初中學生文庫

算術表解

編者 臧渭英

華書局編印

民國二十五年二月印刷
民國二十七年七月再版

有著作權 不准翻印

初中學生文庫 算術表解（全一冊）

◎實價國幣八分
（外埠另加郵匯費）

編者 臧沺英

發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三

印刷者 上海澳門路 中華書局印刷所

總發行處 上海福州路中華書局

分發行處 各埠中華書局

（九五四〇）

算術表解

目次

算術表解

第一　總則

(一)　定義

I. 數
- 意義…………計算事物多少的數目.
- 種類(算術上的)
  - 1. 整數…1的若干倍,沒有奇零的.
  - 2. 分數…由一數爲分母,他數爲分子所成.
  - 3. 小數…分數的一種,由10,100,…等數爲分母所成.

II. 量…………事物可以增減,測度或計算的.

III 單位……某種類的標準量.

〔註〕譬如說:這疋布長100尺,這疋布就是量,100就是數,尺就是單位.

IV.四 法
- 加法……被加數+加數=和
- 減法……被減數−減數=差
- 乘法……被乘數×乘數=積
- 除法……被除數÷除數=商

(二)　定律

1. 加法　若干個數相加,和牠們的先後次序沒有關係,這叫做加法的交換定律.

I. 交換律

例如　$3+5+4=3+4+5=5+3+4$。

2. 減法　從一個數內減去若干個數，其差和減數先後的次序沒有關係，這叫做減法的交換定律。

例如　$24-8-3=24-3-8=13$。

3. 乘法　若干個數相乘．其積和牠們的先後次序沒有關係，這叫做乘法的交換定律．

例如　$2\times3\times5=2\times5\times3=3\times2\times5$。

4. 除法　某數被若干個數除，其商和除數的先後次序沒有關係，這叫作除法的交換定律．

例如　$72\div2\div3=72\div3\div2=12$。

II. 結合律

1. 加法　若干個數相加，隨便把那幾個數先加，再加上其他的數，所得的結果是一樣的，這叫做加法的結合定律。

例如　$6+4+3=6+(4+3)=13$.

2. 減法　從一個數順次減去若干個數，其差等於從此數內減去若干個數的和，這叫做減法的結合定律．

例如　$18-5-2-3=18-(5+2+3)=18-10=8$。

3. 乘法　若干個數相乘，隨便把其中那幾個數先乘，再乘其他的數，所得的結果是一樣的，這叫做乘法的結合定律。

例如　$3\times7\times9=3\times(7\times9)=189$

4. 除法　用若干個數順次除某數所得的商，等於用這若干個數的相乘積去除某數所得的商，這叫做除法的結合

定律.

例如　$150\div5\div2=150\div(5\times2)=15$.

III·分配律

1. 乘法　兩個數的和或差的若干倍等於各數若干倍的和或差,這叫做乘法的分配定律.

例如　$(3\pm2)\times5=3\times5\pm2\times5=15\pm10$.

2. 除法　以某數除兩數的和或差所得的商,等於用某數分別除這兩個數所得的商的和或差,這叫做除法的分配定律.

例如　$(18\pm12)\div3=18\div3\pm12\div3=6\pm4$.

第二　整數性質

(一)　因數

I.　質數　因數　質因數

除了本數和1以外，不能用他數除盡的數，如2,3,5,7……等，叫質數.幾個數相乘，各數都是乘積的因數;因數是質數的，叫質因數.

II.　質因數檢驗法

1. 特法

(1) 2,5　某數的末位數字是2或5的倍數,某數必含質因數2或5.

因十位及十位以上的數,都是2和5的倍數，故只須看末位數是否爲2,5的倍數，就可決定全數是否爲2,5的倍數.

(2) 4,25　某數的末二位數爲4或25的倍數,某數必含質因數4或25.

因百位及百位以上的數,都是4和25的倍數,故只須看末二位數是否爲4或25的倍數，就可決定全數是否爲4或25的倍數.

(3) 3,9　某數數字的和爲3或9的倍數，某數必含質因數3或因數9.

例如　$274=200+70+4$

$=2\times(99+1)+7\times(9+1)+4$

$=2\times99+2+7\times9+7+4$

$=2\times99+7\times9+2+7+4$

$=9$的倍數$+2+7+4$

凡是9的倍數，一定亦是3的倍數，故決定274是否爲3或9的倍數，只須看$2+7+4$是否爲3或9的倍數.

2. 通法

(1) 7. 要曉得某數是否爲7的倍數，只須把某數的末位數截去，再減去末位數的兩倍，如是繼續作下去，到了發現其餘數是否爲7的倍數而止，就可決定原數是否爲7的倍數。

例如檢驗4173是否爲7的倍數。

$$\begin{array}{rl} 4\,1\,7\,3 & \\ 6 & \quad 3\times2 \\ \hline 4\,1\,1 & \\ 2 & \quad 1\times2 \\ \hline 3\,9 & \end{array}$$

因39不是7的倍數，故4173亦不是7的倍數。

說明： 把某數的末位數字抹去，又從十位數內減去末位數的兩倍，這恰等於從原數內減去末位數的21倍，即減去7的倍數，且使末位變爲0，同樣繼續作下去，即可得末若干位爲0的數。然此數乃由原數內減去7的倍數而得，故判定原數是否爲7的倍數，只須視此數而定，又因十乘方的數決不是7的倍數，故末若干位0可以捨去。

(2) 11, 13, 17, ……照前面的原理，攷查某數是否爲11的

倍數，只須把牠的末位數截去，再減去末位數的一倍，又在所得餘數內同樣繼續作下去，到了最後的餘數，看牠是否爲11的倍數，即可決定原數是否爲11的倍數.致查某數是否爲13的倍數，只須把牠的末位數截去，再加上末位數的4倍，在所得的結果內，同樣作下去，到了最後的結果，看牠是否爲13的倍數，即可決定原數是否爲13的倍數. 因爲截去末位數，又加上末位數的4倍，這恰等於在原數內加上末位的39倍，即加上13的倍數. 現在把從7到101質數的倍數檢驗方法，列成一表，附於本篇的末了，以備閱者查考.

（二） 公約數

I. 公約數 最大公約數

諸數都被某數除盡，則某數稱諸數的公約數.諸數的公約數往往不止一個，其中最大的稱最大公約數，可省稱做 G. C. M.

例如 24, 36, 48, 的公約數爲 2,3,4,6,12;在這五個公約數中，以12爲最大，故12稱最大公約數.

II. 最大公約數求法

(1) 分解因數法： 例如求84,216,210的 G. C. M.

$84=2^2\times3\times7$

1. 因數法

$126=2\times3^2\times7$

$210=2\times3\times5\times7$

$\therefore$ G. C. M. $=2\times3\times7=42$

(2) 檢驗公約法：例如求84，126，210的G. C. M.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 84, & 126, & 210 \\ \hline 3 & 42 & 63 & 105 \\ \hline 7 & 14 & 21 & 35 \\ \hline & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

這裏的2，3，7都是84，126，210的公約數，$\therefore$ G. C. M. $=2\times3\times7=42$.

2. 除法

輾轉相除法：　求兩數的最大公約數，先以小數除大數，得餘數，再以餘數除小數，又得餘數，這樣輾轉以餘數除餘數，到除盡爲止，那最後的除數，就是最大公約數.

用輾轉相除法求三個或三個以上的數的最大公約數只須先求任意兩個數的最大公約數，把這最大公約數和其他的數再求其最大公約數；這樣繼續求下去，那最後所得的最大公約數，就是諸數的最大公約數.

(三)　公倍數

I.　公倍數　最小公倍數

某數爲諸數的倍數時，則某數稱作諸數的公倍數.諸數的公倍數不止

一個,其中最小的稱最小公倍數,可省稱做 L. C. M.

例如　12,24,36等皆爲2,3,4的公倍數,而以12爲最小公倍數.

II. 最小公倍數求法

1. 因數法

(1) 分解因數法:　例如求60, 75,80的 L. C. M.

$60=2^2\times3\times5$

$75=3\times5^2$

$80=2^4\times5$

$\therefore$ L.C.M. $=3\times5^2\times2^4=1200.$

(2) 檢驗公約法:　例如求15,20,36,84的L.C.M.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 15 & 20 & 36 & 84 \\ \hline
2 & 15 & 10 & 18 & 42 \\ \hline
3 & 15 & 5 & 9 & 21 \\ \hline
5 & 5 & 5 & 3 & 7 \\ \hline
 & 1 & 1 & 3 & 7
\end{array}$$

$\therefore$ L.C.M. $=2^2\times3\times5\times1\times1\times3\times7=1260.$

2. 除法

先求最大公約數法:　求兩數的最小公倍數, 可先求兩數的最大公約數,用這最大公約數來除兩數中任一數,把所得的商和另一數相乘,即得最小公倍數.

因假設A,B兩數的最大公約數爲D,又設以D除A所得的商爲a,以D除B所得的商爲b,則有

$A=D\,a,\qquad B=D\,b$

由上面分解因數法，知道

A，B 的 L. C. M. $=D.a.b=A.\frac{B}{D}=B\frac{A}{D}$

質因數	截去末位數字後再應加或減的末位倍數	質因數	截去末位數字後再應加或減的末位倍數	質因數	截去末位數字後再應加或減的末位倍數
7	－2	37	－11	71	－7
11	－1	41	－4	73	＋22
13	＋4	43	＋13	79	＋8
17	－5	47	－14	83	＋25
19	＋2	53	＋16	89	＋9
23	＋7	59	＋6	97	－29
29	＋3	61	－6	101	－10
31	－3	67	－20		

第三　　分數

(一)　　分數

I.　約分通分

一分數的分子,分母,以同一數來除牠,其值不變.這叫做約分.同樣用同一數來乘牠,其值也不變.故分母不同的諸分數,可用各分母的最小公倍數來做公分母,再把各分數的分母來除這公分母,以所得的商來乘牠們自己的分子做新分子.這個方法叫做通分.

II.　分數的四則

1. 加減 　同分母的分數加減,只須加減其分子,異分母的分數加減,須先行通分使變爲同分母的分數再行加減其分子.

2. 乘除

(1) 乘　兩分數的乘,以各分子的積作新分子,以各分母的積作新分母.

例如 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=(3\div4)\times(5\div7)=3\div4\times5\div7$

$=3\times5\div(4\times7)=\frac{3\times5}{4\times7}$

(2) 除　兩分數的除,須顚倒除數的分子,分母;并且變除號爲乘號.

例如 $\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}=(3\div4)\div(5\div7)$

$=3\div4\div5\times7$

$=3\div4\times7\div5$

$$=(3\div 4)\times(7\div 5)$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$$

III. 分數的最大公約數和最小公倍數

1. 最大公約數

某分數能除盡諸分數而得整商，則此某分數叫作諸分數的 G. C. M.

例如 $\frac{H}{G}$ 爲 $\frac{A}{B}$，$\frac{C}{D}$，$\frac{E}{F}$ 的 G. C. M，則應有

$$\frac{A}{B}\div\frac{H}{G}=\frac{A}{B}\times\frac{G}{H}=\text{整數}$$
$$\frac{C}{D}\div\frac{H}{G}=\frac{C}{D}\times\frac{G}{H}=\text{整數}$$
$$\frac{E}{F}\div\frac{H}{G}=\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}=\text{整數}$$

要 $\frac{A}{B}\times\frac{G}{H}$ 爲整數，必須 H能除盡 A，B能除盡 G．要 $\frac{C}{D}\times\frac{G}{H}$ 爲整數，必須H能除盡C，D能除盡G，要 $\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$ 爲整數，必須H能除盡E，F能除盡G，即H當爲A，C，E 的 G. C. M.，G當爲B，D，F 的 L. C. M. 故得下列公式：

$$\text{諸分數的 G.C.M.}=\frac{\text{各分子的G.C.M.}}{\text{各分母的L.C.M.}}$$

某分數能被諸分數除盡而得整商，則此某分數叫作諸分數的 L. C. M.

例如 $\frac{Q}{P}$ 爲 $\frac{A}{B}$，$\frac{C}{D}$，$\frac{E}{F}$ 的L. C. M. 則應有

2. 最小公倍數

$$\frac{Q}{P}\div\frac{A}{B}=\frac{Q}{P}\times\frac{B}{A}=\text{整數}$$

$$\frac{Q}{P}\div\frac{C}{D}=\frac{Q}{P}\times\frac{D}{C}=\text{整數}$$

$$\frac{Q}{P}\div\frac{E}{F}=\frac{Q}{P}\times\frac{F}{E}=\text{整數}$$

要 $\frac{Q}{P}\times\frac{B}{A}$ 爲整數，必須 A 能除盡Q，P 能除盡B，要 $\frac{Q}{P}\times\frac{D}{C}$ 爲整數，必須C 能除盡Q，P 能除盡D，要 $\frac{Q}{P}\times\frac{F}{E}$ 爲整數，必須 E能除盡Q，P 能除盡 F；卽Q 當爲A，C，E 的L. C M，P當爲B，D，F的G C M.故得下列公式：

$$\text{諸分數的L C.M.}=\frac{\text{各分子的L C M}}{\text{各分母的G.C.M.}}$$

（二） 比和比例

I. 總 說

比的前項，相當分數的分子；比的後項，相當分數的分母。

兩個比相等而成爲比例式，例如3:5=6:10是一個比例式；比例式內第一項同第四項叫做比例的外項，第二項同第三項叫做比例的內項。比例式中兩外項之積等於兩內項之積，這是比例式中一個很重要的性質。應用這個性質，如果一個比例式中有三項已知，則其餘一項可以求得。這所求的一項叫做比例的未知項，常用 x 來代表，求這未知項叫做解比例式。

II. 各種的比

1. 單比　正比，反比。　如甲數對於乙數的比叫正比，則乙數對於甲數的比叫反比。
例如3:5爲正比，則5:3爲反比。

2. 複比　把若干個比的前項相乘起來作前項，後項相乘起來作後項所成的比，叫做牠們的複比。
例如3;5，2:3，4:7的複比是$(3\times2\times4):(5\times3\times7)$即24:105.

3. 連比　三個或三個以上的數相連而成的比叫做連比。
例如甲乙的比爲2:3，乙丙的比爲3:5，則甲乙丙的連比爲2:3:5。

III. 各種比例

1. 單比例

(1) 正比例.　凡二種有相互關係的量，其變化是同時增進或同時減退的成正比例.

例如布5尺價8角5分，布2丈4尺價多少？這裏布的長短同布的價錢成正比例.今設布2丈4尺的價爲x角，那麼前後價錢的比爲8.5: X，前後長短的比爲5:24，故應有

$$5 : 24 = 8.5 : x$$

$$\therefore X = \frac{24\times8.5}{5} = 40.8\text{角}$$

(2) 反比例.　凡二種有相互關係的量，其變化是一種增進他一種減退的，成反比例.

例如有一件事,8人合作,3日成功,12人合作,幾日成功?

這裏人數的多少和成功的日數成反比例. 今設12人合作所需的日數爲X日,那麼前後人數的比爲8;12,前後日數的比爲3:x

故應有 $12:8=3:x$

$$\therefore x=\frac{8\times3}{12}=2\text{日}$$

2. 複比例

凡含有複比的比例式,叫複比例.

例如牛6頭5日內耕田30畝,問牛16頭,耕田80畝要幾天?

今設牛16頭X日內能耕田80畝,那麼前後日數的比是5:X 前後畝數的比是30:80,前後牛數的比是6:16。吾們知道完成的日數和牛數成反比例,和田的畝數成正比例. 故有

$$\left.\begin{matrix}16 & : & 6\\30 & : & 80\end{matrix}\right\}=5:x$$

$$\therefore x=\frac{6\times80\times5}{16\times30}=5\text{日}$$

IV. 比例的變形

已經知道第一量同第二量的關係,第二量同第三量的關係,第三量同第四量的關係等,求最後一量與第一量的關係的方法,叫做連鎖比例.

例如上茶2斤的價等於中茶3斤的價,中茶4斤的價等於下茶5斤的價.今上茶7斤的價爲10元5角,問下茶13

1. 連鎖比例

斤的價多少?

x 元	下茶13斤
下茶 5 斤	中茶 4 斤
中茶 3 斤	上茶 2 斤
上茶 7 斤	10.5元

$$\therefore x = \frac{13\times 4\times 2\times 10.5}{5\times 3\times 7} = 10.4\text{元}$$

看上面的例子,吾們可以知道寫連鎖比例式的方法,只須先尋出未知項,把牠的等値的量並列在右,再把這同種類的量,斜列在左;同樣把其餘各已知量,凡等値的都並列,同種類的都不同行,然後用左項各數的相乘積除右項各數的相乘積,就得未知項的値。

照所定的比把某數分成若干部分叫配分比例。

例如把60分為三部分,使牠們的比是3:4:5.

因　$3+4+5=12$

$$12 : 60 = 3 : x$$

$$\therefore x = \frac{60\times 3}{12} = 15$$

$$12 : 60 = 4 : x$$

$$\therefore x = \frac{60\times 4}{12} = 20$$

$$12 : 60 = 5 : x$$

$$\therefore x = \frac{60\times 5}{12} = 25$$

故所求三部分為15,20,25。

2\. 配分比例

又如甲，乙，丙三人合資營商；甲投資6個月，計繳銀6000元，乙投資8個月，計繳銀12000元，丙投資5個月，計繳銀8000元，結算時共賺銀8600元．問三人各分得利益多少？

三人資本多寡的比是$6000:12000:8000=3:6:4$

三人出資久暫的比是$6:8:5$

故三人所得利益的比是前二連比的複比，即

$$\left.\begin{matrix}3:6:4\\6:8:5\end{matrix}\right\}=3\times6:6\times8:4\times5$$
$$=18:48:20$$
$$=9:24:10$$

今 $9+24+10=43$

故 $43:8600=9:x$

$$\therefore x=\frac{8600\times9}{43}=1800\text{元} \quad \text{甲所得}$$

$$43:8600=24:x$$

$$\therefore x=\frac{8600\times24}{43}=4800\text{元} \quad \text{乙所得}$$

$$43:8600=10:x$$

$$\therefore X=\frac{8600\times10}{43}=2000\text{元} \quad \text{丙所得}$$

把分量不等，價值不同的數物混合起來叫做混合．算術內關於這類問題的解法可以分作兩種；

(1) 已知混合時各物的原價及各物分量的比，求其平均

3. 混合比例

價格.

例如上茶2斤,每斤9角5分,中茶3斤,每斤7角,下茶5斤,每斤3角.三種混合後求每斤的平均價格.

混合後斤數的和$=2+3+5=10$斤

混合後價值的和$=9.5\times2+7\times3+3\times5$

$=19+21+15=55$ 角

故混合物每斤的價$=\frac{55}{10}=5.5$角

(2) 已知各物的原價及預定混合物的平均價.求混合時各物分量的比.

例如每斤1元8角的茶與每斤1元4角的茶混合,平均每斤售價1元5角,求這兩種茶混合量的比.

平均價	品名	原價	比較	混合量的比
15角	上茶	18角	損3角	1
	下茶	14角	益1角	3

即上下兩種茶混合量的比爲1:3

(三)　百分法和利息

I. 百　分　法

使後項爲100的比叫做百分比.比的前項叫子數,後項叫母數,比值叫百分率.

例如某人出資2500元經商,得利500元,則其利益金額對於資本金額的百

分比爲 $500:2500=20:100$.

現在把子數,母數,百分率三種的關係寫在下面:

百分率=子數÷母數

子　數=母數×百分率

母　數=子數÷百分率

母子和=母數+子數=母數+母數×百分率

　　　=母數×(1+百分率)

母子差=母數-子數=母數-母數×百分率

　　　=母數×(1-百分率)

母　數=母子和÷(1+百分率)

母　數=母子差÷(1-百分率)

II. 利　息

1. 單利法

本金432元,年利5釐,問8年後的利息多少?

一年的利息$=432\times\frac{5}{100}=21.6$ 元

八年的利息$=432\times\frac{5}{100}\times 8=172.8$ 元

從這個例題,得出下面的公式:

利　息=本金×利率×時期

本　金$=\dfrac{利息}{利率\times時期}$

利　率$=\dfrac{利息}{本金\times時期}$

$$時\quad 期=\frac{利息}{本金\times 利率}$$

$$本利和=本金+利息=本金+本金\times 利率\times 時期$$

$$=本金\times(1+利率\times 時期)$$

$$本\quad 金=\frac{本利和}{1+利率\times 時期}$$

2. 複利法

把每期的利息加入本金作爲下一期的本金。這樣利上加利的算法叫做複利法。

例如本金500元，年利4釐，依複利計算，一年一結，求5年後的本利和。

$$第一年的本利和=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)即第二年的本金$$

$$第二年的本利和=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{4}{100}\right)$$

$$=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^2\ 即第三年的本金$$

$$第三年的本利和=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^2\left(1+\frac{4}{100}\right)$$

$$=500\times\left(1+\frac{4}{200}\right)^3\ 即第四年的本金$$

$$第四年的本利和=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^3\left(1+\frac{4}{100}\right)$$

$$=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^4\ 即第五年的本金$$

$$第五年的本利和=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^4\left(1+\frac{4}{100}\right)$$

$$=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^5$$

從上面的例題，得出下列的公式：

$$本利和=本金\times(1+利率)^{時期}$$

$$本\quad金=\frac{本利和}{(1+利率)^{時期}}$$

$$\begin{aligned}複利息&=本利和-本金\\&=本金\times(1+利率)^{時期}-本金\\&=本金\times\left[(1+利率)^{時期}-1\right]\end{aligned}$$

$$本\quad金=\frac{複利息}{(1+利率)^{時期}-1}$$

第四 小數

(一) 普通小數

I. 意義 小數就是一種分數，不過牠的分母是 10,100,1000 等罷了.

II. 化法

1. 化小數爲分數. 如要把一個小數化成分數,只須丟去小數點作分子，在 1 的後面照小數的位數添上幾個 0 來作分母,再約分就行了.

例如

$$0.125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$$

$$12.25=12\frac{25}{100}=12\frac{1}{4}$$

2 化分數爲小數. 如欲把一個分數化成小數,須先把牠的分母化成十或十的十進倍數，再用小數記法表出來.這種化法,須先察看分母裏面 2 和 5 這兩個質因數的個數.有若干個 2 就該用若干個 5 去乘,同樣有若干個 5. 就該用若干個 2 去乘，使分母裏面所包含 2 和 5 的個數相同;那樣一來,分母就可化成十或十的十進倍數; 所化成的小數,其位數是有限的.

例如 $\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\times5}=\frac{7\times5^2}{2^3\times5\times5^2}=\frac{175}{1000}=0.175$

不過這個方法,只能應用於分母裏面的質因數全是2

和5才可；否則就不能化成十或十的十進倍數．這時只能用普通除法，在分子後面加0除下去就得小數．

（二） 循環小數

I. 意義

上面已經說過化一分數爲小數，若分母裏面的質因數不盡是2和5，那就不能化成十或十的十進倍數；若用普通除法化成小數，其位數是無限的，每隔幾位要重複的循環起來，這種小數，叫做循環小數．

例如 $\frac{2}{3}=2\div3=0.666\cdots\cdots$ (1)

$\frac{7}{11}=7\div11=0.6363\cdots\cdots$ (2)

$\frac{17}{55}=17\div55=0.30909\cdots\cdots$ (3)

II. 種類

前面三個例中，(1)和(2)小數部份都循環的叫純循環小數．(3)的開始一位小數不循環的叫混循環小數．

循環小數的循環部份叫循環節；如(1)的循環節是6．(2)的循環節是63，(3)的循環節是09．

記循環小數，常常用兩點放在循環節的首末兩數字上，這兩點叫作循環點．

例如 $\frac{2}{3}=2\div3=0.666\cdots\cdots=0.\dot{6}$

$\frac{7}{11}=7\div11=0.6363\cdots\cdots=0.\dot{6}\dot{3}$

$\frac{1}{7}=1\div7=0.142857142857\cdots\cdots$

$$=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\frac{17}{55}=17\div55=0.30909\cdots\cdots=03\dot{0}\dot{9}$$

III.化法

1. 化純循環小數爲分數. 吾們知道 $\frac{1}{9}=0.\dot{1}$, $\frac{1}{99}=0.\dot{0}\dot{1}$, $\frac{1}{999}=0.\dot{0}0\dot{1}$, $\frac{1}{9999}=0.\dot{0}00\dot{1}$,……, 利用這些,就可把一個純循環小數化爲分數,只須把牠的循環節拿來丟去小數點和循環點作分子,再照循環節的位數連寫若干個 9 作分母,再約分就是了.

例如 $0.\dot{6}=6\times0.\dot{1}=6\times\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$,

$$0.\dot{4}\dot{3}=43\times0.\dot{0}\dot{1}=43\times\frac{1}{99}=\frac{43}{99}$$

$$0.\dot{1}2\dot{5}=125\times0.\dot{0}0\dot{1}=125\times\frac{1}{999}=\frac{125}{999}$$

2. 化混循環小數爲分數. 要把一個混循環小數化爲分數,只須把不循環部分和循環部分連合丟去小數點和循環點,再減去不循環部分作分子.照循環節的位數,連寫若干個 9, 9 的後面,再照不循環部分的位數連添若干個0作分母,再約分就是了.

例如 $0.8\dot{3}=0.8+0.0\dot{3}=\frac{8}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}$

$$=\frac{8}{10}+\frac{3}{90}=\frac{8\times9+3}{90}=\frac{8(10-1)+3}{90}$$

$$=\frac{83-8}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$$

$$0.23\dot{6}5\dot{8}=0.23+0.00\dot{6}5\dot{8}$$

$$=\frac{23}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{658}{999}$$

$$=\frac{23}{100}+\frac{658}{99900}=\frac{23\times999+658}{99900}$$

$$=\frac{23(1000-1)+658}{99900}$$

$$=\frac{23658-23}{99900}=\frac{23635}{99900}=\frac{4727}{19980}$$

IV. 四則　循環小數的加減乘除，只須先把循環小數化爲分數，再照分數的法則去計算。

第五　開方

(一)　開平方

I. 整數

$(甲數)^2=乙數$，則乙數叫做甲數的平方數，甲數叫做乙數的平方根.求某數平方根的方法叫做開平方.

$1^2=1$,　$10^2=100$,　$100^2=10000$,……

$9^2=81$, $99^2=9801$, $999^2=998001$,….

從上面，吾們知道一位數的平方是一位或二位數，二位數的平方是三位或四位數，三位數的平方是五位或六位數，等等.反過來說；就是一位或兩位數的平方根是一位數，三位或四位數的平方根是二位數，五位或六位數的平方根是三位數，等等．所以從整數的個位數字起向左每兩位作一段，末一段是一位或二位不定，這樣分得的段數，就是平方根的位數.例如85694 可分作8,56,94 三段，所以牠的平方根一定是三位數，并且由8知道這三位數的首位數字是2.開平方的方法是根據下面的定理的：

定理；　二數和的平方，等於各數平方的和，再加二數相乘積的兩倍．即

$$(A+B)^2=A^2+B^2+2\times A\times B$$

因　$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$$=A(A+B)+B(A+B)$$

$$=A^2+A\times B+B\times A+B^2$$

$$=A^2+B^2+2\times A\times B.$$

例如求 1849 的平方根。

吾們知道1849的平方根是二位數，并且牠的十位數字是4，故

$$1849=(40+\text{個位數})^2$$

$$=40^2+\text{個位數}^2+2\times40\times\text{個位數}$$

$$=1600+\text{個位數}^2+2\times40\times\text{個位數}$$

或　$1849-1600=\text{個位數}^2+2\times40\times\text{個位數}$

即　$249=\text{個位數}\times(\text{個位數}+2\times40)$

故　$\text{個位數}=\dfrac{249}{2\times40+\text{個位數}}$

到了這裏，這個位數字就可用試除法，拿2×40去試除249，就不難得其商爲3。現在把上面的方法列式如下：

$$\begin{array}{r|l} 18,49 & 43 \\ 16 & \\ \hline 249 & \\ 3\times(2\times40+3)=249 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

故 1849 的平方根是43。

現在把多位數開平方的方法寫在下面：

(a)從個位數字起，每兩位分作一段：

(b)先由左邊第一段找出所求平方根的第一位數。

(c)從第一段減去第一位根的平方數，在差的後面接寫第二段作餘數。

(d)把已經求得的根的二十倍作試除數，去試除那餘數找出第二位根的近似值（倘試除所得的商比1還小時就指示根內有一位0，應即連寫下一段）。

(e)把這第二位根加入試除數內作全除數，再用這第二位根去乘全除數，

　　把所得的積從餘數內減去，再接寫下一段作新餘數。

(f)照前法累次進行，一直到沒有餘數為止。

例如求966289的平方根。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 96,62,89 \;\big|\; \underline{983} \\
 & 81 \\ \hline
 & 1562 \\
8\times(2\times 90+8)= & 1504 \\ \hline
 & 5889 \\
3\times(2\times 980+3)= & 5889 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

∴ 966289的平方根是98 .

II. 小　數

從 $0.1^2=0.01$，　$0.01^2=0.0001$，　$0.001^2=0.000001$，……………

$0.9^2=0.81$，　$0.99^2=0.9801$，　$0.999^2=0.998001$，……

吾們知道小數的平方數中，小數的位數，等於原數中小數位數的兩倍。反過來說，就是小數的平方根中小數的位數等於原數中小數位數的一半；所以從小數點起向右每兩位作一段，所得的段數，就是平方根中小數的位數，其他一切與整數開平方完全一樣。

例如求 0.053824 的平方根。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.05,38,24 \;\big|\; \underline{0.232} \\
 & 0.04 \\ \hline
 & 138 \\
3\times(2\times 20+3)= & 129 \\ \hline
 & 924 \\
2\times(2\times 230+2)= & 924 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

帶小數開平方，整數和小數部分，應分別分段；在小數點前的根是整數，小數點後的根是小數。

III. 分數

分數開平方有二種方法：(一)分母是整方數的分數，只須把分子分母分別開方。(二)分母非整方數的分數，先把分數化成小數，再用小數開方法去求。

(二) 開立方

I. 整數

從 $1^3=1$, $10^3=1000$, $100^3=1000000$,…………

$9^3=729$, $99^3=970299$, $999^3=997002999$,…

吾們知道一位至三位數的立方根是一位數，四位至六位數的立方根是二位數，七位至九位數的立方根是三位數等，所以從整數的個位數字起，向左每三位作一段，最後一段爲一位，二位，三位不定，這樣分得的段數，就是立方根的位數。

例如42875可分爲42，875兩段，所以牠的立方根是兩位數，并且從42，吾們可以知道立方根的首位是3。求立方根的方法是根據下面的定理的。

定理． 甲乙兩數和的立方，等於甲數的立方，甲數平方與乙數相乘積的3倍，甲數與乙數平方相乘積的3倍及乙數的立方共4數的和，即

$$(A+B)^3=A^3+3\times A^2\times B+3\times A\times B^2+B^3$$

因 $(A+B)^3=(A+B)^2\times(A+B)$

$$= A+B)^2\times A+(A+B)^2\times B$$
$$=(A^2+B^2+2\times A\times B\ \times A$$
$$+(A^2+B^2+2\times A\times B)\times B$$
$$=A^3+A\times B^2+2\times A^2\times B+$$
$$A^2\times B+B^3+2\times A\times B^2$$
$$=A^3+3\times A^2\times B+3\times A\times B^2+B^3.$$

例如求42875的立方根.從上面的說法，

吾們知道42875的立方根是二位數，并且牠的首位數是3. 故

$$42875=(30+\text{個位數})^3$$
$$=30^3+3\times 30^2\times\text{個位數}+3\times 30\times\text{個位數}+\text{個位數}^3$$
$$=27000+3\times 30^2\times\text{個位數}+3\times 30\times\text{個位數}^2+\text{個位數}^3$$

或$42875-27000=\text{個位數}\times\left(3\times 30^2+3\times 30\times\text{個位數}+\text{個位數}^2\right)$

故$\text{個位數}=\dfrac{15875}{3\times 30^2+3\times 30\times\text{個位數}+\text{個位數}^2}$到了這裏，這個位數就

可用3×30^2去試除15875，得商爲5. 現在把上面的方法列式如下：

$$\begin{array}{r|l}
 & 42,875 \ \underline{|\ 35} \\
 & \underline{27} \\
 & \ 15875 \\
3\times 30^2=2700 & \\
3\times 30\times 5=450 & \\
5^2=25 & \\
\hline
5\times 3175= & \underline{15875} \\
 & 0
\end{array}$$

∴ 42875 的立方根是 35.

現在把多位數開立方的方法寫在下面：

(a)從個位數字起每三位作一段.

(b)先由左邊第一段找出所求立方根的第一位數.

(c)從第一段裏減去第一位根的立方數,在差的後面接寫第二段作餘數.

(d)把已經求得的根的十倍平方的3倍作試除數,去試除那餘數,找出第二位根的近似值.(倘試除所得的商大於9時,也只能用9,因第二位根是一位數字不能大於9的;設試除所得的商不滿1時,這就指示根內有一位0,應即接寫下一段)

(e)把這位根同第一位根的30倍相乘,在乘積上加上試除數和這位根的平方,再用這位根乘上面所得的和,再從餘數裏減去所得的積,再接寫下一段作新餘數.

(f)照前法累次進行,直到沒有餘數為止.

II. 小數

小數的立方根中,小數的位數為原數中小數位數的三分之一;故小數開立方,應從小數點起向右每三位作一段,倘末一段只有一位或二位時,應加0補足;其餘的方法,同整數開立方一樣.帶小數開立方,整餘部分與小數部分應分別分段,小數點前的根是整數,小數點後的根是小數.

III. 分數

求分數的立方根,倘分母是立方數,只須把分子分母分別求其立方根.若分母不是立方數,可化分數為小數,再開方.

第六　級數

(一)　等差級數

若干個數次第增加或次第減小，其相隣二數的差常相等者曰等差級數.其差曰公差.

例如1,3,5,7,9,…是一個等差級數,其公差是2。若以n表等差級數的項數,d表公差,a表初項,l表末項,則得下列等差級數:

$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\cdots\cdots$

其末項l(卽第n項)當爲a+(n−1)d,故得公式:

$$l=a+(n-1)d$$

卽　末項=初項+(項數−1)×公差　[A]

若把上面的等差級數的n項相加,用S來代表其和,則有$S=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots+[a+(n-1)d]$ (a)

又若以l代末項，則末項的前一項當爲l−d，再前一項爲l−2d，等而上之,第一項a當爲l−(n−1)d;再顚倒(a)式左邊的次序,得

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+(l-3d)+\cdots+[l-(n-1)d] \quad (b)$$

把(a),(b)兩式相加，得

$$2S=n(a+l)$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l)$$

卽　總和=$\frac{項數}{2}$(初項+末項)　[B]

例如求3,6,9,12,…的第30項,並求這30項的總和,

此處初項爲3，公差爲3，項數爲30，代入[A]式，得第30項

$=3+(30-1)\times 3=90$，又代入[B]式，得 $S=\frac{30}{2}(3+90)=1395$.

（二）　等比級數

若干個數次第增加或次第減小，其相隣二數的比常相等者曰等比級數．其比曰公比．

例如2，4，8，16，32，……是一個等比級數，其公比是2．同前面一樣，若用a代表初項，n代表項數，l代表末項，r代表公比，則得下列等比級數，

$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3,\cdots\cdots$

其末項 l（卽第n項）當爲 ar^{n-1}，故得公式：

$$l=ar^{n-1}$$

卽　　末項＝初項×（公比）$^{\text{項數}-1}$　　　[C]

若把上面的等比級數的n項相加，用S代表其和，則有

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}\qquad (a)$$

用r乘(a)的左右兩邊，得

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n\qquad (b)$$

從(b)減去(a)，得

$$Sr-S=ar^n-a$$

或　$S(r-1)=a(r^n-1)$

故　$S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

即　$總和=\dfrac{初項(公比^{項數}-1)}{公比-1}$　　[D]

例如求1,3,9,27,81,…的第10項，并求這10項的總和．此處初項爲1,公比爲3,項數爲10,代入[C]式,得

$$第10項=1\times3^{10-1}=3^9=19683$$

又代入[D]式，得

$$S=\frac{1\times(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{59048}{2}=29524$$

若等比級數的公比 r 爲小於 1 的眞分數,而項數又爲無窮多時,則在

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{ar^n}{r-1}-\frac{a}{r-1}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

內,r^n爲無窮小，因而ar^n爲無窮小,故可略而不計,

得　$S=\dfrac{a}{1-r}$

即　$總和=\dfrac{初項}{1-公比}$　　[D]

例如化循環小數 $0.\dot{3}$ 爲分數.

$$0.\dot{3}=0.333\cdots\cdots$$

$$=0.3+0.03+0.003+\cdots\cdots$$

吾們知道0.3,0.03,0.003…是一個等比級數,牠的初項是0.3，牠的公比

是 $\frac{1}{10}$，牠的項數是無窮多；所以牠的總和是

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{0.3}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0.3}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

故 $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$。這也是化循環小數爲分數的另一個方法。學者應用這個方法，試把下面的兩個循環小數化作分數：$0.\dot{4}\dot{3}$，$0.23\dot{6}5\dot{8}$。

（完）

註冊商標

(9540)

0.08