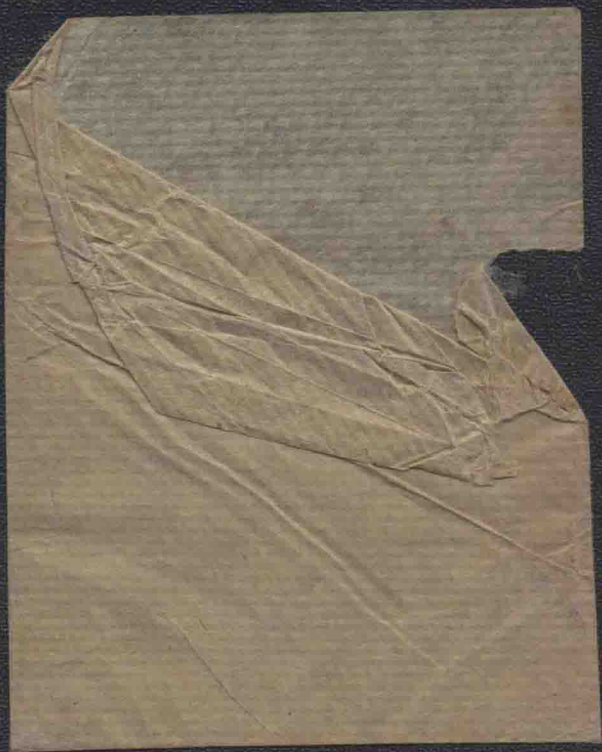


戲學錄

戲學錄



# 數 學 辭 典

## 辭 書 之 部

### I. 辭 典

#### 一 畫

- 【一】 One 或 Unity. [算] 數之單位也。凡其他諸數皆可由此數用加法而得之。亞拉伯以 1 記之，羅馬以 I 記之，希臘以  $\alpha'$  記之。
- 【一位】 Units' place. [算] 亦稱個位，即記數時自右第一位也。
- 【一次式】 Expression of the first degree 或 Linear expression. [代] 代數式之最高次項為一次者，例如  $x+3$ ,  $a+x+y$  是也。
- 【一次項】 Term of the first degree. [代] 項之祇含一文字因數者。例如  $2x$  及  $35y$  是也。
- 【一位數】 Units. [算] 十以下諸數之謂也。
- 【一乘幂】 First power. [算] [代] 一乘幂為對於二乘幂，三乘幂等而言。某數或式之一乘幂，即本數或式之謂。例如 3 之一乘幂為  $3^1$  即 3 之本身， $ax+b$  之一乘幂即為  $ax+b$ 。
- 【一項式】 Monomial 或 Monomial expression. [代] 亦稱獨項式或單項式，即代數式之祇有一項者。例如  $a$  及  $5x^2y$  是也。
- 【一次函數】 Function of the first degree 或 Linear function. [數] 函數內自變數之最高乘幂為一次者。例如  $y=ax+b$ ,  $y$  為  $x$  之一次函數；又如  $z=ax+by+c$ ,  $z$  為  $x, y$  之一次函數。
- 【一價函數】 One-valued function 或 Single-valued function. [數] 於  $y=f(x)$ ，對於自變數  $x$  之一值，函數  $y$  若祇有一值與之相應，則  $y$  為一價函數；若有二值與之相應，則為二價函數；若有數值與之相應，則為多價函數。例如於  $y=3x^2+4$ ，與  $x$  以一值， $y$  亦祇有一值與之相應，故  $y$  為一價函數；而於  $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$ ，對於  $a, -a$  間  $x$  之各值， $y$  為二價函數。
- 【一之三乘根】 Cube roots of unity. [代] 即一之立方根，見該條。
- 【一之立方根】 Cube roots of unity. [代] 二項三次方程式  $x^3-1=0$  之三根，謂之一之立方根或三乘根。因  $x^3-1=$

$(x-1)(x^2+x+1)=0, x-1=0$  或  $x^2+x+1=0$ . 故  $x=1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , 或  $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ,

而  $i$  表  $\sqrt{-1}$ . 是即一之立方根, 後二者爲複虛根. 此三根有種種性質: (1) 一複虛根之平方等於他複虛根. 此實行平方即可知之. 又可證之如次: 若  $\omega$  爲  $x^3-1=0$  之根, 則  $\omega^3=1$ , 平方之則得  $\omega^6=1$  或  $(\omega^2)^3=1$ , 故  $\omega^2$  適合  $x^3-1=0$  而爲其一根. 故一之立方根常以  $1, \omega, \omega^2$  表之. (2) 因  $\omega$  爲  $x^2+x+1=0$  之根, 故  $\omega^2+\omega+1=0$ . 即一之立方根之和爲零. 此又可證之如次:

—因方程式之根之和, 等於其次項之係數而變其號者. 今  $x^2$  之係數爲零, 故  $1, \omega, \omega^2$  之和爲零. (3) 因  $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$ , 故一之立方根之積爲 1. 此又可證之如次: 因方程式之根之積, 等於其末項而變其號者. 今末項爲  $-1$ , 故  $1, \omega, \omega^2$  之積爲 1. (4)  $\omega$  之任何整乘幂, 可以  $1, \omega$  或  $\omega^2$  代之. 因若  $n$

爲 3 之倍數, 命爲  $3m$ , 則  $\omega^n = \omega^{3m} = 1$ . 若  $n$  不爲 3 之倍數, 則必爲  $3m+1$  或  $3m+2$  之形式. 若  $n=3m+1$ , 則  $\omega^n = \omega^{3m+1} = \omega^{3m} \cdot \omega = \omega$ . 若  $n=3m+2$ , 則  $\omega^n = \omega^{3m+2} = \omega^{3m} \cdot \omega^2 = \omega^2$ . 例如  $\omega^6 = (\omega^3)^2 = 1, \omega^7 = \omega^6 \cdot \omega = \omega, \omega^8 = \omega^6 \cdot \omega^2 = \omega^2$ . (5) 任何數  $a$  之三個立方根, 可以  $1, \omega, \omega^2$

乘其實根而得之. 即  $\sqrt[3]{a}, \omega\sqrt[3]{a}, \omega^2\sqrt[3]{a}$  是也. 例如 27 之實根 3 外, 其他二複

虛根爲  $\frac{-3+i3\sqrt{3}}{2}$  與  $\frac{-3-i3\sqrt{3}}{2}$ .

【一之  $n$  乘根】  $N^{\text{th}}$  roots of unity.

〔代〕二項方程式  $x^n-1=0$  之  $n$  個根謂之一之  $n$  乘根. 其性質如次: (1) 若  $n$  爲奇數, 則有一實根, 即 1 是也, 其他諸根皆爲複虛數. 因以大於 1 之數代  $x$ , 則方程式  $x^n-1=0$  之左邊爲正數; 又以小於 1 之數代  $x$ , 則左邊爲負數. 故除 1 以外任何正數任何負數皆不適合  $x^n-1=0$ . 同樣, 若  $n$  爲偶數, 則 +1 與 -1 爲  $x^n-1=0$  之實根, 其他諸根皆爲複虛數. (2) 若  $n$  爲奇數則諸複虛根之代數和爲 -1. 因普通方程式諸根之總和, 爲第二項之係數而反其號者. 今  $x^n-1=0$  之第二項之係數爲 0, 且祇有一實根 1, 故其諸複虛根之代數和爲 -1.

同理, 若  $n$  爲偶數, 則諸複虛根之和爲零. (3) 若  $n$  爲奇數, 則諸複虛根之連乘積等於 +1. 因普通方程式諸根之乘積, 等於其不含  $x$  之項而反其號者, 此時即 +1 是也; 而實根爲 +1, 故諸複虛根之連乘積亦爲 +1. 同樣, 若  $n$  爲偶數, 諸複虛根之連乘積亦爲 +1. 同理可證明由諸根取相異二根之和, 相異三根之和, ..., 相異  $r$  (但  $r < n$ ) 根之和亦各爲零. (4) 方程式  $x^n-1=0$  無等根. 因  $f(x)=x^n-1, f'(x)=nx^{n-1}$ ; 而  $f(x), f'(x)$  無含  $x$  之公因數, 故無等根. (5) 若  $\alpha$  爲  $x^n-1=0$  之複虛根, 則  $\alpha^m$  亦爲一乘根,  $m$  爲任意整數. 因  $\alpha^n=1$ , 故  $(\alpha^m)^n=1$ , 或  $(\alpha^m)^n-1=0$ , 即  $\alpha^m$  爲  $x^n-1=0$  之根. (6) 若  $m$  與  $n$  互爲素數, 則

方程式  $x^m-1=0$  與  $x^n-1=0$  不能有除 1 以外之公根。若設  $\alpha$  爲  $x^m-1=0$  與  $x^n-1=0$  之公根，則  $\alpha^m=1$ ， $\alpha^n=1$ ，而  $\alpha^{mb}=1$ ， $\alpha^{na}=1$ ，其中  $a, b$  爲適合  $mb-na=\pm 1$  之關係之數（可化  $\frac{m}{n}$  爲連分數而求之）。故  $\alpha^{mb-na}=1$ ，即  $\alpha^{\pm 1}=1$  或  $\alpha=1$ 。即 1 爲二方程式惟一之公根。(7)若  $h$  爲  $m$  與  $n$  之最高公因數，則  $x^h-1=0$  之根爲  $x^m-1=0$  與  $x^n-1=0$  之公根。

命  $m=hm'$ ， $n=hn'$  期  $m'$  與  $n'$  互爲素數。故可求得整數  $a, b$ ，使  $m'b-n'a=\pm 1$ 。故  $mb-na=\pm h$ 。故若  $\alpha$  爲公根，則  $\alpha^m=1$ ， $\alpha^n=1$ ， $\alpha^{mb-na}=1$  或  $\alpha^{\pm h}=1$ 。此即表  $\alpha$  爲  $x^h-1=0$  之根。(8)若  $\alpha$  爲  $x^n-1=0$  之複虛根， $n$  爲素數，則諸根爲  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 。由 (5) 知  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  皆爲此方程式之根。且此諸根皆不相同；因若設  $\alpha^p=\alpha^q$ ，則  $\alpha^{p-q}=1$ 。然由 (6)，因  $n$  與  $p-q$  互爲素數，故  $x^n-1=0$  與  $x^{p-q}-1=0$  不能有公根。故方程式  $\alpha^{p-q}=1$  不能成立，而諸根皆含於級數  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  內。

(9)若  $n$  爲由因數  $p, q, r, \dots$  而成之非素數，則方程式  $x^p-1=0, x^q-1=0, x^r-1=0, \dots$  之根皆爲  $x^n-1=0$  之根。若  $\alpha$  爲  $x^p-1=0$  之根，則  $\alpha^p=1$ ，而  $(\alpha^p)^{qr\dots}=1$ ，或  $\alpha^n=1$ ，即  $\alpha$  爲  $x^n-1=0$  之根。(10)若  $n$  爲由因數  $p, q, r, \dots$  而成之非素數，則方程式  $x^n-1=0$

之根爲乘積  $(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{p-1})(1+\beta+\dots+\beta^{q-1})(1+\gamma+\dots+\gamma^{r-1})\dots$  之  $n$  項，但  $\alpha$  爲  $x^p-1=0$  之根， $\beta$  爲  $x^q-1=0$  之根， $\gamma$  爲  $x^r-1=0$  之根， $\dots$  積之任意項，例如  $\alpha^a\beta^b\gamma^c\dots$ ，爲  $x^n-1=0$  之根，因  $\alpha^{an}=1, \beta^{bn}=1, \gamma^{rn}=1, \dots$ ，故得  $(\alpha^a\beta^b\gamma^c\dots)^n=1$  也。又積中無二項相等者；若命  $\alpha^a\beta^b\gamma^c\dots$  等於他項  $\alpha^a'\beta^b'\gamma^c'\dots$ ，則  $\alpha^{a'-a}=\beta^{b'-b}\gamma^{c'-c}\dots$  此方程式之一邊爲  $x^p-1=0$  之根，第二邊爲  $x^{qr\dots}-1=0$  之根。因  $p$  與  $qr\dots$  互爲素數。故由 (6)，此二方程式不能有公根；而  $\alpha^a\beta^b\gamma^c\dots$  不能等於  $\alpha^a'\beta^b'\gamma^c'\dots$ 。(11)若  $n=p^aqbr^c\dots$ ，而  $p, q, r, \dots$  爲  $n$  之素因數，則  $x^n-1=0$  之根爲形如  $\alpha\beta\gamma\dots$  之  $n$  乘積，而  $\alpha$  爲  $x^{b^a}-1=0$  之根， $\beta$  爲  $x^{q^b}-1=0$  之根， $\gamma$  爲  $x^{r^c}-1=0$  之根， $\dots$  此不過爲 (10) 之擴張者，其理全同。由上所述，知一之  $n$  乘根之決定可化爲  $n$  爲素數或素數之乘器而決定之。

**【一之固有根】** Primitive roots of unity. [代] 方程式  $x^n-1=0$  之根，不爲相似低次方程式之根者，謂之該方程式之固有根，或一之固有  $n$  乘根。例如於  $x^6-1=0$ ，知  $x^2-1=0$  與  $x^3-1=0$  之根爲  $x^6-1=0$  之根，即  $\pm 1$  與  $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$  是也。解  $x^2-x+1=0$ ，求得其他二根爲  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ，是即  $x^6-1=0$  之固有根也。一之固有根有次

述之性質：(1) $n$ 之各次數常有一之固有根。(2)若 $\alpha$ 爲一之固有 $n$ 乘根，則 $\alpha^r$ 亦爲一之固有 $n$ 乘根，但 $r$ 須與 $n$ 互爲素數。由是，若知一之固有 $n$ 乘根之一，則可求得其他諸一之固有 $n$ 乘根。

**【一元方程式】** Equation with one unknown number. [代] 方程式之祇含一未知數者。如  $x-5=7$  爲一元一次方程式； $ax^2+bx+c=0$  爲一元二次方程式； $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$  爲一元 $n$ 次方程式。

**【一次方程式】** Equation of the first degree, 或 Simple equation, 或 Linear equation. [代] 方程式內未知數之最高乘幂爲一者之謂也。例如  $ax+b=0$  爲一元一次方程式，其解法爲  $x=-\frac{b}{a}$ 。

又如  $ax+by+c=0$  爲二元一次方程式，其解法不定。一次方程式又稱直線方程式，因其圖爲一直線故也。

**【自變數函數】** Function of one independent variable. [數] 函數之祇含一自變數者。例如  $y=ax^2+bx+c$ ,  $y$  爲一自變數  $x$  之函數。

**【一直角三面角】** Rectangular trihedral angle. [幾] 三面角之有一直角二面角者謂之一直角三面角。

**【一次不定方程式】** Indeterminate equation of the first degree. [代] 不定方程式之爲一次者之謂也。一次不定方程式之未知數限於正整數時，其解答

之數爲有限。凡含二未知數之一次不定方程式皆可化爲  $ax\pm by=\pm c$  之形式，然  $ax+by=-c$  無正整數之解答，而  $ax-by=-c$  與  $by-ax=c$  同，故僅研究方程式  $ax\pm by=c$  即可。且可假定  $a, b, c$  無公因數， $a$  與  $b$  互爲素數。因若  $a, b$  有公因數  $m$ ，而  $c$  不能以  $m$  整除之，即  $ax\pm by$  可以  $m$  整除之，而  $c$  不能以  $m$  整除之，故方程式  $ax\pm by=c$  不能有正整數之根；若  $a, b, c$  有公因數，則可用除法以去之。I. 求方程式  $ax-by=c$  之普通解法。將  $\frac{a}{b}$  化爲

連分數，而命  $\frac{p}{q}$  爲適在  $\frac{a}{b}$  前之近數，則  $aq-bp=\pm 1$ 。所與之方程式可書之爲  $ax-by=\pm c(aq-bp)$ ， $\therefore a(x\mp cq)=b(y\mp cp)$ 。因  $a$  與  $b$  無公因數，故  $x\mp cq$  必可以  $b$  整除之；命其商爲整數  $t$ ，則  $\frac{x\mp cq}{b}=\frac{y\mp cp}{a}=t$ ，即  $x=bt\pm cq$ ,  $y=at\pm cp$ 。(i) 當  $aq-bp=1$ ，則  $x=bt+cq$ ,  $y=at+cp$ ；由是與  $t$  以任何正整數，或數值小於  $\frac{cq}{b}$ ,  $\frac{cp}{a}$  二量中之小者之負整數，可得正整數之解法，故其解法無限。(ii) 若  $ap-bq=-1$ ，則  $x=bt-cq$ ,  $y=at-cp$ ；由是與  $t$  以大於  $\frac{cq}{b}$ ,  $\frac{cp}{a}$  二量中之大者之正整數，可得正整數之解法，故其解法無限。(iii) 若  $a$  或  $b$  爲 1，則分數  $\frac{a}{b}$  不能化成分子爲 1 之連分數，而

上法不能用。然此時解法可由觀察得之。

如  $b=1$ ，則方程式變為  $y=ax-c$ ，其解

法可與  $x$  以大於  $\frac{c}{a}$  之正整數而得之，故

其解法無限。II. 求  $ax+by=c$  之普

通解法。其解法與 I 相似。(i) 若  $aq$

$-bp=1$ ，則  $x=cq-bt$ ， $y=at-cp$ ；

由是其正整數之解法可與  $x$  以大於

$\frac{cp}{a}$  而小於  $\frac{cq}{b}$  之正整數而得之，故其

解法有限。(ii) 若  $aq-bp=-1$ ，則

$x=bt-cq$ ， $y=cp-at$ ；由是其正整數

之解法可與  $x$  以大於  $\frac{cq}{b}$  而小於  $\frac{cp}{a}$

之正整數而得之，故其解法有限。(iii)

若  $a$  或  $b$  為 1，則與 I 之(i)同。

[例] 求  $29x-42y=5$  之正整數之解法。

化  $\frac{42}{29}$  為連分數， $\frac{42}{29}$  之前之近數為

$\frac{13}{9}$ ；故得  $29 \times 13 - 42 \times 9 = -1$ 。∴

$29 \times 65 - 42 \times 45 = -5$ ，與所與方程式相

合，則得  $29(x+65) = 42(y+45)$ ；∴

$\frac{x+65}{42} = \frac{y+45}{29} = \text{整數 } t$ ，故普通解法

為  $x=42t-65$ ， $y=29t-45$ 。

**【一次有向量函數】** Linear vector function. [數] 二有向量和之函數等於此

二有向量之函數之和時，則此有向量之

連續有向函數謂之一次有向量函數。即

命  $\rho_1, \rho_2$  為二有向量，若  $f(\rho_1 +$

$\rho_2) = f(\rho_1) + f(\rho_2)$ ，則函數  $f$  謂

之一次有向量函數。

**【一次聯立方程式】** Simultaneous equations of the first degree. [代] 即聯立方程式之為一次方程式者。見聯立方程式條。

## 二 畫

## 二

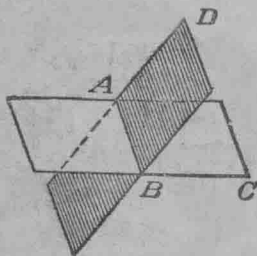
【二】Two [算]數名。爲一加一之結果。亞拉伯以 2 記之，羅馬以 II 記之，希臘以 β' 記之。

【二次式】Quadratic expression. [代] 代數式之含某文字之二乘幂或二以上文字之二次元者。例如  $5x^2-2x+3$ ,  $xy+y+4$ ,  $xy-xz-z+1$  皆是也。

【二次根】Second root. [算][代] 與平方根同。

【二次項】Term of the second degree. [代] 項之含某文字之二乘幂或二文字之二次元者。如  $3x^2$ ,  $7xy$  是也。

【二面角】Dihedral angle. [幾] 二相交平面間之角謂之二面角。二平面 AC, BD



爲二面角之面，其交線 AB 爲二面角之稜。二面角常以其稜或二面與稜表之，即以

AB 或 C-AB-D 表之。二面角又可視爲其一面由他面之位置，以稜爲軸迴轉之所生者，而二面角之大小，不關於面之大，而依此迴轉之量之多少。二平面相交，生二組相等之二面角，謂之對稜

二面角。於二面角之稜之任意一點，作各面之垂線，此二垂線間之角爲一定，而謂之二面角之平面角，二面角即用此角以測度之。

【二重根】Double roots. [代] 若方程式有二根相等，則此根謂之二重根。例如方程式  $x^3-3x^2+4=0$  可寫爲  $(x+1)(x-2)^2=0$ 。故此方程式有二根爲 2，而 2 爲二重根。

【二乘比】Duplicate ratio. [算][代] 比  $2^2:5^2$  謂之比 2:5 之二乘比，而比  $a^2:b^2$  謂之比 a:b 之二乘比。

【二乘根】Second root. [算][代] 與平方根同。

【二乘幂】Second power. [算][代] 與平方同。

【二項式】Binomial 或 Binomial expression. [代] 即由二項而成之式。例如  $x+a$ ,  $2x^3+5y$  是也。

【二進法】Binary scale. [算][代] 於記數時滿 2 即進位之法，謂之二進法，即以二爲記數底之記數法也。二進法用 0 及 1 二數字即足。例如於二進法所寫之 1101，即  $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1$  之意也。

【二十面體】Icosahedron. [幾] 即二十平面所包圍之立體也。

二次曲面 Quadric 或 Quadric surface. [幾]  $x, y, z$  之二次方程式之軌跡謂之二次曲面。任何二次曲面之方程式經適當之坐標之變換，可化成下列諸種如下：

球

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$



扁橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a > b > c).

長橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a > b = c).

虛橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

單翼雙曲線體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

雙翼雙曲線體

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

橢圓的拋物線體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2nz.$$

雙曲線的拋物線體

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2nz.$$

實二次錐面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

虛二次錐面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

橢圓的柱面

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

雙曲線的柱面

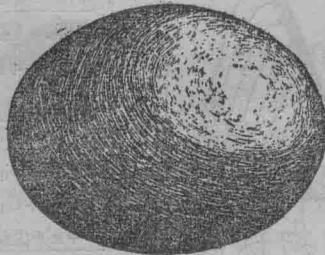
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

拋物線的柱面

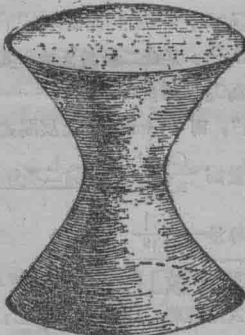
$$y^2 = 2px.$$

虛柱面

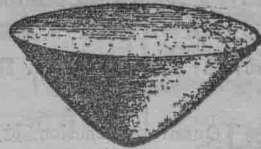
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$



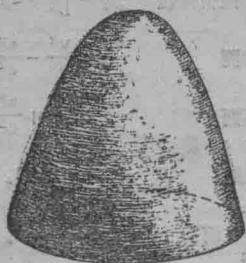
橢圓體



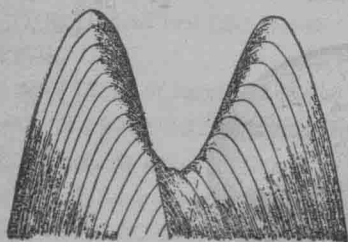
單翼雙曲線體



雙翼雙曲線體



橢圓的拋物線體



雙曲線的拋物線體

【二次曲線】Curve of the second degree. [幾]  $x, y$  之二次方程式之軌跡，謂之二次曲線。因此等曲線可以一平面截一圓錐面而得之，故亦稱圓錐曲線。詳該條。

【二次函數】Quadratic function. [數] 即函數內自變數之最高乘幂為二者。例如  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y$  為  $x$  之二次函數。

【二重關係】[三] 見三角函數條。

【二項係數】Binomial coefficients. [代] 二項係數者，依二項式之定理將  $(x + 1)^n$  展開時， $x$  之各乘幂之係數之謂，即

$$1, n, \frac{n(n-1)}{2!}, \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \dots,$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}, \dots \text{是也。當 } n$$

為正整數時，此等係數等於  $nC_1, nC_2, nC_3, \dots, nC_r, \dots$ ，但  $nC_r$  為由  $n$  物每次取  $r$  物之組合之數。二項係數之性質如次：(1) 因  $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_r x^r + \dots + C_n x^n \dots (I)$ 。∴

$$C_0 = C_n = 1, C_1 = C_{n-1} = n, C_2 = C_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}, \dots, C_r = C_{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

∴。即由二項展開式兩端等距離之項之係數相等。(2) 於(I)內命  $x=1$ ，則得

$$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n. \text{ 即 } (1+x)^n \text{ 之展開式諸係數之和為 } 2^n.$$

(3) 於(I)內命  $x=-1$ ，則得

$$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots$$

$$\therefore C_0 + C_2 + C_4 + \dots = C_1 + C_3 + C_5 + \dots$$

故  $(1+x)^n$  之展開式內諸奇數項之係數之和等於諸偶數項之係數之和。(4) 因

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$$

$$\text{及 } (1+x)^n = C_n + C_{n-1}x + C_{n-2}x^2 + \dots + C_0 x^n.$$

於此二級數之積，其  $x^n$  之係數為  $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots$

$$C_n^2, \text{ 而 } (1+x)^{2n} \text{ 之展開式中 } x^n \text{ 之$$

$$\text{係數為 } \frac{(2n)!}{n! n!}. \text{ 即諸二項係數之平方}$$

$$\text{和等於 } \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

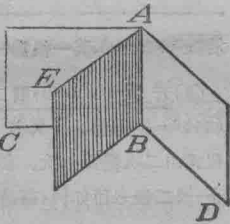
【二項級數】Binomial series. [代] 依二項式定理將  $(x+a)^n$  展開之，其所得之級數謂之二項級數，即

$$x^n + na^nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3x^{n-3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} a^r x^{n-r} + \dots$$

若 n 爲分數或負數，則此級數爲無窮級數。

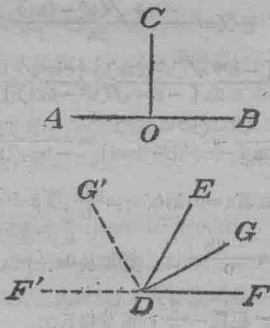
**【二等分面】** Bisector. [幾] 分一幾何量爲二等分之平面，謂之此量之二等分面，或平分面。普通多指二面角之二等分面。

如圖，若二面角 C-AB-E 及二面角 D-AB-E 相等，則 B-E 爲二面角 C-AB-D



之二等分面。而二等分面內各點由二面角之二面之距離均等。

**【二等分線】** Bisector. [幾] 分一幾何量爲二等分之直線，謂之此量之二等分線或平分線。如圖，若直線 A-O, B-O 相等，則 CO 爲 AB 之二等分線。



而 O 謂之二等分點。又如角 EDG, FDG 相等，則 DG 爲角 EDF 之二等分線。普通所謂二等分線多指角之二等分線。而角之二等分線又稱爲內二等分線，其外角之二等分線稱爲外二等分線。內二等分線與外二等分線互相垂直。如圖 DG 爲內二等分線，DG' 爲外二等分線。

$$\text{因 } \angle EDG = \frac{1}{2} \angle EDF, \angle EDG' = \frac{1}{2} \angle EDF', \therefore \angle EDG + \angle EDG' = \frac{1}{2} (\angle EDF + \angle EDF'), \text{ 即 } \angle GDG' = \frac{1}{2}$$

$\angle FDF' = \frac{1}{2} (2\text{rt. } \angle) = \text{rt. } \angle \therefore DG \perp DG'$ 。二等分線上各點與角之二邊之距離均等，故二等分線爲與角之二邊等距離點之軌跡。

**【二等分點】** Point of bisection. [幾] 見二等分線條。

**【二價函數】** Two-valued function. [數] 函數之對於自變數之一值，有二值與之相應者。見一價函數條。

**【二十四面體】** Tetrahexahedron. [幾] 二十四個平面所包圍之立體也。

**【二元方程式】** Equation with two unknown numbers. [代] 卽方程式之含二未知數者。如  $2x+5y+1=0$  爲二元一次方程式， $x^2+3xy-2y+4=0$  爲二元二次方程式。

**【二次不盡根】** Quadratic surd 或 Surd of the second order. [代] 根指數爲 2 之不盡根謂之二次不盡根。例如  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$

是也。二次不盡根又稱平方不盡根。

**【二次方程式】** Quadratic 或 Quadratic equation 或 Equation of the second degree. [代] 方程式之含未知數之二乘幂或二次元之項者，謂之二次方程式。例如  $3x^2 - 5x + 6 = 0$ ,  $x^2 - xy + y^2 = 0$ ,  $xy + x - 2y - 7 = 0$  皆為二次方程式。

I. 普通一元二次方程式為  $ax^2 + bx + c = 0$ 。用配方法可求得其二根。命以  $\alpha$ ,  $\beta$  表之，

$$\alpha = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a},$$

$$\beta = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

由是  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ , 及  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 。故二

根之和等於  $-\frac{b}{a}$ , 而二根之積等於  $\frac{c}{a}$ 。

例如於方程式  $5x^2 - 2x + 3 = 0$ , 其二根

之和為  $\frac{2}{5}$ , 其積為  $\frac{3}{5}$ 。〔根之討論〕

$\frac{b^2 - 4ac}{a^2}$  謂之方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  之

判別式，其根之性質，可以此式判別之。

(1) 若  $b^2 - 4ac > 0$ , 則二根為不等之實數。例如於  $x^2 - 5x - 10 = 0$ ,  $b^2 - 4ac$

$= 65$ , 故二根為不等之實數。(2) 若  $b^2 - 4ac = 0$ , 則二根為相等實數。例如於

$x^2 - 12x + 36 = 0$ ,  $b^2 - 4ac = 0$ , 故知其二根為相等實數。(3) 若  $b^2 - 4ac < 0$ ,

則二根為共軛複虛數。例如於  $x^2 - 3x + 5 = 0$ ,  $b^2 - 4ac = -11$ , 故知其二根為

共軛複虛數。(4) 若  $b^2 - 4ac$  為正有理數之平方，則二根為有理實數。例如

於  $x^2 - 3x + 4 = 0$ ,  $b^2 - 4ac = 25 = 5^2$ , 故知其二根為有理實數。(5) 若  $b^2 -$

$4ac$  不為正有理數之平方，則二根為共軛無理實數。例如於  $x^2 + 7x + 9 = 0$ ,  $b^2 -$

$4ac = 13$ , 故知其二根為共軛無理實數。(6) 若  $a = c$ , 則二根互為倒數。

例如於  $3x^2 - 5x + 3 = 0$ , 其二根互為倒數。(7) 若  $b = 0$ , 則二根之絕對值相

等，而號相反。例如於  $2x^2 + 7 = 0$ , 其二根之絕對值相等而號相反。(8) 若

$c = 0$ , 則一根為零，他根為  $-\frac{b}{a}$ 。例如

於  $3x^2 + 5x = 0$ , 其一根為 0, 他根為  $-\frac{5}{3}$ 。

(9) 若  $b = 0$ ,  $c = 0$ , 則二根皆為零。例如  $5x^2 = 0$  是也。又若  $a$  為零，則方

程式由二次變為一次。然若  $a$  逐漸減小，則二根之值如何，茲進考之。(10)

若  $a = 0$ , 則一根為  $-\frac{c}{b}$ , 而他根為無窮

大。即此時  $\alpha = -\frac{b}{0} + \frac{\sqrt{b^2}}{0} = \frac{-b+b}{0}$

$= \frac{0}{0}$ , 而為不定形。

$$\text{然 } \alpha = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$= \frac{\{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}\} \{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}\}}{2a \{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}\}}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a \{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}\}} = \frac{2c}{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}$$

故若  $a = 0$ , 則  $\alpha = -\frac{c}{b}$ , 又  $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2}}$

$= \frac{-2b}{0} = \infty$ 。例如於  $0x^2 + 3x + 2 = 0$ ,

一根為  $-\frac{2}{3}$ , 而他根為  $\infty$ 。(11) 若

$a=0, b=0$ , 則二根俱爲無窮大。因

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{2c}{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}$$

$$\text{及 } \beta = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}. \text{ 故若 } a=0,$$

$b=0$ , 則  $\alpha = \infty, \beta = \infty$ . 例如於  $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3 = 0$ , 二根俱爲無窮大。

II. 普通二元二次方程式爲

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (i)$$

茲求其左邊可分解爲二個一次因數之條件。視 (i) 爲  $x$  之二次方程式, 即

$$ax^2 + 2(hy + g)x + by^2 + 2fy + c = 0.$$

解之, 得  $x =$

$$\frac{-(hy + g) \pm \sqrt{(hy + g)^2 - (by^2 + 2fy + c)}}{a}.$$

或  $ax + hy + g$

$$= \pm \sqrt{(h^2 - ab)y^2 - 2(hg - af)y + (g^2 - c)}.$$

故欲 (i) 之左邊可分解爲二個形如  $px + qy + r$  之二個一次因數, 則根號內之式必須爲一完全平方; 故  $(hg - af)^2 =$

$$(h^2 - ab)(g^2 - ac). \text{ 移項, 且展開之,}$$

以  $a$  除之, 則得

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \dots (ii)$$

是爲所求之條件。(ii)之左邊謂之(i)之判別式, 此式於解析幾何學中甚爲重要。

若(ii)成立時, 則(i)之左邊可分解爲二一次因數, 而表二直線; 若(ii)不成立,

則(i)表一二次曲線。

**【二項方程式】** Binomial equation.

(代)方程式  $x^n - a = 0$  謂之二項方程式,

其中  $a$  爲實數或虛數,  $n$  爲任意正整數。

二項方程式可化成簡單之形式。何則, 命  $a'$  爲  $a$  之  $n$  乘根, 且命  $a'y = x$ , 則  $ay^n = a$ , 由是  $ay^n - a = 0$ , 即  $y^n - 1 = 0$ . 故二項方程式之研究, 可以形如  $x^n - 1 = 0$  者始。而此方程式之根之性質詳一之  $n$  乘根條。  $x^n - 1 = 0$  之諸根可由

$$\text{公式 } x = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$$

以求之, 但  $k$  爲零或正整數,  $n$  爲奇數, 則諸根可於公式次第命  $k = 0, 1, 2, \dots,$

$\frac{n-1}{2}$  而得之。又若  $n$  爲偶數, 則命  $k$

$= 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  而得之。如斯所得  $x$

之諸值互相異; 且與  $k$  以他值, 則  $x$  所得之值與前例同, 因此  $n$  值依週期而循環故也。 [例 1] 求  $x^3 - 1 = 0$  之根。命

$n=3$ , 而命  $k=1$ , 則  $x=1$ ; 命  $k=2$ ,

則  $x = \cos \frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{3}$ ; 然  $\cos$

$$\frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{-3}}{2},$$

故  $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ . 故三根爲  $1,$

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}).$$

[例 2] 求  $x^4 - 1 = 0$  之根。今  $n=4$ , 命  $k=0$ ,

則  $x=+1$ ; 命  $k=1$ , 則  $x = \pm \sqrt{-1}$ ;

命  $k=2$ , 則  $x=-1$ . 故此方程式之四

根爲  $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ .

若求  $x^n - a = 0$  之根, 則以  $x^n - 1 = 0$

之諸根乘  $a$  之  $n$  乘根即可。

**【二項式定理】** Binomial theorem.

(代) 二項式定理即

$$(x+a)^n = x^n + na x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} a^r x^{n-r} + \dots$$

之謂也。但  $n$  爲正數或負數，整數或分數。茲分別證明之。

I.  $n$  爲正整數。因  $(x+a)^n$  爲各等於  $x+a$  之  $n$  個因數之積，其展開式中各項爲  $n$  次元，而爲由  $n$  因數各取一文字之  $n$  文字相乘之積。故含  $a^r x^{n-r}$  之各項爲由  $n$  因數中之任何  $r$  個取  $a$ ，由其餘  $n-r$  個取  $x$  而得之者。故含  $a^r x^{n-r}$  之項之數必等於由  $n$  物取  $r$  物之組合之數，即  $a^r x^{n-r}$  之係數爲  $nC_r$ 。依次與  $r$  以  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  諸值，則得諸項之係數。故得

$$(x+a)^n = x^n + nC_1 a x^{n-1} + nC_2 a^2 x^{n-2} + \dots + nC_r a^r x^{n-r} + \dots + a^n, \text{ 因 } nC_0 \text{ 與 } nC_n \text{ 各等於 } 1 \text{ 故也。}$$

$n$  爲正整數時，又可用歸納法證明之如次：假定其指數爲  $n$  時爲合理，以  $x+a$  乘之，得

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + (1+nC_1)ax^n + (nC_1+nC_2)a^2x^{n-1} + \dots + (nC_{r-1}+nC_r)a^r x^{n-r+1} + \dots + a^{n+1}.$$

$$\text{而 } 1+nC_1 = 1+n = n+1C_1, nC_1+nC_2 = n + \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{(n+1)n}{2!} = n+1C_2,$$

而普通  $nC_{r-1} + nC_r = n+1C_r$ 。

$$\text{故 } (x+a)^{n+1} = x^{n+1} + n+1C_1 a x^n + n+1C_2 a^2 x^{n-1} + \dots + n+1C_r a^r x^{n-r+1} + \dots + a^{n+1}.$$

由是若此定理對  $n$  之任意值時爲真，則於  $n+1$  亦真。然  $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ， $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ ，即  $n=2, 3$  時此定理爲真，故  $n=4$  時亦真； $n=4$  時此定理既真，則  $n=5$  時亦真。逐次如是，故此定理普通皆真。

[最大係數] 因普通項之係數爲  $nC_r$ ，而當  $n$  爲偶數， $nC_{\frac{n}{2}}$  爲最大，即第  $\frac{n}{2} + 1$  項之係數爲最大。又當  $n$  爲奇數，則  $nC_{\frac{n-1}{2}}$  與  $nC_{\frac{n+1}{2}}$  相等而爲最大，即第  $\frac{n+1}{2}$  與  $\frac{n+3}{2}$  項之係數爲最大（參看組合條）。

[最大項] 因  $(x+a)^n = x^n \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n$ ，故祇須求  $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^n$  內之最大項即可。

而其展開式中之第  $r+1$  項等於第  $r$  項以  $\frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{a}{x}$  或  $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right) \frac{a}{x}$  乘之。而  $\frac{n+1}{r} - 1$  因  $r$  之增大而減小，故必  $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right) \frac{a}{x} > 1$ ，第  $r+1$  項始大於

第  $r$  項。然欲  $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right) \frac{a}{x} > 1$ ，則必  $\frac{n+1}{r} > \frac{x}{a} + 1$ ，或  $\frac{n+1}{\frac{x}{a} + 1} > r$ 。若

$\frac{n+1}{\frac{x}{a} + 1}$  爲整數  $p$ ，則  $p=r$ ，而第  $p+1$

項等於第  $p$  項，而此二項大於其餘各項。

若  $\frac{n+1}{\frac{x}{a} + 1}$  不爲整數，而命其整數部

分爲 q, 則第 q+1 項爲最大。

II. 次證明當 n 爲正分指數時, 二項式定理亦成立。下述爲尤拉 (Euler) 之證法。命

$$f(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (1)$$

$$f(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (2)$$

$$f(m+n) = 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

將(1),(2)之右邊相乘, 而依 x 之昇幂列之, 則不論 m, n 爲何數, 其積之形常爲

$$1 + (m+n)x + \left\{ \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2!} \right\} x^2 + \dots$$

然若 m 與 n 爲正整數時, 則

$$f(m) = (1+x)^m, f(n) = (1+x)^n, \text{ 而 } f(m) \times f(n) = (1+x)^m \times (1+x)^n = (1+x)^{m+n} = f(m+n) \dots \quad (A)$$

而(A)不論 m, n 之值爲何, 皆能合理。同樣 f(m)f(n)f(p)……至 k 因數 = f(m+n+p+……至 k 項)。令 m=n=p=……

=  $\frac{h}{k}$ , 而 h, k 爲正整數, 則得

$$\left\{ f\left(\frac{h}{k}\right) \right\}^k = f(h); \text{ 然 } h \text{ 爲正整數,}$$

故得 f(h) = (1+x)<sup>h</sup>; ∴ (1+x)<sup>h</sup>

$$= \left\{ f\left(\frac{h}{k}\right) \right\}^k; \therefore (1+x)^{\frac{h}{k}} = f\left(\frac{h}{k}\right);$$

$$\therefore (1+x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \frac{h}{k}x + \frac{h}{k} \left( \frac{h-1}{k} \right) \frac{x^2}{2!} + \dots$$

於是已證明二項式定理於正分指數能成立。

III. 茲證當 n 爲負數時二項式定理亦成立。於(A)內以 -n(n爲正數)代m, 則得

$$f(n) \times f(-n) = f(-n+n) = f(0) = 1.$$

$$\therefore \frac{1}{f(n)} = f(-n), \text{ 即 } \frac{1}{(1+x)^n} = f(-n).$$

故 (1+x)<sup>-n</sup> = f(-n) = 1 + (-n)x +

$$\frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

於是已證明 n 爲負數, 二項式定理亦成立。由是, 不論二項式之指數爲正數或負數, 整數或分數(即有理數); 無不合於二項式定理。而二項式定理

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

完全成立矣。若 n 不爲正整數, 則此級數爲無窮級數, 故 x 必取之使右邊之級數爲收斂級數始可。例如

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (r+1)x^r + \dots$$

祇當 x 之值可使右邊之級數爲收斂時爲眞。即須 x 小於 1 始可。若命 x 等於 1, 則得 0 = 1 + 2 + 3 + 4 + … 而爲大誤矣。

二項定理，甚為重要，高等數學中常用之。即初等數學中亦可應用之。例如求 126 之立方根至小數五位。因

$$126 = 125 \left( 1 + \frac{1}{125} \right) = 5^3 \left( 1 + \frac{1}{5^3} \right)$$

$$\sqrt[3]{126} = 5 \left( 1 + \frac{1}{5^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^6} + \right.$$

$$\left. \frac{5}{81} \cdot \frac{1}{5^9} - \dots \dots \dots \right)$$

$$= 5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^5} +$$

$$\frac{1}{81} \cdot \frac{1}{5^8} - \dots \dots \dots$$

$$= 5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{10^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{2^5}{10^5} + \frac{1}{81} \cdot \frac{2^7}{10^7}$$

.....

$$= 5 + \frac{.04}{3} - \frac{.00032}{9} +$$

$$\frac{.0000128}{81} - \dots \dots \dots$$

$$= 5 + .013333 \dots - .000035 \dots + \dots \dots$$

$$= 5.01329 \text{ 至五位小數。}$$

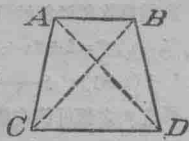
**【二項展開式】** Binomial expansion.

〔代〕即用二項式定理將  $(x+a)^n$  展開所得之式也。與二項級數同。

**【二等邊梯形】** Isosceles trapezoid.

〔幾〕又稱等腰梯形或等脚梯形。即梯形之二腰相等者。

二等邊梯形各底之兩端之角相等，而對角互為補角。即  $\angle A = \angle B$ ，



$\angle C = \angle D$ ，而  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ 。又二等邊梯形之二對角線相

等。即  $AD = BC$ 。

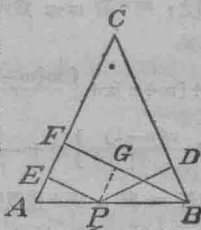
**【二直角三面角】** Bi-rectangular tri-

hedral angle. 〔幾〕即三面角之有二直角二面角者。

**【二等邊三角形】** Isosceles triangle.

〔幾〕三角形之二邊相等者，謂之二等邊三角形或等腰三角形或等脚三角形，而他邊謂之底，對底之角謂之頂角。若三角形之二邊相等，其對角亦等，而此之逆定理亦成立。二等邊三角形之頂角之二等分線，為底之垂直二等分線，而此之逆定理亦成立。引二等邊三角形之中線為底之垂直二等分線，又為頂角之二等分線。於二等邊三角形 ABC 之底 AB (或其延線) 上取一點 P，由 P

至二腰 AC, BC 所作二垂線 PD, PE

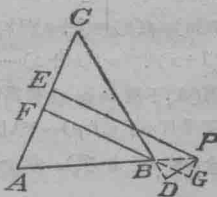


之和 (或差) 為常數，而等於在腰上之高 BF。〔證〕

作  $PG \perp BF$ ，則 EPGF 為

矩形。∴  $GF = PE$ 。

又因直角三角形  $PGB$ ，

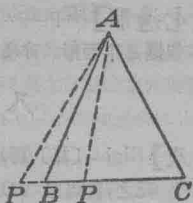


$BDF$  相等，∴  $GB = PD$ 。∴  $PD + PE$  (或  $PD - PE$ ) =  $BF$ 。又於二等邊三角形 ABC 之底 BC 或其延線上取一點 P，則

$AP^2 \sim AB^2 = BP \cdot CP$ 。〔證〕作  $AE \perp BC$ ，



$$\begin{aligned} & \text{則 } AP^2 = AE^2 \\ & + PE^2, AB^2 \\ & = AE^2 + BE^2. \\ & \therefore AP^2 \sim AB^2 \\ & = PE^2 \sim BE^2 \\ & = (PE \sim BE) \\ & (PE + BE) = BP \cdot CP. \end{aligned}$$



### 【二次不定方程式】Indeterminate equation of the second degree. [代]

不定方程式之爲二次者之謂也。方程式  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  之正整數之解法可化爲形如  $x^2 \pm Ny^2 = \pm a$  之方程式之解法，而  $N$  與  $a$  爲正整數。然方程式  $x^2 + Ny^2 = -a$  無實根，而  $x^2 + Ny^2 = a$  有有限數之根，可用試驗得之；故僅須注意  $x^2 - Ny^2 = \pm a$  即可。茲先求  $x^2 - Ny^2 = \pm 1$  之正整數之解答。化  $\sqrt{N}$  爲連分數，而命  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$  爲相連之近數，假定  $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$  爲與  $\frac{p''}{q''}$  相當之完全商，則  $r_n(pq' - p'q) = Nq'^2 - p'^2$ 。然求  $\sqrt{N}$  之連分數時，每次所得連分之各商中，可得  $r_n = 1$ ； $\therefore pq' - p'q = p'^2 - Nq'^2$ ， $\frac{p'}{q'}$  爲任何循環期之末第二近數。而  $p'q - pq' = \pm 1$ ，又原方程爲  $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ ，故  $x = p', y = q'$  爲一組解答。例如求  $x^2 - 13y^2 = \pm 1$  之正整數解答。因  $\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}$  第一循環期內末第二近數爲  $\frac{18}{5}$ ；故  $x = 18, y$

$= 5$  爲  $x^2 - 13y^2 = -1$  之一解答。又第二循環期內末第二近數爲  $\frac{649}{180}$ ；故  $x = 649, y = 180$  爲  $x^2 - 13y^2 = +1$  之一解答。

次求  $x^2 - Ny^2 = \pm a$  之正整數之解答。因  $p'^2 - Nq'^2 = -r_n(pq' - p'q) = \pm r_n$ 。故若  $a$  爲當化  $\sqrt{N}$  爲連分數內任何完全商之分母，而  $\frac{p'}{q'}$  爲與此完全商相當之近數，則  $x = p', y = q'$  爲方程式  $x^2 - Ny^2 = \pm a$  之一之解答。例如求  $x^2 - 7y^2 = 2$  之正整數之解答。因  $\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$ ，而第二完全商之分母爲 2，其相當之近數爲  $\frac{3}{1}$ ；故  $x = 3, y = 1$  爲所求之解答。

若  $N$  爲完全平方，則可如次例以解之。[例] 余有趙，錢，孫三友，皆新婚。一日各攜其妻見予。三夫人爲周氏，吳氏，陳氏。然余已忘各友之妻。惟彼等告我，彼等曾至市購豕，其每口之值之元數各與其所買之豕數同；又趙某較吳氏多購 23 口，錢某較周氏多購 11 口，又每人較其妻多費 63 元。試決定各人之妻。令  $x$  爲任一人所買之豕數，則其所費爲  $x^2$  元；同樣其妻所費之洋爲  $y^2$  元。 $\therefore x^2 - y^2 = 63$ 。即  $(x+y)(x-y) = 63 \times 1$ ，或  $21 \times 3$ ，或  $9 \times 7$ 。 $\therefore x+y = 63$  或  $21$  或  $x-y = 1$  或  $3$  或  $7$ 。 $\therefore x = 32, 12, 8$ ； $y = 31, 9, 1$ 。即三友所購之豕數爲 32, 12, 8；三婦人所購之豕數爲 31,

9, 1. 然因趙某較吳氏多購 23 口, 故知趙某購 32 口, 吳氏購 9 口; 又錢某較周氏多購 11 口, 故知錢某購 12 口, 周氏購 1 口. 由是孫某購 8 口, 陳氏購 31 口. 故知陳氏爲趙某之妻, 吳氏爲錢某之妻, 周氏爲孫某之妻.

【二次聯立方程式】 Simultaneous equations of the second degree. [代] 即聯立方程式之爲二次方程式者.

【二面角之平面角】 Plane angle of dihedral angle. [幾] 見二面角條.

【二線所包之矩形】 Rectangle contained by two lines. [幾] 即以二直線爲鄰邊所作之矩形之謂也.

【二直角球面三角形】 Birectangular spherical triangle. [幾] 球面三角形之有二直角者之謂也.

【二等邊球面三角形】 Isosceles spherical triangle. [幾] 即球面三角形之有二邊相等者.

## 七

【七】 Seven. [算] 數名. 亞拉伯以 7 記之, 羅馬以 VII 記之, 希臘以 ζ' 記之.

【七角形】 Heptagon. [幾] 即七邊形.

【七面體】 Heptahedron. [幾] 即七平面所包圍之立體也.

【七進法】 Septenary scale. [代] 即以七爲記數底之記數法也. 此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 及 0 即足, 而於七進法中, 2453 即表  $2 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 5 \times 7 + 3$  之意.

【七邊形】 Heptagon. [幾] 即七直線所包圍之平面形. 亦稱七角形.

## 八

【八】 Eight. [算] 爲基數之一, 亞拉伯以 8 記之, 羅馬以 VIII 記之, 希臘以 η' 記之.

【八線】 Trigonometrical functions. [三] 即三角函數.

【八角形】 Octagon. [幾] 即八邊形.

【八面體】 Octahedron. [幾] 即八平面所包圍之立體也.

【八進法】 Octenary scale. [代] 即以八爲記數底之記數法也. 此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 及 0 即足, 而於八進法中, 4167 即表  $4 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 6 \times 8 + 7$  之意.

【八線學】 Trigonometry. [數] 即三角法.

【八邊形】 Octagon. [幾] 即八直線所包圍之平面形. 亦稱八角形.

【八分空間】 Octant. [幾] 互相垂直三平面, 分空間爲八部分, 其各部分謂之八分空間.

## 九

【九】 Nine. [算] 爲基數之一. 亞拉伯以 9 記之, 羅馬以 IX 記之, 希臘以 θ' 記之.

【九九】 [算] 自一至九每二數相乘謂之九九.

【九章】 [數] 算法之名, 又算書之名. 見九章算術條.

【九數】〔數〕即九章算法。

【九歸】〔數〕珠算中法數在九以內者之除法也。運算時所用之口訣謂之九歸訣。

【九九表】Multiplication table.〔算〕即乘法表，見該條。

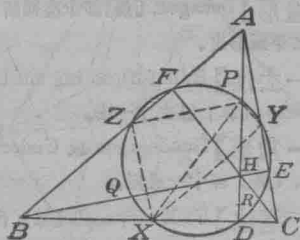
【九去法】Rule for casting out the nines.〔算〕即去九法，見該條。

【九角形】Enneagon 或 Nonagon.〔幾〕即九邊形。

【九面體】Enneahedron.〔幾〕即九平面所包圍之立體也。

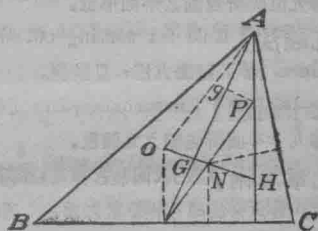
【九進法】Nonary scale.〔代〕即以九為記數底之記數法也。此記數法用數字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 及 0 即足，而於九進法中，3652 即表  $3 \times 9^3 + 6 \times 9^2 + 5 \times 9 + 2$  之意。

【九點圓】Nine-point circle.〔幾〕三角形 ABC 三邊之中點 X, Y, Z, 三垂足 D, E, F, 及由垂心 H 至各角頂之直線 HA, HB, HC 之中點 P, Q, R 在同一圓周上。此圓謂之九點圓，因其過九點故名。而此定理為邦斯累 (Poncelet) 所發明，故謂之邦斯累定理。〔證〕聯 XY,



XZ, XP, YP, ZP. 由  $\triangle ABH$ , 因 AZ

$=ZB$ ,  $AP=PH$ ,  $\therefore ZP \parallel BH$ . 又由  $\triangle ABC$ , 因  $BZ=ZA$ ,  $BX=XC$ ,  $\therefore ZX \parallel AC$ . 然延長 BH, 與 AC 成直角, 故  $\angle XZP$  為直角. 同樣  $\angle XYP$  亦為直角. 故 X, Z, P, Y 在同一圓周上; 即 P 在經過 X, Y, Z 之圓周上, 而 XP 為此圓之直徑. 同樣可證明 Q, R 亦在此圓周上. 又因 PDX 為直角, 故以 XP 為直徑之圓通過 D. 同樣可證明 E, F 在此圓周上. 故 X, Y, Z, D, E, F, P, Q, R 在同一圓周上. 茲述九點之重要性質如次: (1) 九點圓為垂足三角形之外接圓. 此已含於上定理中, 因九點圓過三垂足 D, E, F 故也. (2) 九點圓心為聯結垂心外心之直線之中點. 〔證〕命 H 為垂心, O 為外心, N 為九點圓



心. 作 XD 之中垂線, 則此中垂線平分 HO. 同樣作 EY 之中垂線, 則此線亦平分 HO. 即此等垂線交於 HO 之中點. 而因 XD 與 EY 為九點圓之弦, 故弦之中垂線之交點為九點圓心, 故九點圓心 N 為 HO 之中點. (3) 九點圓心, 垂心, 外心, 重心在同一直線上. 〔證〕由(2)知九點圓心, 垂心, 外心在同

一直線上。聯  $AX$ ，作  $Pg$  平行於  $HO$ ，交  $AX$  於  $g$ 。命  $AX$  交  $HO$  於  $G$ 。則由  $\triangle AGH$ ，因  $AP=PH$ ， $PG \parallel HG$ ， $\therefore Ag=gG$ 。又由  $\triangle XPG$ ，因  $PN=NX$ ， $NG \parallel Pg$ ， $\therefore gG=GX$ 。  $\therefore AG = \frac{2}{3}AX$ 。故  $G$  爲  $\triangle ABC$  之重心。即

重心  $G$  與  $O$ ， $N$ ， $H$  爲共線點。(4) 九點圓之半徑爲外接圓之半徑之半。

[證] 因  $N$  爲  $HO$  之中點， $P$  爲  $HA$  之中點，故  $NP = \frac{1}{2}OA$ 。即九點圓之半徑等於外接圓之半徑之半也。(5) 九點圓與內切圓傍切圓相切。此即富爾巴定理，見該條。

【九邊形】Enneagon 或 Nonagon. [幾] 即九直線所包圍之平面形也。

【九驗法】Rule for casting out the nines. [算] 即去九法，見該條。

【九十面體】Enneacontahedron. [幾] 即九十平面所包圍之立體也。

【九章算術】[數] 我國最古算法，亦稱九數，昔黃帝使隸首作算數即此。今所傳者凡九篇。一曰方田，以御田疇界域。詳簡單幾何圖形之計算，以圓周率爲 3。二曰粟米，以御交質變易。詳百分法之算。三曰衰分，以御貴賤廩稅。四曰少廣，以御積器方圓。五曰商功，以御工程積實。詳立方體，角錐，圓錐，圓柱等體之積。六曰均輸，以御遠近勞費。七曰盈不足，以御雜難互見。八曰方程，以御錯綜正負。用正負之則，以計算聯

立方程。九曰句股，以御高深廣遠。用畢達哥拉斯定理以量地。

## 十

【十】Ten. [算] 數名，爲九加一之結果。亞拉伯以 10 記之，羅馬以 X 記之，希臘以  $\iota'$  記之。

【十位】Tens' place. [算] 即記數時自右第二位也。

【十字比】Cross-ratio [幾] 與非調比同，見該條。

【十位數】Tens. [代] 即在十位之數也。

【十角形】Decagon. [幾] 即十邊形。

【十面體】Decahedron. [幾] 即十平面所包圍之立體也。

【十進法】Denary scale. 或 Decimal system. [算] [代] 十進法者，以一，二，三，四，五，六，七，八，九爲基數，九加一謂之十，自十次第十倍之，與以新名稱，曰百，千，萬，……之法也。此命數法及記數法現今世界各國多用之。

【十進算】Decimal arithmetic. [算] 即用十進法之算術也。

【十邊形】Decagon. [幾] 即十直線所包圍之平面形也。

【十一去法】Rule for casting out the elevens. [算] 即去十一法。

【十一角形】Hendecagon 或 Undecagon. [幾] 即十一邊形。

【十一進法】Undenary scale. [算] [代] 即以十一爲記數底之法也。在此數記法中須另以符號以表十，普通以  $t$  表之。例

如於十一進法中之 72:35, 即表  $7 \times (11)^4 + 2 \times (11)^3 + 10 \times (11)^2 + 3 \times 11 + 5$  之意。

【十一邊形】Hendecagon 或 Undecagon. [幾] 即十一直線所包圍之平面也。

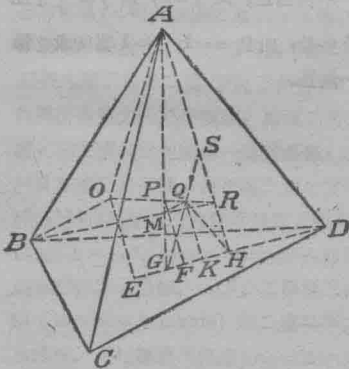
【十一驗法】Rule for casting out the elevens. [算] 即去十一法。

【十二角形】Dodecagon. [幾] 即十二邊形。

【十二面體】Dodecahedron. [幾] 即十二平面所包圍之立體也。

【十二進法】Duodenary scale 或 Duodecimal method [算] [代] 即以十二為記數底之記數法也。此記法中以 t 表 10, e 表 11. 例如  $67t3e2$  即表  $6 \times (12)^5 + 7 \times (12)^4 + 10 \times (12)^3 + 3 \times (12)^2 + 11 \times (12) + 2$  之意。

【十二點球】Twelve points sphere. [幾] 由相對稜互相垂直之四面體之各頂



至對邊作垂線, 其交點由各頂之距離之

三分之一之點, 與各面之垂心及重心(共十二點)同在一球面上。此球謂之十二點球。[證] 設 ABCD 為相對稜互相垂直之四面體, 過各稜之中點之球心為 P, 外接球之心為 O, 垂心為 R. 由 O, P, R 至 BCD 面作垂線 OE, PF, RH, 則 E, F, H 各為  $\triangle BCD$  之外心, 九點圓心, 垂心。又 AP 之延線交 BCD 面於 G, 則 G 為  $\triangle ABC$  之重心, 而 E, G, F, H 四點在同一直線上(見九點圓條)。且  $AP = 3PG$ .  $\therefore FH = 3GH$ , 又  $EF = FH$ , 由是  $2GF = EG$ . 今命 K 為 GH 之中點, 則  $GF = FK$ . 次作  $KQ \parallel AH$ , 交 PR 於 Q, GQ 之延線交 AH 於 S, 則  $GS = QS$ . 然  $\angle AHG = rt. \angle$ , 故  $QS = QH$ . 又因 O, P, Q 在同一直線上,  $PQ : OP = FK : EF = 1 : 3$ .  $\therefore \triangle APO \sim \triangle GPQ$ , 而  $AO \parallel GQS$ , 由是  $AS : SR = OQ :$

$QR = EK : KH = 2 : 1$ . 故  $SR = \frac{1}{3} AR$ .

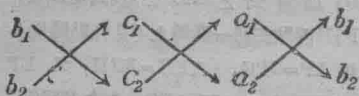
又作  $QM \parallel OB$ , 交 BR 於 M. 則  $QM = \frac{1}{3} OB = \frac{1}{3} OA = QS$ , 而  $MR = \frac{1}{3} BR$ . 由是以 Q 為心, QB 為半徑作球, G, H, M, S 皆在其球面上。其他 CR, DR 上由 R 之距離為其長之三分之一之點皆在此球面上。同樣可證各面之垂心, 重心與 Q 之距離等於 QS. 故此十二點在同一球面上。

【十二邊形】Dodecagon. [幾] 即十二直線所包圍之平面形也。

【十五角形】Pentecagon 或 Quindecagon. [幾] 即十五邊形。

【十五邊形】Pentadecagon 或 Quind-  
ecagon. [幾]即十五直線所包圍之平面  
形也。

【十字乘法】Cross multiplication. [代]  
方程式  $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ,  $a_2x + b_2y$   
 $+ c_2z = 0$  可用下法以求得以係數表  $x$  :  
 $y$  :  $z$  之比。即如圖將  $x, y, z$  之係數, 自  
 $y$  之係數始, 依次書之, 且將  $y$  之係數



書之, 將  $y$  諸係數依矢所示乘之, 自上向  
下者爲正, 自下向上者爲負。則得  $b_1c_2$   
 $- b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1$ , 此三  
式與  $x, y, z$  成比例, 即

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

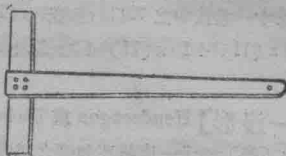
此法謂之十字乘法。

人

【人壽保險】Life assurance 或 Life  
insurance. [算]亦稱生命保險。凡人恐  
一旦死亡而家族無以贍養, 乃預定年限  
及所保之總額, 納費於保險公司。若未  
滿年限而人已死, 則公司照其所保總額  
付給之; 若已滿年限, 則照所保之總額,  
加利息以還之。

丁

【丁字板】T-square [幾]畫圖器, 以  
扁薄二木條製之。形如丁字, 故名。與



三角板並用以畫平行線及垂線, 其形如  
圖。

刁

【刁藩廷解法】Diophantine solution

[代]不定方程式之解法爲不定, 然若於  
其解答上加以限制, 則可使其解法爲一  
定。最普通之例爲屬於解答  $x, y$  之值  
俱爲整數, 特別之例爲須正整數者。如  
是之解法謂之刁藩廷之解法。例如取

方程式  $3x + 2y = 5$ , 且  $x, y$  之解答  
須爲正整數。則此方程式惟一解答,  
即  $x=1, y=1$ 。因變方程式之形式, 得  
 $2y = 5 - 3x$ 。與  $x$  以大於 1 之整數值,  
 $y$  不能爲正, 又  $x=0$ , 則  $y = \frac{5}{2}$ , 此  
非整數, 由是  $x=1, y=1$  爲所求之惟  
一解答。

## 三 畫

## 三

【三】Three, [算] 爲基數之一。亞拉伯以 3 記之，羅馬以 III 記之，希臘以  $\lambda$  記之。

【三次式】Cubic expression. [代] 含某文字之三乘冪或二以上文字之三次元之式謂之三次式。例如  $5x^3+4x^2-2x+8$ ,  $4x^2y-7xy+3y+1$ ,  $xyz-x-y^2+2$  皆爲三次式。而普通三次式爲  $ax^3+bx^2+cx+d$ 。

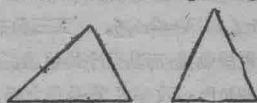
【三次項】Term of the third degree. [代] 項之含某文字之三乘冪或二以上文字之三次元者之謂。例如  $5x^3, 2xy^2, 7xyz$  是也。

【三角比】Trigonometrical ratio. [三] 與三角函數同見該條。

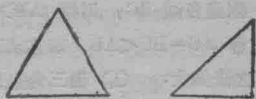
【三角形】Triangle 或 Trigon. [幾] 三角形者，三線所包圍之面之一部也。因有三邊三角故名。三角形分爲平面三角形與球面三角形二種：平面三角形者，三直線所包圍之一部平面也；球面三角形者，三大圓弧所包圍之一部球面也，其詳見球面三角形條。而平面三角形常略稱爲三角形。平面三角形可分類之如次：(1) 斜三角形 (Scalene triangle)，即三邊不相等之三角形。(2) 二等邊三角形 (Isosceles triangle) 即二邊相等之三角形。(3) 等邊三角形 (Equilateral triangle)，即三邊皆相等之三角形。

(4) 直角三角形 (Right-angled triangle)，即三角形之一角爲直角者。

(5) 斜角三角形 (Oblique-angled tri-



斜三角形 二等邊三角形

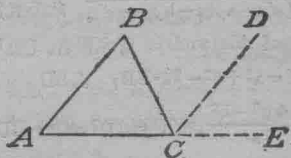


等邊三角形 直角三角形



銳角三角形 鈍角三角形

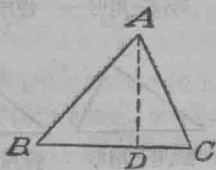
angle)，即任何角皆不爲直角之三角形。而斜角三角形又分銳角三角形與鈍角三角形二種。(6) 銳角三角形 (Acute-angled triangle)，即其諸角皆爲銳角之三角形。(7) 鈍角三角形 (Obtuse-angled triangle)，即有一角爲鈍角之三角形。(8) 等角三角形 (Equiangular triangle)，即三角相等之三角形，實即等邊三角形也。任何三角形三角之和等於二直角。[證]於三角形ABC，



作 CD 平行於 AB，延長 AC 至 E，則

$\angle ECD + \angle DCB + \angle BCA = 2\text{rt}\angle$ 。而  
 $\angle A = \angle ECD$ ,  $\angle B = \angle DCB$ 。以  $\angle A$ ,  
 $\angle B$  代其等角  $\angle ECD$  及  $\angle DCB$ , 則  $\angle A$   
 $+ \angle B + \angle BCA = 2\text{rt}\angle$ 。又三角形兩  
 邊之和大於他邊, 而其差小於他邊。〔證〕  
 於  $\triangle ABC$  內, 設  $AC$  爲最長之邊。因  
 直線爲二點間最短之線。  $\therefore AB + BC$   
 $> AC$ 。兩邊各減  $BC$ , 則得  $AB > AC$   
 $- BC$ , 即  $AC - BC < AB$ 。茲述求三角  
 形面積之法如次: (i) 因三角形爲同  
 底同高之矩

形之半, 故  
 由  $\triangle ABC$  之  
 頂點  $A$  至對  
 邊作垂線  $AD$ , 則  $\triangle ABC$



之面積爲  $\frac{1}{2}BC \cdot AD$ 。命底爲  $a$ , 高爲

$h$ , 面積爲  $S$ , 則  $S = \frac{1}{2}ah$ 。是爲知三

角形之底及高而求其面積之公式。 (ii)

因  $h = AD = AC \sin C = b \sin C$ , 故  $S =$

$\frac{1}{2}ab \sin C$ 。是爲知三角形之二邊及其

夾角而求其面積之公式。 (iii) 設已知

三邊爲  $a, b, c$ , 命  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$  則

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。此公式爲

Hero of Alexandria 所求得者。〔證1〕

因  $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD$ ,  $\therefore BD$

$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ 。故  $h^2 = AD^2 = AC^2 - BD^2$

$= (c - BD)(c + BD)$

$$= \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} \cdot \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}$$

$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2} \cdot \therefore S = \frac{1}{2}ah$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \text{〔證2〕 由三}$$

$$\text{角法之公式 } \sin \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\cos \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

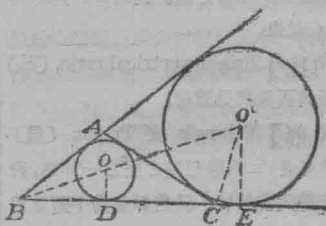
$$\therefore S = \frac{1}{2}ab \sin C = ab \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \text{〔證3〕 命內}$$

切圓之半徑  $OD = r$ , 對  $B$  角之傍切圓

之半徑  $O'E = r'$ , 則  $S = sr \dots \dots (1)$ ,

又因  $\triangle ODC$  與  $\triangle O'CE$  相似, 故  $OD:$



$OD = CE : O'E$ , 即  $r : s - c = s - a : r'$ 。又

$OD : BD = O'E : BE$ , 即  $r : s - b = r' : s$ 。

故由二比例式得  $r^2 : (s-b)(s-c) =$

$(s-a) : s$ ,  $\therefore r^2 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ 。代

入(1)式則得  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

表三角形面積之公式甚多, 茲略示數式

於次: (1)  $sr$ 。 (2)  $\frac{abc}{4R}$ ,  $R$  爲外半徑。

(3)  $\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ 。 (4)  $Rr(\sin A + \sin B$



+sinC), (6)  $2R^2 \sin A \sin B \sin C$ , (6)

$\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ , 而  $r_1, r_2, r_3$  為傍切圓之半

徑, (7)  $\sqrt{\frac{1}{2} R p_1 p_2 p_3}$ , 而  $p_1, p_2, p_3$

為各高, (8)  $r_2 r_3 \tan \frac{1}{2} A$ , (9)  $r r_1 \cot$

$\frac{A}{2}$ , (10)  $r r_1 \frac{r_2 - r_3}{b - c}$  (11)  $\frac{s^2}{\sum \cot \frac{1}{2} A}$

(12)  $r^2 \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C$ .

(13)  $r^2 \cot \frac{1}{2} A + 2Rr \sin A$ , (14)

$r_1 r_2 \sqrt{\frac{4R - (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}}$ , (15)  $\frac{4}{3}$

$\sqrt{\sigma(\sigma - m_1)(\sigma - m_2)(\sigma - m_3)}$ , 而  $m_1,$

$m_2, m_3$  為三中線之長,  $\sigma = \frac{1}{2}(m_1 +$

$m_2 + m_3)$ , (16)  $\left\{ f \cos \frac{1}{2} (B - C) \right.$

$+ g \cos \frac{1}{2} (C - A) + h \cos \frac{1}{2} (A - B) \left. \right\},$

$\div 2 \left( f^{-1} \cos \frac{1}{2} A + g^{-1} \cos \frac{1}{2} B + h^{-1} \cos$

$\frac{1}{2} C \right)$  而  $f, g, h$  為內二等分線之長。

**【三角法】** Trigonometry. [數] 亦稱三

角術, 三角學或八線學。為數學之一分

科, 論三角函數之性質, 關係及三角形

之解法與應用者也。三角法大別為平面,

之邊與角間之關係者也。解析三角法

(Analytical trigonometry) 者, 論普通

**【三角板】** Triangle 或 Set square [數]

畫圖器, 以薄木板或硬橡皮所製之三角

**【三角表】** Trigonometrical tables. [三]

載三角函數之值及其對數之表也。三角

表分二種, 即三角函數真數表與三角函

數對數表是也。前者載三角函數之值,

後者載三角函數之表對數。

〔三角表之造法〕 茲述計算  $0^\circ$  與  $90^\circ$  之

間每隔  $10''$  諸角之三角函數真數之法:

命  $\theta$  為  $10''$  之弧度, 即  $\theta = \frac{10\pi}{180 \times 60 \times 60}$

$= \frac{\pi}{64800} = \frac{3.141592653589793 \dots}{64800}$

$= .00004848136811 \dots$ , 而  $\frac{1}{6} \theta^3 = .000$

$00000000021 \dots$ , 故  $\theta$  與  $\theta - \frac{1}{6} \theta^3$  有

12 位小數相同。然若  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 則

$\theta > \sin \theta > \theta - \frac{1}{6} \theta^3$ ; 故  $\sin 10'' = .0000$

$48181368 \dots$  至 12 位小數, 故  $\cos 10''$

$= \sqrt{1 - \sin^2 10''} = .9999999988248 \dots$

至 13 位小數。而公式  $\sin(n+1)A + \sin$

$(n-1)A = 2 \sin nA \cdot \cos A$  可用以求  $10''$

之倍數之正弦。命  $A = 10''$ ,  $2 \cos 10''$

$= 2 - k$  則  $k = .0000000023504 \dots$ , 而

上公式可寫為  $\sin(n+1)A - \sin nA = \sin nA - \sin$

$(n-1)A - k \sin nA$ . 令  $n=1$ , 則可算得  $\sin 20''$ ; 令  $n=2$ , 則可得  $\sin 30''$ , 由是類推. 因  $k=.0000000023504\dots$ , 故當計算  $k \sin nA$ , 僅用其首數位即可. 用上法算至  $45^\circ$  諸角之正弦, 則此象限內其餘諸角之正弦可用公式

$$\sin(45^\circ + A) - \sin(45^\circ - A) = 2\cos 45^\circ$$

$\sin A = \sqrt{2} \cdot \sin A$  以求之. 若已算至  $60^\circ$  諸角之正弦, 則此象限內其餘諸角之正弦可用公式

$$\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = 2\cos 60^\circ$$

$\sin A = \sin A$  以求之. 若已知諸角之正弦, 則其餘弦亦可知之; 因任何角之餘弦等於其餘角之正弦故也.  $45^\circ$  以下

正切之表, 可用公式  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  以得

之,  $45^\circ$  以上者可用公式  $\tan(45^\circ + A) = 2 \tan 2A + \tan(45^\circ - A)$  以求之. 餘切之表可由正切之表用  $\cot A = \tan(90^\circ - A)$  得之. 正割之表可用公式  $\sec A$

$= \tan A + \tan\left(45^\circ - \frac{1}{2}A\right)$  以得之. 餘

割之表, 可用公式  $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$  以得之.

三角函數之真數表已造成, 則三角函數之對數表可用尋常之對數表以造之. 惟表中之對數, 常加以 10, 使免用負對數, 而如是之對數謂之表對數. 如  $\sin A$  之表對數以  $L \sin A$  記之, 即  $10 + \log \sin A$  之意也.

[三角表之用法] 若所與之角或三角函數為表中所有者, 則所求之函數或角可

直由表檢得之. 茲示當所與之角或函數為表中所無者, 而求其函數或角之法.

(1) 求與角之正弦. 例如求  $\sin 44^\circ 35' 25''$ . 普通之三角函數表祇載每隔  $1'$  之函數, 是以必須以分之小數表秒. 而  $25''$

$$= \frac{25}{60} = .4 \text{ 分, 故所與之角為 } 44^\circ 35'.4.$$

故所求之正弦在  $\sin 44^\circ 30'$  與  $\sin 44^\circ 40'$  之間. 檢五位之三角函數表得

$$\sin 44^\circ 40' - \sin 44^\circ 30' = .70298 - .70091 = .00207. \text{ 命 } x \text{ 為所求之正弦大於 } \sin 44^\circ 30' \text{ 之值. 假定正弦之增加與角之增加成正比例, 則得比例式 } 10':5'.4$$

$$=.00207:x, \text{ 由是得 } x = \frac{5.4 \times .00207}{10}$$

$$=.00112, \text{ 而所求之值為 } .70091 + .00112$$

$= .70203$ . (2) 已知正弦, 求對應之角. 例如求其正弦為  $.69709$  之角, 檢表得

$$\sin 44^\circ 20' - \sin 44^\circ 10' = .69883 - .69$$

$$675 = .00208. \text{ 已知之正弦大於 } 44^\circ 10'$$

者為  $.69709 - .69675 = .00034$ . 而所求

之角在由表檢得之二角之間, 設  $x$  為其大於  $44^\circ 10'$  之分數, 則得比例式  $00208:$

$$.00034 = 10':x, \text{ 由是得 } x = \frac{.00034 \times 10}{.00208}$$

$$= 1'.63, \text{ 而所求之角為 } 44^\circ 10' + 1'.63$$

$$= 44^\circ 11'.63 \text{ 或 } 44^\circ 11' 37''.8. (3)$$

求與角之餘弦. 例如求  $\cos 44^\circ 35'.4$ . 檢

$$\text{表得 } \cos 44^\circ 30' - \cos 44^\circ 40' = .71325 -$$

$$.71121 = .00204. \text{ 因在第一象限內, 餘弦}$$

因角之增加而減小. 故所求之餘弦小於

$44^\circ 30'$  之餘弦, 令  $x$  為其小於  $44^\circ 30'$  之

餘弦之數，則得比例式  $10':5',4=.002$

$$04:x, \text{ 由是 } x = \frac{5.4 \times .00204}{10} = .00110,$$

而所求之餘弦爲  $.71325 - .00110 = .71$

$215$ 。(4)已知餘弦求對應之角。例如

求其餘弦爲  $.71698$  之角。檢表得

$$\cos 44^\circ 10' - \cos 44^\circ 20' = .71732 - .71529$$

$$= .00203, \text{ 而所與之餘弦小於 } 44^\circ 10'$$

者爲  $.71732 - .71698 = .00034$ 。因餘

弦之增減與角之增減相反，令  $x$  爲所求

之角大於  $44^\circ 10'$  之分數，則得比例式

$$.00203 : .00034 = 10' : x, \text{ 由是 } x$$

$$= \frac{.00034 \times 10}{.00203} = 1'.674, \text{ 而所求之角}$$

$$\text{爲 } 44^\circ 10' + 1'.674 = 44^\circ 11'.674 = 44^\circ$$

$$11'4''.$$

其他關於正切，餘切，正割，

餘割之例，與上所述者同。惟須注意者，

即於第一象限，正切及正割與角俱增，

而餘切餘割則與角之增減相反。故正切，

正割可與正弦同法推論之，而餘切，餘

割可與餘弦同法推論之。三角函數對

數表之用法與尋常之對數表之用法同。

**【三角柱】** Triangular prism. [幾] 柱

體之底爲三角形者之謂，亦稱三稜柱。

**【三角術】** Trigonometry. [數] 即三角

法，見該條。

**【三角數】** Triangular number. [代]

見多角數條。

**【三角錐】** Triangular pyramid. [幾]

角錐之底爲三角形者謂之三角錐或三稜

錐。因其有四個三角形之面，故亦稱四

面體。

**【三角學】** Trigonometry. [數] 即三角

法，見該條。

**【三面角】** Trihedral angle. [幾] 三平

面所包圍之立體角謂之三面角。三平面

相交之點謂之三面角之頂，諸平面爲其

面，諸面之交線爲其稜，其兩稜所成之角

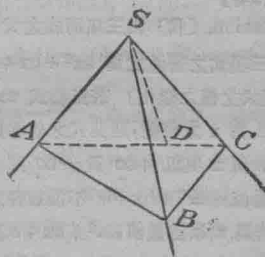
爲其面角。三面角之有一直角二面角者

謂之一直角三面角，有二直角二面角者，

謂之二直角三面角，有三直角二面角者

謂之三直角三面角。三面角之任意兩

面角之和，大於其第三面角 [證] 於三



面角  $S-ABC$  設面角  $ASC$  爲面角中

之最大者。作  $SD$  使  $\angle ASD$  等於

$\angle ASB$ 。過  $SD$  內任一點  $D$ ，作  $ADC$  直

線。取  $SB$  等於  $SD$ 。聯  $AB, BC$ 。依

作圖  $\triangle ASD, ASB$  全相等。故  $AD=AB$ 。

於  $\triangle ABC$ ， $AB+BC > AC$ 。兩邊各減

去相等之  $AB$  及  $AD$ ，則得  $BC > DC$ 。故

於  $\triangle BSC$ ，及  $DSC$ ， $\angle BSC > \angle DSC$ ，

加相等之角  $ASB$  及  $ASD$ ，則得  $\angle ASB$

$+ \angle BSC > \angle ASC$ 。

**【三重根】** Triple root. [代] 方程式若有

三根相等，則此根謂之三重根。例如於

方程式  $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$ , 即  $(x+1)(x-1)^3 = 0$  有三根爲  $+1$ , 故  $+1$  爲三重根。

**【三乘比】** Triplicate ratio. [算][代] 比  $2^3:3^3$  謂之比  $2:3$  之三乘比; 比  $a^3:b^3$  謂之比  $a:b$  之三乘比。

**【三乘根】** Cubic root. [算][代] 與立方根同。

**【三乘幂】** Third power. [算][代] 即某數自乘三次之謂, 例如  $2$  之三乘幂爲  $2^3$ ,  $a$  之三乘幂爲  $a^3$ . 三乘幂又稱立方。

**【三項式】** Trinomial 或 Trinomial expression. [代] 由三項而成之式也。

二次三項式之普通式爲  $ax^2 + bx + c$ .

**【三項式之值之變化】** 若三項式  $ax^2 + bx + c$  內  $x$  之值變, 則其式之值亦因之而變。但  $x$  與以  $+\infty$  及  $-\infty$  間之任意實數值,  $ax^2 + bx + c$  不能取任意之值。若與  $x$  以實數值,  $a^2 + bx + c$  所可取之值可求之如次。與  $x$  以某實數值,

而欲三項式  $ax^2 + bx + c$  等於  $\lambda$  之必要且充足之條件, 爲方程式  $ax^2 + bx + c = \lambda$  之根爲實數是也。而此條件爲  $b^2 - 4a(c - \lambda) \geq 0$ , 即  $b^2 - 4ac + 4a\lambda \geq 0 \dots (1)$ . I. 若  $b^2 - 4ac$  爲正, 與  $x$  之適當之值, 可使  $ax^2 + bx + c$  得與  $a$  同號之任意量, 及與  $a$  異號而絕對值不大於  $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$  之任意量。II. 若  $b^2 - 4ac$

爲負, 則條件(1)惟  $4a\lambda$  爲正, 且不小於  $4ac - b^2$  時, 方可適合。故若  $b^2 - 4ac$  爲負,  $ax^2 + bx + c$  恆與  $a$  同號, 而其

絕對值不能小於  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ . III. 若

$b^2 - 4ac$  爲零,  $a\lambda$  爲正, 恆可適合條件

(1). 由上觀之, 當  $b^2 - 4ac$  爲負或零, 即方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  之根爲

虛根或等根時, 於三項式  $ax^2 + bx + c$ , 與  $x$  以任何實數值, 其符號可一定不易;

又當  $a^2 + bx + c = 0$  之二根爲不相等之實數, 該式之符號可變化。茲又示別證如次。若方程式有實根  $\alpha, \beta$ , 則

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ . 若  $x$  大於  $\alpha$  亦大於  $\beta$  之實數值, 或小於  $\alpha$  亦

小於  $\beta$  之實數值, 則  $(x - \alpha)(x - \beta)$  爲正, 然若  $x$  爲  $\alpha$  與  $\beta$  之間之任意實

數值, 則  $(x - \alpha)(x - \beta)$  爲負。故對於  $x$  之實數值, 除方程式  $ax^2 + bx + c$

$= 0$  之二根間之  $x$  之值外, 三項式  $ax^2 + bx + c$  恆與  $a$  同號。又對於  $x$  之種種之

值, 三項式  $ax^2 + bx + c$ , 若  $b^2 - 4ac$  爲正, 其符號變, 若  $b^2 - 4ac$  爲負, 其

符號不變, 可證之如次: 因  $ax^2 + bx + c$

$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ . I. 若  $b^2$

$- 4ac$  爲正。當  $x = -\frac{b}{2a}$ , 括弧 [ ]

內之全式爲負。又當  $x$  極大,  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$

可大於  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ , 故括弧 [ ] 內之全

式可爲正。由是, 若  $b^2 - 4ac$  爲正, 三項式  $ax^2 + bx + c$ , 與  $x$  以適當之實數值, 其符號可得變化。II. 若  $b^2 - 4ac$  爲負或零。此時對於  $x$  之任意實數值,

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  爲正，而  $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$  亦爲正

或爲零。故括弧〔 〕內全式恆爲正。

故當  $b^2-4ac$  爲負或零，三項式  $ax^2+bx$

+c 恆與 a 同號。由前所述，於 x

之二次式與 x 以實數值，若其符號變

則此二次式等於零所得之方程式之二根

爲實數。例如於三項式  $a^2(x-\beta)(x-\gamma)$

+ $b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x+\alpha)(x-\beta)$ ，

命諸量皆爲實數，且令  $\alpha > \beta > \gamma$ 。當

$x=\alpha$ ，該式爲正，當  $x=\beta$ ，該式爲負。

由是該方程式之符號變，故對於 a, b,

c,  $\alpha, \beta, \gamma$  諸實數值，方程式  $a(x-\beta)$

$(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)$

$(x-\beta)=0$  之根爲實數。〔例1〕求證

$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$  對於

x 之諸實數值皆爲正。取此四因數之第

一第四相乘，又取第二第三相乘，則得

$(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10=(x^2-7x)^2$

+ $18(x^2-7x)+82=\{(x^2-7x)+9\}^2$

+1。故對於 x 之任何實數值皆爲正。

〔例2〕求證與 x 以適當之實數值，

$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}$  可取任意之實數值。

命  $\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}=\lambda$ ，則得  $(4-12\lambda)x^2$

+ $(36-8\lambda)x+9-\lambda=0$ 。欲使 x 爲實數

之必要且充足條件爲  $(36-8\lambda)^2-4(4-$

$-12\lambda)(9-\lambda)\geq 0$ ，即  $\lambda^2-8\lambda+72\geq 0$ ，

即  $(\lambda-4)^2+56\geq 0$ 。此乃對於  $\lambda$  之諸

數值皆真之關係也。故不論如何之  $\lambda$

之實數值，其對應之 x 之實數值常可求

得之。〔例3〕求證與 x 以任何實數值，

$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$  不能大於 7，又不能小於  $\frac{1}{7}$ 。

命  $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=\lambda$ ，則  $(1-\lambda)x^2-3$

$(1+\lambda)x+4(1-\lambda)=0$ 。而 x 爲實數之必

要且充足之條件爲  $9(1+\lambda)^2-16(1-\lambda)^2$

$\geq 0$ ，即  $-7\lambda^2+50\lambda-7\geq 0$ ，即  $-(\lambda-7)$

$(7\lambda-1)\geq 0$ 。由是  $\lambda-7$  與  $7\lambda-1$  必異

號始可。故  $\lambda$  必在  $7$  與  $\frac{1}{7}$  之間，而

本題已證明矣。

【三率法】Rule of three.〔算〕例如於比

例  $3:5=18:30$ ， $3\times 30=5\times 18$ ；普通於

比例  $a:b=c:d$ ， $a\times d=b\times c$ ，故  $d=\frac{b\times c}{a}$

或  $c=\frac{a\times d}{b}$ 。由是比例之一外率等於兩

內率之積以他外率除之。故比例匹率之

中，知其三率，則可求得其餘一率。故解

比例問題之法有稱爲三率法。

【三等分】Trisect.〔幾〕分一幾何量爲

三相等部分之謂也。

【三進法】Ternary scale〔代〕以三爲記

數底之記數法也。此記數用數字 1, 2 及 0

即足。例如於三進法 22012 即表  $2\times 3^4$

+ $2\times 3^3+1\times 3+2$  之意也。

【三次曲線】Cubic curve.〔幾〕x, y

之三次方程式之軌跡謂之三次曲線。如

Diocles 之蔓葉線 (Cissoid)，狄卡德之

Felium, Agnesi 之 Witch，及馬格老林

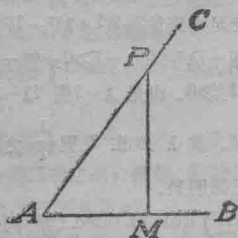
(Maclaurin) 之 Trisectrix 皆爲三次

曲線。

【三次函數】Cubic function.〔數〕函數

內自變數之最高乘幂爲三者。例如  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $y$  爲  $x$  之三次函數。

【三角函數】 Trigonometrical functions. [三] 命  $\angle BAC$  即  $A$  爲任意之角。於其



一邊上，取任意一點  $P$ ，引他邊之垂線  $PM$ 。則比  $\frac{PM}{AP}$ ，即  $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ ，謂之  $A$  角之

正弦，以  $\sin A$  表之。比  $\frac{AM}{AP}$  即  $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ ，

謂之  $A$  角之餘弦，以  $\cos A$  表之。比  $\frac{PM}{AM}$

即  $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ ，謂之  $A$  角之正切，以  $\tan A$  表之。

比  $\frac{AM}{PM}$  即  $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ ，謂之  $A$  角之餘切，以

$\cot A$  表之。比  $\frac{AP}{AM}$  即  $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$  謂之  $A$  角之

正割以  $\sec A$  表之。比  $\frac{AP}{PM}$  即  $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ ，謂

之  $A$  角之餘割，以  $\text{cosec} A$  表之。由 1

減去  $A$  角之餘弦，即  $1 - \cos A$ ，謂之  $A$  角之正矢，以  $\text{vers} A$  表之。由 1 減去

$A$  角之正弦，即  $1 - \sin A$ ，謂之  $A$  角之

餘矢以  $\text{covers} A$  表之。而此角之正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割，正矢，餘矢，

八者謂之角之三角函數，亦稱三角比，

或圓函數或八線。八者之中，後二者用之甚少。三角函數，往昔又有如次定之者。命  $\angle BOC$

爲任意之角

$A$ 。則  $BC$

謂之  $A$  之正

弦， $BD$

( $=OC$ ) 謂

之  $A$  之餘弦，

$EF$  謂之  $A$

之正切， $GH$

謂之  $A$  之餘

切， $OE$  謂之  $A$  之正割， $OG$  謂之  $A$  之餘

割， $OF$  謂之  $A$  之正矢， $DH$  謂之  $A$  之餘

矢。此種定義亞拉伯數學家  $Al-Battani$

始用之。用此定義，則三角函數之值，

不僅與角之大小有關，即與圓之半徑亦

有關。而現今所用之定義，以此爲三角

函數，則與半徑無關，是其利也。由

現今之定義  $\sin A = \frac{PM}{AP} = \cos \angle APM$ ，即一

角之正弦等於其餘角之餘弦。同樣一角

之正切等於其餘角之餘切，一角之正割

等於其餘角之餘割。由定義得

$$\sin A = \frac{PM}{AP}, \cos A = \frac{AM}{AP}, \tan A = \frac{PM}{AM},$$

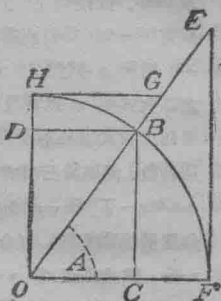
$$\cot A = \frac{AM}{PM}, \sec A = \frac{AP}{AM}, \text{cosec} A = \frac{AP}{PM},$$

因  $\sin A$  及  $\tan A$  之分子相同，而  $\sin A$

之分母大於  $\tan A$  之分母，故  $\sin A$  小於

$\tan A$ 。而  $\tan A$  小於  $\sec A$ 。又  $\cos A$  小

於  $\cot A$ 。而  $\cot A$  小於  $\text{cosec} A$ 。是爲



[大小關係] 即  $\sin A < \tan A < \sec A, \cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A$ .

$$\text{又 } \sin A \cdot \operatorname{cosec} A = \frac{PM}{AP} \cdot \frac{AP}{PM} = 1 \quad (1)$$

$$\cos A \cdot \sec A = \frac{AM}{AP} \cdot \frac{AP}{AM} = 1 \quad (2)$$

$$\tan A \cdot \cot A = \frac{PM}{AM} \cdot \frac{AM}{PM} = 1 \quad (3)$$

是爲[二重關係]。

$$\left. \begin{aligned} \text{又 } \tan A &= \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{AP} \div \frac{AM}{AP} = \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{AM}{PM} = \frac{AM}{AP} \div \frac{PM}{AP} = \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} (4)$$

是爲[三重關係]。

$$\left. \begin{aligned} \text{又 } \sin^2 A + \cos^2 A &= \frac{PM^2}{AP^2} + \frac{AM^2}{AP^2} \\ &= \frac{AP^2}{AP^2} = 1 \\ 1 + \tan^2 A &= 1 + \frac{PM^2}{AM^2} = \frac{AP^2}{AM^2} \\ &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= 1 + \frac{AM^2}{PM^2} = \frac{AP^2}{PM^2} \\ &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} (5)$$

是爲[平方關係]。此三式實表同一關係，惟以不同之形式表之而已。

由上之六種函數間之五個獨立關係，可以一函數表其他五函數。例如以

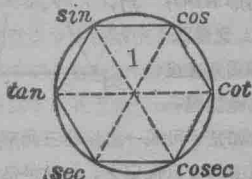
$\sin A$  表其他五種函數。命  $\sin A = x$ ，則

$$\cos A = \sqrt{1-x^2}, \quad \tan A = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cot A$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \sec A = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{cosec} A$$

$$= \frac{1}{x}. \quad \text{又上述之諸關係，可以次圖}$$

記憶之。此圖稱爲三角比之六角形。即將三角函數  $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \operatorname{cosec}$  順次水平並列書於六角形之角頂，其中心書以 1。(1) 於左右兩側往下則僅



增大，而可表大小關係。(2) 各對角線之兩端二者之積，等於中心之數，即 1 是也。故可表二重關係。(3) 連續

三角頂之三函數，其一端者等於中間者以他端者除之，而可表三重關係。(4) 同水平線上相隣二數之平方和，等其下之中間之數之平方，即表平方關係。

又三角函數不僅限於銳角，任意之角皆可適用之。惟須注意者，第一象限內之角，其正弦，正切，正割皆爲正；第二象限之角，其正弦爲正，正切，正割爲負；第三象限內之角，其正弦，正割爲負，正切爲正；第四象限內之角，其正弦，正切爲負，正割爲正。而餘弦，餘切，餘割之正負，各與正割，正切，正弦之正負同。

【三角級數】 Trigonometrical series.

〔三〕見級數條。

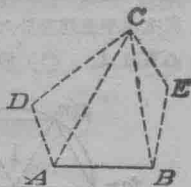
【三角測量】 Triangulation. 〔三〕由

基線  $AB$  起，其長已精密量得一點  $C$  之位置，可觀察三角形  $ABC$  在  $A$  與  $B$  之角而定之。由是，由三角法之公式可算得邊

AC 與 BC 之長。而此二邊可作為新基線，同樣用角

度以定他點之位置，如 D, E。

三角形 ADC, BEC 之邊又可作為基線以定其他諸點，



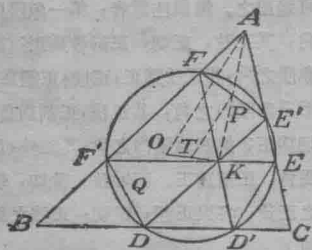
逐次如是，可成一組相連三角形，其頂點僅由角度以決定之。如此於欲測之地面上定一連諸點之法謂之三角測量。

**【三重關係】** (三) 見三角函數條。

**【三乘比圓】** Triplicate ratio circle.

(幾) 過類似重心 K，與三邊平行引 F'E, D'F, E'D 三直線，則 D, D', E, E', F, F' 六點在同一圓周上。此圓謂之三乘比圓或元點圓或第一來莫恩圓。

(證) 因 AF = E' 為平行四邊形，AK 必



二等分 FE'，故 FE' 為 BC 或 EF' 之逆平行線。故 E, E', F, F' 為共圓點。同樣 DF' 為 AC 之逆平行線。故

$\angle BF'D = \angle C$ ，故  $\angle E'DF' = \angle E'EF'$ 。故 D 在同圓之上。同樣 D' 亦在其上。

三乘比圓之重要性質如次：(1) 命 O

為外心，T 為三乘比圓之心，則 T 為 KO 之中點。〔證〕命 AK 交 FE' 於 P, T

為 KO 之中點，聯 AO, PT。則  $PT \parallel AO$ 。而因  $AO \perp FE'$ ，故 PT 為 FE' 之垂直

二等分線。同樣聯 DF' 之中點 Q 及 T，則 QT 亦為 DF' 之垂直二等分線。故過

D, D', E, E', F, F' 之圓之中心必在 PT, QT 上，即 T 為其圓心。(2)  $DD' : FE' : FF' = a^3 : b^3 : c^3$ 。

〔證〕由相似三角形得  $DD' : D'K = a : b$ ， $CE : D'C = a : b$ ， $KE : EE' = a : b$ 。然  $CE = D'K$ ， $KE = D'O$ 。由是此三比相乘得  $DD' : EE' = a^3 :$

$b^3$ 。同樣可證其餘。此圓之所以名為三乘比圓者，即以此也。(3)  $D'E = E'F = F'D$ 。

〔證〕EF'，DD' 為平行弦， $\therefore D'E = F'D$ 。同樣  $= E'F$ 。

**【三線坐標】** Trilinear co-ordinates.

(幾) 三線坐標者，即以三定直線為參考線，而一點之位置，以其由此三定直線

之距離以定之。此種坐標在高等解析幾何學中用之。

**【三元方程式】** Equation with three unknown number. [代] 即方程式之含三未知數者。如  $3x + 2y + 5z - 1 = 0$  是也。

**【三次不盡根】** Cubic surd 或 Surd of the third order. [代] 根指數為 3 之不盡根謂之三次不盡根或立方不盡根，

例如  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\sqrt[3]{x}$  是也。

**【三次方程式】** Cubic 或 Cubic equation 或 Equation of the third degree. [代] 即含未知數之三乘器或三次元之



項之方程式，如  $2x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = 0$ ，  
 $x^2y + 5xy - 2y + 3 = 0$  是也。

普通一元三次方程式為  $x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$ ，令  $x = y - \frac{1}{3}P$ ，則可移去其第

二項而得形如  $y^3 + qy + r = 0$  之方程式。

由欲解三次方程式，解方程式  $x^3 + qx + r = 0$  即可。而其解法可與  $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$  以得之。而此方程式可書為  $(x - a - b)(x - \omega a - \omega^2 b)(x - \omega^2 a - \omega b) = 0$ ，故其根為  $a + b$ ， $\omega a + \omega^2 b$ ， $\omega^2 a + \omega b$ ，而  $a, b$  可由  $q = -3ab$ ， $r = -a^3 - b^3$  得之。即

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \dots\dots (i)$$

$$b^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \dots\dots (ii)$$

例如解  $x^3 - 15x = 126$ 。今  $q = -15$ ， $r = -126$ 。∴  $a = 5, b = 1$ 。故  $x = 5 + 1 = 6$ ， $x = 5 \cdot \omega + 1 \cdot \omega^2 = -3 + 2\sqrt{-3}$ ，或  $x = 5 \cdot \omega^2 + 1 \cdot \omega = -3 - 2\sqrt{-3}$ 。

〔根之討論〕(1)若  $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$  為正。此時  $a^3, b^3$  皆為實數，命  $a, b$  表其算術的立方根，則三根  $a + b$ ， $\omega a + \omega^2 b$ ， $\omega^2 a + \omega b$ ，其第一為實數，他二根為虛數

$$-\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{-3}, -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sqrt{-3}.$$

(2)若  $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$  為零。此時  $a^3 = b^3$ ，即  $a = b$ ，而三根為  $2a, a(\omega + \omega^2), a(\omega^2 + \omega)$ ，即  $2a, -a, -a$  是也。(3)

若  $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$  為負。此時  $a^3$  及  $b^3$  形如

$\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ 。今命其立方根為  $m + in$ ， $m - in$ ，則三根為  $m + in + m - in$ ， $(m + in)\omega + (m - in)\omega^2$ ， $(m + in)\omega^2 + (m - in)\omega$ ，即  $2m, -m - n\sqrt{3}, -m + n\sqrt{3}$ 。由是三根皆為實數。而普通無求虛數之立方根精密之值之法。故三根俱為不等之實數者，前法殆不能解。而此時稱為不可化之例(Irreducible case)。

例如解  $x^3 - 15x - 4 = 0$ 。代入(i)，則得  $a =$

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{\frac{3375}{27} + 4}} = \sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}}.$$

由視察  $(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm 11\sqrt{-1}$ 。∴  $a = 2 + \sqrt{-1}, b = 2 - \sqrt{-1}$ 。由是  $x = 4$ 。

以  $x - 4$  除所與之方程式，解所得之方程式  $x^2 + 4x + 1 = 0$ ，得  $x = -2 \pm \sqrt{-3}$ 。

然用三角函數，則雖困難之解，亦可得之。即於(3)得  $x = (\alpha + i\beta)^{\frac{1}{3}} + (\alpha - i\beta)^{\frac{1}{3}}$ ，命  $\alpha = r \cos \theta, \beta = r \sin \theta$ ，

$$\text{則 } r^2 = \alpha^2 + \beta^2, \tan \theta = \frac{\beta}{\alpha}. \text{ 而 } (\alpha + i\beta)^{\frac{1}{3}} = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^{\frac{1}{3}}.$$

由麥特佛定理(De Moivre theorem)，其三值為

$$r^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right),$$

$$r^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\theta + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{3} \right),$$

$$r^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\theta + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 4\pi}{3} \right).$$

但  $r^{\frac{1}{3}}$  為  $r$  之算術的立方根， $\theta$  為由

$\tan \frac{\theta}{\alpha}$  求得之最小正角。又  $(\alpha - i\beta)^{\frac{1}{3}}$  之值可於上之結果變  $i$  之號而得之。故

$$\text{所求之三根如次: } 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3},$$

$$2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta+2\pi}{3}, 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta+4\pi}{3}.$$

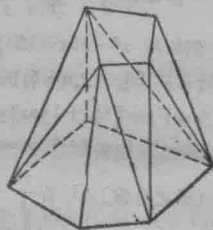
本條之始之解法爲卡隆 (Cardan) 之解法而稍加變更者。十一世紀中葉，亞拉伯人 Alkhyami 所著之代數學中；已揭三次方程式而以幾何學之作圖法以解之。然普通之解法，未有論及。十三世紀之始，意大利 Pisa 人 Leonardo，將代數學之研究，由亞拉伯傳入意大利，爾後意大利研究斯學者甚久。1494 年 Lucus Pacioli 著一書，其中用亞拉伯人之法，分三次方程式之類。且謂以當時代數學之發達，其解法似爲不能。同時氏謂發明三次方程式之解法，數學家當注意之。方程式  $x^3+mx=n$  之解法，Scipis 成功之，然於 1505 年傳其門人 Florido 之外。世無知之者。1530 年，Tartaglia 得三次方程式  $x^3+px^2=q$  之解法。Florido 聞之，遂將其方程式  $x^3+mx=n$  之解法公布之。Tartaglia 聞而疑之，1535 年，與 Florido 大爭論，同時 Tartaglia 亦得方程式  $x^3+mx=n$  之解法。其解法之要點即假定  $x$  爲二根數之差之式，即  $\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ ，實即世所謂 Cardan 之法也。1539 年，Cardan 就學於 Tartaglia 而氏不肯，後屢懇求，Tartaglia 亦漸傳之，且約決不他漏。然

Cardan 卒背約，1545 年載於其所著之書中。蓋 Tartaglia 固自欲公刊之，1556 年，始刊其所著之書，然未至三次方程式，而氏已死。故迨經年代，Tartaglia 之功遂湮沒，後人視爲 Cardan 之發明，而以其名稱之。

【三角方程式】 Trigonometrical equation. [三] 即未知數含三角函數之方程式，如  $\cos \theta + \tan \theta = 0, \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

是也。

【三角傍面臺】 Prismatic. [幾] 三角傍面台亦稱類似角柱體，即一多面體以在二平行面上之二多角形爲其底，以諸三角形爲其側面，諸三角形皆與一底有一公共邊，與他底有一公共頂者也。命  $B_1, B_2$  爲其上下二底之面積， $M$  爲其中央截面之面積，



$H$  爲其高，則其體積  $V = \frac{1}{6} H (B_1 + B_2 + 4M)$ 。由三角傍面台體積之公式可求得初等幾何學內諸立體之體積。(1) 設二底  $B_1, B_2$  相等，則成一角柱，而其公式爲  $V = H \times B$ 。(2) 設  $B_1$  爲零，則成一角錐，而其公式爲  $V = \frac{1}{3} H \times B$ 。

(3) 於角台設  $e_1, e_2$  爲二底  $B_1, B_2$  之

相當邊，則  $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$  爲中央截面之相

當邊。故  $\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{M}} = \frac{e_1}{\frac{1}{2}(e_1 + e_2)}$ ,  $\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{M}} =$

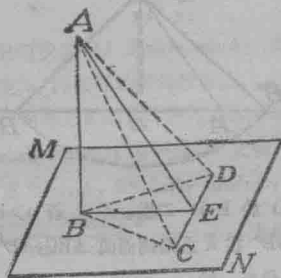
$\frac{e_2}{\frac{1}{2}(e_1 + e_2)}$ 。相加則得  $\frac{\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}}{\sqrt{M}} = 2$ ,

$\therefore 2\sqrt{M} = \sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}$ 。平方之則得  $4M$   
 $= B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1 B_2}$ 。以此值代入三角

傍面台之體積之公式內，則得  $V = \frac{1}{3}$

$H(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$ ，是即求角台之體積之公式也。

【三垂線定理】 Theorem of three perpendiculars. [幾] 設由平面上一直線之足作一直線與其平面內一直線成直角，則由其交點至垂線內任意一點所作之線，必垂直於此平面內之線。此定理與其逆定理謂之三垂線定理。[證] 設 AB



爲平面 MN 之垂線，BE 爲由 B 至此平面內一直線 CD 之垂線，EA 爲由 A 至 AB 之任意直線。取 EG 及 ED 相等。聯 AG, AD, BC, BD。因 BC = BD， $\therefore AC = AD$ 。故  $AE \perp CD$ 。其逆定理之

證法，與此相似。

【三角形之解法】 Solution of triangles. [三] 凡三角形皆有六元素，即三邊三角是也。三角形之解法者，即當知諸

元素中之三者而求餘三者之法也。惟已知之三元素，不能爲三角，因僅知三角，不能決定其各邊之長，僅能求得其相互之比，而合此條件之三角形爲無數也。

三角形之解法分二種，茲分述之如次：

I. 直角三角形之解法。因直角三角形已知其一角爲直角，故知他二元素（惟不能爲二角）即可解之。（1）知斜邊 c 及一銳角（如 A），則由  $B = 90^\circ - A$  得 B，由  $a = c \sin A$  得 a， $b = c \sin B$  得 b。

（2）知斜邊 c 及他一邊（如 a），則由

$\sin A = \frac{a}{c}$  得 A，由

$B = 90^\circ - A$  得 B，由  $b = c \cos A$  得 b。

（3）知一邊及一銳角（如 a, A），則由  $B = 90^\circ - A$  得 B，由  $b = a \cot A$ ,  $c = a \operatorname{cosec} A$  得 b 及 c。

（4）知二邊 a, b

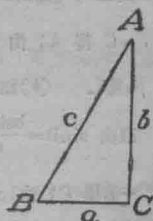
則由  $\tan A = \frac{a}{b}$  得 A，由  $B = 90^\circ - A$  得 B，由  $c = a \operatorname{cosec} A$  得 c。

II. 斜角三角形之解法。（1）知三邊

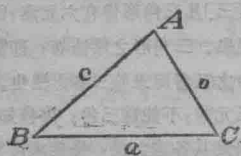
a, b, c，則由  $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$  得 A 及 B，

由  $C = 180^\circ - A - B$  得 C。（2）知二



邊及其夾角 (如  $b, c, A$ )。則由  $\frac{B+C}{2}$



$= 90^\circ - A$  得  $\frac{B+C}{2}$ , 由  $\tan \frac{B-C}{2} =$

$\frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$  得  $\frac{B-C}{2}$ , 相加得  $B$ , 相減

得  $C$ ; 由  $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$  得  $a$ 。(3) 知一邊

及二角 (如  $a, B, C$ )。則由  $A = 180^\circ - B$

$- C$  得  $A$ ; 由  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ ,  $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$  得

$b$  及  $c$ 。(4) 知二邊及一角 (如  $a, b, A$ )。

則由  $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$  得  $B$ ; 由  $C = 180^\circ - A$

$- B$  得  $C$ ; 由  $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$  得  $c$ 。然由  $\sin B$

求  $B$ ,  $B$  可有二值, 一大於  $90^\circ$ , 一小於

$90^\circ$ 。若  $A < 90^\circ$ , 則  $B$  之大於  $90^\circ$

之值不適用, 因  $A+B$  必須小於  $180^\circ$

也。故  $B$  須小於  $A$ , 而  $b$  須小於  $a$ 。

若  $A < 90^\circ$ , 則  $B$  之二值適用與否, 須

依下列條件而定之。(i) 若  $b \sin A > a$ ,

則  $\sin B > 1$ , 是為不能解。(ii) 若  $b \sin A$

$= a$ , 則  $\sin B = 1$ , 故  $B = 90^\circ$ , 而得一

直角三角形。(iii) 若  $b \sin A < a$ , 則

$\sin B < 1$ , 而  $B$  有二值。此時又可分為

三種: (α) 若  $a > b$ , 則  $A > B$ , 故  $B$  不

能為鈍角, 故大於  $90^\circ$  之值不能適用而

僅有一解法。(β) 若  $a = b$ , 則  $A = B$ ,

故  $B$  僅有一值。(γ) 若  $a < b$ , 則  $A < B$ , 而  $B$  為銳角或鈍角皆可, 故  $B$  有二值。是謂之兩意之例。

上所述可以圖說明之如次: 命  $\angle CAD$

為  $A$ , 而  $A < 90^\circ$ , 命  $AC$  為  $b$ 。自  $C$

至  $AD$  作垂線  $CD$ , 則  $CD = b \sin A$ 。以

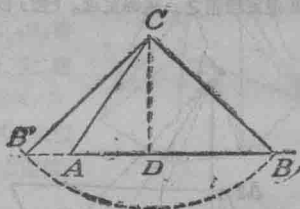
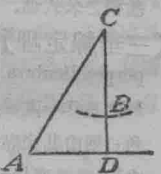
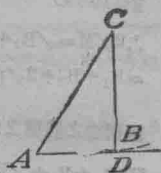
$C$  為心,  $a$  為半徑作圓。(i) 若  $b \sin A$

$> a$ , 則圓不與  $AD$  相交, 故三角形不

能成立。(ii) 若  $b \sin A = a$ , 則圓切

$AD$  於  $D$ , 故所成之三角形為直角三

角形。(iii) 若  $b \sin A < a$ , 則圓交



$AD$  於  $B, B'$  二點。(α) 若  $a > b$ , 則

$B, B'$  在  $A$  之兩側而成  $ABC, AB'C$  兩

三角形。然

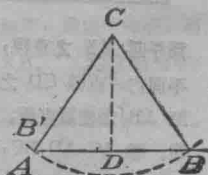
$\triangle AB'C$  之

角  $CAB'$  不

等於  $A$ , 而

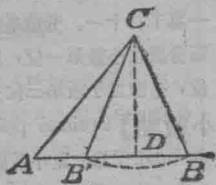
等於  $180^\circ$

$- A$ , 故不



適用。故適用者惟  $\triangle ABC$  而已。

(9) 若  $a=b$ ，則  $B'$  與  $A$  重合，而成一等腰三角形



$ABC$ 。(10) 若  $a < b$ ，則  $B, B'$  在  $A$  之同一側，而成  $ABC, AB'C$  兩三角形，二者俱適合。

上所述之三角形之解法，其已知件皆為邊及角。今舉數例其已知件不為邊及角者。

(1) 已知三角形由其各角頂至對邊之垂線。命此等垂線為  $p_1, p_2, p_3$ ，則  $ap_1 = bp_2 = cp_3 = 2$  倍三角形之面積。因  $\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ ，故  $\cos \frac{1}{2}A =$

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) \times \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)}{\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}}}$$

由此可決定  $A$ ；又  $p_2 = c \sin A$ ，由是可決定  $c$ 。同樣可以得其餘部分。(2) 已知三角形之周圍及其諸角，因  $s = R(\sin A + \sin B + \sin C)$ ，故可得  $R$  之值，而諸邊為  $2R \sin A, 2R \sin B, 2R \sin C$ ，或

$$a = \frac{2s \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}, b, c \text{ 之值與此相似。}$$

**【三角形幾何學】** Geometry of triangle. [數] 即最近幾何學見該條。

**【三直角三面角】** Tri-rectangular trihedral angle. [幾] 即三面角之有三直角者之謂也。

**【三等邊三角形】** Equilateral triangle. [幾] 即等邊三角形，見該條。

**【三角比之六角形】** Ratio-hexagon. [三] 見三角函數條。

**【三直角球面三角形】** Tri-rectangular spherical triangle. [幾] 球面三角形之有三直角者之謂也。

## 千

**【千】** Thousand. [算] 數名。為百之十倍。亞拉伯以 1000 記之，羅馬以 M 記之，希臘以  $\alpha$  記之。

**【千位】** Thousands' place. [算] 即記數時自右第四位也。

**【千位數】** Thousands. [算] 即在千位之數。

## 上

**【上底】** Upper base. [幾] 平面幾何學內之梯形，立體幾何學內之角柱，圓柱，角台，圓台等皆有二底，其在上者曰上底，在下者曰下底。

## 下

**【下底】** Lower base. [幾] 見上底條。

## 大

**【大】** Magnitude. [數] 此語原用以指一物所占有之空間之部分，即長廣厚是也，今擴張之以指線，面，角，……任何數。

**【大於】** Greater than. [數] 即某數大於他數之謂也。而此意以符號  $>$  表之。

例如 7 大於 3，以  $7 > 3$  表之；

【大圓】Great circle. [幾] 球與通過其中心相交之圓之謂也。凡大圓皆相等。球之大圓平分此球。又二大圓互相平分。

【大小關係】[三] 見三角函數條。

### 小

【小於】Less than. [數] 即某數小於他數之謂也。而以符號  $<$  表之。例如  $4 < 9$ ，即 4 小於 9 之意也。

【小時】Hour. [算] 一日之二十四分之一曰一小時，一小時為六十分。

【小圓】Small circle. [幾] 在球面上所畫任意之圓之謂也，其平面不過球心。

【小數】Decimal 或 Decimal fraction.

[算] 以 10 或 10 之乘冪為分母之分數，而以便利之方法記載之之謂也。所謂便利之方法者，即如  $\frac{2}{10}$ ， $\frac{3}{10}$  以 0.2，

0.3 記之，又如  $\frac{27}{100}$ ， $\frac{369}{1000}$  各以 0.27，

0.369 記之。其第一之零表整數之第一位，而該點謂小數點。點後數字之數，

等於分母內零之數。若分子之數字少於分母之零之數，則於小數點之後，以零補

之。即如  $\frac{7}{100} = 0.07$ ， $\frac{21}{10000} = 0.0021$  是也。代表整數之第一位之零，有時不寫之，而僅點一小數點者，如 .13 與 0.13 同；然普通以不省去者為多。又有以逗點(,)代小數點者，如 0,35 與 0.35 同。而如 2.38 表整數 2 與小數 0.38 之和，

33.106 表整數 32 與小數 0.106 之和。

普通整數及小數之命位如次：

普通整數及小數之命位如次：

…萬千百十一。分釐毫絲忽微纖沙塵…而分謂之小數第一位，釐謂之小數第二位，毫謂之小數第三位，如是類推。

【小數點】Decimal point 或 Sign of decimal. [算] 見小數條。

【小行列式】Minor determinant. [代] 將行列式除去其同數之行與列，則得一行列式，此行列式稱為原行列式之小行

列式。例如  $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ， $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ， $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$  為

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  之小行列式；以  $A_1, B_1, C_1$  表之，

則  $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1$ 。

【小補助圓】Minor auxiliary circle. [幾] 見補助圓條。

### 丈

【丈】[算] 度名。十尺為丈。

### 寸

【寸】[算] 度名。十分為寸，十寸為尺。

### 勺

【勺】[算] 量名。升之百分之一為勺。

### 子

【子數】[算] 見百分法條。

【子午線】Meridian. [算] 於地球表面上想像通過某地點及南北極之圓周，此圓周謂之某地之子午線。

## 已

**【已知件】** Datum. [數] 於數學中，已知件云者，指諸已知數及命題之已知部分而言也。即於問題中，已知件云者，為已知之部分，而由此以決定所求之部分。於幾何學之證明，已知件為定義，公理，前已證明之定理；又於作圖題，已知件為點，直線，角，圓，平面，面，立體等。

**【已知項】** Absolute term. [代] 含已知數項（即不含未知數之項）謂之已知項。例如於  $ax^2+bx+c$  式，第三項  $c$  為已知項，方程式之各項可視為皆含未知數，已知項可視為  $x^0$  之係數，而方程式之已知項為諸根之變其號之積。故已知項為零之方程式，其一根或數根為零。

**【已知數】** Known number. [代] 問題或方程式內之已知數者，已與其值或假定已與其值之數也。

**【已約分數】** Fraction in its lowest terms. [算][代] 亦稱最簡分數，即分數之分子分母所有之公約數已悉約去者之謂也。例如  $\frac{3}{7}$ ， $\frac{a}{bx}$  為已約分數。反之， $\frac{9}{15}$ ， $\frac{bx}{ax^2}$  則不為已約分數，而約去其分子，分母之公約數得  $\frac{3}{5}$ ， $\frac{b}{ax}$  即為已約分數。

## 弓

**【弓形】** Segment (of a circle). [幾] 弓

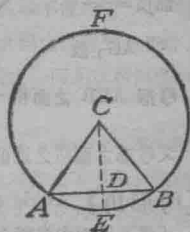
形者，圓面之一部分，以弦與其所跨之弧為界者也。例如 AEB, AFB 是也。一弦分圓面為二弓形，而此二弓形謂之共軛弓形。若為界之弧為優弧，則謂優共軛弓形或優弓形，如 AFB 是也。若為界之弧為劣弧，則謂之劣共軛弓形或劣弓形，如 AEB 是也。

求弓形之面積之法，先求與其弓形同弧之扇形之面積，次求以弓形之弦為底，以圓心為頂之三角形之面積。優弓形則取此二者之和，劣弓形則取此二者之差。如上圖，命弧 AB 之長為  $l$ ，弦 AB 之長為  $k$ ，弓形之高 ED 為  $h$ ，圓之半徑為  $r$ ，則扇形 AEB  $= \frac{1}{2}lr$ ， $\triangle ABC = \frac{1}{2}k \cdot h$ 。

CD  $= \frac{1}{2}k(r-h)$ ， $\therefore$  弓形 AEB 之面積  $= \frac{1}{2}lr - \frac{1}{2}k(r-h) = \frac{1}{2}(lr - kr + kh)$ 。然  $ED \cdot DF = AD^2$ ，即  $h(2r-h) = \frac{1}{4}k^2$ ， $\therefore r = \frac{\frac{1}{4}k^2 + h^2}{2h}$ 。以

$r$  之此值代入前式而化之，則弓形 AEB 之面積為  $\frac{\frac{1}{4}k^2(1-k) + h^2(1+k)}{4h}$ 。

又弓形之面積等於圓之半徑與由其弧減去其弧之二倍之弧之弦之半之積之半。



因扇形 AEB  
BC 之面積

$$= \frac{1}{2}lr,$$

又  $\triangle ABC$  之

$$\text{面積} = \frac{1}{2}$$

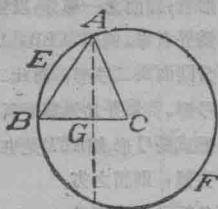
$r \cdot AG$ , 故

$$\text{弓形 AEB 之面積} = \frac{1}{2}r(1-AG).$$

又弓形之面積之近似值可取為  $\frac{2}{3}hk$ .

**【弓形角】** Angle at the segment.

〔幾〕弓形內自弧上一點至弦之兩端引二直線其二直線間之角謂之弓形角。弓形角之大與頂點之位置無關，而與弓形之大小有關。優弓形內之弓形角為銳角，劣弓形內之弓形角為鈍角，半圓內之弓形角為直角。



## 四 畫

### 五

**【五】** Five [算] 為基數之一。亞拉伯以 5 記之，羅馬以 V 記之，希臘以 € 記之。

**【五角形】** Pentagon. [幾] 即五邊形。

**【五角數】** Pentagonal number. [代] 見多角數條。

**【五面體】** Pentahedron. [幾] 即五平面所包圍之立體也。

**【五進法】** Quinary scale. [代] 即以五為記數底之記數法也。此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 及 0 即足。而於五進法中，3401 即表  $3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1$  之意。

**【五邊形】** Pentagon. [幾] 即五直線所包圍之平面形也。亦稱五角形。

**【五次方程式】** Quintic 或 Quintic equation 或 Equation of the fifth degree. [代] 即含未知數之五乘器之方程式也。五次方程式之普通解法，誘起若干數學家之討論，以為二次，三次，四次方程式皆有普通解法，遂謂五次方程式亦有解法。然終失敗。Lagrange 謂五次及高次方程式之代數的解法為不可能，然不能證明之；後 Ruffini 亦謂其不可能，然其推理不甚精密；殆至 Abel 始完全證明其代數的解法為不可能。

**【五角十二面體】** Pentagonal dodecahedron. [幾] 十二個五角形之面所包圍之立體之謂也。



## 六

【六】Six. [算] 爲基數之一，亞拉伯以 6 記之，羅馬以 VI 記之，希臘以 5' 記之。

【六角形】Hexagon. [幾] 卽六邊形。

【六面體】Hexahedron 或 Hexaedron. [幾] 卽六平面所圍之立體也。

【六進法】Senary scale. [代] 卽以 6 爲記數底之記數法也。此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 5, 及 0 卽可。而於六進法中，3154 卽表  $3 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 5 \times 6 + 4$  之意。

【六點圓】Six-point circle. [幾] 卽三乘比圓，見該條。

【六邊形】Hexagon. [幾] 卽六直線所包圍之平面形也。亦稱六角形。

【六十分法】Sexagesimal method. [算] [幾] [三] 亦稱英國法。卽以度，分，秒測角之法也。直角之九十等分之一謂之一度，度之六十等分之一謂之一分，分之六十等分之一謂之一秒，卽

$$1 \text{ 直角} = 90 \text{ 度} = 5400 \text{ 分} = 324000 \text{ 秒，}$$

$$1 \text{ 度} = 60 \text{ 分} = 3600 \text{ 秒，}$$

$$60 \text{ 秒。}$$

而度，分，秒以記號 1, 分, = 表之，例如  $52^\circ 16' 47''$  卽表 52 度 16 分 47 秒也。

## 不

【不合理】Absurdity. [數] 一命題違背已知之真理時謂之背理或不合理。此不合理爲用於反證論法 (Reductio ad absurdum) 中。此證法先假定一命題爲

真，逐次推理，得反背已知之真理之結果，由是知前所假定之命題爲不真。例如於『二直線有二公共點，則此二直線全相合而成一直線』之命題。假定有二公共點之二直線不全相合。則此二直線包圍一空間，而反背『二直線不能包圍一空間』之公理。故有二公共點之二直線全相合。此證法數學中常用之，而尤以幾何學中用之爲多。

【不名數】Abstract number. [算] 數之不附以單位之名者謂之不名數。例如 4, 7, 15 是也。然若 3 人 5 犬則不爲不名數而爲名數矣。

【不完數】Imperfect number. [算] 爲對於完數而言，卽其諸約數中除本數外，其和不等於本數之數也。其和大於本數者曰贏數，小者曰輸數。如 20 之諸約數爲 1, 2, 4, 5, 10，其和大於 20，故 20 贏數；又 9 之約數爲 1, 3，其和小於 9，故 9 爲輸數。

【不定式】Indeterminate expression. [代] 卽不定形，見該條。

【不定形】Indeterminate form. [代] 一式或函數，其中所含之文字與之特別之值時，有爲不定之形者，謂之不定形。

標準不定形爲  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \times \infty$ ,

$0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ 。例如  $\frac{x^2 - x}{x^3 - x}$ ，若  $x = 0$ ，

則爲  $\frac{0}{0}$  之形；若  $x = 1$ ，亦爲  $\frac{0}{0}$  之形；若

$x = \infty$ ，則爲  $\frac{\infty}{\infty}$ 。不定形之值雖實不一

定，用代數學中通常之法則，不能求得其值，然可求得其極限值。如  $\frac{x^2-x}{x^3-x} =$

$$\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)},$$

當  $x$  與 0 或 1 稍差時，分子分母可以  $x(x-1)$  除之，而

$$\frac{x^2-x}{x^3-x} = \frac{1}{x+1}.$$

故  $x$  近於 0 或 1 時，其極

限值為 1 或  $\frac{1}{2}$ 。又當  $x = \infty$ ，此分數之

極限值為 0。又於  $x^x$ ，當  $x = 0$ ，則為  $0^0$  之形，而令  $\mu = x^x$ ，則  $\log \mu = x \log x$ ，而  $x \log x$  或  $\log \mu$  之極限值為 0，故  $\mu$  或  $x^x$  之極限值為 1。

**【不等式】** Inequality. [代] 不等之二

式而以符號  $>$  或  $<$  連結之者之謂也。次所述諸命題中，諸文字皆設為正實數。

若  $a > b$ ，則 (1)  $b < a$ ；(2)  $-a < -b$ ；

(3)  $a + c > b + c$ ；(4)  $a - c > b - c$ ；(5)

$ac > bc$ ；(6)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ；(7)  $a^m > b^m$ ；

(8)  $a^{-m} < b^{-m}$ 。若  $a_1 > b_1$ ， $a_2 > b_2$ ， $a_3 > b_3$ ，……， $a_n > b_n$ ，則

(9)  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > b_1 + b_2 + b_3$

$+ \dots + b_n$ ；(10)  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n > b_1 b_2$

$b_3 \dots b_n$ 。凡以上諸式皆甚明顯。次二不

等式甚重要，

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

$$> (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{\frac{1}{n}};$$

$$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{n}$$

$$> \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right)^m;$$

惟  $m$  須為真分數；其證明見平均數條。

**【不等號】** Sign of inequality. [代]

示二數或量不相等之符號，即  $>$ ， $<$  或  $\neq$  是也。而  $>$  示符號之左大於右； $<$  則反之，即示符號之左小於右；而  $\neq$  僅示符號之左右不相等而已。又有用不等符號  $\succ$ ， $\prec$  者，而  $\succ$  表其左不大於右； $\prec$  表其左不小於右。

**【不盡根】** Surd. [代] 於算術上之開方

法，不能精密求得其根，而僅能得其近似值者，謂之不盡根。如  $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{5}$  是也。代數式  $\sqrt{a}$ ，雖或非為不盡根，而亦恆稱之為不盡根。不盡根有時謂之無理數，不盡根之次數以根號表之，如  $\sqrt{a}$  為二次不盡根， $\sqrt[3]{x}$  為三次不盡根， $\sqrt[n]{y}$  為  $n$  次不盡根。而二次不盡根又謂之平方不盡根，三次不盡根謂之立方不盡根。

**【不同類項】** Unlike terms 或 Dissimilar terms [代] 二項內所含之文字

或其乘幂異者，謂之不同類項或異類項。例如  $2ab^2$  與  $5abc$  為不同類項， $3x^2yz$  與  $3xyz$  為不同類項。

**【不定係數】** Indeterminate coefficient.

[代] 因恒等方程式內所含任意一量或數量，對於諸值皆為真，若如斯之方程式之諸項，悉移於一邊，則其任意量之各乘幂之係數謂之不定係數。此等係數，實皆為零，是謂之不定係數之原理。茲述之如次：(1) 於僅含一不定量而第二邊為零之恒等方程式，其不定量之各乘幂之係數各等於零。或於僅含一不定量之恒等方程式之二邊，其不定量之同乘幂之

係數皆相等。(2)於含二以上不定量而第二邊爲零之恒等方程式，此等不定量之各乘幂及其積之各係數各等於零。或於含二以上不定量之恒等方程式之兩邊，此等不定量之各乘幂及其積之係數各相等。此等原理於解析法中應用甚廣。今示用以展開一式爲級數及求一級數之和之例。【例1】展開  $\frac{1}{1+x}$  爲  $x$  之昇幂之級數。

$$\text{假定 } \frac{1}{1+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots,$$

而  $A, B, C, D, \dots$  爲欲決定之使此方程式爲恒等方程式者。去分母，則得

$$1 = A + (A+B)x + (B+C)x^2 + (C+D)x^3 + \dots$$

兩邊之同乘幂之係數相等，得

$$1 = A, A+B=0, B+C=0, C+D=0, \dots$$

故  $A=1, B=-1, C=1, D=-1, \dots$

$$\text{故 } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

【例2】求級數  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$  之和。

$$\text{假定 } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \dots$$

$$\text{以 } n+1 \text{ 代 } n, \text{ 則得 } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n+1)(n+2) =$$

$$A + B(n+1) + C(n+1)^2 + D(n+1)^3 + E(n+1)^4 + \dots$$

相減則得  $(n+1)(n+2) = B + C(2n+1) + D(3n^2 + 3n + 1) + E(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$

$$+ \dots$$

因此式爲恒等式，故  $E$  及以後之係數皆爲零。而  $3D=1, 3D+2C=3, D+C+B=2$ 。

故  $D = \frac{1}{3}, C=1, B = \frac{2}{3}$ 。故所求之和

$$= A + \frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3. \text{ 命 } n=1, \text{ 則 } 2 = A + 2, \text{ 或 } A=0. \text{ 故 } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

【不定級數】Indeterminate series.

〔代〕與中性級數同。

【不定問題】Indeterminate problem.

〔算〕〔代〕〔幾〕能得無數解答之問題之謂也。算術中例如知三以上同種物之價格及其平均價，而求其混合之各分數時，此類問題恒起所與之條件少於未知數即所求之數之例。此時所與之條件所作方程式之數，少於未知數之數。由是此等方程式爲不定，而問題亦不定。又於幾何學中知三角之底及高求作本形，或知三角形之三角求作本形之問題，三角形爲不確定。

【不能問題】Impossible problem

〔數〕不能問題者，普通得於題意爲不能之結果及其解法爲不能者之謂也。例如於算術或代數學之問題，由所與之數，算得人數爲分數或負數者爲不能問題，因題辭含不能之關係也。又如任意角之三等分，題意雖非不能，然於初等幾何學之範圍內其解法爲不能。

【不連續量】Discontinuous quantity.

【算】量之不能增減小於一單位者謂之不連續量。換言之，若所用之單位為自然獨立者謂之不連續量。如馬以匹計，匹四分離，此即不連續量也。

【不盡小數】Interminate decimal.

【算】小數之無限連續者之謂也。如循環小數即為不盡小數之一，又如  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  化為小數則得 1.4142..., 1.7320..., 2.23 之不盡小數。又不可通約數如圓周率  $\pi$  之值 (3.14159....), 納白爾對數底  $e$  之值 (2.71828), 常用對數之對數率  $\log$  之值 (.43429....) 皆為不盡小數。

【不可化之例】Irreducible case. [代] 見三次方程式條。

【不可通約量】Incommensurable magnitudes. [幾] 見可通約量條。

【不可通約數】Incommensurable numbers. [代] 見可通約數條。

【不定方程式】Indeterminate equation. [代] 僅有一方程式，而其中含有多個未知數，或未知數之數多於方程式之數，而其未知數之值，不能一定，而有無數之解答。此等方程式謂之不定方程式。不定方程式，若其未知數之值，加以限制(例如限於正整數)，則其未知數之值為有限制。詳一次不定方程式及二次不定方程式條。

【不定係數法】Method of indeterminate coefficients. [代] 見不定係數條，及插入法條。

【不平行四邊形】Trapezium. [幾] 四邊形之任何二邊皆不平行者之謂也。

【不同類不盡根】Unlike surds 或 Dissimilar surds. [代] 見同類不盡根條。

【不完全方程式】Incomplete equation [代] 方程式之缺少其最高次項以下之某次數之項者之謂也。例如三次方程式  $2x^3+4x+1=0$ ，缺少  $x^2$  之項，而為不完全方程式。不完全方程式，可附以零係數，使成完全方程式之形式。如上之不完全方程式，可書之為  $2x^3+0 \cdot x^2+4x+1=0$ ，而成完全方程式之形式。

【不相交同軸圓】Non-intersecting co-axial circles. [幾] 見同軸圓條

【不等邊三角形】Scalene triangle. [幾] 三角形之任何二邊皆不相等者之謂也。亦稱斜三角形。

【不同初位循環節】Dissimilar repetend. [算] 見循環小數條。

## 中

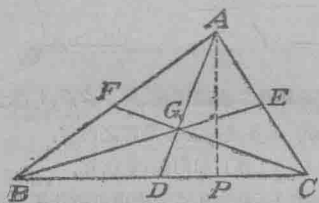
【中心】Centre. [幾] 中心多指圓或球者而言。圓之中心者，由圓內一點至圓周引諸直線皆相等之點也。球之中心者，由球內一點至球面引諸直線皆相等之點也。又正多角形之內切圓之中心謂之中心。其他如平行四邊形之二對角線之交點，亦有稱為中心者，因過此點於形內所引各直線皆平分於此點故也。又橢圓之長軸與短軸之交點，謂之橢圓之中心；雙曲線之橫軸與其共軛軸之交點謂之雙曲線之中心；因過此點之弦皆被平分故也。

【中率】Mean. [算] [代] 比例中項一

稱比例中率。見比例中項條。

【中項】Mean. [代] 中項者，在任意二項之中間，而服從一定之數學的規則者之謂，如比例中項，等差中項，等比中項，調和中項是也。見各條。

【中線】Median [幾] 由三角形之一角頂，至對邊之中點所作之直線，謂之三角形之中線，故三角有三中線，而此三中線交於一點，謂之三角形之重心。如圖  $AD, BE, CF$ ，為  $\triangle ABC$  之中線而其交點  $G$  為重心。三角形兩邊之平方和，



等於他邊之中線之平方與他邊之半之平方和之二倍。即  $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ 。

【證】作  $AP$  垂直於  $BC$ ，則  $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DP$ ， $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DP$ 。因  $BD = DC$ ，故相加得  $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ 。

又聯梯形之兩腰之中點之直線，謂之梯形之中線。梯形之中線與二底平行，且等於二底和之半。

【中點】Middle point 或 Mid-point.

[幾] 某有限直線之中央之點之謂也。

【中心角】Angle at the centre. [幾]

即圓心角，見該條。

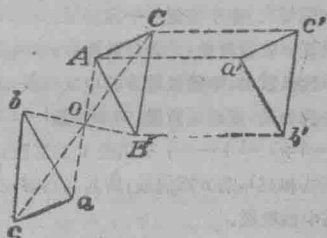
【中心線】Centre-line. [幾] 即聯心線

見該條。

【中垂線】Perpendicular bisector. [幾] 即垂直二等分線。

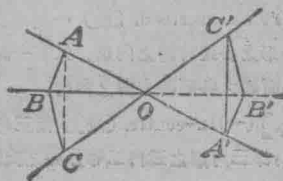
【中心對稱】Central symmetry. [幾]

(1) 於一平面上之中心對稱。A, a' 為在過  $O$  點之直線上二點。而在其反對側由  $O$  等距離處，則此二點謂之對  $O$  為對稱。若  $A$  沿任意線運動，而  $a$  沿對應線運動，則此二線謂之對於  $O$  為對稱。而  $O$  謂之對稱中心。若將  $Oa$  於其平面內  $O$  點週轉二直角，則  $a$  可與  $A$  合。由是中心對



稱之二線或圖形，離平面之中心而週轉之，可使之疊置。中心對稱，對應直線平行，然為反對之向。又對應直線可以平行且同向者置換之。此理可由上圖之三角形  $ABC, abc, a'b'c'$  之關係以明瞭之。

(2) 於空間之中心對稱。取三角錐  $O-ABC$  將其稜通過  $O$  而延長之，使  $OA' = OA, OB' = OB, OC' = OC$ ，則三角錐



$O-A'B'O'$  與三角錐  $O-ABC$  對稱。然此二三角錐，除極特別者外，不能疊置。對於任意之多角錐亦與此同樣。中心對稱又謂之點對稱。


【中立級數】Neutral series. [代] 與中性級數同，見該條。

【中央截面】Mid-section. [幾] 於三角傍面臺與二底平行，且與二底等距離處之平面所作之截面也。

【中性級數】Neutral series. [代] 級數之始  $n$  項之和，若  $n$  無限增大，此和不無限增大，亦不接近於一定極限，則此級數既非收斂級數，又非發散級數，即所謂中性級數也。中性級數亦稱中立級數，或搖動級數，或週期級數。例如級數  $1-1+1-1+1-1+\dots$ ，若項數  $n$  為奇數，則其和為  $1$ ，若  $n$  為偶數，則其和為零，故為中性級數。

## 內

【內分】To divide internally. [幾] 為對於外分而言，即於某有限直線上取一點，則該直線謂之內分於此點。例如於直線  $AB$  上取一點  $C$ ，

則  $AB$  內分於  $C$ 。 

【內切】(一)To touch internally. [幾] 一圓在他圓內而互相切之謂也。

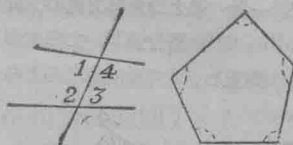
(二)To be inscribed. [幾] 一圓切於一多邊形之各邊時謂之內切。又若一球切於多面體之各面時亦謂之內切。

【內心】(一)In-centre. [幾] 多指三角形而言，即三角形之三內二等分線之交點，

即內切圓之心也。又正多角形之各角之二等分線同交於一點，謂之內心。

(二)Inner centre. [幾] 此為指相似內心，即二相似多邊形或二圓之二相似中心之中，其在二形之中間者之謂也。見相似中心條。

【內角】Interior angle. [幾] 如圖，一



直線與他二直線相交。角  $1, 2, 3, 4$  謂之內角。又多邊形之各角謂之內角。

【內折】[算] 即內耗，見該條。

【內耗】[算] 凡百分率由母數除子數而得者謂之內耗或內折，由餘數(即母數減子數)除子數而得者謂之外耗或外折。例如糙米  $10$  石春成白米  $8$  石，則所耗量  $= 2$  石，故內耗  $= \frac{2}{10} = .2$ ，即  $2$  成；外耗  $= \frac{2}{8} = .25$ ，即  $2$  成  $5$  分。

【內率】Mean. [算] [代] 即內項。

【內項】Mean. [算] [代] 於比例內，其第二項與第三項謂之內項或內率。例如於  $a:b=c:d$ ， $b$  及  $c$  為內項。

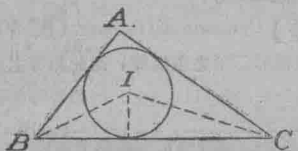
【內接】To be inscribed. [幾] 若多邊形之各角頂在一圓周或他多邊形之邊上，則前多邊形謂之內接於圓或後多邊形。又多面體之各角頂在一球面上，則此多

面體謂之內接於球。(內切,內接,尋常多同義用之)。

【內切球】Inscribed sphere 或 In-sphere. [幾] 即球之切於多面體之各面者之謂也。

【內切圓】Inscribed circle 或 In-circle.

[幾] 即圓之切於多邊形之各邊者之謂也。多就三角形而言,即以三角形 ABC



之三角之內二等分線之交點 I (即內心) 爲心,由 I 至一邊之垂線爲半徑所作之圓也。

【內半徑】In-radius. [幾] 即內切圓之半徑也。

【內接形】Inscribed figure. [幾] 即內接多邊形。

【內對角】Interior opposite angle. [幾] 指三角形之一外角之不相鄰之內角而言。例如

A, B 爲 C

之內對角。

而  $\angle A +$

$\angle B = \angle C$ 。

又於四邊形,

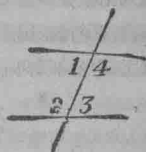
D 稱爲 E 之

內對角。



【內錯角】Alternate interior angles.

[幾] 如圖,一直線截二直線時,1與3, 2與4謂之內錯角。一直線截二平線,則內錯角相等,而其逆定理亦爲真。



【內公切面】Internal common tangent plane. [幾] 同切於二球之切面,而球在切面之異側,則此切面謂之二球之內公切面。

【內公切線】Internal common tangent. [幾] 同切於二圓之切線,而圓在其異側者之謂也。詳公切線條。

【內接角柱】Inscribed prism. [幾] 角柱之頂點在球或多面體之面上者之謂。

【內接角錐】Inscribed pyramid. [幾] 角錐之頂點在球或多面體之面上者之謂。

【內二等分線】Internal bisector. [幾] 某角之二等分線謂之內二等分線,爲對於外二等分線而言也。詳二等分線條。

【內接三角形】Inscribed triangle, 或 Intriangle. [幾] 見內接多邊形條。

【內接四邊形】Inscribed quadrilateral, 或 Inscriptible quadrilateral. [幾] 見內接多邊形條。

【內接正方形】Inscribed square 或 Insquare. [幾] 見內接多邊形條。

【內接多面體】Inscribed polyhedron. [幾] 多面體之各頂點在他多面體之面上或球面上者之謂也。

【內接多邊形】Inscribed polygon 或 In-polygon. [幾] 多邊形之各頂點在一

圓周上或他多邊形上者謂之內接多邊形，而內接多邊形因其邊數爲三，四，……而稱之爲內接三角形，內接四邊形，……。

## 公

【公尺】Metre. [算] 卽米突。自我國加入萬國度量衡同盟會後，稱米突爲公尺。而粉，糲，糶各稱公分，公厘，公毫；料，糶，籽，各稱公式，公引，公里。詳米突條。

【公斤】Kilogramme. [算] 自我國加入萬國度量衡同盟會後，稱鈞爲公斤。而鈞，鈞，克，鈞，鈞，鈞各稱爲公兩，公錢，公分，公厘，公毫，公絲。詳克條。

【公升】Litre. [算] 自我國加入萬國度量衡同盟會後，稱研爲公升。而計，頭，研各稱爲公斗，公石，公乘；粉，糲，糶各稱爲公合，公勺，公撮。

【公比】Common ratio. [代] 等比級數之某項與其前項之比恒相等，而此相等之

比謂之公比，普通以  $r$  表之。例如於  $1, \frac{1}{2},$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}; 1 = \frac{1}{4} : \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \dots = \frac{1}{2} \text{ 而 } \frac{1}{2} \text{ 爲公比。}$$

【公式】Formula. [代] 普通定則之代數的表示卽爲公式；反之，公式以通常之語述之，卽爲定則。例如二數之和爲  $s$ ，其差爲  $d$ ，求二數之公式爲  $\frac{1}{2}(s+d), \frac{1}{2}(s-d)$ 。若以通常之語述之，卽「所求之二數爲所與之和與差之和之半，及其和及差之半」。是卽定則也。

【公法】Postulate. [幾] 卽幾何學中作圖之必可能者之謂也。公理有種種；然普通爲次三條：(1)由一點至他點可引一直線。(2)一有限直線可任意延長之。(3)以任意點爲中心，任意長之直線爲半徑可畫一圓。

【公弦】Common chord. [幾] 聯相交二圓之交點之直線之謂也。公弦爲聯心線所垂直二等分。

【公差】Common difference. [代] 等差級數相鄰二項之差恒等，而此相等之差謂之公差。普通以  $d$  表之。例如於等差級數  $1, 4, 7, 10, \dots, 4-1=7-4=10-7 = \dots = 3$ ，而  $3$  爲公差。

【公根】Common root. [代] 二方程式有一根相同者，則此根稱爲二方程式之公根。二二次方程式  $ax^2+bx+c=0,$

$a'x^2+b'x+c'=0$  有公根之條件爲  $(ca'-c'a)^2=(bc'-b'e)(ab'-a'b)$ ，而此公根

必等於  $\frac{bc'-b'e}{ca'-c'a}$  或  $\frac{a'e-ac'}{a'b-a'b}$ 。[證] 命

$\alpha$  爲公根，則得  $a\alpha^2+b\alpha+c=0, a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$ ；故用十字乘法得  $\frac{\alpha^2}{bc'-b'e}$

$$= \frac{\alpha}{ca'-c'a} = \frac{1}{ab'-a'b} \text{。消去 } \alpha \text{ 得}$$

$$(ca'-c'a)^2=(bc'-b'e)(ab'-a'b)。$$

$$\text{又 } \alpha = \frac{bc'-b'e}{ca'-c'a} = \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}。$$

【公理】Axiom. [數] 公理爲推理之基本，用他命題不能說明之，惟吾人由經驗而認爲眞者也。公理有普通公理與幾何公理二種，見各條。



**【公項】** General term. [代]公項者級數之普通之項之謂也，故亦稱普通項。例如於級數 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots$ ，其第 $n$ 項即公項為 $n(n+1)$ 。又如二項展開式即 $(x+a)^n$ 之展開式之公項為 $\frac{n!}{n!(n-r)!} a^r x^{n-r}$ 。

**【公算】** Probability 或 Chance. [代]即適遇。見該條。

**【公尺制】** Metric system. [算]即米突制，見該條。

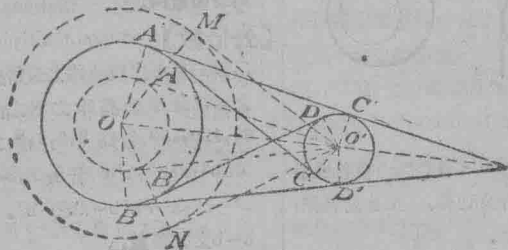
**【公分母】** Common denominator. [算] [代]二以上分數之分母相同者之謂也。分母相異之分數，可化為有公分母之分數，即取各分母之公倍數為公分母，以各分母除之，而以其商乘相當之分子即可。例如化 $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{4}$ ， $\frac{1}{5}$ ，為有公分母之分數，因分母3,4,5之公倍數為60，而 $60 \div 3 = 20$ ， $60 \div 4 = 15$ ， $60 \div 5 = 12$ ；故 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 20}{60} = \frac{40}{60}$ ， $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 15}{60} = \frac{45}{60}$ ， $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 12}{60} = \frac{12}{60}$ ，即 $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{4}$ ， $\frac{1}{5}$ 與有公分母60之分數 $\frac{40}{60}$ ， $\frac{45}{60}$ ， $\frac{12}{60}$

等值。60 可以3,4,5之任何公倍數代之。而公分母為各分母之最小公倍數者謂之最小公分母，如上之 60 即為最小公分母也。

**【公切面】** Common tangent plane. [幾]即二球之公共之切面也。公切面有內公切面與外公切面之分。若二球在面之異側，則此公切面謂之內公切面；若在同側則為外公切面。

**【公切線】** Common tangent. [幾]即二圓之公共切線也。公切線有內公切線與外公切線之分。二圓在切線之異側，則此公切線謂之內公切線；若在同側則為外公切線或直接公切線。普通內公切線與外公切線皆各有二，而內公切線之交點在二圓心之間，外公切線之交點在二圓心之外，而二交點皆在聯心線上。

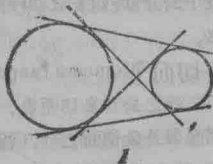
作公切線之法如次：如圖，命 $O, O'$ 為二圓之心， $r, r'$ 為其半徑。以 $O$ 為心， $r+r'$ 為半徑作圓。由 $O'$ 作此圓之切線 $O'M$ ， $O'N$ ，聯 $OM, ON$ ，交 $O$ 圓於 $A$ 及 $B$ 。作 $O'C \parallel OA$ ，及 $O'D \parallel OB$ 。作 $AC, BD$ ，即為二與圓之內公切線。則以 $r \sim r'$ 為半徑作圓，與前同樣，可作二外公切線 $A'C'$ ，



$B'D'$ .

(i)若二圓互在外，即  $OO' > r + r'$ ，此

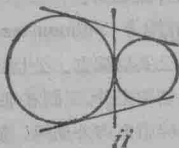
時可作二內  
外公切線與二  
外公切線，  
而共有四公  
切線。(ii)



若二圓互外  
切，即  $OO'$

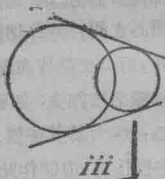
$= r + r'$ ，

此時可作一  
內公切線與  
二外公切線，  
而共有三公  
切線。

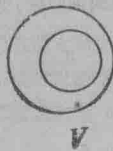


(iii)若二圓  
相交，即  $OO'$

$< r + r'$ ，  
此時祇有二  
外公切線。



(iv)若二圓內切，即  $OO' = r - r'$ ，此  
時祇有一外公切線。(v)若二圓之一全



在他圓之內，即  $OO' < r - r'$ ，此時既無  
內公切線又無外公切線。上述諸關係，  
可以次表明了之。

| 二圓之位置  | 內公切線之數 | 外公切線之數 | 公切線之總數 |
|--------|--------|--------|--------|
| 互在外    | 2      | 2      | 4      |
| 外切     | 1      | 2      | 3      |
| 相交     | 0      | 2      | 2      |
| 內切     | 0      | 1      | 1      |
| 一圓在他圓內 | 0      | 0      | 0      |

【公生數】Common factor. [算] [代]  
即公因數。

【公因數】Common factor. [算] [代]  
二或二以上之數或式之公因數者，即可  
除此等數或式之數或式之謂也。例如 3  
為 9, 12, 15 之公因數，而  $a-b$  為  $a^2-b^2$ ，  
 $(a-b)^2$ ,  $a^3-a^2b$  之公因數。二二次式  
 $ax^2+bx+cy^2$  與  $a'x^2+b'xy+c'y^2$  有  
一公因數之條件為  $(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)$   
 $(ab'-a'b)$ 。公因數亦稱公生數，公度數  
或公約數。

【公度數】Common measure. [算] [代]  
即公約數。

【公約數】Common measure. [算] [代]  
與公因數同。

【公倍數】Common multiple. [算] [代]  
二或二以上之數或式之公倍數者，即數  
之可以此等數整除之者之謂也。例如  
60, 120, 180 皆為 2, 3, 4, 5 之公倍數；  
又  $ab^2$ ,  $a^2b^2$ ,  $a^3b^5$  皆為  $a, b^2$  之公倍數，  
 $a^2-b^2$ ,  $a^3+a^2b-ab^2-b^3$  皆為  $a+b$ ；  
 $a-b$  之公倍數。

## 尺

【尺】〔算〕我國度名。十分爲寸，十寸爲尺，參看度量衡表。

## 斤

【斤】Gatty.〔算〕重量名，十六兩爲一斤。

## 斗

【斗】〔算〕量名，十升爲斗。

## 升

【升】〔算〕量名，十合爲升。

## 分

【分】(一)〔算〕長度名。尺之百分之一曰分。

(二)〔算〕重量名。兩之百分一曰分。

(三)〔算〕地積名。畝之十分之一曰分。

(四)〔算〕小數名。單位之十分之一曰分。

(五) Minute.〔算〕一小時或一度之六十分之一曰分。而一分等於六十秒。

【分子】Numerator.〔算〕〔代〕見分數條。

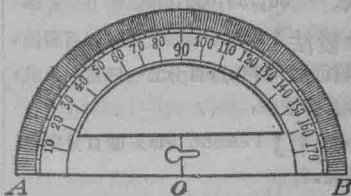
【分母】Denominator.〔算〕〔代〕見分數條。

【分數】Fraction.〔算〕〔代〕表示除法之式，可於被除數之下作一橫線，而以除數書之，則其商謂之分數；被除數謂之分子，除數謂之分母。例如以  $b$  除  $a$ ，可以  $\frac{a}{b}$  表之，而  $\frac{a}{b}$  爲分數， $a$  爲分子， $b$  爲

分母。

【分點】Point of division.〔幾〕即分一直線或圓周爲數部分之點也。

【分度規】Protractor.〔幾〕分度規爲如圖所示之半圓形，其周圍有度劃者，用以



量圓弧所含之度數或作某角。量圓弧之度數之法以  $O$  與弧之中心相當，置弧之一端於直線  $OA$  上。由  $A$  至聯弧之他端及  $O$  之直線之度數，可測得之。又作角之法，即以  $O$  置於頂點，先計其角之度數，次作  $OA$ ，由  $A$  計前所與之度數，可作得其角。分度器不限於如上圖之半圓形，全圓形者有之，三角形者亦有之。其所分之度劃愈精，則用之愈便。

【分指數】Fractional index.〔代〕即分數指數，見該條。

【分線器】Divider.〔幾〕分線器爲由鋼鐵之兩脚而成之器械，（圖見兩脚規條）用以移距離或等分直線或圓弧者也。然有其一脚之螺旋處，可代入鉛筆或鋼嘴筆，而此時之分線器爲兩脚規矣。

【分數式】Fractional expression.〔代〕即合分數之代數式。例如  $\frac{2}{x-3}ax + \frac{c}{x-b}$  是也。又如  $\frac{x^2}{a+2} + \frac{x}{b+5}$  概稱爲分數式。

然對於  $x$  則不爲分數式，即爲  $x$  之整式。

**【分節法】** Process of pointing off. [算] 數之大者，可以分節記之，即自右端起分每三位爲一節也。例如三百六十七億四千九百零五萬二千六百十四則記之如次： 36,739,052,614。

**【分釐法】** Percentage. [算] 即百分法，因百分之十曰分，百分之一曰釐，故名，詳百分法條。

**【分釐率】** Percent. [算] 即百分率，見該條。

**【分比之理】** Dividendo. [代] 亦稱除比之理。若  $a, b, c, d$  成比例，即  $a:b=c:d$ 。則  $a \sim b:b=c \sim d:d$ ，是即爲分比之理。

因  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，故  $\frac{a}{b} \sim 1 = \frac{c}{d} \sim 1$ ，即  $\frac{a \sim b}{b} = \frac{b \sim d}{d}$ ，或  $a \sim b:b=c \sim d:d$ 。

**【分數係數】** Fractional co-efficient.

[代] 係數之爲分數者之謂也。例如

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$  爲有分數係數之式。

**【分數指數】** Fractional index. [代] 亦稱分指數。即指數之爲分數者之謂。例

如  $a^{\frac{1}{2}}ab^{-\frac{1}{2}}$  爲有分數指數之式。

**【分數單位】** Fractional unit. [算] 例

如  $\frac{3}{7}$  表 1 之七等分之三倍，即  $\frac{1}{7}$  爲  $\frac{3}{7}$

之測度而稱爲分數單位，普通 1 之幾等分爲分數單位，用以測度某分數。

**【分數方程式】** Fractional equation.

[代] 分母內有未知數之方程式之謂。例

如  $\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x-5} = 2$ ， $\frac{x^2-5x}{x^2+2} + \frac{1}{x-4} + 2 = 0$

是也。

**【分離係數法】** Method of detached co-efficients. [代] 當含一文字之二代數

式之乘法或除法，僅書其係數而乘除之，待畢後，插入該文字之各乘羈，可大省運算之手續，此注謂之分離係數法。惟用此法，須將二式依昇羈或降羈列之，而某乘羈之缺乏者，須以零係數補充之。例如

$$\begin{array}{r} 2-4+0-5 \\ 3+4-2 \end{array}$$
 以  $3x^2+4x$

$$\begin{array}{r} 6-12+0-15 \\ 8-16+0-20 \end{array}$$
  $-2$  乘  $2x^3-$

$$\begin{array}{r} -4+8-0+10 \end{array}$$
  $4x^2-5$ 。於

$$\begin{array}{r} 6-4-20-7-20+10 \end{array}$$
 被乘數內以

零係數代含  $x$  之項。而積

中  $x$  之最高乘羈明爲  $x^5$ ，且其後者爲降

羈，故所求之積爲

$6x^5 - 4x^4 - 20x^3 - 7x^2 - 20x + 10$ 。

又如以  $2x^2-5$  除  $6x^4-2x^3-19x^2-5x+10$ 。

$$\begin{array}{r} 2+0-5 \\ 6+2-19-5+10(3+1-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6+0-15 \\ 2-4-5 \\ 2+0-5 \end{array}$$

商中之最高乘羈明爲  $x^2$ 。故所求之商爲  $3x^2+x-2$ 。

分離係數法又可用於含二文字之二齊次

式之乘法。例如以  $2x^2-y^2$  乘  $3x^4+2x^3y$

$+4xy^3+2y^4$ 。於被乘數內以零係數表

含  $x^2y^2$  之項，乘數內以零係數表  $xy$  之

$$\frac{3+2+0+4+2}{2+0+1}$$

$$\frac{6+4+0+8+4}{-3-2-0-4-2}$$

$$6+4-3+6+4-4-2$$

$$6x^6+4x^5y-3x^4y^2+6x^3y^3+4x^2y^4-4xy^5-2y^6.$$

項。而於積  
內明知  $x$  爲  
降幕， $y$  爲  
昇幕，故所  
求之積爲

**【分角之三角函數】** Trigonometrical

function of submultiple angle. [三] 即一已知角之幾分之一之三角函數而以已知角之三角函數表之者之謂也。普通所論者爲半角及三分之一角之三角函數。於二倍角之三角函數之公式  $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$  內，變  $A$  爲  $\frac{1}{2}A$ ，則

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1,$$

$$\text{得 } \cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1,$$

$$\text{故 } \sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}},$$

$$\cos \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}; \text{ 故 } \tan \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$$

是爲半角之三角函數之重要公式。

又於三倍角之三角函數之公式內改  $A$  爲  $\frac{1}{3}A$ ，則得  $\sin A = 3\sin \frac{A}{3} - 4\sin^3 \frac{A}{3}$ ，

$$\text{及 } \cos A = 4\cos^3 \frac{A}{3} - 3\cos \frac{A}{3}; \text{ 故以 } A$$

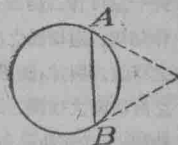
之三角函數表  $\frac{1}{3}A$  之三角函數，須以一三次方程式決定之。即當  $\sin A$  爲已知，得

$$\sin \frac{1}{3}A \text{ 之三值；} \cos A \text{ 爲已知，得 } \cos \frac{1}{3}A$$

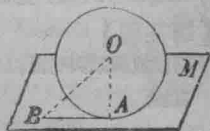
$A$  之三值。

**切**

**【切弦】** Chord of contact. [幾] 由圓或橢圓，或雙曲線，或拋物線外一點，引其二切線，聯其二切點之直線謂之切弦。如圖中之  $AB$  直線即爲圓之切弦。



**【切面】** Tangent plane. [幾] 球之切面者，過球面上一點  $A$ ，作一平面，與球交於一圓，將此平面對  $A$  點迴轉，使圓漸小，及其圓至無窮小之極限，則



此平面謂之切面，而  $A$  謂之切點。在球之半徑之端之垂直平面爲切面。又圓錐或圓柱之切面爲一平面之含其一基線而不截其側面者。

**【切球】** Tangent spheres. [幾] 若二球面僅有一公共點，則此二球謂之切球

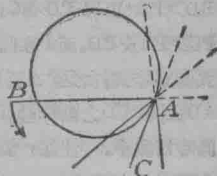
**【切圓】** Tangent circles. [幾] 二圓僅有一公共點，則此二圓謂之切圓。

**【切線】** Tangent. [幾] 圓之切線者，即一直線任何延長之，與圓只有一公共點者之謂也。又或圓之割線  $AB$ ，以  $A$  爲樞而迴轉之，

當  $B$  點與  $A$  點接近，至極限時， $AB$  之位置爲

$AC$ ，則  $AC$

稱爲在  $A$  點圓之切線，而  $A$  點



謂之切點。於圓之半徑端之垂線爲圓之切線。於圓周上一點僅可作一切線；過圓外一點可作二切線；過圓內一點，不能作切線。過切點之直徑平分平行於切線之諸弦。與球，圓錐，圓柱僅有一公共點之直線謂之切線。又與橢圓，雙曲線，拋物線，及任何曲線僅有一公共點之直線，亦謂之切線。

【切點】 Point of contact 或 Point of tangency. [幾] 見切線及切面條。

【切基線】 Element of contact. [幾] 圓柱或圓錐與切面相交之基線，謂之切基線。

### 勿

【勿爾馬點】 Fermat's point. [幾] 於  $\triangle ABC$  內取一點  $P$ ，若  $\sum PA$  爲極小，則此  $P$  點謂之勿爾馬點。求勿爾馬點之法

如次：於  $BC$  上

$\triangle ABC$  之外側作

等邊三角形  $BCD$ 。

若  $P$  在  $\triangle ABC$  內

而不在圓  $BCD$

上，則  $PA \cdot BC +$

$PB \cdot CD + PC \cdot$

$BD > PA \cdot BC + PD \cdot BC$ ，即  $PA + PB +$

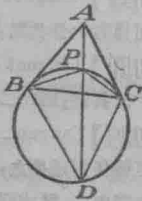
$PC > PA + PD$ 。而  $P$  在此圓周上，則不等

式變爲等式，由是  $P$  在圓  $BCD$  上時，即爲

$AD$  截圓  $BCD$  之點時， $\sum PA$  與  $PA + PD$

同時爲極小。注意：於此點  $\angle APB =$

$\angle BPC = \angle CPA$ 。



【勿爾馬定理】 Fermat's theorem. [代]

若  $p$  爲素數，而  $N$  與  $p$  互爲素數，則  $NP^{p-1} - 1$  爲  $p$  之倍數。是爲勿爾馬定理。

[證] 因  $(a+b+c+\dots)^p = a^p + b^p + c^p + \dots + M(p)$ ，(見 Hall & Knight 大代數 420 節) 命  $a, b, c, \dots$  諸量各等於 1，且設其數爲  $N$ ，則  $NP = N + M(p)$ ；即  $N(NP^{p-1} - 1) = M(p)$ 。然  $N$  與  $p$  爲互素數，故  $NP^{p-1} - 1$  爲  $p$  之倍數。

[證<sup>2</sup>] 因  $N$  與  $p$  互爲素數，故諸數

$$N, 2N, 3N, \dots, (p-1)N \dots (1),$$

以  $p$  除之，其餘數爲

$$1, 2, 3, \dots, p-1 \dots (2),$$

雖其次序不必如是。故(1)內諸項之積與(2)內諸項之積，以  $p$  除之，其餘數相同。

即  $\underline{p-1}NP^{p-1}$  與  $\underline{p-1}$  以  $p$  除之，其餘數相同；然  $\underline{p-1}$  與  $p$  互爲素數，故

$$NP^{p-1} - 1 = M(p).$$

### 反

【反比】 Inverse ratio. 或 Reciprocal ratio. [算] [代] 比  $a:b$  之反比爲  $b:a$ 。

【反形】 Inversion. [幾] 卽倒形，見該條。

【反商】 Reciprocal [算] [代] 卽倒數。

【反數】 Reciprocal [算] [代] 卽倒數。

【反變】 To vary inversely. [代] 某數因他數而反變者，卽前數因後數之反數而

變之謂。例如  $a$  因  $b$  反變，卽  $a: \frac{1}{b}$  爲

常數，卽  $ab = m$  (常數) 之謂也。

【反比例】 Inverse proportion. [代] 一量因他量之反數而變，則前量之任意二值與後量之相當二值成反比例。例如前

量爲某工程工人之數，後量爲作完此工程之日數，即工人12人10日作完之工程，8工人幾日能成之。此時人數之比12:8等日數之比10:x即x:10，即 12:8=x:10；或人數之比之反比 8:12 等於日數之比 10:x，即 8:12=10:x，不論如何，x=15，即 15 日。各種成反比例之量，見正比例條。

**【反定理】** Contradictory of a theorem. [數]反定理者，若原定理爲真，則此必爲偽，若原定理爲偽，則此必爲真。如原定理爲『設A爲B，則C爲D』則其反定理爲『若A爲B，則C不爲D』

**【反適遇】** Inverse probability. [代]設有某事，可由種種原因而成，今於事後欲決定此事由諸原因中之何一原因而成。其決此一原因之適遇謂之反適遇。例如由二囊之任一囊內取1黑玉，但知第一囊內有2黑玉，3白玉，第二囊內有5黑玉，4白玉，求由第一囊取黑玉之適遇。設於二囊中各取出N個玉，則由第一囊內出黑玉之數，平均當有 $\frac{2}{9}$ 個，由第二囊內出黑玉之數，平均當有 $\frac{5}{9}$ 個。由是由二囊內取出黑玉之個數爲 $\frac{2}{9}N + \frac{7}{9}N$ ，而其中由第一囊取出黑玉之個數爲 $\frac{2}{9}N$ 。故出自第一囊之適遇爲 $\frac{\frac{2}{9}N}{\frac{2}{9}N + \frac{7}{9}N} = \frac{2}{7}$ 。

**【反轉之理】** Invertendo. [代]若 a:b

=c:d, 則 b:a=d:c, 此謂之反轉之理, 因  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , 故  $1 \div \frac{a}{b} = 1 \div \frac{c}{d}$ , 即  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  或 b:a=d:c.

**【反三角函數】** Inverse trigonometrical function. [三] 即逆三角函數，見該條。

文

**【文字係數】** Literal coefficient. [代]某項之係數爲文字者謂之文字係數。例如ax之a, ax<sup>2</sup>+bx+c之a,b,c,皆爲文字係數，惟c視爲x<sup>0</sup>之係數。

**【文字方程式】** Literal equation. [代]即方程式之係數以文字表之者，例如 ax+by=0, ax<sup>2</sup>+bx+c=0是也。

**【文單蒙定理】** Vandermonde's theorem. [代]文單蒙定理如次：若n爲任意正整數，a與b爲任意之量，則

$$(a+b)^n = a^n + na_{n-1}b_1 + \frac{n(n-1)}{2!} a_{n-2}b_2 + \dots + \frac{n!}{r!(n-r)!} a_{n-r}b_r + \dots + b^n,$$

但a<sub>n</sub>=a(a-1)(a-2).....(a-n+1)。今假定n爲某特別值爲真，左邊以a+b-n乘之，則爲(a+b)<sub>n+1</sub>右邊之級數之各項亦以a+b-n乘之，惟此乘數可變爲種種之形式，即如次：

- 第一項以{(a-n)+b}乘之，
- 第二項以{(a-n+1)+(b-1)}乘之，
- 第三項以{(a-n+2)+(b-2)}乘之，

逐次如是，而

第  $r$  項以  $\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$  乘之。

$$\begin{aligned} \text{故}(a+b)_{n+1} &= a_n \{(a-n)+b\} \\ &+ {}_n C_1 \cdot a_{n-1} b_1 \{(a-n+1)+(b-1)\} \\ &+ {}_n C_2 \cdot a_{n-2} b_2 \{(a-n+2)+(b-2)\} \\ &+ \dots + {}_n C_{r-1} \cdot a_{n-r+1} b_{r-1} \{(a-n+r-1)+(b-r+1)\} \\ &+ {}_n C_r \cdot a_{n-r} b_r \{(a-n+r)+(b-r)\} \\ &+ \dots + b_n \{a+(b-n)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但} a_n \{(a-n)+b\} &= a_{n+1} + a_n b_1, \\ {}_n C_1 a_{n-1} b_1 \{(a-n+1)+(b-1)\} &= \\ {}_n C_1 (a_n b_1 + a_{n-1} b_2), \\ {}_n C_{r-1} \cdot a_{n-r+1} b_{r-1} \{(a-n+r-1) \\ &+ (b-r+1)\} \\ &= {}_n C_{r-1} (a_{n-r+2} b_{r-1} + a_{n-r+1} b_r), \\ {}_n C_r \cdot a_{n-r} b_r \{(a-n+r)+(b-r)\} &= \\ {}_n C_r (a_{n-r+1} b_r + a_{n-r} b_{r+1}); \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots b_n \{a+(b-n)\} = a_1 b_n + b_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{故}(a+b)_{n+1} &= a_{n+1} + (1+{}_n C_1) a_n b_1 + \dots \\ &+ ({}_n C_{r-1} + {}_n C_r) a_{n-r+1} b_{r-1} + \dots + b_{n+1} \\ &= a_{n+1} + {}_{n+1} C_1 a_n b_1 + \dots \\ &+ {}_{n+1} C_{n+1-r} a_{n+1-r} b_r + \dots + b_{n+1}, \end{aligned}$$

因  ${}_n C_{r-1} + {}_n C_r = {}_{n+1} C_r$  故也。由是，此定理若對於  $n$  之任何正整數值為真，則對於  $n+1$  亦為真。然  $n=2$  時，此定理明知其為真，故  $n=3$  亦必為真，順次  $n$  為 4, 5, 6, …… 亦無不為真矣。〔此證明係 Cayley 所發見〕。

方

【方】Power. [算] [代] 乘幂又稱為方，如平方，立方，四次方，…是也。

【方向】Direction. [幾] 即直線或曲線之向之謂。

【方根】Root. [算] [代] 即根。

【方陣】Magic square. [算] 即幻方。

【方程】Equation. [代] 即方程式，見該條。

【方積】Puissance 或 power. [幾] 過一點引圓之割線交圓周於二點，二交點由該點之距離所包之矩形，即由該點所引之切線上之正方形謂之方積。

【方位角】Azimuth. [三] 即磁針所指之方向與羅盤北線所成之角也。由此角可定方向如某點之方位角為  $90^\circ$ ，則知其方向為正東， $225^\circ$ ，則在西南。

【方格紙】Squared paper. [數] 即劃成小方塊之紙也，作圖時用之。故亦稱作圖紙。

【方程式】Equation [代] 方程式者，表二數或式之相等，而以符號聯結之者也。而兩方之式謂之邊或節，左方之式謂之左邊或左節，右邊之式謂之右邊或右節。方程式有恆方程式 (Identical equation) 及規約方程式二種：恆方程式亦稱恆等式 (identity)，其中所含之文字不論與以何值，仍不失其相等，換言之，表示其一邊為由他邊誘得之者之謂，例如  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ,  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ ,  $(a+b+c) \times (ab+bc+ca) - bc = (a+b)(b+c)(c+a)$  是也。

規約方程式普通即稱為方程式，即其中



所含之文字，僅於某一定值時，始能相等之式之謂。方程式內已知之數或假設為已知之數謂之已知數，所求之數謂之未知數。解方程式時須用下述諸理：(1)方程式之兩邊各加等數仍相等；(2)方程式之兩邊各減等數仍相等；(3)方程式之兩邊各以等數乘之仍相等；(4)方程式之兩邊各以等數除之仍相等。

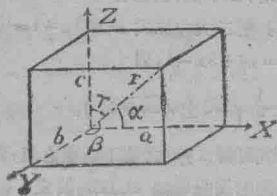
由代數式而成之方程式謂之代數方程式，因其未知數之個數而有一元，二元，三元……之分，因其未知數之次數而有一次，二次，三次之分。例如

$$\text{一元} \begin{cases} \text{一次: } ax + b = 0, \\ \text{二次: } ax^2 + bx + c = 0, \\ \text{三次: } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \end{cases}$$

$$\text{二元} \begin{cases} \text{一次: } ax + by + c = 0, \\ \text{二次: } ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0, \end{cases}$$

$$\text{三元} \begin{cases} \text{一次: } ax + by + cz + d = 0 \\ \text{二次: } ax^2 + by^2 + cz^2 + lxy + \dots \end{cases}$$

**【方向餘弦】** Direction cosines. [幾] 令  $l$  為空中任意直線，而  $l'$  為過原點且與  $l$  同方向之直線。若  $\alpha, \beta, \gamma$  為  $l'$  與坐標軸所



成之角，亦即為  $l$  與坐標軸所成之角。此諸角之餘弦，謂之  $l$  之方向餘弦，常以  $\lambda, \mu, \nu$  表之。命  $P \equiv (a, b, c)$  為在  $l'$  上，由原點之正方向之任意一點，且令  $OP = r$ ，

$$\text{則 } \lambda = \cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \mu = \cos \beta = \frac{b}{r},$$

$$\nu = \cos \gamma = \frac{c}{r}. \text{ 然 } r \text{ 為諸稜為 } OA = a,$$

$OB = b, OC = c$  之直角平行六面體之對角線，故  $\nu = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

$$\therefore \lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \mu = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

故  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ，即一直線之方向餘弦之平方和等於 1。

**【方程式論】** Theory of Equations. [數] 方程式論者，數學之一分科，論普通方程式之根與係數之關係，三次，四次方程式之普通解法，求高次方程式之根之近似值，論高次方程式之種種性質，關係者也。

**【方程式之節】** Members of an equation. [代] 見方程式條。

**【方程式之邊】** Sides of an equation. [代] 見方程式條。

**【方程式之一致】** Consistency of a system of equations. [代] 一組方程式有公共之解答，即為方程式之一致。例如一組方程式為  $a_1x + b_1 = 0, a_2x + b_2 = 0$ ，欲此二者一致之必要且充足條件為

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \dots\dots(1)$ 。又求欲使一組方程式  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ,  $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ 。爲一致之必要且充足之條件，先用十字乘法，由第一、第二兩方程式求得  $x, y$  之值，代入第三方程式，化之則得  $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0 \dots\dots(2)$ 。是爲欲三個一次方程式一致之必要且充足條件。若有一組三個以上之方程式時，每加一方程式有一條件，故若有  $n$  個方程式時，其一致須有  $n-2$  個獨立之條件。例如三方程式  $3x+2y=5, 2x-3y=1, x+y=2$  一致否，於條件(2)  $3\{(-3)(-2)-1 \times (-1)\} + 2\{(-1) \times 1 - (-2) \times 2\} + (-5)\{2 \times 1 - 1 \times (-3)\} = 21 + 6 - 25 = 2 \neq 0$ ；故三方程式無公共之解答，即不一致。又如欲  $3x+2y=5, 2x-3y=1, (1+c)x + (1-c)y=1$  三方程式一致，求  $c$  之值。將諸係數代入(2)，化之則得

$$c = -\frac{11}{10}.$$

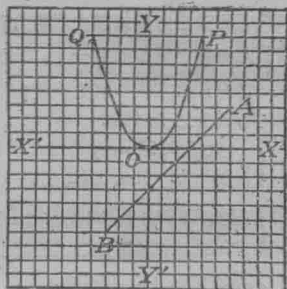
又(1)與(2)可各用下之行列表表之：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots(1), \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots(2).$$

**【方程式之圖形】** Graph of an equation. [代] 命  $f(x)$  爲  $x$  之函數，而其值以  $y$  表之，若與  $x$  以一系列之數值，則得  $y$  之相應之一列之值。若以此等值各爲橫坐標與縱坐標，而作得連續諸點，則

得一直線或曲線。此直線或曲線謂之函數  $f(x)$  或方程式  $f(x)=0$  之圖形。凡一次方程式之圖形皆爲直線，例如作  $y=x-3$  之圖形。

當  $x = \dots\dots 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots\dots$   
 $y = \dots\dots 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots\dots$   
 聯此諸點則得直線  $AB$ 。



又如作  $y = \frac{1}{2}x^2$  之圖形。

當  $x = \dots\dots 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots\dots$   
 $y = \dots\dots 8, 4.5, 2, 5, 0, -5, -2, -4.5, -8, \dots\dots$   
 聯此諸曲線，則得上圖之曲線  $POQ$ ，即拋物線也。

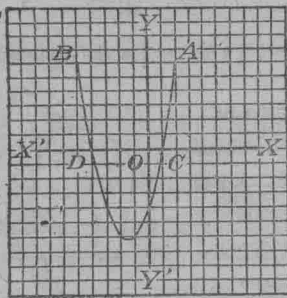
**【方程式之圖解】** Graphical solution of an equation. [代] 方程式之圖形可用以解方程式，而此種解法謂之方程式之圖解，茲示數例於次。

**【例1】** 解二次方程式  $x^2 + 3x - 4 = 0$ 。

命  $y = x^2 + 3x - 4$ ，則

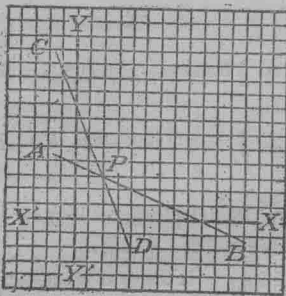
$$x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{25 + 4y}).$$

由此式可得  $x, y$  之若干相應之值，而作得其圖形爲拋物線  $ACDB$ ，其交  $x$  軸之



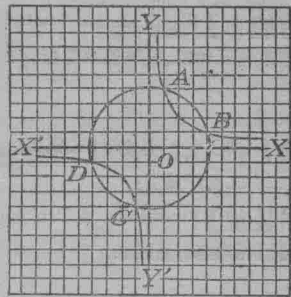
點為 C 與 D, 而其橫坐標各為  $x=1$  或  $-1$ , 即所求之根為 1 與  $-1$ 。

【例2】解一次聯立方程式  $3x+7y=27$ ,  $5x+2y=16$ , 所與二方程式之圖形各為



直線 AB, CD, 其交點 P 之坐標為  $x=2, y=3$ , 是即為所求之根。

【例3】解二次聯立方程式  $x^2+y^2=17$ , 與  $xy=4$ , 此二方程式之圖形各為如圖之圓及雙曲線, 其交點 A, B, C, D 之坐標



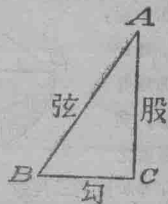
各為  $x=1, y=4; x=4, y=1; x=-1, y=-4; x=-4, y=-1$ ; 是即為所求之根。

【方程式之圖示法】 Graphical representation of equation. [代] 即以圖形表方程式之法也。其法見方程式之圖形條。

【方程式之誘求式】 Derivative of an equation. [代] 見誘求式條。

勾

【勾】 [幾] 於直角三角形, 直角傍之短邊謂之勾, 長邊謂之股, 斜邊謂之弦。例如於直角三角形 ABC, 直角 C 傍二邊中之較短者, 即 CB, 屈折如勾, 故謂之勾; 較長者, 即 AC, 直立如股, 故謂之股; 而斜邊 AB 張於弓之弦, 故謂之弦。故直角三角形有稱為勾



股形者。

【勾股形】Right-angled triangle. [幾]

即直角三角形。見該條及勾條。

### 引

【引】[算] (一)量名，十丈爲引。

(二)二百斤爲引；

【引長線】Production 或 Prolongation.

[幾] 即延線，見該條。

### 心

【心】Centre 或 Center. [幾] 與中心同，

見該條。

### 日

【日利】Daily interest. [算] 見利息條。

### 月

【月利】Monthly interest [算] 見利息條。

【月形】Lune. [幾] (一)二圓弧間所夾

之平面謂之月形。有稱爲 Hippocrates

之月形者。即如圖於直角三角形 ABC

之三邊

上，各

作半圓，

L 與 L'

即爲月

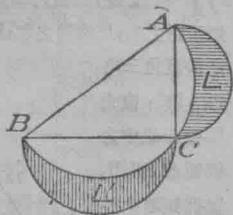
形，其

面積之

和等於直角三角形 ABC 之面積。因

由圖， $L + L' + \text{半圓 } AB = \triangle ABC +$

$\text{半圓 } AC + \text{半圓 } BC$ ；然半圓  $AB = \frac{1}{4}$



$\pi AB^2$ ，半圓  $AC + \text{半圓 } BC = \frac{1}{4} \pi AC^2$

$+ \frac{1}{4} \pi BC^2 = \frac{1}{4} \pi AB^2$ ，由是得  $L + L'$

$= \triangle ABC$ 。

(二)即球面

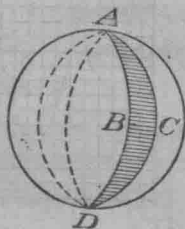
上二大半圓

周間所夾之

部分之謂，

如圖之 AB

DC 是也。



【月形角】Angle of a lune 或 Lunar

angle. [幾] 月形之二弧間之角謂之月

形角，如上圖之 BAC 角是也。而其角

等於在其二弧之交點所引之二切線間之

角。

### 水

【水平】Horizon [三] 見水平面及水平

線條。

【水險】Marine insurance. [算] 見保險

條。

【水平角】Horizontal angle. [三] 角之

兩邊在水平面上者之謂。

【水平面】Horizontal plane. [三] 垂

直於垂直線之平面之謂。

【水平線】Horizontal line. [三] 即在

水平面上之直線之謂。

### 火

【火險】Fire insurance. [算] 見保險

條。

## 太

【太陰歷】Lunar calendar. [算] 即陰歷見該條。

【太陽日】Solar day. [算] 太陽兩次經過某地之子午圈所需之時間謂之太陽日。因地球之軌道爲橢圓，且其橢圓之平面傾斜於赤道之平面，故太陽日長短不等，以之計時，甚覺不便，乃取一年中之太陽日相加平均之，而名之爲平太陽日 (Mean solar day)，即爲尋常之日。

【太陽歷】Solar calendar. [算] 即陽歷。

## 比

【比】Ratio. [算][代][幾][比之定義1]

某數以同類他數除之，而以  $\frac{a}{b}$  或  $a/b$

或  $a:b$  表之者謂之比。故(比之值) =  $a \div b$ ,  $a = (\text{比之值}) \times b$ ,  $b = a \div (\text{比之值})$ 。

[比之定義2] 某量  $a$  與其同類他量  $b$  之比，即  $a$  爲可以乘而得之數之謂。而此

比以  $\frac{a}{b}$  記之。同類二量  $a, b$  之比，若以第一量爲單位，則第二量等於測度之數。

因若已知比時，例如比爲  $\frac{3}{5}$ ，則第一量

爲以  $\frac{3}{5}$  乘第二量之積，然以  $\frac{3}{5}$  乘第一

量，即爲取其  $\frac{3}{5}$ 。由是第一量爲第二

量之  $\frac{3}{5}$ 。故若以第二量爲單位，則  $\frac{3}{5}$  爲

測度第一量之數。若二量  $a$  與  $b$  可以同

一單位  $n$  測度之，則  $a$  與  $b$  之比爲第一量之測度  $\alpha$  以第二量之測度  $\beta$  除之而得之。

因由  $a = m\alpha$ ,  $b = m\beta$  二關係，得  $a = b$

$\frac{\alpha}{\beta}$ ，故  $\frac{\alpha}{\beta}$  爲  $a$  與  $b$  之比。由是誘得任

意二數  $\alpha$  與  $\beta$  之比爲以  $\alpha$  除  $\beta$  之商。算術中所論關於分數之法則亦可適用於比，

即普通之分數  $\frac{\alpha}{\beta}$ ，例如此比以同數乘其

兩項，其值不變，又二比之積爲取各相當之積而得之，等等是也。

[比之定義3] (1) 一量與同類他量之比，

爲第一量與第二量關於量之關係，但此

關係比較二量之幾倍互相等而定之。 $a$

與  $b$  之比，以  $a:b$  表之，此  $a$  謂之前項，

$b$  謂之後項。例如一斤與十兩之比，爲定

$5(\text{一斤}) = 8(\text{十兩})$  之謂。(2) 一量對於

同類他量之比，爲關於第一量與第二量

之倍量之關係之謂。 $a$  之倍量對於  $b$  之關

係，若  $a$  之各倍量與  $b$  之各倍量依其大之

遞昇次序而列之，且無限連續，若知  $a$

之諸倍量如何插於  $b$  之諸倍量之間，則爲

定。例如正方形之對角線爲  $a$ ，邊爲  $b$ ，則

此等量之倍量之交插之法如次：

所與諸倍量如斯之交插法，對於二量  $a$

與  $b$  爲一定，而若  $c$  與  $b$  之差無論若何小，

|        |        |        |       |       |       |      |
|--------|--------|--------|-------|-------|-------|------|
| $a$    | $2a$   | $3a$   | $4a$  | $5a$  |       |      |
| $b$    | $2b$   | $3b$   | $4b$  | $5b$  | $6b$  | $7b$ |
| $6a$   | $7a$   | $8a$   | $9a$  |       |       |      |
| $8b$   | $9b$   | $10b$  | $11b$ | $12b$ | $13b$ |      |
| $14b$  | $10a$  | $15b$  |       |       |       |      |
| $141b$ | $100a$ | $142b$ |       |       |       |      |

a與c之諸倍量之交插之法，異於a與b之諸倍量之交插之法。因命b與c之差為d，無論d如何小，常可求得m，使 $md > a$ ，如是mb與mc之差大於a。故mb與mc不能在a之同倍二量之間。故a與b之諸倍量之交插之法不能同於a與c之諸倍量之交插之法。即對於其初之小倍量或可相同，後至對於大倍量必致相異。

【比之相等】有二比，取此二前項之任意之等倍量，又取其二後項之任意等倍量，若因其一前項之倍量大於，或等於，或小於其後項之倍量，他前項之倍量大於，或等於，或小於其後項之倍量，則此二比謂之相等。但一比之二量與他比之二量同類亦可，異類亦可。換言之，有二比 a:b 及 p:q, m與 n 為任意之整數，因 mp 大於或等於，或小於 nq, ma 大於，或等於小於 nb, 則比 a:b 謂之等於比 p:q. 又由上之定義可直得次之結果。m 為任意整數 n 為 ma 在 nb 與 (n+1)b 之間或等於 nb 所決定之整數。因 ma 在 nb 與 (n+1)b 之間，或等於 nb, mp 在 nq 與 (n+1)q 之間或等於 nq, 則比 a:b 等於比 p:q. 由是上之定義又可述之如次：二比 a:b, p:q, 若 a 之諸倍量與 b 之諸倍量之交插之法，與 p 之諸倍量與 q 之諸倍量之交插之法相同，則謂之相等。

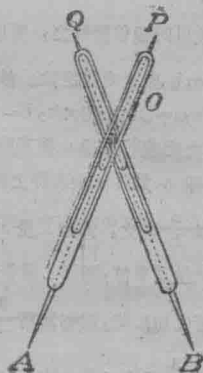
【比之不等】有二比，取此二前項之任意等倍量，又取其二後項之任意等倍量，若第一比前項之倍量，大於或等於其後項之倍量，而第二比前項之倍量不大於或可小於其後項之倍量，則第一比謂之大

於第二比，換言之，二整數 m, n 之值，若 ma 大於 nb, mp 不大於 nq, 或 ma 等於 nb, mp 小於 nq, 則比 a:b 謂之大於比 p:q.

【比例】Proportion. [算] [代] 二比相等而以符號 = 或 : 聯結之者之謂。例如  $3:5 = 12:20$  或  $3:5::12:20$ ; 或  $a:b = c:d$  或  $a:b::c:d$ . a與d謂之比例之外項或外率, b與c謂之內項或內率。比例有正, 反, 單, 複之分, 見各條。

【比號】Sign of ratio. [算] [代] 即二數之比之符號: , 而於前項之右記此符號, 記後項於其右。又記為分數之形時, 則用橫線。

【比例規】Proportional compasses. [幾] 畫圖器, 以金屬製之, 其形如圖, 其各脚上皆刻有度劃, 此規為用以增大或減小已知線分為已知比。即移動點 O, 使  $\frac{OP}{OA}$  等於已知之比, 使 AB 等於已知之線分:



則 PQ 為 AB 以  $\frac{OP}{OA}$  之比而增大或減小。

【比例量】Proportional quantities 或 Proportionals. [算] [代] 成比例之量之謂。

【比例號】 Sign of proportion. [算]

[代] 卽於比例中表二比相等之號::之謂,讀爲若或如。

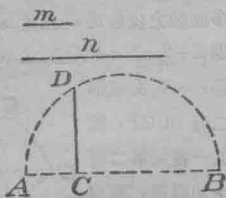
【比例數】 Proportional numbers 或 Proportionals. [算] [代] 成比例之數之謂。

【比例中率】 Mean proportional [算] [代] [幾] 與比例中項同,見該條。

【比例中項】 Mean proportional [算] [代] [幾] 比例之二中項相等時謂之比例中項。例如於 3:6=6:12, 或 a:b=b:c, 6爲3與12之比例中項, b爲a與c之比例中項。而由 a:b=b:c 得  $b^2=ac$ ,  $\therefore b=\pm\sqrt{ac}$ 。故比例中項之平方等於兩外項之積, 由是比例中項等於兩外項之積之平方根。

於幾何中求兩已知直線之比例中項之法如次。設

m 與 n 爲兩已知直線。於 AB 直線上取 AC=m, CB=n。



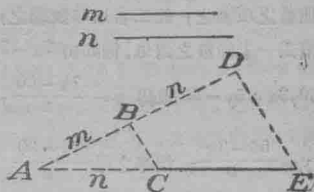
以 AB 爲直徑作半圓, 於 C 作垂線 CD 交圓周於 D。則 CD 爲所求之比。因 AC:CD=CD:CB, 卽  $m:CD=CD:n$  也。

【比例配分】 Proportional parts. [算] 與配分法同, 見該條。

【比例第三項】 Third proportional. [算] [代] [幾] 三量成連比例時, 其第三量謂之他二量之比例第三項。例如於

4:6=6:9 或 a:b=b:c, 9 爲 4 與 6 之比例第三項, c 爲 a 與 b 之比例第三項。

於幾何中求兩已知直線之比例第三項之法如次: 設 m 與 n 爲兩已知直線。任作一角 A, 取  $\Delta B=m, \Delta C=n$ 。延長 AB 至 D。

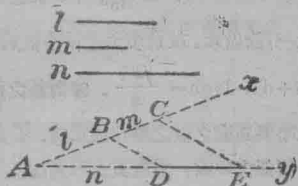


使  $BD=AC$ 。作 BC。過 D 作  $DE \parallel BC$ , 交 AC 之延長線於 E。則 CE 爲 m 與 n 之比例第三項。因  $AB:BD=AC:CE$ , 卽  $m:n=n:CE$  故也。

【比例第四項】 Fourth proportional.

[算] [代] [幾] 四量成比例時, 其第四量謂之他三量之比例第四項。例如於 3:7=6:14 或 a:b=c:d, 14 爲 3, 7, 6 之比例第四項, d 爲 a, b, c 之比例第四項。

於幾何中求三已知直線之比例第四項之法如次: 設 l, m, n 爲三已知直線。任作



$\Delta x, \Delta y$  成一角 A, 於 Ax 取  $AB=l, BC=m$ ; 又於 Ay 取  $AD=n$ 。作 BD, 過 C 作  $CE \parallel BD$  交 Ay 於 E。則 DE 爲 l, m, n 之比例第四項。因  $AB:BC=AD:DE$ ,

即  $1:m=n:DE$  也。

**【比較消去法】** Elimination by comparison. [代]由含二以上未知數之一組方程式之一，其未知數以他未知數之項表之，又由他方程式，其同一未知數，以他數之項表之；此二者以等號聯之，而消去一未知數之謂也。例如由  $7x-2y=60$ ,  $3x+5y=55$  求得  $y=\frac{7x-60}{2}$ ,  $y=\frac{55-3x}{5}$ , 相等之得  $\frac{7x-60}{2}=\frac{55-3x}{5}$ , 即用比較消去法消去一未知數  $y$  也。

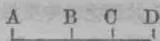
**【比例部之理論】** Theory of proportional parts. [三]  $\log(n+d)-\log n=\log\left(1+\frac{d}{n}\right)=\mu\left(\frac{d}{n}-\frac{d^2}{2n^2}+\frac{d^3}{3n^3}-\dots\right)$ , 而  $\mu=.43429448$ . 設  $n$  爲由五數字而成之整數，故  $n$  不小於 10000，又設  $d$  不大於 1，則  $\frac{\mu d^2}{2n^2}$  小於  $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{10000}\right)^2$ ，故更小於 .000000003；而  $\frac{\mu^3}{3n^3}$  小於此之萬分之一，餘倣此。故最少至七位小數爲  $\log(n+d)-\log n=\frac{\mu d}{n}$ 。即對數之變化約略與對應之數之變化成比例。是謂之比例部之理論，對數表及三角函數對數表即以此理論而構成。

尤

**【尤拉定理】** Euler's theorem. [代]

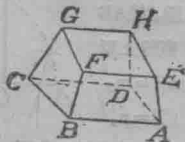
代數中尤拉定理如次：若  $\phi(m)$  爲小於  $m$  而與  $m$  互爲素數之整數之個數，且若  $a$  與  $m$  互爲素數，則  $a^{\phi(m)}-1$  可以  $m$  除盡。此爲勿爾馬定理經尤拉普遍之者。

**【尤拉定理】** Euler's theorem. [幾]幾何學中尤拉定理有二，在平面幾何學中者如次：於一直線上依次取  $A, B, C, D$  四點，則矩形  $AC \cdot BD$  等於矩形  $AB \cdot CD$  與矩形  $BC \cdot AD$  之和。[證]



$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= (AD - CD)(BC + CD) = \\ AD \cdot BC - CD \cdot BC + CD(AD - CD) &= \\ AD \cdot BC - CD \cdot BC + CD(AB + BC) &= \\ AD \cdot BC - CD \cdot BC + CD \cdot AB + & \\ CD \cdot BC = AD \cdot BC + CD \cdot AB. \end{aligned}$$

在立體幾何學中者如次：凸多面體之稜數加 2 等於其頂數與其面數之和，即任意多面體之稜數爲  $E$ ，頂數爲  $V$ ，面數爲  $F$ ，則  $E+2=V+F$ 。[證]先取一面  $ABCD$ ，



得  $E=V$ 。次取第二面  $BCGF$ ，置其一稜於第二面之相當稜，則有一公共稜  $BC$  與二公共頂  $B, C$ 。故由二面得  $E=V+1$ 。再取第三面  $ABFE$ ，與第一面第二面相接，則此三面有二公共稜與三公共頂  $A, B, F$ 。故由三面得  $E=V+2$ 。同理，由四面可得  $E=V+3$ ，餘可類推。故由  $(F-1)$  面得  $E=V+(F-2)$ 。但  $F-1$  爲多面體缺一面者之面數，加此一面，其



稜數與頂數不加增。故由 F 面得  $E=V+F-2$ ，即  $E+2=V+F$ 。

**【尤拉乘積】** Euler's product. [三] 因

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \\ &= 8 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \dots\dots\dots \\ &\quad \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

故  $\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots\dots \cos \frac{x}{2^n}$

若  $n$  無限增大，則  $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots\dots$   
 $\cos \frac{x}{2^n}$  之極限為  $\frac{\sin x}{x}$ 。此結果謂之

尤拉乘積。

**【尤拉級數】** Euler's series. [三] 於

葛雷哥利級數  $\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \dots\dots\dots$

命  $\tan \theta = x$ ，則  $\theta = \tan^{-1} x$ ，故得

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots\dots\dots$$

而  $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1}$

$$\left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) / \left( 1 - \frac{1}{6} \right) \right\} = \tan^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{4};$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots\dots\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\dots\dots$$

是謂之尤拉級數。

**【尤拉消去法】** Euler's method of

elimination. [代] 此法就  $x$  之任意二方程式消去  $x$ ，其法可由次例以明之。[例] 求消去  $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0, b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$  之  $x$ 。若此二方程式有一公根，則得  $(B_1 x + B_2)(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) \equiv (A_1 x + A_2)(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)$ ，或  $(B_1 a_0 - A_1 b_0) x^3 + (B_1 a_1 + B_2 a_0 - A_1 b_1 - A_2 b_0) x^2 - (B_1 a_2 + B_2 a_1 - A_1 b_2 - A_2 b_1) x + B_2 a_2 - A_2 b_2 \equiv 0$ 。

使各項之係數等於零，則得次五個齊次方程式，即

$$\begin{aligned} B_1 a_0 - A_1 b_0 &= 0, \\ B_1 a_1 + B_2 a_0 - A_1 b_1 - A_2 b_0 &= 0, \\ B_1 a_2 + B_2 a_1 - A_1 b_2 - A_2 b_1 &= 0, \\ B_2 a_2 - A_2 b_2 &= 0. \end{aligned}$$

消去  $A_1, A_2, B_1, B_2$  則得消去式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

巴

**【巴斯開線】** Pascal line. [幾] 見巴

斯開定理條。

【**巴斯開定理**】 Pascal's theorem.

〔幾〕巴斯開之定理如次：內接於圓錐曲線之六邊形，其三雙對邊相交之三點為共線點。〔證〕設 ABCDEF 為內接於圓錐曲線之六邊形；FA

與 DC 交於 P；AB

與 ED 交於 Q；BC

與 FE 交於 R。又

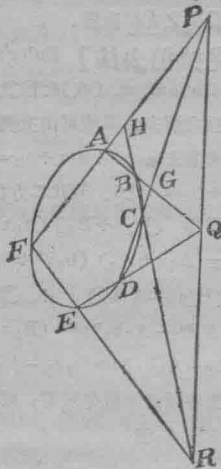
AB, DC 交於 G,

FA, CB 交於 H。

則 P(AB

CQ) =

(ABGQ) = D(ABCE)。然過圓錐曲線上四定點，而以圓錐曲線上他任意一點為頂點之束線為等十字比， $\therefore D(ABCE) = F(ABCE)$ ， $\therefore P(ABCQ) = F(ABCE) = (HBCR) = P(ABCR)$ ，故此始終對應之二組束線為等十字比，且三射線為公共，故第四射線亦為公共，即 PQ, PR 為同一直線。PQR 謂之**巴斯開線**。而六邊形之頂點，若取相異之次序，連以直線，則可得他**巴斯開線**。將六文字 ABCDEF 之次序變換之，而連其同雙之文字可得 120 個六邊形，因設六文字之一為

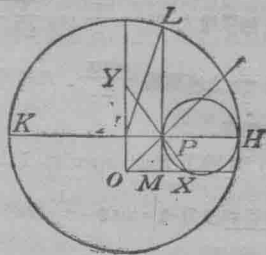


不動，則其餘諸文字之排列之種類為 120 故也。然 120 之中，有一半之次序與餘一半恰相反，而生同一之**巴斯開線**。故**巴斯開線**之總數為 60。又六頂點有 15 聯線；15 直線交於 105 點；然其中有 60 點與六頂點重合（即每點合於一頂點），故 15 聯線除原六頂點外交於 45 點。故上之定理，述之如次，較為完全：——圓錐曲線上六點之十五聯線，交於四十五點，而每三點在一直線上，如是之直線有六十。

【**巴普斯問題**】 Pappus' problem.

〔幾〕**巴普斯問題**如次：——OX, OY 為互成直角之定直線，P 為角 XOY 之二等分線上之一定點。求 X 點使直線 XPY 等於已知之長。

作 PM 垂直於 OX, PN 垂直於 OY, 延長 MP 至 L, 使 PL 等於已知之長。以 N



為中心，NL 為半徑畫圓，交 NP 之延線於 H 及 K。以 HPK 為徑之圓交 OX 於四點（問題有不能者）。命以 HP 為徑之圓交 OX 於 X，聯 XP，交 OY 於 Y。因 PM = PN，及 HX, PY 與 PM, PN 作等角。故互相等。又  $PL^2 = NL^2 - NP^2 = NH^2 - NP^2 = YH^2 - YP^2 = YH^2 -$

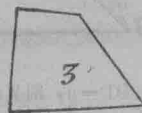
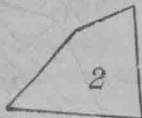
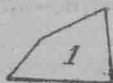
$$XH^2 = XY^2. \text{ 故 } XY = PL.$$

## 互

【互素數】Numbers prime to each other. [算] 二數無 1 以外之公約數者謂之互素數。例如 4 與 5, 7 與 8 是也。各為素數之二數為互素數，而互素數不必各為素數，如 9 與 10 皆非素數，而為互素數。

【互等角多邊形】Mutual equiangular polygons. [幾] 二多邊形之角，依同次序彼此各相等者謂之互等角多邊形。

【互等邊多邊形】Mutual equilateral polygons. [幾] 二多邊形之邊依同次序彼此相等者謂之互等邊多邊形。互等角多邊形可不互等邊，如 1 與 2 是也；互等邊多邊形（除三角形外），亦可不互等角，如 2 與 3 是也。若二多邊形為互等角且互等邊，則此二形必等，因可使之重合故也。



## 幻

【幻方】Magic square. [算] 幻方為將一正方分成若干相等小正方，形如棋盤；於各正方內置以一連由 1 至一邊之孔數之

平方之連續之數

使同行同列及二對角線內之數之和為常數，如圖所列者是也。此幻方縱加，橫加，對角加皆等於

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 14 | 4  | 15 |
| 12 | 7  | 9  | 6  |
| 13 | 2  | 16 | 3  |
| 8  | 11 | 5  | 10 |

34。又此排法不僅限於四數，對於若干數有種種排法。

## 五 畫

## 四

【四】Four. [算] 數名，爲三加一之結果，亞拉伯以 4 記之，羅馬以 IV 記之，希臘以 S' 記之。

【四元】Algebra. [數] 我國昔時稱代數學爲四元。

【四則】Four rules 或 Four fundamental rules. [算] [代] 加法，減法，乘法，除法之總稱也。

【四分圓】Quadrant. [幾] [三] 圓內互相垂直二徑所分之一部之謂也。三角法中稱爲象限。

【四角形】Quadrangle 或 Tetragon. [幾] 同四邊形，見該條。

【四角柱】Quadrangular prism [幾] 底面爲四角形之柱體之謂也。

【四角數】Square number [代] 見多角數條。

【四角錐】Quadrangular pyramid. [幾] 底面爲四角形之錐體之謂也。

【四面角】Tetrahedral angle. [幾] 見多面角條。

【四面體】Tetrahedron. [幾] 多面體之有四面者之謂也。因其爲一以三角形爲底之錐體，故亦稱三角錐。

【四重根】Quadruple root. [代] 見重根條。

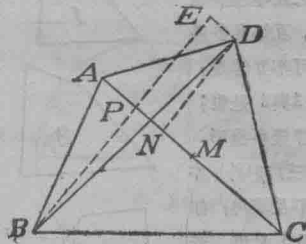
【四乘根】Fourth root. [算] [代] 一數

爲他數之四乘冪，則後數爲前數之四乘根，例如  $81=3^4$ ，故 3 爲 81 之四乘根，以  $\sqrt[4]{81}$  表之，又  $\sqrt[4]{a}$  爲 a 之四乘根。

【四乘冪】Fourth power. [算] [代] 卽某數自乘四次之謂也。例如  $256=4^4$ ，256 爲 4 之四乘冪，又  $a^4$  爲 a 之四乘冪。

【四進法】Quaternary scale. [算] 以四爲記數之底而進位之命數記數法之謂也。此時用數字 1, 2, 3 及 0 卽足。而於四進法 20132 卽  $2 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 3 \times 4 + 2$  之意。

【四邊形】Quadrilateral 或 Tetragram. [幾] 四邊形者，四直線所包圍之平面形之謂也。於任意四邊形 ABCD，命  $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=$



$m, BD=n$ ，則其面積  $S = \frac{1}{4} \sqrt{X \cdot Y}$ ，

但  $X = 2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ ， $Y = 2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2$ 。【證】命 M 爲 AC 之中點， $BP \perp AC, DE \perp BP, DN \perp AC$ ，則  $a^2 - b^2 = -2m \cdot MP, c^2 - d^2 = 2m \cdot MN$ ，

$\therefore a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2m(-NP) =$

$$-2mED,$$

$$\therefore X=2mn+a^2-b^2+c^2-d^2=2m(n-ED),$$

$$Y=2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=2m(n+ED),$$

$$\therefore XY=4n^2(n^2-ED^2)=4n^2BE^2,$$

$$\therefore \sqrt{XY}=2m \cdot BE=4ABCD=4S.$$

若 ABCD 爲內接四邊形時，則由 Ptolemy 定理， $mn=ac+bd$ 。∴  $2mn+a^2$

$$-b^2+c^2-d^2=(a+c)^2-(b-d)^2$$

$$=(a+c+b-d)(a+c-b+d),$$

$$2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=(b+d)^2-(a-c)^2$$

$$=(b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

$$\text{命 } s = \frac{1}{2}(a+b+c+d), \text{ 則 } S = \sqrt{(s-a)(s-b)}$$

$$(s-c)(s-d).$$

又若四邊形可內接及外切於圓，則  $a+c=b+d$ ，∴  $s=a+c=b+d$ ，∴  $S = \sqrt{abcd}$ 。

【四次曲線】Quartic curve. [幾]  $x, y$

之四次方程式之軌跡謂之四次曲線。如

Cardioid, 聶柯米突 (Nicomedes) 之蚌

線 (Conchoid), 狄卡德之 Oval 皆爲四

次曲線。

【四十八面體】Hexoctahedron 或

Hexoctaedron. [幾] 四十八個平面所圍

成之立體之謂也。

【四次方程式】Quartic 或 Biquadratic

equation. [代] 即含未知數之四乘

幂或四次元之方程式，而普通指一元四

次方程式而言，即  $ax^4+bx^3+cx^2+dx$

$+e=0$  是也。四次方程式之解法，須由

三次方程式之解法得之，其解有種種，有

尤拉之解法，有弗拉利 (Ferrari, 1522-

1562, Cardan 之學生) 之解法，有狄卡德之解法，等等。其中以弗拉利者爲最簡便，茲述之如次：

命原方程式爲  $x^4+px^3+qx^2+rx+s$

$=0$ ；於方程式之兩邊各加  $(ax+b)^2$ ，其

$a, b$  之值爲恰能使左邊爲完全平方者，由

是則得  $x^4+px^3+(q+a^2)x^2+(r+2ab)$

$$x+s+b^2=(ax+b)^2.$$

命方程式之左邊爲  $(x^2+\frac{p}{2}x+k)^2$ ；此

較其係數，則得  $\frac{p^2}{4}+2k=q+a^2, pk=$

$r+2ab, k^2=s+b^2$ 。由此三方程式消  $a$

及  $b$ ，則得  $4(k^2-s)(2k+\frac{p^2}{4}-q)-$

$(pk-r)^2=0$ ，即  $8k^3-4qk^2+2(pr-4s)$

$k-p^2s+4qs-r^2=c$  是爲  $k$  之三次方

程式，由此三次方程式常可求得  $k$  之一實

根，而  $a, b$  之值亦可決定之。又因

$(x^2+\frac{p}{2}x+k)^2=(ax+b)^2$ ，故

$$x^2+\frac{p}{2}x+k \pm (ax+b)=0, \text{ 而 } x \text{ 之值}$$

可由  $x^2+(\frac{p}{2}+a)x+(k+b)=0$ ，

$x^2+(\frac{p}{2}-a)x+(k-b)=0$  二次方

程式求得之。[例] 解方程式  $x^4-2x^3$

$-5x^2+10x-3=0$ 。兩邊各加以  $(ax+$

$b)^2$ ，令  $x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+$

$5x)+b^2-3=(x^2-x+k)^2$ ；比較其係

數，得  $a^2=2k+6, ab=-k-5, b^2=k^2$

$+3$ ；∴  $(2k+6)(k^2+3)=(k+5)^2$ ；故

$2k^3+5k^2-4k-7=0$ 。此方程式之一根

爲-1;  $\therefore a^2=4, b^2=4, ab=-4$ . 由假設得  $(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2$ ; 代入  $k, a, b$  之值, 則得  $x^2-x-1=\pm(2x-2)$ ; 即  $x^2-3x+1=0$ , 及  $x^2+x-3=0$  二方程式; 故所求之根爲  $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ,

$$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

**【四捨五入法】** [算] 演算中遇多位小數時, 截取若干位, 而棄其餘位, 其餘位之首不滿5則捨棄之, 若滿5, 則於截取之末位數加一. 此法謂之四捨五入法. 例如有數 2.71546 截取二位小數時, 則作 2.72, 截取三位小數時則作 2.715.

## 平

**【平方】** Square. [算] [代] [幾] 一數之自乘謂之平方, 例如 3 之平方爲  $3 \times 3$  即  $3^2$ , 5 之平方爲  $5 \times 5$  即  $5^2$ , 而普通  $a$  之平方爲  $a^2$ . 平方又稱二乘器. 又正方之平面曰平方, 計面積用之, 如平方尺, 平方寸是也.

**【平年】** Common year. 或 Civil year. [算] 凡陽歷無閏之年謂之平年.

**【平角】** Straight angl. [幾] 角之二邊, 由其角頂, 在兩反對方向引之, 若恰成一直線, 則此角謂之平角. 平角爲  $180^\circ$ , 等於直角之二倍, 而等於周角之半.

**【平面】** Plane 或 Plane surface. [幾] 於面上取任意二點以直線聯之, 處處與面密合者, 則此面謂之平面, 平面之廣無限制. 一直線在他直線上滑之, 恆平行於自身而移動時, 則生平面. 又一直線與之

成直角之軸迴轉時則生平面. (1) 一直線不能定一平面. (2) 一直線及其線外一點可定一平面. (3) 不在同一直線上之三點可定一平面. (4) 相交二直線可定一平面. (5) 平行二直線可定一平面.

**【平三角】** Plane trigonometry. [數] 平面三角法之略.

**【平分面】** Bisector. [幾] 見二等分面條.

**【平分線】** Bisector. [幾] 見二等分線條.

**【平方根】** Square root. [算] [代] 某數之平方根者, 其平方等於彼某數之數之謂也. 例如  $4=2^2$ , 故 4 之平方根爲 2, 9 之平方根爲 3, 而以  $\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3$  記之. 普通  $a$  之平方根以  $\sqrt{a}$  記之. 此  $\sqrt{\quad}$  謂之根號, 此處爲  $\sqrt{\quad}$  之略. 但代數式之平方根有絕對值相等而號相反之二值, 例如  $a+b$  之平方根爲  $\pm\sqrt{a+b}$ .

**【平方數】** Square number. [代] 數之爲他數之平方者謂之平方數. 例如 1, 4, 9, 16, ... 是也. (1) 凡各平方數爲  $3m$  或  $3m+1$ . [證] 各根數爲 3 之倍數或非 3 之倍數, 即各數不外乎  $3m$  或  $3m\pm 1$ , 故其平方數爲  $(3m)^2=9m=3m, (3m\pm 1)^2=3m\pm 2(3m)+1=3m+1$ . (2) 凡平方數爲  $5m$  或  $5m\pm 1$ . [證] 各根數不外乎  $5m, 5m\pm 1, 5m\pm 2$ , 故其平方數爲  $(5m)^2=5m, (5m\pm 1)^2=(5m)^2\pm 2(5m)+1=5m+1, (5m\pm 2)^2=(5m)^2\pm 4(5m)+4=5m-1$ . (3) 平方數之末位數不能有 2, 3, 7, 8 四數. [證] 各數爲

$10.n+a$  (但  $a$  爲  $1, 2, 3, \dots, 9, 0$  以內之數)。故  $(10.n+a)^2 = 10.n+a^2$ , 而  $a^2$  爲  $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 0$  以內之數。即其末位之數字祇有  $1, 4, 5, 6, 9$  或  $0$  而無  $2, 3, 7, 8$  四數字。(4) 平方數之末位數字爲奇數者, 則其十位之數字必爲偶數。

[證] 奇數  $1, 3, 5, 7, 9$  之平方爲  $01, 09, 25, 49, 81$ , 其十位數字爲  $0$  或偶數。而  $a$  爲在  $1, 3, 5, 7, 9$  內之一數字, 則  $(10.n+a)^2 = 100.n+20.n+a^2$ , 其  $20.n$  爲偶數, 以  $a^2$  之十位數字 (即偶數) 加之, 仍爲偶數。(5) 連續四數之積, 決不能爲平方數。

[證] 設連續四數爲  $a, a+1, a+2, a+3$ , 則其積爲  $a(a+1)(a+2)(a+3) = (a^2+3a)(a^2+3a+2) = [(a^2+3a+1)-1] [(a^2+3a+1)+1] = (a^2+3a+1)^2 - 1$ , 即連續之數之積, 其形如  $N^2-1$ , 而不能爲平方數。(6) 各平方數可以兩平方數之差表之。

[證] 若平方數爲偶數, 則  $(2n)^2 = (n^2+1)^2 - (n^2-1)^2$ 。若平方數爲奇數, 則  $(2n+1)^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ; 而  $a+b = (2n+1)^2, a-b=1$ , 則  $a=2n^2+2n+1, b=2n^2+2n$ , 由是  $(2n+1)^2 = (2n^2+2n+1)^2 - (2n^2+2n)^2$ 。

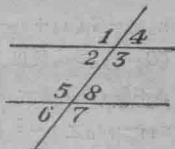
**【平行線】** Parallels 或 Parallel lines.

[幾] 在平面內二直線雙方任何延長之終不相遇者, 謂之平行線。故平行線有同一之方向。而二直線平行, 置記號  $\parallel$  於其間以示之。例如  $AB \parallel CD$  即示直線  $AB$  平行於直線  $CD$  也。又 [別定義] 二直線同方向時謂之平行。由此定義知 (1) 二平行線

在同一平面上, (2) 雙方任何延長之終不相交。又 [別定義, 稍爲高深, 惟不適用於初等幾何] 二直線相交於有限距離時, 謂之相交, 相交於無限距離時謂之平行。一直線交於二平行線時, (1) 其同傍內角  $2$  與  $5$  或  $3$  與  $8$  互爲

補角, (2) 內錯角  $2$  與  $8$  或  $3$  與  $5$  相等, (3) 同傍外角  $1$  與  $6$  或  $4$  與  $7$  互爲

補角, (4) 外錯角  $1$  與  $7$  或  $4$  與  $6$  相等, (5) 同位角  $1$  與  $5, 2$  與  $6, 3$  與  $7, 4$  與  $8$  相等。而此等之逆亦爲真。



**【平均價】** Average value. [算] 若干同類物之價之和以其分量之和除之謂之其混合後之平均價。例如每斤  $2$  角之酒  $2$  斤, 每斤  $2$  角  $4$  分之酒  $5$  斤, 每斤  $3$  角之酒  $3$  斤, 其混合後之平均價爲  $\frac{20 \times 2 + 24 \times 5 + 30 \times 3}{2 + 5 + 3} = 2$  角  $5$  分。

**【平均數】** Mean. [代] 平均數有相加平均相乘平均二種。  $n$  個數之和以  $n$  除之者, 謂之此等數之相加平均,  $n$  個數之連乘積之  $n$  乘根謂之相乘平均。即  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  個數之相加平均爲  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$ , 而其相乘平均爲  $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ; 茲各以  $A, G$  表之。相加平均常大於相乘平均, 即  $A > G$ 。 [證 1] 於  $n$  數  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  中, 以二等數  $\frac{a_1 + a_2}{2}$  代二不等數  $a_1, a_2$ , 則  $A$  不變,

而  $G$  因  $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$  而增大。逐次

如是，將諸數中之二不等數，皆以等數換之，則A不變，而G漸增大。至諸數皆相等時，其諸數之G為極大值，且A等於G。故知原來之 $A > G$ 。〔證2〕命 $a_1$ 為n數中之最大者，而 $a_2$ 為最小者。謂 $a_1 + a_2 = G + K$ 但因G值在 $a_1, a_2$ 之間。 $\therefore GK - a_1 a_2 = G(a_1 + a_2 - G) - a_1 a_2 = (a_1 - G_1)(G - a_2) > 0$ 。故以G, K換 $a_1, a_2$ ，則A不變，而G增大，命為 $G_1$ 次於K,  $a_3, a_4, \dots, a_n$ 之 $n-1$ 數中之最大及最小之數，以 $G_1, L$ 換之，則A仍不變，而G更增大，命為 $G_2$ 。逐次如是，至最後，原來之n數變為 $G, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ ，且 $G < G_1 < G_2 < \dots < G_{n-1}$ ，而A不變。即 $nA = G + G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1} > nG$ 。

$\therefore A > G$ 。〔證3〕命 $a_1$ 為n數中之最大者，而 $a_2$ 為最小者。設 $a_1 a_2 = GK$ ，則 $a_1 : G = K : a_2$ 。 $\therefore a_1 - G : G = K - a_2 : a_2$ ，但 $G > a_2$ 。 $\therefore a_1 - G > K - a_2$ ，即 $a_1 + a_2 > G + K$ 。故以G, K代n數中之 $a_1, a_2$ ，則G不變，而A減小。同樣於 $n-1$ 數 $K, a_3, a_4, \dots, a_n$ 中以G, L代其最大及最小之數，則G仍不變，而A更減小。逐次如是，則G不變而A逐漸減小，最後G仍不變，而A益減小而為 $\frac{G+G+G+\dots}{n}$ 即G矣。由是A經若干次減小方等於G，故原來 $A > G$ 。

n正量之m乘幂之相加平均，大於其相加平均之m乘幂，惟須除m在0與1之間。即命 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為n正量，則 $\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{n} >$

$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}\right)^m$ ，惟m為正真分數則反是。欲證此命題，須用次之補題，即「若a與b為不等之正數，則 $\frac{a^m + b^m}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m$ ，惟m須不為正真分數」。設m為不在0與1之間。細考式 $a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$ ，取 $a_1$ 與 $a_2$ 不相等；若 $a_1 a_2$ 以二相等之數 $\frac{a_1 + a_2}{2}$ 換之，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 之值不變，然 $a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$ 則減小，因 $a_1^m + a_2^m > 2\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^m$ 故也。

故當諸量 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中有任二量不等時，則可減小 $a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$ 而 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 之值不變；故當諸量 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 皆相等時， $a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$ 之值為最小。當此情形，各量皆等於

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$ ，而 $a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$ 之值變為

$n\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}\right)^m$ 。故當 $a_1,$

$a_2, a_3, \dots, a_n$ 不相等時，則

$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{n} >$

$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}\right)^m$ 。若m在0與1

之間，與前同樣，可證上式內之不等號須反轉之。

【平均點】Mean point. [幾] 同平均中心，見該條。

【平面形】Plane figure. [幾] 直線或



曲線所包圍之一部分平面之謂也。例如三角形，四邊形，爲直線所包圍之平面形，圓，橢圓爲曲線所包圍之平面形。

【平面角】Plane angle. [幾] 在一平面上之角之謂也。換言之，在一平面上之一直線以其一端爲軸而迴轉時，畫成一平面角。

【平面圖】Plane figure 或 Plane. [幾] 在一平面上之圖形之謂也。

【平截體】Frustum. [幾] 卽台，見該條。

【平方根比】Subduplicate ratio. [代]  $a:b$  之平方根比爲  $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 。

【平方關係】[三] 見三角函數條。

【平太陽日】Mean solar day. [算] 太陽日由正午至次正午之時間也。然此時間恆不相同，由是取一年中之太陽日而平均之，而名之曰平太陽日，卽尋常之日也。

【平行平面】Parallel planes. [幾] 二平面雙方任何延長之終不相遇者，謂之平行平面，此初等幾何學中之定義也。而高等之幾何學中則謂相交於無窮遠之平面爲平行平面。

【平行直線】Parallel straight lines. [幾] 卽平行線，見該條。

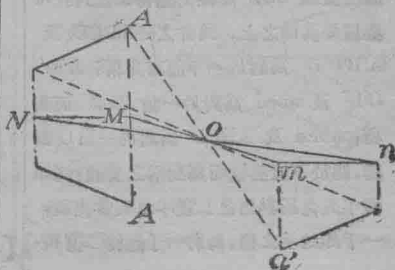
【平均中心】Mean center. [幾] 有  $A, B, C, D, \dots$  一組之點及  $a, b, c, d, \dots$  一組整數，分  $AB$  爲  $a+b$  等分，命  $AM_1$  含其  $b$ ， $BM_1$  含其  $a$ ，又分  $CM_1$  爲  $a+b+c$  等分，命  $M_1M_2$  含其  $c$ ， $CM_2$  含其  $a+b$ ，逐次如斯，求得  $M_3, M_4, \dots$

諸點，若所求最後之點爲  $M$  時，則  $M$  謂之  $A, B, C, D, \dots$  諸點對於  $a, b, c, d, \dots$  乘數之平均中心。

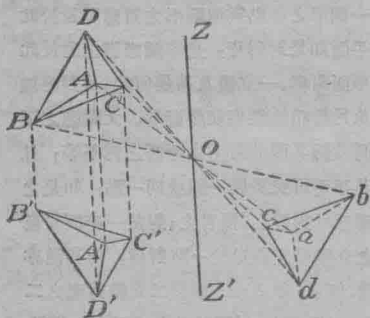
【平面方向】Plane direction. [幾] 平面方向者平面之向之謂也。換言之與此平面之垂線成直角之直線方向之謂也。

【平面曲線】Plane curve. [幾] 曲線之各部在同一平面上者之謂，例如圓，雙曲線是也。

【平面對稱】Plane symmetry. [幾] 於一平面之垂線中而在其反對之側等距離處所取之二點謂之對於此平面對稱，而一圖形之各點與他圖形之對應點對於此平面如是對稱時，是等圖形謂之對於此平面對稱。一立體及其幾何像，其對應線及角皆相等然無能疊置者。又對應之平面及線其傾於對稱之平面之角不等，且其平面可交於同一線或同一點，如是之圖形可對置之。換言之，對於一平面對稱之立體可置爲對於一點對稱，而其逆亦真。何則，命  $A, A'$  爲於二立體對應之二點， $M$  點爲  $A, A'$  於對稱之平面之公共射影。故  $M$  爲  $AA'$  之中點。以過對稱之平面內任意一點  $O$  而與之垂直之直線爲



軸將  $A'$  爲其一點之立體迴轉二直角時，則  $M$  可至  $MO$  之延線上  $Om=OM$  處之  $m$ ，而  $A'$  至於過  $m$  垂直於對稱之平面之線上之  $a'$ 。故  $ma'$ ， $MA'$  相等且同向，而  $Aa'$  通過  $O$ ，且二等分於  $O$ 。由是聯第一立體之各點及第二立體在新位置之對應點之直線皆通過  $O$ ，且二等分於  $O$ ，即二立體對於  $O$  爲中心對稱。下圖表  $A'B'C'D'$  爲  $ABCD$  對於過  $O$  且垂直於  $AA'$  之平面而對稱之四面體。而  $abcd$  爲  $ABCD$  對於  $O$  點對稱之四面體。 $A'B'C'D'$  及  $abcd$  皆不能疊置於  $ABCD$



之上，然  $A'B'C'D'$  及  $abcd$  之一，以垂直於  $ABCD$  及  $A'B'C'D'$  之對稱平面之直線  $ZOZ'$  爲軸而迴轉二直角，可疊置於其他之上。換言之， $ABCD$  及  $A'B'C'D'$  爲對於一平面而對稱； $A'B'C'D'$  及  $abcd$  爲對於一軸  $ZOZ'$  而對稱； $abcd$  及  $ABCD$  爲對於一點  $O$  對稱。關於不能疊置而爲對稱之立體，例如雙手人之所熟知也。雙手掌與掌相對，一手如他手之像。而將一手迴轉二直角，

聯對應指頭之直線，交於一點且二等分於此點，故爲中心對稱。然雙手不疊置。

【平方不盡根】Quadratic surd. [代] 即二次不盡根，見該條。

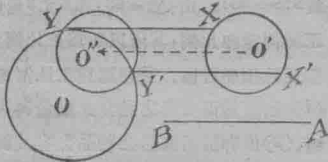
【平行六面體】Parallelepiped 或 Parallelepiped. [幾] 六平行四邊形所包圍成之立體之謂也。若各面爲矩形，則平行六面體爲直角體，若各面爲正方形，則平行六面體爲立方體。平行六面體之相對面相等，相對之立體角亦相等。若相對面之中心作直線聯之，則諸線交於同一點。合二相對面之平面分平行六面體爲二個等積之三角柱。任意平行六面體之體積等於其底面積乘高。

【平行四邊形】Parallelogram. [幾] 四邊形之每二對邊相等者之謂也，故平行四邊形之對邊相等，相對角亦相等。若平行四邊形之一角爲直角，他三角亦必爲直角，而平行四邊形爲矩形。又若平行四邊形之相鄰二邊相等，則四邊皆相等，而平行四邊形爲菱形。若平行四邊形一角爲直角，且其相鄰二邊相等，則平行四邊形爲正方形。又平行四邊形之兩對角線互二等分，而其逆亦爲真。平行四邊形之各對角線分本形爲二等分。平行四邊形之面積等於其底及高所包之矩形。二平行四邊形之底相等，則與其高成比例，高相等則與其底成比例，底及高皆相等，則二平行四邊形等積。平行四邊形兩對角線上之正方形之和，等於其四邊上正方形之和。

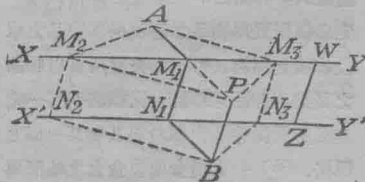
【平行形角柱】Parallelogramic pri-

sm. [幾] 角柱之底爲平行四邊形者之謂，故與平行六面體同。

**【平行移動法】** Method of parallel translation. [幾] 此法於作圖題中甚爲重要，其法可由次二例明瞭之。(1)於二與圓周  $O, O'$  間置一直線，使等於且平行於與直線  $AB$ 。若  $O'$  圓沿平行於  $AB$  之直線動  $AB$  之距離，而至  $O''$ ，則  $XY$



或  $X'Y'$  爲所求之直線。故逆此法，先畫圓  $O''$ ，而由  $Y$  及  $Y'$  可作等於且平行於  $AB$  之直線  $YX$  及  $Y'X'$ 。(2)與二平行線  $XY, X'Y'$  且與夾於其間之直線  $WZ$ ，及二點  $A, B$ ，求聯結  $A, B$  間之最短折線，且須令其平行線間之部分  $MN$  平行於  $WZ$ 。  $MN$  之任意位置之一，沿  $NB$  且平行於其位置，使  $N$  與  $B$  合，而命其時  $M$  點之位置爲  $P$ ，如是則  $AM^1P < AM_2P$ ，或  $AM_3P$ 。故  $AM_1N_1B$  爲所



求之最短折線。由是將此法逆之，先引  $BP$  與  $WZ$  相等且平行，聯結  $A$  及  $P$  可決定  $M_1$  點。

**【平面三角形】** Plane triangle. [幾]

三邊爲直線之三角形之謂，係對於球面三角形而言，然普通皆簡稱爲三角形。詳三角形條。

**【平面三角法】** Plane trigonometry. [數] 平面三角法者，論三角函數之性質，關係等等，而應用於平面三角形之解法之學科也。詳見三角法條。

**【平面直線形】** Plane rectilinear figure. [幾] 三以上直線所包圍之平面形之謂也。

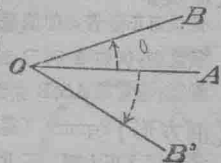
**【平面幾何學】** Plane geometry 或 Planimetry. [數] 論在一平面上之圖形之形狀，大小，位置之學科謂之平面幾何學。

**【平行四邊形之餘形】** Complements of a parallelogram. [幾] 見餘形條。

正

**【正切】** Tangent. [三] 見三角函數條。  
**【正矢】** Versed sine. [三] 某角之正矢者，由  $1$  減去該角之餘弦之謂，即  $1 - \cos A = \text{vers} A$ 。又見三角函數條。

**【正角】** Positive angle. [三] 角之動徑與時計針之方向相反旋轉所生者謂之正角，動徑與時計針之方向相同旋轉之所生者爲負角。如圖  $\angle AOB$  爲正角，而  $\angle AOB'$  爲負角。



**【正弦】** Sine. [三] 見三角函數條。  
**【正根】** Positive root. [代] 方程式之根

爲正數者之謂，例如方程式  $x^2+3x-10=0$  之根爲 2 與 -5，而 2 爲正根。由狄卡德符號之法則，方程式  $f(x)=0$  之正根之數不能多於  $f(x)$  內符號變化之數。

【正高】Vertical height. [幾] 即高，係對斜高而言。

【正割】Secant. [三] 見三角函數條。

【正量】Positive quantity. [代] 量之前置以 + 符號者之謂也。量之前無 + 或 - 符號者爲畧去 + 者而爲正量。此量與數同義。故正量與正數同，正數實爲對負數而稱之者。

【正項】Positive term. [代] 代數式某項前置有 + 符號者則該項謂之正項。但其實非必爲正量，如於  $ax^2+bx+c$ ，其第二項爲正項，然若  $b$  爲正量而  $x$  爲負量則此項實爲負量也。又式中之第一項前不置以 + 或 - 號者爲 + 號之略，而爲正項。

【正號】Positive sign. [代] 即用以表示正量之 + 號也。

【正數】Positive number [代] 即數之前置以符號 + 者，見正量條。

【正變】To vary directly. [代] 一量因他量而正變者，即前量與後量之比爲常數之謂，例如  $A$  因  $B$  而正變，即  $A:B=$  常數，通常以  $A \propto B$  示之。

【正方形】Square. [幾] 等邊等角之四邊形謂之正方形。正方形之各角爲一直角即等於  $90^\circ$ ，而其對角線相等，且互相垂直二等分。正方形之一邊及對角線之比爲  $1:\sqrt{2}$ 。一邊爲線單位之正方形爲面

積單位。例如一邊爲一尺之正方形曰一方尺，一邊爲一里之正方形曰一方里。

【正比例】Direct proportion. [算][代] 一量因他量而變時，前量之任意二值與後量之對應二值謂之成正比例。例如前量爲茶之斤數，而後量爲其價錢，即茶 5 斤之價爲 3 元 5 角，9 斤之價幾何之謂，此時斤數之比 5:9，等於價之比  $35:x$ 。故  $5:9=35:x$ ，由是  $x=63$ ，即 6 元 3 角也。正比例實即比例，其所以稱爲正比例者，對反比例而言也。普通認爲正比例者爲 (1) 依重量而交易之物品之重量與其價格。(2) 依容積而交易之物品之容積與其價格。(3) 依長而交易之物品之長與其價格。(4) 依個數而交易之物品與其價格。(5) 一定時間內所費之糧食與食之之人數。(6) 一定時間內所成之工作與作工之人數。(7) 一定時間內所進之距離與速度。(8) 工作時間與工資。(9) 地價與地面之廣。(10) 一定期間之貸金之利息及本金。其他可由此類推。反此，普通認爲反比例者如次：(1) 一定金額所買得物品之重量與其物品之單位重量之價格。(2) 一定金額所買得物品之容積與其物品之單位容積之價格。(3) 一定金額所買得物品之長與其物品之單位長之價格。(4) 一定金額所買得物品之個數與其物品一個之價格。(5) 一定糧食所要食之之時間與人數。(6) 一定工作所需工作之時間與人數。(7) 行一定距離所需之時間與人數。(8) 得一定利息所需之時間與其單位時間之利息。(9) 一定面積之矩形地面之

長與廣，其他可由此類推。

【正角柱】Regular prism. [幾] 見角柱條。

【正角臺】Regular frustum. [幾] 平行於正角錐之底面之平面所截得之角台之謂也。

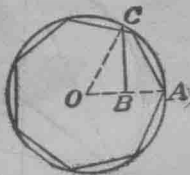
【正角錐】Regular pyramid. [幾] 見角錐條。

【正相似】Directly similar. [幾] 爲與逆相似區別，有稱通常之相似爲正相似者。

【正射影】Orthogonal projection. [幾] 見射影條。

【正七邊形】Regular heptagon. [幾] 等邊等角之七邊形之謂也。圓內接正七邊形，普通幾何中無確切之作法，今示其近似法於次：作半徑  $OA$ ，而平分之於  $B$ ，於  $B$  作垂線

$BC$  交圓周於  $C$ 。則  $BC$  爲正七邊形之一邊。[證] 命半徑爲 1，則  $BC$



$$= \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

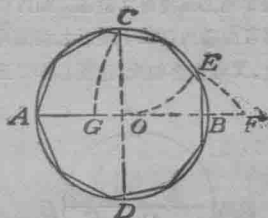
$\approx .866$ 。而正七邊形之一邊爲  $2\sin\frac{\pi}{7}$   
 $\approx 2\sin 25^\circ 43' \approx 2 \times .4331 \approx .8662$ 。故  $BC$   
 近似於正七邊形之一邊。

【正八面體】Regular octahedron. [幾] 見正多面體條。

【正八邊形】Regular octagon. [幾] 等邊等角之八邊形之謂也。作圓內切正

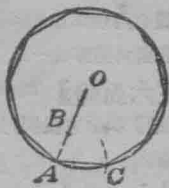
八邊形之法，作互相垂直之二直徑，分圓周爲四等分，復將四相等之弧平分，聯相鄰之二分點，即得正八邊形。

【正九邊形】Regular nonagon. [幾] 等邊等角之九邊形謂之正九邊形。圓內接正九邊形，僅用界尺與圓規，其作法爲不能。今示其近似法於次：於單位圓內作



互相垂直之二直徑  $AOB, COD$ 。以  $O$  爲心， $CO$  爲半徑畫弧，交圓周於  $E$ 。以  $D$  爲心， $DE$  爲半徑作弧，交  $AB$  於  $F$ 。又以  $F$  爲心， $CF$  爲半徑作弧，交  $AB$  於  $G$ 。則  $AG$  爲所求正九邊形之一邊。[證]  $FG = CF = DF = DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{3}$ 。  
 $FO = \sqrt{DF^2 - OD^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1} = \sqrt{2}$ 。  
 $\therefore GO = GF - OF = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1.732 - 1.4142 = .3178$ 。  
 $\therefore AG = AO - GO = 1 - .3178 = .6822$ 。而正九邊形之一邊等於  $2\sin 20^\circ = 2 \times .3420 = .6840$ 。故  $AG$  近似於正九邊形之一邊。

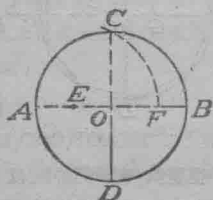
【正十邊形】Regular decagon. [幾] 等邊等角之十邊形之謂也。作圓內切正十邊形之法，作半徑  $OA$ ，分  $OA$  爲外中比，使  $OA : OB = OB$



:AB. 以 A 爲心, OB 爲半徑作弧, 交圓周於 C. 聯 AC, 則 AC 爲正十邊形之一邊。

【正三角形】Regular triangle. [幾] 即等邊三角形, 見等邊三角形條。

【正五邊形】Regular pentagon. [幾] 等邊等角之五邊形之謂也。圓內切正五邊形可由聯內切正十邊形之相間角頂而得之。又可作之如次。過圓心作二互相垂



直之直徑 AOB, COD, 平分 OA 於 E. 以 E 爲心, EC 爲半徑作弧, 交 OB 於 F, 則 CF 爲所求之正五邊形之一邊。又以一已知線爲一邊之正五角形之法如次。

命 BC 爲已知之邊, 作等腰三角形 ABC, 使其底角二倍於頂角。作  $\triangle ABC$  之外接圓, 則 BC 爲此



圓之內切正五邊形之一邊。正五邊形之五對角線亦成一正五邊形。

【正六面體】Regular hexahedron. [幾] 與立方體同, 見該條又見正多面體條。

【正六邊形】Regular hexagon. [幾]

等邊等角之六邊形之謂也。作圓內切正六邊形之法, 於圓周上順次取等於半徑之弦即可, 因正六邊形之一邊等於其外接圓之半徑故也。

【正切定則】Law of tangents. [三]

由正弦定則  $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$ , 故  $\frac{b-c}{b+c} =$

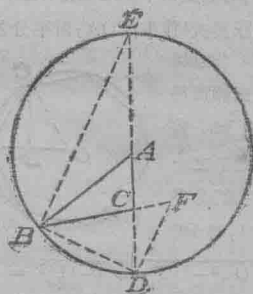
$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

故  $\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$ ; 是謂之正切定

則。而  $\tan\frac{1}{2}(B+C) = \tan\frac{1}{2}(\pi - A)$

$$= \cot\frac{A}{2}, \text{ 故得 } \tan\frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c}$$

$\cot\frac{A}{2}$ . 上式又可用幾何學證明之。以 A



爲心, AB 爲半徑作圓割 AC 於 D 及 E; 作 DF  $\parallel$  BE, 則  $CE = b+c, DC = c-b,$   
 $\angle DEB = \frac{A}{2}, \angle DBF = C + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

$$(C-B). \text{ 故 } \frac{b+c}{c-b} = \frac{CE}{CD} = \frac{EB}{DF} =$$

$$\frac{BD \cot\frac{A}{2}}{BD \tan\frac{1}{2}(C-B)} = \frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan(C-B)}; \text{ 故得}$$

$$\tan \frac{I}{2} (B-C) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

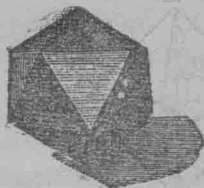
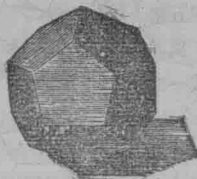
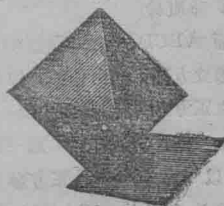
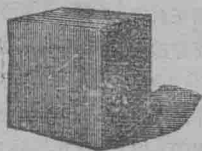
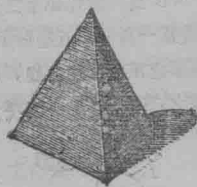
【正四面體】 Regular tetrahedron.

〔幾〕見正多面體條。

【正多面體】 Regular polyhedron.

〔幾〕正多面體者，多面體之諸面爲相等正多邊形，而其諸多面角亦相等者也。正多面體祇有五種。〔證〕凸多面角至少有三面，而其諸面角之和必須小於 $360^\circ$ 。正三角形之各角爲 $60^\circ$ ，而凸多面角可由三，四，或五正三角形而成。六正三角形諸角之和爲 $360^\circ$ ，七以上正三角形之角之和大於 $360^\circ$ ，故以正三角形爲面之正多面體祇有三種。次正方形之各角爲 $90^\circ$ ，

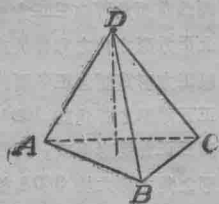
而凸多面角可由三正方形而成，而四以上正方形之角之和等於或大於 $360^\circ$ ，故以正方形爲面之正多面體祇有一種。終正五邊形之各角爲 $108^\circ$ ，而凸多面角可由三正五邊形而成，而四以上之正五邊形之角之和大於 $360^\circ$ 。故以正五邊形爲面之正多面體祇有一種。因正六邊形之三角之和爲 $360^\circ$ ，正七邊形之三角之和大於 $360^\circ$ ，故無以正六邊形以上爲面之正多面體。由是正多面體祇有五種。而此五種正多面體謂之正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體，正二十面體，其形如圖。



(1) 求以 AB 爲一稜作正四面體。以 AB 爲一邊作正三角形 ABC，於其中心 O

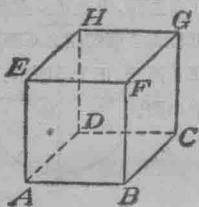
作 ABC 之垂線。於此垂線上取一點 D，使 DA=AB，聯 D 與  $\triangle ABC$  之各頂；

則  $D-A$   
 $BC$  爲正  
 四面體。  
 因由作圖  
 ，四面爲  
 相等之正  
 三角形，

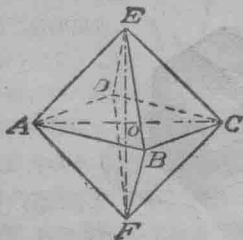


而三面角  $A, B, C, D$ ，其諸面角相等，  
 故相等。(2)求以  $AB$  爲一稜作正六面  
 體。以  $AB$  爲

一邊作正方  
 形  $ABCD$ ，  
 於其各邊上  
 作正方形  $A$   
 $F, BG, CH,$   
 $DE$  垂直於



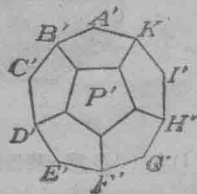
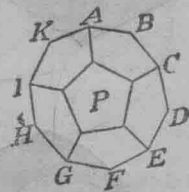
平面  $ABCD$ 。則多面體  $AG$  爲正六面  
 體即立方體。因由作圖，知六面皆爲相  
 等之正方形，而諸三面角因其面角相等，  
 故全相等。(3)求以  $AB$  爲一稜作正八面  
 體，以  $AB$  爲一邊作正方形  $ABCD$ ，過  
 其中心  $O$  作其平面之垂線，於此垂線上



取  $F$  點及  $E$  點，使  $AE, AF$  皆等於  $AB$ 。  
 聯  $E$  及  $F$  於正方形  $ABCD$  之各頂點，

則多面體  $E-ABCFD$  爲正八面體。因  
 由  $E$  及  $F$  至  $A, B, C, D$  所引諸直線  
 皆等於  $AB$ ，故八三角形皆爲相等之正  
 三角形。 $O$  爲  $\square ABCD$  之心，故此正  
 方形之對角線交於  $O$ ，直線  $EF$  及  $AC$   
 在同一平面上。故  $E, C, F, A$  在同一平  
 面上。於  $\triangle AEC, \triangle ABC, \triangle AFC, AC$   
 邊爲公共，其地諸邊皆相等，故此等三  
 角形相等，而  $\angle ABC$  爲直角，故  $\angle AEC,$   
 $\angle AFC$  亦爲直角。故  $AECF$  爲等於  
 $ABCD$  之正方形。由是角錐  $B-AECF$   
 及角錐  $E-ABCF$ ，其底  $AECF$  及  $AB$   
 $CD$  相等，他四面亦相等，故全相等。故  
 四面角  $B$  等於四面角  $E$ 。同樣可證其  
 他諸四面角亦相等。故此多面體爲正八  
 面體。(4)求以  $AB$  爲一稜作正十二面  
 體，以等於所與稜爲一邊作正五邊形  $P,$   
 其各邊合以五相等之正五邊形之邊，於  
 各角頂成五相等之三面角而成一皿狀之  
 面  $ABCD$ ……

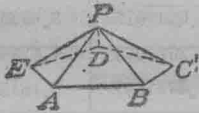
次作等於  $P$  之  
 正五邊形  $P',$   
 於其各邊合以  
 五相等正五邊  
 形之邊，與前  
 同樣又成一皿  
 狀之面  $A', B',$   
 $C', D' \dots \dots$  二  
 皿狀之面皆由  
 六相等正五邊  
 形而成，故於  
 $P$  及  $P'$  之各角





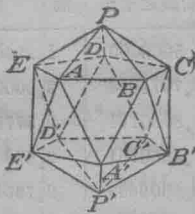
頂之三面角相等。故二面角亦相等，二血狀之面將其邊與邊相合可成一凸多面體。因將二血狀面，四面相對置之，頂點  $A'$  及邊  $A'B'$  與頂點  $A$  及邊  $AB$  相合。一血狀面之二相鄰面角與他血狀面之一面角相合，可成一三面角。因任意二鄰接之面，曾為於  $P$  及  $P'$  之角頂所成之三面角之一二面角。故三面角皆相等，而多面體為正十二面體。(5)求以  $AB$  為一稜作正二十面體。以  $AB$  為一邊作正五邊形  $ABCDE$ ，於其中心作其平面之垂線。於此

垂線上取一點  $P$ ，使  $PA = AB$ 。聯  $P$  於五邊形之



各頂點。成一以  $P$  為頂點之正五角錐。於稜  $PA, PB, \dots$  之二面角皆相等。次於  $A, B, C, D, E$ ，皆加以等於  $PAB$  之三正三角形完成諸五面角， $A, B, C, D, E$

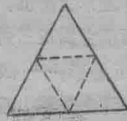
之周圍之二面角皆相等。作等於  $P-ABC$   $DE$  之正五角錐  $P'-A'B'C'D'E'$ ，與前凸面相合，成一



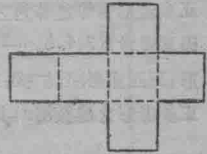
凸多面體，而此為正二十面體，因一凸面之二鄰接面角與他凸面之三鄰接面角相合，可成一正五面角故也。

正多面體之模型可作之如次。取厚紙如圖之實線裁下，其虛線則輕割之，而沿此

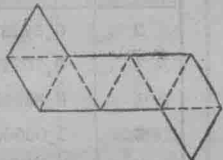
等虛線摺而聯之即得五種正多面體。



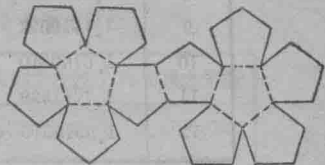
正四面體



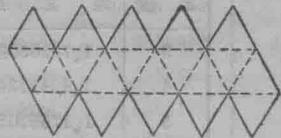
正六面體



正八面體



正十二面體



正二十面體

五種正多面體名為柏拉頓立體 (Platon bodies) 者，實為畢達哥拉斯一派人所專心研究，後以柏拉頓學校教授之，故名。五種正多面體中之三簡單者，即正四面體，正六面體，正八面體，結晶學中屢用之。

【正多邊形】Regular polygon. [幾]

正多邊形者等邊等角之多邊形之謂也。因其邊數爲3,4,5,……而稱之爲正三角形,正四邊形(正方形),正五邊形,……設正多邊形之邊數爲 $n$ ,其一邊之長爲 $l$ ,而

積爲 $A$ ,外接圓之半徑爲 $R$ ,內接圓之半

徑爲 $r$ ,則  $l = 2R \sin \frac{\pi}{n} = 2r \tan \frac{\pi}{n}$ ,

$A = \frac{1}{4} n l^2 \cot \frac{\pi}{n}$ . 用此等公式自正三角形始至正十二邊形之計算如次。

第一表 正多邊形一邊之長等於 1

| 邊 數 | 外接圓之半徑    | 內切圓之半徑    | 面 積        |
|-----|-----------|-----------|------------|
| 3   | 0.5773503 | 0.2886751 | 0.4330127  |
| 4   | 0.7071068 | 0.5000000 | 1.0000000  |
| 5   | 0.8506508 | 0.6881910 | 1.7204774  |
| 6   | 1.0000000 | 0.8660254 | 2.5980762  |
| 7   | 1.1523825 | 1.0382617 | 3.6339124  |
| 8   | 1.3065630 | 1.2071068 | 4.8284271  |
| 9   | 1.4619022 | 1.3737387 | 6.1818242  |
| 10  | 1.6180340 | 1.5388418 | 7.6942088  |
| 11  | 1.7747329 | 1.7028437 | 9.3656404  |
| 12  | 1.9318516 | 1.8660254 | 11.1961524 |

第二表 外接圓之半徑等於 1

| 邊 數 | 邊 之 長     | 內切圓之半徑    | 面 積       |
|-----|-----------|-----------|-----------|
| 3   | 1.7320508 | 0.5000000 | 1.2990381 |
| 4   | 1.4142136 | 0.7071068 | 2.0000000 |
| 5   | 1.1755705 | 0.8090170 | 2.3776412 |
| 6   | 1.0000000 | 0.8660254 | 2.5980762 |
| 7   | 0.8677674 | 0.9009689 | 2.7364102 |
| 8   | 0.7653668 | 0.9238795 | 2.8284271 |
| 9   | 0.6840403 | 0.9396926 | 2.8925137 |
| 10  | 0.6180340 | 0.9510565 | 2.9389263 |
| 11  | 0.5634651 | 0.9594931 | 2.9735250 |
| 12  | 0.5176381 | 0.9659259 | 3.0000000 |

第三表 內切圓之半徑等於 1

| 邊數 | 邊之長       | 外接圓之半徑    | 面積        |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 3  | 3.4641016 | 2.0000000 | 5.1961524 |
| 4  | 2.0000000 | 1.4142136 | 4.0000000 |
| 5  | 1.4530851 | 1.2360680 | 3.6327128 |
| 6  | 1.1547005 | 1.1547005 | 3.4641016 |
| 7  | 0.9631491 | 1.1099160 | 3.3710222 |
| 8  | 0.8284271 | 1.0823919 | 3.3137084 |
| 9  | 0.7279405 | 1.0641776 | 3.2757315 |
| 10 | 0.6498394 | 1.0514622 | 3.2491970 |
| 11 | 0.5872521 | 1.0422172 | 3.2298913 |
| 12 | 0.5358934 | 1.0352760 | 3.21539 4 |

第四表 面積等於 1 平方單位

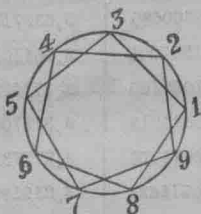
| 邊數 | 邊之長       | 外接圓之半徑    | 內切圓之半徑    |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 3  | 1.5196716 | 0.8773827 | 0.4386912 |
| 4  | 1.0000000 | 0.7071068 | 0.5000000 |
| 5  | 0.7623870 | 0.6485251 | 0.5246678 |
| 6  | 0.6204033 | 0.6204033 | 0.5372849 |
| 7  | 0.5245813 | 0.6045183 | 0.5446520 |
| 8  | 0.4550899 | 0.5946034 | 0.5493420 |
| 9  | 0.4021996 | 0.5879764 | 0.5525172 |
| 11 | 0.3605106 | 0.5833184 | 0.5547681 |
| 11 | 0.3267617 | 0.5799143 | 0.5564242 |
| 12 | 0.2888585 | 0.5773503 | 0.5576775 |

若與邊之長內切圓或外接圓之與半徑或與面積不等於1時，依“相似多邊形相當線成比例，及面積與相當線之平方成比例”之原理，可用此等之表。例如作面積

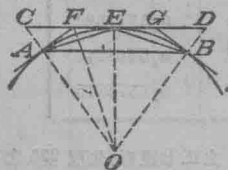
為 225 之正七邊形。先取 225 之平方根得 15，於是以此乘第四表內對 7 之各數即可，即  $l = 0.5245813 \times 15 = 7.8687$ ，是為一邊之長；又  $R = 0.6045183 \times 15 =$

9.0678, 是為外接圓之半徑; 又  $r = 0.5446520 \times 15 = 8.1698$ , 是為內切圓之半徑. 其他諸表之用法準此. 以上所述為就正多邊形之邊不交截者而言. 即邊之交截之正多邊形(即正多邊形之普通定義)除外. 例如分

圓周為九等分, 命其分點依次為 1, 2, 3, ..., 8, 9; 聯結 1 及 3, 3 及 5, 5 及 7, 7 及 9, 9 及 2, ...



得等邊等角之九邊形, 即屬於普通定義之正九邊形. 與內切於圓之  $n$  邊正多邊形之周圍及外接於同圓之  $n$  邊正多邊形之周圍, 計算內切及外接於同圓之  $2n$  邊正多邊形之周圍. 命  $n$  邊之內切正多邊形之邊為  $AB$ , 弧  $AB$  之中點  $E$  之切線  $CD$  為與前多邊形相似之外接正多邊形之一邊. 聯  $AE$ , 於  $A$  及  $B$  作切線  $AF$  及  $BG$ , 則  $AE$  為  $2n$  邊之內切正多邊形之一邊.  $FG$  為  $2n$  邊之外接正多邊形之一邊. 命  $n$  邊之內切正多邊形之周圍為  $p$ ,  $n$  邊之外接正多邊形之周圍為  $P$ ,  $2n$



邊之內切正多邊形之周圍為  $p'$  及  $2n$  邊之外接正多邊形之周圍為  $P'$ .  $\frac{P}{p} = \frac{OC}{OA}$ ,

而  $OF$  二等分  $\angle COE$  角, 故  $\frac{OC}{OE} = \frac{CF}{FE}$ ,

$$\text{故 } \frac{P}{p} = \frac{CF}{FE}. \text{ 故 } \frac{P+p}{2p} = \frac{CF+FE}{2FE} =$$

$\frac{CE}{FG}$ .  $FG$  為周圍為  $P'$  之正多角形之一

邊, 而  $CE$  之含於  $P$  內猶  $FG$  之含於

$P'$  內, 故  $\frac{CE}{FG} = \frac{P}{P'}$ ,  $\therefore \frac{P+p}{2p} = \frac{P}{P'}$ , 由

$$\text{是 } P' = \frac{2Pp}{P+p} \dots \dots \dots (1).$$

又直角三角形  $AEH$  及  $EFN$ , 其銳角  $\angle EAH, \angle FEN$  相等, 故為相似, 由是

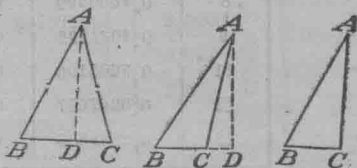
$$\frac{AH}{AE} = \frac{EN}{EF}. \text{ 而 } p \text{ 及 } p' \text{ 內含 } AH \text{ 及 } AE$$

之數相同, 故  $\frac{AH}{AE} = \frac{p}{p'}$ ; 而  $p'$  及  $P'$  內

含  $EN$  及  $EF$  之數相同, 故  $\frac{EN}{EF} = \frac{p'}{P'}$ ,

$$\text{故 } \frac{p}{p'} = \frac{p'}{P'}, \text{ 由是 } p' = \sqrt{p \times P'} \dots (2).$$

**【正弦定則】** Law of sines. (三) 任何三角形之邊與其對角之正弦成比例. 此謂之正弦定則. 以式表之如次,  $\frac{a}{\sin A}$



$$= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \text{ [證] 命 } ABC \text{ 為任}$$

意三角形, 由  $A$  至  $BC$  作垂線  $AD$ , 若  $\angle BCA$  為銳角(圖 1), 則  $AD = AB \sin B$ ,

$AD = AC \sin C$ ; 故  $AB \sin B = AC \sin C$ .  
若  $C$  爲鈍角(圖2), 則  $AD = AB \sin B$ ,  
 $AD = AC \sin ACD = AC \sin (180^\circ - C)$   
 $= AC \sin C$ ; 故  $AB \sin B = AC \sin C$ . 若  
 $C$  爲直角(圖3), 則  $AC = AB \sin B$ , 即  
 $AC \sin C = AB \sin B$ . 故無論何時, 常得

$$AC / \sin B = AB / \sin C, \text{ 即 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同樣可證  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ .

故  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ . 又此各  
比等於  $2R$ , 而  $R$  爲  $\triangle ABC$  之外半徑.

[證] 命  $O$  爲  $\triangle ABC$  之外心, 聯  $BO$ ,  
 $CO$ . 則  $BC =$

$$2R \sin \frac{BOC}{2}$$

$= 2R \sin A$ , 因圓  
周角等於圓心  
角之半故也;

$$\therefore a = 2R \sin A.$$

同樣  $b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$ . 故  $\frac{a}{\sin A}$

$$= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \text{ 正弦定則可由}$$

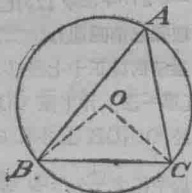
$a = b \cos C + c \cos B$  誘得之. 因  $a = b \cos C$   
 $+ c \cos B, b = c \cos A + a \cos C$ , 即  $a - b$   
 $\cos C - c \cos B = 0, -a \cos C + b - c \cos A$

$$= 0; \text{ 用十字乘法得 } \frac{a}{\cos C \cos A + \cos B}$$

$$= \frac{b}{\cos B \cos C + \cos A} = \frac{c}{1 - \cos^2 C}; \text{ 故}$$

$$\frac{a}{\sin A \sin C} = \frac{b}{\sin B \sin C} = \frac{c}{\sin^2 C} \text{ 即}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



正弦定則又可由餘弦定則而誘得之. 因

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ 故 } \sin^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4b^2c^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2};$$

是即  $\frac{\sin^2 A}{a^2}$  等於對稱函數

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4ab^2c^2}; \text{ 故}$$

$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$ ; 由是即可  
得正弦定則.

**[正二十面體]** Regular icosahedron.

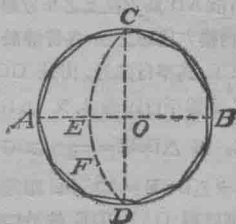
[幾] 見正多面體條.

**[正十一邊形]** Regular undecagon.

[幾] 等邊等角之十一邊形謂之正十一邊  
形. 圓內接正十一邊形, 僅用界尺與圓  
規, 其作法爲不能. 茲示其近似法於次:

於單位圓內作二直交之直徑  $AOB, CO$   
 $D$ . 以  $B$  爲心,  $BC$  爲半徑作弧交  $AB$   
於  $E$ . 二等分弧  $ED$  於  $F$ , 則  $EF$  爲  
所求正十一邊形之一邊. [證] 因  $BC =$

$$BE = BF = \sqrt{2}. \therefore \angle EBF = \frac{1}{2} \angle E$$

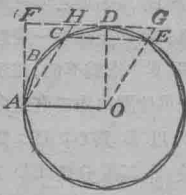


$BD = \frac{1}{4} \angle R = 22^\circ 30'$ .  $\therefore EF = 2BE$   
 $\sin 11^\circ 15' = 2\sqrt{2} \sin 11^\circ 15' = 2 \times 1.414$   
 $2 \times .1951 = .55182$ . 而正十一邊形之一邊等於  $2 \sin 16^\circ 22' = 2 \times .28173 = 56$   
 $356$ . 故  $EF$  近似於正十一邊形之一邊。

**【正十二面體】** Regular dodecahedron. [幾] 見正多面體條。

**【正十二邊形】** Regular dodecagon. [幾] 等邊等角之十二邊形謂之正十二邊形。二等分正六邊形之一邊所乘之弧則可得正十二邊形。

圓之內接正十二邊形之面積，等於半徑上之正方形之三倍。命  $AB, BC, CD, DE$  為內接正十二邊形之鄰接之四邊，引半徑  $OA, OE$ ，則  $OACBCE$  為十二邊形之三分之一。引半徑  $OD$ ，於  $A$  及  $D$  引切

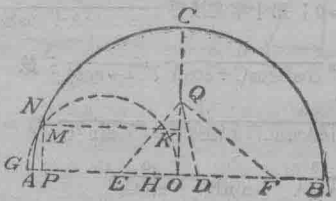


線  $AF$  及  $FDG$ 。聯結  $AC, OE$ ，引長之，交切線  $FG$  於  $H$  及  $G$ 。因  $\angle AOD$  為直角，故  $AD$  為半徑上之正方形。  $AC, CE$  為內接六邊形之邊，各皆等於半徑，故  $OACE$  為平行四邊。由是  $GOAH, GECH$  亦為平行四邊形。又  $\triangle BAC = \triangle DCE$ 。而  $\triangle DCE = \frac{1}{2} \square CG$ ，故  $\triangle BAC + \triangle DCE = \square CG$ 。兩邊各加  $\square AE$  則圖形  $OABCDE$  等於  $\square AG$ 。

然平行四邊形  $AG$  等於正方形  $AD$ 。故正十二邊形之三分之一，即圖形  $OABCDE$ ，等於正方形  $AD$  即半徑上之正方形。由是正十二邊形之面積，等於半徑上之正方形之三倍。

**【正十七邊形】** Regular polygon of 17 sides. [幾] 等邊等角之十七邊形謂之正十七邊形。圓內接正十七邊形，僅用界尺及兩脚規可作得之。命內接於單位圓之正十七邊形之一邊為  $a$ ，則  $a = 2 \sin \frac{\pi}{17}$  而可求得  $a^2 = \frac{1}{8} \{ 17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{(17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}})} \}$  (見武昌高等師範數理雜誌第四期)。

茲示內接正十七邊形之作法如次：——  
 [第一法] 作半徑  $CO$  垂直於直徑  $AB$ 。於  $OC, OB$  上各取  $Q, D$  點，令  $OQ$  等於半徑之  $\frac{1}{2}$ ， $OD$  等半徑之  $\frac{1}{8}$ 。次於  $OA, OB$  上各取  $E, F$  點，令  $DE = DF = DH$ 。又於  $OA$  上取  $G, H$  點，令  $EG = EQ, FH = FQ$ 。更於  $OC$  上取  $K$  點，令  $OK$  為  $OQ, OH$  之比例中項。過  $K$  點  $KM$  平行於  $AB$ ，交以  $OG$  為直徑之圓周於  $M$ 。過  $M$  作  $MP$  平行於  $CO$



與圓交於 N. 則 AN 弧等於與圓之十七分之一。〔証〕設半徑為 1, 則 OQ

$$= \frac{1}{2}, OD = \frac{1}{8}. DE = DF = DQ =$$

$$\sqrt{OQ^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{17}. EG = EQ = \sqrt{OQ^2 + OE^2}$$

$$= \sqrt{OQ^2 + (DE - OD)^2}$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.$$

$$FH = FQ = \sqrt{OQ^2 + OF^2}$$

$$= \sqrt{OQ^2 + (OD + DF)^2}$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}. OK^2 = OQ \cdot OH$$

$$= OQ(FH - OD - DF) =$$

$$\frac{1}{16} \{ \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - (\sqrt{17} + 1) \}.$$

$$OG = OE + EG = DE - OD + EG =$$

$$\frac{1}{8} \{ \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (\sqrt{17} - 1) \}.$$

$$OP + GP = OG = \frac{1}{8} \{ \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

$$+ (\sqrt{17} - 1) \}. OP \cdot GP = MP^2$$

$$= OK^2 = \frac{1}{16} \{ \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

$$- (\sqrt{17} + 1) \}.$$

作以 OP, GP 爲根之方程式, 則得

$$x^2 - \frac{1}{8} \{ \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (\sqrt{17} - 1) \} x$$

$$+ \frac{1}{16} \{ \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - (\sqrt{17} + 1) \} = 0.$$

而 OP 大於 GP, 即 OP 爲二根之大者, 故

$$OP = \frac{1}{16} \{ \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (\sqrt{17} - 1) +$$

$$2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}} \dots (1)$$

$$\text{故 } AN^2 = AP^2 + PN^2 = (OA - OP)^2 + (ON^2 - OP^2) = (1 - OP)^2 + (1 - OP^2) = 2(1 - OP)^2.$$

以(1)式 OP 之值代入之, 則

$$AN^2 = \frac{1}{8} \{ 17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}} \}.$$

故 AN 爲內接正十七邊形之一邊. 此作圖法爲 Lowry 之法. 此外尙有他作圖法, 見武昌高等師範數理雜誌第四期, 及林鶴一所著之初等幾何學作圖不能問題.

**【正十五邊形】** Regular pentadecagon. 等邊等角之十五邊形謂之正十五邊形. 作圓內接正十五邊形之法如次:

設 O 爲已知圓. 作 AB 等於此圓之半徑. 作 AC 等於內切正十邊形之一邊. 作 CB, 則 CB 爲所求正十五邊形之一邊. 〔證〕因弧 AB 爲圓周之  $\frac{1}{6}$ , 又

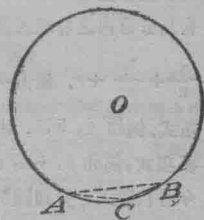
弧 AC 爲圓周

之  $\frac{1}{10}$ . 故弧

CB 爲圓周之

$\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$  即

$\frac{1}{15}$ , 而弦 CB



爲內接正十五邊形之一邊. 分全圓周爲等於弧 CB 之弧, 作此等弧之弦, 則得所求之內接正十五邊形. 又逐次二等分 CB 諸弧, 可作內接正三十邊形, 六十邊形, 百二十邊形等等.

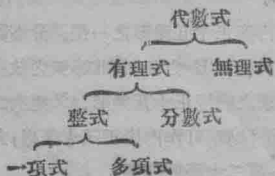
**【正三角函數】** Direct trigonometrical function. (三) 普通之三角函數  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ , 等等謂之正三角函數, 乃對於逆三角函數  $\sin^{-1}x$ ,  $\cos^{-1}x$ ,  $\tan^{-1}x$ , 等而言也。

**【正布洛喀點】** [幾] 見布洛喀點條。

## 代

**【代入法】** Substitution. [代] 與置換法同, 見該條。

**【代數式】** Algebraical expression. [代] 代數式者, 以運算之符號聯結文字及數字者之謂, 即一數之代數的表示也。例如  $5x^2+7y$  為表  $x$  所表之數之平方之 5 倍及  $y$  所表之數之 7 倍之和。不含根號之代數式, 或根號內不含文字之代數式謂之有理式, 例如  $a+bx$ 。根號內含有文字之項之代數式謂之無理式, 例如  $\sqrt{x+x\sqrt{y}+c}$ 。文字不含於分母內之有理式謂之整式, 例如  $ax+by+c$ 。文字含於分母內之有理式謂之分數式; 例如  $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+c$ 。僅由一項而成之式為一項式, 例如  $a$ ,  $5ax$ 。由多項而成之式為多項式, 例如  $ax+b$ ,  $x^3+5x^2-2x+4$ 。今將代數式之分類圖解之如次。



**【代數和】** Algebraical sum. [代] 代數和者, 正數或負數以符號+聯結之者之謂, 例如  $3+(-2)$ ,  $(-5)+(-3)+(+2)$  是也。同樣  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , …… 為正負任意數時,  $a+b+c+\dots$  為一代數和, 故代數和無必增加之意味。

**【代數差】** Algebraical difference.

[代]  $a$  及  $b$  之代數差者  $a-b$  之謂也。故  $a>b$  其代數差為正;  $a<b$ , 其代數差為負。反之  $a$  及  $b$  之算術差云者,  $a$ ,  $b$  為正而由大數減小數之餘數之謂也。例如 2 與 5 之代數差為  $2-5$  即  $-3$ , 而其算術差為  $5-2$  即 3。

**【代數學】** Algebra. [數] 代數學為數學之一分科, 而用記號以研究數之關係及性質者也。數概以羅馬字母  $a, b, c, \dots$  表之, 其所施之運算則以符號表之, 符號及羅馬字母稱為代數記號。代數學內之運算為加, 減, 乘, 除, 及高易常數指數之纂取常數指數之根。代數學又含研究以通常六運算表已知數及未知數之關係諸方程式之性質。如是之方程式謂之代數方程式。代數學之最古之書, 為 Diophantus 之代數學, 乃西歷 350 年時之作也。此書多集關於整數之性質之問題而尤以平方數, 立方數之性質為多。代數學由印度傳於亞拉伯, 十三世紀之始, 由亞拉伯傳入意大利。Ferreas, Cardan, Tartaglia, 及其他諸意大利之學者, 發明新法甚多, 其中最緊要者, 三次方程式之解法是也。其後德人 Stifel, 於十六世紀



之中葉，發見精巧之記法，進步不鮮。次於此發見，經 Robert Recorde, Vieta, Albert Girard, Harriot 及其他諸數學家之研究，而成現今之代數學。1637 年自法人狄卜德，應用代數的解析於幾何學的研究之大著出版，數學之研究開一新生面，於完成純正代數學之進步，貢獻不鮮。其後代數學雖無大改變，然於學科之應用，非常推廣。級數理論之成功，以 Bernouillis, 牛頓, De Moivre, Simpson 等之力為多。近時於代數學之功績家為 Taylor, M<sup>r</sup> Laurin, Clairaut, 尤拉, Legendre, Arbogast, Gauss, Bourdon, 等。代數學之英語 Algebra 為起源於亞拉伯語之 Aljebreal mokabala, 譯成英語 Restoration & Reduction 之意。此名之根源為二次方程式無疑，蓋二次方程式為亞拉伯代數學中之最高深部分也。今詳解其意義使二次方程式含未知數之邊為完全平方，是為 Restoration。取其平方根，是為 Reduction，然此名亦適當於現今之代數學，因算術為記號之算法即變為代數學，是為 Reduction，又擴張其記號之結果，是為 Restoration (De Morgan's Double Algebra)。牛頓稱代數學為 Universal Arismetie, Hamilton 稱之為 The Science of Pure Time, De Morgan 稱之為 The Calculus of Succession, 我國昔稱為四元，日本昔稱為點竅。

**【代數函數】** Algebraical function.

[代]代數函數者，函數與自變數之關係，以代數學之六普通運算即加，減，乘，除，常數指數之羈及根表之之函數也。例如

$ax^2+bx+c$ ,  $\frac{x}{x+3}$ ,  $\sqrt{5x^2+1}$  皆為代數函數。

**【代入消去法】** Elimination by substitution. [代] 由含二以上之未知數之一組方程式之一，求得其一未知數為他未知數之項，以之代入他方程式求不含其一未知數之方程式，是謂之代入消去法。例如於  $2x-3y=17$ ,  $7x-4y=25$ , 由第一方程式  $y=\frac{1}{3}(2x-17)$ , 代入第二方程式得  $7x-\frac{4}{3}(2x-17)=25$ , 即以代入消去法消去  $y$  也。

**【代數的解法】** Algebraical solution [代] 問題之代數的解法者，由問題之已知條件作方程式解之而求其解答之法之謂也。

## 半

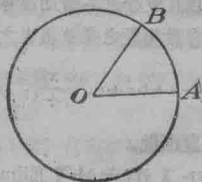
**【半徑】** Radius. [幾] 半徑者由圓之中心至圓周或球面之直線之謂也。半徑即徑之半故圓或球之半徑皆等長。

**【半球】** Hemisphere 或 Semisphere. [幾] 球為通過其中心之平面所分之一部分之謂，而半球為全球之半。

**【半圓】** Hemicircle 或 Semicircle. [幾] 圓為徑所分之一部之謂，故半圓為全圓之半。半圓內之角為直角。

【半徑度】Radian. [三] 亦稱本位弧，

為弧度法內之單位角，即於以 O 為心之圓內，謂 AB 弧之長等於圓之半徑，則 ACB 角謂之半徑度。1 半徑度



半徑，則 ACB 角謂之半徑度。1 半徑度

$$= \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 45''.$$

【半圓周】Semicircumference. [幾]

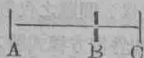
圓周被其徑二分之一部之謂，故半圓周為全圓周之半。

### 外

【外分】To divide externally. [幾] 於

某有限直線之延線上取一點時，則此線謂之外分於此點，而其二部分之差等於某有限直線。例

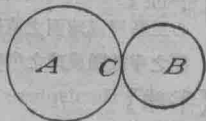
如於 AB 之延線上取一點 C, AB



謂之外分於 C, 而 AC, BC 之差為 AB

【外切】(一) To touch externally.

[幾] 二圓互在外而相切之謂。如圖，A, B 二圓外切於 C。



【外切】(二) To be circumscribed.

[幾] 多邊形之各邊切於一圓，則此多邊形謂之外切於圓。但亦有混稱為外接者。

【外心】(一) Circum centre. [幾] 多角

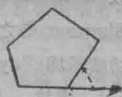
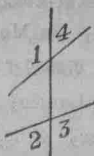
形之外接圓之中心之謂，多指三角形者而言，即諸邊之中垂線之交點之謂也。

【外心】(二) Outer centre. [幾] 指相似外心，即二相似形或二圓之二相似中心二形同在其一側者謂之相似外心。

又見相似中心條。

【外角】Exterior angle. [幾] 如圖，一直線截他二直線時所生 1, 2, 3, 4 諸角

謂之外角。又多角形之一邊及其鄰邊之延線間之角亦謂之外角。



謂之外角。又多角形之一邊及其鄰邊之延線間之角亦謂之外角。

【外折】[算] 即外耗。

【外耗】[算] 見內耗條。

【外率】Extreme. [算] [代] 即外項，見該條。

【外項】Extreme. [算] [代] 於比例 a:b=c:d, a 及 d 謂之外項或外率。

【外接】To be circumscribed. [幾]

一圓過一多邊形之各角頂，則此圓謂之外接於多邊形；又一多邊形之各邊過他多邊形之各角頂，則前多邊形謂之外接於後多邊形。又外切亦有稱為外接者。

【外中比】Extreme and mean ratio.

[幾] 分為外中比，即與外中分割同，見該條。

【外切形】Circumscribed figure. [幾]

見外切多邊形條。

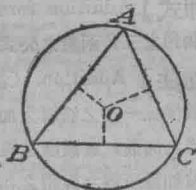
【外切錐】Circum-cone. [幾] 圓錐(或角錐)之曲面(或側面)及底面切於一球時謂之外切錐。

【外半徑】Circum-radius. [幾] 即外接圓之半徑之謂也。

【外接形】Circumscribed figure. [幾] 見外接多邊形條。

【外接球】Circumscribed sphere. [幾] 過多面體之各頂點之球之謂也。

【外接圓】Circumscribed circle. [幾] 過多邊形之各頂點可作一圓時，此圓謂之多邊形之外接圓。多就三角形而言。作△ABC外接



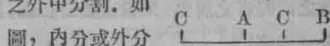
圓之法，先作各邊之中垂線，命其交點(即外心)為O，以O為心，由O至一角頂之長(即外半徑)為半徑作圓，即為外接圓。

【外線分】External segment. [幾] 有限直線AB之延線上取一點C時，AC及BC謂之其外線分。

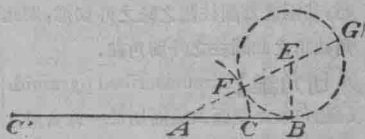
【外錯角】Alternate-exterior angles. [幾] 一直線與二直線相交(外角條之圖)1及3, 2及4謂之外錯角。一直線與二平行線相交，其外錯角相等，而其逆亦為真。

【外中分割】Medial section. [幾] 有限直線內分或外分之於一點，使一部分上之正方形等於全線及他部分所包之矩

形，則謂此直線分成外中比，而此分割謂之外中分割。如



圖，內分或外分AB於C，使 $\overline{AC}^2 = AB \cdot BC$ 是也。作一直線為外中比之法如次：設AB為已知直線，求分AB為外中比。於B作



垂線BE使等AB之半。以E為心，BE為半徑作圓。作AE，遇圓周於F及G。於AB上取 $AC=AF$ ；又於BA之延線上取 $AC'=AG$ 。則AB內分於C外分於C'，而成外中比。

[證] 因 $AG:AB=AB:AF$ 。

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB}^2 &= AF \cdot AG = AC(AF + FG) \\ &= AC(AC + AB) = \overline{AC}^2 + AB \cdot AC. \\ \therefore \overline{AB}^2 - AB \cdot AC &= \overline{AC}^2 \\ \therefore AB(AB - AC) &= \overline{AC}^2 \\ \therefore AB \cdot CB &= \overline{AC}^2. \end{aligned}$$

同樣可證 $AB \cdot C'B = \overline{AC'}^2$ 。

故AB內外分於C及C'而成外中比。此分割於幾何學中甚為重要。昔希臘之數學家稱為黃金分割。畢達哥拉斯時已知作此分割。

【外公切面】External common tangent plane. [幾] 二球之公切面，而其二球俱在平面之同側者之謂也。

【外公切線】External common tan-

gent. [幾] 二圓之公切線中，二圓俱在切線之同側者之謂也。又稱直接公切線，詳公切線條。

**【外切角柱】** Circumscribed prism.

[幾] 角柱之側面及二底面切於一球者之謂也。又角柱之諸側稜與圓柱之基線平行，其兩底為圓柱體之底之外切形，則此角柱謂之此圓柱之外切角柱。

**【外切角錐】** Circumscribed pyramid.

[幾] 角錐之側面及底面切於一球者謂之球之外切角錐。又角錐之底為圓錐之底之外切形其頂點與圓錐之頂點重合者謂之圓錐之外切角錐。

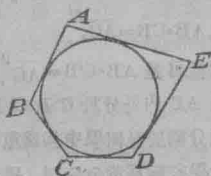
**【外二等分線】** External bisector.

[幾] 某角之外二等分線者，其外角之二等分線之謂也。又見二等分線條。

**【外切多面體】** Circumscribed polyhedron. [幾] 多面體之各面切於同一球者之謂也。

**【外切多邊形】** Circumscribed polygon. [幾] 多邊形之各邊切於同一圓者謂之外切多

邊形，如圖 ABCDE 是也。外切多邊形因其邊數為 3, 4,



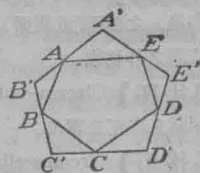
……而分外切三角形，外切四邊形，……等等。

**【外接多邊形】** Circumscribed polygon. [幾] 多邊形之各邊過他多邊形之

各角頂者謂之外接多邊形，如圖  $\Delta' B'$

$C' D' E'$  為

ABCDE 之外接形。外接多邊形因邊數為 3, 4, ………而分外接三角形，外接四邊形，……等等。



加

**【加】** To add. [算] 加甲數於乙數者，將乙數所含之單位，順次一一計入於甲數，而求其最後之數也。

**【加式】** Addition formula. [三] 見表和角之三角函數之公式。

**【加法】** Addition. [算] [代] 合若干數使成一數之法謂之加法，加法之法數謂之加數，實數謂之被加數，加加數於被加數所得之數謂之和或總數。例如  $2+3=5$ 。3 為加數，2 為被加數，5 為和。小數之加法，書小數點於同一行，如整數加之即可；分數之加法，化分數為同分母而直加其分子即可。但代數數之加法，順次置符號 + 於其前而連記之，例如  $a+b+c+\dots$ 。

**【加號】** Sign of addition. [算] 示加一數於他數之符號 + 之謂也，普通記此符號於二數間以示之。例如  $4+3$  為示 4 與 3 相加，而讀為“4 加 3”。書帶分數時則整數與分數間之加號可略去之，例

如  $5+\frac{3}{4}$  書為  $5\frac{3}{4}$ 。

**【加數】** [算] 見加法條。

**【加比之理】** Addendo. [代] [幾] 以若干相等比之前項之和為前項後項之和為後項之比等於原各比，是謂之加比之

理。即  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots\dots$   
 $= \frac{a+c+e+\dots\dots\dots}{b+d+f+\dots\dots\dots}$  也。

**【加減消去法】** Elimination by addition or subtraction. [代] 加減消去法者，由二以上之一組方程式，使其一未知數之係數相等，而用加法或減法消去其一未知數之謂也。例如於

$$3x+5y+2z=19\dots\dots(1).$$

$$2x+3y-z=5\dots\dots(2),$$

$$5x+7y-3z=10\dots\dots(3).$$

將(2)以 2 乘之，而與(1)相加，則得

$$7x+11y=29\dots\dots(4).$$

將(2)以 3 乘之，而減去(3)，則得

$$x+2y=5\dots\dots(5).$$

即(4)，(5)為由(1)，(2)，(3)一組方程式用加減消去法而消去  $z$  者也。

可

**【可通約根】** Commensurable root

[代] 可通約根者方程式之根為可通約數者之謂也。方程式之係數皆為有理數，則其可通約根易求得之。方程式之係數悉為整數且第一項之係數為 1 者不能有分數根。因若  $\frac{a}{b}$  為  $f(x)=0$  之一根，且  $\frac{a}{b}$  為已約分數，則

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

以  $b^{n-1}$  乘此各項且移項，則得

$$-\frac{a^n}{b} = p_1 a^{n-1} + \dots + p_n b^{n-1}.$$

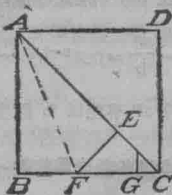
今  $a^n$  不能以  $b$  除盡，故左邊為分數，而右邊各項皆為整數，是為背理。故  $\frac{a}{b}$  不

能為此方程式之根。任意方程式可變化之使第一項之係數為 1，而他項之係數悉為整數者。故求任意方程式之可通約根可變為求一方程式之整數根。設  $a$  為  $f(x)=0$  之整數根，則  $x-a$  為  $f(x)$  之一因數，故  $a$  為於  $f(x)$  內不含  $x$  項之因數。若將  $p_n$  之諸因數一一代入  $f(x)$ ，而其式為 0 者，則此因數即為所求之根。[例] 求  $x^4 - 27x^2 + 42x + 8 = 0$  之可通約根。若有可通約根，必為 8 之因數。故本題驗  $\pm 8$ ， $\pm 4$ ， $\pm 2$ ， $\pm 1$  為所與方程式之根與否即可。而驗知 4 與 2 為其根。既知其二根即可得與方程式之其他之根。因原方程式為  $(x-2)(x-4)(x^2+6x+1)=0$ ，故其根為 2，4， $-3 \pm 2\sqrt{2}$ 。

**【可通約量】** Commensurable magnitudes.

[幾] 可以共同單位精密表示之諸量謂之可通約量，又不可以共同單位精密表示之諸量謂之不可通約量。今舉一例以示不可通約量之存在。命 ABCD 為正方形，則 ABC 為直角二等邊三角形，而直角二等邊三角形之一邊 AB 與斜邊 AC 為不可通約量。AC 必大於 AB 而小於 AB+BC 即 AB 之二倍。

故由AC取AE  
等於 AB 或  
BC，則餘剩  
EC 小於 AB  
或 BC。過 E  
引 EF 垂直於  
AC，交 BC 於



F，聯 AF，如是於二直角三角形 ABF，  
AEF，邊 AB 等於邊 AE，斜邊 AF  
為公共，故  $BF=EF$ 。又於直角三角形  
EFC，ECF 及 EFG 二銳角之和為直  
角，而  $\angle ECF$  為直角之半，故  $\angle EFC$   
亦為直角之半。由是  $\triangle EFC$  為二等邊，  
 $\therefore EC=EF=BF$ 。又由 FC 取 FG 等  
於 EC，而得第二餘剩 GC。此方法與由  
正方形之對角線 FC 截取其一邊 EC 者  
同，故此方法決無底止。由是正方形之  
邊與對角線為不可通約量。

【可通約數】Commensurable num-  
bers. [代]可以共同單位精密表示之數謂  
之可通約數，又不可以共同單位精密表

示之數謂之不可通約數。例如  $2\frac{3}{5}$  及

$3\frac{4}{7}$  為可通約數，因此第一數等於

$\frac{91}{35}$ ，而第二數等於  $\frac{125}{35}$ ，而此二數

可以共同分數單位  $\frac{1}{35}$  精密表示之。然

如  $\sqrt{2}$  與 1 為不可通約數。即正方形之  
一邊以 1 表之，則對角線為  $\sqrt{2}$ ，而此  
為不可通約數。何則，若正方形之對角線  
及一邊可以共同單位之數表示之，命對

角線及邊合最大共同單位  $m$  回及  $n$  回。  
然  $m$  與  $n$  不能俱為偶數，其故因  $m$  與  $n$   
俱為偶數時，則對角線及邊以前單位  
之二倍之單位測度之，然前單位為可測  
度對角線及邊之最大共同單位，故  $m$  與  
 $n$  不能俱為偶數。然對角線上之正方形  
含  $m^2$  平方單位，邊上之正方形含  $n^2$   
平方單位，而已知對角線上之正方形為  
邊上之正方形之二倍， $\therefore m^2=2n^2$ ，由  
是  $m^2$  為偶數，而  $m^2$  為偶數之平方。  
命  $m=2p$ 。然  $2n^2=m^2=4p^2$ 。故  
 $n^2=2p^2$ ，由是  $n$  亦為偶數。然前已知  
 $m$  與  $n$  不能俱為偶數，故正方形之對角  
線及邊無共同單位足以表示其同一單位  
之數。故正方形之對角線及邊之測度為  
不可通約數。

## 去

【去九法】Rule for casting out the  
nines. [算] 若數之各數字之和為 9 之  
倍數，則其數亦為 9 之倍數，而若數字之  
和不為 9 之倍數，則其數亦不為 9 之倍  
數。例如

$$\begin{aligned} 6273 &= 6000 + 200 + 70 + 3 \\ &= 6(999 + 1) + 2(99 + 1) + 7(9 + 1) + 3 \\ &= 6 \times 999 + 6 + 2 \times 99 + 2 + 7 \times 9 + 7 \\ &\quad + 3 \\ &= 9 \text{ 之倍數 } + 6 + 2 + 7 + 3. \end{aligned}$$

此式可分為兩部，前部為 9 之倍數，後部  
為各數字之和，故若後部亦為 9 之倍數，  
則全體為 9 之倍數。例如以 9 除 24573，  
其餘數為  $2+4+5+7+3$  以 9 除之之

餘數，即<sup>3</sup>是也。數字之和以 9 除之，而求其餘數，任何 9 或二，三數字合成之 9 可一見而省去之。例如以 9 除 2691475 而求其餘數，省去 9 及 1, 2, 6 及 5, 4，惟餘一數字 7。同樣於 452876，省去 5, 4 及 2, 7，惟由 8+6 之和去 9，其餘數為 5。應用上述之理，以驗加，減，乘，除之運算之結果為正與否，即所謂去九法也。其法將數之各數字相加，滿 9 即去之，取其餘數，謂之去九數。今示其法如次。

I. 以去九法驗加法。

去九數

|              |                   |
|--------------|-------------------|
| 81346.....4  | } 加得 15.....6 去九數 |
| 27682.....2  |                   |
| 38507.....5  |                   |
| 67549.....4  |                   |
| 215034.....6 | 去九數               |

即將各數之去九數相加，再求其去九數，若與和之去九數不同，則知運算有誤。

II. 以去九法驗減法。

去九數

|              |                  |
|--------------|------------------|
| 176543.....8 | } 減得 5.....5 去九數 |
| 85764.....3  |                  |
| 90869.....5  |                  |

即由被減數之去九數減減數之去九數，若所得之數與差之去九數不同，則知運算有誤。

|                  |              |
|------------------|--------------|
| 又 51786531.....0 | } 減得 1.....1 |
| 23456780.....8   |              |
| 28829751.....1   |              |

此時被減數之去九數，小於減數之去九數，故被減數之去九數須加以 9。

III. 以去九法驗乘法。

|              |                |
|--------------|----------------|
| 1326.....3   | } 相乘得 21.....3 |
| 457.....7    |                |
| 605282.....3 |                |

即將乘數被乘數之去九數相乘，再求其去九數，若與積之去九數不同，則知運算有誤。

IV. 以去九法驗除法。

|          |       |           |             |
|----------|-------|-----------|-------------|
| 2.....11 | } 8 { | 2.....128 |             |
|          |       | 4.....256 | 32906.....2 |
|          |       | 3.....138 |             |

即將除數商數之去九數相乘，加以餘數之去九數，再求去九數，若與被除數之去九數不同，則知運算有誤。

用去九法以驗加，減，乘，除之運算之正否，若誤差為 9 之倍數時，則此法失其效力。例如於加法，其正當之和應為 215034，而誤為 210534 或 214134 時，則九去法無效。

【去九數】〔算〕見去九法條。

【去十一法】Rule for casting out the

elevens. 〔算〕若數之各奇位數字之和與各偶位數字之和相等或其差為 11 之倍數者，則其數為 11 之倍數。例如

$$\begin{aligned}
 34628 &= 30000 + 4000 + 600 + 20 + 8 \\
 &= 3(11 \times 909 + 1) + 4(11 \times 91 - 1) \\
 &\quad + 6(11 \times 9 + 1) + 2(11 - 1) + 8 \\
 &= 11\text{-之倍數} + 3 - 4 + 6 - 2 + 8 \\
 &= 11\text{-之倍數} + 3 + 6 + 8 - 4 - 2.
 \end{aligned}$$

此式可分為兩部，前部為 11 之倍數，後部為各奇位數和與偶位數和之較。故若後部為 0 或 11 之倍數，則全體為 11

之倍數。應用此理以驗加，減，乘，除之運算之正否，即爲去十一法。其法先自奇位數和減偶位數和，若不能減，則加 11 於奇位數和而減之，其較滿 11 則去之，所餘之數謂之去十一數。其驗算之法皆與去九法同，茲僅示驗乘法之例於下。

$$\begin{array}{r} 1326 \dots\dots\dots 5 \\ 457 \dots\dots\dots 6 \\ \hline 605982 \dots\dots\dots 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1326 \\ 457 \\ 605982 \end{array}} \right\} 30 \dots\dots\dots 8$$

若誤差爲 11 之倍數時，則去十一法失其驗算之效力。

【去十一數】〔算〕見去十一法條。

### 未

【未知量】Unknown quantity. 〔數〕數量之值之不知者而後來可決定之者謂之未知量。參看未知數條。有時未知量與未知數同意義用之。

【未知數】Unknown number. 〔代〕問題或方程式之未知數者，其值爲不知而可決定之者之謂也。若於問題，有可決定之未知數之數之與條件時，則此問題能成立，而解答之數爲有限。若與未知數之數之聯立方程式時，則其值可求得之。若所與聯立方程式之數少於其中所含未知數之數，則此等方程式爲不定，而未知數消長變易，即爲變數。未知數通常以二十六字母後部之字母即  $x, y, z, u, v, w$  表之，或以  $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; z_1, z_2, \dots; x', x'', \dots; y', y'', \dots; z', z'', \dots$  表之。

【未定係數】Indeterminate coefficients. 〔代〕即不定係數，見該條。

【未定乘數法】Method of undetermined multipliers. 〔代〕例如有三方程式

$$ax + by + cz = d \dots\dots\dots (1)$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots\dots\dots (2)$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots\dots\dots (3)$$

以  $\lambda$  乘(1)，以  $\mu$  乘(2)而加於(3)，得  $x(\lambda a + \mu a' + a'') + y(\lambda b + \mu b' + b'') + z(\lambda c + \mu c' + c'') = (\lambda d + \mu d' + d'')$ 。

此對於  $\lambda$  及  $\mu$  之不論何值皆爲真。取  $\lambda$  及  $\mu$  之值，使前方程式內  $y$  及  $x$  之係數爲零。則  $x = \frac{\lambda d + \mu d' + d''}{\lambda a + \mu a' + a''}$ 。

但  $\lambda$  及  $\mu$  可由  $\lambda b + \mu b' + b'' = 0$  及  $\lambda c + \mu c' + c'' = 0$  而求得之。

$$\text{即 } \frac{\lambda}{b'c'' - b''c'} = \frac{\mu}{b''c - bc''} = \frac{1}{bc' - b'e}$$

故  $x = \frac{d(b'c'' - b''c') + d'(b''c - bc'') + d''(bc' - b'e)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'e)}$   
如是求未知數之值之法，謂之未定乘數法或貝治阿之法。

於上  $x$  之值內， $a, b, c$  及  $a', b', c'$  及  $a'', b'', c''$ ，依輪換次序而變之，可得  $y$  之值，而再依輪換次序而變之，可得  $z$  之值。而  $x, y, z$  之分母皆相同，此分母不爲零，則各未知數惟一有限值。

### 末

【末項】Last term. 〔代〕即一級數或式或方程式之最後之項之謂也。求等差級數或等比級數之末項之法，見各該條。



## 本

【**本金**】Capital 或 Principal. [算]

Capital 為起始營業所投之資本，而此有將現金之外地面，器具其他貨物勞力算入者。又 Principal 為貸與他人以收利息之金。

【**本位弧**】Radian. [三] 即半徑度，見該條，又見弧度法條。

【**本利和**】Amount. [算] 即貸金於人，若干年後本金與利息之和之謂也。

【**本利合計**】Amoumt. [算] 即本利和。

【**本初子午線**】Principal meridian 或 Prime meridian 或 Standard meridian. [算] 本初子午線為世界諸文明國之經度起算之根本子午線，而經過英國格林維基 (Greenwich) 天文台子午儀之中心之子午線之謂也。本初子午線之經度為零，東經，西經各至一百八十度而止。

## 母

【**母數**】[算] 見百分法條。

【**母線**】Generating line 或 Generatrix 或 Generator. [幾] 某線依某條件運動而生面時，該線稱為此面之母線。例如一直線恆過一曲線且平行於一直線而運動，則所生之面為柱曲面。若此曲線為圓，則所生之面為圓柱。而前直線為母線。又若半圓周以其徑為軸而迴轉之，則所生之面為球面，而半圓周為母線。又母

線所過之曲線謂之母曲線或準線。

【**母曲線**】Generating curve. [幾] 見母線條。

【**母函數**】Generating function. [代] 見循環級數條。

## 永

【**永久年金**】Perpetual annuity 或 Perpetuity. [算] [代] 年金之永久連續者謂之永久年金。而其現價為年金額  $a$  以利率  $r$  除之，即  $\frac{a}{r}$  是也。

## 立

【**立方**】Cube. [算] [代] 某數之立方即其三乘之謂也。例如  $a$  之立方為  $a^3$ 。

【**立突**】Litre 或 Liter. [算] 立突為米突制中容積之基本單位。而一立突為一立方分之容積，合我國 30.5176 立方寸。一立突之十倍曰升 (decalitre)，百倍曰瓩 (hectolitre)，千倍曰千 (kilolitre)，又一立突之十分之一曰澆 (decilitre)，百分之一曰漚 (Centilitre)，千分之一曰錢 (Millilitre)。

【**立體**】Solid. [幾] 立體者，指空間之有限一部而言。換言之，立體有長，廣及厚。空間為無限大，以平行二平面分之，其平面與平面間之空間之部分，原為有限，長及廣為無限大，由是此二平面間之空間之部分亦為無限大，而無如斯之立體，立體者空間之有限部分之謂也。

【**立方根**】Cube root. [算] [代] 某數之立方根，即其立方等於某數之數之

謂也。例如  $8=2^3$ ，故 8 之立方根為 2，而以  $\sqrt[3]{8}=2$  記之。普通 a 之立方根記為  $\sqrt[3]{a}$ 。

【立方數】Cube number. [代] 數之為

他數之立方者之謂也。例如 1, 8, 27, 64, ……是也。各立方數為  $7m$  或  $7m \pm 1$ 。

因各根數為  $7m$ ,  $7m \pm 1$ ,  $7m \pm 2$ , 或  $7m \pm 3$ ; 故其立方數為  $(7m)^3=7m$ ,  $(7m \pm 1)^3=(7m)^3 \pm 3(7m)^2 + 3(7m) \pm 1=7m \pm 1$ ,

$(7m \pm 2)^3=7m \pm 2^3=7m \pm 7 \pm 1=7m \pm 1$ ,

$(7m \pm 3)^3=7m \pm 3^3=7m \pm 28 \pm 1=7m \pm 1$ ,

又各立方數為  $9m$  或  $9m \pm 1$ 。因各數為  $3m$  或  $3m \pm 1$ ，故其立方為  $(3m)^3=27m=9m$ ,

$(3m \pm 1)^3=(3m)^3 \pm 3(3m)^2 + 3(3m) \pm 1=9m \pm 1$ 。

【立方體】Cube. [幾] 六相等正方形

所圍成之立體謂之立方體，又稱正六面體。各稜為線單位之立方體為測體積之單位，如立方寸，立方丈是也。而任意立方體之體積（所含立方單位之數）等於其一稜（以對應之線單位測之之數）之立方。

【立體角】Solid angle. [幾] 與多面角同，見該條。

【立方不盡根】Cubic surd. [代] 根指數為 3 之不盡根謂之立方不盡根或三次不盡根，如  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[3]{x}$  是也。

【立體幾何學】Solid geometry 或

Geometry of space 或 Stereometry.

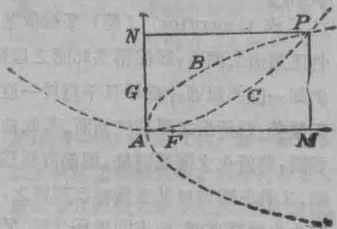
[數] 立體幾何學者，論空間之點，直線，角，曲線，平面，曲面，及其集合之圖形之學科也。若上述之曲線僅限於圓，則稱為初等立體幾何學。

【立方倍積問題】The duplication

of a cube. [幾] 立方倍積問題為幾何學三大問題之一即求有與立方體之二倍體積之立方體之一邊也。若以 a 表與立方體之一邊，x 表所求立方體之一邊，則此問題歸於方程式  $x^3=2a^3$  之解法。而此問題可變形之如次：——於一直線之長與其二倍之長之間插入二比例中項。

今於立方倍積問題，以 a 表與立方體一邊之長，於 a 及 2a 間插入二比例中項，則得  $a:x=x:y=y:2a$ ，故  $x^2=ay$ ,  $xy=2a^2$ 。此二式相乘得  $x^3=2a^3$ 。故所插入二比例中項中之前者即相當於所求立方體一邊之長。今示其用曲線之解法如次。

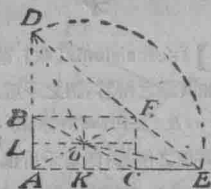
[第一] 用二拋物線之法。作有互成直角之軸且有公共頂點之二拋物線，命其一為 ABP，他一為 ACP。命公共頂點為 A 而軸各為 AM, AN;  $\angle MAN$  為直



角。又命二拋物線之交點爲 P。使拋物線 ABP 之頂點與焦點之距離 AF 等於與立方體之一邊之四分之一，拋物線 ACP 之頂點與焦點之距離 AG 等於其二分之二。由 P 至拋物線 ABP 之軸 AM 作垂線 PM。即爲所求之長。〔證〕由 P 至軸 AN 作垂線 PN，則  $PM^2 = 4AF \cdot AM$ ， $PN^2 = 4AG \cdot AN$ 。然  $PM = AN$ ， $PN = AM$ 。故  $PM^4 = 4^2 AF^2 \cdot AM^2 = 4^2 AF^2 \cdot 4AG \cdot AN = 4^3 AF^2 \cdot AG = 2(4AF)^3 = 2a^3$ 。

〔第二〕用拋物線與雙曲線之法。作有等於與立方體之一邊之通徑之拋物線。以此拋物線之軸與其頂點之切線爲漸近線；作其實軸等於與立方體之一邊之四倍之長之雙曲線。由此二曲線之交點至拋物線之軸所作垂線之長，即爲所求之立方體之一邊。其證明與前同樣，故省略。

〔第三〕亞基默德之法。作矩形 ABFC，使其相鄰二邊 AB 及 AC 各等於與立方體之一邊及其二倍。以此矩形之交點



O 爲心，畫圓與 AB, AC 之延線各交於 D, 及 E, 使 D, F, E 三點在一直線

上(此時用一種曲線)則 CE 爲所求立方體之一邊。〔證〕作  $OK \perp AC$ ， $OL \perp AB$ ，則  $KE^2 - KC^2 = (KE + KC)(KE - KC) = AE \cdot CE$ 。故  $AE \cdot CE + KC^2 = KE^2$ 。兩邊加  $OK^2$ ，則  $AE \cdot EC - OC^2 = OE^2$ 。同樣  $AD \cdot BD + OB^2 = OD^2$ 。但  $OC = OB$ ， $OE = OD$ 。故  $AE \cdot CE = AD \cdot BD$ 。故  $AE:AD = BD:CE$ 。然又  $AE:AD = CE:CF = BF:BD$ 。故  $BF:BD = BD:CE = CE:CF$ ；即  $AB:CE = CE:BD = BD:AC$ 。此外尙有他法，見北京高等師範數理雜誌三卷一號。

## 主

〔主值〕 Principal value. 〔三〕有三角函數之值而求相當之角，則其角可有若干之值。故一數之逆三角函數可有若干之值。絕對值最小之角，謂之該逆三角函數之主值。例  $\sin^{-1} \frac{1}{2}$  之主值爲  $30^\circ$ ，

$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$  之主值爲  $45^\circ$ ， $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

之主值爲  $-60^\circ$ 。

〔主圓〕 Principal circle. 〔幾〕某圓在一平面之正射影得橢圓，其圓有謂之主圓者。

〔主平面〕 Principal plane. 〔幾〕某平面截球或圓錐時，含球心或圓錐之軸直交於其截面之平面之謂。

〔主傍心三角形〕 Principal ex-central triangle. 〔幾〕聯結三角形之三傍心所成之三角形之謂。

## 凸

【凸角】Convex angle 或 Salient angle. [幾] 小於二直角之角之謂，對於凹角而言也。

【凸面】Convex surface. [幾] 凸面者，如球面之面，其任何部分皆凸出者之謂也。

【凸折線】Convex broken line. [幾] 凸折線者，由折線之任何一部直線觀之，全體皆在其一側而不跨兩側者之謂，如

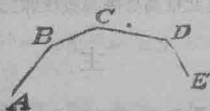


圖 ABCDE 爲一凸折線。

【凸多面角】Convex polyhedral angle. [幾] 不過多面角之頂點之任意截面爲凸多邊形者，則此多面角謂之凸多面角。

【凸多面體】Convex polyhedron. [幾] 多面體以任何平面截之，其截面必爲凸多邊形者之謂也。

【凸多邊形】Convex polygon. [幾] 無一凹角之多邊形謂之凸多邊形。

【凸球面多邊形】Convex spherical polygon. [幾] 無一凹角之球面多邊形之謂也。

## 凹

【凹角】Reflex angle 或 Re-entrant

angle 或 Re-entrating. [幾] 凹角者大於二直角而小於四直角之角之謂也。

【凹多邊形】Re-entrant polygon. [幾] 凹多邊形者，有一以上之凹角之多邊形之謂也。凸多

邊形由其任一

邊觀之，全形

皆在其邊之一方，而凹多邊形由其凹角之一邊觀之，全形跨於其邊之兩方。



## 生

【生數】Factor. [算] [代] 即因數，見該條。

【生命年金】Life annuity. [算] [代] 亦稱終身年金，見該條。

【生命保險】Life assurance 或 Life insurance. [算] 即人壽保險。

## 打

【打】Dozen. [算] 計個數之單位，12 個謂之一打。

## 矛

【矛盾】Inconsistent. [代] 若二以上方程式無共通之解答，謂之矛盾。例如  $ax + b = 0$ ，及  $a'x + b' = 0$ ，非  $ab' - a'b = 0$  則無共通之解答，即爲矛盾也。又欲  $ax + by + c = 0$ ， $a'x + b'y + c' = 0$ ， $a''x + b''y + c'' = 0$  不矛盾，必須  $a''(bc' - b'c) + b''(ca' - c'a) + c''(ab' - a'b) = 0$ 。

必

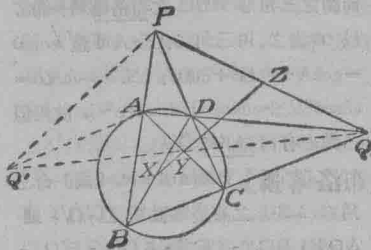
**【必要條件】** Necessary condition.

[數] 數學上常有所謂必要條件及充足條件。欲某事成立必不可不滿足之條件為必要條件。又滿足某條件時，某事必能成立，此條件為充足條件。例如於  $ab$ ，若  $a=0$  則  $ab=0$ ，故  $a=0$  為  $ab=0$  之充足條件。然欲  $ab=0$ ，則  $b=0$  即足，不必  $a=0$ ，故此條件非為必要條件。又  $ab=0$  時，則非  $a=0$  或  $b=0$  不可，故欲  $ab=0$ ，則  $a, b$  之一不可不為零，此條件為必要條件，而欲  $ab=0$ ，則  $a, b$  之一為零即足，故此為必要且充足條件。

**【必要且充足條件】** Necessary and sufficient condition. [數] 見必要條件條。

卡

**【卡兒定理】** Carr's theorem. [幾] 卡兒定理如次：ABCD 為圓之內接四邊形，而 BA, CD 之交點為 P; AD, BC 之交點為 Q; 若 X, Y, Z 各為 BD, AC, PQ 之中點，則  $AC:BD=2YZ:PQ=PQ:2xZ$ 。[證] 聯結 QY，延長至 Q'，使  $YQ'=QY$ 。如是則 QC, AQ' 相等且



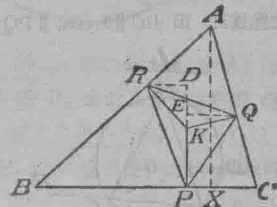
平行。故  $\angle Q'AP = (\angle Q'AB \text{ 之補角}) = (\angle ABC \text{ 之補角}) = \angle ADC = \angle PDQ$ 。又於相似三角形 PAC, PDB,  $AC:DB=PA:PD$ ; 於相似三角形 QCA, QDB,  $AC:DB=QC:QD$ ; 由是  $PD:QD=PA:QC=PA:AQ'$ 。故三角形 PDQ, PAQ' 相似， $\therefore AC:BD=PA:PD=PQ':PQ=2YZ:PQ$ 。同樣  $BD:AC=2xZ:PQ$ ，故  $AC:BD=2YZ:PQ=2xZ:PQ$ 。

**【卡撓定理】** Carnot's theorem. [幾]

卡撓定理如次：圓錐曲線交三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 於  $a, a'; b, b'; c, c'$  時，則  $Ab \cdot Ab' \cdot Bc \cdot Bc' \cdot Ca \cdot Ca' = Ac \cdot Ac' \cdot Ba \cdot Ba' \cdot Cb \cdot Cb'$ 。

**【卡他郎定理】** Catalan's theorem.

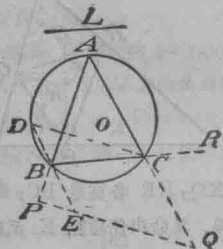
[幾] 卡他郎定理如次：由三角形內一點，至各邊作垂線，而其垂線上之正方形和為極小，則此點為聯結垂線之趾所成之三角之重心，又此點為原三角形之類似重心。[證] 命 K 為如題言之點，設



KP, KQ, KR 各為邊 BC, CA, AB 之垂線。又命由任意點 K 至此各邊之垂線為  $K'P', K'Q', K'R'$ ，則由假設  $\Sigma(KP^2) < \Sigma(K'P'^2)$ ，故  $\Sigma(KP^2)$

$< \Sigma(K^2/P^2)$ 。故  $K$  爲至  $\triangle PQR$  之各角頂之距離上正方形之和爲極小之點，由是  $K$  爲三點  $P, Q, R$  關於相等乘數之平均距離之中心，即  $K$  爲  $\triangle PQR$  之重心。次命  $RD, QE$  爲由  $\triangle PQR$  之  $D$  所引之中線之垂線，則  $RD=QE$ ，而  $\angle KRD = \angle BKD$  之餘角  $= \angle RBP$  之餘角  $= \angle BAX$  ( $AX$  爲  $BC$  之垂線)。同樣  $\angle KQE = \angle CAX$ 。由是  $\triangle KRD$  與  $\triangle BAX$  相似， $\triangle KQE$  與  $\triangle CAX$  相似，故  $KR:AB=RD:AX=QE:AX=KQ:AC$ 。同樣此值等於  $KP:BC$ 。由是  $K$  爲  $\triangle ABC$  之類似重心。

**【卡斯鐵龍問題】** Castillon's problem. [幾] 卡斯鐵龍問題爲求作三邊各過三與點而內接於與圓之三角形。欲解此問題須先解次之問題：求作底邊平行於與直線，他二邊各過二與點而內接於與圓之三角形。[解] 設  $ABC$  爲內接於圓  $O$  之所求之三角形，設  $BC$  平行於直線  $L, AB, AC$  各過與點  $P, Q$ 。由  $C$  引弦  $CD$  平行於  $PQ$ 。聯結  $DB$ ，命其與  $PQ$  之交點爲  $E$ 。因  $BC \parallel L, DC \parallel PQ$ ，故



$\angle DCB$  爲一定，因是弦  $DB$  爲一定。次

因  $\angle BAC = \angle BDC = \angle DEP$ 。故  $AB, EQ$  在同一圓周上，因是  $PE \cdot PQ = PB \cdot PA$ ，而爲一定。故  $E$  點爲一定。由是分  $PQ$  於  $E$ ，使  $PE \cdot PQ$  等於由  $P$  至  $O$  圓所引之切線上之正方形。過  $E$  引一割線  $EBD$ ，使  $BD$  等於前所求得之長。求  $BEQ$  之外接圓與  $O$  圓之交點  $A$ ，聯  $AQ$ ，命與  $O$  圓之交點爲  $C$ ，則  $ABC$  爲所求之三角形。

由是卡斯鐵龍問題可解之如次：設  $P, Q, R$  爲三與點，設  $ABC$  爲所求之三角形。由  $C$  引弦  $CD$  平行於  $PQ, DB$  之延長線與  $PQ$  之交點爲  $E$ ，則如前題所述， $E$  爲定點。由是先作三角形  $BCD$ ，其一邊  $DC$  平行於  $PQ$ ，他二邊各過定點  $E, R$ ，而內接於  $O$  圓。命  $PB$  之延長線與圓周之交點爲  $A$ ，則  $ABC$  爲所求之三角形。

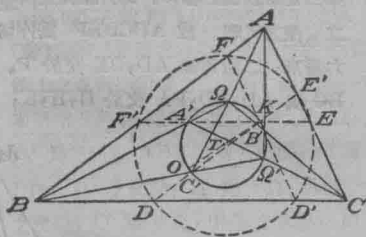
## 布

**【布洛喀角】** Brocard angle. [幾] 命三角形  $ABC$  之布洛喀點爲  $\Omega, \Omega'$ ，則  $\Omega AB, \Omega BC, \Omega CA, \Omega' AC, \Omega' CB, \Omega' BA$  六角皆相等 (圖見布洛喀點條)，而謂之三角形  $ABC$  之布洛喀角，通常以  $\omega$  表之。用三角法之公式可證  $\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$ 。又  $\operatorname{cosec}^2 \omega = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C$ 。故相似三角形有同布洛喀角。

**【布洛喀弧】** Brocard arc. [幾] 命三角形  $ABC$  之布洛喀點爲  $\Omega, \Omega'$ ，則  $A\Omega B, B\Omega C, C\Omega A, A\Omega' B, B'\Omega C,$

$\Omega, \Omega'$  六弧謂之布洛咯弧。

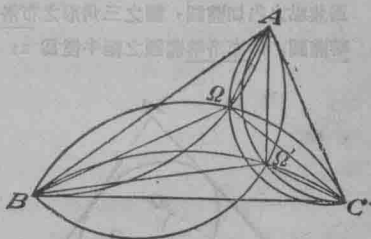
**【布洛咯圓】** Brocard circle. [幾] 以聯結三角形之外心與其類似重心之直線為徑之圓，謂之布洛咯圓。命三角形  $ABC$  之外心為  $O$ ，類似重心為  $K$ ，布洛咯點為  $\Omega, \Omega'$ ； $B\Omega, C\Omega'$  之交點為  $A'C\Omega, A\Omega'$  之交點為  $B'$ ， $A\Omega, B\Omega'$  之交點為  $C'$ ，則  $O, K, A', B', C', \Omega, \Omega'$  七點皆在布洛咯圓周上。〔證〕



命布洛咯角為 $\omega$ ，則  $\angle A'BC = \angle A'CB = \omega$ ，故  $A'B = A'C$ ，而  $A'$  在  $BC$  之垂直二等分線上，即  $OA'$  為垂直於  $BC$ ，又因由  $BC$  至  $A'$  之距離等於  $\frac{1}{2} a \tan \omega$ ，即等於由  $BC$  至  $K$  之距離。故  $A'K$  平行於  $BC$ 。由是知  $OA'K$  為直角。同理可證明  $OB'K, OC'K$  亦為直角。故點  $A', B', C'$  皆在以  $OK$  為徑之圓周上。又因  $\angle A\Omega C' = \angle \Omega AB + \angle \Omega BA = \omega + (B - \omega) = B = \angle A'KC'$ ， $\angle A'\Omega C' = \angle \Omega'CB + \angle \Omega'BC = \omega + (B - \omega) = B = \angle A'KC'$ 。故  $\Omega, \Omega'$  亦在以  $OK$  為徑之圓周上。故  $O, K, A', B', C', \Omega, \Omega'$  七點皆在布洛咯圓周上。

此圓為布洛咯所發明，布氏原稱之為七點圓，然今普通皆稱為布洛咯圓。因  $OK$  之中點下，又為三乘比圓  $DD' EE' FF'$  之中心。故三角形之布洛咯圓與三乘比圓為同心。又布洛咯圓之半徑與三乘比圓之半徑之比等於布洛咯圓之離心率。又連三點  $A', B', C'$  所成之三角形  $A'B'C'$  為三角形  $ABC$  之第一布洛咯三角形。

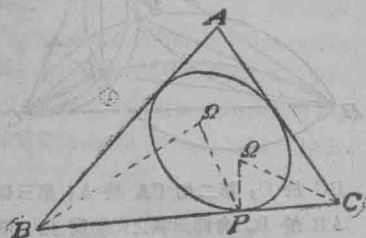
**【布洛咯點】** Brocard point. [幾] 於三角形  $ABC$  之邊  $CA, AB, BC$  上畫圓弧，第一切  $AB$  於  $A$ ，第二切  $BC$  於  $B$ ，第三切  $CA$  於  $C$ ；此三弧交於一點  $\Omega$ ，則  $\Omega$  謂之正布洛咯點。又於邊  $CA, AB, BC$  上畫圓弧，此次第一切



$BC$  於  $C$ ，第二切  $CA$  於  $A$ ，第三切  $AB$  於  $B$ 。命此三弧之交點為  $\Omega'$ ，則  $\Omega'$  謂之負布洛咯點。由  $\Omega, \Omega'$  至三角形  $ABC$  之三邊作垂線，可求得正布洛咯點  $\Omega$  之三線坐標為  $2R \frac{c}{b} \sin^2 \omega$ ， $2R \frac{a}{c} \sin^2 \omega$ ， $2R \frac{b}{a} \sin^2 \omega$ ，負布洛咯點  $\Omega'$  之三線坐標為  $2R \frac{b}{c} \sin^2 \omega$ ， $2R \frac{c}{a} \sin^2 \omega$ ， $2R \frac{a}{b} \sin^2 \omega$ 。

$2R \frac{c}{a} \sin^2 \omega, 2R \frac{a}{b} \sin^2 \omega$ . 又  $A\Omega \cdot B\Omega \cdot C\Omega = A\Omega' \cdot B\Omega' \cdot C\Omega'$ . 今求二布洛喀點間之距離如次: 因  $\angle \Omega A \Omega' = \angle BAC - \angle BA\Omega - \angle CA\Omega' = A - 2\omega$ , 故  $\Omega\Omega'^2 = A\Omega^2 + A\Omega'^2 - 2A\Omega \cdot A\Omega' \cos(A - 2\omega) = 4R^2 \sin^2 \omega \frac{1}{a^2} \{ b^2 + c^2 - 2bc \cos(A - 2\omega) \} = 4R^2 \sin^2 \omega \frac{1}{a^2} \{ a^2 + 2bc \cos A - 2bc \cos(A - 2\omega) \} = 4R^2 \sin^2 \omega \{ 1 - \frac{4bc}{a^2} \sin \omega \cos(A - 2\omega) \} = 4R^2 \sin^2 \omega \{ 1 - 4 \sin^2 \omega \}$ .

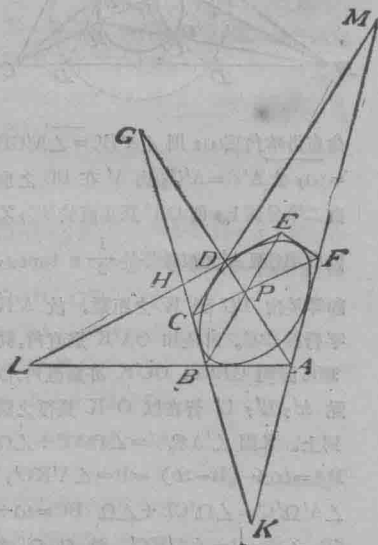
**【布洛喀橢圓】** Brocard ellipse. [幾] 以三角形  $ABC$  之二布洛喀點  $\Omega, \Omega'$  爲焦點之內切橢圓, 謂之三角形之布洛喀橢圓. 命布洛喀橢圓之兩半徑爲  $a_1$



及  $b_1$ , 則得  $b_1^2 = (\text{由 } \Omega, \Omega' \text{ 至 } BC \text{ 上之垂線之積}) = 2R \frac{c}{b} \sin^2 \omega, 2R \frac{b}{c} \sin^2 \omega = 4R^2 \sin^4 \omega$ , 又  $a_1^2 = b_1^2 + \frac{1}{4} \Omega\Omega'^2 = 4R^2 \sin^4 \omega + R^2 \sin^2 (1 - 4 \sin^2 \omega) = R^2 \sin^2 \omega$ . 故布洛喀橢圓之兩半

徑之長各等於  $R \sin \omega$  及  $2R \sin^2 \omega$ . 又因三角形  $\Omega BP, \Omega' CP$  相似, 故  $BP : PC = B\Omega : C\Omega' = 2R \frac{c}{b} \sin \omega : 2R \frac{b}{c} \sin \omega = c^2 : b^2$ . 由是三角形之布洛喀橢圓分三角形之任意邊於切點, 使其鄰邊之平方成比例.

**【布立安深定理】** Brianchon's theorem. [幾] 外切於圓錐曲線之六角形, 其三雙對頂點之聯線, 爲共點線是爲布立安深之定理. 設  $ABCDEF$  爲外切六邊形, 二對角線  $AD, BE$  交於  $P$ .  $BC$  與  $AD, ED, FA$  交於  $G, H, K$ ;



$AB$  與  $ED$  交於  $L$ ;  $AF$  與  $CD$  交於  $M$ . 則  $(APDG) = B(APDG) = (LE$



DE)=(AFMK),因一圓錐曲線之四定切線與此外任一切線之交點皆成等十字比列點故也。故(APDG)=C(AFDG)。故射線 CF 過 P, 即 AD, BE, CF 為共點線。因布立安深定理與巴斯開定理互相對應, 故布立安深定理必如次述之, 方為完全: 一圓錐曲線六切線相交之十五點, 相交於合六十點 (每三線過一點) 之十五直線上。

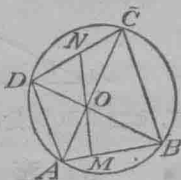
【布洛喀三角形】Brocard triangle.

〔幾〕聯結三角形之外心在其來莫恩平行線上之正射影所成之三角形, 謂之第一布洛喀三角形。此又可述之如次。命  $\Omega$ ,  $\Omega'$  為三角形 ABC 之布洛喀點,  $A'$  為  $B\Omega$ ,  $C\Omega'$  之交點,  $B'$  為  $C\Omega$ ,  $A\Omega'$  之交點,  $C'$  為  $A\Omega$ ,  $B\Omega'$  之交點, 則聯  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  所成之三角形謂之第一布洛喀三角形(圖見布洛喀圖條)。聯結三角形之各角頂與其類似重心之直線與布洛喀相交之三點所聯成之三角形, 謂之第二布洛喀三角形。

【布拉美古他定理】Brahmegupta's

theorem. 〔幾〕布拉美古他定理如次: 若圓內接四邊形之二對角線互相垂直時, 則由其交點引任意邊之垂線必二等分對邊。於內接四邊形 ABCD, 設  $AC \perp BD$ , 命其交

點為 O。由 O 引 AB 之垂線 OM, 命 MO 之延長線交 CD 於 N 點。因



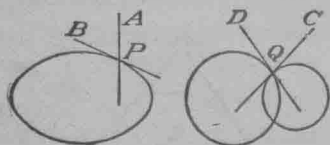
$\angle CON = \angle AOM = \angle R - \angle BOM = \angle OBM = \angle OCN$ . 故  $NC = NO$ . 同樣可證明  $DN = NO$ . 故  $DN = NC$ .

## 六 畫

## 交

【交】 To intersect. [幾] 線與線，線與面，面與面相截之謂也。例如線與線之交爲點，線與面之交亦爲點，平面與平面之交爲直線，平面與球面之交爲圓，平面與曲線之交爲曲線。

【交角】 Angle of intersection. [幾] 直線與直線，直線與曲線，或曲線與曲線相交之角之謂。但於曲線一點之方向，以占該點之切線定之，故直線與切線間之角，即直線與在其交點曲線之切線間之角之謂，而切線與切線間之角，即於其交點二曲線之二切線間之角之謂也。如圖直線



與橢圓之交角爲  $APB$ ，二圓之交角爲  $CQD$ 。

【交線】 Line of intersection. [幾] 平面與平面，平面與曲面，或曲面與曲面相交之線之謂也。但平面與平面之交線爲直線，平面與曲面之交線爲曲線，曲面與曲面之交線亦爲曲線。

【交點】 Point of intersection. [幾] 直線與直線，直線與曲線，或曲線與曲線相交之點之謂也。又於立體幾何學中，線

與面相交之點亦謂之交點。

【交代式】 Alternating expression.

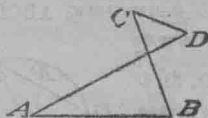
[代] 含若干字母之式，於其中交換任何二字母，惟變其符號之式，稱爲此等字母之交代式。例如於  $(b-c)(c-a)(a-b)$  式，交換  $a$  及  $b$  時，則得  $(a-c)(c-b)(b-a)$ ，即  $-(b-c)(c-a)(a-b)$ ，故  $(b-c)(c-a)(a-b)$  爲  $a$  及  $b$  之交代式。又同樣  $b$  及  $c$ ， $c$  及  $a$ ，可得絕對值相等，符號相反之式。故  $(b-c)(c-a)(a-b)$  爲  $a, b, c$  之交代式。交代式有次之性質：(1) 交代式與對稱式之積爲交代式。(2) 交代式與對稱式之二商爲交代式。(3) 交代式及交代式之積或商爲對稱式。(4) 偶數個交代式之連乘積爲對稱式。(5) 奇數個交代式之連乘積爲交代式。(6) 若干字母之交代式，若此等字母中任何二者相等，則交代式爲零。(7) 若干字母之交代式，若此等字母中任何二者之差能整除者，則其各差之連乘積能整除之。

【交換定則】 Commutative law. [數]

見基本定則條。

【交截四邊形】 Cross quadrilateral.

[幾] 二邊交截之四邊形謂之交截四邊



形。如圖  $ABCD$  是也。

充

【充足條件】Sufficient condition.

〔幾〕見必要條件條。

### 仰

【仰角】Angle of elevation. 〔三〕垂直  
角之一邊在水平面上而他邊向上者謂之  
仰角。

### 全

【全等】Identically equal 或 Congruent. 〔幾〕當一形可置於他形上而適重合者謂之全等。二形全等時則其相當部分各相等，而其面積亦等。

【全面積】Total area. 〔幾〕錐體，柱體，角台，或柱台之側面積與其底面積之和為全面積。

【全等形】Congruent figures. 〔幾〕全等形者，面積，形狀全相等之形之謂也。

### 列

【列點】Range. 〔幾〕在一直線上—羣之點而服從某條件者之謂，例如調和列點是也。

### 劣

【劣比】Ratio of less inequality. 〔代〕於比  $a:b$ ，當  $a < b$  時謂之劣比， $a > b$  時謂之優比， $a = b$  謂之等比。故劣比小於 1，優比大於 1，等比等於 1。

【劣角】Minor angle. 〔幾〕見角條。

【劣弧】Minor arc. 〔幾〕圓之二弧合成全圓周時，其小者謂之劣弧。

【劣弓形】Minor segment. 〔幾〕見弓形條。

【劣共軛角】Minor conjugate angle. 〔幾〕共軛角之小者之謂，同劣角，見角條。

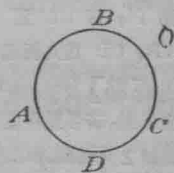
【劣共軛弧】Minor conjugate arc. 〔幾〕共軛弧之小者之謂，同劣弧，見共軛弧條。

【劣共軛弓形】Minor conjugate segment. 〔幾〕共軛弓形之小者之謂，同劣弓形，見弓形條。

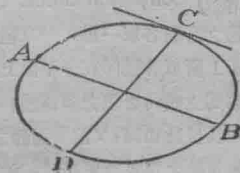
### 共

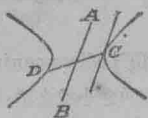
【共軛角】Conjugate angles. 〔幾〕二角合成四直角者，則此二角互為共軛角。見角條。

【共軛弧】Conjugate arcs. 〔幾〕圓之二弧合成一全圓周者，則此二弧互為共軛弧。其大者謂之優弧或優共軛弧，如圖 ABC 弧是也；其小者謂之劣弧或劣共軛弧，如圖 ADC 弧是也。



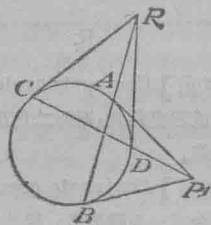
【共軛徑】Conjugate diameters. 〔幾〕曲線（例如橢圓或雙曲線）之一徑 AB 平





行於他徑  $CD$  之端  $C$  之切線時,  $AB$ ,  $CD$  二徑互為共軛。

**【共軛線】** Conjugate lines. [幾] 任意二直線, 若各線過他線對於一曲線之極點, 則此二線謂之對於該曲線之共軛線。

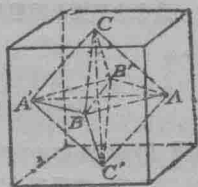


如圖直線  $AB$  過直線  $CD$  對於圓之極點  $P'$ , 而  $CD$  過  $AB$  之極點  $P$ ; 故  $AB$ ,  $CD$  為共軛線。

**【共軛點】** Conjugate points. [幾] 任意二點, 若各點在他點之極線上, 則此二點謂之共軛點。如前圖  $P$  點在  $P'$  點之極線  $CD$  上, 而  $P'$  點在  $P$  點之極線  $AB$  上, 故  $P, P'$  為共軛點。

**【共軛體】** Conjugate solids. [幾] 於多面體之各面各取一點, 一立體角之周圍之面上所取各點同在一平面上。以是等之點為立體角之頂之多面體, 與前之多面體其稜數相同, 又前多面體之面數, 與後多面體之頂點之數相同, 前多面體

之頂點之數, 與後多面體之面數相同。此由 Euler 定理  $F+V=E+2$  甚明。如斯稜數相等面數與立體角之數彼此交換之二多面體謂之共軛。例如於立方體各



面之中心取  $A, A', B, B', C, C'$ , 以之為角頂作一多面體, 得正八面體, 故立方體與正八面體互為共軛。同樣正十二面體與正二十面體互為共軛, 又四面體之共軛體亦為一四面體。

**【共軸圓】** Co-axial circles. [幾] 即同軸圓, 見該條。

**【共圓點】** Concyelic points. [幾] 四以上之點在同一圓周上者之謂也。例如於九點圓, 九點在同一圓周上; 於 Brocard 圓, 五點在同一圓周上; 於三乘比圓, 餘弦圓, Taylor 圓, Tucker 圓, 各有六點在同一圓周上。

**【共線性】** Collinearity. [幾] 三以上之點在同一直線上之謂也。  $X, Y, Z$  為  $\triangle ABC$  之邊  $BC, CA, AB$  (或延線) 上之點, 若  $X, Y, Z$  為共線, 則  $\frac{AZ}{BZ}$ ,

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = -1$$

**【共線點】** Collinear points. [幾] 三以

上之點在同一直線上者之謂也。共線點之最普通者如次：(1)一三角形之各角之外二等分線交對邊之延長線之三點。(2)三角之二角之內二等分線，及第三角之外二等分線交對邊(或延長線)之三點。(3)於三角形之各邊(或延長線)上取一點之三點為共線時，則於其邊上，由其邊之中點與此等點等距離所取之三點。(4)由任意一點取三角形之各頂點之三直線間之角，二內二等分線，一外二等分線與對邊之交點。(5)由三角形之外接圓周上任意一點至三邊(或延長線)之垂線之足(即西摩孫線)。(6)於外接圓上三頂點之切線與三邊之交點。(7)三角之外心，重心，垂心，九點圓心。

【共點性】Concurrence. [幾] 三以上之直線交於同一點之謂也。X, Y, Z 為  $\triangle ABC$  之邊 BC, CA, AB 上之點，若 AX, BY, CZ 為共點，則  $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$

又如 X, Y, Z 為  $\triangle ABC$  之邊 BC, CA, AB 上之點，若過 X, Y, Z 之垂線為共點，則  $(BX^2 - CX^2)(CY^2 - AY^2)(AZ^2 - BZ^2) = 0$ 。

【共點線】Concurrent lines. [幾] 三以上直線交於同一點者之謂也。其最普通者如次：(1)三角形三邊之中垂線。(2)三角形之三高。(3)三角形之三中線。(4)三角形之各角之內二等分線，或二角之外二等分線及第三角之內二等分線。(5)於三角形之各邊上三傍圓之切

點所作之垂線。(6)二傍切圓於過同角頂二邊上之切點及該角頂之對邊與內切圓之切點所作之垂線。(7)於二二相切之三圓之切點之切線。(8)若於三角形垂直於各邊之一組直線同點時，由其邊之中點等距離點之三垂線為共線。(9)若由一三角形之各頂點至第二三角形之各邊所作三垂線為共點，則由第二三角形之各頂點至第一三角形之各邊所作相對應之三垂線亦為共線。

【共軛弓形】Conjugate segments.

[幾] 圓被弦所分成之二部分互為共軛弓形。

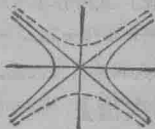
【共軛虛數】Conjugate imaginaries.

[代] 即共軛複虛數。

【共軛複虛式】Conjugate complex expressions. [代] 同共軛複虛數。

【共軛複虛數】Conjugate complex numbers. [代] 如  $a + b\sqrt{-1}$  及  $a - b\sqrt{-1}$  為共軛複虛數，普通以  $a + ib$  及  $a - ib$  表之。

【共軛雙曲線】Conjugate hyperbolas. [幾] 一雙曲線之橫軸為他雙曲線之縱軸，而其縱軸為他曲線之橫軸時，此二雙曲線謂之共軛雙曲線。如圖共軛雙曲線有共同之漸近線。



【共軛二次不盡根】Conjugate quadratic surds. [代] 如  $a + \sqrt{b}$  及  $a - \sqrt{b}$  謂之互為共軛二次不盡根。

**【共軛二次不盡根式】** Conjugate-quadratic surd expressions. [代] 即共軛二次不盡根。

同

**【同一法】** Rule of identity. [幾] 若僅有一 A 與一 B, A 爲 B, 則 B 爲 A, 如是之推論謂之同一法。例如於二等邊三角形頂角之二等分線惟有一, 底之垂直二等分線亦惟有一, 而已知頂角之二等分線爲底之垂直二等分線, 則底之垂直二等分線亦爲頂角之二等分線。

**【同心圓】** Concentric circles. [幾] 同心圓者二以上之圓同中心者之謂, 如圖 A, B, C 三圓之中心同爲 O。



**【同名數】** Like numbers. [算] 例如 2 尺與 3 尺, 5 斤與 3 斤爲同名數然 3 圓與四角, 或 5 里與 100 丈則不爲同名數。

**【同次式】** Homogeneous expression. [代] 式由各項爲同次者之謂, 例如  $a^3+2a^2b+3ab^2+b^3$  爲一三次同次式。同次式亦稱齊次式。

**【同次積】** Homogeneous product. [代] 由 n 文字每次取 r 個作種種之積, 各文字可重複取任何次, 是等之積謂之同次積或齊次積, 其數以  ${}_nH_r$  表之。例如由 a, b, c 三文字取二文字所作之同次積爲  $a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca$ , 此時

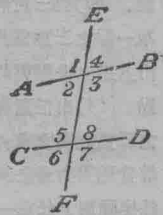
${}_nH_3 = {}_nH_2 = 6$ . 而普通

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots r}$$

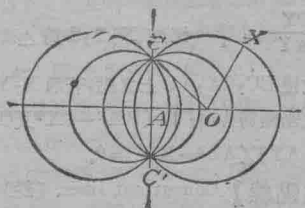
尙見重複組合條。

**【同位角】** Corresponding angles. [幾]

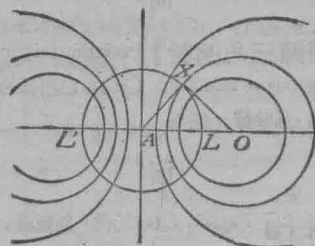
二直線 AB, CD 被他直線 EF 所截時得八角, 其中 1 與 5, 2 與 6, 3 與 7, 4 與 8 稱爲同位角。若二直線爲平行線則其與截線所成之同位角相等, 其逆定理亦成立。



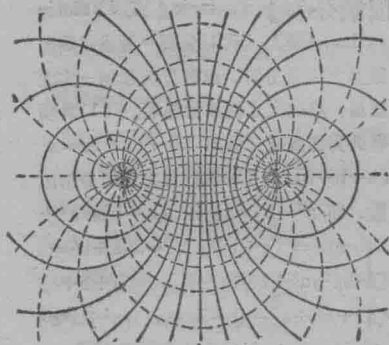
**【同軸圓】** Coaxal circles. [幾] 一組有同聯心線及同根軸之圓謂之同軸圓。若 O 及 OX 爲同軸圓之一組之可變易之中心及半徑, 由同軸圓之定義  $OA^2 \sim OX^2$  爲對於一組諸圓之常數, 命之爲  $\delta^2$ 。(1)若同軸圓之一組中任意二圓交



於 C 及 C' 點時, 則此一組之圓皆通過 C 及 C' 點, 而此一組之圓謂之相交同軸圓。此時  $CA = \delta = C'A$ , 而以  $\delta$  爲半徑之圓爲一組中之最小者。(2)若同軸圓之一組不相交時, 則此一組之圓謂之



不相交同軸圓。此時 O 可漸近於  $AL = S$  之 L 點，而  $OX$  漸減小。而 L 點為圓之半徑無窮小之極限。根軸之他側亦有  $L'$  點與 L 相當。L 及  $L'$  謂之限點，相交同軸圓與不相交同軸圓一組之數無限，且無有限大之極大圓，然根軸為一組之圓之增大之極限。考此圖知凡同軸圓之一組必有他組與之相聯，各組



之各圓與他組之各圓直交，二組之中，一組為相交同軸圓，而他組為不相交同軸圓，後者之限點即為前者之公共點。

【同類項】 Like terms, 或 Similar terms. [代] 二項係數字係數異時，謂之同類項。例如  $2a^2b^3c$  及  $5a^2b^3c$  為同類項。

【同次對稱式】 Homogeneous, symmetrical expression. [代] 同次且對稱之式之謂，例如  $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$  是也。

【同類不盡根】 Similar surds. [代] 當二不盡根可化為有相同之無理因數時，則此二不盡根謂同數不盡根。例如  $2\sqrt{2}$  與  $5\sqrt{2}$  為同類不盡根或相似不盡根。

【同末位循環節】 Conterminous repetend. [算] 見循環小數條。

【同初位循環節】 Similar repetend. [算] 見循環小數條。

## 合

【合計】 Total 或 Amount 或 Aggregation. [數] 二以上之量或數相加之結果之謂也。亦稱總計。

【合數】 Composite number. [算] [代] 即非素數，見該條。

【合變】 To vary jointly. [代] 一量因他諸量之積而正變時，則此量謂之因他諸量而合變。如  $A = mBC$ ，而  $m$  為常數，則  $A$  因  $A$  與  $B$  合變，而以  $A \propto BC$  表之。例如利息因本金，期間，及利率而合變。

【合同形】 Congruent figures. [幾] 與全等形同。見該條。

【合資算】 Partnership 或 Fellowship.

〔算〕數人合出資本，共同營商業，比例於其出資之額，或比例於出資之額及出資之期間，以分配利益擔負損失之算法也。合資算有單複二種：單合資算僅比例於出資之額，複合資算比例於出資之額及出資之期間，分配利益或擔負損失之法之謂也。

【合比之理】Componendo.〔代〕〔幾〕

$a:b=c:d$  時，則  $a+b:b=c+d:d$ 。是

謂之合比之理。因  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，故  $\frac{a}{b} + 1$

$= \frac{c}{d} + 1$ ，即  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ，或

$a+b:b=c+d:d$ 。

## 名

【名數】Concrete number 或 Denominate number.〔算〕數之屬於特別單位者之謂也。例如 5 尺，3 斤，6 分是也。名數對於不名數而言。

## 向

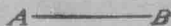
【向】Sense.〔代〕〔幾〕向有二意義：

其一不等式之向之謂，例如於不等式

$a > b$ ，兩邊以  $-1$  乘之，則謂之變不等式之向，即  $-a < -b$  也。又一為直線之

向之謂，例如有限直線 AB，由 A 至 B 之向與由 B

至 A 之向相



反。故謂直線 AB 為由 A 至 B 之向，謂直線 BA 為由 B 至 A 之向。而  $AB = -BA$ ， $AB + BA = 0$ 。

## 回

【回歸三角函數】Periodic trigonometrical function.〔三〕即週期三角函數，見該條。

## 因

【因子】Factor.〔算〕〔代〕同因數，見該條。

【因數】Factor.〔算〕〔代〕當二以上諸數相乘時，此等諸數謂之其積之因數。或可除盡某數之數謂之前數之因數。例如 2, 3, 4, 6 為 12 之因數。求某數之諸因數之法見非素數條。分解代數式為因數，見因數分解條。

【因果法】〔算〕見複比例條。

【因變數】Dependent variable.〔代〕見變數條。

【因數分解】Factoring 或 Factorisation.〔算〕〔代〕分解一數或式為因數謂之因數分解。因數分解雖無一定之法則，然如次之例為常遇者。(1)各項

有公共之因數，例如  $ax+bx+cx=x(a+b+c)$ 。(2)依已知之式而分解因數。即  $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ， $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ， $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ， $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ， $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ 。

(3) $n$  為偶數時， $a^n-b^n$  可以  $a+b$  除之。(4) $n$  為奇數時， $a^n+b^n$  可以  $a+b$  除之。(5)不論  $n$  為奇數或偶數， $a^n-b^n$



常可以  $a-b$  除之。(6)  $x^2+(a+b)x+ac=(x+a)(x+b)$ 。(7) 普通二次式  $ax^2+dx+c=$

$$a \left\{ x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \right\} \times$$

$$\left\{ x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \right\}.$$

(8) 若  $f(x)$  爲  $x$  之有理函數，而  $f(\infty)=0$ ，則  $x-\infty$  爲  $f(x)$  之一因數。例如  $x^3-2x^2+1$ ，當  $x=1$  時爲 0，故  $x-1$  爲  $x^3-2x^2+1$  之一因數，即  $x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)$ 。(9)  $p$  爲素數且  $p$  與  $N$  互爲素數，則  $p$  爲  $N^{p-1}-1$  之一因數。(10) 若  $p$  爲素數，則  $p$  爲  $|p-1+1|$  之一因數。(11) 含  $a+b\sqrt{-1}$  之虛函數之有理式，亦必含  $a-b\sqrt{-1}$  之虛因數。次所述之公式爲於因數分解常用之者。即

$a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2)$ 。  
 $\Sigma a^2+2\Sigma ab=(a+b+c)^2$ 。  
 $2\Sigma a^2b^2-\Sigma a^4=(a+b+c) \times (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ 。  
 $\Sigma a^3+3\Sigma b(b+c)+6abc=(a+b+c)^3$ 。  
 $x^3+x^2\Sigma a+\Sigma ab+2bc=(x+a)(x+b)(x+c)$ 。

$$a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2).$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma a^2+2\Sigma ab &= (a+b+c)^2, \\ 2\Sigma a^2b^2-\Sigma a^4 &= (a+b+c) \times \\ & \quad (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c), \\ \Sigma a^3+3\Sigma b(b+c)+6abc &= \\ & \quad (a+b+c)^3. \end{aligned} \right\}$$

$$x^3+x^2\Sigma a+\Sigma ab+2bc=(x+a)(x+b)(x+c).$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(b-c) &= 0, \\ \Sigma a(b-c) &= 0, \\ \Sigma(b+c)(b-c) &= 0, \\ \Sigma bc(b-c) &= -(b-c)(c-a)(a-b), \\ \Sigma a^2(b-c) &= -(b-c)(c-a)(a-b), \\ \Sigma a(b^2-c^2) &= (b-c)(c-a)(a-b), \\ \Sigma bc(b+c)+2abc &= (b+c)(c+a)(a+b), \\ \Sigma a^3+\Sigma bc(b+c) &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2), \\ \Sigma a^2(b+c)+3abc &= (a+b+c)(bc+ca+ab), \\ \Sigma a^2(b+c)-\Sigma a^3-2abc &= \\ & \quad (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c). \end{aligned} \right\}$$

但於上之諸式中皆假定對於  $a, b, c$  三者。

$$\left. \begin{aligned} (x \pm y)^2 \mp 4xy &= (x \mp y)^2, \\ x^3 \pm y^3 &= (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2), \\ \text{而一般} \\ x^n - y^n &= (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-3} + y^{n-1}), \\ x^n \pm y^n &= (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots \mp xy^{n-2} \pm y^{n-1}). \end{aligned} \right\}$$

但  $n$  爲奇數則取上之符號，若爲偶數則取下之符號。

由三角法，當  $n$  爲奇數， $x^n-1$  可分解爲

$$(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\dots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-3)\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right),$$

$$\text{而以 } (x-1) \prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - 2x \cos \frac{2s\pi}{n} + 1)$$

表之。

當  $n$  爲偶數，則

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1) \prod_{s=1}^{\frac{n-2}{2}} (x^2 - 2x \cos \frac{2s\pi}{n} + 1).$$

又當  $n$  爲奇數，則

$$x^n + 1 = (x+1) \prod_{s=0}^{\frac{n-3}{2}} (x^2 - 2x \cos \frac{(2s+1)\pi}{n} + 1).$$

當  $n$  爲偶數，則

$$x^n + 1 = \prod_{s=0}^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - 2x \cos \frac{(2s+1)\pi}{n} + 1).$$

又由三角法  $x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1$  可分解爲

$$(x^2 - 2x \cos \frac{\theta}{n} + 1)(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi + \theta}{n} + 1)$$

$$(x^2 - 2x \cos \frac{4\pi + \theta}{n} + 1) \dots \dots \dots$$

$$(x^2 - 2x \cos \frac{2n-1\pi + \theta}{n} + 1);$$

$$\text{而以 } \prod_{s=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{2s\pi + \theta}{n} + 1)$$

表之。

【因數定理】Factor theorem. [代]由

剩餘定理，知以  $x-\alpha$  除  $x$  之有理整式

$f(x)$ ，其剩餘爲  $f(\alpha)$ 。若剩餘爲零，則

所與之式可以  $x-\alpha$  除盡。由是得次之

重要定理：——若  $x$  之有理整式，以  $\alpha$

代  $x$ ，此式爲 0，則此式含因數  $x-\alpha$ 。

是謂之因數定理。此定理可用以求一式

之因數。例如分解  $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

爲因數。由試驗知當  $x=3$ ，此式爲零；

故  $x-3$  爲其一因數。故  $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

$= x^2(x-3) + 6x(x-3) + 5(x-3) = (x-3)$

$(x^2 + 6x + 5) = (x-3)(x+1)(x+5)$ 。

【因數除法】Division by factors.

[算] [代] 分解除數爲因數，依次以其

各因數除被除數而求其商及餘數之方法

也。例如以 21 除 819，而  $21 = 3 \times 7$ ，如

右所示。又如

以 56 除 6737，

而  $56 = 7 \times 8$ ，

如右所示。

而商爲 120，及

餘數  $= 3 + 2 \times 7 = 17$ 。

多

【多角形】Polygon. [幾] 多角形者三

以上直線所圍之平面之一部之謂也。而

此等直線謂之多角形之邊，邊與邊之交

點謂之多角形之頂，諸邊之和謂之多角

形之周圍。多角形又從其邊數或角數而

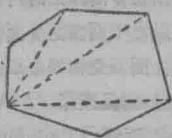
分三角形(三邊形)，四邊形(四角形)，

五角形(五邊形)等等。多角形之諸邊相

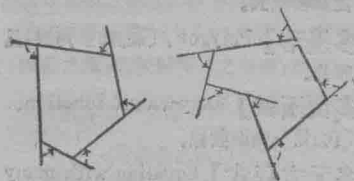
等者謂之等邊形，諸角相等者謂之等角

形，等邊等角之多角形謂之正多角形。多角形之任一角小於二直角時謂之凸多角形，一以上之角為凹角時謂之凹多角形。

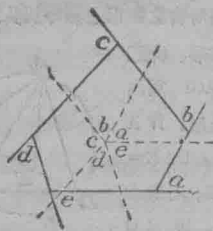
(1)  $n$  邊之多角形諸內角之和等於  $2(n-2)$  直角。由多角形之一角頂至相對之  $n-3$  角頂引對角線分本形為  $n-2$  三角形。



因各三角形之內角之和為  $2$  直角，故諸三角形之內角之和等於多角形之內角之和等於  $(n-2) \times 2 \angle R$  即  $2(n-2) \angle R$ 。(2) 任意多角形依次引長諸邊，其所作諸外角之和等於  $4$  直角。因一內角與其相鄰



之外角之和等於  $2 \angle R$ ，故諸內角及外角之和等於  $n \times 2 \angle R$ ，即  $2n \angle R$ 。然諸內角之和等於  $2(n-2) \angle R$ ，故諸外角之和等於  $4 \angle R$ 。此理又可證之如次，如圖，



由多角形之平面上一點引平行於各邊之直線，各外角等於一點之周圍所生之角，故等於  $4$  直角。

【多角數】 Polygonal numbers. [代]

$n + \frac{1}{2} n(n-1)d$  式為表首項為  $1$  公差為  $d$  之等差級數  $n$  項之和，於此式依次令  $d=0, 1, 2, 3, \dots$  時，則得二次，三次，四次，五次，……之多角數之公項。但一次之多角數假定其各項為  $1$  者即

| 次數 | 第 $n$ 項               | 級數                  |
|----|-----------------------|---------------------|
| 1  | 1                     | 1, 1, 1, 1, ……………   |
| 2  | $n$                   | 1, 2, 3, 4, ……………   |
| 3  | $\frac{1}{2} n(n+1)$  | 1, 3, 6, 10, ……………  |
| 4  | $n^2$                 | 1, 4, 9, 16, ……………  |
| 5  | $\frac{1}{2} n(3n-1)$ | 1, 5, 12, 22, …………… |

餘做此。而二次，三次，四次，五次，……之級數各謂之直線數，三角數，四角數，五角數，……。  $r$  次之多角數即  $r$  角數之第  $n$  項為  $n + \frac{1}{2} n(n-1)(r-2)$ ，而此級數之  $n$  項之和為  $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{r-2}{2}$

$\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ ，即  $\frac{1}{6} n(n+1)$

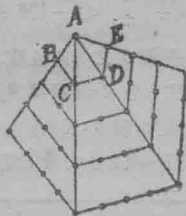
$\{(r-2)(n-1)+3\}$ 。由是對於三角數， $S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$ ，對於四

角數  $S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ ，對

於五角數  $S_n = \frac{1}{2} n^2(n+1)$ , 等等。

而普通作  $r$  角數之圖之法, 先畫正  $r$  角形  $ABCDE$  (茲假定畫正五角形, 然任何正多角形其理皆同), 由其一角頂  $A$  過他角頂  $B$ ,

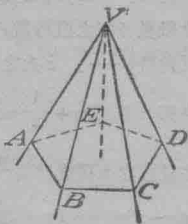
$C, D, E$  引數直線, 而取  $AB$  之二倍, 三倍, …之長以爲一邊而作以  $A$



爲公共角之正多角形, 於此等多角形之周圍, 如圖, 有原多角形之距離處作黑點時, 則  $r$  角數之第一項爲在  $A$  之一點, 第二項爲在第一多角形  $ABCDE$  之各角頂諸點, 第三項爲第一第二多角形之周圍諸點, 如是類推, 可表其他諸項。

【多面角】Polyhedral angle. [幾] 三以上平面相交於一點時, 此等平面謂之成一多面角或立體角。

例如  $V-AB$   
 $CDE$  是也。  
而其交點  $V$   
謂之多面體  
之頂點, 面



與面之交謂之多面角之稜, 而相鄰二稜間之平面角謂之多面角之面角, 多面角因其包圍之平面之數而謂之三面角, 四面角等等。

【多面體】Polyhedron. [幾] 多角形之

面所包圍之立體之謂也, 其包圍之多角形謂之多面體之面, 面與面相交之直線謂之多面體之稜, 多面角之頂謂之多面體之頂, 聯結不同平面之二頂點之直線謂之多面體之對角線, 過不同平面三頂點之平面謂之多面體之對角面, 多面體之面爲全相等之正多角形時謂之正多面體, 詳見該條。

【多項式】Polynomial 或 Polynomial expression 或 Multinomial expression. [代] 由二以上之項而成之式之謂, 因項數爲 2, 3, … 而稱之爲二項式, 三項式, … 例如  $a+b$  爲二項式,  $2x+3y+4z$  爲三項式; 二項式, 三項式, … 通稱之爲多項式。

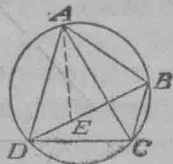
【多邊形】Polygon. [幾] 即多角形, 見該條。

【多價函數】Many-valued function. [代] 見一價函數條。

【多元方程式】Equation with many unknown numbers. [代] 方程式之含二以上未知數者之謂, 例如  $2x+5y+7z=0$ , 是也。

【多來米定理】Ptolemy's theorem. [幾] 多來米定理如次: 圓內接四邊形二對對邊所含之矩形之和等於其對角線所

含之矩形。[證] 命  $ABCD$  爲內接四邊形。作  $AE$ , 使  $\angle DAE = \angle CAB$ , 而交  $BD$  於  $E$ 。因  $\angle D$



$AE = \angle CAB$ , 及  $\angle ADE = \angle ACB$ , 故  $\triangle DAE, CAB$  相似, 故  $AD:AC = DE:CB$ .  $\therefore AD \cdot CB = AC \cdot DE$ . 又因  $\angle EAB = \angle DAC$ ,  $\angle ABE = \angle ACD$ , 故  $\triangle EAB, DAC$  相似, 故  $AB:AC = EB:DC$ , 故  $AB \cdot DC = AC \cdot EB$ . 故  $AD \cdot CB + AB \cdot DC = AC \cdot DE + AC \cdot EB = AC(DE + EB) = AC \cdot DB$ . 此定理可用以證明三角內之若干公式, 如加式, 減式是也. 見和角之三角函數及差角之三角函數條.

**【多項式定理】** Multinomial theorem. [代] 展開多項式之任意乘冪之公式之謂. 求  $(a+b+c+d+\dots)^p$  之展開之任意項之係數, 但  $p$  為正整數. 此展開式為各等於  $a+b+c+d+\dots$  之  $p$  個因數之積, 而於展開式之各項, 為由此  $p$  個因數各取一字母而成. 故任意項  $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots$  於最後之積內所表之數, 等於  $p$  個字母 (其中  $\alpha$  個為  $a$ ,  $\beta$  個為  $b$ ,  $\gamma$  個為  $c$ ,  $\delta$  個為  $d$ ,  $\dots$ ) 之排列之數. 即  $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots$  之係數為  $\frac{p!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta! \dots}$ , 但  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = p$ . 而於  $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^p$  之展開式含  $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots$  之項為  $\frac{p!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} a^\alpha (bx)^\beta (cx^2)^\gamma (dx^3)^\delta \dots$ , 即  $\frac{p!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta x^{\beta+2\gamma+3\delta+\dots}$ , 但  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = p$ . 是稱為多項展開式之公項. 例如於  $(a+bx+cx^2)^9$  之展開式求  $x^5$  之

係數. 此展開式之公項為  $\frac{9!}{\alpha! \beta! \gamma!} a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta+2\gamma} \dots (1)$ . 但  $\alpha + \beta + \gamma = 9$ . 由觀察知適合  $\beta + 2\gamma = 5$  之  $\beta$  與  $\gamma$  之值, 然後由  $\alpha + \beta + \gamma = 9$  求得  $\alpha$  之值.

命  $\gamma = 2$ , 則得  $\beta = 1$ , 而  $\alpha = 6$ ;

命  $\gamma = 1$ , 則得  $\beta = 3$ , 而  $\alpha = 5$ ;

命  $\gamma = 0$ , 則得  $\beta = 5$ , 而  $\alpha = 4$ ;

所求之係數為 (1) 之相當諸值之和, 故所求之係數為

$$\frac{9!}{6!2!} a^6 b c^2 + \frac{9!}{5!3!} a^5 b^3 c + \frac{9!}{4!5!} a^4 b^5 \\ = 252 a^6 b c^2 + 564 a^5 b^3 c + 126 a^4 b^5.$$

## 年

**【利年】** [算] [代] 見利率條.

**【年金】** Annuity. [算] [代] 年金者每年可領取或交付之金錢之謂也. 年金有確實年金 (Certain annuity) 及生命年金 (Life annuity) 二種. 確實年金為一定年限中連續者, 其計算無不確實; 生命年金為其人之生存中連續者, 人之生命不能預先確定其年限. (1) 設利率  $r$ ,  $1+r=R$ , 期間為  $n$  年, 年金為  $S$  圓,  $n$  年間未取年金時, 則於  $n$  年終, 其本利合計  $A = \frac{S(R^n - 1)}{r}$ . (2) 連續  $n$  年間年金  $S$  圓之現價  $P = \frac{S}{R-1} \cdot \frac{R^n - 1}{R^n}$ . (3) 若年金續至無限期時, 於上式  $\frac{R^n - 1}{R^n}$  之極限為 1, 故其現價  $P = \frac{S}{r}$ . (4) 暫停  $p$  年, 其後

連續  $q$  年，年金  $S$  圓之現價  $P = \frac{S}{R^{p+q}}$

$\frac{Rq-1}{R-1}$ 。(5)若暫停  $p$  年，其後永遠連續

年金  $S$  圓之現價  $P = \frac{S}{R^p(R-1)}$ 。

## 式

【式】Expression. [代] 多為代數式之略，見代數式條。

## 收

【收斂】Convergency. [代] 見級數條。

【收斂級數】Converging series 或 Convergent series. [代] 見級數條及無限級數條。

## 曲

【曲面】Curved surface. [幾] 曲面者，於其面上取任意一點，過此點之任意剖面與之交於曲綫者之謂也。於幾何學中，曲面可分類之如次：(1)單曲面(Single curved surface)。此曲面為直綫運動所生之面，而其任意二位置在同一平面上者。圓錐之面，圓柱之面屬於此類。而此類之曲面可展開之為平面。故亦稱為可展面(Developable surface)。(2)複曲面(Double curved surface)。此曲面為曲綫所生之面之謂，例如球面，橢圓體之面是也。(3)扭曲面為直綫所生，惟其二位置不在同一平面上者之謂；例如單翼雙曲綫體之面是也。

【曲綫】Curved line 或 curve. [幾] 曲

綫者，方向變化不絕之綫之謂，即任何隣接三點不在同一平面上者之謂也。曲綫有平面曲綫(Plane curve)及倍率曲綫(Curve of double curvature)二種。平面曲綫者，曲綫之諸點在同一平面上者之謂也。倍率曲綫者，任何隣接四點不在同一平面者之謂也。屬於初等幾何之曲綫為圓。又曲綫分為代數曲綫(Algebraic curve)及超越曲綫二類。代數曲綫者，其點之坐標間之關係，可以代數學之普通運算即加，減，乘，除及常指數之冪與根表之者之謂也。超越曲綫者，其點之坐標間之關係不能如是表之者之謂也。

於高等數學，綫恆以其方程式定之。若綫為由依一定法則而運動之點所成，其法則以代數學之示之者即為該綫之方程式，而用此可以研究綫之解析的意義。若點為不規則運動時，其點之經路為曲綫，嚴密言之，不為數學的曲綫，而為僅彎曲之綫，故曲綫即數學的曲綫及僅彎曲之綫間之不同之點可以知之，即前者服從一定之數學的法則而生，後者為不規則之運動而生。於超越曲綫，其方程式含變數指數之冪或根或對數，又或含三角函數，其曲綫之種類有對數曲綫，擺綫，螺旋綫，懸鏈綫等等。代數曲綫因其方程式之次數而分一次，二次，三次等。一次曲綫即為直綫。二次平面綫為圓，橢圓，雙曲綫，拋物綫，即圓錐曲綫是也。

【曲綫柱】Any cylinder. [幾] 母曲綫為任意曲綫之柱之謂，見柱條。

【曲綫錐】Any cone. [幾] 母曲綫為任

意曲線之錐之謂，見錐條。

【**曲橫線**】Curvilinear abscissa. [幾] 橫線爲曲線者之謂，例如由螺線之一點至圓柱之底作垂線時，其垂線在圓柱面上，而爲該點之縱線，由縱線之趾沿底面之圓周至原點之距離爲曲橫線。

## 有

【**有向量**】Vector 或 Vector quantity. [數] 量之有大小且有方向者之謂，例如直線，速度等是也。

【**有理化**】Rationalization. [代] 無理數或無理式以一因數乘之使成有理數或有理式之謂也。例如  $\frac{3}{4}$  以  $\frac{3}{2}$  乘之得  $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8} = 2$ ，又  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  以  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  乘之，則得  $a - b$ 。而化一無理數或無理式爲有理所乘之因數。例如前例之  $\frac{3}{2}$ ， $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ，謂之  $\frac{3}{4}$ ， $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  之有理化因數。又分數之分母爲無理數時，化爲有理，例如  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，計算其數值甚爲便利。 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  之有理化因數爲  $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ ， $\frac{3}{a} \pm \frac{3}{b}$  之有理化因數  $\frac{3}{a^2} \mp \frac{3}{ab} + \frac{3}{b^2}$ ，須注意之。

【**有理式**】Rational expression. [代] 不含根號之式之謂也。例如  $ax$ ， $ax^2 + bxy + cy^2$ ， $\frac{ax+b}{cx+d}$  是也。又如  $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$  對於  $a, b$  爲有理式，而對於  $x, y$  爲無理式。

【**有理數**】Rational number. [代] 有理數者，係對無理數而言，如  $2, -5, \frac{1}{3}$  皆爲有理數。

【**有中心形**】Central figure. [幾] 有中心之圖形之謂，例如圓，平行四邊形，球皆爲有中心形。

【**有效數字**】Significant figure. [算] 由 1 至 9 之數字謂之有效數字，乃對於 0 而言也。又第一有效數字者，小數點之後非零之第一數之謂，例如於 0.0002537，2 爲第一有效數字。

【**有限小數**】Finite decimal. [算] 有限數字所表之小數之謂也。

【**有限直數**】Finite straight line. [幾] 有限長之直線之謂也。

【**有限級數**】Finite series. [代] 級數之項數爲有限者謂之有限級數。

【**有理分數**】Rational fraction. [代] 不含根號之分數之謂，例如  $\frac{x+1}{x^2+1}$ ， $\frac{x}{ax+b}$  是。

【**有理函數**】Rational function. [代] 僅含加，減，乘，除諸運算之函數之謂，例如  $ax^2 + bx - c$  爲  $x$  之有理函數， $\frac{2x+3y}{5x-y}$  爲  $x, y$  之有理函數。

【**有理整式**】Rational integral expression. [代] 不含根號之整式之謂，例如  $ax^2 + bx + c$ ， $ax + by$  是也。

【**有限連分數**】Terminating continued fraction. [代] 連分數  $a_1 + \frac{1}{a_2 +}$

$\frac{1}{a_3 + \dots}$  之商  $a_1, a_2, a_3, \dots$  之數爲有限者謂之有限連分數。

【有理化因數】Rationalizing factor. [代] 見有理化條。

【有理方程式】Rational equation. [代] 方程式之未知數無根號附於其上者之謂，如  $ax^2 + bx + c = 0$ ， $\frac{5x}{6x+1} = 2$  是也。

【有心圓錐曲線】Central conies. [幾] 圓錐曲線之有中心者之謂，即橢圓與雙曲線是也。

## 次

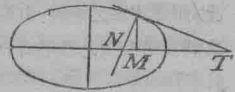
【次】Degree 或 Order. [代] 項之次者，其中所含文字因數之數之謂，例如  $ab$  爲二次項， $abc$  爲三次項，等等。乘冪之次數以其文字之指數表之；例如  $a^3$  爲三次， $b^5$  爲五次。式之次數者該式中最高次項之次數之謂。又有時指式中之特別文字而言者。例如  $x^2y + ax + b$  爲三次式，而爲  $x^2$  之二次式， $y$  之一次式。又根數之次數以根指數表之，例如  $\sqrt{a}$  即  $\frac{2}{a}$  爲二次之根數， $\sqrt[3]{a}$  爲三次之根數。方程式之次數，見方程式條。

【次元】Dimension. [代] [幾] 幾何學中所謂次元與度同，見該條。於代數學中，積或項之文字因數之數謂之次元。例如  $a^2b$  爲三次元之項。於代數學中，一次元之項之幾何的表示爲直線之長，二次元之項之幾何的表示爲面積，三次元之項之幾何的表示爲體積，然於幾何學

四次元以上尙不能實現，而於代數學四次元以上任何次元皆有之。

【次切線】Subtangent. [幾] 曲線上一點之縱線及切線在橫軸上所夾之部分謂之次切線。

如圖 MT 爲次切線。



【次法線】Subnormal. [幾] 曲線上一點之縱線及法線在橫軸上所夾之部分謂之次法線。如上圖，MN 爲次法線。

## 百

【百】Hundred. [算] 數名，十之十倍之謂也。亞拉伯以 100 記之，羅馬以 C 記之，希臘以 ρ' 記之。

【百位】Hundreds' place. [算] 記數時自右數第三位謂之百位，而在此位之數謂之百位數。

【百分法】(一)Percentage [算] 亦稱成分法或分益法。即以甲數與乙數(普通小於甲數)比，而以小數表示之者之謂也。其甲數謂之母數乙數謂之子數，其比之值謂之百分率或成數例如以 8 尺比 6 尺得 .75 則 8 尺爲母數，6 尺爲子數，而 .75 即百分率也。百分率以百分之一爲單位，而以符號 % 記之，其名稱如次：

$$1 \text{ 分} = \frac{10}{100} = .1 = 10\%$$

$$1 \text{ 釐} = \frac{1}{100} = .01 = 1\%$$

$$1 \text{ 毫} = \frac{.1}{100} = .001 = .1\%$$

$$1 \text{ 絲} = \frac{.01}{100} = .0001 = .01\%$$



百分法之最重要公式爲(成數)=(子數)  
 ÷(母數); (母數)=(子數)÷(成數);  
 (子數)=(母數)×(成數)。百分法爲用  
 甚廣,如算利息,計盈虧,納租稅,付酬  
 金,無不用之。(二)Centesimal method.  
 (三)亦稱法國法或百度法。即以法度,  
 分,秒以測角度之法也。直角之百等分  
 一謂之一法度,法度之百等分之一謂之  
 一分,分之百等分之一謂之一秒。而法  
 度,分,秒以 g, ^, ^, 記號表之,例如  
 17<sup>g</sup>32<sup>^</sup>28<sup>^</sup> 即表 17 法度 32 分 28  
 秒也。法國創米突法時,一切度量衡皆以  
 十進,遂制定此法,俟以算學表皆用六十  
 分法,是以此法未通行,今僅於三角法之  
 緒論中,略述其名稱而已。

【百分率】Percent. [算] 見百分法條。

【百分算】Percentage. [算] 即百分法,  
 詳該條。

【百位數】Hundreds. [算] 見百位條。

## 自

【自乘法】Involution. [算] [代] 求  
 一數之任意乘冪之運算也。自乘法可直  
 接由乘法得之,然常有用公式者,二項式  
 定理之公式用之尤多。

【自然數】Natural numbers. [算]  
 [代] 1, 2, 3, 4, 5, …… n 一列整數謂之  
 自然數。以  $\sum n^0, \sum n, \sum n^2, \sum n^3, \dots$ ,  
 $\sum n^{10}$  各表自然數之首 n 項之零乘冪,  
 一乘冪,二乘冪,三乘冪,……,十乘冪之  
 和,則

$$\sum n^0 = n$$

$$\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$= (\sum n)^2.$$

$$\sum n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$= \frac{\sum n^2(3\sum n-2)}{10}.$$

$$\sum n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$= \frac{4(\sum n)^2 - (\sum n)^2}{3}.$$

$$\sum n^6 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+1)}{3} \cdot \frac{3n(n+1)(n^2+n-1)+1}{7}.$$

$$\sum n^7 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \cdot \frac{n(n+1)(3n^2+3n-4)+2}{6}.$$

$$\sum n^8 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(2n+1)}{3} \cdot \frac{n(n+1)(5n^4+10n^3-5n^2-10n+9)-3}{15}.$$

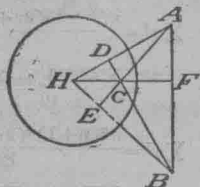
$$\sum n^9 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n^4+4n^3-3n^2-5n+6)-3}{6}.$$

$$\sum n^{10} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+1)}{3} \times \{n(n+1)(3n^6+9n^5-n^4-17n^3+7n^2+17n-15)+5\} \div 11.$$

【自變數】Independent variable. [代] 見變數條。

【自然對數】Natural logarithm. [代] 見對數條。

【自共軛三角形】Self-conjugate triangle. [幾] 三角形之各邊爲其對頂點對於一圓之極線，謂之自共軛三角形。三角形 ABC 對於一圓爲自共軛，則其圓心必爲三角形之垂心 H，而其半徑爲 HA，HD 之比例中項。且此種三角形必爲鈍角三角形，而其一頂點必在圓內，他二頂點必在圓外。



## 米

【米】Metre 或 Meter. [算] 卽米突。

【米突】Metre 或 Meter. [算] 米突制中長之基本單位。合我國營造尺 3.125 尺。一米之十分之一曰分 (Decimeter)，百分之一曰厘 (Centimeter)，千分之一曰毫 (Millimeter)；又一米突之十倍曰分 (Decimeter)，百倍曰百 (Hectometer)，千倍曰千 (Kilometer)，皆以十進。米突亦稱米或呎，自我國加入萬國度量衡同盟會後命爲公尺。

【米突制】Metric system. [算] 以米突爲長之單位，克爲重之單位之度量衡之謂也。其所以稱爲米突制者，因以米突爲基本單位，他單位可由此單位誘導得之

故也。此制起於法國革命之際。1790年，法政府擬規定度量衡單位之新制，且將此事照會各國，各國應此照會派遣學者會於巴黎，與法國學者共議。當時諸委員以爲擬定單位當擇一定基本，假令有何事變，此單位失時，復可算得之。爲合此目的乃擇地球子午線之四分之一爲基本，取此基本之一千萬分之一爲長之單位，而名之曰米突。1795年法政府嘉納此基本之撰定，曾由測定地球之子午線，定米突之長而採用之。然著名天文家 Mechain (1744-1805)，Delambre (1749-1822) 從事測定法國北部 Dunkirk 及西班牙之 Barcelona 間之子午線之弧精密之長，未幾法國數學家 Biot 及天文家 Arago 此子午線之測定延長至 Formentara 島，此等測定與 1795 年所定者少有差異。由于午測定之結果，製鉛棒一當 4°C (卽其密度最大之溫度) 時之長恰爲一米突，以爲原器。是爲萬國同盟度量衡長度之起源。當時委員之一部分決定米突精密之長，他部決定與長之單位有一定不變之關係之重之單位，此研究之結果，撰定一米突之百分之一卽厘之長爲一邊之立體之純水之重爲單位，而名之曰克，作一千克重之鉛板以爲原器。是爲萬國同盟度量衡重量之起源。其後測定愈精，發見當時所測子午線之長稍有差誤，而知一米突小於地球子午線之四千萬分之一。然子午線之長，本難精密，且地球放散溫熱，歷時既久，必有收縮，是子午線亦隨時而變，不足爲永久之

標準，反不如所定原器之長爲便。1870年由二十九國派出五十委員，會議於巴黎，討論萬國度量衡原器，1872年議決仍以法國之原器爲標準，而以鉑90%銻10%之合金作一H形之棒，定爲當 $4^{\circ}\text{C}$ 時其棒面所刻二平行線間之長爲一米突，以爲萬國公尺。克之原器，亦以鉑銻合金製一法碼代之。其所以用鉑銻之合金者，因此合金在空氣或濕氣中其質不變，酸類不腐蝕，富於彈性剛性，且膨脹係數甚小，較其他金屬或合金爲優，經學術上精密之試驗而始採用之也。米突制採用十進法，實爲便利，裨益於世不鮮，世界各國多用之。

**【米突噸】** Metric ton. [算] 一千鈗之重之謂也。亦稱法噸。

## 行

**【行列式】** Determinant. [代] 將 $n^2$ 個數列爲 $n$ 列 $n$ 行之正方形如次。

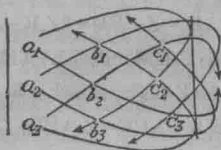
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \end{vmatrix}$$

同列之數用同文字，同行之數用同添數。由上正方形之各行各列各取一數相乘，而得 $n$ 數種種之積，此各積附以適當之符號，則其代數和謂之行列式，而如上所列之正方形爲表此和者。對角線 $a_1b_2c_3\dots$

$\dots m_n$  稱爲主對角線(Principal diagonal)。主對角線中之 $n$ 個數之積恆命爲正。決定其他任意之積之符號，先將其數依文字之次序列之，而使其添數有主對角線之添數之次序，計其變列之數。若此數爲偶數時，該項之符號爲正，若爲奇數時，該項之符號爲負。例如主對角線爲 $a_1b_2c_3d_4$ ，求 $a_3b_2c_4d_1$ 之符號。施以三變列則1可置於第一，施一變列，則3可置於2與4之間，由是置添數爲1234之次序，須經四變列。故此項之符號爲正。爲簡便計，行列式常以希臘字母 $\Delta$ 表之， $\Delta$ 之次數(Order)者與其行或列之數同。下示之例爲三次之 $\Delta$ 而作其諸積且附以適當之符號者，即

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 6 \times 2 - 3 \times 8 \times 2 \\ + 5 \times 2 \times 4 - 5 \times 1 \times 2 \\ + 9 \times 8 \times 1 - 9 \times 6 \times 4$$

三次之 $\Delta$ 積附適當之符號，依次所作之



圖甚便。即於右圖矢向上者爲正，而向下者爲負。行列式之普通性質如次：(1) 將行列式之行變爲列，而列變爲行，其值不變。(2) 行列式交換其任二行或二列，則其符號變，而其絕對值不變。(3) 行列式有二行或二列相等，則其值爲0。

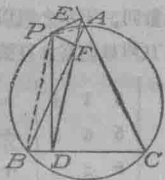
(4) 行列式之任一行或任一列以某數乘之，等於某數乘行列式之全體。行列式可用以解一次聯立方程式，求消去式。解析幾何學中用之尤多。

## 西

【西經】 West meridian. [算] 本初子午線以東之經度謂之東經，其西之經度謂之西經，東西各一百八十度而止。

【西孫摩線】 Simson line. [幾] 由  $\triangle ABC$  之外接圓周上任一點  $P$  至三邊  $BC, CA, AB$  (或延線) 作垂線  $PD, PE, PF$ ，其垂足  $D, E, F$  必在一直線上。而此直線謂之西摩孫

線或  $P$  點之垂足線。〔證〕聯  $DF, FE$ ；又聯  $PA, PB$ 。因  $\triangle PFA, PEA$  為直角，



故  $P, E, A, F$  在同一圓周上。同樣  $P, B, D, F$  亦在同一圓周上。  $\therefore \angle PFE = \angle PAE = \angle PBD = 2\angle R - \angle PFD$ 。

故  $D, E, F$  在一直線上，其逆亦成立。

若  $D, E, F$  在一直線上，則  $\angle BPD = \angle BFD = \angle AFE = \angle APE$ ，  $\therefore \angle BPA = \angle DPE = 2\angle R - \angle C$ ，故  $A, P, B, C$  在同一圓周上。即  $P$  在  $\triangle ABC$  之外接圓周上。

西摩孫線實非西摩孫所發明，而為 Wallace 所發明，因西摩孫編入於其所著之書中，世人遂稱為西摩孫線。若  $PD, PE, PF$  為與三角形之諸邊作等角 (依同方向測之) 之斜線時，亦可證明  $D,$

$E, F$  在一直線上。又四直線相交生四三角形時，由其任意二者之外接圓周之交點至四直線引垂線，其垂足亦在一直線上。

## 七 畫

## 伴

【伴數】Amicable numbers [代] 一數之各整除數之和，等於他數則此二數謂之伴數。例如 220 與 284 爲伴數，因  $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ ，故 220 之整除數之和爲  $(1+2+2^2)(1+5)(1+11) - 220 = 284$ 。而  $284 = 2^2 \times 71$ ；故 284 之整除數之和爲  $(1+2+2^2)(1+71) - 284 = 220$ 。

## 位

【位】Place. [算] 數字之位置也。自右第一日曰個位，第二日曰十位，第三日曰百位，千位，萬位以上，皆每十倍其數而進一位。又數字之個數亦謂之位數，例如二個數字之數曰二位數，三個數字之數曰三位數，等等；又如小數五位。

【位置】Position. [幾] 雖同一物，左手持之與右手持之，其位置不同，故物體有位置，而位置所以示其在何處也。

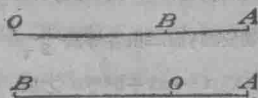
## 作

【作圖】Construction. [幾] 作圖者，由已知件以作幾何學之圖形之謂也。又作數式之作圖爲求代數式之幾何的表示，可由次例以明之。(1) 作  $x = a + b$  之



圖。令  $OA = a$ ，於其右側之延線上取

$AB = b$ ，則  $OB = x = a + b$ 。(2) 作  $x = a - b$  之圖。令  $OA = a$ ，由 A 於其反

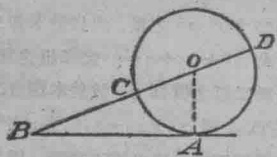


對之向，取  $AB = b$ ，則  $OB$  表  $x$  之值。若  $b > a$ ，則  $x$  之值爲負，此時就絕對值考之，爲無意義。然若於其位置加以思考，知  $x$  之負值，可由  $o$  與其正值之反對方向取之，即  $x$  之負值，可反對於正方向  $OA$  而取之。此方法爲狄卡德所創，即代數學之正負相反對之符號對應於幾何學之反對之向也。今更詳言之，一次式之正值，以由一點於某方向所引之直線表示之，而其負值可以由由同一點於反對方向所引之直線表示之。(3) 作方程式  $x^2 - 2x + b^2 = 0$  之根。於代數學知二次方程式  $x^2 + px + q = 0$  之二根之和爲  $-p$ ，而二根之積爲  $q$ 。故於本題命二根爲  $x_1, x_2$ ，則  $x_1 + x_2 = 2$ ， $x_1 x_2 = b^2$ 。由此等關係明知二根俱爲正實數。因二根之和爲  $a$ ，其積爲  $b^2$ ，故任何根爲正。故本題成爲「知二線之和爲  $a$ ，其積爲  $b^2$ ，求作此二線」。引  $AB = a$ ，以  $AB$  爲徑作半圓，而  $AC$  垂直於  $AB$ ，使其長等於  $b$ 。引  $CD$  平行於  $AB$ ，交半圓周於  $D$ 。引  $DE$  垂直於  $AB$ ，交  $AB$  於  $E$ ，則  $AE$  及  $EB$  爲所求

之二直線。若  $b > \frac{1}{2}a$ , 即  $a < 2b$ , 則 CD 不交於圓, 故二根爲虛根。若  $a = 2b$ , 則 CD 切於圓, 而二根各等於  $\frac{a}{2}$ 。(4)

作方程式  $x^2 + ax + b^2 = 0$  之根。此方程式可於  $x^2 + ax + b^2 = 0$  變  $x$  爲  $-x$  而得之。故變  $x^2 - ax + b^2 = 0$  之根之符號即可得  $x^2 + ax + b^2 = 0$  之根。由是本題之二線之絕對值與前題同。(5) 作方程式  $x^2 - ax - b^2 = 0$  之根。此時二根有反對之符號, 因二根之積  $-b^2$  爲負也。命  $x_1$  爲正根,  $x_2$  爲負根之絕對值則  $x_1 - x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = b^2$ , 由是本題成爲「知二線之差爲  $a$ , 其積爲  $b^2$ , 求作此二線。」

以  $o$  爲中心,  $\frac{1}{2}a$  爲半徑作圓, 過此



圓周之任意點  $A$ , 作切線  $AB = b$ . 而連  $BO$ , 且延長之交圓周於  $C$  及  $D$ , 則  $EC, BD$ , 爲所要之二線。(6) 作方程式  $x^2 + ax - b^2 = 0$  之根。此方程式可於  $x^2 - ax - b^2 = 0$  變  $x$  爲  $-x$  而得之。故本題之二線之絕對值之作圖法與前題同。

【作圖紙】Plotting paper. [幾] 卽方格紙。

【作圖題】Problem, [幾] 作圖題者; 【初等幾何學】Elementary geometry

求作圖之問題之謂也。初等幾何學之作圖法有總合法及解析法。其他尙有軌跡之交法, 平行移動法。詳各條。

【作圖幾何學】Constructive geometry. [幾] 作圖幾何學者, 以已知件爲關鍵, 而研究幾何學之作圖, 幾何學之一分科也。決定有形的作圖爲實用作圖幾何學之目的, 決定想像之作圖(卽取有形的作圖之極限者)爲理論作圖幾何學。實用作圖幾何學(或僅稱實用幾何學)器械學家, 建築家, 測量家, 工程師等多用之, 用數學用器具以作圖。實用幾何學, 用矩以引直線, 用兩脚規以畫圓。理論作圖幾何學引直線畫圓爲公法所許者。

## 克

【克】Gramme 或 Gram. [算] 米突制中之重之基本單位, 合我國 268 兩。十克曰尅(decagram), 百克曰恆(hectogram), 千克曰尅(kilogram), 萬克曰邁(myriagram), 千尅曰米突噸或法噸。而一克之十分之一曰尅(decigram), 百分之一曰邁(centigram), 千分之一曰尅(milligram), 皆以十進。

## 初

【初等代數學】Elementary Algebra. [數] 初等代數學者, 普通論自代數學之始以至正整指數之二項式定理之分科之謂。然初等爲對於高等而言, 無劃然之界限。

【初等幾何學】Elementary geometry

try. [數] 見幾何學條。初等代數學，於代數學中，對於高等無劃然之界限，不過代數學之初步之部分之謂而已；初等幾何學，於幾何學中，對於高等有劃然之界限。

## 利

**【利子】** Interest. [算] [代] 卽利息。

**【利息】** Interest. [算] [代] 借人以銀錢，至返還時，比本金增多若干以爲酬報，此增多之數謂之利息。利息概算爲本金之幾分幾厘，但除日利在外（見利率條。）金錢借貸之利息，借貸者雙方可結契約，然關於借貸，上訴於裁判所時有一定之制裁，蓋因重利困負債者，流毒於社會也。其所謂制裁者，本金百元以下，年利至二分，本金百元以上千元以下，年利至一分五厘，本金千元以上年利至一分二厘，又法律上之利息民事爲年利五厘，商業爲年利六厘。利息又有稱爲利子。關於利息又可參看利率條。

**【利率】** Rate of interest. [算] [代] 利率者，定期內利息對於本金之百分率之謂也。利率爲本金之十分之一爲一分，百分之一爲一厘，千分之一爲一毫，……利率多以年計，而謂之年利。又利率以月計者謂之月利。又以日計者謂之日利。例如日利三分卽洋百元一日之利息爲三分也。

## 判

**【判別式】** Discriminant. [代] 方程式

之判別式爲其係數之一重函數，等於其根之差之平方之積，而判別式消滅卽示該方程式有等根，故可用以判別方程式之根。二次方程式  $a_0x^2+2a_1x+a_2=0$

之判別式爲  $\frac{4}{a_0^2}(a_1^2-a_1a_2)$ 。三次方

程式  $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$  之判

別式爲  $-\frac{27}{a_0^6}(G^2+4H^3)$  但  $G=a_0^2$

$a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3$ ,  $H=a_0a_2-a_1^2$ ;

故其判別式卽爲  $\frac{27}{a_0^4}(3a_1^2a_2^2+6a_0$

$a_1a_2a_3-a_0^2a_3^2-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3)$ 。

四次方程式  $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3$

$x+a_4=0$  之判別式爲  $\frac{256}{a_0^6}(I^3-27J^2)$ ,

但  $I=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$ ,  $J=a_0a_2a_4$

$+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1a_1^2-a_2^3$ 。又

$f(x)=0$  之判別式爲  $f(x)=0$  與  $f'(x)$

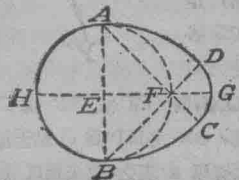
$=0$  之消去式。用判別式以討論方程之

根。見二次方程式，三次方程式等條。

## 卵

**【卵形】** [幾] 卵形之簡單者

如次所示。AFBH 爲以 E 爲心之圓，



弧 AD, BC 爲各以 A, B 爲心者，弧

DGC 爲以 F 爲心者。今命 AFBH 圓

之半徑為  $r$ ，則卵形周圍之長  $= \pi r (3 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ ，而其面積  $= \{ \pi (3 - \sqrt{2}) - 1 \} r^2$ 。

均

【均數】Mean. [代] 即平均數，見該條。

【均中比例】Alligation. [算] 即混合法，見該條。

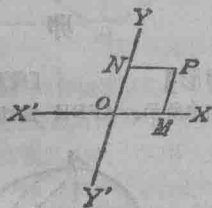
坐

【坐標】Co-ordinates. [幾] 平面內一點

之位置，可以該點由相交之二定直線之一，而平行於他直線之距離表示之，此二距離謂之該點之坐標或縱橫線，二定直線謂之坐標軸或軸，其在水平方向者曰橫軸或 X 軸，其他曰縱軸或 Y 軸。坐標之平行於橫軸者曰橫坐標或橫線，平行於縱軸者曰縱坐標或縱線。又二軸之交點曰原點。如圖，XOX' 為橫軸，YOY' 為縱

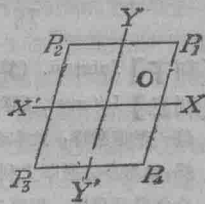
軸，O 為原點，P 為軸之平面內任意之點，作 PM, PN 各平行於 YO

Y', XOX'，則 OM 或 NP 為 P 點之橫坐標，ON 或 MP 為 P 點之縱坐標。橫坐標恆以  $x$  表之，縱坐標以  $y$  表之。知一點之坐標為  $x, y$  而定其點，於 OX 取  $OM = x$ ，於 OY 取  $ON = y$ ，過 M, N

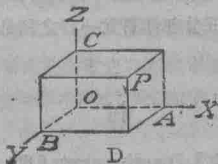
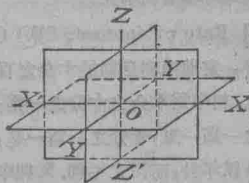


作直線各平行於縱軸及橫軸，而交於 P，則 P 為所求之點。惟定點以如次為便。取  $OM = x$ ，過 M 作 MP 平行於 Y 軸，而使等於  $y$ ，則 P 為所求之點。坐標之向右上量者命為正，向左向下者為負。故在 OX 與

OY 間之平面內之一點  $P_1$  之二坐標皆為正；在 OX' 與 OY 間之  $P_2$  點之橫坐標為



負，縱坐標為正；在 OX' 與 OY' 間之  $P_3$  點之二坐標皆為負；在 OX 與 OY' 間之  $P_4$  點之橫坐標為正，縱坐標為負。空中一點之位置，可以該點由三相交平面之一而平行於他二平面之交線之距離表示之，此三距離謂之該點之坐標，三平面謂之坐標面，每二坐標面之交線謂之坐標軸，而其交點曰原點。如圖 XOY,





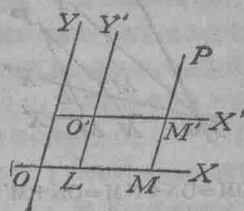
YOZ, ZOY 爲坐標面; XOX' 爲 X 軸, YOY' 爲 Y 軸, ZOX' 爲 Z 軸, 總稱之爲坐標軸; O 爲原點, P 爲空中任意一點, 過 P 作三平面各平行於三坐標面, 而各交 X 軸, Y 軸, Z 軸於 A, B, C, 則 OA, OB, OC 爲 P 點之坐標, 常以  $x, y, z$  表之, 而各稱爲  $x$  坐標,  $y$  坐標,  $z$  坐標, 知一點之坐標爲  $x, y, z$  而定該點於 X 軸取  $OA=x$ , 於 Y 軸取  $OB=y$ , 於 Z 軸取  $OC=z$ , 過 A, B, C 作平面平行於坐標面, 命此三平面交於一點 P, 則 P 爲所求之點。惟定點以如次爲便, 於 X 軸上取  $OA=x$ , 由 A 於 Y 軸之平行線上取  $AD=y$ , 由 D 於 Z 軸之平行線上取  $DP=z$ , 則 P 爲所求之點。若  $a, b, c$  爲 P 點之坐標, 則  $X'YZ, XY'Z, XYZ', X'Y'Z, X'YZ', X'Y'Z'$  各八分空間內, 在同距離處之點之坐標各爲  $(-a, b, c), (a, -b, c), (a, b, -c), (-a, -b, c), (-a, b, -c), (a, -b, -c), (-a, -b, -c)$ 。

【坐標面】Co-ordinate planes. [幾]見坐標條。

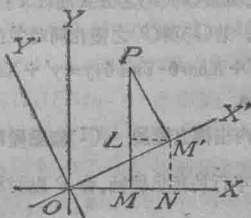
【坐標軸】Co-ordinate axes. [幾]見坐標條。

【坐標之變換】Transformation of co-ordinates. [幾]解析幾何學中, 有時將一組坐標軸變成他組坐標軸, 於研究時甚覺便利, 而由對於舊坐標軸點之坐標或線之方程式以求其對於新坐標軸之坐標或方程式之運算, 謂之坐標之變換。平面內坐標之變換。(1)原點變而兩軸

之方向變換。如圖命 OX, OY 爲舊軸,



$O'X', O'Y'$  爲新軸, 且命新原點  $O'$  對於舊軸之坐標爲  $x', y'$ , 命任意點 P 對於舊軸之坐標爲  $x, y$ , 對於新軸爲  $X, Y$ . 則  $OM = OL + O'M'$ , 及  $PM = MM' + M'P = LO' + M'P$ ;  $\therefore x = X + x', y = Y + y'$ . 此公式不論斜軸或直交軸皆爲真。(2)原點不變而兩直交軸旋轉  $\theta$  角, 命 OX, OY 爲舊軸,  $OX', OY'$  爲新軸, P 點對



於舊軸之坐標爲  $x, y$ , 對於新軸之坐標爲  $X, Y$ . 又命  $X'OX = Y'OY = \theta$ , 則  $OM = ON - MN = ON - LM'$ ,  $PM = LM + PL = M'N + PL$ ; 故得  $x = X \cos \theta - Y \sin \theta, y = X \sin \theta + Y \cos \theta$ . (3)原點不變而斜交坐標由一組變成他組。命  $XOY = \omega, XOX' = \alpha', XOY' = \beta$ . 則由

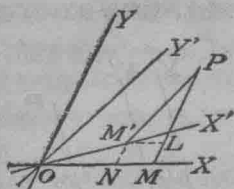


圖  $OM = ON + NM = ON + M'L =$

$$\frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} OM' + \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} M'P,$$

$$MP = NM' + LP = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} OM' + \frac{\sin \beta}{\sin \omega} M'P,$$

故  $x \sin \omega = X \sin(\omega - \alpha) + Y \sin(\omega - \beta)$ ,

$y = X \sin \alpha + Y \sin \beta$ . 若由

一組斜交軸，變成直角軸，惟原點與  $x$  軸

不變，則於上式令  $\alpha = 0, \beta = 90^\circ$ ，而得

$x \sin \omega = X \sin \omega - Y \cos \omega, y \sin \omega = Y$ .

(4) 若原點變為點  $(x', y')$ ，而兩軸之方向

俱變，則於(2)(3)之公式加以  $x'$  及  $y'$

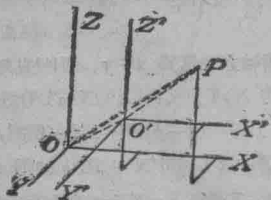
即可。若(1)與(2)之變化同時並生，則

$x = x' + X \cos \theta - Y \sin \theta, y = y' + X \sin \theta +$

$Y \cos \theta$ .

空間內坐標之變換 (1) 原點變而新坐

標軸平行於舊坐標軸。命  $P$  點對於舊直

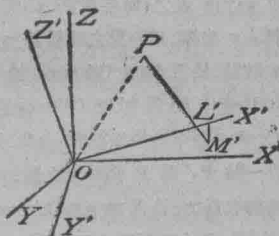


交軸  $OX, OY, OZ$  之坐標為  $x, y, z$ ，對

於新直角軸之坐標為  $X, Y, Z$ ，新原點

$O'$  對於舊軸之坐標為  $f, g, h$ 。因在各軸上  $OP$  之射影，等於  $OO'$ ， $OP$  之射影和，由是得  $x + X + f, y = Y + g, z = Z + h$ 。

(2) 原點不變而直角軸由一組變成他組。命  $P$  點對於舊軸  $OX, OY, OZ$  之坐標為  $x, y, z$ ，對於新軸之坐標為  $X, Y, Z$ ，



且命新軸對於舊軸之方向餘弦各為  $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ 。因

$OP$  在  $OX$  軸上之射影為  $x$ ，又  $OL', L'/M', M'P$  之射影之和為  $l_1 X + l_2 Y +$

$l_3 Z$ ，故  $x = l_1 X + l_2 Y + l_3 Z$ 。同樣  $y =$

$m_1 X + m_2 Y + m_3 Z, z = n_1 X + n_2 Y +$

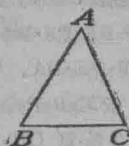
$n_3 Z$ 。(3) 若原點與軸俱變，則合(1)，(2)之結果即可。即  $x = f + l_1 X + l_2 Y +$

夾

【夾角】Included angle 或 Contained angle. [幾] 二直線或弧之間所夾之角謂之夾角。例如知三角形之二邊及其夾角求作其形時之夾角。又如球之二大圓弧之夾角。前者常用之，後者用之較少。

【夾邊】Included side 或 Contained side.

[幾]即邊之兩  
端爲二角之角  
頂者之謂如圖  
BC爲 $\angle B$ 及  
 $\angle C$ 之夾邊。



完

**【完數】** Perfect number. [算] [代]

數之爲除本數外其他整除數之和者謂之完數。例如 6 之除本數外其他各整除數之和爲  $1+2+3=6$ 。其他如 28, 496 皆爲完數，因  $28=2^2 \times 7$ ，故 28 之整除數之和爲  $\frac{(1-2^3)(1-7^2)}{(1-2)(1-7)} - 28 = 28$ ；又  $496=2^4 \times 31$ ，故 496 之整除數之和爲  $\frac{(1-2^5)(1-31^2)}{(1-2)(1-31)} - 496 = 496$ 。若  $2^n - 1$  爲素數，則  $2^{n-1}(2^n - 1)$  爲完數。因  $2^n - 1$  爲素數，故  $2^{n-1}(2^n - 1)$  之素因數爲 2 及  $2^n - 1$ 。故  $2^{n-1}(2^n - 1)$  之整除數之和爲  $\frac{(1-2^n)\{1-(2^n-1)^2\}}{(1-2)\{1-(2^n-1)\}} - 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{n-1}(2^n - 1)$ ，故  $2^{n-1}(2^n - 1)$  爲完數。

**【完全商】** Complete quotient. [算]

[代] 完全商對於部分商而言，商之全部之謂也。例如以 37 除 37)7992(216  
7992，商之百位爲 2， $\frac{74}{59}$   
十位爲 1，個位爲 6。 $\frac{37}{222}$   
即此 200, 10, 6 爲部  
分商，而合之得 216  
爲完全商。又如以  $a-b$  除  $a^3 - b^3$ ，商  
之第一項爲  $a^2$ ，第二項爲  $ab$ ，第三項

爲  $b^2$ ，而合之得  $a^2 + ab + b^2$  爲完全商。

**【完全數】** Whole number. [算] 數之適爲單位若干倍而無零餘者謂之完全數，與整數同。但於算術中，完全數與整數同意義用之，然於代數學中常用整數之語，而鮮用完全數之語。

**【完全平方】** Perfect square, 或 Complete square. 或 Exact square. [算]

[代] 某數或式之爲平方者之謂也。例如 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, …… 以其各爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …… 之平方，故爲完全平方。而如  $a^2 + 2ab + b^2$ ,  $a^2 - 2ab + b^2$ ,  $a^2 + a^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  亦爲完全平方。

**【完全立方】** Perfect cube, 或 Complete cube, 或 Exact cube. [算][代]

某數或式之爲立方者之謂也。例如 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, …… 以其各爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …… 之立方，故爲完全立方。而如  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  亦爲完全立方。

**【完全方程式】** Complete equation.

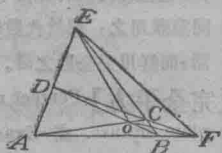
[代] 方程式，自  $x^n$  至  $x^0$ ,  $x$  之各乘幂皆完備者謂之完全方程式。如  $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 4 = 0$  爲完全方程式。但  $x^4 + 5x^2 - 7x + 4 = 0$  則爲不完全方程式。

**【完全四角形】** Complete quadrangle.

[幾] 四點(任三點皆不爲共線點)及其六聯線謂之完全四角形。其四點謂之四角形之頂點，其六直線謂之邊。不過圖

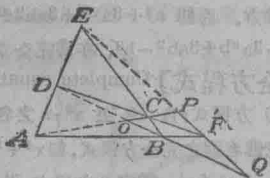
頂點之二邊謂之對邊，對邊之三交點謂之對角點，連對角點所成之三角形謂之完全四角形之對角三角形。如圖 A, B, C, D 爲四頂

點；AB, BC, CD, DA, AC, BD 爲六邊；



PC, DA; AC, BD 爲對邊；E, O, F 爲三對角點，EOF 爲對角三角形。完全四角形一雙之對邊及對角三角形之二邊成調和束線(證法見完全四邊形條)。

**【完全四邊形】** Complete quadrilateral. [幾] 四直線(任三直線皆不爲共點線)及其六交點謂之完全四邊形。其四直線謂之四邊形之邊，其六點謂之頂點。不在同邊上之二頂點謂之對頂點，聯對頂點之三直線謂之對角線。對角線所成之三角形謂之完全四邊形之對角三角形。如圖 AB, BC, CD, DA 爲四邊；A,



B, O, D, E, F 爲六頂點；A, C; B, D; E, F 爲對頂點；AC, BD, EF 爲三對角線；OPQ 爲對角三角形。完全四邊形之一雙對頂點及對角三角形之二頂點成調和列點。[證]就△EAF言之，EB, AP, FD,

爲共點線，DBQ 爲截線。故  $AB \cdot FP \cdot ED = BF \cdot PF \cdot DA$ 。又  $AB \cdot FQ \cdot ED = -BF \cdot QE \cdot DA$ 。∴  $PF \cdot QF = -PF \cdot QE$ 。故 E, P, F, Q 成調和列點(而於完全四角形，則 OE, OC, OF, OB 成調和束線)。同樣可證其餘。

希

**【希臘字母】** Greek letters. [數] 希臘字母有二十四，數學中常用之，其寫法與讀音如次。

| 大寫 | 小寫 | 讀音      | 大寫 | 小寫 | 讀音      |
|----|----|---------|----|----|---------|
| A  | α  | Alpha   | N  | ν  | Nu      |
| B  | β  | Beta    | Ξ  | ξ  | Xi      |
| Γ  | γ  | Gamma   | Ο  | ο  | Omicron |
| Δ  | δ  | Delta   | Π  | π  | Pi      |
| Ε  | ε  | Epsilon | Ρ  | ρ  | Rho     |
| Ζ  | ζ  | Zeta    | Σ  | σ  | Sigma   |
| Η  | η  | Eta     | Τ  | τ  | Tau     |
| Θ  | θ  | Theta   | Υ  | υ  | Upsilon |
| Ι  | ι  | Iota    | Φ  | φ  | Phi     |
| Κ  | κ  | Kappa   | Χ  | χ  | Chi     |
| Λ  | λ  | Lambda  | Ψ  | ψ  | Psi     |
| Μ  | μ  | Mu      | Ω  | ω  | Omega   |

**【希臘數字】** Greek numerals. [算]

|     |      |     |     |     |     |     |     |    |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| α'  | β'   | γ'  | δ'  | ε'  | ζ'  | η'  | θ'  | ι' |
| 1   | 2    | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  |
| 10  | 20   | 30  | 40  | 50  | 60  | 70  | 80  | 90 |
| 100 | 200  | 400 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 |    |
| 900 | 1000 | 18  |     |     |     |     |     |    |

## 延

【延線】Production 或 Prolongation.

〔幾〕有延直線之延長部分之謂。亦稱延長線或引長線。

【延長線】Production 或 Prolongation. 〔幾〕即延線見該條。

## 形

【形】Shape. 〔幾〕物體有方者有圓者，有三角者，有橢圓者，尙有其他種種相異形狀，此物體之形狀謂之形。

【形數】Figurate number. 〔代〕即擬形數，見該條。

## 成

【成】Tenth. 〔算〕百分法中以十分之一爲成。

【成分法】Percentage. 〔算〕即百分法，詳該條。

## 投

【投影】Projection 〔幾〕即射影，見該條。

## 折

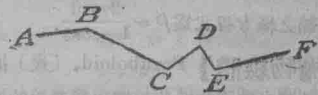
【折扣】Discount. 〔算〕〔代〕若持有期票之人，欲於定期之前，支取現款，則須於支款內扣除若干利息，是謂之折扣。折扣外所付之款謂之現價。折扣所用之利率，謂之折扣率。折扣有二，取眞折扣與銀行折扣是也。眞折扣爲期票之現價之

利息，票面金額與眞折扣之差爲眞現價。銀行折扣爲票面金額（現價眞折扣之和）之利息，故銀行折扣等於眞折扣與眞折扣之利息之和。故銀行折扣恆大於眞折扣。命  $P$  爲票面之金額， $V$  爲眞現價， $D$  爲眞折扣， $r$  爲年折扣率， $n$  爲年數，則

$$V = \frac{P}{1+nr}; D = \frac{Pnr}{1+nr} \text{。而銀行折扣}$$

$= Pnr$ 。例如欲支 6 個月後 630 元之期票，年 1 分之折扣率，求真現價，眞折扣與銀行折扣。六月之利率爲 5 釐，故其眞現價爲  $630 \div (1 + .05) = 600$  元，而眞折扣爲  $600 \times (.05) = 30$  元，銀行折扣爲  $630 \times (.05) = 31.5$  元。

【折線】Broken line. 〔幾〕折線者，種種直線端與端相接而成者之謂，如圖所



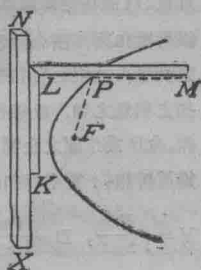
示之 ABCDEF 線爲折線。

【折扣率】Rate of discount. 〔算〕〔代〕見折扣條。

## 拋

【拋物線】Parabola. 〔幾〕拋物線爲圓錐曲線或二次曲線之一種，而爲一點在平面內移動，其由一定點與由一定直線之距離常相等之軌跡。此定點曰焦點，定直線曰準線。拋物線可作之如次，如圖，

KLM 爲一直角定規，規之一邊 KL 與一定尺 XN 密合，而可沿之移動。又命一線其長等於 LM，釘其一



端於 M，而釘其他端於 F。將直角定規之邊 KL 沿 XN 滑動之，而以鉛筆 P 使此線緊隨直角定規移動，則 P 畫成一拋物線，因移動時 PF 常等於 PL 也。如以頂點爲原點，而頂點與焦點之距離爲 d，則拋物線之方程式爲  $y^2 = 4dx$ 。若以任意之徑及徑端之切線爲兩軸，則拋物線之方程式爲  $y^2 = \frac{4dx}{\sin^2 \theta}$ 。又拋物線之極方程式爲  $\rho = \frac{2e \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ 。

【拋物線體】Paraboloid. [幾] 拋物線體有橢圓的拋物線體與雙曲線的拋物線體二種。見二次曲面條。

【拋物線的螺線】Parabolic spiral.

[幾] 見螺線條。

## 更

【更迭之理】Alternando. [代] [幾] 四量成比例時，其第二項與第三項可交換之，是謂之更迭之理。例如  $a:b=c:d$ ，則  $a:c=b:d$

## 東

【東線】Pencil. [幾] 一組共點線謂之東線，其交點謂之頂點或焦點，其各直線謂之射線或元素。東線之最特別者爲調和東線，及等角東線，見各條。

## 步

【步】[算] 我國長度名，屬營造尺庫平制，即五尺也。合公尺制之十六公寸。

## 求

【求積法】Mensuration. [算] [幾] 求積法爲幾何學之一分科，說明由直線及角之已知件以求線之長，而面積，體積之法者也。茲列述之如次：

### I. 線之長。

1. [圓周] 若圓之半徑爲 r，圓周爲 C，則  $C = 2\pi r$ .....(1)

但  $\pi = 3.1416$ 。

2. [弧] 若 C 爲任意之長，a 爲其弧之度數，則  $C = \frac{a\pi r}{180}$ .....(2)

若弧 C 之弦爲 e，其弧之半之弦爲 e'，則

$$\left( = \frac{8' - c}{3} \text{ (近似數)} \right) \dots\dots\dots(3)$$

3. [橢圓] 若兩半徑爲 a, b，周圍爲 C，

$$\text{則 } C = \frac{199}{200} \pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

(近似數).....(4)

### II. 面積。

1. [平面三角形] 命 A 爲面積，b 爲底，h 爲

$$\text{高，則 } A = \frac{1}{2} bh \dots\dots\dots(5)$$

又命 C 爲 a, b 二邊之夾角則

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C \dots\dots\dots(6)$$

命三邊  $a, b, c$  之和之半爲  $s$ , 則

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots\dots\dots(7)$$

2. [矩形] 命  $a, b$  爲其相鄰二邊, 則

$$A = a \cdot b \dots\dots\dots(8)$$

3. [正方形]  $a$  爲其一邊, 則

$$A = a^2 \dots\dots\dots(9)$$

4. [平行四邊形] 命底爲  $b$ , 高爲  $h$ , 則

$$A = b \cdot h \dots\dots\dots(10)$$

又命兩鄰邊爲  $a, b$  其夾角爲  $C$ , 則

$$A = ab \sin C \dots\dots\dots(11)$$

5. [菱形] 命兩對角線爲  $d, d'$ , 則

$$A = \frac{1}{2} dd' \dots\dots\dots(12)$$

6. [梯形] 命二底爲  $b, b'$ , 高爲  $h$ , 則

$$A = \frac{1}{2} (b + b')h \dots\dots\dots(13)$$

7. [任意四邊形] 命兩對角線爲  $d, d'$  其夾角爲  $\phi$ , 則

$$A = \frac{1}{2} dd' \sin \phi \dots\dots\dots(14)$$

8. [正多邊形] 命邊數爲  $n$ , 一邊之長爲  $a$ , 則  $A = n \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tan \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots(15)$

又命內切圓之半徑爲  $r$ , 則

$$A = nr^2 \tan \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots(16)$$

9. [圓] 命半徑爲  $r$ , 則

$$A = \pi r^2 \dots\dots\dots(17)$$

10. [扇形] 命  $n$  爲其角之度數, 則

$$A = \frac{n\pi r^2}{360} \dots\dots\dots(18)$$

11. [橢圓] 命兩半徑爲  $a, b$ , 則

$$A = \pi ab \dots\dots\dots(19)$$

12. [直圓柱] 命底之半徑爲  $r$ , 高爲  $h$ , 側面積爲  $A$ , 則

$$A = 2\pi rh \dots\dots\dots(20)$$

13. [直圓錐] 命底之半徑爲  $r$ , 斜高爲  $l$ , 側面積爲  $A$ , 則  $A = \pi rl \dots\dots\dots(21)$

14. [正圓台] 命兩底之半徑爲  $r, r'$ , 斜高爲  $l$ , 側面積爲  $A$ , 則

$$A = \pi(r+r')l \dots\dots\dots(22)$$

15. [球] 命球之半徑爲  $r$ , 則

$$A = 4\pi r^2 \dots\dots\dots(23)$$

16. [球帶] 命高爲  $h$ , 則

$$A = 2\pi rh \dots\dots\dots(24)$$

17. [月形] 命  $N$  爲其角度之度數, 則

$$A = \frac{\pi r^2 N}{90} \dots\dots\dots(25)$$

18. [球面三角形] 命  $E$  爲球面過剩, 則

$$A = \frac{\pi r^2 E}{180} \dots\dots\dots(26)$$

19. [球面多邊形] 命  $E$  爲球面過剩, 則

$$A = \frac{\pi r^2 E}{180} \dots\dots\dots(27)$$

但  $E = T - (n-2)180$ , 而  $n$  爲邊數,  $T$  爲諸角之和。

### III. 體積.

1. [直角平行六面體] 命其體積爲  $V$ , 交於一頂點之三稜爲  $a, b, c$ , 則

$$V = abc \dots\dots\dots(28)$$

2. [立方體] 命其一邊爲  $a$ , 則

$$V = a^3 \dots\dots\dots(29)$$

3. [平行六面體] 命底之長爲  $a$ , 廣爲  $b$ , 高爲  $h$ , 則  $V = abh \dots\dots\dots(30)$

4. [角柱] 命高爲  $h$ , 底面積爲  $B$ , 則

V=Bh.....(31)

5. [角錐]命高為 h, 底面積為 B, 則

V = 1/3 Bh.....(32)

6. [角臺]命高為 h, 兩底之面積為 B, B',

則 V = 1/3 h(B+B'+sqrt(BB')).....(33)

7. [直圓柱]命高為 h, 底之半徑為 r, 則

V = πr^2h.....(34)

8. [直圓錐]命高為 h, 底之半徑為 r,

則 V = 1/3 πr^2h.....(35)

9. [正圓台]命高為 h, 兩底之半徑為 r,

r', 則 V = 1/3 h(r^2+r'^2+rr').....(36)

10. [球]命半徑為 r, 體積為 V, 則

V = 4/3 πr^3.....(37)

11. [球分]命其底之球帶之高為 h, 則

V = 2/3 πr^2h.....(38)

12. [球盤] 命其兩底之半徑為 r, r', 高為 h, 則

V = 1/2 h(πr^2+πr'^2)+ 1/6 πh^3.....(39)

23. [三角傍面台]命兩底之面積為 B, B', 中央截面之面積為 M, 則

V = 1/6 h(B+B'+4M).....(40)

沙

[沙] [算]小數名, 十塵為沙, 十沙為識, 沙即 .0000001 也。

狄

[狄卡德符號之法則] Descartes' rule of signs. [代]狄卡德符號之法則如次: 一若方程式 f(x)=0 之係數為實數, 則其正根之數與其左邊內諸項內之符號由 + 至 - 及由 - 至 + 之變化之數相同或少一奇數, 茲先證明若以因數 x-α 乘多項式 f(x), 生一新正根, 乘積內符號之變化較原多項式內者多一奇數。於 x 之降冪排列之函數, 諸項之符號依次形式而變化: +...-...+...-...+..., 後之點表若干相連正項, 而一後之點表若干相連負項。設 α 為正根以 x-α 乘 f(x), 而書其同乘冪於一行, 則所得之乘積, 其符號可求之如次:

+.....-.....+.....-.....+..... -.....+.....-.....+.....-.....+..... -.....+.....-.....+.....-.....+.....

士表示兩意, 即似此之項, 其符號不能確定也。士後之點為兩意; 即 f(x) 內一符號之連續於 (x-a)f(x) 內以兩意代之。又 f(x) 之符號之變化, (x-a)f(x) 內有一變化與之對應, 且於乘積內其末尾更有一變化。故乘積較 f(x) 至少多含一變化。且乘積可含更多之變化, 因 f(x) 內諸相續如 +++ 或 --- 在 (x-α)f(x) 內以 +-+ 或 -+- 代之, 然此類符號之變化常增加偶數個。故 (x-α)f(x) 內符號之變化 f(x) 內者多一奇數 1 或 2h+1。由是甚易得狄卡德之法則。設已求得與 f(x)=0 之負根及複虛根相



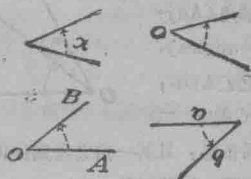
當諸因數之乘積。此乘積以  $F(x)$  表之。因  $F(x) = \dots$  既無正根，則  $F(x)$  之首項與末項為同號。故  $F(x)$  內變化之數為偶數  $2k$ ， $k$  為零或正整數。若以因數  $x - \alpha_1$  乘  $F(x)$ ， $\alpha_1$  為正根，則得  $2k_1 + 1$  變化之積，而  $k_1 \geq k$ 。同理乘以第二因數  $x - \alpha_2$ ，則得  $2k_2 + 2$  變化，由此類推。故引入  $v$  個正根，則得  $2k_v + v$  變化。而  $k_v$  為零或正整數。故此定理成立。

## 系

【系】Corollary. [數]系者可由一命題直接推得之命題也。又稱推理。例如已證明「三角形之二邊相等，則其對角亦相等」之定理，則可直接推得次系：即「等邊三角形亦為等角三角形」。又如已證明由  $n$  文字每次取  $r$  之排列之數為  $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ ，則可推得  $n$  文字每次全取之之排列之數為  $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 。

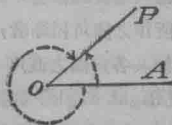
## 角

【角】Angle. [幾]由一點引二直線謂之角，其二直線謂之角之二邊，此一點謂之角頂。某直線以其一端為樞而迴轉時，謂之畫角。角之大不關於其邊之長，而關於其一邊由他邊之位置所迴轉之量。角之與時鐘之針相反對之方向迴轉者為正，反之，為負。而常以弧形之矢示之。角有以在角內之一字母表之者，如角  $\alpha$  或  $\angle \alpha$  或  $\hat{\alpha}$ 。有以在角頂之一字表之者，如



角  $\alpha$ ， $\angle \alpha$  或  $\hat{\alpha}$ ，有以三字母表之者，如角  $\angle AOB$ ， $\angle AOB$  或  $\angle \hat{O}B$ ，但此時角頂之字母須置於中間。又有以二邊之字母表之者，如角  $(a, b)$ 。

如圖，直線  $OA$ ， $OB$  間之角， $OB$  由  $OA$  迴轉有右迴與左迴二種，



而此二角謂之互為共軛角 (Conjugate angles)，大者謂之優角 (Major angle)，小者謂之劣角 (Minor angle)。一直線以其一端為樞而迴轉再至原位時，所畫之角謂之周角 (Circum-angle, 或 Perigon)。角之二邊在一直線



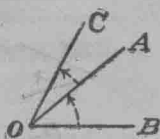
上而在反對之方向時，其角謂之平角 (Straight



angle)。故平角為周角之半。角之大於平角而小於周角者謂之凹角 (Reflux angle 或 Re-entrant angle)。二角有同角頂且有一公

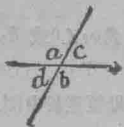


共邊在於其間者  
謂之鄰角(Adj-  
acent angles),  
如圖之 $\angle AOB$ ,  
 $\angle AOC$ 是也。二

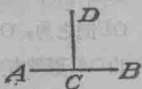


角有同頂點，且其一角之邊爲他角之邊  
之延線者，則此二角  
謂之對頂角(Vertical

angles), 如圖 a 與  
b, c 與 d 是也。一直  
線與他直線相會，其

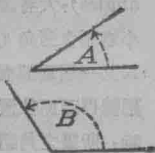


所作之隣角相等者，  
則其各角謂之直角  
(Right angle) 如圖  
之 $\angle DCA$ ,  $\angle DCB$ 是



也。角之小於一直角者謂之銳角(Acute  
angle), 如圖之 A

角是也。角之大於  
一直角而小於一平  
角者謂之鈍角(Ob-  
tuse angle), 如圖

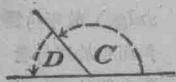


之 B 角是也。二角  
之和等於一直角者，則此二角謂之互爲

餘角 (Comple-  
ment), 如圖之  
 $\angle A$  與  $\angle B$  是



也。二角之和等  
於一平角者，則  
此二角謂之互爲  
補角(Supplem-  
ent), 如圖  $\angle C$  與  $\angle D$  是也。



【角度】Angular measure. [幾] (三)

角之大也，設度，分，秒之單位以測角度，  
即直角之九十等分之一曰度，一度之六  
十等分之一曰分，一分之六十等分之一  
曰秒。即

$$1 \text{ 直角} = 90 \text{ 度} = 5400 \text{ 分} = 324000 \text{ 秒。}$$

$$1 \text{ 度} = 60 \text{ 分} = 3600 \text{ 秒。}$$

$$1 \text{ 分} = 60 \text{ 秒。}$$

【角柱】Prism. [幾] 角柱亦稱稜柱，即  
相對二面(底面)爲全相等之多邊形，而  
其相當邊互相平行，

其餘之各面(側面)  
爲平行四邊形之多面  
體之謂也。兩底面間  
之距離謂之高，側面  
與側面之交線謂之側  
稜。側稜垂直於底面  
者謂之直角柱，側稜爲



底面之斜線者謂之斜角柱，底面爲正多  
邊形者謂之正角柱。角柱因其底面爲三  
角形，四邊形，五邊形等等，而稱之爲三  
角柱，四角柱，五角柱等等。底面爲四邊  
形以上之角柱可分爲若干三角柱(各三  
角柱之高等於原角柱之高)。(1)任意角  
柱之側面積等於其直截面之周圍與其側  
稜之積。(2)任意角柱之體積等於底面  
積乘高。

【角頂】Vertex of an angle. [幾] 見角  
條。

【角臺】Frustum of a pyramid, 或  
Prismoid. [幾] 角台亦稱平截角錐即角  
錐之底與平行於其底之截面所含之部分  
之謂，若以一平行於正角錐之底之平面截

之，則所得之角台謂  
 之正角台。命角台之  
 二底面為  $B, B'$ ，高為  
 $h$ ，則其體積  $V = \frac{1}{3}h$   
 $(B + B' + \sqrt{BB'})$

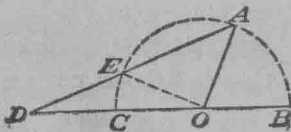


【角錐】Pyramid. [幾]角錐者由一多角  
 形(底面)及以其邊為底而有同一頂之諸  
 三角形而成之多面體  
 也。此諸三角形之面  
 謂之角錐之側面。兩  
 側面之交線謂之側稜。  
 由頂至底面之垂直距  
 離謂之高。角錐之底  
 面為正多邊形而高過底面之中心者謂之  
 正角錐，非然者謂之斜角錐。又角錐因  
 其底面為三角形，四邊形，五邊形等等而  
 稱之為三角錐，四角錐，五角錐等等。

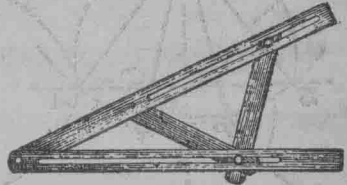


(1) 正角錐之側面積為其底之周圍與其  
 斜高之積之半。(2) 任意角錐之體積為  
 底面積與高之積之三分之一。

【角之三等分】The trisection of an  
 angle. [幾]此問題為幾何學三大問題  
 之一。而初等幾何學，即直線及圓之範圍  
 之幾何學，不能解之。今錄其用曲線之解  
 法於次：【第一法】求三等分角  $AOB$ 。  
 以  $O$  為心， $OA$  為半徑作圓，由  $A$  引割  
 線  $AED$ ，使  $DE = EO = AO$ ，則  $\angle D$

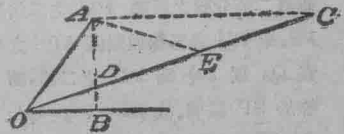


$= \frac{1}{3} \angle AOB$ 。因  $\angle OAE = \angle OEA =$   
 $\angle D + \angle EOD = 2\angle D$  故也。然欲引  $A$   
 $ED$  使  $DE = EO = AO$ ，非僅用界尺及  
 圓規所能為。如圖之器械，為三等分器，



為應用上理以三等分一角者也。其法為  
 開相當於  $DA$  及  $OB$  之棒間之角使與  
 所與之角能密合；則相當於  $D$  之角為與  
 角之三分之一。

【第二法】命  $AOB$  為與角。引  $AC \parallel OB$ ，  
 及  $AB \perp OB$ 。由  $O$  引直線  $ODC$ ，使

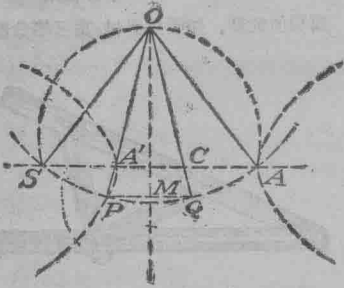


$DC$  等於  $AO$  之二倍(然此亦非僅用界  
 尺及圓規之所能為)，則  $\angle BOC = \frac{1}{3}$

$\angle AOB$ 。因若命  $DC$  之中點為  $E$ ，則  
 $AE = CE = \frac{1}{2} DC = AO$ ，故  $\angle AOE$   
 $= \angle AEO = \angle ACE + \angle CAE = 2\angle A$   
 $CE = 2\angle COB$  也。

【第三法】作離心率等於 2 之雙曲線，命

其中心爲  $C$ ，其二頂點爲  $A, A'$ 。延長  $CA'$  至  $S$ ，使  $A'S = CA'$ 。於  $AS$  上作包含等於欲三等分之角之圓弧。命  $AS$



之垂直二等分線與此圓弧之交點爲  $O$ 。以  $O$  爲心， $OA$  即  $OS$  爲半徑作圓，交以  $A'$  爲頂點之雙曲線之枝線於  $P$ 。則  $\angle SOP$  爲  $\angle SOA$  之三分之一。因離心率等於 2，故  $S$  爲此雙曲線之焦點， $AS$  之垂直二等分線爲準線而由  $P$  至此垂直二等分線之距離  $PM$  之二倍等於  $PS$ 。命  $PM$  之延線與圓弧  $APS$  之交點爲  $Q$ ，則  $PQ$  爲  $PM$  之二倍，而  $AQ$  等於  $SP$  甚明。故  $SP = PQ = QA$ 。故  $\angle SOP = \angle POQ = \angle QOA$ 。是爲巴普斯之法。

此外尚有種種之法。

足

【足】Foot [幾]足亦稱趾即由一點至一直線或平面引垂線或斜線時，其相交之點也。

貝

【貝治阿之法】Bézout's method.

[代]即未定乘數法，見該條。

邦

【邦斯累定理】Poncelet's theorem.

[幾]即九點圓之定理之謂，見九點圓條。

里

【里】[算]長度名，屬營造尺庫平制，即

1800 尺。合 576 公尺。



# 八 畫

## 亞

【亞培爾定理】 Abel's theorem. [代]

$$(x+a)^n = x^n + A_1 a(x+b)^{n-1} + A_2 a(a-2b)(x+2b)^{n-2} + \dots + A_r a(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r} + \dots + a(a-nb)^{n-1}.$$

但  $A_r$  爲由二項式定理  $x^r$  之係數。由查理斯密大代數學第 259 及 305 款，已證明次式。

$$a^p - n(a-1)^p + nC_2(a-2)^p + \dots + (-1)^n(a-n)^p = 0 \dots \dots \dots (A)$$

但  $p$  爲小於  $n$  之正整數。

若以  $n-r$  代  $n$ ,  $n$  代  $a$ ,  $n-r-1$  代  $p$ , 且逆其順序書之, 則得  $r^{n-r-1} - n_{-r}C_1(r+1)^{n-r-1} + n_{-r}C_2(r+2)^{n-r-1} - n_{-r}C_3(r+3)^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r}n^{n-r-1} = 0 \dots \dots \dots (1)$

又於(A)以  $n-1$  代  $n$ ,  $n$  代  $a$ ,  $n-2$  代  $p$ , 且逆其順序書之, 則得

$$1 - (n-1)2^{n-2} + n_{-1}C_23^{n-2} - \dots + (-1)^{r-1}n_{-1}C_r r^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}n^{n-2} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

由是得次式。

$$a^n = nC_1ab^{n-1} + nC_2a(a-2b)(2b)^{n-2} + \dots + nC_r a(a-rb)^{r-1}(rb)^{n-r} + \dots + a(a-nb)^{n-1} \dots \dots (B)$$

因於此式比較  $a^n$  之係數, 則爲  $1=1$ , 比較  $a^{n-1}$  之係數, 則爲  $nC_{n-1}(n-1b) - (n-1)(nb) = 0$ .

又普通於(B)之右邊求  $a^r$  之係數, 則得  $nC_r(rb)^{n-r} - nC_{r+1} \cdot rC_1(\overline{1+1b})(\overline{1+1b})^{n-r-1} + nC_{r+2} \cdot r+1C_2(\overline{r+2b})^2(\overline{r+2b})^{n-r-2} + \dots + (-1)^{n-r}n_{-1}C_{n-r}(nb)^{n-r}$

$$= nC_r r^{n-r} b^{n-r} - nC_r \frac{n-r}{r+1} \cdot r(r+1)^{n-r} b^{n-r} + nC_r \frac{(n-r)(n-r-1)}{(r+1)(r+2)} \times \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} (r+2)^{n-r} \cdot b^{n-r} + \dots + (-1)^{n-r} nC_r \frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$\times \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \cdot n^{n-r} b^{n-r} = r \cdot nC_r b^{n-r} \{ r^{n-r-1} - n_{-r-1}C_1(r+1)^{n-r-1} + n_{-r}C_2(r+2)^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r}n^{n-r-1} \}.$$

以(1)式代入之, 則上式之值爲零。又於(B)式之右邊取  $a$  之係數, 與上同樣而變化之, 則得次式。

$$nb^{n-1} \{ 1 - (n-1) \cdot 2^{n-2} + n_{-1}C_2 3^{n-2} - \dots + (-1)^{r-1}n_{-1}C_r \cdot r^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}n^{n-2} \}.$$

以(2)式代入之, 則此式之值爲零。故(B)式之真確得以證明。而亞培爾定理之真確, 亦得直接證明之。即

$$(x+a)^n = x^n + nC_1 a(x+b)^{n-1} + nC_2 a(a-2b)(a+2b)^{n-2} + \dots + nC_r a(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r} + \dots + a(a-nb)^{n-1} \dots \dots (C)$$

於(C)式之右邊取  $x^{n-r}$  之係數, 則得  $nC_1 a n_{-1} C_{r-1} b^{r-1} + nC_2 a(a-2b)n_{-2}$

$$c_{r-2}(2b)^{r-2} + n c_3 a (a-3b)^2 n-3 c_{r-3} (3b)^{1-3} + \dots + n c_r a (a-rb)^{r-1}$$

如前法將  $n c_1 n-1 c_r -1 n c_2 n-2 c_r -2$  變化之，則為  $n c_r \{ rab^{r-1} + r c_2 a (a-2b)(2b)^{r-2} + \dots + a(a-rb)^{r-1} \}$ 。

於(B)式以  $r$  代  $n$  則此式為  $n c_r^{-r}$ 。又於(C)式之右邊求不含  $x$  之項，則得與(C)同一之式。故(C)為真確。

**【亞拉伯數字】** Arabic numerals.

[算] 即通常所用之數字 0, 1, 2, 3, ..., 9 也。

**【亞拉伯記數法】** Arabic system of notation

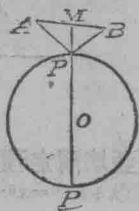
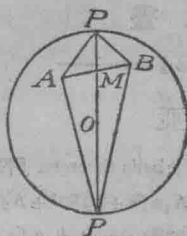
[算] 亞拉伯記數法者，即現今一般算術上所用之記數法也。其法以列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 十個數字以記數，某位數字為表其右位數字之十倍，而於個位數之右作小數點，以下則為小數，故其位之列法如次。

.....<sup>十</sup>萬千百十個。分釐毫絲忽.....  
此記數法歐洲人由亞拉伯人傳入，故有此名，但亞拉伯人則得之於印度人也。

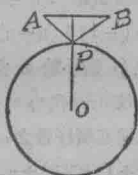
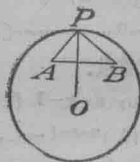
**【亞幾默特螺線】** Spiral of Archimedes. [幾] 見螺線條。

**【亞爾海聖問題】** Alhazen's problem.

[幾]  $P$  為已定圓周上之動點。A, B 為二定點。於  $P$  在如何位置時，則 (1)  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ ，或 (2)  $PA + PB$  為極大或極小。此為亞爾海聖之問題。[解] (1) 命  $M$  為  $AB$  之中點，則  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PM}^2 + 2\overline{MA}^2$ 。故使  $PM$  為極大或極小即可。



即  $P$  於過  $M$  之直徑之兩端中，取距  $M$  遠時為極大，距  $M$  近時為極小也。(2) 命圓之中心為  $O$ ,  $P$  為其圓周上之任意點，則當  $\angle OPA = \angle OPB$  時， $PA + PB$



為極大或極小。(A)圓與 A, B 點在  $P$  之切線反對之側時， $PA + PB$  為極小。(B)圓與 A, B 點在  $P$  之切線同側時， $PA + PB$  為極大。

京

**【京】** [算] 我國記數之名，萬萬曰億，萬億曰兆，萬兆曰京。

來

**【來莫恩點】** Lemoine point. [幾] 即類似重心，見該條。

**【來莫恩平行線】** Lemoine parallels. [幾] 過三角形之類似重心與其邊平行之

直線也。

### 依

【依變數】 Dependent variable. [代] 見變數條。

【依拉安典素數淘汰法】 Eratosthenes's sieve. [算][代] 此法乃由各數中淘汰非素數而求素數之法也。(為希拉天文學者依拉安典新發明故名，氏為西歷紀元前 275 年乃至 195 年頃之人)。先將自然數凡為 2 所能整除者除 2 外皆省去之，記之如次。

|    |    |    |       |    |    |    |    |  |  |
|----|----|----|-------|----|----|----|----|--|--|
| 1  | 2  | 3  | 5     | 7  | 9  | 11 | 13 |  |  |
| 15 | 17 | 19 | 21    | 23 | 25 | 27 | 29 |  |  |
| 31 | 33 | 35 | 37    | 39 | 41 | 43 | 45 |  |  |
| 47 | 49 | 51 | 53    | 55 | 57 | 59 | 61 |  |  |
| 63 | 65 | 67 | 69    | 71 | 73 | 75 | 77 |  |  |
| 79 | 81 | 83 | 85    | 87 | 89 | 91 | 93 |  |  |
| 95 | 97 | 99 | ..... |    |    |    |    |  |  |

次將凡為 3 所整除之數上記點，又凡為 5 所能整除之數上記點，又凡 7 所能整除之數上記點，逐次如斯，則不記點之數即為素數。

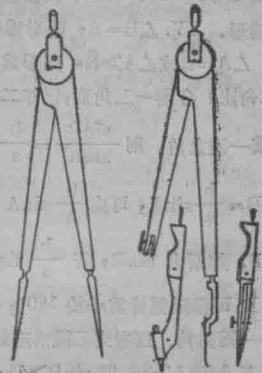
### 例

【例題】 Example. [數] 應用一般原理之一部分所作之命題曰例題，故例題多為說明定理之性質及應用而設。

### 兩

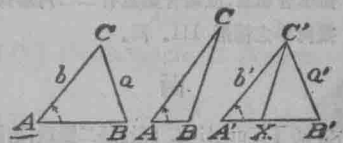
【兩脚規】 Compasses. [數] 兩脚規為由鋼製之兩脚而成，以此兩脚相交之端為

樞，可開閉自如。兩脚規有二種，一種之兩脚為固定之兩尖鉗，可為測距離之用。



一種之一脚插入尖頭之針，而其他一脚則插入嘴鋼筆或鉛筆，以為畫圓之用。

【兩意情形】 Ambiguous case. [幾] [三] 兩意情形如次所述。[幾何學] 二三角形若  $a=a', b=b', \angle A=\angle A'$ ，則  $\angle B=\angle B'$  或  $\angle B+\angle B'=2R$ 。[證] 令  $\triangle ABC$  重置於  $\triangle A'B'C'$  上，A 在  $A'$  上，b 與  $b'$  合，B 及  $B'$  在 b 之同側，則因  $\angle A=\angle A'$ ，故 AB 必沿  $A'B'$  而相重。然 B 為落於  $B'$  上(1)，或落於  $A'B'$  上他點 X 上(2)。(1)之情形為二三角形全



合， $\angle B=\angle B'$ 。(2)之情形  $C'X=a=a'$ ， $\angle B'=\angle C'XB'$ ，而  $\angle C'XA'+\angle C'XB'$

$=2\hat{R}$ , 故  $\angle B + \angle B' = 2\hat{R}$ . 故在本定理  
 I.  $a > b$ , 則兩形爲全等. II.  $a = b$ , 則兩  
 形爲全等. III.  $a < b$ , 則兩形爲兩意  
 之情形. IV.  $\angle B = \hat{R}$ , 兩形爲全等.  
 V.  $\angle A = \hat{R}$  或  $\angle A > \hat{R}$ , 兩形爲全等.

【三角法】令解一三角形, 已知二邊及對  
 於其一邊之角, 則  $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$ , 故

$\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ , 可由  $\frac{b}{a} \sin A$  以求

$\sin B$ . 如斯求  $\sin B$ , 若  $\frac{b}{a} \sin A < 1$ ,  
 則  $B$  可得兩值皆爲小於  $180^\circ$ , 一爲銳  
 角, 一爲鈍角. 茲考究三種情形如下.

(1) 若  $b \sin A > a$ , 則  $\sin B > 1$ , 適合此  
 情形之三角形不能成立. (2) 若  $b \sin A$   
 $= a$ , 則  $\sin B = 1$ , 適合此情形之  $B$  值  
 爲  $90^\circ$ , 故適合此情形只有一三角形.  
 與前幾何學之情形 IV 相對應. (3) 若  
 $b \sin A < a$ , 則  $\sin B < 1$ , 此  $B$  有二值,  
 一爲銳角, 一爲鈍角. (A) 若  $b < a$ , 則  
 $B < A$ , 故  $B$  爲銳角, 而適合之三角形只  
 有一, 與幾何學之情形 I. 同. (B) 若  
 $b = a$ , 則  $B = A$ , 適合題意之三角形只  
 有一, 與幾何學之情形 II. 同. (C) 若  
 $b > a$ , 則  $B$  不一定爲銳角, 而  $B$  之二  
 值俱合題意, 故適合題意有二三角形, 與  
 幾何學之情形 III. 同.

## 函

【函數】Function. 【數】於二變數, 前數  
 給以一值時, 後數對應之而得一值, 則後  
 數稱爲前數之函數. 例如若干三角形,

其高皆同, 則每三角形之面積爲其底之  
 函數. 又火車所行之路程, 當速率一定  
 時, 爲其所經過時間之函數. 於方程式

$y = ax^2 + bx$ , 當  $x$  給以任何值時,  $y$

必得相當之值, 故  $y$  稱爲  $x$  之函數. 又  
 此時  $x$  稱曰自變數,  $y$  稱曰因變數, 即  
 函數亦可稱爲因變數也. 但二數之孰爲  
 自變, 孰爲因變, 則無一定, 如前例若問  
 火車經過之時間, 則時間可視爲所行路  
 程之函數. 故於上之方程式, 亦可謂  $x$  爲  
 $y$  之函數. 有時於多於二之變數之中, 除  
 一數外, 皆給以定值, 而此一數因亦得以  
 決定者, 則此數稱爲他諸數之函數. 如於  
 方程式

$y = ax + bz + u$ ,  $y$  爲  $x, z, u$  之函數.

如前例當三角形之底及高皆變時, 則其  
 面積即爲底及高之函數也. 函數可以方  
 程式表之, 亦可以圖形表之. 故(i)當自  
 變數連續由  $a$  變至  $b$  時, 函數亦連續  
 由  $A$  變至  $B$ . (ii) 當自變數有小變化  
 時, 函數亦相當有小變化. 但有時自變數  
 給以定值時, 反使函數成爲無意義而不  
 能決定者, 例於函數  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , 如令  
 $x = 1$ , 則  $y = \frac{0}{0}$ , 此爲絕對無意義  
 也. 故宜先除以  $x - 1$ , 因此時不視  $x - 1$   
 爲等於零也. 又於函數  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  
 $x$  之值僅可使小於 1 或等於 1, 故  $x$  在  
 $-1$  至  $+1$  之範圍內, 函數  $y$  方能決定其  
 值. 函數常以  $f, F$ , 或希臘字  $\phi, \psi, \omega$  表  
 之, 如  $f(x), \phi(x)$ . 是等字母  $f, F, \dots$  曰  
 函數記號, 此記號  $f(x)$  須視爲一體, 即



“ $x$ 之函數”之意，同時對於相異之多種函數，須用相異之函數記號。 $f(a)$ 為表示“當 $x$ 為 $a$ 時，函數 $f(x)$ 之值”之意。故如令 $f(x)$ 表函數 $x^2-3x-1$ ，則

$$f(0)=-1, f(1)=-3, f(a+b)=(a+b)^2-3(a+b)-1, (fx)^2=(x^2)^2-3x^2-1=x^4-3x^2-1.$$

同一記法常用以表多種變數之函數，如 $f(x,y)$ ， $F(p,v)$ ， $\phi(x,y,z)$ 即所以表 $x$ 與 $y$ ， $p$ 與 $v$ ， $x$ ， $y$ 及 $z$ 之函數也。故若

$$f(x,y)=3x^2-2xy-y^2+4,$$

$$\text{則 } f(1,1)=3+2-1+4=8,$$

$$f(a,b)=3a^2-2ab-b^2+4.$$

[函數之種類] 函數大別之為代數函數與超越函數。代數函數者即自變數與函數之關係，可以代數學之六種通常運算，即加減乘除常數指數之冪及根表之也。而超越函數則不能以代數學之六種通常運算表之。例如 $y=4ax^2$ ， $y=2px+\sqrt{yz}$ 為代數函數，而 $y=a^x$ ， $y=\sin^{-1}x$ 為超越函數。超越函數又有種種。對數函數者用對數以表之，例如 $y=\log x$ 。指數函數者用變數之指數，例如 $y=a^x$ 。圓函數或三角函數者用正弦，餘弦，正切以表之，例如 $y=\sin x$ ， $u=\cos z$ ， $z=\tan^{-1}x$ 。

又函數有陰陽之別。陽函數者如

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, y=\sin^2,$$

自變數與函數之關係顯明表示之者。陰函數如

$$y^2+2xy+x^2+b=0, x\sin y=2a\cos y,$$

自變數與因變數相混合者。又函數有正逆之別。例如 $y=a^x$ 及 $x=\log_a y$ 前者為正函數，後者為逆函數。又 $y=\sin x$ ，

$y=\cos x$ ， $y=\tan x$ 為正函數， $x=\sin^{-1}y$ ， $x=\cos^{-1}y$ ， $x=\tan^{-1}y$ 為逆函數。茲將常用之函數，列舉於次。

### 代 數 函 數

第一對  $\begin{cases} u=f(x)+f(x), & \text{和。} \\ f(x)=f'(x)-u, & \text{差。} \end{cases}$

第二對  $\begin{cases} u=f(x)\times f(x), & \text{積。} \\ f(x)=u/f(x), & \text{商。} \end{cases}$

但 $f(x)$ ， $f'(x)$ 為 $x$ 之代數函數。

第三對  $\begin{cases} u=x^m, & \text{冪。} \\ x=\sqrt[m]{u}, & \text{根。} \end{cases}$

### 超 越 函 數

第四對  $\begin{cases} u=a^x, & \text{指數。} \\ x=\log_a u, & \text{對數。} \end{cases}$

第五對  $\begin{cases} u=\sin x, & \text{正。} \\ x=\sin^{-1}u, & \text{逆。} \end{cases}$

**[函數論]** Theory of functions. [數] 論函數之性質及其定理等之學也。

### 刻

**[刻]** Quarter. [算] 一小時之四分之一，即十五分。

### 周

**[周角]** Circum-angle 或 Perigon. [幾] 見角條。

**[周圍]** Perimeter 或 Contour [幾] 指閉幾何圖形之境界全體而言。

### 命

【命題】 Proposition. [幾] 陳述一事項者曰命題。例如「甲爲乙」爲一命題。而證明事項之陳述爲定理；解事項之陳述爲問題或作圖題等。

【命數法】 Numeration. [算] 用名稱以顯數，謂之命數法。其目的在於用甚少之名，而能表無限之數也。現今所通行者爲十進命數法，如次所述。整數之最小者，命名曰「一」，自一依次增一，每數各命名一，曰「二」「三」「四」「五」「六」「七」「八」「九」。於九增一，命名曰「十」，即一之十倍。自十次第十倍之，命名曰「百」曰「千」曰「萬」。自萬次第十倍之，由「十萬」「百萬」「千萬」，而萬萬則命名曰「億」。自億次第十倍之，由「十億」「百億」「千億」而萬億則命名曰「兆」。自兆次第十倍之，命名曰「京」曰「垓」曰「秭」曰「穰」曰「溝」曰「澗」曰「正」……等，實則徒有其名而無其用耳。代數學則論以任意底表數之一般方法，英語爲 System of numeration.

### 和

【和】 Sum. [算] [代] 二或多於二之數之和者，在算術爲包含其各數之單位之全體，故和常大於其部分。然在代數則和不一定爲增加，如其中正或負多量之和，有小於其任一部分者，有等於 0 者，故名此和曰代數和，以與算術和相區別。

【和較法】 Alligation Alternate. [算] 見混合法條。

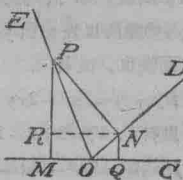
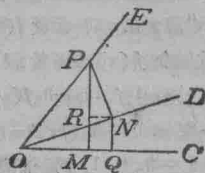
【和角之三角函數】 Trigonometrical functions of the sum of two or

more angles. [三] [二角之和] 以 A 表 COD 角；

以 B 表 DOE 角，則 COE 角，可以 A + B 表之。

由作圖知

NPR 角與 PNR 角互爲餘角，故等於 RNO 角，即等於 NOC 角或 A 角。



$$\text{故 } \sin(A+B) = \frac{PM}{OP} = \frac{RM+PR}{OP}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{NQ}{OP} + \frac{PR}{OP} = \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{PR}{PN} \cdot \frac{PN}{OP} \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B. \end{aligned}$$

$$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ-QM}{OP}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{OQ}{OP} - \frac{NR}{OP} = \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{NR}{NP} \cdot \frac{NP}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

$$\text{又 } \tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

分子分母各以  $\cos A \cos B$  除之，則得

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$$

$$= \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B}$$

分子分母以  $\sin A \sin B$  除之，則得

$$\cot(A+B) = \frac{\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - 1}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

上之關係不論  $A$  及  $B$  爲任何角均可。如  $A$  及  $B$  爲小於二直角，則  $\sin(A+B)$  及  $\cos(A+B)$  之公式，又可以 Ptolemy 定理證明之。Ptolemy 之定理爲如  $AB$   $CD$  爲圓之內接四邊形，則  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$  (1) 令  $BD$  爲圓之直徑，且等於單位長，又  $ADB = \alpha$ ，

$$BDC = \beta, \text{ 則 } ABD = \frac{1}{2} \pi - \alpha,$$

$$DBC = \frac{1}{2} \pi - \beta, \quad AC = \sin(\alpha + \beta),$$

$AB = \sin \alpha$ ， $CD = \cos \beta$ 。故 Ptolemy 之定理爲等於  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。(2) 令  $CD$  爲圓之直徑，且等於單位長，又  $BCD = \alpha$ ， $ADC = \beta$ ，則

$$BCA = \alpha + \beta - \frac{1}{2} \pi, \quad AB = -\cos(\alpha + \beta),$$

而上述定理等於  $-\cos(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta$ 。即  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。

【三角之和】此可由上述諸式誘導得之，

即  $\sin(A+B+C) = \sin(A+B) \cos C + \cos(A+B) \sin C = (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \cos C + (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$ 。

又  $\cos(A+B+C) = \cos(A+B) \cos C - \sin(A+B) \sin C = (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \cos C - (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \sin C = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C - \cos B \cos C \sin A - \cos A \sin C \sin B$ 。

上之二式亦可書爲

$$\sin(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C$$

$$\times (\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C),$$

及  $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C \times (1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B)$ 。

故  $\tan(A+B+C)$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}$$

又  $\cot(A+B+C)$

$$= \frac{\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B - 1}$$

〔 $n$  角之和〕由歸納法可得  $n$  角  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  之和之正弦餘弦之公式如下。

$$\sin(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = S_1 - S_3 + S_5 - \dots$$

$$\cos(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = S_0 - S_2 + S_4 - \dots$$

$S_r$  爲表  $r$  角之正弦與其餘  $(n-r)$  角之餘弦之諸積之和， $r$  角爲由  $n$  角中用種

種之組合法選出。如  $S_0 = \cos A_1 \cos A_2 \dots \cos A_n$ ,  $S_1 = \sin A_1 \cos A_2 \dots \cos A_n + \cos A_1 \sin A_2 \cos A_3 \dots \cos A_n + \cos A_1 \cos A_2 \sin A_3 \dots \cos A_n$ .

上之二式，又可書為

$$\sin(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \cos A_1 \cos A_2 \dots \cos A_n (t_1 - t_2 + t_3 \dots)$$

$$\cos(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \cos A_1 \cos A_2 \dots \cos A_n (1 - t_2 + t_4 \dots)$$

而  $t_r$  為表  $\tan A_1, \tan A_2, \dots, \tan A_n$ , 每取  $r$  角之諸積之和，如  $t_1 = \tan A_1 + \tan A_2 + \dots + \tan A_n$ ,  $t_2 = \tan A_1 \tan A_2 + \tan A_2 \tan A_3 + \dots + \tan A_{n-1} \tan A_n$ .

故  $\tan(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n)$

$$= \frac{t_1 - t_3 + t_5 \dots}{1 - t_2 + t_4 \dots}$$

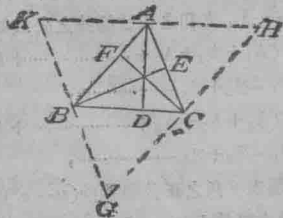
此為  $n$  角之和之正切之公式。

固

【固定資本】Fixed capital. [算] 見資本條。

垂

【垂心】Orthocentre. [幾] 三角形之三垂線必交於同一點，此交點稱曰垂心。



由三角形之各頂點至對邊引三垂線 AD, BE, CF, 又過 A, B, C 與邊 BC, CA, AB 平行引三直線作  $\triangle GHK$ . 則 AKBC 為平行四邊形,  $AK = BC$ , 同理  $AH = BC$ , 故  $AK = AH$ . 同理  $BK = BG, CG = CH$ , 故 AD, BE, CF 為  $\triangle GHK$  三角形各邊中點之垂線, 而相交于同一點。

【垂足】Foot of perpendicular. [幾] 垂線與他線相遇之點，稱為垂足。

【垂直】perpendicular. [幾] 一直線與他直線相交，其所成二隣角各為直角，則此二直線為互相垂直。一直線垂直於一平面內過其足之諸直線，則此直線即垂直於此平面，而此平面亦垂直於此直線。

設一平面與他一平面成一二面角，則此二平面為彼此垂直。又兩圓弧其所含之平面互相垂直，則兩圓弧亦互為垂直。

【垂趾】Foot of perpendicular. [幾] 即垂足，見該條。

【垂線】perpendicular. [幾] 一直線垂直於他直線，則此直線為他直線之垂線，或他直線為此直線之垂線。一直線垂直於一平面，則此直線為此平面之垂線。垂線為自一點至一直線或一平面之最短距離。

【垂足線】Pedal line. [幾] 或曰垂趾線，即西摩孫線，見該條。

【垂直角】Vertical angle. [幾] [三] 垂直角者其邊在垂直面上之角之稱。而垂直角之一邊為水平他邊向上者曰仰角，一邊為水平他邊向下者曰俯角。

【垂直面】Vertical plane. [幾] [三]

垂直面者含垂直線之平面也。

【垂直線】Vertical line. [幾] [三] 爲

鉛垂線之方向之直線也。

【垂直方向】Vertical direction. [幾]

[三] 即鉛垂線之方向。

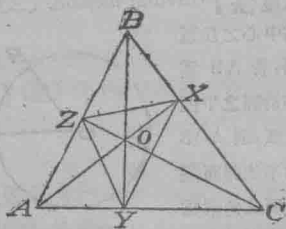
【垂直距離】perpendicular distance.

[幾] 垂直距離者，由一點至他一點或一直線或一平面，或一直線與他一直線，一平面與他一平面間之最短距離，即其間所作之垂線也。

【垂足三角形】Pedal triangle 或 Ort-

hique triangle. [幾] 或稱垂趾三角形。

聯結三角形三垂線之足所成之三角形，



稱爲垂足三角形，即 AX, BY, CZ 爲三角形 ABC 之三垂線，XYZ 爲垂足三角形。AX, BY, CZ 爲三角形 XYZ 之各角之二等分線，故其交點 O 爲三角形 XYZ 之內心。又 BC, CA, AB 爲三角形 XYZ 之各外角之二等分線，故 A, B, C 爲其三角形之傍心。

【垂直二等分線】Perpendicular bi-

sector. [幾] 一直線與一有限直線垂直且二等分之之稱也。

## 奇

【奇數】Odd number. [算] 凡二所不

整除之數曰奇數，如 1, 3, 5, 7, ... 等。自一起連續 n 個奇數之和爲  $n^2$ 。因此 n 數成等差級數，其首項爲 1，公差爲 2，

故其和  $S = \frac{n}{2} \{ 2 + (n-1)2 \} = n^2$ 。

【奇幻平方】Magic square. [算] 即

幻方，見該條。

## 定

【定則】Law 或 Rule. [數] 與定律同

意而意較狹。例如級數之定律者，其各項間順次之關係之謂也，而定則則爲由定律所表示之假設以求各項時所必要之方法。

【定律】Law. [數] 數學上定律一語，常

與法則同意義用之，而較之定則之意，更爲普通。

【定理】Theorem. [數] 於幾何學言之，

定理爲由已知命題證明他命題之謂。其已知之命題爲定義公理或已證明之定理等。定理由假設與終結二部而成，假設者假定其爲真，終結者由假設而導得眞理也。例如「若 A 爲 B，則 C 爲 D」爲一定理，「若 A 爲 B」爲假設，「則 C 爲 D」即終結也。在解析法中，定理不必如上所述表記之，而有時如一恒等式，例如二項式定理等。

【定義】Definition. [數] 說明學語之意

義之敘述也。

【定長直線】Finite straight line.

〔幾〕即有限直綫，見該條。

## 底

【底】Base. 〔算〕〔代〕〔幾〕平面形之

底者，多角形立於其上之一邊也，亦曰底邊。二等邊三角形除相等二邊外其他一邊爲底。梯形之底爲相平行之二邊。其他三角形或多邊形可以任一邊爲底。圓錐，角錐之底者與其頂點相對之面也，亦稱底面。圓柱之底爲其平行之二面。球帶之底爲二平面截球所生之二圓周。球角錐之底爲球面多邊形。球分之底爲扇形之弧所生之球帶。球盤之底爲二平面所作之截面。記數之底於十進法爲10，即滿位須進之數。對數之底見對數條。

【底角】Base angle. 〔幾〕與底邊相鄰之角也。

【底面】Base. 〔幾〕見底條。

【底線】Base line. 〔幾〕即底邊。

【底邊】Base-side. 〔幾〕即底條。

## 弦

【弦】Chord, Hypotenuse. 〔幾〕圓之弦(Chord)者，一直綫與圓周相交，夾於圓周間之部分也。又弦(Hypotenuse)者直角三角形直角之對邊也，亦稱斜邊。

## 弧

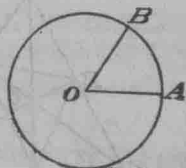
【弧】Arc. 〔幾〕弧爲一般曲綫之一部分，初等幾何學所稱之弧爲圓周之一部分，

故謂之圓弧。若弧爲圓周之半者，稱爲半周。兩弧之和等於一圓周，則兩弧稱爲共軛弧。一弦對兩共軛弧，若兩弧不相等，則小者稱爲劣弧，大者稱爲優弧。通常所稱之弧多指劣弧而言。

【弧度】Circular measure. 〔三〕以一角之頂爲中心任意之長爲半徑畫圓，其角所跨之弧與半徑之比，謂之角之弧度。如以  $r$  表圓之半徑，則全圓周爲  $2\pi r$ ，故四直角之弧度爲  $\frac{2\pi r}{r}$  即  $2\pi$ ，二直角之弧度爲  $\pi$ ，一直角之弧度爲  $\frac{\pi}{2}$ 。

$n$  直角之弧度爲  $\frac{n\pi}{2}$ ， $n$  爲整數分數均可。

【弧度法】Circular method. 〔三〕以  $O$  爲中心之任意圓，若  $AB$  爲等於圓之半徑之弧，則  $AOB$  角不依圓而變，而此角稱爲



半徑度(Radian)，或稱爲弧度之單位。若  $A$  角爲此單位角之若干倍，則  $A$  角爲等於若干半徑度。以半徑度量角之法，稱爲弧度法。由幾何學，圓之中心角與其

所跨之弧成比例，故  $\frac{\angle AOB}{2\text{直角}} = \frac{\text{半徑}}{\text{半圓周}}$

$$= \frac{\text{直徑}}{\text{圓周}} = \frac{1}{\pi},$$

$$\text{而 } \angle AOB = \left( 2\text{直角} \times \frac{1}{\pi} \right)$$

$$= \left( 180^\circ \times \frac{1}{\pi} \right).$$

即  $\triangle OAB$  角為  $180^\circ$  之一定分數，不以圓之大小而變。故以半徑度測角有二便利處，(1) 凡半徑度皆相等，(2) 以半徑度為測角之單位，於理論的三角法之公式可變為簡單，又解析的數學之公式亦可化

為簡單。1 半徑度 = 2 直角  $\times \frac{1}{\pi} = 57^\circ$ 。

$.29577951\dots, = 57^\circ 17' 45''$ 。如以  $D$  表

某角之度數， $\theta$  表其弧度，則  $\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi}$ ，

故  $D = 180 \cdot \frac{\theta}{\pi}$ ， $\theta = \frac{\pi}{180} \cdot D$ 。

即某角之度數以  $\frac{\pi}{180}$  乘之，則為弧度。某

角之弧度以  $\frac{180}{\pi}$  乘之，則為度數。

### 忽

【忽】〔算〕記小數之名即  $.00001$ 。

### 或

【或是率】Probability 或 Chance.〔代〕即適遇，見該條。

### 昇

【昇冪】Ascending power.〔代〕一式中某文字之指數由低順次至高，則稱為某文字之昇冪。如  $10-5x+2x^2-x^3$  之式為  $x$  之昇冪。又如  $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$  之式為  $a$  之昇冪，而為  $x$  之降冪，參閱降冪條。

### 東

【東經】East meridian.〔算〕見經度條。

### 枝

【枝】Branch.〔幾〕見雙曲線條。

### 法

【法則】Rule.〔數〕法則者為表示欲得某結果所必要之運算之方法也。法則又為公式之以通常語言述說之者，而公式則為法則之以代數記號表示之者也。

【法度】Grade.〔三〕一直角之百分之一也。此法為法國之米突制所創定，因諸數皆以十進，故角度亦用十進法，其實用之者甚少也。

【法線】Normal.〔幾〕平面曲線之某點之法線者，為於其曲線之平面上，由該點引曲線之切線，又過其點垂直於切線之直線也，故圓之法線過其中心。又曲面上某點之法線者為於該點作曲面之切面又過其點垂直於切面之直線也，故球之法線過其中心。而於平面上一點之垂線，亦稱其點之法線。

【法數】〔算〕見實數條。

【法噸】英語為 Metric ton，法語為 Tonneau.〔算〕即米突噸，見該條。

【法國制】French system.〔算〕即米突制，見該條。

【法國法】Ererch method.〔三〕角之百分法亦稱法國法，詳百分法條。

### 直

【直交】Orthogonal. [幾]兩曲線相交，於其交點引兩曲線之切線，若此兩切線成直角，則此兩曲線爲直交。

【直角】Right angle. [幾]一直線與他直線相垂直，則其兩直線間之角稱爲直角。直角等於平角之二分之一，周角之四分之一，即 90 度。

【直徑】Diameter. [幾]過圓心，其兩端在圓周上之直線，稱爲圓之直徑，凡圓之諸直徑皆相等。過球心以球面爲界之直線，稱爲球之直徑，球之諸直徑皆相等。

【直線】Straight line 或 Right line. [幾]點移動而成線，若其移動之方向處處相同，則其軌跡成一線。故直線者始終同一方向之線。或二點間最短之線。或曰直線者取其一部分任置他部分上而完全重合者也。直線形之周界爲直線，二平面之交爲直線，常簡稱曰線。

【直交圓】Orthocycle. [幾]兩圓相交，由其交點作兩圓之切線，此二切線夾成直角時，此兩圓稱爲直交圓。

【直向弧】Direct arc. [幾]聯結球面上二點所成大圓弧之小部分曰直向弧。

【直向線】Direct line. [幾]於任意表面上取二點，可完全確定在其面上之線者，則此線稱爲其面之直向線。故直線爲平面之直向線，球之大圓爲球面之直向線。

【直角柱】Right prism. [幾]直角柱者角柱之諸側稜垂直於其兩底者也。

【直角錐】Right pyramid. [幾]角錐之底爲正多角形，其高之趾在底面之

中心者曰直角錐。

【直角體】Cuboid. [幾]即直角平行六面體，見該條。

【直圓柱】Right circular cylinder. [幾]圓柱之諸基線或軸垂直於其兩底者也。或曰以矩形之一邊爲軸而旋轉所生之立體也。

【直圓錐】Right circular cone. [幾]直圓錐者圓錐之軸垂直於其底面者也。或曰以直角三角形直角傍之一邊爲軸而旋轉所生之立體也。

【直截面】Right section 或 Normal section. [幾] (1)與角柱之側稜成直角之截面。(2)與圓柱之基線成直角之截面。(3)與圓錐之軸成直角之截面，亦稱直截面。

【直線角】Rectilinear angle. [幾]角之二邊爲直線者。

【直線形】Rectilinear figure 或 Rectilinear figure. [幾]三以上之直線所包圍之平面形也。亦稱多邊形或多角形。

【直線數】Linear number, [代]見多角數條。

【直二面角】Right dihedral angle. [幾]一平面與他平面相交，若其所成之兩隣二面角相等，則其各二面角，稱爲直二面角。

【直三面角】Rectangular trihedral angle. [幾]三面角之一個面角爲直角者，稱爲直三面角。

【直三角形】Right triangle. [幾]即直角三角形，見該條。



【直接相似】Directly similar. [幾]

與逆相似相對之語，即普通之相似也。

【直角三角形】Right angled triangle. [幾] 三角形之一角為直角者。

【直角雙曲線】Rectangular hyperbola. [幾] 即等邊雙曲線。等邊雙曲線兩漸近線間之角為直角，故有此名。

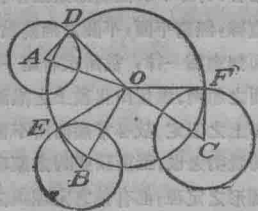
【直接公切線】Direct common tangents. [幾] 二圓之公切線不在二圓之中心間與二圓之中心線相截，則此二公切線稱為直接公切線，即外公切線也。

【直線方程式】Linear equation. [代] 一次方程式以圖示之，為一直線，故亦曰直線方程式。

【直平行六面體】Right parallelepiped. [幾] 平行六面體之諸側稜，垂直交於其兩底者也。

【直角平行六面體】Rectangular parallelepiped (或 parallelepiped.) [幾] 平行六面體之各面皆為矩形者之稱，或稱直角體或長方體。

【直交於三圓之圓】Orthotomic circle. [幾] 即與三圓直交之圓也。如圖



△, B, C 為三圓, O 圓與之直交於 D, E, F

三點，則 O 圓即為所要之圓。命 A, B, C 三圓之半徑為  $r, r', r''$ ，則

$\overline{AO}^2 - r^2 = \overline{BO}^2 - r'^2$ ，即  $\overline{AO}^2 - \overline{BO}^2 = r^2 - r'^2$ ，而 A 及 B 為定點，故 O 點為由 A, B 二定點之距離之平方之差，而為一定之點，其軌跡為一直線。同理  $\overline{BO}^2 - \overline{CO}^2 = r'^2 - r''^2$ ，O 點為由定點 B 及 C 之距離之平方之差之為一定點，其軌跡亦為一直線。是等直線之交點，即為所要之圓之中心。

## 空

【空間】Space. [幾] 吾人試瞻觀天傍，上而日月星辰，下而河海山嶽，茫茫無際，靡知終極。而晴夜仰望蒼空，則無數星辰，密布散列，若用望遠鏡視之，則更見多數之星，以更强之望遠鏡視之，更可發見無數之星，蒼空之渺茫無窮，誠令人驚嘆不止。故欲對空間下一精密之定義，實非易易。略言之，則空間者在無限諸方向之中而包含諸物體者也。數學的空間，亦為無窮大，近世幾何學之無限直線無限平面即由此着想。然一物體皆占空間之一部分，故初等幾何學即為就此空間而論之學科。在幾何學上凡空間之有限部分曰立體。立體者有長有廣有厚有位置者也。立體與其周傍空間之界為面，故面有長有廣有位置而無厚。面之四方廣至無限。若就面之一部而論，則其周圍為線，故線有長有位置而無廣與厚。線之兩端長至無限。然就線之一部考之，則其一端為點，故點唯有位置而無長，廣及厚也。

## 股

【股】〔幾〕直角三角形直角傍之二邊中，比較長之一邊也，見勾條。

## 近

【近數】〔連分數之近數〕 Convergent (of continued fraction). 〔代〕計算連分數至任意之階級，其所得分數，稱為連分數之近數。例如連分數

$$a + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

首之三近數為  $\frac{a}{1}, \frac{ab_1 + a_1}{b_1}, \frac{ab_1b_2 + a_1a_2 + a_1b_2}{b_1b_2 + a_2}$ 。

【近似法】 Approximation. 〔算〕即省略算，見該條。

【近似值】 Approximate value. 〔數〕近似值者近似於真值之值也。例如  $\sqrt{5}$  為不盡根，而 2.23606 或 2.23607 為其近似值，因  $\sqrt{5} = 2.236068\dots$ ，與前二值之差皆小於 .00001，為數甚微也。近似值於實際之計算上常用之。如圓周率之值為 3.14159265358979323846，而實際上多用其近似值 3.1416。

【近世幾何學】 Modern Geometry. 〔幾〕為第十九世紀 Carnot-Géométrie de position (1803年), Brianchon-Mémoire sur les lignes du second ordre (1817年), Poncelet-Traité des propriétés projectives des figures (1822年), Möbius-Barycentrische calcul (1827年), Steiner-Systematische Entwicklung (1832年), Chaeles-Géométrie supérieure (1852年), Von

Staudt-Geometrie der Lage (1847年), 及其他諸氏之研究所得之綜合幾何學 (Synthetic Geometry) 之稱。而其中所記載之主要事項為非調和比 (Anharmonic ratio), 布立安深之定理 (Brianchon theorem), 稅瓦之定理 (Ceva theorem), 同軸圓 (Coaxal circles), 完全四邊形 (Complete quadrilateral), 戴沙固之定理 (Desargues theorem), 調和列點 (Harmonic range), 調和束線 (Harmonic pencils), 倒形法 (Inversion), 對合 (Involution), 美奈勞斯之定理 (Menelaus theorem), 巴斯開之定理 (Pascal theorem), 極及極線 (Pole and polar), 多來米之定理 (Ptolemy theorem) 等。其所以異於古代幾何學者，以二大原理為其基礎，即連續之原理 (Principle of continuity) 及雙對之原理 (Principle of duality) 是也。連續之原理者，乃所有定理，無往不真，可以普通應用，驟有特例，如尋常幾何之理，每至無窮處，即不適用，概以出規名之，故所求者為一種線與面之特例。而近世幾何之各例，即本於無窮原素之存在 (如無窮直線，無窮平面，平圓之無窮點)，視有盡與無窮為一律，故所求者為一類之線與面之通例。蓋皆由代數上之推論，以為幾何上之假定，故尋常幾何所不能解，皆得而說明之也。至所謂雙對之原理者，即各圖形之定理，必有他之定理與之相伴，成為雙對，前者一點，後者有一直線對之，前者一直線，後者有一點對之之謂也。

## 長

【長度】Length. [算] [幾] 短之對，二線相較，其大者曰長。一物之長度，即其物之長所含之單位也。如以尺為單位，則某物之長度為 3 尺者，即其物之長為單位尺之三倍也。

【長徑】Major axis. [幾] 過橢圓之二焦點其兩端在曲線上之直線之部分，稱曰長徑，或稱為長軸，橫軸。

【長軸】Major axis. [幾] 即長徑。

【長噸】Long ton. [算] 即重噸，見該條。

【長方形】Oblong. [幾] 即矩形，見該條。

【長方體】Rectangular parallelepiped. [幾] 即直角平行六面體，見該條。

【長除法】Long division. [算] 為與短除法對稱之語，例如  $37562 \div 7$  及  $12345 \div 23$ ，以下式運算之，即稱為長除法。

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 37562} \quad (5366 \quad 23 \overline{) 12345} \quad (536 \\ \underline{35} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 25 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \underline{21} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 46 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \underline{42} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 42 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \underline{42} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$$

【長菱形】Rhomboid. [幾] 即平行四邊形，或稱偏菱形，斜矩形。

## 金

【金衡】Troy-weight. [算] 英美衡金銀所用之重量，其單位如次。

1 grain (gr.) ..... 合我國·00174兩

1 penny weight (pwt.) = 24 gr. ....

合我國·04169兩。

1 ounce (oz.) = 20 pwt. .... 合我國·83385兩。

1 pound (lb.) = 12 oz. .... 合我國 10·0062兩

## 非

【非素數】Composite number. [算]

[代] 不為素數之數曰非素數，即能以大於 1 之整數整除之數也，例如 12, 15, 27。下表為集合百以內非素數之數因數而成，其百以內之素數，則用大字，以示區別。此表之直行表十位數，橫列表個位數，其行列相交處，即為所取之數之素因數之分解式。例如欲分解 63 為素因數，則於直行下數至 6，於橫列右數至 3。其行列相交處即得  $3^2 \cdot 7$ 。注意此表，可發見次述諸件。(1) 11 之各倍數在自左方上端至右方下端之對角線中。(2)  $3^2$  之諸倍數在他一對角線中，而與此對角線平行每隔二行之線，則各為含 3 之倍數。

(3) 2 與 5 之倍數悉含在 2 與 5 之直行中，而 0 下直行則含 2 與 5 之積之倍數。求某非素數約數之總數，則如次法。例如求 60 即  $2^2 \cdot 3 \cdot 5$  之約數之總數，先將 1, 2,  $2^2$  書為第一列，3 書為第二列，5 書為第三列。於是更書第一列之數，次以第二列之數乘第一列各數之積，置為新第二列，又以舊第三列之數乘新第一，第二列各數之積，置為新第三列，第四

|   | 0                   | 1              | 2                              | 3                 | 4                   | 5                 | 6                              | 7              | 8                  | 9                  |
|---|---------------------|----------------|--------------------------------|-------------------|---------------------|-------------------|--------------------------------|----------------|--------------------|--------------------|
| 0 | 0                   | 1              | 2                              | 3                 | 2 <sup>2</sup>      | 5                 | 2·3                            | 7              | 2 <sup>3</sup>     | 3 <sup>2</sup>     |
| 1 | 2·5                 | 11             | 2 <sup>2</sup> ·3              | 13                | 2·7                 | 3·5               | 2 <sup>4</sup>                 | 17             | 2·3 <sup>2</sup>   | 19                 |
| 2 | 2 <sup>2</sup> ·5   | 3·7            | 2·11                           | 23                | 2 <sup>3</sup> ·3   | 5 <sup>2</sup>    | 2·13                           | 3 <sup>3</sup> | 2 <sup>2</sup> ·7  | 29                 |
| 3 | 2·3·5               | 31             | 2 <sup>5</sup>                 | 3·11              | 2·17                | 5·7               | 2 <sup>2</sup> ·3 <sup>2</sup> | 37             | 2·19               | 3·13               |
| 4 | 2 <sup>3</sup> ·5   | 41             | 2·3·7                          | 43                | 2 <sup>2</sup> ·11  | 3 <sup>2</sup> ·5 | 2·23                           | 47             | 2 <sup>4</sup> ·3  | 7 <sup>2</sup>     |
| 5 | 2·5 <sup>2</sup>    | 3·17           | 2 <sup>3</sup> ·13             | 53                | 2·3 <sup>3</sup>    | 5·11              | 2 <sup>3</sup> ·7              | 3·19           | 2·29               | 59                 |
| 6 | 2 <sup>2</sup> ·3·5 | 61             | 2·31                           | 3 <sup>2</sup> ·7 | 2 <sup>6</sup>      | 5·13              | 2·3·11                         | 67             | 2 <sup>2</sup> ·17 | 3·23               |
| 7 | 2·5·7               | 71             | 2 <sup>3</sup> ·3 <sup>2</sup> | 73                | 2·37                | 3·5 <sup>2</sup>  | 2 <sup>2</sup> ·19             | 7·11           | 2·3·13             | 79                 |
| 8 | 2 <sup>4</sup> ·5   | 3 <sup>4</sup> | 2·41                           | 83                | 2 <sup>2</sup> ·3·7 | 5·17              | 2·43                           | 3·29           | 2 <sup>3</sup> ·11 | 89                 |
| 9 | 2·3 <sup>2</sup> ·5 | 7·13           | 2 <sup>2</sup> ·23             | 3·31              | 2·47                | 5·19              | 2 <sup>5</sup> ·3              | 97             | 2·7 <sup>2</sup>   | 3 <sup>2</sup> ·11 |

|      |        |                      |
|------|--------|----------------------|
| 1    | 2      | 2 <sup>2</sup>       |
| 3    |        |                      |
| 5    |        |                      |
| 1,   | 2,     | 2 <sup>2</sup> ,     |
| 3,   | 2×3,   | 2 <sup>2</sup> ×3,   |
| 5,   | 2×5,   | 2 <sup>2</sup> ×5,   |
| 3×5, | 2×3×5, | 2 <sup>2</sup> ×3×5. |

列。則數新四列各數之和，即得約數之總數，如本例即 12 也。一般將 60 之素因數 2, 3, 5 之指數 2, 1, 1 (即 2<sup>2</sup>×3<sup>1</sup>×5<sup>1</sup> 之指數) 各加 1 之連乘積，即 3×2×2，即為 60 之約數之總數。但此處 1 及 60 本數，亦計在內。普通某數之約數 (1 及其

本數常不在內) 之數為其各素因數之指數各加 1 之連乘積減 2 茲述代數學之求法於下。設已知數為 N，而從 N 約得各異之素因數為 a, b, c, ……………。則  $N = a^x b^y c^z \dots\dots\dots$ 。故 N 可以次之連乘積之各項整除之，其連乘積為  $(1+a+a^2+\dots\dots+a^x)(1+b+b^2+\dots\dots+b^y) \times (1+c+c^2+\dots\dots+c^z) \dots\dots$ 。由是得整除 N 之約數，並 N 及 1，共為  $(x+1)(y+1)(z+1)\dots\dots$ 。又求已知數之約數之法如下。

$$N = a^x b^y c^z \dots\dots, \text{ 則其約數之和, 爲}$$

$$(1+a+a^2+\dots+a^x)(1+b+b^2+\dots+b^y)(1+c+c^2+\dots+c^z)\dots\dots$$

$$= \frac{(1-a^{x+1})(1-b^{y+1})(1-c^{z+1})\dots}{(1-a)(1-b)(1-c)\dots}$$

【非調和比】Anharmonic ratio 或

cross-ratio. [幾]若  $A, B, C, D$  爲直線上之四列點，而  $C, D$  內分或外分  $AB$  線，

則  $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$  稱爲四列點  $A, B, C, D$  之非

調和比或十字比，常略書爲  $\{AB, CD\}$ ，其線之方向須計及。

### 【非歐幾里得幾何學】 Non-Euclidean Geometry. [幾]

歐幾里得第 12 公例云“若一直線與二直線相交，其一側內角之和小於二直角，則此二直線充分延長必相交於其內角和小於二直角之側”。非歐幾里得幾何學者，不用歐氏此公例而獨立創造之有系統的幾何學也。

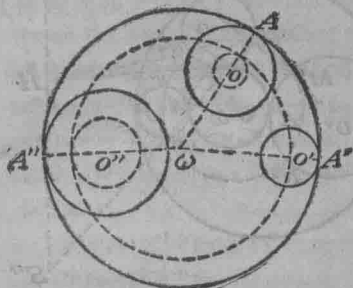
非歐幾里得幾何學思想之由來，發源於求證歐氏第 12 公例之失敗。其始不過見該公例較繁不能一目了然，故思有以證明之，證明不得，懷疑以生。關於此公例研究特深者，爲蘭伯特 (Lambert 1728-1777) 及萊經德 (Legendre 1752-1833) 二氏，其鴻篇傑構實開非歐克里特幾何學之先河。其後學者輩出，俄有羅柏奇 (Lobachevsky 1793-1856)，匈牙利有波利牙 (J. Bolyai 1802-1860)，德有高斯 (Gauss 1777-1855)，均深加研究，不謀而同，咸謂歐氏公例不可證明，且可不用該公例而另創一種有系統之幾何學。高氏此類著作，零星斷片，散見於書札及遺稿中，未之編輯。波氏之作附錄於其父書之後，1832-35 年間出版。羅氏著作較多，出版於 1833-1855 年間。三氏共創之幾何學曰羅柏奇幾何學 (Lobachevskian Geometry)，蓋以羅氏之作

最完且備也。羅氏之幾何學爲銳角之假說，三角形各角之和，小於二直角，又在一平面上二線同垂直於第三線，則二線在其公垂線之任一旁，皆係開義，故亦稱爲雙曲線幾何學。羅氏幾何學獨享非歐克里特幾何學之名有年，1854 年黎曼 (Riemann 1826-1866) 始以微分學爲立足地，另闢一派新幾何學，名曰黎曼幾何學 (Riemann Geometry)。黎氏之幾何學爲鈍角之假說，一直線爲定長，如環無端，可自行回折，故亦稱爲橢圓幾何學。

### 阿

#### 【阿破羅尼問題】 Apollonius' problem.

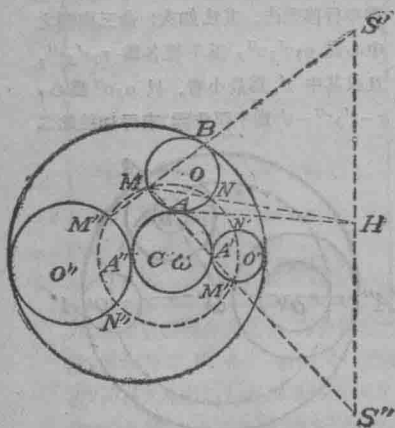
[幾] 阿破羅尼問題即求作切於三與圓之圓之問題也。尋常解此問題之法爲平行移動法。其法如次：命三與圓之中心爲  $o, o', o''$ ，其半徑各爲  $r, r', r''$ 。且設其中  $r'$  爲最小者。以  $o, o''$  爲心， $r - r', r'' - r'$  爲半徑作圓。求得切於此二



圓及過  $o'$  之圓之中心  $\omega$ 。以  $\omega$  爲心， $\omega A$  爲半徑作圓，則此圓切圓  $o', o''$  於  $A'$ ，

$A''$ ，而為所求之圓。此為初等的解法，而為 Vieta 所發見，茲述可應用於與圓之一或二或三代以直線或點之法。此巧妙之解法為葛爾剛納(Gergonne)所發明，其法如次：三與圓之根心與某一相似軸對於此三圓之極相聯之三直線與三與圓之交點為一雙所求之圓之切點，而可作得所求之圓。用葛氏此巧妙之解法猶有不能解者，例如三與圓之中心在一直線上時是也。1892年，富舍(Fouche)除去葛氏解法之不完全之點。其法如次：

有含相似中心  $S', S''$  之相似軸。命  $M$  為  $O$  圓上之任意一點。聯於  $S', S''$ 。  $MS''$  與  $O'$  圓交於二點其一點  $M'$  為  $M$  之逆相應點。同樣  $MS'$  定  $O''$  圓上  $M$  之逆相應點  $M''$ 。畫外接於三角形  $MM'M''$  之圓  $C$ 。設此圓  $C$  與三與圓各交於  $N, N', N''$ 。



聯  $MN$ ，延長之交相似軸  $S'S''$  於  $H$ 。由  $H$  引  $O$  圓之切線  $HA$ ，如前於他二圓

$O', O''$  上求得  $A$  之逆相應點  $A', A''$ 。則外接於三角形  $AA'A''$  之圓為所求之圓。因由  $H$  可作  $O$  圓之二切線  $HA, HB$ ，以是各相似軸與二個實或虛之解，故此問題共有八個實或虛之解。換言之，其八解答如次：所求之圓與三與圓相切為

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| { | 內切 | 內切 | 內切 |
|   | 外切 | 外切 | 外切 |
| { | 外切 | 內切 | 外切 |
|   | 內切 | 外切 | 內切 |
| { | 內切 | 外切 | 外切 |
|   | 外切 | 內切 | 內切 |
| { | 外切 | 外切 | 內切 |
|   | 內切 | 內切 | 外切 |

茲討論實解之數如次：

I. 三與圓無公共點時，(i)任取二圓皆互在外時則有八實解。(ii)取二個一組之圓，任何一圓在他圓之內，他二組皆互在外時，則問題明為不能。(iii)二組之圓為一圓他圓之內，而第三組之圓互在外時，即二與在第三組之圓互在外時，有八實解。(iv)取二圓之任何組，一圓在他圓內時，問題明為不能。

II. 圓周之二相交時。第三圓不過前二圓之交點，而交於此二圓時，有八實解。又第三圓交前二圓之一，或不交於任何圓，或過其交點之一時，惟有四實解。

III. 二圓外切，第三圓在此二圓之外；或二圓內切，第三圓在大圓之內而在小圓之外時，有六實解。其他情形皆有四實解。

IV. 三圓切於同一點時，問題爲不定。

阿破羅尼問題，當特別情形，三與圓之任何者可變爲直線或點。故此問題與其特別情形，共有十種不同情形。今以 P 表點，L 表直線，C 表圓則十種不同之情形如次：(1) 已知 PPP，即過三點作一圓，祇有一解。(2) 已知 LLL，有四解。(3) 已知 PPL，有二解。(4) 已知 PPC，有二解。(5) 已知 PLL，有二解。(6) 已知 PLC，有四解。(7) 已知 PCC，有四解。(8) 已知 LLC，有八解。(9) 已知 LCC，有八解。(10) 已知 CCC，有八解。

## 九 畫

### 係

【係數】Coefficient 或 Co-factor. [代]  
係數即表示某數所取倍數之數，例如  $3ax$  則 3 爲  $ax$  之係數，即表示  $ax$  取三倍之意。上式或可云  $3a$  爲  $x$  之係數，故係數有爲數字者則曰數字係數 Numerical coefficient，有爲文字者則曰文字係數 Literal coefficient，又有數字與文字混合者則曰混係數 Mixed coefficient。然係數之意義甚廣，即凡將積之因數分爲二部分，則其一部即云他部之係數。且係數不僅限於整數，分數正數負數皆可，例如  $\frac{2}{3}ax$  則  $\frac{2}{3}$  即爲  $ax$  之係數，如  $-5bx^2$  則  $-5b$  即  $x^2$  之係數，又如  $xy$  則  $x$  爲  $y$  之係數，或可云  $y$  爲  $x$  之係數。

【係數與根之關係】Relation between the roots and coefficient. [代]  
凡含一未知數之方程式常可變形而爲  $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ ，此爲  $n$  次方，故有  $n$  根，命之爲  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ，則常可得下之恆等式：—

$$\begin{aligned} & x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n \\ & \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \dots (1). \end{aligned}$$

將上式右邊之諸因子乘出，並將  $x$  之係

數左右方程之，則得

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n), \\ p_2 &= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \dots \\ &\quad + \alpha_{n-1}\alpha_n) \\ p_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \dots \\ &\quad + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) \\ &\quad \dots\dots\dots \\ p_n &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n \end{aligned} \right\} (2)$$

故得一定理曰，凡任一代數方程式其最高項之係數為一時，則將第二項之係數  $p_1$  變更符號，即為此方程諸根之和，第三項之係數  $p_2$  即為諸根中每取二根之積之和，第四項之係數  $p_3$  變更符號即為諸根中每取三根之積之和，以此類推，至末項  $p_n$  即  $x^0$  之係數，則為  $n$  根之總乘積  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ ，而其符號須視  $n$  而定，故一方程式之每一根皆為其絕對項之除數。又若方程式之諸根皆為正數時，則方程式之係數正負相間（最高項亦計在內），諸根皆為負數時，則其係數皆正，此觀(2)式即明。

### 保

**【保險】** Insurance 或 Assurance. [算] 在定期之內，為金錢之賠償，以保生命財產之危險，謂之保險。營其業者曰保險公司 Insurance Co，如保房屋貨物之火險 Fire Insurance，則任其被火時之賠償，如保船隻及船中貨物之水險 Marine Insurance，則任其被水時之賠償，如保某人之人壽險 Life Insurance，則任其死亡時之賠償。凡所保之房屋貨物等，謂之保險物。有此保險物者按期付銀於

公司，謂之保費 Premium。至保險物有損失時，公司所出之賠償，謂之險金 Insurable value。保險之計算，則用分益法，險金為母數，保費即子數也。

### 威

**【威爾孫定理】** Wilson's theorem.

[代]若  $p$  為素數，則  $1 + p - 1$  可以  $p$  除盡。是為威爾孫定理。命  $a$  表諸數

$$1, 2, 3, 4, \dots, (p-1) \dots \dots (1)$$

內任意一數，則  $a$  與  $p$  為互素數，若諸積

$$1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \dots, (p-1)a$$

以  $p$  除之，則其中僅有一餘數為 1。命此積為  $ma$ ；則可證除  $a = p - 1$  或 1 以外， $m$  與  $a$  為不同。因若  $a^2$  以  $p$  除之，得餘數 1，則得  $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ，而因  $p$  為素數，此式僅當  $a + 1 = p$  或  $a - 1 = 0$  時，即  $a = p - 1$ ，或 1 時始能成立。故  $2a, 3a, \dots, (p-2)a$  諸積，以  $p$  除之，其中祇有一積之餘數為 1，即 (1) 內諸數之任一數，除第一及最後者外，皆可求得他數，使此一對之數之積形如  $M(p) + 1$ 。故諸整數  $2, 3, 4, \dots, (p-2)$ ，其數為偶數，可結合之成對，使每對之積形如  $M(p) + 1$ 。故將諸對全數相乘，則

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p-2) = M(p) + 1;$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p-1) = M(p) + 1;$$

故  $\frac{p-1}{p} = M(p) + p - 1$ ，或  $1 + \frac{p-1}{p}$  為  $p$  之倍數。

### 括



**【括弧】** Bracket 或 Parenthesis 或 Brace. [數] 欲將二以上之數或項括爲一數或一項時所用之記號曰括弧。其種類通例有 ( ), { }, [ ] 三種, 英名順次爲 Parenthesis, Brace, Bracket.

某式括弧前之符號爲 (+) 時, 則去括弧時, 其式內各項之符號不變, 例如  $N + (a + b) = N + a + b$ ,  $N + (a - b) = N + a - b$ .

反之, 一式中之若干項, 皆可使之包括於括弧之內, 而於其前置符號 (+), 例如  $a + b + c = a + (b + c)$ ,  $a + b - c = a + (b - c)$ ,  $a - b + c = a + (-b + c)$ .

若某式括弧前之符號爲 (-) 時, 則去括弧時, 須儘變其括弧內各項之符號, 例如  $N - (a + b) = N - a - b$ ,  $N - (a - b) = N - a + b$ ,  $N - (a + b - c) = N - a - b + c$ . 反之, 可變某式各項之符號, 以包括於括弧之內, 而於其前置符號 (-), 例如

$a + b + c = a - (-b - c)$ ,  $a - b - c = a - (b + c)$ ,  $a + b - c = a - (-b + c)$ . 又去括弧時每一次可去其一種括弧, 逐次由內部以及於外部, 例如

$a - [b + \{c - (d + e)\}] = a - [b + \{c - d - e\}] = a - [b + c - d - e] = a - b - c + d + e$ .

**【括線】** Vinculum. [數] 欲將諸數或諸項括爲一式時, 有時於其上引一直線以代括弧, 是曰括線, 例如  $a - b - c$  即等於  $a - (b - c)$ , 又  $\sqrt{a + b}$  等於  $\sqrt{(a + b)}$ . 但不用括弧或括線而僅用根號, 則意與括弧或括線時大異, 例如  $\sqrt{a + b}$  非爲  $a + b$  之平方根之意, 乃以  $a$  之平方根加於  $b$  之意. 同樣  $\sqrt{2a}$  非爲  $2a$  之平方根

之意, 乃以  $2$  之平方根乘  $a$  之意. 又分數之分子與分母間之橫線, 亦爲括線之一種, 例  $\frac{a + b}{3}$  即等於  $\frac{1}{3}(a + b)$ .

## 指

**【指標】** Characteristic. [代] 見對數條.

**【指數】** Exponent 或 Index. [數] 爲表示某數自乘若干次之積, 而於其數之右肩書小字以記之, 此所記之小字, 稱曰指數. 例如  $3^5$  即  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$  之意, 而  $5$  爲  $3$  之指數, 又  $a^4$  即  $aaaa$  之意, 而  $4$  爲  $a$  之指數. 一般  $a^n$  爲  $a$  自乘  $n$  次之意, 而  $n$  爲其指數.  $n$  之範圍推廣至負數分數皆可, 例如  $a^{-2}$  則  $-2$  即爲  $a$  之指數, 一般  $a^{-n}$  則  $-n$  即爲  $a$  之指數. 而因  $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$ , 故  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

又  $a^{\frac{1}{3}}$  則  $\frac{1}{3}$  即爲  $a$  之指數, 一般  $a^{\frac{1}{n}}$  則  $\frac{1}{n}$  爲  $a$  之指數. 而因  $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ , 故  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ . 又因  $(\frac{a}{m})^m = a^n$  故  $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ . 但僅書  $\sqrt[n]{a}$  時, 則  $n$  稱曰根指數. 又所宜先證明者, 因由指數定則  $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$ , 故  $a^0 = a^n \div a^n = 1$ , 不論  $a$  爲任何數皆可.

**【指數定則】** Index law. [代]  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ,  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ,  $(a^m)^n = a^{mn}$ ,  $(ab)^n = a^n b^n$ .  $m$  及  $n$  無論爲正數或負數, 整數或分數皆可, 是稱之指數定則.

**【指數級數】** Exponential series.

[代] 將  $a^x$  依  $x$  之昇冪展開之, 則得

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots$$

此時  $a = e^k$ , 故  $a^x = e^{kx}$ , 而上式可書為  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ , 是曰指數級數。

**[指數方程式] Exponential Equation.** [代] 即含有以未知數為指數之項之方程式, 例如  $a^x = b, 3^{2x} + 5 \times 3^x - 1 = 0$ . 指數方程式之最簡者為  $a^x = b$ , 其解法有二種, 一用連分數之解法, 一用對數之解法。

I. 連分數之解法

例. 解  $2^x = 6 \dots (1)$ . 由觀察知

$2 < x < 3$ , 命  $x = 2 + \frac{1}{x'}$ , 代入(1)式為

$2^{2 + \frac{1}{x'}} = 6$ , 即  $2^2 \times 2^{\frac{1}{x'}} = 6$ , 故

$$2^{\frac{1}{x'}} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } \left(\frac{3}{2}\right)^{x'} = 2 \dots (2)$$

又由觀察知  $1 < x' < 2$ , 命  $x' = 1 + \frac{1}{x''}$ , 代

入(2)式得  $\left(\frac{3}{2}\right)^{1 + \frac{1}{x''}} = 2$ . 此式可

$$\text{變為 } \left(\frac{4}{3}\right)^{x''} = \frac{3}{2} \dots (3)$$

又由觀察而知  $1 < x'' < 2$ , 命  $x'' = 1 + \frac{1}{x'''}$ , 代

$$\text{入(3)式, 變化後得 } \left(\frac{9}{8}\right)^{x'''} = \frac{4}{3}$$

$$\dots (4)$$

又由觀察知  $2 < x''' < 3$ ,

命  $x''' = 2 + \frac{1}{x^{(4)}}$  如前法推求之, 即可得  $2 < x^{(4)} < 3$ . 餘倣此. 將是等之值順次代入前之方程式. 則得

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

$x$  之值之分數部其第一近似值為  $\frac{1}{1}$ , 第二近似值為  $\frac{1}{2}$ , 第三近似值為  $\frac{3}{5}$ , 第四近似值為  $\frac{7}{12}$ , 此與真值僅差  $\frac{1}{144}$ .

故若以  $x$  之值為  $2 \frac{7}{12}$  則較真值僅小  $\frac{1}{144}$ .

II. 對數之解法

例與前同  $2^x = 6 \dots (1)$ . 兩邊各取對數,

$$\text{得 } x \log 2 = \log 6. \therefore x = \log 6 \div \log 2,$$

$$\text{即 } x = \frac{0.778151}{0.301030} = 2.584.$$

又用對數便於解更複雜之方程式, 例如解  $(a)^{b^x} = c$ .

先命  $b^x = y$ , 則  $a^y = c$ . 故如前法, 得

$$y = \frac{\log c}{\log a}. \text{ 又 } x = \frac{\log y}{\log b},$$

以前式代入後式, 則得  $x = \log \left( \frac{\log c}{\log a} \right) / \log b$ .

**[指數式定理] Exponential theorem.**

[代] 由二項式定理, 若  $n$  大於一, 則

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx \cdot \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2!}$$

$$+ \frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x(x-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{x(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})}{3!} + \dots$$

$$\dots (1)$$

令  $x=1$ , 則得

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots \dots \dots (2).$$

$$\text{但 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^x,$$

故級數(1)為級數(2)之  $x$  次方, 即

$$1 + x + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots = \left\{ 1 + 1 + \frac{1 + \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots \right\}^x,$$

雖  $n$  為任何大, 此式常正確, 故若  $n$  增至無窮大時, 則

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right)^x.$$

上式右邊括弧內之級數常以  $e$  表之,

$$\text{故 } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

以  $cx$  代  $x$ , 則得

$$e^{cx} = 1 + cx + \frac{c^2x^2}{2!} + \frac{c^3x^3}{3!} + \dots.$$

令  $ea = a$ , 則  $e = \log_e a$ , 代入上式, 得

$$a^x = 1 + \log_e a + \frac{x^2 (\log_e a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log_e a)^3}{3!} + \dots.$$

是即指數式定理也。

英

【英國法】 English method. [三]即六十分法, 見該條。

【英國制】 English system. [算]以尺 foot 為長度之單位。磅 Pound 為重量之單位。秒 Second 為時間之單位之制度曰英國制(F. P. S. unit)。

相

【相似】 Similar. [幾]凡兩直線形之各角順次相等, 且其對應邊成比例者曰相似, 常以“ $\sim$ ”表之, 如  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  即表示三角形  $ABC$  與三角形  $A'B'C'$  為相似也。

【相等】 Equal. [數]凡兩數量之相同者曰相等, 如數之等值, 線之等長, 角或面積之等大是。常於兩數量之間置“=”以表示之, 是曰等號。

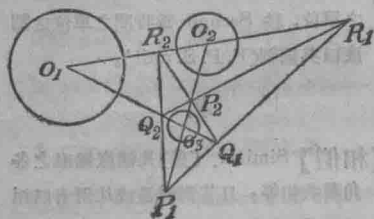
【相似比】 Ratio of similitude. [幾]相似多邊形之相當線之比, 稱為兩多邊形之相似比。

【相似分】 To divide similarly. [幾]一已知直線將他一已知直線之已知二分比之, 則前線為後線之相似分。又以對應直線分相似形時, 亦曰相似分。

【相似形】 Similar figures. [幾]凡直線形之相似者曰相似形, 故相似形之條件有二, 一諸相當角相等, 二諸對應邊成比例。相似形之比等於其對應邊或對應線之二乘比。又相似形之為立體者曰相似體。

【相似軸】 Axis of similitude. [幾]過三圓六相似中心之四直線, 稱為相似

軸，且此四直線爲一完全四邊形之四邊，而六相似中心爲其六頂點。如圖命  $O_1, O_2, O_3$  爲三圓之中心， $r_1, r_2, r_3$  爲其半徑， $P_1, P_2$  爲二圓  $O_2, O_3$  相似之



內心及外心， $Q_1, Q_2$  爲二圓  $O_3, O_1$  相似之外心及內心， $R_1, R_2$  爲二圓  $O_1, O_2$  相似之外心及內心，則四直線  $P_1Q_2R_2, Q_1P_2R_2, R_1P_2Q_2, P_1Q_1R_1$  各爲三圓之相似軸。

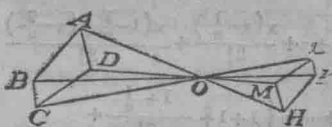
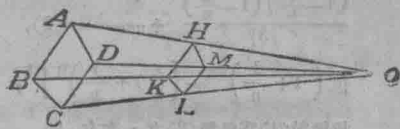
**【相似圓】** Circle of similitude. [幾] 以二圓相似中心之連線爲直徑之圓，稱爲相似圓。上圓以  $P_1P_2$  爲直徑之圓即爲二圓  $O_2, O_3$  之相似圓。又三圓之三相似圓爲共軸圓。

**【相當線】** Homologous lines. [幾] 相似多邊形之相當線，爲在相似位置之諸線。亦稱對應線。

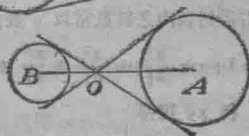
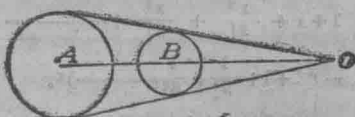
**【相加平均】** Arithmetic mean. [算] [代] 見平均數條。

**【相似中心】** Centre of similitude 或 Centre of similarity. [幾] 置二相似形使其各對應邊互爲平行時，則聯結其各相當角頂之諸直線，必相交於一點，此點曰相似中心，例如二相似形  $ABCD, HKLM$  之相似中心爲  $O$ 。但當  $O$  點在

兩形之外方即同方時，則  $O$  曰相似之外心。當  $O$  點在兩形之內方即在兩形之間時， $O$  曰相似之內心。



又相似形爲圓時，則二圓之外公切線之交點爲相似之外心，其內公切線之交點爲相似之內心，而二圓之相似中心常在其中心線  $AB$  上或其延長線上。



**【相乘平均】** Geometric mean. [算] [代] 見平均數條。

**【相似三角形】** Similar triangle. [幾] 即相似形之爲三角形者。相似形之條件有二，而相似三角形則有其一即包他條件在內，即凡兩互等角三角形必相似，或兩三角形之諸邊成比例，則此兩三角形亦必相似也。

【相似不盡根】Similar surds 或 Like surds. [代] 即無理部分相同之不盡根或同類不盡根例如  $2\sqrt{3}$  與  $5\sqrt{3}$ , 又  $m\sqrt{ab}$  與  $n\sqrt{ab}$ .

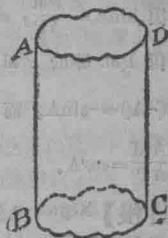
【相似多面體】Similar polyhedrons. [幾] 凡多面體有同數之面, 彼此各相似, 且在相似位置, 而其諸相當多面角相等者曰相似多面體。故 (1) 相似多面體, 可分作同數之四面體, 彼此各相似, 且在相似位置。(2) 相似多面體之諸相當稜成比例。(3) 相似多面體之兩相當線之比, 等於其兩相當稜之比。(4) 相似多面體之兩相當面, 與其相當稜之平方成比例。(5) 兩相似多面體之全面, 與其兩相當稜之平方成比例。(6) 兩相似多面體之體積之比, 等於其相當稜之立方之比。

【相似多邊形】Similar polygons. [幾] 即相似形之為多邊形者, 故凡相似多邊形, (1) 可分為同數三角形, 彼此各相似且在相似位置。(2) 其周界之比, 等於其兩相當邊之比。(3) 其面積之比, 等於任兩相當邊之平方之比。(4) 其面積之比, 亦等於任兩相當線之平方之比。

## 柱

【柱】Cylinder. [幾] 柱面為通過與曲線及平行於原位置之直線移動所生之面。生柱面之動直線謂之母線。母線所過之與曲線謂之母曲線, 母線在任意位置之直線謂之柱面之基線。母曲線為曲線時,

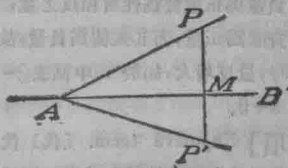
柱面以二平行平面截之, 則其平面與柱面間之立體謂之柱。如圖 ABCD 為母曲線, AB 為基線。若母曲線為圓, 則此柱為圓柱。



【柱面】Cylindrical surface. [幾] 見柱條。

## 負

【負角】Negative angle. [三] 角之動徑與時針同方向旋轉所生之角曰負角, 如圖 BAP 為正角, BAP' 為負角。自



$0^\circ$  至  $-90^\circ$  諸角均在象限 IV, 自  $-90^\circ$  至  $-180^\circ$  諸角均在象限 III, 自  $-180^\circ$  至  $-270^\circ$  諸角均在象限 II, 自  $-270^\circ$  至  $-360^\circ$  諸角均在象限 I, 餘類推。故廣言之, 負角  $(n \times 360^\circ - X)$  所在之象限, 視  $-X$  角所在之象限而定, 式內  $n$  為負整數。又  $(n \times 360^\circ \pm X)$  角之邊與  $\pm X$  之邊同在一處,  $n$  為正負整數均可。故若  $n$  為負整數時, 則負角  $A = (n \times 360^\circ + X)$  之各比, 與正角  $X$  之各比相同。又  $\sin(-A) = -\sin A$ ,  $\cos(-A) = \cos A$ 。

因  $\sin A = \frac{PM}{AP}$ ,  $\sin(-A) = \frac{P'M}{AP}$ .

但 PM 等於 P'M 而符號相反, 故  $\sin$

$(-A) = -\sin A$ . 而  $\cos(-A) = \frac{AM}{AP'} = \frac{AM}{AP} = \cos A$ .

**【負根】** Negative root. [代] 方程式之根之為負數者, 如方程式  $x^2 + x - 6 = 0$  之根為 2 與 -3, -3 為其負根. 由狄卡德之法則, 方程式負根之數, 不能多於多項式  $f(-x)$  各項符號更變之數.

**【負量】** Negative quantity. [代] 於其量之前置負號者稱負量. 算術之運算, 限於正量, 故遇減數大於被減時, 甚覺不便. 代數上即加入此新元素, 以便運算. 而負量與正量實為性質相反之量, 如人之資產為正量, 而其欠債為負量, 故減負量時, 量反增大, 如於 a 中減去(-b)則得 a+b.

**【負項】** Negative term. [代] 代數式中某項前之置有符號(-)者, 則稱其項曰負項. 但其實非必為負量, 如代數式  $a-b+c$ , 其第二項曰負項, 但若 b 等於 -d 時, 則此項實為正量也.

**【負號】** Negative sign. [代] 即用以表示負量之符號(-), 此實減號之廣義用法, 因算術之符號(-)僅為減之意, 而代數上所用之符號(+)及(-), 則含有二種意義, 一即用以演算通常之加減者, 一則用以區別諸量反對之性量者.

**【負數】** Negative number. [代] 即數前之置有符號(-)而為負量者, 見負量條.

**【負指數】** Negative index. [代] 即指數之為負數者. 由指數定理,

$$a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m, \therefore a^0 = a^m \div$$

$$a^m = 1. \text{ 又 } a^{-m} \times a^m = a^{-m+m} = a^0 = 1,$$

$$\therefore a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a^m = \frac{1}{a^{-m}}. \text{ 由是變任何}$$

量指數之符號, 可將其分母為分子, 或分子為分母.

指數為負數時, 其定則亦正確, 如命

$$n = -r, r \text{ 為正數. 則 } (a^m)^n = (a^m)^{-r}$$

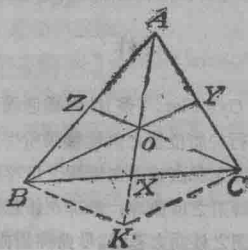
$$= \frac{1}{(a^m)^r} = a^{-mr} = a^{mn}.$$

$$\text{又 } (ab)^n = (ab)^{-r} = \frac{1}{(ab)^r} = a^{-r} b^{-r} = a^{-r} b^{-r} = a^{-r} b^{-r} = a^{-r} b^{-r}.$$

**【負布洛喀點】** Negative Brocard point. [幾] 見布洛喀點條.

## 重

**【重心】** Centroid 或 Centre of gravity. 或 Median point. [幾] 三角形之三中線必交於一點, 此點曰三角形之重心. 其與各頂點之距離, 為各頂點至對邊中點之距離之三分之二.



如圖。中線  $BY$  與中線  $CZ$  交於  $O$  點，聯  $AO$ ，引長之交  $BC$  於  $X$ 。由  $O$  作  $CK \parallel BY$ ，引長  $AX$  交  $CK$  於  $K$ ，聯  $BK$ 。則在  $\triangle AKC$ ， $O$  爲  $AK$  之中點，在  $\triangle ABK$ ， $ZO \parallel BK$ ，即  $OC \parallel BK$ ，故  $BKCO$  爲平行四邊形。而  $X$  爲  $BC$  之中點，即  $AX$  爲  $\triangle ABC$  之中線，即三中線交於  $O$  點。又因  $AO = OK$ 。而  $OX = XK$ ， $\therefore AO = \frac{2}{3}AX$ 。

**【重比】** Multiple ratio. [數] 單比之方乘相比曰重比，如  $a^2:b^2$  爲  $a:b$  之二重比， $a^3:b^3$  爲  $a:b$  之三重比。

**【重合】** Coincide. [幾] 如兩三角形  $ABC$  與  $A'B'C'$  爲全等，則置  $\triangle ABC$  於  $\triangle A'B'C'$  上，使  $AB$  與  $A'B'$  密合，則  $AC$  落於  $A'C'$  上， $BC$  落於  $B'C'$  上，兩三角形密合，是曰重合。

**【重根】** Multiple roots. [代] 如方程式  $f(x) = 0$  有  $n$  根，其中有  $m$  根皆爲  $\alpha_1$  時，則  $\alpha_1$  曰重根，即等根也。視  $m$  爲  $2, 3, \dots$ ，而  $\alpha_1$  稱曰二重根，三重根……。因  $f(x)$  有  $m$  根互相等，即有  $m$  相等因數，故  $f(x)$  可書爲

$$f(x) = (x - \alpha_1)^m \phi(x).$$

於是  $f(x) = m(x - \alpha_1)^{m-1} \phi(x) + (x - \alpha_1)^m \phi'(x)$ 。而  $f(x)$  與  $f'(x)$  有公因數  $(x - \alpha_1)^{m-1}$ 。故求  $f(x)$  與  $f'(x)$  之最高公因數，設此因數爲  $(x - \alpha_1)^r$ ，則  $f(x)$  含因數  $(x - \alpha_1)^{r+1}$ ，而有  $r+1$  等根，即  $\alpha_1$  根有  $r+1$  次也。設最高公

因數爲  $(x - \alpha_1)^r (x - \alpha_2)^s$ ，則根  $\alpha_1$  有  $r+1$  次，根  $\alpha_2$  有  $s+1$  次。由此可知  $f(x) = 0$  之  $m$  次重根，即爲  $f'(x)$  之  $m-1$  次重根。

**【重噸】** Gross ton 或 Long ton. [算] 美國人稱 2240 磅之重曰重噸，此即英國之一噸，因美國通例以 2000 磅爲一噸，特於關稅及量鐵石炭等則用英噸，即以 2240 磅爲一噸，因之別於 2000 磅之噸，面稱 2240 磅之噸曰重噸，或曰長噸。

**【重複排列】** Permutation with repetition. [代] 重複排列分爲無限制及限制二種：由  $n$  個相異原素  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  取  $r$  個之無限制重複組合中，用種種方法交換其原素之位置時，成一羣由  $r$  個原素而成之排列，如是之排列爲由  $n$  個原素取  $r$  個之無限制重複排列。又由  $n$  個相異原素取  $r$  個之限制重複組合中，用種種方法交換其原素之位置時，成一羣由  $r$  原素而成之排列如是之排列謂之限制重複排列。

茲求由  $n$  個原素取  $r$  個之無限制重複排列之數如次：假想於一直線上列  $r$  個位置。其第一位置，可有  $n$  方法充滿之。由其中之任何方法充滿第一位置之後，因任何原素皆可再用之，故第二位置又有  $n$  方法充滿之。故充滿第一第二兩位置之方法有  $n \times n$  或  $n^2$  個。第三位置又有  $n$  方法充滿之，故充滿三位置之方法有  $n^3$ 。以下類推。且因  $n$  之指數常與已充滿之位置之數同，由是充滿此等

$r$  個位置有  $n^r$  個方法。是即為所求排列之數。故答以  ${}_n K_r$  表所求之無限制重複排列之數，則  ${}_n K_r = n^r$ 。

求限制重複排列之數之方法，先作限制重複組合，次計算由各組合可作排列之數，則得所求之數。例如由構成文字 Combination 之字母取 3 字母可作若干排列。因所設之原素為  $i, j, n, n; o, o; a, b; c; m; t$ 。故所求之排列之數如次表所示。

| 構成排列之字母                                                                                                               | 組合之數                            | 排列之數                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| (1) 2 個同種, 1 個異種 (ii 及 $n, o, a, b, c, m, t$ 中之一; $nn$ 及 $i, o, a, b, c, m, t$ 中之一; $oo$ 及 $i, n, a, b, c, m, t$ 中之一) | ${}_3 C_1 \times {}_7 C_1$ 即 21 | $2! \times \frac{3!}{2!}$ 即 63 |
| (2) 3 個皆異種 ( $i, n, o, e, b, c, m, t$ 中任何三個)                                                                          | ${}_7 C_3$ 即 56                 | $56 \times 3!$ 即 336           |
| 合 計                                                                                                                   | 77                              | 399                            |

關於求重複排列之數之法，尙有他法，見北京高等師範數理雜誌二卷三四號。

**【重複組合】** Combination with repetition. (代) 作組合時，設原素中有  $a_1$  個  $a_1, a_2$  個  $a_2, a_3$  個  $a_3, \dots, a_n$  個  $a_n$ 。試考由其中取  $r$  個之組合，因一組合中

所含原素之數為  $r$ ，由是一組合中所含相同原素之數，至多為  $r$ 。若相同原素之數雖多於  $r$ ，而其所作組合之數與其原素為  $r$  時組合之數同。例如當  $a_1=3, a_2=4, a_3=6$ ，而  $r=2$ ，可作之組合為

$a_1 a_1, a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_2, a_2 a_3, a_3 a_3$

六個，與  $a_1=a_2=a_3=r=2$  時無異。

然相同原素之數小於  $r$  時，則與等於  $r$

時不同。例如當  $a_1=1, a_2=2, a_3=2$  時，

可作之組合為  $a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_2, a_2 a_3, a_3 a_3$

五個，與前相同。故重複組合可區別之為二種：I.  $a_1=a_2=a_3=\dots=a_n=r$  者。

II.  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  不皆大於  $r$ ，其中至少有一小於  $r$  者。所設原素中有數個相同時，可作如次想之，即

所設諸原素中無相同者，惟當作組合時，

同原素可重複取若干次。例如由原素

$a_1, a_1, a_2, a_2, a_2, a_3, a_3$  作取 2 之組合，

又可稱為由原素  $a_1, a_2, a_3$  作取 2 之組合，而  $a_1$  可重複 1 次， $a_2$  可重複 2 次， $a_3$  可重複 1 次。如是之組合謂之重複組合；而如 I 者謂之無限制重複組合，如 II 者謂之限制重複組合。

求無限制重複組合之數如次：由  $n$  個原素每取  $r$  個之無限制重複組合之總數，以  ${}_n H_r$  表之；此無限制重複組合之數

${}_n H_r$  與  $n$  個字母  $r$  次之齊次乘積之數同。〔第一法〕作連乘積

$(1+a_1x+a_1^2x^2+a_1^3x^3+\dots)$

$(1+a_2x+a_2^2x^2+a_2^3x^3+\dots)$

$(1+a_3x+a_3^2x^2+a_3^3x^3+\dots)$

$\dots$

$(1+a_nx+a_n^2x^2+a_n^3x^3+\dots)$

。



$x^r$  之係數爲由  $n$  個原素  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  取  $r$  個所有諸無限制重複組合之總和。故於連乘積內，命  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$ ，則可得由  $n$  個原素取  $r$  個諸無限制重複組合之數。故所求組合之數等於  $(1+x+x^2+x^3+\dots)^n$  內  $x^r$  之係數。然  $1+x+x^2+x^3+\dots = (1-x)^{-1}$ ；故所求組合之數爲  $(1-x)^{-n}$  內  $x^r$  之係數。故

$$nH_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = {}_{n+r-1}C_r.$$

故由  $n$  個相異原素每次取  $r$  個之無限制重複組合之數，等於由  $n+r-1$  個原素取  $r$  個不許重複之組合之數。〔第二法〕由  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  中取  $r$  個所作之無限制重複組合，各以  $n$  原素  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  全數加入，其組合之數不變。如斯所得之各組合至少含各原素一次，而每一組合由  $n+r$  個原素而成。故所求之組合之數，等於由  $n$  個原素中取  $n+r$  個，其中各原素至少含一次之組合之數。如斯之組合之數，可求之如次：將組合中之原素依自然之順序列之，相同之原素除第一個外，皆以  $s$  換之；例如組合  $a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_3 \dots$  則以  $a_1 s s a_2 s a_3 s \dots$  代之。如是各組合皆爲由  $n$  個依次序之原素  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  及  $r$  個  $s$  而成。故此問題成爲求  $n+r$  個原素，其中有  $r$  個相同者能排成不同形式之數。當  $s$  在左端時爲無意義，且因與原素  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  之次序無關，故可定  $a_1$  爲第一位。由是今可考察  $n-1$

個原素  $a_2, a_3, \dots, a_n$  及  $r$  個  $s$  之排列。故求此之時，與  $a_2, a_3, \dots, a_n$  之次序無關，必須注意；故當計算排列時可視爲相同。而此題成爲求  $n+r-1$  個原素，其中  $n+1$  爲相同， $r$  個爲相同所能成之不相同之排列之數。故

$$nH_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! n!} {}_{n+r-1}C_r.$$

求限制重複組合之數之法如次：設所有  $n$  個原素中， $n_r$  個得重複  $r$  次者， $n_{r-1}$  個得重複  $r-1$  次或  $r$  次者， $n_{r-2}$  個得重複  $r-2$  次或  $r-1$  次以上者，以下同樣， $n_1$  個但見一次或得重複二次以上者。如是則  $n_r \leq n_{r-1} \leq n_{r-2} \leq \dots \leq n_1, n_1 = n$ 。如此限制，準備求由  $r$  個原素而成之組合之數，一組合中之原素爲  $r$  個，可置之度外，祇須求  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$  個原素各重複  $1, 2, 3, \dots, r$  次諸組合之數，但此等  $k$  爲非 0 之正整數，如是組合中所含原素之總數爲  $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + r k_r$ 。作如是之組合，須由  $n_r$  個原素選擇  $k_r$  個，而其方法有  ${}_{n_r}C_{k_r}$  個。今用某方法選擇  $k_r$  個，次選擇  $k_{r-1}$  個之方法有  ${}_{n_r-1-k_r}C_{k_{r-1}}$  個。以下同樣，選擇  $k_1$  之方法有  ${}_{n_1-n_2-\dots-k_r}C_{k_1}$  個。故組合之數爲

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + r k_r = r.$$

由是  $k$  中必有爲 0 者。故所求組合之數爲

$\sum n_r Ck_r \cdot n_{r-1} - k_r Ck_{r-1} \dots n_1 - n_2 - \dots - k_r Ck_1$ 。例如求字 Examination 之字母每次取三個之組合若干？因諸字母得重複二次者共三個，僅見一次或得重複二次者共八個。故所求之組合之數，爲於  $k_1 + 2k_2 = 3 \dots \dots (1)$  限制內可求得之  $\sum_3 Ck_2 \cdot 8 - k_2 Ck_1$ 。而(1)之解爲  $k_1 = 1, k_2 = 1; k_1 = 3, k_2 = 0$ 。故所求之數爲  $3C1_7 C1 + 3C0_8 C3 = 77$ 。

## 約

【約度】Measure. [幾]一直線若正爲他直線之若干倍之長，或一面積若正合他面積之若干個，則後直線或面積曰前直線或面積之約度。

【約數】Exact measure 或 Exact divisor. [算] [代] A 數或 A 式若能整除 B 數或 B 式時，則 A 數或 A 式爲 B 數或 B 式之約數，例如 3 爲 18 之約數， $x+3$  爲  $x^2+7x+12$  之約數。

## 秒

【秒】Second. [算] [三] (1) 一小時之六十分之一曰分，一分之六十分之一曰秒。(2) 一度之六十分之一曰分，一分之六十分之一曰秒，恆以(')表之，如 50' 卽五十秒也。

## 面

【面】Surface 或 Face [幾] (1) 面 Surface. 線在空中移動所生之跡曰面，面爲空間之一部與他之一部之界，亦爲立

體與周圍空間之界。但面非立體之一部分，故有長有廣而無厚。(2) 面 face, 包圍立體之平面曰面。

【面角】Face angle. [幾] 多面角之相隣二稜所成之角曰面角。

【面積】Area. [幾] 單位長之正方爲面之單位，面之面積爲其所含面之單位之數。測田地之面積常以畝步等爲單位，測國土時則用方里。

## 恒

【恒等式】Identity. [代] [三] 等式兩邊所含之文字，不論其值如何，而兩邊恆相等者曰恒等式。如代數中之

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$

三角中之  $2\sin A \cos A = \sin 2A$  等。

恒等式之等號(=)常書爲( $\equiv$ )，如

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

又因  $n$  次有理整函數，若能以多於  $n$  之變值消盡之，則亦能以任何變值消盡之，故凡  $n$  次之有理整函數若於多於  $n$  變值時爲相等，則於任何變值時亦相等，此時二函數爲恒等，而其同次變值之係數各各相等，此定理爲不定係數之原理。

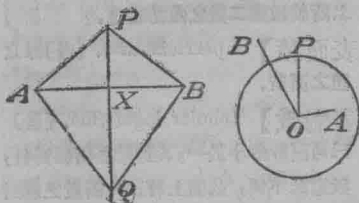
【恒方程式】Identical equation. [代] 卽恒等式。

## 軌

【軌跡】Locus. [幾] [第一平面] 之條

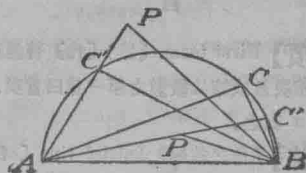
件) 某點適合一定之條件而運動時, 其徑路全體稱為此點之軌跡。如點之運動限在一平面上, 則其軌跡為一直線或數直線或曲線。欲確定某點之軌跡, 須證明次之二命題。即 I. X 線上之點適合條件 A. II. 適合條件 A 之點, 在 X 線上。惟亦可證明次之 III. IV 二命題以代 I. II. III. 不適合條件 A 之點不在 X 線上。 IV. 不在 X 線上之點, 不適合條件 A.

今取次之問題以為由 I. II. 而確定軌跡之例。即求距已知二點等距離之軌跡。A, B 為已知之二點, (I) P 為在 AB 之垂直二等分線 PX 上之任意點。聯結 PA, PB, 則在二三角形 AXP, BXP.  $AX=BX, PX$  為兩形公有,  $\angle AXP=\angle BXP$ , 故  $AP=BP$ 。又(II) 命 Q 為  $AQ=BQ$  之任意點, 聯 XQ, 則  $\triangle AXQ, \triangle BXQ$  之三邊各相等, 因而  $\angle AXQ=\angle BXQ$ 。故 Q 點在 AB 之垂直二等分線上。(斷定)故距 A, B 等距離之點之軌跡, 為 AB 之垂直二等分線。



又取次之問題以為由 I. IV. 而確定軌跡之例。即求由一定點之已知距離之點

之軌跡。以一定點 O 為中心, 以已知距離為半徑畫圓, 則(I)由此圓周上任一點 P 至中心 O 恆等於已知距離。(IV)由圓外任一點 A 至中心 O 之直線必截圓周, 故 AO 大於圓之半徑, 又由中心 O 至圓內任一點 B 之直線 OB, 必延長之方能截圓周, 故 OB 小於圓之半徑, 故由圓外任何點或圓內任何點至中心 O 皆不等於已知距離。(斷定)由一定點之已知距離之點之軌跡為圓。又取次之問題, 以為由 II. III. 而確定軌跡之例。即已知三角形之底邊與頂角, 而求其頂點之軌跡。命三角形 ABC 之底邊 AB 與頂角 C 為已知, 畫外切圓弧, 則(II)以 AB 為底邊頂角等於 C 之三角形之頂點皆在 ACB 弧上。(III)以 AB 為底邊而頂角不等於 C 之三角形之頂點, 均不在 ACB 弧上。此因若不在 ACB 弧上任取一點 P, 令  $\angle P=\angle C$ , 則 AP 或 AP 之延長線截 ACB 弧於 C', 聯結 BC', 則  $\angle APB <$  或  $> \angle AC'B$ , 即  $\angle APB <$  或  $> \angle ACB$ 。(斷定)故所求之軌跡為 ACB 弧。



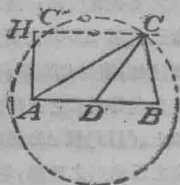
[第二立體之條例]將平面之軌跡之定義推廣之, 即得立體幾何學之軌跡。例如與二定點 A, B 等距離之點之軌跡, 為垂直二等分 AB 之平面。

〔第三直線之軌跡〕直線適合某定則而運動，其所生之面爲此直線之軌跡。例如一直線沿圓周與一定之方向平行而移動，則生圓柱面，即其軌跡。

【軌跡之交】 Intersection of loci.

〔幾〕於幾何學之作圖題中，常須由二已知條件而決定適合此條件之位置者，解此種問題時，必須用軌跡法。即先求適合各條件之軌跡，而後求二軌跡之共同點，即二軌跡之交點，則此交點必滿足二已知條件也。例如已知三角形之底邊與高及此底邊之中

線，求作此三角形。命  $AH$  爲已知之高，則所要三角形之頂點  $C$  必在



通過  $H$  與  $AB$  平行之直線上。又  $D$  爲  $AB$  之中點，則頂點  $C$  必在以  $D$  爲中心以中線  $CD$  爲半徑之圓周上。故所要之頂點即是等二軌跡之交點  $C$  或  $C'$ 。

### 首

【首項】 First term. 〔算〕〔代〕普通稱等差級數或等比級數之第一項曰首項。以  $a$  表之。

【首線】〔角之首線〕 Initial line (of a angle) 〔幾〕〔三〕以一直線之一端爲樞旋轉而生角，其直線之初位置曰首線。

### 前

【前項】 Antecedent 或 Antecedents.

〔算〕〔代〕〔幾〕即比之第一項或比例之第一項及第三項之稱，例如比  $a:b$ ，則  $a$  曰前項。比例  $a:b=c:d$  則  $a$  及  $c$  爲二前項，又有稱前率者。

### 後

【後項】 Consequent 或 Consequents.

〔算〕〔代〕〔幾〕即比之第二項或比例之第二項及第四項之稱。例如比  $a:b$ ，則  $b$  曰後項。如  $a:b$  之值爲  $r$ ，則  $a=br$ ，即後項乘比之值等於前項。又比例  $a:b=c:d$ ，則  $b$  及  $d$  稱爲二後項，亦曰後率。

### 表

【表】 Table. 〔數〕表乃集錄事物，分門別類，以便檢查者也。數學上多用種種之表，惟大要可分爲二種。其一如度量衡等表，範圍較狹，及爲特別物類之集合。他則一則爲由集錄一般公式而得之結果，範圍甚廣，例如對數表及三角函數表等。

【表差】 Tabular difference. 〔數〕對數表，三角函數表或三角函數之對數表，其上所載相隣二數之差之謂也。

【表面積】 Superficial area. 〔幾〕即立體之面積。

【表對數】 Tabular logarithm. 〔數〕三角函數多小於一，其對數之指標爲負，欲避此不便，故表上將三角函數之真對數加 10 以記之，是之謂表對數。例如  $L \sin 18^\circ 35' = 9.50298$ ，乃  $18^\circ 35'$  之正弦之對數加 10 而得，即謂之表對數。正

弦之真對數以  $\log \sin$  記之，如  $\log \sin 18^\circ 35' = \bar{1}.50298$ 。而表對數則用  $L$  記之，以示區別。

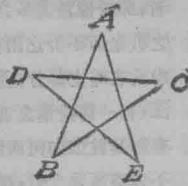
**【表面幾何學】** Surface geometry.

【數】表面幾何學乃數學之一分科，論曲面上圖形之形狀，大小，位置等之學科也。然現今數學之進步，僅於球面幾何學 (Spherical geometry) 有若干之知識，對於一般表面幾何學之知識，則尚極幼稚。平面幾何學乃表面之合特別條件而為平面時所論之幾何學也。

星

**【星形】** Star-polygon. 【幾】正多邊形

之邊之互相交截者，謂之星形。如圖之 ABCDE 為星形正五邊形。命其外接圓之半徑為  $R$ ，則星形

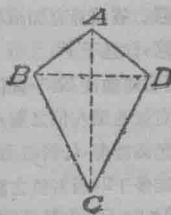


正五邊形之一邊 =  $\frac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ 。

風

**【風箏形】** Kite. 【幾】四邊形之相鄰二

邊相等者謂之風箏形。如圖之 ABCD 為風箏形。風箏形之兩對角線成直角，故風箏形之面積為二對角線之積之半，即風箏形



ABCD 之面積 =  $\frac{1}{2} (AC \times BD)$ 。

度

**【度】** Degree. 【算】【幾】【三】圓周三

百六十分之一曰弧度之一度。一度之弧所對之中心角，稱為角度之度。

**【度】** Dimension. 【幾】長，廣，厚謂之物體之三度。

**【度量衡】** Weights and measures.

【算】度以量長，量以量容積，衡以衡輕重。歐美度量衡之制，大概可分為三派，一曰大陸派，即米突制，法德奧意等二十餘國用之。二曰島派，即英國制，英美及英之屬地用之。三曰斯拉夫派，即俄國制，俄國用之。此外又有日本之制，通行於日本之諸島而已。而為各國所通行者則為萬國度量衡同盟會所定之米突制，即公尺制其詳見該條。今將我國度量衡之數，與米突制略為比較如下。

1 呎 (metre) = 營造尺 3.125 尺

1 妍 (litre) = 30.517573 立方寸 = .965747 升。

1 克 (gramme) = 庫秤 .02680893 兩。又一營造尺 = .32 呎。一升 = 1.0355 妍 庫平一兩 = 27.301 克。

南

**【南緯】** South latitude. 【算】見緯度條。

計

**【計數器】** Abacus 或 Arithmograph 或

Arithmometer. 計算數之器其形狀有種種，大抵多用球以表數。此因以實物表示數之加減乘除，則思考力幼稚之兒童，其觀念易於明瞭也。故教授小學校初年級生多用之，我國之算盤，實亦為計數器之一種。

【計算尺】Slide rule. [數] 計算尺為基於對數之原理而作之尺度，以計算之敏捷而無差誤，為其特長，攜帶便利，用途廣賅，用法簡易，為數學唯一之器具。如乘法，除法，乘方，開方，代數式之連乘連除，三角及對數等計算，皆可應用。其他關於工業上實用之計算，尤為便利。

## 降

【降冪】Descending power. [代] 某文字之降冪云者，即其指數順次由高及低之謂。如  $5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 5$  及  $x^2 + 2xy + y^2$  皆依  $x$  之降冪順次列之，而第二式又為  $y$  之昇冪。

## 限

【限點】Limiting points. [幾] 見同軸圓條。

## 背

【背理】Absurdity. [幾] 即不合理，見該條。

## 省

【省畧算】Approximation. [算] 實際上名數之計算，罕有至小數第三位以下

者，換言之，實際上之計算均大於單位名數之千分之一。例如普通之金錢以圓為單位，而實際上算至釐位。長度以尺為單位，而實際上算至分為限。學術上名數之計算，大抵求至百萬分之一（小數第六位），亦罕有求其再精密之數者。關於時間之計算，則喬瓦安來(Sir George Airy)之器械可算至八百六十四萬分之一，關於重量，則教授馬克斯惠爾(Prof. Clerk Maxwell)算至五百萬分之一。長之測算最困難，其最精密之度，約可求至六萬分之一。而絕對的精密，則仍不能得到。然此等冗長之計算，於實際上則徒覺煩雜而無用，故有用省略算之必要也。省略算者，即於位數甚多之數，將其若干位以後之數棄而不計之謂，多用之於小數。小數內所省略之部分，稱為端數。處置端數之法，有一律捨棄之者，有一律收入之者，有視其首位如何而四捨五入者。省畧與不省略所差之數，謂之誤差。由捨棄而得之數，必小於原數，由收入而得之數，必大於原數，其誤差皆小於所得數末位之1。由四捨五入而得之數，或大或小於原數。其差小於末位之 $\frac{1}{2}$ ，是為誤差之界限。省略算有加減乘除開平方開立方各法，分述于下。

【省略加法】若干數相加，無論何位，其由右位進至左位之數，雖極大必比相加數之個數少1。例如三數相加，進位之數不能多於2，因右位之數，皆以9為最大，而 $9 \times 3 = 27$ ，亦只可進2至左位也。小數多

位之各數相加，可於所要小數位之右一位或二，三位，加以加數少一之數；但使加於某位而不致變動所要之位，則加法即自某位演起，而以下可省略。〔例1〕求

129.3571 與 22.42 及 109.4521 之和至小數第七位。此例為三數相加，加數

|             |    |                           |
|-------------|----|---------------------------|
| 129.3571571 | 57 | 少一則為2，所要之小數至第七位，其右一位和之末位為 |
| 22.4242424  | 24 |                           |
| 109.4521121 | 12 |                           |
| 261.2335116 | 93 |                           |

8. 以 2 加之，為 10，故變動第七位小數。須更取第八第九二位之和即 93，加以 2 為 95，不致變動第七位小數。故所求之和為 261.2335116。

〔例2〕求 0.32，0.45678，7.32 及 5.62 之和至小數第三位。此例為四數相加，

|        |   |                                                   |
|--------|---|---------------------------------------------------|
| 0.321  | 3 | 加數少一則為3，所要之小數至第三位，其右一位和之末位為4，加 3 則為7，不致變動所要之小數位，故 |
| 0.4567 | 7 |                                                   |
| 7.3232 | 2 |                                                   |
| 5.6222 | 2 |                                                   |
| 13.723 | 4 |                                                   |

即自小數第四位加起，得其和為 13.723。四位以下，可從省略。

〔省略減法〕求二小數之差，可自所要之末位演起而省略其他。(1)如右一位之被減數大於減數，則末位依原數而減。(2)如右一位之被減數小於減數，則末位減數宜加一。(3)如右一位之被減數減數相等，則再審視右二位之數而定之。〔例1〕求 314.2905 與 180.4162 之差至小數第七位。茲小數第八位

|             |   |
|-------------|---|
| 314.2905905 | 9 |
| 180.4162626 | 2 |
| 133.8743279 |   |

故從(1)法。

〔例2〕求 0.9893 與 0.2916 之差至小

數第三位。茲小數第四位之被減數小於

|       |   |            |
|-------|---|------------|
| 0.989 | 3 | 減數，故從(2)法， |
| 0.291 | 6 | 將小數第三位之減數  |
| 0.697 |   | 加一而後行減法。   |

〔例3〕由 6.45 減 0.345。求其差至小數第二位。此例小數第

|      |    |                              |
|------|----|------------------------------|
| 6.45 | 55 | 三位之被減數與減數相等，故更查其第四位，而知為從(1)。 |
| 0.34 | 50 |                              |
| 6.11 |    |                              |

〔省略乘法〕凡被乘數為 m 位，乘數為 n 位，其乘積之末位如為 S 位者，設將被乘數比 m 位或進或退若干位，將乘數反之而比 n 位或退或進若干位，則其乘積之末位，亦必皆為 S 位。例如釐位乘分位，乘積之末位為毫位，則毫位乘單位，絲位乘十位，分位乘釐位，單位乘毫位，各積之末位，亦皆為毫位，如下式。

$$\begin{aligned}
 & 7 \times .02 = 7 \times .002 = 70 \times .0002 \\
 & = .07 \times .2 = .007 \times 2 = .014.
 \end{aligned}$$

省略乘法即應用上述之理而得之者。其法先書被乘數，視所要之小數至某位，即於其右二位之下，置乘數之單位，且顛倒乘數之位次而書之。次以乘數之各位，各自相當位起，與被乘數相乘，而于其相當位右之各位，則可以省略。乘得之各部分積，其末位皆與乘數之單位相齊，如右位有應進位之數，則宜併入。次將各部分積相加，棄其右端二位，即為所求之積。

〔例1〕求 62.84563 乘 3.293578 之積，至小數兩位。

$$\begin{array}{r}
 62.84563 \\
 875392.3 \\
 \hline
 623456 \times 3 + 1 \dots\dots\dots 1885369 \\
 62345 \times 2 + 1 \dots\dots\dots 125691 \\
 6234 \times 9 + 5 \dots\dots\dots 56561 \\
 623 \times 3 + 1 \dots\dots\dots 1885 \\
 62 \times 5 + 4 \dots\dots\dots 314 \\
 6 \times 7 + 1 \dots\dots\dots 43 \\
 + 5 \dots\dots\dots 5 \\
 \hline
 206.9863
 \end{array}$$

此例所要小數為兩位，故于再右二位即第四位之下，置乘數之單位。依法乘之，再乘積之右二位，得所求之數為206.98。

【例二】求0.248264乘0.725234之積，至小數五位。

$$\begin{array}{r}
 0.248264 \\
 432527.0 \\
 \hline
 248264 \times 7 \dots\dots\dots 1737848 \\
 24826 \times 2 + 1 \dots\dots\dots 49653 \\
 2482 \times 5 + 3 \dots\dots\dots 12413 \\
 248 \times 2 \dots\dots\dots 496 \\
 24 \times 3 + 2 \dots\dots\dots 74 \\
 2 \times 4 + 1 \dots\dots\dots 9 \\
 \hline
 .180043
 \end{array}$$

此例所要之小數為五位，故置被乘數之單位于更右二位即第七位之下，依法乘之，於其積棄去右二位，得所求數為.18004。

【省略除法】先書法實，如法數為有整數者，則準商數所要之小數位，在實之小數中截取多一之位數，即在法數中截取與實相應之位數，然後相除。既得初商，以初商乘截取之法數，併入右位應進之數，自實減之。每添得一商，則法尾少乘一位，故每次之減數亦遞少，而所要之商，易於求得。

【例】求  $2835.14762 \div 7.5438621$  之商至釐位。

$$\begin{array}{r}
 7.5438621 \overline{) 2835.14762} \\
 \underline{2263158} \dots\dots \text{第一減積} \\
 571989 \\
 \underline{528707} \dots\dots \text{第二減積} \\
 43919 \\
 \underline{37719} \dots\dots \text{第三減積} \\
 6200 \\
 \underline{6034} \dots\dots \text{第四減積} \\
 166 \\
 \underline{151} \dots\dots \text{第五減積} \\
 15
 \end{array}$$

此例所要小數為二位，故於實多截一位，至小數三位，必多截一位者，防末位之誤差，影響及於商數也。

第一減積 =  $7.54386 \times 3$

第二減積 =  $7.5438 \times 7 + 4$  (4為  $6 \times 7 = 42$  之進位數)

第三減積 =  $7.543 \times 5 + 4$  (4為  $8 \times 5 = 40$  之進位數)

第四減積 =  $7.54 \times 8 + 2$  (2為  $3 \times 8 = 24$  之進位數)

第五減積 =  $7.5 \times 2 + 1$  (1為  $4 \times 2 = 8$  收入之進位數)

常法於餘實屢添位，即以10乘實也，此法於法數屢截位，即以10除法也。而實數乘以10，與法數除以10，其所得之商無異。

若法為無整數者，則先將法實之小數點，同移右若干位，使其法數有一位整數，然後依前法除之。

【例】 $2.83514762 \div 0.0075438621$ ，求商至釐位。此例若截取實數至毫位而求之，其所得之商，必不能至釐位，故可將實數法數之小數點，各移右三位，改寫為  $2835.14762 \div 7.5438621$ ，然後截取，即與前例同。若法有整數多位者，亦可將



法實之小數點，同移左若干位，使其法只有一位整數，然後依前法除之。

【例】 $2335147.62 \div 7543.8621$  求商至釐位。此例若截取實數至毫位而除之，則當乘減之時，所省略者無幾，故可將實數法數之小數點，各移左三位，改寫為  $2335.14762 \div 7.5438621$ ，然後截取，亦與前例同。

【注】省略除法，不但小數相除可用，即整數除整數而求商但至某位者，亦可用之。

【省略開平方】大小兩數和之平方，等於兩數平方之和，加兩數乘積之二倍。設其數之小者為甚小，則小者之平方，可略去不計，故兩數和之平方，略可謂等於大者之平方，加兩數乘積之二倍，例如

$$\begin{aligned} (1.039562)^2 &= (1.039 + 0.000562)^2 \\ &= 1.039^2 + 2 \times 1.039 \times 0.000562 + 0.000562^2 \\ &= 1.079521 + 0.001167836 + 0.000000315844 \\ &= 1.080689151844 \end{aligned}$$

而  $1.079521 + 0.001167836 = 1.080688836$ ，故可謂  $1.080689151844 = 1.080688836$  略。省略開平方即應用上理，其法先用通常之法，求得所要平方根半數以上之位數，即以此已得根數之二倍，除此時之餘積，以所得之商，續寫於已得根數之右，補足所要之位數。

例。求  $\sqrt{1.080689151844}$  之值，至小數六位。先依常法開至小數三位，得  $1.039$ 。此時所餘之積為  $0.001168151844$ ，可視為等於已得根與後數位根乘積之二倍，

故以  $1.039 \times 2$  除之。(用省略算)，得商  $.000562$ ，續於已得根之右，即得所求根為  $1.039562$ 。

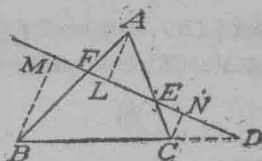
【省略開立方】 $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ ，若  $x$  為甚小，則  $(a+x)^3$  可視為略等於  $a^3 + 3a^2x$ 。省略開立方之法，即應用此理。即先用通常之法，求得所要立方根半數以上之位數，即以此已得根之平方之三倍，除此時之餘積，以所得之商，補足立方根所要之位數。

例。求  $\sqrt[3]{687}$  之值。至小數四位。先依常法求得小數二位之立方根為  $8.82$ ，此時之餘積為  $0.871032$ ，將  $8.82$  平方之得  $77.7924$ ，又三倍之，則為  $233.3772$ ，以此數除  $0.871032$ ，得商  $0.0037$ 。補足於已得根，即得所要立方根為  $8.8237$ 。惟用此法求得之立方根，恒比真正之方根為略大。

## 美

【美奈勞斯定理】Menelaus' theorem

【幾】一截線與三角形  $ABC$  之邊  $BC, CA,$



$AB$  交於  $D, E, F$ ，則

$$BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB.$$

自各頂點向  $DEF$  引垂線  $AL, BM, CN$ ，則由相似三角形之理，併考其線分之力

向，得  $BD:-DC=BM:CN$ ， $CE:EA=$

$CN:-AL$ ， $AF:FB=-AL:BM$ 。

$\therefore BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB = -$

$BM \cdot CN \cdot AL = -CN \cdot AL \cdot BM$ ，

$\therefore BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB$ 。

又其逆定理亦真，即  $D, E, F$  在三角形  $ABC$  之邊  $BC, CA, AB$  上，如  $BD \cdot CE \cdot AF$

$= -DC \cdot EA \cdot FB$ ，則  $D, E, F$  爲共線點。

設  $FE$  交  $BC$  於  $D'$ ，則由上述定理。

$BD' \cdot CE \cdot AF = -D'C \cdot EA \cdot FB$ ，

然  $BD \cdot CE \cdot AF = -DC \cdot EA \cdot FB$ ，

$\therefore BD':D'C = BD:DC$ ，即  $D'$  與  $D$  合，

而與  $E, F$  在同一直線上。

## 十 畫

### 乘

【乘方】Power. [算] [代] 即乘幂。見該條。

【乘法】Multiplication. [算] [代] 乘

法(整數)爲某數與他數累次相加之簡便

法，此某數與他數之累次簡便相加曰相

乘，其某數即乘法之實數曰被乘數，乘某

數之他數，即乘法之法數曰乘數，乘得

之數曰積，又相乘亦可云相倍。被乘數與

乘數互換，其二數之積不變，例如

$a \times b = b \times a$ ，故被乘數與乘數實無區別，

而均爲積之因數。次分數乘某數時，則不

得不將整數乘法之定義擴張之，因分數

爲一新數，故不可不新設一定義曰：分數

乘某數者，即以乘數之分子表所取被乘

數之數，而以分母表等分之數。依此定

義，故例如  $\frac{3}{5}$  乘某數者，即以 5 除被

乘數之 3 倍也。次論小數，例如以 0.1 乘

之者，因  $0.1 = \frac{1}{10}$ ，故即取被乘數之

$\frac{1}{10}$  也。同理以 0.5 乘之者，因

$0.5 = \frac{5}{10}$  故即以 10 除被乘數之 5 倍也。

又如  $0.375 \times 0.27 = \frac{375}{1000} \times \frac{27}{100}$

$= \frac{375 \times 27}{100000}$ ，故可先不問小數點之如何

而行乘法，而後取其積之小數位等於被

乘數與乘數小數位之和。最後代數式之相乘，以各項與被乘數相乘，取其各積之代數和可也，例如  $(a+b+c)(x+y)$

$$= a(x+y) + b(x+y) + c(x+y)$$

$$= ax + ay + bx + by + cx + cy.$$

【乘號】Sign of multiplication. [算]

【代】即表示二以上之數相乘之記號，通常用 $(\times)$ ，如 $a \times b$ 即 $a$ 與 $b$ 相乘之意。惟多數連乘時，則於各數之間置 $(\cdot)$ 以代之，如 $2 \times 3 \times 5$ 之連乘常以 $2 \cdot 3 \cdot 5$ 表之，有時此二種符號均從省，故 $abc$ 即 $a \times b \times c$ 之略也。

【乘數】Multiplier. [算] [代] 見乘法條。

【乘積】Product. [算] [代] 二數相乘，其結果曰乘積，或簡曰積，如 $3a$ 與 $5b$ 之積為 $15ab$ 。

【乘冪】Power. [算] [代] 一數自乘若干次，其積稱為此數之乘冪，如一數 $a$ 自乘一次，二次，三次…… $n$ 次，恒以 $a, a^2, a^3, \dots, a^n$ 記之，而順次稱曰 $a$ 之一乘冪(First power)，二乘冪(Second power)，三乘冪(Third power)，…… $n$ 乘冪( $n$ th power)。二乘冪亦稱平方，三乘冪亦稱立方。任何數之 $0$ 乘冪為 $1$ ，即 $a^0 = 1$ 。某數之負乘冪等於同數之同

整數乘冪除 $1$ ，即 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。某數之分数乘冪等於同數之分子所表之乘冪，以分母表其開方之數，即 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 。某數之乘冪，一般從 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 之定則，即指數定則也。

【乘法表】Multiplication table. [算] 即記載二一位數之積之表，亦曰九九表，又稱畢達哥拉斯表(Pythagoras's table)。其表如下，縱橫二行各數字相交之處，即二數字之乘積，如縱第 $5$ 橫第 $7$

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

相交之處為 $35$ ，故知 $5 \times 7 = 35$ ，讀為 $5, 7, \rightarrow 35$ ，餘類推。

俯

【俯角】Angle of depression. [三] 垂直角之一邊在水平面上，而其他邊向下者曰俯角。

個

【個位】Units place. [算] 十進紀數法之第一位也，在此位之數曰個位數。

倍

【倍度】Multiple. [幾] 一直線為他直線之整數若干倍，則測度時前線為後線之倍度。

【倍量】Multiple. [算] [代] 某數量之整數若干倍之謂，如長 $6$ 尺為長 $2$ 尺

之倍量。

【倍數】Multiple. [算] [代] 某數爲他數所整除時，則前數曰後數之倍數。例如 15, 20, 30 皆爲 5 之倍數， $ma$  爲  $a$  之倍數， $a^2x$  爲  $a, ax, a^2$  之倍數。

【倍角之三角函數】Trigonometric functions of multiple angles. [三]

(1) 將和角之三角函數之公式，令  $B=A$ ，則得

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1,$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A},$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}.$$

(2)  $\sin 3A = \sin(2A + A)$

$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$$= 2\sin A \cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A) \sin A$$

$$= 3\sin A (1 - \sin^2 A) + (1 - 2\sin^2 A) \sin A$$

$$= 3\sin A - 4\sin^3 A.$$

同理  $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$$

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

(3) 三角函數

$$\sin A, \sin 2A, \sin 3A, \dots,$$

$$\cos A, \cos 2A, \cos 3A, \dots,$$

之次序乃爲循環的，因

$$\sin(n+1)A = 2\cos A \cdot \sin nA - \sin(n-1)A,$$

$$\cos(n+1)A = 2\cos A \cdot \cos nA - \cos(n-1)A,$$

故是等結果之各項，可以  $2\cos A$  乘其前

之函數而減去又前之函數以得之。用此法則只須記明  $\sin 2A$  及  $\cos 2A$  之公式，而任何倍角之公式均可求得。故級數

$$1 + x\sin A + x^2\sin 2A + x^3\sin 3A + \dots$$

或  $1 + x\cos A + x^2\cos 2A + x^3\cos 3A + \dots$  之關係式爲  $1 - 2x\cos A + x^2$ 。

## 倒

【倒形】Inverse figure. [幾] 如  $O$  爲一定點， $A$  爲其他任一點，在  $OP$  或其延長線上取  $B$  點，令  $OA \cdot OB = K^2$  (常數)，則  $B$  稱爲  $A$  之倒形，對於中心  $O$  半徑  $K$  之圓言， $O$  曰倒形中心， $K^2$  爲倒形率， $K$  曰倒形半徑，其圓曰倒形圓。又  $A$  亦爲  $B$  之倒形，而  $OA$  與  $OB$  爲倒變。又倒形亦曰反形。

【倒數】Reciprocals. [算] [代] 3 之倒數爲  $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{5}$  之倒數爲  $\frac{5}{2}$ ， $a$  之倒數爲  $\frac{1}{a}$ ， $\frac{y}{x}$  之倒數爲  $\frac{x}{y}$ 。一般整數之倒數，即以其數爲分母，分子爲 1 之分數。分數之倒數，即其分母與分子互相交換之分數。又如  $\frac{x}{y}$  與  $\frac{y}{x}$  稱爲互倒分數 (Reciprocal fraction)。

【倒點】Inverse points. [幾]  $C, D$  二點就一圓直徑二端  $A, B$  言，爲調和共軛時，則就其圓言， $C, D$  爲倒點。如圓之中心爲  $O$ ，半徑爲  $r$ ，則  $OC \cdot OD = r^2$ 。 $C$  與  $D$  對中心  $O$  言，稱爲互爲倒形，亦稱互倒點。一線或圖形上各點之倒點，亦成一線或圖形，名爲前者之倒形，參觀

該條。

【倒形法】Inversion. [幾]即求倒形之法也。

【倒形圓】Circle of inversions. [幾]見倒形條。

【倒數式】Reciprocal expressions.

(代) a 之倒數式爲  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{b-x}{a+x}$  之倒數

式爲  $\frac{a+x}{b-x}$ 。一般言之，整數式之倒數式爲以其式爲分母以 1 爲分子之式，分數式之倒數式爲將其式之分子分母互換之式。

【倒形中心】Centre of inversion. [幾]見倒形條。

【倒數方程式】Reciprocal equation.

(代) 於恆等式  $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$

$\dots (x - \alpha_n)$  中，以  $\frac{1}{y}$  代  $x$ ，變化之後，

得  $\frac{1}{y^n} + \frac{p_1}{y^{n-1}} + \frac{p_2}{y^{n-2}} + \dots + \frac{p_{n-1}}{y} + p_n$

$\equiv \frac{p_n}{y^n} \left( y - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left( y - \frac{1}{\alpha_2} \right) \dots \left( y - \frac{1}{\alpha_n} \right)$ ，

或  $y^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} y^{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_n} y^{n-2} + \dots$

$+ \frac{p_1}{p_n} y + \frac{1}{p_n}$

$\equiv (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_n)$ 。

故一含  $x$  之方程式，以  $\frac{1}{y}$  代  $x$ ，以  $\frac{y^n}{p_n}$

乘之，則其結果爲一含  $y$  之方程式，而有以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  之倒數爲其根，此種方程式當  $x$  變爲倒數後，其值不變，

是曰倒數方程式。由上知倒數方程式其係數中所有之條件爲

$$\frac{p_{n-1}}{p_n} = p_1, \frac{p_{n-2}}{p_n} = p_2, \dots, \frac{p_1}{p_n} = p_{n-1},$$

$$\frac{1}{p_n} = p_n, \text{ 由最後之條件得 } p_n^2 = 1$$

或  $p_n = \pm 1$ 。依  $p_n$  之爲  $+1$  或  $-1$ ，而倒數方程式分爲二類。

(1) 當  $p_n = +1$  時，得關係

$$p_{n-1} = p_1, p_{n-2} = p_2, \dots, p_1 = p_{n-1}.$$

此爲第一類倒數方程式，其首尾相對應項之係數量相等而號相同。

(2) 當  $p_n = -1$  時，得關係

$$p_{n-1} = -p_1, p_{n-2} = -p_2, \dots, p_1 = -p_{n-1}.$$

此爲第二類倒數方程式，其首尾相對應項之係數量相等而號相反。此類之方程式當爲偶次時，如云  $n = 2m$ ，則其係數關係中必有一關係變爲  $p_m = -p_m$ ，即  $p_m = 0$ ，故第二類倒數方程式之爲偶次時，必無中項。

如  $\alpha$  爲倒數方程式之一根，則  $\frac{1}{\alpha}$  亦爲

其一根，故倒數方程式之根常成對，如

$\alpha, \frac{1}{\alpha}; \beta, \frac{1}{\beta}$  等。若方程式爲奇次，則必

有一根自爲倒數，即一根必爲  $+1$  或  $-1$ ，第一類時爲  $-1$ ，第二類時爲  $+1$ 。在此二

情形均可以因數  $(x+1)$  或  $(x-1)$  除之，

而得第一類之偶次倒數方程式。第二類

偶次方程式必有  $(x^2-1)$  爲其因數，因其

方程式常可書爲  $x^n - 1 + p_1 x(x^{n-2} - 1)$

$+ \dots = 0$  也。除以  $(x^2-1)$  之後，則亦

變爲第一類之偶次倒數方程式，故所有

倒數方程式皆可變爲第一類而其次數爲偶數，此爲倒數方程式之標準式。茲舉例以示一般之解法。

〔例〕解方程式

$$6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0.$$

此方程式之左邊明知有因數  $x^2 - 1$ ，而其對應根爲  $\pm 1$ ，故  $6(x^6 - 1) - 25x(x^4 - 1) + 31x^2(x^2 - 1) = 0$  所要之根爲  $\pm 1$  及  $6x^4 - 25x^3 + 37x^2 - 25x + 6 = 0$  之根。

後之方程式各項以  $x^2$  除之，得

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 37 = 0,$$

$$\text{命 } x + \frac{1}{x} = y, \text{ 即 } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

故  $6y^2 - 25y + 25 = 0$ ，因而  $y = \frac{5}{2}$  或

$$\frac{5}{3}. \text{ 若 } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \text{ 則 } x = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2},$$

$$\text{若 } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{3}, \text{ 則 } x = \frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{-11}).$$

故所要之根爲  $\pm 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}(5 \pm$

$$\sqrt{-11}).$$

## 值

〔值〕Value. [數] 有爲式之值者，例  $(2+3)^4$  式之值爲 20，即運算其式所得之結果也。有云文字之值者，如  $2:3=10:x$ ，則適合  $x$  之值爲 15。又比之值即後項除前項之商也。又函數之值，如  $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ，當  $x=4$  時之值爲  $16 + 12 - 5 = 23$ 。

## 原

〔原點〕Origin. [幾] 角之首線初與他一邊相合，其後自他邊之端迴轉，此角之頂曰原點。又方程式之幾何學的表示，即作曲線圖時，常以互成直角之二直線爲縱橫軸，其交點曰原點。故在解析幾何中，原點之坐標爲  $(0, 0)$ 。

## 展

〔展開〕Expand 或 Development.

〔代〕[幾] 代數學上之展開，見下條。

表面之展開者，即單曲面在一平面上迴轉，其曲面之各母線與平面相切而完成一迴轉，是等母線即在平面上畫曲面之展開，例如圓柱面之展開爲矩形，圓錐面之展開爲圓扇形。

〔展開式〕Expansion. [代] 表示冪或除法運算後之結果者曰展開式。例如  $(a+b)^3$  之展開式爲

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ 又 } \frac{1}{1+x} \text{ 之展開式}$$

爲  $1 - x + x^2 - \dots$ 。而爲二項式定理中所常見者，即  $(x+a)^n$  之展開式

$$x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} +$$

$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} + \dots + a^n \text{ 也。}$$

〔展開線〕Involute. [幾] 見縮閉線條。

## 容

〔容量〕Capacity. [數] 某器物之內部所合之容積也。

〔容積〕Contents 或 Volume. [數] 同體積，見該條。

### 差

【差】Difference. [算] [代] 一數減他數之殘餘曰差。取二數之差時，由其大者減其小者，是曰二數之算術差。由第一數減去第二數時，曰二數之代數差。故二數之算術差恆為正，而二數之代數差，則當第一數大於第二數時為正，小時為負。

【差法】Method of difference. [代] 於任意之級數由其各項減其前項，則得差之第一次級數。同樣於此級數亦由各項減其前項，得差之第二次級數。逐次行之，得差之第三，……級數。但於等差級數，差之第二次級數皆為零，故第三，第四以下皆零之級數也。次例取一級數將其下各次之差記出之，即至差之第四次悉為零也。

1 5 12 24 43 71 110....  
 4 7 12 19 28 39....  
 3 5 7 9 11....  
 2 2 2 2....  
 0 0 0....

一般以  $a_1, a_2, a_3, \dots$  為第一級數，如下所示。

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7, \dots$   
 $b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6, \dots$   
 $c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5, \dots$   
 $d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4, \dots$   
 $e_1 \ e_2 \ e_3, \dots$

而終必達於其差悉為零。

【求任意項之法】為簡略計，假定第五次之差悉為零，而遇他條件時亦同理。按作累次之差之方法，而得各等式如次。

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b_1, a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + 2b_1 + c_1. \\ b_2 &= b_1 + c_1, b_3 = b_2 + c_2 = b_1 + 2c_1 + d_1. \\ c_2 &= c_1 + d_1, c_3 = c_2 + d_2 = c_1 + 2d_1 + e_1. \\ d_2 &= d_1 + e_1, d_3 = d_2 + e_2 = d_1 + 2e_1 \\ e_2 &= e_1, \quad e_3 = e_2 = e_1 \\ a_4 &= a_3 + b_3 = a_1 + 3b_1 + 3c_1 + d_1. \\ b_4 &= b_3 + c_3 = b_1 + 3c_1 + 3d_1 + e_1. \\ c_4 &= c_3 + d_3 = c_1 + 3d_1 + 3e_1. \\ d_4 &= d_3 + e_3 = d_1 + 3e_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + b_4 = a_1 + 4b_1 + 6c_1 + 4d_1 + e_1, \\ b_5 &= b_4 + c_4 = b_1 + 4c_1 + 6d_1 + 4e_1. \\ c_5 &= c_4 + d_4 = c_1 + 4d_1 + 6e_1. \\ a_6 &= a_5 + b_5 = a_1 + 5b_1 + 10c_1 + 10d_1 \\ &\quad + 5e_1. \\ b_6 &= b_5 + c_5 = b_1 + 5c_1 + 10d_1 + 10e_1. \\ a_7 &= a_6 + b_6 = a_1 + 6b_1 + 15c_1 + 20d_1 \\ &\quad + 15e_1. \end{aligned}$$

餘做此，且  $a_5$  式之係數為  $(x+y)^4$  之係數，而  $a_6, a_7$  式之係數亦可見出有同樣之關係，一般  $a_1, b_1, c_1, \dots$  可書為  $a, b, c, \dots$  而第  $n+1$  項即  $a_{n+1}$  之式為如次所書。

$$a_{n+1} = a + nb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots$$

例。求級數 1, 5, 12, 24, 43, 71, 110 之第十一項。茲  $a=1, b=4, c=3, d=2, e=0$ 。(此差之作法見本條之首)。而  $n=10$ 。  
 $a_{11} = a + 10b + 45c + 120d$   
 $= 1 + 40 + 135 + 240 = 416$ 。

【求級數之和】令第一項為 0，而以前級數之第一項為第二項，以其第一項與第

二項之和爲第三項，如此作累次各項而成新級數，即  $0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3+a_4+\dots$ ，則此級數之第  $n+1$  項爲級數  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  之  $n$  項之和。例如求級數  $1, 5, 12, 24, 43, 71, \dots$  首十一項之和。新級數及其各次之差如下。

|   |   |    |    |    |    |     |
|---|---|----|----|----|----|-----|
| 0 | 1 | 6  | 18 | 42 | 85 | 156 |
| 1 | 5 | 12 | 24 | 43 | 71 |     |
| 4 | 7 | 12 | 19 | 28 |    |     |
| 3 | 5 | 7  | 9  |    |    |     |
| 2 | 2 | 2  |    |    |    |     |

茲  $a=0, b=1, c=4, d=3, e=2$ ，而  $n=11$ 。故新級數之第十二項爲

$$s = a + 11b + 55c + 165d + 330e \\ = 11 + 220 + 495 + 660 = 1386.$$

若  $s$  爲級數  $a_1, a_2, a_3, \dots$  首  $n$  項之和，

$$\text{則 } s = 0 + na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \dots$$

例。求自然數之平方  $1^2, 2^2, 3^2, \dots$  之首  $n$  個之和。此級數與其各次之差如下：

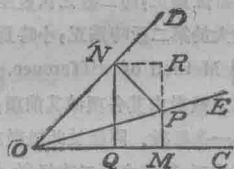
|   |   |         |         |         |             |
|---|---|---------|---------|---------|-------------|
| 1 | 4 | 9       | 16      | 25      | $\dots n^2$ |
| 3 | 5 | 7       | 9       | $\dots$ |             |
| 2 | 2 | 2       | $\dots$ |         |             |
| 0 | 0 | $\dots$ |         |         |             |

故  $a=1, b=3, c=2, d=0$ 。而將是等之值代入一般式爲。

$$s = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 \\ = n \left\{ 1 + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right. \\ \left. (n^2 - 3n + 2) \right\} \\ = \frac{n}{6} \{ 6 + 9n - 9 + 2n^2 - 6n + 4 \}$$

$$= \frac{n}{6} \{ 2n^2 + 3n + 1 \} \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

【差角之三角函數】 Trigonometric functions of the difference of two angles. [三] 命角  $COD$  以  $A$  表之，



角  $DOE$  以  $B$  表之，則角  $COE$  可以  $A-B$  表之。於  $OE$  上任取一點  $P$ ，引  $PM$  垂直於  $OC$ ， $PN$  垂直於  $OD$ ，又引  $NR$  垂直於  $PM$  之引長線， $NQ$  垂直於  $OC$ 。則角  $NPR$  爲角  $PNR$  之餘角，等於角  $DNR$ ，即等於角  $DOC$ 。

$$\text{而 } \sin COE = \frac{PM}{OP} = \frac{RM - RP}{OP} \\ = \frac{NQ}{OP} - \frac{RP}{OP} = \frac{NQ}{ON} \\ - \frac{ON}{OP} \cdot \frac{RP}{PN} \cdot \frac{PN}{OP} \\ \text{又 } \cos COE = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ + QM}{OP} \\ = \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP} = \frac{OQ}{ON} \\ + \frac{ON}{OP} + \frac{NR}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}.$$

故  $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$   
 $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$

$$\text{又 } \tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$$



$$= \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}.$$

分子分母以  $\cos A \cos B$  除之，則得

$$\begin{aligned} \tan(A-B) &= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} \\ &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}. \end{aligned}$$

同理  $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B - \cot A}.$

A 及 B 爲任何角均可，若 A 及 B 爲小於兩直角，則前之二式，又可以普多來米之定理(Ptolemy's theorem)證明之。

普氏之定理爲「若 ABCD 爲圓之內接四邊形，則  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$ 」

茲命 CD 爲圓之直徑且等於單位長，

$\angle BCD = \alpha, \angle ACD = \beta$ ，則  $AB = \sin(\alpha - \beta)$ ，

而其定理爲  $\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha = \cos \beta \sin \alpha$ 。又若命 BD 爲圓之直徑且等於單位長，

$\angle ADB = \alpha, \angle CBD = \beta$ ，則

$\angle ADC = \frac{1}{2} \pi + \alpha - \beta$ ，而  $AC = \cos(\alpha - \beta)$ ，

故其定理爲

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

與上所證明者相合。

## 徑

【徑】Diameter. [幾] 直徑之簡稱。

## 時

【時差】Difference in times. [算] 某地之地方時(見標準時條)與他地之地方時之差，曰此兩地之時差。

## 根

【根】Root, Radix. [算] [代] 英語之

Root 由拉丁語之 Radix 而來，故英語中稱數之根少有用 Radix 者。方程式之根者，以之代入方程式之未知數而得方程式之真值，即使方程式之兩邊相等之實數或虛數也。含一未知數整數方程式之根之數，常與其次數同，如二次方程式有二根，三次方程式有三根。數之根者，即以之爲因數取若干次之積，等於其數之謂也。如某數之二乘根或平方根者，乃以之爲因數取二次之積，即其平方等於某數，又某數之三乘根或立方根者，乃以之爲因數取三次之積即其立方，等於某數之謂也。故一數某數之 n 乘根者，即以之爲因數取 n 次之積，即其 n 乘幂等於某數之謂也。數之根有爲實數者，有爲虛數者， $+a$  及  $-a$  二乘幂爲  $+a^2$ ，故各數有二平方根，其絕對值相等，而符號相反。而  $-a^2$  則無實數之平方根，其二根爲  $+a\sqrt{-1}$  及  $-a\sqrt{-1}$ ，皆虛數也。又  $x^3 = a^3$  列爲方程式則爲  $x^3 - a^3 = 0$ ，即  $(x-a)(x^2 + ax + a^2) = 0$ 。

由前之因數得  $x = a$ ，由後之因數得

$$x = a \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right) \text{ 及 } x = a \left( \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right),$$

故  $a^3$  之立方根有三，

$$\text{即 } a, a \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right), a \left( \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right).$$

通例以  $a, a\omega, a\omega^2$  表之，

$$\text{因 } \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

及  $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$  也。

又  $x^4 = a^4$ , 即  $x^4 - a^4 = 0$ ,

或  $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$ ,

故由前之因數即  $x^2 - a^2 = 0$ ,

或  $(x-a)(x+a) = 0$ ,

故  $x = a$  或  $x = -a$ 。由後之因數  $x^2 + a^2 = 0$

即  $(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1}) = 0$ ,

故  $x = a\sqrt{-1}$  或  $x = -a\sqrt{-1}$ 。

**【根率】** Modulus. [代] 毛萊 (Mourey)

氏證明得各數恆可化為  $a + b\sqrt{-1}$  之形，但  $a$  及  $b$  為實數，無論正數或負數，整數或分數，有理數或無理數或零均可。

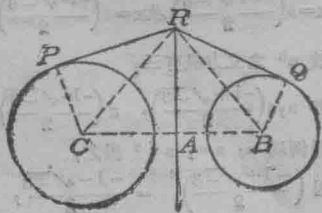
當  $b = 0$  時，則  $a + b\sqrt{-1}$  為實數。

而  $\sqrt{a^2 + b^2}$  之正根稱曰  $a + b\sqrt{-1}$  之根率。  $b$  不為零時，則根率稱為虛數率。

毛萊氏虛數之圖示法，以根率表一直線之長，而  $a$  及  $b$  之關係則以一定主線對於前線之方向決定之，其詳見複虛數圖示法條。

**【根軸】** Radical axis. [幾] 自一點至二

圓引切線為相等，則其點之軌跡，稱為二圓之根軸，根軸為一直線。取任意二圓  $C, B$ ，於  $BC$  上或其延長線上取  $A$  點，令  $\overline{CA}^2 - \overline{BA}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{BQ}^2$ ，但  $CP$  為



圓之半徑，

$BQ$  為  $B$  圓

之半徑。而

$R$  為通過  $A$

點  $OB$  之垂

線上之任一

點。自  $B$  引

切線  $RP, RQ$ ，則

$\overline{OR}^2 - \overline{BR}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{BA}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{BQ}^2$ ，即

$\overline{OR}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{BR}^2 - \overline{BQ}^2$ 。故  $\overline{RP}^2 = \overline{RQ}^2$ ，

故  $RP = RQ$ ，而  $RA$  為二圓  $C, B$  之根軸。

(系) 二圓相交時，其共同弦之直線為二

圓之根軸。二圓內切時，其共同外切線為

其根軸，外切時則其共同內切線為其根

軸。惟以相交二圓之共同弦為根軸之一

部分時，則宜將根軸之定義稍擴張之。

**【根號】** Radical sign. [算] [代] 表示

某數或某式開方時所用之符號曰根號，

例如  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{a+b}$ ,  $\sqrt[3]{6}$ ,  $\sqrt[4]{a^2+b^2}$ ，

符號  $\sqrt{\quad}$  即根號也。此符號  $\sqrt{\quad}$  實為 Radix

之縮寫。根之次數以根號上所書之小字

表示之，例如  $\sqrt[3]{\quad}$  即表示立方根， $\sqrt[4]{\quad}$  表示四

乘根，一般即  $\sqrt[n]{\quad}$  乘根之意。但平方根

則不記為  $\sqrt{\quad}$ ，而僅記為  $\sqrt{\quad}$ 。

**【根數】** Radical. [代] 數或式之不問

其為有理無理而均以根號表示之者曰根

數，如  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt[3]{8}$ ,  $\sqrt[3]{(a+b)}$ ，

$\sqrt{(x+y)^4}$ 。其中  $\sqrt{9} = 3$ ,  $\sqrt[3]{8} = 2$ ，

$\sqrt{(x+y)^4} = (x+y)^2$  實皆為有理數也。

而  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{2}$  等則不能精密求其值，稱

為不盡根，詳該條。

**【根指數】** Index of radicals. [代] 根

號左旁所記之數曰根指數，如於  $\sqrt[n]{a}$  式中， $n$  即根指數。

**【根軸心】** Radical centre. [幾]三圓之根軸，成對相取時，必同交於一點，此點曰根軸心，或曰根心。

消

**【消去式】** Eliminant. [代]由含  $x, y$  二元之方程式消去  $y$ ，得含  $x$  之方程式，是曰「 $x$  消去式」。例如

$$x^2 + xy = 4x - 2 \dots\dots\dots(1).$$

$$y^2 + xy = 4y - 1 \dots\dots\dots(2).$$

由(1)得  $y = \frac{-x^2 + 4x - 2}{x}$ ，代入(2)得

$$(x^2 - 4x + 2)^2 - (x^2 - 4x + 2)x^2 = 4x(-x^2 + 4x - 2) - x^2,$$

即  $3x^2 - 8x + 4 = 0$ ，此方程式即「 $x$  消去式」也。故由含  $x, y$  二元之方程式，消去  $y$  而得含  $x$  之式，故「 $x$  消去式」不當思為消去  $x$  之式也。又若最初消去  $x$ ，則得「 $y$  消去式」。

**【消去法】** Elimination. [代]由二以上之方程式而求出不含一未知數或多未知數之方程式之法曰消去法。消去法有加減消去法，代入消去法，比較消去法三種，詳見各條。茲舉一二例以示說明。

例。由  $ax + b = 0$ ， $a'x + b' = 0$  消去  $x$ ，由第一方程式  $x = -\frac{b}{a}$ ，第二方程式

$$x = -\frac{b'}{a'}. \text{ 故 } \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \text{ 即 } ba' - b'a = 0,$$

此為由上二方程式消去  $x$  之式。又有方程式  $ax + by + c = 0$ ， $a'x + b'y + c' = 0$ ，

$a''x + b''y + c'' = 0$ 。由前二方程式消去

$$x \text{ 及 } y, \text{ 得 } \frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a}$$

$$= \frac{1}{ab' - a'b}. x \text{ 及 } y \text{ 是等之值必適合第}$$

三方程式，代入且變化之，得

$$a''(bc' - b'c) + b''(ca' - c'a) + c''(ab' - a'b)$$

$$= 0. \text{ 又由 } ll' = a, mm' = b, nn' = c,$$

$$mn' + m'l = 2f, nl' + n'l = 2g, lm' + l'$$

$$m = 2h \text{ 六方程式消去 } l, m, n, l', m', n',$$

即由最後之三方程式連乘之，得

$$8fgh = 2lmnln'm' + ll'(m^2n'^2 + m'^2n^2)$$

$$+ mm'(n^2l'^2 + n'^2l^2) + nn'(l^2m'^2 + l'^2$$

$$m^2) = ll'(mn' + m'n)^2 + mm'(nl' + n'l$$

$$)^2 + nn'(lm' + l'm)^2 - 4ll'mm'nn'$$

$$= 4af^2 + 4bg^2 + 4ch^2 - 4abc$$

$$\text{即 } abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

[行列式消去法]欲由四方程式

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

消去  $x, y, z$ ，則先由前三方程式求得

$x, y, z$  之值，代入第四方程式，即將

$$x = -\frac{[d_1 b_2 c_3]}{[a_1 b_2 c_3]}, y = -\frac{[a_1 d_2 c_3]}{[a_1 b_2 c_3]}$$

$$z = -\frac{[a_1 b_2 d_3]}{[a_1 b_2 c_3]}$$

代入第四方程式，得

$$\begin{vmatrix} -a_4 & d_1 b_1 c_1 & -b_4 & a_1 d_1 c_1 & -c_4 & a_1 b_1 d_1 \\ d_2 b_2 c_2 & a_2 d_2 c_2 & a_2 b_2 d_2 & & & \\ d_3 b_3 c_3 & a_3 d_3 c_3 & a_3 b_3 d_3 & & & \end{vmatrix}$$

$$x \cdot d_4 \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{即} \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

而不限於四方程式，若有  $n$  個方程式含  $n-1$  個未知數時，亦可擴張求得之。

〔Sylvester 氏之消去法〕此法爲由含  $x$  之任意二方程式消去  $x$ ，如由下例

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{及} \quad px^2 + qx + r = 0$$

消去  $x$ ，由此二方程式可得

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0, \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

$$px^3 + qx^2 + rx = 0, \quad px^2 + qx + r = 0.$$

以  $x$  之各乘羅即  $x^3, x^2, x$  爲未知數，則由前法得其消去式爲

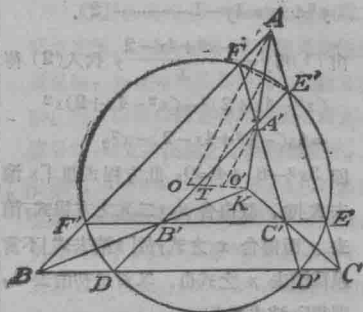
$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

〔消約法〕Cancel'ation. 〔算〕〔代〕對於除法之被除數與除數，分數之分子與分母，消去其共同約數之法也。

〔消失分數〕Vanishing fraction. 〔代〕對於函數或分數內之變數，與以某值時，其函數或分數變爲  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  之形之謂也，見不定形條。

## 特

〔特克圖屬〕Tucker's family of circles. 〔幾〕 $K$  爲三角形  $ABC$  之類似重心；於  $KA, KB, KC$  上取  $A', B', C'$  令  $A'B', B'C', C'A'$  各平行於  $AB, BC, CA$ ，將三角形  $A'B'C'$  各邊雙方引長之，與三角形  $ABC$  之邊交於  $D, D', E, E', F, F'$  六點，此六點在一圓周上。且其中心爲聯結二三角形  $ABC, A'B'C'$  之重心之直線之中點。〔證〕因  $AFA'E'$  爲



梯形，是以  $AA'$  二等分  $FE'$ ，然  $AA'$  爲類似中線，故  $FE'$  逆平行於  $BC$ ，因之逆平行於  $F'E$ 。故  $E, E', F, F'$  爲共圓點。同樣  $D, D', E, E'$ ； $D, D', F, F'$  亦爲共圓點。故由達維斯定理， $D, D', E, E', F, F'$  爲共圓。次命  $O, O'$  各爲三角形  $ABC, A'B'C'$  之外心，因  $K$  爲兩三角形之相似中心。故知  $KO'O$  爲一直線，而  $AO \perp FE'$ ， $O'A' \parallel OA$ ，故過  $AA'$  之中點而平行  $OA$  之直線，即於  $FE'$  之中點與之垂直之直線過  $OO'$  之中點  $T$ 。

同樣  $DF'$ ,  $ED'$  之垂直二等分線亦過  $T$  點。由是  $T$  為圓心。變三角形  $A'B'O'$  之位置, 可得一羣之圓而謂之特克圓屬。

三角形之外接圓, 三乘比圓, 餘弦圓, 皆為特克圓屬之一。當  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , 各與  $A$ ,  $B$ ,  $C$  一致時, 則為三角形之外接圓。

當  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  皆與類似重心  $K$  一致時, 則為三乘比圓。當  $AA'$  之中點與  $K$  一致時, 則逆平行線  $FE'$ ,  $DF'$ ,  $ED'$  皆過  $K$ , 而此特克圓為餘弦圓。

又有謂  $KA':KA = KB':KB = KC':KC$  為常數時, 三角形  $A'B'O'$  之各邊與  $\triangle ABC$  之各邊相交之六點在一圓周上, 此圓謂之特克圓屬。如是則戴勞圓亦特克圓屬之一, 於戴勞圓已證  $YZ'$ ,  $ZX'$ ,  $XY'$  各與  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  平行。延長此三直線交於  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ 。因  $BXB'Z$  為平行四邊形, 故  $BB'$  二等分  $Z'X$ , 而  $Z'X$  為  $CA$  之逆平行線故  $BB'$  為類似中線, 且過  $K$  點。同樣  $AA'$  及  $CC'$  亦過  $K$  點。由是  $KA':KA = KB':KB = KC':KC$ 。由三角

法可知此比等於  $1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4a^2}$ ,

而為一常數。故戴勞圓亦為特克圓屬之一。

### 【特麥佛定理】De Moivre's theorem.

〔三〕特麥佛定理如次：—當  $n$  為實數, 則  $\cos n\theta + i \sin n\theta$  為  $(\cos\theta + i \sin\theta)^n$  之一值。 $\cos\alpha + i \sin\alpha$  以  $\cos\beta + i \sin\beta$  乘之, 其積為  $\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + i(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$ , 即  $\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ ; 此式以  $\cos\gamma + i \sin\gamma$  乘之,

其積為  $\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma)$ 。逐次如是, 可得任何個形如  $\cos\alpha + i \sin\alpha$  之因數之積。設有  $n$  個此積因數,

且各因數皆為  $\cos\theta + i \sin\theta$ ; 則得  $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ 。此證明特麥佛定理當  $n$  為正整數時能成立。次命  $n$  為負數, 設  $n = -m$ , 則  $(\cos\theta + i \sin\theta)^n$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos\theta + i \sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta}; \text{ 分子分母以}$$

$\cos m\theta - i \sin m\theta$  乘之, 則得

$$\frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}, \text{ 即 } \cos m\theta - i \sin m\theta;$$

即  $\cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)$  或  $\cos n\theta + i \sin n\theta$ 。此證明特麥佛定理當  $n$  為負

數時能成立。既因  $n$  為任意整數,  $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ , 故當  $n$  任意整數,  $\cos\theta + i \sin\theta$  為  $(\cos n\theta + i \sin n\theta)^{\frac{1}{n}}$

之一值。又命  $n$  為分數, 設  $n = \frac{p}{q}$ ,

$$\text{則 } (\cos\theta + i \sin\theta)^n = (\cos\theta + i \sin\theta)^{\frac{p}{q}}$$

$$= (\cos p\theta + i \sin p\theta)^{\frac{1}{q}}; \text{ 故最後之式一}$$

$$\text{值為 } \cos \frac{p\theta}{q} + i \sin \frac{p\theta}{q}.$$

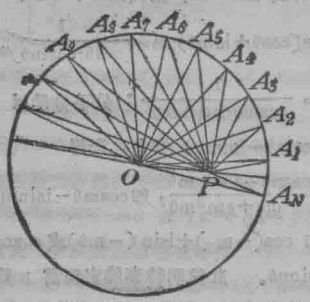
如是特麥佛定理完全成立矣。

特麥佛定理甚為重要, 凡三角函數之展開, 求任意個角和之三角函數, 因數分解, 方程式用三角函數之解法等等皆用之。

【特麥佛圓之性質】De Moivre's property of the circle.〔三〕命  $O$  為圓

心, P 爲圓之平面上任意一點; 分全圓爲 n 等分於 A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>, ……………, A<sub>n</sub>.

聯 O 及 P 於諸分點 A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>, ……………, A<sub>n</sub>. 命圓之半徑爲 a, OP 之距離爲 c. 命角 POA<sub>1</sub> 以 θ 表之, 則角 POA<sub>2</sub>, POA<sub>3</sub>, …………… 各爲 θ +  $\frac{2\pi}{n}$ , θ +  $\frac{4\pi}{n}$ , ……………



則 PA<sub>1</sub><sup>2</sup> = OA<sub>1</sub><sup>2</sup> - 2OA<sub>1</sub> · OP cos θ + OP<sup>2</sup>,

PA<sub>2</sub><sup>2</sup> = OA<sub>2</sub><sup>2</sup> - 2OA<sub>2</sub> · OP cos (θ +  $\frac{2\pi}{n}$ ) + OP<sup>2</sup>,

PA<sub>3</sub><sup>2</sup> = OA<sub>3</sub><sup>2</sup> - 2OA<sub>3</sub> · OP cos (θ +  $\frac{4\pi}{n}$ ) + OP<sup>2</sup>,

……………

PA<sub>n</sub><sup>2</sup> = OA<sub>n</sub><sup>2</sup> - 2OA<sub>n</sub> · OP

cos { θ +  $\frac{2(n-1)\pi}{n}$  } + OP<sup>2</sup>.

因 OA<sub>1</sub> = OA<sub>2</sub> = OA<sub>3</sub> = …………… = OA<sub>n</sub> = a, OP = c, 故 PA<sub>1</sub><sup>2</sup> · PA<sub>2</sub><sup>2</sup> · …………… · PA<sub>n</sub><sup>2</sup>

$\prod_{s=0}^{s=n-1} \{ a^2 - 2accos(\theta + \frac{2s\pi}{n}) + c^2 \}$ .

由是因數分解之公式得

PA<sub>1</sub><sup>2</sup>PA<sub>2</sub><sup>2</sup>PA<sub>3</sub><sup>2</sup>……PA<sub>n</sub><sup>2</sup> = a<sup>2n</sup> - 2a<sup>n</sup>c<sup>n</sup> cos nθ + c<sup>2n</sup>. 是謂之特麥佛圓之性質。

當 P 在圓周上, 則 PA<sub>1</sub>PA<sub>2</sub>PA<sub>3</sub>……PA<sub>n</sub> = 2a<sup>n</sup>cos  $\frac{1}{2} n\theta$ ,

是爲特麥佛圓之性質之特例。

哥芝 (Cotes) 圓之性質亦爲特麥佛圓之性質之二特例。當 P 在半徑 OA 上, 則 θ = 0, 而 PA<sub>1</sub>PA<sub>2</sub>PA<sub>3</sub>……PA<sub>n</sub> = a<sup>n</sup> ~ a<sup>n</sup>.

又當 P 在角 A<sub>n</sub>OA<sub>1</sub> 之二等分線上, 則 θ =  $\frac{\pi}{n}$ , 而得 PA<sub>1</sub> · PA<sub>2</sub> · PA<sub>3</sub> · …………… · PA<sub>n</sub> = a<sup>n</sup> + c<sup>n</sup>. 是二者謂之哥芝圓之性質。

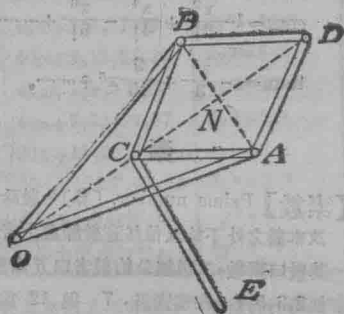
### 矩

**[矩形]** Rectangle 或 Oblong. [幾] 平行四邊形之各角爲直角者曰矩形。[平行四邊形有一角爲直角者, 其他三角亦皆爲直角, 故矩形之定義, 亦可曰平行四邊形之一角爲直角者]。矩形之相鄰二邊相等, 則其四邊皆相等, 而矩形變爲正方形。等底兩矩形之比, 等於其高之比。等高兩矩形之比, 等於其底之比。兩矩形之比, 等於其底高相乘積之比。矩形之面積等於其底高相乘之積。於矩形之平面上任取一點, 由其點至相對兩角頂線上之正方形之和, 等於由其點至他兩角頂線上之正方形之和。

### 破

**[破賽里葉氏聯節器]** Peaucellier's linkage. [幾] C, D 二點, 就中心 O 之圓言, 互爲倒點。若 C 之軌跡爲一圓, 則

其倒點 D 一般之軌跡，爲他一圓。惟 C 所作之圓過 O 時，則 D 之軌跡爲一直線。破賽里葉氏發明自圓運動生直線運動之聯節法。即用此定理之後部，依倒轉之原理而得。最簡單之方法如下。



取頂點能自由運動之菱形 ACBD，於 A, B 附着 AD, BO 二等長之棒。將 O 點固定之，則棒任何迴轉，O, C, D 常爲共線點。又因對角線 AB, CD 互爲垂直二等分線，

$$OC \cdot OD = \frac{2}{ON} - \frac{2}{ON} = \frac{2}{OB} - \frac{2}{CB} =$$

常量。故就 O 點言，C 及 D 爲倒點。更附一棒，OE (E 爲固定。且 EO = EC)，若 C 所作之圓過 O 點，則 D 動於 OE 之一垂線上。

### 租

**【租稅】** Duties. [算] 人民納款於政府以供國家之用者曰租稅。我國租稅以地稅漏稅爲大宗，地稅者按地納稅，名曰地丁，所納之租曰錢糧。關稅分常關海關，常關設於內地，海關設於海口，其納稅之

法，有按貨之件數而計算者曰從量稅。(Specific duty)，有按貨物之價值而計算者。曰從價稅 (Advalorem duty)，從價稅之計算，以貨價爲母數，其規定之稅則即分釐率，其應納之稅銀，即子數也。

### 納

**【納白爾對數】** Napierian logarithm. [代] 即以 e 爲底之對數，亦曰自然對數，見對數條。

### 純

**【純正數學】** Pure mathematics. [數] 論數學之原理者，爲與應用數學 (Applied mathematics) 相對之語。

**【純循環小數】** Pure recurring decimal. [算] 見循環小數條。

**【純二次方程式】** Pure quadratic equation. [代] 方程式之未知數只含二乘冪者，如  $ax^2 + b = 0$ ,  $3x^2 - 5 = 7 - 4x^2$ 。

### 級

**【級數】** Progression 或 Series. [代] 級數之英語，progression 與 series 其意義稍有不同，前者爲其級數順次之各項，可由前項以一定之關係而增減者，後者則其意義稍廣。前者中含有算術級數 (Arithmetic progression. 即等差級數，見該條) 與幾何級數 (Geometric progression 即等比級數。見該條) 及調和級數 (Harmonic progression 見該條) 三

種。廣義之級數(Series)者，乃由無數之項而成一連之數，其各項可由前之一項或數項以一定之法則而誘導之，若級數之項甚充足時，亦可由之而知級數之法則，有時級數之法則，以已知公項表示之。級數可由種種方法而誘導之，如由展開函數而誘導時，則由其展開之函數而命名，如對數級數指數級數。級數各項之絕對值，比其前項之絕對值小時，為遞降級數，大時為遞昇級數。級數之項數增至無限大而其和近於一定之值者，是曰收斂級數(Convergent series. 見該條)。其項數增至無限大而其和亦無限者，是曰發散級數(Divergent series. 見該條)。其項增至無限大，其和非為無限大，亦不近於一定值者，是曰不定級數或中性級數(Oscillating series. 見該條)。級數之總和法(Summation)者，求其若干項之和之式也。收斂級數至無窮項時其和亦可求得，此和即曰該級數之總和。今列舉必要之數種級數於下：1. 算術級數。

2. 幾何級數。3. 調和級數。已上說及。  
4. 循環級數(Recurring series. 見該條)。  
5. 對數級數(Logarithmic series)，將  $\log(1+y)$  依  $y$  之昇幂而展開之級數，即  $\log(1+y) = M\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots\right)$ ，但  $M$  為對數率，於納氏對數

等於 1。6. 指數級數，即展開指數函數之級數，如次。 $a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{k^{n-1} x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \dots$ ，

但  $k$  等於  $a$  之納氏對數。7. 三角級數(Trigonometric series)，此乃展開  $\sin x, \cos x, \tan x$  等為  $x$  之昇幂之級數，如

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots.$$

### 素

【素數】Prime number. [算] 凡數除一及本數之外不能以他任意數除盡之者，其數曰素數，二數無公約數者曰互素數，如 2, 3, 5, 7, ... 等為素數，7 與 12 為互素數。求素數雖無簡單之法則，而依埃拉安曲(Eratosthenes)之素數淘汰法，亦為求素數之一法，見該條。次就下表而說明素數之諸性質：

| 數  | 素 數                | 相 等 式           |
|----|--------------------|-----------------|
| 1  | $4n+1$             | $y^2+z^2$       |
| 2  | $6n+1$             | $y^2+yz+z^2$    |
| 3  | $8n+1, 7$          | $y^2-2z^2$      |
| 4  | $8n+1, 3$          | $y^2+2z^2$      |
| 5  | $12n+1$            | $y^3-3z^3$      |
| 6  | $12n+11$           | $3y^2-z^2$      |
| 7  | $14n+1, 9, 11$     | $y^2+7z^2$      |
| 8  | $20n+1, 9, 11, 19$ | $y^2-5z^2$      |
| 9  | $20n+1, 9$         | $y^2+5z^2$      |
| 10 | $20n+3, 7$         | $2y^2+2yz+3z^2$ |
| 11 | $24n+1, 19$        | $y^2-6z^2$      |
| 12 | $24n+5, 25$        | $6y^2-z^2$      |



|    |                        |              |
|----|------------------------|--------------|
| 13 | $24n+5, 11$            | $2y^2+3z^2$  |
| 14 | $24n+1, 7$             | $y^2+6z^2$   |
| 15 | $23n+1, 9, 25$         | $y^2-7z^2$   |
| 16 | $23n+3, 19, 27$        | $7y^2-z^2$   |
| 17 | $30n+1, 19$            | $y^2+15z^2$  |
| 18 | $30n+17, 23$           | $3y^2+5z^2$  |
| 19 | $40n+1, 9, 31, 39$     | $y^2-10z^2$  |
| 20 | $40n+3, 13, 27, 37$    | $2y^2-5z^2$  |
| 21 | $40n+1, 9, 11, 19$     | $y^2+10z^2$  |
| 22 | $40n+7, 13, 23, 37$    | $2y^2+5z^2$  |
| 23 | $120n+11, 29, 59, 101$ | $5y^2+6z^2$  |
| 24 | $120n+13, 37, 43, 67$  | $10y^2+3z^2$ |
| 25 | $120n+1, 31, 49, 79$   | $y^2+30z^2$  |
| 26 | $120n+17, 23, 47, 113$ | $2y^2+15z^2$ |

1. 凡數以其平方根以下諸數皆不能除盡者必為素數。
2. 凡素數大多為  $4n \pm 1$  之形。即素數以 4 除之，其剩餘為  $\pm 1$ 。素數亦有為  $6n \pm 1$  之形，及其他諸式之形者，前表已記出若干。然是等命題之逆命題未必為真，即為是等之形之各數，不必皆為素數也。
3. 三素數其公差為 6 所能除盡，或其首項為 3 時，則三數不能不為等差級數。然多於三之素數，則決不成等差級數。
4. 如  $n$  為素數，則  $1 + \frac{n-1}{n}$  能為  $n$  所除盡，是為 Wilson 之定理。
5. 如  $n$  為素數， $r$  與  $n$  為互素數，則  $r^{n-1} - 1$  能為  $n$  所能除盡，是為 Fermat 之定理。
6. 如前條同一之假定，則  $r^n - r$  為  $n$  之倍數。
7. 為  $4n+1$  之形各素數之平方為  $y^2+25z^2$  之形。
8. Euler 所發見  $2^{31}-1=2147483647$ ，當時信為最大之素數，其後發見更大之

素數，是即 19 位之數字所成之數  $2^{31}-1=2305843009213693951$  是也。

9.  $2^{2^m}+1$  之形之整數皆為素數，是亦為 Fermat 之定理。然在 1732 年 Euler 發見  $m$  為 5 時，即  $2^{2^5}+1$  得以  $5 \times 2^7+1$  除盡之。在 1880 年 Landry 又發見  $m$  為 6 時，即  $2^{2^6}+1$  得以  $1071 \times 2^3+1$  除盡之。在 1878 年 Pewouchine 發見  $m$  為 12 及 23 時，即  $2^{2^{12}}+1$  得以  $7 \times 2^{14}+1$  除盡之，而  $2^{2^{23}}+1$  得以  $5 \times 2^{26}+1$  除盡之。在 1886 年 Seelhoff 又發見  $m$  為 36 時，即  $2^{2^{36}}+1$  得以  $5 \times 2^{39}+1$  除盡之。由前表可得素數之多種性質，而知素數之配置不從一定之法則。又由前表及其他諸表，可見數目增大時，則素數之數隨之減少，例如 1 與 10000 之間有素數 1230，10000 與 20000 之間有素數 1033，20000 與 30000 之間有 983，90000 至 100000 之間則僅有素數 879。又自 1000000 至 1010000 之間有 753，又自 1010000 至 1020000 之間有 719，又自 3826019 至 3826157 之間並一素數而無之。

$N = \frac{x}{A \log x - B}$  為  $x$  甚大時決定素數之數之公式， $N$  為表素數之數， $A$  及  $B$  為由實驗決定之數。 $x$  甚大時，用納氏對數，則  $A$  等於 1， $B$  殆等於 1.08366，而  $N = \frac{x}{\log x - 1.08366}$ 。此公式滿足已知之結果，乃由實驗決定而不能證明者。素數之大無限，則可證明之，如命  $P$  為最大之素數， $N$  為諸素數  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots P$  之積，

故  $N$  可以其任一素數除盡之，而  $N+1$  則不能為  $2, 3, 5, \dots$  或  $p$  所除盡，故  $N+1$  或自為一素數，或可以大於  $p$  之素數除盡之，而與  $p$  為最大素數之假定相背。故素數之大為無限，惟現今所已發見者，即前述  $2^{31}-1$  之數也。

**【素因數】** Prime factor. [算][代] 某數之素因數，即其因數之為素數者，或曰整除此數而得素數之謂也。任意數之素因數以  $a, b, c, d, \dots$  表之，其因數之次數以  $m, n, p, q, \dots$  等表之，其數之自身則以  $a^m \cdot b^n \cdot c^p \cdot d^q \dots$  表之，而其約數之數（連 1 及其本數）則為  $(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)\dots$ 。今命  $N$  為此數，則小於  $N$  而與  $N$  為互素數之數可以

$$N \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} \dots \text{表之。}$$

分解其數為因數，而其因數不為素因數時，則有種種分法，例如 12 為  $2 \times 6$  或  $3 \times 4$ ，6 非素數，4 亦然。然分解某數為因數，而欲其因數皆為素數時，則只有一分法。

[例 1] 12 為  $2 \times 2 \times 3$  或  $2^2 \times 3$ ，此外無素因數能表其積。

[例 2] 求 4095 之素因數。  

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)4095} \\ \underline{3135} \\ 960 \\ 5 \overline{)960} \\ \underline{5455} \\ 405 \\ 7 \overline{)405} \\ \underline{315} \\ 90 \\ 13 \overline{)90} \\ \underline{69} \\ 21 \end{array}$$
  
 故分解 4095 為素因數，得  $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ，即  $3^2 \times 5 \times 7 \times 13$  也。

**【素約數】** Prime measure 或 Prime divisor. [算] 即素因數，見該條。

**【素數分解法】** Resolution into prime factor. 即求某數之素因數之法，見素因數條。

## 記

**【記法】** Notation. [數] 用記號以表數及運算，而圖便利之法也。數之記法即記數法，現今一般所通行者為亞拉伯記數法。又代數學記法者以  $a+b$  表和， $ab$  表積， $a^m$  表冪之謂也。幾何學記法者，直線以兩端之文字記之如  $AB$ ，三角形以其三角頂之文字記之如  $ABC$  之類是。又三角法之記法者，如  $A$  角之正弦餘弦以  $\sin A, \cos A$  記之之類是也。

**【記號】** Symbol. [代]  $+ - \times \div$  等之運算符號， $= > <$  等之關係符號及代表數量之  $a, b, c, \dots, m, n, \dots, x, y, z$  等，其總稱曰記號。

**【記數法】** Scale of notation. [算][代] 通常以數字  $1, 2, \dots, 8, 9, 0$  表任何之數，於其數之右位進至左位時，以十進，是曰十進法，亦曰通常記數法，而以 10 為其底或根。然記數法除以 10 為底外，亦可以任何數為底，如以 2 為底者曰二進法，以 3 為底者曰三進法，……普通至十二進法，詳見各條。用十二進法時，以  $t, o, T$  三記號表 10, 11, 12 三數，但以何數為底，即以何數為限。如 4235 為以七進法所記之數，則 3 所以表  $3 \times 7, 2$  所以表  $2 \times 7 \times 7, 4$  所以表  $4 \times 7 \times 7 \times 7$ ，因滿七即須進一位也。一般某數  $N$  用  $r$  進法表其數，可記其形為  $\dots d_3 d_2 d_1 d_0$ 。數字

$d_0, d_1, d_2, d_3, \dots$  爲小於  $r$  之正整數或爲零，其  $d_0$  所以表  $d_0$  數位， $d_1$  表  $d_1 \times r, d_2$  表  $d_2 \times r \times r$ ，逐次如此，故  $N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots$ ，故任何正整數皆可用任何數爲記數之底表之。

【例 1】將十進數 5213 以七進法表之。

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 5213} \\ \underline{7 \times 741} \phantom{00} \\ 744 \phantom{00} \dots 5 \\ \underline{7 \times 106} \phantom{00} \\ 106 \phantom{00} \dots 2 \\ \underline{7 \times 15} \phantom{00} \\ 115 \phantom{00} \dots 1 \\ \phantom{00} \phantom{00} \dots 1 \end{array}$$

故  $5213 = 2 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 1 \times 7 + 3$ ，而所要之數爲 21125。

【例 2】變七進法之數 21125 爲十一進法。

所要之數爲 3tot，說  
明。  $21 = 2 \times 7 + 1$   
= fifteen  
=  $1 + e + 4$

$$\begin{array}{r} e \overline{) 21125} \\ \underline{e \times 124} \phantom{00} \\ 161 \phantom{00} \dots 0 \\ \phantom{00} \phantom{00} \dots 3 \dots t \end{array}$$

故以  $e$  除之得商 1，而餘 4。

次  $4 \times 7 + 1 = \text{twenty-nine} = 2 \times e + 7$ 。

故以  $e$  除之得商 2 而餘 7。餘類推。關於記數法之定理：I. 於  $r$  進法所記之數，其數之和以  $r-1$  除之所得之剩餘，與其全數以  $r-1$  除之所得之剩餘同，故  $r$  進法所記之數得以  $r-1$  除盡之，當其數字之和得以  $r-1$  除盡之時。II. 於  $r$  進法所記之數，其奇位數字之和與偶位數字之和之差，如得以  $r+1$  除盡，則全數亦得以  $r+1$  除盡之。

【記數底】Base 或 Radix of the scale.

【算】代 即記數所用之底，或曰根，例如十進法以 10 爲底，故在十進法 356 爲  $3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$ 。一般以  $r$  爲底之記數法，如命其數字爲  $a_0, a_1, a_2, \dots$ ，則其數  $a_0 a_1 a_2 \dots a_n = a_0 r^n + a_1 r^{n-1}$

$$+ a_2 r^{n-2} + \dots + a_n.$$

【記底分數】Radix fraction. 【代】

任何記數法之記底分數，與常用記數法之小數相應，例於  $r$  進法所記之  $0.abc\dots$

即所以表  $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} \dots$ 。凡任何分數，皆可記以任何數爲底之記底分數。

【例 1】將  $\frac{7}{8}$  記以 6 進法之記底分數。

$$\begin{aligned} \text{則 } \frac{7}{8} \times 6 &= \frac{7 \times 3}{4} = 5 + \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} \times 6 &= \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \times 6 &= 3. \text{ 故所要分數} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{3}{6^3} = .513. \end{aligned}$$

【例 2】變 8 進法之 1606.7 爲 5 進法。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 1606} \\ \underline{5 \times 264} \phantom{00} \\ 264 \phantom{00} \dots 2 \\ \underline{5 \times 52} \phantom{00} \\ 14 \phantom{00} \dots 0 \\ \underline{5 \times 2} \phantom{00} \\ 7 \phantom{00} \dots 1 \\ \phantom{00} \phantom{00} \dots 1 \dots 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{7}{8} \times 5 = 4 + \frac{3}{8}, \\ \frac{3}{8} \times 5 = 1 + \frac{7}{8}. \end{array}$$

故所要之數爲 12162.ii.

討

【討論】Discussion. 【代】【幾】方程式

之討論者，即將其方程式中之任意之量，代入以各值，而說明其結果也。作圖形之討論者，即討論其解答之結果，能不能之界限也。

逆

【逆定理】Converse theorem. 【幾】將

原定理之假設及終結互易，則得逆定理。

如有原定理設  $A$  爲  $B$  則  $C$  爲  $D$ ，其逆定理即設  $C$  爲  $D$ ，則  $A$  爲  $B$  也。原定理爲真時，其逆定理未必皆真，真否須俟證明而定。例如三角形之二邊相等時，其對角相等，其逆定理爲三角形之二角相等，其對邊相等，是爲真。然如二角各爲直角則此二角相等，其逆定理爲若二角相等，則此二角各爲直角，此則非一概爲真，因相等二角可各爲任何之角也。又定理含多種假設時，則將其一換爲終結，即爲其定理之逆。例如兩三角形之二邊與其夾角相等，則其底邊亦相等，其逆定理爲兩三角之二邊與底邊相等，則其頂角亦相等。

**【逆函數】** Inverse function. [數] 當  $y$  爲  $x$  之函數即  $y=f(x)$  時，則  $x=f^{-1}(y)$ ，此時  $x$  謂之  $y$  之逆函數，而  $f^{-1}$  卽爲逆函數之記號，此記法與逆三角函數甚相類似，如  $\sin x=y$ ，則  $\sin^{-1}y=x$ ，而  $\sin(\sin^{-1}y)=y$ 。故同理  $f\{f^{-1}(y)\}=y$ ，或  $ff^{-1}(y)=y$ 。

**【逆相似】** Inversely similar. [幾] 同一平面上之二三角形，其各角相等，而各邊不能置爲平行位置時，曰逆相似。故若於平面上取一直線爲軸，將一三角形旋轉之，再與原平面一致，則二三角形之各邊可在平行之位置。

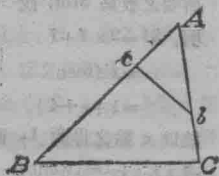
**【逆運算】** Inverse operation. [算][代] 數學中常有二種運算，一曰 Direct operation，加法，乘法，乘方等是。其結果常爲唯一的，且求之較易。一卽前種運算之逆，如加法之逆爲減法，乘法之逆爲除法，

乘方之逆爲開方，由逆運算常生新數，如由減法而生負數，由除法而生分數，由開方而生根數。且求其結果較難，須用試驗法。

**【逆對數】** Antilogarithm. [代] 對應於對數之數，卽眞數也。如  $\log a=b$ ，則  $a$  爲  $b$  之逆對數。

**【逆平行線】** Antiparallels. [幾] 二橫截線截一角之二邊，若其橫截線與二邊所作之二三角行爲逆相似，則其橫截線對於其角而互稱逆平行線。如下圖，

ABC 三角形  
自 CA 邊上  
取  $b$  點，AB  
邊上取  $c$  點，  
令  $\angle Abc$  等  
於  $\angle ABC$ ，



則三角形  $Abc$  與  $ABC$  爲逆相似。而底邊  $bc$  對  $A$  角言，稱爲  $BC$  之逆平行線，四邊形  $BCbc$  之對角和，等於二直角，故  $B, c, b, C$  爲共圓點。

**【逆相似圓】** Circles of anti-similitude. [幾] 以二圓之二相似中心爲中心，以相對應之逆相似矩形之平方根爲半徑所畫之圓，曰逆相似圓。

**【逆圓函數】** Inverse circular function. [三] 卽逆三角函數，見下條。

**【逆三角函數】** Inverse trigonometric function. [三] 如  $\sin A=x$  則  $A=\sin^{-1}x$ 。同樣  $\tan A=x$ ，則  $A=\tan^{-1}x$ 。 $\sin^{-1}x$  及  $\tan^{-1}x$  爲逆三角函數，或以  $\arcsinx$ ， $\operatorname{arctan}x$  表之。故一數之逆正

弦或逆正切者，角之正弦或正切等於此數者也。故角之三角函數為數，數之逆三角函數為角。逆三角函數之公式可由三角函數之公式推得之，茲舉二例，以示一般。

[1] 因  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

令  $\theta = \sin^{-1}x$ ,  $\phi = \sin^{-1}y$ .

則  $x = \sin \theta$ ,  $y = \sin \phi$ .

$\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$ ,  $\sqrt{1-y^2} = \cos \phi$

故  $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$   
 $= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ .

故  $\theta + \phi = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]$

即  $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]$ .

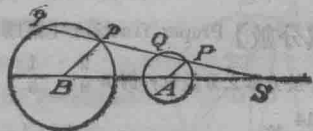
[2] 令  $\theta = \tan^{-1}x$ ,  $\phi = \tan^{-1}y$

則  $x = \tan \theta$ ,  $y = \tan \phi$ .

故  $\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi} = \frac{x+y}{1-xy}$ .

即  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$ .

**[逆相似矩形]** Rectangle of anti-similitude. [幾] 過二圓之相似外心 S,



引一截二圓之直線，則由相似中心至二組非對應點，即 SP 與 Sq 所包之矩形及 SQ 與 SP 所包之矩形，為逆相似矩形，互相等且各為常數。

**[逆定理之法則]** Rule for converse theorem. [幾] 逆定理不常真，但若一定

理中，含三定理。此三者中，僅一假設為真，不能有二終結同時為真，則其逆定理亦必真。如「在同圓或等圓內，等圓心角必對等弧，若兩圓心角不等，則大角必對大弧」之命題，為一定理中具三定理者。

一曰若角 AOB 等於角 A'OB'，則弧 AB 必等於弧 A'B'。二曰若角 AOB 大於角 A'OB'，則弧 AB 必大於弧 A'B'。三曰若角 AOB 小於角 A'OB'，則弧 AB 必小於弧 A'B'。此三假設中必有一為真，因角 AOB 必或等或大或小於角 A'OB' 也。然終無二終結同時為真者，因弧 AB 不能等於且大於弧 A'B'，亦不能等於且小於弧 A'B'，並不能大於且小於弧 A'B' 也。凡若此者，其逆定理亦必真。是為逆定理之法則。

### 配

**[配分法]** Proportional parts. [算] 將一已知數分為若干份，其各份之比，須按已定之比，是謂配分法。配分用比例法，以定比之和為第一項，所分之全量為第三項，以定比之各數各為第二項，所得各第四項，即為各份之數。

[例 1] 將銀 391 圓分給 A, B, C 三人，令其比為 5, 7, 11.  $5+7+11=23$ .

即以 23 為第一項。

$23:5=391:A$ ,  $\therefore A = \frac{391 \times 5}{23} = 85$  圓,

$23:7=391:B$ ,  $\therefore B = \frac{391 \times 7}{23} = 119$  圓.

$23:11=391:C$ ,  $\therefore C = \frac{391 \times 11}{23} = 187$  圓.

若各定比未成連比者，則先化為連比而

求之。

【例 2】將銀 1050 圓分給甲乙丙丁四人，四人所得之比爲甲：乙 = 2:3，乙：丙 = 4:5，丙：丁 = 6:7。則

2:3 甲：乙：丙：丁 = 48:72:  
4:5  
6:7 90:105。然後再照前法  
48:72:90:105 求之。

若所定之比爲分數者，則以分母之最小公倍數乘之，使成整數之比。

若連比各項間有公約數者，可先以公約數除之。

【配方法】Method of completing a square. [代]如  $x^2 + 2ax + a^2$  即  $(x+a)^2$  爲完全平方。若僅有其二項  $x^2$  及  $2ax$ ，欲配成完全平方則宜加  $a$  之平方，即  $x$  係數之半之平方，是謂配方法。例  $x^2 + 6x$  加以  $\left(\frac{6}{2}\right)^2$  爲完全平方，而其加得之式爲  $x^2 + 6x + 9$  即  $(x+3)^2$ 。由是  $x^2 + ax$ ，其  $a$  不拘如何，而於此加以  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$  即成完全平方，即

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

此爲求二次式之因數之一法，茲示一般求  $ax^2 + bx + c$  之因數之法如下。

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

於  $x^2 + \frac{b}{a}x$  加以  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$  即  $\frac{b^2}{4a^2}$  爲完

全平方。  $a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

$$= a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right\}$$

$$= a \left\{ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right\}$$

$$= a \left\{ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left\{ \sqrt{\left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right)} \right\}^2 \right\}.$$

$$= a \left\{ x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right)} \right\}$$

$$\left\{ x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right)} \right\}$$

故任何二次式如  $ax^2 + bx + c$  之形，欲求因數，可以其  $a, b, c$  之值代入上所得之式內而求之，但求得之因數未必皆爲有理整式，爲虛數無理數均可。

【配分定則】Distributive law. [代]一項式乘多項式之積，等於以一項式乘多項式之各項之積之代數和，例如  $a(b+c-d) = ab+ac-ad$ ，是爲乘法之配分定則。一項式除多項式之商，等於一項式除多項式之各項之商之代數和，例如  $(b+c-d) \div a = b \div a + c \div a - d \div a$ ，是爲除法之配分定則。

## 眞

【眞分數】Proper fraction. [算]分子小於分母之分數也，例如  $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$ ，

$\frac{14}{17}$  等。

【眞數正切】Natural tangent. (三) 正切之眞值也，例如  $\tan 45^\circ = 1$ ，此爲對於正切之對數而言。

【眞數正弦】Natural sine. (三) 正弦之眞值也，例如  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，此爲對於

正弦之對數而言。

【**眞數正割**】 Natural secant. [三] 正割之眞值也，例如  $\sec 60^\circ = 2$ ，此爲對於正割之對數而言。

【**眞數函數**】 Natural function. [三] 正弦餘弦等之眞數，爲對於其對數之區別之稱。

【**眞數餘切**】 Natural cotangent. [三] 餘切之眞值也，例如  $\cot 45^\circ = 1$ ，此爲對於餘切之對數而言。

【**眞數餘弦**】 Natural cosine. [三] 餘弦之眞值也，例如  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，此爲對於餘弦之對數而言。

【**眞數餘割**】 Natural cosecant. [三] 餘割之眞值也，例如  $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$ ，此爲對於餘割之對數而言。

郤

【**郤柏爾定理**】 Chapple's theorem.

[幾] 三角形之外接圓及內切圓之半徑爲

$R, r$ ，其中心爲  $O$ ，

1，則  $IO^2 = R^2 -$

$2R \cdot r$ 。

$\angle BP'P = \angle BAP$

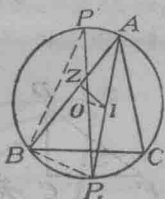
$\therefore \triangle BP'P \sim$

$\triangle AZI$ ，故  $PP' : PB$

$= AI : IZ$ 。

即  $2Rr = PB \cdot AI = PI \cdot AI = R^2 - OI^2$ 。

$\therefore IO^2 = R^2 - 2Rr$ 。



除

【**除**】 To divide. [算] 即求其某數中含他數之幾倍，或等分某數爲他數也。例如  $15 \div 3$  即 15 以 3 除，其值爲 5，即 15 含 3 之 5 倍，或等分 15 爲三份之意也。

【**除法**】 Division. [算] [代] 除法者即求某數中含他數之幾倍之法，或等分某數爲他數之法也。故除法爲累減之簡法，爲乘法之逆運算，即已知二數求以何數乘第一數而生第二數之法也。例如  $a \div b = x$ ， $x$  爲未知數，即云當以何數乘  $b$  方爲  $a$  也。

【**除號**】 Sign of division. [算] [代] 即表示某數以他數除之之符號 ( $\div$ ) 也。此符號記於被除數之右，其右則記除數，例如 27 以 3 除，則記爲  $27 \div 3$ 。又有用橫線或斜線以代除號 ( $\div$ ) 者，此時被除數記於橫線之上或斜線之左，除數記於其下或其右，如前例  $27 \div 3$ ，則記爲  $\frac{27}{3}$  或  $27/3$ 。

【**除數**】 Divisor. [算] [代] 除法之法數，即乘所得之商而等於被除數之數也。

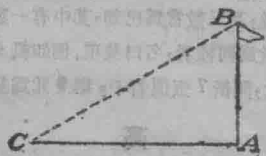
【**除比之理**】 Dividendo. [代] 與分比之理同，見該條。

雙

【**雙項**】 Single term. [算] 單比例只有四數，其三數常爲已知，其中有一數與未知數爲同種者，名曰雙項。例如紙 4 張價 9 元，問紙 7 張價若干，則 9 元爲雙項。

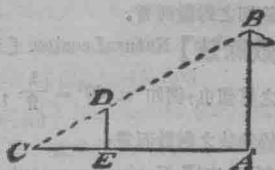
高

【高】Height 或 Altitude. [幾] [三] 高者物體之第三廣度也。三角形之高為自三角形之頂點至其底邊或其延長線之垂直距離。三角形可以任何邊為底邊，而其對角頂即三角形之頂點，故三角形之高有三，普通於圖上取水平之一邊為底邊。又於直角三角形，則恒以夾直角之一邊為底，以他一邊為高。梯形之高為相平行二邊間之垂直距離。平行四邊形之高為任意平行二邊間之垂直距離。圓錐及角錐之高為自頂點與底面間之垂直距離。圓柱及角柱或圓臺及角臺之高，為兩底間之垂直距離。平行六面體可任取二平行平面間之距離為高。球帶及球盤之高為其二底圓平面之垂直距離，若只有一底圓時，則其高為切於球帶或球盤之表面而平行於底圓之平面與底圓間之距離。水準測量由一點至他點之高，為由各點至地球中心之距離之差。陸地測量物體之高，為自其物體之最高點至最下點（或觀測者之位置）引二水平面間之距離。而高之測量分能就近測得者與不能就近測得者二種。能就近測得者，即物體之高，先可自觀測者之位置至物體之距離而測得也。不能就近測得者，即其間有障碍物，故不能直接自觀測者之位置至物體之底之距離而測得物體之高也。



I. 能就近測得物體之高者，茲述二三重要方法如下。(1) 求決定物體 AB 之高，在通過 A 之水平線上取適當之點 C，由 C 點用器械測得角 BCA 及距離 CA 則直角三角形 ABC，得  $AB = \tan \angle BCA \cdot CA$ 。故 AB 之值，可直接由計算而得。

(2) 無測角之器械時，則如前擇 C 點，測得距離 AC，然後更測得距離 CE，於 E 點垂直立標竿，由 C 點望物體之頂，視線



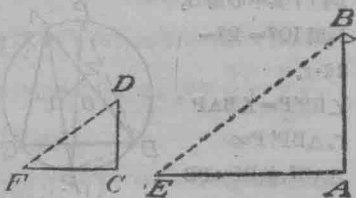
截標竿於 D 點，測定 DE，則由二相似三角形，得  $CE:DE = CA:BA$ ，故

$$BA = \frac{CE \cdot CA}{DE}$$

物體之高即可求得，

用此方法則 AC 不水平亦無誤差。

(3) 由物體之影而決定其高。AB 為所求



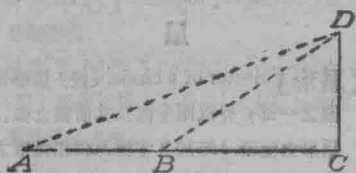
物體之高，垂直立標竿 OD 於地面上，其長為已知，於某瞬間得 B 點之影落於 E 點，D 點之影落於 F 點，測得 FC 及 AE 之距離，則由相似三角形 ABE 及 CDF，



$$FC:CD=EA:AB, \therefore AB = \frac{CD \times EA}{FC}$$

用此方法雖 AF 不在水平面上亦無誤差。

II. 不能就近測得物體之高者。(1) 求水平面 AC 上 D 點之高。於過 D 點之垂直面內取 A 點及 B 點，測定 AB 之距離。

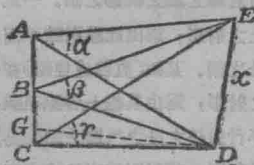


由 A 點及 B 點用器械測得對於 D 點之仰角 DAC 及 DBC，則  $\sin DBC = \sin DBA$ 。  
 $\sin ADB : \sin DBC = AB : AD$ 。

故  $AD = \frac{AB \times \sin DBC}{\sin ADB}$ 。然  $\angle ADB$  等於  $\angle DBC - \angle DAB$ 。

$\therefore AD = \frac{AB \times \sin DBC}{\sin(DBC - DAB)}$ 。由此公式

求得 AD。再由直角三角形 ADC 得  $DC = AD \cdot \sin DAC$ 。(2) 於同一水平線上取三點 A, B, C，又測定距離  $AB = a$ ， $BC = b$ ，及仰角  $\angle DAE = \alpha$ ， $\angle DBE = \beta$ ，



$\angle DCE = \gamma$ 。過 AC 之水平面上所要之高 DE 以 x 表之，則如圖由諸直角三角形知  $AD = x \cot \alpha$ ， $BD = x \cot \beta$ ， $CD = x$

$\cot \gamma$ 。由 D 至 AC 引垂直線 DG，則  $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2AB \cdot BG$ ， $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BC \cdot BG$ ，代入上所測得之值，得  $x^2 \cot^2 \alpha = a^2 + x^2 \cot^2 \beta + 2a \cdot BG$ ，  
 $x^2 \cot^2 \gamma = b^2 + x^2 \cot^2 \beta - 2b \cdot BG$ 。

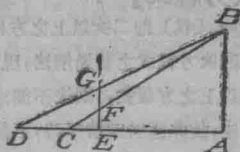
將此二方程式消去 BG。得

$$x = \sqrt{\frac{a^2(b+c) + bc \cot^2 \alpha + ac \cot^2 \gamma - (a+b) \cot^2 \beta}{\cot^2 \alpha + \cot^2 \gamma - \cot^2 \beta}}$$

若  $a = b$ 。則

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{2} \cot^2 \alpha + \frac{1}{2} \cot^2 \gamma - \cot^2 \beta}}$$

若以物之高乘各測點仰角之餘切，則得各測點至物之水面距離。(3) 若無測角器械，則其高可如下法求之。  $AB = x$  表



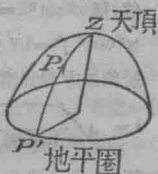
所求之高。於過 B 點之垂直面上取 O 及 D 兩點。測定  $OD = c$ ，於 C 及 A 之間之 E 點立標竿，測得距離  $CE = f$ 。又由 C 點視 B 點，於標竿上記 F 點，於 D 點視 B 點，於標竿上記 G 點，測定  $AC = y$ ， $EF = a$ ， $FG = b$ 。則由相似三角形 CEF 及 CAB， $\frac{a}{f} = \frac{x}{y}$ .....(1)。又由相

似三角形 DBA 及 DEG， $\frac{a+b}{c+f} = \frac{x}{y+c}$ .....(2)。由(1)(2)消去 y，即求得

$$x = \frac{a^2 c + b a c}{a(c+f) - f(a+b)}$$

【高度】Angular altitude. 〔三〕天體與地平圈之距離曰高度，設通過天體  $P$  作垂直圈  $ZPP'$ ，與地平圈交於  $P'$  點，則  $PP'$  爲  $P$  之高度。

高度自地平圈向天體量，其向天頂者作爲正，向天底者作爲負，故若天體在地平面上，則高度之值在  $0^\circ$  與  $90^\circ$  之間，在下則其值在  $0^\circ$  與  $-90^\circ$  之間。



【高次式】Expression of higher degree. 〔代〕代數式某文字所含之乘幂在三次以上者，如  $ax^4+bx^3+cx^2+x$  等式。

【高次方程式】Equation of higher degree. 〔代〕即二次以上之方程式，三次及四次方程式之普通解法，現已求得，五次以上之方程式，則決不能求其普通之解法，故非遇特別情形時，不能解之。

【高等代數學】Higher Algebra. 〔數〕爲對初等代數學而言，見該條。

【高等幾何學】Higher Geometry. 〔數〕論較複雜之線如圓錐曲線等之幾何學。其實初等高等，乃相對而言，並無截然之界限可分。

## 哩

【哩】Mile. 〔算〕英美兩國量長距離之單位，一哩等於 1760 碼，即 5280 英尺，合我國 5029.1094 尺。

## 海

【海里】Nautical mile. 〔算〕海里者航海里程之單位，基於地球之周圍。海里之定法，各國少異，或以地球赤道周圍一分之弧之長爲一海里，或地球子午線一分之長爲一海里。海里亦稱與地里，又簡稱爲〔哩〕。

## 扇

【扇形】Sector of a circle. 〔幾〕扇形爲圓之一部，界以兩半徑及其所截之弧。扇形之面積  $A$  等於其半徑及弧相乘積之半，若中心角爲  $N^\circ$ ，則已知扇形之弧之長  $S$  可以求得，因  $S$  等於  $\pi$  與半徑之積乘扇形之角之度數  $N^\circ$  與  $180^\circ$  之比，即  $S = \pi r \frac{N^\circ}{180^\circ}$  及  $A = \pi r^2 \frac{N^\circ}{360^\circ}$ 。

【扇形角】Angle of sector. 〔幾〕即扇形之兩半徑所夾之角。

## 射

【射影】Projection. 〔幾〕一點在一直線上之射影，爲由此點所引該直線之斜線（即射線）之趾之謂。一直線在他直線上之射影，爲由其直線之各點至直線所引平行射線之趾之軌跡之謂。一點在一平面上之射影，爲由此點引該平面之射線之趾之謂。某線（直線或曲線）在一平面上之射影，爲由其線上各點至該平面所引平行射線之趾之軌跡之謂。上述者爲斜射影。若射影爲直線或平面之垂線，則謂之正射影，各點聯結於一定點  $S$  之射影，謂之中心射影。而定點  $S$  謂之射影中心。

【射線】Ray. [幾]由一點所發射之直線謂之射線，例如束線之射線，射影之射影，見各條。

【射影面】Projecting plane. [幾]射影所在之平面謂之射影面。

【射影中心】Centre of projection. [幾]見射影條。

【射影幾何學】Projective geometry. [幾]為幾何學之一分科，用射影以研究幾何圖形者也。

## 十一畫

### 假

【假定】Assumption. [數]即假定其如此者，有時與假設同，見下條。

【假設】Hypothesis. [幾]即設定其如是者，如於「若甲為乙則丙為丁」之命題，「若甲為乙」即為假設。例三角形之兩邊相等則其對角相等之命題，引線之文句，即為假設。

【假數】Mantissa. [代]某數之對數之小數部分曰假數，見對數條。

【假分數】Improper fraction. [算]假分數者分數之分子不小於其分母者也，例如  $\frac{8}{5}$ ， $\frac{4}{3}$ ， $\frac{7}{7}$  等。

【假設法】Rule of position. [算]算術上解問題之一種方法。有時此法稱為偽設法 [False suppositions]，即先設虛偽之數而後發見其真答者也。又稱試差法 [Rule of trial and errors]，即試設虛偽之數，比較其差，以發見真答數也。用此法於一次方程式之問題，常能得問題之真解答。若二次以上之方程式，則不適得近似之結果，而屢次適用之，則其近似之度愈精密。此法適用於求高次方程式之根，又解指數方程式及一級超越方程式時，皆須用之。又開數之高次根時，亦可適用。假設法分單複二種。單假設法者，問題之答由假設之數與之成比

例以解之也。此法如次所述。假定任意之數，施以問題上所述說之各種運算，其所得結果與其真結果之比，等於假定之數與所要之數之比。例如何數與其二分之一，三分之一，四分之一相加則為125。

〔解〕先假定本數為72，則  $72 + 36 + 24 + 18 = 150$ ，依法得  $150:125 = 72:x$ ，

$\therefore x = 60$ ，即為所要之數。又複假設法者，問題之答，不僅由假設之數與之成比例以解之也。此法如次所述。任意取二數，各從問題之要件，施以運算，則二結果之差與二假定數之差之比，等於真結果與誘求結果之一之差與假定數對應於其結果之改正數之比，如誘求之結果小於問題之結果，則將假定數加改正數。又如大於問題之結果，則將假定數減改正數。例如何數乘6，其積加18之和，以9除之，得商20。

第一假設

第二假設

$$\begin{array}{r} 18 \\ 6 \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline 9 \overline{)126} \\ 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 6 \\ \hline 180 \\ 18 \\ \hline 9 \overline{)198} \\ 22 \end{array}$$

依法得  $22 - 14:30 - 18 = 20 - 14:x$ ，

$\therefore x = 9$ 。故問題之答為  $18 + 9 = 27$ 。

又  $22 - 14:30 - 18 = 22 - 20:x$ ，

$\therefore x = 3$ 。故所求之數為  $30 - 3 = 27$ 。

## 偏

【偏角】Angle of declination.〔三〕磁針之南北線與地球之南北所成之角也。舊磁針之南北，與地球之南北，不盡相

合。其所偏之角，又隨地而異，如在美國，最大者為偏東十度與偏西十度，而在法國，最大者為偏西十七度。

【偏菱形】Rhomboid.〔幾〕即長菱形見該條。

## 側

【側面】Lateral face.〔幾〕立體之側面者，除底以外之傍面也。例如角錐之側面，則為其頂點與兩稜所成諸三角形之面。又側面云者，有指每個側面而言，或指側面全體而言。

【側稜】Lateral edge.〔幾〕兩側面之交線曰側稜，故角柱或角錐之側稜云者，除底邊之稜而言也。亦曰斜稜。

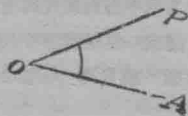
【側面積】Lateral area.〔幾〕立體之側面積云者，即其各側面之面積之和也。如圓柱之側面積為除兩底以外其他部分之面積，角錐之側面積為除去底面其他三角形之面積之全體。然有時亦指每個側面之面積而言。又亦曰傍面積。

## 偶

【偶數】Even number.〔算〕凡2能除盡之數曰偶數。

## 動

【動徑】Radius vector.〔幾〕〔三〕例如P點沿某線而運動，則此點與一定點(原點)之距離曰動徑。於三角法中，O點沿圓周而運動，



直線OP由OA位置起，繞O點以逆鐘向而迴轉，生角POA，則OP即曰動徑。

【動搖級數】Oscillating series. [代] 即中性級數，見該條。

參

【參考軸】Axes of reference. [幾] 即坐標軸，見該條。

毫

【毫】[算] 小數名，即0.001。

商

【商】Quotient. [算] [代] 某數以他數除之，其結果曰商。例如  $54 \div 6 = 9$ ，則9為6除54之商。又  $(a^3 + x^3) \div (a + x) = a^2 - ax + x^2$ ， $a^2 - ax + x^2$  為  $a + x$  除  $a^3 + x^3$  之商。

問

【問題】Problem. [數] 問題者待解之題也。問題之解者，滿足問題之已知條件而求其值之運算也。問題有代數學的與幾何學的。解代數學的問題，即以方程式為問題之要件。若欲問題為定問題，則所立方程式之數須與未知數之數相等。既求得問題之方程式，即可由代數學通常之運算以解之，而須由問題之所要部分，說明求得之根之軌為適合。幾何學之問題有作圖題，軌跡題及計算的問題。作圖題可直接由幾何學的綜合法與分析法解得之。解軌跡問題須證明一定理及

其逆定理。解計算的問題，結合已知未知之部分，作代數方程式以解之。

基

【基數】1. Simple number. [算] 一，二，三，四，五，六，七，八，九之九數稱為基數，即基本之數也。2. Cardinal number. [算] 一，二，三，四，……，十，十一，十二，十三，……等曰基數，即通常之數。乃對於第一，第二，第三，……之序數而言。

【基線】Base line. [三] 基線者三角測量之基礎，即可精密測量之線也。三角測量之精確視基線測量之精確與否而定，故測量者甚注意也。

【基線】Element. [幾] 見柱，錐條。

【基本定則】Fundamental law. [算] [代] 運算之根本定則也，有結合定則，交換定則，分配定則，指數定則四者。

(1) 結合定則如次所述。對於加法

$a + b + c = a + (b + c)$ ,  $a + b + c + d = a + b + (c + d) = a + (b + c + d) = a + (b + c) + d$ ，即三以上之數之和，可任意取若干項，集合之為若干羣而加之，必無差異。此理對於減法亦真確。又對於乘法， $abcd = a(bcd) = a(bc)d = ab(cd)$ ，即三以上之數之積，可任取若干因子，集合為若干羣，而後相乘，必無差異。此理對於除法亦真確。

(2) 交換定則，對於加法， $a + b = b + a$ ,  $a + b + c + d = b + a + d + c = d + c + b + a = \dots$ ，即二以上之數之和，不論其相加之次序

如何，其結果恒同。此理對於代數的減法亦真確，但算術上之減法則不得如此。對於乘法， $ab=ba$ ， $abc=acb=ca=bc=...$ ，即二以上之數之積，不論其所取因數之次序如何，其結果恒同。此理對於除法亦真確。(3) 分配定則對於乘法

$(b+c-d)a=ab+ac-ad$ ，即一項式乘多項式之積，為一項式乘多項式各項之積之代數和。此理對於除法亦真確。

(4) 指數定則 不論  $n$  為正數，負數，整數，分數， $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

**【基本單位】** Standard unit, [算] 見單位條。

### 帶

**【帶分數】** Mixed number [算] [代]

即整數與分數合成之數，例如  $5\frac{2}{3}$

即  $5 + \frac{2}{3}$  之意。又如  $a + \frac{c}{b}$  亦為帶分數。帶分數又稱混數。

### 常

**【常數】** Constant. [數] 常數者對變數

而言，即其值一定不變者也。例如  $a$  與  $b$

為互變數，則令  $a:b$  即  $\frac{a}{b} = m$ ，即

$a=mb$ ， $m$  為常數。又如三角形之底邊為圓之定弦，其頂點在圓周上移動，則三角形之面積隨時消長，謂之變數，其頂角一定不變，謂之常數。又如正方形之對角線與其每邊之比為常數，即  $\sqrt{2}$  也。

**【常衡】** Avoirdupois weight. [算] 此為

英美秤通常物品之單位。在英國

16 Drams=1 Ounce.

16. Ounce=1 Pound.

14 Pounds=1 Stone.

23 Pounds=1 Quarter.

4 Quarters=1 Hundredweight.

20 Hundredweights=1 Ton.

但美國通常以 100 Pounds 為 1 Hundred-weight, 20 Hundredweights 為

1 Ton. 故 1 Ton=2000 Pounds. 秤通常之物即用此噸，而於稅關及鐵石炭之賣買則用以 2240 Pounds 為 1 Ton 之重噸。

**【常用對數】** Common logarithm. [代]

即以 10 為底之對數，為 Briggs 所發見。通常略記為  $\log$ ，不必以其底數 10 表出之。

**【常用記數法】** Common scale of

notation. [算] 即十進記數法，與亞刺比亞記數法同，見該條。

### 排

**【排列】** Permutation 或 Arrangement.

[代] 由若干之物，每次悉取或取其中之若干，作種種次序排列之，是稱其物之排列。故此排列所取之物雖同於彼排列，但次序有異者，不得謂之同排列。(1) 例如將 cambridge 一語之字母悉取之，作種種之排列，問其排列之數有幾。茲有九字母。將九字母之中，任意取其一列為第一，則得九種列法。將其餘八字母中，任意取其一列為第二，則第二之列法有八

種。逐次如斯，最後之一字母，只有一種列法。故所求排列之數為  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ，即  $9$  或  $9!$  也。一般  $n$  個不同之物，悉取排列之，其列法有

$n(n-1)(n-2)\dots\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ，即  $n$  或  $n!$

種也。(2)由  $n$  個物中，每次取  $r$  個其

排列之數為  $n(n-1)(n-2)\dots r$  個因數，

即  $n(n-1)(n-2)\dots\dots \{n(r-1)\}$ ，

即  $n(n-1)(n-2)\dots\dots (n-r+1)$ 。

(3)將 eye 一語之字母排列之，而求其

排列之數有幾。今以  $e_1, e_2$  區別二 e 字，

則得其排列數如次，即  $e_1ye_2, e_2ye_1,$

$e_1e_2y, e_2e_1y, ye_1e_2, ye_2e_1$ 。是等排

列將 e 之添數取去，則  $e_1e_2$  與  $e_2e_1$  無

區別，而  $e_1$  與  $e_2$  相換之排列同，故 eye

之排列只有三法，即  $2!$  除  $3!$  也。又同理

將 a, a, a, x, x 每次悉取之排列數為

$\frac{5!}{3!2!}$  即 10 也。一般  $n$  個物中有  $p$  個

相同之物，他  $q$  個亦相同，他  $r$  個亦相

同，……，則將  $n$  個物悉取排列之，其排

列之數為  $\frac{n!}{p!q!r!\dots}$ 。(4)於  $n$  個不同

之物，每次悉取其重複排列之數為  $n^n$ 。

又於  $n$  個不同之物中，每次取  $r$  個，其

重複排列之數為  $n^r$ 。次討論(2)項之公

式。以 a, b, c, …… 字母表  $n$  個不同之物，從

$n$  個物中每次取  $r$  個其排列之數以  ${}_nP_r$

表之。則  ${}_nP_1 = n$ ，其理甚明。於  ${}_nP_r$  中

取一特別字母列為第一，則其排列之數

等於  ${}_{n-1}P_{r-1}$ ，而此  $n$  個字母之任一字

母皆可列為第一，故  ${}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$ 。

而  $r$  不大於  $n$ ，且  $n, r$  皆為正整數，則此關係，無論  $n, r$  之值如何，皆能合理，故

$${}_{n-1}P_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}P_{r-2}$$

$${}_{n-2}P_{r-3} = (n-2) \times {}_{n-3}P_{r-3}$$

$$\dots\dots = \dots\dots$$

$${}_{n-r+2}P_{r-r+2} = (n-r+2) \times$$

$${}_{n-r+1}P_{n-r+1}$$

又  ${}_{n-r+1}P_{r-r+1} = {}_{n-r+1}P_1 = n-r+1$ 。

將各式之兩邊連乘之，而約其公因數，得

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

若  $r=n$ ，則  ${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\dots\dots$

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

### 推

**【推論】** Corollary. [幾][代] 推論者其理可由定理直接推定也，與系同，詳該條。

### 斜

**【斜角】** Oblique angle. [幾] 角之不為直角者，即銳角或鈍角也。

**【斜高】** Slant height. [幾] 直圓錐之斜高為自其頂點至底面之周之任意直線。截圓台之斜高為其兩底間之基線之長。正角錐之斜高為自頂點至底面之一邊之垂線。截角錐之斜高為其側面之梯形之高。

**【斜稜】** Lateral edge. [幾] 即側稜，見該條。

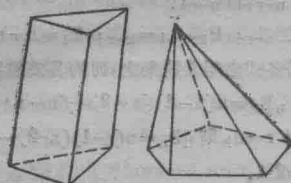
**【斜線】** Oblique line. [幾] (1) 對平面言，一直線之斜線者，即除其垂線外之其他諸直線即與其線成斜角之直線也。

(2) 對立體言，除與其平面垂直之直線

外，其餘與平面斜交之諸直線，均稱此平面之斜線。

【斜邊】Hypotenuse. [幾] 直角三角形直角之對邊也，亦稱曰弦。

【斜角柱】Oblique Prism. [幾] 角柱之諸側稜傾斜於其兩底者也，如下圖。



斜角柱 斜角錐

【斜角臺】Truncated pyramid. [幾] 同截角錐，見該條。

【斜角錐】Oblique pyramid. [幾] 角錐諸側稜之不等長者，如上圖。

【斜圓柱】Oblique cylinder. [幾] 圓柱之基線與兩底面成斜交，其兩底面為橢圓者。



【斜圓台】Truncated cone. [幾] 同截圓錐，見該條。

【斜圓錐】Oblique cone. [幾] 圓錐諸基線之不等長，其底面為橢圓者。



【斜截面】Oblique section. [幾] 圓柱或圓錐以不垂直於其軸之平面截之，或角柱以不垂直於其側稜之平面截之，其

所生之面，均曰斜截面。

【斜三角形】Scalene triangle 或 Oblique triangle. [幾] 見三角形條。

【斜角三角形】Oblique angled triangle. [幾] 三角形之無一角為直角者。

## 旋

【旋轉軸】Axis of revolution. [幾] 一直線，或曲線，或平面以他一直線為軸而旋轉，則此他直線稱為旋轉軸。故旋轉之直線或曲線或平面上之各點各畫圓周，其中心在旋轉軸上，其平面與旋轉軸垂直。例如球可以任何直徑為旋轉軸。

【旋轉體】Solid of revolution. [幾] 一面以一直線為軸而旋轉所生之立體也。例如一半圓以直徑為軸而旋轉則生球，故球為一旋轉體。又如以直角三角形直角傍之一邊為軸而旋轉，則生圓錐，故圓錐亦為一旋轉體。

【旋轉圓柱體】Cylinder of revolution. [幾] 直圓柱之別名，因可取一矩形，以其一邊為軸繞之旋轉而生此體也。

【旋轉圓錐體】Cone of revolution. [幾] 直圓錐之別名，因可取一直角三角形，以其一邊為軸繞之旋轉而生此體也。

## 既

【既約項】Lowest term. [算][代] 分數之分子與分母所有公約數皆約盡而再無公約數者。例如  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{a}{bx}$  皆為既約項，反之  $\frac{6}{14}$ ,  $\frac{ab^2}{a^2b}$  則非既約項，因



將其分子與分母之公約數約盡之後得

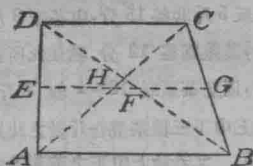
$$\frac{b}{a^2}, \frac{b}{a^2}, \text{ 才爲既約項也。}$$

### 條

【條件】Condition. [數] 如解代數方程式或證幾何問題時，必有已知之規約及必須遵守之限制，此規約與限制，即爲其所含之條件。

### 梯

【梯形】Trapezoid. [幾] 四邊形之有兩邊相平行者。兩平行邊爲其底，其他兩邊



爲其腰，聯兩腰之中點之綫稱爲梯形之中綫。梯形之中綫與兩底平行，且等其兩底之半和。聯結梯形兩對角綫之中點之綫，等於其兩底之差之半。梯形之兩腰相等者，稱爲等腰梯形。梯形之高，爲兩底間之垂直距離。梯形之面積，等於其兩底之半和乘高之積，即等於其中綫乘高之積。

### 混

【混數】Mixed number. [算] [代] 即帶分數，見該條。

【混合法】Alligation 或 Mixture. [算] 混合法者，以價值不同分量不等之同種

類各物，混合而比較之之法也。其法分爲二種。(1) 已知各物之價值及分量，而求其混合後之平均價，此時謂之混和法 (Alligation, medial)。(2) 已知各物之價，且豫定其平均價，而求混合時所取各物之分量，此時謂之和較法 (Alligation, alternate)。混和法與求平均數之法同。例如每升 72 錢之酒 6 斗，78 錢之酒 5 斗，96 錢之酒 7 斗，三種混合後，求每升之平均價。

|                |          |           |
|----------------|----------|-----------|
| 1 升 72 錢之酒     | 60 升之價   | = 4320 錢  |
| ..... 78 ..... | 50 ..... | = 3900    |
| ..... 96 ..... | 70 ..... | = 6720    |
| 混合酒            | 180 升    | = 14940 錢 |

故混合酒 1 升之價 =  $\frac{14940}{180}$  錢 = 83 錢。

因之得次之法則。以同單位表各物之數，以各物之數乘各物之價之積之和，以各物之數之和除之，則得混合物一單位之價。次例亦可以此法推得之。即二十二開之金 6 兩與十七開之金 4 兩混合之，問金之成分如何。

22 開之金 6 兩 ..... 132 開 故  $200 \div 10$ ，  
17 開之金 4 兩 ..... 68 開 即得二十開  
10 兩 ..... 200 開 之金。

和較法不外代數學之不定問題。例如甲乙二物之價爲 a, b; 命其單位之數爲 x, y; 而混合物爲 m 單位，其每單位之價命爲 c, 則  $ax + by = mc$  ..... (1),  
 $x + y = m$  ..... (2), 由 (1), (2) 得  
 $(a-c)x + (b-c)y = 0$ , 即  $x:y = b-c : c-a$ ,  
即甲乙分量之比爲  $b-c : c-a$ . 故若 n 爲

未知數，則雖知  $x, y$  之比，而此問題仍為不定。此理可以次例明之。例，一斤 23 錢之茶與一斤 35 錢之茶混合之，賣一斤 32 錢，問每種應各混入若干斤。

|     | 一斤之價 | 損 益   | 混合量 |
|-----|------|-------|-----|
| 低價茶 | 23 錢 | 益 4 錢 | 3   |
| 混合茶 | 32 錢 |       |     |
| 高價茶 | 35 錢 | 損 3 錢 | 4   |

(說明) 1斤 23 錢之茶賣 1 斤 32 錢，則其所益為  $32 - 23 = 9$  錢，1 斤 35 錢之茶賣 1 斤 32 錢，則其所損為  $35 - 32 = 3$  錢。故若低價茶賣 3 斤，則所益  $= 4 \times 3 = 12$  錢，高價茶賣 4 斤，則所損  $= 3 \times 4 = 12$  錢。即依 3 與 4 之比而混合之，則益損抵消，適得每斤賣 32 錢之茶。

上式可簡單排列之如次。

$$32 \left( \begin{array}{l} 23, 3 \\ 35, 4 \end{array} \right) \quad \text{答混入量爲 3 斤與 4 斤。}$$

若三物相混合，則其不定方程式為

$$ax + by + cz = md \dots \dots \dots (1),$$

$$x + y + z = m \dots \dots \dots (2).$$

$$\text{即 } (a-d)x + (b-d)y + (c-d)z = 0 \dots \dots (3).$$

故是等方程式解答之數為無限，然混合法之解答，限於正整數，故解答之數概為有限。於(3)將三未知數任意定其二，則其他一即可求得。一般  $n$  種物品之方程式，含  $n$  個未知數，其中  $n-1$  個得任意定之。例，下茶每斤 2 角 7 分，中茶每斤 3 角 1 分，上茶每斤 3 角 4 分，混合之使成每斤 3 角，問每種各混入幾斤。本例

為三以上之物相混合，故其分量以分配為不定。故宜先除去一種類之物，將其他二種混合定後，然後配置前除去之物對於他二物之混合量。今命本例下茶與中茶混合斤數之比為 5:3，則三種茶混合斤數之比為 5:3: $x$ ，故

|     | 一斤之價 | 損 益   | 混合量 |
|-----|------|-------|-----|
| 下 茶 | 27 分 | 益 3 分 | 5   |
| 混合茶 | 30 分 |       |     |
| 中 茶 | 31 分 | 損 1 分 | 3   |
| 上 茶 | 34 分 | 損 4 分 | $x$ |

下茶取 5 斤共益 15 分，中茶取 3 斤共損 3 分，其差為益 12 分。欲使此所益之數打消，則上茶須取  $12 \div 4$  即 3 斤也。

因之上中下三種茶混合斤數之比為 3:3:5。又若命上中下之茶其混合斤數之比為 2:1: $x$ ，則上茶取 2 斤損 8 分，中茶取 1 斤損 1 分，合計損 9 分，而下茶取 1 斤能益 3 分，故欲使所損之 9 分打消，則下茶宜取  $9 \div 3$  即 3 斤也。

故所要上中下之茶混合斤數之比為 2:1:3。本例之算式，通常列之如此。

$$30 \left( \begin{array}{l} 27 \\ 31 \\ 34 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} 5 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right) \quad \text{與上第一之答相合。此解下中之比爲 1:3，下上之比爲 4:3，如若干倍其一亦爲適合，若干倍雙方或約其公約數而後相加亦可。例如 2 倍下上之比 4:3 則爲 8:6，與下中之比 1:3 相加，則得上下中之比爲 6:3:9，即 2:1:3 也。}$$

與前之第二答數相合。更述一例如次。  
取十七開，十八開，二十二開及純金四者，問如何混合而得二十一開之金。今命十七開，十八開，二十二開及純金之混合量之比為 3:1:3:x (注意，純金為二十四開)。

|       | 過不足  | 混合量 |
|-------|------|-----|
| 17    | 不足 4 | 3   |
| 18    | 不足 3 | 1   |
| 平均 21 |      |     |
| 22    | 過 1  | 3   |
| 24    | 過 3  | x   |

故  $x = (4 \times 3 + 3 \times 1 - 1 \times 3) \div 3 = 4$ 。

本例可得下列種種解法。

$$(1) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$(2) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$(3) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$(4) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$(5) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$(6) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$(7) \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right.$$

上之種種解答，皆為正確，而以(1)法為最簡單。凡聯以括弧之二物，必取一為過於混合物，一為不足者。又同行中有公約數時，則可約簡之，例如上(3)法，為

$$21 \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ 22 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right.$$

若混合物之量，有豫先限定者，則宜就求得之比，用同乘同除之法以求其適合。例如本題若欲得二十一開之金三十兩，則就(4)法四種混合量之比為 1:4:7:3，而  $1+4+7+3=15$ ， $30 \div 15=2$ ，故十七開之金須  $1 \times 2$  兩，十八開之金須  $4 \times 2$  兩，二十二開之金須  $7 \times 2$  兩，純金須  $3 \times 2$  兩，即四種金各取 2, 8, 14, 6 兩可也。

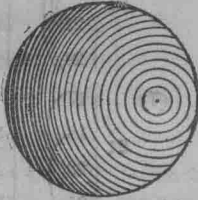
添

**【添數】** Suffix. [數] 添於文字之右側下方以示區別之數字也，例如  $a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 2, \dots, n$  皆為  $a$  之添數。

## 球

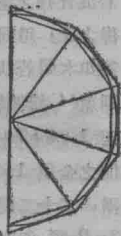
**【球】** Sphere.

[幾] 球者乃稱為球面之曲面所包圍之立體，其面上各點與所稱為中心之一點等距離者也。



或曰球者乃一半圓以其直徑為軸而旋轉所生之立體也。由球之中心至球面上任意點之直線，稱為球之半徑。過球心以球面為界之直線，稱為球之直徑。以任意平面截球，其接口為圓，而以與中心等距離之平面截之，則其接口相等。過中心之平面對於球之接口，稱為大圓。諸大圓皆相等，其半徑等於球之半徑。若以若干邊數之半正多邊形

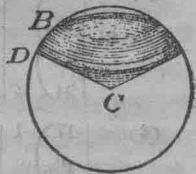
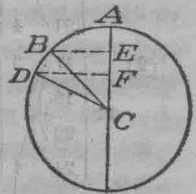
內切於半圓，又以相似半正多邊形外切於同圓，此三圖形以半圓之直徑為軸而旋轉之，則二半正多邊形所生之面相互之差，又此二面與半圓所生之球面之差，可使小於任何之面積。而二半正多邊形所生之體積相互之差，又此二體積與球之體積之差，亦可使小於



任何之體積。故球之面積及體積，可由半正多邊形旋轉其徑所生面積及體積之極限考得之。球之面積等於其直徑乘大圓周之積，或等於四大圓之面積。若以  $r$  表球之半徑， $d$  表其直徑，則面積  $S=4\pi r^2=\pi d^2$ ，故兩球面積之比等於其半徑或直徑之平方比。若直圓柱外切於球，則直圓柱凸面之面積，等於球之面積。球之體積等於其面積與半徑之積之三分之一，又等於外切圓柱之體積之三分之二，即體積  $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$ 。故任意二球體積之比等於其半徑或直徑之立方比。

**【球心】** Centre of sphere. [幾] 球之中心，與球面上各點等距離之點也。

**【球分】** Spherical sector. [幾] 球分為球之一部分，由圓之扇形以過其中心之任直徑為軸，旋轉而生之立體。例如扇形  $BDC$ ，以過其中心  $C$  之任直徑  $AC$  為軸，旋轉之即生球分。故扇形如至極限為半圓時，則球分即為全球。又扇形如至極限



$BC, CD$  相合時，則球分為圓錐面。球分之底為扇形之弧所生之球帶。球分之體

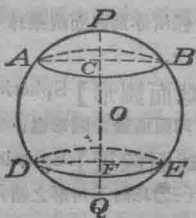
積，等於其底帶及其球之半徑之三分之一相乘之積。令  $h$  為  $BD$  所生球帶  $EF$  之高， $r$  為球之半徑，則球分之體積為

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

【球面】Spherical surface. [幾] 包圍球體之曲面也。

【球帶】Zone of a sphere 或 Zone.

[幾] 球帶為平行二平面間所夾球面之部分，其二平面所作截面之圓周，為球帶之底。二平面間之距離為球帶之高。若平面之一為球面之



切面時，則生單底帶。如圖大圓  $PDQP$  繞直徑  $PQ$  而旋轉，則弧  $AD$  生球帶，二點  $A$  及  $D$  生其兩底， $CF$  為其高，弧  $PA$  生單底帶。球為半圓旋轉而生，其半圓之任意弧旋轉則畫球帶，故圓為弧之極限，球面為球帶之極限，球帶之面積等於其高及大圓周相乘之積，令球帶之高為  $h$ ，球之半徑為  $r$ ，則其面積為  $2\pi rh$ 。單底帶之面積等於以其弧之弦為半徑之圓之面積。若生單底帶之弧之弦為  $AP$ ，則其面積為  $\frac{1}{2}\pi AP^2$ 。

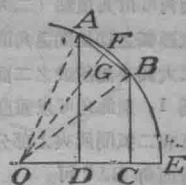
【球劈】Spherical wedge. [幾] 球劈者以球之月形為底，二大半圓之面交於直徑，其間所夾之球之一部分也。球劈之角與月形之角同。其體積等於月形之面積與球之半徑之三分之一之相乘積。令月

形之角為  $A^\circ$ ，球之半徑為  $r$ ，則其體積為  $\pi r^2 \times \frac{A^\circ}{90^\circ} \times \frac{r}{3}$  即  $\pi r^3 \times \frac{A^\circ}{270^\circ}$ 。球劈之角為  $360^\circ$  時，則為全球。球劈亦稱球楔。

【球盤】Spherical segment. [幾] 球盤為二平行平面間所夾球之一部分，二平行平面所作之截面為球盤之底，二平面間之垂直距離為其高。二平行平面之一為切面時，則生單底球盤。若球盤之高為  $2r$ ，則球盤為全球。球盤之體積為

$$V = \pi r'^2 \frac{h}{2} + \pi r''^2 \frac{h}{2} + \frac{\pi}{6} h^3, \text{ 證}$$

之如下。如圖  $ABCD$  繞其  $OD$  軸旋轉，則生球盤。令  $DC = h$ ,  $DE = h'$ ,



$OE = h''$ ,  $AD = r'$ ,  $BC = r''$ ,  $OE = r$ 。則 (球盤  $AFBCD$ ) = (球分  $OAFB$ ) - (體積  $AOB$ ) + (臺  $ABCD$ ),

$$\text{而 (體積 } GAFB) = \frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{2}{3} \pi h$$

$$\times \overline{OG}^2 = \frac{2}{3} \pi h \times \overline{AG}^2$$

$$= \frac{2}{3} \pi h \times \frac{1}{4} \overline{AB}^2 = \frac{2}{3} \pi h \times$$

$$\frac{(r' - r'')^2 + h^2}{4} = \frac{1}{6} \pi h [(r' - r'')^2 + h^2].$$

$$(\text{臺 } ABCD) = \frac{1}{3} \pi h (r'^2 + r''^2 + r'r''),$$

$$\text{故 (體積 } AFBCD) = \frac{1}{6} \pi h [(r' - r'')^2$$

$$+h^2] + \frac{1}{3} \pi h \times (r'^2 + r''^2 + r'r'')$$

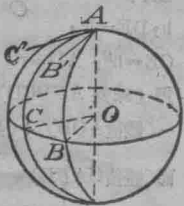
$$= \pi r'^2 \frac{h}{2} + \pi r''^2 \frac{h}{2} + \frac{\pi}{6} h^3.$$

又(單底球盤之體積) = (球分 OAE) - (圓錐 OAD) =  $\frac{2}{3} \pi r^2 h' - \frac{1}{3} \pi r'^2 (r-h')$

$$= \frac{\pi}{3} (2r^2 h' - r'^2 + h'r'^2).$$

今  $r'' = h'(2r-h')$ , 故體積 =  $\pi h'^2 (r - \frac{h'}{3})$ . 或體積 =  $\frac{1}{2} \pi r'^2 h' + \frac{1}{6} \pi h'^3$ .

**【球面角】** Spherical angle. [幾] 球面角者球面上相交二大圓弧間之角也。球面角可由其頂點(二大圓之交點)引二大圓弧之切線間之角測度之。此角等於二大圓平面所成之二面角。若球之半徑為 1, 則此角可以垂直於二大圓弧之大圓在二弧間所夾之部分測度之。如圖, 球面角 BAC 可以  $\angle B'AC'$  測之, 亦可 BC 測之。相交二大圓於其交點作兩兩相等之四球面角, 其相隣二角之和等於  $180^\circ$ , 四角之和等於  $360^\circ$ 。



**【球面度】** Spherical degree. [幾] 一球面為八相等三直角三角形所合成, 可分其各三角形為 90 等分, 每分稱為一球面度, 故全球面含 720 球面度。

**【球角錐】** Spherical pyramid. [幾] 球角錐者以球面多邊形為底及其諸邊之平面交於球之中心其間所舍球之部分也。

球之中心為球角錐之頂, 球面多邊形為球角錐之底, 如圖 O-ABCD 為一球角錐。球角錐之體積等於其底面積乘球半徑之積之三分之一。



**【球圓錐】** Spherical cone. [幾] 球角錐之底為一單底帶時, 則成球圓錐。其體積亦為底面積乘球半徑之積之三分之一。

**【球面圖形】** Spherical figure. [幾] 球面所畫之圖形也。

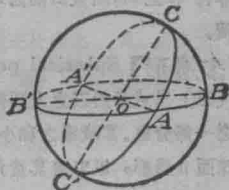
**【球面餘度】** Spherical excess. [幾] [三] 球面三角形之諸角和與  $180^\circ$  之差, 稱為三角形之球面餘度。

**【球面三角法】** Spherical trigonometry. [三] 球面三角法者, 三角法之一分科, 論球面三角形之六部分中已知其三而求其餘之解法, 及球面三角形六部分間之關係者也。於球面三角形之三邊及三角之六部分中, 已知其三, 即可解得其餘。唯於二直角三角形之二直角及其一對邊為已知時, 則有無數之解答。

**【球面三角形】** Spherical triangle. [幾] [三] 球面三角形者三大圓弧所包圍之球面之一部也。此三大弧稱為球面三角形之邊, 其二弧間之角稱為球面三角形之角, 二弧之交點稱為球面三角形之頂。命球之半徑為 1, 則球面三角形之邊可以球半徑至三角形各頂點所成之平面角測之。又三角之角以三邊之平面

所成之二面測之。其每角之度數，以其大圓弧之度測之，即以角頂為極，而夾於角之兩邊間之大圓弧也。三大圓弧常圍成八球面三角形，通常取其較小之三角形即球面三角形之六部分以每部小於  $180^\circ$  為限者論之。若六部分不設此限制，則可有自  $0^\circ$  至  $360^\circ$  之任何值。當此情形時，稱為普通球面三角形 (General spherical triangle)。六部分中之任何二者若同小於  $90^\circ$ ，或同大於  $90^\circ$ ，則稱為同類 (Alike in kind)。若一小於  $90^\circ$ ，一大於  $90^\circ$ ，則稱為異類 (Unlike in kind)。球面三角形有直角，鈍角，銳角，斜，二等邊，等邊之區別，其定義均與平面三角形同。球面三角形有二直角者稱為二直球面三角形，有三直角者稱為三直角球面三角形。三直角球面三角形為全球面之八分之一。二球面三角形，其一形內之各角為其他一形內各對邊之補角者，則二形稱為互極三角或互補三角形。球面三角形有一邊等於  $90^\circ$  者，稱為象限三角形 (Quadrantal triangle)。次略述球面三角形之重要性質。(1)最大邊對最大角，最小邊對最小角，中邊對中角，等邊對等角。若三角相等，則其三邊亦相等，而三角形為等邊。其逆定理亦真。(2)任意一邊比他二邊之和小而比其差大。(3)三角之和大於  $180^\circ$ ，小於  $540^\circ$ 。(4)任意二角之和大於第三角之補角。(5)任意二邊之差小於  $180^\circ$ ，三邊之和小於  $360^\circ$ 。(6)若任意二邊之和等於兩直角，則其對角之和亦等於兩直角。其逆

定理亦真。(7)若三角皆為銳角或鈍角或直角，則其三邊亦皆為小於或大於或等於直角。(8)若二球面三角形，一形之三部分與他形之三部分順次相等，則兩形實相等。若一三角形之部分與他三角形之部分相等，而順序不同，則兩形為對稱，不能疊置之使密合。兩對稱球面三角形之面積相等。球面三角形之面積，以球面度表之，其數等於此三角形之球面餘度。如圖 CBA 為球面三角形，以



A, B, C 表其三角之值，E 表其球餘度。引長  $\triangle CBA$  之三邊成三全圓，則  $\triangle A'BC'$  及  $AB'C'$  為對稱且等積。又  $\triangle ABC + \triangle A'BC' =$  月形  $ABA'C'$ 。以  $\triangle AB'C'$  代其等積之  $\triangle A'BC'$ ，則  $\triangle ABC + \triangle AB'C' =$  月形  $ABA'C'$ 。且  $\triangle ABC + \triangle AB'C' =$  月形  $BAB'C'$ 。又  $\triangle ABC + \triangle AB'C' =$  月形  $CAC'B'$ 。三式相加，且以球面度計之， $\triangle ABC + \triangle AB'C' + \triangle AB'C' \triangle ABC' = 360$ ，又  $ABA'C' + BAB'C' + CAC'B' = 2(A + B + C)$ 。則  $2\triangle ABC + 360 = 2(A + B + C)$ 。故  $\triangle ABC = A + B + C - 180 = E$ 。又因球面 S 之球面度數等  $720$ ，

$$\therefore \triangle CBA : S = E : 720,$$

$$\text{但 } S = 4\pi R^2$$

$$\therefore \triangle CBA = \frac{4\pi R^2 E}{720} = \frac{\pi R^2 E}{180}.$$

若已知三角形之三邊  $a, b, c$ , 則由幼氏公

式 (L'Huilier's formula), 即  $\tan^2 \frac{1}{4}$

$$E = \tan \frac{1}{2} \operatorname{stan} \frac{1}{2} (s-a) \tan \frac{1}{2} (s-b)$$

$$\tan \frac{1}{2} (s-c), \text{ 其 } s = \frac{1}{2} (a+b+c),$$

可計算得  $E$  之值, 然後由前之公式再求其面積。

**【球面多邊形】** Spherical polygon.

〔幾〕〔三〕三或多於三之大圓弧所圍之球面之一部分也。其諸邊之和小於  $360^\circ$ 。

設有球面  $n$  邊形, 以  $T$  表其諸角之和之度數, 則表其面積之球面度等於  $T - (n-2)180^\circ$ 。

**【球面幾何學】** Spherical geometry.

〔幾〕為表面幾何學之一種, 論球之圓形之幾何學也。

**【球面三角形之解法】** Solution of spherical triangle. 〔三〕〔1〕設  $ABC$

為僅含一直角之

球面三角形, 而

$A, B, C$  為其各

角,  $a, b, c$  為其各

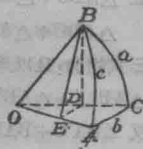
對邊。令  $C$  為直

角, 而令其餘各

項皆小於  $90^\circ$ , 又令其球之半徑為 1, 設

通過各邊之平面, 交於  $OA, OB, OC$  諸

半徑。又設一平面  $\perp OA$ , 通過  $B$  點而截



$OA$  於  $E$ , 及  $OC$  於  $D$ , 作  $BE, BD, DE$ 。

$BE$  及  $DE$  各  $\perp OA$ , 故  $\angle BED = \angle A$ 。

其平面  $BED \perp$  平面  $AOC$ , 故  $BDE$  及

$BOC$  兩平面之交線  $BD \perp$  平面  $AOC$ ;

即  $\perp OC$  及  $DE$ 。

今  $\cos c = OE = OD \times \cos b$ ,

而  $OD = \cos a$ ,

$$\text{故 } \cos c = \cos a \cos b, \dots\dots (1).$$

又  $\sin a = BD = BE \times \sin A$ ,

而  $BE = \sin c$ ,

$$\text{故 } \sin a = \sin c \sin A, \dots\dots (2).$$

$$\text{同理 } \sin b = \sin c \sin B, \dots\dots (3).$$

$$\text{又 } \cos A = \frac{DE}{BE} = \frac{OE \tan b}{OE \tan c},$$

$$\text{故 } \cos A = \tan b \cot c, \dots\dots (4).$$

$$\text{同理 } \cos B = \tan a \cot c, \dots\dots (5).$$

$$\text{又 } \cos A = \frac{DE}{BE} = \frac{OD \sin b}{\sin c} =$$

$$\cos a \frac{\sin b}{\sin c}, \text{ 以 (3) 代 } \frac{\sin b}{\sin c} \text{ 值,}$$

$$\text{得 } \cos A = \cos a \sin B, \dots\dots (6).$$

$$\text{同理 } \cos B = \cos b \sin A, \dots\dots (7).$$

$$\text{又 } \sin b = \frac{DE}{OD} = \frac{BD \cot A}{OD} = \tan a \cot A,$$

$$\text{故 } \sin b = \tan a \cot A, \dots\dots (8).$$

$$\text{同理 } \sin a = \tan b \cot B, \dots\dots (9).$$

設由 (6), (7) 代  $\cos a$  及  $\cos b$  之各值於 (1) 內, 則得

$$\cos c = \cot A \cot B, \dots\dots (10).$$

用以上十公式, 可解任何之球面直角三

角形。惟推論此諸公式時, 其三角形之各

項, 除直角外, 俱假定為小於  $90^\circ$ 。然即

不如此假定, 其公式仍為準確。解直角



三角形時，除直角外，須有二項爲已知。  
例如已知兩邊  $a$  及  $b$ ，則由(1)，(8)，(9)  
三公式得

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

$$\tan A = \tan a \cos b,$$

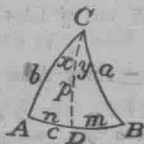
$$\tan B = \tan b \cos a,$$

若已知  $a = 27^\circ 28' 36''$ ， $b = 51^\circ 12' 8''$ ，則  
 $\log \cos a = 9.94802$ ， $\log \cos b = 9.79697$ ，  
 $\therefore \log \cos c = 9.74499$ ， $\therefore c = 56^\circ 13' 41''$ 。  
又  $\log \tan b = 10.09476$ ， $\log \cos a = 0.33$   
 $594$ ， $\therefore \log \tan B = 10.43070$ ， $\therefore B = 69^\circ$   
 $38' 54''$ 。又  $\log \tan a = 9.71605$ ， $\log \cos b$   
 $= 0.10826$ ， $\therefore \log \tan A = 9.82431$ ，  
 $\therefore A = 33^\circ 42' 51''$ 。所得結果以公式

$\cos c = \cot A \cot B$  驗之，則  $\log \cot A =$   
 $10.17569$ ， $\log \cot B = 9.56930$ ，而  
 $\log \cos c = 9.74499$ ，故所解爲不誤。

[2] 若過球面等腰三角形之頂點及其底  
之中點而作大圓，則其弧必分原形爲兩  
個等積之球面直角三角形，故球面等腰  
三角形可由球面直角三角形之解法解  
之。若過球面多角形之中心及其各頂點  
而作大圓，則其弧必分多角形爲數相等  
之等腰三角形，而每等腰三角形，又可分  
爲兩個等積之直角三角形。故球面多角  
形亦可化爲球面直角三角形解之。

[3] 設  $ABC$  爲一球面斜角三角形， $A$ ，  
 $B$ ， $C$  爲其三角，  
 $a, b, c$  爲其各對  
邊。過  $C$  作大圓弧  
 $CD$ ，垂直於  $AB$   
邊，而遇  $AB$  於



$D$ 。命  $CD = p$ ， $AD = n$ ， $BD = m$ ， $\angle ACD$   
 $= x$ ， $\angle BCD = y$ ，1. 由(1)，(2)二公  
式，於直角三角形  $BDC$  及  $ADC$  內，得

$$\sin p = \sin a \sin B,$$

$$\text{及 } \sin p = \sin b \sin A.$$

故  $\sin a \sin B = \sin b \sin A$  }  
同理  $\sin a \sin C = \sin c \sin A$  } ... (11).  
及  $\sin b \sin C = \sin c \sin B$  }

此三方程式又可寫爲比例式，如

$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$ 。  
即球面三角形各邊之正弦，與其對角之  
正弦成正比例也。2. 由公式(1)，則於  
直角三角形  $BDC$  內，得

$$\cos a = \cos p \cos m = \cos p \cos (c - n)$$

$$= \cos p \cos c \cos n + \cos p \sin c \sin n.$$

又於直角三角形  $ADC$  內，由公式(1)，得

$$\cos p \cos n = \cos b.$$

於是  $\cos p = \cos b \sec n$ ，

而  $\cos p \sin n = \cos b \tan n$ 。

由公式(4)，(5)， $\tan n = \tan b \cos A$ 。

$$\therefore \cos p \cos n = \cos b \tan b \cos A$$

$$= \sin b \cos A.$$

以  $\cos p \cos n$  及  $\cos p \sin n$  之各值代入  
 $\cos a$  值內，則得

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b$$

$$\sin c \cos A$$

同理  $\cos b = \cos a \cos c + \sin a$  }  
 $\sin c \sin B$  } ... (12).

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a$$

$$\sin b \cos C$$

3. 由公式(6)，則於直角三角形  $ADC$  內，

$$\begin{aligned} \text{得 } \cos A &= \cos p \sin x - \cos p \sin(C-y) \\ &= \cos p \sin C \cos y - \cos p \cos C \sin y. \end{aligned}$$

又由公式(7),  $\cos p \sin y = \cos B$ ,

故  $\cos p = \cos B \sec y$ ,

而  $\cos p \cos y = \cos B \cot y$ ,

由公式(10),  $= \cos B \tan B \cos a$

$$= \sin B \cos a$$

以  $\cos p \sin y$  及  $\cos p \cos y$  之各值代入  $\cos A$  值內, 則得

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \\ &\quad \sin C \cos a \\ \text{同理可得} \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \\ &\quad \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \\ &\quad \sin B \cos c \end{aligned} \right\} \dots\dots (13).$$

由以上(11), (12), (13)三組公式, 可解任何之球面斜角三角形。

[4] 已知角而求邊, 則有下之公式, 其

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c \sin a}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

[5] 已知角而求邊, 則有下之公式, 其

$$S = \frac{1}{2}(A+B+C).$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-B)}{\sin C \sin A}}$$

$$\sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-C)}{\sin A \sin B}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}$$

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C \sin A}}$$

$$\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A \sin B}}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$

$$\tan \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}$$

$$\tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}$$

[6] 次更述蓋氏方程式及納氏比例式。

$$\text{因 } \cos \frac{1}{2}(A+B) = \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B$$

$$- \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B, \text{ 其 } \cos \frac{A}{2},$$

$$\cos \frac{B}{2}, \sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \text{ 之各值}$$

以上述(4)之諸公式代入而化簡之，則得

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c} \times \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\text{而 } \sin c - \sin(s-c) = 2 \cos \frac{1}{2}(s+c-e)$$

$$\sin \frac{1}{2}(s-s+c) = 2 \cos(s - \frac{1}{2}c)$$

$$\sin \frac{1}{2}c.$$

$$\text{又 } \sin c = 2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c.$$

$$\sin \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\text{代入上式，則得 } \cos \frac{1}{2}(A+B)$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}c \cos(s - \frac{1}{2}c)}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}c$$

$$= \frac{\cos(s - \frac{1}{2}c)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}c. \text{ 又 } s - \frac{1}{2}c = \frac{a+b}{2},$$

$$\therefore \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b)$$

$$(a+b) \sin \frac{1}{2}c. \quad \text{同理可得}$$

$$\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a-b)$$

$$(a-b) \cos \frac{1}{2}c,$$

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b)$$

$$(a+b) \sin \frac{1}{2}c,$$

$$\sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b)$$

$$(a-b) \cos \frac{1}{2}c.$$

是謂之蓋氏方程式 Gauss's Equations. 以蓋氏方程式中之第一式除第二式，第三式除第四式，第一式除第三式，及第二式除第四式，則得

$$\tan \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2}C,$$

$$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2}C,$$

$$\tan \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \tan \frac{1}{2}c,$$

$$\tan \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \tan \frac{1}{2}c.$$

是謂之納氏比例式 (Napier's Analogies).

## 畢

【畢達哥拉斯表】Pythagoras's table.

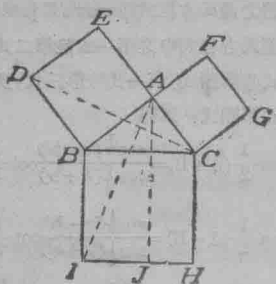
〔算〕即乘法表，見該條。

【畢達哥拉斯定理】Pythagoras's theorem.

〔幾〕「直角三角形斜邊之平方等於他二邊平方之和」，稱為 Pythagoras theorem.

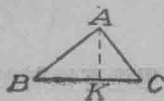
此定理發見極古，我國周髀算經已有「方者等於勾方加股方」之題，惟無一般之證法。西籍謂此定理為 Pythagoras 氏所發見，或曰 Pythagoras 聞諸埃及之僧，而發見其證明也。此定理證法極多，北京高等師範數理雜誌第二卷所載已有六十法，茲述其數法於次。

〔第一證〕此證法即普通幾何學書中所載者。設 ABC 為直角三角形，而 A 為直角。在各邊上畫正方形 AD, BE, CF, 引 AJ // CH. 則  $\triangle BDC = \triangle BAI$ , 則



$\square AD = 2\triangle BDC$ ,  $\square BJ = 2\triangle BAI$ ,  
 $\therefore \square AD = \square BJ$ . 同理  $\square CF = \square CJ$ .  
 $\therefore \square BH = \square AD + \square CF$ , 即  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ . 本題將各正方形畫為種種方向, 則得種種證法, 茲從略. [第二證]

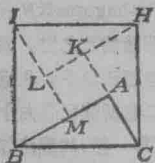
引  $AK \perp BC$ , 則  
 $\triangle ABK$ ,  $\triangle CAK$ ,  
 $\triangle ABC$  皆為相似,  
 故  $IC:AB = AB:$



$BK$ , 即  $\overline{AB}^2 = BC \cdot BK$ .  
 同理  $\overline{AC}^2 = BC \cdot CK$ .  
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \cdot BK + BC \cdot CK$   
 $= BC(BK + CK) = \overline{BC}^2$ .

[第三證] 於  $BC$  上作正方形  $BH$ , 延長  $CA$ , 截  $CK = AB$ , 連結  $AK$  延長之, 截  $HL = AB$ ,

連結  $IL$  延長之  
 交  $AB$  於  $M$ . 則  
 $\triangle KCH \cong \triangle L$   
 $HI \cong \triangle MIB \cong$   
 $\triangle ABC$ . 如圖

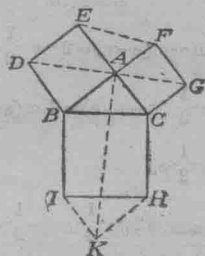


$\square BH = \triangle KCH + \triangle LHI + \triangle MIB +$   
 $\triangle ABC + \square AL = 4\triangle ABC + \overline{AM}^2 =$

$$2AB \cdot AC + (AB - AC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

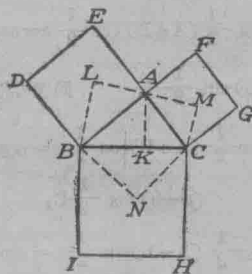
$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

[第四證] 在各邊上畫正方形  $AD, BH,$   
 $CF$ . 於  $IH$  上作  $\triangle KHI \cong \triangle ABC$ ,



而  $D, A, G$  在一直線上, 故四邊形  $GFED$   
 $\cong$  四邊形  $G CBD \cong$  四邊形  $ACHK \cong$   
 四邊形  $KIBA$ , 因之六邊形  $GFEDBC$   
 $\cong$  六邊形  $ABIKHC$ . 然  $\triangle AEF \cong$   
 $\triangle ABC \cong \triangle KHI$ . 各減去之, 則得  
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

[第五證] 在各邊上畫正方形  $AD, BH,$   
 $CF$ . 引  $AK$  正交於  $BC$ , 於各邊上作



$\triangle ABL, \triangle BCN, \triangle CAM \cong \triangle ABK,$   
 $\triangle BCA, \triangle CAK$ . 則  $\triangle BCN = \triangle ABL$   
 $+ \triangle CAM$ . 然  $\triangle BCN \sim \triangle ABL \sim \triangle$   
 $CAM$ , 又  $\square BH \sim \square AD \sim \square CF$ . 故

$\triangle ABC$  各邊上之三角形與正方形等比，

$$\therefore \square BH = \square AD + \square CF,$$

$$\text{即 } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

〔第六證〕作矩

形  $ABA'C$ ，則

此形得內接於

圓，由 Ptole-

my's theorem,

圓內接四邊形

二雙對邊所包矩形之和等於兩對角線所

包矩形之和。故得

$$AB \cdot A'C + AC \cdot A'B = BC \cdot AA',$$

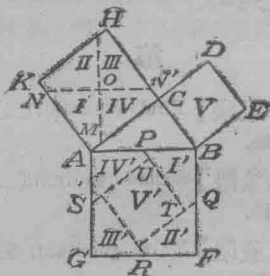
$$\text{即 } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

〔第七證〕過  $AC$  邊上正方形  $AH$  之中心

$O$ ，引  $NO$  平行  $AB$ ，又引  $MO$  垂直  $AB$ 。

又由  $AB$  邊上之正方形之各邊之中點，

引平行及垂直於  $AC$  諸線，如圖所示，



$ABN'N$  為平行四邊形， $N'N$  等於  $AB$ ， $O$

為  $N'N$  之中點， $P$  為  $AB$  之中點，故

$NO = PB$  及  $MO = NO = BQ$ ，而四邊形

$I$  與  $I'$  為等角，故兩形相等。同理四邊形

$II, III, IV$  等於四邊形  $II', III', IV'$ ，

且互相等。次  $PT = AN = BN'$ ，及

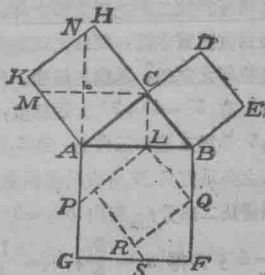
$PU = ON'$ ，故  $TU = BC$ ，而四邊形  $V'$  為

正方形且等於正方形  $V$ 。故正方形  $AF$

等於正方形  $AH$ ， $BD$  之和。

〔第八證〕於各邊上畫正方形，延長  $GA$

至  $N$ ，由  $C$  引  $CL, CM$  垂直及平行於  $AB$ ，



由  $L$  引  $LP, LQ$  平行於  $CA$  及  $CB$ ， $LQ$

上畫正方形  $LR$ ，將其一邊引長至  $S$ ，則

由作圖知  $\triangle ACJ = \triangle ACL = \triangle PLA$ ，

$\triangle AMJ = \triangle BCL = \triangle BLQ$ ，及  $\triangle ACM$

$= \triangle AKN$ ，故正方形  $LR$  等於正方形

$BD$ ，而  $BF = AB = MC = AN$ ，及  $BQ$

$= AJ$ ， $QF = JN$ ，又  $QR = LQ = AM =$

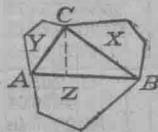
$KN$ ，故兩四邊形  $QRSF$  及  $KMJN$  相

等。又兩四邊形  $PS$  及  $JH$  相等，故正

方形  $AF$  等於正方形  $AH$  及  $BD$  之和。

〔畢達哥拉斯之定理之擴張〕 $ABC$  為  $C$

為直角之三角形， $X, Y, Z$  為在  $A, B, C$



各角之對邊上在相似位置所作之相似直

線形。則相似形與其對應邊上之正方形

成比例，故  $X:Y=\overline{OB}^2:\overline{AC}^2$ ， $X+Y:$

$Y=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2:\overline{AC}^2$ 。而  $\overline{BG}^2+\overline{AC}^2$

$=\overline{AB}^2$ ，且  $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=Z:Y$ ，

$\therefore X+Y=Z$ 。即以直角三角形之三邊為

對應邊，在相似位置畫相似形，則斜邊之

形之積等於他二邊之形之積之和。又以

各邊為直徑畫半徑，則此定理亦真。畢

達哥拉斯之定理，其應用極廣。如三數

3,4,5 有  $5^2=4^2+3^2$  之關係故，若以

3,4,5 寸為三邊作三角形，則 5 寸之邊

所對之角為直角。又由直角引斜邊之高，

分斜邊為二部分，則由  $5a_1=3^2$  及

$5b_1=4^2$ ，而得  $a_1=\frac{9}{5}$ ， $b_1=\frac{19}{5}$ ，

故此高  $p$  可由  $p^2=\frac{9}{5}\cdot\frac{16}{5}$  求得即

$p=\frac{12}{5}$ 。〔問題〕求直角三角形三邊

之整數表。此問題只須求適合方程式

$x^2=y^2+z^2$  之  $x,y,z$  之值可也。命  $m$

及  $n$  為二數，則  $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2$

$+ (2mn)^2$ ，故  $m^2+n^2, m^2-n^2, 2mn$

為表此問題之答數。上表即輯錄如斯計

算而得之數也。

## 略

【略除法】Contraction in division.

〔幾〕見省略算條。

【略乘法】Contraction in multipli-

cation. 〔算〕見省略算條。

## 移

【移項】Transpose. 〔代〕於等式或不等

式之兩邊，將某項由一邊移至他邊之謂

也。移項須變符號。例於  $ax=bx+c$ ，

將  $bx$  移項時，則為  $ax-bx=c$ 。又於

$a+b>c+d$ ，將  $b$  與  $c$  移項則為

$a-c>d-b$ 。

## 第

【第一象限】First quadrant. 〔三〕見

象限條。

【第二象限】Second quadrant. 〔三〕見

象限條。

【第三象限】Third quadrant. 〔三〕

見象限條。

【第四象限】Fourth quadrant. 〔三〕見

象限條。

【第里安問題】Delian problem. 〔代〕

此問題為於已知二正數之間插入二比例

中項。即命  $a:b=b:c=c:d=\frac{1}{\rho}$ ，

| m \ n | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9   |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1     | 5 | 10 | 17 | 26 | 37 | 50 | 56 | 82  |
|       | 3 | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18  |
|       | 4 | 8  | 15 | 24 | 35 | 48 | 63 | 80  |
| 2     |   | 13 | 20 | 29 | 40 | 53 | 68 | 85  |
|       |   | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36  |
|       |   | 5  | 12 | 21 | 32 | 45 | 60 | 77  |
| 3     |   |    | 25 | 34 | 45 | 58 | 73 | 90  |
|       |   |    | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54  |
|       |   |    | 7  | 16 | 27 | 40 | 55 | 72  |
| 4     |   |    |    | 41 | 52 | 65 | 80 | 97  |
|       |   |    |    | 9  | 48 | 56 | 64 | 72  |
|       |   |    |    | 40 | 20 | 33 | 48 | 65  |
| 5     |   |    |    |    | 61 | 74 | 89 | 106 |
|       |   |    |    |    | 60 | 70 | 80 | 90  |
|       |   |    |    |    | 11 | 24 | 39 | 56  |

則  $b = \rho a$ ,  $c = \rho^2 a$ ,  $d = \rho^3 a$ .

$d/a = \rho^3$ ,  $\therefore \rho = \sqrt[3]{(d/a)}$ , 因而

$b = a\rho = a\sqrt[3]{(d/a)} = \sqrt[3]{(a^2d)}$ ,

$c = a\rho^2 = a\{\sqrt[3]{(d/a)}\}^2 = \sqrt[3]{(ad^2)}$ .

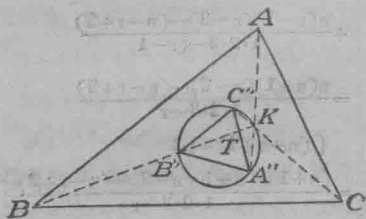
高等幾何學中常應用此問題以求立方倍積。

【第一來莫恩圓】 First Lemoine circle. [幾] 即三乘比圓，見該條。

【第二來莫恩圓】 Second Lemoine circle. [幾] 即餘弦圓，見該條。

【第一布洛喀三角形】 Brocard's first triangle. [幾] 聯三角形之外心在其來莫恩平行線之上正射影所成之三角形謂之第一布洛喀三角形。又見布洛喀三角形及布洛喀圓條。

【第二布洛喀三角形】 Brocard's second triangle. [幾] 三角形之各角頂與其類似重心之聯線交布洛喀圓於三點，聯此三點所成之三角形謂之第二布



洛喀三角形。如圖， $K$  為三角形  $ABC$  之類似重心， $T$  為布洛喀圓，聯  $AK$ ， $BK$ ， $CK$ ，交  $T$  圓於  $A''$ ， $B''$ ， $C''$ ，則  $A''B''C''$  為第二布洛喀三角形。

符

【符號】 Sign. [算] [代] 符號者如  $+$   $-$   $\times$   $\div$  等之稱也。在代數學中行減法時須換符號，即  $+$  換為  $-$ ， $-$  換為  $+$ 。此時所云之符號單指  $+$   $-$  者而言，故符號用於廣義時為指  $+$ ， $-$ ， $\times$ ， $\div$ ， $=$ ， $\dots$ ，用於狹義時則指  $+$ ， $-$  者。

【符號之定則】 Law of signs. [代] 在代數學中之加法， $+a+(+b)=a+b$ ， $+a+(-b)=a-b$ ，即行加法時，不變其各項之符號。於減法  $+a-(+b)=a-b$ ， $+a-(-b)=a+b$ ，即行減法變其減式各項之符號。於乘法

$$(+a) \times (+b) = +ab,$$

$$(-a) \times (+b) = -ab,$$

$$(+a) \times (-b) = -ab,$$

$$(-a) \times (-b) = +ab,$$

即同符號相乘得正，異符號相乘得負。除法亦與乘法同，即

$$(+ab) \div (+a) = +b,$$

$$(-ab) \div (-a) = +b,$$

$$(-ab) \div (+a) = -b,$$

$$(+ab) \div (-a) = -b.$$

組

【組合】 Combination. [代] 由  $n$  個不同之物中，不論其次序如何，但選出  $r$  個不同之物而為一組，此法謂之由  $n$  個物每次取  $r$  個之組合。例如由  $a, b, c, d$  四物每次取三個之組合為  $abc$ ， $abd$ ， $acd$ ， $bcd$ 。由  $n$  個物取  $r$  個之組合之數恒以  ${}_nC_r$  表之。(I) 求  ${}_nC_r$  之法如次。設以  $a, b, c, d, \dots$  表  $n$  個不同之物。

由  $n$  個字母每次取  $r$  字之各組合，凡含有一特別字母之組，其數等於由  $n-1$  字母中取  $r-1$  字母組合之數。故凡  $n$  字母中之任一字母，含於諸組合之全數中者，為有  ${}_{n-1}C_{r-1}$  次。則合於  ${}_nC_r$  內字母之總數為  ${}_{n-1}C_{r-1} \times n$ 。而  ${}_nC_r$  內之任一組，皆含  $r$  個字母，故字母之全數為  ${}_nC_r \times r$ 。由是  $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ 。上式只須  $r$  不大於  $n$ ，則  $r$  及  $n$  為任何之值均合理，順次得

$$(r-1) \times {}_{n-1}C_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}C_{r-2}$$

$$(r-2) \times {}_{n-2}C_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3}C_{r-3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2 \times {}_{n-r+2}C_2 = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}C_1$$

又  ${}_{n-r+1}C_1 = n-r+1$   
將各式之兩邊連乘之而約其公因數，得  $r! \times {}_nC_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ ，即

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \dots(1)$$

上式右邊之分子分母以  $(n-r)!$  乘之，為

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \dots\dots\dots(2)$$

[別證] 每組合若變其次序，可有  $r!$  種排列，故將所有各組合悉變其次序而為排列，則為  ${}_nP_r$ 。由是得

$${}_nC_r \times r! = {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

即(2)式也。又於(2)式，設  $r=n$ ，則

$${}_nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!}$$

而  ${}_nC_n = 1$ ， $\therefore 1 = \frac{1}{0!}$  即  $0! = 1$ ，或可用他法求得，

即  $n! = n(n-1)!$ ，若  $n=1$ ，則  $1! = 1(1-1)!$ ， $\therefore 0! = 1$ 。(II)由相異

之  $n$  物內，每次取  $r$  個之組合數，恒等於每次取  $n-r$  個之組合數。此因由  $n$  物中取去  $r$  物時，其餘尚有物  $n-r$  個，而由  $n$  物取  $r$  物之組合，每次各異，則於同時其所餘之  $n-r$  物，亦每次各異，故如上云云。以公式證之，則因  ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，

$$\text{今以 } n-r \text{ 代 } r, \text{ 則得 } {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\therefore {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 。(III)證  ${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$ 。於  $n+1$  物每次取  $r$  個之組合數，內以其含特別之一物者，與不含特別之一物者，分為二羣。而含特別一物之組數，必為  $n$  物每次取  $r-1$  個之組數，即  ${}_nC_{r-1}$ 。又不含特別一物之組數，必為  $n$  物每次取  $r$  個之組數，即  ${}_nC_r$ 。

$$\therefore {}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$$

[別證]  ${}_nC_r + {}_nC_{r-1}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

$$\{ (n-r+1) + r \}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

$$= {}_{n+1}C_r$$
。(IV)求  ${}_nC_r$  之最大值。

由前(1)式， ${}_nC_r = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots \times \frac{n-r+1}{r}$ ，

$$\therefore {}_nC_r = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$$



由是從  $n-r+1 \leq r$  即  $r \leq \frac{1}{2}(n+1)$ ,

而定  ${}_nC_r \leq {}_nC_{r-1}$ . 故若  $r$  小於  $\frac{1}{2}(n+1)$  時, 則  $r$  之值增大, 而  ${}_nC_r$  之值

亦增大. 故  $n$  為偶數, 則  $r = \frac{n}{2}$ ; 其

${}_nC_r$  為最大. 又  $n$  為奇數, 則  $r = \frac{1}{2}(n+1)$  或  $r = \frac{1}{2}(n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n-1)$ ,

其  ${}_nC_r$  之值為最大, 因  ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$

$= {}_nC_{n-\frac{1}{2}(n+1)} = {}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$  故也.

## 累

【累乘積】Continued product. [算] 即連乘積, 見該條.

【累次消去法】Method of successive elimination. [代] 三以上之聯立方程式含三以上之未知數, 累次消去其未知數之法也. 例如三方程式為

$$ax + by + cz = d \dots\dots\dots(1).$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots\dots\dots(2).$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots\dots\dots(3).$$

以  $c'$  乘(1)式,  $c$  乘(2)式, 行減法, 則得  $(ac' - a'e)x + (bc' - b'e)y = de' - d'e \dots(4)$ .

又以  $c''$  乘(1)式,  $c$  乘(3)式, 行減法, 則得  $(ac'' - a''e)x + (bc'' - b''e)y = de'' - d''e \dots(5)$ .

此(4)與(5)又施以同法, 則得

$$x = \frac{-(bc'' - b''e)(de' - d'e) + (dc' - d'e)(bc'' - b''e) - (bc' - b'e)(ac'' - a''e)}{(bc'' - b''e)(de' - d'e) - (bc' - b'e)(ac'' - a''e)}.$$

## 終

【終結】Conclusion. [幾] 有命題「若 A 為 B 則 C 為 D」, 其前半部「若 A 為 B」為假設, 後半部「則 C 為 D」為終結, 即由假設經推理而達最後之結果也.

【終身年金】Life annuity. [算][代] 終身年金者人之一生繼續所有之年金, 其人死後年金即消滅也.

## 被

【被加數】Addends 或 Summand. [算] [代] 加法中之實數曰被加數, 例如  $5+3=8$ , 則 5 為被加數. 或以加法中相加諸數統稱為被加數, 如上例之 5 與 3. 故減法乘法有被減數減數被乘數乘數之區別, 而加法則無之. summand 本為德語近來則英文書中亦用之.

【被乘數】Multiplicand. [算] [代] 乘法中之實數, 即以他數乘之之數, 例如  $3 \times 4 = 12$ , 則 3 為被乘數.

【被除數】Dividend. [算] [代] 除法中之實數, 即以他數除之之數, 例如  $15 \div 3 = 5$ , 則 15 為被除數.

【被減數】Minuend. [算] [代] 減法中之實數, 即由此減去他數之數, 例如  $a-b=c$ , 則 a 為被減數. 算術中被減法常小於減數, 代數上則無此限制.

【被算數】Operand. [數] 對於一數而施以運算時, 則此數稱為被算數.

【被開方數】Radicand. [算] [代] 某數之  $n$  乘幕為 a 時, 則某數稱為 a 之 n

乘根，以  $\sqrt[n]{a}$  表之，此  $a$  稱為被開方數。  
 $n$  為根之次數，稱曰根指數。

### 趾

【趾】Foot. [幾]由一點至一直線或一平面引垂線或斜線，其相交之點曰趾，亦稱足。

### 逐

【逐乘】Factorial. [代]始自 1 之自然數之連乘積，稱為逐乘或階乘。例如  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ，簡書為  $n!$  或  $n!$ ，稱曰逐乘  $n$ 。

【逐次除法】Successive division.

[算] 例如 3456 以  $\begin{array}{r} 4 \overline{) 3456} \\ \underline{3} \phantom{00} \\ 864 \\ \underline{3} \phantom{00} \\ 288 \end{array}$   
 12 除之，而  $12 = 4 \times 3$ ，  
 故可先以 4 除之，次  
 以所得之商以 3 除之。此稱為逐次除法，亦曰因數除法。

### 通

【通分】Reduction of fractions to a common denominator. [算] [代]異分母之諸分數，化為同分母之諸分數，其法曰通分。可分為二種。(I) 諸分母為互素數者，則以諸分母之連乘積為公分母，各分子與他分母之連乘積為新分子。例將  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$  三分數通分，則其公分母為  $2 \times 3 \times 5 = 30$ ，

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{1}{2} &= \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 5} = \frac{15}{30}, \\ \frac{2}{3} &= \frac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 2 \times 5} = \frac{20}{30}, \end{aligned}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2 \times 3}{5 \times 2 \times 3} = \frac{24}{30}.$$

(II) 諸分母有公約數者，則用其最小公倍為最小公分母。將各分母除之之商，以各分子乘之，為各新分子。例將  $\frac{2}{9}$ ，

$\frac{5}{12}, \frac{7}{15}$  通分。各分母之 L. C. M. = 180，

$$\therefore \frac{2}{9} = \frac{2 \times 20}{9 \times 20} = \frac{40}{180},$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 15}{12 \times 15} = \frac{75}{180},$$

$$\frac{7}{15} = \frac{7 \times 12}{15 \times 12} = \frac{105}{180},$$

【通常分數】Vulgar fraction. [算] 即普通之分數，為與繁分數相對之語。

### 連

【連比】Continued ratio. [算] 諸數相連而作比者曰連比。如 3:5:7 為 3 與 5 與 7 之連比。凡已知諸數中各自成比者，則以下法化為連比。如已知 A 與 B 之比為 4:7，B 與 C 之比為 3:5，則以後比之 3 乘 A 與 B 之比，為 12:21。以前比之 7 乘 B 與 C 之比，為 21:35。故得 A 與 B 與 C 之連比為 12:21:35。

【連比例】Continued proportion. [算] [代]  $a, b, c, d, \dots$  為  $a:b=b:c=c:d=\dots$  時，則謂之成連比例。而  $a, b, c, d, \dots$  成連比例，則  $a:c=a^2:b^2, a:d=a^3:b^3, \dots$ ，又等比級數之各項為成連比例。

## 【連分數】Continued fraction【代】

凡分數爲  $\frac{a}{b \pm \frac{c}{d \pm \frac{e}{f \pm \dots}}}$  之形者謂之連分數，恆記爲  $\frac{a}{b \pm} \frac{c}{d \pm} \frac{e}{f \pm} \dots$  今就簡單之連分數論之。(I) 化任意之既約真分數  $\frac{b}{a}$  爲連分數，以  $b$  除  $a$ ，命其商爲  $p$ ，剩餘爲  $e$ ，則  $\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{p + \frac{e}{b}}$ 。

次以  $e$  除  $b$ ，命其商爲  $q$ ，剩餘爲  $d$ ，則  $\frac{1}{\frac{e}{b}} = \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{b}{e}}} = \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{d}{e}}}$  以下做此

故  $\frac{b}{a} = \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \dots}}}$

即  $\frac{b}{a} = \frac{1}{p +} \frac{1}{q +} \frac{1}{r +} \dots$ 。此運算與求  $a$  及  $b$  之最大公約數之法同，故若  $a$  與  $b$  爲互素數，則終至達於剩餘爲  $1$  之連分數而止。(II) 凡連分數從前向後，任於何處截止之，而截取之各分數，謂之連分數之近數。例如  $\frac{m}{n} = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \dots$  時，第一近數爲  $\frac{a_1}{1}$ ，第二近數爲

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}, \text{ 第三近數爲}$$

$$a_1 + \frac{a}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1}.$$

而第  $n$  近數恆以  $\frac{p_n}{q_n}$  表之。(III) 連分

數  $d_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \dots$  其  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ，

皆爲正者，則各次之近數比連分數大小

相間。第一近數爲  $\frac{a_1}{1}$ ，截去  $\frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +}$

$\dots$  諸正數，故比原連分數爲小。第二近

數爲  $a_1 + \frac{1}{a_2}$ ，其分母  $a_2$  比  $a_2 + \frac{1}{a_3 +} \dots$

爲小，故  $a_1 + \frac{1}{a_2}$  比原連分數爲大。第

三近數  $a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3}$ ，其分母  $a_2 + \frac{1}{a_3}$

比  $a_2 + \frac{1}{a_3 +} \dots$  爲大，故  $a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3}$

比原連分數爲小。以下順次大小相間。故

得一簡明定理曰，凡奇次(如第一，第三，

$\dots$ ) 之近數皆比原連分數小，凡偶次

(如第二，第四 $\dots$ ) 之近數皆比原連分

數大。惟如  $\frac{m}{n}$  爲真分數，則  $a_1 = 0$ ，

而此亦須作爲第一近數。(IV) 連分數

$a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \dots$  之首三近數爲

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}, \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1},$$

已如上述，故第三近數之分子爲以第三

商乘第二近數之分子加第一近數之分子

而成，其分母亦然。故如以  $a_1, a_2, \dots, a_n$

表諸商， $p_1, p_2, \dots, p_n$  及  $q_1, q_2, \dots, q_n$  表

諸近數之分子及分母，則一般

$$p_n = a_{n-1} p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n p_{n-1} +$$

$$q_{n-2}, \text{ 而 } p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n. \text{ 此因}$$

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})$$

$$\times q_{n-1} - p_{n-1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$

$$= (-1)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}), \text{ 同理，}$$

$$= (-1)^2(p_{n-2}q_{n-3} - p_{n-3}q_{n-2})$$

$$= \dots = (-1)^{n-2}(p_2q_1 - p_1q_2).$$

但  $p_2q_1 - p_1q_2 = (a_1a_2 + 1) - a_1a_2 = 1$   
 $= (-1)^2$ , 故  $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n$ .

**【連乘積】** Continued product. [算]

[代] 第一數乘第二數, 又以第三數乘其積, 則其結果稱為三數之連乘積, 四數, 五數, …… 準此。

**【連結線】** Joins. [幾] 連結二點之直線也, 常簡稱為連線。

**【連鎖法】** Chain rule. [算] 有順次而列之諸數, 已知其順次之比, 則可用連鎖法以求其首末二數之比。如  $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{d}, \text{ 今將各分數 } \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$$

約簡之, 使各為  $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ , 則

$$\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} \text{ 雖不等於 } \frac{m}{s}, \text{ 而其值仍}$$

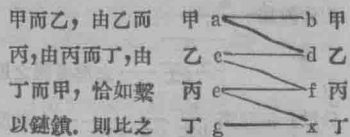
等於  $\frac{a}{d}$ 。以是等分數表比之值, 則得

如次所述, 即「甲乙之比, 乙丙之比, 丙丁之比, 是等連鎖比之積, 等於甲丁之比, 即首末二項之比」。又得如下所述, 即「甲乙之比, 乙丙之比, 丙丁之比, 丁甲之比, 是等連鎖比之積等於 1」。又如已知甲乙

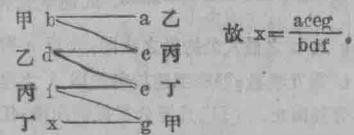
之比為  $\frac{a}{b}$ , 乙丙之比為  $\frac{c}{d}$ , 丙丁之比為  $\frac{e}{f}$ , 又已知丁甲之甲之一項而求其他項, 例如丁為  $g$  時求甲之相對值  $x$ 。則

$$\text{由前所述得 } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{x} = 1.$$

故  $x = \frac{aceg}{bdf}$ 。以圖式記之, 則如次。即由



前項(分子)悉在左側, 後項(分母)悉在右側, 而左右各積之比為 1, 即左右各積相等。則將左方各數之積, 以右方除  $x$  外各數之積除之, 即得  $x$  之值, 是為連鎖法問題一般之解法。然連鎖法之實用問題, 於連鎖比之關係, 多以各數倍數之關係表之。例如有甲乙丙丁四數, 甲之  $a$  倍等於乙之  $b$  倍, 乙之  $c$  倍等於丙之  $d$  倍, 丙之  $e$  倍等於丁之  $f$  倍, 問丁之  $g$  倍等於甲之若干倍。今解此題, 因甲之  $a$  倍等於乙之  $b$  倍, 故甲乙之比為其倍數之比之逆即為  $b:a$ , 餘準此, 故命所要甲之倍數為  $x$ , 則



如斯由倍數之關係改書為比之關係, 則須如上所述。然是等問題常可直接就倍數之關係而立連鎖式, 其所求得  $x$  之值, 與由比之關係求得者無異, 即

$$\text{甲 } a \text{ --- } b \text{ 乙} \quad \text{故 } x = \frac{aceg}{bdf}.$$

$$\text{乙 } c \text{ --- } d \text{ 丙}$$

$$\text{丙 } e \text{ --- } f \text{ 丁}$$

$$\text{丁 } g \text{ --- } x \text{ 甲}$$

今述一二實用問題於下。

[例 1] 茶 3 斤與咖啡 4 斤, 咖啡 6

斤與砂糖 20 斤，砂糖 15 斤與米 1 斗 2 升，其價各相等。問米 6 斗 4 升之價與茶幾斤之價相等。〔解〕茶 3 斤與咖啡 4 斤等價，故茶與咖啡之價之比為 3 與 4 之反比，即為 4:3。餘準此。故命  $x$  為所求茶之斤數，則由比之關係而得左式。又俱歸一斤之價論之，則茶之 3 倍為咖啡之 4 倍，以下準此，故由倍數之關係，可得次之連鎖式。

$$\begin{array}{l} \text{茶 } 3 \text{ — } 4 \text{ 咖} \\ \text{咖 } 6 \text{ — } 20 \text{ 糖} \\ \text{糖 } 15 \text{ — } 12 \text{ 米} \\ \text{米 } 64 \text{ — } x \text{ 茶} \end{array} \quad \text{故 } x = \frac{3 \times 6 \times 15 \times 64}{4 \times 20 \times 12} = 18 \text{ 斤。}$$

〔例 2〕有五數，甲乙二數之比如三與二，乙之四倍等於丙之五倍，丙之三分之一等於丁之五分之一，丁為 6 時則戊為七，問如甲為 9 則戊為何數。〔解〕命  $x$  為戊數。

由各數之比之關係 由各數之倍數之關係所立之連鎖式。

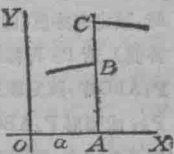
$$\begin{array}{l} \text{甲 } 3 \text{ — } 2 \text{ 乙} \\ \text{乙 } 5 \text{ — } 4 \text{ 丙} \\ \text{丙 } \frac{1}{5} \text{ — } \frac{1}{3} \text{ 丁} \\ \text{丁 } 6 \text{ — } 7 \text{ 戊} \\ \text{戊 } x \text{ — } 9 \text{ 甲} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{甲 } 2 \text{ — } 3 \text{ 乙} \\ \text{乙 } 4 \text{ — } 5 \text{ 丙} \\ \text{丙 } \frac{1}{3} \text{ — } \frac{1}{5} \text{ 丁} \\ \text{丁 } 7 \text{ — } 6 \text{ 戊} \\ \text{戊 } 9 \text{ — } x \text{ 甲} \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{2 \times 4 \times \frac{1}{3} \times 7 \times 9}{3 \times 5 \times \frac{1}{5} \times 6} = 9 \frac{1}{3}.$$

〔連續性〕Continuous. [數] 即有連續之性質者。如以函數而論，當其自變數由  $a$  變  $b$ ，至經過  $a$  與  $b$  中間之一變值。同時函數亦對應之而得一一之值，即自

變數為極小之變化時，函數亦生極小之變化，則函數謂之有連續性而曰連續函數。反之如右圖

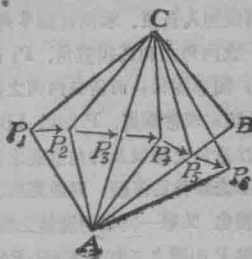
所示，當  $x$  自稍小於  $a$  之值變至稍大於  $a$  之值，函數即生大變化  $BC$ ，則此函數為無連續性。故函數  $f(x)$  當  $x=a$  時無定值，而當  $x$  由左漸近  $a$  時， $f(x)$  漸近一極限  $AB$ ，若  $x$  由右漸近  $a$  時， $f(x)$  漸近另一極限  $AC$ ，即其間相距  $BC$ ，為不連續也。



〔連續量〕Continuous quantity. [數] 為與個個之物之不連續量相對之語，如物之長，時間，角度等皆為連續量。因如物之長寸尺寸尺，互相銜接，非如馬之一匹羊之一隻分割之則不成物也。

〔連續之定則〕Law of continuity.

[數] 在幾何學證明「 $n$  邊多角形內角之和等於  $2(n-2)$  直角」之定理，普通多就凸多角形而證明之。其實不必限於凸多角形，即就凹多角形而論，亦一般真確。即該定理在凸多角形  $P_1ABC$  時為真，若



$P_1$ , 移動至  $P_2$ , 爲凸多角形  $P_2ABC$  時該定理亦真, 若  $P_2$  移動至  $P_3$  而成  $P_3ABC$  ( $P_3$  爲平角, 故可視爲四邊形) 時, 該定理亦真 (即就三角形  $ABC$  而論, 亦真)。若  $P_3$  再移動至  $P_4$ , 成凹多角形  $P_4ABC$  時, 該定理亦真, 若  $P_4$  更移動至  $P_5$ , 成圖形  $P_5ABC$ ,  $\angle BAP_5=0$ , 而就四邊形論之, 該定理亦真。最後  $P_5$  移動至  $P_6$ , 成交截四邊形  $P_6ABC$ , 在此情形時, 所云爲內角者, 與通常之意義有所不合。即  $A$  角過零後則爲負值, 而內角  $\angle AP_6C$  在

初學者視之

或生疑義,

其實視爲由

$P_1, P_2, P_3,$

$P_4, \dots, P_6$  漸

次引續者,

當亦無差異

也。此連續之定則, 在數學中極爲重要,

惟其理甚深, 茲僅說明幾何學之一例耳。

幾何學的量之連續, 可概言之曰, 凡就

一圖形而證明定理, 若其已知條件爲連續,

則對於一般圖形亦爲連續。惟若過

零, 則須加入負值。本例首圖多角形  $P_1$

$ABC$  之內角之和爲四直角。  $P_1$  漸向右

移動, 圖形變化, 而所云內角之條件不

變, 故該定理常爲真。  $P$  超過  $AB$  邊後,

則須注意角之符號及內角意義之擴張,

即已知之條件爲連續, 則該定理之真確

亦連續也。又舉一例以明連續之理。由圖

外一點  $P$  引圓之二割線  $PAB, PA'B'$  及

切線  $PC$ 。則矩形  $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' =$

一定之值。又矩形  $PA \cdot PB = \overline{PC}^2$ 。此二

定理在外觀上視之, 似乎不同, 而基於連

續之定則考之, 則

全歸同一。因割線

$PA'B'$  以  $P$  爲樞而

迴轉之, 則  $A'$  及  $B'$

漸相近, 終至二點

合爲一點, 而  $PA'B'$

即爲圓之切線  $PC$

也。



## 部

**【部分商】** Partial quotient [算][代]

例如 325 以 5 除之,

先得十位之商 60, 次得

個位之商 5, 此 60 與 5

即爲部分商。

又如  $x^2 + 3x + 2$

以  $x+1$  除之,  $(x+1)x^2 + 3x + 2(x+2)$

得商  $x+2$ , 此商

之各項  $x$  與 2

即爲部分商。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 325} \\ \underline{30} \phantom{0} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x+1) \overline{) x^2 + 3x + 2} \\ \underline{x^2 + x} \phantom{+ 2} \\ 2x + 2 \\ \underline{2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

**【部分積】** Partial product. [算][代]

例如以 4 乘 32, 先以 4 乘其個位之 2 則

得 8, 次以 4 乘其十位之 3 則得 120,

此 8 與 120 爲部分積。又如以 23 乘 467,

先以個位之 3 乘之得 1401, 次以十位之

2 乘之得 9340, 皆部分積也。又以  $c$  乘

$a+b$  得  $ac+bc$ ,  $ac$  與  $bc$  爲部分積。又

以  $x-y$  乘  $x^2+xy+y^2$ , 此被乘數以

$x$  乘之得  $x^3+x^2y+xy^2$ , 以  $-y$  乘之得

$-x^2y - xy^2 - y^2$ , 皆部分積也。

### 【部分分數】Partial fraction. [代]

求若干分數其和等於一已知分數，且分子較分母之次數為低，則是等若干分數謂之部分分數或散分數。(I)設分母為可分括為若干一次因子之積，即知此一分數之部分分數有若干，而其各一次因子即為各分數之分母。若所設之一分數其分母可分括為  $x-a, x-b, x-c, \dots, x-n$  因子，而其分子為  $F(x)$ ，但  $F(x)$  為不高於  $x$  之  $n-1$  次之任意代數式，則可得部分如次，其  $A, B, C, \dots$  為與  $x$  不相關，故可求得其值。

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots, \text{兩邊以 } (x-a)(x-b)(x-c)\dots \text{乘之，得 } F(x) = A(x-b)(x-c)\dots + B(x-a)(x-c)\dots + C(x-a)(x-b)\dots + \dots \quad (1)$$

上式為恆等式，故其兩邊  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$  之係數全相同，故可由兩邊比較  $x$  之同次係數，而得  $A, B, C, \dots$  之各值。又因(1)式為恆等式，故對於  $x$  之任何值皆合理。故  $x=a$ ，則  $F(a) = A(a-b)(a-c)\dots$ ，故  $A = \frac{F(a)}{(a-b)(a-c)\dots}$ ，同理  $B = \frac{F(b)}{(b-a)(b-c)\dots}$ ， $C$  以下均可由同法求得之。【例1】試分  $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$  為部分分數，其分母為  $(x+2)(2x-3)$ 。故使  $\frac{5x-11}{2x^2+x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3}$ ，消去

分母，得  $5x-11 = A(2x-3) + B(x+2)$ 。比較兩邊  $x$  之同次係數， $2A+B=5$ ， $-3A+2B=-11$ ，因之  $A=3, B=-1$ ，而  $\frac{5x-11}{2x^2+x-6} = \frac{3}{x+2} - \frac{1}{2x-3}$ 。

【例2】試分  $\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}$  為部分分數。

$$\text{使 } \frac{mx+n}{(x-a)(x+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+b},$$

故  $mx+n = A(x+b) + B(x-a)$ 。

$$\text{令 } x-a=0, \text{ 或 } x=a, \text{ 則 } A = \frac{ma+n}{a+b}.$$

$$\text{令 } x+b=0, \text{ 或 } x=-b, \text{ 則 } B = \frac{mb-n}{a+b}.$$

故  $\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)} = \frac{1}{a+b} \left( \frac{ma+n}{x-a} + \frac{mb-n}{x+b} \right)$ 。(II)分母不能分括為一次

因子者，如【例3】 $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$

$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$ ，因其第二項之分母為二次式，故其分子取低於二次者為一次式，而以  $Bx+C$  表之。由是  $x^2+15 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)$ 。 $x=1$  則  $1+15=8A, \therefore A=2$ 。

代入上式，則  $x^2+15 = 2(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)$ ，即  $-x^2-4x+5 = (Bx+C)(x-1)$ ， $\therefore Bx+C = -(x+5)$ 。

$$\text{故 } \frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+2x+5}.$$

(III)如上所述為部分分數之分母含有相異之因子者，若含有相同之因子，則可如次例解之。【例4】分

解下式爲部分分數。令原式

$$\frac{9x^3 - 24x^2 + 48x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{f(x)}{(x-2)^2}$$

$$\therefore 9x^3 - 24x^2 + 48x = A(x-2)^2 + (x+1)f(x)$$

$f(x)$ 。令  $x = -1$ ，則  $A = -1$ 。代入上式，并移項， $(x+1)f(x) = (x-2)^2 + 9x^3 - 24x^2 + 48x = x^4 + x^3 + 16x + 16$ ，

$$\therefore f(x) = x^3 + 16$$

又令  $x-2 = z$ ，

$$\text{則 } \frac{f(x)}{(x-2)^2} = \frac{x^3 + 16}{(x-2)^2} = \frac{(z+2)^3 + 16}{z^2}$$

$$= \frac{z^3 + 6z^2 + 12z + 24}{z^2} = \frac{1}{z}$$

$$+ \frac{6}{z^2} + \frac{12}{z^3} + \frac{24}{z^4} = \frac{1}{x-2}$$

$$+ \frac{6}{(x-2)^2} + \frac{12}{(x-2)^3} + \frac{24}{(x-2)^4}$$

$$\text{故原式} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{6}{(x-2)^2} + \frac{12}{(x-2)^3}$$

$$+ \frac{24}{(x-2)^4} \quad (\text{IV})$$

有時已知代數式之分子，其所含某文字之次數，比分母爲高者，則先以分母除分子，即可以所得整代數式與分數式之代數和表其原分數，而以所得之分數式視其屬於上述之何種，再按法分析之。

**【部分被除數】** Partial dividend.

〔算〕〔代〕於除法中各階級被除數之部分，謂之部分被除數。例

如 6847 以 41 除之，演

算如右，其各階級之被除數如 68, 274, 287 即

6800, 2740, 287 皆爲部

分被除數。

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 6847} \quad (167) \\ \underline{41} \phantom{00} \\ 274 \phantom{0} \\ \underline{246} \phantom{0} \\ 287 \phantom{0} \\ \underline{287} \\ 0 \end{array}$$

閉

**【閉面】** Closed surface. 〔幾〕包圍空間之有限部分之面也，例如球面。

**【閉線】** Closed line. 〔幾〕包圍平面之一部之線也，例如圓，橢圓等。

**【閉多角形】** Closed polygon. 〔幾〕數直線所包圍之直線形也，例如五角形，六角形等。

陰

**【陰歷】** Lunar calendar. 〔算〕以太陰繞

地球一週之日期爲一月者，謂之陰歷，即我國向來所用之歷。太陰繞地球一週須時二十九日十二小時四十四分三秒，故陰歷之月，或爲三十日而大，或爲二十九日而小。而積十二月之久，又與陽歷之一年約差十日二十一小時，故必添置閏月，恆三年而一閏，五年而再閏，十九年而七閏。陰歷每月以朔月爲始，晦月爲終，故望月之盈虛而知其時日，頗爲農家或行旅者所便，而其一年之日數，多少不確，且與各國不同，甚爲不便，故民國以後，已廢止之。

**【陰函數】** Implicit function. 〔數〕函數

中自變數與因變數混在一方程式而未經解出者，則其因變數稱爲自變數之陰函數，例如在方程式  $axy + bx + cy + d = 0$ ， $y$  爲  $x$  之陰函數。解此方程式，得

$$y = -\frac{bx+d}{ax+c}$$

則  $y$  即爲  $x$  之陽函。

頂

**【頂】** Vertex. 〔幾〕(1)角之頂者角之兩邊之交點也。(2)二等邊三角形底邊之對



角稱爲其頂。(3)多角形之角頂者其多角形各角之頂也。(4)圓錐或角錐之頂者圓錐或角錐之尖頭也。(5)普通三角形可以任一邊爲底，而對其所取之底之角頂，即爲三角形之頂或頂點。

【頂角】Vertical angle. [幾](1)三角之頂角者對其底邊之角也。(2)錐體之頂角者對其底面之立體角也。

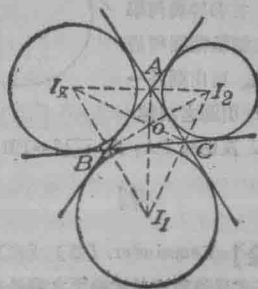
十二畫

傍

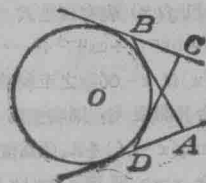
【傍心】Ex-centre. [幾]傍切圓或傍切球之中心，稱爲傍心。

【傍切球】Exscribed sphere 或 Escribed sphere 或 Ex-sphere. [幾]切於四面體之一面及他三面之延伸面之球也。

【傍切圓】Exscribed circle 或 Escribed circle 或 Ex-circle. [幾]切於三角形之一邊及他三邊之延長線之圓也，如下圖。故三角形有三傍切圓，每角之內二



等分線與他二角之外二等分線必交於一點，其交點即爲三角形之內心，如上圖之  $I_1, I_2, I_3$ 。通例傍切圓多就三角形而言，



其實不限於三角形，如下圖之  $O$  圓即為交截四邊形  $ABCD$  之傍切圓。

【傍心三角形】Ex-central triangle.

〔幾〕連結三角形之內心及二傍心所生之三角形也，如上第一圖之  $OI_1I_2$ ， $OI_1I_3$  及  $OI_2I_3$ 。

### 割

【割線】Secant. 〔幾〕截曲線於二點或多於二點之直線，謂之該曲線之割線。

若割線以其交點之

一為樞而迴轉之，

至與第二交點相重

合，則割線成為切

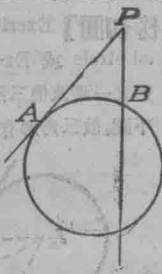
線，在初等幾何學

圓之割線截圓周於

二點。而由圓外一

點  $P$  引圓之割線

$PBC$  及切線  $PA$ ，則  $\overline{PA}^2 = PB \cdot PC$ 。



### 剩

【剩餘】Remainder. 〔算〕〔代〕某數或某式以他數或他式除之之殘餘也。例

如  $7 \div 3$  得商 2，其剩餘為 1，又  $(3x+5) \div (x+1)$  得商 3，其剩餘為 2。

【剩餘定理】Remainder theorem.

〔代〕以  $f(x)$  表有理整式

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + 1.$$

將  $f(x)$  以  $x-\alpha$  除之至剩餘不含  $x$  而止。命其商為  $Q$ ，則剩餘為  $R$ ，則

$f(x) \equiv Q(x-\alpha) + R$ ，此為恆等式，故於式中令  $x=\alpha$  則  $f(\alpha) \equiv Q \times 0 + R = R$ 。

即  $n$  次之有理整式以  $x-\alpha$  除之，其剩餘為與該式之  $x$  以  $\alpha$  代入之之結果

相等。是為剩餘定理。(例 1)  $x^3 - 4x^2 + 2$

以  $x-2$  除之，其剩餘為  $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2$

$= -6$ 。(例 2)  $2x^4 - 7x^3 + ax + b$  若能

為  $x-3$  所整除，則  $a$  與  $b$  之關係如

何。將此式之  $x$  以 3 代入之而令其剩

餘為零，即  $2 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^3 - 3a + b = 0$ ，故

$3a + b = 27$ ，即所求之關係也。由剩餘定

理可立刻證明以下諸式， $n$  為正整數。

(I)  $x^n - y^n$  常為  $x-y$  所整除。因其

剩餘為  $y^n - y^n$  或 0 也。

(II)  $x^n + y^n$  能為  $x+y$  所整除，當  $n$

為奇數時。因如  $n$  為奇數，則  $x+y$  除

$x^n + y^n$  之剩餘為  $(-y)^n + y^n = -y^n + y^n$

$= 0$  也。若  $n$  為偶數則其剩餘為  $(-y)^n$

$+ y^n = y^n + y^n = 2y^n$ ，故  $x+y$  不能除

盡  $x^n + y^n$ 。

(III) 同理當  $n$  為偶數時， $x^n - y^n$  能

為  $x+y$  所整除，而  $x^n + y^n$  則永不能

為  $x-y$  所整除。

### 單

【單比】Simple ratio. 〔算〕比之前後項皆祇一數者曰單比，例如 3:7 及 8:5 者為單比。

【單式】Simple expression. 〔代〕僅由一項所成之式，即一項式也，見該條。

【單位】Units. 〔算〕凡欲表明某量之多寡，必取其同類一定之量以為標準，是為單位。以單位量與某量比較，而定某量含單位量若干倍或若干分，而後某量之大

小，可以一覽而明。其表示若干倍或若干分之數值，謂之某量之測度。學術上所用之量甚多，惟吾人恒利用各種量間所有一定關係，僅選少數單位，以為基本，其他種單位以所選少數單位誘導構成之。此所選少數單位謂之基本單位 (Fundamental units)，由基本單位誘導而出之單位，謂之誘導單位 (Derived units)。普通所出之基本單位為長，時，質量三者，以 [L]，[T]，[M] 等符號表之。各國所通行者，長以一 Centimeter (我國名公分，一米突之百分之一) 為單位，質量以 gramme (我國亦曰公分，即攝氏四度時一立方 Centimeter 蒸溜水之重量) 為單位，時以一 Second (秒即一平太陽日之八萬六千四百分之一) 為單位，而總名之曰 C.G.S. 單位制，即取三基本單位原語之第一字母而名之也。

【單利】 Simple interest. [算] [代] 單利者無論經歷若干時期，其本金始終不變，即前期之利不加入於後期之本者也。命本金為  $P$ ，利率為  $r$ ，期間為  $n$ ，利息為  $I$ ，本利和為  $A$ ，則

$$I = P \cdot r \cdot n, \quad A = P(1 + r \cdot n).$$

【單比例】 Simple proportion. [算] [代] 比例之相等符號之雙方皆由單比而成者稱曰單比例，例如  $5:7=15:21$ ， $a:b=c:d$ 。故單比例只有四數，而單比例之題，必有三數為已知以求一數。例如茶 5 斤價 18 元，問茶 7 斤價若干。命七斤之價為  $x$  元，則  $5:7=18:x$ ，

$\therefore x = \frac{18 \times 7}{5} = 25.2$  元。單比例有正比例與反比例二種，見各條。

【單平均】 Single average. [算] 與複平均相對之語，即單純之平均也。例如日曜日正午之溫度為華氏 88 度，月曜日為 70 度，火曜日為 69 度，水曜日為 68 度，木曜日為 71 度，金曜日為 70 度，土曜日為 67 度，則求此一週間之平均溫度，即為單平均。

【單名數】 Simple number. [算] 凡用一個單位所表示之數，無論整數小數，皆謂之單名數。例如 12 尺及 4.5 丈等皆單名數也。單名數為與複名數相對之語，見該條。

【單曲面】 Single curved surface. [幾] 見曲面條。

【單位圓】 Unit circle. [三] 半徑為 1 之圓也。

【單合資算】 Simple partnership. [算] 見合資算條。

【單循環節】 Single repetend. [算] 見循環小數條。

【單假設法】 Single position. [算] 見假設法條。

【單翼雙曲線體】 Hyperboloid of one sheet. [幾] 二次曲面以次之方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

表示之者，謂之單翼雙曲面體。

**【富爾巴定理】** Feuerbach's theorem  
〔幾〕即「三角形之九點圓切於其內切圓  
及三傍切圓」之定理，爲九點圓中最有名  
者。

## 幾

**【幾何像】** Geometrical image. 〔幾〕見  
平面對稱條。

**【幾何學】** Geometry. 〔幾〕幾何學者數學  
之一分科，論物體之形狀大小及位置而  
研究其真理者也。初等幾何學 (Elementary  
Geometry) 論點，直線，圓，及其集  
合，或由直線或圓所成之面（即平面，圓  
柱面，圓錐面，球），并與之對應之立體。

高等幾何學 (Higher Geometry) 論複雜  
之線即如圓錐曲線等。考幾何一學，發明  
甚古，二千五百年前希臘人 Thales 時  
已卓然成科。後至紀元前三世紀，誕生  
三傑，太古幾何學遂達於極點。三傑者首  
Euclid，著幾何原本，將當時幾何學之知  
識，重爲整理，加以嚴密之證明，更附以  
一己所發明者，遂成宏大之著作。迄今學  
者仍讀其書不衰。Euclid 沒而 Archi-  
medes 及 Apollonius 繼踵以興，咸爲  
幾何學中之元勳。惟 Archimedes 之事  
業，偏於度量的幾何學，Apollonius 則  
偏於圖形的，兩大分科之基礎，二氏實肇  
之。自茲以後，此學發達甚緩，直至距今  
三百年前，法人 Descartes 出，創坐標  
之法，以代數應用於幾何，研究之法全  
變，幾何之學，嶄然一新，世所稱爲解析  
幾何學者是也。然一方解析幾何學進步

時，一方又起一分科，其導源之星宿海，  
遠在 Apollonius，而使之屹然獨立者，  
厥爲 Desargues 及 Pascal 二人，其所  
創之法，今日稱爲近世幾何學，仍就幾何  
學之本體而研研之，一切解析法，摺除不  
用，雖其說見斥於當時，然日後亦駁駁乎  
盛矣。至距今七十年前，又有一分科起，  
將 Euclid 書中關於空間之思想，全行顛  
覆，斥其所論平行線之公理爲謬妄，是爲  
非歐幾里得幾何學 (Non-Euclidian  
Geometry)。故綜前所論，今日幾何學之  
分科，厥有四種，即一太古人之幾何學，  
一解析幾何學，一近世幾何學，一非歐幾  
里得幾何學是也。

**【幾何體】** Geometrical solid. 〔幾〕空  
間之有限部分稱爲幾何體或立體。空間  
可得而分離，取其一部而考之，即爲幾何  
體。幾何體與物體異，物體爲實質體，如  
木石金等，幾何體則僅指物體所占有之  
空間之一部而言，不計其實質。立體有  
長，廣，厚，且可分離。

**【幾何中項】** Geometric mean. 〔算〕  
〔代〕即等比中項，見等比級數條。

**【幾何公理】** Geometrical axiom. 〔幾〕  
幾何公理者關於幾何學之公理也，即如  
次所述。 I. 圖形可不變其形狀及大小  
而變其位置。 II. 全相合之量爲相等。  
III. 過一點在一方向引一直線，而只限  
於一直線。此公理又可換言之如次所述。  
一點與一方向可決定一直線。由此公理  
可知次之二件。 1. 二點可決定一直線  
(或若二直線公有二點則全相合而爲一

直線)。2.相異二直線只能相交於一點。

IV.兩點間之最短距離為其間之直線。

V.凡周角皆相等。VI.過一點可引一直線平行於一已知直線，且只限於一直線，等。

【幾何級數】Geometrical progression 或 Geometrical series. [算][代]即等比級數，見該條。

【幾何圖形】Geometrical figure. [幾]點線面體合成之形，稱為幾何圖形。

【幾何學之三大問題】Three famous problems in Geometry. [幾]求立方體之倍積，任意角之三等分及等於圓面積之正方，此三者稱為古代幾何學之三大問題。是等問題為初等幾何學即以直線及圓為範圍之幾何學所不可解。詳見各條。(1)見立方倍積問題，(2)見角之三等分，(3)見圓積問題條。

## 循

【循環節】Recurring period or Repeatend. [算][代]見下條循環小數。

【循環小數】Recurring decimal 或 Repeating decimal. 或 Circulating decimal. [算][代]無限小數之一種，有以同數字依同順序連續重列者，謂之循環小數。其連續重列之循環部分，謂之循環節。循環小數有純[正]雜[混]二種，純循環小數者小數點之右之第一數字即循環節之第一數字，即純由循環節而成者也。雜循環小數者，有一或數數字在小數點與循環節之間者也。單循環節者只有

一數字循環者也，例如  $0.333\dots$ 。如斯之循環小數則於循環節之一數字上記“ $\cdot$ ”以表之，例如  $0.\dot{2}$  與  $0.222\dots$  同， $0.\dot{3}$  與  $0.333\dots$  同。複循環節者，例如  $0.57235723\dots$ ，其循環節為由多於一之數字而成者也，而此等循環小數則於循環節首尾二位之上，各記“ $\cdot$ ”以表之，如上例則可記為  $0.\dot{5}72\dot{3}$ 。純循環小數之值等於以循環節為分子，依循環節數字之數列書若干個 9 為分母之分數，例如  $0.\dot{2} = \frac{2}{9}$ ，

$$0.\dot{5}72\dot{3} = \frac{5723}{9999}$$

$$\begin{aligned} \text{因 } 5723 &= 5723 \cdot 572\dot{3} - \cdot 572\dot{3} \\ &= \cdot 572\dot{3}(10000 - 1) = \cdot 572\dot{3} \times 9999, \end{aligned}$$

$$\therefore 0.\dot{5}72\dot{3} = \frac{5723}{9999}.$$

雜循環小數之值等於取循環節前之小數部分為分數，與以循環節為分子，依循環節數字之數列書若干個 9，又依小數點與循環節第一數字間數字之數添加若干

$$0 \text{ 為分母之分數。例如 } 2.4\dot{1}8 = 2\frac{4}{10} +$$

$$\frac{18}{990} = 2\frac{23}{55}, 0.13\dot{0}8\dot{1} = \frac{13}{100} + \frac{81}{99900} =$$

$$\frac{121}{925}. \text{ 或云雜循環小數化成分數，可自}$$

循環小數減不循環數用為分子，連列 9 字與循環節數字之數相等，添附 0 字，與不循環部分數字之數相等，用為分母，而

$$\text{再約之。例如 } 0.26\dot{1}3\dot{5} = \frac{26135 - 26}{99900}$$

$$= \frac{967}{3700}. \text{ 因 } 26135 - 26 = 26135 \cdot 13\dot{5}$$

$$- 26 \cdot 13\dot{5} = \cdot 2613\dot{5}(10000 - 100)$$

$$= .2613\dot{5} \times 99900,$$

$$\text{故 } 0.2613\dot{5} = \frac{26135 - 26}{99900}.$$

其實兩法全同，如本例以第一法解之，

$$\text{則爲 } 0.2613\dot{5} = \frac{26}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{135}{999}$$

$$= \frac{26 \times 999 + 135}{99900} = \frac{26 \times (1000 - 1) + 135}{99900}$$

$$= \frac{26000 - 26 + 135}{99900} = \frac{26135 - 26}{99900} \text{ 也。}$$

同初位循環節者，其循環節同始於小數之第幾位也，例如  $0.3\dot{5}4$  與  $0.7\dot{5}34$ 。不同初位循環節者，其循環節始於相異之小數位也，例如  $0.1\dot{2}5$  與  $0.3\dot{5}4$  之謂。同末位循環節者，其循環節同終於小數之第幾位也，例如  $0.235\dot{6}$  與  $2.357\dot{4}$  之謂。

〔循環小數之性質〕(1)任意之小數可以 0 爲循環節而作成循環小數之形，例如  $0.35$  可書爲  $0.35\dot{0}$  或  $0.350\dot{0}$  或  $0.3500\dot{0}$ 。

(2) 循環小數可以其原循環節（數字之數）之二倍或數倍爲新循環節之小數，例如  $0.25\dot{3}7$  可書爲  $0.25\dot{3}73\dot{7}$  或  $0.25\dot{3}7373\dot{7}$ 。故凡循環節數字之數不同之數循環小數，可由次之法則，使變成循環節有同數之數字。即取數循環小數循環節數字之數之最小公倍數，以其數取各循環小數新循環節之數字可也。例如  $0.13\dot{8}$ ， $7.5\dot{4}3$  及  $0.04\dot{3}54$  得書爲  $0.13\dot{8}8888\dot{8}$ ， $7.5\dot{4}3434\dot{3}$  及  $0.04\dot{3}5435\dot{4}$ ，因 1, 2, 3 最小公倍數爲 6 也，是曰通位法。(3) 任意之循環小數其小數點與循環節第一數字之間可得爲有任意之若干數字，例如  $0.5\dot{7}$  可書爲  $0.57\dot{5}$  或  $0.57\dot{5}7$  或  $0.575\dot{7}$ 。

故任意之二循環小數可使成爲同初位并同末位循環節之循環小數。

〔循環小數之運算〕(1) 加法宜先通位使有同初位且同末位之循環節，然後相加，又依循環首位所進於上位之數，而加於

$$\begin{array}{r} .00\dot{5}1 = .00\dot{5}151\dot{5}1 \quad \text{循環末位。例} \\ 3.27\dot{8}\dot{5} = 3.27\dot{8}578\dot{5}7 \quad \text{如求 } .00\dot{5}1 + \\ .6\dot{9} = .699999\dot{9} \quad 3.27\dot{8}\dot{5} + .6\dot{9} \\ .18 = .180000\dot{0} \quad + .18 \text{ 之和，則} \\ \hline 4.16\dot{3}7300\dot{9} \quad \text{如左式。} \end{array}$$

(2) 減法先通位而後求其較。若循環首位減數大於被減數，則較之循環末位宜減

$$\begin{array}{r} 1. \text{例求 } 2.\dot{3} - 2.\dot{3} = 2.3\dot{3}3\dot{3} \\ .18\dot{2}5 \text{ 之較，則如 } .18\dot{2}5 = .18\dot{2}5 \\ \hline \quad \quad \quad 2.1\dot{5}07 \end{array}$$

(3) 乘法，以整數或有限小數乘循環小數，其異於通常乘法者，宜加以循環首位進位之數，而各部分積，必先通位而後相加。例求  $1.0\dot{3}7 \times 2.8$  之積。以 8 乘得之

$$\begin{array}{r} 1.0\dot{3}7 \quad \text{積本爲 } 8296, \text{ 因 } 8 \text{ 乘} \\ 2.8 \quad \text{循環首位 } 3 \text{ 時，有 } 2 \\ \hline .829\dot{8} \dots \cdot 829\dot{8} \\ 2.07\dot{4} \dots \cdot 2.07\dot{4}7 \\ \hline 2.90\dot{4}6 \quad .829\dot{8}, \text{ 以 } 2 \text{ 乘得之積} \\ \text{爲 } 2.07\dot{4}, \text{ 與前積通位，得 } 2.07\dot{4}7, \text{ 相} \\ \text{加，得所求之積 } 2.90\dot{4}6. \text{ 若乘法之乘數} \\ \text{被乘數均爲循環小數，則將乘數之循環} \\ \text{小數化爲分數，以分子乘被乘數而以分} \\ \text{母除之。例 } 3\dot{8}.5\dot{7} \times .92\dot{7} = 3\dot{8}.5\dot{7} \times \frac{51}{55} \\ = 35.77286\dot{5}. \end{array}$$

(4) 除法，以整數或有限小數除循環小

數，可如通常法除之，實數取盡，即續附循環數再除之，至商成循環數而止。例求

$0.0315 \div 2.4$  之商。先以  $2.4$  除  $0.0315$

$2.4 \cdot 0.013138$

24

75

72

33

24

91

72

195

192

33

得商數  $0.013138$ ，

實之數字已盡，

乃續書循環數於

殘數  $3$  之右，再

除之，逐次如是，

除至商數為  $8$  時，

其殘數又為  $3$ ，

即知商之循環數

為  $138$ ，而全商

為  $0.013138$ 。若除法之除數被除數，均為

循環小數，則將除數之循環小數化為分

數，以分母乘被除數而以分子除之。例

$1.28\dot{6} \div 1.\dot{3} = 1.28\dot{6} \div \frac{13}{99} = 1.28\dot{6} \times$

$\frac{99}{13} = 127.39\dot{9} \div 13 = 127.4 \div 13 = 9.8$ 。

惟循環小數之乘除，實以盡化各數為分

數，而以分數行乘除為便。

### 【循環級數】Recurring series. [代]

級數  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  於

其連續  $r+1$  項之間，有  $a_nx^n + px(a_{n-1}$

$x^{n-1}) + qx^2(a_{n-2}x^{n-2}) + \dots = 0$  之關係者，

謂之  $r$  次循環級數，而以  $1 + px + qx^2 +$

$\dots$  為關係式 (Scale of relation)。此關

係不僅對於其第  $n$  項以前之  $r$  項為合

理，即自初項至  $r$  項以後之諸項，皆適

合於此關係也。例級數  $1 + 2x + 4x^2 +$

$8x^3 + \dots$  為一次循環級數，而其關係

式為  $1 - 2x$ 。又級數  $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3$

$+ 9x^4 + \dots$  為二次循環級數，而其關係式

為  $1 - 2x + x^2$ 。若關係式為已知，并已知

所求任意項以前之各項時 (以足用為限)，

則可求得該項。如  $1 - px - qx^2 - rx^3$  為級

數  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  之關係，

則  $a_nx^n = px \cdot a_{n-1}x^{n-1} + qx^2 \cdot a_{n-2}$

$x^{n-2} + rx^3 \cdot a_{n-3}x^{n-3}$ ，或  $a_n = pa_{n-1}$

$+ qa_{n-2} + ra_{n-3}$ 。即當任一項以前三項

之係數為已知，則可求得該項之係數。

反之若級數之各項 (以足用為限) 為已

知，則可求得其關係式。例求級數

$2 + 5x + 13x^2 + 35x^3 + \dots$  之關係式。令

其關係式為  $1 - px - qx^2$ ，則  $13 - 5p - 2q = 0$

又  $35 - 13p - 5q = 0$ ，故  $p = 5$  及  $q = -6$ ，

而所求之關係式為  $1 - 5x + 6x^2$ 。

〔求已知級數  $n$  項之和〕級數  $a_0 + a_1x +$

$\dots + a_nx^n + \dots$ ，假定其關係式為

$1 + px + qx^2$  (此關係式為二次者，若為

一次，則  $q = 0$ ，若二次以上，可由此關

係類推之)。

$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

$+ a_nx^n$ 。

$\therefore S_n(1 + px + qx^2) = a_0 + (a_1 + pa_0)x +$

$(a_2 + pa_1 + qa_0)x^2 + \dots + (a_n +$

$pa_{n-1} + qa_{n-2})x^n + (pa_n + qa_{n-1})$

$x^{n+1} + qa_nx^{n+2} = a_0 + (a_1 + pa_0)x +$

$(pa_n + qa_{n-1})x^{n+1} + qa_nx^{n+2}$ ，

其間  $(a_2 + pa_1 + qa_0)x^2 + \dots + (a_n$

$+ pa_{n-1} + qa_{n-2})x^n$  諸項皆適合於

$a_kx^k + px(a_{k-1}x^{k-1}) + qx^2(a_{k-2}x^{k-2})$

$\equiv 0$  之關係，故悉消去之。(但此關係其

$k$  之值為大於  $1$ )。由是

$S_n = \{ a_0 + (a_1 + pa_0)x + (pa_n + q$

$a_{n-1}x^{n+1} + qa_nx^{n+2}$  }  $\div$   $\{ 1+px+qx^2 \}$ . 此已知級數如爲收斂級數, 則  $n$  增至極大時, 其第  $n$  項爲極小, 故其無窮項之和

爲  $S_\infty = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x}{1+px+qx^2}$ . 若將此式

依  $x$  之昇幂展開之, 而爲收斂級數者, 其展開式中  $x^n$  之係數, 與此循環級數中  $x^n$  之係數相同. 故此式

$$\frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x}{1+px+qx^2}$$

稱爲二次循環級數之母函數(The generating function). 若其母函數可以部分分數表之者, 則此循環級數之公項容易求得. 如設其母函數可分解爲部分分數

$$\frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1+bx} + \frac{C}{(1-cx)^2}$$

則其公項爲  $\{ Aa^r + (-1)^r Bb^r + (r+1)Cc^r \} x^r$ .

在此情形時, 可不用前法以求其  $n$  項之和. 例求循環級數  $1-7x-x^2-43x^3-\dots$  之母函數, 公項及其  $n$  項之和. 令其關係式爲  $1-px-qx^2$ , 則  $-1+7p-q=0$

及  $-43+p+7q=0$ , 故  $p=1, q=6$ ,

而關係式爲  $1-x-6x^2$ . 令  $S$  表其  $n$  項之和, 則  $(1-x-6x^2)S=1-8x$ ,

$\therefore S = \frac{1-8x}{1-x-6x^2}$ , 此爲其母函數. 將

此分解爲部分分數, 得  $\frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1-3x}$ ,

故  $(r+1)$  之公項爲

$\{ (-1)^r 2^{r+1} - 3^r \} x^r$ . 令  $r=0, 1, 2, \dots, n-1$ , 則  $n$  項之和

$$= \{ 2-2^2x+2^3x^2-\dots+(-1)^{n-1}2^n x^{n-1} \} \\ - \{ 1+3x+3^2x^2+\dots+3^{n-1}x^{n-1} \}$$

$$= \frac{2+(-1)^{n-1}2^{n+1}x^n}{1+2x} - \frac{1-3^n x^n}{1-3x}$$

**【循環順序】** Cyclical order. [代] 見輪換次序條.

## 插

**【插入法】** Interpolation. [代] 設  $y$  之值因  $x$  而定, 而對於  $x$  在  $a$  與  $b$  間之各值,  $y$  有一定值. 又謂已知  $y$  之相當於  $x$  之某若干值之各值. 由是由此諸值可誘得  $y$  之相當於  $x$  在  $a, b$  間之他值之值. 而此法謂之插入法. 插入法不外不定係數法及差法二者. 不定係數法爲設已知  $y$  之相當於  $x=x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$  之  $r+1$  值  $y=y_1, y_2, \dots, y_{r+1}$ , 由不定係數法求得公式  $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_r x^r \dots (1)$ . 由此公式可計算  $y$  之相當於  $x$  之值之值. 例如當  $x=2, 3,$

$4, 5$ , 知  $y=5, 4, -7, -34$ ; 當  $x=\frac{5}{2}$ , 求  $y$ . 設  $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ . 則得

$$5=a_0+2a_1+4a_2+8a_3.$$

$$4=a_0+3a_1+9a_2+27a_3.$$

$$-7=a_0+4a_1+16a_2+64a_3.$$

$$-34=a_0+5a_1+25a_2+125a_3.$$

解此等方程式, 得  $a_0=1, a_1=-2,$

$a_2=4, a_3=-1$ . 故  $y=1-2x+4x^2-x^3$ .

故當  $x=\frac{5}{2}$ , 得  $y=1-5+25-\frac{125}{8}$

$$=-\frac{43}{8}. \quad (1) \text{式可化爲}$$

$$y=y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{r+1})}$$



$$+y^2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})} + \cdots$$

$$+y^r + 1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)}.$$

是謂之拉格蘭 (Lagrange) 之公式。  
差法詳該條。

## 普

【普通式】General expression. [代] 一般之式之謂。例如一未知數之一次普通式為  $ax+b$ ，二次普通式為  $ax^2+bx+c$ 。又如  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，在某情形時與公式之意同。

【普通項】General term. [代] 級數中一般之項之謂。例如  $(a+b)^n$  之二項展開式之普通式為  $\frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} b^r$ 。

又見公項條。

【普通公理】General axiom. [數] 推理之基本命題關於普通之量者之謂。普通公理通例如次所述。(1) 全量等於其各部分之和，故全量大於其部分。(2) 與同量或等量相等之諸量，彼此必等。(3) 等量加等量，其和必等。(4) 等量減等量，其差必等。(5) 不等量加等量，其和不等，大者仍大。(6) 不等量減等量，其差不等，大者仍大。(7) 等量減不等量，其差不等，所減為大量者，所餘為小量，所減為小量者，所餘為大量。(8) 等量之同倍數之量相等，又等量之同分數之量相等。

【普通解答】General solution. [代] 用一般之數作答數之公式，稱為普通解

答。例如於「父年 30 歲，子年 10 歲，問幾年之後，父年為子年之二倍」。之問題，命父年為  $a$  歲，子年為  $b$  歲，求幾年後父年為子年之  $m$  倍，因得  $a+x=m(b+x)$ ，即  $x=\frac{a-mb}{m-1}$ ，是為普通之解答。如本例  $a$  為 30， $b$  為 10， $m$  為 2，代入之得  $x=\frac{30-2 \times 10}{2-1}=10$ ，即十年之後父年二倍於子年也。

【普通算術】Universal arithmetic. [數] 大數學家牛頓 Newton 氏著一書名 Arithmetica Universalis，是為普通算術 (Generalised Arithmetic) 之起源，即論一般之數之算術，實代數學之別名。然當時之普通算術不如現代數之發達。

【普通二次式】General quadratic expression. [代] 二次式之諸項完備者，稱為普通二次式。例如  $x$  之二次式號  $ax^2+bx+c$ ， $x$  及  $y$  之二次式為  $ax^2+bx+cy^2+dx+ey+f$ 。

【普通二次方程式】General quadratic equation. [代] 普通二次方程式，為  $ax^2+bx+c=0$ 。

## 最

【最大值】Greatest value. [代] 即  $nC_r$  之最大值，見組合條。

【最大項】Greatest term. [代] 見二項式定理條。

【最大係數】Greatest coefficient. [代] 見二項式定理條。

**【最簡分數】** Fraction in its lowest term. [算][代]分數之分子分母所有之公約數已約盡者，見已約分數條。

**【最小二乘法】** Method of lowest square. [數] 為數學之一分科，以平均誤差為主要點，於天體測量，測地學等用之。

**【最小公分母】** Least Common denominator. [算][代]有相異分母之諸分數，恒可以有同分母之分數表之，而此公分母之數，以最小為便。最小公分母者，即諸分母之之最小公倍數也。例如欲化

$\frac{4}{9}, \frac{6}{12}, \frac{7}{15}$  為同分母，則可先求諸

分母之最小公倍數，使為最小公分母。

乃以各分母除之，以各商乘各分子，使為各新分子，此因分數之分子分母以同數乘之其值不變也。本例之最小公分母為 180，而

$$180 \div 9 = 20, \quad \text{故} \quad \frac{4}{9} = \frac{4 \times 20}{9 \times 20} = \frac{80}{180},$$

$$180 \div 12 = 15, \quad \text{故} \quad \frac{6}{12} = \frac{6 \times 15}{12 \times 15} = \frac{75}{180},$$

$$180 \div 15 = 12, \quad \text{故} \quad \frac{7}{15} = \frac{7 \times 12}{15 \times 12} = \frac{84}{180},$$

$$\text{故} \quad \frac{4}{9}, \frac{6}{12}, \frac{7}{15} \text{ 等於 } \frac{80}{180}, \frac{75}{180}, \frac{84}{180}.$$

又如求化  $\frac{x}{a^2b(x+a)}, \frac{z}{ab^2(x-a)}$

$\frac{z}{ab(a^2-a^2)}$  為同分母之分數。此三分母之最小公倍數為  $a^2b^2(x^2-a^2)$ ，順次以各分母除之，其商為  $b(x-a), a(x+a), ab$ 。各以其商乘其分母分子，因得

$$\frac{x}{a^2b(x+a)} = \frac{x \cdot b(x-a)}{a^2b(x+a) \times b(x-a)}$$

$$= \frac{bx(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)},$$

$$\frac{y}{ab^2(x-a)} = \frac{y \cdot a(x+a)}{ab^2(x-a) \times a(x+a)}$$

$$= \frac{ay(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)},$$

$$\frac{z}{ab(x^2-a^2)} = \frac{z \cdot ab}{ab(x^2-a^2) \times ab}$$

$$= \frac{abz}{a^2b^2(x^2-a^2)}.$$

通分時其公分母並不限於最小公分母，惟以最小公分母為最簡便耳。

**【最小公倍數】** Least common multiple. [算] 在算術中二以上之數之最小公倍數者，即能為各數所整除而又為最小之數也；恒略記為 L. C. M. 例如 60, 120, 180 等皆為 3, 4, 5 之公倍數，而其中 60 為最小。故 60 為 3, 4, 5 之最小公倍數。

[求二數小最小公倍數之法] 例如求 475 589 之最小公倍數。先求得 475 與 589 之最大公約數為 19。而 475 與 589 以此最大公約數即 19 除之，其商為 25 與 31，此二商為互素數，則 475 之各倍數必可含 19 及 25 之因數，又 589 之各倍數必可含 19 及 31 之因數，故 475 及 589 之各公倍數必可含 19, 25 及 31 諸因數，故所要之最小公倍數即為

$$19 \times 25 \times 31 = 475 \times 31 = 589 \times 25 = 14725.$$

今可換書之為  $19 \times 25 \times 31 = 589 \times (475 \div 19) = 475 \times (589 \div 19) = 475 \times 589 \div 19.$

由是知二數之最小公倍數，可以其最大公約數除二數之一，而以其商乘他一數得之。或以其最大公約數除二數之積而得之。〔求三以上之數之最小公倍數之法〕先求得二數之最小公倍數，再與第三數求其最小公倍數，如斯逐次求之可也。

例如求 45, 60, 72 之最小公倍數。茲 45 與 60 之最小公倍數為 180，而 180 與 72 之最小公倍數為 360，故 45, 60, 72 之最小公倍數為 360。〔求最小公倍數之簡法〕諸數容易分解為素因數者，則可直接求其最小公倍數。例如求 45, 60, 72, 96 之最小公倍數，

$$\begin{aligned} 45 &= 3 \times 3 \times 5 &= 3^2 \times 5, \\ 60 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 &= 2^2 \times 3 \times 5, \\ 72 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 &= 2^3 \times 3^2, \\ 96 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 &= 2^5 \times 3. \end{aligned}$$

此四數之因數為由 2, 3, 5 之乘幂而成，此四數之公倍數為含有各數中是等因數之最高幂，而其最小公倍數又為不含他因數。故所要之最小公倍數為  $2^5 \times 3^2 \times 5 = 1440$ 。此運

算又可如次所

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 45, 60, 72, 96} \\ 5 \overline{) 15, 20, 24, 32} \\ 8 \overline{) 3, 4, 24, 32} \\ \quad \quad \quad 3, 4 \end{array}$$

述。即將諸數並書為一列，以二數以上之公約數除之，

其不能約之數與各商並書於第二列，再依前法以公約數除之，直至同列之數為互素而止，乃將各公約數與未列各數連乘，即得最小公倍數。於上例第三列消去 3 與 4 者，因 3 為 24 中所含之因數，

4 為 32 中所含之因數也。於此運算中須以素數為除數，然為簡略計用非素數亦可，如前例之 8 是。

**【最大公因數】** Greatest common factor. [算] [代] 即最大公約數或最高公因數，見該條。

**【最大公約數】** Greatest common measure. [算] 在算術中，二以上之數之最大公約數者，即能整除其各數而又為最大之數也。例如 12 與 18 之最大公約數為 6，因 2, 3, 6 皆為 12 與 18 之公約數，而以 6 為最大也。最大公約數恒略記為 G. C. M.。

〔求最大公約數之第一法〕例如求 36, 42 及 84 之最大公約數。因

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 &= 2^2 \times 3^2, \\ 42 &= 2 \times 3 \times 7 &= 2 \times 3 \times 7, \\ 84 &= 2 \times 2 \times 3 \times 7 &= 2^2 \times 3 \times 7, \end{aligned}$$

故各數皆能為 2 及 3 所整除，而所要之最大公約數為  $2 \times 3 = 6$ 。用次所述之法，則較為簡便，即先用公約數除諸數，再用公約數除諸商，直至諸商為互素數而止。乃

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36, 42, 84} \\ 3 \overline{) 18, 21, 42} \\ \quad \quad \quad 6, 7, 14. \end{array}$$

將各公約數連乘，即得最大公約數，故本例之最大公約數為  $2 \times 3 = 6$ 。〔求最大公約數之第二法〕欲求二數之最大公約數，而不易知其公約數時，則可先以小數除大數，得剩餘，再以剩餘除小數，又得剩餘，如是遞以剩餘除法數，直至除盡而止。其最後之法數，即最大公約數。例如求 651 與 189 之最大公約數。由式之

189)651(3

567

84)189(2

168

21)84(4

84

0

運算，知 21 即爲  
所求之最大公約  
數。如求多數之  
最大公約數，則  
先取其中兩數依  
上法求得最大公

約數，順次遞求，至末後求得之數，即多  
數之最大公約數。例求 1085, 465, 651  
之最大公約數。先求得 465, 651 之  
G.C.M. = 93, 再求得 93 與 1085 之  
G.C.M. = 31, 故 31 即爲三數之最大公  
約數。〔第三法〕求諸數之最大公約數，  
除一數外，可不必求其素因數。例如求  
4095, 3029 及 1703 之最大公約數。將  
4095 分解爲素因數而得  $5 \times 7 \times 3 \times 3 \times$   
 $13$ ，而 3029 及 1703 二數皆不能爲  
5, 7, 3 所整除，然能爲 13 所整除，即  
 $3029 = 13 \times 233$  及  $1703 = 13 \times 131$ ，而  
233 及 131 無論其能分解爲如何之因數，  
但不能爲 5, 7 或 3 所整除，故所要之最  
大公約數即爲 13。

【最低公分母】Lowest common  
denominator. [代] 與最小公分母同，見  
該條。

【最低公倍數】Lowest common mul-  
tiple. [代] 在代數學中二以上之整式之  
最低公倍數者，即能爲其各式所整除而  
又爲最低次之式也，亦略記爲 L.C.M.  
例如求  $a^3b^2x$  及  $a^2b^3x^2$  之最低公倍  
數。二式中 a 之最高冪爲  $a^3$ ，故二式  
之任意公倍數不得不含  $a^3$  之因數。同理  
二式之任意公倍數不得不含  $b^3$  及  $x^2$  之

因數，故所要之最低公倍數爲  $a^3b^3x^2$ 。  
即求二以上諸一項式之 L.C.M. 取其各  
式中所有文字之最高冪，以爲因子，即得。  
求多項式之 L.C.M.，可先求得諸多項式  
之因數，乃準一項式求 L.C.M. 法，取  
其所有因數之最高冪即得。例如求  
 $a^3 + 3a^2b + 2ab^2$  及  $a^4 + 4a^3b + 3a^2b^2$   
之 L.C.M.。因

$$a^3 + 3a^2b + 2ab^2 = a(a+b)(a+2b),$$

$$a^4 + 4a^3b + 3a^2b^2 = a^2(a+b)(a+3b)$$

故所求之 L.C.M. =  $a^2(a+b)(a+2b)(a+3b)$ 。  
〔最高公因數與最低公倍數之  
關係〕設 A 及 B 爲任意二整式，其最高  
公因數爲 H，其最低公倍數爲 L，而以  
H 除 A, B 所得之商爲 a, b。即  $A = H \times a$ ，  
 $B = H \times b$ 。因 H 爲 A 及 B 之最高公因  
數，故 a 及 b 不復有公因數，

$$\therefore L = H \times a \times b \dots \dots \dots (1),$$

$$\text{從(1)} L = Ha \times \frac{Hb}{H} = A \times \frac{B}{H} \dots \dots \dots (2),$$

$$\text{又 } L \times H = Ha \times Hb = A \times B \dots \dots \dots (3).$$

從(2)知二式之最低公倍數等於以最高  
公因數除其一式而與他一式相乘之積。

從(3)知二式之積等於其最高公因數與  
最低公倍數之積。

【最高公因數】Highest common  
factor. [代] 代數學中二以上之整式之  
最高公因數者，即能整除其各式而又爲  
最高次之式也，恒略記爲 H.C.F.  
I. [一項式之 H.C.F.] 例求  $12x^2y^3zu$ ，  
 $6x^3y^4z^2u^2$ ， $24x^6y^3z^3$  之最高公因數。  
能除盡各式之公因數，x 之最高次爲

$x^2, y$  之最高次爲  $y^2, z$  之最高次爲  $z$ , 而  $n$  則非三次所公有, 又 12, 6, 24 之最大公約數爲 6, 故所求之 H. C. F. 爲  $6x^2y^2z$ . 由是二以上之一項式, 其最高公因數即各式中公有文字之最低累之積。

若諸一項式有數係數者, 則將諸數係數求其最大公約數, 而爲所求 H. C. F. 之數係數。II. [多項式之 H. C. F.] 求二多項式之 H. C. F. 與算術上求最大約數之法同, 即將二式俱以同一某文字之降冪列之, 而以其低次式除其高次式, 若爲同次, 則任以一式除他式, 若有剩餘, 則以其剩餘爲除式, 轉除前之除式依此法則, 逐次轉除之, 至無剩餘而止, 其最後之除式, 即爲二式之 H. C. F.。例求  $x^3+x^2-2$  及  $x^3+2x^2-3$  之最高公因數。用係數除法, 演之如次。

|                                                                                                                                                                                               |                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 1+1+0-2 \\ \underline{1+1+0-2} \\ 1+0-1 \\ 1+0-1 \\ \underline{1+0-1} \\ 1+1-2 \\ \underline{1+0-1} \\ 1-1 \\ 1+1 \\ \underline{1-1} \\ 1-1 \\ \underline{1-1} \end{array}$ | <p>故所要之最高公因數爲 <math>x-1</math>. 但上述之法, 爲僅求多項因數者。若兩多項式中含有一項因數, 則宜先取出之, 由觀察而求其</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|

H. C. F.。例如求  $x^4+x^3-2x$  及  $x^5+2x^4-3x^3$  之 H. C. F., 因

$$\begin{aligned} x^4+x^3-2x &= x(x^3+x^2-2), \\ x^5+2x^4-3x^3 &= x^2(x^3+2x^2-3). \end{aligned}$$

故一項因數之 H. C. F. 爲  $x$ , 而  $x^3+x^2-2$  及  $x^3+2x^2-3$  之 H. C. F. 前已求得爲  $x-1$ , 故所求之 H. C. F. 爲  $x(x-1)$ . 茲證明上述之定則於次。設  $A$  及  $B$  爲兩多項式, 各依同文字之降冪列之, 又  $B$  之次數較  $A$  爲高。以  $A$  除  $B$  得商爲  $Q$ , 其餘式爲  $R$ , 則

$$\begin{aligned} A) B(Q) & \text{ 故 } B=AQ+R \dots\dots(1), \\ \frac{AQ}{R} & \text{ } R=B-AQ \dots\dots(2). \end{aligned}$$

任意代數式之各項能以某式除盡之, 即其全式亦能以某式除盡, 故(1)式之  $B$  能以  $A$  及  $R$  之各公因數除盡, (2)式之  $R$ , 能以  $B$  及  $A$  之各公因數除盡。由是  $A$  及  $B$  之各公因數與  $A$  及  $R$  之各公因數全然相同, 故  $A$  及  $R$  之 H. C. F. 即所求  $A$  及  $B$  之 H. C. F.。今設以  $R$  除  $A$ , 其餘式爲  $S$ , 則  $R$  及  $S$  之 H. C. F. 可由同法推得與  $A$  及  $R$  之 H. C. F. 同, 亦即爲所求  $A$  及  $B$  之 H. C. F.。若依此續除之(即又以  $S$  除  $R$ ), 則其除式及被除式之 H. C. F., 必與原兩式之 H. C. F. 同。故依此方法除至無餘, 則其最後之除式, 必爲其最後之被除式之最高公因數, 即爲所求之最高公因數。依除法之性質, 餘式之次數必比除式爲低, 故如前次第施其除法, 則餘式必次第爲低次式, 若所得餘式無公有之文字, 則兩原式爲無最高公因數。前述之求 H. C. F. 法, 其兩式內皆不含一項之公因數, 即祇求多項式之 H. C. F. 也。故其被除式或除式, 以任何一項式除之或乘之, 其所求之 H. C. F.

不變。例如求  $x^5 - y^5$  與  $x^7 - y^7$  之最高公因數。則如次之運算，故  $x - y$  為所求之 H.C.F.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & \frac{x^5 - y^5}{x^5 - x^3y^2} \\ xy^2 & \frac{x^3y^2 - y^5}{x^3y^2 - xy^4} \\ y^4 & \frac{xy^4 - y^5}{x - y} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^2 & \frac{x^7 - y^7}{x^7 - x^3y^4} \\ x & \frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy} \\ y & \frac{xy - y^2}{xy - y^2} \end{array}$$

又如求  $2x^2 - 5x + 2$  及  $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$  之最高公因數。欲避去分數之不便，故將第二式乘以 2 而行運算如次。

$$\begin{array}{r|l} 2x & \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 - 4x} \\ -1 & \frac{-x + 2}{-x + 2} \\ & \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 32}{2x^2 - 5x + 2} \\ & \frac{13x^2 - 10x - 32}{2} \\ & \frac{26x^2 - 20x - 64}{26x^2 - 65x + 26} \\ & \frac{45}{45x - 90} \\ & x - 2 \end{array}$$

故  $x - 2$  即為所求之最高公因數。

又求三式以上之最高公因數，可先求第一第二式之最高公因數，再以所得之式與第三式求其最高公因數，如斯逐次求之可也。例如求  $x^3 + x^2 - x + 1$ ， $x^3 + 3x^2 - x - 3$  及  $x^3 + x^2 - 2$  最高公因數。則第一式與第二式之 H.C.F. 為  $x^2 - 1$ ， $x^2 - 1$  與第三式之 H.C.F. 為  $x - 1$ ，故  $x - 1$  為所求之最高公因數。

### 【最近幾何學】Recent geometry.

〔數〕幾何學之此分科起於十九世紀之後半期。西歷 1873 年來莫恩氏 (Lemoine) 在 Lyons 學術獎勵會開會之席上講演 [三角形之奇異點及其性質] 之題之論文，實為其濫觴。(此點即稱為來莫恩點。又發見其三線坐標與三邊  $a, b, c$  成比例。) 其後德國格來伯 (Grebe)，法國卡他郎 (Catalan)，又中經馬秀 (Mathieu)，叔羅密爾 (Schlomilch)，教授諾依保 (Neuberg)，布洛喀 (Brocard)，戴勞 (Taylor)，懷撒 (Casey) 等及其他諸氏之研究，遂成此分科。內容為逆平行線 (Antiparallels)，等角線 (Isogonals)，逆點 (Inverse point)，布洛喀點 (Brocard point) 及布洛喀橢圓 (Brocard ellipse)，來莫恩點 (Lemoine point) 及三乘比圓 (Triplicate ratio circle)，布洛喀圓 (Brocard circle) 及第一布洛喀三角形 (First Brocard triangle)，特克圓 (Tucker circle)，餘弦圓 (Cosine circle) 及戴勞圓 (Taylor circle) 等。

【最簡交代式】Simplest alternating expression. [代]  $a, b, c$  三字母之最簡交代式者，即  $(b - c)(c - a)(a - b)$  之謂也。三字母  $a, b, c$  之諸交代式得為其最簡交代式所整除，見交代式條。

棄

【棄公生】Cancelation. [算] [代] 即消約，見消約法條。

殘

【殘餘】Remainder. 【算】〔代〕即剩餘，見該條。

## 減

【減】To subtract. 【算】〔代〕由甲數減乙數者，即求乙數加何數而等於甲數之謂也。或曰由甲數中所含之單位取去乙數中所含之單位，而求其殘爲何數也。甲數稱爲被減數，乙數稱爲減數，其殘曰差。

【減式】Subtraction formula. 【三】見差角之三角函數條。

【減法】Subtraction. 【算】〔代〕算術上之減法即由大數減去小數而求其殘之法，或曰求小數加何數而爲大數之法也。代數學上之減法，範圍較廣，即求以何數加於已知之第二數而等於已知之第一數之法也。而第一第二數之大小，可置之不論。

【減號】Sign of subtraction. 【算】〔代〕減法之符號爲“-”，記於被減數之右，其右記減數。例如由 8 減 5 及由 a 減 b，則記爲 8-5 及 a-b，因 8 與 a 爲被減數，5 與 b 爲減數也。

【減數】Subtrahend. 【算】〔代〕即減法中所減去之數也。

## 測

【測度】Measure. 【算】某量與其同種之單位相比較，爲若干倍或若干分，其表示若干倍或若干分之數值，謂之某量之測度。

【測鎖】Surveyor's chain. 【三】測量用之鎖由鋼鐵製成，其長有種種。英國製測地用之測鎖長 66 英尺，土木用之測鎖長 100 英尺，法國製之測鎖長 10 米矣。鎖之兩端有握手之環，全鎖分爲百節，每節有三小環以相連續，可伸屈自如，而每十節，二十節，三十節等處又附有異形之鐵片，以便計算。

【測地線】Geodesic (或 Geodetic) line. 【幾】〔三〕地球(橢圓體)表面上二點間所引之最短線，稱爲測地線。又以廣義言之，則任意立體表面上之任意二點間所引之最短線，稱爲測地線。

【測地學】Geodesy. 【數】爲測量術之一部分依三角測量及天文上之觀測以測定地球表面之面積及形狀者也。測地學之創始者爲亞里斯多得。

【測量術】Surveying. 【數】爲應用數學之一分科，研究地面上形狀位置距離面積等之科學也。凡分兩大類，一曰高等測量，亦曰大地測量，用於極廣大之地面，須依曲面之理以爲計算，即前述之測地學也。一曰普通測量，亦曰平面測量，用之於小區域，可將地面視同平面以爲計算者也。

【測角函數】Goniometrical function. 【三】即三角函數，見該條。

## 無

【無限】Ad-infinity. 【數】此爲拉丁語，即英語之 To an indefinite degree of extent，不加限制之意也。

【無理式】Irrational expression. [代]

即含無理項之代數式，例如 $\sqrt{(3+x)+2}$ ， $\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}$ 等。

【無理項】Irrational term. [代] 即代

數式中含無理數之項。

【無理根】Irrational root. [代] 方程

式之根之為無理數者，如解方程式 $x^2-2=0$ ， $x=\pm\sqrt{2}$ ，即無理根也。

【無理量】Irrational quantity. [代]

與無理數同，見下條。

【無理數】Irrational number. [代] 無

理數者不能以整數或分數表之之數，即

無限接近二分數之間之數也。以 $\frac{m}{n}$ 及

$\frac{m+1}{n}$ 代表二分數，如當其差無限減小

時，恒為 $\frac{m}{n} < I < \frac{m+1}{n}$ 則 $I$ 為無理

數。例如 $\sqrt{2}$

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5,$$

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42,$$

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415,$$

$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143,$$

$$2-1 = 1,$$

$$1.5-1.4 = .01,$$

$$1.42-1.41 = .001,$$

$$1.415-1.414 = .0001,$$

$$1.4143-1.4142 = .00001,$$

故 $\sqrt{2}$ 為無理數。

【無窮大】Indefinitely great. [數]如

以數而言，即其數大至無窮，比任何之數

皆大者也，恒以記號 $\infty$ 表之。如 $\frac{a}{0} = \infty$ ，

即以零除任何數等於無窮大也。又

$\frac{a}{\infty} = 0$ ，即以無窮大之數除任何數等於

零也。

【無窮小】Indefinitely small. [數]如

以數而言，即其數小至無窮，比任何之數

皆小者也，常以 $0$ 為其極限。如圓之半

徑為無窮小時則成點圓，即其半徑小至

無窮，直與無半徑等，則圓即變為一點

耳。

【無限小數】Infinite decimal. [算]

不能以有限數字表之之數曰無限小數，

循環小數即為無限小數之一種。又如將

$\sqrt{2}$ ，逐漸開方，則亦得無限小數。

【無限級數】Infinite series. [代] 級

數之項數以次連續而不終止者，謂之無

限級數。如對數級數，指數級數及三角級

數等皆為無限級數之一種。又無限級數

常可由其性質而區別為收斂級數與發散

級數。(1)無限級數之項正負相間，其各

項比其前項為小者，此級數為收斂級數。

(2)無限級數之項俱為同號且每項大於

一定之量(即極小之量亦可)者，則此級

數為發散級數。(3)於無限級數若干定

項之後，其各後項與其前項之比，恒小於

某定數量，但某定數量為小於 $1$ 者，則其

級數為收斂級數。(4)無限級數之項皆

同號於若干定項之後，其各後項與其前

項之比，若大於 $1$ 或等於 $1$ ，則其級數

為發散級數。(5)兩無限級數之項皆為



正，其相當項之比常為有限，則此兩級數俱為收斂或俱為發散。(6)無限級數

$$\frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \frac{1}{4^P} + \dots,$$

若  $P$  為正而大於 1，則為收斂級數，若  $P$  等於 1 或小於 1 或為負，則均為發散級數。(7)二項級數，若  $x$  小於 1，則為收斂級數。(8)指數級數不論  $x$  為任何值，皆為收斂級數。(9)對數級數，若  $x$  為小於 1 或等於 1 時，為收斂級數，若  $x = -1$ ，則為發散級數。

**【無窮小數】** Infinite decimal. [算] 即無限小數。

**【無窮級數】** Infinite series. [代] 即無限級數。

**【無定長直線】** Indefinite straight line. [幾] 無定長之直線之謂也。例如於二直線相交所生之對頂角相等之定理，二直線之長，不論如何皆適宜，是為無定長直線。然於以一直線為一邊，於其上作正方形之問題，一直線為有限直線之意。即不以有限直線為一邊，不能於其上作正方形也。

**【無理方程式】** Irrational equation.

[代] 方程式含有未知數之平方根，立方根或其他之方根者，謂之無理方程式，如  $\sqrt{x+1}+2=0$ ， $\sqrt[3]{(x^2+b^2)+a}=x$  等。解無理方程式須先移無理項於一邊，其餘諸項於他邊，乃將兩邊各自乘，乘後如何有無理之項，再依此法解之，至悉化為有理項而止。例如求解次式， $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ 。移項得

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+8}-2 &= 2\sqrt{x+5}, \text{ 兩邊自乘, 則} \\ 2x+8-4\sqrt{2x+8}+4 &= 4(x+5), \text{ 即} \\ -4\sqrt{2x+8} &= 2x+8. \text{ 又將兩邊自乘, 則} \\ 16(2x+8) &= (2x+8)^2, \text{ 即 } 4x^2-64=0, \\ \text{即 } x^2-16 &= 0, \text{ 即 } x^2=16, \\ \therefore x &= 4 \text{ 或 } -4. \end{aligned}$$

## 焦

**【焦點】** Focus. [幾] 見橢圓，雙曲線及拋物線各條。

**【焦點弦】** Focal chord. [幾] 通過圓錐曲線之焦點之弦也。

**【焦點距離】** Focal distance. [幾] 由橢圓或雙曲線上任一點至二焦點之距離，謂之焦點距離。橢圓二焦點距離之和為一常數且等於其短軸。雙曲線二焦點距離之差為一常數且等於橫軸。

## 畫

**【畫面】** Picture plane. [幾] 在任意位置之立體，由立體上諸點至吾人之眼引諸直線，是等直線稱為射線。當眼在一定位置，同時所射入之射線，其頂角約在六十度之圓錐內為限。此射線之圓錐垂直於其軸，截任意平面，此平面即所取之畫面。射線與畫面相交之點，即形成此立體在畫面之圖。

**【畫法幾何學】** Descriptive geometry. [數] 為幾何學之一分科，通例用二補助平面，以求長廣厚三度諸圓形之圖的解法為目的。二補助平面稱為射影面或投影面 (plane of projective)，一為水

平，一爲垂直，而此二平面之交稱爲地線 (Ground line)。

## 發

【發散】Divergency. [代] 指級數之發散而言，級數之發散者，其級數之首  $n$  項之和，當  $n$  無限增大時，其和亦無限增大之謂也。例如等比級數之初項爲  $a$ ，公比爲  $r$ ，其首  $n$  項之和爲

$$S_n = \frac{r^n a}{r-1} - \frac{a}{r-1}.$$

而若  $n$  爲正而大於 1，則當  $n$  無限增大， $\frac{r^n a}{r-1}$  亦無限增大，即  $S_n$  之絕對值可大於任何大之正數。即  $r=1$ ，則  $S_n=na$ ，當  $n$  無限增大時， $S_n$  亦得大於任何之值。故在此二情形時，此級數爲發散。

【發散級數】Divergent series. [代] 見級數及無限級數條。

## 短

【短徑】Minor axis. [幾] 過橢圓之中心，與其長徑垂直截於橢圓之直線，稱爲短徑，亦曰短軸。

【短軸】Minor axis. [幾] 即短徑。

【短除法】Short division. [算] 對長除法而言，即簡便之除 求  $587 \div 4$   
法，如右所演。此法  $4 \overline{)587}$   
多用於除數爲一位數  $146 \dots 3$   
時。 答：商 146，餘 3。

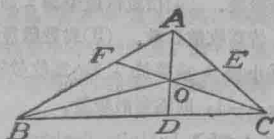
## 稅

【稅瓦定理】Ceva's theorem. [幾] 過三角形頂點  $A, B, C$ ，之三截線，交對邊於  $D, E, F$ ，如三線爲共點線，則

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB.$$

此定理爲意人 Ceva 於 1678 年公布於世。設三截線相交於  $O$ ，則

$$BD:DC = \triangle ABD : \triangle ADC,$$



又  $BD:DC = \triangle OBD : \triangle ODC$ ,

$$\therefore BD:DC = \triangle ABO : \triangle CAO.$$

同理  $CE:EA = \triangle BCO : \triangle ABO$ ,

$$\text{又 } AF:FB = \triangle CAO : \triangle BCO.$$

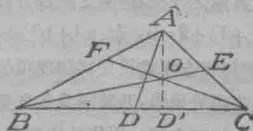
$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

$$= ABO \cdot BCO \cdot CAO : CAO \cdot ABO \cdot BCO,$$

即  $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$ .

又其逆定理亦真，即  $D, E, F$  在三角形之邊  $BC, CA, AB$  上，如  $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$ ，則  $AD, BE, CF$  爲共點線。設  $BE, CF$  相交於  $O$ ，若  $AD$  不過  $O$  點，而  $AO$  交  $BC$  於  $D'$ ，則

$$BD' \cdot CE \cdot AF = D'C \cdot EA \cdot FB, \text{ 然原設}$$



$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB,$$

$$\therefore BD':D'C = BD:DC, \text{ 故 } D' \text{ 與 } D \text{ 相合。}$$

## 等

【等比】Ratio of equality. [算] [代] 比之前項後項，其值相等者爲等比。例有比  $a:b$ ，若  $a=b$ ，則  $a:b$  爲等比，其比之值等於 1。

【等式】Equality. [代] 等式者相等之二次數式以符號“=”連結之之謂也。例如  $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ ，或如  $x=b$ ，則  $3x+7=2x+12$ ，等。而第一式爲絕對的等式 (Absolute equality) 即恆等方程式 (Identical equation) 或恆等式 (Identity)，第二式爲規約的等式 (Conditional equality) 或方程式 (Equation)。

【等根】Equal roots. [代] 即方程式有二或二以上之根爲相等者，見重根條。

【等號】Sign of equality. [數] 表示二數或二式之相等，常於其二數或二式之間記符號“=”，是曰等號。例如由  $a$  減  $b$  後等於  $c$ ，則記爲  $a-b=c$ 。

【等次式】Homogeneous expression. [代] 見同次式條。

【等積次】Homogeneous product. [代] 見同次積條。

【等角形】Isagon 或 Isogon 或 Equiangular figure. [幾] 多角形之各角相等之稱。

【等角線】Isagonals. [幾] 某角之等角線者與其角之二等分線成等角之直線也，亦稱等角共軛線，圖見等角共軛點條。

【等距離】Equi-distant. [幾] 有三點  $A, B, C$ ，若  $A$  至  $B$  之距離與  $A$  至  $C$  之距離相等，則  $A$  爲對於  $B, C$  成等距離，例如圓心與其圓周上之任意點成等距離，又直線與直線，平面與平面，或點與線，點與面，線與面等，所稱爲等距離者，指其垂直距離相等而言。

【等剩式】Congruence. [代] 二數  $a$  及  $b$  以第三數  $c$  除之，其所得之剩餘爲同一者，則稱此二數爲對於其模數 (Modulus)  $c$  而等剩。其記法爲  $a \equiv b \pmod{c}$ ，此式稱爲等剩式。例如  $a = m(c) + r$ ， $b = m(c) + r$ ，則記爲  $a \equiv b \pmod{c}$ 。又 21 及 1 各以 10 除，其所得之剩餘同爲 1， $\therefore 21 \equiv 1 \pmod{10}$ 。又  $(a+1)^2$  及 1 以  $a$  除之，其所得之剩餘同爲 1， $\therefore (a+1)^2 \equiv 1 \pmod{a}$ ，於等剩式  $a \equiv b \pmod{c}$  其  $a-b$  必爲  $c$  之倍數。因  $a = mc + r$ ， $b = nc + r$ ，故  $a-b = c(m-n)$ ，即  $a-b$  爲有  $c$  之倍數，即可記爲  $a-b \equiv 0 \pmod{c}$ 。

[定理] 若  $a_1 \equiv b_1 \pmod{x}$  及  $a_2 \equiv b_2 \pmod{x}$ ，則

$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{x}$  及  $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{x}$ 。假設

$a_1 = m_1 x + r_1$ ， $a_2 = m_2 x + r_2$ ，及  $b_1 = n_1 x + r_1$ ， $b_2 = n_2 x + r_2$ 。故

$a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) = (m_1 + m_2 - n_1 - n_2)x$ ，即  $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{x}$ 。

又  $a_1 a_2 = (m_1 x + r_1)(m_2 x + r_2)$

$= M(x) + r_1 r_2$ ，

$b_1 b_2 = (n_1 x + r_1)(n_2 x + r_2)$

$$=M(x)+r_1r_2,$$

由是  $a_1a_2-b_1b_2=M(x)$ ,

$$\therefore a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod{x}.$$

等剩式與方程式有許多類似之性質，例如等剩式  $Ax^2+Bx+C \equiv 0 \pmod{P}$ ，而  $A, B, C$  為常數，其對於  $x$  之三值  $a, b, c$  為能適合者，且  $a-b$  為  $1$  或對於  $P$  而為素數，其他  $b-c, c-a$  亦然，則此等剩式對於  $x$  之一切整數值，可以適合，而  $A, B, C$  皆為  $P$  之倍數。此因

$$Aa^2+Ba+C \equiv 0 \pmod{P},$$

$$Ab^2+Bb+C \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$(a-b)\{A(a+b)+B\} \equiv 0 \pmod{p}.$$

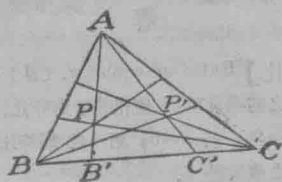
惟因  $a-b$  為  $1$  或對  $p$  而為素數，故以  $a-b$  除上之等剩式，而得  $A(a+b)+B \equiv 0 \pmod{P}$ 。由同法得  $A(a+c)+B \equiv 0 \pmod{P}$ ，相減  $A(b-c) \equiv 0 \pmod{P}$ 。

惟因  $b-c$  為  $1$  或對於  $P$  而為素數，故  $A \equiv 0 \pmod{P}$ 。同法  $B \equiv 0 \pmod{P}$ 。

由此法可證得其一假之定理，即等剩式含有  $x$  之  $n$  次，其於  $x$  之整數值而能適合者，其值多於  $n$ ，且此等任何兩值之差為  $1$  或對模數而為素數者，則此等剩式對於  $x$  之各整數值均能適合，而  $x$  之各次之係數，必為模數之倍數。

**【等截線】** Isotomic line. [幾] 於三角形  $ABC$  之底邊  $BC$  上取  $B', C'$  二點，而  $BB' = CC'$ ，則直線  $AB', AC'$  稱為等截線。

**【等截點】** Isotomic point. [幾] 自各角所引二組之三等截線，同交於二點，此二點稱曰等截點，如圖中之  $P, P'$ 。



**【等積形】** Equivalent figure. [幾] 面積相等之圖形，稱為等積形，其形狀之異同，則置之不論。

**【等十字比】** Equi-cross ratio. [幾] 二組列點或束線之十字比相等者，稱為等十字比。

**【等比之理】** Ex-aequali. [代] [幾]  $a, b, c, d, e, \dots, l$  及  $x, y, z, w, \dots, t$  二組之數量，若  $a:b=x:y, b:c=y:z, \dots$ ，則  $a:l=x:t$ ，是為等比之理。

**【等比中項】** Geometrical mean. [算] [代] 見下條等比級數。

**【等比級數】** Geometrical progression. [算] [代] 等比級數或幾何級數者，其級數中任一項與其前項之比恆為一定數者也，常略記為  $G. P.$  是等級數普通以  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$  表示之， $a$  名曰首項， $r$  名曰公比。而  $r$  之指數順次增  $1$ ，但恆比項數少  $1$ ，故若以  $l$  表其第  $n$  項，則  $l = ar^{n-1} \dots \dots \dots (1)$ 。

二數之間之等比中項(或幾何中項)者，即插入於此二數之間而是等三數成爲等比級數者也。如  $a, b$  爲二數， $G$  爲其等比中項，則由等比級數之定義，

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}, \therefore G = \pm \sqrt{ab} \dots \dots (2).$$

即已知二數量之等比中項，等於其積之平方根。已知之二數量之間，可插入若干之等比中項，今若插入  $m$  等比中項，則其級數之項數為  $m+2=n$ ，故於方程式  $l=ar^{n-1}$  中以  $m+2$  代  $n$ ，其結果為  $l=ar^{m+1}$ 。故  $r^{m+1} = \frac{l}{a} \dots\dots\dots(3)$ 。

今於 3 與 48 之間插入三等比中項，而求其  $r$  之值。則  $r^4 = \frac{48}{3} = 16$ ，而  $r = \pm 2$ 。因之此級數為 3,  $\pm 6$ , 12,  $\pm 24$ , 48。

命首項為  $a$ ，公比為  $r$ ，末項為  $l$ ，項數為  $n$ ，以  $s$  表其  $n$  項之和，則

$$s = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

兩邊以  $r$  乘之，則  $rs = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$ ，

由第二式減第一式，得  $(r-1)s = a(r^n-1)$ ，

$$\therefore s = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \dots\dots\dots(4)$$

若  $r < 1$ ，則上式書為  $s = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$  為便。又  $l = ar^{n-1}$ ， $rl = ar^n$ ，因之(4)式可書為  $s = \frac{rl-a}{r-1}$ 。若  $r$  之絕對值小於 1，

當  $n$  無限增大時，其第  $n$  項之值  $ar^{n-1}$  得小於任何之數，以 0 為極限。而  $n$  項之和  $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$  可記為  $\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$ 。當  $n$  無限增大時， $\frac{ar^n}{1-r}$  得小於任何之值，以 0 為極限。故  $n$  項之和接近於其極限

$$\frac{a}{1-r}$$

故等比級數  $a + ar + ar^2 + \dots$

| 已知     | 公                                                                      | 式 |
|--------|------------------------------------------------------------------------|---|
| $ar^n$ | $l=ar^{n-1}$                                                           |   |
| $ars$  | $l = \frac{a+(r-1)s}{r}$                                               |   |
| $ans$  | $l(s-1)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$                                      |   |
| $rns$  | $l = \frac{(r-1)s_1 r^{n-1}}{r^n - 1}$                                 |   |
| $arn$  | $s = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$                                             |   |
| $arl$  | $s = \frac{rl-a}{r-1}$                                                 |   |
| $anl$  | $s = \frac{\sqrt[n]{ln - \frac{a}{r^n}}}{\sqrt[n]{1 - \frac{a}{r^n}}}$ |   |
| $rnl$  | $s = \frac{lr^n - 1}{r^n - r^{n-1}}$                                   |   |
| $rnl$  | $a = \frac{l}{r^{n-1}}$                                                |   |
| $rns$  | $a = \frac{(r-1)s}{r^n - 1}$                                           |   |
| $rls$  | $a = rl - (r-1)s$                                                      |   |
| $nls$  | $a(s-a)^{n-1} - l(s-1)^{n-1} = 0$                                      |   |
| $anl$  | $r = \sqrt[n]{\frac{l}{a}}$                                            |   |
| $ans$  | $r^n - \frac{s}{a}r + \frac{s-a}{a} = 0$                               |   |
| $als$  | $r = \frac{s-a}{s-1}$                                                  |   |
| $nls$  | $r^n - \frac{s}{s-1}r^{n-1} + \frac{l}{s-1} = 0$                       |   |
| $arl$  | $n = \frac{\log l - \log a}{\log r} + 1$                               |   |
| $ars$  | $n = \frac{\log(a+(r-1)s) - \log a}{\log r}$                           |   |
| $als$  | $n = \frac{\log l - \log a}{\log(s-a) - \log(s-1)} + 1$                |   |
| $rls$  | $n = \frac{\log l - \log[rl - (r-1)s]}{\log r} + 1$                    |   |

$+ar^n + \dots$ , 若  $r$  之值小於 1, 則其無窮

項之和為  $\frac{a}{1-r}$ , 例如  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

$+ \dots$  至無窮項, 其和為  $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ .

等比級數首項  $a$ , 公比  $r$ , 末項  $l$ , 項數  $n$ ,  $n$  項之和  $s$ , 任知其三時, 可由左表求其他二。

**【等差中項】** Arithmetical mean. [算] [代] 見下條等差級數。

**【等差級數】** Arithmetical progression. [算] [代] 等差級數或算術級數者, 其級數之任一項與其前項之差恆為一定數者也, 常略記為 A. P.. 是等級數普通以  $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$ , 表示之,  $a$  名曰首項,  $d$  名曰公差。而各項之  $d$  之係數順次增 1, 但恆比項數少 1, 故若以  $l$  表其第  $n$  項, 則

$$l = a + (n-1)d \dots \dots \dots (1).$$

知等差級數之任意二項, 則其級數即能決定, 例如第  $m$  項為  $\alpha$ , 第  $n$  項為  $\beta$ , 則設其首項為  $a$ , 公差為  $d$ , 故

$$a + (m-1)d = \alpha, \quad a + (n-1)d = \beta,$$

由此二方程式即可由  $\alpha$  及  $\beta$  以求  $a$  及  $d$  之值, 因而全級數可定。二數之間之等差中項 (或算術中項) 者, 即插入於此二數之間而是等三數成爲等差級數者也。如  $a, b$  爲二數,  $A$  爲其等差中項, 則由等差級數之定義,  $A - a = b - A$ ,

$$\therefore A = \frac{1}{2}(a+b) \dots \dots \dots (2).$$

即二數之等差中項, 等於其和之半。已知二數量之間可插入若干之等差中項, 今若插入  $m$  等差中項, 則其級數之項數爲  $m+2=n$ , 故於方程式  $l = a + (n-1)d$  中以  $m+2$  代  $n$ , 其結果爲

$$l = a + (m+1)d, \quad \text{故 } d = \frac{l-a}{m+1} \dots \dots \dots (3).$$

今於 3 與 17 之間插入六等差中項,

而求其  $d$  之值。則  $\frac{17-3}{6+1} = 2$ , 故此級數爲 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17。

等差級數之首項爲  $a$ , 公差爲  $d$ , 末項爲  $l$ , 項數爲  $n$ , 以  $s$  表其  $n$  項之和, 則  $s = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-d) + l$ , 又從末項逆記之, 則得

$$s = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a,$$

由是加其相當項, 則得

$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) \dots \text{至 } n \text{ 項} \\ = n(a+l),$$

$$\therefore s = \frac{n}{2}(a+l) \dots \dots \dots (4).$$

又從 (1) 式得

$$s = \frac{n}{2} \{ 2a + (n-1)d \} \dots \dots \dots (5).$$

從 (1), (4), (5) 三公式, 則於  $a, d, l, n, s$  五數中任知其三, 即可求其餘二數, 茲列表於下:

| 已知    | 公 式                                                          |
|-------|--------------------------------------------------------------|
| a d n | $l = a + (n-1)d.$                                            |
| a d s | $l = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2)}.$ |
| a n s | $l = \frac{2s}{n} - a.$                                      |
| d n s | $l = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}.$                        |
| a d n | $s = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d].$                             |
| a d l | $s = \frac{l+a}{2} + \frac{l^2 - a^2}{2d}.$                  |
| a n l | $s = \frac{n}{2}(l+a).$                                      |
| d n l | $s = \frac{1}{2}n[2l - (n-1)d].$                             |
| d n l | $a = l - (n-1)d.$                                            |
| d n s | $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}.$                        |
| d l s | $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(l + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds]}.$  |
| n l s | $a = \frac{2s}{n} - l.$                                      |
| a n l | $d = \frac{l-a}{n-1}.$                                       |
| a n s | $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}.$                                |
| a l s | $d = \frac{l^2 - a^2}{2s - l - a}.$                          |
| n l s | $d = \frac{2(nl-s)}{n(n-1)}.$                                |
| a d l | $n = \frac{l-a}{d} + 1.$                                     |
| a d s | $n = \frac{d-2a \pm \sqrt{[(2a-d)^2 + 8ds]}}{2d}.$           |
| a l s | $n = \frac{2s}{l+a}.$                                        |
| d l s | $n = \frac{2l+d \pm \sqrt{[(2l+d)^2 - 8ds]}}{2d}.$           |

【等腰梯形】 Isosceles trapezoid.

〔幾〕梯形不平行之兩邊相等者稱為等腰梯形。

【等邊圓柱】 Equilateral cylinder.

〔幾〕以連結正方形相對邊之中點之直線為軸，旋轉而生之圓柱也。

【等邊圓錐】 Equilateral cone. 〔幾〕

以等邊三角形之高為軸旋轉而生之圓錐也。

【等次對稱式】 Homogeneous symmetric expression. 〔代〕見同次對稱式條。

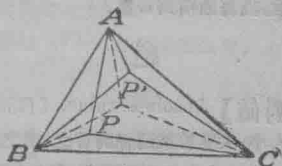
〔代〕見同次對稱式條。

【等角三角形】 Equiangular triangle

〔幾〕三角形之三角相等者之稱，普通稱為等邊形。

【等角共軛點】 Isogonal conjugate

points. 〔幾〕二組之三等角線各於一點相交，此二交點稱為等角共軛點，如圖



AP 及 AP', BP 及 BP', CP 及 CP' 各為 A 角 B 角 C 角之等角線，而 AP' 與 BP' 及 CP' 三者交於 P' 點，AP 與 BP 及 CP 三者交於 P 點，此 P' 及 P 二點謂之等角共軛點。三角形之類似重心與重心成等角共軛點。

【等角雙曲線】 Equiangular hyperbola. 〔幾〕與等邊雙曲線同，見該條。

〔幾〕與等邊雙曲線同，見該條。

## 【等值方程式】Equivalent equations

〔代〕二或二組方程式，適合其未知數之值（即其方程式之根）全相同者，謂之等值方程式。

## 【等腰三角形】Isosceles triangle.

〔幾〕三角形有二邊相等者，謂之等腰三角形，普通稱為二等邊三角形。

## 【等邊三角形】Equilateral triangle.

〔幾〕三角形之三邊相等者之稱，即等角三角形。

## 【等邊雙曲線】Equilateral hyper-

bola. 〔幾〕雙曲線之橫軸與共軛軸相等者，稱為等邊雙曲線，亦稱等角雙曲線，或直角雙曲線。

## 答

【答】Answer. 〔數〕數學上運算之結果，或解問題之結果稱為答。算術上之答常為數，故普通稱為答數。

## 絕

【絕對值】Absolute value. 〔代〕某數之大小，去其符號關係而言之，謂之絕對值。例如  $-5$  之絕對值為  $5$ ，又  $+4$  與  $-4$  之絕對值相等。

【絕對項】Absolute term. 〔代〕方程式中不含未知數之項，謂之絕對項，如二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  中， $c$  為絕對項。

【絕對的不等式】Absolute inequality. 〔代〕絕對的不等式者不拘其式中文字之值如何，而恆為不等式者也。例如  $x^2 + 1 > 0$ ，不拘  $x$  之值如何，此式恆為

真。又如  $a$  與  $b$  之值不相等，則不拘  $a$  與  $b$  之值如何，常得  $(a-b)^2 > 0$ ，故  $a^2 + b^2 > 2ab$ 。

## 【絕對的收斂級數】Absolute conver-

gent series. 〔代〕級數之各項有異符號時，若悉改為同符號而仍為收斂級數者，謂之絕對的收斂級數。絕對的收斂級數為對於不絕對的收斂級數即規約的收斂級數 (Conditional convergent series) 而言，規約的收斂級數有時稱為半收斂級數 (Semi-convergent series)。

## 結

【結合定則】Associative law. 〔代〕見基本定則條。

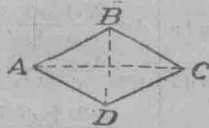
## 絲

【絲】〔算〕小數名，即  $.0001$ 。

## 菱

## 【菱形】Rhombus 或 Lozenge 或 Dia-

mond. 〔幾〕平行四邊形相鄰之邊相等者，稱為菱形。故菱形之四邊相等，如圖 ABCD。若菱形有一角為直角，則菱形成為正方形。菱形



之兩對角線互為垂直二等分，且二等分其通過之角。菱形之面積等於其二對角線所包矩形之面積之半。

## 虛



【虛根】Imaginary roots. [代] 普通二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  之根爲

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ 若 } b^2 - 4ac < 0,$$

則此方程式之根爲虛根，即含有虛數之根也。若方程式  $f(x)=0$  之係數皆爲實數，則當有虛根  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  時，亦必有共軛虛根  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ 。以根  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  代入已知方程式內之  $x$ ，用二項式定理展開  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  之乘幂而化簡之，凡不含  $\sqrt{-1}$  即含  $\sqrt{-1}$  之偶數乘幂諸項皆爲實數，凡含  $\sqrt{-1}$  之奇數乘幂諸項皆爲虛數。以  $P$  表諸實數項之代數和， $Q$  表諸虛數項之代數和，則得

$$P + Q\sqrt{-1} = 0.$$

然因實數與虛數部分決不能互相抵消，故此方程只當  $P=0$  及  $Q=0$  始能成立。

今又以  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$  代入方程式  $f(x)=0$  內之  $x$ ，如前展開且化簡之，諸實數項皆不變，諸虛數項與前相同，惟改其號，故此時多項式  $f(x)$  之值爲  $P + Q\sqrt{-1}$ 。

然已證明  $P=0$  及  $Q=0$ ，故

$$P - Q\sqrt{-1} = 0.$$

即  $x = \alpha - \beta\sqrt{-1}$  適合方程式  $f(x)$ ，而  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$  爲其一根。故凡方程式之係數皆爲實數時，則其所有虛根之數必爲偶數，即虛根常成對也。又由狄卡德符號之法則，亦可驗虛根之數。例如方程式  $x^8 + 10x^3 + x - 4 = 0$ ，則其項之符號只有一變遷，故由狄卡德法則，只有一正根。又以  $-x$  代  $x$ ，則上之方程式變爲  $x^8 - 10x^3 - x - 4 = 0$ ，其項之符號又只

有一變遷，故由狄卡德法則，只有一負根。然此爲八次方程式必有八根，故有六虛根，由此亦可見虛根必成對也。惟此驗法只能用於不完全方程式。

【虛數】Imaginary number 或 Imaginary quantity. [代] 適合方程式  $i^2 = -1$  之  $i$  之值常以  $\sqrt{-1}$  表示之，稱爲虛數。虛數爲對於通常之實數而言。因正數之平方與負數之平方皆爲正，今其數之平方爲負，實際上則無此數，亦不能說明其意義，僅以  $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$  爲一種符號之表示而已。

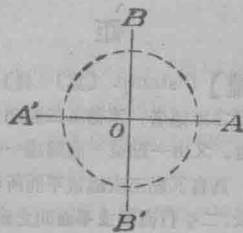
【虛線】Imaginary line. [幾] 線之方程式內含虛數者謂之虛線，如方程式  $\sqrt{-1}ax + by = 0$  所表之線爲虛線。

【虛點】Imaginary point. [幾] 點之坐標含虛數或複虛數者謂之虛點。

【虛因數】Imaginary factors. [代] 二因數如  $x+1+\sqrt{-3}$  與  $x+1-\sqrt{-3}$  者稱曰  $x^2+2x+4$  之虛因數。

### 象

【象限】Quadrant. [三] 若通過一點作兩互垂線，則此兩線等分全平面即全圖爲四份，其每份即全圖之四分之一，謂之



一象限。如圖 AOB 名爲第一象限，凡自  $0^\circ$  至  $90^\circ$  之角均在其內。BOA' 名爲第二象限，凡自  $90^\circ$  至  $180^\circ$  之角均在其內。A'OB' 名爲第三象限，凡自  $180^\circ$  至  $270^\circ$  之角均在其內。B'OA 名爲第四象限，凡自  $270^\circ$  至  $360^\circ$  角均在其內。餘照此可推得。又自  $-0^\circ$  至  $-90^\circ$  之角均在第四象限，自  $-90^\circ$  至  $-180^\circ$  之角均在第三象限，餘做此。

【象限三角形】Quadrantal triangle.

〔三〕見球面三角形條。

## 超

【超越數】Transcendental number.

〔代〕超越數者如  $\log x$ ,  $\sin x$ ,  $a^x$  等即不能以含通常代數的運算（即加減乘除及常數指數之乘幕及根）之有限的代數項所表示之數也。

【超越函數】Transcendental function

〔數〕凡非代數的函數如三角函數對數函數指數函數等，謂之超越函數，又見函數條。

【超越方程式】Transcendental equation.

〔代〕含超越數之方程式，謂之超越方程式。

## 距

【距離】Distance. 〔算〕〔幾〕〔三〕二

點間之距離者，連結其二點間之直線之長也。又由一點至一直線或一平面之距離，爲自其點至直線或平面所引之垂線之長。二平行直線或平面間之距離，爲其

二平行直線或平面間共同垂線之長。又球面上二點之距離爲連結其二點之大圓弧。測量術上之距離分垂直距離（高）水平距離及斜距離三種。水平距離又分能就近測得及不能就近測得二種。能就近測得者可用測鎖或卷尺或測竿直接測定之，其測定須極精密，因與其他由推算而知之結果之精粗有關。不能就近測得之距離，須用他補助距離及補助角以測定之，可由三角法或幾何之法則以計算之，或用計算音響之速度之法。

## 軸

【軸】Axis. 〔幾〕軸者關於某幾何圖

形或幾何體之各部分爲對稱位置之直線也。例如對稱軸，角錐或圓錐之軸，角柱或圓柱之軸，球之軸（半圓以其徑爲軸而旋轉之則生球）等。又見坐標軸條。

【軸對稱】Axial symmetry. 〔幾〕(1)

於一平面上之軸對稱。連結 A, a 二點之直線 Aa 若與他已知直線成垂直二等分，則 A, a 爲關於此已知直線而對稱。A 沿任意之線而運動，若 a 亦沿對應之線而運動，則此二線亦爲對於該已知直線而對稱。此已知之直線稱爲對稱軸。關於軸對稱之線或圖形，其在對稱軸一方之平面上之部分，若以對稱軸爲軸而迴轉之，可與平面上之他部分全相密合。關於對稱軸之圖，若引對應直線，必交於對稱軸且等傾斜，而連結對應點之直線皆平行。(2)於空間之軸對稱。一立體或數立體以垂直於與軸之任意平面截之，若截

面爲以其平面與軸之交點爲中心對稱，則此立體謂之關於此軸而對稱。而與平面內中心對稱同理，軸對稱之立體可以疊置。

## 週

【週期收斂級數】 Periodic convergent series. [代] 卽中性級數，見該條。

【週期三角函數】 Periodic trigonometrical function. [三] 亦稱週期圓函數。週期函數者，函數之值以一定之週期循環不止者也。諸三角函數皆爲週期函數。如  $\tan \theta = \tan(n\pi + \theta)$  及  $\cot \theta = \cot(n\pi + \theta)$ ，故  $\tan \theta$ ， $\cot \theta$  當  $\theta$  增  $\pi$  時，其值不變。故  $\tan \theta$ ， $\cot \theta$  爲週期三角函數，其週期爲  $\pi$ 。又

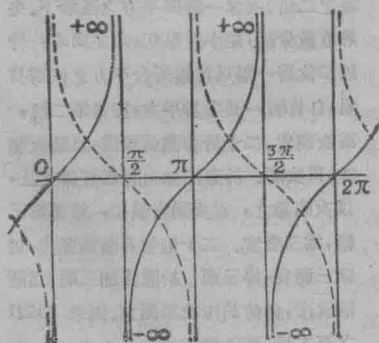
$$\sin \theta = \sin(2n\pi + \theta),$$

$$\cos \theta = \cos(2n\pi + \theta),$$

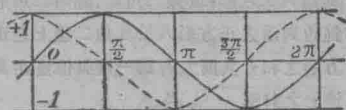
$$\sec \theta = \sec(2n\pi + \theta),$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec}(2n\pi + \theta).$$

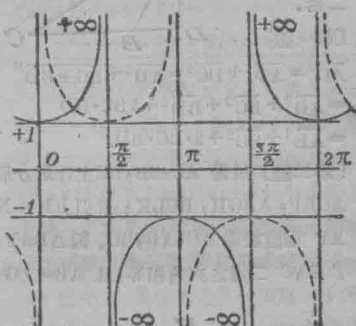
## 正切及餘切之曲線



## 正弦及餘弦之曲線



## 正割及餘割之曲線



故  $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\sec \theta$ ， $\operatorname{cosec} \theta$  亦爲週期三角函數，而其週期爲  $2\pi$ 。今由圖以表明其週期，實線爲表正切正弦正割之曲線，虛線以爲表餘切餘弦餘割之曲線。

## 量

【量】 Quantity. [數] 凡可增減或測度者，可施以數學之運算者，皆謂之量。代數上量與數常作同一意義用之。

## 鈍

【鈍角】 Obtuse angle. [幾] 大於一直角而小於二直角謂之鈍角。

【鈍三角形】 Obtuse triangle. [幾] 與鈍角三角形同。

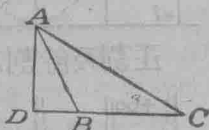
【鈍角三角形】 Obtuse angled tri-

angle. [幾] 三角形有一角為鈍角者，稱為鈍角三角形，或鈍三角形。鈍角三角形鈍角對邊之正方形大於其他二邊上之正方形之和，其所大者為一邊與他邊在其邊上之射影

所包矩形之

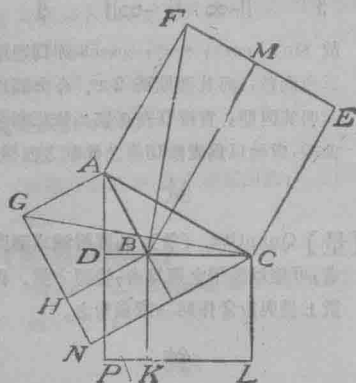
二倍。

[第一證]



$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC} + \overline{BD}^2 \\ &= \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + 2BC \cdot BD \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot BC \cdot BD. \end{aligned}$$

[第二證] 於邊 AC, AB, BC 上作正方形 ACEF, ABGH, BCLK, 且引 BM, CN AP 垂直於邊 AC, AB, BC. 因  $\triangle BAF$ ,  $\triangle GAC$  二邊之夾角相等，且  $AB = AG$ ,



$AF = AC$ ，故兩形全等。

而  $\triangle BAF = \frac{1}{2} \square \triangle AM$ ，

又  $\triangle GAC = \frac{1}{2} \square \triangle AN$ ，

故  $\square AM = \square AN$ 。同理  $\square CM = \square CP$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{AC}^2 &= \square AN + \square CP \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \square BN + \square BP \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \cdot BD. \end{aligned}$$

開

【開方法】 Evolution 或 Radication 或 Extraction of roots. [算] [代] 求某數或某式之根之法，謂之開方法，即自乘法之逆運算。

【開平方方法】 Extraction of square root. [算] [代] 求某數或某式之平方根之法也。百以內完全平方數之平方根，可由下表一覽而得。欲求多位數之平方根，

|   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |

則須知 (1) 凡平方數之位數，為其平方根位數之二倍或二倍少一。(2) 二數和之平方，等於二數平方之和，加二數相乘積之二倍。次述一般開平方之法於下。先將方數分幅，從小數點起，向左向右，皆以二位為一幅，以首幅所含平方之根為初商，自首幅一減去其平方，接書第二幅，為次商實。二十倍初商為廉法，以除次商實，得次商。於廉法加次商為廉偶共法，以次商乘之，從次商實減去，接書第三幅，為三商實。二十倍初次商為廉法，以除三商實，得三商。於廉法加三商，為廉偶共法，仍仿前法次第開之。例求 83521 之平方根，演之如後。

商..... 2 8 9 .....答

方數..... 8, 35, 21

初商平方..... 4

廉法..... 40 

|     |
|-----|
| 435 |
|-----|

廉偶共法..... 48 

|     |
|-----|
| 384 |
|-----|

廉法..... 560 

|      |
|------|
| 5121 |
|------|

廉偶共法..... 569 

|      |
|------|
| 5121 |
|------|

求代數上一項式之平方根，則可由公式

 $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$  直接求得，例如 $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{16} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^4} = 4ab^2$ 。

但平方根恆有正負二值，故其實

 $\sqrt{16a^2b^4} = \pm 4ab^2$ 。若求多項式之平方根，則其通法如下。如求  $(A+B)^2$  之平方根，其  $A$  為其平方根之若干項， $B$ 為其餘之若干項，而  $A$  及  $B$  為依一特別文字之降冪(或昇冪)列之，故  $A$  之各項次數，比  $B$  之任一項為高(或低)。已知  $A$ 之各項，則從  $(A+B)^2$  減  $A^2$ ，其餘式為 $(2A+B)B$ 。前所設之特別文字，在此餘

式內之最高次(或最低次)之項，必等於

 $A$  之第一項與  $B$  之第一項之積之二倍。

由是欲求之根之次項，其法將已求得之

根之平方，從原式中減去之，再以根之第

一項之 2 倍，除其餘式之最高次(或最低

次)之項，所得之商，即根之次項。平方根

第一項為原式第一項之平方根，此甚易

求得，既求得平方根之第一項，乃從上

之法則順次求得平方根之次項，因而求

其根之全數可也。例如求  $x^6 - 4x^5 + 6x^4$  $- 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$  之平方根。則先將代數式以  $x$  之降冪列之，求其第一項  $x^6$  之平方根，得  $x^3$  為所求平方根之第一項。平方根.....  $x^3 - 2x^2 + x - 2$ 原式.....  $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$  $(x^3)^2 = x^6$  $(x^3 - 2x^2)^2 = x^6 - 4x^5 + 4x^4$  $(x^3 - 2x^2 + x)^2 =$  $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + x^2$  $(x^3 - 2x^2 + x - 2)^2 =$  $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$ 從原式減  $x^3$  之平方  $x^6$ ，其餘式之第一項為  $-4x^5$ ，以  $2x^3$  除之，得  $-2x^2$  為

所求之平方根之第二項。次從原式減

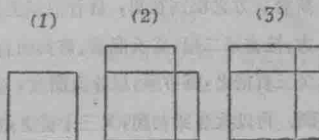
 $x^3 - 2x^2$  之平方  $x^6 - 4x^5 + 4x^4$ ，其餘式之第一項為  $2x^4$ ，以  $2x^3$  除之，得  $x$  為所求之平方根之第三項。又從原式減  $x^3 - 2x^2$  $+ x$  之平方，其餘式之第一項為  $-4x^3$ ，以  $2x^3$  除之，得  $-2$  為所求平方根之末項。而從原式減  $x^3 - 2x^2 + x - 2$  之平方，適盡無餘，故  $x^3 - 2x^2 + x - 2$  即為所求

之平方根。又求數之平方根，得用圖解

法以明之。例  $25^2 = (20+5)^2 = 20^2 + 2$  $\times 20 \times 5 + 5^2 = 625$ 。 $20^2$  以 (1) 圖之正方形形表示之。  $2 \times 20 \times 5$ 

為長 20 廣 5 之二矩

形，添加於

(1) 圖，則成 (2) 圖，  $5^2$  為完成  $(20+5)$ 

之正方形而添付於(2)圖之小正方形，如(3)圖。故求 $(20+5)^2=25^2=625$ 之平方根，先去一邊20之正方形，而餘225。此面積爲由長各20之二矩形與以此矩形之廣爲邊之小正方形而成。求此矩形之廣，可以二矩形之長之和40除225，其商爲5。故此餘面積爲長20,20,5三矩形之和，即 $20 \times 5 + 20 \times 5 + 5 \times 5$  即 $45 \times 5 = 225$ 也。

**【開立方法】** Extraction of cube root.

(算)〔代〕求某數或某式之立方根之法也。千以內完全立方數之立方根可記誦下表而直知之。若欲求多位數之立方根，

|   |   |    |    |     |     |     |     |     |
|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 316 | 343 | 512 | 729 |

則須知(1)凡立方數之位數，爲其立方根位數之三倍，或三倍減二，或三倍減一。(2)二數和之立方，等於二數立方之和，再加第一數平方乘第二數之三倍，及第三數平方乘第一數之三倍。次述開立方之法如下。先將方數分幅，從小數點起，向左向右，皆以三位爲一幅。以首幅所含立方之根爲初商，自首幅減去其立方，接書第二幅，爲次商實。將初商自乘，又三百倍之，爲方廉，以除次商實，得次商。再以次商乘初商，又三十倍之，爲長廉，又將次商自乘，爲隅，加於方廉長廉

爲廉隅全法，以次商乘之。自次商實減去其積，按書第三幅，爲三商實。將初次商自乘，又三百倍之，仍爲方廉，仍照前法，再求以後各商。例如求94818.816之立方根，演算如下。

|           |            |            |            |
|-----------|------------|------------|------------|
| 商.....    | 4          | 5.6...     | 答          |
| 立方數.....  | 94,818.816 |            |            |
| 初商立方..... | 64         |            |            |
| 方廉.....   | 4800       | 30818      |            |
| 長廉.....   | 600        |            |            |
| 廉隅法.....  | 5425       | 27125...   | 5425 × 5   |
| 方廉.....   | 607500     | 3693816    |            |
| 長廉.....   | 8100       |            |            |
| 廉隅法.....  | 615636     | 3693816... | 615636 × 6 |
|           |            |            | 0          |

代數上一項式之立方根，則可由公式 $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ 直接求得，例如 $\sqrt[3]{27a^6x^3} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{x^3} = 3a^2x$ 。求多項式之立方根。其通法如次所述。試求 $(A+B)^3$ 之立方根，A爲立方根之若干項，B爲其餘之若干項，A及B爲依某文字之降幕(或昇幕)列之，故A之各項比B之各項，其文字之次數高(或低)。若已知A之各項而求B之各項，則由 $(A+B)^3$ 減 $A^3$ ，其餘式爲 $(3A^2+3AB+B^2)B$ 。在餘式內最高次(或最低次)之項，必等於3乘A之第一項之平方乘B之第一項。由是欲得立

方根之次項(即B之最高次式最低次項),其法將已得若干項立方根之立方,從原式中減去之。再將立方根第一項之平方三倍之,以除其餘式之最高次(或最低次)之項,即得立方根之次項,乃以A之各項乘次項,三倍之,又將次項平方之,加於A之各項平方之三倍,以次項乘此全和,從原式減去之。倘仍有餘式,則再以A之各項與次項之和之平方,三倍之,以除餘式而得立方根之三項,再照前法次第求之。例如求

$27 + 108x + 90x^2 - 80x^3 - 60x^4 + 48x^5 - 8x^6$  之立方根,立其運算於右方。求立方根用上法者少,施諸實用,尙有簡法如下。例如求

$x^9 - 6x^8y + 15x^7y^2 - 29x^6y^3 + 51x^5y^4 - 60x^4y^5 - 64x^3y^6 - 62x^2y^7 + 27xy^8 - 27y^9$  之立方根。若所設之式爲完全立方,則其立方根之初項及末項爲  $\sqrt[3]{x^9}$  及  $\sqrt[3]{-27y^9}$ , 即  $x^3$  及  $-3y^3$ 。又立方根之第二項,不能不爲  $-6x^8y + 3(x^2)^2 = -2x^2y$ 。而其末項之前一項不能不爲  $27xy^8 \div 3(-3y^3)^2 = xy^2$ 。由是原式若爲完全立方,則不能不等於  $(x^3 - 2x^2y + xy^2 - 3y^3)^3$ , 而易得其立方根。

前例求  $27 + 108x + 90x^2 - 80x^3 - 60x^4 + 48x^5 - 8x^6$  之立方根之運算

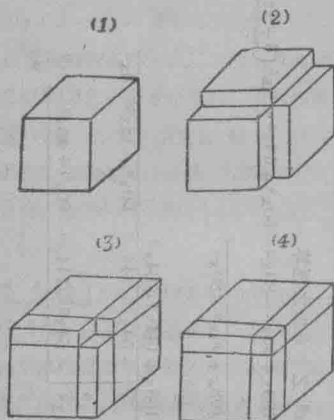
$$\begin{array}{r}
 27 + 108x + 90x^2 - 80x^3 - 60x^4 + 48x^5 - 8x^6 \quad \overline{) 3 + 4x - 2x^2} \\
 \underline{27} \\
 108x + 90x^2 - 80x^3 \\
 \underline{108x + 90x^2 - 80x^3} \\
 0
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 3 \times (3)^2 = 27 \\
 3 \times 3 \times 4x = + 36x \\
 (4x)^2 = + 16x^2 \\
 \underline{27 + 36x + 16x^2} \\
 27 + 72x + 48x^2 \\
 \underline{- 18x^2 - 24x^3} \\
 27 + 72x + 30x^2 - 24x^3 + 4x^4 \\
 \underline{27 + 72x + 30x^2 - 24x^3 + 4x^4} \\
 0
 \end{array}$$

又求數之立方根,可用圖解以明之。例如  $25^3 = (20 + 5)^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 5 + 3 \times 20 \times 5^2 + 5^3$ 。  $20^3$  以(1)圖之立方體表示之。  $3 \times 20^2 \times 5$  爲長 20, 廣 20, 厚

此運算與前算術上求立方根之運算,全相一致。

5 之三直角體，以附於(1)圖之相鄰三面如(2)圖以表示之。 $3 \times 20 \times 5^2$  爲長 20，



廣 5，厚 5 之三直角體，添附於(2)圖則爲(3)圖。 $5^3$  爲完成 $(20+5)^3$ 之立方體補足。(3)圖之小立方體，故添附於(3)圖則成(4)圖之完全立方體 $(20+5)^3$ 。故求 $(20+5)^3 = 25^3 = 15625$  之立方根，則先將一邊爲 20 之立方體減去之，其所餘之體積爲  $15625 - 8000$ ，即 7625。此餘積之大部分爲添附於(1)圖之三直角體，即長 20，廣 20 之三直角體。求此直角體之厚，則以此三直角作三面之和，即  $3 \times 20^2$  即 1200 除 7625，試商以 6，則 6 等於此三直角體之厚。但如其厚爲 6，而餘積 7635 內所含 7 直角體之面，爲(1)添附於(1)圖之三直角體之三面  $3 \times 20^2$ ，(2)添附於(2)圖之三直角體之三面  $3 \times 20 \times 6$ ，(3)添附於(3)圖之小直角體之面  $6^2$ 。將(1)，(2)，(3)

相加，其面積之和爲 1596。以厚 6 乘之應有體積 4576，比餘積 7625 大，故其所求之厚不能爲 6。乃試以 5。則餘積 7625 內所含 7 直角體之面，爲(1) $3 \times 20^2$ ，(2) $3 \times 20 \times 5$ ，(3) $5^2$ 。將(1)，(2)，(3)相加得 1525，以厚 5 乘之，其積爲 7625，却等於餘積。故所求之立方根爲 25。

**【開高次方】** Extraction of higher root. [算][代]此屬於代數之範圍，因  $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + a$  低於  $n-1$  次之項，故求代數式  $n$  方式之法則如次。將代數式依某文字之降冪或昇冪列之，取其第一項之  $n$  方根，爲所求  $n$  方根之第一項。乃從原式減其已得根若干項之乘方，又以  $n$  方根第一項之  $n-1$  方乘之  $n$  倍，除其餘式之第一項，即得  $n$  方根之次項。依此法則，次第求之，則  $n$  方根可得。惟高次方之次數如 6, 8, 12 等有 2 與 3 之因數者，則可迭開平方立方而得其根。例如

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{15625} &= \sqrt{(\sqrt[3]{15625})} = \sqrt{25} = 5, \\ &= \sqrt[3]{64a^{12}b^{24}} = \sqrt[3]{(\sqrt{64a^{12}b^{24}})} \\ &= \sqrt[3]{8a^6b^{12}} = 2a^2b^4. \end{aligned}$$

**【開方之符號】** Sign of radication. [算][代]即記號 $\sqrt{\quad}$ 之稱。如  $a$  之平方根則僅用 $\sqrt{\quad}$ ，即以 $\sqrt{a}$ 記之(爲 $\sqrt[2]{a}$ 之略)，立方根則記爲 $\sqrt[3]{a}$ ，四乘根則記爲 $\sqrt[4]{a}$ ，餘倣此。

閏

**【閏月】** Intercalary month. [算]見陰



歷條。

【閏年】Leap year 或 Bissextile. [算]

見陽歷條。

## 陽

【陽歷】Solar calendar. [算]以地球繞

太陽一周為一年者，謂之陽歷。以三百六

十五日為一年，其一，三，五，七，八，

十，十二各月皆三十一日，四，六，九，

十一，各月皆三十日，二月則平年二十八

日，閏年二十九日。所以有閏年者，因地

球繞太陽一周之時間為 365.2422 日，

即 365 日 5 時 48 分 46 秒，即約

$365 \frac{1}{4}$  日，故一平年為 365 日，一閏年

為 366 日，而每四年置一閏。蓋羅馬愷撒

(Julius Caesar, 西歷紀元前 100 年生，

同 44 年死) 以前無閏年，至愷撒始以 365

日為一平年，每四年置一閏年，為 366 日，

是稱曰愷撒歷。然照此法，則每四百年須

插入百日。其實  $0.2422 \times 400 = 96.88$  日，

即約 97 日。故凡一世紀(百年)之數能為 4

所整除者則為閏年，否則為平年，即每

第四年置一閏年，如第一百年第二百年

第三百年皆廢閏，第四百年則置一閏年。

例如西歷 1700 年，1800 年，1900 年皆

非閏年，2000 年則為閏年。此稱為葛電

哥利之改正，因係法正葛電哥利第十三

世(Gregory XIII, 1502 年生，1585 年

死)所改正也。

【陽函數】Explicit function. [數]自

變數與函數之關係，顯明表示之者，謂之

陽函數，例如  $y = x^2 - 2x + 3$ ， $y$  為  $x$  之陽函數。

## 階

【階乘】Factorial. [代]即逐乘，見該條。

## 集

【集合】Combinations. [代]即組合，見該條。

## 項

【項】Term. [代]代數學中不以加、減、等、不等、……之記號相連結之單式謂之項，如  $3a^2b$ ， $ax^2$ ， $4ba$ ，……皆為項。而諸項以此等記號連結之則為式，如  $3a^2b + 4ab = ax^2$ ，即為式。

## 順

【順列】Permutations. [代]即排列，見該條。

## 黃

【黃金分割】Golden section. [幾]即外中分割，見該條。

## 十三畫

## 傾

【傾角】Angle of inclination 或 Inclination. [幾] 一直線對於他直線之傾角爲其二直線間之角。一直線對於一平面之傾角，爲此直線與其在此平面上之射影所成之角。一平面對於他平面之傾角，爲其兩平面間之角；即在兩平面上垂直於兩平面之交線之兩直線間之角。

## 匯

【匯兌】Exchange. [算] 甲地之人付現款於甲地之銀行或郵局，取得證券寄於乙地之人。乙地人持此證券，可向乙地之銀行或郵局兌換現款，是爲匯兌。

【匯票】Bill of exchange 或 Draft. [算] 由甲地匯款至乙地，憑以收兌之證券也。亦稱匯單。兩地同在國內則稱內國匯票。一在本國一在外國者則稱外國匯兌。

【匯割】Exchange. [算] 甲處匯款於乙，適丙有還乙之款，甲即令丙轉付乙，割抵甲款，是爲匯割。

【匯兌率】Course of exchange 或 Rate of exchange. [算] 某國之貨幣合作他國之貨幣，謂之匯兌率。匯兌率日有變動，故須由兩國貿易金融之狀況及匯票需要供給之關係立一法定平價 (Mint per of exchange) 以爲標準。

## 圓

【圓】Circle. [幾] 圓者乃稱爲圓周之曲線所包圍之平面，其曲線上各點與所稱爲中心之一點爲等距離者也。圓之一字，常用作圓周之意。由中心至圓周之直線謂之圓之半徑。過中心而兩端在圓周上之任意直線謂之圓之直徑或簡稱徑。圓與直線爲平面幾何學之元素，次所示者爲圓之最重要之性質。(1) 各徑二等分圓及圓周。而普通等弧必對等弦。(2) 圓周等於徑之長，以 $\pi$ 即 $3.14159265\dots$ 又或用近似數 $3.1416$ 乘之。故任意二圓周之比等於其徑或半徑之比。(3) 圓之面積等於半徑之平方以 $\pi$ 乘之。故任意二圓之面積之比，等於其半徑之平方或其徑之平方或任二對應線之平方之比。(4) 圓之面積小於外切任意正多邊形之面積，而大於內接任意正多邊形之面積。而圓之面積爲外切或內接正多邊形之極限，即等於多邊形之邊數無限增加時之面積。圓周與外切及內接多邊形之周同同樣之關係亦成立。(5) 圓爲同長之圓繞線所有平面形之中最大之面積。

於直交軸，圓之任意方程式爲

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

若以中心爲原點，則圓之方程式爲

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

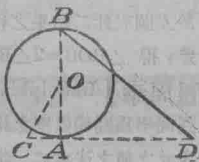
【圓心】Centre of a circle. [幾] 見中心條及圓條。

【圓周】Circumference. [幾] 圓周爲圓面積之界線，而由稱爲中心之一點至其線上之距離皆相等者也。任意圓之圓周之長爲徑即半徑之二倍以 $\pi$ 乘之，即命

圓之半徑為  $r$ ，則圓周之長等於  $2\pi r$ 。  
茲述求等於圓周之直線之近似法如次：  
〔第一法〕設圓之半徑為  $r$ 。作直線使等於  $3r$ 。將  $r$  七等分之，加其一分於此直線於一端，則得全長為  $3\frac{1}{7}r$  之直線。將此直線延長一倍，即得近似於圓周之直線。此法乃以  $\pi$  之近似值為  $3\frac{1}{7}$  為根據者。其理甚明。

〔第二法〕設  $O$  為與圓之心， $r$  為半徑。

於直徑  $AOB$  之一端  $A$ ，作切線  $AD$ 。次於  $DA$  之延長上取一點  $C$ ，使  $\angle COA = 30^\circ$ 。



次於  $O$  之反對方向取一點  $D$ ，使  $CD = 3r$ 。聯  $BD$ 。則  $BD$  為近似於此半圓之二分之一長之直線。因  $AC = \frac{r}{3}\sqrt{3}$ ，

故  $AD = 3r - \frac{r}{3}\sqrt{3}$ 。

故  $BD = \sqrt{(2r)^2 + \left\{ \frac{1(9-\sqrt{3})}{3} \right\}^2}$   
 $= r\sqrt{4 + \frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}}$   
 $= \frac{r}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} \approx (3.141$

533)。而  $\pi = 3.141592 \dots$ ，故所差甚微。是謂之阿多萊魯之法。

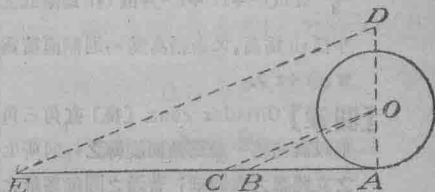
〔第三法〕作等於  $\frac{5}{4}r$  之直線。以  $15r$  及  $2r$  之長之二直線為二邊作直角三角

形，則斜邊等於  $r\sqrt{15^2 + 2^2}$ 。取其八分之一加於前直線，則得近似於半圓周之直線，即為所求直線之二分之一。此時所得之直線等於  $\left\{ \frac{5}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{15^2 + 2^2} \right\}$

$r = r \frac{10 + \sqrt{229}}{8} \approx (3.1415932)r$ 。

是謂之巴萊魯之法。

〔第四法〕命  $O$  為與圓，其半徑  $OA$  為  $r$ 。



於  $OA$  之  $A$  端作切線  $AE$ 。於  $AE$  上取  $B, C$  二點，使  $AD = \frac{11}{5}r$ ， $BC = \frac{2}{5}r$ 。

延長  $AO$  至  $D$ ，使  $AD = OB$ 。過  $D$  作  $DE$  平行於  $OC$ ，交  $AE$  於  $E$ 。則  $AE$  為近似於圓周之直線。因  $OB = \frac{r}{5}\sqrt{146}$ ，

及  $AC = \frac{13}{5}r$ 。故  $AE = \frac{13r}{25}\sqrt{146}$   
 $\approx 2(3.141592)r$ 。

是為斯貝西脫 (Specht) 之法。

【圓弧】Circular arc. [幾] 圓周之一部分謂之圓弧或簡稱弧。

【圓柱】Circular cylinder. [幾] 以矩形之一邊為軸而迴轉之，則所生之立體謂之直圓柱；普通之圓柱為柱之母曲線為圓者之謂，而母線垂直於底面時謂之直圓柱，不然謂之斜圓柱。普通之圓柱之體

積等於底面乘高；而於直圓柱命底面之半徑為  $r$ ，高為  $h$ ，則其側面積為  $2\pi rh$ ，而體積為  $\pi r^2 h$ 。

【圓規】Compasses. [數] 與兩脚規同，見該條。

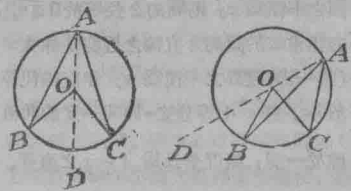
【圓臺】Frustum of cone. [幾] 圓錐以平行於底之平面截去其上部，其所遺者為圓臺。截直圓錐所生之圓臺之體積為  $\frac{1}{3} \pi h(r^2 + rr' + r'^2)$ ，但  $r, r'$  為兩底之半徑， $h$  為高。又命斜高為  $s$ ，則側面積為  $\pi s(r+r')$ 。

【圓錐】Circular cone. [幾] 直角三角形以直角傍一邊為軸而旋轉之，則所生之立體謂之直圓錐；普通之圓錐為錐之母曲線為圓者之謂，若高之趾為底面之圓之中心，則謂之直圓錐，不然則謂之斜圓錐。普通圓錐之體積等於底面積乘高之  $\frac{1}{3}$ 。而於直圓錐命底面之半徑為  $r$ ，高為  $h$ ，斜高為  $s$ ，則其體積為  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ ，側面積為  $\pi rs$ 。

【圓心角】Angle at the centre 或 Central angle. [幾] 角之頂在圓心，邊為兩半徑者謂之圓心角。

【圓函數】Circular function. [三] 與三角函數同，見該條。

【圓周角】Angle at the circumference. [幾] 由圓周上一點引二弦，其所夾之角謂之圓周角，如圖之  $\angle BAC$  是也。圓心角等於同弧所跨之圓周角之二倍。即如圖命  $\angle BOC$  為圓心角， $\angle BAC$  為圓周角，跨同



弧  $BC$ ，則  $\angle BOC = 2\angle BAC$ 。[證] 聯  $AO$  延長至  $D$ 。於  $\triangle AOB$ ，因  $OA = OB$ ， $\therefore \angle ABO = \angle BAO$ 。然外角  $\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO$ ，故  $\angle BOD = 2\angle BAO$ 。同樣  $\angle COD = 2\angle CAO$ 。故於左圖取此二結果之和，於右圖則取其差，得  $\angle BOC = 2\angle BAC$ 。

【圓周率】Ludolphian number. [幾]

圓周率為圓周與徑之比，常以  $\pi$  表之。

求  $\pi$  之值之法有二：第一為利用圓內接正多邊形或外切正多邊形之極限之法。

第二為用無窮級數，無窮乘積，或無限連分數之法。前者謂之幾何之法，而為古代所用之法；後者謂之解析法，而為近世所用之法。由前法以求  $\pi$  之值，若正多邊形之邊數愈增，則  $\pi$  之值愈精，故甚為困難；由後法以求  $\pi$  之值，取無窮級數等之次數愈多，則其值愈精，故較為便易。此外圓周之近似法，見圓周條。

茲用幾何法以求  $\pi$  之值如次：設已知圓之直徑，計算內接正多邊形及與之相似之外切正多邊形之周，然後計算邊數二倍之內接及外切正多邊形之周，次依同樣之方法計算又二倍其邊數之正多邊形之周，逐次如是，算得之值為圓周之逐次近似值。命與圓之徑為 1，自其內接及外

切正方形始，內接正方形之周

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \text{ 外切正方形之}$$

周 = 4。命外切正方形之周爲  $P$ ，內接

正方形之周爲  $p$ ，則  $P=4$ ， $p=2\sqrt{2}$

$= 2.8284271$ 。次外切正八邊形之周爲

$$P' = \frac{2Pp}{P+p} = 3.3137085, \quad p' = \sqrt{p \times P'}$$

$= 3.0614675$ 。以此等爲與量，令

$P=3.3137085$ ， $p=3.0614675$ ，對於正

十六邊形依同式得  $P'=3.1825979$ ，

$p'=3.1214452$ 。續用此法，可得次之結

果。

| 邊數   | 外切正多邊形之周圍 | 內接正多邊形之周圍 |
|------|-----------|-----------|
| 4    | 4.0000000 | 2.8284271 |
| 8    | 3.3137085 | 3.0614675 |
| 16   | 3.1825979 | 3.1214452 |
| 32   | 3.1517249 | 3.1365485 |
| 64   | 3.1441184 | 3.1403312 |
| 128  | 3.1422236 | 3.1412773 |
| 256  | 3.1417504 | 3.1415138 |
| 512  | 3.1416321 | 3.1415723 |
| 1024 | 3.1416025 | 3.1415877 |
| 2048 | 3.1415951 | 3.1415914 |
| 4096 | 3.1415933 | 3.1415923 |
| 8192 | 3.1415928 | 3.1415926 |

由此表之末二數知其徑爲 1 之圓周小於 3.1415928 而大於 3.1415926。而徑爲 1 之圓周等於  $\pi$ ，故  $\pi = 3.1415927$  不過爲小數第七位之一單位以內之誤差。我國求得  $\pi$  之值甚早，周時（西歷紀元前

700 年）商高著周髀算經即以  $\pi$  爲 3。

九章算法中所載  $\pi$  之值，亦與此同。當時西方巴比倫、埃及、非尼基諸國學者，亦

由古代之法，求得  $\pi$  之略值爲 3 或 3.16。

至希臘幾何學者歐克里得 (Euclid) 證得

$3 < \pi < 4$ ，而  $\pi$  之極限略定。至亞基默德 (Archimedes)，由圓內接正 96 邊形，

求得  $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$ ，由是遂以

$\frac{22}{7}$  爲  $\pi$  之近似值。多來米 (Ptolemy)

亦求得  $\pi = 3\frac{17}{120}$ 。羅馬人以 3, 4,

$3\frac{1}{8}$  等表  $\pi$  之略值。同時東方印度諸

國，以  $\pi$  爲  $\frac{49}{16}$ ， $\frac{62832}{20000}$ ， $\sqrt{10}$ 。其

中有學者巴斯喀拉 (Bhaskara)，作內

接正 384 邊形，求得  $\pi = \frac{3927}{1250}$ ，或

$\frac{754}{240}$  而亞拉伯人亦以  $\frac{22}{7}$ ， $\frac{62832}{20000}$ ，

及  $\sqrt{10}$  表  $\pi$  之值。吾國晉時（約西歷

400 年）劉徽，由圓內接正 1536 邊形，

求得  $\pi = 3.1416$ ，即今普通所用之略值，

劉徽後數十年，宋人祖冲之，求得

$3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 。自十三世

紀至十五世紀，歐洲以  $\frac{1440}{4583}$ ， $\frac{62832}{20000}$ ，

及  $\frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{4}$  表  $\pi$  之值。至十六世紀，

布耶塔 (Vieta) 由內接正  $6 \times 2^{16}$  邊形，決

定  $3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$ 。

同時又得  $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}$ 。

$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$  ..... 同世紀中亞多里亞 Adriaen Anthonisz 求得

$$\pi = \frac{355}{113}; \text{ 又由圓內接正 } 2^{30} (10737$$

41824) 邊形, 算得  $\pi$  之值至 15 位小數。

此世紀之末路多路福 (Ludolph Van

Cenlen 由圓內接  $60 \times 2^{33}$  邊形, 算得  $\pi$

之值至 20 位小數; 又由內接正  $2^{33}$  即

4611686018427387904 邊形, 算至 32 位

小數, 1663 年, 日人村松茂清作內接正

$2^{15}$  邊形, 求  $\pi$  之 21 位之值。1700 年,

日人關孝和求至 24 位。1723 年, 日人

健部賢弘求至 41 位。至十七世紀中葉,

華禮士 (Wallis) 證得

$$\pi = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots} \text{ 又先華禮士數}$$

年, 富蘭克發見次之公式, 即

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2+} - \frac{3^2}{2+} + \frac{5^2}{2+} - \frac{7^2}{2+} \dots \text{ 上}$$

所述為用幾何學之法以求  $\pi$  者。至近世

發明無窮級數後, 而得求  $\pi$  之良好之法。

1671 年發明葛利哥雷 (Gregory) 級數,

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta -$$

$$\frac{1}{7} \tan^7 \theta + \dots \text{ 於此式內, 命}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \text{ 則 } \tan \theta = 1, \text{ 故得}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \text{ 於此式}$$

右邊項數取之愈多, 則所得之值愈近於

$\frac{\pi}{4}$ , 而可得  $\pi$  之精密之值。然此級數

收斂甚緩, 用以求  $\pi$  之值, 尚覺繁雜。

1706 年, 馬慶 (Machin) 用公式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{379}, \text{ 求得 } \pi$$

之 100 位精確之值。1719 年, 拉古尼與

喜亞夫, 依同法求得  $\pi$  之 127 位之值, 其

中有 120 位為正確。十九世紀以來, 學者

$$\text{用 } \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{70}$$

$$+ \tan^{-1} \frac{1}{99}, \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

$$+ \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8},$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} \text{ 等公式}$$

以求  $\pi$  之值, 或得 152 位, 或得 200 位;

或得 248 位。至 1853 年, 羅扎夫所託氏

求至 440 位; 向克 (Shanks) 求至 530

位, 是年氏又求至 607 位, 晚年氏求得

$\pi$  之精密值至 707 位 (見附錄一)。

【圓積線】Quadratrix. [幾] 圓積線為

Elis 之 Hippias 所發明。此曲線可作

之如次: 設 AOB 為一象限, 圓之半徑

OA, 以 O 為樞由 OA 之位置, 以均速度

迴轉一直角而至 OB 位置。同時一平行

於 OA 之直線由 OA 之位置, 以均速度

保持平行之

位置進行至

B 點之切線

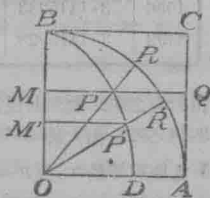
BC, 其與半

徑之交點之

軌跡謂之圓

積線。命

OR, MQ 為此二直線於任意時之位置,



P爲其曲線上之交點。於是  $OM:OB = \text{弧} AR:\text{弧} AB = \angle AOP:\angle AOB$ 。命  $OR'$  爲半徑之他位置，依同理  $OM':OB = \angle AOP':\angle AOB$ 。∴  $OM:OM' = \angle AOP:\angle AOP'$ 。∴  $\angle AOP':\angle P'OP = OM':M'M$ 。故若角  $AOP$  已與時，欲分爲與比，分直線  $OM$  於  $M'$ ，使成與比，引直線  $M'P'$ ，則  $OP'$  分  $\angle AOP$  爲與比。故此曲線可用以作角之三等分及任意等分。

又此曲線可用以解圓積問題。命  $OA$  爲首線， $OP=r$ ， $\angle AOP=\theta$ ， $OA=a$ ，則  $\theta = \frac{1}{2}\pi = r\sin\theta:a$ ；故圓積線之極方程式爲  $r = \frac{2a\theta}{\pi\sin\theta}$ 。

**【圓錐面】** Conical surface. [幾]圓錐之母線所畫之面之謂也。

**【圓之方積】** Puissance or potency (of a circle.) [幾]關於一點圓之方積者，爲由該點至圓之中心之距離之平方與圓之半徑之平方之差之謂也。

**【圓積問題】** The quadrature of a circle. [幾]即求等圓之面積之正方形也。此問題爲幾何學三大問題之一，不能僅以界尺及圓規解之。茲用圓積線解之如次：命與圓之直徑之長爲  $d=2r$ ，其圓周之長爲  $n$ ，則  $n=\pi d$ 。又命其面積爲  $A$ ，則  $A = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$ 。故欲求面積等於  $A$  之正方形之一邊，須求得長等於  $n$  之直線。參看圓積線，知弧  $BR$ ：弧  $BA=BM:BO$ 。故命  $x$  表  $OM$ ， $y$  表  $PM$ ，則  $\frac{y}{x} = \tan BOR = \tan \left( \frac{\text{弧} BR}{BO} \right)$

$$= \tan \left( \frac{\text{弧} BA}{BO} \cdot \frac{BM}{BO} \right) = \tan \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r-x}{r} \right) = \cot \frac{\pi x}{2r}$$

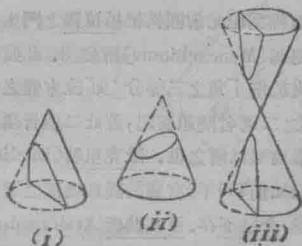
故  $y = x \cot \frac{\pi x}{2r}$ 。是爲圓積線之方程式。若  $x$  近於 0，則得  $AG$  之長，即  $AG = \lim_{x=0} x \cot \frac{\pi x}{2r} = \lim_{x=0} \frac{x}{\sin \frac{\pi x}{2r}} = \frac{2r}{\pi}$ 。故  $\pi = \frac{2r}{AG}$ 。然

$$n = 2\pi r, \text{ 故 } \pi = \frac{n}{2r} \text{。故 } AG:2r = 2r:n \text{。}$$

故若畫得圓積線，換言之，若許用此曲線，則可知  $AG$ ，求  $AG$  與  $2r$  即  $2AB$  之比例第三項，是即  $n$  也。

**【圓錐曲線】** Conic or Conic section.

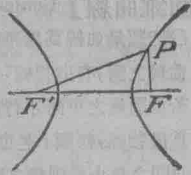
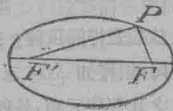
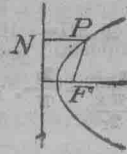
[幾]圓錐曲線爲以平面截圓錐時截口之曲線之謂，有拋物線，橢圓，雙曲線三種。若截圓錐之平面平行於母線，則其截口爲拋物線，如圖 i 是也；若截面與圓錐底面間之角小於圓錐之底角時，則其截口爲橢圓，如圖 ii 是也；若截面與底面間之角，大於圓錐之底角時，則其截口爲雙



曲線。又若截面平行於圓錐之底則截口爲圓，即橢圓之特別之例；又若截面過圓

錐之頂點，則或爲一直線，或爲一點，或爲相交二直線，是爲拋物線，橢圓，雙曲線之特別之例。圓錐曲線又有與以平面之定義者。即拋物線爲由名爲焦點之一

定點  $F$  及名爲準線之一定直線  $N$  等距離點之軌跡之謂；橢圓爲由名爲焦點之二定點  $F, F'$  之距離之和爲一定之點之軌跡之謂；雙曲線爲由名爲焦點之二定點  $F, F'$  之距離之差爲一定之點之軌跡。



又由名爲焦點之一定點之距離與由名爲準線之一定直線之距離之比爲小於 1 之點之軌跡謂之橢圓，大於 1 之點之軌跡謂之雙曲線。圓錐曲線爲紀元前四世紀柏拉圖之門生孟尼哥馬(Menechimus)所發明。此發明蓋由於解「角之三等分」及「立方體之倍積」之二著名問題而起，蓋此二題皆須藉圓錐曲線以解之也。歐克里特(Euclid, 約紀元前300年)有關於圓錐曲線之著作四卷，今已不存。亞基默德(Archimedes, 紀元前 287-22)亦有關於圓錐曲線之著作，且証得拋物線截部之面積，等於其弦與弦端二切線所成三角形面積之三分

之二。其後阿破羅尼 (Apollonius) 著圓錐曲線八卷，證得可由同一圓錐得之，只須改變截面對於圓錐基線之傾角而已。氏又發見橢圓及雙曲線之焦點，且定拋物線 (parabola) 橢圓 (ellipse) 雙曲線 (hyperbola) 諸名詞。至巴普司 (Pappus 約 300 年) 發見拋物線之焦點，且視圓錐曲線爲平面軌跡，發見次之特性，即曲線上任一點至焦點及至準線之距離之比爲常數。其後克伯爾 (Kepler), 牛頓, 快得利 (Quetelet), 但得林 (Dandelin) 諸氏皆有所貢獻。圓錐曲線之代數的表示爲二次方程式，故圓錐曲線亦稱二次曲線。任何二次方程式  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e = 0$  之軌跡爲一圓錐曲線，惟其最簡單者如次，即拋物線之方程式爲  $y = 4dx^2$ ，橢圓之方式爲  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，雙曲線之方程式爲  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，尙見各條。

【圓錐曲線法】Conic sections. [數]

圓錐曲線法爲論圓錐曲線之一分科，有幾何學的與解析的二種。幾何圓錐曲線法爲以幾何學以論圓錐曲線者；而解析圓錐曲線法爲以代數式解析的論之者，即解析幾何學是也。

微

【微】[算] 微爲小數名，即  $\cdot 00001$ ，十綴爲微，十微爲忽。

【微分學】Differential calculus. [數] 微分學爲數學之一分科而依微分法由一



定之函數誘求名為其微分之他函數而應用之以說明代數學，幾何學，力學者也。發明微分學者為來布尼子(Leibnitz)及牛頓(Newton)。

**【微積分】** Calculus. [數] 為微分學與積分學之總稱。

會

**【會合】** Concurrent. [幾] 即交於一點之謂。

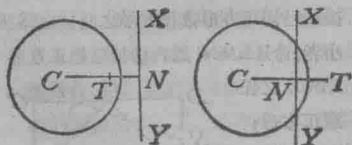
**【會合線】** Concurrent lines. [幾] 與共點線同，見該條。

**【會合點】** Point of concurrence. [幾] 即會合線之交點，亦稱聚交點。

極

**【極】** Pole. [幾] (一) 球之圓之極，為垂直於其圓之平面球之直徑之兩端之謂。(二) 球之極為球之軸交於其球面之點之謂。

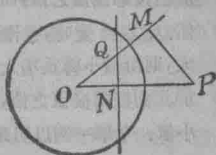
(三) 於圓之任意徑上取二點 N, T, 一在圓內一在圓外，使  $OM \cdot OT$  等於圓之半徑之平方，過 N 作直線 XY 使垂直於 CN,



則 T 謂之 XY 之極，XY 謂之 T 之極線。

(1) 若對於 o 圓，P 點之極線通 Q，則 Q 之極線通過 P。【證】 命 QN 為 P 之極

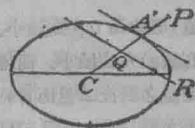
線。由 P 作 PM 垂直於 OQ；則 Q, M, N, P 為共圓點， $\therefore OM \cdot OQ$



$= ON \cdot OP = OA^2$ 。故 PM 為 Q 之極線。故 Q 之極線經過 P。(2) 聯二直線之極之直線為二直線之交點之極線。此可應用(1)以證明之。

(四) 於有中心圓錐曲線，即橢圓或雙曲線，若其徑

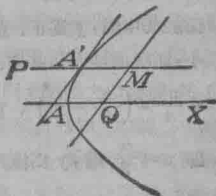
CA' 上取 P, Q 二點，使  $CP \cdot CQ = CA'^2$ ，過其



一點 Q 作 QR 平行於 A' 之切線，則 P 謂之 QR 之極，QR 謂之 P 之極線。關於橢圓或雙曲線之極與極線之性質與關於圓之極與極線之性質同。

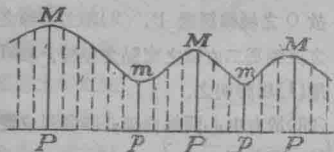
(五) A'M 為平行於拋物線之軸 AX 之任意直線。於此直線上，

取 A'M = A'P，過 M 作 MQ 平行於 A' 點之切線，則 P 為 MQ 之極，MQ 為 P 之極線。



**【極大】** Maximum. [數] 含一變數 x 之 y 式之值，因 x 變，漸漸增大，又漸漸減小，則由增大轉為減小之際，y 必經過大

於前後鄰接值之值，而謂之  $y$  經過極大值。反之， $x$  變時， $y$  漸漸減小，又漸漸增大，則由減小轉為增大之際， $y$  必經過小於其前後鄰接值之值，而謂之  $y$  經過極小值。今舉一例以明此定義，一入行山道，其足出海面之高有種種變化，即登於頂上  $M$ ，則此高  $MP$  為極大，及降至  $n$

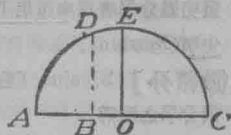


處，則此高  $mp$  為極小。由是知一曲線可有數極大或極小。而極大或極小乃對於變量之前後二量而言，無所謂最大或最小之意；即如上圖， $MP$  有種種，任何者為極大， $mp$  亦有種種，任何者皆為極小。茲示極大極小之問題之數例於次：

(1) 若二數之和為常數  $a$ ，求其積  $y$  之極大值。命一數為  $x$ ，則他數為  $a-x$ ，由是  $y=x(a-x)$ 。命  $x$  由  $0$  變至  $a$ ， $x=0$  時， $y=0$ ，而  $x=a$  時，又得  $y=0$ ，而於其中間， $y$  為正。故  $y$  始增大，後減小，而經過極大值甚明。因  $y=ax-x^2$   
 $=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$ ，故  $\frac{a}{2}-x=0$  時，  
 即  $x=\frac{a}{2}$  時， $y$  為極大，而其極大值為  $\frac{a^2}{4}$  又普通將  $y=ax-x^2$  解  $x$ ，則得  
 $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}$ ，故欲  $x$  為實數， $y$  不能超過  $\frac{a^2}{4}$ 。(2) 茲研究對應

於前題之幾何學的問題。即矩形之面周圍為一定時，求其面積之極大者。命  $AC$  為一定周

圍之半，  
 則  $AC$  亦  
 為一定，  
 以  $AC$  為



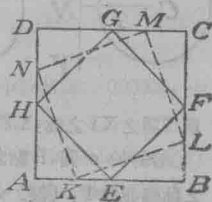
徑於其上畫半圓。由其中心  $O$  作  $OE$  垂直於  $AC$ 。又由  $AC$  上任意點  $B$  作  $BD$  垂直於  $AC$ 。則由幾何學之定理， $AB \cdot BC$

$=BD^2$ 。故  $B$  合於  $O$  時， $AB \cdot BC$  為極大甚明。(3) 二數之和為常數  $a$ ，求其平方和  $y$  之極小值。命二數之一為  $x$ ，則他數為  $a-x$ ，故  $y=x^2+(a-x)^2$   
 $=2x^2-2ax+a^2=\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$ 。

故  $\frac{a}{2}-x=0$  時，即  $x=\frac{a}{2}$  時， $y$  為極小。本題亦可以普通之法解之，即  
 $y=2x^2-2ax+a^2$ ，解  $x$ ，則

$x=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2y-a^2}$ 。故  $y$  不能小於  $\frac{a^2}{2}$ 。故  $y$  之極小值為  $\frac{a^2}{2}$ 。(4) 茲研究

對應於前題之幾何學的問題。即求內接於已知正方形之正方形之面積之為極小者。命  $KLMN$  為內接於已知正方形  $ABCD$  之任意正方形，  
 $EFGH$  為以  
 已知正方形  
 各邊之中點  
 為角頂之正



方形，則 EFGH 之面積明為 ABCD 之面積之半。而  $AK \cdot KB$  等於  $\triangle AKN$ ， $\triangle BLK$ ， $\triangle CML$ ， $\triangle DNM$  之二倍。而  $AK \cdot KB$  以  $K$  與  $E$  合時為極大。故 EFGH 明為內接 ABCD 之正方形之極小者。

【極小】Minimum. [數] 見極大條。

【極限】Limit. [數] 變量之極限為其漸漸接近之一定量，而此量與變量之差可使之小於任意量，然變量決不能達於其極限。例如  $a^2 + 2ax$  與  $x$  俱為變量，即為  $x$  之函數。而因  $x$  減小，漸漸接近於  $a^2$ 。與  $x$  以適當之量，則小於  $a^2$  者可使之小於任意之量。故  $x=0$  時  $a^2 + 2ax$

之極限為  $a^2$ ，而以  $\lim_{x=0} (a^2 + 2ax) =$

$a^2$  記之。同樣當  $x$  無窮減小， $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  之極限為  $a_0$ 。

又有內接於圓之正多邊形，若漸漸增加其邊數，內接多邊形之周圍次第接近於圓周，其與圓周之差，可使之小於任意之量，然不能使為零。故圓周為其內接正多邊形之邊數無限增加時其周圍之極限。

同樣圓之面積為其內接正多邊形之面積之極限。圓錐及圓柱之面積及體積各為以正多邊形為內接角錐及角柱之面積及體積之極限。變量之諸真實之任意性質，對於其極限亦為真。此理可用以誘導得線面體之若干重要性質，而於解析法極限論應用甚廣，微分學之原理多屬於極限論。茲述關於極限論之重要定理於次：

(1) 設一變量  $x$  之極限為零，則此變量以

任何有限常量  $k$  乘之，其積  $kx$  之極限亦為零。(2) 設一變量  $x$  之極限為零，則

此變量以任何有限量  $k$  除之，其商  $\frac{x}{k}$

之極限亦為零。(3) 有限數變量  $x, y, z, \dots$  之和之極限，等於其各變量之極限之和。

(4) 設一變量  $x$  之極限不為零，則此變量以任何有限常量  $k$  乘之，其積  $kx$  之極限，即等於  $x$  之極限以  $k$  乘之。

(5) 設一變量  $x$  之極限不為零，則此變量

以任何有限常量  $k$  除之，其商  $\frac{x}{k}$  之極

限，即等於  $x$  之極限以  $k$  除之。(6) 數變量之積之極限，等於其各變量之極限之積，但此諸極限，須無一為零。(7) 一變量之  $n$  乘冪之極限，即為此變量之極限之  $n$  乘冪。

(8) 一變量之  $n$  乘根之極限，即為此變量之極限之  $n$  乘根。

(9) 設兩變量常相等，且各近於一極限，則此二極限必等。

(10) 設兩變量之比為一常量，且各漸近於其極限，若其極限不為零，則其極限之比，必與兩變量之比

同。於切線之理論，極限甚為重要。例如「圓之切線為交圓周於一點之直線」之定義，適用於如圓或橢圓之凸曲線，然不適用於一般之曲線。然如「切線為曲線之割線，以其交點之一為樞而迴轉時，第二交點接近於第一交點之極限」之定義，適用於一般之曲線。同樣可解釋曲面之切面。

【極軸】Polar axis. [幾] 見極坐標條。

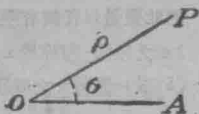
【極線】Polar. [幾] 見極條。

**【極大值】** Maximum value. [數] 見極大條。

**【極小值】** Minimum value. [數] 見極大條。

**【極坐標】** Polar co-ordinates. [幾] 此種坐標法如次，一點 P 之位置，以其由一與點 O 之距離

及 OP 與一定直線 OA 所成之角 AOP 決定之。O 謂之

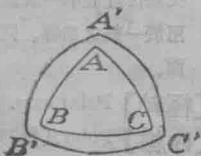


極，OA 謂之極軸或首線；距離 OP 謂之動徑，常以希臘字  $\rho$  表之，角 AOP 謂之變角，常以希臘字  $\theta$  表之。

**【極限值】** Limiting value. [數] 即極限，見該條。

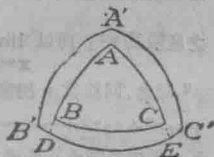
**【極距離】** Polar distance. [幾] 在球面上由小圓之近極至其周圍上任意一點之距離謂之小圓之極距離。又由大圓之任一極至其圓周上任意一點之距離謂之大圓之極距離。大圓之極距離為一象限，即其圓周之四分之一。

**【極三角形】** Polar triangle. [幾] 設以球面三角形之三角頂為極作大圓弧，則另成球面三角形，此球面三角形謂之前球面三角形之極三角形。例如 A 為 B'C' 之極，B 為 C'A' 之極，C 為 A'B' 之



極，則 A'B'C' 謂之 ABC 之極三角形。以 A, B, C 為極作三大圓，則此三圓分球面為八球面三角形。此八三角形中，其一之角頂 A' 與 A 相當，且與 A 在 BC 之同側，其他角頂亦如此者為 ABC 之極三角形。若 A'B'C' 為 ABC 之極三角形，則 ABC 亦為 A'B'C' 之極三角形。因 A 為 B'C' 之極，C 為 A'B' 之極，故 B' 與 A 及 C 之距離為一象限。故 B' 為 AC 之極。同理 A' 為 BC 之極，C' 為 AB 之極。故 ABC 為 A'B'C' 之極三角形。於兩極三角形，一三角形之各角與他三角形之各對邊相補。命 ABC, A'B'C' 為兩極三角

形。命其各角頂之大字母表各角之度，小字母表各對邊之

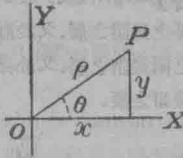


度。延長弧 AB 及 AC 使遇 B'C' 於 D 及 E。因 B' 為 AE 之極，故 B'E = 90°。又 C' 為 AD 之極，故 C'D = 90°。相加得 B'E + C'D = 180°，即 B'D + DE + C'D = 180°，或 DE + B'C' = 180°。然 DE 為  $\angle A$  之測度，B'C' =  $a'$ 。故  $A + a' = 180^\circ$ 。同理可證  $B + b' = 180^\circ$ ， $C + c' = 180^\circ$ ；及  $A' + a = 180^\circ$ ， $B' + b = 180^\circ$ ， $C' + c = 180^\circ$ 。因極三角形有此性質，故極三角形常稱為補三角形。

**【極方程式】** Polar equation. [幾] 即一軌跡以極坐標表之之方程式也。命 OX, OY 為直交軸，P 為極坐標之極，

OX 爲首線。

命  $x, y$  爲一點 P 之坐標,  $\rho, \theta$  爲同點之極坐標。則由圖得



$$x = \rho \cos \theta,$$

$y = \rho \sin \theta$ 。以此代入各軌跡之方程式得其極方程式。例如代入直線之普通方程式,  $Ax + By + C = 0$ , 則得  $\rho(A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0$ , 是爲直線之極方程式。又代入圓之方程式  $x^2 + y^2 = 2rx$ , 卽以圓周上一點爲極, 以一半徑爲首線, 則其極方程式爲  $\rho = 2r \cos \theta$ 。若以焦點爲極, 主軸爲首線則圓錐曲線之極方程式爲

$$\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta},$$

而  $e$  爲離心率,  $p$  爲由焦點至準線之距離。 $e=1$  則爲拋物線,  $e < 1$  則爲橢圓,  $e > 1$  則爲雙曲線。

## 楔

【楔】Wedge. [幾] 楔爲五平面包圍之立體。如圖, 平行四邊形 (通常爲矩形) ABCD 謂之背,

二梯形 ABHG,

CDGH 謂之面,

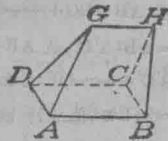
GH 謂之刃, 刃

與背之距離謂之

高。命背之長爲

$L$ , 廣爲  $b$ , 刃之長爲  $l$ , 高爲  $h$ , 則楔

$$\text{之體積 } V = \frac{1}{6} bh(2L+l),$$



## 準

【準圓】Director circle. [幾] 橢圓或雙曲線之二切線互相直交之交點之軌跡之圓謂之準圓。

【準線】Directrix. [幾] 見圓錐曲線條, 及拋物線, 橢圓, 雙曲線各條。

## 稜

【稜】Edge. [幾] 立體之面與面之交謂之稜。

【稜柱】Prism. [幾] 與角柱同, 見該條。

【稜錐】Pyramid. [幾] 與角錐同, 見該條。

## 經

【經度】Longitude. [算] 某地之經度, 爲由本初子午線向東或西沿赤道之弧測至該地之子午線之度數之謂。

【經緯儀】Theodolite. [三] 經緯儀爲測量用器械, 用以測垂直角及水平角。其用廣者爲轉鏡經緯儀 (Transit theodolite)。經緯儀有垂直及水平二分度圈。水平分度圈與羅盤之分度圈同。而望遠鏡有遊尺以支持之; 廻轉水平分度圈, 用以測水平角。又望遠鏡之軸上, 支垂直分度圈, 附同樣遊尺, 以供測傾斜角之用。望遠鏡之下, 附水準器, 以供使望遠鏡水平或測定水平線或測兩地之高低。望遠鏡之筒中, 裝置蛛絲網或白金針直角相交之十字網, 以其交點定視軸 (視線之過望遠鏡之中心者)。



## 置

【置換法】Substitution. [代] 於  $a_1 a_2 a_3 a_4$  四字之排列，命各字以其他一字置換之，例如以  $a_4$  代  $a_1$ ， $a_3$  代  $a_2$ ， $a_1$  代  $a_3$ ， $a_2$  代  $a_4$ ，則此運算謂之置換，可以記法  $\begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a_4 a_3 a_1 a_2 \end{pmatrix}$  表之，而各字以其之字置換之；或以記法  $(a_1 a_4 a_2 a_3)$  表之，而各字以其後之字置換之，最後之字  $a_3$  以第一字  $a_1$  置換之。尋常多用後記法。

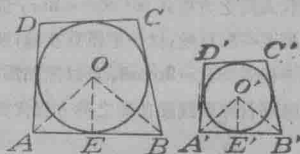
## 腰

【腰】Legs. [幾] 於等腰三角形，其兩相等之邊謂之腰。又於直角三角形，直角傍之兩邊謂之腰。又於梯形，其非平行之兩邊謂之腰。

## 葛

【葛利雷定理】Galileo's theorem.

[幾] 葛利雷定理如次：圓之面積，爲其外切多邊形及與多邊形相似而其周圍等於圓周之多邊形之比例中項。[證] 命與圓



之中心爲  $O$ ，半徑爲  $r$ ，其外切多邊形爲  $ABCD$ ，命與之相似而與圓周有等周之多邊形爲  $A'B'C'D'$ 。因二多邊形相似，而  $ABCD$  外切於圓，故  $A'B'C'D'$  亦可外切於圓。今命其圓之中心爲  $O'$ 。命對應邊  $AB, A'B'$  切於圓之點爲  $E, E'$ ，則  $\triangle OAB, \triangle O'A'B'$  相似，而  $OE, O'E'$  爲相似形之高，故  $AB:A'B' = OE:O'E'$ 。然  $AB+BC+\dots : A'B'+B'C'+\dots = AB:A'B'$ ，故  $AB+BC+\dots : A'B'+B'C'+\dots = OE:O'E'$ 。而  $A'B'+B'C'+\dots = 2O'E'\pi$  (假設)，故得  $AB+BC+\dots : 2O'E'\pi = OE:O'E'$ ，由是  $\frac{1}{2}(AB+BC+\dots)OE:OE^2\pi = OE^2\pi : OE \cdot O'E'\pi$ ，然  $OE \cdot O'E'\pi = \frac{1}{2} O'E' \cdot 2O'E'\pi = \frac{1}{2}$

$O'E'$  (圓  $O$  之周) =  $\frac{1}{2} (A'B' + B'C' + \dots) O'E'$ , 卽  $ABCD : \text{圓} O = \text{圓} O : A'B'C'D'$ .

**【葛爾廷定理】** Guldin's theorem. [幾]

任意正多邊形，以在其平面上而不截之直線爲軸而迴轉之，則所生之體之體積等於其面積以重心所畫之圓周乘之。

[證] 命  $ABCDE \dots$  爲正  $n$  邊形， $XY$  爲在其平面上而不與之相截之直線，聯結頂點  $A, B,$

$C, D, E, \dots$

於重心卽中心

$O$ ，所得之三

角形之重心，

順次命爲  $G_1,$

$G_2, G_3, \dots, G_n$ 。以此諸點作  $XY$  之垂

線各爲  $g_1, g_2, \dots, g_n$ 。由  $O$  作  $XY$  之

垂線命爲  $g$ 。  $ABCDE \dots$  以  $XY$  爲軸而迴

轉所生之體之體積，等於三角形  $OAB,$

$OBC, \dots$  依同迴轉所生之體之體積之

和。卽體積  $ABCDE \dots = \Delta OAB \times g_1$

$+ \Delta OBC \times g_2 + \dots$ 。然  $\Delta OAB,$

$\Delta OBC, \dots$  爲相等之二等邊三角形，

故  $OG_1 = OG_2 = OG_3 = \dots$ ，及

$$\angle G_1OB = \frac{1}{2} \angle BOA = \angle BOG_2, \text{ 故}$$

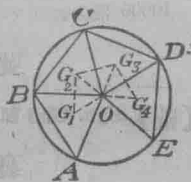
$$\angle G_1OG_2 = \angle AOB, \text{ 同樣 } \angle G_2OG_3,$$

$$\angle G_3OG_4, \dots \text{ 皆等於 } \angle AOB, \text{ 故 } G_1G_2G_3$$

$\dots$  又爲正  $n$  邊形。故體積  $ABCDE \dots$

$$= \Delta OAB \times (g_1 + g_2 + \dots + g_n)$$

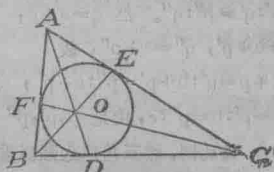
$$= \Delta OAB \times ng = (\Delta OAB \times n)g \times ABC$$



$DE \dots \times g$ 。此定理不限於正多邊形，對於任意之平面形亦爲真，又對於以平面曲線代平面形時所生之面積，本定理亦成立，而謂之葛爾廷定理。

**【葛爾剛訥點】** Gergonne's point.

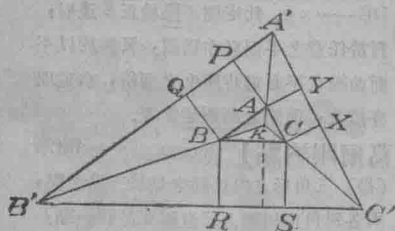
[幾] 三角形之內切圓之切於三邊之點，與各對角頂相聯之三直線交於圓一點，此點謂之葛爾剛訥點。 [證] 命三角形



$ABC$  之內切圓於  $BC, CA, AB$  之切點各爲  $D, E, F$ 。因  $BD = BF, CE = CD, AF = AE$ 。故  $BD : CD, CE : AE, AF : BF$  之複比爲等比。故由稅瓦定理知  $AD, BE, CF$  交於同一點。

**【葛雷伯作圖法】** Grebe's construction.

[幾] 於三角形  $ABC$  之各邊上畫正方形  $APQB, BRSC, CXYA$  (皆向內或皆向外)，命  $QP, XY$  之交點爲  $A'$ ， $PQ, SR$  之交點爲  $B'$ ， $RS, YX$  之交點爲  $C'$ 。則  $A'A, B'B, C'C$  爲共點，而其交點爲三角形  $ABC$  之類似重心。 [證] 因  $ABC, A'B'C'$  爲相似三角形，且相當邊平行列置，故聯結對應點之直線  $A'A, B'B, C'C$  交於同一點。命其交點爲  $K$ 。由  $K$  至三角形  $ABC$  之三邊  $BC, CA, AB$  作垂線，命各爲  $p, p', p''$ ；又至  $B'C', C'A', AB$  作垂線，命各爲  $q, q', q''$ 。則



$\triangle ABC$  與  $\triangle A'B'C'$  相似。故  $a:a'=p:q$   
 $=p':q'=p'':q''$ 。然  $q=a+p$ ，  
 $q'=b+p'$ ， $q''=c+p''$ ；故  
 $p:a+p=p':b+p'=p'':c+p''$ ，或  
 $p:a=p':b=p'':c$ ，由是  $p, p', p''$  與邊  
 $a, b, c$  成比例。然三角形之類似重心與  
 各邊之距離亦與  $a, b, c$  成比例。由是依  
 同一法易知  $K$  不可不為類似重心。故三  
 直線  $A'A, B'B, C'C$  之交點為原三角形  
 之類似重心。上述求三角形之類似重心  
 之作圖謂之葛雷伯作圖法。

**【葛雷哥利級數】** Gregory's series.

(三)由餘弦與正弦之指數值  $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{\theta i} + e^{-\theta i})$ ，  
 $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{\theta i} - e^{-\theta i})$   
 得  $\tan \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}$ ；故  
 $\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = \frac{e^{\theta i}}{e^{-\theta i}} = e^{2\theta i}$ 。取兩邊之  
 對數，則得  $2\theta = \log(1 + i \tan \theta) - i \log(1 - i \tan \theta)$   
 $= 2i \left\{ \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \dots \right\}$ 。故  $\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \dots$ 。是謂之

葛雷哥利級數，當  $\theta$  在  $\pm \frac{\pi}{4}$  之間能成  
 立，而二界限亦在內。於此級數內命  
 $\tan \theta = x$ ，則  $\theta = \tan^{-1} x$ ，故  $\tan^{-1} x =$   
 $x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots$  此不過  
葛雷哥利級數之別形，而  $x$  須在  $\pm 1$  之  
 間。

萬

**【萬】** [算] 數名。為千之十倍，亞拉伯以  
 10000 記之。

號

**【號】** Sign. [數] 即符號之略，見該條。

裏

**【裏定理】** Obverse of a theorem. [幾]  
 若以「A 為 B，則 C 為 D」表定理，則  
 「A 非 B，則 C 非 D」謂之原定理之裏。某  
 定理為真，其裏定理不必真。例如「二三  
 角形，二邊各相等，且其夾角亦相等，則  
 此二三角形為等積」之定理之裏，即「二  
 三角形，二邊各相等，然其夾角不等，則  
 二三角形不等積」，不必為真。因二邊各  
 相等，其夾角為補角時，其面積相等故  
 也。

補

**【補角】** Supplement (of an angle).  
 [幾] 某角由二直角減去之者謂之。若二  
 角之和為二直角，則此二角謂之互為補  
 角。



【補弦】Supplementary chords. [幾]

補弧之弦謂之補弦互為補弧之二弧之弦謂之互為補弦。

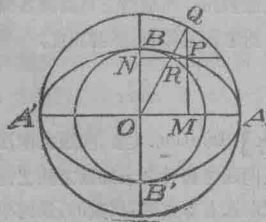
【補弧】Supplement (of an arc) 或 supplementary arcs. [幾]由半圓周減去某弧所餘者之謂。若二弧相合等於一半圓周，則此二弧謂之互為補弧。

【補題】Lemma. [數]即預備定理，見該條。

【補助角】Auxiliary angle 或 Subsidiary angle. [三]於解三角形時，為便於對數計算，有用補助角者。例如於直角三角形之解法， $c^2 = a^2 + b^2$ ，使之適於對數計算，則  $a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$  命  $\frac{b}{a} = \tan \theta$ ，

則  $c^2 = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta$ 。  
 $\therefore c = a \sec \theta$ ， $\therefore \log c = \log a + \log \sec \theta$ 。  
 此  $\theta$  即謂之補助角，而此時可由  $\log \tan \theta = \log b - \log a$  求得之。

【補助圓】Auxiliary circle. [幾]以橢圓之長軸為直徑之圓謂之補助圓或輔圓。其方程式為  $x^2 + y^2 = a^2$ 。又以短軸為徑之圓謂之小補助圓。其方程式為  $x^2 + y^2 = b^2$ 。設 P 為橢圓上任意一點，



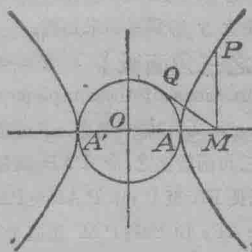
延長縱坐標 MP 遇補助圓於 Q，而 P，

Q 為對應點，角 QOM 謂之離心角。命 y 及 y' 為橢圓及補助圓上有同橫坐標 x 之二對應點之縱坐標，則由二曲線之方

$$\text{程式得 } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y' = \pm \sqrt{a^2 - x^2}. \text{ 由是 } y:y' = b:a.$$

即橢圓及補助圓與公共橫坐標相當之縱坐標之比，如橢圓之半短軸與半長軸之比，而為一常數。此性質可用以當知橢圓之長短軸而作橢圓。其法如次：作長軸及短軸，且作二補助圓。作任意半徑，交二圓於 Q 及 R。過 Q 作 QM 平行 BO，又過 R 作 NR 平行於 OA。命此二線之交點為 P。因 MP:MQ = OR:OQ，即  $y:y' = b:a$ 。故 P 為橢圓上之一點，同樣可得任意若干點，聯結之則得橢圓。又以雙曲線之長軸 AA' 為徑畫圓，則此圓謂之雙曲線之補助圓或輔圓。設 P 為



雙曲線上任意一點，由其縱坐標之足 M 作補助圓之切線 MQ，則可證得 PM:QM = b:a，即雙曲線之任一縱坐標與由其足至補助圓之切線之比，如雙曲線之半短軸與半長軸之比而為一常數。此性質亦可應用之以作雙曲線。

**【補三角形】** Supplemental triangles.

[幾]即極三角形，見該條。

**【補助單位】** Auxiliary unit. [算]補助

單位者為基本單位之若干分，或若干倍者之謂也。例如於米突制長之單位，糧，粉，料，稻，籽等皆為補助單位；又於營造制寸，分，丈皆為補助單位。

**【補助未知數】** Auxiliary unknown quantity. [代]於方程式之解法欲其解

簡明精巧，有用補助未知數者。例如於解

$$\frac{1 + \sqrt{(x^2 - 1)}}{1 + 2a\sqrt{(x^2 - 1)}} = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)} - 1}{x^2 - 2}; \text{命}$$

$\sqrt{(x^2 - 1)} = y$ ，則  $x^2 - 2 = y^2 - 1$ ，與

$$\text{方程式爲 } \frac{1+y}{1+2ay} = \frac{y-1}{y^2-1} = \frac{1}{y+1}.$$

$\therefore y^2 + 2y + 1 = 1 + 2ay$ 。解之，則  $y = 0$

或  $y = 2(a-1)$ ，即  $\sqrt{x^2 - 1} = 0$ ，

$\therefore x = \pm 1$ ，或  $\sqrt{x^2 - 1} = 2(a-1)$ ，

解之，得  $x = \pm \sqrt{1 + 4(a-1)^2}$ 。

此解中之  $y$  即為補助未知數。

**【補角之三角函數】** Trigonometrical functions of the supplement of

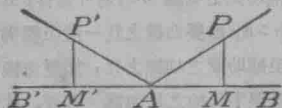
an angle. [三]即一角之三角函數以其角之三角函數表之。命  $PAB$  為任意之

角，延長  $BA$  至  $B'$ ，作  $P'AB' = PAB$ ；取

$AP' = AP$ ，作  $PM, P'M'$  垂直於  $BB'$ 。

$\angle P'AB = 180^\circ - \angle P'AB' = 180^\circ -$

$\angle PAB$ ；故  $\angle P'AB$  為  $\angle PAB$  之補角。



三角形  $PAM$  與  $PAM'$  相等；因

$$\sin A = \frac{PM}{AP}, \sin(180^\circ - A) = \frac{P'M'}{AP'};$$

$$\text{又 } \cos A = \frac{AM}{AP}, \cos(180^\circ - A) = \frac{AM'}{AP'};$$

又因  $PM$  與  $P'M'$  相等且同號，而  $AM$

與  $AM'$  相等，惟號相反，故得  $\sin(180^\circ$

$- A) = \sin A$ ， $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$ 。

其他  $A$  角與其補角之三角函數可由圖

比較之，或由已得之二結果而比較之，今

由後法得

$$\tan(180^\circ - A) = \frac{\sin(180^\circ - A)}{\cos(180^\circ - A)}$$

$$= \frac{\sin A}{-\cos A} = -\tan A,$$

$$\cot(180^\circ - A) = \frac{\cos(180^\circ - A)}{\sin(180^\circ - A)}$$

$$= \frac{-\cos A}{\sin A} = -\cot A,$$

$$\sec(180^\circ - A) = \frac{1}{\cos(180^\circ - A)}$$

$$= \frac{1}{-\cos A} = -\sec A,$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ - A) = \frac{1}{\sin(180^\circ - A)}$$

$$= \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A.$$

故任意角之正弦及餘割各與其補角之正

弦及餘割同；而他諸三角函數各與其補

角之對應函數等值，然號相反。

解

**【解法】** Solution. [數]問題之解法為求

滿足問題之條件之未知數之法之謂。問

題之解法有算術的，代數的，幾何學的等

等。方程式之解法為保持方程式相等之

之未知數之值。

【解答】Solution. [數] 與解法同，見該條。

【解析法】Method of analysis 或 Analysis. [幾] 解析法為以字母表數，以記號示運算之數學論法之謂。解析法有古代之解析法與近世之解析法二種：(1) 古代之解析法之意義，由巴普斯之著作，抄其大要如次。解析法為假定所求者為成立者而由之分出之推理法也。反之，於綜合法 (Synthesis) 為由解析法內在最後者達所求者也。今以一例說明之。

【問題】知由二等邊三角形之頂點至底邊之垂線與二等邊之一之和及底邊，求作本形。

【解析法】命  $ABC$  為所求之三角形，由  $C$  引底

邊  $AB$  之垂線

$CX$ ，則二等分

$AB$  於  $X$ 。延長

$XC$  至  $H$ ，使  $XH$

等於其和  $m$ ，則

知  $CH=CA$ 。聯結  $AH$ ，則  $\angle CAH = \angle CHA$ ，故可決定  $C$  點之位置。

【綜合法】二等分  $AB$  於  $X$ ，由  $X$  作  $XH$

垂直於  $AB$ ，使  $XH=m$ ；作  $AC$  使  $\angle HAC$

等於  $\angle AHC$ ，命其交  $XH$  之點為  $C$ ，則

$ABC$  為所求之三角形。【證】因  $XH$  為

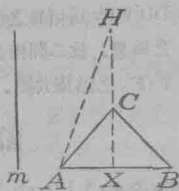
$AB$  之垂直二等分線，故  $AC=BC$ ，故

$ABC$  為二等邊三角形。又  $HC=AC$ ，兩

邊各加  $CX$ ，則得  $AC+CX=HC+CX$

$=HX=m$ 。由是觀之，古代之解析法全

為綜合法之反對之推理法，而假定某命



題為真，經漸漸推理，達真或偽之結果，若達真之結果，則最初假定之結果為真；若達偽之結果，則最初假定之結果為偽。而後者謂之反證法。(2) 近世之解析法，無推理之特別之方法，而為數學的研究之意。凡用記號之數學的推理，即非幾何學的推理，皆為解析法。即數以字母表之，用記號以運算者，因是，甚為簡明。解析法於數學之研究，有便利之處，當應用於物理學，其效用不少。

【解析幾何學】Analytical geometry.

[數] 解析幾何學為用解析法以論幾何學者也。解析幾何學普通分定與不定二者。

定解析幾何學為以解定問題為目的，表

已知未知之間之關係之方程式，常等於

所求部分之數。解析幾何學之此部分，比

較的為不重要，不過應用代數學於幾何

問題而已。不定解析幾何學，為以研究直

線，圓，圓錐曲線及一次二次之表面，其他

如高次曲線，及超越曲線等之普通性質

為主，而用坐標以研究之。此部分為十七

世紀之初狄卡德 (Descartes) 所發明，

而此發明於解析數學現今之進步發達，

關係不淺。

## 資

【資本】Capital. [算] 資本為投於以利

益為目的之事業之金之謂。且不限於現

金，凡公債票，地產，家屋，或商品，勞力

等自算入於資本者。資本有流動資本

(Circulating capital 或 Floating cap-

ital) 與固定資本 (Fixed capital)。流

動資本爲現金或公債票，商品等可轉運生利益者之謂，固定資本爲工場之器械，營業用之地面，家屋等固定而無轉運之方者之謂。

【資產】Assets. [算] 資產爲商人所有之財產與負債相抵消所得之動產，不動產或破產財產之謂。

### 試

【試除數】Trial divisor. [算][代] 於開平方之運算，至任意階級之剩餘，取所得之商之 2 倍爲除數而除之，而此除數謂之試除數。又於開立方之運算，至任意階級之剩餘，取所得之商之平方之 3 倍爲除數以除之，而此除數謂之試除數。例如當求 1369 之平方根，至第二階級之剩餘，

|      |     |
|------|-----|
| 1369 | 37  |
| 9    |     |
| 67   | 469 |
|      | 469 |

以所得之商之 2 倍，即 67 除之，而此 67 謂之試除數。

### 較

【較】Difference. [算][代] 即差，見該條。

### 運

【運算】Operation. [數] 於初等數學中，運算者依表示加減乘除，幕及根之記號而實行之者之謂也。

### 達

【達維斯定理】Davis' theorem. [幾]

達維斯定理如次：——於三角形之各邊或其延線上各有一對之點，而各對與他各對爲共圓點，則此六點又爲共圓點。

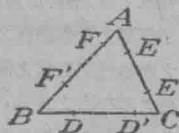
【證】於三角形 ABC，命 D, D' 在邊 BC 上；E, E' 在邊

CA 上；F, F'

在邊 AB 上；H

D, D', E, E'；

D, D', E, F'；



及 E, F', F, F' 任何組皆爲共圓點。求證此六點爲共圓點。因 E, E', F, F' 爲共圓點，故  $AE \cdot AE' = AF \cdot AF'$ ，故 A 在二圓  $DD'E'E'$  及  $DD'F'F'$  之根軸上。然因此二圓有公共弦  $DD'$ ，以是 A 不可不在  $DD'$  上，由是二圓  $DD'E'E'$  及  $DD'F'F'$  爲相異之假設，生如此不合理之結果。故二圓相合，即 D, D', E, E', F, F' 之點爲共圓。

### 鉛

【鉛垂線】Plumb line. [三] 附重錘且自由懸垂之絲之向之直線之謂。

### 零

【零】Zero, 或 Nought (Naught) 或 Cipher (Cypher). [數] 零 (Zero) 有二意義，一爲無 (Nought 或 Cipher) 之意，算術內之零，多爲此意義。他一爲可命之小於任意數之數之意，爲無窮小之意，此意義於代數學及普通之解析的數學內多用之。例如取分數  $\frac{a}{b}$ ，假定 b 爲常

數，而  $a$  逐漸減小，則此分數之值因  $a$  減小而減小，至  $a$  為無限小時，亦為無限小。又於同分數，命  $a$  為常數，而  $b$  逐漸增大，則分數之值逐漸減小，而  $b$  與  $a$  比較為極大時，則分數之值為極小。及至  $b$  為無窮大即  $\infty$  時，則分數之值為無窮小，即為  $0$ 。故  $\frac{a}{\infty} = 0$ 。此種  $0$  謂之極限零 (Limiting value zero)。而  $a$  減  $a$  所得之零即  $a - a = 0$  謂之絕對零 (Absolute zero)。絕對零無討論之必要，凡絕對零皆相等。然極限零，不可不以無窮小之意而討論之，而任何極限零

決不能相同。例如考二分數  $\frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$ ，

命  $a$  為常數， $b$  漸漸增大，則此二分數之值漸漸減小，結果，當  $b$  為無限大則為無限小，即  $b = \infty$  時， $\frac{a}{b}$  及  $\frac{2a}{b}$  俱為  $0$ ，然其比依然為  $2$  也。茲述零之數重要性質如次：(i)  $a + 0 = a$ ，故  $0 + 0 = 0$ 。

(ii)  $a - 0 = a$ 。(iii)  $a \times 0 = 0$ 。(iv)  $\frac{0}{0}$

為不定形。(v)  $\frac{a}{0}$  為不能。又 (vi)

$a^0 = 1$ 。(vii)  $0^0 = 1$ 。(viii)  $\log 0 =$

$-\infty$ 。(ix)  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ 。

**【零係數】** Zero coefficient. [代]於代數式或方程式，其未知數之某乘幂缺少之項，則以  $0$  為其係數，此係數謂之零係數。例如於  $ax^2 + c = 0$  可求為  $ax^2 + 0x + c = 0$ ，而此  $0$  為零係數。

## 預

**【預備定理】** Lemma. [數]亦稱補題，即欲解或證明次之本命題必須預先明此命題也。例如欲證明「由三角形之外接圓周上任一點，而各邊所引之垂線之趾，同在一直線上」之定理，即西摩孫線，為證明引用起見，須預先置以「圓內接四邊形之相對角互為補角，而其逆亦為真」之定理，此謂之預備定理或補題。

## 十四畫

## 偽

【偽設法】Rule for false positions.

〔幾〕與假設法同，見該條。

## 圖

【圖】Diagram. 〔數〕於幾何學中為證明為說明所畫之圖畫之謂也。

【圖形】Figure. 〔數〕點線面體或其集合謂之圖形。

## 境

【境界】Boundary. 〔數〕物之界之謂，例如某平面圖之周圍是也。

## 塵

【塵】〔算〕為沙之十分之一，即.000000001也。

## 實

【實】〔算〕為算術中實數之簡稱。

【實量】Real quantity. 〔代〕與實數同。

【實數】〔算〕加減乘除四法中，其受動之數曰實數，主動之數曰法數。實數或單稱實，即被加數，被減數，被乘數，被除數之總稱；法數或單稱法，即加數，減數，乘數，除數之總稱。

【實數】Real number. 〔代〕為對於虛數而言，凡通常之數，即整數，分數，正數，負

數皆為實數，見虛數條。

【實體】Material solid. 〔幾〕實體為吾人之五官所能認識之物，而即為物體。

【實用算術】Practical arithmetic  
〔數〕實用算術不以算術之理論為主，而以日用之計算為主所述之算術之謂。

## 對

【對合】Involution. 〔幾〕在同一直線上點  $A, A', B, B', C, C', \dots$  與他點  $O$  有  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots$  之關係時，則若干組之二點  $A, A', B, B', C, C', \dots$  謂之對合， $O$  為對合中心，而各組之二點  $A$  與  $A', B$  與  $B', C$  與  $C'$  為共軛點。

【對角】Opposite angle. 〔幾〕某角之對角者，與之相向之角之謂。例如四邊形  $ABCD$ ,  $A$  角為

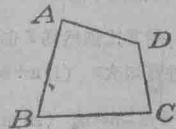
$C$  角之對角，

$B$  角為  $D$  角之

對角。又有指

對多邊形之邊

之角或對多面體之面之角者。



【對面】Opposite face. 〔幾〕即於多面體對某角或稜或面之面之謂。

【對偶】Contraposition (of a theorem). 〔數〕將原定理之假設及終結皆反改之即得其對偶。設原定理為「若  $A$  為  $B$ ，則  $C$  為  $D$ 」，則其對偶為「若  $C$  不為  $D$ ，則  $A$  不為  $B$ 」。若原定理為真，則其對偶必為真。例如「若三角形之二邊相等，則其對角亦相等」之對偶，即「若三角形之二角

不相等，則其對邊不相等」必為真。

【對稱】Symmetry. [代] [幾] [於代數學之對稱] 二以上變數之函數，交換其變數之一組之任意一對，其函數之值不變，則謂之對於變數之此等一組為對稱。例如  $2x+y+z$  對於  $y$  及  $z$  為對稱。

又  $yz+zx+xy+x+y+z$  對於  $x,y,z$

為對稱，而  $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$  及

$(a+b+c)/(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$  對於

$a,b,c$  為對稱。若欲一整數函數為對稱，

其必要且充足條件為任意同一形式之諸

項須為同係數。因變數之一對之交換不

過特別之形之任意項變為同形之他項而

已。例如於  $ax^2+bxy+cy^2$ ，交換  $x$

與  $y$ ，則為  $cx^2+bxy+ay^2$ ，而欲

$ax^2+bxy+cy^2=cx^2+bxy+ay^2$ ，

必須  $a=c$ 。次所示各次數之對稱整數函

數為最普遍者之例：——

| 次數 | 變數      | 函數                                                        |
|----|---------|-----------------------------------------------------------|
| 1  | $x,y$   | $+bx+cy.$                                                 |
| 2  | $x,y,z$ | $a+bx+by+bz+cx^2$<br>$+cy^2+cz^2+dyz$<br>$+d zx+dxy.$     |
| 3  | $x,y$   | $a+bx+by+cx^2$<br>$+dxy+cy^2+ex^3$<br>$+fx^2y+fy^2+ey^3.$ |

次所示各次數之齊次對稱整數函數為最普遍者之例：——

| 次數 | 變數      | 函數                                     |
|----|---------|----------------------------------------|
| 1  | $x,y,z$ | $ax+ay+az.$                            |
| 2  | $x,y,z$ | $ax^2+ay^2+az^2+bxyz$<br>$+bzx+bxy.$   |
| 3  | $x,y$   | $ax^3+bx^2y+cx^2y^2$<br>$+bxy^3+ay^3.$ |

〔於幾何學之對稱〕有中心對稱，軸對稱，平面對稱三種，見各條。

【對數】Logarithm. [代] [三] 一數等

於他數之某乘幂時，則稱其乘幂之次數

為第一數以第二數為底之對數。例如於

$a^x=y$ ，謂  $x$  為  $y$  以  $a$  為底之對數，

而以  $x=\log_a y$  記之。此時  $a$  為對數之

底，而 1 以外之任意正數皆可為底。若計

算對於特別底數之對數，可得對數之一

組。因對數之底可取任意之數，故對數之

種類為無數；然世所用之對數有二種，即

常用對數 (Common logarithm) 與納白

爾對數 (Napierian logarithm) 是也。

納白爾對數亦稱自然對數。常用對數以

10 為底；納白爾對數以不盡數  $e=2.71$

828..... 為底。數之對數由二部而成，即

整數部分與小數部分。而整數部分謂之

指標 (Characteristic)，小數部分謂之假

數 (Mantissa)。例如 52 之常用對數為

1.716003，而 1 為指標，.716003 為假

數。種種之對數表中，以常用對數為便

利，其便利之點如次：〔第一〕指標不必

記載，因常用對數之指標，為數之整數位

數減一。〔第二〕小數之對數與同數字

且同排列之整數之對數同，即不論小數，

整數其假數皆同，而小數亦有指標，惟爲負，但其絕對值爲在小數點與第一有效數字之間之零之數加一。以是之故，常用對數，世界實用計算多用之。次所示對數之性質，各種對數皆可適用之。(1)命  $\log_a x = \alpha, \log_a y = \beta, \log_a z = \gamma, \dots$ ，因  $x = a^\alpha, y = a^\beta, z = a^\gamma, \dots$ ， $\therefore xyz \dots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}$ ，故得  $\log_a(xyz \dots) = \alpha + \beta + \gamma + \dots = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots$ 。由是若干因數之積之對數，等於其各因數之對數之和。(2)命  $\log_a x = \alpha, \log_a y = \beta$ ，因  $x = a^\alpha, y = a^\beta$ ， $\therefore x \div y = a^{\alpha-\beta}$ ，故得  $\log_a(x \div y) = \alpha - \beta = \log_a x - \log_a y$ 。由是商之對數，等於被除數與除數兩對數之差。(3)  $x = a^\alpha$ ，則  $x^m = a^{m\alpha}$ ， $\therefore \log_a x^m = m\alpha = m \log_a x$ 。由是一數某乘器之對數等於其數之對數，而以其指數乘之。(4)若  $\log_a x = \alpha$ ， $\log_b x = \beta$ ，則  $x = a^\alpha = b^\beta$ ，而  $a = b^{\frac{\alpha}{\beta}}$ ，及  $b = a^{\frac{\beta}{\alpha}}$ 。故  $\frac{\beta}{\alpha} = \log_b a$ ， $\frac{\alpha}{\beta} = \log_a b$ 。由是  $\log_a b \times \log_b a = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ， $\therefore \beta = \alpha \log_b a$ ，即  $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ 。由是以  $b$  爲底任何數之對數，等於以  $a$  爲底同數之對數，而以  $\log_b a$  乘之。此四原理可省略乘除，自乘開方之計算，當實行計算多用之。此外如次所示爲解析的研究中所用者。

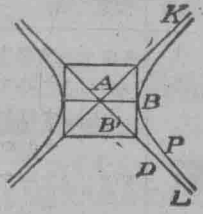
- I. 於任意種類之對數，1 之對數爲 0。
- II. 不論對數之底如何其對數之底爲 1。
- III. 於大於 1 任意之底之對數，大於 1

諸數之對數爲正，而小於 1 諸數之對數爲負。 $\infty$  之對數爲  $+\infty$ ，而 0 之對數爲  $-\infty$ 。IV. 於小於 1 任意之底之對數，大於 1 諸數之對數爲負，小於 1 諸數之對數爲正。 $\infty$  之對數爲  $-\infty$ ，而 0 之對數爲  $+\infty$ 。V. 負數無實數之對數，即負數無對數，各對數爲由二因數而成，其一爲關於其底者，而爲常數；他一爲關於其數者，而因其數變而變。第一因數謂之對數率 (Modulus)。某種對數之對數率，任意數之納白爾對數，以此乘之，可得與其種類同數之對數。常用對數之對

數率爲  $\frac{1}{\log_e 10} = \frac{1}{2.30258509\dots}$

0.434294482.....。而納白爾對數之對數率爲 1。任何種對數之對數率等於該種之底之納白爾對數之倒數。納白爾對數爲各種對數之基本，而由此可得他種對數。納白爾對數又稱雙曲線對數，因納白爾對數與等邊雙曲線及其漸近線間所插之面積有關係故也。命 BP 爲等邊雙

曲線之一分枝，AK 及 AL 爲其漸近線。假定頂點 B 之橫線 AB' 爲 1，如是縱線



BB' 與他任意縱線間所夾之面積之面積單位之數，等於外縱線 PD 之橫線之納白爾對數，即面積  $B'BPD = \log(AD)$ 。普通之對數不謂之雙曲線對數，而納白



爾對數特名之爲雙曲線對數，無其他之理由，且此爲不可思議，因納白爾對數與等邊雙曲線間成立之關係，同關係任意種對數與斜雙曲線間亦成立，即於斜雙曲線時，限於二斜縱線之面積，該種對數之對數率等於斜縱線傾於橫線之角之正弦。

[對數表之計算]對數表用級數以計算之，而其基本者爲次之對數級數，

$$\log(1+x) = M \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \right).$$

但  $\log$  爲表任何種對數， $M$  爲其對數率， $x$  爲任意之數。若命  $M=1$ ，則得納白爾對數，即  $\log_e(1+x)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (1).$$

然此級數收斂甚遲，故於實際計算表時可變之如次。於(1)命  $x$  爲  $-x$ ，則(1)變爲

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (2).$$

而由(1)減(2)， $\log_e(1+x) - \log_e(1-x)$

記爲  $\log_e \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ ，則得

$$\log_e \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (3).$$

命  $x = \frac{1}{2n+1}$ ， $\log_e \left( \frac{n+1}{n} \right)$  記爲  $\log_e(n+1) - \log_e n$ ，則得  $\log_e(n+1) =$

$$\log_e n + 2 \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right) \quad (4).$$

此級數收斂極速，計算對數表計算素數

之對數表即可，因非素數之對數，由已述之對數之性質，將素因數之對數相加即可得之。茲爲示公式(4)之用途，示計算始十整數之對數。若於(4)命  $n=1$ ，則得 2 之對數；次命  $n=2$ ，則得 3 之對數；如是類推。即

$$\log_e 1 = 0,$$

$$\log_e 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right) = 0.693147,$$

$$\log_e 3 = 0.693147 + 2 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) = 1.098612,$$

$$\log_e 4 = 2 \times \log_e 2 = 1.386294,$$

$$\log_e 5 = 1.386294 + 2 \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \dots \right) = 1.609437,$$

$$\log_e 6 = \log_e 2 + \log_e 3 = 1.791759,$$

$$\log_e 7 = 1.791759 + 2 \left( \frac{1}{13} + \frac{1}{3 \times 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \frac{1}{7 \cdot 13^7} + \dots \right) = 1.945910,$$

$$\log_e 8 = 3 \times \log_e 2 = 2.079441,$$

$$\log_e 9 = 2 \times \log_e 3 = 2.197224,$$

$$\log_e 10 = \log_e 2 + \log_e 5 = 2.302585.$$

同樣可算至任何數之納白爾對數。如是常用對數可以對數率乘納白爾對數而得之。

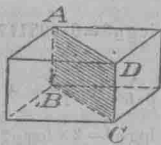
**【對應】** Homologous 或 Corresponding. [數] 於幾何學中，相似多邊形或相似多面體，相似之部分謂之對應部分或相當部分。例如於相似多邊形爲對應點，對應

邊，對應角，對應線。又如於相似多面體爲對應稜，對應面，對應立體角。於比例中，其第一項與第三項，第二項與第四項爲對應項。

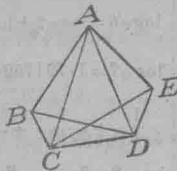
【對點】Opposite points. [幾] 相對之點之謂，如球之徑之兩端是也。

【對邊】Opposite sides. [幾] 於多邊形對於某邊之邊或對於某角之邊之謂。

【對角面】Diagonal plane. [幾] 含多面之相對稜之平面或含一稜與對於該稜之角頂之平面之謂。如圖之 ABCD 爲對角面。



【對角線】Diagonal. [幾] 聯結多邊形之不相鄰二角頂之直線謂之對角線。例如於多邊形 AB CDE, AC, AD, BE, CE 任何者皆爲對角線。於 n 邊之多邊形，對角線之數爲



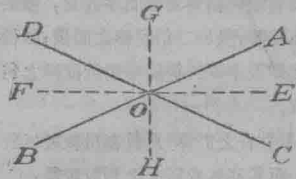
$\frac{1}{2} n(n-3)$ 。又有指聯結多面體之相對角線之直線爲對角線者。

【對角點】Diagonal points. [幾] 相對之角頂之謂也。

【對消法】Cancellation. [算] [代] 與消約法同，見該條。

【對頂角】Vertically opposite angles. [幾] 二直線 AB, CD 交於一點 o 時，角

AOO 與 HOD, 角 AOD 與 BOC 謂之對頂角。而對頂角相等。因對頂角爲同角之補角故也。又二組對頂角之四二等分線



EO, FO, GO, HO, 成二同一直線，且此二直線互垂直。因  $\angle EOC = \frac{1}{2} \angle AOC$ ,

$$\angle COH = \frac{1}{2} \angle COB,$$

而  $\angle AOC + \angle COB = 2\angle R$ ,

故  $\angle EOC + \angle COH = \angle R$ ,

即  $\angle EOH = \angle R$ ; 同樣  $\angle HOF = \angle R$ , 故 EO, OF 爲同一直線，同樣 GO, CH 亦爲同一直線，而此二直線明爲互相垂直。

【對稱式】Symmetrical expression. [代] 與對稱函數同，見對稱條。

【對稱形】Symmetrical figure. [幾] 成對稱之圖形之謂。

【對稱軸】Axis of symmetry. [幾] 見對稱軸條。

【對數底】Logarithmic base. [代] [三] 見對數條。

【對數表】Table of logarithms. [代]

[三] 實用對數表爲載數之以 10 爲底之對數之表(例如由一至十萬)，而有算至四位者，有算至五位，六位，七位者。尋常數學中多用四位者，至高等數學中則須

用七位者，方能精密。

【對數表用法】今示五位對數表(見P.3……)之用法於次：I.求某數之對數。

(1)表中所有之數，其對數可直求得之。

例如 27 之對數，其假數為於表中當 N 行 27 之例又當 L 列之 0 行處知為 3146，其前附以 4，則得假數 43146，附以指標 1 則得  $\log 27 = 1.43146$ 。又求 3.94 之對數，當表中 N 行 39 之列，又當 L 列 4 行之處，知為 9550，其前附以 5，得 59550，是為假數，因指標為零，故

$\log 3.94 = 0.59550$ 。(2)表中所無之數，檢最近此數之二數之對數，依比例可得所求之數。例如 153.7 之對數，檢表得  $\log_2 154 - \log 153 = 2.18752 - 2.18469 = 0.00283$ ，是為對應於小數第四位之一之差，由是  $1:0.7 = 0.00283:x$ ， $\therefore x = 0.001981$  四捨五入， $x = 0.00198$ 。故得  $\log 153.7 = 2.18469 + 0.00198 = 2.18667$ 。

II. 求對應於某對數之真數。(1)表中所有之數，其真數可直求得之。例如對應於對數  $\bar{5}.22011$  之真數，由表知為 0.0000166。

(2)表中所無之數，檢最近此對數之二對數，依比例可得對應於與對數之真數。例如求其對數為  $\bar{3}.83142$  之真數，表中無適當之對數，然  $\log 0.00679 - \log 0.00678 = \bar{3}.83187 - \bar{3}.83123 = 0.00064$ ，又  $\log N - \log 0.00678 = \bar{3}.83142 - \bar{3}.83123 = 0.00019$ 。由是  $64:19 = 0.00001x$ ， $\therefore x = 0.000003$ 。

$\therefore N = 0.00678 + 0.000003 = 0.006783$ 。

【對數率】Modulus. (代) [三] 見對數

條。

【對應角】Homologous angles 或 Corresponding angles. [幾] 見對應條。

【對應面】Homologous face. [幾] 見對應條。

【對應稜】Homologous edges. [幾] 見對應條。

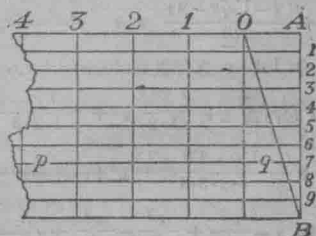
【對應線】Homologous lines. [幾] 見對應條。

【對應點】Homologous points. [幾] 見對應條。

【對應邊】Homologous sides. [幾] 見對應條。

【對合中心】Centre of involution. [幾] 見對合條。

【對角線尺】Diagonal scale. [幾] 對角線尺為依相似三角形之理以精密與小線分者也。圖所示為與一英寸之四十分



之一者，即設 OA 為一英寸之四分之一。AB 以水平之平行線十等分之，每分點為 1, 2, 3, ……如是 AB 與 OB 間所夾之部分，依相似三角形之理，由下端起表

明 OA 之  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{3}{10}$ , …… $\frac{9}{10}$ 。

故  $pq$  之長爲 1 英寸零四十分之七。

【對稱中心】Centre of symmetry.

〔幾〕見中心對稱條。

【對稱函數】Symmetric function.

〔代〕見對稱條。

【對數級數】Logarithm's series.〔代〕

將  $\log_2(1+x)$  展成  $x$  之昇冪所得之級數謂之對數級數。其法如次：於指數定理

$$a^y = 1 + y \log_e a + \frac{y^2 (\log_e a)^2}{2} + \frac{y^3 (\log_e a)^3}{3} + \dots, \text{ 以 } 1+x$$

代  $a$ ；則  $(1+x)^y = 1 + y \log_e(1+x) +$

$$\frac{y^2}{2} \{ \log_e(1+x) \}^2 +$$

$$\frac{y^3}{3} \{ \log_e(1+x) \}^3 + \dots \quad (1).$$

又由二項式定理，若  $x < 1$ ，則得

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2} x^2 +$$

$$\frac{y(y-1)(y-2)}{3} x^3 + \dots \quad (2).$$

今(1)內  $y$  之係數爲  $\log_e(1+x)$ ，而

$$(2) \text{ 內爲 } x + \frac{(-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots,$$

$$\text{即 } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\text{故 } \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

+..... 是即爲對數級數。

【對角三角形】Diagonal triangle.

〔幾〕見完全四角形及完全四邊形兩條。

【對頂二面角】Vertically opposite

dihedral angles.〔幾〕與對頂二面角同，見該條。

【對頂多面角】Vertically opposite polyhedral angles.〔幾〕以交於同一點三以上直線爲稜之相對之多面角之謂。

【對稜二面角】Vertically opposite dihedral angles.〔幾〕二平面相交所生相對之角之謂。而對稜二面角相等。

【對稱三角形】Symmetrical triangle.〔幾〕於平面三角形各邊各角相等者之謂。又於球面三角形見對稱球面三角形條。

【對稱多面角】Symmetrical polyhedral angles.〔幾〕可對置於對頂多面角之位置之多面角之謂。

【對稱多面體】Symmetrical polyhedrons.〔幾〕關於點，或軸或面爲對稱之多面體之謂。

【對稱多邊形】Symmetrical polygons.〔幾〕於平面多邊形各邊各角相等者之謂。然對稱多邊形不相等，因須將其反轉後方可使之疊置故也。又於球面多邊形見對稱球面多邊形條。

【對稱球角錐】Symmetrical spherical pyramids.〔幾〕球角錐之底面爲對稱多邊形者之謂。

【對稱球面三角形】Symmetrical spherical triangles.〔幾〕過球之中心  $O$ ，引三直徑  $AA'$ 、 $BB'$ 、 $CC'$ 。以大圓弧連結點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，又以大圓弧連結點  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ ，成球面三角形  $ABC$ 、 $A'B'C'$ ，而稱之爲對稱球面三角形。若二對稱球

面爲二等邊，

則可疊置，故

相等。又二對

稱三角形爲等

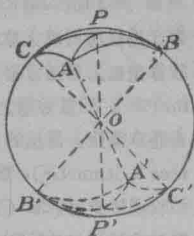
積。取小圓

ABC 之極，命

POP' 爲直徑，

則三角形 ABC，

A'B'C' 皆分爲三二等邊三角形，故可證其爲等積。



【對稱球面多邊形】 Symmetrical spherical polygons. [幾] 以球面多邊形之各角頂之對點爲角頂，作成第二球面多邊形，則此多邊形謂之前多邊形之對稱球面多邊形。

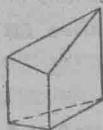
## 截

【截口】 Section. [幾] 即截面，見該條。

【截面】 Section. [幾] 曲面或立體或以一平面截之，其平面與曲面相交之曲線或平面與立體相交之平面形謂之截面或截口。

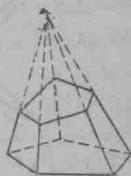
【截線】 Transversal. [幾] 橫截一列直線之直線謂之截線或橫截線。

【截角柱】 Truncated prism. [幾] 角柱之在其底與傾斜於其底之平面之截面間之部分之謂也。其底爲三角形者謂之截三角柱；餘類推。截三角柱之體積與其底爲公共底，以其斜截面之三頂爲頂之三個角錐之和爲等積。



又截三角柱之體積等於其直截面與其三側稜之和之積之三分之一。

【截角錐】 Truncated pyramid. [幾] 截角錐者，角錐之上部以不平行於其底之平面截去之所遺留之部分之謂也。如圖所示爲截五角錐。



【截圓柱】 Truncated cylinder. [幾] 圓柱之在其底與傾斜於其底之平面之截面間之部分之謂。

【截圓錐】 Truncated cone. [幾] 圓錐之上部以不平行於其底之平面截去之，其所遺留之部分謂之截圓錐。

## 演

【演算】 Operation. [數] 與運算同，見該條。

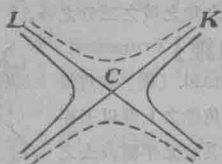
【演繹法】 Deduction. [數] 推理之法，大別爲二，一曰歸納法，一曰演繹法。歸納法爲考察種種事實，依適當之法則，發見普遍之真理之法之謂；演繹法爲由普遍之真理，以斷定特殊之真理之法之謂。幾何學爲以演繹法爲主。

【演算記號】 Symbol of operations. [算] 即表實行運算之記號，例如  $a+b$  之  $+$  爲表示加  $b$  於  $a$  之運算之符號。又記號  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $\sqrt{\quad}$  等皆謂之演算記號。

## 漸

【漸近線】 Asymptote. [幾] 切曲線於

無窮遠點之直線，謂之該曲線之漸近線，



雙曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  有二漸近線，

即  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$  是也，前者為

CK，後者為 CL。此雙曲線之共軛雙曲

線，即  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，與之有共

同之漸近線。

## 算

**【算術】** Arithmetic. [數] 算術為數學之一分科，用數字以論數之性質及關係者也。算術大別為二，一論整數，分數，小數之記數法，命數法，加減乘除，自乘法，開方法者，而為算術之根本。一為算術之應用者，而為諸等數，比及比例，百分法及利息，求積等。普通所用之記數命數法為十進法，然 10 以外任意之數可用為底。例如德國之來布尼子 (Leibniz) 發明二進法。算術因其論法而有種種特別之名稱。即十進算術 (Decimal arithmetic)，為十進法之算術之謂。十二進算術 (Duodecimal arithmetic)，為以十二為底而計算之算術，而世間實際某部分用之，例如年與月之計算，又如英尺與英寸之計算，先令與便士之計算是也。六十進

算術 (Sexagesimal arithmetic)，為以六十為底而計算之算術，例如度分秒之計算是也。普通算術 (Universal arithmetic)，為就普通之數而論之算術，見普通算術條。器械的算術 (Instrumental arithmetic)，為用器械以計算者，如我國算盤之計算 (見算盤條)，又如計算尺亦為器械的算術。表算術 (Tabular arithmetic)，為用表以計算之算術，政治的算術 (Political arithmetic)，為應用政治的數於算術者，例如定一國之人口，男女兩性之分數，作生死之統計，算輸出輸入之額，諸稅之計算是也。

**【算盤】** Abacus. [算] 為珠算所用之器械，以木為之。四周作長方形之框，中植縱桿若干，名曰檔，每檔貫木珠七顆，用橫木一，隔為上二下五，此橫木名曰梁。梁下每珠作一，梁上每珠作五。其左檔各珠皆為右檔之十倍。用時可用口訣以行計算，頗為便利。

**【算術差】** Arithmetical difference. [代] 由大數減去小數之餘數之謂，見差條。

**【算術中項】** Arithmetical mean 或 Arithmetical mean. [算] [代] 即等差中項。

**【算術級數】** Arithmetic (或 Arithmetical) progression 或 Arithmetical series. [算] [代] 即等差級數，見該條。

## 綜

**【綜合法】** Synthesis, method of. [數]

綜合法爲解析法之逆，而由公理，定義及已知之定理，推理希望之結論之推理法之謂。初等幾何學之推理法，多爲綜合法。綜合法爲由特殊之事實推至普遍之事；解析法爲由普遍之事實推至特殊之事實。見解析法條。

**【綜合除法】**Synthetic division. [代]

綜合除法爲霍納(Horner)所發明，其法如次。 $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\dots$  以  $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\dots$  除之，命此商爲  $A_1x^{m-n}+A_2x^{m-n-1}+A_3x^{m-n-2}+A_4x^{m-n-3}+\dots$ ，茲示決定  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  之方法。因以除數乘商，則得被除數，而此運算用分離係數法則如次。

$$\begin{array}{r}
 A+A_1+A_2+A_3+A_4+\dots \\
 1+a_1+a_2+a_3+a_4+\dots \\
 \hline
 A+A_1+A_2+A_3+A_4+\dots \\
 a_1A+a_1A_1+a_1A_2+a_1A_3+\dots \\
 a_2A+a_2A_1+a_2A_2+\dots \\
 a_3A+a_3A_1+\dots \\
 +a_4A+\dots \\
 \hline
 \end{array}$$

$$A+B+C+D+E+\dots$$

今未列之各項可依次將二橫線間之各行相加而得之，若設已知  $A, B, C, D, \dots$  求  $A_1, A_2, A_3, \dots$  而對於此目的，將上之運算逆之如次。

$$\begin{array}{r}
 A+B+C+D+E+\dots \\
 -a_1 \quad -a_1A-a_1A_1-a_1A_2-a_1A_3-\dots \\
 -a_2 \quad \quad -a_2A_1-a_2A_2-a_2A_3-\dots \\
 -a_3 \quad \quad \quad -a_3A \quad -a_3A_1-\dots \\
 -a_4 \quad \quad \quad \quad -a_4A-\dots \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

$A+A_1+A_2+A_3+A_4+\dots$  前運算之縱行與後運算之縱行，結果相同，後運算對於此目的更爲便利。例如前運算之第四縱行爲  $A_3+a_1A_2+a_2A_1+a_3A=D$ ，後運算之第四縱行爲  $D-a_1A_2-a_2A_1-a_3A=A_3$ 。故此法如次：(1) 除數之第一項若爲數字係數，則以此係數除被除數及除數之各係數。如是係數可如次。(2) 被除數之係數以適當之符號書於一橫列(其缺乏之係數以 0 補之)，則得  $A+B+C+D+E+\dots$  之橫列。(3) 於此係數之左引縱線，將除數之係數變其符號，而書之(缺乏者亦以 0 補之)，如是得  $-a_1-a_2-a_3-a_4-\dots$ ，但除數之第一項之係數爲 1，可置之勿論。(4) 此縱行之各係數，以被除數之第一係數乘之，其結果可書於第一斜行，此  $-a_1A-a_2A-a_3A-\dots$ ，而其第一項須置於 B 之下。(5) 縱線右第二行相加爲  $B-a_1A=A_1$ ，是爲商之第二項之係數。(6) 以如斯所得之係數乘縱線左之各係數，得第二斜行  $-a_1A_1-a_2A_1-a_3A_1-\dots$ ，其第一項須置於 C 之下。(7) 縱線右第三項相加爲  $C-a_1A_1-a_2A_1-a_3A_1=A_2$ ，是爲商之第三項之係數。(8) 繼續此等運算，可得所求之項。例如以

$x^2 - 2x + 3$  除  $4x^4 + 3x^2 - 3x + 1$ .

$$\begin{array}{r}
 4+0+3-3+1 \\
 2 \quad 8+16+14-26-92 \\
 -3 \quad -12-24-21+39+138 \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 4+8+7-13-46-53+\dots
 \end{array}$$

故商爲  $4x^2 + 8x + 7 - 13x^{-1} - 46x^{-2} - 53x^{-3} + \dots$ 。若商止於7，則棄去斜行  $-26, +39$  及其以後之斜行，而結果爲

$$4x^2 + 8x + 7 - \frac{13x + 20}{x^2 - 2x + 3}$$

## 聚

【聚交點】Point of concurrence. [幾]

三以上直線相交之點即共點線之交點謂之聚交點。

## 臺

【臺】Frustum. [幾]立體之一部以平行於底之平面截去之，其所遺之部分謂之台或平截體，多就角台，圓台而言，即角錐或圓錐之上部以平行於其底面之平面截去之者之謂。

## 誤

【誤差】Error. [數]近似值與真值之差

謂之誤差。例如以  $\cdot 33$  代  $\frac{1}{3}$ ，其誤差

$$\text{爲 } \frac{1}{300}.$$

## 輔

【輔圓】Auxiliary circle. [幾]即補助圓，見該條。

## 輕

【輕噸】Short ton. [算]美國之噸之謂，即二千磅之噸，等於我國庫平 1520 斤。

## 遞

【遞昇次】Ascending order. [代]數之次序遞次上升之謂。例如式之昇幂之排列，即於  $1 - 2x + 5x^2 - 4x^3$ ， $x$  之指數爲遞昇次。

【遞降次】Descending order. [代]數之次序之遞次下降之謂。例如  $x$  降幂之排列，即如於  $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 1$ ， $x$  之指數爲遞降次。

【遞昇級數】Ascending series. [代]級數之各項之絕對值大於其前項之絕對值者之謂，例如  $1, 2, 4, 8, \dots$  是也。

【遞降級數】Descending series. [代]級數之各項之絕對值少於其前項之絕對值者之謂，例如  $9, 7, 5, 3, 1, \dots$  是也。

## 銀

【銀行折扣】Banker's discount. [算] [代]見折扣條。

## 齊

【齊次式】Homogeneous expression [代]與同次式同，見該條。

【齊次積】Homogeneous product. [代]與同次積同。



【齊次對稱式】Homogeneous symmetrical expression [代]與同次對稱式同。

## 十五畫

### 價

【價】Value. [算]價爲物品之值之謂，例如鉛筆一打之價，紙一張之價是也。

### 億

【億】[算]數名。有以十萬爲億者，即 100000 是也，有以萬萬爲億者，即 10000000 是也。

### 增

【增根】Additional root 或 Extraneous root. [代]方程式  $P=Q$  之兩邊以  $L$  乘之，則爲  $LP=LQ$ ，或  $L(P-Q)=0$ 。但設， $L, P, Q$  皆爲含未知數之式。上方程式含  $L=0$  及  $P-Q=0$  二方程式，然其根爲  $L=0$  或  $P=Q$  之根，然  $L=0$  之根，不必適合  $P=Q$ ；故以含未知數之式乘方程式之兩邊則得增根。又方程式  $P=Q$  之兩邊自乘  $n$  次，則  $P^n=Q^n$ ，或  $(P-Q)(P^{n-1}+P^{n-2}Q+\dots+Q^{n-1})=0$ ，故  $P=Q$  之根必爲  $P^n=Q^n$  之根，然  $P^n=Q^n$  之根爲方程式  $P=Q$  或  $P^{n-1}+P^{n-2}Q+\dots+Q^{n-1}=0$  之根，故不能必適合方程式  $P=Q$ 。故方程式之兩邊自乘常得增根。欲解分數方程式以分母之最小公倍數乘之，或欲解無理方程式，方程兩邊自乘，常得不適合方程式之根，即得增根。例如於方程式

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x^2-x-3}{(x-2)(x-3)} - \frac{3}{x-3} = 0 \dots (1),$$

以分母之最小公倍數乘之，則得  $x^3-4x^2+2x+3=0$ ，即  $(x-3)(x^2-x-1)=0$ ，

故其根為  $x=3$ ， $x=(1\pm\sqrt{5})/2$ 。其中  $x=(1\pm\sqrt{5})/2$  適合原方程式，而  $x=3$

則不適合原方程式，而非為其根，此時惟一之要點為(1)之左邊有餘多之除數，即

(1)之左邊以部分分數分離之，實為  $\frac{1}{x-1}$

$$+ \frac{x^2-x-3}{(x-2)(x-3)} - \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$+ \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + 1.$$

又如欲解  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 1$ ，移項得  $\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{x-1}$ ，兩邊平方而化簡之，則得  $1 = -2\sqrt{x-1}$ 。兩邊再

平方，則  $1 = 4(x-1)$ 。故  $x = \frac{5}{4}$  然

$x = \frac{5}{4}$  不為原方程式之根。

## 廣

【廣】Breadth 或 Width. [幾]物體由前至後之距離謂之廣。

## 整

【整式】Integral expression. [代]見代數式條。

【整數】Integer 或 Whole number.

[算][代]數之適為單位之若干倍而無零餘者謂之整數，整數亦稱完全數，但普通以用整數為多。

【整除數之法】Aliquotation. [算]某數當他數之幾分之一時，其分數利用於乘除法之計算上之方法之謂。於物價之計算，百分法等，特覺其便利。

## 數

【數】Number. [數]有若干之物，由其各個謂之一物之外取去其特性時，則得數之觀念，對於一物之數謂之一，一與一之集合謂之二，二與一之集合謂之三，三與一之集合謂之四，逐次至五，六，七，八，九，而各以記號 1,2,3,4,5,6,7,8,9 表之。由此更進至十，十一，十二，……其結果至無限。如上所述，由數 1 集合而成之數謂之整數。次若 a 不為 b 之倍數，則  $a \div b$  即  $\frac{a}{b}$  為無意義，然今擴張數之範圍，

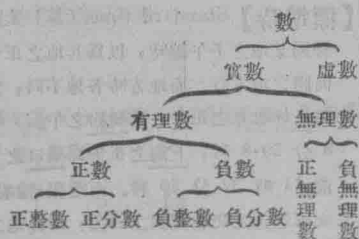
a 不為 b 之倍數時，謂  $\frac{a}{b}$  為分數，而加入於數之中。此時 a 謂之分子，b 謂之

分母。例如  $\frac{3}{5}$ ， $\frac{4}{7}$ ， $\frac{8}{13}$  而分數如整數然，能當基本之定則者。小數不過其分母為 10 或 10 之乘冪之分數之特別

例而已。例如  $\frac{3}{10}$ ， $\frac{19}{100}$ ， $\frac{23}{1000}$ ，……

各以 0.3，0.19，0.023 記之。又擴張數之範圍，例如  $\sqrt{2}$ ，其平方為 2 之數，如斯之數謂之根數，或無理數。而根數或無理數惟可求得其近似值。即  $(1.4142135)^2$  與 2 之差為 0.00000017641775；而  $(1.4142136)^2$  與 2 之差為 0.00000010242469，故  $\sqrt{2}$  之至小數第六位之近似值為

1.414213, 凡冠以根號 $\sqrt{\quad}$ 者皆謂之根數, 不盡根, 或無理數, 例如  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  是也。又有正數負數, 見正量, 負量條。今將數之關係以表記之如次。



**【數字】** Digit 或 Figure. [算] 數字為代表九基數之記號, 即 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 之謂。然有時加 0 於其中而謂之數字者, 此時由 1 至 9 之諸數字謂之有效數字 (Significant figure)。數字之書法可如次示依矢之向以書之。

1, 2, 3, 4, 5

6, 7, 8, 9, 0

5 又有如右圖連續書之者, 是為 5 之本來之寫法, 然現今普通皆前書之。

5

**【數值】** Numerical value. [代] 代數式之數值為式中之諸文字, 以數值代入之, 且行所示之運算所得之結果之謂。例如  $a=2, b=3, c=1, d=5$ , 則  $a^2b-c^2d$  之數值為  $2^2 \cdot 3 - 1^2 \cdot 5 = 7$ 。

**【數論】** Theory of numbers. [代] 論整數之性質; 及關整數之定理者也。

**【數學】** Mathematics. [數] 數學為論關於數及量之科學之總稱。數學分三大分科, 即算術, 幾何學, 解析法是也。I. 算術為以數字表數而論其關係性質等; 而算術有純正部分與應用部分二者之分。II. 幾何學為論關於線, 面, 體之定理, 性質等等之分科, 幾何學有初等幾何學與高等幾何學之別。(1) 初等幾何學為以直線及圓為元素, 而論此等或由此等之集合而成之圖形。(2) 高等幾何學論直線與圓之外普通之曲線曲面等。此外尚有 (3) 畫法幾何學, 為關於合三度者, 以諸問題之圖的解法為目的。III. 解析法合以字母表數, 以記號表運算之諸分科, 而其中有代數學, 解析幾何學, 微積分學等。(1) 代數學為論關於代數數及超越數之性質, 關係, 運算等。三角函數亦屬於其中, 然普通將三角法另立一分科。(2) 解析幾何學為應用代數式於幾何學者, 而其中有定解析幾何學與不定解析幾何學。(3) 微積分學為數學分科之最高科; 又有稱為變分學; 微分學, 積分學為就既知之函數而立論者, 然變分學為就未知之函數而立論者也。以上所述之外, 尚有力學為應用數學之一分科。

**【數字值】** Digit value. [算] 數字本身之值之謂; 即對於位置值而言也。

**【數字係數】** Numerical coefficient. [代] 數字係數為數字所表之係數之謂。例如  $5x^3$  之 5 為數字係數。數字係數對於文字而言之語也。

## 【數字方程式】 Numerical equation.

〔代〕方程式之係數爲數字者之謂。數字方程式爲對於文字方程式而言之語。例如  $3x-7=0$ ,  $7x+4y=10$ ,  $x^2-3x+5=0$  皆是也。

## 【數學的歸納法】 Mathematical

induction. 〔數〕數學的歸納法可由次例

以明之。依除法  $\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + \frac{a(x^{n-1} - a^{n-1})}{x - a}$ 。故若  $x^{n-1} - a^{n-1}$  可以  $x - a$  整除之。則  $x^n - a^n$  可以  $x - a$  整除之。然  $x^2 - a^2$ ,  $x^3 - a^3$  可以  $x - a$  整除之，此明知之。故  $x^4 - a^4$  亦可以  $x - a$  整除之，既知  $x^4 - a^4$  可以  $x - a$  整除之，則  $x^5 - a^5$  亦可以  $x - a$  整除之，如是類推。故  $n$  爲正整數時， $x^n - a^n$  可以  $x - a$  整除之。又他例證明級數  $1, 3, 5, 7, \dots$  之  $n$  項之和爲  $n^2$ 。因此級數之  $n$  項爲  $2n-1$ 。假定  $1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$ 。加  $2n+1$  於其兩邊，則  $1+3+5+\dots+(2n-1)+(2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ 。故若此級數之  $n$  項之和等於  $n^2$ ，則  $n+1$  項之和等於  $(n+1)^2$ ；換言之，此定理若取級數之任意若干項爲真，則項數增一時亦爲真。然  $1+3=4=2^2$ ,  $1+3+5=9=3^2$ ,  $1+3+5+7=16=4^2$ ，即取四項時此定理爲真，故取五項時此定理爲真，由是取六項時及取第七項時亦爲真，如是類推。故此定理普通皆真。由是以觀，數學的歸納法如次：若知一定理於任意某事例爲真，證明其次之事例亦爲真，由是已證此定理一

般皆真。於數學中若干重要公式，用尋常之證法難證明之，此時須用此證法。

## 標

【標準時】 Standard time. 〔算〕太陽經過某地之子午線時，以爲其地之正午而謂之地方時。而地方時各地不同，例如格林維基之正午，爲紐約之午前7時3分59.8秒；上海之正午爲漢口之午前11時32分20秒。而電報、輪船、火車等迅速交通機關之開發，用各地之地方時，甚覺不便。於是取某地之時刻以爲本區域內各地方之時刻之標準，是謂之標準時。

## 模

【模數】 Modulus. 〔代〕見等剩式，複虛數圖示法條。

## 歐

【歐幾里得】 Euclid. 〔幾〕歐幾里得爲希臘古代之幾何學者，爲第一著完全幾何學書之人，而後世遂取其名以爲書名，即所謂歐幾里得原理 (Elements of Euclid) 是也。現今通行之歐幾里得，第一卷直線，第二卷面積，第三卷圓，第四卷內接形及外接形，第五卷比例之理論，第六卷比例之應用，第十一卷爲立體幾何學之初步。英國現今雖仍用稍加修正之歐克立特，然他國用之甚少。歐克立特之第七至第十卷所論多與數論之幾何學有關，第十二卷以下以至第十五卷論立體，

或謂第十四第十五兩卷爲後人所續。歐幾立特，我國舊時有譯本，即幾何原本是也。此書前六卷係西人利瑪竇與明人徐光啟所譯，後九卷係英人偉烈亞力及清人李善蘭所譯。

## 碼

【碼】Yard. [算] 英國長度名，3 呎爲碼，合我國 2·8574 尺。

## 窮

【窮極法】Proof by exhaustion. [幾] 此證法爲古代幾何學者所用之法，可由次例以明之。設已證明「三角形之二邊相等，則其對角相等」之定理，及「三角形之二邊不等，則對大邊之角，大於對小邊之角」之定理，而求證明「三角形之一角大於他角，則對大角之邊大於他邊」。設 ABC 爲三角形，其角 ABC 大於角 ACB，則邊 AC 大於邊 AB。因若  $AC > AB$ ，則必  $AC = AB$ ，或  $AC < AB$ 。然  $AC = AB$  爲不能，若然，則須  $\angle ABC = \angle ACB$  也。又  $AC < AB$  爲不能，若然，則必須  $\angle ABC < \angle ACB$  也。故 AC 不能等於 AB，AC 亦不能小於 AB。故  $AC > AB$ 。此證法即爲窮極法。此法爲互不相容之假設之一必爲真，而證明此等假設之一以外其他皆爲僞，由是知所餘之假設爲真。

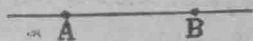
## 線

【線】Line. [幾] 面之界謂之線。面之一部與他部之界爲線。線有位置與長而無

廣及厚。即線僅有一度。於幾何線分爲直線與曲線二者。直線爲方向不變之線，而曲線爲其各點方向變者之謂。又有所謂折線者，見該條。

【線分】Segment of a line. [幾] 直線之一部分之謂。

【線方向】Line direction. [幾] 線有二方向，是又謂之線之向 (Sense)。例如於圖取 A 與 B 之間之直線之一分而考之，



此線分可視爲由 A 至 B 者，即視爲一點由 A 出發，運動至 B，謂之直線 AB；又可視爲由 B 至 A，謂之直線 BA。而通常命由右至左之線爲負。由左至右之線爲正，如是 AB 爲由 A 運動至 B 者，故 BA 爲點又來至原位置者，而謂之  $AB + BA = 0$ ，與代數學之  $x + (-x) = 0$  同。同樣  $AB + BC + CA = 0$ ，然  $AB + BC + AC = 2AC$ 。

【線對稱】Line symmetry. [幾] 與軸對稱同，見該條。

【線方程式】Linear equation. [代] 即一次方程式，見該條。

【線上正方形】Square on the line. [幾] 以一直線爲一邊所作之正方形也。

## 緯

【緯度】Latitude. [算] 某地之緯度，爲過該地之地球之半徑與赤道平面所成之角之度數，而半徑在赤道面之北謂之北緯幾度，在南則謂之南緯幾度。而同緯度

之圓周謂之緯度圈。

【緯度圈】Circle of latitude. [幾] 見緯度條。

### 複

【複比】Compound ratio. [算][代] 二以上之比相乘合成之比謂之複比。例如比  $2:5$  與  $3:7$  之複比為  $2 \times 3:5 \times 7$ ，以  $\left. \begin{matrix} 2:5 \\ 3:7 \end{matrix} \right\}$  記之。又比  $a:b, c:d, e:f$  之複比為  $ace:bdf$ 。

【複式】Compound expression. [代] 由二項以上而成之式之謂。例如  $a+b, 2x+3y-z$  是也。實即多項式。

【複利】Compound interest. [算][代] 於利息，某期間之利息，於其期之末，算入本金以為次期之本金，次期之利息，於其期之末又算入本金，以為第三期之本金，如是類推，此種利息謂之複利。命本金為  $P$ ，本利合計為  $A$ ，利率為  $r$ ，期間為  $n$ ，則  $A=P(1+r)^n$ 。

【複數】Composite number. [算] 即非素數，見該條。

【複分數】Compound fraction. [算] [代] 複分數為分數之分數。例如  $\frac{5}{7}$  之

$\frac{2}{3}$ ，及  $\frac{3}{8}$  之  $\frac{2}{3}$  之  $\frac{2}{15}$  為複分數。

而複分數可用乘法化成簡分數，如  $\frac{5}{7}$

之  $\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$ ， $\frac{3}{8}$  之  $\frac{2}{3}$

之  $\frac{2}{15} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30}$ 。

【複比例】Compound proportion. [算]

[代] 比例之等號之一側或二側為複比者謂之複比例。例如  $\left. \begin{matrix} 2:3 \\ 4:5 \end{matrix} \right\} = 100:x$  是也。

開複比例式之法，以隻項第三項，未知數為第四項；其他同種之數，考其正反，而第一二項，然後以第一項之連乘積，除第二項，第三項之連乘積，則得答數。例如農夫 5 人每日作工 11 小時，則 6 日耕田 13 畝，今 9 人每人作工 10 小時，欲耕田 39 畝需幾日。先以隻項 5 日，未知數  $x$  日列於後節。因同工程之人數與日數為反比，故有 9 人：5 人；因同工程之時數與日數為反比，故有 10 時：11 時；因同工人之畝數與日數為正比，故有 1 畝：39 畝。

$$\left. \begin{matrix} 9:5 \\ 10:11 \\ 13:39 \end{matrix} \right\} = 6:x,$$

$$\text{得 } x = \frac{5 \times 11 \times 39 \times 6}{9 \times 10 \times 13} = 11 \text{ 日。}$$

又或不論已知與未知，但將各數分為原因與結果。將起因之數列於前節，結果之數列於後節，然後依尋常之法解之即得未知數。是為之因果法。如上例可用因果法開比例式如次：

$5 \text{ 人} \times 6 \text{ 日} \times 11 \text{ 時} : 9 \text{ 人} \times x \text{ 日} \times 10 \text{ 時} = 13 \text{ 畝} : 39 \text{ 畝}$ 。其解其未知數之式仍與上同。

【複平均】Compound average. [算] 平

均之複雜者之謂。例如某火車每日行 80 里 2 小時，100 里 3 小時，110 里 5 小時，求每小時平均之里數。因所行里數之總數  $80 \times 2 + 100 \times 3 + 110 \times 5 = 1010$  里，

以時間之總數  $2+3+5=10$  除之，則得 101 里。

【複名數】Compound number. [算] 用二以上單位所表示之數謂之複名數或諸等數。例如 3 尺 5 寸，7 小時 20 分是也。複名數可化為單名數。如 3 尺 5 寸可化為 3.5 尺或 35 寸；7 小時 20 分可化為  $7\frac{1}{3}$  時或 440 分。

【複因數】Composite factor. [算] 由二以上因數之積而成之因數之謂。例如 42 分為因數  $7 \times 6$  時，6 尙可分為二因數  $2 \times 3$ ，故為複因數。然 7 除 1 及本數身外，不能分解為二因數。故為單因數。

【複曲面】Double curved surface. [幾] 見曲面條。

【複利法】Compound interest. [算] 關於複利之算法之謂。

【複符號】Double sign 或 Ambiguous sign. [代] 即符號士之謂，即為 + 或 - 之意義者。例如  $a \pm b$ 。

【複虛數】Complex number. [代] 複虛數含有實數與虛數二種數，若  $a$  及  $b$  為實數，則形如  $a + b\sqrt{-1}$  之數謂之複虛數，而  $\sqrt{-1}$  通例以  $i$  表之，故複虛數  $a + ib$ 。複虛數可以圖表之，見複虛數之圖示法條。

【複合資算】Compound partnership. [算] 於合資算，利益之分配，損失之擔負，比例出資之多寡與出資期間之長短之算法，謂之複合資算。例如甲五月間出資本金 2400 元，乙六月間出資本金 1600 元。

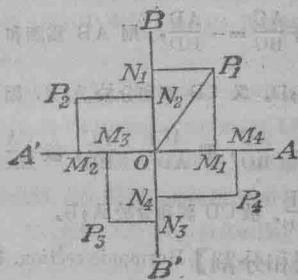
共營商得純利益 865 元，按比例於出資之額與月而分配之是也。

【複利年金】Annuity at compound interest. [算] [代] 複利年利者，年金之利息依複利法而計算者之謂。

【複假設法】Double positions. [算] 見假設法條。

【複循環節】Compound rep tend. [算] 見循環小數條。

【複虛數之圖示法】Graphical representation of a complex number. [代] 複虛數之圖示法 1797 年 Caspar Wessel 始發明之。1806 年 Argand 亦發明之。其法如次：於平面內引互相垂直二直線  $AOA'$ ， $BOB'$ ，命  $AOA'$  為實數軸， $BOB'$



為虛數軸。凡實數  $x$  可在實數軸上表之，即於  $AOA'$  上取  $OM = |x|$ ，按  $x$  為正或負，以定在  $O$  點之右方或左方取之；如是實數  $x$  可以  $M$  點之位置或  $OM$  直線表之。虛數  $iy$  可在虛數軸上表之，即取  $ON = |y|$ ，按  $y$  為正或負以定在  $O$  點之上方或下方取之；如是虛數  $iy$  可以  $N$  點之位置或  $ON$  直線表之。複虛數  $x + iy$

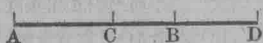
OM, ON 可以為邊所完成之矩形 OMPN 之對角線 OP 表之。如圖 P<sub>1</sub> 表示複虛數  $x_1 + iy_1$ , 而  $x_1, y_1$ , 皆為正; P<sub>2</sub> 表示  $x_2 + iy_2$ , 而  $x_2$  為負,  $y_2$  為正; P<sub>3</sub> 表示  $x_3 + iy_3$ , 而  $x_3, y_3$  皆為負; P<sub>4</sub> 表示  $x_4 + iy_4$ , 而  $x_4$  為正,  $y_4$  為負。

複虛數之加, 減, 乘, 除, 自乘, 開方諸運算, 皆可以圖表示之。其法見北京高等師範學校數理雜誌二卷三, 四號。

## 調

**【調和分】** To divide harmonically.

〔幾〕一有限直線內分於 C, 外分於 D 時,



若  $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ , 則 AB 為調和分於 C, D。又 CD 調和分於 A, B。因  $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ , 則  $\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}$ , 故  $\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$ 。故 CD 調和分於 A, B。

**【調和分割】** Harmonic section. 〔幾〕

調和分割即調和分割直線之謂, 見調和分條。

**【調和中項】** Harmonic mean. 〔代〕

〔幾〕若  $a, b, c$  成調和級數, 即  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

$= \frac{2}{b}$ , 或  $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ , 則 b 謂之 a 及

c 之調和中項, 而  $b = \frac{2ac}{a+c}$ 。又若直線

AB 調和分於 C, D, 則  $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ ,

即  $\frac{AC}{AC-AB} = -\frac{AD}{AD-AB}$ , 即  $\frac{AC}{AD} =$

$\frac{AC-AB}{AB-AD}$ 。故 AC, AB, AD 成調和級數,

而 AB 謂之 AC, AD 之調和中項。

**【調和比例】** Harmonic proportion.

〔代〕成調和級數之諸數, 謂之成調和比例。見調和級數條。

**【調和列點】** Harmonic range. 〔幾〕若

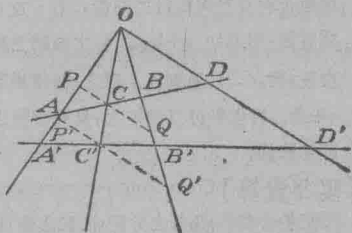
直線 AB 調和分於 C, D, 則 A, B, C, D 謂之調和列點。其所以稱為調和列點者

因此時  $\frac{AC}{AD} = \frac{AC-AB}{AB-AD}$ , 或  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

$= \frac{2}{AB}$ 。AB, AC, AB, AD 成調和級數故也。

**【調和束線】** Harmonic pencil. 〔幾〕若

一由四直線而成之束線, 調和分一橫截線, 則此束線謂之調和束線。若一截線截一束線之四直線於 A, B, C, D 若 ABCD 為調和列點, 則其他任何截線亦必為調和分。命 O 為束線之頂。命他直線截束線



之四射線於 A', B', C', D'。過 C, C' 作直線平行於 CD, 割 OA 於 P, P', 割 OB



於  $Q, Q'$ . 因  $PC \parallel OD$ ,  $\therefore \triangle APC, AOD$

相似,  $\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{OD}$ . 又  $\triangle BQC, BOD$

相似,  $\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{QC}{OD}$ . 因  $ABCD$  爲調和

列點,  $\therefore \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ ,  $\therefore \frac{PC}{OD} = -$

$\frac{QC}{OD}$ .  $\therefore PC = CQ$ . 今  $\frac{P'C'}{P'U} = \frac{OC'}{OC} =$

$\frac{C'Q'}{CQ}$ ,  $\therefore P'C' = C'Q'$ . 又由相似三角形

得  $\frac{A'C'}{A'D'} = \frac{P'C'}{O'D'}$ , 及  $\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{Q'C'}{O'D'}$ .

$\therefore \frac{A'C'}{A'D'} = -\frac{B'C'}{B'D'}$ . 是即  $\frac{A'C'}{B'C'} = -\frac{A'D'}{B'D'}$ .

故  $A'B'C'D'$  爲調和列點.

**【調和級數】** Harmonical (或 Harmonic) progression. [代] 某級數任取其連續三項, 其第一第二之差與第二第三之差之比等於其第一與第三之比, 則此級數謂之調和級數. 例如於級數  $a, b, c, d, \dots$   $a-b : b-c = a-c$ , 又  $b-c = c-d : b-d$ , 依此類推, 則級數  $a, b, c, d, \dots$  謂之調和級數. 略記爲  $H.P.$  由定義得  $c(a-b) = a(b-c)$ , 即  $ca - b$

$= ab - ac$ , 以  $abc$  除之得  $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} :$

$\frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ . 同樣  $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$ .

故  $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} =$

$\dots$ , 而  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \dots$

成等差級數. 由是成調和級數諸量之倒數成等差級數. 故調和級數可由等差級

數以推求之. 又求調和級數之若干項之和, 無普通之公式. 所謂調和之命名之自由起如次. 有同質同大之絲若干條, 其長

各比例於  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ,

$\frac{1}{6}$ , 此等絲以相等之力張緊之, 若其

二絲同時鳴時, 則耳感音之調和. 於往昔希臘時代之音樂之理論上, 與三弦其

長適成  $1 : \frac{2}{3} = 1 - \frac{4}{5} : \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ ,

即長  $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ , 用以發  $do, mi, sol$

三音, 是爲調和之起因.

**【調和共軛線】** Harmonic conjugate rays, 或 Harmonic conjugates. [幾] 若四直線  $OA, OB, OC, OD$  爲調和束線, 則  $OC, OD$  對於  $OA, OB$  爲調和共軛線.

**【調和共軛點】** Harmonic conjugate points 或 Harmonic conjugates. [幾] 若直線  $AB$  調和分於  $C, D$  則  $C, D$  謂之對於直線  $AB$  爲調和共軛點. 故若二點  $C, D$  對於直線  $AB$  爲調和共軛點, 則  $A, B$  亦爲對於直線  $CD$  爲調和共軛點;

誘

**【誘求式】** Derivative. [代] 若方程式  $P=0$  之諸解答亦爲方程式  $Q=0$  之解答, 則方程式  $P=0$  爲方程式  $Q=0$  之誘求式. 若方程式  $Q=0$  之諸解答亦爲方程式  $P=0$  之解答, 則誘求謂之可逆. 而方程式  $P=0$  之諸解答爲  $Q=0$  之解

答，然方程式  $Q=0$  之諸解答不能為方程式  $P=0$  之解答，則誘求謂之不可逆。

例如由  $6x+5=3x+14$  ..... (1)

$(6x+5)-(3x+5)=(3x+14)-(3x+5)$

..... (2) 故  $3x=9$  ..... (3) 由是

$3x \div 3 = 9 \div 3$  ..... (4) 故  $x=3$  ..... (5)

如是上所述諸解法之順序皆可以反對者取之。換言之，(1)，(2)，(3)，(4)，(5) 為可互逆之誘求式。次由  $x-1=0$  ..... (6)

誘求  $(x-1)(x-2)=0$  ..... (7)，適合

(6) 之  $x$  之值亦適合 (7)，然其逆則不真，

即  $x=2$  為 (7) 之解答，然非 (6) 之解答。

由是 (7) 為 (6) 之不可逆誘求式。

### 【誘導函數】 Derived function 或

Derivative. [代] 於  $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n$  命以  $x+h$

代  $x$ ，則得  $f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+a_2(x+h)^{n-2}+\dots+a_n$ 。

用二項式定理展開右邊各項，而集合  $h$

同乘幂之係數，則得

$f(x+h)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots$

$+\dots+a_n+h\{na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}$

$+(n-2)a_2x^{n-3}+\dots+a_{n-1}\}$

$+\frac{h^2}{1 \cdot 2}\{n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)$

$a_1x^{n-3}+\dots+2a_{n-2}\}$

$+\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\{n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3}+(n-1)$

$(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}+\dots+3 \cdot 2a_{n-3}\}$

$+\dots$

$+\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}\{n(n-1)(n-2)\dots \cdot 2 \cdot 1\}a_0$

此展開式之第一行明為  $f(x)$ 。而  $h$  之係數謂之第一誘導函數，以  $f'(x)$  表之。同

樣  $\frac{h^2}{2}$  之係數，謂之第二誘導函數，以  $f''(x)$  表之；如是類推，第  $r$  誘導函數以  $f^r(x)$  表之。故上結果可用新記法書之如次：

$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)$

$+\frac{h^3}{3}f'''(x)+\dots+\frac{h^n}{n}f^n(x)$ 。

此級數在微分學中謂之戴勞(Taylor)定理；而此等誘導函數謂之微分係數(Differential coefficients)。比較下列諸式可得求誘導函數之便利法則：

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots$

$+a_{n-1}x+a_n$ ，

$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+$

$(n-2)a_2x^{n-3}+\dots+a_{n-1}$ ，

$f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)$

$a_1x^{n-3}+\dots+a_{n-2}$ ，

.....

觀此知  $f'(x)$  可由  $f(x)$  求得之，其法如次：

$f(x)$  之各項，以該項之指數乘之，而後各項之係數減去一。用此法  $a_0x^n$  變為

$na_0x^{n-1}$ ， $a_1x^{n-1}$  變為  $(n-1)a_1x^{n-2}$ ，

.....，而  $a_n$  即  $a_nx^0$  變為  $0 \cdot a_nx^{-1}$

即 0。且用與由  $f(x)$  導  $f'(x)$  同樣之法，

可由  $f'(x)$  導得  $f''(x)$ ，如此類推。例如

$f(x)=x^5+3x^4+5x^3+6x^2+7x+10$ ，

則  $f'(x)=5x^4+12x^3+15x^2+12x+7$ ，

$f''(x)=20x^3+36x^2+30x+12$ ，

$f'''(x)=60x^2+72x+30$ ，

$$f^{iv}(x) = 1:0 + 72,$$

$$f^v(x) = 120.$$

【誘導單位】Derived unit. [算]見單位條。

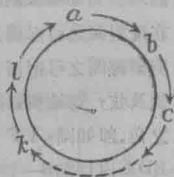
### 質

【質數】Prime number 或 Prime. [算] [代]即素數，見該條。

### 輪

【輪換次序】Cyclic order. [代]輪換次序亦稱循環順序。例如於式  $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)$ ，第二項可於第一項以  $b$  代  $a$ ，以  $c$  代  $b$ ，以  $a$  代  $c$  而得之；第三項可於第二項以  $c$  代  $b$ ，以  $a$  代  $c$ ，以  $b$  代  $a$  而得之；而第一項可於第三項以  $a$  代  $c$ ，以  $b$  代  $a$ ，以  $c$  代  $b$  而得之。如斯文字之排列謂之有輪換次序或循環順序。此類之式，記載甚為便利，由一項可得他各對稱之

項。今如圖記  $a, b, c, \dots, k, l$  諸文字於圓周圍，則各文字可以其次之文字依循環次序而代之，甚為明瞭。



【輪換排列】Cyclic permutation.

[代]例如  $A, B, C, D, E$  五人圍圓桌而就席之法有幾。若不將五席互相比較，而與室內之物相比較，則就席之法共有  $5!$ 。若就同桌互相比較，而不與室內他物相

比，則因圓之為物，無始無終，故如圖若席之號數 1,

2, 3, 4, 5, 各

坐  $A, E,$

$B, D, C,$  相

鄰之次序不

變，而  $A$  至

2,  $E$  至 3,  $D$

至 4, 如是類推，

向右迴轉一席仍

為同排列，即向

右迴轉二席，三

席，四席，其排

列亦仍相同，以

是輪換排列之數

共有  $5 \div 5$

即 4。普通  $n$  個

物之輪換排列之

數為  $(n-1)!$ 。但

是為由  $n$  人就

席圓桌，不與室

內他物相比而次

之者。若有相異

之  $n$  球，以線貫

之，使成輪形，

則其排列之數為

$\frac{1}{2}(n-1)!$ ，因球

之變化與人異，

無上下表裏之別，

其正反相對之各

排列全同故也。

【輪換對稱】Cyclic symmetry. [代] 例如  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ ，其文字有輪換次序之對稱式之謂也。

### 適

【適合】To satisfy. [代]方程式中之未知數代入某值時，若兩邊相等，則謂之適合或滿足此方程式；而未知數之此值謂之適合或滿足問題之條件。

【適遇】Probability 或 Chance. [代] 設有一事，其獲成功共有  $a$  次，其遭失敗共有  $b$  次，乃取其折中之數，謂其成功之適遇為  $\frac{a}{a+b}$ ，其失敗之適遇為  $\frac{b}{a+b}$ 。

欲完全上之意義，須將折中二字之意義解釋之。凡有若干事，其各事之成功無難易之分，則於諸事中任取一事，而預定其成功之率，必皆相等，即每事之適遇皆為若干分之一，是謂之折中。例如一囊中盛黑球若干與白球若干，於無心任取其一球，則其所取出者為黑球抑為白球，固不可預知，而其黑球與白球之適遇皆為  $\frac{1}{2}$ 。因其所取出者為黑球或非黑球，二者必居其一，故得黑球之適遇取其折中數為  $\frac{1}{2}$ 。又以非黑球即為白球，為黑球即非白球，故得白球之適遇亦為  $\frac{1}{2}$ 。若於囊中僅盛白球一種，則任何取出其一球皆為白，故其適遇為 1，而適遇為 1，則其適遇已為確實矣。又若一囊盛黑白赤三種球，各不知其數，而無心取其一球，其所取出者為黑為白抑為赤，固不可預知，而其各色之適遇皆為  $\frac{1}{3}$ ，何則，以其所取出者，或黑或白或赤，三者必居其一，故取其折中數為  $\frac{1}{3}$ 。若求所取之球或黑或白而不為赤，則其適遇為  $\frac{2}{3}$ ，因非白則或赤或黑，三者必居其二，故其折中數為  $\frac{2}{3}$ 。然折中二字亦有與以他意義者，即於長期間內，一事出來之次數相等，則此出來之事謂為折中。例如錢有正反兩面，將錢數之，若所投之次數不多，則正面出來之次數與反面出來之次數未必相同，然因所投之次數愈增，其正面出來之次數與反面出

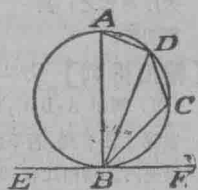
來之次數之比愈近於一，而所投之次數極大，則此比與一之差極小；此即謂之於長期間內，正面與反面折中。今設一事，其獲成功  $a$  次，遭失敗  $b$  次，於長期間內，折中出來，則於  $a+b$  次中成功  $a$  次，失敗  $b$  次，由是得次定義而與定義相合：即一事成或敗之適遇，為於長期間中成或敗之次數與其次數之總和之比。例如已知於長期間內，每生 41 人，男子 21 人，女子 20 人，則知生男子之適遇為  $\frac{21}{41}$ 。又如甲乙二人作某遊戲，於長期間內知每八次甲勝 5 次，則甲於某次勝之適遇為  $\frac{5}{8}$ 。

## 鄰

【鄰角】Adjacent angles. [幾]見角條。

【鄰邊】Adjacent sides. [幾]於多邊形有公共角頂之兩邊謂之鄰邊。

【鄰弓形】Alternate segment. [幾]由圓周上引切線及割線，對於割線與切線在反對側之弓形謂之鄰弓形，是由切線與割線間之弓形而言。於圓上一點引切線及弦，切線與弦間之角等於其鄰弓內之角。即如圖，EF 切圓 ABC 於 B，命 BD 為由切點 B 所引之弦，則  $\angle FBD =$  鄰弓形 BAD 內之角， $\angle EBD =$  鄰弓形 BCD 內之角。〔證〕



命 BA 爲通過 D 之直徑，而 C 爲不含 A 之弧內任意之點。聯 AD, DC, CB。因  $\angle ADB$  爲直角， $\therefore \angle DBA + \angle BAD = rt\angle$ 。又  $\angle DBA + \angle FBD = \angle FBA = rt\angle$ 。 $\therefore \angle BAD = \angle FBD$ 。又因 ABCD 爲圓內接四邊形， $\therefore \angle BCD = \angle BAD$  之補角  $= \angle FBD$  之補角  $= \angle EBD$ 。

【鄰二面角】Adjacent dihedral angles. [幾] 二二面角有公共之稜，且中間之一面爲公共者謂之鄰二面角。

銳

【銳角】Acute angle. [幾] 小於一直角之角之謂。

【銳三角形】Acute triangle. [幾] 即銳角三角形。

【銳角三角形】Acute-angled triangle

[幾] 三角形之諸角皆爲銳角者謂之銳角三角形。於銳角三角形對銳角之邊上之正方形，小於他二邊上之正方形之和，其所小者等於一與他邊在此邊上之射影所包之矩形之二倍。[證<sup>1</sup>] 於三角形 ABC，由 A

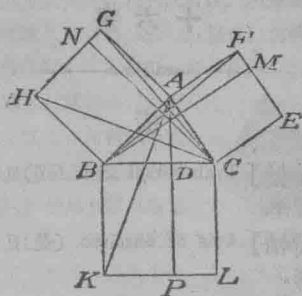
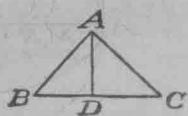
引 BC 之垂線 AD(即高)，則

$AC^2 = AD^2 +$

$CD^2 = AD^2 +$

$(BC - BD)^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$ 。

於邊 AC, AB, BC 上各作正方形 ACEF, ABHG, BCLK。作 BM, CN, AP 各綫於邊 AC, AB, BC。聯 AK, BF, CG, CH。



於  $\triangle BAF, \triangle GAC$ ，因  $AB = AG, AF = AC, \angle BAF = \angle GAC, \therefore \triangle BAF = \triangle GAC$ 。然因  $\triangle BAF = \frac{1}{2} \square AM$ ，

$\triangle GAC = \frac{1}{2} \square AN$ 。故  $\square AM = \square AN$ 。

同樣  $\square CM = \square CP$ 。 $\therefore AC^2 = \square AM + \square CM = \square AN + \square CP = AB^2 + BC^2 - \square BN - \square BP$ 。然於  $\triangle ABK, \triangle HBC$ ，因  $AB = HB, BK = BC, \angle ABK = \angle HBC$ 。故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

故  $\triangle ABK = \triangle HBC$ 。而  $\triangle ABK = \frac{1}{2} \square BP$ ， $\triangle HBC = \frac{1}{2} \square BN$ 。故  $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$ 。故  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$ 。

## 十六畫

## 橫

【橫軸】 Transversal axis. [幾] 見雙曲線條。

【橫軸】 Axis of abscissa. [幾] 見坐標條。

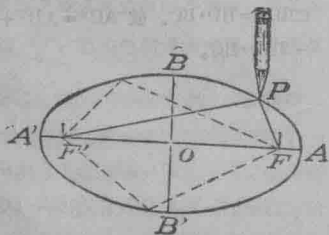
【橫線】 Abscissa. [幾] 即橫坐標。

【橫坐標】 Abscissa. [幾] 見坐標條。

【橫截線】 Transversal. [幾] 橫截→列直線之直線謂之橫截線或截線。

## 橢

【橢圓】 Ellipse. [幾] 橢圓為圓錐曲線之一種，為一動點之軌跡，此點移動於一平面內，其與平面內二定點之和為一定者也。此二定點曰焦點，如圖之  $F, F'$  是。聯橢圓上一點至焦點之直線，謂之焦點半徑如  $PF, PF'$  是。二焦點半徑之定和以  $2a$  表之。橢圓可作如次之：



取一線令其長等於  $2a$ ，釘定其兩端於  $F, F'$ 。以鉛筆尖緊張此線，令常為直，

移動之，則  $P$  點畫成一以  $F, F'$  為焦點之橢圓。因筆尖移動時， $PF$  與  $PF'$  之和為一定也，命橢圓交  $FF'$  之延線於  $A, A'$ ，則  $AA' = 2a$ ，而  $AA'$  謂之長軸。

作  $AA'$  之垂直二等分線交橢圓於  $B, B'$ ，交  $AA'$  於  $O$ ，則  $BB'$  謂之短軸，而  $O$  謂之橢圓之中心。以橢圓之中心為原點，長軸為  $X$  軸，短軸為  $Y$  軸，則橢圓之方程式

$$\text{爲 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

若  $a=b$ ，則此方程式變為  $x^2 + y^2 = a^2$ ，而此時橢圓成為圓。又橢圓之極方程式

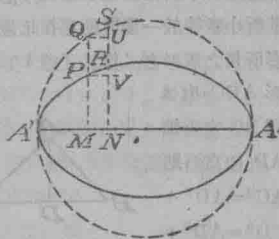
$$\text{爲 } \rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}, \text{ 而 } e \text{ 爲離心率,}$$

其值為  $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ ，而常小於 1，因  $a$

大於  $b$  故也。

茲示求橢圓之面積之法如次：——

設  $PM, RN$  為橢圓之兩縱線； $Q, S$  為補助圓上兩相當點。作  $PV, QU$  平行於



長軸，遇  $NS$  於  $V$  及  $U$ 。則  $\frac{PN}{QN} =$

$$\frac{PM}{QM} = \frac{b}{a}.$$

此關係對於橢圓及補助圓內所作諸相似矩形皆為真。故

橢圓內圓之和  $\frac{b}{a}$ 。此關係不論矩形之數若干皆為真。而橢圓內之和之極限為橢圓之面積，而補助圓內者之極限為補助圓之面積。故橢圓之面積：圓之面積 =  $b:a$ 。故橢圓之面積 =  $\frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab$ 。

**【橢圓體】** Ellipsoid 或 Spheroid.

[幾] 橢圓體為二次曲面之一種。其方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

若  $a > b = c$ ，則橢圓體謂之長橢圓體或長球 (Prolate spheroid)，而可以將橢圓

圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$  以其長軸為軸旋轉得之。若  $a = b > c$ ，則為扁橢圓體或扁球 (Oblate spheroid)，可將橢圓以其短軸

旋轉而得之。此外尚有虛橢圓體，其方程式為  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ 。

因三實數之平方和，不能為負，故其上無實點。

**【橢圓的拋物線體】** Elliptic paraboloid. [幾] 為二次曲面之一種，其方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2nz.$$

**積**

**【積】** Product. [算] 某數或式乘以他數或式之結果謂之積。例  $3 \times 5 = 15$ ，故 15 為 3 與 5 之積；又  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，故  $a^2 - b^2$  為  $a+b$  與  $a-b$  之積。

**【積彈】** Piles of shot. [代] 積彈即將彈

丸堆積成角錐狀或劈狀者也。積彈因其底面為正三角形，正方形，矩形，而積為三角積彈，正方積彈，矩形積彈。三角積彈者，為於正三角形狀之底上，又積以各邊少一之正三角形狀之彈丸，又於其上積以各邊



少一之正三角形狀之彈丸，如是類推，及至頂上堆積一彈丸者也。於完全之三角積彈，彈丸之數等於  $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \dots, 1+2+3+\dots+n$  之和即等於  $1+3+6+10+\dots+\frac{n(n+1)}{2}$ 。

依差法求此級數之知，則  $S = na + \frac{n(n+1)}{2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} d_3 + \dots$  (A)

由級數 1, 3, 6, 10, ..... 作各次之差，則

|   |   |   |    |    |    |       |
|---|---|---|----|----|----|-------|
| 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 21 | ..... |
|   | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | ..... |
|   |   | 1 | 1  | 1  | 1  | ..... |
|   |   |   | 0  | 0  | 0  | ..... |

由是  $a=1, d_1=2, d_2=1, d_3=0, d_4=0, \dots$ ，代入公式(A)，則得

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \dots \dots \dots (1)$$

此式又可求之如次。因最下層彈丸之數為  $\frac{n(n+2)}{2}$  或  $\frac{1}{2}(n^2+n)$ 。於此式內以  $n-1, n-2, \dots$  代  $n$ ，則得自下第二層，第三層，..... 彈丸之數。故

$$S = \sum \frac{1}{2} (n^2+n) = \frac{1}{2} (\sum n^2 + \sum n)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dots \right\}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (\text{參見自然數條})$$

又如圖作正方積彈，其頂上彈丸第二層之彈丸之數為  $2^2$ ，其第三層之彈丸之數為  $3^2$ ，如斯類推。



今求  $n$  層之正方積彈之彈丸之總數如次：

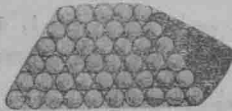
|   |   |   |       |       |       |       |
|---|---|---|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 4 | 9 | 16    | 25    | 36    | ..... |
| 3 | 5 | 7 | 9     | 11    | ..... |       |
| 2 | 2 | 2 | 2     | ..... |       |       |
| 0 | 0 | 0 | ..... |       |       |       |

由是  $a=1, d_1=3, d_2=2, d_3=0, d_4=0$ ，代入公式(A)，則得

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \dots\dots\dots(2)$$

此式又可求之如次。即  $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ 。

又如圖作矩形積彈，其頂上一層為  $m+1$  個彈丸，列成一直線狀者，第二層積



$2(m+2)$  個，第三層積  $3(m+3)$  個彈丸，如是類推。求於完全之矩形積彈之總數，有次之級數。

|         |          |          |          |       |
|---------|----------|----------|----------|-------|
| $(m+1)$ | $2(m+2)$ | $3(m+3)$ | $4(m+4)$ | ..... |
| $m+3$   | $m+5$    | $m+7$    | .....    |       |
| 2       | 2        | .....    |          |       |
| 0       | .....    |          |          |       |

由是  $a=m+1, d_1=m+3, d_2=2, d_3=0, d_4=0, \dots$  代入公式(A)則得

$$S = \frac{n(n+1)(1+2n+3m)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots\dots\dots(3)$$

此式又可證之如次，因其頂上一層為  $m+1$  個彈丸，第二層為  $2(m+2)$  彈丸，第三層為  $3(m+3)$  彈丸，最下層即第  $n$  層為  $n(m+n)$  彈丸而成。

$$\therefore S = (m+1) + 2(m+2) + 3(m+3) + \dots + n(m+n) = m(1+2+3+\dots+n) + (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) = m \sum n + \sum n^2 = \frac{mn(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(3m+2n+1)}{3}$$

又於不完積彈求彈丸之數，加積彈之若干層使成完積彈 由其總數減去所加之積彈之數。此二數之差，為於不完積彈內彈丸之數。

公式(1)(2)(3)又可記之如次。

三角積彈  $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} (n+1+1)$

正方積彈  $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} (n+n+1)$

矩形積彈  $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \{ (n+m) + (n+m) + (m+1) \}$ 。

$\frac{n(n+1)}{2}$  為於各積彈之三角面之數，而次之因數為於底之最長邊與對邊及平行頂上一層之彈丸之總數。由是於任意之積彈求彈丸之總數有次之法。底之最長邊彈丸之數與對邊彈丸之數及頂上一層彈丸之數相加，此和乘積彈之三角面之彈丸之數，以



3 除之。此法則記之甚便，因三積彈中之任何者皆可適用之也。

【積分學】Integral calculus. [數] 積分學為微分學之逆，即與某函數之微分而求其原函數，且有應用之於代數學，幾何學者。

### 諸

【諸等數】Compound number. [算] 即複名數，見該條。

### 輪

【輪數】Defective number, [算] 見不完數條。

### 辨

【辨別式】Discriminant. [代] 即判別式，見該條。

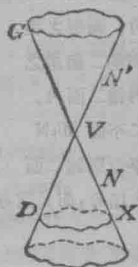
### 遷

【遷項】Transposition. [代] 即移項，見該條。

### 錐

【錐】Cone. [幾] 錐面為通過與曲線及與點之直線移動所生之面之謂。錐為錐面與截錐面之平面間之立體之謂。生錐面之動直線謂之錐面之母線 (Generatrix) 母線所過之一點謂之錐之頂點 (Vertex)，母線所過之曲線謂之母曲線

(Directrix)，母線在任意位置之直線謂之錐面之基線 (Element)。如圖 GX 為母線，DX 為母曲線，V 為頂點，N 為錐之下一片，N' 為錐之上片。



V-DX 為以 DX 為底之錐。

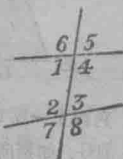
【錐面】Conical surface. [幾] 見錐條。

### 錢

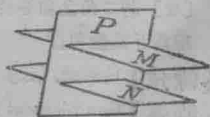
【錢】[算] 衡法，十分為錢，十錢為兩。

### 錯

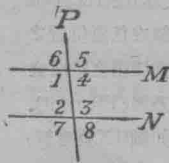
【錯角】Alternate angles. [幾] 如圖一一直線截二直線時，1 與 3，2 與 4 謂之錯角。有時 5 與 7，6 與 8 謂之外錯角，而 1 與 3，2 與 4 謂之內錯角。一直線截二平行線時，錯角相等，而其逆定理亦為真。



【錯二面角】Alternate dihedral angles. [幾] 二平面 M, N 以第三平面 P 截之，則 1 與 3，2 與 4 (右例為以錯二面角之平面角表之者) 謂之錯二面角，有時 5 與 7，6 與 8



謂之外錯二面角，而與之相對前二組謂之內錯二面角。二平面 M, N 平行則錯二面角相等，而其逆亦為真。

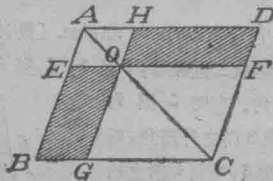


餘

【餘切】 Cotangent. [三] 見三角函數條。

【餘矢】 Coveredsine. [三] 見三角函數條。

【餘形】 Complements (of a Parallelogram) [幾] 由平行四邊形 ABCD 之對



角線上一點 O，與各邊平行引直線 EF, HG。如斯所得之平行四邊形 BEOG, DFOH 稱為沿平行四邊形 ABCD 之對角線 AC 平行四邊形 AECH, GOFC 之餘形。

【餘角】 Complement (of an angle) [幾] 若二角之和等於一直角，則此二角稱為互為餘角。

【餘弦】 Cosine. [三] 見三角函數條。

【餘弧】 Complement (of an arc) [幾] 二弧合成一象限，即等於圓周之四分之一者，則此二弧稱為互為餘弧。

一者，則此二弧稱為互為餘弧。

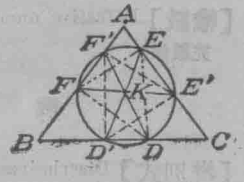
【餘割】 Cosecant. [三] 見三角函數條。

【餘數】 Complement of a number.

[代] 某數之餘數者，為由其數上一位之一單位，減去其數之餘也。例如 7 之餘數為  $10 - 7$  即 3，45 之餘數為  $100 - 45 = 55$ 。

【餘弦圓】 Cosine circle. [幾] 過三角形之類似重心，作三直線，與三邊平行，則其與各邊相交之六點，在一圓周上，此圓稱為三角形之餘弦圓。FKE', DKF', EKD' 為三邊平行線，則因 K 為類似重心，故為此三直線之中點。

又  $\angle KDD' = \angle A = \angle KD'D$ ，故  $KD = KD'$ 。同理  $KD = KE = KE' = KF = KF'$ 。故以 K 為中心，以諸直線之一為半徑作一圓，必過 D, D', E, E', F, F' 六點。所以稱為餘弦圓者，因此圓所截取各邊之部分，



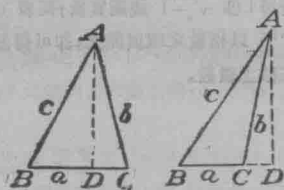
後  $DD' = 2KD \cos A$ ,  $EE' = 2KE \cos B$ ,  $FF' = 2KF \cos C$ ，因而  $DD' : EE' : FF' = \cos A : \cos B : \cos C$  也。此圓又稱第二來莫恩圓，則以發明者之名而名。[系] EFD'E' 為矩形，又角 DFE 等於同弓形上之角 DD'E，故等於  $\angle A$ 。同理， $\angle DEF = \angle C$ ,  $\angle EDF = \angle B$ 。故  $\triangle FDE$  與  $\triangle ABC$  相似。同理， $\triangle E'F'D'$  亦與  $\triangle ABC$  相似。故  $\triangle FDE$  及  $\triangle E'F'D'$  為相似，而因

內接於同圓，故爲全相等。

【餘函數】 Co-functions. (三)餘弦，餘切，餘割，有時稱爲餘函數，蓋卽餘角之正弦，餘角之正切，餘角之正割之省筆也。

【餘對數】 Complement of a logarithm [代]由 1 減去對數之假數之餘，謂之餘對數。

【餘弦定則】 Law of cosines. (三)本定則乃以三角形之三邊表示其餘弦之值者也。令 ABC 爲一三角形，C 爲銳角，則由幾何理，得



$$AB^2 = BC^2 + AD^2 - 2BC \cdot CD,$$

又  $CD = AC \cos C,$

$$\text{故 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

若 C 爲鈍角，則由幾何理，得

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD,$$

又  $CD = AC \cos(180^\circ - C) = -AC \cos C,$

$$\text{故 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{因而 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

又若 C 爲直角，則  $a^2 + b^2 = c^2$ ，而  $\cos C$  爲零，故上之公式仍爲真。同理可得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

故三角形各角之餘弦，得如上式以三邊表示之，是爲餘弦定則。上之三式，通常記之如次。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

此三公式，又可由他式誘導得之，如由上之左圖， $BC = BD + DC = AB \cos B + AC \cos C$ ，由右圖， $BC = BD - DC = AB \cos B - AC \cos(180^\circ - C) = AB \cos B + AC \cos C$ 。二式均爲  $a = c \cos B + b \cos C$ .....(1)。

同理得  $b = a \cos C + c \cos A$ .....(2)。

又  $c = b \cos A + a \cos B$ .....(3)。

將上(1),(2),(3)三式各以  $-a, b, c$  乘之，相加，則得

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

其他二式可以同法誘導之。

【餘角之三角函數】 Trigonometrical functions of complementary angles. (三)兩角互爲餘角之普通式爲 A 及  $90^\circ - A$ 。於

直角三角形

ACB 內，A

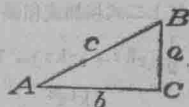
+ B =  $90^\circ$ ，

則 B =  $90^\circ$

- A。以  $90^\circ - A$  代 B，

$$\text{則 } \sin A = \frac{a}{c} = \cos B = \cos(90^\circ - A),$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B = \sin(90^\circ - A),$$



$$\tan A = \frac{a}{b} = \cot B = \cot(90^\circ - A),$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \tan B = \tan(90^\circ - A),$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \operatorname{cosec} B = \operatorname{cosec}(90^\circ - A),$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \sec B = \sec(90^\circ - A).$$

故一銳角之各函數，等於其餘角之餘函數。故求大於  $45^\circ$  諸銳角之函數之值，祇須求其餘角（即小於  $45^\circ$  者）之餘函數之值。例如欲求  $\sin 60^\circ$ ， $\cot 60^\circ$  及  $\sec 54^\circ$  之值，祇須求  $\cos 30^\circ$ ， $\tan 30^\circ$  及  $\operatorname{cosec} 36^\circ$  之值。

**【餘弦及正弦之指數值】** Exponential values of the cosine and sine.

〔三〕將  $e^{kx}$  及  $e^{-kx}$  用指數定理展開之，則得

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^4x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-kx} = 1 - kx + \frac{k^2x^2}{2!} - \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^4x^4}{4!} - \dots$$

將上二式相加或相減，則得

$$\frac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx}) = 1 + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^4x^4}{4!} + \dots,$$

$$\frac{1}{2k}(e^{kx} - e^{-kx}) = x + \frac{k^2x^3}{3!} + \frac{k^4x^5}{5!} + \dots,$$

若令  $k^2 = -1$ ，則  $k^4 = 1$ ， $k^6 = -1$ ，...

又  $k = \sqrt{-1} = i$ 。故上二式爲

$$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.$$

$$\text{但 } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

$$\text{故 } \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

是二式即稱爲餘弦及正弦之指數值。故若將  $i$  即  $\sqrt{-1}$  視爲實數，而將  $e^{ix}$  及  $e^{-ix}$  以指數定理展開之，即可得餘弦及正弦之級數。

## 十七畫

## 優

【優比】Ratio of greater inequality.

〔算〕〔代〕比之前項大於後項即比之值大於1者，謂之優比，如5:3。又a:b若a>b則為優比。

【優角】Major angle. 〔幾〕見角條。

【優弧】Major arc. 〔幾〕圓之二弧合成全圓時，其大者謂之優弧。

【優弓形】Major segment. 〔幾〕見弓形條。

【優共軛角】Major conjugate angle.

〔幾〕共軛角之大者之稱，即優角，見角條。

【優共軛弧】Major conjugate arc.

〔幾〕共軛弧之大者之稱，即優弧，見共軛弧條。

【優共軛弓形】Major conjugate

segment. 〔幾〕共軛弓形之大者之稱，即優弓形，見共軛弓形條。

## 應

【應用數學】Applied mathematics.

〔數〕應用數學為對純正數學之稱，不主重數學之理論而專論其應用者也，如力學及測量術等為應用數學之一種。

## 擬

【擬形數】Figurate number. 〔算〕

〔代〕擬形數一稱擬形級數，先各項為1之級數，即1, 1, 1, 1, …，稱為一次擬形數，

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …

稱為二次，三次，……，擬形數。而各次擬形數任意之第n項，等於其前一次擬形數之首n項之和。由此定義，故二次擬形數之第n項為n，三次擬形數之第n項為

1+2+3+……+n 即  $\frac{1}{2}n(n+1)$ ，

四次擬形數之第n項為  $\frac{1}{2}\{n(n+1)$

+ (n-1)n + …… + 1·2\}，即

$\frac{n(n+1)(n+2)}{1·2·3}$ ，五次擬形數之第n項

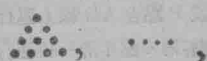
為  $\frac{1}{2·3}\{n(n+1)(n+2) + (n-1)$

$n(n+1) + …… + 1·2·3\}$ ，即

$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1·2·3·4}$ 。一般擬形數之

第n項為  $\frac{n(n+1)(n+2)…(n+r-2)}{(r-1)!}$ 。

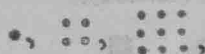
三次擬形數又稱三角數，因其數等於

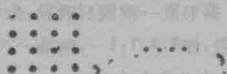


即由自然數1, 2, 3, 4, 5, ……取其三角數

而生三次擬形數。又由1, 3, 5, 7, 9, ……

而生級數1, 4, 9, 16, 25, ……，其形為





又由 1, 4, 7, 10, 13, …… 而生級數 1, 5, 12, 22, 35, ……，其形爲

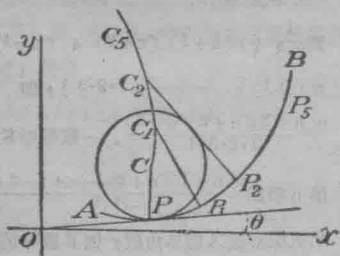


此擬形數之所以名也。

【擬形級數】Figurate series. [算] [代] 即擬形數。

### 縮

【縮閉線】Evolute. [幾] 曲線上各點之曲率中心之軌跡，謂之此曲線之縮閉線。



如上圖 AB 爲一曲線，C 爲 P 點之曲率中心。設 P 點在 AB 線上運行，經  $P_1$ ,  $P_2$  等點，則 C 點亦沿一線運行經  $C_1$ ,  $C_2$  等點，而  $P_1C_1$ ,  $P_2C_2$  等爲其曲率半徑。C 點如是運行所得之軌跡  $CC_5$ ，稱爲  $PP_5$  曲線之縮閉線。而  $PP_5$  稱爲  $CC_5$  之展開線 (Involute)。

### 總

【總和】Sum. [算] [代] 諸數量之和謂。

【總和法】Summation. [代] 求級數之總和之法也。求級數之總和無普通之法則，今舉二三例如次。〔例 1〕求級數

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$  之  $n$  項之和。

茲令  $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$

$+ (n-1)n + n(n+1)$ 。又令  $\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2)$ 。

將各項移右一位列之，爲

$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2)$ 。

由前式減此式，得

$0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 3(n-1)n + 3n(n+1) - n(n+1)(n+2)$ ，由是得  $3\{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n + n(n+1)\} = n(n+1)(n+2)$ 。

$\therefore S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 。

〔例 2〕求級數  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots$  之  $n$  項之和。茲令  $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2)$ 。

$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n \times (n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)(n+3)$ 。

與前同法將各項移右一位列之，爲

$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)(n+3)$ 。

由前式減後式，得

$0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots$

$$+4(n-1)n(n+1)+4n(n+1)(n+2) - n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\therefore 4\{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\dots +n(n+1)(n+2)\} = n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

[注意]此級數與前級數為級數之重要之例，因(1)各項合同數之因數，(2)任意之項之因數成等差級數，(3)各項之第一因數與第一項之因數成同一之等差級數，

(4)求所要之和時所用之 $\Sigma$ 級數，為與已知級數同法則而成，惟每項多一因數而已。[例3]求級數 $1^2+2^2+3^2+\dots$ 之 $n$ 項之和。茲命 $S_n=1^2+2^2+3^2+\dots$

$$+n^2. \text{ 因 } n^2=n(n+1)-n,$$

$$\therefore S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)-1-2-3-\dots-n.$$

由前例 $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$\text{又 } 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\text{故 } S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

[例4] 求級數 $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$ 之 $n$ 項之和。

$$\text{命 } S_n=1^3+2^3+3^3+\dots+n^3.$$

$$\text{而 } 4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2,$$

$$\text{故 } 4\cdot 1^3 = (1\cdot 2)^2,$$

$$4\cdot 2^3 = (2\cdot 3)^2 - (1\cdot 2)^2,$$

$$4\cdot 3^3 = (3\cdot 4)^2 - (2\cdot 3)^2,$$

$$4(n-1)^3 = \{(n-1)n\}^2$$

$$- \{(n-2)(n-1)\}^2,$$

$$4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2,$$

兩邊相加，

$$4\{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3\} = \{n(n+1)\}^2,$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

$$\text{而 } 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$\therefore 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$ 。故自然數自1至 $n$ 之立方之和，等於其自1至 $n$ 之和之平方。

縱

【縱軸】Axis of ordinate. [幾]坐標之縱軸，如下圖之 $YY'$ 。

【縱線】Ordinate. [幾]即縱坐標。

【縱坐標】Ordinate. [幾]如圖， $P$ 點之位置可由 $X$ 軸及 $Y$ 軸表示之，自 $P$ 引平行于 $Y$

$Y'$ 之直線

$PM$ ， $PM$

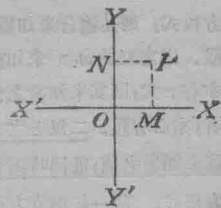
即為 $P$ 點之

縱坐標。又

由 $P$ 引平行

於 $XX'$ 之直

線 $PN$ ， $PN$ 為 $P$ 點之橫坐標。



繁

**【繁分數】** Complex fraction. [算] (代) 分數之分子分母又爲分數所成者，例如

$$3 + \frac{1}{\frac{4}{\frac{5}{2}}}, \text{ 繁分數可化爲簡分數，如}$$

$$3 + \frac{1}{\frac{4}{\frac{5}{2}}} = \frac{13}{\frac{4}{\frac{5}{2}}} = \frac{13}{4} \times \frac{7}{37} = \frac{91}{148}.$$

### 聯

**【聯結線】** Join. [幾] 聯結二點之直線也，或曰連結線。

**【聯節器】** Linkage. [幾] 引直線之器械也，見破塞里葉聯節器條。

**【聯立方程式】** Simultaneous equations. (代) 一方程式含有二或二以上之未知數，則其諸未知數之值，能適合者，多至無限。例如  $2x+y=12$ ，其  $y=12-2x$ 。若  $x=1$ ，則  $y=10$ ， $x=2$ ，則  $y=8$ ， $x=3$ ，則  $y=6$ ，故  $x$  及  $y$  可有無限之值，皆能適合。然同此二未知數，若有二方程式，則其適合未知數之值，即爲有限。推之至於含  $n$  未知數之方程式，如亦有  $n$  式，則其未知數之值，同時能適合者，亦必有限。二以上之方程式，其所含諸未知數之值，能同時適合者，謂之聯立方程式。故一組聯立方程式之條件，爲(1)方程式之數等於未知數之數，(2)方程式都爲獨立，不相矛盾。如此則可有一定之解答。其未知數之乘幂爲一次者稱

曰一次聯立方程式，其最高乘幂爲二次者稱曰二次聯立方程式。如下列第一，二兩組爲一次聯立方程式，第三組爲二次聯立方程式。

$$\left. \begin{aligned} ax+by=c \dots\dots(1) \\ a'x+b'y=c' \dots\dots(2) \end{aligned} \right\} \text{(一組)}$$

$$\left. \begin{aligned} ax+by+cz=b \dots\dots(1) \\ a'x+b'y+c'z=d' \dots\dots(2) \\ a''x+b''y+c''z=d'' \dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{(二組)}$$

$$\left. \begin{aligned} ax^2+bx+cy^2=d \dots\dots(1) \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \dots\dots(2) \end{aligned} \right\} \text{(三組)}$$

聯立方程式每組只含二方程式如第一組第三組者，可用加減消去法，代入消去法，比較消去法以解之。若一組合三或三以上之方程式如第二組者，則可用累次消去法以解之，詳見各條。例如解第三組，則以  $d'$  乘(1)式， $d$  乘(2)式，相減，得  $d'(ax^2+bx+cy^2) - d(a'x^2+b'xy+c'y^2) = dd' - dd'$ ，即  $(ad' - a'd)x^2 + (bd' - b'd)xy + (cd' - c'd)y^2 = 0$ ，此式可由解普通二次方程式之法解之。聯立方程式所含之未知數在三以上者，則無一定之解法，茲舉一二特別之例，解之如下。

$$\left[ \text{第一例} \right] \text{解} \begin{cases} (x+y)(x+z)=a^2 \dots\dots(1) \\ (y+z)(y+x)=b^2 \dots\dots(2) \\ (z+x)(z+y)=c^2 \dots\dots(3) \end{cases}$$

(2)式及(3)式之積，以(1)式除之，則得

$$(y+z)^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}, \therefore y+z = \pm \frac{bc}{a}.$$

$$\text{同法得 } z+x = \pm \frac{ca}{b}, \quad x+y = \pm \frac{ab}{c}.$$



由是  $(y+z)+(z+x)-(x+y)$

$$= \pm \left( \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{ab}{c} \right).$$

即  $z = \pm \frac{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2}{2abc}$ . 同法,

可得  $x = \pm \frac{c^2a^2 + a^2b^2 - b^2c^2}{2abc}$ ,

及  $y = \pm \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{2abc}$ .

$$\text{[第二例]解} \begin{cases} x(y+z) = a \cdots \cdots (1) \\ y(z+x) = b \cdots \cdots (2) \\ z(x+y) = c \cdots \cdots (3) \end{cases}$$

由(1),(2)兩式之和,減去(3)式,則得

$$2xy = a + b - c. \text{ 同法}$$

$$2yz = b + c - a, \quad 2zx = c + a - b.$$

$$\therefore \frac{2xy \cdot 2zx}{2yz} = \frac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a},$$

$$\text{即 } x = \pm \sqrt{\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}.$$

$$\text{同法得 } y = \pm \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}},$$

$$\text{及 } z = \pm \sqrt{\frac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}.$$

**[聯係三角形]** Associated triangle.

[三] 延長球面三角形 ABC 之邊 AB, AC, 復交於 A' 點, 生三角形 A'BC. 延長其 BC, BA 邊, 復交於 B' 點, 生三角形 AB'C. 延長其 CA, CB 邊, 復交於 C' 點, 生三角形 ABC'. 與原三角形合稱之為聯係三角形。由是一三角形之內切圓及傍切圓為其聯係三角形之傍切圓及內切圓。

**[聯圓四邊形]** Cyclic quadrilateral.

[幾] 四邊形之各角頂在同一圓周上者之

謂。

## 螺

**[螺旋]** Screw. [幾] 有二圓柱, 其一為實體圓柱, 於其周圍作凸隆之連續曲線, 其與水平所成之角始終均等。其一為中空圓柱, 於其裏面周圍作凹陷之連續曲線, 其與水面所成之角亦始終均等。如是則將第一圓柱插入第二圓柱時, 必可密合而旋轉。前圓柱謂之雄螺旋, 後者謂之雌螺旋, 為力學上單式機械之一種。

**[螺線]** Spiral. [幾] 當變角 (Vectorial angle) 漸增或漸損於無限之際, 而一點之動徑亦同時漸增或漸損, 則該點所運行之軌跡, 謂之螺線, 普通所用之螺線, 有下列五種。(1) 亞幾默德之螺線 (The spiral of Archimedes), 動點之動徑與其變角成正比例者, 其方程式為  $\rho = a\theta$ 。(2) 雙曲線螺線 (The Reciprocal 或 hyperbolic spiral), 點之動徑與其變角成反比例者, 其方程式為  $\rho\theta = a$ 。(3) 對數螺線 (The Logarithmic spiral), 動徑之對數與其變角成正比例者, 其方程式為  $\log \rho = a\theta$ 。(4) 拐杖螺線 (The lituus), 點之動徑之平方與其變角成反比例者, 其方程式為  $\rho^2\theta = a$ 。(5) 拋物線螺線 (Parabolic spiral), 其方程式為  $(\rho - r)^2 = 4\rho r\theta$ 。

## 諳

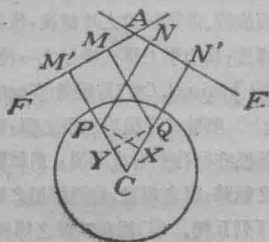
**[諳算]** Mental arithmetic. [算] 亦稱心算, 即不用數字或計算器等, 而惟心中

作簡單之計算者也。

## 賽

【賽爾門定理】 Salmon's theorem.

〔幾〕由圓心至二點之距離之比，等於其各點至他點對於圓之極線之距離之比，是為賽爾門之定理。命  $P, Q$  為二點， $P$  點對於圓之極線為  $AF$ ， $Q$  點對於圓之



極線為  $AE$ 。作  $PN, QM$  垂直於  $AE$  及  $AF$ ，又  $PX, QY$  垂直於  $CQ$  及  $CP$ 。如此則  $CP \cdot CM' = R^2 = CQ \cdot CN'$ ，然  $P, Y, X, Q$  為共圓點，故  $CP \cdot CY = CQ \cdot CX$ ，相減得  $CP \cdot YM' = CQ \cdot XN'$ 。故  $CP : CQ = XN' : YM'$ ，即  $CP : CQ = PN : QM$ 。

## 還

【還原法】〔算〕運算終結後，欲驗其運算之有無差誤，則可逆其道而施運算，以視其是否與原始之數值相同，是曰還原法。如加法中  $5+6+7=18$ ，欲驗其是否真確，則可行還原法，即將所得之和 18，漸次減去 7 與 6，是否為 5 也。減法

之還原則行加法，乘法之還原行除法，除法之還原行乘法，開方之還原行自乘，可知還原法為原運算之逆運算也。

## 點

【點】 Point. 〔幾〕點者無長無廣無厚無大小而惟有位置者也，故常於其所在之位置用一字母以表之。有限直線之端為點，二線之交為點，三面之交為點。

【點對稱】 Point symmetry. 〔幾〕即中心對稱，見該條。

## 辭

【薛爾維斯脫分解消去法】 Sylvester dialytic method of elimination. 〔代〕見消去法條。

## 隱

【隱函數】 Implicit function. 〔數〕即陰函數，見該條。

# 十八畫

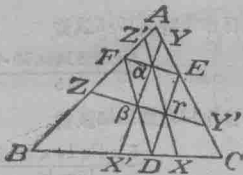


## 噸

【噸】Ton. 【算】英美重衡名，有輕噸重噸之別，見各條。

## 戴

【戴勞圓】Taylor circle. 【幾】DEF 為三角形ABC之垂趾三角形， $\alpha, \beta, \gamma$  為其邊之中點。βγ交CA, AB於Y', Z;



$\gamma\alpha$ 交AB, EC於Z', X;  $\alpha\beta$ 交BC, CA於X', Y. 則六點X, X', Y, Y', Z, Z' 在一圓周上，此圓與三角形 $\alpha\beta\gamma$ 之內切圓同中心，稱之曰戴勞圓。

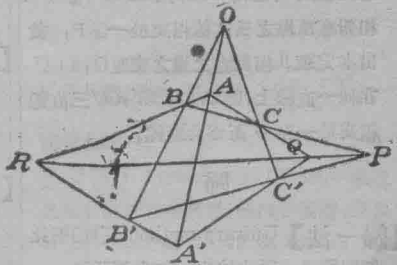
【證】由逆平行線之理，知  $\angle DFZ = \angle C = \angle Y'ZA$ ,  $\therefore \beta Z = \beta F$ . 同理  $\beta X' = \beta D$ . 然  $\beta F = \beta D$ , 故以FD為直徑之圓，過Z及X'. 故ZX'逆平行於DF及XZ', 平行於CA, 故Z, Z', X, X'為共圓點。同理Z'Y平行於BC, 故  $\angle Z'YX' = \angle YX'C = \angle A = \angle Z'XX'$ , 故過Z, Z', X, X'之圓亦過Y點。同理，亦過Y'點。又  $\beta Z = \beta X'$ , 故ZX之垂直二等分線分β角為二等分，即過 $\Delta\alpha\beta\gamma$

之內心。同理，XY', YZ'之垂直二等分線過同點。故圓XX'YY'ZZ'之中心，合於三角形 $\alpha\beta\gamma$ 之內心。

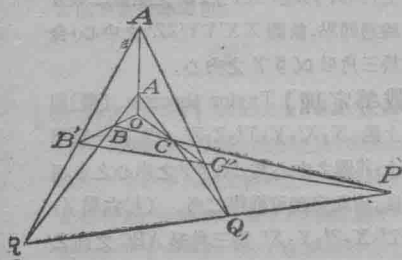
【戴勞定理】Taylor theorem. 【幾】即上述X, X', Y, Y', Z, Z'六點在一圓周上，其圓之中心為 $\Delta\alpha\beta\gamma$ 之內心之定理也。由此定理可推得二系。(1)六點Z, Y', X, Z', Y, X'為三角形ABC之高之趾D, E, F至各邊上之射影。(2)三角形ZXY, Y'Z'X全相等，且各與 $\Delta ABC$ 相似。

【戴沙固定理】Desargues theorem. 【幾】二三角形ABC及A'B'C', 連結其對應頂點之直線AA', BB', CC'若為共點線，則其相對應之邊之交點P, Q, R為共線點。又其逆定理亦真，即二三角形之對應邊之交點P, Q, R若為共線點，則連結其對應頂點之直線為共點線。此稱為戴沙固之定理。

【證】命AA', BB', CC'之交點為O, 邊



BC, B'C'之交點為P, 邊AC, A'C'之交點為Q, 邊AB, A'B'之交點為R, 如是則三角形OAB為直線A'B'R所截，



故由美奈勞斯之定理，知  $AR:RB$ ， $BL':B'O$ ， $OA':AA'$  之複比為等比。同理就  $\triangle OEC$  而言， $BP:PC$ ， $CC':C'O$ ， $OB':B'B$  之複比為等比。又就  $\triangle OAC$  而言， $CQ:QA$ ， $AA':A'O$ ， $OC':C'C$  之複比亦為等比。而此等三複比之複比亦成等比，即  $AR:RB$ ， $BP:PC$ ， $CQ:QA$  之複比為等比。故就三角形  $ABC$  言之，由美奈勞斯之逆定理，而知  $R, Q, P$  三點在同一之直線上而為共線點。逆證之，若  $P, Q, R$  在同一之直線上，則命  $BB', CC'$  之交點為  $O$ ，連結二三角形  $R'B', Q'C'$  相對應頂點之三直線相交於一點  $P$ ，故由本定理其相對應之邊之交點  $O, A, A'$  在同一直線上，即  $AA', BB', CC'$  三直線相交於一點  $O$  而為共線點。

### 歸

**【歸一法】** Unitary method. [算] 解比例問題之一種方法也。如次例所述。

**【例 1】** 茶 5 斤之價為 3 元 3 角，問同種之茶 8 斤，其價若干。5 斤之價 = 3.3 元，故 1 斤之價 =  $(3.3 \div 5)$  元，故 8 斤之價

=  $(3.3 \div 5) \times 8 = 5.28$  元，即 5 元 2 角 8 分。

**【例 2】** 某事限 4 日告成，須用 27 人，問若限 18 日告成，則須用若干人。限 4 日告成須用 27 人，故限 1 日告成須用  $4 \times 27$  人，故限 18 日告成須用  $(4 \times 27) \text{ 人} \div 18 = 6$  人。**【例 3】** 農夫 4 人，每日作工 14 時，則 5 日耕田 15 畝。今 7 人每日作工 13 時，欲耕田 19.5 畝，問需幾日。

既 4 人每日作 14 時耕田 15 畝需 5 日，則 1 人每日作 14 時耕 15 畝所需  $5 \times 4$  日，

1 人每日作 1 時耕 15 畝需  $5 \times 4 \times 14$  日，

1 人每日作 1 時耕 1 畝需  $\frac{5 \times 4 \times 14}{15}$  日，

而 1 人每日作 1 時耕 19.5 畝需

$$\frac{5 \times 4 \times 14 \times 19.5}{15} \text{ 日，}$$

1 人每日作 13 時耕 19.5 畝需

$$\frac{5 \times 4 \times 14 \times 19.5}{15 \times 13} \text{ 日，}$$

故 7 人每日作 13 時耕田 19.5 畝需

$$\frac{5 \times 4 \times 14 \times 19.5}{15 \times 13 \times 7} \text{ 日，}$$

將上之分數約簡之，得所需為 4 日。

**【歸納法】** Induction. [數] 見演繹法條。

### 簡

**【簡分數】** Simple fraction. [算] 分數之

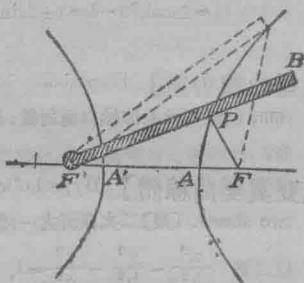
分母分子各為整數者，例如  $\frac{3}{5}$  或  $\frac{8}{7}$ 。

### 釐

**【釐】** [算] (1) 小數名，單位之百分之一，即 .01。(2) 我國貨幣名，圓之百分之一。

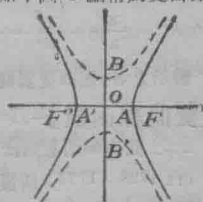
## 雙

【雙曲線】Hyperbola. [幾] 雙曲線為圓錐曲線或二次曲線之一種，為一移動點之軌跡，此點移動於一平面內，其與此平面內兩定點之距離之差為一定者也。此兩定點稱為焦點，如圖  $F, F'$ 。聯曲線上一點於兩焦點之直線，稱為點之焦點半徑，如  $PF, PF'$ 。雙曲線可作之如下。



釘硬尺  $F'B$  之一端於焦點  $F'$ ，此硬尺即以  $F'$  為圓心，繞之而旋轉於紙上。取一線比硬尺短，其差等於兩焦點半徑之定差  $2a$ ，釘其一端於他焦點  $F$ ，而釘其他端於硬尺之一端  $B$ 。今使硬尺繞  $F'$  旋轉，以鉛筆尖  $P$ ，引此線緊隨硬尺移動，則  $P$  點畫一雙曲線。因硬尺移動時， $F'P$  及  $FP$  各增一等量，故  $F'P$  及  $FP$  之差，常為一定。此硬尺繞  $F'$  旋轉而成之曲線，為雙曲線之右枝。可以同法以  $F$  為圓心，使硬尺繞  $F$  旋轉而作對稱之左枝。設雙曲線之兩枝，截線  $FF'$  於  $A$  及  $A'$ ，則因其圖形之對稱，而得  $AA' = 2a$ ，此為雙曲線兩枝之最近點之距離。雙曲線

無一點能為  $FF'$  之垂直二等分線上者，因垂直二等分線上之各點，與兩焦點等距離，其差為零也。如下圖， $O$  點稱為雙曲線之中心， $AA'$  稱為橫軸或截軸， $A$  及  $A'$  稱為頂。設  $FF'$  之垂直二等分線上兩點  $B$  及



$B'$  與  $A$  (或  $A'$ ) 之距離等於  $C$  (兩焦點間之距離之半)，則  $BB'$  稱為雙曲線之共軛軸，以  $2b$  表之。以  $O$  為原點， $AOA'$  及  $BOB'$  為坐標軸，則雙曲線之方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

又方程式為  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  之雙曲

線，為前者之共軛雙曲線。若  $a=b$ ，則此雙曲線稱為等邊雙曲線或直角雙曲線，其方程式為

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

又雙曲線之極方程式為

$$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \theta - 1},$$

而常大於 1。

【雙素數】Prime-pair. [算] 凡一偶數之左右夾以二素數者，稱曰雙素數，例如 11 與 13, 41 與 43, 59 與 61, 569 與 571 等。相隣之二素數不必為雙素數，例如 3 與 7 二素數其中間有 4, 5, 6 諸數。

【雙曲線體】Hyperboloid. [幾] 為二次曲面之一種，其以方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

表示之者，稱曰單翼雙曲線體，以方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

表示之者，稱曰雙翼雙曲線體。

**【雙曲線函數】**Hyperbolic functions.

〔三〕雙曲線函數為法人蘭伯特(Lambert 1728-1777)所發明，與三角函數或圓函數甚相類似，其定義如下。

$$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}),$$

$$\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}),$$

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}, \quad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u},$$

$$\operatorname{cosech} u = \frac{1}{\sinh u},$$

$\sinh u$  為「 $u$  之雙曲線正弦」之意， $\cosh u$  為「 $u$  之雙曲線餘弦」之意，餘同此。雙曲線函數可以  $iu$  之圓函數表之如下之方程式。

$$\sinh u = -i \sin iu, \quad \cosh u = \cos iu,$$

$$\tanh u = -i \tan iu, \quad \coth u = i \cot iu,$$

$$\operatorname{sech} u = \sec iu, \quad \operatorname{cosech} u = i \operatorname{cosec} iu.$$

雙曲線函數有下之關係，

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

$$\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1,$$

$$\coth^2 u - \operatorname{cosech}^2 u = 1.$$

此與圓函數之關係

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1,$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1,$$

相當，因令  $\theta = iu$ ，即可誘得之。又與圓函數之和角或倍角函數相當，則有下式。

$$\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v,$$

$$\cosh(u \pm v) = \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v,$$

若  $u = v$ ，則

$$\sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u,$$

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u$$

$$= 2 \cosh^2 u - 1 = 1 + 2 \sinh^2 u,$$

**【雙曲線對數】**Hyperbolic logarithm. 〔代〕〔三〕即納白爾對數，見對數條。

**【雙翼雙曲線體】**Hyperbolic of two sheets. 〔幾〕二次曲面之一種，其方

$$\text{程式爲 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**【雙曲線的拋物線體】**Hyperbolic paraboloid. 〔幾〕二次曲面之一種，其方

$$\text{程式爲 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2nz.$$

## 雜

**【雜循環小數】**Mixed recurring decimal. 〔算〕亦稱混循環小數，見循環小數條。

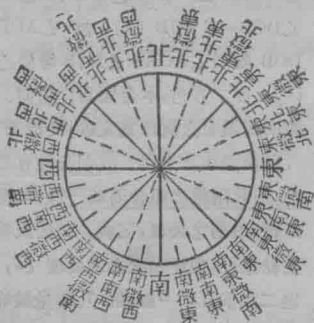
**【雜二次方程式】**Adfected quadratic equation. 〔代〕含一未知數  $x$  之一次及二次之方程式，稱為雜二次方程式，例如  $3x^2 + 5x - 8 = 0$ ，此為與純二次方程式對稱之語。

## 十九畫



## 羅

【羅盤】Compass. 〔三〕陸地測量用之羅盤 (Surveyor's compass) 由裝置磁針之圓盤而成，記東西南北四方位，分全面為三百六十度；由南北兩點至左右各九十度，以數字記之，如記為北幾度東（或西），又南幾度東（或西）等。又航海用之羅盤 (Mariner's compass) 亦由裝置磁針之圓盤而成，分全面為三十二方位。以北為基點，與時針同方向迴轉之，其方位之順次如下。又羅盤我國亦稱為指南鍼，為三大發明之一。



【羅耳定理】Rolle's theorem. 〔代〕  
羅耳定理如次： $f(x)=0$  之二實根之間必有  $f'(x)=0$  之一實根。

【羅馬數字】Roman numbers. 〔算〕  
羅馬記數法現今計算上雖已不用，而於

鐘錶表面，書籍卷目，西歷紀年，則多以記數，是為羅馬數字，其字如下。

數字 I, V, X, L, C, D, M  
字值 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

用此七個數字，以記一切之數，其法如下。

(1) 同字幾個並書者，則以其字值之幾倍為值，例

III 為 3, XX 為 20, CCC 為 300.

(2) 異字並寫，左值大於右值者，則以其相和之值為值，例如

XII 為  $10+2=12$ , VIII 為  $5+3=8$ , DCLVII 為  $500+100+50+5+2=657$ .

(3) 異字並寫，右值大於左值者，則以其相差之值為值，例如

IV 為  $5-1=4$ , XC 為  $100-10=90$ , CD 為  $500-100=400$ .

(4) 數字之上引一橫線者，則以其字值之千倍為值，例如

$\bar{L}$  為  $50 \times 1000 = 50000$ ,  
 $\bar{C}$  為 100000,  $\bar{IX}$  為 9000.

【羅馬記數法】Roman notation.

〔算〕即用羅馬數字以記數之法也，見上條。

## 藥

【藥衡】Apothecaries' weight. 〔算〕英美秤藥品用之重量，其單位如次。

1 grain (gr.) ..... 合我國 0.0174 兩

1 scruple (℞) ..... 30 grains ..... 0.3474 兩

1 dram (ʒ) ..... 3 scruples ..... 1.0423 兩

1 ounce( $\frac{1}{16}$ ).....3drams.....83385兩  
 1 pound(lb).....12ounce.....10.0062兩

## 證

【證明】Proof 或 Demonstration. [數]

證明 (proof) 者驗證法則或運算之結果之正否也。運算之正否常可逆其跡而查證之，例如驗證加法運算之正否，則由其和順次減去被加數，至悉減去後，如得結果為 0，則其運算為正確不誤。驗證減法則可將其差加減數，如其結果等於被減數，則其運算為正確不誤。同理乘法可以除法驗證之，除法可以乘法驗證之，開方可以自乘驗證之，此即所謂還原法也。又加減乘除之運算均可以去九法證明之，見該條。又證明 (Demonstration) 者，達到終結之推理之步程也，其證明之目的，為由假定之真理以求結果。數學的證明所假定之真理，為定義、公理及前所已證明之命題等。證明法有二種，即直接證明法與間接證明法。間接證明法合通常所稱之反證法 (Reductio ad absurdum)，先假設其終結為不能，施以推理，因以得到與已知之真理相矛盾之結果，故可推定其原終結為真。直接證明法者，即由假定之真理如定義公理及已證之命題，直接施以推理而得到終結者也。惟前之 proof 與茲之 demonstration 常作同意用之。茲取幾何學之例以說明二種證法如次。〔直接證明法之例〕一直線與他直線相交，其所成兩隣角之和，等於二直角。如直線 CD 與 AB 相交於

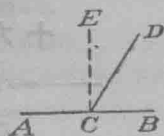
C 點，則兩隣角

DCA, DCB

之和等於二直

角。證明此命

題所用之假設



為直角之定義 [1]，三公理 [2, 3, 4] 及一公法 [5]。1. 若一直線與他直線相交，其兩隣角互相等，則各角稱為直角，二直線稱為互相垂直。2. 諸量若均與他量相等，則諸量互等。3. 等量加等量，其和相等。4. 全量等於其諸分量之和。5. 於線內一已知點僅可作一直線垂直於此線。〔證〕於直線 AB 上 C 點引一垂線 CE，則由 [1]，角 ACE, ECB 各為直角。由公理 [4]， $\angle ACD$  等於  $\angle ACE + \angle ECD$ ，又由公理 [3]， $\angle ACD + \angle DCB$  等於  $\angle ACE + \angle ECD + \angle DCB$ 。然  $\angle ECD + \angle DCB = \angle ECB$  [4]，故  $\angle ACD + \angle DCB$  等於  $\angle ACE + \angle ECB$  等於  $\angle ACB$  [2]，即二直角，本命題為已證明。於此證明所假定之真理為定義、公理及公法。

〔間接證明法之例〕設兩直線有二公共點，則此兩線必相合而成一線。欲證明此命題，用前之公理、定義、公法及前命題之結果外，須更用次之二公理 [6, 7]。6. 過二點惟可引一直線。7. 等量減等量其差相等。〔證〕命與兩直線有公共點 A, B，則由公理 [6] 此二直線於 A, B 間相合。今命二直線過 B 點後於 C 點開始分離，第一直線向 CD，第二直線向 CE。於 C 點作 AC 之垂線 CF。ACE 直線與 FC 交於 C 點，則由前命題  $\angle ACF + \angle FCE$



$=2\hat{R}$ , 又 ACD 直線與 FC 交於 C 點, 由前命題  $\angle ACF + \angle FCD = 2\hat{R}$ .

故  $\angle ACF +$

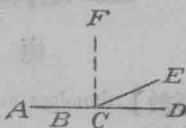
$\angle FCE =$

$\angle ACF +$

$\angle FCD(2)$ ,

由公理(7),

$\angle FCE = \angle FCD$ , 而此為不合理, 因部分不能等於全量。故二直線於某點開始分離之假定不真, 即二直線不能於某點分離, 而必為全相合。於此證明法由二直線於某點開始分離之假設, 致誘出不合理之終結, 故此假設之反面(即二線相合成一線), 此即所謂反證法也。



邊

【邊】Side. [幾] 夾成角之直線稱為角之邊。包圍正多角形之直線稱為正多角形之邊。

【邊心距】Apothem. [幾] 由正多邊形之中心至其一邊之距離, 即其內切圓之半徑, 稱為多邊形之邊心距。

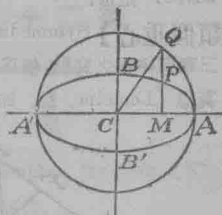
關

【關係式】Scale of relation. [代] 見循環級數條。

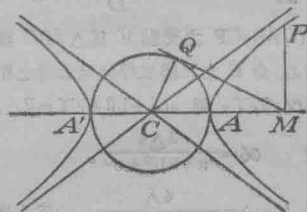
離

【離心角】Eccentric angle. [幾] [1]

如圖由橢圓之補助圓上一點 Q, 作 AA' 軸之垂綫 QM, 交橢圓於 P 點, 則角 QCM



稱為橢圓上 P 點之離心角。[2] 如圖



與雙曲線同心以 CA 為半徑畫圓。由雙曲線上 P 點作縱坐標 PM, 由 M 引圓之切線 MQ, 則角 QCM 稱為雙曲線上 P 點之離心角。

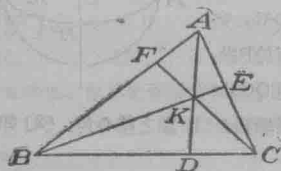
【離心率】Eccentricity 或 Excentricity. [幾] [1] 命橢圓之長徑, 短徑之半為 a, b, 則  $\sqrt{a^2 - b^2}$ : a 稱為橢圓之離心率, 為小於 1 之實數。[2] 命雙曲線之橫軸, 共軛軸之半為 a, b, 則  $\sqrt{a^2 + b^2}$ : a 稱為雙曲線之離心率, 為大於 1 之實數。離心率常以 e 表之。

類

【類似中線】Symmedian lines. [幾] 過三角之頂點, 且二等分底邊逆平行線之直線, 稱為類似中線。如下圖之 AD;

BE, CF 是也。

【類似重心】Symmedian point. [幾] 三類似中線之交點，稱為類似重心，或來莫恩 (Lemoine) 點。如圖類似中線



AD, BE, CF 之交點 K 為  $\triangle ABC$  類似重心。命 K 之三綫坐標即至三邊之距離為  $\alpha, \beta, \gamma$ ，則  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta$ 。

$$\text{故 } \alpha = \frac{2\Delta a}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

然  $\tan \omega = \frac{4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}$ ， $\omega$  為布洛喀

角。故得  $\alpha = \frac{1}{2} a \tan \omega$ 。同樣

$$\beta = \frac{1}{2} b \tan \omega, \quad \gamma = \frac{1}{2} c \tan \omega.$$

故  $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$ ；即類似重心至三角形三邊之距離，與三邊成比例。

## 二十畫

### 贏

【贏數】Abundant number. [算] 見不完數條。

### 二十一畫

#### 魔

【魔方】 Magic square. [算] 見幻方條。

### 二十二畫

#### 疊

【疊分數】 Complex fraction. [算]

即繁分數，見該條。

【疊置之公法】 Postulate of superposition. [幾] 任何圖形，可變其位置，而其大小及形狀不變。

## 二十三畫

## 織

【織】〔算〕小數名，即 .0000001。

## 變

【變】To vary. 〔代〕見變數法條。

【變角】Variable angle 或 Vectorial angle. 〔幾〕見極坐標條。

【變數】Variable. 〔代〕代數式或方程式中可任意取得之數曰變數。例如於代數式  $ax^2+bx+c$ ,  $x$  爲變數。又於方程式  $x^2+y^2=r^2$ ,  $x, y$  爲變數。數之得自爲消長變易者稱曰自變數，因自變數而定者稱曰因變數。例如於  $y=ax^2+bx+c$ ,  $x$  爲自變數， $y$  爲因變數。又於  $x^2+y^2=r^2$ ，若  $y$  爲自變數，則  $x$  爲因變數。因變數又稱爲自變數之函數。而自變數與因變數無固定之名，於含二變數之方程式，若取其一爲自變數，則其他即爲因變數。又如  $y=ax^2+bx+c$ ，若就  $x$  而解之，則可以  $x=f(y)$  表示之，故  $y$  爲自變數而  $x$  爲因變數。又含三變數之式如  $x^2+y^2+z^2=r^2$  可任取其中之二變數如  $x, y$  爲自變數，而其他一如  $z$  爲因變數。餘倣此。

【變數法】Variation. 〔代〕二量有一定之關係，其第一量任意二值之比，等於第二量相當二值之比，則謂之第一量因第二量而變。例如第一量之兩值爲  $a_1, a_2$

之比，等於第二量之相當兩值  $b_1, b_2$  之比，則  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ，故  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ，由是此二量之相當值爲常比。變之記號爲  $\propto$ ，如  $A \propto B$  讀爲「A 因 B 而變」。若  $a \propto b$ ，則  $a:b$  爲常數。命此常比爲  $m$ ，則  $\frac{a}{b} = m$ ， $\therefore a = mb$ 。於任意之例欲求常比  $m$ ，必先知  $a$  及  $b$  之一對相當數值。例如

$\propto$  知  $a=15, b=5$ ，則  $a=mb$ ， $\therefore 15 = m \times 5$ ，即  $m=3$ ， $\therefore a=3b$ 。

凡二量，其第一量因第二量之反商而變，則謂之第一量因第二量而反變。一量依他二量之積而變，則謂之此量因他二量而合變。有三量其第一量依第二量及第三量之反商之積而變，則謂之第一量因第二量而正變，因第三量而反變。有  $a, b, c$  三量， $a$  與  $b$  及  $c$  相關係，若  $c$  爲常數，則  $a$  因  $b$  而變，若  $b$  爲常數，則  $a$  因  $c$  而變，若  $b$  及  $c$  俱爲變數，則  $a$  因  $bc$  而變。例如三角形之面積，若高爲常數，即因底邊而變，若底邊爲常數，則因高而變，若高及底邊俱爲變數，則其面積因高及底邊之積而變。又如氣體之壓力，若溫度爲常數，則因其質之密度而變，若密度爲常數，則因溫度而變，若密度及溫度俱爲變數，則氣體之壓力，因密度與溫度之積而變。故變數法爲解關於比及比例之問題之一種方法，茲舉二例如下。〔例 1〕有三角形之底邊爲 8 寸，其面積爲 20 平方寸，與其等高之三角形，其面積爲 45 平方寸，則底邊爲若干

寸。命三角形之面積及底邊爲  $A$  及  $b$ ，則  
 $A = mb$ 。而  $b = 8$ ，則  $A = 20$ ，

$\therefore 20 = 8m$ ， $\therefore m = \frac{5}{2}$ 。故  $45 = \frac{5}{2}b$ ，

$\therefore b = 18$  寸。〔例 2〕氣體之體積因溫度正變，因壓力反變。今壓力 15，溫度 260，則其體積爲 200 立方寸。若壓力 18，溫度 390，則其體積爲若干。命體積爲  $V$ ，壓力爲  $P$ ，溫度爲  $T$ ，則

$$V = mT \times \frac{1}{P}。即 200 = m \times 260 \times \frac{1}{15}，\therefore m = \frac{150}{13}。故 V = \frac{150}{13} \times 390 \times \frac{1}{18} = 250 立方寸。$$

### 驗

【驗證】Verification 或 Proof. [數] 微驗計算之結果之誤否之謂也。

### 體

【體積】Volume 或 Solidity. [幾] 立體所占有之空間之部分之量，謂之體積。任意立體之體積爲其所含體積單位之數，故可用體積單位測之。

【體積單位】Unit of volume. [幾] 一正方形之諸稜等於綫單位，則此正方形爲體積單位。

## II. 英 漢 名 詞 對 照

## A

- Abacus. 算盤。
- Abel's theorem. 亞培爾定理。
- Abscissa. 橫線, 橫坐標。
- Absolute inequality. 絕對的不等式。
- Absolutely convergent series. 絕對的收斂級數。
- Absolute term. 已知項, 絕對項。
- Absolute value. 絕對值。
- Abstract number. 不名數。
- Absurdity. 背理, 不合理。
- Abundant number. 贏數。
- Acute angle. 銳角。
- Acute angled triangle. 銳角三角形。
- Acute triangle. 銳三角形。
- Addendo. 加比之理。
- Addend. 被加數。
- Addition. 加法。
- Additional formula. 加式。
- Additional root. 增根。
- Adfected quadratic equation. 雜二次方程式。
- Ad-infinitum. 無限。
- Adjacent angles. 隣角。
- Adjacent dihedral angles. 隣二面角。
- Adjacent sides. 隣邊。
- Advalorem duty. 從價稅。
- Aggregation. 合計。
- Algebra. 代數學。
- Algebraical difference. 代數差。
- Algebraical expression. 代數式。
- Algebraical function. 代數函數。
- Algebraical solution. 代數的解法。
- Algebraical sum. 代數和。
- Alhezen's problem. 亞爾海聖問題。
- Aliquotation. 整除數之法。
- Alligation. 混合法, 均中比例。
- Alligation, alternate. 和較法。
- Alligation, medial. 混和法。
- Alternando. 更迭之理。
- Alternate angles. 錯角。
- Alternate dihedral angles. 錯二面角。
- Alternate exterior angles. 外錯角。
- Alternate interior angles. 內錯角。
- Alternate segment. 隣弓形。
- Alternating expression. 交代式。
- Altitude. 高。
- Ambiguous case. 兩意情形。
- Ambiguous sign. 複符號。
- Amount. 本利和。
- Amplitude. 期限。
- Amicable number. 伴數。
- Analysis, method of. 解析法。
- Analytic Geometry. 解析幾何學。
- Angle. 角。

- Angle at the centre. 中心角, 圓心角。  
 Angle at the circumference. 圓周角。  
 Angle at the segment. 弓形角。  
 Angle of a lune. 月形角。  
 Angle of declination. 偏角。  
 Angle of depression. 俯角。  
 Angle of elevation. 仰角。  
 Angle of inclination. 傾角。  
 Angle of intersection. 交角。  
 Angle of sector. 扇形角。  
 Angular altitude. 高度。  
 Angular measure. 角度。  
 Anharmonic ratio. 非調和比。  
 Annuity. 年金。  
 Annuity at compound interest. 複利年金。  
 Annuity at simple interest. 單利年金。  
 Answer. 答。  
 Antecedent. 前項, 前率。  
 Antilogarithm. 逆對數。  
 Antiparallels. 逆平行線。  
 Any cone. 曲線錐。  
 Any cylinder. 曲線柱。  
 Apollonius problem. 阿破羅尼問題。  
 Apothecaries' weight. 藥衡。  
 Apothem. 邊心距。  
 Applied mathematics. 應用數學。  
 Approximate value. 近似值。  
 Approximation. 省略算, 近似法。  
 Arabic numerals. 亞拉伯數字。  
 Arabic system of notation. 亞拉伯記數法。  
 Arc. 弧。  
 Area. 面積。  
 Arithmetic. 算術。  
 Arithmetic (或 Arithmetical) mean. 等差中項, 算術中項, 相加平均。  
 Arithmetic (或 Arithmetical) difference. 算術差。  
 Arithmetic (或 Arithmetical) progression. 等差級數, 算術級數。  
 Arithmograph. 計數器。  
 Arithmometer. 計數器。  
 Arrangement. 排列。  
 Ascending order. 遞昇次。  
 Ascending power. 昇幂。  
 Ascending series. 遞昇級數。  
 Assets. 資產。  
 Associative law. 結合定則。  
 Associated triangle. 聯係三角形。  
 Assumption. 假定。  
 Assurance. 人壽保險。  
 Asymptote. 漸近線。  
 Auxiliary angle. 補助角。  
 Auxiliary circle. 補助圓, 輔圓。  
 Auxiliary unit. 補助單位。  
 Auxiliary unknown quantity. 補助未知數。  
 Average value. 平均數。  
 Axis-symmetry. 軸對稱。  
 Axiom. 公理。  
 Axis. 軸。  
 Axis of abscissa. 橫軸。  
 Axis of ordinate. 縱軸。

Axis of reference. 參考軸。  
 Axis of revolution. 旋轉軸。  
 Axis of similitude. 相似軸。  
 Axis of symmetry. 對稱軸。  
 Azimuth. 方位角。

## B

Banker's discount. 銀行折扣。  
 Base. 底。  
 Base angle. 底角。  
 Base line. 基線。  
 Bezout's method. 貝治阿之法。  
 Bill of exchange. 滙票。  
 Binary scale. 二進法。  
 Binomial coefficient. 二項係數。  
 Binomial equation. 二項方程式。  
 Binomial expansion. 二項展開式。  
 Binomial expression. 二項式。  
 Binomial series. 二項級數。  
 Binomial theorem. 二項式定理。  
 Biquadratic equation. 四次方程式。  
 Bi-rectangular trihedral angle. 二直角三面角。  
 Bi-rectangular spherical triangle. 二直角球面三角形。  
 Bisector. 二等分線; 二等分面。  
 Bissextile. 閏年。  
 Boundary. 境界。  
 Brace. 括弧。  
 Bracket. 括弧。  
 Brahmagupta's theorem. 布洛美固柏他定理。

Branch. 枝。  
 Branches of Mathematics. 數學諸科。  
 Breadth. 廣。  
 Brianchon's theorem. 布立安深問題。  
 Brocard's angle. 布洛喀角。  
 Brocard's circle. 布洛喀圓。  
 Brocard's ellipse. 布洛喀橢圓。  
 Brocard's first triangle. 第一布洛喀三角形。  
 Brocard's point. 布洛喀點。  
 Brocard's second triangle. 第二布洛喀三角形。  
 Broken line. 折線。

## C

Calculus. 微積分。  
 Calculation. 計算。  
 Cancellation. 消約法, 棄公生。  
 Capacity. 容量。  
 Capital. 本金, 資本。  
 Cardinal number. 基数。  
 Carnot theorem. 卡撓定理。  
 Carr theorem. 卡兒定理。  
 Castillon problem. 卡斯鐵龍問題。  
 Casting out of nines. 去九法。  
 Casting out of elevens. 去十一法。  
 Catalan theorem. 卡他郎定理。  
 Centesimal method. 百分法。  
 Centigram. 公毫, 厘。  
 Centigramme. 公毫, 厘。  
 Centiliter. 公勺, 厘。  
 Centilitre. 公勺, 厘。



- Centimeter. 公分, 檯.
- Centimetre. 公分, 檯.
- Central angle. 同心角.
- Central conics. 有心圓錐曲線.
- Central figure 有中心形.
- Central-symmetry. 中心對稱.
- Centre. 中心.
- Centre-line. 中心線, 聯心線.
- Centre of circle. 圓心.
- Centre of gravity. 重心.
- Centre of inversion. 倒形中心.
- Centre of involution. 對合中心.
- Centre of sphere. 球心.
- Centre of similarity. 相似中心.
- Centre of similitude. 相似中心.
- Centre of symmetry. 對稱中心.
- Centroid. 重心.
- Century. 世紀.
- Ceva's theorem. 稅瓦定理.
- C. G. S. units. C. G. S 單位.
- Chain rule. 連鎖法.
- Chance. 適遇, 或是率.
- Chapple's theorem. 卻拍爾定理.
- Characteristic. 指標, 首數.
- Chord. 弦.
- Chord of contact. 切弦.
- Circle. 圓.
- Circle of antisimilitude. 逆相似圓.
- Circle of inversion. 倒形圓.
- Circle of latitude. 緯度圈.
- Circle of similitude. 相似圓.
- Circular arc. 圓弧.
- Circular cone. 圓錐.
- Circular cylinder. 圓柱.
- Circular function. 圓函數.
- Circular measure. 弧度.
- Circular method. 弧度法.
- Circular permutation. 輪換排列.
- Circulating decimal. 循環小數.
- Circum-angle. 周角.
- Circum-centre. 外心.
- Circum-cone. 外接錐.
- Circumference. 圓周.
- Circum-polygon. 外接多邊形, 外切多角形.
- Circum-radius. 外半徑.
- Circumscribed circle. 外接圓.
- Circumscribed figure. 外接形.
- Circumscribed polygon. 外接多邊形, 外切多角形.
- Circumscribed polyhedron. 外接多面體, 外切多面體.
- Circumscribed prism. 外接角柱, 外切角柱.
- Circumscribed pyramid. 外接角錐, 外切角錐.
- Circumscribed quadrilateral. 外接四邊形.
- Circumscribed sphere. 外接球.
- Civil year. 平年.
- Closed line. 閉線.
- Closed polygon. 閉多邊形.
- Closed surface. 閉面.
- Co-axial circles. 同軸圓.

- Coefficient. 係數。  
 Co-factor. 係數。  
 Co-function. 餘函數。  
 Coincide. 重合。  
 Collinearity. 共線性。  
 Collinear points. 共線點。  
 Cologarithm of a number. 倒數之對數。  
 Combination. 組合, 集合。  
 Combination with repetition. 重複組合。  
 Commensurable magnitude. 可通約量。  
 Commensurable number. 可通約數。  
 Commensurable root. 可通約根。  
 Common chord. 公弦。  
 Common denominator. 公分母。  
 Common difference. 公差。  
 Common factor. 公約數, 公生數。  
 Common logarithm. 常用對數。  
 Common measure. 公度量。  
 Common multiple. 公倍數。  
 Common ratio. 公比。  
 Common root. 公根。  
 Common scale of notation. 常用記數法。  
 Common tangent. 公切線。  
 Common tangent plane. 公切面。  
 Common year. 平年。  
 Commutative law. 交換定則。  
 Compass. 羅盤。  
 Compasses. 圓規, 兩腳規。  
 Complement of an angle. 餘角。  
 Complement of an arc. 餘弧。  
 Complement of a logarithm. 餘對數。  
 Complement of a number. 餘數。  
 Complement of the parallelograms about the diagonal of a parallelogram. 餘形。  
 Complete cube. 完全立方。  
 Complete equation. 完全方程式。  
 Complete quadrangle. 完全四角形。  
 Complete quadrilateral. 完全四邊形。  
 Complete quotient. 完全商。  
 Complete square. 完全平方。  
 Complete fraction. 繁分數。  
 Complex number. 複虛數。  
 Complex quantity. 複虛量。  
 Componendo. 合比之理。  
 Composite number. 非素數。  
 Compositive factors. 複因數。  
 Compound addition. 諸等加法。  
 Compound average. 複平均。  
 Compound expression. 複式。  
 Compound fraction. 複分數。  
 Compound interest. 複利。  
 Compound number. 複名數 諸等數。  
 Compound partnership. 複合資算。  
 Compound proportion. 複比例。  
 Compound ratio. 複比。  
 Compound repetend. 複循環節。  
 Concentric circles. 同心圓。  
 Conclusion. 終結。  
 Concrete number. 名數。  
 Concurrence. 共點性。  
 Concurrent. 會合。  
 Concurrent lines. 共點線, 會合線。  
 Conyclic points. 共圓點。

- Condition, 條件.
- Conditional equation, 規約方程式.
- Conditional inequality, 規約不等式.
- Cone, 錐.
- Cone of revolution, 旋轉圓錐體.
- Congruence, 等剩式.
- Congruent, 全等.
- Congruent figures, 全等形.
- Conical surface, 圓錐面.
- Conic section, 圓錐曲線.
- Conic sections, 圓錐曲線法.
- Conjugate angles, 共軛角.
- Conjugate arcs, 共軛弧.
- Conjugate complex expressions, 共軛複虛式.
- Conjugate complex numbers, 共軛複虛數.
- Conjugate diameters, 共軛徑.
- Conjugate hyperbolas, 共軛雙曲線.
- Conjugate imaginaries, 共軛虛數.
- Conjugate lines, 共軛線.
- Conjugate points, 共軛點.
- Conjugate quadratic surd expressions, 共軛二次根式.
- Conjugate quadratic surds, 共軛二次不盡根.
- Conjugate segments, 共軛弓形.
- Conjugate solids, 共軛體.
- Consequent, 後項, 後率.
- Consistency of a system of equations, 方程式之一致.
- Constant, 常數.
- Construction, 作圖.
- Constructive Geometry, 作圖幾何學.
- Contained angle, 夾角.
- Contained side, 夾邊.
- Contents, 容積.
- Conterrinous repetend, 同末位循環節.
- Contiguous angles, 接角.
- Continued fraction, 連分數.
- Continued product, 連乘積, 累乘積.
- Continued proportion, 連比例.
- Continued ratio, 連比.
- Continuous, 連續性.
- Continuous quantity, 連續量.
- Contour, 周圍.
- Contracted division, 省略除法.
- Contracted method of extracting the cube root, 省略開立方.
- Contracted method of extracting the square root, 省略開平方.
- Contraction in division, 省略除法.
- Contraction in multiplication, 省略乘法.
- Contractory of a theorem, 反定理.
- Contraposition of a theorem, 對偶.
- Convergency, 收斂.
- Convergent of a continued fraction, 連分數之近數.
- Convergent series, 收斂級數.
- Converging series, 收斂級數.
- Converse of a theorem, 逆定理.
- Convex angle, 凸角.
- Convex broken line, 凸折線.

Convex polygon. 凸多邊形。  
 Convex polyhedral. 凸多面角。  
 Convex polyhedron. 凸多面體。  
 Convex spherical polygon. 凸球面多邊形。  
 Convex surface. 凸面。  
 Co-ordinate axes. 坐標軸。  
 Co-ordinate plane. 坐標面。  
 Co-ordinates. 坐軸。  
 Corollary. 系, 推論。  
 Corresponding. 對應, 相當。  
 Corresponding angles. 同位角, 對應角, 相當角。  
 Corresponding sides. 對應邊, 相當邊。  
 Cosecant. 餘割。  
 Cosine. 餘弦。  
 Cosine circle. 餘弦圓。  
 Cotangent. 餘切。  
 Course of exchange. 滙兌率。  
 Covered sine. 餘矢。  
 Cross multiplication. 十字乘法。  
 Cross quadrilateral. 交截四邊形。  
 Cross-ratio. 十字比。  
 Cube. 立方, 立方體。  
 Cube numb. r. 立方數。  
 Cube root. 立方根, 三乘根。  
 Cube roots of unity. 一之立方根, 一之三乘根。  
 Cubic curve. 三次曲線。  
 Cubic equation. 三次方程式。  
 Cubic expression. 三次式。  
 Cubic function. 三次函數。

Cubic surd. 三次不盡根, 立方不盡根。  
 Cuboid. 直角體。  
 Curve. 曲線。  
 Curved line. 曲線。  
 Curved surface. 曲面。  
 Curve of second degree. 二次曲線。  
 Curvilinear abscissa. 曲橫線。  
 Cyclical order. 輪換次序, 循環順序。  
 Cyclic permutation. 輪換排列。  
 Cyclic quadrilateral. 聯圓四邊形。  
 Cyclic symmetry. 輪換對稱。  
 Cylinder. 柱。  
 Cylinder of revolution. 旋轉圓柱體。  
 Cylindrical surface. 柱面。  
 Cypher. 零。

## D

Daily interest. 日利。  
 Datum. 已知件。  
 Davis' theorem. 達維斯定理。  
 Decagon. 十邊形。  
 Decagramme. 公錢, 尅。  
 Decahedron. 十面體。  
 Decalitre. 公斗, 訖。  
 Decametre. 公丈, 料。  
 Decigramme. 公釐, 尅。  
 Decilitre. 公合, 訖。  
 Decimal. 小數。  
 Decimal arithmetic. 十進算。  
 Decimal fraction. 小數。  
 Decimal point. 小數點。  
 Decimal system. 十進法。

- Decimeter. 公尺, 粉。
- Deduction. 演繹法。
- Defective number. 輸數。
- Definite straight line. 定長直線。
- Definition. 定義。
- Degree. 度; 次。
- Dekagram. 公斗, 斛。
- Dekaliter. 公錢升。
- Dekameter. 公丈, 杆。
- Delian problem. 第里安 問題。
- De Moivre's property of the circle. 特麥佛 圓之性質。
- De Moivre's theorem. 特麥佛 定理。
- Demonstration. 證明。
- Denary scale. 十進法。
- Denominate number. 名數。
- Denominator. 分母。
- Dependent variable. 因變數, 依變數。
- Derivative of equations. 方程式之誘求式。
- Derived function. 誘導函數。
- Derived unit. 誘導單位。
- Desargues theorem. 戴沙 固定理。
- Descartes' rule of signs. 狄卡德 符號之法則。
- Descending order. 遞降次。
- Descending power. 降冪。
- Descending series. 遞降級數。
- Descriptive geometry. 畫法幾何學。
- Detached coefficients. 分離係數。
- Determinant. 行列式。
- Development. 展開。
- Diagonal. 對角線。
- Diagonal plane. 對角面。
- Diagonal points. 對角點。
- Diagonal scale. 對角線尺, 斜尺。
- Diagonal triangle. 對角三角形。
- Diagram. 圖。
- Diameter. 徑, 直徑。
- Difference. 差, 較。
- Difference in times. 時差。
- Differential calculus. 微分學。
- Digit. 數字。
- Digit value. 數字值。
- Dihedral angle. 二面角。
- Dimension. 度; 次元。
- Diophantine solution. 刁藩 延解法。
- Dip of visible horizon. 視水平之俯角。
- Direct arc. 直向弧。
- Direct circular function. 正圓函數。
- Direct common tangent. 直接公切線。
- Direction. 方向。
- Direct line. 直向線。
- Directly similar. 正相似, 直接相似。
- Director circle. 準圓。
- Direct proportion. 正比例。
- Directrix. 準線。
- Discontinuous quantity. 不連續量。
- Discount. 折扣。
- Discriminant. 判別式。
- Discriminant of a quadratic function. 二次函數之判別式。
- Discussion. 討論。
- Dissimilar repetend. 不同初位循環節。

- Dissimilar surds, 不同類不盡根。
- Dissimilar term, 不同類項。
- Distance, 距離。
- Distributive law, 分配定則。
- Divergency, 發散。
- Divergent series, 發散級數。
- Diverging series, 發散級數。
- Dividend, 被除數, 實。
- Dividendo, 分比之理, 除比之理。
- Divider, 分線器。
- Division, 除法。
- Division by factor, 因數除數。
- Divisor, 除數, 法。
- Dodecagon, 十二邊形。
- Dodecahedron, 十二面體。
- Dollar, 銀元。
- Double chord, 倍弦。
- Double curved surface, 複曲面。
- Double positions, 複偽設法。
- Double roots, 二重根。
- Double sign, 複符號。
- Dozen, 打。
- Draft, 滙票。
- Duodecimal method, 十二進法。
- Duodenary scale, 十二進法。
- Duplicate ratio, 二乘比。
- Duties, 租稅。
- E**
- East meridian 東經。
- Eccentricity, 離心率。
- Edge, 稜。
- Eight, 八。
- Element, 基線。
- Elementary algebra, 初等代數學。
- Elementary geometry, 初等幾何學。
- Element of contact, 切基線。
- Eliminant, 消去式。
- Elimination, 消去法。
- Elimination by addition or subtraction, 加減消去法。
- Elimination by comparison, 比較消去法。
- Elimination by substitution, 代入消去法。
- Ellipse, 橢圓。
- Ellipsoid, 橢圓體。
- Elliptic paraboloid, 橢圓的拋物線體。
- English method, 英國法。
- English system, 英國制。
- Ennecontahedron, 九十面體。
- Enneagon, 九邊形。
- Enneahedron, 九面體。
- Equal, 相等。
- Equality, 等式。
- Equal roots, 等根。
- Equation, 方程式。
- Equation of higher degree, 高次方程式。
- Equation of the first degree, 一次方程式。
- Equation of the second degree, 二次方程式。
- Equation of the third degree, 三次方程式。
- Equation with many unknown num-

- bers. 多元方程式。
- Equation with one unknown number. 一元方程式。
- Equation with three unknown numbers. 三元方程式。
- Equation with two unknown numbers. 二元方程式。
- Equiangular figure. 等角形。
- Equiangular hyperbola. 等角雙曲線。
- Equiangular triangle. 等角三角形。
- Equi-cross ratio. 等十字比。
- Equidistant. 等距離。
- Equilateral cone. 等邊圓錐。
- Equilateral cylinder. 等邊圓柱。
- Equilateral hyperbola. 等邊雙曲線。
- Equilateral triangle. 等邊三角法。
- Equivalent equations. 等值方程式。
- Equivalent figure. 等積形。
- Eratosthenes's sieve. 依拉愛典素數淘汰法。
- Error. 誤差。
- Escribed circle. 傍切圓。
- Escribed sphere. 傍切球。
- Euclid. 歐幾里得。
- Euclidean geometry. 歐幾里得幾何學。
- Euler's method of elimination. 尤拉消去法。
- Euler's product. 尤拉乘積。
- Euler's series. 尤拉級數。
- Euler's theorem. 尤拉定理。
- Even number. 偶數。
- Evolute. 縮閉線。
- Evolution. 開方法。
- Exact cube. 完全立方。
- Exact divisor. 約數。
- Exactly divisible. 整除, 除盡。
- Exact measure. 約度。
- Exact square. 完全平方。
- Ex-aequali. 等比之理。
- Example. 例題。
- Ex-centre. 傍心。
- Ex-central triangle. 傍心三角形。
- Excentric angle. 離心角。
- Excentricity. 離心率。
- Exchange. 匯兌, 匯割。
- Ex-circle. 傍切圓。
- Exscribed circle. 傍切圓。
- Exscribed sphere. 傍切球。
- Expand. 展開。
- Expansion. 展開式。
- Explicit function. 陽函數。
- Exponent. 指數。
- Exponential equation. 指數方程式。
- Exponential series. 指數級數。
- Exponential theorem. 指數式定理。
- Exponential value of the cosine and sine. 餘弦及正弦之指數值。
- Expression. 式。
- Expression of first degree. 一次式。
- Expression of higher degree. 高次式。
- Extention. 廣。
- Exterior angle. 外角。
- External bisector. 外二等分線。
- External common tangent. 外公切線。

- External common tangent plane. 外公切面。
- External segment. 外線分。
- Extraction of cube root. 開立方方法。
- Extraction of higher root. 開高次方法。
- Extraction of square. 開平方法。
- Extraneous root. 增根。
- Extreme. 外項, 外率。
- Extreme and mean ratio. 外中比。
- F**
- Face. 角。
- Face angle. 面角。
- Factor. 因數, 生數, 因子。
- Factorial. 逐乘, 階乘。
- Factoring. 因數分解。
- Factorisation. 因數分解。
- Factor theorem. 因數定理。
- False suppositions. 偽設法。
- Fermat's point. 勿爾馬點。
- Fermat's theorem. 勿爾馬定理。
- Feuerbach's theorem. 富爾巴定理。
- Fifth root. 五乘根。
- Figurate numbers. 形數, 擬形數。
- Figurate series. 擬形級數。
- Figure. 數字; 圖形。
- Finite decimal. 有限小數。
- Finite series. 有限級數。
- Finite straight line. 有限直線; 定長直線。
- Fire insurance. 保火險。
- First Lemoine circle. 第一來莫恩圓。
- First power. 一乘幂。
- First quadrant. 第一象限。
- First term. 第一項。
- Five. 五。
- Fixed capital. 固定資本。
- Focal chord. 焦點弦。
- Focal distance. 焦點距離。
- Focus. 焦點。
- Foot (of a perpendicular or an oblique). 足, 趾。
- Formula. 公式。
- Four. 四。
- Four fundamental rules. 四則。
- Four rules. 四則。
- Fourth power. 四乘幂。
- Fourth proportional. 比例第四項。
- Fourth quadrant. 第四象限。
- Fourth root. 四乘根。
- Fraction. 分數。
- Fractional coefficient. 分數係數。
- Fractional equation. 分數方程式。
- Fractional expression. 分數式。
- Fractional index. 分指數, 分數指數。
- Fractional unit. 分數單位。
- Fraction in its lowest term. 已約分數, 最簡分數。
- French method. 法國法。
- French system. 法國制。
- Frustum. 臺, 平截體。
- Frustum of a cone. 圓台。
- Frustum of a pyramid. 角台。



Function. 函數。  
 Eunction of first degree. 一次函數。  
 Function of one independent variable.  
 一自變數函數。  
 Fundamental law. 基本定則。

G

Gallilles's theorem. 葛利雷定理。  
 General axiom. 普通公理。  
 General expression. 普通式。  
 General quadratic expression. 普通二次式。  
 General solution. 普通解答。  
 General term. 公項, 普通項。  
 Generating function. 母函數。  
 Generating line. 母線。  
 Generator. 母線。  
 Generatrix. 母線。  
 Geodesic line. 測地線。  
 Geodesy. 測地學。  
 Geometrical axiom. 幾何學公理。  
 Geometrical figure. 幾何圖形。  
 Geometrical image. 幾何像。  
 Geometrical (或 Gemetrie) mean. 等比中項, 幾何中項, 相乘平均。  
 Geometrical (或 Geometrie) progression. 等比級數, 幾何級數。  
 Geometrical solid. 幾何體。  
 Geometry. 幾何學。  
 Geometry of space. 立體幾何學。  
 Geometry of triangle. 三角形幾何學。  
 Gergonne's point. 葛爾剛納點。

Golden section. 黃金分割。  
 Goniometrical function. 測角函數。  
 Grade. 法度。  
 Gram. 克, 公分。  
 Gramme. 克, 公分。  
 Graph of an equation. 方程式之圖形。  
 Graphical representation of a complex number. 複虛數之圖示法。  
 Graphical representation of an equation. 方程式之圖示法。  
 Graphical solution of an equation. 方程式之圖解。  
 Great circle. 大圓。  
 Greater than. 大於。  
 Greatest coefficient. 最大係數。  
 Greatest common factor. 最大公因數。  
 Greatest common measure. 最大公約數。  
 Greatest term. 最大項。  
 Greatest value. 最大值。  
 Greek letters. 希臘字母。  
 Greek numbers. 希臘數字。  
 Gregory's series. 葛來哥利級數。  
 Gross ton. 重噸。  
 Guldin's theorem. 葛爾廷定理。

H

Harmonic (或 Harmonically) conjugate points. 調和共軛點。  
 Harmonic conjugate rays. 調和共軛線。  
 Harmonic division. 調和分割。  
 Harmonic (或 Harmontcal) mean. 調和中項。

- Harmonic pencil. 調和束線。
- Harmonic (或 Harmonical) progression. 調和級數。
- Harmonic proportion. 調和比例。
- Harmonic range. 調和列點。
- Harmonic section. 調和分割。
- Hectogram. 公兩, 鎊。
- Hectoliter. 公石, 鎊。
- Hectometer. 公引, 鎊。
- Height. 高。
- Hemisphere. 半球。
- Hendecagon. 十一邊形。
- Heptagon. 七邊形。
- Heptahedron. 七面體。
- Hexagon. 六邊形。
- Hexahedron. 六面體。
- Hexoctaedron. 四十八面體。
- Hexoctahedron. 四十八面體。
- Higher algebra. 高等代數學。
- Higher geometry. 高等幾何學。
- Highest common factor. 最高公因數。
- Highest common measure (divisor). 最高公約數。
- Holizon. 水平。
- Horizontal angle. 水平角。
- Horizontal line. 水平線。
- Horizontal plane. 水平面。
- Homogeneous expression. 同次式, 齊次式, 等次式。
- Homogeneous product. 同次積, 齊次積, 等次積。
- Homogeneous symmetrical expression. 同次對稱式, 齊次對稱式, 等式對稱式。
- Homologous. 對應, 相當。
- Homologous angles. 對應角, 相當角。
- Homologous edges. 對應稜, 相當稜。
- Homologous faces. 對應面, 相當面。
- Homologous lines. 對應線, 相當線。
- Homologous points. 對應點, 相當點。
- Homologous sides. 對應邊, 相當邊。
- Hour. 小時。
- Hundred. 百。
- Hundreds. 百位數。
- Hundreds' place. 百位。
- Hyperbola. 雙曲線。
- Hyperbolic function. 雙曲線函數。
- Hyperbolic logarithm. 雙曲線對數。
- Hyperbolic paraboloid. 雙曲線的拋物線體。
- Hyperboloid. 雙曲線體。
- Hyperboloid of one sheet. 單翼雙曲線體。
- Hyperboloid of two sheets. 雙翼雙曲線體。
- Hypotenuse. 斜邊, 弦。
- Hypothesis. 假設。
- I
- Icosahedron. 二十面體。
- Identical equation. 恆等方程式。
- Identically equal. 全等。
- Identity. 恆等式。
- Imaginary factor. 虛因數。
- Imaginary line. 虛線。

- Imaginary number. 虛數.
- Imaginary point. 虛點.
- Imaginary quantity. 虛量.
- Imaginary roots. 虛根.
- Imperfect number. 不完數.
- Implicit function. 陰函數, 隱函數.
- Impossible problem. 不能問題.
- Improper fraction. 假分數.
- In-centre. 內心.
- In-circle. 內切圓.
- Inclination. 傾角.
- Included angle. 夾角.
- Included side. 夾邊.
- Incommensurable magnitudes. 不可通約量.
- Incommensurable numbers. 不可通約數.
- Incomplete equation. 不完全方程式.
- Inconsistent. 矛盾.
- Indefinite straight line. 無定長直線.
- Indefinitely great. 無窮大.
- Indefinitely small. 無窮小.
- Independent variable. 自變數.
- Indeterminate coefficients. 不定係數.
- Indeterminate equation. 不定方程式.
- Indeterminate equation of the first degree. 一次不定方程式.
- Indeterminate equation of the second degree. 二次不定方程式.
- Indeterminate expression. 不定式.
- Indeterminate form. 不定形.
- Indeterminate problem. 不定問題.
- Indeterminate series. 不定級數.
- Index. 指數.
- Index law. 指數定則.
- Index of radicals. 根指數.
- Induction. 歸納法.
- Inequality. 不等式.
- Infinite decimal. 無窮小數, 無限小數.
- Infinite series. 無窮級數, 無限級數.
- Initial line of an angle. 角之首線.
- Inner center. 內心. (相似之內心).
- In-polygon. 內接多邊形.
- In-radius. 內半徑.
- Inscribed circle. 內切圓.
- Inscribed figure. 內接形.
- Inscribed polygon. 內接多邊形.
- Inscribed polyhedron. 內接多面體.
- Inscribed prism. 內接角柱.
- Inscribed pyramid. 內接角錐.
- Inscribed quadrilateral. 內接四邊形.
- Inscribed sphere. 內切球.
- Inscribed square. 內接正方形.
- Inscribed triangle. 內接三角形.
- Inscriptible quadrilateral. 內接四邊形.
- In-sphere. 內切球.
- In-square. 內接正方形.
- Insurance. 保險.
- Integer. 整數.
- Integral calculus. 積分學.
- Integral expression. 整式.
- Intercalary month. 閏月.
- Interest. 利息.
- Interior angle. 內角.
- Interior opposite angle. 內對角.

- Interminate decimal. 不盡小數.
- Internal bisector. 內二等分線.
- Internal common tangent. 內公接綫.
- Internal common tangent plane. 內公切面.
- Interpolation. 插入法.
- Intersection of loci. 軌跡之交.
- In-triangle. 內接三角形.
- Inverse circular function. 逆圓函數.
- Inverse figure. 倒形.
- Inverse function. 逆函數.
- Inverse operation. 逆運算.
- Inverse points. 倒點.
- Inverse probability. 反適遇.
- Inverse proportion. 反比例.
- Inverse ratio. 反比.
- Inverse trigonometric function. 逆三角函數, 反三角函數.
- Inversely similar. 逆相似.
- Inversion. 倒形法.
- Invertendo. 反轉之理.
- Involute. 展開綫.
- Involution. 自乘法; 對合.
- Irrational equation. 無理方程式.
- Irrational expression. 無理式.
- Irrational number. 無理數.
- Irrational quantity. 無理量.
- Irrational root. 無理根.
- Irrational term. 無理項.
- Irreducible case. 不可化之例.
- Isagon. 等角形.
- Isagonal conjugate points. 等角共軌點.
- Isagonals. 等角綫.
- Isogon. 等角形.
- Isosceles spherical triangle. 二等邊球面三角形.
- Isosceles trapezoid. 二等邊梯形, 等腰梯形.
- Isosceles triangle. 二等邊三角形, 等腰三角形.
- Isotomic line. 等截綫.
- Isotomic point. 等截點.

## J

Joins. 連綫, 連結綫, 聯結綫.

## K

Kilogram. 公斤, 尪.

Kilogramme. 公斤, 尪.

Kiloliter. 公秉, 缸.

Kilolitre. 公秉, 缸.

Kilometer. 公里, 杆.

Kilometre. 公里, 杆.

Known number. 已知數.

## L

Last term. 末項.

Lateral area. 側面積, 傍面積.

Lateral edge. 側稜.

Lateral face. 側面.

Latitude. 緯度.

Law. 定則, 法則, 定律.

Law of continuity. 連續之定則.

Law of cosines. 餘弦定則.

|                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| Law of signs. 符號之定則。                | Lines of intersection. 交線。        |
| Law of sines. 正弦定則。                 | Line symmetry 線對稱。                |
| Law of tangents. 正切定則。              | Linkage 聯結器。                      |
| Leap year. 閏年。                      | Liter. 公升, 妍。                     |
| Least common denominator. 最小公分母。    | Literal coefficient. 文字係數。        |
| Least common multiple. 最小公倍數。       | Literal equation. 文字方程式。          |
| Least squares. 最小二乘法。               | Litre. 公升, 妍。                     |
| Legs. 腰。                            | Locus. 軌跡。                        |
| Lemma. 預備定理, 補題。                    | Logarithm. 對數。                    |
| Lemoine point. 來莫恩點。                | Logarithmic base. 對數底。            |
| Lemoine parallels. 來莫恩平行線。          | Logarithmic series. 對數級數。         |
| Length. 長度。                         | Long division. 長除法。               |
| Less than. 小於。                      | Longitude. 經度。                    |
| Li. 里。                              | Long ton. 長噸, 重噸。                 |
| Life annuity. 終身年金。                 | Lower base. 下底。                   |
| Life assurance. 人壽保險。               | Lowest common denominator. 最低公分母。 |
| Life insurance. 人壽保險。               | Lowest common multiple. 最低公倍數。    |
| Like number. 同名數。                   | Lowest term. 既紛項, 最簡項。            |
| Like term. 同類項。                     | Lozenge. 菱形。                      |
| Limit. 極限。                          | Ludolphian number. 圓周率。           |
| Limiting points. 限點。                | Lunar angle. 月形角。                 |
| Limiting value. 極限值。                | Lunar calendar. 陰歷, 太陰歷。          |
| Line. 線, 直線。                        | Lune. 月形。                         |
| Linear equation. 一次方程式, 直線方程式。      |                                   |
| Linear expression. 一次式。             | <b>M</b>                          |
| Linear number. 直線數。                 | Magic square. 奇方, 幻方, 魔方, 方陣。     |
| Linear vector of function. 一次有向量函數。 | Magnitude. 大小, 量。                 |
| Line direction. 線方向。                | Major angle. 優角。                  |
| Lines of concurrency. 共點線。          | Major arc. 優弧。                    |
|                                     | Major axis. 長軸, 長徑。               |
|                                     | Major conjugate angle. 優共軛角。      |

- Major conjugate arc. 優共軛弧。
- Major conjugate segment. 優共軛弓形。
- Major segment. 優弓形。
- Mantissa. 假數。
- Many-valued function. 多價函數。
- Marine insurance. 水險。
- Mariner's compass. 航海用羅盤。
- Material solid 實質體。
- Mathematical induction. 數學的歸納法。
- Mathematics. 數學。
- Maximum. 極大。
- Maximum values. 極大值。
- Mean. 中項, 中率, 平均數。
- Mean centre. 平均中心。
- Mean point. 平均點。
- Mean proportion. 比例中項, 比例中率。
- Mean solar day. 平太陽日。
- Measure. 測度, 約度, 約數。
- Medial section. 外中分割。
- Median. 中線。
- Median point. 重心。
- Members of an equation. 方程式之節。
- Menelaus's theorem. 美奈勞斯定理。
- Mensuration. 求積法。
- Mental arithmetic. 暗算, 心算。
- Meridian. 子午線。
- Meter. 米突, 公尺。
- Method of analysis. 解析法。
- Method of completing a square. 配方法。
- Method of detached coefficient. 分離
- 係數法。
- Method of difference. 差法。
- Method of least square. 最小二乘法。
- Method of parallel translation. 平面移動法。
- Method of successive eliminations. 累次消去法。
- Method of undetermined multipliers. 未定乘數法。
- Meter. 米突, 公尺, 呎。
- Millimetre. 公釐, 耗。
- Centimetre. 公分, 厘。
- Decimetre. 公寸, 分。
- Decametre. 公尺, 計。
- Hectometre. 公引, 柁。
- Kilometre. 公里, 杆。
- Myriametre. 糎。
- Metric system. 公尺制, 米突制。
- Metric ton. 米突噸。
- Middle point. 中點。
- Mid-section. 中央截面。
- Mile. 哩。
- Milligram. 公絲, 尅。
- Milliliter. 公撮, 鈞。
- Millimeter. 公釐, 耗。
- Minimum. 極小。
- Minimum value. 極小值。
- Minor angle. 劣角。
- Minor arc. 劣弧。
- Minor auxiliary circle. 小補助圓。
- Minor axis. 短徑, 短軸。
- Minor conjugate angle. 劣共軛角。

|                                     |                                              |
|-------------------------------------|----------------------------------------------|
| Minor conjugate arc. 劣共軛弧。          | Natural function. 真數函數。                      |
| Minor conjugate segment. 劣共軛弓形。     | Natural logarithm. 自然對數。                     |
| Minor determinant. 小行列式。            | Natural numbers. 自然數。                        |
| Minor segment. 劣弓形。                 | Natural secant. 真數正割。                        |
| Minuend. 被減數。                       | Natural sine. 真數正弦。                          |
| Minus. 減。                           | Natural tangent. 真數正切。                       |
| Minute. 分。                          | Naught. 零。                                   |
| Mixed number. 帶分數; 混數。              | Nautical mile. 海里, 涅。                        |
| Mixed recurring decimal. 雜循環小數。     | Necessary condition. 必要條件。                   |
| Mixture. 混合法。                       | Necessary and sufficient condition. 必要且充足條件。 |
| Modern geometry. 近世幾何學。             | Negative. 負。                                 |
| Modulus. 對數率; 根率; 模數。               | Negative angle. 負角。                          |
| Monomial expression. 一項式。           | Negative Brocard point. 負布洛喀點。               |
| Multinomial expression. 多項式。        | Negative index. 負指數。                         |
| Multinomial theorem. 多項式定理。         | Negative number. 負數。                         |
| Multiple. 倍度, 倍數, 倍量。               | Negative quantity. 負量。                       |
| Multiple ratio. 重比。                 | Negative root. 負根。                           |
| Multiple roots. 重根。                 | Negative sign. 負號。                           |
| Multiplicand. 被乘數。                  | Negative term. 負項。                           |
| Multiplication. 乘法。                 | Neutral series. 中性級數。                        |
| Multiplication table. 乘法表, 九九表。     | Nine. 九。                                     |
| Multiplier. 乘數。                     | Nine point circle. 九點圓。                      |
| Mutual equiangular polygon. 互等角多角形。 | Nonagon. 九邊形。                                |
| Mutual equilateral polygon. 互等邊多邊形。 | Nonary scale. 九進法。                           |
| <b>N</b>                            |                                              |
| Napierian logarithm. 納白爾對數。         | Non-Euclidean geometry. 非歐幾里得幾何學。            |
| Natural cosecant. 真數餘割。             | Non intersecting coaxial circle. 不相交同軸圓。     |
| Natural cosine. 真數餘弦。               | Normal. 法線。                                  |
| Natural cotangent. 真數餘切。            | Normal section. 直截面。                         |
|                                     | Notation. 記法, 記數法。                           |

- Nought. 零.
- Nth root.  $n$  乘根.
- Nth root of unity. 一之  $n$  乘根.
- Number. 數.
- Number prime to each other. 互素數.
- Numeration. 命數法.
- Numerator. 分子.
- Numerical coefficient. 數字係數.
- Numerical equation. 數字方程式.
- Numerical value. 數值.
- O**
- Oblique. 斜線.
- Oblique angle. 斜角.
- Oblique angled triangle. 斜三角形, 斜角三角形.
- Oblique cone. 斜圓錐.
- Oblique cylinder. 斜圓柱.
- Oblique line. 斜線.
- Oblique prism. 斜角柱.
- Oblique pyramid. 斜角錐.
- Oblique section. 斜截面, 斜切口.
- Oblique triangle. 斜三角形.
- Oblong. 矩形, 長方形.
- Obtuse angle. 鈍角.
- Obtuse angled triangle. 鈍角三角形.
- Obtuse triangle. 鈍三角形.
- Obverse of a theorem. 裏定理.
- Octagon. 八邊形.
- Octahedron. 八面體.
- Octant. 八分空間.
- Octenary scale. 八進法.
- Odd number. 奇數.
- One. 一.
- One valued function. 一價函數.
- Operand. 被算數.
- Operation. 運算, 演算.
- Opposite angles. 對角.
- Opposite faces. 對面.
- Opposite points. 對點.
- Opposite sides. 對邊.
- Order. 次.
- Ordinat. 縱線, 縱坐標.
- Origin. 原點.
- Orthique triangle. 垂趾(足)三角形.
- Orthocentre. 垂心.
- Orthocycle. 直交圓.
- Orthogonal. 直交.
- Orthogonal projection. 正射影.
- Orthotomic circle. 直交於三圓之圓.
- Oscillating series. 動搖級數.
- Outer centre. 相似外心.
- P**
- Pappus problem. 巴普斯問題.
- Parabola. 拋物線.
- Parabolic spiral. 拋物線的螺線.
- Paraboid. 拋物線體.
- Parallelepiped. 平行六面體.
- Parallelogram. 平行四邊形.
- Parallelogramic prism. 平行形角柱.
- Parallelograms about the diagonal. 沿對角線之平行四邊形.
- Parallelopiped. 平行六面體.



- Parallel planes. 平行平面.
- Parallels. 平行線.
- Parallel straight lines. 平行直線.
- Parenthesis. 括弧.
- Partial dividend. 部分被除數.
- Partial fractions. 部分分數.
- Partial product. 部分積.
- Partial quotient. 部分商.
- Partnership. 合資算.
- Pascal line. 巴斯開線.
- Pascal theorem. 巴斯開定理.
- Peaucollier's linkage. 破塞里葉聯節器.
- Pedal line. 垂趾線, 垂足線.
- Pedal triangle. 垂趾三角形, 垂足三角形.
- Pencil. 束線.
- Pentagon. 五邊形.
- Pentagonal dodecahedron. 五角十二面體.
- Pentagonal number. 五角數.
- Pentahedron. 五面體.
- Pentadecagon. 十五邊形.
- Per-cent. 百分率, 分釐率.
- Percentage. 百分法, 分釐法.
- Perfect cube. 完全立方.
- Perfect number. 完數.
- Perfect square. 完全平方.
- Perigon. 周角.
- Perimeter. 周圍.
- Periodic circular function. 週期圓函數.
- Periodic convergent series. 週期收斂級數.
- Periodic trigonometric function. 週期三角函數.
- Permutation. 排列, 順列.
- Permutation with repetition. 重複排列.
- Perpendicular. 垂直, 垂線.
- Perpendicular bisector. 中垂線, 垂直二等分線.
- Perpendicular distance. 垂直距離.
- Perpetual annuity. 永久年金.
- Perpetuity. 永久年金.
- Phil's line. 費羅線.
- Picture plane. 畫面.
- Piles of shot. 積彈.
- Place. 位.
- Plane. 平面.
- Plane angle. 平面角.
- Plane angle of a dihedral angle. 二面角之平面角.
- Plane curve. 平面曲線.
- Plane direction. 平面方向.
- Plane figure. 平面圖, 平面形.
- Plane geometry. 平面幾何學.
- Plane rectilinear figure. 平面直線形.
- Plane surface. 平面.
- Plane symmetry. 平面對稱.
- Plane triangle. 平面三角形.
- Plane trigonometry. 平面三角法.
- Planimetry. 平面幾何學.
- Plotting paper. 作圖紙.
- Plumb-line. 鉛垂線, 鉛直線.

- Plus. 加。
- Point. 點。
- Point of bisection. 二等分點。
- Point of concurrence. 會合點。
- Point of contact. 切點。
- Point of division. 分點。
- Point of intersection. 交點。
- Point of tangency. 切點。
- Point symmetry. 點對稱。
- Polar. 極線。
- Polar axis. 極軸。
- Polar circle. 極圓。
- Polar co-ordinates. 極坐標。
- Polar distance. 極距離。
- Polar equation. 極方程式。
- Polar triangle. 極三角形。
- Pole. 極。
- Polyedral angle. 多面角。
- Polygon. 多角形, 多邊形。
- Polygonal number. 多角數。
- Polyhedral angle. 多面角。
- Polyhedron. 多面體。
- Polynomial expression. 多項式。
- Poncelet's theorem. 邦斯累定理。
- Position. 位置。
- Positive. 正。
- Positive angle. 正角。
- Positive Brocard point. 正布洛喀點。
- Positive integer. 正整數。
- Positive number. 正數。
- Positive quantity. 正量。
- Positive root. 正根。
- Positive sign. 正號。
- Positive term. 正項。
- Postulate. 公法。
- Postulate of superposition. 疊置之公法。
- Potency of a circle. 圓之方積。
- Pound. 磅。
- Power. 方乘, 乘羣, 羣。
- Practical arithmetic. 實用算術。
- Prime divisor. 素約數。
- Prime factor. 素因數。
- Prime measure. 素約數。
- Prime meridian. 本初子午線。
- Prime number. 素數。
- Prime-pair. 雙素數。
- Prime to each other. 互素。
- Primitive roots of unity. 一之固有根。
- Principal. 本金。
- Principal circle. 主圓。
- Principal ex-central triangle. 主傍心三角形。
- Principal meridian. 本初子午線。
- Principal plane. 主平面。
- Principal value. 主值。
- Prism. 角柱, 積柱。
- Prismatoid. 三角傍面台。
- Prismoid. 角台。
- Probability. 適遇, 或是率。
- Problems. 問題, 作圖題。
- Process of pointing off. 分節法。
- Product. 積。
- Production. 延長線。

Profit and loss. 損益.  
 Progression. 級數.  
 Projection. 射影, 投影.  
 Prolongation. 延長線.  
 Proof. 證明, 驗算.  
 Proof by exhaustion. 窮極法.  
 Proper fraction. 真分數.  
 Proportion. 比例.  
 Proportional. 比例數, 比例量.  
 Proportional compasses. 比例規.  
 Proportional division. 比例配分.  
 Proportional numbers. 比例數.  
 Proportional parts. 比例配分 配分法.  
 Proportional quantities. 比例量.  
 Proposition. 命題.  
 Protractor. 分度規.  
 Ptolemy's theorem. 多來米定理.  
 Puissance. 方積.  
 Puissance of a circle. 圓之方積.  
 Pure mathematics. 純正數學.  
 Pure quadratic equation. 純二次方程式.  
 Pure recurring decimal. 純循環小數.  
 Pyramid. 角錐, 稜錐.  
 Pythagoras's table. 畢達哥拉表.  
 Pythagoras's theorem. 畢達哥拉定理.  
 Pythagorean table. 畢達哥拉表.

Q

Quadrangle. 四角形.  
 Quadrangular prism. 四角柱.  
 Quadrangular pyramid. 四角錐.

Quadrant. 象限, 四分圓.  
 Quadrantal triangle. 象限三角形.  
 Quadratic. 二次方程式.  
 Quadratic equation. 二次方程式.  
 Quadratic expression. 二次式.  
 Quadratic function. 二次函數.  
 Quadratic surd. 二次不盡根.  
 Quadratrix. 圓積線.  
 Quadrature of a circle. 圓積問題.  
 Quadric surface. 二次曲面.  
 Quadrilateral. 四邊形.  
 Quadruple root. 四重根.  
 Quantity. 量, 數.  
 Quarter. 四分之一, 刻.  
 Quarternary scale. 四進法.  
 Quartic. 四次方程式.  
 Quartic curve. 四次曲線.  
 Quinary scale. 五進法.  
 Quindecagon. 十五邊形.  
 Quintic. 五次方程式.  
 Quintic equation. 五次方程式.  
 Quotient. 商.

R

Radian. 半徑度, 本位弧.  
 Radical. 根數.  
 Radical axis. 根軸.  
 Radical centre. 根軸心.  
 Radical sign. 根號.  
 Radicand. 被開方數.  
 Radication. 開方法.  
 Radius. 半徑.

- Radius vector. 動徑.
- Radix. 根; 底.
- Radix fraction. 記底分數.
- Radix of the scale. 記數底.
- Range. 列點.
- Rate of discount. 折扣率.
- Rate of exchange. 匯兌率.
- Rate of interest. 利率.
- Rate percent. 利率.
- Ratio. 比.
- Ratio-hexagon. 三角比之六角形.
- Rational equation. 有理方程式.
- Rational expression. 有理式.
- Rational fraction. 有理分數.
- Rational function. 有理函數.
- Rational integral expression. 有理整式.
- Rationalization. 有理化.
- Rationalizing factor. 有理化因數.
- Rational number. 有理數.
- Ratio of equality. 等比.
- Ratio of greater inequality. 優比.
- Ratio of less inequality. 劣比.
- Ratio of similitude. 相似比.
- Real number. 實數.
- Real quantity. 實量.
- Recent geometry. 最近幾何學.
- Reciprocal equation. 倒數方程式.
- Reciprocal expression. 倒數式.
- Reciprocal fractions. 倒分數.
- Reciprocal ratio. 倒數比.
- Reciprocals. 倒數.
- Rectangle. 矩形.
- Rectangle contained by two lines. 二線所包之矩形.
- Rectangle of antisimilitude. 逆相似矩形.
- Rectangular cone. 直角圓錐.
- Rectangular hyperbola. 直角雙曲線.
- Rectangular parallelepiped. 直角平行六面體, 長方體.
- Rectangular trihedral angle. 直角三面角.
- Rectilinear angle. 直線角.
- Rectilinear figure. 直線形.
- Recurring decimal. 循環小數.
- Recurring period. 循環節.
- Recurring series. 循環級數.
- Reduce. 約, 通約.
- Reduction of fractions to a common denominator. 通分.
- Re-entering angle. 凹角.
- Re-entrant angle. 凹角.
- Re-entrant polygon. 凹多角形.
- Reflex angle. 凹角.
- Regular decagon. 正十邊形.
- Regular dodecagon. 正十二邊形.
- Regular dodecahedron. 正十二面體.
- Regular enneagon. 正九邊形.
- Regular hendecagon. 正十一邊形.
- Regular heptagon. 正七邊形.
- Regular hexagon. 正六邊形.
- Regular hexahedron. 正六面體.
- Regular icosahedron. 正二十面體.
- Regular octagon. 正八邊形.

- Regular octahedron. 正八面體。
- Regular pentagon. 正五邊形。
- Regular pentecagon. 正十五邊形。
- Regular polygon. 正多邊形。
- Regular polygon of 17 sides. 正十七邊形。
- Regular polyhedron. 正多面體。
- Regular prism. 正角柱。
- Regular pyramid. 正角錐。
- Regular tetrahedron. 正四面體。
- Regular triangle. 正三角形。
- Relation between the roots and coefficients. 係數與根之關係。
- Remainder. 剩餘。
- Remainder theorem. 剩餘定理。
- Repeating decimal. 循環小數。
- Repetend. 循環節。
- Resolution into prime factors. 素數分解法。
- Rhomboid. 偏菱形, 長菱形。
- Rhombus. 菱形。
- Right angle. 直角。
- Right angled triangle. 直角三角形, 勾股形。
- Right circular cone. 直圓錐。
- Right circular cylinder. 直圓柱。
- Right dihedral angle. 直二面角。
- Right line. 直線。
- Right parallelepiped. 直六面體。
- Right parallelopiped. 直六面體。
- Right prism. 直角柱。
- Right pyramid. 直角錐。
- Right section. 直截面, 直截面。
- Right triangle. 直三角形。
- Roman notation. 羅馬記數法。
- Roman numbers. 羅馬數字。
- Root. 根。
- Rotation. 自轉。
- Rule. 定則, 法則; 尺度。
- Rule for casting out of elevens. 去十一法。
- Rule for casting out of nine. 去九法。
- Rule for converse theorem. 逆定理之法則。
- Rule for false positions. 偽設法。
- Rule for identity. 同一法。
- Rule for positions. 假設法。
- Rule for three. 三率法。
- Ruler. 界尺。
- S**
- Salient angle. 凸角。
- Salmon's theorem. 賽爾門定理。
- Scalene triangle. 斜三角形。
- Scale of notation. 記數法。
- Scale of relation. 關係式。
- Schlömilch theorem. 叔羅密爾夫定理。
- Screw. 螺旋。
- Second. 秒。
- Second Lomoiné circle. 第二來莫恩圓。
- Second power. 二乘幂。
- Second quadrant. 第二象限。
- Second root. 二次根, 二乘根。
- Section. 截面, 截面。

- Sector of a circle. 扇形。
- Segment of a circle. 弓形。
- Segment of a line. 線分。
- Self conjugate triangle. 自共軛三角形。
- Semi-circle. 半圓。
- Semi-circumference. 半圓周。
- Semi-sphere. 半球。
- Senary scale. 六進法。
- Sense. 向。
- Septenary scale. 七進法。
- Series. 級數。
- Set-square. 三角板。
- Seven. 七。
- Sexagesimal method. 六十分法。
- Shape. 形。
- Short division. 短除法。
- Short ton. 短噸, 輕噸。
- Side. 邊。
- Side of an equation. 方程式之邊。
- Sign. 符號。
- Significant figure. 有效數字。
- Sign of addition. 加號。
- Sign of decimal. 小數點。
- Sign of division. 除號。
- Sign of equality. 等號。
- Sign of inequality. 不等號。
- Sign of multiplication. 乘號。
- Sign of radication. 開方之符號。
- Sign of roots. 根號。
- Sign of subtraction. 減號。
- Similar. 相似。
- Similar figures. 相似形。
- Similarly situated. 相似放置。
- Similar polygons. 相似多邊形。
- Similar polyhedrons. 相似多面體。
- Similar repetend. 同初位循環節。
- Similar surds. 相似不盡根。
- Similar terms. 相似項。
- Similar triangles. 相似三角形。
- Simple average. 單平均。
- Simple equation. 一次方程式。
- Simple expression. 一次式。
- Simple interest. 單利。
- Simple number. 單名數; 基數。
- Simple partnership. 單合資算。
- Simple proportion. 單比例。
- Simple ratio. 單比。
- Simplest alternating expression. 最簡交代式。
- Simson's line. 西摩孫線。
- Simultaneous equation. 聯立方程式。
- Simultaneous equation of the first degree. 一次聯立方程式。
- Simultaneous equation of the second degree. 二次聯立方程式。
- Sine. 正弦。
- Single curved surface. 單曲面。
- Single positions. 單僞設法。
- Single repetend. 單循環節。
- Single term. 單項。
- Single valued function. 一價函數。
- Six. 六。
- Six-points circle. 六點圓。
- Slant edge. 斜稜。

- Slant height. 斜高.
- Slide rule. 計算尺.
- Small circle. 小圓.
- Solar calendar. 陽歷.
- Solar day. 太陽日.
- Solid. 立體.
- Solid angle. 立體角.
- Solid geometry. 立體幾何學.
- Solidity. 體積.
- Solid of revolution. 旋轉體.
- Solution. 解法, 解答.
- Solution of spherical triangle. 球面三角形之解法.
- Solution of triangle. 三角形之解法.
- South latitude. 南緯.
- Space. 空間.
- Specific duty. 從量稅.
- Sphere. 球.
- Spherical angle. 球面角.
- Spherical cone. 球圓錐.
- Spherical degree. 球面度.
- Spherical excess. 球面餘度.
- Spherical figure. 球面圖形.
- Spherical geometry. 球面幾何學.
- Spherical polygon. 球面多邊形.
- Spherical pyramid. 球角錐.
- Spherical sector. 球分, 球扇形.
- Spherical segment. 球盤.
- Spherical surface. 球面.
- Spherical triangle. 球面三角形.
- Spherical trigonometry. 球面三角法.
- Spherical wedge. 球劈, 球楔.
- Spheroid. 橢圓體.
- Spiral. 螺旋.
- Spiral of Archimedes. 亞幾默德螺旋.
- Square. 正方, 正方形.
- Square number. 平方數, 四角數.
- Square on the line. 線上之正方形.
- Square paper. 方格紙.
- Square root. 平方根.
- Standard meridian. 本初子午線.
- Standard time. 標準時.
- Standard unit. 基本單位.
- Star polygon. 星形.
- Stereometry. 立體幾何學.
- Stock. 資本.
- Straight angle. 平角.
- Straight line. 直線.
- Subduplicate ratio. 平方根比.
- Subnormal. 次法線.
- Subsidiary angle. 補助角.
- Substitution. 代入法, 置換法.
- Subtangent. 次切線.
- Subtraction. 減法.
- Subtraction formula. 減式.
- Subtrahend. 減數.
- Successive division. 累次除法.
- Sufficient condition. 充足條件.
- Suffix. 添數.
- Sum. 和.
- Summand. 被加數.
- Summation. 總和法.
- Superficial area. 表面積.
- Supplemental triangle. 補三角形.

- Supplementary chord, 補弦。
- Supplement of an angle, 補角。
- Supplement of an arc, 補弧。
- Surd, 不盡根。
- Surd of second order, 二次不盡根。
- Surd of third order, 三次不盡根。
- Surface, 面。
- Surface geometry, 表面幾何學。
- Surveying, 測量術。
- Surveyor's chain, 測鐵。
- Sylvester dialytic method of elimination, 薛爾維斯脫分解消去法。
- Symbol, 記號。
- Symbol of operations, 演算之記號。
- Symmedian, 類似中線。
- Symmedian line, 類似中線。
- Symmedian point, 爾似重心。
- Symmetrical figure, 對稱圖形。
- Symmetrical function, 對稱函數。
- Symmetrical polygon, 對稱多邊形。
- Symmetrical polyhedral angles, 對稱多面角。
- Symmetrical polyhedron, 對稱多面體。
- Symmetrical spherical polygon, 對稱球面多邊形。
- Symmetrical spherical pyramid, 對稱球角錐。
- Symmetrical spherical triangles, 對稱球面三角形。
- Symmetrical triangles, 對稱三角形。
- Symmetry, 對稱。
- Symmetry, collateral, 並行的對稱。
- Symmetry, cyclic, 輪換的對稱。
- Synthesis, method of, 綜合法。
- Synthetic division, 綜合除法。
- System of notation, 記數法。
- System of numeration, 命數法。

## T

- Table, 表。
- Table of logarithms, 對數表。
- Tabular difference, 表差。
- Tabular logarithm, 表對數。
- Tangent, 正切, 切線。
- Tangent circle, 切圓。
- Tangent plane, 切面。
- Tangent sphere, 切球。
- Taylor circle, 戴勞圓。
- Taylor theorem, 戴勞定理。
- Tee square, 丁字級。
- Ten, 十。
- Tens, 十位數。
- Tens' place, 十位。
- Term, 項。
- Terminating continued fraction, 有限連分數。
- Term of first degree, 一次式。
- Term of second degree, 二次式。
- Ternary scale, 三進法。
- Tetragon, 四角形。
- Tetragram, 四邊形。
- Tetrahedral angle, 四面角。
- Tetrahedron, 四面體。
- Tetrahexahedron, 二十四面體。



- Theodolite. 經緯儀。
- Theorem. 定理。
- Theorem of three perpendiculars. 三垂線之定理。
- Theory of equations. 方程式論。
- Theory of numbers. 數論。
- Theory of proportional parts. 比例部之理論。
- Third power. 三乘冪。
- Third proportional. 比例第三項。
- Third quadrant. 第三象限。
- Thousand. 千。
- Thousands. 千位數。
- Thousands' place. 千位。
- Three. 三。
- Three famous problems in geometry. 幾何學之三大問題。
- To add. 加。
- To be circumscribed. 外接。
- To be homologous. 相當。
- To be inscribed. 內接。
- To be similarly situated. 相似放置。
- To correspond. 對應。
- To deduct. 減。
- To divide. 除。
- To divide externally. 外分。
- To divide harmonically. 調和分。
- To divide internally. 內分。
- To divide similarly. 相似分。
- To divide symmetrically. 對稱分。
- To intersect. 交。
- To multiply. 乘。
- To satisfy. 適合, 滿足。
- To solve. 解。
- To subtract. 減。
- Total. 合計, 總計。
- Total area. 全面積。
- To touch externally. 外切。
- To touch internally. 內切。
- To vary. 變。
- To vary directly. 正變。
- To vary inversely. 反變。
- To vary jointly. 合變。
- Transcendental equation. 超越方程式。
- Transcendental function. 超越函數。
- Transcendental number. 超越數。
- Transformation of co-ordinates. 坐標之變換。
- Transpose. 移項。
- Transposition. 移項。
- Transversal. 截線, 橫截線。
- Transversal axis. 橫軸。
- Trapezium. 不平行四邊形。
- Trapezoid. 梯形。
- Trial divisor. 試除數。
- Triangle. 三角形。
- Triangular number. 三角數。
- Triangular prism. 三角柱。
- Triangular pyramid. 三角錐。
- Triangulation. 三角測量。
- Trigon. 三角形。
- Trigonometrical equation. 三角方程式。
- Trigonometrical function. 三角函數。
- Trigonometrical functions of comple-

- mentary angles. 餘角之三角函數。
- Trigonometrical functions of multiple angles. 倍角之三角函數。
- Trigonometrical functions of submultiple angle. 分角之三角函數。
- Trigonometrical functions of supplement of an angle. 補角之三角函數。
- Trigonometrical functions of the difference of two angles. 差角之三角函數。
- Trigonometrical functions of two or more angles. 和角之三角函數。
- Trigonometrical ratio. 三角比。
- Trigonometrical series. 三角級數。
- Trigonometrical table. 三角表。
- Trigonometry. 三角法。
- Tribedral angle. 三面角。
- Trilinear co-ordinates. 三角坐標。
- Trinomial expression. 三項式。
- Triple ratio. 三乘比。
- Triplicate ratio. 三乘比。
- Triplicate ratio circle. 三乘比圓。
- Trirectangular spherical triangle. 三直角球面三角形。
- Trirectangular trihedral angle. 直三面角。
- Trisect. 三等分。
- Trisection of an angle. 角之三等分。
- Troy weight. 金衡。
- Truncated cone. 截圓錐。
- Truncated cylinder. 截圓柱。
- Truncated prism. 截角柱。
- Truncated pyramid. 截角錐。
- Tucker's family of circles. 特克圓屬。
- Twelve points sphere. 十二點球。
- Two. 二。
- Two valued function. 二價函數。

## U

- Undecagon. 十一邊形。
- Undenary scale. 十一進法。
- Undetermined multiplier, method of. 未定乘數法。
- Unequal. 不等。
- Unit. 單位。
- Unitary method. 歸一法。
- Unit circle. 單位圓。
- Unit of volume. 體積單位。
- Units. 一位數, 個位數。
- Units' place. 一位, 個位。
- Unity. 一。
- Universal arithmetic. 普通算術。
- Unknown number. 未知數。
- Unknown quantity. 未知量。
- Unlike surds. 不同類不盡根。
- Unlike terms. 不同類項。
- Upper base. 上底。

## V

- Value. 值。
- Vandermonde's theorem. 文單蒙定理。
- Vanishing fraction. 消失分數。
- Variable. 變數。
- Variable angle. 變角。

Variation. 變數法。  
 Vectoral angle. 變角。  
 Vector quantity. 有向量。  
 Verification. 驗證。  
 Versed sine 正矢。  
 Vertex. 頂。  
 Vertex of an angle. 角頂。  
 Vertical angle. 頂角; 垂直角。  
 Vertical direction. 垂直方向。  
 Vertical height. 正高。  
 Vertical line. 垂直線。  
 Vertically opposite angles. 對頂角。  
 Vertically opposite dihedral angles.  
 對頂二面角, 對稜二面角。  
 Vertically opposite polyhedral angles.  
 對頂多面角。  
 Vertical plane. 垂直面。  
 Vinculum. 括線。  
 Volume. 體積。  
 Vulgar fraction. 通常分數。

W

Warped surface. 扭曲面。  
 Wedge. 楔, 劈。  
 Weights and measures. 度量衡。  
 West meridian. 西經。  
 Whole number. 完全數。  
 Width. 廣。  
 Wilson's theorem. 威爾孫定理。

Y

Yard. 碼。

Year. 年。

Z

Zero. 零。  
 Zero coefficient. 零係數。  
 Zone of a sphere. 球帶。

## III. 數 學 用 字 略

- A. or ans. Answer; 答。
- A. C. *ante Christum* = Refere Christ; 耶蘇紀元前。
- A. D. *anno Domini* = In the year of our Lord; 耶蘇紀元。
- Ad inf. *ad infinitum* = To infinity; 無窮。
- adj. Adjacent; 相鄰。
- alg. Algebra; 代數學。
- alt. Alternate; 錯。Altitude; 高。
- ans. Answer; 答。
- A. P. Arithmetic progression; 算術級數, 等差級數。
- arith. Arithmetic or Arithmetical; 算術或算術的。
- art. Article; 節。
- Avoir., Avdp. Avoirdupois; 藥衡。
- Ax. Axiom; 公理。
- B. C. Before Christ; 耶蘇紀元前。
- C. Centigrade; 百度。
- C., Cap., Ch. *Caput* = Chapter; 章。
- c., ct., cent. *Centum* = A hundred; 百。
- cen. Central; 中心的。Century; 世紀。
- cg. Centigram; 公毫, 釐。
- C.G.S. Centimetre, Gramme, Second; 長, 質量, 時之單位。
- Ch., Chap. Chapter; 章。
- cm. Centimetre; 公分, 釐。
- com. Common; 公, 共通。
- comp. Compare; 比較。Compound or Compounded; 複。
- con. Conclusion; 終結。
- con. sec. Conic Sections; 圓錐曲線, 圓錐曲線法。
- const. Construction; 作圖。
- contr. Contracted; 省略的。Contraction; 省略。
- cor. Corollary; 系, 推論。
- cos. Cosine; 餘弦。
- cot. Cotangent; 餘切。
- cover. Covered sine; 餘矢。
- csc. Cosecant; 餘割。
- cu., cub., Cubic; 立方的。
- ewt. A hundredweight. 一百二十磅。
- d., deg. Degree; 度。
- d. *denarius* = A penny; 辨士。
- def. Definition; 定義。
- demon. Demonstrative; 證明。
- der. Derivation; 誘求。
- diam. Diameter; 徑, 直徑。
- dist. Distance; 距離。
- div. Divide; 除。
- dols. Dollars; 銀圓。
- doz. Dozen; 打。
- E. East; 東。
- e. g., ex. gr. *exempli gratia* = For example; 例。
- E. N. E. East-north-east; 東北東。
- eq. Equal; 相等。

- E. S. E. east-south-east; 東南東。  
 etc. *et ceteri or cetra*=And others, and so forth; 等。  
 ex. Example; 例. Exercise; 例題。  
 ext. Exterio; 在外。  
 f. Foot; 英尺。  
 fig. Figure; 圖形。  
 ft. Foot. Feet; 英尺。  
 fth, fthm. Fathom; 尋(六英尺)  
 fur, Furlong; 長度名(一英里八尺之一)。  
 g. Gramme; 克,公分。  
 G. C. M. Greatest common measure; 最大公約數。  
 geom. Geometry; 幾何學。  
 gm. Gramme; 克。  
 G. M. T. Greenwich Mean Time; 格林維基平均時。  
 G. P. Geometrical progression; 幾何級數; 等比級數。  
 guin. Guinea; 貨幣名(值二十一先令)。  
 H. C. F. Highest common factor; 最高公因數。  
 hf. Half; 半。  
 hr. Hour; 小時。  
 hyp. Hypothesis; 假設。  
 iden. Identical; 全等,恆等。  
 i. e. *id est*=that is, 即,即是。  
 in. Inch, inches; 英寸。  
 indef. Indefinite; 無限,不定。  
 int. Interest; 利息. Interior; 在內。  
 kilo. Kilogramme; 公斤,斤。  
 km. Kilometre; 公里,斤。
- l. Napierian logarithm; 納白爾對數。  
 lat. Latitude; 緯度。  
 lb. *libra*=pound; 磅。  
 L. C. M. Least Common multiple; 最小公倍數. Lowest common multiple; 最低公倍數。  
 lit. Liter, Litre; 公升,立升。  
 Log. Tabular logarithm; 表對數。  
 log. Common logarithm; 常用對數。  
 lon, long. Longitude; 經度。  
 M. *mille*. =A thousand; 千。  
 m. Metre; 米突. Minute; 分。  
 Math. Mathematics; 數學。  
 mo. Month; 月。  
 mos Months; 月。  
 mth. Month; 月。  
 N. North; 北. Northern; 北方的。  
 N. B. *Nota bene*=Note well or take notice; 注意。  
 N. E. North-east; 北東。  
 N. N. E. North-north-east; 北北東。  
 N. N. W. North-north-west; 北北西。  
 No. *Número*=Number; 數。  
 Nos. Numbers; 數。  
 N. W. North-west; 北西。  
 oz. Ounce; 溫司。  
 P. Page; 頁。  
 par. Parallel; 平行。  
 perp. Perpendicular; 垂直,正交。  
 p. p. Pages. 頁。  
 p. p. Proportional parts; 比例部。  
 q. e. d. *quod erat domonstrandum*=which

- was to be demonstrate; 所證明者。
- q. e. f. *quod erat faciendum* = which was to be done; 所作者。
- q. e. i. *quod erat invenien* = which was to be found out; 所求者。
- qr. Quarter; 刻, 四分之一。
- qt. Quantity; 量。Quart; 容量名。
- qts. Quarts; 容量名。
- Rad. Radical; 根的。
- rad. *ratix* = Root; 根, 底。
- s. Second; 秒。
- S. South; 南。
- S. E. South-east; 南東。
- sec. Secant; 正割。
- sh. Shilling; 先令。
- sin. Sine; 正弦。
- sol. Solution; 解法, 解答。
- sq. Square; 平方, 正方。
- S. S. E. South-south-east; 南南東。
- S. S. W. South-south-west; 南南西。
- subst. Substitute; 代入。
- suf., suff. Suffix; 添數。
- supp. Supplement; 補。
- S. W. South-west; 南西。
- T. Ton; 噸。
- tan. Tangent; 正切。
- th. theor. Theorem; 定理。
- trig. Trigonometry; 三角法。
- V. Volume; 體積。
- vg. *Verbi gratia* = For example; 例如。
- viz. *Videlicet* = Namely; 名爲。
- vers. Versed sine; 正矢。
- vol. Volume; 卷。
- W. West; 西。
- wk. Week; 一禮拜。
- W. N. W. West-north-west; 西北西。
- W. S. W. West-south-west; 西南西。
- wt. Weight. 重量。
- X. Unknown number; 未知數。
- Y., Yd. Yard; 碼。
- Y. Yr. Year; 年。
- &. et = And; 與, 及, 且。
- &c. et Cetera = And so forth; 等。

# 數 學 用 符 號

- + Plus. 加號, 加; 正號。
- Minus. 減號, 減; 負號。
- ± or ∓ Plus or minus. 加減之複符號。
- ± Plus or difference. 加差。
- × Multiplied by; times into. 乘號, 乘。
- ÷ Divided by. 除號, 除。
- = Is equal to, equals. 等號, 等於。
- ≈ Approximately equal. 接近於。
- ≠ Is not equal to. 不等於。
- > Is greater than. 大於。
- < Is less than. 小於。
- ≥ Greater or equal. 大於或等於。
- ≤ Less or equal. 小於或等於。
- ≥ Greater or less. 大於或小於。
- ⊄ Is not greater than. 不大於。
- ⊈ Is not less than. 不小於。
- ≡ Is identical. 全等, 恆等。
- ≅ Congruous. 相合。
- ≐ Denoting equivalence in area or volume in Geometry. 全等。
- ~ The difference between. 差。
- ∝ Varies as, is proportional to. 變, 與之成比例。
- : Is to; the ratio of. 比之記號。
- :: As, equals. 若, 等於。
- ∴ Hence; therefore. 所以, 故。
- ∵ Because. 因。
- ∞ Infinity; Indefinitely great. 無窮, 無窮大。
- 0 Infinitesimal; indefinitely small; zero. 無窮小, 零。
- ∠ or ∟ Angle 角. ∠Angles. 諸角。
- ⊥ or ⊞ Right angle. 直角。
- ⊥ The perpendicular; perpendicular to. 垂線, 垂直。⊥ Perpendiculars. 諸垂線。
- ∥ Parallel; is parallel to. 平行線, 平行於。∥ Parallels. 諸平行線。
- ⌒ Arc of a circle. 弧。
- ⊙ Circle. 圓。⊙ Circles. 諸圓。
- △ Triangle. 三角形。△ Triangles. 諸三角形。
- Square. 正方形。
- ▭ Rectangle. 矩形。
- ▭ Parallelogram. 平行四邊形。
- ∞ Is similar. 相似。
- ∠ Equiangular figure or Isogon 等角形。
- ⊃ Equilateral figure. 等邊形。
- √ or √ Radical. 根號, 平方根。
- ∛ Cubic root. 立方根。
- ∛ Nth root. n 乘根。
- Vinculum. 括線。
- ( ) Parenthesis; [ ] Brackets; { } Braces. 括弧。
- f, φ, ψ, F. Function or function of. 函數之符號。
- d, D, δ. Differential. 微分之符號。

- ∫ Integral, integral of. 積分之符號。
- Σ Sigma; Sum; algebraic sum. 和。
- M The modulus of logarithm. 對數率。
- π The number 3.14159265 + ... 圓周率。
- ° Degrees of arc. 度。
- ' Minutes of arc. 分。
- " Seconds of arc. 秒。

專 題

此處為專題之詞彙，內容包含多個條目，但文字模糊且呈鏡像，難以辨識具體內容。



# 附錄一 定理公式及表

## 目次

|                                  | 頁      |
|----------------------------------|--------|
| I. 定理及公式                         | 1—51   |
| 算術之諸法則                           | 1—3    |
| 代數                               | 3—17   |
| 平面幾何學定理                          | 17—26  |
| 立體幾何學定理                          | 27—29  |
| 幾何學公式                            | 30—39  |
| 三角法公式(平面部)                       | 39—44  |
| 三角法公式(球面部)                       | 45—47  |
| 三角法諸表                            | 47—51  |
| II. 數學用諸表                        | 52—122 |
| 數字讀法I                            | 52     |
| 數字讀法II                           | 52     |
| 某月與某月間之日數表                       | 53—54  |
| 時差與經差之關係                         | 54     |
| 素數表                              | 55—56  |
| 逐乘                               | 57     |
| 非素數                              | 57—58  |
| 平方, 立方, 平方根, 立方根, 平方之立方<br>根及倒數表 | 59—60  |
| 複利表                              | 61—62  |

|                                   |         |
|-----------------------------------|---------|
| 複利現價表                             | 63—64   |
| 複利年金總和表                           | 65—66   |
| 複利年金現價表                           | 67—68   |
| 複利年金分還表                           | 69—70   |
| 日利年利比較表                           | 71      |
| 直角三角形                             | 71—73   |
| 斜三角形                              | 73—74   |
| 直徑圓周及面積對照表                        | 75—76   |
| 弧之長(角之弧度)                         | 77      |
| 弓形之面積                             | 77      |
| 正多邊形                              | 78      |
| 正多面體                              | 78      |
| 圓周率之重要諸值                          | 79      |
| $\pi, e, \mu, \frac{1}{\mu}$ 之最近值 | 80      |
| 常用對數表                             | 81—103  |
| 三角函數對數表                           | 104—113 |
| 三角函數真數表                           | 114—122 |
| III. 度量衡及貨幣表                      | 123—141 |
| 本國之度量衡及貨幣表                        | 123—126 |
| 法國之度量衡及貨幣表                        | 126—130 |
| 英美之度量衡及貨幣表                        | 130—135 |
| 日本之度量衡及貨幣表                        | 135—138 |
| 俄國之度量衡及貨幣表                        | 138—141 |

# 附錄二 數學家事略

## 目次

頁

I. 外國數學家.....142—160

**A**.....142—144

|                 |            |
|-----------------|------------|
| Abel            | Al Kuhi    |
| Abul Jud        | Al Nasawi  |
| Abul Wefa       | Al Sagani  |
| Adelard         | Anaxagoras |
| Al Battani      | Apianus    |
| Alberti         | Apollonius |
| Albertus Magnus | Arbogast   |
| Al Biruni       | Archimedes |
| Alcuin          | Archytas   |
| Alhazen         | Argand     |
| Al Kalsadi      | Aristotle  |
| Al Karkhi       | Aryabhatta |
| Al Khojandi     | August     |
| Al Khowarizmi   | Autolykus  |
| Al Kindi        | Avicenna   |

**B**.....144—146

|         |        |
|---------|--------|
| Babbage | Bacon  |
| Bachet  | Balbus |

Baldi  
 Baltzer  
 Barlaam  
 Barozzi  
 Barrow  
 Beda  
 Bellavitis  
 Bernelinus  
 Bernoulli  
 Bézout  
 Bhaskara Acharya  
 Biot  
 Boëthius  
 Bolyai  
 Bolzano  
 Bombelli  
 Boncompagni

Boole  
 Booth  
 Borchardt  
 Boschi  
 Bouquet  
 Bour  
 Bradwardine  
 Brahmagupta  
 Brasseur  
 Bretschneider  
 Brianchon  
 Briggs  
 Briot  
 Brouncker  
 Brunlleschi  
 Bürgi

**C**.....146—147

Caporali  
 Cardan  
 Carnot  
 Cassini  
 Castigliano  
 Catalan  
 Cataldi

Cattaneo  
 Cauchy  
 Cavalieri  
 Cayley  
 Ceva  
 Chasles  
 Chelini

|                 |                       |
|-----------------|-----------------------|
| Chuquet         | Condorcet             |
| Clairaut        | Cotes                 |
| Clausberg       | Cramer                |
| Clebsch         | Crelle                |
|                 | <b>D</b> .....147—148 |
| D'Alembert      | Diocles               |
| De Beaune       | Diophantus            |
| De la Gournerie | Dirichlet             |
| Del Monte       | Dodson                |
| Democritus      | Donatello             |
| De Moivre       | Du Bois-Reymond       |
| De Morgan       | Duhamel               |
| Desargues       | Dupin                 |
| Descartes       | Dürer                 |
| Dinostratus     |                       |
|                 | <b>E</b> .....148—149 |
| Eisenstein      | Euclid                |
| Enneper         | Eudoxus               |
| Epaphroditus    | Euler                 |
| Eratosthenes    | Eutocius              |
|                 | <b>F</b> .....149     |
| Fagnano         | Ferro                 |
| Faulhaber       | Feuerbach             |
| Fermat          | Fibonacci             |
| Ferrari         | Fourier               |

Frénicle

Érézier

Friedlein

Frontinus

**G**.....149—150

Galois

Gauss

Geber

Gellibrand

Geminus

Gerbert

Gerhard

Germain

Girard

Göpel

Grammateus

Grassmann

Grebe

Gregory

Grunert

Gua

Gudermann

Guldin

**H**.....150—151

Hachette

Halley

Halphen

Hamilton

Hankel

Harnack

Harriot

Heron

Hesse

Hipparchus

Hippias

Hippocrates

Horner

Hrabanus Maurus

Huddle

Hunain

Huygens

Hyginus

Hypatia

Hypsicles

**I**.....151—152

Iamblichus

Ibn Albanna

Ibn Yunus

Isidorus Hispalensis

Ivory

**J**.....152

Jacobi

Johannes

Jamin

Johann von Gmünden

Joannes

**K**.....152

Kästner

Khayyam

Kepler

Köbel

**L**.....152—154

Lacroix

Leibnitz

Lagrange

Leonardo

Laguerre

L'Hospital

Lahire

Lhuilier

Laloubère

Libri

Lambert

Lie

Lame

Liouville

Landen

Lobachevsky

Laplace

Ludolph

Legendre

**M**.....154—155

Mac Cullagh

Maximus Planudes

Maclaurin

Menaechmus

Malfatti

Menelaus

Malus

Mercator

Mascheroni

Metius

Maurolico

Meusnier de la Place

Méziriac

Möbius

Mohammed

Moivre

Mollweide

Monge

Montmort

Moschopulus

Mydorge

**N**.....155

Napier

Newton

Nicole

Nicomachus

Nicomedes

Nicolaus von Cusa

**O**.....155

Odo

Oenopides

Olivier

Oresme

Oughtred

**P**.....155—156

Pacioli

Pappus

Parent

Pascal

Peirce

Pell

Perseus

Peurbach

Pfaff

Pitiscus

Plana

Planudes

Plato

Plato of Tivoli

Plücker

Poisson

Poncelet

Pothenot

Proclus

Ptolemy

Pythagoras



|                         |                |                     |
|-------------------------|----------------|---------------------|
|                         | <b>Q</b> ..... | 156                 |
| Quételet                |                |                     |
|                         | <b>R</b> ..... | 156—157             |
| Ramus                   |                | Richelot            |
| Recorde                 |                | Riemann             |
| Regiomontanus           |                | Riese               |
| Remigius                |                | Roberval            |
| Rhaeticus               |                | Rolle               |
| Riccati                 |                | Rudolff             |
|                         | <b>S</b> ..... | 157—158             |
| Sacro-Bosco             |                | Sluze               |
| Saint-Venant            |                | Smith               |
| Saint-Vincent           |                | Snell               |
| Saurin                  |                | Spottiswoode        |
| Scheeffer               |                | Staudt              |
| Schindel                |                | Steiner             |
| Schwenter               |                | Stevin              |
| Serenus                 |                | Stewart             |
| Serret                  |                | Stifel              |
| Sextus Julius Africanus |                | Sturm               |
| Simpson                 |                | Sylvester           |
|                         | <b>T</b> ..... | 158—159             |
| Tabit ibn Korra         |                | Theaetetus          |
| Tartaglia               |                | Theodorus           |
| Taylor                  |                | Theon of Alexandria |
| Thales                  |                | Theon of Smyrna     |

|                  |               |
|------------------|---------------|
| Thymaridas ..... | Tremblay      |
| Torricelli       | Tschirnhausen |
| Tortolini        |               |

**U**.....159

|        |         |
|--------|---------|
| Ubaldi | Urcinus |
| Unger  |         |

**V**.....159

|              |           |
|--------------|-----------|
| Van Ceulen   | Viete     |
| Vandermonde  | Vincent   |
| Van Eyck     | Vitruvius |
| Van Schooten | Viviani   |

**W**.....159—160

|             |         |
|-------------|---------|
| Wallace     | Witt    |
| Wallis      | Woepcke |
| Weierstrass | Wolf    |
| Werner      | Wren    |
| Widmann     |         |

II. 本國數學家.....161—167

二 畫.....161

|     |     |
|-----|-----|
| 丁 巨 | 丁取忠 |
|-----|-----|

四 畫.....161

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 王 蕃 | 王錫闡 | 毛 晉 |
| 王孝通 | 王元啟 |     |
| 王真儒 | 王裕之 |     |

|     |   |       |         |
|-----|---|-------|---------|
| 五   | 畫 | ..... | 161     |
| 石信道 |   | 任弘濟   |         |
| 六   | 畫 | ..... | 161     |
| 朱世傑 |   | 朱駿聲   | 江 永     |
| 朱載堉 |   | 朱 鴻   | 年希堯     |
| 朱元濬 |   | 江 本   |         |
| 七   | 畫 | ..... | 161—163 |
| 李遵義 |   | 李善蘭   | 何夢瑤     |
| 李淳風 |   | 阮 元   | 安心齋     |
| 李 冶 |   | 杜 忠   | 安清翹     |
| 李文一 |   | 杜 高   | 吳信民     |
| 李德載 |   | 杜知耕   | 吳 烜     |
| 李紹穀 |   | 沈 括   | 余 進     |
| 李之藻 |   | 沈欽裴   | 余 楷     |
| 李天經 |   | 汪 萊   | 邢雲路     |
| 李光地 |   | 汪曰楨   | 宋泉之     |
| 李子金 |   | 何平子   | 宋景昌     |
| 李 銳 |   | 何國宗   |         |
| 八   | 畫 | ..... | 163     |
| 周 公 |   | 明安圖   | 易之瀚     |
| 九   | 畫 | ..... | 163     |
| 信都芳 |   | 保其壽   | 馬 傑     |

## 十 畫.....163

耿壽昌  
徐岳  
徐仁美  
徐光啟

徐有壬  
祖冲之  
祖暅  
夏侯陽

夏源澤  
夏鸞翔  
秦九韶  
唐順之

## 十一 畫.....163—164

郭守敬  
陳從運  
陳尙德  
陳必智  
陳盡謨  
陳厚耀  
陳世仁  
陳謙  
陳鶴齡  
陳萬策

陳杰  
陸績  
陰景愉  
許商  
許榮  
許桂林  
梅文鼎  
梅穀成  
梁述  
莊亨陽

張蒼  
張衡  
張丘建  
張婁  
張纘  
張去斤  
張爵  
張敦仁  
張作楠

## 十二 畫.....164—165

黃宗羲  
馮桂芳  
程大位  
焦循

項名達  
華蘅芳  
華世芳  
彭絲

揭暄  
惠士奇

## 十三 畫.....165

|                          |     |     |
|--------------------------|-----|-----|
| 楊 淑                      | 楊雲翼 | 董祐誠 |
| 楊 輝                      | 楊 溥 | 鄒伯奇 |
| 楊 楷                      | 賈 亨 |     |
| <b>十四 畫</b> .....165     |     |     |
| 趙 爽                      | 僧一行 | 鄭高昇 |
| 趙 敷                      | 甄 鸞 |     |
| <b>十五 畫</b> .....165—166 |     |     |
| 劉 歆                      | 劉士隆 | 駱騰鳳 |
| 劉 徽                      | 劉 洪 | 魯 靖 |
| 劉 祐                      | 劉 衡 | 談 泰 |
| 劉汝諧                      | 劉湘燧 | 潘聖樟 |
| 劉大鑑                      | 蔣 周 |     |
| 劉 益                      | 蔣維鍾 |     |
| <b>十六 畫</b> .....166     |     |     |
| 錢 塘                      |     |     |
| <b>十七 畫</b> .....166     |     |     |
| 隸 首                      | 謝家禾 | 龍受益 |
| 謝察微                      | 龍 受 | 閻若璩 |
| <b>十八 畫</b> .....166—167 |     |     |
| 瞿曇悉達                     | 戴 震 | 戴 煦 |
| <b>十九 畫</b> .....167     |     |     |
| 羅士琳                      |     |     |

二十畫.....167

嚴 恭 |

二十一畫.....167

顧應祥 | 顧觀光 |

# 附錄一 定理公式及表

## I. 定理及公式

### 算術之諸法則

#### 命數法及記數法

- 基数。 一 二 三 四 五 六 七 八 九。
- 數字。 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0。
- 取位。  
…兆 千 百 十 億 千 百 十 萬 千 百 十。 分 釐  
億 億 萬 萬 萬  
毫 絲 忽……。
- 符號。 + - × ÷ =。
- 羅馬數字。  
I(-), V(五), X(十), L(五十), C(百),  
D(五百), M(千)。 (1) 同字幾個並寫者，則以其字值之幾倍為值。 (2) 異字並寫，左值大於右值者，則以其相和之值為值。 (3) 異字並寫，右值大於左值者，則以其相差之值為值。 (4) 數字之上引一橫線者，則以其字值之千倍為值。

#### 整數小數之四則

- 諸數相加，不論其順序如何，其和不變。
- 被減數 - 減數 = 差，故  
被減數 = 差 + 減數。 被減數 - 差 = 減數。

- 二數之積，可不拘其因數之順序。
- 某數乘諸數之和之積，等於以某數乘各數之積之和。
- 被除數與除數以同數除之或以同數乘之，其商不變。
- 除數 × 商 + 剩餘 = 被除數。
- 同種若干數之和，等於以其個數乘其平均數。
- 加減之運算之式，由左順次及右。
- 乘減之運算之式，由左順次及右。
- 加減乘除之運算相混之式，須先行乘除之運算，而後行加減之運算。

#### 整數之性質

- 約數之性質。
  - (1) 二數之公約數為其和或其差之約數。
  - (2) 某數之約數為其諸倍數之約數。
  - (3) 二數之公約數，為其一之任意若干倍與他一之任意若干倍之和或其差之約數。
- 得約數之條件。
  - (1) 凡數之末位為零，或為偶數，則其數能為 2 所整除。
  - (2) 凡數之末位為零或為 5，則其數能為 5 所整除。

(3) 凡數之末二位爲零者，其數能爲 4 與 25 所整除。又其末二位爲 4 之倍數者，其數能爲 4 所整除。其末二位爲 25 之倍數者其數能爲 25 所整除。

(4) 凡數之末三位爲零者，其數能爲 8 與 125 所整除。其末三位爲 8 之倍數者，其數能爲 8 所整除。其末三位爲 125 之倍數者，其數能爲 125 所整除。

(5) 凡數之數字之和能爲 9 或 3 所整除者，則其數能爲 9 或 3 所整除。凡偶數爲 3 之倍數者，則其數能爲 6 所整除。

(6) 凡數若各奇位數字之和，與各偶位數字之和相等，或其較爲 11 所整除者，則其數得爲 11 所整除。

- 二數之最大公約數與最小公倍數之積，等於二數之積。

## 分 數

- 以整數乘分子，等於以同數乘其分數。以整數除分子，等於以同數除其分數。
- 以整數乘分母，等於以同數除其分數。以整數除分母，等於以同數乘其分數。
- 分子與分母以同數乘之，或以同數除之，其分數之值不變。
- 同分母之二分數，其分子大者，則其分數之值大。
- 同分子之二分數，其分母小者，則其分數之值大。
- 諸分數之最大公約數，爲以諸分母之最小公倍數爲分母，諸分子之最大公約數爲分子之分數。

- 諸分數之最小公倍數，爲以諸分母之最大公約數爲分母，諸分子之最小公倍數爲分子之分數。

## 循 環 小 數

- 純循環小數化成分數，可取其循環節爲分子，依循環節數字之數列書若干個 9 爲分母。
- 雜循環小數化成分數，可自全小數減不循環數，用爲分子，依循環節數字之數列記若干 9 字，又依不循環之數字之數連附若干 0 字爲分母。

## 比

- 比之值 = 前項 ÷ 後項。  
 前項 = 後項 × 比之值。  
 後項 = 前項 ÷ 比之值。

## 比 例

- 外項之乘積 = 中項之乘積。

## 百 分 法

- 百分率 = 子數 ÷ 母數。  
 母數 = 子數 ÷ 百分率。  
 子數 = 母數 × 百分率。  
 內折 = 子數 ÷ 母數。  
 外折 = 子數 ÷ (母數 - 子數)。

## 利 息

- 單利。利息 = 本金 × 利率 × 時間。



$$\text{本利和} = \text{本金} + \text{本金} \times \text{利率} \times \text{時間}.$$

$$= \text{本金} \times (1 + \text{利率} \times \text{時間}).$$

$$\text{本金} = \text{利息} \div (\text{利率} \times \text{時間})$$

$$= \frac{\text{本利和}}{1 + \text{利率} \times \text{時間}}.$$

$$\text{利率} = \text{利息} \div (\text{本金} \times \text{時間}).$$

$$\text{時間} = \text{利息} \div (\text{本金} \times \text{利率}).$$

## ● 複利

$$\text{本利和} = \text{本金} \times (1 + \text{利率})^{\text{時間}}.$$

$$\text{利息} = \text{本金} \times (1 + \text{利率})^{\text{時間}} - \text{本金}.$$

$$= \text{本金} \times \{ (1 + \text{利率})^{\text{時間}} - 1 \}.$$

$$\text{本金} = \text{本利和} \div (1 + \text{利率})^{\text{時間}}.$$

$$= \text{利息} \div \{ (1 + \text{利率})^{\text{時間}} - 1 \}.$$

## 代 數

## 交 換 之 理

- 諸數之和可不拘其被加數之順序。

$$a + b + c = b + a + c = c + b + a = \dots.$$

- 諸數之積可不拘其因數之順序。

$$a \times b \times c = a \times c \times b = b \times c \times a = \dots.$$

## 結 合 之 理

- 求諸數之和可任意集合若干項為若干羣，而後相加。

$$a + d + c + d = a + (b + c + d)$$

$$= (a + b) + (c + d) = \dots.$$

- 求諸數之積，可任意集合若干因數為若干羣，而後相乘。

$$a \times b \times c = a \times (b \times c) = d \times (a \times c) = \dots.$$

## 配 分 之 理

- 以某數乘由若干項所成之式，可以此數乘其各項。

$$(a + b + c + d) m = am + bm + cm + dm.$$

- 反之，以某數除由若干項所成之式，可以此數除其各項。

$$(a + b + c + d) \div n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n}.$$

## 指 數 之 理

- 
- $a^m \times a^n = a^{m+n}.$

●逆之，若  $m > n$ ， $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

若  $m < n$ ， $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ 。

### 符號之定則

●加法  $+a + (+b) = +(a+b)$ 。

$-a + (+b) = -(a-b) [a > b]$ 。

$= +(b-a) [a < b]$ 。

$+a + (-b) = +(a-b) [a > b]$ 。

$= -(b-a) [a < b]$ 。

$-a + (-b) = -(a+b)$ 。

●減法  $+a - (+b) = +(a-b) [a > b]$ 。

$= -(b-a) [a < b]$ 。

$+a - (-b) = +(a+b)$ 。

$-a - (+b) = -(a+b)$ 。

$-a - (-b) = -(a-b) [a > b]$ 。

$= +(b-a) [a < b]$ 。

●乘法  $(+a) \times (+b) = +ab$ 。

$(-a) \times (+b) = -ab$ 。

$(+a) \times (-b) = -ab$ 。

$(-a) \times (-b) = +ab$ 。

●除法  $(+ab) \div (+a) = +b$ 。

$(-ab) \div (+a) = -b$ 。

$(-ab) \div (-a) = +b$ 。

$(+ab) \div (-a) = -b$ 。

### 公式及因數

●  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

●  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

●  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。

●  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 。

●  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。

●  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。

●  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。

●  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

●  $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$   
 $= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。

●  $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$

$(-a+b+c) = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 +$

$2c^2a^2 + 2a^2b^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$

$[s = \frac{1}{2}(a+b+c)]$ 。

●  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca$   
 $+ 2ab$ 。

●  $(a+b+c)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2b + 6abc$ 。

●  $(\sum a)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$ 。即  $a+b+c+\dots$   
式之平方，為各項之平方，與於諸文字中  
每取二文字之組合之積之 2 倍之和。

● 二同次式之積或商為一同次式。數同次  
式之積亦然。

● 含  $x$  之任意有理整式，將  $x$  以  $a$  代入  
之，若其式為零，則其式得為  $x-a$  所整  
除。

● 剩餘定理。以  $x-a$  除  $x$  之有理整式之  
剩餘，為將其式中之  $x$  以  $a$  代入後之值。

●  $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b +$   
 $a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})$ 。

●  $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b$   
 $+ a^{2m-2}b^2 - \dots - ab^{2m-1} + b^{2m})$ 。

●  $a^{2m} - b^{2m} = (a+b)(a^{2m-1} - a^{2m-2}b$   
 $+ a^{2m-3}b^2 - \dots + ab^{2m-2} - b^{2m-1})$ 。

●  $a^{2m} + b^{2m} = (a+b)(a^{2m-1} - a^{2m-2}b$   
 $+ a^{2m-3}b^2 - \dots - b^{2m-1}) + 2b^{2m}$ 。

●  $a^{2m+1} - b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b$

$$b+a^{2m-2}b^2+\dots+b^{2m})-2b^{2m+1}$$

$$\bullet \sum(b-c)=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$$

$$\bullet \sum a(b-c)=a(b-a)+b(c-a)+c(a-b)=0.$$

$$\bullet \sum(b^2-c^2)=\sum(b+c)(b-c)=0.$$

$$\bullet (b-c)(c-a)(a-b) \\ =a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+a(a^2-b^2) \\ =-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b) \\ =-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b).$$

$$\bullet (b+c)(c+a)(a+b)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \\ =bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc \\ =\sum a^2b+2abc.$$

$$\bullet (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=bc(c+b)+ca(c+a)+ab(a+b)+a^3+b^3+c^3.$$

$$\bullet (a+b+c)(bc+ca+ab)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$$

$$\bullet (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \\ =a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \\ -a^3-b^3-c^3-2abc.$$

$$\bullet (a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$$

$$\bullet (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \\ =(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$$

$$\bullet (a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \\ =(ax+by+cz+dw)^2 \\ +(ay-bx+cw-dz)^2 \\ +(az-bw-cx+dy)^2 \\ +(aw+bz-cy-dx)^2$$

此結果少加注意，甚易記憶，即由左之上端至右之下端之對角線，爲  $x$  與  $a, b, c, d$

之乘積，其符號爲  $+- -$ 。其餘由交叉之理考之，可得同樣之符號及文字之乘積，而發見一定之規律。

●對稱式〔互換的〕。一式其中之二文字互換而其值不變時，此式稱爲該二文字之互換的對稱式。例如  $bc+ca-mabc$  爲  $a, b$  之互換的對稱式。

●對稱式〔輪換的〕。一式其中之第一文字換爲第二文字，第二文字換爲第三文字，第三文字換爲第一文字，而其式之值不變時，則此式稱爲該三文字之輪換的對稱式。例如  $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$  爲  $a, b, c$  之輪換的對稱式。

●二式爲同文字之對稱式時，其和差積商亦均爲對稱式。

●互換的同次對稱式，舉二三例如次。

一次  $A(x+y).$

二次  $A(x^2+y^2)+Bxy.$

三次  $A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2).$

四次  $A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+Cx^2y^2.$

一次  $A(x+y+z).$

二次  $A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy).$

三次  $A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz.$

●輪換的同次對稱式，舉二三例如次。

就二文字  $x, y$  之式，換的同。

又就三文字  $x, y, z$  之式，其二次與互換的對稱式同。

三次  $A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2z+z^2x)+C(xy^2+yz^2+zx^2)+Dxyz.$

●  $x, y, z$  之互換或輪換的二次不同次對稱式爲

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy) \\ +C(x+y+z)+D.$$

● 若干文字之交代式，令是等文字中之任意二文字相等，則其式爲零。

● 交代式與交代式之積或商爲對稱式。

● 對稱式與交代式之積或商爲交代式。

● 最簡交代式。  $a, b, c$  之最簡交代式爲  $\Pi(b-c)=(b-c)(c-a)(a-b)$ 。

● 若干文字之交代式能爲其最簡交代式所整除。

## 公約數及公倍數

● 命  $H$  爲二代數式  $A$  及  $B$  之最高公因數， $L$  爲其最低公倍數，而  $A=aH, B=bH$ 。

$$\text{則 } L=abH=A \times \frac{B}{H} = B \times \frac{A}{H}$$

$$= \frac{A \times B}{H}; L \times H = A \times B.$$

## 分 數

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_1+a_2+a_3+\dots}{b_1+b_2+b_3+\dots}$$

$$= \left( \frac{pa_1^n + qa_2^n + \dots}{pb_1^n + qb_2^n + \dots} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

## 方 程 式

● 一元一次方程式  $ax+b=0$  之根爲

$$x = -\frac{b}{a}.$$

● 二元一次方程式  $ax+by+c=0$  與  $a'x+b'y+c'=0$  之根爲

$$x = \frac{bc'-b'e}{ab'-a'b}; \quad y = \frac{ca'-c'a}{ab'-a'd}.$$

● 三元一次方程式  $ax+by+cz=d$ ,

$$a'x+b'y+c'z=d', \quad a''x+b''y+c''z=d'' \text{ 之根,}$$

$$x = \{ d(b'e''-b''e') + d'(b''e-b'e'') \\ + d''(b'e'-b'e'') \} \div \{ a(b'e''-b''e') \\ + a'(b''e-b'e'') + a''(b'e'-b'e'') \}.$$

$y$  之值可由  $x$  之值將  $a, b, c$  變爲  $b, c, a$  而得之。  $z$  之值可由  $y$  之值施以同樣之變化而得之。但  $x, y, z$  之值之分母均相等。

● 二次方程式  $ax^2-bx+c=0$  之根爲  $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 。  
 $ab>0$  爲實根，  $ab<0$  爲虛根。

● 二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  之根爲

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$b^2-4ac>0$  爲相異之實根。

$b^2-4ac=0$  爲相等之實根。

$b^2-4ac<0$  爲相異之虛根。

● 根與係數之關係。命  $\alpha, \beta$  爲方程式  $ax^2+bx+c=0$  之二根，則

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

## 乘 冪 及 根

●  $a^m \times a^n \times a^p \times \dots = a^{m+n+p+\dots}$

●  $(a^m)^n = a^{mn}$ .

●  $(ax^m b^y c^z \dots)^m = a^m x^{m^2} b^{my} c^{mz} \dots$

●  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

●  $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$

●  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

●  $a^0 = 1, a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

●  $\sqrt{(a \pm \sqrt{a^2 - b})} \pm \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}\right)}$

### 不 等 式

● 若  $a > b$ , 則

$a + x > b + x, -a < -b.$

$ma > mb [m > 0], ma < mb [m < 0].$

●  $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots, a_n > b_n,$

若諸文字皆為正數, 則

$a_1 a_2 a_3 \dots a_n > b_1 b_2 b_3 \dots b_n.$

●  $a > b, c > d$ , 若諸文字皆為負數,

則  $ac < bd.$

●  $a > b$ , 若  $a, b$  皆為正數, 則

$a^m > b^m [m > 0], a^m < b^m [m < 0].$

● 由  $ax + b > 0$ , 得

$x > -\frac{b}{a} [a > 0], x < -\frac{b}{a} [a < 0].$

● 於不等式  $ax^2 + bx + c > 0$ ,

命方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  之根為

$\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ , 若  $\alpha, \beta$  為實數, 則當

$a > 0$  時,  $x > \alpha$ , 或  $x < \beta.$

$a < 0$  時,  $\alpha > x > \beta.$

若  $ax^2 + bx + c = 0$  之根為虛數, 則當

$a > 0$  時,  $x$  之諸值均能適合,

$a < 0$  時, 此不等式為不可能。

●  $ax^2 + bx + c < 0$ , 則得與上相反對之結果。

●  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) > 0,$

適合此不等式為

$x > \alpha_1$  或  $\alpha_2 > x > \alpha_3, \dots, \dots,$

$\alpha_2 > x > \alpha_{2r+1}, \dots, \dots [但 \alpha_r > \alpha_{r+1}].$

●  $ax + by + c = 0 \dots (1), a'x + b'y + c' \geq 0$

$\dots (2)$  之解答為  $x = -\frac{c + by}{a}, y \geq \alpha.$

即由(1)未知數之一例如  $x$ , 以他未知數  $y$  表之, 代入(2)以解不等式, 則得  $y \geq \alpha.$

●  $(x^2 + y^2 + z^2 + \dots)(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)$

$< (ax + by + cz + \dots)^2.$

● 若  $a, b$  為正數, 則  $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}.$

● 若干正數之相加平均數大於相乘平均數, 即

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$

●  $n$  正數之  $m$  乘冪之相加平均, 大於其相加平均之  $m$  乘冪, 即

$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{n}$

$> \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^m$

若  $m$  為正真分數則反是。

●  $m$  及  $r$  皆為正數, 若  $m > r$ , 則

$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n}$

$< \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \times$

$\frac{a_1^{m-r} + a_2^{m-r} + \dots + a_n^{m-r}}{n}.$

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  皆為正數，若  $\alpha + \beta + \gamma + \dots = m$ ，則

$$\frac{\sum a_1^m}{n} \leq \frac{\sum a_1^\alpha}{n} \cdot \frac{\sum a_2^\beta}{n} \cdot \frac{\sum a_3^\gamma}{n} \dots$$

- $a, b, c, \dots$  為正整數，若  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  為正數，則

$$\left( \frac{a^\alpha + b^\beta + c^\gamma + \dots}{a + b + c} \right)^{a+b+c} \geq a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$$

### 極大極小

- 若干正數之積為一定數，則各數相等時，其和為極小。
- 若干正數之和為一定數，則各數相等時，其積為極大。
- 若文字皆表正數， $x^m y^n z^p \dots$  為一定值，則  $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots$  時，其和  $x + y + z + \dots$  為極小。
- 若文字皆表正數， $x + y + z + \dots$  為一定值，則  $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots$  時，其積  $x^m y^n z^p \dots$  為極大。

- 於代數式  $ax^2 + bx + c$ ，當  $a > 0$  時之極小值及  $a < 0$  時之極大值，均為

$$\frac{4ac - b^2}{4a}$$

而與之對應  $x$  之值為  $-\frac{b}{2a}$ 。

- 求  $\frac{ax^2 + bx + c}{a^2 x^2 + b^2 x + c^2}$  之極大或極小值，可由此分數為等於  $y$  之方程式，而由此方程式書出  $x$  之值為實數之條件  $(b^2 - b^2 y)^2 - 4(a - a^2 y)(c - c^2 y) > 0$ ，由

此二次不等式解得  $y$  之值即可。

### 比例

- 若  $ad = bc$ ，則  $a:b = c:d$ 。
- 反之，若  $a:b = c:d$ ，則  $ad = bc$ 。
- 又  $a:b = c:d$ ，則  $b:a = d:c$  [反轉之理]。  
 $a+b:b = c+d:d$  [合比之理]。  
 $a \sim b:b = c \sim d:d$  [分比之理]。  
 $a+b:c \sim b = c+d:d \sim d$  [分合比之理]。  
 $a:c = b:d$  [更迭之理]。  
 $a^n:b^n = c^n:d^n$ 。  
 $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$ 。
- 若  $a:a' = b:b' = c:c' = \dots$ ，則  $a:a' = b:b' = c:c' = \dots$   
 $= a + b + c + \dots : a' + b' + c' + \dots$ 。
- 若  $a:b = b:c = c:d$ ，則  $a:c = a^2:b^2$ ，  
 $a:d = a^3:b^3$ ，  
 $b^2 = ac$ 。

### 變數法

- 若  $A \subset B$  及  $B \subset C$ ，則  $A \subset C$ 。
- 若  $A \subset B$  及  $C \subset D$ ，則  $A \subset B \subset D$ 。
- 若  $A \subset B$ ，則  $A^n \subset B^n$ 。
- 若  $C$  為一定數時  $A \subset B$ ，又  $B$  為一定數時  $A \subset C$ ，則當  $B, C$  俱變時， $A \subset B \subset C$ 。

### 級數

●命等差級數之首項爲  $a$ ，末項爲  $l$ ，公差爲  $d$ ，項數爲  $n$ ，其和爲  $s$ ，則

| 已知    | 公 式                                                          |
|-------|--------------------------------------------------------------|
| $adn$ | $l = a + (n-1)d.$                                            |
| $ads$ | $l = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2]}.$ |
| $ans$ | $l = \frac{2s}{n} - a.$                                      |
| $dns$ | $l = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}.$                        |
| $adn$ | $s = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d].$                             |
| $adl$ | $s = \frac{l+a}{2} + \frac{l^2-a^2}{2d}.$                    |
| $anl$ | $s = (1+a)\frac{n}{2}.$                                      |
| $dnl$ | $s = \frac{1}{2}n[2l - (n-1)d].$                             |
| $dnl$ | $a = l - (n-1)d.$                                            |
| $dns$ | $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}.$                        |
| $dls$ | $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(1 + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds]}.$  |
| $nls$ | $a = \frac{2s}{n} - l.$                                      |
| $anl$ | $d = \frac{l-a}{n-1}.$                                       |
| $ans$ | $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}.$                                |
| $als$ | $d = \frac{l^2-a^2}{2s-l-a}.$                                |
| $nls$ | $d = \frac{2(nl-s)}{n(n-1)}.$                                |
| $adl$ | $n = \frac{l-a}{d} + 1.$                                     |
| $ads$ | $n = \frac{d-2a \pm \sqrt{[(2a-d)^2 + 8ds]}}{2d}.$           |
| $als$ | $n = \frac{2s}{l+a}.$                                        |
| $dls$ | $n = \frac{2l+d \pm \sqrt{[(2l+d)^2 - 8ds]}}{2d}.$           |

●命等比級數之首項爲  $a$ ，末項  $l$ ，公比爲  $r$ ，項數爲  $n$ ，其和爲  $s$ ，則

| 已知    | 公 式                                                                  |
|-------|----------------------------------------------------------------------|
| $arn$ | $l = ar^{n-1}.$                                                      |
| $ars$ | $l = \frac{a+(r-1)s}{r}.$                                            |
| $ans$ | $l(s-1)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0.$                                   |
| $rns$ | $l = \frac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}.$                                   |
| $arn$ | $s = \frac{a(r^n-1)}{r-1}.$                                          |
| $arl$ | $s = \frac{rl-a}{r-1}.$                                              |
| $anl$ | $s = \frac{\sqrt[n]{ln} - \sqrt[n]{an}}{\sqrt[n]{1} - \sqrt[n]{a}}.$ |
| $rnl$ | $s = \frac{lr^n-1}{r^n-r^{n-1}}.$                                    |
| $rnl$ | $a = \frac{l}{r^{n-1}}.$                                             |
| $rns$ | $a = \frac{(r-1)s}{r^n-1}.$                                          |
| $rls$ | $a = rl - (r-1)s.$                                                   |
| $nls$ | $a(s-a)^{n-1} - l(s-1)^{n-1} = 0.$                                   |
| $anl$ | $r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}.$                                       |
| $ans$ | $r^n \frac{s}{a} - r + \frac{s-a}{a} = 0.$                           |
| $als$ | $r = \frac{s-a}{s-l}.$                                               |
| $nls$ | $r^n \frac{s}{s-1} - r^{n-1} + \frac{1}{s-1} = 0.$                   |
| $arl$ | $n = \frac{\log l - \log a}{\log r} + 1.$                            |
| $ars$ | $n = \frac{\log[a+(r-1)s] - \log a}{\log r}.$                        |
| $als$ | $n = \frac{\log l - \log a}{\log(s-a) - \log(s-l)} + 1.$             |
| $rls$ | $n = \frac{\log l - \log[lr - (r-1)s]}{\log r} + 1.$                 |

- 於等比級數，若  $-1 < r < 1$ ，則當  $n \rightarrow \infty$ ，

$$S = \frac{a}{1-r}$$

- 若  $a, b, c$  成等差級數，則

$$a - b : b - c = a : a$$

- 若  $a, b, c$  成等比級數，則

$$a - b : b - c = a^2 : b$$

- 若  $a, b, c$  成調和級數，則

$$a - b : b - c = a : c$$

- 命二數  $a, b$  之等差，等比，調和中項爲

$$A, G, H, \text{ 則 } A = \frac{1}{2}(a+b),$$

$$G = \pm \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}, \quad G^2 = A \cdot H.$$

## 記數法

- 以  $r$  爲底所記之數，若其數字之和得以  $r-1$  或其因數整除，則其全數亦得以  $r-1$  或其因數整除之。

- 以  $r$  爲底所記之數，若其奇位數字之和與偶位數字之和之差，得以  $r+1$  整除，則其全數亦可以  $r+1$  整除之。

## 排列，組合。

- $n$  個相異之物，同時悉取時，其排列之數爲  $nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 。

- $n$  個相異之物，每次取  $r$  個時，其排列之數爲

$$nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

- $n$  個物之輪換排列之數爲  $(n-1)!$ 。

- $n$  個物中有  $D$  個， $q$  個， $r$  個相同之物，則每次悉取時，其排列之數爲

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

- $n$  個相異之物，每次悉取，其重複排列之數爲  $n^n$ 。

- $n$  個相異之物，每次取  $r$  個，其重複排列之數爲  $n^r$ 。

- 由  $n$  個相異之物中取  $r$  個，其組合之

$$\text{數爲 } nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- $nC_r = nC_{n-r}$ 。  $nC_r + nC_{r-1} = n+1C_r$ 。

- $nC_r$  之最大值。  $n$  爲偶數，則  $r = \frac{n}{2}$

時， $nC_r$  之值爲最大。  $n$  爲奇數，則

$$r = \frac{n-1}{2} \text{ 及 } r = \frac{n+1}{2} \text{ 時， } nC_r \text{ 之值爲}$$

最大。

- $x+y+z$  個相異之物，各分爲含  $x, y, z$  個物之三組，其組合之數爲

$$\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}$$

- 文覃蒙之定理 Vandermonde's theorem. 若  $n$  爲任意之正整數， $x$  與  $y$  爲任意之值，則

$$(x+y)_n = x_n + n x_{n-1} y_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$x_{n-2} y_2 + \cdots + \frac{n!}{r!(n-r)!} x_{n-r} y_r + \cdots + y_n.$$

- 由  $n$  個文字所能作之  $r$  次同次積之數

$$\text{爲 } nH_r = \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdots r}$$

$$= n+r-1C_r.$$

- 由  $n$  個物中取  $r$  個之重複組合之數與上式同，即  $nH_r = n+r-1C_r$ 。



### 二項式定理

●  $(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \dots + d^n$ .

● 二項式定理之公項為  ${}_nC_r a^{n-r}b^r$ .

● 二項式  $(a+b)^n$  之展開式，其與初末兩項等距離之項之係數相等。

●  $(1+x)^n$  之展開式之最大項為適合

$$\frac{(n+1)x}{x+1} < r < \frac{(n+1)x}{x+1} + 1 \text{ 之整數 } r$$

所取之第  $r$  項。若  $r = \frac{(n+1)x}{x+1}$ ，則第  $r$  項與第  $r+1$  項同為最大項。

●  $(1 \pm x)^n$  之展開式，其絕對值最大係數之項為適合

$$\frac{n+1}{2} < r < \frac{n+1}{2} + 1 \text{ 之整數 } r \text{ 所取之}$$

第  $r$  項。故若  $n$  為偶數，則

$$r = \frac{n}{2} + 1, \text{ 此第 } r \text{ 項之係數為最大。}$$

若  $n$  為奇數，則第  $\frac{n+1}{2}$  項及第  $\frac{n+3}{2}$  項之係數互相等，而大於其餘任何項之係數。

●  $(1+x)^n$  之展開式，其各項係數之和為  $2^n$ 。

●  $(1+x)^n$  之展開式，其奇位數各項之係數之和與偶位數各項之係數之和為互相等。

### 多項式定理

●  $(a+b+c+\dots)^n$  之展開式之公項為

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots, \text{ 但 } \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

$= n$ 。

●  $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^n$  之展開式之公項為

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta! \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\dots}$$

但  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = n$ 。

●  $(1+x+x^2+\dots+x^r)^n$  之展開式，其與兩端等距離之項之係數相等。

### 對數

●  $\log_a a = 1, \log_a a^m = m, \log_a 1 = 0$ 。

●  $\log(ab) = \log a + \log b$ 。

●  $\log(a \div b) = \log a - \log b$ 。

●  $\log a^m = m \log a, \log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$ 。

●  $\log_a b \times \log_b c = 1$ 。

●  $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$   
 $= 2.7182818284\dots$

●  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

●  $a^x = 1 + x \log_e a + \frac{x^2 (\log_e a)^2}{2!}$

$$+ \frac{x^3 (\log_e a)^3}{3!} + \dots$$

●  $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots$

$$= \frac{1}{2}(e + e^{-1})$$

●  $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

●  $\log_e(n+1) - \log_e n = 2 \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\}$ 。

## 利息, 年金.

命本金 =  $P$ , 本利和 =  $\Delta$ , 利率 =  $r$ ,  
 $1+r=R$ , 時間之數 =  $n$ .

● 單利. 利息 =  $Pnr$ .

本利和 =  $P(1+nr)$ .

● 複利. 利息 =  $P\{(1+r)^n - 1\}$ .

本利和 =  $P(1+r)^n$ .

●  $r = \sqrt[n]{\frac{\Delta}{P}} - 1$ .  $n = \frac{\log \Delta - \log P}{\log(1+r)}$ .

●  $n$  年後金額  $P$  之現價  $V = \frac{P}{1+nr}$   
 [單利]

折扣  $D = \frac{Pnr}{1+nr}$ .

●  $n$  年後金額  $P$  之現價  $V = P \cdot R^{-n}$  [複利]

折扣  $D = P(1 - R^{-n})$ .

● 永久年金  $a$  之現價 =  $\frac{a}{r}$ .

● 自  $p$  年後為始  $n$  年間年金  $a$  之現價為

$$\frac{a}{R^{p+n}} \times \frac{R^n - 1}{r}$$

● 自  $P$  年後為始, 永久年金  $a$  之現價為

$$\frac{a}{R^p r}$$

## 級數之收斂發散

● 收斂級數.

I. 諸項悉較某收斂級數之對應諸項為小者.

II. 二級數其對應諸項之比常為有限, 而其一為收斂級數者.

III. 諸項皆為正數, 於若干定項之後, 其各後項與其前項之比, 恒小於

某定量, 而某定量為小於 1 者.

IV. 相隣二項符號相反, 而其絕對值為  $u_n > u_{n+1}$ , 若  $n$  無限增大時,  $u_n$  無限減小者.

V.  $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  之極限大於 1 者.

● 發散級數

I. 級數之各項皆為有限值, 且諸項為同符號者.

II. 二級數其對應諸項之比常為有限, 而其一為發散級數者.

III. 諸項皆為正數, 於若干定項之後, 其各後項與前項之比為等於 1 或大於 1 者.

IV.  $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  之極限為小於 1 者.

●  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  為發散級數.

● 二項級數  $1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$ ,

若  $n$  為非正整數而  $|x| < 1$  者, 為收斂級數.

● 指數級數  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$  為收斂級數.

● 對數級數  $x - \frac{x^2}{2} \div \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ , 當  $1 \geq x > -1$  時為收斂級數,  $x = -1$  為發散級數.

### 級數之總和法

命第  $n$  項 =  $u_n$ ,  $n$  項之利 =  $S_n$ .

無窮級數之總和 =  $S_\infty$ .

●  $u_n = n$ , 則  $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ .

●  $u_n = n^2$ , 則  $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ .

●  $u_n = n^3$ , 則  $S_n = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$ .

●  $u_n = n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)$ , 則

$$S_n = \frac{1}{r+1}n(n+1)\dots(n+r).$$

●  $u_n = n + \frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$  [ $r$  次多角數之第  $n$  項], 則

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(r-2).$$

●  $u_n = (a+nb)(a+n+1b)(a+n+2b)\dots \times (a+n+r-1b)$ , 則

$$S_n = \frac{(a+n+rb)u_n - au_1}{(r+1)b}.$$

●  $u_n = \frac{1}{(a+nb)(a+n+1b)\dots(a+n+r-1b)}$ ,

則  $S_n = \frac{(a+rb)u_1 - (a+nb)u_n}{(r-1)b}$ .

●  $u_n = \frac{a(a+x)(a+2x)\dots(a+n-1x)}{b(b+x)(b+2x)\dots(b+n-1x)}$ ,

則  $S_n = \frac{a}{a+x-b}$

$$\left\{ \frac{a(a+x)\dots(a+nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} - 1 \right\}.$$

●  $u_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$

[二項級數], 則  $S_\infty = (1+x)^m$  [但  $1 > x > -1$ ].

●  $u_{n+1} = \frac{1}{n!}$ , 則  $S_\infty = 2.7182818\dots$ .

[納白爾對數之底, 通例命為  $e$ ].

●  $u_{n+1} = \frac{x^n}{n!}$  [指數級數], 則  $S_\infty = e^x$ .

●  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n!}$  [對數級數], 則

$$S_\infty = \log_e(1+y).$$

### 數論

●  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ , 則其約數為  $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots$ , 但  $a, b, c, \dots$  為相異之素數.

●  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ , 則其約數之總和為  $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \dots$ .

●  $p$  為素數, 而  $N$  對於  $p$  為素數, 則  $N^{p-1}-1$  為  $p$  之倍數 (勿爾馬定理).

●  $[n]$  內所含素數  $a$  之最高乘幂之次數為

$$I\left(\frac{n}{a}\right) + I\left(\frac{n}{a^2}\right) + I\left(\frac{n}{a^3}\right) + \dots,$$

但  $I\left(\frac{n}{a^r}\right)$  為表  $\frac{n}{a^r}$  內所含之最大整數.

●  $r$  個相連續之整數之積可以  $r!$  整除之.

● 若  $a$  對於  $b$  為素數, 則  $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$  各以  $b$  除之, 其餘數皆互相異.

●  $\phi(abcd) = \phi(a) \cdot \phi(b) \cdot \phi(c) \dots$ , 但  $a, b, c, d, \dots$  互為素數.

● 若  $N = a^p$  ( $a$  為素數), 則  $\phi(N) = a^p$

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

- 若  $N = a^p b^q c^r \dots$ ，而  $a, b, c, \dots$

爲相異之素數，則  $\phi(N) = N \left(1 - \frac{1}{a}\right)$

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots$$

- 若  $p$  爲素數，則  $1 + \frac{1}{p-1}$  爲  $p$  之倍數 (威爾孫定理)。

### 連 分 數

- 於連分數  $a + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$ ，

命第  $n$  近數爲  $\frac{p_n}{q_n}$ ，則

$$p_n = b_{n-1} p_{n-1} + a_{n-1} p_{n-2},$$

$$q_n = b_{n-1} q_{n-1} + a_{n-1} q_{n-2},$$

- 於連分數  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$ ，

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

- 於  $\frac{a_1}{b_1 - \frac{a_2}{b_2 - \frac{a_3}{b_3 - \dots}}}$

$$p_n = b_n p_{n-1} - a_n p_{n-2},$$

$$q_n = b_n q_{n-1} - a_n q_{n-2}.$$

- 於  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ ，

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

- 於  $\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ ，

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

- 必成功即確實出來之事之適遇爲 1，

- 命事  $A, B$  成功之適遇各爲  $a, b$ ，且設

$A$  及  $B$  無相互之關係，則

I.  $A, B$  同時成功之適遇爲  $ab$ 。

II.  $A, B$  之任一成功之適遇爲  $a+b$ 。

III.  $A$  成功  $B$  失敗之適遇爲  $a(1-b)$ 。

IV.  $A, B$  俱失敗之適遇爲  $(1-a)(1-b)$ 。

- 無相互關係之若干事各自成功之適遇各爲  $p_1, p_2, p_3, \dots$ ，則此等事俱成功之適遇爲  $p_1 p_2 p_3 \dots$ ，而俱失敗之適遇爲  $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \dots$ 。

- 命事  $A$  成功之適遇爲  $p$ ， $A$  成功時，第二事  $B$  隨之而成功之適遇爲  $q$ ，則此二事同時成功之適遇爲  $pq$ 。

- 設已知某事於一次之試驗，其適遇爲  $p$ ，則其於  $n$  次試驗內成功  $n$  次  $n-1$  次， $n-2$  次，等等之適遇爲  $(p+q)^n$  之二項展開式之諸項，但  $q=1-p$ 。

- 於前條次之試驗，成功及失敗之適遇爲於  $(p+q)^n$  之展開式內之最大項。

- 於前條  $n$  次試驗內最少成功  $r$  次之適遇爲  $p^n + n C_1 p^{n-1} q + n C_2 p^{n-2} q^2 + \dots + n C_{n-r} p^r q^{n-r}$ 。

- 若  $p$  爲一人得金之適遇，而金額爲  $M$ ，則其人之希望爲  $pM$ 。

### 行 列 式

- 改行列式之行爲列，而列爲行，其行列式之值不變。

- 行列式之任意相鄰二行(或列)互換時，行列式惟變其符號。

- 若行列式之二行(或二列)相等，則其值

### 適 遇 法

爲零。

- 若行列式之任意一行(或一列)之諸原素以同一數乘之,則行列式爲其乘數倍。

$$\begin{aligned} \bullet \Delta &= a_1 \Delta_{a_1} - a_2 \Delta_{a_2} + a_3 \Delta_{a_3} - \dots \\ &= -b_1 \Delta_{b_1} + b_2 \Delta_{b_2} - b_3 \Delta_{b_3} + \dots \\ &= -a_1 \Delta_{a_1} - b_1 \Delta_{b_1} + c_1 \Delta_{c_1} - \dots \end{aligned}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1 & b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + b_3 \gamma_1 & c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + c_3 \gamma_1 \\ a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2 & b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + b_3 \gamma_2 & c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 + c_3 \gamma_2 \\ a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3 & b_1 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + b_3 \gamma_3 & c_1 \alpha_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3 \end{vmatrix}$$

- $a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \dots + k_1 x_n = \alpha_1$ ;
- $a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \dots + k_2 x_n = \alpha_2$ ;
- .....
- $a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + \dots + k_n x_n = \alpha_n$

之解答如次

$$x_1 = \frac{[\alpha_1 b_2 c_3 \dots k_n]}{[a_1 b_2 c_3 \dots k_n]}, \dots$$

而一般  $x_r = \frac{[a_1 b_2 \dots \alpha_r \dots k_n]}{[a_1 b_2 c_3 \dots k_n]}$  .

- 形如  $a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + k_1 x_n = \alpha_1$  之  $n+1$  個方程式爲聯立之條件爲

$$[a_1 b_2 c_3 \dots k_n \alpha_{n+1}] = 0.$$

- 形如  $a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + k_1 x_n = 0$  之  $n$  個方程式,無  $x_1 = x_2 = \dots = 0$ , 欲適合於他值,  $[a_1 b_2 c_3 \dots k_n] = 0$ .

- 薛爾維斯脫消去法。由  $ax^3 + bx^2 + cx + \alpha = 0$ ,  $px^2 + qx + r = 0$  消去  $x$ , 則

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

### 方程式論

- 有理整方程式,至少有一根(基本定理)。

- $n$  次之方程式祇有  $n$  根。

- 根與係數之關係。命由方程式

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

之  $n$  根之中取  $r$  個諸數之積之和爲  $s_r$ ,

則  $s_1 = -p_1$ ,  $s_2 = p_2$ ,  $s_3 = -p_3$ , .....

$s_n = (-1)^n p_n$ .

- 於方程式

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0,$$

I. 改變根之符號之方程式爲

$$p_0 y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n = 0.$$

II. 以  $c$  乘諸根之方程式爲

$$p_0 y^n + p_1 c y^{n-1} + p_2 c^2 y^{n-2} + \dots + p_n c^n = 0.$$

III. 由根減去  $c$  之方程式爲

$$f(x+c) = 0.$$

IV. 以根之倒數爲根之方程式爲

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + p_{n-2} x^{n-2} + \dots + p_0 = 0.$$

● 某方程式爲倒數方程式之條件爲由兩端同次第之項之係數相等(第一類), 惟符號相異(第二類)者。

● 倒數方程式之重要性質。

I. 屬於第一類而爲奇數次者, 有等於  $-1$  之根。

II. 屬於第二類而爲奇數次者, 有等於  $+1$  之一根。

III. 屬於第二類而爲偶數次者, 有  $\pm 1$  二根。

IV. 由以上三條, 由  $f(x)$  除去對應於各根之因數時, 任意倒數方程式可化爲第一類而爲偶數次之方程式; 而此種方程式可視爲倒數方程式之標準形。

● 第一類偶數次之倒數方程式可減半其次數。

● 方程式之根爲有理數, 而其中有二次不盡根之根或複虛根存在時, 則必以共軛組而存在。

●  $n$  次方程式之係數皆爲整數, 且  $n$  次之

係數爲 1 者, 不能有分數之根。

● 若  $f(x)$  爲  $x$  之任意有理整函數, 而  $f'(x)$  爲其第一誘導函數, 則

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a_1} + \frac{f(x)}{x-a_2} + \frac{f(x)}{x-a_3} + \dots,$$

但  $a_1, a_2, a_3, \dots$  爲  $f(x) = 0$  之實根或虛根。

●  $f(x) = 0$  中所含等根爲求  $f(x)$  與  $f'(x)$  之最大公約數  $\phi(x)$ , 使之等於 0 而求之, 但  $\phi(x) = 0$  之根含  $m$  個  $a$ ,  $n$  個  $b, \dots$  時, 則  $f(x) = 0$  之根含  $m+1$  個  $a$ ,  $n+1$  個  $b, \dots$ 。

●  $f(\alpha)$  及  $f(\beta)$  有反對之符號時, 則方程式  $f(x) = 0$  至少有一根在  $\alpha$  與  $\beta$  之間。

● 奇數次之方程式至少有一實根。

● 偶數次之方程式之第一項之係數爲 1, 而末項爲負時, 則其方程式至少有二實根, 其符號爲反對。

●  $(x-a)(x-b)(x-c) - f^2(x-a) - g^2(x-b) - h^2(x-c) - 2fgh = 0$  之根皆爲實數。

● 若  $f(\alpha)$  及  $f(\beta)$  爲異號時, 則  $f(x) = 0$  有奇數個之根在  $\alpha$  與  $\beta$  之間, 又  $f(\alpha)$  及  $f(\beta)$  爲同號時,  $f(x) = 0$  有偶數個根在  $\alpha$  與  $\beta$  之間, 或無一根在  $\alpha$  與  $\beta$  之間。

●  $f(x) = 0$  至少有一實根在  $f(x) = 0$  之鄰接二實根之間(羅兒定理)。

● 於  $f(x) = 0$ , 正實根之數, 不能超過  $f(x)$  內諸項之係數之符號之變化之數; 又負實根之數, 不能超過  $f(-x)$  內諸項係數之符號變化之數(狄卡德符號之法則)。

● 命  $x^3 + px + q$  之根爲  $\dots(a+b)$ ,

$-(\omega a + \omega^2 b), -(\omega^2 a + \omega b)$ , 則  $a^3$  及  $b^3$  爲

$$\left\{ \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} \right\}.$$

● 三次方程式解法之不能化之情形,  $a^3$  及  $b^3$  之式爲  $\alpha + i\beta$  及  $\alpha - i\beta$  之複虛數式

時, 則  $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ,  $\tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$ , 而三根

$$\text{爲 } -2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3}, -2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi}{3},$$

$$-2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 4\pi}{3}.$$

● 欲解  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ , 先解

$$4(\lambda^2 - s)(2\lambda + \frac{p^2}{4} - q) - (p\lambda - r)^2 = 0,$$

而求其根, 則由  $2\lambda + \frac{p^2}{4} = q + \alpha^2$ ,

$p\lambda = r + 2\alpha\beta$ ,  $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$  求得  $\alpha, \beta$ , 而解

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda \pm (\alpha x + \beta) = 0 \text{ 則得所}$$

求之根。

●  $x^3 + px + q = 0$  之根悉爲實數之條件爲  $27q^2 + 4p^3$  爲負。

## 平面幾何學定理



### 普通公理

- 與同量相等之諸量, 彼此互相等。
- 全量等於其各部分之和。  
故全量大於其各部分。
- 等量加等量其和必等。
- 等量減等量其差必等。
- 等量加不等量, 其和不等, 所加爲大量者, 則其和大大。
- 不等量減等量, 其差不等, 本爲大量者仍爲大量。
- 等量減不等量, 其差不等, 所減爲大量者, 其餘爲小量, 所減爲小量者, 所餘爲大量。
- 諸等量之同倍數之量相等。
- 諸等量之同分數之量相等。

### 幾何學公理

- 圓形可不變其形狀及大小, 而得變其位置。
- 能全相重合之圓形爲相等。
- 過一點在一方向可引一直線, 而只限於一直線。  
換言之, 一點與一方向可決定一直線。  
由此公理可知次之二件。
- (1) 二點可決定一直線。  
換言之, 若二直線有二公共點, 則此二直線必全相合而成一直線。
- (2) 相異二直線只能相交於一點。

- 二點間之最短徑爲其間之直線。
- 諸周角相等。
- 過一點可引一直線平行於他一直線，惟只限於一直線。

## 定理之關係

1. 定理者其真理可以已知之命題而證明之之命題也。但已知之命題爲公理或定理等。

定理由二部而成，一曰假設，一曰終結。假設者假定其如是者也，終結者由假設施以推理所生之結果也。例如定理之雛形爲

若 A 爲 B 則 C 爲 D。(1)

「若 A 爲 B」爲假設，「則 C 爲 D」爲終結。

此定理如果真確，則次之定理亦必真，即

若 C 不爲 D，則 A 不爲 B。(2)

此(1)與(2)稱爲互爲對偶。例如馬爲四足動物之命題，若欲合前之雛形，則須改書之如次。

如動物爲馬，則此動物爲四足。

其對偶爲

如動物不爲四足，則此動物不爲馬。

此定理常爲真，因動物之不爲四足者，雖不僅爲馬，而其必非馬也則甚明。

2. 二定理其一之假設爲他之終結時，則後者稱爲前者之逆定理。例如

若 C 爲 D 則 A 爲 B (3)

爲(1)之逆定理。又(3)之對偶爲

若 A 不爲 B 則 C 不爲 D。(4)

此(4)稱爲(1)之裏定理。

一定理爲真時，其逆定理與裏定理未必皆真，果真與否不得不特別討論之。例如前例之

如動物爲馬，則此動物爲四足。

其逆定理爲

如動物爲四足，則此動物爲馬。

又其裏定理爲

如動物不爲馬，則此動物不爲四足。

此二定理一見而知非真，可知逆定理與裏定理未必一般爲真也。

3. 前述定理之四種變態，又列舉之如次。原定理。若 A 爲 B 則 C 爲 D。(1) 其對偶。

若 C 不爲 D 則 A 不爲 B。(2)

其逆定理。若 C 爲 D 則 A 爲 B。(3)

其裏定理。

若 A 不爲 B 則 C 不爲 D。(4)

此(1)爲真時，(2)則常爲真〔論理的〕，而(4)爲(3)之對偶，故(3)與(4)必同時爲真。然(1)與(3)或與(4)，則不能知其必真與否。故此定理之四種變態中，其不互爲對偶者爲(1)與(3)，(1)與(4)，(2)與(3)及(2)與(4)，須由幾何的證法證明其真確與否。

4. 定理之假設複雜時之情形。在此情形時，將假設之一與終結交換，即得原定理之逆定理。例如

$$\left. \begin{array}{l} \text{若 } A = D \\ \text{ } B = E \\ \text{ } C = F \end{array} \right\} \text{則 } M = N.$$

其逆理爲



$$\left. \begin{array}{l} \text{若 } A=D \\ B=E \\ M=N \end{array} \right\} \text{則 } C=F,$$

$$\left. \begin{array}{l} A=D \\ M=N \\ C=F \end{array} \right\} \text{則 } B=E,$$

5. 逆定理之法則。逆定理不常真，但若原定理中含一羣之定理，而僅一假設為真時，不能同時有二終結為真。則此一羣定理之逆定理，必均為真。例如

若 A 大於 B 則 C 大於 D。

若 A 等於 B 則 C 等於 D。

若 A 小於 B 則 C 小於 D。

如已證明此三定理為真，則其各逆定理亦必為真。即

若 C 大於 D 則 A 大於 B。

若 C 等於 D 則 A 等於 B。

若 C 小於 D 則 A 小於 B。

6. 同一法 若僅有 A 及 B 於此，若已知 A 為 B，則必可斷定 B 為 A。

例如已知一直線 AB 與其線外一定點 P，由 P 至 AB 之最短線只有一，由 P 至 AB 之垂線亦只有一。則當云最短線為垂線時，必可由同一法而直接斷定垂線為最短線。

### 直 線

● 於一直線上之一點，得引一垂線垂直於此直線，唯只限於一。

● 由一直線外之一點，得引一垂線垂直於

此直線，唯只限於一。

● 由一直線外之一點，對於此直線所引之諸線。

(1) 垂線為最短。

(2) 斜線之趾與垂線之趾成等距離者，則此兩斜線等長。

(3) 斜線之趾與垂趾之距離不等，則距離遠者其綫較長。

(4) 前條之逆定理。

(5) 由一直線外之一點，對於此直線可引相等之兩直線，唯只限於二，各在垂線之兩側。

(6) 已知之有限直線得以任意之比內分為二分，又得以任意之比外分為二分，惟外分時不能成等比。如斯之分點只限於一點。

### 角

● 由一點引諸直線，所生諸隣角之和，等於一周角，即四直角。

● 一直線與他一直線相交，其兩隣角之和等於一平角，即等於二直角。

此定理之逆定理亦真。

● 對頂角相等。

● 若兩隣角之和等於二直角，則其各角之二等分線互相垂直。

● 若兩直線相交所成之四角中，有一角為直角，則其他三角必皆為直角。

### 平 行 直 線

● 一直線截二直線，若其所成之內錯角相

等，則此二直線必平行。

此定理之逆。

- 一直線截二直線，若其在截線同側之二內角互為補角，則此二直線必平行。

此定理之逆。

- 一直線截二直線，若其所成之同位角相等，則此二直線必平行。

此定理之逆。

- 垂直於同一直線之二直線，必互相平行。
- 平行直線有共同之垂線。
- 平行於同直線之二直線，必互相平行。
- 一橫截線截三平行線，若其所截取之線分相等，則以任意之他橫截線截之時，其所截取之線分亦相等。
- 設二直線為一組之數平行線所截，則其諸相當線分成比例。

## 三 角 形

- 三角形各內角之和等於二直角。
- 三角形之一外角等於其相對二內角之和，故大於二內角之任一角。
- 二三角形全等之條件。
  - (1) 二邊及其夾角相等者。
  - (2) 二角及其夾邊相等者。
  - (3) 三邊相等者。
  - (4) 二邊及其大邊所對之角相等者。
- 二三角形之兩意情形。
 

二邊及其小邊所對之角相等，大邊所對之角相等或互為補角者。
- 三角形之二邊相等，則其所對之角亦相等。其逆定理亦真。
- 二等邊三角形之頂角之二等分線為其底

邊之垂直二等分線。其逆定理亦真。

- 三角形之大邊對大角，又大角對大邊。
- 三角形之二邊之和大於其他之一邊。二邊之差小於其他之一邊。
- 由三角形一邊之兩端至三角形內之一點引直線，此二直線之和比其所對他二邊之和小，然其所夾之角，則大於他二邊所夾之角。
- 二三角形之二邊相等，若其夾角不相等，則大角之對邊大於他之對邊。其逆定理亦真。
- 三角形之三中線相交於一點〔重心〕。重心分中線為 1:2 之比。
- 三角形之各邊之垂直二等分線相交於一點〔外心〕。
- 由三角形各角之頂點至對邊所引之垂線相交於一點〔垂心〕。
- 三角形各角之內二等分線相交於一點〔內心〕。
- 三角形一角之內二等分線與他二角之外二等分線相交於一點〔傍心〕。
- $\Delta = \frac{1}{2}$  (等底等高之平行四邊形)。
- $\Delta = \frac{1}{2}$  底  $\times$  高。
- $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。
- $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 。
- 直角三角形斜邊上之正方形等於他二邊上之正方形之和。〔畢達哥拉斯之定理〕。
- 三角形銳角之對邊上之正方形等於他二邊上之正方形之和，減去一邊與他邊在此邊上之正射影所包矩形之二倍。

- 鈍角三角形鈍角之對邊上之正方形等於他二邊上之正方形之和，加一邊與他邊在此邊上之正射影所包矩形之二倍。
- 三角形二邊上之正方形之和，等於第三邊之半之正方形之二倍，與第三邊之中線上正方形之二倍之和。
- 三角形二邊上之正方形之差，等於第三邊之二倍與第三邊之中線在其邊上之正射影所包之矩形。
- 二三角形相似之條件。
  - (1) 三角各相等者。
  - (2) 三邊成比例者。
  - (3) 二邊成比例，且其兩邊之夾角相等者。
  - (4) 二邊成比例，且其大邊之對角相等者。
- 由直角三角形直角之頂點至斜邊引垂線，則所成之二三角形，與原三角形相似，且彼此相似。
- 二三角形之彼此二邊成比例，若其小邊所對之角相等，則其大邊所對之角為相等或互為補角。
- 分三角形之二邊成相等之比之直線，必與第三邊平行。
- 三角形同頂內外角之二等分線截其對邊成調和比例。其逆定理亦真。
- 有一角相等之二三角形之比，等於夾此角之二邊所包矩形之比。
- 相似三角形之比，等於其對應邊之二乘比。
- 內接於圓之四邊形，其相對之角互為補角。其逆定理亦真。
- 圓之外切四邊形，其相對二邊之和等於他相對二邊之和。其逆定理亦真。
- 圓之內接四邊形，其二對角線所包之矩形，等於兩組之兩對邊所包矩形之和。
- 在平行四邊形
  - (1) 相對之邊相等。
  - (2) 相對之角相等。
  - (3) 相隣之角互為補角。
  - (4) 兩對角線互為二等分。
  - (5) 面積等於底與高所包之矩形。
- 在一四邊形，若
  - (1) 二組相對之邊各相等者，
  - (2) 二組相對之角各相等者，
  - (3) 一組相對之邊相等且平行者，
 則其四邊形為平行四邊形。
- 等底等高之二矩形相等。
- 矩形之面積 = 底 × 高。
- 梯形之面積 =  $\frac{1}{2} \cdot \text{高} \cdot \text{兩底之和}$ 。
- 在同底或相等之底邊上，且在同平行線間所作之平行四邊形，皆互相等。
- 沿平行四邊形之對角線之平行四邊形之餘形相等。
- 一平行四邊形之相隣兩邊與他平行四邊形之相隣二邊相等，且有一角相等者，則二平行四邊形為全等。
- 等高之矩形與其底成比例。
- 等底之矩形與其高成比例。
- 命  $X, Y, \dots$  為線分， $XY, XZ, \dots$  為矩形， $X^2, Y^2, \dots$  為正方形，則

四 邊 形

- (1)  $X(Y+Z)=XY+XZ$ .  
 (2)  $(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$ .  
 (3)  $(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY$ .  
 (4)  $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$ .

## 多 角 形

### [或多邊形]

- ①  $n$  邊多角形內角之和  $= (2n-4)\hat{R}$ .  
 ②  $n$  邊多角形外角之和  $= 4\hat{R}$ .  
 ③ 二等分正多角形之各角之直線，皆相交於一點，此點與諸頂點成等距離，且與諸邊等距離。

- ④ 正多邊形得內接或外切於一圓。  
 ⑤ 分圓之全周為若干相等之弧，是等之弧之弦必構成一內接正多邊形，又於諸分點作諸切線，必構成一外切正多邊形。  
 ⑥ 內接於圓之等邊多邊形恆為正多邊形。又外切於圓之等邊多邊形，若邊數為奇數，則為正多邊形。  
 ⑦ 外切於圓之等角多角形恆為正多角形。又內接於圓之等角多角形，若邊數為奇數，則為正多角形。

- ⑧ 正多邊形之面積  $= \frac{1}{2} \cdot \text{邊心距} \cdot \text{周}$

- ⑨ 同邊數之正多邊形為相似形。  
 命相似兩形之對應邊為  $a, b, c, \dots$  及  $a', b', c', \dots$  外接圓之半徑為  $r, r'$ ，則

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots$$

$$= \frac{a+b+c+\dots}{a'+b'+c'+\dots}$$

- ⑩ 將二相似直線形之各對應邊平行放置之

，則連結一形之頂點與他形之頂點之諸直線，必互相平行，或同遇一點，而由點引任意直線與二形之對應邊之交點，其距離之比等於對應邊之比。

- ⑪ 相似多邊形之比，等於其對應邊之二乘比。  
 ⑫ 四直線成比例，於第一及第二之上在相似位置作二相似形，又於第三及第四之上亦作二相似形，則是等諸形必成比例。其逆定理亦真。  
 ⑬ 直角三角形斜邊上之直線形，等於他二邊上在相似位置所作之相似直線形之和

## 圓

- ① 半徑相等之圓為全相等。  
 ② 圓對於中心為對稱。  
 ③ 圓對於任意直徑為對稱。  
 ④ 命由中心至一點之距離為  $d$ ，圓之半徑為  $r$ ，則  
 (1) 點在圓內  $d < r$ .  
 (2) 點在圓周上  $d = r$ .  
 (3) 點在圓外  $d > r$ .  
 並是等之逆定理亦真。  
 ⑤ 過圓之中心垂直於弦之直線，必二等分此弦。其逆定理亦真。  
 ⑥ 圓之弦之垂直二等分線必過中心。  
 ⑦ 圓之弦之垂直二等分線必二等分其弦之共軛弧。  
 ⑧ 在同圓或等圓內，相等之弦與中心成等距離。又其逆與中心等距離之弦必等。  
 ⑨ 在同圓或等圓內，若二弦不等，則大弦距

中心近，小弦距中心遠。又其逆。

- 在同圓或等圓內，相等之中心角對相等之弧。又其逆。
- 在同圓或等圓內，若中心角不等，則大中心角對大弧。又其逆。
- 在同圓或等圓內，相等之弧必對相等之弦。於不相等之劣弧，則大劣弦必對大弧。又此定理之逆。
- 在同弧上之圓周角等於圓心角之半。
- 在圓之同弓形內之角相等。又其逆。
- 於圓內〔或外〕相交二弦間之角，得以其所截之弧之和〔或差〕之半測度之。
- 在弓形內之角，視其弓形大於，或等於，或小於半圓，因而其角為銳角，或直角，或鈍角。又其逆。
- 過圓周上一點所引之諸線中，惟在此點與半徑垂直之直線不再與圓周相交，其他諸線則皆與圓周相交於他一點。
- 直線與圓心之距離比半徑小者，則與圓周相交，等於半徑者則切於圓周，大於半徑者，則全不與圓周相遇。
- 圓之切線垂直於過切點之半徑。
- 過切點引切線之垂線必過圓心。
- 切線及由切點所引之弦，其間之角，等於其角之隣弓形內之角。又其逆。
- 由圓外一點引圓之二切線必相等。
- 切於不過同一點又不平行之三直線之圓有四，亦只有四。
- 相交二圓之聯心線為其公通弦之垂直二等分線。
- 二圓周不於連結其中心之直線上一點相交時，必又於他一點相交，是為二圓相

交，而其中心間之距離比半徑之和，比其差大。

- 二圓周於連結其中心之直線上一點相交時，則此二圓周不再於他點相交，此時二圓為外切或內切，而其中心間之距離，為外切時則等於半徑之和，為內切時則等於半徑之差。
- 二圓相切，其切點與二圓之中心在同一直線上。
- 圓之弦內分或外分，其二分所包之矩形，等於半徑上之正方形與連結分點與圓心之直線上之正方形之差。
- 過一定點引圓之諸割線，由其與圓周相交之二點至該定點之線分所包之矩形必均相等。又其逆。
- 由圓外一點引切線及割線，其切線上之正方形等於割線之二分所包之矩形。又其逆。
- 同圓或等圓之圓心角之比，等於其所對之弧之比。
- 命圓之半徑為  $r$ ，圓周為  $c$ ，則
 
$$c = 2\pi r.$$
- 圓之面積  $= \pi r^2$ 。
- 扇形之面積  $S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ ，但  $\alpha$  為扇形之角度。

### 軌跡

- 欲確定軌跡，須證明次之二命題。
  - (1) 在  $X$  線上之點適合條件  $A$ 。
  - (2) 適合條件  $A$  之點在  $X$  線上。
 或可證明(3)以代(1)，證明(4)以代(2)。

- (3) 不適合條件 A 之點不在 X 線上。  
 (4) 不在 X 線上之點不適合條件 A。
- 與二定點 A, B 等距離之點之軌跡, 爲 AB 直線之垂直二等分線。
- 與一定點等距離之點之軌跡, 爲以其點爲中心之圓周。
- 與一直線成一定距離之點之軌跡, 爲與此直線平行之二直線。
- 三角形之底邊爲一定, 其所對之角亦一定, 則其頂點之軌跡, 爲其以底爲弦之圓之二弧。
- 與相交二直線等距離之點之軌跡, 爲其角之內外二等分線。
- 與相交二直線之距離爲已知之比之點之軌跡, 爲過其交點之二直線。
- 與已知二點之距離爲已知之比之點之軌跡, 爲連結二點之直線以已知之比內分及外分之, 以此二分點之距離爲直徑之圓周。

### 作 圖 題

- 作圖題之目的在成功幾何學之作圖。解作圖題許使用器具, 因可使用器具之限制, 其範圍愈狹者, 則其可解得之作圖題之範圍愈狹, 從而其解法亦愈困難。在初等幾何學許使用之器具, 不外規矩二物。所謂規者即兩脚規, 所以畫圓及測距離之器具也。所謂矩者即直線版, 所以引直線及延長直線所用之器具也。
- 作圖之公法
- (1) 由任意之一點至他之任意一點, 可引一直線。

- (2) 有限直線得延引爲任意之長。  
 (4) 以任意之點爲中心, 任意之有限直線爲半徑, 得畫一圓。

### 倍 量 之 性 質

●就可通約量而言

- (1) 若  $A=B$ , 則  $mA=mB$ 。  
 (2) 若  $mA=mB$ , 則  $A=B$ 。  
 (3)  $mA+mB+\dots=m(A+B+\dots)$ 。  
 (4)  $mA-mB=m(A-B)$ , 但  $A>B$ 。  
 (5)  $mA+nA=(m+n)A$ 。  
 (6)  $mA-nA=(m-n)A$ , 但  $m>n$ 。  
 (7)  $m \cdot nA=mn \cdot A=n \cdot mA$ 。

●就不可通約量而言

- (1)  $A>B$ , 則  $mA>nB$ 。  
 (2)  $A>B$ , 則  $A>B$ 。  
 (3)  $mA+mB+\dots=m(A+B+\dots)$ 。  
 (4)  $mA-mB=m(A-B)$ , 但  $A>B$ 。  
 (5)  $mA+nA+\dots=(m+n+\dots)A$ 。  
 (6)  $mA-nA=(m-n)A$ , 但  $m>n$ 。  
 (7)  $m \cdot nA=mnA=n \cdot mA$ 。

### 比 例

- 若  $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ ,  $\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$ ,  
 則  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 。
- 若  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ , 則  $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ 。〔反轉之理〕。
- 若  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ , 則  $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 。〔更迭之理〕。
- 若  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ , 則  $ad=bc$ 。

●若  $ad=be$ ，則可得次之諸比例。

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

●若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ 。

[合比之理]。

●若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ ，則  $\frac{a \sim b}{b} = \frac{c \sim d}{d}$ ，

[分比之理]。

●若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則  $\frac{a+b}{a \sim b} = \frac{c+d}{c \sim d}$ 。

[分合比之理]。

●若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ ，則  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$   
 $= \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$  [加比之理]。

●若  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ，則  $b^2=ac$ ， $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$ 。

●若  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ，則  $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}$ 。

●若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ， $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ ，則

$$\frac{ax}{by} = \frac{cz}{yw}.$$

●若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，視  $a \leq c$ ，而  $b \leq d$ 。

●若  $a:b=P:Q$ ，則  $a^2:b^2=P^2:Q^2$ ，  
 又  $b^3:a^3=P^3:Q^3$ 。

## 極 限 論

●某量有一定之值者曰常數，從某條件而消長變異其值者曰變數。

●變數之值漸漸與常數接近，但其差雖如

何微小，而不能恰等於常數，則此常數稱為此變數之極限，此變數漸近於此常數，稱為漸近於其極限。

若變數漸漸增大而接近於其極限，則其極限稱曰增極。又若漸漸減小而接近於其極限則其極限稱曰減極。

●設一點由 A 向 B 運動，第一秒間行 AB 之半至 M，第二秒行 MB 之半至 M'，第三秒間行 M'B 之半至 M''，逐次如斯前進。則此運動點可使漸近於 B，然決不能達至 B。因每次皆行餘距離之半，其至 B 也，雖愈行愈近，然尚有餘距離之半在，終不能恰等於 B 也。

故由 A 至運動點之距離，為增變數，漸近於一常數 AB，以 AB 為其極限。由運動點至 B 之距離，為損變數，漸近於一常數零，以零為其極限。

命 AB 之長為 2 寸，由 A 至運動點之變數為 x，此變數與其極限之差為 v，則第一秒後

$$x=1, \quad v=1,$$

第二秒後  $x=1+\frac{1}{2}$ ， $v=\frac{1}{2}$ ，

第三秒後  $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ， $v=\frac{1}{4}$ ，

第四秒後  $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ，

$$v=\frac{1}{8}, \quad \text{餘準此。}$$

此級數  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$  之和

明知其小於 2，然若所取之項數愈多，則其與 2 之差可使為任何小。故 2 為該級數取無窮項時之極限，零為該級數與 2 之差之極限。

①(1) 變數與其極限之差為一變數，其極限為零。

(2) 二以上之變數  $v, v', v''$ ，等若其極限各為零，則其和  $v+v'+v''+\dots$  之極限亦為零。

(3) 若變數  $v$  之極限為零，則  $a \pm v$  之極限為一常數  $a$ ， $a \times v$  之極限亦為零。

(4) 常數與變數之積為變數，常數與變數之積之極限為其變數之極限與常數之積。

(5) 若二變數為同時俱增之變數，亦為同時俱減之變數，則其二變數之和或積，亦為一變數。

(6) 若二變數恆相等，則其極限亦相等。二變數  $AM$  及  $AN$  恆相等，而  $AC$  與  $AB$  為其極限，試證明  $AC=AB$ 。

[證] 若  $AC > AB$ ，

則取短於  $AC$  之  $AC'$ ，令  $AC'=AB$ ， $AM$  之極限接近於  $AC$ ，故大於  $AC'$ ，假定為達於  $AP$ ， $AQ$  為對應於  $AP$  之  $AN$

之值。如是則得  $AP=AQ$ ， $AC'=AB$ 。然此二相等式不能成立，因  $AP > AC'$ ， $AQ < AB$ 。故  $AC$  不能大於  $AB$ 。同理  $AB$  不能大於  $AC$ ，即  $AC$  不能小於  $AB$ ，則  $AC$  既不能大於  $AB$ ，又不能小於  $AB$ ，故必等於  $AB$ 。

(7) 二變數有一定之比者，則其極限亦有同比。

極限常以  $\lim$  記之，例如  $\lim x$  即「 $x$  之極限」之謂也。

[證] 命  $x$  及  $y$  為二變數， $r$  為其一定之比，則  $x:y=r$ ，即  $x=ry$ ，故

$$\lim x = \lim(ry) = r \cdot \lim y, \text{ 故}$$

$$\lim x : \lim y = r.$$

(8) 不可通約之二比  $a:b$  及  $a':b'$  表至同程度精密時，其近似值恆為同一者，則其比不相等。

(9) 二以上變數之代數和之極限為其極限之代數和。

命  $x, y, z$  為變數， $a, b, c$  為其極限，證明  $\lim(x+y+z) = a+b+c$ 。

[證] 命  $a-x=v$ ， $b-y=v'$ ， $c-z=v''$ ，則  $x=a-v$ ， $y=b-v'$ ， $z=c-v''$ ，故  $x+y+z = a-v+b-v'+c-v''$ ，

$$\lim(x+y+z) = \lim(a-v+b-v'+c-v'')$$

[6]。然  $\lim(a-v+b-v'+c-v'') = a+b+c$  [3]。故  $\lim(x+y+z) = a+b+c$ 。

(10) 二以上變數之積之極限等於其極限之積。

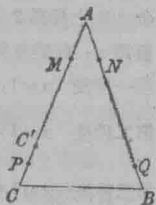
命  $x, y, z$  為變數， $a, b, c$  為其極限，證明  $\lim(xyz) = abc$ 。

[證]  $x = a-v$ ， $y = b-v'$ ， $z = c-v''$ ，取此各邊之積，則

$xyz = abc \pm$  (含  $v, v', v''$  之因數之諸項)。此式符號士以下諸項之極限為零。

[3]。故  $\lim(xyz) = \lim\{abc \pm (\text{極限為零之諸項})\}$  [6]。故  $\lim(xyz) = abc$ 。

上為變數漸次增大時之證明，然變數漸次減小時之證明亦同。





## 立體幾何學定理



### 定平面之條件

- 一直線及不在其直線上之一點。
- 不在一直線上之三點。
- 相交二直線。
- 相平行二直線。

### 二平面之交

- 二平面之交為一直線。

### 平面之垂線及斜線

- 在相交二直線之交點作二線之垂線，必垂直於此二直線所定之平面。
- 在一平面上一點〔或由一平面外一點〕可作一直線垂直於此平面，亦僅可作一直線。
- 由一平面外一點至此平面所作之諸斜線：
  - (1) 斜線與平面相交之趾與垂線之趾成等距離者，則其斜線相等。
  - (2) 若二斜線與平面相交之趾與垂趾之距離不等，則距離遠者其線長，又其逆。
- 由平面外一點至此平面所引之諸直線中，以垂線為最短。
- 在一直線上同一點所引之諸垂線，必同在過此點垂直於此直線之平面上。
- 過一直線上〔外〕一點，可作一平面垂直於此直線，亦僅限於一。

- 由平面上—垂趾，作一直線，與此平面內一直線垂直，則由其交點至垂線上任一點所作之線，必垂直於此平面內之直線。

### 平行直線及平面

- 垂直於同一平面之二直線互相平行。
- 若二平行直線中—線垂直於一平面，則他線亦垂直於此平面。
- 與同一直線平行之二直線，必互相平行。
- 含二平行直線之一之平面，必與他直線平行。
- 與二平面之交線平行之直線，必平行於其各平面。
- 若一直線與一平面平行，則此平面與含此直線之平面之交線，必與此線平行。
- 與同一直線垂直之二平面互相平行。
- 相交二直線同與一平面平行，則由是等二直線所定之平面，亦必與前平面平行。
- 平行之二平面，與第三平面之交線，必互相平行。
- 平行之二平面間所夾之平行直線之長相等。
- 一直線垂直於二平行平面中之一平面者，亦必垂直於他平面。
- 過一點可作一平面，亦僅可作一平面，與一已知平面平行。
- 不在同一平面上之二角，若其各邊互相平行，則此二角為相等或互為補角。
- 過一直線僅可作一平面與不在同一平面上之一直線平行。
- 若二直線為平行三平面所截，則其諸相當線分成比例。

- 垂直於不在同一平面上之二直線之垂線有一，亦只有一。  
此線為二直線間之最短線。

### 軌 跡

- 一有限直線之垂直二等分面為與其兩端等距離之點之軌跡。
- 與一圓周上各點等距離之點之軌跡，為過其圓之中心與其平面垂直之直線。
- 與平行二直線等距離之點之軌跡為其公垂線之垂直二等分面。
- 與一平面為一定距離之點之軌跡，為與此面平行之二平面。

### 垂直平面及二面角

- 若一直線垂直於一平面，則含此線之諸平面，亦必垂直於前之平面。
- 垂直於二面角之稜之平面，亦垂直於其二面。
- 過一平面之斜線可作一平面，亦僅可作一平面，垂直於此平面。
- 若二平面相垂直，則在一平面所作垂直於其交線之垂線，亦必垂直於其他平面。
- 由二面角稜上之二點，在各面上作稜之垂線，其所成之二直線角相等。
- 由二面角內一點作各面之垂線，此二線之夾角為二面角之對應直線角之補角。

### 射 影

- 不垂直於一平面之有限直線在此面上之射影，為連結其兩端之射影之有限直線。

- 一斜線與其在一平面上之射影所成之銳角，比其與此平面上任何直線所成之角小。

### 多 面 角

- 三面角之任兩面角之和，大於第三面角。
- 凸多面角之各面角之和，小於四直角。
- 二三面角若其諸面角同順序相等，則此二三面角為相等。若逆順序相等，則此二三面角為對稱。
- 命一凸  $n$  面角之二面角之和為  $s$ ，則有次之關係，  
 $2n$  直角  $> s > (2n-4)$  直角。

### 多 面 體

- 正多面體不能多於五種。  
〔五種者即正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體，正二十面體〕。
- 尤拉定理 Euler's theorem. 命  $E$  表凸多面體之稜數， $F$  表其面數， $V$  表其頂數，則  $E+2=F+V$ 。
- 過正多面體各面之中心作垂線，必交於一點，此點與各面各稜及各角頂成等距離。
- 多面體之諸面角之和，等於以其角頂數減二乘四直角之積。
- 平行六面體之各對角線必過同一點，且為此點所二等分。
- 等底等高之兩三角錐之體積相等。
- 斜角柱與以其直截面為底側稜為高之直角柱為等積。

- 底面相等及高相等之平行六面體爲相等。
- 一三角柱得分爲相等之三角錐。
- 相似多面體之體積之比，等於其對應邊之三乘比。

### 旋 轉 體

- 以平面截球，其截口爲圓。
- 球之圓之軸過球之中心，而諸平行圓有同軸與同極。
- 球之諸大圓均相等，且二等分球及球面。
- 球面與球面之交爲圓。
- 由球外一點作球之諸切線皆相等，且切點之軌跡爲圓。
- 一平面於球之半徑之一端，垂直於其半徑者，爲球之切面。
- 垂直於球之半徑之端諸垂線皆切於球。
- 一直線爲球之一圓之切線者，則含此直線之平面，必於其切點，爲球之切面。
- 於球之切面上過切點引任意之直線，此直線必於切點爲球之切線。
- 二直線於同點爲球之切線者，則含此二直線之平面，必於此點爲球之切面。
- 球之圓之周上諸點，與其極成等距離。
- 過球面上之二點〔非對點〕僅可作一大圓。
- 由球面上一點至他一點之最短徑，爲過此二點之大圓弧。
- 二對稱球面三角形爲等積。
- 球面三角形之各邊小於其他二邊之和。
- 球面多角形之任意一邊小於其他各邊之和。

- 球面多邊形之諸邊之和小於  $360^\circ$ 。
- 二球面三角形爲他之球面三角形之極三角形，則後之三角形亦爲前之三角形之極三角形。
- 二球面三角形互爲極三角形者，則其一之各角與他之一之對邊互爲補角。
- 球面三角形之諸角之和，大於二直角而小於六直角。
- 球面五角形之諸角之和，大於六直角而小於十直角。
- 球之面積及體積見幾何學公式欄內。
- 一有限直線以在同一平面上不相交且不垂直之他一有限直線爲軸，繞之旋轉，其所生之表面積，等於以旋轉線之垂直二等線在兩線間之部分爲半徑之圓周，與旋轉線在軸上之射影相乘之積。
- 一三角形以在其平面上過其頂點不與三角形相截之一直線爲軸，繞之旋轉，其所生之體積，等於三角形之底所生之表面與其高之積之三分之一。
- 圓之弓形以不與之相截之直徑爲軸而旋轉所生之體積，等於以弓形之弦爲底之半徑與其弦在軸上之射影爲高之圓錐之體積之半。

## 幾何學公式

命  $L$  爲長之單位。

- (I) 任意之長以數小字母  $a, b, c, \dots$  表之, 有時半徑之長以  $R$  表之。
- (II) 任意之面積以數大字母  $S, S_1, S_2, \dots$  表之, 面積之單位爲以長之單位  $L$  爲一邊之正方形之面積。
- (III) 任意之體積以數大字母  $V, V_1, V_2, \dots$  表之。體積之單位爲以長之單位  $L$  爲一邊之立方體之體積。

## 長之公式

## [平面部]

## ●不等式的關係。

1. 若  $a, b, c$  爲三角形之三邊, 則  $a < b + c$ ,  $b < c + a$ ,  $c < a + b$ , 因而  $a \sim b < c$ ,  $b \sim c < a$ ,  $c \sim a < b$ 。

2. 以  $r, r'$  表二圓之半徑,  $d$  表其中心距離, 則二圓相交時,  $r + r' > d > r - r'$ 。各在外而不相交時,  $r + r' < d$ 。其一全在他一之內而不相交時,  $r - r' > d$ 。

## ●等式的關係。

1. 若二圓之半徑爲  $r, r'$ , 則中心距離爲  $d$ 。則當二圓外切時,  $r + r' = d$ 。當二圓內切時,  $r - r' = d$ 。

2. 命  $a, b, c$  爲三角形  $ABC$  之三邊,

$$\frac{1}{2}(a + b + c) = s.$$

(I) 命由  $A, B, C$  至內切圓之切點之距

離各爲  $A_1, B_1, C_1$ ; 由  $A, B, C$  至邊  $(b, c), (c, a), (a, b)$  之延線上之傍切圓之切點之距離各爲  $A_0, B_0, C_0$ ; 由  $A, B, C$  至邊  $(b, c), (c, a), (a, b)$  上之傍切圓之切點之距離各爲  $(A_b, A_c), (B_c, B_a), (C_a, C_b)$ , 則

$$A_0 = B_0 = C_0 = s.$$

$$A_1 = B_c = C_b = s - a.$$

$$B_1 = C_a = A_c = s - b.$$

$$C_1 = A_b = B_a = s - c.$$

(II) 命內切圓之半徑爲  $r$ , 面積爲  $S$ , 外心與內心之距離爲  $d$ , 則

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$= \frac{S}{s} = \frac{R^2 - d^2}{R}.$$

(III) 命角  $BAC$  內之傍切圓之半徑爲  $r_1$ , 則

$$r_1 = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{S}{s-a}.$$

(IV) 命外接圓之半徑爲  $R$ , 則

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{abc}{4S} = \frac{bc}{2h_a}.$$

但  $h_a$  爲由  $A$  至  $a$  邊之高。

(V) 命由  $A$  至  $a$  邊之高爲  $h_a$ , 則

$$h_a = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}.$$

(VI) 命由  $A$  至  $a$  邊之中線之長爲  $m_a$ , 則

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2)}.$$

(VII) 命  $A$  角之二等分由  $A$  至  $a$  邊

之長爲  $w_a$ , 則

$$w_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$$

(VIII) 命垂趾三角形之三邊爲  $a', b', c'$  則  $a'+b'+c'$

$$= \frac{2S}{R} = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

但  $a', b', c'$  之中, 對原三角形之鈍角者爲負值。

3. 分已知之有限直線  $a$  爲外中比, 命  $x$  爲其大部分, 則

(I) 當內分時,  $x = \frac{1}{2} a(\sqrt{5}-1)$ .

(II) 當外分時,  $x = \frac{1}{2} a(\sqrt{5}+1)$ .

4. 命  $a, b$  爲梯形  $ABCD$  之平行邊  $AB, CD$ ;  $c, d$  爲其他二邊  $BC, DA$ , 則

$$BD = \sqrt{\frac{a(c^2-b^2)+b(a^2-d^2)}{a-b}}$$

$$AC = \sqrt{\frac{a(d^2-b^2)+b(a^2-c^2)}{a-b}}$$

5. 命圓之內接四邊形  $ABCD$  之邊  $AB, BC, CD, DA$  各以  $a, b, c, d$  表之, 其對角線  $AC, BD$  以  $\lambda, \mu$  表之, 則

$$\lambda = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

6. 命  $x, y$  爲直角三角形夾直角之二邊,  $z$  爲斜邊, 則  $z = \sqrt{x^2+y^2}$ .

7. 內接於以  $R$  爲半徑之圓之

(I) 正三角形之一邊  $= R\sqrt{3}$ .

(II) 正方形之一邊  $= R\sqrt{2}$ .

(III) 凸正五邊形之一邊

$$= \frac{1}{2} R \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

(IV) 星形正五角形之一邊

$$= \frac{1}{2} R \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

(V) 凸正六邊形之一邊  $= R$ .

(VI) 凸正八邊形之一邊  $= R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(VII) 星形正八角形之一邊

$$= R\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(VIII) 凸正十邊形之一邊

$$= \frac{1}{2} R(\sqrt{5}-1)$$

(IX) 星形正十角形之一邊

$$= \frac{1}{2} R(\sqrt{5}+1)$$

(X) 凸正十二邊形之一邊

$$= \frac{1}{2} R(\sqrt{3}-1)$$

(XI) 星形正十二邊形之一邊

$$= \frac{1}{2} R(\sqrt{3}+1)$$

(XII) 凸正十五邊形之一邊

$$= \frac{1}{4} R \{ \sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) \}$$

(XIII) 第一星形正十五角形之一邊

$$= \frac{1}{4} R \{ \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}} \}$$

(XIV) 第二星形正十五角形之一邊

$$= \frac{1}{4} R \{ \sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) \}$$

8. 逆之求外接於一邊爲  $a$  之正多邊形之圓之半徑  $R$ , 若正多邊形之邊數爲如 7 所示, 則可由 7 容易求得之。

9. 命一邊爲  $a$  之正多邊形之外接圓之

半徑為  $R$ ，內切圓之半徑為  $r$ ，則

$$R^2 - r^2 = \frac{1}{4} a^2. \text{ 故若正多邊形之邊數}$$

為如 7 所示，則由關係 7, 8 及上式，凡已知  $R, r, a$  之任一即可求得其他，例如以  $r_n$  表凸正  $n$  邊形之內切圓之半徑，而記其  $r_n$  與  $a$  及  $R$  之關係於次。

$$(I) \quad r_3 = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{1}{2} R.$$

$$(II) \quad r_4 = \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{2} R.$$

$$(III) \quad r_5 = \frac{a\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} = \frac{R(1+\sqrt{5})}{4}.$$

$$(IV) \quad r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$(V) \quad r_8 = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$(VI) \quad r_{10} = \frac{1}{2} a\sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

10. 命內接及外切於半徑為  $r$  之圓之正  $n$  邊形之一邊之長為  $p, q$ ，內接及外切於此圓，有二倍之邊數之正  $2n$  邊形之一邊為  $p', q'$ ，則

$$(I) \quad p' = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - p^2})}$$

$$(II) \quad q' = \frac{2pq}{p+q}.$$

$$(III) \quad p' = \sqrt{q'p}.$$

由公式 (II)，(III) 計算內接及外切於圓之正多邊形之周圍，可得次表。

| 邊數   | 外切多邊形之周圍  | 內接多邊形之周圍  |
|------|-----------|-----------|
| 4    | 4.0000000 | 2.8284271 |
| 8    | 3.3137085 | 3.0614675 |
| 16   | 3.1825979 | 3.1214452 |
| 32   | 3.1517249 | 3.1365485 |
| 64   | 3.1441184 | 3.1403312 |
| 128  | 3.1422236 | 3.1412773 |
| 256  | 3.1417504 | 3.1415138 |
| 512  | 3.1416321 | 3.1415729 |
| 1024 | 3.1416025 | 3.1415877 |
| 2048 | 3.1415951 | 3.1415914 |
| 4096 | 3.1415933 | 3.1415923 |
| 8192 | 3.1415923 | 3.1415926 |

11. 圓周之長  $= 2\pi r$ 。但  $r$  為圓之半徑。 $\pi = 3.1415926535\dots\dots$ 。

12. 對  $\alpha$  度之角之圓弧  $= \frac{\alpha}{180} \pi r$ 。

對  $\alpha$  直角之圓弧  $= \frac{\alpha}{2} \pi r$ 。

13. 面積為  $a^2$  之圓之半徑  $= \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ 。

14. 卵形之周圍。卵形之簡單者如次。

AFBH 為

以 E 為中

心之圓，

弧 AD，

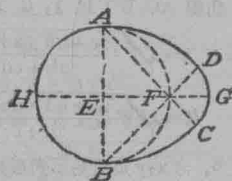
BC 以 B，

A 為中心，

弧 BGC 以 F 為中心。今命 AFBH 圓

之半徑為  $r$ ，則

周圍之長  $= \pi r \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ 。



## 長之公式

## [立體部]

1. 命四面體  $SABC$  之稜  $SA, SB, SC, AB, BC, CA$  各為  $a', b', c', a, b, c$ ; 由  $S$  至底之高為  $h$ ; 三角形  $ABC$  之面積為  $T$ , 則

$$h = \sqrt{\left[ \left\{ 16T^2c'^2 - b^2(a^2 + c'^2 - b'^2) \right\}^2 - a^2(b^2 - c'^2 - a'^2)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c'^2 - b'^2)(b^2 + c'^2 - a'^2) \right] \div 16T^2}.$$

2. 命一稜為  $a$  之正四面體之高為  $h$ , 則

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. 命三度為  $x, y, z$  之直角體〔長方體〕之對角線為  $u$ , 則

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4. 命一稜為  $a$  之立方體之對角線為  $m$ , 則  $m = a\sqrt{3}$ .

5. 命一稜為  $a$  之正八面體之對角線為  $m$ , 則  $m = a\sqrt{2}$ .

6. 命面積為  $a^2$  之球之半徑為  $r$ , 則

$$r = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}.$$

## 面積之公式

## [平面部]

面積以  $S$  表之。

1. 二邊為  $a, b$  之直角三角形

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

2. 底為  $a$ , 高為  $h$  之三角形

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

3. 三邊為  $a, b, c$  之三角形

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

但  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ .

$$\text{又 } S = rs = \frac{abc}{4R} = (s-a)r_1,$$

但  $r, R$  及  $r_1$ , 為其內切圓, 外接圓及對  $a$  邊之傍切圓之半徑。

4. 二邊為  $a, b$  之矩形  $S = ab$ .

5. 高為  $h$ , 相平行之二邊為  $a, b$  之梯形

$$S = \frac{1}{2}h(a+b).$$

6 相平行之二邊為  $a, b$ ; 其他二邊為  $c, d$  之梯形

$$S = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-b-c)(s-b-d)}.$$

但  $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ .

7. 四邊形  $ABCD$  之對角線  $AC, BD$  為  $m, n$ ; 其順次之邊之長為  $a, b, c, d$ , 則其面積

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{\left\{ (2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2) \times (2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2) \right\}}.$$

8. 內接於圓其四邊為  $a, b, c, d$  之四邊形

$$S = \sqrt{\left\{ (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \right\}}.$$

但  $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ .

9. 外切於半徑  $r$  之圓之正多邊形之周圍為  $p$ , 則  $S = \frac{1}{2}pr$ .

10. 內接於半徑  $r$  之圓之

(I) 正三角形

$$S = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

(II) 正方形

$$S = 2r^2$$

(III) 凸正五邊形

$$S = \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

(IV) 凸正六邊形

$$S = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

(V) 凸正八邊形

$$S = 2r^2\sqrt{2}$$

(VI) 凸正十邊形

$$S = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

(VII) 凸正十二邊形

$$S = 3r^2$$

11. 相似形之面積與其對應邊之平方成比例。

12. 半徑為  $r$  之圓之面積  $S = \pi r^2$ 。13. 對  $\alpha$  度之角之扇形

$$S = \frac{\alpha}{360} \pi r^2$$

14. 弓形之弧之長為  $l$ , 弦為  $k$ , 由弧之中點至弦之垂線為  $h$ , 則其面積

$$S = \frac{\frac{1}{2}k^2(1-k) + h^2(1+k)}{4h}$$

15. 卵形之面積 =  $\{ \pi(3-\sqrt{2})-1 \} r^2$ 。16. 橢圓之面積 =  $\pi ab$ 。但  $a, b$  為其長短半徑。17. 以弦截拋物線, 其所截取部分之面積為  $\frac{2}{3} ab$ , 但  $a$  為弦,  $b$  為自拋物線

之頂點至弦之垂線。

## 面積之公式

## [立體部]

1. 若角柱之直截面之周圍為  $a$ , 側棱為  $h$ , 則其側面積  $S = ah$ 。2. 三度為  $a, b, c$  之長方體之面積

$$S = 2(ab + bc + ca)$$

3. 直角錐之底之周圍為  $a$ , 斜高為  $h$ , 則其側面積  $S = \frac{1}{2} ah$ 。4. 若正角台之兩底之周圍為  $a, b$ ; 斜高為  $h$ , 則其側面積  $S = \frac{1}{2} h(a+b)$ 。又若與其兩底等距離之截面之周圍為  $a'$ , 則  $S = ha'$ 。

5. 二相似形之面積, 與其對應之棱之平方成比例。

6. 若直圓柱之底之半徑為  $r$ , 基線為  $h$ , 則其側面積  $S = 2\pi rh$ 。

$$\text{全面積 } S' = 2\pi r(r+h)$$

7. 若直圓錐之底之半徑為  $r$ , 基線為  $h$ , 則其側面積  $S = \pi rh$ 。

$$\text{全面積 } S' = \pi r(r+h)$$

8. 若正圓台之兩底之半徑為  $r, r'$ ; 斜高為  $h$ , 則其側面積  $S = \pi(r+r')h$ 。9. 半徑為  $r$  之球之面積  $S = 4\pi r^2$ 。10. 在半徑為  $r$  之球高為  $h$  之球帶之側面積  $S = 2\pi rh$ 。11. 有  $\alpha$  度之角之月形之面積

$$S = \frac{\alpha}{360} \times \text{球面積} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$



12. 在半徑為  $r$  之球之球面三角形之面積  $S = \frac{\alpha \pi r^2}{180}$ .

但  $\alpha$  爲此球面三角形之球面餘度。

13. 巴普斯 Pappus 或葛爾廷 Guldin 之定理，一閉平面曲線，以在其平面上不與曲線相截之一直線爲軸而旋轉，其所生之面積，等於以曲線之全長〔周圍〕乘其重心所畫之圓周。

### 體積之公式

1. 若角柱之底面積爲  $S$ ，高爲  $h$ ，則其體積  $V = Sh$ 。

若其直截面之面積爲  $S'$ ，側稜爲  $l$ ，則

$$V = S'l.$$

2. 三度爲  $a, b, c$  之長方體之體積  $V = abc$ 。

3. 斜三角柱之下底爲  $S$ ，由其上底之重心至下底之距離爲  $h$ ，則

$$V = Sh.$$

4. 若以  $S'$  表斜角柱之直截面， $l$  表其兩底之重心之距離，則

$$V = S'l.$$

5. 若角錐之底爲  $S$ ，高爲  $h$ ，則

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

6. 若角台之兩底爲  $B, B'$ ；高爲  $h$ ，則

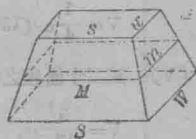
$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}).$$

7. 若第二種角台之兩底爲  $B, B'$ ；高爲

$h$ ，則體積  $V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$ 。

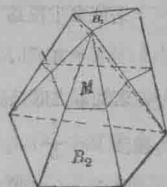
8. 若楔之背爲  $L$ ，廣爲  $b$ ，長爲  $l$ ，高爲  $h$ ，則體積  $V = \frac{1}{6}bh(2L + l)$ 。

9. 若矩角台之高爲  $h$ ，上底之二邊爲  $s, w$ ；下底之對應二邊爲  $S, W$ ；與上下兩底等距離之截面之對應二邊爲  $M, m$ ；則



$$V = \frac{1}{6}h(Ws + ws + 4Mm).$$

19. 若三角傍台之二底之面積爲  $B_1, B_2$ ，中央之截面面積爲  $M$ ；高爲  $h$ ，則其體積  $V = \frac{1}{6}h$



$$\times (B_1 + 4M + B_2).$$

11. 若四面體之相對之稜各爲  $a, a'$ ； $b, b'$ ； $c, c'$ ；又  $a', b', c'$  爲過同頂點者，則其體積

$$V = \frac{1}{144} \{ (b^2 + c^2 - a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2) a^2 a'^2 + (c^2 + a^2 - b'^2 + c'^2 + a'^2 - b^2) b^2 b'^2 + (a^2 + b^2 - c'^2 + a'^2 + b'^2 - c^2) c^2 c'^2 - (a^2 b^2 c^2 + a'^2 b'^2 c'^2 + b^2 c^2 a'^2 + c^2 a^2 b'^2) \}.$$

12. 若以  $a$  表正多面體之一稜，則

(I) 正四面體之體積  $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ .

(II) 正六面體即立方體之體積

$$V = a^3.$$

(III) 正八面體之體積  $V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$ .

(IV) 正十二面體之體積

$$V = \frac{1}{4} a^3 (15 - 7\sqrt{5}).$$

(V) 正二十面體之體積

$$V = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}).$$

13. 若圓柱之底及高為  $S$  及  $h$ , 則其體積

$$V = Sh.$$

若底之半徑為  $r$ , 則

$$V = \pi r^2 h.$$

14. 若圓錐之底及高為  $S$  及  $h$ , 則

$$\text{體積 } V = \frac{1}{3} Sh.$$

若底之半徑為  $r$ , 則

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

15. 若圓台之兩底及高為  $S, S'$  及  $h$ , 則

$$\text{體積 } V = \frac{1}{3} h (S + S' + \sqrt{SS'}).$$

若兩底之半徑各為  $r, r'$ , 則

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + rr').$$

16. 半徑為  $r$  之球之體積  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

若直徑為  $d$ , 則  $V = \frac{1}{6} \pi d^3$ .

17. 若球之半徑為  $r$ , 球帶之高為  $h$ , 球

帶之面積為  $Z$ , 則以  $Z$  為底之球分之

$$\begin{aligned} \text{體積 } V &= \frac{1}{3} Z \times h = \frac{1}{3} h \cdot 2\pi r h \\ &= \frac{2}{3} \pi r h^2. \end{aligned}$$

18. 在半徑為  $r$  之球, 有  $\alpha$  度之角之球

扇(球楔)之體積  $V = \frac{\alpha}{270} \pi r^2$ .

19. 底面積為  $S$ , 球半徑為  $r$  之球角錐

$$\text{之體積 } V = \frac{1}{3} Sr.$$

20. 在半徑為  $r$  之球之球面三角錐之

$$\text{體積 } V = \frac{\alpha \pi r^3}{540}.$$

但  $\alpha$  為其底之球面三角形之球面餘度。

21. 兩底之半徑為  $r', r''$ ; 高為  $h$  之球盤

$$\begin{aligned} \text{之積體 } V &= \pi \left( r'^2 \frac{h}{2} + r''^2 \frac{h}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} h^3 \right). \end{aligned}$$

22. 單底球盤其底之半徑為  $r$ , 高為  $h$  之

$$\text{體積 } V = \pi \left( r^2 \frac{h}{2} + \frac{1}{6} h^3 \right).$$

23. 巴普斯及葛爾廷之定理。一閉平面

曲線, 以在其平面上不與曲線相截之一直線為軸而旋轉, 其所生之體積, 等於其面積與其重心所畫之圓周之乘積。

24. 旋轉體之體積。

以正多邊形之一邊為軸而旋轉, 其所生之體積, 立表於下。

但  $R$  為正多邊形之外接圓之半徑,  $a$  為其一邊。

| 正多邊形      | 以 R 表其體積                                  | 以 a 表其體積                            |
|-----------|-------------------------------------------|-------------------------------------|
| 三角形.....  | $\frac{3}{4} \pi R^3 \sqrt{3}$            | $\frac{1}{4} \pi a^3$               |
| 四邊形.....  | $2\pi R^3 \sqrt{2}$                       | $\pi a^3$                           |
| 五邊形.....  | $\frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{5+2\sqrt{5}}$  | $\frac{1}{4} \pi a^3 (5+2\sqrt{5})$ |
| 六邊形.....  | $\frac{9}{2} \pi R^3$                     | $\frac{9}{2} \pi a^3$               |
| 八邊形.....  | $2\pi R^3 \sqrt{4+2\sqrt{2}}$             | $2\pi a^3 (3+2\sqrt{2})$            |
| 十邊形.....  | $\frac{5}{2} \pi R^3 \sqrt{5}$            | $\frac{5}{2} \pi a^3 (5+2\sqrt{5})$ |
| 十二邊形..... | $\frac{3}{2} \pi R^3 (\sqrt{6}+\sqrt{2})$ | $3\pi a^3 (7+4\sqrt{3})$            |

### 雜 部

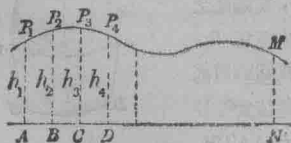
#### A. 弓形面積之近似數

若圓之弓形之弦為 k，自弓形之中點至弦之垂線為 h，則其面積之近似數

$$S' = \frac{2}{3} hk.$$

#### B. 辛伯孫 Simpson 之近似法

求不規則之曲線所圍之面積，多用辛伯孫之近似法。



求曲線  $P_1P_2\dots M$  所圍之面積，如圖所示，只見其曲線之一部分，為便利計，可取直線 AN，求  $P_1ANM$  之面積。如斯求得之數面積相加，即得全曲線之面積。分 AN 為若干等分，由等分點 A, B, C, D, ..... 作 AN 之垂線  $AP_1, BP_2, CP_3, \dots$ ，與曲線相交於  $P_1, P_2, P_3, \dots$ 。而命

$AB=BC=CD=\dots=x$ ， $AP_1=h_1$ ， $BP_2=h_2$ ， $CP_3=h_3, \dots$ ，則面積

$$P_1ANM = P_1ABP_2 + P_2BCP_3 +$$

$$P_3CDP_4 + \dots = \frac{1}{2} x(h_1+h_2) +$$

$$\frac{1}{2} x(h_2+h_3) + \frac{1}{2} x(h_3+h_4) + \dots$$

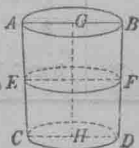
$$= x \left\{ \frac{1}{2} (h_1+h_n) + h_2+h_3+\dots \right\}$$

+ $b_{n-1}$  }。於是得次之法則。

[法則]二外垂線之和之半與中間諸垂線相加，以相隣二垂線間之距離乘之，即所求之面積。

### C. 桶之容量

1. 上大下小之桶，可基於求圓台之體積之公式，以測其容量。如圖，AB 為桶之上口之內直徑，CD 為其下底之內直徑，EF 為其中央截面之



內直徑，而 GH 為其深。此桶之中央截面分上下兩部分為兩圓台，故命  $AB=d$ ， $CD=d_1$ ， $EF=d_2$ ， $GH=h$ ，則由前求圓台之體積之公式，而得桶之體積

$$= \frac{\pi}{3} \times \frac{h}{2} \times \frac{d^2 + dd_2 + d_2^2}{4} +$$

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{h}{2} \times \frac{d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2}{4}$$

$$= \frac{h}{2} \{ (d+d_2)^2 + (d_1+d_2)^2$$

$$- (d+d_1)d_2 \} \frac{\pi}{12}$$

然 1 升 = 31.6 立方寸，

故 1 石 = 3.16 立方尺。

故若桶之直徑以尺為單位，則桶之容量

$$= \frac{h}{2} \{ (d+d_2)^2 + (d_2+d_1)^2 -$$

$$(d+d_1)d_2 \} \times \frac{\pi}{12 \times 3.16} \text{ 石。}$$

又因  $\pi = 3.1416$ ，故

$$\frac{\pi}{12 \times 3.16} = .0802109.$$

於是得次之法則。

[法則]命上口之內直徑與中央截面之內直徑之和之平方以 A 表之，中央截面之內直徑與下底之內直徑之和之平方以 B 表之，上口之內直徑與下底之內直徑之和與中央截面內直徑之乘積以 C 表之。由 A, B 之和減去 C，其差以深及 .0802109 乘之，以二除之即得桶之容量。

[例]有木桶其上口之內直徑為 7 尺，中央截面之內直徑為 6 尺 4 寸，下底之內直徑為 5 尺，深為 8 尺，問此桶能容水若干石。

$$\text{茲 } A = (7 + 6.4)^2 = 179.56,$$

$$B = (6.4 + 5)^2 = 129.96,$$

$$C = (7 + 5)6.4 = 76.8,$$

$$A + B - C = 179.56 + 129.96 - 76.8$$

$$= 232.72.$$

$$\text{故桶之容量} = \frac{232.72 \times 8 \times .0802109}{2}$$

$$= 74.667 \dots \text{石}$$

即此桶能容水 74 石 6 斗 6 升 7 合。

2. 上下較小中央突大之桶，亦可基於求圓台之體積之公式以測其容量。如圖，

命最大截面之

內直徑  $AA'$  為

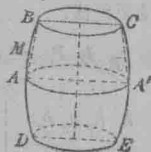
$2R$ ，其兩底之

內直徑為  $2r$ ，

桶高為  $h$ ，則桶

之體積實等於

圓台  $AA'CB$



之二倍。故若以公式

$$\frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2) \dots \dots (1).$$

以算其體，則將由AMB所生之體積之一小部分棄去，故所求得之體積比實際之體積為小。若於上之公式以  $R^2$  代  $Rr$ ，

則為  $\frac{1}{3} \pi h(2R^2 + r^2) \dots \dots (2).$

而由此公式所求得之體積，則比實際之體積為大。

[例]有桶深 3 呎，其最大截面之圓周為 10 呎，兩底之圓周均為 8 呎，而一呎則含 277.274 立方呎，問此桶之容量如何。由公式(1)求得之容量為 121 呎強。

又由公式(2)求得之容量為 131 呎強。

而由次之公式

$$V = \frac{1}{3} \pi h \left\{ 2R^2 + r^2 - \frac{1}{3} (R^2 - r^2) \right\}$$

所求得之容量為 125 呎，故較前之二公式所求得者為精密。

## 三角法公式

### 平面部

### 測角法

● 度與法度之比較。

$$D = G - \frac{G}{10}, \quad G = D + \frac{D}{9}.$$

● 分與法分之比較，  $27 \mu = 50m.$

● 秒與法秒之比較，  $81 \sigma = 250s.$

● 度與弧度之比較，  $180\theta = \pi x.$

● 法度與弧度之比較，  $200\theta = \pi y.$

### 三角函數之定義

●  $\sin A = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ ， ●  $\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ 。

●  $\cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ ， ●  $\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ 。

●  $\tan A = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ ， ●  $\cot A = \frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ 。

●  $\text{vers} A = 1 - \cos A$ ， ●  $\text{covers} A = 1 - \sin A$ 。

### 三角函數之基本關係

●  $\sin A \times \csc A = 1$ 。

●  $\cos A \times \sec A = 1$ 。

●  $\tan A \times \cot A = 1$ 。

●  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 。

●  $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$ 。

●  $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$ 。

●  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ， ●  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ 。

- $\sin A < \tan A < \sec A$ .
- $\cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A$ .

### 餘角之三角函數

- $\sin(90^\circ - A) = \cos A$ .
- $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ .
- $\tan(90^\circ - A) = \cot A$ .

[注意]  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\sec A$ ,  $\cot A$  爲  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$  之倒數, 故從略。

### 補角之三角函數

- $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ .
- $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$ .
- $\tan(180^\circ - A) = -\tan A$ .

### 負角之三角函數

- $\sin(-A) = -\sin A$ .
- $\cos(-A) = \cos A$ .
- $\tan(-A) = -\tan A$ .

### $90^\circ + A$ 之三角函數

- $\sin(90^\circ + A) = \cos A$ .
- $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$ .
- $\tan(90^\circ + A) = -\operatorname{cosec} A$ .

### $180^\circ + A$ 之三角函數

- $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$ .
- $\cos(180^\circ + A) = -\cos A$ .
- $\tan(180^\circ + A) = \tan A$ .

### $270^\circ - A$ 之三角函數

- $\sin(270^\circ - A) = -\cos A$ .
- $\cos(270^\circ - A) = -\sin A$ .
- $\tan(270^\circ - A) = \cot A$ .

### $270^\circ + A$ 之三角函數

- $\sin(270^\circ + A) = -\cos A$ .
- $\cos(270^\circ + A) = \sin A$ .
- $\tan(270^\circ + A) = -\cot A$ .

### $360^\circ - A$ 之三角函數

- $\sin(360^\circ - A) = -\sin A$ .
- $\cos(360^\circ - A) = \cos A$ .
- $\tan(360^\circ - A) = -\tan A$ .

### 二角之三角函數

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ .
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ .
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ .
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ .
- $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ .
- $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ .
- $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$ .
- $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A - \cot B}$ .
- $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$ .
- $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$ .
- $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$ .

- $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B.$
- $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$
- $\cos(A-B)\cos(A+B) = \cos^2 A - \sin^2 B$   
 $= \cos^2 B - \sin^2 A.$
- $\sin C + \sin D = 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}.$
- $\sin C - \sin D = 2\cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$
- $\cos C + \cos D = 2\cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}.$
- $\cos C - \cos D = -2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$

### 三角之三角函數

- $\sin(A+B+C)$   
 $= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C$   
 $+ \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C.$
- $\cos(A+B+C)$   
 $= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C$   
 $- \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C.$
- $\tan(A+B+C)$   
 $\frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}.$
- $\cot(A+B+C)$   
 $\frac{\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A - 1}.$
- 若  $A+B+C=90^\circ$ , 則  
 $1 = \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A$   
 $\cot A \cot B \cot C = \cot A + \cot B + \cot C.$   
若  $A+B+C=180^\circ$ , 則  
 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$   
 $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$

### 倍角之三角函數

- $\sin 2A = 2\sin A \cos A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$   
 $= 1 - 2\sin^2 A.$
- $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}.$
- $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}.$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$
- $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$
- $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}.$

### 分角之三角函數

- $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$
- $\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$
- $2\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}.$
- $2\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A}.$
- $\sqrt{2} \sin \left( \frac{A}{2} + 45^\circ \right) = \pm \sqrt{1 + \sin A}.$
- $\sqrt{2} \cos \left( \frac{A}{2} + 45^\circ \right) = \pm \sqrt{1 - \sin A}.$
- $\tan \frac{A}{2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A})}{\tan A}$   
 $= (-1 \pm \sec A) \cot A.$

### 一般角之三角函數

$$\bullet \sin\{n \cdot 180^\circ + (-1)^n A\} = \sin A.$$

$$\bullet \cos(n \cdot 360^\circ \pm A) = \cos A.$$

$$\bullet \tan(n \cdot 180^\circ + A) = \tan A.$$

### 三角形四邊形等

$$\bullet \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\bullet a = b \cos C + c \cos B$$

$$\bullet b = c \cos A + a \cos C$$

$$\bullet c = a \cos B + b \cos A$$

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\bullet b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$\bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\bullet \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\bullet \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\bullet \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

以下命  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ .

$$\bullet \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\bullet \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\bullet \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\bullet \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\bullet \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\bullet \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\bullet \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\bullet \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\bullet \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\bullet (b+c) \sin \frac{1}{2} A = a \cos \frac{1}{2} (B-C)$$

$$\bullet (c+a) \sin \frac{1}{2} B = b \cos \frac{1}{2} (C-A)$$

$$\bullet (a+b) \sin \frac{1}{2} C = c \cos \frac{1}{2} (A-B)$$

$$\bullet \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} = \tan \frac{B-C}{2}$$

$$\bullet \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2} = \tan \frac{C-A}{2}$$

$$\bullet \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$$

$$\text{但 } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\bullet r = (s-a) \tan \frac{A}{2}, r_1 = s \tan \frac{A}{2}$$

$$\bullet r_2 = s \tan \frac{B}{2}, r_3 = s \tan \frac{C}{2}$$

$$\bullet A \text{ 角之內二等線} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$\bullet A \text{ 角之外二等線} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b-c}$$

$$\bullet a \text{ 邊之中線} = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc \cos A)}$$

$$\bullet \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \Delta$$



$$=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$$

$$= \frac{1}{2} h_a a = \frac{abc}{4R}$$

〔 $\Delta$ =三角形面積〕

$$\bullet R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4\Delta}$$

●圓之內接四邊形之面積

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

●任意四邊形之面積=

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}}$$

$$\bullet \text{外切四邊形之面積} = \sqrt{abcd} \cdot \sin \frac{A+C}{2}$$

$$\bullet \text{內接且外切四邊形之面積} = \sqrt{abcd}$$

$$\bullet \text{正多邊形之邊心距 } r = a / 2 \tan \frac{\pi}{n}$$

●正多邊形之面積

$$= \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = nr^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

### 特麥物之定理

De Moivre's theorem

$$\bullet (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\bullet \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$\bullet \sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

### 三角函數之展開

$$\bullet \sin n\theta = n \sin \theta - \frac{n(n^2-1)}{3!} \sin^3 \theta$$

$$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!} \sin^5 \theta \dots$$

$$\bullet \cos n\theta = \cos \theta \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{2!} \sin^2 \theta \right.$$

$$\left. + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!} \sin^4 \theta - \dots \right\}$$

### 三角函數之指數值

$$\bullet \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\bullet \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\bullet i \tan \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$$

### 級數之和

$$\bullet \cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha + 4\beta) + \dots + \cos\{\alpha + 2(n-1)\beta\} = \frac{\cos\{\alpha + (n-1)\beta\} \sin n\beta}{\sin \beta}$$

$$\bullet \sin \alpha + \cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha + 4\beta) + \dots + \sin\{\alpha + 2(n-1)\beta\} = \frac{\sin\{\alpha + (n-1)\beta\} \sin n\beta}{\sin \beta}$$

$$\bullet \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left\{\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = 0$$

$$\bullet \sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left\{\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = 0$$

## 三角函數式之因數分解

$$\bullet \text{ 若 } n \text{ 爲偶數, 則 } x^n - 1 = (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right) \\ \times \dots \left\{ x^2 - 2x\cos\frac{n-4}{n}\pi + 1 \right\} \left\{ x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1 \right\}.$$

$$\bullet \text{ 若 } n \text{ 爲奇數, 則 } x^n - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right) \\ \times \dots \left\{ x^2 - 2x\cos\frac{n-3}{n}\pi + 1 \right\} \left\{ x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1 \right\}.$$

$$\bullet \text{ 若 } n \text{ 爲偶數, 則 } x^n + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right) \\ \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{n} + 1\right) \times \dots \left(x^2 - 2x\cos\frac{n-3}{n}\pi + 1\right) \\ \left(x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right).$$

$$\bullet \text{ 若 } n \text{ 爲奇數, 則 } x^n + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right) \\ \times \dots \left(x^2 - 2x\cos\frac{n-4}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right).$$

$$\bullet x^n - x^{-n} = (x - x^{-1})\left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \\ \times \dots \left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

$$\bullet x^n + x^{-n} = \left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{3\pi}{2n}\right) \dots \left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right).$$

$$\bullet x^{2n} - 2x^n \cos\theta + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\theta}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi + \theta}{n} + 1\right) \\ \left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi + \theta}{n} + 1\right) \times \dots \left\{ x^2 - 2x\cos\frac{(2n-4)\pi + \theta}{n} + 1 \right\} \\ \left\{ x^2 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi + \theta}{n} + 1 \right\}.$$

$$\bullet x^n + x^{-n} - 2\cos n\theta = \left(x + x^{-1} - 2\cos\theta\right) \left\{ x + x^{-1} - 2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \right\} \times \dots \\ \left\{ x + x^{-1} - 2\cos\left(\theta + \frac{2n-2}{n}\pi\right) \right\}.$$

### 球面部

#### 基本公式

- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ .
- $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$ .
- $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ .

#### $\sin A$ 之公式

- $\sin A = \{ \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)} \} \div (\sin b \sin c)$   
 $= \frac{2n}{\sin b \sin c}$ . 但  $2s = a + b + c$  及  
 $n = \{ \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c) \}^{\frac{1}{2}}$ .

#### 餘切正弦之公式

- $\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C$ .
- $\cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C$ .
- $\cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A$ .
- $\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A$ .
- $\cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B$ .
- $\cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B$ .

#### 正弦比例

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{2n}{\sin a \sin b \sin c}$$

#### 半角之公式

- $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$ .
- $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$ .
- $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$ .

#### 半弧之公式

- $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}$ .
- $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\sin B \sin C}}$ .
- $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B) \cos(S-C)}}$ .

[注意]  $2S = A + B + C$ .

$B, C$  角及  $b, c$  弧之公式可同樣推得。

#### 納氏比例式

Napier's analogies

- $\tan \frac{1}{2} (A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \cot \frac{C}{2}$ .
- $\tan \frac{1}{2} (A-B) = \frac{\sin (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (a+b)} \cot \frac{C}{2}$ .
- $\tan \frac{1}{2} (a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B)} \tan \frac{c}{2}$ .
- $\tan \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} (A+B)} \tan \frac{c}{2}$ .

#### 蓋氏比例式

Gauss's Analogies.

- $\sin \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} c =$   
 $\cos \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$ .

$$\bullet \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C.$$

$$\bullet \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C.$$

$$\bullet \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C.$$

### 球面直角三角形

[命 C 爲直角]

$$\bullet \left. \begin{aligned} \sin b &= \sin B \sin c \\ \sin a &= \sin A \sin c \end{aligned} \right\}$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} \tan a &= \cos B \tan c \\ \tan b &= \cos A \tan c \end{aligned} \right\}$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} \tan a &= \tan A \sin b \\ \tan b &= \tan B \sin a \end{aligned} \right\}$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} \tan A \tan B &= \frac{1}{\cos c} \\ \cot A \cot B &= \cos c \end{aligned} \right\}$$

### 內切圓傍切圓外接圓

$$\bullet \tan r = \frac{n}{\sin s} = \tan \frac{A}{2} \sin(s-a) \\ = \frac{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} \sin a \\ = \frac{N}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}.$$

$$\text{但 } N = \{ -\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C) \}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\bullet \cot r = \frac{1}{2N} \{ \cos S + \cos(S-A) + \cos(S-B) + \cos(S-C) \}.$$

$$\bullet \tan r_1 = \frac{n}{\sin(s-a)} = \tan \frac{A}{2} \sin s \\ = \frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} \sin a \\ = \frac{N}{2 \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}.$$

$$\bullet \cot r_1 = \frac{1}{2N} \{ -\cos S - \cos(S-A) + \cos(S-B) + \cos(S-C) \}.$$

$$\bullet \tan R = -\frac{\cos S}{N} = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\sin A \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} \\ = \frac{\tan \frac{1}{2}a}{\cos(S-A)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n} \\ = \frac{1}{2n} \{ \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) - \sin s \}.$$

$$\bullet \tan R_1 = \frac{\cos(S-A)}{N} \\ = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\sin A \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c} = -\frac{\tan \frac{1}{2}a}{\cos S} \\ = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{n} \\ = \frac{1}{2n} \{ \sin s - \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) \}.$$

$$\bullet (\cot r + \tan R)^2 \\ = \frac{1}{4n^2} (\sin a + \sin b + \sin c)^2 - 1.$$

$$\bullet (\cot r_1 - \tan R)^2 \\ = \frac{1}{4n^2} (\sin b + \sin c - \sin a)^2 - 1.$$

面積

● 球面多角形 =  $\{ \Sigma - (n-2)\pi \} r^2$ ;  
但  $\Sigma$  為多角形之各角之和。

● 球面三角形  $ABC = (A+B+C-\pi)r^2$ 。

卡格腦之定理 Cagnoli's theorem.

●  $\sin \frac{1}{2} E = \frac{\sqrt{\{ \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c) \}}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$ , 但  $E = A+B+C-\pi$ 。

幼氏之定理 l'Huilier's theorem.

●  $\tan \frac{1}{4} E = \sqrt{\{ \tan \frac{1}{2} s \tan \frac{1}{2} (s-a) \tan \frac{1}{2} (s-b) \tan \frac{1}{2} (s-c) \}}$ 。

三角法諸表

三角函數相互之關係

|                                 | $\sin \theta = x$          | $\cos \theta = x$          | $\tan \theta = x$          | $\cot \theta = x$          | $\sec \theta = x$          | $\operatorname{cosec} \theta = x$ |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| $\sin \theta =$                 | $x$                        | $\sqrt{(1-x^2)}$           | $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$ | $\frac{1}{x}$                     |
| $\cos \theta =$                 | $\sqrt{(1-x^2)}$           | $x$                        | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$        |
| $\tan \theta =$                 | $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ | $x$                        | $\frac{1}{x}$              | $\sqrt{(x^2-1)}$           | $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$        |
| $\cot \theta =$                 | $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $x$                        | $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $\sqrt{(x^2-1)}$                  |
| $\sec \theta =$                 | $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $\sqrt{(1+x^2)}$           | $\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$ | $x$                        | $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$        |
| $\operatorname{cosec} \theta =$ | $\frac{1}{x}$              | $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$ | $\sqrt{(1+x^2)}$           | $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $x$                               |

## 逆三角函數相互之關係

|                               | $\sin^{-1}$                | $\cos^{-1}$                | $\tan^{-1}$                | $\cot^{-1}$                | $\sec^{-1}$                | $\operatorname{cosec}^{-1}$ |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $\sin^{-1}x=$                 | $x$                        | $\sqrt{(1-x^2)}$           | $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$               |
| $\cos^{-1}x=$                 | $\sqrt{(1-x^2)}$           | $x$                        | $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$  |
| $\tan^{-1}x=$                 | $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $x$                        | $\frac{1}{x}$              | $\sqrt{(1+x^2)}$           | $\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$  |
| $\cot^{-1}x=$                 | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $x$                        | $\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$ | $\sqrt{(1+x^2)}$            |
| $\sec^{-1}x=$                 | $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$ | $\frac{1}{x}$              | $\sqrt{(x^2-1)}$           | $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $x$                        | $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$  |
| $\operatorname{cosec}^{-1}x=$ | $\frac{1}{x}$              | $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $\sqrt{(x^2-1)}$           | $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $x$                         |

## 雙曲線函數相互之關係

|                            | $\sinh u=x$                | $\cosh u=x$                | $\tanh u=x$                | $\coth u=x$                | $\operatorname{sech} u=x$  | $\operatorname{cosech} u=x$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $\sinh u=$                 | $x$                        | $\sqrt{(x^2-1)}$           | $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ | $\frac{1}{x}$               |
| $\cosh u=$                 | $\sqrt{(1+x^2)}$           | $x$                        | $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$  |
| $\tanh u=$                 | $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$ | $x$                        | $\frac{1}{x}$              | $\sqrt{(1-x^2)}$           | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$  |
| $\coth u=$                 | $\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $x$                        | $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $\sqrt{(1+x^2)}$            |
| $\operatorname{sech} u=$   | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ | $\frac{1}{x}$              | $\sqrt{(1-x^2)}$           | $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$ | $x$                        | $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$  |
| $\operatorname{cosech} u=$ | $\frac{1}{x}$              | $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ | $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ | $\sqrt{(x^2-1)}$           | $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ | $x$                         |

### 三角函數之符號及其變化

| 象限<br>函數 | 第一 |                | 第二      |                  | 第三      |                  | 第四       |                  |
|----------|----|----------------|---------|------------------|---------|------------------|----------|------------------|
|          | 正弦 | 正              | 由 0 至 1 | 正                | 由 1 至 0 | 負                | 由 0 至 -1 | 負                |
| 餘割       |    | 由 $\infty$ 至 1 |         | 由 1 至 $\infty$   |         | 由 $-\infty$ 至 -1 |          | 由 -1 至 $-\infty$ |
| 餘弦       |    | 由 1 至 0        | 負       | 由 0 至 -1         | 負       | 由 -1 至 0         | 正        | 由 0 至 1          |
| 正割       |    | 由 1 至 $\infty$ |         | 由 $-\infty$ 至 -1 |         | 由 -1 至 $-\infty$ |          | 由 $\infty$ 至 1   |
| 正切       | 正  | 由 0 至 $\infty$ | 負       | 由 $-\infty$ 至 0  | 正       | 由 0 至 $\infty$   | 負        | 由 $-\infty$ 至 0  |
| 餘切       |    | 由 $\infty$ 至 0 |         | 由 0 至 $-\infty$  |         | 由 $\infty$ 至 0   |          | 由 0 至 $-\infty$  |

### 三角函數之值

| 函數 \ 度 | 0°       | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°      | 120°                  | 135°                  | 150°                  | 180°     |
|--------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| sin.   | 0        | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | $\frac{1}{2}$         | 0        |
| cos.   | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0        | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1       |
| tan.   | 0        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$ | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0        |
| cot.   | $\infty$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0        | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1                    | $-\sqrt{3}$           | $\infty$ |
| sec.   | 1        | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$           | 2                    | $\infty$ | -2                    | $-\sqrt{2}$           | $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | -1       |
| csc.c  | $\infty$ | 2                    | $\sqrt{2}$           | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1        | $\frac{2}{\sqrt{3}}$  | $\sqrt{2}$            | 2                     | $\infty$ |

## 特別角之三角函數

|                             | sin                             | cos                             | tan                               | cot                               |                              |
|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$   | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$   | $2-\sqrt{3}$                      | $2+\sqrt{3}$                      | $\frac{5}{12}\pi = 75^\circ$ |
| $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$          | $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{4}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$ | $\sqrt{5}+2\sqrt{5}$              | $\frac{2}{5}\pi = 72^\circ$  |
| $\frac{1}{5} = 36^\circ$    | $\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$          | $\sqrt{5}-\sqrt{5}$               | $\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ | $\frac{3}{10}\pi = 54^\circ$ |
|                             | cos                             | sin                             | cot                               | tan                               |                              |

## 特別角之正弦

|                                     |                                                                                       |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(3^\circ = \frac{1}{60}\pi)$   | $\frac{1}{16} \{ (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}} \}$ |
| $\sin(6^\circ = \frac{1}{30}\pi)$   | $\frac{1}{8}(\sqrt{30}-6\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)$                                         |
| $\sin(9^\circ = \frac{1}{20}\pi)$   | $\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$                                  |
| $\sin(12^\circ = \frac{1}{15}\pi)$  | $\frac{1}{8}(\sqrt{10}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$                                 |
| $\sin(15^\circ = \frac{1}{12}\pi)$  | $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$                                                      |
| $\sin(18^\circ = \frac{1}{10}\pi)$  | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$                                                             |
| $\sin(21^\circ = \frac{7}{60}\pi)$  | $\frac{1}{16} \{ 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1) \}$ |
| $\sin(24^\circ = \frac{2}{15}\pi)$  | $\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10}-2\sqrt{5})$                                 |
| $\sin(27^\circ = \frac{3}{20}\pi)$  | $\frac{1}{8}(2\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$                                  |
| $\sin(30^\circ = \frac{1}{6}\pi)$   | $\frac{1}{2}$                                                                         |
| $\sin(33^\circ = \frac{11}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16} \{ (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}} \}$ |
| $\sin(36^\circ = \frac{1}{5}\pi)$   | $\frac{1}{4}\sqrt{10}-2\sqrt{5}$                                                      |
| $\sin(39^\circ = \frac{13}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16} \{ (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}} \}$ |



|                                     |                                                                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(42^\circ = \frac{7}{30}\pi)$  | $\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5+1})$                                    |
| $\sin(45^\circ = \frac{1}{4}\pi)$   | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$                                                            |
| $\sin(48^\circ = \frac{4}{15}\pi)$  | $\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15-\sqrt{3}})$                            |
| $\sin(51^\circ = \frac{17}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3+1})\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6-\sqrt{2}})(\sqrt{5+1})\}$ |
| $\sin(54^\circ = \frac{3}{10}\pi)$  | $\frac{1}{4}(\sqrt{5+1})$                                                        |
| $\sin(57^\circ = \frac{19}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3+1})\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6-\sqrt{2}})(\sqrt{5-1})\}$ |
| $\sin(60^\circ = \frac{1}{3}\pi)$   | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$                                                            |
| $\sin(63^\circ = \frac{7}{20}\pi)$  | $\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10-\sqrt{2}})$                             |
| $\sin(66^\circ = \frac{11}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5+1})$                                    |
| $\sin(69^\circ = \frac{23}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{(\sqrt{6+\sqrt{2}})(\sqrt{5+1})+2(\sqrt{3-1})\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$ |
| $\sin(72^\circ = \frac{2}{5}\pi)$   | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$                                                 |
| $\sin(75^\circ = \frac{5}{12}\pi)$  | $\frac{1}{4}(\sqrt{6+\sqrt{2}})$                                                 |
| $\sin(78^\circ = \frac{13}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5-1})$                                    |
| $\sin(81^\circ = \frac{9}{20}\pi)$  | $\frac{1}{8}(\sqrt{10+\sqrt{2}}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})$                             |
| $\sin(84^\circ = \frac{14}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{15+\sqrt{3}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$                            |
| $\sin(87^\circ = \frac{29}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3+1})\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6-\sqrt{2}})(\sqrt{5-1})\}$ |

## II. 數學用諸表

## 數字讀法 I.

|    | Hebrew.  | Arabic.   | Sanscrit. | Graek.   | Latin.  | H.German. | A.Saxon |
|----|----------|-----------|-----------|----------|---------|-----------|---------|
| 1  | echad    | wahad     | eka       | ΈΙΣ      | unus    | ein       | an      |
| 2  | shnagim  | ethnan    | dwi       | δύο      | duo     | zwei      | two     |
| 3  | shloshta | thalathat | tri       | τρείς    | tres    | drei      | three   |
| 4  | arbba    | arbaat    | chatur    | τέσσαρες | quatuor | viuar     | feower  |
| 5  | khamish  | khamzat   | panchan   | πέντε    | quinque | finfe     | fif     |
| 6  | shisha   | sittat    | shash     | ἕξ       | sex     | sehs      | six     |
| 7  | shiva    | sabaat    | saptan    | ἑπτέ     | septem  | sibun     | sesfan  |
| 8  | shmona   | thamaniat | ashtan    | ὀκτώ     | octo    | ohto      | eahta   |
| 9  | tisha    | tessaat   | novan     | ἐννέα    | novem   | niguni    | nigon   |
| 10 | asara    | aaskerat  | dasan     | δέκα     | decem   | tehan     | tya     |

## 數字讀法 II.

|    | 中 | 國 | 日 | 本  | 英     | 法       | 德      |
|----|---|---|---|----|-------|---------|--------|
| 1  | 一 | 壹 | 一 | イチ | one   | un, une | eins   |
| 2  | 二 | 貳 | 二 | ニ  | two   | deux    | zwei   |
| 3  | 三 | 叁 | 三 | サン | three | trois   | drei   |
| 4  | 四 | 肆 | 四 | シ  | four  | quatre  | vier   |
| 5  | 五 | 伍 | 五 | ゴ  | five  | cinq    | fünf   |
| 6  | 六 | 陸 | 六 | ロク | six   | six     | sechs  |
| 7  | 七 | 柒 | 七 | シチ | seven | sept    | sieben |
| 8  | 八 | 捌 | 八 | ハチ | eight | huit    | acht   |
| 9  | 九 | 玖 | 九 | ク  | nine  | neuf    | neun   |
| 10 | 十 | 拾 | 十 | ジウ | ten   | dix     | zehn   |



例 1. 三月十五日與七月十五日之間有幾日?

解。今欲知此，檢與上端書由三月者同行，及與右側書至七月者同列之方格內之數字，則知為 122，是為所求之日數。

例 2. 四月十日與九月二十五日之間有幾日?

解。依例 1 之方法知四月十日與九月十日之間有 153 日。而加  $25 - 10 = 15$  於其內，得 168，是為所求之日數。

例 3. 由九月三十日至翌年五月十日之間

有幾日?

解。與上端書由九月者同行，且與右側書至五月者同列之方格內之數字為 242 故知由九月三十日至翌年五月三十日之間有 242 日。然今求至五月十日之日數，故減去  $30 - 10$  即 20 得 222 日，是為所求之日數。

注意 上表為依平年所造之表，故若所求之日數之間含閏年之二月時，則必須尚加 1。

### 時差與經差之關係

| 由 經 差 求 時 差 |                | 由 時 差 求 經 差 |       |
|-------------|----------------|-------------|-------|
| 經 差         | 時 差            | 時 差         | 經 差   |
| ° ' "       | 小時 分 秒         | 小時 分 秒      | ° ' " |
| 360         | 24             | 24          | 360   |
| 1           | 4              | 1           | 15    |
| 30          | 2              | 30          | 7 30  |
| 1           | 4              | 1           | 15    |
| 30          | 2              | 30          | 7 30  |
| 1           | $\frac{1}{15}$ | 1           | 15    |



| 6  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 7  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 8  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 07 | 01 | 03 | 01 | 21 | 21 | 07 | 01 | 03 | 07 | 01 | 03 | 07 | 07 | 11 | 07 | 03 | 03 | 17 | 01 | 09 | 01 | 09 | 11 | 19 | 01 | 09 | 07 | 03 | 23 |
| 11 | 13 | 11 | 11 | 27 | 29 | 19 | 03 | 23 | 11 | 13 | 09 | 11 | 09 | 17 | 17 | 07 | 17 | 23 | 07 | 11 | 11 | 19 | 17 | 23 | 13 | 23 | 13 | 07 | 29 |
| 29 | 21 | 17 | 17 | 49 | 47 | 37 | 09 | 27 | 17 | 19 | 21 | 13 | 21 | 33 | 23 | 21 | 23 | 29 | 19 | 17 | 17 | 21 | 29 | 29 | 21 | 27 | 19 | 19 | 33 |
| 37 | 31 | 21 | 23 | 51 | 51 | 53 | 19 | 29 | 47 | 27 | 27 | 19 | 31 | 51 | 29 | 39 | 27 | 41 | 27 | 39 | 23 | 31 | 53 | 31 | 27 | 29 | 31 | 21 | 41 |
| 43 | 33 | 29 | 29 | 69 | 53 | 59 | 33 | 33 | 49 | 39 | 29 | 29 | 33 | 57 | 37 | 43 | 41 | 53 | 33 | 53 | 47 | 33 | 63 | 43 | 37 | 41 | 37 | 31 | 51 |
| 47 | 43 | 47 | 37 | 73 | 63 | 61 | 37 | 41 | 59 | 43 | 51 | 37 | 49 | 59 | 41 | 49 | 53 | 67 | 37 | 59 | 61 | 37 | 69 | 47 | 39 | 47 | 41 | 37 | 63 |
| 53 | 51 | 57 | 43 | 81 | 69 | 73 | 61 | 57 | 61 | 57 | 59 | 43 | 51 | 77 | 47 | 69 | 57 | 73 | 49 | 69 | 67 | 43 | 77 | 61 | 43 | 63 | 47 | 39 | 69 |
| 67 | 63 | 63 | 53 | 91 | 71 | 79 | 63 | 63 | 67 | 69 | 77 | 47 | 69 | 81 | 49 | 73 | 59 | 77 | 51 | 81 | 71 | 63 | 87 | 67 | 63 | 69 | 53 | 49 | 71 |
| 73 | 73 | 69 | 59 |    | 77 | 89 | 79 | 69 | 71 | 79 | 87 | 53 | 93 | 87 | 59 | 81 | 89 | 79 | 63 | 87 | 79 | 69 | 89 |    | 73 | 77 | 61 | 61 | 99 |
| 79 | 97 | 71 | 61 |    | 81 | 91 | 81 | 71 | 77 | 93 | 83 |    | 89 | 61 | 87 | 93 | 83 | 93 | 89 | 91 | 73 |    |    | 81 | 81 | 79 | 63 |    |    |
| 89 | 99 | 77 | 67 |    | 99 |    | 91 | 83 | 83 |    | 37 |    | 99 | 73 | 91 |    |    |    | 93 |    | 87 |    |    | 97 | 89 | 83 | 67 |    |    |
| 91 |    | 87 | 73 |    |    |    | 93 | 99 | 91 |    |    |    |    |    | 77 | 99 |    |    |    |    | 91 |    |    | 99 | 93 |    | 87 |    |    |
|    |    | 99 | 79 |    |    |    |    | 97 |    |    |    |    |    |    | 83 |    |    |    |    |    | 93 |    |    | 99 |    |    | 93 |    |    |
|    |    |    | 89 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 89 |    |    |    |    |    | 97 |    |    |    |    |    |    |    |    |
|    |    |    | 97 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 91 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

| 9  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 10 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 01 | 03 | 03 | 11 | 03 | 11 | 01 | 19 | 03 | 01 | 07 | 03 | 11 | 01 | 27 | 01 | 01 | 09 | 31 | 03 |
| 07 | 09 | 09 | 19 | 13 | 21 | 13 | 21 | 11 | 07 | 09 | 11 | 23 | 03 | 29 | 13 | 07 | 11 | 37 | 09 |
| 11 | 27 | 21 | 23 | 19 | 33 | 19 | 33 | 17 | 23 | 37 | 33 | 43 | 13 | 33 | 29 | 13 | 23 | 47 | 37 |
| 13 | 33 | 27 | 37 | 21 | 39 | 23 | 39 | 29 | 29 | 39 | 39 | 47 | 21 | 53 | 31 | 27 | 29 | 53 | 39 |
| 29 | 37 | 39 | 41 | 31 | 47 | 29 | 43 | 33 | 31 | 61 | 41 | 53 | 31 | 57 | 59 | 31 | 33 | 59 | 49 |
| 41 | 51 | 41 | 43 | 33 | 51 | 31 | 49 | 39 | 41 | 67 | 51 | 59 | 33 | 59 | 67 | 39 | 39 | 61 | 57 |
| 43 | 57 | 57 | 49 | 37 | 87 | 43 | 67 | 51 | 49 | 69 | 59 | 67 | 37 | 63 | 89 | 51 | 53 | 67 | 73 |
| 49 | 61 | 77 | 71 | 39 |    | 49 | 69 | 57 | 67 | 79 | 63 | 71 | 43 | 77 | 97 | 57 | 71 | 83 | 79 |
| 59 | 73 | 81 | 77 | 61 |    | 61 | 81 | 59 | 73 | 91 | 69 | 73 | 57 | 87 |    | 63 | 81 | 89 | 87 |
| 67 | 81 | 83 | 91 | 63 |    | 77 | 87 | 71 |    | 93 | 77 | 89 | 69 | 99 |    | 67 | 89 | 91 | 93 |
| 91 | 87 | 93 | 97 | 67 |    | 79 | 91 | 83 |    | 99 | 81 |    | 91 |    |    | 87 | 99 |    |    |
|    | 99 |    |    | 73 |    | 89 |    | 87 |    | 93 | 99 |    |    |    |    | 91 |    |    |    |
|    |    |    | 79 |    |    | 97 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|    |    |    | 91 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|    |    |    | 97 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

此表含 1 至 11000 之間諸素數。用此表之法，先求千位於大字，求百位於大字下之上列，次二位之數則求於各行。例如求 2633 爲素數否。先檢表中之大字 2，次求大字 2 下之 6，而該行內有 33，故知 2633 爲素數，又如求 8754 爲素數否。先檢表中之大字 8，次求大字 8 之下之 7，而該行內無 54，故知 8754 不爲素數。

逐 乘

|                                             |                     |                                         |                      |
|---------------------------------------------|---------------------|-----------------------------------------|----------------------|
| $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ | $0! = 1$            | $1! = 1$                                | $11! = 39\ 916\ 800$ |
| 之 $n$ 個因數之積謂                                | $2! = 2$            | $12! = 479\ 001\ 600$                   |                      |
| 之逐乘 $n$ 或階乘                                 | $3! = 6$            | $13! = 6\ 227\ 020\ 800$                |                      |
| $n$ , 以 $n!$ 或 $[n]$ 表之.                    | $4! = 24$           | $14! = 87\ 178\ 291\ 200$               |                      |
|                                             | $5! = 120$          | $15! = 1\ 307\ 674\ 368\ 000$           |                      |
|                                             | $6! = 720$          | $16! = 20\ 922\ 789\ 888\ 000$          |                      |
|                                             | $7! = 5\ 040$       | $17! = 355\ 687\ 428\ 096\ 000$         |                      |
|                                             | $8! = 40\ 320$      | $18! = 6\ 402\ 373\ 705\ 728\ 000$      |                      |
|                                             | $9! = 362\ 880$     | $19! = 121\ 645\ 100\ 408\ 832\ 000$    |                      |
|                                             | $10! = 3\ 628\ 800$ | $20! = 2\ 432\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000$ |                      |

70 至 10000 之非素數之因數

| 數   | 因 數    | 數   | 因 數     | 數   | 因 數     | 數   | 因 數       |
|-----|--------|-----|---------|-----|---------|-----|-----------|
| 75  | 5 5 3  | 231 | 11 7 3  | 392 | 8 7 7   | 648 | 9 9 8     |
| 98  | 7 7 2  | 242 | 11 11 2 | 396 | 11 9 4  | 672 | 12 8 7    |
| 105 | 7 5 3  | 243 | 9 9 3   | 405 | 9 9 5   | 675 | 9 5 5 3   |
| 112 | 8 7 2  | 245 | 7 7 5   | 432 | 12 9 4  | 686 | 7 7 7 2   |
| 125 | 5 5 5  | 252 | 12 7 3  | 441 | 9 7 7   | 693 | 11 9 7    |
| 126 | 9 7 2  | 256 | 8 8 4   | 448 | 8 8 7   | 704 | 11 8 8    |
| 128 | 8 8 2  | 264 | 11 6 4  | 462 | 11 7 6  | 726 | 11 11 6   |
| 135 | 9 5 3  | 275 | 11 5 5  | 484 | 11 11 4 | 729 | 9 9 9     |
| 147 | 7 7 3  | 288 | 12 12 2 | 486 | 9 9 6   | 735 | 7 7 5 3   |
| 154 | 11 7 2 | 294 | 7 7 6   | 495 | 11 9 5  | 756 | 12 9 7    |
| 162 | 9 9 2  | 297 | 11 9 3  | 504 | 9 8 7   | 768 | 12 8 8    |
| 165 | 11 5 3 | 308 | 11 7 4  | 512 | 8 8 8   | 784 | 8 7 7 2   |
| 168 | 8 7 3  | 315 | 9 7 5   | 525 | 7 5 5 3 | 792 | 12 11 6   |
| 175 | 7 5 5  | 324 | 9 9 4   | 528 | 12 11 4 | 825 | 11 5 5 3  |
| 176 | 11 8 2 | 336 | 12 7 4  | 539 | 11 7 7  | 847 | 11 11 7   |
| 189 | 9 7 3  | 343 | 7 7 7   | 567 | 9 9 7   | 864 | 12 9 8    |
| 192 | 12 8 2 | 352 | 11 8 4  | 576 | 12 12 4 | 875 | 7 5 5 5   |
| 196 | 7 7 4  | 363 | 11 11 3 | 588 | 12 7 7  | 882 | 9 7 7 2   |
| 198 | 11 9 2 | 375 | 5 5 5 3 | 594 | 11 9 6  | 891 | 11 9 9    |
| 216 | 12 9 2 | 378 | 9 7 6   | 605 | 11 11 5 | 896 | 8 8 7 2   |
| 224 | 8 7 4  | 384 | 8 8 6   | 616 | 11 8 7  | 924 | 12 11 7 2 |
| 225 | 9 5 5  | 385 | 11 7 5  | 625 | 5 5 5 5 | 945 | 9 7 5 3   |

| 數    | 因  | 數  | 數  | 因    | 數    | 數    | 因  | 數 | 數    | 因    | 數    |    |    |      |      |      |      |    |    |   |   |
|------|----|----|----|------|------|------|----|---|------|------|------|----|----|------|------|------|------|----|----|---|---|
| 968  | 11 | 11 | 8  | 2048 | 8    | 8    | 8  | 4 | 3773 | 11   | 7    | 7  | 7  | 6336 | 11   | 9    | 8    | 8  |    |   |   |
| 972  | 12 | 9  | 9  | 2058 | 7    | 7    | 7  | 6 | 3872 | 11   | 11   | 8  | 4  | 6468 | 12   | 11   | 7    | 7  |    |   |   |
| 1008 | 12 | 12 | 7  | 2079 | 11   | 9    | 7  | 3 | 3888 | 9    | 9    | 8  | 6  | 6534 | 11   | 11   | 9    | 6  |    |   |   |
| 1024 | 8  | 8  | 8  | 2    | 2112 | 11   | 8  | 8 | 3    | 3969 | 9    | 9  | 7  | 7    | 6561 | 9    | 9    | 9  | 9  |   |   |
| 1029 | 7  | 7  | 7  | 3    | 2156 | 11   | 7  | 7 | 4    | 3993 | 11   | 11 | 11 | 3    | 6615 | 9    | 7    | 7  | 5  | 3 |   |
| 1056 | 12 | 11 | 8  | 2178 | 11   | 11   | 9  | 2 | 4032 | 9    | 8    | 8  | 7  | 6655 | 11   | 11   | 11   | 5  |    |   |   |
| 1078 | 11 | 7  | 7  | 2    | 2187 | 9    | 9  | 9 | 3    | 4096 | 8    | 8  | 8  | 8    | 6776 | 11   | 11   | 8  | 7  |   |   |
| 1089 | 11 | 11 | 9  | 2205 | 9    | 7    | 7  | 5 | 4116 | 12   | 7    | 7  | 7  | 6804 | 12   | 9    | 9    | 7  |    |   |   |
| 1125 | 9  | 5  | 5  | 5    | 2268 | 9    | 9  | 7 | 4    | 4125 | 11   | 5  | 5  | 5    | 3    | 6875 | 11   | 5  | 5  | 5 | 5 |
| 1134 | 9  | 9  | 7  | 2    | 2304 | 9    | 8  | 8 | 4    | 4158 | 11   | 9  | 7  | 6    | 6912 | 12   | 9    | 8  | 8  |   |   |
| 1152 | 12 | 12 | 8  | 2352 | 8    | 7    | 7  | 6 | 4224 | 11   | 8    | 8  | 6  | 7056 | 9    | 8    | 7    | 7  | 2  |   |   |
| 1155 | 11 | 7  | 5  | 3    | 2376 | 11   | 9  | 8 | 3    | 4235 | 11   | 11 | 7  | 5    | 7128 | 11   | 9    | 9  | 8  |   |   |
| 1176 | 8  | 7  | 7  | 3    | 2401 | 7    | 7  | 7 | 7    | 4312 | 11   | 8  | 7  | 7    | 7168 | 8    | 8    | 8  | 7  | 2 |   |
| 1188 | 12 | 11 | 9  | 2464 | 11   | 8    | 7  | 4 | 4356 | 11   | 11   | 9  | 4  | 7203 | 7    | 7    | 7    | 7  | 3  |   |   |
| 1215 | 9  | 9  | 5  | 3    | 2475 | 11   | 9  | 5 | 5    | 4374 | 9    | 9  | 9  | 6    | 7392 | 12   | 11   | 8  | 8  |   |   |
| 1225 | 7  | 7  | 5  | 5    | 2541 | 11   | 11 | 7 | 3    | 4375 | 7    | 5  | 5  | 5    | 5    | 7425 | 11   | 9  | 5  | 5 | 3 |
| 1232 | 11 | 8  | 7  | 2    | 2592 | 9    | 9  | 8 | 4    | 4455 | 11   | 9  | 9  | 5    | 7546 | 11   | 7    | 7  | 7  | 2 |   |
| 1296 | 12 | 12 | 9  | 2625 | 7    | 5    | 5  | 5 | 3    | 4536 | 9    | 9  | 8  | 7    | 7623 | 11   | 11   | 9  | 7  |   |   |
| 1323 | 9  | 7  | 7  | 3    | 2646 | 9    | 7  | 7 | 6    | 4608 | 9    | 8  | 8  | 8    | 7744 | 11   | 11   | 8  | 8  |   |   |
| 1331 | 11 | 11 | 11 | 2662 | 11   | 11   | 11 | 2 | 4704 | 12   | 8    | 7  | 7  | 7776 | 12   | 9    | 9    | 8  |    |   |   |
| 1344 | 8  | 8  | 7  | 3    | 2673 | 11   | 9  | 9 | 3    | 4725 | 9    | 7  | 5  | 5    | 3    | 7875 | 9    | 7  | 5  | 5 | 5 |
| 1372 | 7  | 7  | 7  | 4    | 2688 | 8    | 8  | 7 | 6    | 4752 | 11   | 9  | 8  | 6    | 7938 | 9    | 9    | 7  | 7  | 2 |   |
| 1375 | 11 | 5  | 5  | 5    | 2695 | 11   | 7  | 7 | 5    | 4802 | 7    | 7  | 7  | 7    | 2    | 7986 | 11   | 11 | 11 | 6 |   |
| 1386 | 11 | 9  | 7  | 2    | 2744 | 8    | 7  | 7 | 7    | 4851 | 11   | 9  | 7  | 7    | 8019 | 11   | 9    | 9  | 9  |   |   |
| 1408 | 11 | 8  | 8  | 2    | 2772 | 11   | 9  | 7 | 4    | 4928 | 11   | 8  | 8  | 7    | 8064 | 9    | 8    | 8  | 7  | 2 |   |
| 1452 | 12 | 11 | 11 | 2816 | 11   | 8    | 8  | 4 | 5082 | 11   | 11   | 7  | 6  | 8085 | 11   | 7    | 7    | 5  | 3  |   |   |
| 1458 | 9  | 9  | 9  | 2    | 2835 | 9    | 9  | 7 | 5    | 5103 | 9    | 9  | 9  | 7    | 8192 | 8    | 8    | 8  | 4  | 4 |   |
| 1485 | 11 | 9  | 5  | 3    | 2904 | 11   | 11 | 8 | 3    | 5145 | 7    | 7  | 7  | 5    | 3    | 8232 | 8    | 7  | 7  | 7 | 3 |
| 1512 | 9  | 8  | 7  | 3    | 2916 | 9    | 9  | 9 | 4    | 5184 | 9    | 9  | 8  | 8    | 8316 | 12   | 11   | 9  | 7  |   |   |
| 1536 | 8  | 8  | 8  | 3    | 3024 | 9    | 8  | 7 | 6    | 5292 | 12   | 9  | 7  | 7    | 8448 | 12   | 11   | 8  | 8  |   |   |
| 1568 | 8  | 7  | 7  | 4    | 3025 | 11   | 11 | 5 | 5    | 5324 | 11   | 11 | 11 | 4    | 8505 | 9    | 9    | 7  | 5  | 3 |   |
| 1575 | 9  | 7  | 5  | 5    | 3072 | 8    | 8  | 8 | 6    | 5346 | 11   | 9  | 9  | 6    | 8575 | 7    | 7    | 7  | 5  | 5 |   |
| 1584 | 12 | 12 | 11 | 3087 | 9    | 7    | 7  | 7 | 5376 | 12   | 8    | 8  | 7  | 8624 | 11   | 8    | 7    | 7  | 2  |   |   |
| 1617 | 11 | 7  | 7  | 3    | 3125 | 5    | 5  | 5 | 5    | 5    | 5445 | 11 | 11 | 9    | 5    | 8712 | 11   | 11 | 9  | 8 |   |
| 1694 | 11 | 11 | 7  | 2    | 3136 | 8    | 8  | 7 | 7    | 5488 | 8    | 7  | 7  | 7    | 2    | 8748 | 12   | 9  | 9  | 9 |   |
| 1701 | 9  | 9  | 7  | 3    | 3168 | 11   | 9  | 8 | 4    | 5544 | 11   | 9  | 8  | 7    | 9072 | 9    | 9    | 8  | 7  | 2 |   |
| 1715 | 7  | 7  | 7  | 5    | 3234 | 11   | 7  | 7 | 6    | 5625 | 9    | 5  | 5  | 5    | 5    | 9075 | 11   | 11 | 5  | 5 | 3 |
| 1728 | 12 | 12 | 12 | 3237 | 11   | 11   | 9  | 3 | 5632 | 11   | 8    | 8  | 8  | 9216 | 9    | 8    | 8    | 4  | 4  |   |   |
| 1764 | 9  | 7  | 7  | 4    | 3375 | 9    | 5  | 5 | 5    | 3    | 5775 | 11 | 7  | 5    | 5    | 3    | 9261 | 9  | 7  | 7 | 3 |
| 1782 | 11 | 9  | 9  | 2    | 3388 | 11   | 11 | 7 | 4    | 5808 | 11   | 11 | 8  | 6    | 9317 | 11   | 11   | 11 | 7  |   |   |
| 1792 | 8  | 8  | 7  | 4    | 3402 | 9    | 9  | 7 | 6    | 5832 | 9    | 9  | 9  | 8    | 9375 | 5    | 5    | 5  | 5  | 3 |   |
| 1815 | 11 | 11 | 5  | 3    | 3456 | 9    | 8  | 8 | 6    | 5929 | 11   | 11 | 7  | 7    | 9408 | 8    | 8    | 7  | 7  | 3 |   |
| 1848 | 11 | 8  | 7  | 3    | 3465 | 11   | 9  | 7 | 5    | 6048 | 12   | 9  | 8  | 7    | 9504 | 12   | 11   | 9  | 8  |   |   |
| 1875 | 5  | 5  | 5  | 5    | 3    | 3528 | 9  | 8 | 7    | 7    | 6075 | 9  | 9  | 5    | 5    | 3    | 9604 | 7  | 7  | 7 | 4 |
| 1925 | 11 | 7  | 5  | 5    | 3564 | 11   | 9  | 9 | 4    | 6125 | 7    | 7  | 5  | 5    | 5    | 9625 | 11   | 7  | 5  | 5 | 5 |
| 1936 | 11 | 11 | 4  | 4    | 3584 | 8    | 8  | 8 | 7    | 6144 | 12   | 8  | 8  | 8    | 9702 | 11   | 9    | 7  | 7  | 2 |   |
| 1944 | 9  | 9  | 8  | 3    | 3645 | 9    | 9  | 9 | 5    | 6174 | 9    | 7  | 7  | 7    | 2    | 9801 | 11   | 11 | 9  | 9 |   |
| 2016 | 9  | 8  | 7  | 4    | 3675 | 7    | 7  | 5 | 5    | 3    | 6237 | 11 | 9  | 9    | 6    | 9856 | 11   | 8  | 7  | 4 | 4 |
| 2025 | 9  | 9  | 5  | 5    | 3696 | 11   | 8  | 7 | 6    | 6272 | 8    | 8  | 7  | 7    | 2    |      |      |    |    |   |   |



平方立方平方根立方根平方之立方根及倒數表

| 數  | 平方   | 立方     | 平方根       | 立方根       | 平方之立方根     | 倒數          |
|----|------|--------|-----------|-----------|------------|-------------|
| 1  | 1    | 1      | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000  | 1.000000000 |
| 2  | 4    | 8      | 1.4142136 | 1.2599210 | 1.5874011  | 0.500000000 |
| 3  | 9    | 27     | 1.7320508 | 1.4422496 | 2.0800837  | 0.333333333 |
| 4  | 16   | 64     | 2.0000000 | 1.5874011 | 2.5193421  | 0.250000000 |
| 5  | 25   | 125    | 2.2360680 | 1.7099759 | 2.9240177  | 0.200000000 |
| 6  | 36   | 216    | 2.4494897 | 1.8171206 | 3.3019272  | 0.166666667 |
| 7  | 49   | 343    | 2.6457513 | 1.9129312 | 3.6593057  | 0.142857143 |
| 8  | 64   | 512    | 2.8284271 | 2.0000000 | 4.0000000  | 0.125000000 |
| 9  | 81   | 729    | 3.0000000 | 2.0800873 | 4.3267487  | 0.111111111 |
| 10 | 100  | 1000   | 3.1622777 | 2.1544347 | 4.6415888  | 0.100000000 |
| 11 | 121  | 1331   | 3.3166248 | 2.2239801 | 4.9460874  | 0.090909091 |
| 12 | 144  | 1728   | 3.4641016 | 2.2894286 | 5.2414828  | 0.083333333 |
| 13 | 169  | 2197   | 3.6056513 | 2.3513347 | 5.5287748  | 0.076923077 |
| 14 | 196  | 2744   | 3.7416574 | 2.4101422 | 5.8087857  | 0.071428571 |
| 15 | 225  | 3375   | 3.8729833 | 2.4662121 | 6.0822020  | 0.066666667 |
| 16 | 256  | 4096   | 4.0000000 | 2.5198421 | 6.3496042  | 0.062500000 |
| 17 | 289  | 4913   | 4.1231056 | 2.5712316 | 6.6114890  | 0.058823529 |
| 18 | 324  | 5832   | 4.2426497 | 2.6207414 | 6.8682855  | 0.055555556 |
| 19 | 361  | 6859   | 4.3588989 | 2.6684016 | 7.1203674  | 0.052631579 |
| 20 | 400  | 8000   | 4.4721360 | 2.7144177 | 7.3680630  | 0.050000000 |
| 21 | 441  | 9261   | 4.5825757 | 2.7589243 | 7.6116286  | 0.047619048 |
| 22 | 484  | 10648  | 4.6904158 | 2.8020393 | 7.8514244  | 0.045454545 |
| 23 | 529  | 12167  | 4.7958315 | 2.8438670 | 8.0875794  | 0.043478261 |
| 24 | 576  | 13824  | 4.8989795 | 2.8844991 | 8.3203359  | 0.041666667 |
| 25 | 625  | 15625  | 5.0000000 | 2.9240177 | 8.5498797  | 0.040000000 |
| 26 | 676  | 17576  | 5.0990195 | 2.9624960 | 8.7763830  | 0.038461538 |
| 27 | 729  | 19683  | 5.1961524 | 3.0000000 | 9.0000000  | 0.037037037 |
| 28 | 784  | 21952  | 5.2915026 | 3.0365889 | 9.2208726  | 0.035714286 |
| 29 | 841  | 24389  | 5.3861648 | 3.0723168 | 9.4391307  | 0.034482759 |
| 30 | 900  | 27000  | 5.4772256 | 3.1072325 | 9.6548938  | 0.033333333 |
| 31 | 961  | 29791  | 5.5677644 | 3.1413806 | 9.8682724  | 0.032258065 |
| 32 | 1024 | 32768  | 5.6568542 | 3.1748021 | 10.0793084 | 0.031250000 |
| 33 | 1089 | 35937  | 5.7445626 | 3.2075343 | 10.2882765 | 0.030303030 |
| 34 | 1156 | 39304  | 5.8309519 | 3.2396118 | 10.4950847 | 0.029411765 |
| 35 | 1225 | 42875  | 5.9160798 | 3.2710663 | 10.6998748 | 0.028571429 |
| 36 | 1296 | 46656  | 6.0000000 | 3.3019272 | 10.9027235 | 0.027777778 |
| 37 | 1369 | 50653  | 6.0827625 | 3.3322218 | 11.1037250 | 0.027027627 |
| 38 | 1444 | 54872  | 6.1644140 | 3.3619754 | 11.3028786 | 0.026315789 |
| 39 | 1521 | 59319  | 6.2449980 | 3.3912114 | 11.5003151 | 0.025641026 |
| 40 | 1600 | 64000  | 6.3245553 | 3.4199519 | 11.6960709 | 0.025000000 |
| 41 | 1681 | 68921  | 6.4031242 | 3.4482172 | 11.8902022 | 0.024390244 |
| 42 | 1764 | 74088  | 6.4807407 | 3.4760266 | 12.0827612 | 0.023809524 |
| 43 | 1849 | 79507  | 6.5574385 | 3.5033981 | 12.2737980 | 0.023255814 |
| 44 | 1936 | 85184  | 6.6332496 | 3.5303483 | 12.4633594 | 0.022727273 |
| 45 | 2025 | 91125  | 6.7082039 | 3.5568933 | 12.6514900 | 0.022222222 |
| 46 | 2116 | 97336  | 6.7823300 | 3.5830479 | 12.8382321 | 0.021739130 |
| 47 | 2209 | 103823 | 6.8556546 | 3.6088261 | 13.0236256 | 0.021276600 |
| 48 | 2304 | 110592 | 6.9282032 | 3.6342411 | 13.2077090 | 0.020833333 |
| 49 | 2401 | 117649 | 7.0000000 | 3.6593057 | 13.3905183 | 0.020408163 |
| 50 | 2500 | 125000 | 7.0710678 | 3.6840314 | 18.5720880 | 0.020000000 |

| 數   | 平方    | 立方      | 平方根        | 立方根       | 平方之立方根     | 倒 數         |
|-----|-------|---------|------------|-----------|------------|-------------|
| 51  | 2601  | 132651  | 7.1414284  | 3.7081298 | 13.7524514 | 0.019607843 |
| 52  | 2704  | 140608  | 7.2111926  | 3.7321111 | 13.9316395 | 0.019230769 |
| 53  | 2809  | 148877  | 7.2801099  | 3.7512858 | 14.1096827 | 0.018867925 |
| 54  | 2916  | 157464  | 7.3484692  | 3.7797631 | 14.2866095 | 0.018518519 |
| 55  | 3025  | 166375  | 7.4161985  | 3.8029525 | 14.4624474 | 0.018181818 |
| 56  | 3136  | 175616  | 7.4833148  | 3.8258624 | 14.6372228 | 0.017857143 |
| 57  | 3249  | 185193  | 7.5498344  | 3.8485011 | 14.8109610 | 0.017543860 |
| 58  | 3364  | 195112  | 7.6157731  | 3.8708766 | 14.9836859 | 0.017241379 |
| 59  | 3481  | 205379  | 7.6811457  | 3.8929965 | 15.1554212 | 0.016949153 |
| 60  | 3600  | 216000  | 7.7459667  | 3.9148676 | 15.3261887 | 0.016666667 |
| 61  | 3721  | 226981  | 7.8102497  | 3.9364972 | 15.4960101 | 0.016393443 |
| 62  | 3844  | 238328  | 7.8740079  | 3.9578915 | 15.6649060 | 0.016129032 |
| 63  | 3969  | 250047  | 7.9372539  | 3.9790571 | 15.8328962 | 0.015873016 |
| 64  | 4096  | 262144  | 8.0000000  | 4.0000000 | 16.0000000 | 0.015625000 |
| 65  | 4225  | 274625  | 8.0622577  | 4.0207256 | 16.1662356 | 0.015384615 |
| 66  | 4356  | 287496  | 8.1240384  | 4.0412401 | 16.3316209 | 0.015151515 |
| 67  | 4489  | 300763  | 8.1853528  | 4.0616480 | 16.4961730 | 0.014925373 |
| 68  | 4624  | 314432  | 8.2462113  | 4.0816551 | 16.6599083 | 0.014705882 |
| 69  | 4761  | 328509  | 8.3066239  | 4.1015661 | 16.8228430 | 0.014492754 |
| 70  | 4900  | 343000  | 8.3666003  | 4.1212853 | 16.9849925 | 0.014285714 |
| 71  | 5041  | 357911  | 8.4261498  | 4.1408178 | 17.1463716 | 0.014084507 |
| 72  | 5184  | 373248  | 8.4852814  | 4.1601676 | 17.3069948 | 0.013888889 |
| 73  | 5329  | 389017  | 8.5440037  | 4.1793392 | 17.4668762 | 0.013698630 |
| 74  | 5476  | 405224  | 8.6023253  | 4.1983364 | 17.6260690 | 0.013513514 |
| 75  | 5625  | 421875  | 8.6602540  | 4.2171633 | 17.7844665 | 0.013333333 |
| 76  | 5776  | 438976  | 8.7177979  | 4.2358236 | 17.9422010 | 0.013157895 |
| 77  | 5929  | 456533  | 8.7749644  | 4.2543210 | 18.0992464 | 0.012987013 |
| 78  | 6084  | 474552  | 8.8317609  | 4.2726586 | 18.2556122 | 0.012820513 |
| 79  | 6241  | 493039  | 8.8881944  | 4.2908404 | 18.4113116 | 0.012659228 |
| 80  | 6400  | 512000  | 8.9442719  | 4.3088695 | 18.5663553 | 0.012500000 |
| 81  | 6561  | 531441  | 9.0000000  | 4.3268487 | 18.7207544 | 0.012345679 |
| 82  | 6724  | 551368  | 9.0553851  | 4.3444815 | 18.8745194 | 0.012195122 |
| 83  | 6889  | 571787  | 9.1104336  | 4.3620707 | 19.0276606 | 0.012049193 |
| 84  | 7056  | 592704  | 9.1651514  | 4.3795191 | 19.1801879 | 0.011904762 |
| 85  | 7225  | 614125  | 9.2195445  | 4.3968296 | 19.3321111 | 0.011764706 |
| 86  | 7396  | 636056  | 9.2736185  | 4.4140049 | 19.4834398 | 0.011627907 |
| 87  | 7569  | 658503  | 9.3273791  | 4.4310476 | 19.6341830 | 0.011494253 |
| 88  | 7744  | 681472  | 9.3808315  | 4.4479602 | 19.7843498 | 0.011363636 |
| 89  | 7921  | 704969  | 9.4339811  | 4.4647451 | 19.9339487 | 0.011235985 |
| 90  | 8100  | 729000  | 9.4868330  | 4.4814047 | 20.0829885 | 0.011111111 |
| 91  | 8281  | 753571  | 9.5393926  | 4.4979414 | 20.2314773 | 0.010989011 |
| 92  | 8464  | 778688  | 9.5916630  | 4.5143574 | 20.3794231 | 0.010869565 |
| 93  | 8649  | 804357  | 9.6433508  | 4.5306549 | 20.5268337 | 0.010752688 |
| 94  | 8836  | 830584  | 9.6953597  | 4.5468359 | 20.6737171 | 0.010638298 |
| 95  | 9025  | 857375  | 9.7467943  | 4.5629026 | 20.8200805 | 0.010526316 |
| 96  | 9216  | 884736  | 9.7979590  | 4.5788570 | 20.9659311 | 0.010416667 |
| 97  | 9409  | 912673  | 9.8488578  | 4.5947009 | 21.1112763 | 0.010309278 |
| 98  | 9604  | 941192  | 9.8994949  | 4.6104363 | 21.2561227 | 0.010204082 |
| 99  | 9801  | 970299  | 9.9498744  | 4.6260650 | 21.4004775 | 0.010101010 |
| 100 | 10000 | 1000000 | 10.0000000 | 4.6415888 | 21.5443469 | 0.010000000 |

## 複利表

| 年  | 2 釐        | 2½ 釐       | 3 釐        | 3½ 釐       | 4 釐        | 4½ 釐       |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1  | 1.02000000 | 1.02500000 | 1.03000000 | 1.03500000 | 1.04000000 | 1.04500000 |
| 2  | 1.04040000 | 1.05062500 | 1.06090000 | 1.07122500 | 1.08160000 | 1.09202500 |
| 3  | 1.06120800 | 1.07689063 | 1.09272700 | 1.10871788 | 1.12486400 | 1.14116613 |
| 4  | 1.08243216 | 1.10381289 | 1.12550881 | 1.14752300 | 1.16985856 | 1.19251860 |
| 5  | 1.10408080 | 1.13140821 | 1.15927407 | 1.18768631 | 1.21665290 | 1.24618194 |
| 6  | 1.12616242 | 1.15869342 | 1.19405230 | 1.22925533 | 1.26531902 | 1.30226012 |
| 7  | 1.14868567 | 1.18868575 | 1.22987387 | 1.27227926 | 1.31593178 | 1.36086183 |
| 8  | 1.17165938 | 1.21840290 | 1.26677008 | 1.31680904 | 1.36856905 | 1.42210061 |
| 9  | 1.19509257 | 1.24886297 | 1.30477318 | 1.36289735 | 1.42331181 | 1.48609514 |
| 10 | 1.21899442 | 1.28008454 | 1.34391638 | 1.41059876 | 1.48024428 | 1.55296942 |
| 11 | 1.24337431 | 1.31298666 | 1.38423387 | 1.45996972 | 1.53945406 | 1.62285305 |
| 12 | 1.26824179 | 1.34488882 | 1.42576089 | 1.51106366 | 1.60103222 | 1.69588143 |
| 13 | 1.29360663 | 1.37851104 | 1.46853371 | 1.56395606 | 1.66507351 | 1.77219610 |
| 14 | 1.31947876 | 1.41297382 | 1.51258972 | 1.61869452 | 1.73167645 | 1.85194452 |
| 15 | 1.34586834 | 1.44829817 | 1.55796742 | 1.67534883 | 1.80094351 | 1.93528244 |
| 16 | 1.37278571 | 1.48450552 | 1.60470644 | 1.73398504 | 1.87298125 | 2.02237015 |
| 17 | 1.40024142 | 1.52161826 | 1.65284763 | 1.79467555 | 1.94790050 | 2.11337681 |
| 18 | 1.42824625 | 1.55965872 | 1.70243306 | 1.85748920 | 2.02581652 | 2.20847877 |
| 19 | 1.45681117 | 1.59865019 | 1.75350605 | 1.92250132 | 2.10684918 | 2.30786031 |
| 20 | 1.48594740 | 1.63846164 | 1.80611123 | 1.98978886 | 2.19112314 | 2.41171402 |
| 21 | 1.51566634 | 1.67958185 | 1.86029457 | 2.05943147 | 2.27876807 | 2.52024116 |
| 22 | 1.54597967 | 1.72157140 | 1.91610341 | 2.13151158 | 2.36991879 | 2.63365201 |
| 23 | 1.57689926 | 1.76461068 | 1.97358651 | 2.20611448 | 2.46471555 | 2.75216635 |
| 24 | 1.60843725 | 1.80872595 | 2.03279411 | 2.28332849 | 2.56330416 | 2.87631383 |
| 25 | 1.64060599 | 1.85394410 | 2.09377793 | 2.36324498 | 2.66583633 | 3.00543446 |
| 26 | 1.67341811 | 1.90029270 | 2.15659127 | 2.44595856 | 2.77246978 | 3.14067901 |
| 27 | 1.70688648 | 1.94780002 | 2.22128901 | 2.53156711 | 2.88336858 | 3.28200956 |
| 28 | 1.74102421 | 1.99649502 | 2.28792768 | 2.62017196 | 2.99870332 | 3.42969999 |
| 29 | 1.77584469 | 2.04640739 | 2.35656551 | 2.71187798 | 3.11865145 | 3.58403649 |
| 30 | 1.81136158 | 2.09756768 | 2.42726247 | 2.80679370 | 3.24339751 | 3.74531813 |
| 31 | 1.84758882 | 2.15006677 | 2.50000000 | 2.90503148 | 3.37313341 | 3.91385745 |
| 32 | 1.88454059 | 2.20375694 | 2.57508276 | 3.00670759 | 3.50805875 | 4.08998104 |
| 33 | 1.92223140 | 2.25885086 | 2.65233524 | 3.11194235 | 3.64838110 | 4.27403018 |
| 34 | 1.96067603 | 2.31532213 | 2.73190530 | 3.22086033 | 3.79431634 | 4.46636154 |
| 35 | 1.99988955 | 2.37320519 | 2.81386245 | 3.33359045 | 3.94608899 | 4.66734781 |
| 36 | 2.03988734 | 2.43253532 | 2.89827833 | 3.45026611 | 4.10393255 | 4.87737846 |
| 37 | 2.08068509 | 2.49334870 | 2.98522668 | 3.57102543 | 4.26808986 | 5.0986049  |
| 38 | 2.12229879 | 2.55568242 | 3.07478348 | 3.69601132 | 4.43881345 | 5.32621921 |
| 39 | 2.16474477 | 2.61957448 | 3.16702698 | 3.82537171 | 4.61636599 | 5.56589908 |
| 40 | 2.20803966 | 2.68506384 | 3.26203779 | 3.95925972 | 4.80102063 | 5.81636454 |
| 41 | 2.25220046 | 2.75219043 | 3.35989893 | 4.09783381 | 4.99306145 | 6.07810094 |
| 42 | 2.29724447 | 2.82099520 | 3.46069689 | 4.24125799 | 5.19278391 | 6.35161548 |
| 43 | 2.34318936 | 2.89152008 | 3.56451677 | 4.38970202 | 5.40049527 | 6.63743818 |
| 44 | 2.39005314 | 2.96380808 | 3.67145227 | 4.54334160 | 5.61651508 | 6.93612290 |
| 45 | 2.43785421 | 3.03790328 | 3.78159584 | 4.70235855 | 5.84117568 | 7.24824843 |
| 46 | 2.48661128 | 3.11385086 | 3.89504372 | 4.86694110 | 6.07452271 | 7.57441961 |
| 47 | 2.53634351 | 3.19169713 | 4.01189503 | 5.03728404 | 6.31781562 | 7.91526849 |
| 48 | 2.58707039 | 3.27148956 | 4.13225188 | 5.21358898 | 6.57052824 | 8.27145557 |
| 49 | 2.63881179 | 3.35327686 | 4.25621944 | 5.39606459 | 6.83334937 | 8.64367107 |
| 50 | 2.69158803 | 3.43710872 | 4.38390002 | 5.58452686 | 7.10668335 | 9.03293627 |

| 年  | 5 釐        | 6 釐        | 7 釐        | 8 釐        | 9 釐        | 1 分         |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 1  | 1.0500000  | 1.0600000  | 1.0700000  | 1.0800000  | 1.0900000  | 1.1000000   |
| 2  | 1.1025000  | 1.1236000  | 1.1449000  | 1.1664000  | 1.1881000  | 1.2100000   |
| 3  | 1.1576250  | 1.1910160  | 1.2250430  | 1.2597120  | 1.1950290  | 1.3310000   |
| 4  | 1.2155063  | 1.2624770  | 1.3107960  | 1.3604890  | 1.4115816  | 1.4641000   |
| 5  | 1.2762816  | 1.3382256  | 1.4025517  | 1.4693281  | 1.5386240  | 1.6105100   |
| 6  | 1.3400956  | 1.4185191  | 1.5007304  | 1.5868743  | 1.6771001  | 1.7715610   |
| 7  | 1.4071004  | 1.5036303  | 1.6057815  | 1.7138243  | 1.8230391  | 1.9487171   |
| 8  | 1.4774554  | 1.5938481  | 1.7181862  | 1.8568302  | 1.9925226  | 2.1435888   |
| 9  | 1.5513252  | 1.6894790  | 1.8384592  | 1.9990046  | 2.1718933  | 2.3579477   |
| 10 | 1.6288946  | 1.7908477  | 1.9671514  | 2.1589250  | 2.3673637  | 2.5937425   |
| 11 | 1.7103394  | 1.8982986  | 2.1048520  | 2.3316290  | 2.5804254  | 2.8531167   |
| 12 | 1.7958563  | 2.0121965  | 2.2521916  | 2.5181701  | 2.8126648  | 3.1384284   |
| 13 | 1.8856491  | 2.1322283  | 2.4098450  | 2.7096237  | 3.0338046  | 3.4522712   |
| 14 | 1.9799316  | 2.2609040  | 2.5785342  | 2.9371936  | 3.3417270  | 3.7974983   |
| 15 | 2.0789282  | 2.3965582  | 2.7590315  | 3.1721691  | 3.6424825  | 4.1772482   |
| 16 | 2.1828746  | 2.5403517  | 2.9521638  | 3.4259426  | 3.9703059  | 4.5940730   |
| 17 | 2.2920183  | 2.6927728  | 3.1588152  | 3.7000181  | 4.3276334  | 5.0544703   |
| 18 | 2.4066192  | 2.8543392  | 3.3799323  | 3.9960195  | 4.7117204  | 5.5599173   |
| 19 | 2.5369502  | 3.0255995  | 3.6165275  | 4.3157011  | 5.1416613  | 6.1159090   |
| 20 | 2.6532977  | 3.2071355  | 3.8696845  | 4.6609571  | 5.6044108  | 6.7275000   |
| 21 | 2.7859626  | 3.3995636  | 4.1405624  | 5.0338337  | 6.1088077  | 7.4002499   |
| 22 | 2.9252607  | 3.6035374  | 4.4304017  | 5.4365404  | 6.6586004  | 8.1402749   |
| 23 | 3.0715238  | 3.8197497  | 4.7405299  | 5.8714637  | 7.2578745  | 8.9543024   |
| 24 | 3.2250999  | 4.0489346  | 5.0723670  | 6.3411807  | 7.9110832  | 9.8497328   |
| 25 | 3.3863549  | 4.2918707  | 5.4274326  | 6.8484752  | 8.6230807  | 10.8347059  |
| 26 | 3.5556727  | 4.5493830  | 5.8073599  | 7.3963532  | 9.3991579  | 11.9181765  |
| 27 | 3.7334563  | 4.8223549  | 6.2138676  | 7.9880615  | 10.2450821 | 13.1099942  |
| 28 | 3.9201291  | 5.1116367  | 6.6488384  | 8.6271064  | 11.1671395 | 14.4209936  |
| 29 | 4.1161356  | 5.4183879  | 7.1142571  | 9.3172749  | 12.1721821 | 15.8630930  |
| 30 | 4.3219424  | 5.7434912  | 7.6122550  | 10.0626569 | 13.2676785 | 17.4494023  |
| 31 | 4.5380398  | 6.0881006  | 8.1451129  | 10.8676694 | 14.4617695 | 19.1943425  |
| 32 | 4.7649415  | 6.4533867  | 8.7152708  | 11.7370830 | 15.7633288 | 21.1137768  |
| 33 | 5.0031885  | 6.8405899  | 9.3253398  | 12.6760496 | 17.1820284 | 23.2251544  |
| 34 | 5.2533480  | 7.2510253  | 9.9781135  | 13.6901336 | 18.7284109 | 25.5476699  |
| 35 | 5.5160154  | 7.6850868  | 10.6765815 | 14.7853443 | 20.4139679 | 28.1024369  |
| 36 | 5.7918161  | 8.1472520  | 11.4239422 | 15.9681718 | 22.2512250 | 30.9126805  |
| 37 | 6.0814069  | 8.6360871  | 12.2236188 | 17.2456256 | 24.2538358 | 34.0039486  |
| 38 | 6.3854773  | 9.1542524  | 13.0752714 | 18.6252756 | 26.4366805 | 37.4043434  |
| 39 | 6.7047512  | 9.7035075  | 13.9948204 | 20.1152977 | 28.8159817 | 41.1447778  |
| 40 | 7.0399887  | 10.2857179 | 14.9744578 | 21.7245215 | 31.4094201 | 45.2592556  |
| 41 | 7.3919882  | 10.9028610 | 16.0226699 | 23.4624832 | 34.2362679 | 49.7851811  |
| 42 | 7.7615876  | 11.5570327 | 17.1442568 | 25.3394819 | 37.3175320 | 54.7636992  |
| 43 | 8.1496669  | 12.2504546 | 18.3443548 | 27.3666404 | 40.6761098 | 60.2400692  |
| 44 | 8.5571503  | 12.9854819 | 19.6284596 | 29.5559717 | 44.3369597 | 66.2640761  |
| 45 | 8.9850078  | 13.7646108 | 21.0024510 | 31.9204494 | 48.3272861 | 72.8904837  |
| 46 | 9.4342582  | 14.5904875 | 22.4726234 | 34.4740853 | 52.6767419 | 80.1795321  |
| 47 | 9.9059711  | 15.4659167 | 24.0457070 | 37.2320122 | 57.4176486 | 88.1974853  |
| 48 | 10.4012697 | 16.3938717 | 25.7289065 | 40.2105731 | 62.5852370 | 97.0172338  |
| 49 | 10.9213331 | 17.3775040 | 27.5299300 | 43.4247190 | 68.2179083 | 106.7189572 |
| 50 | 11.4673998 | 18.4201543 | 29.4570251 | 46.9016125 | 74.3575201 | 117.3908529 |

## 複利現價表

|    | 2 釐       | 2½ 釐      | 3 釐       | 3½ 釐      | 4 釐       | 4½ 釐      |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | .98039216 | .97560976 | .97087379 | .96618357 | .96153846 | .95693780 |
| 2  | .96116878 | .95181440 | .94259591 | .93351070 | .92455621 | .91572995 |
| 3  | .94232233 | .92859941 | .91514166 | .90194271 | .88899636 | .87629660 |
| 4  | .92384543 | .90595064 | .88848705 | .87144223 | .85480419 | .83859134 |
| 5  | .90573081 | .88385429 | .86260878 | .84197317 | .82192711 | .80245105 |
| 6  | .88797138 | .86226687 | .83748426 | .81350064 | .79031453 | .76789574 |
| 7  | .87056418 | .84126524 | .81309151 | .78599096 | .75991781 | .73482846 |
| 8  | .85349037 | .82074657 | .78940923 | .75941156 | .73069021 | .70318513 |
| 9  | .83675527 | .80072836 | .76641673 | .73373097 | .70258674 | .67290443 |
| 10 | .82034830 | .78119840 | .74409391 | .70891881 | .67556417 | .64392769 |
| 11 | .80426304 | .76214478 | .72242128 | .68494571 | .64958093 | .61619874 |
| 12 | .78849318 | .74355589 | .70137988 | .66178330 | .62459705 | .58966386 |
| 13 | .77303253 | .72542038 | .68095134 | .63940415 | .60057409 | .56427164 |
| 14 | .75787502 | .70772720 | .66111781 | .61778179 | .57747509 | .53997286 |
| 15 | .74301473 | .69046556 | .64186195 | .59689062 | .55526450 | .51672044 |
| 16 | .72844581 | .67362493 | .62316694 | .57670591 | .53390318 | .49446932 |
| 17 | .71416256 | .65719506 | .60501645 | .55720378 | .51337325 | .47317639 |
| 18 | .70015937 | .64116591 | .58739461 | .53836114 | .49662812 | .45280037 |
| 19 | .68643076 | .62552772 | .57028603 | .52015569 | .47464242 | .43330179 |
| 20 | .67297133 | .61027094 | .55367575 | .50256588 | .45638695 | .41464286 |
| 21 | .65977582 | .59538629 | .53754928 | .48557090 | .43883360 | .39678743 |
| 22 | .64683904 | .58086467 | .52189250 | .46915063 | .42195539 | .37970089 |
| 23 | .63415592 | .56669724 | .50669175 | .45328463 | .40572633 | .36335013 |
| 24 | .62172149 | .55287535 | .49193374 | .43795713 | .39012147 | .34770347 |
| 25 | .60953087 | .53939059 | .47760557 | .42314699 | .37511680 | .33273060 |
| 26 | .59757928 | .52623472 | .46369473 | .40883767 | .36068923 | .31840243 |
| 27 | .58586204 | .51339973 | .45018916 | .39501224 | .34681657 | .30469187 |
| 28 | .57437455 | .50087778 | .43707675 | .38165434 | .33347747 | .29157069 |
| 29 | .56311231 | .48866125 | .42434636 | .36864815 | .32065141 | .27901502 |
| 30 | .55207089 | .47674269 | .41198676 | .35627841 | .30831867 | .26700002 |
| 31 | .54124597 | .46511481 | .39998715 | .34423035 | .29646926 | .25550211 |
| 32 | .53033330 | .45377055 | .38833703 | .33258971 | .28505704 | .24449991 |
| 33 | .52022873 | .44270298 | .37702625 | .32134271 | .27409417 | .23397121 |
| 34 | .51002817 | .43199534 | .36604490 | .31047605 | .26355290 | .22389589 |
| 35 | .50002761 | .42137107 | .35538340 | .29997686 | .25341547 | .21425444 |
| 36 | .49022315 | .41109372 | .34503243 | .28983272 | .24366872 | .20502817 |
| 37 | .48061093 | .40106705 | .33498394 | .28003161 | .23429685 | .19619921 |
| 38 | .47118719 | .39128492 | .32522615 | .27056194 | .22528543 | .18775044 |
| 39 | .46194822 | .38174139 | .31575355 | .26141250 | .21662061 | .17966549 |
| 40 | .45289042 | .37243062 | .30655684 | .25257247 | .20828904 | .17192870 |
| 41 | .44401021 | .36334695 | .29762800 | .24403137 | .20027793 | .16452507 |
| 42 | .43530413 | .35448483 | .28895922 | .23577910 | .19257493 | .15744026 |
| 43 | .42676875 | .34583886 | .28054294 | .22780590 | .18516820 | .15066054 |
| 44 | .41840074 | .33740376 | .27237178 | .22010231 | .17804635 | .14417237 |
| 45 | .41019680 | .32917440 | .26443862 | .21265924 | .17119841 | .13796437 |
| 46 | .40215373 | .32114576 | .25673653 | .20546787 | .16481386 | .13222332 |
| 47 | .39426836 | .31331294 | .24925876 | .19851968 | .15882856 | .12633810 |
| 48 | .38653761 | .30567116 | .24199880 | .19180645 | .15219476 | .12086770 |
| 49 | .37895844 | .29821576 | .23495029 | .18532024 | .14634112 | .11569158 |
| 50 | .37152788 | .29094221 | .22811708 | .17905337 | .14071262 | .11070965 |

|    | 5 蓋       | 6 蓋       | 7 蓋       | 8 蓋       | 9 蓋       | 1 分       |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | .95238095 | .94339623 | .93457944 | .92592593 | .91743119 | .90909091 |
| 2  | .90762948 | .88999644 | .87343873 | .85733882 | .84167999 | .82744628 |
| 3  | .86383760 | .83961928 | .81629788 | .79383224 | .77218348 | .75131480 |
| 4  | .82270247 | .79209366 | .76289521 | .73502985 | .70842521 | .68301346 |
| 5  | .78352617 | .74725817 | .71298618 | .68058320 | .64993139 | .62092132 |
| 6  | .74621540 | .70496014 | .66634222 | .63016963 | .59626733 | .56447393 |
| 7  | .71068133 | .66505711 | .62274974 | .58349040 | .54703424 | .51315812 |
| 8  | .67683936 | .62741237 | .58200910 | .54026888 | .50186628 | .46650738 |
| 9  | .64460892 | .59189846 | .54393374 | .50024897 | .46042778 | .42409762 |
| 10 | .61391325 | .55839478 | .50834929 | .46319349 | .42241081 | .38554329 |
| 11 | .58467929 | .52678753 | .47509280 | .42888286 | .38753285 | .35049390 |
| 12 | .55683742 | .49696936 | .44401196 | .39711376 | .35553473 | .31863082 |
| 13 | .53032135 | .46883902 | .41496445 | .36769792 | .32617865 | .28966438 |
| 14 | .50506795 | .44230096 | .38781724 | .34046104 | .29924647 | .26333125 |
| 15 | .48101710 | .41726506 | .36244602 | .31524170 | .27453804 | .23939205 |
| 16 | .45811112 | .39364628 | .33873460 | .29189047 | .25186976 | .21712914 |
| 17 | .43629669 | .37136442 | .31657439 | .27029895 | .23107318 | .19784467 |
| 18 | .41552065 | .35034379 | .29586392 | .25024903 | .21199374 | .17985879 |
| 19 | .39573396 | .33051301 | .27650832 | .23171206 | .19489667 | .16350799 |
| 20 | .37688948 | .31180473 | .25841900 | .21454821 | .17843089 | .14864363 |
| 21 | .35894236 | .29415540 | .24151309 | .19865575 | .16369806 | .13513067 |
| 22 | .34184987 | .27750510 | .22571317 | .18394051 | .15018171 | .12284597 |
| 23 | .32557131 | .26179726 | .21094688 | .17031528 | .13778139 | .11167816 |
| 24 | .31006791 | .24697855 | .19714662 | .15769934 | .12640494 | .10152560 |
| 25 | .29530277 | .23299863 | .18424918 | .14601790 | .11596784 | .09229600 |
| 26 | .28124073 | .21981003 | .17219549 | .13520176 | .10639251 | .08390545 |
| 27 | .26784832 | .20736795 | .16093037 | .12518682 | .09760781 | .07627768 |
| 28 | .25509364 | .19563014 | .15040221 | .11591372 | .08954845 | .06934335 |
| 29 | .24294632 | .18455574 | .14056282 | .10732752 | .08215454 | .06030394 |
| 30 | .23137745 | .17411013 | .13136712 | .09937733 | .07537114 | .05730855 |
| 31 | .22035947 | .16425484 | .12277301 | .09201605 | .06914783 | .05299868 |
| 32 | .20986617 | .15495740 | .11474113 | .08520005 | .06343838 | .04736244 |
| 33 | .19987254 | .14618622 | .10723470 | .07888893 | .05820035 | .04305676 |
| 34 | .19035480 | .13791153 | .10021934 | .07304531 | .05339481 | .03914251 |
| 35 | .18129029 | .13010523 | .09366294 | .06763454 | .04898607 | .03548410 |
| 36 | .17265741 | .12274007 | .08753546 | .06262458 | .04494135 | .03234918 |
| 37 | .16443563 | .11579318 | .08180884 | .05798572 | .04123059 | .02940835 |
| 38 | .15660536 | .10923885 | .07645686 | .05369048 | .03782623 | .02673486 |
| 39 | .14914797 | .10305552 | .07145501 | .04971341 | .03470296 | .02430442 |
| 40 | .14204568 | .09722219 | .06678038 | .04603093 | .03183758 | .02209493 |
| 41 | .13528160 | .09171905 | .06241157 | .04262123 | .02920879 | .02008630 |
| 42 | .12883962 | .08652740 | .05832857 | .03946411 | .02679706 | .01820627 |
| 43 | .12270440 | .08162962 | .05451268 | .03654084 | .02458446 | .01660025 |
| 44 | .11686133 | .07709080 | .05094643 | .03383411 | .02255455 | .01509113 |
| 45 | .11129651 | .07265007 | .04761349 | .03132788 | .02066224 | .01371221 |
| 46 | .10599668 | .06853781 | .04446859 | .02900730 | .01898371 | .01247201 |
| 47 | .10094921 | .06465831 | .04158757 | .02685851 | .01741625 | .01133819 |
| 48 | .09614211 | .06099840 | .03886679 | .02486908 | .01597821 | .01030745 |
| 49 | .09156391 | .05754566 | .03632440 | .02302393 | .01465891 | .00937041 |
| 50 | .08720373 | .05428836 | .03394776 | .02132123 | .01344854 | .00851855 |

## 複利年金總和表

| 年  | 2 釐         | 2½釐         | 3 釐          | 3½釐          | 4 釐          | 4½釐          |
|----|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | 1.00000000  | 1.00000000  | 1.00000000   | 1.00000000   | 1.00000000   | 1.00000000   |
| 2  | 2.02000000  | 2.02500000  | 2.03000000   | 2.03500000   | 2.04000000   | 2.04500000   |
| 3  | 3.06400000  | 3.07562500  | 3.09090000   | 3.10622500   | 3.12160000   | 3.13702500   |
| 4  | 4.12160000  | 4.15251563  | 4.18362700   | 4.21494288   | 4.24646400   | 4.27819113   |
| 5  | 5.20404016  | 5.25632852  | 5.30912581   | 5.36246588   | 5.41632256   | 5.47070073   |
| 6  | 6.30812096  | 6.38773673  | 6.46840988   | 6.55015218   | 6.63297546   | 6.71689166   |
| 7  | 7.43428338  | 7.54743015  | 7.66246218   | 7.77940751   | 7.89829448   | 8.01915179   |
| 8  | 8.58296905  | 8.73611590  | 8.89233605   | 9.05168677   | 9.21422626   | 9.38001362   |
| 9  | 9.75462843  | 9.95451880  | 10.15910613  | 10.36849581  | 10.58279531  | 10.80211423  |
| 10 | 10.94972100 | 11.20338177 | 11.46387921  | 11.73139316  | 12.00610712  | 12.28820937  |
| 11 | 12.16871542 | 12.48346631 | 12.80779569  | 13.14199192  | 13.48635141  | 13.84117879  |
| 12 | 13.41208973 | 13.79555297 | 14.19202956  | 14.60196164  | 15.02580546  | 15.46403184  |
| 13 | 14.68033152 | 15.14044179 | 15.61779045  | 16.11303030  | 16.62683768  | 17.15991327  |
| 14 | 15.97393815 | 16.51895284 | 17.08632416  | 17.67698636  | 18.29191119  | 18.93210937  |
| 15 | 17.29341692 | 17.93192666 | 18.59891389  | 19.29568088  | 20.02358764  | 20.78405429  |
| 16 | 18.63928525 | 19.38022483 | 20.15868120  | 20.97102971  | 21.82453114  | 22.71933673  |
| 17 | 20.01207096 | 20.86473045 | 21.76158774  | 22.70501575  | 23.69751239  | 24.74170689  |
| 18 | 21.41231238 | 22.38634871 | 23.41443537  | 24.49969130  | 25.64541288  | 26.851508370 |
| 19 | 22.84055863 | 23.94600743 | 25.11686844  | 26.35718050  | 27.67122940  | 29.06356246  |
| 20 | 24.29736980 | 25.54465761 | 26.87037449  | 28.27968181  | 29.77807858  | 31.37142277  |
| 21 | 25.78331719 | 27.18337405 | 28.67648572  | 30.26947068  | 31.96920172  | 33.78313680  |
| 22 | 27.29898354 | 28.86285590 | 30.53678030  | 32.32890215  | 34.24796979  | 36.30337795  |
| 23 | 28.84496321 | 30.58442730 | 32.45288370  | 34.46041373  | 36.61788858  | 38.93702996  |
| 24 | 30.42186247 | 32.34903798 | 34.42647022  | 36.66652821  | 39.08260412  | 41.98619631  |
| 25 | 32.03029972 | 34.15773693 | 36.45926432  | 38.94985669  | 41.64590829  | 44.56521015  |
| 26 | 33.67099057 | 36.01170803 | 38.55304225  | 41.31310168  | 44.31174462  | 47.57064460  |
| 27 | 35.34432383 | 37.91200072 | 40.70963352  | 43.75906024  | 47.08421440  | 50.71132361  |
| 28 | 37.05121031 | 39.85980075 | 42.93092252  | 46.29062734  | 49.96758298  | 53.99333317  |
| 29 | 38.79223451 | 41.85629577 | 45.21885020  | 48.91079930  | 52.96628630  | 57.42303316  |
| 30 | 40.56807921 | 43.90270316 | 47.57541571  | 51.62267728  | 56.08493775  | 61.00706966  |
| 31 | 42.37944079 | 46.00027074 | 50.00267818  | 54.42947098  | 59.32833526  | 64.75238779  |
| 32 | 44.22702961 | 48.15027751 | 52.50275852  | 57.33450247  | 62.70146867  | 68.66624524  |
| 33 | 46.11570205 | 50.35403445 | 55.07784128  | 60.34121005  | 66.20952742  | 72.75622628  |
| 34 | 48.03380160 | 52.61288531 | 57.73017652  | 63.45315240  | 69.85790851  | 77.03025646  |
| 35 | 49.99447763 | 54.92820744 | 60.46208181  | 66.67401274  | 73.65222486  | 81.49661800  |
| 36 | 51.99436719 | 57.30141263 | 63.27594427  | 70.00760318  | 77.59831385  | 86.16396581  |
| 37 | 54.03425453 | 59.73394794 | 66.17422259  | 73.45786930  | 81.70224640  | 91.04134427  |
| 38 | 56.11493962 | 62.22796664 | 69.15944297  | 77.02889472  | 85.97033626  | 96.13820476  |
| 39 | 58.23723841 | 64.78297906 | 72.23423275  | 80.72490604  | 90.40914971  | 101.46442398 |
| 40 | 60.40198318 | 67.40255354 | 75.40125973  | 84.55027775  | 95.02551570  | 107.03032306 |
| 41 | 62.61002284 | 70.08761737 | 78.66329753  | 88.50953747  | 99.82653633  | 112.84668760 |
| 42 | 64.86222330 | 72.83980781 | 82.02319645  | 92.60737128  | 104.81959778 | 118.92478854 |
| 43 | 67.15946777 | 75.66080800 | 85.48389234  | 96.84862928  | 110.01238169 | 125.2764040  |
| 44 | 69.50265712 | 78.55232308 | 89.04840911  | 101.23833130 | 115.41287696 | 131.91384220 |
| 45 | 71.89271027 | 81.51613116 | 92.71986139  | 105.78167290 | 121.02939204 | 138.84996510 |
| 46 | 74.33056447 | 84.55403443 | 96.50145723  | 110.48403145 | 126.87056772 | 146.09821353 |
| 47 | 76.81717578 | 87.66788530 | 100.39650095 | 115.35097255 | 132.94539043 | 153.67263314 |
| 48 | 79.35351927 | 90.85985243 | 104.40839598 | 120.38825659 | 139.26322604 | 161.58790163 |
| 49 | 81.94058966 | 94.13107199 | 108.54064785 | 125.60184557 | 145.83373429 | 169.85935720 |
| 50 | 84.57940145 | 97.48434879 | 112.79686729 | 130.99791016 | 152.66708366 | 178.50302828 |

| 年  | 5 釐          | 6 釐          | 7 釐          | 8 釐          | 9 釐          | 1 分           |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 1  | 1.0000000    | 1.0000000    | 1.0000000    | 1.0000000    | 1.0000000    | 1.0000000     |
| 2  | 2.0500000    | 2.0600000    | 2.0700000    | 2.0800000    | 2.0900000    | 2.1000000     |
| 3  | 3.1525000    | 3.1836000    | 3.2149000    | 3.2464000    | 3.2781000    | 3.3100000     |
| 4  | 4.3101250    | 4.3746160    | 4.4399430    | 4.5061120    | 4.5731290    | 4.6410000     |
| 5  | 5.52563125   | 5.63709296   | 5.75073901   | 5.86660096   | 5.98471061   | 6.10510000    |
| 6  | 6.80191281   | 6.97531854   | 7.15329074   | 7.33552904   | 7.52333456   | 7.71561000    |
| 7  | 8.14200845   | 8.39383765   | 8.65402109   | 8.92280336   | 9.20043468   | 9.48717100    |
| 8  | 9.54910888   | 9.89746791   | 10.25980257  | 10.63662763  | 11.02847380  | 11.43588810   |
| 9  | 11.02656432  | 11.49131598  | 11.97798875  | 12.48755784  | 13.02102344  | 13.57947691   |
| 10 | 12.57789254  | 13.18079494  | 13.81644796  | 14.48656247  | 15.19292972  | 15.93742460   |
| 11 | 14.20678716  | 14.97164264  | 15.78359932  | 16.64545746  | 17.56029339  | 18.53116700   |
| 12 | 15.91712652  | 16.86994120  | 17.88845127  | 18.97712346  | 20.14071980  | 21.38428377   |
| 13 | 17.71298285  | 18.88213767  | 20.14064289  | 21.49529658  | 22.59338458  | 24.52712124   |
| 14 | 19.59863199  | 21.01576193  | 22.55048786  | 24.21442030  | 26.01918949  | 27.97498336   |
| 15 | 21.57856359  | 23.27596988  | 25.12902201  | 27.15211393  | 29.36061622  | 31.77248169   |
| 16 | 23.65749177  | 25.67252808  | 27.88805355  | 30.32423304  | 33.00339868  | 36.94972986   |
| 17 | 25.84036636  | 28.21287976  | 30.84021730  | 33.75022369  | 36.97370456  | 40.54470285   |
| 18 | 28.13238467  | 30.90565255  | 33.99903251  | 37.44521374  | 41.20133797  | 45.59917313   |
| 19 | 30.53900391  | 33.75999170  | 37.37896479  | 41.44203324  | 46.01845839  | 51.15909045   |
| 20 | 33.06595410  | 36.78519120  | 40.99549232  | 45.76190400  | 51.16011964  | 57.27499949   |
| 21 | 35.71925181  | 39.99272668  | 44.86517678  | 50.42222144  | 56.76453041  | 64.00249944   |
| 22 | 38.50521440  | 43.39229028  | 49.00573916  | 55.45675516  | 62.87333815  | 71.40274939   |
| 23 | 41.43047512  | 46.99532769  | 53.43614090  | 60.89923557  | 69.53193858  | 79.54204233   |
| 24 | 44.50199887  | 50.81557735  | 58.17667070  | 66.76475522  | 76.78981305  | 88.49732676   |
| 25 | 47.72709882  | 54.86451200  | 63.24903772  | 73.10593995  | 84.70089623  | 98.34705943   |
| 26 | 51.11345376  | 59.15638212  | 68.67647031  | 79.95441515  | 93.32397689  | 109.18176538  |
| 27 | 54.66912645  | 63.70576568  | 74.48382328  | 87.35076836  | 102.72313481 | 121.09994191  |
| 28 | 58.40258277  | 68.52811162  | 80.69769091  | 95.33882983  | 112.96821694 | 134.20993691  |
| 29 | 62.32271191  | 73.63979832  | 87.34652927  | 103.96593522 | 124.13535646 | 148.63092972  |
| 30 | 66.43384750  | 79.05818622  | 94.46078632  | 113.28321111 | 136.30753355 | 164.49402269  |
| 31 | 70.76078988  | 84.80167739  | 102.07304137 | 123.34586800 | 149.57521701 | 181.94372496  |
| 32 | 75.29882937  | 90.88977803  | 110.21815426 | 134.21353744 | 164.03698655 | 201.13776745  |
| 33 | 80.06377084  | 97.34316471  | 118.93342506 | 145.95062044 | 179.80031534 | 222.25154420  |
| 34 | 85.06695938  | 104.18375460 | 128.25876481 | 158.62667007 | 196.98934372 | 245.47669861  |
| 35 | 90.32030735  | 111.43477987 | 138.23687835 | 172.31680368 | 216.71075465 | 271.02436848  |
| 36 | 95.8362274   | 119.12086666 | 148.91345984 | 187.10214797 | 236.12472257 | 299.12680533  |
| 37 | 101.62813886 | 127.26811866 | 160.83740202 | 203.07031981 | 258.37594760 | 330.03948586  |
| 38 | 107.70954580 | 135.96420578 | 172.56102017 | 220.31594540 | 282.62978288 | 36.04343445   |
| 39 | 114.09502309 | 145.05845813 | 185.64029158 | 238.94122103 | 309.06646334 | 401.44777789  |
| 40 | 120.79977424 | 154.76196562 | 199.63511199 | 259.05651871 | 337.88244504 | 442.59255568  |
| 41 | 127.83975295 | 165.04768356 | 214.60956983 | 280.78104021 | 369.29186512 | 487.85181125  |
| 42 | 135.23172510 | 175.95054467 | 230.63223972 | 304.24352342 | 403.52813296 | 537.63699237  |
| 43 | 142.99333866 | 187.50755521 | 247.77649650 | 329.58300530 | 440.84566492 | 592.40069161  |
| 44 | 151.14330059 | 199.75803188 | 266.12085125 | 356.94964572 | 481.52177457 | 652.64076077  |
| 45 | 159.70015587 | 212.74351379 | 285.74931081 | 386.50561728 | 525.85873450 | 718.90483685  |
| 46 | 168.68516300 | 226.50812462 | 306.75176260 | 418.42606677 | 574.18602060 | 791.79532054  |
| 47 | 178.11942185 | 241.09881210 | 329.22438598 | 452.90015211 | 626.86276245 | 871.97485259  |
| 48 | 188.02539294 | 256.56452882 | 353.27009300 | 490.93216428 | 684.28041107 | 960.17233785  |
| 49 | 198.42666259 | 272.95840055 | 378.99899951 | 530.34273742 | 746.86564807 | 1057.18957163 |
| 50 | 209.34799572 | 290.33590458 | 406.72892947 | 573.77015642 | 815.08355540 | 1163.69852880 |



複利年金現價表

| 年  | 2 釐         | 2½釐         | 3 釐         | 3½釐         | 4 釐         | 4½釐         |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.98039216  | 0.97560976  | 0.97087379  | 0.96618357  | 0.96153846  | 0.95693780  |
| 2  | 1.94156094  | 1.92742415  | 1.91346970  | 1.89969428  | 1.88609467  | 1.87266775  |
| 3  | 2.88388327  | 2.85602356  | 2.82861135  | 2.80163698  | 2.77509103  | 2.74896435  |
| 4  | 3.80772870  | 3.76197421  | 3.71709640  | 3.67307921  | 3.62989522  | 3.58752570  |
| 5  | 4.71345951  | 4.645832850 | 4.57970719  | 4.51505238  | 4.45182233  | 4.38997674  |
| 6  | 5.60143089  | 5.50812536  | 5.41719144  | 5.32855302  | 5.24213686  | 5.15787248  |
| 7  | 6.47199107  | 6.34939060  | 6.23028296  | 6.11454398  | 6.00205467  | 5.89270094  |
| 8  | 7.32548144  | 7.17013717  | 7.01969219  | 6.87395554  | 6.73274487  | 6.59588607  |
| 9  | 8.16223671  | 7.97086553  | 7.78610392  | 7.60768651  | 7.43533161  | 7.26879050  |
| 10 | 8.98258501  | 8.75206393  | 8.53020284  | 8.31660532  | 8.11089578  | 7.91271818  |
| 11 | 9.78684805  | 9.51420871  | 9.25262411  | 9.00165104  | 8.76047671  | 8.52891692  |
| 12 | 10.57534122 | 10.25776460 | 9.95400399  | 9.66333433  | 9.38507376  | 9.11858078  |
| 13 | 11.34837375 | 10.98318497 | 10.63499933 | 10.30273849 | 9.98564785  | 9.86285242  |
| 14 | 12.10624877 | 11.69091217 | 11.29607314 | 10.92052028 | 10.56312293 | 10.22282528 |
| 15 | 12.84926350 | 12.38137773 | 11.93763509 | 11.51741090 | 11.11838743 | 10.73954673 |
| 16 | 13.57770931 | 13.05500266 | 12.56110203 | 12.09411681 | 11.65229531 | 11.23401505 |
| 17 | 14.29187188 | 13.71219772 | 13.16611847 | 12.65132059 | 12.16566885 | 11.70719142 |
| 18 | 14.99203125 | 14.35336363 | 13.75351308 | 13.18968173 | 12.65929697 | 12.15999180 |
| 19 | 15.67846201 | 14.97889134 | 14.32379911 | 13.70983742 | 13.13393940 | 12.59329359 |
| 20 | 16.35143334 | 15.58916229 | 14.87747486 | 14.21240330 | 13.59022634 | 13.00793645 |
| 21 | 17.01120916 | 16.18454857 | 15.41602414 | 14.69797420 | 14.02915995 | 13.40472388 |
| 22 | 17.65804820 | 16.76541324 | 15.93691664 | 15.16712484 | 14.45111533 | 13.78442476 |
| 23 | 18.29220412 | 17.33211048 | 16.44360829 | 15.62041047 | 14.85684197 | 14.14777489 |
| 24 | 18.91392560 | 17.88498585 | 16.93554212 | 16.05836760 | 15.24696314 | 14.49547837 |
| 25 | 19.52345647 | 18.42437642 | 17.41314769 | 16.48151159 | 15.62207994 | 14.82820396 |
| 26 | 20.12103576 | 18.95061114 | 17.87684242 | 16.89035226 | 15.98276918 | 15.14661145 |
| 27 | 20.70689780 | 19.46401087 | 18.32703147 | 17.28536451 | 16.32958575 | 15.45130282 |
| 28 | 21.28127236 | 19.96488866 | 18.76410823 | 17.66701885 | 16.66306322 | 15.74287351 |
| 29 | 21.84438466 | 20.45354991 | 19.18845459 | 18.03576700 | 16.98371463 | 16.02188853 |
| 30 | 22.39645555 | 20.93029259 | 19.60044135 | 18.39201541 | 17.29203330 | 16.28888854 |
| 31 | 22.93770152 | 21.39540741 | 20.00042849 | 18.73627576 | 17.58849356 | 16.54439095 |
| 32 | 23.46833482 | 21.84917796 | 20.39876553 | 19.06886547 | 17.87355150 | 16.78889086 |
| 33 | 23.98856255 | 22.29188094 | 20.76579178 | 19.39020818 | 18.14764567 | 17.02286207 |
| 34 | 24.49859172 | 22.72378628 | 21.13183668 | 19.70063423 | 18.41119776 | 17.24675796 |
| 35 | 24.99831933 | 23.14515734 | 21.48722007 | 20.00601110 | 18.66461323 | 17.46101240 |
| 36 | 25.48884248 | 23.55625107 | 21.83225250 | 20.29049381 | 18.90828195 | 17.66604058 |
| 37 | 25.96945344 | 23.95731812 | 22.16723544 | 20.57052542 | 19.14257880 | 17.86223979 |
| 38 | 26.44064060 | 24.34860304 | 22.49246159 | 20.84108736 | 19.36786423 | 18.04999023 |
| 39 | 26.90258893 | 24.73034443 | 22.80821513 | 21.10249987 | 19.58448484 | 18.22965572 |
| 40 | 27.35547924 | 25.10277505 | 23.11477197 | 21.35507234 | 19.79277388 | 18.40158442 |
| 41 | 27.79948945 | 25.46612200 | 23.41239997 | 21.59910371 | 19.99305181 | 18.56610946 |
| 42 | 28.23479358 | 25.82060683 | 23.70135920 | 21.83488281 | 20.18662674 | 18.72354975 |
| 43 | 28.66156233 | 25.16644569 | 23.98190213 | 22.06268870 | 20.37079494 | 18.87421029 |
| 44 | 29.07996307 | 26.50384945 | 24.25427392 | 22.28279102 | 20.54884129 | 19.01838305 |
| 45 | 29.49015987 | 26.83302386 | 24.51871254 | 22.49545026 | 20.72003970 | 19.15634742 |
| 46 | 29.89231360 | 27.15416962 | 24.77544907 | 22.70091813 | 20.88465356 | 19.28837074 |
| 47 | 30.28658196 | 27.46748255 | 25.02470783 | 22.89943780 | 21.04293612 | 19.41470884 |
| 48 | 30.67311957 | 27.77315371 | 25.26670664 | 23.09124425 | 21.19513088 | 19.53560654 |
| 49 | 31.05207801 | 28.07136947 | 25.50165693 | 23.27656450 | 21.34147200 | 19.65129812 |
| 50 | 31.42360589 | 28.36231168 | 25.72976401 | 23.45661787 | 21.48218462 | 19.76200778 |

| 年  | 5 釐         | 6 釐         | 7 釐         | 8 釐         | 9 釐         | 1 分         |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 0.96238095  | 0.94339623  | 0.93457944  | 0.92592593  | 0.91743119  | 0.90909091  |
| 2  | 1.86941043  | 1.83339267  | 1.80801817  | 1.78326475  | 1.75911119  | 1.73553719  |
| 3  | 2.72324803  | 2.67301195  | 2.62431604  | 2.57709699  | 2.52129467  | 2.46865199  |
| 4  | 3.54595050  | 3.46510561  | 3.38721126  | 3.31212684  | 3.23971488  | 3.16986546  |
| 5  | 4.32947667  | 4.21236379  | 4.10019744  | 3.99271004  | 3.88965126  | 3.79078677  |
| 6  | 5.07569206  | 4.91732433  | 4.76653966  | 4.62287966  | 4.48591859  | 4.35526070  |
| 7  | 5.78637340  | 5.58238144  | 5.38928940  | 5.20637006  | 5.03295284  | 4.89841882  |
| 8  | 6.46321276  | 6.20979381  | 5.97129851  | 5.74663894  | 5.53481911  | 5.33492620  |
| 9  | 7.10782168  | 6.80169227  | 6.51525225  | 6.24688791  | 5.99524689  | 5.75902382  |
| 10 | 7.72173493  | 7.36008705  | 7.02358154  | 6.71008140  | 6.41765770  | 6.14456711  |
| 11 | 8.30641422  | 7.88687458  | 7.49867434  | 7.13896426  | 6.80519055  | 6.49506101  |
| 12 | 8.86325164  | 8.38384394  | 7.94268630  | 7.53607802  | 7.16072528  | 6.81360182  |
| 13 | 9.39357299  | 8.85268296  | 8.35765074  | 7.90377594  | 7.48690392  | 7.10335620  |
| 14 | 9.89864094  | 9.29498393  | 8.74546799  | 8.24423698  | 7.78615039  | 7.36668746  |
| 15 | 10.37965804 | 9.71224899  | 9.10789801  | 8.55947869  | 8.06068843  | 7.60607951  |
| 16 | 10.83776956 | 10.10589527 | 9.44664860  | 8.85136916  | 8.31255819  | 7.82370864  |
| 17 | 11.27406625 | 10.47725969 | 9.76322299  | 9.12163811  | 8.54363137  | 8.02155331  |
| 18 | 11.68958690 | 10.82760348 | 10.05908691 | 9.37188714  | 8.75562511  | 8.20141210  |
| 19 | 12.08532086 | 11.15811649 | 10.33559624 | 9.60359920  | 8.95011478  | 8.36492009  |
| 20 | 12.46221034 | 11.46992122 | 10.59401425 | 9.81814741  | 9.12854567  | 8.51355372  |
| 21 | 12.82115271 | 11.76407662 | 10.83552733 | 10.01680316 | 9.29224373  | 8.84869429  |
| 22 | 13.16300258 | 12.04158172 | 11.06124050 | 10.20074366 | 9.44225444  | 8.77154026  |
| 23 | 13.48857388 | 12.30337898 | 11.27218738 | 10.37105895 | 9.58020683  | 8.89321842  |
| 24 | 13.79894179 | 12.55035753 | 11.46933400 | 10.52875828 | 9.70661177  | 8.98474402  |
| 25 | 14.09394457 | 12.78335616 | 11.65358318 | 10.67477619 | 9.82257960  | 9.07704002  |
| 26 | 14.37518530 | 13.00316619 | 11.82577837 | 10.80997795 | 9.92897211  | 9.16094547  |
| 27 | 14.64303362 | 13.21053414 | 11.98670904 | 10.93516477 | 10.02657992 | 9.23722316  |
| 28 | 14.89812726 | 13.40616428 | 12.13711125 | 11.05107849 | 10.11612837 | 9.30656651  |
| 29 | 15.14107358 | 13.59072102 | 12.27767407 | 11.15840601 | 10.19828291 | 9.36960591  |
| 30 | 15.37245103 | 13.76483115 | 12.40904118 | 11.25778324 | 10.27365404 | 9.42691447  |
| 31 | 15.59281050 | 13.92908599 | 12.53181419 | 11.34979939 | 10.34280187 | 9.47901315  |
| 32 | 15.80267667 | 14.08404339 | 12.64655532 | 11.43499944 | 10.40624025 | 9.52633759  |
| 33 | 16.00254921 | 14.23022961 | 12.75379002 | 11.51388827 | 10.46444060 | 9.56943236  |
| 34 | 16.19290101 | 14.36814114 | 12.85400936 | 11.58693367 | 10.51783541 | 9.60857487  |
| 35 | 16.37419429 | 14.49824636 | 12.94767239 | 11.65456822 | 10.56682148 | 9.64415897  |
| 36 | 16.54685171 | 14.62098713 | 13.03520776 | 11.71719279 | 10.61176282 | 9.676550816 |
| 37 | 16.71148734 | 14.73678031 | 13.11701660 | 11.77517851 | 10.65299342 | 9.70591651  |
| 38 | 16.86789271 | 14.84601916 | 13.19347345 | 11.82886899 | 10.69081965 | 9.73265137  |
| 39 | 17.01704067 | 14.94907468 | 13.26492846 | 11.87858240 | 10.72552261 | 9.75695579  |
| 40 | 17.15908635 | 15.04629687 | 13.33170884 | 11.92461333 | 10.75736020 | 9.77905072  |
| 41 | 17.29436796 | 15.13801592 | 13.39412041 | 11.96723457 | 10.78656899 | 9.79913702  |
| 42 | 17.42320758 | 15.22454322 | 13.45244898 | 12.00669867 | 10.81336604 | 9.81739729  |
| 43 | 17.54591198 | 15.30617294 | 13.50696167 | 12.04323951 | 10.83795050 | 9.83399753  |
| 44 | 17.66727331 | 15.38318202 | 13.55790820 | 12.07707362 | 10.86050504 | 9.84908867  |
| 45 | 17.77406982 | 15.45583209 | 13.60552159 | 12.10840150 | 10.88119729 | 9.86280788  |
| 46 | 17.88006650 | 15.52436690 | 13.65002018 | 12.13740880 | 10.90018100 | 9.87527989  |
| 47 | 17.98101571 | 15.58902821 | 13.69160764 | 12.16426741 | 10.91759725 | 9.8861808   |
| 48 | 18.07715782 | 15.65002661 | 13.73047443 | 12.18913649 | 10.93357545 | 9.8962553   |
| 49 | 18.16872173 | 15.70757227 | 13.76679852 | 12.21216341 | 10.94823436 | 9.90629594  |
| 50 | 18.25592546 | 15.76186064 | 13.80074629 | 12.23348464 | 10.96168290 | 9.91481449  |

複利年金分還表

| 年  | 2 釐         | 2½釐         | 3 釐        | 3½釐        | 4 釐        | 4½釐        |
|----|-------------|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1  | 1.02000000  | 1.02500000  | 1.03000000 | 1.03500000 | 1.04000000 | 1.04500000 |
| 2  | 0.51504950  | 0.51882716  | 0.52261084 | 0.52640049 | 0.53019608 | 0.53399756 |
| 3  | 0.34675467  | 0.35013717  | 0.35353036 | 0.35693418 | 0.36034854 | 0.36377336 |
| 4  | 0.26262375  | 0.26581788  | 0.26902705 | 0.27225114 | 0.27549005 | 0.27874365 |
| 5  | 0.21215839  | 0.21524686  | 0.21835457 | 0.22248137 | 0.22462711 | 0.22779164 |
| 6  | 0.17852581  | 0.18154997  | 0.18459757 | 0.18766821 | 0.19076190 | 0.19387839 |
| 7  | 0.15451196  | 0.15749543  | 0.16050635 | 0.16354449 | 0.16660961 | 0.16970147 |
| 8  | 0.13650980  | 0.13916735  | 0.14245639 | 0.14547665 | 0.14852783 | 0.15160965 |
| 9  | 0.12251514  | 0.12545689  | 0.12843386 | 0.13144601 | 0.13449299 | 0.13757447 |
| 10 | 0.11132653  | 0.11425876  | 0.11723051 | 0.12024137 | 0.12329094 | 0.12637882 |
| 11 | 0.10217794  | 0.10510596  | 0.10807745 | 0.11109197 | 0.11414904 | 0.11724818 |
| 12 | 0.09455960  | 0.09747773  | 0.10046209 | 0.10348395 | 0.10655217 | 0.10966619 |
| 13 | 0.08811835  | 0.09104827  | 0.09402954 | 0.09706157 | 0.10014373 | 0.10327535 |
| 14 | 0.08260197  | 0.08553653  | 0.08852634 | 0.09157073 | 0.09466897 | 0.09782032 |
| 15 | 0.07782517  | 0.08076646  | 0.08376658 | 0.08682507 | 0.08994110 | 0.09311381 |
| 16 | 0.07365013  | 0.07659839  | 0.07961085 | 0.08268483 | 0.08582000 | 0.08901537 |
| 17 | 0.06996984  | 0.07292777  | 0.07595253 | 0.07904313 | 0.08219852 | 0.08541758 |
| 18 | 0.066670210 | 0.06967008  | 0.07270870 | 0.07581684 | 0.07899333 | 0.08223690 |
| 19 | 0.06378177  | 0.06676062  | 0.06981388 | 0.07294033 | 0.07613862 | 0.07940734 |
| 20 | 0.06115672  | 0.06414613  | 0.06721571 | 0.07036108 | 0.07358175 | 0.07687614 |
| 21 | 0.05878477  | 0.06178733  | 0.06487178 | 0.06803659 | 0.07128011 | 0.07460057 |
| 22 | 0.05663140  | 0.05964661  | 0.06274739 | 0.06593207 | 0.06919881 | 0.07254565 |
| 23 | 0.05466810  | 0.05769638  | 0.06081390 | 0.06401880 | 0.06730906 | 0.07068249 |
| 24 | 0.05287110  | 0.05591282  | 0.05904742 | 0.06227283 | 0.06558683 | 0.06898703 |
| 25 | 0.05122044  | 0.05427592  | 0.05742787 | 0.06067404 | 0.06401196 | 0.06743903 |
| 26 | 0.04969923  | 0.05276875  | 0.05593829 | 0.05920540 | 0.06256738 | 0.06602137 |
| 27 | 0.04829309  | 0.05137687  | 0.05456421 | 0.05785241 | 0.06123854 | 0.06471946 |
| 28 | 0.04698967  | 0.05008793  | 0.05329323 | 0.05660265 | 0.06001298 | 0.06352081 |
| 29 | 0.04577836  | 0.04889127  | 0.05211467 | 0.05544538 | 0.05887993 | 0.06241461 |
| 30 | 0.04464992  | 0.04777764  | 0.05101926 | 0.05437133 | 0.05783010 | 0.06139154 |
| 31 | 0.04359635  | 0.04673900  | 0.04999892 | 0.05337240 | 0.05685535 | 0.06044345 |
| 32 | 0.04261061  | 0.04576831  | 0.04904662 | 0.05244150 | 0.05594859 | 0.05956320 |
| 33 | 0.04168653  | 0.04485938  | 0.04815612 | 0.05157242 | 0.05510357 | 0.05874453 |
| 34 | 0.04081867  | 0.044000675 | 0.04732196 | 0.05075966 | 0.05431477 | 0.05798191 |
| 35 | 0.04000221  | 0.04320558  | 0.04653929 | 0.04999835 | 0.05357731 | 0.05727045 |
| 36 | 0.03923285  | 0.04245158  | 0.04580379 | 0.04928416 | 0.05288688 | 0.05660578 |
| 37 | 0.03850678  | 0.04174090  | 0.04511162 | 0.04861325 | 0.05223957 | 0.05598402 |
| 38 | 0.03782057  | 0.04107912  | 0.04445924 | 0.04798214 | 0.05163192 | 0.05540169 |
| 39 | 0.03717114  | 0.04043615  | 0.04384384 | 0.04738775 | 0.05106083 | 0.05485567 |
| 40 | 0.03655575  | 0.03983623  | 0.04326238 | 0.04682728 | 0.05052349 | 0.05434315 |
| 41 | 0.03597188  | 0.03926786  | 0.04271241 | 0.04629822 | 0.05001738 | 0.05386158 |
| 42 | 0.03541729  | 0.03872876  | 0.04219167 | 0.04579828 | 0.04954020 | 0.05340868 |
| 43 | 0.03488993  | 0.03821688  | 0.04169811 | 0.04532539 | 0.04908989 | 0.05298235 |
| 44 | 0.03438794  | 0.03773037  | 0.04122985 | 0.04487798 | 0.04866454 | 0.05258071 |
| 45 | 0.03390962  | 0.03726752  | 0.04078518 | 0.04445343 | 0.04826246 | 0.05220202 |
| 46 | 0.03345342  | 0.03682676  | 0.04036254 | 0.04405108 | 0.04788205 | 0.05184471 |
| 47 | 0.03301792  | 0.03640669  | 0.03996051 | 0.04366919 | 0.04752189 | 0.05150734 |
| 48 | 0.03260184  | 0.03600599  | 0.03957777 | 0.04330646 | 0.04717805 | 0.05118858 |
| 49 | 0.03220396  | 0.03562348  | 0.03921314 | 0.04296167 | 0.04685712 | 0.05088722 |
| 50 | 0.03182321  | 0.03525806  | 0.03886550 | 0.04263371 | 0.04655020 | 0.05060215 |

| 年  | 5 釐        | 6 釐         | 7 釐        | 8 釐        | 9 釐        | 1 分        |
|----|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1  | 1.05000000 | 1.06000000  | 1.07000000 | 1.08000000 | 1.09000000 | 1.10000000 |
| 2  | 0.53780488 | 0.54543689  | 0.55309179 | 0.56076923 | 0.56846890 | 0.57619048 |
| 3  | 0.36720856 | 0.37410981  | 0.38105166 | 0.38803351 | 0.39505476 | 0.40211480 |
| 4  | 0.28201183 | 0.28859149  | 0.29522812 | 0.30192080 | 0.30866866 | 0.31547080 |
| 5  | 0.23097480 | 0.23739640  | 0.24389069 | 0.25045645 | 0.25709246 | 0.26379748 |
| 6  | 0.19701747 | 0.20336263  | 0.20979580 | 0.21631539 | 0.22291978 | 0.22960738 |
| 7  | 0.17281982 | 0.17913502  | 0.18555322 | 0.19207240 | 0.19869052 | 0.20540550 |
| 8  | 0.15472181 | 0.16103594  | 0.16746776 | 0.17401476 | 0.18067438 | 0.18744402 |
| 9  | 0.14069008 | 0.14702224  | 0.15348647 | 0.16007971 | 0.16679880 | 0.17364054 |
| 10 | 0.12950458 | 0.13586796  | 0.14237750 | 0.14902949 | 0.15582009 | 0.16274539 |
| 11 | 0.12038889 | 0.12676294  | 0.13335690 | 0.14007634 | 0.14694666 | 0.15396314 |
| 12 | 0.11282541 | 0.11927703  | 0.12590199 | 0.13266502 | 0.13956066 | 0.14676332 |
| 13 | 0.10645577 | 0.11296011  | 0.11965085 | 0.12652181 | 0.13356656 | 0.14077852 |
| 14 | 0.10102397 | 0.10758491  | 0.11434494 | 0.12129685 | 0.12843317 | 0.13574622 |
| 15 | 0.09643225 | 0.10296276  | 0.10979462 | 0.11682954 | 0.12405888 | 0.13147378 |
| 16 | 0.09226991 | 0.098895214 | 0.10585765 | 0.11297687 | 0.12029991 | 0.12781662 |
| 17 | 0.08869914 | 0.09544480  | 0.10242519 | 0.10962942 | 0.11704625 | 0.12466413 |
| 18 | 0.08554622 | 0.09233654  | 0.09941260 | 0.10670210 | 0.11421229 | 0.12193022 |
| 19 | 0.08274501 | 0.08962088  | 0.09675301 | 0.10412763 | 0.11172041 | 0.11954687 |
| 20 | 0.08024259 | 0.08718456  | 0.09439293 | 0.10185221 | 0.10954647 | 0.11745962 |
| 21 | 0.07799611 | 0.08500455  | 0.09228900 | 0.09983225 | 0.10761663 | 0.11562439 |
| 22 | 0.07597051 | 0.08304557  | 0.09040577 | 0.09803207 | 0.10590499 | 0.11400506 |
| 23 | 0.07413682 | 0.08127818  | 0.08871393 | 0.09642271 | 0.10438188 | 0.11257181 |
| 24 | 0.07247090 | 0.07967900  | 0.08718902 | 0.09497796 | 0.10322256 | 0.11129978 |
| 25 | 0.07095246 | 0.07822672  | 0.08581052 | 0.09367878 | 0.10180625 | 0.11016807 |
| 26 | 0.06955432 | 0.07690435  | 0.08456103 | 0.09250713 | 0.10071536 | 0.10915904 |
| 27 | 0.06829186 | 0.07569717  | 0.08342573 | 0.09144809 | 0.09973491 | 0.10825764 |
| 28 | 0.06712253 | 0.07459255  | 0.08239193 | 0.09048891 | 0.09885205 | 0.10745101 |
| 29 | 0.06604551 | 0.07357961  | 0.08144865 | 0.08961854 | 0.09805572 | 0.10672807 |
| 30 | 0.06505144 | 0.07264891  | 0.08058640 | 0.08882743 | 0.09733635 | 0.10607925 |
| 31 | 0.06413212 | 0.07179222  | 0.07979691 | 0.08810728 | 0.09668560 | 0.10549621 |
| 32 | 0.06328042 | 0.07100234  | 0.07907292 | 0.08745081 | 0.09609619 | 0.10497172 |
| 33 | 0.06249004 | 0.07027293  | 0.07840807 | 0.08685163 | 0.09556173 | 0.10449941 |
| 34 | 0.06175545 | 0.06959843  | 0.07779674 | 0.08630411 | 0.09507660 | 0.10407371 |
| 35 | 0.06107171 | 0.06897386  | 0.07723396 | 0.08580326 | 0.09463584 | 0.10378971 |
| 36 | 0.06043446 | 0.06839483  | 0.07671531 | 0.08524467 | 0.09423505 | 0.10334306 |
| 37 | 0.05983979 | 0.06785743  | 0.07623685 | 0.08492440 | 0.09387033 | 0.10302994 |
| 38 | 0.05928423 | 0.06735812  | 0.07579505 | 0.08453894 | 0.09353820 | 0.10274692 |
| 39 | 0.05876462 | 0.06689377  | 0.07538676 | 0.08418573 | 0.09323555 | 0.10249098 |
| 40 | 0.05827816 | 0.06646154  | 0.07500914 | 0.08386016 | 0.09295961 | 0.10225941 |
| 41 | 0.05782229 | 0.06605886  | 0.07465962 | 0.08356149 | 0.09277789 | 0.10204980 |
| 42 | 0.05739471 | 0.06568342  | 0.07433591 | 0.08328684 | 0.09247814 | 0.10185999 |
| 43 | 0.05699333 | 0.06533312  | 0.07403590 | 0.08303410 | 0.09226837 | 0.10168805 |
| 44 | 0.05661625 | 0.06500606  | 0.07375769 | 0.08280152 | 0.09207675 | 0.10153224 |
| 45 | 0.05626173 | 0.06470050  | 0.07349957 | 0.08258728 | 0.09190165 | 0.10139100 |
| 46 | 0.05592820 | 0.06441486  | 0.07325996 | 0.08238991 | 0.09174160 | 0.10126295 |
| 47 | 0.05561421 | 0.06414768  | 0.07303744 | 0.08220799 | 0.09159525 | 0.10114682 |
| 48 | 0.05531842 | 0.06389766  | 0.07283070 | 0.08204027 | 0.09146139 | 0.10104148 |
| 49 | 0.05503965 | 0.06366356  | 0.07263853 | 0.08188557 | 0.09133893 | 0.10094590 |
| 50 | 0.05477674 | 0.06344429  | 0.07245985 | 0.08174286 | 0.09122687 | 0.10085917 |

日利年利比較表

| 對於日利之年利 |         |      |         | 對於年利之日利 |        |       |        |
|---------|---------|------|---------|---------|--------|-------|--------|
| 日利      | 年利      | 日利   | 年利      | 年利      | 日利     | 年利    | 日利     |
| 0.55    | 0.20075 | 2.10 | 0.76650 | 0.200   | 0.5479 | 1.050 | 2.8757 |
| 0.60    | 0.21900 | 2.20 | 0.80300 | 0.225   | 0.6164 | 1.100 | 3.0137 |
| 0.65    | 0.23725 | 2.30 | 0.83950 | 0.250   | 0.6849 | 1.150 | 3.1507 |
| 0.70    | 0.25550 | 2.40 | 0.87600 | 0.275   | 0.7534 | 1.200 | 3.2877 |
| 0.75    | 0.27375 | 2.50 | 0.91250 | 0.300   | 0.8219 | 1.250 | 3.4247 |
| 0.80    | 0.29200 | 2.60 | 0.94900 | 0.325   | 0.8904 | 1.300 | 3.5616 |
| 0.85    | 0.31025 | 2.70 | 0.98500 | 0.350   | 0.9589 | 1.350 | 3.6986 |
| 0.90    | 0.32850 | 2.80 | 1.02200 | 0.400   | 1.0950 | 1.400 | 3.8356 |
| 0.95    | 0.34675 | 2.90 | 1.05850 | 0.450   | 1.2329 | 1.450 | 3.9726 |
| 1.00    | 0.36500 | 3.00 | 1.09500 | 0.500   | 1.3699 | 1.500 | 4.1096 |
| 1.10    | 0.40150 | 3.10 | 1.13150 | 0.550   | 1.5069 | 1.550 | 4.2466 |
| 1.20    | 0.43800 | 3.20 | 1.16800 | 0.600   | 1.6438 | 1.600 | 4.3836 |
| 1.30    | 0.47450 | 3.30 | 1.21450 | 0.650   | 1.7808 | 1.650 | 4.5206 |
| 1.40    | 0.51100 | 3.40 | 1.24100 | 0.700   | 1.9178 | 1.700 | 4.6575 |
| 1.50    | 0.54750 | 3.50 | 1.27750 | 0.750   | 2.0548 | 1.750 | 4.7945 |
| 1.60    | 0.58400 | 3.60 | 1.31400 | 0.800   | 2.1918 | 1.800 | 4.9315 |
| 1.70    | 0.62050 | 3.70 | 1.35050 | 0.850   | 2.3288 | 1.850 | 5.0685 |
| 1.80    | 0.65700 | 3.80 | 1.38700 | 0.900   | 2.4658 | 1.900 | 5.2055 |
| 1.90    | 0.69350 | 3.90 | 1.42350 | 0.950   | 2.6027 | 1.950 | 5.3425 |
| 2.00    | 0.73000 | 4.00 | 1.46000 | 1.000   | 2.7397 | 2.000 | 5.4795 |

注意 於日利以毫為單位，於年利以分為單位。

### 直角三角形

求可表直角三角形之三邊之三整數。

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 之法。命任意奇整數  $n$  為一邊，則他邊為  $\frac{1}{2}(n^2-1)$ ，

斜邊為  $\frac{1}{2}(n^2+1)$ 。

歐克立特 (Euclid) 之法。設  $x, y$  俱為奇數或俱為偶數，而  $xy$  為完全平方，則斜邊

為  $\frac{1}{2}(x+y)$ ，他二邊為  $\frac{1}{2}(x-y)$ ， $\sqrt{xy}$ 。

柏拉圖 (Plato) 之法。設以任意偶整數  $m$  為一邊，則他邊為  $\frac{1}{4}m^2-1$ ，斜邊為

$\frac{1}{4}m^2+1$ 。

Moseres 之法。取任意二數  $m, n$ ，則其積之 2 倍，即  $2mn$  及平方差  $m^2-n^2$  表二邊，平方和  $m^2+n^2$  表斜邊。

| 邊   |     |     | 面積    | 邊   |      |      | 面積    | 邊   |      |      | 面積     |
|-----|-----|-----|-------|-----|------|------|-------|-----|------|------|--------|
| 3   | 4   | 5   | 6     | 75  | 308  | 317  | 11550 | 231 | 520  | 569  | 60060  |
| 5   | 12  | 13  | 30    | 96  | 247  | 265  | 11856 | 200 | 609  | 641  | 60900  |
| 8   | 15  | 17  | 60    | 140 | 171  | 221  | 11970 | 279 | 440  | 521  | 61380  |
| 7   | 24  | 25  | 84    | 120 | 209  | 241  | 12540 | 185 | 672  | 697  | 62160  |
| 9   | 40  | 41  | 180   | 37  | 684  | 685  | 12654 | 336 | 377  | 505  | 63336  |
| 12  | 35  | 37  | 210   | 76  | 357  | 365  | 13566 | 20  | 1599 | 1601 | 63960  |
| 20  | 21  | 29  | 210   | 48  | 575  | 577  | 13800 | 308 | 435  | 533  | 66990  |
| 11  | 50  | 61  | 330   | 115 | 252  | 277  | 14490 | 195 | 748  | 773  | 72930  |
| 16  | 63  | 65  | 504   | 39  | 760  | 761  | 14820 | 396 | 403  | 565  | 79794  |
| 13  | 84  | 85  | 546   | 52  | 675  | 677  | 17550 | 259 | 660  | 709  | 85470  |
| 28  | 45  | 53  | 630   | 87  | 416  | 425  | 18096 | 368 | 465  | 593  | 85560  |
| 15  | 112 | 113 | 840   | 160 | 231  | 281  | 18480 | 336 | 527  | 625  | 88536  |
| 33  | 56  | 65  | 924   | 136 | 273  | 305  | 18564 | 315 | 572  | 653  | 90090  |
| 20  | 99  | 101 | 990   | 161 | 240  | 289  | 19320 | 273 | 736  | 785  | 100469 |
| 17  | 144 | 145 | 1224  | 56  | 783  | 785  | 21924 | 400 | 561  | 689  | 112200 |
| 48  | 55  | 73  | 1320  | 93  | 476  | 485  | 22134 | 364 | 627  | 725  | 114114 |
| 36  | 77  | 85  | 1386  | 207 | 224  | 305  | 23184 | 455 | 528  | 697  | 120120 |
| 39  | 80  | 89  | 1560  | 120 | 391  | 409  | 23460 | 407 | 624  | 745  | 126984 |
| 19  | 180 | 181 | 1710  | 135 | 352  | 377  | 23760 | 301 | 900  | 949  | 135450 |
| 24  | 143 | 145 | 1716  | 92  | 525  | 533  | 24150 | 468 | 595  | 757  | 139230 |
| 21  | 220 | 221 | 2310  | 175 | 289  | 337  | 25200 | 432 | 665  | 793  | 143640 |
| 65  | 72  | 97  | 3340  | 204 | 253  | 325  | 25806 | 369 | 800  | 881  | 147600 |
| 44  | 117 | 125 | 2574  | 152 | 345  | 377  | 26220 | 429 | 700  | 821  | 150150 |
| 60  | 91  | 109 | 2730  | 180 | 299  | 349  | 26910 | 315 | 988  | 1037 | 155610 |
| 28  | 195 | 197 | 2730  | 60  | 899  | 910  | 26970 | 555 | 572  | 797  | 158730 |
| 23  | 264 | 265 | 3036  | 145 | 408  | 433  | 29580 | 540 | 629  | 829  | 169830 |
| 51  | 140 | 149 | 3570  | 225 | 272  | 353  | 30600 | 451 | 780  | 901  | 175890 |
| 25  | 312 | 313 | 3900  | 100 | 621  | 629  | 31050 | 504 | 703  | 865  | 177150 |
| 32  | 255 | 257 | 4080  | 105 | 608  | 617  | 31920 | 329 | 1080 | 1129 | 177660 |
| 52  | 165 | 173 | 4290  | 180 | 340  | 389  | 32130 | 402 | 851  | 949  | 178710 |
| 88  | 105 | 137 | 4620  | 64  | 1023 | 1025 | 32736 | 464 | 777  | 905  | 180264 |
| 27  | 364 | 365 | 4914  | 252 | 275  | 373  | 34650 | 533 | 756  | 925  | 201474 |
| 57  | 176 | 185 | 5016  | 168 | 425  | 457  | 35700 | 616 | 663  | 905  | 204204 |
| 85  | 132 | 157 | 5610  | 155 | 468  | 493  | 36270 | 473 | 864  | 985  | 204336 |
| 36  | 323 | 325 | 5814  | 228 | 325  | 397  | 37050 | 580 | 741  | 941  | 214890 |
| 29  | 420 | 421 | 6090  | 111 | 680  | 689  | 37740 | 496 | 897  | 1025 | 222456 |
| 60  | 221 | 229 | 6630  | 108 | 725  | 733  | 39150 | 615 | 728  | 953  | 223860 |
| 119 | 120 | 169 | 7140  | 68  | 1155 | 1157 | 39270 | 330 | 644  | 725  | 107226 |
| 31  | 480 | 481 | 7440  | 203 | 396  | 445  | 40194 | 557 | 840  | 1009 | 234780 |
| 84  | 187 | 205 | 7854  | 165 | 532  | 557  | 43890 | 696 | 697  | 985  | 242556 |
| 104 | 153 | 185 | 7956  | 297 | 304  | 425  | 45144 | 660 | 779  | 1021 | 257070 |
| 95  | 168 | 193 | 7980  | 72  | 1295 | 1297 | 46620 | 645 | 812  | 1037 | 261870 |
| 40  | 399 | 401 | 7980  | 184 | 513  | 545  | 47196 | 476 | 1107 | 1205 | 263466 |
| 69  | 260 | 269 | 8970  | 116 | 837  | 845  | 48546 | 620 | 861  | 1061 | 266910 |
| 33  | 544 | 545 | 8976  | 280 | 351  | 449  | 49140 | 585 | 928  | 1097 | 271440 |
| 68  | 285 | 293 | 9690  | 217 | 456  | 505  | 49476 | 731 | 780  | 1069 | 285090 |
| 133 | 156 | 205 | 10374 | 261 | 380  | 461  | 49590 | 504 | 1247 | 1345 | 314244 |
| 44  | 483 | 485 | 10626 | 76  | 1443 | 1445 | 54834 | 704 | 903  | 1145 | 317856 |
| 35  | 612 | 613 | 10710 | 319 | 360  | 481  | 57420 | 660 | 989  | 1189 | 326370 |
| 105 | 208 | 233 | 10920 | 124 | 957  | 965  | 59334 | 612 | 1075 | 2237 | 329950 |

| 邊   |      |      | 面積     | 邊    |      |      | 面積     | 邊    |      |      | 面積     |
|-----|------|------|--------|------|------|------|--------|------|------|------|--------|
| 765 | 868  | 1157 | 332010 | 684  | 1363 | 1525 | 466839 | 988  | 1275 | 1613 | 629850 |
| 705 | 992  | 1217 | 349680 | 740  | 1269 | 1469 | 469530 | 880  | 1479 | 1721 | 650760 |
| 832 | 855  | 1193 | 355680 | 931  | 1021 | 1381 | 474810 | 1113 | 1184 | 1625 | 658896 |
| 532 | 1395 | 1493 | 371070 | 833  | 1056 | 1345 | 481474 | 1140 | 1219 | 1669 | 694830 |
| 799 | 960  | 1349 | 383520 | 969  | 1120 | 1481 | 542640 | 1040 | 1431 | 1769 | 744120 |
| 748 | 1035 | 1277 | 389090 | 720  | 1519 | 1681 | 546840 | 1248 | 1265 | 1777 | 799480 |
| 893 | 924  | 1285 | 412566 | 836  | 1325 | 1565 | 554014 | 1148 | 1485 | 1877 | 852390 |
| 560 | 1511 | 1649 | 434280 | 780  | 1421 | 1621 | 554190 | 1312 | 1425 | 1937 | 863550 |
| 884 | 987  | 1325 | 436254 | 936  | 1127 | 1465 | 556738 |      |      |      |        |
| 792 | 1175 | 1417 | 465300 | 1036 | 1173 | 1565 | 607614 |      |      |      |        |

### 斜 三 角 形

斜三角形之三邊及面積爲整數者之表如次。

| 邊  |    |    | 面積  | 邊  |     |     | 面積  | 邊  |     |     | 面積   |
|----|----|----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|------|
| 4  | 13 | 15 | 24  | 15 | 37  | 44  | 264 | 32 | 53  | 75  | 720  |
| 3  | 25 | 26 | 36  | 25 | 51  | 74  | 300 | 34 | 65  | 93  | 744  |
| 9  | 20 | 17 | 36  | 20 | 37  | 51  | 306 | 25 | 63  | 74  | 756  |
| 7  | 15 | 20 | 42  | 25 | 33  | 52  | 330 | 39 | 41  | 50  | 780  |
| 6  | 25 | 29 | 60  | 11 | 100 | 109 | 330 | 21 | 89  | 100 | 840  |
| 11 | 13 | 20 | 60  | 17 | 39  | 44  | 330 | 35 | 52  | 73  | 840  |
| 5  | 29 | 30 | 72  | 24 | 35  | 53  | 336 | 25 | 84  | 101 | 840  |
| 13 | 14 | 15 | 84  | 25 | 29  | 36  | 360 | 14 | 157 | 165 | 924  |
| 8  | 29 | 35 | 84  | 13 | 68  | 75  | 390 | 35 | 53  | 66  | 924  |
| 10 | 17 | 21 | 84  | 20 | 51  | 65  | 408 | 33 | 56  | 65  | 924  |
| 12 | 17 | 25 | 90  | 25 | 39  | 56  | 420 | 22 | 85  | 91  | 924  |
| 19 | 20 | 37 | 114 | 21 | 85  | 104 | 420 | 40 | 51  | 77  | 924  |
| 16 | 25 | 39 | 120 | 26 | 35  | 51  | 420 | 31 | 156 | 185 | 930  |
| 13 | 20 | 21 | 126 | 21 | 61  | 65  | 420 | 23 | 140 | 159 | 966  |
| 15 | 28 | 41 | 126 | 19 | 60  | 73  | 456 | 34 | 61  | 75  | 1020 |
| 11 | 25 | 30 | 132 | 35 | 44  | 75  | 462 | 57 | 60  | 111 | 1026 |
| 11 | 90 | 97 | 132 | 25 | 39  | 40  | 468 | 35 | 61  | 65  | 1080 |
| 13 | 40 | 51 | 156 | 8  | 123 | 125 | 480 | 31 | 97  | 120 | 1116 |
| 15 | 26 | 37 | 156 | 29 | 35  | 48  | 504 | 39 | 62  | 85  | 1116 |
| 10 | 35 | 39 | 168 | 51 | 52  | 101 | 510 | 25 | 101 | 114 | 1140 |
| 13 | 30 | 37 | 180 | 29 | 60  | 85  | 522 | 33 | 65  | 87  | 1140 |
| 12 | 55 | 65 | 198 | 28 | 65  | 89  | 546 | 51 | 98  | 145 | 1176 |
| 7  | 65 | 68 | 210 | 25 | 51  | 52  | 624 | 35 | 78  | 97  | 1260 |
| 17 | 25 | 28 | 210 | 25 | 52  | 63  | 630 | 16 | 195 | 205 | 1288 |
| 9  | 73 | 80 | 216 | 36 | 91  | 125 | 630 | 41 | 66  | 85  | 1320 |
| 15 | 41 | 52 | 234 | 26 | 51  | 55  | 660 | 40 | 111 | 145 | 1332 |
| 13 | 37 | 40 | 240 | 25 | 92  | 113 | 690 | 23 | 123 | 130 | 1380 |
| 9  | 65 | 70 | 252 | 29 | 52  | 69  | 690 | 46 | 75  | 109 | 1380 |
| 33 | 34 | 65 | 264 | 17 | 105 | 116 | 714 | 51 | 74  | 115 | 1380 |

| 邊  |     |     | 面積   | 邊   |     |     | 面積   | 邊   |     |     | 面積    |
|----|-----|-----|------|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-------|
| 41 | 75  | 97  | 1584 | 45  | 164 | 187 | 3366 | 123 | 133 | 200 | 7980  |
| 35 | 100 | 117 | 1638 | 78  | 95  | 97  | 3420 | 65  | 272 | 303 | 8160  |
| 39 | 85  | 92  | 1656 | 57  | 122 | 125 | 3420 | 111 | 200 | 281 | 8880  |
| 50 | 69  | 73  | 1656 | 65  | 109 | 116 | 3480 | 140 | 143 | 157 | 9240  |
| 41 | 84  | 85  | 1680 | 73  | 102 | 145 | 3480 | 68  | 273 | 275 | 9240  |
| 46 | 61  | 75  | 1680 | 65  | 126 | 173 | 3484 | 111 | 175 | 176 | 9240  |
| 57 | 65  | 68  | 1710 | 65  | 119 | 156 | 3570 | 89  | 208 | 231 | 9240  |
| 39 | 100 | 137 | 1716 | 40  | 231 | 257 | 3696 | 116 | 231 | 325 | 9240  |
| 29 | 150 | 169 | 1740 | 69  | 113 | 140 | 3864 | 111 | 175 | 232 | 9324  |
| 29 | 125 | 136 | 1740 | 65  | 119 | 138 | 3864 | 74  | 277 | 315 | 9324  |
| 52 | 73  | 75  | 1800 | 60  | 145 | 161 | 3864 | 117 | 164 | 175 | 9450  |
| 43 | 259 | 300 | 1806 | 89  | 99  | 100 | 3960 | 116 | 181 | 225 | 10440 |
| 26 | 145 | 153 | 1836 | 57  | 148 | 175 | 3990 | 91  | 253 | 300 | 10626 |
| 51 | 75  | 78  | 1836 | 75  | 109 | 136 | 4080 | 148 | 153 | 175 | 10710 |
| 80 | 91  | 165 | 1848 | 85  | 99  | 140 | 4158 | 113 | 195 | 288 | 10920 |
| 55 | 84  | 125 | 1848 | 91  | 100 | 159 | 4200 | 149 | 156 | 175 | 11920 |
| 45 | 85  | 104 | 1872 | 90  | 97  | 119 | 4284 | 66  | 389 | 425 | 11220 |
| 45 | 91  | 116 | 1890 | 40  | 291 | 325 | 4290 | 123 | 187 | 200 | 11220 |
| 53 | 75  | 88  | 1980 | 87  | 100 | 143 | 4290 | 85  | 293 | 336 | 11424 |
| 65 | 66  | 109 | 1980 | 68  | 87  | 145 | 4350 | 170 | 171 | 305 | 11628 |
| 48 | 85  | 91  | 2016 | 39  | 280 | 305 | 4368 | 75  | 403 | 452 | 12090 |
| 65 | 72  | 119 | 2016 | 89  | 117 | 170 | 4440 | 93  | 325 | 338 | 12090 |
| 17 | 260 | 267 | 2040 | 55  | 207 | 244 | 4554 | 130 | 185 | 231 | 12012 |
| 92 | 117 | 205 | 2070 | 66  | 175 | 221 | 4620 | 113 | 225 | 238 | 12600 |
| 61 | 69  | 100 | 2070 | 143 | 168 | 305 | 4620 | 159 | 165 | 184 | 12144 |
| 65 | 68  | 105 | 2142 | 61  | 155 | 156 | 4650 | 87  | 340 | 385 | 13398 |
| 60 | 73  | 91  | 2184 | 37  | 411 | 440 | 4884 | 164 | 225 | 349 | 14760 |
| 61 | 74  | 87  | 2220 | 41  | 337 | 360 | 4904 | 125 | 253 | 312 | 15180 |
| 55 | 136 | 183 | 2244 | 123 | 208 | 325 | 4920 | 225 | 287 | 496 | 15624 |
| 19 | 289 | 300 | 2280 | 105 | 124 | 205 | 5208 | 195 | 203 | 356 | 15834 |
| 68 | 75  | 77  | 2310 | 75  | 176 | 229 | 5280 | 144 | 221 | 275 | 15840 |
| 58 | 85  | 117 | 2340 | 51  | 233 | 260 | 5304 | 126 | 269 | 325 | 16380 |
| 45 | 133 | 164 | 2394 | 65  | 173 | 204 | 5304 | 190 | 231 | 377 | 17556 |
| 29 | 182 | 195 | 2426 | 45  | 296 | 325 | 5328 | 175 | 221 | 318 | 18564 |
| 87 | 119 | 200 | 2436 | 91  | 125 | 174 | 5460 | 175 | 221 | 276 | 19320 |
| 35 | 174 | 197 | 2436 | 104 | 111 | 175 | 5460 | 125 | 312 | 323 | 19380 |
| 41 | 169 | 200 | 2460 | 99  | 113 | 140 | 5544 | 143 | 296 | 375 | 19536 |
| 85 | 123 | 202 | 2460 | 47  | 250 | 267 | 5640 | 186 | 221 | 275 | 20460 |
| 65 | 89  | 132 | 2574 | 55  | 244 | 273 | 6006 | 212 | 225 | 247 | 22230 |
| 31 | 193 | 210 | 2604 | 105 | 116 | 143 | 6006 | 260 | 287 | 519 | 22386 |
| 39 | 145 | 164 | 2610 | 100 | 217 | 302 | 6510 | 129 | 377 | 440 | 22704 |
| 65 | 87  | 88  | 2640 | 91  | 145 | 180 | 6552 | 205 | 286 | 411 | 27060 |
| 61 | 91  | 100 | 2730 | 153 | 185 | 328 | 6660 | 221 | 346 | 525 | 27300 |
| 21 | 340 | 353 | 2856 | 43  | 520 | 555 | 6708 | 123 | 595 | 676 | 29274 |
| 49 | 200 | 241 | 2940 | 119 | 150 | 241 | 7140 | 253 | 260 | 315 | 31878 |
| 27 | 275 | 292 | 2970 | 50  | 369 | 401 | 7380 | 277 | 304 | 315 | 33304 |
| 35 | 197 | 216 | 3024 | 89  | 170 | 189 | 7560 | 255 | 407 | 596 | 41514 |
| 76 | 85  | 105 | 3196 | 65  | 297 | 340 | 7722 | 217 | 404 | 495 | 42966 |
| 37 | 195 | 212 | 3330 | 37  | 525 | 548 | 7770 | 175 | 527 | 600 | 44268 |
| 87 | 112 | 185 | 3360 | 85  | 234 | 293 | 7956 | 273 | 425 | 628 | 46410 |



直徑圓周及面積對照表

| 直徑   | 圓周      | 面積       | 直徑   | 圓周       | 面積        |
|------|---------|----------|------|----------|-----------|
| 0.5  | 1.5708  | 0.1964   | 25.5 | 80.1106  | 510.7052  |
| 1.0  | 3.1416  | 0.7854   | 26.0 | 81.6814  | 530.9292  |
| 1.5  | 4.7124  | 1.7672   | 26.5 | 83.2522  | 551.5459  |
| 2.0  | 6.2832  | 3.1416   | 27.0 | 84.8230  | 572.5553  |
| 2.5  | 7.8540  | 4.9084   | 27.5 | 86.3939  | 593.9574  |
| 3.0  | 9.4248  | 7.0686   | 28.0 | 87.9646  | 615.7522  |
| 3.5  | 10.9956 | 9.6211   | 28.5 | 89.5354  | 637.9397  |
| 4.0  | 12.5664 | 12.5664  | 29.0 | 91.1062  | 660.5199  |
| 4.5  | 14.1372 | 15.9043  | 29.5 | 92.6770  | 683.4928  |
| 5.0  | 15.7080 | 19.6350  | 30.0 | 94.2478  | 706.8583  |
| 5.5  | 17.2788 | 23.7583  | 30.5 | 95.8186  | 730.6166  |
| 6.0  | 18.8496 | 28.2743  | 31.0 | 97.3894  | 754.7676  |
| 6.5  | 20.4204 | 32.1831  | 31.5 | 98.9602  | 779.3113  |
| 7.0  | 21.9912 | 38.4845  | 32.0 | 100.5310 | 804.2477  |
| 7.5  | 23.5619 | 44.1787  | 32.5 | 102.1018 | 829.5768  |
| 8.0  | 25.1327 | 50.2655  | 33.0 | 103.6726 | 855.2986  |
| 8.5  | 26.7035 | 56.7450  | 33.5 | 105.2434 | 881.4131  |
| 9.0  | 28.2743 | 63.6173  | 34.0 | 106.8142 | 907.9203  |
| 9.5  | 29.8451 | 70.8822  | 34.5 | 108.3849 | 934.8202  |
| 10.0 | 31.4159 | 78.5398  | 35.0 | 109.9557 | 962.1128  |
| 10.5 | 32.9867 | 86.5902  | 35.5 | 111.5265 | 989.7980  |
| 11.0 | 34.5575 | 95.0332  | 36.0 | 113.0973 | 1017.8760 |
| 11.5 | 36.1283 | 103.8689 | 36.5 | 114.6681 | 1046.3467 |
| 12.0 | 37.6991 | 113.0973 | 37.0 | 116.2389 | 1075.2101 |
| 12.5 | 39.2699 | 122.7185 | 37.5 | 117.8097 | 1104.4662 |
| 13.0 | 40.8407 | 132.7323 | 38.0 | 119.3805 | 1134.1149 |
| 13.5 | 42.4115 | 143.1388 | 38.5 | 120.9513 | 1164.1564 |
| 14.0 | 43.9823 | 153.9380 | 39.0 | 122.5221 | 1194.5906 |
| 14.5 | 45.5531 | 165.1300 | 39.5 | 124.0929 | 1225.4275 |
| 15.0 | 47.1239 | 176.7146 | 40.0 | 125.6637 | 1256.6371 |
| 15.5 | 48.6947 | 188.6919 | 40.5 | 127.2345 | 1288.2493 |
| 16.0 | 50.2655 | 201.0619 | 41.0 | 128.8053 | 1320.2543 |
| 16.5 | 51.8363 | 213.8246 | 41.5 | 130.3761 | 1352.6520 |
| 17.0 | 53.4071 | 226.9801 | 42.0 | 131.9469 | 1385.4424 |
| 17.5 | 54.9779 | 240.5282 | 42.5 | 133.5177 | 1418.6254 |
| 18.0 | 56.5487 | 254.4690 | 43.0 | 135.0885 | 1452.2012 |
| 18.5 | 58.1195 | 268.8025 | 43.5 | 136.6593 | 1486.1697 |
| 19.0 | 59.6903 | 283.5287 | 44.0 | 138.2301 | 1520.5308 |
| 19.5 | 61.2611 | 298.6477 | 44.5 | 139.8009 | 1555.2847 |
| 20.0 | 62.8319 | 314.1593 | 45.0 | 141.3717 | 1590.4313 |
| 20.5 | 64.4027 | 330.0636 | 45.5 | 142.9425 | 1625.9705 |
| 21.0 | 65.9735 | 346.3606 | 46.0 | 144.5133 | 1661.9025 |
| 21.5 | 67.5442 | 363.0503 | 46.5 | 146.0841 | 1698.2272 |
| 22.0 | 69.1150 | 380.1327 | 47.0 | 147.6549 | 1734.9445 |
| 22.5 | 70.6858 | 497.6078 | 47.5 | 149.2257 | 1772.0546 |
| 23.0 | 72.2566 | 415.4756 | 48.0 | 150.7964 | 1809.5574 |
| 23.5 | 73.8274 | 433.7361 | 48.5 | 152.3672 | 1847.7523 |
| 24.0 | 75.3982 | 452.3893 | 49.0 | 153.9380 | 1885.7410 |
| 24.5 | 76.9690 | 471.4352 | 49.5 | 155.5088 | 1924.4218 |
| 25.0 | 78.5398 | 490.8739 | 50.0 | 157.0796 | 1963.4954 |

| 直 徑  | 圓 周      | 面 積       | 直 徑   | 圓 周      | 面 積       |
|------|----------|-----------|-------|----------|-----------|
| 50.5 | 158.6504 | 2002.9617 | 75.5  | 237.1902 | 4476.9659 |
| 51.0 | 160.2212 | 2042.8216 | 76.0  | 238.7610 | 4536.4598 |
| 51.5 | 161.7920 | 2083.0723 | 76.5  | 240.3318 | 4596.3464 |
| 52.0 | 163.3628 | 2123.7166 | 77.0  | 241.9026 | 4656.6257 |
| 52.5 | 164.9336 | 2164.7537 | 77.5  | 243.4734 | 4717.2977 |
| 53.0 | 166.5044 | 2206.1834 | 78.0  | 245.0442 | 4778.3624 |
| 53.5 | 168.0752 | 2248.0059 | 78.5  | 246.6150 | 4839.8198 |
| 54.0 | 169.6460 | 2290.2210 | 79.0  | 248.1858 | 4901.6699 |
| 54.5 | 171.2168 | 2332.8289 | 79.5  | 249.7566 | 4963.9127 |
| 55.0 | 172.7876 | 2375.8294 | 80.0  | 251.3274 | 5026.5482 |
| 55.5 | 174.3584 | 2419.2227 | 80.5  | 252.8982 | 5089.5764 |
| 56.0 | 175.9292 | 2463.0086 | 81.0  | 254.4690 | 5152.9974 |
| 56.5 | 177.5000 | 2507.1873 | 81.5  | 256.0398 | 5216.8110 |
| 57.0 | 179.0708 | 2551.7586 | 82.0  | 257.6106 | 5281.0173 |
| 57.5 | 180.6416 | 2596.7227 | 82.5  | 259.1814 | 5345.6162 |
| 58.0 | 182.2124 | 2642.0794 | 83.0  | 260.7522 | 5410.6079 |
| 58.5 | 183.7832 | 2687.8289 | 83.5  | 262.3230 | 5475.9923 |
| 59.0 | 185.3540 | 2733.9710 | 84.0  | 263.8938 | 5541.7694 |
| 59.5 | 186.9248 | 2780.5058 | 84.5  | 265.4646 | 5607.9392 |
| 60.0 | 188.4956 | 2827.4334 | 85.0  | 267.0354 | 5674.5017 |
| 60.5 | 190.0664 | 2874.7536 | 85.5  | 268.6062 | 5741.4569 |
| 61.0 | 191.6372 | 2922.4666 | 86.0  | 270.1770 | 5808.8048 |
| 61.5 | 193.2079 | 2970.5722 | 86.5  | 271.7478 | 5876.5454 |
| 62.0 | 194.7787 | 3019.0705 | 87.0  | 273.3186 | 5944.6787 |
| 62.5 | 196.3495 | 3067.9616 | 87.5  | 274.8894 | 6013.2047 |
| 63.0 | 197.9203 | 3117.2453 | 88.0  | 276.4602 | 6082.1234 |
| 63.5 | 199.4911 | 3166.9217 | 88.5  | 278.0309 | 6151.4348 |
| 64.0 | 201.0619 | 3216.9909 | 89.0  | 279.6017 | 6221.1389 |
| 64.5 | 202.6327 | 3267.4527 | 89.5  | 281.1725 | 6291.2356 |
| 65.0 | 204.2035 | 3318.3072 | 90.0  | 282.7433 | 6361.7251 |
| 65.5 | 205.7743 | 3369.5545 | 90.5  | 284.3141 | 6432.6073 |
| 66.0 | 207.3451 | 3421.1944 | 91.0  | 285.8849 | 6503.8822 |
| 66.5 | 208.9159 | 3473.2270 | 91.5  | 287.4557 | 6575.5498 |
| 67.0 | 210.4867 | 3525.6524 | 92.0  | 289.0265 | 6647.6101 |
| 67.5 | 212.0575 | 3578.4704 | 92.5  | 290.5973 | 6720.0630 |
| 68.0 | 213.6283 | 3631.6811 | 93.0  | 292.1681 | 6792.9087 |
| 68.5 | 215.1991 | 3685.2845 | 93.5  | 293.7389 | 6866.1471 |
| 69.0 | 216.7699 | 3739.2807 | 94.0  | 295.3097 | 6939.7782 |
| 69.5 | 218.3407 | 3793.6695 | 94.5  | 296.8805 | 7013.8019 |
| 70.0 | 219.9115 | 3848.4510 | 95.0  | 298.4513 | 7088.2184 |
| 70.5 | 221.4823 | 3903.6252 | 95.5  | 300.0221 | 7163.0276 |
| 71.0 | 223.0531 | 3959.1921 | 96.0  | 301.5929 | 7238.2295 |
| 71.5 | 224.6239 | 4015.1518 | 96.5  | 303.1637 | 7313.8240 |
| 72.0 | 226.1947 | 4071.5041 | 97.0  | 304.7345 | 7389.8119 |
| 72.5 | 227.7655 | 4128.2491 | 97.5  | 306.3053 | 7466.1913 |
| 73.0 | 229.3363 | 4185.3868 | 98.0  | 307.8761 | 7542.9640 |
| 73.5 | 230.9071 | 4242.9172 | 98.5  | 309.4469 | 7620.1293 |
| 74.0 | 232.4779 | 4300.8403 | 99.0  | 311.0177 | 7697.6874 |
| 74.5 | 234.0487 | 4359.1562 | 99.5  | 312.5885 | 7775.6382 |
| 75.0 | 235.6194 | 4417.8647 | 100.0 | 314.1593 | 7853.9816 |

弧之長(亦稱角之弧度)

設圓之半徑為 1.

| 角  | 弧              | 角  | 弧之長            | 角   | 弧之長            | 角              | 弧之長            |
|----|----------------|----|----------------|-----|----------------|----------------|----------------|
| 1° | 0.017453292520 | 1' | 0.000290888209 | 1'' | 0.000004848137 | 1 <sup>分</sup> | 0.015707963268 |
| 2  | 0.034906585040 | 2  | 0.000581776417 | 2   | 0.000009696274 | 2              | 0.031415926536 |
| 3  | 0.052359877560 | 3  | 0.000872664626 | 3   | 0.000014544410 | 3              | 0.047123889804 |
| 4  | 0.069813170080 | 4  | 0.001163552835 | 4   | 0.000019392547 | 4              | 0.062831853072 |
| 5  | 0.087266462606 | 5  | 0.001454441043 | 5   | 0.000024240684 | 5              | 0.078539816340 |
| 6  | 0.104715755120 | 6  | 0.001745329252 | 6   | 0.000029088821 | 6              | 0.094247779608 |
| 7  | 0.122173047640 | 7  | 0.002036217461 | 7   | 0.000033936958 | 7              | 0.109955742876 |
| 8  | 0.139626340160 | 8  | 0.002327105669 | 8   | 0.000038785094 | 8              | 0.125663706144 |
| 9  | 0.157079632679 | 9  | 0.002617993878 | 9   | 0.000043633231 | 9              | 0.141371669412 |

| 角  | 弧之長                         | 角    | 弧之長                         |
|----|-----------------------------|------|-----------------------------|
| 1° | 0.0174532925199432957692369 | 1'   | 0.0000048481368110953599359 |
| 1' | 0.0002908882086657215961539 | 1gr. | 0.0157079632679489661923133 |

弓形之面積

設圓之直徑為 1

| 高    | 面積      | 高    | 面積      | 高    | 面積      | 高    | 面積      |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| .005 | .000471 | .130 | .059999 | .255 | .157891 | .380 | .273861 |
| .010 | .001329 | .135 | .063389 | .260 | .162263 | .385 | .278721 |
| .015 | .002438 | .140 | .066833 | .265 | .166663 | .390 | .283593 |
| .020 | .003749 | .145 | .070329 | .270 | .171090 | .395 | .288476 |
| .025 | .005231 | .150 | .073875 | .275 | .175542 | .400 | .293370 |
| .030 | .006866 | .155 | .077470 | .280 | .180020 | .405 | .298274 |
| .035 | .008636 | .160 | .081112 | .285 | .184522 | .410 | .303187 |
| .040 | .010538 | .165 | .084801 | .290 | .189048 | .415 | .308110 |
| .045 | .012555 | .170 | .088536 | .295 | .193597 | .420 | .313042 |
| .050 | .014681 | .175 | .092314 | .300 | .198168 | .425 | .317981 |
| .055 | .016912 | .180 | .096135 | .305 | .202762 | .430 | .322928 |
| .060 | .019239 | .185 | .099997 | .310 | .207376 | .435 | .327883 |
| .065 | .021660 | .190 | .103900 | .315 | .212011 | .440 | .332843 |
| .070 | .024168 | .195 | .107843 | .320 | .216666 | .445 | .337810 |
| .075 | .026761 | .200 | .111824 | .325 | .221341 | .450 | .342783 |
| .080 | .029435 | .205 | .115842 | .330 | .226034 | .455 | .347760 |
| .085 | .032186 | .210 | .119898 | .335 | .230745 | .460 | .352742 |
| .090 | .035012 | .215 | .123988 | .340 | .235473 | .465 | .357728 |
| .095 | .037909 | .220 | .128114 | .345 | .240219 | .470 | .362717 |
| .100 | .040875 | .225 | .132273 | .350 | .244980 | .475 | .367710 |
| .105 | .043908 | .230 | .136465 | .355 | .249758 | .480 | .372704 |
| .110 | .047006 | .235 | .140689 | .360 | .254551 | .485 | .377701 |
| .115 | .050165 | .240 | .144945 | .365 | .259358 | .490 | .382700 |
| .120 | .053385 | .245 | .149231 | .370 | .264179 | .495 | .387699 |
| .125 | .056664 | .250 | .153546 | .375 | .269014 | .500 | .392699 |

## 正 多 邊 形

表 I 爲示正多邊形之一邊爲 1 時，表其半徑，邊心距，面積之數；表 II 爲示正多邊形之半徑爲 1，或邊心距爲 1，又或面積爲 1 時表其一邊之數。

| 多邊形<br>之邊數 | I. 邊 $c=1$ . |          |           | II. 依下之已知件 $c$ 之值 |          |          |
|------------|--------------|----------|-----------|-------------------|----------|----------|
|            | 半 徑          | 邊 心 距    | 面 積       | 半徑=1              | 邊心距=1    | 面積=1     |
| 3          | 0.577350     | 0.288675 | 0.433013  | 1.732050          | 3.404101 | 1.519671 |
| 4          | 0.707107     | 0.500000 | 1.000000  | 1.414214          | 2.000000 | 1.000000 |
| 5          | 0.850651     | 0.688191 | 1.720477  | 1.175570          | 1.453085 | 0.762387 |
| 6          | 1.000000     | 0.866025 | 2.598076  | 1.000000          | 1.154701 | 0.620403 |
| 7          | 1.152382     | 1.038261 | 3.633912  | 0.867767          | 0.963149 | 0.524581 |
| 8          | 1.306563     | 1.207107 | 3.828428  | 0.765367          | 0.828427 | 0.455090 |
| 9          | 1.461902     | 1.373739 | 6.181823  | 0.684040          | 0.727940 | 0.402200 |
| 10         | 1.618034     | 1.538842 | 7.694207  | 0.6 8034          | 0.649839 | 1.390511 |
| 11         | 1.774732     | 1.702844 | 9.365640  | 0.563465          | 0.587253 | 1.326762 |
| 12         | 1.931852     | 1.866025 | 11.196150 | 0.517638          | 0.535898 | 0.298858 |
| 15         | 2.404867     | 2.352315 | 11.642360 | 0.415823          | 0.425113 | 0.238079 |
| 18         | 2.879385     | 2.835641 | 25.520770 | 0.347296          | 0.352654 | 0.197949 |
| 20         | 3.196277     | 3.156876 | 31.568760 | 0.312869          | 0.316769 | 0.077980 |

但邊變時，半徑及邊心距以同比而變，而面積因邊之平方而變。例如作深 3 尺容 36.75 立方尺之八角柱器，底面積爲  $36.75 \div 3 = 12.25$  平方尺。故由表 II 得  $c^2:0.45509^2 = 12.25:1$ 。  $\therefore c = 1.59815$ 。

## 正 多 面 體

正多面體之頂數，積數，面數，及積爲 1 時表其面積及體積之數。

| 正 多 面 體   | 頂 數 | 積 數 | 面      | 面 積       | 體 積      |
|-----------|-----|-----|--------|-----------|----------|
| 正四面體      | 4   | 6   | 4個三角形  | 1.732051  | 0.117851 |
| 正六面體(立方體) | 8   | 12  | 6個正方形  | 6.000000  | 1.000000 |
| 正八面體      | 6   | 12  | 8個三角形  | 3.464102  | 0.471404 |
| 正十二面體     | 20  | 30  | 12個五角形 | 20.645779 | 7.663119 |
| 正二十面體     | 12  | 30  | 20個三角形 | 8.660254  | 2.181595 |

圓周率之重要諸值

|   | $\pi$      | $\pi^2$    | $\pi^3$     | $\sqrt{\pi}$ | $\sqrt[3]{\pi}$ | $\sqrt[3]{\pi^2}$ |
|---|------------|------------|-------------|--------------|-----------------|-------------------|
| 1 | 3.1415927  | 9.8696044  | 31.0062767  | 1.7724539    | 1.4645919       | 2.1450294         |
| 2 | 6.2831853  | 19.7392088 | 62.0125534  | 3.5449077    | 2.9291836       | 4.2900588         |
| 3 | 9.4247780  | 29.6088132 | 93.0188300  | 5.3173616    | 4.3937756       | 6.4350882         |
| 4 | 12.5663706 | 89.4780220 | 124.0251067 | 7.0398154    | 5.8583675       | 8.5801176         |
| 5 | 15.7079633 | 49.3480220 | 155.0313834 | 8.8622693    | 7.3229594       | 10.7251470        |
| 6 | 18.8495559 | 59.2176264 | 186.0376601 | 10.6347231   | 8.7875513       | 12.8701764        |
| 7 | 21.9911486 | 69.0872308 | 217.0439368 | 12.4071770   | 10.2521432      | 15.0152059        |
| 8 | 25.1327412 | 78.9568352 | 248.0502134 | 14.1796308   | 11.7167351      | 17.1602352        |
| 9 | 28.2743339 | 88.8254396 | 279.0564901 | 15.9520847   | 13.1813269      | 19.3052646        |

|   | $\frac{1}{\pi}$ | $\frac{1}{\pi^2}$ | $\frac{1}{\pi^3}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ |
|---|-----------------|-------------------|-------------------|------------------------|---------------------------|
| 1 | 0.3183099       | 0.1013210         | 0.0322515         | 0.5641896              | 0.6827841                 |
| 2 | 0.6366198       | 0.2026420         | 0.0645030         | 1.1283792              | 1.3655681                 |
| 3 | 0.9549297       | 0.3039631         | 0.0967545         | 1.6925688              | 2.483522                  |
| 4 | 1.2732395       | 0.4052841         | 0.1290060         | 2.2567583              | 2.7311363                 |
| 5 | 1.5915494       | 0.5066051         | 0.1612576         | 2.8209479              | 3.4139203                 |
| 6 | 1.9098593       | 0.6079261         | 0.1935090         | 3.3851375              | 4.0967644                 |
| 7 | 2.2281692       | 0.7092471         | 0.2257605         | 3.9493271              | 4.7794885                 |
| 8 | 2.5464791       | 0.8105682         | 0.2580120         | 4.5139167              | 5.4622725                 |
| 9 | 2.8647890       | 0.9118892         | 0.2902335         | 5.0777033              | 6.1450566                 |

$\pi$  之重要諸值之對數

|                          |                                    |                                          |                                                  |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\log \pi = 0.4971499$   | $\log \sqrt{\pi} = 0.2485749$      | $\log \frac{1}{\pi} = \bar{1}.5028501$   | $\log \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \bar{1}.7514251$    |
| $\log \pi^2 = 0.9942997$ | $\log \sqrt[3]{\pi} = 0.1657166$   | $\log \frac{1}{\pi^2} = \bar{1}.0057003$ | $\log \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = \bar{1}.8342834$ |
| $\log \pi^3 = 1.4914496$ | $\log \sqrt[3]{\pi^2} = 0.3314332$ | $\log \frac{1}{\pi^3} = \bar{1}.5085504$ |                                                  |

$\pi, e, \mu, \frac{1}{\mu}$  之最近值

|                           |       |         |       |       |       |       |         |         |                      |
|---------------------------|-------|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|----------------------|
| $\pi = 3.14159$           | 26535 | 89793   | 23846 | 26433 | 83279 | 50288 | 41971   | 69399   | 37510                |
|                           | 58209 | 74944   | 59230 | 78164 | 06286 | 20899 | 86230   | 34825   | 34211                |
|                           | 82148 | 08651   | 32823 | 06647 | 09384 | 46095 | 50582   | 23172   | 53594                |
|                           | 48111 | 74502   | 84102 | 70193 | 85211 | 05559 | 64462   | 29489   | 54930                |
|                           | 44288 | 10975   | 66593 | 34461 | 28475 | 64823 | 37867   | 83165   | 27120                |
|                           | 45648 | 56692   | 34603 | 48610 | 49432 | 66482 | 13393   | 60726   | 02491                |
|                           | 72458 | 70066   | 04315 | 58817 | 48815 | 20920 | 96982   | 92540   | 91715                |
|                           | 79925 | 90360   | 01133 | 05305 | 48820 | 46652 | 13841   | 46951   | 94151                |
|                           | 33057 | 27036   | 57595 | 91953 | 09218 | 61173 | 81932   | 61179   | 31051                |
|                           | 07746 | 23798   | 34749 | 56735 | 18857 | 52724 | 89122   | 79381   | 83011                |
|                           | 98336 | 73362   | 44193 | 66430 | 86021 | 39501 | 60924   | 43077   | 23094                |
|                           | 53096 | 62027   | 55693 | 97986 | 95022 | 24749 | 96206   | 07497   | 03041                |
|                           | 86199 | 51100   | 89202 | 28377 | 02131 | 41694 | 11902   | 98858   | 25446                |
|                           | 79990 | 46597   | 00081 | 70029 | 63123 | 77381 | 34208   | 41807   | 91451                |
|                           | 05709 | 85..... | ..... |       |       |       |         |         |                      |
|                           |       |         |       |       |       |       |         |         | (小數 707 位)           |
| $e = 2.71828$             | 18284 | 59045   | 23536 | 02874 | 71352 | 66249 | 77572   | 47093   | 69995                |
|                           | 95749 | 63967   | 62772 | 40766 | 30335 | 35475 | 94571   | 38217   | 85257                |
|                           | 42746 | 63919   | 32003 | 05992 | 18474 | 13596 | 62904   | 357.... | .....                |
|                           |       |         |       |       |       |       |         |         | (小數 138 位)           |
| $\mu = 0.43429$           | 44819 | 03251   | 82765 | 11289 | 18916 | 60508 | 22943   | 97005   | 80366                |
|                           | 65661 | 14453   | 78316 | 58646 | 49208 | 87077 | 47292   | 24949   | 33843                |
|                           | 18706 | 10674   | 47663 | 03733 | 64167 | 92871 | 58963   | 90656   | 92210                |
|                           | 81226 | 58521   | 27086 | 56867 | 03295 | 93370 | 86965   | 88266   | 88331                |
|                           | 77384 | 90514   | 28443 | 48666 | 76864 | 65860 | 85135   | 56148   | 21234                |
|                           | 42543 | 43573   | 17247 | 48049 | 05993 | 55353 | 05..... | .....   | (小數 282 位)           |
| $\frac{1}{\mu} = 2.30258$ | 50929 | 94045   | 68401 | 79914 | 45684 | 36420 | 76011   | 01488   | 02877                |
|                           | 29760 | 33327   | 90096 | 75726 | 09677 | 35248 | 02359   | 97205   | 08959                |
|                           | 41967 | 78404   | 22862 | 48633 | 40952 | 54650 | 82806   | 75666   | 62873                |
|                           | 78168 | 94829   | 07208 | 32555 | 46808 | 43799 | 89482   | 62331   | 98528                |
|                           | 53089 | 65377   | 73262 | 88461 | 63366 | 22228 | 76982   | 19886   | 74654                |
|                           | 74404 | 24327   | 43685 | ..... | ..... |       |         |         | (小數 265 位對的, 惟最後二數字不 |

精確)  $\pi$  之值爲 Shanks 所計算, 後三者爲 Adams 所計算。

## 常用對數表

## 100-140

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 100 | 00000 | 00043 | 00087 | 00130 | 00173 | 00217 | 00260 | 00303 | 00346 | 00389 |
| 101 | 00432 | 00475 | 00518 | 00561 | 00604 | 00647 | 00689 | 00732 | 00775 | 00817 |
| 102 | 00860 | 00903 | 00945 | 00988 | 01030 | 01072 | 01115 | 01157 | 01199 | 01242 |
| 103 | 01284 | 01326 | 01368 | 01410 | 01452 | 01494 | 01536 | 01578 | 01620 | 01662 |
| 104 | 01703 | 01745 | 01787 | 01828 | 01870 | 01912 | 01953 | 01995 | 02036 | 02078 |
| 105 | 02119 | 02160 | 02202 | 02243 | 02284 | 02325 | 02366 | 02407 | 02449 | 02490 |
| 106 | 02531 | 02572 | 02612 | 02653 | 02694 | 02735 | 02776 | 02816 | 02857 | 02898 |
| 107 | 02938 | 02979 | 03019 | 03060 | 03100 | 03141 | 03181 | 03222 | 03262 | 03302 |
| 108 | 03342 | 03383 | 03423 | 03463 | 03503 | 03543 | 03583 | 03623 | 03663 | 03703 |
| 109 | 03743 | 03782 | 03822 | 03862 | 03902 | 03941 | 03981 | 04021 | 04060 | 04100 |
| 110 | 04139 | 04179 | 04218 | 04258 | 04297 | 04336 | 04376 | 04415 | 04454 | 04493 |
| 111 | 04532 | 04571 | 04610 | 04650 | 04689 | 04727 | 04766 | 04805 | 04844 | 04883 |
| 112 | 04922 | 04961 | 04999 | 05038 | 05077 | 05115 | 05154 | 05192 | 05231 | 05269 |
| 113 | 05308 | 05346 | 05385 | 05423 | 05461 | 05500 | 05538 | 05576 | 05614 | 05652 |
| 114 | 05690 | 05729 | 05767 | 05805 | 05843 | 05881 | 05918 | 05956 | 05994 | 06032 |
| 115 | 06070 | 06108 | 06145 | 06183 | 06221 | 06258 | 06296 | 06333 | 06371 | 06408 |
| 116 | 06446 | 06483 | 06521 | 06558 | 06595 | 06633 | 06670 | 06707 | 06744 | 06781 |
| 117 | 06819 | 06856 | 06893 | 06930 | 06967 | 07004 | 07041 | 07078 | 07115 | 07151 |
| 118 | 07188 | 07225 | 07262 | 07298 | 07335 | 07372 | 07408 | 07445 | 07482 | 07518 |
| 119 | 07555 | 07591 | 07628 | 07664 | 07700 | 07737 | 07773 | 07809 | 07849 | 07882 |
| 120 | 07918 | 07954 | 07990 | 08027 | 08063 | 08099 | 08135 | 08171 | 08207 | 08243 |
| 121 | 08279 | 08314 | 08350 | 08386 | 08422 | 08458 | 08493 | 08529 | 08565 | 08600 |
| 122 | 08636 | 08672 | 08707 | 08743 | 08778 | 08814 | 08849 | 08884 | 08920 | 08955 |
| 123 | 08991 | 09026 | 09061 | 09096 | 09132 | 09167 | 09202 | 09237 | 09272 | 09307 |
| 124 | 09342 | 09377 | 09412 | 09447 | 09482 | 09517 | 09552 | 09587 | 09621 | 09656 |
| 125 | 09691 | 09726 | 09760 | 09795 | 09830 | 09864 | 09899 | 09934 | 09968 | 10003 |
| 126 | 10037 | 10072 | 10106 | 10140 | 10175 | 10209 | 10243 | 10278 | 10312 | 10346 |
| 127 | 10380 | 10415 | 10449 | 10483 | 10517 | 10551 | 10585 | 10619 | 10653 | 10687 |
| 128 | 10721 | 10755 | 10789 | 10823 | 10857 | 10890 | 10924 | 10958 | 10992 | 11025 |
| 129 | 11059 | 11093 | 11126 | 11160 | 11193 | 11227 | 11261 | 11294 | 11327 | 11361 |
| 130 | 11394 | 11428 | 11461 | 11494 | 11528 | 11561 | 11594 | 11628 | 11661 | 11694 |
| 131 | 11727 | 11760 | 11793 | 11826 | 11860 | 11893 | 11926 | 11959 | 11992 | 12024 |
| 132 | 12057 | 12090 | 12123 | 12156 | 12189 | 12222 | 12254 | 12287 | 12320 | 12352 |
| 133 | 12385 | 12418 | 12450 | 12483 | 12516 | 12548 | 12581 | 12613 | 12646 | 12678 |
| 134 | 12710 | 12743 | 12775 | 12808 | 12840 | 12872 | 12905 | 12937 | 12969 | 13001 |
| 135 | 13033 | 13066 | 13098 | 13130 | 13162 | 13194 | 13226 | 13258 | 13290 | 13322 |
| 136 | 13354 | 13386 | 13418 | 13450 | 13481 | 13513 | 13545 | 13577 | 13609 | 13640 |
| 137 | 13672 | 13704 | 13735 | 13767 | 13799 | 13830 | 13862 | 13893 | 13925 | 13956 |
| 138 | 13988 | 14019 | 14051 | 14082 | 14114 | 14145 | 14176 | 14208 | 14239 | 14270 |
| 139 | 14301 | 14333 | 14364 | 14395 | 14426 | 14457 | 14489 | 14520 | 14551 | 14582 |
| 140 | 14613 | 14644 | 14675 | 14706 | 14737 | 14768 | 14799 | 14829 | 14860 | 14891 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 140-180

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 140 | 14613 | 14644 | 14675 | 14706 | 14737 | 14768 | 14799 | 14829 | 14860 | 14891 |
| 141 | 14922 | 14953 | 14983 | 15014 | 15045 | 15076 | 15106 | 15137 | 15168 | 15128 |
| 142 | 15229 | 15259 | 15290 | 15320 | 15351 | 15381 | 15412 | 15442 | 15473 | 15503 |
| 143 | 15534 | 15564 | 15594 | 15625 | 15655 | 15685 | 15715 | 15746 | 15776 | 15806 |
| 144 | 15836 | 15866 | 15897 | 15927 | 15957 | 15987 | 16017 | 16047 | 16077 | 16107 |
| 145 | 16137 | 16167 | 16197 | 16227 | 16256 | 16286 | 16316 | 16346 | 16376 | 16406 |
| 146 | 16435 | 16465 | 16495 | 16524 | 16554 | 16584 | 16613 | 16643 | 16673 | 16702 |
| 147 | 16732 | 16761 | 16791 | 16820 | 16850 | 16879 | 16909 | 16938 | 16967 | 16997 |
| 148 | 17026 | 17056 | 17085 | 17114 | 17143 | 17173 | 17202 | 17231 | 17260 | 17289 |
| 149 | 17319 | 17348 | 17377 | 17406 | 17435 | 17464 | 17493 | 17522 | 17551 | 17580 |
| 150 | 17609 | 17638 | 17667 | 17696 | 17725 | 17754 | 17782 | 17811 | 17840 | 17869 |
| 151 | 17898 | 17926 | 17955 | 17984 | 18013 | 18041 | 18070 | 18099 | 18127 | 18156 |
| 152 | 18184 | 18213 | 18241 | 18270 | 18298 | 18327 | 18355 | 18384 | 18412 | 18441 |
| 153 | 18469 | 18498 | 18526 | 18554 | 18583 | 18611 | 18639 | 18667 | 18696 | 18724 |
| 154 | 18752 | 18780 | 18808 | 18837 | 18865 | 18893 | 18921 | 18949 | 18977 | 19005 |
| 155 | 19033 | 19061 | 19089 | 19117 | 19145 | 19173 | 19201 | 19229 | 19257 | 19285 |
| 156 | 19312 | 19340 | 19368 | 19396 | 19424 | 19451 | 19479 | 19507 | 19535 | 19562 |
| 157 | 19590 | 19618 | 19645 | 19673 | 19700 | 19728 | 19756 | 19783 | 19811 | 19838 |
| 158 | 19866 | 19893 | 19921 | 19948 | 19976 | 20003 | 20030 | 20058 | 20085 | 20112 |
| 159 | 20140 | 20167 | 20194 | 20222 | 20249 | 20276 | 20303 | 20330 | 20358 | 20385 |
| 160 | 20412 | 20439 | 20466 | 20493 | 20520 | 20548 | 20575 | 20602 | 20629 | 20656 |
| 161 | 20683 | 20710 | 20737 | 20763 | 20790 | 20817 | 20844 | 20871 | 20898 | 20925 |
| 162 | 20952 | 20978 | 21005 | 21032 | 21059 | 21085 | 21112 | 21139 | 21165 | 21192 |
| 163 | 21219 | 21245 | 21272 | 21299 | 21325 | 21352 | 21378 | 21405 | 21431 | 21458 |
| 164 | 21484 | 21511 | 21537 | 21564 | 21590 | 21617 | 21643 | 21669 | 21696 | 21722 |
| 165 | 21748 | 21775 | 21801 | 21827 | 21854 | 21880 | 21906 | 21932 | 21958 | 21985 |
| 166 | 22011 | 22037 | 22063 | 22089 | 22115 | 22141 | 22167 | 22194 | 22220 | 22246 |
| 167 | 22272 | 22298 | 22324 | 22350 | 22376 | 22401 | 22427 | 22453 | 22479 | 22505 |
| 168 | 22531 | 22557 | 22583 | 22608 | 22634 | 22660 | 22686 | 22712 | 22737 | 22763 |
| 169 | 22789 | 22814 | 22840 | 22866 | 22891 | 22917 | 22943 | 22968 | 22994 | 23019 |
| 170 | 23045 | 23070 | 23096 | 23121 | 23147 | 23172 | 23198 | 23223 | 23249 | 23274 |
| 171 | 23300 | 23325 | 23350 | 23376 | 23401 | 23426 | 23452 | 23477 | 23502 | 23528 |
| 172 | 23553 | 23578 | 23603 | 23629 | 23654 | 23679 | 23704 | 23729 | 23754 | 23779 |
| 173 | 23805 | 23830 | 23855 | 23880 | 23905 | 23930 | 23955 | 23980 | 24005 | 24030 |
| 174 | 24055 | 24080 | 24105 | 24130 | 24155 | 24180 | 24204 | 24229 | 24254 | 24279 |
| 175 | 24304 | 24329 | 24353 | 24378 | 24403 | 24428 | 24452 | 24477 | 24502 | 24527 |
| 176 | 24551 | 24576 | 24601 | 24625 | 24650 | 24674 | 24699 | 24724 | 24748 | 24773 |
| 177 | 24797 | 24822 | 24846 | 24871 | 24895 | 24920 | 24944 | 24969 | 24993 | 25018 |
| 178 | 25082 | 25066 | 25091 | 25115 | 25139 | 25164 | 25188 | 25212 | 25237 | 25261 |
| 179 | 25285 | 25310 | 25334 | 25358 | 25382 | 25406 | 25431 | 25455 | 25479 | 25503 |
| 180 | 25527 | 25551 | 25575 | 25600 | 25624 | 25648 | 25672 | 25696 | 25720 | 25744 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |



## 180-220

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 180 | 25527 | 25551 | 25575 | 25600 | 25624 | 25648 | 25672 | 25696 | 25720 | 25744 |
| 181 | 25768 | 25792 | 25816 | 25840 | 25864 | 25888 | 25912 | 25935 | 25959 | 25983 |
| 182 | 26007 | 26031 | 26055 | 26079 | 26102 | 26126 | 26150 | 26174 | 26198 | 26221 |
| 183 | 26245 | 26269 | 26293 | 26316 | 26340 | 26364 | 26387 | 26411 | 26435 | 26458 |
| 184 | 26482 | 26505 | 26529 | 26553 | 26576 | 26600 | 26623 | 26647 | 26670 | 26694 |
| 185 | 26717 | 26741 | 26764 | 26788 | 26811 | 26834 | 26858 | 26881 | 26905 | 26928 |
| 186 | 26951 | 26975 | 26998 | 27021 | 27045 | 27068 | 27091 | 27114 | 27138 | 27161 |
| 187 | 27184 | 27207 | 27231 | 27254 | 27277 | 27300 | 27323 | 27346 | 27370 | 27393 |
| 188 | 27416 | 27439 | 27462 | 27485 | 27508 | 27531 | 27554 | 27577 | 27600 | 27623 |
| 189 | 27646 | 27669 | 27692 | 27715 | 27738 | 27761 | 27784 | 27807 | 27830 | 27852 |
| 190 | 27875 | 27898 | 27921 | 27944 | 27967 | 27989 | 28012 | 28035 | 28058 | 28081 |
| 191 | 28103 | 28126 | 28149 | 28171 | 28194 | 28217 | 28240 | 28262 | 28285 | 28307 |
| 192 | 28330 | 28353 | 28375 | 28398 | 28421 | 28443 | 28466 | 28488 | 28511 | 28533 |
| 193 | 28556 | 28578 | 28601 | 28623 | 28646 | 28668 | 28691 | 28713 | 28735 | 28758 |
| 194 | 28780 | 28803 | 28825 | 28847 | 28870 | 28892 | 28914 | 28937 | 28959 | 28981 |
| 195 | 29003 | 29025 | 29048 | 29070 | 29092 | 29115 | 29137 | 29159 | 29181 | 29203 |
| 196 | 29225 | 29248 | 29270 | 29292 | 29314 | 29336 | 29358 | 29380 | 29403 | 29425 |
| 197 | 29447 | 29469 | 29491 | 29513 | 29535 | 29557 | 29579 | 29601 | 29623 | 29645 |
| 198 | 29667 | 29688 | 29710 | 29732 | 29754 | 29776 | 29798 | 29820 | 29842 | 29863 |
| 199 | 29885 | 29907 | 29929 | 29951 | 29973 | 29994 | 30016 | 30038 | 30060 | 30081 |
| 200 | 30103 | 30125 | 30146 | 30168 | 30190 | 30211 | 30233 | 30255 | 30276 | 30298 |
| 201 | 30320 | 30341 | 30363 | 30384 | 30406 | 30428 | 30449 | 30471 | 30492 | 30514 |
| 202 | 30535 | 30557 | 30578 | 30600 | 30621 | 30643 | 30664 | 30685 | 30707 | 30728 |
| 203 | 30750 | 30771 | 30792 | 30814 | 30835 | 30856 | 30878 | 30899 | 30920 | 30942 |
| 204 | 30963 | 30984 | 31006 | 31027 | 31048 | 31069 | 31091 | 31112 | 31133 | 31154 |
| 205 | 31175 | 31197 | 31218 | 31239 | 31260 | 31281 | 31302 | 31323 | 31345 | 31366 |
| 206 | 31387 | 31408 | 31429 | 31450 | 31471 | 31492 | 31513 | 31534 | 31555 | 31576 |
| 207 | 31597 | 31618 | 31639 | 31660 | 31681 | 31702 | 31723 | 31744 | 31765 | 31785 |
| 208 | 31806 | 31827 | 31848 | 31869 | 31890 | 31911 | 31931 | 31952 | 31973 | 31994 |
| 209 | 32015 | 32035 | 32056 | 32077 | 32098 | 32118 | 32139 | 32160 | 32181 | 32201 |
| 210 | 32222 | 32243 | 32263 | 32284 | 32305 | 32325 | 32346 | 32366 | 32387 | 32408 |
| 211 | 32428 | 32449 | 32469 | 32490 | 32510 | 32531 | 32552 | 32572 | 32593 | 32613 |
| 212 | 32634 | 32654 | 32675 | 32695 | 32715 | 32736 | 32756 | 32777 | 32797 | 32818 |
| 213 | 32838 | 32858 | 32879 | 32899 | 32919 | 32940 | 32960 | 32980 | 33001 | 33021 |
| 214 | 33041 | 33062 | 33082 | 33102 | 33122 | 33143 | 33163 | 33183 | 33203 | 33224 |
| 215 | 33244 | 33264 | 33284 | 33304 | 33325 | 33345 | 33365 | 33385 | 33405 | 33425 |
| 216 | 33445 | 33465 | 33486 | 33506 | 33526 | 33546 | 33566 | 33586 | 33606 | 33626 |
| 217 | 33646 | 33666 | 33687 | 33706 | 33726 | 33746 | 33766 | 33786 | 33806 | 33826 |
| 218 | 33846 | 33866 | 33885 | 33905 | 33925 | 33945 | 33965 | 33985 | 34005 | 34025 |
| 219 | 34044 | 34064 | 34084 | 34104 | 34124 | 34143 | 34163 | 34183 | 34203 | 34223 |
| 220 | 34242 | 34262 | 34282 | 34301 | 34321 | 34341 | 34361 | 34380 | 34400 | 34420 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 220-260

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 220 | 34242 | 34262 | 34282 | 34301 | 34321 | 34341 | 34361 | 34380 | 34400 | 34420 |
| 221 | 34439 | 34459 | 34479 | 34498 | 34518 | 34537 | 34557 | 34577 | 34596 | 34616 |
| 222 | 34635 | 34655 | 34674 | 34694 | 34713 | 34733 | 34753 | 34772 | 34792 | 34811 |
| 223 | 34830 | 34850 | 34869 | 34889 | 34908 | 34928 | 34947 | 34967 | 34986 | 35005 |
| 224 | 35025 | 35044 | 35064 | 35083 | 35102 | 35122 | 35141 | 35160 | 35180 | 35199 |
| 225 | 35218 | 35238 | 35257 | 35276 | 35295 | 35315 | 35334 | 35353 | 35372 | 35392 |
| 226 | 35411 | 35430 | 35449 | 35468 | 35488 | 35507 | 35526 | 35545 | 35564 | 35583 |
| 227 | 35603 | 35622 | 35641 | 35660 | 35679 | 35698 | 35717 | 35736 | 35755 | 35774 |
| 228 | 35793 | 35813 | 35832 | 35851 | 35870 | 35889 | 35908 | 35927 | 35946 | 35965 |
| 229 | 35984 | 36003 | 36021 | 36040 | 36059 | 36078 | 36097 | 36116 | 36135 | 36154 |
| 230 | 36173 | 36192 | 36211 | 36229 | 36248 | 36267 | 36286 | 36305 | 36324 | 36342 |
| 231 | 36361 | 36380 | 36399 | 36418 | 36436 | 36455 | 36474 | 36493 | 36511 | 36530 |
| 232 | 36549 | 36568 | 36586 | 36605 | 36624 | 36642 | 36661 | 36680 | 36698 | 36717 |
| 233 | 36736 | 36754 | 36773 | 36791 | 36810 | 36829 | 36847 | 36866 | 36884 | 36903 |
| 234 | 36922 | 36940 | 36959 | 36977 | 36996 | 37014 | 37033 | 37051 | 37070 | 37088 |
| 235 | 37107 | 37125 | 37144 | 37162 | 37181 | 37199 | 37218 | 37236 | 37254 | 37273 |
| 236 | 37291 | 37310 | 37328 | 37346 | 37365 | 37383 | 37401 | 37420 | 37438 | 37457 |
| 237 | 37475 | 37493 | 37511 | 37530 | 37548 | 37566 | 37585 | 37603 | 37621 | 37639 |
| 238 | 37658 | 37676 | 37694 | 37712 | 37731 | 37749 | 37767 | 37785 | 37803 | 37822 |
| 239 | 37840 | 37858 | 37876 | 37894 | 37912 | 37931 | 37949 | 37967 | 37985 | 38003 |
| 240 | 38021 | 38039 | 38057 | 38075 | 38093 | 38112 | 38130 | 38148 | 38166 | 38184 |
| 241 | 38202 | 38220 | 38238 | 38256 | 38274 | 38292 | 38310 | 38328 | 38346 | 38364 |
| 242 | 38382 | 38399 | 38417 | 38435 | 38453 | 38471 | 38489 | 38507 | 38525 | 38543 |
| 243 | 38561 | 38578 | 38596 | 38614 | 38632 | 38650 | 38668 | 38686 | 38703 | 38721 |
| 244 | 38739 | 38757 | 38775 | 38792 | 38810 | 38828 | 38846 | 38863 | 38881 | 38899 |
| 245 | 38917 | 38934 | 38952 | 38970 | 38987 | 39005 | 39023 | 39041 | 39058 | 39076 |
| 246 | 39094 | 39111 | 39129 | 39146 | 39164 | 39182 | 39199 | 39217 | 39235 | 39252 |
| 247 | 39270 | 39287 | 39305 | 39322 | 39340 | 39358 | 39375 | 39393 | 39410 | 39428 |
| 248 | 39445 | 39463 | 39480 | 39498 | 39515 | 39533 | 39550 | 39568 | 39585 | 39602 |
| 249 | 39620 | 39637 | 39655 | 39672 | 39690 | 39707 | 39724 | 39742 | 39759 | 39777 |
| 250 | 39794 | 39811 | 39829 | 39846 | 39863 | 39881 | 39898 | 39915 | 39933 | 39950 |
| 251 | 39967 | 39985 | 40002 | 40019 | 40037 | 40054 | 40071 | 40088 | 40106 | 40123 |
| 252 | 40140 | 40157 | 40175 | 40192 | 40209 | 40226 | 40243 | 40261 | 40278 | 40295 |
| 253 | 40312 | 40329 | 40346 | 40364 | 40381 | 40398 | 40415 | 40432 | 40449 | 40466 |
| 254 | 40483 | 40500 | 40518 | 40535 | 40552 | 40569 | 40586 | 40603 | 40620 | 40637 |
| 255 | 40654 | 40671 | 40688 | 40705 | 40722 | 40739 | 40756 | 40773 | 40790 | 40807 |
| 256 | 40824 | 40841 | 40858 | 40875 | 40892 | 40909 | 40926 | 40943 | 40960 | 40976 |
| 257 | 40993 | 41010 | 41027 | 41044 | 41061 | 41078 | 41095 | 41111 | 41128 | 41145 |
| 258 | 41162 | 41179 | 41196 | 41212 | 41229 | 41246 | 41263 | 41280 | 41296 | 41313 |
| 259 | 41330 | 41347 | 41363 | 41380 | 41397 | 41414 | 41430 | 41447 | 41464 | 41481 |
| 260 | 41497 | 41514 | 41531 | 41547 | 41564 | 41581 | 41597 | 41614 | 41631 | 41647 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

260—300

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 260 | 41497 | 41514 | 41531 | 41547 | 41564 | 41581 | 41597 | 41614 | 41631 | 41647 |
| 261 | 41664 | 41681 | 41697 | 41714 | 41731 | 41747 | 41764 | 41780 | 41797 | 41814 |
| 262 | 41830 | 41847 | 41863 | 41880 | 41896 | 41913 | 41929 | 41946 | 41963 | 41979 |
| 263 | 41996 | 42012 | 42029 | 42045 | 42062 | 42078 | 42095 | 42111 | 42127 | 42144 |
| 264 | 42160 | 42177 | 42193 | 42210 | 42226 | 42243 | 42259 | 42275 | 42292 | 42308 |
| 265 | 42325 | 42341 | 42357 | 42374 | 42390 | 42406 | 42423 | 42439 | 42455 | 42472 |
| 266 | 42488 | 42504 | 42521 | 42537 | 42553 | 42570 | 42586 | 42602 | 42619 | 42635 |
| 267 | 42651 | 42667 | 42684 | 42700 | 42716 | 42732 | 42749 | 42765 | 42781 | 42797 |
| 268 | 42813 | 42830 | 42846 | 42862 | 42878 | 42894 | 42911 | 42927 | 42943 | 42959 |
| 269 | 42975 | 42991 | 43008 | 43024 | 43040 | 43056 | 43072 | 43088 | 43104 | 43120 |
| 270 | 43136 | 43152 | 43169 | 43185 | 43201 | 43217 | 43233 | 43249 | 43265 | 43281 |
| 271 | 43297 | 43313 | 43329 | 43345 | 43361 | 43377 | 43393 | 43409 | 43425 | 43441 |
| 272 | 43457 | 43473 | 43489 | 43505 | 43521 | 43537 | 43553 | 43569 | 43584 | 43600 |
| 273 | 43616 | 43632 | 43648 | 43664 | 43680 | 43696 | 43712 | 43727 | 43743 | 43759 |
| 274 | 43775 | 43791 | 43807 | 43823 | 43838 | 43854 | 43870 | 43886 | 43902 | 43917 |
| 275 | 43933 | 43949 | 43965 | 43981 | 43996 | 44012 | 44028 | 44044 | 44059 | 44075 |
| 276 | 44091 | 44107 | 44122 | 44138 | 44154 | 44170 | 44185 | 44201 | 44217 | 44232 |
| 277 | 44248 | 44264 | 44279 | 44295 | 44311 | 44326 | 44342 | 44358 | 44373 | 44389 |
| 278 | 44404 | 44420 | 44436 | 44451 | 44467 | 44483 | 44498 | 44514 | 44529 | 44545 |
| 279 | 44560 | 44576 | 44592 | 44607 | 44623 | 44638 | 44654 | 44669 | 44685 | 44700 |
| 280 | 44716 | 44731 | 44747 | 44762 | 44778 | 44793 | 44809 | 44824 | 44840 | 44855 |
| 281 | 44871 | 44886 | 44902 | 44917 | 44932 | 44948 | 44963 | 44979 | 44994 | 45010 |
| 282 | 45025 | 45040 | 45056 | 45071 | 45086 | 45102 | 45117 | 45133 | 45148 | 45163 |
| 283 | 45179 | 45194 | 45209 | 45225 | 45240 | 45255 | 45271 | 45286 | 45301 | 45317 |
| 284 | 45332 | 45347 | 45362 | 45378 | 45393 | 45408 | 45423 | 45439 | 45454 | 45469 |
| 285 | 45484 | 45500 | 45515 | 45530 | 45545 | 45561 | 45576 | 45591 | 45606 | 45621 |
| 286 | 45637 | 45652 | 45667 | 45682 | 45697 | 15712 | 45728 | 45743 | 45758 | 45773 |
| 287 | 45788 | 45803 | 45818 | 45834 | 45849 | 45864 | 45879 | 45894 | 45909 | 45924 |
| 288 | 45939 | 45954 | 45969 | 45984 | 46000 | 46015 | 46030 | 46045 | 46060 | 46075 |
| 289 | 46090 | 46105 | 46120 | 46135 | 46150 | 46165 | 46180 | 46195 | 46210 | 46225 |
| 290 | 46240 | 46255 | 46270 | 46285 | 46300 | 46315 | 46330 | 46345 | 46359 | 46374 |
| 291 | 46389 | 46404 | 46419 | 46434 | 46449 | 46464 | 46479 | 46494 | 46509 | 46523 |
| 292 | 46538 | 46553 | 46568 | 46583 | 46598 | 46613 | 46627 | 46642 | 46657 | 46672 |
| 293 | 46687 | 46702 | 46716 | 46731 | 46746 | 46761 | 46776 | 46790 | 46805 | 46820 |
| 294 | 46835 | 46850 | 46864 | 46879 | 46894 | 46909 | 46923 | 46938 | 46953 | 46967 |
| 295 | 46982 | 46997 | 47012 | 47026 | 47041 | 47056 | 46070 | 47085 | 47100 | 47114 |
| 296 | 47129 | 47144 | 47159 | 47173 | 47188 | 47202 | 47217 | 47232 | 47246 | 47261 |
| 297 | 47276 | 47290 | 47305 | 47319 | 47334 | 47349 | 47363 | 47378 | 47392 | 47407 |
| 298 | 47422 | 47436 | 47451 | 47465 | 47480 | 47494 | 47509 | 47524 | 47538 | 47553 |
| 299 | 47567 | 47582 | 47596 | 47611 | 47625 | 47640 | 47654 | 47669 | 47683 | 47698 |
| 300 | 47712 | 47727 | 47741 | 47756 | 47770 | 47784 | 47799 | 47813 | 47828 | 47842 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 300—340

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 300 | 47712 | 47727 | 47741 | 47756 | 47770 | 47784 | 47799 | 47813 | 47828 | 47842 |
| 301 | 47857 | 47871 | 47885 | 47900 | 47914 | 47929 | 47943 | 47958 | 47972 | 47986 |
| 302 | 48001 | 48015 | 48029 | 48044 | 48059 | 48073 | 48087 | 48101 | 48116 | 48130 |
| 303 | 48144 | 48159 | 48173 | 48187 | 48202 | 48216 | 48230 | 48244 | 48259 | 48273 |
| 304 | 48287 | 48302 | 48316 | 48330 | 48344 | 48359 | 48373 | 48387 | 48401 | 48416 |
| 305 | 48430 | 48444 | 48458 | 48473 | 48487 | 48501 | 48515 | 48530 | 48544 | 48558 |
| 306 | 48572 | 48586 | 48601 | 48615 | 48629 | 48643 | 48657 | 48671 | 48686 | 48700 |
| 307 | 48714 | 48728 | 48742 | 48756 | 48770 | 48785 | 48799 | 48813 | 48827 | 48841 |
| 308 | 48855 | 48869 | 48883 | 48897 | 48911 | 48926 | 48940 | 48954 | 48968 | 48982 |
| 309 | 48996 | 49010 | 49024 | 49038 | 49052 | 49066 | 49080 | 49094 | 49108 | 49122 |
| 310 | 49136 | 49150 | 49164 | 49178 | 49192 | 49206 | 49220 | 49234 | 49248 | 49262 |
| 311 | 49276 | 49290 | 49304 | 49318 | 49332 | 49346 | 49360 | 49374 | 49388 | 49402 |
| 312 | 49415 | 49429 | 49443 | 49457 | 49471 | 49485 | 49499 | 49513 | 49527 | 49541 |
| 313 | 49554 | 49568 | 49582 | 49596 | 49610 | 49624 | 49638 | 49651 | 49665 | 49679 |
| 314 | 49693 | 49707 | 49721 | 49734 | 49748 | 49762 | 49776 | 49790 | 49803 | 49817 |
| 315 | 49831 | 49845 | 49859 | 49872 | 49886 | 49900 | 49914 | 49927 | 49941 | 49955 |
| 316 | 49969 | 49982 | 49996 | 50010 | 50024 | 50037 | 50051 | 50065 | 50079 | 50092 |
| 317 | 50106 | 50120 | 50133 | 50147 | 50161 | 50174 | 50188 | 50202 | 50215 | 50229 |
| 318 | 50243 | 50256 | 50270 | 50284 | 50297 | 50211 | 50325 | 50338 | 50352 | 50365 |
| 319 | 50379 | 50393 | 50406 | 50420 | 50433 | 50447 | 50461 | 50474 | 50488 | 50501 |
| 320 | 50515 | 50529 | 50542 | 50556 | 50569 | 50583 | 50596 | 50610 | 50623 | 50637 |
| 321 | 50651 | 50664 | 50678 | 50691 | 50705 | 50718 | 50732 | 50745 | 50759 | 50772 |
| 322 | 50786 | 50799 | 50813 | 50826 | 50840 | 50853 | 50866 | 50880 | 50893 | 50907 |
| 323 | 50920 | 50934 | 50947 | 50961 | 50974 | 50987 | 51001 | 51014 | 51028 | 51041 |
| 324 | 51055 | 51068 | 51081 | 51095 | 51108 | 51121 | 51135 | 51148 | 51162 | 51175 |
| 325 | 51188 | 51202 | 51215 | 51228 | 51242 | 51255 | 51268 | 51282 | 51295 | 51308 |
| 326 | 51322 | 51335 | 51348 | 51362 | 51375 | 51388 | 51402 | 51415 | 51428 | 51441 |
| 327 | 51455 | 51468 | 51481 | 51495 | 51508 | 51521 | 51534 | 51548 | 51561 | 51574 |
| 328 | 51587 | 51601 | 51614 | 51627 | 51640 | 51654 | 51667 | 51680 | 51693 | 51706 |
| 329 | 51720 | 51733 | 51746 | 51759 | 51772 | 51786 | 51799 | 51812 | 51825 | 51838 |
| 330 | 51851 | 51865 | 51878 | 51891 | 51904 | 51917 | 51930 | 51943 | 51957 | 51970 |
| 331 | 51983 | 51996 | 52009 | 52022 | 52035 | 52048 | 52061 | 52075 | 52088 | 52101 |
| 332 | 52114 | 52127 | 52140 | 52153 | 52166 | 52179 | 52192 | 52205 | 52218 | 52231 |
| 333 | 52244 | 52257 | 52270 | 52284 | 52297 | 52310 | 52323 | 52336 | 52349 | 52362 |
| 334 | 52375 | 52388 | 52401 | 52414 | 52427 | 52440 | 44453 | 52466 | 52479 | 52492 |
| 335 | 52504 | 52517 | 52530 | 52543 | 52556 | 52569 | 52582 | 52595 | 52608 | 52621 |
| 336 | 52634 | 52647 | 52660 | 52673 | 52686 | 52699 | 52711 | 52724 | 52737 | 52750 |
| 337 | 52763 | 52776 | 52789 | 52802 | 52815 | 52827 | 52840 | 52853 | 52866 | 52879 |
| 338 | 52892 | 52905 | 52917 | 52930 | 52943 | 52956 | 52969 | 52982 | 52994 | 53007 |
| 339 | 53020 | 53033 | 53046 | 53058 | 53071 | 53084 | 53097 | 53110 | 53122 | 53135 |
| 340 | 53148 | 53161 | 53173 | 53186 | 53199 | 53212 | 53224 | 53237 | 53250 | 53263 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 340—380

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 340 | 53148 | 53161 | 53173 | 53186 | 53199 | 53212 | 53224 | 53237 | 53250 | 53263 |
| 341 | 53275 | 53288 | 53301 | 53314 | 53326 | 53339 | 53352 | 53364 | 53377 | 53390 |
| 342 | 53403 | 53415 | 53428 | 53441 | 53453 | 53466 | 53479 | 53491 | 53504 | 53517 |
| 343 | 53529 | 53542 | 53555 | 53567 | 53580 | 53593 | 53605 | 53618 | 53631 | 53643 |
| 344 | 53656 | 53668 | 53681 | 53694 | 53706 | 53719 | 53732 | 53744 | 53757 | 53769 |
| 345 | 53782 | 53794 | 53807 | 53820 | 53832 | 53845 | 53857 | 53870 | 53882 | 53895 |
| 346 | 53908 | 53920 | 53933 | 53945 | 53958 | 53970 | 53983 | 53995 | 54008 | 54020 |
| 347 | 54033 | 54045 | 54058 | 54070 | 54083 | 54095 | 54108 | 54120 | 54133 | 54145 |
| 348 | 54158 | 54170 | 54183 | 54195 | 54208 | 54220 | 54233 | 54245 | 54258 | 54270 |
| 349 | 54283 | 54295 | 54307 | 54320 | 54332 | 54345 | 54357 | 54370 | 54382 | 54394 |
| 350 | 54407 | 54419 | 54432 | 54444 | 54456 | 54469 | 54481 | 54494 | 54506 | 54518 |
| 351 | 54531 | 54543 | 54555 | 54568 | 54580 | 54593 | 54605 | 54617 | 54630 | 54642 |
| 352 | 54654 | 54667 | 54679 | 54691 | 54704 | 54716 | 54728 | 54741 | 54753 | 54765 |
| 353 | 54777 | 54790 | 54802 | 54814 | 54827 | 54839 | 54851 | 54864 | 54876 | 54888 |
| 354 | 54900 | 54913 | 54925 | 54937 | 54949 | 54962 | 54974 | 54986 | 54998 | 55011 |
| 355 | 55023 | 55035 | 55047 | 55060 | 55072 | 55084 | 55096 | 55108 | 55121 | 55133 |
| 356 | 55145 | 55157 | 55169 | 55182 | 55194 | 55206 | 55218 | 55230 | 55242 | 55255 |
| 357 | 55267 | 55279 | 55291 | 55303 | 55315 | 55328 | 55340 | 55352 | 55364 | 55376 |
| 358 | 55388 | 55400 | 55413 | 55425 | 55437 | 55449 | 55461 | 55473 | 55485 | 55497 |
| 359 | 55509 | 55522 | 55534 | 55546 | 55558 | 55570 | 55582 | 55594 | 55606 | 55618 |
| 360 | 55630 | 55642 | 55654 | 55666 | 55678 | 55691 | 55703 | 55715 | 55727 | 55739 |
| 361 | 55751 | 55763 | 55775 | 55787 | 55799 | 55811 | 55823 | 55835 | 55847 | 55859 |
| 362 | 55871 | 55883 | 55895 | 55907 | 55919 | 55931 | 55943 | 55955 | 55967 | 55979 |
| 363 | 55991 | 56003 | 56015 | 56027 | 56038 | 56050 | 56062 | 56074 | 56086 | 56098 |
| 364 | 56110 | 56122 | 56134 | 56146 | 56158 | 56170 | 56182 | 56194 | 56205 | 56217 |
| 365 | 56229 | 56241 | 56253 | 56265 | 56277 | 56289 | 56301 | 56312 | 56324 | 56336 |
| 366 | 56348 | 56360 | 56372 | 56384 | 56396 | 56407 | 56419 | 56431 | 56443 | 56455 |
| 367 | 56467 | 56478 | 56490 | 56502 | 56514 | 56526 | 56538 | 56549 | 56561 | 56573 |
| 368 | 56585 | 56597 | 56608 | 56620 | 56632 | 56644 | 56656 | 56667 | 56679 | 56691 |
| 369 | 56703 | 56714 | 56726 | 56738 | 56750 | 56761 | 56773 | 56785 | 56797 | 56808 |
| 370 | 56820 | 56832 | 56844 | 56855 | 56867 | 56879 | 56891 | 56902 | 56914 | 56926 |
| 371 | 56937 | 56949 | 56961 | 56972 | 56984 | 56996 | 57008 | 57019 | 57031 | 57043 |
| 372 | 57054 | 57066 | 57078 | 57089 | 57101 | 57113 | 57124 | 57136 | 57148 | 57159 |
| 373 | 57171 | 57183 | 57194 | 57206 | 57217 | 57229 | 57241 | 57252 | 57264 | 57276 |
| 374 | 57287 | 57299 | 57310 | 57322 | 57334 | 57345 | 57357 | 57368 | 57380 | 57392 |
| 375 | 57403 | 57415 | 57426 | 57438 | 57449 | 57461 | 57473 | 57484 | 57496 | 57507 |
| 376 | 57519 | 57530 | 57542 | 57553 | 57565 | 57576 | 57588 | 57600 | 57611 | 57623 |
| 377 | 57634 | 57646 | 57657 | 57669 | 57680 | 57692 | 57703 | 57715 | 57726 | 57738 |
| 378 | 57749 | 57761 | 57772 | 57784 | 57795 | 57807 | 57818 | 57830 | 57841 | 57852 |
| 379 | 57864 | 57875 | 57887 | 57898 | 57910 | 57921 | 57933 | 57944 | 57955 | 57967 |
| 380 | 57978 | 57990 | 58001 | 58013 | 58024 | 58035 | 58047 | 58058 | 58070 | 58081 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 380—420

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 380 | 57978 | 57990 | 58001 | 58013 | 58024 | 58035 | 58047 | 58058 | 58070 | 58081 |
| 381 | 58092 | 58104 | 58115 | 58127 | 58138 | 58149 | 58161 | 58172 | 58184 | 58195 |
| 382 | 58206 | 58218 | 58229 | 58240 | 58252 | 58263 | 58274 | 58286 | 58297 | 58309 |
| 383 | 58320 | 58331 | 58343 | 58354 | 58365 | 58377 | 58388 | 58399 | 58410 | 58422 |
| 384 | 58433 | 58444 | 58456 | 58467 | 58478 | 58490 | 58501 | 58512 | 58524 | 58535 |
| 385 | 58546 | 58557 | 58569 | 58580 | 58591 | 58602 | 58614 | 58625 | 58636 | 58647 |
| 386 | 58659 | 58670 | 58681 | 58692 | 58704 | 58715 | 58726 | 58737 | 58749 | 58760 |
| 387 | 58771 | 58782 | 58794 | 58805 | 58816 | 58827 | 58838 | 58850 | 58861 | 58872 |
| 388 | 58883 | 58894 | 58906 | 58917 | 58928 | 58939 | 58950 | 58961 | 58973 | 58984 |
| 389 | 58995 | 59006 | 59017 | 59028 | 59040 | 59051 | 59062 | 59073 | 59084 | 59095 |
| 390 | 59106 | 59118 | 59129 | 59140 | 59151 | 59162 | 59173 | 59184 | 59195 | 59207 |
| 391 | 59218 | 59229 | 59240 | 59251 | 59262 | 59273 | 59284 | 59295 | 59306 | 59318 |
| 392 | 59329 | 59340 | 59351 | 59362 | 59373 | 59384 | 59395 | 59406 | 59417 | 59428 |
| 393 | 59439 | 59450 | 59461 | 59472 | 59483 | 59494 | 59506 | 59517 | 59528 | 59539 |
| 394 | 59550 | 59561 | 59572 | 59583 | 59594 | 59605 | 59616 | 59627 | 59638 | 59649 |
| 395 | 59660 | 59671 | 59682 | 59693 | 59704 | 59715 | 59726 | 59737 | 59748 | 59759 |
| 396 | 59770 | 59780 | 59791 | 59802 | 59813 | 59824 | 59835 | 59846 | 59857 | 59868 |
| 397 | 59879 | 59890 | 59901 | 59912 | 59923 | 59934 | 59945 | 59956 | 59966 | 59977 |
| 398 | 59988 | 59999 | 60010 | 60021 | 60032 | 60043 | 60054 | 60065 | 60076 | 60086 |
| 399 | 60097 | 60108 | 60119 | 60130 | 60141 | 60152 | 60163 | 60173 | 60184 | 60195 |
| 400 | 60206 | 60217 | 60228 | 60239 | 60249 | 60260 | 60271 | 60282 | 60293 | 60304 |
| 401 | 60314 | 60325 | 60336 | 60347 | 60358 | 60369 | 60379 | 60390 | 60401 | 60412 |
| 402 | 60423 | 60433 | 60444 | 60455 | 60466 | 60477 | 60487 | 60498 | 60509 | 60520 |
| 403 | 60531 | 60541 | 60552 | 60563 | 60574 | 60584 | 60595 | 60606 | 60617 | 60627 |
| 404 | 60638 | 60649 | 60660 | 60670 | 60681 | 60692 | 60703 | 60713 | 60724 | 60735 |
| 405 | 60746 | 60756 | 60767 | 60778 | 60788 | 60799 | 60810 | 60821 | 60831 | 60842 |
| 406 | 60853 | 60863 | 60874 | 60885 | 60895 | 60906 | 60917 | 60927 | 60938 | 60949 |
| 407 | 60959 | 60970 | 60981 | 60991 | 61002 | 61013 | 61023 | 61034 | 61045 | 61055 |
| 408 | 61066 | 61077 | 61087 | 61098 | 61109 | 61119 | 61130 | 61140 | 61151 | 61162 |
| 409 | 61172 | 61183 | 61194 | 61204 | 61215 | 61225 | 61236 | 61247 | 61257 | 61268 |
| 410 | 61278 | 61289 | 61300 | 61310 | 61321 | 61331 | 61342 | 61352 | 61363 | 61374 |
| 411 | 61384 | 61395 | 61405 | 61416 | 61426 | 61437 | 61448 | 61458 | 61469 | 61479 |
| 412 | 61490 | 61500 | 61511 | 61521 | 61532 | 61542 | 61553 | 61563 | 61574 | 61584 |
| 413 | 61595 | 61606 | 61616 | 61627 | 61637 | 61648 | 61658 | 61669 | 61679 | 61690 |
| 414 | 61700 | 61711 | 61721 | 61731 | 61742 | 61752 | 61763 | 61773 | 61784 | 61794 |
| 415 | 61805 | 61815 | 61826 | 61836 | 61847 | 61857 | 61868 | 61878 | 61888 | 61899 |
| 416 | 61909 | 61920 | 61930 | 61941 | 61951 | 61962 | 61972 | 61982 | 61993 | 62003 |
| 417 | 62014 | 62024 | 62034 | 62045 | 62055 | 62066 | 62076 | 62086 | 62098 | 62107 |
| 418 | 62118 | 62128 | 62138 | 62149 | 62159 | 62170 | 62180 | 62190 | 62201 | 62211 |
| 419 | 62221 | 62232 | 62242 | 62252 | 62263 | 62273 | 62284 | 62294 | 62304 | 62315 |
| 420 | 62325 | 62335 | 62346 | 62356 | 62366 | 62377 | 62387 | 62397 | 62408 | 62418 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 420—460

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 420 | 62325 | 62335 | 62346 | 62356 | 62366 | 62377 | 62387 | 62397 | 62408 | 62418 |
| 421 | 62428 | 62439 | 62449 | 62459 | 62469 | 62480 | 62490 | 62500 | 62511 | 62521 |
| 422 | 62531 | 62542 | 62552 | 62562 | 62572 | 62583 | 62593 | 62603 | 62613 | 62624 |
| 423 | 62634 | 62644 | 62655 | 62665 | 62675 | 62685 | 62696 | 62706 | 62716 | 62726 |
| 424 | 62737 | 62747 | 62757 | 62767 | 62778 | 62788 | 62798 | 62808 | 62818 | 62829 |
| 425 | 62839 | 62849 | 62859 | 62870 | 62880 | 62890 | 62900 | 62910 | 62921 | 62931 |
| 426 | 62941 | 62951 | 62961 | 62972 | 62982 | 62992 | 63002 | 63012 | 63022 | 63033 |
| 427 | 63043 | 63053 | 63063 | 63073 | 63083 | 63094 | 63104 | 63114 | 63124 | 63134 |
| 428 | 63144 | 63155 | 63165 | 63175 | 63185 | 63195 | 63205 | 63215 | 63225 | 63236 |
| 429 | 63246 | 63256 | 63266 | 63276 | 63286 | 63296 | 63306 | 63317 | 63327 | 63337 |
| 430 | 63347 | 63357 | 63367 | 63377 | 63387 | 63397 | 63407 | 63417 | 63428 | 63438 |
| 431 | 63448 | 63458 | 63468 | 63478 | 63488 | 63498 | 63508 | 63518 | 63528 | 63538 |
| 432 | 63548 | 63558 | 63568 | 63579 | 63589 | 63599 | 63609 | 63619 | 63629 | 63639 |
| 433 | 63649 | 63659 | 63669 | 63679 | 63689 | 63699 | 63709 | 63719 | 63729 | 63639 |
| 434 | 63749 | 63759 | 63769 | 63779 | 63789 | 63799 | 63809 | 63819 | 63829 | 63839 |
| 435 | 63849 | 63859 | 63869 | 63879 | 63889 | 63899 | 63909 | 63919 | 63929 | 63939 |
| 436 | 63949 | 63959 | 63969 | 63979 | 63988 | 63998 | 64008 | 64018 | 64028 | 64038 |
| 437 | 64048 | 64058 | 64068 | 64078 | 64088 | 64098 | 64108 | 64118 | 64128 | 64137 |
| 438 | 64147 | 64157 | 64167 | 64177 | 64187 | 64197 | 64207 | 64217 | 64227 | 64237 |
| 439 | 64246 | 64256 | 64266 | 64276 | 64286 | 64296 | 64306 | 64316 | 64326 | 64336 |
| 440 | 64345 | 64355 | 64365 | 64375 | 64385 | 64395 | 64404 | 64414 | 64424 | 64434 |
| 441 | 64444 | 64454 | 64464 | 64473 | 64483 | 64493 | 64503 | 64513 | 64523 | 64532 |
| 442 | 64542 | 64552 | 64562 | 64572 | 64582 | 64591 | 64601 | 64611 | 64621 | 64631 |
| 443 | 64640 | 64650 | 64660 | 64670 | 64680 | 64689 | 64699 | 64709 | 64719 | 64729 |
| 444 | 64738 | 64748 | 64758 | 64768 | 64777 | 64787 | 64797 | 64807 | 64816 | 64826 |
| 445 | 64836 | 64846 | 64856 | 64865 | 64875 | 64885 | 64895 | 64904 | 64914 | 64924 |
| 446 | 64933 | 64943 | 64953 | 64963 | 64972 | 64982 | 64992 | 65002 | 65011 | 65021 |
| 447 | 65031 | 65040 | 65050 | 65060 | 65070 | 65079 | 65089 | 65099 | 65108 | 65118 |
| 448 | 65128 | 65137 | 65147 | 65157 | 65167 | 65176 | 65186 | 65196 | 65205 | 65215 |
| 449 | 65225 | 65234 | 65244 | 65254 | 65263 | 65273 | 65283 | 65292 | 65302 | 65312 |
| 450 | 65321 | 65331 | 65341 | 65350 | 65360 | 65369 | 65379 | 65389 | 65398 | 65408 |
| 451 | 65418 | 65427 | 65437 | 65447 | 65456 | 65466 | 65475 | 65485 | 65495 | 65504 |
| 452 | 65514 | 65523 | 65533 | 65543 | 65552 | 65562 | 65571 | 65581 | 65591 | 65600 |
| 453 | 65610 | 65619 | 65629 | 65639 | 65648 | 65658 | 65667 | 65677 | 65686 | 65696 |
| 454 | 65706 | 65715 | 65725 | 65734 | 65744 | 65753 | 65763 | 65772 | 65782 | 65792 |
| 455 | 65801 | 65811 | 65820 | 65830 | 65839 | 65849 | 65858 | 65868 | 65877 | 65887 |
| 456 | 65896 | 65906 | 65916 | 65925 | 65935 | 65944 | 65954 | 65963 | 65973 | 65982 |
| 457 | 65992 | 66001 | 66011 | 66020 | 66030 | 66039 | 66049 | 66058 | 66068 | 66077 |
| 458 | 66087 | 66096 | 66106 | 66115 | 66124 | 66134 | 66143 | 66153 | 66162 | 66172 |
| 459 | 66181 | 66191 | 66200 | 66210 | 66219 | 66229 | 66238 | 66247 | 66257 | 66266 |
| 460 | 66276 | 66285 | 66295 | 66304 | 66314 | 66323 | 66332 | 66342 | 66351 | 66361 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 460—500

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 460 | 66276 | 66285 | 66295 | 66304 | 66314 | 66323 | 66332 | 66342 | 66351 | 66361 |
| 461 | 66370 | 66380 | 66389 | 66398 | 66408 | 66417 | 66427 | 66436 | 66445 | 66455 |
| 462 | 66464 | 66474 | 66483 | 66492 | 66502 | 66511 | 66521 | 66530 | 66539 | 66549 |
| 463 | 66558 | 66567 | 66577 | 66586 | 66596 | 66605 | 66614 | 66624 | 66633 | 66642 |
| 464 | 66652 | 66661 | 66671 | 66680 | 66689 | 66699 | 66708 | 66717 | 66727 | 66736 |
| 465 | 66745 | 66755 | 66764 | 66773 | 66783 | 66792 | 66801 | 66811 | 66820 | 66829 |
| 466 | 66839 | 66848 | 66857 | 66867 | 66876 | 66885 | 66894 | 66904 | 66913 | 66922 |
| 467 | 66932 | 66941 | 66950 | 66960 | 66969 | 66978 | 66987 | 66997 | 67006 | 67015 |
| 468 | 67025 | 67034 | 67043 | 67052 | 67062 | 67071 | 67080 | 67089 | 67099 | 67108 |
| 469 | 67117 | 67127 | 67136 | 67145 | 67154 | 67164 | 67173 | 67182 | 67191 | 67201 |
| 470 | 67210 | 67219 | 67228 | 67237 | 67247 | 67256 | 67265 | 67274 | 67284 | 67293 |
| 471 | 67302 | 67311 | 67321 | 67330 | 67339 | 67348 | 67357 | 67367 | 67376 | 67385 |
| 472 | 67394 | 67403 | 67413 | 67422 | 67431 | 67440 | 67449 | 67459 | 67468 | 67477 |
| 473 | 67486 | 67495 | 67504 | 67514 | 67523 | 67532 | 67541 | 67550 | 67560 | 67569 |
| 474 | 67578 | 67587 | 67596 | 67605 | 67614 | 67624 | 67633 | 67642 | 67651 | 67660 |
| 475 | 67669 | 67679 | 67688 | 67697 | 67706 | 67715 | 67724 | 67733 | 67742 | 67752 |
| 476 | 67761 | 67770 | 67779 | 67788 | 67797 | 67806 | 67815 | 67825 | 67834 | 67843 |
| 477 | 67852 | 67861 | 67870 | 67879 | 67888 | 67897 | 67906 | 67916 | 67925 | 67934 |
| 478 | 67943 | 67952 | 67961 | 67970 | 67979 | 67988 | 67997 | 68006 | 68015 | 68024 |
| 479 | 68034 | 68043 | 68052 | 68061 | 68070 | 68079 | 68088 | 68097 | 68106 | 68115 |
| 480 | 68124 | 68133 | 68142 | 68151 | 68160 | 68169 | 68178 | 68187 | 68196 | 68205 |
| 481 | 68215 | 68224 | 68233 | 68242 | 68251 | 68260 | 68269 | 68278 | 68287 | 68296 |
| 482 | 68305 | 68314 | 68323 | 68332 | 68341 | 68350 | 68359 | 68368 | 68377 | 68386 |
| 483 | 68395 | 68404 | 68413 | 68422 | 68431 | 68440 | 68449 | 68458 | 68467 | 68476 |
| 484 | 68485 | 68494 | 68502 | 68511 | 68520 | 68529 | 68538 | 68547 | 68556 | 68565 |
| 485 | 68574 | 68583 | 68592 | 68601 | 68610 | 68619 | 68628 | 68637 | 68646 | 68655 |
| 486 | 68664 | 68673 | 68681 | 68690 | 68699 | 68708 | 68717 | 68726 | 68735 | 68744 |
| 487 | 68753 | 68762 | 68771 | 68780 | 68789 | 68797 | 68806 | 68815 | 68824 | 68833 |
| 488 | 68842 | 68851 | 68860 | 68869 | 68878 | 68886 | 68895 | 68904 | 68913 | 68922 |
| 489 | 68931 | 68940 | 68949 | 68958 | 68966 | 68975 | 68984 | 68993 | 69002 | 69011 |
| 490 | 69020 | 69028 | 69037 | 69046 | 69055 | 69064 | 69073 | 69082 | 69090 | 69099 |
| 491 | 69108 | 69117 | 69126 | 69135 | 69144 | 69152 | 69161 | 69170 | 69179 | 69188 |
| 492 | 69197 | 69205 | 69214 | 69223 | 69232 | 69241 | 69249 | 69258 | 69267 | 69276 |
| 493 | 69285 | 69294 | 69302 | 69311 | 69320 | 69329 | 69338 | 69346 | 69355 | 69364 |
| 494 | 69373 | 69381 | 69390 | 69399 | 69408 | 69417 | 69425 | 69434 | 69443 | 69452 |
| 495 | 69461 | 69469 | 69478 | 69487 | 69496 | 69504 | 69513 | 69522 | 69531 | 69539 |
| 496 | 69548 | 69557 | 69566 | 69574 | 69583 | 69592 | 69601 | 69609 | 69618 | 69627 |
| 497 | 69636 | 69644 | 69653 | 69662 | 69671 | 69679 | 69688 | 69697 | 69705 | 69714 |
| 498 | 69723 | 69732 | 69740 | 69749 | 69758 | 69767 | 69775 | 69784 | 69793 | 69801 |
| 499 | 69810 | 69819 | 69827 | 69836 | 69845 | 69854 | 69862 | 69871 | 69880 | 69888 |
| 500 | 69897 | 69906 | 69914 | 69923 | 69932 | 69940 | 69949 | 69958 | 69966 | 69975 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |



## 500—540

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 500 | 69897 | 69906 | 69914 | 69923 | 69932 | 69940 | 69949 | 69958 | 69966 | 69975 |
| 501 | 69984 | 69992 | 70001 | 70010 | 70018 | 70027 | 70036 | 70044 | 70053 | 70062 |
| 502 | 70070 | 70079 | 70088 | 70096 | 70105 | 70114 | 70122 | 70131 | 70140 | 70148 |
| 503 | 70157 | 70165 | 70174 | 70183 | 70191 | 70200 | 70209 | 70217 | 70226 | 70234 |
| 504 | 70243 | 70252 | 70260 | 70269 | 70278 | 70286 | 70295 | 70303 | 70312 | 70321 |
| 505 | 70329 | 70338 | 70346 | 70355 | 70364 | 70372 | 70381 | 70389 | 70398 | 70406 |
| 506 | 70415 | 70424 | 70432 | 70441 | 70449 | 70458 | 70467 | 70475 | 70484 | 70492 |
| 507 | 70501 | 70509 | 70518 | 70526 | 70535 | 70544 | 70552 | 70561 | 70569 | 70578 |
| 508 | 70586 | 70595 | 70603 | 70612 | 70621 | 70629 | 70638 | 70646 | 70655 | 70663 |
| 509 | 70672 | 70680 | 70689 | 70697 | 70706 | 70714 | 70723 | 70731 | 70740 | 70749 |
| 510 | 70757 | 70766 | 70774 | 70783 | 70791 | 70800 | 70808 | 70817 | 70825 | 70834 |
| 511 | 70842 | 70851 | 70859 | 70868 | 70876 | 70885 | 70893 | 70902 | 70910 | 70919 |
| 512 | 70927 | 70935 | 70944 | 70952 | 70961 | 70969 | 70978 | 70986 | 70995 | 71003 |
| 513 | 71012 | 71020 | 71029 | 71037 | 71046 | 71054 | 71063 | 71071 | 71079 | 71088 |
| 514 | 71096 | 71105 | 71113 | 71122 | 71130 | 71139 | 71147 | 71155 | 71164 | 71172 |
| 515 | 71181 | 71189 | 71198 | 71206 | 71214 | 71223 | 71231 | 71240 | 71248 | 71257 |
| 516 | 71265 | 71273 | 71282 | 71290 | 71299 | 71307 | 71315 | 71324 | 71332 | 71341 |
| 517 | 71349 | 71357 | 71366 | 71374 | 71383 | 71391 | 71399 | 71408 | 71416 | 71425 |
| 518 | 71433 | 71441 | 71450 | 71458 | 71466 | 71475 | 71483 | 71492 | 71500 | 71508 |
| 519 | 71517 | 71525 | 71533 | 71542 | 71550 | 71559 | 71567 | 71575 | 71584 | 71592 |
| 520 | 71600 | 71609 | 71617 | 71625 | 71634 | 71642 | 71650 | 71659 | 71667 | 71675 |
| 521 | 71684 | 71692 | 71700 | 71709 | 71717 | 71725 | 71734 | 71742 | 71750 | 71759 |
| 522 | 71767 | 71775 | 71784 | 71792 | 71800 | 71809 | 71817 | 71825 | 71834 | 71842 |
| 523 | 71850 | 71858 | 71867 | 71875 | 71883 | 71892 | 71900 | 71908 | 71917 | 71925 |
| 524 | 71933 | 71941 | 71950 | 71958 | 71966 | 71975 | 71983 | 71991 | 71999 | 72008 |
| 525 | 72016 | 72024 | 72032 | 72041 | 72049 | 72057 | 72066 | 72074 | 72082 | 72090 |
| 526 | 72099 | 72107 | 72115 | 72123 | 72132 | 72140 | 72148 | 72156 | 72165 | 72173 |
| 527 | 72181 | 72189 | 72198 | 72206 | 72214 | 72222 | 72230 | 72239 | 72247 | 72255 |
| 528 | 72263 | 72272 | 72280 | 72288 | 72296 | 72304 | 72313 | 72321 | 72329 | 72337 |
| 529 | 72346 | 72354 | 72362 | 72370 | 72378 | 72387 | 72395 | 72403 | 72411 | 72419 |
| 530 | 72428 | 72436 | 72444 | 72452 | 72460 | 72469 | 72477 | 72485 | 72493 | 72501 |
| 531 | 72509 | 72518 | 72526 | 72534 | 72542 | 72550 | 72558 | 72567 | 72575 | 72583 |
| 532 | 72591 | 72599 | 72607 | 72616 | 72624 | 72632 | 72640 | 72648 | 72656 | 72665 |
| 533 | 72673 | 72681 | 72689 | 72697 | 72705 | 72713 | 72722 | 72730 | 72738 | 72746 |
| 534 | 72754 | 72762 | 72770 | 72779 | 72787 | 72795 | 72803 | 72811 | 72819 | 72827 |
| 535 | 72835 | 72843 | 72852 | 72860 | 72868 | 72876 | 72884 | 72892 | 72900 | 72908 |
| 536 | 72916 | 72925 | 72933 | 72941 | 72949 | 72957 | 72965 | 72973 | 72981 | 72989 |
| 537 | 72997 | 73006 | 73014 | 73022 | 73030 | 73038 | 73046 | 73054 | 73062 | 73070 |
| 538 | 73078 | 73086 | 73094 | 73102 | 73111 | 73119 | 73127 | 73135 | 73143 | 73151 |
| 539 | 73159 | 73167 | 73175 | 73183 | 73191 | 73199 | 73207 | 73215 | 73223 | 73231 |
| 540 | 73239 | 73247 | 73255 | 73263 | 73272 | 73280 | 73288 | 73296 | 73304 | 73312 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 540—580

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 540 | 73239 | 73247 | 73255 | 73263 | 73272 | 73280 | 73288 | 73296 | 73304 | 73312 |
| 541 | 73320 | 73328 | 73336 | 73344 | 73352 | 73360 | 73368 | 73376 | 73384 | 73392 |
| 542 | 73400 | 73408 | 73416 | 73424 | 73432 | 73440 | 73448 | 73456 | 73464 | 73472 |
| 543 | 73480 | 73488 | 73496 | 73504 | 73512 | 73520 | 73528 | 73536 | 73544 | 73552 |
| 544 | 73560 | 73568 | 73576 | 73584 | 73592 | 73600 | 73608 | 73616 | 73624 | 73632 |
| 545 | 63640 | 73648 | 73656 | 73664 | 73672 | 73679 | 73687 | 73695 | 73703 | 73711 |
| 546 | 73719 | 73727 | 73735 | 73743 | 73751 | 73759 | 73767 | 73775 | 73783 | 73791 |
| 547 | 73799 | 73807 | 73815 | 73823 | 73830 | 73838 | 73846 | 73854 | 73862 | 73870 |
| 548 | 73878 | 73886 | 73894 | 73902 | 73910 | 73918 | 73926 | 73933 | 73941 | 73949 |
| 549 | 73957 | 73965 | 73973 | 73981 | 73989 | 73997 | 74005 | 74013 | 74020 | 74028 |
| 550 | 74036 | 74044 | 74052 | 74060 | 74068 | 74076 | 74084 | 74092 | 74099 | 74107 |
| 551 | 74115 | 74123 | 74131 | 74139 | 74147 | 74155 | 74162 | 74170 | 74178 | 74186 |
| 552 | 74194 | 74202 | 74210 | 74218 | 74225 | 74233 | 74241 | 74249 | 74257 | 74265 |
| 553 | 74273 | 74280 | 74288 | 74296 | 74304 | 74312 | 74320 | 74327 | 74335 | 74343 |
| 554 | 74351 | 74359 | 74367 | 74374 | 74382 | 74390 | 74398 | 74406 | 74414 | 74421 |
| 555 | 74429 | 74437 | 74445 | 74453 | 74461 | 74468 | 74476 | 74484 | 74492 | 74500 |
| 556 | 74507 | 74515 | 74523 | 74531 | 74539 | 74547 | 74554 | 74562 | 74570 | 74578 |
| 557 | 74586 | 74593 | 74601 | 74609 | 74617 | 74624 | 74632 | 74640 | 74648 | 74656 |
| 558 | 74663 | 74671 | 74679 | 74687 | 74695 | 74702 | 74710 | 74718 | 74726 | 74733 |
| 559 | 74741 | 74749 | 74757 | 74764 | 74772 | 74780 | 74788 | 74796 | 74803 | 74811 |
| 560 | 74819 | 74827 | 74834 | 74842 | 74850 | 74858 | 74865 | 74873 | 74881 | 74889 |
| 561 | 74896 | 74904 | 74912 | 74920 | 74927 | 74935 | 74943 | 74950 | 74958 | 74966 |
| 562 | 74974 | 74981 | 74989 | 74997 | 75005 | 75012 | 75020 | 75028 | 75035 | 75043 |
| 563 | 75051 | 75059 | 75066 | 75074 | 75082 | 75089 | 75097 | 75105 | 75113 | 75120 |
| 564 | 75128 | 75136 | 75143 | 75151 | 75159 | 75166 | 75174 | 75182 | 75189 | 75197 |
| 565 | 75205 | 75213 | 75220 | 75228 | 75236 | 75243 | 75251 | 75259 | 75266 | 75274 |
| 566 | 75282 | 75289 | 75297 | 75305 | 75312 | 75320 | 75328 | 75335 | 75343 | 75351 |
| 567 | 85358 | 75366 | 75374 | 75381 | 75389 | 75397 | 75404 | 75412 | 75420 | 75427 |
| 568 | 75435 | 75442 | 75450 | 75458 | 75465 | 75473 | 75481 | 75488 | 75496 | 75504 |
| 569 | 75511 | 75519 | 75526 | 75534 | 75542 | 75549 | 75557 | 75565 | 75572 | 75580 |
| 570 | 75587 | 75595 | 75603 | 75610 | 75618 | 75626 | 75633 | 75641 | 75648 | 75656 |
| 571 | 75664 | 75671 | 75679 | 75686 | 75694 | 75702 | 75709 | 75717 | 75724 | 75732 |
| 572 | 75740 | 75747 | 75755 | 75762 | 75770 | 75778 | 75785 | 75793 | 75800 | 75808 |
| 573 | 75815 | 71823 | 75831 | 75838 | 75846 | 75853 | 75861 | 75868 | 75876 | 75884 |
| 574 | 75891 | 75899 | 75906 | 75914 | 75921 | 75929 | 75937 | 75944 | 75952 | 75959 |
| 575 | 75967 | 75974 | 75982 | 75989 | 75997 | 76005 | 76012 | 76020 | 76027 | 76035 |
| 576 | 76042 | 76050 | 76057 | 76065 | 76072 | 76080 | 76087 | 76095 | 76103 | 76110 |
| 577 | 76118 | 76125 | 76133 | 76140 | 76148 | 76155 | 76163 | 76170 | 76178 | 76185 |
| 578 | 76193 | 76200 | 76208 | 76215 | 76223 | 76230 | 76238 | 76245 | 76253 | 76260 |
| 579 | 76268 | 76275 | 76283 | 76290 | 76298 | 76305 | 76313 | 76320 | 76328 | 76335 |
| 580 | 76343 | 76350 | 76358 | 76365 | 76373 | 76380 | 76388 | 76395 | 76403 | 76410 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 580—620

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 580 | 76343 | 76350 | 76358 | 76365 | 76373 | 76380 | 76388 | 76395 | 76403 | 76410 |
| 581 | 76418 | 76425 | 76433 | 76440 | 76448 | 76455 | 76462 | 76470 | 76477 | 76485 |
| 582 | 76492 | 76500 | 76507 | 76515 | 76522 | 76530 | 76537 | 76545 | 76552 | 76559 |
| 583 | 76567 | 76574 | 76582 | 76589 | 76597 | 76604 | 76612 | 76619 | 76626 | 76634 |
| 584 | 76641 | 76649 | 76656 | 76664 | 76671 | 76678 | 76686 | 76693 | 76701 | 76708 |
| 585 | 76716 | 76723 | 76730 | 76738 | 76745 | 76753 | 76760 | 76768 | 76775 | 76782 |
| 586 | 76790 | 76797 | 76805 | 76812 | 76819 | 76827 | 76834 | 76842 | 76849 | 76856 |
| 587 | 76864 | 76871 | 76879 | 76886 | 76893 | 76901 | 76908 | 76916 | 76923 | 76930 |
| 588 | 76938 | 76945 | 76953 | 76960 | 76967 | 76975 | 76982 | 76989 | 76997 | 77004 |
| 589 | 77012 | 77019 | 77026 | 77034 | 77041 | 77048 | 77056 | 77063 | 77070 | 77078 |
| 590 | 77085 | 77093 | 77100 | 77107 | 77115 | 77122 | 77129 | 77137 | 77144 | 77151 |
| 591 | 77159 | 77166 | 77173 | 77181 | 77188 | 77195 | 77203 | 77210 | 77217 | 77225 |
| 592 | 77232 | 77240 | 77247 | 77254 | 77262 | 77269 | 77276 | 77283 | 77291 | 77298 |
| 593 | 77305 | 77313 | 77320 | 77327 | 77335 | 77342 | 77349 | 77357 | 77364 | 77371 |
| 594 | 77379 | 77386 | 77393 | 77401 | 77408 | 77415 | 77422 | 77430 | 77437 | 77444 |
| 595 | 77452 | 77459 | 77466 | 77474 | 77481 | 77488 | 77495 | 77503 | 77510 | 77517 |
| 596 | 77525 | 77532 | 77539 | 77546 | 77554 | 77561 | 77568 | 77576 | 77583 | 77590 |
| 597 | 77597 | 77605 | 77612 | 77619 | 77627 | 77634 | 77641 | 77648 | 77656 | 77663 |
| 598 | 77670 | 77677 | 77685 | 77692 | 77699 | 77706 | 77714 | 77721 | 77728 | 77735 |
| 599 | 77743 | 77750 | 77757 | 77764 | 77772 | 77779 | 77786 | 77793 | 77801 | 77808 |
| 600 | 77815 | 77822 | 77830 | 77837 | 77844 | 77851 | 77859 | 77866 | 77873 | 77880 |
| 601 | 77887 | 77895 | 77902 | 77909 | 77916 | 77924 | 77931 | 77938 | 77945 | 77952 |
| 602 | 77960 | 77967 | 77974 | 77981 | 77988 | 77996 | 78003 | 78010 | 78017 | 78025 |
| 603 | 78032 | 78039 | 78046 | 78053 | 78061 | 78068 | 78075 | 78082 | 78089 | 78097 |
| 604 | 78104 | 78111 | 78118 | 78125 | 78132 | 78140 | 78147 | 78154 | 78161 | 78168 |
| 605 | 78176 | 78183 | 78190 | 78197 | 78204 | 78211 | 78219 | 78226 | 78233 | 78240 |
| 606 | 78247 | 78254 | 78262 | 78269 | 78276 | 78283 | 78290 | 78297 | 78305 | 78312 |
| 607 | 78319 | 78326 | 78333 | 78340 | 78347 | 78355 | 78362 | 78369 | 78376 | 78383 |
| 608 | 78390 | 78398 | 78405 | 78412 | 78419 | 78426 | 78433 | 78440 | 78447 | 78455 |
| 609 | 78462 | 78469 | 78476 | 78483 | 78490 | 78497 | 78504 | 78512 | 78519 | 78526 |
| 610 | 78533 | 78540 | 78547 | 78554 | 78561 | 78569 | 78576 | 78583 | 78590 | 78597 |
| 611 | 78604 | 78611 | 78618 | 78625 | 78633 | 78640 | 78647 | 78654 | 78661 | 78668 |
| 612 | 78675 | 78682 | 78689 | 78696 | 78704 | 78711 | 78718 | 78725 | 78732 | 78739 |
| 613 | 78746 | 78753 | 78760 | 78767 | 78774 | 78781 | 78789 | 78796 | 78803 | 78810 |
| 614 | 78817 | 78824 | 78831 | 78838 | 78845 | 78852 | 78859 | 78866 | 78873 | 78880 |
| 615 | 78888 | 78895 | 78902 | 78909 | 78916 | 78923 | 78930 | 78937 | 78944 | 78951 |
| 616 | 78958 | 78965 | 78972 | 78979 | 78986 | 78993 | 79000 | 79007 | 79014 | 79021 |
| 617 | 79029 | 79036 | 79043 | 79050 | 79057 | 79064 | 79071 | 79078 | 79085 | 79092 |
| 618 | 79099 | 79106 | 79113 | 79120 | 79127 | 78134 | 79141 | 79148 | 79155 | 79162 |
| 619 | 79169 | 79176 | 79183 | 79190 | 79197 | 79204 | 79211 | 79218 | 79225 | 79232 |
| 620 | 79239 | 79246 | 79253 | 79260 | 79267 | 79274 | 79281 | 79288 | 79295 | 79302 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 620—660

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 620 | 79239 | 79246 | 79253 | 79260 | 69267 | 79274 | 79281 | 79288 | 79295 | 79302 |
| 621 | 79309 | 79316 | 79323 | 79330 | 79337 | 79344 | 79351 | 79358 | 79365 | 79372 |
| 622 | 79379 | 79386 | 79393 | 79400 | 79407 | 79414 | 79421 | 79428 | 79435 | 79442 |
| 623 | 79449 | 79456 | 79463 | 79470 | 79477 | 79484 | 79491 | 79498 | 79505 | 79511 |
| 624 | 79518 | 79525 | 79532 | 79539 | 79546 | 79553 | 79560 | 79567 | 79574 | 79581 |
| 625 | 79588 | 79595 | 79602 | 79609 | 79616 | 79623 | 79630 | 79637 | 79644 | 79650 |
| 626 | 79657 | 79664 | 79671 | 79678 | 79685 | 79692 | 79699 | 79706 | 79713 | 79720 |
| 627 | 79727 | 79734 | 79741 | 79748 | 79754 | 79761 | 79768 | 79775 | 79782 | 79789 |
| 628 | 79796 | 79803 | 79810 | 79817 | 79824 | 79831 | 79837 | 79844 | 79851 | 79858 |
| 629 | 79865 | 79872 | 79879 | 79886 | 79893 | 79900 | 79906 | 79913 | 79920 | 79927 |
| 630 | 79934 | 79941 | 79948 | 79955 | 79962 | 79969 | 79975 | 79982 | 79989 | 79996 |
| 631 | 80003 | 80010 | 80017 | 80024 | 80030 | 84037 | 80044 | 80051 | 80058 | 80065 |
| 632 | 80072 | 80079 | 80085 | 80092 | 80099 | 80106 | 80113 | 80120 | 80127 | 80134 |
| 633 | 80140 | 80147 | 80154 | 80161 | 80168 | 80175 | 80182 | 80188 | 80195 | 80202 |
| 634 | 80209 | 80216 | 80223 | 80229 | 80236 | 80243 | 80250 | 80257 | 80264 | 80271 |
| 635 | 80277 | 80284 | 80291 | 80298 | 80305 | 80312 | 80318 | 80325 | 80332 | 80339 |
| 636 | 80346 | 80353 | 80359 | 80366 | 80373 | 80380 | 80387 | 80393 | 89400 | 80407 |
| 637 | 80414 | 80421 | 80428 | 80434 | 80441 | 80448 | 80455 | 80462 | 80468 | 80475 |
| 638 | 80482 | 80489 | 80496 | 80502 | 80509 | 80516 | 80523 | 80530 | 80536 | 80543 |
| 639 | 80550 | 80557 | 80564 | 80570 | 80577 | 80584 | 80591 | 80598 | 80604 | 80611 |
| 640 | 80618 | 80625 | 80632 | 80638 | 80645 | 80652 | 80659 | 80665 | 80672 | 80679 |
| 641 | 80686 | 80693 | 80699 | 80706 | 80713 | 80720 | 80726 | 80733 | 80740 | 80747 |
| 642 | 80754 | 80760 | 80767 | 80774 | 80781 | 80787 | 80794 | 80801 | 80808 | 80814 |
| 643 | 80821 | 80828 | 80835 | 80841 | 80848 | 80855 | 80862 | 80868 | 80875 | 80882 |
| 644 | 80889 | 80895 | 80902 | 80909 | 80916 | 80922 | 80929 | 80936 | 80943 | 80949 |
| 645 | 80956 | 80963 | 80969 | 80976 | 80983 | 80990 | 80996 | 81003 | 81010 | 81017 |
| 646 | 81023 | 81030 | 81037 | 81043 | 81050 | 81057 | 81064 | 81070 | 81077 | 81084 |
| 647 | 81090 | 81097 | 81104 | 81111 | 81117 | 81124 | 81131 | 81137 | 81144 | 81151 |
| 648 | 81158 | 81164 | 81171 | 81178 | 81184 | 81191 | 81198 | 81204 | 81211 | 81218 |
| 649 | 81224 | 81231 | 81238 | 81245 | 81251 | 81258 | 81265 | 81271 | 81278 | 81285 |
| 650 | 81291 | 81298 | 81305 | 81311 | 81318 | 81325 | 81331 | 81338 | 81345 | 81351 |
| 651 | 81358 | 81365 | 81371 | 81378 | 81385 | 81391 | 81398 | 81405 | 81411 | 81418 |
| 652 | 81425 | 81431 | 81438 | 81445 | 81451 | 81458 | 81465 | 81471 | 81478 | 81485 |
| 653 | 81491 | 81498 | 81505 | 81511 | 81518 | 81525 | 81531 | 81538 | 81544 | 81551 |
| 654 | 81558 | 81564 | 81571 | 81578 | 81584 | 81591 | 81598 | 81604 | 81611 | 81617 |
| 655 | 81624 | 81631 | 81637 | 81644 | 81651 | 81657 | 81664 | 81671 | 81677 | 81684 |
| 656 | 81690 | 81697 | 81704 | 81710 | 81717 | 81723 | 81730 | 81737 | 81743 | 81750 |
| 657 | 81757 | 81763 | 81770 | 81776 | 81783 | 81790 | 81796 | 81803 | 81809 | 81816 |
| 658 | 81823 | 81829 | 81836 | 81842 | 81849 | 81856 | 81862 | 81869 | 81875 | 81882 |
| 659 | 81889 | 81895 | 81902 | 81908 | 81915 | 81921 | 81928 | 81935 | 81941 | 81948 |
| 660 | 81954 | 81961 | 81968 | 81974 | 81981 | 81987 | 81994 | 82000 | 82007 | 82014 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

660-700

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 660 | 81954 | 81961 | 81968 | 81974 | 81981 | 81987 | 81994 | 82000 | 82007 | 82014 |
| 661 | 82020 | 82027 | 82033 | 82040 | 82046 | 82053 | 82060 | 82066 | 82073 | 82079 |
| 662 | 82086 | 82092 | 82099 | 82105 | 82112 | 82119 | 82125 | 82132 | 82138 | 82145 |
| 663 | 82151 | 82158 | 82164 | 82171 | 82178 | 82184 | 82191 | 82197 | 82204 | 82210 |
| 664 | 82217 | 82223 | 82230 | 82236 | 82243 | 82249 | 82256 | 82263 | 82269 | 82276 |
| 665 | 82282 | 82289 | 82295 | 82302 | 82308 | 82315 | 82321 | 82328 | 82334 | 82341 |
| 666 | 82347 | 82354 | 82360 | 82367 | 82373 | 82380 | 82387 | 82393 | 82400 | 82406 |
| 667 | 82413 | 82419 | 82426 | 82432 | 82439 | 82445 | 82452 | 82458 | 82465 | 82471 |
| 668 | 82478 | 82484 | 82491 | 82497 | 82504 | 82510 | 82517 | 82523 | 82530 | 82536 |
| 669 | 82543 | 82549 | 82556 | 82562 | 82569 | 82575 | 82582 | 82588 | 82595 | 82601 |
| 670 | 82607 | 82614 | 82620 | 82627 | 82633 | 82640 | 82646 | 82653 | 82659 | 82666 |
| 671 | 82672 | 82679 | 82685 | 82692 | 82698 | 82705 | 82711 | 82718 | 82724 | 82730 |
| 672 | 82737 | 82743 | 82750 | 82756 | 82763 | 82769 | 82776 | 82782 | 82789 | 82795 |
| 673 | 82802 | 82808 | 82814 | 82821 | 82827 | 82834 | 82840 | 82847 | 82853 | 82860 |
| 674 | 82866 | 82872 | 82879 | 82885 | 82892 | 82898 | 82905 | 82911 | 82918 | 82924 |
| 675 | 82930 | 82937 | 82943 | 82950 | 82956 | 82963 | 82969 | 82975 | 82982 | 82988 |
| 676 | 82995 | 83001 | 83008 | 83014 | 83020 | 83027 | 83033 | 83040 | 83046 | 83052 |
| 677 | 83059 | 83065 | 83072 | 83078 | 83085 | 83091 | 83097 | 83104 | 83110 | 83117 |
| 678 | 83123 | 83129 | 83136 | 83142 | 83149 | 83155 | 83161 | 83168 | 83174 | 83181 |
| 679 | 83187 | 83193 | 83200 | 83206 | 83213 | 83219 | 83225 | 83232 | 83238 | 83245 |
| 680 | 83251 | 83257 | 83264 | 83270 | 83276 | 83283 | 83289 | 83296 | 83302 | 83308 |
| 681 | 83315 | 83321 | 83327 | 83334 | 83340 | 83347 | 83353 | 83360 | 83366 | 83372 |
| 682 | 83378 | 83385 | 83391 | 83398 | 83404 | 83410 | 83417 | 83423 | 83429 | 83436 |
| 683 | 83442 | 83448 | 83455 | 83461 | 83467 | 83474 | 83480 | 83487 | 83493 | 83499 |
| 684 | 83506 | 83512 | 83518 | 83525 | 83531 | 83537 | 83544 | 83550 | 83556 | 83563 |
| 685 | 83569 | 83575 | 83582 | 83588 | 83594 | 83601 | 83607 | 83613 | 83620 | 83626 |
| 686 | 83632 | 83639 | 83645 | 83651 | 83658 | 83664 | 83670 | 83677 | 83683 | 83689 |
| 687 | 83696 | 83702 | 83708 | 83715 | 83721 | 83727 | 83734 | 83740 | 83746 | 83753 |
| 688 | 83759 | 83765 | 83771 | 83778 | 83784 | 83790 | 83797 | 83803 | 83809 | 83816 |
| 689 | 83822 | 83828 | 83835 | 83841 | 83847 | 83853 | 83860 | 83866 | 83872 | 83879 |
| 690 | 83885 | 83891 | 83897 | 83904 | 83910 | 83916 | 83923 | 83929 | 83935 | 83942 |
| 691 | 83948 | 83954 | 83960 | 83967 | 83973 | 83979 | 83985 | 83992 | 83998 | 84004 |
| 692 | 84011 | 84017 | 84023 | 84029 | 84036 | 84042 | 84048 | 84055 | 84061 | 84067 |
| 693 | 84073 | 84080 | 84086 | 84092 | 84098 | 84105 | 84111 | 84117 | 84123 | 84130 |
| 694 | 84136 | 84142 | 84148 | 84155 | 84161 | 84167 | 84173 | 84180 | 84186 | 84192 |
| 695 | 84193 | 84205 | 84211 | 84217 | 84223 | 84230 | 84236 | 84242 | 84248 | 84255 |
| 696 | 84261 | 84267 | 84273 | 84280 | 84286 | 84292 | 84298 | 84305 | 84311 | 84317 |
| 697 | 84323 | 84330 | 84336 | 84342 | 84348 | 84354 | 84361 | 84367 | 84373 | 84379 |
| 698 | 84385 | 84392 | 84398 | 84404 | 84410 | 84417 | 84423 | 84429 | 84435 | 84442 |
| 699 | 84448 | 84454 | 84460 | 84466 | 84473 | 84479 | 84485 | 84491 | 84497 | 84504 |
| 700 | 84510 | 84516 | 84522 | 84528 | 84535 | 84541 | 84547 | 84553 | 84559 | 84566 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 700—740

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 700 | 84510 | 84516 | 84522 | 84528 | 84535 | 84541 | 84547 | 84553 | 84559 | 84566 |
| 701 | 84572 | 84578 | 84584 | 84590 | 84597 | 84603 | 84609 | 84615 | 84621 | 84628 |
| 702 | 84634 | 84640 | 84646 | 84652 | 84658 | 84665 | 84671 | 84677 | 84683 | 84689 |
| 703 | 84696 | 84702 | 84708 | 84714 | 84720 | 84726 | 84733 | 84739 | 84745 | 84751 |
| 704 | 84757 | 84763 | 84770 | 84776 | 84782 | 84788 | 84794 | 84800 | 84807 | 84813 |
| 705 | 84819 | 84825 | 84831 | 84837 | 84844 | 84850 | 84856 | 84862 | 84868 | 84874 |
| 706 | 84880 | 84887 | 84893 | 84899 | 84905 | 84911 | 84917 | 84924 | 84930 | 84936 |
| 707 | 84942 | 84948 | 84954 | 84960 | 84967 | 84973 | 84979 | 84985 | 84991 | 84997 |
| 708 | 85003 | 85009 | 85016 | 85022 | 85028 | 85034 | 85040 | 85046 | 85052 | 85058 |
| 709 | 85065 | 85071 | 85077 | 85083 | 85089 | 85095 | 80101 | 85107 | 85114 | 85120 |
| 710 | 85126 | 85132 | 85138 | 85144 | 85150 | 85156 | 85163 | 85169 | 85175 | 85181 |
| 711 | 85187 | 85193 | 85199 | 85205 | 85211 | 85217 | 85224 | 85230 | 85236 | 85242 |
| 712 | 85248 | 85254 | 85260 | 85266 | 85272 | 85278 | 85285 | 85291 | 85297 | 85303 |
| 713 | 85309 | 85315 | 85321 | 85327 | 85333 | 85339 | 85345 | 85352 | 85358 | 85364 |
| 714 | 85370 | 85376 | 85382 | 85388 | 85394 | 85400 | 85406 | 85412 | 85418 | 85425 |
| 715 | 85431 | 85437 | 85443 | 85449 | 85455 | 85461 | 85467 | 85473 | 85479 | 85485 |
| 716 | 85491 | 85497 | 85503 | 85509 | 85516 | 85522 | 85528 | 85534 | 85540 | 85546 |
| 717 | 85552 | 85558 | 85564 | 85570 | 85576 | 85582 | 85588 | 85594 | 85600 | 85606 |
| 718 | 85612 | 85618 | 85625 | 85631 | 85637 | 85643 | 85649 | 85655 | 85661 | 85667 |
| 719 | 85673 | 85679 | 85685 | 85691 | 85697 | 85703 | 85709 | 85715 | 85721 | 85727 |
| 720 | 85733 | 85739 | 85745 | 85751 | 85757 | 85763 | 85769 | 85775 | 85781 | 85788 |
| 721 | 85794 | 85800 | 85806 | 85812 | 85818 | 85824 | 85830 | 85836 | 85842 | 85848 |
| 722 | 85854 | 85860 | 85866 | 85872 | 85878 | 85884 | 85890 | 85896 | 85902 | 85908 |
| 723 | 85914 | 85920 | 85926 | 85932 | 85938 | 85944 | 85950 | 85956 | 85962 | 85968 |
| 724 | 85974 | 85980 | 85986 | 85992 | 85998 | 86004 | 86010 | 86016 | 87022 | 86028 |
| 725 | 86034 | 86040 | 86046 | 86052 | 86058 | 86064 | 86070 | 86076 | 86082 | 86088 |
| 726 | 86094 | 86100 | 86106 | 86112 | 86118 | 86124 | 86130 | 86136 | 86141 | 86147 |
| 727 | 86153 | 86159 | 86165 | 86171 | 86177 | 86183 | 86189 | 86195 | 86201 | 86207 |
| 728 | 86213 | 86219 | 86225 | 86231 | 86237 | 86243 | 86249 | 86255 | 86261 | 86267 |
| 729 | 86273 | 86279 | 86285 | 86291 | 86297 | 86303 | 86308 | 86314 | 86320 | 86326 |
| 730 | 86332 | 86338 | 86344 | 86350 | 86356 | 86362 | 86368 | 86374 | 86380 | 86386 |
| 731 | 86392 | 86398 | 86404 | 86410 | 86415 | 86421 | 86427 | 86433 | 86439 | 86445 |
| 732 | 86451 | 86457 | 86463 | 86469 | 86475 | 86481 | 86487 | 86493 | 86499 | 86504 |
| 733 | 86510 | 86516 | 86522 | 86528 | 86534 | 86540 | 86546 | 86552 | 86558 | 86564 |
| 734 | 86570 | 86576 | 86581 | 86587 | 86593 | 86599 | 86605 | 86611 | 86617 | 86623 |
| 735 | 86629 | 86635 | 86641 | 86646 | 86652 | 86658 | 86664 | 86670 | 86676 | 86682 |
| 736 | 86688 | 86694 | 86700 | 86705 | 86711 | 86717 | 86723 | 86729 | 86735 | 86741 |
| 737 | 86747 | 86753 | 86759 | 86764 | 86770 | 86776 | 86782 | 86788 | 86794 | 86800 |
| 738 | 86806 | 86812 | 86817 | 86823 | 86829 | 86835 | 86841 | 86847 | 86853 | 86859 |
| 739 | 86864 | 86870 | 86876 | 86882 | 86888 | 86894 | 86900 | 86906 | 86911 | 86917 |
| 740 | 86923 | 86929 | 86935 | 86941 | 86947 | 86953 | 86958 | 86964 | 86970 | 86976 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 740—780

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 740 | 86923 | 86929 | 86935 | 86941 | 86947 | 86953 | 86958 | 86964 | 86970 | 86976 |
| 741 | 86982 | 86988 | 86994 | 86999 | 87005 | 87011 | 87017 | 87023 | 87029 | 87035 |
| 742 | 87040 | 87046 | 87052 | 87058 | 87064 | 87070 | 87075 | 87081 | 87087 | 87093 |
| 743 | 87099 | 87105 | 87111 | 87116 | 87122 | 87128 | 87134 | 87140 | 87146 | 87151 |
| 744 | 87157 | 87163 | 87169 | 87175 | 87181 | 87186 | 87192 | 87198 | 87204 | 87210 |
| 745 | 87216 | 87221 | 87227 | 87233 | 87239 | 87245 | 87251 | 87256 | 87262 | 87268 |
| 746 | 87274 | 87280 | 87286 | 87291 | 87297 | 87303 | 87309 | 87315 | 87320 | 87326 |
| 747 | 87332 | 87338 | 87344 | 87349 | 87355 | 87361 | 87367 | 87373 | 87379 | 87384 |
| 748 | 87390 | 87396 | 87402 | 87408 | 87413 | 87419 | 87425 | 87431 | 87437 | 87442 |
| 749 | 87448 | 87454 | 87460 | 87466 | 87471 | 87477 | 87483 | 87489 | 87495 | 87500 |
| 750 | 87506 | 87512 | 87518 | 87523 | 87529 | 87535 | 87541 | 87547 | 87552 | 87558 |
| 751 | 87564 | 87570 | 87576 | 87581 | 87587 | 87593 | 87599 | 87604 | 87610 | 87616 |
| 752 | 87622 | 87628 | 87633 | 87639 | 87645 | 87651 | 87656 | 87662 | 87668 | 87674 |
| 753 | 87679 | 87685 | 87691 | 87697 | 87703 | 87708 | 87714 | 87720 | 87726 | 87731 |
| 754 | 87737 | 87743 | 87749 | 87754 | 87760 | 87766 | 87772 | 87777 | 87783 | 87789 |
| 755 | 87795 | 87800 | 87806 | 87812 | 87818 | 87823 | 87829 | 87835 | 87841 | 87846 |
| 756 | 87852 | 87858 | 87864 | 87869 | 87875 | 87881 | 87887 | 87892 | 87898 | 87904 |
| 757 | 87910 | 87915 | 87921 | 87927 | 87933 | 87938 | 87944 | 87950 | 87955 | 87961 |
| 758 | 87967 | 87973 | 87978 | 87984 | 87990 | 87996 | 88001 | 88007 | 88013 | 88018 |
| 759 | 88024 | 88030 | 88036 | 88041 | 88047 | 88053 | 88058 | 88064 | 88070 | 88076 |
| 760 | 88081 | 88087 | 88093 | 88098 | 88104 | 88110 | 88116 | 88121 | 88127 | 88133 |
| 761 | 88138 | 88144 | 88150 | 88156 | 88161 | 88167 | 88173 | 88178 | 88184 | 88190 |
| 762 | 88195 | 88201 | 88207 | 88213 | 88218 | 88224 | 88230 | 88235 | 88241 | 88247 |
| 763 | 88252 | 88258 | 88264 | 88270 | 88275 | 88281 | 88287 | 88292 | 88298 | 88304 |
| 764 | 88309 | 88315 | 88321 | 88326 | 88332 | 88338 | 88343 | 88349 | 88355 | 88360 |
| 765 | 88366 | 88372 | 88377 | 88383 | 88389 | 88395 | 88400 | 88406 | 88412 | 88417 |
| 766 | 88423 | 88429 | 88434 | 88440 | 88446 | 88451 | 88457 | 88463 | 88468 | 88474 |
| 767 | 88480 | 88485 | 88491 | 88497 | 88502 | 88508 | 88513 | 88519 | 88525 | 88530 |
| 768 | 88536 | 88542 | 88547 | 88553 | 88559 | 88564 | 88570 | 88576 | 88581 | 88587 |
| 769 | 88593 | 88598 | 88604 | 88610 | 88615 | 88621 | 88627 | 88632 | 88638 | 88643 |
| 770 | 88649 | 88655 | 88660 | 88666 | 88672 | 88677 | 88683 | 88689 | 88694 | 88700 |
| 771 | 88705 | 88711 | 88717 | 88722 | 88728 | 88734 | 88739 | 88745 | 88750 | 88756 |
| 772 | 88762 | 88767 | 88773 | 88779 | 88784 | 88790 | 88795 | 88801 | 88807 | 88812 |
| 773 | 88818 | 88824 | 88829 | 88835 | 88840 | 88846 | 88852 | 88857 | 88863 | 88868 |
| 774 | 88874 | 88880 | 88885 | 88891 | 88897 | 88902 | 88908 | 88913 | 88919 | 88925 |
| 775 | 88930 | 88936 | 88941 | 88947 | 88953 | 88958 | 88964 | 88969 | 88975 | 88981 |
| 776 | 88986 | 88992 | 88997 | 89003 | 89009 | 89014 | 89020 | 89025 | 89031 | 89037 |
| 777 | 89042 | 89048 | 89053 | 89059 | 89064 | 89070 | 89076 | 89081 | 89087 | 89092 |
| 778 | 89098 | 89104 | 89109 | 89115 | 89120 | 89126 | 89131 | 89137 | 89143 | 89148 |
| 779 | 89154 | 89159 | 89165 | 89170 | 89176 | 89182 | 89187 | 89193 | 89198 | 89204 |
| 780 | 89209 | 89215 | 89221 | 89226 | 89232 | 89237 | 89243 | 89248 | 89254 | 89260 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 780—820

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 780 | 89209 | 89215 | 89221 | 89226 | 89232 | 89237 | 89243 | 89248 | 89254 | 89260 |
| 781 | 89265 | 89271 | 89276 | 89282 | 89287 | 89293 | 89298 | 89304 | 89310 | 89315 |
| 782 | 89321 | 89326 | 89332 | 89337 | 89343 | 89348 | 89354 | 89360 | 89365 | 89371 |
| 783 | 89376 | 89382 | 89387 | 89393 | 89398 | 89404 | 89409 | 89415 | 89421 | 89426 |
| 784 | 89432 | 89437 | 89443 | 89448 | 89454 | 89459 | 89465 | 89470 | 89476 | 89481 |
| 785 | 89487 | 89492 | 89498 | 89504 | 89509 | 89515 | 89520 | 89526 | 89531 | 89537 |
| 786 | 89542 | 89548 | 89553 | 89559 | 89564 | 89570 | 89575 | 89581 | 89586 | 89592 |
| 787 | 89597 | 89603 | 89909 | 89614 | 89620 | 89625 | 89631 | 89636 | 89642 | 89647 |
| 788 | 89653 | 89658 | 89664 | 89669 | 89675 | 89680 | 89686 | 89691 | 89697 | 89702 |
| 789 | 89708 | 89713 | 89719 | 89724 | 89730 | 89735 | 89741 | 89746 | 89752 | 89757 |
| 790 | 89763 | 89768 | 89774 | 89779 | 89785 | 89790 | 89796 | 89801 | 89807 | 89812 |
| 791 | 89818 | 89823 | 89829 | 89834 | 89840 | 89845 | 89851 | 89856 | 89862 | 89867 |
| 792 | 89873 | 89878 | 89883 | 89889 | 89894 | 89900 | 89905 | 89911 | 89916 | 89922 |
| 793 | 89927 | 89933 | 89938 | 89944 | 89949 | 89955 | 89960 | 89966 | 89971 | 89977 |
| 794 | 89982 | 89988 | 89993 | 89998 | 90004 | 90009 | 90015 | 90020 | 90026 | 90031 |
| 795 | 90037 | 90042 | 90048 | 90053 | 90059 | 90064 | 90069 | 90075 | 90080 | 90086 |
| 796 | 90091 | 90097 | 90102 | 90108 | 90113 | 90119 | 90124 | 90129 | 90135 | 90140 |
| 797 | 90146 | 90151 | 90157 | 90162 | 90168 | 90173 | 90179 | 90184 | 90189 | 90195 |
| 798 | 90200 | 90206 | 90211 | 90217 | 90222 | 90227 | 90233 | 90238 | 90244 | 90249 |
| 799 | 90255 | 90260 | 90266 | 90271 | 90276 | 90282 | 90287 | 90293 | 90298 | 90304 |
| 800 | 90309 | 90314 | 90320 | 90325 | 90331 | 90336 | 90342 | 90347 | 90352 | 90358 |
| 801 | 90363 | 90369 | 90374 | 90380 | 90385 | 90390 | 90396 | 90401 | 90407 | 90412 |
| 802 | 90417 | 90423 | 90428 | 90434 | 90439 | 90445 | 90450 | 90455 | 90461 | 90466 |
| 803 | 90472 | 90477 | 90482 | 90488 | 90493 | 90499 | 90504 | 90509 | 90515 | 90520 |
| 804 | 90526 | 90531 | 90536 | 90542 | 90547 | 90553 | 90558 | 90563 | 90569 | 90574 |
| 805 | 90580 | 90585 | 90590 | 90596 | 90601 | 90607 | 90612 | 90617 | 90623 | 90628 |
| 806 | 90634 | 90639 | 90644 | 90650 | 90655 | 90660 | 90666 | 90671 | 90677 | 90682 |
| 807 | 90687 | 90693 | 90698 | 90703 | 90709 | 90714 | 90720 | 90725 | 90730 | 90736 |
| 808 | 90741 | 90747 | 90752 | 90757 | 90763 | 90768 | 90773 | 90779 | 90784 | 90789 |
| 809 | 90795 | 90800 | 90806 | 90811 | 90816 | 90822 | 90827 | 90832 | 90838 | 90843 |
| 810 | 90849 | 90854 | 90859 | 90865 | 90870 | 90875 | 90881 | 90886 | 90891 | 90897 |
| 811 | 90902 | 90907 | 90913 | 90918 | 90924 | 90929 | 90934 | 90940 | 90945 | 90950 |
| 812 | 90956 | 90961 | 90966 | 90972 | 90977 | 90982 | 90988 | 90993 | 90998 | 91004 |
| 813 | 91009 | 91014 | 91020 | 91025 | 91030 | 91036 | 91041 | 91046 | 91052 | 91057 |
| 814 | 91062 | 91068 | 91073 | 91078 | 91084 | 91089 | 91094 | 91100 | 91105 | 91110 |
| 815 | 91116 | 91121 | 91126 | 91132 | 91137 | 91142 | 91148 | 91153 | 91158 | 91164 |
| 816 | 91169 | 91174 | 91180 | 91185 | 91190 | 91196 | 91201 | 91206 | 91212 | 91217 |
| 817 | 91222 | 91228 | 91233 | 91238 | 91243 | 91249 | 91254 | 91259 | 91265 | 91270 |
| 818 | 91275 | 91281 | 91286 | 91291 | 91297 | 91302 | 91307 | 91312 | 91318 | 91323 |
| 819 | 91328 | 91334 | 91339 | 91344 | 91350 | 91355 | 91360 | 91365 | 91371 | 91376 |
| 820 | 91381 | 91387 | 91392 | 91397 | 91403 | 91408 | 91413 | 91418 | 91424 | 91429 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |



## 820-860

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 820 | 91381 | 91387 | 91392 | 91397 | 91403 | 91408 | 91413 | 91418 | 91424 | 91429 |
| 821 | 91434 | 91440 | 91445 | 91450 | 91455 | 91461 | 91466 | 91471 | 91477 | 91482 |
| 822 | 91487 | 91492 | 91498 | 91503 | 91508 | 91514 | 91519 | 91524 | 91529 | 91535 |
| 823 | 91540 | 91545 | 91551 | 91556 | 91561 | 91566 | 91572 | 91577 | 91582 | 91587 |
| 824 | 91593 | 91598 | 91603 | 91609 | 91614 | 91619 | 91624 | 91630 | 91635 | 91640 |
| 825 | 91645 | 91651 | 91656 | 91661 | 91666 | 91672 | 91677 | 91682 | 91687 | 91693 |
| 826 | 91698 | 91703 | 91709 | 91714 | 91719 | 91724 | 91730 | 91735 | 91740 | 91745 |
| 827 | 91751 | 91756 | 91761 | 91766 | 91772 | 91777 | 91782 | 91787 | 91793 | 91798 |
| 828 | 91803 | 91808 | 91814 | 91819 | 91824 | 91829 | 91834 | 91840 | 91845 | 91850 |
| 829 | 91855 | 91861 | 91866 | 91871 | 91876 | 91882 | 91887 | 91892 | 91897 | 91903 |
| 830 | 91908 | 91913 | 91918 | 91924 | 91929 | 91934 | 91939 | 91944 | 91950 | 91955 |
| 831 | 91960 | 91965 | 91971 | 91976 | 91981 | 91986 | 91991 | 91997 | 92002 | 92007 |
| 832 | 92012 | 92018 | 92023 | 92028 | 92033 | 92038 | 92044 | 92049 | 92054 | 92059 |
| 833 | 92065 | 92070 | 92075 | 92080 | 92085 | 92091 | 92096 | 92101 | 92106 | 92111 |
| 834 | 92117 | 92122 | 92127 | 92132 | 92137 | 92143 | 92148 | 92153 | 92158 | 92163 |
| 835 | 92169 | 92174 | 92179 | 92184 | 92189 | 92165 | 92200 | 92205 | 92210 | 92215 |
| 836 | 92221 | 92226 | 92231 | 92236 | 92241 | 92247 | 92252 | 92257 | 92262 | 92267 |
| 837 | 92273 | 92278 | 92283 | 92288 | 92293 | 92298 | 92304 | 92309 | 92314 | 92319 |
| 838 | 92324 | 92330 | 92335 | 92340 | 92345 | 92350 | 92355 | 92361 | 92366 | 92371 |
| 839 | 92376 | 92381 | 92387 | 92392 | 92397 | 92402 | 92407 | 92412 | 92418 | 92423 |
| 840 | 92428 | 92433 | 92438 | 92443 | 92449 | 92454 | 92459 | 92464 | 92469 | 92474 |
| 841 | 92480 | 92485 | 92490 | 92495 | 92500 | 92605 | 92511 | 92516 | 92521 | 92526 |
| 842 | 92531 | 92536 | 92542 | 92547 | 92552 | 92557 | 92562 | 92567 | 92572 | 92578 |
| 843 | 92583 | 92588 | 92593 | 92598 | 92603 | 92609 | 92614 | 92619 | 92624 | 92629 |
| 844 | 92634 | 92639 | 92645 | 92650 | 92655 | 92660 | 92665 | 92670 | 92675 | 92681 |
| 845 | 92686 | 92691 | 92696 | 92701 | 92706 | 92711 | 92716 | 92722 | 92727 | 92732 |
| 846 | 92737 | 92742 | 92747 | 92752 | 92758 | 92763 | 92768 | 92773 | 92778 | 92783 |
| 847 | 92788 | 92793 | 92799 | 92804 | 92809 | 92814 | 92819 | 92824 | 92829 | 92834 |
| 848 | 92840 | 92845 | 92850 | 92855 | 92860 | 92865 | 92870 | 92875 | 92881 | 92886 |
| 849 | 92891 | 92896 | 92901 | 92906 | 92911 | 92916 | 92921 | 92927 | 92932 | 92937 |
| 850 | 92942 | 92947 | 92952 | 92957 | 92962 | 92967 | 92973 | 92978 | 92983 | 92988 |
| 851 | 92993 | 92998 | 93003 | 93008 | 93013 | 93018 | 93024 | 93029 | 93034 | 93039 |
| 852 | 93044 | 93049 | 93054 | 93059 | 93064 | 93069 | 93075 | 93080 | 93085 | 93090 |
| 853 | 93095 | 93100 | 93105 | 93110 | 93115 | 93120 | 93125 | 93131 | 93136 | 93141 |
| 854 | 93146 | 93151 | 93156 | 93161 | 93166 | 93171 | 93176 | 93181 | 93186 | 93192 |
| 855 | 93197 | 93202 | 93207 | 93212 | 93217 | 93222 | 93227 | 93232 | 93237 | 93242 |
| 856 | 93247 | 93252 | 93258 | 93263 | 93268 | 93273 | 93278 | 93283 | 93288 | 93293 |
| 857 | 93298 | 93303 | 93308 | 93313 | 93318 | 93323 | 93328 | 93334 | 93339 | 93344 |
| 858 | 93349 | 93354 | 93359 | 93364 | 93369 | 93374 | 93379 | 93384 | 93389 | 93394 |
| 859 | 93399 | 93404 | 93409 | 93414 | 93420 | 93425 | 93430 | 93435 | 93440 | 93445 |
| 860 | 93450 | 93455 | 93460 | 93465 | 93470 | 93475 | 93480 | 93485 | 93490 | 93495 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 860—900

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 860 | 93450 | 93455 | 93460 | 93465 | 93470 | 93475 | 93480 | 93485 | 93490 | 93495 |
| 861 | 93500 | 93505 | 93510 | 93515 | 93520 | 93525 | 93531 | 93536 | 93541 | 93546 |
| 862 | 93551 | 93556 | 93561 | 93566 | 93571 | 93576 | 93581 | 93586 | 93591 | 93596 |
| 863 | 93601 | 93606 | 93611 | 93616 | 93621 | 93626 | 93631 | 93636 | 93641 | 93646 |
| 864 | 93651 | 93656 | 93661 | 93666 | 93671 | 93676 | 93682 | 93687 | 93692 | 93697 |
| 865 | 93702 | 93707 | 93712 | 93717 | 93722 | 93727 | 93732 | 93737 | 93742 | 93747 |
| 866 | 93752 | 93757 | 93762 | 93767 | 93772 | 93777 | 93782 | 93787 | 93792 | 93797 |
| 867 | 93802 | 93807 | 93812 | 93817 | 93822 | 93827 | 93832 | 93837 | 93842 | 93847 |
| 868 | 93852 | 93857 | 93862 | 93867 | 93872 | 93877 | 93882 | 93887 | 93892 | 93897 |
| 869 | 93902 | 93907 | 93912 | 93917 | 93922 | 93927 | 93932 | 93937 | 93942 | 93947 |
| 870 | 93952 | 93957 | 93962 | 93967 | 93972 | 93977 | 93982 | 93987 | 93992 | 93997 |
| 871 | 94002 | 94007 | 94012 | 94017 | 94022 | 93027 | 94032 | 94037 | 94042 | 94047 |
| 872 | 94052 | 94057 | 94062 | 94067 | 94072 | 94077 | 94082 | 94086 | 94091 | 94096 |
| 873 | 94101 | 94106 | 94111 | 94116 | 94121 | 94126 | 94131 | 94136 | 94141 | 94146 |
| 874 | 94151 | 94156 | 94161 | 94166 | 94171 | 94176 | 94181 | 94186 | 94191 | 94196 |
| 875 | 94201 | 94206 | 94211 | 94216 | 94221 | 94226 | 94231 | 94236 | 94240 | 94245 |
| 876 | 94250 | 94255 | 94260 | 94265 | 94270 | 94275 | 94280 | 94285 | 94290 | 94295 |
| 877 | 94300 | 94305 | 94310 | 94315 | 94320 | 94325 | 94330 | 94335 | 94340 | 94345 |
| 878 | 94349 | 94354 | 94359 | 94364 | 94369 | 94374 | 94379 | 94384 | 94389 | 94394 |
| 879 | 94399 | 94404 | 94409 | 94414 | 94419 | 94424 | 94429 | 94466 | 94488 | 94443 |
| 880 | 94448 | 94453 | 94458 | 94463 | 94468 | 94473 | 94478 | 94483 | 94488 | 94493 |
| 881 | 94498 | 94503 | 94507 | 94512 | 94517 | 94522 | 94527 | 94532 | 94537 | 94542 |
| 882 | 94547 | 94552 | 94557 | 94562 | 94567 | 94571 | 94576 | 94581 | 94586 | 94591 |
| 883 | 94596 | 94601 | 94606 | 94611 | 94616 | 94621 | 94626 | 94630 | 94635 | 94640 |
| 884 | 94645 | 94650 | 94655 | 94660 | 94665 | 94670 | 94675 | 94680 | 94685 | 94689 |
| 885 | 94694 | 94699 | 94704 | 94709 | 94714 | 94719 | 94724 | 94729 | 94734 | 94738 |
| 886 | 94743 | 94748 | 94753 | 94758 | 94763 | 94768 | 94773 | 94778 | 94783 | 94787 |
| 887 | 94792 | 94797 | 94802 | 94807 | 94812 | 94817 | 94822 | 94827 | 94832 | 94836 |
| 888 | 94841 | 94846 | 94851 | 94856 | 94861 | 94866 | 94871 | 94876 | 94880 | 94885 |
| 889 | 94890 | 94895 | 94900 | 94905 | 94910 | 94915 | 94919 | 94924 | 94929 | 94934 |
| 890 | 94939 | 94944 | 94949 | 94954 | 94959 | 94963 | 94968 | 94973 | 94978 | 94983 |
| 891 | 94988 | 94993 | 94998 | 95002 | 95007 | 95012 | 95017 | 95022 | 95027 | 95032 |
| 892 | 95036 | 95041 | 95046 | 95051 | 95056 | 95061 | 95066 | 95071 | 95075 | 95080 |
| 893 | 95085 | 95090 | 95095 | 95100 | 95105 | 95109 | 95114 | 95119 | 95124 | 95129 |
| 894 | 95134 | 95139 | 95143 | 95148 | 95153 | 95158 | 25163 | 95168 | 95173 | 95177 |
| 895 | 95182 | 95187 | 95192 | 95197 | 95202 | 95207 | 95211 | 95216 | 95221 | 95226 |
| 896 | 95231 | 95236 | 95240 | 95245 | 95250 | 95255 | 95260 | 95265 | 95270 | 95274 |
| 897 | 95279 | 95284 | 95289 | 95294 | 95299 | 95303 | 95308 | 95313 | 95318 | 95323 |
| 898 | 95328 | 95332 | 95337 | 95342 | 95347 | 95352 | 95357 | 95361 | 95366 | 95371 |
| 899 | 95376 | 95381 | 95386 | 95390 | 95395 | 95400 | 95405 | 95410 | 95415 | 95419 |
| 900 | 95424 | 95429 | 95434 | 95439 | 95444 | 95448 | 95453 | 95458 | 95463 | 95468 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

900—940

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 900 | 95424 | 95429 | 95434 | 95439 | 95444 | 95448 | 95453 | 95458 | 95463 | 95468 |
| 901 | 95472 | 95477 | 95482 | 95487 | 95492 | 95497 | 95501 | 95506 | 95511 | 95516 |
| 902 | 95521 | 95525 | 95530 | 95535 | 95540 | 95545 | 95550 | 95554 | 95559 | 95564 |
| 903 | 95569 | 95574 | 95578 | 95583 | 95588 | 95593 | 95598 | 95602 | 95607 | 95612 |
| 904 | 95617 | 95622 | 95626 | 95631 | 95636 | 95641 | 95646 | 95650 | 95655 | 95660 |
| 905 | 95665 | 95670 | 95674 | 95679 | 95684 | 95689 | 95694 | 95698 | 95703 | 95708 |
| 906 | 95713 | 95718 | 95722 | 95727 | 95732 | 95737 | 95742 | 95746 | 95751 | 95756 |
| 907 | 95761 | 95766 | 95770 | 95775 | 95780 | 95785 | 95789 | 95794 | 95799 | 95804 |
| 908 | 95809 | 95813 | 95818 | 95823 | 95828 | 95832 | 95837 | 95842 | 95847 | 95852 |
| 909 | 95856 | 95861 | 95866 | 95871 | 95875 | 95880 | 95885 | 95890 | 95895 | 95899 |
| 910 | 95904 | 95909 | 95914 | 95918 | 95923 | 95928 | 95933 | 95938 | 95942 | 95947 |
| 911 | 95952 | 95957 | 95961 | 95966 | 95971 | 95976 | 95980 | 95985 | 95990 | 95995 |
| 912 | 95999 | 96004 | 96009 | 96014 | 96019 | 96023 | 96028 | 96033 | 96038 | 96042 |
| 913 | 96047 | 96052 | 96057 | 96061 | 96066 | 96071 | 96076 | 96080 | 96085 | 96090 |
| 914 | 96095 | 96099 | 96104 | 96109 | 96114 | 96118 | 96123 | 96128 | 96133 | 96137 |
| 915 | 96142 | 96147 | 96152 | 96156 | 96161 | 96166 | 96171 | 96175 | 96180 | 96185 |
| 916 | 96190 | 96194 | 96199 | 96204 | 96209 | 96213 | 96218 | 96223 | 96227 | 96232 |
| 917 | 96237 | 96242 | 96246 | 96251 | 96256 | 96261 | 96265 | 96270 | 96275 | 96280 |
| 918 | 96284 | 96289 | 96294 | 96298 | 96303 | 96308 | 96313 | 96317 | 96322 | 96327 |
| 919 | 96332 | 96336 | 96341 | 96346 | 96350 | 96355 | 96360 | 96365 | 96369 | 96374 |
| 920 | 96379 | 96384 | 96388 | 96393 | 96398 | 96402 | 96407 | 96412 | 96417 | 96421 |
| 921 | 96426 | 96431 | 96435 | 96440 | 96445 | 96450 | 96454 | 96459 | 96464 | 96468 |
| 922 | 96473 | 96478 | 96483 | 96487 | 96492 | 96497 | 96501 | 96506 | 96511 | 96515 |
| 923 | 96520 | 96525 | 96530 | 96534 | 96539 | 96544 | 96548 | 96553 | 96558 | 96562 |
| 924 | 96567 | 96572 | 96577 | 96581 | 96586 | 96591 | 96595 | 96600 | 96605 | 96609 |
| 925 | 96614 | 96619 | 96624 | 96628 | 96633 | 96638 | 96642 | 96647 | 96652 | 96656 |
| 926 | 96661 | 96666 | 96670 | 96675 | 96680 | 96685 | 96689 | 96694 | 96699 | 96703 |
| 927 | 96708 | 96713 | 96717 | 96722 | 96727 | 96731 | 96736 | 96741 | 96745 | 96750 |
| 928 | 96755 | 96759 | 96764 | 96769 | 96774 | 96778 | 96783 | 96788 | 96792 | 96797 |
| 929 | 96802 | 96806 | 96811 | 96816 | 96820 | 96825 | 96830 | 96834 | 96839 | 96844 |
| 930 | 96848 | 96853 | 96858 | 96862 | 96867 | 96872 | 96876 | 96881 | 96886 | 96890 |
| 931 | 96895 | 96900 | 96904 | 96909 | 96914 | 96918 | 96923 | 96928 | 96932 | 96937 |
| 932 | 96942 | 96946 | 96951 | 96956 | 96960 | 96965 | 96970 | 96974 | 96979 | 96984 |
| 933 | 96988 | 96993 | 96997 | 97002 | 97007 | 97011 | 97016 | 97021 | 97025 | 97030 |
| 934 | 97035 | 97039 | 97044 | 97049 | 97053 | 97058 | 97063 | 97067 | 97072 | 97077 |
| 935 | 97081 | 97086 | 97090 | 97095 | 97100 | 97104 | 97109 | 97114 | 97118 | 97123 |
| 936 | 97123 | 97128 | 97133 | 97137 | 97142 | 97146 | 97151 | 97155 | 97160 | 97165 |
| 937 | 97174 | 97179 | 97183 | 97188 | 97192 | 97197 | 97202 | 97206 | 97211 | 97216 |
| 938 | 97229 | 97235 | 97239 | 97243 | 97239 | 97243 | 97248 | 97253 | 97257 | 97262 |
| 939 | 97267 | 97271 | 97276 | 97280 | 97285 | 97290 | 97294 | 97299 | 97304 | 97308 |
| 940 | 97313 | 97317 | 97322 | 97327 | 97331 | 97336 | 97340 | 97345 | 97350 | 97354 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |

## 940—980

| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 940 | 97313 | 97317 | 97322 | 97327 | 97331 | 97336 | 97340 | 97345 | 97350 | 97354 |
| 941 | 97359 | 97364 | 97368 | 97373 | 97377 | 97382 | 97387 | 97391 | 97396 | 97400 |
| 942 | 97405 | 97410 | 97414 | 97419 | 97424 | 97428 | 97433 | 97437 | 97442 | 97447 |
| 943 | 97451 | 97456 | 97460 | 97465 | 97470 | 97474 | 97479 | 97483 | 97488 | 97493 |
| 944 | 97497 | 97502 | 97506 | 97511 | 97516 | 97520 | 97525 | 97529 | 97534 | 97539 |
| 945 | 97543 | 97548 | 97552 | 97557 | 97562 | 97566 | 97571 | 97575 | 97580 | 97585 |
| 946 | 97589 | 97594 | 97598 | 97603 | 97607 | 97612 | 97617 | 97621 | 97626 | 97630 |
| 947 | 97635 | 97640 | 97644 | 97649 | 97653 | 97658 | 97663 | 97667 | 97672 | 97676 |
| 948 | 97681 | 97685 | 97690 | 97695 | 97699 | 97704 | 97708 | 97713 | 97717 | 97722 |
| 949 | 97727 | 97731 | 97736 | 97740 | 97745 | 97749 | 97754 | 97759 | 97763 | 97768 |
| 950 | 97772 | 97777 | 97782 | 97786 | 97791 | 97795 | 97800 | 97804 | 97809 | 97813 |
| 951 | 97818 | 97823 | 97827 | 97832 | 97836 | 97841 | 97845 | 97850 | 97855 | 97859 |
| 952 | 97864 | 97868 | 97873 | 97877 | 97882 | 97886 | 97891 | 97896 | 97900 | 97905 |
| 953 | 97909 | 97914 | 97918 | 97923 | 97928 | 97932 | 97937 | 97941 | 97946 | 97950 |
| 954 | 97955 | 97959 | 97964 | 97968 | 97973 | 97978 | 97982 | 97987 | 97991 | 97996 |
| 955 | 98000 | 98005 | 98009 | 98014 | 98019 | 98023 | 98028 | 98032 | 98037 | 98041 |
| 956 | 98046 | 98050 | 98055 | 98059 | 98064 | 98068 | 98073 | 98078 | 98082 | 98087 |
| 957 | 98091 | 98096 | 98100 | 98105 | 98109 | 98114 | 98118 | 98123 | 98127 | 98132 |
| 958 | 98137 | 98141 | 98146 | 98150 | 98155 | 98159 | 98164 | 98168 | 98173 | 98177 |
| 959 | 98182 | 98186 | 98191 | 98195 | 98200 | 98204 | 98209 | 98214 | 98218 | 98223 |
| 960 | 98227 | 98232 | 98236 | 98241 | 98245 | 98250 | 98254 | 98259 | 98263 | 98268 |
| 961 | 98272 | 98277 | 98281 | 98286 | 98290 | 98295 | 98299 | 98304 | 98308 | 98313 |
| 962 | 98318 | 98322 | 98327 | 98331 | 98336 | 98340 | 98345 | 98349 | 98354 | 98358 |
| 963 | 98363 | 98367 | 98372 | 98376 | 98381 | 98385 | 98390 | 98394 | 98399 | 98403 |
| 964 | 98408 | 98412 | 98417 | 98421 | 98426 | 98430 | 98435 | 98439 | 98444 | 98448 |
| 965 | 98453 | 98457 | 98462 | 98466 | 98471 | 98475 | 98480 | 98484 | 98489 | 98493 |
| 966 | 98498 | 98502 | 98507 | 98511 | 98516 | 98520 | 98525 | 98529 | 98534 | 98538 |
| 967 | 98543 | 98547 | 98552 | 98556 | 98561 | 98565 | 98570 | 98574 | 98579 | 98583 |
| 968 | 98588 | 98592 | 98597 | 98601 | 98605 | 98610 | 98614 | 98619 | 98623 | 98628 |
| 969 | 98632 | 98637 | 98641 | 98646 | 98650 | 98655 | 98659 | 98664 | 98668 | 98673 |
| 970 | 98677 | 98682 | 98686 | 98691 | 98695 | 98700 | 98704 | 98709 | 98713 | 98717 |
| 971 | 98722 | 98726 | 98731 | 98735 | 98740 | 98744 | 98749 | 98753 | 98758 | 98762 |
| 972 | 98767 | 98771 | 98776 | 98780 | 98784 | 98789 | 98793 | 98798 | 98802 | 98807 |
| 973 | 98811 | 98816 | 98820 | 98825 | 98829 | 98834 | 98838 | 98843 | 98847 | 98851 |
| 974 | 98856 | 98860 | 98865 | 98869 | 98874 | 98878 | 98883 | 98887 | 98892 | 98896 |
| 975 | 98900 | 98905 | 98909 | 98914 | 98918 | 98923 | 98927 | 98932 | 98936 | 98941 |
| 976 | 98945 | 98949 | 98954 | 98958 | 98963 | 98967 | 98972 | 98976 | 98981 | 98985 |
| 977 | 98989 | 98994 | 98998 | 99003 | 99007 | 99012 | 99016 | 99021 | 99025 | 99029 |
| 978 | 99034 | 99038 | 99043 | 99047 | 99052 | 99056 | 99061 | 99065 | 99069 | 99074 |
| 979 | 99078 | 99083 | 99087 | 99092 | 99086 | 99100 | 99105 | 99109 | 99114 | 99118 |
| 980 | 99123 | 99127 | 99131 | 99136 | 99140 | 99145 | 99149 | 99154 | 99158 | 99162 |
| N   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |



三角函數之對數表

| 角     | log sin        | log tan        | log cot | log cos        |        |
|-------|----------------|----------------|---------|----------------|--------|
| 0° 0' | -∞             | -∞             | ∞       | 0.0000         | 0' 90° |
| 10'   | $\bar{3}.4637$ | $\bar{3}.4637$ | 2.5363  | 0.0000         | 50'    |
| 20'   | $\bar{3}.7648$ | $\bar{3}.7648$ | 2.2352  | 0.0000         | 40'    |
| 30'   | $\bar{3}.9408$ | $\bar{3}.9409$ | 2.0591  | 0.0000         | 30'    |
| 40'   | $\bar{2}.0658$ | $\bar{2}.0658$ | 1.9342  | 0.0000         | 20'    |
| 50'   | $\bar{2}.1627$ | $\bar{2}.1627$ | 1.8373  | 0.0000         | 10'    |
| 1° 0' | $\bar{2}.2419$ | $\bar{2}.2419$ | 1.7581  | $\bar{1}.9999$ | 0' 89° |
| 10'   | $\bar{2}.3088$ | $\bar{2}.3089$ | 1.6911  | $\bar{1}.9999$ | 50'    |
| 20'   | $\bar{2}.3668$ | $\bar{2}.3669$ | 1.6331  | $\bar{1}.9999$ | 40'    |
| 30'   | $\bar{2}.4179$ | $\bar{2}.4181$ | 1.5819  | $\bar{1}.9999$ | 30'    |
| 40'   | $\bar{2}.4637$ | $\bar{2}.4638$ | 1.5362  | $\bar{1}.9998$ | 20'    |
| 50'   | $\bar{2}.5050$ | $\bar{2}.5053$ | 1.4947  | $\bar{1}.9998$ | 10'    |
| 2° 0' | $\bar{2}.5428$ | $\bar{2}.5431$ | 1.4569  | $\bar{1}.9997$ | 0' 88° |
| 10'   | $\bar{2}.5776$ | $\bar{2}.5779$ | 1.4221  | $\bar{1}.9997$ | 50'    |
| 20'   | $\bar{2}.6097$ | $\bar{2}.6101$ | 1.3899  | $\bar{1}.9996$ | 40'    |
| 30'   | $\bar{2}.6397$ | $\bar{2}.6401$ | 1.3599  | $\bar{1}.9996$ | 30'    |
| 40'   | $\bar{2}.6677$ | $\bar{2}.6682$ | 1.3318  | $\bar{1}.9995$ | 20'    |
| 50'   | $\bar{2}.6940$ | $\bar{2}.6945$ | 1.3055  | $\bar{1}.9995$ | 10'    |
| 3° 0' | $\bar{2}.7188$ | $\bar{2}.7194$ | 1.2806  | $\bar{1}.9994$ | 0' 87° |
| 10'   | $\bar{2}.7423$ | $\bar{2}.7429$ | 1.2571  | $\bar{1}.9993$ | 50'    |
| 20'   | $\bar{2}.7645$ | $\bar{2}.7652$ | 1.2348  | $\bar{1}.9993$ | 40'    |
| 30'   | $\bar{2}.7857$ | $\bar{2}.7865$ | 1.2135  | $\bar{1}.9992$ | 30'    |
| 40'   | $\bar{2}.8059$ | $\bar{2}.8067$ | 1.1933  | $\bar{1}.9991$ | 20'    |
| 50'   | $\bar{2}.8251$ | $\bar{2}.8261$ | 1.1739  | $\bar{1}.9990$ | 10'    |
| 4° 0' | $\bar{2}.8436$ | $\bar{2}.8446$ | 1.1554  | $\bar{1}.9989$ | 0' 86° |
| 10'   | $\bar{2}.8613$ | $\bar{2}.8624$ | 1.1376  | $\bar{1}.9989$ | 50'    |
| 20'   | $\bar{2}.8783$ | $\bar{2}.8795$ | 1.1205  | $\bar{1}.9988$ | 40'    |
| 30'   | $\bar{2}.8946$ | $\bar{2}.8960$ | 1.1040  | $\bar{1}.9987$ | 30'    |
| 40'   | $\bar{2}.9104$ | $\bar{2}.9118$ | 1.0882  | $\bar{1}.9986$ | 20'    |
| 50'   | $\bar{2}.9256$ | $\bar{2}.9272$ | 1.0728  | $\bar{1}.9985$ | 10'    |
| 5° 0' | $\bar{2}.9403$ | $\bar{2}.9420$ | 1.0580  | $\bar{1}.9983$ | 0' 85° |
|       | log csc        | log cot        | log tan | log sin        | 角      |

$$\log \sin a' = \log s + \frac{1}{2} \cdot 4637 + \frac{1}{2} \log \cos a'$$

$$\log \tan a' = \log a + \frac{1}{2} \cdot 4637 - \frac{1}{2} \log \cos a'$$

$$\log \cos a' = -\log a + 3.5363 + \frac{1}{2} \log \cos a'$$

三角函數之對數表

| 角      | log sin | log tan | log cot | log cos |        |
|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 5° 0'  | 2̄.9403 | 2̄.9420 | 1.0580  | 1̄.9983 | 0' 85° |
| 10'    | 2̄.9545 | 2̄.9563 | 1.0437  | 1̄.9982 | 50'    |
| 20'    | 2̄.9682 | 2̄.9701 | 1.0299  | 1̄.9981 | 40'    |
| 30'    | 2̄.9816 | 2̄.9836 | 1.0164  | 1̄.9980 | 30'    |
| 40'    | 2̄.9945 | 2̄.9966 | 1.0034  | 1̄.9979 | 20'    |
| 50'    | 1̄.0070 | 1̄.0093 | 0.9907  | 1̄.9977 | 10'    |
| 6° 0'  | 1̄.0192 | 1̄.0216 | 0.9784  | 1̄.9976 | 0' 84° |
| 10'    | 1̄.0311 | 1̄.0336 | 0.9664  | 1̄.9975 | 50'    |
| 20'    | 1̄.0426 | 1̄.0453 | 0.9547  | 1̄.9973 | 40'    |
| 30'    | 1̄.0539 | 1̄.0567 | 0.9433  | 1̄.9972 | 30'    |
| 40'    | 1̄.0648 | 1̄.0678 | 0.9322  | 1̄.9971 | 20'    |
| 50'    | 1̄.0755 | 1̄.0786 | 0.9214  | 1̄.9969 | 10'    |
| 7° 0'  | 1̄.0859 | 1̄.0891 | 0.9109  | 1̄.9968 | 0' 83° |
| 10'    | 1̄.0961 | 1̄.0995 | 0.9005  | 1̄.9966 | 50'    |
| 20'    | 1̄.1060 | 1̄.1096 | 0.8904  | 1̄.9964 | 40'    |
| 30'    | 1̄.1157 | 1̄.1194 | 0.8806  | 1̄.9963 | 30'    |
| 40'    | 1̄.1252 | 1̄.1291 | 0.8709  | 1̄.9961 | 20'    |
| 50'    | 1̄.1345 | 1̄.1385 | 0.8615  | 1̄.9959 | 10'    |
| 8° 0'  | 1̄.1436 | 1̄.1478 | 0.8522  | 1̄.9958 | 0' 82° |
| 10'    | 1̄.1525 | 1̄.1569 | 0.8431  | 1̄.9956 | 50'    |
| 20'    | 1̄.1612 | 1̄.1658 | 0.8342  | 1̄.9954 | 40'    |
| 30'    | 1̄.1697 | 1̄.1745 | 0.8255  | 1̄.9952 | 30'    |
| 40'    | 1̄.1781 | 1̄.1831 | 0.8169  | 1̄.9950 | 20'    |
| 50'    | 1̄.1863 | 1̄.1915 | 0.8085  | 1̄.9948 | 10'    |
| 9° 0'  | 1̄.1943 | 1̄.1997 | 0.8003  | 1̄.9946 | 0' 81° |
| 10'    | 1̄.2022 | 1̄.2078 | 0.7922  | 1̄.9944 | 50'    |
| 20'    | 1̄.2100 | 1̄.2158 | 0.7842  | 1̄.9942 | 40'    |
| 30'    | 1̄.2176 | 1̄.2236 | 0.7764  | 1̄.9940 | 30'    |
| 40'    | 1̄.2251 | 1̄.2313 | 0.7687  | 1̄.9938 | 20'    |
| 50'    | 1̄.2324 | 1̄.2389 | 0.7611  | 1̄.9936 | 10'    |
| 10° 0' | 1̄.2397 | 1̄.2463 | 0.7537  | 1̄.9934 | 0' 80° |
|        | log cos | log cot | log tan | log sin | 角      |

$$\begin{aligned} \log \sin a' &= \log a + \bar{4}.4637 + \frac{1}{3} \log \cos a' \\ \log \tan a' &= \log a + \bar{4}.4637 - \frac{2}{3} \log \cos a' \\ \log \cot a' &= -\log a + \bar{3}.5363 + \frac{2}{3} \log \cos a' \end{aligned}$$

## 三角函數之對數表

| 角      | log sin        | 差  | log tan        | 通差 | log cot | 差 | log csc        |        |
|--------|----------------|----|----------------|----|---------|---|----------------|--------|
| 10° 0' | $\bar{1}.2397$ |    | $\bar{1}.2463$ |    | 0.7537  |   | $\bar{1}.9934$ | 0' 80° |
|        |                | 71 |                | 73 |         | 3 |                | P.P.   |
|        |                |    |                |    |         |   |                | 73 71  |
| 10'    | $\bar{1}.2468$ | 70 | $\bar{1}.2536$ | 73 | 0.7464  | 3 | $\bar{1}.9931$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.2538$ | 68 | $\bar{1}.2609$ | 71 | 0.7391  | 2 | $\bar{1}.9929$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.2606$ | 68 | $\bar{1}.2680$ | 70 | 0.7320  | 3 | $\bar{1}.9927$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.2674$ | 66 | $\bar{1}.2750$ | 69 | 0.7250  | 2 | $\bar{1}.9924$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.2740$ | 66 | $\bar{1}.2819$ | 68 | 0.7181  | 3 | $\bar{1}.9922$ | 10'    |
| 11° 0' | $\bar{1}.2806$ |    | $\bar{1}.2887$ |    | 0.7113  |   | $\bar{1}.9919$ | 0' 79° |
|        |                | 64 |                | 66 |         | 2 |                | 65 63  |
| 10'    | $\bar{1}.2870$ | 64 | $\bar{1}.2953$ | 67 | 0.7047  | 3 | $\bar{1}.9917$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.2934$ | 63 | $\bar{1}.3020$ | 65 | 0.6980  | 2 | $\bar{1}.9914$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.2997$ | 61 | $\bar{1}.3085$ | 64 | 0.6915  | 3 | $\bar{1}.9912$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.3058$ | 61 | $\bar{1}.3149$ | 63 | 0.6851  | 2 | $\bar{1}.9909$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.3119$ | 60 | $\bar{1}.3212$ | 63 | 0.6788  | 3 | $\bar{1}.9907$ | 10'    |
| 12° 0' | $\bar{1}.3179$ |    | $\bar{1}.3275$ |    | 0.6725  |   | $\bar{1}.9904$ | 0' 78° |
|        |                | 59 |                | 61 |         | 3 |                | 57 55  |
| 10'    | $\bar{1}.3238$ | 58 | $\bar{1}.3336$ | 61 | 0.6664  | 2 | $\bar{1}.9901$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.3296$ | 57 | $\bar{1}.3397$ | 61 | 0.6603  | 3 | $\bar{1}.9899$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.3353$ | 57 | $\bar{1}.3458$ | 59 | 0.6542  | 3 | $\bar{1}.9896$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.3410$ | 56 | $\bar{1}.3517$ | 59 | 0.6483  | 3 | $\bar{1}.9893$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.3466$ | 55 | $\bar{1}.3576$ | 58 | 0.6424  | 3 | $\bar{1}.9890$ | 10'    |
| 13° 0' | $\bar{1}.3521$ |    | $\bar{1}.3634$ |    | 0.6366  |   | $\bar{1}.9887$ | 0' 77° |
|        |                | 54 |                | 57 |         | 3 |                | 49 47  |
| 10'    | $\bar{1}.3575$ | 54 | $\bar{1}.3691$ | 57 | 0.6309  | 3 | $\bar{1}.9884$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.3629$ | 53 | $\bar{1}.3748$ | 56 | 0.6252  | 3 | $\bar{1}.9881$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.3682$ | 52 | $\bar{1}.3804$ | 55 | 0.6196  | 3 | $\bar{1}.9878$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.3734$ | 52 | $\bar{1}.3859$ | 55 | 0.6141  | 3 | $\bar{1}.9875$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.3786$ | 51 | $\bar{1}.3914$ | 54 | 0.6086  | 3 | $\bar{1}.9872$ | 10'    |
| 14° 0' | $\bar{1}.3837$ |    | $\bar{1}.3968$ |    | 0.6032  |   | $\bar{1}.9869$ | 0' 76° |
|        |                | 50 |                | 53 |         | 3 |                | 41 39  |
| 10'    | $\bar{1}.3887$ | 50 | $\bar{1}.4021$ | 53 | 0.5979  | 3 | $\bar{1}.9866$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.3937$ | 49 | $\bar{1}.4074$ | 53 | 0.5926  | 4 | $\bar{1}.9863$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.3986$ | 49 | $\bar{1}.4127$ | 51 | 0.5873  | 3 | $\bar{1}.9859$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.4035$ | 48 | $\bar{1}.4178$ | 52 | 0.5822  | 3 | $\bar{1}.9856$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.4083$ | 47 | $\bar{1}.4230$ | 51 | 0.5770  | 4 | $\bar{1}.9853$ | 10'    |
| 15° 0' | $\bar{1}.4130$ |    | $\bar{1}.4281$ |    | 0.5719  |   | $\bar{1}.9849$ | 0' 75° |
|        |                |    |                |    |         |   |                |        |
|        | log csc        | 差  | log cot        | 通差 | log tan | 差 | log sin        | 角      |

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 7.3  | 7.1  |
| 2 | 14.6 | 14.2 |
| 3 | 21.9 | 21.3 |
| 4 | 29.2 | 28.4 |
| 5 | 36.5 | 35.5 |
| 6 | 43.8 | 42.6 |
| 7 | 51.1 | 49.7 |
| 8 | 58.4 | 56.8 |
| 9 | 65.7 | 63.9 |

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 6.5  | 6.3  |
| 2 | 13.0 | 12.6 |
| 3 | 19.5 | 18.9 |
| 4 | 26.0 | 25.5 |
| 5 | 32.5 | 31.5 |
| 6 | 39.0 | 37.8 |
| 7 | 45.5 | 44.1 |
| 8 | 52.0 | 50.4 |
| 9 | 58.5 | 56.7 |

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 5.7  | 5.5  |
| 2 | 11.4 | 11.0 |
| 3 | 17.1 | 16.5 |
| 4 | 22.8 | 22.0 |
| 5 | 28.5 | 27.5 |
| 6 | 34.2 | 33.0 |
| 7 | 39.9 | 38.5 |
| 8 | 45.6 | 44.0 |
| 9 | 51.3 | 49.5 |

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 4.9  | 4.7  |
| 2 | 9.8  | 9.4  |
| 3 | 14.7 | 14.1 |
| 4 | 19.6 | 18.8 |
| 5 | 24.5 | 23.5 |
| 6 | 29.4 | 28.2 |
| 7 | 34.3 | 32.9 |
| 8 | 39.2 | 37.6 |
| 9 | 44.1 | 42.3 |

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 4.1  | 3.9  |
| 2 | 8.2  | 7.8  |
| 3 | 12.3 | 11.7 |
| 4 | 16.4 | 15.0 |
| 5 | 20.5 | 19.5 |
| 6 | 24.6 | 23.4 |
| 7 | 28.7 | 27.3 |
| 8 | 32.8 | 31.2 |
| 9 | 36.9 | 35.1 |



三角函數之對數表

P.P.  
**69 67**  
 1 6.9 6.7  
 2 13.8 13.4  
 3 20.7 20.1  
 4 27.6 26.8  
 5 34.5 33.3  
 6 41.4 40.0  
 7 48.3 46.6  
 8 55.2 53.6  
 9 62.1 60.3

**59 61**  
 1 6.1 5.9  
 2 12.2 11.7  
 3 18.3 17.7  
 4 24.4 23.6  
 5 30.5 29.5  
 6 36.6 35.4  
 7 42.7 41.3  
 8 48.8 47.2  
 9 54.9 53.1

**53 51**  
 1 5.3 5.1  
 2 10.6 10.2  
 3 15.9 15.3  
 4 21.2 20.4  
 5 26.5 25.5  
 6 31.8 30.6  
 7 37.1 35.7  
 8 42.4 40.8  
 9 47.7 45.9

**45 43**  
 1 4.5 4.3  
 2 9.0 8.6  
 3 13.5 12.9  
 4 18.0 17.2  
 5 22.5 21.5  
 6 27.0 25.8  
 7 31.5 30.1  
 8 36.0 34.4  
 9 40.5 38.7

**37 35**  
 1 3.7 3.5  
 2 7.4 7.0  
 3 11.1 10.5  
 4 14.8 14.0  
 5 18.5 17.5  
 6 22.2 21.0  
 7 25.9 24.5  
 8 29.6 28.0  
 9 33.3 31.5

| 角      | log sin | 差  | log tan | 通差 | log cot | 差 | log cos |        |
|--------|---------|----|---------|----|---------|---|---------|--------|
| 15° 0' | 1̄.4130 |    | 1̄.4281 |    | 0.5719  |   | 1̄.9849 | 0' 75° |
| 10'    | 1̄.4177 | 47 | 1̄.4331 | 50 | 0.5669  | 3 | 1̄.9846 | 50'    |
| 20'    | 1̄.4223 | 46 | 1̄.4381 | 49 | 0.5619  | 4 | 1̄.9843 | 40'    |
| 30'    | 1̄.4269 | 45 | 1̄.4430 | 49 | 0.5570  | 3 | 1̄.9839 | 30'    |
| 40'    | 1̄.4314 | 45 | 1̄.4479 | 48 | 0.5521  | 4 | 1̄.9836 | 20'    |
| 50'    | 1̄.4359 | 44 | 1̄.4527 | 48 | 0.5473  | 4 | 1̄.9832 | 10'    |
| 16° 0' | 1̄.4403 |    | 1̄.4575 |    | 0.5425  |   | 1̄.9828 | 0' 74° |
| 10'    | 1̄.4447 | 44 | 1̄.4622 | 47 | 0.5378  | 3 | 1̄.9825 | 50'    |
| 20'    | 1̄.4491 | 44 | 1̄.4669 | 47 | 0.5331  | 4 | 1̄.9821 | 40'    |
| 30'    | 1̄.4533 | 42 | 1̄.4716 | 46 | 0.5284  | 4 | 1̄.9817 | 30'    |
| 40'    | 1̄.4576 | 42 | 1̄.4762 | 46 | 0.5238  | 4 | 1̄.9814 | 20'    |
| 50'    | 1̄.4618 | 42 | 1̄.4808 | 45 | 0.5192  | 4 | 1̄.9810 | 10'    |
| 17° 0' | 1̄.4659 |    | 1̄.4853 |    | 0.5147  |   | 1̄.9806 | 0' 73° |
| 10'    | 1̄.4700 | 41 | 1̄.4898 | 45 | 0.5102  | 4 | 1̄.9802 | 50'    |
| 20'    | 1̄.4741 | 41 | 1̄.4943 | 44 | 0.5057  | 4 | 1̄.9798 | 40'    |
| 30'    | 1̄.4781 | 40 | 1̄.4987 | 44 | 0.5013  | 4 | 1̄.9794 | 30'    |
| 40'    | 1̄.4821 | 40 | 1̄.5031 | 44 | 0.4969  | 4 | 1̄.9790 | 20'    |
| 50'    | 1̄.4861 | 40 | 1̄.5075 | 44 | 0.4925  | 4 | 1̄.9786 | 10'    |
| 18° 0' | 1̄.4900 |    | 1̄.5118 |    | 0.4882  |   | 1̄.9782 | 0' 72° |
| 10'    | 1̄.4939 | 39 | 1̄.5161 | 43 | 0.4839  | 4 | 1̄.9778 | 50'    |
| 20'    | 1̄.4977 | 38 | 1̄.5203 | 42 | 0.4797  | 4 | 1̄.9774 | 40'    |
| 30'    | 1̄.5015 | 38 | 1̄.5245 | 42 | 0.4755  | 5 | 1̄.9770 | 30'    |
| 40'    | 1̄.5052 | 37 | 1̄.5287 | 42 | 0.4713  | 4 | 1̄.9765 | 20'    |
| 50'    | 1̄.5090 | 38 | 1̄.5329 | 42 | 0.4671  | 4 | 1̄.9761 | 10'    |
| 19° 0' | 1̄.5126 |    | 1̄.5370 |    | 0.4630  |   | 1̄.9757 | 0' 71° |
| 10'    | 1̄.5163 | 37 | 1̄.5411 | 41 | 0.4589  | 5 | 1̄.9752 | 50'    |
| 20'    | 1̄.5199 | 36 | 1̄.5451 | 40 | 0.4549  | 4 | 1̄.9748 | 40'    |
| 30'    | 1̄.5235 | 36 | 1̄.5491 | 40 | 0.4509  | 5 | 1̄.9743 | 30'    |
| 40'    | 1̄.5270 | 35 | 1̄.5531 | 40 | 0.4469  | 4 | 1̄.9739 | 20'    |
| 50'    | 1̄.5306 | 36 | 1̄.5571 | 40 | 0.4429  | 5 | 1̄.9734 | 10'    |
| 20° 0' | 1̄.5341 |    | 1̄.5611 |    | 0.4389  |   | 1̄.9730 | 0' 70° |
|        | log cos | 差  | log cot | 通差 | log tan | 差 | log sin | 角      |

三角函數之對數表

| 角      | log sin | 差  | log tan | 通差 | log cot | 差 | log csc |        |
|--------|---------|----|---------|----|---------|---|---------|--------|
| 20° 0' | 1̄.5341 |    | 1̄.5611 |    | 0.4389  |   | 1̄.9730 | 0' 70° |
| 10'    | 1̄.5375 | 34 | 1̄.5650 | 39 | 0.4350  | 5 | 1̄.9725 | 50'    |
| 20'    | 1̄.5409 | 34 | 1̄.5689 | 39 | 0.4311  | 4 | 1̄.9721 | 40'    |
| 30'    | 1̄.5443 | 34 | 1̄.5727 | 38 | 0.4273  | 5 | 1̄.9716 | 30'    |
| 40'    | 1̄.5477 | 34 | 1̄.5766 | 39 | 0.4234  | 5 | 1̄.9711 | 20'    |
| 50'    | 1̄.5510 | 33 | 1̄.5804 | 38 | 0.4196  | 5 | 1̄.9706 | 10'    |
| 21° 0' | 1̄.5543 |    | 1̄.5842 |    | 0.4158  |   | 1̄.9702 | 0' 69° |
| 10'    | 1̄.5576 | 33 | 1̄.5879 | 37 | 0.4121  | 5 | 1̄.9697 | 50'    |
| 20'    | 1̄.5609 | 33 | 1̄.5917 | 38 | 0.4083  | 5 | 1̄.9692 | 40'    |
| 30'    | 1̄.5641 | 32 | 1̄.5954 | 37 | 0.4046  | 5 | 1̄.9687 | 30'    |
| 40'    | 1̄.5673 | 31 | 1̄.5991 | 37 | 0.4009  | 5 | 1̄.9682 | 20'    |
| 50'    | 1̄.5704 | 31 | 1̄.6028 | 37 | 0.3972  | 5 | 1̄.9677 | 10'    |
| 22° 0' | 1̄.5736 |    | 1̄.6064 |    | 0.3936  |   | 1̄.9672 | 0' 68° |
| 10'    | 1̄.5767 | 31 | 1̄.6100 | 36 | 0.3900  | 5 | 1̄.9667 | 50'    |
| 20'    | 1̄.5798 | 31 | 1̄.6136 | 36 | 0.3864  | 6 | 1̄.9661 | 40'    |
| 30'    | 1̄.5828 | 30 | 1̄.6172 | 36 | 0.3828  | 5 | 1̄.9656 | 30'    |
| 40'    | 1̄.5859 | 31 | 1̄.6208 | 36 | 0.3792  | 5 | 1̄.9651 | 20'    |
| 50'    | 1̄.5889 | 30 | 1̄.6243 | 35 | 0.3757  | 5 | 1̄.9646 | 10'    |
| 23° 0' | 1̄.5919 |    | 1̄.6279 |    | 0.3721  |   | 1̄.9640 | 0' 67° |
| 10'    | 1̄.5948 | 29 | 1̄.6314 | 35 | 0.3686  | 5 | 1̄.9635 | 50'    |
| 20'    | 1̄.5978 | 30 | 1̄.6348 | 34 | 0.3652  | 6 | 1̄.9629 | 40'    |
| 30'    | 1̄.6007 | 29 | 1̄.6383 | 35 | 0.3617  | 5 | 1̄.9624 | 30'    |
| 40'    | 1̄.6036 | 29 | 1̄.6417 | 34 | 0.3583  | 6 | 1̄.9618 | 20'    |
| 50'    | 1̄.6065 | 30 | 1̄.6452 | 35 | 0.3548  | 5 | 1̄.9613 | 10'    |
| 24° 0' | 1̄.6093 |    | 1̄.6486 |    | 0.3514  |   | 1̄.9607 | 0' 66° |
| 10'    | 1̄.6121 | 28 | 1̄.6520 | 34 | 0.3480  | 5 | 1̄.9602 | 50'    |
| 20'    | 1̄.6149 | 28 | 1̄.6553 | 33 | 0.3447  | 6 | 1̄.9596 | 40'    |
| 30'    | 1̄.6177 | 28 | 1̄.6587 | 34 | 0.3413  | 6 | 1̄.9590 | 30'    |
| 40'    | 1̄.6205 | 27 | 1̄.6620 | 33 | 0.3380  | 6 | 1̄.9584 | 20'    |
| 50'    | 1̄.6232 | 27 | 1̄.6654 | 34 | 0.3346  | 5 | 1̄.9579 | 10'    |
| 25° 0' | 1̄.6259 |    | 1̄.6687 |    | 0.3313  |   | 1̄.9573 | 0' 65° |
|        | log csc | 差  | log cot | 通差 | log tan | 差 | log sin | 角      |

P.P.

39 38

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 3.0  | 3.8  |
| 2 | 7.8  | 7.6  |
| 3 | 11.7 | 11.4 |
| 4 | 15.6 | 15.2 |
| 5 | 19.5 | 19.0 |
| 6 | 23.4 | 22.8 |
| 7 | 27.3 | 26.6 |
| 8 | 31.2 | 30.4 |
| 9 | 35.1 | 34.2 |

35 34

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 3.5  | 3.4  |
| 2 | 7.0  | 6.8  |
| 3 | 10.5 | 10.2 |
| 4 | 14.0 | 13.6 |
| 5 | 17.5 | 17.0 |
| 6 | 21.0 | 20.4 |
| 7 | 24.5 | 23.8 |
| 8 | 28.0 | 27.2 |
| 9 | 31.5 | 30.6 |

31 29

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 3.1  | 2.9  |
| 2 | 6.2  | 5.8  |
| 3 | 9.3  | 8.7  |
| 4 | 12.4 | 11.6 |
| 5 | 15.5 | 14.5 |
| 6 | 18.6 | 17.4 |
| 7 | 21.7 | 20.3 |
| 8 | 24.8 | 23.2 |
| 9 | 27.9 | 26.1 |

26 25

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 2.6  | 2.5  |
| 2 | 5.2  | 5.0  |
| 3 | 7.8  | 7.5  |
| 4 | 10.4 | 10.0 |
| 5 | 13.0 | 12.5 |
| 6 | 15.6 | 15.0 |
| 7 | 18.2 | 17.5 |
| 8 | 20.8 | 20.0 |
| 9 | 23.4 | 22.5 |

22 8

|   |      |     |
|---|------|-----|
| 1 | 2.2  | 0.8 |
| 2 | 4.4  | 1.6 |
| 3 | 6.6  | 2.4 |
| 4 | 8.8  | 3.2 |
| 5 | 11.0 | 4.0 |
| 6 | 13.2 | 4.8 |
| 7 | 15.4 | 5.6 |
| 8 | 17.6 | 6.4 |
| 9 | 19.8 | 7.2 |

三角函數之對數表

P.P.  
 37 36  
 1 3.7 3.6  
 2 7.4 7.2  
 3 11.1 10.8  
 4 14.8 14.4  
 5 18.5 18.0  
 6 22.2 21.6  
 7 25.9 25.2  
 8 29.6 28.8  
 9 33.3 32.4

33 32  
 1 3.3 3.2  
 2 6.6 6.4  
 3 9.9 9.6  
 4 13.2 12.8  
 5 16.5 16.2  
 6 19.8 19.2  
 7 23.1 22.6  
 8 26.4 25.8  
 9 29.7 28.8

28 27  
 1 2.8 2.7  
 2 5.6 5.4  
 3 8.4 8.1  
 4 11.2 10.8  
 5 14.0 13.5  
 6 16.8 16.2  
 7 19.6 18.9  
 8 22.4 21.6  
 9 25.2 24.3

24 23  
 1 2.4 2.3  
 2 4.8 4.6  
 3 7.2 6.9  
 4 9.6 9.2  
 5 12.0 11.5  
 6 14.4 13.8  
 7 16.8 16.1  
 8 19.2 18.4  
 9 21.6 20.7

6 4  
 1 0.6 0.4  
 2 1.2 0.8  
 3 1.8 1.2  
 4 2.4 1.6  
 5 3.0 2.0  
 6 3.6 2.4  
 7 4.2 2.8  
 8 4.8 3.2  
 9 5.4 3.6

| 角      | log sin | 差  | log tan | 通差 | log cot | 差 | log cos |        |
|--------|---------|----|---------|----|---------|---|---------|--------|
| 25° 0' | 1.6259  |    | 1.6687  |    | 0.3313  |   | 1.9573  | 0' 65° |
| 10'    | 1.6286  | 27 | 1.6720  | 32 | 0.3280  | 6 | 1.9567  | 50'    |
| 20'    | 1.6313  | 27 | 1.6752  | 33 | 0.3248  | 6 | 1.9561  | 40'    |
| 30'    | 1.6340  | 27 | 1.6785  | 33 | 0.3215  | 6 | 1.9555  | 30'    |
| 40'    | 1.6366  | 26 | 1.6817  | 32 | 0.3183  | 6 | 1.9549  | 20'    |
| 50'    | 1.6392  | 26 | 1.6850  | 33 | 0.3150  | 6 | 1.9543  | 10'    |
| 26° 0' | 1.6418  |    | 1.6882  |    | 0.3118  |   | 1.9537  | 0' 64° |
| 10'    | 1.6444  | 26 | 1.6914  | 32 | 0.3086  | 7 | 1.9530  | 50'    |
| 20'    | 1.6470  | 25 | 1.6946  | 31 | 0.3054  | 6 | 1.9524  | 40'    |
| 30'    | 1.6495  | 25 | 1.6977  | 32 | 0.3023  | 6 | 1.9518  | 30'    |
| 40'    | 1.6521  | 25 | 1.7009  | 31 | 0.2991  | 7 | 1.9512  | 20'    |
| 50'    | 1.6546  | 25 | 1.7040  | 31 | 0.2960  | 7 | 1.9505  | 10'    |
| 27° 0' | 1.6570  |    | 1.7072  |    | 0.2928  |   | 1.9499  | 0' 63° |
| 10'    | 1.6595  | 25 | 1.7103  | 31 | 0.2897  | 7 | 1.9492  | 50'    |
| 20'    | 1.6620  | 25 | 1.7134  | 31 | 0.2866  | 6 | 1.9486  | 40'    |
| 30'    | 1.6644  | 24 | 1.7165  | 31 | 0.2835  | 7 | 1.9479  | 30'    |
| 40'    | 1.6668  | 24 | 1.7196  | 30 | 0.2804  | 6 | 1.9473  | 20'    |
| 50'    | 1.6692  | 24 | 1.7226  | 31 | 0.2774  | 7 | 1.9466  | 10'    |
| 28° 0' | 1.6716  |    | 1.7257  |    | 0.2743  |   | 1.9459  | 0' 62° |
| 10'    | 1.6740  | 23 | 1.7287  | 30 | 0.2713  | 6 | 1.9453  | 50'    |
| 20'    | 1.6763  | 23 | 1.7317  | 31 | 0.2683  | 7 | 1.9446  | 40'    |
| 30'    | 1.6787  | 23 | 1.7348  | 30 | 0.2652  | 7 | 1.9439  | 30'    |
| 40'    | 1.6810  | 23 | 1.7378  | 30 | 0.2622  | 7 | 1.9432  | 20'    |
| 50'    | 1.6833  | 23 | 1.7408  | 30 | 0.2592  | 7 | 1.9425  | 10'    |
| 29° 0' | 1.6856  |    | 1.7438  |    | 0.2562  |   | 1.9418  | 0' 61° |
| 10'    | 1.6878  | 22 | 1.7467  | 29 | 0.2533  | 7 | 1.9411  | 50'    |
| 20'    | 1.6901  | 23 | 1.7497  | 30 | 0.2503  | 7 | 1.9404  | 40'    |
| 30'    | 1.6923  | 22 | 1.7526  | 30 | 0.2474  | 7 | 1.9397  | 30'    |
| 40'    | 1.6946  | 22 | 1.7556  | 29 | 0.2444  | 7 | 1.9390  | 20'    |
| 50'    | 1.6968  | 22 | 1.7585  | 29 | 0.2415  | 7 | 1.9383  | 10'    |
| 30° 0' | 1.6990  |    | 1.7614  |    | 0.2386  |   | 1.9375  | 0' 60° |
|        | log cos | 差  | log cot | 通差 | log tan | 差 | log sin | 角      |

三角函數之對數表

| 角      | log sin        | 差  | log tan        | 通差 | log cot | 差 | log cos        |        |
|--------|----------------|----|----------------|----|---------|---|----------------|--------|
| 30° 0' | $\bar{1}.6990$ |    | $\bar{1}.7614$ |    | 0.2386  |   | $\bar{1}.9375$ | 0' 60° |
| 10'    | $\bar{1}.7012$ | 22 | $\bar{1}.7644$ | 30 | 0.2356  | 7 | $\bar{1}.9368$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.7033$ | 21 | $\bar{1}.7673$ | 29 | 0.2327  | 7 | $\bar{1}.9361$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.7055$ | 22 | $\bar{1}.7701$ | 28 | 0.2299  | 8 | $\bar{1}.9353$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.7076$ | 21 | $\bar{1}.7730$ | 29 | 0.2270  | 7 | $\bar{1}.9346$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.7097$ | 21 | $\bar{1}.7759$ | 29 | 0.2241  | 8 | $\bar{1}.9338$ | 10'    |
|        |                | 21 |                | 29 |         | 7 |                |        |
| 31° 0' | $\bar{1}.7118$ |    | $\bar{1}.7788$ |    | 0.2212  |   | $\bar{1}.9331$ | 0' 59° |
| 10'    | $\bar{1}.7139$ | 21 | $\bar{1}.7816$ | 28 | 0.2184  | 8 | $\bar{1}.9323$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.7160$ | 21 | $\bar{1}.7845$ | 29 | 0.2155  | 8 | $\bar{1}.9315$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.7181$ | 20 | $\bar{1}.7873$ | 28 | 0.2127  | 7 | $\bar{1}.9308$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.7201$ | 21 | $\bar{1}.7902$ | 29 | 0.2098  | 8 | $\bar{1}.9300$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.7222$ | 21 | $\bar{1}.7930$ | 28 | 0.2070  | 8 | $\bar{1}.9292$ | 10'    |
|        |                | 20 |                | 28 |         | 8 |                |        |
| 32° 0' | $\bar{1}.7242$ |    | $\bar{1}.7958$ |    | 0.2042  |   | $\bar{1}.9284$ | 0' 58° |
| 10'    | $\bar{1}.7262$ | 20 | $\bar{1}.7986$ | 28 | 0.2014  | 8 | $\bar{1}.9276$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.7282$ | 20 | $\bar{1}.8014$ | 28 | 0.1986  | 8 | $\bar{1}.9268$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.7302$ | 20 | $\bar{1}.8042$ | 28 | 0.1958  | 8 | $\bar{1}.9260$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.7322$ | 20 | $\bar{1}.8070$ | 28 | 0.1930  | 8 | $\bar{1}.9252$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.7342$ | 20 | $\bar{1}.8097$ | 27 | 0.1903  | 8 | $\bar{1}.9244$ | 10'    |
|        |                | 19 |                | 28 |         | 8 |                |        |
| 33° 0' | $\bar{1}.7361$ |    | $\bar{1}.8125$ |    | 0.1875  |   | $\bar{1}.9236$ | 0' 57° |
| 10'    | $\bar{1}.7380$ | 19 | $\bar{1}.8153$ | 28 | 0.1847  | 8 | $\bar{1}.9228$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.7400$ | 20 | $\bar{1}.8180$ | 27 | 0.1820  | 9 | $\bar{1}.9219$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.7419$ | 19 | $\bar{1}.8208$ | 28 | 0.1792  | 8 | $\bar{1}.9211$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.7438$ | 19 | $\bar{1}.8235$ | 27 | 0.1765  | 9 | $\bar{1}.9203$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.7457$ | 19 | $\bar{1}.8263$ | 28 | 0.1737  | 9 | $\bar{1}.9194$ | 10'    |
|        |                | 19 |                | 27 |         | 8 |                |        |
| 34° 0' | $\bar{1}.7476$ |    | $\bar{1}.8290$ |    | 0.1710  |   | $\bar{1}.9186$ | 0' 56° |
| 10'    | $\bar{1}.7494$ | 18 | $\bar{1}.8317$ | 27 | 0.1683  | 9 | $\bar{1}.9177$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.7513$ | 19 | $\bar{1}.8344$ | 27 | 0.1656  | 8 | $\bar{1}.9169$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.7531$ | 18 | $\bar{1}.8371$ | 27 | 0.1629  | 9 | $\bar{1}.9160$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.7550$ | 19 | $\bar{1}.8398$ | 27 | 0.1602  | 9 | $\bar{1}.9151$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.7568$ | 18 | $\bar{1}.8425$ | 27 | 0.1575  | 8 | $\bar{1}.9142$ | 10'    |
|        |                | 18 |                | 27 |         | 8 |                |        |
| 35° 0' | $\bar{1}.7586$ |    | $\bar{1}.8452$ |    | 0.1548  |   | $\bar{1}.9134$ | 0' 55° |
|        |                |    |                |    |         |   |                |        |
|        | log cos        | 差  | log cot        | 通差 | log tan | 差 | log sin        | 角      |

P.P.

30 29

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 3.0  | 2.9  |
| 2 | 6.0  | 5.8  |
| 3 | 9.0  | 8.7  |
| 4 | 12.0 | 11.6 |
| 5 | 15.0 | 14.5 |
| 6 | 18.0 | 17.4 |
| 7 | 21.0 | 20.3 |
| 8 | 24.0 | 23.2 |
| 9 | 27.0 | 26.1 |

26 25

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 2.6  | 2.5  |
| 2 | 5.2  | 5.0  |
| 3 | 7.8  | 7.5  |
| 4 | 10.4 | 10.0 |
| 5 | 13.0 | 12.5 |
| 6 | 15.6 | 15.0 |
| 7 | 18.2 | 17.5 |
| 8 | 20.8 | 20.0 |
| 9 | 23.4 | 22.5 |

20 19

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 2.0  | 1.9  |
| 2 | 4.0  | 3.8  |
| 3 | 6.0  | 5.7  |
| 4 | 8.0  | 7.6  |
| 5 | 10.0 | 9.5  |
| 6 | 12.0 | 11.4 |
| 7 | 14.0 | 13.3 |
| 8 | 16.0 | 15.2 |
| 9 | 18.0 | 17.1 |

16 15

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 1.6  | 1.5  |
| 2 | 3.2  | 3.0  |
| 3 | 4.8  | 4.5  |
| 4 | 6.4  | 6.0  |
| 5 | 8.0  | 7.5  |
| 6 | 9.6  | 9.0  |
| 7 | 11.2 | 10.5 |
| 8 | 12.8 | 12.0 |
| 9 | 14.4 | 13.5 |

9 8

|   |     |     |
|---|-----|-----|
| 1 | 0.9 | 0.8 |
| 2 | 1.8 | 1.6 |
| 3 | 2.7 | 2.4 |
| 4 | 3.6 | 3.2 |
| 5 | 4.5 | 4.0 |
| 6 | 5.4 | 4.8 |
| 7 | 6.3 | 5.6 |
| 8 | 7.2 | 6.4 |
| 9 | 8.1 | 7.2 |

三角函數之對數表

P.P.  
 26 27  
 1 2.8 2.7  
 2 5.6 5.4  
 3 8.4 8.1  
 4 11.2 10.8  
 5 14.0 13.5  
 6 16.8 16.2  
 7 19.6 18.9  
 8 22.4 21.6  
 9 25.2 24.3

22 21  
 1 2.2 2.1  
 2 4.4 4.2  
 3 6.6 6.4  
 4 8.8 8.4  
 5 11.0 10.5  
 6 13.2 12.6  
 7 15.4 14.7  
 8 17.6 16.8  
 9 19.8 18.9

18 17  
 1 1.8 1.7  
 2 3.6 3.4  
 3 5.4 5.1  
 4 7.2 6.8  
 5 9.0 8.5  
 6 10.8 10.2  
 7 12.6 11.9  
 8 14.4 13.6  
 9 16.2 15.3

11 10  
 1 1.1 1.0  
 2 2.2 2.0  
 3 3.3 3.0  
 4 4.4 4.0  
 5 5.5 5.0  
 6 6.6 6.0  
 7 7.7 7.0  
 8 8.8 8.0  
 9 9.9 9.0

7  
 1 0.7  
 2 1.4  
 3 2.1  
 4 2.8  
 5 3.5  
 6 4.2  
 7 4.9  
 8 5.6  
 9 6.3

| 角      | log sin | 差  | log tan | 通差 | log cot | 差  | log cos |        |
|--------|---------|----|---------|----|---------|----|---------|--------|
| 35° 0' | 1.7586  |    | 1.8542  |    | 0.1548  |    | 1.9134  | 0' 55° |
| 10'    | 1.7604  | 18 | 1.8479  | 27 | 0.1521  | 9  | 1.9125  | 50'    |
| 20'    | 1.7622  | 18 | 1.8503  | 27 | 0.1494  | 9  | 1.9116  | 40'    |
| 30'    | 1.7640  | 17 | 1.8533  | 26 | 0.1467  | 9  | 1.9107  | 30'    |
| 40'    | 1.7657  | 18 | 1.8559  | 27 | 0.1441  | 9  | 1.9098  | 20'    |
| 50'    | 1.7675  | 17 | 1.8586  | 27 | 0.1414  | 9  | 1.9089  | 10'    |
| 36° 0' | 1.7692  |    | 1.8613  |    | 0.1387  |    | 1.9080  | 0' 54° |
| 10'    | 1.7710  | 18 | 1.8639  | 26 | 0.1361  | 10 | 1.9070  | 50'    |
| 20'    | 1.7727  | 17 | 1.8666  | 27 | 0.1334  | 9  | 1.9061  | 40'    |
| 30'    | 1.7744  | 17 | 1.8692  | 26 | 0.1308  | 10 | 1.9052  | 30'    |
| 40'    | 1.7761  | 17 | 1.8718  | 27 | 0.1282  | 9  | 1.9042  | 20'    |
| 50'    | 1.7778  | 17 | 1.8745  | 26 | 0.1255  | 10 | 1.9033  | 10'    |
| 37° 0' | 1.7795  |    | 1.8771  |    | 0.1229  |    | 1.9023  | 0' 53° |
| 10'    | 1.7811  | 17 | 1.8797  | 27 | 0.1203  | 10 | 1.9014  | 50'    |
| 20'    | 1.7828  | 16 | 1.8824  | 26 | 0.1176  | 9  | 1.9004  | 40'    |
| 30'    | 1.7844  | 17 | 1.8850  | 26 | 0.1150  | 10 | 1.8995  | 30'    |
| 40'    | 1.7861  | 16 | 1.8876  | 26 | 0.1124  | 10 | 1.8985  | 20'    |
| 50'    | 1.7877  | 16 | 1.8902  | 26 | 0.1098  | 10 | 1.8975  | 10'    |
| 38° 0' | 1.7893  |    | 1.8928  |    | 0.1072  |    | 1.8965  | 0' 52° |
| 10'    | 1.7910  | 16 | 1.8954  | 26 | 0.1046  | 10 | 1.8955  | 50'    |
| 20'    | 1.7926  | 15 | 1.8980  | 26 | 0.1020  | 10 | 1.8945  | 40'    |
| 30'    | 1.7941  | 16 | 1.9006  | 26 | 0.0994  | 10 | 1.8935  | 30'    |
| 40'    | 1.7957  | 16 | 1.9032  | 26 | 0.0968  | 10 | 1.8925  | 20'    |
| 50'    | 1.7973  | 16 | 1.9058  | 26 | 0.0942  | 10 | 1.8915  | 10'    |
| 39° 0' | 1.7989  |    | 1.9084  |    | 0.0916  |    | 1.8905  | 0' 51° |
| 10'    | 1.8004  | 15 | 1.9110  | 26 | 0.0890  | 10 | 1.8895  | 50'    |
| 20'    | 1.8020  | 16 | 1.9135  | 25 | 0.0865  | 11 | 1.8884  | 40'    |
| 30'    | 1.8035  | 15 | 1.9161  | 26 | 0.0839  | 10 | 1.8874  | 30'    |
| 40'    | 1.8050  | 16 | 1.9187  | 25 | 0.0813  | 11 | 1.8864  | 20'    |
| 50'    | 1.8066  | 15 | 1.9212  | 26 | 0.0788  | 10 | 1.8853  | 10'    |
| 40° 0' | 1.8081  |    | 1.9238  |    | 0.0762  |    | 1.8843  | 0' 50° |
|        | log cos | 差  | log cot | 通差 | log tan | 差  | log sin | 角      |

## 三角函數之對數表

| 角      | log sin        | 差  | log tan        | 通差 | log cot | 差  | log cos        |        |
|--------|----------------|----|----------------|----|---------|----|----------------|--------|
| 40° 0' | $\bar{1}.8081$ |    | $\bar{1}.9238$ |    | 0.0762  |    | $\bar{1}.8843$ | 0' 50" |
| 10'    | $\bar{1}.8096$ | 15 | $\bar{1}.9264$ | 26 | 0.0736  | 11 | $\bar{1}.8832$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.8111$ | 15 | $\bar{1}.9289$ | 25 | 0.0711  | 11 | $\bar{1}.8821$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.8125$ | 14 | $\bar{1}.9315$ | 26 | 0.0685  | 10 | $\bar{1}.8810$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.8140$ | 15 | $\bar{1}.9341$ | 25 | 0.0659  | 11 | $\bar{1}.8800$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.8155$ | 15 | $\bar{1}.9366$ | 25 | 0.0634  | 11 | $\bar{1}.8789$ | 10'    |
| 41° 0' | $\bar{1}.8169$ | 14 | $\bar{1}.9392$ | 26 | 0.0608  | 11 | $\bar{1}.8778$ | 0' 49" |
| 10'    | $\bar{1}.8184$ | 15 | $\bar{1}.9417$ | 25 | 0.0583  | 11 | $\bar{1}.8767$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.8198$ | 14 | $\bar{1}.9443$ | 26 | 0.0557  | 11 | $\bar{1}.8759$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.8213$ | 15 | $\bar{1}.9468$ | 25 | 0.0532  | 11 | $\bar{1}.8745$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.8227$ | 14 | $\bar{1}.9494$ | 26 | 0.0506  | 12 | $\bar{1}.8733$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.8241$ | 14 | $\bar{1}.9519$ | 25 | 0.0481  | 11 | $\bar{1}.8722$ | 10'    |
| 42° 0' | $\bar{1}.8255$ | 14 | $\bar{1}.9544$ | 26 | 0.0456  | 11 | $\bar{1}.8711$ | 0' 48" |
| 10'    | $\bar{1}.8269$ | 14 | $\bar{1}.9570$ | 25 | 0.0430  | 12 | $\bar{1}.8699$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.8283$ | 14 | $\bar{1}.9595$ | 26 | 0.0405  | 11 | $\bar{1}.8688$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.8297$ | 14 | $\bar{1}.9621$ | 25 | 0.0379  | 12 | $\bar{1}.8676$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.8311$ | 14 | $\bar{1}.9646$ | 25 | 0.0354  | 11 | $\bar{1}.8665$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.8324$ | 13 | $\bar{1}.9671$ | 25 | 0.0329  | 12 | $\bar{1}.8653$ | 10'    |
| 43° 0' | $\bar{1}.8338$ | 14 | $\bar{1}.9697$ | 26 | 0.0303  | 12 | $\bar{1}.8641$ | 0' 47" |
| 10'    | $\bar{1}.8351$ | 13 | $\bar{1}.9722$ | 25 | 0.0278  | 12 | $\bar{1}.8629$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.8365$ | 14 | $\bar{1}.9747$ | 25 | 0.0253  | 11 | $\bar{1}.8618$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.8378$ | 13 | $\bar{1}.9772$ | 26 | 0.0228  | 12 | $\bar{1}.8606$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.8391$ | 13 | $\bar{1}.9798$ | 26 | 0.0202  | 12 | $\bar{1}.8594$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.8405$ | 14 | $\bar{1}.9823$ | 25 | 0.0177  | 12 | $\bar{1}.8582$ | 10'    |
| 44° 0' | $\bar{1}.8418$ | 13 | $\bar{1}.9848$ | 26 | 0.0152  | 13 | $\bar{1}.8569$ | 0' 46" |
| 10'    | $\bar{1}.8431$ | 13 | $\bar{1}.9874$ | 25 | 0.0126  | 12 | $\bar{1}.8557$ | 50'    |
| 20'    | $\bar{1}.8444$ | 13 | $\bar{1}.9899$ | 25 | 0.0101  | 12 | $\bar{1}.8545$ | 40'    |
| 30'    | $\bar{1}.8457$ | 13 | $\bar{1}.9924$ | 25 | 0.0076  | 13 | $\bar{1}.8532$ | 30'    |
| 40'    | $\bar{1}.8469$ | 12 | $\bar{1}.9949$ | 25 | 0.0051  | 12 | $\bar{1}.8520$ | 20'    |
| 50'    | $\bar{1}.8482$ | 13 | $\bar{1}.9975$ | 26 | 0.0025  | 13 | $\bar{1}.8507$ | 10'    |
| 45° 0' | $\bar{1}.8495$ | 13 | 0.0000         | 25 | 0.0000  | 12 | $\bar{1}.8495$ | 0' 45" |
|        | log cos        | 差  | log cot        | 通差 | log tan | 差  | log sin        | 角      |

P.P.

26 25

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 2.6  | 2.5  |
| 2 | 5.2  | 5.0  |
| 3 | 7.8  | 7.5  |
| 4 | 10.4 | 10.0 |
| 5 | 13.0 | 12.5 |
| 6 | 15.6 | 15.0 |
| 7 | 18.2 | 17.5 |
| 8 | 20.8 | 20.0 |
| 9 | 23.4 | 22.5 |

15

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 1.5  | 1.3  |
| 2 | 3.0  | 3.0  |
| 3 | 4.5  | 4.5  |
| 4 | 6.0  | 6.0  |
| 5 | 7.5  | 7.5  |
| 6 | 9.0  | 9.0  |
| 7 | 10.5 | 10.5 |
| 8 | 12.0 | 12.0 |
| 9 | 13.5 | 13.5 |

14 13

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 1.4  | 1.3  |
| 2 | 2.8  | 2.6  |
| 3 | 4.2  | 3.9  |
| 4 | 5.6  | 5.2  |
| 5 | 7.0  | 6.5  |
| 6 | 8.4  | 7.8  |
| 7 | 9.8  | 9.1  |
| 8 | 11.2 | 10.4 |
| 9 | 12.6 | 11.7 |

12 11

|   |      |     |
|---|------|-----|
| 1 | 1.2  | 1.1 |
| 2 | 2.4  | 2.2 |
| 3 | 3.6  | 3.3 |
| 4 | 4.8  | 4.4 |
| 5 | 6.0  | 5.5 |
| 6 | 7.2  | 6.6 |
| 7 | 8.4  | 7.7 |
| 8 | 9.6  | 8.8 |
| 9 | 10.8 | 9.9 |

用 S 及 T 之公式

I. 當  $\alpha$  角在  $0^\circ$  與  $2^\circ$  之間:

$$\log \sin \alpha = \log \alpha'' + S.$$

$$\log \tan \alpha = \log \alpha'' + T$$

$$\log \cot \alpha = \text{colog } \tan \alpha$$

$$\log \alpha'' = \log \sin \alpha - S,$$

$$= \log \tan \alpha - T,$$

$$= \text{colog } \cot \alpha - T.$$

II. 當  $\alpha$  角在  $88^\circ$  與  $90^\circ$  之間.

$$\log \cos \alpha = \log(90^\circ - \alpha)'' + S.$$

$$\log \cot \alpha = \log(90^\circ - \alpha)'' + T.$$

$$\log \tan \alpha = \text{colog } \cot \alpha.$$

$$\log(90^\circ - \alpha)'' = \log \cos \alpha - S,$$

$$= \log \cot \alpha - T,$$

$$= \text{colog } \tan \alpha - T;$$

而  $\alpha = 90^\circ - (90^\circ - \alpha).$

S 及 T 之值

| $\alpha''$ | S       | $\log \sin \alpha$ | $\alpha''$ | T       | $\log \tan \alpha$ | $\alpha$ | T       | $\log \tan \alpha$ |
|------------|---------|--------------------|------------|---------|--------------------|----------|---------|--------------------|
| 0          |         | —                  | 0          |         | —                  | 5146     |         | 8.39713            |
| 2409       | 4.68557 | 8.06740            | 200        | 4.68557 | 6.98660            | 5424     | 4.68567 | 8.41999            |
| 3417       | 4.68556 | 8.21920            | 1726       | 4.68558 | 7.92263            | 5689     | 4.68568 | 8.44072            |
| 3823       | 4.68555 | 8.26795            | 4242       | 4.68559 | 8.07156            | 5941     | 4.68569 | 8.45953            |
| 4190       | 4.68555 | 8.30776            | 2976       | 4.68560 | 8.15924            | 6184     | 4.68570 | 8.47697            |
| 4840       | 4.68554 | 8.37038            | 3434       | 4.68561 | 8.22142            | 6417     | 4.68571 | 8.49365            |
| 5414       | 4.68553 | 8.41904            | 3838       | 4.68562 | 8.26973            | 6642     | 4.68572 | 8.50802            |
| 5932       | 4.68552 | 8.45872            | 4204       | 4.68563 | 8.30930            | 6859     | 4.68573 | 8.52200            |
| 6408       | 4.68551 | 8.49223            | 4540       | 4.68564 | 8.34270            | 7070     | 4.68574 | 8.53516            |
| 6633       | 4.68550 | 8.50721            | 4699       | 4.68565 | 8.35766            | 7173     | 4.68575 | 8.54145            |
| 6851       | 4.68550 | 8.52125            | 4853       | 4.68565 | 8.37167            | 7274     | 4.68575 | 8.54753            |
| 7267       | 4.68549 | 8.54684            | 5146       | 4.68566 | 8.39713            |          |         |                    |

用此法較前表所得者精密多矣。

三角函數之真數表

| 角     | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 0° 0' | .0000 | .0000 | 1.000 | ∞     | ∞     | 1.000 | 0' 90° |
| 10'   | .0029 | .0029 | 1.000 | 343.8 | 343.8 | 1.000 | 50'    |
| 20'   | .0058 | .0058 | 1.000 | 171.9 | 171.9 | 1.000 | 40'    |
| 30'   | .0087 | .0087 | 1.000 | 114.6 | 114.6 | 1.000 | 30'    |
| 40'   | .0116 | .0116 | 1.000 | 85.95 | 85.94 | .9999 | 20'    |
| 50'   | .0145 | .0145 | 1.000 | 68.76 | 68.75 | .9999 | 10'    |
| 1° 0' | .0175 | .0175 | 1.000 | 57.30 | 57.29 | .9998 | 0' 89° |
| 10'   | .0204 | .0204 | 1.000 | 49.11 | 49.10 | .9998 | 50'    |
| 20'   | .0233 | .0233 | 1.000 | 42.98 | 42.96 | .9997 | 40'    |
| 30'   | .0262 | .0262 | 1.000 | 38.20 | 38.19 | .9997 | 30'    |
| 40'   | .0291 | .0291 | 1.000 | 34.38 | 34.37 | .9996 | 20'    |
| 50'   | .0320 | .0320 | 1.001 | 31.23 | 31.24 | .9995 | 10'    |
| 2° 0' | .0349 | .0349 | 1.001 | 28.65 | 28.64 | .9994 | 0' 88° |
| 10'   | .0378 | .0378 | 1.001 | 26.45 | 26.43 | .9993 | 50'    |
| 20'   | .0407 | .0407 | 1.001 | 24.56 | 24.54 | .9992 | 40'    |
| 30'   | .0436 | .0437 | 1.001 | 22.93 | 22.90 | .9990 | 30'    |
| 40'   | .0465 | .0466 | 1.001 | 21.49 | 21.47 | .9989 | 20'    |
| 50'   | .0494 | .0495 | 1.001 | 20.23 | 20.21 | .9988 | 10'    |
| 3° 0' | .0523 | .0524 | 1.001 | 19.11 | 19.08 | .9986 | 0' 87° |
| 10'   | .0552 | .0553 | 1.002 | 18.10 | 18.07 | .9985 | 50'    |
| 20'   | .0581 | .0582 | 1.002 | 17.20 | 17.17 | .9983 | 40'    |
| 30'   | .0610 | .0612 | 1.002 | 16.38 | 16.35 | .9981 | 30'    |
| 40'   | .0640 | .0641 | 1.002 | 15.64 | 15.60 | .9980 | 20'    |
| 50'   | .0669 | .0670 | 1.002 | 14.96 | 14.92 | .9978 | 10'    |
| 4° 0' | .0698 | .0699 | 1.002 | 14.34 | 14.30 | .9976 | 0' 86° |
| 10'   | .0727 | .0729 | 1.003 | 13.76 | 13.73 | .9974 | 50'    |
| 20'   | .0756 | .0758 | 1.003 | 13.23 | 13.20 | .9971 | 40'    |
| 30'   | .0785 | .0787 | 1.003 | 12.75 | 12.71 | .9969 | 30'    |
| 40'   | .0814 | .0816 | 1.003 | 12.29 | 12.25 | .9967 | 20'    |
| 50'   | .0843 | .0846 | 1.004 | 11.87 | 11.83 | .9964 | 10'    |
| 5° 0' | .0872 | .0875 | 1.004 | 11.47 | 11.43 | .9962 | 0' 85° |
|       | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |



三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 5° 0'  | .0872 | .0875 | 1.004 | 11.47 | 11.43 | .9962 | 0' 85° |
| 10'    | .0901 | .0904 | 1.004 | 11.10 | 11.06 | .9959 | 50'    |
| 20'    | .0929 | .0931 | 1.004 | 10.76 | 10.71 | .9957 | 40'    |
| 30'    | .0958 | .0963 | 1.005 | 10.43 | 10.39 | .9954 | 30'    |
| 40'    | .0987 | .0992 | 1.005 | 10.13 | 10.08 | .9951 | 20'    |
| 50'    | .1016 | .1022 | 1.005 | 9.839 | 9.788 | .9948 | 10'    |
| 6° 0'  | .1045 | .1051 | 1.006 | 9.567 | 9.514 | .9945 | 0' 84° |
| 10'    | .1074 | .1080 | 1.006 | 9.309 | 9.255 | .9942 | 50'    |
| 20'    | .1103 | .1110 | 1.006 | 9.065 | 9.010 | .9939 | 40'    |
| 30'    | .1132 | .1139 | 1.006 | 8.834 | 8.777 | .9936 | 30'    |
| 40'    | .1161 | .1169 | 1.007 | 8.614 | 8.556 | .9932 | 20'    |
| 50'    | .1190 | .1198 | 1.007 | 8.405 | 8.345 | .9929 | 10'    |
| 7° 0'  | .1219 | .1228 | 1.008 | 8.206 | 8.144 | .9925 | 0' 83° |
| 10'    | .1248 | .1257 | 1.008 | 8.016 | 7.953 | .9922 | 50'    |
| 20'    | .1276 | .1287 | 1.008 | 7.834 | 7.770 | .9918 | 40'    |
| 30'    | .1305 | .1317 | 1.009 | 7.661 | 7.596 | .9914 | 30'    |
| 40'    | .1334 | .1346 | 1.009 | 7.496 | 7.429 | .9911 | 20'    |
| 50'    | .1363 | .1376 | 1.009 | 7.337 | 7.269 | .9907 | 10'    |
| 8° 0'  | .1392 | .1405 | 1.010 | 7.185 | 7.115 | .9903 | 0' 82° |
| 10'    | .1421 | .1435 | 1.010 | 7.040 | 6.968 | .9899 | 50'    |
| 20'    | .1449 | .1465 | 1.011 | 6.900 | 6.827 | .9894 | 40'    |
| 30'    | .1478 | .1495 | 1.011 | 6.765 | 6.691 | .9890 | 30'    |
| 40'    | .1507 | .1524 | 1.012 | 6.636 | 6.561 | .9886 | 20'    |
| 50'    | .1536 | .1554 | 1.012 | 6.512 | 6.435 | .9881 | 10'    |
| 9° 0'  | .1564 | .1584 | 1.012 | 6.392 | 6.314 | .9877 | 0' 81° |
| 10'    | .1593 | .1614 | 1.013 | 6.277 | 6.197 | .9872 | 50'    |
| 20'    | .1622 | .1644 | 1.013 | 6.166 | 6.084 | .9868 | 40'    |
| 30'    | .1650 | .1673 | 1.014 | 6.059 | 5.976 | .9863 | 30'    |
| 40'    | .1679 | .1703 | 1.014 | 5.955 | 5.871 | .9858 | 20'    |
| 50'    | .1708 | .1733 | 1.015 | 5.855 | 5.769 | .9853 | 10'    |
| 10° 0' | .1736 | .1763 | 1.015 | 5.759 | 5.671 | .9848 | 0' 80° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |

## 三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 10° 0' | .1736 | .1763 | 1.015 | 5.759 | 5.671 | .9848 | 0' 80° |
| 10'    | .1765 | .1793 | 1.016 | 5.665 | 5.576 | .9843 | 50'    |
| 20'    | .1794 | .1823 | 1.016 | 5.575 | 5.485 | .9838 | 40'    |
| 30'    | .1822 | .1853 | 1.017 | 5.487 | 5.396 | .9833 | 30'    |
| 40'    | .1851 | .1883 | 1.018 | 5.403 | 5.309 | .9827 | 20'    |
| 50'    | .1880 | .1914 | 1.018 | 5.320 | 5.225 | .9822 | 10'    |
| 11° 0' | .1908 | .1944 | 1.019 | 5.241 | 5.145 | .9816 | 0' 79° |
| 10'    | .1937 | .1974 | 1.019 | 5.164 | 5.066 | .9811 | 50'    |
| 20'    | .1965 | .2004 | 1.020 | 5.089 | 4.989 | .9805 | 40'    |
| 30'    | .1994 | .2035 | 1.020 | 5.016 | 4.915 | .9799 | 30'    |
| 40'    | .2022 | .2065 | 1.021 | 4.945 | 4.843 | .9793 | 20'    |
| 50'    | .2051 | .2095 | 1.022 | 4.876 | 4.773 | .9787 | 10'    |
| 12° 0' | .2079 | .2126 | 1.022 | 4.810 | 4.705 | .9781 | 0' 78° |
| 10'    | .2108 | .2156 | 1.023 | 4.745 | 4.638 | .9775 | 50'    |
| 20'    | .2136 | .2186 | 1.024 | 4.682 | 4.574 | .9769 | 40'    |
| 30'    | .2164 | .2217 | 1.024 | 4.620 | 4.511 | .9763 | 30'    |
| 40'    | .2193 | .2247 | 1.025 | 4.560 | 4.449 | .9757 | 20'    |
| 50'    | .2221 | .2278 | 1.026 | 4.502 | 4.390 | .9750 | 10'    |
| 13° 0' | .2250 | .2309 | 1.026 | 4.445 | 4.331 | .9744 | 0' 77° |
| 10'    | .2278 | .2339 | 1.027 | 4.390 | 4.275 | .9737 | 50'    |
| 20'    | .2306 | .2370 | 1.028 | 4.336 | 4.219 | .9730 | 40'    |
| 30'    | .2334 | .2401 | 1.028 | 4.284 | 4.165 | .9724 | 30'    |
| 40'    | .2363 | .2432 | 1.029 | 4.232 | 4.113 | .9717 | 20'    |
| 50'    | .2391 | .2462 | 1.030 | 4.182 | 4.061 | .9710 | 10'    |
| 14° 0' | .2419 | .2493 | 1.031 | 4.134 | 4.011 | .9703 | 0' 76° |
| 10'    | .2447 | .2524 | 1.031 | 4.086 | 3.962 | .9696 | 50'    |
| 20'    | .2476 | .2555 | 1.032 | 4.039 | 3.914 | .9689 | 40'    |
| 30'    | .2504 | .2586 | 1.033 | 3.994 | 3.867 | .9681 | 30'    |
| 40'    | .2532 | .2617 | 1.034 | 3.950 | 3.821 | .9674 | 20'    |
| 50'    | .2560 | .2648 | 1.034 | 3.906 | 3.776 | .9667 | 10'    |
| 15° 0' | .2588 | .2679 | 1.035 | 3.864 | 3.732 | .9659 | 0' 75° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |

三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 15° 0' | .2588 | .2679 | 1.035 | 3.864 | .3732 | .9659 | 0' 75° |
| 10'    | .2616 | .2711 | 1.036 | 3.822 | 3.689 | .9652 | 50'    |
| 20'    | .2644 | .2742 | 1.037 | 3.782 | 3.647 | .9644 | 40'    |
| 30'    | .2672 | .2773 | 1.038 | 3.742 | 3.606 | .9636 | 30'    |
| 40'    | .2700 | .2805 | 1.039 | 3.703 | 3.566 | .9628 | 20'    |
| 50'    | .2728 | .2836 | 1.039 | 3.665 | 3.526 | .9621 | 10'    |
| 16° 0' | .2756 | .2867 | 1.040 | 3.628 | 3.487 | .9613 | 0' 74° |
| 10'    | .2784 | .2899 | 1.041 | 3.592 | 3.450 | .9605 | 50'    |
| 20'    | .2812 | .2931 | 1.042 | 3.556 | 3.412 | .9596 | 40'    |
| 30'    | .2840 | .2962 | 1.043 | 3.521 | 3.376 | .9588 | 30'    |
| 40'    | .2868 | .2994 | 1.044 | 3.487 | 3.340 | .9580 | 20'    |
| 50'    | .2896 | .3026 | 1.045 | 3.453 | 3.305 | .9572 | 10'    |
| 17° 0' | .2924 | .3057 | 1.046 | 3.420 | 3.271 | .9563 | 0' 73° |
| 10'    | .2952 | .3089 | 1.047 | 3.388 | 3.237 | .9555 | 50'    |
| 20'    | .2979 | .3121 | 1.048 | 3.356 | 3.204 | .9546 | 40'    |
| 30'    | .3007 | .3153 | 1.049 | 3.326 | 3.172 | .9537 | 30'    |
| 40'    | .3035 | .3185 | 1.049 | 3.295 | 3.140 | .9528 | 20'    |
| 50'    | .3062 | .3217 | 1.050 | 3.265 | 3.108 | .9520 | 10'    |
| 18° 0' | .3090 | .3249 | 1.051 | 3.236 | 3.078 | .9511 | 0' 72° |
| 10'    | .3118 | .3281 | 1.052 | 3.207 | 3.047 | .9502 | 50'    |
| 20'    | .3145 | .3314 | 1.053 | 3.179 | 3.018 | .9492 | 40'    |
| 30'    | .3173 | .3346 | 1.054 | 3.152 | 2.989 | .9483 | 30'    |
| 40'    | .3201 | .3378 | 1.056 | 3.124 | 2.960 | .9474 | 20'    |
| 50'    | .3228 | .3411 | 1.057 | 3.098 | 2.932 | .9465 | 10'    |
| 19° 0' | .3256 | .3443 | 1.058 | 3.072 | 2.904 | .9455 | 0' 71° |
| 10'    | .3283 | .3476 | 1.059 | 3.046 | 2.877 | .9446 | 50'    |
| 20'    | .3311 | .3508 | 1.060 | 3.021 | 2.850 | .9436 | 40'    |
| 30'    | .3338 | .3541 | 1.061 | 2.996 | 2.824 | .9426 | 30'    |
| 40'    | .3365 | .3574 | 1.062 | 2.971 | 2.798 | .9417 | 20'    |
| 50'    | .3393 | .3607 | 1.063 | 2.947 | 2.773 | .9407 | 10'    |
| 20° 0' | .3420 | .3640 | 1.064 | 2.924 | 2.747 | .9397 | 0' 70° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |

## 三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 20° 0' | .3420 | .3640 | 1.064 | 2.924 | 2.747 | .9397 | 0' 70° |
| 10'    | .3448 | .3673 | 1.065 | 2.901 | 2.723 | .9387 | 50'    |
| 20'    | .3475 | .3706 | 1.066 | 2.878 | 2.699 | .9377 | 40'    |
| 30'    | .3502 | .3739 | 1.068 | 2.855 | 2.675 | .9367 | 30'    |
| 40'    | .3529 | .3772 | 1.069 | 2.833 | 2.651 | .9356 | 20'    |
| 50'    | .3557 | .3805 | 1.070 | 2.812 | 2.628 | .9346 | 10'    |
| 21° 0' | .3584 | .3839 | 1.071 | 2.790 | 2.605 | .9336 | 0' 69° |
| 10'    | .3611 | .3872 | 1.072 | 2.769 | 2.583 | .9325 | 50'    |
| 20'    | .3638 | .3906 | 1.074 | 2.749 | 2.560 | .9315 | 40'    |
| 30'    | .3665 | .3939 | 1.075 | 2.729 | 2.539 | .9304 | 30'    |
| 40'    | .3692 | .3973 | 1.076 | 2.709 | 2.517 | .9293 | 20'    |
| 50'    | .3719 | .4006 | 1.077 | 2.689 | 2.496 | .9283 | 10'    |
| 22° 0' | .3746 | .4040 | 1.079 | 2.669 | 2.475 | .9272 | 0' 68° |
| 10'    | .3773 | .4074 | 1.080 | 2.650 | 2.455 | .9261 | 50'    |
| 20'    | .3800 | .4108 | 1.081 | 2.632 | 2.434 | .9250 | 40'    |
| 30'    | .3827 | .4142 | 1.082 | 2.613 | 2.414 | .9239 | 30'    |
| 40'    | .3854 | .4176 | 1.084 | 2.595 | 2.394 | .9228 | 20'    |
| 50'    | .3881 | .4210 | 1.085 | 2.577 | 2.375 | .9216 | 10'    |
| 23° 0' | .3907 | .4245 | 1.086 | 2.595 | 2.356 | .9205 | 0' 67° |
| 10'    | .3934 | .4279 | 1.088 | 2.542 | 2.337 | .9194 | 50'    |
| 20'    | .3961 | .4314 | 1.089 | 2.525 | 2.318 | .9182 | 40'    |
| 30'    | .3987 | .4348 | 1.090 | 2.508 | 2.300 | .9171 | 30'    |
| 40'    | .4014 | .4383 | 1.092 | 2.491 | 2.282 | .9159 | 20'    |
| 50'    | .4041 | .4417 | 1.093 | 2.475 | 2.264 | .9147 | 10'    |
| 24° 0' | .4067 | .4452 | 1.095 | 2.459 | 2.246 | .9135 | 0' 66° |
| 10'    | .4094 | .4487 | 1.096 | 2.443 | 2.229 | .9124 | 50'    |
| 20'    | .4120 | .4522 | 1.097 | 2.427 | 2.211 | .9112 | 40'    |
| 30'    | .4147 | .4557 | 1.099 | 2.411 | 2.194 | .9100 | 30'    |
| 30'    | .4173 | .4592 | 1.100 | 2.396 | 2.177 | .9088 | 20'    |
| 50'    | .4200 | .4628 | 1.102 | 2.381 | 2.161 | .9075 | 10'    |
| 25° 0' | .4226 | .4663 | 1.103 | 2.366 | 2.145 | .9063 | 0' 65° |
|        | cos   | cot   | ccsec | sec   | tan   | sin   | 角      |

三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 25° 0' | .4226 | .4663 | 1.103 | 2.366 | 2.145 | .9063 | 0' 65° |
| 10'    | .4253 | .4699 | 1.105 | 2.352 | 2.128 | .9051 | 50'    |
| 20'    | .4279 | .4734 | 1.106 | 2.337 | 2.112 | .9038 | 40'    |
| 30'    | .4305 | .4770 | 1.108 | 2.323 | 2.097 | .9026 | 30'    |
| 40'    | .4331 | .4806 | 1.109 | 2.309 | 2.081 | .9013 | 20'    |
| 50'    | .4358 | .4841 | 1.111 | 2.295 | 2.066 | .9001 | 10'    |
| 26° 0' | .4384 | .4877 | 1.113 | 2.281 | 2.050 | .8988 | 0' 64° |
| 10'    | .4410 | .4913 | 1.114 | 2.268 | 2.035 | .8975 | 50'    |
| 20'    | .4436 | .4950 | 1.116 | 2.254 | 2.020 | .8962 | 40'    |
| 30'    | .4462 | .4986 | 1.117 | 2.241 | 2.006 | .8949 | 30'    |
| 40'    | .4488 | .5022 | 1.119 | 2.228 | 1.991 | .8936 | 20'    |
| 50'    | .4514 | .5059 | 1.121 | 2.215 | 1.977 | .8923 | 10'    |
| 27° 0' | .4540 | .5095 | 1.122 | 2.203 | 1.963 | .8910 | 0' 63° |
| 10'    | .4566 | .5132 | 1.124 | 2.190 | 1.949 | .8897 | 50'    |
| 20'    | .4592 | .5169 | 1.126 | 2.178 | 1.935 | .8884 | 40'    |
| 30'    | .4617 | .5206 | 1.127 | 2.166 | 1.921 | .8870 | 30'    |
| 40'    | .4643 | .5243 | 1.129 | 2.154 | 1.907 | .8857 | 20'    |
| 50'    | .4669 | .5280 | 1.131 | 2.142 | 1.894 | .8843 | 10'    |
| 28° 0' | .4695 | .5317 | 1.133 | 2.130 | 1.881 | .8829 | 0' 62° |
| 10'    | .4720 | .5354 | 1.134 | 2.118 | 1.868 | .8816 | 50'    |
| 20'    | .4746 | .5392 | 1.136 | 2.107 | 1.855 | .8802 | 40'    |
| 30'    | .4772 | .5430 | 1.138 | 2.096 | 1.842 | .8788 | 30'    |
| 40'    | .4797 | .5467 | 1.140 | 2.085 | 1.829 | .8774 | 20'    |
| 50'    | .4823 | .5505 | 1.142 | 2.074 | 1.816 | .8760 | 10'    |
| 29° 0' | .4848 | .5543 | 1.143 | 2.063 | 1.804 | .8746 | 0' 61° |
| 10'    | .4874 | .5581 | 1.145 | 2.052 | 1.792 | .8732 | 50'    |
| 20'    | .4899 | .5619 | 1.147 | 2.041 | 1.780 | .8718 | 40'    |
| 30'    | .4924 | .5658 | 1.149 | 2.031 | 1.767 | .8704 | 30'    |
| 40'    | .4950 | .5696 | 1.151 | 2.020 | 1.756 | .8689 | 20'    |
| 50'    | .4975 | .5735 | 1.153 | 2.010 | 1.744 | .8675 | 10'    |
| 30° 0' | .5000 | .5774 | 1.155 | 2.000 | 1.732 | .8660 | 0' 60° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |

## 三角函數之眞數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | cosec | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 30° 0' | .5000 | .5774 | 1.155 | 2.000 | 1.732 | .8660 | 0' 60° |
| 10'    | .5025 | .5812 | 1.157 | 1.990 | 1.720 | .8646 | 50'    |
| 20'    | .5050 | .5851 | 1.159 | 1.980 | 1.709 | .8631 | 40'    |
| 30'    | .5075 | .5890 | 1.161 | 1.970 | 1.698 | .8616 | 30'    |
| 40'    | .5100 | .5930 | 1.163 | 1.961 | 1.686 | .8601 | 20'    |
| 50'    | .5125 | .5969 | 1.165 | 1.951 | 1.675 | .8587 | 10'    |
| 31° 0' | .5150 | .6009 | 1.167 | 1.942 | 1.664 | .8572 | 0' 59° |
| 10'    | .5175 | .6048 | 1.169 | 1.932 | 1.653 | .8557 | 50'    |
| 20'    | .5200 | .6088 | 1.171 | 1.923 | 1.643 | .8542 | 40'    |
| 30'    | .5225 | .6128 | 1.173 | 1.914 | 1.632 | .8526 | 30'    |
| 40'    | .5250 | .6168 | 1.175 | 1.905 | 1.621 | .8511 | 20'    |
| 50'    | .5275 | .6208 | 1.177 | 1.896 | 1.611 | .8496 | 10'    |
| 32° 0' | .5299 | .6249 | 1.179 | 1.887 | 1.600 | .8480 | 0' 58° |
| 10'    | .5324 | .6289 | 1.181 | 1.878 | 1.590 | .8465 | 50'    |
| 20'    | .5348 | .6330 | 1.184 | 1.870 | 1.580 | .8450 | 40'    |
| 30'    | .5373 | .6371 | 1.186 | 1.861 | 1.570 | .8434 | 30'    |
| 40'    | .5398 | .6412 | 1.188 | 1.853 | 1.560 | .8418 | 20'    |
| 50'    | .5422 | .6453 | 1.190 | 1.844 | 1.550 | .8403 | 10'    |
| 33° 0' | .5446 | .6494 | 1.192 | 1.836 | 1.540 | .8387 | 0' 57° |
| 10'    | .5471 | .6536 | 1.195 | 1.828 | 1.530 | .8371 | 50'    |
| 20'    | .5495 | .6577 | 1.197 | 1.820 | 1.520 | .8355 | 40'    |
| 30'    | .5519 | .6619 | 1.199 | 1.812 | 1.511 | .8339 | 30'    |
| 40'    | .5544 | .6661 | 1.202 | 1.804 | 1.501 | .8323 | 20'    |
| 50'    | .5568 | .6703 | 1.204 | 1.796 | 1.492 | .8307 | 10'    |
| 34° 0' | .5592 | .6745 | 1.206 | 1.788 | 1.483 | .8290 | 0' 56° |
| 10'    | .5616 | .6787 | 1.209 | 1.781 | 1.473 | .8274 | 50'    |
| 20'    | .5640 | .6830 | 1.211 | 1.773 | 1.464 | .8258 | 40'    |
| 30'    | .5664 | .6873 | 1.213 | 1.766 | 1.455 | .8241 | 30'    |
| 40'    | .5688 | .6916 | 1.216 | 1.758 | 1.446 | .8225 | 20'    |
| 50'    | .5712 | .6959 | 1.218 | 1.751 | 1.437 | .8208 | 10'    |
| 35° 0' | .5736 | .7002 | 1.221 | 1.743 | 1.428 | .8192 | 0' 55° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |

三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | csc   | cot   | cos   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 35° 0' | .5736 | .7002 | 1.221 | 1.743 | 1.428 | .8192 | 0' 55° |
| 10'    | .5760 | .7046 | 1.223 | 1.736 | 1.419 | .8175 | 50'    |
| 20'    | .5783 | .7089 | 1.226 | 1.729 | 1.411 | .8158 | 40'    |
| 30'    | .5807 | .7133 | 1.228 | 1.722 | 1.402 | .8141 | 30'    |
| 40'    | .5831 | .7177 | 1.231 | 1.715 | 1.393 | .8124 | 20'    |
| 50'    | .5854 | .7221 | 1.233 | 1.708 | 1.385 | .8107 | 10'    |
| 36° 0' | .5878 | .7265 | 1.236 | 1.701 | 1.376 | .8090 | 0' 54° |
| 10'    | .5901 | .7310 | 1.239 | 1.695 | 1.368 | .8073 | 50'    |
| 20'    | .5925 | .7355 | 1.241 | 1.688 | 1.360 | .8056 | 40'    |
| 30'    | .5948 | .7400 | 1.244 | 1.681 | 1.351 | .8039 | 30'    |
| 40'    | .5972 | .7445 | 1.247 | 1.675 | 1.343 | .8021 | 20'    |
| 50'    | .5995 | .7490 | 1.249 | 1.668 | 1.335 | .8004 | 10'    |
| 37° 0' | .6018 | .7536 | 1.252 | 1.662 | 1.327 | .7986 | 0' 53° |
| 10'    | .6041 | .7581 | 1.255 | 1.655 | 1.319 | .7969 | 50'    |
| 20'    | .6065 | .7627 | 1.258 | 1.649 | 1.311 | .7951 | 40'    |
| 30'    | .6088 | .7673 | 1.260 | 1.643 | 1.303 | .7934 | 30'    |
| 40'    | .6111 | .7720 | 1.263 | 1.636 | 1.295 | .7916 | 20'    |
| 50'    | .6134 | .7766 | 1.266 | 1.630 | 1.288 | .7898 | 10'    |
| 38° 0' | .6157 | .7813 | 1.269 | 1.624 | 1.280 | .7880 | 0' 52° |
| 10'    | .6180 | .7860 | 1.272 | 1.618 | 1.272 | .7862 | 50'    |
| 20'    | .6202 | .7907 | 1.275 | 1.612 | 1.265 | .7844 | 40'    |
| 30'    | .6225 | .7954 | 1.278 | 1.606 | 1.257 | .7826 | 30'    |
| 40'    | .6248 | .8002 | 1.281 | 1.601 | 1.250 | .7808 | 20'    |
| 50'    | .6271 | .8050 | 1.284 | 1.595 | 1.242 | .7790 | 10'    |
| 39° 0' | .6293 | .8098 | 1.287 | 1.589 | 1.235 | .7771 | 0' 51° |
| 10'    | .6316 | .8116 | 1.290 | 1.583 | 1.228 | .7753 | 50'    |
| 20'    | .6338 | .8195 | 1.293 | 1.578 | 1.220 | .7735 | 40'    |
| 30'    | .6361 | .8243 | 1.296 | 1.572 | 1.213 | .7716 | 30'    |
| 40'    | .6383 | .8292 | 1.299 | 1.567 | 1.206 | .7698 | 20'    |
| 50'    | .6406 | .8342 | 1.302 | 1.561 | 1.199 | .7679 | 10'    |
| 40° 0' | .6428 | .8391 | 1.305 | 1.556 | 1.192 | .7660 | 0' 50° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | -tan  | sin   | 角      |

## 三角函數之真數表

| 角      | sin   | tan   | sec   | ccsec | cot   | ecs   |        |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 40° 0' | .6428 | .8391 | 1.305 | 1.556 | 1.192 | .7660 | 0' 50° |
| 10'    | .6450 | .8441 | 1.309 | 1.550 | 1.185 | .7642 | 50'    |
| 20'    | .6472 | .8491 | 1.312 | 1.545 | 1.178 | .7623 | 40'    |
| 30'    | .6494 | .8541 | 1.315 | 1.540 | 1.171 | .7604 | 30'    |
| 40'    | .6517 | .8591 | 1.318 | 1.535 | 1.164 | .7585 | 20'    |
| 50'    | .6539 | .8642 | 1.322 | 1.529 | 1.157 | .7566 | 10'    |
| 41° 0' | .6561 | .8693 | 1.325 | 1.524 | 1.150 | .7547 | 0' 49° |
| 10'    | .6583 | .8744 | 1.328 | 1.519 | 1.144 | .7528 | 50'    |
| 20'    | .6604 | .8796 | 1.332 | 1.514 | 1.137 | .7509 | 40'    |
| 30'    | .6626 | .8847 | 1.335 | 1.509 | 1.130 | .7490 | 30'    |
| 40'    | .6648 | .8899 | 1.339 | 1.504 | 1.124 | .7470 | 20'    |
| 50'    | .6670 | .8952 | 1.342 | 1.499 | 1.117 | .7451 | 10'    |
| 42° 0' | .6691 | .9004 | 1.346 | 1.494 | 1.111 | .7431 | 0' 48° |
| 10'    | .6713 | .9057 | 1.349 | 1.490 | 1.104 | .7412 | 50'    |
| 20'    | .6734 | .9110 | 1.353 | 1.485 | 1.098 | .7392 | 40'    |
| 30'    | .6756 | .9163 | 1.356 | 1.480 | 1.091 | .7373 | 30'    |
| 40'    | .6777 | .9217 | 1.360 | 1.476 | 1.085 | .7353 | 20'    |
| 50'    | .6799 | .9271 | 1.364 | 1.471 | 1.079 | .7333 | 10'    |
| 43° 0' | .6820 | .9325 | 1.367 | 1.466 | 1.072 | .7314 | 0' 47° |
| 10'    | .6841 | .9380 | 1.371 | 1.462 | 1.066 | .7294 | 50'    |
| 20'    | .6862 | .9435 | 1.375 | 1.457 | 1.060 | .7274 | 40'    |
| 30'    | .6884 | .9490 | 1.379 | 1.453 | 1.054 | .7254 | 30'    |
| 40'    | .6905 | .9545 | 1.382 | 1.448 | 1.048 | .7234 | 20'    |
| 50'    | .6926 | .9601 | 1.386 | 1.444 | 1.042 | .7214 | 10'    |
| 44° 0' | .6947 | .9657 | 1.390 | 1.440 | 1.036 | .7193 | 0' 46° |
| 10'    | .6967 | .9713 | 1.394 | 1.435 | 1.030 | .7173 | 50'    |
| 20'    | .6988 | .9770 | 1.398 | 1.431 | 1.024 | .7153 | 40'    |
| 30'    | .7009 | .9827 | 1.402 | 1.427 | 1.018 | .7133 | 30'    |
| 40'    | .7030 | .9884 | 1.406 | 1.423 | 1.012 | .7112 | 20'    |
| 50'    | .7050 | .9942 | 1.410 | 1.418 | 1.006 | .7092 | 10'    |
| 45° 0' | .7071 | 1.000 | 1.414 | 1.414 | 1.000 | .7071 | 0' 45° |
|        | cos   | cot   | cosec | sec   | tan   | sin   | 角      |





〔說明〕 畝以下通常用分釐毫等小數，皆以十進。畝以上以 100 畝爲頃。

茲更將關尺與部尺比較各數列下。

關尺 1 平方尺 = 部尺 1.2516 平方尺。 部尺 1 平方尺 = 關尺 0.7989763 平方尺。

1 畝 = 關尺 4793.86 平方尺。 1 方里 = 關尺 2588684.4 平方尺。

### III. 體 積 度 表

| 尺制…… | 立方丈 | ……        | …… | 立方尺  | ……        | ……        | 立方寸     |
|------|-----|-----------|----|------|-----------|-----------|---------|
| 量制…… |     | 石         | 斛  | ……   | 斗         | 升         |         |
| 等    | 1   | 316.45596 |    | 1000 | 3164.5596 | 31645.596 | 1000000 |
|      |     | 1         | 2  | 3.16 | 10        | 100       | 3160    |
|      |     |           |    | 1    | 3.165     | 31.65     | 1000    |
|      |     |           |    |      | 1         | 10        | 316     |
| 數    |     |           |    |      |           | 1         | 31.6    |

〔說明〕 量制以升爲單位，升以下小數爲合，勺，撮，抄等，皆以十進。

茲更將關尺與部尺比較各數列下。

關尺 1 立方尺 = 部尺 1.400229……立方尺。 部尺 1 立方尺 = 關尺 0.714168

……立方尺。 1 石 = 關尺 2.25677……立方尺。 關尺 1 立方尺 = 0.44311 石。

### IV. 衡 制 表。

| 庫秤…… | 引 | 擔 | 斤   | 兩  | 錢   |
|------|---|---|-----|----|-----|
| 等    | 1 |   | 200 |    |     |
|      |   | 1 | 100 |    |     |
| 數    |   |   | 1   | 16 | 160 |
|      |   |   |     | 1  | 10  |

〔說明〕 衡制以庫秤爲準，純水 1 立方寸，在攝氏 4 度時之重量爲 0.878475 兩，故 1 兩 = 4 度純水 1.13833632 立方寸之重。錢以下亦用分，釐，毫等名，皆以十進。有所謂關秤者，載在條約，爲海關收稅之所用。

條約載關秤與英法衡制之比較如下。

關秤 1 兩 = 英  $583\frac{1}{3}$  喱 = 法 37.783125 克。

若據英約計算，則關秤 1 兩 = 庫秤 1.0133618..... 兩。

庫秤 1 兩 = 關秤 0.9868144..... 兩。

若據法約計算，則關秤 1 兩 = 庫秤 1.01292525..... 兩。

庫秤 1 兩 = 關秤 0.98723967..... 兩。

以上兩數相較，約差萬分之四。

## V. 貨 幣 表

| 銀圓..... | 圓 | 角  | 分   | 銀兩..... | 兩 | 錢  | 分   |
|---------|---|----|-----|---------|---|----|-----|
| 等       | 1 | 10 | 100 | 等       | 1 | 10 | 100 |
| 數       |   | 1  | 10  | 數       |   | 1  | 10  |

〔說明〕 貨幣以銀圓為主要品，銀圓者以銀鑄為圓形之幣，前清官造者鑄龍紋曰龍圓，自墨西哥鑄造，由美輸入者鑄一鷹曰鷹圓，簡曰英洋，民國袁世凱時所造者鑄袁氏頭。每圓重量為庫秤 7 錢 2 分，中含純銀  $\frac{9}{10}$ 。每圓之十分之一曰角，有 1 角 2 角及 5 角之小銀幣。角以下亦用分，釐之名，但只有虛值而無實幣。銀兩即生銀之重，有三種標準，曰庫銀為官署所用，曰關銀為海關收稅所用，曰規銀為上海商民所用。至與各國比較之數，則因時價有漲落，無一定值。又角以下則輔以銅幣，小者曰銅錢，每枚值 1 文，大者曰銅元，有每枚當 10 文者及 20 文者。近有值 1 分之銅元。

## VI. 我國度量衡與法英比較表

| 種類 | 我國之單位  | 合法國之數       | 合英國之數        |
|----|--------|-------------|--------------|
| 長  | 一尺(部尺) | 0.32 呎(公尺)  | 1.0498877 呎  |
|    | 一尺(關尺) | 0.358 呎     | 1.175 呎      |
| 度  | 一步     | 1.6 呎       | 5.2494385 呎  |
|    | 一里     | 0.576 杆(公里) | 0.35791625 哩 |

|             |          |               |                |
|-------------|----------|---------------|----------------|
| 面<br>積<br>度 | 一方尺(部尺)  | 0.1024方呎      | 1.102264方呎     |
|             | 一方尺(關尺)  | 0.128164方呎    | 1.380625方呎     |
|             | 一方步      | 2.56方呎        | 27.55680方呎     |
|             | 一畝       | 6.144安(公畝,方呎) | 0.151827英畝     |
|             | 一方里      | 0.331776方杆    | 0.128104方哩     |
| 體<br>積<br>度 | 一立方寸(部尺) | 0.032768立粉    | 1.999736立吋     |
|             | 一立方寸(關尺) | 0.0458827立粉   | 2.803221立吋     |
|             | 一升       | 1.03546垧(公升)  | 0.2279029垧(加倫) |
| 衡           | 一斤(庫秤)   | 0.596816鈞(公斤) | 1.315752磅      |
|             | 一斤(關秤)   | 0.604531鈞     | 1.3333...磅     |
| 制           | 一兩(庫秤)   | 37.301克(公分)   | 575.641715喱    |
|             | 一兩(關秤)   | 37.783125克    | 583.33333喱     |

## 2. 法國之度量衡及貨幣表

〔說明〕 米突制創自法國，為萬國所通用，自我國加入萬國度量衡同盟會後，命名為公尺制。其制以地球子午周四千萬分之一為長度之基本單位，即一米突，我國昔譯為邁當或密達，今名公尺。以十米突之平方，為面積之基本單位，曰一阿耳，我國今名為公畝。以十分之一米突之立方為體積之基本單位，曰一立脫耳，我國今名為公升。以百分之一米突之立方體所容攝氏 4 度之純水之重，為重量之基本單位，曰一克蘭姆，我國今名為公分。此制互相貫串，且皆以十進，故其法最善，今列諸表於後。

### I. 長度表

| 原 名        | 譯 名   | 我國定名 | 略號 | 進位                         |
|------------|-------|------|----|----------------------------|
| Kilomètre  | 啟羅米突  | 公 里  | 杆  | 各<br>位<br>皆<br>以<br>十<br>進 |
| Hectomètre | 海克脫米突 | 公 引  | 稻  |                            |
| Décamètre  | 特卡米突  | 公 丈  | 料  |                            |
| Mètre      | 米 突   | 公 尺  | 枳  |                            |
| Déimètre   | 特西米突  | 公 寸  | 粉  |                            |
| Centimètre | 生的米突  | 公 分  | 糲  |                            |
| Millimètre | 密理米突  | 公 釐  | 耗  |                            |

### II. 面積度及地積表

| 原 名               | 譯 名      | 我國定名 | 略號 | 進位                         |
|-------------------|----------|------|----|----------------------------|
| Kilomètre carré   | 啟羅米突街害   |      | 方杆 | 各<br>位<br>皆<br>以<br>百<br>進 |
| Hectomètre carré, | 海克脫米突街害, |      | 方稻 |                            |
| Hectare           | 海克脫阿耳    | 公 頃  | 類  |                            |
| Décamètre carré,  | 特卡米突街害,  |      | 方料 |                            |
| Are               | 阿耳       | 公 畝  | 安  |                            |
| Mètre carré,      | 米突街害,    |      | 方枳 |                            |
| Centiare          | 生的阿耳     | 公 釐  | 糲  |                            |
| Déimètre carré    | 特西米突街害   |      | 方粉 |                            |
| Centimètre carré  | 生的米突街害   |      | 方糲 |                            |
| Millimètre carré  | 密理米突街害   |      | 方耗 |                            |

【註】公頃,公畝,公釐三者,為測地積時所用。

## III. 體 積 度 表

| 原 名             | 譯 名     | 略號 | 進位                         |
|-----------------|---------|----|----------------------------|
| Kilomètre cube  | 啟羅米突朱勃  | 立軒 | 各<br>位<br>皆<br>以<br>千<br>進 |
| Heetomètre cube | 海克脫米突朱勃 | 立稻 |                            |
| Décamètre cube  | 特卡米突朱勃  | 立籽 |                            |
| Mètre cube      | 米突朱勃    | 立籽 |                            |
| Décimètre cube  | 特西米突朱勃  | 立粉 |                            |
| Centimètre cube | 生的米突朱勃  | 立糧 |                            |
| Millimètre cube | 密理米突朱勃  | 立耗 |                            |

## IV. 量 制 表

| 原 名        | 譯 名    | 我國定名 | 略號 | 進位                         |
|------------|--------|------|----|----------------------------|
| Kilolitre  | 啟羅立脫耳  | 公 乘  | 軒  | 各<br>位<br>皆<br>以<br>十<br>進 |
| Heetolitre | 海克脫立脫耳 | 公 石  | 稻  |                            |
| Décalitre  | 特卡立脫耳  | 公 斗  | 籽  |                            |
| Litre      | 立脫耳    | 公 升  | 籽  |                            |
| Décalitre  | 特西立脫耳  | 公 合  | 粉  |                            |
| Centilitre | 生的立脫耳  | 公 勺  | 糧  |                            |
| Millilitre | 密理立脫耳  | 公 撮  | 耗  |                            |

【註】 1 立粉 = 1 軒，餘準此。

V. 衡 制 量

| 原 名         | 譯 名    | 我國定名 | 略號 | 進位                         |
|-------------|--------|------|----|----------------------------|
| Kilogramme  | 啟羅克蘭姆  | 公 斤  | 尅  | 各<br>位<br>皆<br>以<br>十<br>進 |
| Hectogramme | 海克脫克蘭姆 | 公 兩  | 尅  |                            |
| Déca-gramme | 特卡克蘭姆  | 公 錢  | 尅  |                            |
| Gramme      | 克蘭姆    | 公 分  | 克  |                            |
| Décigramme  | 特西克蘭姆  | 公 釐  | 尅  |                            |
| Centigramme | 生的克蘭姆  | 公 毫  | 尅  |                            |
| Milligramme | 密理克蘭姆  | 公 絲  | 尅  |                            |

VI. 幣 制 表

| 原 名     | 譯 名 | 略 號 | 進 位         |
|---------|-----|-----|-------------|
| Franc   | 佛 郎 | 佛   | 1 佛 = 100 參 |
| Centime | 生 丁 | 參   |             |

VII. 法 國 度 量 衡 與 我 國 比 較 表

| 法國單位 | 合 我 國 數         |                 |           |
|------|-----------------|-----------------|-----------|
| 尺    | 部尺 3.125尺       | 關尺 2.793296尺    |           |
| 安    | 部尺976.5625平方尺   | 關尺780.2503平方尺   | 0.16276畝  |
| 畝    | 部尺 30.517578立方寸 | 關尺 21.794701立方寸 | 0.965746升 |
| 克    | 庫秤 0.0258089兩   | 關秤 0.026467兩    |           |

## 3. 英美之度量衡及貨幣表

## I. 長 度 表

| 原名 | Mile | Furlong | Chain | Pole | Fathom | Yard | Foot | Link             | Inch  |
|----|------|---------|-------|------|--------|------|------|------------------|-------|
| 譯名 | 埋爾   | 富呵郎     | 奢因    | 布耳   | 花當     | 依亞   | 幅特   | 令克               | 因制    |
| 略號 | 哩    | 浪       | 鎖     | 桿    | 噶      | 碼    | 呎    | 令                | 吋     |
| 等  | 1    | 8       | 80    | 320  | 880    | 1760 | 5280 | 8000             | 63360 |
|    |      | 1       | 10    | 40   | 110    | 220  | 660  | 1000             | 7920  |
|    |      |         | 1     | 4    | 11     | 22   | 66   | 100              | 792   |
|    |      |         |       | 1    | 2.75   | 5.5  | 16.5 | 25               | 198   |
|    |      |         |       |      | 1      | 2    | 6    | $9\frac{1}{11}$  | 72    |
|    |      |         |       |      |        | 1    | 3    | $4\frac{6}{11}$  | 36    |
|    |      |         |       |      |        |      | 1    | $1\frac{17}{33}$ | 12    |
| 數  |      |         |       |      |        |      | 1    | 7.92             |       |

又水程之長度如下。

1 海里(哩, Nautical mile) = 10 鏈(Cable) = 100 浬(Nautical fathom)。

惟英 1 哩 = 6080 呎。

美 1 哩 = 6086 呎。

## II. 面 積 度 表 A.

| 原名 | Square mile | Square yard | Square foot | Square inch |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 略號 | 方 哩         | 方 碼         | 方 呎         | 方 吋         |
| 等  | 1           | 3097600     | 27878400    | 4014489600  |
|    |             | 1           | 9           | 1296        |
| 數  |             |             | 1           | 144         |



III. 面積度表 B.

| 原名 | Square mile | Aere | Rood | Square chain | Square pole | Square link |
|----|-------------|------|------|--------------|-------------|-------------|
| 譯名 |             | 愛克   | 路得   |              |             |             |
| 略號 | 方哩          | 英畝   |      | 方鎖           | 方桿          | 方令          |
| 等  | 1           | 640  | 2560 | 6400         | 102400      | 64000000    |
|    |             | 1    | 4    | 10           | 160         | 100000      |
|    |             |      | 1    | 2.5          | 40          | 25000       |
|    |             |      |      | 1            | 16          | 10000       |
|    |             |      |      |              | 1           | 625         |
| 數  |             |      |      |              |             |             |

〔註〕 1 英畝 = 43560 方呎。

IV. 體積度表

| 原名 | Cubic yard | Cubic foot | Cubic inch |
|----|------------|------------|------------|
| 略號 | 立方碼        | 立方尺        | 立方寸        |
| 等  | 1          | 27         | 46656      |
| 數  |            | 1          | 1728       |

V. 量制表 (A. 液量)

| 原名 | Gallon | Quart | Pint | Gill | Ounce |
|----|--------|-------|------|------|-------|
| 譯名 | 加倫     | 夸爾    | 品脫   | 及耳   | 溫司    |
| 略號 | 呷      | 夸     | 品    | 及    |       |
| 等  | 1      | 4     | 8    | 32   | 160   |
|    |        | 1     | 2    | 8    | 40    |
|    |        |       | 1    | 4    | 20    |
| 數  |        |       |      | 1    | 5     |

〔註〕 英一呷=277.274 立方呎， 美一呷=231 立方呎。

### VI. 量制表 (B. 乾量)

| 原 名 | Bushel | Peck | Gallon | Quart | Pint |
|-----|--------|------|--------|-------|------|
| 譯 名 | 蒲式耳    | 配 容  | 加 倫    | 夸 爾   | 品 脫  |
| 略 號 | 畚      | 呌    | 呷      | 夸     | 品    |
| 等   | 1      | 4    | 8      | 32    | 64   |
|     |        | 1    | 2      | 8     | 16   |
|     |        |      | 1      | 4     | 8    |
| 數   |        |      |        | 1     | 2    |

〔註〕 英一畚=1.283676 立方呎， 美一畚=1.244458 立方呎。

英乾量一呷與液量一呷同， 美乾量一呷=268.803 立方呎。

### VII. 衡制表 (A. 常衡)

| 原 名 | Ton | Hundred weight | Pound | Ounce | Dram   | Grain    |
|-----|-----|----------------|-------|-------|--------|----------|
| 譯 名 |     | 漢厥韋特           |       | 溫 司   | 打 蘭    | 克 令      |
| 略 號 | 噸   | 擔              | 磅     | 噶     |        | 喱        |
| 等   | 1   | 20             | 2240  | 35840 | 573440 | 15680000 |
|     |     | 1              | 112   | 1792  | 28672  | 784000   |
|     |     |                | 1     | 16    | 256    | 7000     |
|     |     |                |       | 1     | 16     | 437.5    |
| 數   |     |                |       |       | 1      | 27.34375 |

〔註〕 此係英制。 美一擔=100 磅， 一噸=20 擔=2000 磅。

VIII. 衡制表 (B. 金衡)

| 原名 | Pound | Ounce | Pennyweight | Grain |
|----|-------|-------|-------------|-------|
| 譯名 |       | 溫司    | 本尼懷脫        | 克令    |
| 略號 | 磅     | 噸     | 英錢          | 喱     |
| 等  | 1     | 12    | 240         | 5760  |
|    |       | 1     | 20          | 480   |
| 數  |       |       | 1           | 24    |

IX. 衡制表 (C. 藥衡)

| 原名 | Pound | Ounce | Dram | Seruple | Grain |
|----|-------|-------|------|---------|-------|
| 譯名 |       | 溫司    | 打蘭   | 司克路步    | 克令    |
| 略號 | 磅     | 噸     |      |         | 喱     |
| 等  | 1     | 12    | 96   | 288     | 5760  |
|    |       | 1     | 8    | 24      | 480   |
| 數  |       |       | 1    | 3       | 60    |
|    |       |       |      | 1       | 20    |

[註] 金藥衡 1 磅 = 常衡 0.82285714.....磅。  
 金藥衡 1 溫司 = 常衡 1.0971428.....溫司。  
 常衡 1 磅 = 金藥衡 1.2152777.....磅。  
 常衡 1 溫司 = 金藥衡 0.91145833.....溫司。

X. 貨幣表

| 國別 | 英 幣       |          |       | 美 幣    |      |
|----|-----------|----------|-------|--------|------|
| 原名 | Sovereign | Shilling | Pence | Dollar | Cent |
| 譯名 | 索佛令       | 先令       | 辨士    | 他賴     | 生脫   |
| 略號 | 鎊         | 先        | 片     | 弗      | 仙    |
| 等  | 1         | 20       | 240   | 1      | 100  |
| 數  |           | 1        | 12    |        |      |

## XI. 英美度量衡與中法比較表

【說明】 英美制度最為繁複，茲取其我國所常用者，列其比較表於下。

| 種類          | 英 美 之 單 位 | 合 中 國 數            | 合 法 國 數                |               |
|-------------|-----------|--------------------|------------------------|---------------|
| 長           | 吋         | $\frac{1}{12}$ 呎   | 0.0793736部尺            | 0.0253995呎    |
|             | 令         | •66呎               | 0.628633部尺             | 0.201164呎     |
|             | 呎         | 1呎                 | 0.952483部尺             | 0.3047945呎    |
|             | 碼         | 3呎                 | 2.857448部尺             | 0.9143835呎    |
| 度           | 哩         | 5280呎              | 5029.1094部尺            | 1609.315呎     |
|             | 漚         | 6080呎              | 5791.1部尺               | 1853.15呎      |
| 面<br>積      | 方吋        | $\frac{1}{144}$ 方呎 | 0.00630017方尺           | 0.000645136方呎 |
|             | 方令        | 0.4356方呎           | 0.395186方尺             | 0.0404671方呎   |
|             | 方呎        | 1方呎                | 0.907223方尺             | 0.09289968方呎  |
|             | 方碼        | 9方呎                | 8.165011方尺             | 0.8360971方呎   |
|             | 英畝        | 43560方呎            | 39518.63方尺<br>6.58644畝 | 40.4671方呎     |
|             | 方哩        | 27878400方呎         | 25291937.5方尺           | 25898.9453方呎  |
| 體<br>積      | 立吋        | 0.00360654加倫       | 0.500067立方寸            | 0.016386立粉    |
|             | 溫司        | 0.00625加倫          | 0.02742395升            | 0.028396625呷  |
|             | 加倫        | 277.274立吋          | 4.3878326升             | 4.54346呷      |
|             | 立呎        | 6.232102加倫         | 0.86411476立方尺          | 0.02831531立粉  |
|             | 立碼        | 168.26676加倫        | 23.331099立方尺           | 0.76451337立粉  |
| 常<br>衡<br>制 | 溫司        | 0.0625磅            | 0.76002136兩(庫秤)        | 28.3495568克   |
|             | 磅         | 1磅                 | 12.16034178兩           | 453.592909克   |
|             | 擔         | 112磅               | 1361.958279兩           | 50802.4058克   |
|             | 噸         | 2240磅              | 27239.165587兩          | 1016048.116克  |

〔註一〕 上表係由英制計算，茲將美制與英制不同者，另列表。

1. 美 1 哩 = 中 5796.81 部尺 = 法 1854.98 呎。
2. 美 液量 1 呷 = 231 立吋 = 中 3.65555 升 = 法 3.78521 呷。
3. 美 乾量 1 呷 = 258.803 立吋 = 中 4.25377 升 = 法 4.40465 呷。
4. 美 1 噸 = 2000 磅 = 中 24320.68356 兩 = 法 907185.818 克。

〔註二〕 1. 金衡 1 磅 = 中 10.006225 兩 = 373.2422 克。

2. 藥衡 1 磅 = 金衡 1 磅。

〔註三〕 英美貨幣與法之比較如下。

A.

| 國別<br>幣名 | 英(片) | 法 (佛)      |
|----------|------|------------|
| 片        | 1    | 0.1050896  |
| 先        | 12   | 1.261076   |
| 磅        | 240  | 25.2215157 |

B.

| 國別<br>幣名 | 美(仙) | 法 (佛)   |
|----------|------|---------|
| 仙        | 1    | .051825 |
| 弗        | 100  | 5.1825  |

#### 4. 日本之度量衡表

##### 丁. 長度表

| 名稱 | 里 | 町  | 丈    | 間              | 鯨尺             | 尺     | 寸      |
|----|---|----|------|----------------|----------------|-------|--------|
| 等  | 1 | 36 | 1296 | 2160           | 10368          | 12960 | 129600 |
|    |   | 1  | 36   | 60             | 288            | 360   | 3600   |
|    |   |    | 1    | $1\frac{2}{3}$ | 8              | 10    | 100    |
|    |   |    |      | 1              | $4\frac{4}{5}$ | 6     | 60     |
|    |   |    |      |                | 1              | 1.25  | 12.5   |
| 數  |   |    |      |                |                | 1     | 10     |

## II. 面 積 度 表

A. 尺制，普通所用。

| 名 稱 | 方 丈 | 方 間            | 方 尺 | 方 寸   |
|-----|-----|----------------|-----|-------|
| 等   | 1   | $2\frac{7}{9}$ | 100 | 10000 |
|     |     | 1              | 36  | 3600  |
| 數   |     |                | 1   | 100   |

B. 畝制，測地積用。

| 名 稱 | 町 | 段  | 畝   | 步 或 坪 | 合     | 勺      |
|-----|---|----|-----|-------|-------|--------|
| 等   | 1 | 10 | 100 | 3000  | 30000 | 300000 |
|     |   | 1  | 10  | 300   | 3000  | 30000  |
| 數   |   | 1  | 30  | 300   | 3000  | 30000  |
|     |   |    |     | 1     | 10    | 100    |
|     |   |    |     |       | 1     | 10     |

〔註〕 步或坪=方間。

## III. 體 積 度 表

A. 尺制

| 名 稱 | 立 方 坪 | 立 方 尺 | 立 方 寸  |
|-----|-------|-------|--------|
| 等   | 1     | 216   | 216000 |
| 數   |       | 1     | 1000   |

B. 量制

| 名稱 | 石 | 斗  | 升   | 合    | 勺     |
|----|---|----|-----|------|-------|
| 等  | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|    |   | 1  | 10  | 100  | 1000  |
|    |   |    | 1   | 10   | 100   |
| 數  |   |    |     | 1    | 10    |

〔註〕 一立方坪 = 33.31945 石, 一石 = 6.4827 立方尺。

IV. 衡制表

| 名稱 | 貫 | 斤    | 兩    | 分     | 厘      | 毛       |
|----|---|------|------|-------|--------|---------|
| 等  | 1 | 6.25 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|    |   | 1    | 160  | 1600  | 16000  | 160000  |
|    |   |      | 1    | 10    | 100    | 1000    |
| 數  |   |      |      | 1     | 10     | 100     |
|    |   |      |      |       | 1      | 10      |
|    |   |      |      |       |        | 1       |

V. 幣制

〔說明〕 日本現亦用金本位, 以 1 圓為單位, 而以 100 錢為 1 圓。其貨幣有金銀二種, 金幣 1 枚為 5 圓, 銀幣 1 枚為 50 錢, 其一圓之幣, 則為紙幣而已。

## VI. 日本度量衡與中法比較表

| 種類 | 日本之單位 |           | 合中國數                         | 合法國數        |
|----|-------|-----------|------------------------------|-------------|
| 長度 | 尺     | 1尺        | 0.946969部尺                   | 0.30303呎    |
|    | 里     | 12960尺    | 12272.727272部尺               | 3927.27呎    |
| 面積 | 方尺    | 1方尺       | 0.89675 <sup>部尺</sup><br>平方尺 | 0.0918275呎  |
|    | 畝     | 1080方尺    | 968.492 <sup>部尺</sup><br>平方尺 | 99.1736呎    |
| 體積 | 升     | 1升        | 1.7420637升                   | 1.803907妍   |
|    | 立方尺   | 15.42567升 | 0.849195立方尺                  | 0.0278265立呎 |
| 衡制 | 匁     | 1匁        | 0.10053349兩                  | 3.75克       |
|    | 斤     | 160匁      | 16.085359兩                   | 600克        |

又日幣 1 圓 = 法 2.5833126 佛。

## 5. 俄國之度量衡及貨幣表

## I. 長度表

| 原名 | Werst | Sagene | Archin | Foot           | Werchok        |
|----|-------|--------|--------|----------------|----------------|
| 譯名 | 阜斯得   | 晒琴     | 埃頃     | 福脫             | 胃曲             |
| 略號 | 俄里    | 晒      | 埃      | 俄尺             |                |
| 等數 | 1     | 500    | 1500   | 3500           | 24000          |
|    |       | 1      | 3      | 7              | 48             |
|    |       |        | 1      | $2\frac{1}{3}$ | 16             |
|    |       |        |        | 1              | $6\frac{6}{7}$ |



II. 面積度表

| 原名 | Square werst | Dessatine        | Square sagene | Square archin | Square foot    |
|----|--------------|------------------|---------------|---------------|----------------|
| 譯名 |              | 臺利廳              |               |               |                |
| 略號 | 方俄里          | 俄傾               | 方晒            | 方埃            | 方俄尺            |
| 等  | 1            | $104\frac{1}{6}$ | 250000        | 2250000       | 12250000       |
|    |              | 1                | 2400          | 21600         | 117600         |
|    |              |                  | 1             | 9             | 49             |
| 數  |              |                  |               | 1             | $\frac{4}{59}$ |

III. 量制表 (A. 乾量)

| 原名 | Tschet wert | Osmina | Pajok | Tschet werik | Tschet werka | Garnetz |
|----|-------------|--------|-------|--------------|--------------|---------|
| 譯名 | 淺多浮脫        | 哇司密那   | 排雅克   | 淺多維立克        | 淺多惠卡         | 加你南     |
| 略號 | 俄石          |        |       | 俄斗           |              | 俄升      |
| 等  | 1           | 2      | 4     | 8            | 32           | 64      |
|    |             | 1      | 2     | 4            | 16           | 32      |
|    |             |        | 1     | 2            | 8            | 16      |
|    |             |        |       | 1            | 4            | 8       |
| 數  |             |        |       |              | 1            | 2       |

B. 液量

| 原名 | Boehka | Vedro | Chtof | Kronehka | Tscharly |
|----|--------|-------|-------|----------|----------|
| 譯名 | 薄卡     | 浮駝羅   | 司多夫   | 克郎齊卡     | 楷爾卡      |
| 等  | 1      | 40    | 320   | 400      | 4000     |
|    |        | 1     | 8     | 10       | 100      |
|    |        |       | 1     | 1.25     | 12.5     |
| 數  |        |       |       | 1        | 10       |

## IV. 衡 制 表

| 原名 | Berkowitz | Pud | Funt   | Loth  | Zolotnik |
|----|-----------|-----|--------|-------|----------|
| 譯名 | 倍可惠士      | 潑 特 | 諷脫(俄磅) | 羅 修   | 若羅臬克     |
| 等  | 1         | 10  | 400    | 12800 | 38400    |
|    |           | 1   | 40     | 1280  | 3840     |
|    |           |     | 1      | 32    | 96       |
| 數  |           |     |        | 1     | 3        |

## V. 貨 幣 表

| 原 名 | Roubls | Kopeek |
|-----|--------|--------|
| 譯 名 | 盧 布    | 戈 比    |
| 略 號 | 留      | 哥      |
| 等 數 | 1      | 100    |

## VI. 俄國度量衡貨幣與中法比較表

| 俄之單位 | 合 中 國 數          | 合 法 國 數      |
|------|------------------|--------------|
| 俄 尺  | 0.9525部尺         | 0.3048呎      |
| 俄 里  | 3333.75部尺        | 1066.8呎      |
| 俄方尺  | 0.90725625平方尺    | 0.09290304方呎 |
| 俄方里  | 11113889.0625平方尺 | 1138062.24方呎 |
| 俄 升  | 3.167139升        | 3.2795729呎   |
| 浮駝羅  | 11.877306升       | 12.29895呎    |
| 俄 磅  | 10.9782579兩      | 409.5克       |
| 盧 布  |                  | 2.666418佛    |

其他各國如德意志，意大利，荷蘭，葡萄牙等之度量衡制，均與法國同，惟幣制則各異，茲分述如下。

1. 德意志——以 100 分尼 (略稱布, Pfennige) 爲 1 馬克 (略稱馬, Mark, 合法 1.234569 佛)。
2. 意大利——以 10 賴 (Lira, 與佛郎等) 爲 1 西袞 (Soquin)。
3. 荷蘭——以 100 生式 (Cent) 爲 1 鹿林 (Florin)。
4. 葡萄牙——以 1000 而雷 (Rei) 爲 1 密而司 (Milreis),  
10 密而司爲 1 克倫 (Crown)。

# 附錄二 數學家事略

## I. 外國數學家

**Abel, Niels Henrik.** 1802年8月5日，生於挪威 Findöe；死於1829年4月6日。求學於Christiania，又求學於柏林及巴黎，惟爲時甚暫。證明五次方程式代數解法之不能；改良橢圓函數論；手創Abel函數論。

**Abul Jnd, Mohammed ibn al Last al Slauni.** 約1050年時人，甚專心研究僅用圓規及直線尺所不能解之幾何學問題。

**Abul Wefay al Buzjani.** 940年6月10日，生於波斯Buzjan；998年7月1日死於Bagdad。亞拉伯之天文家。譯希臘數學家之著作甚多；改良三角法，且計算若干之表；用圓規之惟一開度以爲幾何學之作圖，爲有興趣。

**Adelard.** 約1120年時人。英之僧侶。嘗遊行於小亞細亞，西班牙，埃及及亞拉伯。首將歐克立特之書由亞拉伯語譯成拉丁語。且譯Al Khowarizmi之著作之一部分。

**Al Battani (Albatagnius).** Mohammed ibn Sinan Abu Abdallah al Battani. 850年頃，生於米薩波打米亞 (Mesopotamia) 之Battani；929年死於Da-

mascus。亞拉伯之皇族，敘利亞之管理者；當時最大之天文家兼數學家。改良三角法，且始計算餘切之表。

**Alberti, Leon Battista.** 1404年至1472年間人。建築師，畫家，兼雕刻師。

**Albertus Magnus, Count Albrecht von Bollstädt.** 1193年或云1205年生於Bavaria之Laningen；1280年11月15日死於Cologne。著名神學家，化學家，物理學家兼數學家。

**Al Biruni, Abul Rihan Mohammed ibn Ahmed.** 出自印度河流域之Birum；死於1038年。亞拉伯人，然居住及遊歷印度，且關於印度數學有所著述，發展球面三角法。

**Alcuin.** 736年生於York；804年5月19日死於Hesse之Hersfeld。始爲York之僧侶學校之教員，後於法國助Charlemagne設立諸學校。

**Alhazen, ibn al Haitam.** 950年生於Bassora；1038年死於Cairo。關係光學爲最重要之亞拉伯著作者。

**Al Kalsadi, Abul Hasan Ali ibn Mohammed.** 死於1486年或1477年。出自Andalusia或Granada。算術家。

\*此係譯自Fink之數學史，數學家不依年代之先後而按英文字母排之，以其便於查攷也。又此處之數學家皆係西人，故所用之年月日，皆係指西歷紀元後。

- Al Karkhi**, Abu Bekr Mohammed ibn al Hosain. 約 1010 年時人。在 Bagdad 之亞拉伯數學家。有關於算術，代數學，幾何學之著作。
- Al Khojandi**, Abu Mobammed. 出自 Khorassan 之 Khojand; 992 年尚生存。亞拉伯天文家。
- Al Khowarizmi**, Abu Jafar Mohammed ibn Musa. 第九世紀初葉人。Khowarizm (Khiva) 人。亞拉伯數學家及天文家。其著作之著名者為代數學。譯有數種希臘語之著作。
- Al Kindi**, Jacob ibn Ishak, Abu Yusuf. 生於 813 年頃; 死於 873 年。亞拉伯哲學家，物理學家，天文家及星學家。
- Al Kuli**, Vaijan ibn Rustam Abu Sahl. 約 976 年時人。在 Bagdad 之亞拉伯天文家兼幾何學家。
- Al Nasawi**, Abul Hasan Ali ibn Ahmed. 約 1000 年時人。出自 Khorassan 之 Nasa. 算術家也。
- Al Sagani**, Ahmed ibn Mohammed al Sagani Abu Hamid al Usturlabi. 出自 Khorassan 之 Sagan; 死於 990 年。Bagdad 之天文家。
- Anaxagoras**. 紀元前 499 年生於 Ionic 之 Clazomene; 紀元前 428 年死於 Lampsacus. Ionic 學校之最後而最著名之哲學家。講授於雅典。為 Euripides 及 Pericles 之師。
- Apianus** (Apian), Petrus. 1495 年生於撒克遜 (Saxony) 之 Leisnig; 死於 1553 年。著有算術及三角法。
- Apollonius of Perga**, in Pamphylia. 於紀元前 250 年至 200 年之間，Ptolemy Philopator 在位時，講授於亞歷山大因著圓錐曲線論八卷，而成大幾何學家之名。尚著有他書甚多。又用圓錐曲線解普通二次方程式。
- Arbogast**, Louis Francois Antoine. 1759 年生於 Mutzig; 死於 1803 年。著有微分學，級數，gamma 函數，微分方程式。
- Archimedes**. 紀元前 287 (?) 年生於 Syracuse; 紀元前 212 年，被羅馬兵士殺害於彼。為工程師，建築師，幾何學家及物理學家。曾遊歷西班牙及埃及。Hiero 王之友。大發展幾何體之求積法及某數種曲線形面積之求積法。其於物理學上以關於重心，槓杆，滑車，螺旋及比重等而著名。
- Archytas**. 紀元前 430 年生於 Tarentum; 死於紀元前 365 年。為柏拉圖之友，Pythagoras 派之學者，政治家且為長官。關於比例，有理數與無理數，罅隙面與截口及重學有所著述。
- Argand**, Jean Robert. 1768 年生於 Geneva; 約死於 1825 年。其傳記不詳。為現今複虛數之幾何學之表示方法發明者之一 (1806)。
- Aristotle**. 紀元前 384 年生於 Macedonia 之 Stageira; 紀元前 322 年死於 Euboea 之 Chalcis. 哲學中逍遙學派之元

- 祖；亞歷山大帝之師傅。以文字表未知量；區別幾何學與測地學；關於物理有所著述；發組合理論之端緒。
- Aryabhata.** 476 年生於恆河上流之 Pataliputra。印度數學家。所著多為代數學，其中含二次方程式；排列，不定方程式及幻方。
- August, Ernst Ferdinand.** 1795 年生於 Prenzlau；死於 1870，是時氏為柏林 Kölnisch 高等學校之管理者。
- Autolykus of Pitane, Asia Minor.** 約紀元前 330 年頃人。希臘天文家；球面幾何學之最古著作者。
- Avicenna, Abu Ali Hosain ibn Sina.** 978 年生於 Bokhara 附近之 Charmatin；1036 年死於波斯之 Hamadam。亞拉伯之醫學家兼博物學家。發行亞里斯多德，歐克立特等之數學及物理學之著作數種。有算術及幾何學之著作。
- Babbage, Charles.** 1792 年 12 月 26 日生於 Totnes；1871 年 10 月 18 日死於倫敦。於劍橋為數學之 Lucasian 教授。以其計算器，人皆知之。於英國提高數學程度甚有力。
- Bachet.** 見 Méziriac 條。
- Bacon, Roger.** 1214 年生於 Somersetshire 之 Ilchester；1294 年 6 月 11 日死於牛津。學於牛津及巴黎；曾於牛津為教授；數學家兼物理學家。
- Balbus.** 約 100 年時人。羅馬測量師。
- Baldi, Bernardino.** 1553 年生於 Urbino；1617 年死於該處。數學家又為普通之學者。於數學史有所貢獻。
- Baltzer, Heinrich Richard.** 1818 年生於 Meissen；1887 年死於 Giessen。於 Giessen 為數學教授。
- Barlaam, Bernard.** 十四世紀初葉人。為著述天文學及幾何學之僧侶。
- Barezzi, Francesco.** 意大利數學家。1537 年至 1604 年時人。
- Barrow, Issac.** 1630 年生於倫敦；1677 年 5 月 4 日死於劍橋。於劍橋為希臘語及數學之教授。學者，數學家，科學家，又為傳教者。牛頓有為其弟子及繼承者。
- Beda, the Venerable.** 672 年生於 Northumberland 之 Yarrow 附近之 Monkton；735 年 5 月 26 日死於 Yarrow。著有年代學及算術。
- Bellavitis, Gino.** 1803 年 11 月 23 日生於 Padua 附近之 Bassano；死於 1880 年 11 月 6 日。以其射影幾何學及平衡論之著作而著名。
- Bernolinus.** 約 1020 年時人。於巴黎為 Gerbert 之弟子。著有算術。
- Bernoulli.** 著名數學家家族。其人如次：  
**Jacob** (英人常稱為 James)，1654 年 12 月 27 日生於 Basel；1705 年 8 月 16 日死於該處。為首先承認微積分學之一人。其 De Arte Conjectandi 一書為適選法之大著作。研究曲線之拔萃者，在 Basel 刻對數螺線於其紀念物上。  
**John** (Johann)，為 Jacob 之弟；1667 年 8 月 7 日生於 Basel；1748 年 1 月

- 1 日死於該處。首先試作積分學及指數函數之微積分。又爲物理學家之拔萃者，而其才不過一教員而已。
- Nicholas** (Nikolaus), 爲 John 之姪; 1687 年 10 月 10 日生於 Basel; 1759 年 11 月 29 日死於該處。教授於聖彼得堡, Basel, 及 Padua。於微分方程式之研究有所貢獻。
- Daniel**, 爲 John 之子; 1700 年 2 月 9 日生於 Groningen; 1782 年死於 Basel。於聖彼得堡爲數學教授。其重要之著作爲液體動力學。
- John, the younger**, 爲 John 之子。1710 年至 1790 年間人, 教授於 Basel。
- Bézout**, Étienne. 1730 年生於 Nemours; 1783 年死於巴黎。爲代數學者; 而於對稱函數及行列式之研究甚著名。
- Bhaskara Acharya**. 生於 1114 年。印度數學家兼天文家。爲 Lilavati 及 Vijaganita 之著者, 其書含有算術及代數學之大綱。爲當代最著名數學家之一。
- Biot**, Jean Baptiste. 1774 年 4 月 21 日生於巴黎。1862 年 2 月 3 日死於該處。物理學, 數學, 天文學之教授, 著書甚多。
- Boëthius**, Anicius Manlius Torquatus Severinus. 480 年生於羅馬; 524 年受刑於 Pavia。爲中古煩瑣學說之元祖。翻譯希臘語數學, 重學, 物理學甚多, 且加以校訂。著有算術。哲學之慰藉 (Consolations of Philosophy) 即其在獄時之著作也。
- Bolyai: Wolfgang** Bolyai de Bolya. 1775 年生於 Bolya; 死於 1856 年。爲 Gauss 之友。
- Johann** Bolyai de Bolya, 爲 Bolyai 之子。1802 年生於 Klausenburg; 1860 年死於 Maros-Vásárhely。爲所謂非歐克里特幾何學發明者之一。
- Bolzano**, Bernhard. 1781 年至 1848 年間人, 於級數之研究有所貢獻。
- Bombelli** Rafaele. 意大利人。約生於 1530 年。其代數學 (1572 年) 網羅當時所知關於代數學之問題。於三次方程式之研究有所貢獻。
- Boncompagni**, Baldassare. 意大利之富裕皇族。1821 年 5 月 10 日生於羅馬; 1894 年 4 月 12 日死於同地。Boncompagni's Bulletins 之出版者。
- Boole**, George. 1815 年生於 Lincoln; 1864 年死於 Cork。於 Cork 之 Queen's College 爲數學教授。Invariants 及 Covariants 之理論, 可謂氏發其端緒 (1841 年)。
- Booth**, James. 1806 年至 1878 年間人。教士且爲精算積分之著者。
- Borchardt**, Karl Wilhelm. 生於 1817 年; 1880 年死於柏林。教授於柏林。
- Boschi**, Pietro. 1833 年生於羅馬; 死於 1887 年。教授於 Bologna。
- Bouquet**, Jean Claude. 1819 年生於 Morteau; 1885 年死於巴黎。
- Bour**, Jacques Edmond Emile. 生於

- 1832年; 1866年死於巴黎爲多藝學校 (École Polytechnique, 法國之大學) 之教授。
- Bradwardine, Thomas de.** 1920年生於 Chichester 附近之 Hardfield; 1349年8月26日死於 Lambeth。初於牛津 爲神學教授, 後爲 Canterburg 之大僧正。著有關於算術及幾何學之書。
- Brahmagupta.** 生於 598年。印度 數學家, 而於幾何學及三角法有所貢獻。
- Brasseur, Jean Baptiste.** 1802年至 1868年間人。教授於 Liège。
- Breschneider, Carl Anton.** 1808年5月27日生於 Schneeberg; 1878年11月6日死於 Gotha。
- Brianchon, Charles Julien.** 1785年生於 Sèvres; 死於 1864年。因其關於巴斯開之神秘六邊形之逆之論文而著名。
- Briggs, Henry.** 1660年2月生於 Yorkshire 之 Halifax 附近之 Watery Wood; 1630年1月26日死於牛津。於牛津 爲幾何學之 Savilian 教授。最初認對數之價值之一人; 以10爲底之對數, 實爲氏所首創。
- Briot, Charles August Albert.** 1817年生於 Sainte-Hippolyte; 死於 1882年。教授於巴黎之 Sorbonne。
- Brouncker, William, Lord.** 生於1620(?)年; 1684年死於 Westminster。皇家學會之最初會長。於級數之理論有所貢獻。
- Brancelleschi, Filippo.** 1979年生於 Florence; 1446年4月16日死於該處。有名之意大利 建築家。
- Bürgi, Joost (Jobst).** 1552年生於瑞士 St. Gall 之 Lichtensteig; 1632年死於 Cassal。最初提出對數之一種之一人。且爲最初承認方程式之第二邊等於零之價值之人。
- Caporali, Ettore.** 1855年生於 Perugia; 1886年死於 Naples。數學教授, 而著有幾何學。
- Cardan, Jerome (Hieronymus, Girolamo).** 1501年生於 Pavia; 1576年死於羅馬。於 Bologna 及 Padua 爲數學教授。數學家, 物理學家, 兼星學家。其對於代數學及外擺線之理論之貢獻, 爲其主要者也。
- Carnot, Lazare Nicolas Marguerite.** 1753年生於 Nolay, Côte d'Or; 1823年於流徙中死於 Magdeburg。於近世幾何有所貢獻。
- Cassini, Giovanni Domenico.** 1625年生於 Nice 附近之 Perinaldo; 1712年死於巴黎。Bologna 之天文教授, 且四代間保持巴黎天文會長之地位之家族之第一人。
- Castigliano, Carlo Alberto.** 1847年至 1884年間人。意大利 工程師。
- Catatan, Eugène Charles.** 1814年5月30日生於比利時之 Bruges; 死於 1894年4月14日。於巴黎及 Liège 爲數學教授。
- Cataldi, Pietro Antonio.** 意大利 數學



- 家，生於1548年；1626年死於 Bologna, Florence, Perugia 及 Bologna 之數學教授。曾應用連分數以開方者。
- Cattaneo, Francesco**, 1811年至1875年間人。Pavia 之大學之物理學及重學教授。
- Cauchy, Augustin Louis**, 1789年生於巴黎；1857年死於 Seeaux。於巴黎為數學教授。為當時最卓越之數學家之一。於函數論，行列式，微分方程式，剩餘之理論，橢圓函數，收斂級數等皆有所貢獻。
- Cavalieri, Bonaventura**, 1598年生於 Milan；1647年死於 Bologna。以其微量之法開拓微分學(1629)。
- Cayley, Arthur**, 1821年8月16日生於 Surrey 之 Richmond；1895年1月26日死於劍橋。劍橋大學數學之 Sadlerian 教授。數學上之重要著作者。
- Ceva, Giovanni**, 1648年約至1737年間人。關於橫截線之理論有所貢獻。
- Charles, Michel**, 1793年11月15日生於 Chartres；1880年12月12日死於巴黎。貢獻於近世幾何學之理論甚大。
- Chellini, Domenico**，生於1802年；死於1878年11月16日。意大利數學家；於解析幾何學及重學有所貢獻。
- Chuquet, Nicolas**，來自 Lyons；約死於1500年。住居巴黎，於代數學及算術有所貢獻。
- Clairaut, Alexis Claude**, 1713年生於巴黎；1765年死於同地。物理學家，天文家，數學家。於曲線之研究之卓越者。
- Clausberg, Christlieb von**, 1689年生於 Danzig；1751年死於 Copenhagen。
- Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred**，生於1833年1月19日。死於1872年11月7日。Carlsruhe, Giessen 及 Göttingen 之數學教授。
- Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas**, 1743年生於 Aisne 之 St. Quentin 附近之 Ribemont，1794年死於 Bourglala-Reine。Académie des Sciences 之書記。於適遇法之理論有所貢獻。
- Cotes, Roger**, 1682年7月10日生於 Leicester 附近之 Burbage；1716年6月5日死於劍橋。劍橋之天文學教授。氏之名附於幾何學，代數學及解析法中之許多定理。牛頓曰：“Cotes 若在，吾人必有所學”。
- Cramer, Gabriel**, 1704年生於 Geneva。1752年死於 Bagnols。增補方程式論，再興行列式之研究(自 Leibnitz 始)。著曲線論。
- Crelle, August Leopold**, 1780年生於 Eichwerder (Wriezen a. d. Oder)；死於1855年。Journal für reine und angewandte Mathematik (1823年)之創立者。
- D'Alembert, Jean le Rond**, 1717年生於巴黎。1783年死於同地。物理學家，數學家，天文家。於方程式論有所貢獻。
- De Beaune, Florimond**, 1601年至1652年間人。Descartes 之幾何學之註釋者。

- De la Gournerie, Jules Antoine René Maillard.** 生於 1814 年; 1883 年死於巴黎。貢獻於畫法幾何學。
- Del Monte, Guidobaldo.** 1545 年至 1607 年間人。著有重學及配景論。
- Democritus,** 紀元前 460 年生於 Thrace 之 Abdara; 約死於紀元前 370 年。遊學於埃及及波斯。著有數論及幾何學, 提示無窮小數之觀念。
- De Moivre, Abraham.** 1667 年生於 Champagne 之 Vitry, 1754 年死於倫敦。貢獻於複虛數及適遇法。
- De Morgan, Augustus.** 1806 年 6 月生於 Madras 之 Madura; 死於 1871 年 3 月 18 日。倫敦大學之最初之數學教授 (1828 年)。氏為有名之教員, 而於代數學及適遇法亦有所貢獻。
- Desargues, Girard.** 1593 年生於 Lyons, 死於 1662 年。近世幾何學之創立者之一。
- Descartes, René du Perron.** 1596 年生於 Touraine 之 La Haye; 1650 年死於 Stockholm。解析幾何學之發明者。貢獻於代數學者甚多。
- Dioscurus.** 約紀元前 335 年時人; 希臘幾何學家。Menaechmus 之弟。其名與圓積線有密切之關係。
- Diocles.** 約紀元前 180 年頃人。希臘幾何學家。氏發明蔓葉線 (Cissoid), 而用之以解第里安問題。
- Diophantus of Alexandria.** 約 275 年時人。希臘代數學家中之最卓越者; 特貢獻於不定方程式。
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune.** 1805 生於 Düren; 1859 年死於 Göttingen。於 Göttingen 繼 Guass 為教授。於數論之拔萃之貢獻者。
- Dodson, James.** 死於 1757 年 11 月 23 日。De Morgan 之曾祖父。特以其浩大之逆對數表 (1742 年) 而著名。
- Donatello,** 1386 年至 1468 年間人。意大利雕刻師。
- Du Bois-Reymond, Paul David Gustav.** 1831 年 12 月 2 日生於柏林; 1889 年 4 月 7 日死於 Freiburg, Heidelberg, Freiburg 及 Tübingen 之數學教授。
- Duhamel, Jean Maire Constant.** 1797 年生於 Saint-Malo; 1872 年死於巴黎。始記述於數學關於類別之一人。
- Dupin, François Pierre Charles.** 1784 年生於 Varzy; 1873 年死於巴黎。
- Dürer, Albrecht.** 1471 年生於 Nuremberg; 1528 年死於該處。有名美術家。近世曲線論創立者之一人。
- Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max.** 1823 年生於柏林; 1852 年死於該處。於 invariant 及 covariant 方面之最早研究者之一人。
- Enneper, Alfred.** 1830 年至 1885 年間人。Göttingen 之教授。
- Epaphroditus.** 約 200 年時人。羅馬測量師。關於測量, 數論, 求積有所著述。
- Eratosithenes.** 紀元前 275 年生於非洲之 Cyrene; 紀元前 194 年死於亞歷山

- 大。拔萃之地理學家。以其求素數之「篩」而著名。
- Euclid.** 紀元前 300 年頃人。Ptolemy Soter 在位時，教授亞歷山大。自來最有名之幾何學教本即其所著之 Elements，是書凡十三卷。
- Eudoxus of Cnidus.** 紀元前 408 年至紀元前 355 年間人。Archytes 及柏拉圖之弟子。拔萃之幾何學家，特貢獻於比例論，相似論，及「黃金分割」。
- Euler, Leonhard.** 1707 年生於 Basel；1783 年死於聖彼得堡。十八世紀最大物理學家，天文學家及數學家之一。Kelland 曰：——“於其繁卷浩籍中，……代數學及重學之各分門可謂研究之完善寶庫”。
- Eutocius.** 480 年生於 Ascalon。幾何學者。註釋亞基默德，阿破羅尼，多來米之著作。
- Fagnano, Giulio Carlo, Count de.** 1682 年生於 Sinigaglia，死於 1766 年。於曲線之研究有所貢獻。尤拉稱揚橢圓函數之著作，以氏為嚆矢。
- Faulhaber, Johann.** 1580 年至 1635 年間人。貢獻於級數之理論。
- Fermat, Pierre de.** 1601 年生於 Montauban 附近之 Beaumont-de-Lomagne。1665 年 1 月 12 日死於 Castres。為當時最多才之數學家之一；其關於數論之著作，從未有能與之匹敵者。
- Ferrari, Ludovico.** 1522 年生於 Bologna；死於 1562 年。得四次方程式之解法。
- Ferro, Scipione del.** 約 1465 年生於 Bologna；死於 1526 年 10 月 29 日與 11 月 16 日之間。Bologna 之數學教授。研究單用圓規之幾何學，又為解決特別三次方程式  $x^3 + px = q$  之最初之人。
- Feuerbach, Karl Wilhelm.** 1800 年生於 Jena；死於 1834 年。貢獻於近世初等幾何。
- Fibonacci.** 見 Legnardo of Pisa。
- Fourier, Jean Baptiste Joseph, Baron.** 1768 年生於 Auxerre；1830 年死於巴黎。物理學家及數學家。於方程式論及級數論有所貢獻。
- Frénicle.** Bernhard Frénicle de Bessy。1605 年至 1675 年間人。勿爾馬之友。
- Frézier, Amédée François.** 1682 年生於 Chambéry；1773 年死於 Brest。畫法幾何學之創立者之一。
- Friedlein, Johann Gottfried.** 1828 年生於 Regensburg；死於 1875 年。
- Frontinus, Sextus Julius.** 40 年至 103 年間人。羅馬測量師及工程師。
- Galois, Évariste.** 1811 年生於巴黎；1832 年死於該處。羣論之創立者。
- Gauss, Karl Friedrich.** 1777 年生於 Brunswick；1855 年死於 Göttingen。為近世最大數學家。物理家及天文學家之卓著者。舉凡數論，函數論，方程式論，行列式，複虛數，雙曲線幾何學，其非常之才所負者甚多。
- Geber. Jabir ben Aflah.** 約 1085 年時

- 人。Seville 之天文學家；著有球面三角法。
- Gallibrand, Henry.** 1597 年至 1637 年間人。Gresham 高等學校之天文學教授。
- Geminus.** 紀元前 100 年生於 Rhodes；紀元前 40 年，死於羅馬。著有天文學及歐克里得以前之數學史。
- Gerbert.** 法王 Sylvester 第二。940 年生於 Auvergne；1003 年 5 月 13 日死於羅馬。有名教師；999 年選為法王。關於算術有所著作。
- Gerhard of Cremona.** 出自 Cremona (或云出自 Andalusia 之 Carmona)。生於 1114 年；1187 年死於 Toledo。物理學家，數學家兼星學家。將希臘及亞拉伯之若干著作，由亞拉伯文譯成拉丁文。
- Germain, Sophie.** 1776 年至 1831 年間人。關於彈性面有所著述。
- Girard, Albert.** 約 1590 年至 1633 年間人。貢獻於方程式論，普通多邊形，及記號法。
- Göpel, Gustav Adolf.** 1812 年至 1847 年間人。以其雙曲線的橢圓函數之研究而著名。
- Grammateus, Henricus.** (德文名為 Heinrich Schreiber) 約 1476 年生於 Erfurt。算術家。
- Grassmann, Hermann Günther.** 1809 年 4 月 15 日生於 Stettin。1877 年 9 月 26 日死於該處。特以其 Ausdehnungslehre (1844 年) 而著名。又關於算術，三角法，物理學有所著作。
- Grebe, Ernst Wilhelm.** 1804 年 8 月 30 日生於 Oberhesse 之 Marbach 附近。1874 年 1 月 14 日死於 Cassel。於近世初等幾何學有所貢獻。
- Gregory, James.** 1638 年 11 月生於 Aberdeenshire 之 Drumoak；1675 年死於愛丁堡。於 St. Andrew 及愛丁堡為數學教授。證明  $\pi$  之為不通約數；於級數論有所貢獻。
- Grunert, Johann August.** 1797 年生於 Halle A. S.；死於 1872 年。Greifswald 之教授，而為 Grunert's Archiv 之出版者。
- Gua, Jean Paul de Gua de Malves.** 1713 年生於 Carcassonne；1785 年 6 月 2 日死於巴黎。始與狄卡德符號之法則嚴密之證明。
- Gudermann, Christoph.** 1798 年 3 月 23 日生於 Winneburg；1852 年 9 月 25 日死於 Münster。引導雙曲線函數於近世解析法，氏與有力馬。
- Guldin, Habakkuk (Paul).** 1577 年生於 St. Gall；1643 年死於 Grätz。特以其取自 Pappus 之旋轉體之定理而著名。
- Hachette, Jean Nicolas Pierre.** 1769 年生於 Mézières；1834 年死於巴黎。代數學家及幾何學家。
- Halley, Edmund.** 1656 年 11 月 8 日生於倫敦附近之 Haggerston；1742 年 1 月 14 日死於格林維基。特以其關於

- 物理學及天文學之貴重之貢獻而著名。
- Halphen, George Henri.** 1844 年 10 月 30 日生於 Rouen; 1889 年死於 Versailles, 巴黎多藝學校之教授。貢獻於微分方程式論及橢圓函數論。
- Hamilton, Sir William Rowan.** 1805 年 8 月 3 日或 4 日生於 Dublin. 1865 年 9 月 2 日死於該處。Dublin 之天文教授。關於光學,力學大有所貢獻,而普通以其四元論之發明而著名。
- Hankel, Hermann.** 1839 年 2 月 14 日生於 Halle. 1873 年 8 月 29 日死於 Schramberg. 以貢獻於複虛數論及數學史爲多。
- Harnack, Karl Gustav Axel.** 1851 年生於 Dorpat; 1888 年死於 Dresden. Dresden 之多藝學校之教授。
- Harriot, Thomas.** 1560 年生於牛津; 1621 年 7 月 2 日死於 Isleworth 附近之 Sion House. 當時最有名之英國代數學家。
- Heron of Alexandria.** 約紀元前 110 年時人。有名測量師及機器師。貢獻於求積。
- Hesse, Ludwig Otto.** 1811 年 4 月 22 日生於 Königsberg; 1874 年 8 月 4 日死於 Munique. 於曲線論及行列式論有所貢獻。
- Hipparchus.** 紀元前 180 年生於 Bithynia 之 Nicæa; 紀元前 125 年,死於 Rhodes. 有名天文學家,球面三角法之最早著者之一。
- Hippias of Elis.** 約生於紀元前 460 年。數學家,天文學家,自然科學家。發明圓積線。
- Hippocrates of Chios.** 約紀元前 440 年頃人。著最初希臘語之數學初等教科書。
- Horner, William George.** 生於 1786 年; 1837 年 9 月 22 日死於 Bath. 特以其數字方程式實根之近似法(1819年)而著名。
- Hrabanus Maurus.** 788 年至 856 年間人。數學教師。Mainz 之大僧正。
- Huddle, Johann.** 1633 年生於 Amsterdam; 1704 年死於該處。貢獻於方程式論及級數論。
- Hunain ibn Ishak.** 死於 873 年。亞拉伯物理學家。翻譯數種希臘語科學書。
- Huygens, Christian, van Zuylichem.** 1629 年生於海牙; 1695 年死於該處。著名物理學家及天文學家。其於數學,於曲線之研究有所貢獻。
- Hyginus.** 約 100 年頃人。羅馬測量師。
- Hypatia, Alexandria** 之 Theon 之女。375 年至 415 年時人。著有若干數學之著作。見 Charles Kingsley's Hypatia.
- Hypsicles of Alexandria.** 約紀元前 190 年時人。著有立體幾何學及數論,且解法某數不定方程式。
- Isamblichus.** 約 325 年時人。出自 Chalcis. 數學之各分科皆有所著述。
- Ibn Albauna.** Abul Abbas Ahmed ibn Mohammed ibn Otman al Azdi al

- Marrakushi ibn all Banna Algatnati. 1252 年或云 1257 年生於摩洛哥。西亞拉伯代數學家；有益於世之著作家。
- Ibn Yunus**, Abul Hasan Ali ibn Abi Said Abderrahman. 960 年至 1008 年間人。亞拉伯天文學家；作 Hakimitic 表。
- Isidorus Hispalensis**. 570 年生於 Carthagena；636 年死於 Seville. Seville 之大僧正。其所著之 *Origines* 載有關於數學之論文。
- Ivory**, James. 1765 年生於 Dundee；1842 年 9 月 21 日死於倫敦。概知為物理學家。
- Jacobi**, Karl Gustav Jacob. 1804 年 12 月 10 日生於 Potsdam；1851 年 2 月 18 日死於柏林。橢圓函數及 theta 函數論及函數行列式論之重要貢獻者。
- Jamin**, Jules Celestin. 生於 1818 年；1886 年死於巴黎。物理學教授。
- Joannes de Praga** (Jnhannes Schindell). 1370 或謂 1375 年生於 Königgrätz；約 1450 年死於 Prag. 天文學家兼數學家。
- Johannes of Seville** (Johannes von Luna, Johannes Hispalensis). 約 1140 年時人屬於西班牙之猶太人；著有算術及代數學。
- Johann von Gmünden**. 1375 年與 1385 年之間生於 Gmünden am Traunsee. 1442 年 2 月 23 日死於 Vienna. Vienna 之數學及天文學教授；Teuton
- ie 大學之第一博學之數學教授。
- Kästner**, Abraham Gotthelf. 1719 年生於 Leipzig；1800 年死於 Göttingen. 著有數學史。
- Kepler**, Johann. 1571 年生於 Stuttgart 附近之 Württemberg；1630 年死於 Regensburg. 天文學家（當年少時為 Tycho Brahe 之助手）；Proctor 曰：“Kepler 可謂造宇宙之大廈”。擴張對數之用以拔萃者。述“連續之原理”（1604 年）；有功於立微積分學之基礎。
- Khayyam**, Omar. 1123 年死於 Nishapur. 天文學家，幾何學家，代數學家。普通以隔句押韻四行之詩集而著名。
- Köbel**, Jacob. 1470 年生於 Heidelberg；1533 年死於 Oppenheim. 關於算術拔萃之著作家（1514 年，1520 年）。
- Lacroix**, Sylvestre François. 1765 年生於巴黎；1843 年 5 月 25 日死於該處。著有關於數學之最難方面之書。
- Laguerre**, Edmond Nicolas. 1834 年 4 月 9 日生於 Bar-le-Duc；1886 年 8 月 14 日死於該處。貢獻於高等解析法。
- Lagrange**, Joseph Louis Comte. 1736 年 1 月 25 日生於 Turin；1813 年 4 月 10 日死於巴黎。當時第一等數學家之一。關於變分學，數論，行列式，微分方程式，有限微差法，方程式論，橢圓函數有所貢獻。解析重學之著者。又為有名之天文學家。
- Lahire**, Philippe de. 1640 年 3 月 18 日

- 生於巴黎；1718年4月21日死於該處。於曲線之研究及幻方有所貢獻。
- Laloubère, Antoine de.** 1600年生於 Languedoc. 1664年死於 Toulouse. 貢獻於曲線之研究。
- Lambert, Johann Heinrich.** 1728年生於上部 Alsace 之 Mühlhausen; 1777年死於柏林。雙曲線三角法之創立者。
- Lame, Gabriel.** 1795年生於 Tours; 1870年死於巴黎。關於彈性及直交面有所著述。
- Lauden, John.** 1719年生於 Peterborough 附近之 Peakirk; 1790年死於 Milton。其一定理(1755年)與 Euler 及 Lagrange 以橢圓積分之研究之端緒。
- Laplace, Pierre Simon, Marquis de.** 1749年3月23日生於 Normandy 之 Beaumont-en-Auge; 1827年3月5日死於巴黎。有名天文學家, 物理學家及數學家。於最小二乘法, 行列式, 方程式, 級數, 適遇法及微分方程式之理論有所增補。
- Legendre, Adrien Marie.** 1752年9月18日生於 Toulouse; 1833年1月10日死於巴黎。有名數學家, 特有貢獻於橢圓函數論, 數論, 最小二乘法, 及幾何學。發見 "law of quadratic reciprocity", Gauss 謂之 "算術之寶玉"。
- Leibnitz, Gottfried Wilhelm.** 1646年生於 Leipzig; 1716年死於 Hanover. 近世博學之士之一; 卓越之哲學家及數學家, 爲微分學之發明者之一, 又爲今日所行其記法之發明者。
- Leonardo of Pisa, Fibonacci (filius Bonacci, Bonacius 之子).** 1180年生於 Pisa; 約死於 1250年。遊歷甚廣, 得關於印度數字及亞拉伯普通學術之知識, 歸國後, 載於其所著之 Liber Abaci, Practica geometriae 及 Flos 而出版。
- L'Hospital, Guillaume François Antoine de, Marquis de St. Mesme.** 1661年生於巴黎; 1704年死於該處。爲最初承認微分學之價值之一人。
- Lhuillier, Simon Antoine Jean.** 1750年生於 Geneva; 死於 1840年。幾何學家。
- Libri, Carucci dalla Sommaja, Guglielmo Brutus Icilius Timoleon.** 1803年1月2日生於 Florence; 1869年9月23日死於 Villa Fiesole。著有意大利數學史。
- Lie, Marius Sophus.** 生於 1842年12月12日; 死於 1899年2月18日。於 Christiania 及 Leipzig 以應用其 Continuous groups of transformations 於微分方程式而特著名。
- Liouville, Joseph.** 1809年生於 St. Omer; 死於 1882年。所謂 Liouville 雜誌之創立者。
- Lobachevsky, Nicolai Ivanovich.** 1793年生於 Makarief; 1856年2月12日至24日死於 Kasan。所謂非歐克里得幾何學之創立者之一。

- Ludolph van Ceulen.** 見 Van Ceulen 條。
- Mac Cullagh, James.** 1809年生於 Strabane 附近; 1846年死於 Dublin. 爲 Dublin 之 Trinity College 數學及物理學教授。
- Maclaurin, Colin.** 1698年生於 Argyllshire 之 Kilmodan. 1746年6月14日死於 York. 愛丁堡之數學教授。於圓錐曲線及級數有所貢獻。
- Malfatti, Giovanni Francesco Giuseppe.** 1731年9月26日生於 Ala; 1807年10月9日死於 Ferrara. 以其名冠於幾何學之問題而有名。
- Malus, Étienne Louis.** 1775年6月23日生於巴黎; 1812年2月24日死於該處. 物理學家。
- Mascheroni, Lorenzo.** 1750年生於 Castagneta; 1800年死於巴黎. 集備用圓規之幾何學之大成(1795年)。
- Maurolico, Francesco.** 1494年9月16日生於 Messina; 死於 1575年7月21日. 當時出類之幾何學家. 又關於三角法有所著述。
- Maximus, Planudes.** 約 1330年頃人. 出自 Nicomedia. 在君士坦丁堡之希臘數學家. 關於 Diophantus 之註釋及算術有所著述。
- Menaechmus.** 約紀元前 350年頃人. 柏拉圖之弟子. 圓錐曲線之發明者。
- Menelaus of Alexandria.** 約 100年頃人. 希臘數學家及天文學家著有幾何學及三角法。
- Mercator, Gerhard.** 1512年生於 Flanders 之 Rupelmonde, 1594年死於 Duisburg. 地理學家。
- Mercator, Nicholas.** (德文名爲 Kaufmann,) 約 1620年生於 Cismar 附近; 1687年死於巴黎. 發明  $\log(1+x)$  之級數。
- Metius, Adriaen.** 1571年生於 Alkmaar; 1635年死於 Franeker. 誘出  $\pi$  之近似數, 實爲其父所得。
- Mensurier de la Place, Jean Eaptiste Marie Charles.** 1754年生於巴黎; 1793年死於 Cassol. 發見關於曲面之曲率之一定理。
- Méziriac, Claude Gaspard Bachet de.** 1581年生於 Boarg-en-Bresse; 死於 1638年. 以其 Problèmes plaisants 等 (1624年) 及 Diophantus 之翻譯而著名。
- Möbius August Ferdinand.** 1790年11月17日生於 Schulpforta; 1868年9月26日死於 Leipzig. 於近世幾何學之先進者. Der Barycentrische Calcül (1827年) 之著者。
- Mohammed ibn Musa.** 見 Al Khowarizmi 條。
- Moirre.** 見 De Moivre 條。
- Mollweide, Karl Brandan.** 1774年2月3日生於 Wolfenbüttel; 1825年3月10日死於 Leipzig. 關於天文學及數學有所著述。
- Monge, Gaspard, Comte de Péluse.**



- 1746 年生於 Beaune; 1818 年死於 巴黎。畫法幾何之發見者。於曲線及曲面之研究, 及微分方程式有所貢獻。
- Montmort, Pierre Raymond de.** 1678 年生於 巴黎; 1719 年死於同地。貢獻於適遇法之理論及級數之總和法。
- Moschopolus, Manuel.** 約 1300 年時人。Byzant 之數學家。以其關於幻方之著作而著名。
- Mydorge, Claude.** 1585 年生於 巴黎; 1647 年死於該處。最先法文之圓錐曲線論之著作者。
- Napier, John.** 1550 年生於 滿加斯德, 後即居住於 愛丁堡 之郊外; 1617 年死於其地。對數之發明者。貢獻於三角法。
- Newton, Sir Issac.** 1642 年 12 月 25 日生於 Lincolnshire 之 Woolsthorpe; 1727 年 3 月 20 日死於 Kensington。繼 Barrow 為劍橋大學之數學之 Lucasian 教授(1669 年)。世界大數學物理學家。發明微積分(約 1666 年)。貢獻於級數論, 方程式論, 曲線論以及當時所知數學之各分科甚多。
- Nicole, François.** 1683 年生於 巴黎。1758 年死於其地。有限微差法之論文之最初之人。
- Nicomachus of Girasa Arabia.** 100 年時人。著有算術。
- Nicomedes of Girasa.** 紀元前 180 年時人。發明冠其名之蚌線 (Conchoid)。
- Nicolaus von Cusa.** 1401 年生於 Mosel 河畔之 Cuss; 1464 年 8 月 11 日死於 Todi。神學家, 物理學家, 天文學家及幾何學家。
- Odo of Clung.** 879 年生於 Tours; 942 年或云 493 年死於 Clung。關於算術有所著作。
- Oenopides of Chios.** 紀元前 465 年時人。遊學於埃及。幾何學家也。
- Olivier, Théodore.** 1793 年 1 月 21 日生於 里昂; 1853 年 8 月 5 日死於同地。著有畫法幾何學。
- Oresme, Nicole.** 約 1320 年生於 Normandy; 1382 年死於 Lisieux。著有算術及幾何學。
- Oughtred, William.** 1574 年生於 Eton; 1660 年死於 Albury。著有算術及三角法。
- Pacioli, Luca.** Era Luca di Borgo di Santi Sepulchri。約於 1445 年生於 Tuscany 之 Berzo San Sepolcro; 約 1509 年死於 Florence。掌教鞭於 意大利 之數市。其所著之 Summa de Arithmetica, Geometria 等, 實為數學界大著作之嚆矢(1494)。
- Pappus of Alexandria.** 約 300 年頃人。編纂一書網羅當時數學之知識。
- Parent, Antoine.** 1666 年生於 巴黎; 1716 年死於其地。對於三坐標而論表面之最初之人(1700 年)。
- Pascal, Blaise.** 1623 年生於 Clermont; 1662 年死於 巴黎。物理學家, 哲學家, 數學家。貢獻於數論, 適遇法及幾何學。
- Peirce, Charles S.** 1839 年 9 月 10 日生

- 於 Mass 之劍橋。關於論理學有所著述。
- Pell, John**, 1610年3月1日生於Sussex; 1985年12月10日死於倫敦。翻譯Rahn之代數學。
- Perseus**, 紀元前150年時人。希臘幾何學家; 研究螺線。
- Peuerbach, Georg von**, 1423年5月30日生於上部澳洲之Peuerbach; 1461年4月8日死於維也納。著名教師且著有算術, 三角法, 及天文學。
- Pfaff, Johann Friedrich**, 1765年生於Stuttgart; 1825年死於Halle。天文學家及數學家。
- Pitiscus, Bartholomaeus**, 生於1561年8月24日; 1613年7月2日死於Heidelberg。著有算術, 且為最初用現今之小數點者(1612年)。
- Plana, Giovanni Antonio Amaedo**, 1781年11月8日生於Voghera; 1864年1月2日死於Turin。數學的天文學家及物理學家。
- Planudes**, 見Maximus Planudes條。
- Plateau, Joseph Antoine Ferdinand**, 1801年10月14日生於Brussels; 1883年9月15日死於Ghent。於Ghent為物理學教授。
- Plato**, 紀元前429年生於雅典; 死於紀元前348年。Academy之創立者。貢獻於數學的哲學。
- Plato of Tivoli**, 1120年時人。翻譯Al Battani之三角法及其他著作。
- Plücker, Johann**, 1801年7月16日生於Elberfeld; 1868年5月22日死於Bonn。於Bonn及Halle為數學教授。為此世紀中第一等幾何學家之一。
- Poisson, Siméon Denis**, 1781年生於Loiret之Pithiviers; 1840年死於巴黎。概知其為物理學家。於定積分之研究及級數有所貢獻。
- Poncelet, Jean Victor**, 1788年生於Metz; 1867年死於巴黎。射影幾何學之創作者之一。
- Pothenot, Laurent**, 1732年死於巴黎。法國之College Royale之數學教授。
- Proclus**, 412年生於Byzantium; 死於485年。作歐克里得之註解。研究高等平面曲線。
- Ptolemy, (Ptolemaeus Claudius)**, 87年生於Ptolemais; 165年死於亞歷山大。最大希臘天文家之一。
- Pythagoras**, 紀元前580年生於Samos; 紀元前501年死於Megapontum。遊學於埃及及東方。於南意大利之Croton創立Pythagoras學校。發數論之端緒。有名幾何學家。
- Quételet, Lambert Adolph Jacques**, 1796年2月22日生於Ghent; 1874年2月7日死於Brussels。比利時之皇立天文臺之管理者。貢獻於幾何學, 天文學, 及統計學。
- Ramus, Peter (Pierre de la Ramée)**, 1515年生於Picardy之Cuth; 1572年8月24日至25日巴黎 St. Bartholomew之殺戮之際被害。哲學家; 然又為

數學界之卓越之著作者。

**Recordie, Robert.** 1510 年生於 Wales 之 Tenby; 1558 年死於倫敦之獄中。於牛津爲數學及修辭學教授。始用符號“=”以表相等。

**Regiomontanus, Johannes Müller.** 1436 年 6 月 6 日生於 Königsberg 附近; 1476 年 7 月 6 日死於羅馬。數學家, 天文家兼地理學家。翻譯希臘數學書者。最初三角法教科書之著者。

**Remigius of Auxerre.** 約死於 908 年。爲 Alcuin 之弟子。著有算術。

**Rhaeticus, Georg Joachim.** 1514 年生於 Feldkirch; 1576 年死於 Kaschau。Wittenberg 之數學教授; Copernicus 之弟子, 而爲其書之出版者。於三角法有所貢獻。

**Riccati, Count Jacopo Francesco.** 1676 年生於 Venice; 1754 年死於 Trèves。於物理學及微方程式有所貢獻。

**Richelot, Friedrich Julius.** 1808 年 11 月 6 日生於 Königsberg; 1875 年 3 月 31 日死於同地。於橢圓函數及 Abel 函數有所著作。

**Riemann, Georg Friedrich Bernhard.** 1826 年 9 月 17 日生於 Breselenz; 1866 年 7 月 20 日死於 Selasca。貢獻於函數論及曲面之研究。

**Riese, Adam.** 1492 年生於 Lichtenfels 附近之 Staffelstein; 1559 年死於 Annaberg。十六世紀關於算術最有勢力之教師及著作者。

**Roberval, Giles Persone d'.** 1602 年生於 Roberval; 1675 年死於巴黎。於巴黎爲數學教授。著關於切線及擺線之幾何學。

**Rollé, Michel.** 1652 年 4 月 22 日生於 Ambert; 1719 年 11 月 8 日死於巴黎。於方程式論發明冠其名之定理。

**Rudolf, Christoff.** 十六世紀前葉人。德國代數學家。

**Sacro-Bosco, Johannes de.** 1200 年 (†) 生於 Yorkshire 之 Holywood (Halifax); 1256 年死於巴黎。於巴黎爲數學及天文學教授。特以其所著之 Tractatus de sphaere mundi 而著名。

**Saint-Venant, Adhémar Jean Claude Barré de.** 生於 1797 年; 1886 年死於 Vendôme。關於彈性及扭性之著者。

**Saint-Vincent, G'egoire de.** 1584 年生於 Bruges; 1667 年死於 Ghent。以求與圓等積之正方形失敗而有名。

**Saurin, Joseph.** 1659 年生於 Courtaison; 1737 年死於巴黎。著切線之幾何學。

**Scheffer, Ludwig.** 1859 年生於 Königsberg; 1885 年死於 Munich。函數論之著者。

**Schindel, Johannes.** 見 Johannes de Praga 條。

**Schwenter, Daniel.** 1585 年生於 Nuremberg; 死於 1636 年。於 Altdorf 爲東方言語及數學教授。

- Serenus of Antissa.** 約 350 年時人。幾何學家。
- Serret, Joseph Alfred.** 1819 年 8 月 30 日生於巴黎; 1885 年 3 月 2 日死於 Versailles。關於代數學及微積分有名教科書之著者。
- Sextus Julius Africanus.** 約 230 年頃人。著有數學史。
- Simpson, Thomas.** 1710 年 8 月 20 日生於 Bosworth; 1761 年 5 月 14 日死於 Woolwich。代數學, 幾何學, 三角法, 及流數衍教科書之著者。
- Sluze, René François Walter de.** 1622 年生於 Maas 河畔之 Visé; 1685 年死於 Liège。貢獻於微積分之記法及幾何學。
- Smith, Henry John Stephen.** 1826 年生於 Dublin; 死於 1883 年 2 月 9 日。關於數論為英國之第一等著者。
- Snell, Willebrord, Van Roijen.** 1581 年生於 Leyden; 1626 年死於該處。物理學家, 天文家, 又為三角法之貢獻者。
- Spottiswoode, William.** 1825 年 1 月 11 日生於倫敦; 1883 年 6 月 27 日死於該處。皇家學會會長。代數學及幾何之著者。
- Staudt, Karl Georg Christian von.** 1798 年 1 月 24 日生於 Rothenburg a. d. Tauber; 1867 年 6 月 1 日死於 Erlangen。近世幾何學之拔萃貢獻者, Geometrie der Lage 即為其所著之書。
- Steiner, Jacob.** 1796 年 3 月 18 日生於 Utzendorf; 1863 年 4 月 1 日死於 Pern。有名幾何學家。
- Stevin, Simon.** 1548 年生於 Bruges。1620 年死於 Leyden (或謂海牙)。物理學家及算術家。
- Stewart, Matthew.** 1717 年生於 Bute 島之 Rothsay; 1785 年死於愛丁堡。於愛丁堡繼 Maclaurin 為數學教授, 貢獻於近世初等幾何學。
- Stifel, Michael.** 1486 年或謂 1487 年生於 Esslingen; 1567 年死於 Jena。特以其所著之 Arithmetica integra (1544 年) 而著名。
- Sturm, Jacques Charles François.** 1803 年生於 Geneva; 死於 1855 年。於巴黎之多藝學校為教授。Sturm 定理之發明者。
- Sylvester, James Joseph.** 1814 年 9 月 3 日生於倫敦; 1897 年 3 月 15 日死於同地。於牛津大學為純正幾何學之 Savilian 教授。
- Tabit ibn Korra.** 833 年生於米薩波打米亞; 902 年死於 Bagdad。數學家及天文學家。翻譯希臘數學家之著作, 著數論。
- Tartaglia, Nicolo.** (Nicolas the Stammerer. 真名為 Nicolo Fontana)。約 1500 年生於 Brescia; 約 1557 年死於 Venice。物理學家及算術家。其關於三次方程式之著作最著名。
- Taylor, Brook.** 1685 年生於 Edmonton; 1731 年死於倫敦。物理學家及數學家。概

- 以其關於級數之著作而著名。
- Thales.** 紀元前 640 年生於 Miletus; 紀元前 548 年死於雅典。希臘七賢之一。創設 Ionia 學校。遊歷埃及，學天文學及幾何學。希臘發起科學的幾何學之第一人。
- Theaetetus of Heraclea.** 紀元前 390 年時人。蘇格洛底之弟子。關於無理數及幾何學有所著作。
- Theodorus of Cyrene.** 紀元前 410 年時人。柏拉圖之數學教師。著有無理數。
- Theon of Alexandria.** 370 年時人。於亞歷山大為教師。出版希臘數學家之著作。
- Theon of Smyrna.** 130 年時人。柏拉圖派之哲學家。著有算術，幾何學，數學史，及天文學。
- Thymaridas of Paros.** 紀元前 390 年時人。畢達哥拉斯派學者。關於算術及方程式有所著作。
- Torricelli, Evangelista.** 1608 年生於 Faenza; 死於 1647 年。著名物理學家。
- Tortolini, Barnaba.** 1808 年 11 月 19 日生於羅馬; 死於 1874 年 8 月 24 日。負其名之 Annali 之發行者。
- Tremblay, Jean.** 1749 年生於 Geneva; 死於 1811 年。著有微分方程式。
- Tschirnhausen, Ehrenfried Walter, Graf von.** 1651 年生於 Kiesslingswalde; 1708 年死於 Dresden。創立 Catacaustics 之理論。
- Uboldi, Guido.** 見 Del Monte 條。
- Unger, Ephraim Solomon.** 1788 年生於 Coswig; 死於 1870 年。
- Urianus, Benjamin.** 1587 年至 1633 年間人。著三角法及計算表。
- Van Ceulen, Ludolph.** 1540 年 1 月 18 日(或謂 23 日)生於 Hildesheim; 1610 年 12 月 31 日死於荷蘭。以其  $\pi$  之計算而著名。
- Vandermonde, Charles Auguste.** 1735 年生於巴黎; 1796 年死於該處。Conservatoire pour les arts et metiers 之會長。
- Van Eyck, Jan.** 1385 年至 1440 年間人。荷蘭畫家。
- Van Schooten, Franciscus (年幼者).** 生於 1615 年; 死於 1660 年。狄卡及 Vieta 之書之發行者。
- Viete (Vieta), François, Seigneur de la Bigotière.** 1540 年生於 Fontenay-la-Comte; 1603 年死於巴黎。當時著名之代數學家。又著三角法及幾何學。
- Vincent.** 見 Saint-Vincent 條。
- Vitruvius, Marcus Vitruvius Pollio.** 紀元前 15 年生存之人。羅馬建築家。關於應用數學有所著作。
- Viviani, Vincenzo.** 1622 年生於 Florence; 1703 年死於該處。Galileo 及 Torricelli 之弟子。貢獻於初等幾何學。
- Wallace, William.** 生於 1768 年; 死於 1843 年。愛丁堡之數學教授。
- Wallis, John.** 1616 年生於 Ashford; 1703 年死於牛津。於牛津為幾何學之

- Savilian 教授。出版數學書甚多。與虛數之近世圖解的說明之端緒。
- Weierstrass, Karl Theodor, Wilhelm.** 1815 年 10 月 13 日生於 Ostfeld；1897 年 2 月 19 日死於柏林。該世紀中多能之數學家之一。
- Werner, Johann.** 1486 年生於 Nuremberg；死於 1528 年。著有數學，地理學，天文學。
- Widmann, Johann von Eger.** 1498 尚生存之人。編來布尼子代數學之講義。德文代數學之創作者。又著算術及幾何學。
- Witt, Johann de.** 生於 1625 年；死於 1672 年。狄卡德之友及助手。
- Wolf, Johann Christian von.** 1679 年生於 Breslau；1754 年死於 Halle。於 Halle 及 Marburg 爲數學及物理學教授。
- Woepeke, Franz.** 1826 年 5 月 6 日生於 Dessau；1864 年 3 月 25 日死於巴黎。研究亞拉伯數學發達史。
- Wren, Sir Christopher.** 1632 年生於東 Knoyle；1723 年死於倫敦。於 Gresham College 爲天文學教授；於牛津爲 Savilian 教授；皇家學會會長。然氏全以建築家之大著作而著名。

## II. 本國數學家\*

## 二 畫

丁 巨 元人，著有算法八卷，見知不足齋叢書。

丁取忠 清同治時人，刊白芙堂算學十七種，又刊白芙堂算學叢書三十一種。

## 四 畫

王 舊 三國時人，於圓率有所貢獻。

王孝通 唐太宗時人，著有緝古算經一卷。

王真儒 唐貞觀時人。

王錫闡 字寅旭，號曉菴，清初吳江人，著曉菴新法六卷。

王元啟 字宋賢，清乾隆時嘉興人。於勾股形有所研究。著書已刊者為星齋雜著。

王裕之 宋元間絳人，撰細草。

毛 晉 明末常熟人，精通中算。

## 五 畫

石信道 宋元間鹿泉人。撰鈴經。

任弘濟 宋人，有一法算法問答一卷。

## 六 畫

朱世傑 字漢卿號松庭，元時著名數學家。發明四元。於堆積，級數亦有所推進。

朱載堉 明人，著有算學新說。

朱元濬 明萬曆時人，著有庸章算法。

朱駿聲 清道光時人，著有天算瑣記四卷，數度衍約四卷。

朱 鴻 清嘉慶時人，計算圓率三十九位。

江 本 唐人，有一位算法二卷。

江 永 字慎修，康熙時婺源人。作數學八卷。又續數學一卷，曰正弧三角疏義。

又有推步法解五卷。

年希堯 清初人，有測算刀圭三卷。

## 七 畫

李遵義 南北朝人，疏九章算術一卷。

李淳風 唐太宗時岐州雍人，為太史令。與梁述王真儒同正五曹孫子九章算術等書。又自撰麟德術。

李 冶 字仁卿，號敬齋，真定欒城人，宋末著名數學家，著有測圓海鏡(1248)及益古演段(1258)二書，皆闡明天元一之術。

李文一 宋元間博陸人，撰照膽。

李德載 宋元間平陽人，撰兩儀羣英集臻，兼有地元。

李紹穀 宋人，有求一指蒙一卷。

李之藻 明末人，與西人利瑪竇共成圓容較義一卷(1609)，同文算指前編二卷，通編八卷。

\* 以姓之筆畫為序，同姓者以時代之先後為序。

**李天經** 明人，繼徐光啟督修歷法，成歷書六十一卷。

**李光地** 字晉卿，號厚庵，福建安溪人，康熙庚戌進士，所著有記四分術，記太初術，記渾儀三篇。

**李子金** 清康熙時人，著有算法通義五卷，幾何易簡集，天弧象限集。

**李銳** 清乾隆時人，與阮元共著疇人傳。校測圓海鏡，推算立天元一細草，又校益古演段。自著方程新術草一卷，勾股算術細草一卷，弧矢算術細草一卷。校楊輝算法若干卷。復因秦九韶之法作開方說三卷，甫成上中二卷而卒，其徒黎應南續成之。

**李善蘭** 字壬叔，號秋綉，海寧人，生於嘉慶己卯正月，卒於光緒壬午十月。咸豐壬子至滬，與西士偉烈亞力 (Alexander Wylie) 共譯幾何原本後九卷，閱四年而成。又與偉烈亞力共譯侯勒天文十八卷 (Herschel's Outline of Astronomy)，棣斐甘 (Augustus De Morgan) 代數學十三卷，羅密士 (Elias Loomis) 代微積拾級十八卷，胡威立重學十八卷 (Whewell's Mechanics)，曲線說一卷，奈端數理若干卷 (Newton's Principle)。其自著則古昔齋算學，凡十三種，共二十四卷，同治乙卯彙刊行世。歲戊辰入北京同文館爲算學總教習，又著測圓海鏡解一卷，考數根法三卷，造整數勾股級數二卷。

**阮元** 字伯元，號雲臺，清乾嘉時 (1764—1849) 儀徵人。與李銳周治平共著疇

人傳四十六卷。

**杜忠** 漢初人，著有算術。

**杜高** 明人，訂正算法。

**杜知耕** 清康熙時人，著有數學論六卷，幾何論約七卷。

**沈括** 字存中，號夢溪，宋末錢塘人。學術浩博，文藝深長，兼通天文，方志，律歷，算數，醫卜之說。著夢溪筆談二十六卷，補筆談二卷，續筆談一卷，修城法式二卷。夢溪筆談卷十八有隙積術，隙積即堆積積。又有會圓術，自謂此二類皆造微之術。

**沈欽裴** 清嘉慶時人，校正李潢九章算術細草九卷，補演海島算經一卷，又校數學九章，補四元玉鑑細草。

**汪萊** 清乾嘉間人，於二次式三次式之根及堆積，皆有所研究。

**汪日楨** 清嘉道時人，有如積引蒙八卷。

**何平子** 元人，與安心齋著有詳明算法二卷。

**何國宗** 清初人，與梅穀成共主輯律歷淵源。

**何夢瑤** 清康熙時人，著有算法迪十二卷。

**安心齋** 元人，與何平子有詳明算法二卷。

**安清翹** 清乾嘉時人 (1759—1803)。著推步惟是四卷，學算存略三卷，一線表用六卷，矩線原本四卷，樂律新得二卷，號爲數學五書。

**吳信民** 明人，著九章比類算法。

**吳煇** 字樞亭，清乾隆時全椒人，著有



周髀算經圖注。

余進 明人，著有九章許通算法。

余楷 明人，著有一鴻算法。

邢雲路 明人，著有古今律歷考七十二卷。謂 $\pi=3.126$ ，又 $\pi=3.12132034$ 。

宋泉之 唐人，有九章術疏九卷。

宋景昌 清人，有開方之分還原術一卷。

## 八 畫

周公 文王之子，名且。相傳周髀算經爲周公商高二人問答之辭。又有謂九章算術爲周公遺書。

明安圖 清康熙時人，何國宗梅數成輯律歷淵源時，安圖亦與焉。著割圓密率捷法四卷，未成而卒。其子新，其弟子陳際新完成之。

易之瀚 清人，有四元釋例一卷，增例一卷。

## 九 畫

信都芳 南北朝人，傳祖暅之學。王延明鈔集五經算學，芳爲之注，且自著重差勾股及四術周髀宗。

保其壽 清人，著有遊戲算術一卷，又增補算法渾圓。

馬傑 明人，改正算法。

## 十 畫

耿壽昌 漢初人，刪補九章。

徐岳 漢末人，著數學記遺一卷。

徐仁美 宋人，增成玄一算經三卷。

徐光啟 字子先，號玄扈，明季（1562—

1634）上海人。從利瑪竇學天文算法火器，與意人龍華民（Nicola Langobardi）羅雅谷（Jiaco Rho）德人湯若望（Adam Schaal）鄧玉函（Jean Terenz）等修正歷法，先後成書七十餘卷。譯著甚多，其所譯幾何原本前六卷，爲尤著名者。

徐有壬 字君青，又字鈞卿，清烏程人，精數術，著務民義齋算學。

祖冲之 晉范陽人（429—500），得約率

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ 及密率 } \pi = \frac{355}{113} \text{。又注九章，}$$

造綴術數十篇。

祖暅 或作暅之，又作耳，冲之之子，少傳家學，亦以善算稱。

夏侯陽 晉人，有算經。

夏源澤 明人，有指明算法。

夏鸞翔 清道咸時人，著有少廣鏡鑿一卷，洞方術圖解二卷，致曲術圖解一卷，萬象一原九卷。

秦九韶 字道古，宋人，寓居湖州。嘗從隱君子受數學。數書九章，即其傑作，凡十八卷。

唐順之 字應德，明（1507—1560）武進人，著有勾股測望論，勾股容方圓論，弧矢論，分法論，六分論。

## 十一 畫

郭守敬 字若思，元順德邢臺人，大父榮，精算術。守敬承其業，又嘗學於劉秉忠，元世祖命之治歷。

陳從運 唐人，著有得一算法七卷。

- 陳尙德** 元人，撰石塘算書四卷。
- 陳必智** 明人，有算理明解。
- 陳蓋謨** 明人，有度測三卷。
- 陳厚耀** 字泗源，號曙峯，清康熙時泰州人。著有續增新法比例四十卷。
- 陳世仁** 字元之，海寧人，康熙乙未入翰林。著有少廣補遺一卷。
- 陳 譚** 清康熙時人，有勾股引蒙五卷，又勾股述二卷。
- 陳鶴齡** 清康熙時人，著有算法正宗。
- 陳萬策** 字對初，又字謙季，晉江人，康熙戊戌進士。受算學於梅文鼎，作中西算法異同論。
- 陳 杰** 清嘉道時人，著有輯古算經細草一卷，圖解三卷，音義一卷，算法大成上編十卷。
- 陸 績** 三國時吳人，以圓率
- $$\pi = \frac{142}{45} = 3.15.$$
- 陰景愉** 唐人，著有七經算術通義七卷。
- 許 商** 漢初人，著有算術。
- 許 榮** 明人，有九章詳註算法。
- 許桂林** 清乾嘉時人，著立天元一導算三卷。
- 梅文鼎** 字定九，號勿庵，清初（1633—1721）宣城人。師事竹冠道士倪觀湖受數學。弟文鼐，文鼎，子以燕，孫毀成，曾孫紛，鈇，鈇，鈇，鈇，鈇均通數學，而以毀成爲尤著。文鼎著書七十餘種。今所傳者以承學堂所刻梅氏叢書輯要二十九種爲最完備。其關於算數者，有籌算二卷，平三角舉要五卷，弧三角舉要五卷，方程論六

卷，勾股舉隅一卷，幾何通解一卷，幾何補編四卷，少廣拾遺一卷，算算五卷，環中黍尺五卷，壘堵測量二卷，方圓算積一卷。

**梅穀成** 字玉汝，號循齋，又號柳下居士，文鼎之孫。嘗與修律歷淵源一百卷，增刪算法統宗十一卷，重編梅氏叢書六十二卷，顏曰梅氏叢書輯要，卷末附錄自著赤水遺珍，操縱卮言各一卷。又著柳下舊聞十六卷。

**梁 述** 唐貞觀初人，與李淳風等同正五曹孫子等書。

**莊亨陽** 清初人（1685—1746），著有莊氏算學八卷。

**張 蒼** 漢初人，刪補九章。

**張 衡** 字平子，後漢西鄂人，以圓率

$$\pi = \sqrt{10}, \text{ 又 } \pi = \frac{92}{29}.$$

**張丘建** 三國時人，著有算經。

**張 婁** 南北朝人，撰九章推圖經法一卷。

**張 纘** 南北朝人，撰算經異義一卷。

**張去斤** 南北朝人，撰算疏一卷。

**張 儼** 明人，著有正明算法。

**張敦仁** 清乾嘉時人，著輯古算經細草三卷，求一算術三卷，開方補記八卷，附通論一卷。

**張作楠** 清嘉道時人，著翠微山房算學十五種。

## 十 二 畫

**黃宗羲** 字太冲，號黎洲，明末（1610—

1695) 餘姚人。著有大統歷法辨四卷，時憲書法解新推交食法一卷，圖解一卷，割圓八線解一卷，授時歷法假如一卷，西歷回歷假如各一卷等書。

**馮桂芳** 清道同間人(1809-1874)，著有弧矢算術細草圖解一卷，西算新法直解八卷。

**程大位** 字汝思，號賓渠，明新安人。著算法統宗十三卷。

**焦循** 清乾嘉時人(1763-1820)，著加減乘除釋八卷，天元一釋二卷，釋弧三卷，釋輪二卷，釋橢一卷，補衡齋算學第三册一卷，又開方通釋一册。

**項名達** 清嘉道時人(1789-1850)，著有勾股術，三角和較術，象數一原七卷。

**華蘅芳** 字若汀，清季(1830-1902)，江蘇金匱人。與西士傅蘭雅共譯英華里司代數學二十五卷，及微積溯源九卷，英海麻士三角數理十二卷，英倫德代數雜題十六卷，決疑數學十卷，又英白爾尼合數術十一卷。自著有開方別術一卷，數根術解一卷，開方古義二卷，積較術演三卷，學算筆談十二卷，算草叢存四卷，號行素軒算稿，已刊世。又有算學須知一卷，西算初階，刊入藝經齋算學叢書。此外又有未完成之稿四種。

**華世芳** 字若溪，衡芳之弟。嘗主講湖北自強學堂，上海南洋公學等處。著恒河沙館算草二種，又有專術舉隅，今有術，雙套勾股，三角新理等稿存於家。

**彭絲** 元人，撰算經圖釋九卷。

**揭暄** 字子宜，清江西廣昌人，著璇璣

遺述七卷。

**惠士奇** 字天牧，一字仲儒，清康熙時吳縣人，著有交食舉隅二卷。

### 十三畫

**楊淑** 隋人，撰九九算術二卷。

**楊輝** 字謙光，宋錢塘人。作詳解九章算法十二卷，日用算法二卷，乘除通變本末三卷，田賦比類乘除捷法二卷，續古摘奇算法二卷。

**楊楫** 宋人，著有明微算經一卷，法算機要賦一卷，法算口訣一卷，算法秘訣一卷，算術玄要一卷。

**楊雲翼** 金人，著有勾股機要，象數雜說等書。

**楊溥** 明人，著有算林拔萃。

**賈亨** 元人，著有算法全能集二卷。

**董祐誠** 清嘉道時人(1791-1823)，著有割圓連比例三卷，橢圓求周術一卷，斜弧三邊求角補術一卷，堆垛求術一卷。

**鄒伯奇** 清道同間人(1819-1869)，著有粟布演草，對數尺記一卷，乘方捷術三卷，又存稿一卷。

### 十四畫

**趙爽** 一名嬰，漢人，詮釋周髀。

**趙數** 南北朝人，著有算經一卷。

**僧一行** 唐人，著有心機算術括一卷。

**甄鸞** 南北朝人，嘗註周髀算經，數術記遺，五曹，孫子等書。又自撰五經算術二卷。

**鄭高昇** 明人，著有啟蒙發明算法。

## 十五畫

**劉歆** 漢宗室，名秀，字子駿，與父同集六藝叢書。以圓率 $\pi = \frac{3927}{1250}$ ，號稱歆率。

**劉徽** 三國時魏人，以 $\pi = \frac{157}{50} = 3.14$ ，號稱徽率。又著重差一卷，今名海島算經。

**劉祐** 南北朝人，著有九章雜算文二卷。

**劉汝諧** 宋元間平水人，撰如積釋鎖。

**劉大鑑** 字澗夫，宋末人，撰乾坤括囊，末有人元二間。

**劉益** 宋人，著議古根源。

**劉士隆** 明人，著有通明算法。

**劉洪** 明人，著有算學通詮。

**劉衡** 清嘉慶時人，著尺算日晷新義二卷，勾股測量法，籌表開諸方捷法二卷，借根方淺說，四率淺說，共五種，號六九軒算書。

**劉湘燧** 字允恭，清江夏人，受業梅文鼎，著五星法象編五卷。

**蔣周** 宋元間平陽人，撰益古。

**蔣維鍾** 近時數學家。

**駱騰鳳** 清乾嘉朝人，著開方釋例四卷，藝遊錄二卷。

**魯靖** 南北朝人，新集五曹時要術三卷。

**談泰** 清人，著測量周徑正誤，周體算經四極南北遊法，揲縵唇言正誤，圓壺周

徑積實，祖冲之誦法辨，蒲內方非十尺辨。又著明算津梁四卷，平方立方表六卷，周徑說一卷，嚮人傳三卷。

**潘聖樟** 一名樞，字力田，清吳江人，與王錫闢友善，著辛丑厘辨。

## 十六畫

**錢塘** 字學淵，一字禹美，號溉亭，清乾隆時嘉定人。論方圓周徑，獨以 $\pi = 3.16$ 。著有淮南天文訓補注三卷。

## 十七畫

**隸首** 黃帝時，始作算數，得下籌之法。

**謝察微** 南北朝人。著有算經三卷。

**謝家禾** 清嘉道時人。著有演元要義一卷，瓜田問率一卷，直積回求一卷。

**龍受** 唐德宗貞元時人，著有算法二卷。

**龍受益** 宋人，著算範要訣二卷，明算指掌三卷等書，見宋史藝文志。

**閻若璩** 字百詩，清淮安山陽人，通時憲及授時法，嘗據算術以証古文尙書之偽。

## 十八畫

**瞿曇悉達** 唐人，開元戊午歲受詔譯九執述，其術出自梵天，為梵天寫算輸入中國之始。

**戴震** 字東原，清休寧人，少善策數，著有策算一卷。乾隆壬辰開四庫全書館，震以薦入館充校理，於永樂大典中輯出海島算經五經算術二種。又以梅文鼎三

角法舉要，壘塔測量，環中黍尺三書之法，易以新名，飾以古義，爲勾股割圓記三篇。

**戴 煦** 清嘉道間人，著有重差圖說一卷，勾股和較集成一卷，對數簡法二卷，又續一卷，外切密率四卷，假數測圓二卷。

## 十 九 畫

**羅士琳** 號茗香，甘泉人，出阮元門下。於嘉慶戊寅刊所著比例匯通四卷。又著勾股容三事拾遺三卷，附例一卷，演元九式一卷，四元玉鑑細草二十四卷，釋例二卷，臺錐積演一卷，三角和較算例一卷，續噶人傳六卷等書，刊入觀我生室彙稿。

## 二 十 畫

**嚴 恭** 明人，有通原算法一卷。

## 二 十 一 畫

**顧應祥** 明人，著有勾股算術二卷，測圓海鏡釋述十二卷，又著弧矢算術。

**顧觀光** 清嘉道間人，著有九數存古一卷，九數外錄一卷，周髀算經校勘記一卷，算牘初編續編若干卷。

# 微分學

段子燮 何魯編 一冊一元

本書著者爲吾國教育界素負盛名之算學專家；因鑒於近今各校算學用書，採取西文原本，難免程度不合及前後不相銜接之弊；爰本多年研究心得，與平日教授經驗，著成是書，以供國內大學教學之用。曾在成都高等師範及南京東南大學等校，實地講授，逐年討訂，煞費苦心，選材審慎，編制完善，分上下兩編：上編十二章，述微分原理，包括一切。下編五章，論微分應用，詳悉靡遺。凡已習大代數及解析幾何，而欲進習高等分析算學者，不可不讀。

中華書局發行

# 數學公式

江永吳  
胡樹楷編

全一冊

精裝二元五角  
並裝一元五角

本書包括代數、幾何、三角、解析幾何、微分積分、概率學、最小自乘法、力學等各公式及表數，凡數學中緊要部分，列載無遺。編者曾任高等及大學數理教授近二十年，對於材料之搜羅取捨極費斟酌，自中學而上，凡洽算者，均宜手備一冊，以資查攷。

中華書局發行

精裝一巨冊



定價八元

# 中華百科辭典

本書是舒新城先生費十年光陰集十數同志隨時隨地從各方面估量青年及一般社會應具之常識，釐訂綱目，搜集材料，從事編輯而成。全書共一千六百餘頁二百萬言；凡關於政治、社會、教育、經濟、文學、藝術、數理、哲學等科學術語以及社會流行名詞，無不盡量搜羅，詳加解釋。其日常應用之名詞無須詳釋者，則列為圖表，附錄於後。實中等學生及一般青年修學治事必備的常識大全。

## ▲專科詞典

中國教育辭典

精裝一冊  
七元

余家菊等編

中外地名詞典

精裝一冊  
二元五角

丁督窻 葛綏成編

地學辭書

精裝一冊  
三元五角

王益匡編

數學詞典

精裝一冊  
三元

倪德基 顧祿琦編

理化詞典

精裝一冊  
一元八角

陳英才 楊立奎 彭世芳 符鼎升 陳映璜 王烈編

博物詞典

精裝一冊  
三元

王烈 彭世芳 陳映璜編

中華書局發行



# 空前正確之字書

## 中華大字典

大精裝四冊  
定價十元  
縮本六元

精裝二冊  
定價七元  
縮本四元

本書由歐陽溥存徐元誥汪長祿主編范源廉戴克敦陸費逵校閱其特色有四

①收字四萬八千餘較康熙字典多五千餘字全書四百萬言較康熙字典多三分之一

②每一字解釋至數十條複詞極多人名地名新名詞等無不收入

③引用之文均查原書校核並一律註明篇名一洗尋常字書

④輾轉鈔襲以訛傳訛之弊校正康熙字典之訛字凡二千餘條

圖書館協會季刊推為我國第一部字書

⑤大字三號小字五號每條另行眉目極清插圖三千餘個五彩圖多幅附錄有篆字譜中外地名表

中華中字典 精裝一冊 三元

(歐陽溥存徐元誥等編)

新式學生字典 一冊 精裝 四角 本裝 三角

(吳研因編)

頭尾新國音字典 一冊 五角

(陸衣言編)

中華注音國語字典 一冊 四角

(孫樾編)

新橋字典 精裝一冊 四元五角

(萬國鼎編)

中華萬字字典 一冊 精裝 一元二角 並裝 六角

(沈銓編)

國語學生字典 一冊 精裝 一元六角 並裝 六角

(陸衣言等編)

小學國語字典 一冊 三角

(馬俊如等編)

國音小字典 一冊 二角

(陸衣言等編)

中華書局發行

# 升學預備

## 算術問題解法指導

匡文濤編 一冊 四角

本書就算術問題指導解法，與代數、平面幾何、立體幾何、平面三角等，合為一組。於預備升學及自修參考，均甚適用。所選問題多饒興味，且對於中等程度概括無遺，解法則嶄新便捷，簡明得當。各種解法之首，均有摘要，列入有關係之定理及公式等，學者宜熟記而善用之。

## 代數學問題解法指導

匡文濤編 一冊 四角

是書與算術、幾何、三角等問題解法指導各書，合為一組，體例大致相同。其包舉代數學之事項，為因數分解、多項式之最大公約、及最小公倍、聯立一次方程式、分數方程式、聯立二次方程式、平方及根、比及比例、級數、對數、複利、年金等問題，淺深有序，排比煞費苦心，務使學者手此一編，於代數學解法，有事半功倍之效。

## 平面幾何問題解法指導

匡文濤編 一冊 四角

是書為幾何學問題解法指導之平面部，與立體部分而為二，便於研究幾何學者之採購。內容概列於下：(一)直綫形，(二)圓，(三)軌跡及作圖之重要問題，(四)面積，(五)比及比例，(六)軌跡及作圖，(七)正多角形及圖。

## 立體幾何問題解法指導

匡文濤編 一冊 二角半

是書為幾何學問題解法指導之立體部，其體例與平面部大致相同。內容擇要列下：(一)空間之線與平面，(二)多面體，(三)旋轉體。關於立體幾何學之問題，已包括無遺，且圖形準確，解釋詳明。

## 平面三角法問題解法指導

匡文濤編 一冊 二角

是書與算術代數幾何各科合為一組，內容擇要列下：(一)三角函數之關係，(二)三角和差之三角函數，(三)特別角之三角函數，(四)三角方程式之消去法，(五)三角及函數，(六)三角函數值之極限，(七)三角形之性質及解法。

中華書局發行