MATEMATIKA TERMINARO

KAJ KRESTOMATIO

KOLEKTO ESPERANTA
APROBITA DE Dᴼ ZAMENHOF

RAOUL BRICARD

MATEMATIKA TERMINARO
KAJ KRESTOMATIO

FRANCUJO. — HACHETTE ET Cie, *PARIS.*

ANGLUJO. — « REVIEW of REVIEWS », *LONDON.*
DANUJO. — ANDR.-FRED. HÖST & SÖN, *KJOBENHAN.*
GERMANUJO. — MÖLLER & BOREL, *BERLIN.*
HISPANUJO. — J. ESPASA, *BARCELONA.*
ITALUJO. — RAFFAELLO GIUSTI, *LIVORNO.*
POLUJO. — M. ARCT, *WARSZAWA.*
SVEDUJO. — ESPERANTOFÖRENING, *STOCKHOLM.*

1905

AL MIA KARA AMIKO

HENRI HOFFBAUER

MATEMATIKA TERMINARO

KAJ KRESTOMATIO

Antaŭparolo

La jam riĉiĝinta literaturo esperanta enhavas, ĝis nun, tre malmulte da matematikaj verkoj, kio povas ŝajni iom stranga, ĉar matematiko estas unu el aferoj plej bezonantaj internacian komunikilon. La tialo tamen estas facile klarigebla : en la komuna vortaro mankas la necesaj teknikaj vortoj. Formi ilin, laŭ bezonoj de speciala temo, kaj sen pripenso rilata je ĝenerala terminaro matematika, estus danĝere, ĉar vorto, ŝajne tre taŭga por la dirita temo, eble tamen estus foriginda, pro ĝeneralaj kaŭzoj. Ekzemple, skribante verkon pri la Fundamentoj de Aritmetiko, kaj ne pripensante alion, oni eble alprenus la vorton *integra* (de la latina vorto *integer*) por traduki : *entier* (france). *intero* (itale), *ganz* (germane), *integer* (angle). La netaŭgeco de tio ekaperos, se oni alpensos la *kalkulon integralan*, en kiun la internacia radiko *integr* nepre devas enkondukiĝi.

Sendube, timo de tiaĵoj malhelpis aŭtorojn riski publikigi matematikaĵojn, tro frue esperantigitajn;

pro tio, mi esperas ke la jena verketo ŝajnos utila, kaj estos bone akceptata de la esperantista sciencularo.

Terminaro matematika estis komencata, de pli ol unu jaro, en la franca revuo *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1). Malsano, bedaŭrinde, malpermesis al la kompetenta Aŭtoro, S° H. Hoffbauer, daŭrigi sian verkon (2). Mi do ĝin refaris, profitante notojn afable komunikitajn al mi de mia antaŭulo, sed alpreninte planon tre diferencan je lia. La terminaro, komencita en *Nouvelles Annales*, estis *kvinlingva* (esp. — fr. — it. — germ. — angl.). Ŝajnis al mi ke traduko de vortoj, el kiuj la plejmulto estas senpere komprenebla, senutile plilongigos la libron, kaj mi decidis redakti ĝin *tute* esperante. Aliparole, mi skribis malgrandan *krestomation matematikan*, enkondukantan vortojn per frazoj, kiuj ilin difinas aŭ donas ekzemplon de ilia uzo, kiam difino ŝajnis neutila. Krom sia taŭgeco por mallongigo, tia metodo ebligas doni multajn ekzemplojn de redakto matematika.

Mia celo neniel estas *altrudi* la vortojn elektitajn de mi : mi ilin nur *proponas*. Eble, malgraŭ mia zorgo, malpravaĵoj ekzistas, esprimoj estas anstataŭindaj per pli raciaj. Tion mi senĉagrene akceptos. Mi nur petas ke la estontaj aŭtoroj, nekonsentaj kun mi pri iu vorto, bonvolu klarigi la kaŭzon de sia nekonsento. Mi tion petas, ne pro malhumileco, sed ĉar mi pensas ke kunigo

(1) Vidu la *Aldonojn* al la numeroj septembra 1903 ĝis marta 1904.

(2) Antaŭe, S° Ceretti (*Periodico di Matematica*, en Livorno, numero maja-junia de 1903), en interesa artikolo titolita : *Matematica ed Esperanto*, skizis matematikan terminaron. Mi ankaŭ profitis diversajn artikolojn presitajn en *Internacia Scienca Revuo*.

de ideoj, kaj nedisigo de laboroj estas plej grava por la sukceso de la afero esperanta.

Nur iom plie : Kiel mi diris, unu el miaj ĉefaj celoj estis konciza redaktaĵo. Tial, oni bonvolu ne kritiki, ĉu mankon de filozofiaj vidpunktoj, ĉu neracian ordon (ekzemple : enkonduko de supera Aritmetiko, antaŭ Algebro, dismeto de la paragrafo rilata je *neracionaloj*, kaj de la paragrafo rilata je *limoj*) : mi ne skribis lernolibron matematikan, mi nur volis doni, en plej malpeza formo, ilon al Matematikistoj.

Pri la elekto mem de vortoj, mi, kiel eble plej ofte, akceptis la internaciajn terminojn, kiam ili jam ekzistis, kvankam multaj ne estas laŭlogikaj (Ekzemple, *determinanto*, per si mem, nenion *determinas*, aritmetika *kvadrato* ne estas la sama afero, kiel geometria *kvadrato* ; k. t. p.). Sed formado de terminaro nepre laŭlogika ŝajnas tre malfacila, eĉ neebla, se oni ne alprenas simbolaron tian, kiel tiu de S° PEANO (1). Aliparte, gravaj lingvaj difektoj ne malhelpis, ĝis nun, progreson de Matematiko. Ĉu oni devas postuli de Esperanto perfektecon, kies neesto en « naturaj » lingvoj ne tre malutilis ?

Mi tamen ne akceptis tro kondamnindajn malbonaĵojn, kiel *limo*, uzita en la sencoj de *limo* kaj de *rando* ; *derivato* (anstataŭ *derivaĵo*), por esprimi la rezultaton akiritan per *derivo* de funcio, k. t. p. La legonto juĝos

(1) Ekzemple, *dualeco*, en geometrio perspekteca, necesigus terminaron simetrian. Sed, en *ebena geometrio*, interrespondiĝas dualece *rekto kaj punkto* ; en *spaca geometrio*, *ebeno kaj punkto*. Laŭlogika terminaro tial bezonus diferencajn esprimojn, laŭ tio ĉu oni parolus pri ebeno, ĉu pri spaco.

ĉu mi, celante mezon inter logikeco kaj respekto de internacieco, ne malprave oferis unu al alia (1).

Oni trovos, ĉe l'fino de tiu ĉi verketo, mallongajn redaktaĵojn pri temoj, ĉu tre konitaj, ĉu facilaj.

Rimarko. — Tiu ĉi verko enhavas tre grandan nombron da novaj vortoj teĥnikaj. Ĉar la verko mem estas tre bona kaj utila, tial mi plezure donis al ĝi mian aprobon. Sed ne estante kompetenta matematikisto, mi ne povas juĝi, ĉu ĉiuj tie ĉi donitaj novaj vortoj teĥnikaj estas efektive *necesaj* aŭ ĉu grandan parton da ili estus utile formi el vortoj jam ekzistantaj en la komuna vortaro. Tiun ĉi demandon la plej bone povos respondi la esperantistoj-*matematikistoj*.

L. Zamenhof.

(1) Kiel mi diris, eble ekzistas malpravaĵoj. Mi petas ke oni bonvolu sendi al mi kritikojn pri ili, kaj ke oni ankaŭ montru konstatitajn forgesaĵojn. Mia adreso estas : 295, *boulevard Raspail*, Paris, 14me (*France*).

KLARIGOJ KAJ ĜENERALAJ RIMARKOJ

1e Tiu ĉi terminaro enhavas nur *puran* matematikon (kun enhavo de mekaniko).

2e La *Terminaro* partiĝas en 5 ĉapitrojn: *Aritmetiko*, *Algebro*, *Analitiko*, *Geometrio*, *Mekaniko*. En ĉiu ĉapitro multaj titoletoj (**egipte** presitaj) ebligas, ke oni tre rapide trovos vorton aŭ esprimon deziratan.

3e Ĉiuj proponitaj vortoj aŭ esprimoj estas *kursive* presitaj.

4e Kiam vorto nova estas ne difinita, sed enkondukita per ekzempla frazo, tion ĉi montras la signo (E.).

5e Kiam, el du aŭ kelkaj samsencaj vortoj proponitaj, unu ŝajnis malpreferinda, tion ĉi montras steleto *, kiun sekvas la malbona vorto.

6e Oni trovos oftan uzon de la adjektivo *ajna*, pri kiu mi pensas ke ĝi estas tre konforma al emoj de Esperanto, kvankam mi ĝin nenie legis. *Ajna* estas distinginda de *iu*, *ia*. Aferon *ajnan* oni povas laŭvole elekti. Afero *iu* estas ne ankoraŭ konita, sed konebla. Mi diros, ekzemple :

1e *Ajna* n^a-grada ekvacio algebra havas n radikojn.

2e Se $f(x)$ estas funcio kontinua, kaj se

$$f(a)\,f(b) < 0,$$

ekzistas *iu* nombro c, enhavita en la intervalo de a al b, tia ke

$$f(c) = 0.$$

En matematika stilo, la vorto *iu* estas malofte necesa: eligo de ĝi ne malutilas klarecon.

ĜENERALAĴOJ

La jenaj vortoj aŭ apartenas al la komuna lingvo, aŭ estas internaciaj :

Fundamento, aksiomo, difino, pruvo, hipotezo, tezo, teoremo, helpa teoremo, korolario, problemo, konstruo, solvo, metodo, induko, deduko, formulo, egala, neegala, propraĵo, kvanto.

(E.) Teoremo, rilata *specialan kazon*, ofte estas *pliĝeneraligebla.*

Problemo geometria koncernas konstruon de *figuroj*, kiuj *akceptos kondiĉojn* donitajn. Estas utile *kontroli* la solvon.

Algebro lernas *ekvaciigi* problemon. Ĝi ofte enkondukas *fremdajn* solvojn, kiujn oni devas *forigi*. Serĉado de *realecaj* kondiĉoj postulas *diskutadon*.

Oni ofte devas *signifigi* negativajn solvojn.

ARITMETIKO

Entjeroj. — (0), 1, 2,... *n*... estas la *sekvaĵo natura de la nombroj entjeraj* (1) (aŭ de la *entjeroj*). La nombro 0 estas elparolata *nul*.

Per nombro *kardinala* oni *komputas* (2) aĵojn kaj montras ilian *kiomon*. Per nombroj *ordaj*, oni *numerigas* ilin, kaj montras la *vicon* de ĉiu. Aferon, solan en ĝia speco, oni diras *unika* (3).

Oni enkondukas en aritmetikon nombrojn *negativajn*. La entjeroj naturaj estas *pozitivaj*; $+a$, $-a$ estas elparolataj : *plus a*, *minus a*; $+$, $-$ estas *signoj*.

Se $a < 0$, $-a$ estas la *valoro absoluta* de a.

Du nombroj, *kontraŭsignaj*, kaj havantaj saman valoron absolutan, estas *kontraŭegalaj*.

Racionaloj. — *Nombro racionala* (aŭ *racionalo*) estas *fracio* $\frac{a}{b}$ (elparolu *a sur b*), kies ambaŭ *termoj*, a kaj b, estas entjeraj; a estas *numeratoro*; b, *denominatoro*.

Fracio < 1 estas *partumo*.

$\frac{1}{n}$ estas la *inverso* de n.

(1) France : *nombre entier*.

(2) Ne *kalkulas* : Kalkuli estas vorto ĝenerala, rilata je operacio ajna, ĉu aritmetika, ĉu algebra, ĉu analitika.

(3) Tiu vorto, necesega en Matematiko, mankas en la komuna lingvo.

(E.) La fracio $\frac{14}{21}$ povas esti *plejsimpligata en* la fracion *neredukeblan* $\frac{2}{3}$. La du fracioj estas *egalvaloraj*.

Neracionaloj. — *Nombro neracionala* (aŭ *neracionalo*) estas difinebla per *tranĉo* farata en racionaloj (DEDEKIND). Ĝi povas esti, ĉu *algebra*, ĉu *transcendenta*.

Grando, Mezuro. — Per nombro, ĉu racionala, ĉu ne, oni mezuras grandon, post kiam, el grandoj samaspecaj, oni elektis *unuon*.

Du grandoj a, b, havas *raporton* (1) $\frac{a}{b}$, kies termoj ricevas samajn nomojn, kiel tiuj de fracioj. *Egaligo* de du *raportoj* faras *proporcion*. Du *variantaj* grandoj povas esti *proporciaj* aŭ inverse *proporciaj*.

(E.) Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, d estas *ekstremaĵoj*; b, c, *mezaĵoj*.

Se $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, b estas *geometria mezo* de a, c; ($d = \frac{a+c}{2}$ estas *aritmetika mezo*).

Nombrado. — Oni skribas nombron en *nombradsistemo n-uma*. En nombradsistemo dekuma, oni legas nombrojn, partiginte ilin po *sesciferaroj*; 10^6 estas *miliono*; 10^{12}, *biliono*; 10^{18}, *triliono*; k. t. p. (2). Ekz., la nombro

18 239 427 829 001 312 475

(1) La vorto *raporto* jam posedas alian sencon en la komuna lingvo; mi tamen ne pensas ke konfuzo estas timinda.

(2) Laŭ kelkaj nacioj, 10^9 = biliono; 10^{12} = triliono, k. t. p. La sistemo enteksta estas pli internacia kaj pli oportuna.

estos elparolata : 18 trilionoj, 239 427 bilionoj, 829 001 milionoj, 312 475.

En nombro neentjera, *n*-*ume* skribita, oni distingas la parton *entjeran*, kaj la parton *partuman* (aŭ *mantison*; aŭ parton *decimalan*, en sistemo dekuma), kiujn disigas la *komo*. Ĉiu cifero de la partumo estas *postfiguro* (aŭ *decimalo*, en sistemo *dekuma*).

Decimalfracio, ĉu *finita*, ĉu *simple perioda*, ĉu *malsimple perioda*, egalas sian fracion *naskantan*.

Operacioj. — Oni *adicias* nombron *al* alia, *subtrahas* nombron *de* alia, *multiplikas*, *dividas* nombron *per* alia (1).

Se $a+b=c$, a, b estas *sumeroj*; a estas *pliigata* de b; c estas *sumo*.

Se $a-b=c$, a estas *malpliigata* de b; c povas esti nomata ĉu *diferenco*, ĉu *manko*, ĉu *troo*, laŭ la vidpunkto.

Se $ab=c$, a, b estas *faktoroj*; c estas *produto*.

Se $a=bk+r$, a estas *dividato*; b, *dividanto*; k, *kvociento*; r, *resto*.

Multiplikon per *entjero*, dividon *ekzaktan* per *entjero*, oni ankaŭ nomas *obligon*, *onigon*.

(E.) Kiam oni *produtigas* nombrojn, oni povas anstataŭi kelkajn el ili per ilia *produto kalkulita*. Oni povas *interŝanĝi* kelkajn faktorojn.

(1) *Aldoni, depreni, multigi, partigi* estas vortoj malprecizaj de la komuna lingvo (kompreneble, ankaŭ uzindaj en la matematika stilo). Oni ekzemple diros : se de determinanto 3^a-orda, oni *deprenas* unu horizontalan kaj unu vertikalan liniojn, oni ricevas determinanton 2^a-ordan; du punktoj de segmento ĝin *partigas* en tri segmentojn, k. t. p.

Se $a = bc$ (a, b, c, entjeroj), a estas *oblo* de b kaj de c; b kaj c estas *onoj* de a.

La produton $1 \cdot 2 \ldots n = n!$ oni nomas *faktorialo* de n.

Potencigo kaj Radikigo. — a^m estas *potenco* m^a de a; m estas *esponanto* (aŭ *potenciganto*). Potencojn duan, trian, kvaran, oni ankaŭ nomas *kvadrato*, *kubo*, *bikvadrato*.

La *radikalo* $\sqrt[m]{a}$ estas *radiko* m^a de a (radiko *kvadrata*, *kuba*, *bikvadrata*, se $m = 2, 3, 4$); $\sqrt[m]{}$ estas *radikilo* (aŭ *radika signo*).

Operacioj mallongigaj kaj proksimumigaj. — Neracionalo havas valoron *ekzaktan*, kaj *valorojn proksimumajn*. Oni *proksimumigas* neracionalon *laŭ ekarto* (1), ĉu *troa*, ĉu *manka*, tiel malgranda kiel dezirate. La ekarto estas ĉu *rilata*, ĉu *absoluta*.

Progresioj. — La sekvaĵo a, $a + d$, $a + 2d, \ldots$ estas *aritmetika progresio*, kies *racio* estas d.

La sekvaĵo a, ar, $ar^2 \ldots$ estas *geometria progresio*, kies *racio* estas r

Elementa Teorio de Nombroj. — Entjero estas ĉu *prima*, ĉu *komponita* (2).

Komponito havas *divizorojn*. Ĝi estas, unike, *malkomponebla* en primojn.

(1) Ne *eraro* : *eraro* estas malgraŭa, *ekarto* (france, *écart*) estas volita.

(2) Ne *kunmetita*. En la komuna lingvo, oni malprave uzas la vorton *kunmeti*, anstataŭ *komponi* : laŭ Logiko, oni *kunmetas* elementojn por *komponi* ion. Same, pri *dismeti* kaj *malkomponi*.

Oni formas *tabelon* de primoj, uzante la *Eratostenan kribrilon*.

Entjeroj, *kies plej granda komuna divizoro* (*P. g. k. d.*) estas 1, estas *interprimumaj*. Se el kelkaj entjeroj, du ajnaj estas interprimumaj, oni diras ke la entjeroj estas *primumaj, unu je ĉiu el ceteraj* (aŭ, pli mallonge, *duope interprimumaj*).

Supera Teorio de Nombroj (1). — *Kongruaĵo* estas rilato inter entjeroj : $a \equiv b$ (mod. p). Elparolu : a estas *kongrua* je b, laŭ *modulo* p.

Analizo diofanta (2) koncernas solvon de ekvacioj, per entjeroj aŭ racionaloj. Analizon diofantan *unuagradan* oni ankaŭ nomas : *partigo de nombroj*.

Se divido per p de la nombroj $g, g^2, \ldots\ g^{p-1}$ liveras $p-1$ restojn malsamajn, g estas *radiko primitiva* de p. En tiu kazo, se $g^h \equiv k$, (mod. p), h estas la *indico* de k.

Divido per p de la entjeroj m-potencigitaj liveras *restojn m-umajn* (por $m = 2, 3, 4$, restojn *kvadratumajn, kubumajn, bikvadratumajn*). Pri tiaj restoj, ekzistas *reciprokecaj teoremoj* (aŭ *leĝoj*).

Teorio de formoj aritmetikaj enkondukas konceptojn de *ekvivaleco, reduko, klasoj* k. t. p. La terminaro jam estas preskaŭ internacia.

Ĉenfracioj. — (E.) $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$

(1) En tiu paragrafo, oni uzas esprimojn, kies klarigo troviĝas malsupre en *Algebro*.

(2) El la nomo de la greka Matematikisto, DIOFANTO.

estas *ĉenfracio*[1]; a_0, a_1, a_2 ... estas *neplenaj kvocientoj*;

$$a_h + \cfrac{1}{a_{h+1} + \cfrac{1}{a_{h+2} + \dots}}$$

estas *plena kvociento*;

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_1 \dots + \frac{1}{a_h}}$$

estas *konverĝa fracio* aŭ *redukaĵo*.

(1) Germane, *Kettenbruch* (*Kette*, ĉeno; *Bruch*, fracio).

ALGEBRO

Polinomjoj. — (E.) Estu $P = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots a_m y^m$. P estas *polinomjo* (*ununomjo* aŭ *monomjo*, *dunomjo*, *k. t. p.*) *homogena*, de la du *variantoj* x, y, m^a*-grada laŭ* x kaj y (1); $a_0 x^m$, $a_1 x^{m-1} y, \ldots$ estas *termoj*; P estas *ordigita laŭ la malkreskantaj potencoj de* x; $a_0, a_1, \ldots a_m$ estas *koeficientoj*; $0, 1, \ldots m$ estas *indicoj*.

Se oni *nombrigas* la koeficientojn kaj variantojn, oni ricevas *nombran valoron* de la polinomjo.

(E.) Skribante

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab,$$

oni *elvolvas* la unuan *membron*.

En la elvovaĵo

$$(x+a)^m = x^m + \binom{m}{1} a x^{m-1} + \ldots \binom{m}{p} a^p x^{m-p} + \ldots + a^m,$$

$\binom{m}{p}$ estas *binomja koeficiento* (2).

Kombinatoriko. — (E.) Estu a, b, c tri literoj. La 6 *ordaĵoj*

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba,$$

estas *permutaĵoj*; la 6 *ordaĵoj*

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

(1) Esprimaĵo unuagrada estas ankaŭ nomata *lineara*.

(2) Ne : *dunomja*; ĉar *koeficiento dunomja* signifus : *koeficiento kiu estas dunomjo*.

estas *aranĝaĵoj duopaj*;

$$ab,\ ac,\ bc$$

estas *kombinaĵoj duopaj*;

$$aa,\ ab,\ ac,\ bb,\ bc,\ cc$$

estas *kombinaĵoj duopaj ripetaj*.

(E.) Oni ŝanĝas la permutaĵon *bdacf* en *dacfb* per *cikla permuto*.

(E.) En la permutaĵo *bdafc*, la *duaĵoj* (aŭ *duopoj*) *ba*, *da*, *dc*, *fc* estas *renversaĵoj*.

Teorio de Substituoj. — Ĉar la teorio de *substituoj* estas juna, ĝi uzas vortojn kaj esprimojn jam internaciajn. Ni citos nur :

Grupo (*simetria*, *alterna*, *simpla*, *komponita*, *transitiva*, *abela*, k. t. p.) ; *izomorfismo* (aŭ *izomorfeco*), k. t. p.

Determinantoj. — (E.) Estu

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1\,A_1^1 + a_1^2\,A_1^2 + a_1^3\,A_1^3$$

$$= a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + a_3^1 A_3^1.$$

δ estas *determinanto triaorda* elvolvata laŭ la *elementoj*, ĉu de la unua *horizontala linio*, ĉu de la unua *vertikala linio*; $a_1^1\ a_2^2\ a_3^3$ estas la *ĉeftermo*.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^3 \end{vmatrix}, \dots$$

estas *duaordaj subdeterminantoj*.

$$\Delta = \Sigma \pm A_1^{\alpha_1}\ A_2^{\alpha_2}\ A_3^{\alpha_3}$$

estas la *kundeterminanto* de δ.

Nombroj kompleksaj. — *Nombro kompleksa* havas la formon $A = a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n$, kie $i_1, \ldots i_n$ estas *unuoj*, al kiuj oni altrudas leĝojn, koncerne multiplikon.

Se $AB = BA$, multipliko estas *komuteca*.

Se $(AB)\,C = A\,(BC)$, multipliko estas *asocieca*.

Se $(A + B)\,C = AC + BC$, multipliko estas *distribueca, rilate adicion*.

$A = a + bi$ $(i^2 = -1)$ estas *nombro imaginara* aŭ *imaginaro; a* estas *realo; bi, imaginaro pura*.

$\sqrt{a^2 + b^2}$ estas la *modulo* (aŭ *valoro absoluta*) de A; $a^2 + b^2$ estas ĝia *normo*; arc tg $\frac{a}{b}$ esta ĝia *argumento*.

Rilatoj, Identaĵoj, Ekvacioj. —

$$A = B, \quad A > B,$$

kie A kaj B estas ajnaj *esprimaĵoj*, estas *rilatoj*.

La unua (elparolu : A *estas egala je* B, A *egalas* B) estas *egalaĵo*. La dua (elparolu : A *estas pli granda ol* B, A *superas* B) estas *neegalaĵo*.

$$\text{(E.)} \qquad a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

estas *identaĵo*.

$$a_0\,x^m + a_1\,x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

estas *ekvacio* de unu *nekonato x*. Ĝi havas *m radikojn*, el kiuj kelkaj povas esti *egalaj*, kiam la *diskriminanto* estas nula. Radiko povas esti ĉu *unuobla*, ĉu *duobla*.... Oni *solvas* ekvacion por kalkuli ĝiajn radikojn.

Ekvacio povas esti ĉu *redukebla*, ĉu ne. Oni kelkafoje povas *malaltigi* ĝian gradon.

Kelkaj ekvacioj, de kelkaj nekonatoj, povas esti :

1e *akordaj* kaj *determinaj;* 2e *neakordaj;* 3e *akordaj, sed nedeterminaj*. (Vidu la jenajn E.)

(E.)

$$1^e\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+3y=5; \end{cases} \quad 2^e\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+2y=5; \end{cases} \quad 3^e\begin{cases} x+y=2. \\ 2x+2y=4. \end{cases}$$

Per *elimino* de y *inter* la ekvacioj

$$f(x, y)=0, \qquad \varphi(x, y)=0,$$

oni ricevas

$$R(x)=0;$$

La polinomjo $R(x)$ estas *rezultanto.*

(E.). Por solvi ekvacion *nombran*, oni povas :

serĉi *superrandon* kaj *malsuperrandon* de la radikoj realaj;

superrandon de la nombro da radikoj pozitivaj, apli-kiante la *kartezian prisignan regulon*, kiu koncernas la *signoŝanĝojn* de la unua membro;

proksimumigi la radikojn per aplikado de diversaj metodoj.

Oni *figuras* per kurbo la ekvacion $f(x, y)=0$.

La rilato

$$f(x, y, \ldots)>0$$

kiun devos verigi kelkaj nekonatoj x, y, ... estas *neekvacio*.

ANALITIKO

Infinito. — (E.). La sekvaĵo de la nombroj naturaj estas *senfina*.

La kiomo de la nombroj naturaj estas *infinita* (ne *senfina* aŭ *senlima*).

La valoro de $\frac{1}{x}$, kiam $x=0$, estas *infinita*.

La valoro de $\frac{1}{x}$, kiam x *konverĝas* al 0, laŭ valoroj pozitivaj, kreskas *senlime* (aŭ *senrande*), aŭ *infinitiĝas*.

Limoj kaj Randoj. — Estu

$$A, \quad (a_1, a_2 \ldots\ldots)$$

aro infinita da nombroj, a iu nombro.

1e Se, al ajna $\varepsilon > 0$, respondas iu entjero N tia ke $n > N$ igas $|a_n - a| < \varepsilon$, a estas *limo* de la nombroj A. Ili *konverĝas* al a.

2e Se, kiu ajn estas $\varepsilon > 0$, la aro (A) envahas kiomon finitan da nombroj $> a + \varepsilon$, kaj kiomon infinitan da nombroj $> a - \varepsilon$, a estas la *superlimo* de la nombroj A. Analogie estas difinebla la *malsuperlimo*.

(E.) 1 estas superlimo, — 1, malsuperlimo de la nombroj $\pm 1 \pm \frac{1}{n}$, (n entjero ajna).

3e Se neniu el la nombroj (A) *transiĝas* a (*t. e.* estas

$> a$), sed se kelkaj el ili transiĝas $a - \varepsilon$ (ε ajna > 0), a estas ilia *maksimumo*. Analogie difinebla *minimumo*. Ili povas esti *tuŝataj* aŭ ne.

(E.) 1 estas maksimumo (kaj ankaŭ superlimo), tuŝata, de ĉiuj nombroj $\leqq 1$.

1 estas *minimumo* (kaj ankaŭ malsuperlimo), ne tuŝata, de ĉiuj nombroj > 1.

2 estas *maksimumo* (sed ne *limo*), tuŝata de ĉiuj nombroj < 1, al kiuj oni aldonas la nombron 2.

4e Ĉiu nombro $>$ maksimumo estas *superrando*.

Analogie estas difinebla *malsuperrando*.

Vario, Infinitezimo. — Ĉu nombro, ĉu grando, ne konstanta, estas *varianto*. Ĝi povas ricevi *varieron pozitivan* (aŭ *pligrandiĝon*), varieron negativan (aŭ *malpligrandiĝon*).

Infinitezimo estas nombro aŭ grando varianta, konverĝanta al nul. Se kelkaj infinitezimoj interdependaj estas enkondukataj en kalkulon, oni elektas unu el ili kiel *ĉefinfinitezimo*. La ceteraj havas (ĝenerale) *ordojn* precizajn : oni parolos pri infinitezimoj *duaordaj*, *triaordaj*,...

Grando, nek nula, nek infinita estas *finita*.

Estu x ĉefinfinitezimo, y infinitezimo p^a-orda. Se $y = Ax^p + \varepsilon x^p$, (A finita, ε infinitezimo), Ax^p estas la *ĉefparto* de y.

Amasoj. — *Amaso* estas kolektaĵo en la plej ĝenerala senco. Ĝi povas esti, ĉu *finita*; ĉu *infinita*; ĉu *komputebla*, ĉu ne; *kontinua*; (*bone*) *ordigita*; *densa*; *perfekta*, k.t.p. Ĝi havas iun *nombron kardinalan*. Ĝi havas amason *devenitan* (aŭ *limamason*).

Serioj. — Serio estas sekvaĵo senfina de nombroj *sumotaj*; ĝi povas esti : ĉu *konverĝa*, ĉu *nekonverĝa*; ĉu *absolute konverĝa*, ĉu ne; ĉu *unuforme* konverĝa, ĉu ne.

Se

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n,$$

R_n estas *resto*.

Serio, en kiu termo u_n estas difinata per rilato inter k termoj intersekvaj :

$$f(u_{n-k+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n) = 0,$$

estas *rikura serio*.

(E.) La serio

$$S = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \ldots$$

estas, ordinare, konverĝa en iu *intervalo* (z reala), en iu *regiono* (z imaginara) : ili estas *konverĝintervalo*, *konverĝoregiono*.

La serio

$$S = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

estas serio *da potencoj* (aŭ serio *entjera*). Ĝi havas *konverĝocirklon*.

Funcioj diversaspecaj. — $y = f(x)$ difinas funcion *esplicitan* de la *varianto* x; $f(x, y) = 0$ funcion *implicitan*.

$$z = f(u, v), \quad u = \varphi(x), \quad v = \psi(x),$$

difinas *funcion komponitan* de x.

Se de $y = f(x)$, rezultas $x = \varphi(y)$, f kaj φ estas funcioj *reciprokaj*.

Apartaj funcioj. — Funcio estas ĉu *algebra* (ĉu *racionala*, ĉu ne), ĉu *transcendenta*

e^x estas *esponenciala* funcio (aŭ *esponencialo*); $\log_a x$, *logaritmo a-uma.*

Logaritmon *e-uman* oni ankaŭ nomas : logaritmo *natura.*

Cirklaj aŭ *trigonometriaj* funcioj estas :

$$\sin x,\ \text{kos}\ x,\ \text{tang}\ x, \text{kotang}\ x,\ \text{sek}\ x,\ \text{kosek}\ x$$

(elparolu: *sinuso, kosinuso, tangento*(1), *kotangento, sekanto, kosekanto*).

Kiam oni konas nur valorojn de funcio, respondajn al apartaj valoroj de la varianto, oni proksimumigas aliajn valorojn per *interpolado* aŭ *eksterpolado.*

Vario de funcioj. — Funcio estas ĉu *kontinua*, ĉu *ne kontinua.* Ĝi povas esti, ĉu *konstanta*, ĉu *kreskanta*, ĉu *malkreskanta.* Ĝi povas havi *maksimumojn* kaj *minimumojn* (la respondaj valoroj de la variantoj estas *maksimumigantoj* kaj *minimumigantoj*). Fine ĝi povas *nuliĝi, infinitiĝi* (la respondaj valoroj de la variantoj estas *nuligantoj, infinitigantoj*).

Kalkulo diferenciala. — Estu $y=f(x)$, $d^n y=f^{(n)}(x)dx^n$; $f^n(x)$ estas *derivaĵo* n^a de $f(x)$; $d^n y$, *diferencialo* n^a de y.

Kiam oni *derivas* funcion, oni ricevas derivaĵon; kiam oni ĝin *diferencias*, oni ricevas diferencialon.

Estu

$$z=f(x, y),\ dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

dz estas diferencialo *tuta*; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ derivaĵo *parta* de f laŭ x.

(1) Ne konfuzu : *tanĝanto* (geometria) kaj *tangento* (trigonometria).

(E.). $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$

estas la *funcia determinanto* (aŭ *jakobiano*) de $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$.

Kalkulo integrala. — *Integralo* (aŭ *integraĵo*) estas ĉu *difinita*, ĉu *nedifinita*. Integralo nedifinita ricevas ankaŭ la nomon *funcio primitiva*. Integralo difinita havas du *randojn*, *supran* kaj *malsupran*. $\int$ estas *integrilo*.

La rilato

$$\int u dv = uv - \int v du$$

esprimas la metodon de *poparta integrado*.

$\iint f(x,y)\, dx\, dy$ estas integralo *duobla*.

Oni ankaŭ konsideras integralojn *laŭkurbajn*.

Analitiko supera, Teorio de funcioj. — Funcio de varianto imaginara estas *analitika*, kiam ĝi havas derivaĵon. Ĝi estas ĉu *unuforma*, ĉu *duforma*....

Pro la figurado geometria, valoro de varianto imaginara ofte ricevas la nomon *punkto*.

Punkto povas esti, por funcio, *ordinara*, kaj la funcio estas *regula* (aŭ *holomorfa*) en la *ĉirkaŭaĵo* de tiu punkto.

Punkto *neordinara* povas esti : 1e *infinitiganto finitorda* (aŭ *poluso*), kaj la funcio estas *meromorfa* (aŭ *fracia*) en la ĉirkaŭaĵo de tiu punkto ; 2e *esenca punkto*.

[(E.), $z = 0$ por la funcio $e^{\frac{1}{z}}$]

Funcioj *neunuformaj* posedas ankaŭ punktojn *kritikajn* (aŭ *konfuzigajn*), en kiuj du aŭ kelkaj *branĉoj konfuziĝas*. [(E.). $z = 1$ por la funcio $\sqrt{z-1}$].

Estu :

$$f(z) = \dots + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \dots$$

la *elvolvaĵo* de $f(z)$, en la ĉirkaŭaĵo de la neordinara punkto a;

A_{-1} estas *reziduo*;

$$\dots + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a}$$

estas la *ĉefparto* (aŭ *fracia parto*).

Funcio regula en la tuta ebeno estas *nepre regula* (aŭ *nepre holomorfa, entjera*).

Funcioj duperiodaj. — Se $f(z+\omega) = f(z)$, ω estas *periodo* de $f(z)$, kiu estas *funcio perioda*.

(E.) pu, $\mathrm{sn}u$, $\sigma_{10}u$, k. t. p. estas *funcioj duperiodaj* (aŭ **elipsaj*). Geometrie figuritaj, la periodoj formas *reton*.

Funcioj duperiodaj havas *modulon*. Ĉiuj el ili akceptas transformon, kaj kelkaj, *kompleksan multiplikon*.

Aliaj funcioj. — Ekzistas ankaŭ multo da funcioj apartaj :

Γ-*funcioj*, *abelaj*, *modulaj*, *aŭtomorfaj* funcioj, k. t. p., kies teorio uzas terminaron proksimume internacian.

Diferencialaj ekvacioj. — *Integri diferencialan ekvacion unuaordan*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

estas trovi ĉiujn funciojn de x, kiuj verigas tiun ekvacion.

(E.) $y = \mathrm{A} \operatorname{kos} x + \mathrm{B} \sin x$, (A, B, arbitraj konstantoj), estas la *ĝenerala integralo* de la *homogena, unuagrada laŭ* $\frac{dy}{dx}$ (aŭ *lineara, duaorda*) diferenciala ekvacio:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = 0;$$

$y = \operatorname{kos} x$ estas *aparta* integralo.

La ekvacio

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = b^2 + a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

unuaorda kaj duagrada laŭ $\frac{dy}{dx}$, havas, kiel *ĝeneralan integralon* (aŭ *solvon*):

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}, \quad (m, \text{ konstanto arbitra}).$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ estas *singulara* solvo.

Kelkaj ekvacioj diferencialaj estas redukeblaj al *kvadraturoj*.

Laŭpartaj diferencialaj ekvacioj.

$$\text{(E.). } f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

estas *laŭparta*, unuaorda diferenciala ekvacio.

Kiam oni serĉas unu aŭ kelkajn funciojn kiuj verigos kelkajn ekvaciojn diferencialajn, tiuj ekvacioj estas *simultanaj*.

Kalkulo de la Probabloj kaj de la Ekartoj

Eblaĵo estas io, kio povas okazi, sed ne certe. Se, el q okazoj *eblaj*, p estas *favoraj* por iu rezultato atendata, la *probablo* de tiu rezultato estas $\frac{p}{q}$.

Se iu rezultato estas trafebla, per ĉiu el kelkaj *okazaroj*, donontaj al ĝi la respondajn probablojn ϖ_1, $\varpi_2, \ldots \varpi_n$, $\varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_n$ estas la *tuta* probablo de la rezultato atendata.

Se iu eblaĵo A havas la probablon ϖ, kaj se la eblaĵo A_1 havos la probablon ϖ_1, kiam la eblaĵo A estos okazinta, $\varpi\varpi_1$ estas la *komponita* probablo de A_1.

Se mi povas esperi kvantojn da mono $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$, kies respondaj probabloj estas $\varpi_1, \varpi_2 \ldots\ldots \varpi_n$, $\sum A\varpi$ estas mia *probabla havaĵo* (* *matematika espero*).

Ludo, en kiu la probablaj havaĵoj de la kunludantoj estas egalaj, estas *justa* ludo.

Se oni ripetas mezuradon de grando, oni ricevas valorojn *proksimumajn*, el kiuj ĉiu havas *ekarton* je la ekzakta valoro. *Probablekarto* estas tiu, kiun ĉu transiĝi, ĉu ne transiĝi havas probablon $= \frac{1}{2}$. *Mezekarto* estas la *asimptota meza* valoro de tre granda nombro da ekartoj (probablekarto $=$ mezekarto $\times$ 0,8463).

Oni kalkulas pri observoj, uzante la *metodon de la plej malgrandaj kvadratoj*.

GEOMETRIO [1]

Geometrio elementa

Ĝeneralaĵoj. — La komuna *spaco* estas *tridimensia* (aŭ *havas tri dimensiojn : longecon, larĝecon, dikecon*). Ĝi enhavas *korpojn*, kiujn *randas surfacoj*.

Sur surfaco, oni povas *desegni* (aŭ *konduki, streki*) *liniojn*. Plej simpla el linioj estas *linio rekta* (aŭ *rekto*). Ĝin *determinas* du ajnaj el ĝiaj *punktoj*.

Oni diros : surfaco *enhavas* linion ; linio *naskas* surfacon ; linio *enhavas* punkton (aŭ *pasas ĉe* punkto) ; punkto *naskas* (oŭ *laŭiras*) linion.

Plej simpla el surfacoj estas *ebeno*. Ĝi enhavas ĉiun rekton *kunigantan* du ajnajn el siaj punktoj (aŭ *kondukitan de... al...*).

Du surfacoj povas sin *reciproke tranĉi* (aŭ *seci*) *ĉe* linioj ; du linioj, ĉe punktoj.

Du *figuroj*, kies unu, ricevante taŭgan *delokigon* estas *koincidigebla* je la alia, estas *kongruaj* (aŭ * *egalaj*).

Du figuroj estas *simetriecaj*, kiam unu el ili estas kongrua je la figuro *simetria* de la alia, laŭ ebeno aŭ laŭ punkto.

Figuro precize *grafikita*, per *rektilo* kaj *cirkelo*, estas *grafikaĵo*.

(1) Nenio estos dirata pri *n-dimensiaj* aŭ *ne-eŭklidaj* geometrioj. La necesaj vortoj estas aŭ internaciaj, aŭ facile formiĝas.

Plej simplaj figuroj ebenaj. — (E.). En fig. 1ª, AB estas *segmento*; A kaj B, ĝiaj *randoj*, O (AO = OB), ĝia *mezpunkto*.

Ox, *plilongigaĵo* de x'O, estas *duonrekto*, kies *direkton* montras sago.

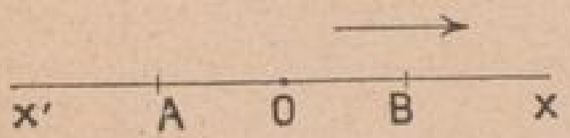

Fig. 1ª.

O estas la *origeno* de Ox.

La *longo* de AB estas la *distanco* inter A *kaj* B (aŭ la *interlongo* de A, B).

Segmento *direktita* estas *vektoro*.

En fig. 2ª, $\widehat{xOy}$ estas *angulo*; O, ĝia *vertico* (aŭ **pinto*); Ox, Oy, ĝiaj *lateroj*; Ot ($\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$), ĝia *interna duonanto*; Ot' ($\widehat{x'Ot'} = \widehat{t'Oy}$), ĝia *ekstera* duonanto.

$\widehat{xOy}$ estas *akuta*, $\widehat{yOx'}$, *malakuta*.

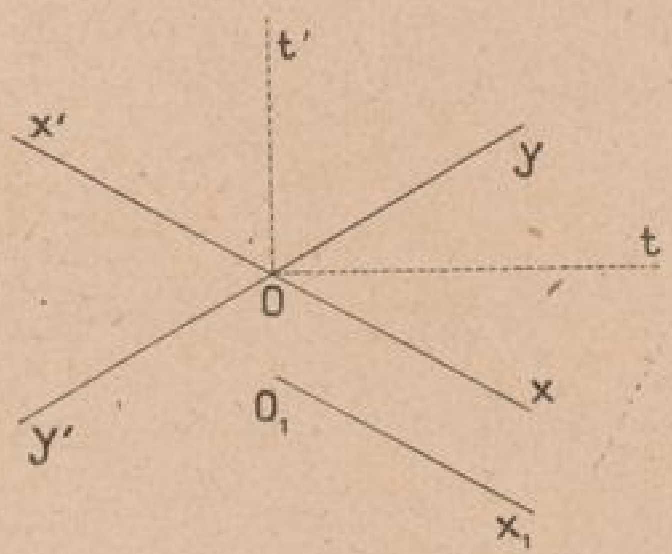

Fig. 2ª.

$\widehat{tOt'}$ estas *angulo orta*(1) (aŭ *orto*); Ot' estas *perpendikla* je Ot; O ĝia *piedo*, estas la *projeciaĵo* de t' sur Ot'; Oy estas *oblikva* je Ox.

t, punkto de Ot, estas *egaldistanca* de Ox kaj de Oy.

(1) De la greka vorto ὀρθός; ne konfuzu *orta* kaj *rekta*.

$\widehat{xOy}$, $\widehat{yOt'}$ estas anguloj *apudaj*.

$\widehat{xOy}$, $\widehat{x'Oy'}$ estas *kontraŭlateraj*.

$\widehat{tOy}$, $\widehat{yOt'}$ estas *komplementaj*.

$\widehat{xOy}$, $\widehat{yOx'}$ estas *suplementaj*.

En la sama figuro, Ox, O_1x_1, estas *paralelaj*.

Du vektoroj paralelaj, egallongaj, kaj same direktitaj, estas *ekvipolentaj*.

Trianguloj. — (E.). En fig. 3ª, ABC estas *triangulo* (aŭ *trilatero*); BC, *latero*; A, *vertico*; AM, *mezanto*; AH, *ortanto*; AB + BC + CA estas la *perimetro*.

La tri mezantoj de ABC pasas tra punkto, kiun oni nomas : *baricentro*; la tri ortantoj *sin reciproke tranĉas*, ĉe la *ortocentro*.

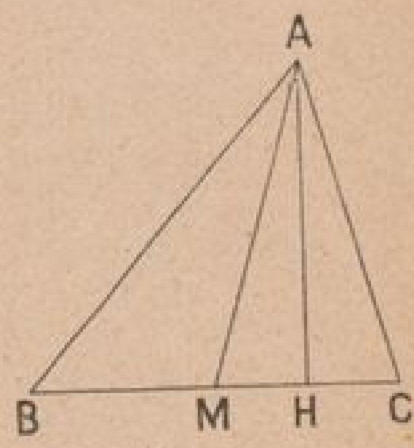

Fig. 3ª.

Triangulo, kies du lateroj estas *egallongaj* (aŭ *egalaj*) estas *izocela*. La tria latero estas *bazo*.

Triangulo, kies tri lateroj estas egalaj, estas *regula*.

Triangulo, kies unu angulo estas orta, estas *ortangula*. La latero, *kontraŭa je* la vertico de la orto, estas *hipotenuzo*.

Multanguloj (*aŭ* **poligonoj**) **kaj multlateroj**. — Oni diros : *kvarangulo*, *kvinangulo*,... aŭ *kvarlatero*, *kvinlatero*,... laŭ la vidpunkto. Kvaranguloj specialaj estas *paralelogramo*, *ortangulo*, *rombo* (aŭ *lozanĝo*), *kvadrato*, *trapezo*.

(E.). La figuro, kiun formas 4 rektoj kaj iliaj 6 duope komunaj punktoj, estas *plena kvarlatero*. Ĝi havas tri *diagonalojn*.

La figuro, kiun formas 4 punktoj kaj la 6 rektoj, kiuj duope kunigas ilin, estas *plena kvarangulo*.

Multangulo *regula* estas, ĉu *konveksa*, ĉu *stelforma*.

Cirklo. — (E.). En fig. 4[a], C estas *cirklo*; O, ĝia *centro*; AB, *diametro*; OA, *radio*, *normala* je la cirklo, ĉe A; $\overset{\frown}{MN}$, *arko*; MN, ĝia *ŝnuro*; IK, ĝia *sago*; *xy*, *secanto*; la areaĵo MONK, *sektoro*; la areaĵo MNK, *segmento*; la arko BE $\left(\frac{1}{4}\right.$ de la perimetro$\left.\right)$, *kvadranto*.

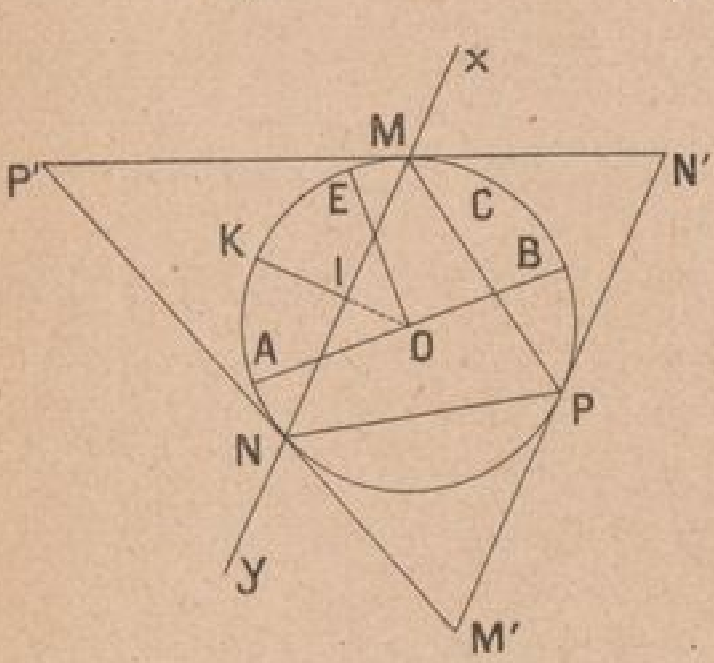

Fig. 4[a].

P′N′ estas *tanĝanto*, kiu *tanĝas* C ĉe la *tanĝopunkto* M (1).

MNP, M′N′P′ estas trianguloj, responde *enskribita* kaj *ĉirkaŭskribita* je C. Cirklo, kiu tanĝas unu lateron de triangulo, kaj du laterojn plilongigitajn, estas *eksterskribita* en la triangulo.

Se G estas punkto de AB, la produto GA$\times$GB estas la *potenco* de G, rilate C.

Du cirkloj havas *komunan ŝnuron* (aŭ *akson radikalan*, aŭ *radikalakson*). Tri cirkloj havas *centron radikalan* (aŭ *radikalcentron*).

Aro da cirkloj, havantaj du punktojn komunajn, estas

(1) Komprenelble, tiuj vortoj taŭgas por ajna kurbo.

fasko da cirkloj. Ĝi enhavas du cirklojn *nulradiajn* : la *punkto-cirklojn* (aŭ **limpunktojn*) de la fasko.

(E.). Ĉiuj cirkloj, kiuj *orte tranĉas* du cirklojn, formas *faskon*.

Similaj figuroj. — (E.). Ĉiuj respondaj anguloj de du *similaj* figuroj estas egalaj.

En du similaj figuroj, ekzistas punkto responda je si mem, la *similcentro*.

Kiam la rektoj kunigantaj ajnajn respondajn punktojn pasas tra sama punkto O, la figuroj estas *homotetiaj*. O estas *homoteticentro*.

Inversaj figuroj. — Se la rektoj kunigantaj duopojn de respondaj punktoj M, M′, de du figuroj, pasas tra la sama punkto O, kaj se OM.OM′ egalas konstanton K^2, la du figuroj estas *inversaj*, rilatante la *poluson* (aŭ *centron*) O. K^2 estas la *inverspotenco*. Kurbo, kiun ne ŝanĝas iu *inversigo*, estas *analagmatika*.

Areoj. — *Areo* estas la mezuro de *areaĵo*, randita de linioj. Du areaĵoj, kies areoj estas egalaj, estas *samareaj*.

Plej simplaj figuroj spacaj. — Du ebenoj formas *duedron*, kies du *edroj* (1) sin reciproke tranĉas ĉe la *eĝo* (2).

Kelkaj ebenoj pasantaj tra unu komuna punkto formas *angulon multedran*. La perpendikloj al la edroj, kondukitaj de la komuna punkto, aŭ *vertico*, estas la eĝoj de la *reciproka* angulo multedra.

Triedro, kies tri edroj estas ortaj, estas *triorta*.

(1) Greke, ἕδρα.
(2) Angle, *edge*.

Multedroj (*aŭ* **poliedroj**). — *Multedro* estas figuro, kiun formas kelkaj ebenoj [1]. Ĝi havas *verticojn*, *edrojn*, *eĝojn*.

Apartaj multedroj estas *piramido*; *prismo*; *secita piramido*; *kvaredro* (aŭ **tetraedro*); *sesedro* (aŭ **heksaedro*); *okedro* (aŭ **oktaedro*); *dekduedro* (aŭ **dodekaedro*); *dudekedro* (aŭ **ikosaedro*).

Apartaj sesedroj estas *paralelepipedo*, ĉu *orta*, ĉu *neorta*; *kubo*.

Sfero. — (E.). Ĉiuj *ebenaj secaĵoj* de *sfero* estas cirkloj. Sur sfero, cirklo, kies ebeno pasas tra la centro de la surfaco, estas *ĉefa* (aŭ **granda*) *cirklo*. Netia cirklo estas *neĉefa* (aŭ **malgranda*) cirklo. Cirklo ajna havas du *polusojn*.

Du cirkloj, kies ebenoj estas paralelaj, randas *zonon*. Se unu el la ebenoj estas tanĝanta, la zono iĝas *unubaza*.

Plej simplaj surfacoj [2]. — La vortoj *cilindro*, *konuso*, *konoido*, ne bezonas klarigojn.

Surfaco *revolua* estas tiu, kiun naskas kurbo *rotacianta* ĉirkaŭ ajna akso. Ĝi havas *meridianojn* kaj *paralelcirklojn*. La surfaco revolua, kies meridianoj estas cirkloj, estas *toruso*.

Volumeno. — *Volumeno* estas la mezuro de *volumenaĵo*, kiun randas surfaco *fermita*. Du volumenaĵoj, kies volumenoj estas egalaj, estas *samvolumenaj*.

(1) Mi, kompreneble, ne pretendas ke tiu difino estas perfekta (vidu antaŭparolon).

(2) *Rektenaskitajn* surfacojn vidu ĉe *Geometrio infinitezimeca*.

Kurboj kaj Surfacoj algebraj kaj transcendentaj (1)

Geometrio analitika. — Oni *rilatas* figuron *al* 2 (ebene), 3 (space) *aksoj koordinataj* (aŭ *koordinataksoj*) ordinare *interortaj*, havantaj komunan punkton, la *koordinato-centron* (aŭ *origenon*)

Punkto havas 3 (ebene, 2), *karteziajn koordinatojn*, la *x-koordinaton*, la *y-koordinaton*, la *z-koordinaton*. Oni ankaŭ uzadas *homogenajn*, kaj *triangulajn* (ebene), *kvaredrajn* (space) koordinatojn.

Direkto estas montrata per siaj *kosinusoj direktaj*.

Oni ankaŭ uzas koordinatojn *azimutajn* (aŭ **polusajn*); punkto, en ebeno, havas du koordinatojn azimutajn : *vektoron* kaj *angulon azimutan*.

Geometrio perspekteca kaj Geometrio metrika. — En geometrio *perspekteca*, fundamente estas konsideri la *biraporton* (aŭ *anharmonan* raporton) de 4 punktoj *komunrektaj*, aŭ de 4 rektoj *komunpunktaj*. Speciala biraporto estas la *harmona*. Se A, B, C, D havas harmonan biraporton $\left(\frac{AB}{AD} = -\frac{CB}{CD}\right)$, A estas la *harmona kunulo* de C, rilate je BD.

Aro da punktoj komunrektaj formas (*rektan*) *punktaĵon*. Aro da rektoj komunpunktaj formas *faskon* en ebeno, *garbon* en spaco. Ebenoj *komunrektaj* formas *faskon*.

Por du punktaĵoj, faskoj, povas ekzisti *homografia* (aŭ *perspekteca*) interrespondo. Interrespondo homografia, simetria, estas *involucio*.

(1) Oni tie ĉi uzos vortojn, nur difinotajn en la 3a paragrafo.

Homografio (aŭ *perpeskteco*) kaj *dualeco* estas la ĉefaj principoj de geometrio perspekteca.

Geometrio *metrika* enkondukas : en ebeno, rekton *absolutan* (aŭ *infinituman*), kaj du punktojn *absolutajn* (aŭ *cirklumajn*) ; en spaco, ebenon *absolutan* (aŭ *infinituman*), kaj *konikon absolutan* (aŭ *sferuman*).

Rektoj, kiuj tranĉas la konikon absolutan, estas *izotropaj*.

Ebenaj kurboj n^a-ordaj kaj n^a-klasaj. — Kurbo estas je *punkta* vidpunkto, *lokaro* da punktoj, kiuj ĝin *laŭiras ;* je *tanĝanta* vidpunkto, *envolvaĵo* da rektoj, kiuj ĝin *envolvas*.

Kurbo *n^a-orda* estas tiu, kiun tranĉas ĉiu rekto ĉe n punktoj ; kurbo *n^a-klasa* estas tiu, al kiu n tanĝantoj povas esti strekataj de ĉiu punkto. Kurbo duaorda (kaj duaklasa) ankaŭ ricevas la nomon *koniko*.

Kurbo konsistas, ĉu el unu, ĉu el kelkaj *branĉoj*.

Kurbo, kies ekvacio estas redukebla, estas ankaŭ *redukebla*.

Singularaĵoj de kurboj. — Punkto de kurbo estas ĉu *ordinara*, ĉu *singulara*. Singulara punkto de kurbo algebra estas ĉu *duobla*, ĉu *triobla*,... Ekzistas tri specoj da duoblaj punktoj :

1e, *Krunodo ;* 2e, *Kuspo ;* 3e, *Aknodo* (1) (aŭ *izolita* punkto) (Vidu fig. 5a).

Pli alta singularaĵo estas *duaspeca* kuspo (4).

(1) Angle, *crunode, cusp, acnode*.

Infleksa punkto (5), ĉe kiu *konkaveco* kaj *konvekseco* ŝanĝas sian *direkton* ne estas punkta singularaĵo.

Se kurbo n^a-orda posedas d duoblajn punktojn, la nombro $\frac{(n-1)\ (n-2)}{2} - d$ estas ĝia *gento* (aŭ *manko*).

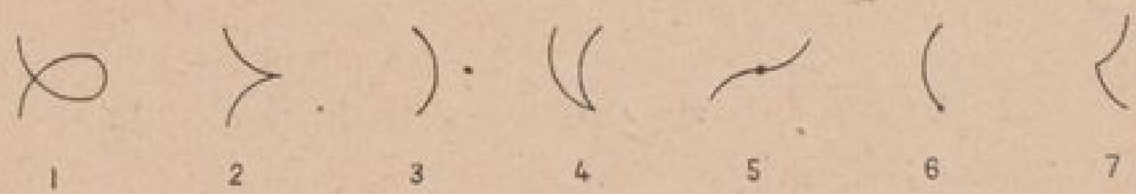

Fig. 5a.

Dualeco enkondukas konsideron de *tanĝantaj* singularaĵoj, kies ĉefaj estas *n-obla* tanĝanto, *infleksa* tanĝanto.

Nur transcendentaj kurboj posedas *haltopunktojn*, *angulpunktojn* (6, 7).

Infinitumaj punktoj. — Tanĝanto, ĉe infinituma punkto, estas *asimptoto*; ĝi povas esti *unuobla*, *duobla*, *infleksa*.

Konikoj. — Ili partiĝas en tri ĉefaj specoj : *elipso*, *parabolo*, *hiperbolo*. Hiperbolo, kies du asimptotoj estas interortaj, estas *ortuma*.

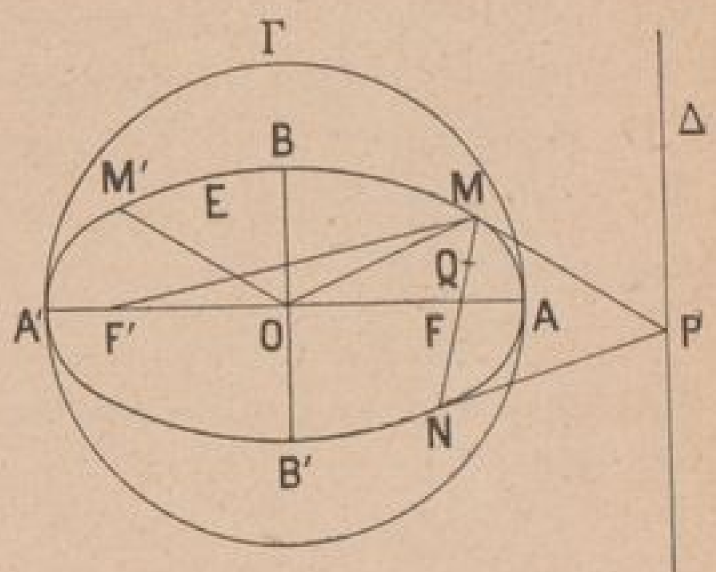

Fig. 6a.

(E.) En fig. 6a, AA' estas *longa* akso; BB', *mallonga* akso; A, A', B, B', *verticoj*; Γ, *ĉefa cirklo*; F, F', *fokusoj*; FM, *vektora radio*; OM kaj OM', *kunulaj diametroj*; P, *poluso* de MN, MN, *polajro* de P; L, punkto ajna de MN, kaj P estas (*harmonaj*) *kunuloj*, rilate E; Δ estas *direktrico;*

La raporto $\frac{OF}{OA}$ estas *decentreco.*

Kiam punkto laŭiras kurbon K, ĝia polajro rilate E envolvas la kurbon *reciprokan de* K, *laŭ* E.

Sistemoj da konikoj. — Aro da konikoj, kiujn prezentas la ekvacio :

$$f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0,$$

formas (*punktan*) *faskon.* Aro da konikoj, kiujn prezentas la ekvacio

$$f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) + \mu \psi(x, y) = 0,$$

formas (*punktan*) *reton.* Dualece respondas *tanĝantaj* fasko kaj reto.

En punkta fasko, ekzistas tri *durektoj-konikoj*. Iliaj centroj estas verticoj de triangulo, *mempolajra* rilate ĉiun konikon de la fasko ; ĉi tiuj verticoj estas *duoblaj* polusoj, por ĉiu duaĵo da konikoj de la fasko.

En tanĝanta fasko, ekzistas tri *dupunktoj-konikoj*. Ĉiu el ili konsistas el du punktoj, kiuj ambaŭ estas *umbilikoj* de du ajnaj konikoj de la fasko.

Specialan tanĝantan faskon formas sistemo da *komunfokusaj* konikoj.

Se ekzistas triangulo, enskribita en la koniko A, kaj mempolajra je la koniko B, A estas *harmone ĉirkaŭskribita* je B.

Apartaj algebraj kaj transcendentaj kurboj. — Kurboj triaordaj : *strofoido ; cisoido.*

Kurboj kvaraordaj : *paskala limako; kardioido* (aŭ *korforma* kurbo); *lemniskato; karteza ovalo; trikusphava hipocikloido.*

Kurboj transcendentaj : *cikloido; epicikloido*(1); *hipocikloido*(1); *kateno; spiraloj* diversaj; *traktorio.*

Kelkaj kurboj estas difinitaj per siaj rilatoj je alia kurbo K : *elvolvato*, envolvaĵo de la normaloj de K; *elvolvanto*, kies normaloj estas la tanĝantoj de K; *reflektokaŭstiko*, *refraktokaŭstiko*, envolvaĵo da lumaj radioj, ĉu reflektitaj, ĉu refraktitaj de K; *konkoido*, akirita per plilongigo konstanta de la vektoroj de K; *izoptika* kurbo, lokaro de la verticoj de anguloj konstantaj, ĉirkaŭskribitaj je K; *ortoptika* kurbo, lokaro de la verticoj de ortoj, ĉirkaŭskribitaj je K; *podajro*, lokaro de la piedoj de la perpendikloj strekitaj de fiksa punkto al la tanĝantoj de K.

Neebenaj kurboj. — La *ordo* de neebena algebra kurbo estas la kiomo de la punktoj, ĉe kiuj ajna ebeno ĝin tranĉas; ĝia *klaso* estas la kiomo de ĝiaj oskulebenoj kiuj enhavas punkton ajnan; ĝia *rango* estas la kiomo de ĝiaj tanĝantoj, kiuj tranĉas rekton ajnan.

La ĉefa specialaĵo de neebena kurbo estas *halteca punkto* (2) (4 infinite najbaraj punktoj en la sama ebeno).

Aparta kurbo neebena, transcendenta, estas la *helico ĝenerala*, kiu secas la naskantojn de cilindro, laŭ angulo konstanta. Se la cilindro estas revolua, la kurbo estas helico (*ordinara*); ĝi estas ĉu *dekstruma*, ĉu *maldekstruma*; ĝi havas *paŝon*.

(1) Nenecese transcendenta.
(2) Ne konfuzu *haltecan* punkton kaj *haltopunkton*.

Algebraj surfacoj. — Laŭ punkta vidpunkto, surfaco estas lokaro *duparametra* de punkto varianta. Laŭ tanĝanta vidpunkto, surfaco estas *envolvaĵo* duparametra de ebeno varianta. La *ordo* de surfaco estas la ordo de ĝiaj ebenaj secaĵoj. La *klaso* de surfaco estas la klaso de ĝiaj *ĉirkaŭskribitaj* konusoj. Surfaco ajna havas (*polajre*) *reciprokan* surfacon, kies klaso egalas la ordon de la unua surfaco.

Kurbo estas reciproka je *elvolvebla* surfaco, envolvaĵo unuparametra de ebeno varianta. Naskanto de elvolvebla surfaco estas la *karakteristiko* de la ebeno, kiu tanĝas la surfacon laŭ tiu ĉi naskanto.

Ĉefaj singularaĵoj de surfaco estas : *duobla* (aŭ *konusuma*) *punkto ; duobla linio.*

Duaordaj surfacoj. — Duaordaj surfacoj (aŭ *kvadrikoj*) partiĝas en diversaj specoj : *elipsoido ; hiperboloido*, ĉu *unupeca*, ĉu *dupeca ; paraboloido*, ĉu *elipsa*, ĉu *hiperbola*.

Hiperboloido, kies *asimptota konuso* enhavas triedron triortan, kaj paraboloido, kies *direktaj ebenoj* estas interortaj, estas *ortumaj*.

Duaorda surfaco havas du *sistemojn* da (rektaj) *naskantoj ;* tri (*ĉefajn*) *aksojn ;* tri *ĉefajn ebenojn :* du realajn sistemojn da cirkloj (enhavitaj en ebenoj *cirklesecaj*), el kiuj ĉiu enhavas du *punktocirklojn* (aŭ **umbilikojn*). La lokaro de la verticoj de la konusoj revoluaj, ĉirkaŭskribitaj je duaorda surfaco, konsistas el tri *fokusaj* konikoj.

(E.). La lokaro de la polusoj, rilate duaordan surfacon, de *kunfaskaj* ebenoj, estas rekto, kiun oni nomas la (*harmona*) *kunrekto* de la eĝo de la fasko.

Sistemoj da duaordaj surfacoj estas *fasko*, *reto* (punktaj aŭ tanĝantaj), k.t.p.

Sistemoj da rektoj. — Sistemo da rektoj, dependaj de *n parametroj*, estas : se $n = 3$, *komplekso ;* se $n = 2$, *kongruenco*.

La *ordo* de komplekso egalas ĝian *klason ;* oni do diros ke komplekso esta n^a-*grada*.

En komplekso *unuagrada*, ĉiuj rektoj komunebenaj pasas tra unu punkto, la *poluso* (aŭ * *fokuso*) de la ebeno ; ĉiuj rektoj komunpunktaj estas en unu ebeno, la *polajra ebeno* (aŭ * *fokusa* ebeno) de la punkto ; ĉiuj rektoj de la komplekso kiuj tranĉas rekton ajnan, ankaŭ tranĉas ĝian *kunrekton*.

Rimarkinda komplekso duagrada estas *kvaredruma* komplekso.

Kongruenco estas aro da rektoj, kiuj tanĝas du surfacojn, la *ĉefajn* surfacojn (aŭ *fokussurfacojn*). Ĉiu rekto de la kongruenco enhavas du *ĉefpunktojn* (aŭ *fokuspunktojn*) ; tiun rekton enhavas du *ĉefebenoj* (aŭ *fokusebenoj*). Ĉefebeno tanĝas unu el la ĉefsurfacoj ĉe unu el la ĉefpunktoj.

En speciala kazo, ĉefsurfaco povas esti anstataŭita de *ĉefkurbo* (aŭ *fokuskurbo*).

Transformadoj. — Oni jam parolis pri *transformadoj simileca*, *homotetieca*, *inverseca*, *perspekteca*, *dualeca* aŭ (*polajre*) *reciprokeca*.

Transformado, kiu konservas la ordon de tanĝeco, estas *tanĝeca*.

Transformado, kiu konservas la grandon de anguloj, estas *konformeca*.

Transformado *punkteca*, ĉe kiu al unu punkto respondas nur unu punkto, estas *racionala* (ĉu *unuoble*, ĉu *duoble*). Transformadon duoble racionalan (aŭ *duracionalan*), *de ebeno al ebeno* (aŭ *de spaco al spaco*), oni ankaŭ nomas *transformadon de Kremona*. La transformado estas n^a-*orda*, se ĝi interrespondigas rektojn kaj kurbojn n^a-ordajn.

Aparta perspekteca transformado estas *homologio*.

Aparta inverseca transformado estas *perspekto stereografia* de sfero.

Geometrio infinitezimeca

Infinitezimecaj propraĵoj de ebenaj kurboj. — La angulo de du *infinite najbaraj* tanĝantoj estas *kurbeca* angulo. Du infinite najbaraj *normaloj* sin reciproke tranĉas, ĉe la *kurbecocentro*, kiu estas centro de la *kurbecocirklo* (aŭ *oskulcirklo*). La radio de tiu cirklo estas *kurbecoradio*, kies inverso estas *kurbeco*.

La rilato, kiu ekzistas inter longo de arko, mezurita de ajna origeno, kaj kurbeco, estas la *ekvacio intrinseka* de kurbo.

La lokaro de kurbecocentroj de kurbo K estas ĝia *elvolvata* kurbo (aŭ *elvolvato*) K′. K estas *elvolvanto* de K′.

Du kurboj povas sin reciproke tanĝi *unuaorde*, *duaorde*...; tanĝeco duaorda estas ankaŭ nomita *oskuleco*.

Kiam oni serĉas la longon de arko, oni ĉi-tiun *rektifas*; kiam oni serĉas la areon de areaĵo, randita de kurbo, oni ĉi tiun *kvadraturas*.

Neebenaj kurboj. — Ebeno, kiu enhavas tri infinite najbarajn punktojn de kurbo, estas *oskulebeno*; ĝi enhavas la *ĉefan* normalon; al ĝi estas perpendikla la *binormalo*. La angulo de du infinite najbaraj oskulebenoj estas *tordecangulo*. Kurbo havas du kurbecojn: la *unuan* kurbecon, kaj la *duan* (aŭ *tordecon*), kies inverso estas *tordecoradio*.

Rektenaskitaj surfacoj. — *Rektenaskita* surfaco estas tiu, kiun *naskas* varianta rekto. Surfaco rektenaskita estas ĉu neelvolvebla, ĉu elvolvebla, laŭ se la tanĝanta ebeno ĉe punkto varianta sur *naskanto*, ĉu varias, ĉu ne.

La piedo, sur naskanto, de la perpendiklo komuna je ĝi kaj je infinite najbara naskanto, estas *centra punkto*, la ebeno tanĝanta ĉe kiu estas *centra ebeno*. La ebeno tanĝanta la surfacon, ĉe l'punkto infinituma de naskanto, estas *asimptota ebeno*.

La lokaro de la centraj punktoj estas *striktolinio* (aŭ *striktokurbo*). Por elvolvebla surfaco, tiu lokaro ricevas la nomon: *kuspeĝo*.

La naskantoj de rektenaskita surfaco estas paralelaj je tiuj de ĝia *asimptota konuso*.

Surfacoj ajnaj. — Pri punkto ajna, oni konsideras: du *ĉefajn kurbecoradiojn*, du *ĉefajn kurbecojn*, kies duona sumo estas *meza* kurbeco, kaj produto, *tuta* kurbeco; du *ĉefajn ebenojn* (normalajn), rilatajn je tiu punkto; du *ĉefajn kurbecocentrojn*, kies lokaro estas *elvolvato* de la surfaco.

Punkto, ĉe kiu la du ĉefaj kurbecoradioj estas egalaj, estas *sfereca* punkto (aŭ **umbiliko*).

Koniko, komuncentra kaj homotetia je tiu, kiu rezultas de seco de la surfaco per ebeno infinite najbara je la tanĝanta ebeno, estas *montra kurbo.*

Ĉefe interesaj kurboj, desegnataj sur surfaco, estas : *kurbeclinioj*; *asimptoteclinioj*; *geodeziaj* linioj ; *nullongaj* linioj. Ajna kurbo havas *geodezian kurbecon.*

Rilate ebenon *horizontalan*, oni konsideras *nivelkurbojn*, kies ebenoj estas horizontalaj; *plejklinajn* kurbojn, kiuj orte secas la nivelkurbojn.

Oni ankaŭ konsideras *retojn da kunulaj kurboj* (aŭ *kunumretojn*) : ĉe la punkto komuna je du kunulaj kurboj, la tanĝantoj al tiuj kurboj estas kunulaj diametroj de la montra koniko.

Surfaco povas esti *prezentata* aŭ *figurata* sur sfero. Kurbeclinio kaj ĝia *sfera prezentaĵo* estas, ĉe interrespondaj punktoj, interortaj.

Surfaco povas esti *fleksata*. Oni tiel akiras surfacon *kongruigeblan* je la unua.

Surfaco, kies, ĉe ajna punkto, ĉefaj kurbecoradioj estas kontraŭegalaj, estas *minimala* surfaco.

Surfaco, kies unu kurbecoradio estas konstanta, estas envolvaĵo de sfero, kies radio havas konstantan longon : ĝi estas *tubosurfaco.*

Geometrio situa

Geometrio situa (aŭ *Analysis situs*, *Topologio*) koncernas figurojn, pri kiuj oni konsideras, ne grandecajn propraĵojn, sed ecojn, kiujn ne ŝanĝas aliformigo *kontinua* de figuro.

(E.). Surfaco estas, ĉu *fermita*, ĉu *malfermita.* Surfaco malfermita posedas *randojn*

Surfaco estas ĉu *duflanka* (ekzemple : ebeno, sfero, k.t.p.), ĉu *unuflanka* (ekzemple : la rektenaskita surfaco triagrada; papera banderolo *tordita*, kies du finaĵojn oni kunigas).

Surfaco estas, ĉu *unuoble*, ĉu *duoble*, ..., *koneksa*.

Surfaco multoble koneksa estas malkomponebla en unuoble koneksajn *pecojn*, per *tranĉoj*.

MEKANIKO

Kinematiko

Kinematiko enkondukas la konsideradon de tempo kaj de movo.

Parolante pri tempo, oni devas distingi la *instanton* (aŭ *tempopunkton*) de la *momento* (aŭ *tempero*).

La punktoj de korpo movata havas *trajektoriojn*.

Diversaspecaj movoj. — Movo, en kiu ĉiu rekto de la movata korpo konservas direkton konstantan, estas *translacia movo*.

Movo, en kiu la movata korpo turniĝas ĉirkaŭ akso, estas *rotacia movo*.

Movo, en kiu la movata korpo turniĝas kaj glitas ĉirkaŭ akso, estas *riglomovo* (aŭ movo *rigleca*) se la turniĝo kaj glito estas sendependaj. Se ili estas proporciaj, la movo estas *helicmovo* au movo *heliceca*.

(E.). Ĉiu *delokigo* estas *efektivigebla* per helicmovo.

Movo povas esti *unuparametra*, ... *kvinparametra* (aŭ *libera unuagrade*,... *kvinagrade*).

Geometrio kinematika. — En geometrio kinematika, oni studas la geometriajn ecojn de movo, ne enkondukante la konsideradon de tempo.

(E.). Ĉiu ebena infinitezima movo estas rotacio ĉirkaŭ *instanta rotacicentro*; ĉiu spaca movo estas helicmovo ĉirkaŭ *instanta helicakso*; je ĉiu instanto, la trajektorioj de la diversaj punktoj de ebeno estas normalaj je rektoj, kiuj enhavas komuna la *poluson* (aŭ **fokuson*) de la ebeno.

Rapido, Acelo. — Se la ekvacio $s = f(t)$ prezentas la movon de punkto, $\frac{ds}{dt}$ estas la *rapido*, $\frac{d^2s}{dt^2}$, la *acelo*.

(E.). La teorio de *rilataj movoj* enkondukas *absolutajn* kaj *rilatajn* rapidojn kaj acelojn, acelon *decentran komponitan*.

Movo, kies rapido estas konstanta, estas *unuforma*; movo, kies absoluta valoro de rapido *unuforme* kreskas, estas *unuforme acela*; movo, kies absoluta valoro de rapido unuforme malkreskas, estas unuforme *malacela*.

Geometrio de masoj

Peza korpo havas *pezocentron*. La valoro de $\Sigma\, mr^2$ (kie r estas la distanco de punkto havanta mason m al la akso X) estas la *inertomomento* de la korpo, rilate X.

Statiko

Statiko rilatas ripozajn korpojn, al kiuj *agas fortoj*. Tiuj fortoj povas esti, ĉu *interekvilibraj*, ĉu ne. Ekvilibro estas ĉu *starema*, ĉu ne.

Ĉiu forto estas prezentebla de vektoro. Ĝi havas *agopunkton*, *grandon*, *direkton*; ĝi havas *momenton*, rilate ĉu punkton, ĉu akson.

Forto devena de punkto estas *centra* forto, ĉu *altira*, ĉu *depuŝa* (aŭ *alcentriga*, *decentriga*).

(E.). Sistemo da fortoj estas redukebla, ĉu al *rezultanto* unika, ĉu al unu forto kaj unu *fortoparo*.

Oni *kunmetas* fortoparojn, prezentitajn per vektoroj, same kiel fortojn.

Dinamiko

Inerteca leĝo estas unu el ĉefprincipoj de mekaniko. Alia ĉefprincipo estas : egaleco de *ago* kaj *kontraŭago*.

(E.). En la rilato

$$F = m\gamma, \qquad (\gamma = \text{acelo})$$

m estas la *maso* de materia punkto.

— $m\gamma$ estas *inertoforto* ; ĝia normala komponanto estas *forto decentriga*.

(E.). La rilato

$$\mathfrak{C} = \Sigma \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)_t^2 - \Sigma \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t_0}^2$$

esprimiĝas ĉi tiel : de la instanto t_0 al la instanto t, la *laboro* de la fortoj *efikaj* je korpo moviĝanta egalas la varion de la *vivpovo* de l'korpo.

Laŭ Dalembert, oni akiras la ekvaciojn de ajna movo, aplikante la principon de *neefektivaj laboroj*.

Korpo movanta havas *energion efektivan* (kiu estas ĝia vivpovo) kaj energion *potencialan*, kiam al ĝi agas fortoj devenaj de *potencialo*.

MALLONGAJ EKZEMPLOJ

Aritmetiko

Teoremo de Fermat: *Se p estas primo, m entjero ajna, la nombro m^p-m estas oblo de p.*

Ni skribu, per la sistemo de nombrado m-uma, ĉiujn entjerojn p-ciferajn, kies nombro (enhavante la *nulon*) estas m^p.

El ĉi tiuj nombroj, la m jenaj :

$$\begin{array}{llll}(o & o & \ldots\ldots & o), \\ (1 & 1 & \ldots\ldots & 1), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\overline{m-1} & \overline{m-1} & & \overline{m-1}),\end{array}$$

konsistas ĉiu el unu cifero p-foje ripetita.

Estu :

$$A_1 = (a \quad b \quad \ldots\ldots \quad k \quad l)$$

unu el la m^p-m aliaj nombroj. Mi pretendas *ke la p nombroj :*

$$\begin{array}{l}A_1 = (a \quad b \quad \ldots\ldots \quad k \quad l), \\ A_2 = (b \quad \ldots\ldots\ldots \quad l \quad a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p = (l \quad a \quad \ldots\ldots \quad k),\end{array}$$

kiuj devenas de A_1 per cikla permuto, estas diferencaj, ĉiu de la ceteraj.

Supozinte ke (ekzemple) A_1 estas identa je A_h, ni p-onigu cirklon, kaj je la dividpunktoj $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$, ni apudigu la ciferojn de A_1, kiel montras la jena figuro (fig. 7^a).

Se A_h estas identa je A_1, la unua cifero de A_h estas la unua cifero de A_1, t. e. : a. Sed la unua cifero de A_h estas la h^a cifero de A_1. Sekve la h^a cifero de A_1, kiu estas la h^a cifero de A_h estas a. Sed la h^a cifero de A_h estas la $(2h-1)^a$ cifero de A_1, k. t. p.

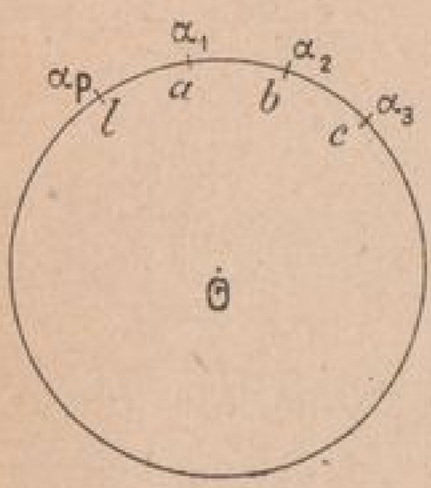

Fig. 7^a.

Videble, oni povas geometrie esprimi ĉi tion, dirante :

Se oni alkondukas rektojn de la punkto α_1 al la punkto α_h, de la punkto α_h al la punkto α_{2h-1}, k. t. p., la ciferoj, apudaj je la verticoj de la formita stelforma multangulo, estas identaj.

Sed, ĉar p estas primo, tiu multangulo estas necese p-angulo. Sekve, la nombro A_1 konsistas el identaj ciferoj, kaj ne povas esti unu el la $m^p - m$ nombroj nun konsiderataj.

De tio tuj rezultas ke tiuj $m^p - m$ nombroj estas *p-opigeblaj*.

Ĉi tio nur okazas, se $m^p - m$ estas entjero dividebla per p.

K. O. D. P.

Teorio de ekvacioj nombraj

Teoremo de Kartezio : 1^e *Se $F(x)$ estas polinomjo ordigita laŭ la potencoj de x, la nombro de la radikoj pozitivaj de la ekvacio $F(x) = 0$ egalas pleje la nombro de la signoŝanĝoj de l' polinomjo $F(x)$.*

2^e. *Se la nombro de la radikoj pozitivaj estas pli mal-*

granda ol la nombro de la signoŝanĝoj de l' polinomjo, la diferenco estas iu entjero para.

Pruvo de Laguerre [1]. Por pruvi la unuan teoremon, mi montros ke, se ĝi estas vera, kiam la polinomjo kiu formas la unuan membron de l'ekvacio posedas $(m-1)$ signoŝanĝojn, ĝi ankaŭ estas vera, kiam la polinomjo posedas m signoŝanĝojn. La teoremo estos, sekve, tute ĝenerale pruvita, ĉar ĝi memvideble estas vera, kiam ĉiuj termoj de l' polinomjo havas saman signon.

Estu do

$$F(x) = A\,x^p \ldots + M\,x^r + N\,x^s + \ldots + R\,x^u,$$

polinomjo ordigita laŭ la potencoj, ĉu kreskantaj, ĉu malkreskantaj de x, kaj posedanta m signoŝanĝojn.

L'ekvacio

$$F(x)\,x^{-\alpha} = 0,$$

se α estas nombro reala ajna, havas la samajn pozitivajn radikojn kiel l'ekvacio

$$(1) \qquad F(x) = 0,$$

kaj la funcio, el kiu konsistas ĝia unua membro, ĉiam estas finita kaj kontinua, kiam x senfine kreskas, de nombro pozitiva ε, laŭvole malgranda. Oni do rajte aplikos la teoremon de Rolle, inter la randoj 0 kaj $+\infty$: oni tiel vidas ke la nombro de la radikoj pozitivaj de l'ekvacio(1) pleje superas per 1 la nombron de la radikoj pozitivaj de l'ekvacio

$$x^{-(\alpha+1)}\,[x\,F'(x) - \alpha\,F(x)] = 0,$$

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, tome IX. 1883. *Œuvres*, tome I, p. 3. La sekvanta teksto estas laŭvorta traduko de tiu de Laguerre.

t. e., de l'ekvacio

$$(2) \qquad x\,F'(x) - \alpha\,F(x) = 0.$$

La koeficientoj de tiu ĉi ekvacio estas, laŭvice

$$A\,(p-\alpha),\ \ldots\ M\,(r-\alpha),\ N\,(s-\alpha),\ \ldots\ R\,(u-\alpha).$$

Ĉar la polinomjo F (x) posedas m signoŝanĝojn, ni supozu ke M kaj N estas kontraŭsignaj, kaj elektu la nombron arbitran α, tiamaniere ke ĝi estu interhavita de la nombroj r, s. Estas videble ke, ĉe la antaŭa sekvaĵo, la nombraj koeficientoj de la kvantoj A,... M, kaj tiuj de la kvantoj N,... R, estas kontraŭsignaj.

Tial la unua membro de l'ekvacio (2) posedas tiom da signoŝanĝoj, kiom la sekvaĵo

$$A, \ldots M, -N, \ldots -R,$$

t. e. $m-1$ signoŝanĝojn. De tio rezultas ke ĉi tiu ekvacio posedas, pleje, $m-1$ radikojn pozitivajn, kaj l'ekvacio (1), pleje, m radikojn pozitivajn. La unua teoremo estas, tiel, plene pruvita.

Por pruvi la duan teoremon, estas sufiĉe, kiel oni scias, rimarki ke la nombro da radikoj pozitivaj de l'ekvacio (1), kaj la nombro da signoŝanĝoj de l'polinomjo F (x), ĉiam havas saman parecon.

Geometrio elementa

Ĉe triangulo ajna, je du lateroj neegalaj, estas kontraŭaj du anguloj, kies internaj duonantoj estas neegalaj, kaj la pli mallonga duonanto estas kontraŭa je la pli longa latero.

Estu ABC triangulo, pri kiu oni supozas $AB < AC$ (fig. 8[a]). Estu BD la interna duonanto de l'angulo $\widehat{B}$, CE la interna duonanto de l'angulo $\widehat{C}$, D, E, iliaj piedoj. Mi pretendas ke $CE > BD$.

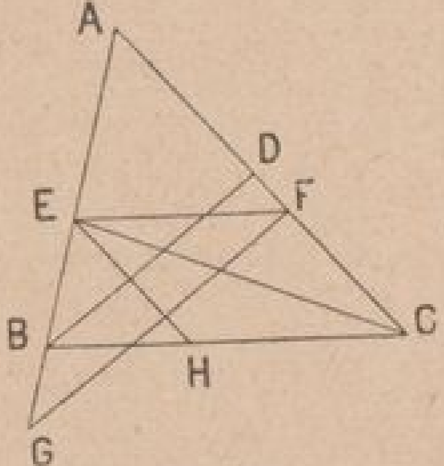

Fig. 8[a].

Oni streku EF, paralelan je BC, kaj estu F la punkto ĉe kiu EF tranĉas AC; oni ankaŭ streku EH, paralelan je AC, kaj estu H la punkto, ĉe kiu EH tranĉas BC : EFCH estas, memvideble, lozanĝo. Tial $EH = EF = FC$.

De la hipotezo rezultas :

$$\widehat{ACB} = \widehat{EHB} < \widehat{EBH}, \text{ tial } EB < EH = EF.$$

Se do oni markas sur la duonrekto EB la punkton G, tian ke $EG = EF$, la punkto G estas ekster la segmento EB (kiel montras la figuro). GF estas paralela je BD, ĉar $\widehat{EGF} = \frac{1}{2}\widehat{AEF} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{EBD}$.

Tial, $GF > BD$.

Nun, ni komparu la triangulojn GEF, EFC. Estas :

$$EG = FE, \qquad EF = FC,$$

$$\widehat{GEF} = \pi - \widehat{ABC} < \pi - \widehat{ACB} = \widehat{EFC}.$$

Tial $$EC > GF > BD.$$

Geometrio supera

Estu D, D′ *du rektoj, ne enhavitaj en unu ebeno. Konsideru ĉiujn hiperboloidojn ortumajn, kiuj enhavas tiujn rektojn : iliaj rektaj naskantoj, samsistemaj kiel D, D′, formas komplekson unuagradan.*

Ni konsideru ĉiujn hiperboloidojn ortumajn (H), kiuj enhavas D, D′, kaj punkton ajnan P : ili akceptas *ok* kondiĉojn, ĉiujn unuagradajn laŭ la koeficientoj de l'ekvacio punkta de (H). De tio rezultas ke la hiperboloidoj (F) formas punktan faskon. Ilia komuna kurbo enhavas D, D′; ĝi do konsistas el D, D′, kaj el du aliaj rektoj, kiuj tranĉas D, D′ : unu pasas ĉe P; estu Δ la alia. La naskanto G de (H), samsistema kiel D, D′, tranĉas Δ : ĝia lokaro, sekve, estas la ebeno, kiun determinas P kaj Δ.

El ĉi tio rezultas la teoremo, kiun oni devis pruvi.

TABELO DA VORTOJ

Ĉi tiu tabelo enhavas ĉiujn novajn radikojn proponitajn, kaj vortojn de la komuna lingvo, kiuj ricevas apartan sencon, en matematiko.

Ĉiu radiko estas ordinare prezentita per la ĉefa vorto, kiu al ĝi apartenas (ĉu substantivo, ĉu adjektivo, ĉu verbo, laŭokaze). El devenigitaj vortoj, nur la plej gravaj troviĝas.

La numeroj rilatas la paĝojn, ĉe kiuj la radikoj unuafoje enkondukiĝis.

57

TABELO DE L'ENHAVO

54878. — Imprimerie Lahure, 9, rue de Fleurus, à Paris.