圓心,用AO做半徑,作諸弧,得八邊形;求證這八邊形是等角,並且是等邊。



注意: 設　$AB=2a$

則　$AO=a\sqrt{2}$

而　$AF=2a-a\sqrt{2}$

習題555　設上題中的$AB=2a$,求正八邊形的面積。

習題556　有正八方形的棹面,他的每邊是1呎,求他的面積。

第四編　比例量和相似多邊形

第一章　比例的基本定理

263. 比例的各項　設有比例 $a:b=c:d$ 其中的 a 和 d 叫做外項 (Extremes)，而 c 和 b 叫做內項 (Means)；設 a, b, c 都是已知，則 d 對於 a. b. c. 又叫做第四比例項 (Fourth Proportional)。

264. 連鎖比例和反比例　設 $a:b=b:c=c:d$, 則 a. b. c d 四量成連鎖比例 (Continued Proportion)。如有三量成連鎖比例，那第二量便叫做其他兩量的比例中項 (Mean Proportional), 而第三量便是其他兩量的第三比例項 (Third Proportional)。如有 $2:4=4:8$, 則 4 是 2 和 8 的比例中項，而 8 是 2 和 4 的第三比例項。

若一比適等於他比的倒數，則第一比的兩項和第二比的兩項成反比例 (Inverse Proportion)；如 a, b 和 x, y 成反比例，則 $a:b=y:x$。

例如：兩個矩形的高是 a_1, a_2 他們的底是 b_1, b_2, 並且面積相等，可用下式表示：

$a_1\times b_1=a_2\times b_2$. 兩端都用 a_1 b_2 除，則得

$b_1:b_2=a_2:a_1$：所以矩形的面積若是一定量，他的底必和他的高成反比例。

265. 定理 1　凡比例兩外項的積，等於兩中項的積，

設 $a:b=c:d$

則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ § 229

故 $ad=bc$

266. 定理 2 二量的比例中項，等於這二量的積的平方根。

設 $a:b=b:c$

則 $b^2=ac$ § 265

開方得 $b=\sqrt{ac}$

267. 定理 3 設二量的積等於他二量的積，可拿任意二量做比例的外項，其餘二量做中項。

設 $ad=bc$

求證 $a:b=c:d$

用 bd 除等式的兩邊，得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

即是 $a:b=c:d$

268. 定理 4 互理 (Alternation) 設四量成比例，則第一項比第三項，如第二項比第四項。

設 $a:b=c:d$

求證 $a:c=b:d$

今 $ad=bc$ § 265

用 cd 除等式的兩邊，則得 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

即是 $a:c=b:d$

269. 定理 5　逆理 (Inversion): 設四量成比例，則第二項比第一項如第四項比第三項。

設　$a : b = c : d$

求證　$b : a = d : c$

今　$bc = ad$　§ 265

用 a c 除等式的兩邊，則得 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

即　$b : a = d : c$

270. 定理 6　合理 (Composition): 設四量成比例，則第一第二項的和比第二項，如第三第四項的和比第四項。

設　$a : b = c : d$

求證　$a+b : b = c+d : d$

今　$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$　§ 229

則　$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$　公理 2

即是　$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

或　$a+b : b = c+d : d$

依同理　$a+b : a = c+d : c$

271. 定理 7　分理 (Division): 設四量成比例，則第一第二項的差比第二項，如第三第四項的差比

第四項。

設 $a : b = c : d$

求證 $a-b : b = c-d : d$

今 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

則 $$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \qquad \text{公理 3}$$

即 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

或 $a-b : b = c-d : d$

依同理 $a-b : a = c-d : c$

272. 定理 8 合理和分理：設四量成比例，則第一第二項的和比他們的差，如第三第四項的和比他們的差。

設 $a : b = c : d$

則 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \S\ 270$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad \S\ 271$$

由除法得 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

或 $a+b : a-b = c+d : c-d.$

273. 定理 9 若數個比相等，則各比前項的和比各後項的和，如任一前項比他的後項。

設　$a:b=c:d=e:f=g:h$

求證　$a+c+e+g:b+d+f+h=a:b=c:d$

設　$r=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$

則　$a=br,\quad c=dr,\quad e=fr,\quad g=hr$

而　$a+c+e+g=(b+d+f+h)r$

用　$(b+d+f+h)$除，則得

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=r=\frac{a}{b}$$

即　$a+c+e+g:b+d+f+h=a:b$

習題557　求下列各比例中 x 的價值:

(*a*) $4:5=12:x$,　(*b*) $x:m=c:n$,　(*c*) $12:x=x:27$

習題558　求 M 和 N 的比例中項。

習題559　求用比例表　(*a*) $cd=mn$,　(*b*) $b^2=ac$

習題560　有槓桿長 9 呎,設他的一端懸 7 磅,他端懸 11 磅,問桿成平衡時,他的支點當在甚麼地方?

習題561　三角形的各邊是 7, 8, 9 吋,那 8 吋的邊被對角的平分線截成二部份;求這二部份的長(§260)

習題562　有矩形和正方形等積求證正方形的一邊是矩形的底和高的比例中項。

習題563　設 $10:7=x:y$, 求證 $17:3=x+y:x-y$。

習題564　設 b 是 a 和 c 的中比,求證 $a:c=a^2:b^2$。

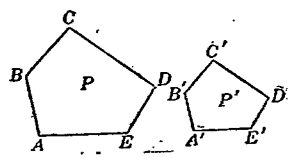
習題565　設 $a:b=c:d$

求證 $2a^2+3b^2:2a^2-3b^2=2c^2+3d^2:2c^2-3d^2$

注意 兩端自乘，且乘 $\frac{2}{3}$ 然後改變。

274. 互等邊和互等角 設一個多邊形的邊，和他多邊形的邊各各相等，這兩形叫做互等邊(Mutually Equilateral)；設一個多邊形的角，和他多邊形的角各各相等，這兩形叫做互等角(Mutually Equiangu lar)。相等的角叫做相當角(Corresponding Angles)，兩個地位相同的邊叫做相當邊(Corresponding Sides)。

275. 相似形 設兩個多邊形的相當角相等，並且相當邊成正比例，這兩形便叫做相似多邊形 (Similar Polygons)。



右圖的多邊形 P 和多邊形 P' 相似，常用 P∼P' 表示。

觀右圖，可曉得兩個相似形的形狀完全相同。右圖 P 和 P' 既相似，所以，

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}$$

276. 相似率 兩個相似形相當邊的比，叫做兩形的相似率(Ratio of Similitude)，這相似率可用任意相當邊來決定。

習題566 兩個相似多邊形的相似率是 1:2 但知第

一形的各邊是 8, 9, 10, 12 和 15, 求第二形的各邊。

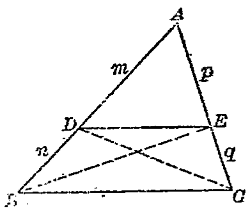
習題 567　有兩個相似直角三角形, 第一形的兩腰是 5 和 12, 第二形的斜邊是 65, 求第二形的兩腰。

習題 568　求證兩個全等三角形相似。

習題 569　求證兩個正方形相似。

命辭一　定理

277.　設過三角形的兩邊，作第三邊的平行線，這線必分這兩邊成比例。



在已知 △ABC 中，設DBE和C平行，並且分 AB 爲 m,n 兩部份，又分 AC 爲 p,q 兩部份。

求證　　$m:n=p:q$

證　　作 BE 和 CD

則　$\triangle ADE:\triangle BDE=m:n$　　§244(2)

又　$\triangle ADE:\triangle CDE=p:q$　　§244(2)

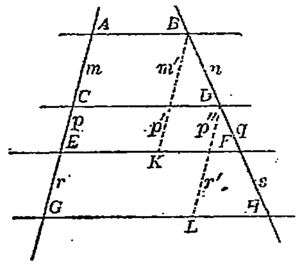
但　$\triangle BDE=\triangle CDE$　　§244(4)

∴　$\triangle ADE:\triangle BDE=\triangle ADE:\triangle CDE$　　§146(d)

∴　$m:n=p:q$　　公理 1

278. 系一 設過三角形的兩邊 作第三邊的平行線，則第一邊比他的任一部份，必等於第二邊比他的相當部份。 § 270

279. 系二 若兩線被數平行線所截，他們的相當部份成比例。



注意： 在上圖中，作BK, DL, 使都和AG平行。

則 $m'=m,$

$p''=p'=p,$ $r'=r$ § 126

但 $m':n=p':q$ § 277

又 $p':q=r':s$ § 277

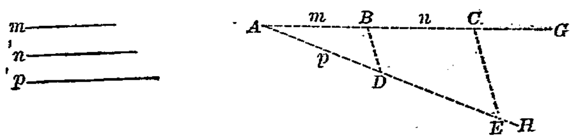
$\therefore$ $m:n=p:q=r:s$

習題570 甲乙兩線同被數平行線所截,甲線上所成的各線段是 8 吋 6 吋和 5 吋,但知乙線上的第一段是 12 吋,求乙線上其餘的兩段。

習題571 上題中,設甲線上各段是 3 吋 4 吋和 5 吋,但知乙線上各段的和是60吋,求乙線上各段的長。

命辭二　作圖題

280. <u>求作已知三線段的第四比例項。</u>



設　m, n, p 是三個已知線段，

求作　m, n, p 的第四比例項。

作圖法　作任意角 GAH,

在 AG 上，拿 AB＝m,

BC＝n,

在 AH 上，拿 AD＝p,

作BD線，又過C點作BD的平行線，使他和AH相交於E。

這 DE 就是所求的第四比例項。

證　CE ∥ BD　作圖意

∴　m : n＝p : DE　§ 277

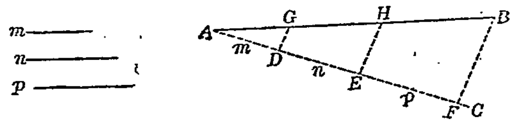
習題 572　上命辭中,設 m=10, n=12, p=15 求 DE 長。

習題 573　上命辭中,設 DE 是已知量而 n 是未知量,問當如何作圖?

習題 574　設 a, b, 及 p+q 是三個已知線段,求作 p 和 q,使成比例 a : b=p : q。

命辭三　作圖題

281. 求分已知線段爲數個部份，使和數個已知線段成比例。



設 AB, m, n, p 都是已知線段，

求分這 AB 成爲數個部份，使各部份和 m, n, p 成比例。

作圖法：　作 AC 線，使他和 AB 成任意角。

在 AC 線上，拿 AD＝m,　D＝En,　EF＝p,

連接 BF,

作　　DG 和 EH, 都和 BF 平行；

則　　AG, GH, HB 便是所求的部份。

證　　設過 A 點作 BF 的平行線，

則　　AG : GH : HB＝m : n : p。　　§ 279

習題 575　設 a, b, c, d 和 e 是已知五線段。

求作　　(甲) $\frac{bc}{e}$　　(乙) $\frac{bc}{2a}$　　(丙) $\frac{b^2}{a}$

(丁) $\frac{2b^2}{a}$　　(戊) $\sqrt{ab}$

習題 576　設兩個矩形面積相等;第一矩形的兩鄰邊是 a 和 b,第二矩形的底是 c;設 a, b, c, 都是已知,求作

第二矩形的高。(但不要實際作第二矩形)

習題 577　矩形的底是一已知線段 b,他的面積和一正方形相等;設正方形的一邊是一已知線段 c,求作這矩形的高。

習題 578　求分已知正方形爲兩個矩形,使他們和兩已知線段 m, n 成比例。

習題 579　求分已知矩形爲三部份,使各部份面積的比爲 1 : 2 : 3。

習題 580　上題的圖共有幾種作法?試分別述明。

習題 581　求分已知矩形成爲三部份,使各部份和三已知線 a, b, c, 成比例。

習題 582　求分已知三角形成爲三個三角形,使他們的面積的比爲 1 : 2 : 3。

習題 583　求分已知三角形爲兩部份,使他們的面積和兩已知線 m 和 n 成比例。

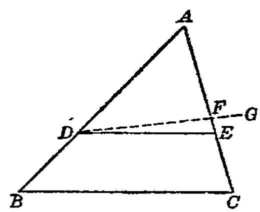
習題 584　求分已知三角形爲三部份,使他們的面積和三已知線段 a, b, c, 成比例。

習題 585　求作四個三角形使他們的面積的比爲 1 : 2 : 3 : 4,而他們的面積的和等於已知五邊形的面積。

習題 586　求作三個三角形,使他們的面積的比等於 2 : 3 : 4 而他們的面積的和等於已知六邊形的面積。

命辭四 定理

282. 若一線分三角形的兩邊成比例，這線必和第三邊平行。



設 ABC 是一個已知三角形，並且 DE 線分 AB 和 AC 兩邊，使 AD : DB = AE : EC

求證 DE ∥ BC

證 由已知比例用合理改法，可得

AD + DB : AD = AE + EC : AE

或 AB : AD = AC : AE

過 D 點作 DG ∥ BC

設 DG 交 AC 於 F 點

則 AB : AD = AC : AF § 278

但已曉得 AB : AD = AC : AE

∴ AE = AF § 146(*d*)

而 E 點和 F 點必密合

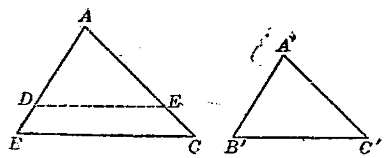
∴ DE 和 DF 密合 § 53(*4*)

即是 DE ∥ BC

第二章　相似三角形

命辭五　定理

283.　<u>設一個三角形的角，和另一個三角形的角各各相等，這兩形必相似。</u>



設　$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是兩個已知三角形，其中

$\angle A=\angle A'$，　$\angle B=\angle B'$，　$\angle C=\angle C'$，

求證　$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

證在 AB 上，拿 $AD=A'B'$，又在 AC 上，拿 $AE=A'C'$，作 DE 線。

則	$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$	s. a. s.
又	$DE \parallel BC$	§ 96
∴	$AB : AD = AC : AE$	§ 278
即	$AB : A'B' = AC : A'C'$	§ 146(*d*)

依同理：若在 BA 和 BC 兩邊拿等於 B'A' 和 B'C' 的線段，也可證明 $AB : A'B' = BC : B'C'$。

所以曉得：　$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的相當邊成正比例。

∴　$\triangle ABC \sim A'B'C'$　　§ 275

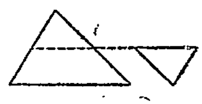
284. 系一 設一個三角形有兩角，和另一個三角形的兩角各各角相等，這兩形必相似。

285. 系二 若兩個直角三角形有一銳角相等，這兩形必相似。

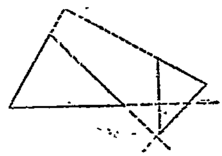
286. 系三 若兩個等腰三角形有一頂角相等，或有一底角相等，這兩形必相似。

287. 系四 兩個等邊三角形相似。

288. 系五 設一個三角形的邊，和另一個三角形的邊各各平行，這兩形必相似。



289. 系六 若一個三角形的邊，和另一個三角形的邊各各垂直，兩形必相似。



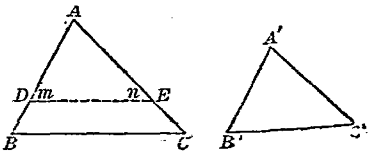
按 上列「系五」的證法，是延長一形中或兩形中不平行的邊，使他們相交，再用各平行邊做相當邊。「系六」和這略同，不過要用各垂直邊做相當邊。

習題587 梯形兩對角線的交點,必分這兩對角線成爲同一的比。

習題588 設一線和三角形的一邊平行,並且和他的其餘兩邊或兩邊的延長線相交,所成的三角形必和已知三角形相似。

命辭六　定理

290. 設兩個三角形有一角相等，並且夾這角的兩邊成正比例，這兩形必相似。



設　ABC及A'B'C'是兩個巳知三角形，其中

$$\angle A = \angle A',$$

又　$AB : A'B' = AC : A'C'$

求證　$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$。

證　在AB上，拿AD＝A'B'；又在AC上，拿AE＝A'C'，然後作DE。

則	$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$	s. a. s.
且	$AB : AD = AC : AE$	§ 146(*d*)
所以曉得	$DE \parallel BC$	§ 282
∴	$\angle m = \angle B$	§ 94
	$\angle n = \angle C$	§ 94
∴	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$	§ 283
即	$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$	§ 146(*d*)

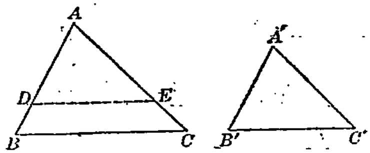
291. 系一　設一個直角三角形的兩腰，和另一個直角三角形的兩腰成正比例，這兩形必相似。

292. 系二　設一個直角三角形有一腰和斜邊，

同另一個直角三角形的一腰和斜邊成正比例，這兩形必相似。（§ 252）

命辭七　定理

293. 設一個三角形的各邊，和另一個三角形的各邊成正比例，這兩形必相似。



設　ABC和A'B'C'是兩個已知三角形，其中

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

求證　$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$。

證　在AB線上，拿AD＝A'B'；又在AC線上，拿AE＝A'C' 作DE線。

則	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$	§ 290
因	$\angle A$ 爲共用	
且	$AB : AD = AC : AE$	假設
所以得	$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$	§ 275
但	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$	假設
又	$AD = A'B'$	作圖意
∴	$\frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'}$	公理 1

$\therefore$ $DE = B'C'$

$\therefore$ $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ s. s. s.

$\therefore$ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ § 146(*d*)

習題 589 要證明兩個三角形相似,共有幾種方法?

習題 590 若過三角形的兩邊作線,和第三邊平行,這線必被第三邊上的中線所平分。

習題 591 由已知角一邊內的任一點A,到他邊內的任一點B作一線,又作許多線和AB平行,並且他們的兩端都在已知角的邊內,求各平行線中點的軌跡。

習題 592 兩個圓的半徑是3吋和2吋,圓心距離10吋,設他的內公切線和圓心線段在A點相交,求這A點對於每一圓心的距離。

習題 593 求上題的內公切線的長。

習題 594 求上題的外公切線的長。

習題 595 過已知點作許多直線,和兩根已知平行線相交,求證他們所截的各部份成正比例。

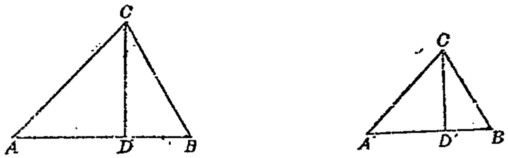
習題 596 連接梯形兩底中點的直線,必過這形兩腰延長線的交點。

習題 597 長6呎的桿,直立地上,他的影長8呎,同時有一樹影長60呎,求這樹的高。

習題 598 二桿直立,甲桿長34吋,他的影長51吋,乙桿長30吋,求他的影的長。

命辭八　定理

294. 兩個相似三角形的相當高，和他們的任意兩相當邊成正比例。



設 ABC 和 A'B'C' 是兩個相似三角形，CD 和 C'D' 是相當高，

求證　$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$

證　$\triangle CDA \sim \triangle C'D'A'$　§ 285

$\therefore$　$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}$

即是　$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$　公理 1

295. 系一　兩個相似三角形各相當高成正比例、

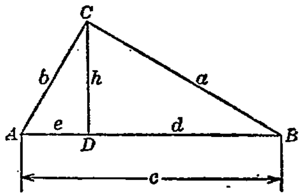
296. 系二　兩個相似三角形的相當中線，和他們的任意兩相當邊成正比例。　§ 290

297. 系三　兩個相似三角形的相當中線成正比例；又相當中線和任意兩相當高也成正比例。

習題　上命辭圖中，各形所分成的相當部份相似。

命辭九　定理

298. 直角三角形斜邊上的高，必分這形成兩個相似三角形，並且都和已知直角三角形相似。



設　ABC 是一個已知直角三角形 AB 是他的斜邊，CD 是斜邊上的高。

求證　$rt\triangle ACD \sim rt\triangle ABC \sim rt\triangle BCD$

證　（請學者根據 §285 自擬）。

299. 系一　直角三角形斜邊上的高，等於他的斜邊兩段的中比。（求證上圖 $h^2 = de$）

300. 系二　設作直角三角形斜邊上的高，那任一腰必等於斜邊和相鄰的線段的中比。　（$b^2 = ce$, $a^2 = cd$）

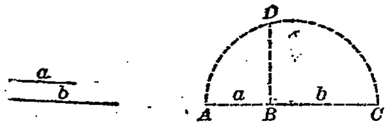
301. 系三　設作直角三角形斜邊上的高，這形的兩腰平方的比，等於斜邊兩段的比。

302. 系四　直角三角形兩腰平方的和，等於他的斜邊上的平方。　§300

303. 系五 若從圓上任一點到直線作垂線，這垂線必等於直徑兩段的比例中項。

命辭十 作圖題

304. 求作兩已知線段的比例中項。



設 a和b是已知線段，

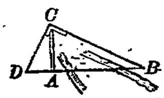
求作 a,b的比例中項

作圖法： 作直線ABC,使AB=a,BC=b,用AC做直徑，作半圓，在B點作AC的垂線，使和這半圓相交於D點。

則DB就是所求的比例中項

證 (請學者根據§303自擬之)

習題600 右圖中A,B二點在河的兩岸,有人站在A處要曉得他對於B點的距離,所以在地上立木桿AC,並且在C端安放曲尺,使他的一臂正向B點;他僅量AD和AC兩線,便可知道由A到B的距離,試說明這理由。

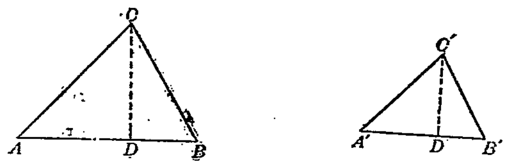


習題601 上題中,設AC=18呎,AD=12呎,求AB。

習題602 上題中,設AB是32呎,AD是18呎,求AC。

命辭十一　定理

305. **兩個相似三角形面積的比，等於他們的任兩相當邊的平方的比。**



設　ABC和A′B′C′是兩個相似三角形。

求證　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

證　作頂垂線CD和C′D′

則　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\times CD}{A'B'\times C'D'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{CD}{C'D'}\qquad §\,244(1)$$

但　$$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'}\qquad §\,294$$

∴　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AB}{A'B'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}\qquad §\,146(d)$$

習題603　a和b是兩已知線段，求作下列各線段：

(甲)　$\sqrt{ab}$　　(乙)　$\sqrt{2ab}$

(丙)　$\sqrt{\frac{ab}{2}}$　　(丁)　$2\sqrt{ab}$

(戊)　$\frac{1}{2}\sqrt{ab}$　　(己)　$\sqrt{2a^2}$

習題604　求利用命辭十的定理，變已知矩形爲正方形

習題605 求變一已知多邊形爲一正方形。

習題606 求變一已知正方形爲一矩形,使他的底與高的和等於一已知線。

習題607 求變一已知三角形爲一等邊三角形。(先變這形使有一角爲60°然後求夾這角的兩邊的比例中項)

習題608 兩個相似三角形相當邊的比是2:3,求他們的面積的比。

習題609 兩個相似三角形面積的比是4:5,求他們的相當邊的比。

習題610 兩個相似三角形面積的比是a:b,求他們的相當邊的比。

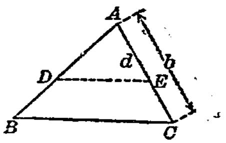
習題611 有甲乙兩個相似三角形,甲的面積等於乙的 $2\frac{1}{4}$ 倍,但知乙的三邊是13,14,15,求甲的各邊。

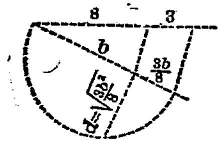
習題612 有兩個等邊三角形,甲形的高等於乙形的一邊,求此二形面積的比。

習題613 圓的內接正六邊形的面積,必等於同圓內接等邊三角形和外切等邊三角形面積的比例中項。

習題614 三角形的高爲10,今作一線和底平行,並且分三角形爲兩個等份,求這線對於底的距離。

習題615 求作一線和已知三角形的底平行,並且分三角形爲兩部份,使成一已知比。





設　ABC是已知三角形，

求作一線和BC平行並且分△ABC成3∶5的比。

解析：假設這圖業已作成，並且DE是所求的線；

則　$\triangle ADE$：梯形$DECB=3:5$，

∴　$\triangle ADE:\triangle ABC=3:8$。

今用b代表AC的長，d代表AE的長；

則　$\triangle ADE:\triangle ABC=d^2:b^2$　§ 305

∴　$d^2:b^2=3:8$　公理 1

即　$d^2=\frac{3b^2}{8}=b\times\frac{3b}{8}$

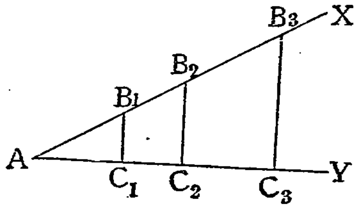
由此可知此題之所要者，是先求$\frac{3b}{8}$的長，然後求這長和b邊的比例中項。

習題616　求作一線和已知三角形的底邊平行，並且分這三角形成為4∶5的比。

習題617　求作許多線和已知三角形的底邊平行，並且分這三角形為五個等份。

習題618　三角形的高為m，今作底的許多平行線，分這形為n等份，求這些線對於頂點的距離。

306. 三角函數(Trigonmetric Functions) 從A點作AX和AY兩線，又從AX內B_1, B_2, B_3各點作AY的垂直線B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3；



則得三個相似直角三角形，其中

$$(1)\qquad \frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{B_3C_3}{AB_3},$$

$$(2)\qquad \frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AC_3}{AB_3},$$

$$(3\qquad \frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=\frac{B_3C_3}{AC_3}。$$

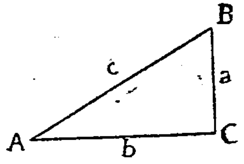
上列三式中各比的價值依∠A的大小而變，但是和各邊的長短無關。

第(1)式各比的值叫做∠A的正弦，用Sin A表示。
第(2)式各比的值叫做∠A的餘弦，用Cos A表示。
第(3)式各比的值叫做∠A的正切，用Tan A表示。
若作直角三角形，用a, b, c表他的各邊；則得

$\operatorname{Sin} A = \frac{a}{c}$,

$\operatorname{Cos} A = \frac{b}{c}$,

$\operatorname{Tan} A = \frac{a}{b}$,



307. 三角函數的應用 計算三角形的時候，若是已知∠A和c邊，要求其餘的兩邊，可用下式:

因　$\frac{a}{c} = \operatorname{Sin} A$,　　∴　$a = c \operatorname{Sin} A$;

又因　$\frac{b}{c} = \operatorname{Cos} A$,　　∴　$b = c \operatorname{Cos} A$。

依同理　我們又可證明

$$a = b \times \tan A$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Cos} A}, \quad \text{及} \quad b = \frac{a}{\tan A}\text{。}$$

例如　$c = 120$呎，$\angle A = 40°$ 求 a,b 二邊。

解　$a = c \times \operatorname{Sin} A = 120 \times \operatorname{Sin} 40°$,

由表得知

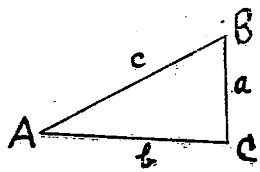
$$\operatorname{Sin} 40° = .643,$$

∴　$a = 120 \times .643 = 77.16$ 呎

依同理　$b = c \times \operatorname{Cos} A = 120 \times \operatorname{Cos} 40°$

$= 120 \times .766 = 91.92$ 呎

角	Sin	Cos	Tan	角	Sin	Cos	Tan
1°	.017	.9998	.017	46°	.719	.695	1.036
2°	.035	.9994	.035	47°	.731	.682	1.072
3°	.052	.9986	.052	48°	.743	.669	1.111
4°	.070	.9976	.070	49°	.755	.656	1.150
5°	.087	.996	.087	50°	.766	.643	1.192
6°	.105	.995	.105	51°	.777	.629	1.235
7°	.122	.993	.123	52°	.788	.616	1.280
8°	.139	.990	.141	53°	.799	.602	1.327
9°	.156	.988	.158	54°	.809	.588	1.376
10°	.174	.985	.176	55°	.819	.574	1.428
11°	.191	.982	.194	56°	.829	.559	1.483
12°	.208	.978	.213	57°	.839	.545	1.540
13°	.225	.974	.231	58°	.848	.530	1.600
14°	.242	.970	.249	59°	.857	.515	1.664
15°	.259	.966	.268	60°	.866	.500	1.732
16°	.276	.961	.287	61°	.875	.485	1.804
17°	.292	.956	.306	62°	.883	.469	1.881
18°	.309	.951	.325	63°	.891	.454	1.963
19°	.326	.946	.344	64°	.899	.438	2.050
20°	.342	.940	.364	65°	.906	.423	2.144
21°	.358	.934	.384	66°	.914	.407	2.246
22°	.375	.927	.404	67°	.921	.391	2.356
23°	.391	.921	.424	68°	.927	.375	2.475
24°	.407	.914	.445	69°	.934	.358	2.605
25°	.423	.906	.466	70°	.940	.342	2.747
26°	.438	.899	.488	71°	.946	.326	2.904
27°	.454	.891	.510	72°	.951	.309	3.078
28°	.469	.883	.532	73°	.956	.292	3.271
29°	.485	.875	.554	74°	.961	.276	3.487
30°	.500	.866	.577	75°	.966	.259	3.732
31°	.515	.857	.601	76°	.970	.242	4.011
32°	.530	.848	.625	77°	.974	.225	4.331
33°	.545	.839	.649	78°	.978	.208	4.705
34°	.559	.829	.675	79°	.982	.191	5.145
35°	.574	.819	.700	80°	.985	.174	5.671
36°	.588	.809	.727	81°	.988	.156	6.314
37°	.602	.799	.754	82°	.990	.139	7.115
38°	.616	.788	.781	83°	.993	.122	8.144
39°	.629	.777	.810	84°	.995	.105	9.514
40°	.643	.766	.839	85°	.996	.087	11.43
41°	.656	.755	.869	86°	.9976	.070	14.30
42°	.669	.743	.900	87°	.9986	.052	19.08
43°	.682	.731	.933	88°	.9994	.035	28.64
44°	.695	.719	.966	89°	.9998	.017	57.29
45°	.707	.707	1.000	45°	.707	.707	1.000



習題619　右圖中設 $\angle A=30^{\circ}$, 又 c 邊爲 8, 求 a, b 二邊的長。

習題620　在上題中,設 $\angle A=30^{\circ}$ 又 b 邊爲 6 时,求 a, c 兩邊的長。

習題621　在上題中,設 $\angle A=30^{\circ}$ a 邊爲 14,求 b, c 兩邊的長。

習題622　有梯斜靠在電桿的旁邊,並且和電桿成 30° 的角,但知梯長 12 呎,問梯的上端離地面幾呎?

習題623　上題中,問梯的下端和電桿的下端相距幾呎?

習題624　平地直立一桿,從桿的上端到他的影的上端所作直線長 18 呎,並且和桿的影成 51° 的角,求桿的長和影的長。

註:本題所說 51° 的角叫做太陽的高度 (Altitude)

習題625　有人站在日光中,他的影長 15 呎,若太陽的高度是 35°, 求這人的長。

習題626　設人高 7 呎,太陽的高度 41°, 求影的長。

習題627　若人仰望高處,從人的眼到所望處作直線這直線和水平線所成的角,叫做高處的仰角。 (Angle of Elevation) 有人在離山 7 哩的地方望見山頂的仰角爲 22°, 求山的高。(在這題和下兩題中,假定山是直立。)

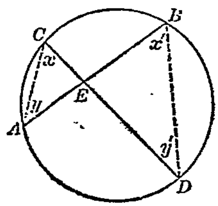
習題628　有人在離山 5.5 哩的地方望見山頂的仰角是 36°，求山的高。

習題629　一山高 5000 呎，有人望見他的仰角是24°求這人對於這山的距離。

習題630　人在離樹26呎的地方望見樹頂仰角是42°若人的眼離地 5 呎，求樹的高。

命辭十二　定理

308.　設兩弦在圓內相交，則一弦兩段的積必等於他弦兩段的積。



設　AB, CD 兩弦相交於E點，

求證　$AE \times EB = CE \times ED$

證　作AC及BD兩線，

則　$\angle x$ 和 $\angle x'$ 都可用$\frac{1}{2}$弧AD來度量。　§ 206

∴　$\angle x = \angle x'$；　§ 210

依同理　$\angle y = \angle y'$；　§ 210

∴　$\triangle AEC \sim \triangle BED$　§ 284

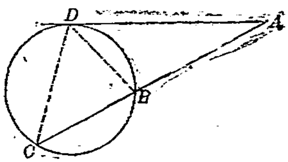
∴　$AE : ED = CE : EB$,　§ 275

即　$AE \times EB = CE \times ED$。　§ 265

309. **定義**　若從圓外的一點作一割線交圓於兩點，從已知點到第二交點的距離叫做<u>割線的長</u>，而從已知點到第一交點的距離叫做<u>割線的外段</u> (External Segment)。

命辭十三　定理

310. <u>若從圓外的一點到圓作一切線和一割線，這切線必等於這割線和他的外段的比例中項。</u>



上圖中，設 AD 是從 A 點到圓 BDC 的切線，AC 是他的割線，

求證　$AC : AD = AD : AB$。

證　作 DC 和 DB 兩線，

則因　$\angle A$ 共用，

$\angle C = \angle ADB$,

(同用$\frac{1}{2}$弧 DB 度量)

故　$\triangle ADC \sim \triangle ABD$　§ 284

AC : AD＝AD : AB § 275

311. 系 若從圓外的一點到圓作一割線，無論所作的方向如何，這割線和他的外段的積總是一定。

312. 定義 設一線段分爲兩部份，使他的大部份等於全線和小部份的比例中項，這線段叫做分成內外比(Extreme And Mean Ratio)。

例如 C是AB線段上的一點，並且

AB : AC＝AC : CB,

則 C點分AB線段爲內外比，其中AC叫做大段，CB 叫做小段。

習題 631 在§310的圖中，設

AB＝32,

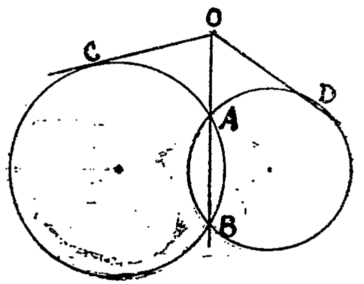
BC＝18,

求 AD 的長。

習題 632 設 AB＝BC＝12 吋，求 AD 的長。(答用根式)

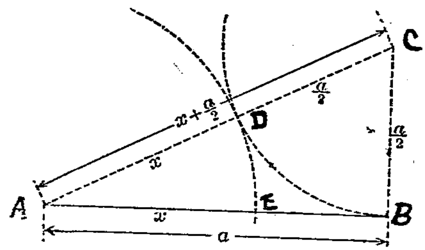
習題 633 右圖中，兩圓相交，AB 是他們的公共弦，O 點是這弦的延長線上的一點，今從 O 點作兩圓的切線 OC 和 OD，

求證 OC＝OD



命辭十四　作圖題

313. 求分已知線段爲內外比。



設　已知線段 AB 他的長是 a,

求作線段 x, 使 $a : x = x : a - x$。

解析：　假設這圖業已作成，

則當得　　　$x^2 = a(a-x)$,

即是　　　$x^2 + ax = a^2$,

將左端配成平方，

則　　$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$。

這式既然顯明兩量平方的和等於第三量的平方，所以這三量必定是代表直角三角形的各邊，其中 a 是長腰，$\frac{a}{2}$ 是短腰，$x + \frac{a}{2}$ 是斜邊，並且 x 就是斜邊和短腰的差。

作圖法：　在 B 點作 $CB \perp AB$, 並且等於 $\frac{a}{2}$,

聯 A, C;

用C做圓心，用$\frac{1}{2}a$做半徑，作弧交AC線於D點
又用A做圓心，AD做半徑，作弧交AB於E點；

則 AE就是所求的線段x。

證 （請學者根據分析自擬）

314. 系一 本題中x的數值約為0.618a。

因為解算上列的二次式，可得 $x+\frac{a}{2}=\pm\frac{a}{2}\sqrt{5}$
負號不討論，

則 $x=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$

$=\frac{a}{2}(2.236-1)=0.618a$。

315. 系二 設一線已被分為內外比，又在小段的一端作等於大段的延長線，則所得結果還是分成內外比的線段。

若 $a:x=x:a-x$,

用逆理改變 $x:a=a-x:x$,

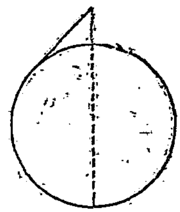
又用合理改變，可得，$a+x:a=a:x$。

註 本題的作圖法叫做黃金分段法（Golden Section）。

習題634 圓的半徑是5吋，E是圓內的一點，距圓心3吋，設過E點任作一弦，求這弦兩段的積。

習題635 設地球的直徑是8000哩，有人站在高一哩

的山頂,問這人目光可望多少遠?(根據命辭十三的理,應用右圖,又空氣的折光可以不計)



習題636　上題中,設山高2哩,求他的目光所到的距離。

習題637　圓的半徑是9呎,從距圓心15呎的一點作圓的切線,求這切線的長。

習題638　圓的半徑是5呎,從某點到圓的切線長12呎,求這點到圓心的距離。

習題639　從距圓心29呎的一點到圓作一切線,若這切線長21呎,求這圓的半徑。

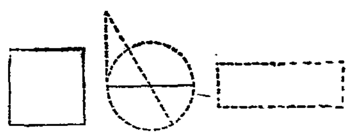
習題640　從距圓8呎的一點作切線,若這線長16呎,求圓的半徑。

按下列的641, 642, 643各題可用作圖計算兩法解明,然後比較結果。

習題641　有長6呎的線,分他成內外比,求各段的長。

習題642　有線段分成內外比,那長段是3吋,求這線段全部的長。

習題643　有線段分成內外比,那小段是2吋求這線全部的長。



習題644　求變一已知

正方形爲一矩形,使矩形的高和底的差等於一已知長。

解: 用已知長做直徑作圓,過直徑的一端作圓的切線,並且使這切線的長等於正方形的一邊,從切線的外端過圓心作一割線,就得所求矩形的底和高。

習題 645　求作一圓,使過兩已知點,並且和一已知線相切。(§ 310)

習題 646　若兩圓互相外切,則過切點以兩圓爲限的直線的兩段必和兩圓的直徑成比例。

習題 647　若兩圓互相內切,則過切點所作大圓的各弦被小圓分成比例。

習題 648　兩圓相切於 n 點,過 n 作三線交甲圓於 A, B, C 三點,又交乙圓於 D, E, F 三點,若作 AB, AC, BC, DE, DF, EF 諸線,求證 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。

習題 649　設 ABCD 是圓的內接四邊形,他的對角線相交於 O 點。

求證　$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

習題 650　若兩弦在圓內相交,則各弦的長部必和他們的短部成反比例。

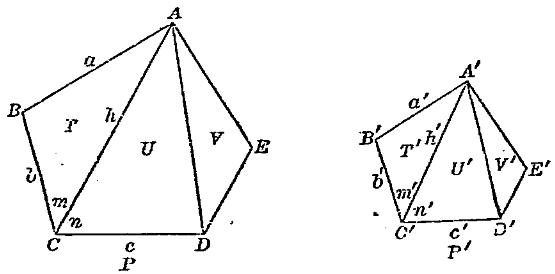
習題 651　設 O 是圓心, AB 是直徑,有弦 CD 交 AB 於 E 點,但知 $AB=10$, $OE=3$, 求 $CE \times ED$ 的值。

習題 652　上題中,設已知 $CE=5$, $ED=12$, $OE=3$, 求這圓的半徑的長。

第三章　相似多邊形

命辭十五　定理

316. 設兩個多邊形相似，他們可分做同數個三角形，彼此各各相似，並且在相似的位置。



設　多邊形P和P'相似，由頂點A,A'作各對角線

求證　$\triangle T \sim \triangle T'$，$\triangle U \sim \triangle U'$……………。

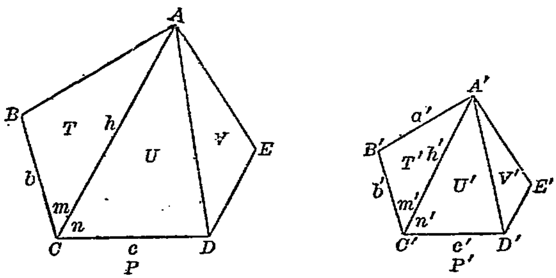
證	$\angle B = \angle B'$	§ 275
	$a : a' = b : b'$	§ 275
∴	$\triangle T \sim \triangle T'$	§ 290
∴	$\angle m = \angle m'$	§ 275
但是	$\angle BCD = \angle B'C'D'$	§ 275
∴	$\angle n = \angle n'$,	公理 3
又	$b : b' = h : h'$	§ 275
	$b : b' = c : c'$,	§ 275
∴	$c : c' = h : h'$	公理 1

∴　　$\triangle U \sim \triangle U'$。　　§ 290

依同理　又可證明其餘的各三角形也相似，

命辭十六　定理

317. 設兩個多邊形可分做同數的三角形，彼此各各相似，並且在相似的位置，這兩個多邊形必相似。



設　P和P'是兩個多邊形，其中

$\triangle T \sim \triangle T'$　$\triangle U \sim \triangle U'$……………，

求證　　$P \sim P'$

證　　$\angle B = \angle B'$，　　§ 275

又　　$\angle m = \angle m'$　$\angle n = \angle n'$　　§ 275

∴　　$\angle BCD = \angle B'C'D'$　　公理 2

依同理　可證P和P'其餘的諸角都是彼此各各相等；

又　　$b : b' = h : h'$　　§ 275

且　　$h : h' = c : c'$

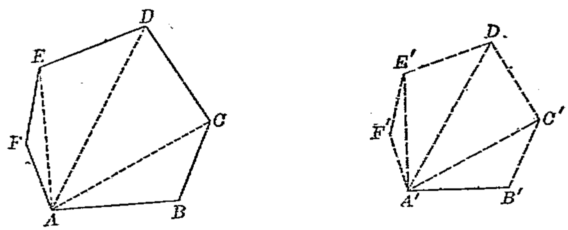
∴　　$b : b' = c : c'$　　公理 1

依同理可證這兩個多邊形其餘的各相當邊都成比例；

$P \sim P'$　§ 275

命辭十七　作圖題

318. 設已知直線和已知多邊形的一邊相當，求在這線上作一個多邊形和已知多邊形相似。



設 A'B'是已知直線，並且和已知多邊形ABCDEF的邊 AB 相當，

求　在 A'B' 線上作多邊形和 ABCDEF 相似。

作圖法：　從 A 點作各對角線，在 A'B' 線上作 △A'B'C' 和 △ABC 相似，並且使 AB,A'B' 爲相當邊。

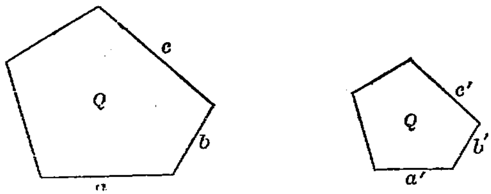
依同法　在A'C'線上作三角形，使和△ACD相似。照這法進行，使已知多邊形內的每一個三角形都在他一形內有相當的相似三角形，則多邊形 A'B'C'D'E'F' 必和多邊形 ABCDEF 相似。

證　這兩個多邊形裏面的相當三角形各各相似，並且在相似的位置。　作圖意

∴　這兩個多邊形相似。　§ 317

命辭十八　定理

319. 兩個相似多邊形的周界必和任意兩相當邊成比例。



設　Q 和 Q' 是兩個相似多邊形，他們的周界是 P 和 P', 又 a, a' 是相當邊，

求證　$P : P' = a : a'$。

證　$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \cdots\cdots$,　§ 275

$\therefore$　$\dfrac{a + b + c \cdots\cdots}{a' + b' + c' \cdots\cdots} = \dfrac{a}{a'}$,　§ 273

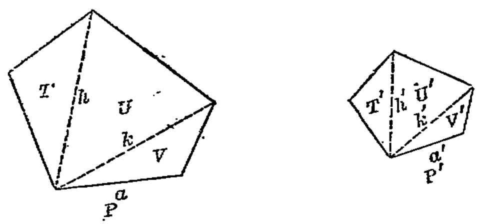
即是　$P : P' = a : a'$。　§ 146(*d*)

習題 653　草地兩塊形狀相同,第一塊的周圍是 100 呎,只曉得他們的兩相當邊是 20 呎和 30 呎,求第二塊草地的周圍。

習題 654　有兩個相似三角形,第一形的三邊是 6, 8, 11 吋,但知第二形的第一邊是 8 吋,求第二形的其餘兩邊。

命辭十九　定理

320. 兩個相似多邊形面積的比等於他們的任意兩相當邊平方的比。



設　P和P'是兩個相似多邊形，他們的面積是S和S'，又a和a'是相當邊，

求證　$S : S' = a^2 : a'^2$。

證　從兩個相當頂點作各對角線，這兩個多邊形被分爲同數的相似三角形，

即是　$\triangle T \sim \triangle T'$ …………　§ 316

$\therefore\quad \frac{T}{T'} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{U}{U'} = \frac{k^2}{k'^2} = \frac{V}{V'}$　§ 305

$\therefore\quad \frac{T}{T'} = \frac{U}{U'} = \frac{V}{V'}$,　公理 1

所以　$\frac{T+U+V}{T'+U'+V'} = \frac{V}{V'}$　§ 273

即是　$\frac{S}{S'} = \frac{V}{V'}$,　§ 146(*d*)

但 $$\frac{V}{V'}=\frac{a^2}{a'^2},$$ §305

∴ $$\frac{S}{S'}=\frac{a^2}{a'^2}。$$

習題655 設ABCDE是多邊形,O是形內或形外的一點,從O到各頂點作連接線,在OA上拿任一點A',又過A'作線和AB平行並且交OB於B';

依同法 作B'C'∥BC, C'D'∥CD, D'E'∥DE;

求證 E'A'∥EA;

並且證明這新成的多邊形必和多邊形ABCDE相似。

習題656 有兩個相似多邊形,第一形的周界是400吋只曉得兩相當邊是80吋和100吋,求第二形的周界。

習題657 有兩個相似三角形,他們的周界是18吋,和15吋,第一形有一高是6吋,求第二形的相當高。

習題658 兩個相似多邊形,面積的比是121:169,求他們的周界的比。

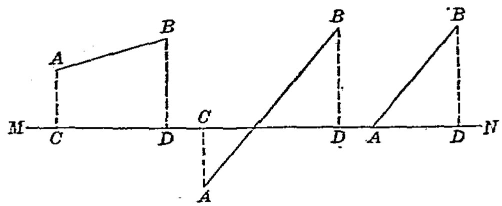
習題659 求作一六邊形作使和一已知六邊形相似,並且面積等於那已知六邊形面積的二倍。

習題660 設A和B是兩個相似多邊形,求作多邊形和A,B都相似,並且等於A,B的和。

習題661 設A,B是兩個相似多邊形,求作多邊形和A,B相似,並且等於A,B的差。

第四章　三角形的數的性質

321. 定義　過甲線兩端對乙線作兩垂線，在垂足中間的線段叫做甲線在乙線上的投影 (Projection)



如上圖，左部和中部AB在MN線上的投影是CD，若是A點在MN線內(如右部)，則他的投影是AD，圖中的MN叫做底線(Base Line)，由這定義得下列二定理：

(甲) 直角三角形的任一腰等於斜邊在此腰上的投影。

(乙) 等腰三角形的任一腰在底上的投影等於他的底的一半。

習題662　設a線和b線成垂直，則a在b上的投影如何？又問b在a上的投影如何？都請作圖說明。

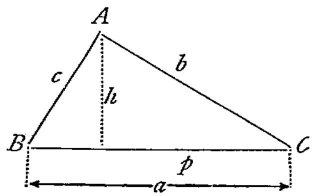
習題663　設a線和b線平行，則a線在b線上的投影如何？

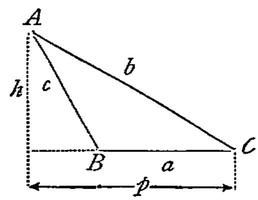
習題664　銳角三角形兩邊在第三邊上投影的和等於第三邊。

習題665　鈍角三角形中，夾一銳角的兩邊在第三邊投影的差等於第三邊。

命辭二十 定理

322. 三角形銳角對邊的平方等於他兩邊平方的和減去第二邊乘第三邊在第二邊上投影的積的二倍。





設 ABC 是一個已知三角形，p 是 b 邊在 a 邊上的投影，又 ∠C 是一個銳角，

求證 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ap$。

證 1 設 ∠B 也是一個銳角（左圖），作 a 邊上的高 h,

則 $c^2 = h^2 + (a-p)^2$, § 252

但 $h^2 = b^2 - p^2$ § 253

∴ $c^2 = b^2 - p^2 + a^2 - 2ap + p^2$

$= a^2 + b^2 - 2ap$。

證 2 設 ∠B 是一個鈍角（右圖），作高 h,

則 $c^2 = h^2 + (p-a)^2$, § 252

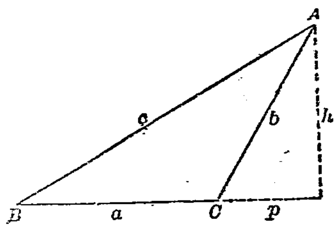
但 $h^2 = b^2 - p^2$ § 253

∴ $c^2 = b^2 - p^2 + p^2 - 2ap + a^2$

$= a^2 + b^2 - 2ap$

命辭二十一　定理

323. 鈍角三角形中，對鈍角的邊的平方等於其餘兩邊平方的和加第二邊乘第三邊在第二邊上投影的積的二倍。



在 $\triangle ABC$裡面，設$\angle BCA$是一個鈍角，又p是b邊在a邊上的投影，

求證　$c^2=a^2+b^2+2ap$。

證　作a邊上的高h，

則　$c^2=h^2+(a+p)^2$，　§ 252

但　$h^2=b^2-p^2$　§ 253

$\therefore$　$c^2=b^2-p^2+a^2+2ap+p^2$

$=a^2+b^2+2ap$

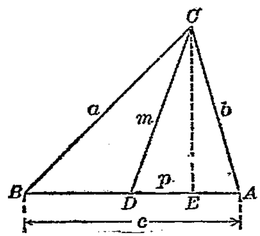
習題 666　上命辭圖中，設 a=5, b=6, c=9，求 p 的值。

習題 667　同圖中，設 c=13, a=9, p=3 求 h。

習題 668　設三角形的三邊是 7, 8, 13，求那最短邊在最長邊上的投影，又問這形是那一種三角形？

命辭二十二 定理

324. 三角形兩邊平方的和等於第三邊的一半的平方的二倍加第三邊上的中線平方的二倍。



設 ΔABC裡面，m是c邊上的中線，

求證 $$a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2。$$

證 作$CE\perp AB$,

設 E點落在A,D的中間，

則 DE是m在AB上的投影，今用p表DE,

在 ΔBCD內，$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)p$， § 323

在 ΔACD內，$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)p$， § 322

$\therefore$ $a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2$。 公理 2

325. 系 三角形兩邊平方的差等於第三邊乘這邊上的中線投影的積的二倍（$a^2-b^2=2cp$）。

326. 討論　由命辭二十和命辭二十一的定理可以曉得在銳角三角形裡面，

$$c^2 < a^2 + b^2,$$

在直角三角形裡面，

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

在鈍角三角形裡面，

$$c^2 > a^2 + b^2;$$

以上三式都是假設 c 是最大的邊，由命辭二十二的定理可得求三角形中線的公式，

設　　m_c是 c 邊上的中線，

則　　$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$。

習題 669　在命辭二十的圖中，設 AB 的長是 10 呎並且和 BC 成 60°的角，求 AB 在 BC 上投影的長。

習題 670　在命辭二十的左圖中，求證 AB 在 BC 上的投影必等於 AB 乘 ∠B 餘弦 (cos B) 的積。

習題 671　利用同題的圖，求證

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C。$$

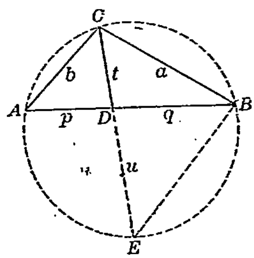
習題 672　利用命辭二十一的圖，求證

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - c)。$$

習題 673　上題中，設 a=6, b=7, ∠c=120° 求 c 的值到小數三位。

命辭二十三　定理

327. 三角形兩邊的積等於他們的夾角平分線的平方加第三邊兩部份的乘積。



設　t 是 $\triangle ABC$ 裡面 $\angle C$ 的平分線，又 AB 邊被 t 分為 p,q 二部份，

求證　$ab=t^2+pq$。

證　作 $\triangle ABC$ 的外接圓，並且延長 t 使他交圓於 E 點作 EB 線並且用 u 代表 DE，

則	$\angle ACD=\angle ECB$,	假設
又	$\angle A=\angle E$,	§ 210
所以	$\triangle ACD\sim\triangle ECB$	§ 284
∴	$b:t+u=t:a$	§ 275
即是	$ab=t(t+u)=t^2+tu$,	
但是	$tu=pq$,	§ 308
∴	$ab=t^2+pq$。	

328. 討論　若用 t_c 表 C 角的平分線，按上題的結果，

可得　$t_c^2 = ab - pq,$

但是　$p : q = b : a,$　§ 260

∴　$p : p+q = b : a+b,$　§ 270　§ 269

並且　$q : p+q = a : a+b,$

但是　$p+q = c,$

故　$p = \dfrac{bc}{a+b},\qquad q = \dfrac{ac}{a+b},$

代入可得　$t_c^2 = ab - \dfrac{abc^2}{(a+b)^2},$

若用 2s 表 $a+b+c,$

則得　$t_c = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$。

依同法，　可求　∠A 和 ∠B 的平分線。

習題 674　在命辭二十三的圖中，設 $a=8$, $b=5$, $p=4$, $q=7$, 求 t 的值(到小數三位)。

習題 675　§ 328 公式中，設 $a=b$, 這式將如何?

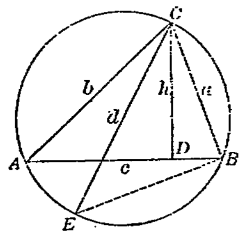
習題 676　設 △ABC 是等邊，則 t_c 的值，當如何?

習題 677　利用上題所得 t_c 的值，求證等邊三角形任一角的平分線必等於他的對邊上的高。

習題 678　利用 § 326 求 m_c 的公式及 § 328 求 t_c 的公式求證等邊三角形任一邊上的中線平分這邊的對角。

命辭二十四　定理

329.　三角形兩邊的積等於第三邊上的高乘他的外接圓的直徑。



設　CE 是 $\triangle ABC$ 外接圓的直徑，用 d 表示，又 h 是 c 邊上的高，

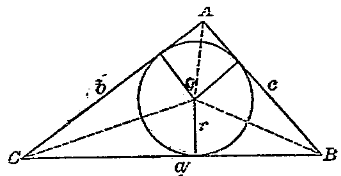
求證	$ab=hd$。	
證	作 BE 線	
則	$\angle A=\angle E$,	§ 210
又	$\angle ADC=\angle EBC$,	皆直角
∴	$\triangle ADC\sim\triangle EBC$,	§ 284
∴	$a:h=d:b$,	
即	$ab=hd$	

330. 討論　由上題的定理，可求三角形外接圓的半徑，若用 R 表這半徑，可得下式：

$$R=\frac{d}{2}=\frac{ab}{2h}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}。\quad \S\ 261$$

命辭二十五　定理

331. 三角形的面積等於他的周界乘內切圓半徑的積的一半。



設 r 是 $\triangle ABC$ 內切圓的半徑，

求證　$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$。

證：從各切點作半徑，各半徑必定和各邊成垂直，(§ 192) 又從圓心 O 到各頂點作直線，

則　$\triangle AOB=\frac{1}{2}\cdot r\cdot c,$　§ 243

$\triangle AOC=\frac{1}{2}\cdot r\cdot b,$

$\triangle BOC=\frac{1}{2}\cdot r\cdot a,$

$\therefore$　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot r(a+b+c)$。

332. 討論　由上題和 § 261 的併合，可得三角形內切圓半徑的公式如下：

$$r=\frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

習題 679　三角形的各邊是 13, 14, 15, 求他的最長邊在

次長邊上的投影,又求次長邊上的高。

習題 680 下表是數個三角形各邊的價值,試指出他們中間的直角三角形銳角三角形同鈍角三角形。

a	3	7	5	10	13	21
b	4	9	12	24	15	28
c	6	8	11	26	18	35

習題 681 設三角形的邊是 6, 7, 9, 求最長邊在最短邊上的投影。

習題 682 三角形的兩邊是 10 和 12, 他們的夾角是 45°; 求第一邊在第二邊上的投影又求第二邊上的高。

習題 683 三角形的兩邊是 7 和 8, 他們的夾角是 60°; 求第二邊在第一邊上的投影,又求這三角形的面積。

習題 684 三角形的兩邊是 10 和 12, 他們的夾角是 30°; 求第一邊在第二邊上的投影,又求這三角形的面積。

習題 685 三角形的兩邊是 8 和 9, 他們的夾角是 120°; 求第三邊和面積。

習題 686 三角形的兩邊是 18 和 30, 已知夾角是銳角第一邊在第二邊上的高是 12, 求第三邊。

習題 687 三角形的各邊是 9, 12, 15, 求他的各高。(§ 261)

習題 688 三角形的各邊是 5, 9, 10, 求他的各高。又問這形是那一種三角形。

習題 689 三角形的各邊是 14, 16, 18, 求第二邊上的中

線。

習題690　三角形的各邊是9,10,11,求第一邊上的中線。

習題691　三角形的各邊是14,48,50,求他的面積和最長邊上的高;又求外接圓的半徑。

習題692　直角三角形的兩腰是21和28,設斜邊上的高把斜邊分成兩段,求這兩段的長。

習題693　上題中求斜邊上的高和中線的長。

習題694　直角三角形的一腰是8吋,他的斜邊是16吋,求斜邊上的高。

習題695　上題中,設那高把斜邊分成兩段,求這兩段的長。

習題696　三角形的各邊是8,26,30;求他的內切圓和外接圓的半徑。

習題697　三角形的各邊是6,7,8,求第二邊對角平分線的長。

習題698　設三角形的一高把底邊分成兩段求證這兩段平方的差等於三角形其餘兩邊平方的差。

習題699　求證平行四邊形各邊平方的和等於他的兩對角線平方的和。(§133　§324)

習題700　三角形各中線平方的和,等於各邊平方的和的四分之三。(§324)

習題 701 四邊形各邊平方的和,等於各對角線平方的和,加兩對角線中點連接線的平方的四倍。

(從一對角線的中點,到他對角線的兩端作直線,並且用 § 324)

習題 702 作三角形的各高每一高,分一邊成兩段,則第一第三第五各段平方的和,必等於第二第四第六各段平方的和。(§ 252)

習題 703 某點對於兩平行線的距離成已知比,求這點的軌跡。

習題 704 設 A 是圓上的一點,過 A 作數弦;如今在弦上取一點,使他對 A 的距離等於弦長三分之一。求這點的軌跡。

習題 705 已知三角形的底和其餘兩邊平方的和,求他的頂點的軌跡。(§ 324)

習題 706 已知三角形的底和其餘兩邊平方的差,求他的頂點的軌跡。(§ 325)

習題 707 銳角三角形的第一邊是 20。他的第二邊在第一邊上的投影是 10,問這形是那一種三角形?又問這三角形是不是完全決定?

習題 708 銳角三角形的一邊是 8,這邊在他邊上的投影是 4,問這形是那一種三角形?又問這三角形是不是完全決定?

第五編　正多邊形和圓

第一章　正多邊形的作法

333. 定義　多邊形各邊相等，各角也相等的，叫做正多邊形(§116)，也叫做有法多邊形。
若多邊形的各頂點都在圓上，這形便叫做圓的內接多邊形。(§173)
若多邊形的各邊都是圓的切線，這形便叫做圓的外切多邊形。(§173) 下列各定理，性質簡單，可幫助以後的推證。

334. 設作$\frac{360^\circ}{n}$的圓心角，再在圓上拿他的截弧的 n 倍，則各弧的弦必圍成 n 邊數的正多邊形。

335. 圓的內接等邊多邊形，必是正多邊形。

336. 圓的內接正多邊形的一邊所對的圓心角，必和多邊形的一內角互為補角。

337. 過內接正多邊形各頂點所作圓的切線，必圍成同邊數的外切正多邊形。

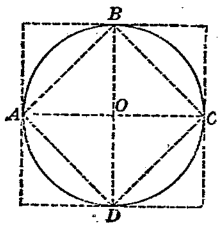
338. 從內接正多邊形各邊所對弧的中點，到附近兩頂點所作的各弦，必圍成一內接正多邊形；他的邊數等於已知多邊形的二倍。

339. 過外切正多邊形各切點間各弧的中點，所作的各切線，必圍成外切正多邊形，他的邊數等於

已知多邊形邊數的二倍。

命辭一　作圖題

340. 求作圓的內接正方形和外切正方形。



設　O是一個已知圓。

求　作他的內接正方形和外切正方形.

作圖法1：作直徑AC，又作直徑BD⊥AC，過A,B,C,D各點，作圓的切線，則必圍成外切正方形。(§192，§86，§126)

作圖法2：又作AB,BC,CD,DA各弦，必圍成內接正方形。(174(7)§207)(學者自證之)

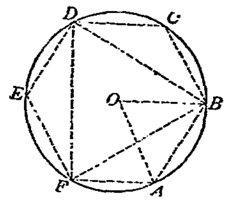
習題709　求作圓的內接正八邊形,正十六邊形,正三十二邊形。

習題710　求作圓的外切正八邊形正十六邊形正三十二邊形。

習題711　求證圓的內接正方形的面積等於同圓外切正方形面積的一半。

命辭二 作圖題

341. 求作圓的內接正六邊形。



設 O是一個已知圓，求作他的內接正六邊形。

作圖法： 作半徑 OB，用 B 做圓心，用 OB 做半徑，作弧，交圓於 A 點，作 BA 和 OA。

則 BA 就是所求正六邊形的一邊。

證 △OBA 是等角三角形， § 61

∴ ∠BOA＝60° § 107

即弧 BA 等於全圓六分之一，弦 BA 等於內接正六邊形的一邊。

所以若用半徑做弦，連續六次，便可得正六邊形。

習題 712 求作圓的外切正六邊形。

習題 713 求作圓的內接等邊三角形。

習題 714 求作圓的內接正十二邊形，二十四邊形，四十八邊形。

342. 幾何作法 按 § 334 多邊形的作法，要用

量角器和尺，叫做非幾何作法，而§340到§343各段的作圖法，只應用雙脚規，和沒有分度的尺，所以叫做幾何作法。

習題715 圓的半徑是5,求他的內接正六邊形的周界,和內接正方形的周界。

習題716 圓的內接正六邊形的周界是12,求其直徑。

習題717 圓的直徑是5,求他的內接正方形的面積和外切正方形的面積。

習題718 圓的半徑是R,求外切正六邊形的周界。

習題719 過內接正六邊形一頂點所作的直徑,必分這六邊形爲兩個全等等腰梯形。

習題720 圓的內接等邊三角形的面積必等於同圓內接正六邊形面積的一半。

習題721 設圓的半徑是R,求他的內接等邊三角形的面積。

習題722 求證圓的內接等邊三角形的面積,等於同圓外切等邊三角形面積的四分之一。

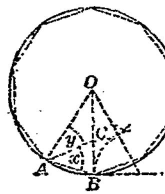
習題723 求證圓的內接正六邊形的面積,等於他的內接等邊三角形的面積,和外切等邊三角形的面積的比例中項。

習題724 求用幾何法作下列各角:

(a) $7\frac{1}{2}°$ (b) $22\frac{1}{2}°$ (c) $37\frac{1}{2}°$ (d) $82\frac{1}{2}°$ (e) $52\frac{1}{2}°$

命辭三　作圖題

343. 求作圓的內接正十邊形。



設　O 是一個已知圓，

求作 O 圓的內接正十邊形。

解析：　假設圖已作成，並且 AB 是所求正十邊形的一邊。

則　$\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

所以曉得　$\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$

但　$72^\circ = 2 \times 36^\circ$

設作　AC 使平分 $\angle OAB$

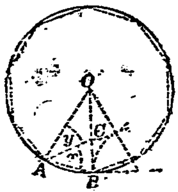
則圖中　$\angle x = \angle y = 36^\circ$

於是　$\triangle ABC$ 及 $\triangle AOC$ 都是等腰。

即　$AB = AC = OC$

且　$\triangle ABC \sim \triangle AOB$　§ 286

$\therefore$　$OB : AB = AB : BC$　§ 275



或 $OB : OC = OC : BC$

從這裏便曉得半徑 OB 是被 C 點分成內外比。

且 AB (或 OC) 是他的大段。

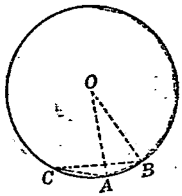
(這題的作法和證法請學者自擬)。

習題 725 求作圓的內接正十五邊形。

解 先作 36°的圓心角, (§ 343)

又作 60°的圓心角, (§ 341)

他們的差必等於 24°, 這差角所對的弦,就是所求正十五邊形的一邊。

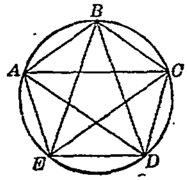


習題 726 求作圓的內接正五邊形二十邊形,四十邊形。

習題 727 求作圓的外切正五邊形二十邊形,四十邊形。

習題728　設圓的半徑是R,他的內接正十邊形的一邊是S_{10},求證$S_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

習題729　求證正五邊形的各對角線交成另一正五邊形。



習題730　從正五邊形一角的頂點所作的對角線必分這角為三等份。

習題731　正五邊形中,從兩個相鄰頂點所作的兩對角線必互分成內外比。

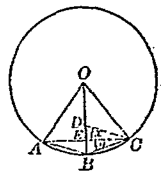
習題732　在附圖中,設R是半徑,又用AB(=BC=OD)表內接正十邊形的一邊;則AC是內接正五邊形的一邊,用S_5來表示;可知

$\angle DCB=36°$

$\angle y=18°$ (§203)

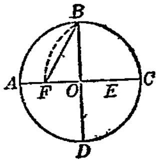
$\therefore\quad \angle x=18°$

故　DE=EB



所以曉得DE等於R和S_{10}的差的一半。試由前所得S_{10}的值。

求證　$S_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$。



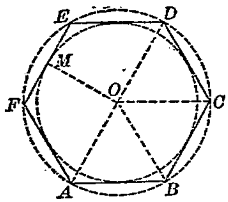
習題733　附圖中,設AC和BD是O圓中的兩垂直直徑,E是OC的中點,現在用E做圓心,用BE做半徑,作弧,交AO於F點。

求證　　$OF=S_{10}$,　　$BF=S_5$

344. 定義　多邊形內切圓的半徑，叫做這形的邊心距(Apothem)。外接圓的半徑，叫做頂心距:(Radius)外接圓的心或內切圓的心，叫做這形的中心。

命辭四　定理

345. 正多邊形可外接一圓，可內切一圓。



設 ABCDEF	是一個已知正多邊形，	
求證(I)	這形可作一外接圓。	
證	過A.B,C,三點作一圓，	§ 180
設	這圓的心是在O點,	
作	OA, OB, OC, OD 諸線。	
因為	$\angle ABC=\angle BCD$	§ 333
又	$\angle OBC=\angle OCB$	§ 59

∴	$\angle ABO=\angle DCO$	公理 3
但是	$AB=CD$	§ 333
	$OB=OC$	作圖意
∴	$\triangle AOB\equiv\triangle COD$	s. a s.
∴	$OA=OD$	

所以曉得　經過 A,B,C,三點的圓，也必經過D點。依同理可證明這圓也必經過 E,F 各點。

求證(2)　這多邊形可作一內切圓。

證　正多邊形各邊都是他的外接圓的等弦 § 333

所以他們到圓心的距離都相等。　§ 185

若用這距離做半徑，又用多邊形的中心做圓心，作一圓，這圓必和多邊形的各邊相切。§174(1) § 191

習題 734　已知正五邊形,求作他的內切圓。

習題 735　求作正八邊形的內切圓。

習題 736　求作已知圓的外切等邊三角形。

習題 737　正方形的一邊等於 6,求他外接圓的半徑。

習題 738　等邊三角形的一邊等 6,求他的內切圓的半徑和外接圓的半徑。

習題 739　圓的內接正多邊形的周界,必小於同圓內接二倍邊數正多邊形的周界。

習題 740　圓的外切正多邊形的周界,必大於同圓外切二倍邊數正多邊形的周界。

命辭五　定理

346.　邊數相同的兩個正多邊形必定相似。

設　Q 和 Q' 是兩個正多邊形，他們的邊數都是 n，

求證　　　　Q 和 Q' 相似。

證　兩個多邊形各內角的和，都是 $(n-2)2rt\angle s$，(§ 114)

所以每一個角都是 $\frac{(n-2)2rt\angle s}{n}$

可知 Q 和 Q' 互爲等角。

又因兩形都是等邊，　　　　§ 333

所以他們的邊成比例。

$\therefore$　　　　$Q \sim Q'$　　　　§ 275

347. 系一　若兩個正多邊形的邊數相等，他們的周界的比，必等於任意兩相當邊的比；他們的面積的比，必等於任意兩相當邊平方的比。

348. 系二　在已知圓中，可作正多邊形，和已知正多邊形相似。

注意　作圓心角，使等於已知形一邊所對的圓心角。

在下列 741—744 各題中,用 r 表正多邊形的邊心距,R 表頂心距,S 表一邊,A 表一內角,C 表每邊所對的圓心角。

習題 741　在內接等邊三角形中,求證

$$S=R\sqrt{3},\qquad r=\frac{1}{2}R,\qquad A=60^\circ,\qquad C=120^\circ。$$

習題 742　在內接正方形中,求證

$$S=R\sqrt{2},\qquad r=\frac{1}{2}R\sqrt{2},\qquad A=90^\circ,\qquad C=90^\circ。$$

習題 743　在內接正六邊形中,求證

$$S=R,\qquad r=\frac{1}{2}R\sqrt{3},\qquad A=120^\circ,\qquad C=60^\circ$$

習題 744　在內接正十邊形中,求證

$$S=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1),\qquad A=144^\circ。$$

$$r=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},\qquad C=36^\circ。$$

習題 745　圓的外切正多邊形的周界,必大於同圓內接同邊數正多邊形的周界。

習題 746　已知圓的半徑是 4 时,求他的外切正六邊形的頂心距。

習題 747　圓的半徑是 6,求他的外切等邊三角形的頂心距和內接等邊三角形的邊心距。

習題 748　用已知線段做一邊,求作正五邊形和正八邊形。

解　拿任意圓,作他的內接正五邊形。設 AB 是這五邊形的一邊 O 是中心,再在已知邊 A'B' 上,作

$$\triangle A'O'B' \sim \triangle AOB,$$

則 O' 就是所求五邊形的中心。作八邊形也同這法。

習題749　過圓上一點,求作弦,使分這圓為兩弧,成 1:3 的比。

習題750　用已知線段做一邊,求作等邊三角形正方形,和正六邊形。

習題751　求作圓的外切等邊三角形和正六邊形。

習題752　求作圓的外切正五邊形。

習題753　圓的半徑等於 3,求他的內接正三角形的一邊。

習題754　圓的半徑等於 5,求他的外切正六邊形的周界。

習題755　設圓的半徑等於 5,求他的內接正方形的面積。

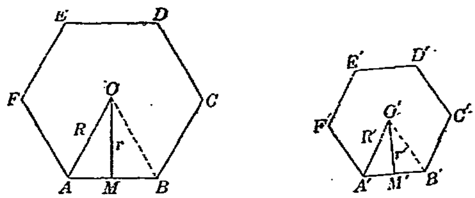
習題756　圓的直徑等於 6,求他的內接正五邊形的周界。

習題757　圓的內接正六邊形的周界等於18,求這圓內接正方形的面積。

習題758　圓的內接正方形的面積等於 100,求他的外切正方形的面積。

命辭六　定理

349. 兩個同邊數正多邊形周界的比，等於那兩形頂心距的比，又等於那兩形邊心距的比。



在上圖兩個正多邊形的邊數都是 n,他們的中心是 O 和 O'，頂心距是 R 和 R' 邊心距是 r 和 r'，周界是 p 和 p'，

求證　　$p : p' = R : R'$

又　　$p : p' = r : r'$

證　　作 OB 和 O'B'

因　　$\angle AOB = \angle A'O'B'$

$\left(\text{都是}\dfrac{360^\circ}{n}\right)$

又　　$\triangle$AOB 和 A'O'B' 都是等腰　　§ 174(2)

$\therefore$　　$\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$　　§ 290

$\therefore$　　$AB : A'B' = R : R'$　　§ 275

並且　　$AB : A'B' = r : r'$　　§ 294

但是　　$p : p' = AB : A'B'$　　§ 349

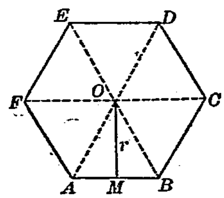
$\therefore$　　$p : p' = R : R'$

$$p : p' = r : r'$$ 公理 1

350. 系 兩個同邊數正多邊形面積的比，等於他們的頂心距平方的比，又等於他們的邊心距平方的比。

命辭七 定理

351. 正多邊形的面積，等於他的周界，乘邊心距的積的一半。



設已知正多邊形的周界是 p,邊心距是 r, 面積是 s,

求證 $$s = \frac{1}{2}p \times r。$$

證: 作 OA, OB, OC, OD 各線,

這多邊形便被分做數個全等三角形。

已經曉得 $\triangle AOB$的面積$= \frac{1}{2}r \times AB$ § 243

$\triangle BOC$的面積$= \frac{1}{2}r \times BC$ § 243

其餘各三角形，都可以這樣類推。

所以 $$s = \frac{1}{2}(AB + BC + \cdots\cdots)\times r$$

即是 $$s = \frac{1}{2}p \times r。$$

習題759　正六邊形一邊爲6,邊心距爲$3\sqrt{3}$求面積

習題760　設正六邊形的一邊等於a,求他的面積。

習題761　設正六邊形的邊心距等於n,求他的面積。

習題762　求證圓的內接正八邊形的面積,等於同圓內接正方形的一邊,乘這圓的直徑的積。(作三根頂心距。)

習題763　求證圓的內接正十二邊形的面積,等於這圓的半徑平方的三倍。(用上題的方法)

352. 圓周和直徑的比　圓是一種曲線，這曲線的長叫做圓周。(Circumference) 圓周和直徑的比，總是一個定值，這定值的求法，是古今算學界的一大問題。普通的幾何裏面，不能把這題解決。並且這比的精密值，也不是代數方法所能計算的，實用上只求概略的數值就夠了，我們尋常所稱的長，都是用直線做單位，現在求圓周是用直線單位去計量一曲線；所以他們中間的比，只可以概略表示。

習題764　取直徑四吋的圓,用絲線繞在他的周圍,然後量這絲線的長;又用直徑的長,除這絲線的長,求商。(都用吋做單位)

習題765　下表中,C代圓周,D代直徑的吋數,C:D代他們中間的比;試用上題的方法求出各值填入表中。

D	C	C:D
四寸		
6		
8		

習題766　上題中各次所求C:D的值平均數約多少?

353.　上段練習裏面求圓周比的方法，不甚精密，並且是全憑人的視察力做標準，不是根據幾何原則的，所以不合於科學上種種重要計算的應用，要求比較精密的結果，必須利用正多邊形求面積的方法；因爲我們把圓看做一種無量邊數的多邊形。例如作圓的內接正多邊形，並由每邊所對弧的中點。到這邊的兩端作線，結果還是一內接正多邊形，他的邊數等於原多邊形的二倍，依同法，可作四倍，八倍，十六倍，直到無窮倍邊數的多邊形。邊數愈多，這形的周界和圓周的差愈少。下列的命辭，可補助我們求這種多邊形周界的方法。

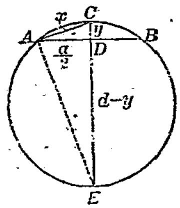
圓的直徑和圓周的比，在算學中常用希臘字母π來表示，古猶太人求得這值是3；但西歷前一千七百年的埃及古書裏已說$\pi=3.1604$。大算學家亞基米底說π的值小於$3\frac{1}{7}$而大於$3\frac{10}{71}$；天文家拖連買說$\pi=3.14166$；印度人說，$\pi=3.1623$；荷蘭人墨提歐氏說$\pi=3.1415929$。盧得夫計算這值，曾算到小數三十五位，而善克斯氏竟推算到707位。因爲π的值，既不是一種有理數，也不是不盡根式，不能用正確的代數式來表示，所以叫做一種超越數。(Transcendental Number)　若把π的正確值算到十

位小數止，據最近的計算，其式如下：

$$\pi = 3.1415926535$$

命辭八　作圖題

354. <u>曉得圓的直徑，和內接正多邊形的一邊，求同圓內接二倍邊數正多邊形一邊的長。</u>



設　AB 是一個圓的內接正多邊形的一邊，CE 是垂直於 AB 的直徑。

求作一個公式，來計算同圓內接二倍邊數正多邊形的一邊。

解　圖中 AB 是已知正多邊形的一邊，AC 是所求的一邊，今用 x 代 AC 的值，用 a 代 AB，用 y 代 CD。

則　$AD = \frac{a}{2}$　§ 175

又　$DE = d - y$

作 AE 線

則　$\frac{a^2}{4} = y(d-y) = dy - y^2$　§ 299

遷項，則得　$y^2 - dy + \frac{a^2}{4} = 0$

解這式，則得 $y=\dfrac{d\pm\sqrt{d^2-a^2}}{2}$

但是在正多邊形裡面，y 必定比$\dfrac{1}{2}$d 小些，所以曉得根式前必是負號。

又 $x^2=dy$ § 300

$$=d\cdot\frac{d-\sqrt{d^2-a^2}}{2}$$

$$x=\sqrt{\frac{d^2-d\sqrt{d^2-a^2}}{2}}$$

習題 767 設 d=1 (就是設圓是單位圓)則

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-a^2}}$$

355. 設單位圓內接正多邊形的邊數，由 6 漸增加到 12,24…, 利用上命辭的公式，可得結果如下表：

直徑為 1 的圓的內接正多邊形		
邊數	每邊的長	週界的長
6	.5	3.
12	.25881904	3.10583
24	.13052619	3.13263
48	.06540313	3.13935
96	.03271908	3.14103
192	.01636173	3.14145
384	.00818114	3.14156
768	.00409060	3.14158

由表裡面的各結果，又可得到以下的結論：——單位圓的長，大約等於 3.1416 線單位。

又由 § 349, 曉得同邊數正多邊形周界的比，等於他

們的頂心距的比，又等於他們的外接圓直徑的比：所以曉得任意兩圓 C 和 C' 的比，必等於他們的直徑 D 和 D' 的比　即是 $C:C'=D:D'$

由 §268 的法子，可得

$$C:D=C':D'$$

所以任意圓和他的直徑的比，都是等於單位圓和他的直徑的比。這比的值常有一定。在計算中，是用希臘字母 π 來表示。設 C 是一圓，D 是他的直徑，R 是半徑，則

$$\frac{C}{D}=\pi,\qquad C=\pi D,\qquad C=2\pi R$$

而 π 的價值，大約等於 3.1416。

若用分數來表示，便是 $\frac{22}{7}$。

356. 弧的長　設弧的度數是 n，他的長必是

$$\frac{n}{360}\times 2\pi R。$$

在下列 768－770 各題中，設 $\pi=3.1416$，又在 771－775 題中，以 $\pi=\frac{22}{7}$。

習題 768　圓形墨盒的直徑是 3 吋，求他的周圍。

習題 769　美國加省有大樹，他的直徑是 32 呎，求他的周圍。

習題770 地球的直徑是8000里,假定地是完全球形,求赤道的長。

習題771 車輪的半徑是84吋,問行2哩的時候,這輪要轉多少次。(1哩=5280呎)

習題772 某圓周是88呎,求他的直徑。

習題773 某圓塔的周圍是132呎,求他的直徑。

習題774 鐘的長針是7吋,短針是5.6吋,求一晝夜間兩針尖端所行距離的差。

習題775 有一哩的圓形跑道,他的直徑是多少呎?

習題776 求作一圓,使他的長等於兩已知圓的和。

解 設x是所求圓的半徑,又R和R'是兩已知圓的半徑。

則 $$2\pi x=2\pi R+2\pi R'$$

∴ $$x=R+R'$$

習題777 設C_1, C_2是已知圓,求作$C=C_1-C_2$。

習題778 求作$C=3C_1$。

習題779 設C_1, C_2, C_3,都是已知圓,求作

$$C=C_1+C_2-C_3$$

習題780 設圓的半徑是10,求他的內接正方形的一邊,又求他的內接正十六邊形的一邊。

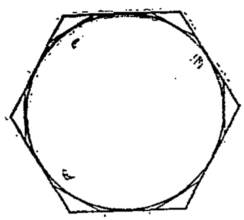
習題781 設R是圓的半徑,n是他的內接正多邊形的邊數,S_n是一邊的長,求證

$$S_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad ; S_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$S_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad ; S_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

357. **圓的面積**　設作圓的外切正六邊形，他的面積必大於圓的面積，但如過截弧的中點作切線，結果必成一個二倍邊數的外切正多邊形。

按這法每次增加邊數一倍，所得多邊形的周界，必漸近於圓，他的面積也漸近於圓的面積，但每一多邊形，都是已知圓的外切形，所以他的邊心距總是不變。



又因正多邊形的面積，等於邊心距乘周界的積的一半；故知圓的面積，必等於他的半徑乘圓周的積的一半。

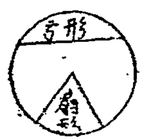
設　$C=$圓周，　$R=$半徑，　$S=$圓的面積

可得　$S=\frac{1}{2}RC$

但　$C=2\pi R$

$\therefore$　$S=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2$

358. **扇形**　兩半徑和他們中間截弧所成的形，叫做扇形(Sector)。

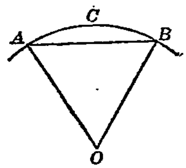


359. **弓形**　一弦和他的截弧所成的形，叫做弓形(Segment)。

360. 扇形的面積，等於他的半徑，乘他的弧的積的一半。

361. 若扇形的圓心角是 $n°$，他的面積必是

$$\frac{n}{360}\pi R^2。$$



362. 弓形的面積 在右圖中若要求弓形 ACB 的面積必先求扇形O－ACB的面積，然後減去△OAB的面積所得的差，便是所求弓形的面積。

習題782 設圓的半徑是下列各值,求他的面積。

(a) 1, (b) 2, (c) 3, (p) $\frac{1}{2}$吋, (e) 1.2糎, (f) m+n,

習題783 設下列各值是圓的直徑,求他的面積。

(a) 1, (b) 2, (c) 3 (d) $\frac{1}{3}$吋, (e) 3.7糎, (f) x−y,

習題784 設下列各值是圓的面積,求他的直徑和半徑。

(a) 4, (b) 16, (c) 36, (d) 5平方吋

(e) 4.1平方糎, (f) S,

習題785 設圓的半徑用2去乘他的面積當如何改變?

習題786 設圓的半徑用3去乘他的面積當如何改變?又問若用x去乘當如何?

習題787 下列各值,是扇形的圓心角和半徑,試求各形的面積。

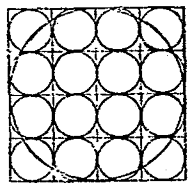
角	30°	60°	120°	150°	240°	210°	330°	315°	248°
半徑	2吋	$2\frac{1}{2}$	1.8糎	.75糎	1.15	2.3	.8吋	2.6	.33呎

習題788　時表上長短二針的比爲4:5設每針旋轉一次,問他們所成兩圓面積的比當如何?

習題789　某樹的周圍是5呎,求他的截徑面積。

習題790　圓形的鐵片直徑是8吋,如今要拿這鐵片剪成最大的正方形(卽內接正方形)求其餘鐵片的面積。

習題791　若把上題的鐵片剪成最大的正六邊形,求所餘鐵片的面積。



習題792　附圖中,求證各小圓面積的和等於大圓的面積。

習題793　求作一圓,使他的面積,等於兩已知圓面積的和。

解　設已知圓的半徑是R_1和R_2,又所求的圓半徑是x則按題意得

$$\pi x^2=\pi R_1^2,\quad +\pi R_2^2$$

卽是　$$x^2=R_1^2,\quad +R_2^2$$

由此,可用§256的方法去求x的值。

習題794　求作圓使他的面積等於兩已知圓面積的差。

習題795 求作圓,使他的面積,等於巳知圓面積的五倍。

注意
$$\pi x^2 = 5\pi R^2$$
$$x^2 = 5R^2$$
$$\therefore \quad R : x = x : 5R$$

習題796 設S_1,S_2,S_3,和S_4是數個巳知圓的面積求作圓的面積S,使

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4$$

習題797 圓的半徑是a,求他的內接正六邊形一邊所成弓形的面積。

第二章 圓的量法和他的正式推證

363. 變數與常數 上海距首都312公里，某人由首都向上海行走，每小時行五公里。從起程後，這人對於首都的距離漸次增加，對於上海的距離漸次減少，這種漸增或漸減的距離，在算學中叫做變數(Variable)。但是上海和首都間的距離總是312公里，始終不變，這距離叫做常數(Constant)。故得下段的定義。

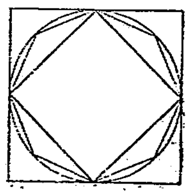
364. 定義 一數在同一討論中有一定值的，叫做常數，若他的值順次不同，而無一定的，叫做變數。

365. 變數的極限 甲乙丙器中，各貯酒十斤，今拿甲器中酒的一半注入乙器，則甲器中只剩五斤，乙器中卻有十五斤；又拿甲器餘酒的一半加入乙器，

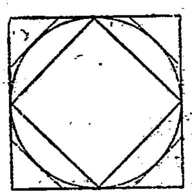
則乙器中共有一十七斤半，甲器中卻只剩二斤半。如此繼續不止，每次都拿甲器餘酒的一半加入乙器，則甲器裏的酒漸次減少，並可使他少於任何已知量，只是不能等於零。所以我們說。甲器中的酒是一個變數，而零就是這變數的極限(Limit)。同時，乙器中的酒量漸次增加，但無論如何，決不能加到二十斤；這個器中的酒量，也是一個變數，他的極限就是二十斤。從這個例：我們可得定義如下：

設一個變數的價值，漸漸和一個常數相近，並且變數和常數的差，可小到於不可名言，但不能完全等於零：這個常數就是變數的極限，或僅稱限；這個變數就漸漸接近他的極限(Approach Its Limit)。

366. 符號 設有變數x,漸漸接近極限a,我們可寫作



367. 關於圓的極限問題 設有一圓，外切一個正方形；連接各切點，則得一個內接正方形。又由這內接正方形每邊截弧的中點作線到他的兩端，則得同圓的內接正八邊形。若是繼續不已，每次可得一個內接二倍邊數的正多邊形。這個多邊形的周界漸次增加，但無論如



何總是比圓的外切正方形小些；而且他的面積也比外切正方形的面積小些。

又如在外切正方形每兩切點中間的弧的中點上作切線，則得同圓的外切正八邊形，照這法進行，每次可得一個外切二倍邊數的正多邊形，他的周界和面積漸次減少，但無論如何，總是大於同圓內接正方形的周界和面積。

這兩種多邊形的周界和面積，都是變數；屬於內接多邊形的，叫做漸增變數，這種變數常比某種常數小些。屬於外切多邊形的，叫做漸減變數，他的價值漸次變小，但總比某種常數大些。

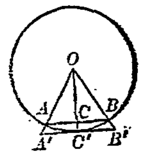
由上兩例，我們可得下段的兩條。

368. 極限的存在公理 1 若一個變數漸次增加，但常常比一個已知常數小些，這變數必漸近於一個極限；這極限或小於已知常數，或等於已知常數。

369. 極限的存在公理 2 若一個變數漸次減少但常常比一個已知常數大些，這變數必漸近於一個極限；這極限或大於已知常數，或等於已知常數。

370. 關於極限的證明 由§367 裡面的推想曉得圓的內接正多邊形和外切正多邊形的周界，各漸近於一極限。由下列的證明，可知這兩種變數的極限，實在是同一個數，因為我們能證明這兩種多

邊形周界的比，是用 1 做他們的極限。在附圖中，設 AB 和 A'B' 是圓內接和外切兩個相似正多邊形的相當邊。今用 a 表 AB, R 表 OC' 又用 P 和 P' 表內外兩形的周界，可得



$$\frac{P}{P'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{\sqrt{OA^2-AC^2}}{R}=\frac{\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}}{R}$$

若多邊形的邊數漸次增加，由上式可曉得 a 的價值漸次減少，以零做極限；但是半徑 R 是一常數，他的價值始終不變。又 $\frac{P}{P'}$ 的價值漸次增加，但總是小於 1, 所以曉得 $\frac{P}{P'}$ 必漸近於一極限。　§ 368

即是　$\frac{P}{P'}$ 的極限 $=\frac{\sqrt{R^2-O}}{R}=\frac{R}{R}=1$

換句話說就是 P 和 P' 有同一的極限。

依同法我們又可證明這兩種正多邊形的面積，也必漸近於同一的極限。

371. 定義　由上面的討論，可得定義如下：

(*a*)設圓的內接正多邊形，和外切同邊數正多邊形的邊數漸次增加，他們的周界的公共極限叫做圓周。

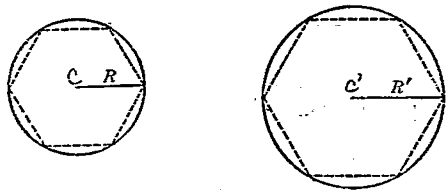
(*b*)這兩種多邊形的面積的公共極限叫做圓的面積。

372. 定理 1　設變數 x 的極限等於 a. 則 $\frac{1}{2}$ x 的極限等於 $\frac{1}{2}$ a. 並設 c 是一個常數,（不是零）則 $\frac{x}{c}$ 的極限必等於 $\frac{a}{c}$。

定理2 設兩個變數常常相等，他們的極限必相等

命辭九 定理

373. 兩圓的比等於他們的半徑的比。



設 C 和 C' 是兩個圓，他們的半徑是 R 和 R'，

求證 $C : C' = R : R'$

證 每圓內接一個正 n 邊形，用 P, P' 表他們的周界，

則 $P : P' = R : R'$ § 349

或 $\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}$

今設 n 無限增加，

則 $\frac{P}{R} \doteq \frac{C}{R}$ § 371 § 372

並且 $\frac{P'}{R'} \doteq \frac{C'}{R'}$

又 $\frac{P}{R}$ 和 $\frac{P'}{R'}$ 雖然都是變數，但常常相等，(§ 349)

所以他們的極限也相等。 § 372(2)

即是 $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$

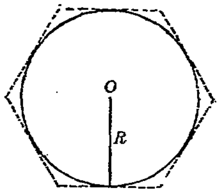
或 $C : C' = R : R'$

374. 系一　兩圓的比，等於他們的直徑的比。

375. 系二　圓和他的直徑的比是一常數，這常數是用字母 π 來代表。

命辭十　定理

376.　圓的面積，等於半徑乘圓周的積的一半。



設上圖圓心是 O，面積是 S，半徑是 R，圓的長是 C，

求證　　$S=\frac{1}{2}C\times R$

證　　作圓的外切正 n 邊形，並且用 p 表這形的周界，又用 A 表他的面積：這形的邊心距，必等於已知圓的半徑。所以 $A=\frac{1}{2}p\times R$。　§ 351

設這外切正多邊形的邊數無限增加，

則　　$A \doteq S$　§ 371(*b*)

　　　$p \doteq C$　§ 371(*a*)

故　　$\frac{1}{2}p\times R \doteq \frac{1}{2}C\times R$　§ 372(*1*)

現在 A 和 $\frac{1}{2}P\times R$ 是相等的變數，所以極限也相等。

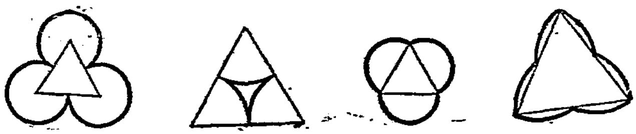
即是　　$S=\frac{1}{2}C\times R$　§ 372(*2*)

377. 系一　圓的面積，等於π乘他的半徑的平方。

378. 系二　兩圓面積的比，等於他們的半徑平方的比，又等於他們的直徑平方的比。

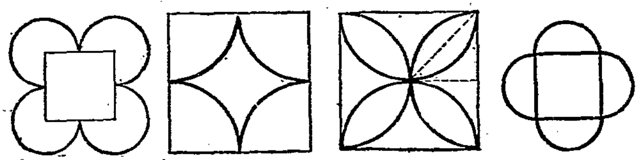
379. 定義　平面形以曲面為界的叫做曲線形。

習題798　試作下列各圖



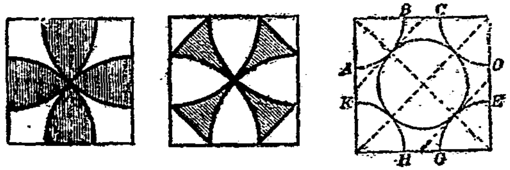
習題799　上題各圖中，設各弧的半徑都是a，求各曲線形的面積。

習題800　試作下列各圖



習題801　上圖各弧的半徑是a，求各曲線形的面積。

習題802　試作下列各圖



此書經教育部審定內政部註冊

Plane Geometry

By

Lao Chi Chiang B. A. M. S.

民國十九年六月第一版
民國二十年八月第二版
民國廿一年八月第三版
民國廿三年三月第四版

每冊定價大洋壹元陸角
照碼七折每冊實售洋壹元壹角貳分
(外埠酌加郵費匯費)

著作者 芝加哥大學理科碩士 勞啓祥
發行所 長沙私立雅禮中學校
印刷所 湘鄂印刷公司 長沙織機巷 電話六二六六

分銷處

長沙	南正街	商務印書館
武昌	察院坡	文華書局
南京	花牌樓	南京書店
上海	博物院路	青年協會書局
上海	福州路	作者書社
蕪湖	共和街	蕪湖書局
南通	南大街	三友書店
廣州	永漢北路	共和書局
汕頭	平安路	文華美術圖書公司
北平	琉璃廠	現代書局分店
開封	北書店街	百城書館
重慶	天主堂街	重慶書店
太原	樓兒底	覺民書報社