大學叢書

立體圖學

王石安著

商務印書館發行

大學叢書

立體圖學

王石安著

商務印書館發行

中華民國二十八年三月初版
中華民國三十六年七月三版

大學叢書（教本）立體圖學一冊
⊕（50763平）

平裝定價國幣拾貳元
印刷地點外另加運費

著作者　王石安
發行人　朱經農　上海河南中路
印刷所　商務印書館印刷廠
發行所　商務印書館　各地

（本書校對者王永滂）

序

海禁大開，歐風東漸，物質之文明，器械之新穎，幾如雨後春筍爭先萌出，我國學子從事研究者，固不乏人。惟工業科學一科，內容繁奧，悉心研究著有專書者，尙不多覯。當此科學戰爭工業亟待振興之際，未免有嫌落後。

余對於工業科學，略窺門徑，認爲立體圖學，實爲學習工業科學之基礎。爰將余平日之所學幷採擇東西名著之精華，集成斯册，貢獻國人，以冀彌補於萬一。全書計圖六百有奇，雖不敢自詡爲完備，然重要之圖，業已搜集無餘，當可作研究斯學者之一助。惟倉卒脫稿謬誤之處，恐難倖免，尙希　海內專家有以正之，是幸。

石安識於渡歐之途上。

念六年元旦

目　次

正　投　影　圖

斜　投　影　圖

透　視　圖

立體圖學

緒言

立體圖學 (Practical solid geometry) 爲幾何學之一分科，專研究物體在空間之位置及形狀，精確表現於一平面上之方法學科也。其所表示之圖，當物體與眼之位置固定後，此即應有與實際所見之物體有同一之感。是故眼與物體上之各點相結之直線與所表示物體之平面相交，將其交點連結成線，爲作圖上必要之條件。如斯所作之圖，稱爲其物體之投影 (Projection)。投影所作之平面，稱爲投影面(Plane of projection)。又表示眼之位置之點，謂之視點 (Point of sight)。由視點所發出而通過物體各點之直線，謂之視線 (Line of sight)。又視線上投影面與物體上之各點間之線分，謂之投射線，或投影線 (Projector or line of projection)。

如 Fig. 1 所示，S 爲視點，平面 T 爲投影面，A B D F 爲空間之物體，S 與 A B D F 之各點相結之直線與平面 T 相交，將其各交點相結，即成 a b d f 圖形。此時 a b d f 爲物體 A B D F 於平面 T 上之投影。而

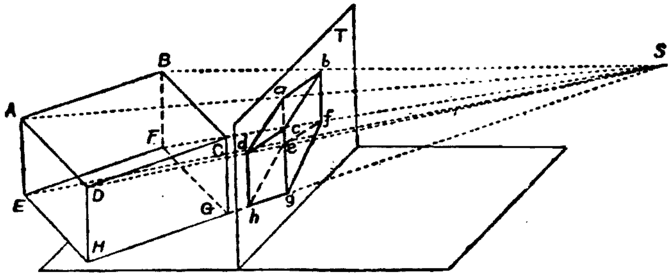


Fig. 1

直線 SA, SB, SC……爲視線, Aa, Bb, Cc……爲投影線。

視點與物體間其距離爲有限時，則所投之影稱爲透視投影 (Perspective projection)。又稱爲圓錐投影 (Conical projection)。視點與物體間之距離，若遠至於無限之極限，則所有之投影線，均成平行，此時之投影，稱爲平行投影 (Parallel projection)。平行投影中，投影線垂直於投影面者，謂之正投影 (Orthogonal projection or orthographic projection)。其不垂直者，謂之斜投影 (Oblique projection)。

$$
投影\begin{cases}透視投影\\ 平行投影\begin{cases}正投影\\ 斜投影\end{cases}\end{cases}
$$

正 投 影 圖

總　論

1. 投影面

如 Fig. 2 所示，設物體 A 與物體 B 位於平面 H 上，其共通之投影爲 a，若吾人僅以 a 而想像空間物體 A, B 之形狀，乃屬不可能之事。因之其位置與形狀，亦不能加以限定。然於他一平面 V 上，另作一投影 a′, b′，藉 a 與 a′, b 與 b′之助，斯時 A, B 之形狀，方可想像得知。次設 A 上之一點 P 之投影爲 p, p′，則 P 之位置，可由 p, p′ 向水平直立兩面引垂線，以其垂線相交之點表之。是故正投影中，通常有二投影面方能限定空間中物體之形狀，及其全部點之位置。茲因作圖之便利，取其一面保持水平之位置，他一面保持直立之位置。其保持水平者，稱爲水平投影面 (Horizonal plane of projection)。保持直立者，稱爲直立投影面 (Vertical plane of projection)。其兩投影面間之交切線，稱爲基線 (Ground line)。

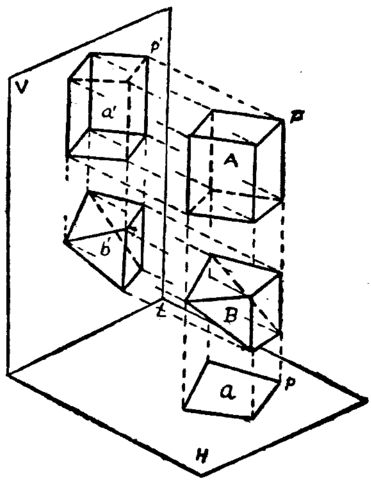


Fig. 2

2. 二面角

平面因能無限擴張,故其水平直立兩投影圖,可分空間爲四。其基線之周,可作成四二面角。二面角之名稱,其水平投影面之上,位於直立投影面前方者,爲第一二面角 (First dihedral angle)。位於後方者,爲第二二面角 (Second dihedral angle)。其水平投影面之下,位於直立投影面之後方者,爲第三二面角 (Third dihedral angle)。位於前方者,爲第四二面角(Fourth dihedral angle)。

3. 投影之區別

投影可依投影面而分別之,如水平投影面上之投影,稱爲水平投影(Horizonal projection)。或爲平面圖。直立投影面上之投影,稱爲直立投影 (Vertical projection)。或爲立面圖 (Elevation)。如Fig. 3 所示,a 爲立體 A 之平面圖,a′ 爲其立面圖也。

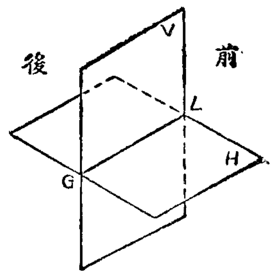


Fig. 3

又投影線,其至水平投影面者,爲水平投影線 (Horizonal projector),至直立投影面者,爲直立投影線 (Vertical projector)。

4. 投影面之迴轉

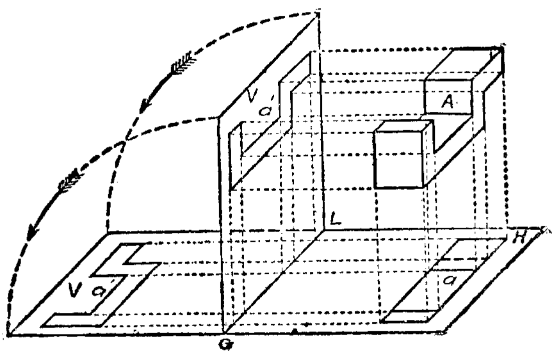


Fig. 4

上述之投影,

因其在水平直立兩平面上，故作圖上，若仍保持其兩平面間所成之直角之關係，殊感不便。勢非將其移至同一平面上不可。轉移之法，通常以基線為軸，將直立投影面向後方迴轉，使其與水平面重合。如 Fig. 4 所示，其矢所指之方向，即為迴轉直立投影面所示之方向也。

第一章　點之投影

1. 點之投影

如 Fig.5 所示，A 爲空間之一點，由點 A 向水平投影面與直立投影面引垂線，其足爲 a, a′。此時 a 爲 A 之平面圖，a′ 爲其立面圖。然此時含水平投影線 Aa 之各平面，垂直於 H，含 Aa′ 之各平面垂直於 V。由是可知含 Aa, Aa′ 之平面 V_1 必垂直於 H, V 兩投影面。今 H, V 兩平面互相垂直，若 V_1 與 H 相交爲 m a, V_1 與 V 相交爲 a′ m，則四邊形 A a a′ m 爲矩形，a m, a′ m 均垂直於基線 G L。故知由平面圖 a 至基線之距離 a m 與由點 A 至直立投影面之距離相等。由立面圖 a′ 至基線之距離 a′m 與由點 A 至水平投影面之距離相等。

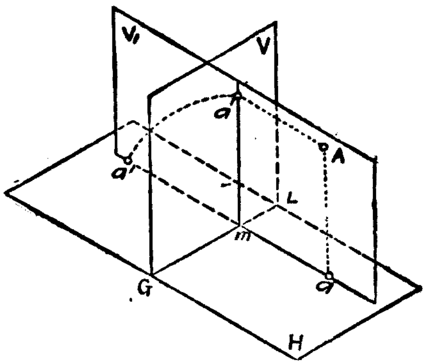


Fig. 5

次以基線爲軸，將直立投影面向後方迴轉，使其與水平投影面重合。今因 a m, a′ m 均垂直於基線，故 a m a′ 成一直線後，亦必垂直於基線。

當投影面迴轉後，點之平面圖與立面圖所連結之直線，必垂直於基線。今爲作圖之便利計，故稱此線爲投射線 (Projection line)。

（註）水平投影面略稱爲H. P.，直立投影面略稱爲V. P.，基線則略稱爲G L。

2. 點之投影與二面角

如 Fig.6 (a)所示，A爲第一二面角內之一點，其兩投影爲 a,a'。B 爲第二二面角內之一點，其兩投影爲 b,b'。C爲第三二面角內之一點，其兩投影爲 c, c'。D 爲第四二面角內之一點，其兩投影爲 d d'。今將其直立投影面，以基線爲軸向後方迴轉，使其與水平投影面重合，即得如

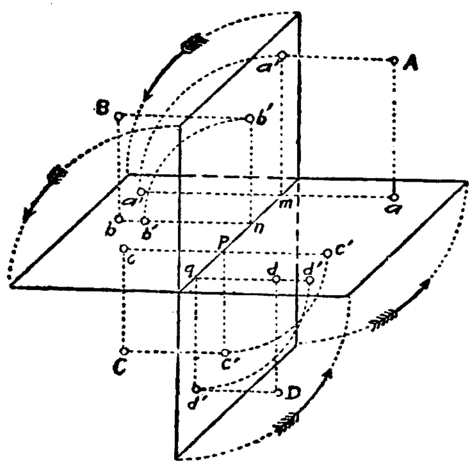


Fig. 6(a)

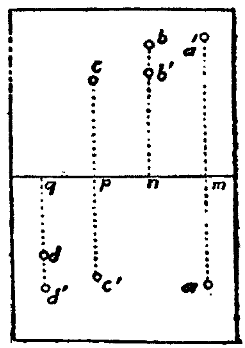


Fig. 6(b)

Fig. 6 (b) 所示之圖。圖中投射線 aa', bb', cc', dd' 等與基線所交之點爲 m, n, p, q, 則 am, bn, cp, dq 等之長，等於由 A, B, C, D 至直立投影面之距離。a'm, b'n, c'p, d'q 等之長，等於由 A, B, C, D 至水平投影面之距離。

如上圖所示，兩投影面迴轉後，其點之投影對於其基線已易其位置。即：

(1)第一二面角內之點，其平面圖在基線之下，立面圖在基線之上。

(2)第二二面角內之點，其平面圖及立面圖均在基線之上。

（3）第三二面角內之點，其平面圖在基線之上，立面圖在基線之下。

（4）第四二面角內之點，其平面圖及立面圖均在基線之下。

今設一點在水平投影面上時，其立面圖則在基線上。在直立投影面上時，其平面圖亦在基線上。又點在基線上時，其平面圖及立面圖，均在基線上。

3. 副投影

每一點對於所定之一對投影面，僅有一平面圖及一立面圖。今欲變更投影面之位置，可將其點向各新投影面上投影，而生新投影。此等新投影面，對於原投影面，稱爲副投影面 (Auxiliary plane of projection)。副投影面上所作之投影，對於原平面圖及立面圖，稱爲副投影 (Auxiliary projection)。

如 Fig.7 (a) 所示，H. P. V. P. 爲所定之一對投影面，A爲空間之一點。a,a′ 爲點A之平面圖及立面圖。設平面 A.P. 與 H.P. 直交於基線 G′L′。水平面上A之投影爲 a，其副投影爲 a″次以 G′L′ 爲軸將 A.P. 向後方迴轉，使其與 H.P. 重合後，將 G′L′ 及 a″ 與原投影同一圖示時，則得如 Fig. 7(b) 所示之圖。今以 A.P. 爲新直立面，而與

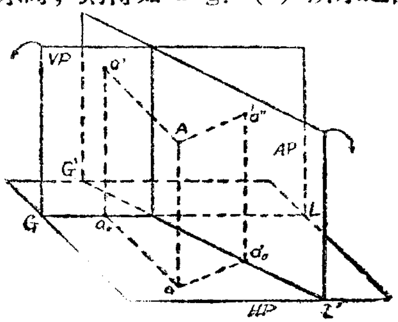


Fig. 7(a)

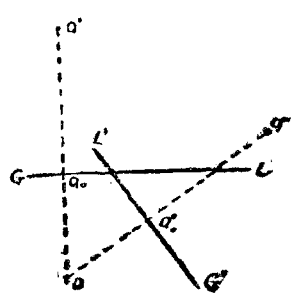


Fig. 7(b)

H.P. 視爲一對之投影面，則 a″ 爲 A 之新立面圖，而與 a 對於新基線 G′L′ 形成一對新投影圖。此時 G′L′ 稱爲副基線 (Auxiliary ground line)，a″稱爲副立面圖 (Auxiliary elevation)

又原投影與副立面圖之間，有下列之關係。

$$aa'' \perp G'L' \qquad a''a'_{\circ} = Aa = a'a_{\circ}$$

是故關於一副基線 G′L′，而作已知之點 a, a′ 之副立面圖時，可由平面圖 a 至 G′L′ 作垂線，於其足作垂線 $a_{\circ}'a''$，取其與 $a_{\circ}a'$ 等長可也。但 a″ 之位置，必隨 a′ 之位於 G L 之上方或下方，而位於 G′L′ 之上方或下方。

間有如 Fig. 8(a) 所示，將副基線 G′L′，置於 V. P. 之上，此時直交於 V. P. 之平面 A. P. 爲副投影面。而 V. P. 與 A. P. 可視爲新一對投影面，因之 A. P. 上之投影 a″，可視爲新平面圖。

後以 G′L′ 爲軸將 A. P. 向下方迴轉，使其與 V. P. 重合，而 a″ 落於 V. P. 上。今將 a″ 與 G′L′ 同時添諸原投影內，則得 (b) 圖，此時

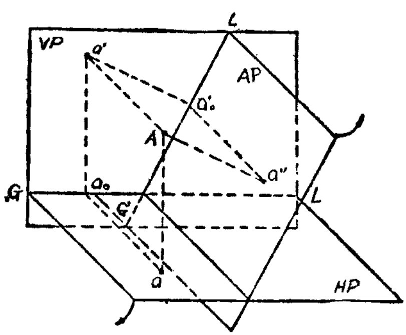


Fig. 8(a)

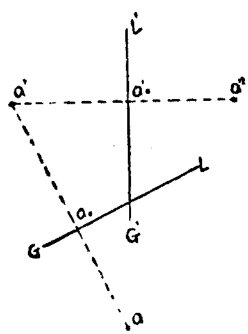


Fig. 8(b)

$a'a'' \perp G'L' \qquad a''a_0' = Aa' = aa_0$

由此關係，可決定圖上 a″ 之位置。此時 a″ 爲 A 之副平面圖（Auxiliary plan），而與立面圖 a′ 對於 G′ L′，形成 A 之新投影圖。

4. 側面投影

垂直於水平直立兩投影面之平面上之投影，即垂直於基線之平面上之投影。通稱此投影，謂之側面投影 (Profile)。或謂之側面圖 (Side elevation)。側面投影，可視爲副立面圖，復可視爲副平面圖。其求法，與求副立面圖及副平面圖之方法完全相似。例如若視其爲副立面圖，可將其迴倒於水平投影面，如視其爲平面圖，可將其迴倒於直立投影面。如Fig. 9 所示，爲已知一點 P 之平面圖及立面圖，以OV_1爲其副基線，而求其側面圖 p″ 之圖。今其側面圖，視爲副平面圖，故向直立投影面迴倒。

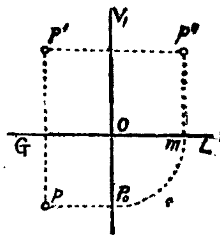


Fig. 9

5. 直線之副投影

直線之副投影，因其爲一直線。故直線之副投影，爲其兩端二點之副投影相結而成。如 Fig. 10 所示，爲已知三角形 A B C 之兩投影，於 G′ L′ 爲副基線之平面上，而求其副立面圖 a″ b″ c″ 之圖也。

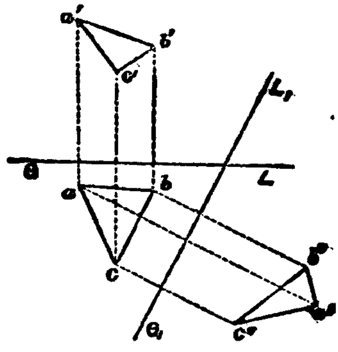


Fig. 10

作圖題1. 垂直於基線之直線之投影 a b a′ b′ 爲已知，求其水平跡與直立跡。

如 Fig. 11 所示，先求 A B 之側面圖 $a''\,b''$。次將其延長線，使其與基點相交於點 h_1，與副基線相交於點 v_1。此時 h_1 爲水平跡之側面圖，v_1 爲直立跡之側面圖。由是再逆求其水平跡 h，直立跡 v' 可也。

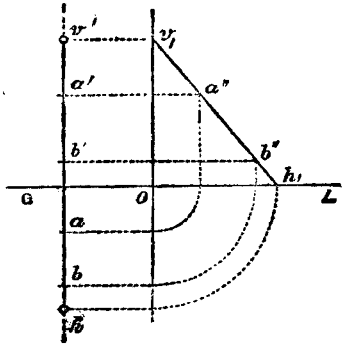


Fig. 11

6. 多面體之副投影

求多面體之副投影，與求其平面圖及立面圖之法相同，其求法可依求其各稜之副投影而得。

如 Fig. 12 所示，爲直四角柱，其底面平行於直立投影面之投影爲已知，而求其副投影之圖也。圖中 $a_1\,b_1\,c_1-d_1\,e_1\,f_1\,g_1\,h_1$ 以 $G'\,L'$ 爲副基線之副立面圖。求 $a_1, b_1,\cdots\cdots$ 之法，可由 $a, b,\cdots\cdots$ 向 $G'\,L'$ 引垂線，復由垂線之足 $m_1, n_1,\cdots\cdots$ 截取 $m_1\,a_1$, $n_1\,b_1,\cdots\cdots$ 之長，等於 A,B……之高 $a'm$, $b'm,\cdots\cdots$ 可也。又與 $G'L'$ 爲副基線之副投影面相垂直，以 $G''L''$ 爲副基線之平面而於其平面上，其副投影爲 $a_2\,b_2\,c_2\,d_2\,e_2\,f_2\,g_2\,h_2$。至求 $a_2, b_2,\cdots\cdots$ 之法，可由 $a_1, b_1,\cdots\cdots$ 向 $G''\,L''$ 引垂線，於其垂線上，由其足 $m_2, n_2\cdots\cdots$ 截取 $m_2\,a_2$, $n_2\,b_2,\cdots\cdots$ 等於 $a\,m_1$, $b\,n_1\cdots\cdots$ 可也。

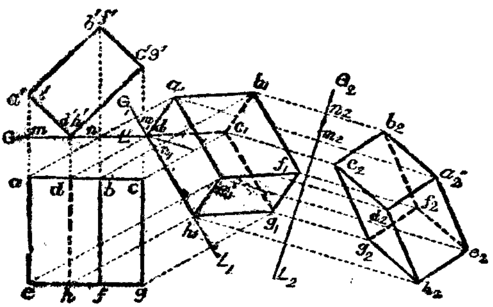


Fig. 12

作圖題2.　求垂直於立方體之一對角線之平面上，其立方體之投影。

如 Fig. 13 所示，乃立方體之一對角線平行於直立投影面，其一面置於水平投影面上，而作其平面圖 a b c d，與立面圖 a′ b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ 之圖也。其求法，先引 $G_1 L_1$ 垂直於 a′ g′，後以 $G_1 L_1$ 爲副基線，而作 $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1\ g_1\ h_1$ 是卽所求之投影也。

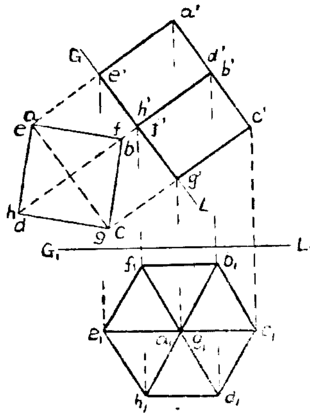


Fig. 13

作圖題3.　有一平面與正六角錐之一斜面成角 θ，求其平面上之投影。

如 Fig 14. 所示，先作其底置於水平投影面上之平面圖 v a b c d e f。次引 G L 垂直於 cd，而作其立面圖 v′ a′ b′ c′ d′ e′ f′。此時斜面 v c d, v′ c′ d′ 垂直於直立投影面，故若與 v′ c′ 成角 θ 引副基線 $G_1 L_1$，而作副平面圖 $v_1\ a_1\ b_1 c_1\ d_1\ e_1\ f_1$，則得所求之投影。

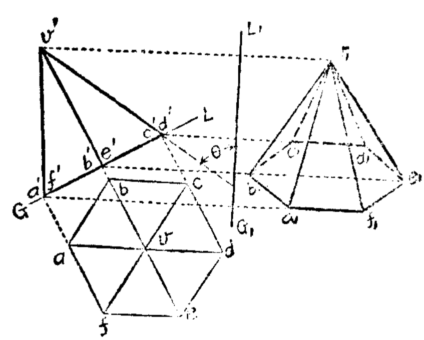


Fig. 14

作圖題4.　求平行於正八面體之一面之平面上，其正八面體之投影。

如Fig. 15 所示，置八面體之一對角線EF垂直於水平投影面，而作其平面圖 a b c d e f。次引基線垂直於 a d，而作其立面圖 a' b' c' d' e' f'。比時面ADF，因其垂直於直立投影面，故平行於 a' f' 所引之 G_1 L_1 爲副基線，而作成之副投影 a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1，是爲所求之投影。

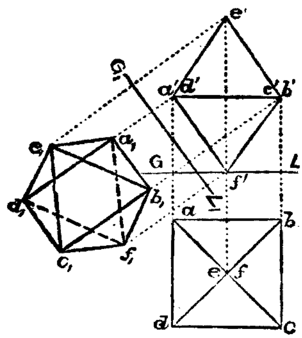


Fig. 15

練 習 題

（1）有垂直於基線之直線，其一端位於 H.P.下 2 糎，V.P.前 4 糎，他端位於 H.P.上 4 糎，V.P.後 6 糎，試求其直線之實長跡，及與投影面所成之角度。

（2）有底面一邊爲 3 糎之正五角形，高 4 糎之直角柱，今其一側面位於直立投影面上，其底與水平投影面成 45° 之傾斜，試求其投影。

（3）如 Fig. 16所示，爲寬 6 糎之階段之側面圖，今其副基線與基線成 30°，其階段之副立面圖如何？

（4）如 Fig. 17 所示，爲直角相交之正四角柱之立面圖，今副基線與基線成 25° 其副立面圖如何？

（5）如 Fig. 18 所示，乃立體之底與水平投影面成 30° 之平面圖，試求其立面圖，其後使副基線與基線成 25° 之角，再求其副立面圖。

（6）試求 Fig. 19 所示之立體之副立面圖 此時副基線與基線成 20° 之角度

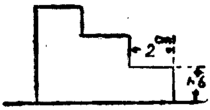


Fig. 16

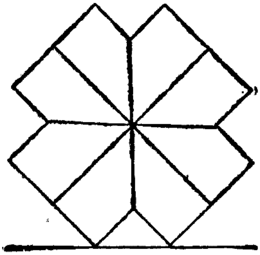


Fig. 17

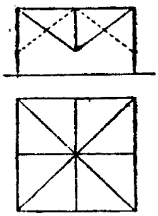


Fig. 18

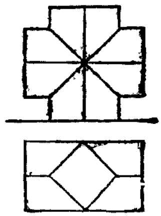


Fig. 19

(7)有底爲正五角形，每邊之長爲4糎，高爲5糎之正角錐體，今其一斜面位於水平投影面上，其軸之平面圖與其基線成30°，試求其平面圖及立面圖。

(8)有一邊長爲四糎之正八面體，其一對角線與水平投影面成60°，試求其投影。

(9)有正十二面體，其每邊之長爲3糎，其最長之對角線垂直於水平投影面，試求其投影。

(10)有正七角錐體，其底爲正七角形，底邊一邊之長爲3糎，錐體高爲7糎，試作其一斜面與水平投影面成30°之投影圖，次作副基線與基線成45°，再求其副平面圖。

(11)有底之長爲3糎，相等邊之長爲4糎之二等邊三角形 a′ v′ b′,

其 a′ b′ 與基線平行，今以此爲高 6 糎之正六角錐之一斜面之立面圖，其角錐之底爲一邊 3 糎之正角形，試求其平面圖及立面圖。

(12) 有直徑 5 糎，高 7 糎之直圓柱，其底與水平投影面平行時，其投影若何？又其副基線與基線成 35° 時，其副平面圖若何？

第二章　直　線

1. 直線之投影

直線之投影面爲平面，故直線之投影一般爲直線。因之連二點之直線之投影，爲連結二點之投影之直線，由是可知凡一直線之投影，依其上二點之投影而定。如 Fig. 20 所示，a′ b′, a b 爲連結二點 a a′, b b′ 之直線之投影。圖中，若 a b 不平行於 G L, 則 A, B. 至直立面之距離不等，故 A, B 不平行於 G L。同樣 a′ b′ 不平行於 G L, 卽示 A B 不平行於水平面，是故傾斜於兩投影面之直線，應有如此之投影。

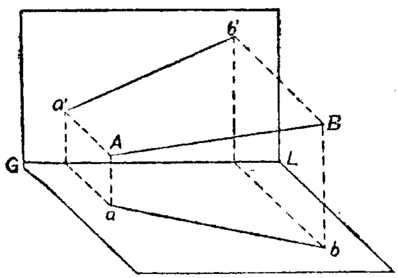


Fig. 20(a)

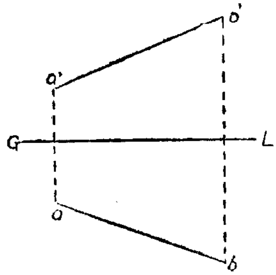


Fig. 20(b)

A B 對於水平面及直立面所成之傾角，卽爲 A B 對於 a b, a′ b′ 之角。今若以 α, β 表之，則得，

$$ab = AB\cos\alpha, \qquad a'b' = AB\cos\beta.$$

由此因知 a b, a'b' 均短於 AB。又 AB, ab 各不平行於 a'b', GL. 故 a'b' 對於 GL. 之傾角不等於 α。同樣 ab, 對於 GL 之傾角不等於 β。

當特殊之位置，其直線之投影，俱有特殊之性質。如 Fig. 21 所示，cd, c'd' 乃平行於水平面之直線投影之例也。此時直線上之二點 C, D，因距水平面爲等距離，故 c'd' 平行於 GL，其距離與 CD 至水平面之距離相等。又如前節所述，cd 若等於 CD 且爲平行，則 cd 對於 GL 之傾角等於 CD 對於直立面之傾角。

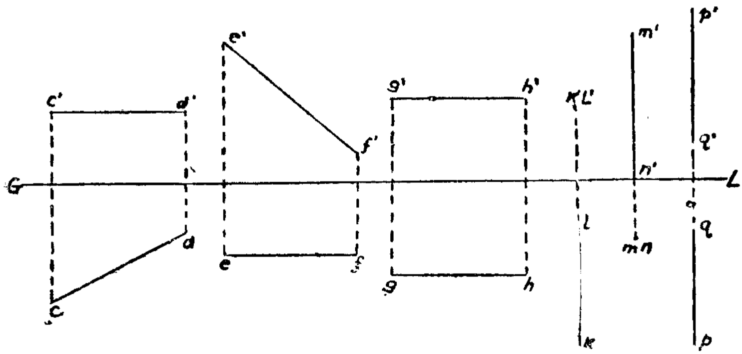


Fig. 21

ef, e'f' 爲平行於直立面之直線之投影之例也。此時 ef 平行於 GL，其距離等於 EF 至直立面之距離。又 e'f' 等於 EF 之實長，且其對於 GL 之傾角等於 EF 對於水平面之傾角。

gh, g'h' 爲平行於兩投影面之直線，即平行於基線之直線投影之例也。gh, g'h' 各等於 GH 之實長，且各平行於 GL。

kl, k'l' 爲垂直於直立面之直線之投影之例也。此時直線上之各點，其正面圖爲共有，故直線之正面圖爲一點。此點即爲已知之直線或其延長線相交於直立面之點。又 kl 等於 KL，且與 KL 平行，故 kl 垂直於 GL。

mn, m'n' 爲垂直於水平面之直線之投影之例也。mn 爲一點，m'n' 等於已知之直線，且與 GL 垂直。

pq, p'q' 乃垂直於基線之平面上之直線之投影之例也。pq, p'q' 均垂直於 GL。本投影圖中，因直線上之二點 P, Q 之投影爲既決定之投影，故知已知之線爲直線時，則由此投影，即可確定其直線之位置。

2. 線投影之定理

(1)二線交點之投影爲二線投影之交點。逆之，二線平面圖之交點與正面圖之交點在同一投射線上時，其二線將其交點於其投影之點相交。

如 Fig. 22 所示，AB 與 CD 相交於O時，則 o 之投影，在 AB 投影之上，同時亦必在 CD 投影之上。故 ab 與 cd 相交於 o, a'b' 與 c'd' 相交於 o'。反之 ab, cd 之交點 o 與 a'b' c'd' 之交點 o' 同在投射線之上時，則 o 爲平面圖之點，o' 爲正面圖之點，且其點在 AB, CD 雙方之上。故 AB, CD 相交於 o, o' 又設二線 AB, EF 之平面圖 ab, ef 相交於 q，其正面圖 a'b', e'f' 相交於 p'。若 q 與 p' 不在同一投射線上。則 q 爲平面圖之點，p' 爲正面圖之點自不能存在。故 AB, EF 爲不相交之二線。

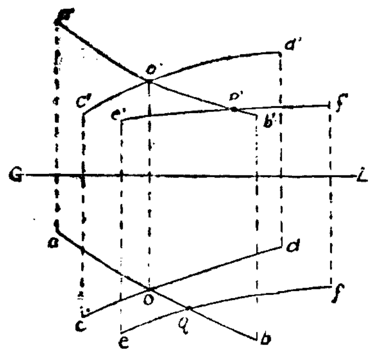


Fig. 22

(2)對於任意之投影面，互相平行之直線，之投射面亦互相平行。故平行之直線，投於任意之投影面上之投影，亦常平行。

對於某種之投影面，互相不平行之直線，有平行之投射面，故亦可得平行之投影。然不平行之直線。僅能有一組平行之平面，故此等之直線，一般在相交之二投影面之雙方上，不能有彼此平行之投影。

又互相平行之直線，對於任意之投影面，其傾斜所成之角相等，故其投影之長之比與原直線之長之比相等。若於必要時，將有限直線之長分成或比，則其點之投影，必分成直線之投影爲同樣之比。如 Fig. 23，所示。ab, a'b'. cd, c'd' 爲互相平行直線之投影，卽 ab 與 cd, a'b' 與 c'd', 彼此平行。今 AB 與 CD 相等，則 ab 與 cd, a,b' 與 c'd' 亦必彼此相等。又一直線 E F 若於G處，分 E F 爲 m:n 之比時，則 ef, e'f' 各於 g, g' 處亦必分爲 m:n 同樣之比。

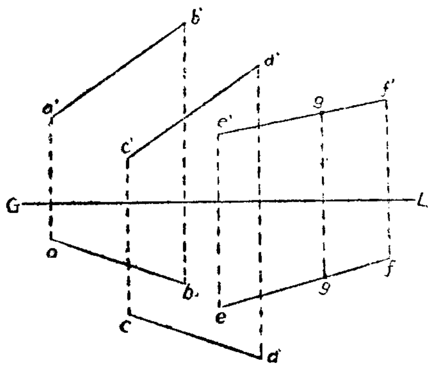


Fig. 23

(3)二直線平行於同一投影面時，其面上之投影，亦必平行於原直線。故投影間之角等於原二直線間之角。

二直線，其一線對於投影面平行，他一線不平行時，則投影間之角，必不等於原二直線間之角，唯二直線間之角爲直角時，投影間之角亦必爲直角。

如 Fig. 24 所示，P爲一投影面，A B爲平行於P之直線，C D爲垂直於A B任意之直線。今A B與CD,於P上所投之投影爲ab, cd時，則ab，平行於AB。然因 C D 垂直於AB, 故 C D 必垂直於ab。又 Cc

垂直於P,故亦垂直於ab。由此可知平面Cd垂直於ab,故平面Cd上之直線cd,亦必垂直於ab。

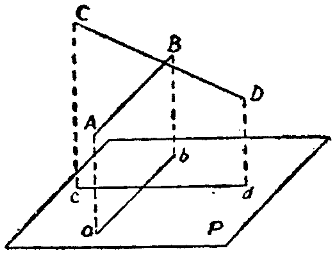


Fig. 24

二直線同傾於一投影面時,其投影間之角與原二直線間之角不等。

3. 垂直於基線之平面上之線

垂直於基線之平面上所有之線,其不符於一般定理者頗多,玆舉其數例如下:

(1)線之投影上,有投影之點爲其線上之點。如 Fig. 25 所示,AB爲垂直於基線之平面上之線,其投影上所有之投影之點 O, P, 不必爲AB上之點。今以 G′L′ 爲副基線,作AB之側面圖 a″b″。是時 O, P 之側面圖若爲 o″, p″, 則 o p 之在AB上與否,乃依 o″p″ 之在 a″b″ 上與否而定。是即 o 非AB上之點,而P爲AB上之點也,故知由AB上一點P之一投影,而求其與此對應之投影時,如僅依通過已知之投影引投射線而決定,勢所不能,必先在線之側面圖上作側面圖 p″ 不可。又若 a″b″ 爲未知,則AB爲不定,故上之問題亦屬不定。

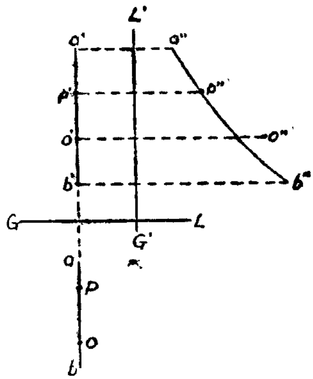


Fig. 25

(2)二線是否相交,乃依二線之平面圖之交點與其立面圖之交點是否在同一投射線上而定,如 Fig. 26 所示之AB及CD,其AB爲垂

直於基線之平面上之線時，點 O 雖明知其爲 C D 上之點，然未必爲 A B 上之點，故 AB, C D 不必相交。今欲決定二線是否相交，當視 O 之側面圖是否在 A B 之側面圖上耳。

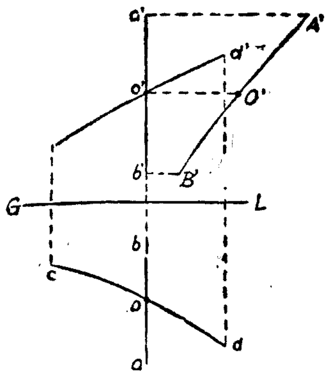


Fig. 26

本圖中之側面圖，以 a'b' 爲其副基線所作之圖也。如斯作圖，其法至簡，惟應注意者，乃符號之變化耳。

（3）二直線之平面圖與立面圖若彼此平行，則二直線必互相平行。然如二直線均在垂直於基線之平面上時，則上之定理，不必爲眞。如 Fig. 27 所示二直線 AB, C D, 雖有平行之平面圖與平行之立面圖，然於此時，因二直線各在垂直於基線之惟一之平行平面上。故僅根據此種關係，而即決定其是否平行實所不能。勢必待察其側面圖平行與否，方可判別。但於特殊條件之下，其二直線，當其共垂直於一投影面時，其彼此平行。

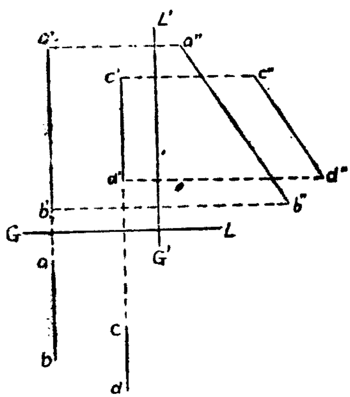


Fig. 27

4. 直線之跡

直線與平面相交之點，通稱其直線在其平面上之跡 (Trace)。投影圖中，簡稱之直線之跡者，即投影面上直線之跡之意義。其在水平面上者，謂之水平跡 (Horizontal trace)。在直立面上者，謂之直立跡

(Vertical trace)。凡一直線必有一水平跡與一直立跡。其平行於水平面之直線，無水平跡。平行於直立面之直線，無直立跡。但平行於基線之直線，其二跡均付缺如。

如 Fig. 28–31 所示，m n 爲直線A B之水平跡，m′ n′ 爲其直立跡。

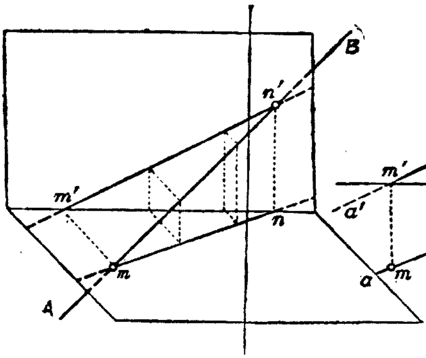


Fig. 28(a)

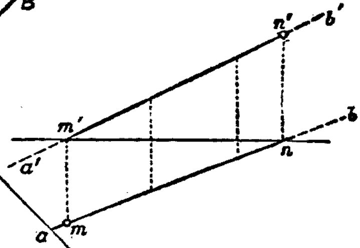


Fig. 28(b)

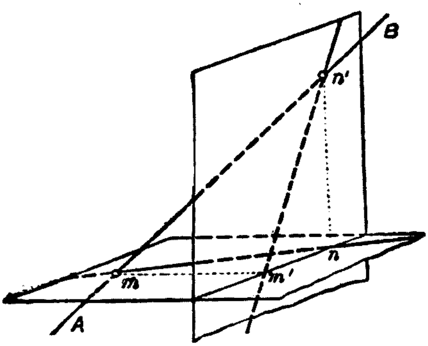


Fig. 29(a)

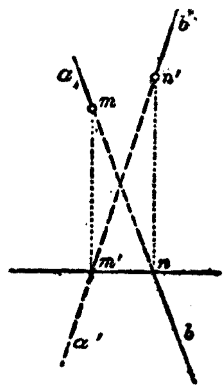


Fig. 28(b)

上述之直線之水平跡，因其爲水平投影面上之點。其直立跡，爲直立投影面上之點。故求已知直線之跡，可由其直線之立面圖與基線所交

之點引投射線,而求其與平面圖相交之點,是即其水平跡也。又由直線之平面圖與基線所交之點引投射線,而求其與立面圖相交之點,是即其直立跡也。

平行於投影面之直線,不論延長至任何程度,決不與投影面相交,故無其跡之存在。由是可知,凡直線平行於直立投影面,則無其直立跡之存在。故其平面圖,平行於基線。又凡直線平行於水平投影面,則無其水平跡之存在,故其立面圖平行於基線。

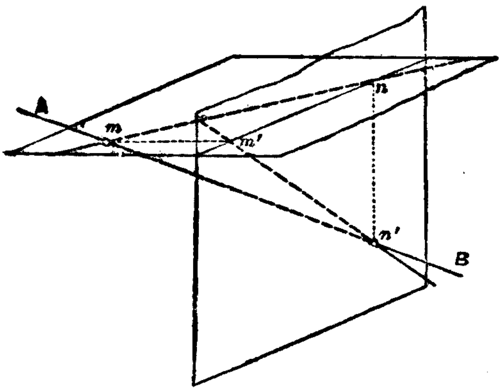


Fig. 30(a)

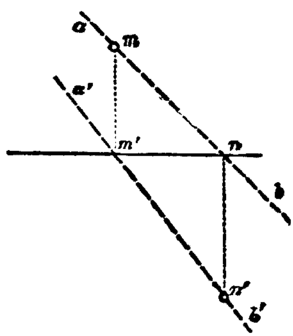


Fig. 30(b)

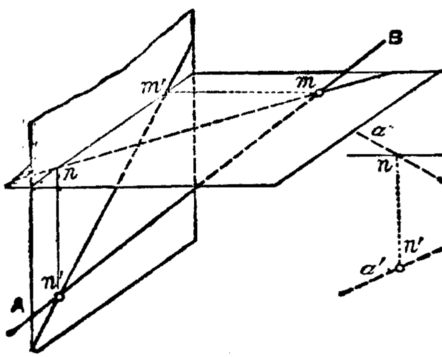


Fig. 31(a)

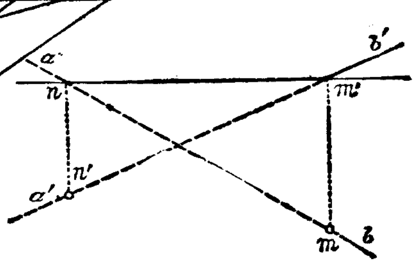


Fig. 31(b)

5. 直線與平面間之角

直線與平面間之角，即其直線與其平面上之投影間之角也。如Fig. 32所示，Ab爲直線A B投射於平面P上之投影，A B與Ab間所成之角爲A B與平面P所成之角。故凡直線平行於直立投影面，其立面圖與基線間所成之角等於其直線與水平投影面所成之實角。又凡直線平行於水平投影面，其平面圖與基線間所成之角等於其直線與直立投影面所成之實角。

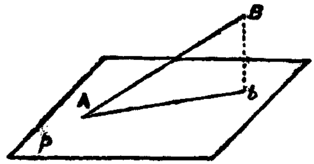


Fig. 32

作圖題1. 求已知直線之實長，及與投影面所成之實角。

解一. 將已知之直線，先使其與水平投影面所成之角不變迴轉於其直線上之一點之周，置其與直立投影面平行之位置。此時迴轉後之立面圖應等於其實長。其與基線所成之角應等於其與水平投影面所成之實角。同法，後使其與直立投影面所成之角不變，置其與水平投影面平行之位置。此時之平面圖與其實長相等。其與基線所成之角與直立投影面所成之實角相等。

作圖: 如 Fig. 33 所示，圖中 ab, a'b' 爲已知直線之投影，由 ab 之一端 b 引平行於基線之 b a_1. 使其等於 b a。此時 b a_1, 將已知之直線與 H. P. 所成之角不變迴轉於點B之周，而使其成爲平行於直立投影面之平面圖。由是由 a_1 引投射線及由 a' 引平行於基線之直線，使其相交於點 a_1 。後將 a_1' 與 b' 連結而成 b' a_1'，則 a_1' b' 爲其迴轉後之立面圖，故等於其實長。而其與基線所成之角 θ 等於其與水平投影面所成

之實角。

同法，由 a′ 引平行於基線之 $a'b_1'$，使其等於 a′b′。由 b 引平行於基線之直線及由 b_1' 引投射線，使其相交於點 b_1。此時將直線 ab_1 與 V. P. 所成之角不變，以 A B 迴轉於點 A 之周，使其為平行於水平投影面時之平面圖。因之 a b 等於其實長，而與基線所成之角 ϕ 等於其與直立投影面所成之實角。

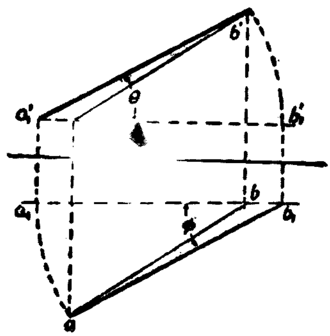


Fig. 33

解二. 將直線迴轉於其平面圖之周，使其與水平投影面一致。然迴轉後，其直線之長等於其實長。故其與平面圖所成之角等於其與水平投影面所成之實角。同法，將其迴轉於其立面圖之周，使其與直立投影面一致，而得其與直立投影面所成之實角。如 Fig. 34 所示，aa′ bb′ 與基線所交之點為 m n，由 a, b 向 a b 引垂線，於其垂線上，取 aa_1, bb_1 之長等於 a′m, b′n。此時 a_1b_1，乃以 A B 迴轉於其平面圖 a b 之周，而倒置於水平投影面之位置，故 a_1b_1 等於 A B 之實長。而 a_1b_1 與 a b 間之角 θ 等於 A B 與水平投影面所成之實角。同法，由 a′, b′ 向 a′b′ 引垂線，而於其上取 $a'a_2$, $b'b_2$ 使其等於 a m, b n。則 a_2b_2 等於 A B 之實長。而 a_2b_2 與 a′b′ 間所成之角

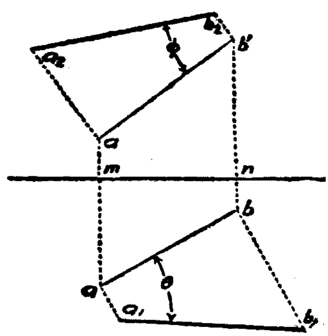


Fig. 34

等於A B與直立投影面所成之實角。

作圖題2.　已知直線之實長及其兩投影之長，求其投影圖。

解：　若知已知直線之兩端至水平投影面或直立投影面之距離之差，即可易求其投影圖。

作圖：　如 Fig. 35 所示，其基線上之 A_0 n, A_0 m. 等於其平面圖及立面圖之長。次由 m, n 向基線所引之垂線，使其與 A_0 爲中心，直線之實長爲半徑，所作之圓相交於點 B_1, B_2。則此時之 B_2 n 等於所求之直線之兩端至水平投影面之距離之差。B_1 m 等於至直立投影面之距離之差。

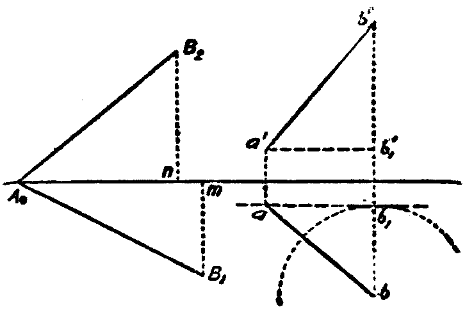


Fig. 35

次於任意之位置取 b b', 於 b b' 上，取 b b_1 等於 B_1 m。次由 b_1 引平行於基線之直線，使其與 b 爲中心，平面圖之長爲半徑所畫之圓弧相交於點 a 。此時 a b，卽爲所求之平面圖。又於 b' b 上，取 b' b_1' 等於 B_2 n, 由 b_1' 引平行於基線之直線及由 a 引投射線使其相交於點 a' 。此時 a' b' 卽爲所求之立面圖。

作圖題3.　直線之實長及其與兩投影面所成之角 θ, ϕ, 爲已知，求其投影？

解：　將已知之直線使其平行於一投影面，而求其平面圖及立面圖之長，然後將其一端迴轉至其所求之位置爲止可也。

作圖： 如 Fig. 36 所示，由基線上之任意一點 a_0 引 a_0b'，使其與水平投影面所成之角等於已知角 θ，($\angle ba_0b'$)。次取 a_0b' 之長等於其實長。後由 b' 向基線引垂線，其足爲 b，而 a_0b 即等於其平面圖之長。又引 $b'a_1$ 與直線 $b'a_0$ 成角 ϕ，後由 a_0 向 $b'a_1$ 作垂線 a_0a_1。是時 $b'a_1$ 之長等於其立面圖之長。

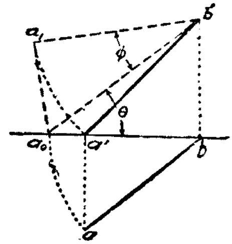


Fig. 36

由此，以 b' 爲中心，$b'a_1$ 爲半徑畫圓弧，使其與基線相交於點 a'。此時 $a'b'$ 爲所求之立面圖。又由 a' 向基線引垂線，使其與 b 爲中心，過 a_0 所作之圓弧相交於點 a。則所得之 ab，即爲所求之平面圖。

如 Fig. 37 所示，乃由已知之一點 A 而引直線之圖也。其求法，先由 a 引直線 ab_0，使其與基線成角 ϕ，而取 ab_0 之長等於其實長。次由 b_0 引投射線及由 a' 引平行於基線之直線，使其相交於點 b'_0。此時 ab_0，$a'b_0'$ 爲所求之直線廻轉於 A 之周，而與水平投影面成平行時之投影。次引 ab_1 使其與 ab_0 成角 θ，而由 b_0 向其引垂線，使其相交於點 b_1。此時 ab_1 之長等於其平面圖之長。後由 b_0 引平行於基線之直線，及以 a 爲中心，ab_1 爲半徑畫圓弧，使其相交於點 b。

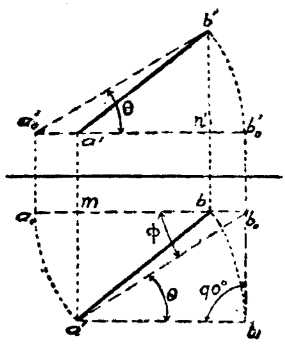


Fig. 37

則所得之 ab，即爲所求之平面圖。又由 b 引投射線及以 a 爲中心，$a'b_0'$ 爲半徑畫圓弧，使其相交於點 b'。則所得之 $a'b'$，即爲所求之立面

圖。

6. 相交之直線

如 Fig. 38(a) 所示，圖中AB，CD爲點O處相交之直線，其平面圖爲ab，cd，o，立面圖爲a′b′，c′d′，o′。然O爲AB，CD共通之點，故O之平面圖O應在ab，cd上。又立面圖o′，應在a′b′，c′d′上。是故相交二直線之投影應於其交點之投影處相交。今將其直立投影面迴轉於基線之周，使其與水平投影面重合，卽如 Fig. 38(b) 所示。而此時其平面圖之交點O與其立面圖之交點O′相結之直線，應垂直於基線。

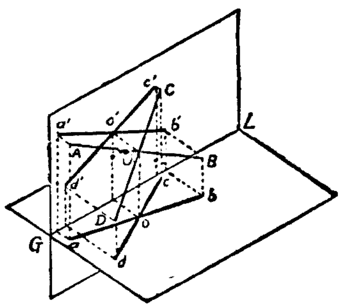


Fig. 38(a)

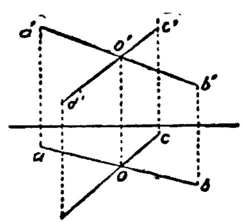


Fig. 38(b)

如上所云，吾人可知凡二直線之平面圖及立面圖，雖交於交點，然其交點所連結之直線。若與基線不相垂直者，必不交於空間。

作圖題4. 三角形ABC之投影abc，a′b′c′爲已知，求其實形。

解： 先由已知三角形之兩投影而求其各邊之實長。次以其實長作三角形，卽得其實形。

作圖： 如 Fig. 39 所示，由 b 引垂直於 a b 之 bb_1，取其長等於 a′, b′ 至基線之距離之差。此時 ab_1 應等於 A B 之實長。同法，求得他二邊之實長 b_2c, c_1a，將其實長爲邊而作三角形，則得所求之實形。

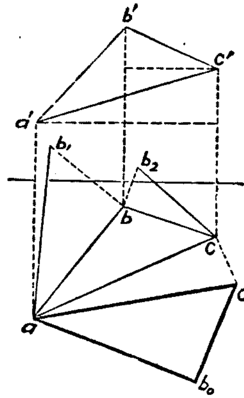


Fig. 39

作圖題5. 相交之二直線之投影 a b, a′b′, b c, b′c′ 爲已知，求其夾角及二等分其夾角之直線之投影。

解： 將已知之二直線爲二邊作三角形，求其實形，即得其實角。又將其實角作二等分，而逆求其投影可也。或將其二直線之水平跡及直立跡相結作成直線，而廻轉於其直線之周，使其倒置於水平投影面及直立投影面，亦得其實角。

作圖： 如 Fig. 40 所示，先求二直線之水平跡 a, b，次求 a b, a′b′, c d, c′d′ 之實長 ab_1, cb_2。次以 a, c 爲中心，ab_1, cb_2 爲半徑畫弧，而求弧之交點 b_0。此時 ab_0c 爲已知之二直線廻轉於 a c 之周而倒置於水平投影面時之位置。故角 ab_0c 等於其實角。

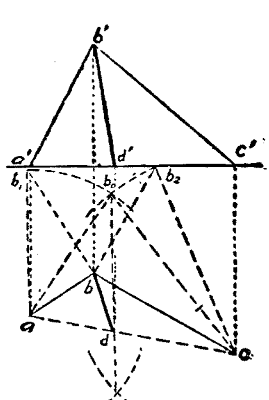


Fig. 40

次引角 ab_0c 二等分之直線，使其與 a c 相交於點 d，則 b_0d 即爲所求二等分線倒置於水平投影面時之位置。後將二直線復歸原

有之位置，則得二等分線之投影 b d, b′d′。詳言之，即 b, d 相結之直線為二等分線之平面圖，由 d 向基線所引之垂線，其垂線足 d′ 與 b′ 相結之直線，是為其立面圖也。

練習題

〔注意〕 練習題圖中長度之單位為糎。

(1)試求 Fig. 41 所示之三角形及六角形之實形。

(2)有長 5 糎之直線，與水平及直立兩投影面成 60°，20° 之角，試求其投影。

(3)如 Fig. 42 所示，圖中 a′b′，c′b′，為通過基線之立面圖，B 點位於直立投影面之前 5 糎處。試求其二直線間之實角及其與基線所成之各實角。

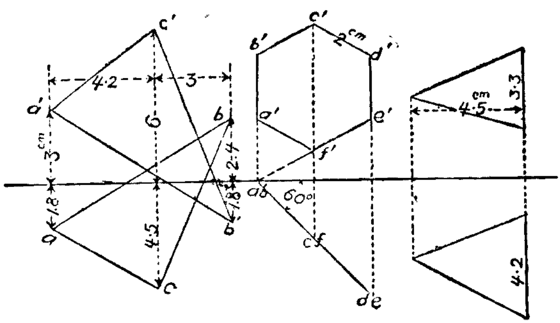


Fig. 41

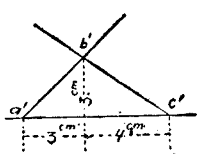


Fig. 42

(4)與水平投影面成 40° 直立投影面成 30° 之直線，其兩端 A, B 位於水平投影面之上 1 糎，5 糎處。今過 A 作與 A B 成 70° 與水平投影面成 50° 之直線。試求其投影。

(5)試求 Fig. 43 所示之已知角 A B C 之實角及二等分其角之直線跡。

(6)如 Fig. 44 所示,由一點 P,試求與直線 M N 直交之直線之投影。

(7)如 Fig. 45 所示,三角形 a b c (ac=6.5 糎, ab=5 糎) 爲一三角形之平面圖,A位於水平面上,B之位於水平面之上方較C尤高,A B之實長爲 7 糎,B C與水平面成 40°,試求此三角形之立面圖與A C之實長。

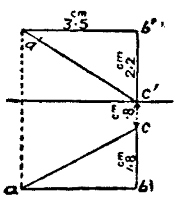


Fig. 43

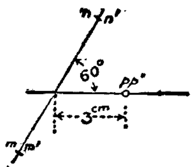


Fig. 44

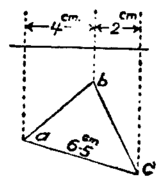


Fig. 45

(8)如 Fig. 46 所示,a b c d 爲平行於水平投影面之矩形之平面圖,今將其矩形之對角線A C爲廻轉軸,廻轉後,角A B C之平面圖成 120°,試求其兩投影,

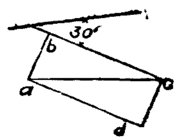


Fig. 46

(9)一邊長 3 糎之正六角形 a b c d e f 爲一六角形之平面圖。今 a b 與基線成 45°。A, B, C 三點,高於水平投影面 1 糎, 3 糎, 7 糎,試求其六角形之立面圖及實形。

(10)實長 7 糎之直線,其一端位於直立投影面前 1 糎,水平投影面上 4 糎處,他端位於直立投影面前 5 糎,水平投影面上 2 糎處,試求其

直線之投影。

(11)長6糎之直線，其一端位於水平投影面上，他端位於直立投影面上。今使其直線與水平面成30°，其平面圖與基線成45°，試作其投影。

(12)有平行於基線之二直線，一線位於H.P上1糎，V.P前3糎處，他線位於H.P.下4糎，V.P.後2糎處，試求其二直線之距離?

第三章　平　面

1. 平面之跡

二平面相交，可謂其內一平面在他一平面上之跡 (Trace)。投影圖中，單稱爲平面跡者，乃指投影面上之跡而言也。其水平面上之跡，稱爲水平跡 (Horizontal trace)。直立面上之跡，稱爲直立跡 (Vertical trace)。副投影面上之跡，則稱爲副跡 (Auxiliary trace)。

平面圖形之形狀與位置，雖可依其投影而圖示，然不具形狀之平面，則其作投影之無由，故其平面之位置，可用其跡以表之。

如 Fig. 47(a) 所示，將直立投影面迴轉於基線之周，使其與水平投影面重合，如 Fig. 47(b) 所示。此時其水平直立兩跡應相交於基線上之一點 P。

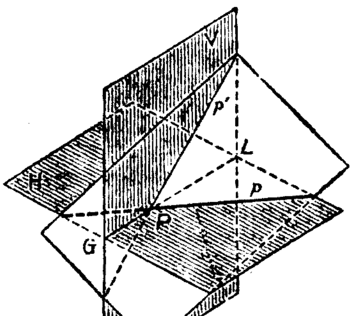


Fig. 47(a)

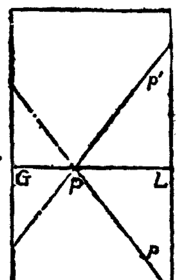


Fig. 47(b)

平面之跡與直線之投影之區別，厥爲水平直立兩跡相會之點處，記其平面所表示之文字之大寫字。於其水平跡上適宜之位置，記其小寫字。於直立跡上之適宜位置，亦記其小寫字，並於字之右肩上附以 (') 記號。故稱平面 P 可改稱爲平面 p P p'。如 p P 之

表示，即其水平跡之平圖，P p′ 乃其直立跡之平圖也。

2. 平面之跡與基線間之關係

如 Fig. 48 所示，乃平行於水平投影面之平面，因其與水平投影面不相交，故無實在之水平跡，其直立跡與基線平行。似此平面，稱爲水平面。

如 Fig. 49 所示，乃平行於直立投影面之平面，因其與直立投影面不相交，故無實在之直立跡，其水平跡與基線平行。似此平面，稱爲直立面。

如 Fig. 50 所示，爲垂直於基線之平面，其水平直立兩跡，均與基線相垂直。

如 Fig. 51 所示，爲垂直於直立投影面之平面。其水平跡垂直於基線，其直立跡與基線間所成之角等於其平面與水平面所成之實角。圖中角 θ，即其平面與水平面所成之實角也。

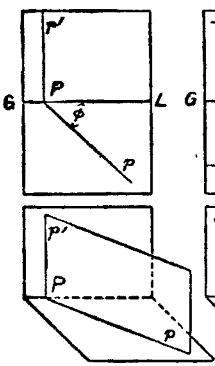


Fig. 48

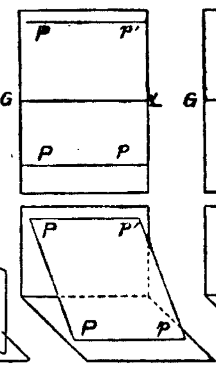


Fig. 49

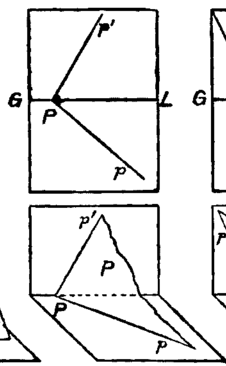


Fig. 50

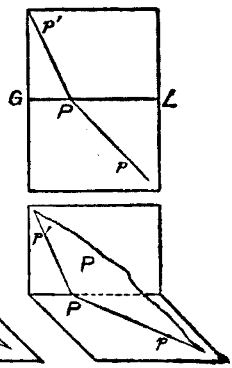


Fig. 51

如 Fig. 52 所示，爲垂直於水平投影面之平面。其直立跡垂直於

基線，其水平跡與基線間所成之角等於其平面與直立投影面所成之實角。圖中角 ϕ，卽其平面與直立投影面所成之實角也。

如 Fig. 53 所示，爲平行於基線之平面，然以其不與基線相交，故水平直立兩跡，均平行於其基線。

如 Fig. 54, Fig. 55 所示，爲傾斜於水平直立兩投影面之平面，故其兩跡亦傾斜於其基線，似此之平面，稱爲傾斜平面。

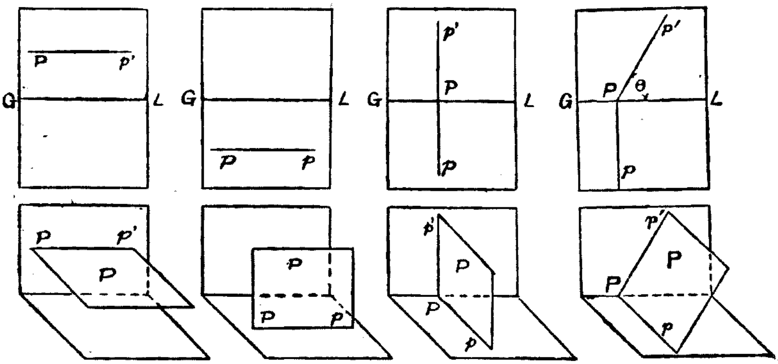


Fig. 52　　Fig. 53　　Fig. 54　　Fig. 55

含基線之平面，其水平直立兩跡以其與基線相一致，故無由表示。似此之平面，如欲知其跡，可於副投影面上求之。如 Fig. 56 所示，卽於垂直於基線之副投影面上，所求之跡 P p_1 之圖是也。

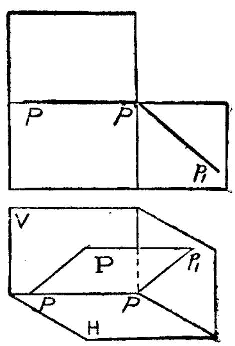


Fig. 56

3.　平面上之直線

一平面上之諸直線，其水平跡在其平面之水平跡上，其直立跡在其平面之直立跡上。故一

平面，其水平跡上之一點與其直立跡上之一點相結所成之直線，應在其平面上。如 Fig. 57 所示，圖中 a b，a' b' 爲平面 p P p' 上之直線，其水平跡 b b' 在其平面之水平跡 p P 上，其直立跡 a a' 在其平面之直立跡 P p' 上。

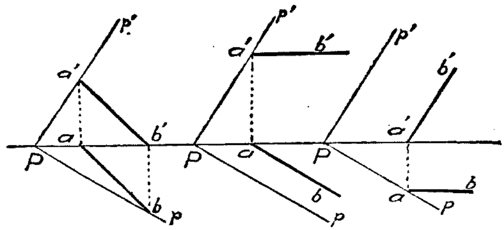


Fig. 57　Fig. 58　Fig. 59

一平面上之直線平行於一投影面時，其投影面上直線之投影與其平面之跡相平行。如 Fig. 58 所示，圖中 a b，a'b'，因其爲平面 P 上之水平之直線，故其平面圖 a b 與其水平跡 p P 相平行，其立面圖 a' b' 與基線相平行。又如 Fig. 59 所示，a b，a' b' 在平面 P 上，而爲平行於直立投影面之直線，故其立面圖 a' b' 與其直立跡 P p' 相平行。

4.　副投影面上平面之跡

如 Fig. 60 所示，t T t' 爲已知之一平面，G_1 L_1 爲垂直於水平投影面之副投影面與水平投影面之相交處，即副基線。今置 G_1 L_1 與 t T 之交點爲 T_1 則平面 T 之副投影面上之跡，必通過於 T_1。次於 G_1 L_1 上取任意之一點 b，使其爲副投影面與平面 T 之共通一點 B 之平面圖。後由 b 引平行線平行於 t T，使其與基線相交

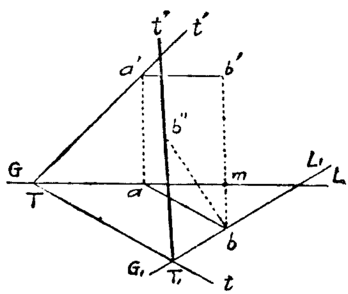


Fig. 60

於點 a。由 a 引投射線，使其與 T t′ 相交於點 a′。由 a′ 引平行線 a′ b′ 平行於基線。此時 a b，a′ b′ 通過點 B，為平面 T 上之水平直線。故知由 b 所引之投射線與 a′ b′ 相交之點 b′，即為 B 點之立面圖。依此，由 b 向 $G_1 L_1$ 引垂線，於其垂線上取 b b″，使其等於 b′ 至基線之距離(即 B 點之高) b′ m，則 b″ 為副投影面上之跡上之一點。故直線下 b″ 即為所求之跡，亦即為平面 T 之副直立跡 (Auxiliary vertical trace)。

同法，可求其垂直於直立投影面之副投影面 E 之跡，以此垂直於直立投影面之平面上之跡，謂之副水平跡。(Auxiliary horizontal trace)。

副直立跡及副水平跡，總稱之為副跡 (Auxiliary trace)。

5. 平面間之角

二平面間之角，乃垂直於其交切線之平面與二平面之交切線間之角之意義。如 Fig. 61 所示，圖中平面 H 與 P 相交之跡為直線 C E，今垂直於 C E 之平面 Q 與平面 H，P 相交之跡為 A B，F D。則二直線 A B，F D 間之角，即為平面 H，P 間之角。

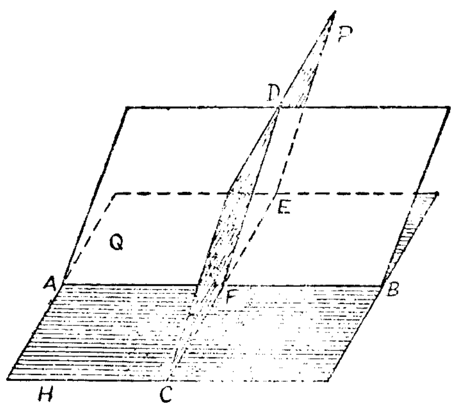


Fig. 61

6. 平面與投影面間之角

如 Fig. 62 所示，t T t′ 為任意之平面，由基線上之任意一點 P 向水平跡 t T 引垂線 P M，使其與 t T 相交於點 M。又於直立投影面

上，向基線引垂線ＰＮ，使其與Ｔt′相交於點Ｎ。此時，三角形ＭＰＮ爲直角三角形且垂直於平面Ｔ之水平跡ｔＴ。是故角ＮＭＰ等於平面Ｔ與其水平投影面所成之實角，卽角θ。

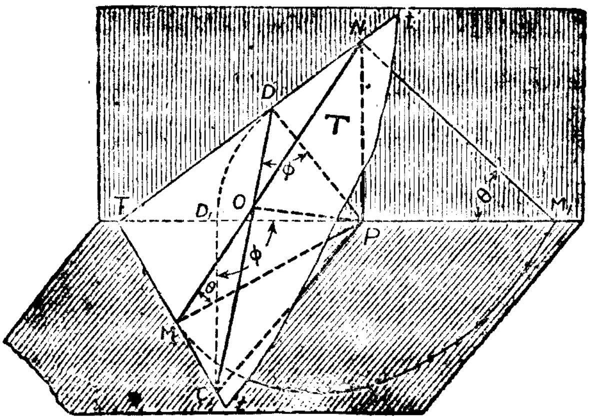


Fig. 62

同法，由Ｐ向直立跡Ｔt′引垂線ＰＤ，使其與Ｔt′相交於點Ｄ。又於水平投影面上，向基線引垂線ＰＣ，使其與ｔＴ相交於點Ｃ。此時三角形ＣＰＤ，爲直角三角形，且垂直於平面Ｔ之直立跡Ｔt′。是故角ＣＤＰ等於平面Ｔ與其直立投影面所成之實角，卽角ϕ。

ＭＮ，ＣＤ，爲平面Ｔ上之直線，然以其不平行，故必交於一點Ｏ。此時直線ＰＯ爲垂直於平面Ｔ之二直角三角形ＭＰＮ，ＣＰＤ之相交跡。今其跡既垂直於平面Ｔ，則其垂直於ＭＮ，ＣＤ自不待言矣。由是可知角ＮＰＯ必等於θ，角ＣＰＯ必等於ϕ。如此關係，乃平面與水平直立兩投影面所成之角爲已知，而求其跡之重要關係也。

次於含三角形ＭＰＮ，ＣＰＤ之平面內，各以Ｐ爲中心，ＰＯ爲半徑作圓，則二圓切ＭＮ，ＣＤ於點Ｏ。次將上記之二直角三角形，中ＮＰ，ＣＰ爲軸，廻轉一週作成圓錐。又Ｐ爲中心之二圓，應爲Ｐ爲中心之

二球。然二球，因其中心共有，半徑相等，故二球完全一致，且各內切於上述之二圓錐。此時NP為軸之圓錐，其底位於水平投影面上，切於平面T之水平跡tT，其底角等於θ。又CP為軸之圓錐，其底位於直立投影面上，切於平面T之直立跡Tt′，其底角等於ϕ。圖中，P為中心，過M所作之圓弧MM_1，乃屬於NP為軸之圓錐之底之一部分，今使其與基線相交於點M_1，則角NM_1P必等於θ。又P為中心，過D所作之圓弧DD_1，乃屬於CP為軸之圓錐之底之一部分，今使其與基線相交於點D_1，則角CD_1P必等於ϕ。上述之關係，乃平面與投影面所成之角為已知，而求其跡之重要關係，亦為求已知平面之跡與投影面所成之角之重要關係也。

7. 平行平面之跡

平行平面，無論延至若何長度，必不相交，因之其跡亦不相交。故平水平面之水平跡，直立跡，副跡，均平行。

作圖題1. 已知平面pPp′，而求其與投影面所成之角。

解： 應用第六節後段之關係，可易求其與投影面所成之角。

作圖： 如Fig. 63所示，由基線上之一點O引垂線於基線，使其與水平直立兩跡相交於點n, m′。次以o為中心，切於水平直立兩跡作圓弧，使其與基線之交點為k_1，l_1。此時角$m'k_1o$，nl_1o等於其與水平投影面．直立投影面所成之角。

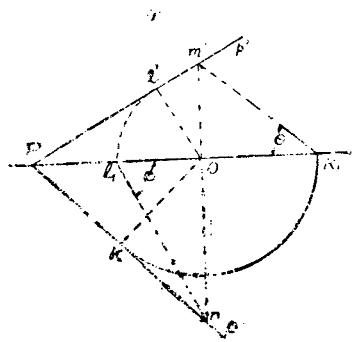


Fig. 63

如 Fig. 64 所示，圖中爲平面P平行於基線時。其平面與水平直立兩投影面所成之角之和等於直角。是故垂直於基線之副投影面上之副跡與基線，副基線所成之角θ,ϕ，等於其平面與水平投影面，直立投影面所成之角。

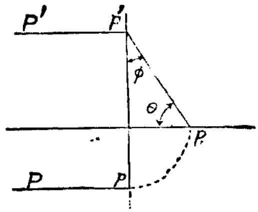


Fig. 64

作圖題2. 平面與一投影面所成之角，及其一跡爲已知，求其他之跡。

解: 亦可應用第六節後段之關係求之。

作圖: 如 Fig. 65 所示，圖中，平面與水平投影面所成之角θ及其水平跡 p P 爲已知，而求其直立跡 P p' 之圖也。求法，先由基線上之任意一點 m，向 p P 引垂線，其足爲n，次於基線上取 m n_1 等於 m n。再由 n_1 引與基線成角θ之直線，及由m向基線引垂線，使其相交於點 m'。此時 m' 與P相結之直線，卽爲所求之直立跡。

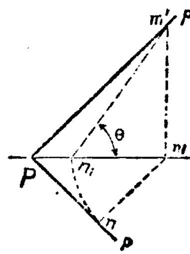


Fig. 65

如 Fig. 66 所示，爲直立跡 P p' 與直立投影面所成之角ϕ爲已知，而求其水平跡 p P 之圖也。其作圖與前圖同，故說明從略。

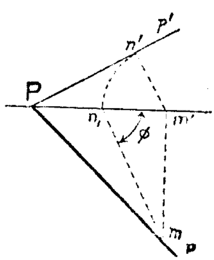


Fig. 66

作圖題3. 平面與水平直立兩投影面所成之角θ, ϕ爲已知，求其跡。

解: 應用第六節前段之關係求之可也。

作圖: 如 Fig. 67 所示，由基線上之任意一點 o 向基線引垂線

ob'，於 ob' 上取一點 b'，由點 b' 引與基線成角 θ 之一直線，使其與基線相交於點 a 次由 σ 引垂線垂直於直線 ab'，其足爲 γ，又由 o 引與 $\sigma\gamma$ 成角 ϕ 之直線，使其與 ab' 相交於點 C_1，更將 $b'o$ 延長至 C，於其延長線上，取 oc 等於 oc_1。此時由 c 向 o 爲中心，oa 爲半徑之圓弧所引之切線 pP. 卽爲所求之水平跡。又引與 $o\gamma$ 成角 $(90°-\phi)$ 之直線，

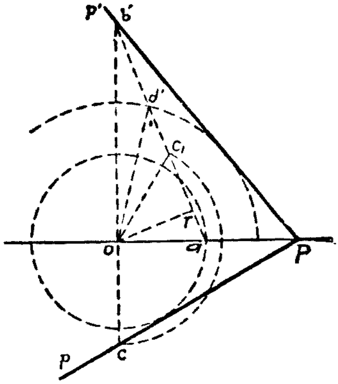


Fig. 67

使其與 ab' 相交於 d'，由 b' 向 o 爲中心，過 d' 之圓弧引切線 Pp' 則 Pp' 卽爲所求之直立跡。

作圖題4.　求已知平面兩跡間之實角。

解：　將已知之平面廻轉於其水平跡，直立跡之周，而使其倒於水平投影面上及直立投影面上，其時兩跡間之角，等於其實角。

作圖：　如 Fig. 68 所示，pPp' 爲已知之平面，先於其直立跡上取任意之一點 a, a'。其後由 a 向水平跡 pP 引垂線，使其與 P 爲中心，過 a' 所作之圓弧相交於點 a_1。此時 a_1 爲直立跡上之點 a' 廻轉於其水平跡之周，而倒於水平投影面上時之位

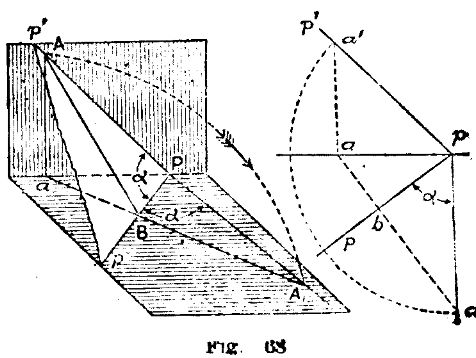


Fig. 68

置，故直線 P a_1 爲其直立跡倒於水平投影面時之位置，而角 p P p′ 卽爲所求之實角。

作圖題5.　平面兩跡間之角與其一跡爲已知，求其他一跡。

解：　先將平面廻轉於其跡之周，而求其倒於投影面上時之位置，後將其平面復返原有之位置，再求其他一跡可也。

作圖：如 Fig. 69 所示。圖中水平面 p P 爲已知，而求其直立跡 P p′ 之圖也。求法，先引與 p P 成角 θ 之 P m_1，由其上任意之一點 m_1 向 p P 引垂線，使其與基線相交於 m。次由 m 引垂線垂直於基線，使其與 P 爲中心過 m_1 所作之圓弧相交於 m′。此時 P 與 m′ 所連結之直線，卽爲所求之直立跡。

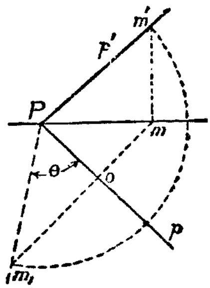


Fig. 69

Fig. 70 中，其直立跡 P p′ 爲已知，而求其水平跡 P p 之圖也。其作圖之說明與 Fig. 69 同，故略。

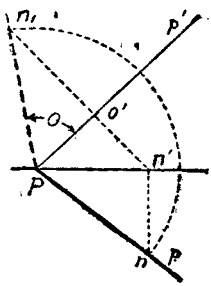


Fig. 70

作圖題6.　求已知二平面之交切線之投影。

解：　二平面之相交處，因其成一直線，故求其共通之二點連結而成直線可也。或求二平面相交之方向，由二平面共通之一點，向其方向引平行線亦可。

作圖1.　如 Fig. 71 所示，p P p′，q Q q′ 爲已知之二平面，其平面跡於紙面內相交，今置其水平跡，直立跡之交點爲 b，a′。此時二平面

有共通之二點，故二點連結之直線，即為所求之交切線。b 若為水平跡之交點，則其立面圖 b′ 應在基線上。又 a′ 若為直立跡之交點，則其平面圖 a 亦應在基線上。是故直線 a b, a′ b′ 即為所求之交切線之平面圖及立面圖也。

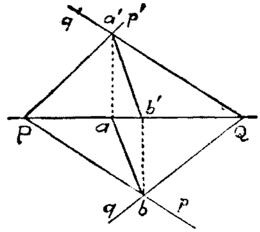


Fig. 71

作圖2. 如 Fig. 72 所示，p P p′, q Q q′ 為已知之二平面，其水平跡彼此平行。此時因其水平跡彼此不能相交，故其交切線亦不與水平投影面相交，即平行於水平投影面。然其直立跡相交，今置其交點為 a′，故由 a′ 可求其平面圖 a。此時由 a 引平行於 p P 之 a b，即為所求之交切線之平面圖，由 a′ 引平行於基線之 a′ b′，即為其立面圖也。

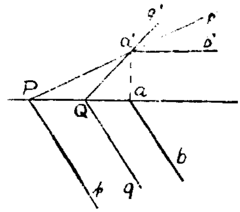


Fig. 72

作圖3. 如 Fig. 73 所示，p P p′, q Q q′ 為已知之二平面，其基線上之一點 P 為共有之點。此時水平直立兩跡之交點，雖於基線上之一點 P 相一致。然欲由兩跡之交點所結之直線而求其交切線，事所不能，勢必另設與此二平面相交之任意之第三平面 r R r′，而求其與 p P p′ 相交於 (12, 1′2′)，與 q Q q′ 相交於 (34, 3′ 4′) 不可。此時二直線 (12, 1′ 2′)，(34, 3′4′) 之交點 a, a′，為 P, Q 二平面共通之一點。故 P a, P a′ 即為所求之交切線，其平面圖及立面圖也。

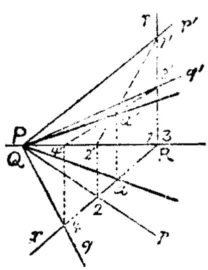


Fig. 73

作圖4.　如 Fig. 74 所示，爲已知之二平面 p P p′, q Q q′ 平行於基線之圖也。圖中因二平面平行於基線，故其交切線亦平行於基線。作此圖時，亦須設第三平面，使其與 p P p′ 相交於 (12′, 1′2′)，與 q Q q′ 相交於 (34, 3′4′)。此時二直線(12, 1′2′)，(34, 3′4′) 之交點 a, a′，乃因其爲已知之二平面共通之點，故由此所引之平行於基線之直線 a b, a′ b′，即爲所求之交切線。

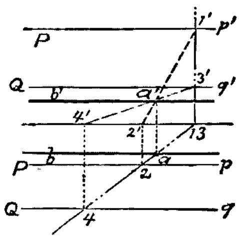


Fig. 74

作圖5.　如 Fig. 75 所示，圖中已知之二平面 p P p′, q Q q′，其直立跡，相交於紙面內，其水平跡爲不相交之圖也。作圖時，亦應設平行於平面 q Q q′ 之任意平面 r R r′，而求其與平面 p P p′ 之相交 m n, m′ n′。此時平面 P, Q 之相交跡，因平行於 m n, m′ n′，故由直立跡之交點 a, a′ 若引平行於此之平行線 a b, a′ b′，則 a b, a′ b′ 即爲所求之交切線也。

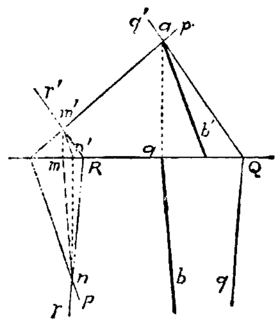


Fig. 75

作圖6.　如Fig. 76 所示，圖中已知之二平面 p P p′, q Q q′，其兩跡近平行於基線，而於有限之紙面內，其跡不能相交之圖也。作此圖時，亦應設第三平面 r R r′,

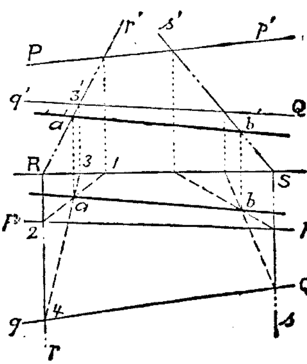


Fig. 76

使其與平面 p P p′ 相交於 (12, 1′2′),與平面 q Q q′ 相交於(34, 3′4′)。此時二直線 (12, 1′2′),(34, 3′4′) 之交點 a, a′. 即為所求之交切線上之一點。同法,再設其他之任意平面 s S s′,而求其與二平面共通之點 b, b′。是時點 (a, a′), (b, b′) 連結所成之直線ab, a′ b′,即為所求之交切線也。

8. 點直線與平面

作圖題7. 求含已知三點 M, N, P 之平面之跡。

解: 於含已知之三點之平面上任意引二直線,其水平跡與直立跡所引之直線,即為所求之平面之跡。

作圖: 如 Fig. 77 所示,先連結二點 M, N, 將其上之一點 O 與 P 相結。此時直線 M N, O P 因為含三點之平面上之二直線,故其水平跡相結之直線 a d, 直立跡相結之直線 b′ c′ 是為所求之跡。

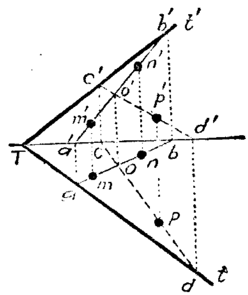


Fig. 77

作圖題8. 一平面之一跡,與其平面上一點之投影為已知,求其他之跡。

解: 引直線於已知之平面上,求得其直立跡或水平跡,則可得其平面之跡。

作圖1. 如 Fig. 78 所示,乃平面之直立跡 T t′, 與平面上之一點 p, p′ 為

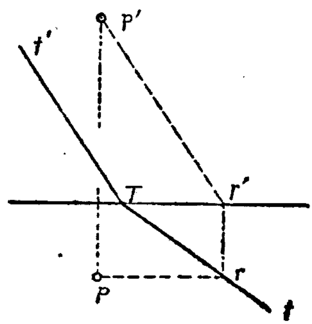


Fig. 78

已知，而求其水平跡 T t 之圖也。其求法，先由 p′ 作平行線 p′ r′ 平行於 T t′，由 p 作平行線 p r 平行於基線。此時直線 p r, p′ r′ 在平面 T 上，而爲平行於直立投影面之直線。後求 p r, p′ r′ 之水平跡 r，再將 r 與 T 相結。即得所求之水平跡。

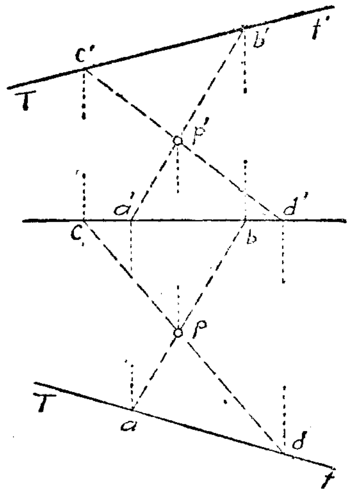


Fig. 79

作圖8.　如 Fig. 79 所示，乃由已知水平跡 t T 而求其直立跡之圖也。圖中，其水平跡 t T 與基線幾近平行，故作圖之法，與前圖相殊。其法，可將水平跡之任意二點 (a, a′)，(d, d′) 與 p, p′ 相結，而求其直立跡 (b,b′)，(c, c′)。此時直線 b′ c′，即爲所求之直立跡也。

作圖題9.　已知之平面 T 上之一點 P 之平面圖 p 爲已知，求其立面圖 p′。

解：　通過平面上之點 P 任意引直線，則 P 之立面圖，當在其立面圖上。

作圖：　如 Fig. 80 所示，先過 p 引任意之直線，使其與 t T 及基線之交點爲 a 及 b。次由 a，b 引投射線，使其與基線及 T t′ 之交點爲 a′b′。

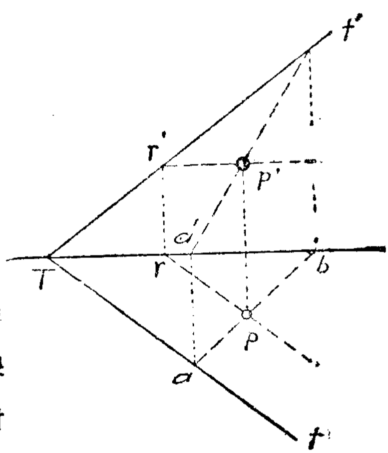


Fig. 80

此時直線 a′ b′ 因其爲過點 P 之一直線之立面圖，故其與由 p 所引之投射線相交之點 p′，卽爲所求之立面圖。

如過點 P 引水平直線 p r, p′ r′ 而代直線 a b－a′ b′ 亦可。

作圖題10. 有含已知之一點，而平行於他之已知平面之平面，求其跡。

解： 由點 M，引平行線平行於平面 P，而求其跡。後由其各跡引平行線，平行於其對應之平面 P 之跡可也。

作圖1. 如 Fig. 81 所示，圖中已知之點爲 M，平面爲 P，由 m, m′ 向 p P 及基線引平行線 m n, m′ n′，則直線 m n, m′ n′ 爲平行於平面 P 之水平直線。故由其直立跡 n′ 引平行於 P p′ 之 T t′，爲所求之平面之直立跡。又由 T t′ 與基線之交點 T，平行於 p P 所引之 T t，卽爲其水平跡也。

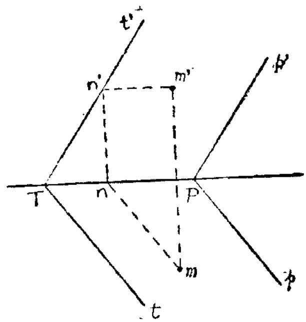


Fig. 81

作圖2. 如 Fig. 82 所示，平面之跡，幾近平行於基線時，可先於已知之平面 S 上，任意引傾斜於兩投影面之直線 a b, a′ b′。次由已知之點 p, p′，向 a b, a′ b′ 引平行線 m n－m′ n′。此時由其跡 m, n′ 向 S s, S s′ 所引之平行線 T t, T t′，卽爲所求之平面之跡。

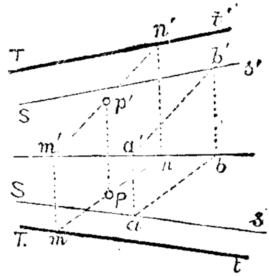


Fig. 82

作圖題11. 平面 T 上，多角形之平面

圖 a b c d e 爲已知,求其立面圖。

本作圖題乃本章作圖題 2 之應用。

如 Fig. 83 所示,先於平面 T 上,引過多角形之各角點之水平直線而求其各角點之立面圖 a′, b′, c′, d′, e′。後將其連結而成多角形 a′ b′ c′ d′ e′,卽爲所求之立面圖也。

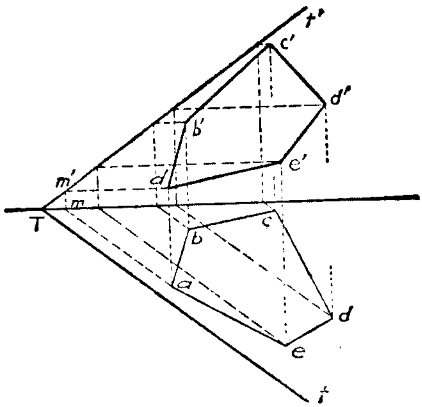


Fig. 83

作圖題12. 於平面 T 上作一正五角形,置其一邊與水平面平行,求其兩投影。

解: 將平面 T 迴轉於其水平跡之周,使其與水平投影面相一致時,則已知之五角形之平面圖與其實形相等。依此將平面置於倒置之位置,而作五角形,後將其復歸原有之位置,再求其兩投影可也。

作圖: Fig. 84 之求法,與本章作圖題 5 同,其法,先將平面之直立跡 Tt′ 倒於水平投影面之位置爲 Tt_1。後置其一邊平行於 Tt,而作正五角形 $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1$。此正五角形,以 T t 爲軸,倒於水平投影面上之位置,卽可得所求之五角形。

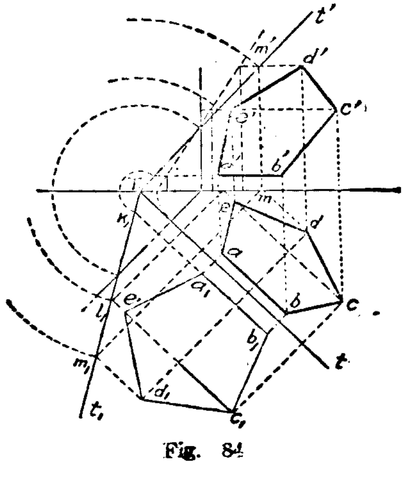


Fig. 84

先由 d_1 引平行線 $d_1\ m_1$ 平行於 T t，使其與 T t_1 相交於點 m_1。次於 T t′ 上，取 **T** m′ 之長等於 T m_1，由 m′ 向基線引垂線，而求其足 m。此時由 m，m′ 所引之平行於 T t 及基線之直線 m d 及 m′ d′，因其爲過五角形之一角點 D 之水平直線，故由 d_1 向 T t 所作之垂線，而與 m d 相交之點 d 爲角點 D 之平面圖。因知由 d 所引之投射線，而與 m′ d′ 相交之點 d′，卽爲其立面圖也。同法，求得其他角點之投影後，則可作五角形之投影 a b c d e，a′ b′ c′ d′ e′。

作圖題13. 正六角形 A B C D E F 之一邊 A B，位於直立投影面上，與水平投影面成角 θ，其隣邊 A F 位於水平投影面上，求此六角形之投影。

解： 將六角形，依 A B 之周廻轉，作倒於直立投影面上時之圖。後使其復其原有之位置求之可也。

作圖： 如 Fig. 85 所示，由基線上之一點 a′，引與基線成角 θ 之 a′ t′，於 a′ t′ 上，取 a′ b′ 之長等於正六角形一邊之長。次因正六角形之一內角爲 120°，故引與 a′ b′ 成 120° 之 a′ t_1，後於 a′ t_1 上，取 a′ f_1 等於 a′ b′。此時有二邊 a′ b′，a′

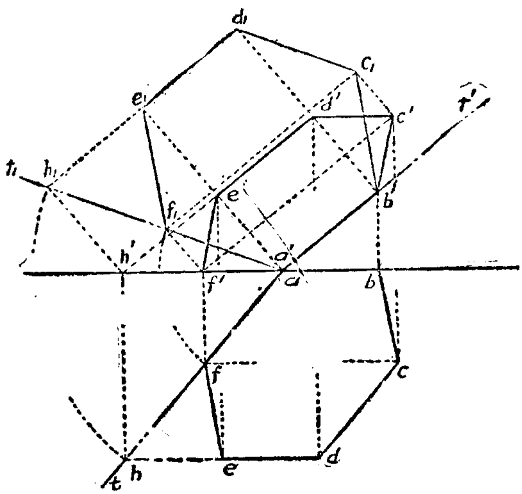


Fig. 85

f_1 之正六角形 $a' b' c_1 d_1 e_1 f_1$，爲所求之六角形倒於直立投影面時之圖也。而 $a' f_1$ 乃含六角形之平面之水平跡，倒於直立投影面時之位置。後使其復歸原有之位置，卽可求其平面圖 a b c d e f，立面圖 a′ b′ c′ d′ e′ f′。

作圖題14.　平行線之投影 (a b, a′ b′)，(c d, c′ d′) 爲已知，求其間之距離。

解：　將二直線若廻轉於其水平投影面或直立投影面上，則於其位置，而得其實距離。

作圖：　如 Fig. 86 所示，求得二直線之水平跡 a, c 後，連結 a c。此時直線 a c，爲含二直線之平面之水平跡。次於 a b, a′ b′上，取任意之一點 b, b′，由 b 向 a c 引垂線，其足爲n，於其延長線上取 $n b_1$，使其等於 b n 爲底 B 點之高爲高所作之直角三角形之斜邊之長。此時連結 a b_1 之直線，爲 A B 以 a c 爲軸，倒於水平投影面上之位置。後由 C 所引之平行於 a b_1 之 c d_1，爲 C D 倒於水平投影面之位置。依此可知 a b_1，c d_1 間之距離 l，卽爲所求之實距離。

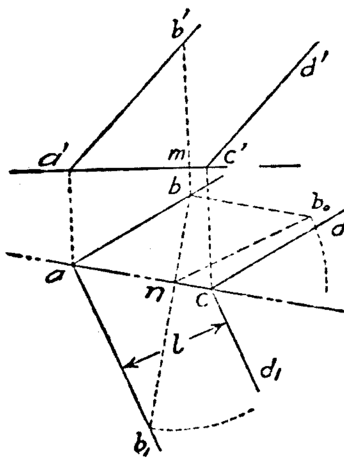


Fig. 83

作圖題15.　於同一平面上，由已知之一點 P 求引與二直線 A B，C D 相交之直線。

解： 先求含點P與AB，或CD之平面，次求其平面與CD，或AB之交點。此時其交點與P所連結之直線，即為所求之直線。

作圖： 如 Fig. 87 所示，將 a b, a′ b′ 上之任意二點 (m, m′), (n, n′) 與 p, p′ 相結，由 p m, p n 與 c d 之交點 1, 2 引投射線，使其與 p′ m′, p′ n′ 之交點為 1′, 2′。此時直線 12, 1′ 2′, 吾人可知其為含 p, p′ 及 a b, a′ b′ 之平面，與含 c d, c′ d′ 之直立面之交切線。是故 1 2, 1′ 2′ 與 c d, c′ d′ 之交點 o, o′ 與 p, p′ 相結之直線，即為所求之直線。

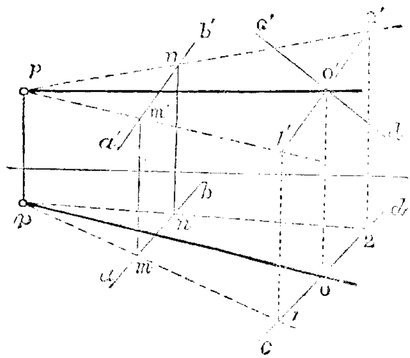


Fig. 87

作圖題16. 一直線AB之投影 a b, a′ b′ 及垂直於此之直線BC之立面圖為已知，求BC之平面圖。

解： 作平行於AB，且垂直於直立投影面之平面，於其平面上之AB, CD之副投影，應互相垂直。依此，可由副投影而知BC上之一點C至直立投影面之距離。故能求其平面圖。

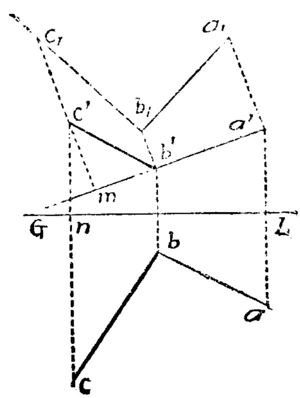


Fig. 88

作圖： 如 Fig. 88 所示，以 a′ b′ 為新基線，而求AB之副平面圖 $a_1 b_1$。此時垂直於 $a_1 b_1$ 之 $b_1 c_1$，為BC之副平面圖，

由 c_1 至 $a'b'$ 之距離 C_1m，等於點C至直立投影面之距離。是故由 C' 所引之投射線，使其與基線GL相交於點n，於其延長上，取nc等於 C_1m，則c爲點C之平面圖。故b，c相結之直線，卽爲所求之平面圖。

作圖題17. 求含已知之點P且垂直於他已知之直線MN之平面之跡。

解： 垂直於MN平面之跡，因其均垂直於MN之投影，故引垂直於MN之任意平面S。其後通過點P。平行於平面S上之任意直線引直線PR。此時由PR之水平直立兩跡，向平面S之兩跡所引平行之直線，卽爲所求之平面之跡。

作圖： 由P向垂直於MN之平面S所引之平行線，使其與水平投影面或直立投影面平行，則平面S，自無作圖之必要。如Fig. 89所示，作pr垂直於mn，及 $p'r'$ 平行於基線，是時直線pr，$p'r'$ 爲所求之平面上之水平直線。故由其直立跡 r' 所引之垂直於 $m'n'$ 之 $t'T$，卽爲所求之平面之直立跡。後由基線之交點T所引之垂直於mn之Tt，卽其水平跡也。

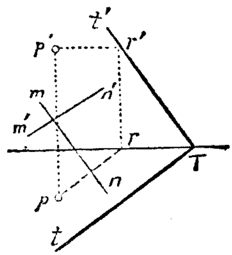


Fig. 89

作圖題18. 於已知之平面T上，求與他已知之二點A，B距離之和爲最小之點。

解： 由B向平面T引垂線，而求其足R。次於其延長線上取 RB_1 等於RB。此時直線 AB_1 與平面T相交之點C，卽爲所求之點。

作圖： 如Fig. 90所示，由b，b' 各向tT，Tt' 所引之垂線br，$b'r$，卽爲B向平面T所引之垂線之投影。次求此垂線之直立面 sSs'

與平面 tTt' 之交切線之立面圖 $1'2'$，則 $1'2'$ 與 $b'r'$ 之交點 r'，爲B向平面T所引之垂線，其足之立面圖。是故由 r' 所引之投射線與 rb 相交之點 r，爲其垂線足之平面圖。次於 br，$b'r'$ 之延長線上，取 rb_1，$r'b_1'$ 等於 rb，$r'b'$ 引直線 ab_1，$a'b_1'$，而求其與平面T之交點 C，C′ 可也。

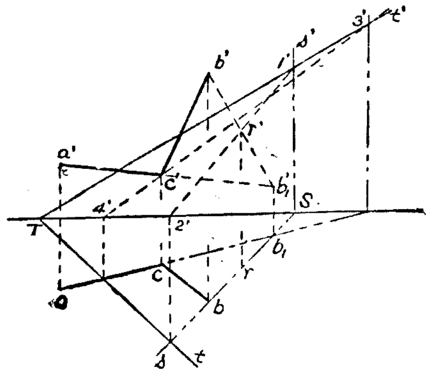


Fig. 90

作圖題19. 求過已知之點P.與他已知之直線MN相交爲角 θ 之直線。

解：將含P與MN之平面，使其倒置於水平投影面及直立投影面之位置，後由P引與MN成角 θ 之直線，再將其平面復歸原有之位置求之可也。

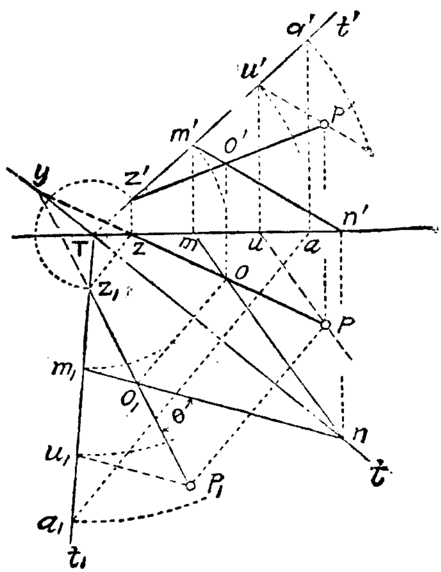


Fig. 91

作圖：如Fig. 91所示，由 p，p' 引平行線 pn，$p'n'$ 平行於直線 mn，$m'n'$。次將其二直線之直立跡 m'，n' 相結，而作直線 Tt'。此時 Tt' 因其含P與MN之平面之直立跡，

故與T及MN之水平跡n所結之直線Tt，即其水平跡也。次將平面tTt′迴轉於其水平跡之周，使其與水平投影面相一致時，而求直立跡Tt′之位置Tt_1，及MN，P之位置m_1n，p_1。此時由p_1與m_1n成角θ之直線p_1o_1，因其為所求之直線而倒於水平投影面之位置。故將其復歸原有之位置，即可求得其平面圖po，立面圖p′o′

作圖題20． 求含已知之點A，而垂直於他已知之二平面P，Q之平面之跡。

解： 先求P，Q二平面之相交跡，復求含點A而垂直於二平面相交跡之平面可也。

作圖： 如Fig. 92所示，圖中mn，m′n′，為平面pPp′，qQq′之相交跡。然平面rRr′為垂直於mn m′n′含a，a′之平面。即平面rRr′為所求之平面。

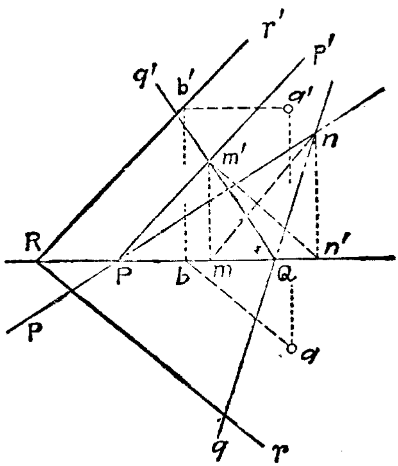


Fig. 92

作圖題21． 於已知之平面Q上，求與他已知之平面P平行，且與平面P有l之距離之直線。

解： 平行於平面P相距為l之距離之平面，而求其與平面Q相交可也。

作圖： 如Fig. 93所示，圖中，先引垂直於平面pPp′之水平跡之平面tTt′，而求其與平面pPp之相交跡。次將其相交跡迴轉於其直立跡Tt′之周，使其倒於直立投影

面上。然後與其相隔爲 l 之距離，引平行之直線，使其與基線相交，過其交點以 T 爲中心作圓。此時通過此圓與 t T 之交點所引之平行於 p P 之 $r_1 R_1$, $r_2 R_2$, 爲距平面 P 有 l 之距離，之平面之水平跡。而由 R_1, R_2 平行於 P p′ 所引之 R_1 r_1', R_2 r'_2, 爲其直立跡。故知平面 r_1 R_1 r_1', $r_2 R_2 r_2'$ 與 q Q q′ 之交切線 (a_1 b_1, a_1' b_1'), (a_2 b_2, a_2' b_2') 是爲所求之直線。

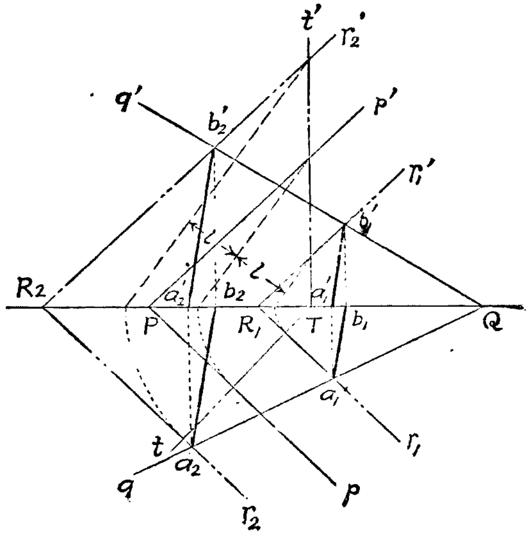


Fig. 93

作圖題22. 求通過已知之平面 T 上之一點 P，而於此平面內作與水平面成角 θ 之直線。

解： 通過點 P 引任意之直線，使其與水平面成角 θ，而求其直線之水平跡 m, m′。此時所求之水平跡，距 P 之平面圖 p 爲 p m 之距離。是故 p 爲中心，p m 爲半徑所畫之圓，與平面 T 之水平跡相交之點，卽爲所求之直線之水平跡。後依此求其直線之投影可也。

作圖： 如 Fig. 94 所示，先由 p 與水平面成角 θ，引平行於直立投影面之直線 pm, p′ m′，而求其水平跡 m, m′。次以 p 爲中心，p m 爲

半徑畫圓，而求其與平面T之水平跡 tT 之交點 a, b。復由 a, b 引投射線，而求其與基線之交點 a′, b′。此時 (pa, p′a′), (pb, p′b′)，即爲所求之直線也。

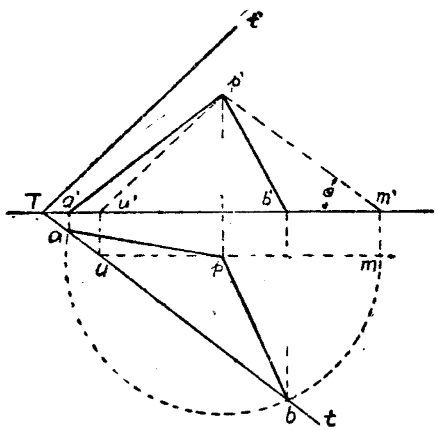


Fig. 94

作圖題23. 求垂直於相交之二直線 (ab, a′b′), (bc, b′c′)，而通過點 p, p′ 之直線。

解： 求含已知二直線之平面之跡後，由點P引垂線垂直於此平面可也。或求垂直於已知二直線之任意直線後，由P引平行線平行於此直線亦可。

前者之作圖法，既述之於前題，故略。茲將其後者之作圖法，述之如次：

作圖： 如 Fig. 95 所示，先於含AB垂直於直立投影面之平面上，求AB之副平面圖 a_1 b_1，而引垂直於 a_1 b_1 之 b_1 d_1。此時 b_1 d_1 爲垂直於AB之平面之副跡。凡過點B而垂直於AB之各直線之副平面圖，均在 b_1 d_1 上。又於含BC垂直於直立投影面之平面上，求得BC之副平面圖 b_2 c_2 後，引垂直於 b_2 c_2 之 b_2 d_2。此時 b_2 d_2 爲垂直於BC之平面之副跡。凡過點B而垂直於BC之各直線之副平面圖，均在 b_2 d_2 上。

次於 b_1 d_1, b_2 d_2 上，各由 a′b′, b′c′ 取等距離之點 d_1, d_2，由

d_1, d_2 向 a′ b′, b′ c′, 引垂線，置其足為 m_1, n_2。此時直線 d_1 m_1, d_2 n_2，在含點B而垂直於A B，B C之平面上，應爲距直立投影面有 d_1 m_1, d_2 n_2 之距離之直線之立面圖。然以 d_1 $m_1 = d_2$ n_2，故上述之二直線，而於不平行時相交。依此今置 d_1 m_1, d_2 m_2 之交點爲 d′，則直線b′ d′，乃通過點B而垂直於 AB，B C 直線之立面圖。再由 d′ 引投影線，使其與

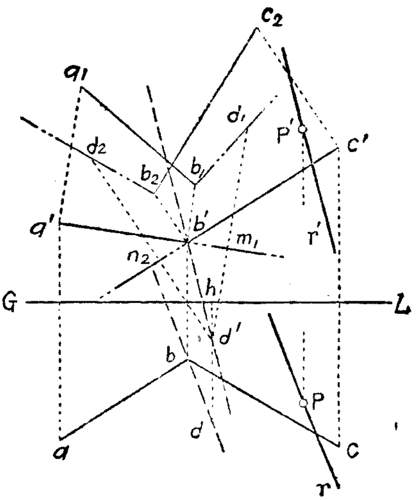


Fig. 95

基線相交於點 h，而於 h 上取 h d 等於 d_1 m_1，則直線 b d 爲垂直於A B，B C之直線之平面圖。是故由 p, p′ 引平行於 b d, b′ d′ 之 p r, p′ r′，即爲所求之直線。

作圖題24. 立面圖爲正三角形之一三角形 A B C，其點A高於點B, C位於水平投影面上高 h 處，求此三角形與他已知一點 P 間之距離。

解： 先求A B C之立面圖，次求含此三角形之平面之跡。然後由P向此平面引垂線，而求其足可也。或設垂直於三角形之副投影面，由其上P之投影，向A B C之投影引垂線亦可。茲將前者之作圖從略，就其後者述之。

作圖： 如 Fig. 96 所示，先求A之立面圖 a′, 由 a′ 引直線使其與

由 b, c 所引之投射線成 60°, 其交點為 n′, m′。次作過 m′ a′ n′ 之圓, 使其與 b n′, c m′ 相交於點 b′, c′, 此時 △a′ b′ c′ 為△A B C之立面圖。

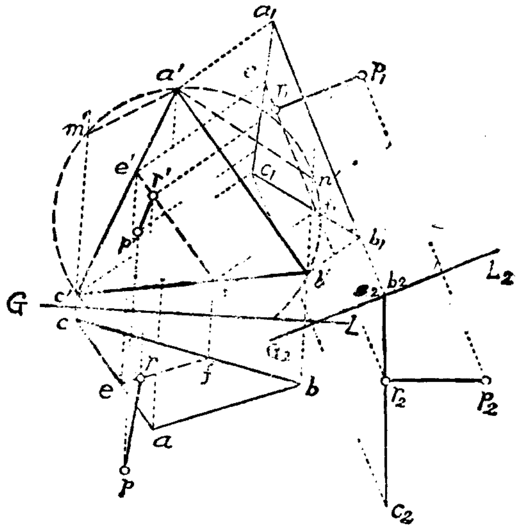


Fig. 96

次求含 A B 而垂直於直立投影面之平面上之 A B C 及 P 之副投影 a_1 b_1 c_1, p_1。後引 G_2 L_2 使其垂直於 a_1 b_1, 即以 G_2 L_2 為新基線, 而求與上述之副投影面成垂直之第二副投影面上之副投影 a_2 b_2 c_2, p_2。此時由 p_2 向 a_2 b_2 c_2 所引之垂線 p_2 r_2, 即為所求之實距離。

作圖題25. 求已知二直線A B, C D間之最短距離。

解: 二直線間之最短距離, 為共通垂線之長。共通垂線, 必含二直線中之一直線, 且於平行於他直線之平面上, 通過其第二直線之投影與第一直線之交點。故依此理而作其投影, 可易求其共通垂線, 及其實長。

次作垂直於一直線之平面上之投影, 則共通垂線於其平面上之投影等於其實長。例如 Fig. 97, 設垂直於C D之平面H, 於其平面上之投影為 a b, c d。此時 c d 為一點, 含 A B 與 a b 之平面垂直於平面 H。又設共通垂線為E F, 則 E F 垂直於平面 A B－a b, 而平行於平面

H。因此ＥＦ於平面Ｈ上之投影為ｅ ｆ，故ｅ ｆ垂直於ａｂ，且等於ＥＦ之實長。是故設垂直於ＣＤ之投影面，而作投影面上之投影，則共通垂線，即最短距離，不難求得也。

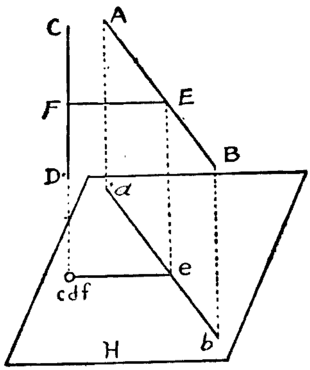


Fig. 97

作圖1. 如Fig. 98所示，乃依副投影，而求其最短距離之圖也。其求法，先引平行於ＣＤ之平面圖ｃｄ之H_1H_1，以H_1H_1為副基線，而求副立面圖 a″ b″, c″ d″。次垂直於 c″ d″ 引 V_1V_1，以 V_1V_1 為第一副投影面，使其與垂直於 V_1V_1 之第二副投影面相交。後以此相交跡為副基線，作第二副投影面上之副投影 a_1 b_1, c_1 d_1。此時ＣＤ，因其垂直於第二副投影面，故 c_1 d_1 為一點。

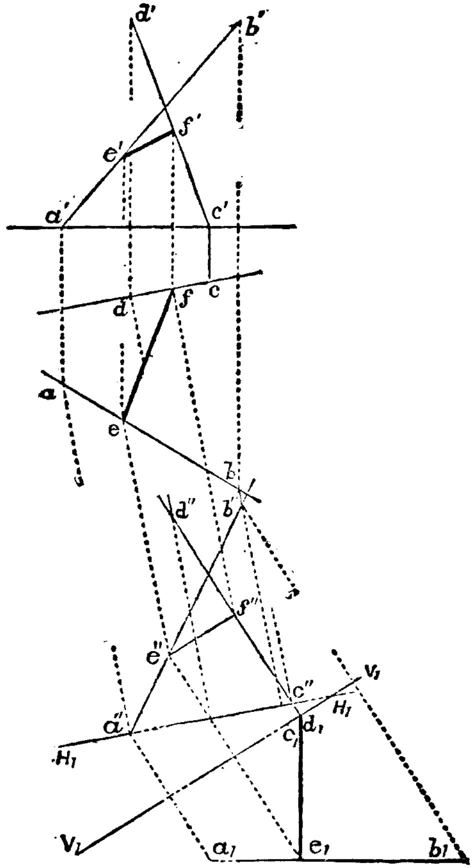


Fig. 98

因之由 c_1 向 $a_1 b_1$ 所引之垂線 $c_1 e_1$，即爲共通垂線之副投影，且其長等於最短距離之實長。今欲求其共通垂線之平面圖 e f，及立面圖 e′ f′ 時，可由副投影 $c_1 e_1$ 逆作其圖可也。如共通垂線於第一副投影面上之投影 e″ f″ 若平行於 $V_1 V_1$，可由 $c_1 e_1$ 求之，其法較易。

作圖2.　如 Fig. 99 所示，乃僅依其平面圖與立面圖所求之圖也。其法，先由 a b, a′ b′ 上之任意一點 o, o′ 引平行於 c d, c′ d′ 之平行線 m n, m′ n′，而求含 (a b, a′ b′), (m n, m′ n′) 之平面 t T t′。次由 c d, c′ d′ 上之任意一點 p, p′ 向平面 t T t′ 引垂線，由其足 q, q′ 引平行線 q f, q′ f′ 平行於 c d, c′ d′。此時 q f, q′ f′ 乃平面 t T t′ 上 c d, c′ d′ 之投影之平面圖及立面圖也。依此由 a b, a′ b′ 與 q f, q′ f′ 之交點 f, f′ 引平行於 p q, p′ q′ 之直線，使其與 c d, c′ d′ 相交於點 e, e′，則 e f, e′ f′ 爲共通垂線之平面圖及立面圖。由是而求其實長可也。

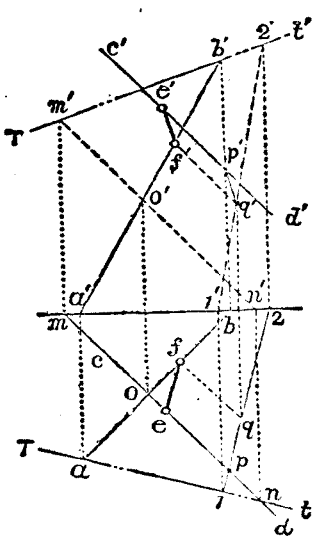


Fig.　99

作圖3.　如 Fig. 100 所示，乃求直線 A B 與基線間之最短距離之圖，是即前圖中之 C D 使其與基線一致時之圖也。圖中，設垂直於基線之副投影面，而求其共通垂線之側面圖 o m″。此時 o m″ 之長，等於最短距離之實長。由是再求其平面圖 m n，及立面圖 m′ n′ 可也。

作圖題26.　二三角形 A B C，D E F 之投影爲已知，求其交切線。

解： 求得含二三角形之平面之跡，則可求其交切線。本題之說明，乃不依平面之跡而求其交跡之方法也。

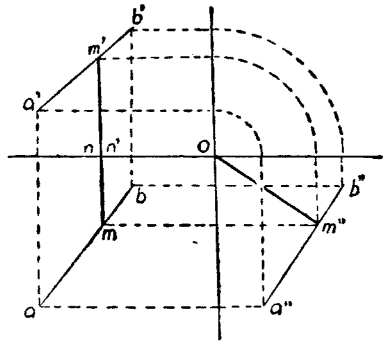


Fig. 100

今將二三角形，以垂直於水平投影面或直立投影面之平面切之，求其各切口之交點。然其交點，因其爲二三角形共通之點，故似此之點，若求得其二，將其連結而成直線可也。

作圖： 如 Fig. 101 所示，將三角形以垂直於水平投影面之平面 V_1 切之，其切口爲(12, 1′2′)，(3 4, 3′ 4′)，其相交點爲 k k′。同法，切含一邊 D E 之直立面，其切口之交點爲 l, l′。此時直線 k l, k′ l′，爲含二三角形之平面之相交跡。其在二三角形上之部分 m n, m′ n′，即爲所求之交切線。

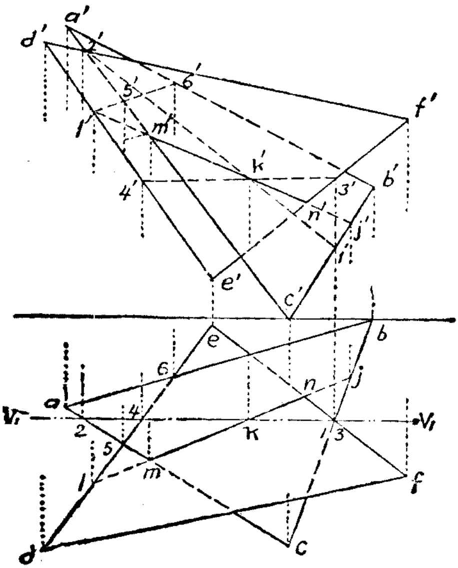


Fig. 101

作圖題27. 求互相直交之三直線之投影。

解： 互相直交之三平面之交切線，爲互相垂直之

三直線。其中二平面之相交線，必垂直於第三平面。然直線垂直於平面時，則直線之投影，必垂直於平面之跡。根據所述之關係，則互相直交之三直線之投影，當不難求得也。

作圖：如 Fig. 102 所示，先引任意之三直線 a b, b c, c a。其各交點爲 a, b, c。今以三直線爲互相直交之三平面之水平跡，而由 a, b, c 向各點對邊引垂線 o a, o b, o c, 則 o a, o b, oc、爲三平面之交切線之平面圖，是卽爲互相直交之直線之平面圖也。次延長 a o, 使其與 b c 相交於點 d, 以 a d 爲半徑作圖。及由 o 向 a d 引垂線，使其相交於點 o″ 此時角 a o″ d 因其爲直角，故 o o″ 等於由三直線之交點 o 至水平投影面之距離。根據是理，則三直線之立面圖 o′ a′, o′ b′, o′ c′, 不難求也。

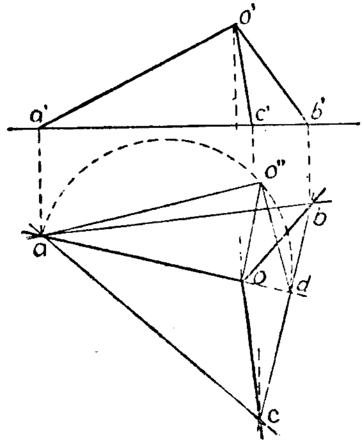


Fig. 102

作圖題28.　相交二直線之夾角 θ, 交點之高 h, 及二直線與水平面所成之角 α, β 均爲已知，求其投影。

解：將二直線廻轉於含二直線平面之水平跡之周，使其倒於水平投影面上，於其倒置之位置，其二直線之角，等於其所成之實角。依此，於任意之位置，引二直線使其成角 θ, 將其倒於水平面之位置，而求其水平跡。後使其復歸原有之位置，再求其投影可也。

作圖：如 Fig. 103 所示，先引互成角 θ 之二直線 c_1 a, c_1 b, 次引

與 c_1a, c_1b 成角 α, β 之直線 am, bn, 使其與 C_1 爲中心, h 爲半徑之圓相切, 其各交點爲 a, b, 其各切點爲 m, n。此時 a, b 爲其水平跡, am, bn 之長, 等於其各平面圖之長。依此若以 a b 爲中心, am, bn 爲半徑作兩圓, 使其相交於點 c, 則直線 ca, cb, 即爲所求直線之平面圖。然 A B 在水平投影面上, C 之高因其爲 h, 故可求其立面圖 $c'a'$, $c'b'$。而 tTt' 爲含二直線之平面。

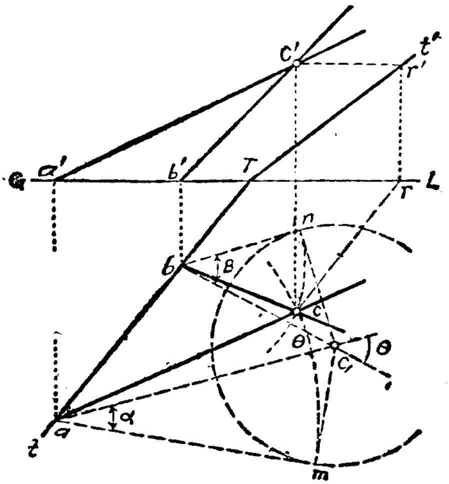


Fig. 103

作圖題29. 直角相交之三直線中, 其二直線與水平面成角 θ_1, θ_2, 第三直線與直立投影面成角 α, 三直線之交點高於水平投影面 h 時, 求三直線之投影。

解: 先作與水平面成角 θ_1, θ_2 之二直線之投影, 後作直線垂直於含此二直線之平面, 則得第三直線之投影。次使第三直線與直立投影面成角 α 後, 廻轉於三直線之交點之周, 則得所求之三直線之投影。

作圖: 如 Fig. 104 所示, 先作互相直交, 與水平投影面成角 θ_1, θ_2 之二直線之平面圖 pa_1, pb_1。其作圖法, 與 Fig. 103 同。次引 a_1b_1 垂直於基線, 而作其立面圖 $p'a_1'$。然後引 $p'c_1'$ 垂直於 $p'a_1'$, pc_1 平行於基線, 則直線 pc_1, $p'c_1'$ 爲垂直於二直線 (pa_1, pa_1'), (pb_1, $p'b_1'$) 之直

線。然 pc_1, $p'c'_1$ 因其平行於直立投影面，故將其廻轉，使其與直立投影面成角 α。

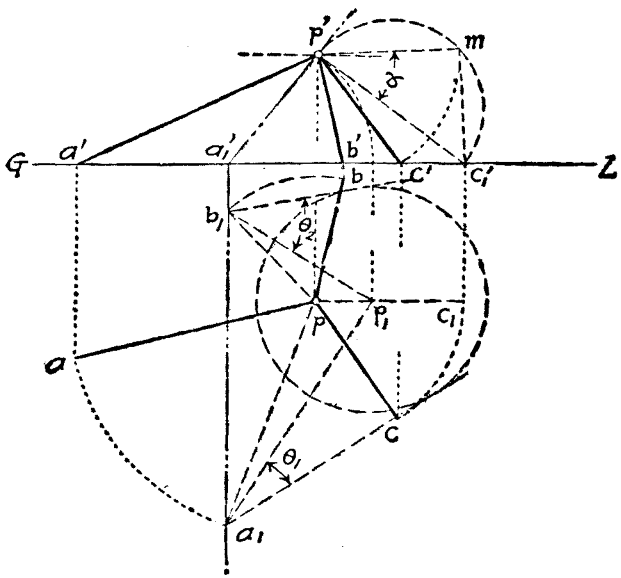


Fig. 104

求得 pc_1, $p'c'_1$ 之水平跡 c_1, c'_1 後，可引與 $p'c'_1$ 成角 α 之直線 $p'm$, 次由 c_1' 向此引垂線 $c_1'm$。此時 $p'm$, 等於 pc_1, $p'c_1'$ 廻轉於點 p, p' 之周，至其與直立投影面成角 θ 時，其立面圖之長。依此，以 p' 爲中心，$p'm$ 爲半徑畫圓弧，使其與基線相交於點 c', 由 c' 所引之投射線，使其與 p 爲中心，pc_1 爲半徑之圓弧相交於點 c。次取直線 pa, pb 等於 pa_1, pb_1, 並 pa, pb 與 pa_1, pb_1 所成之角等於角 c_1pc。此時 pa, pb, pc, 即爲所求之三直線之平面圖。又由 a, b 引投射線，使其與基線相交於點 a', b', 則直線 p'a', p'b', p'c', 爲所求之直線之立面圖。

作圖題30 求已知二平面 P, Q 間之角。

解： 先求二平面之交切線，次以垂直於交切線之平面切二平面。然後使其切口與一投影面平行，斯時投影面上切口之投影間之角，卽等於所求之實角。

作圖： 如 Fig. 105 所示，乃先求 P, Q 二平面相交跡之平面圖 a b，次作垂直於 a b 之任意直線，使其與 p P, q Q, a b 相交於點 m, n, c_o。次於基線上，取 a o_1, a b_1 等於 a o, a b，由 o_1 向 a' b_1 引垂線其長爲 o_1 c_1，於 a b 上取 o c_o 等於 o_1 c_1。此時直線 m c_0, n c_0，乃以 m n 爲水平跡，而將垂直於二平面 P, Q 之平面，與二平面 P, Q 之交跡倒於水平投影面之位置之圖也。是故角 m c_0 n，爲所求之實角。

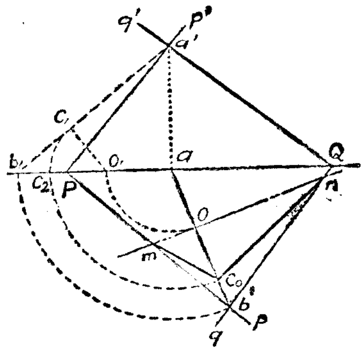


Fig. 105

如 Fig. 106 所示，乃 P, Q 二平面之跡，近垂直於基線之圖也。其求法，先求任意之水平面 H_1 與二平面 P, Q 相交之平面圖 m_1 a, n_1 a，其交點爲 a。及他之水平面 H_2 與二平面 P, Q 相交之平面圖 m_2 b, n_2 b，其交點爲 b。此時直線ab爲二平面 P, Q 相交之平面圖。次使垂直於 a b 之任意直線

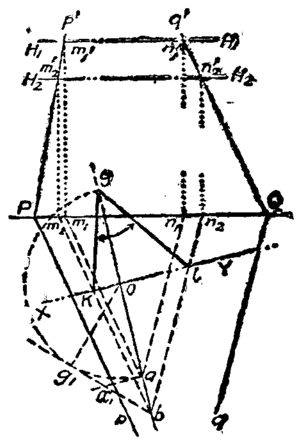


Fig. 106

XY 與 m_2b, n_2b, ab 相交於點 k, l, o。又由 a 向 ab 引垂線 aa_1，使其等於二水平面 H_1, H_2 之距離，復由 o 向直線 ba_1 引垂線 og_1。然後於 ab 上，取 og_0 等於 og_1。今若以 XY 爲垂直於二平面 P, Q 之一平面與水平面 H_2 相交之平面圖，則二直線 kg_0, lg_0 爲此平面與二平面 P, Q 之相交跡，廻轉於 XY 之周，而成水平時之平面圖。故角 kg_0l，爲所求之實角。

作圖題31.　二等分已知二平面 P, Q 間之角之平面，求其跡。

解：　先求二平面 P, Q 之交切線，再引二等分二平面間之角之直線。此時含上述之二直線之平面，即爲所求之平面。

作圖：　如 Fig. 107 所示，先求 P, Q 二平面之交切線之平面圖，次求垂直於 ab 之任意直線與 ab, pP, qQ 之交點 o, m, n。其後與 Fig. 69 作圖同法，求其二平面間之實角 mc_0n。而角 mc_0n 之二等分線與 mn 之交點爲 d，故 d 爲二等分二平面間之角之一直線之水平跡。因知，a 與 d 相結之直線 rR，爲所求之平面之水平跡。R 與 b' 相結

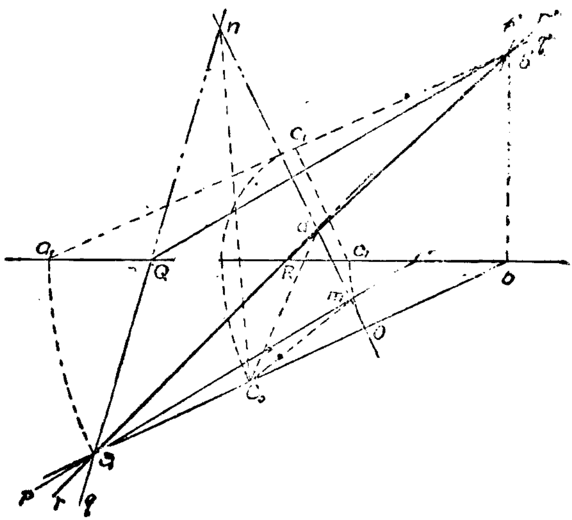


Fig. 107

之R r′,爲所求之直立跡也。

作圖題32. 直線之投影與平面之跡爲已知,求兩者間之實角。

解: 直線與平面間之角,卽直線與其平面上之投影間之角。故求得直線與平面之交點,及由其直線上之任意一點,向平面所引垂線之足,卽可求其兩者間之角之投影。因之,由其投影,卽可求其實角也。或由直線上之任意一點引垂線,垂直於由其直線上之他一點向其平面所引之垂線。然此垂線,與已知直線間之角,卽等於所求之角。

作圖1. 如 Fig. 108 所示,A B及t T t′爲已知之直線及平面。其求法,先求A B與平面T之交點b, b′。次由A B上之一點A,向平面T引垂線,而求其足c, c′。此時角a b c, a′ b′ c′,卽爲所求之角之平面圖及立面圖。依此,若求得三角形a b c, a′ b′ c′ 之實形 a_0 c b_0,則知此三角形爲直角三角形,a_0 b_0 c 卽所求之實角也。

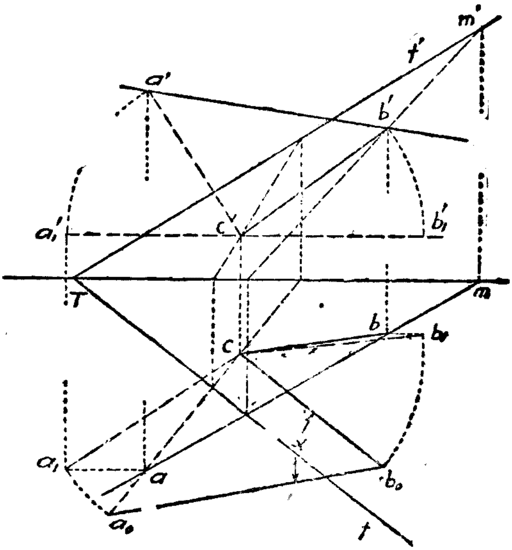


Fig. 108

作圖2. 如 Fig. 109 所示,圖中 (a b, a′ b′), p P p′ 爲已知之直線及平面。其作圖之法,先求 a b, a′ b′ 之水平跡 b, b′, 及由 a b, a′ b′ 上

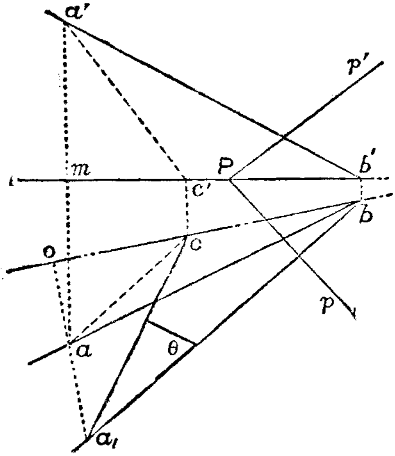


Fig. 109

之任意一點a, a′向平面P所作之垂線之水平跡 c, c′。次由 a 向直線 b c 引垂線，其足為 o 。更於其上取 o a_1 等於以 o a 為底，點A之高 a′ m 為高之直角三角形之斜邊之長。此時二直線 b a_1, c a_1, 因其為直線(ba, b′a′), (ca, c′a′), 倒於水平投影面時之圖，故垂直於 C a_1 之任意直線與 b a_1 間所成之角 θ, 即為所求之實角。

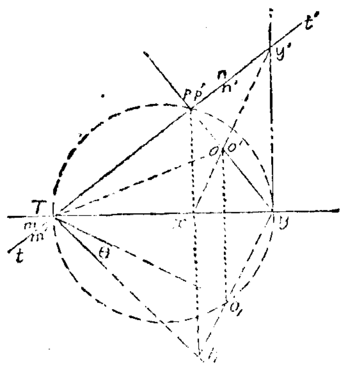


Fig. 110

作圖3. 如 Fig. 110 所示，為平面 t T t′ 之兩跡與直線 m n, m′ n′ 之兩投影重合於一直線上時之圖也。此時由 m n, m′ n′ 上之一點 p, p′ 向平面 t T t′ 所引之垂線，必與基線相交。故由 p, p′ 向平面 t T t′ 引垂線，而求其足 o, o′ 之後，迴轉於基線之周，使其倒於投影面上，則得直線M N 與平面 T間之實角 θ。

作圖4. 如 Fig. 111 所示，乃求平面 t T t′ 與基線間之實角之圖也。此時，由基線上之一點O，向平面 T引垂線，求得其足 r, r′ 之後，迴轉於基線之周，使其倒於投影面上，即得其實角 r_1 T o。

作圖題33. 有直線A B，與含其一點A之平面T為已知，求於平

面T上與AB成角θ之直線。

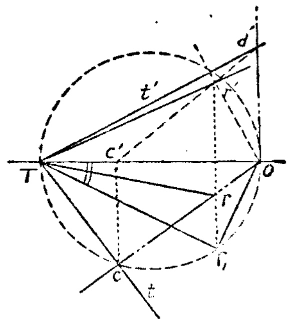


Fig 111

解： 先由AB之兩投影，求其實長A_1B_1，次於與A_1B_1成角θ之直線上，取任意之一點c_1。次以B為中心，B_1C_1為半徑作球，則其與平面T相交而作一圓。更於平面T上，以A為中心，A_1C_1為半徑畫圓，使其與上述之圓相交於點C。此時直線AC，是為所求之直線。至求二圓之交點C，可將平面T，倒於水平投影面之位置，而作其圖，後將其復歸原有位置求之可也。

作圖： 如Fig.112所示，以垂直於平面T之水平跡tT之G_1L_1為副基線，而求AB之副立面圖a″b″，及平面T之副直立跡T_1t″。又於AB之實長A_1B_1，及與A_1B_1成角θ之A_1C_1上，取任意之點C_1。次以b″為中心，B_1C_1為半徑畫圓，使其與T_1t″相交於點e″，f″，更由b″向T_1t″引垂線，其

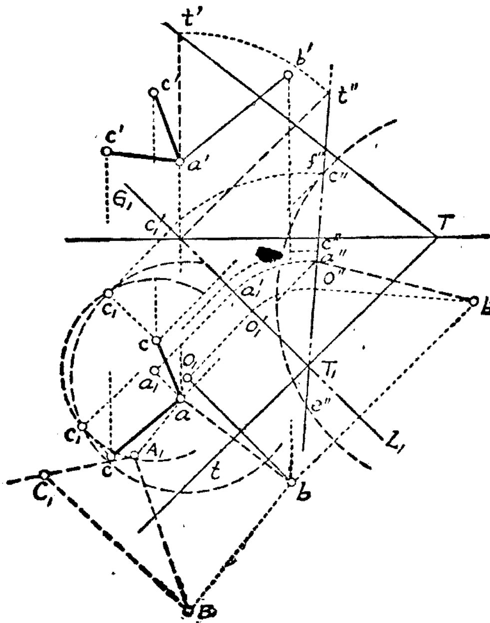


Fig. 112

足為 o″。斯時 o″ 為中心，B_1 半徑 B_1C_1 之球，與平面 T 相交之圓，其中心之副立面圖也。又 e″, f″ 為圓之副立面圖，而其長等於圓之直徑。

次將平面 T 廻轉於其水平跡之周，而求其倒於水平投影面時之 A，及圓之中心 o 之位置 a_1, o_1。後以 a_1, o_1 為中心，A_1C_1, o″ e″ 為半徑畫圓，而求其交點 C_1。此時 C_1 為所求之直線上之一點，倒於水平投影面之位置。後將平面 T 復歸原有之位置，即可求其平面圖 C，立面圖 c′。是時 a c, a′ c′，即為所求之直線之投影也。

作圖題34. 有正三角形與水平面成角 θ，其一邊與水平面成角 α 求其投影。

解： 先作與水平面成角 θ 之平面，於其平面上，引一任意之直線，使其與水平面成角 α，後將三角形之一邊置於其直線上，而於其平面上作正三角形可也。

作圖： 如 Fig. 113 所示，乃先作垂直於直立投影面而與水平面成角 θ 之平面 t T t′。次於平面 t T t′ 上，引直線與水平面成角 α，其平面圖為 x y。後將平面 t T t′，以水平跡 t T 為軸，廻倒於水平投影面上，而求 X Y 之位置 x_1 y。然 x_1 y 上有一邊之正三角形 a_1 b_1 c_1，因其為所求之三角形倒置於水

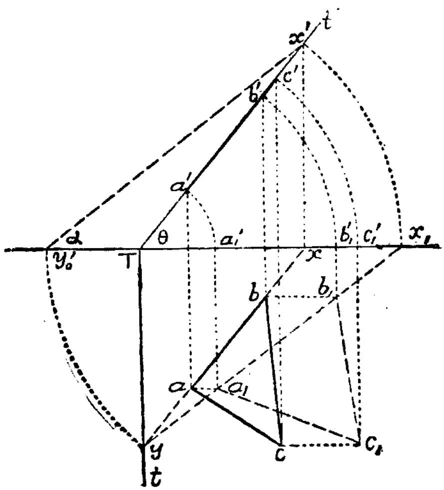


Fig. 113

平投影面之位置，故將平面復歸原有之位置，則得其投影 a b c, a_1 b_1 c_1。

作圖題35. 正方形之相隣二邊與水平面成角 α, β，求其投影。

解： 先將正方形廻轉於含此正方形之平面之水平跡之周，而作其倒於水平投影面時之圖，後將其復歸原來之位置求之可也，此時若以正方形之一角點，置於水平投影面上，則其作圖上，更較便利。

作圖： 如 Fig. 114 所示，圖中，於任意之位置，作正方形 a b_1 c_1 d_1，後即以此為倒置於水平投影面時之圖。又於別之位置，引任意之直線 A_1 d_0，更引與 A_1 d_0 成角 α, β 之二直線 A_1 B_1, A_1 D_1，而取其長等於 a d_1。然後由D_1平行於 A_1 d_0 引 D_1 H_1，使其與 A_1 B_1 相交於點 H_1，於 a b_1 上取 a h_1 等於 A_1H_1。此時直線 d_1 h_1，因其為正方形上之一水平直線倒於水平投影面之位置，故含此正方形之平面之水平跡與 d_1 h_1 平行。今將A置於水平投影面上，則過 a 平行於 d_1 h_1 之 t T，為含正方形之平面之水平跡。

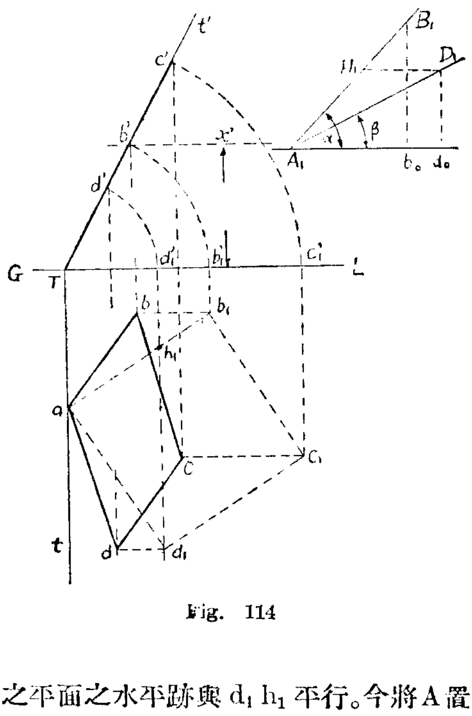


Fig. 114

由 B_1 向 A_1 d_0 引垂線 B_1 b_0，則其長等於由正方形之一角點B至水

平投影面之距離。依此，垂直於 t T 引基線 G L，由 b_1 向 G L 引垂線，其足爲 b_1'。更以 T 爲中心，過 b_1 作圓弧，及引等於 $B_1 b_0$ 之距離之直線 $x' b'$ 平行於 G L，而使其相交於點 b'。此時 b' 爲點 B 之立面圖，直線 T b' 爲含正方形之平面之直立跡。故一旦倒置之正方形。若廻至與平面 T 一致之位置，則得其兩投影 a b c d, $a' b' c' d'$。

作圖題36.　已知正六角形 A B C D E F 之一邊之長 l，及其三角點 A, B, C 高於水平投影面爲 h_1, h_2, h_3，求作其投影。

解：　將正六角形廻轉於含此正六角形之平面之水平跡之周，由其倒於水平投影面之位置，復歸原來之位置，即可得其投影。

作圖：　如 Fig. 115 所示，於任意之位置，作一邊之長爲 l 之正六角形 $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$，次將此正六角形廻轉於含六角形之平面之水平跡之周，使其倒於水平投影面之位置。次以 a_1, b_1, c_1 爲中心，以 h_1, h_2, h_3 爲半徑作圓，則兩圓 a_1, b_1 之共通切線，與直線 $a_1 b_1$ 相交之點爲 m，兩圓 b_1, c_1 之共通切線與直線 $b_1 c_1$ 相交之點爲 n。而直線 m n 爲含所求之正六角形

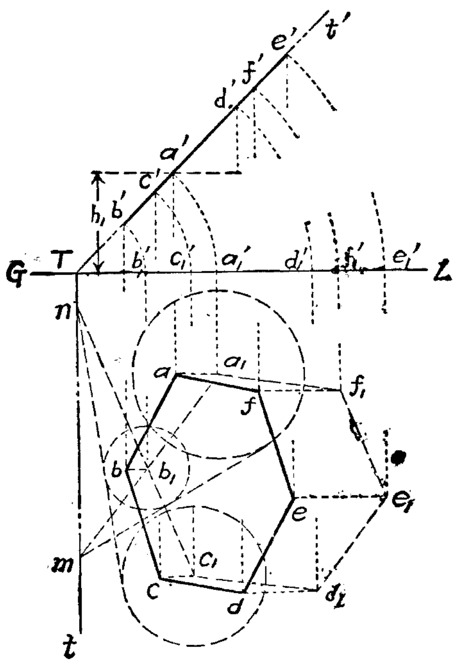


Fig. 115

之平面之水平跡。又垂直於m n. 引基線 G L, 由 a_1 向基線引垂線，其足爲a_1'。後以m n 與G L之交點T爲中心，過a_1'作圓，及引等於h_1之距離之直線，平行於G L，而使其相交於點a'。此時a'爲角點A之立面圖。T與a'相結之T t'，爲含正六角形之平面之直立跡。是故將已倒於水平投影面之六角形，若復歸原來之位置，則可作其投影a b c d e f，作a' b' c'd' e' f'。

作圖題37. 立方體之一面A B C D及一邊 A B 與水平面所成之角θ, α爲已知，求其所投之影。

本題之作圖法，與本章作圖題 28 同，其法，先作面A B C D之平面圖a b c d，及其立面圖 a' b' c' d'。此時含A B C D之平面，若使其垂直於直立投影面，則垂直於此之稜，因平行於直立投影面，故垂直於A B C D之稜之立面圖等於其實長。其平面圖，平行於基線。依 Fig. 116 所示，頗易求其立方體之立面圖，及平面圖也。

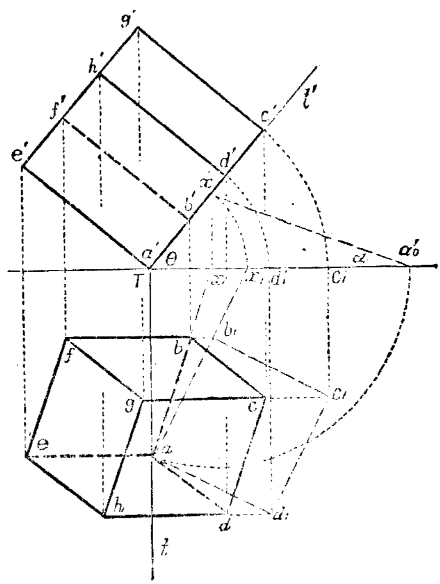


Fig. 116

作圖題38. 正六角柱之一側面A B G H及其一邊A G與水平面所成之角θ, α爲已知，求其所投之影。

本題之作圖法，與作圖題

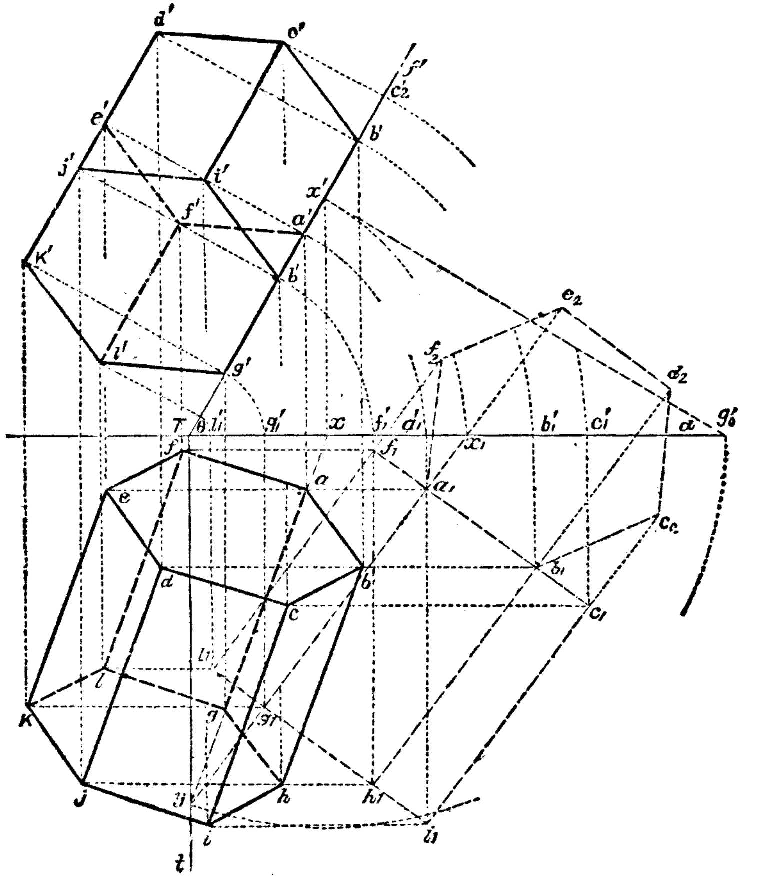


Fig. 117

31 完全相似,其法即將 A B G H,倒於水平投影面之位置,由 a_1 b_1 h_1 g_1 求之可也。參照 Fig. 117。

作圖題39. 含立方體之二對角線之平面及其一對角線與水平投影面所成之角 θ, α 爲已知,求其所投之影。

如 Fig. 118 所示,將含二對角線之平面,使其垂直於直立投影

面。然後使其倒於水平投影面，而作其平面圖 $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1$。此時 $a_1\ c_1\ g_1\ e_1$ 爲矩形，其邊之長等於立方體之稜，及面之對角線之長。其對角線 $c_1\ e_1$，$a_1\ g_1$ 等於立方體之對角線之實長。今將其倒置之平面，復歸原有之位置，則可求其立方體之投影 a b c d e f g h，a' b' c' d' e' f' g' h'。以上之作圖，亦與本章作圖題 31. 完全相同。

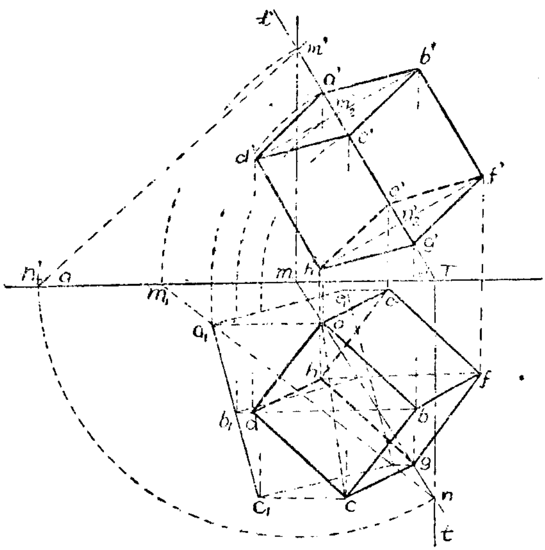


Fig. 118

作圖題40. 正四面體之三角點距水平投影面之高 h_1，h_2，h_3 爲已知，求其所投之影。

解： 先將其一面廻轉於含此一面之平面之水平跡之周，而作與水平投影面一致時之平面圖。後將其平面復歸原有之位置，即可作其投影。

作圖： 如 Fig. 119 所示，先於任意之位置，作正三角形 $a_1\ b_1\ c_1$。次由各頂點向對邊引垂線，使其相交於點 d_1。後以此圖，為廻轉於含面ABC之平面之水平跡之周，而倒於水平投影面時之平面圖。次以 a_1, b_1, c_1, 為中心，h_1, h_2, h_3 為半徑作圓，而圓 a_1, b_1 之共通切線與直線 $a_1\ b_1$ 相交於點 m，又圓 b_1, c_1 之共通切線與直線 $b_1\ c_1$ 相交於點 n。其時直線 m n，因其為含四面體之一面ABC之平面之水平跡，故垂直於m n引基線，而得平面之直立跡 T t′。由是將ABC廻至平面 t T t′。之位置，則四面體之投影 a b c d，a′ b′ c′ d′ 可求也。

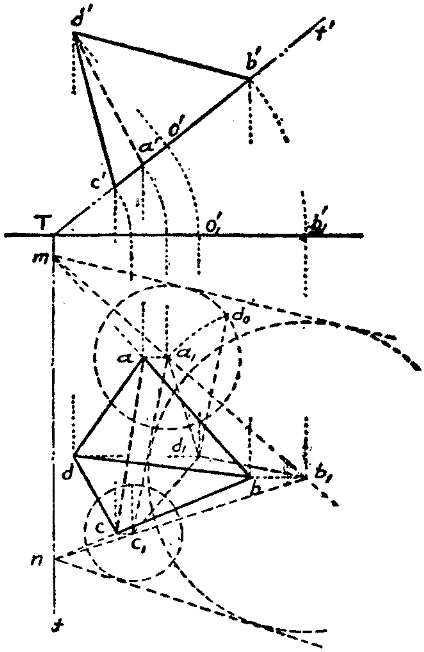


Fig. 119

練 習 題

(1)設與基線成 45° 之直線為直立跡，試求與水平投影面成 60° 之平面之水平跡。

(2)試求與水平投影面成 60°，與直立投影面成 45° 之平面之跡。

(3)試求與水平投影面成 60°，其水平直立兩投影間之角為70°之平面之跡。

(4)有平行於基線之二平面，其一水平跡，位於基線下3糎處，其直立跡位於基線下5糎處，他之水平跡位於基線上4糎處，求二平面間之實距離。

(5)有含基線與水平投影面成35°之平面，及水平直立兩跡與基線成45°,60°之平面，試求其交切點。

(6)如 Fig. 120, Fig. 121 所示，試求其三平面 P, Q, R 共通之點。

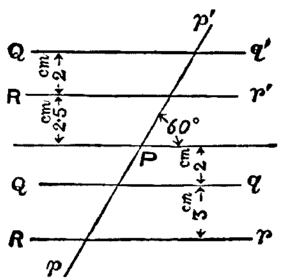


Fig. 120

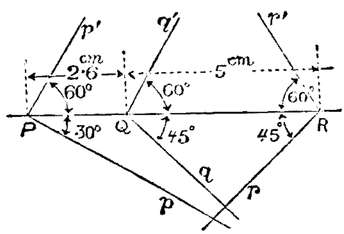


Fig. 121

(7)有二平面平行於基線，而與水平投影面成30°,70°。此二平面之交切線，位於水平投影面上4糎，直立投影面後3糎處，試求其二平面之跡。

(8) Fig. 122 中，a' b' 爲垂直於直線 b c, b' c' 之直線 A B 之立面圖，試求其平面圖。

(9)試求 Fig. 123 所示之垂直於平面 p P p' 之平面之跡。

(10)如 Fig. 124 所示，正五角形 a b c d e (一邊2糎) 爲平面 P 上之五角形之平面圖。試求此五角形之立面圖及其實形。

(11)如 Fig. 125, Fig. 126 所示，試求 P, Q 兩平面間之實角。

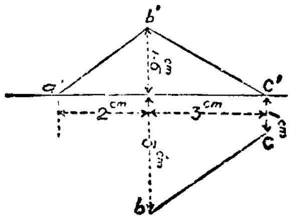


Fig. 122

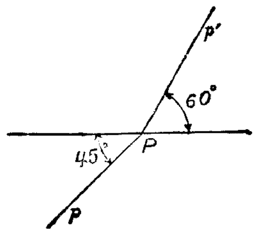


Fig. 123

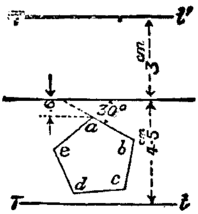


Fig. 124

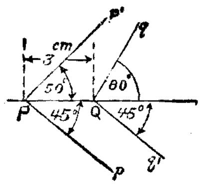


Fig. 125

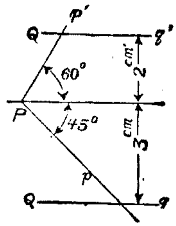


Fig. 126

(12)試求 Fig. 127 所示之平面 t T t′ 與直線 m n, m′ n′ 間之角。

(13)試求 Fig. 128 所示之平面 P, Q 間之實角。

(14)如 Fig. 129 所示，於平面 P 上，試求距 A, B, C 等距離之點。

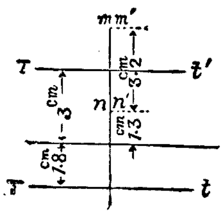


Fig. 127

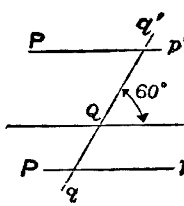


Fig. 128

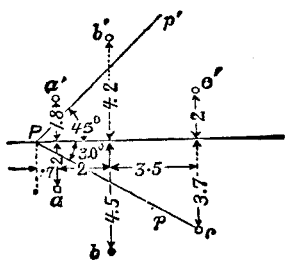


Fig. 129

(15)如 Fig. 130 所示,試求含點A而垂直於平面P之平面之跡。及點A與平面P間之實距離

(16)試求 Fig. 131 所示之二直線A B,C D間之最短距離。

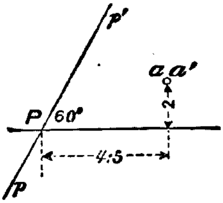


Fig. 130

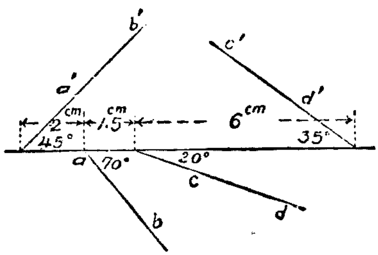


Fig. 131

(17)如 Fig. 132 所示,b c 乃以 a b 爲水平跡之平面上直線 B C 之平面圖。今B C與水平面成 50° 時,試於上述之平面上求以B C爲一邊之正三角形。

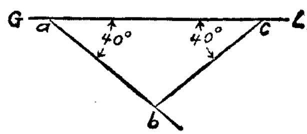


Fig. 132

(18)有直線與基線成 45°,其直線上。有相距 5 糎之二點 a,b 。此二點,爲彼此以 50° 相交而與水平面成 35°,70° 之二直線之水平跡,試求含此二直線之平面與兩投影面所成之實角。

(19)有四邊形 a M N b,∠a M N=∠M N b=90°,M N= 4 糎 a M= 3 糎,b N= 6 糎,a b 爲高於水平投影面 1.6 糎之水平直線之平面圖。又M N爲含A之平面之水平跡。試於平面 A M N 上,求與A B成 75° 之直線。

(20)有互相垂直之二直線A B,C D今A B與水平投影面成 30°,與直立投影面成 50°,C D與直立投影面成 25°。此二直線間之最短距

離爲 4 糎，試求其二直線之投影。

(21)二等邊三角形 a b c (a c= 6 糎，a b=b c= 4 糎) 爲一正三角形之平面圖，今 a c 與基線成 60°。試求其三角形之立面圖。

(22)今有平面，與水平投影面成 60°，直立投影面成 40° 之平面成垂直，且與水平面成 45°，試求其跡。

(23)引與基線成 50° 之直線 t t'，今以此爲一平面之水平直立面跡時，試求其平面與基線間之角。

(24)一邊長爲 5 糎之正三角形 A B C，其二邊 A B，B C 與水平投影面成 50°，30°，第三邊 C A 與直立投影面成 45°。今 B 位於水平投影面上 6 糎處，試求其三角形之投影。

(25)一邊長 4 糎之正方形與水平面成 60°，其一對角線與水平面成 45°，試求其正方形之投影。

(26)有一邊長 3 糎之正六角形 A B C D E F，其一邊 A B 爲水平，其對角線 B D 之平面圖之長爲 4 糎，邊 F A 與直立投影面成 45°。試求其六角形之投影。

(27)有平面與水平投影面成 60°，與直立投影面成 45°，於此平面上，置一邊之長爲 3.5 糎之正五角形，今將其一邊與直立投影面成30°，試求其五角形之投影。

(28)有一邊長爲 3.5 糎之正五角形 A B C D E，其一邊 A B 位於水平投影面上，角 A B C 之平面圖爲 135°。試求其五角形之投影。

(29)有一邊長爲 4 糎之正三角形，其一邊平行於水平投影面，而位於水平投影面上 1 糎之位置，他一邊平行於直立投影面，而位於其前 2

糎之位置，與水平面成 35°。試求其三角形之投影。

(30)有一邊長 4 糎之正八面體，其一面上三角點之高為1糎，3 糎，4 糎。試求其投影。

(31)有一邊長為 3 糎之正十二面體，其一面及其一邊，與水平投影面成 60°，35°。試求其立體之投影。

(32)以一邊長 3.5 糎之正五角形為底，高 6 糎之直角錐，其一斜面與水平面成 50°，其斜面之一斜稜與水平面成 30°。試求其角錐之投影。

(33)有一邊長 4 糎之正八面體，其一對角線與水平投影面成 30°，與直立投影面成 45°，他一對角線與水平投影面成 40°。試求其八面體之投影。

(34)以一邊長 4 糎之正三角形為底之角錐，其頂點距其底之三角點為等距離，底之三角點位於水平投影面上 4 糎，5 糎，7 糎，其頂點正在水平投影面上。試求其角錐之投影。

(35)以一邊長 3 糎之正六角形 A B C D E F 為底之直角柱．過 D 之側稜上距 D 為 5 糎處有一點 P。試求其角柱之側面上 A 與 P 間之最短線之投影。

第四章　立　體

1. 多面體之投影

四個以上之平面所圍成之立體，謂之多面體(Polyhedron)。故多面體爲四個以上之多角形所圍成之立體，圍成多面體之多角形，謂之面(Face)。其多角形之各邊，謂之稜(Edge)。角點，謂之角點(Angular point)。又不在同一面上之二角點其所連成之直線，謂之對角線(Diagonal)。

多面體各稜之位置固定後，其各面之位置，因之而定，故多面體之形狀及位置亦因之而定。由是可知多面體各稜之投影圖，卽通常所示之多面體之投影圖也。

2. 平行六面體

六個平行之四邊形所圍成之多面體，稱爲平行六面體。其面均爲矩形者，稱爲直六面體，或長方柱。

3. 角柱及其投影

平行於一直線三個以上之平面，及與其各平面相交之平行二平面所圍成之立體，謂之角柱(Prism)是故角柱爲三個以上之平行四邊形及與此四邊形有同數之邊二個平行多角形所圍成之立體也。

形成角柱之平行四邊形，謂之側面(Lateral face)。側面與側面之交切線，謂之側稜(Lateral edge)。又兩個平行之多角形，謂之底面(Base)，或單稱爲底。二底之重心所結之直線，謂之軸(Axis)。其軸

垂直於底者，謂之直角柱 (Right prism)。其不垂直者，謂之斜角柱 (Oblique prism)。直角柱之底爲正多角形者，謂之正角柱(Regular prism)。角柱二底間垂直之距離，謂之角柱之高。故直角柱，其軸之長與其高相等，

角柱依其底之形狀，而稱其爲三角柱(Triangular prism)，四角柱(Quadrilateral prism) 及五角柱(Pentagonal prism)等。如 Fig. 133爲四角柱，Fig. 134 爲五角柱是也。

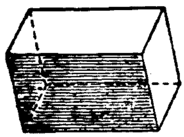


Fig. 133

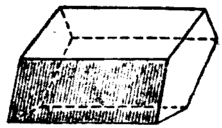


Fig. 134

如 Fig. 135 所示，爲正六角柱，其一底面位於水平投影面上時之投影圖也。圖中因其底在水平面上，故其平面圖與其底爲同形之正六角形。又側稜之立面圖，若垂直於基線，則與其實長相等，後依此可求其水平直立兩投影。

如 Fig. 136 所示，乃其底爲正六角形之斜角柱，其一底面置於直

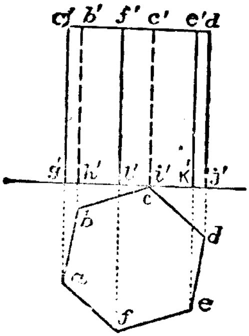


Fig. 135

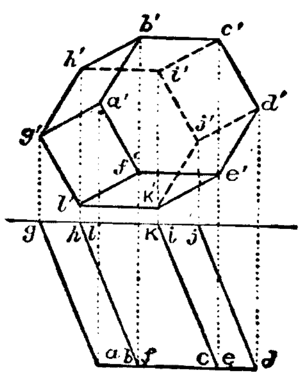


Fig. 136

立投影面上時之投影圖也。圖中,其底之立面圖與其實形相等,兩底面之平面圖爲直線其間之距離等於角柱之高。依此若其側稜與其底所成之角及與水平面所成之角爲已知時,則其投影,亦不難求得也。

如 Fig. 137 所示,乃求正六角柱之一側面位於水平投影面上時之投影圖也。其正六角形ab $c_1d_1e_1f_1$,乃以其底迴轉於水平面上之一邊 A B 之周,而倒於水平面時之圖。後將其六角形復歸原有之位置,則得其底之平面圖 a b c d e f。後由是,可求其立體之平面圖。又 C,D 距水平面之高,因其等於 cc_1, dd_1, 故其立面圖,可易求也

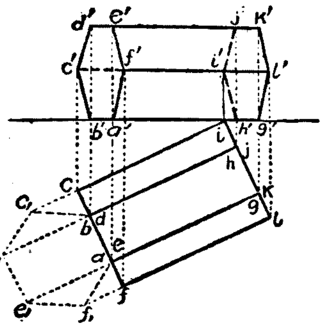


Fig. 137

4. 角錐及其投影

一平面多角形,及其各邊爲底角點共有之三角形,所圍成之多面體,謂之角錐(Pyramid)。形成角錐之三角形,謂之斜面(Slant face)。斜面與斜面之交,謂之斜稜(Slant edge)。又非斜面之面,謂之底。凡斜面共通之點,謂之角錐之頂點 (Vertex)。頂點與其底重心所結之直線,謂之軸(Axis)。

角錐之軸,垂直於其底者,謂之直角錐 (Right pyramid)。其不垂直者。謂之斜角錐(Oblique pyramid)。直角錐之底爲正多角形者,謂之正角錐(Regular pyramid)。頂點至底之距離,謂之角錐之高。故正角錐,其軸之長與其高相等。

角錐依其底之形而分爲三角錐 (Triangular pyramid), 四角錐 (Quadrilateral pyramid),五角錐(Pentagonal pyramid)等。

如 Fig. 138爲正六角錐, Fig. 139爲斜七角錐是也。

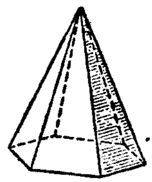


Fig. 138

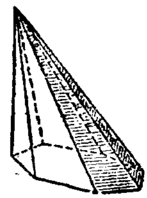


Fig. 139

如 Fig. 140 所示, 乃求正四角錐之底平行於水平投影面時之投影圖也。圖中其平面圖, 由其底之正方形及其二對角線而成。而其底之立面圖爲一直線。由頂點之立面圖,至底之立面圖之距離等於其角錐之高。是故求其立面圖不難也。

如 Fig. 141,乃示其底爲正五角形,一斜稜 V A 垂直於其底,而置其斜角錐之底,平行於直立投影面時,所求其投影之圖也, 圖中其立面圖, 由其底之正五角形及其對角線而成。其 V A 之平面圖, 垂直於基線,且等於其實長。

如 Fig. 119所示,乃正七角錐之一斜面 V A B, 位於水平投影面上時所求之投影圖也。作圖之法,先作 vab 等於其斜面之實形, 卽以此爲水平面上之面之平面圖。次以 a b 爲一邊作正七角形 $abc_1d_1e_1f_1g_1$, 是卽其底倒於水平投影面上時之圖。此時 vc_1垂直於 ab,其交點爲 r 。又 g_1c_1,d_1f_1因

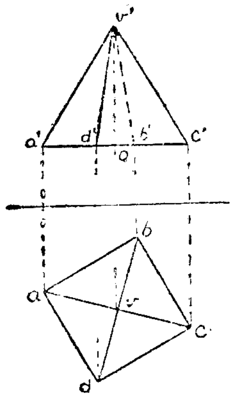


Fig. 140

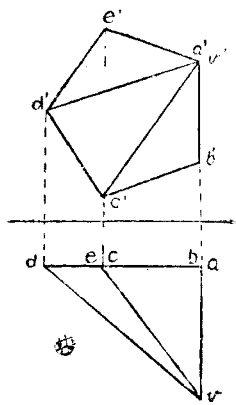


Fig. 141

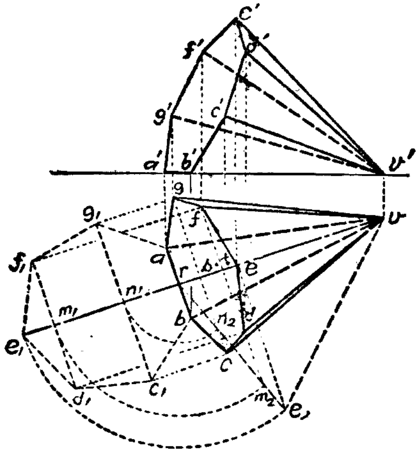


Fig. 142

其垂直於 ve_1，故其各相交於點 n_1,m_1，然後以 v 爲中心，v b 爲半徑作圓，及以 r 爲中心，re_1 爲半徑作圓，而使兩圓相交於點 e_2。次於 re_2 上取 rm_2，rn_2 等於 rm_1，rn_1，此時由 m_2n_2 向 vr 所引之垂線，與由 f_1,d_1，及 c_1，g_1 向 ab 所引之垂線，其相交於點，f，d，c，g。則七角形 a b c d e f g，及其各角點與 v 連結之直線所圍成之圖形，卽爲所求之平面圖。然 F,D 及 C,G 至水平面之距離，因其等於由 m_2，n_2 至 vr 之距離 m_2t，n_2s。故根據斯理，而求其角錐之立面圖不難也。

5. 正多面體

如多面體之各角點然，其一點之周，限定三個以上之平面角時，其所成之多面體，謂之正多面體 (Regular polyhedron)。正多面體有下列之五種。卽正四面體(Regular tetrahedron)，由四個正三角形而成。正

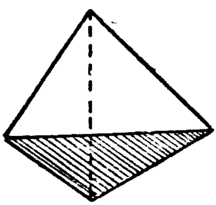


Fig. 143

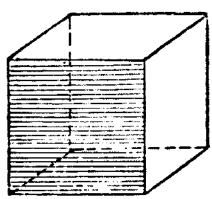


Fig. 144

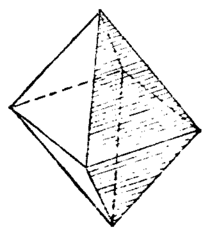


Fig. 145

六面體(Regular hexahedron), 由六個正方形卽成。正八面體(Regular octahedron) 由八個正三角形而成。正十二面體(Regular dodecahedron), 由十二正五角形而成。正二十面體(Regular icosohedron)。由二十個正三角形而成。

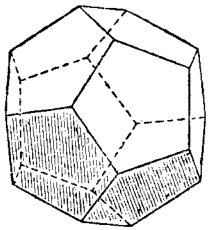


Fig. 146

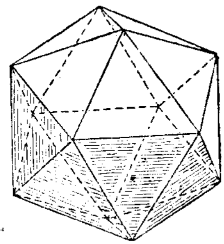


Fig. 147

6. 多面體之展開

多面體之表面,或各種之曲面,於一平面上展開所成之圖形,謂之展開圖(Development)。曲面中有展開可能,與不可能者。然多面體之表面,爲多數多角形平面之集合,故於適當之稜,將其各面切離,必能作得其展開圖。因知多面體之展開圖,爲各面之實形之集合。

求多面體各面之實形之法,若其面爲三角形,則其實形可由三邊之實長而定。若邊數爲四或四以上,則以適宜之對角線,將其分成數個三角形,後再連結各三角形之實形,是爲所求之實形。然此時必視其面爲正多角形,或平行四邊形等之特別形狀,方可利用其特性。又其面之跡若爲已知,則可將其面迴轉於其跡之周,而求其面之實形於投影面上亦可也。

作圖題1. 正四面體之一稜ＣＤ垂直於水平投影面時,求其所投之影。

解: 將面ＡＢＣ置於水平投影面上,使ＣＤ平行於直立投影面,而作其兩投影。次將ＣＤ迴轉於Ｄ之周,使其垂直立之位置,卽得所求

之投影。

作圖：　將ABC置於水平投影面上，而作其平面圖 $a_1b_1c_1d$，然後垂直於 a_1b_1 引基線，而作 $a_1'b_1'c_1'd'$。次由d'向基線引垂線 d'c'，使其等於 $d'c_1'$，而作與三角形 $a_1'c_1'd'$ 同形之三角形 a'c'd'。此時之三角形，即爲所求之立面圖也。

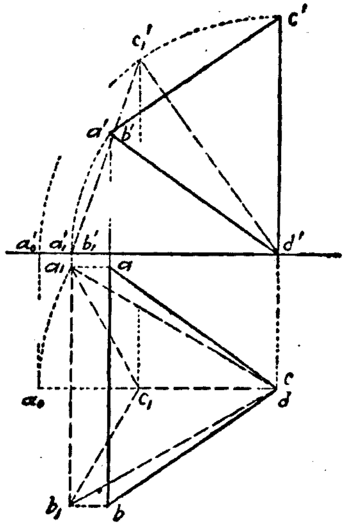


Fig. 148

後由 a' 引投送線，及由 a_1,b_1 引平行於基線之直線，而使其相交於點 a, b，則三角形 a b c，即爲所求之平面圖也。

作圖題2.　求立方體之一面置於水平投影面上時之投影。

取任意之位置，以立方體之一邊之長作正方形 a b c d，是即所求之平面圖。其垂直於水平投影面之稜之立面圖，因與基線垂直，故其長等於其實長。依此，則其立面圖 a'b'c'd'e'f'g'h'，不難求也。

作圖題3.　求立方體之一對角線垂直於水平投影面時之投影。

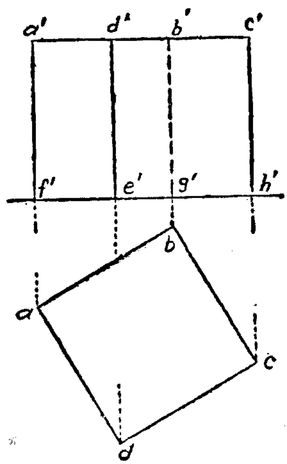


Fig. 149

解：　本題之作圖法，可仿本章作圖題2，以立方體之一面，置於水平投影面上，

其一對角線，使其平行於直立投影面，而作其投影。然後將此對角線迴轉於其一端之周，使其與水平面成垂直，而求其投影可也。

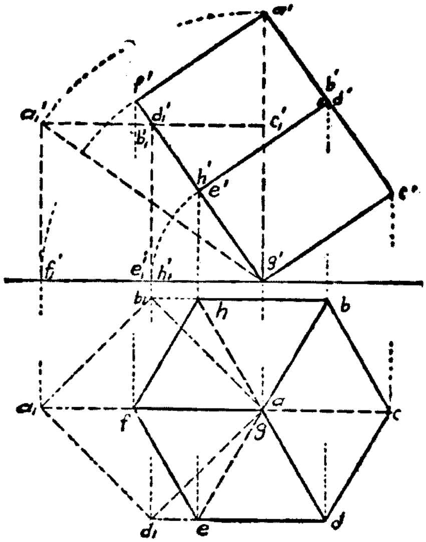


Fig. 150

作圖： 如Fig. 150 所示，先以一邊之長作正方形 $a_1\ b_1\ g\ d_1$，次引基線平行於 a_1g，而作其立面圖 $a'_1b'_1c'_1d'_1e'_1f'_1g'h'_1$。此時此圖，乃置其對角線A G平行於直立投影面時之投影圖也。

次由 g' 向基線引垂線 $a'g'$，使其等於 $g'a_1'$ 而作與 $a_1'b_1'c_1'\cdots\cdots g'h_1'$ 同形之圖 $a'b'c'\cdots\cdots g'h'$。此時 $a'b'c'\cdots\cdots g'h'$，即爲所求之立面圖。其平面圖 $a\ b\ c\cdots\cdots g\ h$ 之求法，可仿本章作圖題 1 之作法求之可也。然此時之平面圖，吾人可知由其正六角形與其三對角線而成。其立面圖，由其矩形與長邊之中點所結之直線而成。其長邊之長等於面之對角線之實長，其短邊之長等於其稜之實長。苟利用此種性質，而求其立面圖及平面圖亦可。

作圖題4. 求正八面體之一對角線垂直於水平投影面時之投影。

解： 正四面體之對角線有三，均互相直交且互爲二等分。故其中一對角線若使其與水平投影面垂直，則他二者，必與水平投影面平行。因有此關係，故易求其平面圖，及立面圖。

作圖： 如 Fig. 151 所示，先於任意之位置，以稜之實長爲邊之長而作正方形 a b c d。次引對角線 ac, bd,使其相交於點 e。此時 e 卽爲所求之平面圖。次由 e 引投射線，於其投射線上，取 e'f' 等於 ac。後作 e'f' 之垂直二等分線，及由 a,b,c,d 引投射線，使其相交於點 a',b',c',d'。此時 a',b,,c',d', e',f' 如圖所示由連結之直線所成之圖，卽爲所求之立面圖。

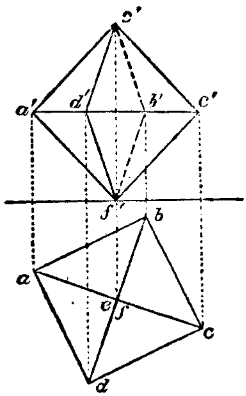


Fig. 151

作圖題5. 求正八面體之一面置於水平投影面上時之投影。

解： 正八面體相對之二面互相平行，其相對之二面之三邊，每二邊相平行。依此將其一面置於水平投影面上時，則其對稱之面亦必爲水平。故知其平面圖，爲每二邊平行之二正三角形。然其各角點爲數有六，故依上述之二面之平面圖，可決定其平面圖。平面圖既決，則其立面圖可易求也。

作圖： 如 Fig. 152 所示，先於任意之位置，以稜之實長爲邊之長作正三角形 d e f，此卽爲水平投影面上之面之平面圖。次引 d e f 之外切圓，結弧 de, ef, f d 之中點，引正三角形 a b c，此卽與面 D E F 對稱之面之平面圖。是故由二正三角形 a b c，d e f 與正六角形 a e'b f c d 所成之圖形，卽爲所求之平面圖。

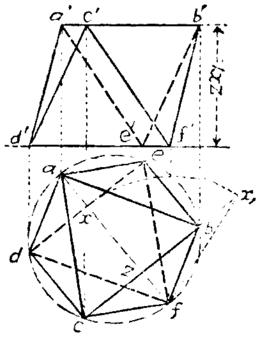


Fig. 152

根據上述之作圖，則ａｆ之垂直於ｄｅ，ｂｃ自無論矣。今使其相交點爲ｘ，ｚ。次以ｆ爲中心，ｆｘ爲半徑作圓，使其與ｚｂ相交於點x_1，則 x_1z 之長，等於以 a,b，c 三點爲平面圖之三角點之高。故由是可求其各角點之立面圖。後由各角點之立面圖，即可決定其立體之立面圖也。

作圖題6．　求正十二面體之一面置於水平投影面上時之投影。

解：　正十二面體相對之二面爲互相平行，其相對二面之各稜中每二稜亦必互相平行。又過一面之一角點，其不在此面上之稜，與此面所成之角均相同，且此稜與上述面之對稜成垂直。故將非平行之二面上之角點順次連結，而成十稜。後使其向上述之二面平行之平面投影，則其所投之影爲正十角形。其外接圓之半徑，與一面（正五角形）之外接圓之半徑之比，等於正五角形之對角線與一邊之比，苟知此種關係，即可求此立體之平面圖。平面圖決定後，若知其各角點之高再求其立面圖不難也。

作圖1：　如 Fig. 153 所示，先以稜之實長爲邊之長，作正五角形ｑｒｓｔｕ，使其爲水平投影面上之面之平面圖。次引正五角形之外接圓，連結弧 qr，rs，st，tu，uq 之中點 a,b,c,d,e，而作正五角形ａｂｃｄｅ。此正五角形，即爲平行於面ＱＲＳＴＵ之面之平面圖。再以圓之中心ｏ爲中心，引其與 oa 之比，等於

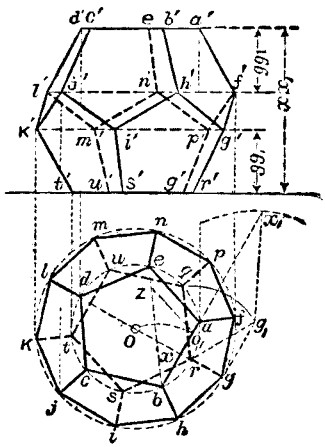


Fig. 153

be:ba 之長爲半徑之圓。由 a,b,……,q,r,……向對邊 cd, de,……,St, tu,……,引垂直之直線,使其相交於點 f, h,……p,g,……等。此時上述之各線與正十角形 f g h i j k l m n p 所成之圖形。卽爲所求之平面圖。

依上之作圖,可知 g r d l 在一直線上,而垂直於 a b。次由 g 向 g r 引垂線,及以 r 爲中心, r q 爲半徑作圓,使其相交於點 g_1。此時 gg_1 之長,等於 G,I,K,M,P 至水平投影面之距離。又 g l 與 a b 之交點爲 x。a b 之延長線與 g_1 爲中心, d x 爲半徑所作之圓相交於點 x_1 而 xx_1 之長,與 A,B,C,D,E 至水平投影面之距離相等。又由 xx_1 所引之 gg_1 之長,與F,H,J,L,M, 至水平投影面之距離相等。依上所述,若知其各角點之高,則可求其立體之立面圖。

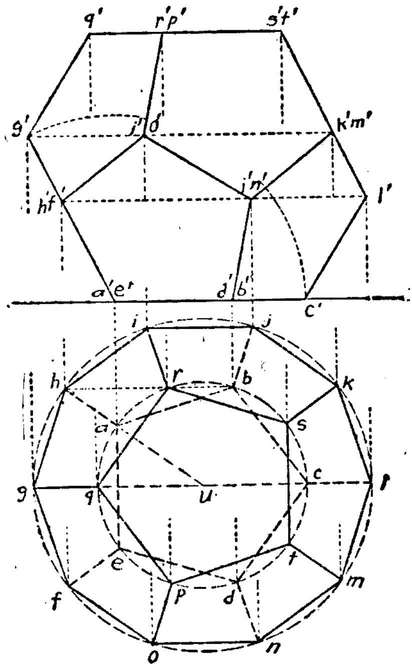


Fig. 154

作圖2: 若使水平投影面上之面,其相隣之一面,垂直於直立投影面時,則其投影圖較上述之作圖更形簡單。如Fig. 154所示,卽其例也。作圖之法,先作正五角形 a b c d e 爲水平投影面上之面之平面圖,由此仿傚前法,作與 a b c d e 相對之面之平面圖 p q r s t 。次將正五角形之中心 u 與 a 相結,使其與 b r 相遇於點 h,後以 u 爲中心,過 h 作圓,是即爲所求之圓。由是復依前法,而求其立體之平面圖。

次引基線垂直於 a e,而求 A B C D E 之立面圖 a'b'c'd'e'。後以 a' 爲中心過 c' 所作之圓,與由 g 所引投射線相交於點 g',則 a'g' 爲面 A E F G H 之立面圖。此時面 A E F G H 與面 K L M T S 互相平行,故面 K L M T S 之立面圖,平行於 a'g'。因此,故如圖所示之立面圖,其易求可知矣。

作圖題7. 求正二十面體之一面位於水平投影面上時之投影。

解: 正二十面體,其相對之二面必互相平行。其相對之二面之三稜中,每二稜亦必平行。因之,置其一面於水平投影面上,則與此面相對之一面之平面圖,必與水平面平行,而成相對邊平行之二正三角形。又水平二面以外之六角點,其連續所成之六角形之平面圖,爲正六角形。其外切圓之半徑,與正三角形外切圓之半徑之比,等於正五角形之對角線與其一邊之比。又其一稜,以其一端爲一角點,而與不爲稜之一面之對邊相垂直。根據上述之性質,知其立體之平面圖,可依十二面體之求法而求得。其平面圖決定後,再求其各角點之高,即可求其立面圖。

作圖1: 如 Fig. 155 所示,先於任意之位置,作正三角形 j k l 爲水平投影面上之面之平面圖。次引 j k l 之外接圓,連結弧 lj, jk, kl 之中點,而作正三角形 a b c 。此時 a b c 爲水平之面之平面圖。次求其與圓之半徑 o a 之比,等於正五角形之對角線與一邊之比之長,後即

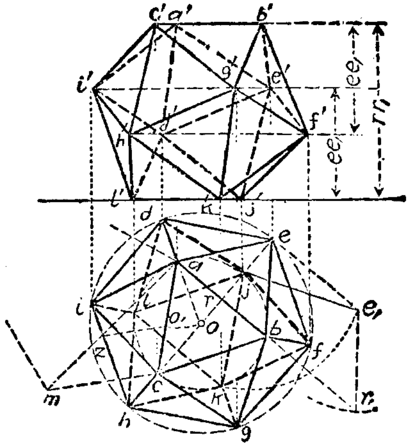


Fig. 155

以此爲半徑而作同心圓，使其與由 a,j,b,k,c,l 向圓之中心之直線相交於點 d,e,f,g,h,i。此時此六點，乃非水平之二面上之角點之平面圖。由是其立體之平面圖。不難求也。

次由 e 向 e j 引垂線，使其與 j 爲中心。j k 爲半徑所作之圓相交於點 e_1 則 ee_1 之長等於角點E,G,I,距水平投影面上之高。又 e j c，因其在一直線上且垂直於 ab，故 a b 之延長線與以 e_1 爲中心，c r 爲半徑所作之圓相交於點 r_1，此時由 r_1 至 e j 之距離 rr_1 等於 A,B,C 三點之高。又 rr_1-ee_1 之長，等於 D,F,H 之高。如上述之各角點之高既知，則其立體之立面圖可求也。

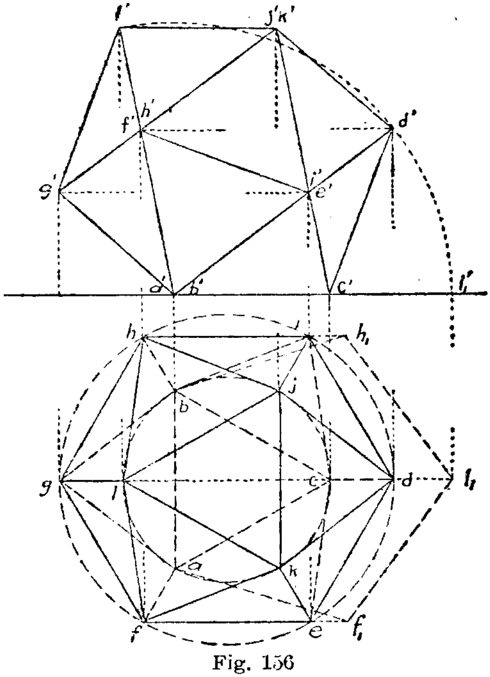


Fig. 156

作圖2: 今若置其一面垂直於直立投形影面，則本題之作圖，更形簡單，如 Fig. 156 所示，先

以 abc 爲水平投影面上之面之平面圖。而求與此面相對之平面圖 j k l。然後再求其正六角形 d e f g h i 之外接圓之半徑。至求外接圓半徑之方法,可先將 a b 爲一邊，而作正五角形 a $bh_1l_1f_1$ 由 h_1 向 a b 引垂線,及由 b 向 a c 引垂線，使其相交於點 h，此時過 h 之同心圓，卽爲正六角形 d e f g h i 之外切圓。今外切圓既得,卽可求其立體之平面圖。

次引基線垂直於 a b,則面 A B H L F,J K E C I,A B I D E,J K F G H 與直立投影面成垂直，其各立面圖應成一直線，然其長與 l_1 至 a b 之垂線之長相等。故其立體之立面圖。可如圖所示求之。

7. 圓柱及其投影

以矩形之一邊爲軸迴轉於其一週,則所成之立體,謂之圓柱(Circular Cylinder)。此時迴轉之軸,謂之圓柱之軸。垂直於軸之端所作之圓，謂之底。如 Fig. 157 所示,卽其例也。

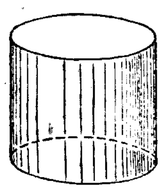


Fig. 157

本節所述之圓柱之軸,僅限於垂直投影面或平行於基線者。

如 Fig. 158 所示，乃圓柱之軸垂直於直立投影面時之投影。故其立面圖與其底爲同形之圓。其平面圖爲矩形。

如 Fig. 159 所示,乃圓柱之軸平行於基線時之投影。故其平面圖及立面圖爲同之矩形。

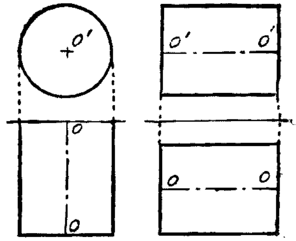


Fig 158 Fig. 159

8. 圓錐及其投影

直角三角形，以其垂直之一邊爲軸迴轉於其一週，則所成之立體，謂之圓錐(Circular cone)。此時迴轉之軸，謂之圓錐之軸。與其軸垂直之邊所作之圓，謂之底。如 Fig. 160 所示，卽其例也。

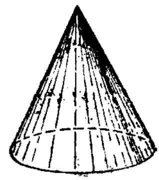


Fig. 160

此節圓錐之軸，僅限於垂直於投影面及平行於基線者誌之。

如 Fig. 161 所示，爲圓錐之軸垂直於水平投影面時之投影，故其平面圖，與其底爲同形之圓，其立面圖，爲二等邊三角形。其立面圖之高，等於其圓錐之高。

如 Fig. 162 所示，爲圓錐之軸平行於基線時之投影。故其平面圖及立面圖，爲共同之二等邊三角形。

9. 球及其投影。

將半圓以其直徑爲軸旋轉於其一週，其所生之立體，謂之球(Sphere)。半圓之中心，謂之球之中心 (Center)。其半徑，謂之球之半徑(Redius)。其球以平面切之，其切口爲圓。以含其中心之平面切之，其切口爲最大圓，通稱其最大圓，爲球之大圓(Great Circle)。

如 Fig. 164 所示，爲球之投影。球之投影，無論在若何之投影面

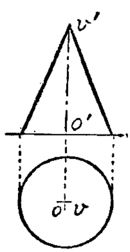


Fig. 161

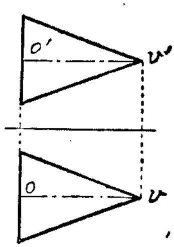


Fig. 162

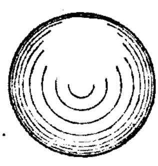


Fig. 163

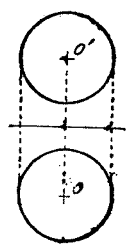


Fig. 164

上，均有等於其直徑之直徑之圓。

作圖題8. 求正四面體中內切球之投影。

解： 由正四面體之各角點，向其所對之面引垂線。其垂線上，因有內切球之中心，故其各垂線之交點，爲其球之中心。由其中心至各面垂直之距離，等於其球之半徑。

作圖： 如 Fig. 165 所示，爲面ＡＢＣ位於水平投影面上時之投影。其求法先求面ＡＣＤ之重心 P，使ＰＢ與由Ｄ向水平面所引之垂線相交於點 o 。此時 o 因爲內切球之中心，故以立面圖 o′ 爲中心，引切於基線之圓，爲所求之內切球之立面圖。是故以 o 爲中心，作與圓 o′同半徑之圓，卽爲所求之平面圖也。

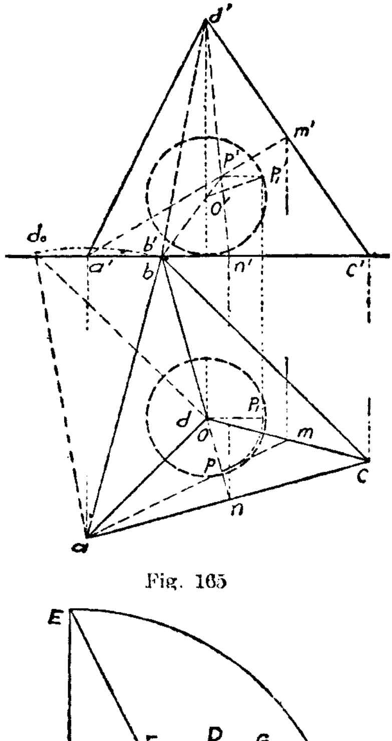


Fig. 165

10. 球之內切正多面體

內切於球之正多面體，其一邊之長，可依下法求之。

如 Fig. 166 所示，將已知ＡＢ爲球之直徑，先作ＡＢ爲直徑之半圓，次垂直於ＡＢ引半徑ＣＤ。則ＡＤ等於內切正八面體之一邊之長。

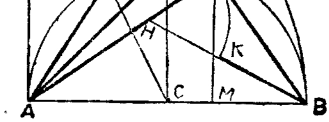


Fig. 166

次於ＡＢ上，取ＢＭ等於ＡＢ

之三分之一，由M向A B引垂線，使其與半圓相交於點G。此時A G等於內切正四面體之一邊之長，B G等於立方體之一邊之長。又於A G上，取G H等於B G之二分之一，更於B H上，取H K等於H G。此時B K等於內切正十二面體之一邊之長。

後垂直於A B作A E，使其等於A B。更引C E使其與半圓相交於點F。此時A F之長，等於內切正二十面體之一邊之長。

作圖題9. 求內切於已知球之正四邊體之投影。

如 Fig. 167 所示，過球之立面圖圓o′引垂直於基線之直徑 d′m′，於其直徑上，取 m′n′ 等於 d′m′之三分之一。由 n′ 向 d′m′ 引垂線，使其與圓 o′ 相交於點 b′，復由 b′ 引投射線，及由 o 引平行於基線之直線，使其相交於點 b 。然後以 o 爲中心，過 b 作圓。於此圓內作內切正三角形 a b c，而引 o a，o c。此時 a b c o 爲所求正四面體之平面圖。

次因 a c 垂直於基線，故其延長線與 b′n′ 相交於點 a′。而此時三角形 a′ b′ d′，即爲所求之正四面體之立面圖。

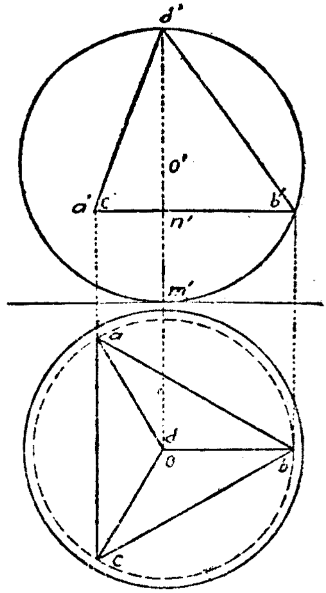


Fig. 167

作圖題10. 求內切於已知球之立方體之投影。

如 Fig. 168 所示，先過球之立面圖圓 o′，作球之直徑，使其垂直於基線。次於其直徑上，取 m′n′ 等於其三分之一，由 n′ 向 m′n′ 引

垂線，使其與圓 o′ 相交於點 k′。此時 m′k′ 等於內切立方體之一邊之長。次以 m′k′ 之長爲相等之二邊，作二等邊直角三角形 o k_1 l。後以其斜邊 o l 之長爲直徑，o 爲中心作圓 ab。此時內切於圓 a b 之正方形，是爲內切於立方體之平面圖。平面圖決定後，則其立面圖 a′b′c′d′e′f′g′h′，卽可循序求之。

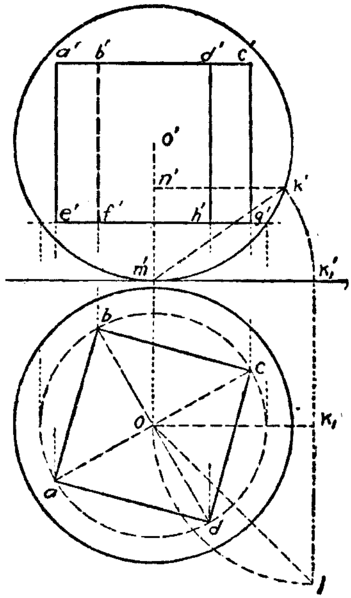


Fig. 168

練 習 題

1. 如 Fig. 169 所示，爲三個正四角柱相積之平面圖，今角柱之尺度爲 2糎×2糎×7糎時，試求其立面圖。

2. 如 Fig. 170 所示之三角形，圓，半圓，爲直圓錐，直圓柱，半球，之立面圖，試求其平面圖。

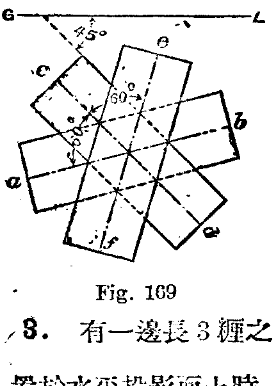


Fig. 169

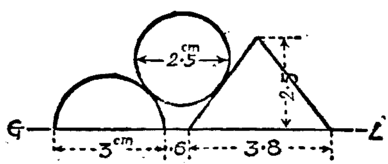


Fig. 170

3. 有一邊長 3 糎之正五角形爲底，高爲 7 糎之正五角柱。其一側面，置於水平投影面上時，試求其兩投影。然其軸與直立投影面成35°。

4. 有高為7糎,底之一邊為3糎之正五角錐。其一斜面,置於水平投影面上,其軸之平面圖與基線成30°,試求其兩投影。

5. 有高為6糎底之一邊為3糎之正六角柱。其一底面,置於水平投影面上,其一邊與基線成10°。今於其上底面之三角點上,置有角點之正四面體時,試求其投影。

6. 有高為6糎,底之一邊為 2·5 糎之正六角錐。其軸為水平,與直立投影面成20°。今底之一對角線垂直於水平面,試求其角錐之投影。

7. 有一邊長為4糎之正八面體.其一對角線垂直於水平面。他一對角線,與直立面成30°。試求其投影。

8. 有正八面體內切於直徑6糎之球。試求其投影。

9. 有正十二面體內切於直徑7糎之球。試求其投影。

10. 有正二十面體內切於直徑7糎之球。試求其投影。

11. 有一邊長為4糎之立方體。其一對角線與水平面成70°。試求其投影。

12. 有一邊長3糎之正六角形為底,高6糎之斜角柱。其底與直立投影面平行,其軸與水平面成20°,軸與底間之角為50°。試求其投影。然其一側稜向底所投之投影,與此相隣底之一邊成 20°。

13. 有一邊長 3·5 糎之正六角形為底,高6糎之斜角錐。其軸與其底成60°,而令其軸之底平面上之投影,過其底之一角點。今將其底使其平行於直立投影面,其軸與水平面成20°。試求其投影。

14. 先作直徑為7糎之球之平面圖,及立面圖。後作內切於球之立方體,其一對角線垂直於水平投影面。試求其投影。

第五章　立體之切斷面

1.　立體之切斷面

立體以平面切斷時，其平面謂之切斷平面(Section plane)。其切口謂之斷面(Section)。決定立面體斷面之投影，須於其切口上求多數之點，將其順序連結而成直線可也。關於立體斷面之作圖，可概列之如下：

(a)多面體之切口，爲多角形。故其切斷面，可求其切斷平面與多面體之各稜之交點。後將其各交點順次連結，而作成多角形可也。

(b)單曲面及捩面之切口，通常均爲曲線，故其切斷面，可求其切斷平面與面素(Element)相交之點，後將其各交點連結而成曲線可也。

(c)複曲面之切口，一般爲曲線。然複曲面之面素因其不爲直線，故求其面素與切斷平面之交點，頗爲不易。此時曲面若以平面切時，須使其曲面之切口成圓或橢圓之簡單曲線，然後再求其切口與已知切斷平面之交點。其各交點求得後，將其順序連結，作成曲面可也。

作圖題1.　有已知之直立方柱，以垂直於直立投影面之平面切之，求其切口之實形。

解：　切斷平面之直立跡與角柱各稜之立面圖之交點，爲切斷平面與稜之交點之立面圖。故其切斷面之平面圖不難求也。又切口之實形，可將切斷平面倒於投影面上，或於平行於切斷面之平面上而求其副投影可也。

作圖： 如 Fig. 171 所示，圖中，直線 d' e'爲切斷面之立面圖。四邊形 a b n d 爲其平面圖。又平行於切斷平面 t T t' 之副投影面上之投影 $e_1m_1n_1d_1$，爲其切口之實形。

作圖題2. 有已知之正八面體，以垂直於水平投影面之平面切斷，求其切口之投影。

解： 切斷平面之水平跡與八面體各稜之平面圖之交點，爲切斷平面與其稜之交點之平面圖。故依此關係，而求其立面圖可也。

作圖： 如 Fig. 172 所示，圖中，直線25爲切斷面之平面圖。六角形 1'2'3'4'5'6' 爲其立面圖。

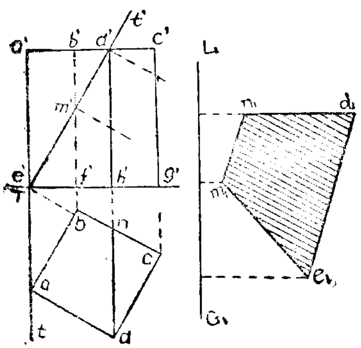


Fig. 171

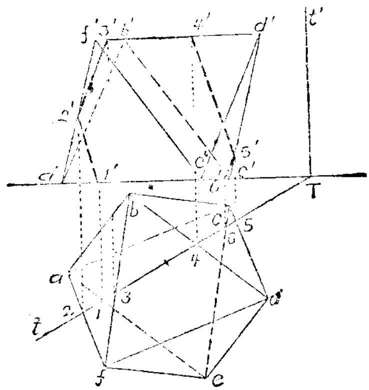


Fig. 172

作圖題3. 有已知之正八面體，以傾斜於兩投影面之平面切斷，求其切口之投影。

解： 於垂直於切斷平面之水平跡，及直立跡之副投影面上作副投影。此時各稜之副投影，與切斷平面之副投影面上之跡之相交點，爲各稜與切斷平面交點之副投影。故由此副投影，可先求其平面圖與立面

圖，而後求其切口之兩投影圖可也。

作圖： 如 Fig. 173 所示，先於垂直於切斷平面 T 之水平跡之副投影面上作副投影，次求其切口之平面圖 g h i j k l ，及立面圖 g' h' i' j' k' l' 之圖也。

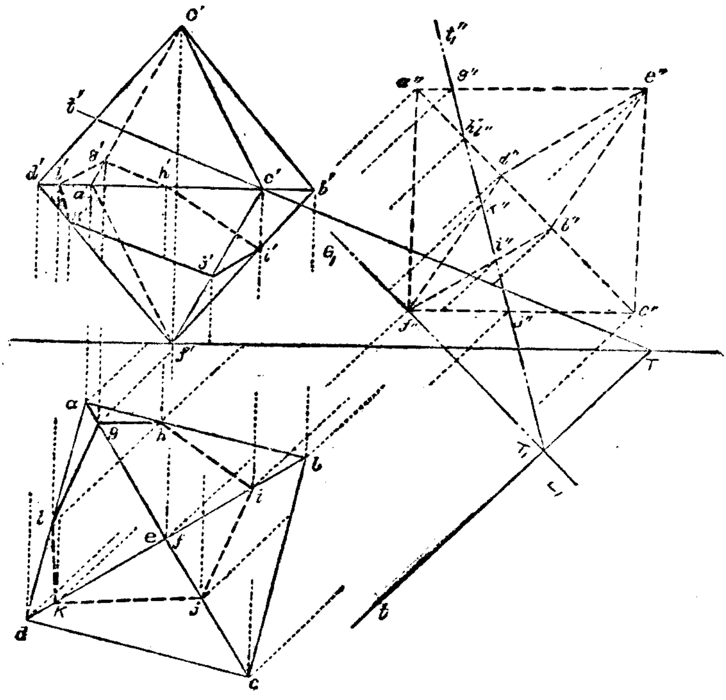


Fig. 173

作圖題4 有直立於水平投影面上之正六角柱，以傾於兩投影面之平面 T 切斷，而求其切口之投影及其實形。

解： 角柱之側稜，因其垂直於水平投影面。故易求其側稜與切斷平面之交點。後將所求之交點連結，作成多角形可也。

作圖： 如 Fig. 174 所示，先由 a 向切斷平面之水平跡 tT 引平行線 a1，使其與基線相交於點 1。由點 1 引投射線，使其與切斷平面之直立跡 Tt′ 相交於點 1′ 次由 1′ 引平行於基線之 1′m′ 使其與 a′a′ 相交於點 m′ 則 m′ 為稜 (a,a′a′) 與切斷平面 T 相交點之立面圖。同法，求得其稜與平面 T 相交點之立面圖後，將其各點連結作成六角形 m′n′p′q′r′s′，是即所求之切口之立面圖。而其切口之平面圖與角柱之平面圖 a b c d e f 相一致。次將平面 T，以其水平跡為軸，倒於水平投影面上，則得切口之實形 $m_1n_1p_1q_1r_1s_1$。

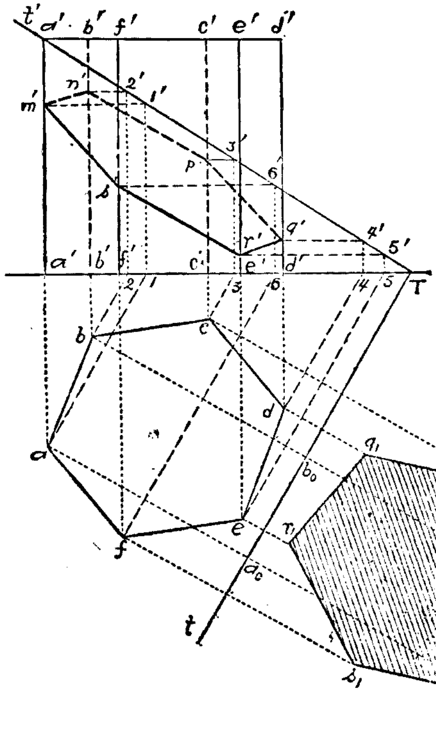


Fig. 174

作圖題5. 有一角錐，其底不在投影面上。今以傾斜於兩投影面之平面切斷，求其切口。

解： 先求含各稜之直立面與切斷平面之交跡。次求其交跡與各稜

之交點。後將其各交點順次連結而作成多角形可也。

作圖： 如 Fig. 175 所示，先求過角錐頂點之直立線與切斷平面T相交點之立面圖 o'。次求 va 或其延長線與平面T之水平跡之交點 e。再由 e 向基線引垂線，求其足 e'。此時直線 o' e'，爲含稜 V A 之直立面與平面T之交跡之立面圖。依此 o'e' 與 v'a' 之交點 a'，爲稜 V A 與平面T之交點之立面圖。同法，求得各稜與平面T之交點之立面圖，則可求其切口之立面圖 a'b'c'd'e'.

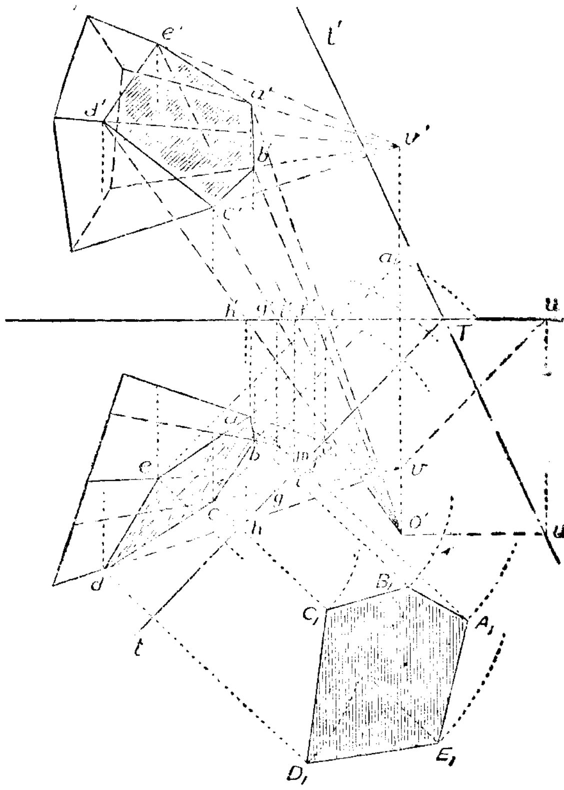


Fig. 175

次根據立面圖 a'b'c'd'e'，即可求其平面圖 a b c d e。其後將平面T倒於水平投影面上，即得其實形 $A_1B_1C_1D_1E_1$。

2. 圓錐之切口

如 Fig. 176 所示，V 爲頂點之圓錐，以平面 R 切斷，其切口爲 B A B_1。又切於平面 R，及內切於圓錐之球 o，使其與錐面之接觸線爲K L J。此時K L J 爲圓，而垂直於圓錐之軸。次含圓 K L J 之平面爲 H，使其與平面 R 之交跡爲 D N。

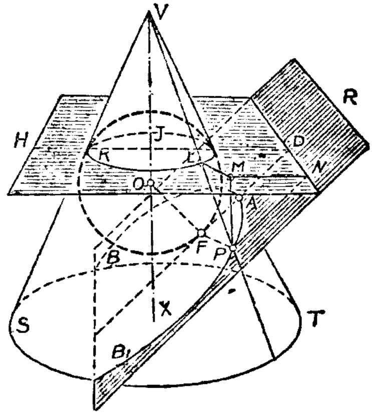


Fig. 176

由切口 B A B_1 上之任意一點P，向平面 H 及直線 DN 引垂線，使其足爲 M，N。又將 P V 相結，則 P V 爲圓錐面之一面素，故與圓K L J 相交，其交點爲 L。今置圓錐之底角爲 ϕ，二平面 R，H間之角爲 θ，卽

$$\angle PLM=\phi,\ \angle PNM=\theta$$

然三角形 PML，PMN，因均爲直角三角形，故此兩三角形，無論 P 在 B A B_1 上之任何位置，均不變其形狀。是故 PL:PM＝一定，P L:PN＝一定。然球 o 與平面 R 之切點若爲 F，則 P F，P L 因其均爲由 P 向球所引之切線，故 PF＝PL：因知 PF:PN ＝一定。而 P N 對於切口 B A B_1 爲定直線，又 F 爲定點，故曲線 B A B_1 爲橢圓，拋物線或雙曲線，諸曲線中之一形。然平面 R，因其垂直於 V X，故其切口爲圓，若含其軸則爲直線。此時 F 爲焦點，D N 爲導線。

如 Fig. 177 所示，$\theta=\phi$ 時，若 PL＝PN，則其切口爲拋物線。又如 Fig. 152 所示 $\theta<\phi$ 時，若 PL<PN，則其切口爲橢圓形。又如 Fig. 153 所示，$\theta>\phi$ 時，若 PL>PN，則其切口爲雙曲線。

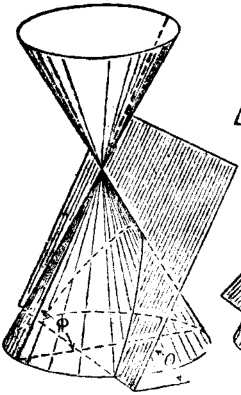


Fig. 177

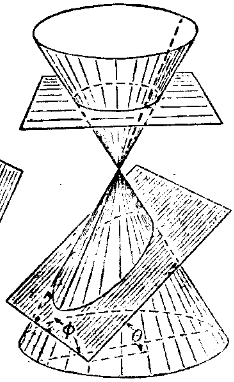


Fig. 178

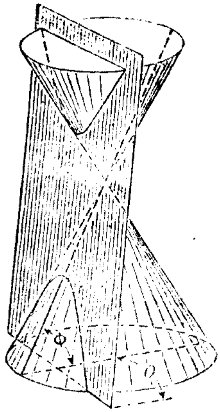


Fig. 179

3. 求圓錐切口之實形之方法

如 Fig. 180, Fig. 181, Fig. 182 各圖所示，爲其軸平行於直立投影面之圓錐，以垂直於直立投影面之平面切斷而求其切口之圖也。

今 Fig. 180 爲橢圓，Fig. 181 爲拋物線，Fig. 182 爲雙曲線。

Fig. 180 之 DD_1，爲切斷平面之直立跡，而與 V R，V S 之交點爲

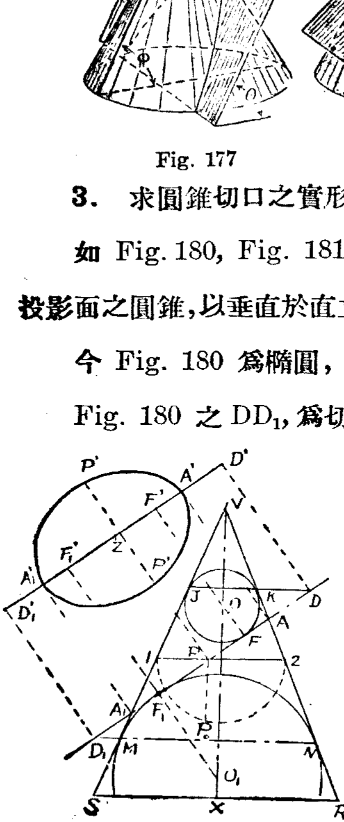


Fig. 180

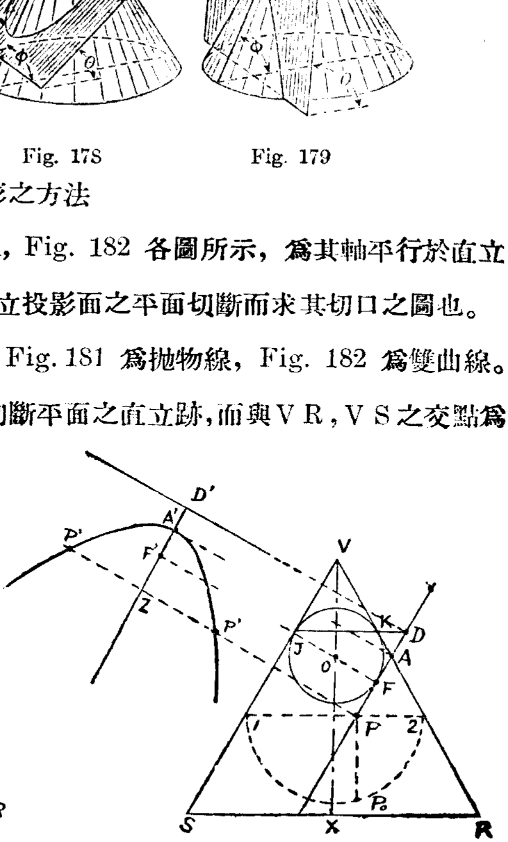


Fig. 181

A, A_1。又切於 V R , V S , DD_1 三線作圓 o, o_1 使其與 DD_1 相交於點 F,F_1。此時以 AA_1 爲長軸，F,F_1 爲焦點所作之橢圓，乃其切口之實形。本圖之作，因避圖之混雜，將 DD_1 移至於適當之位置 $D'D'_1$ 處所作之圖也。是卽以 $A'A'_1$ 爲長軸，F',F'_1 爲焦點，DD', $D_1D'_1$ 爲導線，曲線 $A'P'A'_1$ 爲切口之實形之橢圓。

又另一作法，先引垂直於軸 V X 之任意直線 12，使其與 V S , V R 相交於點 1, 2。卽以 12 爲直徑，引圓 $1P_02$。次由 12 與 DD_1 之交點

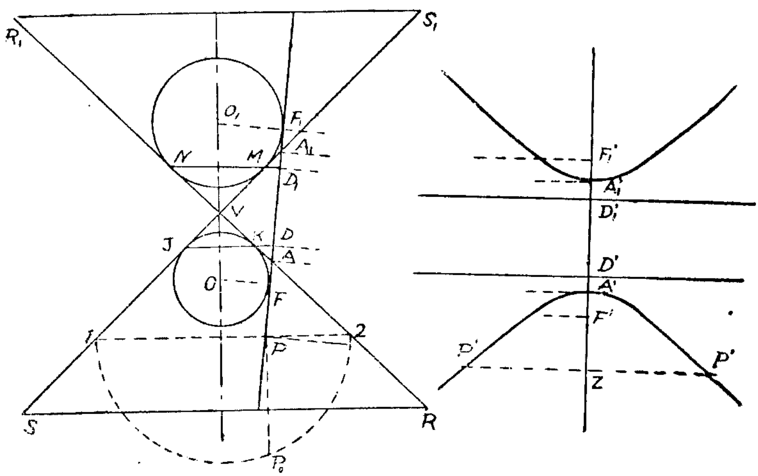


Fig. 182

P, 向 12 引垂線，使其與圓 $1P_02$ 相交於點 P_0。更由 P 向平行於 DD_1 之直線 $D'D'_1$ 引垂線，其足爲 Z 。此時於 P Z 上，取 ZP' 等於 PP_0，其點 P' 卽爲橢圓上之點。同法，求得其橢圓上之各點，將其連結作成曲線，卽爲所求之切口之實形也。

次 Fig. 181, Fig. 182 之作圖，與上述之作圖大致相同，故略其

說明。

4. 圓柱之切口

圓錐之頂點，由其底漸漸及遠使其至無限遠之距離時，則其極限之圓錐而成圓柱。故圓柱以平面切斷之切口，與圓錐之切口同。然圓柱之切口，不形成拋物線形或雙曲線形，而形成直線，圓，橢圓等形。

作圖題6. 圓錐面之投影爲已知，求其與投影之相交跡。

解： 圓錐之切口，一般知其爲橢圓形，拋物線形，或雙曲線形，故僅求其焦點及軸之長可也。

作圖： 如 Fig. 183 所示，爲圓錐之軸平行於直立投影面時，而求其水平跡之圖也。其作法，先引切於立面圖之外廓線 a′ v′ b′，及基線之圓 o′，使其與基線相切於點 f′。此時圓 o′ 內切於圓錐，而爲切於水平投影面之球之立面圖。f′ 爲球與水平投影面之切點之立面圖。次由 f′ 引投影線，

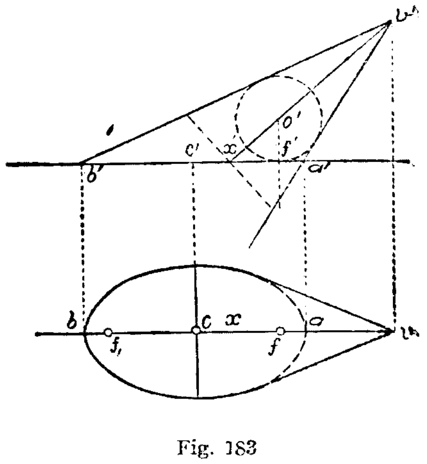


Fig. 183

使其與軸之平面圖 v c 相交於點 f，則 f 爲圓錐之水平跡之一焦點。又由 v′a′，v′b′ 與基線之交點 a′，b′ 引投射線，使其與 v c 相交於點 a，b。此時 a b 爲圓錐之水平跡之軸。本圖中，因其形成橢圓，此橢圓以 f 爲一焦點，a b 爲長軸。是卽所求之水平跡也。

如 Fig. 184 所示，爲圓錐之軸，傾斜於兩投影面之圖也。其求法與

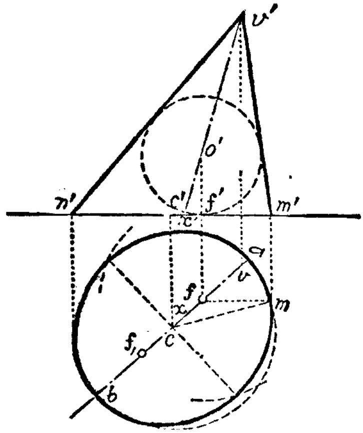


Fig. 184

前圖同。其法，先求其焦點之平面圖f。次由圓錐之立面圖之外廓線 v'm' 與基線相交之點m'，向基線引垂線m'm。更由 f 向 m'm 引垂線 f m。又由m'n'之中點 c' 引投射線，使其與軸之平面圖相交於點 c 。此時 c 爲圓錐之水平跡之橢圓中心，c m 之長等於橢圓長軸之半。故於 v c 上取 c a，c b 等於 c m，而作 a b 爲長軸之橢圓。則此橢圓，即爲所求圓錐之水平跡。

作圖題7. 已知圓柱面之投影，求其投影面之交跡。

求圓柱面與投影面交跡之作圖法，與前題求圓錐面與投影面之交跡同。如 Fig. 185 所示，乃求圓柱面之軸平行於直立投影面時之水平

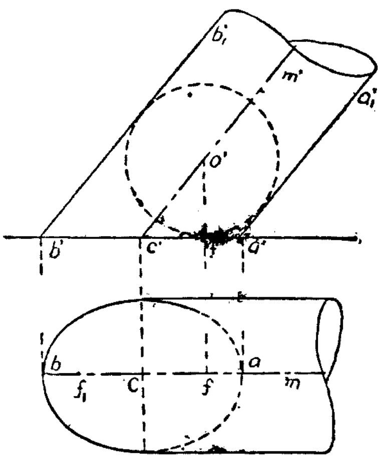


Fig. 185

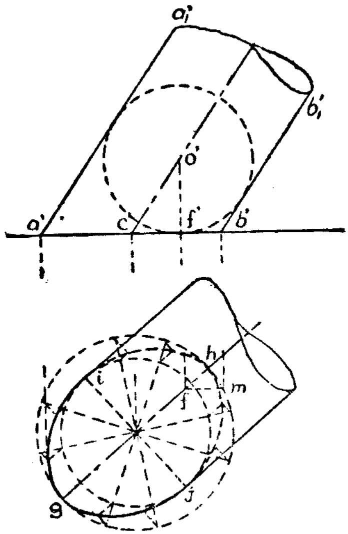


Fig. 186

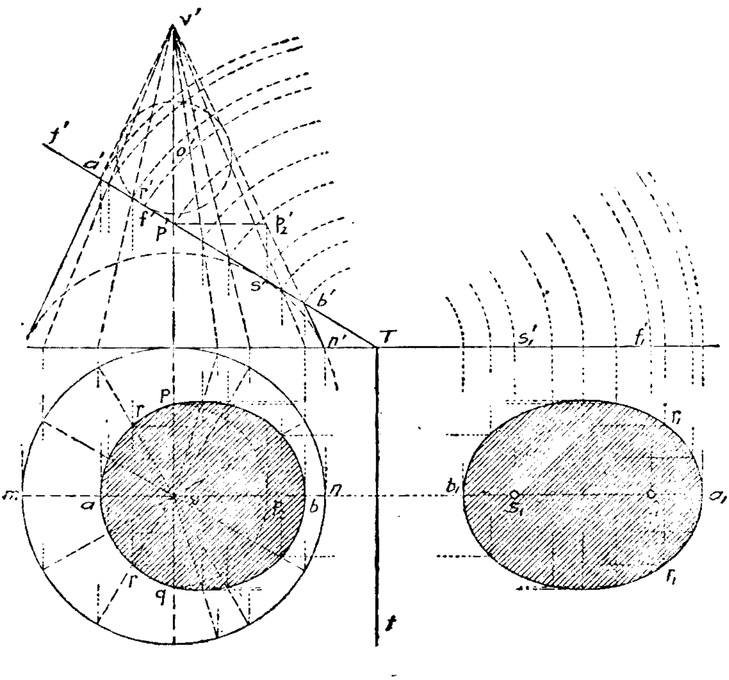
跡，Fig. 186 所示，乃求圓柱面之軸，傾斜於兩投影面時之水平跡也。

作圖題8. 有軸垂直於水平投影面之圓錐，以垂直於直立投影面之平面切斷。求其切口之投影及其實形。

解： 先引多數圓錐面之面素(Element)，而求其與切斷平面相交點之投影。此時各交點相結所成之曲線。即爲所求之切口之投影。又求切口之實形，須將切斷平面，倒於水平投影面上求之可也。

作圖： 下列之 Fig. 187, Fig. 188, 乃就其大要所作之圖也。

作圖題9. 有置其底於水平投影面上之錐體，以傾斜於兩投影面之平面切斷時，求其切口之投影。



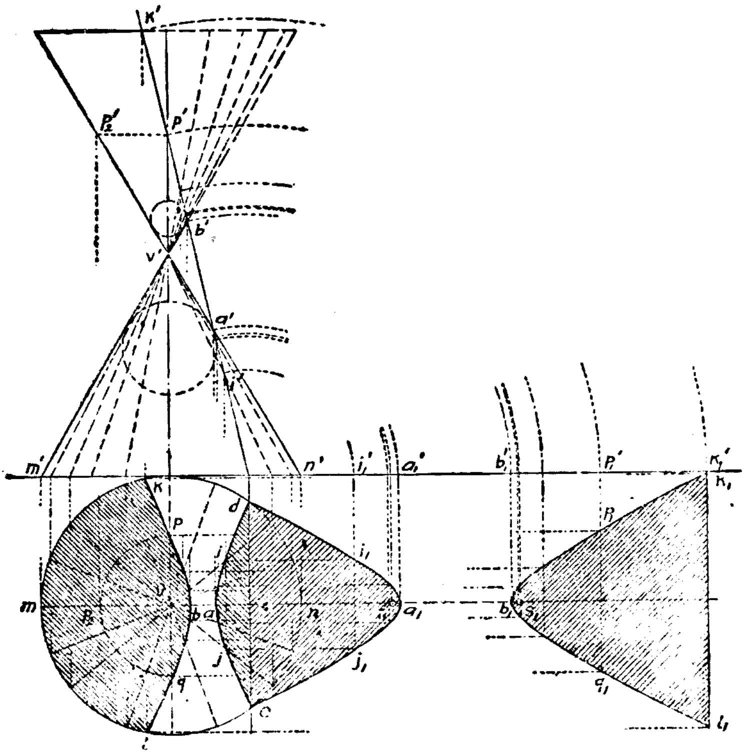


Fig. 188

解： 先引多數錐面之面素，而求其與切斷平面相交之點可也。

作圖： 如 Fig. 189 所示，圖中作任意之面素 v1, v′1′，而求含此直立面與切斷平面 T 之交線 gh, g′h′。此時 gh, g′h′ 與 v1, v′1′ 之交點 a′a′，即爲所求之切口上之一點。同法，再求其他之點將其連結作成曲線 alfe, a′1′f′e′，即爲所求之投影。

作圖題10. 有置其軸平行於基線之直圓錐，以傾斜於兩投影面之平面切斷時，求其切口之投影及其實形。

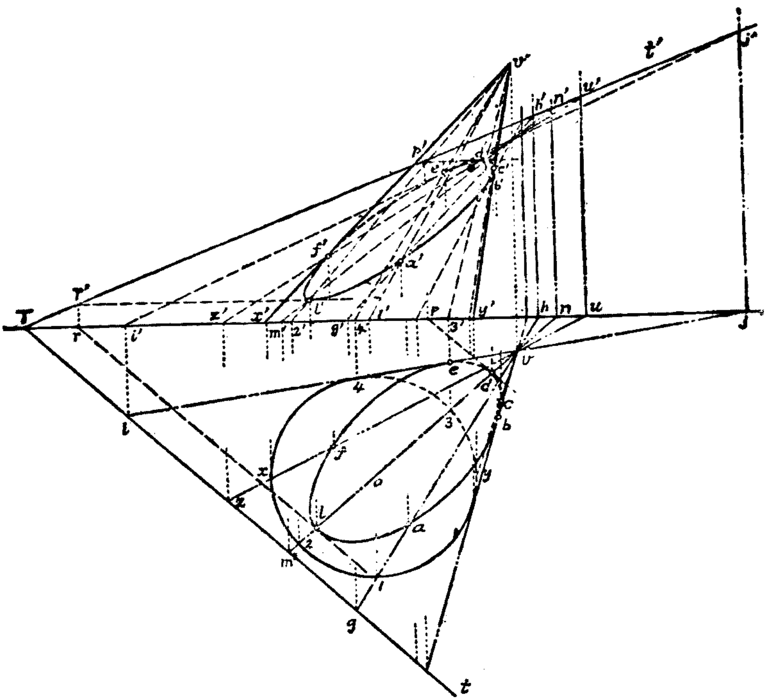


Fig. 189

解： 引面素而求其與切斷平面之交點。將其各交點相結作成曲線,即爲所求之投影。又切口之實形，可將其切斷平面倒於水平投影面上求之卽得。

作圖： 如Fig. 190 所示,卽其大要之圖也，

作圖題11. 有傾斜於兩投影面之角柱,以傾斜於兩投影面之平面切斷時,求其切口之投影。

解： 先求角柱之稜與切斷平面之交點。次將其各交點相結作成多

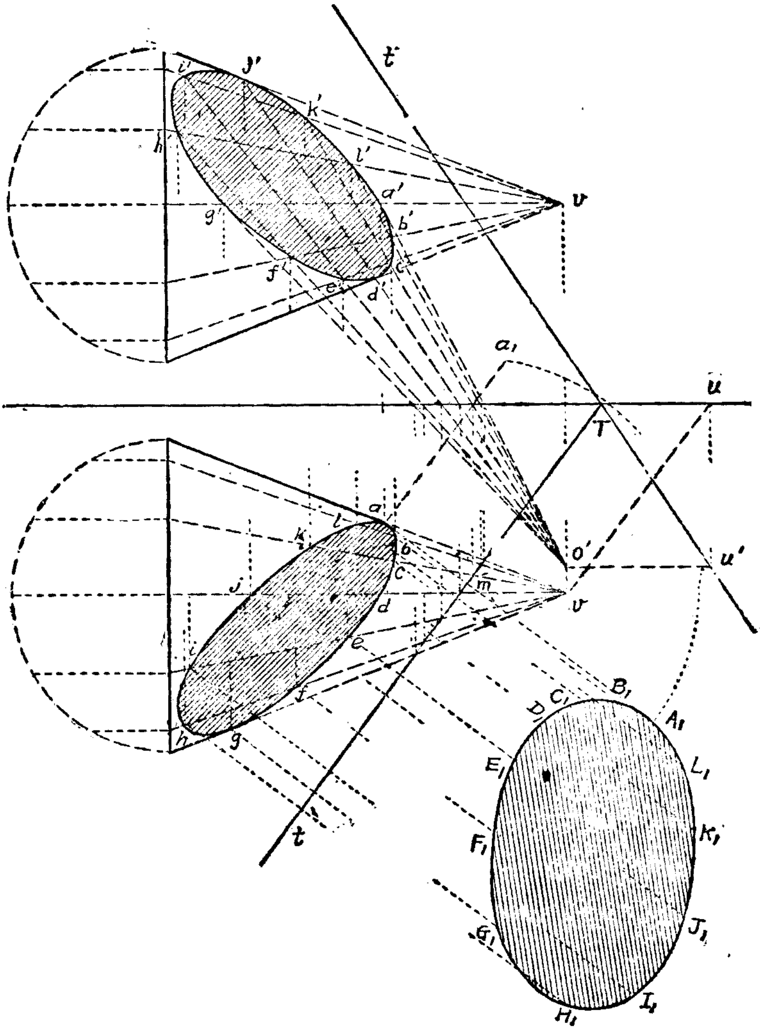

t'
i'
j'
k'
h'
l'
a'
v
g'
b'
c'
f'
e'
d'
a₁
u
T
a
l
k
b
o'
u'
c
j
m
d
v
e
i
B₁
C₁
D
A₁
f
h
g
E₁
L₁
F₁
K₁
t
G₁
J₁
H₁
I₁

Fig. 190

角形，即爲所求之投影。求稜與切斷平面之交點，須求含稜之直立面與切斷平面之交跡方可易求其交點。此時若求平行於稜之直立面與切斷平面之交跡，則作圖上，益形便利。

作圖題12. 有置其底於水平投影面上之柱體，以傾斜於兩投影面之平面切斷，求其切口之投影。

其求法與前題大致相同，亦必求得其面素與其切數平面之交點方

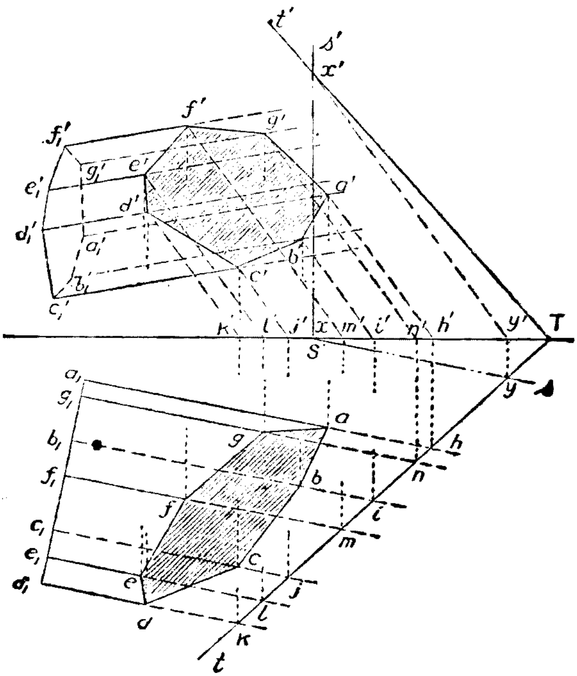


Fig. 191

可。其作圖之說明,茲免重複從略。如 Fig. 192 所示,乃其大要圖也。

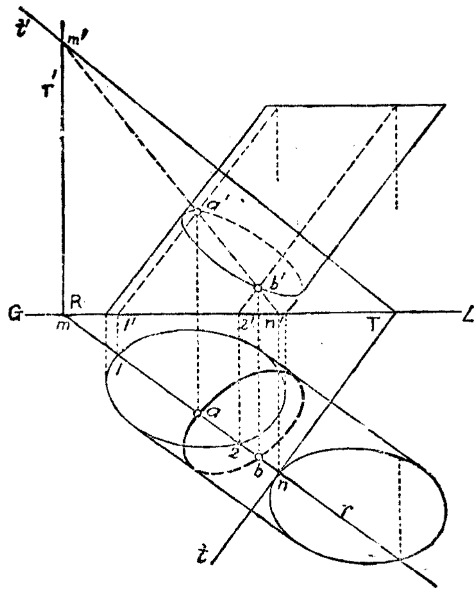


Fig. 192

作圖題13. 今有其軸垂直於水平投影面之廻轉體,以傾斜於兩投影面之平面切斷。求其切口之投影。

解: 其立體之軸垂直於水平投影面,故以水平面切之,其切口爲圓。依此關係,則所求之切口上之點,不難求也。

作圖: 如 Fig. 193 乃示平行於水平投影面之任意平面 H_1 切已知之立體,而求其平面圖之圓 12。又求平面 H_1 與切斷平面 T 之交跡之平面圖 p i 。此時圓12與直線 p i 之交點 f, i, 即爲所求之切口上二點之平面圖。又由 f, i 引投射線,使其與平面 H_1 之直立跡 H_1 H_1 相交於點 f', i', 則 f', i' 爲其立面圖。同法,求其切口上諸點之投影,將其

連結而成曲線 e f g k，e′f′g′k′，即爲所求之切口之投影。

切口之投影，如欲得其正確，可如下法求之：

(i)切口上之最高點與最低點：

最高點與最低點，含廻轉體之軸，而位於垂直於切斷平面之水平跡之平面上。故以含其軸

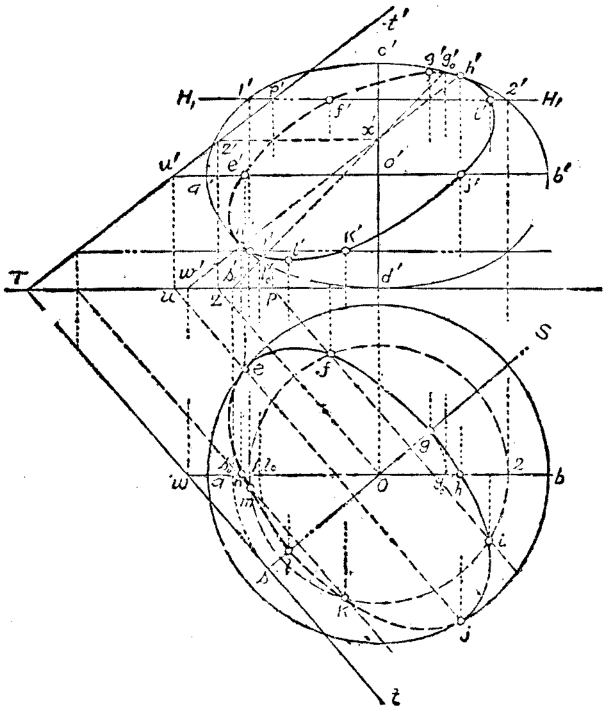


Fig. 193

而垂直於平面 T 之水平跡之平面 S 切平面 T 及其立體。將其所得之切口廻轉於其軸之周，使其與直立投影面平行。此時立體之切口之立面圖與立體之立面圖相一致。依此則廻轉後之平面 T 之切口立面圖 $x'S_0'$ 與立體之立面圖所交之點 g_0'，l'_0 爲最高點與最低點之廻轉後之立面圖。後將廻轉平面 T 復歸原有之位置，則得所求之立面圖 g′，l′ 及平面圖 g，l。

(ii)立體平面圖之外形線上之點：

求立體平面圖之外形線上之點時，可將立體切口之平面圖，以立體

平面圖之外形線之平面切之可也。此圖中之立體，因其爲橢圓廻轉體，故以含立體中心之水平面切之，即得所求之點 e, e′, j, j′。

(iii)立體立面圖之外形線上之點：

求立體立面圖之外形線上之點，可將立體切口之立面圖，以立體立面圖之外形線之平面切之可也。此圖中之立體，若以含立體之軸，而平行於直立投影面之平面切之，即得所求之點 n,n′, h,h′。

作圖題14.　有一軸垂直於水平投影面之橢圓體，以傾斜於兩投影面之平面切之，求其切口之投影。

解：　水平面切得橢圓體之切口，與橢圓體之平面圖爲相似形。故所求之切口上之點不難求也。

作圖：　如 Fig. 194 所示，圖中 a b ,c d 爲已知之橢圓體之平面圖。其 a′b′, e′ f′ 爲其立面圖。今橢圓體以任意之水平面 H_1 切之，其立面圖爲直線 m′ n′。次由 m′,n′ 引投射線，使其與 a

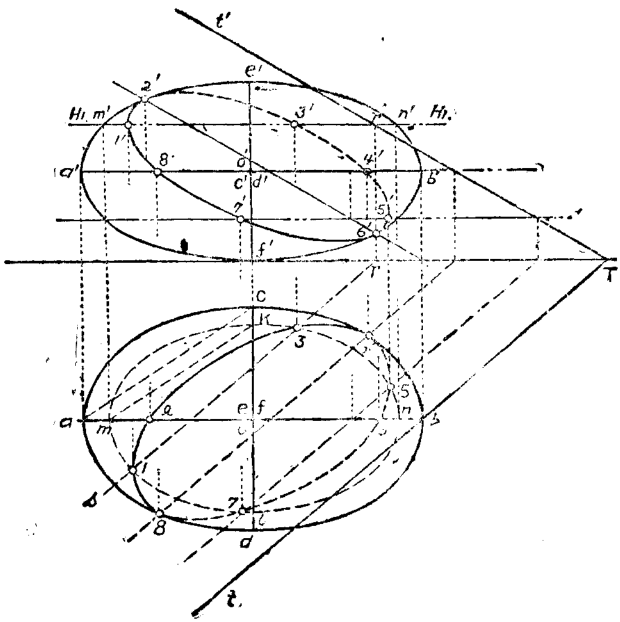


Fig. 194.

b相交於點 m, n。更由m引平行於 a c 之平行線，使其與 c d 相交於 k。此時短軸 k l，長軸m n之橢圓，爲水平面H_1所切得之切口之平面圖。次求平面H_1與切斷平面T相交跡之平面圖 r s，及 r s 與橢圓m k n l 之交點 1,3。此時 1,3 爲所求之切口上二點之平面圖。更由此引投射線，使其與 m'n' 相交於點 1', 3'。則點 1',3' 爲其立面圖。同法，求得切口上之各點，將其連結所成之曲線，即爲所求之投影。

作圖題15.　求已知之立體與直線之交點。

解：　以含已知直線之任意平面切已知之立體，而求其切口與直線之交點。此交點，即爲所求之點。若已知之立體爲多面體時，應以垂直於投影面之平面切之。又已知之立體爲錐體或柱體時，應以切口爲直線之平面切之。又球體因其切口始終爲圓，故應以垂直於投影面之平面切之。又切口爲橢圓形之立體，如作切口之投影，可作含切口之水平跡爲圓之柱面，而切其柱面與直線之交點可也。

作圖1：　如 Fig. 195 所示，乃求四面體A B C D與直線M N之交點圖也。作圖之法，用含直線M N之直立面切之，而求其切口之投影 1234 及 1'2'3'4'。今此兩投影與 m n, m' n' 所交之點 p, p', q, q'，即爲所求之點。

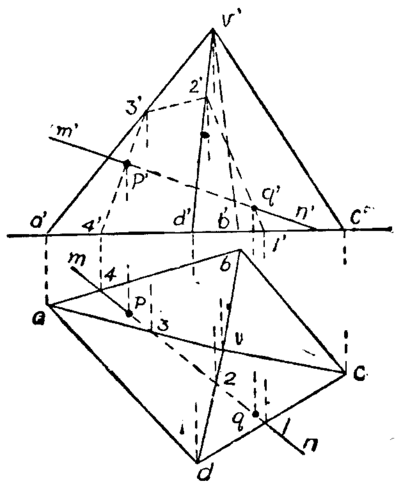


Fig. 195

作圖2：　如 Fig. 196 所示，

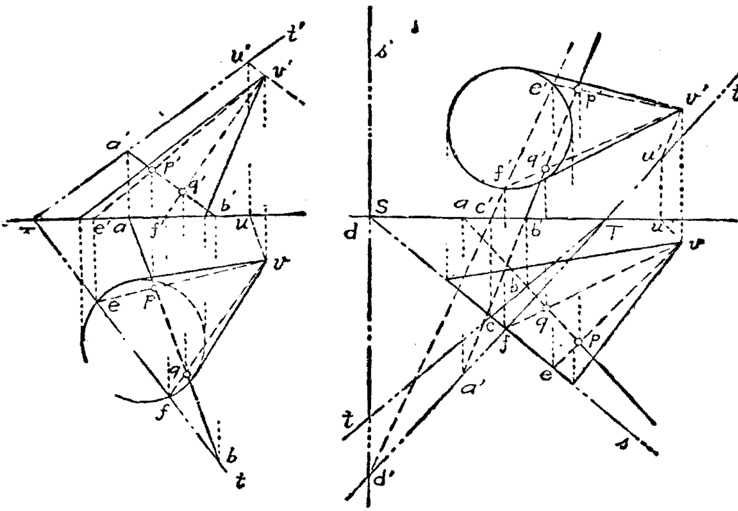


Fig. 196

乃求錐體與直線交點之圖也。圖中，以含已知之直線ＡＢ及錐體之頂點Ｖ之平面切之，其切口爲直線。故切口之直線ＶＥ，ＶＦ與ＡＢ所交之點 P,Q, 卽爲所求之點。

作圖3：　如 Fig. 197所示，乃求柱體與直線之交點圖也。圖中，以含已知之直線ＡＢ且平

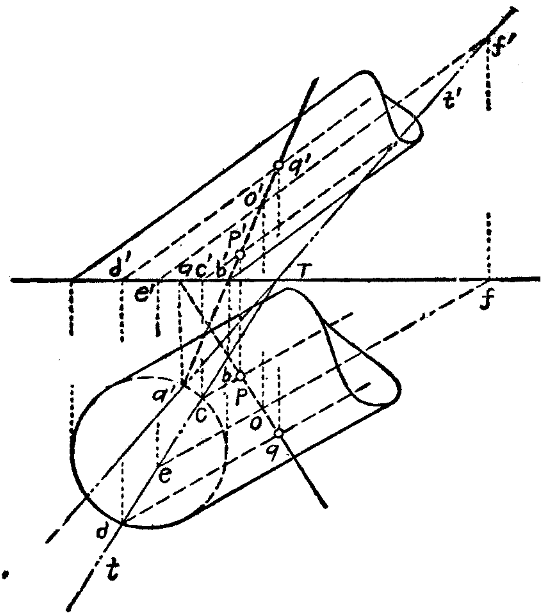


Fig 197

行於柱面之軸之平面T切之，而求其切口CP，DQ，與AB之交點P，Q。

作圖題16. 由已知之二點A,B，求其距離之比爲2:1之點於直線MN上。

解： 先由二點A，B求其距離之比爲2:1之點之軌跡，後求其MN之交點可也。

作圖： 如Fig. 198所示，將AB以2:1之比內分或外分，而求其內分或外分之點K,L。次以KL爲直徑作球。此時其球面，乃由A，B之距離之比爲2:1點之軌跡也。故球與MN之交點P,Q,即爲所求之點。

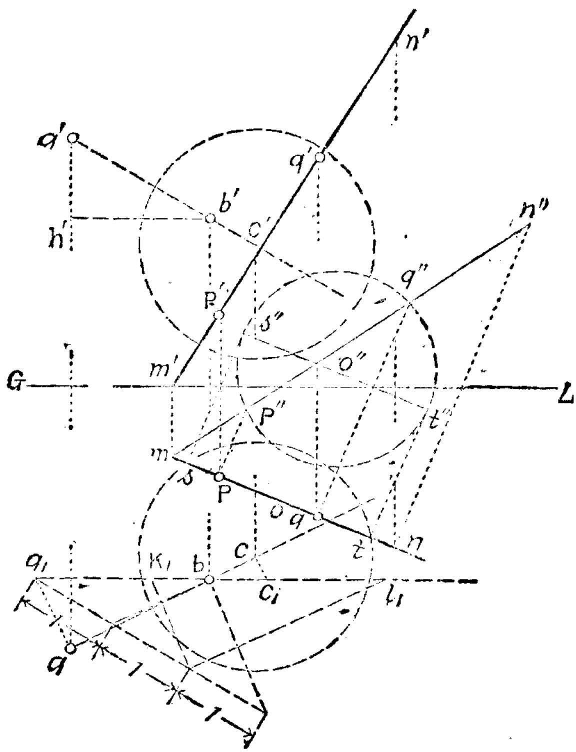


Fig 198

作圖題17. 由已知二點A，B而於平面T上，求其距離爲$d_1:d_2$之點。

解： 先求距A,B爲$d_1:d_2$之點之軌跡，次求其與

平面T之相交跡。此相交跡，卽爲所求之點。

作圖： 如 Fig. 199 所示，圓 a″,b″,以A，B爲中心，d_1,d_2 爲半徑所作之球之立面圖。其副投影面爲平行於A B之直立面。c d，c′d′乃

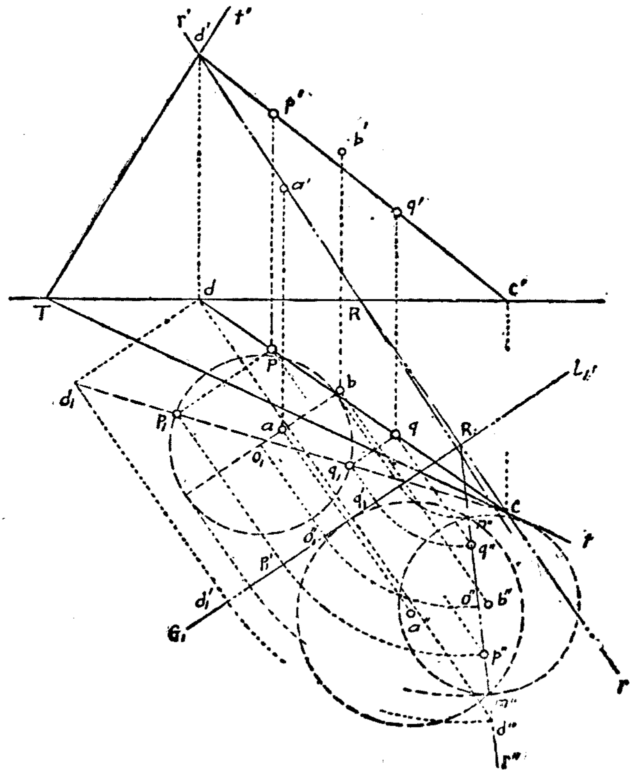


Fig. 199

含球A,B之相交跡之平面 rRr′ 與平面 tTt′ 之相交跡。故點(p,p′)(q,q′)，卽爲所求之點。

5. 球面三角形

先作一球，以含球之中心三平面切之，依其各切口所圍成之球面之

部分,謂之球面三角形。如 Fig. 200 所示,圖中O為中心之球面,以三平面 AoB, BoC, CoA 切之,其切口為$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CA}$。而球面 A B C 為球面三角形。此時A處$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{CA}$之切線間之角。等於平面 AoB, CoA 間之角。同法,B處切線間之角等於平面 AoB, BoC 間之角。又C處切線間之角等於平面 BoC CoA 間之角。今為說明之便利計,設其角為 A, B, C。又設 $\angle$BoC, $\angle$CoA, $\angle$AoB 為 α, β, γ。此時 A, B, C 為球面三角形之頂點。

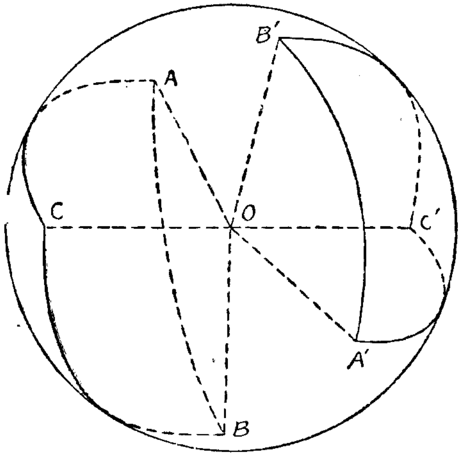


Fig. 200

次引垂直於平面 BoC, CoA, AoB 之半徑 oA′, oB′, oC′ 而作A′, B′,C′ 為頂點之球面三角形 A′B′C′。此時 A′,B′,C′ 處之角,為角 A′,B′, C′。又設角 B′oC′, C′oA′, A′oB′ 為 α',β',γ'。而得下列之關係:

$$\angle A+\angle\alpha'=180°$$

$$\angle A'+\angle\alpha=180°$$

$$\angle B+\angle\beta'=180°$$

$$\angle B'+\angle\beta=180°$$

$$\angle C+\angle\gamma'=180°$$

$$\angle C'+\angle\gamma=180°$$

如 Fig. 201 所示，a b c 乃O爲中心之球面三角形之平面圖。a' b'c' 爲其立面圖。今邊 A C，因其位於水平投影線上，故 ∠aoc＝∠B。次由 b 向 o a 引垂線，其足爲n，由 b 向 b n 引垂線 b b_3，使其等於B之高 b'h，此時 $\angle b_3nb=\angle A$。更於 n b之延長線上取nb_4等於 nb_3 則$\angle nob_4=\angle\gamma$。同法，可求得∠C，∠$\alpha$。

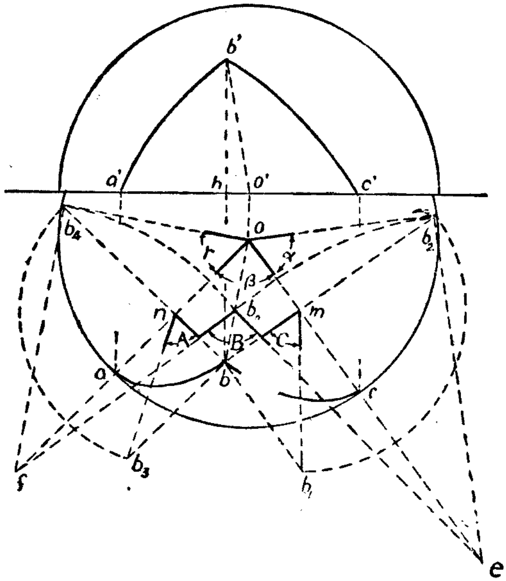


Fig. 201

次由 b_4 向ob_4 引垂線，使其與 o n 之延長線相交於點 f，則 f 爲於B處$\overset{\frown}{BA}$之切線之水平跡。同法，再於 B 處求$\overset{\frown}{BC}$之切線之水平跡 e 。後以 f 爲中心，f b_4 爲半徑作圓弧，使其與 o b 相交於點 b_0，則 $\angle eb_0f=\angle B$

6. 雜題

1. 如 Fig. 202 所示，爲其軸垂直於水平投影面之圓環，以傾斜於兩投影面之平面切之，而求其切口之投影圖也。

2. 如 Fig. 203 所示，爲其軸垂直於水平投影面之單雙曲線廻轉體，以傾斜於兩投影面之平面切之，而求其切口之投影圖也。

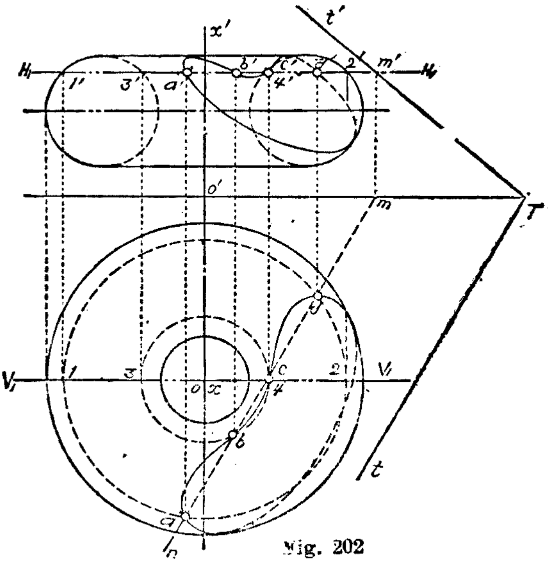


Fig. 202

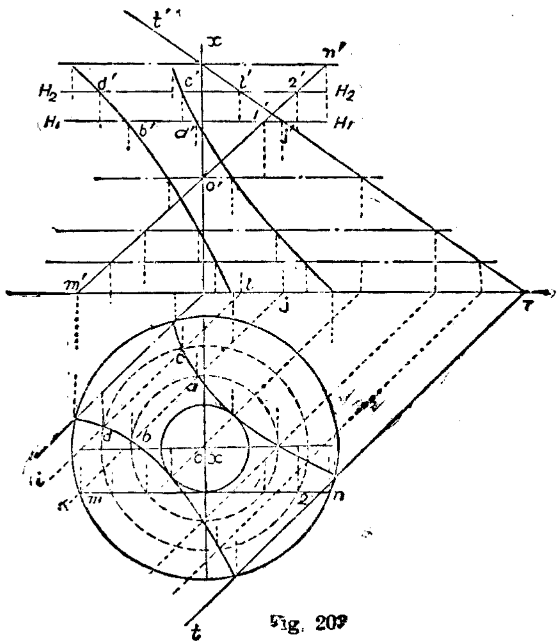


Fig. 203

3. 如 Fig. 204 所示,爲水平直線切觸於直線 MN 及直立圓錐,

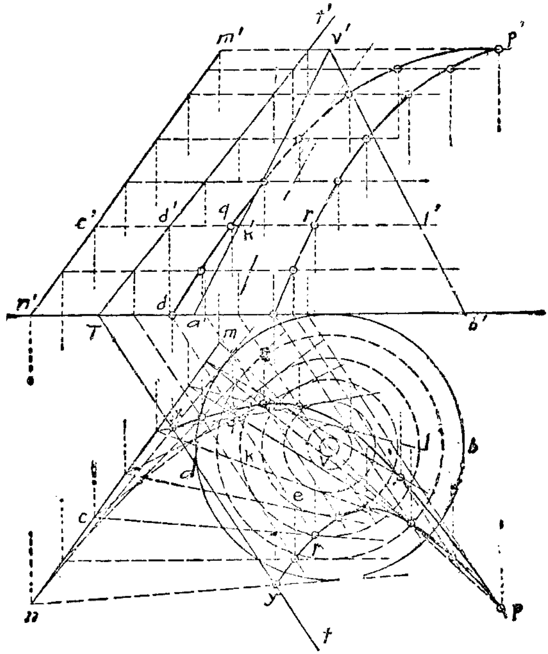


Fig. 204

當其直線移動時,以動直線所作之曲線切以平面 T ,而求其切口投影之圖也。

練習題

(1)有頂角爲60°之圓錐,其軸與水平投影面成20°,其頂點位於水平投影面之上 3 糎處。試求其曲面之水平跡。

(2)如 Fig. 205 所示,爲一廻轉體,以垂直於直立投影面之平面 T 切之,試求其切口之平面圖及其實形。

(3)如 Fig. 206, Fig. 207 所示之各立體，以平面T切之，試求其切口之平面圖及其實形。

(4)與直立投影面成30°之水平圓柱（直徑4糎），切以平面。其平面與水平投影面成60°，直立投影面成50°。試求其切口之投影及其實形。

(5)直角柱之底為一邊長3糎之正六角形，其底之一邊AB,位於水平投影面上面與基線成45°。今含AB之側面與水平投影面成70°時，切以平面，其平面與水平投影面成60°與直立投影面成50°試求其切口之投影。

(6)如 Fig. 208 所示，為球O切以平面T，試求其切口之投影及其實形。

(7)如 Fig. 209 所示，

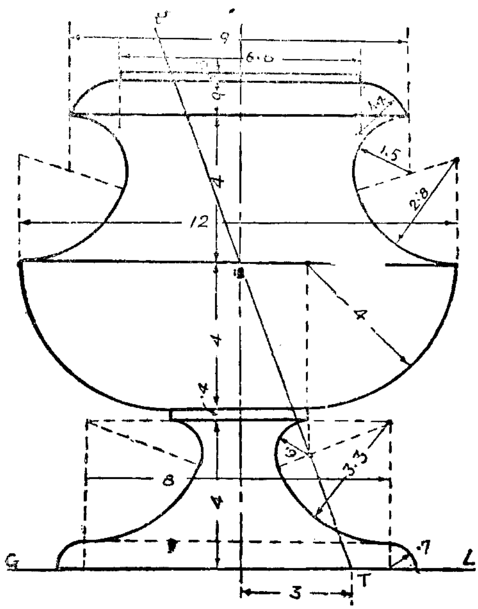


Fig. 205

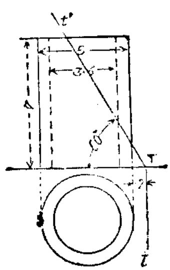


Fig. 206

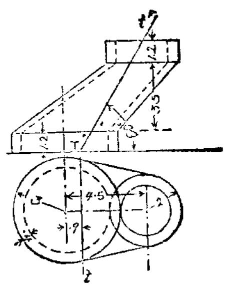


Fig 207.

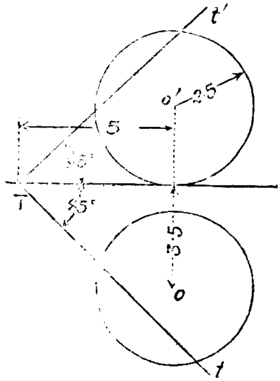


Fig. 208

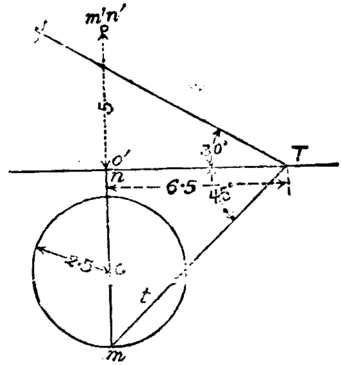


Fig. 209

以直線MN與水平投影面上之圓O爲導線之直錐狀面，切以平面T。試求其切口之投影及其實形。

(8)有與水平投影面成 45° 與直立投影面成 30° 之直線 AB，與基線間之最短距離爲 2 糎。又有與水平投影面成 45° 與直立投影面成 60° 之平面 T。今 A B 與基線間之線分爲 3 糎，試求平行於平面 T 之直線之投影。

(9)球面三角形，其角 α，β，γ 爲已知，求角 A,B,C。

(10)球面三角形，其角 α，β，C爲已知，求角 γ，A,B。

第六章　曲面

1.　柱面

一直線,接觸於他一曲線,使其始終保持平行移動時,其動直線之軌跡,謂之柱面(Cylinderical surface)。如 Fig. 210 所示,乃AB為導線所成之柱面之圖也。其柱面,因平行於各直線之面素,故接近二面素,應在一平面上。凡似此曲面,通屬於單曲面。又一直線,迴轉於與此平行之他直線之周時,其所生之柱面,謂之圓柱面 (Circular conical surface)。

2.　柱體

如 Fig. 211 所示,導線為圓或橢圓之閉曲面之面柱,及與此相交之二平行之平面,其所圍成之立體,謂之柱體(Cylinder)。

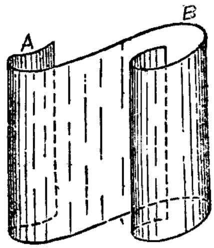


Fig. 210

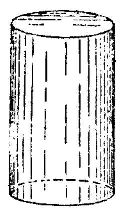


Fig. 211

此時二平行平面,與柱面之交切線所成之平面形,謂之柱體之底。二底間垂直距離之高,謂之柱體之高。二體之重心所結之直線,謂之軸。其軸垂直於底者,謂之直柱體(Right cylinder)。其不垂直者,謂之斜柱體(Oblique cylinder)。

柱體之曲面為圓柱面者,謂之圓柱,(Circular cylinder)。其軸垂直於底者,謂之直圓柱(Right circular cylinder)。其不垂直者,謂之斜圓柱(Oblique circular cylinder)。

3. 錐面

一直線過一點V且接觸於他一曲線AB而移動時，其動直線之軌跡，謂之錐面(Conical surface)。其點V，謂之頂點。參照 Fig. 212。此時曲面，因其各直線面素聚會於其頂點，故接近二面素恆在一平面上。似此曲面，亦屬於單曲面。

又一直線與他一直線相交，以他一直線爲軸，而旋轉於其周時，則所生之錐面，謂之圓錐面 (Circular conical surface)。

錐面，如 Fig. 213 所示，其頂點之兩側爲對稱形之二曲面，此等曲面，謂之拉帕(Nappe)，即對頂錐面。

4. 錐體

由一拉帕之錐面與其相交之一平面所圍成之立體，謂之錐體(Cone)。圍成錐體之二面，其相交所成之平面形，謂之底。參照 Fig. 214。錐體之頂點與其底之重心相結之直線，謂之軸。其軸垂直於底者，謂之直錐體(Right cone)。其不垂直者，謂之斜錐體 (Oblique cone)

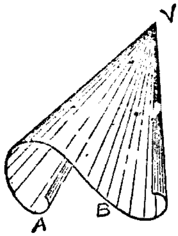


Fig. 212

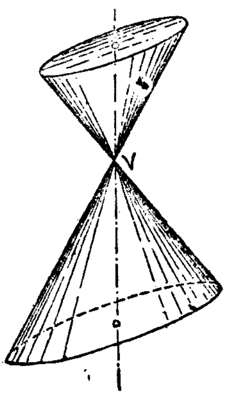


Fig. 213

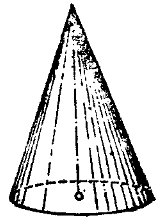


Fig. 214

又由其頂點至其底垂直之距離，謂之錐體之高。

錐體之曲面為圓錐面者，謂之圓錐。其軸垂直於底者，謂之直圓錐。其不垂直者，謂之斜圓錐。直圓錐之底為一圓，其圓之半徑為底之半徑。又母線與底所成之角，謂之直圓錐之底角。其在一子午面上直線面素間之角，謂之頂角。

錐體以平行二平面截斷時，其二平面間之部分，謂之截頭錐(Frustum of cone)。如 Fig. 215 所示，即此例也。

又錐體以不平行二平面截斷時，其二平面間之部分，謂之斜截頭錐(Truncated frustum of cone)。

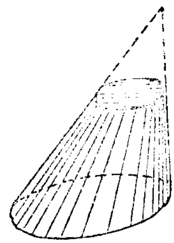


Fig. 215

作圖題1. 軸之長，底之半徑，及軸與水平投影面所成之角 θ 均為已知，求作直圓錐之投影。

解： 置其軸平行於直立投影面，則圓錐之立面圖，為二等邊三角形。由此，則其立面圖，可易求也。而其底之平面圖為橢圓。故由頂點之平面圖，向橢圓引切線，則得所求之平面圖。

作圖： 如 Fig. 216 所示，圖中先作與基線成角 θ 之 v'a'，使其等於長軸。次由 a' 作垂直於 v'a' 之 d'j'，而於 d'j' 上取 a'd'，a'j' 各等於其底之半徑。此時二等邊三角形v'd'j'，即為所求之立面圖。

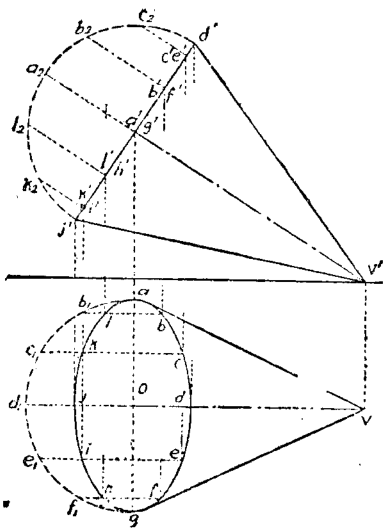


Fig. 216

次引平行於基線之任意直線，使其與由 v′,a′ 所引之投射線相交於點 v，o。復於 o a 上，取 oa，og 各等於其底之半徑，又由 d′，j′ 引投射線，使其與 o v 相交於點 d，j。此時 a g 爲長軸，d j 爲短軸所作之橢圓，爲其底之平面圖。後由 v 引二切線切於橢圓，則所成之圖形，卽爲所求之平面圖。

作橢圓之法，先以 d′ j′ 爲直徑作半圓，將其半圓分爲任意之等分，由等分點向 d′ j′ 引垂線，其足爲 b_1, c_1, d_1, e_1, f_1。此時由 d′, e′, f′, ……引投射線，使其與由 b_1, c_1, d_1,……引平行於基線之直線相交，將其交點連結，則所成之曲線 a b c d ……，卽爲所求之橢圓。

作圖題2.　軸之長，底之半徑，軸與水平面間所成之角 θ，均爲已知，求作直圓柱之投影。

解：　置其軸平行於直立投影面時，其圓柱之立面圖爲矩形。故與前題同法，而求其立面圖及平面圖可也。

作圖：　如 Fig. 217 所示之矩形 d′ j′ v′ p′ 爲所求之立面圖。d′ j′ 等於其底之直徑。d′p′ 等於其軸之長。d′p′ 與基線所成之角等於角 θ。二橢圓 adc，mnp 爲其二底之平面圖。後由二切線 am，gs 所圍成之圖形，卽爲所求

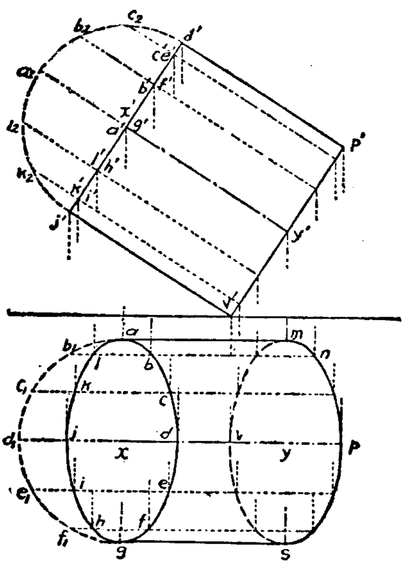


Fig. 217

之平面圖。

作圖題3. 軸之投影 vo; v′o′ 與底之半徑爲已知,求作直圓錐之投影。

解: 先於平行於其軸之直立面上,作副投影, 則圓錐之副投影爲二等邊三角形。次求平行及垂直於副投影面之底二直徑之平面圖及立面圖, 而作其共軛軸之楕圓。後由與此楕圓對應之頂點之投影引切線切此楕圓, 則得所求之投影。

作圖; 如Fig. 218 乃示其大要之圖也。

作圖題4. 軸之投影 oo_1, $o'o_1'$與底之半徑爲已知, 求作直圓柱之投影。

先於平行於其軸之直立面上作副投影, 則圓柱之副

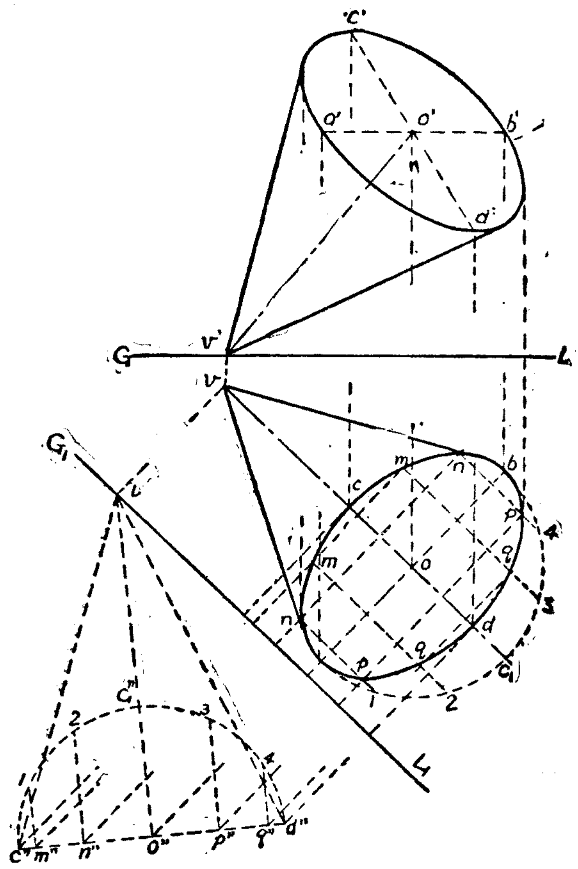


Fig. 218

投影爲矩形，故易求其副投影。後由其副投影，卽可求其平面圖及立面圖。如 Fig. 219 所示，乃其大略圖也。

5. 圓錐圓柱與內切球

如 Fig. 220 所示，設接二直線 VA, VB 之任意圓爲 O，將圓O

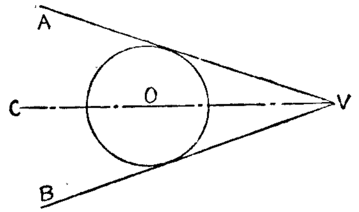


Fig. 220

旋轉於其角 AVB 二等分線之周，此時 AVB 爲一圓錐面，圓O爲一球內切於圓錐面。若圓O爲切於 AVB 之任意圓，則圓錐面可以任意之球內切。然圓錐面之投影，乃由其頂點之投影，向其內切球之投影所引之二切線而成。故作圓錐

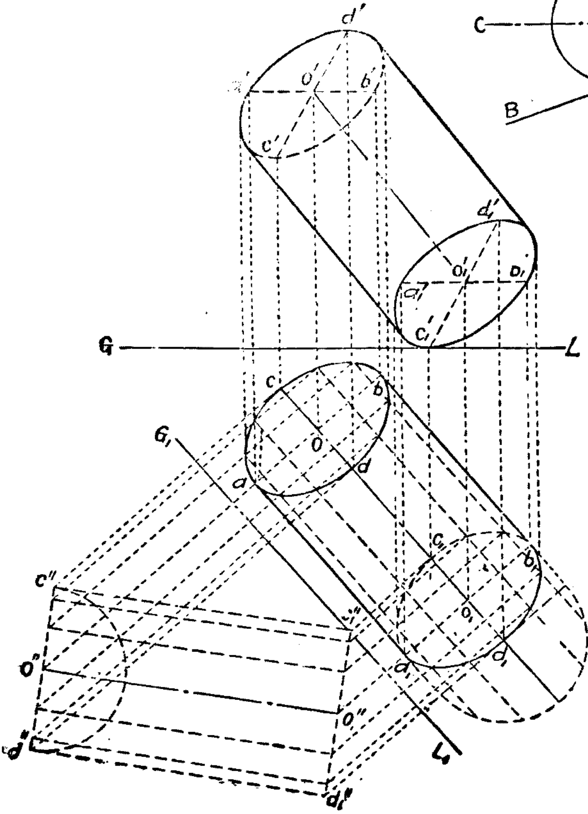


Fig. 219

面之投影，若作內切球之投影可也。

同法，圓柱面可以其圓柱面同半徑之球內切。故圓柱面之投影，爲平行於其軸之投影，而由切於內切球之投影之二直線所成。

作圖題5. 圓錐面之頂角 α 與其軸之投影爲已知，求其投影。

解： 平行於圓錐面之軸之平面上之投影中，由其頂點向內切球所引之二切線間之角等於頂角。依此，可使其軸平行於一投影面或平行於其軸，設副投影面，而求其內切球。然後，求其內切球之平面圖及立面圖，即可作成所求之投影。

作圖： 如 Fig. 221 所示，圖中 vm, v'm' 爲已知之軸迴轉於頂點 V, V' 之周，而求平行於直立投影面時之投影 $V'm'_1$。次由 V' 引二直線，使其與 $V'm_1'$ 成 $\frac{1}{2}\alpha$，復引任意之圓 O_1' 切於所引之二直線。此時圓 O_1' 爲迴轉後內切球之立面圖。後將其軸復歸原有之位置，而求其內切球之平面圖 O，及立面圖 O'。後由 V,V' 向圓 O, O' 引二切線，則其所圍成之圖，即爲所求之投影。

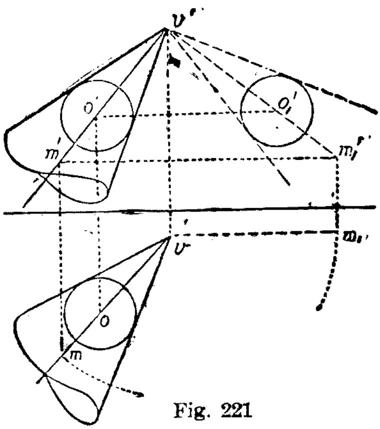


Fig. 221

作圖題6. 圓柱面之軸之投影 m n, m'n' 與直徑 d 爲已知，求其投影。

先以 d 爲直徑作圓，置其中心於 m n, m'n' 上，次引平行於 mn,

m'n' 之二切線。此時由其切線所成之圖，卽爲所求之投影。如 Fig. 222 所示，卽其大略之圖也。

作圖題7. 錐體之兩投影與其曲面上一點之平面圖爲已知，求其點之立面圖。

解： 錐面上之一點與其頂點所連結之直線，因其爲錐面之面素，故過已知之點引面素，則本問題之作圖，自不難解決矣。

作圖： 如 Fig. 223 所示之 p，爲其底位於水平投影面上之錐體

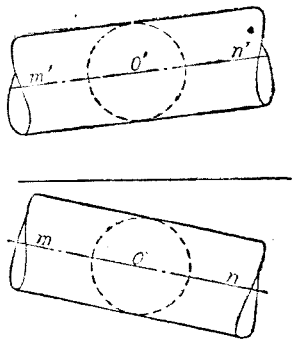


Fig. 222

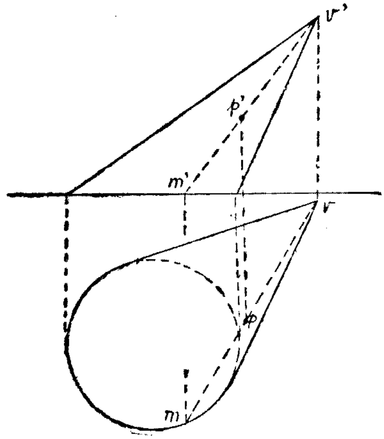


Fig. 223

上一點P之平面圖。其求法，先連結頂點之平面圖V與p，使其與其底之平面圖相交於點 m。更由m引投射線使其與基線相交於點 m'。後將 m' 與其頂點之立面圖 v' 相結，此時v'm' 因其爲過P面素之立面圖，故由p引投射線，使其與 v'm' 相交，則所得之交點 p'，卽爲所求之立面圖。

如 Fig. 224 所示，爲其軸平行於基線之直圓錐，圓錐上之一點P

之平面圖爲已知，而求其立面圖 p′ 之圖也。此時，其底之兩投影，因其垂直於基線之一直線上，故作其側面投影，卽易求其立面圖 p′。

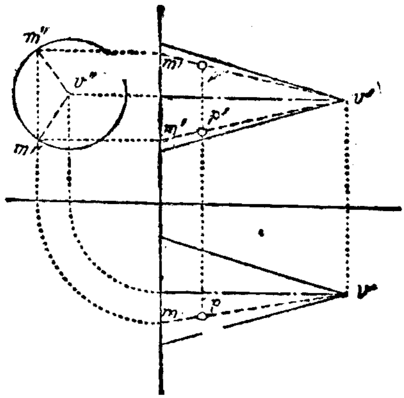


Fig. 224

作圖題8. 柱體之底位於水平投影面上，而柱體上之一點 P 之平面圖爲已知，求其立面圖 p′。

其作圖法與前作圖題同，若求得過點 P 之面素之立面圖卽可也。柱面之面素，因爲平行，故易引過點 P 之面素。如 Fig. 225 所示，mn, m′n′ 爲過點 P 之面素，由 p 所引之投射線與 m′n′ 相交之點 p′，卽爲所求之立面圖。

作圖題9. 有橫置於水平投影面上之圓柱，其面上一點 P 之平面圖 p 爲已知，求其立面圖。

解： 圓柱面之投影，於垂直於其軸之平面上爲一圓。故於垂直於其軸之直立面上作副立面圖，亦爲一圓，而 P 之副投影，卽在此圓上。故由 P 之副投影至副基線之距離，等於由 P 至水平投影面之距離。是故求得其副投影，卽可求其 P

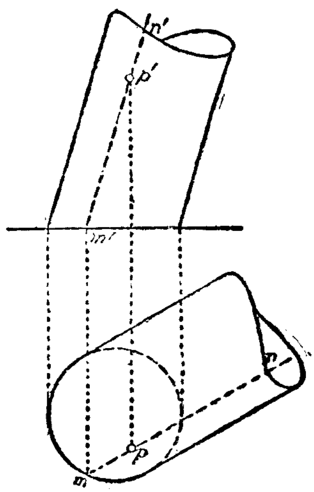


Fig. 225

之立面圖 p′ 也。

作圖：　如 Fig. 226 所示，卽其大要圖也。

6. 球

將圓迴轉於其直徑之周，以迴轉圓所作之立體，謂之球 (Sphere)。

7. 圓環

將一圓迴轉於含其圓之平面內一直線之周時，其迴轉圓所作之立體，謂之圓環(Annular torus)故圓環之內面，能以迴轉圓之半徑之球內切。

如 Fig. 227，乃示垂直於水平投影面之O X，爲迴轉軸之圓環之

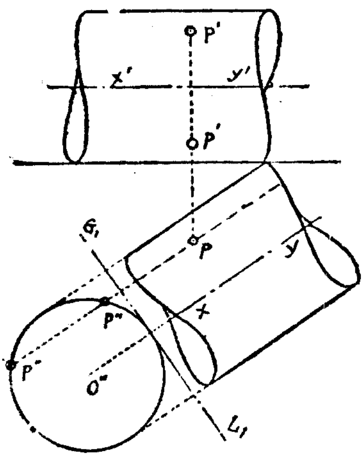


Fig. 226

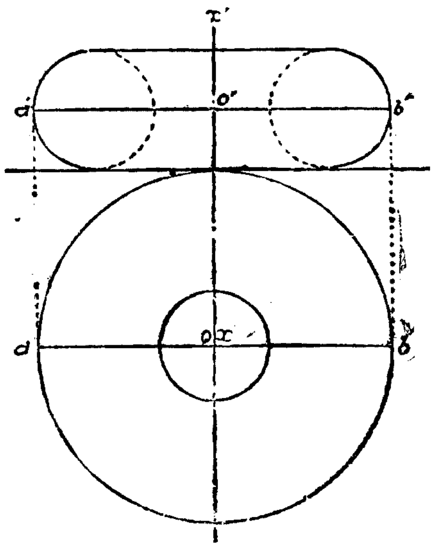


Fig. 227

投影圖也。

作圖題10.　圓環之軸X Y，迴轉之中心 o，迴轉圓之半徑 r，及迴

轉之中心O至R之距離均爲已知,求圓環之投影。

解: 先以O爲中心,R爲半徑,作垂直於XY之圓AB之投影。次置中心於圓AB上,作半徑r球之投影。其後引切於各球之投影之曲線可也。

作圖: 如Fig. 228所示,先作含O且垂直於XY之平面T。次於此平面上,以中心爲O,半徑爲R,而作圓之投影abcd, a'b'c'd'。然後於圓之投影上。作多數半徑爲r之圓。此時各圓,因其爲所求之內切

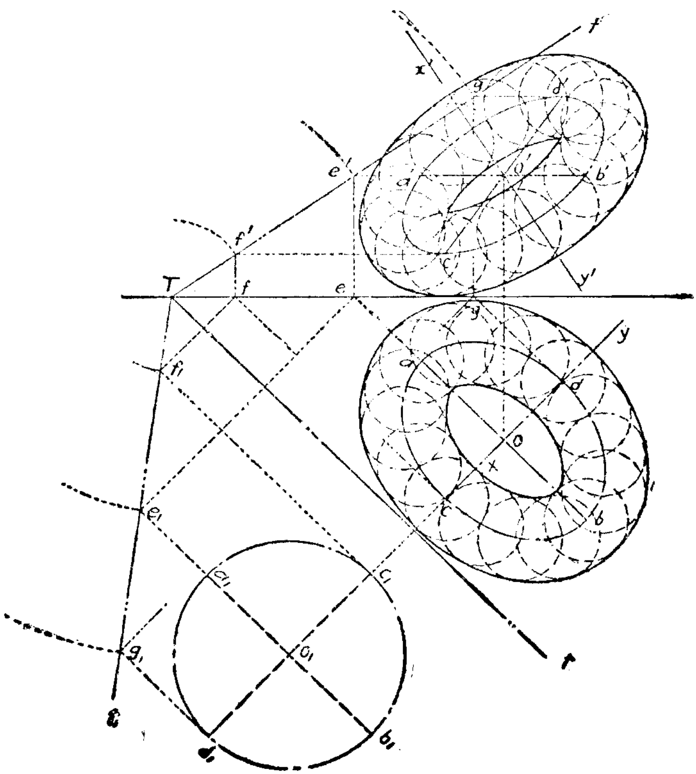


Fig. 228

於圓環之球之投影，故如圖所示，引切於各圓之曲線可也。

8. 橢圓迴轉面

橢圓迴轉於其一軸之周時，其所生之曲面，謂之橢圓迴轉面(Ellipsoid of revolution)，或稱為橢球(Spheroid)。橢圓迴轉於其長軸之周時，其所生之曲面，謂之長橢球(Prolate spheroid)。迴轉於其短軸之周時，其所生之曲面，謂之扁橢球(Oblate spheroid)。

如 Fig. 229，乃示其軸垂直於水平投影面之長橢球之投影。Fig. 230乃示扁橢球之投影也。

橢球若以垂直於其軸之平面切之，其切口為圓。以不垂直於其軸之平面切之，其切口為橢圓。以平行平面切之，其切口則為相似形。

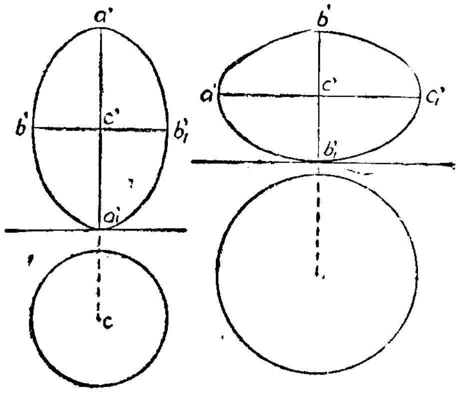


Fig. 229 Fig. 230

9. 複雙曲線迴轉面

雙曲線迴轉於其橫軸之周時，其所生之曲面，謂之複雙曲線迴轉面(Hyperboid of revolution of two sheets)。此時雙曲線之漸近線形成圓錐，故稱此圓錐，謂之複雙曲線迴轉面之漸近錐(Asymptotic cone)。漸近錐之頂角為 α 時，若以複雙曲線迴轉面與其軸所成之角，大於 $\frac{\alpha}{2}$ 之平面切之，其切口形成橢圓。又以其他之平面切之，其所成之切口為雙曲線。以平行平面切之，其切口為相似形。如 Fig. 231 所示，乃

以 AA_1 為軸之複雙曲線迴轉面之觀察圖也。

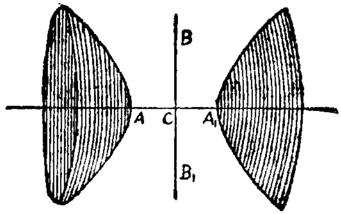


Fig. 231

10. **拋物線迴轉面**

拋物線迴轉於其軸之周，其所生之曲面，謂之拋物線迴轉面 (Paraboloid of revolution)。此曲面，以平行於軸之平面切之，其切口為拋物線。以不平行之平面切之，其切口為橢圓。

作圖題11. 已知之球面上其一點 P 之立面圖 p′ 為已知，求其平面圖。

解： 已知之球，以含已知之點且平行於水平投影面之平面切之，此時其切口之平面圖為圓，故已知點之平面圖，應在其圓之上。

或以含 P 且平行於直立投影面之平面切之，而求其切口之平面圖亦可。

作圖： 如 Fig. 232 所示，過點 p′ 引平行於基線之弦 m′n′。此時 m′n′ 即為含點 p 之水平面所切之球其切口之立面圖。故 O 為中心，m′n′ 之長為直徑所作之圓 mn，為切口之平面圖。後使其與由 p′ 所引之投射線相交於點 p，則 p 為所求之平面[illegible]

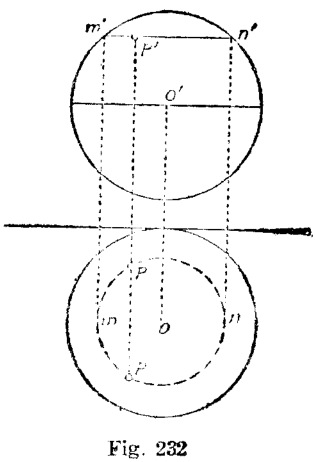


Fig. 232

作圖題12. 有軸平行於直立投影面之迴轉面，其面上一點 P 之立面圖 p′ 為已知，求其平面圖。

解: 曲面，以含已知之點且垂直於已知迴轉面之軸之平面切之。此時切口爲圓，故以此圓作內切於曲面之球可也。

然已知之點，因其在此球面上，故與前題同法，可求其已知點之平面圖。

作圖: 如 Fig. 233 所示，圖中 a'x'b'y' 爲已知曲面之立面圖，x'y' 爲其軸之立面圖。作圖之法，先過 p' 引垂直於 x'y' 之弦 e' f'。此時e'f'，因其爲含點 P 且垂直於其軸之平面所切得之切口之立面圖。故於 e'，f' 處切於 a' x' b' y' 之圓 o'，爲於其切口處，內切於曲面之球之立面圖。此球之中心，因在已知曲面之軸上，故容易求其平面圖。因之點 P 之平面圖 p，亦可求也。

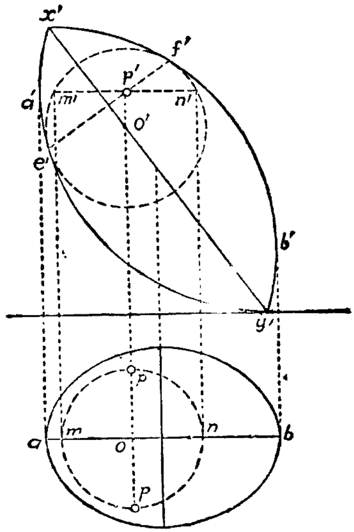


Fig. 233

作圖題13. 有含已知之三點 P，Q，R，其中心高於水平投影面 h 之球，求其投影。

解: 距三點 P，Q，R 有等距離之一點，其點之軌跡爲一直線。次於其直線上，求得高於水平投影面 h 之點，即爲所求之球之中心。後求得球之半徑，即可作所求之投影。

作圖: 如 Fig. 234 所示，乃先求垂直二等分 P Q，Q R 之平面 S，T，次求其二平面之交跡 K L。然 K L 乃距三點 P，Q，R 有等距離

點之軌跡。次於 k′l′ 上，求距基線有 h 之距離之點 c′，則 c′ 爲所求球之中心之立面圖。由是而求其中心之平面圖 C 可也。其後再求 c p，c′p′之實長 cp_1。然 cp_1 因其等於所求球之半徑，故c,c′爲中心，cp_1 爲半徑所作之圓，即爲所求之投影。

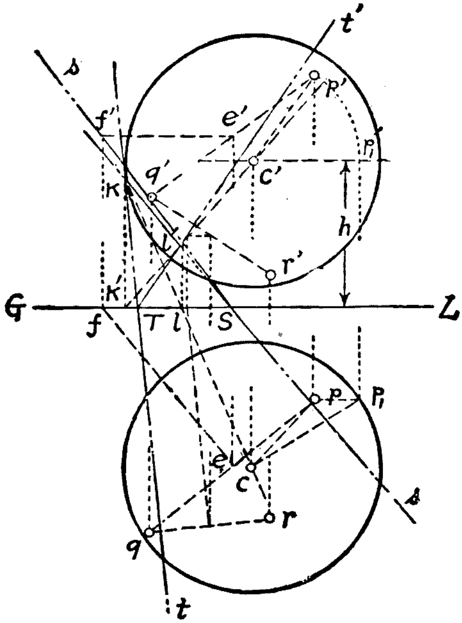


Fig. 234

11. 橢圓體

其一軸共通，有互相垂直之二橢圓，此二橢圓垂直於其共通軸，其軸之兩端，如上述之橢圓上之橢圓所作成之立體，謂之橢圓體(Ellipsoid)。此時共通軸之中點，謂之橢圓體之中心。

如 Fig. 235 所示，以平行於基線之C D爲共通軸，以平行於直立投影面之橢圓A D B C及平行於水平投影面之橢圓C F D E爲導線，而作之橢圓體之投影圖也。故橢圓體之立面圖，爲平行於直立投影面之橢圓之立面圖 a′d′b′c′。其平面圖，爲水平橢圓之平面圖 c f d e。

橢圓體以平面切之，其切口恆爲橢圓。以平行平面切之，其切口爲相似形。橢圓之長軸與其短軸相等時，則其形爲圓。故橢圓體之切口，間亦爲圓形。今圖中因 a′b′>ef>cd，故以 o′ 爲中心，e f 爲直徑所作之

圓，而與橢圓 a'd'b'c' 相交於點 n',r'。此時弦 n'r' 為垂直於直立投影面之切口之立面圖。其切口之立面圖之切口必為圓。是故以平行於此之平面切之，其切口均為圓。右圖中，乃平行於此切口之一平面上，所示之副投影圖也。

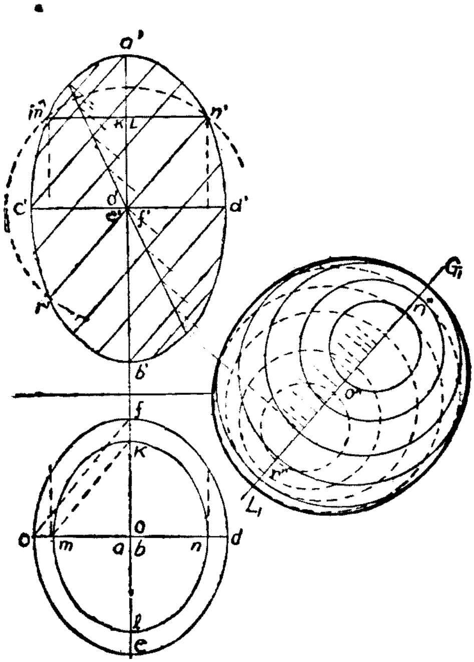


Fig. 235

12. 橢圓拋物線體

有一點與軸為共通，其彎曲方向相同之互相垂直之二拋物線，今固定其一拋物線，將他之拋物線之一點，在固定拋物線上平行移動時，依動拋物線所作之立體，謂之<u>橢圓拋物線體</u>(Elliptic paraboloid)。此時其拋物線之彎曲方向若相反對，則成雙曲拋物線面。

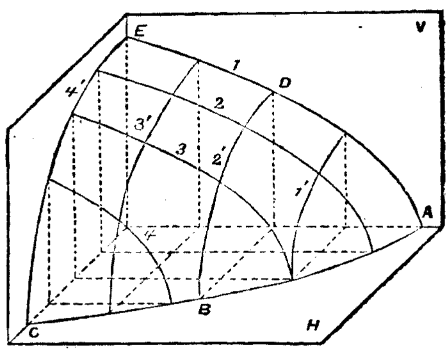


Fig. 236

如 Fig. 236 所示，圖中，A B C 以基線為軸為水平面上之拋物線。ABE 亦以基線為軸，為直立面上之拋

物線。又曲線 2, 3, 4, 乃示拋物線 ADE 之動態。

橢圓拋物線體，亦可如次之作圖求之。其法設上述之二拋物線爲固定拋物線，置其軸之兩端於二拋物線上，其垂直於拋物線之共通軸之橢圓所作之立體，卽成橢圓拋物線體。圖中之 1′, 2., 3′, 4′, 乃示其橢圓之圖也。

此曲面，以平面切之，其切口爲橢圓或拋物線。上述之二拋物線之共通軸，謂之橢圓拋物線體之軸。以平行於軸之平面切得之切口，爲拋物線。以不平行於軸之平面切得之切口，爲橢圓或圓。

13. 複雙曲線體

有軸與頂點共通，且互相垂直之二雙曲線。今置其軸之兩端於所述之二雙曲線上，而由垂直於其共通軸之橢圓所作之曲面，謂之複雙曲線體(Hyperboloid of two sheets)。又上述之二雙曲線之漸近線上有其軸之兩端，而依垂直於其共通軸之橢圓所作之錐面，謂之複雙曲線體之漸近錐。參照 Fig. 237。

此曲面，以平行於其軸之平面切之，其切口爲雙曲線，其不平於其

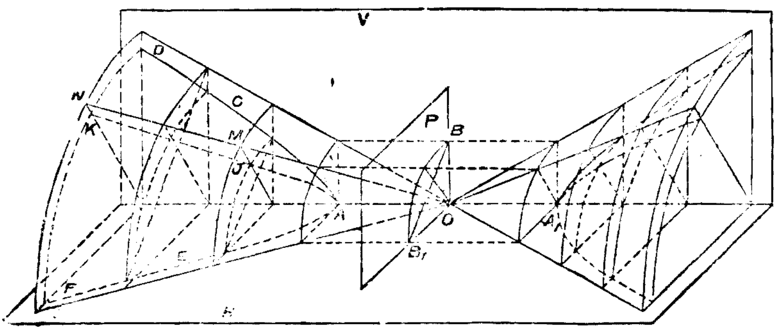


Fig. 237

軸之平面切之，其切口爲圓或楕圓。

練 習 題

(1)有高 8 糎，半徑 3 糎之直圓柱，其軸與水平投影面成 30°，與直立投影面成 45° 時，試求其兩投影。

(2)有高 7 糎之直錐體，以長軸之長 6 糎，短軸之長 4 糎之楕圓爲底，今其底與水平投影面成 45°，與直立投影面成 60°，其底之長軸與水平面成 30°。試求其錐體之投影。

(3)有二等邊三角形 a′ v′ b′ (v′a′＝v′ b′＝ 7 糎 a′ b′＝ 6 糎)。其底與基線成 45°，其形內距 v′, a′ 爲 6 糎，2 糎之位置有一點 p′。今此二等邊三角形，爲其軸距直立投影面前 3 糎之距離處之直圓錐之立面圖，又 p′ 爲錐體之曲面上其軸之前一點 P 之立面圖。試求 P 之平面圖。

(4)有高 7 糎之直錐體，以長軸 6 糎，短軸 4 糎之楕圓爲其底。今其軸與直投影面成 30°，底之平面圖爲圓。試求其錐體之投影。

(5)有直柱體，以長軸 6 糎，短軸 4 糎之楕圓爲底。其二底之平面圖爲圓且互切。今此柱體之軸，與直立投影面成 20° 時。試求其投影。

(6)有長軸 8 糎，短軸 4 糎之長楕球。其軸與水平面成 30°，與直立面成 45°。試求其投影。

(7)有已知之四點，求含此四點之球之投影。

(8)有已知之三點，求作含此三點而切於兩投影面之球之投影。

(9)已知任意二點 P, Q, 求至 P, Q 距離之比等於 3:2 之點之軌

跡。

(10)以頂點與焦點之間 $\frac{1}{2}$ 糎之拋物線爲母線之拋物線迴轉體，其軸與水平面成 35°。試求其投影。

(11)有高爲 8 糎之橢圓拋物線體，其底爲長軸 5 糎，短軸 3 糎之橢圓其軸與水平面成 30°，與直立面成 45°。試求其投影。

第七章 捩 面

1. 捩面

捩面乃由直線面素所成之曲面，其二接近面素，決不在同一平面上。今設有不在同一平面上之三線 A B, C D, E F, 另有一直線，在此三直線上移動時，其由動直線所作之曲面，謂之捩面 (Warped surface, or Twisted surface)。

次過任意之一點，引多數平形線平行於一捩面之諸面素，此等平形線，形成一錐面。後以此捩面上之任意二線爲導線，另以一直線於上述之錐面之面素順次平形移動時，則動直線所作之曲面，與原捩面完全一致。此時之錐面，謂之捩面之導錐 (Cone director)。故捩面乃以不在同一平面上之二線爲導線，一錐面爲導錐之面。當導錐爲平面時，謂之導平面 (Plane director)。

作圖題1. 已知三線 A B, C D,E F, 過 A B 上之一點 O, 試引直線面素。

解: 由 O 爲頂點，C D 爲導線之錐面，而求其與 E F 之交點 P。此時直線 O P, 卽爲所求之面素。

作圖: 如 Fig. 238 所示，先於 cd, c′d′ 之上，取任意之數點 (1, 1′), (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′), 使其與點 o, o′ 連結。次設 o′ 1′, o′2′, o′3′, o′4′, 與 e′f′ 之交點爲 t′, u′, v′, w′。復由 t′, u′, v′, w′ 引投射線，使其與直線 o1, o2, o3, o4 之相對應之交點爲 t, u, v, w。此時曲線 t u v w,

乃以點O爲頂點，C D爲導線之錐面，與以E F爲導線而垂直於直立投影面之柱面相交之平面圖。故 tuvw 與 ef 之交點 p，爲上述錐面與E F交點之平面圖。依此，則直線 o p 爲所求之面素之平面圖。後由此，卽可求其立面圖 o'p'。

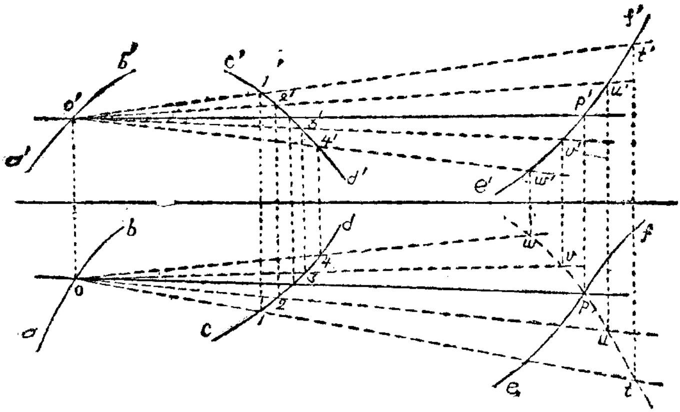


Fig. 238

作圖題2.　二導線 AB, CD, 與導平面 T 爲已知，求平形於平面 T 上之直線M N之直線面素。

解：　以 AB 爲導線之面素作平形於M N之柱面，而求其與C D之交點 R。此時由 R 引平形於M N之R P，卽爲所求之面素。

作圖：　如 Fig. 239 所示，於 ab, a'b' 上，取任意之數點 (1, 1')，(2, 2') (3, 3')，由此各點，引平形線 (1e, 1'e')，(2f, 2'f')，(3g, 3'g') 平行於 mn, m'n'。復由 1e, 2f, 3g 與 cd 之交點 e, f, g 引投射線，使其與 1'e', 2'f', 3'g' 之相對應之交點 e', f', g' 連結，而作成曲線。此時 e'f'g' 與 c'd' 之交點 r' 乃以 AB 爲導線之平行於 MN 之柱面與 C D

相交點之立面圖。故由m引平行於 m'n' 之 r'p'，即爲所求之立面圖。從由此即可求其平面圖 rp。

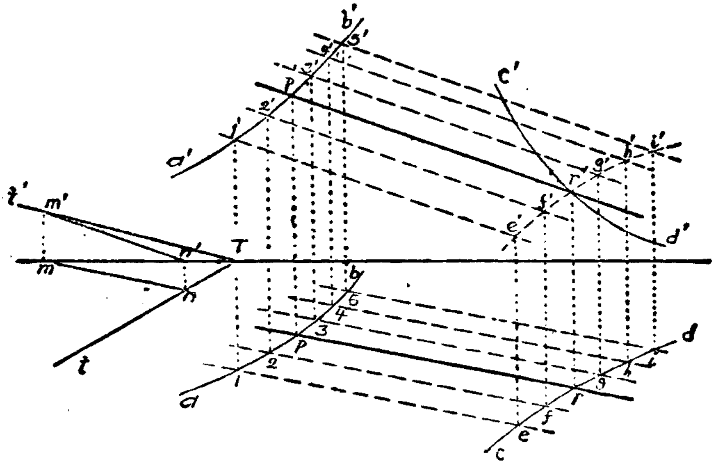


Fig. 239

2. 雙曲拋物線面

以不在同一平面上之二直線爲導線，以一平面爲導平面，其所成之捩面，通稱爲雙曲拋物線面(Hyperbolic paraboloid)。是故平行於導平面之任意平面，與二導線之交點相結，則其所成之直線，爲雙曲拋物線面之面素。又平行於導平面之多數平面，切此二導線，則此二導線，可分成相同之比。故凡在不同一平面上之二直線，可分割成相同之比，此等之對應點，連結所成之直線，即爲一雙曲拋物線面之面素。

3. 雙曲拋物線面爲複線織面

如 Fig. 240 所示，圖中以二直線 AC, BD 爲導線。平面W爲導平面。AB, CD 爲二直線面素。AB 爲平面W上之直線。今引任意之面素

MN，則 AM:MC＝BN:ND。

次作含 BD 而平行於 AC 之平面 V，使其與平面 W 相交爲直線 XY。次由 D,N 向 XY 引垂線 DK,NI，復由 A 向 XY 引平行線 AZ，更由 C,M 向 AZ 引垂線 CH，MG。此時因 AG：GH＝BI：IK 故 AB，GI，HK，相會於一點 R。是以，由 R 所引之平行於 DK 之 RT，乃含平行四邊形 CDKH，MNIG 之平面相交軸。

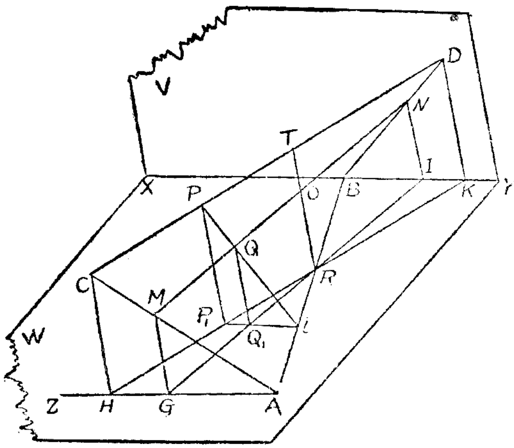


Fig. 240

再以 CD，AB 爲導線，平面 V 爲導平面，而作雙曲拋物線面考之，則 AC，BD，爲其直線面素。若設平行於平面 V 之任意平面與平行四邊形 CDKH，MNIG 之交軸爲 PP_1，QQ_1 時，則 $PP_1＝CH$，$QQ_1＝MG$。而直線 P_1Q_1 平行於 AZ，今使其與 AB 相交於點 L。此時因 $LP_1：LQ_1＝PP_1：QQ_1$，故 PQL 爲一直線。是故 V 爲導平面之雙曲拋物線面之一面素。然 MN 因以 W 爲導平面之任意面素，故 PL 與其他諸面素相交。因之 AC，BD 爲導線，平面 W 爲導平面之雙曲拋物線面，與 AB，CD 爲導線，平面 V 爲導平面之雙曲拋物線面，兩相一致。

綜合以上之說明，凡雙曲拋物線面，應有二導平面。因此而知其有

二組之面素。凡有此二組面素之曲面，謂之複線織面 (Doubly ruled surface)。又此導線，吾人可知其爲他一組之面素。例如。導線 AC, BD 以 V 爲導平面之平面。導線 AB, CD 以 W 爲導平面之面素是也。

如 Fig. 241 所示，乃以平面 sSs′, tTt′ 爲導平面之雙曲拋物線面之面素圖也。圖中，與 AS, TB 相交之直線，乃以平面 sSs′ 爲導面之面素。與 AT, SB 相交之直線，乃以平面 tTt′ 爲導面之面素。

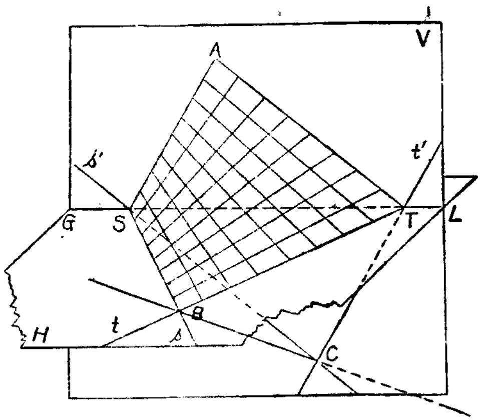


Fig. 241

4. 雙曲拋物線面之軸及其頂點

如 Fig. 242 所示，圖中 AB, CD 以 AC, BD 爲導線，平面 W 爲導面之雙曲拋物線面之面素，AB 爲平面 W 上之直線。又 AC, BD, 以 AB, CD 爲導線之雙曲拋物線面之面素，BD 爲平面 V 上之直線。其二導線之交爲 X Y，次由 A 引平行線 A Z 平行於 X Y。復

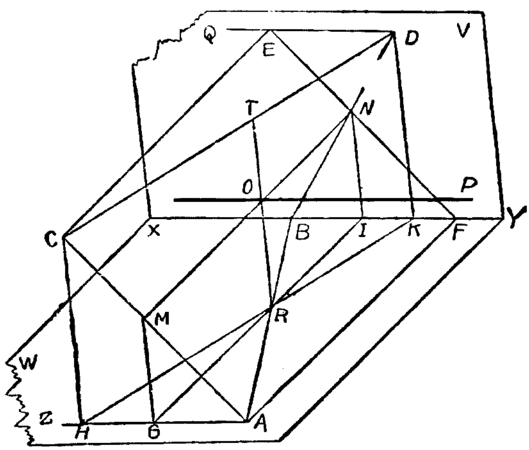


Fig. 242

由C,向AZ,由D向X Y引垂線CH及DK,則四邊形C D H K,爲平面四邊形。依此由A B與KH之交點R引平行線RT平行於DK,則RT與CD相交。是故RT垂直於X Y而成平面V爲導面時之面素。

後由A向X Y引垂線AF,而由C引平行於此之CE,使其與平面V相交於E。此時四邊形A C E F爲平行四邊形。然由E F與BD之交點N所引之平行於A F之M N,應與A C相交。是故M N垂直於X Y,而成平面W爲導面時之面素。

然雙曲拋物線面之面素,既有二組,其一組之面素,應與他組諸面素相交。因之R T與M N應相會於一點,今設其點爲O。其二導面之相交爲X Y,則垂直於X Y面素之交點O,謂之雙曲拋物線面之頂點。又過頂點O引平行於X Y之O P謂之軸。

雙曲拋物線面中,二導平面互相垂直時,謂之直雙曲拋物線面(Rectangular hyperbolic paraboloid)其不垂直者,謂之斜雙曲拋物線面(Oblique hyperbolic paraboloid)。

5. 捩四邊形

非同一平面上四點相結,其所成之四邊形,謂之捩四邊形。捩四邊形之相對二邊,若等分爲任意之同數,將其相對應之點連結而作直線,則包絡此等直線之曲面,爲雙曲拋物線面。

如Fig. 243所示,乃以捩四邊形A B C D之對邊爲導線之雙曲拋物線面之面素之圖也。

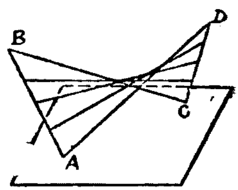


Fig. 243

6. 雙曲拋物線面之投影

雙曲拋物線面之投影，乃依其面素之投影而明示。例如 Fig. 244 所示，圖中 t_1Tt'，t_2Tt'，爲其導平面。

7. 雙曲拋物線面之又一作法

有互相垂直，彎曲方面相反對之二拋物線 A，B，其頂點共通，其軸在一直線上，拋物線 A 之頂點，常在他之拋物線 B 上平行移動時，則 A 之軌跡爲一雙曲拋物線面。

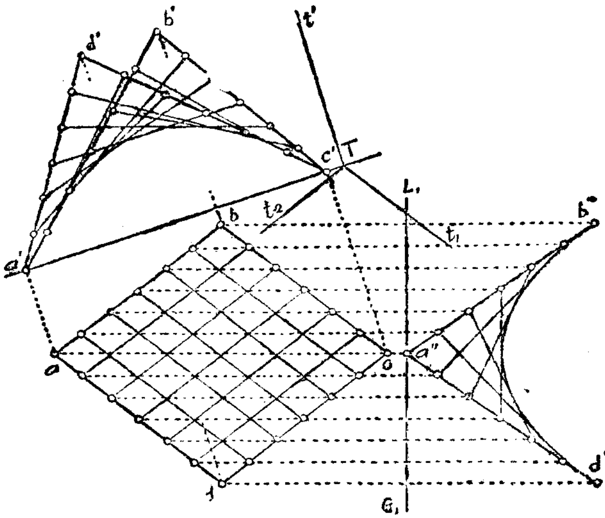


Fig. 244

如 Fig. 245 所示，乃曲線 A B C 在直立投影面上，而以垂直於基線 A N 爲軸所成之拋物線。及曲線 A T D 垂直於直立投影面，而以垂直於基線之 N A 爲軸所成之拋物線。拋物線 A T D 之頂點 A，在拋物線 A B C 上平行移動時，則 A T D 如圖所示，形成雙曲拋物線面。而 1, 2, 3,……等，乃示動拋物線之動態。此時 A 爲雙曲拋物線面之頂

點，A N 爲其軸。

又此曲面，用過頂點A垂直於軸 A N 之平面切之，其切口爲二直線。其一直線爲 A K。含各切口而平行於 A N 之平面，謂之曲面之漸近面(Asymptatic surface)。此曲面，以平行於軸之平面切之，其切口悉爲拋物線。又以不平行於軸之平面切之，其切口悉爲雙曲線。切斷面與漸近面之交，爲切口之雙曲線之漸近線。

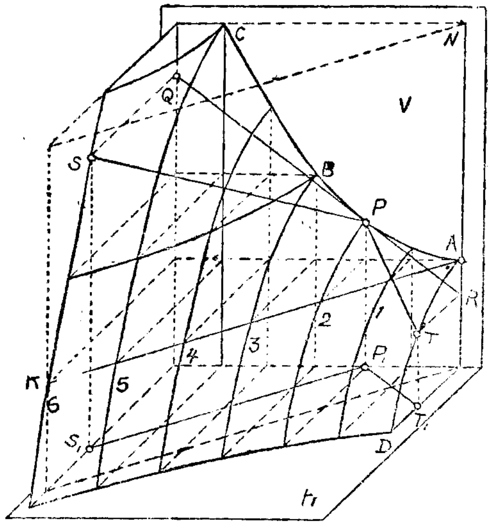


Fig. 245

作圖題3. 求過已知雙曲拋物線面上之一點 P 之面素。

解： 先求含 P 且平行於導平面之平面與導線之交點，後使其與 P 相結而作成直線可也。

作圖： 如 Fig. 246 所示，圖中 P 爲含捩四邊形 A B C D 之雙曲拋物線面上之點。先由點 p, p′ 引平行線 (p1, p′1′), (p2, p′2′) 平行於 (ab, a′b′), (cd, c′d′)。次由 p1, p2 與 ad 之交點 1, 2 引投射線，而求其與 p′1′, p′2′ 相對應之交點 1′, 2′。此時直線 1′2′ 與 a′d′ 之交點 m′，乃以 (ad, a′d′), (bc, b′c′) 爲導線之導面與 (ad, a′d′) 相交之點之立面圖。依此，由 m′ 引投射線，使其與 a d 之交點爲 m，則直線 (pm, p′m′)

即為所求之面素。後如法，可求得以 (ab, a'b')，(cd, c'd') 為導線之面素(pn, p'n')。

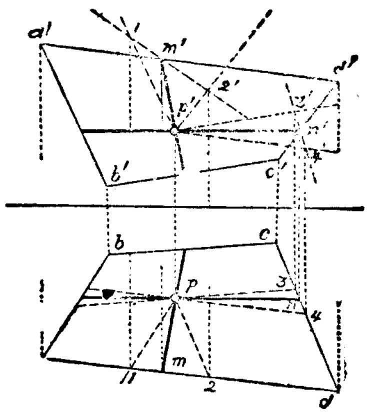


Fig. 246

8. 錐狀面

用非同一平面上之一直線與一曲線為導線，及一平面為導面，由其所成之捩面，謂之錐狀面 (Conoid)。

如 Fig. 247 所示，乃以直線 X Y，曲線 A B C 為導線及平面 V 為導面之錐狀面之圖也。錐狀面之導線，其垂直於導平面者，謂之直錐狀面。

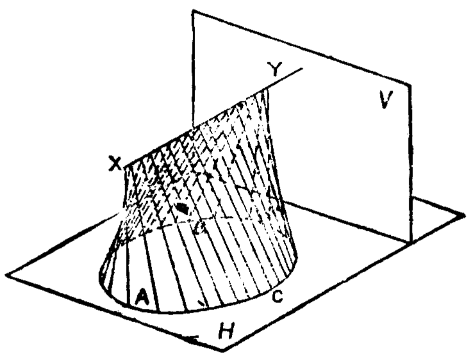


Fig. 247

如 Fig. 248 乃示其直錐狀面之一例，圖中以水平投影面上之圓 O 與在其中心直上之垂直於直立投影面之直線 X Y 為導線，以直立投影面為導平面所作之圖也。今此曲面，以平行於水平投影面之任意平面 H_1 切之，其切口之平面，為曲線 a_1 b c_1 d。今置平行於基線之圓 abc 之直徑 ac 與曲線 a_1 bc_1 d 之交點為 c_1。又使平行於基線之直線 uf 與圓 abc 之交點為 f，直徑 bd 之交點為 u，曲線 a_1 b c_1 之交點為 f_1 此時 oc, uf 因

其爲此曲面之面素之平面圖。故 $uf_1:uf=oc_1:oc$。因之，曲線 a_1 b c_1 d 爲橢圓。如斯之錐狀面，若以任意之水平面切之，其切口應形成橢圓。

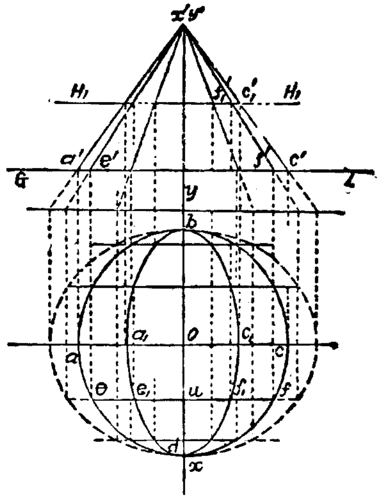


Fig. 248

9. 柱狀面

以二曲線爲導線，一平面爲導面，則其所成之捩面，謂之柱狀面 (Cylindroid)。

如 Fig 249 所示，乃以 A B C, D E F 爲導線。水平投影面爲導面之柱狀面之圖也。

10. 牛角

二曲線與一直線爲導線之拋面，謂之牛角 (Cow's horn)。

如 Fig. 250 所示，乃以二半圓 A B C, E F G 與直線 X Y 爲導線之牛角之圖也。

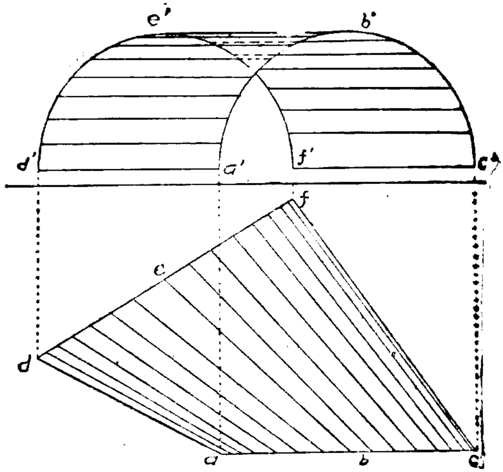


Fig. 249

其二導曲線，乃直徑相等，互相平行之二圓。其導直線，與二圓之平行直

軸相交，其各交點，由各圓中心成等距離，其對於中心位置相反對者，多用於捩拱 (Warped arch)。

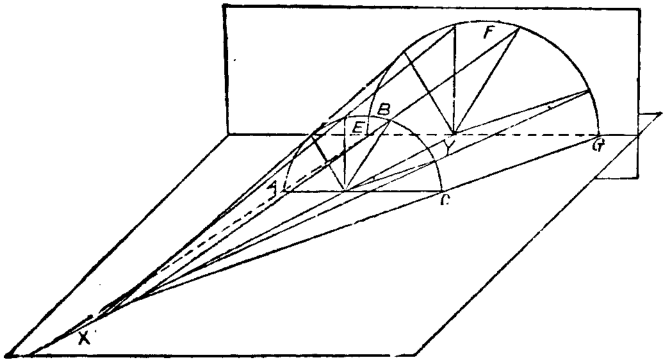


Fig. 250

如 Fig. 251 所示，卽其例也。圖中，其平行於直立投影面之二圓 A B C，E F G 與垂直於直立投影面之直線 X Y 者爲導線。

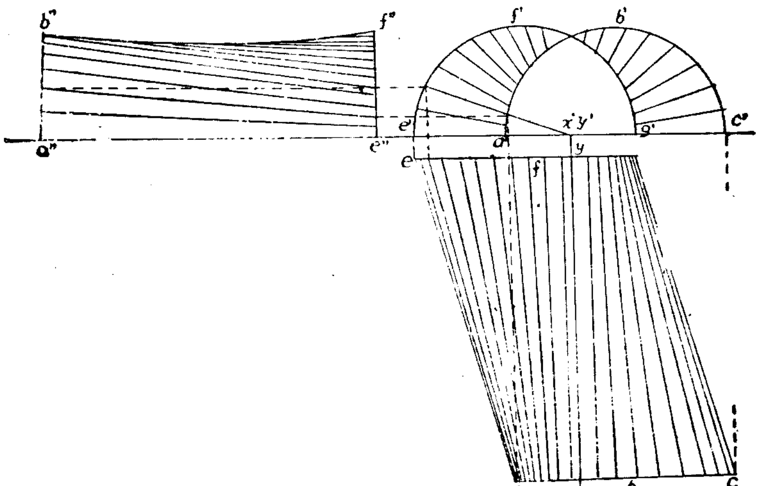


Fig. 251

11. 單雙曲線迴轉面

一直線迴轉於其非同一平面上之他一直線之周時，其迴轉直線所作之面，謂之單雙曲線回轉面 (Hyperboloid of revolution of one sheet)。由此曲面與垂直於其軸之二平面所圍成之立體，謂之單雙曲線迴轉體。此時垂直於軸之平面，與曲面之相交爲圓，此圓通稱爲底。

如 Fig. 252 所示，圖中，以垂直於水平投影面之直線 O X 爲軸。以直線 M N 迴轉於其周時所成之投影。由軸之平面圖 O，向 M N 之平面圖 mn 所引之垂線，爲軸與 M N 間共通垂線之平面圖。且其長等於共通垂線之長。次以M N與O X之共通垂線爲共通垂線，置其傾斜方向與M N相反對作直線 $M_1 N_1$ 使其與 O X 所成之角，等於 M N 與 O X 所成之角。此時 $M_1 N_1$ 迴轉於 O X 之周所生之單雙曲線迴轉面，與 M N 迴轉所生之單雙曲線迴轉面完全一致。故單雙曲線迴轉面爲複線織面。

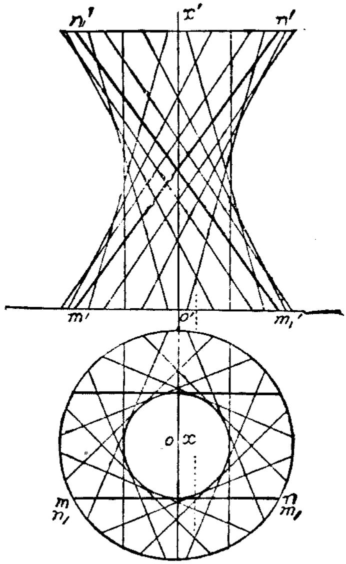


Fig. 252

如 Fig. 3 所示，圖中 m n, m′ n′ 迴轉於 ox, o′x′ 之周時，其迴轉直線上之諸點，均垂直於其軸所作之圓也。例如設 m n, m′n′ 上之任意一點爲 p, p′，則 o 爲中心，op 爲半徑之圓，爲點 p, p′ 所作圓之平面圖。次由此圓平行於基線之直徑之端引投射線，使其與由 p′ 引平行於

基線之直線相交，其相交點爲 o' 時，則直線 e'e' 應爲點 p, p' 所作之圓之立面圖。此圓之立面圖之端所連結之曲線 l'd'k' 爲曲面之立面圖之外劃線。復因此曲面爲迴轉面，故以含其軸之平面切之，其切口爲等形。依此，則曲線 l'd'k' 爲平行於直立投影面之子午線之立面圖。又曲面諸面素之立面圖，應切於曲線 l'd'k'。

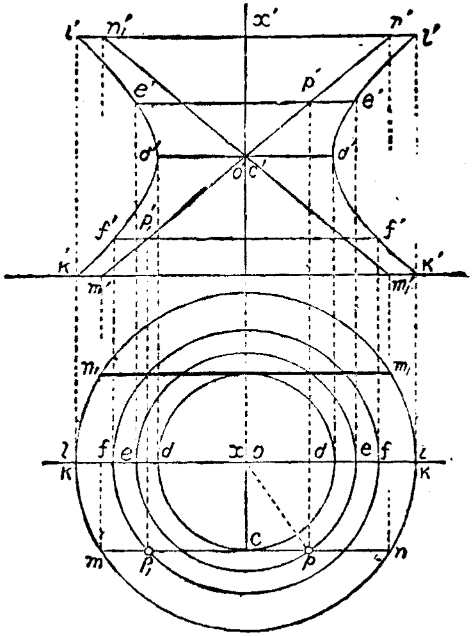


Fig. 253

再由 o 向 mn 引垂線 oc，則 oc 爲其軸與母線間共通垂線之平面圖。故以 o 爲中心，oc 爲半徑所作之圓，爲母線上之點所作之圓中最小圓之平面圖。更由 m'n' 與 o'x' 之交點 o' 引平行於基線之直線，及以 oc 爲半徑之圓，由其圓之平行於基線之直徑之端 d 引投射線，使其交點爲 d'，斯時直線 d'd'，應爲最小圓之立面圖。其母線上之點所作之圓，其中最小者，謂之扼圓 (Gorge circle or throat circle)。垂直於其軸投影面上之諸面素之投影。應切於扼圓之投影。如 Fig. 252 所示，其面素之平面圖切於扼圓之平面圖之例是也。

12. 單雙曲線迴轉面之子午面

如 Fig. 254 所示，圖中 ox, o'x' 爲垂直於水平投影面之軸，圓 cd, 直線 d'd', 爲扼圓之平面圖，及其直面圖。今令 (mn, m'n'), (m_1n_1, $m_1'n_1'$) 平行於直立投影面，且爲同組之面素。(tu, t'u') 爲他一組任意之面素。此時 (tu, t'u') 與 (mn, m'n'), (m_1n_1, $m_1'n_1'$) 相交之點爲 (g, g'), (u, u')。又 (tu, t'u') 與平行於直立投影面之子午線相交之點爲 (p, p'), 故 p' 在曲面之立面圖 l' d' k' 上。而 t'u' 應切曲線 l' d' k' 於 p'。然此平面圖中，因 pu＝py, 故其立面圖中亦必 p'y'＝p'u'。

次於面素 m n, m' n' 上，取任意之點 r, r'。由 r' 引平行於基線之直線，使其與曲線 l' d' k' 相交於點 g'。此時 r'g'＝or－cr。然三角形 ocr 因其爲直角三角形，故 $\overline{oc}^2=\overline{or}^2-\overline{cr}^2=(or+cr)(or-cr)$。因得 $r'g'=\overline{oc}^2/(or+cr)$。前式中分子 oc, 因其等於扼圓之半徑，故與 r' 之位置無何關係。然分母 (or＋cr) 因 r' 距 c' 愈遠則愈大，當遠至無限遠時，則爲無限大，故 r' g' 因之爲無限小。因之，

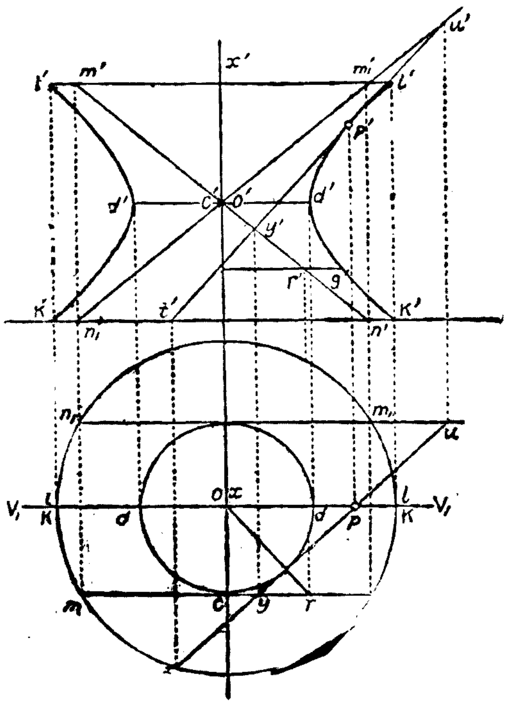


Fig. 254

$m'n'$ 與曲線 $l'd'k'$ 愈延長則愈接近。是卽 $m'n'$ 爲曲線 $l'd'k'$ 之漸近線。同此，則 $m_1'n_1'$ 亦爲 $l'd'k'$ 之漸近線。

又於上述之任意點 p' 上，切線 $t'u'$ 之二漸近線 $m'n'$, $m_1'n_1'$ 間之線分 u', y'，應於切點 p' 處作二等分。依此，可知曲線 $l'd'k'$ 爲雙曲線。然曲線 $l'd'k'$ 因其等於平行於直立投影面之子午線之實形，故其他子午線亦應與曲線 $l'd'k'$ 同形。是卽單雙曲線迴轉面之子午線爲雙曲線。故單雙曲線迴轉面，應爲雙曲線迴轉於其縱軸之周時所生之曲面，此時迴轉雙曲線之漸近線，形成一圓錐面。凡稱此圓錐面，謂之單雙曲線迴轉面之漸近錐。

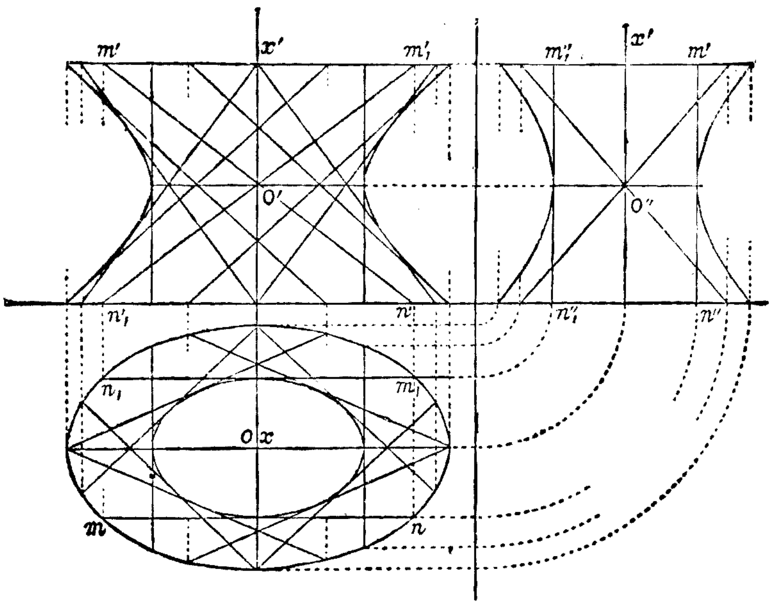


Fig. 255

13. 單雙曲線面

單雙曲線迴轉體中，其二底圓及扼圓，以同角度迴轉於其各平行直線之周，使其向原來之圓投影。此時三圓之投影，應爲彼此相似之橢圓。後以此三橢圓爲導線，而作直線移動時。其動直線所作之曲面，謂之單雙曲線面 (Hyperboloid of one sheet)。此時扼圓投影之橢圓，謂之扼橢圓 (Gorge ellipse)。此曲面。若以垂直於其軸之平面切之．其所切之切口，均與扼橢圓相似。以含其軸之平面切之，其切口爲雙曲線。

如 Fig. 255 所示，乃其軸垂直於水平投影面時之單雙曲線面之平面圖，立面圖，及側面圖也。

14. 螺旋面

其軸共通之二螺旋線，及其軸爲導線所成之捩面，謂之螺旋面。(Screw surface or helicoid)。此時二螺旋線之節爲等距時，則其諸面素與其軸成相等角。如斯之螺旋面，謂之等節螺旋面 (Helicoid of uniform pitch)。反之，謂之不等節螺旋面 (Helicoid of varying pitch)。

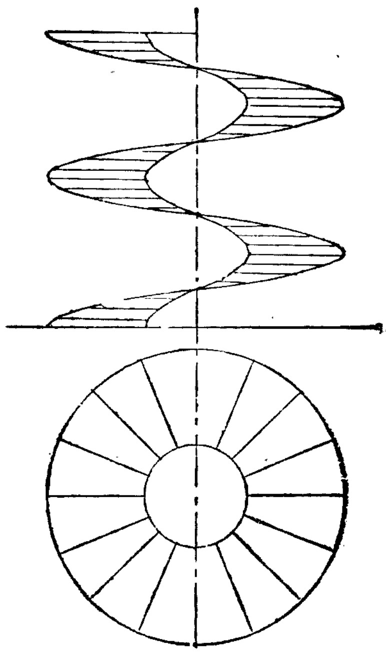


Fig. 256

今以任意之一點爲頂點，由此頂點引平行線平行於等節螺旋面之諸面素，則其諸平行線，應形成一圓錐面。故等節螺旋面，應以一螺旋

線及其軸爲導線，以其軸平行於螺旋線之軸之一圓錐面爲導面，所成之捩面也。此時圓錐面之頂角爲180°時，則圓錐面爲平面。因之，螺旋面之面素，應垂直於其軸。如斯之螺旋面，謂之直螺旋面（Right helicoid）。不然，謂之斜螺旋面（Oblique helicoid）。如 Fig. 256 所示，乃其軸垂直於水平投影面時，其直螺旋面之平面圖及立面圖。又如 Fig. 257 所示，乃斜螺旋面之平面圖及立面圖也。

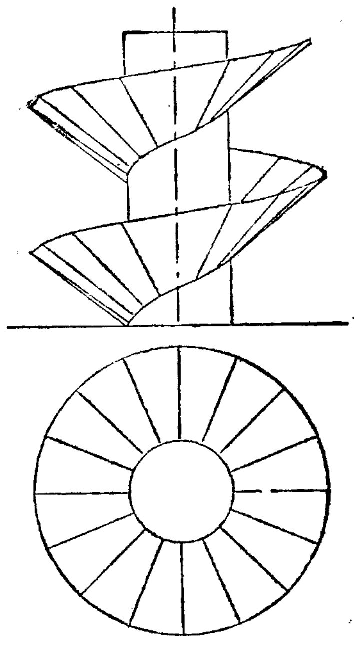


Fig. 257

作圖題4. 已知母線與水平投影面成角 θ，其軸垂直於水平投影面時，求斜螺旋面之投影。

解： 螺旋面之投影，依作其面素之投影而得。

作圖： 如 Fig. 258 所示，設圓 o 爲導線之螺旋線之平面圖。曲線 a′ b′ c′……爲其立面圖，o′x′ 爲其軸之立面圖。今 a, a′ 在水平投影面上，o a 平行於基線。先由 a 始，將圓 o 分爲任意等分之點 b, c, d,……，由此而求其各立面圖 b′, c′, d′,……次由 a′ 引與基線成角 θ 之 a′ 1′，使其與 o′x′ 相交於點 1′。更於 o′ x′ 上，取 1′2′, 2′3′, 3′4′,……，使其等於螺旋線之節距之 $\frac{1}{12}$。此時直線 oa, ob, oc, od……爲面素之平面圖。直線 1′a′, 2′b′, 3′c′, 4′d′ ……爲面素之立面圖。然後將此等面素之水平

跡 a, b_1, c_1, d_1,……相結，其所成之曲線，爲螺旋面之水平跡。此時 $ob_1-oa=oc_1-ob_1=od_1-oc_1=\cdots$ …。如斯之曲線 a b_1 c_1 d_1 ……，謂之等進螺旋。

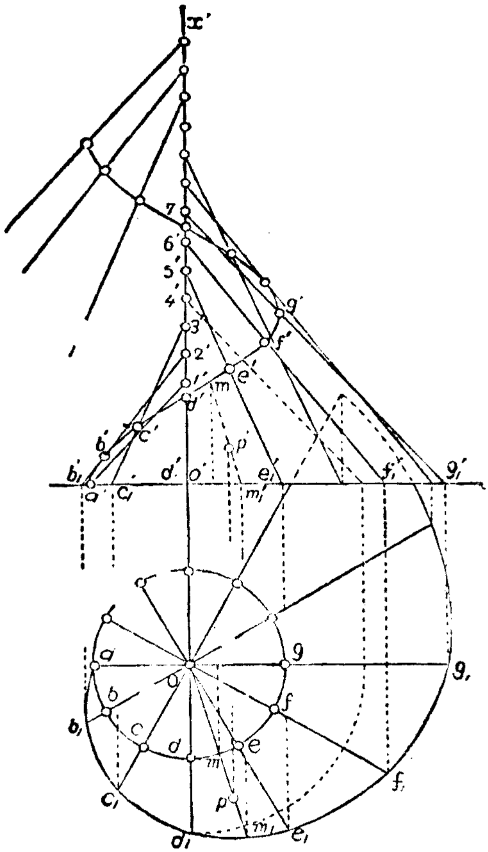


Fig. 258

15. 螺旋

一圓柱面上有底邊之二等邊三角形，將圓柱面以等速度向軸之平行方向迴轉時，由圓柱與三角形所成之立體，謂三角螺旋桿 (Triangular threaded screw)。如 Fig. 259 所示，即其例也。又以正方形之一邊，置於圓柱面上，使其與前圖同樣移動時，則所求之立體，謂之方形螺旋桿 (Square threaded screw)。如 Fig. 260 所示，乃其例也。又其三角螺旋桿中之斜面，爲斜螺旋面。其不平行於方形螺旋面之柱面之面，爲直螺旋面。螺旋桿之對於實用方面，極形重要，如機械，土木，建築，造船等工業中，爲須臾不可缺之用具也。其三角螺旋桿，多用於物體與物體之結合，方形螺旋桿，則用於傳達萬力

(Vice) 之用也。

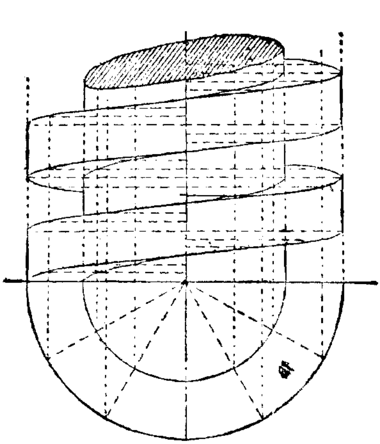


Fig. 259

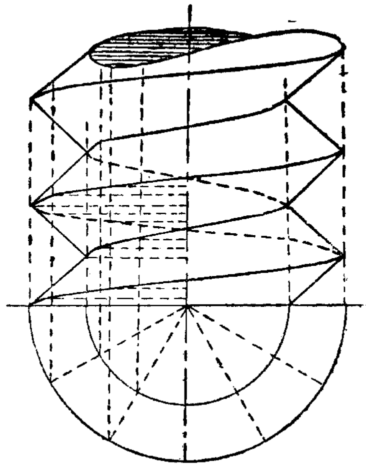


Fig. 260

如 Fig. 261,乃示通常實用之螺旋桿,以含其軸之平面切開後,所示之切口之圖也,其斷面中之凸部,謂之螺旋齒 (Screw thread)。其最外部,謂之頂部,最內部,謂之底部。

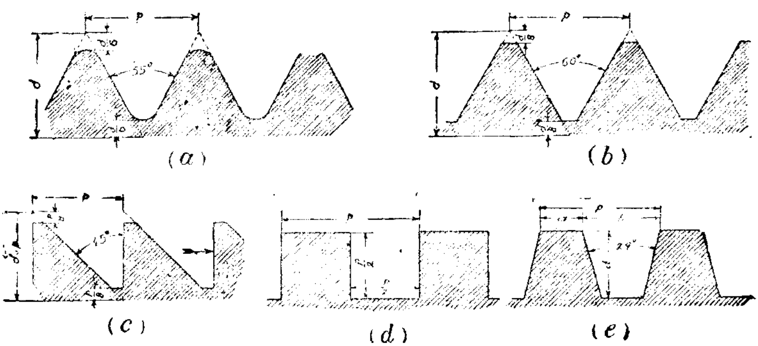


Fig. 261

16. 螺旋狀斜溝

水由高處降下時，作一種斜溝，導水沿螺旋面降落，其目的，使水降下時。不致發生泡沫。如斯之斜溝，謂之螺旋狀斜溝 (Spiral chute)。如 Fig. 262 所示，卽此例也。

17. 螺旋狀階段

凡如燈台之建築，其內部狹小，如欲登其高層時，可應用 Fig. 263 所示之直螺旋面，沿其螺旋面，而設階段，則登臨自如。如斯之階段，謂之螺旋狀階段 (Spiral stair)。

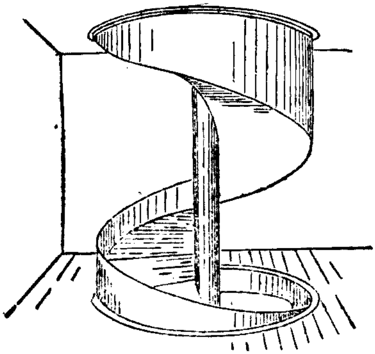


Fig. 262

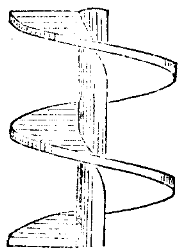


Fig. 263

18. 螺旋發條

沿螺旋線之一平面形或立體，將其移動時，動平面形或動立體所作之立體，謂之螺旋發條 (Spiral spring)。如 Fig. 264 所示，乃正方形所作之發條，Fig. 265 所示，乃球形所作之發條。螺旋發條，實用上應用頗廣。

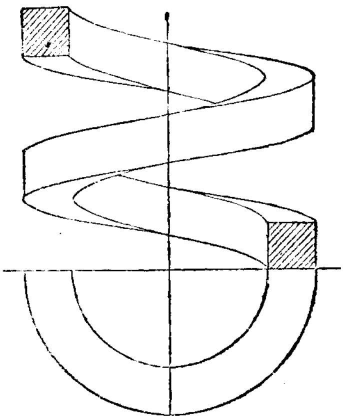


Fig. 264

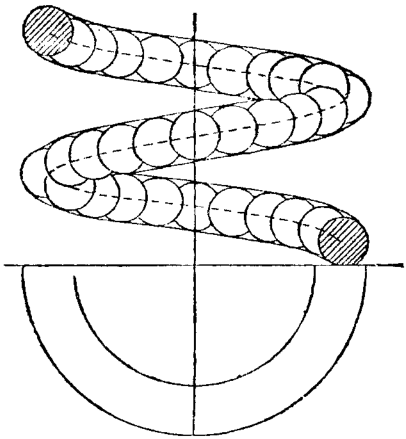


Fig. 265

19. 螺旋推進器

如 Fig. 266 所示，直線 EA, 12, 34, 56, DC, 乃以直線ED爲軸之螺旋面之面素。又曲線 F L G, H S I 等，乃以ED爲軸之圓柱面，切上之螺旋面所成之切口。此時 F L G, H S T 等，爲節距相等之螺旋線，不言可知。又如 $P_1 Q_1 R_1 S_1$ 之形狀，可用屈折自如之薄板作成多數，後將此薄板直線之部分，使其與上述之螺旋線相一

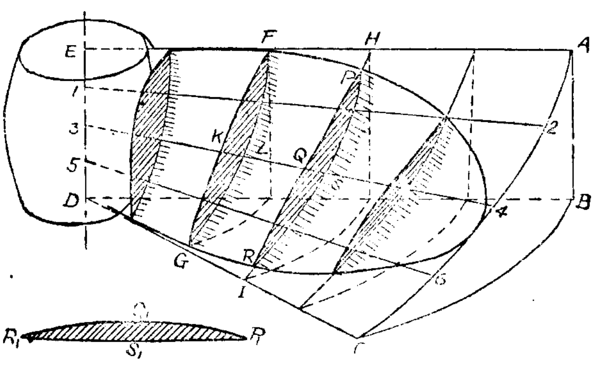


Fig. 266

致屈曲，立於螺旋面上。然後將薄板與薄板之間，塡充似粘土之凝固性之物質，由塡充物所成之立體。可應用於螺旋推進器 (Spiral propeller)。翼根之形。

螺旋推進器之翼根中，其螺旋面謂之表面，他面謂之裏面。

如 Fig. 267 所示，乃以直螺旋面爲表面，而求其翼根之投影之圖也。圖中破線所示之 $p_1' a' q_1'$ 爲其表面展開近似之實形，點 c′ 爲螺旋面之軸之立面圖。直線 c x 爲其軸之平面圖。今爲作圖之便利計，於基線上取 c′，使 c′c 等於螺旋面節距之 $\frac{1}{2\pi}$。然後以 c′ 爲中心，引任意之圓弧，使其與 a′ c′ 相交於點 m^1，與基線相交於點 G。次於基線上取

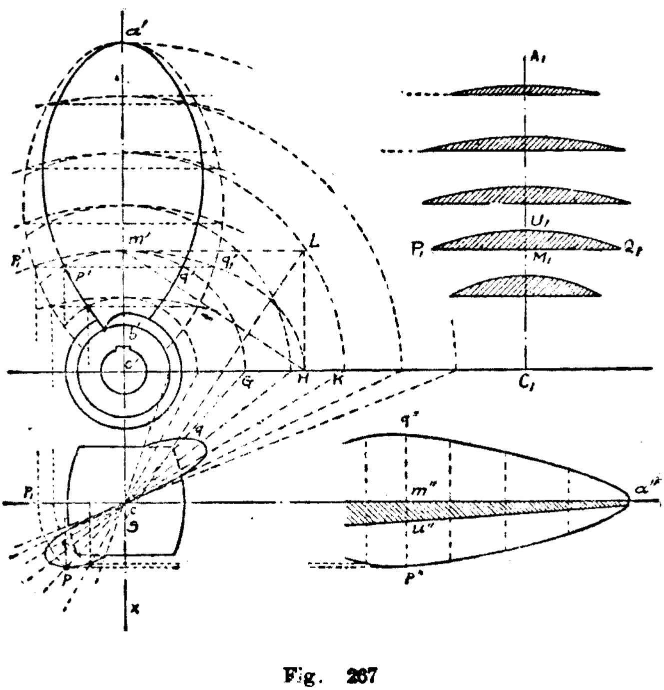


Fig. 267

$C'H$ 等於 CG，以 $C'H$，與 $c'm'$ 爲長軸與短軸之半，而作橢圓 $p_1'm'q_1'$，使其與曲線 $p_1'a'q_1'$ 相交於點 p_1'，q_1'，更由 p_1' 引投射線，及由 C 引平行於基線之直線。使其交於 p_1。此時於 CG 上，取 cp 等於 cp_1，則 p 爲所求之螺旋面上之一點之平面圖。後由 p 所引之投射線與由 p_1' 所引之平行於基線之直線，其交點 p' 即爲其立面圖。而點 q, q'，亦可依同法求得。後於翼根之表面線上，求得多數之點，將其連結作成曲線，則如圖所示，而得其平面圖及立面圖。圖中右下之圖，爲表面之側面圖。中央之 $m''a''u''$，乃示翼根最厚之部分之斷面。又右上圖中，取 P_1Q_1 等於橢圓弧 $p_1'm'q_1'$，M_1U_1 等於 $m''u''$，而作圓弧 $P_1U_1Q_1$。此時圖形 $P_1U_1Q_1M_1$ 與 Fig. 236 中薄板 $P_1Q_1R_1S_1$ 相等。

依上述之作圖。當作橢圓 $p_1'm'q_1'$ 時，頗費手續，今將此橢圓，若代用以近似之圓弧，似未爲不可。其法，可於圖中作矩形 $m'c'HL$，由 L 向對角線 $m'H$ 引垂線，使其與 $m'c'$ 相交於 S。此時 S 於 m' 處，爲橢圓 $p_1'm'q_1'$ 曲率中心。然橢圓弧 $p_1'm'q_1'$ 爲橢圓之一小部分，故其橢圓弧。與 S 爲中心過 m' 所作之圓弧，殆相一致。是故以圓弧代橢圓而作圖，似無差異。

練習題

(1) 今以半徑 2 糎，節距 5 糎之螺旋線爲導線，試求其母線與軸間之角成 30° 時之螺旋面投影。

(2) 今以錐狀螺旋線與其軸爲導線，試求其母線與其軸間之角成 30° 時之螺旋面投影。

(3) 有扼圓直徑爲 3 糎，底圓直徑爲 7 糎之單雙曲線迴轉面，兩底圓間之距離爲 6 糎，今此曲線之軸與水平直立兩投影面成 30°，45°時，試求其投影。

(4) 前問中，單雙曲線迴轉面之一面素，垂直於水平投影面時，其投影若何？

(5) 扼橢圓及底橢圓，其長軸之長爲 4 糎及 7 糎，其長軸與短軸之比爲 3:2，試求兩底間之距離爲 6 糎，之單雙曲線體之投影。

(6) 如 Fig. 268 所示之橢圓，爲螺旋推進器之翼根表面之展開圖。今螺旋面爲直螺旋面時。試作其投影。[註]： 其節距爲 1500 粍。

(7) 以頂角 30° 之錐狀螺旋線爲導線之直螺旋面，與斜螺旋面所成之螺旋桿之投影若何？

(8) 內徑 60 粍，外徑 90 粍節距 20 粍之三角螺旋桿之投影若何？

(9) 內徑 6 糎，外徑 9 糎之方形螺旋桿之投影若何？

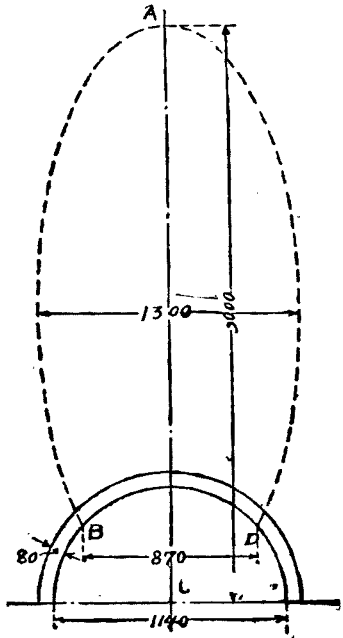


Fig. 268

第八章　面之接觸

1. 概說

如 Fig. 269 所示，P 爲曲面上之一點，A B 爲過點 P 之面素。曲線 P Q，P R 爲過點 P 之曲面上之任意二線，今使其與任意之面素 Q R 之交點爲 Q, R。此時 P, Q, R 三點，當在一平面上。面素 Q R，縱令與面素 A B 至如何接近，然 P Q R，終在一平面上。面素 Q R，接近面素 A B 至於極限時，則直線 P Q, QR, RP，均應於點 P 爲曲線 PQ, AB, PR 之切線。然曲線 PQ, PR，因其爲曲線上所引任意之線，故過點 P 之曲面上之諸線，於點 P 處所成之切線，應在平面 P Q R 上。換言之，曲面上任意一點之諸切線，應在一平面上。如斯之平面，謂之於 P 處之切平面 (Tangent plane) 又過切點垂直於切平面之直線。謂之法線 (Normal)

作圖題1. 求含已知錐體之曲面上一點之切平面之跡。

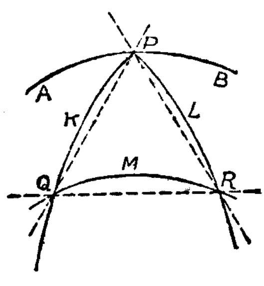


Fig. 269

解： 含過已知點之面素，及其與底相交點之切線之平面。卽爲所求之切平面。此時其底若在一投影面上，則過已知點之面素，與其底相交點之切線，應爲其投影面上切平面之跡。

作圖： 如 Fig. 270 所示，乃其底在水平投影面上時所作之圖也。圖中作過已知點 P 之面素，與其底相交於點 N，而點 N 處之切線。

應爲切平面之水平跡。而平面 tTt′，即爲所求之平面。

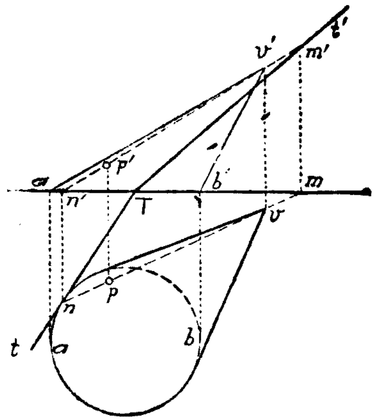


Fig. 270

作圖題2. 含已知柱體之曲面上一點之切平面，其跡若何。

解： 作過已知點之面素，及此面素與其底交點處之切線，含此二者之平面，乃爲所求之平面。此時其底若在一投影面上，則其面素與其底之交點處之切線，即爲切平面之投影面上之跡。

作圖： 如 Fig. 271 所示，爲其底在水平投影面上時之圖也。圖中過已知之點P之面素PR之水平跡r處之切線 tT，即爲所求之切平面之水平跡。然後由其水平跡而求其直立跡 Tt′ 可也。

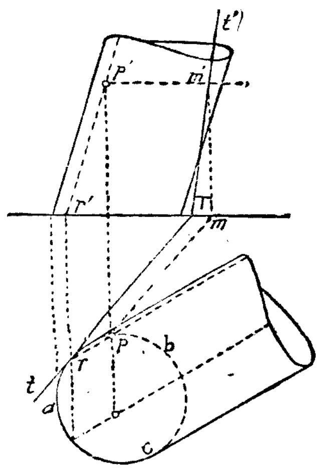


Fig. 271

作圖題3. 求含已知之點而切於他已知錐體之平面之跡。

解： 連結已知之點與錐體頂點之直線，及由此直線與含錐體底之平面相交點向其底引切線。含此二者之平面，乃爲所求之切平面。

作圖： 如 Fig. 272 所示，乃錐體之底在水平投影面上時之圖

也。作圖之法，先由已知點P，與錐體之頂點V相結，由其所成之直線之水平跡n，向其底之平面圖引切線tT，此時tT，即爲所求之切平面之水平跡。次引VP之直立跡m'，使其與T所結之直線爲Tt'，是即爲所求之直立跡也。

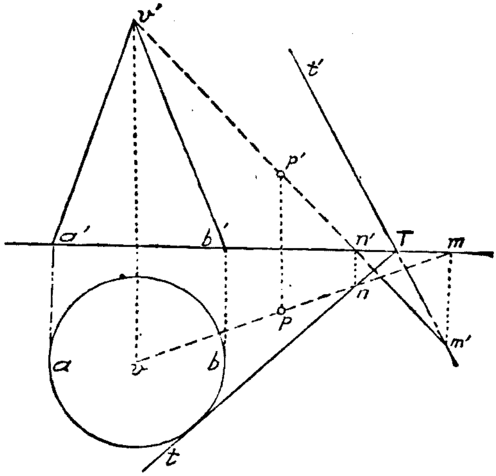


Fig. 272

作圖題4. 平行於已知之直線，而切於他已知錐體之平面，其跡若何？

解： 過錐體之頂點，引平行於已知直線之直線，後由此直線與錐體底面之交點向其底引切線。含此二者之平面，乃爲所求之平面。

作圖： 如 Fig. 273 所示，乃其底切垂直於水平投影面之錐體，而求平行於 M N 之切垂面之圖也。其作法，先由頂點 v, v' 引平行於 mn, m' n' 之 vo, v'o'，而求其與其底之交點 o,o '。次由此向其底引切線 ok, o'k', ol, o'l'，而求其水平跡 k,l。然 ov, o'v' 之水平跡 S 與 k, l 所結之二直線 t_1T_1, t_2T_2 爲其所求之水平跡。故 ov, o'v' 之直立跡 r' 與 T_1, T_2 所結之 T_1t_1', T_2t_2'，即爲所求之直立跡。

作圖題5. 求平行於已知直線 M N，而切於他已知柱體之平面之跡

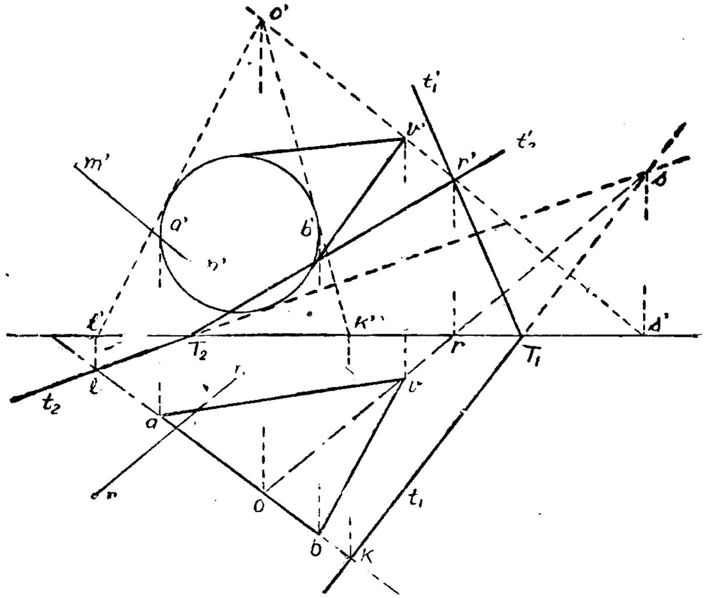


Fig. 273

解： 作一平面平行於與已知直線又已知柱體之軸，而求其與含柱體之底之平面相交跡。然平行此相交跡，而切於柱體之底之直線，應在所求之切平面上。故含此切線，所作之平行於上述平面之平面，即得所求之切平面。此時柱體之底，若在一投影面上，則上述之切線，爲其切平面於其投影面上之跡。

作圖： 如 Fig. 274 所示，圖中 mn, m'n' 爲已知直線之投影，平面 pPp' 乃含柱體之底之平面。其作法，先求含 mn, m'n' 且平行於柱體之軸之平面 rRr'，使其與平面 pPp' 相交爲 ef, e'f'。次引平行於 ef, e'f' 而切於柱體之底之直線 (gh' g'h'), (ij, i'j')。然後

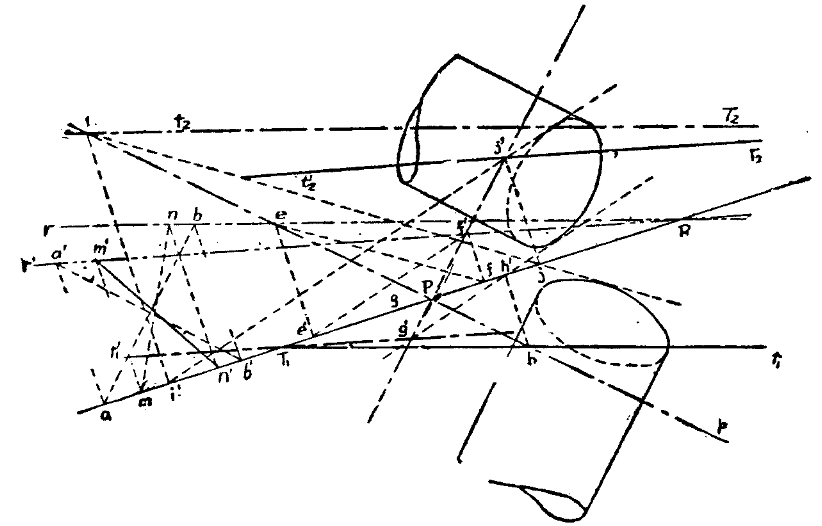


Fig. 274

過 gh, g'h' 之水平跡 h, 引平行於 rR 之 t_1T_1, 是爲所求之一平面之水平跡。再過直立跡 g', 引平行於 Rr' 之 $T_1t'_1$, 卽爲所求之直立跡。又合 ij, i'j 引平行於平面 rRr' 之平面 $t_2T_2t'_2$, 卽得所求之一平面。

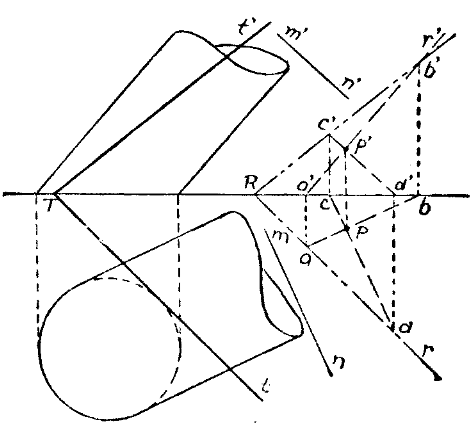


Fig. 275

如Fig. 275 所示,乃柱體之底位於水平投影面上時之圖也。圖中作平行於 M N 及柱體之軸之平面 rRr', 使其與水平跡rR,成平行,且切於其底之平面圓 tT。此時 tT, 卽爲所求之一平面之水平跡。故由 T 引平行於Rr' 之 Tt' 卽爲所求之直立跡。

作圖題6. 有傾斜於兩投影面之不定長之圓柱面，求含已知點 P 且與此圓柱面相切之平面之跡。

解: 以任意之平面切柱面，而求其切口。後由已知點，引平行於柱面之軸之直線。此直線與切斷平面相交於一點。復由此交點，向切口引切線。則含此二者之平面，即爲所求之平面。此時切口之平面圖及立面圖，若以圓形之平面切之，則作圖上似較便利。

作圖: 如 Fig. 276 所示，先設平行於柱面之軸之直立副投影面，作副投影。次於此面上，而求其柱面之切口之平面圖，此平面圖，爲

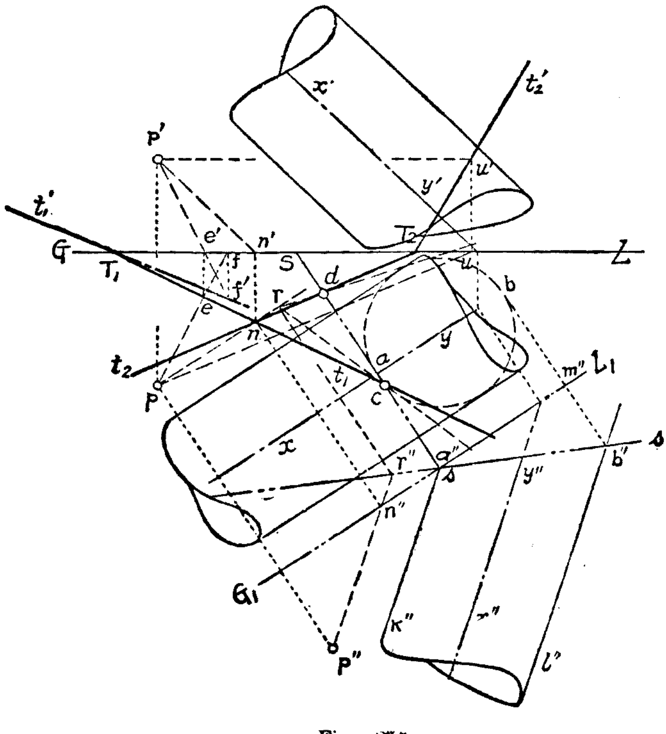


Fig. 276

圓形之平面 S。今 ss″ 爲其平面之副直立跡，sS 爲其水平跡，圓 ab 爲其切口之平面圖。復由已知點 P，引平行於圓柱之軸 PN，其水平跡爲 n。今使其與切斷平面 S 相交點之副立面圖爲 r″，平面圖爲 r。後由 r 向圓 ab 引切線，使其與 sS 相交於 c,d，由 c,d 與 n 相結所得之 cT_1，dT_2，即爲所求之平面之水平跡，後藉此而求其各直立跡 T_1t_1'，$T_2t'_2$ 可也。

作圖題7. 設有切平面，其軸與平行於直立投影面之不定長之圓柱面相切，與直線 M N 平行，求其跡。

解： 以任意之平面 S 切圓柱面，而求其與平行於 M N 及柱面軸之任意之平面 R 相交跡。此時含平行於此相交跡之柱面之切口之切線，而引平行於平面 R 之平面，即爲所求之平面。

作圖： 如 Fig. 277 所示，平面 sSs′ 乃切口之平面圖爲圓 ab 之平面。又平面 rRr′ 爲平行於 M N 及柱面之軸之平面，其直立跡與其軸之立面圖平行。又 u v，u′v′ 乃平面 sSs′ 及 rRr′ 之相交跡。其平行於平面圖 uv 切於圓 ab 之直線 ef，lk，與 sS 相交於點 e，k。此時由 e，k 所引之平行於 rR 之 eT_1 及 kT_2，是爲所求之平面之水平跡。又由 ef，kl，與基線相交之點所引之垂直於基線之直線，與 Ss′ 相交於點 f′，l′。後由 f′，l′ 所引之平行於 Rr′ 之 T_1f'，T_2l'，即爲所求之直立跡。

2. 二圓錐共通之切平面存在時之作圖法

（i）二圓錐之頂角相等，且其軸爲平行時，其共通之切平面有二。如 Fig. 278 Fig. 279. 所示，其法，先將二圓錐以垂直於其軸之平

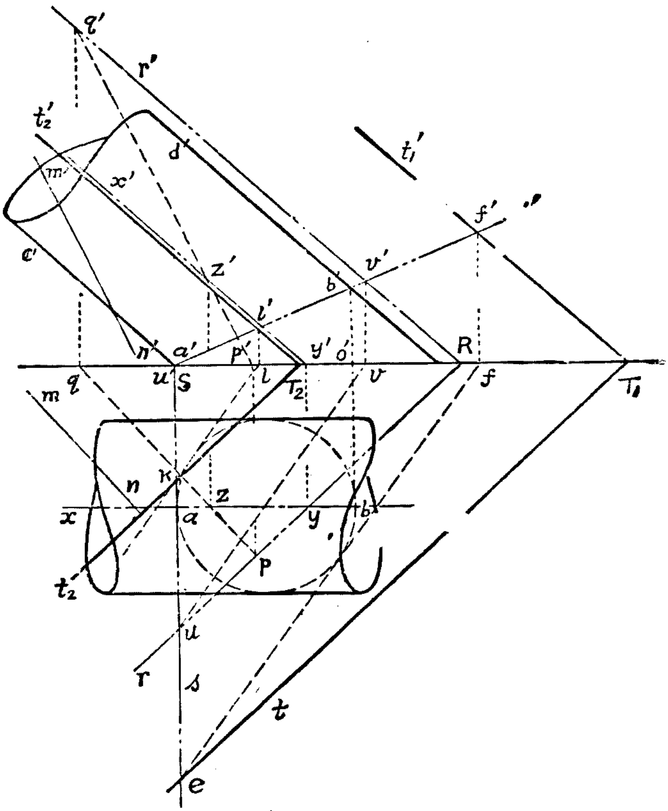


Fig. 277

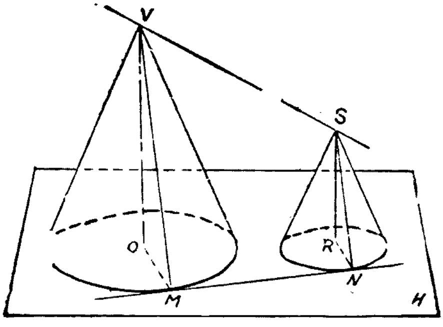


Fig 278

面H切之，其切得之切口為圓 O, R。次向此二圓引共通切線 M N. 置各切點為 M, N。此時二圓錐因其軸平行，其頂角相等，故其面素 V M, S N 為互相平行。依此，而知平面 M N S V 為共通之切平面。如 Fig. 278 所示，乃圓錐之方向相同，故所引之共通之切線，在圓之外方。如 Fig. 279 所示，乃圓錐方向相反對，故所引之共通之切線，在二圓之中間。

(ii) 二圓錐以共通之一球包絡時，應有共通切平面之存在。此何故，茲舉 Fig. 280 所示以明之。圖中球 o, 乃內切於 V, S 為頂點之圓錐面之球。設球與錐面之切觸線之交點為 P, 則直線 S P, V P 為錐面之

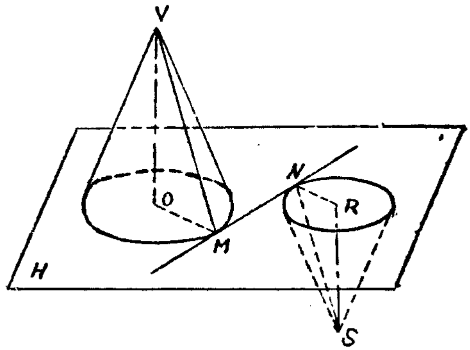


Fig. 279

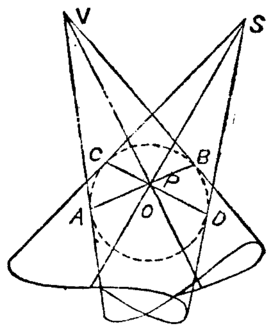


Fig. 280

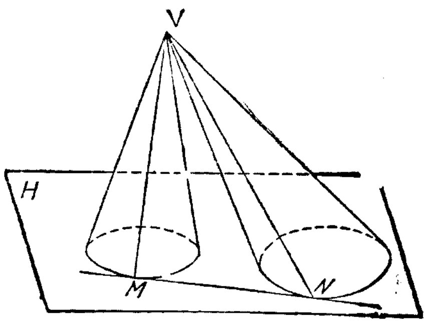


Fig. 281

面素，因其切球 O 於 P，故平面 V P S 爲共通之切平面。

(iii)二錐面頂點爲共通時，其共通之切平面亦存在。如 Fig. 281 所示，圖中，V 爲頂點之二圓錐面，以任意之平面 H 切之，而向其切口引共通切線 M N。此時 M N V 在一平面上，而切於各錐面。如此共通切線共有四數。

作圖題8. 求切已知二球 P，Q 而與水平投影面成角 θ 之平面之跡。

解： 包絡已知二球，且與其底角等於 θ 之直立圓錐，其共通相切之平面，卽爲所求之平面。如斯之平面通常有八。

作圖： Fig. 282，Fig. 283，Fig. 284，Fig. 285 四圖中，包絡二球 P，Q 之圓錐，其軸垂直於水平投影面，其底角爲 θ，向此圓錐之水平跡之圓所引之共通切線，乃爲所求之平面之水平跡。水平跡旣得，則其直立跡，自不難求也。Fig. 282，Fig. 285 爲圓錐之所向相同，故共通切線在圓之外側。Fig. 283，Fig. 284 爲圓錐所向相反，故共通切線，在二圓之間。

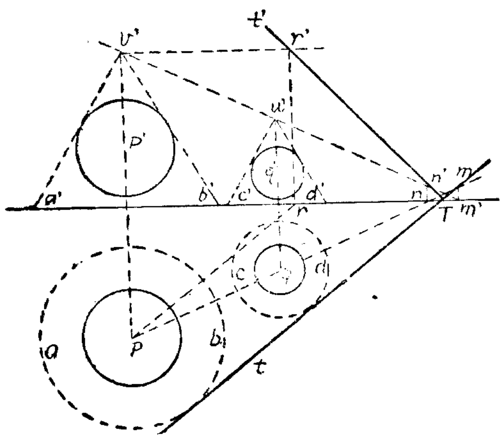


Fig. 282

作圖題9 有含已知點 P，與水平投影面成 θ，與直立投影面成 ϕ 之平面，求其跡。

解： 設已知點爲頂

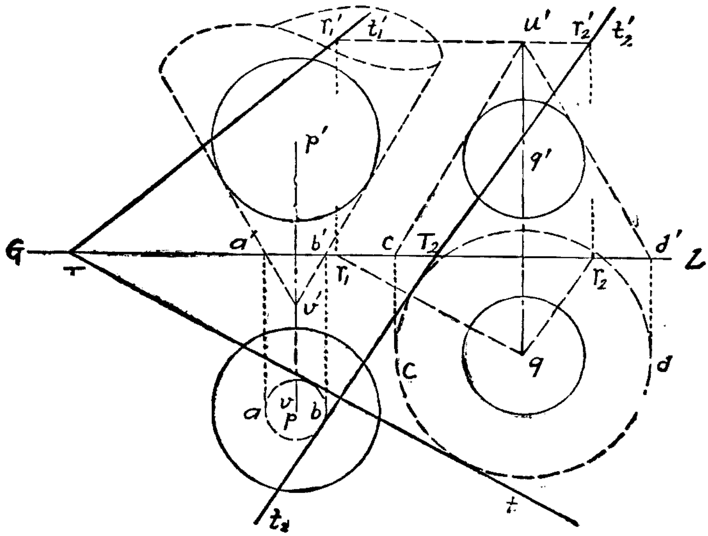


Fig. 283

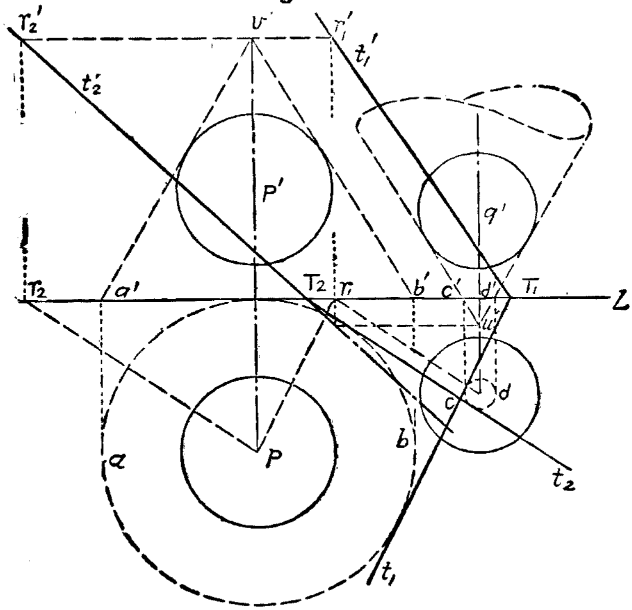


Fig. 284

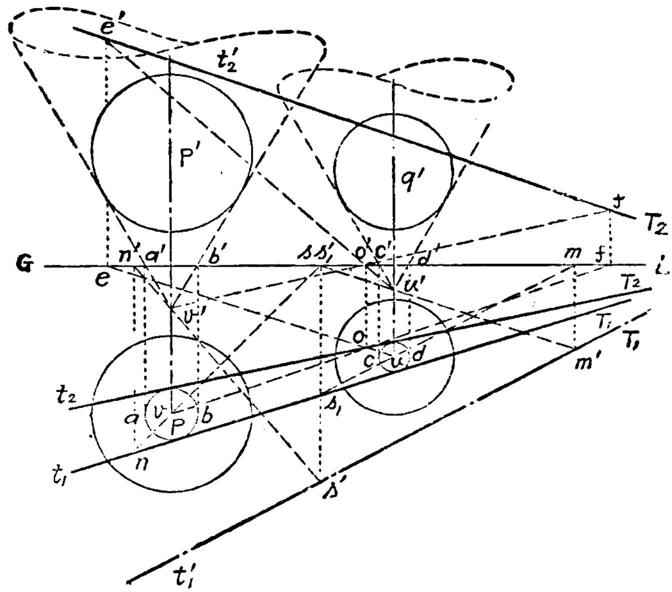


Fig. 285

點，先作底角爲 θ 之圓錐，其軸垂直於水平投影面。及作底角爲 ϕ 之圓錐，其軸垂直直立投影面。此時切兩圓錐共通之平面，乃爲所求之平面。

作圖： 如 Fig. 286 所示，設 P 爲頂點，底角爲 θ 之圓錐，其軸垂直於 H. P，其水平跡爲圓 c d，及底角爲 ϕ 之圓錐，其軸垂直於 V. P. 其直立跡爲圓 m′ n′。次將內切於其軸垂直於 V. P. 之圓錐，以任意之球包之，而作其軸垂直於 H. P. 底角爲 θ 之圓錐。後置其頂點爲 q, q′ 水平跡爲圓 ef。此時共切上述之直立二圓錐之平面，亦切於其軸垂直於直立投影面之圓錐。依此，則圓 cd, ef 之共通切線 t_1T_1, t_2T_2 應爲所求之切平面之水平跡。故由 T_1, T_2 向圓 m′ n′ 所引之切線、

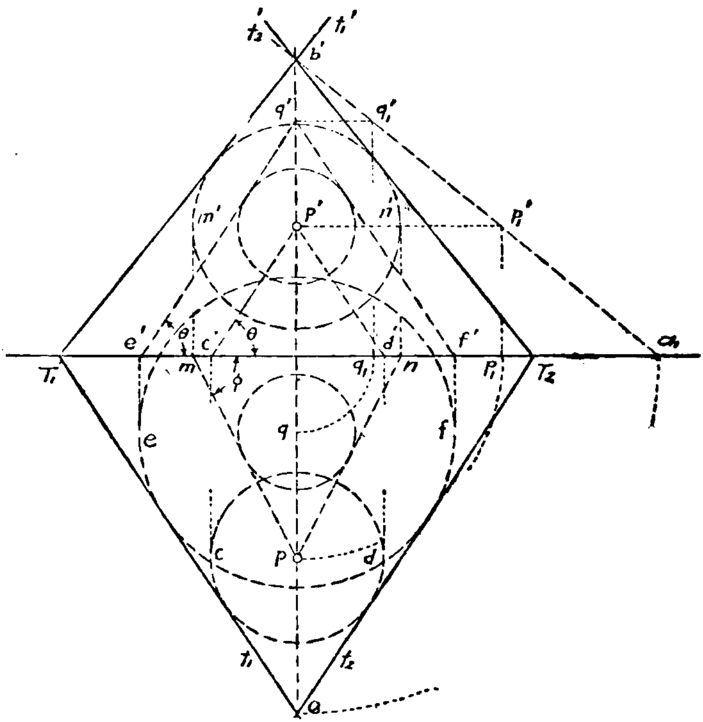


Fig. 286

即爲所求之直立跡。

作圖題10. 今有切於已知不定長之圓錐與水平投影面成角 θ 之平面,求其跡。

解: 將內切於已知圓錐之任意球包絡之,而作其軸垂直於水平投影面,其底角爲 θ 之圓錐。或使其與已知圓錐共通頂點,而作其軸垂直於水平投影面,其底角爲 θ 之圓錐。此時已知之圓錐,與上述直立圓錐所切之平面,及切於上述之直立二圓錐之平面,皆爲所求之平面。如斯

平面，通常有四。

作圖： 於已知圓錐與上述直立圓錐之水平跡，若引共通切線。則得所求之平面之水平跡。如 Fig. 287 所示，乃已知圓錐面之水平跡在紙面內，而不能求得之圖也。圖中，先於其底角 θ 之直立二圓錐之水平跡，引共通切線 t_1T_1, t_2T_2。此時 t_1T_1, t_2T_2, 因其爲所求之平面之水平跡，故可由此而求其各直立跡 T_1t_1', $T_2t'_2$。又包絡球 P 之直立圓錐，其方向相逆時，則所求之四平面之中，而得他二平面 $t_3T_3t'_3$, $t_4T_4t'_4$。參照 Fig. 288。

作圖題11． 有含已知直線 A B, 且與平

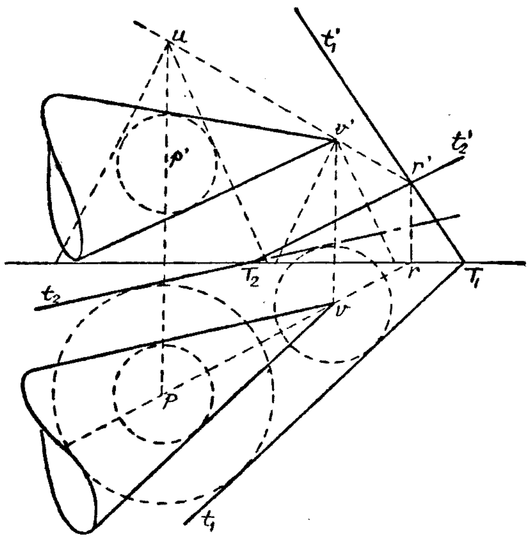


Fig. 287

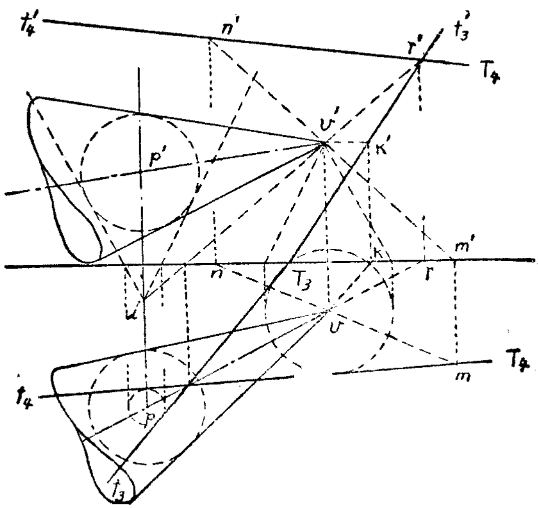


Fig. 288

面 P 成角 α 之平面，求其跡。

解： 以直線 A B 上任意之一點 A 為頂點，而作其軸垂直於平面 P，其底角為 α 之圓錐。此時含直線 A B，且切於此圓錐之平面，即為所求之平面。

作圖： 如 Fig. 289 所示，先引 G_1L_1 垂直於平面 P 之水平跡，

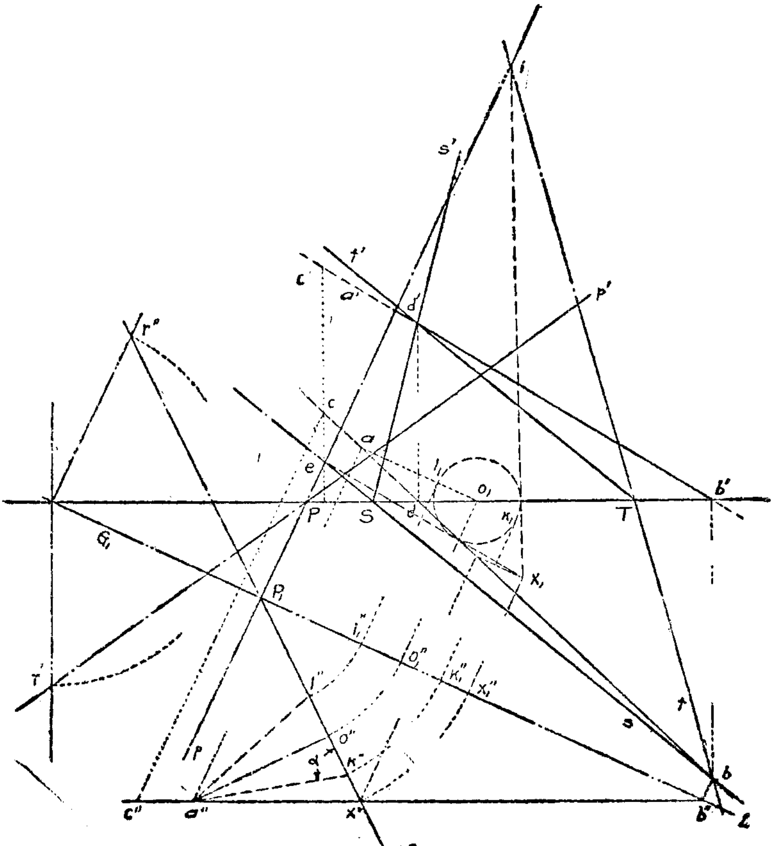


Fig. 289

作副基線，而求其直立面上AB之副投影 $a''b''$，及平面P之跡 P_1p''。此時由 a''，$P_1\ p''$ 與 α 所成之二直線爲 $a''\ k''$，$a''l''$。其所作成之圖形，爲其軸垂直於平面 P，其底角爲 α，其頂點爲 A 之圓錐之副投影。次將此圓錐及直線 A B 與平面P之相交跡，以平面P之水平跡 p P 爲軸，而倒於水平投影面上，則其彼此之位置，爲點 x_1，圓 $k_1\ l_1$。更由 x_1 向圓 $k_1\ l_1$ 引切線 x_1e，x_1i 使其與 pP 之交點爲 e，i。此時 A B 之水平跡 b 與 e，i 相結之 s S，tT，應爲所求之平面之水平跡。故 A B 之直立跡 d′ 與 S，T 所結之 Ss′，Tt′，即爲所求之直立跡。

作圖題12. 有平面含已知點 P 且與平面R成角 α 與水平投影面成角 θ，求此平面之跡。

解： 以P爲頂點，而作其軸垂直於平面 R，其底角爲 α 之圓錐。復以同P爲頂點而作其軸垂直於水平投影面，其底角爲 θ 之圓錐。此時切此二圓錐之平面，即爲所求之平面。

作圖： 如 Fig. 290 所示，先設垂直於平面 R 之水平跡之副投影面。後以P爲頂點，而作其軸垂直於平面 R，其底角爲 α 之圓錐之副投影 $x''\ p''\ y''$。及以同P爲頂點，其軸垂直於水平投影面，其底角爲 θ 之圓錐之副投影 $m_1''\ p''\ n_1'$。然此軸爲垂直於平面 R 之圓錐之軸，然以其傾斜於水平投影面，故其水平跡不爲圓。因此若無其圓錐之母線而作圖，可將內切於此圓錐之任意球包絡之，而作其軸垂直於水平投影面，其底角爲 θ 之圓錐之副投影 $m_2''\ v''\ n_2''$。此時上述之直立二圓錐之水平跡，因其爲圓 $m_1\ n_1$，$m_2\ n_2$，故向此二圓引共通切線 tT，而得所

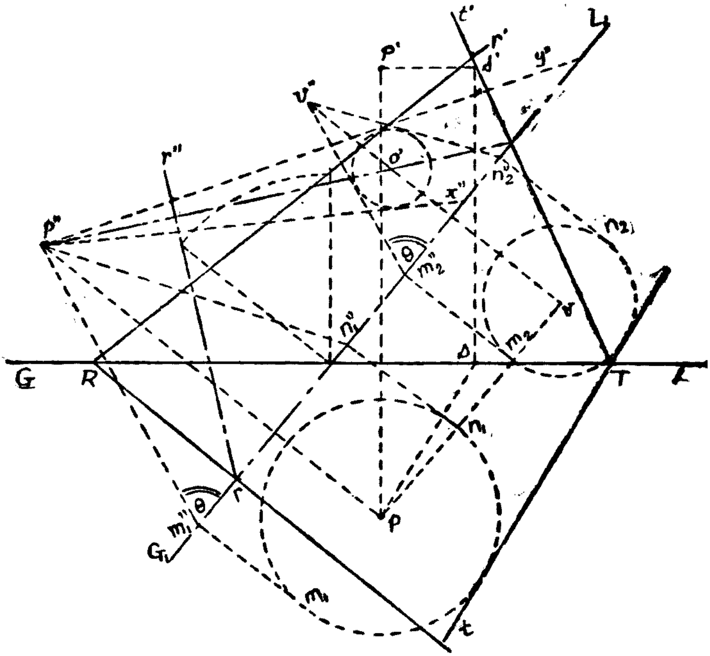


Fig. 290

求之平面之水平跡。後由是即可求其直立跡 Tt'。

作圖題13. 正四面體之二面與水平投影面所成之角 θ, ϕ 爲已知，求其投影。

解： 先作與水平投影面成 ϕ 之平面 T。次求正四面體之二面角 α。再求與平面 T 成角 α 與水平投影面成角 θ 之平面 R。此時於平面 R 與 T 之交跡上，置四面體之一稜，後將含此稜之一面，置於平面 T 上，而作正四面體之投影，是即所求之投影。此時平面 T，若使其垂直於直立投影面，可免作圖之繁。

作圖：　如 Fig. 291 所示，x y 爲平面R與T相交之平面圖，而 xv_1 爲平面R與T相交之平面圖，而以平面T之水平跡 tT 爲軸，倒置於水平投影面上之位置之圖也。次於 xv_1 上，取 a_1 b_1 等於正四面體之一邊，後以此爲一邊，而作正三角形 a_1 b_1 c_1，與三中線 a_1 d_1，b_1d_1，c_1d_1，則圖形 a_1 b_1 c_1 d_1 爲所求之四面體，倒置於水平投影面時之位置之圖。是故若將已倒置於水平投影面之平面T，復歸原有位置，則得四面體之立面圖 a′ b′ c′ d′ 及平面圖 a b c d。

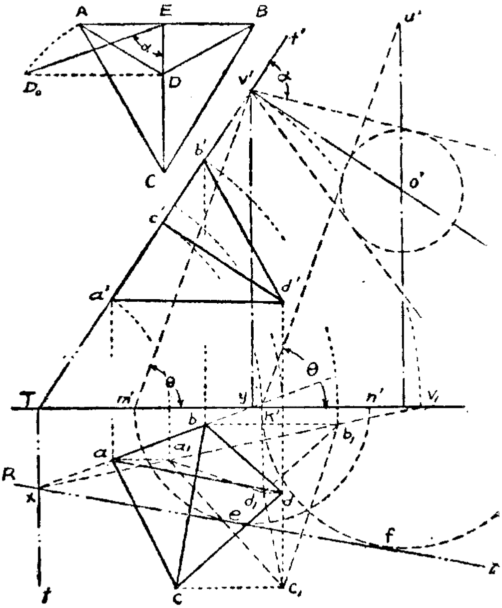


Fig. 291

作圖題14. 求與已知直線 AB 成已知角 α 及與水平投影面成角 θ 之平面之跡。

解：　以 A B 爲軸，作頂角爲 2 α 之圓錐。若切此圓錐而作與水平投影面成角 θ 之平面，則此題可解決矣。

作圖：　如 Fig. 202 所示，平面 tTt′ 爲所求之一平面。今以 A B 爲軸，作頂角爲 2 α 之圓錐之方法，既於第六章作圖題 5 中說明之。

又切此圓錐而作平面與水平面成角 θ 之方法，亦於本章作圖題 10 中述之，茲免贅。

作圖題15.　立方體之一面及其一對角線，與水平投影面所成之角 θ, ϕ 爲已知，求其投影。

解：　先求立方體之對角線與一面所成之角 α。次引與水平投影面成角 ϕ 之直線 A F，而作與此成角 α，與水平投影面成角 θ 之平面 P。此時置 A 於平面 P 上，取 A F 之長等於立方體之對角線之長，由 F 向平面 P 引垂線而求其垂線之足 G。此時平面

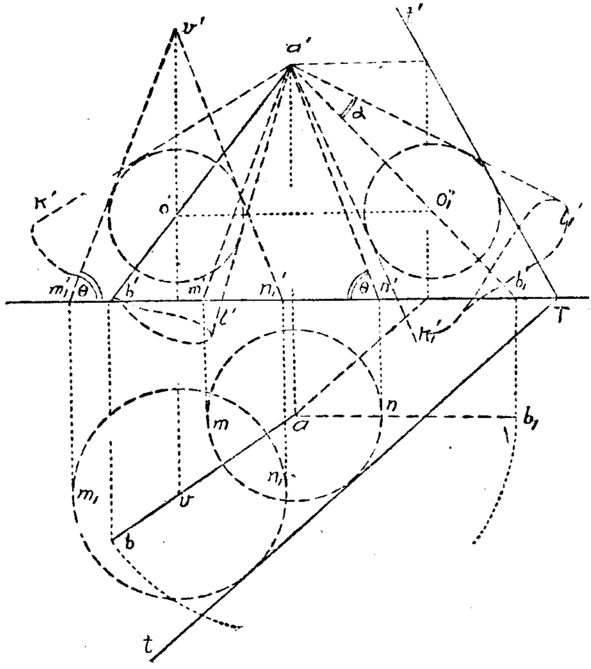


Fig. 292

P 上以 A G 爲對角線所作之正方形，即爲所求之立方體之一面。此一面既決，則立方體之投影，自不難解決矣。

作圖：　如 Fig. 293 所示，乃其大要圖也。

作圖題16.　有迴轉面，其軸垂直於水平投影面，求於迴轉上面一

點之切平面之跡。

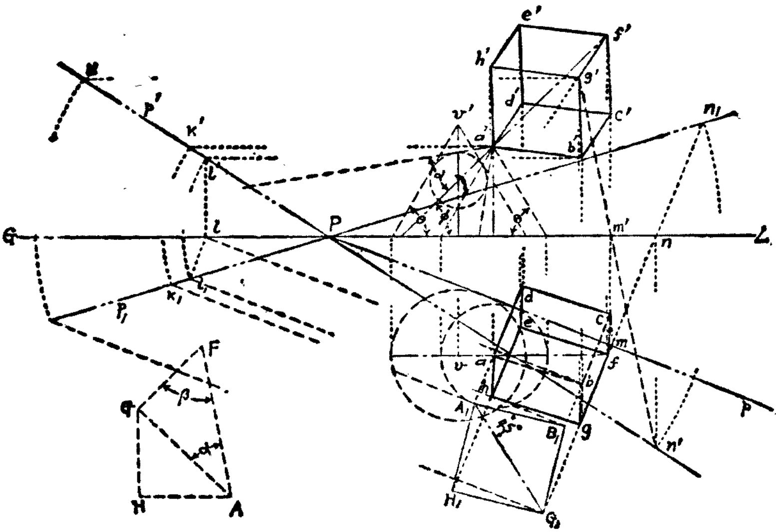


Fig. 293

解： 迴轉面用含已知點且垂直於迴轉面之軸之平面切之，其切口爲圓。後以此圓而作包絡迴轉面之圓錐，復切圓錐而作含已知點之平面。或作含於已知點之切口之切線，及垂直於已知點之法線之平面亦可。

作圖： 如 Fig. 294 所示，P 爲橢圓迴轉面上已知之點。始由 P 之立面圖 p' 引平行於基線之直線，使其與迴轉面之立面圖相交於 p_1'。次於點 p' 之切線 $p_1'\ u_1'$ 與軸之立面圖相交之點爲 x'。此時 x' 乃含 P 垂直於其軸之平面於所切之切口包絡曲面之圓錐，其頂點之立面圖。再由 p_1' 引垂直於 $x'\ p_1'$ 之直線，使其與軸之立面圖相交於 o'，則

o′ 與 p′ 相結所成之直線，爲於點 P 之法線之立面圖。是故切平面之直立跡垂直於 o′p′，其水平跡垂直於 op。又切平面之直立跡應過於點 P 之切口之切線 pr, p′r′ 之直立跡 r′。依此則切平面之跡，不難求也。

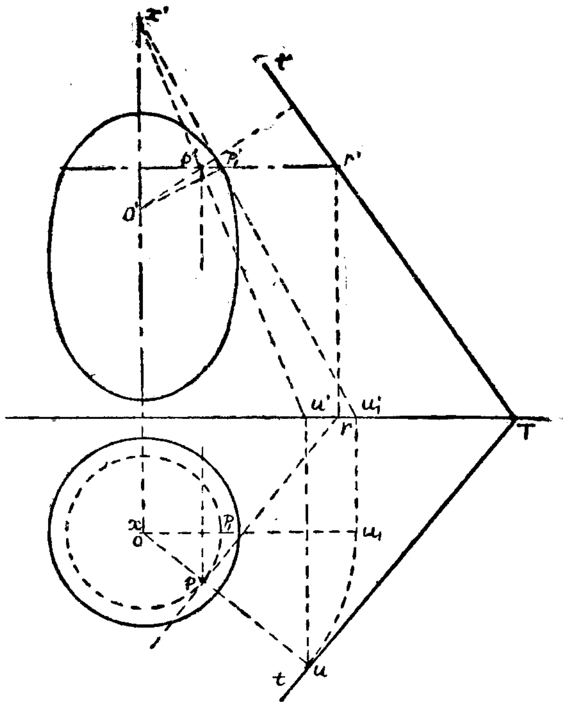


Fig. 294

作圖題17.　設有平面，含已知之直線 A B，且切於他已知之球，求其平面之跡。

解：　先作含球之中心而垂直於 A B 之平面 S，次求此與 A B 之交點 A。此時由 A 以平面 S 切球，向其切口所引之切線之切點，即爲所求之切平面之切點。是故，含此切點與 A B 之平面，乃爲所求之平面。或於 A B 上而作有頂點之圓錐面且包絡此球，復切此圓錐面，而作含 A B 之平面亦可。

作圖1：　如 Fig. 295 所示，圖中含已知球之中心 o，先作垂直於直線 A B 之平面 sSs′，而求其與 A B 交點之投影 a, a′。次於平面 sSs′

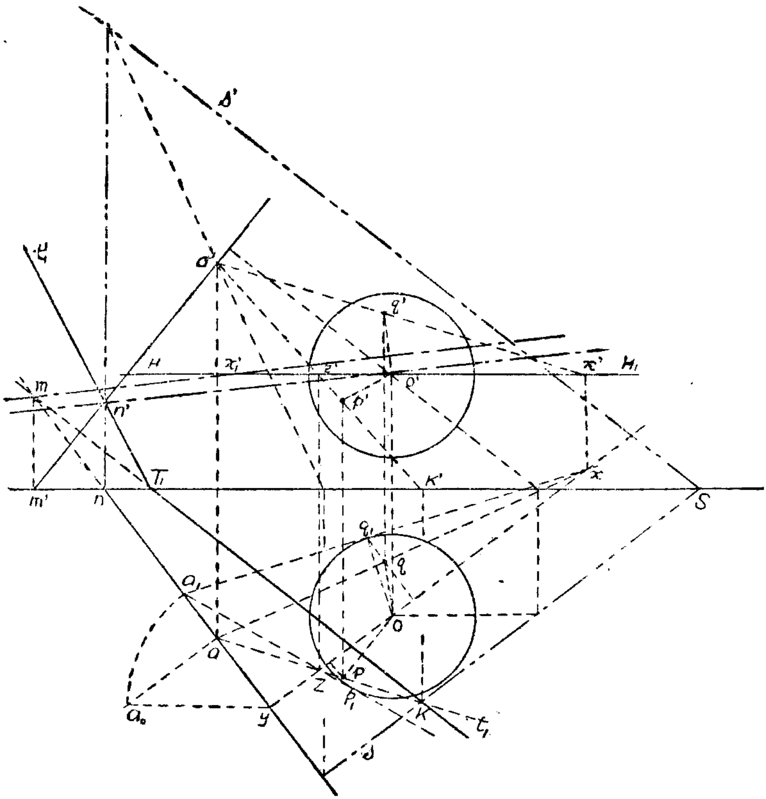


Fig. 295

上,引過中心 o 之水平直線 o x, o'x', 後以此爲軸,以平面 sSs' 切球 O所得之切口及點 a, a' 迴轉,使成水平。此時迴轉後之球,其切口之平面圖,與球之平面圖圓O相一致。又於迴轉後,點 a, a' 之平面圖 a, 應在 A B 之平面圖 a b 上。求 a_1 時,可先使 o x 與 a b 之交點爲 y, 而求 y a_1 之長。求 ya_1 之法,須以 ay 爲底,以 a' 至 o'x' 之距離 a' x_1' 之長,爲所作之直角三角形之高,此時斜邊之長 ya_0,即等於 ya_1

之長。後由 a_1 向圓 O 引切線，設其切點爲 p_1 及 q_1，則此二點，卽爲所求之切平面之切點於迴轉後之平面圖。後將迴轉後之切口，復歸原有之位置，則可求其各平面圖 p, q 又立面圖 p′, q′。是故，由 A B 之水平跡m向 o p, oq 所引之垂線 t_1T_1, t_2T_2, 卽爲所求之切平面之水平跡。由直立跡 n′ 向 o′ p′, o′ q′ 引垂線 T_1t_1', $T_2t'_2$ 卽爲所求之切平面之直立跡。

作圖2. 如 Fig. 296 所示，以 ab, a′b′ 上任意之一點 a, a′ 爲頂點，而作包絡球 o, o′ 之圓錐面。此時圓錐面之水平跡因爲橢圓，故可依第五章作圖題 6 而求其長軸及焦點。後由 a b, a′b′ 之水平跡 b 向橢圓引切線 t_1T_1, t_2T_2。此時 t_1T_1, t_2T_2 因其爲所求之平面之水平跡，故由此而求其各直立跡 $T_1t'_1$, $T_2t'_2$ 可也。

又 t_1T_1, t_2T_2 與過橢圓之切點 k,l 之錐面

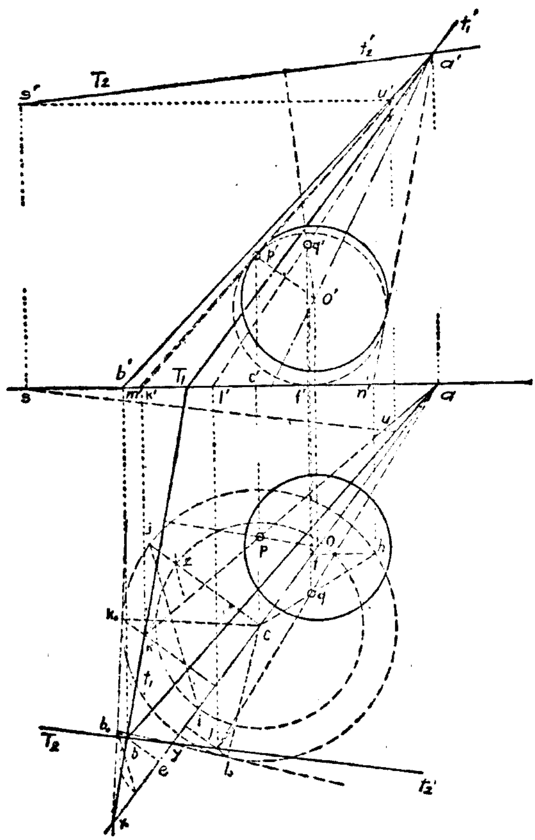


Fig. 296

面素。與由球之中心 o, o′ 向切平面 $t_1T_1t_1'$, $t_2T_2t'_2$ 引垂線，其所得之交點 (p, p′), (q, q′) 是爲切點。

作圖3. 如 Fig. 297 所示，先於 ab, a′b′ 上作有頂點之圓錐其頂點爲 v, v′, 其軸平行於水平投影面。此時由 v 向球之平面圖圓 O 引切線，其切點 m, n 連結所成之直線，爲球與錐面之接觸線之平面圖。含此接觸線之直立面，使其與 ab, a′b′ 之交點爲 c, c′。再將此平面倒

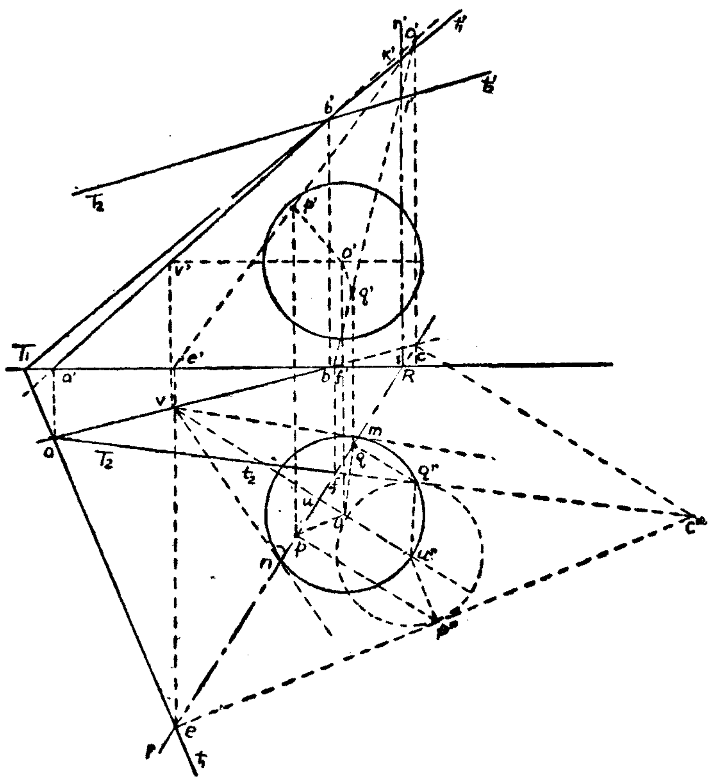


Fig. 297

於水平投影面，而求點 c, c′ 及接觸線之位置 o″, 圓 u″。此時，由 c″ 向圓 u″ 所引之切線，與 m n 相交之點 e, f, 乃由點 c, c′ 向接觸線所引之切線之水平跡。又由切線之切點 p″, q″ 向 m n 引垂線，設其垂線之足爲 p, q, 是卽爲所求之切平面其切點之平面圖。又 p″p, q″q 之長，因其各等於切點距水平投影面之高，故可求其切點之立面圖 p′; q′。因之，由 ab, a′b′ 之水平跡 a, 向 op, oq 所引之垂線 t_1T_1, t_2T_2, 卽爲所求之切平面之水平跡。由直立跡 b′ 向 o′p′, o′q′ 所引之垂線 T_1t_1', T_2t_2', 卽爲所求之平面之直立跡。

作圖4. 如 Fig. 298 所示，先作包絡球 o, o′, 其頂點在 ab, a′b′ 上，其軸平行於直立投影面之圓錐面，其頂點爲 a, a′。次作包絡球 o, o′ 之直立圓柱面。此時，上述之圓錐面與圓柱面，相交於二橢圓，其立面圖，應爲直線。今此二橢圓中其一橢圓之平面爲 sSs′, 使其與 ab, a′b′ 之交點爲 b, b′。此時由 b 向圓 o 所引之切線 bk, bl, 乃向橢圓所引之切線之平面圖。次由其各切點 k, l 引投射線，使其與 Ss′ 之交點爲 k′ l′ 時則二點 (k, k′), (l, l′), 爲由點 (b, b′) 向橢圓所引之切線之切點。是故含 ab, a′b′ 與點 (l, l′), (k, k′) 之平面 $t_1T_1t_1'$, $t_2T_2t_2'$, 卽爲所求之切平面。故由中心 o, o′ 向切平面所引之垂線，與錐面之面素 (al, a′l′), (ak, a′k′), 相交之點 (p, p′), (q, q′), 卽爲所切之點。

作圖題18. 設切橢圓體及切於有一軸垂直於水平投影面之橢圓體，且含有已知直線 M N 之平面其跡若何。

答. 包絡橢圓體之錐面之接觸線，因其爲橢圓形，故於 M N 上置頂點，而作包絡橢圓體之二錐面。此時錐面與橢圓體之接觸線之二橢圓

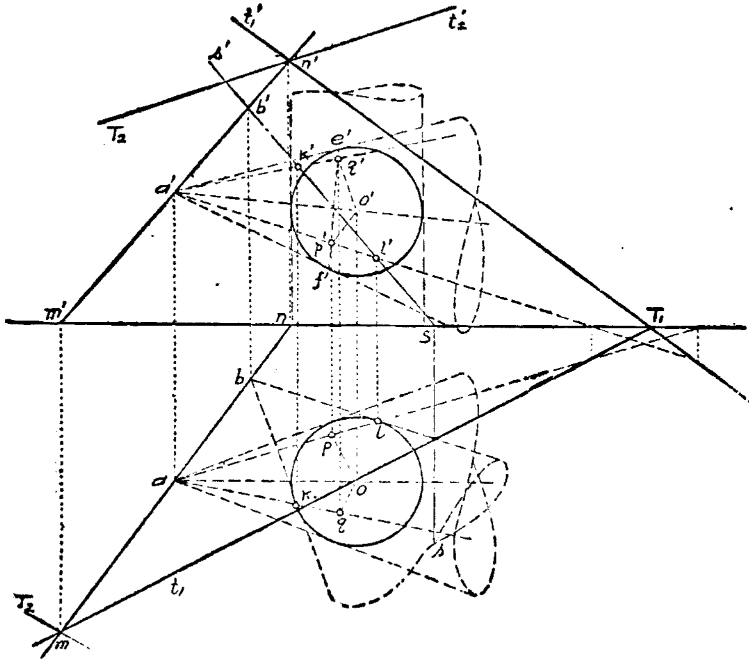


Fig. 298

之交點，即爲所求切平面之切點。是時，若將錐面之軸，使其平行於一投影面，則作圖之手續，因之較簡。

作圖: 如 Fig. 299 所示，以 m, m' 爲頂點，其包絡橢圓體之錐面之軸與直立投影面平行，而直線 g'h'，爲兩者接觸線之立面圖。又點 n, n' 爲頂點，其包絡橢圓體之錐面之軸與水平投影面平行。而直線 k l 爲兩者接觸面之平面圖，橢圓 k'l'i'j' 爲其立面圖。至求橢圓 k'l'i'j' 之法，可如下述。

於楕圓體之平面圖之楕圓，引平行於 k l 之弦，以其一端爲 z。次由 k, l 引投射線使其與 a'b' 之交點爲 k', l'。由 k' l' 之中點 r' 引垂直於此之直線，在此直線上，取 r'i', r'j' 等於 o'e'.$\frac{ql}{2}$/oz。此時，以 i' j' 爲長軸，k' l' 爲短軸之楕圓，乃示 ql 爲平面圖之楕圓之立面圖也。

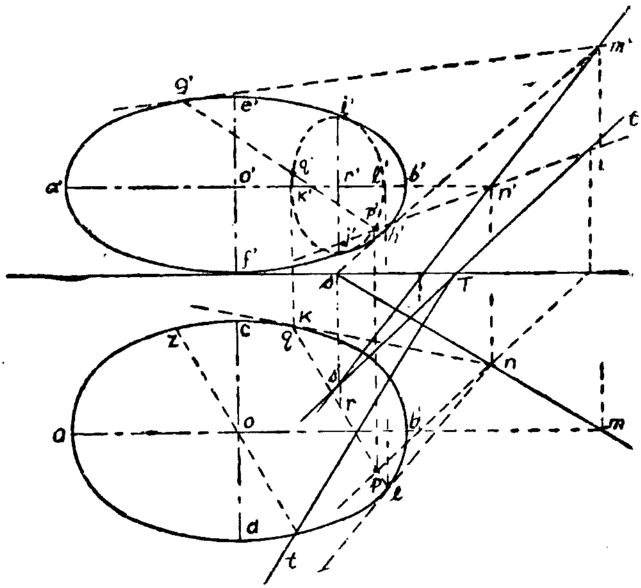


Fig. 299

由是 g' h' 與 k' l' i' j' 之交點 p', q', 是爲所求之切平面之切點之立面圖。後由此二點引投射線，而與 ql 所交之點 p, q, 即爲其平面圖。故含 m n, m' n' 與 (p, p'), (q, q') 之平面，乃爲所求之切平面。圖中平面 tTt', 乃以 p, p' 爲切點之切平面。其以 q, q' 爲切點之平面，茲因避作圖之繁，故從略。

作圖題19　有平行於已知直線 X Y 且切於其軸垂直於水平投影面之類似螺旋面之平面，求其跡。

解：　切於類似螺旋面之導錐，而作平行於 X Y 之平面R。此時平行於平面R而切於類似螺旋面之平面，即爲所求之平面。

作圖：　先作已知曲面之面素，與垂直於其軸之平面成角 θ，後作其軸與此成平行，底角爲 θ 之圓錐 v m n, v′ m′ n′。此時，錐面爲已知曲面之導錐。

如 Fig. 300 所示，設平行於 xy, x′y′ 而切於導錐 v m n, v′ m′ n′

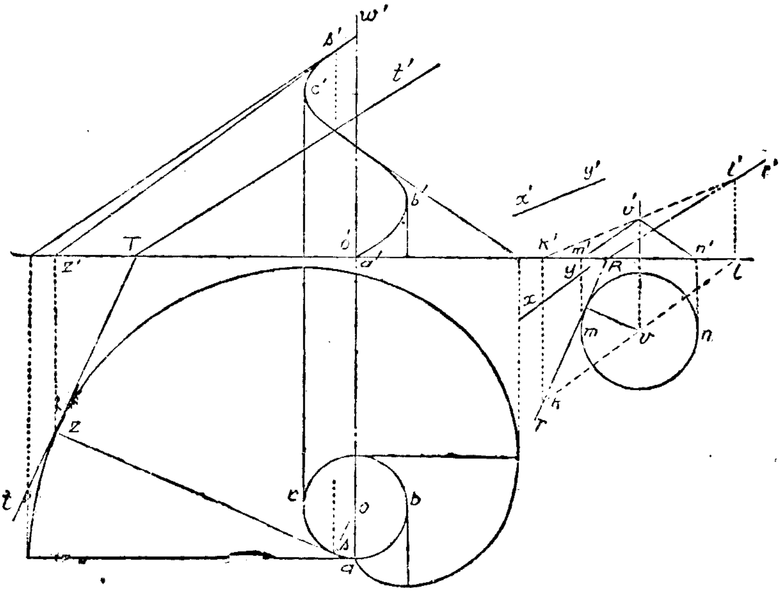


Fig.　300

之平面爲 rRr′。其平行於 rR 而切於已知曲面之水平跡之直線 tT，即爲所求之切平面之水平跡。故由 T所引之平行於 Rr′ 之 Tt′，即爲所

求之直立跡。

作圖題20. 螺旋面之軸,垂直於水平投影面,今有切螺旋面上之一點 u 之切平面,其跡若何。

解: 過 u 引曲面上之螺旋線,則含於點 u 之螺旋線之切線,與過 u 之面素所作之平面即爲所求之平面。

作圖: 如 Fig. 301 所示,螺旋線 abc–a′b′c′ 乃過點 u 之曲面上之螺旋線 u z, u′ z′, 即 u, u′ 之切線。又 u m, u′ m′ 爲過 u, u′ 之面

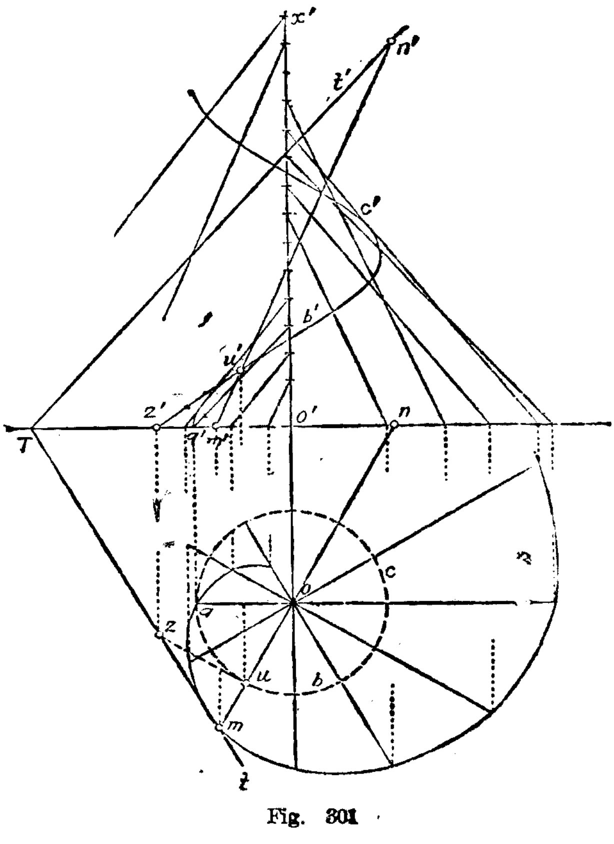


Fig. 301

素。平面 tTt′ 乃含 (uz, u′z′), (um, u′m′) 之平面，亦卽所求之平面。

作圖題21. 今有軸垂直於水平投影面之螺旋面,求切於螺旋面而垂直於直線 K L 之平面之跡。

解： 導錐，以含螺旋面之導錐之頂點，且垂直於 K L 之平面切之,其切口爲二直線。此時含有之平行於此直線之螺旋面之面素，及垂直於 K L 之平面卽爲所求之平面。切平面之切點，爲切平面與曲面共通二線之交點。當含導錐之頂點,而垂直於 K L 之平面,與導錐不相交時,無切平面之存在。

作圖： 如 Fig. 302 所示,平面 rRr′, 乃含導線 vxy－v′x′y′ 之

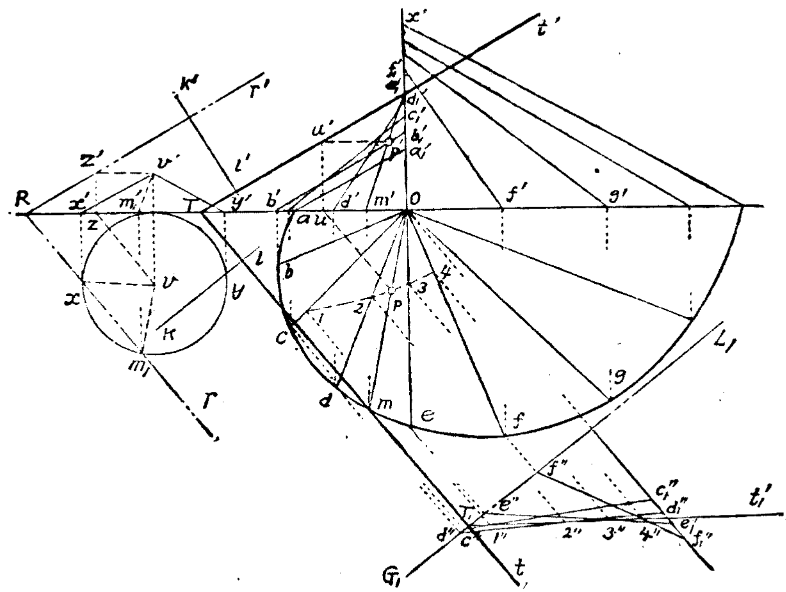


Fig. 302

頂點 v,v′, 而垂直於 kl, k′l′ 之平面。 vm_1, $v'm_1'$。爲其切口之一。pm, p′m′ 爲平行於 vm_1, v_1m_1', 螺旋面之面素,平面 tTt′ 爲所求之切平面。又平面 T 與螺旋面相交之平面圖 1234 與 pm 相交之點 p, 爲切點之平面圖,而 p′ 爲其立面圖。作曲線 1234 時,若於垂直於 tT 之副投影面上作副投影,則作圖較易。

作圖題22. 今有迴轉面,其軸垂直於水平投影面, 求切於迴轉面而含直線 M N 之平面之跡。

解: 含一直線,切一迴轉面之平面, 使其軸爲共有, 切於以此直線爲母線之單雙曲線迴轉面。後依此,而作如斯之單雙曲線迴轉面,及作含已知直線之共通切平面可也。

作圖: 如 Fig. 303 所示, 圓 ab 爲已知迴轉面之平面圖。曲線 a′o′b′ 爲其立面圖。又雙曲線 c′g′e′, d′h′f′ 乃與已知曲線共軸, 以 m n, m′n′ 爲母線之單雙曲線迴轉面之立面圖,而圓 c m d 爲其水平跡。

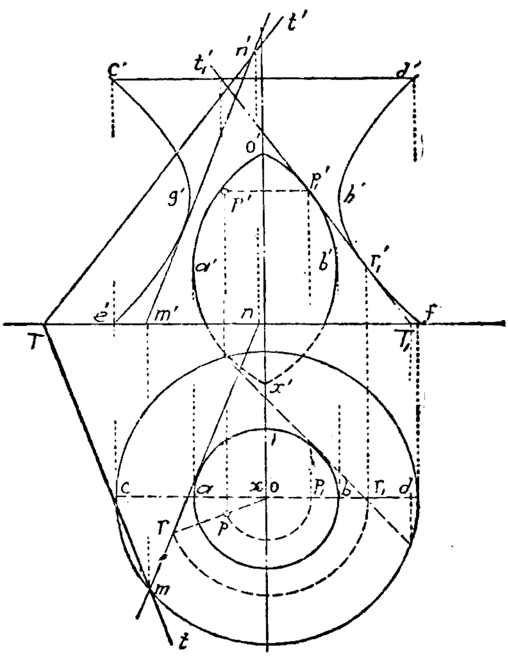


Fig. 303

二曲線 a′ o′ b′,d′ h′ f′ 之共通切線 T_1t_1' 爲所求

之切平面迴轉於其軸 O X 之周，而使其垂直於直立投影面時之直立跡。故其切點 p_1', r_1' 爲各切點之立面圖。由此所引之投射線，與平行於基線之 o d 之交點 p_1, r_1, 卽爲所求之切點之平面圖。次以 o 爲中心，過 r_1 引圓，使其與 m n 之交點爲 r 時，則 r 爲所求之切平面，與單雙曲線迴轉面相切，而得切點之平面圖。o r 爲於切點處法線之平面圖。然二曲面因其軸共通，且垂直於水平投影面，故於共通切平面之切點處，其法線之平面圖應相一致。由是，過 m n, m'n' 之水平跡 m，引垂直於 or 之 tT，卽爲所求之切平面之一水平跡。其直立跡 Tt' 可由此順序求之。又以 o 爲中心，作過 p_1 之圓，其與 o r 之交點 p，應爲切點之平面圖。後由 p 引投射線，使其與由 p_1' 引水平線，其所得之交點 p'，卽爲其立面圖。

3. 曲面之接觸

設二曲面，以一點共通，且於其點有共通切平面時，則此二曲面，謂之於其點之接觸。

曲面投影之輪廓上一點之切平面，因其垂直於投影面，故於其點之法線，必平行於投影面。接觸之二曲面，其共通法線平行於投影面時，則二曲面之投影，於切點之投影處相切。如 Fig. 304 所示，直線 A B 爲迴轉面 A B C 之立面圖之輪廓，設直線 A B 上之一點爲 P，則點 P 之法線，應平行於直立面。是卽其立面圖垂直於 a'b' 平面圖平行於 GL。同法 P 爲球 O 立面圖圓上之點時，則於點 P 向球面所引之法線之立面圖，乃過圓 o' 之中心，其平面圖平行於 G L。故二曲面，若於點 P 處有共通之法線，則兩法線之平面圖，應平行於 G L，而成一直

線。同時其立面圖，因其亦爲一直線，故兩曲面之立面圖，相切於P。

又以圓 o′ 爲立面圖之圓柱，亦於P點處接觸於迴轉面。

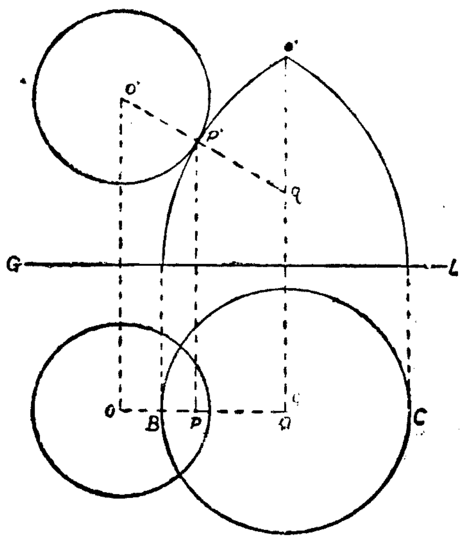


Fig. 304

作圖題23.　有橫置於水平投影面上互切之三球，其半徑爲 r_1, r_2, r_3, 求其各球中心之投影。

解：　互切二球之中心所結之線，若平行於一投影面時，則其投影面上，其球之投影互切。依此，先將二球中心所結之線，使其平行於直立投影面，然後作第三球與他二球之中心所結之直線，而求其平面圖之長。由是卽能求其所求之球之投影。

作圖　如 Fig. 305 所示，圖中，圓 (m, m′), (n, n′), 其半徑爲 r_1, r_2, 而其中心所結之直線，爲平行於直立投影面之球之投影。$o_1'j'$, o'_2k' 之長，等於半徑 r_3 球之中心，與球 (m, m′), (n, n′) 中心間距離之平面圖之長。而圓 o, o′, 卽爲半徑 r_3 之第三球之投影.

作圖題24.　有半徑爲 r_1, r_2, r_3, r_4, 之四球互相切觸，其中三球置於水平投影面上，求作其投影。

解：　依本章作圖題 23 作圖之方法，於水平投影面上，先作三球 A, B, C, 後求第四球之投影可也。定半徑之球，切於他二球，其中心

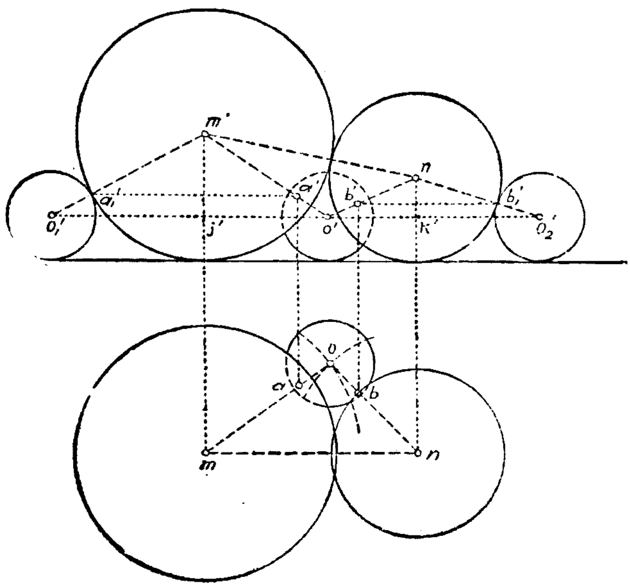


Fig. 305

之軌跡爲圓，其投影一般爲橢圓。作如此之二橢圓而求其交點，則得第四球之中心。

作圖： 如 Fig. 306 所示，圖中，半徑爲 r_1, r_2, r_3 之圓 a, b, c, 爲水平投影面上互切之三球之平面圖。圓 a', b', c', 爲其立面圖。

切圓 a', b' 引半徑 r_4 之圓 d_3'. 由其中心 d_3' 向直線 a' b' 引垂線，其垂線足爲 o'。次由 o', d_3' 向直線 ab 引垂線，其垂線足爲 o, d_3。更於 o'o 上取 oj, 使其等於 o' d_3' 此時以 o 爲中心，o j 爲長軸之半，od_3 爲短軸之半，則所作之橢圓，爲切於球 A, B, 半徑 r_4 之球，其中心軌跡圓之平面圖也。

次設切於圓 b' 及基線，半徑 r_3 之圓爲 c_1，引半徑 r_4 圓 d_4' 使

其切於圓 c_1' 與圓 b'。再由中心 d_4' 向直線 $b'c_1'$ 引垂線，其垂線足爲 m_1'。由 m_1', d_4' 引投射線，使其與平行於基線之 a b 相交，其交點爲 m_1, d_4。然後於直線上，取 b m, be 使其等於 bm_1, bd_4。又由 m 引垂直於 bm 之 mf 使其等於 d_4' m_1'。此時以 m 爲中心，mf

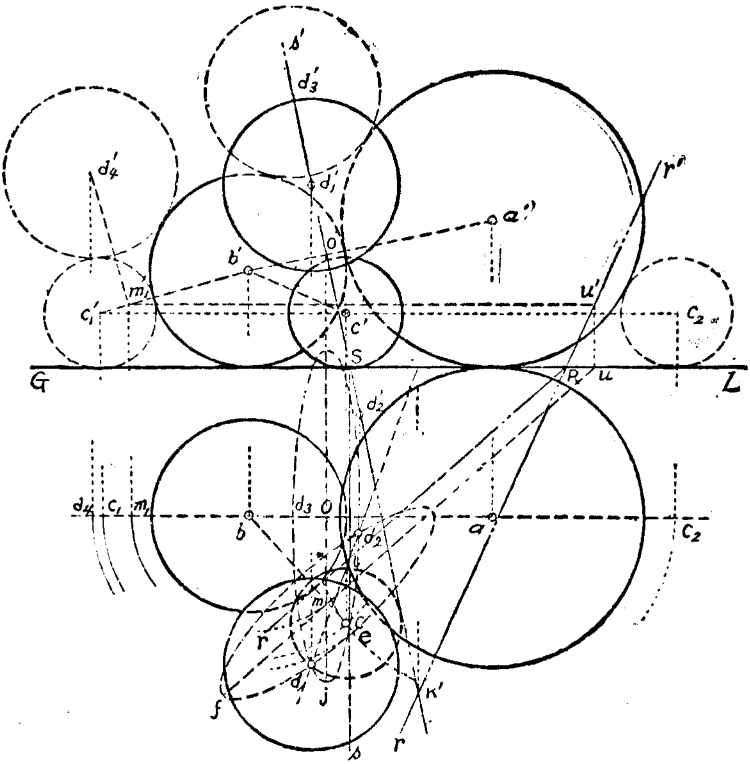


Fig.　306

爲長軸之半，m e 爲短軸之半，而所作之橢圓，爲切於球 B, C, 半徑 r_4 之球，其中心軌跡圓之平面圖也。

斯時，上二橢圓之交點 d_1, d_2, 即爲所求之第四球，其中心之平面圖，依此，d_1, d_2 爲中心，半徑 r_4 之圓，即爲所求之第四球之平面圖。後由 d_1, d_2 引投射線，使其與 o' d_3' 之交點 d_1', d'_2 爲中心，則半徑 r_4 之球，爲其各立面圖。圖中以 d_2, d'_2 爲中心之球之投影，茲從略。

作圖題25. 有半徑爲 r 之球，切於已知球 o 之面上一點 P，求其投影。

解： 於過 P. 球之半徑延長線上，取 P C 等於 r，則 C 應爲所求之球之中心。

作圖： 如 Fig. 307 所示，作過 p, p′ 之半徑 op, o′p′，迴轉於中心 o, o′ 之周，當其平行於直立投影面之位置時爲 on, o′n′。次於其立面圖 o′ n′ 上，取 n′ c_1' 等於 r 由 c_1' 引平行於基線之直線，使其與 o′p′ 之交點爲 c′。此時 c′ 爲中心，r 爲半徑之圓，即爲所求之球之立面圖。由是，再求其平面圖可也。

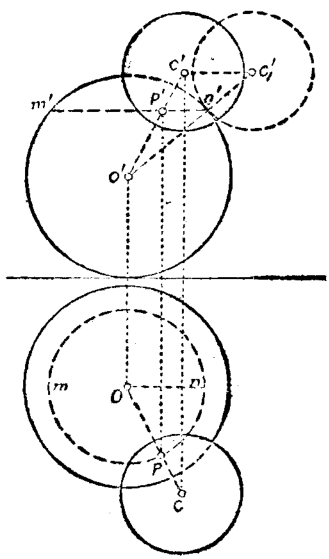


Fig. 307

作圖題26. 直圓錐之軸，垂直於水平投影面時，有半徑 r 之球，切於其曲面上之一點 P，求作此球之投影。

解： 由 P 向過 P 之面素引垂線，於其垂線上，取 P C 等於 r。此時 C 即爲所求之球之中心。

作圖： 如 Fig. 308 所示，乃過 P 之面素，迴轉於其軸之周。當其

平行於直立投影面時之位置爲 vn, v'n' 此時P之位置爲 n, n'。由 n' 向 v' n' 引垂線於其垂線上，取 n'c'₁ 等於 r。又 n' c₁' 與軸之立面圖相交，其點爲 o'。此時 o' p' 因其爲點P之法線之立面圖，故由 c₁' 引平行於基線之 c₁', c' 與 o' p' 之交點 c'，乃示所求球之中心之立面圖。而由 c' 所引之投射線，與 v p 之交點 c，爲其中心之平面圖。故 c, c' 爲中心，r 爲半徑之圓，卽爲所求之球之投影。

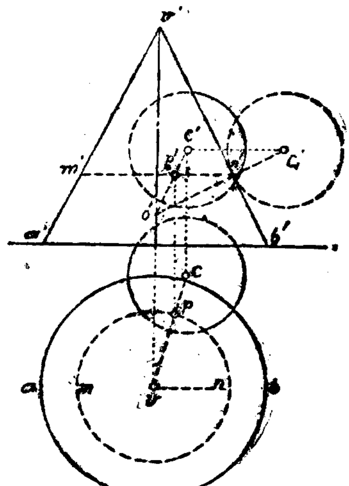


Fig. 308

作圖題27. 有頂角爲 α 之圓錐與橫置於水平投影面上之一圓錐，共通其頂點，且切於水平投影面及此圓錐，求作其投影。

解: 將所求之圓錐面之軸，迴轉於已知圓錐軸之周，使其保持平行於直立投影面之位置，而作所求之圓錐面之投影。次於迴轉後之位置，作內切於圓錐面之任意之球。後將迴轉之軸，復歸原有位置。而作其球之投影。此時切於此球之投影，及由已知圓錐之頂點之投影引直線，則其所圍成之圖形，卽爲所求之投影。

作圖: 如 Fig. 309 所示，圖中 a' v' b' 爲已知圓錐之立面圖，其作法，先引 $v' g_1'$ 使其與 v' b' 成角 α，置角 $b' v' g_1'$ 之二等分線爲 $v' o_1'$。由 $v' o_1'$ 上之任意一點 o_1'，向 v'b' 引垂線，其足爲 p_1' 更將其延長使其與 v' x' 之交點爲 c'。又平行於基線引 m' n'，使其距基線

之距離等於 o_1' p_1' 復由 c' 向 $m'n'$ 引垂線，其足爲 z'。後以 c' 爲中心，過 o_1' 作圓，使其與 $m'n'$ 之交點爲 o_2'

此時，由 o_1' 向已知圓錐面軸之立面圖 $v'x'$ 引垂線，使其與 $m'n'$ 之交點爲 o'。復以 o' 爲中心，以等於 o_1' p_1' 之長爲半徑作圓。由 v' 向此圓引二切線，由二切線所成之圖形，即爲所求之立面圖。又由 c' 向軸之平面圖 v x 引垂線，其足爲 c。次以 v, c 爲中心，以等於 v' p_1', z' o_2' 之長爲半徑作圓，使其相交之點爲 o。此時，復以 o 爲中心，以等於 o_1' p_1' 之長爲半徑作圓。後由 v 向此圓引二切線，則所成之圖形，即爲所求之平面圖。

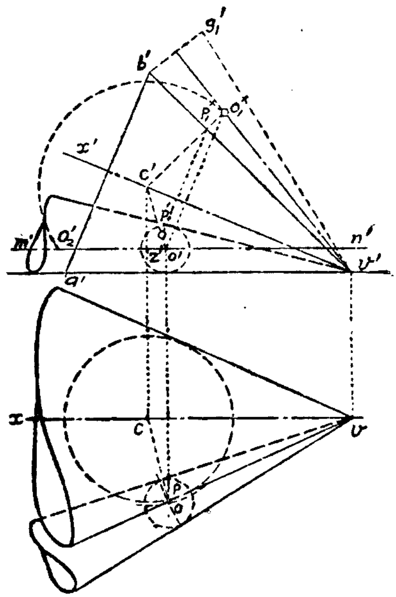


Fig. 309

作圖題28. 有內切球內切於已知圓柱且含此圓柱面上一點 P. 求作此球之投影。

解： 作含 P 且垂直於圓柱軸之平面 T，而求其圓柱軸之交點 c。此時 c 應爲所求之球之中心。

作圖： 如 Fig. 310 所示，曲面上已知點 P 之平面圖 p 爲已知，其作圖法，先求其立面圖 p'。次求含 P 而垂直於圓柱之軸 ab, a'b' 之

平面。後於此平面上，引水平直線 p h, p'h' 而求其水平跡 h。此時由 h 引垂直於 a b 之 tT，卽爲含 P 及垂直於 A B 之平面之水平跡。因之由 tT 與基線之交點 T 所引之垂直於 a' b' 之 Tt'，卽爲其直立跡。

圖中 ab, a'b' 因其與基線不交於紙面內，故作平行於 ab, a'b' 及垂直於直立投影面之任意平面 rRr'，而求其與平面 tTt' 相交之平面圖 m n。此時，由 a'b' 與 Tt' 之交點 k' 引投射線，使其與基線之交點爲k。由 k 所引之平行於 m n 之 k l，爲含 ab, a'b' 而垂直於直立投影面之平面與平面 tTt' 相交所得之平面圖。故 k l 與 a b 之交點 c，爲所求之球之中心平面圖。由此求立面圖 c'，而作所求之球之投影 c, c' 可也。

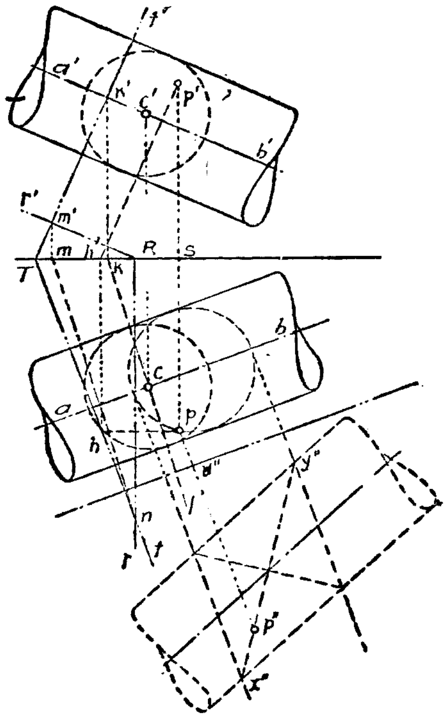


Fig. 316

作圖題29. 有半徑 r 之圓柱，其軸之平面圖平行於 x y，求切於已知圓柱面上之一點 P 之投影。

解： 含 P 而作內切於已知圓柱之球 H，復於 P 切此球，而作半徑

r 之球K。此時包絡球K而作其軸之平面圖平行於 x y 之圓柱可也。

作圖: 如 Fig. 311 所示，p 爲已知點 P 之平面圖。本題作圖之法，與前題 Fig. 280 相似，必先求 P 之立面圖 p′，及含 P 而內切於已知圓柱之球之中心 h, h′。次與作圖題 25 Fig. 277 同法，作半徑 r 球，使其切球 h, h′ 於 p, p′，而求其中心 k, k′。由是切K爲中心，半徑爲 r 之圓，而作平行於 x y 之二直線，則此二直線所成之圖形，是爲所求之圓柱之平面圖。

次過 p, p′ 引已知圓柱之面素 pc, p′c′。由其水平跡 C，向 p h 引垂線 c d。此時 c d 因其爲點 p, p′ 之切平面之水平跡，故由 p 平行於 x y 所引之直線與 c d 相交之點爲 d 時，則 d 爲過 p, p′ 所求之圓柱面之水平跡。

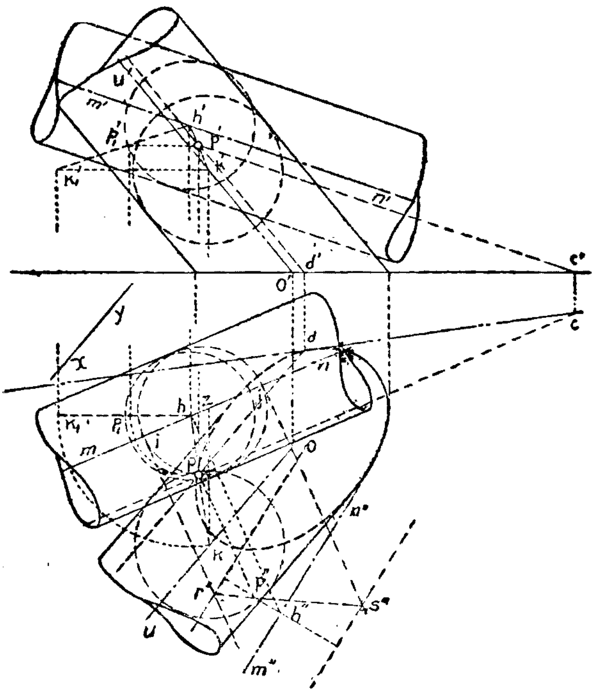


Fig. 311

因之由 d 所引之投射線，與基線相交之點爲 d′ 時，則 p′ d′ 爲過 p, p′

所求圓柱之面素之立面圖。由是切 k′ 爲中心。r 爲半徑之圓。而作平行於 p′ d′ 之二直線。則此二直線所成之圖形，即爲所求之圓柱之立面圖。

圖中橢圓，爲所求之圓柱之水平跡，其求法已於第五章作圖題 7. Fig. 186 述之，茲將其作圖從略。

作圖題30.　有半徑 r 之圓柱，其軸之平面圖平行於 m n，而切於橫置於水平投影面上之圓錐面上之一點 P，求其圓柱面之投影。

解：　含 P 而作內切於圓錐之球 o，再作半徑 r 之球 u，切此球於 P。然包絡球 u 之圓柱，其軸之平面圖平行於 m n，故此圓柱，即爲所求之圓柱。

作圖： 如 Fig. 312 所示，先求球 O 之平面圖圓 o，次求球之投影圓 u, u′，切球 O 於 P。然切於圓 u，而平行於 m n 之二直線所成之圓形，乃爲所求之圓柱之平面圖。今圓錐之頂點 V，因其在水平投影面上，故由其平面圖 v 所引之垂直於直線 o p 之 v s，爲於 P 點切平面

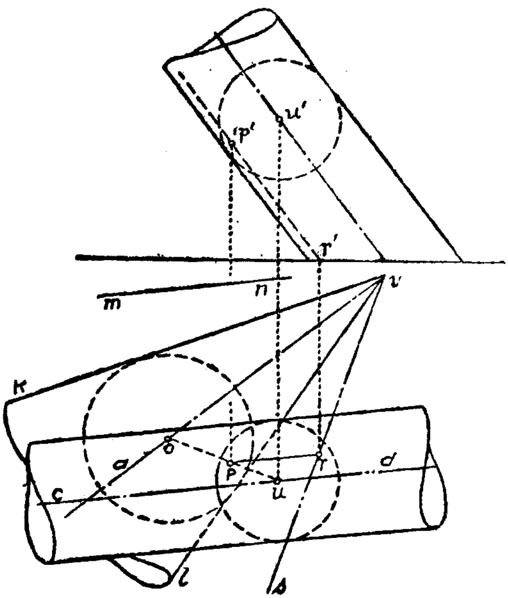


Fig. 312

之水平跡。次由 p 所引之平行於 m n 之 p r 與 v s 相交之點爲 r, 此 r 乃過 P 所求之圓柱之面素之水平跡。依此若由 r 引投射線使其與基線相交之點爲 r'。則切於圓 u' 而平行於 p' r' 之二直線，其所成之圖形,即爲所求之圓柱之立面圖。

4. 捩面之接觸

二捩面,共通之一面素 X Y 爲共有,若與此面素無限接近之一面素亦爲共有時,則此二曲面,謂之於 X Y 相切。今設有二捩面,其一面素爲共有,於其面素上之任意三點,若各有共通之切平面，則二曲面應於 X Y 相切。其理由茲述之如次:

如 Fig. 313 所示，圖中爲二捩面 G H I，D E F，有共通之一面素 X Y。於其上之三點 A, B, C, 設有共通之切平面 T_1, T_2, T_3。今含 A, B, C 之任意三平面 S_1, S_2, S_3, 切二捩面之切口,各爲曲線 (A G, B H, C I), (AD, BE, CF)。又切平面 T_1, T_2, T_3 之相交跡,各爲 AP, BQ, CR。此時 AG, AD, AP, 因其相切於 A, 故接近於 A 之一點爲共有。又 BH, BE, BQ, 因其相切於 B, 故接近於 B 之一點爲共有。又 CI, CF, CR, 因其切於 C, 故接近於 C 之一點爲共有。然 X Y 以 AG, BH, CI 爲導線，其移動時所生之面,爲捩面 GHI。又 X Y 以 AD, BE, CF 爲導線,其移動時所生之面。爲捩面 DEF。故捩面 GHI, 無限接近於 X Y 之面素與捩面 DEF 無限接近於 X Y 之面素

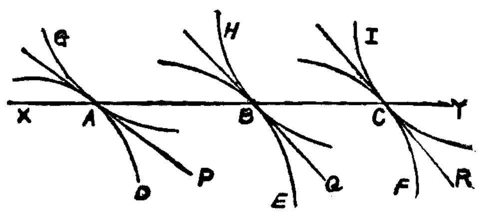


Fig. 313

兩相一致。故此二捩面，於 XY 相切。

次 XY，以三直線 AP, BQ, CR 爲導線，而移動時，則 XY 卽作成一捩面。此面於二捩面 GHI, DEF 及 XY 處相切。此時若三平面 S_1, S_2, S_3 爲平行，則爲雙曲拋物線面。

二捩面 GHI, DEF 有共通之導平面時，若於 XY 上之二點有共通切平面，則二面切於 XY。

作圖題31. 有平行於直立投影面之半圓 AB, CD, 與平行於水平投影面之直線 XY 爲導線之牛角，於其上之一點 P，切以平面，求此平面之跡。

解： 於過 P 之面素 MN，作切於牛角之雙曲拋物線面，後於 P，作切此雙曲拋物線面之平面可也。

作圖： 如 Fig. 314 所示，過 p, p′ 之面素與三導線 AB, CD, XY 相交之點爲 (m, n′), (m, n′), (h, h′)。後於 (m, m′), (n, n′) 之導線 AB, CD 引切線 (me, m′e′), (nl, n′l′)。又作含 XY 與 MN 之平面 sSs′，則此平面，於點 h, h′ 爲牛角之切平面。次於平面 sSs′ 上，過點 h, h′ 引平行於直立投影面之直線 hj, h′j′，則此直線於點 h, h′ 爲牛角之一切線。然上述之三切線 (me, m′e′), (nl, n′l′), (hj, h′j′) 因其平行於直立投影面，故直線 mn, m′n′ 以此三切線爲導線，而爲雙曲拋物線面之一面素。而含 (mn, m′n′) 與 (me, m′e′), (mn, m′n′) 與 (nl, n′l′), (mn, m′n′) 與 (hj, h′j′) 之三平面，因其各於點 (m, m), (n, n′), (h, h′) 爲牛角及上述之雙曲拋物線面之切平面，故二曲面與 mn, m′n′ 相切，依此過點 p, p′ 若求平行於雙曲拋物線面之直立

投影面之面素 p u, p′u′, 則含 (m n, m′n′) 與 (p u, p′u′) 之平面 tTt′, 於 p, p′ 處爲雙曲拋物線面之切平面,且爲牛角之切平面。

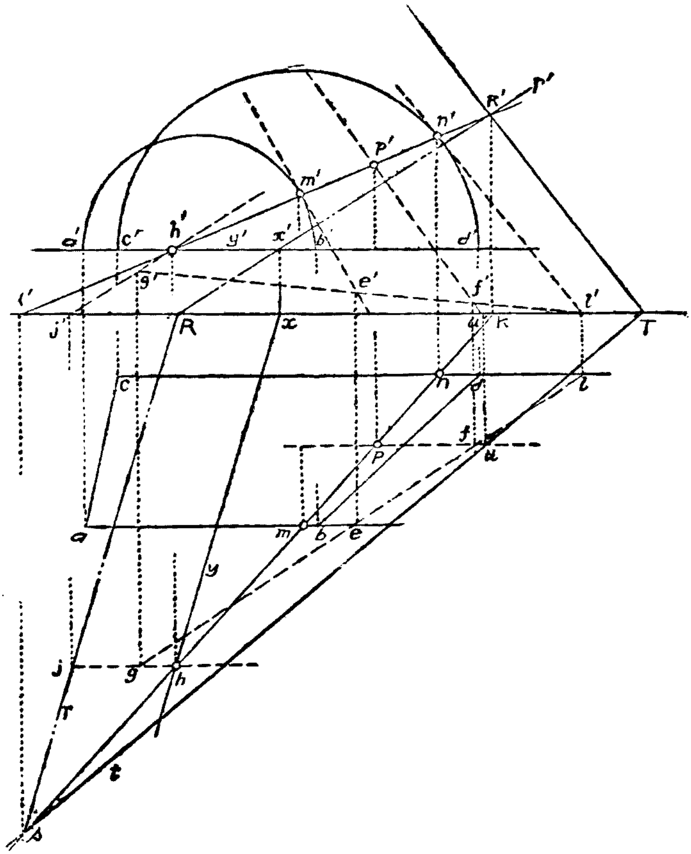


Fig. 314

作圖題32. 有以垂直於水平投影面之二曲線 AB, CD 爲導線,直立投影面爲導平面之柱狀面,求此柱狀面上一點 P之切平面。

解：　以直立投影面爲導平面，過點 P 切於柱狀面之面素，而作雙曲拋物線面。然後於點 P，而作切雙曲拋物線面之平面可也。

作圖：　如 Fig. 315 所示，過 P 之面素爲 mn, m'n'，使其與二導線相交於點 (m, m')，(n, n')。復於此點引切線 (mk, m'k')，(nl, n'l')。此時 mn, m'n'，以上述之二切線爲導線，直立投影面爲導平面，

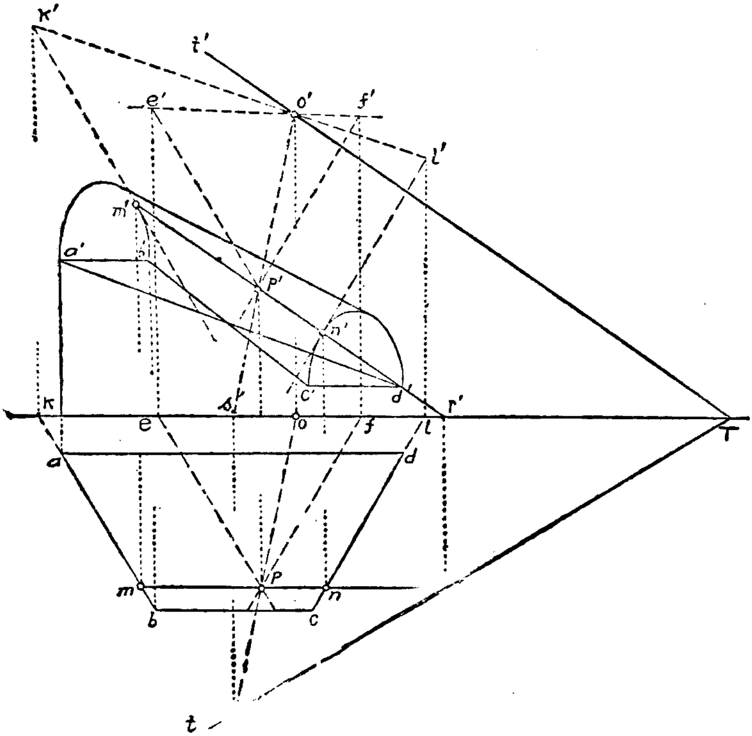


Fig. 315

而成之雙曲拋物線面之面素。是故，含 (mn, m'n') 與 (mk, m'k')，(mn, m'n') 與 (nl, n'l') 之平面，乃爲於點 (m, m')，(n, n') 之柱狀面，

及上述之雙曲拋物線面之切平面。因之,二曲面應與面素 (mn, m'n') 相切。故於點 P 之雙曲拋物線面之切平面 tTt'。即爲所求之平面。至作平面 tTt' 之法,玆示之如下:

今置 (mk, m'k'), (nl, n'l') 與直立投影面之各交點爲 (k, k'), (l, l')。又由點 p, p' 向 (mk, m'k'), (nl, n'l'), 引平行線 (pe, p'e'), (pf, p'f'), 而求其各直立跡 (e, e'), (f, f')。然後將直線 (kl, k'l'),與 (ef, e'f') 之交點 o, o' 與 p, p' 相結,則直線 (op, o'p') 爲過 p, p' 之雙曲拋物線面之一面素,因之,含過 p, p' 之雙曲拋物線面之二面素 (mn, m'n'), (po, p'o') 之平面 tTt',爲於 p, p' 處之切平面。

5. 單雙曲線迴轉面之接觸

以一面素,切二單雙曲線迴轉面,其接觸面,若有相當磨擦,則其一必迴轉於其軸之周。此時,依其磨擦,則他之曲面亦迴轉於其軸之周。如斯之曲面,若應用於磨擦車 (Friction wheel) 上,當其軸不在同一平面內時,由其一軸向他一軸,可傳達其迴轉運動。又沿如斯二曲面之面素,刻以齒,依齒與齒嚙合,可得較磨擦傳達有更大之力。

二單雙曲拋物線面,以一面素接觸,故其共通之面素,與其各軸之共通垂線,應在一直線上。如 Fig. 316 所示,圖中以垂直於水平投影面之 ox, o'x' 與平行於直立投影面 zy, z'y' 爲軸,以平行於直立投影面之 pc, p'c' 爲母線所成之二單雙曲線迴轉面,今以上述之三直線之共通垂線爲 opz, o'p'z' 設以 ox, o'x' 爲軸之面,迴轉於其軸之周時,將迴轉運動傳達於以 zy, z'y' 爲軸之面。今依說明之便利計,置面 A 之軸爲 ox, o'x',面 B 之軸爲 zy, z'y'。

今設 A, B 之迴轉速度爲 w_1, w_2, 各扼圓上之點之線速度爲 V_1, V_2。又 A, B 扼圓之半徑爲 r_1, r_2。此時有

$$w_1=\frac{V_1}{r_1},\quad w_2=\frac{V_2}{r_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之關係。次置角 x′o′c′, y′o′c′ 爲 α, β。先由 o′ 引 o′D 垂直於 o′x′, 取 o′D 等於 V_1, 由 D 引平行於 o′c′ 之直線, 與由 o′ 引垂直於 o′c′ 之直線, 使其相交點爲 F。此時 ∠Do′F 等於 α, o′F 之長, 爲 o′c′ 垂直之方向 V_1 之分速度, DF 之長, 爲 o′c′ 平行之方向之分速度。今二曲面依其磨擦, 若完全傳達其迴轉運動, 則於共通面素之垂直方向之分速度, 勢必相等。依此, 由 o′ 引垂直於 o′y′ 之直線, 使其與 DF 之延長線之交點爲 E 時, 則 o′E 之長等 V_2 而 ∠EoF 等於 β。

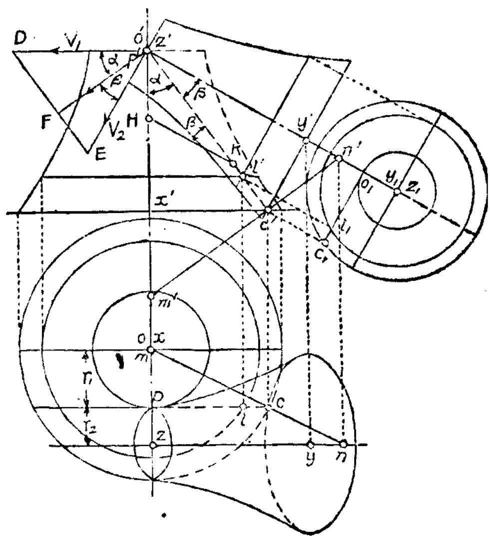


Fig. 316

次於共通面素 pc, p′c′ 上任意之點之切平面, 因其含此面素, 故切平面之直立跡平行於 p′c′, 因之, 此切點之法線之立面圖, 必垂直於 p′c。依此, 由 o′c′ 上之任意點 c′, 向此引垂線, 使其與 o′x′, z′y 相交之點爲 m′, n′。由 n′ 引投射線, 使其與 zy 之交點爲 n。此時直線 mn, m′n′ 爲點 c, c′ 處之共通法線。依上述之作圖, 知 △o′FD∽

$\triangle o'c'm'$, $\triangle o'FE \backsim \triangle o'c'n'$。故 $o'D : o'E = o'm : o'n$, 今依 (1) 式得

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{V_1}{r_1} \div \frac{V_2}{r_2} = \frac{o'D}{r_1} \div \frac{o'E}{r_2}$$

$$= \frac{o'D}{o'E} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{o'm'}{o'n'} \cdot \frac{zp}{op}$$

$$= \frac{o'm'}{o'n'} \cdot \frac{c'n'}{c'm} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

次於 $o'x'$ 上,取 $o'H$ 等於 w_1, 由H引平行於 $o'n'$ 之直線,使其與 $o'c'$ 之交點爲 K, 此時

$$\overline{HK}. = w_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = w_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

依上述之關係，迴轉接觸所成之二單雙曲線迴轉面之軸，與角速度 w_1, w_2 若爲已知，則可知接觸線之共通面素之位置,因此可求得其曲面。例如 ox, o'x' 與 zy, z'y' 爲已知之軸,於 o'x' 上,取 o'H 等於 w_1，更由 H 引平行於 z'y' 之 H K, 使 HK 等於 w_2。此時 o'k 爲共通面素之立面圖。次由 o'k 上之一點 c' 引垂直於此之 m'n', 使其與 z'y' 之交點爲 n'。更由 n' 引投射線,使其與 zy 之交點爲 n 。然由 c' 所引之投射線與直線 o n 之相交點爲 c 。復由 c 引平行於 z n 之 pc, 是卽爲共通面素之平面圖。

6. 球面擺線

有頂點共通,切於一面素之二圓錐。今一圓錐,旋轉於他圓錐之曲面上時，則與轉動圓錐共同移動之一點軌跡，應於圓錐之頂點爲中心之球面上得之。斯點之軌跡,謂之球面擺線 (Spherical cycloid)。其點謂之跡點 (Tracing point)。轉動圓錐，外切於固定圓錐面迴轉時,其

跡點在轉動圓錐面上者，謂之球面外擺線 (Spherical epicycloid)。其不然者，謂之球面外餘擺線 (Spherical epitrochoid)。又轉動圓錐，內切於固定圓錐面迴轉時，其跡點在轉動圓錐面上者，謂之球面內擺線 (Spherical hypocycloid)。其不然者，謂之球面內餘擺線 (Spherical hypotrochoid)

作圖題33. 今以其軸垂直於水平投影面之直圓錐 VAB 爲固定圓錐，直圓錐 VAC 爲轉動圓錐，求其球面外擺線之投影。

解: 置其跡點在轉動圓錐之底圓上，置固定圓錐之底在水平投影面上。將轉動圓錐之底，以其切點處之切線爲軸，倒置於水平投影面上，而求其跡點之位置。然後將此復歸原有之位置，而求軌跡上之點之投影。

作圖: 如 Fig. 317 所示，圖中二等邊三角形 a′v′c′ 爲轉動圓錐，其軸平行於直立投影面時之立面圖。圓 $a s_1 c_1$ 爲其底倒置於水平投影面之位置。今先引固定圓錐底之相垂直之二直徑 ab, m_1w，使其一直徑 a b 平行於基線。次於 m_1 切圓 a b 引與圓 a $s_1 c_1$ 同半徑之圓。設過其 m_1 之直徑爲 p_1m_1。而由 c′ 所引之投射線與直線 a b 之交點爲 po，復於 vp_1 上取 v p 等於 vp。此時 p 卽爲所求之軌跡上一點之平面圖。復由 p 引投射線，及由 c′ 引平行於基線之 c′p′，其所交之點 p′，卽其立面圖。

次切圓 a b 上之任意一點 m_2，作與圓 a s_1 c_1 同半徑之圓 o_2，引過 m_2 之直徑 $m_2 n_2$。又於此圓周上，取 $\overset{\frown}{n_2 q_1}$ 等於 $\overset{\frown}{m_1 m_2}$ 次以 v 爲中心，過 q_1 之圓弧與圓 a s_1 c_1 之交點爲 q_2。更由 q_2 引投射線，使

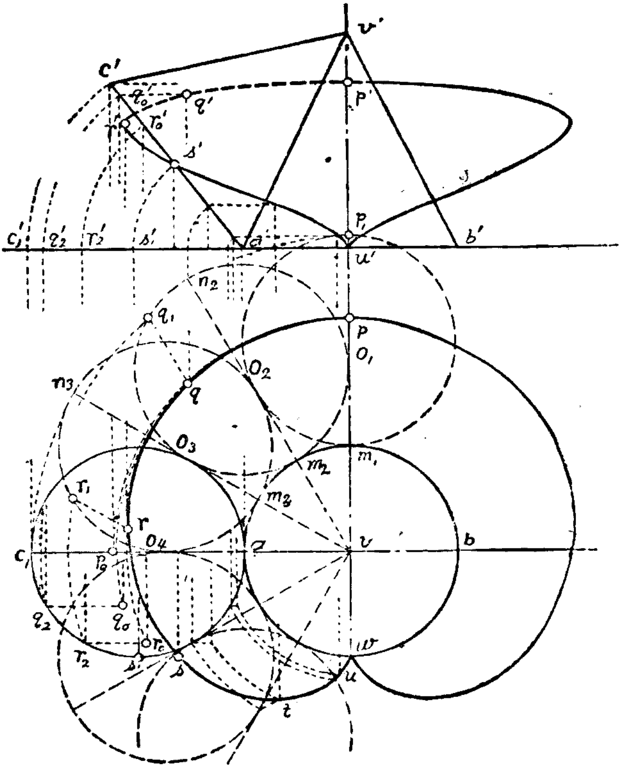


Fig. 317

其與基線之交點爲 q'_2 再於 $a'c'$ 上，取 $a'q_0'$ 等於 $a'q_2'$。復由 q' 引投射線，及由 q_2 引平行於基線之直線 q_2q_0。使其交點爲 q_0。此時 v 爲中心，過 q_0 之圓弧，與由 q_1 引平行於 m_2n_2 之直線之交點 q，乃兩底圓之切點之平面圖爲 m_2 時之跡點之平面圖也。故由 q 所引之投射線與由 q_0' 所引之平行於基線之直線，其交點 q' 即爲其立面圖。

同法，先求軌跡上之點，後將此諸點連結作成曲線，則得如圖所示

之曲線。圖中固定圓錐之底圓與轉動圓錐之底圓，其直徑相等。

作圖題34.　轉動圓錐與固定圓錐爲已知，求球面內擺線。

本題作圖法，與前作圖題相同。

如 Fig. 318 所示，乃轉動圓錐，其底之直徑爲其固定圓錐之三分之一時，所作之圖也。

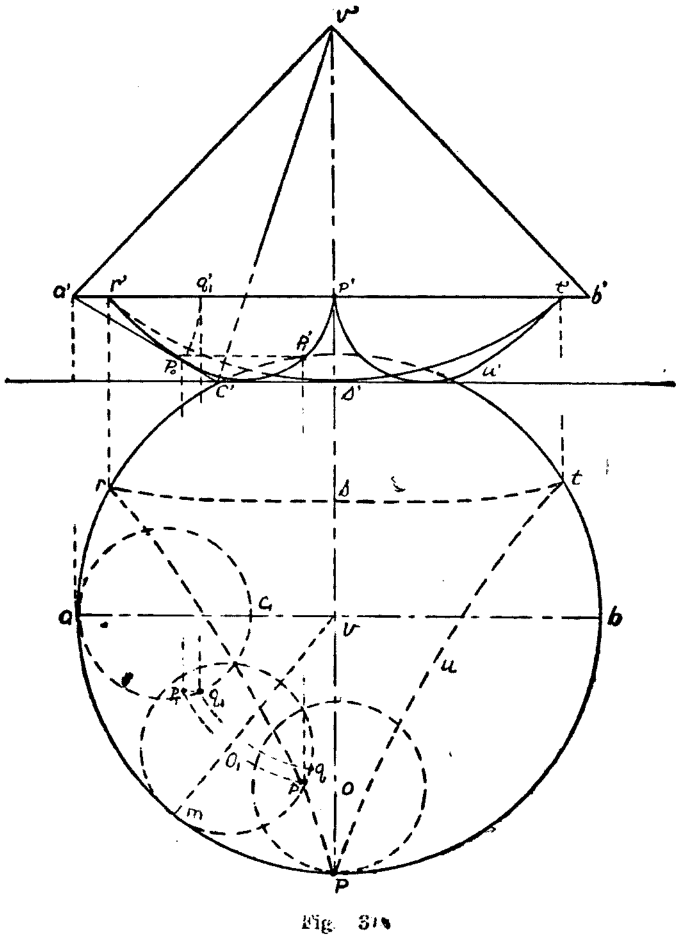


Fig. 318

作圖題35 **轉動圓錐，固定圓錐，及跡點爲已知，求球面外餘擺線。**

作圖： 本題作圖法與前作圖題同。如 Fig. 319 所示，圖中，以 vab, v'a'b' 爲固定圓錐，其底平行於水平投影面。又 v'a'c' 爲轉動圓錐，當其軸平行於直立投影面時之立面圖也。今置其跡點，在含轉動圓錐底之平面上，及設兩底圓之半徑相等。

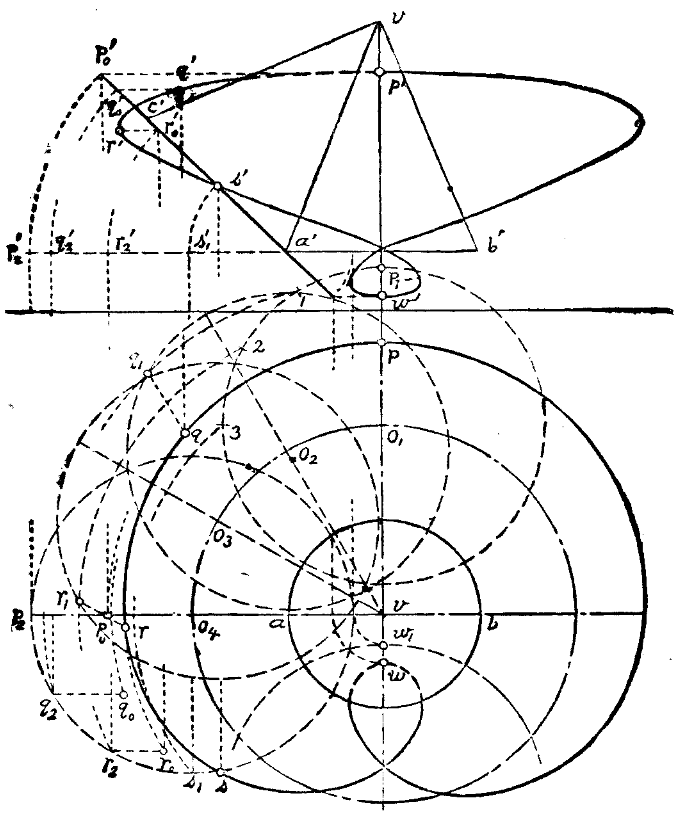


Fig. 319

先以 v 爲中心以兩圓錐底之半徑之和爲半徑作圓。置平行及垂直於其基線之半徑爲 vo_4, vo_1。次以 o_1, o_4 爲中心，由其跡點至轉動圓錐底之中心之距離爲半徑作圓，使其與 vo_1, vo_4 之延長線相交，其交點爲 p_1, p_2。又以 o_1, o_4 爲中心之圓及圓 o_1 o_4，各由 p_1, p_2, o_1 起，分成等分之任意同數之點，使其各爲 (1, 2, 3,……), (q_2, r_2,……), (o_2, o_3,……)。

然後由 p_2 引投射線與由 a' 引平行於基線之直線，其交點爲 p'_2 次於 a' c' 上取 a' p_0' 等於 a' p_2'。更由 p'_0 引投射線，使其與 v p_2 相交之點爲 p。復於 vp_1 上，取 v p 等於 vp_0。此時 p 乃爲所求之軌跡上其一點之平面圖。後由 p 引投射線，與由 p_0' 引平行於基線之直線，其交點 p'，卽爲其立面圖。

次由 q_2 引投射線使其與 a' p'_2 之交點爲 q_2'，於 a' c' 上取 a' q_0 等於 a' q_2'。更由 q_2' 引投射線，與由 q_2 引平行於基線之直線，使其交點爲 q_0。又一方以 o_2 及 o_1 爲中心，各作同半徑之圓，令其與 v 爲中心過 1 之圓弧相交於 q_1。此時由 q_1 所引之平行於 vo_2 之直線，與 v 爲中心過 q_0 之圓弧相交之點 q，是爲所求之曲線上其一點之平面圖。是故由 q 引投射線與由 q_0' 引平行於基線之直線，其交點 q' 卽爲其立面圖。

以下同法，可求得軌跡上之諸點，後將諸點連結作成之曲線，則得如圖所示之曲線。

練 習 題

(1)有切於 Fig. 320 所示之圓錐，且含點 P 之平面，試求其跡。

(2)有 Fig. 321 所示之錐狀面，試求於其面上一點之切平面之跡。

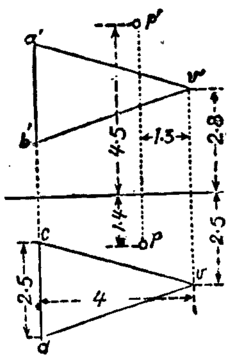


Fig. 320

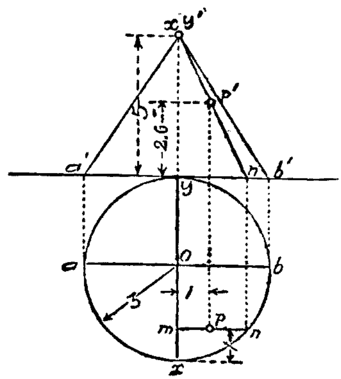


Fig. 321

(3)有切於 Fig. 322 所示之球 o，且含點M而與直立投影面成 60° 之平面，試求其跡。

(4)有切於 Fig. 322 所示之球 o，且垂直於直線 MN 之平面，試求其跡。

(5)有切於 Fig. 323 所示之圓錐，且與直立投影面成 60° 之平面，試求其跡。

(6)有切於所示 Fig. 324 之球及圓錐之平面，試求其跡。

(7)有切於 Fig. 324 所示之三球之平面，試求其跡。

(8)有切於 Fig. 325 所示之橢球。且垂直於直線M N之平面，試求其跡。

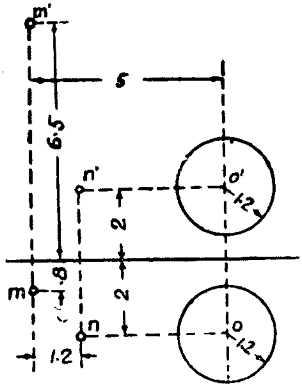


Fig. 322

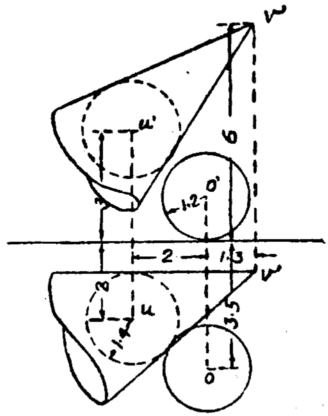


Fig. 323

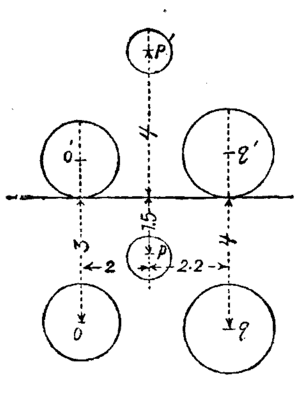


Fig. 324

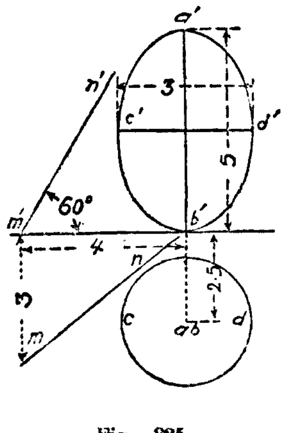


Fig. 325

(9)如 Fig. 326 所示，有含四邊形 A B C D，切雙曲拋物線面，且垂直於直線 M N 之平面，試求其跡。

(10)有切於 Fig. 327 所示之橢圓體，且與水平投影面成 45°，與直立投影面成 60° 之平面，試求其跡。

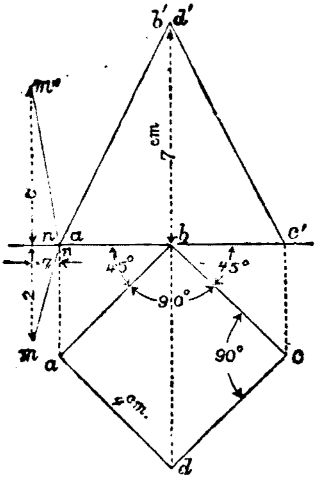


Fig. 326

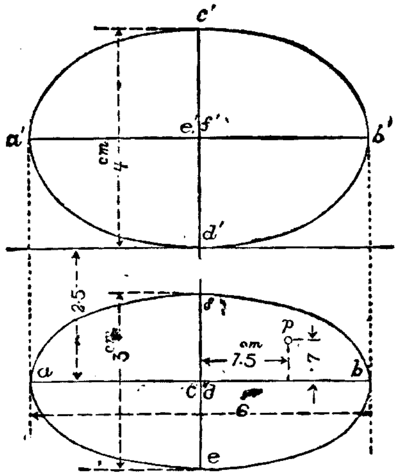


Fig. 327

(11)有距水平投影面，直立投影面為 3 糎，5 糎之一點。今以此點為中心，作直徑 3 糎之球，以頂角 45° 之直立圓錐包絡之。復作頂角 30° 之圓錐，令其軸平行於基線，問切此兩圓錐之平面，其跡若何？

(12)有邊為 4 糎之立方體，其二面與水平投影面各成 50°，60° 時，試求其投影。

(13)一邊 4 糎之立方體之一面，與水平投影面成 45°，其一對角線與直立投影面成 70°，求此立方體之投影。

(14)有高 5 糎之直角錐，以一邊長 3 糎之正六角形為底，其底面與水平投影面成 45°，與直立投影面成 60°，其一斜面與水平投影面成 70°。試求其投影。

(15)有高 6 糎之直角柱,以一邊長 3 糎之正五角形爲底,其一側面與水平投影面成 45°,與直立投影面成 60°,其底與直立投影面成 70°。試求其投影。

(16)有橢圓體,其三軸之長,爲 7 糎,6 糎,4 糎,其最短軸平行於基線,其最長軸垂直於水平投影面。試求切此曲面而與水平投影面成 60°,與直立投影面成 45° 之平面之跡。

(17)有內徑 1 糎,外徑 10 糎之圓環,其軸與水平投影面成垂直,其中心在水平投影面上方 3 糎處。又有頂角爲 60°,高 8 糎之直圓錐,其底在水平投影面上。今兩軸之間隔爲 6 糎時,試求切此兩曲面之平面之跡。

(18)有長軸爲 5 糎,短軸爲 3 糎之長橢球,將其一端直立。又有橫置於水平投影面上,直徑爲 4 糎之球,其中心與橢球之軸之距離爲 4 糎。試求切此二曲面而與水平投影面成 60° 之平面之跡。

(19)有中心相距爲 6 糎之二球,其直徑爲 6 糎,4 糎,其中心所結之直線爲水平,而與直立投影面成 20°,位於水平投影面上方之 3 糎處。又大球之中心,在小球之左前面,位於直立投影面前方 5 糎之位置。試求兩球之切口均爲直徑 2 糎之圓,而與水平投影面成 65° 時之各平面。

(20) Fig. 328 中,p′ 爲已知圓柱面上之一點 P 之立面圖。今有直徑 3 糎之球,於點 P 切此圓柱。試求此球之投影。

(21) 有直徑爲 4 糎之水平圓柱,切 Fig. 328 所示之圓柱於點P,試求水平圓柱之投影。

(22)有頂角 40° 之圓錐，切 Fig. 329 所示之球 o，於其上之一點 P，且橫置於水平投影面上，試求此圓錐面之投影。

(23)有直徑 2 糎，3 糎，4 糎，5 糎之四球互切，其中三球中心均在水平投影面上方 3 糎處。試求其投影。

(24)今有含 Fig. 330 所示之球O上之一點 P，且包絡此球之圓錐，其軸與水平投影面成 40°，與直立投影面成 35°。試求此圓錐面之投影。

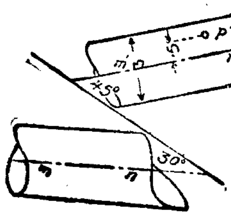


Fig. 328

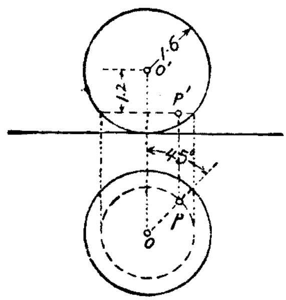


Fig. 329

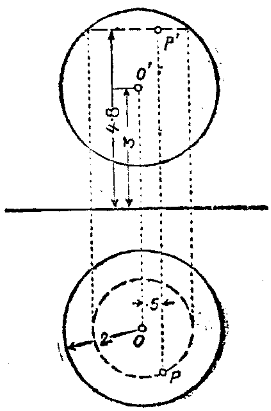


Fig. 330

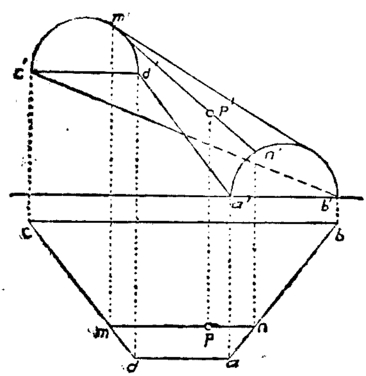


Fig. 331

(25)今有平面,以 Fig. 331 所示之二曲線 ANB, CMD 爲導線,而切於直立投影面爲導平面之柱狀面上之一點 P。試求此平面之跡。

(26)有如 Fig. 332 所示之半圓 AB, CD 與直線 XY 爲導線之牛角。試求平面切於其上之一點 P 之跡。

(27)如 Fig. 333 所示之二立體爲圓錐，之軸平行於直立投影面時與圓柱互切之立面圖。試求此二立體之平面圖。

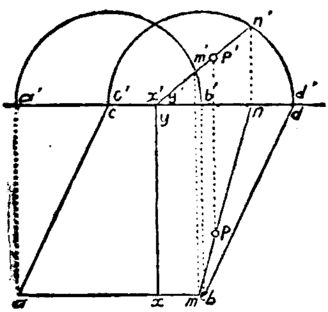


Fig. 332

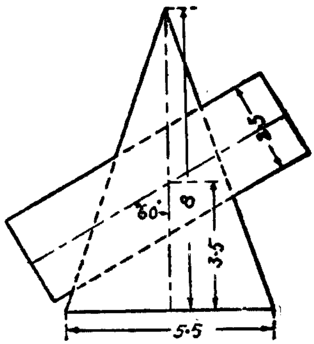


Fig. 333

(28)三角形 ABC (AB＝5糎,BC＝4糎,CA＝3糎。)，與水平投影面成 45°，與直立投影面成 35°，其一邊 A B 與直立投影面成 25° 試以 A, B, C 爲中心,作互切三球之投影。

(29)今有由單雙曲線廻轉面所成之二磨擦車，其兩軸之最短距離爲 100 糎,兩者間之角爲 60°，若二者之角速度之比爲 3:2 時。試求其二者之投影。

(30)有一邊共通之兩二等邊三角形 a'v'b' (a'b'＝8糎 v'a'＝v'b'＝7糎)，b'v'c' (b'c'＝4糎，v'b'＝v'c'＝7糎)，a'b' 平行於基線。此兩

二等邊三角形，爲直圓錐 AVB, BVC 之立面圖。又含底 BC 之平面內，距其中心 3·5 糎處，有一點 p。今將圓錐 AVB 轉動於圓錐 BVC 上。試作點 p 軌跡之球面，其外餘擺線之投影。

(31)有長橢球，以長軸 7 糎，短軸 5 糎之橢圓爲母線，其廻轉軸垂直於水平投影面。另有直徑 3 糎之球切此橢球，而於切點處之法線，與水平投影面成 50°，與直立投影面成 30° 試求此球之投影。

(32)有外徑 10 糎，內徑 4 糎之圓環。其軸垂直於水平投影面。此圓環之內側，置直徑 3 糎之圓柱，使其切圓環於二點．然此圓柱之軸與直立投影面成 30° 之傾斜。試求其投影。

第九章　曲面之展開

1. 曲面之展開

曲面有展開可能與不可能者。其展開可能者，其線織面中相隣接之二面素，以恆在同一平面上者爲限。適合此條件之曲面，計有次之三種。卽：

(Ⅰ)曲錐面之面素，均相交於錐頂。是卽相隣接之二面素，恆在同一平面上。故曲錐面，有展開之可能。

(Ⅱ)同此，曲柱面之面素，因其互相平行，故此曲面，亦能展開。

(Ⅲ)依複曲線之切線而形成之曲面中，有相當距離之二面素，其面素雖屬不在同一平面上，但隣接之二面素，於該曲線上之一點相交，因此可視其在同一平面上。故該曲線亦可展開。凡如斯之曲面，謂之擬捩面。如螺旋線，依其切線而形成之特殊螺旋面然之例是也。

作圖題 1. 直立於水平投影面上之圓柱，以平面T切斷時，求其一半之展開。

解：　求圓柱曲面之展開，須引面素爲等距離，然後將此等面素，順序展開於一平面上可也。

作圖：如 Fig.334 所示，等距離之圓柱面之面素，其平面圖爲點 a, b, c, ……。其立面圖爲 $a'a_1'$, $b'b_1'$, $c'c_1'$, ……。先於基線上取 A_2B_2, C_2D_2, ……等於 ab, bc, cd, ……。次由 A_2, B_2, C_2, ……引垂直於基線之直線，及由 a', b', c', ……引垂直於基線之直線，使其對應之交點各爲 A_1,

B_1, C_1,……。此時 A_1, B_1, C_1,……所結成之曲線，與直線 A_1 A_2 A_2 A_1 所圍成之圖形，即為所求之展開。

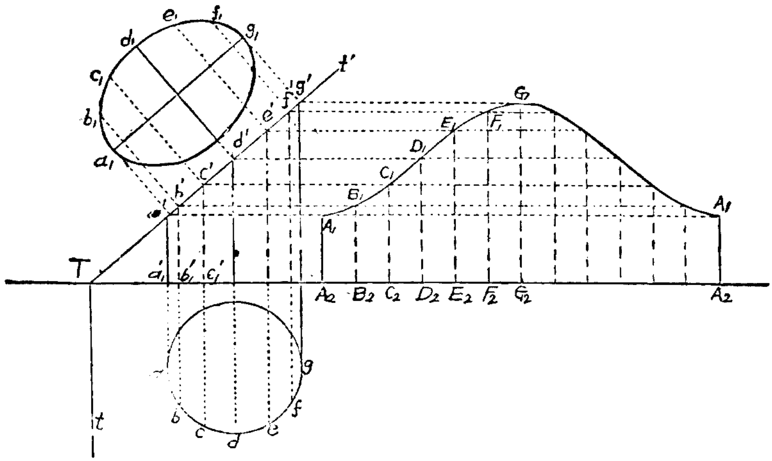


Fig. 334

求 A_2, B_2, C_2,……時，必須求與圓 abc 圓周相等之長，後將此分成等分，而與面素之數為同數作之可也。

作圖題 2. 已知之直圓錐，以平面 T 切之，求其切口之展開。

解：先將圓錐面展開，及引多數之面素。然後將切斷平面與面素之交點，順次置於展開面素上，後將諸點相結，是即所作之曲線。

作圖：如 Fig. 335 所示，引等距離之面素(va, v'a'),(vb, v'b'),(vc, v'c'),……,而求其與切斷平面之交點(s, s'),(u, u'),(w, w'),……。次如 Fig. 336 所示，將圓錐展開為 V_1 A_1 G_1 A_1 及引面素 V_1 A_1,V_1 B_1, V_1 C_1。此時 B_1, C_1, D_1,……乃以圓弧 A_1 G_1 A_1 分成等分，且與面素為同數之點。次於 V_1 A_1, V_1 B_1, V_1 C_1,……上，取 V_1 S_1, V_1 U_1, V_1 W_1,

……等於 (vs, v's'), (vu, v'u'), (vw, v'w') 之實長 $v's_1'$, v'u', $v'w_1'$。後將諸點連結所成之曲線 $S_1U_1W_1$，卽爲所求之切口之展開。

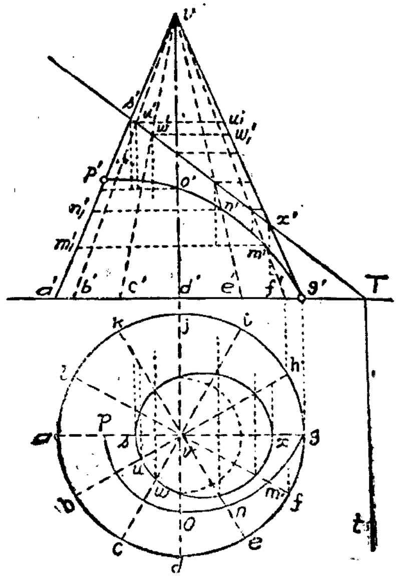


Fig. 335

作圖題 3. 於已知圓錐面上，作過二點之最短線。

解：曲面上之最短線之展開，因其爲直線，故求其展開後，而作其投影可也。

作圖：如 Fig. 336 所示，二點(p,p'),(g,g')，爲已知之二點。本圖之作法，先引等距離之面素 (va, v'a',),(vb, v'b'),(vc, v'c'),(vd, v'd'),(ve, v'e'),(vf, v'f'),(vg, v'g')。次如 Fig. 306 所示，求此諸面素

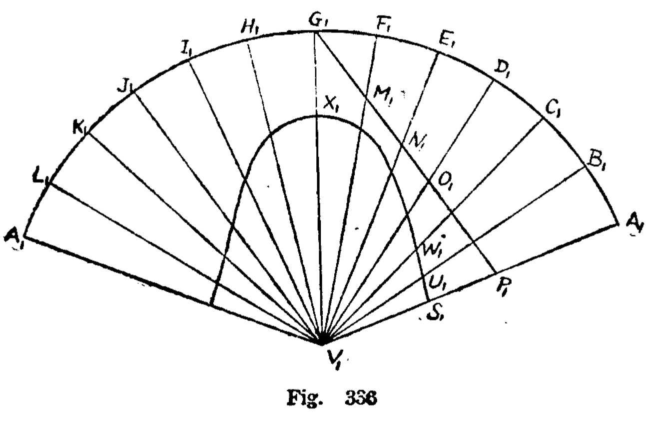


Fig. 336

及二點之展開 $V_1 A_1$, $V_1 B_1$, $V_1 C_1$, $V_1 D_1$, $V_1 E_1$, $V_1 F_1$, $V_1 G_1$, P_1, G_1。此時直線 $P_1 G_1$ 爲最短距離之展開，而與 $V_1 F_1$, $V_1 E_1$, $V_1 D_1$,……之交點，各爲 M_1, N_1, O_1,……。然後於 $v' a'$ 上取 $v' m_1'$, $v' n_1'$,……等於 $V_1 M_1$, $V_1 N_1$,……。更由 m_1', n_1',……，引平行線於基線，而與 $v' f'$, $v' e'$,……相交之點各爲 m', n',……。此時曲線 g', m', n',……p'，因其爲所求之最短線之立面圖，故由此，可求其平面圖 $g\ m\ n$……p。

作圖題 4. 求斜錐體之曲面之展開。

解：斜錐體曲面之展開，不若直圓錐形成扇形。是故當展開時，勢非引多數之面素，而求其各自之位置不可。其一法，卽求以頂點爲中心之球面與其各面素之交點。此時諸交點之展開，應在球之半徑爲半徑之圓弧上。依此，則其各面素之展開可易求也。其二法，卽以相隣之面素，視爲三角形之二邊，由其多數三角形聚集而成之曲面，後將諸三角形之實形順序連續，則得其曲面之展開。

作圖 1：如 Fig. 337 所示，其求法，先求頂點 v, v' 爲中心之任意球面與面素 $(va, v'a')$, $(vb, v'b')$, $(vc, v'c')$……之交點 $(a_1\ a_1')$, $(b_1\ b_1')$, (c_1, c_1')……。後將諸點連結而作曲線 $a_1\ b_1\ c_1$……$a_1'\ b_1'\ c_1'$……。次作含此曲線之直立圓柱，而求其展開。此時 $a_3\ b_3$, $b_3 c_3$, $c_3\ d_3$,……，使其等於弧 $a_1\ b_1$, $b_1\ c_1$, $c_1\ d_1$,……可也。次以 V 爲中心，以球之半球之長爲半徑作圓弧，於其圓弧上，取弧 $a_5\ b_5$, $b_5\ c_5$, $c_5\ d_5$,……等於 $a_4\ b_4$, $b_4\ c_4$, $c_4\ d_4$,……。然後於 Va_5, Vb_5, Vc_5,……上，取 VA, VB, VC,……，各等於面素 $(va, v'a')$, $(vb, v'b')$, $(vc, v'c')$,……之實長而作曲線 $A\ B\ C\ D$……$K\ L\ A$。此時圖形 $V\ A\ B\ C$……$K\ L\ A$，卽爲所求之展開。

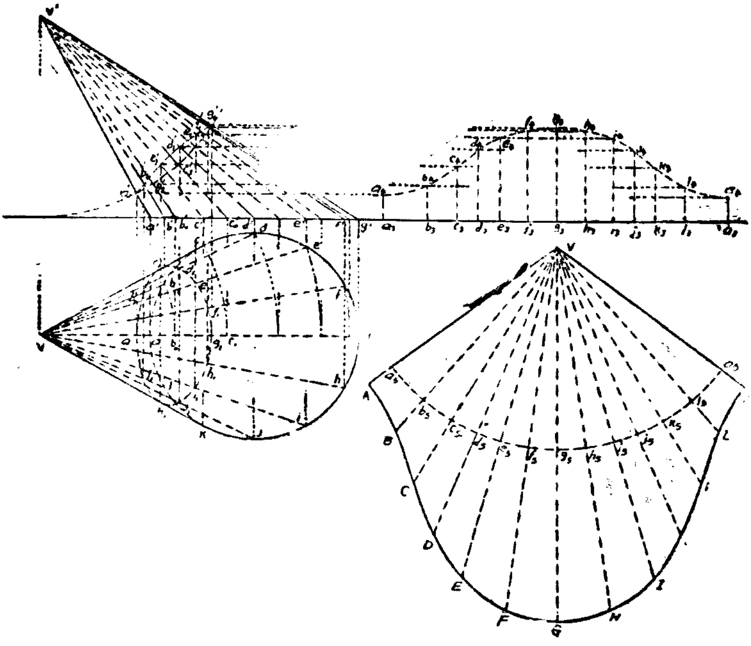


Fig. 337

作圖 2:　如 Fig. 338 所示，先引面素。(vm, v′ m′)，(v n, v′ n′)，(vo, v′ o′)，……，將此相隣之二直線爲二邊，而作三角形之實形，V_1 M_1 N_1, V_1 N_1 O_1,……。復將 M_1, N_1, O_1,……相結而作曲線。此時 V_1 M_1 N_1……M_1 之圖形，卽爲所求之展開。又面素之間隔過廣時，其誤差不免增大，故間隔宜小。

2.　螺旋線之曲率半徑

螺旋線之在圓柱面上，前旣已述之詳矣。玆如 Fig. 339 所示，P 爲螺旋線 A B 上之任意一點，先於同線上 P 之兩側，取等距離之點 Q, R。

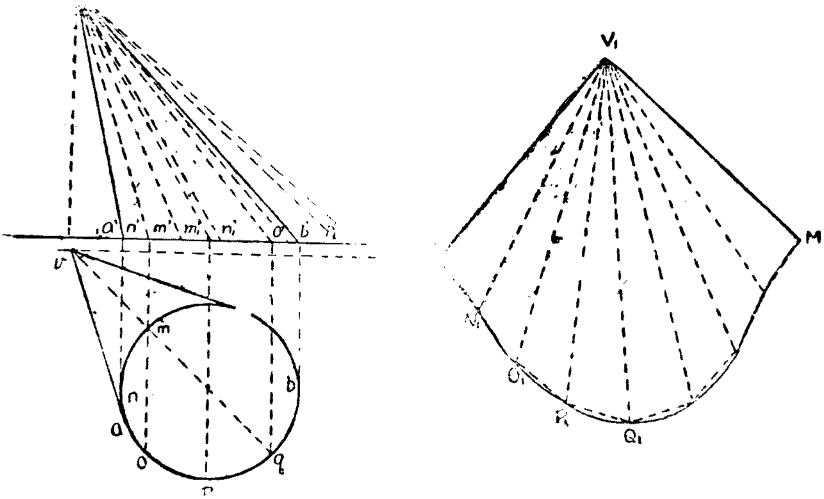


Fig. 338

又含 P 垂直於圓柱之軸之平面切此圓柱，其切口爲圓 P Q′ F, 其中心爲 O。次由 Q, R 向圓 O 引垂線，若其各足爲 Q′, R′, 則此二點，應在圓 O 之圓周上。而直線 Q R 與 Q′ R′ 於含圓 O 之平面上，相交，其交點 E, 應在過 P 之直徑 P O F 上。而三角形 P R′ F 爲直角三角形，R′ E 垂直於 P F。

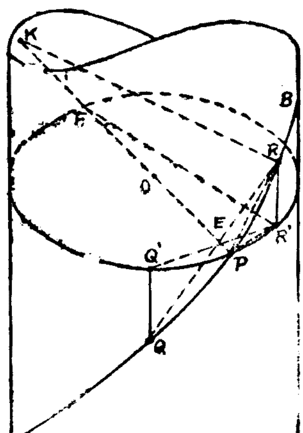


Fig. 339

次作過 Q, P, R 三點之圓，若其直徑爲 P K, 則 P K 與 P F 同在一直線上。而三角形 P R K 爲直角三角形，R E 垂直於 P K。是故

$$\overline{R^1 P^2} = P E \cdot P F,$$

$$\overline{RP^2} = PE \cdot PK.$$

因之，若角 RPR' 爲 θ 時，則得

$$\mathrm{Cos}^2\theta = \frac{R'P^2}{RP^2} = \frac{PF}{PK}, \qquad \text{即}\ PK = \frac{PF}{\mathrm{Cos}^2\theta}.$$

今Q與R使其接近於P，當其無限接近至於極限時，則PK爲直徑之圓，爲P處螺旋線之曲率圓。其角 θ 應等於螺旋線之切線與垂直於其軸之平面所成之角。故由上所述，螺旋線上之任意之曲率半徑，等於含螺旋線之圓柱半徑與螺旋線之切線垂直於其軸之平面所成之角，其餘弦之二乘所除得之商。

作圖題 5. 求類似螺旋面之展開。

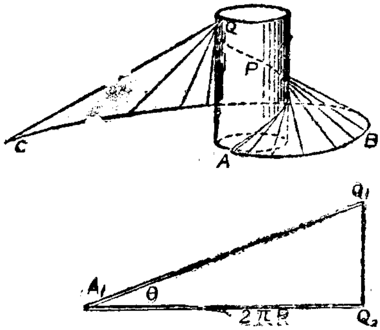


Fig. 340

解　螺旋線之半徑爲R，其切線與其軸垂直之平面所成之角爲 θ 時，則類似螺旋面之展開，爲半徑 $R/\mathrm{Cos}^2\theta$ 之圓作底之漸伸線與此圓所圍成之圖形。

作圖：如 Fig. 340 所示，爲類似螺旋面一迴轉間之觀察圖。而 Fig. 341 爲其展開之圖也。今X等於 $R/\mathrm{Cos}^2\theta$，後以此爲半徑作圓弧 $a_1\,p_1\,q_1$ 使其等於 $2\pi R/\mathrm{Cos}\,\theta$，而作其漸伸線 $a_1\,b_1\,c_1$ 由是 $a_1\,b_1\,c_1\,q_1\,p_1$ 之圖形，即爲所求之展開。

3. 線織面之展開。

單曲面爲展開可能之曲面。捩面雖屬展開不能之曲面，然均可依近似展開之法展開，茲將關於一般對於單曲面，捩面展開之法，述之如次：

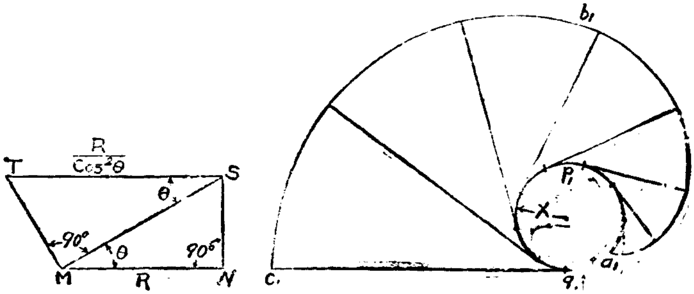


Fig. 341

錐面，以其相隣之二面素爲二邊作三角形，由其三角形而得其展開法，既述之於前矣。至其他之線織面，可將其相隣面素之端互相連結，而

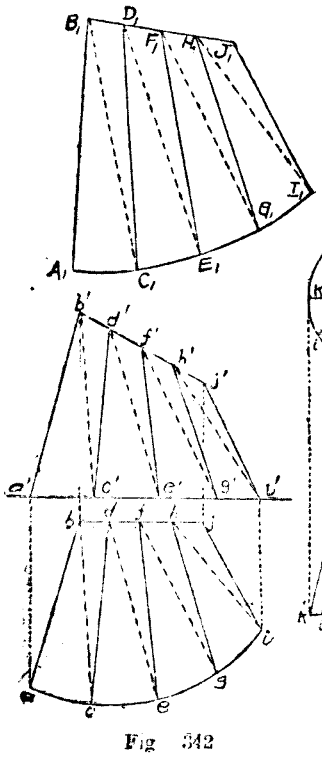


Fig. 342

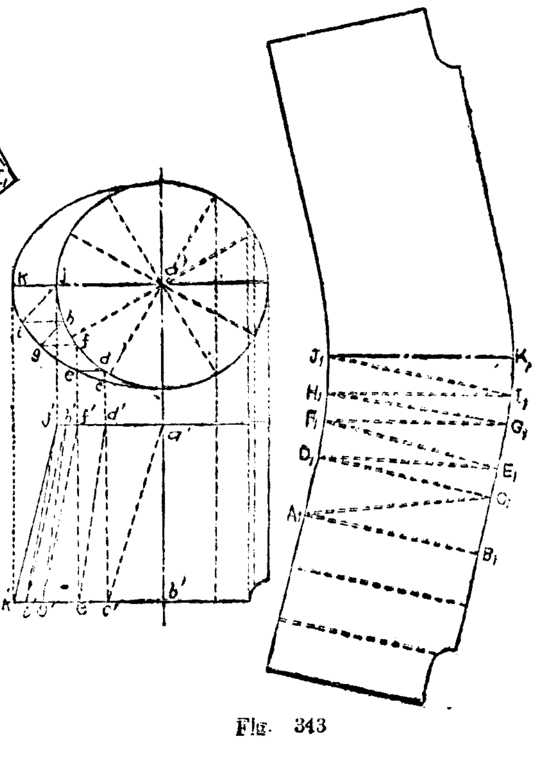


Fig. 343

視其與面素爲三角形之二邊，後由其多數三角形而成曲面。似此展開之法，謂之三角法。如Fig. 342, 343, 344, 345, 諸圖，用示其大要圖也。

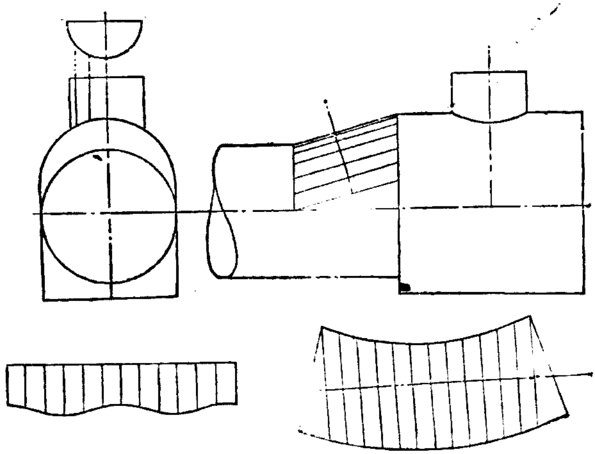


Fig. 344

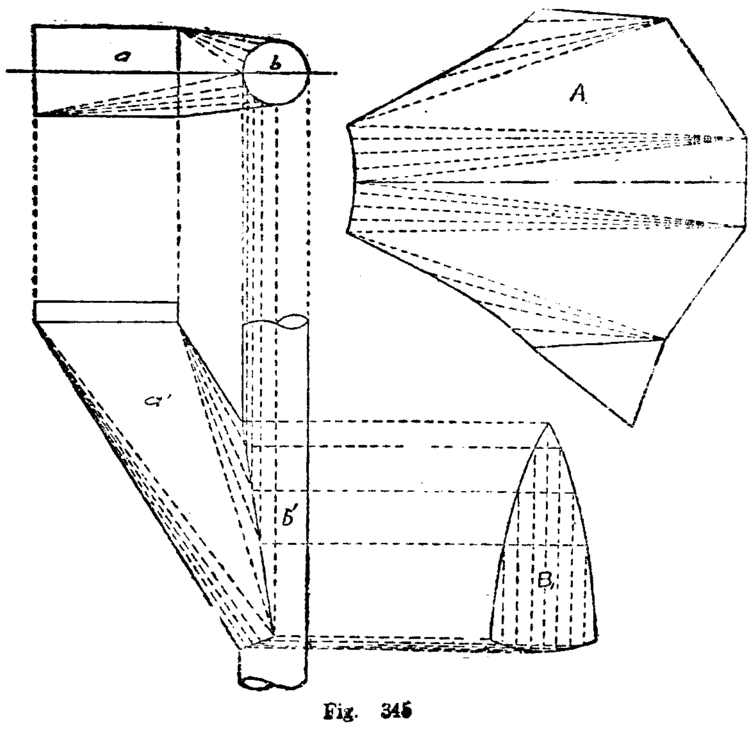


Fig. 345

如 Fig. 346 所示，爲直圓錐以平面 T 切之，而求其切口及曲面之展開，及於切口上之任意點，而引切線之圖也。

4. 複曲迴轉面之展開

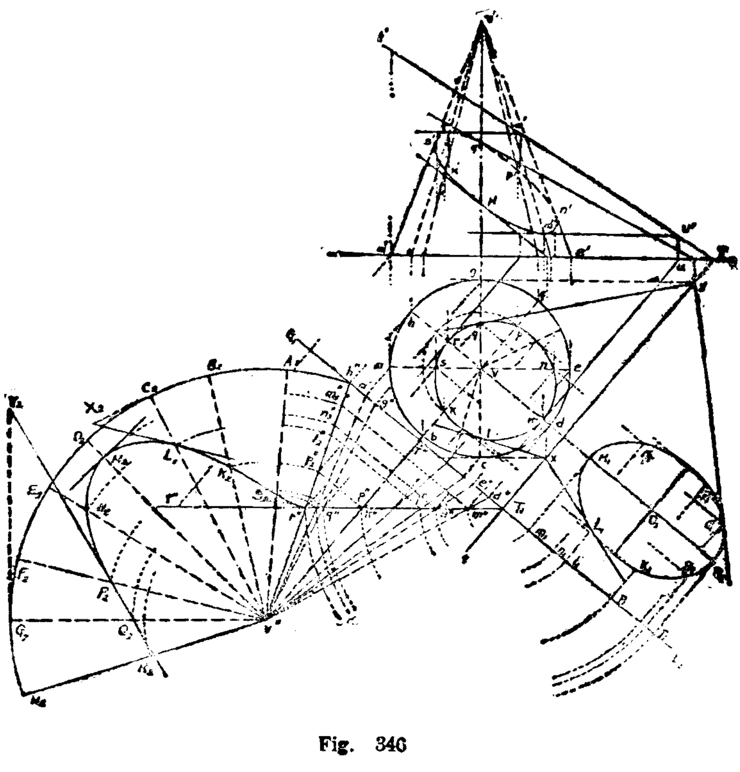


Fig. 346

如球，橢球，圓環之諸複曲迴轉面，雖不能展開而成平面，但實用上，有近似形之展開法，如斯之展開法，若欲全體作成一連續形，乃屬不可能之事。茲將其方法，述之如次：

(1)三角帶法：

此法，將曲面分成多數之子午面，而求其各部分之近似形之展開之法也。如 Fig. 347 所示，乃球之展開圖。其法，先於子午面所分成之部分，更以垂直於其軸之平面分之而成梯形及三角形（兩端爲三角形）。後由梯形及三角形，而求其近似之展開圖。

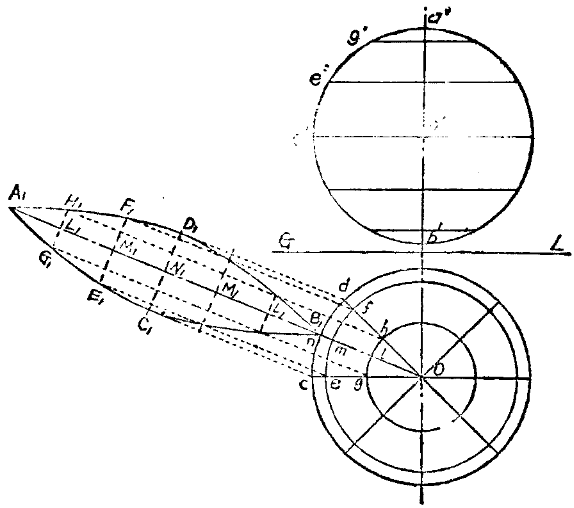


Fig. 347

(ii)帶環法:

此法，先將曲面以垂直於其軸之平面分之，則其所得之各部分爲截頭圓錐，及圓錐（兩端爲圓錐）。後由截頭圓錐及圓錐再求其展開之法也。如 Fig. 349 乃將 Fig. 348 所示之球，依此方法，而作成之展開圖也。

練習題

1. 如 Fig. 350 所示，爲二角柱之相貫體，試求其展開圖。

2. Fig. 351 爲五平面與二錐面所成之立體，試求其展開圖。

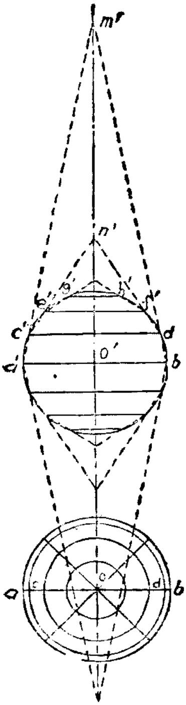


Fig. 348

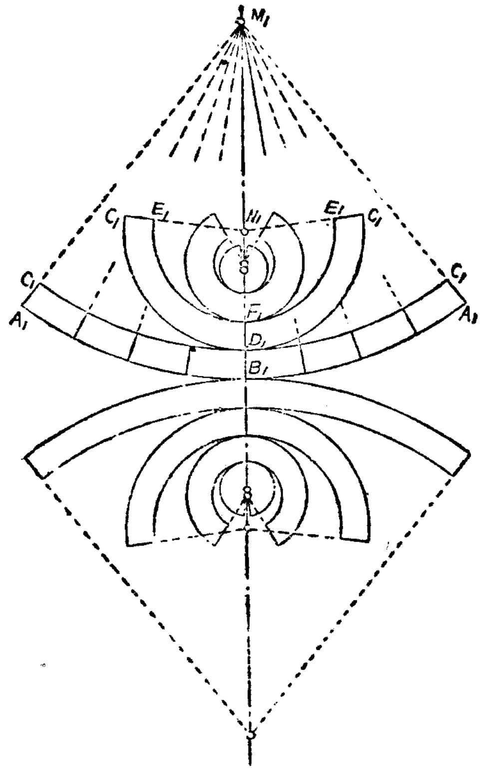


Fig. --

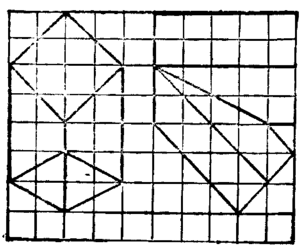


Fig. 350

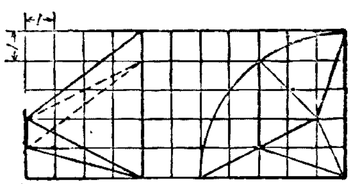


Fig. 351

3. Fig. 352 爲二圓柱與一截頭錐所成之曲面，試求其展開圖。

4. Fig. 353 爲一圓柱與二截頭圓錐所成之曲面，試求其展開圖。

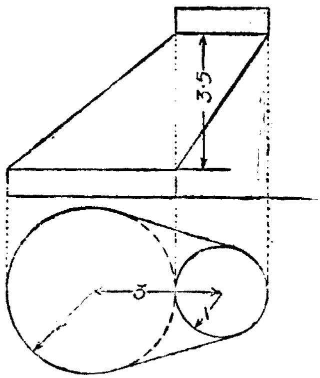


Fig. 352

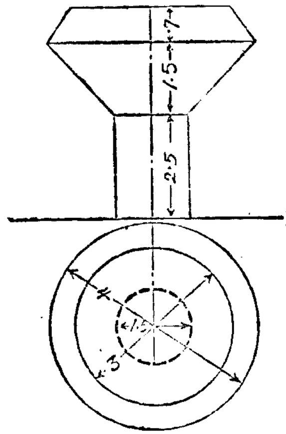


Fig. 353

5. Fig. 354 爲一圓柱，一直立四角柱，二三角形，二錐狀面，與二錐面所成之接續之投影，試求其各面之展開圖。

6. Fig. 355 爲二圓柱面，以一錐面接續之圖，試求其曲面之展開圖。

7. 試將 Fig. 356 所示之圓環之四之一展開。

8. 試於 Fig. 357 所示之錐面上，作過二點 P, Q 之最短線之投影。

9. 有橢圓體，其三軸之長爲 7 糎，4 糎，3 糎。試求其展開圖。

10. 有直徑 6 糎二平行之半圓，各垂直於含其二直徑之平面，其距離爲 5 糎。而二中心相結之直線與直徑成 60°。又有與上述之二直徑垂直相交之直線，其交點與中心間之距離相等。試以上述之二圓與直線爲

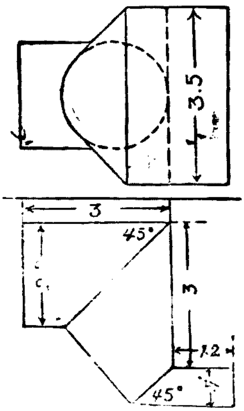


Fig. 354

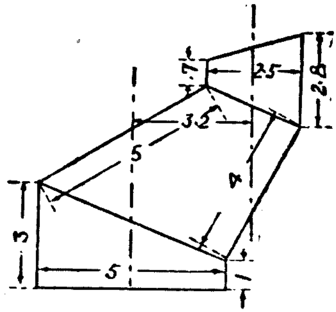


Fig. 355

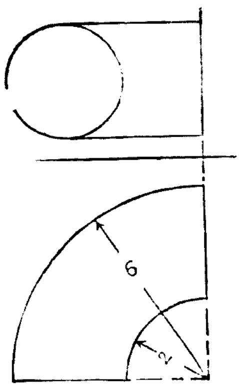


Fig. 356

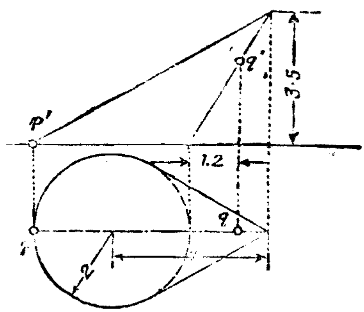


Fig. 357

導線，而求其牛角之展開圖。

11. 試以半徑 2 糎，節距 6 糎之螺旋線為導線，而求其類似螺旋面之展開圖。求此圖時，只限於過螺旋線一迴轉之兩端，垂直於其軸之平面內之部分。

第十章　相貫體

1. 面之交切線

二面相交，其相交處謂之二面之交切線 (Intersection)。求二面交切線之法，玆述之如次：

A, B 爲已知之二面，設與 A, B 二面相交之第三面 C 切於已知之二面。此時各切口之交點，應爲 A B 二面共通之點。同法求得二面多數共通之點，將其連結而作成圖形可也。此時切已知二面之面 C，究應爲何面，須依已知之面與其位置，而作適當之選擇。通常，多使其切口成爲直線或圓等之簡單形爲準繩。是故，面 C 通常雖多採用平面，然於特別時間亦有採用錐面，柱面，球面等之曲面，而較便利者。又二立體爲多面體時，以含其各稜之平面切之，其作圖上，似較稱便。

2. 角柱與角錐之交切

角錐與角柱兩方均爲多面體，故其交切線爲多角形。依此，先求其多面體之各稜與其他面之交點，後將其諸交點連結作成多角形，是即所求之交切。

作圖題 1. 求角錐與垂直於直立投影面之角柱之交切線。

解　因角柱垂直於直立投影面，故以含角錐之頂點與角柱之各稜之平面，及含角錐之稜而垂直於直立投影面之平面切之，而求其切口可也。

作圖：　如 Fig. 358 所示，求角柱之稜(eh, e')貫角錐之點時，須用

含角柱之側稜與角錐之頂點 v, v' 之平面而切角錐可也。此時切口之平面圖爲 v m, v n。次使其與 eh 之交點爲 1, 6, 則交點 1, 6, 卽爲所求之點之平面圖。又求角錐之稜 (vb, v'b') 貫角柱之點，可用含角錐之稜而垂直於直立投影面之平面切之，使其與切口相交之點爲 (7, 7'), (10, 10')。如此方法作圖，則得如圖所示之交切線之平面圖 12345, 678910。

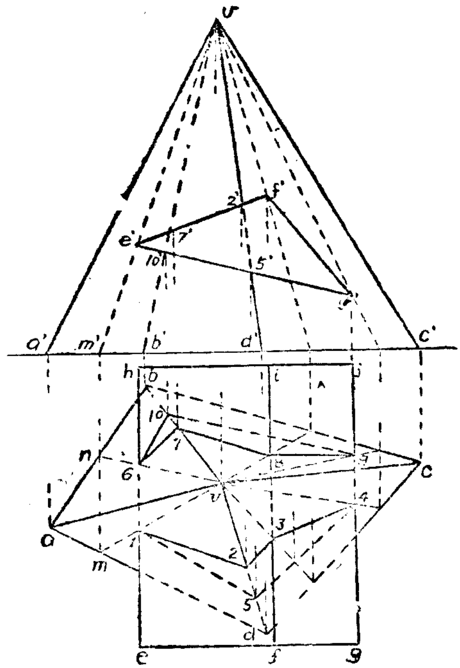


Fig. 358

作圖題 2. 求垂直於水平投影面之角柱與角錐之交切線。

解: 角柱，因其垂直於水平投影面，故以垂直於水平投影面之平面切之，而求其切口之各交點可也。此時切斷平面，以其含角錐之頂點者爲適宜。

作圖: 如 Fig. 359，乃示其大要之圖也。圖中 VC 爲垂直於基線之稜，若求其與角柱相交點之立面圖 5' 時，可以含 VC 之直立面切之，將其切口，倒置於水平投影面上求之可也。

作圖題 3. 求平行於水平投影面之角柱與角錐之交切線。

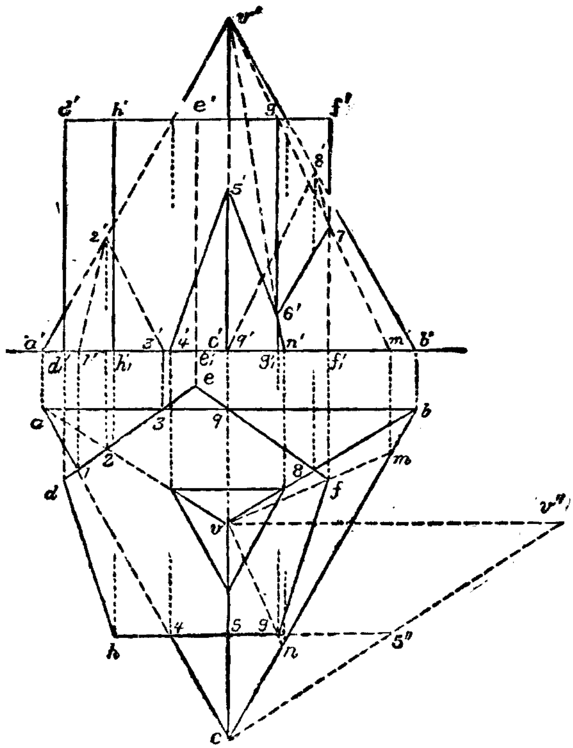


Fig. 359

解：　於垂直於角柱之軸之直立面上，求其副投影。然後依作圖題1之作法，而求其交切線可也。

作圖：　如 Fig. 360，乃示其大要之圖也。求角柱求之稜貫角錐之點，可如圖所示之水平面切其角錐求之可也。

作圖題 4　求其底在水平投影面上之斜角柱與斜角錐之交切線。

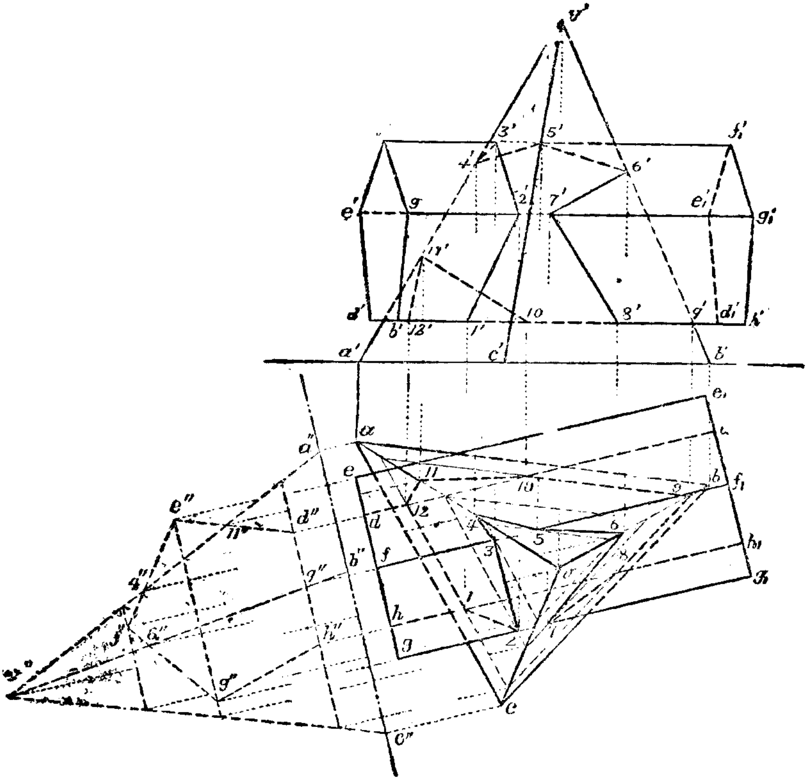


Fig. 360

解: 求角柱之稜貫角錐之點時,可用含角柱之稜與角錐之頂點之平面切其角錐,而求其切口與其角柱之稜之交點可也。又求角錐之稜貫角柱之點時,可用含角錐之稜及平行於角柱之軸之平面切其角柱,而求其切口與其角錐之稜之交點可也。

作圖: 如 Fig. 361,乃示其大要之圖也。圖中,v 爲過角錐之頂點,平行於角柱之軸,其直線之水平跡也。過角錐之頂點,平行於角柱之軸,

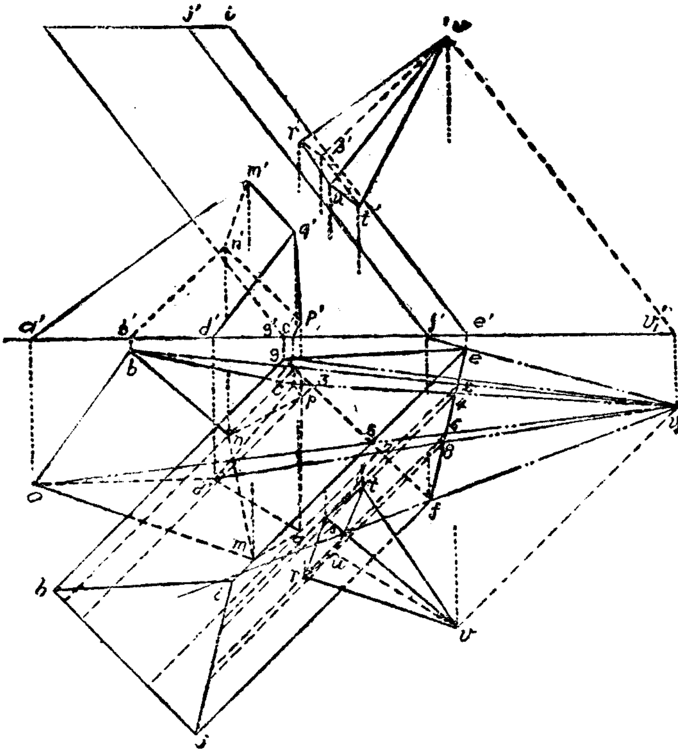


Fig. 381

之平面之水平跡，及含角錐之稜，與角錐之頂點之平面之水平跡，必通過 V_1 點。

3　二角柱之交切

作圖題 5.　求垂直於水平投影面之角柱，與他一角柱之交切線。

解：　其一角柱垂直於水平投影面時，用垂直於水平投影面之平面

切之，而求其切口之交點可也。

作圖：　如 Fig. 362 所示，爲不垂直於水平投影面之角柱，而平行於直立投影面時，以平行於直立投影面之平面切之，而求其交切線上之

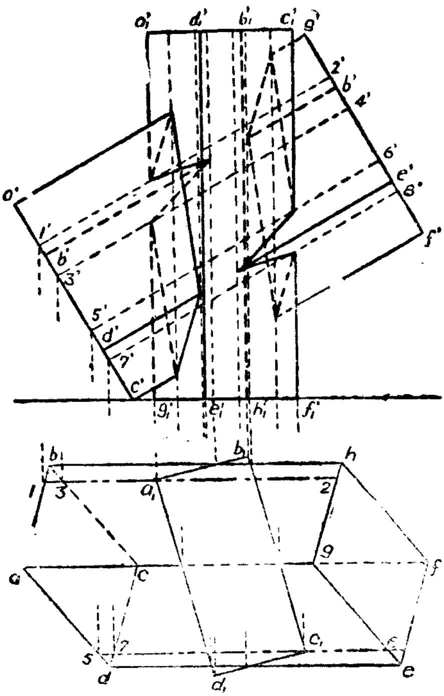


Fig. 362

點之圖也。又如 Fig. 363 所示，爲其一角柱成水平，而於垂直於水平角柱之直立面上，求其副投影，其副投影求得後，再求其稜與面之交點之圖也。

作圖題 6.　求其底在水平投影面上之二斜角柱之交切線。

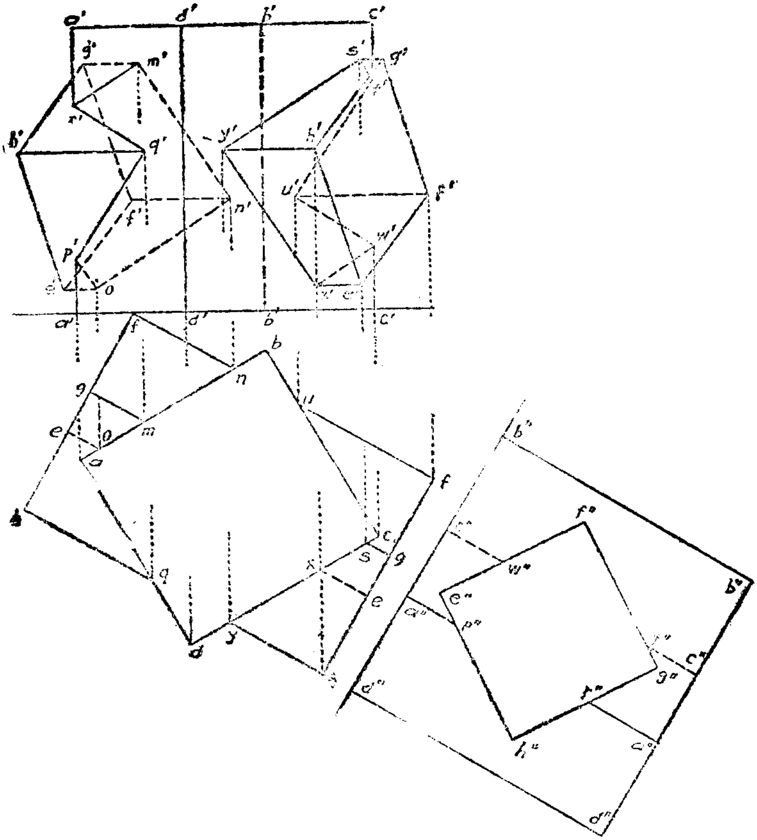


Fig. 363

解：　角柱以平行於二角柱之軸之平面切之，其切口與其各軸平行。故用含其一稜，平行於他角柱之軸之平面切之，頗易求其交點。

作圖：　如 Fig. 364，乃示其大要之圖也。圖中直線 f1, a2 等，乃平行於二角柱之軸之平面之水平跡所引之平行之線也。但平行於此二角柱之軸之平面之水平跡之求法，茲略不贅。

4. 二角錐之交切

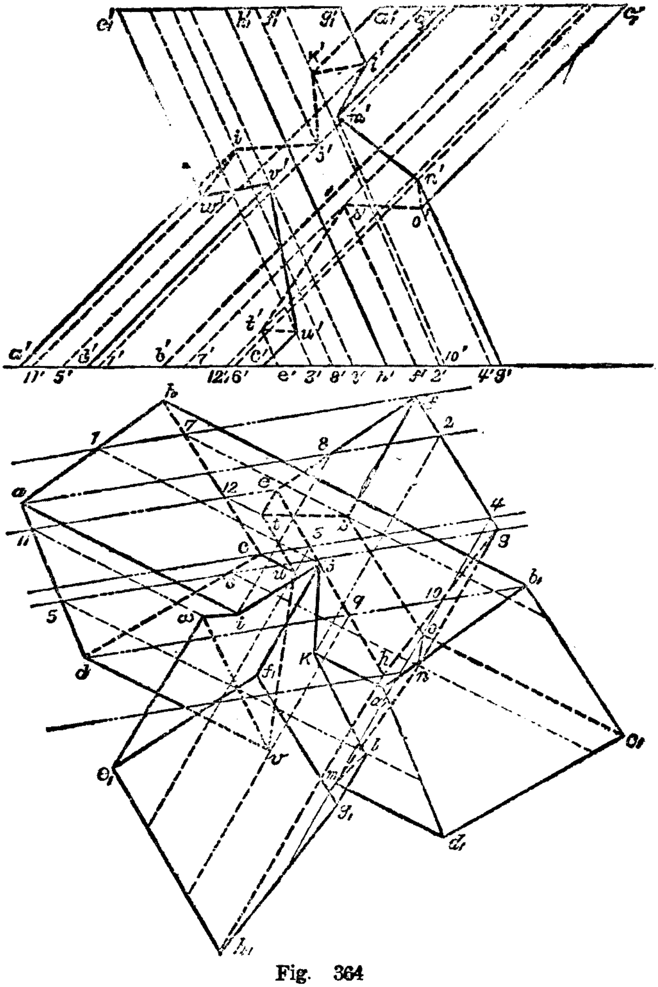


Fig. 364

作圖題7. 求其底置於水平投影面上之二角錐之交切線。

解: 以含二角錐之頂點之平面切其角錐，其切口為過各頂點之直線。是故用此平面切之，頗易求其交切線上之點。

作圖: 如 Fig. 365，乃示求斜角錐之交切線之圖也。圖中，x 為連

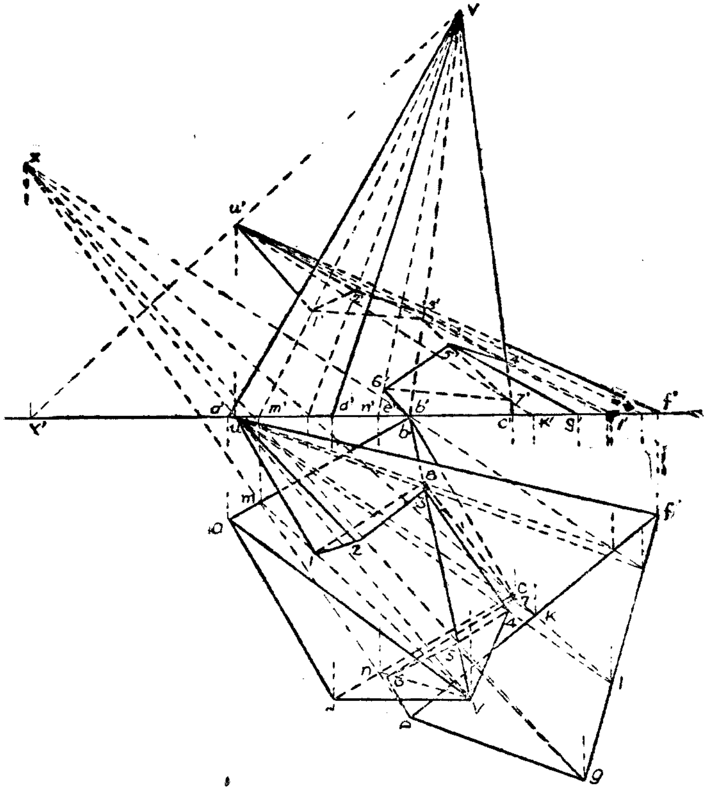


Fig. 365

結二頂點之直線之水平跡。求 x 時，若引含頂點之平面之水平跡，較易作圖。

作圖題 8. 求其底不在投影面上之二角錐之交切線。

解： 以含二角錐之頂點之平面切之，求其交切線上之點。其求法，與前作圖題同。然此題，其角錐之底不在投影面上，故作圖亦不如前圖之簡單。

作圖： 如 Fig. 366 所示，V-MNO, R-ABCD 爲已知之二錐體。其求法，先延長 ad, bc, 使其與 vr 之交點爲 6, 3。次由此引投射線，使其與 a′ d′, b′ c′ 之相對應之交點爲 6′, 3′。此時直線 6′ 5′ 與 v′ r′ 之交點 2′，爲連結角錐之二頂點之直線與含底ABCD之平面，其交點之立面圖也。是故，由 2′ 所引之投射線，與 vr 相交之點 2，卽爲其平面圖。同法，

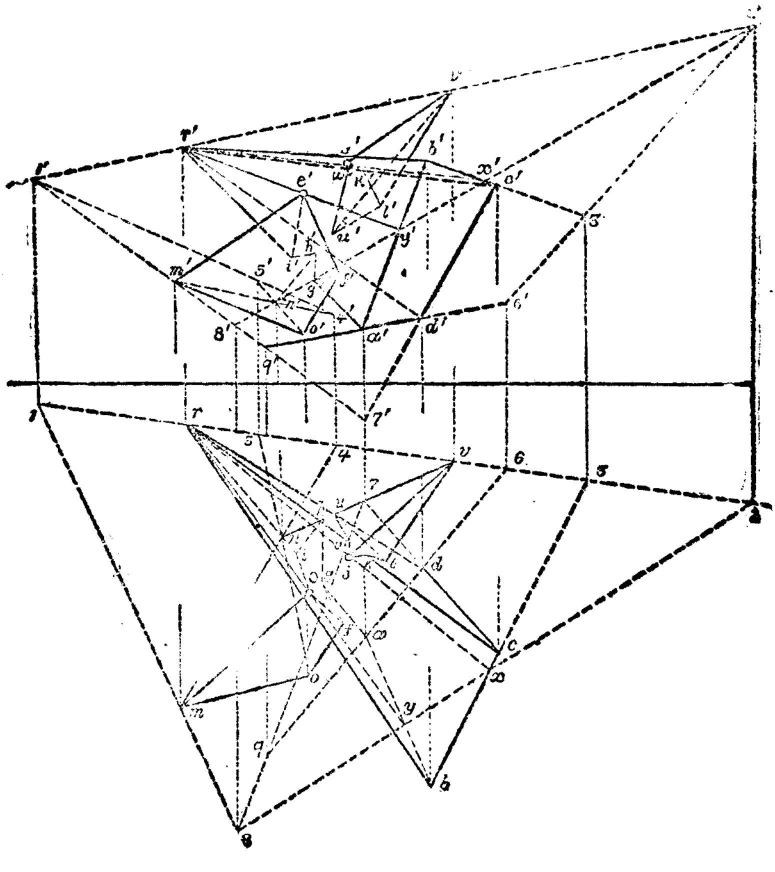


Fig. 366

可求連結二頂點之直線與含底 MNO 之平面，其相交點之投影 1, l'。

次求其一稜 VM 貫他角錐 R-ABCD 之點。其求法先引 l' m', 使其與四邊形 a' b' c' d' 之任意二邊 a' d', c' d' 之延長線相交，其交點爲 9', 7'。更由 9', 7' 引投射線，使其與 ad, cd 相對應之交點爲 9, 7, 而直線 97 與 lm 之交點爲 8。此時直線 28, 爲含 VM 與 VR 之平面與含四邊形 ABCD 之平面，之相交之平面圖。是故 28 與四邊形 abcd 之交點 x, y 與 r 所結之直線，乃含 VM 及 R 之平面，切角錐 V-ABCD 之切口之平面圖。rx, ry 與 vm 之交點 j, e. 爲 V M 貫角錐 V-ABCD 之點之平面圖也。今平面圖旣得，則其立面圖 j', e', 自不難求矣。

同法，求得一角錐之稜與他角錐之交點，將其諸點連結而作成多角形 jwul, j' w' u' l', efghi, e' f' g' h' i', 可也。

5. 圓柱與圓錐之交切

二立體以任意之平面切之，置其切口爲 CD, EF, 由錐體之頂點 A 引平行於柱體之軸之直線。使其與平面 H 相交之點爲 X。如 Fig. 367 所示，由 X 向一切口 CD 所引之二切線間有他切口時，則其交切線爲不相交之二曲線。又如 Fig. 368 所示，由 X 向 CD 引一切線與 EF 相

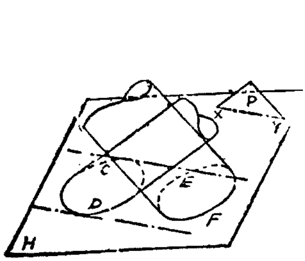


Fig. 367

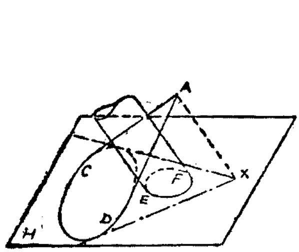


Fig. 368

交，向 EF 引一切線與 CD 相交時，其交切線爲一曲線。又如 Fig. 369 所示，向 C D, EF 所引之共通之切線，僅爲一線時，其交切線，於過其各切點之面素之交點處相交，而成一曲線。又如 Fig. 370 所示，由 X 向 CD, EF 所引之共通切線有二時，其交切線，於過其各切點之面素之二交點處相交，而成二曲線。

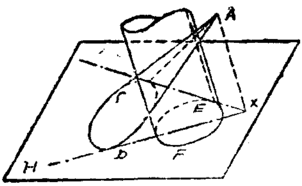


Fig. 369

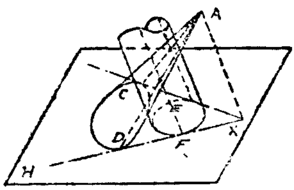


Fig. 370

作圖題 9. 求錐體與柱體之交切線。

解： 二立體，用含錐面之頂點且平行於柱面之軸之平面切之，其切口應爲直線。依此其交切線上之點，頗易求也。

作圖 1： 如 Fig. 371，乃示其底置於水平投影面上之錐體，及其底附於直立投影面上之柱體，而求其交切線之圖也。圖中柱面之軸，因其平行於水平投影面，故平行於其軸之平面之水平跡，與其軸之平面圖平行。依此，含錐面之頂點，及平行於柱體之軸之平面，不難求得。圖中所示，其大要也。

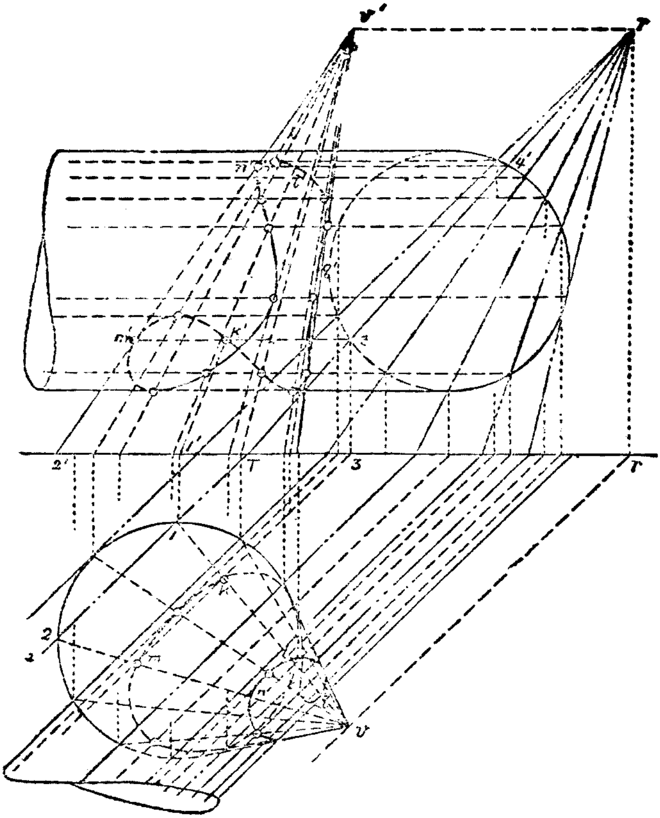


Fig. 371

作圖 2:　如 Fig. 372, 爲其底置於水平投影面上之直圓錐與其軸平行於水平投影面之圓柱,而求其交切線之圖也。其圓柱,因傾斜於直立投影面,故於垂直於其軸之直立面上作副投影,即易求其交切線之投影。

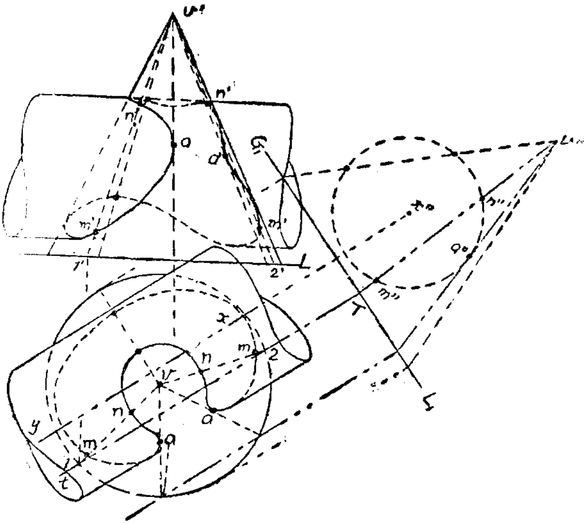


Fig. 372

作圖 3: 如 Fig. 373，乃示其軸垂直於水平投影面之圓錐及圓柱，而求其交切線之圖也。

作圖 4: 如 Fig. 374, Fig. 375，乃示其一面素，垂直於水平投影面之錐體，及其軸垂直於水平投影面之圓柱，而求其交切線之圖也。如 Fig. 374 中，m n, m′ n′ 爲交切線之漸近線。Fig 375 中 (m n, m′ n′)，(yz, y′ z′) 爲漸近線。

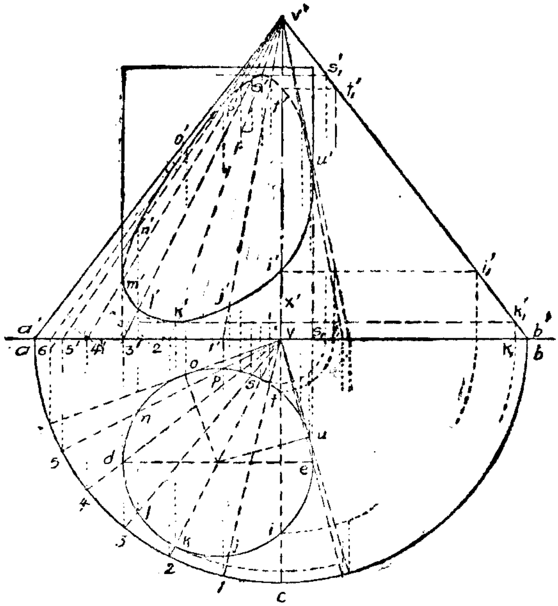


Fig. 373

作圖 5: 如 Fig. 376, 乃求水平圓柱與直立圓錐之交切點之圖也。

6. 二圓柱之交切

設二圓柱, 以任意之平面 H 切之, 其切口爲 C D, E F, 又置平行於二軸之任意平面與平面 H 之交跡爲直線 X Y。此時如 Fig. 377 所示, 其一切口, 介於平行於 X Y 之他切口之二切線間時, 其交切線, 卽爲不相交之二曲線。又如 Fig. 378 所示, 平行於 X Y 之 C D 之一切

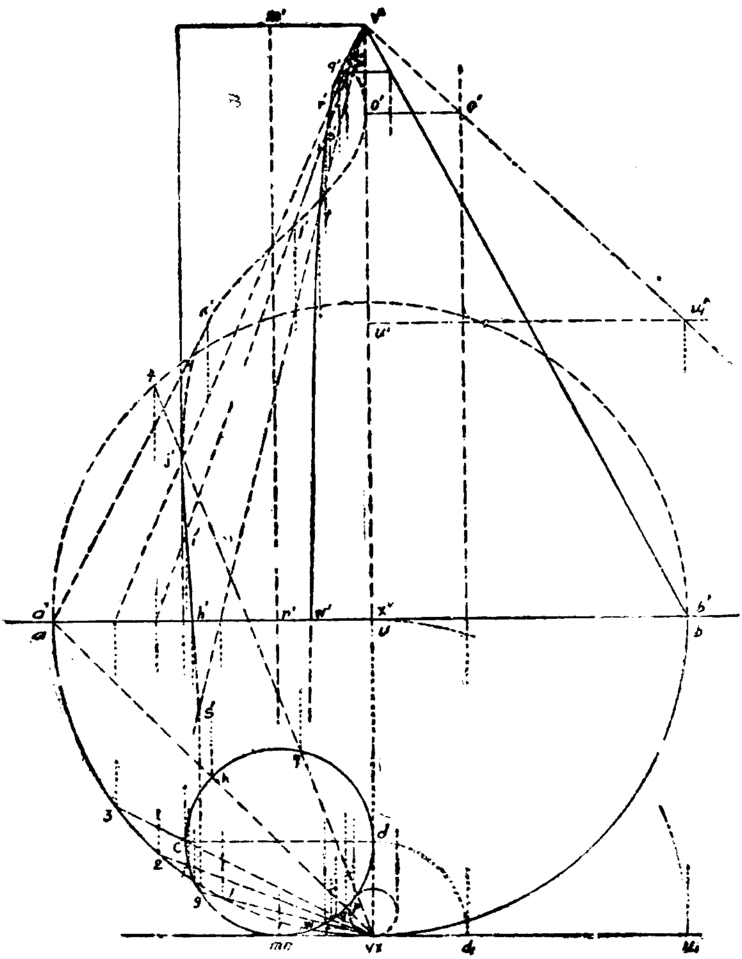


Fig. 374

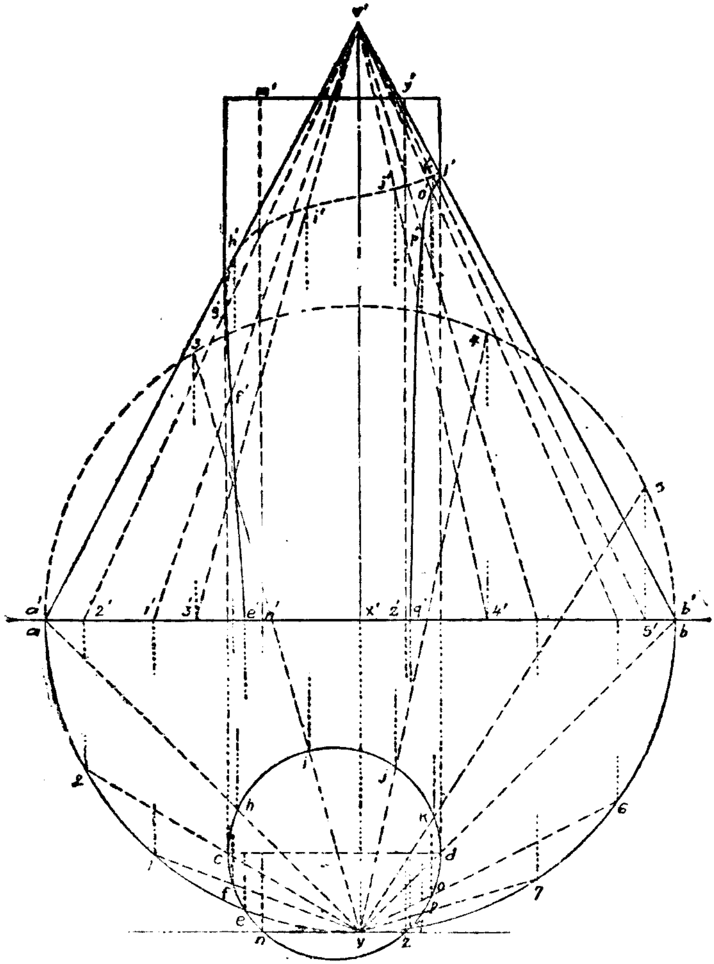


Fig. 375

線，切於 E F，平行於 E F 之一切線切於 C D 時，其交切線爲一曲線。又如 Fig. 379 所示，於 C D，E F 有一平行於 X Y 之共通切線時，其交切線，乃過各交點之面素，於其面素之交點處相交，而成一曲線。又如 Fig. 380，乃示 C D，E F，有平行於 X Y 之二共通切線，其交切線，乃過各切點之面素，於其面素之二交點處相交，而成二曲線之圖也。

作圖題10. 求二圓柱之交切線。

解： 以平行於二柱體之軸之平面切其柱面，其切口應爲直線。是故將其各切口之交點連結而成曲線可也。

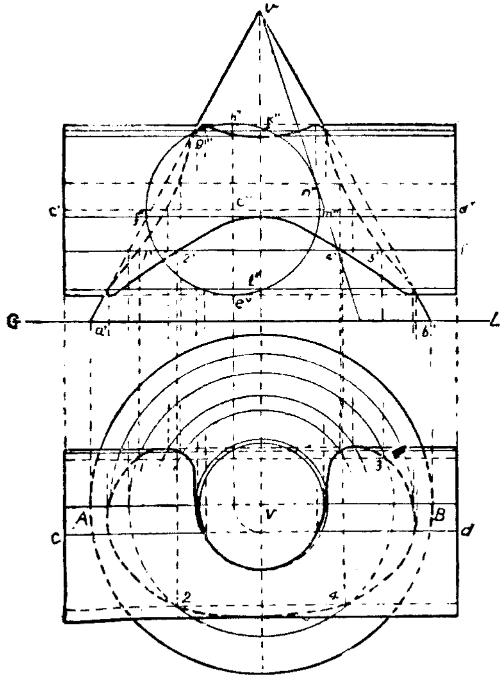


Fig. 376

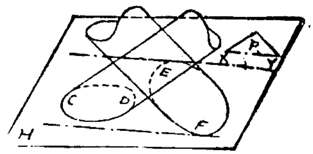


Fig. 377

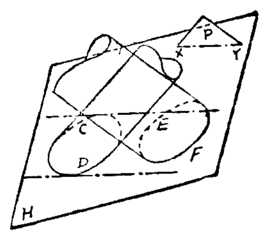


Fig. 378

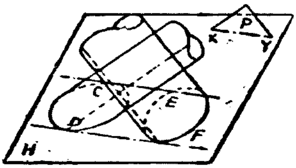


Fig. 379

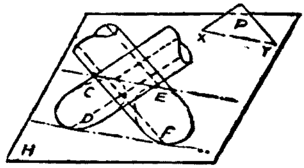


Fig. 380

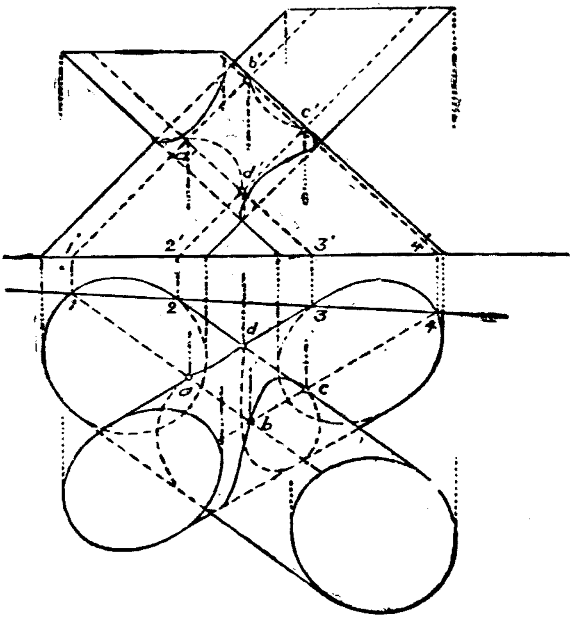


Fig. 381

作圖 1:　如 Fig. 381，乃示其底置於水平投影面上之二柱體，而求其交切線之圖也。圖中直線 1 2，用表平行於二軸之一平面之水平跡，其各切口之交點 (a, a′)，(b, b′)，(c, c′)，(d, d′) 爲所求之交切線上之點。同法，可求其交切線上之各點。

作圖 2:　如 Fig. 382，乃示其底垂直於水平投影面之柱體，及其底垂直於直立投影面之柱體，而求其交切線之圖也。其求法，先作平行於

二軸之任意平面 r R r′，而求其含垂直於水平投影面之底之平面 t T t′ 之相交跡(34, 3′ 4′)，及含垂直於直立投影面之底之平面 s S s′ 之相交跡(12, 1′ 2′)。次作平行於 1 2 之任意直線 gh, 及垂直於直立投影面之

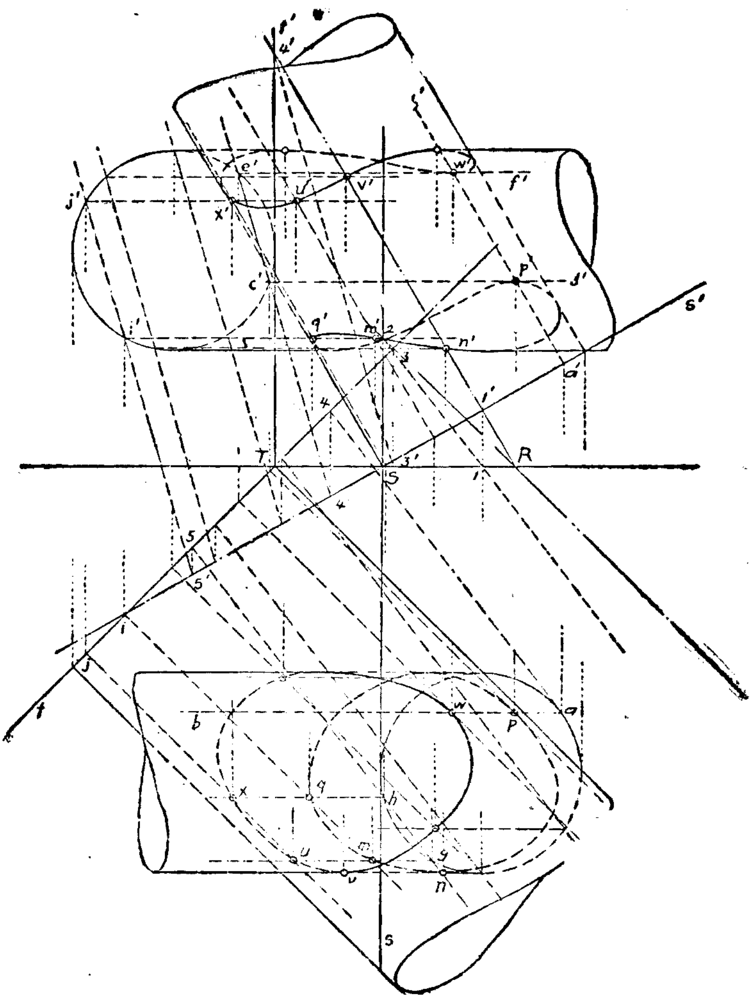


Fig. 382

底之平面圖，其交點為 g, h, 又由 g h 與 t T 之交點 5 引投射線，使其與 S s′ 相交之點為 5′。更由 5′ 引平行於 3′ 4′ 之平行線 i′ j′，使其與垂直於水平投影面之底之立面圖相交於 i′, j′。通 g, h 作與其底垂直於直立投影面之柱面之軸之平面圖成平行之 gm, hx。此時 gm, hx，乃平行於二軸之一平面切此柱面，而成切口之平面圖。又由 i′ j′ 引與其底垂直於水平投影面之柱面之軸之立面圖成平行之 i′ m′, j′ x′。此時 i′ m′, j′ x′，乃以同平面切此柱面所得之切口之立面圖。依此諸切口之交點 (m, m′), (u, u′), (q, q′)(x, x′)，卽為所求之切口上之點。同法，再求其交切線上之點可也。

作圖 3:　如 Fig. 383 所示，乃半徑相同，其軸相交之二直圓柱，其一圓柱，垂直於水平投影面時，而求其交切線之投影圖也。此時，其軸相交，其半徑相同，故二圓柱之交切線，應為二橢圓。是故平行於二軸之直立面上之交切線之投影為二直線。圖中 m″ n″, p″ q″，為交切線之副投影。後由其副投影，而求其交切線之平面圖及立面圖可也。

7.　二圓錐之交切

設任意之平面切二錐體，其切口為 C D, E F。次連結二頂點 A, B 之直線，使其與平面 H 相交之點為 X。此時如 Fig. 384 所示，由 X 向 E F 所引之二切線間若有 C D 時，其交切線必為不相交之二曲線。又如 Fig. 385 所示，由 X 向 C D 所引之一切線與 E F 相交，向 E F 所引之一切線與 C D 相交時，其交切線必為一曲線。又如 Fig. 386 所示，由 X 向 C D, E F 所引之共通之切線為一切線時，則其交切線，於過各切點之面素之交點處相交，而成一曲線。又如 Fig. 387 所示，由 X 向CD,

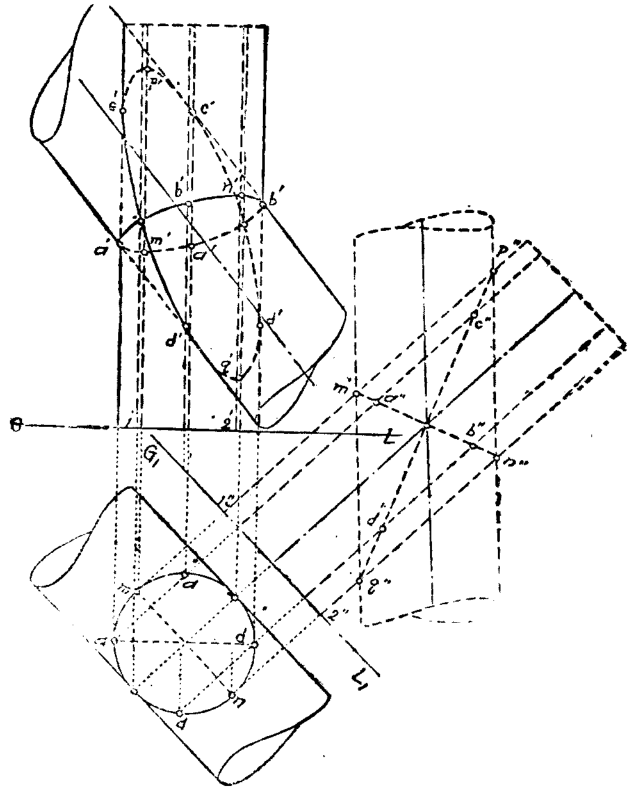


Fig. 383

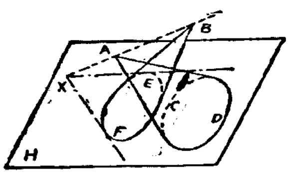


Fig. 384

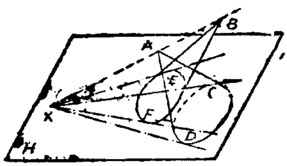


Fig. 385

E F 所引之共通之切線爲二切線時，則其交切線，於過各切點面素之二交點處相交，而成二曲線。

作圖題 11 已知二錐體之投影，求其交切線。

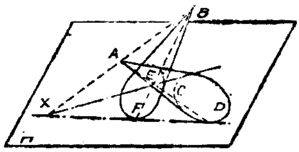


Fig. 386

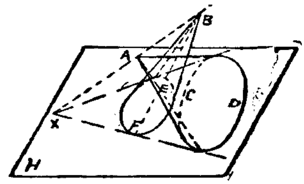


Fig. 387

解：　用含二頂點之平面切其錐面，其切口因爲直線，故易求其各切口之交點。因之，亦可易求其交切線。

作圖 1：　如 Fig. 388 所示，乃兩斜錐體之底，置於水平投影面上，而求其交切線之圖也。其作法，先求連結兩頂點之直線之水平跡 S。次

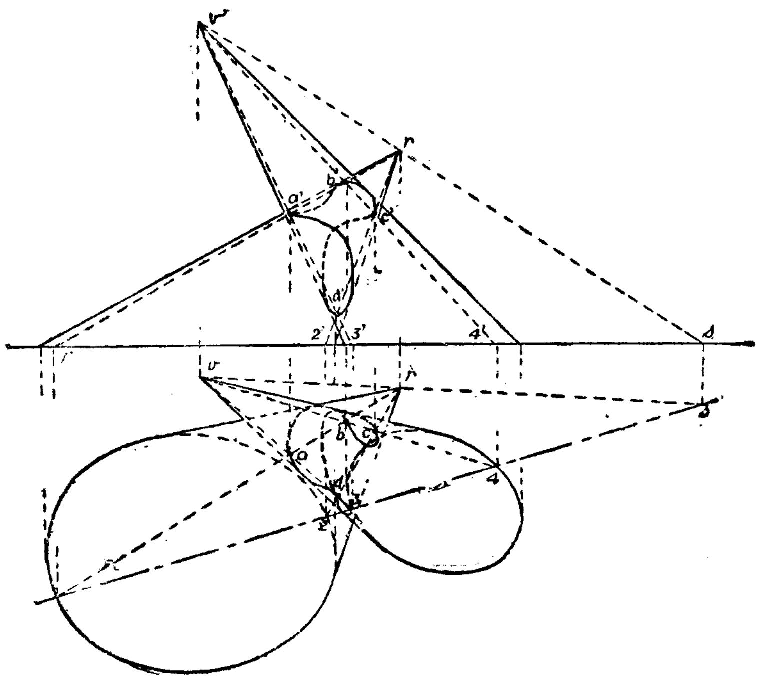


Fig. 388

過 S 引任意之直線 S 1，使其與二錐體之底之平面圖相交，其交點爲 1, 2, 3, 4。此時直線 r 1, r 2, v 3, v 4, 乃以 S 1 爲水平跡之平面切其錐面所得之切口之平面圖。其各交點 a, b, c, d, 爲所求之交切線上之點之平面圖。後由此可易求其各立面圖 a′, b′, c′, d′。同法，求得其交切

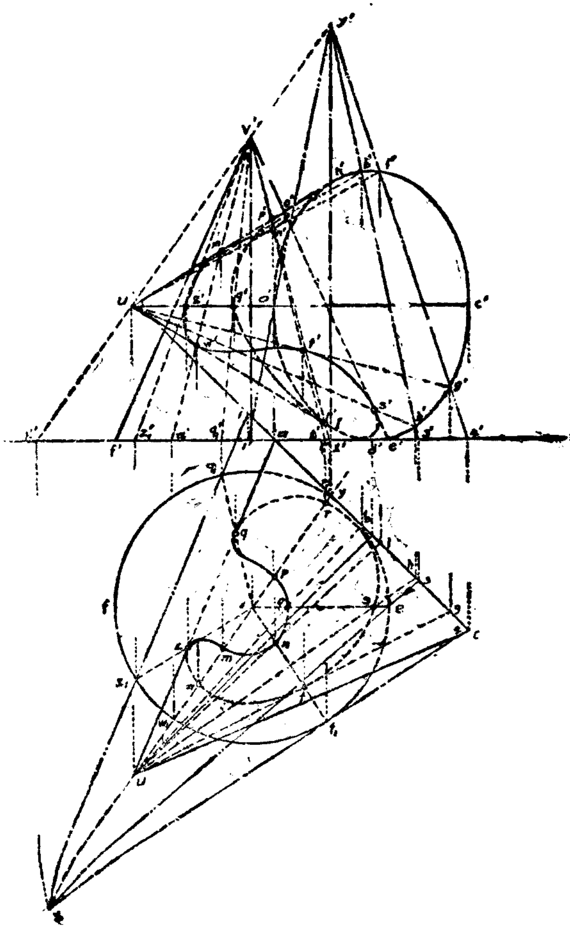


Fig. 389

線上之點，將其連結，而作成曲線可也。

作圖 2:　如 Fig. 389，乃示其底置於水平投影面上之一圓錐，及其底垂直於水平投影面之他一圓錐，而求其交切線之圖也。其法，連結其二頂點 v, u 之直線之水平跡 x，及含垂直於水平投影面之底之平面，而求其交點 y, y′。其法，先過 x 引任意之直線 x 3，令其與其底垂直於水平投影面之平面圖 a c 相交，其交點為 3。更由 3 引投射線，使其與基線相交之點為 3′，再將 3′ 與 y′ 相結。此時，X 3 與圓 e f 之交點 e 與 v 所結之直線，乃以 X 3 為水平跡之平面切於 V 為頂點之錐面之切口之平面圖。又 y′ 3′ 與曲線 a′ c′ 之交點 b′, h′ 與 u′ 所結之直線，乃以同平面切 U 為頂點之錐面之切口之立面圖。是故其切口之交點 s, s′, o, o′，即為所求之交切線上之二點。同法，後求其交切線上其他之點，將其連續而得，如圖所示之交切線之投影。

作圖 3:　如 Fig. 390，乃示其底垂直於水平投影面之錐體 U C D，及其底垂直於直立投影面之錐體 V A B，而求其交切線之法也。其求法，先連結二頂點 U, V 之直線，與含其底 C D 之平面，使其相交於點 x, x′。次令 x, x 與含其底 A B 之平面相交於點 y, y′。其後過 y 引任意之直線，使其與 c d 相交於 o。更由 o 引投射線，使其與 a′ b′ 相交於 o′，再將 o′ 與 X 相結。此時 y o 與曲線 a b 之交點 1, 2 與 v 所結之直線，乃含 U V 之一平面切 V 為頂點之錐面，其切口之平面圖。又 o′ x′，與曲線 c′ d′ 之交點 3′, 4′ 與 u′ 所結之直線，乃以同平面切 U 為頂點之錐面，其切口之立面圖也。是故，切口之交點 (p, p′)，(q, q′)，(l, l′)，(n, n′)，即為所求之切口上之點。同法，再求切口上之各點，將其連續，

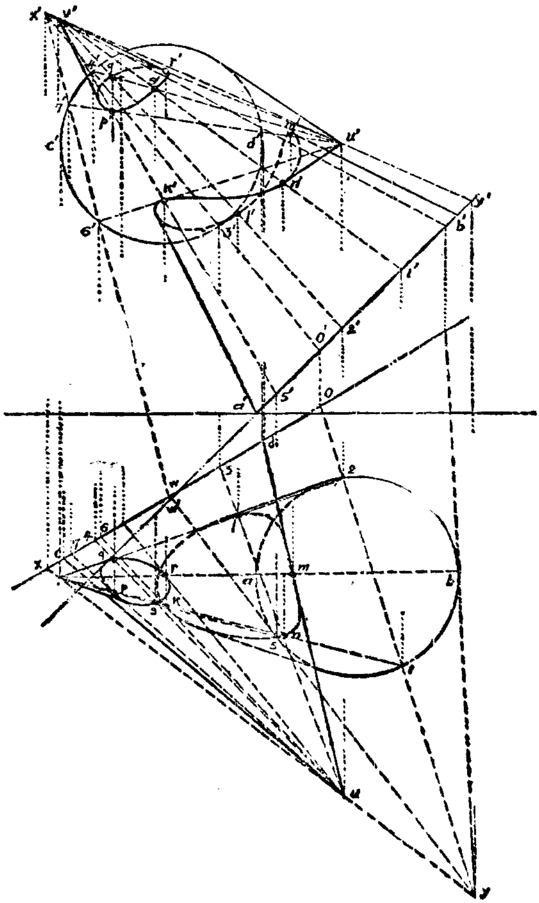


Fig. 390

而得如圖所示之交切線之投影。

作圖 4: 如 Fig. 391,乃示其底置於水平投影面上之直圓錐,及其軸平行於基線之直圓錐,而求其交切線之法也。其求法與前題同。先以含其二頂點之平面切之,而求其切口之交點。然本題若僅依其平面圖及

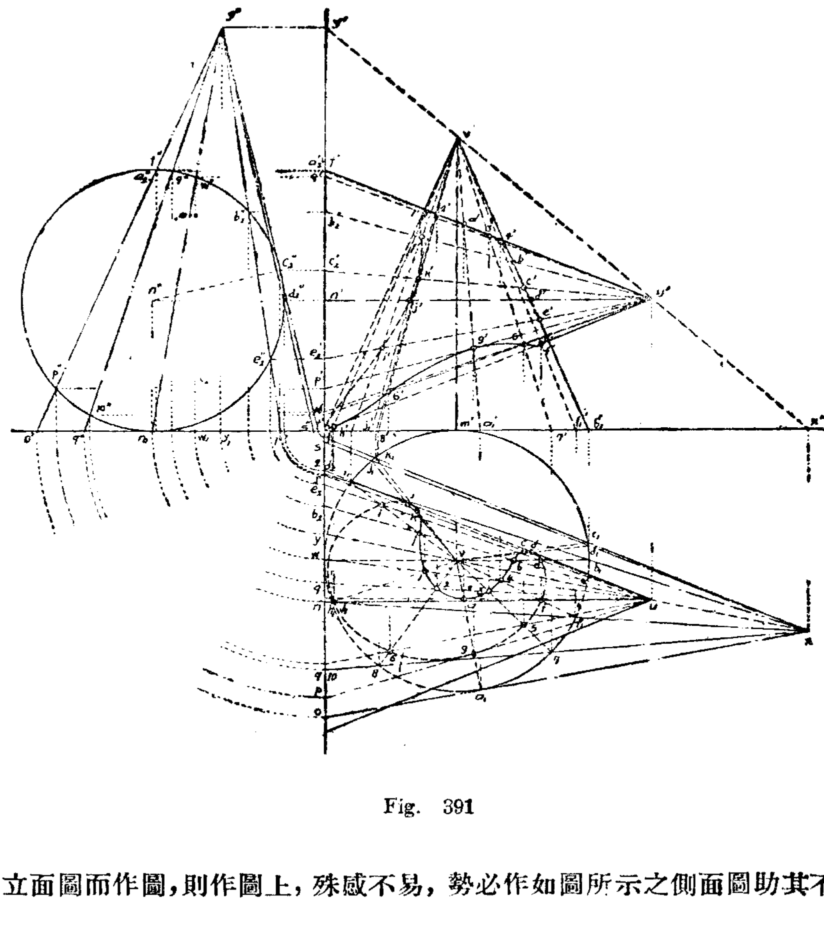


Fig. 391

立面圖而作圖，則作圖上，殊感不易，勢必作如圖所示之側面圖助其不逮可也。

作圖 5:　如 Fig. 392，乃示二圓錐包絡一球，其軸垂直於直立投影面時，而求其交切線之法也。其法，因圓錐之軸，平行於直立投影面，故其交切線之立面圖為二直線，又 v′ b′ 平行於 u′ c′，故其交切線由橢圓

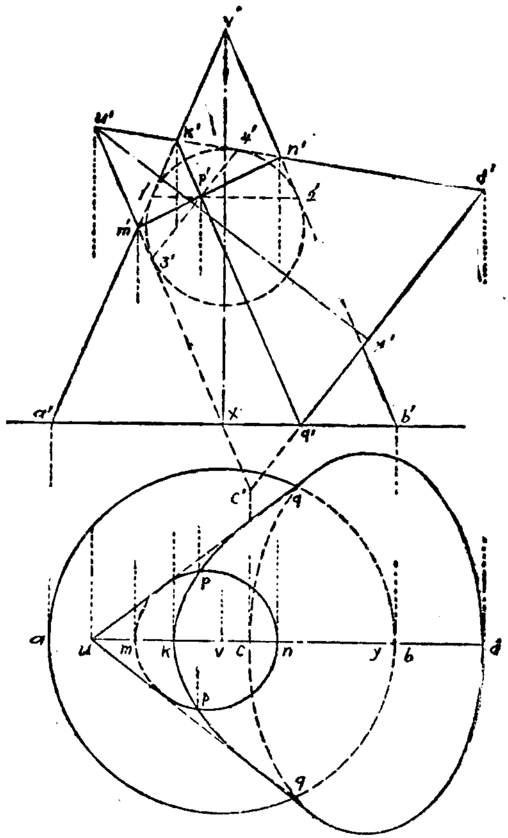


Fig. 392

與拋物線而成。至其交切線之平面圖，可由其立面圖求之。

作圖 6: 如 Fig. 393，乃示其頂角相等之二直立圓錐，而求其交切線之法也。其求法，當求其交切線時，若用含二頂點之平面切之作圖固可，若以水平面切之而求其切口之交點，則其法更覺簡單也。再本圖之交切線，為一雙曲線。

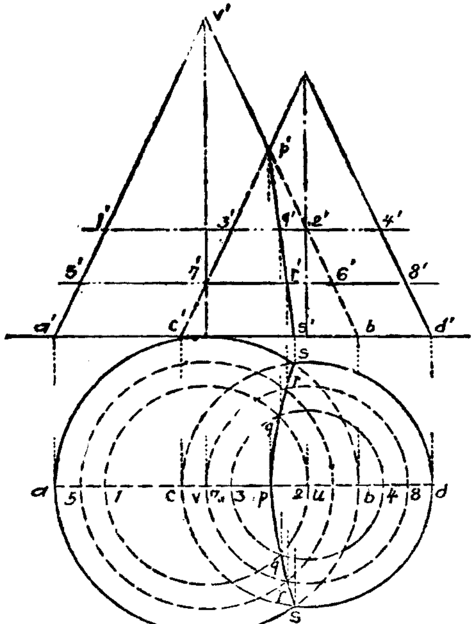


Fig. 393

8. 圓環與圓錐之交切

作圖題 12. 求其軸垂直於水平投影面之圓錐與圓環之交切線。

解：　二立體，因其彼此之軸垂直於水平投影面，故以水平面切之，其所得之切口均爲圓。由此，後再求其交切線上之點。其次，交切線上之最高點與最低點，因其在含其二軸之平面上，故以同平面切之，而求其切口之交點後，即可得也。

作圖：　如 Fig. 394 所示，乃用含其二立體之軸之平面切之，將其所切得之切口，迴轉於圓環軸之周，使其平行於直立投影面。此時圓環切口之立面圖與圓環之立面圖相一致。故迴轉後，頗易求其切口之交點

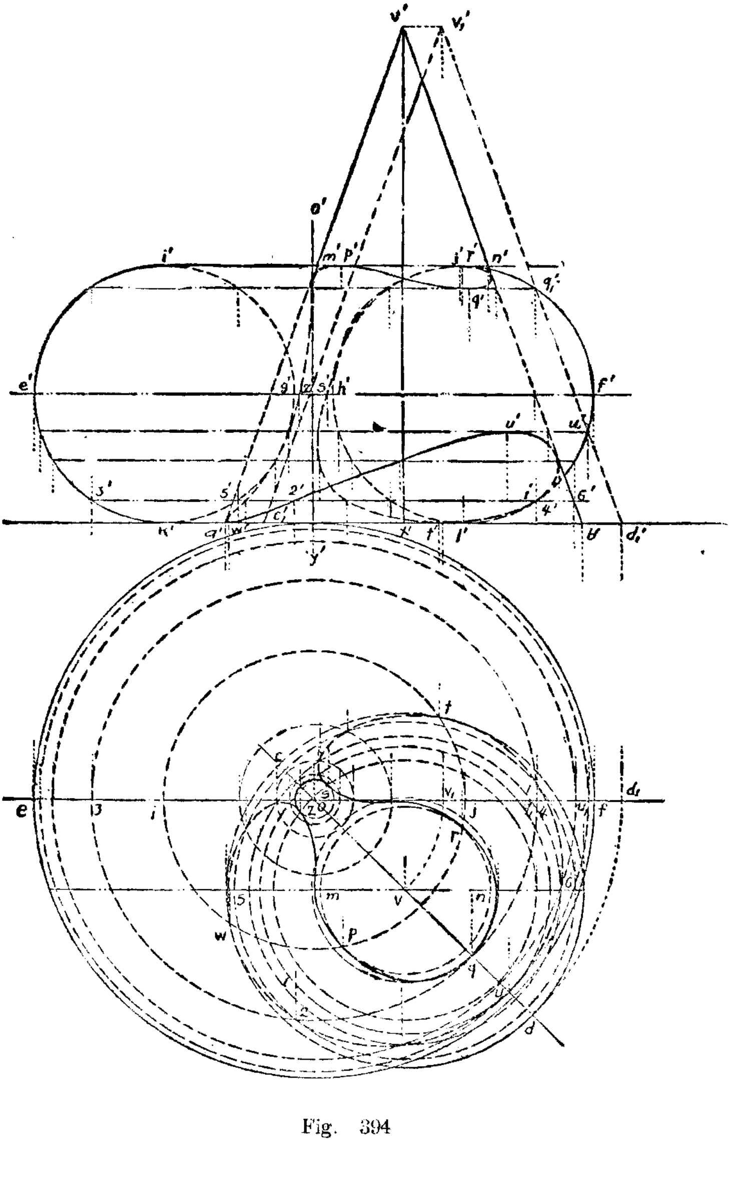


Fig. 394

q_1, q_1', u_1, u_1'。然後將已迴轉之切口復歸原來之位置，即可得投影 q, q', u, u'。圖中之交切線，因其爲一閉曲線，故點 q, q', u, u'，不爲最高點與最低點。若其交切線爲二閉曲線時，則點 q, q', u, u' 爲最高點及最低點。其他交切線上之點，若以水平面切之，求法亦易，故作圖從略。

9. 球與圓錐之交切

作圖題13. 求其底位於水平投影面上之圓錐與球之交切線。

解： 二立體，以水平面或含圓錐之頂點之直立面切之，即易求其交切線上之點。

作圖 1: 如 Fig. 395，乃示直立圓錐及球，而求其交切線之圖也。求交切線之最高點 (a, a')，(e, e')及最低點 (c, c')，(g, g')時，以含圓錐之軸，與球之中心之平面切之，即可求得。然後復以最高點與最低

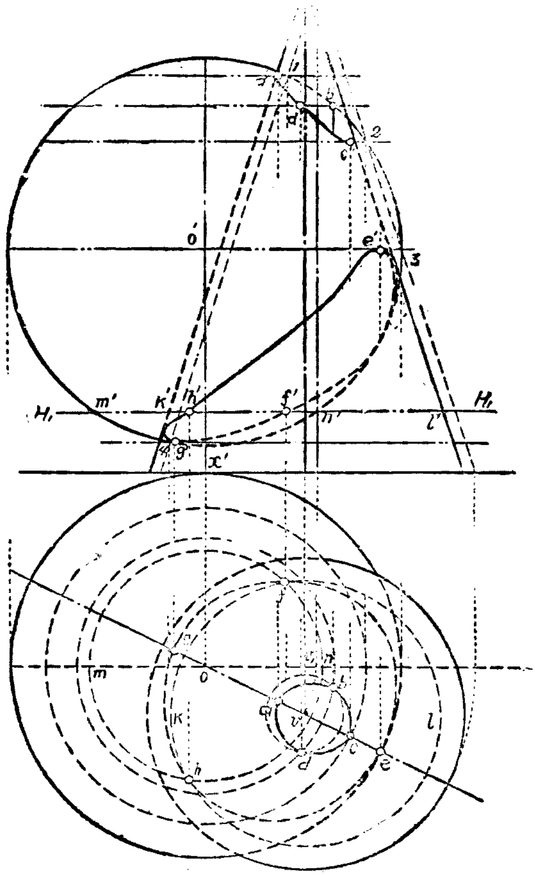


Fig. 395

點間之水平面切之，即得交切線上之點。

作圖 2: 如 Fig. 396，乃示斜圓錐及球，而求其交切線之圖也。其求法，用含圓錐之頂點之直立面切之，將其切口倒於水平投影面。又將其迴轉至平行於直立投影面之位置，而求其切口之交點可也。

10. 二迴轉面之交切

作圖題14. 求其軸相交之二迴轉面之交切線。

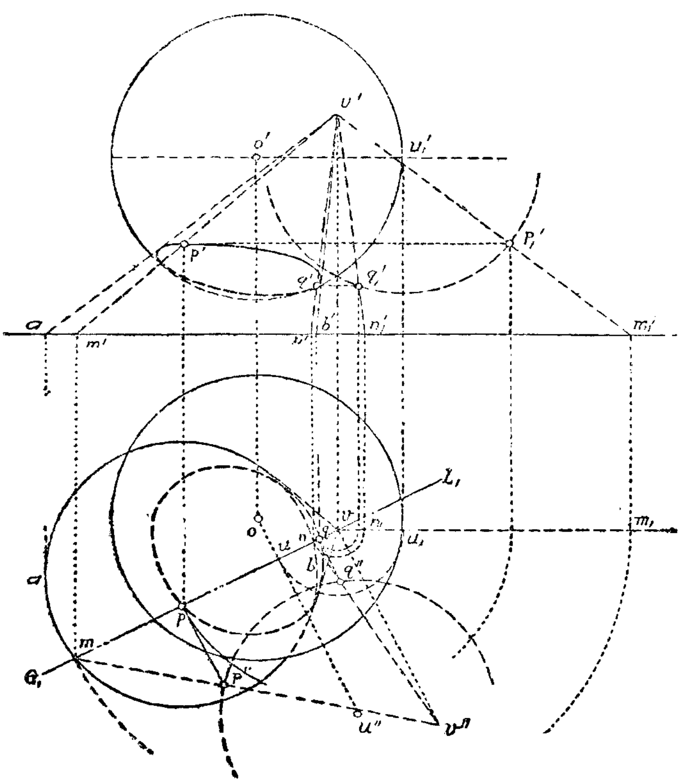


Fig. 396

解：　二迴轉面，以其軸之交點爲中心之球面切之，其切口爲垂直於其軸之圓。依此，而求其交切線上之點。

作圖：　如 Fig. 397，乃示其軸平行於直立投影面之圓錐面，及圓弧面轉面，而求其相交之圖也。其求法，先以其軸之交點之立面圖 o′ 爲中心作任意之圓，使其與二迴轉面之立面圖所交之點相結，而成二直線 1′ 2′, 3′ 4′。此時 1′ 2′, 3′ 4′ 爲球面切二迴轉面之切口之立面圖，故其交點 p′ 爲所求之交切線上之點之立面圖。次以 1′ 2′ 爲立面圖之切口之平面圖，因其爲圓 1 2，故由 p′ 所引之投射線與圓 1 2 相交之點 p，即爲所求之平面圖。同法，後求交切線上之各點，將其連結而成曲線，是

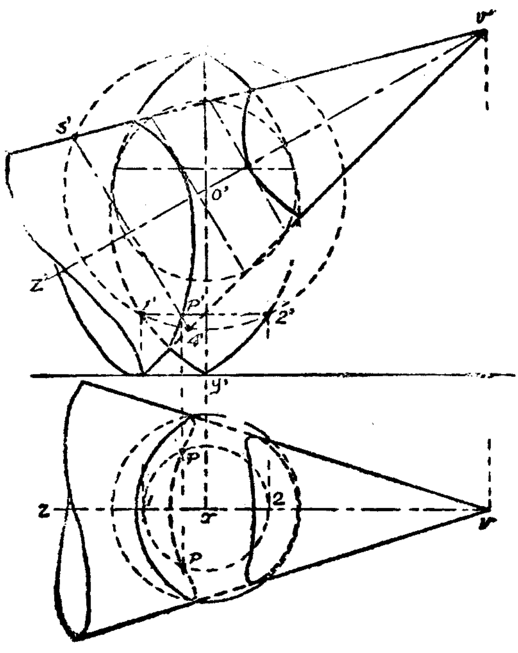


Fig. 397

爲所求之交切線。

11. 斜圓柱與迴轉面之交切

作圖題15. 求其底位於水平投影面上之斜圓柱，與其軸直立之迴轉面之交切線。

解： 今以其軸與已知迴轉面之軸相交，且與已知圓柱之軸平行，其水平跡爲圓之柱面切已知之二曲面。此時，已知迴轉面之切口爲水平圓，已知柱面之切口爲直線。依此，而求其切口之投影及其交點不難也。

作圖： 如Fig. 398，乃示已知之迴轉面，以任意之水平面切之，其切口爲圓 m n, m′ n′。過此圓之中心，引平行線 xo_1, $o' \, o_1'$ 平行於已知柱面之軸。此時以 xo_1, $o' \, o_1'$ 爲軸，含圓 m n, m′ n′ 之柱面之水平跡爲圓 m n 與同半徑之圓 $m_1 \, n_1$。依此，圓 $m_1 \, n_1$ 與已知圓柱之底之平面圖相交於點 1, 2，由 1, 2 引平行線平行於 xo_1，使其與圓 m n 相交之點爲 p, q。此時 p, q 卽爲所求交切線上各點之平面圖。由此，引投射線使其與 m′ n′ 相交之點 p′, q′，爲其各立面圖。同法，後求得交切線上之各點作成曲線，是卽所求之交切線。

12. 圓錐與迴轉面之交切

作圖題16. 求其底位於水平投影面上之斜圓錐與其軸直立之迴轉面之交切線。

解： 已知二曲面，以其頂點與已知圓錐共通，其軸與已知迴轉面之軸相交，其水平跡爲圓之錐面切之，其錐面之切口爲直線，迴轉面之切口爲水平圓。依此，而其切口之投影及其交點，自不難求得也。

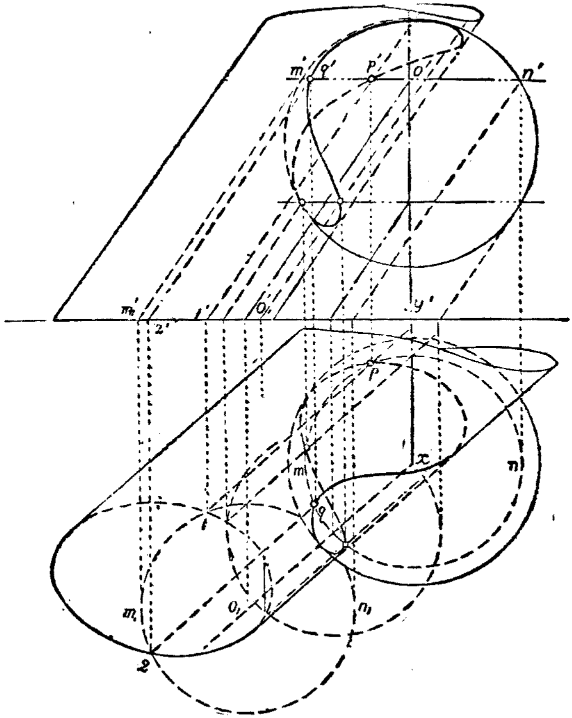


Fig. 398

作圖：　如 Fig. 399 所示，爲已知之迴轉面，以任意之水平面切之，其切口爲 m n, m′ n′。此時，含圓 m n, m′ n′，且以已知錐面之頂點 v, v′ 爲頂點之錐面之水平跡爲圓，且其軸與迴轉面之軸相交。由是再求其錐面之水平跡之圓 sl, 使其與已知圓錐之底之平面圖相交於點 1, 2。後引直線 v 1, v 2, 而求其與圓 m n 之交點 a, b。是時 a, b, 卽所求之交切線上二點之平面圖也。玆平面圖既得，則其立面圖 a′, b′，可由此求之。同法，求得交切線上之點，將其連結作成曲線，卽爲所求之交切線。

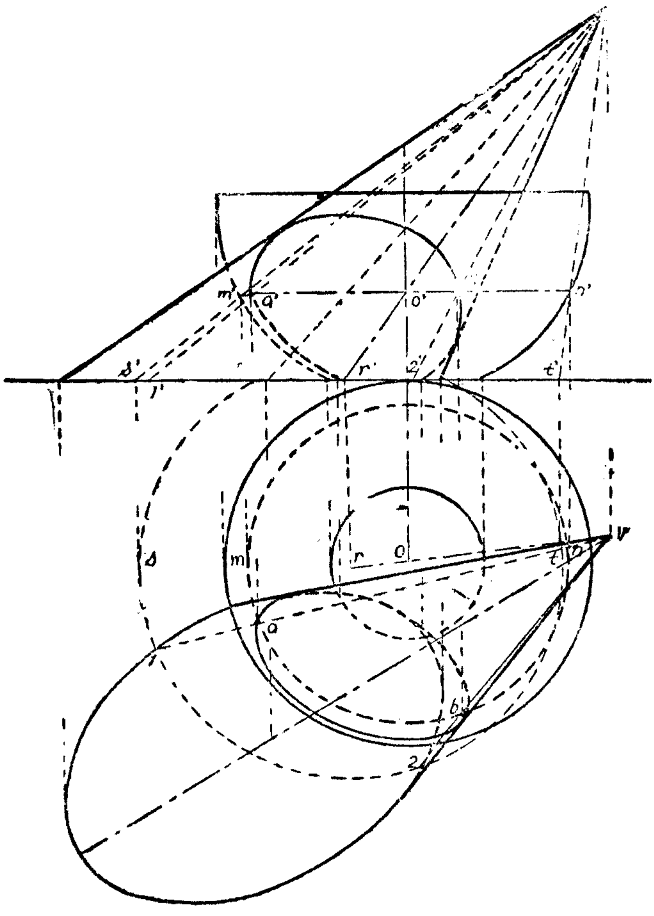


Fig. 399

13. 二橢球之交切

作圖題17. 求其軸平行於直立投影面之二橢球之交切線。

解: 二橢球之切口，以平面切之，使其成相似之橢圓。次作含各切

口，其軸平行於直立投影面，其水平跡爲圓之柱面。此時二柱面之相交跡，爲平行於直立投影面之二直線。此二直線與切斷平面之交點，即爲所求之交切線上之點。

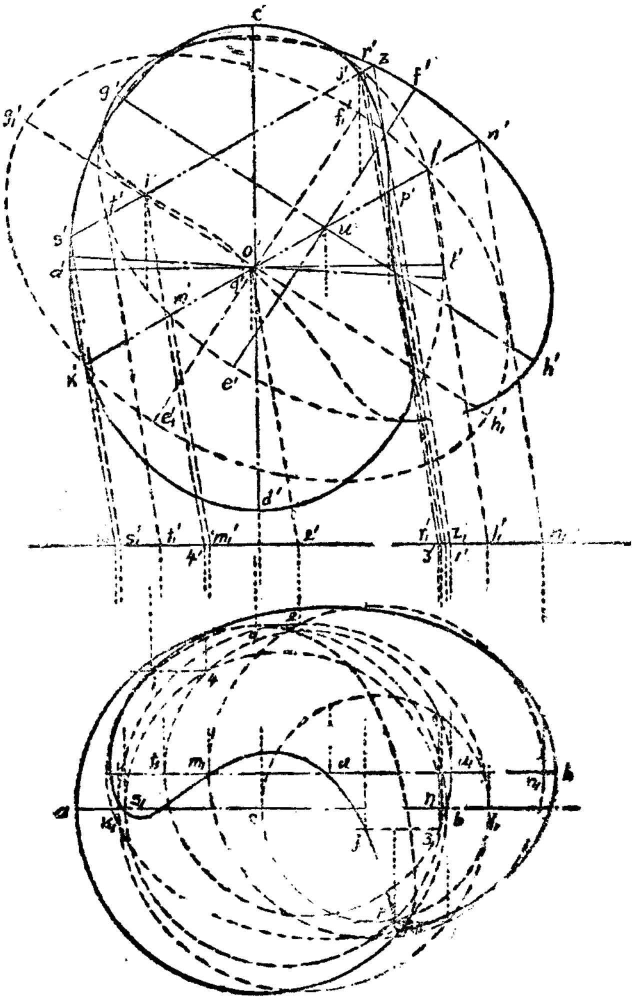


Fig. 400

作圖： 如 Fig. 400 所示，圖中 CD, GH, 爲已知二橢球之軸，O, U 爲二橢球之中心。今先以 O 爲中心，其軸平行於 G H 使其包絡內切於 O 爲中心之橢球之最大球，且與 U 爲中心之橢球相似而作橢球之立面圖 e_1', g_1' f_1' h_1'。是卽 e_1' f_1',＝a' b', g_1' h_1' // g' h', e_1' f_1' // e' f', g_1' h_1': e_1' f_1'＝g' h':e' f'。而作之橢圓 e_1' g_1' f_1' h_1' 也。此時 O 爲中心之二橢球之相交跡爲二橢圓，其立面圖爲直線。圖中直線 l' k' 爲其一立面圖。故以 l' k' 爲直立跡而垂直於直立投影面之平面及平行於此平面之平面，切已知之二橢球，其切口均爲相似之橢圓。是等橢圓之長軸與短軸之比，等於 l' k': a' b'。而含其切口之橢圓，其軸平行於直立投影面，其水平跡爲圓之柱面其軸之立面圖，應平行於 a' k'。是故易求其含切口之水平跡爲圓之柱面之投影也。然此柱面之交跡，因其均爲直線，故如圖所示，可易求其交切線上之諸點 (p, p')，(q, q') (i, i')，(j, j') 等。

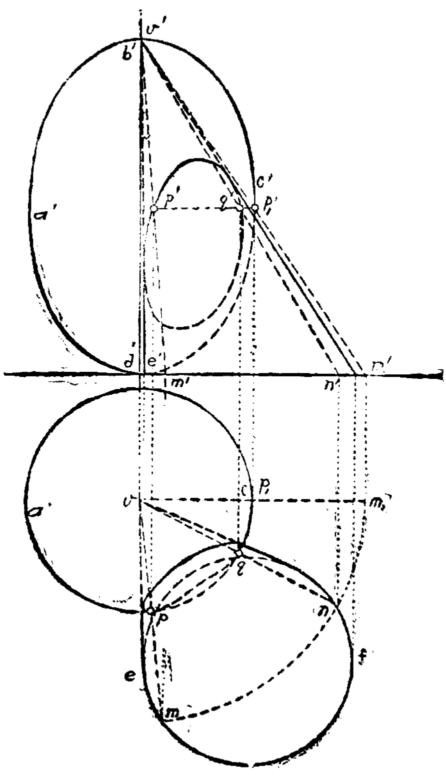


Fig. 401

14 雜題

如 Fig. 401，乃示其軸垂直於水平投影面之橢球及其軸

上有頂點之圓錐，而求其交切線之圖也。圖中，用含橢球之軸之平面切之，將其切口迴轉於其軸之周，使其平行於直立投影面，而於其位置求其切口之交點。後將其切口復歸原有之位置，而作交切線之投影。

如 Fig. 402，乃示其底位於水平投影面上之正四角錐與球，而求其交切線之圖也。其作法如圖，以水平面切之，即易求其交切線上之點。

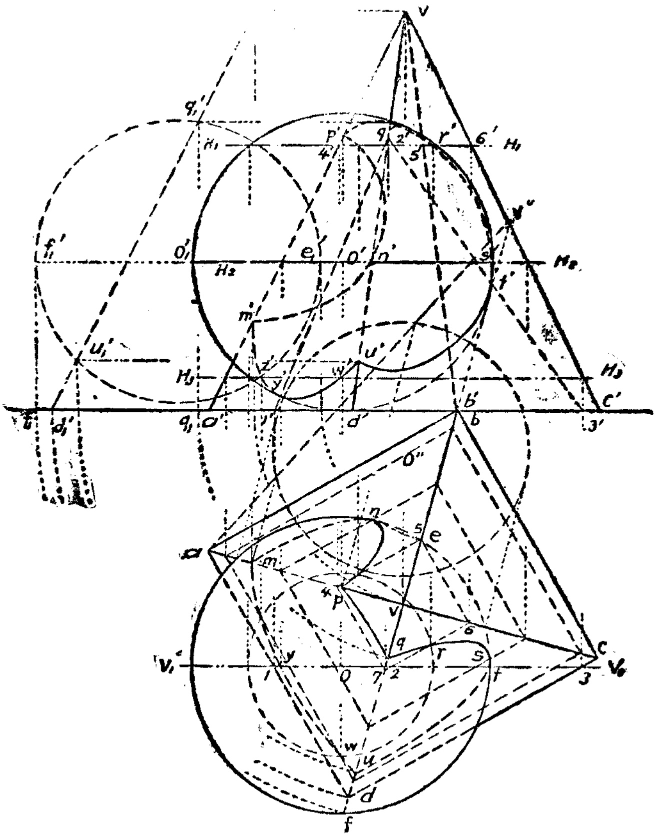


Fig. 402

如 Fig. 403，乃示直立三角柱及球，而求其交切線之圖也。

練 習 題

1. Fig. 404，爲水平之正方柱與直立於水平面上之正六角柱之平面圖，試求其二立體之交切線之立面圖。

2. Fig. 405爲高 8 糎，底在水平面上之斜角錐，及直立之正方柱之平面圖。試求其二立體之交切線之立面圖。

3. Fig. 406 中，正六角形，a b c d e f，正三角形 g h i，爲水平投影面上二斜角柱之底之平面圖，而(am, a′ m′)，(gn, g′ n′)爲其各之一側稜，試求此二角柱之交切線之投影。作圖時，可將原圖擴大三倍。

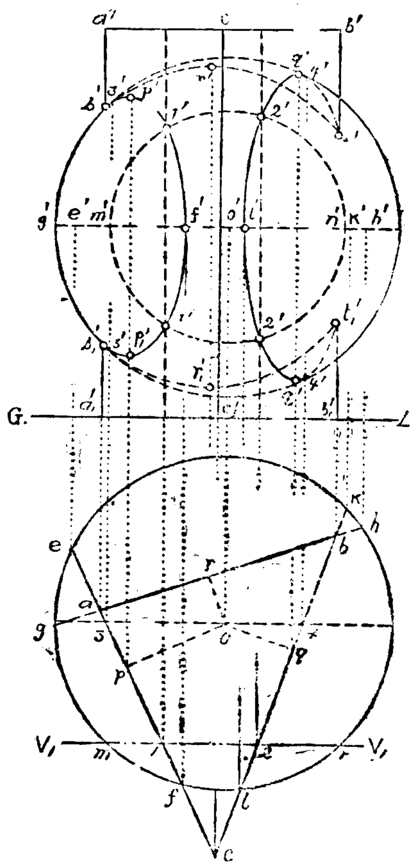


Fig. 403

4. Fig. 407 中，正六角形，a b c d e f，正方形 g h i j 爲水平投影面上之角柱之底及角錐之底之平面圖。而 a m, a′ m′ 爲角柱之一側稜，v 爲角錐頂點之平面圖。今 ab＝2.5 糎，gh＝3.5 糎，頂點之高

爲 9 糎時，試求二立體之交切線之投影。

5. Fig. 408，爲直立直圓柱及直立四角柱之平面圖，試作二立體之交切線之投影。

6. Fig. 409，爲橫置於水平投影面上之直圓柱及高 7 糎其底位於水平投影面上之直圓錐之平面圖。試作此二立體之交切線之投影。

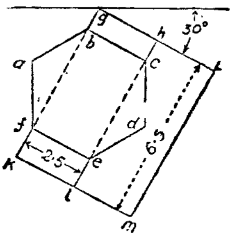


Fig. 404

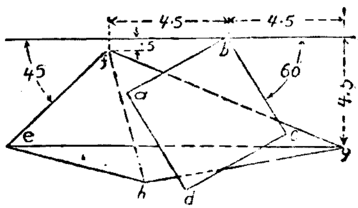


Fig. 405

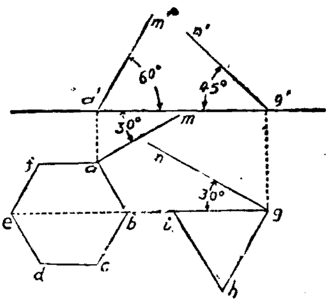


Fig. 406

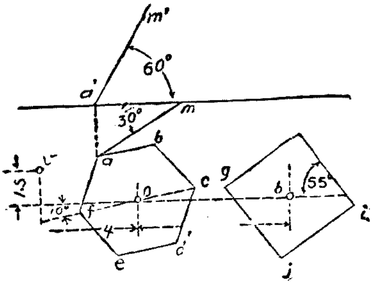


Fig. 407

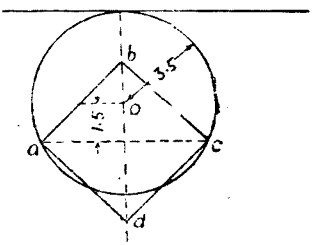


Fig. 408

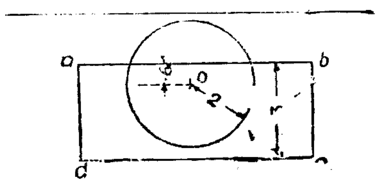


Fig. 409

7. Fig. 410 中，k l m n 爲四面體之平面圖，其角點 L, K, M, N, 距水平投影面之高爲 0 糎，5 糎，7 糎，10 糎。又圓 O，乃於四面體直立之方向，所穿之穴之平面圖。試求四面體之立面圖。

8. Fig. 411，爲圓柱及四角錐。試求其交切線。

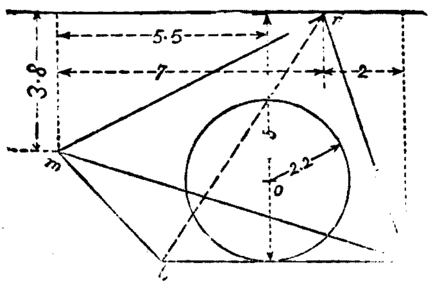


Fig. 410

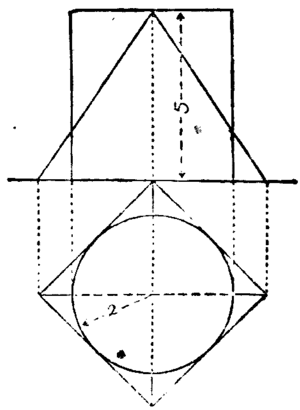


Fig 411

9 Fig. 412，爲直立圓環及水平圓柱，試求其交切線。

10. Fig. 413 所示，爲長橢球及以 X X 爲軸，其直徑爲 4 糎之圓柱。試求其交切線。

11. 試求 Fig. 414 所示之二球之交切線。

12. Fig. 415，乃示 X Y 及 A B 爲長軸，6 糎及 4 糎爲短軸之二長橢球。試求其交切線。

13. 試求 Fig. 416 所示之二直圓錐之交切線。

14. 有扼圓與底圓之直徑爲 4 糎，7 糎，其[illegible]底圓間之距離爲 12 糎之單雙曲線迴轉體及直徑 3 糎之圓柱。此二立體之軸，於單[illegible]曲線迴

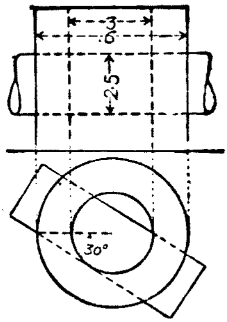


Fig. 412

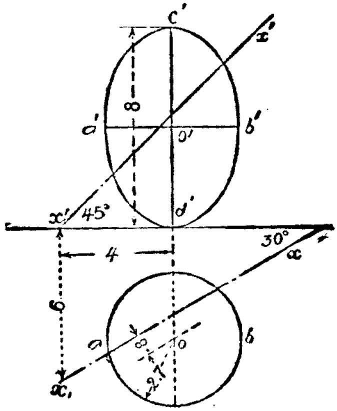


Fig. 413

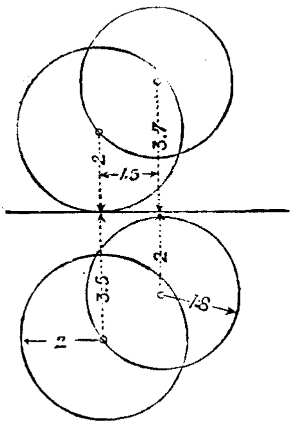


Fig. 414

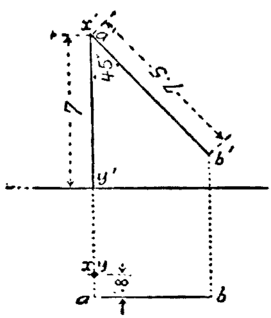


Fig. 415

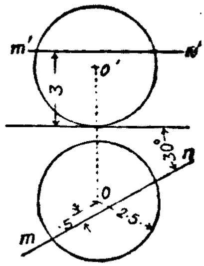


Fig. 416

轉體之中心以 75° 相交時，試求兩者之交切線。

15. 有最大直徑爲 8 糎，最小直徑爲 2 糎之圓環，其軸直立於水平投影面時，試求其頂角 30° 之直立圓錐之交切線。然圓錐頂點，與含圓環之最大圓之平面間之距離爲 4 糎，其兩軸之長之間隔爲 1 糎。

16. 有長軸及短軸之長爲 8 糎及 5 糎之扁橢球，其迴轉軸上距中心 2 糎之距離處有頂點之拋物線迴轉體。今拋物線迴轉面之焦點與頂點間之距離爲 1 糎，兩軸間之角爲 30° 時，試求兩者之交切線。

17. 有與水平投影面成 45°，與直立投影面成 50° 之平面 P，今使其與平面 P 外之任意一點 A 成 60°，試引與水平投影面成 50° 之直線。

18. 有頂角 50°，40° 之二直圓錐，包絡直徑 3 糎之球時，試求其交切線。其一爲二橢圓，一爲一橢圓與拋物線，一爲一橢圓與雙曲線之三種投影。

19. 有軸與水平投影面成 50°，與直立投影面成 30°，其水平跡爲直徑 4 糎之圓之柱體。另有軸與水平投影面成 40°，與直立投影面成 35°，其水平跡爲直徑 5 糎之圓之柱體。試作兩者之交切線，爲相交一閉曲線之投影。

20. 軸之長各爲 10 糎，高爲 9 糎，6 糎，底之直徑各爲 4 糎之二斜錐體。今將其底置於水平投影面上。試求其交切線，爲二閉曲線之投影。

第十一章　陰影

1. 定義

如 Fig. 417 所示，圖中 S 爲發光點(Source of light)，立體 O 爲不透明之立體。今以 S 爲頂點，而作包絡立體 O 之錐面，使其與立體 O 之接觸線爲線 A B C。此時立體 O 之表面，以線 A B C 爲界限，其在發光點 S 之反對側之部分，因不受由 S 所射來之直接之光，故成黑暗。此黑暗之部分，謂之陰面(Shade)。反之，又以 A B C 爲界限，其向發光點 S 之部分，謂之光面(Illuminated face)。次設任意之一平面 P，使其與上述之錐面相交於線 A_1 B_1 C_1，此線界限內之部分，因不能直接受 S 投射之光，而成黑暗。此黑暗之部分，稱爲立體 O 於平面 P 上之影(Shadow)。是故一立體之影，由其立體陰線之影而限定。此陰線之影，謂之影線(Line of shadow)。是卽曲線 A_1 B_1 C_1 爲立體 O 之影線。

由發光點所發出之直線，謂之光線(Ray of light)。以發光點爲頂

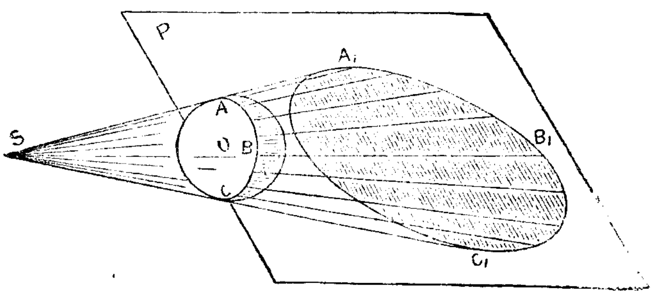


Fig. 417

點包絡一物體之錐面，謂之光線錐(Cone of ray)。發光點，距物體爲無限遠距離時，其極限之光線錐成爲柱面，故稱此柱面，謂之光線柱(Cylinder of ray)。

發光體，距物體爲有限之距離時，其向物體所投射之光線爲不平行，故稱此光線，謂之輻射光線(Radiating ray)。又發光點距物體爲無限遠距離時，由其極限發光點所投送之光線爲平行之光線，故稱爲平行光線(Parallel ray)。太陽所送至地球表面上之光線，吾人若認其爲平行光線未爲不可。

其一　平行光線

2. 關於影之諸重要之定義

(Ⅰ)直線向一平面所投之影，通常爲直線，然平行於光線之直線之影爲一點。

(Ⅱ)平面形於平行於平面形之平面上，與原形有等形之影。

(Ⅲ)平行線向平面所投之影，亦爲平行。

(Ⅳ)相交線之影，於其交點之影處相交。

(Ⅴ)曲線向平面所投之影，一般爲曲線，然平面曲線，於垂直於含平面曲線之平面之平面上，而成直線。

(Ⅵ)相切二線之影，於其切點之影處相切。

3. 光線之方向

作圖題1. 光線之方向 r, r′ 爲已知，求已知之點向投影面所投之影。

解：　由已知之點，引平行線平行於已知之光線，而求其與投影面相交之點可也。

作圖：　如 Fig. 418 所示，由已知之點 a, a′，平行於光線 r, r′，引 $a\,a_2$, $a'\,a_2'$。其直立跡 a_2'，即爲所求之影。此時其水平跡位於直立投影面之後方，故其水平跡不能成影。又過點 b, b′ 之光線之水平跡 b_1 爲其所求之影。此時光線之直立跡，位於水平投影面之下，故其直立跡不能成影。

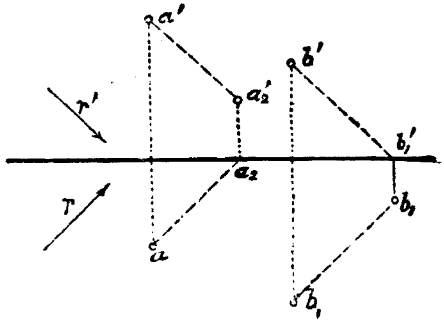


Fig. 418

作圖題 2.　光線之方向 r, r′ 爲已知，求已知之直線向其投影面所投之影。

解：　直線向平面所投之影爲直線，故過其兩端二點之光線之跡，連結所成之直線，即爲所求之影。

作圖：　如 Fig. 419 所示，過直線 a b, a′ b′ 之兩端二點之光線，其水平跡 a_1, b_1 均在直立投影面之前方，故其影落於水平投影面上。其

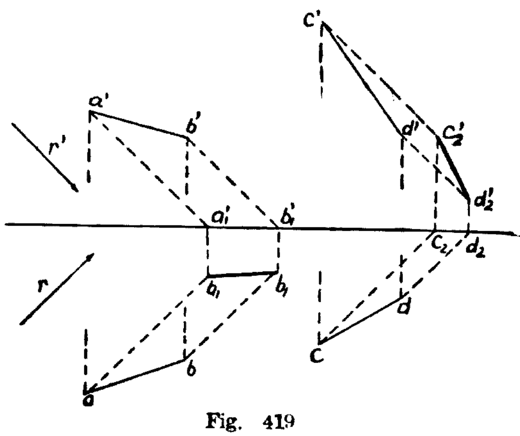


Fig. 419

直線 $a_1 b_1$，即爲所求之影。又過直線 $c d$, $c' d'$ 之兩端之光線，其直立跡 c_2', d_2'，在水平投影面之上方，故其影落於直立投影面上。其直線 $c_2' d_2'$ 亦爲所求之影。

作圖題3. 光線之方向 r, r' 爲已知，求已知之三角形向其投影面所投之影。

解: 求三角形之三邊向投影面所投之影可也。

作圖: 如 Fig. 420 所示，四邊形 $a_1 m_1 n_1 c_1$ 爲水平投影面上之影，而三角形 $m_1 b_2' n_1$ 爲直立投影面上之影。

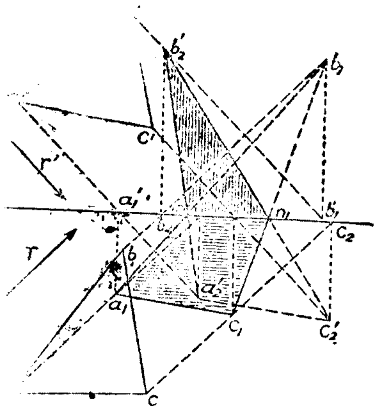


Fig. 420

作圖題4. 已知光線之方向 r, r'，求直線 MN 向四邊形 ABCD 上所投之投影。

解: 先將兩者向一投影面投影。次由其投影之交點引平行於光線之平行線，而求其與四邊形之交點可也。

作圖: 如 Fig. 421 所示，四邊形 $a_1 b_1 c_1 d_1$，爲過已知四邊形 $a b c d$, $a' b' c' d'$ 之角點之光線，將其水平跡，連結而成之四邊形也。直線 $m_1 n_1$ 爲過直線 $m n$, $m' n'$ 之兩端之光線，將其水平跡連結而成之直線也。是故由 $a_1 b_1 c_1 d_1$ 與 $m_1 n_1$ 之交點 p_1, q_1 向光線之平面圖 r 引平行之直線，使其與四邊形 $a b c d$ 之交點爲 p_2, q_2，則直線 $p_2 q_2$，即爲所求之影之平面圖。其平面圖既得，後由是再求其立面圖 p_2', q_2' 可也。

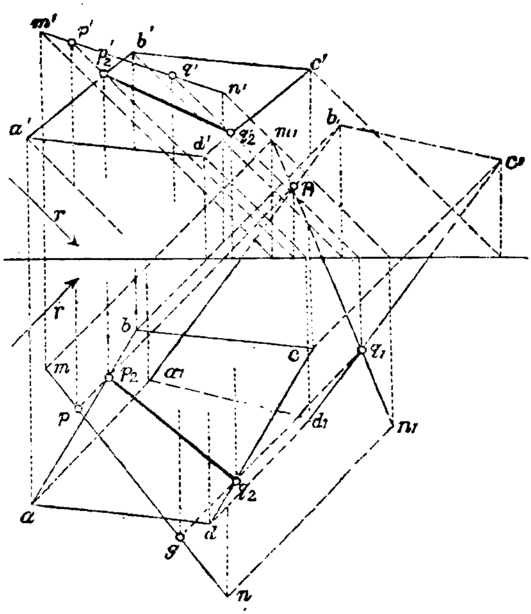


Fig. 421

作圖題 5. 已知光線之方向 r, r′ 求已知之直線 M N 向平面 T 所投之投影。

解： 求過直線兩端之光線與平面 T 之交跡，將其連結而作成直線可也。

作圖： 如 Fig. 422 所示，點 n_2, n_2'，乃過已知直線一端 n, n′ 之光線與平面 t T t′ 之交點。其過他端 m, m′ 之光線，當與平面 t T t′ 相交之前，與水平投影面相

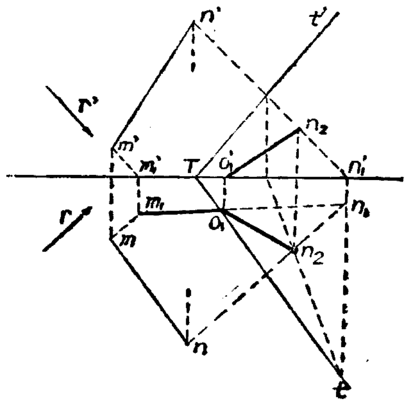


Fig. 422

交。故將過 m n, m′ n′ 兩端之光線之水平跡 m_1, n_1 相結，使其與平面 t T t′ 之水平跡 t T 之交點爲 o_1，而求其立面圖 o_1'。此時直線 o_1 n_2, o_1' n_2'，是爲所求之影之投影。

作圖題 6. 已知光線之方向 r, r,′ 求直立於水平投影面上之直四角柱之陰影

解: 角柱向投影面所投之影爲各稜之影所圍成之多角形。又陰面可由投影面上之影線求之可也。

作圖: 如 Fig. 423 所示，圖中角點 c, c′ 之影引至水平投影面上時爲 c_1。此時，c c_1 爲稜 c g, c′ g′ 之影。次過角點 b, b′ 之光線之水平跡 b_1 因其位於直立投影面之後方，故其直立跡 b_2'，爲點 b, b′ 之影。

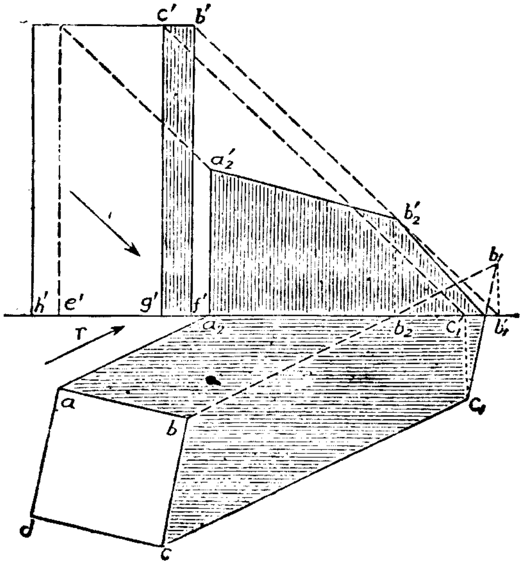


Fig. 423

因之直線 c_1 b_1，其在基線前方之部分，爲水平投影面上之稜 b c, b′ c′ 之影。次使其與基線相交之點與 b_2' 相結，則所成之直線，爲直立面上之影。再角點 a, a′ 之影，落於直立投影面上，設其影爲 a_2'，則直線 a_2' b_2'，爲稜 a b, a′ b′ 之影。最後由 a 於光線之平面圖 r 所引之平行線 a a_2，爲水平投影面上其稜 a e, a′ e′ 之影。後將 a a_2 與基線相交之點 a_2 與 a_2' 相結，則所成之直線，爲直立投影面上之影。是故，上述各稜之影，其所圍成之圖形，即爲投影面上之影線。由此可知，面 E F G H, C B F G, A B F E, 均爲陰面。

作圖題 7.　已知光線之方向爲 r, r′, 求角錐之底在水平投影面上之陰影。

解：　因其底位於水平投影面上，故通過頂點之光線之水平跡，與其底之角點相結之直線，爲斜稜在水平投影面上之影。由是求其陰影，頗形簡單。

作圖：　如 Fig. 424 所示，圖中過頂點 v v′ 之光線，其水平跡 v_1 與 a, d 連結而成二直線，其二直線所圍成之部分，爲水平投影面上之陰影。然 v_1 因其位於直立投影面之後方，故其頂點之影，在直立投影面上 v_2' 處。而 v_1 d, v_1 a 與基線之交點爲 e_1, f_1, 故三角形 e_1 v_2' f_1 爲直立投影面上之影。因知三角形 e_1 v_1 f_1 不爲水平投影面上之影，綜合上述之影，可知三斜面 V A B, V B C, V C D, 均爲陰面。

作圖題 8　已知光線之方向爲 r, r,′ 求傾斜於兩投影面之角柱之陰影。

解：　角柱各稜之影，包圍所成之圖形，爲角柱之影。後由角柱之

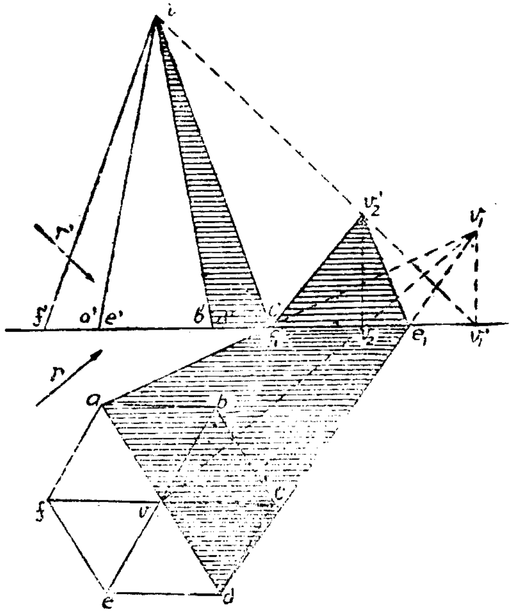


Fig. 424

影，卽可決定其陰面。又求陰面時，可以平行於光線之平面切之，由其切口與光線之方向而決定。

作圖：　如 Fig. 425 所示，多角形 m_1 d_1 j_1 k_1 n_1，爲水平投影面上之影，m_1 c_2' b_2' a_2' g_2' l_2' n_1，爲直立投影面上之影。由此陰影，可知底面 G H I K, 側面 A B H G, B C I H, C D J I, 均爲陰面。

又求側面之陰面時，以平行於光線之直立面 V_1 切之，而求其立面圖 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′。後由此六角形與光線之立面圖之方向，藉知 3′ 4′ 5′ 6′ 之部分爲不受光線之部分。故 A B H G, B C I H, C D J I, 均爲陰面。同法，將其底以平行於光線之直立面切之，依其切口之立面圖，與光

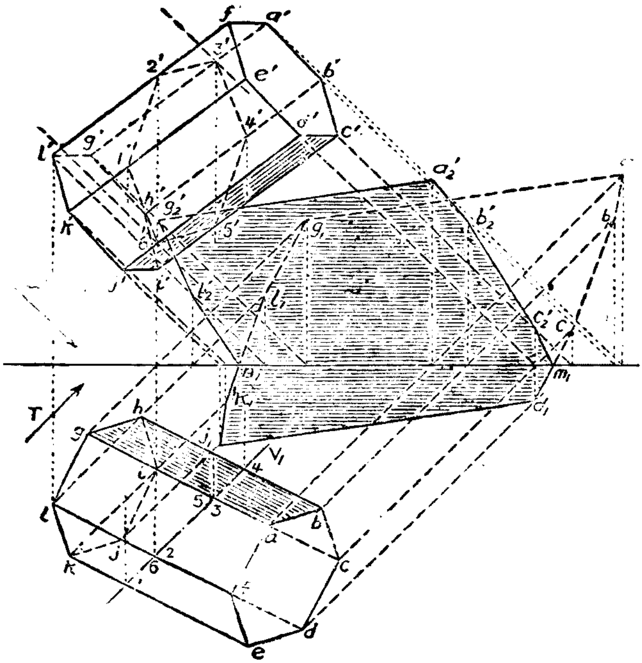


Fig. 425

線之立面圖 r′ 所成之傾斜角之大小，而決定其光面與陰面。其作圖法，本圖中茲略不贅。

作圖題 9. 直立於水平投影面上之正六角柱及一稜位於水平投影面上之正四角柱爲已知，求其兩者之陰影。

解：先求水平投影面及直立投影面上之陰影，然後決定其陰面。又由投影面上之影之交點，而決定其直立六角柱向四角柱所投之影。

作圖：如 Fig. 426 所示，乃求各立體之陰面，及投影面上之影。其法與本章作圖題 6 及作圖題 8 相似。茲將其說明從略。次直立角柱之角

點 D，於水平投影面上所成之影 d_1，因其在四角柱之水平投影面上之影之內，故知 D 之影在四角柱之上。依此，由 d_1 引平行於 gk 之 $d_1 s_1$，使其與四角柱之影線 $g\,j_1\,g_1$ 相交於 S_1，復由 S_1 引平行線平行於光線之平面圖，而與 g j 之交點為 S。此時由 S 引平行於 g k 之 $s\,d_3$，使其

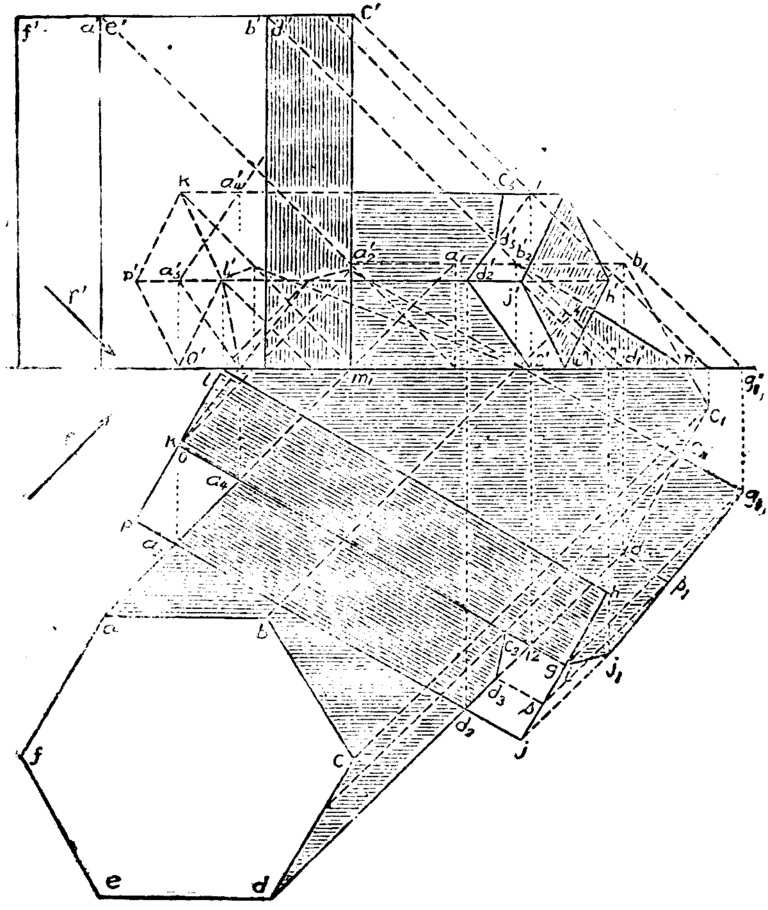


Fig. 426

與 $d\,d_1$ 之交點爲 d_3，則 d_3 爲 D 向四角柱所投之影之平面圖也。由是再求其立面圖 d_3'。又 $d\,d_1$ 與 $o\,i$, $p\,j$ 相交於點 $2\,d_2$ 時，則直線 $2d_2\,d_3$ 乃以 d 爲平面圖之稜，向四角柱所投影之平面圖。由是可藉此而求其立面圖 $2'\,d_2'\,d_3'$。又於水平投影面上之稜 C D, G K，其影之交點爲 c_4。由 c_4 引平行線平行於光線之平面圖，其平行線與 g k 之交點爲 c_3。此時直線 $d_2\,c_3$ 乃稜 C D 向四角柱所投之影之平面圖。後由其平面圖，再求其立面圖 $d_3'\,c_3'$ 可也。次角點 A 於投影面上之影，因其出於四角柱之影外，故稜 A B 之投影，不在四角柱上。依此，過 A 之光線之水平跡 a_1 與 a 相結，而與 gk, pj, oi 相交之點爲 a_4, a_3, a_4，則直線 $a_4\,a_3\,a_4$，過 A 之側稜，向四角柱所投之影之平面圖也。後藉此，可求其立面圖。

求 D 向四角柱所投之影 d_3, d_3' 時，可用含過 D 之光線之直立面切四角柱，而求其切口與過 D 之光線之交點可也。

作圖題10. 光線之方向爲已知，求圓向投影面所投之影。

解： 設圓與一投影面平行，則其向投影面所投之影，與原形爲同形之圓。故以過圓之中心之光線之跡爲中心，可引與此圓同半徑之圓。若此圓不平行於投影面時，則其影一般爲橢圓。因之若欲求圓爲互相直交之二直徑之影，可以此而作共軛直徑之橢圓卽得。

作圖： 如 Fig. 427，乃示平行於直立投影面圓 O 之影之圖也。其求法，先以過圓之中心之光線之直立跡爲中心作與圓 O 同半徑之圓，其基線上方之部分，於直立投影面上而成陰影。又於水平投影面上直角相交之二直徑 A B, C D 所成之影 $a_1\,b_1$, $c_1\,d_1$，爲共軛直徑之橢圓。其基線下方之部分，於水平投影面上而成陰影。

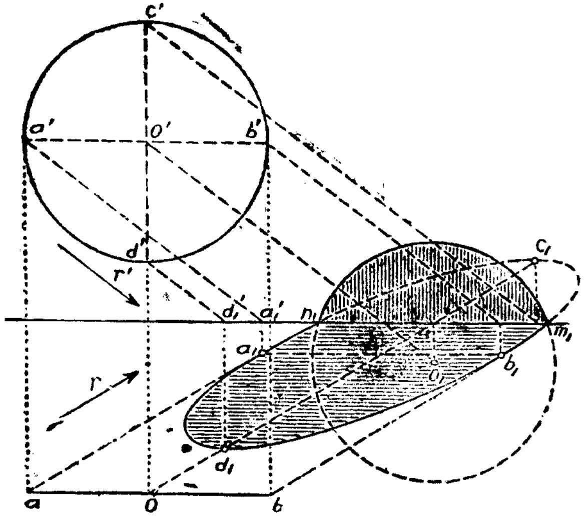


Fig. 427

作圖題11. 光線之方向爲已知，求其底垂直於水平投影面之直圓錐之陰影。

解： 其底向投影面所投之影，及由頂點之影向此所引之二切線，其所圍成之圖形卽爲所求之影。後由此影而決定其陰面可也。或先求平行於光線之切平面，由其接觸線而決定其陰面亦可。

作圖： 如 Fig. 428 所示，圖中圓錐之底之相垂直之二直徑 A B, C D, 向水平投影面所投之影爲 a_1 b_1, c_1 d_1。次以此爲共軛直徑而作橢圓，更過頂點 v 之光線之水平跡 v_1，向橢圓引切線 v_1 m_1, v_1 n_1, 其各切點爲 m_1, n_1。此時 v_1，因在直立投影面之後方，故此圓錐亦向直立投影面投射陰影。由是使 v_1 m_1, v_1 n_1 與基線相交之點爲 f_1, e_1 將其與過頂點 v 之光線之直立跡 v_2' 相結，而作 v_2 f_1, v_2' e_1。此時 c_1 c_1 b_1 d_1

$m_1 f_1$ 爲水平投影面上之陰影，$e_1 v_2' f_1$ 爲直立投影面上之陰影。次以 $v_1 m_1$, $v_1 n_1$ 爲水平投影面上之影，而求其面素(vm, v' m'),(vn, v' n')，則得錐面之陰線。

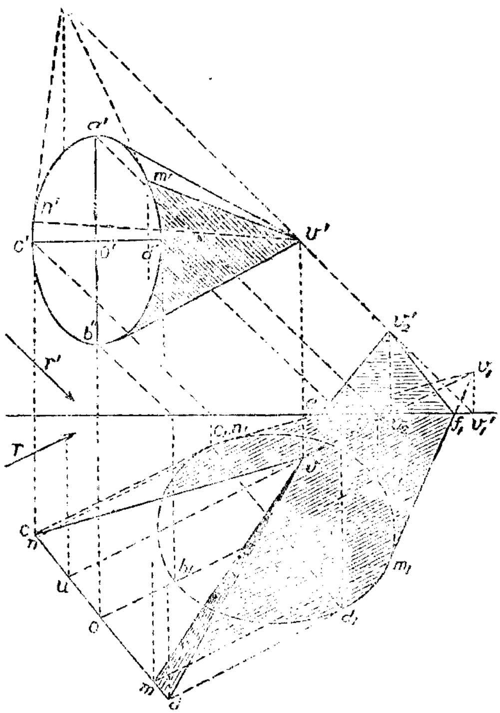


Fig. 428

通過頂點 V 之光線及含底之平面，而求其相交點 u, u' 時，可由 u 向其立面圖引切線 u' m , u' n'，而得其切點 m', n'。此時，v' m', v' n' 是爲所求之陰線之立面圖。於是由其立面圖，而求其平面圖 vm, vn 可也。

作圖題12. 光線之方向爲已知，複圓錐之底在水平投影面上時，求其曲面上之陰影。

解： 圓錐用含圓錐之軸及光線之平面切之，其切口恆爲二直線。此時切口與水平投影面所成之角，若小於光線與水平投面所成之角時，則上之錐面之全部皆爲陰影，而上之錐底必向下之錐面投射陰影。求上之錐底向下之錐面投射陰影之法，可於其底圓之上取多數之點，通過其各點引光線，而求其與下之錐面之交點。此時將諸交點連結而成曲線，卽爲所求之影。

作圖： 如 Fig. 429 所示，圖中錐面用含其軸與光線之平面切之，使其切口爲直線 vs, v′ s′。此時 v′ s′ 與基線所成之角，小於光線之立面圖與基線所成之角，故於下之錐面上而生陰影。過上底圓之中心 o, o′ 之光線，以其水平跡 o_1 爲中心，引與底圓同半徑之圓，使其與錐底之平面圖圓 a b 相交之點爲 c, d。此時圓弧 c a d, c′ a′ d′ 爲向下之錐面投射陰影之部分。依此，將下之錐面，用含過此圓弧上之任意一點 p, p′ 之光線，及頂點 v, v′ 之平面切之，而求其切口之投影 vm_1, $v' m_1'$。

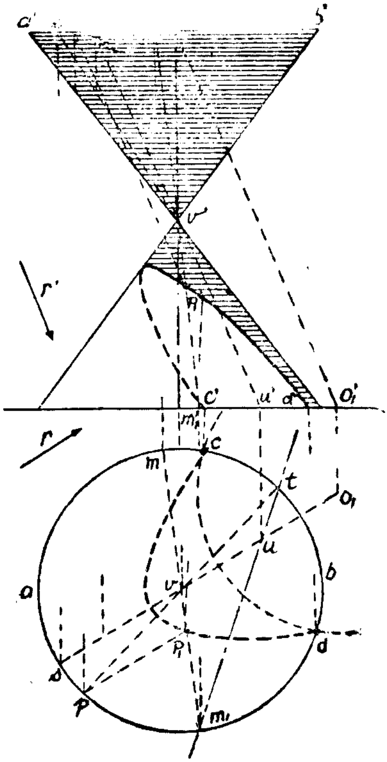


Fig. 429

此時切口與過 p, p′ 之光線所交之點 p_1, p_1'，乃爲 p, p′ 所投之影。同此，再求得其他點之影，將其連結作成曲線 $c\,p_1\,d$, $c'\,p_1'\,d'$，即得所求之影。

作圖題13. 光線之方向爲已知，求中空截頭圓錐之底位於水平投影面上時之陰影。

解： 其底不在水平投影面上之影與在水平投影面上之底引共通切線時，則於投影面上而得陰影。其陰面乃依投影面上之影而決定。次求通過不在水平投影面上之底圓上諸點之光線與錐面之交點，後將諸交點連結作成曲線，即得其錐面內面之影線

作圖： 如 Fig. 430 所示，通過不在水平投影面上之底圓 A B K 之中心之光線，以其水平跡 o_1 爲中心，引與底圓同半徑之圓 $a_1\,b_1\,k_1$。

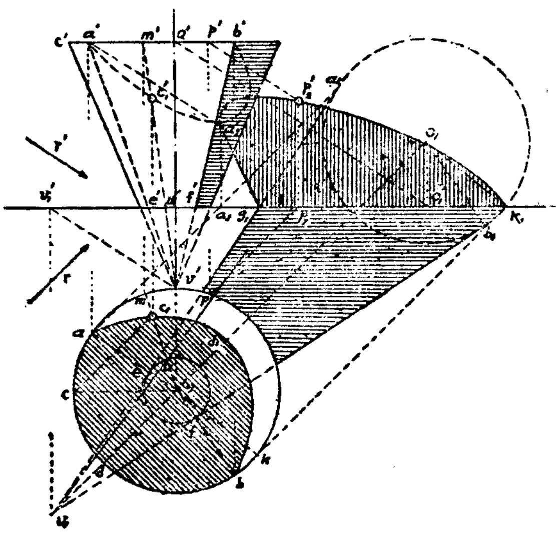


Fig. 430

次於此圓與在水平投影面上之底之平面圖圓 e f 引其通切線 a_1 e, b_1 f, 其各切點爲 a_1, e, b_1, f。此時由上述之切線與圓 a_1 b_1 k_1 所圍成之圖形，乃圓錐於水平投影面上所成之影。又求 e, f 之立面圖 e′, f′ 時，可引過此諸點之錐面之面素(ea, e′ a′)，(fb, f′ b′)。此卽爲錐面之外面之陰影。

圖中 e a_1 與基線相交於 g_1，圓 a_1 b_1 k_1 與基線相交於 k_1，故知此圓錐亦向直立投影面投影。依此可求以 k_1 爲水平投影面上之影之圓 A B K 上之點 k, k′。此時通過圓弧 A M K 上數點之光線，將其直立跡連結而成之曲線 a_2' p_2' k_1 與直線 g_1 a_2' 卽圓錐於直立投影面上所成之影線。

錐面內部之影線，乃圓弧 A D B 所投之影。依此作過錐面之頂點 V 之光線，而求其水平跡 v_1 次於圓弧 A D B 上，取任意一點 c, c′ 作平面與含過點 c, c′ 之面素之光線平行之平面之水平跡 v_1 u，而使其與圓 e f 相交之點爲 u。此時直線 v u，及由 c 引平行於光線之平面圖 r 之 c c_1，其所得之交點 c_1 爲點 c, c′ 所投之影之平面圖。後由此可求其立面圖 c_1'。同法，復求圓弧 A D B 上之點，向其錐面之內面投影，將其諸點連結作成曲線 a c_1 d_1 b, a′ c_1' d_1' b′，卽得所求之影線。

作圖題14. 圓形頂蓋之直立圓柱爲已知，而求其曲面上之陰影。

解: 過圓形頂蓋之下線上之數點引光線，而求其直立圓柱之交點。後將諸交點結而成曲線，卽爲所求之影線。

作圖: 如 Fig. 431，乃示其大要之圖也。其作圖法，頗形簡單，故其說明從略。

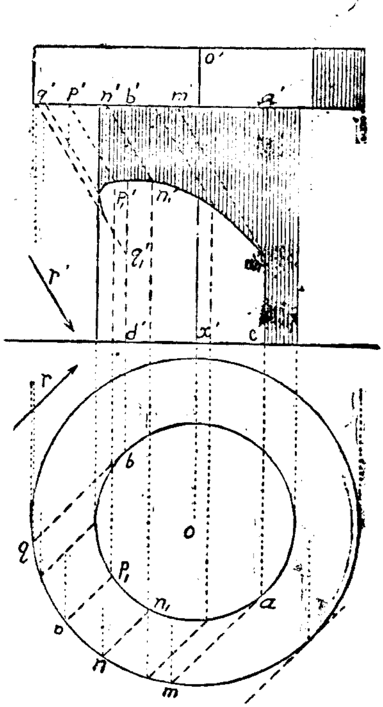


Fig. 431

作圖題 5. 已知其一圓柱之軸垂直於水平投影面，他圓柱之軸平行於基線之相交二圓柱，求其各曲面上之陰影。

解：求直立圓柱之陰面，可由直立圓柱之底向投影面所投之影及平行於光線之切平面之跡所圍成之圖形，而求其影。又求平行於光線之切平面之接觸線，即可決定其陰面。求平行於基線之圓柱之陰面時，若先求其側面圖，則其作圖較易。次求直立圓柱之上底圓向水平圓柱所投之影時，須以任意之水平面切水平圓柱，而求其切口與切斷平面上之上底圓之影之相交點可也。次求直立圓柱面之陰線向水平圓柱所投之影時，可用平行於含陰線之光線之平面切水平圓柱，而求其切口可也。其後於水平圓柱之左底圓及曲面之陰線上，取多數之點，而求其過諸點之光線與直立圓柱之交點。其求得之交點，即為直立圓柱上之影。

作圖：如 Fig. 432 所示，圖中曲線 m l k i, m' l' k' i 為直立圓柱之上底圓向水平圓柱所投之影，而 i g h, i' h' g' 為陰線 a b, a' b' 所投之影。曲線 t u_1 w_1 z_1, t' u_1' w_1' z_1' 為水平圓柱之左底圓及陰線 c d, c' d' 向直立圓柱所投之影。

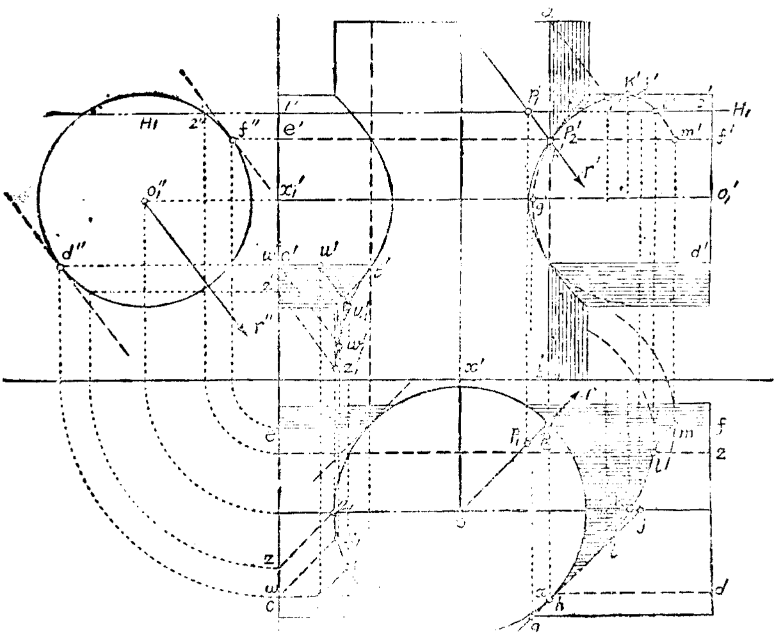


Fig. 432

作圖題16. 光線之方向為已知，求球之陰影。

解： 球之陰線為一大圓，故其投影，若作一直線之副投影，則由此可得其平面圖及立面圖。然後再求其陰線向投影面所投之影可也。

作圖： 如 Fig. 433 所示，圖中於平行於光線之直立面上所作之副投影為圓 o″。此時垂直於光線之副投影圓 o″ 之直徑 a″ b″，是為所求之陰線之副投影。陰線之實形，因其與球為同半徑之圓，故以點 o″ 直線 a″ b″ 所成之各副投影之直徑，為互相垂直之直徑，由是求二直徑之平面圖 a b, c d。後以此為二軸而作橢圓，則得陰線之平面圖。又求此二直徑之立面圖 a′ b′, c′ d′，以此為共軛直徑而作橢圓，則得陰線之立面

圖。又求此二直徑向水平投影面所投之影 a_1 b_1 c_1 d_1，後以此爲二軸，而作橢圓，則於水平投影面上而得陰影。若欲向直立投影面投影時，可求上述之二直徑向直立投影面所投之影，後以此爲共軛直徑而作橢圓可也。

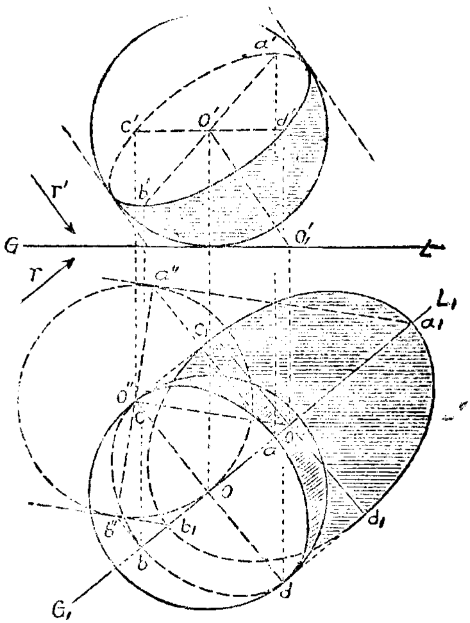


Fig. 433

作圖題17. 光線之方向爲已知，而求直立於水平投影面上之圓錐向球所投之影。

解： 先作球之陰影，次以切於圓錐且平行於光線之平面切球，而求其切口。此時由上述之陰線，與其切口所圍成之圖形，即爲所求之影。

作圖： 以平行於光線之圓錐之切平面切球而求其切口時，可於垂直於切平面之水平跡之直立面上作副投影而求之可也。Fig. 632 中，橢圓 c f d e 爲陰線之平面圖，橢圓 c' f' d' e' 爲其立面圖。又橢圓 g j h k, l p s q 爲切口之平面圖，橢圓 g' j' h' k', l' p' s' q' 爲其立面圖。綜合上述之諸橢圓所圍成之 u l w k z, u' l' w' k' z'，即爲所求之影之投影。

作圖題18. 光線之方向爲已知，而求直立於水平投影面上之長橢球之陰面。

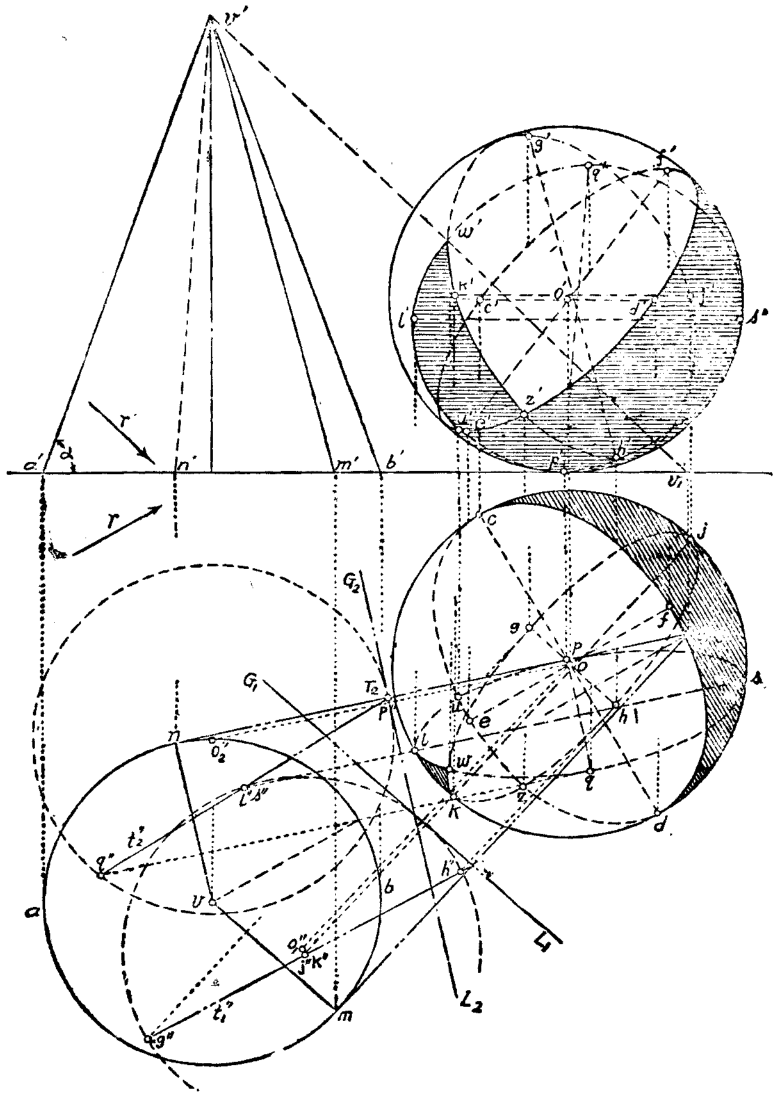


Fig. 434

解：　橢球之陰線因爲一橢圓，故其投影，使其爲一直線之副投影，則易作其平面圖及立面圖。

作圖　如 Fig. 435 所示，於平行於光線之直立面上，橢球之副投影爲橢圓 s″ m″ u″ n″，光線之副投影爲 r″。此時平行於 r″ 切橢圓 s″ m″ u″ n″ 之切線，其切點 m″, n″ 所結之直線，爲其所求之陰線之副投影。其陰線之實形之橢圓，其長軸等於 m″ n″，短軸則等於立體之平面圖圓 s u 之直徑。依此求得二軸之平面圖後，而作二軸及共軛軸之橢圓，即得所求之陰線。或如圖所示，以水平面切之，而求陰線上各點之平面

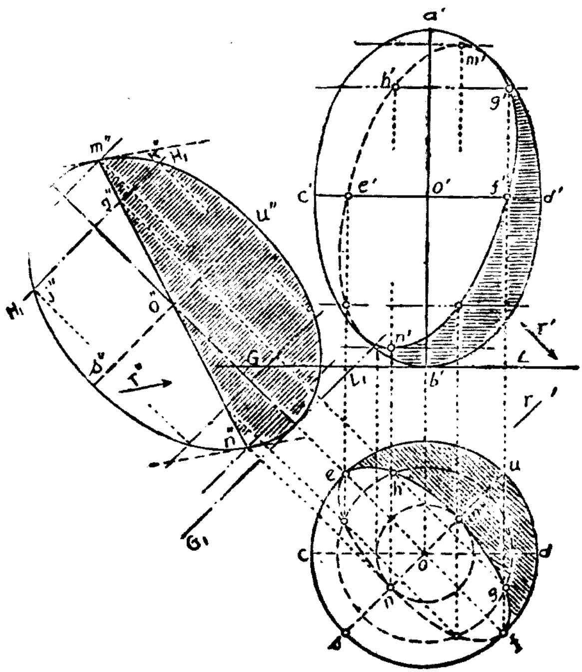


Fig. 435

圖，及立面圖亦可。

作圖題19. 光線之方向為已知，而求迴轉面之軸垂直於水平投影面時之陰線。

解： 求陰線上諸點之方法頗多，其第一法，於垂直於曲面之軸之切口，內切於曲面作圓錐面之陰線，而求其與切口之交點。其第二法，於垂直於其軸之切口，內切於曲面作球之陰線，而求其於切口之交點。其第三法，以含其軸之平面切之，向此切口，平行於切斷面上之光線之投影引切線，而求其切點。其第四法，以平行於光線之平面切之，向其切口引平行於光線之切線，而求其切點。其第四法，因其切口之投影，一般為圓以外之曲線，其作圖頗繁，故鮮有用之者。

作圖 1： 陰線上之最高點及最低點，在平行於光線且含其軸之平面所切得之切口上，今將此切口，迴轉於其軸之周，使其平行於直立投影面，則其立面圖與曲面之立面圖兩相一致。次將光線 o r, o′ r′ 迴轉於 o, o′ 之周，使其平行於直立投影面之位置為 o r_1, o′ r_1'。然平行於 o′ r_1' 而切於曲面之立面圖之直線其切點，為 j_1', e_1'。此時 j_1', e_1' 即為迴轉後之最高點及最低點之立面圖。故由 j_1', e_1' 所引之投射線與平行於基線之 o r_1 相交之點，即為其各平面圖。後將迴轉之切口，復歸原有之位置，則得其各投影(j, j′)，(e, e′)。

次於上述之最高點與最低點之間，切以任意之水平面，則其立面圖為直線 m′ n′, 平面圖為圓 m n。於其切口處，切於曲面之錐面頂點，在其軸之上，而其立面圖為 v′。後過其頂點引平行於光線之直線，而求其與切斷水平面之交點 u, u′。此時由 u 向圓 m n 所引之切線之切點 b, b,

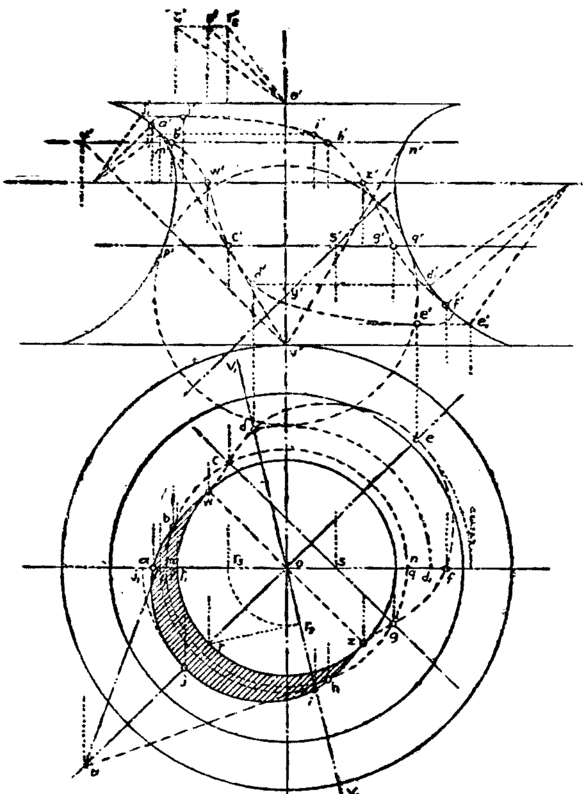


Fig. 436

即爲所求之陰線上二點之平面圖。故由 b, h 所引之投射線與 m′ n′ 之交點 b′, h′, 爲其二點之立面圖。同法，求得陰線上之諸點，將其結成曲線，即爲所求之陰線。

作圖 2: 陰線上之最高點與最低點之間，以任意之水平面切之，其切口之立面圖爲直線 p′ q′, 平面圖爲圓 p q。次於其切口處而作內切於曲面之球，其中心之立面圖爲 y′。然後由 y′ 引垂線 y′ s′ 垂直於光線之

立面圖 $o'r'$，使其與 $p'q'$ 之交點爲 s'。更由 s' 引投射線使其與平行於基線之 $o\,r_1$ 相交之點爲 s，由 s 引垂線垂直於光線之平面圖 $o\,r$，使其與圓 $p\,q$ 之交點爲 c, g。此時 $y'\,s'$ 乃含球之陰線之平面及含其軸平行於直立投影面之平面其相交之立面圖，$c\,g$ 乃含球之陰影之平面及含圓 PQ 之平面其相交之平面圖。此何故，蓋因含陰線之平面與光線互相垂直之故也。由是可知 c, g 二點，爲圓 PQ 上之陰線上之點之平面圖，至其立面圖 c', g'，可由其平面圖求之。同法，後求得陰線上之諸點，將其連續而作陰線可也。

作圖 3: 先含其軸而作任意之平面 v_1，使其水平跡爲直線 $v_1\,v_1$。次由光線 $o\,r, o'\,r'$ 上之任意一點 r, r' 之平面圖 r 向 $v_1\,v_1$ 引垂線，置其足爲 r_2，則 $o\,r_2$ 爲光線 $o\,r, o'\,r'$ 向上述之平面 v_1 所投之投影之平面圖。次以平面 v_1 切其曲面，將其切口迴轉於其軸之周，當其平行於直立投影面時所成之立面圖，與其曲面之立面圖相一致。後於 $o\,r, o'\,r'$ 之平面 v_1 上，求其投影迴轉後之投影 $o\,r_3, o'\,r_3'$，再作平行於 $o'\,r_3'$，切於其曲面之立面圖之直線，而求其切點 d_1', i_1'。此時 d_1', i_1' 因其爲所求之陰線上之點於其迴轉後之立面圖。故將其復歸原有之位置，則得其投影 (d, d')，(i, i')。同法，求得陰線上之各點，將其連續而作陰線可也。

作圖題20. 光線之方向爲已知，求凹迴轉面之軸垂直於水平投影面時，其曲面上之影。

解: 向曲面投影之部分，曲面之上端爲圓。求此圓向曲面投影之法，可以任意之水平面切其曲面，而求其切口與此平面上之上端圓之影之交點可也。

作圖： 如 Fig. 437 所示，圓 m n 爲任意之水平面 H_1 切其曲面所得之切口之平面圖。而 o_1 爲中心之圓 i f，爲上端圓 A B 向平面 H_1 所投影之平面圖。依此，則二圓之交點 i, f，卽爲所求之影上其二點之平面圖。後由其平面圖，方可求其立面圖 i′, f′。

作圖題21. 光線之方向與其軸垂直於水平投影面之類似螺旋面爲已知，求其陰影。

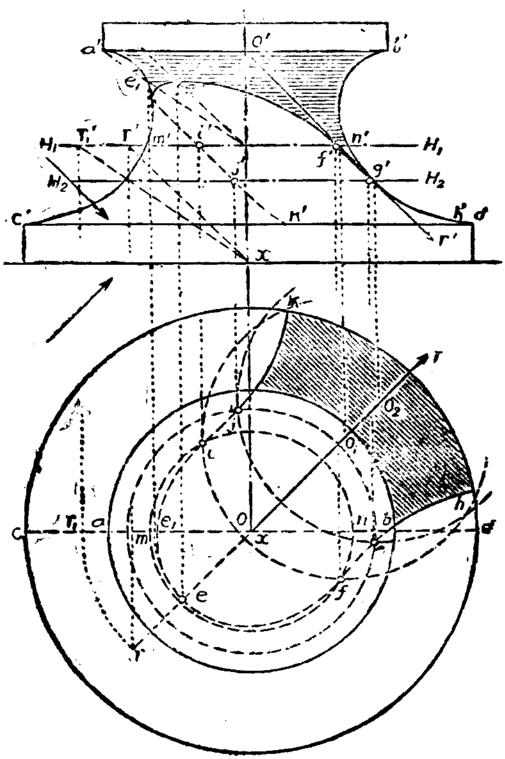


Fig. 437

解： 切於類似螺旋面之導錐，作平行於光線之切平面而求其接觸線。此時平行於接觸面之面素，爲曲面之陰線。當曲面陰線決定後，則陰線與曲面之周緣向投影面所投之影，卽爲所求之影線。

作圖： 如 Fig. 438 所示，圖中三角形 m′ v′ n′ 爲導錐之立面圖，圓 m n 爲其平面圖。$v_1\ e_1$，$v_1\ d_1$ 爲平行於光線之導錐之切平面之水平跡，而 v d_1，v e_1 爲其接觸線 V D_1，V E_1 之平面圖。此時，平行於 V E_1

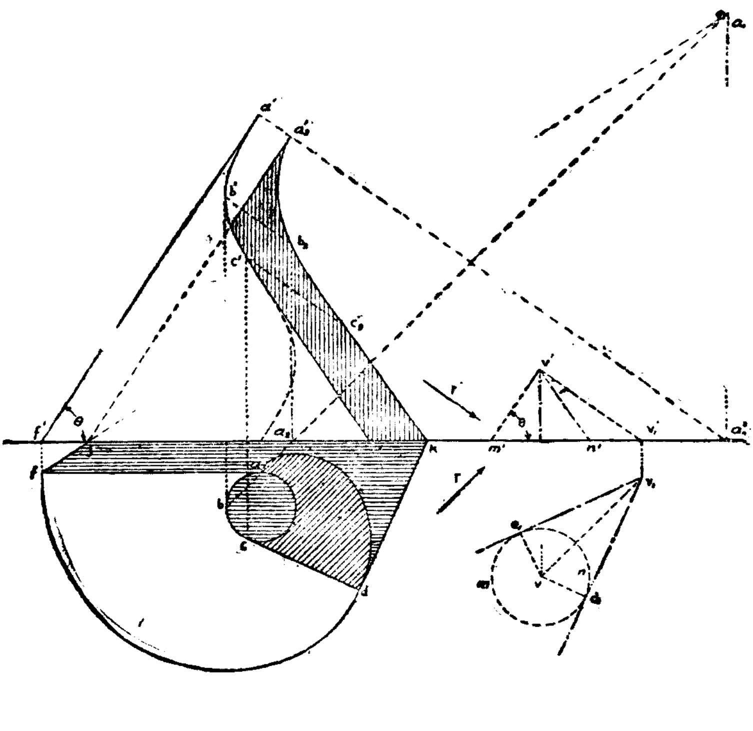


Fig. 438

之類似螺旋面之面素入於影中，不成陰線。故平行於 V D_1 之面素與螺旋線之一部分 A B C，及面素 A F 所投之影，其所圍成之 d k c'_2 b'_2 a'_2 j f，是爲所求之影。

作圖題22 光線之方向爲已知，求斜螺旋面之軸垂直於水平投影面之陰影。

解：求陰線之法，先求平行於光線之切平面之切點，後將其各切點連結而作曲線可也。或求其面素向投影面投影，由切於其影之曲線之切點，逆引光線，後連結與此對應之面素相交之點，而作成曲線亦可。投影面上之影，可依包函面素之影所作之圖形而得。又求螺旋面之緣線向曲面投影之法，可由此緣線及面素向投影面所投之影之交點逆引光線，將其對應之面素之交點連結而作曲線卽可。或以含過緣線上各點之光線之平面切其曲面，而求其切口與光線之交點亦可。

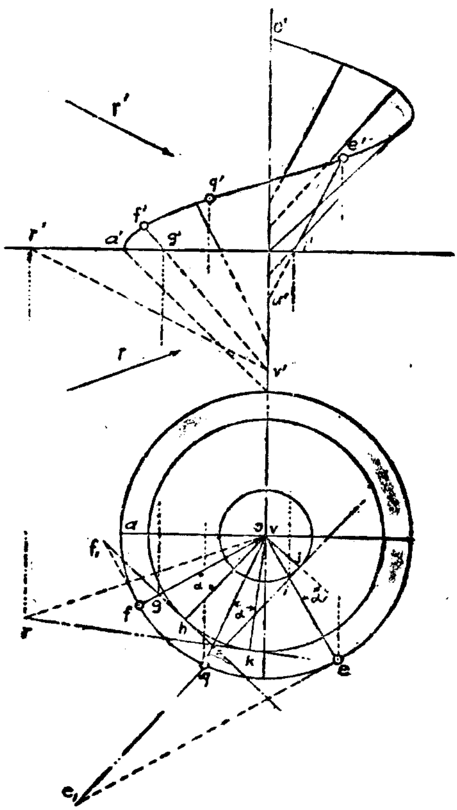


Fig. 439

作圖： 如 Fig. 439 所

示，螺旋線 a f e, a′ f′ e′ 爲已知之曲面上一螺旋線 過螺旋線上任意之點(e, e′)，(f, f′)之面素爲(e o, e′ u′)，(f o, f′ v′)，其水平跡爲 i, g。次於 e, f 處，取切線 $e e_1$, $f f_1$ 等於圓弧 ae, af。此時，直線 e_1 i, f_1 g 於點(e, e′)，(f, f′)處，爲切平面之水平跡。次以 O 爲中心，切 e_1 i, f_1 g 引圓，使其各切點爲 j, h。然此時二圓爲其水平跡，點 (o, u′)，(c, v′)，各爲圓錐之頂點。此圓錐，稱爲螺旋面之傾斜錐。其各傾斜錐，於點(e, e′)，(f, f′)切於切平面。而各圓錐之底角均相等，及 $\angle eoj = \angle foh$。今置 $\angle eoj = \angle foh = \alpha$，則利用此種關係，可求其平行於光線之切平面之切點。是卽求切於頂點(o, v′)之傾斜錐，且平行於光線之切平面之水平跡 r k。其傾斜錐之水平跡與 r k 之切點爲 k。後引與 o k 成角 α 之 o q，使其與圓 a f e 之交點爲 q。然此時 q 爲平行於光線之切平面之切點之平面圖。故由 q 所引之投射線與曲線 a′ f′ e′ 相交之點 q′，卽爲其立面圖，同法，後引螺旋上之螺旋線作傾斜錐，而求其平行於光線之切平面之切點可也。

如 Fig. 440 所示，圖中陰線(p q, p′ q′)，(m n u, m′ n′ u′)，可於上之作圖中求之。或於水平投影面上，作切各面素之影之曲線，由其切點逆引光線，而求其與其對應之面素之交點亦可。如所求之點 (u, u′) 然。

次包函各面素向水平投影面投影而求其圖形。如圖所示，而得影 o b_1 d_1 u_1 a_1。又由螺旋線 p b d m, p′ b′ d′ m′ 與面素之影相交點引平行線平行於光線，而求其與其對應之面素之交點。此時將其各點連結而作成曲線 (p j, p′ j′)，(m z, m′ z′)，是爲曲面上之影。

作圖題23. 壁龕之投影爲已知，求其內面所生之影。

解： 本題，由直立之半圓柱面，與四分之一之球面所成之壁龕之

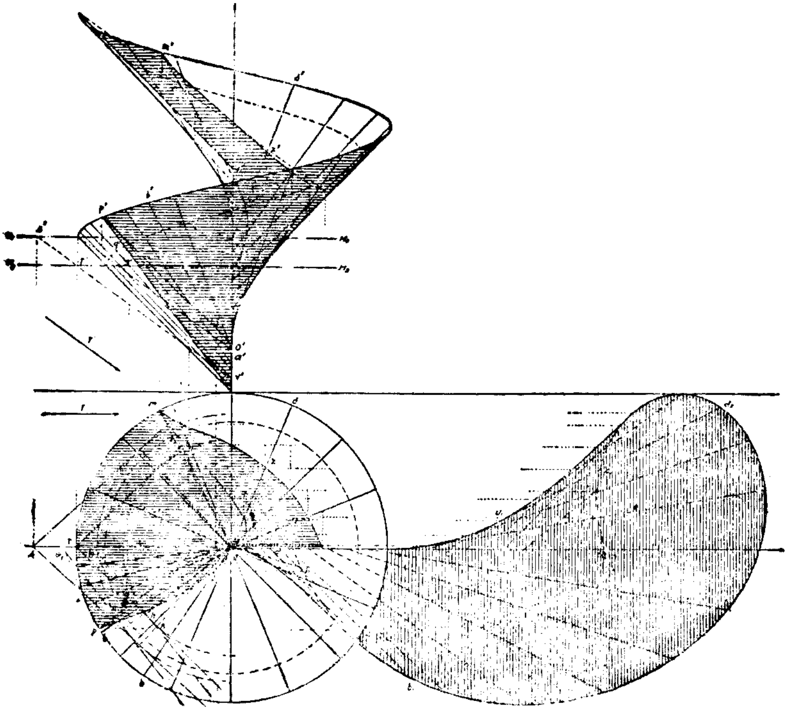


Fig. 440

倒。其四分之一球，其一端之半圓平行於直立投影面。柱面之軸垂直於水平投影面。其內面之影線爲平行於圓柱之緣線及直立投影面之半圓所投之影。故過上述之線上多數之點引光線，而求其與內面相交之各點，後將其連續而作成曲線可也。

作圖： 如 Fig. 441 所示，先求過 a, a′ 之光線與柱面相交之點a_1, a_1'，過此點之直立線，乃柱面左緣線所投之影。次於半圓 A C B 上，引過任意之點 m, m′ 之光線，使其與柱面相交於點 m_1, m_1'。則點 m_1, m_1'

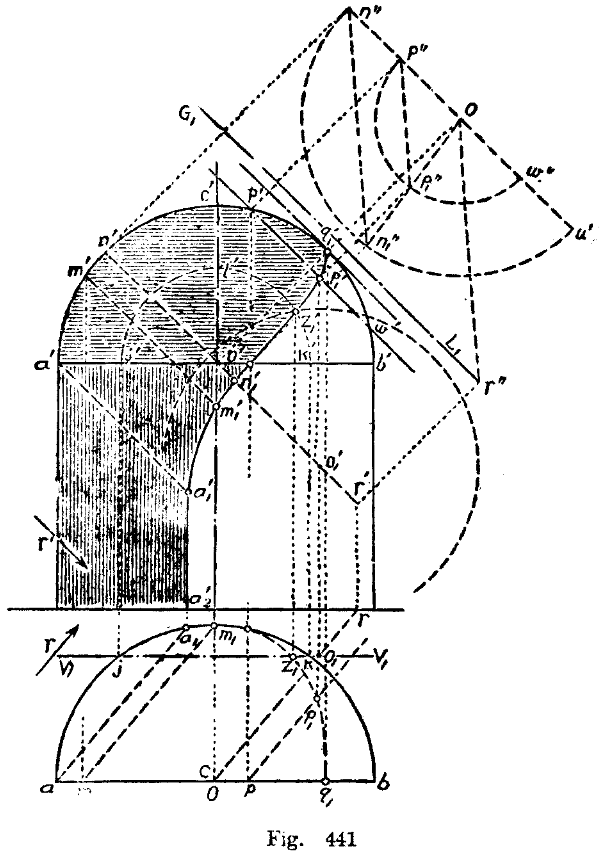


Fig. 441

爲點 m, m′ 向柱面所投之影。後求得其半圓上諸點向柱面所投之影，將其連結作曲線 a_1' m_1' n_1'，則得球向柱面所投之影線。

次求球之內面之影時，先過半圓 A C B 之任意點 p, p′，作含已知光線且垂直於直立投影面之平面，而切球面。復於平行於切口之切斷面之一平面上作副平面圖。圖中 p″ 爲點 p, p′ 之副平面圖，半圓 p″ p_1″ w″ 爲切口之副平面圖。此時過點 p, p′ 之光線之副平面圖與半圓 p″

$p_1'' w$ 之交點 r_1''，爲點 p, p' 所投影之副平面圖。由副平面圖卽可求其立面圖 p_1' 及平面圖 r_1。同法若求得半圓 A C B 上之諸點向球面所投之影，則可求得其影線 $q_1 p_1 z_1 \cdots\cdots, q_1' p_1' z_1' \cdots\cdots$。

作圖題24. 求橢圓體之陰線。

解： 橢圓體以平行於光線之平面切之，向其切口引平行於光線之切線。此時其切點爲所求之陰線上之點。如斯之點，若多數求之，將其連結作成曲線，是卽所求之陰線。當向切口引切線時，切口之投影若作爲圓形之副投影面，則作圖上，僅用圓與直線，卽可。

作圖： 如 Fig. 442 所示，圖中爲其橢圓體之最長軸垂直於水平投影面，其最短軸平行於基線，而求其陰線之圖也。其平面圖，因避煩從略。

先以含橢圓體之中心 O 及平行於光線且垂直於直立投影面之平面切之，其切口之立面圖爲直線 $u' z'$。次以垂直於直立投影面之軸之長爲直徑，以中心之立面圖 o' 爲中心引圓，由 u, z 向此引切線 $u' u_1, z' z_1$。此時垂直於 $u'\ u_1$ 之 $C_1\ L_1$ 爲垂直於直立投影面之副投影面上之副基線，而上述之切口之副投影爲圓 $u_1\ z_1$。故在此副投影面上平行於已知光線且垂直於直立投影面之切口之副投影爲圓。依此，若於諸圓中引垂直於已知光線之副投影之直徑，則各直徑之端，爲陰線上之點之副投影。其副投影既得，由是求其立面圖與平面圖可也。圖中曲線 $m' n' g' h' k'$，卽爲陰線之立面圖。

作圖題25. 求雙曲拋物線面之陰影。

解： 先求雙曲拋物線面之面素向投影面所投之影。次作包函此影

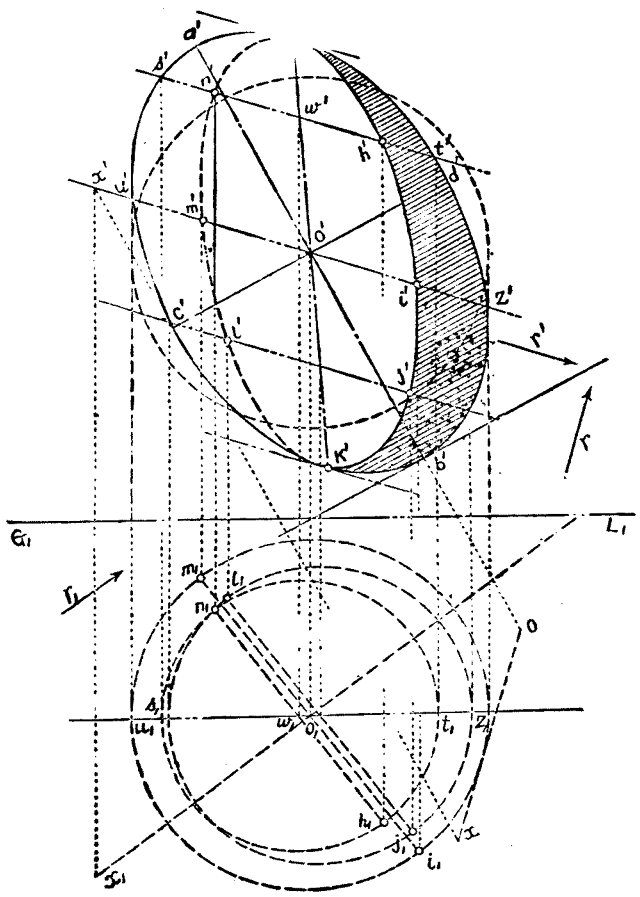


Fig. 442

之圖形，則得投影面上之影。求曲面上陰影之法，須求平行於光線之切平面之各切點，後將其各切點連結而成曲線可也。

作圖：　如 Fig.443 所示，圖中以垂直於水平投影面之直線 a b, a' b' 及在直立投影面上之 c d, c' d' 爲導線，以水平投影面爲導面之雙曲

拋物線面，而求其陰影之圖也。

圖中，包函 a b, a′ b′ 及面素(a c, a′ c′),(a f, e′ f′)……等，向水平投影面所投之影 b a_1, a_1 m_1, e_1 n_1,……之圖形爲水平投影面上之影。又由切於 a_1 m_1, e_1 n_1……之曲線之切點 m_2, n_2 引平行線平行於光線之平面圖，使其與 a c, a f……相交。其交點 m, n,……卽爲平行於已知光線之切平面其切點之平面圖。依此，後將其各切點連結，則所成之曲線 m n o p q，是爲陰線之平面圖，其立面圖 a′ n′ o′ p′ q′，可由其平面圖求之。

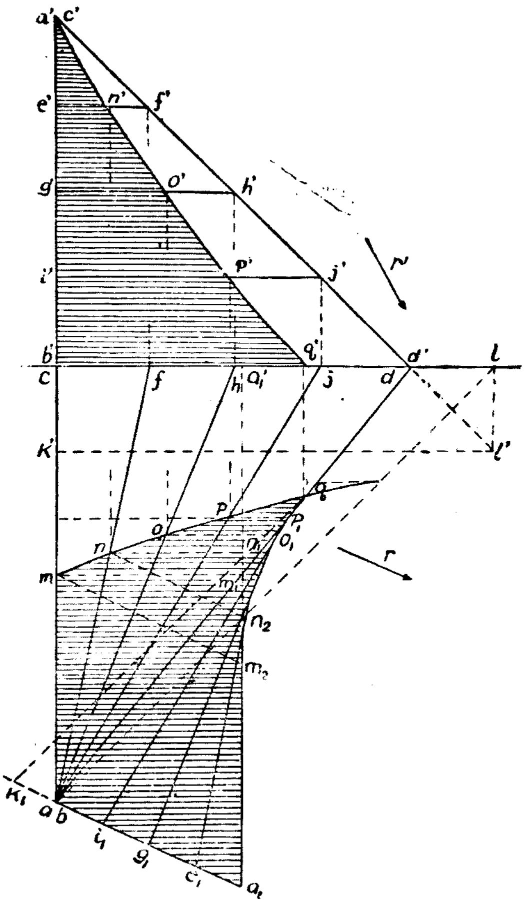


Fig. 443

4. 雜題

作圖題26. 如 Fig. 444，乃示圓管之軸平行於基線，而求其陰影之圖也。

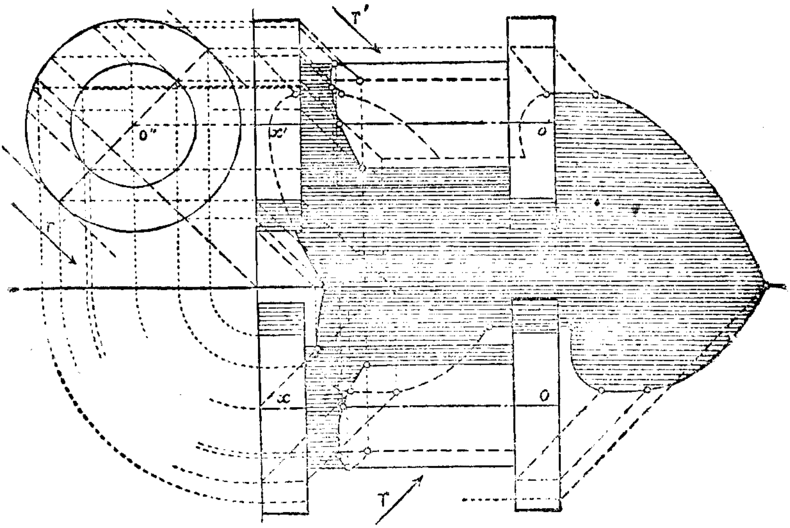


Fig. 444

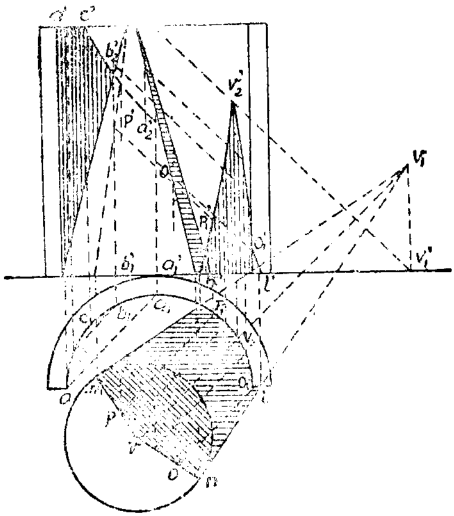


Fig. 445

作圖題27. 如 Fig. 445，乃示直立於水平投影面上之圓錐及半圓管，而求其陰影之圖也。

作圖題28. 如 Fig. 446，乃示三角螺旋桿，而求其陰影之圖也。

作圖題29. 如 Fig. 447，乃示球與直立圓柱所求得之陰影之圖也。

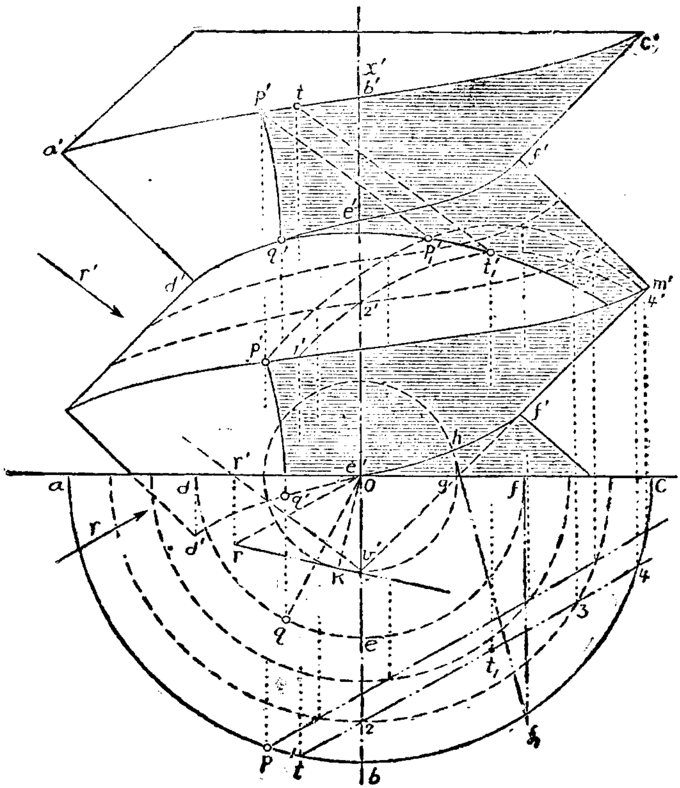


Fig. 446

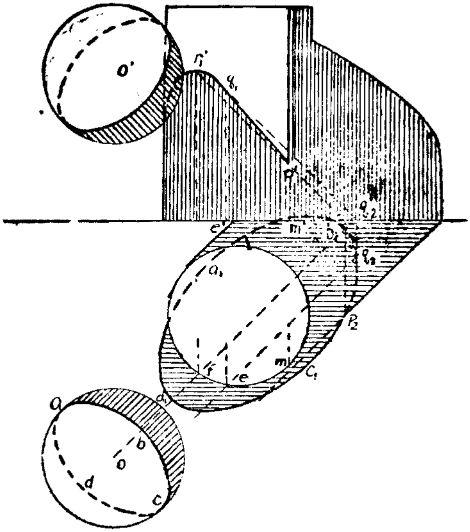


Fig. 447

作圖題30. 如 Fig. 448,乃示球,直立圓柱,及直立圓錐,而求其陰影之圖也。

作圖題31. 如 Fig. 449,乃示橫於水平投影面上之圓柱及以一面素切於圓柱之十字形爲已知,而求其各陰影之圖也。求十字向圓柱所投影之法,可先設垂直於圓柱之副投影面,而作其副投影。如斯作圖,較爲簡易。

其二 輻射光線

5. 關於影之諸重要之定義

(Ⅰ)直線向平面所投之影,通常雖爲直線,但其延長線若通過發光

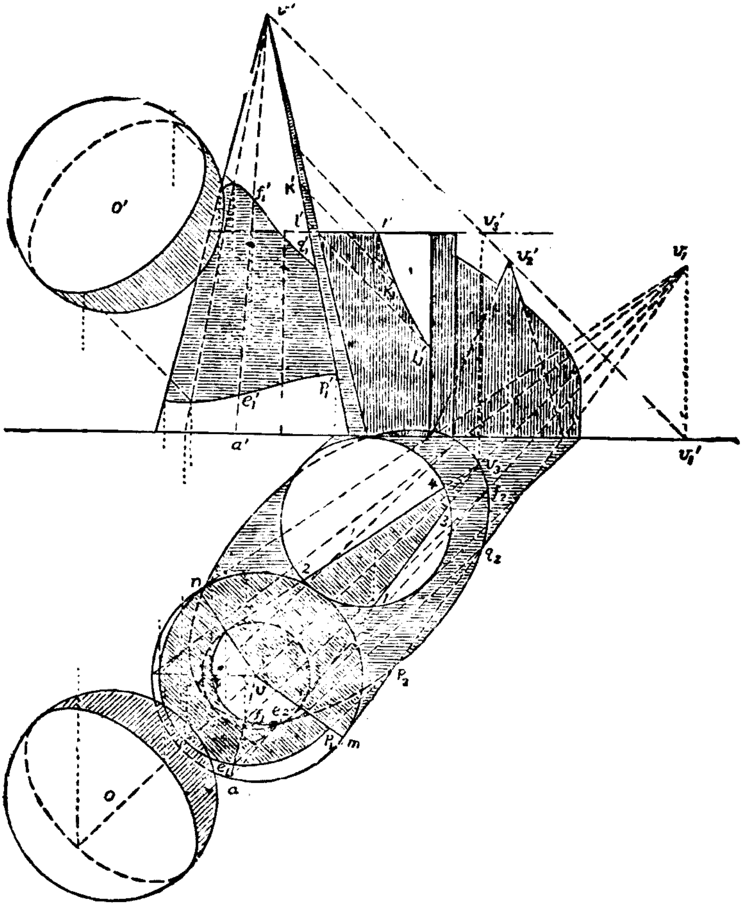


Fig. 443

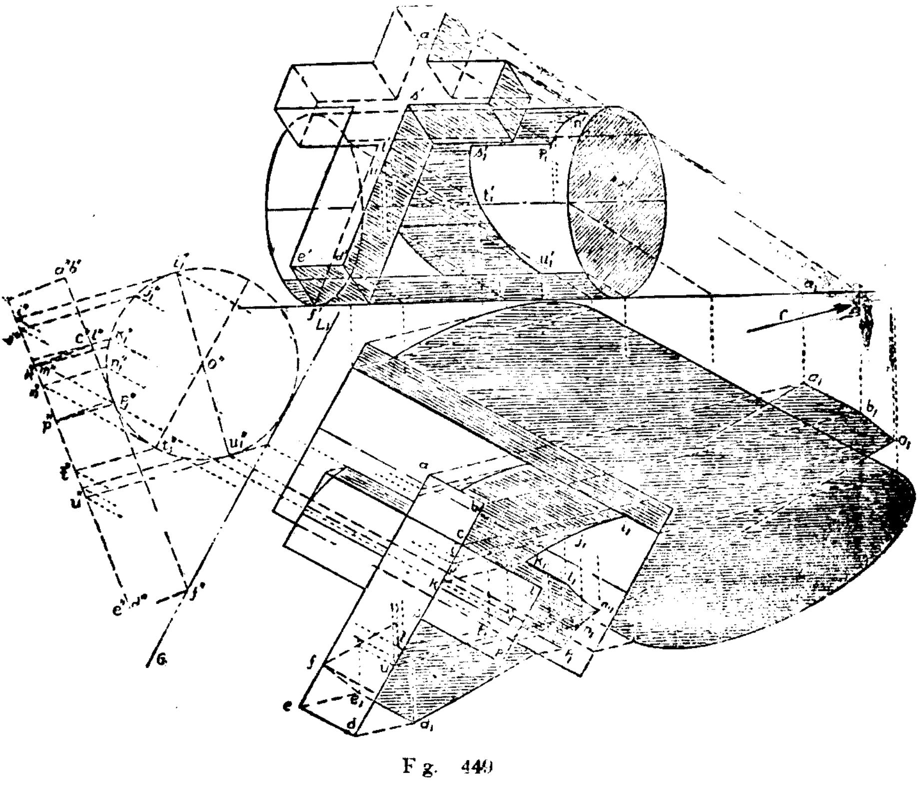


Fig. 449

點時，不拘其長延至如何程度，均爲一點。

(II)相交二線之影，於其交點之影處相交。

(III)相切二線之影，於其切點之影處相交。

(IV)平面形於平行於平面形之平面上，有原形相似之影。

(V)曲線之影，一般固爲曲線，然單曲線，若含其單曲線之平面含發光點時，於不平行於此之平面上成直線之影。

(VI)平行線向平面所投之影，若不爲平行，故其延長線相會於一

點。如 Fig. 450 所示，A B, C D, E F,……爲平行線，今使其與平面 V. P. 相交點爲 B, D, F,……。S 爲發光體，由 S 引直線平行於 A B, 使其與平面 V, P, 相交於點 V_1。此時 V_1 爲 S 與 A B, C D, E F,……之延長線上無限遠距離之點相結之直線與 V. P. 相交之點，又 V. P. 上 A B, C D, E F,……等之影，各通過 B, D, F,……。由此，可知 A B, C D, E F,……之影 A_1 B, C_1 D, E_1 F,……各在 V_1 B, V_1 D, V_1 F,……上。 如 Fig.451 所示，

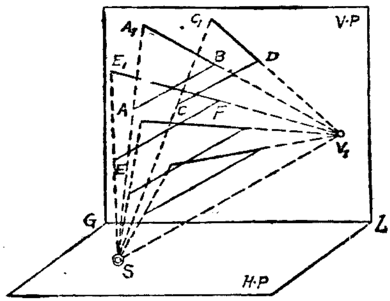


Fig. 450

乃平行線(ab, a' b')，(cd, c' d')。(ef, e' f')，……向投影面所投之影。其水平投影面上之影會於 v_1，直立投影面上之影會於 v_2'。

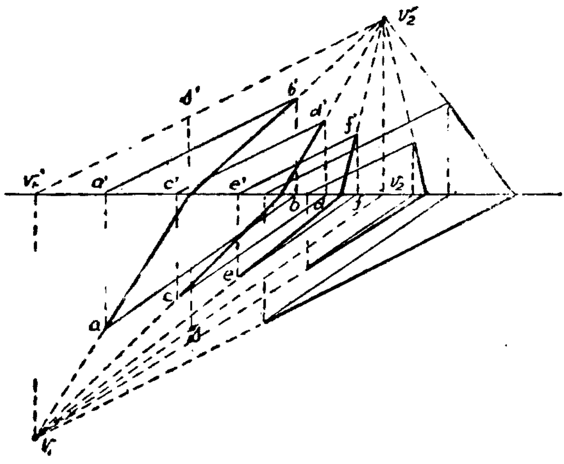


Fig 451

作圖題32. 發光點 S 及直立圓柱爲已知，求其陰影。

解： 先作含發光點且切於圓柱之平面。次求其接觸線，卽得圓柱之陰線。然後再求其陰線向投影面所投之影可也。

作圖 如 Fig. 452 所示，圖中由發光點之平面圖 S，向圓柱之平面圖圓 O 引切線，其切點爲 a, c。此時平面圖之面素 a, c 爲圓柱面上之陰線。以圓弧 a e c 爲平面圖之底圓之弧爲其底之陰線。故過其底之中心 O 之光線，以其水平跡 o_1 爲中心，其切於 S a, S c 之圓與二切線所圍成之圖形，爲水平投影面上之影。又面素 c d, c′ d′ 與圓弧 a e c, a′ c′ c′ 向直立投影面所投之影 $c_2 c_2'$, $c_2' p_2 e_1$ 與基線所圍成之圖形，爲直立

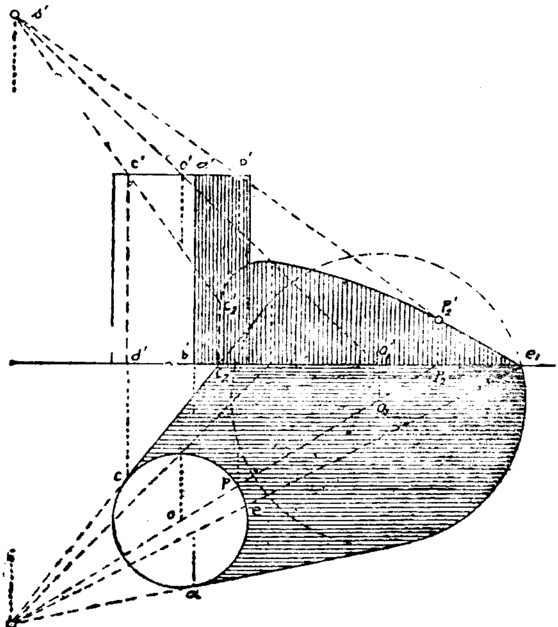


Fig. 452

投影面上之影。

作圖題33 發光點為已知，求迴轉面之軸垂直於水平投影面時之陰線。

解： 以含發光點之任意平面，切已知之立體，由發光點向其切口引切線。此時其切點，即為所求之陰線上之點。或以含軸之任意平面切已知之立體，而由發光點之切斷平面上之投影向其切口引切線。此時其切點，即為所求之陰線上之點。次將其切口迴轉於其軸之周，使其平行於直立投影面，則切口之立面圖與立體之立面圖相一致，由是，復於迴轉後之位置引切線，再使其復歸原來之位置而作圖。或求內切球之陰線與球之接觸線之交點亦可。

作圖： 如 Fig. 453 所示，乃用含發光點 S 之直立

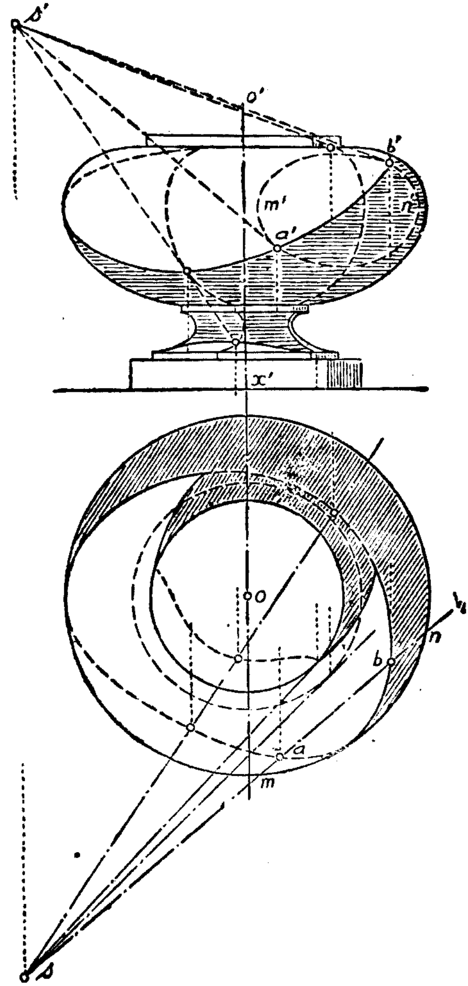


Fig. 453

面切之，由 S 向各切口之投影引切線，求其切點。由其切點而作陰線之圖也。

如 Fig. 454 所示，乃以含軸之直立面切之，將其切口迴轉於其軸之周，使其平行於直立投影面而作圖。圖中 V_1 V_2 爲含軸之任意平面之水平跡。s_1，爲 S 於其直立面上其投影之平面圖。今 S 之投影當其迴轉後之立面圖爲 s'_2，由 s'_2 向立體之立面圖引切線，其各切點爲 m_1', n_1', p_1',

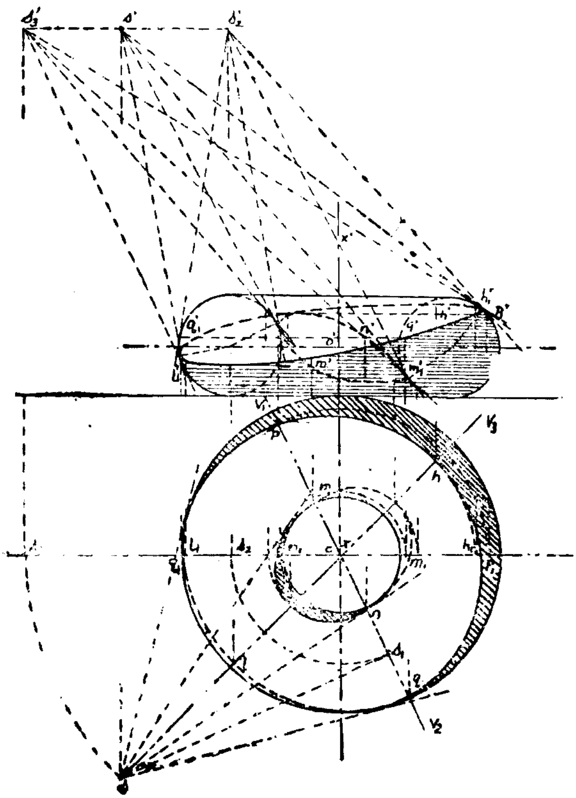


Fig. 454

q_1'。此四點，爲其迴轉後陰線上之點之立面圖。後將切斷面復歸原有之位置，而得各投影(m, m')，(n, n')，(p, p')，(q, q')。求陰線上之最高點及最低點之法，可以含發光點及其軸之平面切之，由發光點向其切口引切線，而求其各切點可也。又陰線之平面圖與立體之平面圖之切點，爲發光點 S 之平面圖 s 所引之切線之切點。又陰線之立面圖與立體之立面圖之切點，爲發光點 S 之立面圖 s' 所引之切線之切點也。

如 Fig. 455，乃示含發光點與其軸之平面平行於直立投影面時之圖

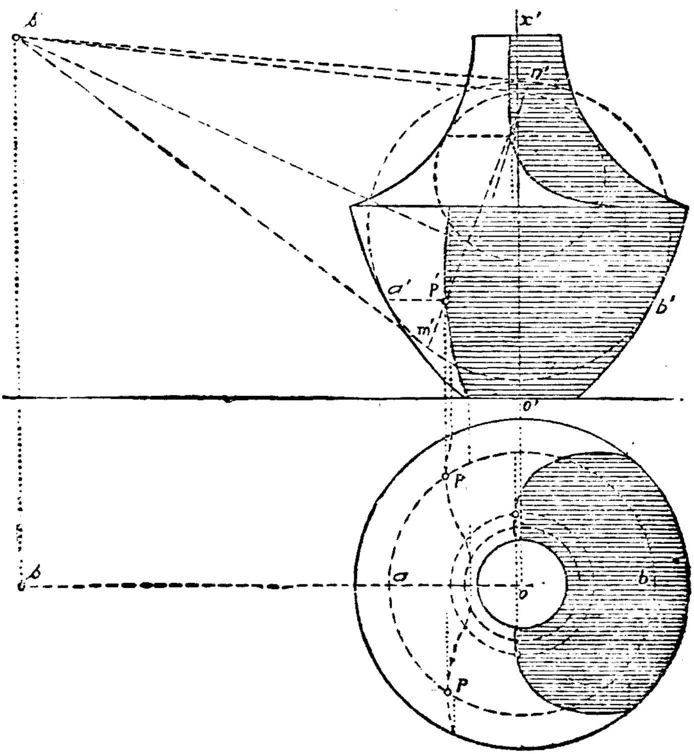


Fig. 455

也。今發光點置於如圖所示之位置時，則求內切球之陰線與球之接觸線之交點之方法，益形簡單。

作圖題34. 發光點 S 為已知，求水平圓柱與直立圓錐之陰影。

解： 求兩立體向投影面投影及陰線之方法，前例述之既詳，茲不復贅。求水平圓柱之陰線及直立圓錐之陰線向圓柱投影之法，須設垂直於圓柱之軸之副投影面方可。

作圖： 如 Fig. 45 所示，乃就其大要所作之圖也。

其三 依平行光線物體面所生之明暗

6. 照度

設射於一面上之一點，其光之強度為 a，其投入光線與其切點處法線間之角為 α，於其法線之方向，其光之強度可以 $a \cos \alpha$ 表之。此時 $a \cos \alpha$，稱為其點之照度 (Degree of illumination)。凡其面上同等照度之點連結所成之線，稱為等照線 (Iso-illuminated line)。當其角 α 愈小時，則其照度愈大。故 $\alpha=0$ 時為最大，$\alpha=90°$ 時為最小。等照線在單曲面上為一直線，在球面上為垂直於光線之圓。

如 $\alpha=0$ 之點處，因其反射光線與投入光線之方向正相反對，故為最明之點。通稱此點，為實輝點 (Real brilliant point)。然實際訴諸吾人目中最明之點，決非實輝點，而為反對光線向吾人目中所射來之點。此點通稱為現輝點 (Apparent brilliant point)。如球，橢球，橢圓體等之立體上，僅有一輝點，而其凹凸不平之曲面上，應有多數輝點。又單曲面上最明之處，非為一點而為一面素。如斯面素，稱為輝線 (Brilliant

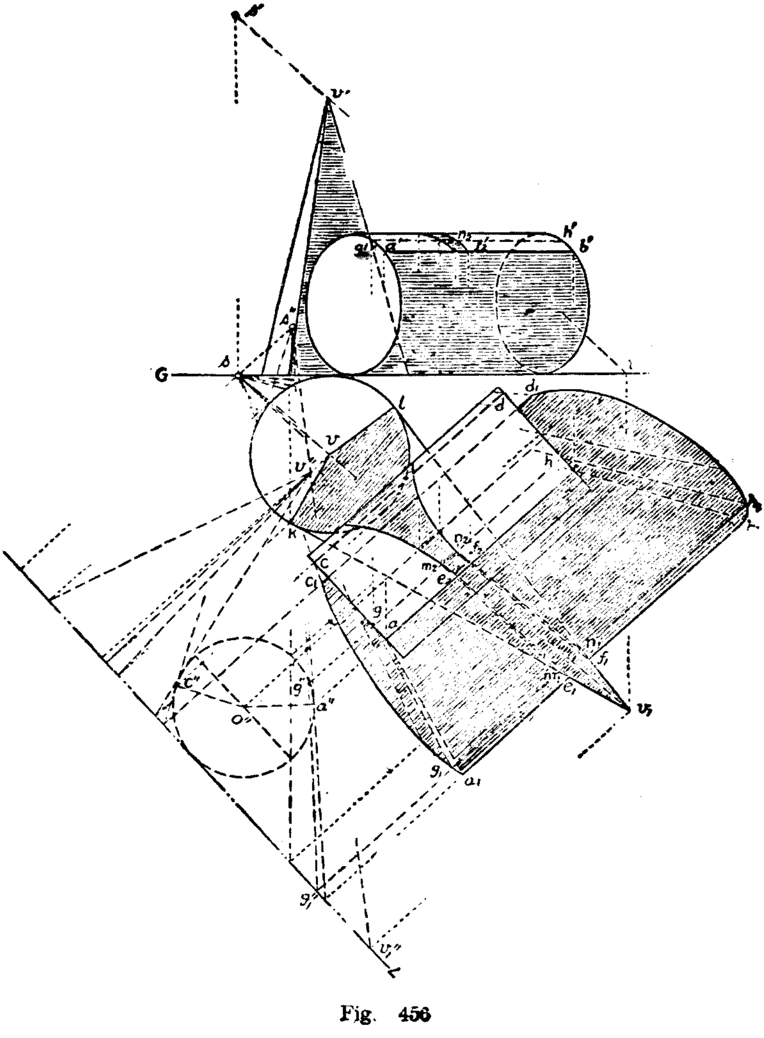


Fig. 456

line)。

ㄚ. 現輝點之一般作圖法

於一面上之一點，其投入光線及反射光線，與於其點處之法線成相

等角。正投影中之視點，因其置於投影面垂直之方向有無限遠之距離，故投影圖之現輝點爲反射光線垂直於投影面之點。依此，若求平面圖之現輝點，須先將過任意點之光線，與垂直於水平投影面之直線間之角作二等分之直線，後作垂直於二等分線之切平面，而求其切點可也。又求立面圖之現輝點時，先將過任意點之光線與垂直於直立投影面之直線間之角作二等分之直線，後作垂直於二等分線之切平面，而求其切點可也。

作圖題35. 光線之方向爲已知，求橢球之軸垂直於水平投影面時之輝

(I)立面圖之現輝點：

如 Fig. 457 所示，先將過其軸上之任意點 o, o′ 之光線 o r, o′ r′ 與垂直於直立投影面之直線 o u, o′ 間之角作二等分線，而求其投影 o m, o′ r′。次將 o m, o′ r′ 迴轉於點 o, o′ 之周，使其平行於直立投影面之位置，而求 o m_2, o′ m'_2，此時垂直於 o′ m'_2 而

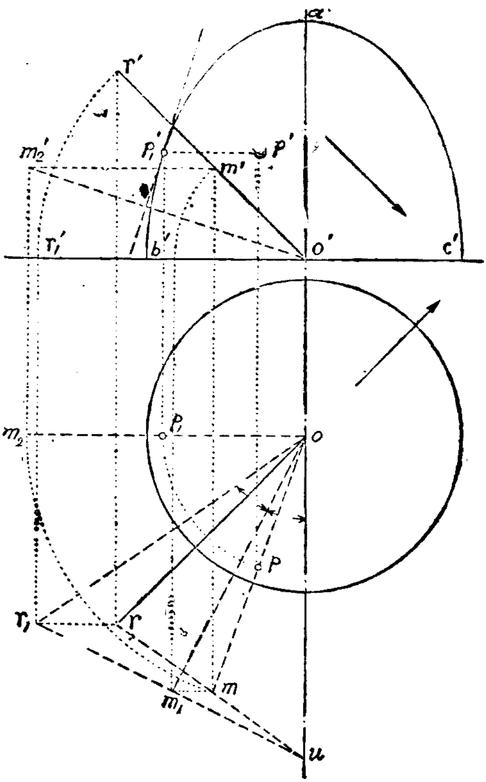


Fig. 457

切於橢球之立面圖之直線之切點 p_1' 爲迴轉後現輝點之立面圖。其平面圖，爲 o m_2 與由 p_1' 所引之投射線相交之點 p_1。依此以 o 爲中心，作過 p_1 之圓，使其與 o m 相交之點爲 p。此時 p 卽爲所求之現輝點之平面圖。又由 p 引投射線及由 p_1' 引平行於基線之直線，使其二者相交之點爲 p′，是時 p′ 卽爲所求之立面圖。

(II)平面圖之現輝點。

如 Fig. 458 所示，先過軸上任意之點 o, o′ 之光線 o r, o′ r′ 與垂直於水平投影面之 o, o′ a′ 間之角作二等分之直線。後作垂直於此直線之切平面，其切點 p, p′ 卽爲所求之現輝點。次將 o r, o′ r′ 迴轉於點 o, o′ 之周，而求平行於直立投影面之位置 o r_1, o′ r_1'。此時角 a′ o′ r_1' 之二等分線 o′ m_1'，因其爲迴轉後二等分線之立面圖。故先求垂直於 o′ m_1' 之切線之切點 p_1'，後由此引投射線，而求其與 or_1 之交點 p_1，則點 p_1, p_1' 爲迴轉後之現輝點。由是，以 o 爲中心，作過 p_1 之圓弧，而求其與 o r 之交點 p，是爲所求之現輝點之平面圖。又由 p 引投射線，及由 p_1' 引平行於基線之直線，其交點 p′，卽爲所

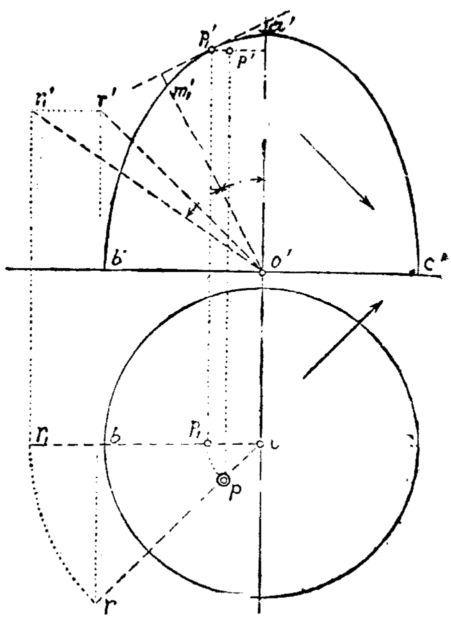


Fig. 458

求之立面圖。

8. 單曲面之現輝線

如 Fig. 459 所示，使其光線平行於水平投影面，而作過直立圓柱之軸上之任意一點之光線OR及垂直於直立投影面之OU。其間所成之角分以二等分之直線OM，次垂直於OM作切平面。是卽平面圖or與ou間之角之二等分線om與圓柱之平面圖之圓o相交於點m，而以m爲平面圖之面素，卽現輝線也。

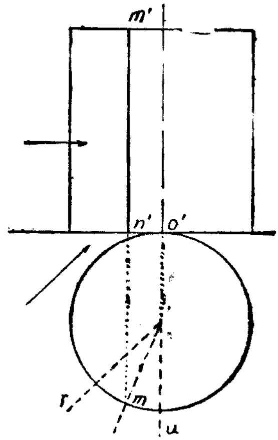


Fig. 459

如 Fig. 460，乃示其光線傾斜於兩投影面時，因無垂直於角ROU之二等分線OM之切平面之存在，故無理論上之現輝點之存在。然全曲面非理想上之平滑面，若詳細察之，則呈凹凸起伏之狀，而於其各方向，均有反射之光線。是故垂直於投影面之反射光線爲實在光線。又因其有散光，故由任何之方向觀察物體時，均能認其存在。故角ROU二等分線之平

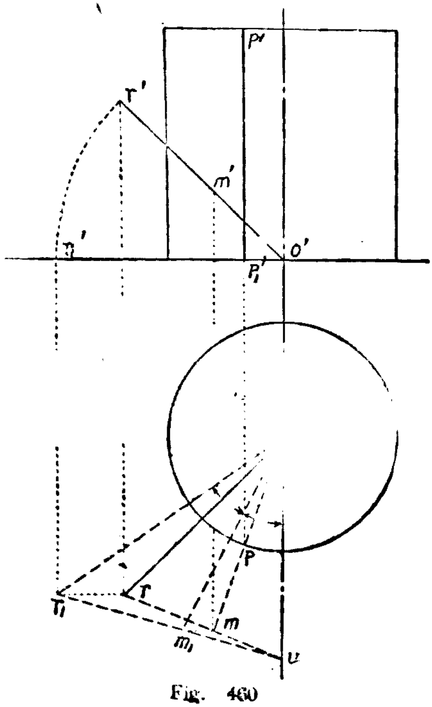


Fig. 460

面圖 o m 與圓 o 所交之點 p 爲平面圖之面素，即現輝線也。

如 Fig. 461 所示，過基線上一點 o 之光線 O R 與垂直於直立投影面之 O U 間之角之二等分線爲 O M。設垂直於 O M 之任意平面爲 t T t'。次切此平面，而作其軸垂直於水平投影面之圓錐 V A B，其底角爲 θ。此時，平面 t T t' 與圓錐之接觸線 V P 爲現輝線。故其底角爲 θ 之直立圓錐，應有平行於 V P 之現輝線 其底角不等於 θ 之直立圓錐，則無平行於平面 t T t' 之切平面，故理論上之現輝線亦付缺如。然因其有散光之存在，故現輝線亦仍存在。由是可知，凡平行於 t T 之切線而過其切點之面素爲底角不等於 θ 之直立圓錐上之現輝線。

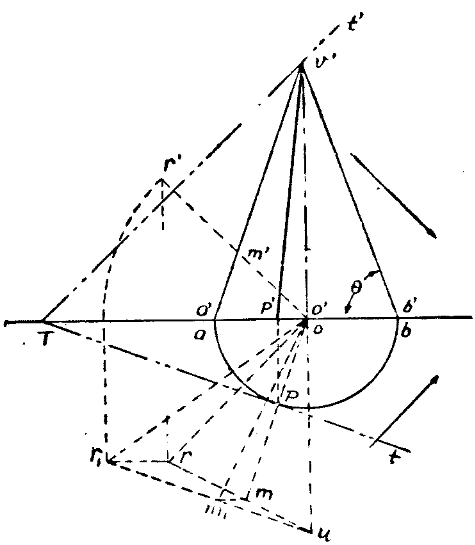


Fig. 461

9. 物體面之明暗

物體面當光線直射之點爲最明，而明暗之別，乃依其陰線而分，其明暗度，乃由同物體所發出之反射光線射入吾人眼睛中之多少而異。故光面上之現輝點或現輝線爲最明。當光面相距漸遠，則光之明度漸減。反之，陰面雖不受原光線之直射，然以大氣各分子所發出之反射光線之關係，可認有幾分之明度。當其相距漸遠，大氣層漸增，由大氣各分子所發出之反射光線亦漸增，故其陰面之暗度因之而漸減。反之，其光面之明度因之而漸

弱。

光面上所生之影，雖不受原光線之直射，然因大氣各分子之反射光線，亦可認有幾分之明度。但向光面所發出之大氣各分子之反射光線，較之陰面爲弱，而尤以輝點或輝線之附近更弱。故光面內之影較之陰面爲暗，輝點及輝線處尤爲黑暗。

10. 圖上之明暗

投影圖之附有明暗，乃依着色之濃淡及平行線之密度而異。

着色濃淡之方法有二，一爲引多數之等照線。其相隣之二等照線間，有相同之明度及暗度，依其明暗之度，可作同一濃度之着色。如 Fig 462, Fig. 463 所示。他爲依明暗度順次變更其濃度，而不分階段之形跡。如 Fig. 464, Fig. 465 所示是也。

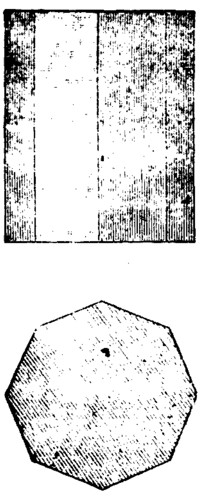


Fig. 462

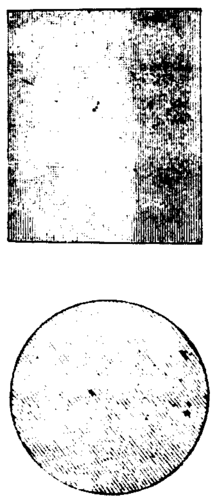


Fig. 463

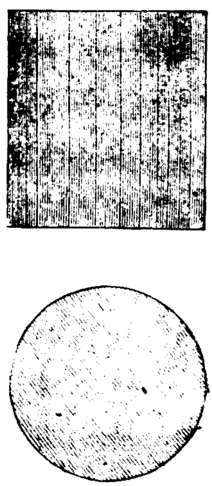


Fig. 464

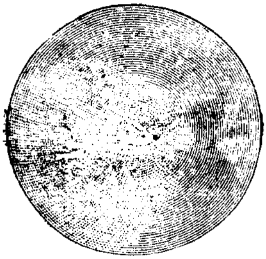


Fig. 465

平行線密度之方法亦有二，其一，乃引同樣粗度之線，依其密度而示其明暗。他一，乃依線之粗度及密度而示其明暗。如 Fig.466, Fig.467, Fig.468, 所示是也。

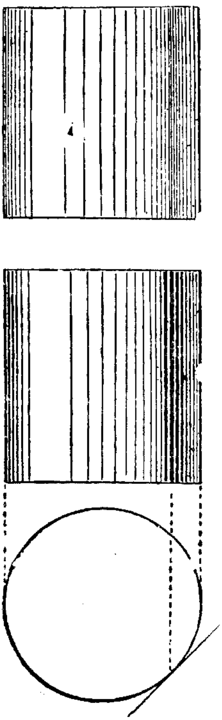


Fig. 466

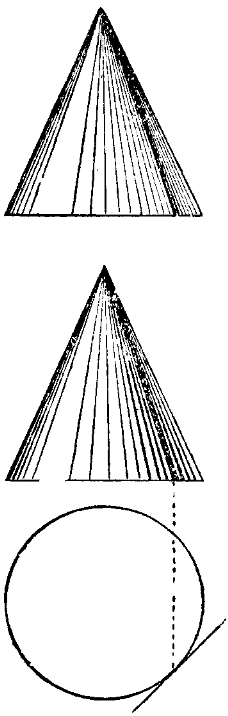


Fig. 467

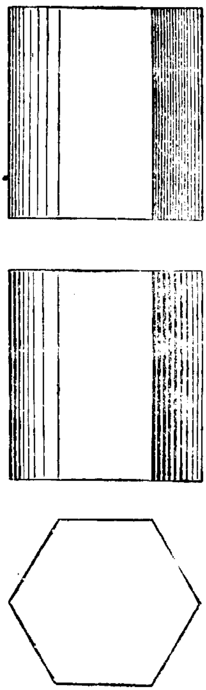


Fig. 468

練習題

練習題中未示光線之方向者，其光線之平面圖及立面圖，均與基線成 45°。

1. 如 Fig. 469 所示，試求三角形 A B C 向平面 T 所投之影。

2. 試將 Fig. 470 擴大為二倍，而求其陰影。

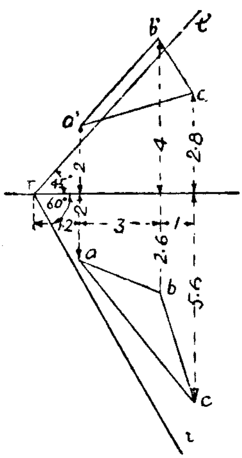


Fig. 469

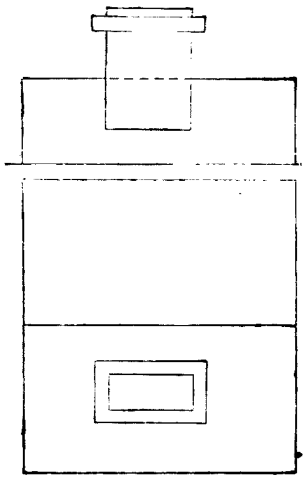


Fig. 470

3. 如 Fig. 471 所示，試求其立體之陰影。

4. 有底之直徑為 6 糎，高為 7 糎之直圓錐。其一面素切於水平投影面，其軸之平面圖與基線成 30°。今圓錐之底為光面時，試求其陰影。

5. 有直徑 4 糎，高 7 糎之直圓柱。其軸與水平投影面成 45°，與直立投影面 30°。其一底與水平投影面，他一底與直立投影面，相接觸

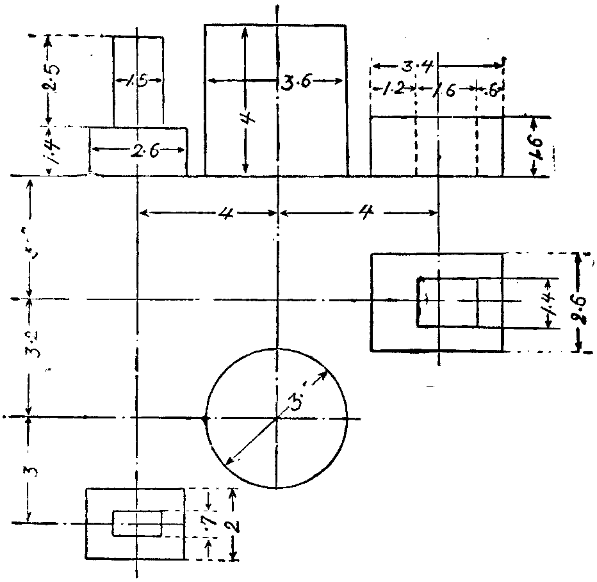


Fig. 471

於一點。當此圓柱，面於水平投影面之底向光線時，試求其陰影。

6. 如 Fig. 472 所示，試求其二圓柱之陰影。

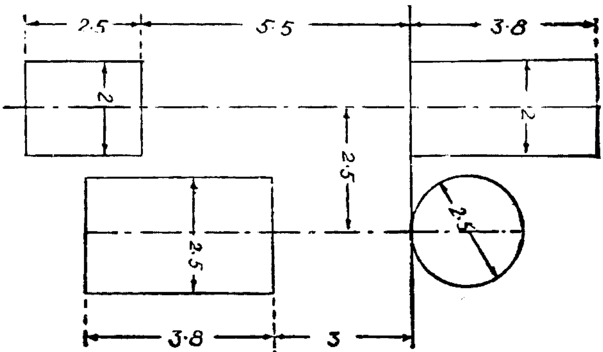


Fig. 472

7. Fig. 473 爲汽箭切斷後之半分，試求其投影。

8. 試將 Fig. 474, Fig. 475三倍擴大後，而求其立體面上之陰影。

9. 試將 Fig. 476, Fig. 477，二倍擴大後，而求其立體之陰影。

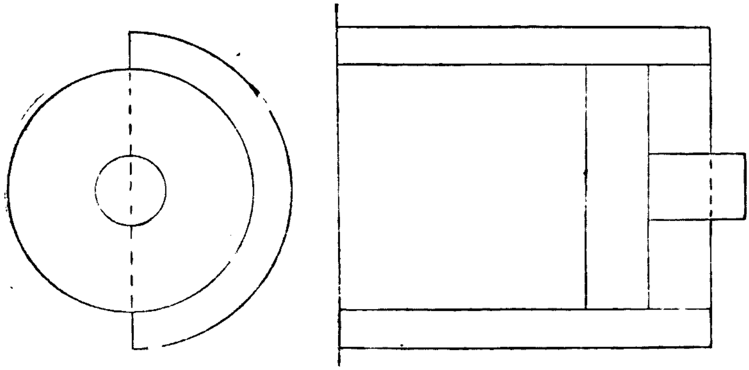


Fig. 473

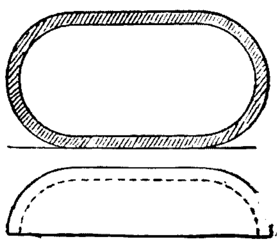


Fig. 474

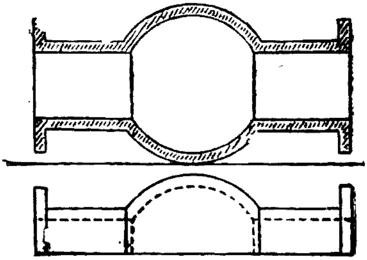


Fig. 475

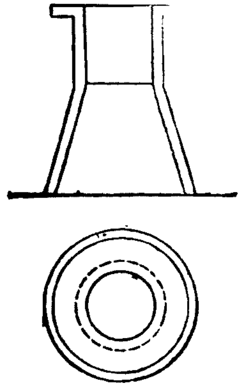


Fig 476

10. 試將 Fig. 478，二倍擴大後，而求其立體之陰影。

11. 如 Fig. 479所示，其半圓環之切口爲水平投影面上之平面圖，試求其立體之陰影。

12. 如 Fig. 480 所示之圓，爲高 5 糎之直立圓柱之平面圖，其矩形爲橫置於水平投影面上之圓柱之平面圖。試求其陰影。

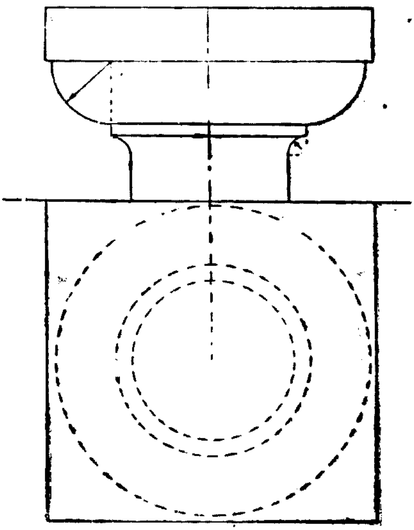


Fig. 477

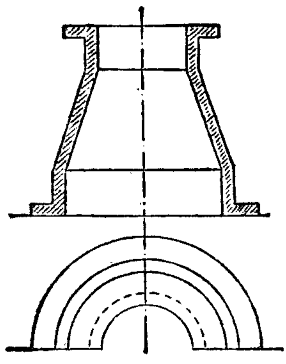


Fig. 478

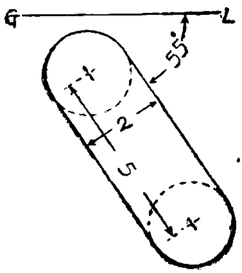


Fig. 479

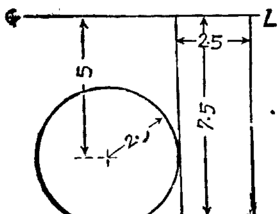


Fig. 480

13. 試求 Fig. 481 所示之球，向平面 P 所投之影。

14. 試求 Fig. 482 所示之圓與半球之陰影。

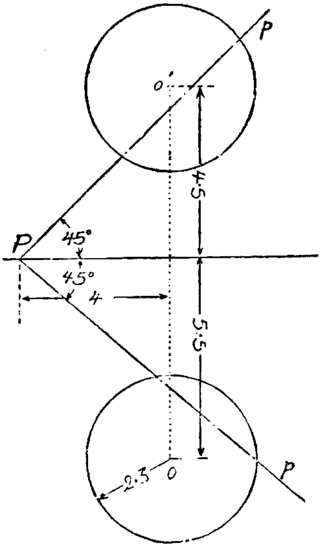


Fig. 481

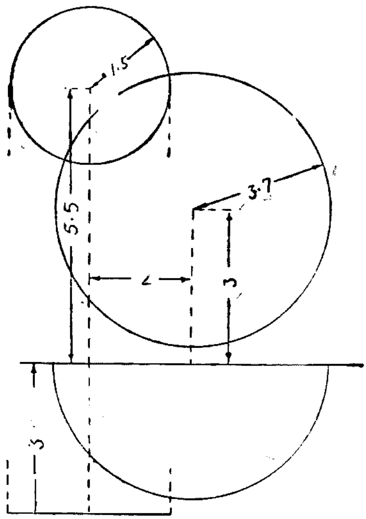


Fig. 482

15. 如 Fig. 483 所示，試求其圓錐之陰影。

16. a, b 各爲直徑 6 4 粍 4 0 粍，圓之中心，其間隔爲 5 4 粍。大圓與水平投影面切於一點，而爲中空半球之平面圖。小圓爲中心在水平投影面上方 5 0 粍之球之平面圖。今 a b 與基線成 4 5°，而置小球能向半球投影之位置，試求其各陰影。

17. 有底圓扼圓之直徑爲 8 糎，3 糎，高爲 8糎之單雙曲線迴轉體。其一底面位於水平投影

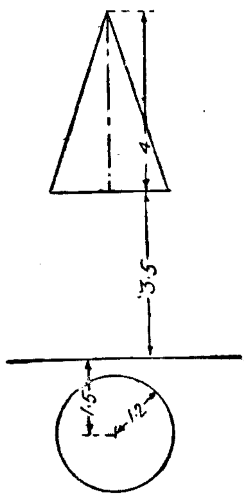


Fig. 483

面上。今將此立體之軸置於直立投影面前方 6 糎處，試求其陰影。

18. 有外徑爲 8 糎，內徑爲 4 糎，節距爲 3 糎之三角螺旋桿，其軸垂直於水平投影面，其長爲 9 糎。若光線平行於直立投影面與水平投影面成 30° 時，試求其陰影。

19. 有直徑 4 糎之球，其中心位於水平投影面上方 4 糎，直立投影面前方 4 糎處。發光點距球之中心爲 10 糎。今將發光點與中心相結所成之直線，與水平投影面成 50°，與直立投影面成 20°。試求其陰影。

20. 有直徑各爲 5 糎，長各爲 8 糎之互相直交之二圓柱，形成十字形。今其一直立，他一平行於直立投影面時，試求其陰影。

21. 傾斜於兩投影面之直線，向橫置於水平投影面直徑爲 5 糎之球投影時，試求其影。

第十二章　標高平面圖

1. 標高平面圖

正投影中，表示點之位置，厥爲平面圖與立面圖。今除去直立投影面之關係，專由平面圖與高亦可求其點之位置。其法僅於點之平面圖上記其高度之數字卽可耳。如此所作之圖，謂之標高平面圖（Figured plan or indered plan）。例如 Fig. 484 所示，圖中 $a_0\ b_{20}$ 爲一端 A 在水平投影面上，他端 B 高於水平投影面 20 糎之直線之標高平面圖也。此投影圖中，其對於直立投影圖全無關係，故基線亦無引之必要。

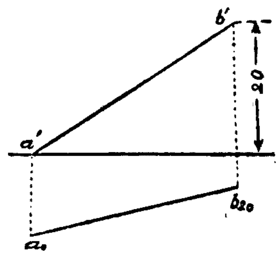


Fig. 484

作圖題 1. 過已知點 a_2 引平行於直線 $m_{10}\ n_{15}$ 之直線，求其標高平面圖。

解：平行線之投影爲平行，故由點 a_2 引平行線於 $m_{10}\ n_{15}$，取其長等於 $m_{10}\ n_{15}$。而於其他端明記 $\{2+(15-10)\}$ 或 $\{2-(15-10)\}$ 之指數可也。

作圖：如 Fig. 485 所示，$a_2\ b_7\ l_5\ m_{10}\ n_{15}$，而 b 之指數爲 $\{2+(15-10)\}$，卽 7。若 b 位於 a_2 之反對側，則可記入 $\{2-(15-10)\}$，卽 -3 之指數。

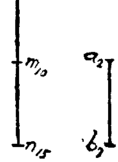


Fig 485

作圖題 2. 直線 $a_2\ b_7$ 爲已知，求其與水平投影面所成之角，及其線有 4 之高之點。

解：　將已知之直線迴轉於其平面圖之周，使其與水平投影面相一致。此時迴轉後之直線與平面圖間所成之角，等於直線與水平面所成之角。次於迴轉後之直線上，於 4 高之處取一點，後使其復歸原有之位置，卽於 4 之高處，而得其點之平面圖。

作圖：　如 Fig. 486 所示，由 a, b 向 a b 引垂線 a a′, b b′，取其各長爲 2, 9。此時，直線 a′ b′ 等於 a_2 b_9 之實長，a′ b′ 與 a b 所成之角等於直線與水平投影面所成之角。又 b b′ 上取 b m′ 等於 4 之長，由 m′ 引平行於 a b 之直線使其與 a′ b′ 相交於點 c′。此時由 c′ 向 a b 所引之垂線之足 c_4，卽爲所求之點之標高平面圖。

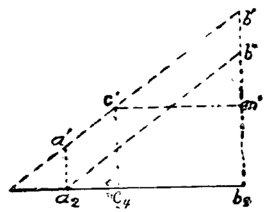


Fig.　486

求直線與水平投影面所成之角，其法可於 b b′ 上取 b b″ 等於(9－2）卽 7，而引 b″ a。此時因 a b″ // a′ b′，故角 b″ a b 爲所求之角。

（註）上記之作圖，因說明之便利計，故將點之指數從略。

作圖題 3.　求過已知點 m_9 與直線 a_{16} b_4 相交之水平直線之標高平面圖。

解：　於 a_{16} b_4 上，求與 m_9 有同指數之點，而引其與 m_9 相結之直線可也。

作圖：　如 Fig. 487 所示，將已知之直線迴轉於其平面圖之周，而求其與水平投影面相一致之位置 a′ b′。次於 a a′ 上取 a k′ 等於 9，由 k′ 引平行於 a b 之直線使其與 a′ b′ 相交於 n′。

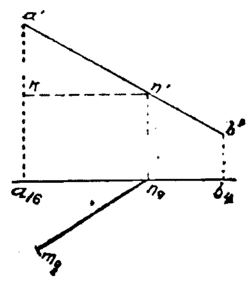


Fig.　487

更由 n′ 向 a b 引垂線，其足爲 n。此時，直線 $m_9\ n_9$ 卽爲所求之水平直線之標高平面圖。

作圖題4　三點 a_6, b_9, $c_{1\cdot5}$爲已知，於含此三點之平面上，求過$c_{1\cdot5}$之水平直線之標高平面圖。

解：　在含三點之平面內引一水平直線，後由 $c_{1\cdot5}$ 引平行於此之平行線可也。

作圖：　如 Fig. 488 所示，先引過 a_6 與直線 $b_9\ c_{1\cdot5}$ 相交之水平直線 $a_6\ m_6$，次由 $c_{1\cdot5}$引平行於此之平行線 $c_{1\cdot5}d$。引 $a_6\ m_6$ 之法，固可與本章作圖題 1. 同法求之。然本圖可於任意之位置引基線，而求其立面圖 a′ b′ c′ 之作圖可也。

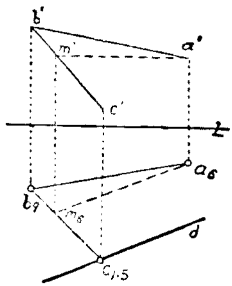


Fig. 488

2. 傾斜尺度

正投影圖表示平面之法，專賴其水平跡與直立跡而決定。今若僅對於水平投影面之關係，則於其平面上用垂直於水平跡之直線之標高平面圖足矣。何言之蓋，此平面與水平面所成之角，等於直線與水平面所成之角。平面之水平跡，因其指數通過零點且垂直於直線之平面圖，故能限定其平面。似此直線之標高平面圖，謂之平面之<u>傾斜尺度</u> (Scale of slope)。例如 Fig. 489 所示，$a_0\ e_{20}$ 爲平面T之傾斜尺度。平面之傾斜尺度與一般直線之標高平面圖之區別，厥爲沿此

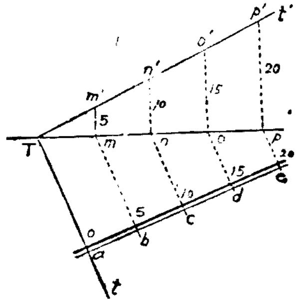


Fig. 489

線旁另附一較粗之直線。此直線通附於平面之上勾股之左側。

作圖題 5.　平面之傾斜尺度 a_{10} b_{30} 爲已知，求其與水平投影面所成之角。

解：　求表示已知平面之傾斜尺度之直線與水平投影面所成之角可也。

作圖：　如 Fig.490 所示，由 b 向 a b 引垂線於其垂線上，取 b b″ 等於(30－10)，卽等於 20 之高，而引 a b″。此時角 b″ a b，卽爲所求之角。

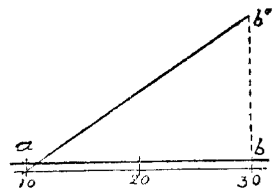


Fig. 490

作圖題 6.　平行平面之傾斜尺度 a_0 b_{20}, c_{10} d_{25} 爲已知，求兩者間之距離。

解：　以平行於傾斜尺度之一直線爲基線，而求其二平面之直立跡。此時直立跡間之距離等於二平面間之距離。

作圖：　如 Fig. 491 所示，以 a b 爲基線而求其直立跡 a b′, e′ d′。由是求得二直線間之距離，卽爲所求之距離。

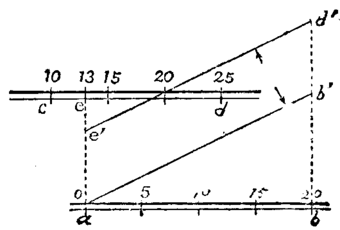


Fig. 491

作圖題 7.　二平面之傾斜尺度 a_{10} b_5, c_{10} d_5 爲已知，求其二平面相交之標高平面圖。

解：　於兩平面上引同高之水平直線，而求其交點。如此二交點所連結之直線，卽爲所求之直線。或於任意之位置引基線，求其二平面之

直立跡之交點，由其交點，而求其平面圖亦可。

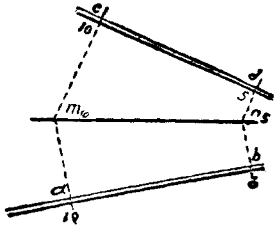


Fig. 492

作圖： 如 Fig.492 所示，乃連結同高之水平直線之交點 m_{10}, n_{50} 之圖也。如 Fig. 493 所示，先以 G_1 L_1, G_2 L_2 爲基線，由其各直立跡之交點 s′, t′, 而求其平面圖 s, t, 後將 s, t 相結而成直線 s t。次由 s′, t′ 測其至基線之距離，而得 11, 12。此數字即爲 s, t 之指數。

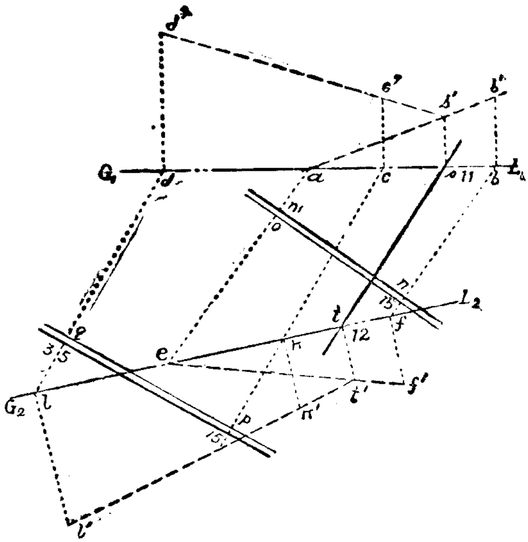


Fig. 493

作圖題 8. 含已知點 p_{33} 作垂直於以 a_0 b_{30} 爲傾斜尺度之平面，而與水平投影面成角 θ 之平面，求其傾斜尺度。

解： 以點 p_{33} 爲頂點，作底角 θ 之直立圓錐，而求其與直立圓錐相切，且與已知平面成垂直之平面之水平跡。此時所求之平面之傾斜尺度，因其垂直於所求之水平跡，故易求得其所求之傾斜尺度。

作圖： 先引平行於 a b 之基線 G L, 而求點 p_{33} 之立面圖 p′ 及已

知平面之直立跡 k l′。然後以點 p_{33} 爲頂點，而求底角 θ 之直立圓錐之水平跡圓 m n。又由點 p_{33} 向已知平面引垂線，作垂線之平面圖 p r。及立面圖 p′ r′，而求其水平跡 r_0 此時由 r_0 向圓 m n 所引之切線 u s，卽爲所求之平面之水平跡。依此，引垂直於 u s 之任意之直線 s t，更由 p 向直線 s t 引垂線 p t，後記取 s, t 之指數 o, 33。故 s_0 t_{33} 爲傾斜尺度之平面，卽爲所求之平面。

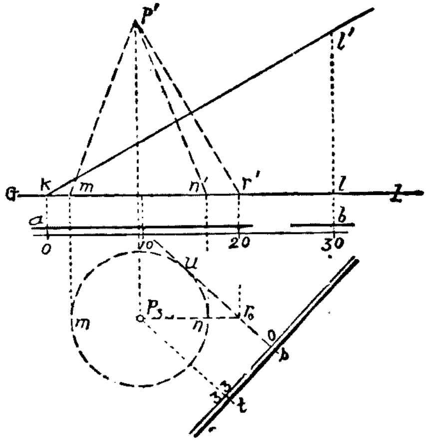


Fig. 494

作圖題 9 二直線之標高平面圖 a_2 c_4, a_2 b_1 爲已知，求其夾角垂直二等分之平面之傾斜尺度。

解： 由已知二直線之交點向含二直線之平面引垂線，及於二直線之夾角引二等分之直線。此時含此垂線與二等分線之平面，卽爲所求之平面。

作圖： 如 Fig. 495 所示，於 a_2 c_4 上求與 b_1 同高之點 k_1，而引直線 b_1 k_1。此時 b_1 k_1 因其爲含已知二直線之平面內之水平直

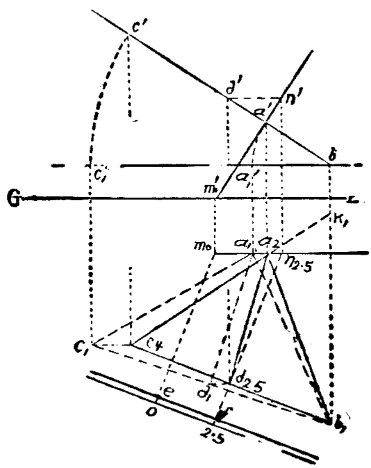


Fig. 495

線。故若引與此垂直之基線 G L，則含二直線之平面，應垂直於直立投影面。當求得二直線之立面圖 a' b' c' 之後，由 a' 向其引垂線 a' m'，又由 a 引平行線 a_2 m_0 平行於基線。此時以 a' m' 為立面圖，a_2 m_0 為平面圖之直線，乃由點 a_2 向含二直線之平面所引之垂線。

次將二直線迴轉於 b_1 k_1 之周，若求其成水平時之平面圖 a_1 b_1，a_1 c_1，則角 b_1 a_1 c_1 等於二直線間之實角。由是，引角 b_1 a_1 c_1 二等分之直線 a_1 d_1，後使其復歸原有之位置，而得二等分線之平面圖 a_2 $d_{2\cdot5}$。後於此二等分線上，取任意之一點 $d_{2\cdot5}$，於其垂線 a_2 m_0 上求與 $d_{2\cdot5}$ 同指數之點 $n_{2\cdot5}$，而引直線 $d_{2.5}$ $n_{2.5}$。斯時此直線，因其為所求之平面上其水平直線之標高平面圖。故引垂直於此之 e f，而於其交點 f 旁，付以 2.5 之指數。又由垂線 a_2 m_0 之水平跡 m_0 向 e f 引垂線，其足為 e，而 e 之指數為 o。此時傾斜尺度之平面 e_0 $f_{2.5}$，即為所求之平面。

作圖題10. 二平面之傾斜尺度 a_0 b_{20}，c_0 d_{20} 為已知，求其夾角二等分之平面之傾斜尺度。

解： 先求已知二平面之相交跡，次作二平面之相交跡之垂直之平面。次以此平面切已知平面，而作其交切線間之角二等分之直線。此時，含上述之二平面之相交跡與二等分線之平面，即為所求之平面。

作圖： 如 Fig. 496 所示，乃先求二平面 a_0 b_{20}，c_0 d_{20} 相交之標高平面圖 e_0 f_{20}，及引二平面之水平跡 a e_0，c e_0。次引垂直於平面圖 e f 之 x_0 y_0，其交點為 t，又後求其與二平面之水平跡之交點。然後由 f 向 e f 引垂線，而於垂線上取 f f″ 等於 20，於 e f 上取 t R_0 等於由 t 向 e f″ 所引之垂線之長。此時 x_0 R_0，y_0 R_0，乃以 x_0 y_0 為水平跡，以垂直

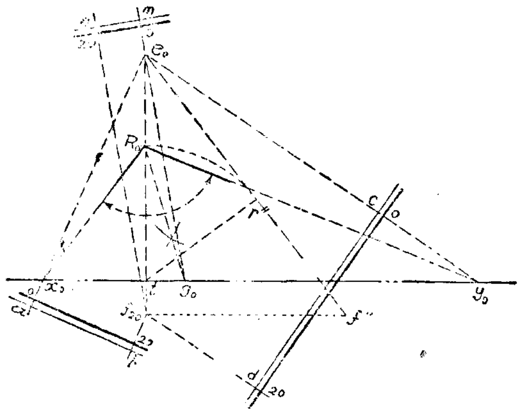


Fig. 496

於直線 e_0 f_{20} 之平面與二平面 a_0 b_{20} c_0 d_{20} 之相交跡，倒置於水平投影面時之位置。依此，若角 x_0 R_0 y_0 之二等分線與 x_0 y_0 之交點爲 g_0，則直線 e_0 g_0 爲所求之平面其水平跡之標高平面圖。是故置垂直於 e_0 g_0 之任意直線 m n，與 e_0 g_0 相交之點爲 m。由 f 引平行於 e_0 g_0 之直線，使其與 m n 之交點爲 n，後將 m, n 之指數 0, 20 記入，則傾斜尺度之平面 m_0 n_{20}，即爲所求之平面。

作圖題 11 m_{45} n_{10} 爲標高平面圖之直線，a_0 b_{30} 爲傾斜尺度之平面，求其間之角二等分直線之標高平面圖。

解： 先由 m_{45} n_{10} 上任意之點 m_{45} 向平面 a_0 b_{30} 引垂線而求其足。次求 m_{45} n_{10} 與平面 a_0 b_{30} 之交點。後求以 m_{45} 與上述之二交點爲頂點之直角三角形，則得已知之直線與平面間所成之實角。由其實角之二等分直線，再求其投影可也。

作圖： 如 Fig. 497 所示，a b 爲基線，求得平面 a_0 b_{30} 之直立跡 a b 及 m_{45} n_{10} 之立面圖 m n′ 後，由點 m_{45} 向平面 a_0 b_{30} 引垂線，而

求其足之立面圖 d'，平面圖 d。又 $a\,b'$ 與 $m'\,n'$ 之交點爲 p'，由 p' 所引之投射線與 $m\,n$ 相交之點爲 p，則點 p，p' 爲已知之直線與平面之交點。由 p' 至基線所測得之距離爲 21。故 21，爲 p 之指數。次將已知之平面迴轉於其水平跡之周，使其倒置於水平投影面，則點 (p, p')，(d, d') 之位置爲 P_0，D_0。此時以 $P_0\,D_0$ 爲底邊，以等於 $m'\,d'$ 之 $M_0\,D_0$ 爲高之直角三角形 $M_0\,D_0\,P_0$，應爲三角形 $m\,d\,p$，$m'\,d'\,p'$ 之實形。依此，置角 $M_0\,P_0\,D_0$ 之二等分線與 $M_0\,D_0$ 之相交點爲 Q_0，而於 $m'\,d'$ 上取 $q'\,d'$ 等於 $Q_0\,D_0$。此時直線 $p'\,q'$ 因其爲所求之直線之立面圖，故可由此而求其平面圖 $p\,q$。後由 q' 至基線測得其距離爲 26.5，是爲 q 之指數。後將其指數記入，其所得之 $p_{21}\,q_{26.5}$，是爲所求之直線之標高平面圖。

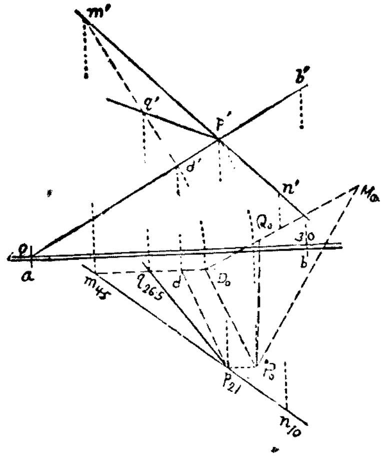


Fig. 497

作圖題12. 三角形 A B C (AB＝25 糎，BC＝30 糎，CA＝40糎) 之頂點 A, B, C, 於水平投影面上方之 2 糎，1 糎，2.5 糎處，求其三角形之標高平面圖及其外切圓之中心向三角形所引垂線之標高平面圖。

解： 先將所求之三角形，迴倒於水平投影面作圖，次求含三角形之平面之水平跡。後引垂直於此之基線，再將其置於所求之位置求之可也。

作圖：　如 Fig.498，乃示於任意之位置，作與已知之三角形同形之三角形 $A_0\,B_0\,C_0$。次將此迴轉於含三角形之平面之水平跡之周，使其倒於水平投影面之位置。後以 A_0, B_0, C_0 爲中心，以 2 粴，1 粴，2.5 粴爲半徑作圓。圓 A_0, B_0 之共通切線與直線 $A_0\,B_0$ 相交之點爲 e。圓 B_0, C_0 之共通切線與直線 $B_0\,C_0$ 相交之點爲 f。此時直線 e f，乃含三角形之平面之水平跡。次垂直於 e f 引基線 G L，其交點爲 P。後以 P 爲中心，由 c_0 向 G L 引垂線，而過垂線之足作圓弧，使其與由 G L 有 2.5 粴之距離之直線相交於 c′。此時直線 P c′，乃含三角形之平面之直立跡。而三角形之立面圖，應在 P c′ 之上。依此，將三角形 $A_0\,B_0\,C_0$ 移起，而得其立面圖 a′ b′ c′ 平面圖 a b c。後將 a, b, c 之指數 2, 1, 2.5 記入，則所得之 $a_2\,b_1\,c_{2.5}$，卽爲所求之標高平面圖。

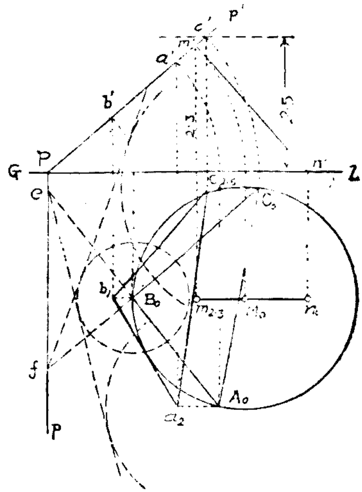


Fig. 498

次求三角形 $A_0\,B_0\,C_0$ 之外切圓之中心 M_0，將 M_0 移起，而得其立面圖 m′，平面圖 m。由 m′ 至 G L 之距離，所測得之 2·3 卽爲 m 之指數。故 $m_{2\cdot3}$ 爲所求外切圓中心之標高平面圖。

次由點 m, m′ 向含三角形之平面引垂線 m n, m′ n′，而求其水平跡 n。後將其指數 0 記入，則所得之直線 $m_{2\cdot3}\,n_0$，卽爲所求之直線之標高平面圖。

作圖題13. 有切於傾斜尺度 a_0 b_{30}, c_0 d_{30} 之平面而作頂點之高爲 15 頂角 α 之圓錐，求其平面圖。

解： 先求二平面之相交，次於其上求水平投影面上方高 15 處之點 p_{15}。另引二直線 P W, P Z 成角 α，作切二直線任意之圓，其中心爲 S，其半徑爲 r。然後平行於各平面而求隔 r 之距離之平面 e_0 f_{30}, g_0 h_{30} 及其交點 k_0 l_{15}。次作 p_{15} 爲中心，P S 爲半徑之球，使其與 k_0 l_{15} 相交於點 $s_{6\cdot8}$。後以 $s_{6\cdot8}$ 爲中心，r 爲半徑所作之球，卽爲所求之圓錐之一內切球。由此內切球可求其圓錐之平面圖。

作圖： 如 Fig. 499 所示，乃其大要之圖也。

3. 等高線

表示地球表面各部起伏之狀態，可以等距離之多數水平面切之，而

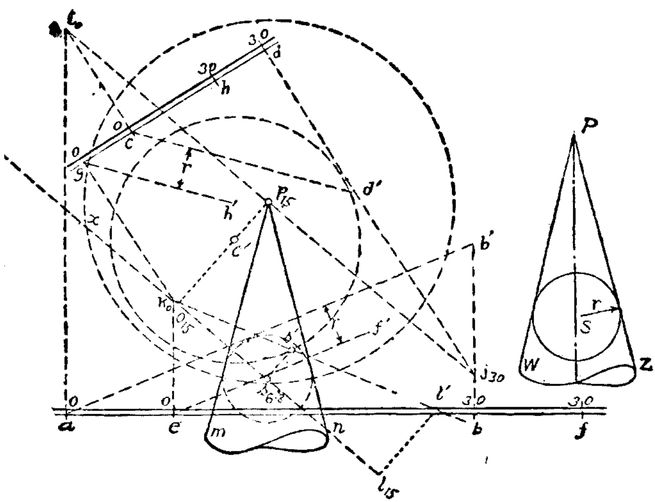


Fig. 499

於其各切口之平面圖上，記入其各由基準面之高。後將同高之點連結而成一線。其線之平面圖，通稱爲等高線(Contour line)。測高之基準面，通用平均海水面 間有特殊目的，而採用最高海水面或最低海水面者。

作圖題14. 依等高線，將已知地表面之一部，以傾斜尺度 $m_{70}\ n_0$ 之平面切之，求其切口之平面圖。

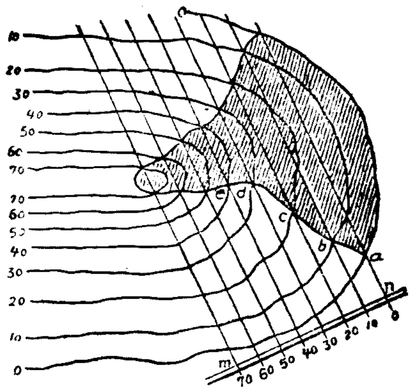


Fig. 500

解：於切斷面上，引與各等高線等高之水平直線，而求其各對應之等高線相交之點。後將其諸交點連結而作成曲線可也。

作圖：如 Fig. 500 所示，由 m n 上之 0, 10, 20,……諸點，引垂直於 m n 之直線，而求其有指數 0, 10, 20,……等之等高線之相交點 a, b, c,……是時曲線 o b c……，即爲所求之切口之平面圖。

練習題

1. 如 Fig. 501 所示，試求其三平面共通點之標高平面圖。

2. Fig. 502 中之 e f，乃含三角形 a_{15} b_{25} c–5 之平面其二等分之直線之平面圖。今 e 之指數爲 16，試求 f 之指數。

3. 三角形 a b c (ab=55 粍，bc=45 粍，ca=35 粍)，爲三角形 A B C 之平面圖。A, B, C 之高爲 5 粍，−30 粍，40 粍。於 B C 上取高爲 15 粍之點，試求其標高平面圖。又過 B 求平行於 A D 之直線之標高

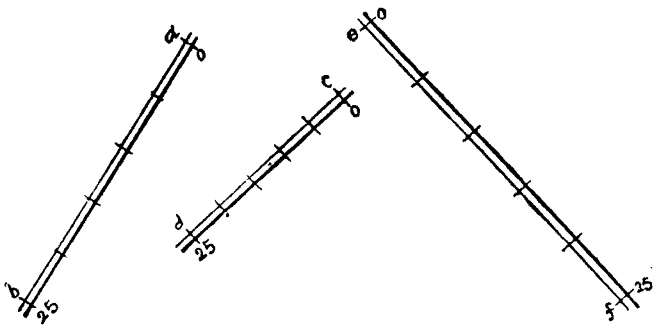


Fig. 501

平面圖。及此三角形重心之標高平面圖。

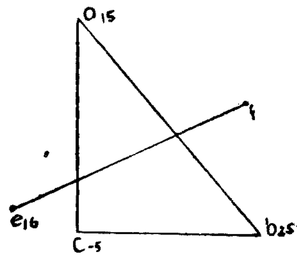


Fig. 502

4. 有一邊長爲 60 粍之正三角形 a b c, 其各頂點之指數爲 5, 35, 25。其指數之單位爲粍，試求含此三角形之平面之傾斜尺度。

5. 有一邊長爲 40 粍之正六角形 a b c d e f; a, b, c, d, e, f, 之指數爲 5, 55, 25, 3, 65, 40。今指數之單位爲粍，試求含 A C E, B D F 之平面間之角其二等分之平面之傾斜尺度。

6. 有一邊長爲 50 粍之正方形 a b c d。a, b, c, d, 之指數爲 30, 5, 60, 55。今指數之單位爲粍，試求直線 a_{30} c_{60}, b_5 d_{55} 間之角。

7. 直角相交之三直線中，其二直線與水平投影面成 30°. 45°，試求三直線之標高平面圖。

8. 與水平投影面成 60° 之平面上，試求三角形 A B C 之標高平面圖。然其 A B, B C, 與水平投影面成 35°. 45°。A, B, C, 位於水平投影

面之上方 5 粍，35 粍，55 粍處。

9. 正四面體之一面與水平投影面成 60°，其三頂點，位於水平投影面之上方 10 粍，20 粍，45 粍處，試求此四面體之標高平面圖。

10. 內切於直徑 80 粍，中心之高爲 40 粍之球，試求作其一面與水平投影面成 65° 之正四面體之標高平面圖。

第十三章 軸測投影圖

1. 總說

空間中之點，線，面，立體等，如欲其圖正確之表示及作圖問題之解釋，必須有二或二以上之投影方能盡其詳。若以立體之大體形狀為主要之目的時，則僅以一投影表之足矣。以下所述之軸測投影圖，斜投影圖，及透視圖等，皆屬此類。故通名之曰單式投影圖 (Single plane projection)。而第十一章以上所述之者，名之曰複式投影圖 (Double plane projection)。

器具，機械，建造物等之各稜，多為長，寬，高，三方向之直線彼此互相直交。其每二對所圍成之三種平面亦互相直交，而形成立體之表面。

凡器具，機械等之工作圖 (Working drawing)，其着眼點專以作圖之簡易及明示其各部分之實長為主。故凡立體，常置其一面平行於水平面，他一面平行於直立面。其形狀之構造，多以平面圖，立面圖，側面圖等表示為通例。例如 Fig. 503 (1) (2) (3)，乃示一直六面體之工作圖，其平面圖 (1)，正面圖 (2)，側面圖 (3)，乃表示其立體之上面，前面，側面之實形。此種投影圖作圖既易，其各稜之實長，亦復易測。以之用於實用上之工作圖，其便利自不待言。惟各投影專表示其一面，而不能與他面連絡之表示，若用之於複雜之立體，則其實形，頗難辨別。茲欲去此缺點，可將其立體縱橫旋轉，或變更其基線，而作各面之傾斜投

影，如圖(5)。此圖雖能表示三面連絡之狀態及實物之形狀，然作圖之繁雜及測各稜之實長不易，是又不得不爲此投影圖答。

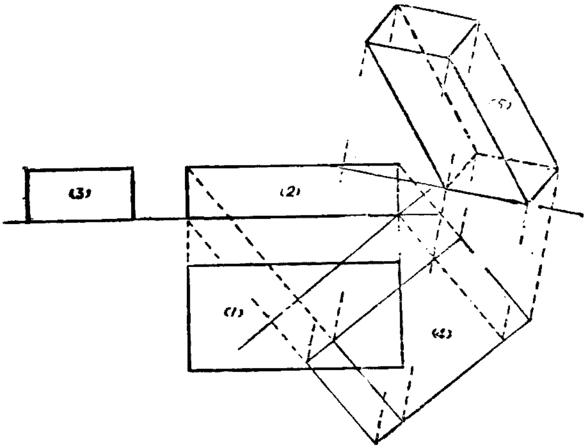


Fig. 503

如 Fig. 504 (1), (2), (3),乃示稍形複雜之立體之平面圖，正面圖，及側面圖。斯投影圖，理論上雖能完全表示立體之形，然採用此圖時，即

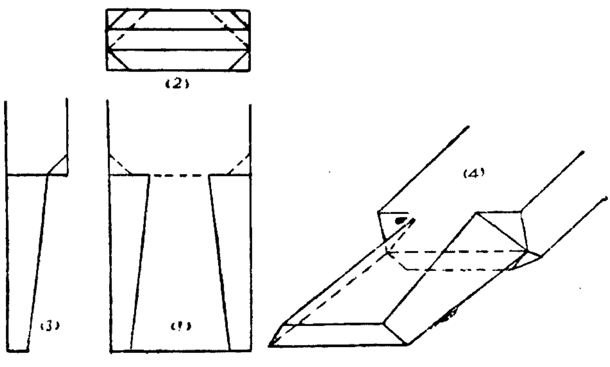


Fig. 504

專門技術師，亦不易於判斷，且因之而生誤斷者頗多。是故於其投影之

旁，常附添如 (4) 之副投影而說明其形狀。或僅採用副投影 (4) 附以數字，表示其各部分之長，用代普通之投影圖。

2. 軸測投影圖

前節所示之副投影，不必旋轉其立體或變更其基線，而卽作圖之方法也。其法，先決定相互直交之三直線之投影，及沿此三直線測其與已知之實長相對應之長而定其縮尺。後以其三直線爲基準，卽軸，而定其各點及各線之投影。凡根據此法，所作之投影圖，謂之軸測投影圖 (Axonometric projection)。

3. 軸測尺度

如 Fig. 505，乃示直線 ab, bc, ca 爲互相直交之三平面於一投影面上所呈之跡。由 a, b, c 向各對邊所引之垂線 oa, ob, oc，爲三平面相交之投影，其三直線相會於一點 o。次將 ao 延長，使其與 bc 相交之點爲 m，更以 am 爲直徑引半圓，使其與由 o 向 am 所引之垂線相交於點 o_1。此時角 ao_1m 爲

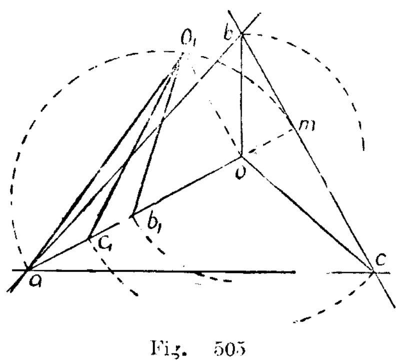


Fig. 505

直角。故 oo_1 之長等於 o 點至投影面之實距離。依此，若於 oa 上取 ob_1, oc_1 等於 ob, oc，則 o_1a, o_1b_1, o_1c_1 之長，各等於三直線 oA, oB, oC 之實長。故平行於 oA, oB, oC之直線，其投影之長，各等於其實長之 oa: o_1a, ob: o_1b_1, oc: o_1c_1，後依此，將此比爲縮尺比(Representative fraction)，而作縮尺 (Scale)。後以 oa, ob, oc 爲軸測軸 (Axonometric axis) 時，

則平行於此軸之直線之長可易測也。如斯之縮尺，謂之軸測尺度 (Axónometric scale)。

三軸與投影面所成之角相異時，則上述之三縮尺比均不相等。如斯之軸測投影圖，謂之三測投影圖 (Trimetric projection)。三軸之中，其二軸與投影面所成之角相等時，則上述之縮尺有二，如斯之軸測投影圖，謂之二測投影圖 (Dimetric projection)。三軸均與投影面成相等角時，則縮尺只有其一，如斯之軸測投影圖，謂之等測投影圖 (Isometric projection)。實用上最簡單者，厥為等測投影圖也。

4. 立方體之等測投影圖

立方體之一對角線垂直於投影面時，其各稜均與投影面成等角。依

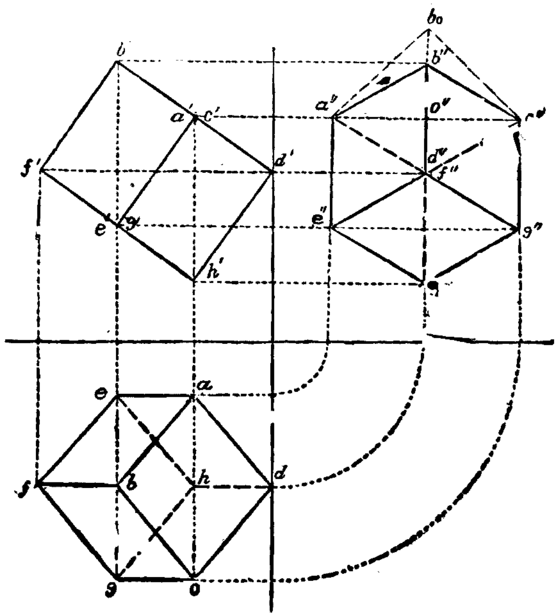


Fig. 506

此，以過其對角線之一端之三稜爲軸之等測投影圖而作副投影，可易求也。如 Fig. 506 所示，a′ b′ c′ d′……，爲對角線 F D 平行於基線時之立面圖，b′ d′ 等於面之對角線之實長，b′ f′ 等於稜之實長。又 a b c d……爲其平面圖，a c 等於面之對角線之實長。又 a″ b″ c″ d″……爲垂直於對角線 F D 之平面上之投影，而 a″ b″ c″ g″ h″ e″爲正六角形，a″ c″ 等於面之對角線之實長，d″ a″，d″ c″，d″ h″，互成 120°。故此副投影，以 d″ a″，d″ c″，d″ h″ 爲軸測軸之立方體之等測投影圖。因知三軸測軸間之角，互成 120°。

等測投影圖中之軸測軸，謂之等測軸 (Isometric axis)。平行於諸軸之直線，謂之等測線 (Isometric line)。

次引對角線 a″ c″ 使其與 d″ b″ 之交點爲 o″。更於 o″ b″ 之延長線上取 o″ b_0 等於 o″ a″。此時三角形 a″ o″ b_0 爲二等邊直角三角形。a″ b_0 等於其立方體之稜之實長。而 $\angle b_0$ a″ b″ = 15°，$\angle$ a″ b″ b_0 = 120°，故

$$a'' b'' : a'' b_0 = \sin 45° ; \sin 120° = \sqrt{2} : \sqrt{3}\text{。}$$

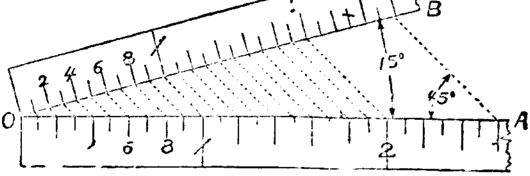


Fig. 507

由是可知，其立方體之稜，及平行其稜之諸直線之等測投影爲實長之 $\sqrt{2} / \sqrt{3}$。卽等測投影圖中，平行於等測軸之直線之投影之長爲實長

之$\sqrt{2}/\sqrt{3}$。凡以此爲縮尺比所作之縮尺,謂之等測尺度(Isometric scale)。此等測尺度，可由$\angle b_0 a'' b'' = 15°$, $a'' b_0 b'' = 45°$ 而求出。如Fig. 507 所示，圖中取角 AOB 爲 15°, 而於 O A 上施以普通之尺寸，由此尺寸之諸點引與 O A 成 45° 之直線使其與 O B 相交。次以其交點

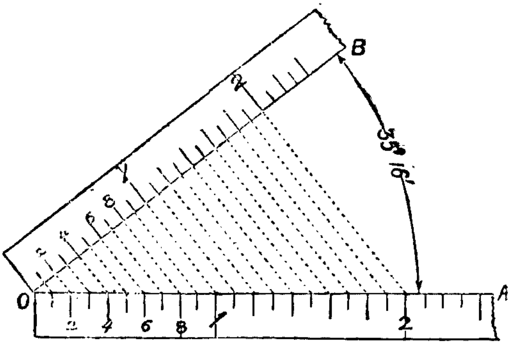


Fig. 508

爲刻度點而作尺度。此時尺度 O B 爲等測尺度。或因其爲 $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 35° 16'$, 故於 Fig. 508 中，先取角 A O B 等於 35° 16', 次於 OA 上由已刻成之普通尺度之刻點向 O B 引垂線，後將此等垂線之足作刻度點之尺度。此時尺度 O B, 卽爲等測尺度。

5. 等測圖

等測投影圖之縮尺,因其三軸共通,故以原尺代用縮尺，將其投影圖向其三軸之方向同樣擴大,而得與等測投影圖相似之圖。其明示之立體之形與等測投影圖有同一之效果。且製圖或於圖上測其長度時，均能使用實尺。故用作實用圖面便利頗多。如斯之圖，稱之爲等測圖(Isometric drawing)。

6. 平面形之等測圖

作平面形之等測圖時，先須以一矩形包之，將其相隣之二邊使其與等測軸之二軸相一致，而作其矩形之等測圖。然後以此矩形爲基本，而

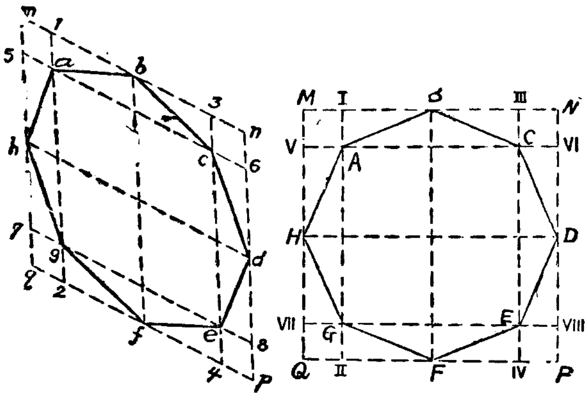


Fig. 509

求其已知平面形之各點之位置可也。如 Fig. 509 所示，爲已知之正八角形 A B C D E F G H 以一正方形 M N P Q 包之。後基於此，而求其等測圖 a b c d e f g h 之圖也。又如 Fig. 510 所示，乃基於圓之外接正方形之等測圖而求圓之等測圖之例也。其圓之等測圖爲橢圓，故如圖所示以圓弧作近似之橢圓可也。

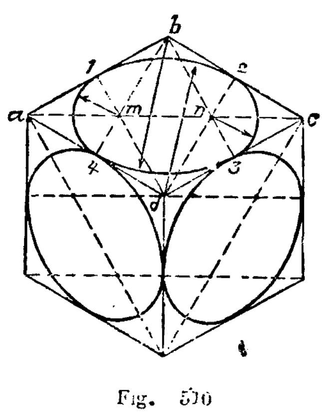


Fig. 510

7. 立體之等測圖

立體之等測圖乃以包函立體之長方目之等測圖爲基準而作之圖也。如 Fig.

511 所示，其右圖乃表示左圖之立體之等測圖也。

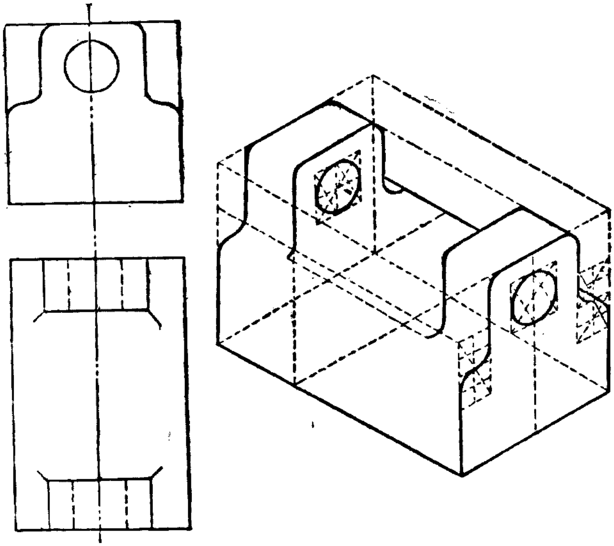


Fig. 511

8.　等測投影圖上之陰影

等測投影圖中，其光線之方向，雖可任意，然於普通立方體之三稜爲軸時，以平行其一對角線爲常則。又因於投影面上，不易求其影，故於三軸之中，在含其二軸之平面上求之。例如 Fig. 512 所示，圖中以三稜 f b, f g, f e 爲三軸立方體之等測投影圖爲 a b c d e f g h，對角線 a g 爲光線之方向，而 e g 乃含光線 a g 且平行於 f b 之平面與含二軸 f g, f e 之平面之相交跡。依此，則光線之等測

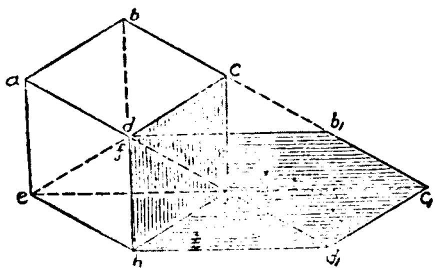


Fig. 512

圖必平行於等測軸之一。又平行於光線及其一軸之平面與含他二軸之平面之相交跡爲垂直於前者之軸。

根據上節之所述，則 Fig. 512 所示之立方體之陰影不難求得。次由 d, c, b 引平行線平行於 a g，而由 h, g, f，引平行於 e g 之直線使其與此相對應之交點爲 d_1, c_1, b_1。此時多角形 $hd_1c_1b_1fg$ 所圍成之圖形，乃含二軸 e f, f g 之平面上之影。後由此影可知三面 e f g h, b c g f, d c g h 均爲陰面。如 Fig. 513 所示，乃七個同形之立方體所構成之立體，而求其陰影之圖也。

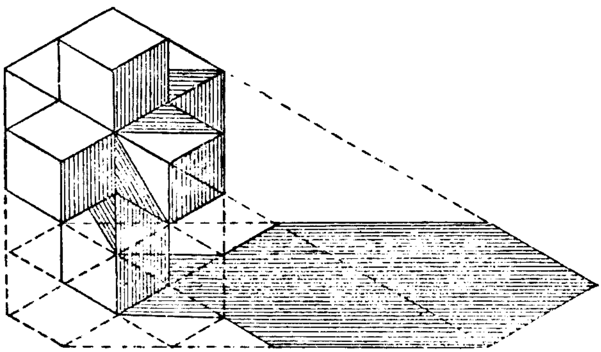


Fig. 513

作圖題 1. 有貫通六角板之圓柱，求所成之立體上之陰影。

解：如 Fig. 514 所示，其圓柱之軸平行於其一等測軸 o y，而其六角板之一面置於含有他軸 o x, o z 之平面上。今求點 u_1 向圓柱所投之影 u_2 時，可由 u_1 引平行於 o y 之直線而求其與含有圓柱底之平面之相交點 u。次由 u 向 o y 引垂線而求其與圓柱底之交點 u_0。更由 u_0 引平行線於 o y 及由 u_1 引平行於 o z 之直線使其相交之點爲 u_2 此時 u_2 即

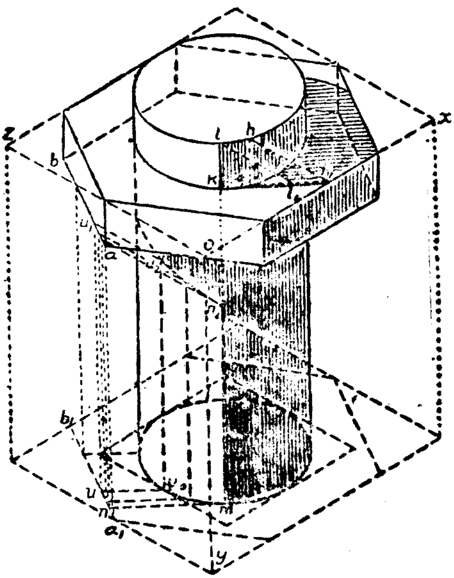


Fig. 514

爲所求之影。又求點 h 向六角板所投之影 h_1 時，可由 h 引平行線於 o y，使其與六角板相交之點爲 g。此時由 g 引垂直於 o y 之直線及由 h 引平行於 o z 之直線，其相交之點 h_1，卽爲所求之影。又求圓柱之陰線時，可向其底引垂直於 o y 之切線，其切點爲 m。此時過 m 之面素 ml，卽爲所求之陰線。綜合上之所述，卽求得立體上之陰線。

作圖題 2. 已知之六角柱其底置於二軸 O X，O Z 上，求其陰影。

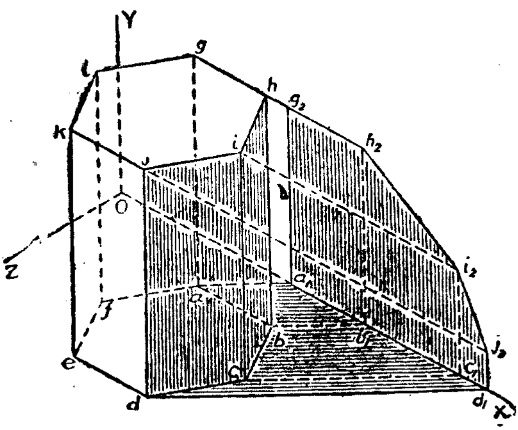


Fig. 515

作圖：如 Fig. 515 所示，先由 d 引垂直於 O Y之直線，使其與 O X 之交點爲 d_1。次由 d_1 引平行線於 O Y，及由 j 引平行於 O X 之直線，使其相交之點爲 j_2。此時 d d_1 爲稜 j d 向面 X O Z 所

投之影，而 $d_1 j_1$ 乃向面 Y O X 所投之影。同法，若求得角柱向平面 X O Z, Y O X 所投之影，而由此影可決定其陰面。

練習題

1. 試將 Fig. 516 所示之立體，擴大二倍後，而作其等測圖。

2. 試將 Fig. 517 所示之齒車擴大二倍，而求其等測投影圖。

3. 試將 Fig. 518 所示之鋲擴大二倍，而求其等測投影圖。

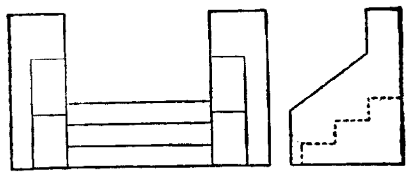


Fig. 516

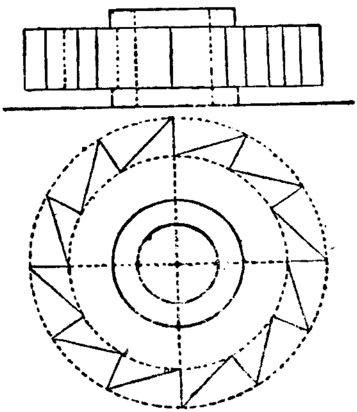


Fig. 517

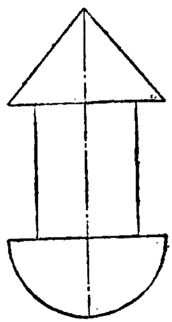


Fig. 518

4. 試求 Fig. 519 所示之立體之等測圖及求其陰影。

5. 試求 Fig. 520 所示之立體之等測圖及求其陰影。

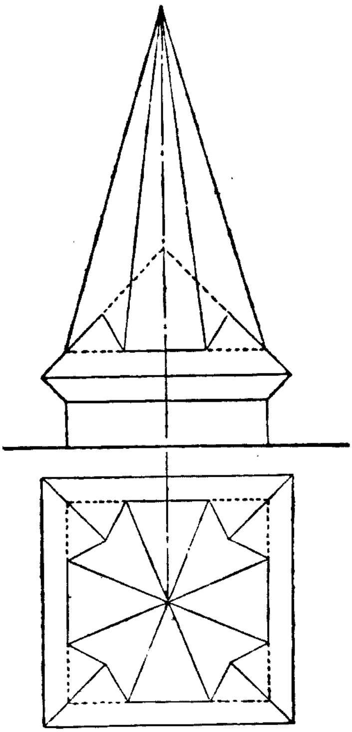


Fig. 519

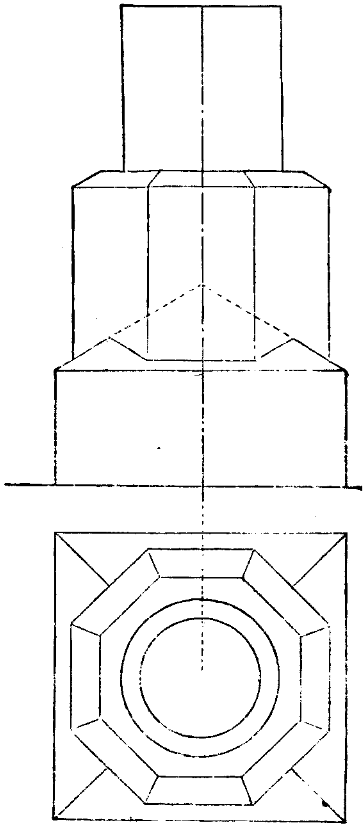


Fig. 520

6. 有直徑 5 糎，節距 3 糎之螺旋線，試作其三卷，並求其等測投影圖。

7. 有長軸 8 糎，短軸 5 糎之長橢球，試求其等測投影圖及其陰影。

8. 有一邊長爲 4 糎之正八面體，試求其等測投影圖，及其陰影。

9. 有外徑 8 糎，內徑 7 糎，長 3 糎之圓管，試求其等測圖及其陰影。

10. 有一邊長 3 糎之正十二面體，試求其等測圖及其陰影。

斜投影圖

第十四章　斜投影

1.　基本作圖

投影圖法中，凡投射線均互相平行，今假其投射線與投影面斜交時，則所得之投影圖，謂之斜投影圖（Oblique projection）。斜投影圖，常作於直立投影面上，其主眼如軸測投影圖然，能以單一之投影，而表示其立體之概形。茲關於斜投影圖之定理，就其主要者述之如下：

(1)連結二點之直線之斜投影為連結二點斜投影之直線。

(2)平行直線之斜投影相平行，其投影長之比等於原直線實長之比。

(2′)相等且平行之直線，其斜投影亦相等且平行。

(2″)將有限直線分成或比之點之斜投影，為該直線之斜投影分成同比。

(3)平行於投影面之平面圖形之斜投影與原圖形相同且平行。

〔備考〕　或圖形依平行光線投於直立投影面上之影，為該圖形之斜投影。

斜投影中之投影線因為平行，故平行於投影面之直線，其投影之長與實長相等。又投影線與投影面成45°時，其垂直於投影面之直線之投影等於其實長。如 Fig. 521 所示，圖中垂直於投影面 V 之直線 A B，其斜投影 A b_1，A b_2 等之等於實長 A B，可由三角形 B A b_1，B A b_2 為二

等邊直角三角形而知之。是故，斜投影中之投影線，若使其與投影面成45°，則作圖較便。如斯之斜投影，謂之克阿利亞投影(Cavalier projection)。

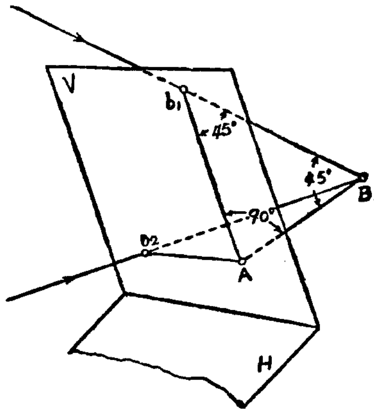


Fig. 521

作長方柱之克阿利亞投影時，若置其一面平行於投影面，則平行於投影面之面之投影等於其實形，而各稜之投影，等於其各之實長。又凡立體上各點之位置，因由其直交三軸而限定，故三軸中若其一軸垂直於投影面，則平行於三軸之直線投影之長均等於其實長。故易作其立體之克阿利亞投影。

垂直於投影面之直線，其投影之長，若使其等於其實長之二分之一，可置其投影線與投影面所成之角約爲 72° 27′ 即可。如斯之斜投影，謂之克比烈特投影 (Cabinet projection)。

2 長方柱之斜投影

長方柱之斜投影，其能作各種立體之斜投影之基礎者，茲述之如次。

如 Fig. 522 所示，取矩形 a b c d 等於長方柱一面之實形，由 c 與 c d 成任意之角 θ 引 c g，取其與垂直於面 a b c d 之稜之實長相等。次作平行四邊形 b c g f，矩形 f g h e，平行四邊形 a b f e，c d h g。此時 a b c d e f g h 爲已知長方柱之克阿利亞投影。如欲作克比烈特投影，可取 c g 等於其實長之半作圖可也。

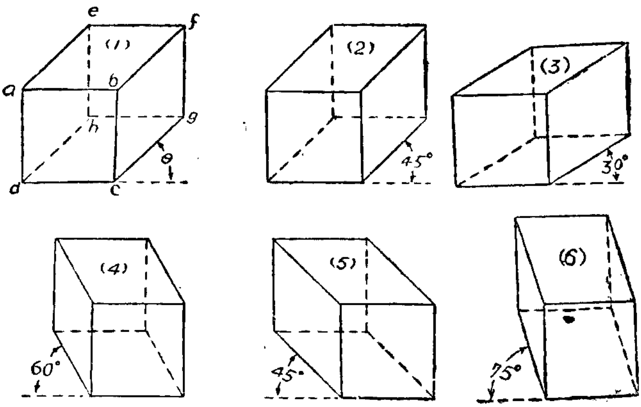


Fig. 522

3.　平面形之斜投影

平面形之斜投影之作法與平面形之等測投影圖同。必先作包函平面形之矩形之斜投影圖，後基此而求所求之平面形上各點之位置。

如 Fig. 523 所示，乃求圓之斜投影圖也。當其圓平行於投影面時，其投影爲圓，其不平行時爲橢圓。

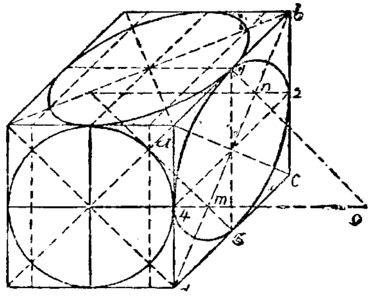


Fig. 523

4.　立體之斜投影

作立體之斜投影之法與等測圖之作法同。先以包函立體之長方柱之斜投影爲基礎，而後作其斜投影圖可也。如 Fig. 524 所示，乃將附有環鈕之圓管切開分成半分後所成之斜投影圖也。

5.　斜投影之陰影

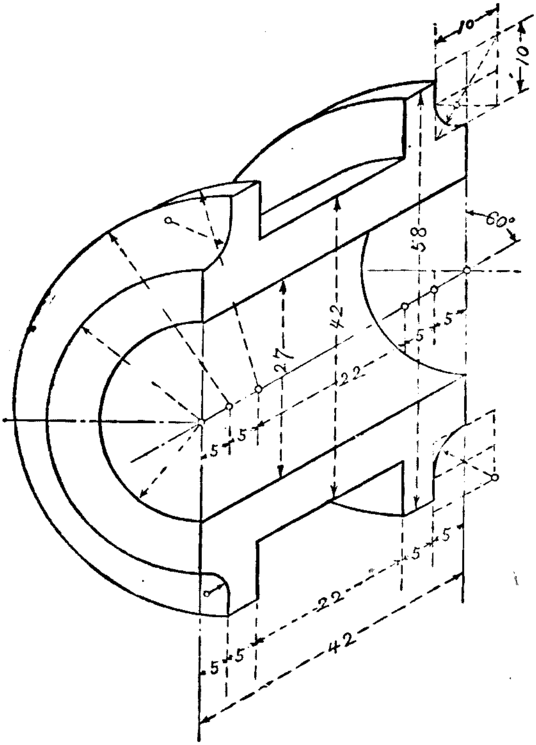


Fig. 524

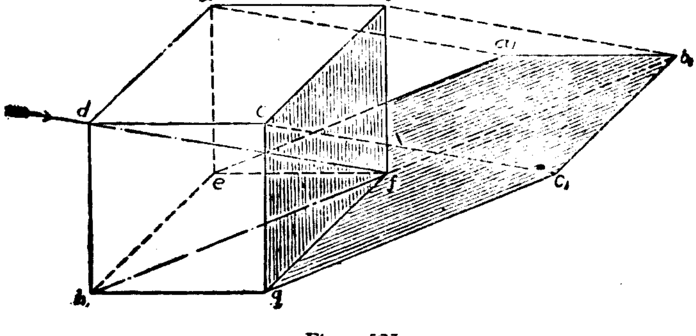


Fig. 525

添陰影於斜投影圖時，其光線之方向雖可任意，然多以平行於立方體之對角線爲常則。求投影面上之影之法，本屬頗鮮，通常慣作包函其立體之長方柱於含其一面之平面上而求其影。如 Fig. 525 所示，乃求其立方體之陰影圖也。其光線平行於對角線 d f。影 g c_1 b_1 a_1 e 乃含底面 e f g h 之平面上之陰影。求點 c 所投之影時，可由 g 引平行線平行於 h f 及由 c 引平行於 d f 之直線，而求其交點可也。

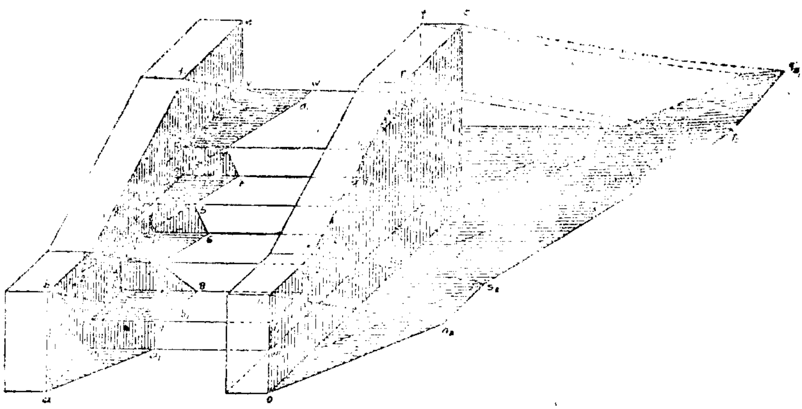


Fig. 526

如 Fig. 526 所示，乃求階段之陰影圖也。其光線之方向亦取其平行於立方體之對角線。圖中 d d_1, c c_1, b b_1, n n_2 等，取其平行於 Fig. 525 中之 d f。而 f d_1, a a_1, p q_2, o n_2 等，取其平行於 Fig. 525 中之 h f 之圖也。

如 Fig. 527 所示，乃等測投影圖與克阿利亞投影圖相比較之圖也。

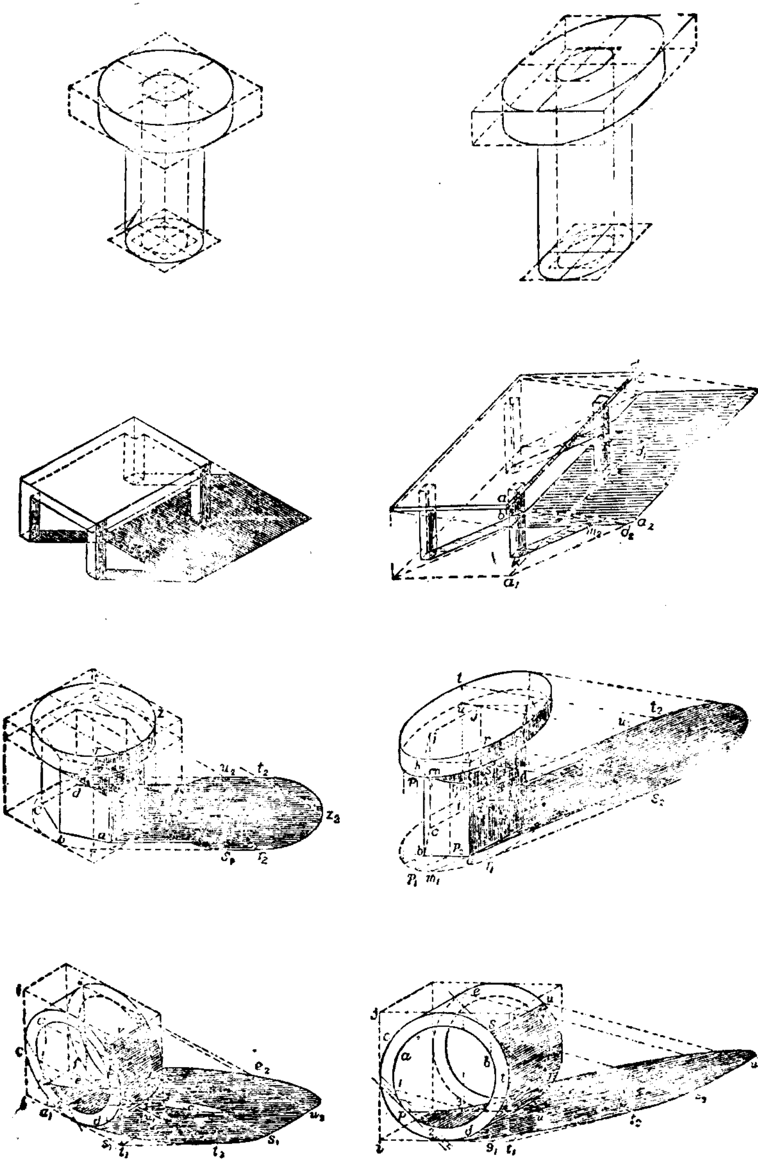


Fig. 527

練習題

試將等測投影圖中之練習題，用克阿利亞投影法或克比烈特投影法作圖。

透 視 圖

總 論

1. 透視圖

當視點距物體爲有限之距離時，其全部視線不成平行而集諸一點，余既述之於前矣。此諸視線與一面之交點連續所得之圖形，通稱爲透視圖(Perspective drawing)。今此面若爲柱面，則稱爲圓壔透視圖(Cylindrical perspective)。

又透視圖可大別之爲線透視(Linear perspective)與色透視 (Aerial perspective)。前者專用於決定物體之位置及形狀。後者不僅決定物體之位置及形狀，且其視點 (Paint of sight) 與物體間，因受所隔之氣層及光線之作用，而於其所生之陰影上，兼施以色彩之濃淡。故色透視之對於自在畫關係至爲重要。本書所論，以決定物體正確之位置之形狀爲目的，故僅就線透視之一端詳細述之。

2. 定義

透視圖一如等測圖，斜投影圖，而於一投影面上表示其投影之另一作圖法也。當作物體之透視圖時，若物體之位置未予以固定，則作圖限於不能。固定物體之位置，以平面圖與立面圖爲簡便。透視圖中，對直立投影面，特稱爲畫面 (Picture plane)。對水平投影面，特稱爲基面(Ground plane)。而畫面與基面之交，稱爲基線。

視點之平面圖，稱為停點 (Station point)。其立面圖，稱為心點 (Centre of vision)。又過心點平行於基線所引之直線，稱為地平線 (Horizon)。如 Fig. 528 所示，平面 P 為畫面，平面 Q 為基面，直線 G L 為基線，E 為視點，V_c 為心點，直線 H H 為地平線，S 為停點。今將畫面以基線為軸向後方迴轉使其與基面相一致，如 Fig. 529 所示。依此，則由 S 至 G L 之距離 Ss_0 與由視點至畫面之距離相等。G L 與 H H 間之距離與由視點至基面之距離相等。

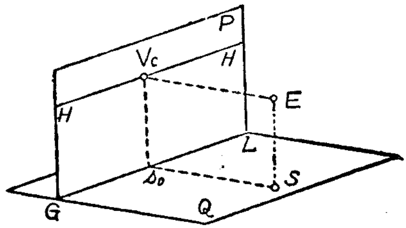


Fig. 528

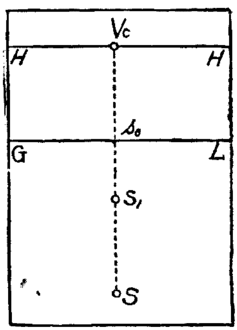


Fig. 529

透視圖中，通置視點於畫面之前基面之上，置物體於畫面之後，基面之下為原則。是即置視點於正投影圖中之第一二面角內，置物體於其第二二面角內之謂。當畫面迴轉後，則停點位於基線之下，心點位於基線之上，而物體之平面圖及立面圖均位於基線之上。

3. 視錐

以視點為頂點之圓錐面，稱為視錐 (Visual cone)。錐面之頂角，謂之視角 (Visual angle)。吾人目中之視角，雖有一定之限制，然亦依其人而生差異。普通視角之範疇，約由 45° 至 60°。凡投入此視角之圓錐面中之物體則見，其視角外者不見。故吾人作透視圖時，須將其物體放

入於視角內，而定眼球與其物體之位置。

4. 心點與地平線

心點及地平線之位置，其影響於物體之透視圖至大，如觀察高層建築物然，由下仰視，似覺頗高，由高俯察似覺頗低，其理由，要不外地平線與基線間之間隔大小之故也。其間隔小時，其透視圖給予吾人有頗高之感，故吾人如欲作高壯感之圖，勢必將地平線降低然後可。反之，如欲作低感之圖，勢非將地平線增高不爲功。又如欲作廣面積之透視圖，其視點若不置於高之位置，則其全景無從充分之表現。似此之圖，通稱爲鳥瞰圖(Bird's eye view)。

5. 線之透視

線之透視，乃作平面形及立體之透視之基礎，玆就其透視之重要事項述之。

(i)相交線之透視於其交點之透視處相交。

(ii)相切二線之透視於其切點之透視處相切。

(iii)與畫面相交線之透視過其交點。

(iv)直線之透視一般爲直線，但過視點之直線之透視，其長度不拘延至如何程度，終爲一點。

(v)平行於畫面之線及平面形之透視與原形相似。

(vi)曲線之透視一般爲曲線，但視點在含其曲線之平面內時，其透視爲直線。

第十五章　滅點與滅線

1. 點之透視圖

作點之透視圖，可將其點與視點結成直線，而求其與畫面相交之點可也。是法與求視點之直立跡問題之作圖法悉同。

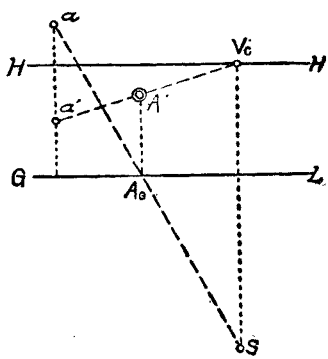


Fig. 530

如 Fig. 530 所示，圖中 S 及 V_c 爲停點及心點，a, a′ 爲已知點 A 之平面圖，立面圖。此時直線 S_a 乃過 A 之視線之平面圖，而 V_c a′ 則爲其立面圖。據此，由 S_a 與基線之交點 A_o 引垂直於基線之 A_o A′，使其與 V_c a′ 之交點爲 A′，是卽所求之透視圖。此時 Sa，謂爲點 A 之足線 (Foot line)。V_ca′ 爲目線 (Eye line)。求是點之透視圖時，其引足線與目線作圖之方法，稱爲直接法 (Direct method)。或稱爲視線法(Method by visual ray)。

2. 直線之透視圖

直線之透視圖，可由直線兩端二點之透視相結而成直線卽得。

如 Fig. 531 所示，a b 爲直線 A B 之平面圖，a′ b′ 爲其立面圖。其 A, B 二點之透視 A′, B′ 相結之直線，卽爲所求之直線之透視圖也。

3. 滅點

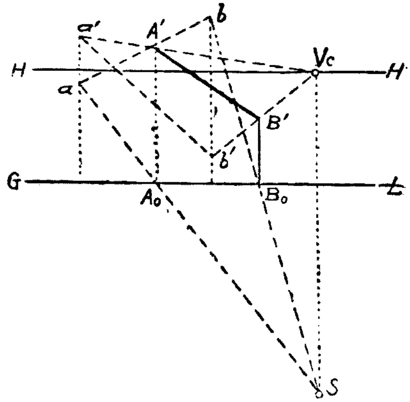


Fig. 531

如 Fig. 532 所示，圖中以任意之直線 A B 與畫面相交之點爲 P，則 A B 之透視，應通過點 P。次由視點 E 引平行線 E V 平行於 A B，而使其與畫面相交於點 V。此時 E V 乃由 A B 上 P 相距無限遠距離之點與 E 所結成之直線而得。故 V 爲 A B 上於無限遠距離點之透視。依此則 A B 之透視應在直線 P V 上。又平行於 A B 之任意直線爲 C D 使其與畫面相交之點爲 Q。此時由 C D 上 Q 於無限遠距離點之透視亦爲 V，故 C D 之透視應在直線 Q V 上。由是可知，凡平行於 A B 之各直線之透視應相會於一點 V。如點 V 之點，謂之 A B 之焦點。

透視中，平行直線之透視圖爲不平行，而其各延長線均相會於焦點

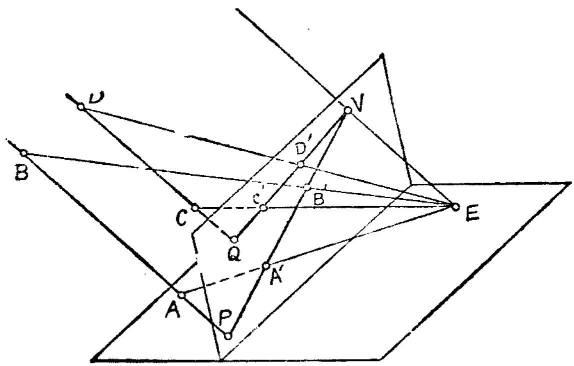


Fig. 532

之一點。如 Fig. 533 所示，乃街道兩側之建築物其水平直線之透視圖也。圖中其水平直線相會於一點V_c。其相會於焦點之直線與幾何學上之平行相異其趣，故稱為透視的平行。

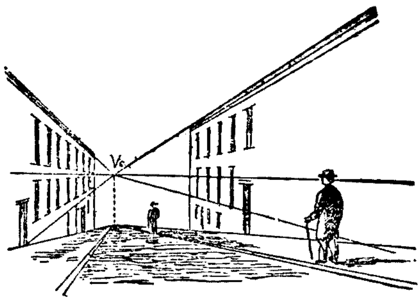


Fig. 533

4. 滅點之位置

直線之焦點，應俟其直線與畫面所成之角決定後方能固定其位置。茲舉其要述之：

(i)垂直於畫面其直線之滅點為心點。

(ii)平行於基線其直線之滅點在地平線上。

與畫面成四十五度之直線之滅點，特稱為距離點(Point of distance)。距離點在心點之兩側，其距心點之距離因其等於視點至畫面之距離，故得其名。

(iii)垂直於基線之平面上，其直線之焦點，在過心點且垂直於基線之直線上。

(iv)平行於畫面之直線之焦點，因其位於無限遠之距離處，故非為實在焦點。故平行於畫面之直線之透視為平行。由是吾人可知，凡平行於基線其直線之透視應平行於基線，垂直於基面其直線之透視應垂直於基線。

5. 依心點與距離點而作點之透視圖之方法

如 Fig. 534 所示，圖中 D_1, D_2 為距離點，m′ 為已知點 M 之立面

圖。由 m′ 引平行於基線之直線 $m_1 m_2$，而於其上取 $m' m_1$，及 $m' m_2$ 使其等於由點 M 至畫面之距離。此時 m_1, m_2，乃由 M 與畫面成 45° 之水平直線之直立跡。故由 M 與畫面成 45° 之水平直線之透視應在直線 $D_1 m_1$, $D_2 m_2$ 上。

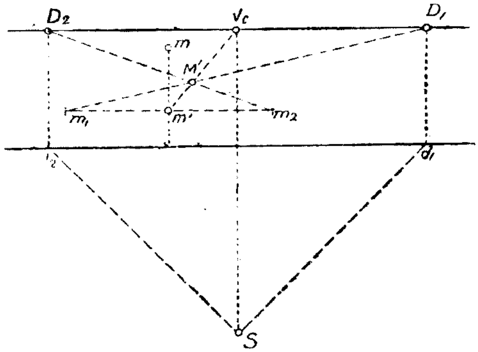


Fig. 534

又心點因其爲垂直於畫面之直線之焦點，故由 M 引垂直於畫面之直線之透視應在 $m' V_c$ 上。依此若 $m_1 D_1$, $m_2 D_2$ 與 $m' V_c$ 相交之點爲 M′，則 M′ 卽爲點 M 之透視。

6. 於垂直於畫面之直線上求等距離點之方法：

如 Fig. 535 所示，圖中 D 爲一距離點，由基線上任意之點 B，於其基線上取等距離之點 D_0, F_0, H_0 等，使其與 D 相結，而與 $V_c B$ 相交之點爲 D′, F′, H_0' 此時 $D D_0$, $D F_0$, $D H_0$ 乃與畫面成 45° 之水平直線之透視。而 $B V_c$ 因其由 B 向畫面所引之垂線之透視，故 B D′, D′ F′, F′ H′ 所爲之透視之線之實長應等於 $B D_0$, D_0

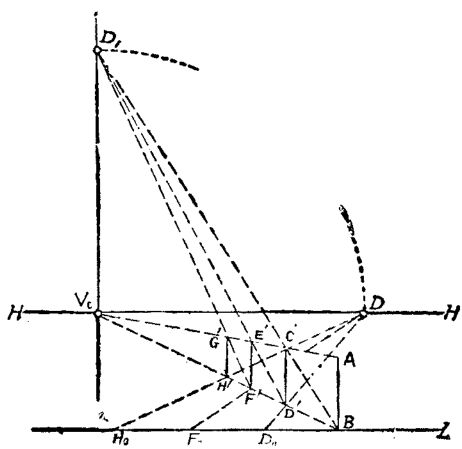


Fig. 535

F_9, F_0H_0。故採用如此之心點與距離點，即可求得垂直於畫面之直線上之等距離點。

次由 B 向基線引垂線 B A，取其等於 B D_0。更引 A V_c 及由 D′, F′, H′ 引平行於 A B 之直線，使其相交於點 C′, E′, G′。此時因 B V_c, A V_c，爲垂直於畫面之直線之透視。A B, C′ D′, E′ F′, G′ H′. 爲垂直於基面之直線之透視，故四邊形 A B D′ C′, C′ D′ F′ E′, E′ F′ H′ G′ 爲正方形之透視，對角線 B C′, D′ E′, F′ G′ 爲垂直於基線，而與基面成 45° 之直線之透視。次由 V_c 引垂直於基線之 V_c D_1，於 V_c D_1 上，若取 V_c D_1 等於 V_c D，則 D_1 應垂直於基線且與基面成 45° 之直線之焦點。依此，則 B C′, D′ E′, F′ G′ 之延長線應過點 D_1。是故若取 B A 等於已知之實距離，即不採用距離點 D，而由 V_c, D_1 亦可求得 D′, F′, H′ 等之等距離點之透視。

7. 依滅點求直線透視之方法

如 Fig. 536 所示，圖中 a b, a′ b′ 爲已知直線之平面圖，立面圖。由停點 S，心點 V_c，引平行線 Sv_0，V_c V，平行於 a b, a′ b′。次由 Sv_0 與基線之交點 v_0，引垂直於基線之直線，使其與 V_c V 相交之點爲 V_0 此時 V 爲已知直線 a b, a′ b′ 之焦點。當求得直線 a b, a′ b′ 之直立跡 p′ 後，則直線 a b, a′ b′ 之透視，應

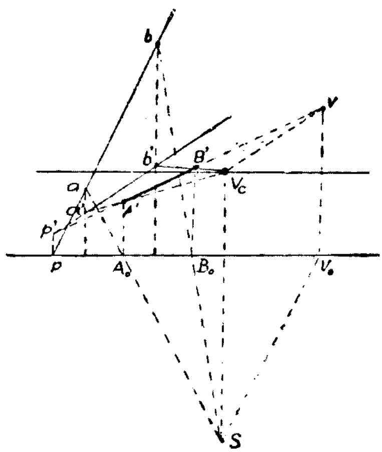


Fig. 536

在 p′V 上。依此 $V_c a'$, $V_c b'$ 與 p′V 相交之點若爲 A′, B′ 則直線 A′B′, 卽爲所求之透視。或引 Sa, Sb, 使其與基線相交於點 A_0, B_0, 更由 A_0, B_0 引垂線於基線，而求其與 p′V 相交之點 A′, B′ 亦可。

8　滅線

如 Fig. 537 所示，圖中先作平面 R 平行於含視點 E 之任意平面 P，使其與畫面相交爲 V_1 V_2。此時平面 P 及平行於平面 P 之平面上之各直線之滅點應在 V_1 V_2 上。依此，平面 P 及平行於平面 P 之各平面之透視，均以 V_1 V_2 爲界限，而於此處消失。似此之 V_1 V_2，謂之平面 P 之滅線。

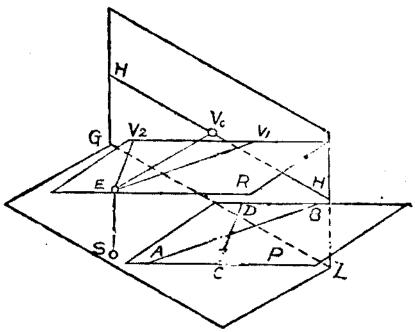


Fig. 537

滅線隨其平面之傾斜而變更其位置。其大要，茲述之如次：

(i)傾斜於畫面之平面之滅點，傾斜於地平線，而不通過心點。

(ii)垂直於畫面之平面之滅點，通過心點。

(iii)垂直於基線之平面之滅點爲通過心點，而垂直於地平線之直線。

如 Fig. 538，乃表示建築物之側面 A B C 之滅線 V_1 V_2 之圖也。

(iv)平行於基面之平面之滅線爲地平線。如 Fig. 538 中面 J E F 所示。

(v)平行於基線之平面之滅線，平行於地平線，如 Fig. 538 中，屋

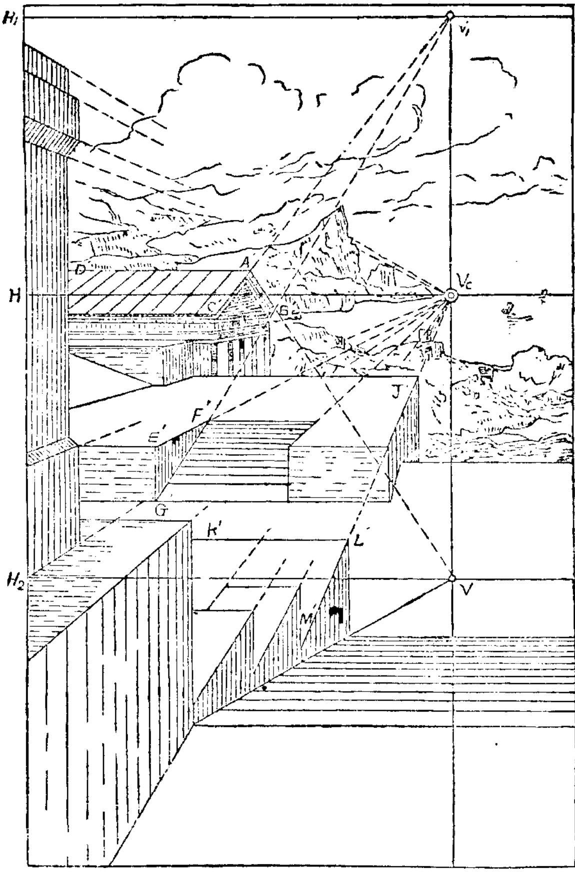


Fig. 538

頂之面 A B C, A C D 之滅線 V_2 H_2, V_1 H_1 所示。

(vi)垂直於基面之平面之滅線垂直於地平線。如 Fig. 539 中，橋梁側面之滅線 V_1 V_2 是也。

(vii)平行於畫面之平面之滅線延至無限遠距離時，爲虛線。

9 滅尺度

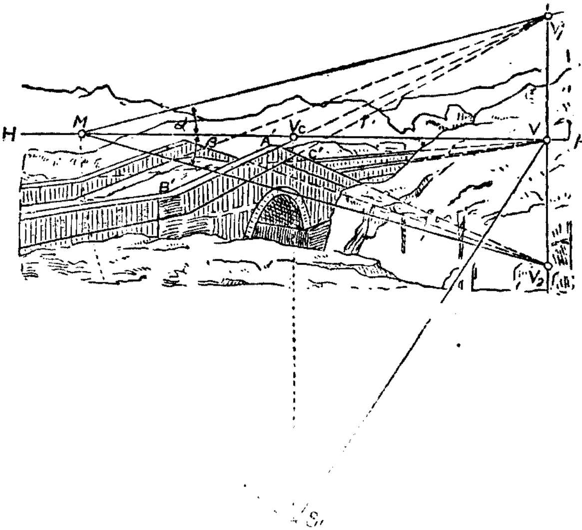


Fig. 539

如 Fig. 540 所示，圖中 I′ J′ 爲直立於基面上之直線之透視，先將心點 V_c 與 I′, J′ 相結，則所得之 V_c I′, V_o J′ 爲垂直於畫面之二直線之透視。且二直線在垂直於基面之平面上。依此，而 V_c I′, V_c J′ 間以平行於 I′ J′ 之 K′, L′, P′ Q′ 爲透視之直立線之實長與 I′ J′ 之實長相等。又

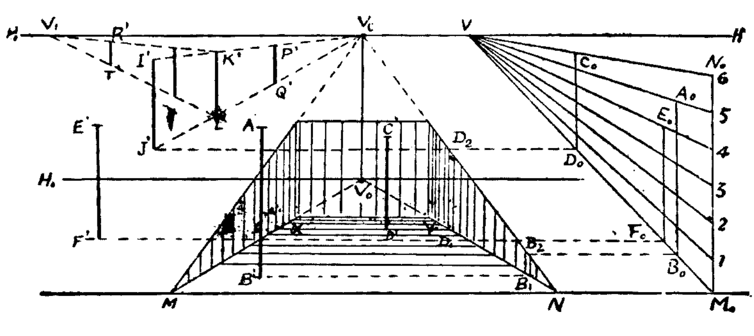


Fig. 540

將地平線上任意之點 V_1 與 K′, L′ 相結，則 V_1 K′, V_1 L′ 在垂直於基面之平面上，且爲平行直線之透視。依此，而 V_1 K′, V_1 L′ 間，以平行於 K′ L′ 任意之直線 R′ T′ 爲透視之直立線之實長與 I′ J′ 之實長相等。應用是種關係，可依直立線之透視求其實長，而得一種之尺度法。

如 Fig. 540 所示，由基線上任意之一點 M_0, 引直立線 M_0 N_0, 於 M_0 N_0 上附以普通之尺度 1, 2, 3……, 次將此各點與地平線上任意之一點 V 相結，而由 J′ 引平行線平行於基線，使其與 V M_0 相交之點爲 D_0。後由 D_0 引直立線，於其直立線上取 D_0 C_0 等於 I′ J′ 之長。此時 C_0 因其在 V6 之線上，故 I′ J′ 之實長可知其有 6 之長。

次於滅線 H_0 V_0 之平面上，有過其上任意一點 B 之直立線之透視 B′ A′。次由 V_c 向 V_0 H_0 引垂線，其足爲 V_0，後將基線上任意之一點 N 與 V_0, V_c 相結。次由 B′ 引平行線平行於基線使其與 V_0 N 相交之點爲 B_1, 復由 B_1 引垂線垂直於基線使其與 V_c N 相交之點爲 B_2, 更由此引平行線平行於基線使其與 V M_0 相交於點 B_0。然後由 B_0 引直立線 B_0 A_0 使其等於 A′ B′, 則 A_0 當在 V5 之線上。此時 A′ B′ 之實長應有 5 之長。似此一種之尺度 V M_0, V1, V2, V3,……等，謂之滅尺度(Vanishing scale)。

如 Fig. 541 所示，圖中乃以滅尺度度吾人身高之圖也。其法，可由平行於基線之直線之透視度其實長，而作滅尺度。如 Fig. 542 所示，圖中於基線上施以普通尺度，如 0, 1, 2, 3, 4,……等，使其各點與地平線上一點 V 相結而作尺度。此時於其基面上，可由此尺度度平行於基線之直線之透視 M′ N′, K′ L′ 之實長 6, 8。

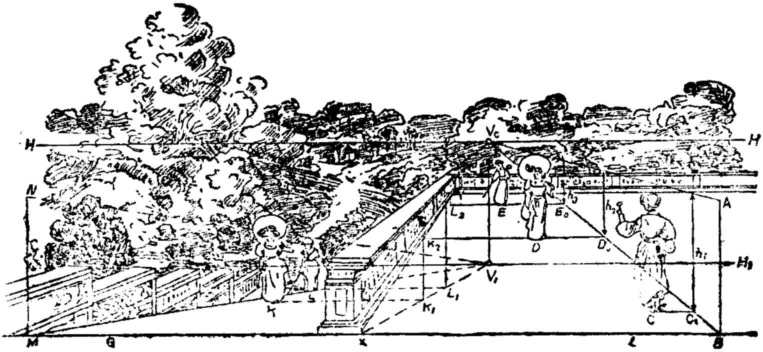


Fig. 541

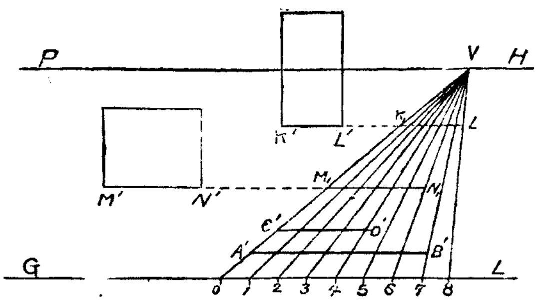


Fig. 542

10. 平行四邊形之應用

(i)將已知直線作 2, 4, 8 之等分之法。

如 Fig. 543 所示，A′ B′ 為已知直線 A B 之透視，V 為其焦點。將任意之一點 V_1 與 A′, B′ 相結使其與過 V 任意之直線相交於點 C′, D′。此時 A′ C′, B′ D′ 因其為 V_1 為滅點之直線之透視，故 A′ C′ D′ B′ 為一平行四邊形之透視。依此，將其四邊形之對角線之交點 1 與 V_1 相結使其

與 A′ B′ 相交之點爲 Q′。然 V_1 Q′ 因其透視的平行於邊 A′ C′，故 Q′ 應爲 A B 之中點之透視。同法，可求得 A Q，B Q 之中點之透視 P′，R′。如是循序作圖，可等分 A′ B′ 爲 2, 4, 8 等。

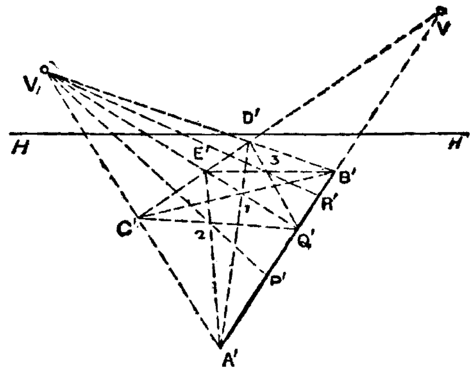


Fig. 543

(ii) 將已知直線延長爲 2, 3, 4 倍等之法。

如 Fig. 544 所示，設 A′ B′ 爲任意之直線 A B 之透視，其焦點爲 V。次倣 Fig. 543 之作圖法取任意一點 V_1，而作 A B 爲一邊之平行四邊形之透視 A′ P′ Q′ B′，置其對角線之焦點爲 1。次將 1 與 V 相結使其與 V_1 B′ 相交於點 2。此時，2 因其爲平行四邊形 A P Q B 之一邊 Q B 其中點之透視，故置 P′ 2 與 A′ V 之交點爲 C′，則 B′ C′ 之實長與 A′ B′ 之實長相等。倣此，若求得 D′, E′, F′ 等點，則得 A B 之三倍，四倍，五倍，等長之透視。

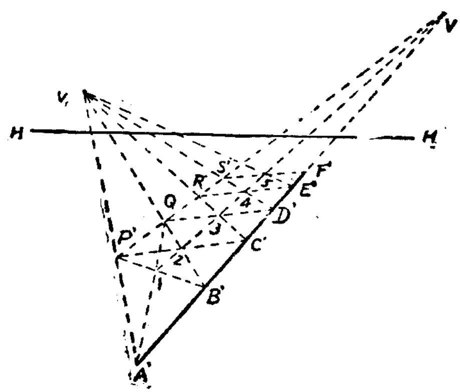


Fig. 544

(iii) 求對稱點之法。

如 Fig. 545 所示，圖中 P′ 乃 V 爲焦點之直線 A′ B′ 上之一點，而於 A B′ 上求其與 P′ 相對稱之點 Q′。其作圖之法與前圖同。先作 A′ B′ 爲一邊之平行四邊形之透視 A′ C′ D′ B′，而引對角線 A′ D′, B′ C′。次將 P′ V_1 與 A′ D′ 之交點 1 與

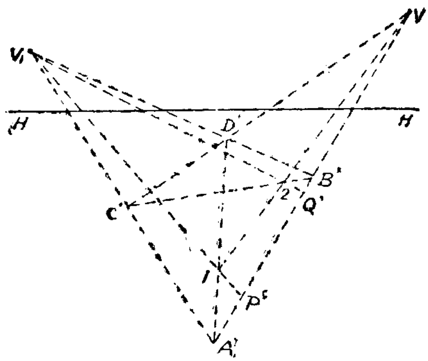


Fig. 545

V 相結，而求其與 B′ C′ 相交之點 2。更引 V_1 2，使其與 A′ B′ 相交於點 Q′。此時 1 2 爲透視的平行於 A′ B′。1 P′, 2 Q′ 爲透視的平行於 A′ C′。故 A′ P′, B′ Q′ 之實長相等。依此，Q 卽爲所求之點。

練習題

1. 視點位於基面 3 糎之上，畫面 6 糎之前，試求由視點 3 糎之左，基面 5 糎之上，畫面 4 糎之後，其一點之透視。

2. 視點位於基面 3 糎之上，畫面 6 糎之前，試求與基面成 45°，與畫面成 30°，其直線之滅點。

3. 視點位於基面 3 糎之上，畫面 6 糎之前，試求次之平面之滅線。

(a) 與基面成 60°，與畫面成垂直之平面。

(b) 與畫面成 40°，與基面成 50° 之平面。

4. 每隔 50 米高 8 米之電柱，直立於與基線成 45° 之直線上。今

置視點於適當之位置，以適當之縮尺，試作電柱 20 株之透視。

5. 基面上，有正六角形（一邊之長 3 糎），其一邊與基線成 45°，試求其透視。

6. 有一邊長爲 3 糎之直立正六角形，其一邊置於基面上，且此邊與基線成 35°，試作其透視。

7. 由基線上之一點 A，與基線成 30°，45° 之二直線 A′ B′（長 6 糎），B′ D′(長 4 糎)爲互相垂直之水平直線之透視。然角 B′ A′ D′爲 105°。試作其二直線爲二邊之矩形之透視，及前者之對角線上有頂點，面積爲前者之 $\frac{1}{4}$ 之矩形之透視。但視點之高爲 5 糎。

8. 視點位於基面 3 糎之上，畫面 6 糎之前時，試求視點左 7 糎，基面上 7 糎，畫面後 50 糎處其點之透視。

第十六章　測點

1. 測點

如 Fig. 546 所示，圖中 A B 爲任意之直線，其延長線與畫面相交之點爲 A。又由視點引平行線平行於 A B 而與畫面相交於點 V。此時 A B 之透視之在直線 A V 上，乃爲吾人所既知之者。次於畫面上，過 V 引任意之直線 V M 取其長與 V E 相等。又由 A 引平行線平行於 V M，而於其上取 A b_0 等於 A B。此時三角形 E V M，B A b_0 爲二等邊三角形，而其相等之邊彼此平行。故底邊 M E，B b_0 彼此平行。由

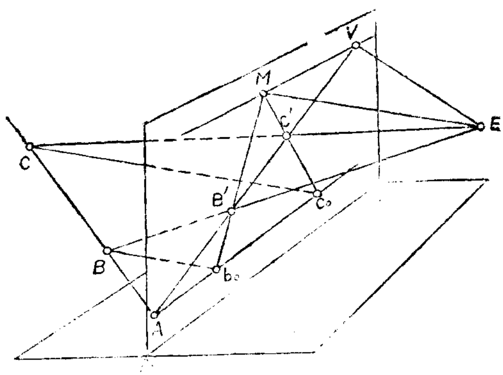


Fig. 546

是，M 爲直線 B b_0 及平行於 B b_0 之各直線之滅點。故 B 點之透視應爲二直線 A V，M b_0 之交點 B′。同法於 A B 上取任意之一點 C，於 A b_0 上取 b_0 c_0 等於 B C。此時 c_0 C 平行於 M E，故 C 點之透視爲 A V 與 c_0 M 之交點 c′。反之，若 B′ C′ 爲 B C 之透視，則 b_0 c_0 等於 B C 之實長。茲根據上述，可由 V，M 二點求其直線之透視及由透視而求其實長。似此 M 點，謂之直線 A B 之測點 (Measuring point)。

設 V M 爲畫面上任意之方向所引之直線，則 A B 之測點多至無

數，然均在 V 爲中心 V E 爲半徑之圓周上。此時 V M 以平行或垂直於地平線者爲多。

2. 由減測點而求直線透視之方法

如 Fig. 547 所示，圖中 a b, a′ b′ 爲已知直線之投影，S 爲停點，V_0 爲心點。由 S 引平行於 a b 之 S v_0 使其與基線相交之點爲 v_0。更由 v_0 向基線引垂線及由 V_0 引平行於 a′ b′ 之 V_0V 使其相交於點 V。此時 V

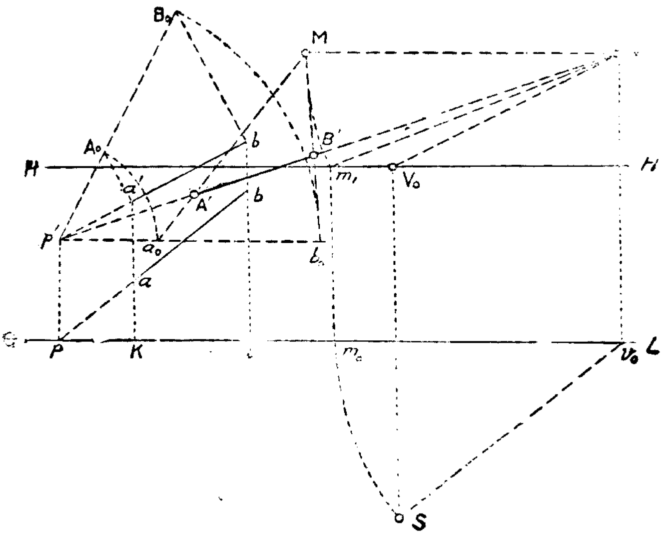


Fig. 547

即爲已知直線之焦點。次於基線上取 v_0 m_0 等於 v_0 S，更由 m_0 向地平線引垂線，其足爲 m_1。此時 V m_1 之長，因其等於由 V 至視點之實距離，故由 V 引平行於地平線之 V M，而於其上，取 V M 等於 V m_1，則 M 爲已知直線之一測點。

次再求直線 A B 之直立跡 p′，由 p′ 引平行於 V M 之直線，後於其

上取 $p'a_0$, $p'b_0$ 各等於由 p' 至點 A, B 之距離。則所引之 $p'V$, Ma_0, Mb_0, 相交於點 A', B'。此時 $A'B'$ 卽爲所求之直線之透視。

作圖題 1　於基面上之一直線上求直立之等間隔等長之直線之透視。

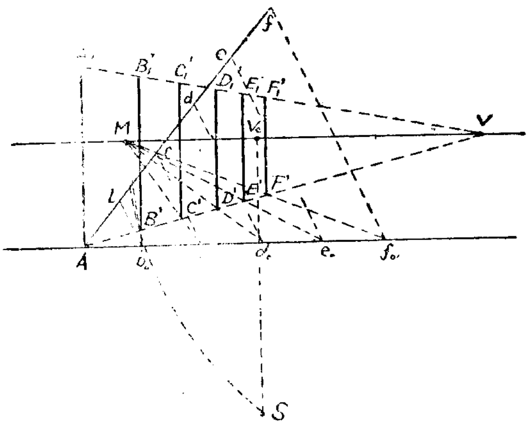


Fig. 542

如 Fig. 542 所示，圖中 Af 爲基面上一直線之平面圖，其求法，先求其消點 V 與測點 M。點 A 因其在基線上，故於基線上取 Ab_0, b_0c_0, c_0d_0, d_0e_0, e_0f_0 等等於已知之間隔。次引 Mb_0, Mc_0, Md_0, Me_0, Mf_0 使其與 AV 相交於點 B', C', D', E', F'。此時 B', C', D', E', F' 等應爲已知直立線其足之透視。依此，復取垂直於基線之 AA_1 等於已知直線之長。後更 A_1 與 V 相結，若其與由 B', C', D', E', F' 引垂直於基線之直線相交於點 B_1', C_1', D_1', E_1', F_1'，則 AA_1, $B'B_1$, $C'C_1'$, $D'D_1'$, $E'E_1'$, $F'F_1'$，卽爲所求之直線之透視。

3 垂直於基面之平面上直線之透視

如 Fig. 549 所示，先設垂直於基面而與畫面成角 ϕ 之任意平面爲 ABC。而 AB, AC 乃與基面成角 α, β 之直線。次由視點 E 引平行線平行於平面 BAC 內之水平直線 AP, 而使其與畫面相交於點 V, 則 V 之在地平線上自無論矣。然由 V 所引之垂直於地平線之 $V_1 V_2$ 爲已知平面之滅線，而 AB, AC 之滅點應在此滅線上。是即由 E 引平行於 AB, AC 之直線使其與 $V_1 V_2$ 相交，其各交點爲 V_1, V_2。斯時 V_1, V_2, 爲 AB, AC 之焦點。而 $\angle V_1 E V = \alpha$, $\angle V_2 E V = \beta$。

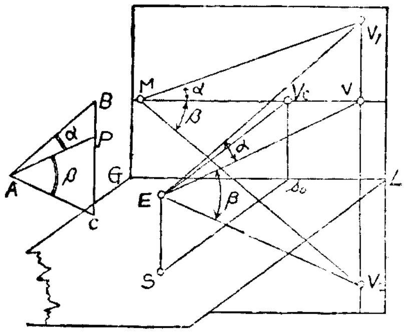


Fig. 549

次以 $V_1 V_2$ 爲軸，將 E 旋轉使其轉至畫面上之位置爲 M, 則 M 應位於地平線上。故 $\angle V_1 M V = \alpha$, $\angle V_2 M V = \beta$。然 VM = VE, 故 M 爲平面 BAC 及平行於此之平面內之水平直線之測點。

根據上述之關係，依求任意之直立面之滅線及此平面內之水平直線之測點，可易求其平面內之任意直線之滅點。

4. 分測點

如 Fig. 550 所示，g′A 以 V 爲滅點，M 爲一測點之直線 GA 之透視，G 爲畫面上之點。次引 $g'a_0$ 平行於 VM 使其與 MA′ 相交於點 a_0, 則 $g'a_0$ 之長等於 GA 之實長。

次於VM上取任意一點$\frac{M}{x}$之點，使VM:V$\frac{M}{x}$之比之値爲x。若$\frac{M}{x}$與A′相結與$g'a_0$相交於點$\frac{a}{x}$，則$g'a_0:g'\frac{a}{x}$之比之値等於x。依此而$g'\frac{a}{x}$之長之x倍等於直線GA之實長。故知x之比之値時，即不根據測點M而依$\frac{M}{x}$之點，亦可知GA之長。反之，知GA之實長，又可求其透視。似$\frac{M}{x}$之點，謂之分測點 (Fractional measuring point)。

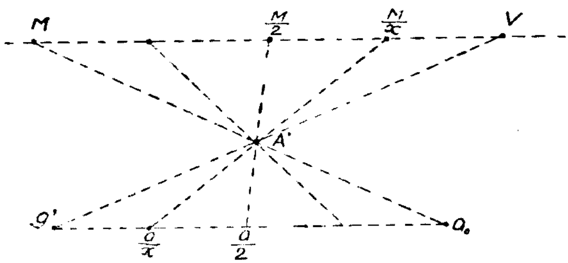


Fig. 550

距離點因其爲垂直於畫面之直線之測點，故依用上述之分測點，可求垂直於畫面之直線之透視。反之，由其透視亦可求其實長。然此時稱此，不爲分測點，而爲分距離點 (Fractional point of distance)。

分測點與分距離點中x比之値，務求用如2, 4, 5, 10等之簡單之數。普通用於分測點時，多以$\frac{M}{2}$，$\frac{M}{4}$，$\frac{M}{5}$，$\frac{M}{10}$，等之記號。用於分距離點時，多以$\frac{D}{2}$，$\frac{D}{4}$，$\frac{D}{5}$，$\frac{D}{10}$等之記號。

如Fig. 551所示，圖中直立於基面上之直線之透視，用滅尺度及分

測點而求其實長及其直線間之距離之圖也。其法，先將 $\frac{M}{2}$ 與 N', Q' 相結使其與基線相交於點 n_0, q_0。此時 $n_0\ q_0$ 之長為 3 糎，故直立線 M N, P Q 間之間隔為 3 糎 × 2 = 6 糎。

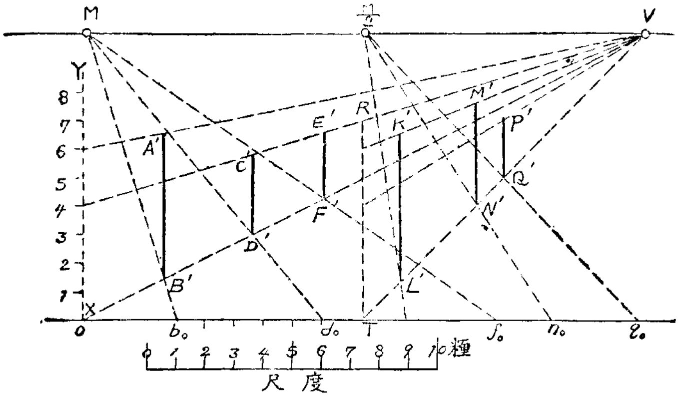


Fig. 551

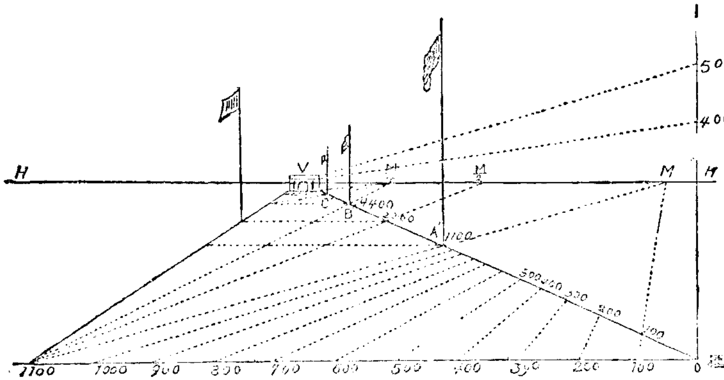


Fig. 552

如 Fig. 552 所示，圖中為旗桿 A, B 間之間隔為 1100 糎 × 4 − 1100 糎 = 3300 糎之圖也。

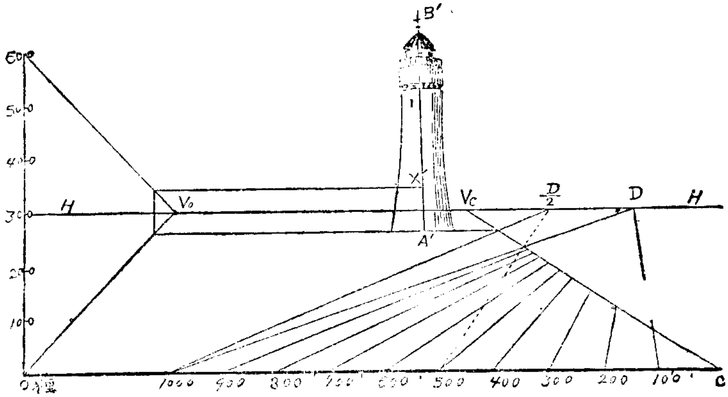


Fig. 553

如 Fig. 553 所示，乃畫面至燈臺之距離為 1000 粍 ×2＝2000 粍之圖也。圖中燈台之高為 600 粍 $\times \frac{A'B'}{A'X'}$ ＝600 粍 ×5＝3000 粍。

5.　分割一直線為任意比之方法

如 Fig. 554 所示，為 A′K′ 以 V 為滅點之一直線 AK 之透視而分其成為已知之比之圖也。其法，先由 V 向任意之方向引直線 $V\frac{M}{x}$。次於其上取任意之點 $\frac{M}{x}$，即以此為已知直線之一分測點。今便於解說計，置 A′ 為畫面上之點，由 A′ 引平行於 $V\frac{M}{x}$ 之直線使其與 $\frac{M}{x}$ K′ 相交於點 K_0，則 AK 之實長等於 $A'K_0$ 之 x

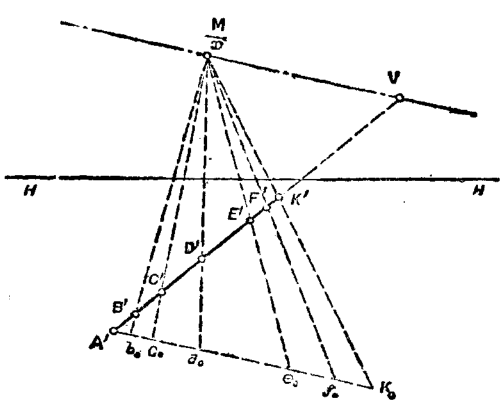


Fig. 554

倍。依此，將 $A'K_0$ 分為已知之比，其各點為 b_0, c_0, d_0, e_0, f_0，復將各點與 $\frac{M}{x}$ 相結使其與 $A'K'$ 相交於點 B', C', D', E', F'。此時 $B'C', D', E', F'$，卽為所求之分割點之透視。

練習題

1. 視點位於基面 4 糎之上，畫面 6 糎之前，且在與畫面成 $50°$ 之直立面內，試求其與基面成 $15°, 30°, 45°$ 之直線之滅點。

2. 過基面 2 糎之上，畫面 5 糎之後之一點 A，試作其與基面成 $35°$，畫面成 $40°$ 之直線 AB（長 8 糎）之透視。然視點位於 A 之右 2 糎，基面上之 4 糎，畫面前之 6 糎處。

3. 過基線上 1 糎處之一點 A'，與基線成 $40°$ 之直線 $A'B'$，其長為 5 糎。今直線 $A'B'$，為 A' 向 B' 之方向距離 8 糎處，點 V 為滅點之直線 AB 之透視時，試求 AB 7 等分點之透視。

4. 過基面之上 2 糎，畫面後 30 糎處之一點 A，有長為 50 糎之直線 AB，與畫面成 $45°$，基面成 $30°$，B 位於 A 之右後之方向。今視點位於基面 6 糎之上，畫面 8 糎之前，A 2 糎之右時，試求 AB 之透視。又將 AB 由 A 分為 $1:2:3$ 之比，再求其點之透視。

5. 作傾斜於基面及畫面之任意平行四邊形之透視，試求與此四邊形共通重心，各邊平行，面積為此平行四邊形之 $\frac{1}{2}$ 及 2 倍之二平行四邊形之透視。

6. 有三角形 $V_1A'V_2$，（$A'V_1=10$ 糎，$A'V_2=12$ 糎，$V_1V_2=16$ 糎）$A'V_1$ 與基線成 $30°$。又 $A'V_1$，$A'V_2$ 上，有 B', C' 二點，$A'B'=$

粍，A′C′＝7粍。今A′B′，A′C′，以V_1，V_2爲滅點之直線AB，AC之透視，角BAC爲60°時，試求∠BAC之二等分線之透視，及其滅點。然A在基線上，AB之實長爲8粍.

第十七章　平行透視

1.　平行透視

平行於畫面其直線之滅點，因其至無限遠之距離，故平行於畫面之平行線透視亦爲平行。又垂直於畫面其直線之焦點，因爲心點，故垂直於畫面其各直線之透視應相會於心點。由是可知，凡平行或垂直於畫面之直線，其所成之物體之透視，可由其心點與停點，或心點與距離點，而能解決也。似此之透視，通稱爲平行透視 (Parallel perspective)，或稱爲一點透視 (One point perspective)。

2.　在基面上其一邊平行於基線之矩形之透視圖

如 Fig. 555 所示，圖中矩形 a b c d，當基線升至地平線上時爲矩形之平面圖，V_c 爲心點，D 爲距離點。其作圖法先將 a b, c d 延長使其與基線相交於點 m_1, n_1，則垂直於基線之邊之透視應在 $V_c\ m_1$, $V_c\ n_1$

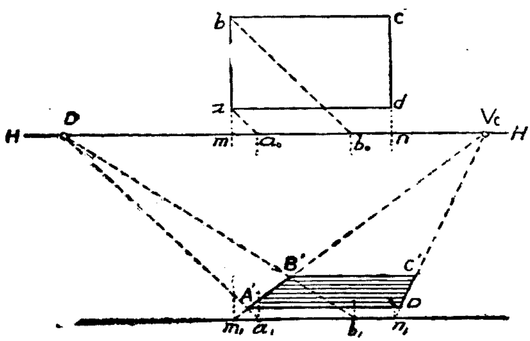


Fig. 555

上。次於基線上，取 $m_1 a_1$, $m_1 b_1$ 等於 $m a$, $m b$, 後引 $D a_1$, $D b_1$, 而使其與 $m_1 V_c$ 相交於點 A', B'。此時 $A' B'$ 爲垂直於基線之一邊之透視，是故由 A', B' 引平行線平行於基線，而得與 $n_1 V_c$ 相交之點 D', C'。斯時 $A' B' C' D'$，即爲矩形之透視圖矣。

3. 直立於基面上其一面平行於畫面之四角柱之透視

如 Fig. 556 所示，圖中矩形 a b c d 當基線升至 $G_1 L_1$ 時爲四角柱之平面圖。其求法與前圖 (Fig. 555) 同，必先求基面上其角柱之底之透視 $A' B' C' D'$。次由 m_1 引垂直於基線之 $m_1 m_2$，取其長等於角柱之高。後引 $V_c m_2$ 及由 A' 引垂直於基線之 $A' E'$，使其相交於點 E'。此時 $A' E'$ 爲垂直於底 A B C D 之一稜之透視。依此，由 E' 引平行於 $A' D'$ 之直線及由 D' 引垂直於基線之直線，使其相交於點 L'。又由 B' 引垂直於 $A' D'$ 之直線，使其與 $E' V_c$ 相交於點 F'。更由 F' 引平行於 $B' C'$ 之直線，使其與 $L' V_c$ 相交於點 K'。後將 K', C' 相結。斯時由上述之直線所成之圖形 $A' B' C' D' L' E' F' K'$，即爲已知角柱之透視。

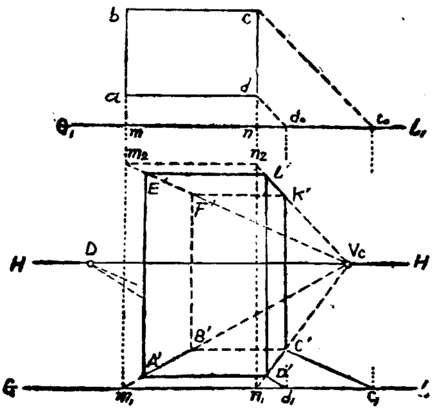


Fig. 556

作圖題 1. 求正六角柱直立於基面上之透視圖。

如 Fig. 557 所示，圖中正六角形 a b c d e f，當基線升至 $G_1 L_1$ 時爲正六角柱之平面圖。其求法，先由心點及距離點而於基面上作正六角

形之透視圖 A′B′C′D′E′F′。次將心點 V_o 與 A′相結，使其與基線相交於點 p_1。復由 p_1 向基線引垂線 $p_1\ p_2$，取其長等於角柱之高。然後，由A′向基線引垂線，使其與 $p_2\ V_o$ 相交於點 G′。此時，A′G′為垂直於基面之一稜之透視。同法，若求得垂直於基面之其他稜之透視，則得所求之角柱之透視圖 A′B′C′D′E′F′L′G′H′I′J′K′。

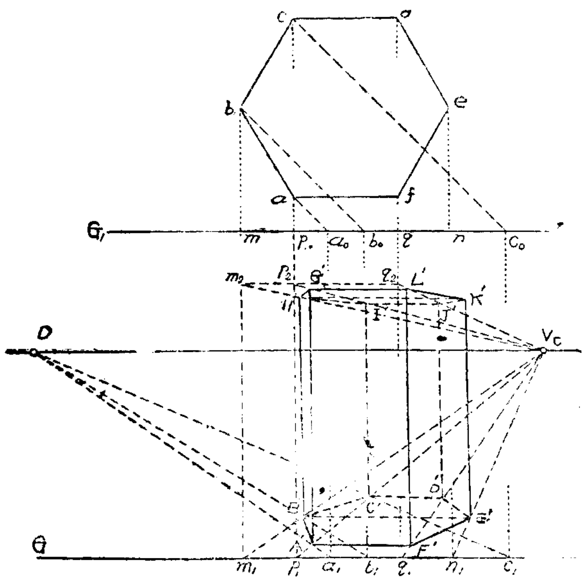


Fig.　557

作圖題 2.　求正五角錐其底在基面上之透視圖。

如 Fig. 558 所示，圖中 f-abcde，當基線升至地平線時為角錐之平面圖。其作法，先求平面圖之透視圖 O′–A′B′C′D′E′。次將心點 V_o 與 O′相結，其所成之直線與基線相交於點 r。復由 r 引垂直於基線之 r t 而取其長等於角錐之高。更引 t V_o 及由 O′ 引垂直於基線之 O′F′，使其

相交於點 F′。此時 F′ 爲角錐頂點之透視。故將 F′ 與 A′ ,B′, C′, D′, E′ 相結，卽得所求之角錐之透視圖。

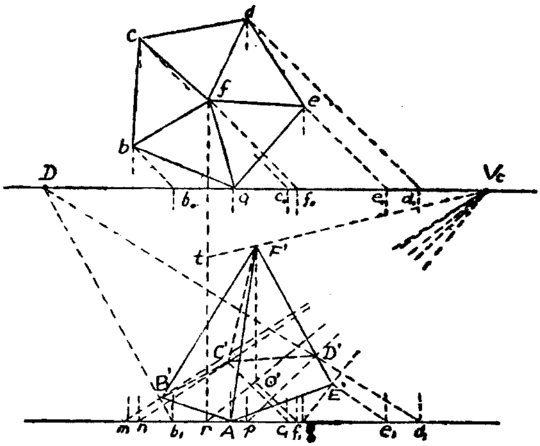


Fig. 558

4　長方柱及角錐之雜例

如 Fig. 559 所示，乃求正五角柱其底在畫面上之透視圖也。其求法，如以一長方柱包函五角柱，由長方柱之透視而求其五角柱之透視，其作圖法簡且易也。

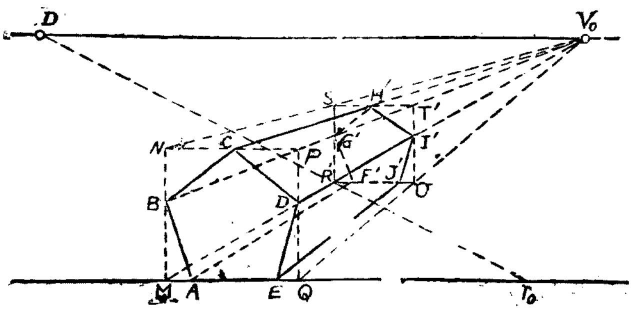


Fig. 559

如 Fig. 560 所示，圖中爲三重相疊之長方板之透視圖。其最前面與畫面相一致。

如 Fig. 561 所示，圖中爲階段之透視圖，其前面與畫面相一致。

如 Fig. 562 所示，圖中爲其側面與畫面相一致之透視圖也。

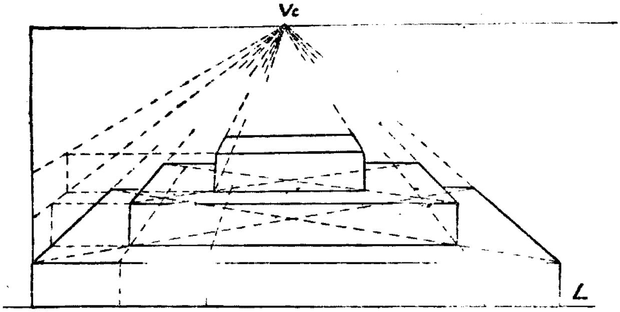


Fig. 560

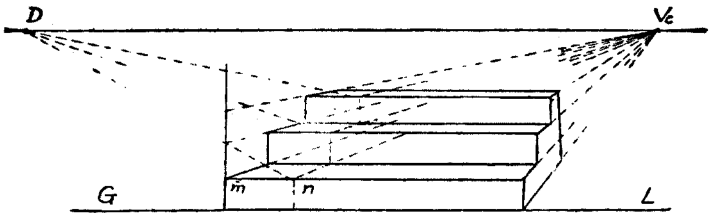


Fig. 561

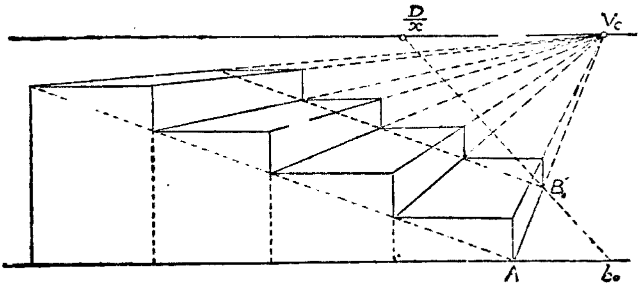


Fig. 562

如 Fig. 563 所示，圖中爲尖塔之一面與畫面相一致時，其外形之透視圖也。

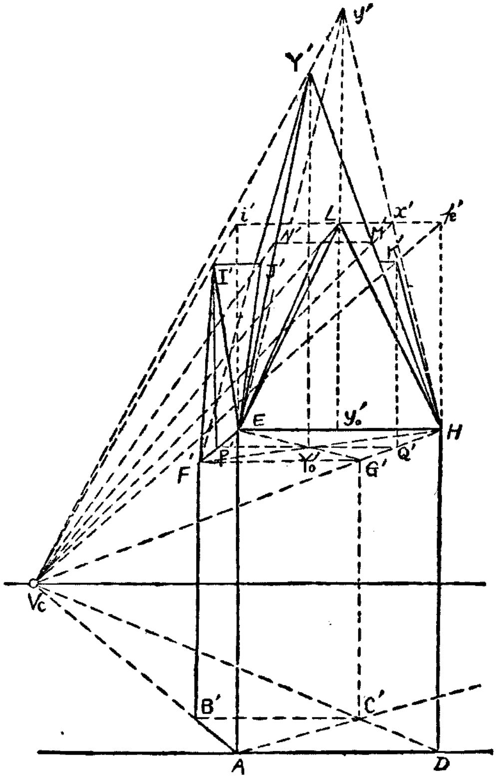


Fig. 563

5. 曲線之透視圖

曲線之透視，由曲線上各點之透視相結所成之曲線而得。當曲線在基面上或平行於基面時，可依心點與距離點而求其透視圖。如 Fig. 564 所示，爲基面上所求之曲線之透視。此圖乃過曲線上之各點而作與畫面成 45° 之水平直線及垂直於畫面之直線之透視，而求其各交點之圖

也。凡依與畫面成 45° 之直線及垂直於畫面之直線而求點之透視之法，謂之垂直對角線法。

求曲線於基面上之透視時，可用方格包函其曲線，求得方格之透視後，計其方格之分量，再求其曲線上之點。如 Fig. 565 所示，即此例也。基於方格而求曲線上之點之方法，謂之方格法。

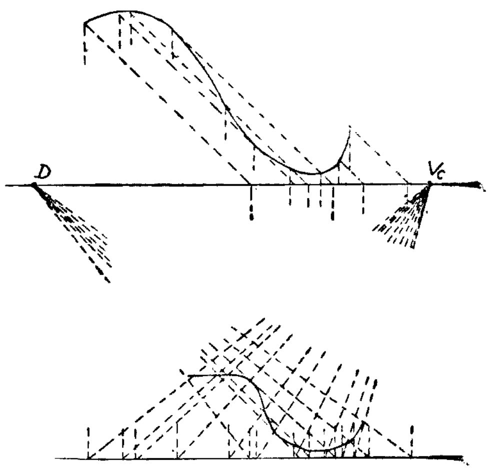


Fig. 564

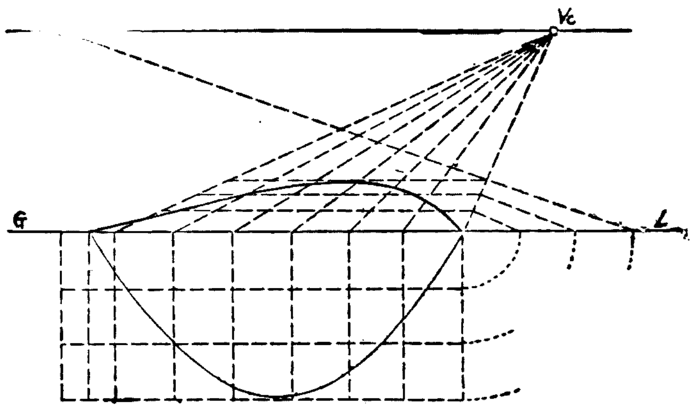


Fig. 565

6. 圓之透視圖

圓之透視，通常形成橢圓，故求得其長短軸或共軛直徑，則能求得

其圓之透視圖。如 Fig. 566 所示，爲基面上所作其圓之透視圖也。圖中圓 a b c，當基線升至地平線上時爲圓之平面圖。求法，先由停點 S_1 向圓 a b c 引切線，其切點 a, b 與地平線相交之點爲 a_1, b_1。次將 a_1 b_1 之中點 d_1 與 S_1 相結使其與圓 a b c 相交於點 c, d。此時弦 a b, c d 之透視爲此圓之透視之橢圓之共軛直徑。依此，求 a b, c d 之透視 A′ B′, C′ D′ 後，即以此爲共軛直徑而作橢圓 A′ C′ B′ D′ 可也。如 Fig. 567 所示，圖中 a b 平行於基線，而 a b 與 c d 互相垂直。因之，其各透視 A′ B′, C′ D′ 亦垂直。此時 A′ B′, C′ D′ 爲橢圓之長短軸，故以 A′ B′ 爲長軸，C′ D′ 爲短軸而作橢圓可也。

或置外切於圓之正方形之一邊平行於基線，基此正方形之透視，而

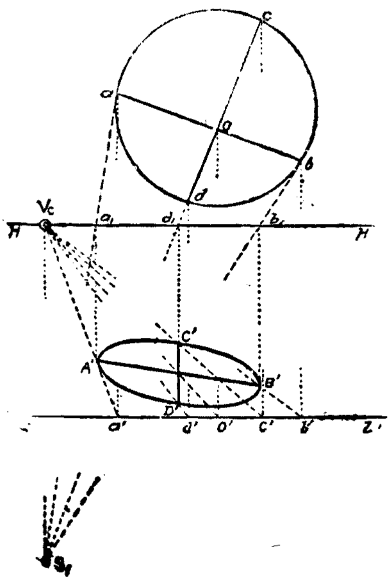


Fig. 566

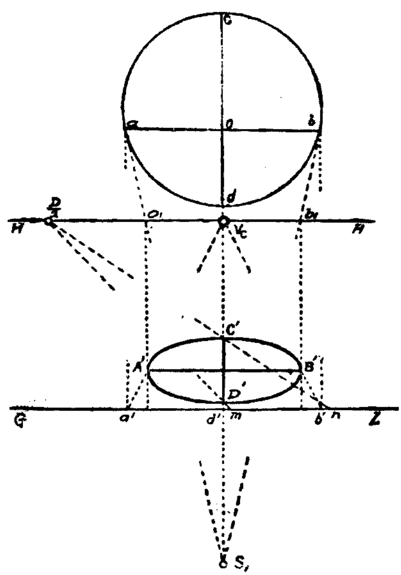


Fig. 567

求圓周上之點之透視亦可。

如 Fig. 568 所示，圖中為平行於外切之正方形之一邊之直線，而求其與圓相交點之透視之圖也。

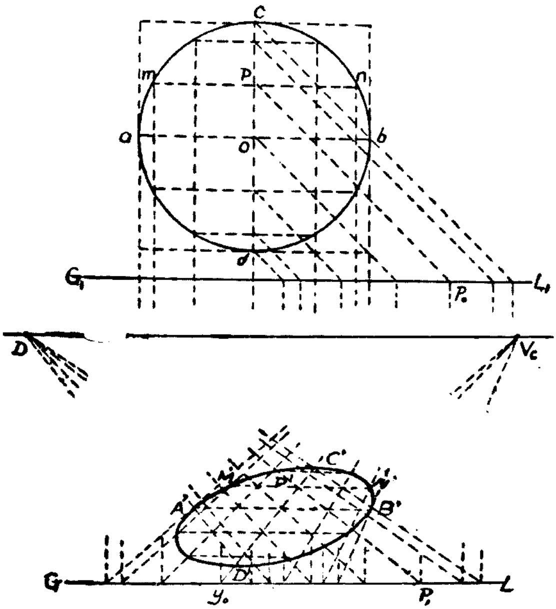


Fig. 568

7. 同心圓之透視圖

如 Fig. 569 所示，其右圖中，弧 A K C 為中心 O 之四分圓與正方形 A O C Q 之對角線 O Q 相交於點 K。次過半徑 O C 上之任意點 W, Z 引圓 W J R, Z I T, 使其與 O Q 相交於點 J, I。又使其與 O A 相交於點 R, T。然後由 W, Z 引平行線平行於 O A, 使其與 A Q 相交於點 w, z。再使 C K, W J, Z I 與 A Q 相交於點 1, 2, 3。復使 W R, Z T 與 Q A 之延長線相交於點 4, 5。此時 Q w＝12＝A 4, w z＝23＝45。依此關係，

過已知圓之直徑上之點，可作同心圓之透視圖。

Fig. 569 之左圖中，A′ C′ B′ D′ 爲平行於基面之圓之透視，四邊形 P′ Q′ M′ N′ 爲平行於基線之外切正方形之一邊之透視。又 C′ D′, A′ B′ 爲平行於基線且垂直於畫面之直徑之透視。然後過 C′ D′ 上之點 W′, Z′，而作同心圓之透視圖也。

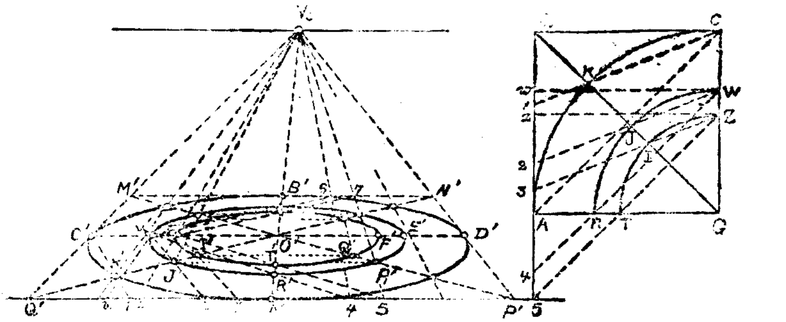


Fig. 569

先將心點 V_0 與 W′, Z′ 相結，使其與 P′ Q′ 相交於點 w, z。又對角線 Q′ N′ 與曲線 A′ B′ C′ D′ 之交點 K′ 與 C′ 相結，使其與 P′ Q′ 相交於點 1。然後，於 P′ Q′ 之上取 12, 23 等於 Q′ w, w z。再引 2 W′, 3 Z′，使其與 Q′ N′ 相交於點 J′, I′。此時 J′, I′，是卽過 W′, Z′ 之圓心圓而與對角線 Q′ N′ 相交之點。又於 P′ Q′ 上取 A′ 4, 45 之長等於 Q′ w, w z。更引 W′ 4, Z′ 5，使其與 A′ B′ 相交於點 R′, T′。此時 R′, T′ 爲直徑 A′ B′ 上之點。又由 J′ I′ 引平行線平行於 P′ Q′，使其與對角線 P′ M′ 相交於點 P_1', Q_1'，則 P_1', Q_1' 爲 P′ M′ 上之點。

後引 $P_1' V_0$, $Q_1' V_0$ 而求其與 Q′ N′ 之交點，則得對角線 Q′ N′ 上之點。以下仿此，可得 O′ B′, O′ M′ 上之點。

依上述之作圖，可得同心圓上之八點，後將各點連結，即得所求之曲線。

8. 圓周之等分

Fig. 570 之右圖中，圓弧 ACB，以 AB 爲直徑以 OC 爲垂直於 AB 之半徑所作之半圓之圖也。其作法，先將四分圓 AC，分任意數之等分點爲 1, 2, 3, 4。次將各點與 B 相結，使其與 OC 相交於點 1″, 2″, 3″, 4″。次以 OC 爲正三角形之一邊，求其頂點 X，而使其與 1″, 2″, 3″, 4″ 相結。今若等分數相同，則不拘其半徑之大小而 O1″ : 1″2″ : 2″3″ : 3″4″ : 4″C 之比爲一定。故用此關係，可等分已知之圓周。

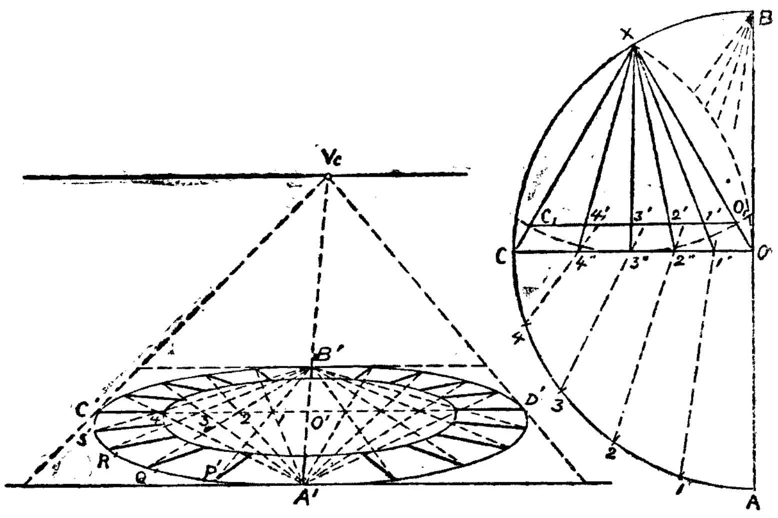


Fig. 570

如 Fig. 570 之左圖，A′ B′ C′ 爲平行於基面之圓之透視，A′ B′ 爲垂直於畫面之直徑之透視，C′ D′ 爲平行於基線之直徑之透視。次以 X

爲中心，以等於 O′C′ 之長爲半徑引圓，使其與 XC, XO 相交於點 C_1, O_1。更將 X 與 1″, 2″, 3″, 4″ 相結，其直線與直線 O_1C_1 相交於點 1′, 2′, 3′, 4′。次於 O′C′ 上，取 O′1, 12, 23, 34 等之長等於 $O_1$1′, 1′2′, 2′3′, 34′。此時 1, 2, 3, 4 與 A′, B′ 所結之直線與曲線 A′C′B′ 相交之點，爲圓周 20 等分之點之透視。同法。亦可求其右半圓之等分點。

9. 雜題

如 Fig. 571 所示，爲直圓柱之一底位於基面上之透視圖也。其求法，先求其二底之透視，使其與平行二共通切線相切，其所成之圖形，即爲直立圓柱之透視。

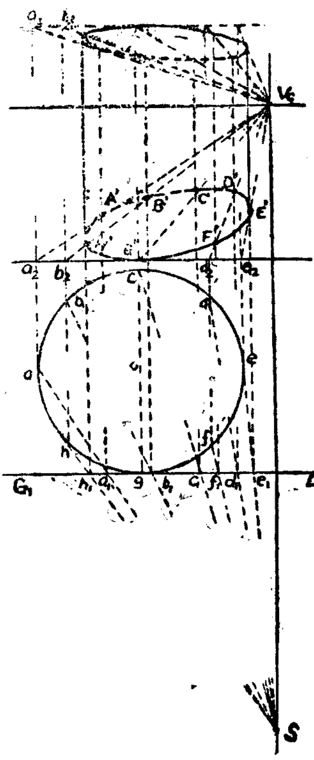


Fig. 571

如 Fig. 572 所示，乃四正方柱所支持之十字拱之透視圖也。求四支柱之透視圖，可依前節所述之角柱之透視圖之作圖法，求十字拱之透視圖，可先作平行於基面之任意平面 H_1 與十字拱之交點 P_1, Q_1, P_2, Q_2, W_1, W_2, Z_1, Z_2 之透視。後將似此各點求得多數，將其連結而作成曲線可也。十字拱之透視圖中，求其平行於基線之切線時，可由視點向平行於基線之半圓柱引切線，使其與畫面相交於 Y。後過 Y 引水平線即可。垂直於畫面之半圓柱，其兩端之透視均爲圓，故無

求各個圓周上點之透視之必要。

如 Fig. 573 所示，乃十字拱之實例。

如 Fig. 574 所示，爲棧道橋概形之透視圖。

如 Fig. 575 所示，爲半圓形隧道及隧道內之壁龕之透視圖。

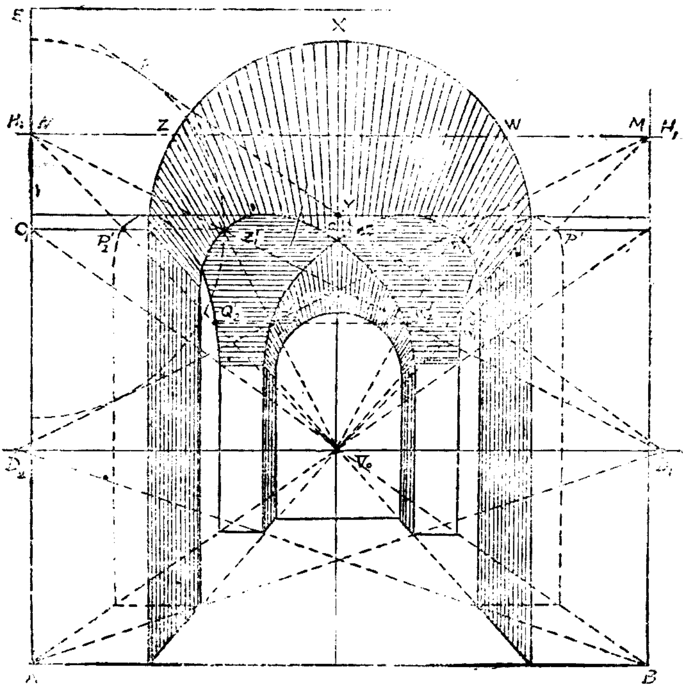


Fig. 572

練習題

1. 試作外徑 6 糎，內徑 4 糎，長 5 糎之圓管之透視圖。其圓管之位置，使其橫於基面上而垂直於畫面。然視點位於基面上 4 糎，畫面前

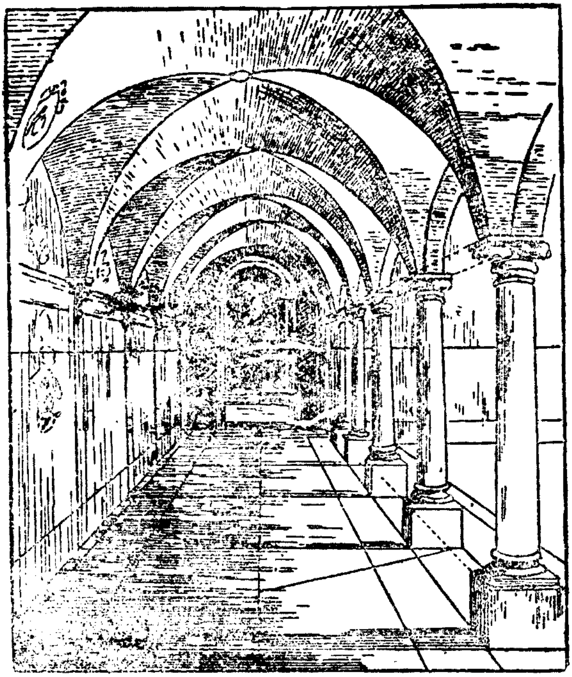


Fig. 573

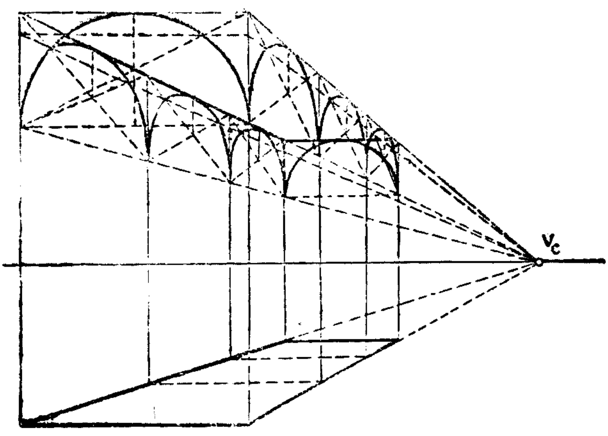


Fig. 574

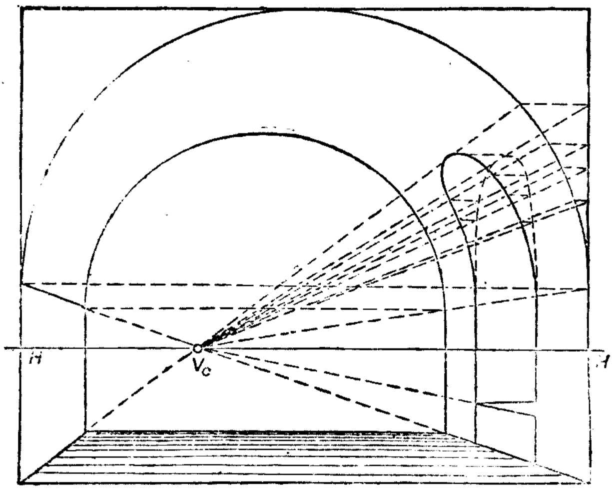


Fig. 575

7 糎，圓管之軸右 3 糎處。

2. 兩底圓之直徑爲 6 糎，4 糎，高爲 7 糎之截頭圓錐，其小底上附有直徑 6 糎厚 1 糎之圓板，而大底置於基面上。今視點位於基面上 3 糎，畫面前 8 糎，立體右 4 糎之處，試作立體之透視圖。

3. 有一邊長爲 4 糎之正八面體，其一對角線垂直於基面，試作其透視圖。

4. 有長軸 8 糎，短軸 5 糎，之長橢球，其軸垂直於基面，試作其透視圖。

5. 有底圓扼圓之直徑爲 8 糎，4 糎，兩底圓之距離爲 8 糎之單雙曲線迴轉面。其軸垂直於基面，試作其透視圖。然視點置於基面上 3 糎，畫面前 10 糎，曲面之軸右 5 糎處。

6. 如 Fig. 576 所示之家屋正面，使其平行於畫面。試作其二倍擴大之透視圖。

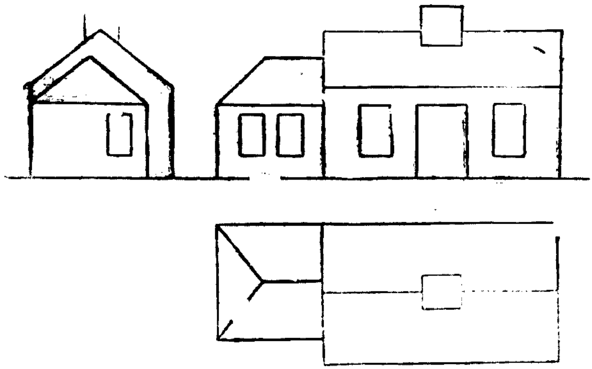


Fig. 576

7. 有直徑 6 糎，節距 4 糎之螺旋線，今使其軸垂直於基面，試作螺旋線之二周之透視圖。

8. 有底之直徑爲 6 糎，高爲 7 糎之直圓錐，其底平行於畫面，位於畫面後 1 糎之位置，試作其透視圖。然視點置於立體之右。

9. 有外徑 8 糎，內徑 6 糎之中空半球形體。今使其切基面於一點，其平面部平行於基面，試作其透視圖。然視點置於基面上 8 糎，畫面前 10 糎之位置。

10. 基面上有長軸 8 糎，短軸 5 糎之橢圓，其長軸之一端在基線上且垂直於基線。停點在長軸之延長線上而位於基線前 5 糎之位置。今若使橢圓之透視爲圓，問視點距基面之高幾何。

第十八章　有角透視

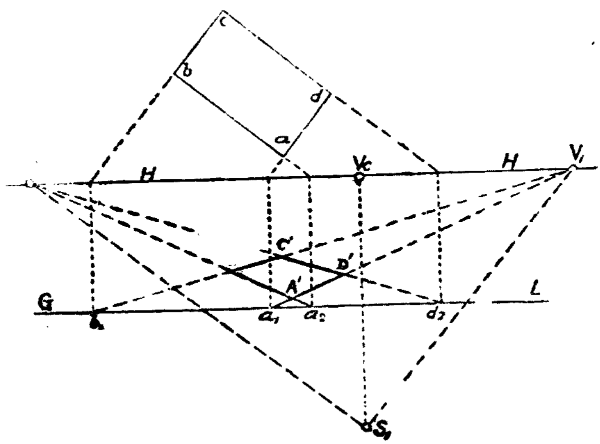
1. 有角透視

一般立體之透視，多由心點與距離點兩者而決定。其由傾斜於畫面之線面所成之者，捨心點與距離點外，亦有用滅點與測點者。凡用滅點與測點所作之透視圖。稱爲有角透視（Angular perspective）。或稱爲成角透視。

2. 長方形之透視圖

（i）依二滅點之方法。

如 Fig. 577 所示，圖中 a b c d，當基線移至地平線時，爲基面上之矩形 A B C D 之平面圖。本題作圖之法，先求邊 A D，A B 之滅點 V_1，V_2。次延長 A B，B C，C D，D A，使其與基線相交於點 a_2，b_1，d_2，a_1。



然後引 V_1a_1, V_1b_1, V_2a_2, V_2d_2, 而置其各交點爲 A′, B′, C′, D′。此時四邊形 A′B′C′D′, 卽爲已知矩形之透視。

(ii)依滅點與測點之方法。

如 Fig. 578 所示,邊 AD, AB 之滅點爲 V_1, V_2。其各測點爲 M_1, M_2。次延長 AD, AB 使其與基線相交於點 a_1, a_2。次引 a_1V_1, a_2V_2, 其交點爲 A′。此時 A′, 卽爲 A 之透視。次於基線上取 a_1d_0, a_2b_0 之長等於由 D, B 至 a_1, a_2 之距離。再引 M_1d_0, M_2b_0, 使其與 a_1V_1, a_2V_2 之相對應之交點爲 D′, B′。後引 $B'V_1$, $D'V_2$ 使其相交於點 C′。此時所得之 A′B′C′D′, 卽爲已知矩形之透視。

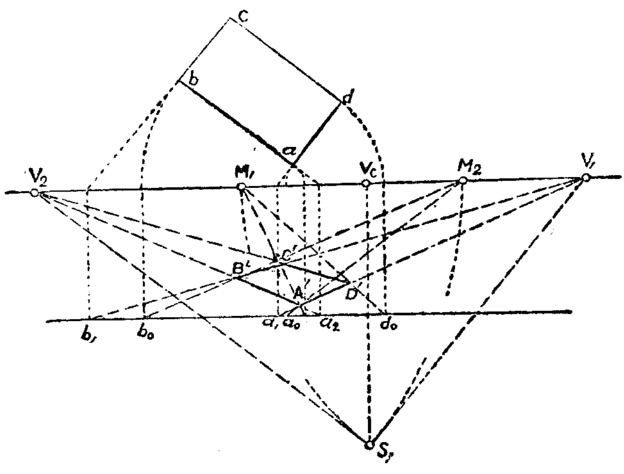


Fig. 578

(iii)依其他之方法。

依滅點與目線,或滅點與足線,均可求其矩形之各角點之透視。如 Fig. 579 所示,乃依滅點與目線所求之圖也。

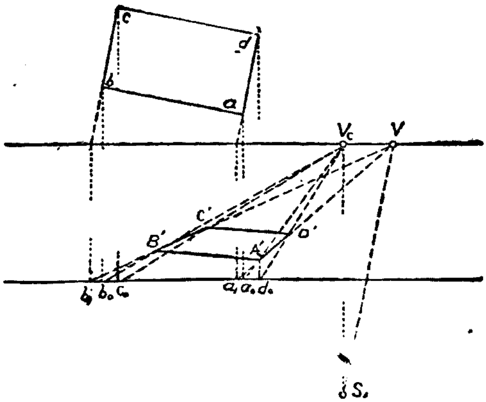


Fig. 579

3. 長方柱之透視圖

作長方柱之透視圖，須先求其一底之透視，然後再求其垂直於此稜之透視可也。如 Fig. 580 所示，乃其一底位於基面上所作之透視圖也。本圖作法，先求其底 A B C D 在基面上之透視圖 A' B' C' D'。次由 a

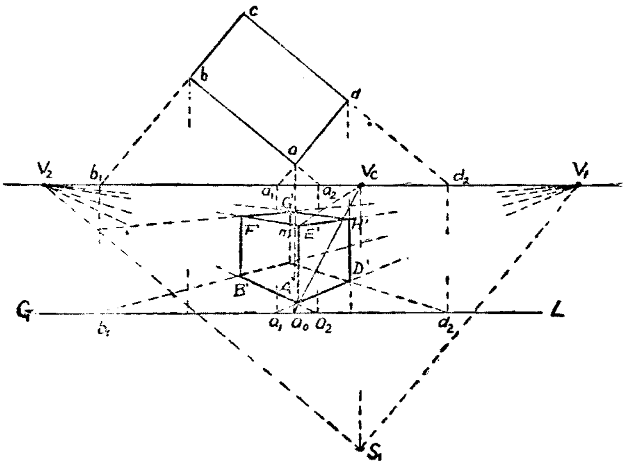


Fig. 580

向基線引垂線，由其垂線之足，於其垂線上取 a_9 m 之長等於角柱之高。後引 m V_c 及由 A′ 引垂直於基線之直線，使其相交於點 E′。此時 A′E′，應爲其一側稜之透視。今 E′ 既決定，卽可由 E′ 求 F′, G′, H′ 等各點之透視。

作圖題 1. 有蓋長方形箱之投影爲已知，求其透視圖。

如 Fig. 581 所示，圖中 a b c d，爲已知箱之平面圖，a′ b′ c′ d′ h′ n′ 爲其立面圖。今先求箱之水平稜 A D，A B 之焦點 V_1, V_2 及測點 M_1, M_2。次由 M_1 引與地平線成 α, $(90°-\alpha)$，之二直線及由 V_1 引垂直於地平線之直線，使其相交於 V_3, V_4。此時 V_3 爲蓋之傾斜稜 I H 之滅點，V_4 爲 I N 之滅點。

將蓋取去之部分，其透視圖之作法與前段所述相同，茲將其作圖之說明從略。

次由 A D 之延長線與基線相交之點 a_2 引垂直於基線之直線，復於其直線上取 a_2 2 之長等於角點 O 之高 z′ y′，而引 2 V_1，使其與 H′ V_4 相交於點 O′。又於 a_2 2 上取 a_2 5 之長等於角點 N 之高 n′ y′，而引 5 V_1，使其與 O′ V_3 相交於點 N′。更引 V_4 N′, V_3 H′ 使其相交之點爲 I′。如是，卽得蓋之側面之透視圖 O′ H′ I′ N′。然後，將各角點與滅點相結而求其交點，則得蓋之透視圖 H′ I′ K′ G′ P′ L′ N′ O′。

4. 圓之透視

如 Fig. 582 所示，O_0 爲已知中心之透視圖，r 爲已知半徑。其求法先連 S′ O_0 使其延長線與 G L 相交於點 O′。次於 O′ 之左右側，取 o′ a′, o′ b′。等於 r，將 a′, b′ 與 S′ 相連，卽得切所求之圓之二矩線。次

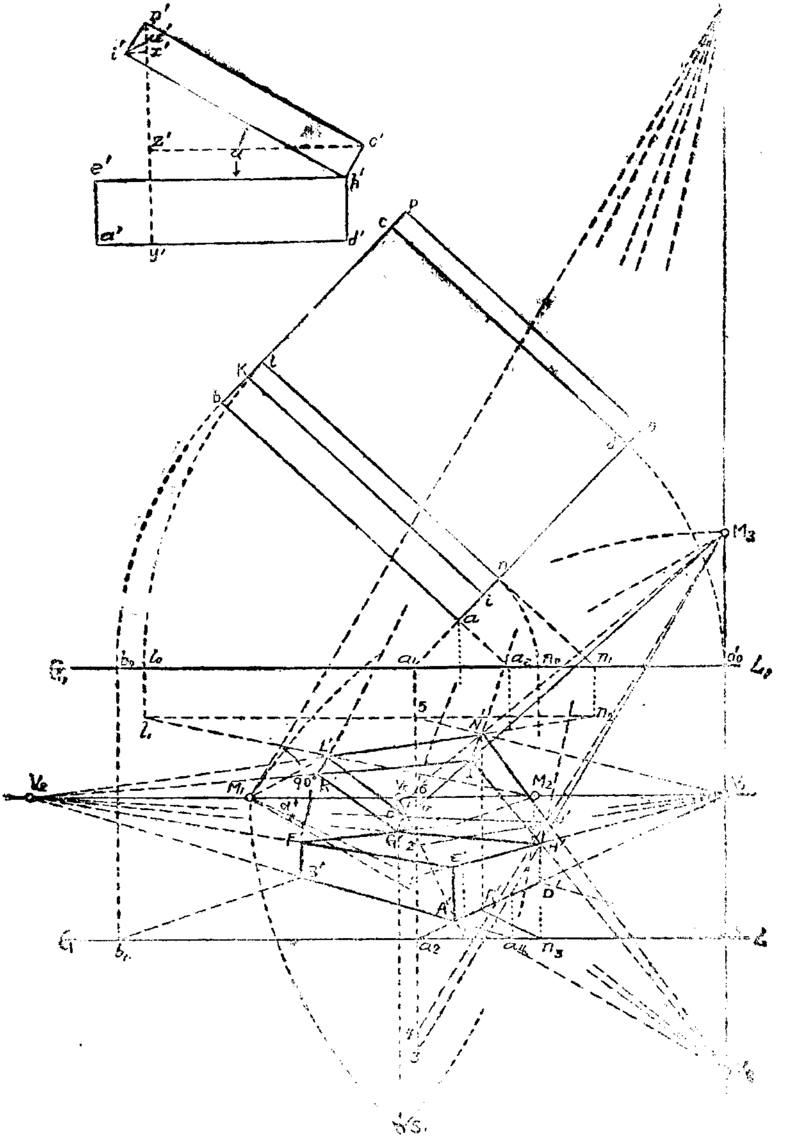


Fig. 581

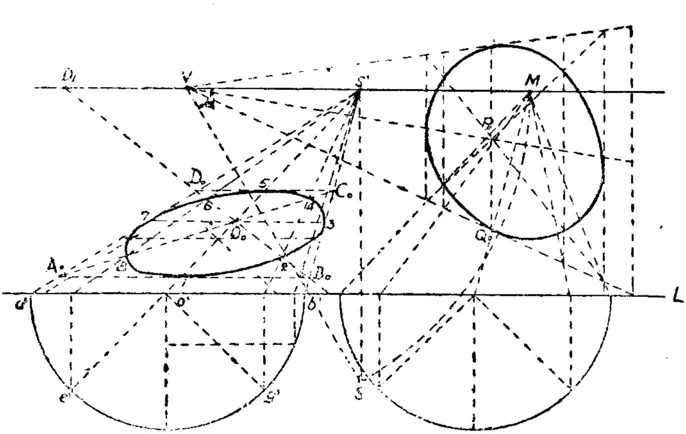


Fig. 582

以距離點 D_1 爲中心,連以 O_0, 使其與前二直線相交於 B_0, D_0。由此二點引平行於 G L 之 B_0A_0, D_0C_0, 則 $A_0B_0C_0D_0$ 爲所求之圓外接之正方形。B_0D_0, A_0C_0 爲其對角線,其各邊之中點 1, 3, 5, 7 爲圓周上之點之透視圖。

又以 a′ b′ 爲直徑作所求之圓之實形,次將直角 a′ o′ f′, b′ o′ f′ 分成二等分,由其半徑之端 e′, g′ 向 a′ b′ 引垂線使其足與 S′ 相連,則此等與對角線之交點 2, 4, 6, 8 亦爲圓周上之點。後依 1, 2, 3,……7, 8 之順序相結,即得所求之圓之透視圖。

5. 透視的平面圖法

視點向基面垂直之方向移動與已知物體之透視之於心點之左右方向之關係毫無稍異。然視點距基面愈遠,則物體上各點之透視與基線愈離。故作複雜之透視圖時,視點必須向上方移動至實際之數倍後,方可

作其物體之平面圖。然後，由各點向基線引垂線而取其各高。如斯方法，稱爲透視的平面圖法 (Method by perspective plan)。

如 Fig. 583 所示，乃依透視的平面圖法，而作建築物外形之透視圖也。其作法，先將基線置於適當之位置 G_1 L_1 處，而作平面圖 a d j k 之透視圖 A_1 D_1 J_1 K_1。然後由 A_1 向基線 G L 引垂線，由其足 B'，取 B' A' 等於 b' a'。次將 A'，B' 與焦點 V_1，V_2 相結及由 K_1，D_1 引垂直於基線之直線，使其相對應之交點爲 K'，L'，D'，C'。次於 B' A' 上取 B' e。等於 b' e'。更引 e_0 V_1 及由 E_1 引垂直於基線之直線，使其相交於點 E'。後引 E' V_2 及由 F_1 引垂直於基線之直線，使其相交於點 F'，而作直線 F' D'，E' A'，E' K'。此時依上述之線所作之圖形，即爲建築物之透視圖也。

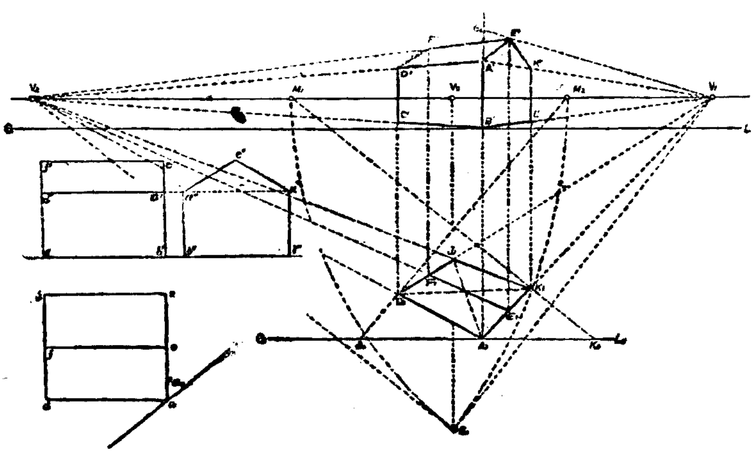


Fig. 583

6. 雜題

如 Fig. 584 所示，乃階段之透視圖。其法，先將其各角點連結，後由其直線之焦點與心點所作得之圖也。

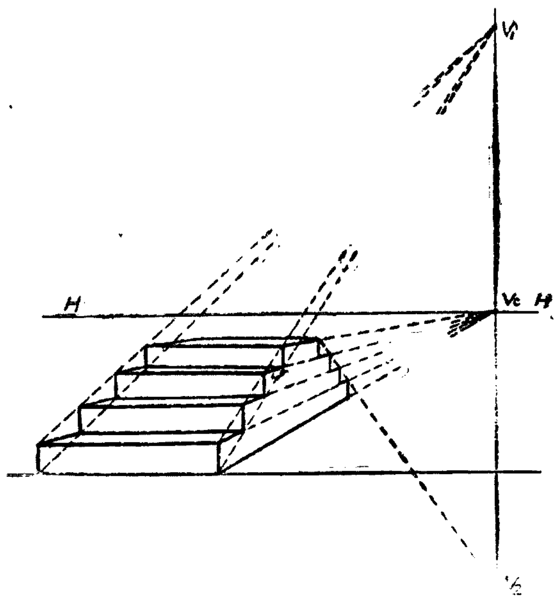


Fig. 584

如 Fig. 585，乃示正五角柱，其一側面置於基面上所作之透視圖也。

如 Fig. 586，乃示圓柱橫於基面上所作之透視圖也。

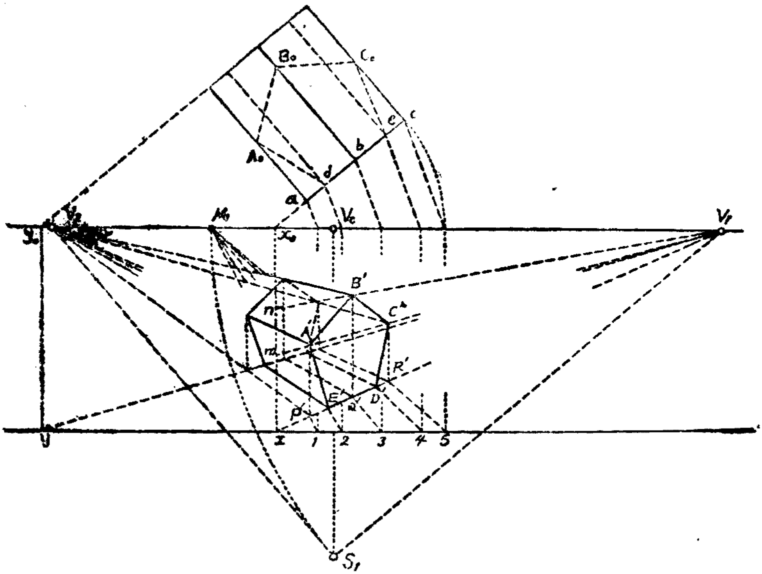


Fig. 585

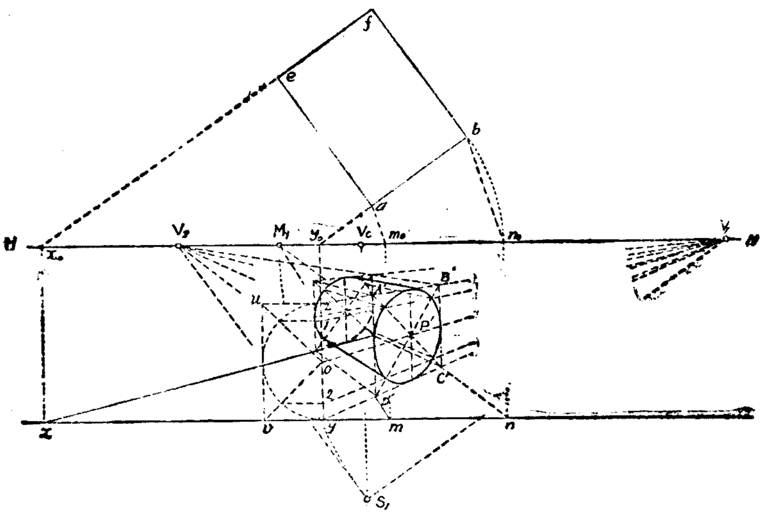


Fig. 586

練習題

1. 取一邊長 3 糎之正方形五個組成十字形，使其直立於基面上，令十字面與畫面成 30°。試求其透視圖。

2. 如 Fig. 587 所示之建築物置於成角之位置，試求其透視圖。

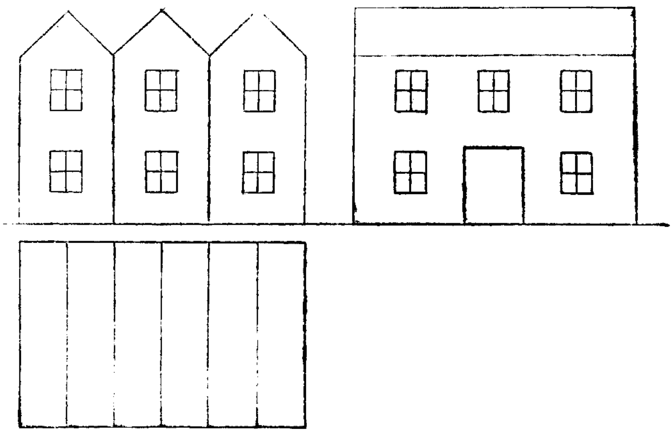


Fig. 587

3. 有一邊長為 4 糎之立方體，其一對角線與基面成垂直，試求其透視圖。

4. 有底之直徑為 5 糎，高為 7 糎之直圓錐，其軸平行於基面而與畫面成 60°，試求其透視圖。

5. 有外徑 7 糎，內徑 5 糎，長 6 糎之圓管，今使其橫於基面上，其軸與畫面成 35°，試求吾人能窺其內部之透視圖。

6. 將 Fig. 519 所示之立體，直立於基面上成角之位置，試求其透視圖。

7. 將 Fig. 520 所示之立體，直立於基面上成角之位置，試求其透視圖。

第十九章　斜透視

1. 斜透視

由傾斜於基面及畫面之直線而作立體之透視時，必須求得含其一傾斜面之平面之滅線。後於其滅線上，再求其傾斜面中所含之直線之滅點及測點。如是作圖，則事半而功倍矣。凡應用此方法所作之透視圖，稱爲斜透視 (Oblique perspective)。斜透視便利之點，厥爲已知立體，不必於基面及畫面上求作正投影圖。至用有角透視，其滅點所結之直線，以專與地平線平行爲主。然於此種透視，通常多不必與地平線平行。故稱此種透視，亦可謂之三點透視。(Three point perspective)。

2. 斜透視之一般

如 Fig. 588 所示，圖中四邊形 A B C D 爲傾斜於基面及畫面之四邊形。其作法，先作含視點 E 而平行於四邊形之平面 P，使其與畫面相交爲 V_1 V_2。此時含四邊形之平面及平行於此平面內之直線之滅點應在 V_1 V_2 上。次以 D_1, D_2 爲距離點，H H 爲地平線，V_c 爲心點，S_1 爲視點 E 迴轉於 H H 之周與畫面成一致時之位置。又以 V_1, V_2 爲直線 A D, A B 之滅點，M_1, M_2 爲其各測點。次以視點 E 迴轉於 V_1 V_2 之周，使其與畫面所成一致之位置爲 S_0，由 E 向 V_1 V_2 所引垂線之足爲 V_0。此時 V_0 V_c S_0 爲一直線，V_0 E $=$ V_0 S_0，三角形 E V_c V_0 爲直角三角形。依此，由 V_c 引平行於 V_1 V_2 之直線，而於此直線上取 V_c E_1 等於 V_c S_1，則 V_0 E_1 $=$ V_0 S_0。又於 V_1 V_2 上取 V_0 D_4 等於 V_0 S_0。此

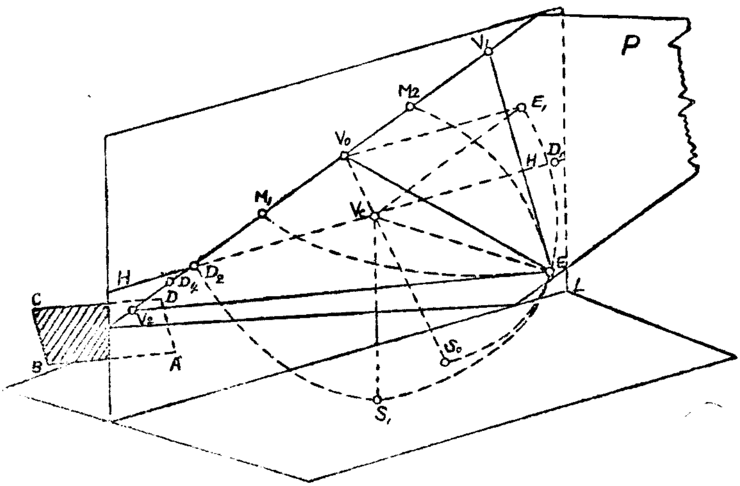


Fig. 588

時，直線 $V_1 V_2$, V_0, S_0 D_4 間之關係，應與 H H, V_c, S_1, D_2 間之關係相同。故將四邊形 A B C D 迴轉於含此四邊形之平面之直立跡之周，使其與畫面成一致之位置時，若以其直立跡爲基線，$V_1 V_2$ 爲地平線，V_0 爲心點，S_0 爲停點，D_4 爲距離點考之，其四邊形 A B C D 之透視圖之作，可依前章之平行透視，有角透視之作圖法求之可也。

如 Fig. 589, 乃示其迴轉後之位置之圖也。圖中 A′ B′ C′ D′ 爲四邊形 A B C D 之透視。A 點位於畫面上，直線 b_0 d_0 乃含四邊形之平面之直立跡。依此，A′ b_0 A′ d_0 等於 A B, A D 之實長。又四邊形 E′ F′ G′ H′, 乃示平行於四邊形 A B C D 之四邊形其透視之圖也。

作圖題 1. 求傾斜於畫面之長方柱之透視圖。

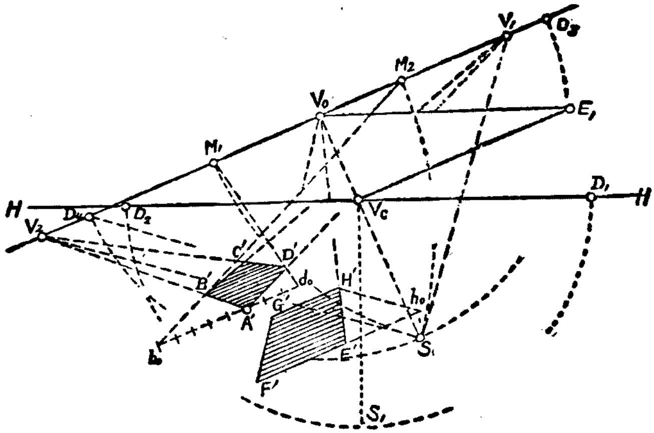


Fig. 589

如 Fig. 590 所示，圖中平面 Q 爲含角柱之底 A B C D 之平面。矩形 A B C D 乃以其底迴轉於 Q q′ 之周，使其與畫面成一致時之位置之圖。次作 A B C D 之透視圖 A′ B′ C′ D′。再求垂直於平面 Q 之直線之滅點 V_3，由 V_3 引平行線 V_3 M_3 平行於 V_1 V_2，取其長等於 V_3 至視點之實距離。次於 Q q′ 上，由 A D 之延長線與 Q q′ 之交點 a_1，取 a_1 n_3 之長等於角柱之高，更引 n_3 M_3，a_1 V_3 使其相交於點 N′。後引 N′ V_1，A′ V_3 使其相交於點 E′。此時 A′ E′ 乃過 A 之側稜之透視。又引 E′ V_1，E′ V_2 與 D′ V_3，B′ V_3，其相對應之交點爲 L′，F′。再引 F′ V_1，L′ V_2 使其相交於點 K′。後連結 K′，C′。此時所成之圖形 A′ B′ C′ D′ E′ F′ K′ L′，即爲所求之角柱之透視圖也。

3. 雜題

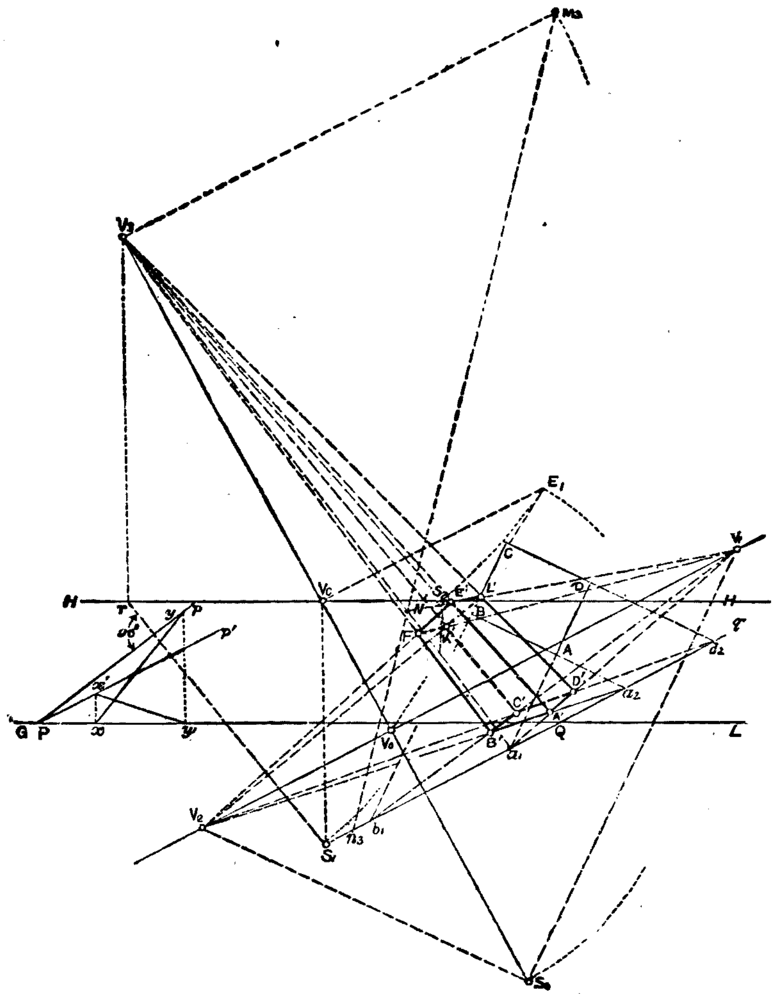


Fig. 590

如 Fig. 591 所示，圖中爲圓柱之軸傾斜於畫面時所作之圓柱之透視圖也。此圖之求法，先將此圓柱以一正方柱包之，設含其一側面 A B C D 之平面爲平面 Q。次與 Fig. 590 同法，作角柱之透視圖。後由角

柱之透視圖而作圓柱底之透視圖。圖中$\frac{M_3}{3}$之點爲垂直於平面 Q 之直線之$\frac{1}{3}$之分測點也。

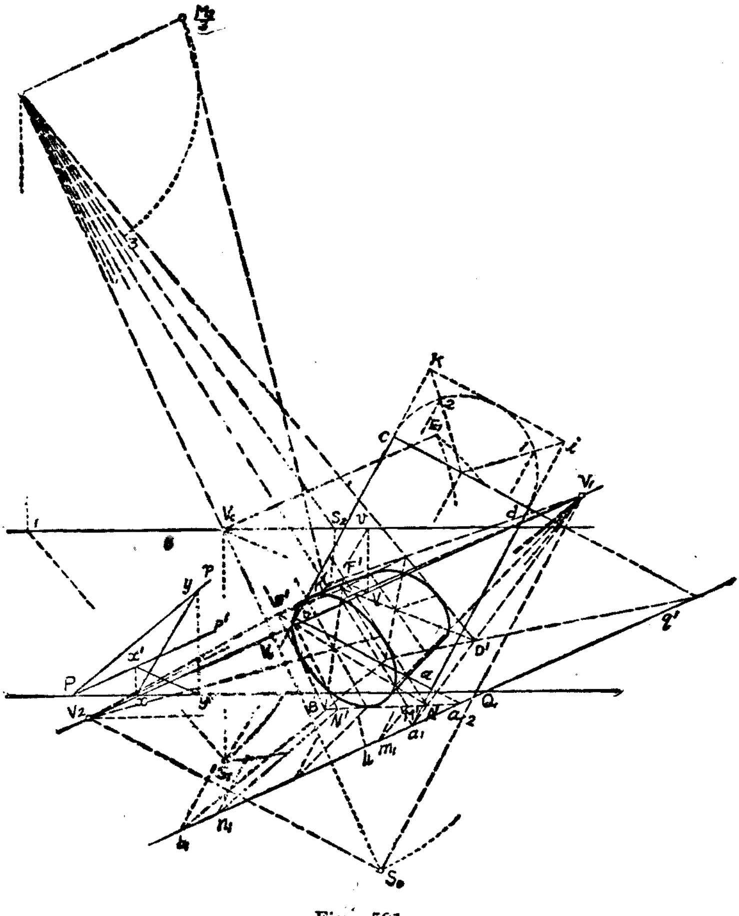


Fig. 591

如 Fig. 592 所示，爲圓柱上有圓板之立體所作之透視圖。此圖亦以方柱包之而求其透視之法也。

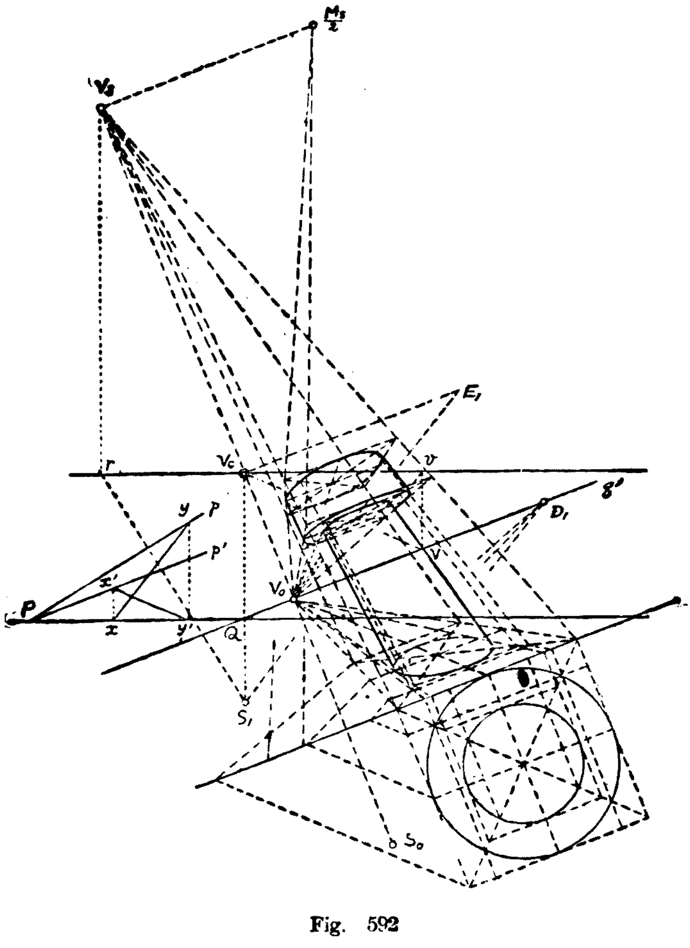


Fig. 592

練 習 題

1. 有直徑爲 4 糎，高爲 6 糎之直圓柱，其軸與畫面成 35°，與基面成 45°，試作其透視圖。

2. 有底之直徑為 4 糎，高為 7 糎之直圓錐，其底面與畫面成 60°，與基面成 45°，試作其透視圖。

3. 有一邊長為 4 糎之正八面體，其一面與畫面成 60°，與基面成 45°，其一邊與基面成 30°，試求其透視圖。

4. 有高 7 糎，以一邊長 3 糎之正六角形為底之正六角柱。其底與畫面成 70°，與基面成 40°，底之一邊與基面成 30°，試求其角柱之透視圖。

5. 如 Fig. 520 所示之立體，其底與畫面成 60°，與基面成 45°，底之一邊與基面成 30°，試求其透視圖。

6. 如 Fig. 583 所示之建築物，其底與基面成 30°，與畫面成 70°，其側面與基面成 80°，試求其透視圖。

7. 如 Fig. 593 所示之立體，其底與基面成 30°，與畫面成 60°，其底之一邊與基面成 10°，試求其透視圖。

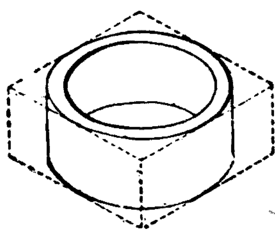


Fig. 593

8. 如 Fig. 594 所示之立體，試作其等測投影圖，斜投影圖，平行透視圖，有角透視圖，斜透視圖等比較之。其縮尺為 $\frac{1}{20}$。

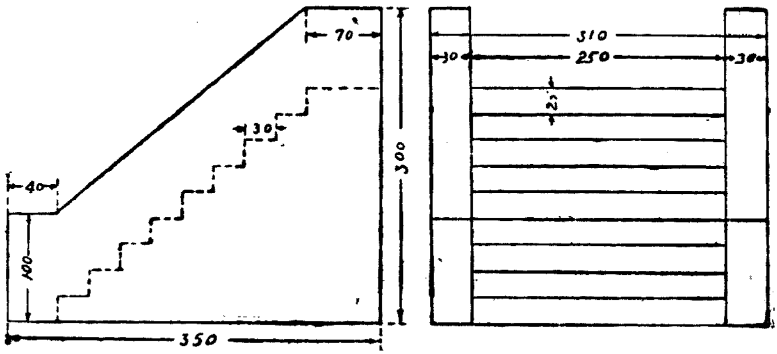


Fig. 594

第二十章　Adhemar 氏法

1.　點之透視

如 Fig. 595 所示，乃以 $\frac{1}{3}$ 之縮尺所作之平面圖也。圖中 S 為停點，P Q 為基線，a 為基面上一點 A 之平面圖。角 PSQ 為視角，由 S 向 P Q 所引之垂線之足為 X。又由 P 引垂直於 P Q 之直線，後向此直線由 a 引垂線，使其足為 a_0。此時 A 應在畫面後方 $\overline{P a_0}$ 之三倍，P之右方 $\overline{a\, a_0}$ 之三倍之距離處。

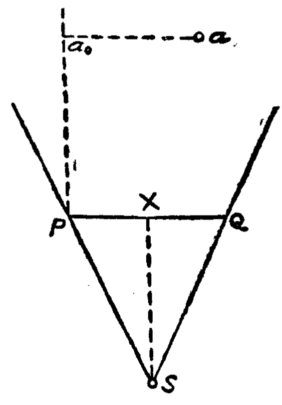


Fig. 595

次如 Fig. 596 所示，取基線 $P_1 Q_1$ 之長為 P Q 之三倍，由其中點向地平線 H H 引垂線，其足 V_c 為心點。又於 H H 上取 $V_c X$ 等於 P X，由 X 引垂直於HH之直線使其與 $P_1 V_c$ 相交於點 p，復由 p 引平行於 H H 之直線，於其直線上取 $p\, a_3$ 等於 $a\, a_0$。又於地平線上取 $V_c \frac{D}{3}$ 等於 S X。此時 $\frac{D}{3}$ 因其為分距離點，故於 $P_1 Q_1$ 上取 $P_1 a_1$ 等於 $P a_0$，則 a_1 與 $\frac{D}{3}$ 相結而與 $V_c P_1$ 所交之點為 a_2。此時點 A 之透視乃在由 a_2 所引之平行於基線之直線上。又因其亦在 V_c 與 a_3 所結之直線上，故兩者之交點 A′ 應為點A之透視。今 $V_c a_3$ 與基線相交於點 a_4，則 $P_1 a_4$ 之長當等於 $a\, a_0$ 之三倍。

應用上述之方法而求點之透視，謂之阿特赫瑪 (Adhemar) 氏法。

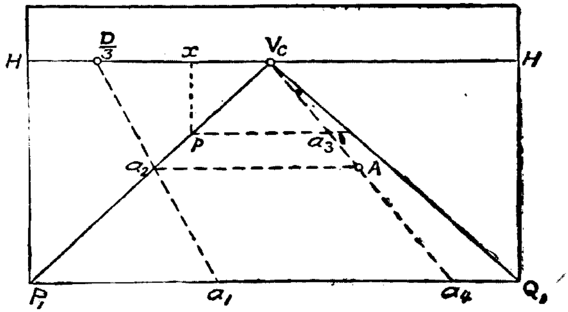


Fig. 596

2. 四邊形之透視

如 Fig. 597 所示，乃以$\frac{1}{6}$之縮尺所作之平面圖也。圖中 S 爲停點，PQ 爲基線，abcd 爲基面上四邊形 ABCD 之平面圖。由S向 PQ 引垂線，其足爲X。Pg_0, Qi_0, 爲 P, Q 向 PQ 所引之垂線，ab 與 SX 相交於點 k, 其延長線與 SP 相交於點 e, 由 e 向 Pg_0 所引垂線之足爲 e_0。又 bc 之延長線與 SX, SQ 相交於點 g, j, 由 j 向 Qi_0 所引之垂線之足爲 j_0。又 cd 之延長線與 SX, SQ 相交於點 u, i, 由 i 向 Qi_0 所引之垂線之足爲 i_0。又 da 之延長線於 SP, SQ 相交於點 f, l, 由 f, l 向 Pg_0, Qi_0 所引之垂線之足爲 f_0, l_0。又由 a, b, c, d 向 Pg_0 所引之垂線之足爲 a_0, b_0, c_0, d_0。

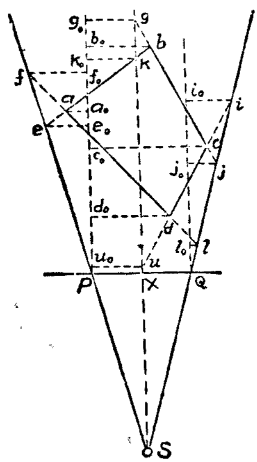


Fig. 597

如 Fig. 598 所示，圖中取基線 P_1Q_1 之長爲 PQ 之六倍，由其中點向地平線 HH 所引垂線之足 V_c 用爲心點。又於 HH 上取 V_cx 等於 P

X, 由 x 向 H H 所引之垂線使其與 $V_c\,P_1$ 相交於點 p。又於 H H 上取 $V_c\frac{D_1}{6}$, $V_c\,\frac{D_2}{6}$等於 S X, 則$\frac{D_1}{6}$, $\frac{D_2}{6}$應爲分距離點。依此，由 p 引平行於 H H 之直線，而於此直線上取 $p\,a_3$, $p\,b_3$, $p\,c_3$, $h\,d_3$ 等於 $a\,a_0$, $b\,b_0$, $c\,c_0$, $d\,d_0$, 又於 $P_1\,Q_1$ 上取 $P_1\,a_1$, $P_1\,b_1$, $P_1\,c_1$, $P_1\,d_1$ 等於 $P\,a_0$, $P\,b_0$, $P\,c_0$, $P\,d_0$。後令 a_1, b_1, c_1, d_1 與$\frac{D_1}{6}$相結，而與 $V_c\,P_1$ 相交於點 a_2, b_2, c_2, d_2。次由 a_2, b_2, c_2, d_2 引平行線平行於 $P_1\,Q_1$, 使其與 $V_c\,a_3$, $V_c\,b_3$, $V_c\,c_3$, $V_c\,d_3$ 相對應之交點爲 A′, B′, C′, D′, 則四邊形 A′ B′ C′ D′ 應爲已知四邊形之透視。圖中 a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, 各點，線以避免作圖之繁，故缺如也。

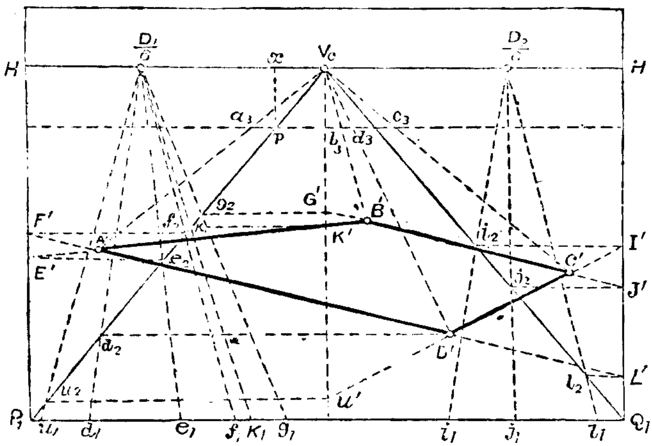


Fig. 598

次於 $P_1\,Q_1$ 上，取 $P_1\,e_1$, $P_1\,k_1$ 等於 $P\,e_0$, $P\,k_0$, 後將 e_1, k_1 與$\frac{D_1}{6}$相結，使其與 $V_c\,P_1$ 相交於點 e_2, k_2。更由 e_2, k_2, 各向垂直於地平線之 $P_1\,H$, $V_c\,K'$ 引垂線，置其相對應之交點爲 E′, K′。此時 E′, K′ 應在 A′ B′

上，或其延長線上。

再於 $P_1 Q_1$ 上，取 $P_1 g_1$, $Q_1 j_1$，等於 $P g_0$, $Q j_0$。次將 g_1, j_1 與 $\frac{D_1}{6}$，$\frac{D_2}{6}$ 相結，使其與 $V_c P_1$, $V_c Q_1$ 相對應之交點為 g_2, j_2。更由 g_2, j_2 向垂直於地平線之 $V_c K'$, $Q_1 H$ 引垂線，置其相對應之交點為 G'，J'。此時 G', J' 應在 $B' C'$ 之延長線上。

又於 $P_1 Q_1$ 上取 $P_1 u_1$, $Q_1 i_1$ 等於 $P u_0$, $Q i_0$。次將 u_1, i_1 與 $\frac{D_1}{6}$，$\frac{D_2}{6}$ 相結，使其與 $V_c P_1$, $V_c Q_1$ 相對應之交點為 u_2, i_2。更由 u_2, i_2 向 $V_c K'$, $Q_1 H$ 引垂線，置其相對應之交點為 U', I'。此時 U', I'，應在 $C' D'$ 之延長線上。

後於 $P_1 Q_1$ 上，取 $P_1 f_1$, $Q_1 l_1$ 等於 $P f_0$, $Q l_0$。次將 f_1, l_1 與 $\frac{D_1}{6}$，$\frac{D_2}{6}$ 相結，使其與 $V_c P_1$, $V_c Q_1$ 相對應之交點為 f_2, l_2。更由 f_2, l_2，向 $P_1 H$, $Q_1 H$ 引垂線。置其相對應之交點為 F', L'。此時 F', L' 應在 $A' D'$ 之延長線上。

上述之 E', K', G', J', U', I', F', L' 各點既得，將其連結而作成直線，即可求其 A', B', C', D' 諸點。

3. 長方柱之透視

如 Fig. 599 所示，乃以 $\frac{1}{4}$ 之縮尺所作之投影圖也。圖中矩形 a b c d 為長方柱之底在基面上之平面圖。又 S 為停點，P Q 為基線，h 為角柱之高，h_1 為地平線之高。由 P Q 上之任意點

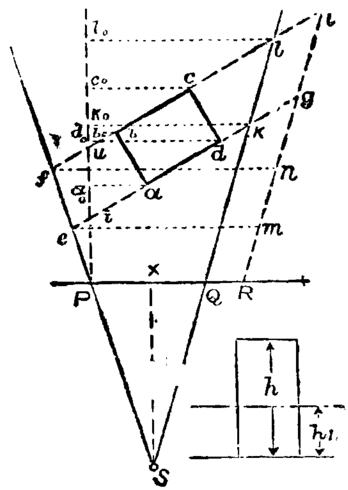


Fig. 599

R 引平行線 R i 平行於 S Q，使其與 a d, b c 之延長線之各交點爲 g, i。又由 a d, b c 之延長線與 S P 相交於點 e, f。次引平行線平行於 P Q，使其與 R i 相交於點 m, n。此時 R i 謂之R線。

如 Fig. 600 所示，圖中取 P_0 O 之長等於 P Q 之四倍。其中點爲 V_1，又隔 P_0 O 與 h_1 之四倍之距離，引平行於此之平行線 H H，由 V_1 向 H H 所引垂線之足爲 V_c。然此時 P_0 O 爲基線，H H 爲地平線，V_c 爲心點。次引平行於 P_0 O 之任意直線 P_1 Q_1，由 P_0, O 向 P_1 Q_1 所引之各

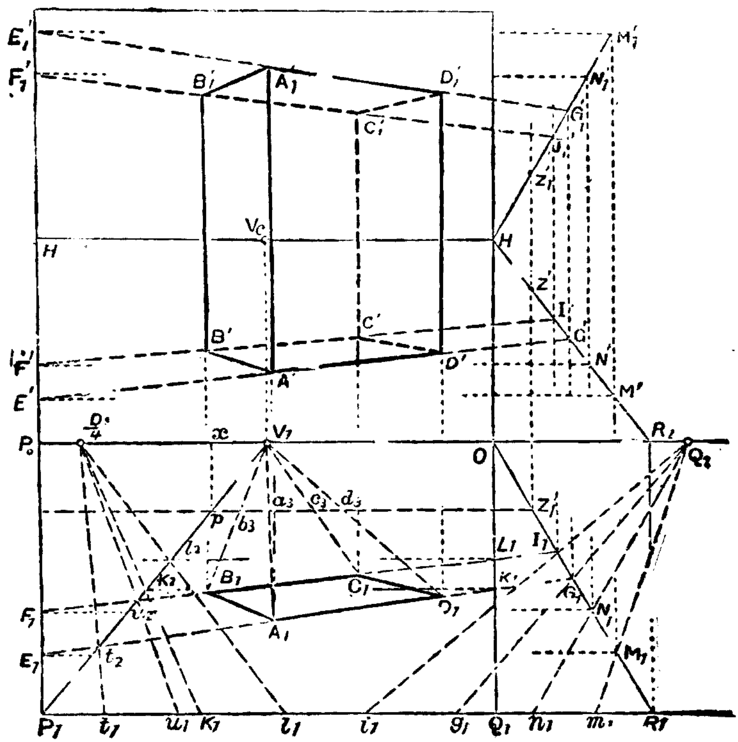


Fig. 600

垂線之足為 P_1, Q_1。復於 P_0O 上取 OQ_2 等於 SQ, 則 Q_2 視 P_0O 為地平線時為 R 線之 $\frac{1}{4}$ 之分測點。又於 P_1Q_1 上取 Q_1R_1 等於 QR 之四倍, 則直線 OR_1 視 P_0O_1 及 P_1Q_1 為地平線及基線時為 R 線之透視。但實際之 R 線之透視, 乃由 R_1 向 P_0O 所引之垂線之足 R_2 與 HH, Q_1O 之交點 H 相結所成之 HR_2 也。

先於 P_0O 上取 V_1x 等於 PX, 由 x 向 P_1Q_1 所引之垂線與 V_1P_1 相交於 p, 由 p 引平行線 pd_3 平行於 P_1Q_1。次於 R_1P_1 上取 R_1m_1, R_1n_1, R_1g_1, Ri_1 等於 Rm, Rn, Rg, Ri。後將 m_1, n_1, g_1, i_1 與 Q_2 相結, 使其與 OR_1 相交於點 M_1, N_1, G_1, I_1。更由 M_1, N_1 向 P_1P_0 所引之各垂線之足為 E_1, F_1。次於 pd 上取 pa_3, pb_3, pc_3, pd_3 等於由 a, b, c, d 至垂直於 PQ 之 Pl_0 之距離 aa_0, bb_0, cc_0, dd_0 後將 a_3, b_3, c_3, d_3 與 V_1 相結, 使其與 E_1G, F_1I_1 相對應之各交點為 A_1, B_1, C_1, D_1。此時四邊形 $A_1B_1C_1D_1$, 以 P_1Q_1 為基線, P_0O 為地平線時, 為角柱之底 ABCD 之透視。

次由 pd_3 與 OR_1 之交點 Z_1 向基線引垂線, 使其與 HR_2 相交於點 Z'。後於其延長線上, 取 $Z'Z_1'$ 等於 h, 將 H 與 Z_1' 相結。再由 M_1, N_1, G_1, I_1 向基線引垂線, 使其與 HR_2 相交於點 M', N', G', I'。又使其與 HZ_1' 相交於點 M_1', N_1', G_1', I_1'。復由 M', N', M_1', N_1' 向 P_1P_0 引垂線, 其足為 E', F', E_1', F_1', 後引直線 $E'G'$, $F'I'$, $E_1'G_1'$, $F_1'I_1'$。此時直線 $E'G'$, $F'I'$, $E_1'G_1'$, $F_1'I_1'$ 與由 A_1, B_1, C_1, D_1 向基線所引之垂線, 其相對應之交點 A', B', C', D', A_1', B_1', C_1', D_1', 應為角柱之各角點之透視。依此, 將以上諸點連結而成如圖所示之圖形, 即為角柱之透

視圖。

4. 建築物之透視

作建築物之透視圖與作長方柱之透視圖全同一法。如 Fig. 601, Fig. 602 所示，乃其大要之圖也。

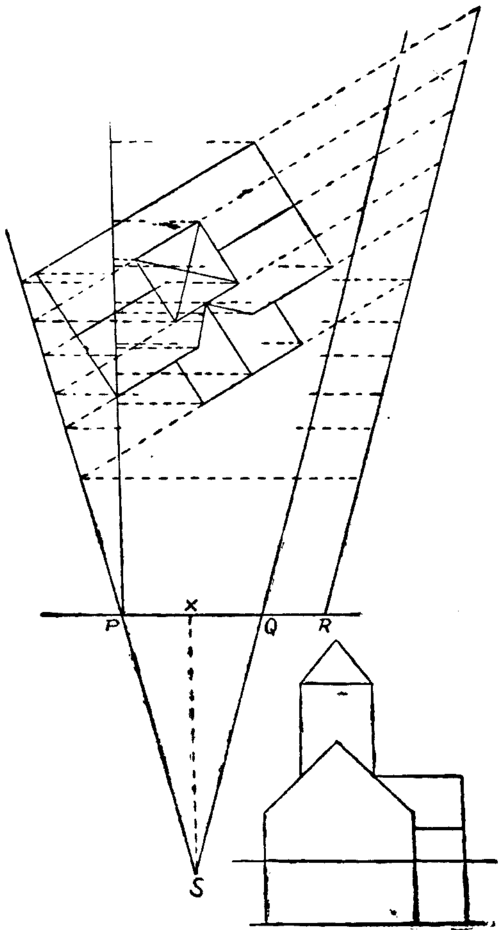


Fig. 601

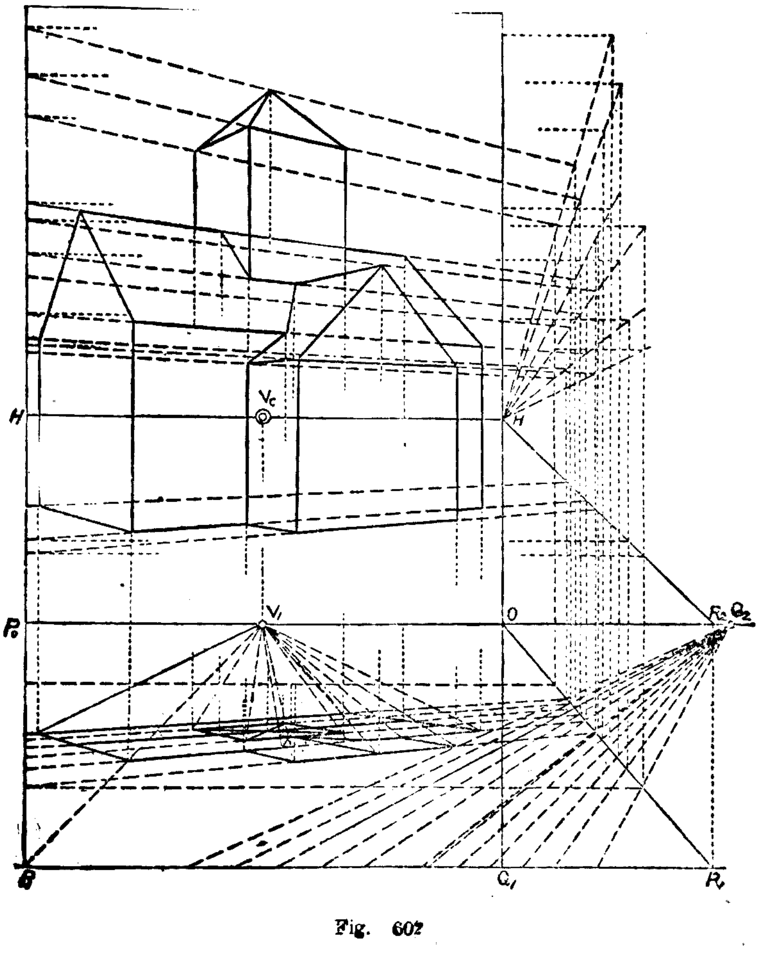


Fig. 602

第二十一章　三平面法

1.　三平面法

以上所述之圖法，必先以畫面爲直立投影面，基面爲水平投影面，而表示物體之正投影。後由其正投影，再求其透視圖。如斯作圖，乃屬其普通方法。至另一作圖法與此相異其趣者，厥爲三平面作圖之方法也。

將物體之正投影，表示於普通之直立投影面，及水平投影面上，而置畫面垂直於基線。凡置畫面於如斯之位置而作透視圖之方法，謂之三平面法 (Method by three planes)。

2.　點之透視

如 Fig. 603 所示，圖中 a, a′ 爲已知點 A 之平面圖，立面圖。e, e′ 爲視點之平面圖，立面圖。O Y, O X 爲畫面之水平跡，直立跡。此時 a e 與 O Y 所交之點 a_0 爲點 A 透視之平面圖。a′ e′ 與 O X 所交之點 a_0' 爲點 A 之透視之立面圖。依此，將畫面迴轉於 O X 之周，使其與直立投影面相一致，即可得點 A 之透視，然將如斯之畫面迴轉時，因透視與立面圖相重合而混雜，故通常必將畫面移至適當之位置 X_1

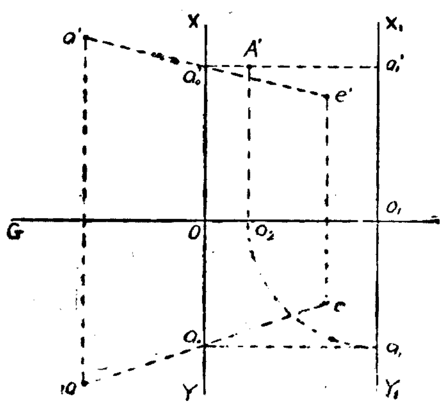


Fig. 603

o_1 Y_1 處，而於其位置向直立投影面迴倒。依此，由 a_0 向 o_1 Y_1 所引之垂線，其足爲 a_1。次於基線上取 O_1 a_2 等於 O_1 a_1。更由 a_2 引垂直於基線之 a_2 A' 及由 a_0' 引平行於基線之直線，使其相交於點 A'。此時 A'，即爲所求之點 A 之透視。

3. 多面體之透視

多面體之透視，乃由多面體之各角點之透視相結所作之直線而成。例如 Fig. 604 中之 B' A' D' J' G' H' V'，乃根據左圖之二投影而求得已知立體之透視圖也。求各角點透視之法與 Fig 603 同。

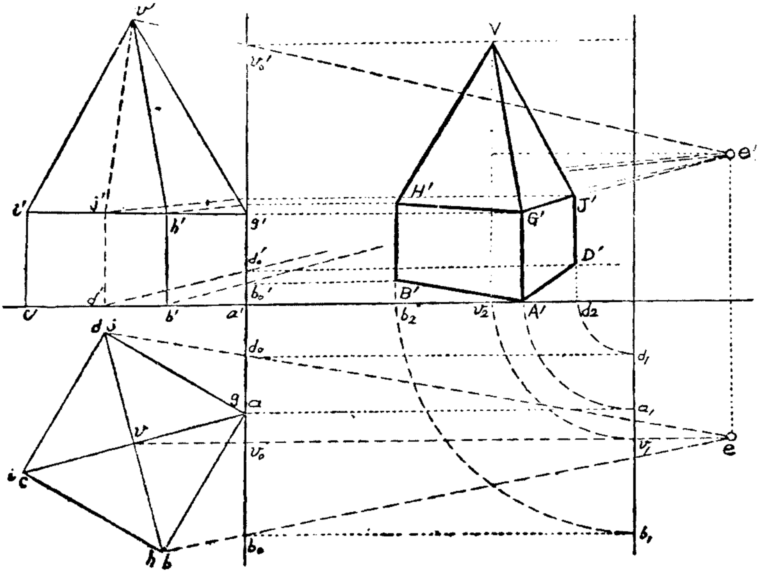


Fig. 604

4. 圓錐之透視

圓錐之透視，乃由其底之透視與由頂點之透視向此所引之二切線

而成。求底之透視時，亦可由包函其底之正方形之透視而求之。其後將圓周上數點之透視連續而成曲線可也。如 Fig. 605 所示，乃直圓錐之底位於水平投影面上時所作之透視圖也。

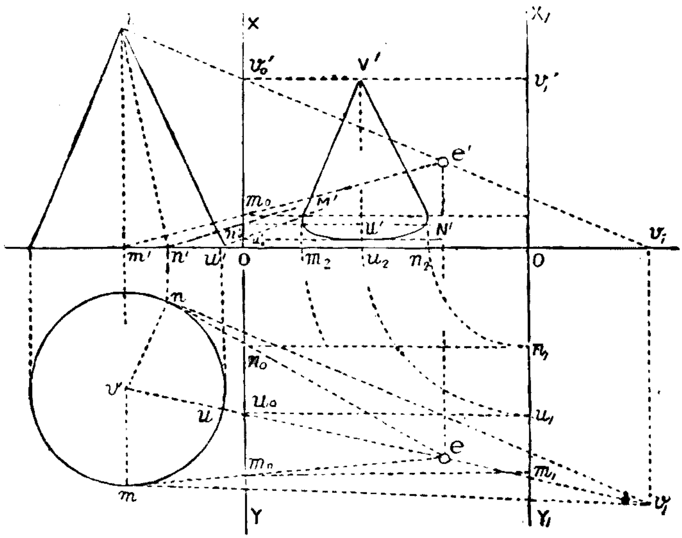


Fig. 605

5. 傾斜於畫面之直線之透視

當作傾斜於畫面之直線之透視圖時，爲作圖便利計，可採用其焦點之作圖法，如 Fig. 606 所示，圖中 a b, a' b' 爲已知直線 A B 之平面圖及立面圖。p, p' 爲 A B 與畫面相交點 P 之平面圖及立面圖。先若求得點 P 之透視 P'，則 A B 之透視應通過點 P'。又由視點 E 引平行於 A B之直線而求其與畫面之相交點 V。此時 V，卽爲 A B 之焦點，而 A B 及平行於 A B 之直線之透視應通過點 V。依此，則 e' 於 a', b' 相結之

直線與 O X 相交於 a_0', b_0'。後由 a_0', b_0' 引平行線平行於基線，使其與直線 P′ V 相交於點 A′, B′。此時 A′ B′，卽爲AB之透視。

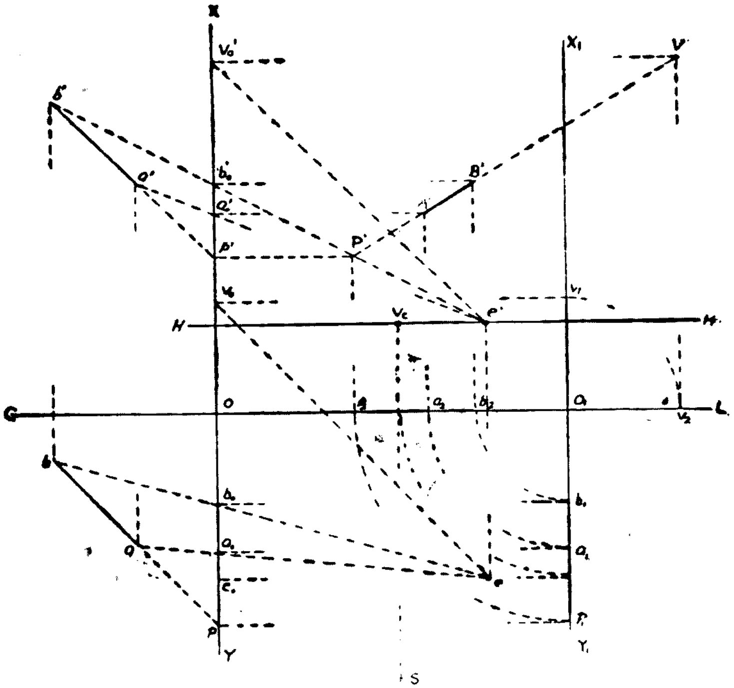


Fig. 606

如 Fig. 607 所示，乃先求 G F, F H 之焦點 V_1, V_2，然後作已知立體之透視圖之圖也。

練 習 題

1. 試用三平面法。求直立於水平投影面上之圓柱（直徑 4 糎，高

7糎）之透視圖。而視點置於畫面前6糎，水平面上3糎，圓柱之軸右4糎處。

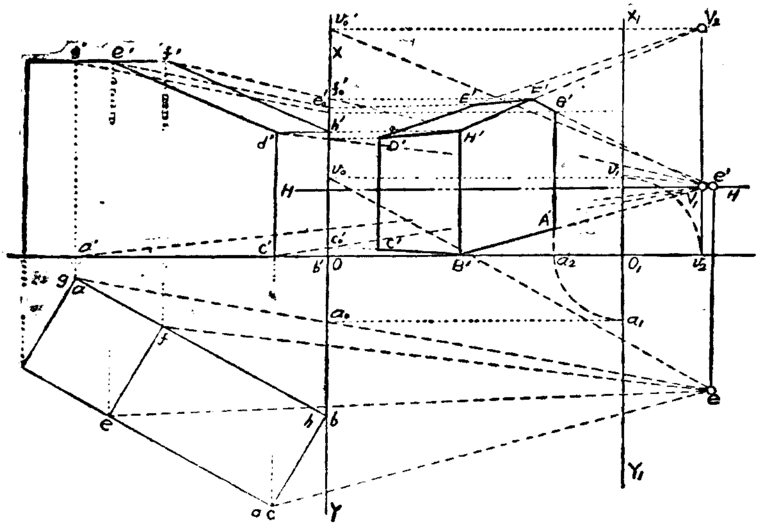


Fig. 607

2. Fig. 594 所示之階段之正面，與畫面成35°，試以三平面法求其透視圖。但視點之位置爲任意，縮尺爲$\frac{1}{50}$

3. 將 Fig. 576 所示之建築物置於成角之位置，試採用三平面法求其透視圖。

4. 如 Fig. 519 所示之立體之一面，與畫面成30°，試依三平面法求其透視圖。

5. 有直徑4糎，長8糎之二圓柱，其角互直交而成十字形。試依三平面法求其透視圖。

6. 有一邊長爲 4 糎之正八面體。其一對角線垂直於水平面，他一對角線與畫面成 30°。試依三平面法求其透視圖。

7. 有直徑 4 糎，節距 4 糎之螺旋線。試依三平面法求其二周之透視圖。但其軸垂直於水平投影面，視點置於軸之右方 3 糎之位置。

8. 有外徑 8 糎，內徑 2 糎之圓環。其軸爲水平而與畫面成 20°。試依三平面法求其透視圖。

9. 有高 5 糎之截頭圓錐。其底之直徑爲 3 糎，5 糎。當其軸垂直於水平面時，試依三平面法求其透視圖。

10. 如 Fig. 574 所示之棧道之外形置於成角之位置。試依三平面法求其透視圖。

第二十二章　透視之陰影

1.　基面上點之陰影

如 Fig. 608 所示，L' 爲發光點之透視，L_0 爲發光點向基面所引垂線之足。又 P' 爲已知點 P 之透視，P_0 爲 P 向基面所引之垂線之足。此時，過點 P 光線之透視爲 $L'P'$，而過點 P 含光線且垂直於基面之平面與基面之相交跡之透視爲 L_0P_0，故 $L'P'$ 與 L_0P_0 之交點 P_1'，爲 P 向基面所投影之透視。

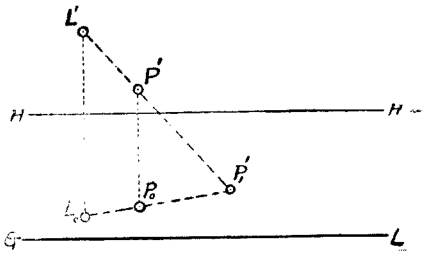


Fig. 608

發光點至無限遠之距離時，其光線爲平行光線。其透視不爲平行而相會於其滅點。然光線平行於畫面時，光線之透視亦平行。

如 Fig. 609 所示，圖中 r, r' 爲平行於畫面之光線之平面圖，立面圖。此時平行此光線之光線之透視應平行於 r'。依此，使 P' 爲點 P 之透視，P_0 爲 P 向基面所引垂線足之透視，則平行於 r 之 P_0P_1' 與平行於 r' 之 $P'P_1'$ 之交點 P_1'，爲 P 向基面所投之影之透視。

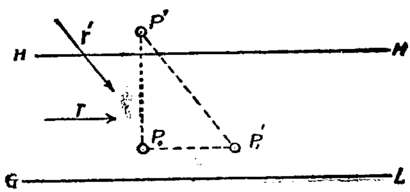


Fig. 609

如 Fig. 610 所示，圖中 r, r' 乃示傾斜於畫面之光線之平面圖，立

面圖。由停點 S 引平行於 r 之直線，使其與基線相交於點 r_0。更由 r_0 向地平線引垂線，其足爲 r_1。又由心點 V_c 引平行於 r' 之直線，使其與 $r_1\,r_0$ 相交於點 R′。此時圖中平行於已知光線之光線之透視，相會於 R′。平行於光線而垂直於基面之平面與基面相交跡之透視，相會於 r_1'。依此，P′ 爲一點 P 之透視，P_0 爲 P 向基面所引之垂線之足之透視時，則直線 P′ R′ 與 $P_0\,r_1$ 之交點 P_1'，爲 P 向基面所投影之透視。

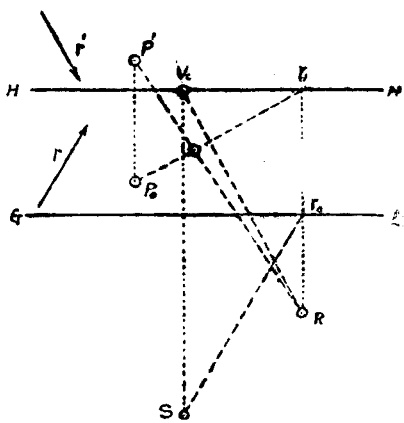


Fig. 610

2. 角柱之底位於基面上時之陰影

(i)發光點在有限之距離時。

如 Fig. 611 所示，圖中 L′ 爲發光點之透視，L_0 爲發光點向基面所引之垂線之足之透視。此時作圖與 Fig. 607 同，先求點 F′, E′, H′, G′ 向基面所投之影 F_1', E_1', H_1', G_1'。由是將 B′, F_1', E_1', H_1', G_1', C′ 順次連結，其所得之直線所圍成之圖形，爲其於基面上之影。由此影所得之面 F′ B′ A′ E′, E′ A′ D′ H′, H′ D′ C′ G′，是爲陰面。

(ii)平行光線平行於畫面時。

其作圖法與 Fig. 608 相似，先求其立體上之各點向基面所投之影，後將此連續而作成圖可也。如 Fig. 612, Fig. 613,乃示其大要之圖

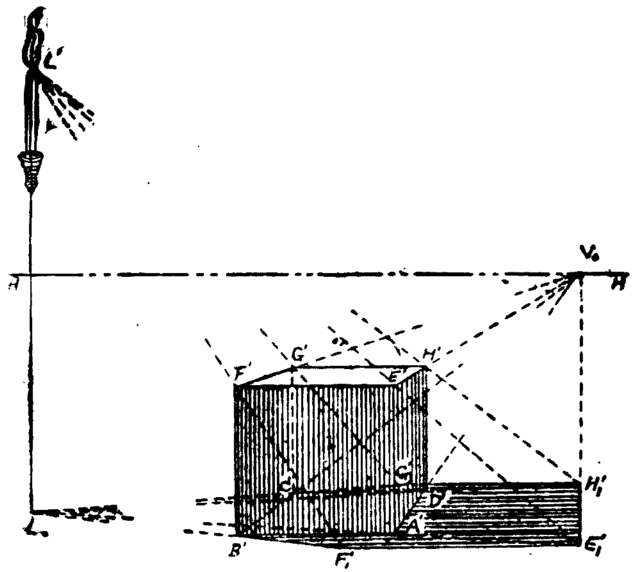


Fig. 611

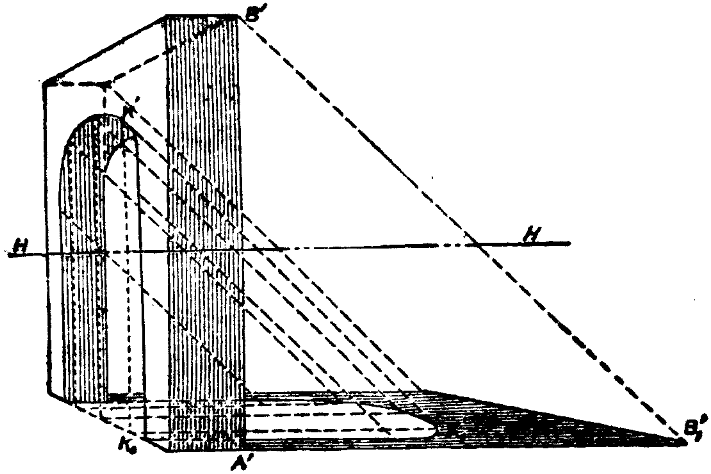


Fig. 612

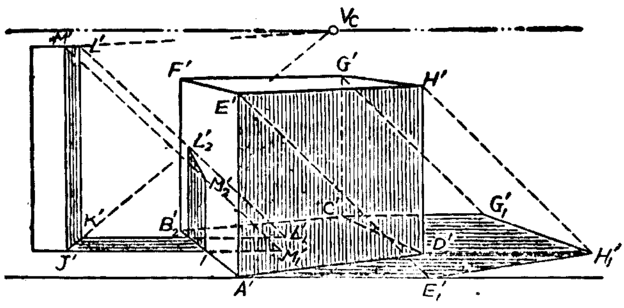


Fig. 613

也。Fig. 613 中，其左方之角柱，因其向右方之角柱上投影，故求其影，可如求 M' J' 所投之影 1 M_2' 時，須由 J' 引平行於基線之直線，使其與 A' B' 相交於點 1。由 1 引垂線於基線，後由 M' 引平行於已知光線之直線，使其與垂線相交於點 M_2' 可也。同法，求得 L' K' 所投之影 2 L_2'，則得影 1M_2' L_2' 2。

(iii)平行光線傾斜於畫面時。

如 Fig. 614, Fig. 615 所示，圖中 R' 爲已知光線之滅點，r_1 爲光線之平面圖之滅點。此時凡各點光線之透視均聚會於點 R'，而平行於光線之直立面之水平跡之透視應會於點 r_1。依此，可如 Fig. 609 作圖法，於立體上之各角點求其向基面所投之影。將其各點連續所作之圖形，則得基面上之影。後由基面上之影，可決定其立體之陰面。

3 直線向基面及其他之傾斜面所投之影

如 Fig. 616 所示，圖中 M' N' 爲直線 M N 之透視，V 爲其滅點，點 M 爲基面上之點。又 A' D' E' F' B' C' 爲一面 A E F B 位於基面

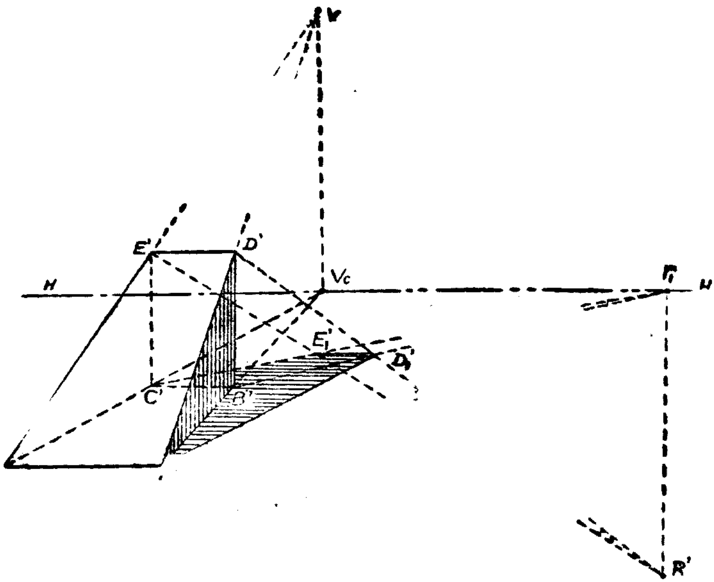


Fig. 614

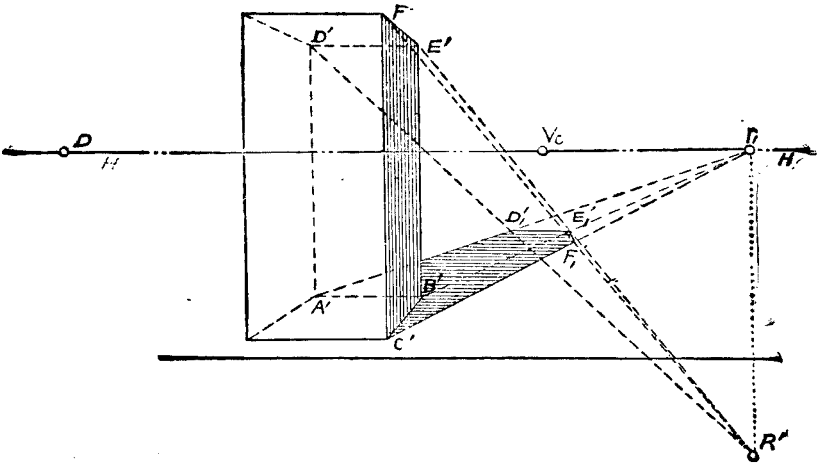


Fig. 615

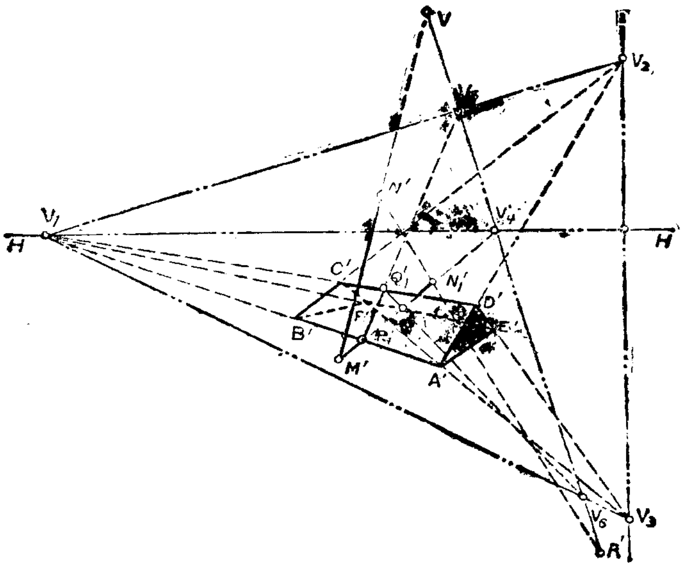


Fig. 616

上時三角柱 A D E F B C 之透視，直線 V_1 V_2 爲面 A B C D 之滅線，直線 V_1 V_3 爲面 C D E F 之滅線，R' 爲光線之滅點。此時直線 V R' 爲含其直線且平行於光線之平面之滅線。依此，V R' 與地平線 H H 相交之點 V_4，是即直線 M N 向基面所投之影之滅點。又 V R' 與 V_1 V_2 相交之點爲 V_5，則 V_5 爲 M N 向面 A B C D 所投之影之滅點。V R' 與 V_1 V_3 相交之點爲 V_6，則 V_6 爲 M N 向面 C D E F 所投之影之滅點。

依此，置直線 N' R' 與 M' V，相交之點爲 N_1'，則 M' N_1' 爲 M N 向基面所投之影。又 M' V_4 與 A' B' 之交點 P_1' 與 V_5 相結，使其與 C' D' 相交於點 Q_1'，則 P_1' Q_1' 爲 M N 向面 A B C D 所投之影。Q_1' V_6

與 E′ F 相交之點爲 O_1'，則 Q_1' O_1' 爲 M N 向面 C D E F 所投之影。此時 O_1' 之在 M′ N′ 上，自無論矣。

作圖題 1. 求直立於基面上之角柱向置於基面上之角錐所投之影。

如 Fig. 617 所示，圖中 T′ 爲角錐之頂點向其底所垂之垂線之足。光線爲平行光線，而平行於畫面。

先由 C′ 引平行線 C′ L′ 平行於基線，使其與 M′ O′，T′ O′ 相交於

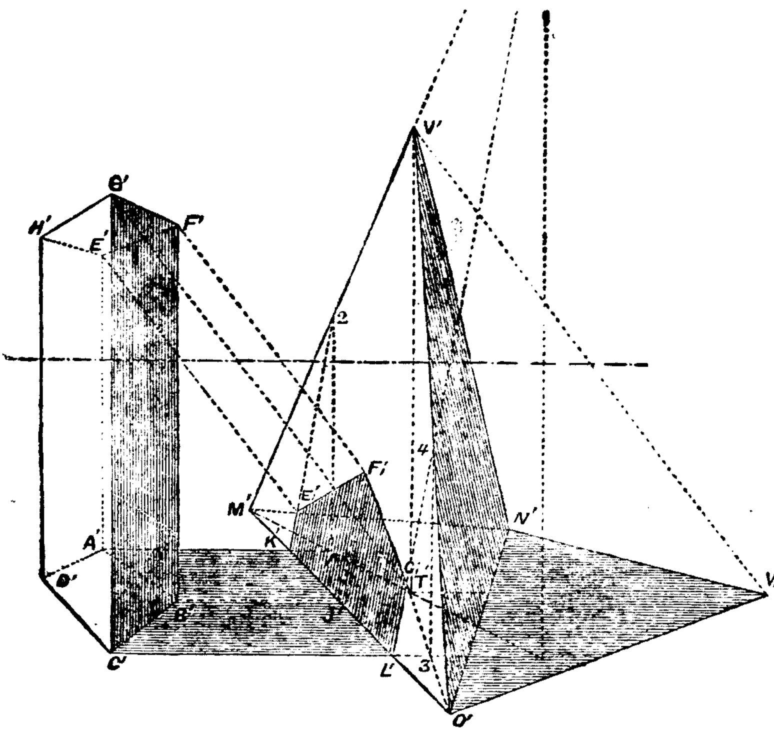


Fig. 617

點 L′, 3。次由 3 向基線引垂線使其與 V′ O′ 相交於點 4, 後引直線 4 L′。此時 C′ L′, 乃示含直線 G′ C′ 及平行於光線之平面之水平跡。直線 34, 因其爲其平面與含三角形 V′ T′ O′ 之平面之相交跡，故直線 4 L 應爲前者與面 V′ M′ O′ 之相交跡。依此，由 G′ 所引之平行於光線之平行線與 4 L′ 相交於點 G_1', 則 G_1' 爲點 G′ 向角錐之斜面 V′ M′ O′ 所投之影。是故 L G′ 爲 G′ C′ 向斜面 V′ M′ O′ 所投之影。同法，若求得角柱他稜 F′ B′, E′ A 所投之影，則得所求之影 L′ G_1' F_1' E_1' K′

作圖題 2.　求其底置於基面上之角錐向其一側面置於基面上之角柱所投之影。

如 Fig. 618 所示，圖中 R′ 爲光線之滅點，r_1 爲 R′ 向地平線所引之垂線足，O′ 爲角錐之頂點 V′ 向其底所引之垂線足。

先引 V′ R′, O′r_1 使其相交於點 V_1', 次將 V_1' 與 A_1' B′ 相結使其與 D′ H′, G′ K′ 相交於點 3, 4, 9, 10。再由 O′ r_1 與 D′ H′, G′ K′ 之交

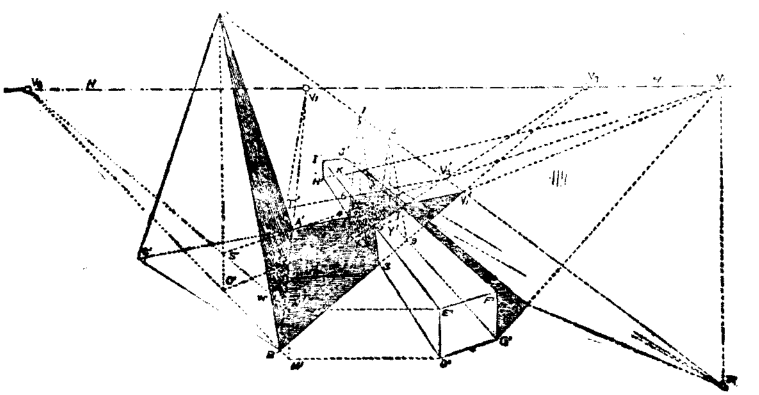


Fig 618

點 X′, Y′ 向基線引垂線,使其與 V′ R′ 相交於點 1, 2。更將 1 與 3, 4 相結使其與 E′ I′ 相交於點 5, 6。又 2 與 9, 10 相結,使其與 F′ J′ 相交於點 7, 8。此時四邊形 3 4 6 5 爲角錐向側面 E′ D′ H′ I′ 所投之影。又 5 6 8 7 爲其向側面 E′ I′ J′ F′ 所投之影。

次由 D′ 引平行線平行於基線,使其與地平線上任意之點 V_2 與 G′ 相結之直線相交於點 M′。更由 M′ 引垂直於基線之直線,即平行於 D′ E′ 之直線及由 E′ 引平行於 D′ M′ 之直線,使其相交於點 N′。而 N′ V_2 與 V′ O′ 之交點 S′ 與 r_1 相結,使其與 V′ R′ 相交於點 V_2'。此時 V_2' 因其爲角錐之頂點 V′ 向含面 E′ I′ J′ F′ 之平面所投之影,故直線 $\overline{68}$, $\overline{57}$ 相會於 V_2'。

作圖題 3. 求垂直於畫面之圓管曲面上之陰影。

如 Fig. 619 所示,圖中 R′ 爲光線之滅點,V_c 爲心點。其圓管之一端 A′ B′ C′ 置於畫面上。此時直線 R′ V_c 乃示平行於圓管之軸及其

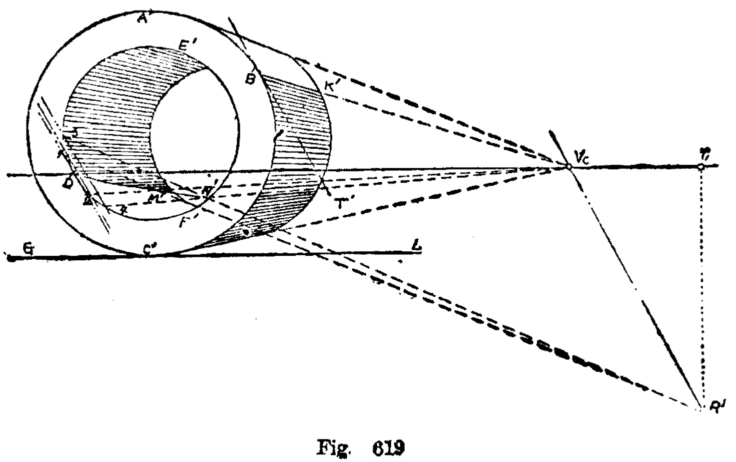


Fig. 619

光線之平面之滅線。是故平行於光線之圓管其切平面之直立跡應平行於 R′ V_c。依此，若引平行於 R′ V_c 之切線 B′ T′ 切於圓 A′ B′ C′，則過其切點之柱面之面素 B′ K′ 爲外側之一陰線。其另一陰線，因其位於不見之部分，故略。

次引平行於 R′ V_c 而切於圓 D′ E′ F′ 之直線，其切點爲 D′。此時 D′ 爲圓管內面影線之一端。次置平行於 R′ V_c 之任意直線與圓 D′ E F′ 相交於點 1, 2, 則 1 與 R′, 2 與 V_c 相結，其所得之交點爲 M。此時 M′ 爲點 1 向內面所投之影。同法，而求其內面上之影，將其各點連續作成曲線。1 M′ N′，卽得其內面上之影線。

作圖題 4. 十字拱之透視爲已知，求其陰影。

如 Fig. 620 所示，圖中拱之一面與畫面相一致。故形成十字拱之半圓柱面，其一垂直於畫面，他一平行於畫面。

先置 R′ 爲光線之焦點，V_c 爲心點，則垂直於畫面之圓柱面其內面之影，可用 Fig. 619 作圖法求之。次由 R′ 引平行於基線之直線，及由 V_c 引垂直於基線之直線，使其相交於點 R_0，故 R_0 爲平行於基線及光線之平面與垂直於基線之平面其相交跡之焦點。而平行於畫面之半圓柱面之軸與基線平行，其兩端之半圓與基線垂直。依此，由 R_0 向左側圓之透視引切線，置其切點爲 P′，則 P′ 爲平行於畫面之圓柱面內其影之一端。又過 R_0 之任意直線與左側圓相交於點 3, 4，次由 4 引平行於基線之直線，使其與過 3 之光線 3 R′ 相交於點 Q′，則 Q′ 爲點 3 向其內面所投之影。後依此法，而求平行於畫面之圓柱面其內面之影線上之點，將各點連結而作成曲線，卽得其內面之影。

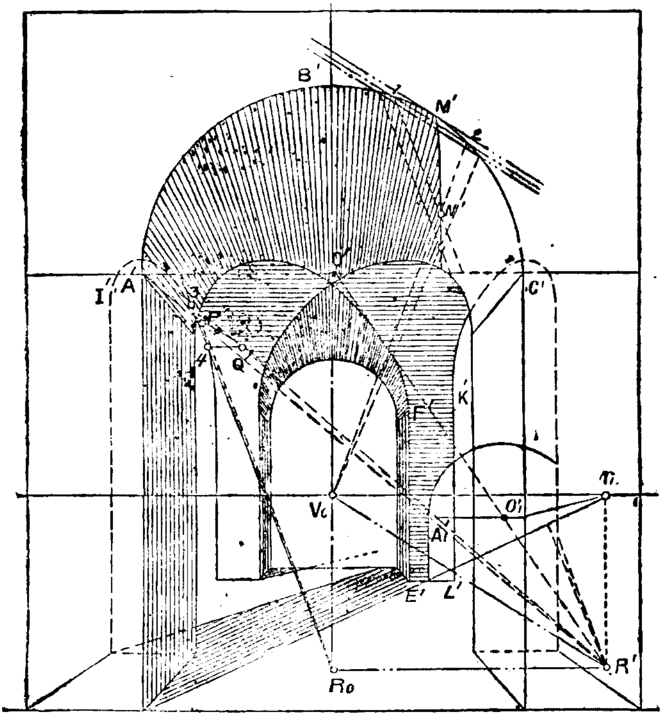


Fig. 620

又與畫面一致之半圓 A' B' C'，其中心爲 O'。由半圓直徑之一端 A 向基線引垂線，其足爲 G'。次將 G' 與 r_1 相結，而與 E' L' 相交於點 E'。更由 E' 引垂線垂直於基線，使其與 R' A' 相交於點 A_1'。次由 A_1' 引平行線平行於基線，使其與 R' O' 相交於點 O_1'，則 O_1' 爲半圓 A' B' C' 之中心 O' 向面 E' F' K' L' 所投之影。依此，以 O_1' 爲中心過 A_1' 作圓，則得半圓 A' B' C' 向平行於一拱脚之畫面之面 E' F' K' L' 所投之影。

又其基面上所投之影，茲從略。

作圖題 5. 由半圓筒與四半球所成之壁龕爲已知，求其圓面之影。

如 Fig. 621 所示，圖中 R′ 爲光線之焦點，V_c 爲心點，D 爲距離點。其壁龕之前面與畫面相一致。

(i)圓筒內面之影。

由 A′ r_1 與曲線 A′ B′ C′ 之交點 B′ 引垂直於基線之 B′ E_1′，使其與 E′ R′ 相交於點 E_1′。此時直線 E_1′ B′ 爲直線 E′ A′ 向圓筒內面所投之影。次由半圓 E′ K′ J′ 上之任意點 N′ 向基線引垂線，其足爲 M_1。次置 M′ r_1 與曲線 A′ B′ C′ 之交點爲 1，則由 1 向基線所引之垂線與 N′

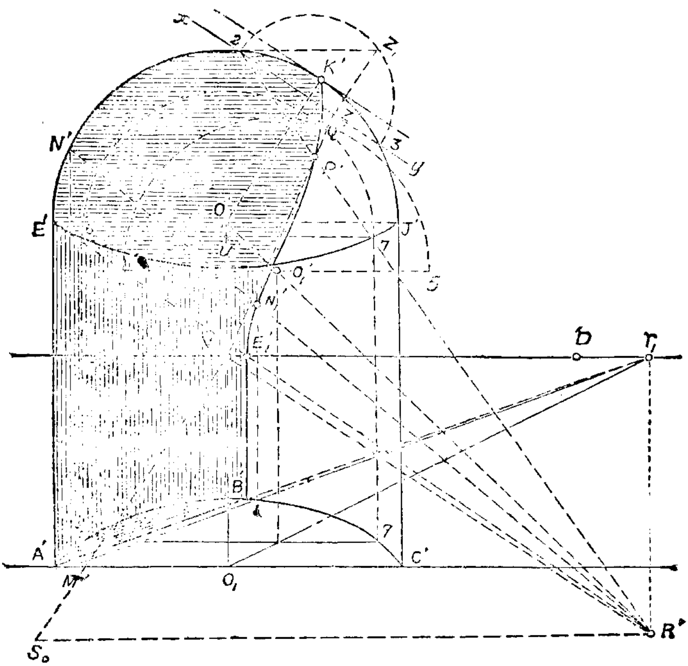


Fig. 621

R' 相交之點 N_1'，爲點 N' 所投之影。同法，可求半圓 E' K' J' 上之點向半圓筒之內面所投之影。後將其各點連續而成曲線，卽得半圓 E' K' J' 向圓筒內面所投之影。

(ii)球內面之影。

四半球以平行於畫面之任意平面切之，則所得之切口之透視爲半圓 6 Q' 7，其水平跡之透視爲直線 8 9。由半圓 E' K' J' 之中心 O' 向基線引垂線，其足爲 O_1。O_1 與 r_1 相結之直線，使其與直線 8 9 相交，由其交點向基線所引之垂線與 O' R' 相交於點 O_1'。更由 O_1' 引平行線平行於基線，使其與 R' E' 相交於點 4。此時 O_1' 爲中心，O_1' 4 爲半徑之半圓爲上述切斷平面上半圓 E' K' J' 之影，依此，使此半圓與上述之切口之半圓 6 Q' 7 相交於點 Q'，則 Q' 爲球面內影線上之一點。同法，若求得影線上之點，將其連續作成曲面，卽得球面內之影。

或以平行於光線而垂直於畫面之平面切之，而於其切口上，求其影線上之點亦可。此法，先將 V_c 與 R' 連結而成直線。此直線因其爲過心點而含光線且垂直於畫面之平面之直立跡，故平行於此平面而切於半圓 E' K' J' 之直線之切點若爲 K'，則 K' 爲球內面之影線之端。次由 V_c 引垂直於 V_c R' 之 V_c S_0，取 V_c S_0 等於視點至畫面之距離 V_c D，則直線 S_0 R' 爲通過視點之光線以 V_c R' 爲軸，而倒於畫面之位置之圖。又平行於 V_c R' 之任意直線 x y 與半圓 E' K' J' 相交於點 2, 3, 以 2 3 爲直徑作圓。此時此半圓乃以 x y 爲直立跡，以垂直於畫面之平面切其球面，將其所得之切口迴轉於 x y 之周，使其與畫面成一致之位置之圖。依此，由 2 引平行於 S_0 R' 之直線，使其與半圓 2 Z_1 3 相交於點 Z_1。

是時 Z_1 因其爲點 2 向球之內面所投之影倒於畫面之位置之圖，故將其復歸原有之位置，則得其透視 P′。是卽由 Z_1 向 x y 所引之垂線足 Z_1' 與 V_c 相結之直線及 2 與 R′ 相結之直線，而得其相交點，P′。同法，求得影線上之點，將其連結而成曲線可也。

作圖題 6. 求於心點切畫面之球之陰影。

如 Fig. 622 所示，V_c 爲心點，D 爲距離點，S_1 以地平線爲基線時之停點，R′ 爲光線之滅點，r_1 爲 R′ 向地平線所引垂線之足。

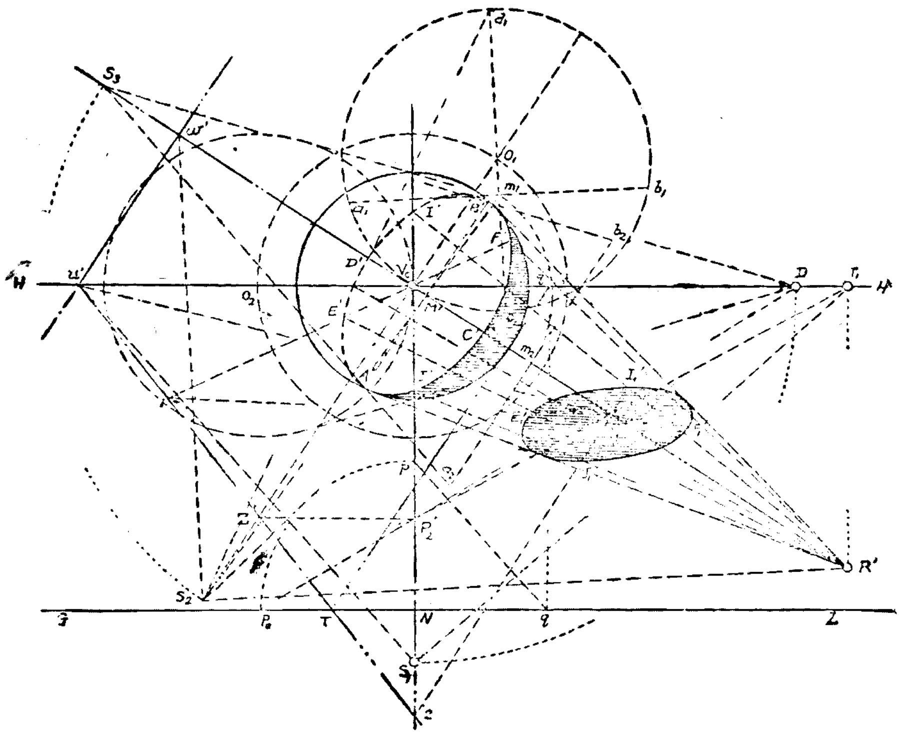


Fig. 622

先於地平線上，由心點 V_o 取 $V_o O_2$ 等於已知球之半徑。次以 O_2 爲中心，以球之半徑作圓。後由 D 向此圓引切線及由心點向地平線引垂線而得交點。過此交點，以心點爲中心作圓，卽得其球之透視。

(i)求球之陰面之方法。

由 V_o 引垂直於 $V_o R'$ 之 $V_o S_2$，取 $V_o S_2$ 等於 $V_o D$，而引 $S_2 R'$。此時 $S_2 R'$ 乃通過視點之光線以 $V_o R'$ 爲軸而倒於畫面之位置。又於 $S_2 V_o$ 之延長線上，取 $V_o O_1$ 等於球之半徑，若以 O_1 爲中心過 V_o 作圓，則此圓爲含過視點之光線且垂直於畫面之平面切於此球，而後以$V_o R'$ 爲軸，將其切口倒於畫面時之位置。依此，使垂直於 $S_2 R'$ 之直徑 $c_1 d_1$ 之端與 S_2 所結之直線與 $V_o R'$ 相交於點 C', D'，則 $C' D'$ 爲球之陰線之透視之橢圓之一軸也。

次將 $C' D'$ 之中點 M' 與 S_2 相結，使其與 $c_1 d_1$ 相交於點 m_1，更過 m_1 作垂直於直徑 $c_1 d_1$ 之弦 $a_1 b_1$。此時 $a_1 b_1$ 之長等於垂直於陰線之透視之橢圓 $C' D'$ 之軸之實長。而含陰線之光線，因其垂直於光線，故於 $V_o R'$ 上取 $V_o S_3$ $M' m_2$ 等於 $V_o D$, $M' m_1$。更由 m_2 引垂直於 $V_o R'$ 之直線，而於其上取 $m_2 a_2$, $m_2 b_2$ 等於 $m_1 a_1$，再由 M' 引垂直於 $C' D'$ 之直線及 a_2, b_2 與 S_3 相結之直線，使其相交點爲 A', B'。此時 $A' B'$ 因其爲垂直於 $C' D'$ 之軸，故 $A' B'$, $C' D'$ 爲二軸之橢圓，是爲陰線之透視。

(ii)求基線上球影之方法。

由 S_2 引垂線於 $S_2 R'$，使其與 $V_o R'$ 之交點爲 w'，故由 w' 所引之垂直於 $V_o R'$ 之 $w' u'$ 爲含球之陰面其平面之滅線。依此，含陰面之平

面其水平跡之透視，應通過 $w'u'$ 與地平線之交點 u'。次由 V_c 向地平線引垂線，其足爲 N，於基面上取 Np_0 等於球之半徑，將 r_0 與 D 相結，其所成之直線與 V_cN 相交於點 P_2'。此時 P_2' 因其爲由球之中心向基面所引之垂線足之透視，故由 P_2' 引平行於基線之 $P_2'Z'$，爲含球之中心且平行於畫面之平面其水平跡之透視。而平行於 $u'w'$ 之 V_cS_2 因其在含球之陰線之平面內，且爲平行於畫面之直徑其延長線之透視，故其與 $P_2'Z'$ 所交之點 Z'，應爲平行於畫面之直徑之水平跡。依此則 u' 與 Z' 相結之直線，爲含陰面之平面其水平跡之透視。其後再求球之中心向基面所投之影 P_1'。此 P_1' 爲 $P_2'r_1$ 與 V_cR' 之交點，固無待述。此時陰線之各直徑通過球之中心，其各透視，通過點 P_1'。又其各直徑之延長線與基面相交點之透視，應在 $u'z'$ 上。

陰線之任意直徑之透視，卽過 V_c 任意之弦 $E'F'$ 之延長線與 $u'Z'$ 相交之點 1，由點 1 與 P_1' 相結，使其與 $R'E'$, $R'F'$ 相交點於點 E_1', F_1'。則 $E_1'F_1'$ 爲 $E'F'$ 向基面所投之影。同法，後求得其他直徑之影，將其各直徑之端連續而成曲線，是卽於基面上而得其球之影。

4. 雜題

作圖 1: 如 Fig. 623 所示，以 R' 爲光線之滅點，而求八角形之井口及建築物之一面垂直於畫面之陰影圖也。求法，先由心點 V_c 向地平線引垂線，及由 R_1 向地平線引平行線，使其相交於點 V_1，此時 V_1 爲屋頂裏面之水平線 $S'Q'$ 向垂直於畫面之面所投之影之焦點，依此，將 V_1S' 與 $R'Q'$ 相交於點 Q_1'，則 $S'Q_1'$ 爲 $S'Q'$ 所投之影。又由 Q_1' 向 V_c 引 $Q_1'Z_1'$，則 $Q_1'Z_1'$ 爲 $P'Q'$ 所投之影。

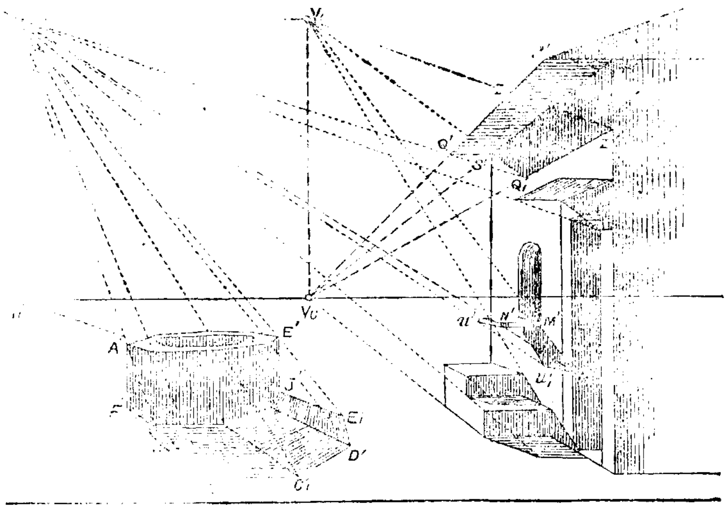


Fig. 623

作圖 2:　如 Fig. 624 所示,乃求垂直於畫面之墻向其一面平行於畫面,一面位於基面上之直角柱所投之陰影之圖也。其求法,先將平行於基線之 E′ F″ 延長,使其交於墻與基面之境界線之一點 N_0' 處。次由 N_0' 引直立線,使其與墻之上端交於 N′。此時由 N′ 所引之平行於 V_0 R′ 之 N′ N_1',爲含光線且垂直於畫面之平面及含平行於畫面之 E′ F″ G′ D′ 之平面之相交跡。依此,若 N′ N_1' 與 E′ F′, G′ D′ 相交於點 N_1', 2, 則 2 N_1' 爲面 E′ F″ G′ D′ 上之影線。又 2 與心點 V_0 相結,使其與 H′ K′ 相交於點 3, 則 $\overline{23}$ 爲面 D′ G′ H′ K′ 上之影線。

作圖 3:　如 Fig. 625 所示,乃求直立於基面上之圓柱與垂直於畫面之墻之陰影圖也。其求法,先作平行於基線之一直線 T′ S_1',使其交於墻與基面之境界線 T′ L′ 之一點 T′。復由 T′ 引直立線 T′ S′,使其

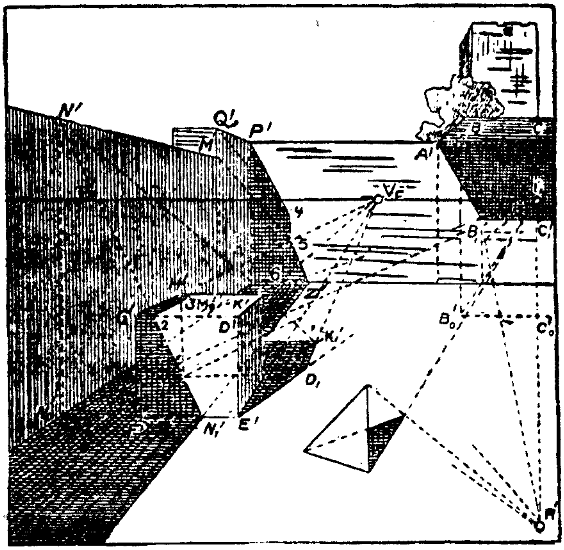


Fig. 624

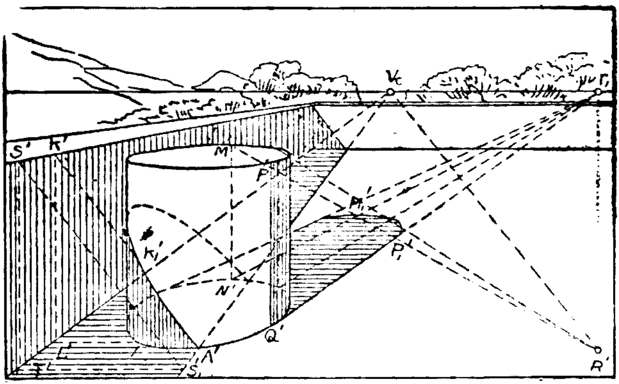


Fig. 625

與墻之上端相交於點 S'。此時，由 S' 所引之平行於 V_c R' 之直線與 T' S_1' 相交於點 S_1'，故由 S_1' 向心點 V_c 所引之直線爲墻向基面所投之影線。此影線與圓柱之底相交於點 A'，由底上 A' 之左方任意之一點 1 引

平行線平行於基線，使其與 T′ L′ 相交於點 L′。更由 L′ 引直立線，使其與墻之上端相交於點 K′。由 K′ 引平行於 V_c R′ 之直線，使其與過點 1 之圓柱之面素相交。其所交之點 K_1'，是為圓柱之影線上之一點。同法，求得影線上之各點，將其連續而作成曲線，即得圓柱之曲面上之陰影。

作圖 4：　如 Fig. 626 所示，圖中為垂直及平行於畫面之墻與橫於基面上之圓柱，其圓柱之一端與垂直於畫面之墻相一致時所求之其陰

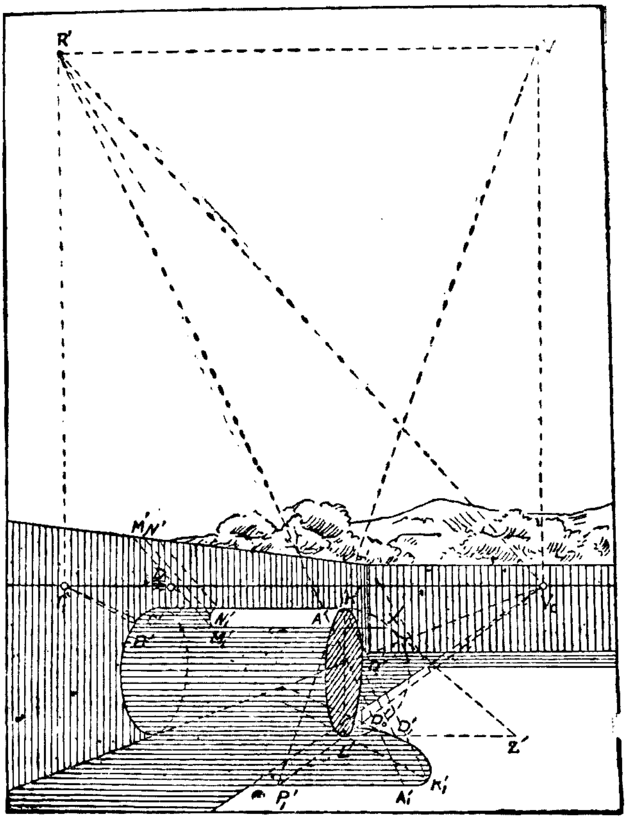


Fig. 626

影之圖也。其作法，先由光線之焦點 R′ 引平行於地平線之直線，及由心點 V_0 引垂直於地平線之直線，而求其交點 V。此時，V 爲平行於圓柱之軸及光線之平面與垂直於基線之平面相交之焦點也。次以 K′ L′ 爲垂直於圓柱之右端之基面之直徑，由 V 向右端所引之切線 V A′ 與 V_0 L′ 相交於點 P_1'。次由 L′ 引平行於基線之 L′ Z′，使 L′ Z′ 與 L′ P_1' 透視的相等。此時，由 Z′ 向直徑 K′ L′ 之圓引切線，由其切點 X′ 引平行於圓柱之軸之直線，此直線與 V A′ 所交之點 A′，即切點也。是故過 A′ 之面素 A′ M_1' 爲曲面之陰線。（求 Z′ 之法。可將 P_1' 與距離點相結而取其與 L′ Z′ 之交點可也）。

又求墻向圓柱上投影，可由圓柱之右端上之一點 C′ 引直立線，使其與墻之上端相交於點 N′。次由 N′ 所引之平行於 V_0 R′ 之直線及過 C′ 之面素，使其相交於點 N_1'。此時 N_1'，即爲圓柱之曲面上之影線上之一點。同法，求得影線上之各點，將其連成曲線可也。

練 習 題

光線之方向未加明示時，其光線爲平行光線。其平面圖及其立面圖均與基線成 45°。

1. 將 Fig. 602 所示之圖擴大三倍後，求其透視圖及其陰影。

2. 有高 7 糎之直立六角柱，以一邊長 3 糎之正六角形爲底，角柱之上，置有直徑 8 糎，厚 1 糎之圓板。試求其透視及其陰影。然視點之高爲 3 糎。

3. 將 Fig. 519 所示之圖擴大二倍，置其於成角之位置。試求其

透視圖及其陰影。

4. 有高 8 糎之直圓錐，其底之直徑爲 7 糎，今使其立於基面上。試求其透視圖及陰影。

5. 有內徑 6 糎，外徑 8 糎，長 5 糎之圓管，其一端置於基面上。今視點之高爲 10 糎，試求其透視及陰影。

6. 有截頭圓錐，其底之直徑爲 4 糎，8 糎，兩底間之距離爲 7 糎。小底上有直徑 6 糎，厚 1 糎之圓板，大底圓置於基面上。今視點之高爲 4 糎，試作其透視及陰影。然光線與畫面平行與基面成 40°。

7. 有長 8 糎之直角柱，以一邊長 3 糎之正方形爲底。又有高 10 糎之直角錐，以一邊長 8 糎之正三角形爲底。今二者直立於基面上，使其角柱向角錐有投影之位置。試求其二者之透視及陰影。設視點之高爲 6 糎。

8. 有直徑 6 糎，長 7 糎之圓柱，使其橫於基面上且平行於畫面。試求其透視及陰影。

9. 有直徑 6 糎，節距 8 糎之螺旋線，今其軸垂直於基面。試求其透視及陰影。然光線平行於畫面而與基面成 45°。

10. 如 Fig. 576 所示之建築物，其正面與畫面成 30°，今光線由左後方來時，試求其透視及陰影。但屋頂之面，應使其全爲光面。

第二十三章 虛像

1. 虛像

由平面鏡反射作用所生之虛像 (Image)，對於鏡面與原圖形相對稱。故求已知圖形虛像之作圖，不外將其圖形中之各點向鏡面引垂線及延長垂線爲等長之一端耳。

如 Fig. 627 所示，(I)爲水平面，(II)爲垂直於透視面之直立平面，(III)爲平行於透視面之平面，(IV) 爲斜交於透視面之直立平面。今以其各面爲鏡面，而作一垂線 A_0 B_0 之虛像 Aio Bio。(I) 中之虛像之作圖，僅將 A_0 B_0 延長，取 B_0 Aio 之長等於 A_0 B_0，此時因垂線 A_0 Aio 與 A_0 B_0 相合，而平行於透視面之故也。

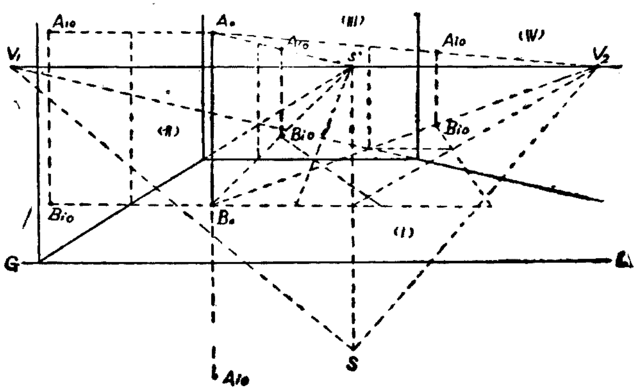


Fig. 627

決定(II)中之虛像時，因其由 A_0, B_0 所引之垂線，平行於 G L, 故其足不難求出。後於其延長線上，再取其等長.其作法如(I)。

(III)中,向鏡面所引之垂線，因其爲矩線,故其足亦不難求出。又垂線延爲等長之作圖法,可用距離點爲測點求之。如欲作圖之簡易，可於地平線上取任意之點爲分測點可也。

定(IV)中之虛像,可先向鏡面引垂線，利用垂線之滅點 V_2 而定垂線之透視圖。後依 (III) 作圖之法,求其垂線之足，且延其垂線，取其等長。

如 Fig. 628, Fig. 629 所示，爲於水面上，所求之虛像之透視圖也。

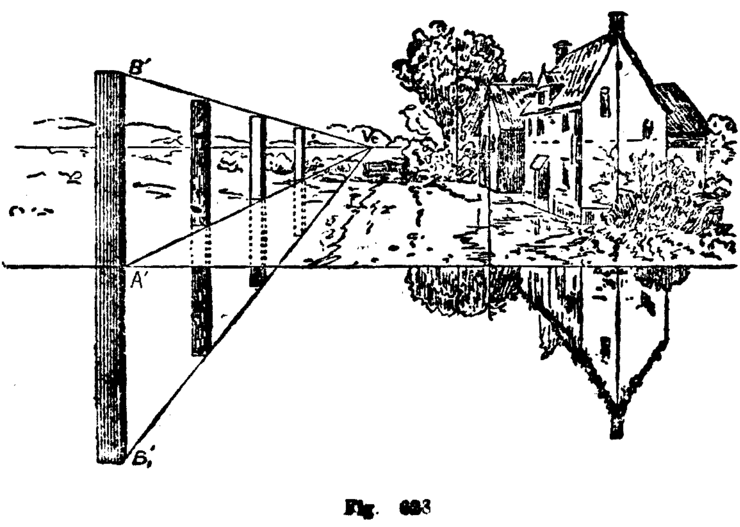


Fig. 628

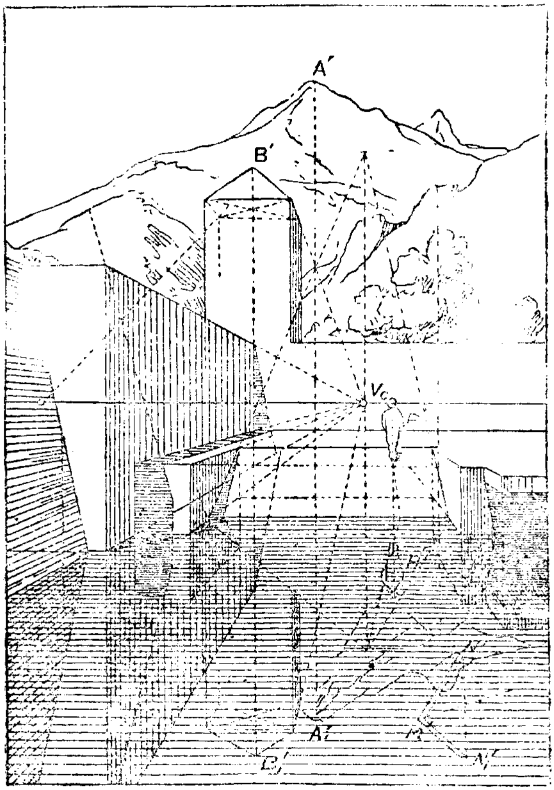


Fig. 629