新中學文庫

統計學

金國寶編著

商務印書館發行

統 計 學

金國寶編著

商務印書館發行

中華民國二十四年五月初版
中華民國三十五年十二月二版

統計學一册

⊕(32073·2)

定價國幣肆元
印刷地點外另加運費

編著者　金國寶
發行人　朱經農
上海河南中路
印刷所　商務印書館印刷廠
發行所　商務印書館
各地

(本書校對者袁粟美)

引　言

一、本書係拙稿『統計學大綱』一書之縮本一切數學理論完全節去最合商科高級中學或師範學校教科書之用

二、全書十章一年可以讀完如其課程祇有半年則可選讀前列七章最後三章可以不讀

三、每章各附問題及習題若干則問題可在教室中討論習題則備課外練習之用

四、本書所用統計符號與『統計學大綱』一書不盡相同取其簡明也

目　　次

統計學教科書

第一章　緒論

第一節　統計學之定義

統計學者用計數或估量以數字表示社會或自然現象之動態或靜態並分析其數字間關係之學也。此定義須稍加以解釋。

統計學計量而不較質。欲比較人之貧富或智愚，在統計學內必須先有可以表示此貧富或智愚之數量方可以言比較，故數字不能與統計分離。統計學上大半數字均由計數而來，故雷翁衰氏以計數之學作爲統計學之定義。此定義雖覺太狹，但計數爲統計學之主要職務要無可疑。惟統計學上之數字未必均由計數而來，有時不得不用估量方法以求其近似之數值，故定義中計數與估量並列。

古代統計學研究之對象爲國家，故有以研究國家之學爲統計學之定義者。其後研究之範圍漸次推廣，研究之對象亦漸由國家而推及於社會與自然現象；此種現象或同時同地，或同時異地，或同地異時，故社會與自然現象之動態與靜態均在統計學研究範圍之內。

統計學亦有作爲研究平均數之科學者。此定義亦覺太狹。統計學不特用數字表示社會與自然現象之動態與靜態，且用種種分析方法以推求其數字間之關係；此種關係不僅是平均數一種。故謂統計學之任務在根據大量觀察而闡明其數字間之平均關係則可，若謂統計學爲研究平均數之學，則不免令人誤解矣。

第二節 統計學之應用

統計學之應用甚廣，不勝枚舉，茲擇其最重要者分述如下：

(一)統計與社會政策　近世各國無不倡言社會政策，社會立法；然欲救濟社會之疾病，必須先明瞭社會疾病之原因，然後對症下藥，方可有改良社會之望。欲明原因則非取證於統計不可。例如根據工業上之失事統計，於是有強迫保險之實行；比較男女童工之工資，知女工童工有特別保護之必要，於是有最低工資法之制定，卽其例也。

(二)統計與公共衞生　人口之疾病死亡統計對於公共衞生尤有密切之關係。衞生當局之唯一參考卽在統計；凡以後施政之方針及以前設施之成績無不取決於此。當疾病發生之際卽可由統計之報告而設法防止其蔓延；平日亦可注意社會之弱點而徐圖補救之辦法。且若將此等統計及其效用公告人民，尤不難得社會之合作與經濟之贊助，誠推廣公共衞生事業之第一急務也。

(三)統計與商業　現代商業範圍擴大，故其問題亦日趨複雜；內部如浪費之減少，工人之效能，分公司之營業，售貨員之比較，等等；外部如供給需要之狀況，市場之變遷，商業之盛衰，季節之影響，等等；皆與商業之成敗，有莫大之關係。故現代歐美各大公司皆特設統計部以專司其各種調查之職責。

(四)統計與財政　財政以收支適合為原則；支出雖較能預定，然收入卻頗難預言。例如所得稅之多寡，須視人民所得之數額而定；關稅之收入，須視外國輸入品之種類與數額而定；然歐美各國之財政專家每能根據歷年之統計而預測未來之收入，雖亦有時與實收數目相差甚遠，然適合者其常，而相差極大者僅例外耳。

第三節 統計之誤用

統計之用固極神妙，然用之失當，其流弊所屆亦有不可勝言者。吾人格物務須平心靜氣屏除成見，取懷疑之態度，戒獨斷之行爲，如是細心分析方能得事物之眞相；否則，毫釐千里未有不陷於絕大之謬誤者。美國統計學家鄃獨克氏對於統計學之誤用論列甚詳，據其所論可分謬誤爲四種：一曰，不同事物比較之謬誤；二曰，百分比之謬誤；三曰，原因脫漏之謬誤；四曰，偏見之謬誤；而統計自身之謬誤猶不與焉。鄃氏對於每種謬誤各附以若干例證，茲節取其一二如下：

(一) 不同事物比較之謬誤　統計之妙用端在比較，單獨一個數字毫無意義可言，必有兩處地方或兩個時期相互比較，意義始明；然事物之性質不相同者則無比較之可能。如一八九九年美國陸軍部長論非列濱之美國兵士死亡率事，卽犯此病。當時外界對於多數兵士之死亡頗有責言，該部長乃出而置辯；大意謂兵士之死亡率不過萬分之一七二，與華盛頓波士頓一般人口之死亡率相差無幾，故兵士之死亡率不得謂爲過高云云。其實軍隊與一般人口，性質完全不同，安能相提並論？一般人口之中，老少齊全，而極老極少者之死亡率尤高出尋常，斷不可與中年人相比較；而兵士則旣悉强壯之靑年，且均經過體格檢查者，故此種比較實自欺欺人耳。

又如就各國煤礦工人每千人每年所遇之失事數目而比較之，其結果亦不確當；蓋各國礦工工作之日數不同，歐洲各國較多，美國較少。若以每年所遇之失事數相比較，則美國必佔便宜，故最善之辦法須將各國之失事次數均以作工三百日爲標準而修整之，方有比較之可能。

（二）百分比之謬誤　百分比之使用亦須格外注意，偶一不愼即可令人發生謬誤之感想。例如美國約翰哈金斯大學初收女生之時即發生一有趣之新聞，謂該校女生百分之三十三又三分之一均與本校教員成眷屬云。不知底細者必以為該校教員均風流人物，然細加考察則與教員結婚之女生僅一人而已。蓋當時女生共祇三人，一人即為全體百分之三十三又三分之一。故數目甚小之時，不宜用百分比。如欲用百分比，亦必須將實在數同時並列，方不致令人發生謬誤之印象也。

又如甲城人口十萬而外國移民居百分之二十，乙城人口五十萬而移民居百分之三十，丙城人口百萬而移民居百分之四十，今若將此三城合而計之，試問其移民成分幾何？對此問題往往即將此三城之百分比相加而以三除之為答，則其答數為百分之三十：

$$\frac{20+30+40}{3}\% = 30\%;$$

然應得之百分比當為35.625而非30也；因準確之計算法當以三城人口之總數除其移民之總數。甲城之移民有二萬，乙城之移民有十五萬，丙城之移民有四十萬，故三城移民之總數共有五十七萬，而其人口之總數則有一百六十萬，列成算式即得：

$$\frac{570{,}000}{1{,}600{,}000} = 35.625\%.$$

（三）原因脫漏之謬誤　有時事實之原因甚多，若獨取其一盡置其他於不顧，亦常發生不確之結論。如美國某大學調查學生吸煙程度以斷定吸煙為學業不及格之原因，即其一例。茲將學生分為吸煙多者，吸煙不多者，完全不吸者三類，而其中不及格之人數如下：

	調查學生數	全年平均分數	不及格之百分比
完全不吸者	111	85.2	3.2
吸煙不多者	35	73.3	14.1
吸煙極多者	18	59.7	24.1

根據此項調查結果遂認吸煙為不及格之原因，則未免失當；蓋學生之好吸煙者其人往往視他種活動較重於學業，同時或為體育家，或為極貪舒適之人，其所以不及格者由於其不重學業所致，而吸煙不過其不重學業之一種間接表示。科學家之探討必須盡窺事物之全豹，不當以部分的理由作全體之解釋也。

（四）偏見之謬誤　統計學家當有超然中正之態，切不可先有偏見存乎胸中乃覓統計以實其說；自欺欺人，莫此為甚。例如前年美國嘗有反對種痘同盟會之職員投函於紐約晚報（一九一四年五月四日），引用英國之統計如下：

天花死亡總數（1905—1910 年）	199
種痘死亡總數（1905—1910 年）	99
五歲以下天花死亡總數（1905—1910 年）	26
五歲以下種痘死亡總數（1905—1910 年）	98

大意謂就全體而論，種痘死者歲佔天花死者之半，就五歲以下而論，種痘死者尚多出天花死者之上幾有四倍之多，故強迫種痘之舉殊可不必云云。所引統計固屬確實，但其議論殊與事實相反。天花死亡之減少即由於種痘。六年之中，因種痘致死者祇有九十九人。假使不實行強迫種痘，則當時以天花死者必非少數，以之與九十九人相比，孰多孰少，不言可知矣。

然而以上種種猶非就統計本身言也。統計本身亦難免謬誤，或由於調查之疏忽，或由於計算之錯誤，故於他人所披露之統計吾人須詳加分析，不可輕信。差以毫釐，謬以千里，不可不

愼之又愼也。

第四節 統計之法則

抽樣為近世所發見最有價值之調查方法。所謂抽樣即自一大羣極複雜之事項中抽取一小部分作為調查之標準，由此所得之結果即可用以代表全部。例欲調查上海工人所得之平均工資，吾人不必遍查全部工人所得之工資再求其平均數，吾人祇須抽查其中可以代表全體的一小部工人所得之工資再求其平均數。由是而得之平均工資雖未必與全體工人所得之平均工資完全一致；然相差甚微，實際上可以略而不計，故即以之作為全體工人所得平均工資之代表亦無不可。又設有雞蛋十萬枚而欲求其平均重量，吾人不必將此十萬枚雞蛋一一秤其重量再求其平均數。吾人祇須任取（當然不能故意選擇最大或最小之雞蛋）其中一千枚雞蛋秤其重量而求其平均數。由是而得之平均重量雖未必與十萬雞蛋之平均重量完全一致；然相差無幾，實際上已可用為全部雞蛋平均重量之代表。此種調查方法係根據統計常態之法則。所謂統計常態，即謂由一大羣中任意選擇之一小部平均差不多可以保持全部之特性。

由一大羣中任意抽出之一部既能代表全體，則由此一大羣中抽出之其他一部自當與第一部相似。若第一部中有幾項具有異常之特性，則在第二部中吾人亦可預期發見具此異常特性之幾項，其項數亦與前無甚差異；此即所謂小數永存之法則，蓋由統計常態之法則脫胎而來也。統計學家蒲闌謂各種職業之專家自專醫特種難症之耳科醫生以至販賣古董之商人，靡不賴此「小數永存之法則」而生。

由統計常態之法則脫胎而來，尚有大量惰性之法則。所謂大

量惰性，乃謂在外界原因不變之情況下若觀察之範圍擴大甚廣則每年之統計常得相似之數量。例如火災之損失就一城而言歷年之損失或相差甚多，然就全國或全世界而言，若房屋之建築或防火之設備未有改進，則每年火災之損失常能保持一定之數量；蓋各處每年火災損失數量之變動其方向不同，有較去年增加者，亦有較去年減少者，甲乙等地增加之量適與丙丁等地減少之量約略相抵，故其結果變動甚微。

第五節　統計方法之程序

統計方法之程序，可分爲四大步驟：

(一)搜集資料

(二)整理資料

(三)發表資料

(四)分析資料

請舉例以明之。今設欲清查某地之人口，自當首先確定其淸查之範圍，調查表之問題及格式，施行方法，以及其舉行日期，等等，此皆屬於其初步「搜集資料」之工作。迨資料旣已齊集，則當進而點明其人口之總數，男女各若干？已婚與未婚者各若干？識字與不識字者又各若干？其年齡之分配如何？其職業之分配又如何？類此之工作皆屬於其第二步「整理資料」之範圍。今旣得其統計各事項之數目，卽得酌量情形製成圖表以公布之，此卽其第三步「發表資料」之工作。大半統計機關之工作至此爲止。完成此三項工作亦可謂爲已盡「計數」之能事。然統計學之效用卻不但示吾人以各種事項之確切數目，尤當由其所示之數目間發現一定之規律。例如由各國人口年齡統計之比較而發現其分配曲線大致有一定之形式，再若由其已婚者年齡之研究而得計算其夫婦

間年齡之繫聯係數，諸如此類之工作概屬於其第四步「分析資料」之範圍。規模較大之統計機關亦甚努力於此種工作。本書第二第三兩章先述圖表之繪製，第四章以下略述統計資料之分析，至於統計資料之搜集與整理，在初學者每覺過於枯燥，故從略。

問題及習題

1. 試述統計學之意義。
2. 解釋下列各名詞:
   a. 計數。
   b. 估量。
   c. 抽樣。
3. 統計學之應用何在?
4. 統計之誤用最重要者有幾種? 試詳述之。
5. 解釋下列各法則:
   a. 統計常態之法則。
   b. 小數永存之法則。
   c. 大量惰性之法則。
6. 試述統計方法之程序。

第二章　統計表

第一節　統計表之功用

統計不能與數字分離，故其結果恆有無數複雜之數字。此無數複雜之數字即所以表示統計事項之動態或靜態。若用文字一一為之披露，則長篇累牘，讀者需時既多，而讀後恐仍不知其所云；反之，若將此無數複雜之數字擇要列之於表，則統計之結果便可一目了然，較之用文字敍述者不可同日而語。玆將統計表之功用擇其重要者分述如下：

(一) 統計資料之排列，有明顯且合於邏輯之系統。

(二) 易得明切之概念。

(三) 易於記憶。

(四) 便於比較。

(五) 易於檢查錯誤及遺漏。

(六) 免去文字上重複解釋之煩。

(七) 便於總計平均及其他較深之計算。

第二節　統計事項之特性及其相互之關係

將雜亂無章之統計資料依一定之系統排列成表，必須先有預定之目的，然後能有整齊之秩序；然欲預定目的，必須先能確定統計事項之特性。所謂特性，即其個別之性質是也。試就田地而言，土質之肥瘠，面積之大小，產量之多少，市價之高低，以及

其地位，其地主，均可爲其特性之一。吾人可取特性之全部或一部作爲排列之標準。

統計事項之特性有可以累積與不可累積之別，排列成表時亦不可不加以注意。例如商店中每期之售貨總額可以依次累積，第一期之售貨總額與第二期之售貨總額相加卽爲前二期之售貨總額，再加以第三期之售貨總額卽爲前三期之售貨總額，故各期之累積額各有其意義；反之，工廠中每期之作工人數則不能累積，第一期之作工人數不能與第二期之作工人數相加作爲前二期之作工總人數，以各期之人數相加卽失其意義，故不能累積。

統計事項之特性通常不止一種，其間相互之關係亦有種種之區別，或可合併計算，或則彼此不能相混；例如兼售皮鞋與衣服之商人其售去皮鞋之額及其售去衣服之額彼此不能相混，然其售貨總額，則可將兩者合併計算。統計事項之特性又有原始與附生之別；例如商店中盤存商品之總值隨估計價値之標準而異，前者爲附生特性，後者爲原始特性，故附生特性可謂爲原始特性之函數。

統計事項之特性或有因果之關係，或彼此無關係，或雖相伴而無一定之關係。例如橡皮生產之限制與橡皮價格之增高是有因果之關係者也。工人所得工資額與工廠支付工資次數是無若何之關係者也。商店中之賒售額及其營業額是雖相伴而無一定之關係者也。

第三節　統計事項之分類

統計事項之分類有科學的與非科學的之別。所分之類若能互相排斥而不致混淆，則爲科學的分類；反之，卽爲非科學的分類。例如分居民爲男性與女性，則男性一類中不含女性之分子，

而女性一類中亦不含男性之分子，男性與女性互相排斥不致混淆，故此種分類爲科學的；反之，若分居民爲婦女，未成年者與生利者，則各類相混而不能互相排斥，蓋男子未必均係生利者，而生利者之中亦未必無婦女與未成年者，故此種分類爲非科學的。

統計事項之分類又有縱分與橫分之別。縱分以經過之時間爲標準，故爲歷史的分類。橫分與時間無關，其分類之標準或爲統計事項分配之地域，或爲某種特性之表現，或依其數量之大小而分成數組，故橫分又可區別爲地理的分類性質的分類與數量的分類三種。例如最近十年間我國對外貿易之消長，人口之變動，物價之漲落，工資與稅收之增減，是皆歷史的分類也。民國二十一年我國各省人口之比較，各省產米量之對照，各國在我國對外貿易中分配之狀況，是皆地理的分類也。民國二十一年上海市人民死亡原因之比較，上海外人國籍性別與宗教信仰等之統計，是皆性質的分類也。至若依年齡之大小工資之多少或身長之高低分成數組，則是以數量爲標準而屬於最後一種之分類，卽所謂數量的分類是也。

第四節　總表與摘要表

統計表有總表與摘要表之分。將有關研究現象之一切已知事項列之於表，是爲總表，故其記載甚爲詳盡，凡吾人由搜集而得之原始資料均詳載於此表之上而爲編製摘要表之準備。摘要表者就總表中所載之資料摘要記載或加以分析而成之表也。總表之記載既甚詳盡，故所佔之篇幅甚多，而所需之印費亦甚大，且普通讀者祇欲略知統計之結果而不欲深察其詳細情形，故統計機關通常不以總表披露；雖然，摘要表中所載之資料僅關研究現象之一部，不能供多方面之參考，故有時統計機關或另以總表

單獨發表，或載摘要表於正文而置總表於附錄，俾讀者得由此而作他種更高深之分析。

第五節　統計表之形式及製表規律

統計表之形式有繁有簡，隨需要而異。最簡單者爲單項表。單項表者祇作一種比較之表式也。較繁者可於表中作二種，三種或四五種比較；此種表式名曰雙項，三項，四項，五項表。

表中地位有優劣之別，有便於比較者，有不便於比較者；善製表者先確定各種比較重要性之大小，最重要之比較，置於最優之地位，次要之比較置於較劣之地位，最不重要之比較置於最劣之地位。然則表中之地位何者便於比較？何者不便於比較？同行（縱行）數字比較與同列（橫行）數字比較似無優劣之分；然於目力前者實較優於後者，故表中最優地位爲同行相鄰數字之比較，其次即爲同列相鄰數字之比較。若欲於表中作第三種比較，則欲比較之數字不能相互爲鄰惟有相間之一法，而同行既優於同列，故第三種較優地位即置比較數字於同行而隔列相間，至於同列而隔行相間數字之比較，較第三種爲不便，故可作爲第四種比較。譬就上海市人口統計而言，吾人或欲作種種之比較，滿二十歲與不滿二十歲之比較，男性與女性之比較，已婚與未婚之比較，華人與外人之比較，此四種比較吾人或欲與以先後輕重之別；茲就第一表將此四種比較之先後輕重與表中地位之優劣次序互相對照如下：

第一位　同行相鄰數字之比較——滿二十歲與不滿二十歲之比較。

第二位　同列相鄰數字之比較——男性與女性之比較。

第三位　同行而隔列相間數字之比較——已婚與未婚之比

較。

第四位　同列而隔行相間數字之比較——華人與外人之比較。

第一表　四項表

性別與國別 / 年別與婚別	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	華人與外人			華人			外人		
	兩性	男性	女性	兩性	男性	女性	兩性	男性	女性
1. 總數：滿二十歲與不滿二十歲									
2. 滿二十歲									
3. 不滿二十歲									
4. 已婚：滿二十歲與不滿二十歲									
5. 滿二十歲									
6. 不滿二十歲									
7. 未婚：滿二十歲與不滿二十歲									
8. 滿二十歲									
9. 不滿二十歲									

統計表之標題置於表之上端，所以表明其內容，須簡明而能揭出表中重要各點；其各點先後之次序，須與其重要性之大小相應。表中行列，亦須冠以適當之標目；有時因標目遺漏，或次序顚倒，或措辭失當，而使讀者誤解，故不可不特別注意。例如工廠中之失事統計，失事之結果有死者，有傷者，而傷者之中又有傷手者，傷足者與傷目者等之別；若以傷手者，傷足者，傷目者等，與死者並列，則犯標目遺漏之弊病。善製表者必先分失事結果爲死

者與傷者二項，然後再將傷者一項分成傷手者，傷足者與傷目者等，若是，則輕重之別顯然，閱者不致誤解矣。

昔時統計表中之總數均置於各數字之末，今則有相反之趨勢，首創者爲美國華盛頓人口清查局，其目的欲使總數與表之標題相近而卽能顯示於讀者目前；蓋普通閱者對於總數特別注意，置總數於顯著之地位，於閱者較爲便利。惟總數若位於各數字之前，則加時須自下而上，或自右而左。各行總數之和與各列總數之和相等，亦可藉此稽核計算之準確與否也。

表中行列須以直線劃分，而所劃界線須有粗細多少之別。普通項目之間用一細線，重要項目之間則用粗線或雙線表之。上下兩端，亦須劃雙線或粗線以與正文相別。總之，各項重要性之大小須與界線之粗細多少相應，庶閱者可一目了然。由界線劃分之行列各冠一字母或數字以便引用參考；如第一表中以 A, B, C, D 等區別各行，以 1,2,3,4 等區別各列，若是，則設於正文中述及某行某列，卽知所指爲何行何列也。

表中數字須排列整齊以便計算。所用單位須在數字之前註明。在摘要表中所用之單位不宜過小，過小則位數較多，印費較大，而計算亦較煩，且普通讀者祇欲知統計結果之大概，故單位甚小之數字，非其所需。單位以後之數字，可依四捨五入法取捨之。

表中項目不宜過多，過多則易致混淆，不如分製數表較爲明顯。統計表若非單獨發表或另置於附錄，則其地位須與有關之正文接近；至其對於正文前後之位置，則須視正文與統計表之關係而定。若正文爲對於統計表內容之說明，則先統計表而後正文；反之，若有關之正文不待統計表而亦能自明，則可先正文而後統計表。

表中資料之來源須常註明，以供讀者之參考；若資料之來源

甚爲重要，則可置於表之標題之下，否則亦可書於表之下端。

第六節　統計數列

吾人在統計學中研究之特性隨時隨地或隨情況而變。試以工人所得之工資而論，甲時之工資與乙時之工資不同，甲地之工資與乙地之工資亦不同，而甲組工人之工資又不能與乙組工人之工資一致，故吾人所研究之工資在時間在空間或在不同情況中均可有許多數値。具此許多數値之特性在統計學中名曰變量；而此許多數値卽爲變量之數値。在研究之時間空間或情況中變量之數値依一定之次序相連而成一列，是曰統計數列，或單稱數列。

統計數列可分爲時間數列空間數列與質量數列。統計事項之分類吾人前已論其大概。時間數列與空間數列，卽依歷史的與地理的分類而組成之數列，至依性質的或數量的分類而組成之數列，則名曰質量數列。試取民國元年至十年我國每年對外貿易之總値而論，貿易總値爲一變量，此變量可有十個數値，(此十個數値，當然不能全同，但亦不必全異。)此十個數値卽組成一種時間數列。又試取民國二十年我國輸往外國之絲量依照香港，日本，法國，美國，意大利，印度，英國與其他各國之分類而研究之，則輸出絲量爲一變量，而可有八個不同之數値（不必全異），惟此變量在空間變化而非在時間變化，故此八個數値所組成之數列係空間數列而非時間數列。又若依死亡之原因而計算死亡之人數，或就工人所得之工資而研究其分配，前者之變量爲死亡人數，後者之變量爲工資，均可有若干不同之數値；凡此二者旣均不在時間或空間變化，則由此二變量之數値所組成之數列不能謂爲時間數列或空間數列，故總稱之曰質量數列。

質量數列之中有一種數列，在統計學上特別重要者，曰頻數數列。例如就工人所得之工資而研究其分配，每月工資在五元以下者若干人，五元與十元之間若干人，十元與十五元之間若干人，等等。每五元爲一組，而以全體人數分配於各組之中，是曰頻數分配。各組人數即爲頻數。此類數列名曰頻數數列。以上各種數列之中，統計學上最重要者，爲頻數數列與時間數列，而空間數列與通常之質量數列較不重要。故統計學家亦有分數列爲（一）頻數數列，（二）時間數列，與（三）類別數列（包括空間數列及通常之質量數列在內）之三類者。

統計數列，又可分爲連續數列，非連續數列與近似連續數列三種。若變量之兩個不同數值中可有無限不同之數值，則由此變量而生之數列，名曰連續數列，數值之由測量而能確定之數列均屬之。例如人之身長在 60 吋與 61 吋之間有無限不同之數值，在 60 吋與 $60\frac{1}{10}$ 吋之間或在 60 吋與 $60\frac{1}{100}$ 吋之間仍有無限不同之數值，故身長數列爲一連續數列；又若人之年歲在三十歲與三十一歲之間有無限不同之數值，在三十歲與三十歲一月之間或在三十歲與三十歲零一日之間仍有無限不同之數值，故年歲數列亦爲一連續數列。反之，若變量之兩個不同數值中祇有有限不同之數值，則由此變量而生之數列，名曰非連續數列，數值之由計數而能確定之數列均屬之。例如人數十人與十三人之間祇有十一人與十二人二數；又若計算工資之最低單位爲一分，則三角五分與三角九分之間祇有三角六分，三角七分與三角八分三數，故人數與工資之數列均爲非連續數列。此外尚有一種數列，其變量之數值亦若連續數列之連續不絕，惟其連續性非自然而係人爲，此種數列名曰近似連續數列，凡用近似值表示其數值之數列均

屬之。連續數列之前冠以近似二字者以此，百分率與死亡率之數列即其例也。

第七節 頻數表

頻數與頻數分配上文略已論及，茲再舉例說明之。例有學生十人，其總平均分數如下：

85	62
74	85
72	62
85	85
65	90

上述數列中，85分出現四次，62分二次，其餘均僅一次，故85分之頻數爲四，62分之頻數爲二，其餘均爲一。若吾人僅書數列中不同之數值而書其頻數於各數值之旁，則成一表，名曰頻數表，第二表即由上述數列編製而成之頻數表也。其中之學生人數即頻數也。

第二表 頻數表

總平均分數	學生人數
90	1
85	4
74	1
72	1
65	1
62	2

變量之數值即使完全不同，或相同者甚少，然爲計算便利起見仍可製成頻數表，惟其法略異耳。吾人可將全部數列依其大小分成數組，而以變量之數值盡納於各組之中，全部數列在各組間

之分配，名曰頻數分配，而表示此頻數分配之表，即名曰分組頻數表。分組頻數表與普通頻數表之區別，即在前者略變原有各項之數值而後者保持其原有之數值也。例如下列上海金業交易所所開標金行市（民國二十二年八月二十五日）共有二十六個：

832.80 元	834.60 元	836.80 元	839.30 元
833.00	832.60	835.30	836.00
831.60	833.80	838.20	837.30
832.20	832.00	837.60	836.20
829.00	835.20	838.20	837.50
833.30	834.80	836.20	837.10
831.70	836.60		

若吾人以一元爲一組，將全部數列分成數組，而將變量之數值容納於適當之各組中，則由上述之數列可得下列之分組頻數表：

第三表　分組頻數表（甲）

標金行市(元)	頻　數
828.50——829.50	1
829.50——830.50	0
830.50——831.50	1
831.50——832.50	3
832.50——833.50	4
833.50——834.50	1
834.50——835.50	4
835.50——836.50	3
836.50——837.50	4
837.50——838.50	4
838.50——839.50	1
	26

原來數列中在 832.50 元至 833.50 元之間共有四數：

832.60　832.80　833.00　833.30

此四數本非一致，然爲計算便利起見認爲相等而悉數歸納於第

五組之中，故第五組之頻數爲 4，其餘各組可依此類推。

各組之大小名曰組距，上表中之組距爲一元。組之兩端名曰組限，其較大者曰上限，其較小者曰下限，上表中第一組之上限爲 829.50 元，其下限爲 828.50 元。每組中間之數值，名曰組中點，或單稱中點，即上下兩組限之平均數，上表中第一組之中點爲 829 元，第二組之中點爲 830 元。

關於編製分組頻數表之問題有二：其一，須確定組數之多少，換言之，即確定組距之大小；其二，須確定組限之位置及其表現之方法。

若組距太大，則組中各數相差太多，其中點似難作爲一組之代表，且頻數分配之重要情狀將因是而被蒙蔽；反之，若組距太小，則既不便於處理，且又不能顯示其主要趨勢；故組距之大小不可不有適中之度。據英國統計學家游爾氏之意見，連續數列或間隔微小之非連續數列可分爲十五組至二十五組，至於間隔較大（間隔對於全域比例之度較大）之非連續數列則組距之大小通常可由數列之性質而定。例欲調查上海市每家所佔房間之數，則可以一間爲組距。

上表中各組之組距相等，但亦有不相等者。前者較優於後者；蓋各組之組距相等，則各組之頻數易得精確之比較，其便一；以相等之組距爲單位，則計算較易，（參看以後各章簡捷法）其便二；由組距相等之分組頻數表繪成確實表現頻數分配之圖較由組距不相等者爲易，其便三。雖然，統計機關所發表之分組頻數表仍有組距不相等者，蓋亦有故焉。例如調查人民財富之分配，設以五萬元爲組距，則 0—50000 元一組之頻數必甚多，若不將此組分成若干小組，則此許多頻數之分配不能得其詳，此困難一；自百萬至數千萬中間之頻數甚少而組數甚多，若不用較大之

組距,或用「一百萬以上」一組以容納之,則須浪費無數之時間與地位,此困難二;有時政府制度分組不齊,例如所得稅,政府若採累進制,分所得爲大小不等之數組而以不等之稅率徵收,則關於所得之統計亦不能不歸納於組距不等之分組頻數表中,此困難三。有此種種理由,故原則上各組之組距雖應相等,然實際應用仍當視研究問題之性質如何以爲斷。(但非至萬不得已時,不可用「五萬以下」或「一百萬以上」等分組,蓋此種分組之中點不能確定。)

組距雖定,若組限之位置未定,則頻數之分配仍未能確定。試就上例中之第五組而論,吾人可定爲 832.60—833.60,或 832.70—833.70,或其他別種分法,各種分法之結果不盡相同。由第一種分法,則第五組仍含四項(依統計慣例 832.60 應包含在 832.60—833.60 組中);由第二種分法,則第五組僅含三項(832.60 應歸納在第四組之內)。然則第三表中之第五組何以欲用 832.50 爲其下限?吾人作此選擇並非偶然,自有其選擇之理由。吾人旣以一組之中點作爲組內諸數之代表,則此代表之本身務須最簡;以 832.50 爲第五組之下限,則其中點爲一整數,其他各組之中點亦然,故組限位置之確定須以中點整數化或簡單化爲標準。(但若數列之分配集中於一點,則不論此點之爲整數與否均須取作中點。)

組限表示之方法亦有種種;或用上限與下限表示,或用中點表示;(第三表中之組限若用中點表示,則第一組可改書 829,第二組可改書 830,餘類推。)而前者之中又可分爲兩種,後組之下限與前組之上限(若各組之排列由大而小,則可改爲後組之上限與前組之下限。)或用相同數字表示,或用不同數字表示,第三表爲前者之例,而第四表爲後者之例。

第四表　分組頻數表(乙)

標金行市(元)	頻　數
829——830	1
831——832	4
833——834	5
835——836	7
837——838	8
839——840	1
	26

上表中第一組之上限爲 830 元，第二組之下限爲 831 元，初學者必以爲 830 元與 831 元間之數值，將無所歸納矣；此則未明外表組限與實際組限之別使然也。就外表而言，第一組之下限爲 829 元，其上限爲 830 元；但就實際而言，第一組之下限爲 828.50 元，其上限爲 830.50 元，本例組距並非一元實係二元，故 830.40 元須歸入第一組，而 830.50 元則歸入第二組。此種表示之法統計書中亦常有遇見，讀者不可不注意也。(參閱第十表註二。)

分組中或有數組其頻數爲零，但其組限仍須列入以免計算之錯誤。

分組頻數表有簡單頻數表與累積頻數表之別。第三表與第四表卽爲簡單頻數表之例。若於簡單頻數表中以各組之頻數依次累積則成累積頻數表。累積頻數表中第一組之累積頻數與其簡單頻數相等；第二組之累積頻數等於第一組之累積頻數與第二組之簡單頻數之和；第三組之累積頻數等於第二組之累積頻數與第三組之簡單頻數之和，餘可依次類推。

第五表　累積頻數表(甲)(較小制)

標金行市(元)	頻數	累積頻數
828.50——829.50	1	1
829.50——830.50	0	1
830.50——831.50	1	2
831.50——832.50	3	5
832.50——833.50	4	9
833.50——834.50	1	10
834.50——835.50	4	14
835.50——836.50	3	17
836.50——837.50	4	21
837.50——838.50	4	25
838.50——839.50	1	26

第六表　累積頻數表(乙)(較大制)

標金行市(元)	頻數	累積頻數
838.50——839.50	1	1
837.50——838.50	4	5
836.50——837.50	4	9
835.50——836.50	3	12
834.50——835.50	4	16
833.50——834.50	1	17
832.50——833.50	4	21
831.50——832.50	3	24
830.50——831.50	1	25
829.50——830.50	0	25
828.50——829.50	1	26

頻數累積有向上與向下之別。若各組之排列由小而大，則頻數依次向上累積，第五表卽其例也。第五表中各組之累積頻數各有其意義，卽謂標金行市之較小於 829.50 元者有 1 次，較小於 830.50 元者亦祇 1 次，較小於 831.50 元者則有 2 次，等等，故此種頻數累積名曰較小制。反之，若各組之排列由大而小，則頻數依次向下累積，第六表卽其例也。第六表中各組之累積頻數亦各有其意義，惟其意義適與前相反；由表中之累積頻數而觀，可知標金行市之較大於 838.50 元者有 1 次，較大於 837.50 元者有

5次，較大於 836.50 元者有 9 次，等等，故此種頻數累積名曰較大制。

問題及習題

1. 統計表有何功用?
2. 區列下列各名詞:
   a. 科學的分類與非科學的分類。
   b. 歷史的分類，地理的分類，性質的分類，與數量的分類。
   c. 總表與摘要表。
   d. 時間數列，空間數列與質量數列。
   e. 連續數列，非連續數列與近似連續數列。
   f. 普通頻數表與分組頻數表。
   g. 外表組限與實際組限。
   h. 簡單頻數表與累積頻數表。
   i. 較小制累積頻數表與較大制累積頻數表。
3. 解釋下列各名詞:
   a. 特性。
   b. 變量。
   c. 統計數列。
   d. 頻數。
   e. 頻數分配。
   f. 頻數數列。
   g. 組距。
   h. 組限。
   i. 上限與下限。
   j. 組中點。
4. 組距應否相等？試說明之。
5. 組限之選擇應以何者爲標準?其表示之方法如何?
6. 累積頻數表中各組之累積頻數有何意義？試舉例以明之。
7. 試擬作一『三項表』。

8. 就下列綠兵船牌麪粉市價(每袋値規元數)編一分組頻數表:

a. 組距爲一錢。

b. 組距爲五分。

民國十二年至二十一年綠兵船牌麪粉市價

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
十二年	2.225	2.275	2.125	2.120	2.100	2.075	2.150	2.100	2.250	2.025	1.970	1.900
十三年	1.850	1.825	1.790	1.750	1.800	1.800	2.000	1.825	1.875	1.925	2.050	2.150
十四年	2.250	2.250	2.350	2.450	2.450	2.300	2.375	2.350	2.150	2.125	2.270	2.400
十五年	2.500	2.450	2.425	2.420	2.310	2.130	2.175	2.175	2.200	2.380	2.450	2.400
十六年	2.300	2.375	2.440	2.450	2.525	2.470	2.275	2.300	2.300	2.250	2.225	2.150
十七年	2.250	2.275	2.450	2.350	2.350	2.175	2.100	2.025	2.075	2.150	2.225	2.225
十八年	2.325	2.350	2.275	2.200	2.075	2.125	2.275	2.325	2.325	2.325	2.350	2.375
十九年	2.525	2.625	2.525	2.550	2.525	2.700	2.550	2.575	2.475	2.325	2.300	2.200
二十年	2.200	2.325	2.175	2.175	2.175	2.125	2.100	2.200	2.150	2.075	2.075	1.950
廿一年	1.925	1.975	1.975	2.125	2.100	1.950	1.850	1.950	1.900	1.900	1.925	2.000

資料來源: 財政部駐滬貨價調查處及國定稅則委員會貨價季刊

9. 由前題之分組頻數表,各製一累積頻數表:

a. 較小制。

b. 較大制。

第三章　統計圖

第一節　統計圖之功用及製圖之原則

統計表雖能化雜亂無序之資料為整齊簡單之排列，不待文字敍述可使閱者得一明確之概念；然欲得此明確之概念，仍須詳閱表中数字一一為之比較對照方得明瞭数字間之關係。統計圖則不然，不待比較而統計事項之大概情狀已畢現於紙上，且予讀者以深切之印象；故統計圖者表現統計上数字間之關係最有效之方法也。茲擇其功用之重要者分述如下：

(一)讀者僅耗甚少之時間即能得明確之概念。

(二)易於記憶。

(三)便於比較。

(四)予讀者以深切之印象，利於演講宣傳或廣告。

(五)可用插補法求近似值以免計算之煩。

(六)可由抽查之樣本確定全部之分配狀況。

(七)可供高深分析之用。

第二節　統計圖之分類

統計圖得依其形式，目的，應用環境及比較之性質而分類。就其形式而言，統計圖可分為條形圖，統計地圖，面積圖，體積圖及線圖五種。就其目的而言，統計圖可分為說明圖，分析圖及計算圖三種。就其應用環境而言，統計圖可分為壁圖，桌圖及書圖

三種。就其比較之性質而言，統計圖又可分爲時間比較圖，空間比較圖，數量比較圖及頻數分配圖四種。

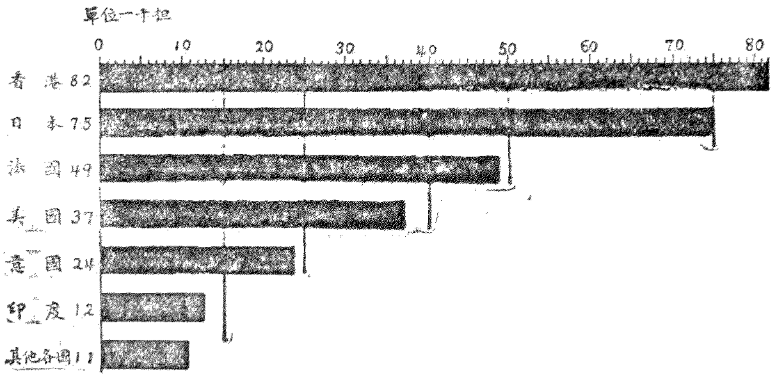
本章分類之主要基礎乃統計圖之形式；但適當形式之確定須以統計資料之性質與統計圖之目的及其應用之環境爲標準。各種形式各有其用，何者適用於歷史資料或頻數分配之研究，何者便於宣傳或演講之用，亦均爲製圖者所不可不知；故於以下各節分述各種統計圖之形式時亦將擇要論及，俾學者知所應用也。

第三節　條形圖

條形圖者，以平行寬條若干條比較統計事項之數量或其百分比之圖也。條形圖有橫條形圖與縱條形圖之分。寬條之自左而右平行者，曰橫條形圖；其自下而上平行者，曰縱條形圖。

橫條形圖又可分爲簡單橫條形圖（第一圖），組合橫條形圖（第二圖），簡單成分橫條形圖（第三圖）及組合成分橫條形圖（第四圖）四種。

第一圖　民國二十年我國輸往外國絲量按國比較圖



〔註〕 資料來源：民國二十年海關中外貿易統計年刊上卷。

簡單橫條形圖者僅以一種橫條若干比較統計事項之圖也。此種橫條不分細段，故祇可以其長短作一種比較；如第一圖中之橫條係比較民國二十年我國輸往各國之絲量之多少。

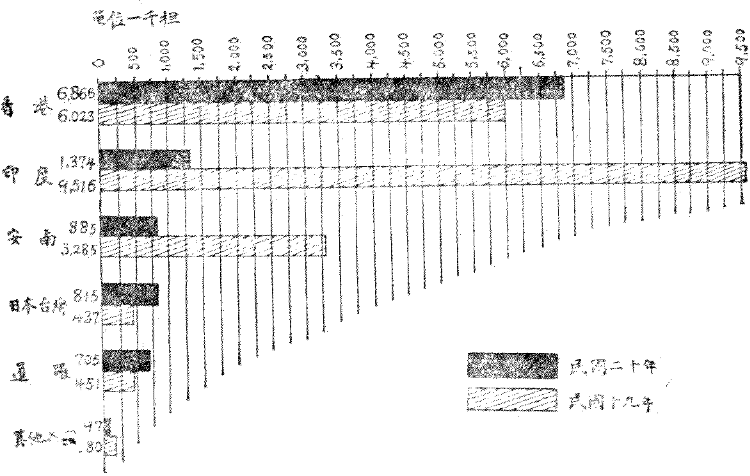
組合橫條圖形者以多種橫條若干比較統計事項之圖也。此種橫條亦不分細段，惟以其不止一種，故可作多種比較，如第二圖中之橫條有黑條與線條二種，其所示吾人之比較可有下列三種：

(一)各黑條比較民國二十年各國輸入我國米量之多少。

(二)各線條比較民國十九年各國輸入我國米量之多少。

(三)圖中黑條與線條相間，每兩條成一組，第一組比較民國二十年由香港輸入米量對於民國十九年之增減，同理，第二組比較印度，第三組比較安南，第四組比較日本及臺灣，第五組比較暹羅，第六組比較其他各國。

第二圖　民國十九年及二十年外國輸入我國米量按國比較圖



〔註〕　資料來源：民國二十年海關中外貿易統計年刊下卷第一冊。

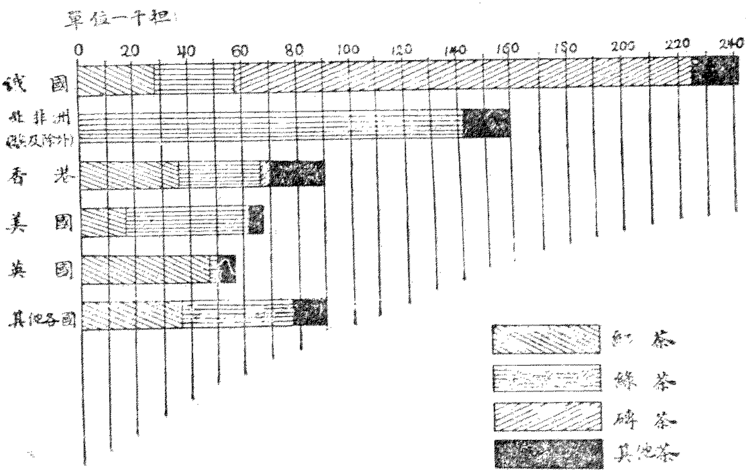
簡單成分橫條形圖者各條之內分成細段之簡單橫條形圖也。此圖可作種種比較：各條全部相比，條內各段相比，而各條各段又可一一相比。如第三圖中之橫條，每條均分作四段，其所示之比較可有下列三種：

(一)以各條全部之長短比較民國二十年我國輸往各主要國茶量之多少。

(二)以條內各段之長短比較民國二十年我國輸往某國茶量中紅茶，綠茶，磚茶與其他茶各佔數量之多少。

(三)以各條第一段之長短比較民國二十年我國輸往外國紅茶中各主要國所佔數量之多少，同理，以各條第二段比較綠茶，第三段比較磚茶，第四段比較其他茶。

第三圖　民國二十年我國輸往外國茶量按國按類比較圖



〔註〕參看第七表。

上列三種比較均可得自第三圖；惟其第三種比較則以各段起點除第一段外均非一致，故其長短之區別較難，此則爲成分條

形圖之缺點也。

第七表 民國二十年我國輸往外國茶量按國按類比較表

（單位一千擔）

輸往國	總數	紅茶	綠茶	磚茶	其他茶
俄國	241	29.6	29.5	165.1	16.5
北非洲（埃及除外）	160	1.7	141.4	——	16.7
香港	80	36.6	22.3	1.5	19.9
美國	66	17.3	46.0	——	2.7
英國	56	48.3	2.5	——	5.6
其他各國	90	37.9	41.8	0.0	10.1

［註一］ 資料來源：民國二十年海關中外貿易統計年刊上卷。

［註二］ 數量為零者以——表之，數量過小者以0.0或0表之，以後仿此。

組合成分橫條形圖者，各條之內分成細段之組合橫條形圖也。此圖之缺點與簡單成分橫條形圖同，即各段之起點除第一段外均非一致。第四圖為組合成分橫條形圖之一種，乃比較統計事項百分比之圖也。其所示之比較有下列之四種：

（一）以條內各段之長短比較各種出生地點及父母血統在某處都市或農村中所佔之百分比。

（二）以都市各條第一段之長短比較各處都市之本地白人本地親系在其居民中所佔百分比之多少，同理，第二段比較本地白人外國或混合親系，第三段比較產在外國之白人，第四段比較黑人及其他人種。

（三）與第二種比較相似，惟改都市為農村。

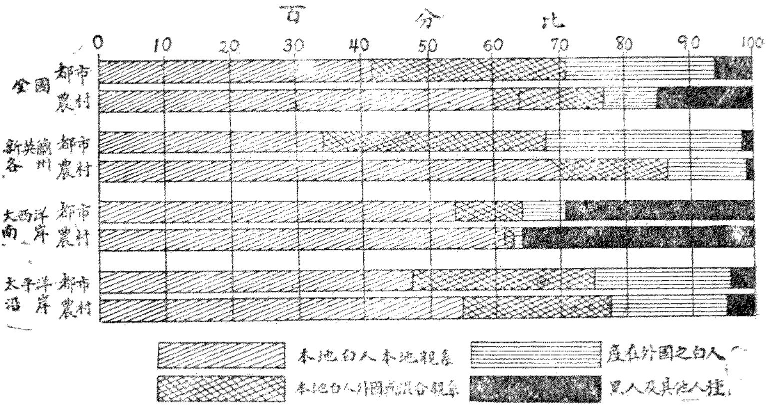
（四）以第一條各段與第二條各段比較美國全國各種出生地點及父母血統在都市及農村居民中各佔百分比之多少，同理，以第三條各段與第四條各段比較新英蘭各州，以第五條各段與第六條各段比較大西洋南岸，以第

七條各段與第八條各段比較太平洋沿岸。

下圖中各横條之長短相等，但若改百分比為實際數量，則各横條之長短各不相等，又可用以作其他種種之比較。

第四圖　1910年美國人口百分比分配圖

(按照區域，人種，親系與城鄉之區別而比較)



〔註〕 參看第八表。

第八表　1910年美國人口百分比分配表

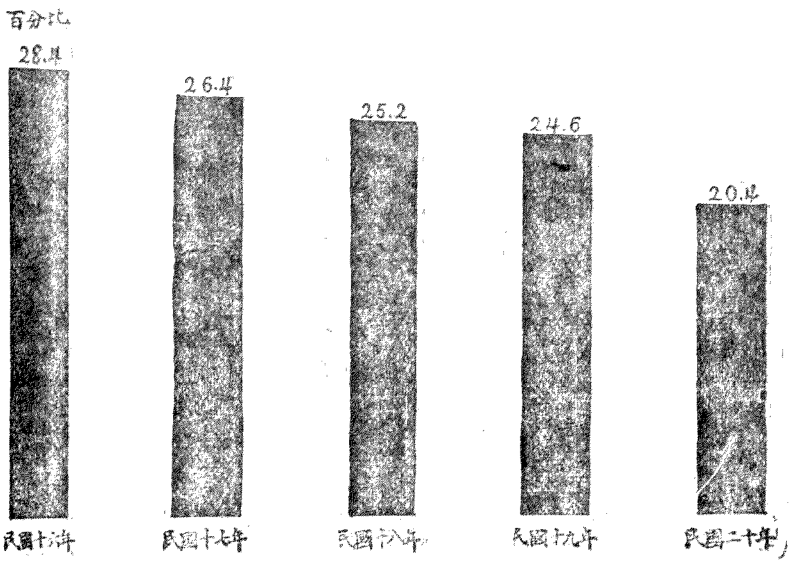
(按照區域人種親系與城鄉之區別而比較)

出生地點及父母血統	全國		新英蘭各州		大西洋南岸		太平洋沿岸	
	都市	農村	都市	農村	都市	農村	都市	農村
本地白人本地親系	41.9	64.1	33.9	69.8	54.2	62.2	46.9	54.8
本地白人外國或混合親系	29.0	13.3	34.2	17.0	10.1	1.4	27.2	22.4
產在外國之白人	22.6	7.5	30.7	12.6	6.2	1.1	22.2	18.4
黑人及其他人種	6.5	15.1	1.2	0.6	29.5	35.3	3.7	4.5
合計	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

〔註〕 上表譯自美人席陸姆氏之統計方法。

上述各種橫條形圖各有其應用。如作同一時期內各種數量之簡單比較可用簡單橫條形圖。若比較之事項過多，則圖中之橫條亦可易以橫線。若欲比較同時期內各小部數量之多少，則橫條形圖之選擇須視總數之多少而定。若祇有一個總數則可用簡單橫條形圖，以一橫條代表一小部而另取一橫條以代表其全部。雖此種比較亦可用圓形圖表示，然究不若簡單橫條形圖之簡便明顯。若有兩三個總數則可用組合橫條形圖。若總數過多，則只用簡單成分橫條形圖爲宜。至於組合成分橫條形圖，則最適用於若干總數百分比分配之比較。

第五圖　最近五年日本及臺灣在我國輸入總值中所佔之百分比

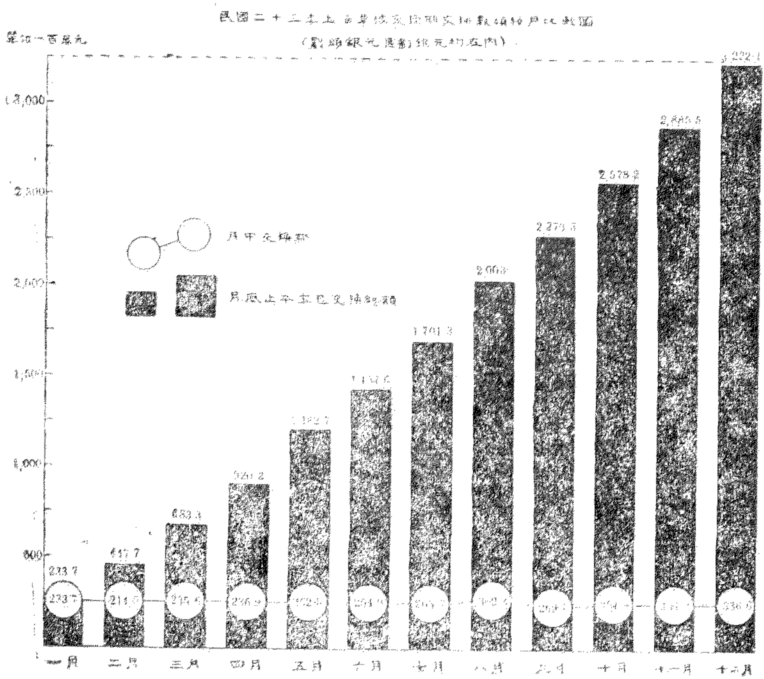


〔註〕資料來源：海關中外貿易統計年刊。

縱條形圖之最通行者有簡單縱條形圖（第五圖），條線混合圖（第六圖）與頻數分配縱條形圖（第七圖）三種。前二種宜於時間數列之比較，後一種宜於頻數分配之比較。

簡單縱條形圖者僅以一種縱條若干比較統計事項之圖也。此種縱條祇有高低之別，故祇可作一種比較。如前面第五圖中之縱條共有五條，每條代表一年；觀此五條之高低，即可知民國十六年至二十年日本及臺灣在我國輸入總值中所佔百分比之消長。

第六圖



[註] 參看第九表。

條線混合圖者，縱條與曲線混合而成之圖也。縱條與曲線各示吾人以一種比較，如第六圖中之縱條乃比較每月底止上海票據交換所本年已交換之票據總金額，而每月中票據之交換額則須視圖中曲線之高低。

第九表　民國二十三年上海票據交換所交換數額按月比較表

（單位一百萬元劃頭銀元匯劃銀元均在內）

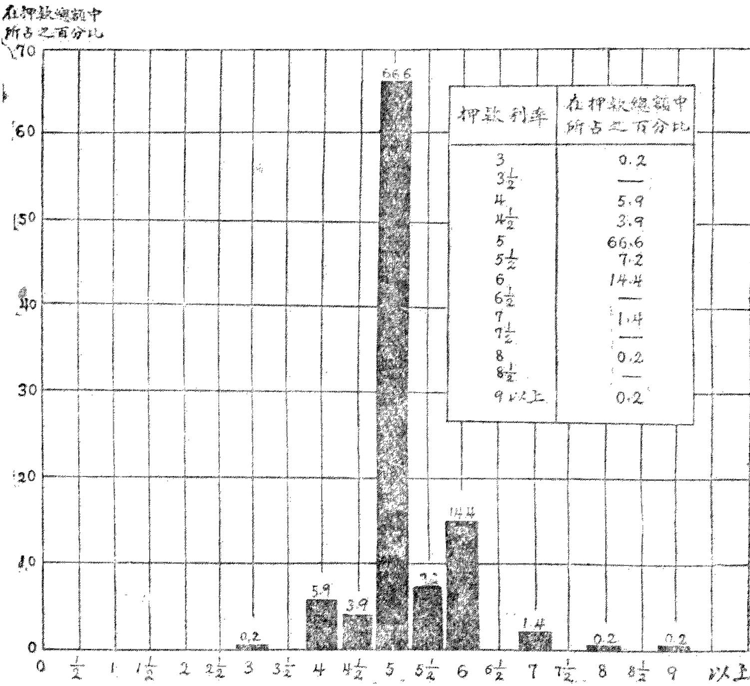
月別	月中交換額	月底止本年已交換總額
一月	233.7	233.7
二月	214.0	447.7
三月	235.6	683.3
四月	236.9	920.2
五月	262.5	1,182.7
六月	254.9	1,437.6
七月	263.7	1,701.3
八月	302.3	2,003.6
九月	269.7	2,273.3
十月	304.9	2,578.2
十一月	307.3	2,885.5
十二月	336.6	3,222.1

〔註〕資料來源：上海銀行業同業公會聯合準備委員會票據交換所報告。

頻數分配縱條形圖者，以縱條之高低比較分組頻數表中各組頻數多少之圖也。此圖最適用於非連續數列分配之比較。觀第七圖中各縱條之高低即可知各種利率所佔之百分比。

第七圖 美國威士康辛州丹村農業押款利率比較圖

(依各種利率成交之押款額在押款總額中所佔之百分比)



〔註〕 上圖自美人席萊姆氏之統計方法轉載。

第四節 統計地圖面積圖及體積圖

統計地圖者，乃表示統計事項在空間的分配最簡單且最有效之統計圖也。如欲表示我國各省人口之密度，各省米茶絲產量之分配狀況，各國重要農工礦業產量之比較，均適用此種統計地圖。

統計地圖有彩色統計地圖，交叉線統計地圖與點式統計地圖三種。用數種顏色或一種深淺不同之顏色表示統計事項之分配狀況者，名曰彩色統計地圖。用數種形式不同之交叉線表示統計事項之分配狀況者，名曰交叉線統計地圖。用數量不同或粗細不等之小點表示統計事項之分配狀況者，名曰點式統計地圖。彩色統計地圖印費最大，故普通統計機關所發行之統計地圖爲交叉線統計地圖與點式統計地圖二種。

點式統計地圖又可分爲單點統計地圖，密點統計地圖與四分點統計地圖三種。單點統計地圖上每區祇有一點，點之大小不一，數量多者用大點，少者用小點，以點之大小表示數量之多少。密點統計地圖上之點則反是，各點之大小相等，但各區之點數不一，以點數之疏密表示數量之多少。至於四分點統計地圖，則介於前二者之間，所用之點雖不一致，然其種類有限，不若單點統計地圖之參差不齊，各區內所用點數雖有不止一點者，然究不若密點統計地圖之密。四分點統計地圖所用之點共有五種；例如比較各地產米之量，吾人可用下列形式略異之五點表示產量之多少：

○　一萬石以下

◔　一萬石以上二萬石以下

◑　二萬石以上三萬石以下

◕　三萬石以上四萬石以下

●　四萬石以上五萬石以下

觀上列各點則四分點之意義自明。由四分點統計地圖估計數量之多少較其他二種點式統計地圖爲易，蓋依上列之標準某地之區域內若有下列三點

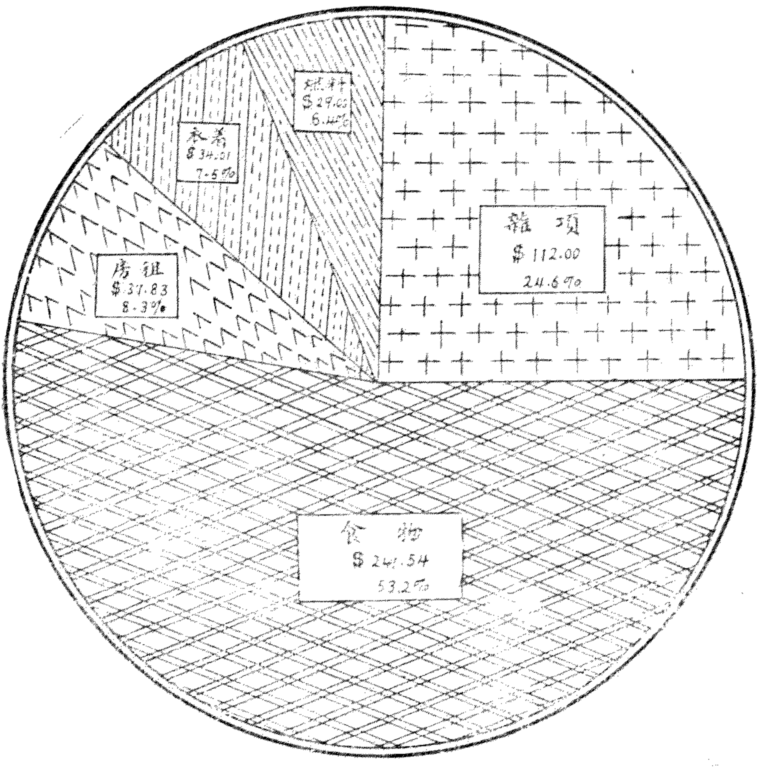
●　●　◑

卽可知該地產米之量在十二萬石與十三萬石之間。

面積有長寬二邊,體積有長寬高三邊,均不便於比較,故面積圖與體積圖在原則上均當避用;惟面積圖中之圓形圖已成為吾人習見之統計圖,尚適用於簡單之比較,例如捐稅與生活費之分析均可用圓形圖表示。其他如正方形圖與矩形圖則用者甚少。

第八圖　上海工人家庭生活費用百分比分配圖

(民國十八年四月至十九年三月)



〔註〕 資料來源:上海市工人生活費指數(民國十五年至二十年)。

圓形圖者，以圓分成數部而以各部之大小比較統計事項之分配狀況者也。其繪製之步驟如下：

(一) 求各項在總數中所佔之百分比。

(二) 以各部之百分比乘 360° 得各部在圓內應佔有之度數。

(三) 過圓心引若干界線依照求得之角度分全圓爲若干部。

(四) 各部之區分或僅用界線，或界線以外更用各種顏色或交叉線以示區別。

(五) 各部內須書各項之名稱及其百分比，但不書其度，蓋角度爲製圖之助而非爲讀者所欲知也。

茲就上海市社會局在民國十八年四月至十九年三月之一年中，調查上海工人三百零五家之生活費用，所得之結果繪製圓形圖如前頁。

體積圖有立方圖球形圖與像形圖之別。所謂像形圖乃以實體之形像比較統計事項之圖也。例如以大小不同之二軍人描寫兩國陸軍軍力之厚薄；或以一大戰艦與一小兵船表示兩國海軍力之懸殊，皆像形圖之例也。像形圖較其他體積圖更不便於比較，故除宣傳或廣告外鮮有用之者。

第五節　線圖

線圖者以曲線之升降表示統計事項變動之圖也。線圖不僅說明事實，且能供分析之用，故其應用最廣。時間數列之變動及頻數分配之狀況均可用線圖表示。對於科學管理之研究及經濟問題之探討尤爲不可缺少之工具。

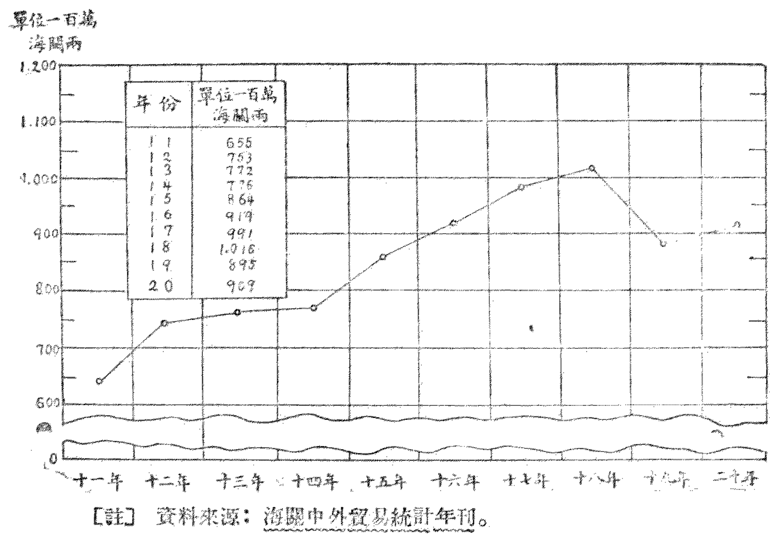
用兩種尺度以表統計材料之分配爲線圖之特點。繪製線圖時在圖上先引互爲垂直之直線二，在此二直線之上各有其尺度，橫線上之尺度名曰橫尺度，縱線上之尺度名曰縱尺度，而橫線與

縱線通常稱為x軸與y軸。平面上任何一點在橫尺度上所測之數量為該點之橫坐標,其在縱尺度上所測之數量則為其縱坐標,故各點均各有其在兩種尺度上所測之數量。聯接各點而成之線,名曰曲線;其升降起伏即可以測知統計事項變動之狀況。

線圖得依其所表示之統計資料而分為歷史線圖與頻數線圖二種。表示時間數列變動狀況之線圖,名曰歷史線圖。表示頻數分配情形之線圖,名曰頻數線圖。前者以時間為橫坐標,數量為縱坐標;而後者則以分組為橫坐標,頻數為縱坐標。

線圖又可依縱尺度上分隔之標準而分為算術圖與單對數圖二種。縱尺度上相等之距離可代表相等之數量或相等之倍數;依前之標準而成之圖,名曰算術圖,依後之標準而成之圖,名曰單對數圖或比例圖。所謂單對數者乃半用算術標準(橫尺度)半用對

第九圖　民國十一年至二十年我國出口總值消長圖



年份	單位一百萬海關兩
11	655
12	753
13	772
14	776
15	864
16	919
17	991
18	1.016
19	895
20	909

〔註〕資料來源:海關中外貿易統計年刊。

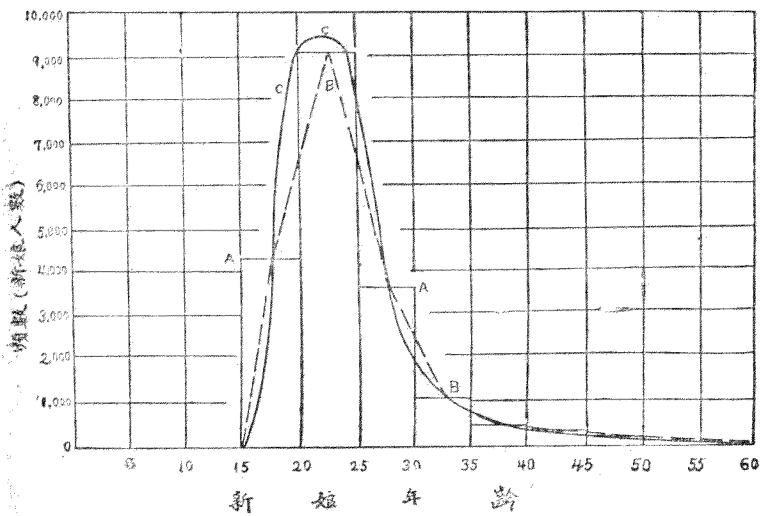
數標準(縱尺度)之謂也。(但亦有在橫尺度上用對數標準而在縱尺度上用算術標準者。若在縱橫尺度上俱用對數標準則名曰雙對數圖,惟用者甚少。)

線圖之形式亦可作爲線圖分類之標準。連接各點而成之折線,名曰角曲線;修去角曲線之角而成之光滑曲線,名曰修勻曲線。

歷史線圖有簡單與累積之別。前者比較各時期內簡單數量之變動(第九圖),後者則表示各時期末累積之數量。

若歷史線圖上有兩種曲線,而兩種數列之平均數又相差甚大,則在縱線上可用兩種尺度以便比較(兩種尺度分置於左右兩端)。例如一國之輸出總值約五倍於其輸入總值,則在同一圖上可以代表輸入值一百萬元之距離代表五百萬元之輸出值;若是,

第十圖　1917 年美國威士康辛州新娘年齡分配圖



[註]　參看第十表。

則二曲線之距離不遠，而其起伏即易於比較矣。

頻數分配之狀況可用縱條形圖或線圖表示。第十圖中之曲線B即表示頻數分配之曲線也。此曲線乃由各點連接而成，各點之橫坐標為各組之中點，而其縱坐標則為各組之頻數，此曲線與最小組之下限及最大組之上限連接則成一多邊形，此即所謂頻數多邊形是也。若於每組之上畫一矩形，(組矩為底，頻數為高。)則此無數矩形之高低亦可用以比較頻數之分配。此種統計圖，名曰直方圖，如第十圖中A。直方圖可視為縱條形圖之一種，亦可作為繪製修勻曲線之初步。

第十表　1917年美國威士康辛州新娘年齡分配表

新娘年齡	新娘人數
15——19	4,292
20——24	9,121
25——29	3,568
30——34	1,144
35——39	488
40——44	321
45——49	245
50——54	118
55——59	80
60——79	67
年齡不明者	80

〔註一〕　上表自美人席陸姆氏之統計方法轉載。

〔註二〕　新娘之年齡可有兩種假定：第一種之假定為上次生日時之年齡，第二種之假定為四捨五入法計算而得之年齡，第十圖係根據前一種假定而作，否則橫線上之組限應改為 14.5, 19.5, 24.5……。

〔註三〕　60——79一組之組距四倍於其他各組，若亦欲在圖上表示，則應以其頻數四分之一為其矩形之高。

第十圖中之C乃將角曲線B修勻而得。頻數曲線修勻之目的有二:

(一)估計各組內之頻數分配。

(二)修去偶由抽樣而得之不規則現象，使全體之確實分配狀況得以表現。

然欲達上述之目的必須修勻得當;若隨便修勻一無標準，則修勻曲線之位置必難適當。威斯脫教授在其所著之數學統計導論中曾有下列之建議，可作爲頻數曲線之修勻規則:

(一)在修勻曲線下之面積應與直方圖各矩形面積之和相等。

(二)各組上由修勻曲線之一部與兩組限上之二縱線所包圍之面積在可能範圍內須使與原矩形之面積相等。

(三)修勻曲線之轉折務須和緩。

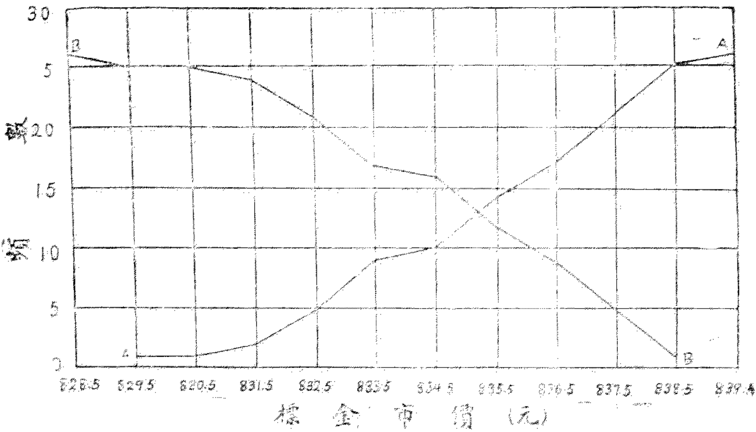
頻數曲線圖上之曲線同時可有多種。曲線之起伏即可用以比較其頻數分配之狀況。但若其頻數之多寡相差懸殊，則其比較不顯。反之，若以各組之頻數化成百分比(各組之頻數在其總頻數中所佔之百分比)而以之繪成曲線，則各組百分比之和既均等於100%，而其曲線之升降自亦便於比較矣。

頻數曲線亦有簡單與累積之別。以各組之簡單頻數爲縱坐標而成之曲線，名曰簡單頻數曲線，第十圖中之曲線B即其例也。以各組之累積頻數爲縱坐標而成之曲線，名曰累積頻數曲線。累積頻數曲線可用以估計中位數，四分位數，十分位數與百分位數之數值(參看第四章)。

累積頻數曲線又有向上累積與向下累積之別。向上與向下之意義，前於累積頻數表中已言之矣。向上累積曲線以各組之上限爲橫坐標(第十一圖A)，向下累積曲線以各組之下限爲橫坐標

標(第十一圖 B),此亦為繪製累積曲線時所當注意也。

第十一圖　累積頻數曲線圖



[註] 參看第五第六表。

若統計事項之變動在吾人研究時期之前後兩期中相差甚大,則其變動之確實狀況不能在算術圖上顯示。茲假定前後兩期中某變量之各數值如下:

前期	第一年	10
	第二年	15
	第三年	20
	第四年	25
後期	第一年	100
	第二年	150
	第三年	200
	第四年	250

若用算術尺度(第十二圖),則吾人將疑前期之變動甚微,後期之

變動甚烈；但實際上後期中變量之各數值適十倍於前期中變量之各數值，故其變動完全一致，與第十二圖上所顯示者完全相反。反之，若用對數尺度，則其實際狀況完全能顯示於圖上；蓋前例中各數若用對數求之，則得：

前期	第一年	log 10	=1
	第二年	log 15	=1.176
	第三年	log 20	=1.301
	第四年	log 25	=1.398
後期	第一年	log 100	=2
	第二年	log 150	=2.176
	第三年	log 200	=2.301
	第四年	log 250	=2.398

前期中前後兩年對數之差與後期中前後兩年對數之差完全相同，故圖中之縱尺度若以對數為標準，則前後兩期曲線之起伏即完全一致（第十三圖），此單對數圖優於算術圖之一點也。

對數相差之數即為實際數量相比之數，縱尺度上相等之距離即代表實際數量相等之倍數，故欲知各年之增加率，並欲知其實際數量則不可不應用單對數圖，單對數圖又可用以比較大小相差懸殊之數種數列。

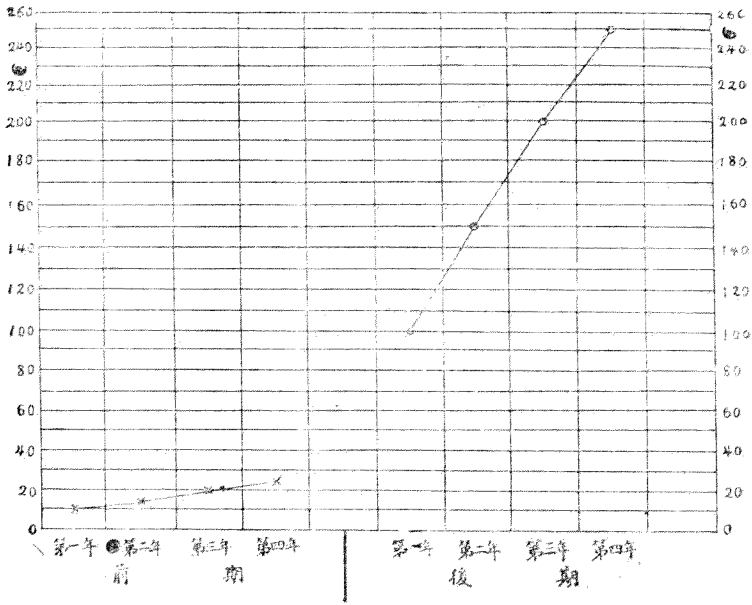
雖然，單對數圖普通人不易了解，此則其缺點也。茲就解釋單對數圖應注意各點列舉之如下：

（一）單對數圖之橫尺度為算術尺度，縱尺度為對數尺度，換言之，即為 x 與 log y。（但亦有橫尺度為對數尺度縱尺度為算術尺度者，換言之，即為 y 與 log x）。

（二）算術圖有零線而單對數圖則否。

（三）若曲線上升或下降而幾與直線平行，則其所代表之統

第十二圖 算術圖



計事項增加率或減少率幾相等。

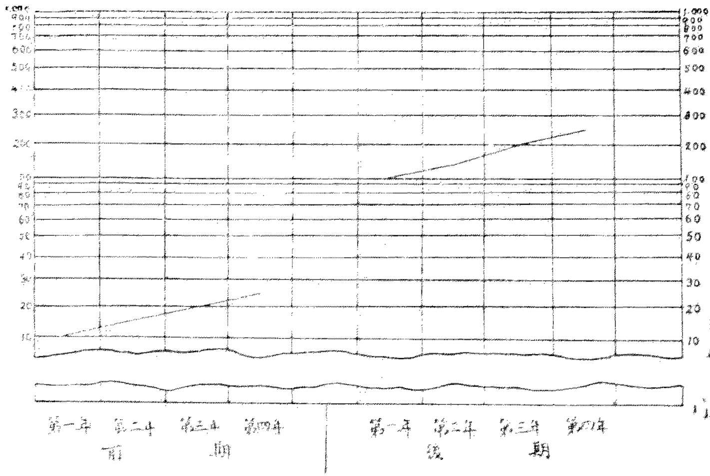
(四)若曲線離直線而向上彎曲，則其增加率增大，反之，若向下彎曲，則其增加率減少。

(五)在縱尺度上相等之距離表示相等之比例或相等之倍數

(六)若曲線一部之方向與其他一部同，則此二部變動之百分比亦同；反之，若此二部之斜度不等，則斜度較大之部，其變動之百分率亦較速。

(七)若吾人祇欲知數種曲線之相對變動而不問其絕對數量，則此數種曲線可任意上下移動，使其互相接近，以便比較。

第十三圖 單對数圖



第六節 作圖規則

雖然，統計圖繪製若不得法，亦足蒙蔽統計事項之實際狀況，故製圖者不可不謹愼從事。曩年美國統計學會，工程師學會等各學術團體有鑒於斯，特合組一委員會，討論統一作圖之法。其結果共得規則十七條，茲譯述如下：

(一)作圖應自左而右。

(二)數量宜以直線表示，勿用面積或體積，蓋面積體積容易令人發生謬誤之印象。

(三)繪畫曲線之時，宜愼選其縱尺度，俾零線亦能畫入。

(四)如其縱尺度決不能將零線畫入之時，則可在圖之下部留一空白斷面，俾零線仍能畫在斷面之下。

(五)無論縱橫尺度，零線應稍粗，俾與其他格線分別。

(六)曲線之表示百分數者，其百分之100或其他標準值之線應特別分明。

(七)如其横尺度爲日期而時期又不成一完全之單位者，其第一第末兩線以不分明爲善，蓋本無始末之意。

(八)曲線如畫在對數圖上，其對數尺度之界線均須爲十之方數。(據李格爾孟氏之說，如其十分不便，則此條亦可不必拘泥。)

(九)圖上格線原爲醒目之用，其不必要之線一概不必畫入。

(十)所畫曲線應與格線特別分明。

(十一)如其曲線表示若干觀察值，其代表觀察值之各點以分別標出爲善。

(十二)横尺度自左而右，縱尺度自下而上。

(十三)尺度上數字應列在左方與下方，或沿縱横二軸。

(十四)曲線所代表之數字或公式，亦宜一併列在圖上。

(十五)統計數字如不列在圖上，則作爲附表亦可。

(十六)圖上一切文字數字須向下或向右，俾可從下方或右方讀去，一目了然。(例如ABC，如其不能如此寫法，亦可書作 ABC，但不能書作 ABC。)

(十七)圖之標題愈清楚完全者愈佳。有時爲明白起見，尙須加小標題或其他說明。

問題及習題

1. 試述統計圖之功用。
2. 統計圖如何分類?
3. 解釋下列各名詞:
   a. 像形圖。
   b. 角曲線。
   c. 修勻曲線。
   d. 四分點統計地圖。
4. 區列下列各名詞:
   a. 算術圖與單對數圖。
   b. 歷史線圖與頻數線圖。
5. 頻數曲線之修勻有何規則?
6. 統計地圖有何效用?
7. 作圖規則如何? 試詳述之。
8. 就下表統計製民國二十年及二十一年我國輸入棉花量按國比較圖(單位一千擔).

國別	二十年	二十一年
美國	2,573.8	3,102.4
印度	1,811.1	426.0
日本	247.1	88.9
埃及	45.5	47.2
其他	10.5	45.5

〔註〕 資料來源: 棉業統制委員會棉花統計。

9. 就下列一九三二年上海公共租界居民因患傳染病致死之死亡統計,製外人華人按症比較圖。

民國二十一年上海公共租界傳染病死亡統計表

症別	死亡人數	
	外人	華人
天花	21	189
霍亂	13	149
傷寒	11	283
白喉	2	73
猩紅熱	5	64
各種癆病	70	746
流行性感冒	1	69
腦膜炎	2	57

[註 資料來源：上海公共租界工部局年報。

10. 根據下表統計製民國二十一年各省(限於上海紗廠聯合會調查省份)棉田面積比較圖。

a. 條形圖。

b. 圓形圖。

民國二十一年各省棉田面積表(單位千畝)

省別	棉田面積
江蘇	8,514.8
湖北	7,626.7
山東	6,844.2
河北	5,143.2
河南	3,424.1
浙江	1,671.8
陝西	1,412.7
湖南	982.7
安徽	955.1
山西	302.0
江西	222.7

[註] 資料來源：棉業統制委員會棉花統計。

11. 根據下列關稅及鹽稅收入統計，各製一按年比較圖。

a. 算術圖。

b. 單對數圖。

關稅及鹽稅收入表（單位一百萬元）

年別	關稅	鹽稅
民國元年	66.4	——
民國二年	72.7	19.0
民國三年	65.6	68.5
民國四年	62.8	80.5
民國五年	64.3	81.1
民國六年	65.0	82.2
民國七年	62.5	88.4
民國八年	78.3	87.8
民國九年	84.0	90.1
民國十年	91.4	94.9
民國十一年	97.6	98.1
民國十二年	105.4	90.5
民國十三年	114.5	97.9
民國十四年	115.6	91.9
民國十五年	128.1	92.1
民國十六年	112.4	82.9
民國十七年	133.3	65.6
民國十八年	244.0	78.8
民國十九年	290.2	127.9
民國二十年	384.9	162.9
民國二十一年	286.0	149.0

〔註〕 資料來源：財政部中華民國十九年及二十年兩會計年度財政報告。

12. 根據第二章第 8 題中之分組頻數表 (a)，製：

a. 頻數曲線圖。

b. 累積頻數曲線圖。

13. 根據第二章第 8 題中之分組頻數表 (b), 製:

a. 直方圖。

b. 頻數曲線圖。

c. 修勻曲線圖。

[註] 須畫在同一圖上。

第四章　平均數

第一節　平均數之意義與種類

頻數分配表較之未經整理之統計資料固已稍勝，然僅有頻數分配表猶不便於比較。例如學生二級，吾人若欲比較其成績之優劣，則於分配表以外猶不可不各求一代表的成績以爲比較之根據；（有時雖可用總數比較兩級學生之成績，然若學生人數不等，則此種比較即無意義。）然所謂代表的成績決非最好的學生，亦非最劣的學生，乃通常的學生平均的成績，換言之，即平均數之問題也。

故平均數者非異常之事項，乃通常之事項，非極端的現象，乃中心的現象。平均數代表性之多寡即視全體事項集中之程度而定。故在頻數分配之中最集中之一點，實爲最適宜之代表，換言之，即頻數最多之數值也。此項數値名曰衆數。若就頻數曲線而言，則衆數之地位即在 x 軸上縱坐標最高之一點；但在時間數列，則曲線最高之點卻爲異常之狀態而非衆數，讀者幸勿混爲一談。

衆數雖可爲一數列之代表，然此數列之代表未必一定用衆數。人民代表選擇之標準不一，數列之代表亦然，故上述衆數僅爲代表數列平均數之一種。

吾人若就統計事項依其大小之次序排列，則其中間之一項亦可作爲全部之代表，是曰中位數。例如一級學生共有九人，其

分數依次排列如下：

50　55　60　64　68　72　75　78　85

其中間之數爲 68，是卽中位數也。設項數爲偶數，則中間有二數，此二數相加之半卽爲中位數。

吾人若以數列之各項相加而以項數除之，則求得之商亦可爲全部之代表，是曰算術平均數；通常所謂平均數卽指此也。試就前例而言，則學生九人之總分數爲 607，而算術平均數卽爲其九分之一卽 67。

此外尙有幾何平均數與倒數平均數亦爲統計上通用之平均數。設一數列由 n 項組成，則此 n 項乘積之 n 方根卽爲此數列之幾何平均數。若取各項之倒數而求其算術平均數，則此算術平均數之倒數卽爲倒數平均數。

衆數，中位數，算術平均數，幾何平均數與倒數平均數，爲統計學上通用之五種平均數。其計算方法分別詳論於以下五節。

第二節　算術平均數

以數列之項數除其總和卽得算術平均數，故其計算公式如下：

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} X_k \tag{1}$$

A　算術平均數。

n　項數。

X_k　變量之數値。

Σ　總和之記號，讀如 Sigma。

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots\cdots + X_n$$

公式(1)通常縮寫如次:

$$A=\frac{\sum X}{n} \tag{1'}$$

例如民國二十二年八月三十日上海金業交易所所開標金行市如第十一表所示,設今欲求其算術平均數,則 $\sum X$ 即為各種行市之總和,而 n 即為所開行市之次數。

第十一表　民國二十二年八月三十日上海金業交易所所開標金行市表(單位元)

839.00	836.80	836.20	830.80
835.80	834.80	830.50	825.50
837.30	837.20	832.20	828.00
833.50	834.00	828.60	825.70

應用公式(1'),得:

$$A=\frac{\sum X}{n}=\frac{13325.90}{16}=832.8\frac{11}{16}$$

上例中之各種標金行市有大於平均數者,有小於平均數者,此大於或小於平均數之差量統計學上謂之離中差。依數學原理,若平均數為算術平均數,則各項離中差之總和等於零,即:

$$\sum(X-A)=0 \tag{2}$$

X　變量之數值。

A　算術平均數。

蓋依算術平均數之定義,

$$A=\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

或　　$nA=X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_n$

nA 為 n 個 A 相加之和,故

$$\underbrace{A+A+A+\cdots\cdots+A}_{n\text{個}}=\underbrace{X_1+X_2+X_3\cdots\cdots+X_n}_{n\text{個}}$$

移項得

$$0=(X_1-A)+(X_2-A)+(X_3-A)+\cdots\cdots+(X_n-A)$$

即
$$\Sigma(X-A)=0$$

試就上例中各項離中差作表如下:

第十二表　離中差計算表

標金行市（元）	離中差 +	離中差 −
839.00	$6.1\frac{5}{16}$	
835.80	$2.9\frac{5}{16}$	
837.30	$4.4\frac{5}{16}$	
833.50	$0.6\frac{5}{16}$	
836.80	$3.9\frac{5}{16}$	
834.80	$1.9\frac{5}{16}$	
837.20	$4.3\frac{5}{16}$	
834.00	$1.1\frac{5}{16}$	
836.20	$3.3\frac{5}{16}$	
830.50		$2.3\frac{11}{16}$
832.20		$0.6\frac{11}{16}$
828.60		$4.2\frac{11}{16}$
830.80		$2.0\frac{11}{16}$
825.50		$7.3\frac{11}{16}$
828.00		$4.8\frac{11}{16}$
825.70		$7.1\frac{11}{16}$
	$28.7\frac{13}{16}$	$28.7\frac{13}{16}$

$$28.7\frac{13}{16}-28.7\frac{13}{16}=0$$

數列之各項若數值甚大而相差甚微，則可先設一假定平均數以計算各項對此假定平均數之離中差，求其總和，然後乃可決定此假定平均數與眞正平均數二者之差額；蓋此二者之差額即各項對於假定平均數所有離中差之平均數也。由是求得算術平均數之法名曰簡捷法，其計算公式如下：

$$A = A' + \frac{\sum(X - A')}{n} \qquad (3)$$

A　算術平均數。

A′　假定平均數。

X　變量之數值。

n　項數。

〔證〕　$\Sigma(X - A') = \Sigma\{(X - A) + (A - A')\}$

$$= \Sigma(X - A) + n(A - A')$$

但　$\Sigma(X - A) = 0$

故　$\Sigma(X - A') = n(A - A')$

或　$\frac{\Sigma(X - A')}{n} = A - A'$

移項得

$$A = A' + \frac{\Sigma(X - A')}{n}$$

上例中標金行市均在 830 元左右，故可應用簡捷法以求算術平均數。今即以 830 元爲假定平均數並作下表以計算各項對於假定平均數離中差之總和。

第十三表　應用簡捷法求算術平均數

標金行市(元)	d′=X−A′ +	d′=X−A′ −
839.00	9.00	
835.80	5.80	
837.30	7.30	
833.50	3.50	
836.80	6.80	
834.80	4.80	
837.20	7.20	
834.00	4.00	
836.20	6.20	
830.50	0.50	
832.20	2.20	
828.60		1.40
830.80	0.80	
825.50		4.50
828.00		2.00
825.70		4.30
A′=830	58.10	12.20

$$58.10-12.20=45.90$$

代入公式(3),得:

$$A=830+\frac{45.90}{16}=832.8\frac{11}{16}$$

若統計資料已製成頻數表，則算術平均數可自下列公式求得:

普通法: $$A=\frac{\Sigma(fX)}{n} \qquad (4)$$

簡捷法: $$A=A'+\frac{(fd')}{n} \qquad (5)$$

A　算術平均數。

A′　假定平均數。

X　變量之數值。

d'　各項與假定平均數之差。

n　項數。

例如民國十九，二十兩年上海香煙（金鼠牌）每月平均每盒零售價已製成頻數表如下：

第十四表　民國十九，二十兩年上海香煙（金鼠牌）每月平均價表

每盒零售價（元）	頻數
0.045	1
0.046	2
0.047	2
0.049	2
0.050	4
0.052	1
0.055	7
0.056	3
0.057	2

〔註〕資料來源：上海市工人生活費指數（民國十五年至二十年）

茲由上表計算算術平均數如下：

第十五表　由頻數表求算術平均數（普通法與簡捷法之比較）

X	f	普通法	簡捷法		
		fX	d' = X − A' (A' = 0.050)	fd' +	fd' −
$ 0.045	1	0.045	−0.005		0.005
0.046	2	0.092	−0.004		0.008
0.047	2	0.094	−0.003		0.006
0.049	2	0.098	−0.001		0.002
0.050	4	0.200	0		
0.052	1	0.052	+0.002	0.002	
0.055	7	0.385	+0.005	0.035	
0.056	3	0.168	+0.006	0.018	
0.057	2	0.114	+0.007	0.014	
	24	1.248		0.069	0.021

$$0.069 - 0.021 = 0.048$$

普通法：
$$A=\frac{1.248}{24}=0.052$$

簡捷法：
$$A=0.050+\frac{0.048}{24}=0.052$$

若統計資料大部均祇每種一次，則由頻數表求算術平均數計算仍不能稍簡；但若以之製成分組頻數表，則每組頻數較多，而計算亦可較簡，惟由是求得之算術平均數與直接求得者略有差異，組距愈大則計算愈簡而相差亦愈大。由分組頻數表求算術平均數之公式如下：

普通法：
$$A=\frac{\Sigma(f\bar{m})}{n} \qquad (6)$$

簡捷法：
$$A=A'+\frac{\Sigma(fd')}{n} \qquad (7)$$

A 算術平均數。

A′ 假定平均數。

$\bar{m}$ 組中點。

d′ 各項與假定平均數之差。

n 項數。

茲應用以上兩法計算下表中玉蜀黍稈之平均高度：

第十六表 由分組頻數表求算術平均數

（普通法與簡捷法之比較）

玉蜀黍稈之高度(英尺)	稈數 f	普通法 $\bar{m}$	普通法 $f\bar{m}$	簡捷法 d′ (A′=6.5)	簡捷法 fd′ +	簡捷法 fd′ −
3——4	3	3.5	10.5	−3		9
4——5	7	4.5	31.5	−2		14
5——6	22	5.5	121.0	−1		22
6——7	60	6.5	390.0	0		
7——8	85	7.5	637.5	+1	85	
8——9	32	8.5	272.0	+2	64	
9——10	8	9.5	76.0	+3	24	
	217		1538.5		173	45

〔註〕資料來源：金維福氏所著之統計方法。

$$173-45=128$$

應用公式(6),得：　$A=\frac{1538.5}{217}=7.0\frac{195}{217}$

應用公式(7),得：　$A=6.5+\frac{128}{217}=7.0\frac{195}{217}$

應用公式(7)求算術平均數較之公式(6)簡捷多矣;但本例組距爲一,故計算甚爲便利。若組距不爲一,或大於一,或小於一,而頻數過多,則計算猶難敏捷。在此情形,則須改用組距單位,計算尤便。換言之,卽假定組距仍等於一,俟求得 $\Sigma fd'$ 後,再以組距乘之,結果亦同。其運算之詳細步驟如下：

(一)擇適中一組之中點爲假定平均數。

(二)將其上下各組表示其離中差 d', 以組距爲單位, 換言之,卽以假定平均數所在之一組離中差爲零,其下一組爲 -1, 其上一組爲 $+1$, 餘類推。

(三)以各組之離中差與其頻數相乘,列於 fd' 行下。

(四)就 fd' 行下各乘積求其總和。

(五)所得結果先以組距乘之,更以項數 n 除所得之積,是卽算術平均數與假定平均數相差之數。

(六)以此相差之數與假定平均數相加卽得眞正算術平均數。

玆舉一例以示此二法之應用而資比較。

第十七表　由分組頻數表用簡捷法求算術平均數

(第一簡捷法與第二簡捷法之比較)

工資 (G)	工人人數 (f)	第一簡捷法				第二簡捷法		
		中點 (m)	m−A′ (A′=52.5)	fd′ (原有單位) +	fd′ (原有單位) −	d′	fd′ (組距單位) +	fd′ (組距單位) −
\$ 0——\$ 15	156	7.5	−45		7020	−3		468
15—— 30	233	22.5	−30		6990	−2		466
30—— 45	435	37.5	−15		6525	−1		435
45—— 60	455	52.5	0			0		
60—— 75	305	67.5	15	4575		1	305	
75—— 90	15	82.5	30	450		2	30	
90—— 105	1	97.5	45	45		3	3	
	1600			5070	20535		338	1369

〔註〕 上表中統計採自美國勞工統計局所編之鋼鐵業工人之工資與工作時期：工資數目係指十六日所得工資而言。

$$5070-20535=-15465$$

$$338-1369=-1031\ (\text{組距單位})$$

依第一法，得：　$A=52.5-\dfrac{15465}{1600}=42.83$

依第二法，得：　$A=52.5-\dfrac{1031\times 15}{1600}=52.5-\dfrac{15465}{1600}=42.83$

分組頻數表組距若不相等，則應用公式(7)以求算術平均數時須注意 d′ 之數值。例如由下列分組頻數表求算術平均數。

第十八表　組距不等之分組頻數表

G	f	d'	d' −	d' +
$10——12	5	−3	15	
12——14	12	−2	24	
14——16	23	−1	23	
16——18	35	0	0	
18——22	22	+1.5		33
22——26	10	+3.5		35
26——32	8	+6		48
	115		62	116

上表中之組距有大小之別，前四組之組距爲二元，第五第六兩組之組距爲四元，末一組之組距爲六元，故若以 17 元爲假定平均數而以二元爲標準組距，則在 d' 一行中，前四組爲 −3, −2, −1, 0, 但在後三組中，不能仍作爲 +1, +2, +3。蓋第五組之中點爲 20, 與假定平均數相差 3, 合之標準組距當爲 1.5 組而非 1 組；第六組之中點爲 24, 與假定平均數相差 7, 合之標準組距當爲 3.5 組而非 2 組；第七組之中點爲 29, 與假定平均數相差 12, 合之標準組距當爲 6 組而非 3 組。

計算 d' 時不必先求中點與假定平均數相差之量。譬自第四組至第五組，組距自二元增至四元，計算第五組之 d' 時不必先求中點 20 與假定平均數相差之量，祇須求第四組組距與第五組組距之平均數，再由此平均數計算合成標準組距之組數，第四組之組距爲二，第五組之組距爲四，其平均數爲三，合之標準組距則得 1.5 組，以之與第四組之 d' 相加卽得第五組之 d'；第五第六兩組之組距相等，故祇須以此相等之組距合成標準組距之組數卽得二組，以之與第五組之 d' 相加卽得第六組之 d'；第六組之組

距爲四，第七組之組距爲六，其平均數爲五，合之標準組距則得 2.5 組，以之與第六組之 d′ 相加，即得第七組之 d′。既求得 d′ 再計算 fd′，然後代入公式 (7) 即得。

$$A = 17 + \frac{116-62}{115} \times 2 = 17.94$$

以上所示公式均以數列之各項視爲同等重要，然有時須有輕重之分。設學校新生之入學，須經國文數學英文之試驗，若學校當局認此三種試驗爲同等重要，則求三種試驗之總成績而以三除之即得平均成績；但若學校當局偏重國文而以數學英文爲比較的不重要，則計算平均成績以前須將各種成績各乘以相當的數值，是曰權數。故算術平均數之中又有單純與加權二種。加權平均數可自下列之公式求得：

$$W.A. = \frac{\sum(WX)}{\sum W} \qquad (8)$$

W. A. 加權平均數。

W 權數。

X 變量之數值。

公式(8)與公式(4)相似，故由頻數表求算術平均數之簡捷法均可適用於加權平均數。

茲就 1926 年美國農部在農業年鑑上所發表之蛋價統計，說明加權平均數之計算法於下：

第十九表　加權平均數計算法

月　份	每打蛋價（單位分）(X)	五大市場貿易額（單位千箱）(W)	WX
一　月	36.3	906	32887.8
二　月	28.9	1070	30923.0
三　月	24.1	1741	41958.1
四　月	24.8	2086	51732.8
五　月	25.2	2261	56977.2
六　月	25.7	2015	51785.5
七　月	25.7	1386	35620.2
八　月	26.4	1081	28538.4
九　月	31.5	933	29389.5
十　月	36.8	699	25723.2
十一月	44.9	581	26086.9
十二月	47.6	752	35795.2
		15511	447417.8

〔註〕資料來源：1926年美國農業年鑑。

應用公式(8)，得：　$\text{W.A.}=\dfrac{447417.8}{15511}=28.85$

觀上例可見加權之必要；蓋各月蛋價對於平均價格之影響不同，貿易較盛之月其影響較大，貿易較衰之月其影響較小。若不權其輕重而逕求單純算術平均數，則求得之數非眞正一年內之平均價格。卽以一年內雞蛋貿易之總量除其總值不能與此數相等也。

第三節　中位數

中位數之來源以其地位而不以計算，故有人稱之曰地位平均數，統計學中甚爲有用。決定之法亦甚簡易。但已經整理而成分組頻數表者與一一枚舉之數列稍有不同。其在一一枚舉之數列，祇須將統計事項依數值之大小順次排列而取其中間之一項卽得。若項數爲偶數，則取其中間二項之算術平均數可也。

欲知數列之第幾項爲中位數可應用下之公式:

$$O_M=\frac{n+1}{2} \tag{9}$$

O_M　中位數在數列中之項次

n　項數

〔註〕 普通統計學書中公式 (9) 均作 $M=\frac{n+1}{2}$, 學者常誤以爲由是求得之數卽中位數,故本書易以 O_M 以資區別。

試取第十一表中之標金行市依次排列，則中位數卽爲第八項與第九項之和之半。

$$O_M=\frac{n+1}{2}=\frac{16+1}{2}=8.5$$

8.5 介於 8 與 9 之間,故取第 8 與第 9 二項。

極大極小各項不必一一列舉,祇知某數之下有若干極小項,某數之上有若干極大項, 已足應用。16 個標金行市中不滿 830 元者共有 4 個, 835 元以上者共有 6 個,故僅須將中間 6 個行市依次列舉如下:

第 5 項	830.5
第 6 項	830.8
第 7 項	832.2
第 8 項	833.5
第 9 項	834.0
第 10 項	834.8

第 8 項爲 833.5, 第 9 項爲 834.0, 故中位數爲 833.75。

由分組頻數表求中位數可先用公式 (9) 確定第幾項爲中位數;然後用插補法依下之公式計算中位數之數值。

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - l}{f} \times i \qquad (10)$$

$$M = U - \frac{\frac{n}{2} - u}{f} \times i \qquad (11)$$

M　中位數。

n　項數。

f　中位數所在組之頻數。

i　組距。

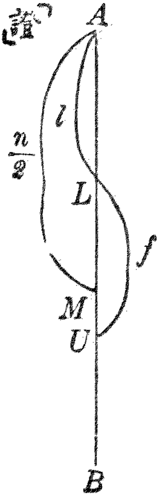
l　小於中位數各組頻數之和。

u　大於中位數各組頻數之和。

L　中位數所在組之下限。

U　中位數所在組之上限。

〔證〕



設以直線 AB 之長代表項數，則中位數 M 分全線爲 AM 與 MB 二等分。

$$AM = MB = \frac{n}{2}$$

設中位數所在組之頻數爲 f，而其下限與上限爲 L 與 U，則 LU = f

但 LM = AM − AL

而 AL 即代表小於中位數各組頻數之和，故等於 l。

$$\therefore LM = \frac{n}{2} - l$$

中位數離下限之距離等於全組距離之 $\frac{\frac{n}{2} - l}{f}$，故中位數值與下限數值相差之量即爲：

$$M-L=\frac{\frac{n}{2}-l}{f}\times i$$

移項卽得：

$$M=L+\frac{\frac{n}{2}-l}{f}\times i$$

頻數表之排列若由小而大，則用公式(10)；若由大而小則用公式(11)。

玆就上海市社會局所發表民國元年至十六年上海粳米每擔按月平均價先製分組頻數表，然後應用公式(9)與(10)計算中位數。

第二十表 民國元年至十六年上海粳米按月平均價頻數分配表

平均價	頻數	累積頻數
$5.25——5.75	2	2
5.75——6.25	8	10
6.25——6.75	30	40
6.75——7.25	26	66
7.25——7.75	17	83
7.75——8.25	12	95
8.25——8.75	4	99
8.75——9.25	10	109
9.25——9.75	9	118
9.75——10.25	9	127
10.25——10.75	12	139
10.75——11.25	7	146
11.25——11.75	9	155
11.75——12.25	8	163
12.25——12.75	4	167
12.75——13.25	5	172
13.25——13.75	1	173
13.75——14.25	0	173
14.25——14.75	2	175
14.75——15.25	2	177
15.25——15.75	5	182
15.75——16.25	1	183
16.25——16.75	5	188
16.75——17.25	1	189
17.25——17.75	2	191
17.75——18.25	1	192

〔註〕 資料來源：上海市社會局社會月刊第一卷第二號。

$$O_M=\frac{n+1}{2}=\frac{192+1}{2}+96.5$$

觀累積頻數可知中位數在第七組，故

$L=8.25$

$f=4$

$l=95$

$i=0.5$

$n=192$

代入公式(10)，得：

$$M=8.25+\frac{96-95}{4}\times 0.5=8.375$$

若頻數表之排列由大而小，則

$U=8.75$

$f=4$

$u=93$

$i=0.5$

$n=192$

代入公式(11)，得：

$$M=8.75-\frac{96-93}{4}\times 0.5=8.375$$

時間數列中位數之計算不以時間之先後而以數量之大小爲標準，即以各期之數量依照大小之次序排列，取其中間一項即爲中位數。

中位數分數列爲前後二部，此前後二部又各有其中位數，故一種數列亦可分成相等四部分，此四部分之分界點名曰四分位數。前半部之中位數名曰第一四分位數或下四分位數，後半部之中位數名曰第三四分位數或上四分位數，而第二四分位數即爲

全部數列之中位數。統計學上亦有分數列爲十等分或一百等分者，其分點名曰十分位數或百分位數。

中位數之地位，比較簡單，容易決定，但四分位數及十分位數等，較難確定，統計學家中意見亦不一致，尙無定論。茲舉其較通行之公式如下：

$$O_{Qm}=\frac{m(n+1)}{4} \tag{12}$$

$$O_{Dm}=\frac{m(n+1)}{10} \tag{13}$$

$$O_{Pm}=\frac{m(n+1)}{100} \tag{14}$$

O_{Qm} 第 m 四分位數在數列中之項次。

O_{Dm} 第 m 十分位數在數列中之項次。

O_{Pm} 第 m 百分位數在數列中之項次。

n 項數。

確定四分位數十分位數與百分位數在分組頻數表中第幾組後可依下列公式求其數值：

$$Q_m=L+\frac{\frac{mn}{4}-l}{f}\times i \tag{15}$$

$$D_m=L+\frac{\frac{mn}{10}-l}{f}\times i \tag{16}$$

$$P_m=L+\frac{\frac{mn}{100}-l}{f}\times i \tag{17}$$

Q_m 第 m 四分位數。

D_m 第 m 十分位數。

P_m 第 m 百分位數。

n　項數。

f　Q_m, D_m, 或 P_m 所在組之頻數。

i　組距。

l　小於Q_m, D_m 或 P_m 各組頻數之和。

L　Q_m, D_m, 或 P_m 所在組之下限。

設就前例而求 Q_1（第一四分位數），Q_3（第三四分位數），D_4（第四十分位數），P_{15}（第十五百分位數），則其計算如下：

（1）求 Q_1

$$O_{Q_1}=\frac{n+1}{4}=\frac{193}{4}=48\frac{1}{4}$$

$$Q_1=6.75+\frac{48-40}{26}\times 0.5=6.75+\frac{4}{26}=6.904$$

（2）求 Q_3

$$O_{Q_3}=\frac{3(n+1)}{4}=\frac{579}{4}=144\frac{3}{4}$$

$$Q_3=10.75+\frac{141-139}{7}\times 0.5=11.107$$

（3）求 D_4

$$O_{D_4}=\frac{4(n+1)}{10}=\frac{772}{10}=77.2$$

$$D_4=7.25+\frac{76.8-66}{17}\times 0.5=7.568$$

（4）求 P_{15}

$$O_{P_{15}}=\frac{15(n+1)}{100}=28.95$$

$$P_{15}=6.25+\frac{28.8-10}{30}\times 0.5=6.563$$

中位數，四分位數，十分位數與百分位數，亦可由累積頻數圖求得。茲就中位數之求法(四分位數，十分位數與百分位數之求

法可依次類推，述其程序如下：

(一) 作累積頻數表。

(二) 繪累積頻數曲線圖，並將曲線化爲修勻曲線。

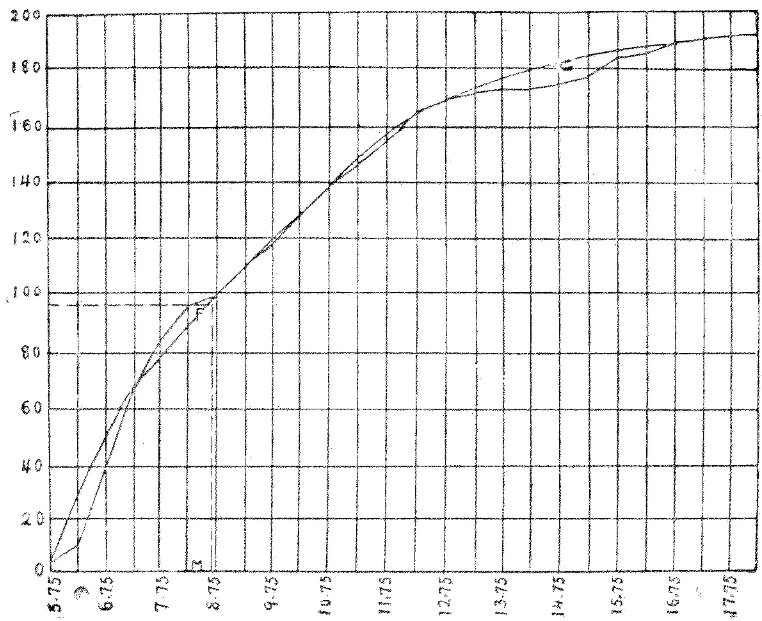
(三) 由 y 軸上頻數之中點引 x 軸之平行線與修勻曲線相交於 P 點。

(四) 過 P 點引 y 軸之平行線交 x 軸於 M 點。

(五) 在 x 軸上量 M 點所代表之數值，此數值卽爲中位數。

茲就前例依上述之程序而求中位數。量 M 點在 x 軸上之數值約得 8.65，此卽所求之中位數。

第十四圖　由累積頻數圖求中位數



【註】參看第二十表。

第四節　衆數

衆數之觀念最爲易明，例如最普通之工資，最普通之城市，皆所謂衆數。衆數之地位乃頻數曲線下最高之縱線所在底線上之數值也。但眞正衆數不易決定，讀者非俟研究曲線之配合方法後無從入手。吾人通常所用者不過近似的數值，所謂近似衆數者是也。玆述其通用之求法於下：

(一)衆數之觀念旣爲最普通之數值，故在分組頻數表中可卽以頻數最多一組中點爲衆數，是爲最普通之方法，請就第十六表說明之。

表中7—8組之頻數爲最大，故可以此組之中點(卽7.5)爲衆數。但同一資料，增減其組距之大小，或變更其組限之位置，足以發生不同之結果。故衆數之值似不一定，推考其故，則由於所取項數太少之過。若將項數無限增加，則其中遇見最多之數值卽眞正之衆數。蓋組距太大，則但表大體，而細小之點一概抹殺；組距減小，則實際分配之表現較爲眞切。但普通之統計事項往往有限，若將組距過於減縮，則每致缺陷不整而無集中對稱之勢矣。

就統計事項而配以最適合之曲線，則不必增加項數而衆數之值亦可求得，是曰修勻曲線法(參看第三章)。

(二)分組頻數表中如有一組頻數最大，則衆數之數值甚易決定；但若表中不甚整齊，則衆數地位究在何組，頗難斷言。依美國統計學家金維爾之說，如遇此等情形，則可用併組法以求之；其法，先自第一組起將每兩組之頻數相加，次則移下一組卽自第二組起將每兩組之頻數相加。若衆數之地位猶未確定，則再行三組相加之法；先自第一組起將每三組之頻數相加，次則移下一組卽自第二組起將每三組之頻數相加，次更移下一組卽自第三組

起將每三組之頻數相加。若衆數之地位猶未確定，則再行四組五組相加之法。其合併程序可依此類推。(觀第二十一表)

第二十一表　併組法

G	f	兩組合併		三組合併		
5	48	100				
6	52		108	156		
7	56	116			168	
8	60		122			
9	62	122		182		178
10	60		118		180	
11	58	114				
12	56		119	177		174
13	63	123			179	
14	60		108			
15	48	88		148		171
16	40		72		120	
17	32					

〔註〕上表自美人金維福氏所著之統計方法轉載。

第一次併組之時衆數之地位似在十三與十四之間，蓋123在合併頻數中爲最大；但若移下一組即自第二組起將每兩組之頻數相加，則衆數之地位又似在八與九之間，蓋122在合併頻數中爲最大。衆數之地位旣未確定，則非再行三組相加之法不可。三組相加之結果，中點爲9一組之頻數均包含在合併頻數最多一項之內，故可確定衆數爲9。

(三)第一法以衆數所在組之中點為衆數,事甚簡易,但若組距甚大,則衆數之地位究在組中何點,亦當確實決定。例如第十五圖,衆數之地位在 7——8 之一組中;但其左右兩組之面積大不相同,6——7 組之大小遠在 8——9 組之上,故衆數之確實地位當近於 7 而遠於 8。若以組距中點為衆數,不甚恰當。如遇此等情形,統計家以為衆數之地位受鄰組之影響,故當視其左右兩組之大小而定。下之公式即據此理而成:

$$Z = L + \frac{f_2 i}{f_1 + f_2} \tag{18}$$

Z　衆數。

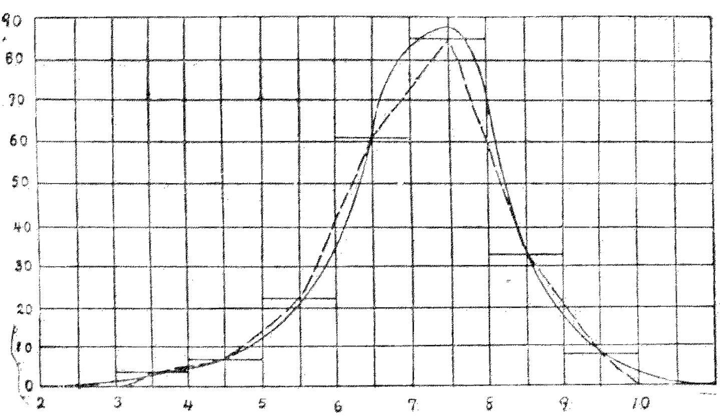
L　衆數組之下限。

i　組距。

f_1　衆數組下一組之頻數。

f_2　衆數組上一組之頻數。

第十五圖　玉蜀黍稈之高度



如以玉蜀黍稈一例之事項代入公式(18),則得:

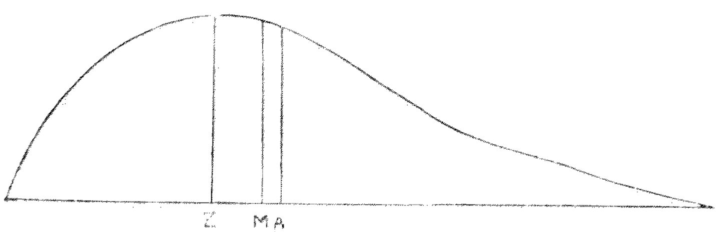
$$Z=7+\frac{32\times1}{32+60}=7+\frac{32}{92}=7.35$$

(四)此外皮爾生氏尙有一近似之公式，根於算術平均數與中位數之數値而決定衆數之値，其公式如下:

$$Z=A-3(A-M) \qquad (19)$$

頻數分配完全對稱之時，算術平均數中位數衆數三者合而爲一。頻數分配如不對稱,則此三者之値各不相同;但頻數分配偏態不甚之時,三者之間恆有一定關係。算術平均數與衆數相距最遠，而中位數與算術平均數之距離約等於算術平均數與衆數距離三分之一(如第十六圖),即:

第十六圖　算術平均數中位數與衆數之關係



$$A-Z=3(A-M)$$

移項卽得上式,此皮爾生公式之由來也。但此公式係根於經驗而來,無數理上之根據,非至萬不得已不宜輕用也。

一數列祇有一個算術平均數與中位數,至於衆數則不然,有時一數列可有兩個或三個不同之衆數。例如工資統計,其衆數常不止一個,蓋工人有男工女工與童工之別;通常女工所得之工資較低於男工,而童工所得之工資又較低於女工,故設調查之工資

統計中包含此三種工人之工資，則其衆數常有三個：一個代表男工之工資，一個代表女工之工資，一個代表童工之工資。

第五節　幾何平均數

幾何平均數者乃 n 數相乘後開 n 方所得之方根也，其公式如下：

$$G=\sqrt[n]{X_1X_2X_3\cdots\cdots X_n} \qquad (20)$$

G　幾何平均數。

n　項數。

X　變量之數值。

例如 2, 4, 8, 三數，其幾何平均數為

$$G=\sqrt[3]{2\times4\times8}=\sqrt[3]{64}=4$$

但實際上幾何平均數之計算須應用對數表，蓋上列之公式可以變為：

$$\log G=\frac{1}{n}\sum\log X \qquad (21)$$

幾何平均數之對數，乃等於各數量之對數之算術平均數，故幾何平均數亦有人稱之曰對數平均數，茲述其計算之程序於下：

A.　求各項之對數。

B.　將各項對數相加。

C.　以項數除 B。

D.　應用對數表求 C 之眞數，即求其反對數。

例如民國十一年木材類市價對稅價之比例若用幾何平均法計算之，其平均數為 122.3，算式如下：

第二十二表　幾何平均數之計算法

品名	市價對稅價之比例 X	log X
平常斫伐木材：重木	145.5	2.16286
輕木	125.4	2.09830
平常鋸解木材：重木	114.0	2.05690
輕木	108.6	2.03583
柚木樑木飯木段	121.1	2.08314
		10.43703

〔註〕資料來源：貨價調查處民國十一年市價稅價比較表第十頁。

$$\log G=\frac{10.43703}{5}=2.08741$$

$$\therefore \quad G=122.3$$

幾何平均數亦可有加權平均數，但在算術平均數以權數乘各項，而在幾何平均數則以權數為各項之指數，故得加權幾何平均數之公式如下：

$$\log W\,G.=\frac{1}{\sum W}\sum(W\log X) \qquad (22)$$

W. G.　加權幾何平均數。

W　權數。

X　變量之數值。

幾何平均數在經濟統計上最著之用途乃在物價指數(詳見指數一章)。設今有甲乙丙三物，甲物之價不變，乙物之價今年較去年加倍，丙物之價今年較去年減半，此三者今年平均漲價若干？甲物既不變則其價比仍為 100，乙物加倍則等於 200，丙物減半則等於 50，設用算術平均數求此三種價比之平均數，則：

$$A=\frac{100+200+50}{3}=117$$

似較去年爲高，但實際上今年三物之平均物價應與去年相等。故算術平均數不能適用。反之，若用幾何平均數求此三種價比之平均數，則：

$$G=\sqrt[3]{100\times200\times50}=\sqrt[3]{100^3}=100$$

適與去年相等，故與事實相符，此幾何平均數之所以較適用於物價指數也。

幾何平均數又可用以估計兩時期中間一年之人口，設已知第一期之人口爲 P_1，第二期之人口爲 P_2，而每年之增加率相等，則兩時期中間一年之人口 P_0，卽爲 P_1 與 P_2 之幾何平均數。

蓋設第一期與第二期相距 n 年，則其中間一年卽在第一期後 $\frac{n}{2}$ 年。令每年之增加率爲 r，則：

$$P_2=P_1(1+r)^n$$

$$P_0=P_1(1+r)^{\frac{n}{2}}$$

$$P_1P_2=P_1\times P_1(1+r)^n=P_1^2(1+r)^n$$

$$P_0^2=[P_1(1+r)^{\frac{n}{2}}]^2=P_1^2(1+r)^n$$

$$\therefore\ P_0^2=P_1P_2$$

兩邊開方則得：

$$P_0=\sqrt{P_1P_2}$$

卽 P_0 爲 P_1 與 P_2 之幾何平均數。

例如某城之人口在民國十年爲八十萬，民國二十年爲一百二十五萬，則民國十五年之人口估計之可得一百萬（假定每年人口之增加率不變），蓋

$$P_0=\sqrt{P_1P_2}=\sqrt{800000\times1250000}=\sqrt{10^{12}}=10^6=1000000$$

第六節　倒數平均數

倒數平均數者，各數量倒數之算術平均數之倒數也，其公式如下：

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\sum\frac{1}{X} \tag{23}$$

H　倒數平均數。

n　項數。

X　變量之數值。

倒數平均數可依下列之程序計算：

A.　求各項之倒數。

B.　將各項倒數相加。

C.　以項數除 B。

D　求 C 之倒數。

茲就下表中之十數而示倒數平均數之計算法於下：

第二十三表　倒數平均數之計算法

X	$\frac{1}{X}$
48	0.02083
50	0.02000
54	0.01852
56	0.01786
58	0.01724
62	0.01613
64	0.01563
65	0.01538
68	0.01471
72	0.01389
	0.17019

$$\frac{1}{H}=.017019$$

$$H=\frac{1}{.017019}=58.8$$

倒數平均數之求法已如上述，茲更舉數例以明其用。設一人步行三里，當走第一里時速率爲每小時十里，其走第二里時速率降至每小時六里，其走第三里時速率更降至每小時五里，如用算術平均數求其平均速率，則：

$$A=\frac{10+6+5}{3}=7$$

以此速率行三里之路須費$\frac{3}{7}$小時，即 $25\frac{5}{7}$ 分，但此人行第一里時須一小時之十分之一即 6 分，行第二里時須一小時之六分之一即 10 分，行第三里時須一小時之五分之一即 12 分，行此三里之路共須 28 分，與由算術平均數求得之數不符。反之，若用倒數平均數求此人行此三里路程之平均速率，則：

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{45}$$

$$H=\frac{45}{7}=6\frac{3}{7}$$

以此速率行三里之路須費 $\frac{7}{15}$ 小時即 28 分，與事實相符，故此問題適用倒數平均數而不適用算術平均數。

又設肉之市價昨日一元可買四斤，今日一元僅能買二斤，如用算術平均數求此二日一元可買肉之平均斤數，則：

$$A=\frac{4+2}{2}=3$$

一元可買肉三斤，則肉每斤之價當爲 3 角 $3\frac{1}{3}$ 分，但此非昨日與今日之平均肉價，蓋昨日一元可買肉四斤，則肉一斤之價爲二角五分，今日一元可買肉二斤，則肉一斤之價爲五角，故兩日之平均肉價應爲每斤三角七分半，與由算術平均數求得之數不符。反之，若用倒數平均數求其平均斤數，則：

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$H=\frac{8}{3}$$

一元可買肉 $\frac{8}{3}$ 斤，則肉每斤之價當爲 $\frac{3}{8}$ 元卽三角七分半，與事實相符，故此問題亦適用倒數平均數而不適用算術平均數。

第七節　各種平均數之比較

各種平均數之數值雖各不相同，但其間之關係亦有可得而言者，茲請略述如下：

(一)在完全對稱之頻數分配，算術平均數中位數與衆數三者合而爲一。

(二)在偏態不甚之頻數分配，中位數之地位處於算術平均數與衆數之間，中位數與算術平均數之距離約等於算術平均數與衆數距離三分之一(參看公式 19)。

(三)任何數量(限於不等於零之正數)之算術平均數必大於其幾何平均數，而幾何平均數又必大於其倒數平均數，但若所有數量各各相等，則此三種平均數合而爲一。

(四)任何二數(限於不等於零之正數)之幾何平均數卽等於

其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數。(註) 例如2與8之倒數平均爲 $3\frac{1}{5}$, 幾何平均數爲 4, 算術平均數爲5, 而

$$\sqrt{5\times3\frac{1}{5}}=\sqrt{16}=4$$

但二數以上者不在此例。

(五) 統計事項之離中趨勢如受算術定律之支配，則衆數與中位數往往與算術平均數爲近；反之，若受幾何定律之支配，則衆數與中位數常與幾何平均數爲近。

各種平均數各有其短長，故何種問題當用何種平均數，學者不可不細細研究，蓋宜於甲者不必宜於乙。茲就各種平均數之特點與其優劣同異之處略述於下：

(一)計算算術平均數時，一切項數鉅細不遺，均在計算之列，

〔註〕 設 $a>0$,

$b>0$,

依平均數之定義，則

$$G=\sqrt{ab}$$

$$A=\frac{a+b}{2},$$

$$H=\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$$

$$AH=\frac{a+b}{2}\times\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$$

$$=ab$$

$$\therefore\quad \sqrt{AH}=\sqrt{ab}=G$$

而中位數與衆數則對於兩極端之數量完全不管。然中位數與衆數亦略有區別，中位數依地位而定，在兩端加上或減去幾項，中位數亦必受其影響，若在衆數則兩端卽加減幾項亦無些微之影響。至若幾何平均數受極端變量之影響較少，似亦稍勝於算術平均數也。

（二）統計事項祇有總量與項數時，惟有算術平均數可以應用。例如僅知我國之人口及每年食米之總量，則須用算術平均數可求我國每年每人食米之量。

（三）各項若有輕重之別則須加權，若輕重相等則不加權。例如求工人生活費指數以測物價對於工人生活之影響，則以各種物價之高低對於工人生活之影響不同，故須加以相當之權數；反之，若求甲乙丙丁戊五個學校學生人數之平均數，則各學校之重要相等，故不當加權。

（四）設項數甚少且極散漫並無集中之傾向，則衆數爲不適用。例如一城中人民之財產均不相同，祇有二人有同等之財產爲一萬元，若求衆數，則勢必以萬元爲此城之平均財富。就此點而論，衆數不如中位數，而算術平均數將一切數量都算在內，尤無此弊。

（五）就決定之難易言，則中位數爲最易，近似衆數雖亦甚易決定，而眞正衆數則計算甚繁，算術平均數之決定亦稍難，蓋非計算不知也。但從他方面論，中位數與衆數之決定非先將一切數量依次排列或繪成頻數曲線不可，而算術平均數一算便知，不必將統計資料整理淸楚也。然在頻數曲線上，則以衆數之決定爲最易。幾何平均數與倒數平均數計算最繁，幾何平均數之計算尤甚，非應用對數表不可。

（六）算術平均數，幾何平均數，倒數平均數，三者均由計算而

得，故可用數學方法研究之，而中位數與衆數則不能。

（七）若兩極端之數量不十分清楚，則可用中位數或衆數。衆數對於兩極端數量之項數大小均可不管，而中位數則知其項數已足，數量之大小可不問也；而算術平均數則一切數量均須計算在內，故非將一切數量之項數大小先行調查清楚不可。

（八）統計雖不能與數量分離，然有時欲比較人物之心性狀態而無相當之數量可以表示者，則不可不用中位數。

（九）就普通人了解之難易言，則以算術平均數為首屈一指，而倒數平均數之意義則最晦澀，故在統計分析上鮮有用之者。

（十）求時間速率之平均數則必用倒數平均數，物價之以每元幾個或幾斤表示者則亦非用倒數平均數不可。

（十一）幾何平均數對於等比之變化各與以同等之地位，故計算事物之平均比例，非用幾何平均數不可。

本章應用公式：

$$A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}X_k \tag{1}$$

$$A=\frac{\sum X}{n} \tag{1'}$$

$$\sum(X-A)=0 \tag{2}$$

$$A=A'+\frac{\sum(X-A')}{n} \tag{3}$$

$$A=\frac{\Sigma(fX)}{n} \tag{4}$$

$$A=A'+\frac{\Sigma(fd')}{n} \tag{5}$$

$$A = \frac{\Sigma(f\overline{m})}{n} \tag{6}$$

$$A = A' + \frac{\Sigma(fd')}{n} \tag{7}$$

$$W.A. = \frac{\sum(WX)}{\sum W} \tag{8}$$

$$O_M = \frac{n+1}{2} \tag{9}$$

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - l}{f} \times i \tag{10}$$

$$M = U - \frac{\frac{n}{2} - u}{f} \times i \tag{11}$$

$$O_{Qm} = \frac{m(n+1)}{4} \tag{12}$$

$$O_{Dm} = \frac{m(n+1)}{10} \tag{13}$$

$$O_{Pm} = \frac{m(n+1)}{100} \tag{14}$$

$$Q_m = L + \frac{\frac{mn}{4} - l}{f} \times i \tag{15}$$

$$D_m = L + \frac{\frac{mn}{10} - l}{f} \times i \tag{16}$$

$$P_m = L + \frac{\frac{mn}{100} - l}{f} \times i \tag{17}$$

$$Z = L + \frac{f_2}{f_1 + f_2} i \tag{18}$$

$$Z = A - 3(A - M) \tag{19}$$

$$G = \sqrt[n]{X_1 X_2 X_3 \cdots\cdots X_n} \tag{20}$$

$$\log G = \frac{1}{n} \sum \log X \tag{21}$$

$$\log W.G. = \frac{1}{\sum W} \sum (W \log X) \tag{22}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{X} \tag{23}$$

問題及習題

1. 試述平均數之定義及其種類。

2. 單純平均數與加權平均數有何區別?

3. 算術平均數,中位數與衆數有何關係?

4. 有時一數列之衆數不止一個,其故安在?

5. 幾何平均數與倒數平均數有何效用?

6. 若以 X 爲變量之數value, A 爲算術平均數,試證

$$\Sigma (X - A) = 0$$

7. 試證任何二數(限於不等於零之整數)之幾何平均數卽等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數。

8. 由下表求:

 a. 算術平均數。

 b. 中位數。

 c. 第一四分位數。

 d. 第三四分位數。

e. 衆數。

上海三百零五家工人家庭每年收入分配表

每年收入	家數
$ 200——$ 300	62
300—— 400	95
400—— 500	80
500—— 600	31
600—— 700	25
700—— 800	8
800—— 900	4
	305

〔註〕 資料來源：民國十三年至二十年上海市工人生活費指數（上海市政府社會局出版）

9. 下爲民國二十三年九月中央銀行所開關金行市，試求其算術平均數（用簡捷法）及中位數（不必製成分組頻數表）。

1.925, 1.938, 1.934, 1.931, 1.940, 1.921, 1.923, 1.923, 1.926, 1.930, 1.933, 1.934, 1.934, 1.932, 1.933, 1.933, 1.928, 1.915, 1.918, 1.916, 1.918, 1.907, 1.901, 1.903, 1.871.

10. 由第二章第 8 題中之分組頻數表 (a) 與 (b)，各求其

a. 算術平均數。

b. 中位數。

c. 衆數。

11. 由第三章第 12 題中累積頻數曲線圖，求

a. 中位數。

b. 第一四分位數。

c. 第三四分位數。

12. 求下列各數之幾何平均數與倒數平均數：

58, 60, 24, 51, 92, 42, 88, 79, 90. 105.

第五章　離中趨勢與偏態

第一節　離中趨勢之意義及其測定之方法

使統計事項由繁化簡，以便於吾人之比較研究者，是曰頻數分配法。就頻數分配而表示其中心傾向者，是曰平均數。此二點以上各章言之備矣。然僅有平均數，頻數分配之性質不能謂已窺全豹。平均數之外，尚須有離中趨勢與偏態之測定，方足以明頻數分配之眞相。平均數乃表示一切數量中心的性質，而離中趨勢則表示其離中之程度。故平均數之意義，隨離中趨勢之大小而定。離中趨勢大，則平均數之價値小，離中趨勢小，則平均數之價値大。故平均數爲一切數量之代表，而離中趨勢則表示平均數之『非』代表性者也。

表示離中趨勢之單位，有用原有事項之單位者，有用抽象的數量者。前者曰絕對離中趨勢或離中差，後者曰相對離中趨勢或離中係數。兩種單位不同之數列，或單位雖同而其平均數相差甚大之兩種數列，僅知其離中差，猶未能比較其離中趨勢之大小。例有甲，乙，丙三個數列，甲之離中差爲三尺五寸，其平均數爲三十五尺，乙之離中差爲四角八分，其平均數爲四十八元，丙之離中差爲四角八分，其平均數爲二十四元。甲與乙，丙之單位不同，故其離中趨勢之大小，無從比較，乙與丙之單位雖同，但其平均數相差太大，仍不能比較其離中趨勢之大小。何則？四十八元中相差四角八分，與二十四元中相差四角八分，其離中之度迥異。

人之身，長於人之鼻。故若二人之身長與鼻長，相差均爲一分，其量雖同，而相差之程度則迥殊。故離中差之外，尙須計算離中係數。俾單位不同或平均數相差甚大之數列亦能比較其離中趨勢之大小。離中係數之計算以平均數除離中差卽得。就上述甲，乙，丙三數列而計算其離中係數，則甲爲十分之一，乙爲一百分之一，丙爲五十分之一。故其離中之度，甲最大，丙次之，乙更次之。

平均數之計算有種種，離中差亦然。測定離中差之法，有全距，四分位差，平均差，標準差之別；其定義及計算法，將分別詳論於以下各節。

第二節　全距

以全距之長短，爲分配疏密之標準，乃測定離中差最簡單之一法。所謂全距者，卽最大一項與最小一項二者之差也。統計事項如已組成分組頻數表，則以最小一組之下限與最大一組之上限之距離爲全距可也。

然而全距不甚可恃。何則？全距之大小，祇依極端兩項之數值而定。一二項之增減，足以大變全距之性質。且兩數列之全距相等而離中之程度不等者有之，離中趨勢相等而全距之長短不等者亦有之。故全距之長短，不足爲測定離中趨勢之正當尺度。

第三節　四分位差

中位數與四分位數之性質，上文已言之矣。利用四分位數以表示離中趨勢之大小者，是曰四分位差。

中位數分全體數量爲二，Q_1 與 Q_3 將中分之二部分，復各分爲二，則 Q_1 與中位數之間，當有全體數量四分之一，Q_3 與中位數之間，亦有四分之一。故 Q_1 與 Q_3 雖非離中差，然可間接表示

離中狀況之一斑。蓋 Q_1 與 Q_3 間必有全體數量之半，然 Q_1 與 Q_3 在底線上之距離則不一定；此距離愈短，則集中之程度愈大，而離中趨勢愈小，就此 Q_1 與 Q_3 之距離折半，即得四分位差，(Q.D.) 其公式如下：

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2} \tag{1}$$

四分位差旣根據 Q_1 與 Q_3 求得，則以 Q_1 與 Q_3 之平均數除 Q.D.，當爲四分位係數，(Q.′D.′) 其公式如下：

$$Q.'D.'=\frac{Q.D.}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} \tag{2}$$

如以底線上 Q_1 與 Q_3 中間之數值爲 m，則全體數量之半，必在 $m\pm Q.D.$ 之距離中。譬如在前章玉蜀黍稈一例中，

$$Q_3=7.83$$

$$Q_1=6.37$$

$$Q.D.=\frac{7.83-6.37}{2}=0.73$$

$$m=6.37+0.73=7.10$$

全數量之一半，當在 7.10 ± 0.73 之距離中。頻數分配如能完全對稱，則 m 之數值與中位數合一。今玉蜀黍稈之分配稍歪，故此二者之值稍有不同，m 等於 7.10 而中位數則等於 7.19.

設欲比較玉蜀黍稈之離中趨勢與第二十表中粳米價之離中趨勢，則非各求四分位係數不可。

先求玉蜀黍稈之四分位係數：

$$\frac{Q_3+Q_1}{2}=7.10$$

$$Q.D.=0.73\text{ 英尺}$$

$$\therefore \quad Q'.D' = \frac{0.73}{7.10} = 0.103$$

次求粳米價之四分位係數：

$$Q_1 = 6.904$$

$$Q_3 = 11.107$$

$$\therefore \quad Q.'D.' = \frac{11.107-6.904}{11.107+6.904} = \frac{4.203}{18.011} = 0.233$$

$$0.233 > 0.103$$

故粳米價之離中趨勢，較玉蜀黍稈之離中趨勢為大。

第四節　平均差

以上兩法，均非離中差，不過用間接方法，以觀察離中之程度而已。眞正根據各數量之離中差而測定離中趨勢之大小者有二法：曰平均差，曰標準差。今先述平均差。

諸數量之離中差，或過或不及，故其記號或正或負。若此平均數為算術平均數，則正號諸項之和與負號諸項之和適相抵銷，諸項相加結果為零（參看平均數一章）。且過猶不及，苟其絕對值相同，其離中之程度亦同，故求平均差時，各項離中差符號之為正為負，均可不問，以項數除各項與平均數相差絕對值之和，即得平均差。其公式如下：

$$A.D. = \frac{\Sigma(f\bar{d})}{n} \tag{3}$$

A.D.　平均差。

n　項數。

f　頻數。

$\bar{d}$　各項與平均數相差之絕對值。

上式中之d爲各項與平均數相差之絕對值。然平均數有種種，其數值常不相等，究以何者爲宜?統計學家通常用中位數爲計算平均差之標準，蓋中位數與各項相差絕對值之和爲最小，故取中位數較爲合理;惟間亦有用算術平均數以計算平均差者。

若平均差之計算，係根據中位數求得，則求平均差係數，自當以中位數除平均差，其公式如下:

$$A.'D.' = \frac{A.D.}{M} \qquad (4)$$

A.'D.'　平均差係數。

A.D.　平均差。

M　中位數。

先以最簡單之一例，說明平均差計算之方法如下:

第二十四表　平均差之計算法

X	f	d
3	1	6
6	1	3
9	1	0
13	1	4
14	1	5
	5	18

$$M = 9$$

$$A.D. = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$A.'D.' = \frac{3.6}{9} = 0.4$$

統計事項如已組成分組頻數表，則平均差之計算，稍爲麻煩。吾人計算平均數之時，假定各組中各項皆等於各組之中點。

今於平均差之計算，亦復如是，即頻數分配之各組所有各項，皆假定等於各組之中點。但離中差之計算，常有小數，總覺麻繁。故實際計算之時，常用簡捷法。其公式如下：

$$\mathrm{A.D.}=\frac{\Sigma(f\bar{d}')+(a-b)\bar{c}}{n} \tag{5}$$

A.D. 平均差。

n 項數。

f 頻數。

$\bar{d}$ 各項與假定平均數相差之絕對值。

$\bar{c}$ 改正數，即中位數與假定平均數相差之絕對值。

b 若中位數大於假定平均數，則 b 爲大於中位數各組頻數之和；若中位數小於假定平均數，則 b 爲小於中位數各組頻數之和。

$a=n-b$

茲述簡捷法計算之程序於下：

A 作累積頻數表，並求中位數 M。

B 以中位數所在組之中點，作爲假定平均數 M′

C 以組距爲單位，求各項與中位數相差之絕對值 $\bar{d}'$。

D 以各組之頻數 f 與 $\bar{d}'$ 相乘，即 $f\bar{d}'$，求得之數相加，即 $\Sigma(f\bar{d}')$。組距如不等於一，則以組距乘 $\Sigma(f\bar{d}')$，改爲原有單位。

E 求改正數 $\bar{c}$ 即 M 與 M′ 相差之絕對值。

F 若中位數大於假定平均數，則將大於中位數各組之頻數相加，即得 b；若中位數小於假定平均數，則將小於中位數各組之頻數相加，即得 b。

G 由項數 n 減去 b，即得 a。

H　以Σ(fd'),加上 a－b 與 c 相乘之積。

I　由 H 所得之結果,以項數 n 除之,即得平均差。

茲就玉蜀黍桿與粳米價,用普通法與簡捷法,比較其離中趨勢,以求平均差與平均差係數之計算。

第二十五表　由分組頻數表求平均差(甲)

玉蜀黍桿之高度(英尺)	稈數		累積稈數	普通法			簡捷法	
G	f		f'	中點 (m)	d	fd	d'	fd'
3——4	3		3	3.5	3.69	11.07	4	12
4——5	7		10	4.5	2.69	18.83	3	21
5——6	22	b	32	5.5	1.69	37.18	2	44
6——7	60		92	6.5	0.69	41.40	1	60
7——8	85		177	7.5	0.31	26.35	0	0
8——9	32	a	209	8.5	1.31	41.92	1	32
9——10	8		217	9.5	2.31	18.48	2	16
	217					195.23		185

$$O_M=\frac{218}{2}=109$$

$$M\ =7+\frac{108.5-92}{85}=7.19$$

普通法:

$$A.D.=\frac{195.23}{217}=0.90\text{ (英尺)}$$

簡捷法:

$$M'=7.50$$

$$c=0.31$$

$$a=125$$

$$b=92$$

$$A.D.=\frac{185+33\times0.31}{217}=\frac{195.23}{217}=0.90\text{(英尺)}$$

與由普通法所得之結果相同。惟須注意者，本例組距爲一，故計算 $\Sigma fd'$ 之時可以不必再乘組距。但若組距不等於一，則求得 $\Sigma fd'$ 之後，尚須以組距乘之，化爲原有單位。

$$A.'D.'=\frac{A.D.}{M}=\frac{0.90}{7.19}=0.125$$

第二十六表　由分組頻數表求平均差(乙)

每擔粳米平均價	頻數		累積頻數	普通法			簡捷法	
G	f		f′	中點 (m)	d	fd	d′	fd′
$ 5.25— 5.75	2		2	5.50	2.875	5.750	6	12
5.75— 6.25	8		10	6.00	2.375	19.000	5	40
6.25— 6.75	30	b	40	6.50	1.875	56.250	4	120
6.75— 7.25	26		66	7.00	1.375	35.750	3	78
7.25— 7.75	17		83	7.50	0.875	14.875	2	34
7.75— 8.25	12		95	8.00	0.375	4.500	1	12
8.25— 8.75	4		99	8.50	0.125	0.500	0	0
8.75— 9.25	10		109	9.00	0.625	6.250	1	10
9.25— 9.75	9		118	9.50	1.125	10.125	2	18
9.75—10.25	9		127	10.00	1.625	14.625	3	27
10.25—10.75	12		139	10.50	2.125	25.500	4	48
10.75—11.25	7		146	11.00	2.625	18.375	5	35
11.25—11.75	9		155	11.50	3.125	28.125	6	54
11.75—12.25	8		163	12.00	3.625	29.000	7	56
12.25—12.75	4		167	12.50	4.125	16.500	8	32
12.75—13.25	5	a	172	13.00	4.625	23.125	9	45
13.25—13.75	1		173	13.50	5.125	5.125	10	10
13.75—14.25	0		173	14.00	5.625	0	11	0
14.25—14.75	2		175	14.50	6.125	12.250	12	24
14.75—15.25	2		177	15.00	6.625	13.250	13	26
15.25—15.75	5		182	15.50	7.125	35.625	14	70
15.75—16.25	1		183	16.00	7.625	7.625	15	15
16.25—16.75	5		188	16.50	8.125	40.625	16	80
16.75—17.25	1		189	17.00	8.625	8.625	17	17
17.25—17.75	2		191	17.50	9.125	18.250	18	36
17.75—18.25	1		192	18.00	9.625	9.625	19	19
	192					459.250		918

$$O_M=\frac{193}{2}=96.5$$

$$M = 8.25 + \frac{96-95}{4} \times 0.50 = 8.375$$

普通法：　$A.D. = \frac{459.25}{192} = 2.39$ (元)

簡捷法：　$M' = 8.50$

$\bar{c} = 0.125$

$a = 97$

$b = 95$

$$A.D. = \frac{0.50 \times 918 + 2 \times 0.125}{192} = \frac{459.25}{192} = 2.39 \text{ (元)}$$

與由普通法所得之結果相同。

$$A'D' = \frac{A.D.}{M} = \frac{2.39}{8.375} = 0.285$$

$$0.285 > 0.125$$

故粳米價之離中趨勢較玉蜀黍稈之離中趨勢爲大。

第五節　標準差

平均差之計算，將正負符號一概不問，此種計算，不免牽强，故皮爾生氏發明一法，以一切離中差自乘，則負號消失，然後求此等乘方之平均數，但初既自乘，則結果不得不開方以資還原，是曰標準差。統計學上恆以 σ (讀如 sigma) 表之。

標準差之計算，常以算術平均數爲中心，蓋標準差之數值，以從算術平均數計算者爲最小。求標準差之公式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \qquad (6)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma}{A} \qquad (7)$$

σ　標準差。

σ'　標準差係數。

A　算術平均數。

n　項數。

d　各項與算術平均數之差。

今以一最簡之例，示其計算之方法如下：

第二十七表　標準差之計算法

X	f	d	d²
3	1	−6	36
6	1	−3	9
9	1	0	0
12	1	3	9
15	1	6	36
	5		90

$$A = 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{90}{5}} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$\sigma' = \frac{4.24}{9} = 0.471$$

上例中，算術平均數適爲整數，故計算平方時甚爲簡易；但算術平均數乃以項數除總和而得，故普通常帶有小數，若仍以各項與之相減，則其平方之計算，甚爲複雜。故實際計算，常用簡捷法，其公式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n} - c^2} \tag{8}$$

σ　標準差。

n　項數。

d'　各項與假定平均數之差。

c　算術平均數與假定平均數之差。

蓋　$d' = d + c$

$$\Sigma d'^2 = \Sigma d^2 + 2c\Sigma d + nc^2$$

但　$\Sigma d = 0$

$\therefore$　$\Sigma d'^2 = \Sigma d^2 + nc^2$

$$\frac{\Sigma d'^2}{n} = \frac{\Sigma d^2}{n} + c^2$$

$\therefore$　$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n} - c^2}$

茲就民國元年至二十年我國之輸出值,計算標準差,以示公式(8)之應用:

第二十八表　求標準差之簡捷法

年份	輸出值（單位一千萬海關兩）	d′	d′²
元年	37	−29	841
二年	40	−26	676
三年	36	−30	900
四年	42	−24	576
五年	48	−18	324
六年	46	−20	400
七年	49	−17	289
八年	63	−3	9
九年	54	−12	144
十年	60	−6	36
十一年	65	−1	1
十二年	75	9	81
十三年	77	11	121
十四年	78	12	144
十五年	86	20	400
十六年	92	26	676
十七年	99	33	1089
十八年	102	36	1296
十九年	89	23	529
二十年	91	25	625
A = 66.45 A′ = 66	1329		9157

$$\sigma = \sqrt{\frac{9157}{20} - 0.45^2} = \sqrt{457.6475} = 21.39\text{（千萬海關兩）}$$

$$\sigma' = \frac{21.39}{66.45} = 0.322$$

若統計事項已組成分組頻數表，則用簡捷法計算標準差，尤爲簡捷。其計算之程序如下：

A　任取一組之中點，作爲假定平均數。

B.　就上下各組，以組距爲單位，而計算各組中點對於假定平均數之離中差 d'。

C.　求 fd'。

D.　求 fd'^2，即B行與C行相乘之積。

E.　將C行各項相加，得 $\Sigma(fd')$，復以項數 n 除之，除得之商，即爲改正數 c（算術平均數與假定平均數之差）。

F.　將D行各項相加，得 $\Sigma(fd'^2)$，復以項數 n 除之。

G.　由F所得之結果，減去改正數 c 之平方。

H.　將G所得之結果開方，即爲標準差。但此爲組距單位，須再以組距乘之，改爲原有單位。

上述之步驟，以公式書之如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(fd'^2)}{n} - c^2} \qquad (9)$$

茲仍取玉蜀黍稈與粳米價之例，應用公式(9)計算其標準差與標準差係數，以比較其離中趨勢。

第二十九表　由分組頻數表計算標準差之簡捷法(甲)

玉蜀黍稈之高度(英尺) G	稈數 f	d'	fd' −	fd' +	fd'²
3——4	3	−4	12		48
4——5	7	−3	21		63
5——6	22	−2	44		88
6——7	60	−1	60		60
7——8	85	0	0		0
8——9	32	1		32	32
9——10	8	2		16	32
	217		−137	48	323

$$48-137=-89$$

$$c=\frac{-89}{217}=-0.41$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{323}{217}-0.41^2}=\sqrt{1.4885-0.1681}=\sqrt{1.3204}$$

$$=1.15(\text{英尺})$$

$$A'=7.50$$

$$A=A'+c=7.50-0.41=7.09$$

$$\sigma'=\frac{1.15}{7.09}=0.162$$

由分組頻數表計算標準差時，假定組中各項均集中於中點，但在實際分配則不然，組中各項大小不等。且若頻數之分配完全對稱，或偏態不甚時，在小於平均數各組中較大數值之頻數，多於較小數值之頻數，而在大於平均數各組中較小數值之頻數，多於較大數值之頻數。故若以中點代表全組中各項之數值，則由是求得之標準差，較實際標準差爲大。統計學家薛伯氏據此理由，求得校正標準差之數值如下：

$$\sigma_c=i\sqrt{m_2-\frac{1}{12}} \tag{10}$$

σ_c　校正標準差。

m_2　公式(9)中方根下之數值。而以組距爲單位者。

i　組距。

上例中 $m_2=1.3204, i=1$

$$\therefore\quad \sigma_c=\sqrt{1.3204-0.0833}$$
$$=1.11\text{(英尺)}$$

與未校正時之 σ 相差 .04 英尺。至其標準差係數則如下:

$$\sigma_c'=\frac{1.11}{7.09}=0.157$$

$307-749=-442$

第三十表　由分組頻數表計算標準差之簡捷法(乙)

每擔粳米平均價 G	頻數 f	d'	fd' −	fd' +	fd'^2
$ 5.25——5.75	2	−10	20		200
5.75——6.25	8	−9	72		648
6.25——6.75	30	−8	240		1920
6.75——7.25	26	−7	182		1274
7.25——7.75	17	−6	102		612
7.75——8.25	12	−5	60		300
8.25——8.75	4	−4	16		64
8.75——9.25	10	−3	30		90
9.25——9.75	9	−2	18		36
9.75——10.25	9	−1	9		9
10.25——10.75	12	0	0		0
10.75——11.25	7	1		7	7
11.25——11.75	9	2		18	36
11.75——12.25	8	3		24	72
12.25——12.75	4	4		16	64
12.75——13.25	5	5		25	125
13.25——13.75	1	6		6	36
13.75——14.25	0	7		0	0
14.25——14.75	2	8		16	128
14.75——15.25	2	9		18	162
15.25——15.75	5	10		50	500
15.75——16.25	1	11		11	121
16.25——16.75	5	12		60	720
16.75——17.25	1	13		13	169
17.25——17.75	2	14		28	392
17.75——18.25	1	15		15	225
	192		−749	307	7910

[註]　粳米平均價之分配,偏態過甚,本不適用公式(10),此處僅示計算之方法而已。

$$c=-\frac{442}{192}=-2.3\text{(組距單位)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{7910}{192}-2.3^2}=\sqrt{41.195-5.29}=\sqrt{35.908}$$

$$\sigma_c=\sqrt{35.908-\frac{1}{12}}=5.985\text{(組距單位)}$$

$$\therefore\ \sigma_c=5.985\times0.50=2.99\text{(元)}$$

$$A'=10.50$$

$$c=-\ .3\times.50=-1.15$$

$$A=A'+c=10.50-1.15=9.35$$

$$\sigma_c'=\frac{2.99}{9.35}=0.320\qquad 0.320>0.157$$

故粳米之離中趨勢，較玉蜀黍稈之離中趨勢爲大。

上表中之 $\Sigma(fd')$ 與 $\Sigma(fd'^2)$ 可用薛立愛氏校核法稽核其計算之正誤。此法爲薛立愛氏所創，故名。採用薛立愛氏校正法時，須於表中添設三行：一行爲 $d'+1$，一行爲 $(d'+1)^2$，一行爲 $f(d'+1)^2$。茲舉一簡易之例，以示其計算如下：

第三十一表　薛立愛氏校核法

(1) G	(2) f	(3) d′	(4) fd′ −	(4) fd′ +	(5) fd′²	(6) d′+1	(7) (d′+1)²	(8) f(d′+1)²
5—7	3	−2	6		12	−1	1	3
7—9	4	−1	4		4	0	0	0
9—11	8	0	0		0	1	1	8
11—13	6	1		6	6	2	4	24
13—15	5	2		10	20	3	9	45
	26		−10	16	42			80

$$16-10=6$$

上表中第六，第七，第八三行，特爲校核法而設。若計算無誤，則各項數值，須滿足下列之關係：

$$\Sigma[f(d'+1)^2]=\Sigma(fd'^2)+2\Sigma(fd')+n \qquad (11)$$

蓋

$$\Sigma[f(d'+1)^2]=\Sigma(fd'^2+2fd'+f)$$
$$=\Sigma(fd'^2)+2\Sigma(fd')+n$$

代以上例中之數值，則得：

$$80=42+2\times 6+26$$

故知上表之計算，並無錯誤；否則，必不能符合也。

故粳米價之離中趨勢較玉蜀黍稈之離中趨勢爲大，與以上諸法所得之結果相同。玆將其各種離中差與離中係數，列表比較之如下：

第三十二表　玉蜀黍稈與粳米離中趨勢之比較

	玉蜀黍稈	粳米價
Q. D.	0.73 英尺	2.10 元
Q.'D.'	0.103	0.233
A. D.	0.90 英尺	2.40 元
A.'D.'	0.125	0.285
σ_c（註）	1.15 英尺	3.00 元
σ_c'（註）	0.162	0.321

〔註〕未改正標準差。

此外尚有相互平均差者，爲意大利統計學家席義氏所倡道，應用減少，故從略。

第六節　各種離中差之關係

各種差量之定義及其計算，已分別詳論於以上各節，玆更述其特點及其相互之關係於下，以便比較：

(一)全距者,乃底線上一定距離全體數量盡在此距離之中者也。

(二)四分位差者,亦一距離之問題。就 Q_1 與 Q_3 間之中點而左右各取一定距離等於四分位差之數值,則在此距離間當有全體數量之一半。

(三)在完全對稱或偏態不甚之頻數分配,就算術平均數計算之平均差,約等於標準差五分之四。四分位差約等於標準差三分之二。以算術平均數爲中心取平均差七倍半之距離,約可包含全部數量百分之九十九。

(四)在完全對稱或偏態不甚之頻數分配,若從算術平均數向左右各取一標準差之距離,則其中項數約等於全部數量三分之二(在正態曲線則其中所含項數實有百分之六八·二六)。若各取二標準差之距離,則其中項數約有百分之九十五(在正態曲線則實有百分之九五·四六)。若各取三標準差之距離,則約有百分之九十九(在正態曲線實有百分之九九·七三)。故標準差之六倍約等於全距之長,吾人在通常計算可卽以此爲測驗正謬之標準也。

(五)就計算與了解之難易言,以全距與四分位差爲最易。

(六)全距之數值僅依極大極小之兩端而定,而於中間頻數分配之情形一概不問,故其數值全不足恃。一兩項之去留足以大變全距之面目而有餘。就此點而論,則以平均差與標準差爲較優,蓋平均差與標準差對於全體各項均有關係也。

(七)就極端差離之影響而論,則平均差不如標準差之甚。

(八)就數學之理論而言,則平均差不如標準差;蓋平均差將正負符號一概不問究不免牽強,而標準差用自乘之法消去負號較爲合理。

(九)就代數方法之處理而論,則以標準差爲優,蓋標準差之

數學意義明白確切，而四分位差則不能用代數方法處理也。

第七節　偏態之意義及其形式

一切數量之離中程度可由離中趨勢測定，但離中趨勢不能告吾人以離中差分配之形狀，亦不能顯示其密集於平均數上下之程度，故離中趨勢之外須有偏態之測定。偏態即非對稱之謂。在頻數分配完全對稱之數列中，衆數中位數與算術平均數三者合而爲一。偏態數列則不然，三者分而爲三。其數值之大小影響於偏態之方向及其數量。偏態者即所以測此方向與數量者也。

大多數數列之頻數分配不能完全對稱，或左或右總有少許偏態。但偏態之程度有大有小，形式不一，有稍偏者，有成 u 字形者，有成 J 字形者，有成倒 J 字形者，又有其他形式者，故不可以一概而論。

第八節　測定偏態之方法

偏態之測定亦有偏態與偏態係數之分。偏態之單位即原有事項之單位，偏態係數之單位則爲抽象的數量，正與離中差與離中係數同；惟離中係數爲離中差與平均數之比，而偏態係數則爲偏態與離中差之比。蓋偏態所以表示離中差分配之情形，故計算係數時所用之分母當爲離中差之平均數而非數列之平均數。兩種單位不同之數列或單位雖同而其離中差之平均數相差甚大之兩種數列均不能不求偏態係數以比較其偏態之程度。

頻數之分配有向右偏與向左偏之分，故偏態與偏態係數亦有正負之別。頻數曲線向右偏斜，則偏態與偏態係數均爲正數，反之則爲負數。若頻數之分配完全對稱，則偏態與偏態係數俱等於零。

偏態對於衆數中位數與算術平均數之影響不同，故在偏態數列中三者即分而爲三。若頻數曲線向右偏斜，則算術平均數因常在重心處受極端項之影響甚大，故向右移動甚多，中位數祇受頻數多少之影響而不受各項大小之影響，故雖亦向右移動，但其移動之程度較算術平均數爲微；反之，若頻數曲線向左移動，則算術平均數與中位數亦均向左移動，其移動之程度算術平均數亦較甚於中位數。至於衆數則不論頻數曲線之向右偏或向左偏，均能維持其原有之位置。故算術平均數與衆數之距離即可爲測定偏態之標準，其公式如下：

$$K = A - Z \tag{12}$$

$$K' = \frac{K}{\sigma} = \frac{A-Z}{\sigma} \tag{13}$$

K　偏態。

K′　偏態係數。

A　算術平均數。

Z　衆數。

σ　標準差。

衆數不易確定，故有時公式(12)不能應用，惟在偏態不甚之數列中，根據皮爾生氏之經驗，中位數與算術平均數之距離約等於算術平均數與衆數距離三分之一（參看平均數章衆數節），故可以下列之公式代替公式(12)與公式(13)。

$$K = 3(A - M) \tag{14}$$

$$K' = \frac{K}{\sigma} = \frac{3(A-M)}{\sigma} \tag{15}$$

K　偏態。

K′　偏態係數。

A　算術平均數。

M　中位數。

σ　標準差。

偏態之地位及其數量亦可根據數列一部之分配而測定。通用之方法爲截取 Q_1 與 Q_3 中間之部，在此部分之數列若係完全對稱，則中位數與 Q_1, Q_3 之距離相等，即 Q_1 與 Q_3 之和等於 M 之二倍。故在此部分之偏態與偏態係數可用下列公式測定。

$$K = Q_3 + Q_1 - 2M \tag{16}$$

$$K' = \frac{K}{Q.D.} = \frac{2(Q_3 + Q_1 - 2M)}{Q_3 - Q_1} \tag{17}$$

K　偏態。

K′　偏態係數。

Q_1　第一四分位數。

Q_3　第三四分位數。

M　中位數。

Q.D.　四分位差。

若頻數之分配完全對稱，則各項與算術平均數相差立方之和等於零；但若稍有偏態，則各立方之和即不等於零。故此法亦可用以測定偏態及偏態係數，其公式如下：

$$K = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{n}} \tag{18}$$

$$K' = \frac{K}{\sigma} = \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{n}}}{\sigma} \tag{19}$$

K　偏態。

[註]　公式(17)有略去分子之 2 以便計算者，蓋求偏態係數之目的原爲比較二或二以上數列之偏態程度，各種數列之偏態係數同以某數乘之或同以某數除之，其大小之比例不變。

K'　偏態係數。

d　各項與算術平均數之差。

n　項數。

σ　標準差。

茲舉一極簡單之例以示上述兩公式之應用。

第三十三表　偏態與偏態係數之計算法

X	d	d^2	d^3 −	d^3 +
1	−6	36	216	
4	−3	9	27	
5	−2	4	8	
6	−1	1	1	
8	1	1		1
9	2	4		8
11	4	16		[illegible]
12	5	25		[illegible]
A=7		96	252	198

$$198-252=-54$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{-54}{8}}=\sqrt[3]{-6.75}=-1.89$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{96}{8}}=\sqrt{12}=3.46$$

$$K'=-\frac{1.89}{3.46}=-0.546$$

上例中算術平均數爲整數，故計算尙易。若帶有幾位小數，則各離中差立方之計算非常複雜，故實際計算不得不另求簡捷之法，其公式如下：

$$K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma d'^3-3c\Sigma d'^2}{n}+2c^3} \qquad (20)$$

K　偏態。

d'　各項與假定平均數之差。

c　算術平均數與假定平均數之差。

n　項數。

〔證〕 令 d 爲各項與算術平均數之差。

$\because \quad d' = d + c$

$\therefore \quad \Sigma d'^3 = \Sigma(d+c)^3 = \Sigma d^3 + 3c\Sigma d^2 + 3c^2\Sigma d + nc^3$

但 $\Sigma d^2 = \Sigma d'^2 - nc^2$

$\Sigma d = 0$

$\therefore \quad \Sigma d'^3 = \Sigma d^3 + 3c\Sigma d'^2 - 3nc^3 + nc^3$

即 $\Sigma d^3 = \Sigma d'^3 - 3c\Sigma d'^2 + 2nc^3$

$$K = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{n}}$$

$$\therefore \quad K = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d'^3 - 3c\Sigma d'^2}{n} + 2c^3}$$

試就一簡單之例應用公式 (20) 以求偏態。

第三十四表　求偏態之簡捷法

X	d'	d'2	d'3 −	d'3 +
4	−7	49	343	
5	−6	36	216	
7	−4	16	64	
10	−1	1	1	
11	0	0	0	
15	4	16		64
17	6	36		216
21	10	100		1000
A' = 11 A = 11.25		254	624	1280

1280 − 624 = 656

代入公式(20)得：

$$K=\sqrt[3]{\frac{656-3\times0.25\times254}{8}+2\times0.25^3}=\sqrt[3]{58.21875}=3.88$$

統計事項若已組成分組頻數表，則可依下列公式計算偏態。

$$K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma(fd'^3)-3c\Sigma(fd'^2)}{n}+2c^3} \tag{21}$$

K　偏態。

d'　各項與假定平均數之差。

c　算術平均數與假定平均數之差。

n　項數。

f　頻數。

茲舉例以示公式(21)之應用於下：

第三十五表　由分組頻數表求偏態之簡捷法

存款額(單位一千美金) G	銀行數 f	d'	fd' −	fd' +	fd'^2	fd'^3 −	fd'^3 +
0——50	11	−3	33		99	297	
50——100	19	−2	38		76	152	
100——150	21	−1	21		21	21	
150——200	9	0	0		0	0	
200——250	6	1		6	6		6
250——300	5	2		10	20		40
300——350	4	3		12	36		108
350——400	0	4		0	0		0
400——450	0	5		0	0		0
450——500	1	6		6	36		216
500——550	2	7		14	98		686
550——600	0	8		0	0		0
600——650	2	9		18	162		1458
650——700	1	10		10	100		1000
700——750	0	11		0	0		0
750——800	1	12		12	144		1728
	82		−92	88	798	−470	5242
			−4			4772	

〔註〕上表自克勒姆之經濟統計轉載。

$$c=\frac{-4}{82}=-0.04878$$

$$\Sigma(fd'^3)=4772$$

$$\Sigma(fd'^2)=798$$

代入公式(21)得:

$$K=\sqrt[3]{\frac{4772+3\times0.04878\times798}{82}-2\times0.04878^3}$$

$$=\sqrt[3]{59.619028}$$

$$=3.9066\text{（組距單位）}$$

$$=195.33\text{（原有單位）}$$

本章應用公式

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2} \tag{1}$$

$$Q'.D.'=\frac{Q.D.}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} \tag{2}$$

$$A.D.=\frac{\Sigma(f\bar{d})}{n} \tag{3}$$

$$A.D.'=\frac{A.D.}{M} \tag{4}$$

$$A.D.=\frac{\Sigma(f\bar{d}')+(a-b)\bar{c}}{n} \tag{5}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \tag{6}$$

$$\sigma'=\frac{\sigma}{A} \tag{7}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n}-c^2} \tag{8}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(fd^2)}{n} - c^2} \tag{9}$$

$$\sigma_c = i\sqrt{m_2 - \frac{1}{12}} \tag{10}$$

$$\Sigma[f(d'+1)^2] = \Sigma(fd'^2) + 2\Sigma(fd') + n \tag{11}$$

$$K = A - Z \tag{12}$$

$$K' = \frac{K}{\sigma} = \frac{A-Z}{\sigma} \tag{13}$$

$$K = 3(A-M) \tag{14}$$

$$K' = \frac{K}{\sigma} = \frac{3(A-M)}{\sigma} \tag{15}$$

$$K = Q_3 + Q_1 - 2M \tag{16}$$

$$K' = \frac{K}{Q.D.} = \frac{2(Q_3+Q_1-2M)}{Q_3-Q_1} \tag{17}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{n}} \tag{18}$$

$$K' = \frac{K}{\sigma} = \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{n}}}{\sigma} \tag{19}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d'^3 - 3c\Sigma d'^2}{n} + 2c^3} \tag{20}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{\Sigma(fd'^3) - 3c\Sigma(fd'^2)}{n} + 2c^3} \tag{21}$$

問題及習題

1. 試述離中趨勢之意義及其測定之方法。
2. 解釋下列各名詞：
   a. 全距。
   b. 四分位差。

c. 平均差。

d. 標準差。

e. 偏態。

3. 試述各種離中差之關係。

4. 離中差與離中係數有何區別?

5. 由第四章第 8 題中之三百零五家工人家庭收入分配表，求

a. 四分位差。

b. 平均差。

c. 標準差。

6. 由第四章第 9 題中之關金行市，求

a. 平均差。

b. 標準差。

7. 由第二章第 8 題中之分組類數表 (a) 與 (b)，各求其

a. 四分位差與四分位差係數。

b. 平均差與平均差係數。

c. 標準差與標準差係數。

8. 就第四章第 8 題中之三百零五家工人家庭收入分配表，依公式 (12), (14), (16), 及 (20) 各求其偏態。

9. 就第二章第 8 題中之分組類數表 (a) 與 (b), 依公式 (12), (14), (16) 及 (21) 各求其偏態。

第六章　指數

第一節　指數之意義與種類

指數者用簡單之數字表示複雜事實之變化者也。譬如物價，其變化甚爲複雜，世間物品不止一種，其變化之趨勢亦非一律，或上漲，或下落，或相差甚大，或變動甚微。苟無簡單之數字以示一般物價之變化，則異地異時之物價將無由比較。更就生產而論，煤鐵之生產以噸計，米麥之生產以擔計，布綢之生產以疋計，發電機之生產以馬力計，併此性質迥異單位不同之產量而欲比較其在不同時間或空間所生之變化，非先將複雜之數量化成簡單之數字不可。此簡單之數字卽指數也。

指數之應用至廣，其用以測量物價之變動者曰物價指數，用以測量貿易之消長者曰貿易指數，他如股票之漲落，工資之增減，生活費之高下，生產消費之狀況，靡不可用指數表示之。

第二節　物價指數編製之方法

指數之應用雖不限於物價，然物價指數乃指數中之最重要者。本節卽就物價指數詳論其編製之方法，其他指數之編製亦大體相似，學者不難隅反得之也。

同一物品在兩時期之價格可用價比以示其變動。所謂價比卽甲時物價與乙時物價之比率（通常乘以一百）。甲時之物價名曰計算價，乙時之物價名曰基價。基價或爲一日之物價，或爲一

年或數年之平均物價。所選基價之時期名曰基期，故基期可短至一日，長至數年或數十年。

基期有固定與變動之別。以指定一時期之物價爲基價而計算各時期之價比者名曰固定基期法；以前一年或前一月之物價爲基價而計算下一時期之價比者名曰變動基期法。前者之價比名曰定基價比，後者之價比名曰環比。下表中第三行即爲定基價比，基期爲民國十二年，第四行則爲環比。計算民國十三年之環比時基期爲民國十二年，計算民國十四年之環比時基期爲民國十三年（餘可類推）。故民國十三年之環比爲

$$\frac{7.110}{7.594}\times 100=93.6$$

民國十四年之環比爲

$$\frac{7.282}{7.110}\times 100=102.4$$

第三十六表　定基價比與環比之比較

年別	米每擔平均價（單位規元一兩）	定基價比（基期民國12年）	環比
民國十二年	7.594	100.0	
十三年	7.110	93.6	93.6
十四年	7.282	95.9	102.4
十五年	10.395	136.9	142.7
十六年	10.030	132.1	96.5
十七年	7.389	97.3	73.7
十八年	8.986	118.3	121.6
十九年	11.512	151.6	128.1
二十年	8.792	115.8	76.4
廿一年	8.049	106.0	91.5

［註］參看第三十八表。

定基價比與環比之外尚有一種價比名曰鎖比。鎖比者將環比之各環相乘而得之價比也。例如第五年之鎖比爲五環比相乘

之積，第六年之鎖比為六環比相乘之積。換言之第六年之鎖比即為第五年之鎖比與第六年之環比相乘之積，故以去年之鎖比與今年之環比相乘即得今年之鎖比。例如前例中之米以 100 為民國十二年之鎖比，以民國十二年之鎖比與民國十三年之環比相乘則得民國十三年之鎖比，即

$$\frac{100\times 93.6}{100}=93.6$$

以民國十三年之鎖比與民國十四年之環比相乘則得民國十四年之鎖比，即

$$\frac{93.6\times 102.4}{100}=95.8 \quad (\text{註})$$

但

$$\text{民國十三年之環比}=\frac{\text{民國十三年之物價}}{\text{民國十二年之物價}}\times 100$$

$$\text{民國十三年之鎖比}=\frac{\text{民國十三年之物價}}{\text{民國十二年之物價}}\times 100$$

$$\text{民國十四年之環比}=\frac{\text{民國十四年之物價}}{\text{民國十三年之物價}}\times 100$$

$$\begin{aligned}\text{民國十四年之鎖比}&=\frac{\text{民國十四年之物價}}{\text{民國十三年之物價}}\\&\quad\times\frac{\text{民國十三年之物價}}{\text{民國十二年之物價}}\times 100\\&=\frac{\text{民國十四年之物價}}{\text{民國十二年之物價}}\times 100\end{aligned}$$

故各年之鎖比各與其定基價比相等，但若物品不止一種，則兩者之數值不必相同。

〔註〕與第三十六表中之 95.9 略有差異，此由於小數四捨五入之故。

以各時期之定基價比爲一數列，則可比較各時期之物價對於基價之變動。若數種物品用同一時期爲基期，則更可比較此數種物價對於基價變動同異之一斑，即微小之變動亦可一覽而知也。下表中 (1) (2) (3) 三行爲棉花米絲之每年平均價，(4) (5) (6) 三行則其價比。

第三十七表　棉花米絲價格之比較

基期：　民國十二年

年份	每年平均價			價比		
	棉花(1)	米(2)	絲(3)	棉花(4)	米(5)	絲(6)
民國十二年	$41.383	$7.594	$1722	100.0	100.0	100.0
十三年	44.671	7.110	1295	107.9	93.6	75.2
十四年	40.667	7.282	1215	98.3	95.9	70.6
十五年	33.117	10.395	1292	80.0	136.9	75.0
十六年	34.975	10.030	1317	84.5	132.1	76.5
十七年	37.283	7.389	1302	90.1	97.3	75.6
十八年	36.125	8.986	1284	87.3	118.3	74.6
十九年	35.667	11.512	1241	86.2	151.6	72.1
二十年	39.167	8.792	1169	94.6	115.8	67.9
廿一年	32.250	8.049	772	77.9	106.0	44.8

[註]　參看第三十八表。

若以表中平均價與價比分別製圖，則後者較前者便於比較。何則？絲價與棉米之價相差甚大，圖上之曲線相離甚遠，故不易比較，反之若用價比，則民國十二年之價比均爲100，三曲線之出發點俱在一點，故觀曲線之起伏卽可知其對於基價變動之方向及其程度。此價比之所以優於實際價格也。

棉花米絲價格變動之方向未必一致。例如民國十三年米絲價格變動之方向一致而棉花則相反，民國十四年絲棉價格變動之方向一致而米則相反，故卽世間物品僅有棉花與米絲三種，亦不能以其價比測定一般物價之趨勢；且世間重要物品不止此三

種，其變動之方向及其程度亦甚參差不齊。除受一般物價趨勢之影響外，各物品各有其個別變動之原因。故欲推測一般物價之趨勢，不可不自重要物品之個別變動中選取一種可以代表全部之數字，此即所謂物價指數是也。

然代表之方法甚多，各項物價之總值或其平均數均可作爲一切物價或價比之代表。此代表若能正確測定一般物價之趨勢則爲良指數，否則爲不良指數。由總值製成之指數亦屬不良指數之一，蓋若一二種物品每單位之價格甚大而其他物品每單位之價格甚小，則此一二種物品價格之變動常足左右總值之大小。例如第三十八表中五種重要物品之物價，絲價在一千兩左右，棉花之價則僅三四十兩，絲價之變動對於總值之影響甚大而棉花則否。反之若絲價改以兩計，棉花之價改以噸計，則棉花價格之變動對於總值之影響甚大而絲價則否。故總值變動之方向及其程度隨各物所用之單位而異，一般物價之趨勢不能正確測定，自不待言。以物品數除其總值得一平均數，似稍勝矣，然上述之弊仍未消除。故實際價格之簡單算術平均數亦爲不良指數之一。由物品之總值編製指數，其公式如下：

$$A_g = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \qquad (1)$$

A_g　簡單總值式指數。

p_0　基期之物價。

p_1　計算期之物價。

第三十八表 五種重要物品之物價

物品 年別	米	小 麥	麵 粉	棉 花	絲
民國十二年	7.594	3.813	2.110	41.383	1722
十三年	7.110	3.398	1.887	44.671	1295
十四年	7.282	4.223	2.310	40.667	1215
十五年	10.395	4.533	2.335	33.117	1292
十六年	10.030	4.444	2.346	34.975	1317
十七年	7.389	4.107	2.221	37.283	1302
十八年	8.986	4.124	2.277	36.125	1284
十九年	11.512	4.658	2.490	35.667	1241
二十年	8.792	3.733	2.144	39.167	1169
廿一年	8.049	3.430	1.962	32.250	772

〔註一〕 資料來源： 貨價季刊（財政部國定稅則委員會出版）。

〔註二〕 物價單位： 上海規元一兩。

米——常熟機粳一市石之價

小麥——漢口小麥一擔之價

麵粉——綠兵船麵粉一袋（49 磅）之價

棉花——通州棉花一擔之價

絲——高等白廠經一擔之價

（以上各種物價均每月十五日之價）

若用價比以代實際價格，則各物單位之影響可以盡除。例如上表中之五種重要物品，若以民國十二年爲基期，則民國十三年米之價比爲 93.6

$$\frac{7.110}{7.594}\times 100 = 93.6$$

若表示米價所用之單位改一擔爲一千擔則民國十三年米之價比仍爲 93.6

$$\frac{7110}{7594}\times 100 = 93.6$$

單位之變動與價比無關，故取五種價比之平均數為指數較能得物價高低之眞相。但須選擇物價變動不大之時期為基期，否則價比亦不可恃。物價變動不大則其離中趨勢甚小，故在選擇基期以前須先計算其離中趨勢之大小。

但平均數亦有種種，如算術平均數中位數衆數幾何平均數與倒數平均數均可用於指數之編製，其公式如下：

$$A=\frac{\Sigma\frac{p_1}{p_0}}{n} \tag{2}$$

$$H=\frac{n}{\Sigma\frac{p_0}{p_1}} \tag{3}$$

$$\log G=\frac{1}{n}\Sigma\log\frac{p_1}{p_0} \tag{4}$$

A　簡單算術式指數

H　簡單倒數式指數

G　簡單幾何式指數

p_0　基期物價

p_1　計算期物價

n　物品總數

若取順次排列中間之一價比則為簡單中位數式指數，若取最普通之一價比則為簡單衆數式指數。

然則各物價比之平均數究以何者為最善？考平均數之選擇無一定之規則，各國學者頗多爭論。惟衆數因不易確定，故用者甚少。中位數與算術平均數之間有時因編製指數之目的而異其取舍。例如編製物價指數之目的若在測定模範物價變動則中位數為宜，反之若欲測量貨幣對於一般物品之購買力則算術平均

數較優於中位數。費暄教授在其所著指數編製論中以時間互換測驗與因子互換測驗為決定良否之標準，平均數之選擇即可取決於此。據費暄氏之報告，簡單算術平均數倒數平均數及加權平均數對此二種測驗均不能滿足，祇簡單幾何平均數中位數衆數及總值式指數可以滿足第一測驗，但亦不能滿足第二測驗。此二種測驗方法將於第三節詳論之。

上述各種指數均以民國十二年為基期，故可名曰定基指數。然定基指數之基期不必限於一年，更不必限於民國十二年，或短至一月一日，或長至五十年，均無不可；惟就物價變態漲跌之危險而論，則一年比一月為佳，而十年又勝於一年，蓋變態之漲跌決不能持久也。基期之長短與平均數之選擇亦有關係，平均數若為算術平均數則基期宜長。何則？基期中之物價如偶有一二項極漲或極跌，則所得價比勢必異常之低或異常之高，而極高之價比大有左右算術平均數之能力，即有極低之價比亦不能與之抵銷。（價比之上升無限，其下落則以零為極限。）故欲消除物價之變態的影響不可不用較長之基期；反之若用幾何平均數則與基期之選擇無關。若用中位數而物品數又甚多者，則基期之影響亦甚微也。

物價變態之時期不宜選作基期，其理上已言之。基期亦不宜距今過遠，蓋經過之時期愈長則價比之分配愈散漫而求得之指數亦不足代表一般物價之趨勢，故須常由較遠之基期轉換至較近之基期，是曰變換基期。

統計學家鑒於定基指數之常須轉換基期，故有主用連環指數與連鎖指數以代定基指數者。若吾人將基期變動，以前一年或前一月為基期，計算本年或本月之指數，則所得之指數名曰連環指數。由連環指數可化為連鎖指數，其化法與由環比化為鎖比相

似。相鄰兩年或兩月之價相比，則物價升降之迹益顯。定基指數有多種，連鎖指數亦然。玆就第三十八表中五種重要物品編製各種指數如下：

第三十九表　各種定基指數與連鎖指數之比較

民國十二年指數＝100

	民國十三年	民國十四年	民國十五年
算術式指數			
定基指數	91.1	97.0	104.3
連鎖指數	91.1	97.3	104.9
幾何式指數			
定基指數	90.5	95.8	101.6
連鎖指數	90.5	95.8	101.6
倒數式指數			
定基指數	89.9	94.4	98.9
連鎖指數	89.9	94.4	98.4
中位數式指數			
定基指數	89.4	98.3	110.7
連鎖指數	89.4	91.6	97.4
總值式指數			
定基指數	76.1	71.4	75.5
連鎖指數	76.1	71.4	75.5

［註］物品祇有五種，故其衆數不能確定。

上表中除幾何式指數與總值式指數外，定基指數與連鎖指數均非一致，此則與一種物品之價比異也。編製指數若用算術平均數，則當物價上升之時連鎖指數之變化通常大於定基指數；當物價下落之時連鎖指數之變化通常小於定基指數（若用倒數平均數則所得結果適相反）。下表中自 1891 年至 1913 年兩種指數變化之百分率相同者僅有二年（1912 年與 1913 年），與此結論相反者亦僅二年（1908 年與 1911 年），其餘十九年均與此結論相合。

第四十表　定基指數與連鎖指數變化百分率之比較

	美國勞工局之指數		變化百分率%	
	定基指數(1890－1899＝100)	連鎖指數	定基指數	連鎖指數
1890	112.9	112.9		
1891	111.7	112.7	－1.1	－ 0.2
1892	106.1	107.7	－5.0	－ 4.4
1893	105.6	107.5	－0.5	－ 0.2
1894	96.1	98.2	－9.0	－ 8.7
1895	93.6	96.7	－2.6	－ 1.5
1896	90.4	94.0	－3.4	－ 2.8
1897	89.7	94.2	－0.8	＋ 0.2
1898	93.4	98.7	＋4.1	＋ 4.8
1899	101.7	109.0	＋8.9	＋10.4
1900	110.5	119.3	＋8.7	＋ 9.4
1901	108.5	118.0	－1.8	－ 1.1
1902	112.9	123.4	＋4.1	＋ 4.6
1903	113.6	124.9	＋0.6	＋ 1.2
1904	113.0	124.8	－0.5	－ 0.1
1905	115.9	128.4	＋2.6	＋ 2.9
1906	122.5	135.9	＋5.7	＋ 5.8
1907	129.5	144.1	＋5.7	＋ 6.0
1908	122.8	136.0	－5.2	－ 5.6
1909	126.5	140.3	＋3.0	＋ 3.2
1910	131.6	146.1	＋4.0	＋ 4.1
1911	129.2	143.3	－1.8	－ 1.9
1912	133.6	148.2	＋3.4	＋ 3.4
1913	135.2	150.0	＋1.2	＋ 1.2

蓋各項物價常有一中心之傾向，其離中心已多者還歸中心之傾向常多於離中之傾向，故平均數以上之價比上升之傾向少而下落之傾向多。反之平均數以下之價比上升之傾向多而下落之傾向少。故當物價上升之時連鎖指數之變化常大於定基指數。當物價下落之時連鎖指數之變化常小於定基指數。

連鎖指數之值常與定基指數不同，且其差異與年俱積，故歷時愈久其差異亦愈大，上表中指數至 1913 年相差已達百分之五十卽其明證。且連鎖指數之意義不易解釋，遠不若定基指數之簡明，此則連鎖指數之缺點也。

世間物品對於人生之重要未必盡同。例如米麥與咖啡相較，其重要之程度迥乎不同。物品之種類至多，而其重要性之大小亦至不齊。善製指數者須視各種物品重要性之大小而增減高下其變化之影響，是卽所謂加權指數是也。反之若不問物品之重要與否而使其價格之變化對於物價指數之編製有同等之影響，則名曰單純指數。上述各種指數均單純指數也。編製加權指數時物品之最重要者與以最大之權數，其次要者與以較小之權數，其最不重要者與以最小之權數，故加權指數較單純指數為公平。然亦有持反對之論者，其主要理由有二：權數之資料不易搜集，此其一；權數影響於指數之結果甚微，此其二。愛奇渥斯謂權數之重要遠不如物價。據愛氏之試驗權數之誤影響於指數者不過二十分之一，而物價之誤影響於指數者則有四分之一或五分之一之多。據米乞爾之報告則單純指數與加權指數之差往往不及十分之一。

加權指數雖較單純指數為公平，然若權數選擇不當，則其結果反不及單純指數。然則權數之選擇究應以何者為標準？楊氏謂大麥之重要二倍於羊毛煤鐵，而糧食有四倍之重要，小麥與日工則有五倍之重要。此雖亦加權之一法，然權數之選擇無客觀之標準，悉由主編者任意决定，常不能得滿意之結果。費暄教授在其所著指數編製論一書中分加權方法為下列四種：

(一)以基期之貿易值(卽基期之物價 p_0 與基期之貿易量 q_0 之乘積)為權數(卽 $p_0 q_0$)，其公式如下：

$$A_1 = \frac{\Sigma\left(p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_0 q_0)} \tag{5}$$

(二)以基期之物價與計算期之貿易量之乘積(卽 $p_0 q_1$)為權數，其公式如下：

$$A_2 = \frac{\Sigma\left(p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_0 q_1)} \tag{6}$$

(三) 以計算期之物價與基期之貿易量之乘積(即 $p_1 q_0$)為權數,其公式如下:

$$A_3 = \frac{\Sigma\left(p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_1 q_0)} \tag{7}$$

(四) 以計算期之貿易值(即計算期之物價 p_1 與計算期之貿易量 q_1 之乘積)為權數(即 $p_1 q_1$),其公式如下:

$$A_4 = \frac{\Sigma\left(p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_1 q_1)} \tag{8}$$

同理幾何式指數與倒數式指數亦各有四種加權方法,其公式如下:

$$\log G_1 = \frac{1}{\Sigma(p_0 q_0)} \Sigma\left(p_0 q_0 \log \frac{p_1}{p_0}\right) \tag{9}$$

$$\log G_2 = \frac{1}{\Sigma(p_0 q_1)} \Sigma\left(p_0 q_1 \log \frac{p_1}{p_0}\right) \tag{10}$$

$$\log G_3 = \frac{1}{\Sigma(p_1 q_0)} \Sigma\left(p_1 q_0 \log \frac{p_1}{p_0}\right) \tag{11}$$

$$\log G_4 = \frac{1}{\Sigma(p_1 q_1)} \Sigma\left(p_1 q_1 \log \frac{p_1}{p_0}\right) \tag{12}$$

$$H_1 = \frac{\Sigma(p_0 q_0)}{\Sigma\left(p_0 q_0 \frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{13}$$

$$H_2=\frac{\Sigma(p_0 q_1)}{\Sigma\left(p_0 q_1 \frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{14}$$

$$H_3=\frac{\Sigma(p_1 q_0)}{\Sigma\left(p_1 q_0 \frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{15}$$

$$H_4=\frac{\Sigma(p_1 q_1)}{\Sigma\left(p_1 q_1 \frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{16}$$

以上四種加權方法均可適用於中位數與衆數。加權中位數乃各權數中間一項之價比，而加權衆數則爲權數最大之價比（參看費暄書 pp 377－8）。

就以上四種加權方法之結果而言，第一第二兩種相差甚微，第三第四兩種亦然，而前兩種與後兩種則相差甚大。由是可見物價之變動甚於物品之貿易量，故其對於物價指數之影響前者較後者爲大。

若用總值法編製指數，則祇可以物品之貿易量爲各物之權數，故權數之選擇祇有基期之貿易量與計算期之貿易量兩種，其公式如下：

$$A_{g1}=\frac{\Sigma(p_1 q_0)}{\Sigma(p_0 q_0)} \tag{17}$$

$$A_{g2}=\frac{\Sigma(p_1 q_1)}{\Sigma(p_0 q_1)} \tag{18}$$

讀者須注意，此處公式 (17) 等於 A_1 及 H_3，公式 (18) 等於 A_2 及 H_4。

第三節　指數公式之測驗

指數公式多至數百，由是求得之指數未必俱能適應物價之變動，指數之良否當視其代表性之大小以爲斷。然則何由知其代表性之大小？統計學家常用種種測驗方法以辨別指數之良否。指數公式之測驗方法有二，卽時間互換測驗與因子互換測驗是也。

若吾人僅欲比較兩時期之物價，則兩時期中之任何一期均可作爲基期。以前一期爲基期而編製之指數，名曰前進指數，以後一期爲基期而編製之指數，名曰後退指數。時間互換測驗者卽前進指數與後退指數相乘之積是否爲一之測驗也。若商品祇有一種，則後退指數卽爲前進指數之倒數，故其相乘之積必等於一。例如民國十年肉一斤之價爲二角五分，民國十五年肉一斤之價爲五角，則前進指數爲200，後退指數爲50，而其相乘之積則爲

$$\frac{200}{100}\times\frac{50}{100}=1$$

若商品不祇一種，則由各種公式求得之指數未必俱能滿足此條件。換言之前進指數與後退指數相乘之積有等於一者，亦有大於或小於一者。簡單幾何式指數簡單中位數式指數簡單衆數式指數與簡單總値式指數均屬於前者，各種加權平均數與加權總値式指數均屬於後者。簡單算術平均數常大於簡單幾何平均數，而簡單倒數平均數常小於簡單幾何平均數，故前進指數與後退指數相乘之積，前者（算術平均數）常大於一而後者（倒數平均數）常小於一。換言之前者常向上偏誤，而後者常向下偏誤，卽所謂型偏誤是也。

四種加權方法中所選之權數通常前二種失之過低，後二種失之過高，故前進指數與後退指數相乘之積前二種小於一而後二種大於一。換言之前二種向下偏誤而後二種向上偏誤，是曰權

偏誤。故由各種公式編製之指數或具型偏誤，或具權偏誤，或兼具型偏誤與權偏誤。簡單算術式指數與簡單倒數式指數僅有型偏誤，加權幾何式指數僅有權偏誤，加權算術式指數與加權倒數式指數則兼有型偏誤與權偏誤。

雖然，型偏誤與權偏誤其方向未必一致，故兼有型偏誤與權偏誤之指數有時仍不失為良指數。例如第一第二兩種加權算術式指數，型偏誤向上而權偏誤向下，反之第三第四兩種加權倒數式指數，型偏誤向下而權偏誤向上，向上偏誤與向下偏誤相抵，故其結果偏誤甚微。

型偏誤或權偏誤亦可用交叉方法減免之。交叉方法者選取偏誤異向之二種指數而求其幾何平均數之法也。簡單算術式指數之向上偏誤與簡單倒數式指數之向下偏誤幾相等，故交叉後之偏誤甚微。(商品祇有兩種時簡單算術平均數與簡單倒數平均數之幾何平均數與簡單幾何平均數相等，參看平均數一章) 費暄教授在其所著之指數編製論一書中列舉各種交叉公式，學者可參考之。

第二種測驗適用於加權指數，是曰因子互換測驗，蓋加權指數公式中 p 代表物價，q 代表貿易量，若以 p 與 q 互換，則其求得之指數非物價指數而為物量指數，因子互換測驗者即物價指數與物量指數相乘之積是否與兩時期貿易值之比率相等之測驗也。若商品祇有一種，則其物價指數為 $\frac{p_1}{p_0}$ 而其物量指數則為 $\frac{q_1}{q_0}$，故其相乘之積等於 $\frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$，即計算期之貿易值與基期之貿易值之比也。

若商品不止一種，則根據以上各公式求得之指數均不能滿

足此條件，費喧教授之所謂「理想公式」則與此條件相合，其公式如下：

$$I=\sqrt{\frac{\Sigma(p_1q_0)}{\Sigma(p_0q_0)}\times\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma(p_0q_1)}} \qquad (19)$$

即公式(17)與公式(18)之交叉公式也。

公式(19)又可改作下式：

$$I=\sqrt{\frac{\Sigma\left(p_0\,q_0\,\frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_0q_0)}\times\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma\left(p_1\,q_1\frac{p_0}{p_1}\right)}} \qquad (20)$$

此則公式(5)與公式(16)之交叉公式也。同理亦可改作公式(15)與公式(6)之交叉公式。

公式(19)中之 p 與 q 互換後即得物量指數如下：

$$\sqrt{\frac{\Sigma(q_1p_0)}{\Sigma(q_0p_0)}\times\frac{\Sigma(q_1p_1)}{\Sigma(q_0p_1)}}$$

物價指數與物量指數相乘則得：

$$\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma(p_0q_0)}$$

此即計算期之貿易値與基期之貿易値之比也。

理想公式試以時間互換之測驗亦能適合，蓋若公式(19)爲前進指數，則其後退指數當爲

$$\sqrt{\frac{\Sigma(p_0q_1)}{\Sigma(p_1q_1)}\times\frac{\Sigma(p_0q_0)}{\Sigma(p_1q_0)}}$$

以之與公式(19)相乘則分子分母兩兩相消，故其乘積爲一。

此外尙有一種測驗，名曰循環測驗，適用於兩個以上時期之比較。即以第一年爲基年計算第二第三兩年之指數；若以第二年

之指數除第三年之指數，其結果應等於以第二年爲基年而計算之第三年指數。關於此項測驗，各家意見略有不同。潘蓀氏謂此乃時間互換測驗（潘蓀氏稱基期互換測驗）之合理的推衍。二個時期既可互換而無矛盾，則三個時期自當亦無矛盾。但適合此測驗必先有一條件，即權數須爲常數是也。費暄氏則以爲此項測驗可以不必，祇有權數爲常數之時方可滿足此測驗，各時代物品之重要性不同，故通常各公式不能適合此測驗，即其所最稱道之理想公式亦不適合也。此項測驗祇有權數爲常數之時可以適合一點，二家之結論相同。惟潘蓀主用相同之權數，以求適合此測驗，而費暄則以爲各時期物品重要不同，權數不能無異，此其別耳。

本章應用公式

$$A_g = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \tag{1}$$

$$A = \frac{\Sigma \frac{p_1}{p_0}}{n} \tag{2}$$

$$H = \frac{n}{\Sigma \frac{p_0}{p_1}} \tag{3}$$

$$\log G = \frac{1}{n} \Sigma \log \frac{p_1}{p_0} \tag{4}$$

$$A_1 = \frac{\Sigma\left(p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_0 q_0)} \tag{5}$$

$$A_2 = \frac{\Sigma\left(p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_0 q_1)} \tag{6}$$

$$A_3=\frac{\Sigma\left(p_1q_0\frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_1q_0)} \tag{7}$$

$$A_4=\frac{\Sigma\left(p_1q_1\frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_1q_1)} \tag{8}$$

$$\log G_1=\frac{1}{\Sigma(p_0q_0)}\Sigma\left(p_0q_0\log\frac{p_1}{p_0}\right) \tag{9}$$

$$\log G_2=\frac{1}{\Sigma(p_0q_1)}\Sigma\left(p_0q_1\log\frac{p_1}{p_0}\right) \tag{10}$$

$$\log G_3=\frac{1}{\Sigma(p_1q_0)}\Sigma\left(p_1q_0\log\frac{p_1}{p_0}\right) \tag{11}$$

$$\log G_4=\frac{1}{\Sigma(p_1q_1)}\Sigma\left(p_1q_1\log\frac{p_1}{p_0}\right) \tag{12}$$

$$H_1=\frac{\Sigma(p_0q_0)}{\Sigma\left(p_0q_0\frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{13}$$

$$H_2=\frac{\Sigma(p_0q_1)}{\Sigma\left(p_0q_1\frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{14}$$

$$H_3=\frac{\Sigma(p_1q_0)}{\Sigma\left(p_1q_0\frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{15}$$

$$H_4=\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma\left(p_1q_1\frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{16}$$

$$A_{g1}=\frac{\Sigma(p_1q_0)}{\Sigma(p_0q_0)} \tag{17}$$

$$A_{g2}=\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma(p_0q_1)} \tag{18}$$

$$I=\sqrt{\frac{\Sigma(p_1q_0)}{\Sigma(p_0q_0)}\times\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma(p_0q_1)}} \tag{19}$$

$$I=\sqrt{\frac{\Sigma\left(p_0q_0\frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma(p_0q_0)}\times\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma\left(p_1q_1\frac{p_0}{p_1}\right)}} \tag{20}$$

問題及習題

1. 試述指數之意義及用途。
2. 解釋下列各名詞：
   a. 價比。
   b. 基期。
   c. 變換基期。
3. 區別下列各名詞：
   a. 固定基期與變動基期。
   b. 定基價比，環比與鏈比。
   c. 定基指數，連環指數與連鎖指數。
   d. 單純指數與加權指數。
   e. 前進指數與後退指數。
   f. 型偏誤與權偏誤。
4. 簡單總值式指數是否爲良指數？
5. 價比之上升下落有無限制？
6. 加權方法有幾種？試舉例說明之。
7. 何謂時間互換測驗與因子互換測驗？試詳論之。
8. 何謂交叉公式？其作用何在？
9. 根據第 38 表計算民國十二年至二十一年棉花之定基價比（基期，民國十二年）環比與鏈比。

10. 根據第 38 表之統計編製民國十二年至二十一年之定基指數（基期，民國十二年）與連鎖指數。

a. 算術式指數。

b. 幾何式指數。

c. 倒數式指數。

d. 中位數式指數。

e. 總值式指數。

第七章　吾國重要指數之編製

指數編製之方法及其公式之測驗已詳述於第六章，雖均能適用於各種指數，然實際編製指數時除公式之採用外若物品之選擇分類之方法以及編製之程序均須分別釐訂。此種問題之解答隨指數之種類而不同。茲就吾國現有各重要指數略述其實際編製之方法以供學者之參考。

第一節　物價指數

物價指數者研究物價變動而編製之指數也。物價之變動素爲經濟學者與社會學者所注意，蓋詳察物價之變動可以推測生活程度之高低與貨幣購買力之大小，並因特種物品定價之過高或過低而引起社會上收益分配之不平現象也。古時物價變動較爲和緩，其影響較小，故物價指數之效用不若今日之顯著。今則通貨之忽漲忽縮常使物價發生極大之變動，而物價之忽高忽低又常反映於一切社會經濟現象，故凡研究社會經濟問題者靡不詳察物價變動之因果。物價指數之效用至此益彰。

近來吾國公私團體鑒於物價指數之重要，亦爲各種物價指數之試編，若財政部國定稅則委員會實業部廣東建設廳南開大學等均先後編製物價指數以示物價之變動。物價指數中最重要者爲躉售物價指數。茲就財政部國定稅則委員會所編之上海躉售物價指數而述其編製方法於後：

國定稅則委員會所編之物價指數係繼前財政部駐滬貨價調查

處之指數而續編者。基期之選擇,公式之應用,以及物品之分類,民國二十年曾有一度之修正。茲就修正前後之編製方法略述其梗概以資比較。

上海躉售物價指數始編於民國八年九月,以民國二年二月爲基期,蓋當時以補查資料之困難,故暫以一個月之物價爲基價也。然基期過短則物價因受季節之影響而有偏高或偏低之病,故於民國二十年修正物價指數時,改一月爲一年,而以民國十五年全年之平均物價爲基價。至於計算期之物價則採用每月十五日上海之躉售市價。

基期有固定與變動之別,吾人在第六章第二節已言之矣。上海躉售物價指數係用固定基期制,公式初用簡單算術平均數,修正後改用簡單幾何平均數。

物品之分類初分爲五大類,即糧食類,其他食物類,疋頭及其原料類,金屬類與雜貨類是也。修正後則將雜貨類復分爲燃料類,建築材料類,化學品類與雜類四類。故今則物品已分爲八大類,而疋頭及其原料類亦易名爲紡織品及其原料類,以上八大類包括一百十九種物品與一百五十五種項目。

茲將國定稅則委員會所發表之上海躉售物價指數列表於下頁,以示物價變動之一般。

我國躉售物價指數,除國定稅則委員會所編之上海躉售物價指數外,尚有實業部所編之南京躉售物價指數,漢口躉售物價指數,青島躉售物價指數,與遼寧躉售物價指數,廣東省建設廳所編之廣州躉售物價指數,南開大學所編之華北躉售物價指數。茲將此六種指數所用基期公式與編製時期以及物品類別與種數列表於下,以資比較:

第四十一表　上海躉售物價指數表

基期：民國十五年

民　國	全年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
十　年	104.6	102.9	105.5	106.2	105.9	105.2	105.4	105.0	105.8	105.5	102.6	102.5	102.1
十一年	98.6	100.9	101.6	101.8	100.6	99.2	97.2	97.6	96.1	95.0	96.2	97.5	99.5
十二年	102.0	100.9	103.3	104.1	103.2	102.0	100.8	100.8	99.9	102.1	101.7	102.8	102.6
十三年	97.9	101.6	100.8	99.1	98.6	97.2	96.9	96.4	96.7	96.4	96.5	97.2	96.9
十四年	99.3	98.2	97.9	97.6	97.9	99.9	99.6	103.2	101.7	100.5	99.4	98.3	97.6
十五年	100.0	97.9	99.0	99.2	99.4	98.1	97.9	98.0	97.9	99.2	103.0	105.3	105.5
十六年	104.4	103.2	103.1	104.7	105.2	104.1	103.9	104.5	104.8	103.2	104.9	103.1	101.7
十七年	101.7	101.0	102.2	102.4	102.9	103.0	101.7	100.8	99.8	98.9	101.2	101.4	101.6
十八年	104.5	101.7	103.2	104.1	103.1	102.6	103.0	103.4	104.8	106.6	107.4	106.1	105.5
十九年	114.8	108.3	111.3	111.3	111.2	111.0	117.5	120.4	119.6	118.4	115.4	114.1	113.6
二十年	126.7	119.7	127.4	126.1	126.2	127.5	129.2	127.4	130.3	129.2	126.9	124.8	121.8
二十一年	112.4	119.3	118.4	117.6	116.7	115.7	113.6	111.8	111.3	109.8	108.7	106.9	107.5
二十二年	103.8	108.6	107.6	103.7	104.5	104.2	104.5	103.4	101.7	100.4	100.3	99.9	98.4
二十三年		97.2	98.0	96.6	94.6	94.9	95.7	97.1	99.8	97.3			

〔註一〕資料來源：財政部國定稅則委員會上海貨價季刊。

〔註二〕二十一年二月及三月之物價指數以上海中日戰爭並無市面，指數未能編製，故用插補法插入（插補方法詳見該會出版之二十一年二三月之插補指數）。

第四十二表　南京漢口青島遼寧廣州華北躉售物價指數之比較

地別	基期	公式	編製時期	物品類別與種數（括弧內數字係每類所選物品數）
南京	民國十九年	簡單幾何式	民國十九年一月起	食料(43)衣料(16)燃料(10)金屬及電氣(17)建築材料(11)雜項(9)
漢口	民國十九年	簡單幾何式	民國十九年一月起	食料(48)衣料(20)燃料(15)金屬及建築材料(17)雜項(11)
青島	民國十九年	簡單幾何式	民國十九年一月起	食料(50)衣料(21)燃料(9)金屬(13)建築材料(15)雜項(13)
遼寧	民國十九年	簡單算術式	民國十九年一月至二十年九月	食料(37)衣料(18)燃料(19)金屬及電氣(13)建築材料(13)雜項(12)
廣州	民國二年	簡單幾何式	民國元年一月起	米(20)其他食品(65)衣料(43)燃料(14)金屬及建築材料(41)雜項(22)
*華北	民國十五年	簡單幾何式	民國二年一月起	食物(41)布疋及其原料(18)金屬(12)建築材料(12)燃料(12)雜項(5)

*南開大學又按原料品與製造品編製華北躉售物價指數，共選物品一百零六種，分為原料品與製造品二大類，原料品又分為農產品動物產品與鑛產品，而製造品又分為生產品與消費品。

物價指數除躉售物價指數外，尚有零售物價指數，我國亦有編製之者。茲將已編指數列表於下，以資比較：

第四十三表　南京廣州北平零售物價指數之比較

地名	編製機關	基期	公式	編製時期	物品類別與種數（括弧內數字係各類中物品種數）
南京	工商部（十八年二月以前）南京市社會局（十九年一月以後）	十五年	簡單幾何式	十三年十月至十九年十二月	糧食(13)蔬菜(11)肉食(10)菓品(6)其他食品(17)服用(12)燃料(14)雜項(10)
南京（農產品及日用零售品市價指數）	江蘇省農工廳	十四年	簡單算術式	十四年一月至十七年六月	農產品(19)日用品(25)
廣州	廣州市政府統計股	十五年	簡單幾何式	自十五年一月起	米(6)肉(7)蔬菜(8)其他食品(10)衣着(8)燃料(4)雜項(7)
北平	北平社會調查所	十六年	簡單算術式	十五年十二月至十八年四月	食料(21)服用(15)燈油燃料(2)

此外尚有輸出入物價指數，亦躉售物價指數之一種，南開大學，國定稅則委員會及前工商部均有編製。茲以應用較少，故從略。

第二節　生活費指數

生活費指數者測量生活費變遷而編製之指數也。生活費之升降對於用貨幣為標準之長期契約（如工資契約）之關係人影響甚大，蓋若生活費驟行高漲，則工人所得工資之購買力無形減低而工人將難維持其固有之生活。編製生活費指數之目的，即欲利用指數改訂此長期契約，使其常能與物價之升降適應也。

最初測量生活費變遷者，常選少數日用消費品，如食物一類，以為標準，蓋以其便於調查也；然食物類之物價變遷有時與其他物品相差甚大，故食物類物價之指數，不能用為測量生活費變遷之惟一標準。今之編製生活費指數者，必先決定消費者實際消費之狀態。實際消費狀態之調查方法有二：即總合支出法與模範家計調查法是也。

一國之生產量與輸入量相加而減去輸出量即為消費總量。以各物之消費量分別與其價格相乘即得各物消費值，總合支出法者，即依此消費值以定各物輕重之程度者也。採行此法之國家，須有完備之生產與輸出入統計，方能得一時期內之消費總量。惟社會上消費習慣時有變遷，昔之重要消費品至今日或已消費無幾，今日大量消費之品或為昔日所無。故一次調查之消費總量不能作為長時期之標準。且房租一項必須另行調查，而某種階級之生活費不能分別測定，尤為總合支出法之缺點。

模範家計調查法者，選取代表某階級之標準家庭若干，而調查其一般生活狀況，藉以確定各種物品在某階級內消費之輕重

程度者也。家計調查之目的，或爲確定編製生活費指數所必需之權數，或欲表示某階級在某時期內所必不可缺之最低生活程度；前者可較簡略而後者務宜詳盡。蓋生活程度之確定，須將消費物品盡行搜集故也。

近年來我國學者與公共機關頗多從事於家計調查及生活費之研究。北平社會調查所，前財政部駐滬貨價調查處，上海社會局先後均有生活費指數之編製。上海市社會局所編之上海市工人生活費指數調查工人家數較多，共有三百零五家，且所選工人家庭遍及各業（如下表）。玆將其家計調查及指數編製之方法略述於下。

第四十四表

上海市三百零五工人家庭中有職業人口之業務分配

業務	人數	百分比	業務	人數	百分比
機器	49	7.8%	棉紡	276	43.9%
建築	11	1.7	繅絲	19	3.0
水電	10	1.6	棉織	79	12.6
化學	6	0.9	絲織	3	0.5
火柴	34	5.4	針織	2	0.3
食物	17	2.7	小販	10	1.6
煙草	32	5.1	服役	20	3.2
印刷	18	2.9	其他	19	3.0
碼頭工人	10	1.6	合計	629	100.0%
洋車夫	14	2.2			

〔註〕 資料來源：上海市工人生活費指數（民國十五年至二十年）。

上海社會局工人家計調查自民國十八年一月至十九年三月止，最初記帳五百家，分東南西北與浦東五區。記帳之標準有二：(一)三人至六人之工人家庭，(二)每月收入自二十九元至六十七元之工人家庭。最初記帳之五百家中有不適合記帳標準而被剔除者，有因中途離滬或記帳不全而中止者，故實際調查祇有三百另五家。此三百另五家按其全年收入額分組則如下表：

第四十五表 上海市三百另五工人家庭每年收入額之分配

全年收入額	家數	平均每家人口數	平均每家寄膳人口數	平均每家折合成年男子數	平均每家有職業人口數
200—300	62	3.95	0.18	2.85	1.82
300—400	95	4.17	0.36	3.09	1.93
400—500	80	4.89	0.56	3.61	2.19
500—600	31	5.19	0.94	4.02	2.42
600—700	25	5.92	0.56	4.23	2.28
700—800	8	5.50	1.00	3.94	2.13
800—900	4	6.25	2.50	5.25	2.25
	305				
平均		4.62	0.47	3.42	2.06

〔註一〕 資料來源：上海工人生活費指數（民國十五年至二十年。）

〔註二〕 平均每家人口數係指家屬人口而言，寄膳者未計入在內。

〔註三〕 折合成年男子數係依據阿脫完脫氏之換算表而計算，凡滿足十七歲之男子均作爲一成年男子，其未滿十七歲之男子及一切女子，依其年齡大小均作爲一成年男子之百分之幾。

實際調查之三百另五家每家帳目均記滿十二月，(十八年四月至十九年三月）每家每月記帳一本，每家每種物品之平均消費額即根據各家帳簿求得，然後再選擇消費品之較重要者六十種，

以爲編製指數之根據。此六十種物品又可分爲食物，衣着，房租，燃料，雜項五大類，各類包含之物品及其消費量詳下表：

第四十六表　上海市工人生活費指數所選物品及其消費量

物品	消費量	物品	消費量
食物類		白糖	10.307 市斤
米麵		房租類	
粳米	5.014 市石	樓房	
秈米	3.370 市石	石庫門	0.22 標準間
糯米	0.118 市石	中洋式	0.58 標準間
麵粉	1.122 包	平房	0.54 標準間
切麵	38.117 市斤	衣着項	
豆及蔬菜		粗布	6.253 市尺
豆腐	459.152 塊	細布	19.643 市尺
豆腐乾	207.497 塊	條格布	20.713 市尺
百頁	382.186 張	花標布	9.159 市尺
油豆腐	4.138 市斤	漂布	5.155 市尺
發芽豆	22.656 市斤	土布	3.696 市尺
綠粉	22.750 市斤	綃呢	10.957 市尺
黃豆芽	49.735 市斤	絨布	5.000 市尺
鹹雪菜	67.125 市斤	斜紋布	3.241 市尺
靑菜	304.145 市斤	棉花	1.479 市尺
蘿蔔	52.210 市斤	男線襪	3.948 雙
洋山芋	18.390 市斤	燃料類	
韭菜	22.136 市斤	煤	171.543 市斤
菠菜	17.116 市斤	煤油	63.499 市斤
魚肉及蛋		劈柴	117.897 捆
鮮豬肉	48.060 市斤	硬木柴	493.874 市斤
鮮牛肉	10.060 市斤	花萁柴	185.451 市斤
鹹豬肉	6.918 市斤	稻柴	205.368 市斤
雞	2.948 市斤	火柴	90.052 小匣
鯽魚	4.158 市斤	灰	0.680 簍
鮮魚	32.996 市斤	雜項類	
鹹白魚	9.918 市斤	肥皂	50.827 塊
鮮鴨蛋	84.932 個	草紙	15.244 刀
調味		香煙	231.869 十支
豆油	68.318 市斤	黃酒	44.597 市斤
豬油	2.638 市斤	高粱	25.140 市斤
醬油	72.775 市斤	茶葉	2.849 市斤
食鹽	37.575 市斤	開水	4436.469 杓

〔註〕　資料來源：上海市工人生活費指數（民國十五年至二十年）

上表中各物之消費量，社會局即取爲權數，用以計算分類指數，至總指數之編製則不再用分類權數。

零售物價調查區域，社會局規定爲工人集居之地，計分上海爲東南西北與浦東五大區，再依區域之大小與工人之多少，每區各選代表商舖若干家。各區內調查之主要街道列舉如下：

東區　楊樹浦路　平涼路　華德路　韜朋路　臨青路
　　　物華路　天寶路　胡家木橋　梧州路
南區　康悌路　菜市路　裏馬路　滬軍路　半淞園路
西區　曹家渡　勞勃生路　安南路
北區　恆豐路　大統路　寶山路　西寶興路
浦東　爛泥渡大街

此外在全市調查菜市九處，其分佈如下：

東區　平涼路小菜場　梧州路小菜場
南區　唐家灣小菜場　南碼頭
西區　曹家渡　勞勃生路
北區　共和路小菜場　寶興路小菜場
浦東　爛泥渡大街

物價變動有遲速與大小之別，故社會局調查物價期間隨物品之變動性質而異。油醬布疋等之價變動不大，故僅於每月十五日調查一次。蔬菜魚肉米糧等之價變動較多，故每星期調查一次，再求一月之平均價。至於各種物品調查之店舖亦有多少之別，蓋隨各店舖填價參差之程度而異也。最少者爲棉花，僅調查六家，最多者爲米糧，共調查二十家。

物品價格隨其品質而異，故調查物價不可不劃一物品品質。社會局調查物價對貨物之有標準或著名通銷之牌號者用標準牌號。其必須憑店員目光及優劣懸殊，而無標準牌號可資依據者，除在調查表將各種牌號詳細分開外，均附帶貨樣，並將上期填價註出以便比較。

房租調查隨各區房屋之多少而異，按年調查每標準間平均每月房租若干，以計算指數。

指數公式，係用加權總值式：

$$\frac{\Sigma\ P_1Q_0}{\Sigma\ P_0\ Q_0}$$

上式中 Q_0 代表家計調查每種物品之消費量，作為固定權數，P_0 與 P_1 則代表基期與計算期各物物價。基期為民國十五年。茲將民國十五年以來上海市工人生活費指數，列表於下，以資研究。

第四十七表　上海市工人生活費指數表

(十五年全年平均 = 100)

時　　期	食　物	房　租	衣　着	燃　料	雜　項	總指數
民國十五年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
一　月	92.58	100.00	100.59	101.17	104.31	95.48
二　月	98.97	100.00	102.18	97.54	104.31	99.58
三　月	96.05	100.00	99.29	97.93	101.21	97.25
四　月	96.81	100.00	100.59	98.16	100.21	97.74
五　月	96.29	100.00	101.54	96.53	100.24	97.33
六　月	96.52	100.00	99.88	95.53	100.39	97.33
七　月	101.40	100.00	99.05	96.53	99.42	100.60
八　月	104.02	100.00	99.41	101.29	99.42	102.74
九　月	109.83	100.00	100.36	101.57	96.37	106.46
十　月	108.97	100.00	99.41	102.79	96.17	105.92
十一月	100.15	100.00	98.82	104.42	98.16	100.23
十二月	99.07	100.00	99.17	108.88	94.96	99.57
民國十六年	100.71	97.98	98.82	109.05	102.23	101.09
一　月	109.63	97.98	99.76	111.01	98.40	106.96
二　月	124.23	97.98	99.29	109.78	97.92	116.67
三　月	111.58	97.98	99.17	113.58	98.11	108.43
四　月	104.41	97.98	99.17	111.63	98.11	103.43
五　月	99.84	97.98	97.63	111.51	96.95	100.17
六　月	101.61	97.98	97.39	107.49	97.82	101.13
七　月	105.24	97.98	99.17	109.00	96.46	103.64
八　月	105.34	97.98	98.34	110.68	96.37	103.81
九　月	97.42	97.98	97.87	106.88	107.80	99.16
十　月	85.50	97.98	97.16	106.20	107.70	91.02
十一月	83.18	97.98	99.83	102.91	115.89	90.02
十二月	81.00	97.98	99.41	108.50	116.91	89.06

時期	食物	房租	衣着	燃料	雜項	總指數
民國十七年	87.22	100.11	99.64	110.23	114.09	93.21
一月	85.80	100.11	99.05	108.11	121.37	92.91
二月	90.13	100.11	99.29	107.27	116.86	95.38
三月	86.93	100.11	97.51	108.16	115.21	93.08
四月	85.26	100.11	97.99	107.04	113.23	91.70
五月	84.51	100.11	98.10	107.38	113.23	91.22
六月	83.21	100.11	97.51	107.32	113.03	90.32
七月	84.50	100.11	99.05	108.27	112.26	91.23
八月	84.31	100.11	99.05	109.78	113.08	91.30
九月	90.38	100.11	99.76	108.66	114.73	95.48
十月	93.18	100.11	101.54	116.32	113.18	97.89
十一月	90.06	100.11	102.73	117.16	112.98	95.87
十二月	89.67	100.11	102.37	117.10	113.18	95.62
民國十八年	97.56	103.80	106.04	117.61	117.78	101.98
一月	91.38	103.80	107.23	120.23	119.46	98.18
二月	92.39	103.80	107.58	111.91	116.33	97.97
三月	91.14	103.80	110.90	113.69	119.38	97.66
四月	86.74	103.80	107.46	113.25	120.0[illegible]	94.58
五月	91.39	103.80	106.04	113.54	116.86	97.42
六月	92.95	103.80	107.82	111.85	117.15	98.43
七月	95.07	103.80	106.52	118.28	115.50	100.11
八月	103.58	103.80	104.38	118.11	115.89	105.85
九月	106.78	103.80	105.69	117.38	116.42	108.06
十月	109.85	103.80	102.01	114.42	117.25	109.84
十一月	104.22	103.80	104.03	119.01	119.48	106.66
十二月	105.36	103.80	103.20	125.71	123.59	108.28
民國十九年	114.99	106.96	108.18	140.47	126.84	116.79
一月	114.66	106.96	106.75	127.95	124.13	115.30
二月	118.38	106.96	107.82	124.65	123.60	117.55
三月	117.99	106.96	108.06	126.72	124.03	117.50
四月	116.61	106.96	106.99	125.21	126.50	116.63
五月	116.28	106.96	104.86	131.26	120.49	116.49
六月	122.46	106.96	110.31	142.26	124.27	121.83
七月	127.92	106.96	109.60	148.07	129.26	126.38
八月	125.21	106.96	107.82	152.88	128.10	124.75
九月	121.85	106.96	107.11	137.23	128.34	121.26
十月	104.49	106.96	108.29	149.69	130.86	110.77
十一月	98.58	106.96	109.36	148.24	130.14	106.64
十二月	94.76	106.96	109.95	158.86	133.91	105.23

時期	食物	房租	衣着	燃料	雜項	總指數
民國二十年	104.10	114.46	123.58	164.62	138.37	113.82
一月	98.79	114.46	114.93	152.54	139.63	109.07
二月	105.78	114.46	117.30	161.99	142.97	126.29
三月	106.85	114.46	121.68	161.60	140.12	126.56
四月	92.32	114.46	122.51	170.65	139.05	117.23
五月	94.22	114.46	122.87	163.39	136.68	117.62
六月	96.62	114.46	116.59	165.51	136.34	119.21
七月	102.16	114.46	118.84	165.85	135.37	112.11
八月	121.07	114.46	124.41	168.75	134.35	125.25
九月	118.90	114.46	127.01	169.37	137.40	124.20
十月	108.56	114.46	129.03	169.26	134.50	117.01
十一月	103.26	114.46	131.75	169.93	135.37	113.66
十二月	100.38	114.46	134.60	164.84	134.88	111.39
民國二十一年	96.89	117.18	124.17	160.93	127.86	108.05
一月	105.96	117.18	136.73	165.01	140.02	116.03
二月	111.82	117.18	135.78	167.30	140.99	120.22
三月	103.77	117.18	133.18	165.85	133.14	113.88
四月	96.54	117.18	129.15	157.41	131.10	108.01
五月	97.85	117.18	129.50	151.93	124.71	107.92
六月	103.40	117.18	125.00	159.25	125.78	112.17
七月	98.07	117.18	122.27	165.29	124.13	108.79
八月	101.33	117.18	121.45	163.11	124.03	110.78
九月	92.81	117.18	117.30	162.21	122.87	104.70
十月	92.82	117.18	110.66	155.84	121.95	103.89
十一月	81.46	117.18	114.45	155.79	127.03	96.80
十二月	82.91	117.18	111.61	164.73	128.49	98.50
民國二十二年	83.47	123.53	102.84	142.43	123.59	97.17
一月	89.16	123.53	113.73	163.28	129.60	102.71
二月	90.65	123.53	111.14	153.27	124.22	102.45
三月	87.08	123.53	103.55	157.18	125.48	100.17
四月	80.79	123.53	105.33	147.79	124.85	95.20
五月	81.65	123.53	102.49	137.34	124.22	94.82
六月	80.66	123.53	104.74	132.81	119.77	93.48
七月	83.53	123.53	104.27	132.59	120.40	95.45
八月	82.84	123.53	105.81	131.58	118.36	94.77
九月	82.19	123.53	102.84	133.37	124.22	95.66
十月	85.75	123.53	91.47	137.62	119.48	97.56
十一月	80.42	123.53	100.00	136.95	119.82	94.25
十二月	75.40	123.53	94.08	138.46	124.27	91.15

時期	食物	房租	衣着	燃料	雜項	總指數
民國二十三年	77.65	123.88	95.68	139.85	123.11	92.82
一月	78.20	123.88	93.68	137.40	128.34	93.46
二月	73.52	123.88	97.39	132.08	125.05	89.63
三月	71.46	123.88	89.57	129.74	122.50	87.63
四月	73.85	123.88	91.58	129.51	121.71	89.14
五月	78.06	123.88	92.77	124.09	12[illegible].14	91.[illegible]6
六月	91.72	123.88	90.88	130.13	121.61	101.23
七月	98.50	123.88	93.25	130.60	120.78	105.85
八月	98.15	123.88	94.55	138.40	124.13	106.57
九月						
十月						
十一月						
十二月						

〔註〕　資料來源：上海市工人生活費指數與上海貨價季刊。

我國生活費指數除上海市社會局所編製者外，尚有國定稅則委員會所編之上海生活費指數，南京市社會局所編之南京工人生活費指數，北平社會調查所所編之北平工人生活費指數與南開大學所編之天津工人生活費指數。茲將此三種指數所用基期公式與編製時期以及物品類別與種數列表於下以便比較：

第四十八表　南京北平與天津工人生活費指數之比較

地別	基期	公式	編製時期	物品類別與種數（括弧內數字係每類所選物品數）
上海	民國十五年	加權算術式	民國十五年一月起	食品(24)衣着(8)房租(1)燃料(4)雜項(6)
南京	民國十九年	加權算術式	民國二十年一月起	食品(31)服用(11)房租(1)燃料(7)雜項(9)
北平	民國十六年	加權總值式	民國十五年一月起	食品(23)衣服(7)房租(1)燃料(4)雜項(5)
天津	民國十五年	加權總值式	民國十五年一月起	食品(25)服用品(6)燃料與水(5)房租(1)

第三節　外匯指數

外匯指數者測量國外匯率之變動而編製之指數也。在用金國與用金國之間計算指數，不必有基期，可以平價爲基價，但在我用銀之國計算用金國匯率指數，則非用基期不可。我國之有外匯指數始於南開大學經濟學院(今改稱經濟研究所)所編之天津對外匯率指數。第一次披露於清華學報第四卷第二期。其後繼續在南開統計週報按期發表，包括英美法日四國匯率，以民國二年爲基期，公式用加權總值式。十八年一月復編上海對外匯率指數，編製方法與天津指數同，但津滬兩指數均改用民國十五年爲基期。至民國二十一年又將基期改爲民國十九年，公式仍用加權總值式，權數亦有修正。

基期所以改爲民國十九年者，則以民國十五年法日兩國之貨幣尚未兌現，皆非眞正之金本位制，指數基期應以常態者爲合格。民國二年雖屬常態，但距今過遠。且法國於民國十六年將貨幣單位改變，使與跌價以後之幣値相符，故以民國二年之法郎與民國十六年以後之法郎等量齊觀亦不合理。法國低減幣値以後英美法日四國同時皆爲金本位制之時期祇有民國十九年一年，南開大學之津滬兩指數近來改用民國十九年爲基期者卽此故耳。

津滬兩指數之權數用加權總值式，其公式如下：

$$外匯指數=\frac{\Sigma\frac{T_i}{R_i}R}{\Sigma\frac{T_i}{R_i}R_0}$$

式中 R_0 爲基期外幣每單位合行化銀或規元之市價，R_1 爲計算期外幣每單位合行化銀或規元之市價，T_i 爲計算指數以前

第四十九表　上海每月外匯指數表(民國十九年＝100)

年＼月	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	全年
民國二年	69.62	69.03	71.06	70.08	69.32	70.03	70.28	70.16	69.59	69.47	69.72	72.07	69.98
三年	72.20	73.17	72.89	72.25	71.21	73.06	74.82	82.14	82.15	80.71	86.53	81.66	77.20
四年	81.24	80.60	80.58	78.84	78.40	79.16	80.61	81.69	81.45	78.99	78.01	69.97	78.96
五年	72.95	70.34	70.58	65.95	58.64	62.34	63.91	64.85	61.80	60.07	59.36	53.24	63.51
六年	53.71	51.52	52.83	53.65	52.02	52.03	49.21	47.68	41.22	44.32	44.69	44.81	49.45
七年	43.00	43.64	43.64	42.78	41.94	41.00	40.09	39.61	37.87	35.07	37.55	37.25	40.02
八年	36.96	37.17	39.79	39.76	37.68	36.48	36.00	35.12	34.08	32.65	31.15	28.33	34.94
九年	27.46	23.47	27.82	30.86	36.66	42.76	41.29	38.65	39.21	42.41	46.85	54.32	37.02
十年	52.41	60.25	66.44	63.19	62.08	61.60	58.47	58.31	57.25	51.34	52.53	54.12	58.08
十一年	55.19	56.65	58.67	55.58	52.81	52.48	53.68	53.96	53.67	55.42	58.42	58.92	55.55
十二年	58.83	58.41	56.18	56.57	57.10	58.52	59.50	59.92	58.53	59.70	58.74	55.64	58.41
十三年	56.17	55.55	55.47	55.21	53.55	53.66	53.32	52.90	51.27	49.02	49.42	50.03	52.77
十四年	50.51	50.27	52.72	53.63	52.48	50.62	50.54	49.89	49.00	49.49	51.19	51.63	50.69
十五年	52.39	54.02	54.29	56.71	56.16	55.48	55.64	58.89	60.32	67.38	70.50	71.16	59.34
十六年	67.66	65.09	68.35	67.25	66.29	65.17	65.76	68.05	67.03	66.21	64.18	63.76	66.32
十七年	64.05	64.91	64.91	65.34	61.59	61.59	61.98	61.84	63.13	63.35	63.35	63.74	64.29
十八年	63.30	64.18	63.89	64.80	66.63	68.23	69.46	70.20	72.50	74.76	75.62	77.24	69.02
十九年	83.88	86.78	88.66	88.96	93.48	112.55	113.06	108.05	105.25	103.83	107.11	116.96	100.00
二十年	131.85	143.36	132.58	134.20	138.07	139.83	134.42	139.40	135.07	126.16	118.13	114.26	131.93
二十一年	103.12	103.76	102.10	109.07	110.39	109.06	108.24	100.37	98.93	99.58	98.98	103.80	104.35
二十二年	*93.68	*92.42	*89.67	**89.65	83.71	81.59							

〔註〕　資料來源：南開大學經濟統計季刊第一卷第三期。

* 經濟季刊第二卷第二期原作一月 107.82，二月 105.90，三月 103.73，茲依第二卷第三期改正。

** 英法外匯二十二年四月以前爲每規元一兩合外幣數，自四月起改爲每銀元一元合外幣數；美匯四月以前爲每規元百兩合外幣數，自四月改爲每銀元百元合外幣數；日匯四月以前爲每日金百元合規元數，自四月改爲銀元百元合日金數。

一年以海關兩計算之中國對各國直接進出貿易總值，R_i 爲計算指數以前一年（即與 T_i 同年）關册所載外幣每單位合海關兩之市價，$\frac{T_i}{R_i}$ 即爲以外幣計算之各國直接對華進出口貿易總值。

南開大學之外匯指數有津滬二指數，而此二指數又各有二個基期，一爲民國二年，一爲民國十九年。自民國二年至十九年，依此二基期各算一指數，十九年以後祇用十九年一基期。此二指數趨勢大抵相同。論其重要，則上海指數遠在天津指數之上。茲將十九年爲基期之上海外匯指數列前以資研究。

第四節　證劵指數

證劵指數者測量證劵行市之升降而編製之指數也。吾國之證劵市場以上海爲主，北平雖亦有證劵交易所，但所交易者祇有九六公債一種，交易甚少，不足道也。上海之證劵交易所有二，一爲國人所辦之華商證劵交易所，一爲外人所辦之上海股票交易所；前者交易限於政府所發內國債劵，後者交易種類較多，有普通股橡皮（普通）股公司債優先股等。

此各種證劵之中，以政府公債與普通股爲最重要。故上海新豐洋行編有兩個證劵指數，一爲股票指數，一爲公債指數，每日在西文各日報披露，每星期三復在金融商業週報披露。前者可以表示外人在華事業之盛衰與外人投資之心理，後者表示國內社會政治及政府信用之狀況。茲將編製方法分述如下：

編製指數時所取價格，據新豐洋行之報告有下列各點：

（一）以最後實際成交之價爲準。但如其買價高於最後交易之成交價，或賣價低於最後成交價，則以買價或賣價代之。如某種股票既無成交而買價或賣價又不合上述條件，則以市價無變

動論。

(二)場外交易之價一概不取。

(三)本指數中所用之價必其交易股數合於該交易所規定之最低標準者,此項標準祇在第二、三、四、三場有效。

(四)股票交易多投機性質,故現貨交易少而期貨交易多。然期貨以利息關係往往高於現貨。故新豐洋行股票指數取期貨價,但減去百分之[illegible]俾約略等於現貨價。其所減之數略等於利息之數,大致一月爲百分之一,一星期爲百分之$\frac{1}{4}$。換言之,指數所用爲期貨價,但此期貨價須合成一種現貨價,每月十五日以前用本月期,十五日以後則用下月期。所用市價均以股票交易所正式公佈者爲準。

股票指數中所有股票凡二十種如下表:

金融業

美東銀公司(B)

匯衆銀公司

國際信託公司

揚子銀公司

保險業

美亞保險公司

四海保險公司

地產業

普益地產公司(B)

華懋地產公司

中國營業公司

業廣地產公司

船塢碼頭運輸業

瑞鎔船廠

耶松船廠

公用事業

中國公共汽車公司

上海自來火公司

上海電話公司

上海電車公司(不記名)

棉紗業

怡和紗廠

上海紡織株式會社

其他

開平煤礦

孫其美鐵釘公司

此二十種股票對於上海股票交易所所有股票之總數比例如下:

	指數中股票數	總數
金融業	4	6
保險業	2	5
地產業	4	10
船塢業	2	6
公用事業	4	5
棉紗業	2	3
其他	2	20

但從民國二十二年四月一日起將美東與孫其美取消而代以上海自來水公司股票 (C) 與聯合影片公司股票，蓋前二者上年交易已不在最活潑之列矣。公式爲簡單算術平均數，基期爲一九

三一年七月三十一日。所以取此日爲基期者則有三理由:(一)此日去今不遠。(二)基期本以六個月或一年爲較善,但經新豐洋行研究之結果,近幾年來外匯劇變,故股票市價變動,與其謂事業盛衰之結果,毋寧謂爲金銀比價變動之影響。況在外國指數中亦有以一日爲基期者。故決定用此日,其時若干星期中外匯較爲平穩,金銀比價之影響較小。(三)本指數中所用市價對於股息並未扣算,通常股息在春初發給,故指數基期以股息發給後五六月爲最佳。

新豐洋行之公債指數取中國政府所發之內債十種(十八年關稅庫券,編遣庫券,裁兵公債,十九年關稅庫券,十九年善後庫券,二十年捲煙庫券,二十年關稅庫券,二十年統稅庫券,整六公債,九六公債共十種。從二十二年四月一日起將二十年鹽稅庫券代九六公債。)亦以一九三一年七月三十一日爲基期,公式亦用簡單算術平均數。

公債市價亦有現貨本月期下月期三種。計算指數之時除星期六外以每日第四盤本月期收盤價爲準,星期六則以上午第二盤收盤價爲準。現貨交易無足輕重,故現貨價一概不取。但此十種債券之中,有庫券多種,票面本金已還去一部,故於計算指數之時先以此種市價照本金數計算百分數,然後計算指數。公債庫券之利息並不扣除,蓋各債券發息日各月皆有,此種差誤可以互相抵銷也。

從二十三年四月起,新豐洋行復增編一橡皮股票指數。以其與我國證券事業關係較少,故從略。此外美東銀公司亦有股票平均數之編製,新華銀行亦有內國債券指數之編製,性質相同,茲均不錄。

第五節　國外貿易指數

國外貿易指數者，測量本國與外國間貿易之消長而編製之指數也。國外貿易有輸入與輸出兩種，故國外貿易指數亦有輸入指數與輸出指數二種。我國之有國外貿易指數始於民國十九年，蓋南開大學經濟學院所編之中國六十年進出口物量指數物價指數及物物交易指數一書於是年出版也。其指數從一八六七年始，資料取自海關貿易總册。我國海關一八五九年即有貿易清册之刊行，一八六四年復增刊貿易報告，一八八二年兩種刊物合併爲一，稱爲華洋貿易總册。所以起於一八六七年者，以一八六七年以前各關貿易值，有以銀元爲計算單位者，有以銀兩爲計算單位者，從一八六七年始以海關兩爲各關共同計算之單位也。

該院出版之經濟統計季刊第一卷第一期修正重印一次以後，按年編製輸出量輸入量輸出價輸入價之指數各一，在經濟統計季刊每卷第一期披露。

進出口物品變化無常，關册之分類方法亦常有變更，時代愈久，困難愈多。南開大學有鑒於此，故本指數之編製不用定基指數而用連鎖指數。即先以一八六七年爲基期，計算一八六八年之指數，再以一八六八年爲基期，計算一八六九年之指數，餘類推。次以一八六七年指數與一八六八年指數相乘爲一八六八年之連鎖指數，再以一八六八年之連鎖指數與一八六九年指數相乘爲一八六九年之連鎖指數，餘類推。如此所得指數爲以一八六七年爲基期之指數，但一八六七年去今過遠，不宜用爲比較之標準，故再以一九一三年之指數除全體指數，則基期改爲一九一三年矣。

南開大學所用公式爲費暄教授之「理想公式」如下：

$$\text{物量指數} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}}$$

$$\text{物價指數} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}$$

物量指數以物價爲權數，物價指數以物量爲權數，玆將指數列下：

第五十表　中國進出口物量與物價指數

年別	物量指數		物價指數	
	進口 Qi	出口 Qe	進口 Pi	出口 Pe
1867	24.7	31.9	46.9	45.1
8	25.4	33.7	46.9	51.7
9	26.4	35.4	47.9	47.8
1870	25.9	33.3	46.7	46.1
1	28.1	39.4	47.4	47.2
2	27.9	43.2	45.8	48.7
3	27.3	39.7	46.3	49.6
4	31.5	40.1	38.5	45.9
5	33.8	42.2	35.3	40.6
6	36.3	42.8	33.8	47.1
7	36.1	40.8	35.5	40.8
8	34.9	41.4	35.7	40.2
9	40.8	43.2	35.2	41.3
1880	36.2	47.2	38.3	41.1
1	40.8	43.5	39.6	40.5
2	36.4	45.9	37.6	36.2
3	35.0	47.2	37.1	36.8
4	34.5	50.6	37.1	32.9
5	40.5	47.6	38.1	33.9
6	35.3	54.2	43.3	35.3
7	41.6	41.2	43.0	51.8
8	50.3	43.6	43.6	52.4
9	44.0	45.2	44.3	53.3
1890	54.8	42.0	40.7	51.5
1	60.8	47.9	38.7	52.3
2	59.9	49.8	39.6	51.4
3	59.4	57.2	44.7	50.8

此外上海市社會局尚着手編製工資指數，則以調查需時，尚未披露耳。

問題及習題

1. 試述下列各種指數之效用:

  a. 躉售物價指數。

  b. 生活費指數。

  c 外匯指數。

  d. 證券指數。

  e. 國外貿易指數。

2. 工人家計調查應如何辦理?

4. 編製外匯指數,應以何者爲基價?

4. 編製證券指數,有何困難之點?試詳論之。

5. 我國躉售物價指數,除國定稅則委員會所編上海一指數外,尚有南京,漢口,青島,遼甯(實業部編)廣州,(廣東建設廳編)與華北(南開大學編)等六指數。此等指數之編製方法優劣如何?試詳論之。

第八章　繫聯

第一節　繫聯之意義

世間現象千變萬化，驟視之若各自生滅，風馬牛不相及；然若詳細分析，則其間固常有因果之關係存焉。吾人俱知雨量之多少，溫度之寒暖與五穀之收穫有因果之關係。然何者為因？何者為果？溫度之寒暖是否隨雨量之多少而異？收穫之良否是否隨溫度之寒暖而異？種植之一般狀況是否足以影響溫度之變遷？類是之因果關係常為經濟學家所悉心研究。至於統計學家之興趣則與此略異。彼所急欲探討者乃各現象間相互關係之存在及其相關之程度而已。此相互之關係名曰繫聯。

試就郵政匯兌而論，在一定時期中各郵區有開發之匯票，亦有兌付之匯票，其價值頗有出入。若在開發匯票額較大之郵區，其兌付匯票額亦大，在開發匯票額較小之郵區，其兌付匯票額亦小；則開發匯票額與兌付匯票額之間顯有一種繫聯，此繫聯名曰正繫聯。若在開發匯票額較大之郵區其兌付匯票額反小，在開發匯票額較小之郵區其兌付匯票額反大，則兩者之間仍有繫聯存在，惟以其相反故曰負繫聯。若開發匯票額之大小不能影響於兌付匯票額，則兩者之間顯無任何繫聯存在，即其繫聯為零，故曰零繫聯。

吾人若在垂直標軸畫分之平面上以開發匯票額為橫坐標，兌付匯票額為縱坐標，而以縱橫坐標確定各點之位置，則全國二

十三郵區將共有二十三點。觀第十七圖，此二十三點之散佈可以一直線代表，故曰直線繫聯。有時各點散佈雖不可以直線代表，但可以一定曲線代表者是曰非直線繫聯。本書所論僅限於直線繫聯。

第四節 繫聯係數之計算

繫聯之程度必以一抽象的數字表示，是曰繫聯係數。其計算之公式如下：

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{n\sigma_x\sigma_y} \tag{1}$$

r　繫聯係數

x　x 數列之各項與算術平均數之差

y　y 數列之各項與算術平均數之差

σ_x　x 數列之標準差

σ_y　y 數列之標準差

n　項數

r 可正可負，若 r 爲正數則爲正繫聯，若 r 爲負數則爲負繫聯。r 之絕對值介於 0 與 1 之間。若 r 爲 0 則爲零繫聯，若 r 爲 1 則兩變量間有一完全之繫聯，此繫聯名曰整繫聯，蓋以其係數爲整數故也。

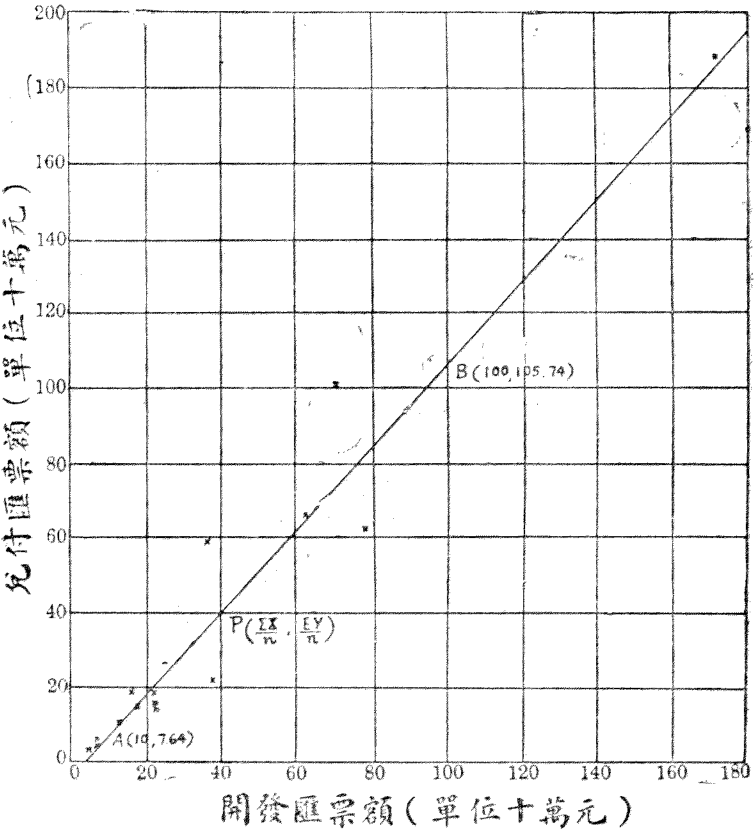
但計算繫聯係數之時，亦可不必先求標準差，蓋

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n}}$$

$$\therefore\quad r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}} \tag{2}$$

第十七圖 民國二十一年我國二十三郵區之開發匯票額與兌付匯票額之散佈圖



由上式計算繫聯係數較(1)式尤爲簡捷。玆述其計算之程序於下:

A. 求 x 數列之各項與算術平均數之差 x。

B. 求 y 數列之各項與算術平均數之差 y。

C. 將 x 行各項與 y 行各項兩兩相乘得 xy，並求其總和，即 $\Sigma(xy)$。

D. 將 x 行各項一一平方得 x^2，並求其總和，即 Σx^2。

E. 將 y 行各項一一平方得 y^2，並求其總和，即 Σy^2。

F. 以求得諸數值代入公式 (2)，即得繫聯係數 r。

茲就民國二十一年上半年我國二十三郵區之開發匯票額與兌付匯票額而計算其繫聯係數。

第五十一表 繫聯係數之計算

郵區	X	Y	x	y	xy +	xy −	x^2	y^2
蘇皖	172	187	131.1	145.7	19101.27		17187.21	21228.49
上海	78	62	37.1	20.7	767.97		1376.41	428.49
浙江	37	59	− 3.9	17.7		69.03	15.21	313.29
江西	22	14	−18.9	−27.3	515.97		357.21	745.29
湖北	57	44	16.1	2.7	43.47		259.21	7.29
湖南	31	43	− 9.9	1.7		61.83	98.01	2.89
東川	22	15	−18.9	−26.3	497.07		357.21	691.69
西川	24	27	−16.9	−14.3	241.67		285.61	204.49
山東	109	107	68.1	65.7	4474.17		4637.61	4316.49
河北	71	101	30.1	59.7	1796.97		906.01	3564.09
北平	92	107	51.1	65.7	3357.27		2611.21	4316.49
河南	62	65	21.1	23.7	500.07		445.21	561.69
山西	18	15	−22.9	−26.3	602.27		524.41	691.69
陝西	7	6	−33.9	−35.3	1196.67		1149.21	1246.09
甘肅	6	3	−34.9	−38.3	1336.67		1218.01	1466.89
福建	22	19	−18.9	−22.3	421.47		357.21	497.29
廣東	16	19	−24.9	−22.3	555.27		620.01	497.29
廣西	7	5	−33.9	−36.3	1230.57		1149.21	1317.69
雲南	12	11	−28.9	−30.3	875.67		835.21	918.09
貴州	5	3	−35.9	−38.3	1374.97		1288.81	1466.89
遼寧	38	22	− 2.9	−19.3	55.97		8.41	372.49
吉黑	31	16	− 9.9	−15.3	250.47		98.01	640.09
新疆	1	0	−39.9	−41.3	1647.87		1592.01	1705.69
					40843.77	85.86		
	$A_x=40.9$	$A_y=41.3$			40757.91		37376.63	47200.87

$$\Sigma(xy)=40757.91$$

$$\Sigma x^2 \quad =37376.63$$

$$\Sigma y^2 \quad =47200.87$$

代入公式 (2) 則得:

$$r=\frac{40757.91}{\sqrt{37376.63\times 47200.87}}=0.97$$

上題中平均數均帶小數故計算稍繁，實際應用時可用簡捷法。簡捷法之公式如下:

$$r=\frac{\Sigma(x'y')-nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-nc_x^2)(\Sigma y'^2-nc_y^2)}} \tag{3}$$

r　繫聯係數

x′　x 數列之各項與假定平均數之差

y′　y 數列之各項與假定平均數之差

c_x　x 數列之算術平均數與假定平均數之差即 $A_x-A'_x$

c_y　y 數列之算術平均數與假定平均數之差即 $A_y-A'_y$

n　項數

蓋　$\Sigma(x'y')=\Sigma[(x+c_x)(y+c_y)]=\Sigma(xy)+nc_xc_y$

$$\Sigma x'^2=\Sigma x^2+nc_x^2$$

$$\Sigma y'^2=\Sigma y^2+nc_y^2$$

$$\therefore\quad r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}=\frac{\Sigma(x'y')-nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-nc_x^2)(\Sigma y'^2-nc_y^2)}}$$

茲就前例應用簡捷法計算繫聯係數如下:

第五十二表　計算繫聯係數之簡捷法

郵區	X	Y	x′	y′	x′y′ +	x′y′ −	x′²	y′²
蘇皖	172	187	131	146	19126		17161	21316
上海	78	62	37	21	777		1369	441
浙江	37	59	−4	18		72	16	324
江西	22	14	−19	−27	513		361	729
湖北	57	44	16	3	48		256	9
湖南	31	43	−10	2		20	100	4
東川	22	15	−19	−26	494		361	676
西川	24	27	−17	−14	238		289	196
山東	109	107	68	66	4488		4624	4356
河北	71	101	30	60	1800		900	3600
北平	92	107	51	66	3366		2601	4356
河南	62	65	21	24	504		441	576
山西	18	15	−23	−26	598		529	676
陝西	7	6	−34	−35	1190		1156	1225
甘肅	6	3	−35	−38	1330		1225	1444
福建	22	19	−19	−22	418		361	484
廣東	16	19	−25	−22	550		625	484
廣西	7	5	−34	−36	1224		1156	1296
雲南	12	11	−29	−30	870		841	900
貴州	5	3	−36	−38	1368		1296	1444
遼寧	38	22	−3	−19	57		9	361
吉黑	31	16	−10	−25	250		100	625
新疆	1	0	−40	−41	1640		1600	1681
	$A_x=40.9$	$A_y=41.3$			40849	92	37377	47203
	$A'_x=41$	$A'_y=41$			40757			

$$\Sigma(x'y')=40757$$

$$\Sigma x'^2=37377$$

$$\Sigma y'^2=47203$$

$$c_x=40.9-41=-0.1$$

$$c_y=41.3-41=0.3$$

$$n=23$$

代入公式 (3) 則得：

$$r=\frac{40757+0.69}{\sqrt{(37377-23\times0.01)(47203-23\times0.09)}}$$

$$=\frac{40757.69}{\sqrt{37376.77\times47200.93}}=0.97$$

〔註〕 由公式 (2) 求得之 r 其分子爲 40757.91 而此爲 40757.69，其分母方根下爲 37376.63×47200.87 而此爲 37376.77×47200.93。所以有此微小差異者，由於所取算術平均數僅係近似數之故。若取其準確數值，則兩法所得之結果完全相同。若取算術平均數準確數值，則：

$$c_x=40\frac{20}{23}-41=-\frac{3}{23}$$

$$c_y=41\frac{7}{23}-41=\frac{7}{23}$$

由簡捷法求得之 r 將爲：

$$r=\frac{40757+\frac{21}{23}}{\sqrt{\left(37377-\frac{9}{23}\right)\left(47203-\frac{49}{23}\right)}}=\frac{40757.91}{\sqrt{37376.61\times47200.87}}$$

由公式(2)求得之 r 亦須依照簡捷法公式加以修正。

$$c_x=40.8\frac{16}{23}-40.9=-0.0\frac{7}{23}$$

$$c_y=41.3\frac{1}{23}-41.3=0.0\frac{1}{23}$$

$$\therefore \quad r=\frac{40757.91+0.00\frac{7}{23}}{\sqrt{\left(37376.63-0.02\frac{3}{23}\right)\left(47200.87-0.00\frac{1}{23}\right)}}$$

$$=\frac{40757.91}{\sqrt{37376.61\times 47200.87}}$$

若 x 數列與 y 數列之分配甚爲散漫，則計算繫聯係數時不必先求各項與算術平均數或假定平均數之差，直接自各項求之可也。其公式如下：

$$r=\frac{\Sigma(XY)-A_xA_y}{\sqrt{(\Sigma X^2-nA_x{}^2)(\Sigma Y^2-nA_y{}^2)}} \tag{4}$$

r 繫聯係數

X x 數列之各項

Y y 數列之各項

A_x x 數列之算術平均數

A_y y 數列之算術平均數

n 項數

蓋 $A'_x=A'_y=0$

$x'=X$

$y'=Y$

$c_x=A_x$

$c_y=A_y$

$$\therefore \quad r=\frac{\Sigma(XY)-A_xA_y}{\sqrt{(\Sigma X^2-nA_x{}^2)(\Sigma Y^2-nA_y{}^2)}}$$

茲依上述公式計算繫聯係數如下：

第五十三表 由各項直接計算繫聯係數

郵區	X	Y	XY	X^2	Y^2
蘇皖	172	187	32164	29584	34969
上海	78	62	4836	6084	3844
浙江	37	59	2183	1369	3481
江西	22	14	308	484	196
湖北	57	44	2508	3249	1936
湖南	31	43	1333	961	1849
東川	22	15	330	484	225
西川	24	27	648	576	729
山東	109	107	11663	11881	11449
河北	71	101	7171	5041	10201
北平	92	107	9844	8464	11449
河南	62	65	4030	3844	4225
山西	18	15	270	324	225
陝西	7	6	42	49	36
甘肅	6	3	18	36	9
福建	22	19	418	484	361
廣東	16	19	304	256	361
廣西	7	5	35	49	25
雲南	12	11	132	144	121
貴州	5	3	15	25	9
遼寧	38	22	836	1444	484
吉黑	31	16	496	961	256
新疆	1	0	0	1	0
	940	950	79584	75794	86440

$\Sigma(XY)=79584$

$\Sigma X^2=75794$

$\Sigma Y^2=86440$

$A_x=40\frac{20}{23}$

$A_y=41\frac{7}{23}$

$n=23$

代入公式(3)則得：

$$r=\frac{79584-\frac{940\times950}{23}}{\sqrt{\left(75794-\frac{940^2}{23}\right)\left(86440-\frac{950^2}{23}\right)}}$$

$$=\frac{79584-38826.09}{\sqrt{(75794-38417.39)(86440-39239.13)}}$$

$$=\frac{40757.91}{\sqrt{37376.61\times47200.87}}=0.97$$

上例中祇有二十三組區，故計算尚不甚繁；但若項數多至數百，則欲依前法計算其繫聯係數，幾爲事實所不許。欲免計算過繁，不得不先將各項分組整理，然後研究其繫聯。惟在繫聯問題中變量不止一個，故須就簡單頻數表加以擴充以便計算，此即所謂繫聯表是也。

繫聯表之編製及繫聯係數之計算，可按下列程序進行：

A. 各組之組距屬於 x 數列者書於第一列，屬於 y 數列者書於第一行。

B. 各組之頻數 f 屬於 x 數列者書於第二列，屬於 y 數列者書於第二行。

C. 以組距爲單位，求各組與假定平均數之差 d′，屬於 x 數列者書於第三列，屬於 y 數列者書於第三行。

D. 求 fd′，其屬於 x 數列者書於第四列，屬於 y 數列者書於第四行。

E. 求 fd′²，其屬於 x 數列者書於第五列，屬於 y 數列者書於第五行。

F. 在第五列之下第五行之右各方格中各記入相當之頻數並加括弧以示區別，此頻數即爲同行 x 組與同列 y 組之共同頻數也。

第五十四表　繫聯表

美國聯邦準備銀行之貼現率(%)

美國商業銀行之貼現率(%)

組距					3.75-4.24	4.25-4.74	4.75-5.24	5.25-5.74	5.75-6.24	5.25-6.74	6.75-7.24	合計	d'xd'y
	f				24	227	48	20	123	20	42	504	
		d'			−3	−2	−1	0	1	2	3		
			fd'		−72	−454	−48	0	123	40	126	-285	
				fd'²	216	908	48	0	123	80	378	1753	
7.75—8.24	4	4	16	64					+4 (1) +4	+8 (1) +8	+12 (2) +24		36
7.25—7.74	17	3	51	153					+3 (7) +21	+6 (9) +54	+9 (1) +9		84
6.75—7.24	117	2	234	468			−2 (5) −10	0 (4) 0	+2 (63) +126	+4 (9) +36	+6 (36) +216		368
6.25—6.74	47	1	47	47		−2 (2) −4	−1 (9) −9	0 (10) 0	+1 (22) +22	+2 (1) +2	+3 (3) +9		20
5.75—6.24	156	0	0	0	0 (1) 0	0 (90) 0	0 (29) 0	0 (6) 0	0 (30) 0				0
5.25—5.74	126	−1	−126	126	+3 (11) +33	+2 (110) +220	+1 (5) +5						258
4.75—5.24	34	−2	−68	136	+6 (10) +60	+4 (24) +96							156
4.25—4.74	3	−3	−9	27	+9 (2) +18	+6 (1) +6							24
合計	504		145	1021									
d'xd'y					111	318	−14	0	173	100	258		946

〔註〕　資料來源：米爾斯之統計方法

G. 各方格中頻數之上各記入 d'_x 與 d'_y 之乘積，卽 x 數列之 d′ 與 y 數列之 d′ 相乘之積。

H. 將各方格中已求得之二數相乘而記其乘積於頻數之下。

I. 將第二，第四，第五，三列與第二，第四，第五，三行之各項相加。

J. 將各列及各行方格中第三排數字相加而記其和於最後一行與最後一列。

K. 將最後一行與最後一列各數各自相加而記其和（兩個總和須相等）於右下角之方格中。

L. 應用公式 (3) 計算繫聯係數；但此處 x', y'（卽 d'_x, d'_y）c_x, c_y 皆用組距單位。

茲依以上程序計算美國聯邦準備銀行之貼現率與商業銀行之貼現率之繫聯係數於前頁。

$$\Sigma(x'y')=946$$

$$c_x=-\frac{285}{504}$$

$$c_y=\frac{145}{504}$$

$$\Sigma x'^2=1753$$

$$\Sigma y'^2=1021$$

$$n=504$$

代入公式 (3) 則得:

$$r=\frac{946+\dfrac{2.85\times145}{504}}{\sqrt{\left(1753-\dfrac{285^2}{504}\right)\left(1021-\dfrac{145^2}{504}\right)}}=\frac{1027.99}{\sqrt{1591.84\times979.28}}$$

$$=0.82$$

本章應用公式

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{n\sigma_x\sigma_y} \tag{1}$$

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2\,\Sigma y^2}} \tag{2}$$

$$r=\frac{\Sigma(x'y')-nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-nc_x^2)(\Sigma y'^2-nc_y^2)}} \tag{3}$$

$$r=\frac{\Sigma(XY)-nA_xA_y}{\sqrt{(\Sigma X^2-nA_x^2)(\Sigma Y^2-nA_y^2)}} \tag{4}$$

問題及習題

1. 試述繫聯之意義。
2. 解釋下列各名詞:
   a. 繫聯表。
   b. 正繫聯與負繫聯。
   c. 零繫聯。
3. 就下表統計應用公式(2),(3),(4)計算繫聯係數:
   a. 錠子數目與布機臺數。
   b. 錠子數目與用花包數。

並各製一散佈圖。

各國紗布廠內紡錠織機與用花量表

國別	錠子數目(單位一百萬錠)	布機臺數(單位一百萬臺)	用花包數(單位一百萬包)
英國	50.2	69.3	2.4
美國	31.3	69.9	4.8
法國	10.2	20.0	0.9
德國	9.8	22.4	1.2
俄國	9.2	15.9	1.5
印度	9.5	18.0	2.7
日本	8.0	7.9	2.8
意大利	5.4	14.7	0.8
中國	4.5	3.0	2.3
捷克	3.6	12.5	0.3
巴西	2.6	7.8	0.5
比利時	2.1	5.4	0.3
西班牙	2.1	8.1	0.4
波蘭	1.8	4.1	0.2

[註] 資料來源: 1933 年萬國棉紡織業聯合會報告

4. 就下列統計作成繫聯表並用公式(3)計算繫聯係數。

民國十九年天津紗廠內男工身長與年齡之分配

年齡＼身長	4'—4'2"	4'2"—4'4"	4'4"—4'6"	4'6"—4'8"	4'8"—4'10"	4'10"—5'	5'—5'2"	5'2"—5'4"	5'4"—5'6"	5'6"—5'8"	5'8"—5'10"	5'10"—6'	人數
10—12	6	3											9
12—14	5	16	9	6	1								37
14—16	37	59	54	50	29	7	6	2	1	1		1	247
16—18	11	25	46	40	49	34	50	17	12	5	1	1	291
18—20	2	4	16	15	31	16	62	34	48	20	5	1	234
20—22		1	9	8	17	1	43	29	42	31	11	1	193
22—24			2	4	5	4	16	25	32	37	4	1	130
24—26					7	1	14	14	27	25	6		94
26—28					1		12	6	22	15	7		63
28—30				1	2		4	8	9	14	5	1	44
30—32							1	7	11	5	4		28
32—34			1		1		1	6	6	6	1		22
34—36							3	3	8	5	4		23
36—38					1		3	1	5	3	3		16
38—40					1		3	1	3	4	2		14
人數	61	108	137	124	145	63	218	153	226	171	53	6	1465

〔註一〕 資料來源：方顯庭編中國棉業及其貿易第二册。

〔註二〕 年齡在四十歲以上或身長高出六呎以上之男子均不包含在內。

第九章　時間數列

第一節　經濟現象變動之原因

以前平均數至偏態各章所論，均頻數數列之分析。至於經濟商業上所用之統計資料，大抵均爲時間數列。時間數列之分析方法與頻數數列不同，故有專門研究之必要。此種統計資料之搜集以美國爲最盛。最著者爲哈佛大學。英，法，德各國繼起仿效。雖其分析之方法不免小有出入，而根本原理則同。

據哈佛大學研究之結果，經濟現象變動之原因共有四種：(一)爲一時期內繼續增減之趨勢，是曰長期趨勢；(二)爲季節之影響，是曰季節變動；(三)爲整個社會經濟盛衰之起伏，是曰循環變動；(四)爲戰爭，罷工，災荒等之影響，是曰意外變動。研究一時期內時間數列之變動，自當首先除去此意外變動之影響；惟意外變動之原因甚多，無一般適用之方法，祇得隨時隨地設法除去之可也。

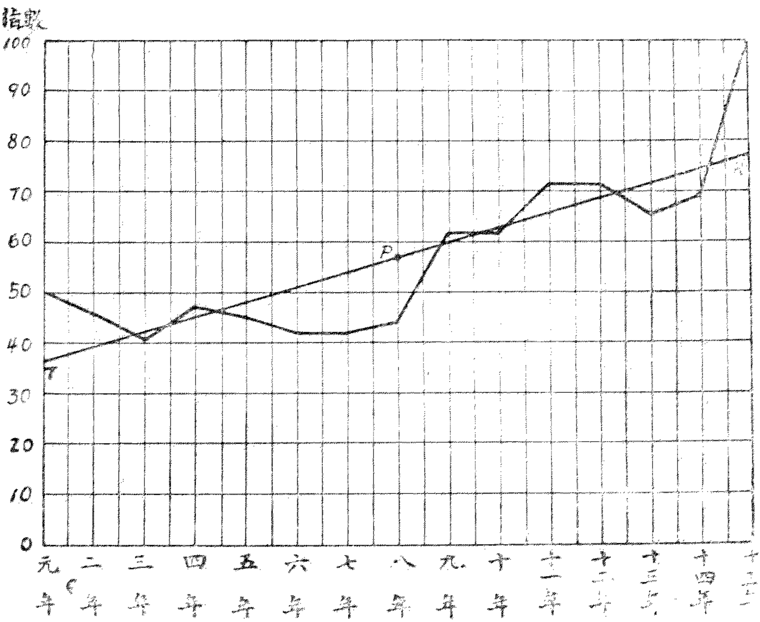
第二節　長期趨勢

長期趨勢者，一種變量在一長時期內，逐漸向上或向下變動之傾向也。此種傾向或受外界之影響，或依自然之趨勢。保持此傾向之時期或短至數年，或長至數十年，數百年。人口誕生率高於其死亡率，故人口之變動常有向上之趨勢；五穀種植之法逐漸改良，故每年收穫之量亦逐漸增加；房屋之建築與豫防火災之設

備逐漸改善,故每年火災之數逐漸減少;鑛產愈掘愈少,故鑛區之繁榮亦漸呈退化之勢;此皆長期趨勢之例也。

長期趨勢大別之可分爲直線趨勢與曲線趨勢二種。第十八圖米價指數之長期趨勢爲直線趨勢,圖中TR線即其所配合之趨勢直線也。至於如何決定長期趨勢之方法則以限於篇幅,故從略。

第十八圖　民國元年至十五年上海粳米指數之長期趨勢



第三節　季節變動

季節變動者,時間數列受季節之影響而生之變動也。草帽與皮貨之營業均受顯著之季節影響,他若牛油與鷄蛋之生產,建築

業與旅行之活動，戲館公園顧客之多少，以及煤電之消費，靡不受季節之影響；凡此皆因氣候之寒暖，雨量之多少以及其他自然現象之變動而使時間數列發生變動，即米乞爾教授所謂自然因子是也。米氏謂自然因子之外尚有人爲因子，有時亦爲造成季節變動之原因。我國舊歷新年與歐美復活聖誕等節之習俗，我國三節還賬與歐美十二月雙薪之制度，均足使各種營業發生季節之變動，此則人爲因子影響於季節變動之例也。雖然，人爲因子有時亦能緩和季節之變動。羊毛衣襪祇能銷售於秋冬二季，然其生產全年不絕，煤商常於夏季以廉價之煤出售於消費者，使其夏季營業得維持相當之數量，此皆人爲因子足以緩和季節變動之例也。

阿富塔里翁教授謂自然與人爲因子之外各月日數之不同亦爲季節變動原因之一。每月之日數多至三十一日少至二十八日，除二月外每月之日數或爲三十一日或爲三十日，故每月之中或有五個星期日或僅有四個星期日，凡此皆可造成季節之變動。惟此種不規則變動消除尚易。若能代以工作日之平均統計，則此種不規則之變動即能完全消滅。

季節變動之性質已如上述。茲更論其效用於次：

一．季節變動能示吾人以季節性工業之失業程度，並使吾人對於某種變動得一正確之觀念。例如某種工業產品盛銷於夏，則該工業之失業人數苟在冬季增加，不能即謂爲由於經濟之衰落；一國之通貨在清賬季節需用較多，則一時之多量通貨不能即謂爲通貨膨脹，更無所謂提高物價之危險。

二．季節變動之研究能使吾人確定非季節性之變動。例如每

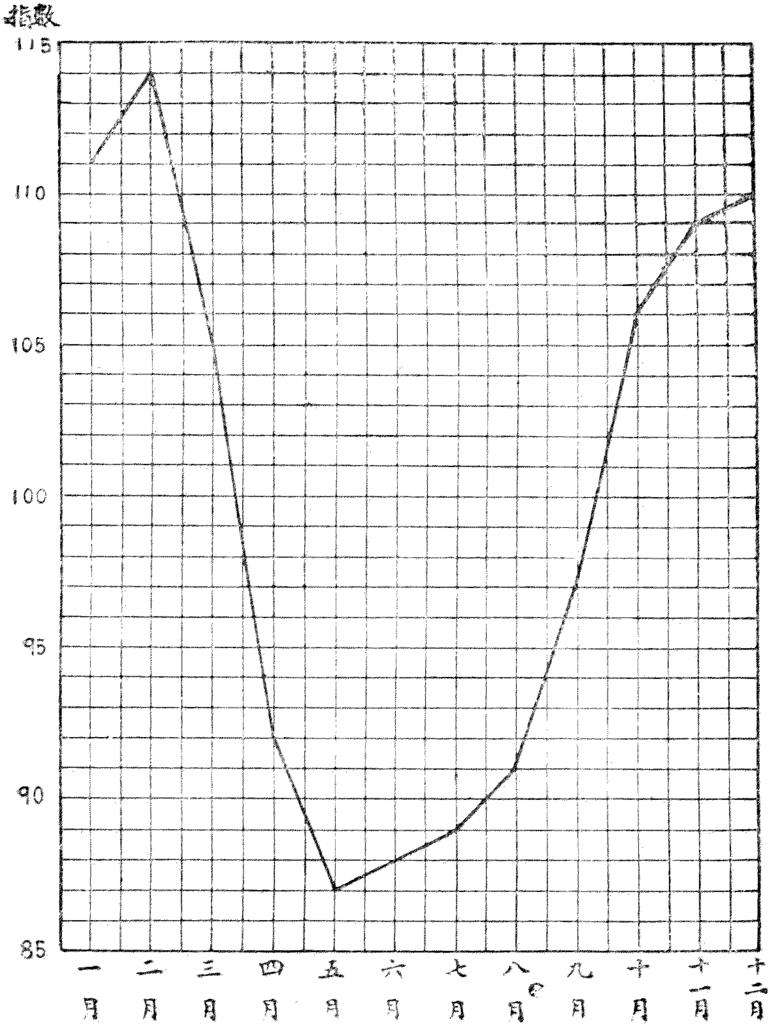
年冬季某種工業之失業人數常較其他各季爲多，設民國二十年十二月之失業人數多於同年六月，則此種失業人數之增加究僅受季節變動之影響，抑於季節變動之外尙有其他變動。此其他變動之測定非自時間數列中消除季節變動不可。

三.季節變動之硏究能使吾人確定循環變動之時日。例如季節變動未除去以前物價之下降始自一月，但在循環變動中物價之下降或在十二月已開始，或至二月方開始。故欲確定循環變動之時日，非先硏究季節變動而設法消除之不可。

四.季節變動之硏究能使吾人對於經濟定理之價值與以正當之評判。有時經濟定理似與事實相反，但不能遽以爲定理謬誤之證；蓋此事理之相反或由於季節變動未消除之故，亦未可知。故欲評論經濟定理之價值，亦非先硏究季節變動而設法消除之不可。

季節變動雖爲時間數列變動原因之一，然此非謂一切時間數列均有季節變動存在；故吾人在分析季節變動之前須先將原有數列作圖以斷定季節變動之有無。此項斷定之方法亦有數種。第一法則以此數列繪於單對數紙上，若某月常升某月常降，則季節變動卽可斷定其必然存在。所以必用單對數紙者，則以小數值之小差量與大數值之大差量從比例尺度上觀之初無二致。故用單對數紙作圖，則長期趨勢之性質與季節變動之有無皆可一覽而知。但此法有時亦不適用，則須用更精密之方法。可用透明紙作圖，每年數字各繪一圖，然後將此各圖疊而觀之，如其各年起伏升降之情形略相符合，則季節變動之存在可以斷言。

第十九圖 上海雞蛋價格之季節變動



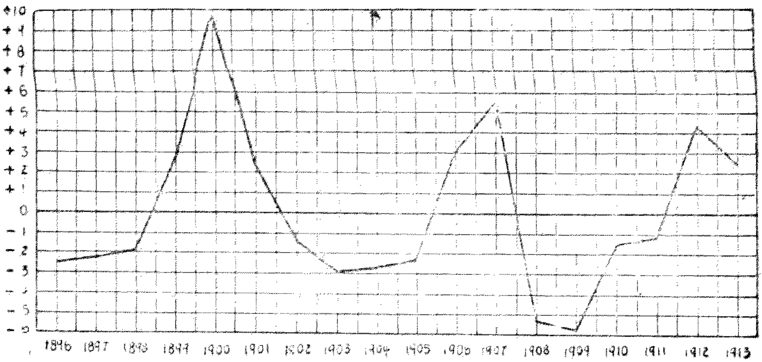
第四節　循環變動

寒暑溫涼相繼不息，此天時之循環變動也。繁榮衰落相替不絕，此經濟之循環變動也。天時之循環變動有春夏秋冬之別。經濟之循環變動亦可分爲四大時期，卽極盛期，清理期，衰落期與復興期是也。惟天時之循環有一定之時期，各期之始末亦略有一定之時日。經濟之循環則不然，其時期可短至三四年，亦可長至七八年或十一二年，各期之始末亦不能確定爲何年何月。然鑑往知來，苟能應用精密之統計方法，亦未始不可作種種之預測以爲經營事業之指南，此吾人於長期趨勢與季節變動之後所以不得不更研究循環變動也。

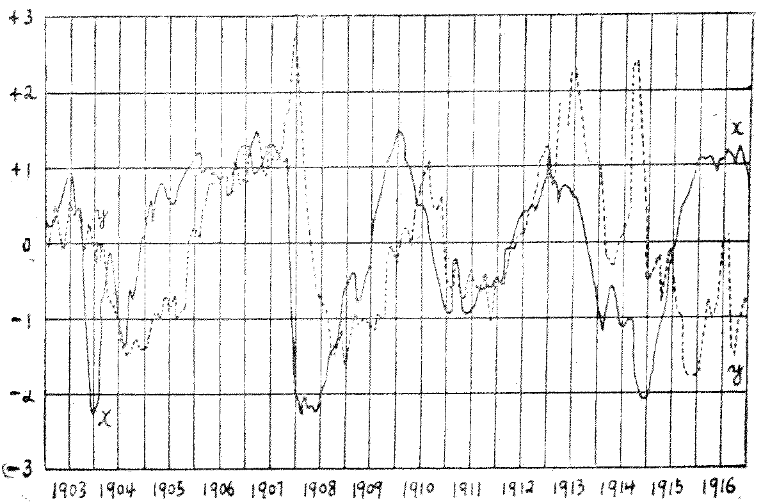
然則經濟現象何以有循環變動？其起因安在？關於此點衆說紛紜莫衷一是。茲就維廉斯麥脫之學說略譯其大意於下（錄自拙著統計新論中華書局出版），蓋取其較近事理且又通俗易解也。

維氏以爲吾人若信歷史爲不謬，則盛衰循環之變遷乃產業之常態耳。欲考其原亦至易明。近世產業之特點爲分工，而分工之結果有不可避免者三事：(一)一切物品之價值全恃乎需要，而此物品之需要完全與製造者之意志無干。製造者之所能爲者物品耳，非價值也。價値之決定全恃乎他人之欲望與購買力。故製造者千方百計以求一適當之需要，而社會上事物之足以影響此需要者又層出不窮，其危險爲何如。富力愈增，文明程度愈高，則需要之變化亦愈速。需要一變則產業亦必有隨之而衰落不振者。貧乏之社會欲望簡單，需要之變化亦少，然在富足之社會則欲望時變，至不定也。每一變遷則其影響之所屆不僅一兩項產業而已，而其他互相關聯之諸產業亦無不受其影響者也。(二)每一產業之成功必有待於其他產業。何則？物品之製成由原料至商品必經許多產業。故方其製造也，每一產業必須仰給於前一產業之製

第二十圖　1896—1913年英國物價指數之循環變動



第二十一圖　1903—1916生鐵產量與紐約短期商業票據之利率兩循環變動之比較



x 生鐵產量之循環變動　y 紐約短期商業票據利率之循環變動

品以爲之原料；及其成也，又必有待於下一產業之購求以爲之收容。此等產業前前後後成一聯環。此聯環中一節失其所，全體均有瓦解之虞。（三）一產業之成功與他產業所得之購買力亦有關係。任何一產業之失敗或由供給之無當，或由需要之變化，要必影響於其他諸產業；蓋一業失敗，此業失其購買力，於是而零售商，而批發商，而工廠，而他產業，轉輾影響以至無窮。

二三兩項所以明產業傳染之現象，而傳染現象乃盛衰循環之樞紐也。一業之衰往往引起他業之衰，此等現象吾人固熟知之。然健康之傳染不若疾病傳染之令人注意。其實產業衰落之極，向上運動漸生之時，一業之購買力增加，影響他業，轉輾影響以至全社會，其傳染之勢與衰落時初無二致也。

第五節　商情預測

觀第二十一圖，二數列之循環，雖時期稍有先後，而起伏之趨勢則同。此二數列，在前者名曰前引數列，在後者名曰落後數列。根據前引數列之升降，即可預測落後數列之升降。二個數列之關係即或不甚可靠，可多取幾個數列其過去之變動有充分之繫聯者，則其預測當較可恃。此種未來變動之預測名曰商情預測，而此等數列爲預測之根據者，名曰商情指標。

商情預測爲統計學中最重要方法之一，或竟可稱爲統計學之冠冕。吾人研究科學不特爲求知，且欲支配吾人所研究之現象，而最能表現此支配能力者即爲預測。統計學中預測之成效雖較遜於理化中之預測，然經驗與事實已證明其可能性。雖然，學者中仍有持懷疑之態度者，反對商情預測之主要理由約有三點。茲先列舉於下，然後討論其是非。

（一）自然現象與經濟現象有一極大異點，即前者與人慾無關

而後者則至少受其一大部影響；故前者之變動循一定不變之規律，而支配人類現象之規律則不能固定而不變。吾人在人類現象中所發見之常態，當然不能如自然現象無絲毫之變動，人類事實無一能與他一事實完全相似，蓋在經過時期內已受新因子之影響故也。尤其在商情預測中常有影響於預測事實之新因子，此新因子非他，卽預測自己是也。故預測卽爲變動原因之一。預測之事實常因人之預測而非出現不能悉如預測，或竟因此預測而絕不出現。使人能於一九一四年之初預測歐戰之爆發，則歐戰或竟可避免；卽不幸而不能避免，其時期之久暫與戰爭之經過亦必與吾人所經歷之歐戰逈異；此無他，預測影響於所測事實之變動故也。

（二）經濟現象變動之原因甚多，換言之，卽有許多自變量影響於一因變量之變動。吾人雖可應用響應方程式預測此因變量之變動，然所含自變量太多，計算太繁，事實上實爲不可能。

（三）統計預測根據數字上之關係。吾人分析之結果雖能確定一統計常態，但此常態祇能描寫過去，非謂未來之事實亦必將循此常態而變動也。

以上三點爲反對論者之主要理由。然據吾人見解，此三大理由均不足爲預測之病。第一理由且可藉此反證預測之效用。何則？歐戰之爆發苟因預測而能避免，是乃預測之效用而非預測之無能。生產者若因生產過剩之預測減少生產而使生產不致過剩，是亦預測之效用而非預測之無能。預測之事實果不利於吾人，則預測之目的原欲設法避免而冀其不至。衞生家預測瘟疫之將至，原欲預籌防疫之法以免瘟疫之流行，故預測之言不驗，有時卽可反證預測之價值及其必要。至於人類之慾望志願與行爲固能影響於經濟現象之變動，然大部統計預測係指集合事實而言，故支

配現象之規律不易避免，保險公司之能預測人口死亡率與火災率即其例也。以上所論係就第一點而言，茲請進而討論第二點。經濟現象變動之原動力雖有種種，然就二個，三個或四個自變量預測因變量之變動，所得之結果已與事實相差無幾。統計預測本非謂未來事實必與預測事實完全一致，然根據少數主要自變量預測經濟現象之近似變動，固為吾人能力之所及。至於第三點亦不難答辯。吾人根據已往事實預測未來事實本當有所保留。所謂保留卽假定未來之環境與過去環境相同之謂也。例如吾人根據已往之火災可預測未來之火災，然此預測必先假定未來之房屋建築與防火設備與以前相同。上海天文臺預測颶風若不改變方向必將經過上海，是天文臺之預測亦有所保留也。統計預測亦然。至於諸現象間之因果關係雖不能得之於統計數字，然苟能利用嚴密之經濟分析，則其間因果關係亦不難確定。僅憑統計數字之關係而誤測經濟現象之變動，雖不能謂為必無，然此乃預測者之無能而非預測方法之無能也。

預測經濟變動之方法有二：一曰經濟法，一曰統計法。前者先觀察事實漸推及現象之原因，然後就已得之原因分析其現在之狀況而推測未來之結果。後者則就統計數字研究諸現象間之繫聯響應，或就曲線之升降起伏研究諸現象盛衰時期之先後而推測未來之結果。經濟法依現象之原因推測未來之事實，故能知研究現象之確實變動；惟所謂現象之原因無客觀之標準，經濟學家預測之根據乃其對於現象原因之意見；故預測之結果隨預測者之主觀而異。社會主義者與資本主義者對於經濟恐慌之原因各有絕不相同之見解，憑各人之主觀預測未來之經濟恐慌，其結果必不相同，此則經濟法之缺點也。統計法雖不能確定原因，然因不為預測者主觀所蔽，故其結果常較勝於經濟法。有時亦可兼

用經濟分析以補統計法之不足。

統計學中預測商情之方法甚多。研究現象之長期趨勢，季節變動與循環變動均可用作預測之根據。惟較完善之預測方法則必先詳察諸現象在過去之關係，然後預測未來之變化，其最著者有哈佛法與響應法二種。茲以過涉專門，不贅述。

問題與習題

1. 經濟現象變動之原因有幾種?
2. 何謂長期趨勢?何以有長期趨勢?
3. 何謂季節變動?何以有季節變動?
4. 研究季節變動之目的何在?
5. 何謂循環變動?何以有循環變動?
6. 何謂意外變動?如何除去意外變動之影響?
7. 何謂商情預測?何謂商情指標?
8. 反對商情預測者之理由何在?試討論之。

第十章　機率與差誤正態曲線

第一節　機率

機率者，一事成敗機會之比率也。例如取一錢而擲之，則其結果不出二途：或面向上，或背向上，而面向上之機會與背向上之機會完全相等。面向上之機率爲二分之一，而背向上之機率亦二分之一。又如擲骰之結果共有六種，此六種之結果實現之機會亦均相等。故一擲而得一點者其機率爲 $\frac{1}{6}$，一擲而非一點者其機率爲 $\frac{5}{6}$。

假如某事實現之結果有 a 種，不實現之結果有 b 種，而此種種結果之機會又均相等，則此事實現之機率爲 $\frac{a}{a+b}$，不實現之機率爲 $\frac{b}{a+b}$，此分數乃表示某事實現與不實現之機會程度也。此程度大至於 1，小至於 0。就第一分數而言，如其爲 0，則表示此事之決不實現。如其爲一，則表示此事之必然實現。如其爲 $\frac{1}{2}$，則謂實現與不實現之機會各半而已。故一者實爲必然之數學符號。凡事只有實現與不實現之二途，故實現之機率與不實現之機率二者之總和必爲一。假以 p 爲實現之機率，則 $1-p$ 爲不實現之機率，例如彩票中獎之機率爲 $\frac{1}{20000}$，則不中獎之機率爲 $\frac{19999}{20000}$，以視中獎之機率相差多矣。

若一事之實現可有種種不同方法，而此種種方法能互相排

斥，則其實現之機率爲各項機率之總和；蓋如一事之實現可有 a 法又可有 a' 法，而全體可能之方法爲 c，則其機率爲 $\frac{a+a'}{c}$，而此分數等於 $\frac{a}{c}+\frac{a'}{c}$ 之總和也。

例如一囊內有紅球二十，白球十六，黑球十四，則取得紅球之機率爲 $\frac{20}{50}$，白球之機率爲 $\frac{16}{50}$，黑球之機率爲 $\frac{14}{50}$。紅球與黑球互相排斥，即一抽而不能同時取得，故抽取紅球或黑球之機率爲紅球之機率與黑球之機率之總和，即：

$$\frac{20}{50}+\frac{14}{50}=\frac{34}{50}$$

上例中互相排斥之假定甚爲重要。若不能互相排斥，兩種機率即不能相加。例如甲乙兩生解一難題，甲生解出之機率爲 p_1，乙生解出之機率爲 p_2，甲生能解時乙生未必不能解，乙生能解時甲生亦未必不能解，即彼此不能互相排斥，故甲生或乙生解出之機率不能以 p_1 與 p_2 相加求得。

以上所論者乃就一單純事件而言，今請進而論繁複事件。所謂繁複事件者，乃若干各自獨立之單純事件同時發生之總和現象也。例如取三骰而擲之，得一點者三，此乃繁複事件也。繁複事件實現之機率等於各單純獨立事件機率之乘積。例如二囊，一儲黑球七白球九，一儲黑球四白球十一，吾人試探手取之，從第一囊取得黑球之機率爲 $\frac{7}{16}$，從第二囊取得黑球之機率爲 $\frac{4}{15}$，然則從此二囊同時各得一黑球之機率幾何？第一囊共十六球，第二囊共十五球，自二囊各取一球，其結果共有 16×15 種，而第一囊中之七個黑球各球均有與第二囊中四個黑球之任何一個同時取得之機會。故二囊各得黑球之結果亦有 7×4 種，而所求之機率爲

$\frac{7\times4}{16\times15}$。而 $\frac{7\times4}{16\times15}$ 等於 $\frac{7}{16}\times\frac{4}{15}$，換言之卽等於二單純事件之機率相乘之乘積也。

今請以此原理用代數的符號表之。如有單純事件二，其一實現之方法有 a_1 種，不實現之方法有 b_1 種，第二事件實現之方法有 a_2 種，不實現之方法有 b_2 種，則第一事件可能之結果共有 a_1+b_1 種，第二事件可能之結果共有 a_2+b_2 種，而 a_1+b_1 中之任何一件均有與 a_2+b_2 中任何一件同時發生之機會，故此二事件同時發生之結果共有 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ 種，且其機率各自相等，而在此 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ 中二事共同實現之方法有 a_1a_2 種，二事均不實現之方法有 b_1b_2 種，前者實現後者不實現者有 a_1b_2 種，前者不實現後者實現者有 b_1a_2 種。故繁複事件之機率當如下：

二者均實現	$\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$
二者均不實現	$\frac{b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$
前者實現後者不實現	$\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$
前者不實現後者實現	$\frac{a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

單純事件如有三或三以上，其理亦同，要之繁複事件之機率乃獨立單純事件機率之乘積也。

今有獨立單純事件四而其機率爲 p_1, p_2, p_3 與 p_4，則四者均實現之機率爲 $p_1p_2p_3p_4$，四者均不實現之機率爲 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$，第一件實現而其他三者不實現之機率則等於 $p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$，餘可類推。

以上所論者爲機率之加法與乘法。有時加法與乘法二者必須兼用。例如擲骰二個而得五點之機率幾何？吾人試就此兩骰而名之，一曰甲，一曰乙，則擲得五點之方法不出下列四種：

甲骰	乙骰
1	4
2	3
3	2
4	1

甲骰擲得 1 點之機率爲 $\frac{1}{6}$，而乙骰擲得 4 點之機率亦 $\frac{1}{6}$，故此二者同時實現之機率等於 $\frac{1}{36}$，此就第一種結果言也。其他三種結果之機率亦各爲 $\frac{1}{36}$。而此四種結果均得五點。假以擲得五點之機率爲 p，則：

$$p=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$$

故擲骰二個共得五點之機率幾何，曰 $\frac{1}{9}$。設將此問稍變曰，擲骰二個至少可得五點之機率幾何？則其答案大不同矣。蓋既云至少五點，則六點，七點以至十二點均在其內。茲將各種結果之機率作表如下：

$$\text{兩骰擲得 12 點之機率}=\frac{1}{36}$$

$$\text{兩骰擲得 11 點之機率}=\frac{2}{36}$$

$$\text{兩骰擲得 10 點之機率}=\frac{3}{36}$$

$$兩骰擲得\ 9\ 點之機率=\frac{4}{36}$$

$$兩骰擲得\ 8\ 點之機率=\frac{5}{36}$$

$$兩骰擲得\ 7\ 點之機率=\frac{6}{36}$$

$$兩骰擲得\ 6\ 點之機率=\frac{5}{36}$$

$$兩骰擲得\ 5\ 點之機率=\frac{4}{36}$$

$$機率之總和=\frac{30}{36}$$

故擲得五點或五點以上之機率爲 $\frac{30}{36}$ 或 $\frac{5}{6}$。

但擲骰二個至少可得五點之機率與至多可得四點之機率之總和等於一。故設前者之機率爲 p, 後者之機率爲 q, 則:

$$p=1-q$$

故可先求 q, 然後由上式計算 p.

$$兩骰擲得\ 2\ 點之機率=\frac{1}{36}$$

$$兩骰擲得\ 3\ 點之機率=\frac{2}{36}$$

$$兩骰擲得\ 4\ 點之機率=\frac{3}{36}$$

$$機率之總和=\frac{6}{36}$$

$$即\quad q=\frac{6}{36}$$

$$\therefore \quad p=1-\frac{6}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

擲骰擲幣既有種種不同之結果，而此種種結果之機率又各不同，其中最有實現之機會者即其機率最大之一種。例如取幣二枚同時擲之，則其結果如下：

甲乙	甲乙	甲乙	甲乙
面面	面背	背面	背背

合而觀之祇有三種結果，而此三者之中一面一背之機率爲最大，故最有實現之機會。

二者俱面	$\frac{1}{4}$
一面一背	$\frac{1}{2}$
二者俱背	$\frac{1}{4}$

此三者機率之總和等於1，$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\right)$，蓋三者之中必有一種實現，固無疑也。若取幣三枚同時擲之，則可有下列八種結果：

甲乙丙	甲乙丙	甲乙丙	甲乙丙	甲乙丙	甲乙丙	甲乙丙	甲乙丙
面面面	面面背	面背面	背面面	面背背	背背面	背面背	背背背

合而觀之，要不出：(一)三面，(二)二面，(三)一面，(四)無面之四種，而其機率爲$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$。

但此各種結果之機率，其實可以不必如此計算。假定以實現之機率爲p，不實現之機率爲q，則擲幣二枚各種結果之機率，適爲下列展開式之各項。

$$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$$

本例 $p=q=\frac{1}{2}$，故其各種結果之機率可就下式得之：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

此卽第一例所得之結果。設幣有三枚，則：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$$

此卽第二例各種結果之機率也。

故吾人擲幣若干次內欲知各種結果或然的實現次數，則可依下式求之：

$$N(p+q)^n$$

式中 N 代表所擲次數而 n 則各個獨立事件之數也。故擲幣二枚各種結果之機率等於 $(p+q)^2$ 展開式之各項，若擲 N 次，則各種結果之次數等於 $N(p+q)^2$ 之各項。假令幣數爲三，則等於 $N(p+q)^3$。換言之，擲幣 n 枚各種結果之機率等於 $N(p+q)^n$ 之各項。

$(p+q)^n$ 展開式中各項之係數，可自下之算術三角形求得：

一	1	1									
二	1	2	1								
三	1	3	3	1							
四	1	4	6	4	1						
五	1	5	10	10	5	1					
六	1	6	15	20	15	6	1				
七	1	7	21	35	35	21	7	1			
八	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
九	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
十	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

若 n 爲 3，則查第三行，得各項之係數：

1　　3　　3　　1

若 n 爲 5，則查第五行，得各項之係數：

1　　5　　10　　10　　5　　1

餘可類推。

$(p+q)^n$ 展開式中各項之係數,亦可自下之組合公式求得:

$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!} \qquad (1)$$

${}_nC_r$　n 物中每 r 個組合之方法。

$$r!=1\times2\times3\times4\cdots\cdots\times r$$

展開式中 $p^{n-r}q^r$ 項之係數卽為 ${}_nC_r$,換言之卽等於:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

以 n 與 r 之數值代入卽得各項之係數。

n 種事件在 N 次試驗中各種結果之或然次數等於 $N(p+q)^n$ 展開式之各項,卽:

$$N(p+q)^n=N\{p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+{}_nC_3p^{n-3}q^3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}pq^{n-1}+q^n\} \qquad (2)$$

右邊括弧中第一項表示一切均實現之機率,第二項則為 n－1 個實現而 1 個不實現之機率,故最有實現之機率者無他,卽式中最大之一項耳。擲幣之一例中 $p=q=\frac{1}{2}$,故括弧中各項可改為:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

n 若為偶數,則中間一項為最大,n 若為奇數,則中間相等之二項為最大。若 n＝7,則:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}+\frac{7}{128}+\frac{21}{128}+\frac{35}{128}+\frac{35}{128}+\frac{21}{128}+\frac{7}{128}+\frac{1}{128}$$

故若取幣七枚擲之,則各種結果之機率如下:

七面無背	$\frac{1}{128}$
六面一背	$\frac{7}{128}$
五面二背	$\frac{21}{128}$
四面三背	$\frac{35}{158}$
三面四背	$\frac{35}{128}$
二面五背	$\frac{21}{128}$
一面六背	$\frac{7}{128}$
七背無面	$\frac{1}{128}$

此八種機率之總和等於一，蓋此八種中必有一項實現也。美國伊里諾大學學生十人嘗就此事試驗之，則知實在機率之分配與數學理論上之機率正相符合。據此十人各擲一百二十八次所得之平均結果如下：

七面	1.1
六面	7.0
五面	21.6
四面	36.8
三面	33.3
二面	20.3
一面	6.9
無面	1.1

維爾屯氏亦有同樣之擲骰試驗，取骰十二同時擲之，以得一二三各點者爲失敗，四五六各點者爲成功，共擲四千零九十六次，其所得結果見下表第二行，此實在頻數也。至於理論頻數可將下式展開求得：

$$4096\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{12}$$

卽下表第三行是也。

第五十五表　擲骰試驗中實在頻數與理論頻數之比較

得四五六各點之骰子數	實在頻數	理論頻數
0	0	1
1	7	12
2	60	66
3	198	220
4	430	495
5	731	792
6	948	924
7	847	792
8	536	495
9	257	220
10	71	66
11	11	12
12	0	1
	4096	4096

表示此二種分配之曲線見下頁二十二圖。

理論分配之算術平均數與標準差可自下列兩式求之：

$$A=np \tag{3}$$

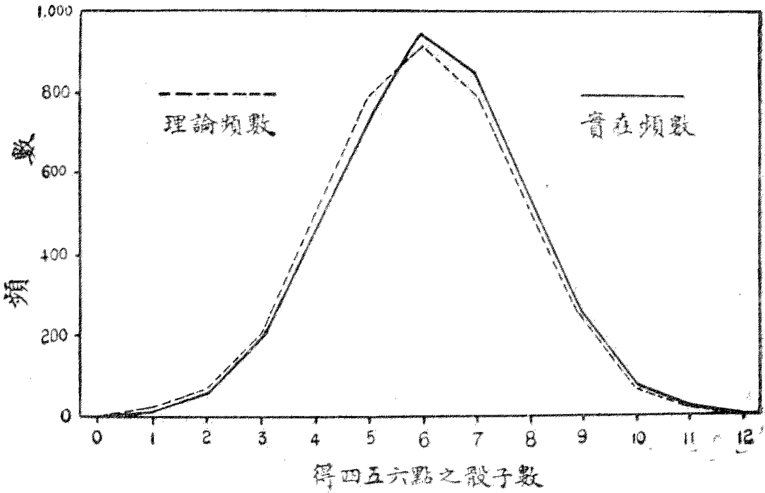
$$\sigma=\sqrt{npq} \tag{4}$$

A　算術平均數

σ　標準差

n　獨立單純事件之總數

第二十二圖　擲骰試驗中實在頻數與理論頻數之比較圖



p　成功之機率

q　失敗之機率

以本例之數值代入，則得

$$A = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1.732$$

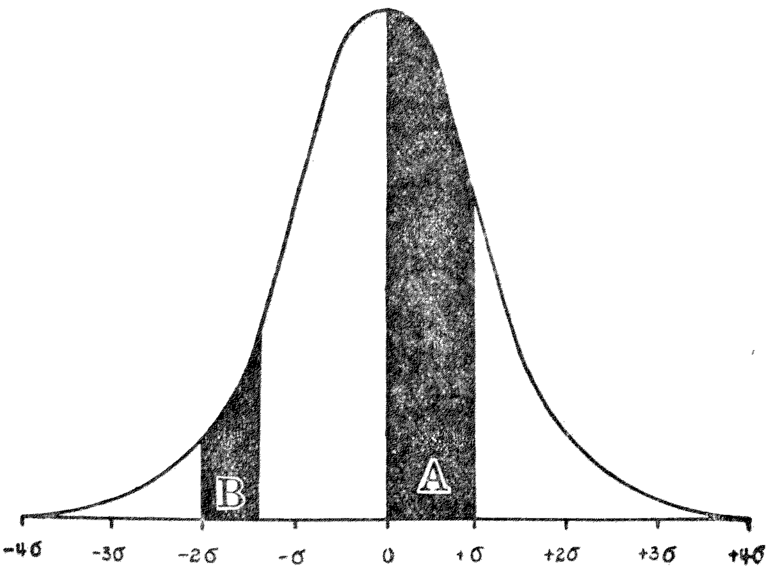
依據實在頻數計算，則算術平均數等於 6.139，而標準差等於 1.712。

第二節　差誤正態曲線

第二十二圖中之虛線即表示擲骰試驗中理論頻數的分配，乃一完全對稱之十二邊形。所有邊數（底線除外）等於骰子之數，

骰子如有六粒則爲六邊形，二十粒則爲二十邊形，餘類推。n 愈大則多邊形之邊數愈多而所作之曲線愈平滑，n 之數無窮大則可得一完全平滑之修勻曲線，如第二十三圖，是曰差誤正態曲線。差誤正態曲線爲數學家高斯氏首先發見，故又名高斯式曲線。

第二十三圖　差誤正態曲線



二項展開式雖可用以決定各種結果之理論頻數，然其計算甚爲繁重，不如根據此曲線之積分表而計算之較爲簡易，下文當舉例說明之。

此曲線之方程式可用種種形式表示，其最普通者爲：

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (5)$$

x　對於算術平均數之離中差(橫坐標)

y　頻數(縱坐標)

y_0　最大之縱坐標

σ　標準差

$e=2.7182818$

但　$y_0=\dfrac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

N　頻數之和

$\pi=3.14159$

故差誤正態曲線亦可以下列方程式表之:

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

平均數上之縱線分差誤正態曲線爲相等之二部分，在平均數之左右取相等之距離各引一縱線，此二縱線與差誤正態曲線所包含之面積若爲全面積之半，則此距離名曰機差，其數值與四分位差相等，蓋 Q_1 與 Q_3 間所包含之頻數亦爲總頻數之半故也。差誤正態曲線之機差與標準差之關係如下:

$$P.E.=0.6745\,\sigma \tag{7}$$

P.E.　機差

σ　標準差

頻數分配若取差誤正態曲線形式，則變量之在 A－P. E. 與 A＋P. E 之間者佔總頻數之一半。其在 $A-\sigma$ 與 $A+\sigma$ 之間者約佔總頻數三分之二。(68.268%)其在 $A-3\sigma$ 與 $A+3\sigma$ 之間者則幾佔總頻數之全部。(99.73%)

通常曲線之配合方法可分二步:(一)以 x 之各種數值遞次代入方程式而求 y 之數值;(二)就 x 與 y 之數值求得其曲線。

但就差誤正態曲線之方程式：

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

作圖，斷不能如此簡單；蓋式中除 x 外尚有 y_0 與 σ 亦須各給以一定之數值，故通常配合之法不能適用。統計學家嘗就此方程式中 y 與 y_0 之關係作成一表以便計算，是曰差誤正態曲線之縱坐標表。(附錄丁第三表)

吾人祇須就表中查得各縱線之高，乃將此各縱線之頂點連結卽得。例如離平均數 0.1σ 之點所豎立之縱線等於 $0.995y_0$。在 1σ 之縱線等於 $0.607y_0$ 在 2σ 之縱線等於 $0.135y_0$ 餘類推，而 y_0 之數值則可依下式求得：

$$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{N}{2.506628\,\sigma}$$

故自一定之數列配以差誤正態曲線而欲比較理論分配與實在分配之同異，則可分爲下列之九步：

(一)將原有數列之實在分配繪成多邊形。

(二)令實在分配之算術平均數爲差誤正態曲線之中心點，使此點爲 x = 0。

(三)以標準差爲單位就 x 軸分作若干標準距離如 0.1σ, 0.2σ 或 0.01σ, 0.02σ 等，分得愈小則所得之曲線愈爲平滑。

(四)在 x 軸上求得此等標準距離之地位。

(五)用下列公式計算 y_0 之值：

$$y_0 = \frac{N}{2.506628\,\sigma}$$

(六)從平均數地位豎立等於 y_0 之值。

(七)令 x 等於 0.1σ, 0.2σ 或 0.01σ, 0.02σ 等而計算相當的高度，法以 y_0 之值乘附錄丁第三表中 $\frac{y}{y_0}$ 適當之數卽得。

(八)就 x 軸上各點依次豎立縱線等於第七條所得之高度。

(九)將此等縱線頂點連結卽得差誤正態曲線。

惟須注意者，此處 y_0 及第五十七表之計算均須用組距單位。蓋實在頻數既以組表示，求得之計算頻數亦應改爲組距單位以便比較也。

茲就美國電話公司 995 用戶每年通話頻數分配先求其算術平均數與標準差，然後再依照上法配以差誤正態曲線。

第五十六表　美國 995 電話用戶每年通話之頻數分配

組數	中點 $\bar{m}$	頻數 f	對於假定平均數之離中差（組距單位）x'	fx'	fx'^2
0—50	25	0	−10	0	0
50—100	75	1	−9	−9	81
100—150	125	9	−8	−72	576
150—200	175	19	−7	−133	931
200—250	225	38	−6	−228	1368
250—300	275	50	−5	−250	1250
300—350	325	95	−4	−380	1520
350—400	375	85	−3	−255	765
400—450	425	115	−2	−230	460
450—500	475	132	−1	−132	132
500—550	525	144	0	0	0
550—600	575	116	1	116	116
600—650	625	79	2	158	316
650—700	675	54	3	162	486
700—750	725	31	4	124	496
750—800	775	11	5	55	275
800—850	825	5	6	30	180
850—900	875	6	7	42	294
900—950	925	2	8	16	128
950—1000	975	1	9	9	81
1000—1050	1025	1	10	10	100
1050—1100	1075	1	11	11	121
		995		−956	9676

［註］資料來源：米爾斯所著之統計方法。

$$A = 525 - \frac{956}{995} \times 50$$

$$= 476.96$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9676}{995} - \left(\frac{956}{995}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9.724623 - .960804^2}$$

$$= \sqrt{9.724623 - .923144}$$

$$= \sqrt{8.801479}$$

第五十七表　差誤正態曲線之配合(美國電話公司 995 用戶每年通話頻數之分配)

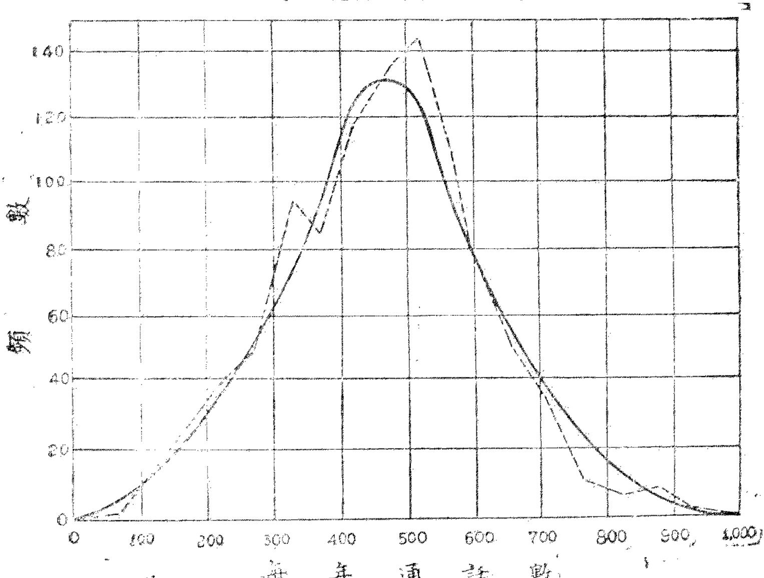
每年通話數 $\bar{m}$	用戶數 f	對於算術平均數之離中差 x (組距單位)	$\frac{x}{\sigma}$	$\frac{y}{y_0}$	y
25	0	−9.0392	−3.06	.00153	0.21
75	1	−8.0392	−2.72	.02474	3.33
125	9	−7.0392	−2.38	05888	7.91
175	19	−6.0392	−2.05	.12230	16.44
225	38	−5.0392	−1.71	.23176	31.15
275	50	−4.0392	−1.37	.39123	52.59
325	95	−3.0392	−1.03	.58834	79.08
375	85	−2.0392	−0.69	.78817	105.95
425	115	−1.0392	−0.35	.94055	126.43
475	132	−0.0392	−0.01	99995	134.41
525	144	0.9608	0.32	.94856	127.71
575	116	1.9608	0.66	.80429	108.11
625	79	2.9608	1.00	.60653	81.53
675	54	3.9608	1.34	.40747	54.77
725	31	4.9608	1.68	.24385	32.78
775	11	5.9608	2.02	.13000	17.47
825	5	6.9608	2.36	.06174	8.30
875	6	7.9608	2.70	.02612	3.51
925	2	8.9608	3.03	.01015	1.36
975	1	9.9608	3.37	.00342	0.46
1025	1	10.9608	3.71	.00103	0.14
1075	1	11.9608	4.05	.00027	0.04
	995				993.48

[註]　資料來源——米爾斯所著之統計方法。

此是未經校正之數值。若用薛伯氏校正法，則

$$\sigma=\sqrt{8.801479-\frac{1}{12}}$$
$$=\sqrt{8.801479-.083333}$$
$$=\sqrt{8.718146}$$
$$=2.953\text{(組距單位)}$$

第二十四圖　差誤正態曲線配合圖（美國電話公司995用戶每年通話頻數之分配）



吾人就統計事件配合差誤正態曲線，實在分配曲線與差誤正態曲線二者有時不甚相合。考其原因不出二端：(一)統計事件往往不能將一切數量搜羅無遺。例如計算我國人之平均高度，斷

不能盡人而量之，吾人所能爲者，不過選最能代表之一羣而量之，將其平均數作爲吾國人之平均高度，即所謂抽樣是也。然而抽樣法以局部代表全部，究不盡合，抽樣十次，十次之結果決不盡同，差誤正態曲線之異乎實在分配或即由於抽樣結果上落之影響。抽樣所包含之項數愈多，則此影響稍減，而其分配愈近於差誤正態曲線。故差誤正態曲線所以表示事物之理論分配而將例外影響消除，差誤正態曲線之功用即在於此。(二)有時實在分配與差誤正態曲線之差異，由於事物自身之分配本不取差誤正態曲線之形態，故此類事件不能以差誤正態曲線表示也。

然欲從事於實在頻數與理論頻數之比較，必先有較精密之理論頻數。差誤正態曲線下之縱線尙不能代表精密之頻數，吾人之頻數必以曲線下之面積表示較爲正確。曲線下之全面積爲頻數之總和，吾人如能知各部對於全面積之比，則各部分之面積不難求得。附錄丁第四表即所以計算各部之面積者也。此項面積均從 y_0 算起，差誤正態曲線兩邊對稱，故表中數值無論正負均可適用。例如從 y_0 與 $+\sigma$ 地方所豎之縱線間之面積佔全面積之0.3413，蓋查表中 $\frac{x}{\sigma}=1$ 則得 0.3413 故也。(從 $-\sigma$ 至 y_0 之面積亦爲全面積之 0.3413) 第二十三圖中之 A 即佔全面積之0.3413。

設從 -1.4σ 與 -2σ 之兩點各豎縱線與差誤正態曲線相交，則此二縱線與曲線底線間之面積（第二十三圖中之 B）究有幾何？依附錄丁第四表從 y_0 至 -1.4σ 之縱線間之面積爲全面積之 0.4192，從 y_0 至 -2σ 之縱線間之面積等於全面積之0.4773，兩者相減即得所求之面積等於全面積之0.0581。以0.0581乘頻數之總和 N 即得理論頻數。

茲仍就美國電話公司之例由差誤正態曲線下之面積表計算理論頻數於下表。

第五十八表　由差誤正態曲線下之面積表計算理論頻數

(美國電話公司995用戶每年通話頻數之分配)

組限	對於算術平均數之離中差 $\frac{x}{\sigma}$	各縱線與 y_0 包含之面積(對於全面積之比)	各縱線與 y_0 間包含之頻數	各組之理論頻數	
0	−3.23	0.4993810	496.88		
50	−2.89	0.4980738	495.58	0—50	1.92 (註)
100	−2.55	0.4946139	492.14	50—100	3.44
150	−2.22	0.4867906	484.36	100—150	7.78
200	−1.88	0.4699460	467.60	150—200	16.76
250	−1.54	0.4382198	436.03	200—250	31.57
300	−1.20	0.3849303	383.01	250—300	53.02
350	− .86	0.3051055	303.58	300—350	78.63
400	− .52	0.1984682	197.48	350—400	106.90
450	− .18	0.0714237	71.07	400—450	126.41
500	+ .16	0.0635595	63.24	450—500	134.31
550	+ .495	0.1896881	188.74	500—550	125.50
600	+ .83	0.2967306	295.25	550—600	106.51
650	+1.17	0.3789995	377.10	600—650	81.85
700	+1.51	0.4344783	432.31	650—700	55.21
750	+1.85	0.4678432	465.50	700—750	33.19
800	+2.19	0.4857379	483.31	750—800	17.81
850	+2.53	0.4942969	491.83	800—850	8.52
900	+2.87	0.4979476	495.46	850—900	3.63
950	+3.20	0.4993129	496.82	900—950	1.36
1000	+3.54	0.4997999	497.30	950—1000	0.48
1050	+3.88	0.4999478	497.45	1000—1050	0.15
1100	+4.22	0.4999878	497.49	1050以上	0.05
					995.00

〔註〕 依理論分配則 -3.23σ 之下尚有頻數 0.62，但在本例中爲無意義，故以之併於 0—50 一組中。

本章應用公式

$$
{}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{1}
$$

$$
N(p+q)^n=N\{p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+{}_nC_1p^{n-3}q^3+\cdots\cdots +{}_nC_{n-1}pq^{n-1}+q^n\} \tag{2}
$$

$$
A=np \tag{3}
$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \tag{4}$$

$$y = y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

$$P.E. = 0.6745\,\sigma \tag{7}$$

問題與習題

1. 解釋下列各名詞:
   a. 機率。
   b. 互相排斥事件。
   c. 獨立事件。
   d. 差誤正態曲線。
   e. 機差。
2. 區別下列各名詞:
   a. 單純事件與繁複事件。
   b. 實在頻數與理論頻數。
3. 何謂機率之加法與乘法?試各舉例以明之。
4. 擲骰二粒,求各點之機率。
5. 擲骰三粒,求各點之機率。
6. 今有二甕,甲甕內有白球八個,黑球七個,乙甕內有白球三個,黑球九個,設自甲乙二甕各取一球,求下列各種結果之機率:
   a. 二個白球。
   b. 一白一黑。
   c. 二個黑球。
7. 擲錢四枚,連續一百次,求下列各種出現之次數:
   a. 四面。
   b. 三面一背。
   c. 二面二背。

d. 一面三背。

e. 四背。

8. 下表為美國1431白種男孩年齡自一月至二月之體重:

a. 計算標準差與機差。

b. 配合差誤正態曲線。每間隔 0.25σ 豎一縱線。

c. 繪實在曲線與配合曲線。

d. 確定各組之理論頻數。

美國1431白種男孩之體重表

體重(磅)	男孩數
$5\frac{1}{4}$—$6\frac{1}{4}$	12
$6\frac{1}{4}$—$7\frac{1}{4}$	31
$7\frac{1}{4}$—$8\frac{1}{4}$	87
$8\frac{1}{4}$—$9\frac{1}{4}$	136
$9\frac{1}{4}$—$10\frac{1}{4}$	254
$10\frac{1}{4}$—$11\frac{1}{4}$	314
$11\frac{1}{4}$—$12\frac{1}{4}$	282
$12\frac{1}{4}$—$13\frac{1}{4}$	186
$13\frac{1}{4}$—$14\frac{1}{4}$	81
$14\frac{1}{4}$—$15\frac{1}{4}$	36
$15\frac{1}{4}$—$16\frac{1}{4}$	10
$16\frac{1}{4}$—$17\frac{1}{4}$	0
$17\frac{1}{4}$—$18\frac{1}{4}$	0
$18\frac{1}{4}$—$19\frac{1}{4}$	0
$19\frac{1}{4}$—$20\frac{1}{4}$	1
$20\frac{1}{4}$—$21\frac{1}{4}$	0
$21\frac{1}{4}$—$22\frac{1}{4}$	1
	1431

[註] 上表自鄧獨克之「統計方法習題」轉載。

附　錄　甲

英華對照統計名詞

（附人名地名索引）

下列統計譯名係根據民國二十二年中國統計學社社務會議初讀通過統計名詞。其未經社務會議通過而新增補名詞則用括弧以示區別。

例：(Cumulative frequency method)（累積頻數法）爲新添入之名詞。至於吾人認爲譯名尚有更正之必要者則置括弧於提議改正譯名之兩端以示區別。

例 Regression 回應（響應），上字中［回應］爲社務會議通過之譯名，［響應］爲吾人提議改正之譯名。

民國二十三年七月統計譯名經中國統計學社第四屆年會通過。大體上與上次社務會議初讀通過者相同，但亦有不少變更。例如「轉矩」之改爲「動差」等等。本書暫不照改，有下列三種原因：（一）版已排就修改困難；（二）尙有德法日各國名詞，正由本屆理事會另組委員會設法補入，故不如俟全部編成後，再行修正；（三）本屆所通過之名詞亦尙有應商榷者。例如 trend 譯爲「趨向」，而 secular trend 譯爲「長期趨勢」。bias 譯爲「偏性」而 formula bias 譯爲「公式之偏誤」。同一 trend，一曰趨向，一曰趨勢。同一 bias，一曰偏性，一曰偏誤。似尙有討論之餘地。至於 type bias 譯爲「型偏」，而 weight bias 譯爲「偏權」而不作「權偏」，恐係手民之誤。因此種種故本書暫照上屆社務會議通過之稿。最後修正姑待來日。

A

Abscissa, 橫坐標.

Absolute dispersion, 絕對離中趨勢.

Absolute variation, 絕對離中趨勢.

Accidental fluctuation, 無規則變動.

Actual frequency, 實在頻數.

(Actual limits), (實際組限).

Aggregative index number, 總值式指數.

Alignment chart, 直線圖.

All over, 以上.

All under, 以下.

Alphabetic order, 依字母次序.

Amplitude, 變幅.

(Analysis chart), (分析圖).

(Angular curve), (角曲線).

Anisotrapic distribution, 異向異質分配.

Annual increment, 年增量.

Auti-logarithm, 反對數.

(Approximately continuous series), (近似連續數列).

(Arbitrary average), (假定平均數).

Arbitrary mean, 假定中數.

(Area chart), (面積圖).

Arithmetic average, 算術平均數.

Arithmetic index number, 算術式指數.

Arithmetic series, 算術級數.

(Arithmetic triangle), (算術三角形).

Array, 序列, 列.

Ascending order, 遞升次序.

Associated variates, 相聯變量.

Association, 伴聯.

(Assumed average), (假定平均數).

Assumed mean, 假定中數.

Asymmetrical distribution, 非對稱分配.

Asymmetry, 非對稱.

Asymptote, 漸近線.

Attenuation, 減弱.

Attribute, 屬性.

Average, 平均數.

Average deviation, 平均差.

Axis, 軸.

B

Bar chart, 條形圖.

Bar diagram, 條形圖.

Base, 基, 基期.

Base period, 基期.

Bias, 偏誤.

Bimodal, 雙峯.

Binomial distribution, 二項分配.

Binomial equation, 二項方程式.

Binomial expansion, 二項展開式.

Binomial series, 二項級數.

Biometry, 生物統計學.

Blank form, 調查表式.

Block diagram, 直方圖.

(Book chart), (書圖).

Broadened base, 擴張基期

Broken series, 非連續數列.

Broken trend, 斷線長期趨勢.
Business barometer, 商情指標.
Business cycles, 商情循環.
Business forecasting, 商情預測.

C

Caption, 縱標目.
Cartogram, 統計地圖.
Case method, 個案法.
Case work, 個案調査.
Categorical series, 類別數列.
(Census), (人口清查).
Central ordinate, 中縱坐標.
Central tendency, 集中趨勢.
Central value, 集中值.
Chain base, 連鎖基期.
Chain index numbers, 連鎖指數.
Chain relatives, 鎖比.
Chance, 機.
Characteristic, 首數; (特性)
Charlier check, 薛立愛氏校核法.
Chart, 圖.
Chart field, 圖位.
Charting, 製圖.
(Chi-square test of goodness of fit), (配合適度之 λ^2 測驗法).
Chronological order, 依時次序.
(Circle chart), (圓形圖).
Circular test 循環測驗法.
Class, 組.
Classification, 分類.
Classified frequency series, 分組類數數列.
Class index number, 類指數.
Class interval, 組距.
Class limit, 組限.
Class mark, 組中點.
Class mid-value, 組中點.
Class weight, 類權數.
Code, 分類記號.
Coefficient, 係數.
Coefficient of association, 伴聯係數
Coefficient of contingency, 列聯係數.
Coefficient of correlation, 繫聯係數.
Coefficient of disturbancy, 反常係數.
Coefficient of first order, 一次係數.
Coefficient of multiple correlation, 複繫聯係數.
Coefficient of partial correlation, 偏繫聯係數.
Coefficient of pth order, p 次係數.
Coefficient of regression, 回應係數 (響應係數).
Coefficient of second order, 二次係數.
Coefficient of skewness, 偏態係數.
Coefficient of variation, 離中係數.
Coefficient of zero order, 零次係數.
Colored map, 彩色統計地圖.
Column, 縱行; (行)
Column diagram, 直方圖.
Commodity weight, 物品權數.
Compartment, 局部.
Compensating fluctuations, 補償變動.
Compilation, 編製.
Component part bar diagram, 條形

成分圖.
Component part diagram. 成分圖.
Component part pie diagram, 圓形成分圖.
Composite bar diagram, 組合條形圖.
(Composite curve), (組合曲線).
Composite unit, 組合單位.
Compound event, 繁複事件.
(Computation chart), (計算圖).
Computed value, 計算價值.
Concentration, 集中.
Concurrent deviations method, 符號同異法(相應增減法).
(Condition series), (質量數列).
Constant, 常數.
Constant weight, 固定權數.
Contingency, 列聯.
Continuous series, 連續數列.
Contrary classes 反組.
Contrary frequencies 反組頻數.
Co-ordinate classes, 同等類.
Correlation, 繫聯.
Correlation ratio, 繫聯比.
Correlation ratio of x on y, 從y繫聯比(x對y之繫聯比).
Correlation ratio of y on x, 從x繫聯比(y對x之繫聯比).
Correlation surface, 繫聯面.
Correlation table, 繫聯表.
Costing index number, 成本指數.
Cost of living index number, 生活費指數.
(Counting), (計數).
Covariation, 同變.
Crest, 峯.
Cross-check, 互校.
Cross-hatched map, 交叉線統計地圖.
Crossing formula, 交叉公式.
Cross moment method, 乘積率法.
Crude mode, 近似衆數.
Crude moment, 補助轉矩; 補助動矩.
Cumulative block diagram, 累積直方圖.
Cumulative frequency curve, 累積頻數圖.
(Cumulative frequency method), (累積頻數法).
(Cumulative frequency of first order), (第一累積頻數).
(Cumulative frequency of second order), (第二累積頻數).
(Cumulative frequency of third order), (第三累積頻數).
Cumulative frequency polygon, 累積多邊圖.
Cumulative frequency table, 累積頻數表.
(Cumulative frequency table on the "less than" basis), (較小制累積頻數表).
(Cumulative frequency table on the "more than" basis), (較大制累積頻數表).
Cumulative table, 累積表.
Curve, 曲線.
Curve fitting, 曲線配合.
Curvilinear regression, 曲線回應(曲

綜響應).

Curvilinear trend, 曲線長期趨勢.

(Cyclical deviation), (循環變差).

(Cyclical fluctuation), (循環變動).

D

Data, 資料.

Decile, 十分位數.

Decrement rate, 減率.

Dependent variable, 因變數.

Descending order, 遞降次序.

(Desk chart), (桌圖).

Determinant, 行列式.

Deviation, 差離;離中差.

Diagonal method, 對角線法.

Dichotomy, 二分類法.

Direct correlation, 正繫聯.

(Discontinuous series), (非連續數列).

Discrete series 非連續數列.

Dispersion, 離中趨勢

Distribution, 分配

Doolittle method, 杜立特氏計算方程式法.

Dot map, 點式統計地圖.

Double frequency table, 二項類數表.

Double logarithmic scale, 雙對數尺度.

Double table, 雙項表.

Downward bias, 向下偏誤.

E

Edit, 校勘.

Elimination of trend, 消除長期趨勢.

Empirical mode, 近似衆數.

Empirical probability, 試驗機率.

Enquiry, 詢問.

Enumeration method, 點查法.

Enumerator, 查點人.

Episodic movement, 特出變動.

Equation, 方程式.

Equation of normal curve of error 差誤正態曲線方程式.

Error of sampling, 抽樣的差誤.

Estimation, 估量.

Event, 事件.

Exponent, 冪數.

Exponential average, 變冪平均數.

Exponential series, 變冪級數.

(Expressed limits), (外表組限).

Extrapolation, 外推法.

F

Factor reversal test, 因子互換測驗法.

Failure, 敗.

(Field method), (實地調查法).

First moment, 一次轉矩;一次動矩.

First quartile, 第一四分位數.

Fisher's ideal formula, 費暄氏理想公式.

Fit, 配合.

Fixed base, 固定基期

Fixed base index numbers, 定基指數.

Fixed base relatives, 固定價比.

Fixed weighting, 固定加權法.

Fixed weights, 固定權數.

Forecasting sequence, 預測順序.

Freehand method, 隨手畫法.

Frequency, 頻數.

Frequency curve, 頻數曲線.

Frequency distribution, 頻數分配.

Frequency histogram, 頻數直方圖.

Frequency polygon, 頻數多邊形.

Frequency series, 頻數數列.

Frequency surface, 頻數面.

Frequency table, 頻數表.

Function, 函數.

G

Gamperg curve, 甘佩氏曲線.

Gantt progress chart, 甘悌氏進行圖.

Gaussian curve, 高斯式曲線.

General index number, 總指數.

General table, 總表.

(Geographical classification), (地理的分類).

Geographical order, 依地次序.

Geometric average, 幾何平均數.

Geometric index number, 幾何式指數.

Geometric series, 幾何級數.

Given period, 計算期.

Goodness of fit, 配合的適度.

Grand total, 共計.

Graph, 線圖.

Grouped frequency series, 分組頻數數列.

(Grouped frequency table), (分組頻數表).

Group index number, 類指數.

H

Hand card, 手片.

Harmonic average, 倒數平均數.

Harmonic index number, 倒數式指數

Heading, 標目.

Heterogeneity, 異質.

Histogram, 直方圖.

(Historical classification), (歷史的分類).

Historical series, 時間數列.

Homogeneity, 同質.

Horizontal axis, 橫軸.

Horizontal bar diagram, 橫條形圖.

Horizontal scale, 橫尺度.

Hyperbola, 雙曲線.

I

(Illustration chart), (說明圖).

Increment rate, 增率.

Independent event, 獨立事件.

Independent variable, 自變數.

Index number, 指數.
Index number of imports and exports, 進出口貨指數.
Index number of physical production, 生產數量指數.
Index number of prices, 物價指數.
Index number of retail prices, 零售物價指數.
Index number of volume of trade, 貿易量指數.
Index number of wages, 工資指數.
Index number of wholesale prices, 躉售物價指數;批發物價指數.
Index of correlation, 繫聯指數.
(Inertia of large numbers), (大量惰性).
Informant, 被詢人.
Intercept, 截數.
Interpolation, 內推法.
Inverse correlation, 負繫聯.
Inverse exponential average, 倒冪平均數.
Investigation, 調查.
Investigator, 考查人.
Investment index number, 投資指數.
Irregular fluctuations, 無規則變動.
Isotrapic distribution, 異向同質分配.
Item, 項目.

J

J-shaped distribution, J 形分配.

K

Key, 圖說明.
Kurtosis, 峯態.

L

Lag, 落後.
Lagging correlation, 落後繫聯.
Law of great numbers, 大數定律.
(Law of statistical regularity), (統計常態之法則).
Lead 前引.
Legend, 圖說明.
Leptokurtic, 尖峯態的.
Linear correlation, 直線繫聯.
Linear regression, 直線回應 (直線嚮應).
Linear trend, 直線長期趨勢.
Line of regression, 回應線 (嚮應線).
Line of regression of x on y, 從 y 回應線 (x 對 y 之嚮應線).
Line of regression of y on x, 從 x 回應線 (y 對 x 之嚮應線).
Line of trend, 長期趨勢線.
Link index numbers, 連環指數.
Link relatives, 環比.
(Location of mode by grouping), (併組法).

Logarithm, 對數.
Logarithmic average, 對數平均數.
Logarithmic scale, 對數尺度.
Logistic curve, S 形曲線.
Long-time trend, 長期趨勢.
Lorenz curve, 羅倫氏曲線.
Lower limit, 下限.
Lower limit inclusive, 下限包含.
Lower quartile, 下四分位數.

M

Machine card, 機器片.
Magnitude, 量.
Major heading, 大標目.
Mantissa, 尾數.
Maximum ordinate, 最大縱坐標.
Mean, 中數.
Mean deviation, 平均差.
Measure of characteristics, 特性的計量.
Measure of reliability, 可靠量.
Median, 中位數.
Median class, 中位數所在組.
Median index number, 中位數式指數.
Median-link-relative method, 環比中位數法.
Meso kurtic, 正峯態的.
Method of least squares, 最小平方法(最小二乘法).
(Method of maxima and minima), (極大極小法).
Method of moving averages, 移動平均數法.
Method of moving medians, 移動中位數法.
Method of rank correlation, 等級繫聯法.
(Method of unlike signed pairs), (異號成對法).
Minor heading, 小標目.
Miscellaneous, 雜項.
Modal class, 衆數所在組;密集組.
Modal group, 衆數所在組;密集組.
Mode, 衆數.
Mode index number, 衆數式指數.
Modulus, 根率.
Moment, 轉矩;動矩.
Monthly increment, 月增量.
Multimodal, 多峯.
Multiple contingency, 複列聯.
Multiple correlation, 複繫聯.
(Multiple-dot map), (密點統計地圖).
Multiple frequency table, 多項類數表.
Mutual deviation, 相互平均差.
Mutually exclusive event, 互相排斥事件.

N

Natural scale, 實數尺度.
Negative correlation, 負繫聯.
Net correlation, 偏繫聯.
Non-linear correlation, 非直線繫聯.

Non-linear regression, 曲線回應(曲線響應).

Non-linear trend, 曲線長期趨勢.

(Non-scientific classification), (非科學的分類).

Normal correlation, 正態繫聯.

Normal correlation surface, 正態繫聯面.

Normal curve of error, 差誤正態曲線.

Normal equations, 正則方程式.

Normal frequency distribution, 正態頻數分配.

Normal histogram, 正態直方圖.

Normal law of error, 差誤正態定律.

Normal values, 正則價值.

O

Observed frequencies, 觀察頻數.

Observed values, 觀察價值.

Ogive, 累積頻數圖.

Open ends, 餘空兩端.

Order, 次序.

Ordinate, 縱坐標.

Origin, 原點.

Original table, 原表.

Original values, 原來價值.

P

Parabola, 拋物線.

Parameter, 參數.

Part correlation, 部分繫聯.

Partial association, 偏伴聯.

Partial contingency, 偏列聯.

Partial correlation, 偏繫聯.

Partial regression, 偏回應(偏響應).

Partial regression coefficient, 偏回應係數(偏響應係數).

Pearsonian coefficient, 皮爾生氏係數.

Percentile, 百分位數.

Perfect correlation, 整繫聯.

Period, 期.

Periodicity, 週期.

Periodogram analysis, 週期循環分析.

Permanence of small numbers, 小數永存.

Personal enquiry, 訪問.

Pictogram, 像形圖.

(Pie), (圓形圖).

Pin map, 插針統計地圖.

Platy kurtic, 平峯態的.

Point of inflection, 折形點.

Population, 人口, 全域.

Positive correlation, 正繫聯.

Potential series, 定冪級數.

Price relative, 價比.

Primary data, 原始資料.

Primary investigation, 原始調查.

Primary source, 原始來源.

Primary statistics, 原始資料.

Primary survey 原始調查.

Principal moment, 主要轉矩; 主要動矩.

Probability, 機率.
Probability a priori, 先定機率.
Probability integral, 機率積分.
Probable error, 機差.
Product moment method, 乘積率法.
Pth degree parabola, p 次拋物線.
Pth moment, p 次轉矩; p 次動矩.
Publication table, 刊佈表.
Punch, 打點.
Punching machine, 打點機.
Purposive sampling, 計劃抽樣.

Q

Quadrature method, 積分法.
Quadruple table, 四項表.
(Qualitative classification), (性質的分類).
(Quantitative classification), (數量的分類).
Quantity index number, 數量指數.
(Quartered-dot-map), (四分點統計地圖).
Quartile, 四分位數.
Quartile coefficient, 四分位係數.
Quartile deviation, 四分位差.
Questionnaire, 調查表式.

R

Random fluctuation, 無規則變動.
Random sampling, 簡單抽樣.
Range, 全距.
Ratio, 比;比率.
Ratio-actual-to-ordinate method, 比率平均計算法.
Ratio scale, 比例尺度.
Reciprocal, 倒數.
Rectangular coordinates, 直縱橫坐標.
Rectilinear trend, 垂直線長期趨勢.
Registration method, 登記法.
Regression, 回應. (繆應).
Regression coefficient, 回應係數. (繆應係數).
Relative dispersion, 相對離中趨勢.
Relative price, 價比.
Relatives, 比.
Relative variation, 相對離中趨勢.
Residual movement, 淨餘變動.
Returns, 答案.
Root-mean-square deviation, 標準差.
Row, 橫行;(列).
Ruling, 行格.

S

Sample, 樣; 樣本.
Sampling, 抽樣.
Sampling by chance, 機遇抽樣.
Sampling by design, 計劃抽樣.
Scale, 尺度.
(Scale guide line), (指線).

(Scale point), (度點).
Scatter, 散佈.
Scatter diagram, 散佈圖.
(Scientific classification), (科學的分類).
Seasonal fluctuation, 季節變動.
Seasonal index numbers, 季節指數.
Seasonal variation, 季節變動.
Secondary data, 次級資料.
Secondary source, 次級來源.
Secondary statistics, 次級資料.
Secondary table, 次級表.
Second degree parabola, 二次拋物線.
Second moment, 二次轉矩; 二次動矩.
Sector diagram, 扇形圖.
Secular trend, 長期趨勢.
Semi-inter-quartile range, 四分位差.
Semi-invariant, 變動數.
Semi-logarithmic scale, 單對數尺度.
Separate even , 單純事件.
Shaded map, 濃淡線統計地圖.
Sheppard's correction, 薛伯氏校正數.
Shifting base, 變換基期.
Short method of computation, 簡捷計算法, (簡捷法).
(Short term fluctuation), (短期變動).
Simple average, 單純平均數.
Simple correlation, 單繫聯.
(Simple frequency table), (簡單頻數表).
Simple index number, 單純指數.
Simple sampling, 簡單抽樣.
Simple unit, 單純單位.
(Single-dot map), (單點統計地圖).
Single table, 單項表.
Size, 大小.
Skelton method of computation, 簡捷計算法(簡捷法).
Skew, 偏.
Skewed histogram, 偏態直方圖.
Skewness, 偏態.
Slope, 斜度.
Smoothing, 修勻.
Sort, 分類.
Sorting machine, 分類機.
Source, 來源.
Space series, 空間數列.
Spacing, 位列.
Spearman's footrule formula, 司佩曼氏簡便公式.
Spurious correlation, 假引繫聯.
Staircase chart, 直方圖.
Standard deviation, 標準差.
Standard error of arithmetic mean, 算術中數標準誤.
Standard error of coefficient of correlation, 繫聯係數標準誤.
Standard error of coefficient of regression, 回應係數標準誤(響應係數標準誤).
Standard error of coefficient of variation, 離中係數標準誤.
Standard error of correlation ratio, 繫聯比標準誤.
Standard error of distance between two means, 二中數距離標準誤.
Standard error of median, 中位數標準誤.

Standard error of quartile, 四分位數標準誤.

Standard error of sampling, 抽樣的標準誤.

Standard error of standard variation, 標準差的標準誤.

Standard error of test for linearity of regression, 直線回歷試驗標準誤(直綫響應試驗標準誤).

Standard unit, 標準單位.

Statistical analysis, 統計分析.

Statistical chart, 統計圖.

Statistical data, 統計資料.

Statistical deflation, 統計消漲法.

Statistical induction, 統計歸納.

Statistical inference, 統計歸納.

Statistical map, 統計地圖.

Statistical mass, 統計大量.

Statistical material, 統計材料.

Statistical method, 統計方法.

Statistical series, 統計數列.

Statistical table, 統計表.

Statistics, 統計;統計學.

Straight line, 直線.

Stub, 橫標目.

Sub-class, 小組.

Sub-classification, 分目.

Sub-heading, 小標目.

Subordinate class, 附屬類.

Subsidiary class, 附屬類.

Success, 成.

Summary number, 總括數.

Summary table, 摘要表.

Symmetrical distribution, 對稱分配.

Symmetry, 對稱.

System of coordinates, 縱橫坐標制.

T

Table, 表.

Table of first order, 單項表.

Table of fourth order, 四項表.

Table of second order, 雙項表.

Table of third order, 三項表.

Tabulating machine, 製表機.

Tabulation, 製表.

Tabulation card, 表片.

Tetrad, 四項組.

Theoretical frequency, 理論頻數.

Third quartile, 第三四分位數.

Time reversal test, 時間互換測驗法.

Time series, 時間數列.

Title, 標題.

Total, 合計.

Total association, 全作聯.

Total correlation, 全繫發.

Total index number, 總指數.

Total regression, 全回應(全響應)

Transcription, 謄錄.

Transcription form, 謄錄表式.

Trend, 長期趨勢.

Trial, 試.

Triple table, 三項表.

Trough, 谷.

True mean, 眞實中數.

Type, 型, 式.

Type bias, 型偏誤.

Type of averages, 平均數的型類.
Type of index numbers, 指數的型類.
Typical value, 範值.

U

Ultimate class, 極組.
Ultimate frequency, 極組類數.
Uniformity, 劃一.
Unimodal, 單峯.
Unit, 單位.
Universe, 域.
Unweighted average, 單純平均數
Upper limit, 上限.
Upper limit inclusive, 上限包含.
Upper quartile, 上四分位數.
Upward bias, 向上偏誤.
U-shaped distribution, U 形分配.

V

Value index number, 價值指數.
Variable, 變數.
Variable weighting, 變動加權法.
Variable weights, 變動權數.
Variance, 二次隣矩; 二次動矩.
Variate, 變量.
Variate differences correlation, 變差繫聯法.
Variation, 離中趨勢.
Vertical axis, 縱軸.
Vertical bar diagram, 縱條形圖.
Vertical scale, 縱尺度.
Vital statistics, 人口統計學.
(Volume chart), (體積圖).

W

(Wall chart), (壁圖).
Weight, 權數.
Weight bias, 權偏誤.
Weighted average, 加權平均數.
Weighted index number, 加權指數
Weighting, 加權.
Working table, 工作表.

Z

Zero correlation, 零繫聯
Zero line, 零線.

附人名地名索引

New York Stock Exchange, 紐約證券交易所.

North Dakota, 北達古塔.

P

Pacific Ocean, 太平洋

Pearson, Karl, 皮爾生

Persons, W. M., 潘蓀

Philippine, 菲列濱.

R

Riggleman, G. R. 李格爾孟.

S

Sauerbeck, 薩安貝克.

Say, Leon, 雷翁賽.

Secrist, H., 西克里斯脫.

Shanghai Cotton Manufacturing Co., Ltd., 上海紡織株式會社.

Shanghai Dock & Engineering Co., Ltd., 耶松船廠.

Shanghai Electric Construction Co., Ltd., 上海電車公司.

Shanghai Gas Co., Ltd., 上海自來火公司.

Shanghai Land Investment Co., Ltd., 業廣地產公司.

Shanghai Stock Exchange, 上海股票交易所.

Shanghai Telephone Co., 上海電話公司.

Shanghai Waterworks Co., Ltd., 上海自來水公司.

Sheppard, U. F., 薛伯.

Smart, William, 維脈斯麥脫.

Spearmon C., 司佩蒙.

Standard Statistics Corporation, 標準統計公司.

Swan Culbertson and Fritz, 新豐洋行.

U

United Theaters. 聯合影片公司.

W

Washington, 華盛頓.

Weldon, W. F. R., 維爾屯.

Wester, C. J., 威斯脫.

Wisconsin, 威士康辛.

Y

Yantsze Finance Co., Ltd., 揚子銀公司.

Young, A. A., 楊氏.

Yule, G. U., 游爾.

附　錄　乙

統　計　符　號

A	算術平均數；單純算術式指數
A_x	x 數列之算術平均數
A_y	y 數列之算術平均數
A_1	第一種加權算術式指數
A_2	第二種加權算術式指數
A_3	第三種加權算術式指數
A_4	第四種加權算術式指數
Ag	單純總值式指數
Ag_1	第一種加權總值式指數
Ag_2	第二種加權總值式指數
A.D.	平均差
A'.D'.	平均差係數
A'	假定平均數
A'_x	x 數列之假定平均數
A'_y	y 數列之假定平均數
C	眞正平均數與假定平均數之差
$\bar{C}$	眞正平均數與假定平均數相差之絕對值
C_x	x 數列之算術平均數與假定平均數之差
C_y	y 數列之算術平均數與假定平均數之差
d'	各項與假定平均數之差
$\bar{d}$	各項與平均數相差之絕對值
$\bar{d'}$	各項與假定平均數相差之絕對值
d'_x	x 數列中各項與假定平均數之差
d'_y	y 數列中各項與假定平均數之差
D_m	第 m 十分位數
f	頻數
f_t	理論頻數
f_o	實在頻數
G	幾何平均數；單純幾何式指數
G_1	第一種加權幾何式指數
G_2	第二種加權幾何式指數
G_3	第三種加權幾何式指數
G_4	第四種加權幾何式指數
H	倒數平均數；單純倒數式指數
H_1	第一種加權倒數式指數
H_2	第二種加權倒數式指數
H_3	第三種加權倒數式指數
H_4	第四種加權倒數式指數
i	組距
I	指數
K	偏態
K'	偏態係數

l	小於 M, Qm, Dm 或 Pm 各組頻數之和
L	下限
$\bar{m}$	組中點
M	中位數
M′	假定中位數
n	項數
O_M	中位數在數列中之項次
O_{Dm}	第 m 十分位數在數列中之項次
O_{Pm}	第 m 百分位數在數列中之項次
O_{Qm}	第 m 四分位數在數列中之項次
p_0	基期之物價
p_1	計算期之物價
Pm	第 m 百分位數
P. E.	機差
q_0	基期之貿易量
q_1	計算期之貿易量
Qm	第 m 四分位數
Q.D.	四分位差
Q′.D′.	四分位係數
r	繫聯係數
u	大於 M, Qm, Dm 或 Pm 各組頻數之和
U	上限
W.	權數
W.A.	加權算術平均數
W.G.	加權幾何平均數
x	x 數列之各項與其算術平均數之差
x′	x 數列之各項與假定平均數之差
X	x 數列之各項
y	y 數列之各項與其算術平均數之差
y′	y 數列之各項與假定平均數之差
Y	y 數列之各項
y_0	最大之縱坐標
Z	衆數
Σ	總和之記號
σ	標準差
σ'	標準差係數
σ_1	X_1 之標準差
σ_2	X_2 之標準差
σ_c	校正標準差
σ_c'	校正標準差係數
σ_x	x 數列之標準差
σ_y	y 數列之標準差

附　錄　丙

本書重要參考書

Fisher (I.) The Making and Use of Index Numbers

Secrist (H.) An Introduction to Statistical Methods

Reading and Problems in Statistical Methods

Bowley (A.L.) Elements of Statistics

Chaddock (R.E.) Statistical Method

Exercises in Statistical Methods

Yule (G.U.) An Introduction to the Theory of Statistics

Jerome (H.) Statistical Method

King (W. I.) Elements of Statistical Method

Crum (W. L.) An Introduction to the Methods of Economic Statistics

Moore (H. L.) Forecasting the Yield and the Price of Cotton

Mills (F. C.) Statistical Methods Applied to Economics and Business

Riggleman (J.R.) Business Statistics

Babson (R. W.) Business Barometers used in the Management of Business and Investment of Money

Davies (G.R.) Introduction to Economic Statistics

Persons (W.M.) Correlation of Time Series

The Construction of Idex Numbers

Mitchell (W. C.) Index Numbers of Wholesale Prices in the United States and Foreign Countries (U.S. Department of Labour)

社會月刊(上海市社會局)

海關中外貿易統計年刊(海關)

上海市工人生活費指數(上海市社會局)
最近中國對外貿易統計圖解(中國銀行)
經濟統計季刊(南開大學經濟學院)
上海生活費指數(國定稅則委員會)
棉花統計(棉業統制委員會)
上海特別市工資和工作時間(上海市社會局)
交通統計簡報(交通部)
中國棉業及其貿易(方顯廷)
經濟學季刊(中國經濟學社)
中日貿易統計(中國經濟學社中日貿易研究所)
統計月報(立法院統計處及主計處統計局)
貨價季刊(國定稅則委員會)
統計學大綱(金國寶)
物價指數淺說(金國寶)

附　錄　丁

計　算　應　用　表

(一)　差誤正態曲線下之縱坐標表

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	29119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31955	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27365	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

(二) 差誤正態曲線下之面積表

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4516	4526	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4758	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	5896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4674	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989	4990
3.1	4990.3	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									