Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 13

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 13.1. Bestimme für einen Körper K die idempotenten Elemente, also Elemente $e \in K$ mit $e^2 = e$. Bestimme die linearen Projektionen $\varphi\colon K \to K$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.2.*

Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis. Bestimme die Matrix zu φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.3. Es sei $L \subseteq \mathbb{R}^3$ der Lösungsraum zur linearen Gleichung

$$3x + 4y + 6z = 0$$

und $W = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Zeige

$$\mathbb{R}^3 = L \oplus W$$

und beschreibe die Projektionen auf L und auf W bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.4. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Projektion auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige, dass φ bezüglich einer geeigneten Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 13.5. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^3$ das Bild der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto (t, t^2, t^3) = (x, y, z).$$

Skizziere die Bilder von C unter den Projektionen auf die verschiedenen Koordinatenebenen.

Aufgabe 13.6. Zeige, dass die Summe von zwei linearen Projektionen

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Projektion ist.

Aufgabe 13.7. Vereinfache den Beweis zu Lemma 13.5 mit Hilfe der Dimensionsformel.

Aufgabe 13.8. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Vektorraum ist.

Aufgabe 13.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Untervektorraum des Abbildungsraumes $\operatorname{Abb}(V, W)$ ist.

Aufgabe 13.10. Es sei W ein K-Vektorraum über dem Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(K,W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto \varphi(1),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Aufgabe 13.11.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $\operatorname{Hom}_K(V,W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F\colon \operatorname{Hom}_K(V,W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.

Aufgabe 13.12. Wir betrachten den Matrizenraum $\operatorname{Mat}_2(K)$ und fixieren die Matrix $A = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow \operatorname{Mat}_2(K),\ M \longmapsto A \circ M,$$

linear ist.

(2) Beschreibe die Matrix zu φ bezüglich einer geeignet gewählten Basis.

(3) Bestimme Kern und Bild von φ.

Aufgabe 13.13. Wir betrachten den Endomorphismenraum $\operatorname{End}(K^2) = \operatorname{Hom}_K(K^2,K^2)$. Ist die Abbildung

$$\operatorname{End}\left(K^2\right) \longrightarrow \operatorname{End}\left(K^2\right),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ \varphi,$$

eine lineare Abbildung?

Aufgabe 13.14. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass die ersten n^2+1 Potenzen[1]

$$M^i,\ i = 0, \ldots, n^2,$$

linear abhängig in $\operatorname{Mat}_n(K)$ sind.

Aufgabe 13.15. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige die folgenden Aussagen.

[1]Wir werden später eine deutlich stärkere Aussage kennenlernen.

(1) Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon U \longrightarrow V$$

mit einem weiteren Vektorraum U induziert eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(U,W),\ f \longmapsto f\circ\varphi.$$

(2) Eine lineare Abbildung

$$\psi\colon W \longrightarrow T$$

mit einem weiteren Vektorraum T induziert eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V,T),\ f \longmapsto \psi\circ f.$$

Aufgabe 13.16. Formuliere Lemma 13.8 mit Matrizen bezüglich gegebener Basen.

Aufgabe 13.17.*

Es sei K ein Körper, V und W seien endlichdimensionale K-Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

a) Zeige: φ ist genau dann surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung

$$\psi\colon W \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi\circ\psi = \operatorname{Id}_W$$

gibt.

b) Es sei nun φ surjektiv, es sei

$$S = \{\psi : W \to V \,|\, \psi \text{ linear},\ \varphi\circ\psi = \operatorname{Id}_W\}$$

und es sei $\psi_0 \in S$ fixiert. Definiere eine Bijektion zwischen $\operatorname{Hom}_K(W, \operatorname{kern}\varphi)$ und S, unter der 0 auf ψ_0 abgebildet wird.

Aufgabe 13.18. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass

$$\operatorname{End}(V) = \{\varphi : V \to V \,|\, \varphi \text{ linear}\}$$

mit der Addition und der Hintereinanderschaltung von Abbildungen ein Ring ist.

Den Ring der vorstehenden Aufgabe nennt man *Endomorphismenring* zu V.

Aufgabe 13.19. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$g\colon V \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi_g\colon \operatorname{End}(V) \longrightarrow \operatorname{End}(V),\ f \longmapsto gfg^{-1},$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist und dass darüber hinaus

$$\Psi_g(f_1 \circ f_2) = \Psi_g(f_1) \circ \Psi_g(f_2)$$

und

$$\Psi_g(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_V$$

gilt.

Aufgabe 13.20. Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Bestimme die Dimension des Raumes der Endomorphismen

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi(v_i) \in K v_i$$

für alle i. Wie sehen die Matrizen zu einem solchen φ bezüglich dieser Basis aus?

Aufgabe 13.21. Wir betrachten die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$. Bestimme die Dimension des Vektorraumes, der aus allen linearen Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

besteht, die u auf die x-Achse und v auf die y-Achse abbilden. Beschreibe den entsprechenden Unterraum des Matrizenraums bezüglich passend gewählter Basen.

Aufgabe 13.22. Wir betrachten die Gerade $G = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$. Es sei $M \subseteq \operatorname{Hom}_K(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ die Menge der linearen Abbildungen, die diese Gerade auf das Achsenkreuz abbildet. Zeige, dass M kein Untervektorraum des Homomorphismenraumes ist.

Aufgabe 13.23. Es sei V ein K-Vektorraum und es seien

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

Automorphismen derart, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $\varphi(U) = \psi(U)$ gilt. Zeige, dass $\varphi = a\psi$ mit einem $a \in K$ ist.

Die Idee zu den folgenden Aufgaben stammt von
http://www.vier-zahlen.bplaced.net/ .

Aufgabe 13.24. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Es bezeichne Ψ^n die n-fache Hintereinanderschaltung von Ψ.

(1) Berechne

$$\Psi(6,5,2,8),\ \Psi^2(6,5,2,8),\ \Psi^3(6,5,2,8),\ \Psi^4(6,5,2,8)\ldots,$$

bis das Ergebnis das Nulltupel $(0,0,0,0)$ ist.

(2) Berechne

$$\Psi(1,10,100,1000),\ \Psi^2(1,10,100,1000),\ \Psi^3(1,10,100,1000),\ \Psi^4(1,10,100,1000)\ldots,$$

bis das Ergebnis das Nulltupel $(0,0,0,0)$ ist.

(3) Zeige $\Psi^4(0,0,n,0) = (0,0,0,0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13.25. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Bestimme, ob Ψ injektiv und ob Ψ surjektiv ist.

Aufgabe 13.26. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich bei jedem Starttupel (a,b,c,d) nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Aufgabe 13.27. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{Q}_{\geq 0}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.28. (4 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis. Bestimme die Matrix zu φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.29. (5 (1+4) Punkte)

a) Zeige, dass die 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1 \mp \sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix}$$

Projektionen beschreiben. Dabei sind $b, c \in K$ derart, dass eine Quadratwurzel $\sqrt{1-4bc}$ existiert.

b) Bestimme sämtliche 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

die eine Projektion beschreiben.

Aufgabe 13.30. (2 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Zeige

$$\operatorname{rang}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang} \varphi_i .$$

Aufgabe 13.31. (3 Punkte)

Es seien G_1, G_2 und H_1, H_2 jeweils verschiedene Geraden im K^3. Welche Dimension hat der Raum

$$W = \left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_K\left(K^3, K^3\right) \mid \varphi(G_1) \subseteq H_1 \text{ und } \varphi(G_2) \subseteq H_2 \right\}?$$

Aufgabe 13.32. (5 (1+2+2) Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ gegeben. Wir betrachten den Untervektorraum

$$U \subseteq \operatorname{Hom}_K\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right),$$

der aus allen linearen Abbildungen φ besteht, die gleichzeitig die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

a) $\varphi(u) \in \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$.

b) $\varphi(v) \in \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$.

(1) Bestimme die Dimension von U.
(2) Beschreibe den entsprechenden Unterraum des Matrizenraums bezüglich passend gewählter Basen durch lineare Gleichungen.
(3) Beschreibe den entsprechenden Unterraum des Matrizenraums bezüglich passend gewählter Basen durch eine Basis.

Die Aufgabe zum Aufgeben

Lösungen zu der folgenden Aufgabe direkt an den Dozenten. Bis nach den Ferien.

Aufgabe 13.33. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Man gebe ein Beispiel für ein Vierertupel (a, b, c, d) mit der Eigenschaft an, dass sämliche Iterationen $\Psi^n(a, b, c, d)$ für $n \leq 25$ nicht das Nulltupel liefern.

Überprüfe das Ergebnis auf http://www.vier-zahlen.bplaced.net/stufe4.php
.