高等算學入門

周爲羣編

高等算學入門

周為羣 編

開明書店

高等算學入門

二十三年四月初版　　三十六年二月四版

每册定價國幣五元七角

編著者　周爲羣

發行者　開明書店

代表人范洗人

印刷者　開明書店

(260 P.) W　　高

編輯大意

1. 本書可供高級中學學生三年之用,或作教科書,或作參考書,均覺適當;即大學一年級學生——除對於算學須深詳研究者外——亦可採用;即其他人等爲學問上或業務上欲了解高中範圍內的算學,本書亦恰合其需要.

2. 本書採用混合編法,其中包含平面三角,高等代數,解析幾何,微分積分;取材精當,聯絡自然,絕無蕪雜凌亂之弊.

3. 本書雖係混合編法,然平面三角,高等代數,解析幾何,微分積分各自的體系仍能保持,且於其相互關聯處,發揮盡致,使學者領悟算學中有"左右逢源","殊途同歸"之妙,與僅學習分科算學者大異其趣.

4. 本書所有習題,多寡合度,學者須逐一演算勿缺.在第二十三章以後,對於較難的習題附記答數,寓有啓發作用.

5. Breslich's Second-Year Mathematics.
Breslich's Third-Year Mathematics.
Breslich's Correlated Mathematics For Junior Colleges.
Wentworth's Plane And Spherical Trigonometry.
Fine's College Algebra.
Siceloff, Wentworth and Smith's Analytic Geometry.
Love's Analytic Geometry.
Love's Differential and Integral Calculus.
Baker's The Calculus For Beginners.
Osborne's Differential and Integral Calculus.

上列各書,編輯本書時均經參考,得助甚多,特表謝意,並以示不敢掠美.

編者識　二十三年三月二十四日.

目　次

第一章

三角比

1. 求角與距離. 畢塔哥拉斯(Pythagoras)的定理,我們知道了;兩個直角三角形,如各有一個銳角彼此相等,則兩形相似,這事實我們也知道了;還有在同一直角三角形內的兩個銳角互爲餘角,我們也知道了.從這些原理我們能悟得一種求未知角和未知距離的方法.

這些原理是"三角法(Trigonometry)"的基礎;三角法不僅在研究高等算學方面很有用處,在一切實用科學方面也很有用處的.

習題

1. 試證凡直角三角形各有一個銳角彼此相等,則互相似.

2. 在方格紙(書店內有製成的出售)上畫一直角三角形,令其一角等於 30°.量其各邊至小數點下第二位,並求對30°角的邊與斜邊的比值.

3. 試證凡直角三角形有一個角是30°的,這個比值是

相同的.

4. 在習題2那個三角形內,求對60°角的邊與斜邊的比值,算至小數點下第二位.將你所算得的結果和同班同學的比較一下.

5. 試證凡直角三角形有一個角是60°的,這個比值是相同的.

6. 在有一個角是45°的直角三角形內,求對45°角的邊與斜邊的比值,算至小數點下第二位.

7. 試證凡直角三角形有一個角是45°的,這個比值是一定不變的.

8. 用量角器畫一個40°的角(圖1).在任一邊上取A_1, A_2, A_3,各點,再從各點作垂線至他邊.量A_1C_1與A_1O,並求其比值.

9. 試證在圖1的一切三角形內,對40°角的邊與各自斜邊的比值是相同的.

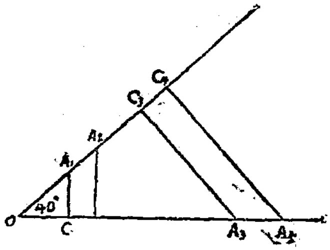

圖 1

從習題9的事理看來,可知兩邊的長雖變動不居,而其比值是固定的.

如圖1,對邊與斜邊這個固定的比值叫做40°角的正弦(sine).

2. 一個角的三角比 (Trigonometric ratios).

設有一個A角(圖2).在這個角的任一邊上取一點,如B,自B至他邊作垂線卽成了一個直角三角形,如ABC.

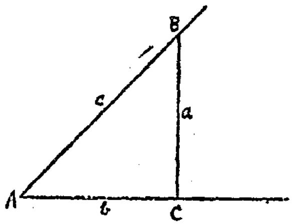

圖 2

在這個三角形內,對A角的邊與斜邊的比叫做A角的"正弦"(寫爲: $\sin A$),卽

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

隣A角的邊與斜邊的比叫做A角的"餘弦 (Cosine)",(寫爲: $\operatorname{Cos} A$),卽

$$\cos A=\frac{b}{c}.$$

對A角的邊與鄰A角的邊的比叫做A角的"正切 (tangent)",(寫爲: $\tan A$),卽

$$\tan A=\frac{a}{b}.$$

簡括言之:

$$\sin A=\frac{對邊}{斜邊}, 或 \frac{a}{c}.$$

$$\cos A=\frac{隣邊}{斜邊}, 或 \frac{b}{c}.$$

$$\tan A=\frac{對邊}{隣邊}, 或 \frac{a}{b}.$$

3. 以圖形法決定三角比的數值.

一個已知角的三角比的數值可以約略求得,只須畫一個含有已知角的直角三角形,看以下的習題自可明瞭.

習 題

1. 求 $\sin 50°$ 的數值.

用量角器在方格紙上畫一個角等於50° (圖3).作$AB \perp CB$.量AB與AC.求這個比$\frac{AB}{AC}$的值.這就是要求的數.

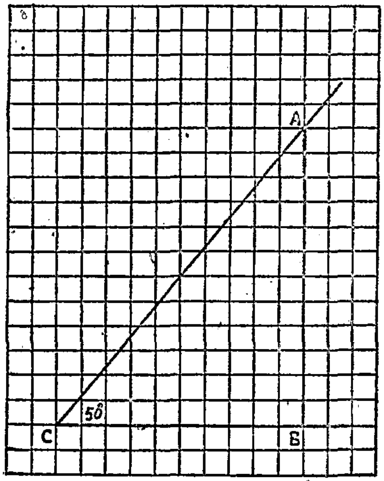

圖 3

2. 求 $\sin 20°$; $\sin 45°$; $\sin 60°$; $\sin 70°$ 的數值.

3. 從1°到90°各角的三角比的值可以列成下表.把你演算習題1,2所得結果與表中相當的值比較一下.

1°—90° 各角的正弦,餘弦和正切的表.

角	正弦	餘弦	正切	角	正弦	餘弦	正切
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	.0872	.9962	.0875	**50**	.7660	.6428	1.1918
6	1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7880	.6157	1.2799
8	.1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	.1736	.9848	.1763	**55**	.8192	.5736	1.4281
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2126	57	.8387	.5446	1.5399
13	.2250	.9744	.2309	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	.2588	.9659	.2679	**60**	.8660	.5000	1.7321
16	.2756	.9613	.2867	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9563	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3443	64	.9888	.4384	2.0503
20	.3420	.9397	.3640	**65**	.9063	.4226	2.1445
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	.4226	.9063	.4663	**70**	.9397	.3420	2.7475
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	.9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	.5000	.8660	.5774	**75**	.9659	.2588	3.7321
31	.5150	.8572	.6009	76	.9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	.9744	2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	.9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	.5736	.8192	7002	**80**	.9848	.1736	5.6713
36	.5878	.8090	7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	.6428	.7660	.8391	**85**	.9962	.0872	11.4301
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	.9998	.0175	57.2900
45	.7071	.7071	1.0000	**90**	1.0000	.0000	∞

4. 三角函數. 設有一方程式 $y=2x+3$. $x=0$, $y=3$; $x=1$, $y=5$; $x=-1$, $y=1$;……;當 x 有一個值, y 必有一個對應的值; y 跟着 x 而變. y 就說是 x 的函數.凡乙數跟

着甲數而變,則乙數稱爲甲數的函數.我們考察前表,則見角度變化從 1° 到 90°,諸三角比的值也跟着變化.因爲在角度上起了變化,在比值上便產生了一個對應的變化,所以三角比又叫做"三角函數(Trigonometric Functions)".

設有一個角,牠有一個函數的值已經知道了,那麼其他函數的值和這個角的度數可用幾種方法來決定.假使有了一張三角函數的表在手頭,自然只須把表一查就可以了.如不用表,可用代數法或圖形法;代數法在後講到,圖形法說明如下:

5. 已知一個角的一個函數,用圖形法求其他諸函數.

習　題

1. 已知一角的正弦爲 $\frac{1}{2}$,求其他諸函數的值和這角的度數.

畫一個直角 A (圖 4).在這個角的一邊上取 $AB=1$. 以 B 爲中心並取半徑等於 2, 畫一圓弧,遇 AC 於 C.

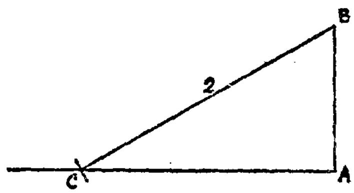

圖 4

量 AC 並求 C 角的餘弦與正切.

用量角器求 C 角的度數.

2. 設有一角,其正弦為 $\frac{7}{8}$; .2; .75; 試求其度數,並求其他諸函數的值.

3. 求這個角度和其他二函數的值,設 $\cos B = 0.6$; 設 $\tan A=\frac{4}{3}$.

30°, 45°, 60° 的函數的確值.

6. 30°與60°的函數的確值. 因為30°, 45°,和60°在許多問題中要用到,所以我們應該記牢牠們的函數的確值.這些確值可在以下的習題中求得.

習題

1. 畫一個含有30°角的直角三角形,可先畫一個等邊三角形(圖 5),然後把牠分成兩個相合三角形 (Congruent triangles).

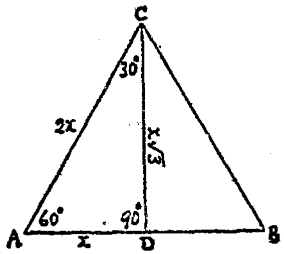

圖 5

求證 $\triangle ADC$ 的兩個銳角是60°和 30°.

求證這斜邊是對30°角的邊的二倍.所以,設 AD 為 x, 則 AC 必為 $2x$.

求證 $CD=x\sqrt{3}$.

2. 求 $\sin 30°$ 的值,用圖 5.

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \qquad \text{何故?}$$

3. 求 $\sin 60^\circ$ 的值.

$$\sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

4. 求 $\cos 30$ 的值.

5. 求 $\cos 60^\circ$ 的值.

6. 求 $\tan 30^\circ$ 的值.

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7. 求 $\tan 60^\circ$ 的值.

7.　45° 的函數的確值. 畫一等腰直角三角形,即得 45° 的角 (圖 6).

習　題

1. 在這個等腰直角三角形 ABC 內 (圖 6), 試證 $A=C=45^\circ$.

2. $\triangle ABC$ 的兩等邊用 x 表示, 試證 $AC=x\sqrt{2}$.

3. 求 45° 的各函數的確值, 但須令其分母爲有理數.

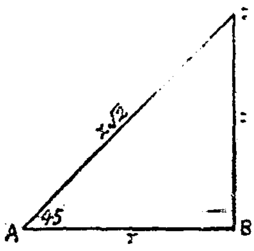

圖　6

8.　30°, 45°, 60° 的函數的確值的總覽.

為要整齊起見,把 $\frac{1}{2}$ 寫做 $\frac{1}{2}\sqrt{1}$, 那麼

$$\sin 30^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{1},\ \sin 45^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \sin 60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

餘弦的數值是和上面一樣的,但把次序倒轉過來,如:

$$\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{1},\ \cos 45^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \cos 30^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

這幾個數值又可列成一表如下:

函數＼角度	30°	45°	60°
正　弦	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
餘　弦	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$

至於正切的數值無須記住,因為從三角函數相互間的關係,這是很容易算出的,往後便可知道.不過在研究這些關係之前,我們應該略述這些函數的實用.

三角函數的實用

9. 一個直角三角形的決定. 我們已知凡直角三角形是相合的,只要牠們對於下列各部分彼此相等:

(1) 夾直角的二邊.

(2) 一邊和一銳角.

(3) 斜邊和其他二邊之一.

這就是說:在一個直角三角形內,除直角以外還有兩

部分(至少須有一種是邊)如已知道,那麼這個三角形便可完全決定,並可根據已知部分把牠畫出來;試看以下的習題自可明瞭.

習題

1. 一根旗竿直立在地面,有一根繩,一端結在旗竿頂上,一端結在離旗竿脚20尺的地上,並與地面成73°的角,又假設這根繩拉得很緊張的.試求這根旗竿的高.

(1) 圖形法的解答:用尺和量角器,在方格紙上,照自定的比例畫一個直角三角形 ABC (圖 7).量 x,就知道牠大約是66尺.

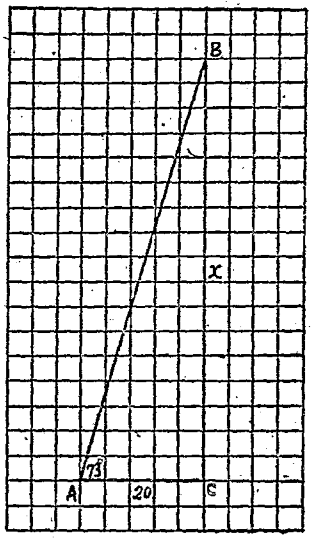

圖 7

(2) 三角法的解答:應用 A 角的正切,則得:

$$\frac{x}{20}=\tan 73°=3.2709 \text{ (見前表)}.$$

所以 $x=20\times3.2709=65.418$.

2. 用260尺長的一根線把一個輕氣球扣在地上,線和地面成67°的角,假設這根線是直線,那麼這個輕氣球飄得多少高?

3. 牽風箏的一根繩長300尺,繫在地面上一點 A (圖

8). 在地面上,從 A 到另一點 C, 相距 $102\frac{1}{2}$ 尺,而正在風箏 B 之下. 假設牽風箏的這根繩是直的,試求風箏的高和牠的仰角* (即 $\angle A$).

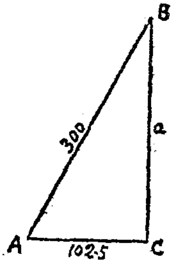

圖　8

(1)　圖形法的解答:在方格紙上,照自定的比例畫一個直角三角形 ABC, 而量 a 和 A 即得.

(2)　三角法的解答:

$$\cos A=\frac{102.5}{300}=.3.$$

由前表檢得 $\cos 72^\circ=.3090,$

$$\cos 73^\circ=.2924,$$

何謂仰角?何謂俯角?仰角和俯角這兩個名詞在測量上時常用到,究竟是什麼意義,看右圖自明:

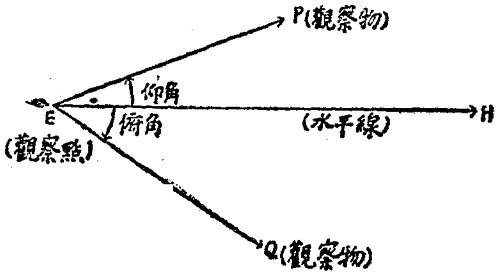

圖　9

在自觀察點引出的水平線上面的角,叫做仰角,在下面的角,叫做俯角.觀察物如在自觀察點引出的水平線上面,則成仰角而無俯角;觀察物如在自觀察點引出的水平線下面,則成俯角而無仰角.如圖 9, $\angle HEP$ 是觀察物 P 的仰角, $\angle HEQ$ 是觀察物 Q 的俯角.

∴這風箏的仰角大約是72°或73°.

因為 $\frac{a}{300}=\sin 72°=.9511$ (見前表),

所以 $a=300\times.9511=285.$

(3) 代數法的解答: a 的數值又可從下面的方程式求得

$$a=\sqrt{300^2-102.5^2} \qquad \text{何故?}$$

4. 8尺長的一根竹竿直立在平地上,投射在地面上的一個影子是9尺長.試求這時太陽的仰角.

5. 在地面上 A 點測得一架飛機的仰角為60°.正在飛機之下的一點 C, 在地面上離 A 點300碼.試求這架飛機的高.

6. 有一座山,山頂離地面 $500\sqrt{3}$ 尺,在平地上有一點與山頂間最短的距離為1000尺.這山頂的仰角是什麼?

7. 立在高出海面140尺的塔上,見一船的俯角為20°,問這船離塔脚多少遠?

8. 站在高出海面120尺的塔上,見一船離塔脚400尺遠.這船的俯角是什麼?

9. 從離海面150尺高的塔頂上,一船的俯角是25°.問這船離塔頂多少遠?

10. 一架飛機正飛在 C 鎮之上,望見離 C 鎮 $2\frac{1}{4}$ 里的 B 鎮的俯角為10°.求其時這飛機的高.

11. 從飛得 600 尺高的一架飛機上,望見飛得 150 尺高的另一架飛機的俯角是 39°. 問這兩架飛機相隔多少遠?

12. A, B 二人,相距 1200 尺,各望一架飛機,而這飛機正在自 A 至 B 的一直線上方. A 見這飛機的仰角爲 35°,同時 B 見這飛機的仰角爲 55°. 求這飛機的高.

13. 在一座塔的頂上豎着一根旗竿. 在平地上離塔脚 50 尺遠的一點 A, 見旗竿頭的仰角爲 35°; 在同點見塔頂的仰角爲 20°. 求這根旗竿的長.

14. 有一兒童要決定一個工廠的烟囱的高 HK. 他先把一個測量鏡放在 B, 後又放在 A, 測得 x 和 y 二角. 這個測量鏡置在離地面 $3\frac{1}{2}$ 尺高的一張三脚台上. A, B 相距 50 尺. 假設那塊地面是水平的,又假設 $x=63°$, $y=33\frac{1}{2}°$ (圖 10), 那麼這個烟囱多少高?

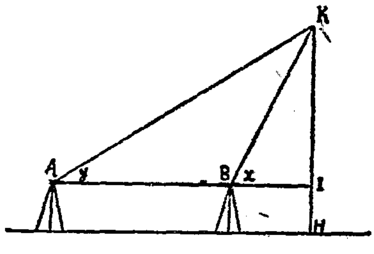

圖 10

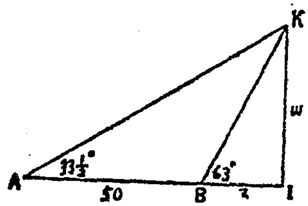

圖 11

在圖 11 內,
$$\frac{w}{z}=\tan 63°=1.9626, \tag{1}$$

$$\frac{w}{50+z}=\tan 33\tfrac{1}{2}°=.6620. \tag{2}$$

(1) 與 (2) 爲聯立方程式, w 與 z 爲其中的未知數.用替代法消去 w:

$$w=1.9626\,z \text{ (從 (1) 得來)}, \tag{3}$$

把 (3) 代入 (2), 得

$$\frac{1.9626z}{50+z}=.6620. \tag{4}$$

從 (4) 求 z 的值.將 z 的值代入 (3), 卽得 w 的值.最後把 $3\frac{1}{3}$ 尺加到 w 的值上去,就是這烟囪的高 HK.

15. 從一條河的南岸一點 A 望見北岸一棵樹頂的仰角爲 45°. 在 A 之南 70 碼遠的一點 B, 則見這樹頂的仰角爲 30°. 求這河的闊.

16. 在離地 20 尺高的窗口,見一座塔的脚的俯角爲 15°, 牠的頂的仰角爲 37°. 問這塔多少高?

17. 有一條東西流行的河.一個人在岸旁選一點 A, 從 A 點向東偏北 30° 見對岸有一棵樹 C. 他再從 A 點向東前進到一點 B, 回頭向西測得這棵樹 C 在偏北 60°. AB 的長爲 300 碼.試求這條河的闊 CH (圖 12).

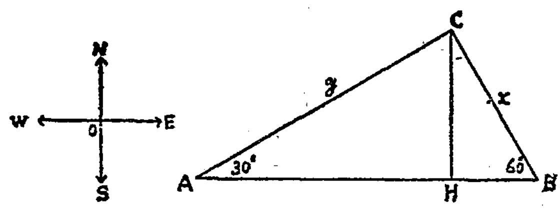

圖　12

18. 兩架飛機同時從 C 城飛出.飛機 A 向南飛,每點鐘15里,飛機 B 向西飛.過了一點鐘的 $\frac{3}{4}$,從飛機 A 上望見飛機 B 在自北偏西 $51\frac{1}{2}°$ 的方位.問兩機相隔多少遠?又飛機 B 每點鐘的平均速度是多少?

19. 一個輕氣球正飄在一條直路的上方.在這路上有兩所房子,其俯角一為 $34°$,一為 $64°$.假設這兩所房子相距65碼,問這球多少高?

20. 從一架飛機上,望見一根55尺高的旗竿,牠的頂和脚的俯角是 $45°$ 和 $67°$.試求這架飛機的高.

三角函數相互間的關係

10. 一個角的正弦,餘弦和正切,其中重要的關係可用簡單的公式表明出來.

習　題

1. 設 A 為一任意銳角,試證

$$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1.$$

在圖13內, $\sin A=\frac{a}{c}$, (1)

$\cos A=\frac{b}{c}$. (2)

平方(1)和(2),

$(\sin A)^2=\frac{a^2}{c^2}$, (3)

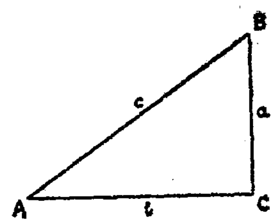

圖　13

$$(\cos A)^2=\frac{b^2}{c^2}. \tag{4}$$

(3) 和 (4) 相加,

$$(\sin A)^2+(\cos A)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}, \tag{5}$$

$$\because \quad a^2+b^2=c^2,$$

$$\therefore \quad (\sin A)^2+(\cos A)^2=1. \tag{6}$$

$(\sin A)^2$ 通常寫做 $\sin^2 A$; 同樣 $(\cos A)^2$ 和 $(\tan A)^2$ 寫做 $\cos^2 A$ 和 $\tan^2 A$.

2. 在圖 13 內,求證 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$.

3. 應用這個公式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,求證 $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$*, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

4. 從圖 13, 求證

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}.$$

11. 三角恆等式.

這兩種基本關係

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1, \tag{1}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}, \tag{2}$$

*現在我們在根式之前不該用雙號,因爲我們還沒有了解負正弦或負餘弦的意義.

對於任何值的 A 角是眞實的.所以牠們稱爲恆等式,並且有時寫做

$$\sin^2 A+\cos^2 A\equiv 1;\ \tan A\equiv\frac{\sin A}{\cos A}.$$

這個符號"≡"就是表示恆等的意思.

12. 已知一個函數的值,求其他諸函數的值. 根據了這兩個基本恆等式 $\sin^2 A+\cos^2 A\equiv 1$, 和 $\tan A\equiv\frac{\sin A}{\cos A}$, 設使我們已知一個函數的值,那麼其他二函數的值便可求得.

習　題

在以下各題中,求其他二函數的值:

1. $\tan B=\frac{3}{4}$.

解法: $$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{3}{4}, \tag{1}$$

又 $$\sin^2 B+\cos^2 B=1. \tag{2}$$

(1) 和 (2) 可以當做含有二個未知數 $\sin B$ 和 $\cos B$ 的聯立方程式. $\sin B$ 可用替代法消去如下:

從 (1), $$\sin B=\frac{3}{4}\cos B, \tag{3}$$

以 (3) 代入 (2), $$\frac{9}{16}\cos^2 B+\cos^2 B=1, \tag{4}$$

去 (4) 的分母, $$9\cos^2 B+16\cos^2 B=16, \tag{5}$$

$$25\cos^2 B=16, \tag{6}$$

$$\cos^2 B=\frac{16}{25}, \tag{7}$$

$$\cos B=\frac{4}{5}. \tag{8}$$

從 (3), $$\sin B=\frac{3}{5}.$$

2. $\cos B=\frac{1}{3}$. 3. $\sin B=\frac{1}{4}$. 4. $\tan B=\frac{4}{3}$.

5. $\sin B=0.5$. 6. $\cos B=m$. 7. $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

8. $\cos B=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. 9. $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 10. $\cos B=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

11. $\tan B=\sqrt{3}$. 12. $\tan B=\frac{1}{3}\sqrt{3}$. 13. $\tan B=s$.

13. 三角恆等式的證法. 依據了這兩個基本的三角恆等式 $\sin^2 A+\cos^2 A\equiv 1$ 和 $\tan A\equiv\frac{\sin A}{\cos A}$ 還可導出許多其他三角恆等式來.

習　題

試證下列的三角恆等式:

1. $1+\tan^2 A\equiv\frac{1}{\cos^2 A}$.

證: $$1+\tan^2 A\equiv 1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \qquad \text{何故?}$$

$$\equiv\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$\equiv\frac{1}{\cos^2 A}. \qquad \text{何故?}$$

2. $\cos A \equiv \frac{\sin A}{\tan A}$.

證：因 $\tan A \equiv \frac{\sin A}{\cos A}$.

兩邊乘以 $\frac{\cos A}{\tan A}$ 即得

$$\cos A \equiv \frac{\sin A}{\tan A}.$$

3. $\tan A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \equiv 1$.

4. $\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\tan A} \equiv \frac{1}{\sin A}$.

5. $\cos A \cdot \tan A \cdot \frac{1}{\sin A} \equiv 1$.

6. $\sin A \cdot \frac{1}{\tan A} \equiv \cos A$.

7. $\frac{1}{\tan^2 A} \equiv \frac{1}{\sin^2 A} - 1$.

8. $\frac{\sin A + \cos A}{1 + \tan A} \equiv \cos A$.

9. $\frac{1}{\sin A} - \sin A \equiv \cos A \cdot \frac{1}{\tan A}$.

10. $\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin A} \equiv \tan A + \frac{1}{\tan A}$.

11. $\sqrt{1 - \sin^2 A} \equiv \sin A \cdot \frac{1}{\tan A}$.

12. $\tan A \cdot \cos A \equiv \sqrt{1 - \cos^2 A}$.

13. $1 + \frac{1}{\tan^2 A} \equiv \frac{1}{\sin^2 A}$.

14. $\left(1 + \frac{1}{\tan^2 A}\right)(1 - \cos^2 A) \equiv 1$.

15. $(1 + \tan^2 A)(1 - \sin^2 A) \equiv 1$.

16. $\dfrac{1}{\cos A}+\tan A\equiv\dfrac{\cos A}{1-\tan A\cos A}$.

證: $$\frac{1}{\cos A}+\tan A\equiv\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\equiv\frac{1+\sin A}{\cos A}.$$

$$\frac{\cos A}{1-\tan A\cos A}\equiv\frac{\cos A}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos A}$$

$$\equiv\frac{\cos A}{1-\sin A}$$

$$\equiv\frac{\cos A(1+\sin A)}{1-\sin^2 A}$$

$$\equiv\frac{\cos A(1+\sin A)}{\cos^2 A}$$

$$\equiv\frac{1+\sin A}{\cos A}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\cos A}+\tan A\equiv\frac{\cos A}{1-\tan A\cos A}.\quad 何故?$$

17. $\dfrac{1}{\cos A}-\sin A\cdot\tan A\equiv\cos A$.

18. $\left(\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1-\dfrac{1}{\tan A}\right)$

$$\equiv\left(\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\tan A}\right).$$

14. 倒數. x 和 $\dfrac{1}{x}$ 互爲倒數就是: $\dfrac{1}{x}$ 是 x 的倒數,

x 也是 $\frac{1}{x}$ 的倒數. $x\times\frac{1}{x}=1$, 就是兩個互為倒數的數相乘,其積必等於 1; 也就是一個數乘牠的倒數必得 1. 例如: $3\times\frac{1}{3}=1$; $\frac{2}{5}\times\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$.

15. 正切,餘弦,正弦的倒數. 一個角的正切,餘弦,和正弦既是隨着這個角的變化而變化,那麼牠們各自的倒數也必是隨着這個角的變化而變化的.所以也可稱為三角函數.正切的倒數叫做"餘切(Cotangent)",餘弦的倒數叫做"正割(secant)",正弦的倒數叫做"餘割(Cosecant)".總而言之,一個角的三角函數就是正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割共六個.再用圖(圖 14)表明如下:

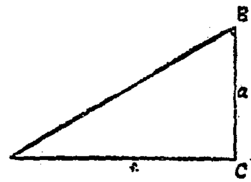

圖 14

$$\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{a}{c}.$$

$$\cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\frac{b}{c}.$$

$$\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\frac{a}{b}.$$

$$\cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\frac{b}{a}=\frac{1}{\tan A}=\tan A\text{ 的倒數}.$$

$$\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\frac{c}{b}=\frac{1}{\cos A}=\cos A\text{ 的倒數}.$$

$$\csc A(\text{或 }\operatorname{cosec} A)=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sin A}=\sin A\text{ 的倒數}.$$

16. 從 §15 又可得下列的三種基本關係:

$$\left.\begin{aligned}\sin A\csc A&\equiv 1. &(1)\\ \cos A\sec A&\equiv 1. &(2)\\ \tan A\cot A&\equiv 1. &(3)\end{aligned}\right\}[3]$$

由是，§13 的習題 1，可寫爲

$$1+\tan^2 A\equiv\sec^2 A;$$

習題13，可寫爲

$$1+\cot^2 A\equiv\csc^2 A.$$

這兩式也很重要，應該記住。

習　　題

試證以下各恆等式：

1. $\sin A\sec A\equiv\tan A.$
2. $\cos A\csc A\equiv\cot A.$
3. $\sin A\sec A\cot A\equiv 1.$
4. $\cos A\csc A\tan A\equiv 1.$
5. $(1-\sin^2 A)\tan^2 A\equiv\sin^2 A.$
6. $(1+\tan^2 A)\sin^2 A\equiv\tan^2 A.$
7. $(1-\sin^2 A)\csc^2 A\equiv\cot^2 A.$
8. $\tan^2 A\cos^2 A+\cos^2 A\equiv 1.$
9. $(\sin^2 A-\cos^2 A)^2\equiv 1-4\sin^2 A\cos^2 A.$
10. $\tan A+\cot A\equiv\sec A\csc A.$
11. $\dfrac{\cos A}{1-\sin A}\equiv\dfrac{1+\sin A}{\cos A}.$

第　二　章

三角函數的變化　對數

17. 餘角的三角函數.

兩個餘角的普通形式爲 A 和 $90°-A$.

在直角三角形 ABC 內 (圖 15),

$$A+B=90°;$$

所以 $$B=90°-A.$$

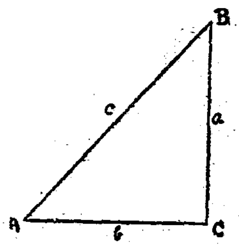

圖　15

由三角比的定義得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B=\cos(90°-A),$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B=\sin(90°-A),$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B=\cot(90°-A),$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B=\tan(90°-A),$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\csc B=\csc(90°-A),$$

$$\csc A=\frac{c}{a}=\sec B=\sec(90°-A).$$

習　題

1. 已知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$; 求 $\cos 60^\circ$.

$$\sin 30^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)=\cos 60^\circ.$$

$$\therefore\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

2. 已知 $\tan 30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$; 求 $\cot 60^\circ$.

3. 已知 $\cot 40^\circ=1.192$; 求 $\tan 50^\circ$.

4. 設 0° 至 45° 間各角的三角函數都已知道,那麼 45° 至 90° 間各角的三角函數也可求得.是何道理?

5. 已知 $\tan A=\cot A$; 求 A 的度數.

$$\tan A=\cot(90^\circ-A)=\cot A.$$

$$\therefore\quad 90^\circ-A=A.$$

$$\therefore\quad A=45^\circ.$$

6. 已知 $\cos A=\sin 2A$; 求 A 的度數.

7. 已知 $\sin A=\cos 2A$; 求 A 的度數.

8. 已知 $\cos A=\sin(45^\circ-\frac{1}{2}A)$; 求 A 的度數.

9. 已知 $\cot\frac{1}{2}A=\tan A$; 求 A 的度數.

三角函數的變化

18. 以直線代表各三角函數. 一個角的各函數都可以直線代表,只要我們先選取一根單位長的線段,而後畫出幾個直角三角形,令各比式的分母都等於這根單位長的線段;最便當的方法如下:

以一點O(圖16)爲中心,以一根單位長的線段爲半徑,作一個圓,又畫兩根直徑AA'和BB'互相垂直.像這個圓以1爲半徑,就叫做"單位圓".

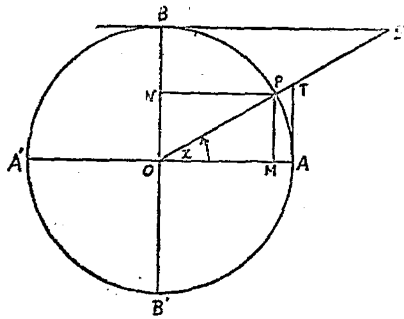

圖 16

設AOP爲一銳角而以x表示其值(度,分,秒). x這個角,我們可以當做牠由OP轉動而產生的,OP繞着O點從始位OA轉到終位OP,才成$\angle AOP$.

畫$PM\perp OA$, $PN\perp OB$.

在直角三角形OMP內,斜邊$OP=1$. 所以, $\sin x=\frac{MP}{OP}=MP$; $\cos x=\frac{OM}{OP}=OM$.

經過A與B畫兩切線遇OP的引長部分於T與S. 在二直角三角形OAT與OBS內, $OA=1$, $OB=1$, $\angle OSB=\angle x$. 所以,

$$\tan x=\frac{AT}{OA}=AT;\qquad \cot x=\frac{BS}{OB}=BS;$$

$$\sec x=\frac{OT}{OA}=OT;\qquad \csc x=\frac{OS}{OB}=OS.$$

這六根直線可以代表這六個函數,乃是因爲把這個圓的半徑當做單位長的緣故.如若這個角的度數變化,那

麼這些直線也跟着變化,並且常常等於這些比值.所以,在角度變化的過程中,我們要研究各函數變化的情況,只須把這些直線來代替這些比值,一定覺得非常便利的.

習題

1. 用直線代表一個大於圖16的銳角的各函數.
2. 設 x 爲一銳角,試圖證 $\sin x$ 小於 $\tan x$.
3. 設 x 爲一銳角,試圖證:

   (a) $\sec x > \tan x$.

   (b) $\csc x > \cot x$.

4. 試作 x 角,設:

   (a) $\tan x = 3$. (b) $\csc x = 2$.

   (c) $\cos x = \frac{1}{2}$. (d) $\sin x = \cos x$.

   (e) $\sin x = 2\cos x$. (f) $4\sin x = \tan x$.

5. 設 x 爲一已知角,試從下列的關係畫出 y 角來:

   (a) $\sin y = 2\sin x$. (b) $\cos y = \frac{1}{2}\cos x$.

   (c) $\tan y = 3\tan x$. (d) $\sec y = \csc x$.

6. 試圖證 $2\sin A > \sin 2A$.
7. 有 A, B 二角, $A+B<90°$; 試證 $\sin(A+B) < \sin A + \sin B$

19. 角度變化時各函數所生的變化.

設 $\angle AOP$ 或 x (圖17) 向着 $90°$ 逐漸增大,那麼這個 P

點沿着AB弧向B移動,T沿着切線AT移動而離A漸遠,S沿着切線BS向B移動,M沿着半徑OA向O移動.所以MP,AT,OT逐漸增長,而OM,BS,OS逐漸縮短;就是:

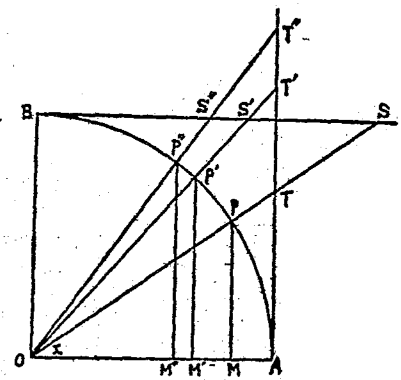

圖 17

當一個銳角向着90°增大,牠的正弦,正切,和正割隨着增大,而牠的餘弦餘切,和餘割隨着減小.

反過來說,當x角逐漸減小,那麼牠的各函數變化的次序也就倒轉過來.

設x角減小到$0°$,那麼OP與OA重合而與BS平行.故MP和AT都消滅,OM等於OA,而BS和OS都變成無限長,其值以符號∞代表之.

又設x角增大到90°,那麼OP與OB重合而與AT平行.故MP和OS都等於OB,OM和BS都消滅,而AT和OT都變成無限長.

所以,當x角從0°增大到90°,

$\sin x$ 增大從 0 到 1,

$\cos x$ 減小從 1 到 0,

$\tan x$ 增大從 0 到 ∞,

$\cot x$ 減小從 ∞ 到 0,

$\sec x$ 增大從 1 到 ∞,

$\csc x$ 減小從 ∞ 到 1.

0° 或 90° 的各函數的值都是一個銳角的各函數的極限值(limiting values).對於任何銳角,這是顯而易見的:

正弦與餘弦常小於 1;

正割與餘割常大於 1;

正切與餘切含有 0 與 ∞ 間一切的值.

習題

1. 已知 $\sin A=\frac{12}{13}$; 求其餘各函數的值.
2. 已知 $\tan A=\frac{4}{3}$; 求其餘各函數的值.
3. 已知 $\sin A=m$; 求 $\sec A$.
4. 已知 $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$; 求 15° 的其餘各函數.
5. 已知 $\sin 0^\circ=0$; 求 0° 的其餘各函數.
6. 已知 $\sin 90^\circ=1$; 求 90° 的其餘各函數.
7. 已知 $2\sin A=\cos A$; 求 $\sin A$ 與 $\cos A$.
8. 已知 $4\sin A=\tan A$; 求 $\sin A$ 與 $\tan A$.

對數

20. 對數 (Logarithm) 的定義. 設 a 為除 1 以

外的任何正數，n 為任何數(不論整數或分數，也不論正負，0也可以)，則 a^n= 一個數 $=N$；我們就說 n 是以 a 為"底"時 N 的"對數"，通常寫做 $n=\log_a N$；log 就是 logarithm 的縮寫，就是表示對數，寫在 log 右側下的 a 字就是表示底。

設 $b^m=M$，則 $m=\log_b M$.

又設 $M=a^k$，則 $\log_a M=k$.

例如：　$64=4^3$，　$\therefore\ \log_4 64=3$.

　　又　$64=8^2$，　$\therefore\ \log_8 64=2$.

同是一數只要所取的底不同，牠的對數便不同了。

21. 對數對於乘，除，乘方，開方都有很大的用處，在三角法上為求計算簡捷起見，需用對數的地方很多。關於對數的性質和對數表的用法，在以前學習初等代數的時候應該都已學過，這里不必多講，只說個概要就好了，

22. 關於對數的定理. 關於對數的幾條重要定理，一一說明如下：

(1)　1 的對數為 0.

　　因為　$a^0=1$.　$\therefore\ 0=\log_a 1$.

(2)　底的對數為 1.

　　因為　$a^1=a$.　$\therefore\ 1=\log_a a$.

(3)　一個正數的倒數的對數是這個數的負對數.

　　因為設 $a^n=N$，則 $\frac{1}{N}=\frac{1}{a^n}=a^{-n}$.

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{1}{N}\right)=-n=-\log_a N.$$

(4) 二個或二個以上的正數相乘的積的對數等於各因數的對數之和.

$$\text{因為} \quad M\times N=a^m\times a^n=a^{m+n}.$$

$$\therefore \quad \log_a(M\times N)=m+n=\log_a M+\log_a N.$$

三個,四個,……因數的積亦復如是.

(5) 二個正數相除的商的對數等於被除數與除數的對數之差.

$$\text{因為} \quad \frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=m-n=\log_a M-\log_a N.$$

(6) 一個正數的冪的對數等於這個數的對數與指數相乘的積.

$$\text{因為} \quad N^p=(a^n)^p=a^{np}.$$

$$\therefore \quad \log_a(N^p)=np=p\log_a N.$$

(7) 一個正數的正實根的對數等於這個數的對數除以根指數所得的商.

$$\text{因為} \quad \sqrt[r]{N}=\sqrt[r]{a^n}=a^{\frac{n}{r}}.$$

$$\therefore \quad \log_a\sqrt[r]{N}=\frac{n}{r}=\frac{\log_a N}{r}.$$

23. 底的變換. 以 a 爲底的對數可變成以 b 爲底的對數,其法如下:

設 N 爲任何正數,又設 $n=\log_a N$, $m=\log_b N$, 那麼,

$$N=a^n,\quad N=b^m.$$

$$\therefore\quad a^n=b^m.$$

無論以何數爲底,

$$n\log a=m\log b,$$

或
$$\log a\times\log_a N=\log b\times\log_b N,$$

由是 $\log_b N$ 可以求得,只要已知 $\log a$, $\log b$ 和 $\log_a N$; 反過來說, $\log_a N$ 可以求得,只要已知 $\log a$, $\log b$ 和 $\log_b N$.

24. 兩種重要對數. 對數的種類雖可多至無限,但只有兩種是通行的.這兩種是:

(1) 常用對數 (The common logarithm), 其底爲 10.

(2) 自然對數 (The natural logarithm), 其底爲 e.

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots=2.71828\cdots\cdots.$$

常用對數用在實際計算上,自然對數則用在高等算上.

常用對數的底 10, 通常不寫出來,例如 $\log_{10}2=0.30103$, 就寫做 $\log 2=0.30103$.

25. 指標和假數. 對於同一個底,大數的對數必

大於小數的對數.如以10為底則56的對數,必大於31的對數,1的對數必大於0.8或$\frac{5}{12}$的對數,0.8或$\frac{5}{12}$的對數必大於0.14或$\frac{3}{13}$的對數,就是, $\log 56>\log 31$, $\log 1>\log 0.8$, $\log 1>\log\frac{5}{12}$, $\log 0.8>\log 0.14$, $\log\frac{5}{12}>\log\frac{3}{13}$.

已知 $\log 1=0$, $\log 10=1$. 何故?

所以,凡大於1而小於10的數,其對數必大於0而小於1. $\therefore$ $\log 2, 3, 4, \cdots\cdots, 9=$ 一個小數.

已知 $\log 10=1$, $\log 100=2$.

所以,凡大於10而小於100的數,其對數必大於1而小於2. $\therefore$ $\log 11, 12, 13, \cdots\cdots, 99=1+$ 一個小數.

已知 $\log 100=2$, $\log 1000=3$.

所以,凡大於100而小於1000的數,其對數必大於2而小於3. $\therefore$ $\log 101, 102, \cdots\cdots, 999=2+$ 一個小數.

依據了這個道理,可以推算任何數的對數.

通常一個數的對數由兩部分合成,一部分是整數,他一部分是小數.這個整數叫做"指標",這個小數叫做"假數".例如, $\log 7263=3.86112$, 3是指標, 0.86112是假數.

凡小數必小於1,但1的對數為0,故小數的對數必小於0,就是小數的對數必為負數.

26. 指標的求法. 求一個數的對數,牠的假數須

向已經製成的對數表上去檢查,但是牠的指標等於這個數的整數部分所有位數減 1, 無須查表,況且表上也決不載指標.

(1)　問 25671 的對數的指標是什麽?

因爲 25671 是一個五位數,所以牠的指標是 $5-1=4$

(2)　問 3917.876 的對數的指標是什麽?

因爲 3917.876 的整數部分有四位 (3917),所以牠的指標是 $4-1=3$.

27. 小數的對數的指標. 小數的對數必是負數前已說過;但是所謂指標只要是整數,正負不論,所以小數的對數的指標必是一個負整數.

$$0.1=\frac{1}{10}=10^{-1}. \qquad \therefore \qquad \log 0.1=-1.$$

$$0.01=\frac{1}{100}=10^{-2}. \qquad \therefore \qquad \log 0.01=-2.$$

$$0.001=\frac{1}{1000}=10^{-3}. \qquad \therefore \qquad \log 0.001=-3.$$

$$0.0001=\frac{1}{10000}=10^{-4}. \qquad \therefore \qquad \log 0.0001=-4.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於此可見這個負整數的絕對值常等於這個小數點右面所有 0 的個數加 1. (1)　問 $\log 0.5=?$

$$1>0.5>0.1 \qquad \therefore \quad 0>\log 0.5>-1.$$

$\therefore \quad \log 0.5=-1+$ 一個小數.

(2) 問 $\log 0.513=?$

$1>0.513>0.1. \qquad \therefore \quad 0>\log 0.513>-1.$

$\therefore \quad \log 0.513=-1+$ 一個小數.

(3) 問 $\log 0.0371=?$

$0.1>0.0371>0.01. \qquad \therefore \quad -1>\log 0.0371>-2.$

$\therefore \quad \log 0.0371=-2+$ 一個小數.

(4) 問 $\log 0.0093=?$

$0.01>0.0093>0.001. \qquad \therefore \quad -2>\log 0.0093>-3.$

$\therefore \quad \log 0.0093=-3+$ 一個小數.

由是而知小數的對數的指標的絕對值等於這個小數點右面所有 0 的個數加 1.

例如: $\log 0.71$ 的指標是 -1, 因爲小數點的右面沒有 0.

$\log 0.0216$ 的指標是 -2, 因爲小數點的右面有一個 0.

$\log 0.007154$ 的指標是 -3, 因爲小數點的右面有兩個 0.

28. 小數的對數的記法.

從 §27 看來, 小數的對數, 通常仍由指標和假數兩部分合成, 爲求統一起見, 假數常令爲正. 所以小數的對數通常含有一個負整數和一個正小數, 如 $\log 0.02=-2+0.30103$; 但如此記法很不便利, 不過改爲 -2.30103 也不好, 因爲這

樣要把 2.30103 完全看做負數了;所以如下的記法最妥,

$$\log 0.02=\overline{2}.30103$$

把負號放在 2 的頭上,就表示只有 2 是負數, 0.30103 還是正數.

29. 一個數以10的冪乘或以10的冪除,乘得或除得的各數的對數的假數是永遠不變的,就是牠們的假數相同而指標各異.

例如: $\log 32700=\log(3.27\times10^4)=\log 3.27+\log10^4$

$$=\log 3.27+4.$$

$$\log .0327=\log(3.27\times10^{-2})=\log 3.27+\log 10^{-2}$$

$$=\log 3.27-2.$$

$$\log .000327=\log(3.27\times10^{-4})=\log 3.27+\log 10^{-4}$$

$$=\log 3.27-4.$$

於此可見 log 32700, log .0327, log .000327 和 log 3.27 不同之處只在整數部分,而各自的假數是一樣的.

30. 眞數和對數的互求.

要求一個數的對數,只須向對數表上找尋,已知某數的對數,要求某數,也須用對數表.一個數對於牠的對數就稱"眞數",有了對數表,眞數和對數可以互求的.

31. 對數表用法示例. 表內各數的對數記到

小數第五位(其下四捨五入),就叫做"五位對數表";其他也有四位,六位,七位等對數表.本書採用蓋氏(F. G. Gauss)對數表(上海商務印書館出售),這是一種五位對數表,不太簡也不太繁,恰合實用.

例 1. 求 $\log 224.5$

【解】 從蓋氏對數表第五面左邊第一行 224 的地方向右看,又從上端 5 的地方向下看,得相交處的數 35122,就是假數,又知指標為 2; 故得

$$\log 224.5=2.35122.$$

例 2. 有 $\log x=\overline{3}.15351$, 求 x.

【解】 查表第三面與假數 15351 相當的眞數為 1424,又因指標為 -3; 故

$$x=0.001424.$$

例 3. 求 $\log 1912.6$.

【解】 從表上得 $\log 1912=3.28149$

$$\begin{array}{l}\log 1913=3.28171\\ \hline \qquad\ \ 1 \qquad\quad 22\ (\text{表差})\end{array}$$

* 應用比例差的原理,知道眞數差 1 和假數差 22 之比,等於眞數差 0.6 和假數差13之比.

*二數的微差與牠們相應的對數差殆成正比例(本來不成正比例,不過因為所差甚微,那麼作為正比例也不妨).這名為比例差的原理,要用高等算學才能證明,這裏從略.

故　$\log 1912.6 = 3.28149 + 0.00013 = 3.28162.$

算式如下:

$$\begin{array}{lr|l} & \log 1912 \quad = 3.28149 & \\ \text{由 } P.\ P.\ \text{小表,} & .6 \cdots\cdots\cdots 13 & 2 \\ \hline \therefore & \log 1912.6 = 3.28162 & \end{array} \qquad \text{表差} = 22.$$

例 4. 有 $\log x = 1.80395$, 求 x.

【解】

$$\begin{array}{r|l} 1.80395 & \\ 1.80393 = \log 63.67 & \\ \hline 2 \cdots \cdots \cdots \cdots & 3 \end{array}$$

$$\therefore \quad x = 63.673.$$

例 5. 有一正三角形,其一邊爲 37.56 尺,試求其面積,

【解】 今設面積爲 S 平方尺,

則
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (37.56)^2.$$

$$\log S = \tfrac{1}{2}\log 3 + 2\log 37.56 - \log 4.$$

$$\begin{array}{rl} \tfrac{1}{2}\log 3 = \tfrac{1}{2} \times 0.47712 = & 0.23856 \\ 2\log 37.56 = 2 \times 1.57473 = & 3.14946 \\ -\log 4 = \ -0.60206 = & \bar{1}.39794 \\ \hline \log S = & 2.78596 \\ \log 610.8 = & 2.78590 \\ \hline 9 \cdots\cdots\cdots & 6 \end{array}$$

$$\therefore \quad S = 610.89.$$

註: $-\log 4$ 與其他二數不便在一處計算,故加以變更如下:

$-\log 4=-0.60206=1-0.60206-1$

$=0.39794-1=\bar{1}.39794$，然後和上面二數相加.

例 6. 試求 $\dfrac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{0.24}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}$.

【解】 $3\times\log 6.45=3\times0.80956 \qquad\qquad =2.42868$

$\frac{1}{3}\times\log 0.34=\frac{1}{3}\times\bar{1}.53148=\frac{1}{3}(-3+2.53148)=\bar{1}.84383$

$-2\times\log 9.37=-2\times0.97174=-2(1-0.02826)$

$=\bar{2}.05652$

$-\frac{1}{4}\times\log 8.93=-\frac{1}{4}\times0.95085=-\frac{1}{4}(4-3.04915)$

$=\bar{1}.76229$

$\log 1.234=0.09152.$

$\therefore$ 所求的數是 1.234.

習　　題

1. 凡大於 1 的數，牠的對數的指標等於其整數部分的位數減 1，是何道理？

2. 說出下列各數的對數的指標：

3174, 625.7, 3.502, .4, .374, .000135, 23.29.

3. 已知 log 3754 的假數爲 .57449，寫出下列各數的對數來：　37.54, .003754, 3754000, .3754.

4. 已知 8.061 的對數爲 0.90639，寫出以下各對數的眞

數來:　　$5.90639,\ 1.90639,\ 3.90639,\ \bar{1}.90639.$

5. 計算以下各值:

(a) $\bar{1}.36813\times 3.$　　(b) $\bar{2}.00681\times 7.$

(c) $\bar{4}.98325\times 12.$　　(d) $\bar{2}.43203+\bar{1}.39712.$

(e) $\bar{3}.65832-\bar{4}.72417.$　　(f) $\bar{4}.58851-2.93477.$

(g) $\bar{4}.57035\div 5.$　　(h) $\frac{1}{6}(\bar{3}.81234).$

(i) $\frac{2}{5}(\bar{1}.56322).$　　(j) $\frac{3}{4}(\bar{2}.10353).$

6. 求:　$\log 171,\ \log 992,\ \log 5.81,\ \log 8200,$

$\log 0.0037,\ \log 0.215.$

7. 求下面諸對數的眞數:

$2.13033,\ 0.51720,\ \bar{1}.71357,\ \bar{4}.93455,\ 5.98994.$

8. 求 $\log 687.26$ 及 $\log 0.011258.$

9. 求 $\bar{2}.68335$ 與 0.89010 的眞數.

10. 有一個半徑 5 寸的球,試計算牠的體積.但球的體積 $=\frac{4}{3}\pi R^3.$

11. 求 $\log_{49}343\sqrt{7}.$

12. $\log(x^2-6x+8)-\log(x-4)=2$, 求 $x.$

13. 試化簡 $\dfrac{2\log 2+\log 3}{1+\frac{1}{2}\log 0.36+\frac{1}{3}\log 8}.$

14. $(0.6)^x=144$, 求 $x.$

15. 問 45^{20} 及 $2^{10}\times 3^{15}$, 各爲幾位數?

16. 計算下式:

(a) $\sqrt[3]{0.075}$.　　(b) $\sqrt[3]{\left(\frac{343\times 625}{32}\right)^2}$.

(c) $\frac{4.783\times\sqrt{3}}{12.75\times 0.0349}$.　　(d) $\sqrt[3]{\frac{43.15\times 237.5}{8794}}$.

32. 三角函數的眞數檢查法.

$\sin 30°=\frac{1}{2}=0.5$, 0.5 這個數就是30°角的三角函數的眞數之一.各角有牠的三角函數的近似值,這些近似值要用高等算學才能算出,這里不講;把這些近似值列成一表,叫做三角函數的眞數表,如載在第一章裏的那張表便是.

例 1. 求 $\tan 34°50'$ 的值.

【解】 檢查蓋氏對數表中第71面左邊34的橫行,及上端 50′ 的直行,在交叉的地方得 6959, 又在左第一直行中 34 稍上的地方,其右側有個 0.

故 $$\tan 34°50'=0.6959.$$

例 2. 求 $\cos 43°40'$ 的值.

【解】 在第70面自左至右第9直行中43的地方向左看,又從下端40′的地方向上看,交叉地方的數是 7234.

故 $$\cos 43°40'=0.7234.$$

再看這個數的左邊和上端,知道牠又等於 $\sin 46°20'$.

例 3. 求 $\sin 18°32'$ 的值.

【解】 檢表得 $\sin 18°30'=0.3173$,

$$\sin 18°40' = 0.3201.$$

可見角差10′,那麼正弦差0.0028(表差).

角差和函數差本不成正比例,不過倘然所差甚微,那麼作為正比例也不妨;這也是根據比例差的原理的.

今設角差2′而正弦差x,那麼從比例式

$$10' : 2' = 0.0028 : x$$

得x為0.00056,四捨五入則為0.0006.所以

$$\sin 18°32' = 0.3173 + 0.0006 = 0.3179.$$

表差和正弦差也可以從表上求得.先檢查sin 18°30′同一橫行且與d同一直行的數得28,這就是表差.再查P.P.小表中28的下面寫2的一列,得5.6,這就是正弦差.算式如下:

$$\begin{array}{rr|l}
 & \sin 18°30' = 0.3173 & \\
\text{從P.P.小表} & 2' \cdots\cdots 5 & 6 \qquad \text{表差} = 28. \\
\hline
\therefore & \sin 18°32' = 0.3179. &
\end{array}$$

例4. 求cos 67°23′的值.

【解】

$$\begin{array}{rr|l}
 & \cos 67°20' = 0.3854 & \\
 & 3' \cdots\cdots -8 & 1 \qquad \text{表差} = 27. \\
\hline
\therefore & \cos 67°23' = 0.3846. &
\end{array}$$

註:——角增大餘弦反減小,所以餘弦差是負的.餘切差,餘割差和餘弦差一樣,也是負的.

例 5. 求 $\tan 63°16.5'$.

【解】

$$\begin{array}{r|ll} \tan 63°10' = 1.977 & & \\ 6' \cdots\cdots\cdots 8 & 4 & \\ 0.5' \cdots\cdots\cdots & 7 & \text{表差} = 14. \\ \hline \therefore\ \tan 63°16.5' = 1.986 & & \end{array}$$

例 6. $\sin x = 0.4924$, 求 x.

【解】 查表第 69 面左邊 29 爲首的橫行,及上端 30′ 爲首的直行,相交的地方得 4924.

$$\therefore \quad x = 29°30'.$$

例 7. $\sin x = 0.4572$, 求 x.

【解】 檢表知道 $\sin x$ 的眞數在下二數之間.

$$\sin 27°10' = 0.4566,$$

$$\sin 27°20' = 0.4592.$$

所以表差是 0.0026.

又 $$\sin x - \sin 27°10' = 0.0006.$$

因爲角的微差和正弦的微差成正比例,

所以 $$10' : d' = 0.0026 : 0.0006.$$

$$\therefore \quad d' = 2'.3.$$

把 $2'.3$ 加到 $27°10'$ 上去,得

$$x = 27°12.3'.$$

這個算法也可以從 P. P. 小表求得,算式如下:

$$
\begin{array}{l}
0.4572 \\
\underline{0.4566 = \sin 27^\circ 10'} \qquad \text{表差} = 26. \\
\quad 6 \\
\quad \underline{5}\ |\ 2 \cdots\cdots 2' \\
\qquad |\ 8 \\
\qquad |\ \underline{78 \cdots\cdots 0.3'} \\
\qquad\ 2 \quad \therefore\ x = 27^\circ 12.3'.
\end{array}
$$

例 8.　$\cot x = 0.5455$, 求 x.

$$
\begin{array}{l}
0.5455 \\
\underline{0.5430 = \cot 61^\circ 30'} \qquad \text{表差} = 38. \\
\quad 25 \\
\quad \underline{22}\ |\ 8 \cdots\cdots 6' \\
\quad 2\ |\ 2 \\
\quad \underline{1\ |\ 9 \cdots\cdots 0.5'} \\
\qquad \therefore\ x = 61^\circ 23.5'.
\end{array}
$$

習　題

從下列各式求 x:

1. $\sin 28^\circ 32' = x$.　　2. $\cos 47^\circ 24' = x$.

3. $\tan 43^\circ 16.2' = x$.　　4. $\sin x = 0.4912$.

5. $\tan x = 1.3363$.　　6. $\cos x = 0.3540$.

33. 三角函數的對數檢查法:

三角函數的值多半小於 1, 所以對數的指標很多是負的,通常加上 10, 使變成正數,叫做"表對數 (tabular logarithm)", 記號用 $\mathrm{L}\sin A$, $\mathrm{L}\cos A$ 等. 就是

$$\mathrm{L}\sin A = \log \sin A + 10.$$

例 1.　求 $\mathrm{L}\sin 15^\circ 24' 36''$.

【解】 檢表第39面上端 Lsin 行,得

$$
\begin{array}{lrr|l}
 & \text{Lsin } 15^\circ 24' & =9.42416 & \\
\text{從 P. P. 小表} & 30'' \cdots\cdots & 22 & 5 \\
 & 6'' \cdots\cdots & 4 & 5 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{\therefore\ \text{Lsin } 15^\circ 24' 36'' = 9.42443}
\end{array}
$$

例 2. 求 $\log \cot 75^\circ 51' 15''$.

【解】

$$
\begin{array}{rr|l}
\log \cot 75^\circ 51' & =9.40159 & -10 \\
10'' \cdots\cdots & -8 & 8 \\
5'' \cdots\cdots & -4 & 4 \\
\hline
\therefore \log \cot 75^\circ 51' 15'' & =9.40146 & -10
\end{array}
$$

例 3. $\log \tan x = 0.08685$, 求 x.

【解】

$$10.08685 = \text{Ltan } x$$

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\underline{10.08673} = \text{Ltan } 50^\circ 41'} \\
12 & \\
8 & 7 \cdots\cdots 20'' \\
\hline
3 & 3 \cdots\cdots 8'' \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{\therefore\quad x = 50^\circ 41' 28''}
\end{array}
$$

習　題

1. 求 $\text{Lsin } 63^\circ 23' 42''$ 及 $\text{Ltan } 43^\circ 32' 32''$.

2. 求 $\log \cot 18^\circ 35' 10''$.

3. 從下列各式求 A:

$$\text{Lsin } A = 9.84358, \quad \text{Ltan } A = 9.42126,$$

$$\log \tan A = 1.20073, \quad \log \cos A = \overline{1}.47896.$$

4. 求 $\text{Lsin } 15^\circ 17' 12''$.

5. 求 $\log \sec 37°42'$, $L\csc 49°25.6'$.

6. 已知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, 求 $\log \sin 60°$.

7. 化簡下式:

$$1+\log 75-\log(13\times 8)+\tfrac{1}{2}\log 10816-2\log \sin 60°.$$

第 三 章

任何角的三角函數

34. 任何角. 以前所解釋的正弦,餘弦,和正切都是屬於銳角的.這些函數都已用於解決直角三角形方面過了(參看§9).但是在任何三角形內,不僅要求銳角,也要求鈍角的.因此我們現在必須把三角函數的意義推廣到大於$90°$的一切角上去了.

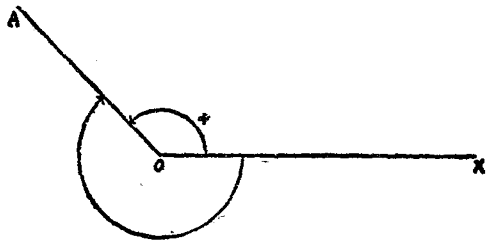

圖 18

35. 角可以當作旋轉的總量.

這個角 XOA (圖 18) 可以當作由一根線繞着 O 點從 OX 的位置旋轉到 OA 的位置而成. OX 這根線叫做這角的"始邊",而 OA 叫做這角的"終邊".設這根線從 OX 朝着反鐘針方向旋轉,那麼 XOA 這個角是正的;設牠朝着鐘針方向旋轉,那麼所成的角是負的.

36. 象限. 兩根互相垂直的線(圖 9) 把圍繞交點 O 的一個平面分成四等份，各等份叫做"象限"。這四個象限：XOY 爲"第一象限"，YOX' 爲"第二象限"，$X'OY'$ 爲"第三象限"，$Y'OX$ 爲"第四象限"。

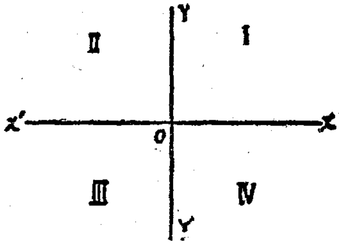

圖　19

一個角稱爲在第一，第二，第三，第四象限，只須看牠的終邊在第一，第二，第三，第四象限，至於牠的始邊呢，總是放置在 OX 上的。

所以凡角在 $0°$ 和 $90°$ 之間的，在 $90°$ 和 $180°$ 之間的，在 $180°$ 和 $270°$ 之間的，在 $270°$ 和 $360°$ 之間的，分別稱爲在第一，第二，第三，第四象限的角 (圖 20)。

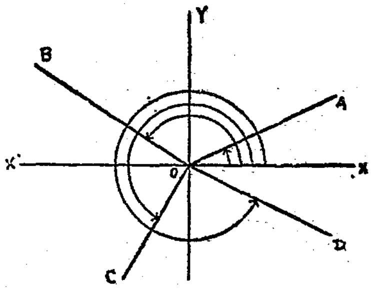

圖　20

【練習】 畫出下列各角，並說明各角所在的象限：

$20°, 160°, 240°, 315°, 545°,$

$-40°, -220°.$

37. 三角函數定義的推廣. 設 XOA (圖 21—24) 爲一已知角，從終線 OA 上的任一點 P，畫垂線 PM 到始線 OX 上 (或牠的引長部分上)。這樣便成了一個直角三角形 MOP。

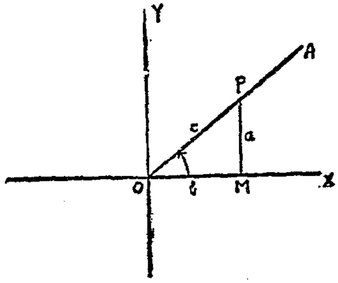

圖 21

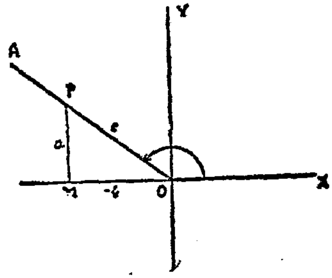

圖 22

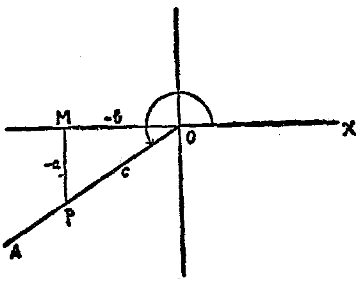

圖 23

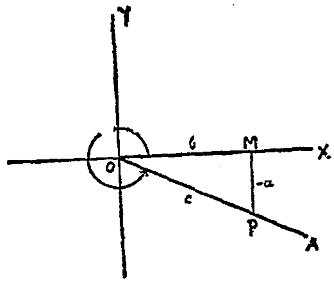

圖 24

(1) $\angle XOA$ 的正弦 (Sine) 爲在 $\triangle MOP$ 內對 O 的邊與斜邊之比,即 $\frac{MP}{OP}$.

(2) $\angle XOA$ 的餘弦 (cosine) 爲在 $\triangle MOP$ 內鄰 O 的邊與斜邊之比, 卽 $\frac{OM}{OP}$.

(3) $\angle XOA$ 的正切 (tangent) 爲對 O 的邊與鄰 O 的邊之比,卽 $\frac{MP}{OM}$.

(4) $\angle XOA$ 的餘切 (Cotangent) 爲鄰 O 的邊與對 O 的邊之比, 卽 $\frac{OM}{MP}$.

(5) $\angle XOA$ 的正割 (secant) 為斜邊與鄰 O 的邊之比,即 $\frac{OP}{OM}$.

(6) $\angle XOA$ 的餘割 (cosecant) 為斜邊與對 O 的邊之比,即 $\frac{OP}{MP}$.

38. 在每個象限內的諸函數的符號.

這根對角頂 O 的邊從始線 OX 向上引伸作為正,向下引伸作為負.這根鄰邊從 O 點向右引伸作為正,向左引伸作為負.這根斜邊常作為正.

把一個希臘字母 α (讀如 alpha) 表示 $\angle XOA$ 的值,並把 a, b, c 分別表示 $\triangle MOP$ 各邊的長,那麼 §37 的定義可列表如下:

函數 \ 象限	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+\frac{a}{c}$	$+\frac{a}{c}$	$-\frac{a}{c}$	$-\frac{a}{c}$
$\cos\alpha$	$+\frac{b}{c}$	$-\frac{b}{c}$	$-\frac{b}{c}$	$+\frac{b}{c}$
$\tan\alpha$	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$
$\cot\alpha$	$+\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$+\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$
$\sec\alpha$	$+\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$+\frac{c}{b}$
$\csc\alpha$	$+\frac{c}{a}$	$+\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$

在各象限內的角的函數的符號應當記住.下列的圖

(圖25)對於記憶各函數的眞確符號很有幫助.

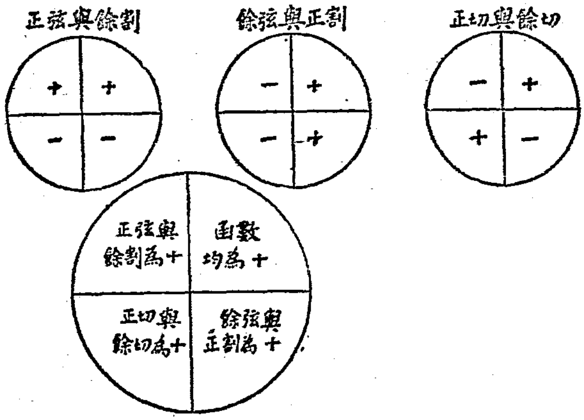

圖　25

39. 以圖形法求三角函數的値.

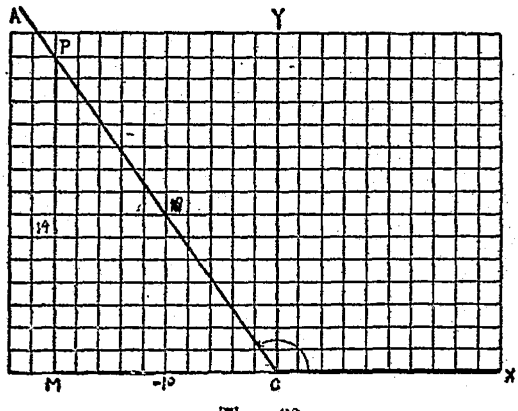

圖　26

在方格紙上作這個已知角.畫出這個三角形 *MOP* 來(圖 26).先量各邊而後決定這角各函數的數値和符號.

【練習】 1. 求 $\sin 125^\circ$.

2. 求下列各角的諸函數:

140°, 220°, 245°, 315°.

40. 一個角有一個函數的值已知,求作此角.

習　題

1. 已知 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$,試作 α 角.

先證正切爲$\frac{3}{4}$的角有兩個,一個在第一象限內,一個在第三象限內(圖27),然後畫出這兩個角來,再用量角器量牠們.

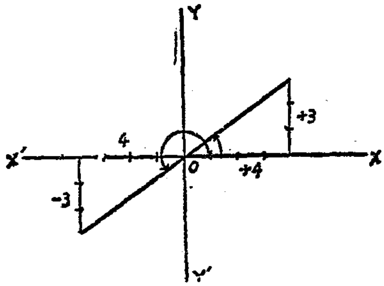

圖　27

2. 求作 A, x, α 三個角,已知 $\cos A=\frac{2}{3}$, $\tan x=-3$, $\cot\alpha=3$.

3. 作 x, y 二角,已知 $\tan x=\frac{3}{4}$, $\cos y=\frac{1}{5}$.

4. 試作各 α 角,已知 $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\sin\alpha=+\frac{4}{5}$, $\tan\alpha=3$, $\tan\alpha=-3$, $\cot\alpha=4$.

41. 反三角函數. 從 §40 看來,一個角的三角函

數的值如知其一,那麼這個角便可求得.例如,這方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 可以決定 x, x 是一個角,或是一根弧,* 其正弦爲 $\frac{1}{2}$. 設 x 爲一角,其正弦爲 y, 則通常寫作 $x=\sin^{-1}y$, 或作 $x=\operatorname{arc}\sin y$, 讀爲"反正弦"或"弧正弦".

【練習】 說出下列各式的意義:

$$x=\tan^{-1}3,\quad y=\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right),\quad A=\operatorname{arc}\sin\frac{3}{4}.$$

42. 已知一個角的一個函數的值,解答其他各函數的值.

習 題

1. 已知 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$, 但 α 在第二象限內,試求 α 的其他各函數.

作$\triangle MOP$ (圖 28), 令 $OM=-3$, $MP=4$. 計算出 OP 來,其他各函數便可次第求得.

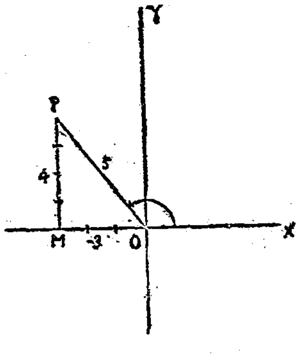

圖 28

2. 設 $\cot x=\frac{3}{7}$. 試求 x 的其他各函數,但 x 在第三象限內.

3. 已知 $\tan x=\frac{3}{4}$. 設 x 在第三象限內,則其他各函數的值何如?

---

* 因爲一個圓心角和牠兩根邊所夾的弧有相等的度數,所以諸三角函數都可當作這弧的函數,不一定要說是這角的函數.

4. 設 $\sin\alpha=\frac{18}{25}$, 求 $\cot\alpha$ (圖29).

5. 設 $\angle A$ 在第三象限內,且 $\tan A=\frac{13}{6}$, 求 $\sec A$ 與 $\sin A$.

6. 試求 x 的各函數,設 $\sec x=\frac{3}{2}$.

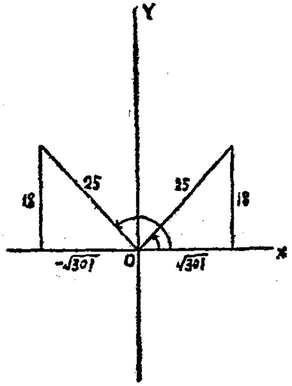

圖 29

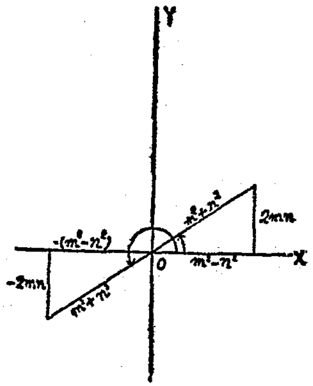

圖 30

7. 試求 $\cos x$, 設 $\tan x=\frac{2mn}{m^2-n^2}$ (圖30).

8. 設 $\sin\alpha=\frac{2}{1+a^2}$, 求 $\cos\alpha$.

9. 設 $\tan\alpha=\frac{2xy}{x^2-y^2}$, 求 $\sin\alpha$.

10. 設 $x=\text{arc}\sin y$, 求 $\tan x$.

當一個角從 0° 變到 360°, 牠的三角函數的變化怎樣?

43. 以直線代表三角函數. 一個角的三角函數可用直線代表,前已說過,但僅及於在 0° 與 90° 間的

角對於 90° 以上的角,就有再行研究之必要.

44. 代表正弦與餘弦的線. 設 $\angle XOA$ (圖 31) 是一個任意的角.

以 1 為半徑,以 0 為中心,畫一個圓.

從這個單位圓和這根邊 OA 的交點 P, 畫 $PM \perp OX$.

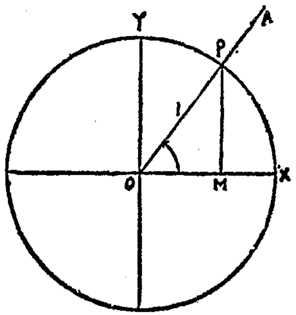

圖 31

以 α 表示 $\angle XOA$, 則得

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{1}=MP,$$

就是 MP 這根線段代表 $\sin\alpha$.

同樣, $\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{1}=OM$,就是 OM 這根線段代表 $\cos\alpha$

【練習】 試作第二,第三,第四象限內的角,並用線段代表正弦與餘弦的值.

45. 正弦與餘弦的變化. 在圖 32 內, M_1P_1, M_2P_2,…… 代表 $\sin\alpha$, 而 OM_1, OM_2,…… 代表 $\cos\alpha$.

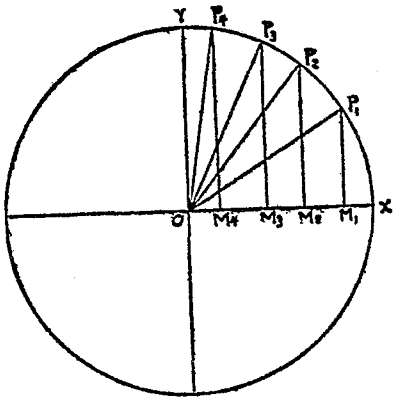

圖 32

當 α 減小的時候, $\sin\alpha$ 也減小而 $\cos\alpha$ 增大.當 OP 和 OX 重合的時候, $\alpha=0°$, $\sin 0°$

$=0$, $\cos 0^\circ=1$.

當 α 增大從 0° 到 90°, $\sin\alpha$ 也增大,而 $\cos\alpha$ 減小,但都是正數.

當 $\alpha=90^\circ$, MP 與 OP 重合, $\sin 90^\circ=+1$, 而 $\cos 90^\circ=0$.

當 α 增大從 90° 到 180°, $\sin\alpha$ 減小從 1 到 0, $\cos\alpha$ 也減小從 0 到 -1 (圖 33).

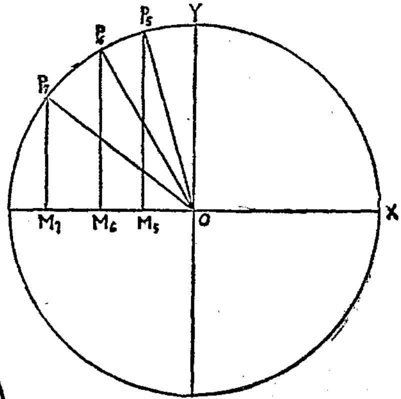

圖　33

當 α 增大從 180° 到 270°, $\sin\alpha$ 減小從 0 到 -1, 而 $\cos\alpha$ 增大到從 -1 到 0 (圖 34).

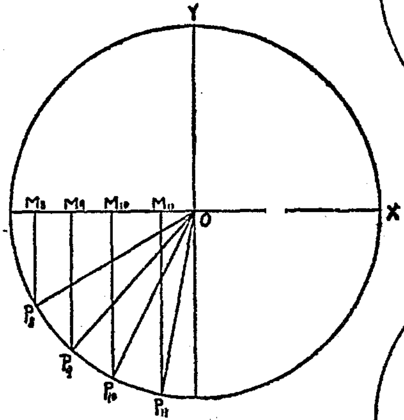

圖　34

當 α 增大從 270° 到 360°, $\sin\alpha$ 增大從 -1 到 0, $\cos\alpha$ 也增大從 0 到 1(圖 35).

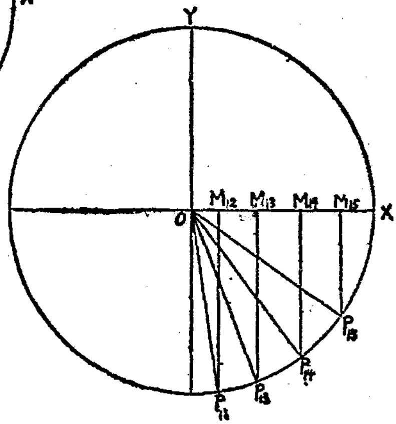

圖　35

【練習】 正弦和餘弦不能大於 $+1$, 也不能小於 -1. 何故?

46. 代表正切與正割的線.

設 $\angle XOA$(圖36)是一個任意的角.以 1 為半徑,以 0 為中心,畫一個圓.畫一切線 XT 切這個圓於 X.以 α 表示 $\angle XOA$,則得 $\tan\alpha=\frac{XA}{OX}=\frac{XA}{1}=XA$;所以 XA 可代表 $\tan\alpha$.

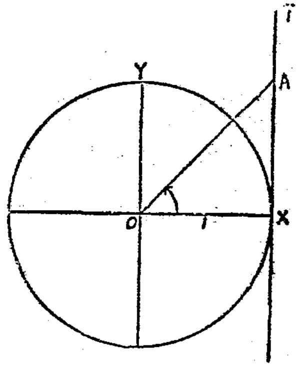

圖 36

同樣, $\sec\alpha=\frac{OA}{OX}=\frac{OA}{1}=OA$.所以 OA 可代表 $\sec\alpha$.

47. 正切與正割的變化.

當 α 減小時, XA 也減小(圖 37).當 $\alpha=0°$ 時, $XA=0$,卽 $\tan\alpha=0$.當 α 增大從 $0°$ 到 $90°$, $\tan\alpha$ 也增大.當 α 漸近 $90°$時, XA 就無限的增大.所以當 $\alpha=90°$時, $\tan\alpha$ 沒有一個確定的值,只好寫做 $\tan 90°=+\infty$

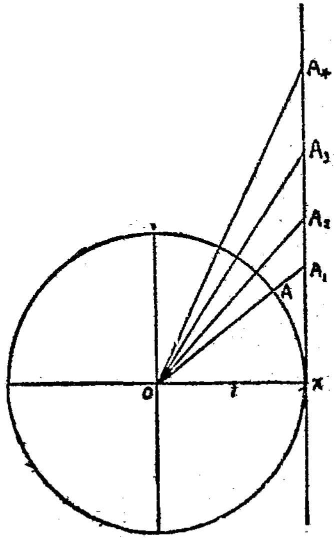

圖 37

試證當 α 從 $0°$ 變到 $90°$, 則 $\sec\alpha$ 增大從 1 到 $+\infty$.

試證 sec α 的正負號和 cos α 相同.

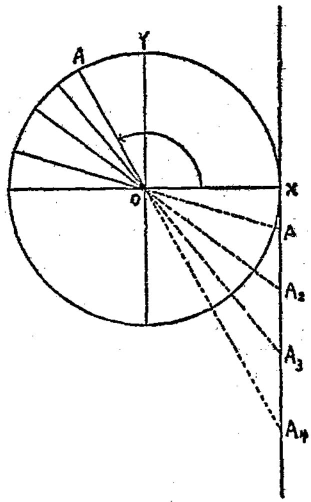

圖　38

當 α 在第二象限內時(圖 38), tanα 被 XA_1, XA_2…… 代表.從事實上看來,其時, XA_1, XA_2,……是從 OX 向下增長,足見在第二象限內 tan α 是負的.當 α 在第二象限內時,令牠減小漸近於 90°,那麼 tanα 無限的增大,但常是負的,只好寫做 tan90°＝－∞.當 α 漸近於 180°時 tanα 漸近於零.

【練習】 **1.** 試證當 α 從 90° 變到 180°, 那麼 secα 從－∞ 變到 －1.

2. 試證當 α 從 180° 變到 270°, 那麼 tan α 從 0 變到＋∞; 而 secα 從 －1 變到 －∞.

3. 當 α 從 270° 變到 360°, 試證 tan α 從 －∞ 變到 0; 而 sec α 從 ＋∞ 變到 ＋1.

下表表示 α 從 0° 變到 360° 時, tan α 和 sec α 的變化:

函數＼角度	0°	90°	180°	270°	360°
正　切	0	±∞	0	±∞	0
正　割	＋1	±∞	－1	∓∞	＋1

48. 代表餘切與餘割的線. 設 XOA (圖 39) 是一個任意的角.

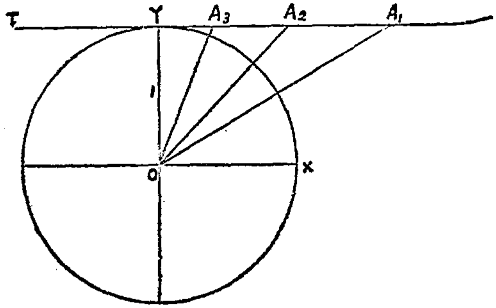

圖 39

以 0 爲中心畫一個單位圓.在 Y, 畫一切線 YT.

試證 $\angle XOA=\angle YAO$.

以 α 表示 $\angle XOA$.

試證 $\cot\alpha=\dfrac{YA}{OY}=\dfrac{YA}{1}=YA$.

同樣,求證 $\csc\alpha=\dfrac{OA}{OY}=\dfrac{OA}{1}=OA$.

當 α 爲鈍角時, A 點在 Y 之左,所以 YA 是負的.

當 α 在第三象限內時,試證 YA 爲正.

當 α 在第四象限內時,試證 YA 爲負.

【練習】 當 α 從 $0°$ 逐漸增加到 $360°$, $\cot\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 的變化怎樣?試作圖表明之.

49. 函數變化表. 下列的一表,表明一個角 α 從 $0°$ 變到 $360°$, 牠的函數的變化.

函數＼角度	0° 至 90°	90° 至 1·0°	180° 至 270°	270° 至 360°
正　　弦	0 至 +1	+1 至 0	0 至 −1	−1 至 0
餘　　割	+∞ 至 +1	+1 至 +∞	−∞ 至 −1	−1 至 −∞
餘　　弦	+1 至 0	0 至 −1	−1 至 0	0 至 +1
正　　割	+1 至 +∞	−∞ 至 −1	−1 至 −∞	+∞ 至 +1
正　　切	0 至 +∞	−∞ 至 0	0 至 +∞	−∞ 至 0
餘　　切	+∞ 至 0	0 至 −∞	+∞ 至 0	0 至 −∞

50. 大於360°的角的函數. 設一個大於360°的角爲 $(360°+x)$. $(360°+x)$ 的函數的正負號和絕對值與 x 的函數的正負號和絕對值是一樣的,因爲這根轉動的半徑(就是這根"終邊")在同一地位. 設 n 爲一個正整數,那麼

$$(n\times 360°+x) \text{ 的函數} = x \text{ 的函數}.$$

例如: $2200° = (6\times 360°+40°)$ 的函數 $=40°$ 的函數.

51. 任何角的函數都可化做第一象限內的角(即銳角)的函數. 在一個單位圓(圖40)內,畫兩根直徑 PR 和 QS, 各與橫直徑 AA' 相交成等角, 就是 $\angle AOP$, $\angle A'OQ$, $\angle A'OR$, $\angle AOS$ 互相等.從 P, Q, R, S 各點引垂線到 AA' 上;這樣所成的四個直角三角形是相合的,因爲牠們有相等的斜邊(同圓的半徑),和相等的銳角(在

0 點的),所以這些垂線 PM, QN, RN, SM 是相等的;但是 $\angle AOP$, $\angle AOQ$, $\angle AOR$, $\angle AOS$ 的正弦就是這些垂線.所以,在絕對值上

$$\sin AOP=\sin AOQ$$
$$=\sin AOR=\sin AOS.$$

因此,這些角的餘弦,正切,餘切正割,餘割,在絕對值上,也都是相等的.

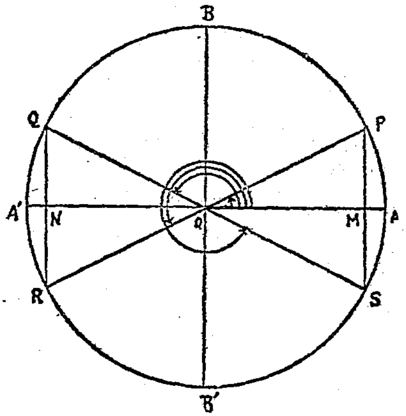

圖 40

由是可知對於每個銳角,在第二,第三,第四象限內必各有一個角,牠的函數的絕對值和這個銳角的相等;反過來說,在第二,第三,第四象限內的各角,牠的函數的絕對值必與一個銳角的相等.

任何大小的角總脫離不了這四個象限的範圍,所以計算任何角的函數只須依照相當的銳角計算.

52. 公式繼續有効. 在第一章裏的公式如:

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1. \qquad [1]$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}. \qquad [2]$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin A \csc A=1,\\ \cos A \sec A=1,\\ \tan A \cot A=1\end{array}\right\}. \qquad [3]$$

原都在 A 爲銳角的條件上成立的,但從 §51 的道理看來,這些公式對於任何角都可適用,並且增加一個負函數的意義出來(參看第一章,§10,習題 3.)

例. 已知 $\sin x=+\frac{4}{5}$, 而 $\tan x$ 爲負;求其餘各函數的值.

【解】 因 $\sin x$ 爲正, x 是在第一或第二象限內的角;但因 $\tan x$ 爲負,第一象限是不合理的.

用[1],得 $\cos x=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}$.

因這個角在第二象限內,應取負號,故得

$$\cos x=-\frac{3}{5}.$$

用[2]與[3],得

$$\tan x=-\frac{4}{3},\ \cot x=-\frac{3}{4},\ \sec x=-\frac{5}{3},\ \csc x=\frac{5}{4}.$$

【練習】 1. 說出下列各角的函數的符號: 340°, 239°, 145°, 400°, 700°, 1200°, 3800°.

2. 一個小於 720° 的角 x 可有幾個值?設 $\cos x=+\frac{2}{3}$; 又 x 在哪幾個象限內?

3. 用公式 $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ 求 $\cos x$ 的值, 問何時應取正號,何時應取負號?

4. 已知 x 在第三象限內,而 $\tan x=\sqrt{3}$, 求其餘各函數的值.

53. 弧度法. 量角的方法有兩種,一種是"六十分

法",一種是"弧度法"."六十分法"就是把一個直角的$\frac{1}{90}$當做單位角,叫做"度",一度的$\frac{1}{60}$叫做"分",一分的$\frac{1}{60}$叫做"秒".這個方法大家對牠是很熟悉的了.但是後一個方法的好處遠勝於前一個,現在說明如下:

在一個圓的圓周(圖41)上,取一根弧AB與半徑r等長,聯結兩半徑OA, OB,那麼,$\angle AOB$叫做"半徑角(Radian)",因爲牠所截的弧AB等於半徑r.無論圓的大小,半徑角是一個一定不變的角.以半徑角當做單位角去量一切的角便叫做"弧度法".凡表示一個角的大小而不註明單位,那便是以半徑角爲單位角的.例如$\angle ABC=\frac{1}{2}$,就是$\angle ABC$爲半徑角的$\frac{1}{2}$,也就是$\angle ABC=\frac{1}{2}$半徑角.

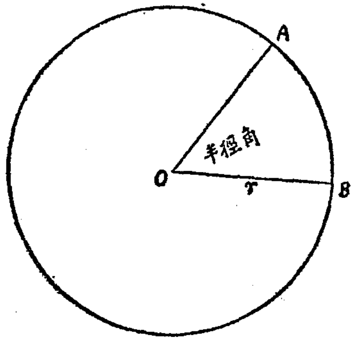

圖 41

54. 弧度法與六十分法的關係.

設$\angle BOA$(圖41)爲一半徑角.因爲半圓周的長是πr又因爲$\widehat{AB}$*$=r$,所以

$$\pi\text{ 半徑角}=180^\circ,\text{這里 }\pi=3.14159;$$

$$\therefore\ \text{一個半徑角}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=57^\circ.3.$$

* $\widehat{AB}$就是弧AB.

試證　　$1^\circ=\left(\frac{\pi}{180}\right)$半徑角.

55. 一個角和牠的截弧和圓的半徑的關係.

設以 θ (讀如 theta) 表示一個已知角所含有半徑角的數值 (圖 42).

那麼, $\frac{\theta}{1}=\frac{s}{r}$, 或 $\theta=\frac{s}{r}$, 就是:

一個角所含有半徑角的數值等於以圓的半徑除牠的截弧的長所得的商.

試證　　$s=r\theta$.

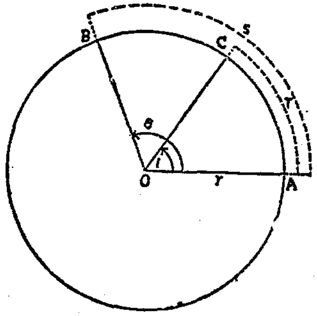

圖 42

習題

1. 以弧度法表明 10°15′.

$$10^\circ 15'=\left(10\frac{1}{4}\right)^\circ=\left(10\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)\text{半徑角}=.19.$$

2. 用弧度法表明下列各角: 10°, 8°30′, −50°, .58°.

3. 一個角 $=\frac{4}{3}$, 求牠的度數.

$$\frac{4}{3}\text{半徑角}=\frac{4}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=76^\circ.39.$$

4. 以度數表明下列各角: $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$, .752, 3.14.

5. 以半徑角表明下列各角: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°,

270°, 360°

6. 用六十分法表明下列各角: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi, \pi, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{15}$.

7. 寫出下列各函數的值: $\sin\frac{\pi}{2}, \tan\frac{3\pi}{2}, \cos\pi, \csc\frac{3\pi}{2}$.

8. 一個圓的半徑是 3 尺.有一個圓心角等於 $1\frac{1}{3}$,試求這角所截弧的長.

9. 一個圓的半徑是10尺.問一個圓心角80°所截的弧多少長?

10. 有一個圓心角,牠的截弧等於半徑的 $\frac{2}{3}$,試以弧度法表明這個角.

11. 試證一個圓內的扇形的面積等於 $\frac{r^2\theta}{2}$,這里的 r 是半徑, θ 是這個圓心角含有半徑角的數值.

12. 求證一個圓內的弓形的面積是 $\frac{r^2\theta}{2}-\frac{r^2\sin\theta}{2}$.

13. 一個圓的半徑是10尺. 有一個圓心角截 2 尺長的弧;試求這個角的度數.

負角的三角函數

56. 正角和負角.

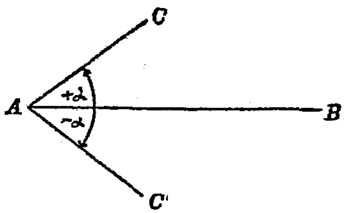

圖 43

繞着 A (圖 43) 把 AB 旋轉到 AC 的地位,成了 BAC 角.又把 AB 向反邊旋轉成了 BAC' 角. 在習慣上,凡朝

着反鐘針方向旋成的角當做正的,凡朝着鐘針方向旋成的角當做負的.所以,$\angle BAC$ 是一個正角,$\angle BAC'$ 是一個負角.

57. 以 α 的三角函數表明 $-\alpha$ 的三角函數. 以 α 表示 $\angle BAC$ (圖 44 至 47),則 $\angle BAC'=-\alpha$.

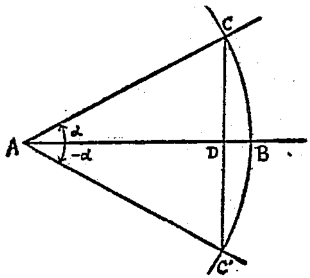

圖 44

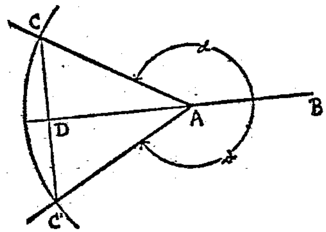

圖 45

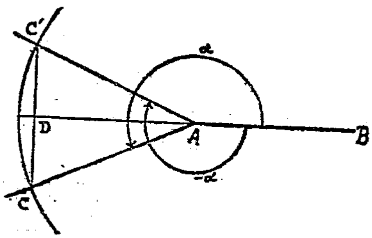

圖 46

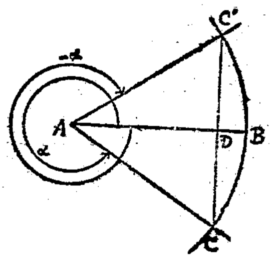

圖 47

以 A 為中心,以 1 為半徑畫 $\overset{\frown}{CC'}$,又畫弦 CC'.那麼 AD 是弦 CC' 的中垂線.

$$\therefore\quad \triangle DAC \equiv \triangle DAC'.$$

$$\sin\alpha = DC,$$

$$\sin(-\alpha) = DC' = -DC = -\sin\alpha.$$

同様，$$\cos(-\alpha) = AD = \cos\alpha.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\therefore\quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$ 何故？

【練習】 1. 試證：

(1) $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$ (2) $\sec(-\alpha) = \sec\alpha.$

(3) $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha.$

2. 用正角的函數表明下列各角一切函數的值：$-30°$，$-45°$，$-60°$.

從以上的練習看來，可知 $-\alpha$ 的任何函數與 α 的同函數等數值而異符號，但餘弦和正割的數值和符號完全一致.

以 α 的三角函數表明 $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ 的三角函數.

58. 在 §17 中，我們已證明下列的關係，現在無須再講了.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha.$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha.$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\csc\alpha.$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\alpha.$$

$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$的函數可以 α 的函數表明，$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 的函數，也可以 α 的函數表明的。

設 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$（圖 48），則

$\angle XAD=\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

試證　$\triangle CAB\equiv\triangle EDA$.

$\therefore\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{b}{c}=+\cos\alpha,$

又　$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{-a}{c}=-\frac{a}{c}=-\sin\alpha.$

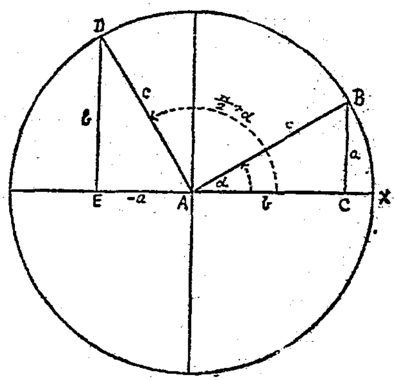

圖　48

習　題

1. 求證：　$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha.$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha.$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\csc\alpha.$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sec\alpha.$$

2. 求下列各角的函數的確值: 120°, 135°, 150°.

3. 在下列各情形中,求證:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

(1) 當α在第二象限內(圖 49).

(2) 當α在第三象限內(圖 50).

(3) 當α在第四象限內(圖 51).

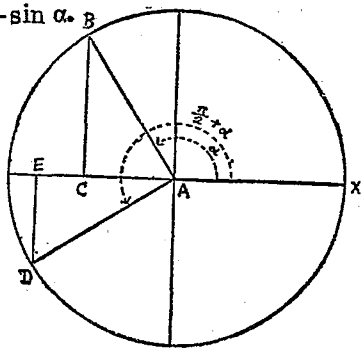

圖　49

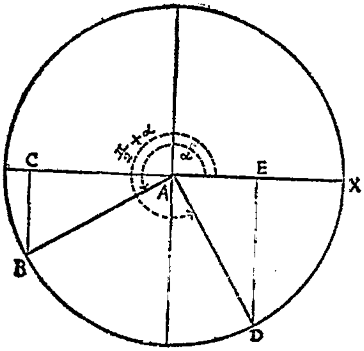

圖　50

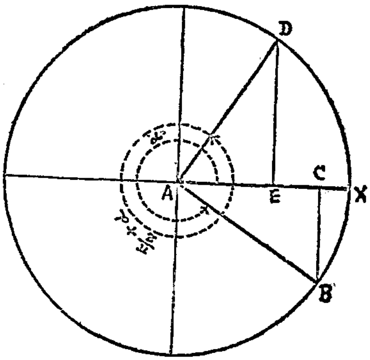

圖　51

以 α 的三角函數表明 $\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ 的三角函數.

59. 在以下諸習題中,我們可以α的函數表明$\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$的任何函數,只須連續應用 §58 的原理.

習　題

求證以下各式:

1. (1) $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\{90^\circ+(90^\circ-\alpha)\}$
$$=\cos(90^\circ-\alpha)$$
$$=\sin\alpha.$$

(2) $\cos(180^\circ-\alpha)=\cos\{90^\circ+(90^\circ-\alpha)\}$
$$=-\sin(90^\circ-\alpha)$$
$$=-\cos\alpha.$$

(3) $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha.$

(4) $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha.$

(5) $\sec(180^\circ-\alpha)=-\sec\alpha.$

(6) $\csc(180^\circ-\alpha)=\quad\csc\alpha.$

2. (1) $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha.$

(2) $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha.$

(3) $\tan(180^\circ+\alpha)=\quad\tan\alpha.$

(4) $\cot(180^\circ+\alpha)= \cot\alpha.$

(5) $\sec(180^\circ+\alpha)=-\sec\alpha.$

(6) $\csc(180^\circ+\alpha)=-\csc\alpha.$

3. (1) $\sin(270^\circ-\alpha)=\sin\{90^\circ+(180^\circ-\alpha)\}$

$$=\cos(180^\circ-\alpha)$$

$$=-\cos\alpha.$$

(2) $\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha.$

(3) $\tan(270^\circ-\alpha)= \cot\alpha.$

(4) $\cot(270^\circ-\alpha)= \tan\alpha.$

(5) $\sec(270^\circ-\alpha)=-\csc\alpha.$

(6) $\csc(270^\circ-\alpha)=-\sec\alpha.$

4. (1) $\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha.$

(2) $\cos(270^\circ+\alpha)= \sin\alpha.$

(3) $\tan(270^\circ+\alpha)=-\cot\alpha.$

(4) $\cot(270^\circ+\alpha)=-\tan\alpha.$

(5) $\sec(270^\circ+\alpha)= \csc\alpha.$

(6) $\csc(270^\circ+\alpha)=-\sec\alpha.$

5. (1) $\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha.$

(2) $\cos(360^\circ-\alpha)= \cos\alpha.$

(3) $\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha.$

(4) $\cot(360^\circ-\alpha)=-\cot\alpha.$

(5)　$\sec(360°-\alpha)=\sec\alpha.$

(6)　$\csc(360°-\alpha)=-\csc\alpha.$

6. (1)　$\sin(360°+\alpha)=\sin\alpha.$

(2)　$\cos(360°+\alpha)=\cos\alpha.$

(3)　$\tan(360°+\alpha)=\tan\alpha.$

(4)　$\cot(360°+\alpha)=\cot\alpha.$

(5)　$\sec(360°+\alpha)=\sec\alpha.$

(6)　$\csc(360°+\alpha)=\csc\alpha.$

研究了上面的習題,我們可以知道些什麼關係?卽使α不是一個銳角,這些關係依然成立的.

習　題

以正銳角的函數表明下列各題:

1. $\sin 580°.$

$\sin 580°=\sin(6\cdot 90°+40°)=-\sin 40°.$

2. $\cos 315°.$　　3. $\sin(-196°).$

4. $\tan\left(2\frac{7}{12}\pi\right).$　　5. $\cos 120°.$

6. $\sin 240°.$　　7. $\tan(-410°).$

8. $\cot 120°.$　　9. $\sin 300°.$

以小於 45° 的正角的函數表明下列各題:

10. $\cos(-428°).$　　11 $\sin(-84°).$

12. $\csc(834°)$.
13. $\tan(-65°)$.
14. $\sin 1420°$.
15. $\cot 1330°$.

求下列各式的值:

16. $\cos 180° - \sec^2 45° - 4\sin 30° + \sqrt{2}\sin 45° + \cos 180° \csc 90°$.

17. $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}$.

18. $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{3}$.

19. 化簡: $\tan(\pi - x)$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$; $\sin(270° - x)$; $-\cot(90° + x)$.

第 四 章

對數與三角形的解法

用對數解直角三角形

60. 三角形的解法. 解一個三角形就是用已知的邊和角求出未知的邊和角.我們在第一章裏已經用了三角函數的眞數解決許多關於直角三角形的問題.現在我們用三角函數的對數來解直角三角形更覺便利,因爲乘法和除法的麻煩都可免除了.

61. 公式. 在直角三角形內,邊和角的關係可以下列的公式表明(圖 52).

$$a=c\sin A.\qquad b=c\sin B.$$

$$a=c\cos B.\qquad b=c\cos A.$$

$$a=b\tan A.\qquad b=a\tan B.$$

$$a=b\cot B.\qquad b=a\cot A.$$

$$c^2=a^2+b^2$$

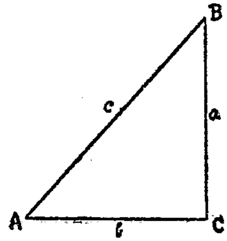

圖 52

$c^2=a^2+b^2$ 這個方程式可變爲下式:

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

上面的公式在對數計算上都是必需的.

這些方程式的兩邊如各取對數則變爲:

$\log a=\log c+\log\sin A$; $\log b=\log c+\log\sin B$; 等等.

要決定一個角,應該用正切或餘切,因爲這兩個函數比正弦和餘弦變化得快.

要決定一根邊,最好用已知角的正弦或餘弦.

62. 解直角三角形應有的佈置.

第一種情形. 已知直角三角形的兩邊,求牠的角和斜邊.

設 $a=418$, $b=325$ (圖 53).

(a) 畫出圖來並標明已知和欲求的部分.

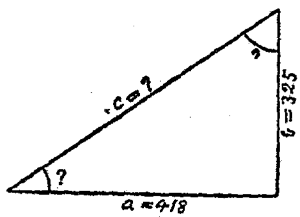

圖 53

(b) 要用的公式是:

$\tan B=\dfrac{b}{a}$; $c=\dfrac{b}{\sin B}$; $A=90°-B$.

$a=\sqrt{(c+b)(c-b)}$ 這個方程式可用來驗算.

(c) 把計算的程序佈置如下:

$\log b=$	$\log b=$	驗算: $\log(c+b)=$
$\log a=$	$\log\sin B=$	$\log(c-b)=$
$\log\tan B=$	$\log c=$	$\log a^2=2\log a=$
$B=$	$c=$	$\log a=$
$A=90°-B=$		把這個 $\log a$ 和前面的 $\log a$ 比比看.

(d) 按照 (c) 的程序實行計算.

第二種情形. 已知直角三角形的斜邊 c 和一邊 b.

要用的公式是: $\sin B=\cos A=\frac{b}{c}$; $a=\frac{b}{\tan B}$;
$a=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.

第三種情形 已知一角 B 和一邊 b.

要用的公式是: $A=90°-B$; $a=\frac{b}{\tan B}$; $c=\frac{b}{\sin B}$;
$a=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.

第四種情形. 已知一角 B 和斜邊 c.

要用的公式是: $A=90°-B$; $b=c\sin B$; $a=c\cos B$;
$a=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.

習 題

用對數解下列的直角三角形:

1. $c=25$, $a=22$.
2. $c=35.145$, $A=25°24'30''$.
3. $a=316.5$, $c=521.2$.
4. $B=23°9'$, $b=75.48$.
5. $c=369.72$, $a=235.64$.
6. $a=194.5$, $b=223.5$.
7. $b=547.5$, $B=32°16'24''$.
8. $c=672.4$, $B=37°16'25''$.
9. $a=3.414$, $b=2875$.
10. $a=617.57$, $c=729.59$.

11. 要決定一條河的闊,一個測量者在河岸上量得 $A.B$ 兩點間的距離 100 尺.在對岸的 C 點有一棵樹. $\angle ABC$ 是 $63°\ 40'$, $\angle BAC$ 是 $55°35'$. 求這條河的闊.

12. 有一個三角形的底邊是3248尺,而牠的底角,一個是46°15′(=46°.25),一個是100°37′(=100°.62).求牠的高.

13. 一個塔的影子,當日高30°的時候比當日高45°的時候長100尺.這塔有多少高?不要查表,只須把結果用根式表示出來.

14. 半徑爲5的一個圓,在A點對着一個20°的角.M和N是從A點畫出的兩根切線的切點.求自M至AN的垂直距離.

15. 月亮的直徑是2164英里長,假設牠的直徑對着一個31′.1的角在地球面上某點,那麼從地球到月亮有多少遠?

斜角三角形的邊和角的關係

63. 在一個斜角三角形內,邊和角有幾種關係,我們用了這些關係可從這三角形的已知部分算出牠其餘的部分,這些關係可以分別稱爲三種定律,就是"正弦定律","餘弦定律",和"正切定律".

64. 正弦定律.

1. 在三角形ABC(圖54)內,設h爲自C至AB的高.

$$\sin A=\frac{h}{b},\text{ 即 } h=b\sin A.$$

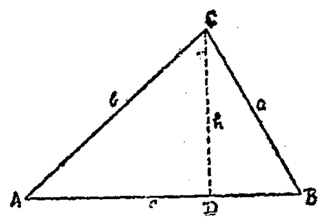

圖 54

又 $$\sin B=\frac{h}{a}\text{，即 } h=a\sin B.$$

$$a\sin B=b\sin A.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

再畫一根自 A 至 BC 的垂線,則得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

這個方程式就是所謂"正弦定律",就是:一個三角形的三邊和牠們各自的對角的正弦成正比例.

2. 在鈍角三角形 ABC (圖 55) 內,

$\sin A=\frac{h}{b}$, 即 $h=b\sin A$.

$\sin x=\sin(180°-B)=\sin B=\frac{h}{a}$,

即 $h=a\sin B$.

$$\therefore\quad b\sin A=a\sin B.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

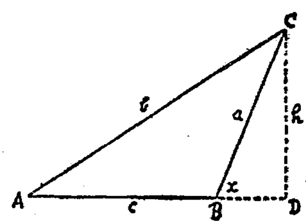

圖 55

65. 外接圓的直徑. 這個常比 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 有一個很有趣味的幾何的意義.設一個圓包在 $\triangle ABC$ (圖 56) 之外,則得 $\angle A=\angle D$.

$\therefore\quad \sin A=\sin D=\frac{a}{d}$, d 是表示直徑的.

$$\therefore \quad d=\frac{a}{\sin A}.$$

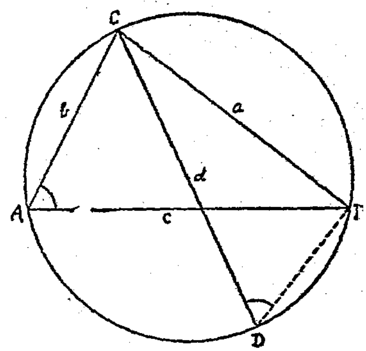

圖 56

這就是說:三角形的一邊和對角的正弦的比等於外接圓的直徑.

66. 餘弦定律.

1. 設 $\angle A$ (圖 57)為一銳角.那麼根據幾何學上的一個定理,得 $a^2=b^2+c^2-2cb'$.

因 $b'=b\cos A$,

故 $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A}$.

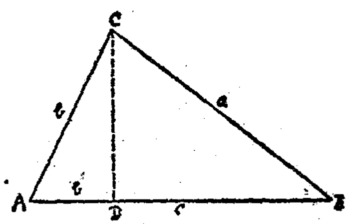

圖 57

這就是說:三角形一邊的平方等於其他二邊平方之和減去這二邊和夾角的餘弦之積之二倍.這定理就叫"餘弦定律".

2. 設 $\angle A$ 為一個鈍角(圖 58).

那麼 $a^2=b^2+c^2+2cb'$.

因 $b'=b\cos x$

$=b\cos(180°-A)$

$=-b\cos A$.

故 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

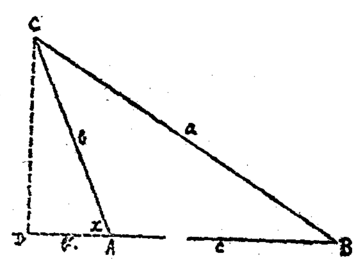

圖 58

由是可知 A 不論是銳角

或鈍角,這個方程式是同一的.

同樣,得 $$b^2=c^2+a^2-2\,ca\cos B.$$

$$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C.$$

試證畢塔哥拉斯的定理是餘弦定律中的一個特殊情形.

67. 解斜角三角形,有了正弦定律和餘弦定律已足夠了.因爲,設有二角和一邊已知,那麼 $A+B+C=180°$ 這個方程式可以決定第三角,而正弦定律可以決定其他二邊.

設有 a, b 二邊和一角 A 已知,那麼第三邊 c 可由 $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$ 這個方程式求得,其他二角可由正弦定律求得.

設有二邊和夾角已知,都麼可由餘弦定律求得第三邊,並可由正弦定律求得其他二角.

設有三邊已知,那麼用餘弦定律可求得三角.

但是餘弦定律不適宜用對數,因爲牠只含有"項"而不含有"因數".所以我們現在要得一個適用對數計算的公式.

68. 正切定律. 設 ABC (圖59) 爲一任意的三角形.

以 C 爲中心,以通過 C 而較短的這根邊爲半徑,畫一圓,割 CB 和 AB 於 D 和 E.

引長 BC 遇圓周於 D'.

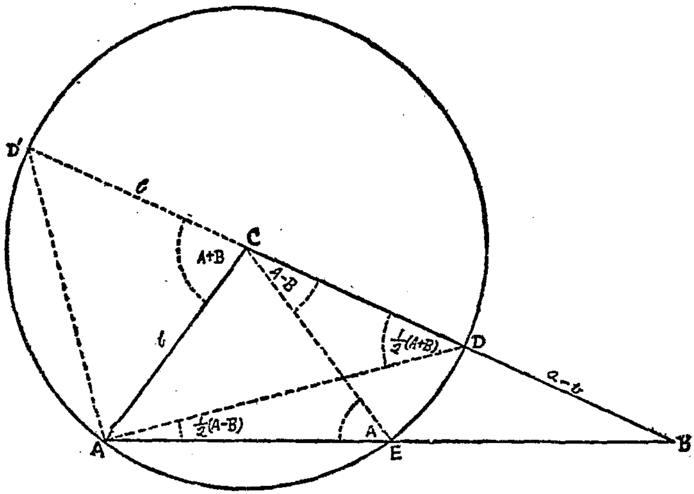

圖 59

作 CE, AD 與 AD'.

$\angle D'CA=A+B$. $\quad\therefore\ \angle D'DA=\frac{1}{2}(A+B)$. 何故?

$A=\angle CEA=\angle ECB+B$. $\therefore\ \angle ECB=A-B$. 何故?

$$\therefore\ \angle DAE=\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\angle D'AD=90°.$$

把正弦定律用到 $\triangle ADB$ 上去,

$$\frac{DB}{AB}=\frac{\sin DAB}{\sin ADB},\ 或\ \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin[180°-\frac{1}{2}(A+B)]}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}. \tag{1}$$

把正弦定律用到$\triangle AD'B$上去,

$$\frac{D'B}{AB}=\frac{\sin D'AB}{\sin AD'B}, \text{ 或 } \frac{a+b}{c}=\frac{\sin[D'AD+\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin AD'B}$$

$$=\frac{\sin[90^\circ+\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}.$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}. \tag{2}$$

以(1)除(2),

$$\frac{\dfrac{a+b}{c}}{\dfrac{a-b}{c}}=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}}, \text{ 或 } \frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}. \tag{3}$$

這就叫做"正切定律".

這個公式也可寫如下式:

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+A)}{\tan\frac{1}{2}(B-A)},$$

設$b>a$時就要用到牠.

同樣,
$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}.$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}.$$

因 $$\frac{A+B}{2}=\frac{180^\circ}{2}-\frac{C}{2}=90^\circ-\frac{C}{2},$$

故 $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{\cot\dfrac{C}{2}}{\tan\dfrac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\therefore\ \tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

這也是一個正切定律的式子,當 a, b 和 C 已知的時候就要用到牠.

又在 (1) 和 (2) 兩方程式內,把 $90^\circ-\dfrac{C}{2}$ 代替 $\dfrac{A+B}{2}$,則得

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

這也是兩個很有用處的公式.

69. 一個三角形的各個半角的正切,內切圓的半徑. 設 O (圖 60) 爲一三角形各角平分線的交點,又設 r 爲內切圓半徑的長,又設 x, y, z 表明自 A, B, C 各點所作切線的長.

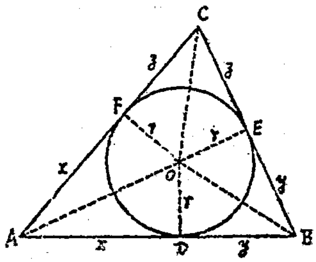

圖 60

那麼這三角形的周 $=2x+2y+2z$.

以 $2s$ 表明這三角形的周並除以 2，則得

$$s=x+y+z,$$

因

$$\underline{a=\quad y+z,}$$

$$\therefore\ s-a=x.$$

同樣，$\qquad s-b=y;\qquad s-c=z.$

從 $\triangle AOD$，$\qquad \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{x}.$

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}.$$

同樣，$\qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b};\qquad \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$

從平面幾何學上知道 $\triangle ABC$ 的面積 F 可由下式求得：

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

又 $\quad F=\frac{r}{2}(a+b+c)=rs.$

$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},$$

即 $\quad r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$

斜角三角形的解法

70. 一個斜角三角形可以畫出來，只要在六部分(即三邊和三角)中有三部分已知，而在這已知的三部分中至

少有一根邊所以要解斜角三角形,我們應當研究以下的三種情形.

71. 第一種情形: 已知一邊和二角.

在下的例就用以說明這個解法.

已知: $\begin{cases} A=49°38'30'' \\ B=70°21'15'' \\ b=229.38 \end{cases}$

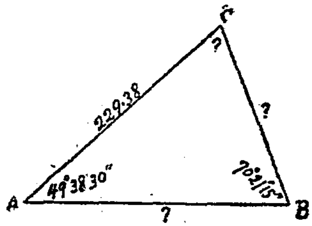

圖 61

欲求: C, a, 與 c.

公式: $\begin{cases} C=180°-(A+B) \\ a=\dfrac{b\sin A}{\sin B} \\ c=\dfrac{b\sin C}{\sin B} \end{cases}$

解　法:

$$
\begin{array}{rl}
180° & =179°59'60'' \\
A+B & =119°59'45'' \\
\hline
\therefore\ C & =\ 60°\quad\ \ 15''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log b & =2.36055 \\
\log\sin A & =9.88198-10 \\
-\log\sin B & =0.02604 \\
\hline
相加,\ \log a & =2.26857 \\
\therefore\quad a & =185.59
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log b & =2.36055 \\
\log\sin C & =9.93757-10 \\
-\log\sin B & =0.02604 \\
\hline
相加,\ \log c & =2.32416 \\
\therefore\quad c & =210.94
\end{array}
$$

習　題

解下列各三角形:

1. $a=29.73$, $A=52°36'$, $B=67°40'$.

2. $a=788$, $C=72°12'35''$, $B=55°43'18''$.

3. $c=3795$, $A=18°53'22''$, $B=81°12'\ 5''$.

4. $b=37$, $A=115°36'24''$, $B=27°18'10''$.

5. $c=91^{\circ}.45$, $A=64°56'18''$, $B=47°29'11''$.

6. $c=327.85$, $A=40°31'42''$, $B=110°52'54''$.

72. 第二種情形: 已知二邊和一夾角.

在下的例就用以說明這個解法.

已知: $B=37°33'40''$, $c=95721$, $a=25463$.

欲求: A, C, 和 b.

公式: $\tan\frac{1}{2}(C-A)=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{1}{2}B$ 這個方程式可決定 $\frac{1}{2}(C-A)$ 的值.

$$\tfrac{1}{2}(C+A)=90°-\tfrac{1}{2}B,$$

$$C=\tfrac{1}{2}(C+A)+\tfrac{1}{2}(C-A),$$

$$A=\tfrac{1}{2}(C+A)-\tfrac{1}{2}(C-A),$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C},\qquad \frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B}.$$

解 法:

$c-a=70258.$	$\frac{1}{2}B=18°46'50''.$
$c+a=121184.$	$\frac{1}{2}(C+A)=71°13'10''.$

$$\log(c-a)=4.84670$$
$$-\log(c+a)=4.91656-10$$
$$\log\cot\tfrac{1}{2}B=0.46847$$
$$\log\tan\tfrac{1}{2}(C-A)=0.23173$$
$$\tfrac{1}{2}(C-A)=59^\circ 36'30''$$
$$\tfrac{1}{2}(C+A)=71^\circ 13'10''$$
$$C=130^\circ 49'40''$$
$$A=11^\circ 36'40''$$

驗算:

$$\log b=4.88715$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(C-A)=9.93580-10$$
$$-\log\cos\tfrac{1}{2}B=0.02376$$
$$\log(c-a)=4.84671$$

$$\log c=4.98100$$
$$\log\sin B=9.78505-10$$
$$-\log\sin C=0.12110$$
$$\log b=4.88715$$
$$b=77117.$$

習題

解下列各三角形並驗算所得結果:

1. $a=748,\quad b=375,\quad C=63^\circ 35'30''$

2. $a=486,\quad b=347,\quad C=51^\circ 36'.$

3. $a=34.645,\quad b=22.531,\quad C=43^\circ 31'.$

4. $a=145.9,\quad b=39.90,\quad C=92^\circ 11'18''.$

5. $a=103.21,\quad b=152.37,\quad C=141^\circ 8'54''.$

6. 一個平行四邊形的兩根對角線是 83.66 和 92.84, 而牠們的一個交角是 $84^\circ.28$. 試求這平行四邊形的邊和角.

73. 第三種情形：已知三邊.

在下的例,就用以說明這個解法.

已知：$a=116.26$, $b=172.36$,

$c=149.54$ (圖 62).

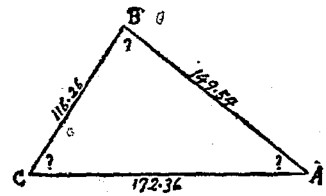

圖　62

欲求：A, B, 和 C.

公式：$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{r}{s-a},\ \tan\tfrac{1}{2}B=\frac{r}{s-b},\ \tan\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{s-c}.$$

$$A+B+C=180°.$$

解　法：

$$\begin{aligned}2s&=438.16\\ s&=219.08\\ s-a&=102.82\\ s-b&=46.72\\ s-c&=69.54\\ \text{驗算：}2s&=438.16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(s-a)&=2.01208\\ \log(s-b)&=1.66950\\ \log(s-c)&=1.84223\\ -\log s&=7.65940-10\\ \log r^2&=3.18321\\ \log r&=11.59160-10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log r&=11.59160-10\\ \log(s-a)&=2.01208\\ \log\tan\tfrac{1}{2}A&=9.57952-10\\ \tfrac{1}{2}A&=20°47'42''\\ A&=41°35'24''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log r&=11.59160-10\\ \log(s-b)&=1.66950\\ \log\tan\tfrac{1}{2}B&=9.92210-10\\ \tfrac{1}{2}B&=39°53'18''\\ B&=79°46'36''\end{aligned}$$

$$\log r = 11.59160 - 10$$
$$\log(s-c) = 1.84223$$
$$\log\tan\tfrac{1}{2}C = 9.74937 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}C = 29°18'54''$$
$$C = 58°37'48''$$

驗算: $A+B+C = 179°59'48''$.

習 題

解下列各三角形:

1. $a=13$, $b=14$, $c=15$.
2. $a=77$, $b=123$, $c=130$.
3. $a=5.953$, $b=9.639$, $c=14.424$.
4. $a=286$, $b=321$, $c=463$.
5. $a=12.653$, $b=17.213$, $c=23.103$.
6. $a=34.278$, $b=25.691$, $c=30.175$.

斜角三角形的面積

74. 求一個三角形的面積有許多公式,其中有幾個從幾何學上可以知道.在計算一個斜角三角形的面積時,選用公式須依據已知部分.

1. 已知一邊和在這邊上的高:

在這個情形中，

$$T=\frac{bh}{2},$$

這里的 T 表明面積，b 表明一邊，而 h 表明在這邊上的高。

2. 已知二邊和一夾角：

因爲 $T=\frac{1}{2}bh$，又因爲 $h=a\sin c$，所以

$$T=\frac{ab\sin c}{2}.$$

3. 已知三邊：　$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

4. 已知一邊和三角：

從正弦定律，　$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$，

代入這個方程式 $T=\dfrac{ab\sin c}{2}$，則得

$$T=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}.$$

5. 已知三邊和內切圓的半徑：

$$T=rs.$$

6. 已知三邊和外接圓的半徑：

我們已經見到　$\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

$$\therefore\quad \sin C=\frac{c}{2R};$$

把牠代入這個方程式　$T=\frac{1}{2}ab\sin C$，則得　$T=\frac{1}{2}ab\,\dfrac{c}{2R}.$

$$\therefore\quad T=\frac{abc}{4R}.$$

習　題

求以下每個三角形的面積.

1. $a=40$,　$b=13$,　$c=37$.

2. $a=10$,　$b=12$,　$C=60°$.

3. $a=122.5$,　$c=122.5$,　$B=110°31'$.

4. $A=61°30'$,　$B=44°15'$,　$c=163$.

5. $a=17$,　$b=113$,　$c=120$.

6. 一個正五邊形的每邊長7寸. 把每邊兩端引長使互相交則成一五角星形,試求此形的面積.

7. 試證一個平行四邊形的面積等於其二高相乘除以一角的正弦(四角中的任何一角).

8. 一個平行四邊形的二邊爲28.26與30.15,而其夾角爲68°.29. 試求其面積.

第五章

幾個角的函數

加法定理與減法定理

75. 正弦和餘弦的加法定理. 這兩個定理可以分做三步研究如下:

I. 設 α 和 β (圖 63), 代表兩個正銳角而其和小於 $90.°$

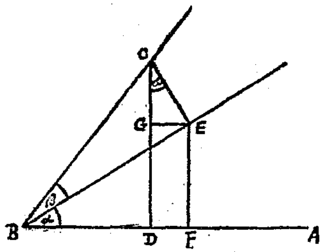

圖 63

令 $\angle ABC=\alpha+\beta$.

試求 $\sin(\alpha+\beta)$.

作 $CD\perp AB$,

那麼 $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC}{CB}.$$

作 $CE\perp BE$, $EF\perp AB$, 而 $EG\perp CD$.

試證

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC}{CB}=\frac{DG+GC}{CB}=\frac{FE+GC}{CB}=\frac{FE}{CB}+\frac{GC}{CB}.$$

試證

$$FE=EB\sin\alpha,\ 而\ \frac{FE}{CB}=\frac{EB}{CB}\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha.$$

因為 $\angle GCE=\alpha$, 所以

$$GC=CE\cos\alpha,\text{ 而 }\frac{GC}{CB}=\frac{CE}{CB}\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha.$$

替代以後,則得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \tag{1}$$

$\cos(\alpha+\beta)$ 亦可求得如下:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{BD}{CB}=\frac{BF-DF}{CB}=\frac{BF}{CB}-\frac{DF}{CB}=\frac{BF}{CB}-\frac{GE}{CB}.$$

試證

$$BF=EB\cos\alpha,\text{而 }\frac{BF}{CB}=\frac{EB}{CB}\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha.$$

同樣,

$$GE=CE\sin\alpha,\text{而 }\frac{GE}{CB}=\frac{CE}{CB}\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha.$$

替代以後,則得

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

方程式 (1) 與 (2) 就是正弦和餘弦的加法定理.

II. 方程式 (1) 與 (2) 仍可證明,當 $\alpha+\beta$ 大於 $90°$ 的時候 (圖 64).

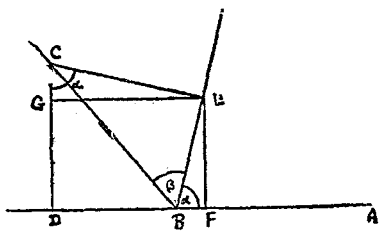

圖 64

方程式 (1) 可與前法同樣證明,不必贅述.

求證方程式 (2), 令

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{DB}{CB}=-\frac{DF-BF}{CB}=\frac{BF-DF}{CB},$$ 以下同前法.

所以方程式(1)與(2)對於任何二銳角常能成立.

III. 設方程式(1)與(2)的一角增加90.°

以α'表明其和,就是$\alpha'=90°+\alpha$.

那麼
$$\sin(\alpha'+\beta)=\sin[90°+(\alpha+\beta)]$$
$$=\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

但是
$$\cos\alpha=\sin(90°+\alpha)=\sin\alpha',$$

又
$$\sin\alpha=-\cos(90°+\alpha)=-\cos\alpha'.$$

替代以後,則得$\sin(\alpha'+\beta)=\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta.$

這樣看來,方程式(1)依然成立,即使其中一角加了90°

同樣,

$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos[90°+(\alpha+\beta)]=-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

替代則得　$\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta.$

因此可知方程式(1)與(2)不但對於任何二銳角可以成立,即使其中一角加了90°,仍復有效.

依照同樣的推論,我們把其中一角屢次增加90°,這兩個方程式常是眞的.所以牠們對於任何二角恆能成立.

習　題

1. 計算$\sin 75°$和$\cos 75°$.

令 $$75^\circ=45^\circ+30^\circ.$$

那麼 $$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

計算下列各角的正弦和餘弦:

2. 15° (令 $15^\circ+15^\circ=30^\circ$). **3.** 90° (令 $90^\circ=60^\circ+30^\circ$).

4. 105° (令 $105^\circ=60^\circ+45^\circ$). **5.** 150°.

6. 210°. **7.** 195°. **8.** 120°. **9.** 240°.

10. 試證 $\sin(45^\circ+x)=\dfrac{(\cos x+\sin x)\sqrt{2}}{2}$.

11. 試證 $\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$.

76. 正弦和餘弦的減法定理.

這兩個定理可證明如下:

令 $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$, 則

$$\sin\alpha=\sin\{(\alpha-\beta)+\beta\}$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta,$$
$$\cos\alpha=\cos\{(\alpha-\beta)+\beta\}$$
$$=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

以 x 代表 $\sin(\alpha-\beta)$, 以 y 代表 $\cos(\alpha-\beta)$, 則以上二方程式可改作 $$\sin\alpha=x\cos\beta+y\sin\beta,$$
$$\cos\alpha=y\cos\beta-x\sin\beta.$$

在這兩個方程式內的 x 和 y 作為未知數而解之,則得

$$x=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\beta},$$

$$y=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}.$$

即 $$x=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$y=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

習　題

1. 計算 $\sin 15°$ 與 $\cos 15°$.

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

用減法定理演算下列各題:

2. $\sin(90°-x)$.　　**3.** $\cos(45°-x)$.

4. $\cos(30°-y)$.　　**5.** $\sin(360°-y)$.

求證下列各題:

6. $\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2 x-\sin^2 y$.

7. $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\cos^2 y$.

8. $\sin(x+y+z)=\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\cos z$

$$+\cos x\cos y\sin z-\sin x\sin y\sin z.$$

77. 正弦與餘弦的和與差.

正弦與餘弦的和或差都可變爲積,其變法如下:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

(1) 與 (2) 相加,

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \tag{3}$$

由 (1) 減 (2),

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

同樣, $$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta, \tag{5}$$

又 $$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta. \tag{6}$$

設 $\alpha+\beta=A,\qquad \alpha-\beta=B,$

則 $\alpha=\frac{1}{2}(A+B),\qquad \beta=\frac{1}{2}(A-B).$ 何故?

代入方程式 (3), (4), (5), (6), 則得

$$\sin A+\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

習題

求證:

1. $\sin 35^\circ+\sin 15^\circ=2\sin 25^\circ\cos 10^\circ.$

2. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

3. $\sin 3\theta + \sin \theta = 2 \sin 2\theta \cos\theta$.

4. $\sin 5x + \sin 3x = 2 \sin 4x \cos x$.

5. $\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 2 \cos x \sin \frac{x}{2}$.

6. $\sin (45^\circ + x) + \sin (45^\circ - x) = \sqrt{2} \cos x$.

7. $\frac{\sin 2\theta + \sin \theta}{\cos 2\theta - \cos \theta} = -\cot \frac{\theta}{2}$.

8. $\frac{\sin 6x + \sin 4x}{\cos 6x + \cos 4x} = \tan 5x$.

78. 正切與餘切的加法與減法定理.

試證:

$$\tan (\alpha+\beta) = \frac{\sin (\alpha+\beta)}{\cos (\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

$$= \frac{\dfrac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}.$$

$$\therefore \quad \tan (\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

同樣, $$\tan (\alpha-\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

習題

求證:

1. $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$.

2. $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$.

3. $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$.

4. $\tan(45^\circ-A)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$.

5. $\tan(45^\circ+A)=\cot(45^\circ-A)$.

79. 二倍角的函數.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

在這個方程式內,設$\beta=\alpha$,

則 $$\sin(2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha,$$

即 $$\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.}$$

同樣,從 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 得

$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.}$$

因 $$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$

故 $$\mathbf{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.}$$

又因 $$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,$$

故 $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$
$$=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha,$$

即 $$\mathbf{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.}$$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, 從這個方程式得

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

【練習】 1. 試證 $\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$.

2. 試證 $\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$.

令 $3\alpha=(2\alpha+\alpha)$.

80. 半角的函數.

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, 在這個方程式內,

設 $2\alpha=x$, 則 $\alpha=\frac{x}{2}$.

因此卽得 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$.

$$\therefore\ \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

同樣,從 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 得

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

以 $\cos\frac{x}{2}$ 除 $\sin\frac{x}{2}$, 則得

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

習 題

試證:

1. $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\tan x\cos^2 x$$
$$=\frac{2\tan x}{\sec^2 x}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}.$$

2. $\left(\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$.

3. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$.

4. $\tan A+\cot A=2\csc 2A$.

5. $\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\tan x\tan y$.

6. $\cot x=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

7. $\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\cos x$.

8. $1+\tan A\tan\dfrac{A}{2}=\sec A$.

雜　題

試證下列各式:

1. $\tan 2x+\sec 2x=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$.

2. $2\sin x+\sin 2x=\dfrac{2\sin^3 x}{1-\cos x}$.

3. $(\sec\alpha+\tan\alpha)^2=\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

4. $\sin(\frac{1}{3}\pi+\alpha)-\sin(\frac{1}{3}\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

5. $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

6. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=2\csc x$.

7. $\tan x=\tan\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}\sec x$.

8. $\dfrac{\cos(\alpha-45^\circ)}{\cos(\alpha+45^\circ)}=\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

9. 已知 $\tan x=-\dfrac{4}{3}$, 又 x 在第二象限內.求 $\sin 2x$.

10. $\tan x=\dfrac{7}{24}$,又 x 在第三象限內. $\sec y=-\dfrac{13}{5}$, 又 y 在第二象限內.求 $\cos(x-2y)$; $\cot 2x$; $\sin\frac{1}{2}y$.

11. 設 $\sin x=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$, 求 $\tan\dfrac{x}{2}$.

12. 設 $\tan\dfrac{x}{2}=y$, 求 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值(以 y 表明).

13. 求證在一個直角三角形內, 其二銳角差的餘弦等於其二邊的積的二倍除以斜邊的平方.

14. 設 $x=\tan^{-1}\dfrac{2a}{1-a^2}$, 求 $\sin\dfrac{x}{2}$ 的值.(但 $90^\circ>x>0^\circ, 1>a>0$)

15. 試解 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}2x=\tan^{-1}3$.

設 $\alpha=\tan^{-1}x$, $\beta=\tan^{-1}2x$, 則 $\tan(\alpha+\beta)=3$,……

16. 求證 $\operatorname{arc}\tan\frac{1}{2}+\operatorname{arc}\tan\frac{1}{3}=45^\circ$.

17. 求證 $\sin(\sin^{-1}x+\sin^{-1}y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

18. 求證 $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

19. 求證 $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-y}{x-z}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-y}{y-z}}$.

20. 試解 $\tan^{-1}\frac{x+2}{x+1}+\tan^{-1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{3}{4}\pi$.

81. 三角方程式. 凡含未知角三角函數的等式叫做三角方程式.試解以下的三角方程式,但 x 的值大於 $0°$ 而小於 $360°$.

1. $\cos 2x+3\sin x=2$.

先將原式化爲 $1-2\sin^2 x+3\sin x=2$, 而後求 $\sin x$, 最後求 x.

2. $\cos 2x+\cos x=0$. 3. $\cos x\cos 2x+2\cos^3 x=0$.

用因數分解法.

4. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=4$.

先將各項展開.

5. $\sin x+\sin 2x=1$. 6. $\cos 2x+\sin x=4\sin^2 x$.

7. 試解 $3\sec^2 x-7\tan^2 x=\tan x$; 但 x 的值在 $0°$ 與 $180°$ 之間.

8. 試解 $\sin 2x+\frac{1}{2}=\sin x+\cos x$; 但 x 的值在 $0°$ 與 $180°$ 之間.

9. 試解 $4\cos 2x+3\cos x=1$; 但 x 的值在 $0°$ 與 $360°$ 之間.

10. 試解 $6\cos 2x+6\sin^2 x=5+\sin x$; 但 x 的值在 $0°$ 與 $360°$ 之間.

11. $0°<x<360°$, 試解 $3\cos 2x+\sin x\ (3\sin x+5)=5$.

12. $0°<x<360°$, 試解 $2\sin 2x=\cos x$.

13. 一個直角三角形的兩個銳角的正切相加等於 4. 試求這兩個銳角.

14. 試解 $\cos 5\theta+\cos 3\theta=\sqrt{2}\cos 4\theta$.

15. 試解 $\tan 2x+\tan 3x=0$.

16. 設 $\cos 5x+\cos 3x+\cos x=0$, 求 x.

17. 設 $\sec x-\cot x=\csc x-\tan x$, 求 x.

18. 試解 $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$.

19. 試解 $\sin x\cos 2x\tan x\cot 2x\sec x\csc 2x=1$.

20. 設 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$, 求 x.

第六章

點的定位法　數系

實數.點在直線上的定位法

82. 以直線代表整數. 選取一根適當的線段 l 當作單位長，把 l 放在 OX (圖 65) 上，一段一段量過去，得 OA, AB, BC, 等等，各等於 l. 那麼，$OA=l$, $OB=l+l=2l$, $OC=l+l+l=3l$, 等等.

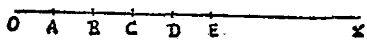

圖 65

這些整數 1, 2, 3, 等等是 OA, OB, OC, 等等的"量數". 這些線段 OA, OB, OC, 等等可說是代表這些整數 1, 2, 3, 等等的.反過來說,每一個整數,在 OX 上必有一個定點與牠相應.

83. 原點. 橫距. 在一直線 AB 上 (圖66),有一點 P, 要定 P 的位置,只要在同線上取一個標準點 O, 而說明 P 與 O 中間的距離 x 就可以了.

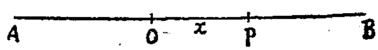

圖 66

O 這個點叫做"原點",這根線段 $OP=x$ 叫做 P 點的"橫距"或"橫坐標".

84. 正數與負數. 這些線段 OA', OB', OC', 等等(圖 67), 都自 O 而左,與自 O 而右的諸線段不同,而其不同

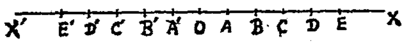

圖 67

之處只是“方向”.爲要分別這兩個相反的方向起見,沿 OX 方向所取的各線段叫做“正”. OA, OB, 等等所代表的數叫做“正數”,各在牠們的前面放一個正號(+).所以 OA 代表 $+1$, OB 代表 $+2$, 等等.這些線段 OA', OB', OC', 等等都是沿 OX' 方向而取得的,便叫做“負”,牠們是代表這些“負數” -1, -2, -3, 等等的.因此,正負數可如圖 68 所示.

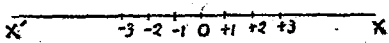

圖 68

85. 零. O 這個點(圖 68)我們可以設想牠是一根無長的線段,也就可以當作牠代表“零”這個數.

86. 以直線代表分數. 有一分數 $\frac{m}{n}$, m 和 n 都是整數,而 m 是分子, n 是分母,如要用直線來表示這個分數,可照下法.

將 OA (圖 69) 分成 n 個等份,每一份就是 $\frac{1}{n}$.這麼一來,便在 O 與 A 之間定下了許多點,而牠們的橫距各爲 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots, \frac{m}{n}, \ldots\ldots$.所以每一個分數 $\frac{m}{n}$, 在 $X'X$ 上必有一

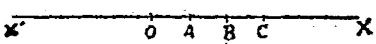

圖 69

個相應的點,而這點與O的距離就代表這個分數.

87. 有理數. §82至§86說明一切整數與分數都可用直線代表.凡整數和分數,不論正負,合成一個'有理數"的區域.

88. 無理數. 在OX上(圖69),有些線段不代表有理數,這是顯而易見的.例如每邊等於1的一個正方形,其對角線之長顯然等於$\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$這個數既不是一個整數又不是一個分數,也不能用整數和分數確實表明出來,但是可在OX上取得一根線段代表牠,這根線段和每邊等於1的正方形的對角線有同樣的長.

凡數雖可用OX上的線段代表,但不能用有理數確實表明出來的,都叫做"無理數".因此可知在OX上的每一根線段必相應於一個數,而每個有理或無理數總可用OX上的一根線段來代表牠.這就叫做各數和OX上的各點"一一相應".

89. 實數. 整數和分數的觀念在古代的人早已有了,至於無理數的存在直到希臘的人才發明的.當其時他們就能見到有些線段和一根定長線段的比不能用一個分數確實表明出來,他們就說這樣的線段是無公量的(i commensurable).

合整數,分數和無理數的全部而成一個"實數"區域.

像"有理"和"無理"這種名稱上的分別似可隨意選定，但是這兩種不同的觀念的引入在算學上是必要的.例如，正數和負數是必要的，因為如若沒有牠們，那麼要解像 $x+a=b$ 這樣的方程式有時就不可能了.如 $x+5=0$ 這個方程式單在正數的區域內是不能解的.

況且,當解二次方程式像 $x^2+a=b$,我們就必須用到無理數了.例如,解 $x^2+1=4$ 這個方程式得二根,一是 $+\sqrt{3}$,一是 $-\sqrt{3}$.解這個方程式 $x^2+a=b$，設或 b 小於 a，那麼一個更大的難關要發生了,就是我們必須解釋 $\pm\sqrt{b-a}$ 的意義，不過 $b-a$ 是負的.任何意義都可加到 $\pm\sqrt{-n}$ 上去，但必須使得代數上以前所成立的許多運算規法對於這個新數仍可適用.我們對於這個符號 $\sqrt{-a^2}$ 給牠一個名稱叫"虛數"，a 無論是正的或負的整數,分數,或無理數均可.關於虛數容後再研究.

【練習】 以直線代表下列各數: $-5, \sqrt{3}, \frac{2}{3}, 2\sqrt{2}, 0$.

點在平面上的定位法

90. 直線坐標. 若兩根相交的直線 $X'X$ 和 $Y'Y$ (圖 70) 當作標準線,那麼在這兩根線的平面上的一點 P，其位置可決定如下:

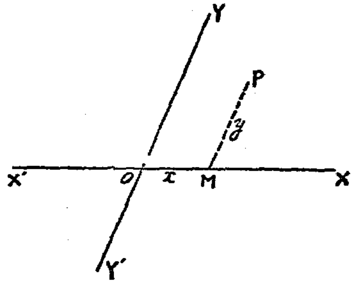

圖 70

畫 PM 平行於 YY'. 設 y 表明 MP 的長, x 表明 OM 的長;那麼,這一對數 (x, y) 就把 P 點的位置決定了.這兩根標準線通常叫做"坐標軸",或單叫做"軸"這個交點叫做"原點".又 OX 叫做 x 軸, OY 叫做 y 軸.

$OM=x$ 叫做 P 點的"橫距"或"橫坐標",而 MP y 叫做 P 點的"縱距"或"縱坐標", x 和 y 這兩個數總稱為 P 點的"坐標".所以我們說着"這點 (x, y)",就是說"這樣的一點,牠的坐標是 x 和 y".

通常所用的坐標軸是互相垂直的,如圖 71. 在這種情形中, x 和 y 是 P 點離軸的兩根垂直距離.這樣的坐標叫

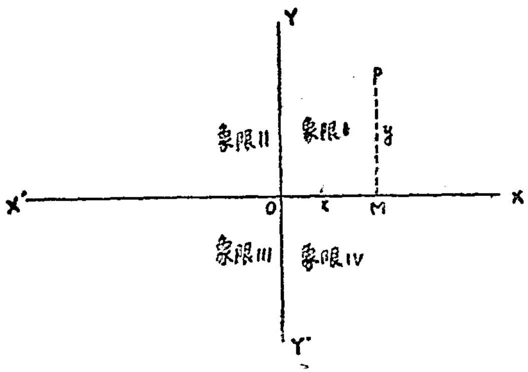

圖 71

做"垂直坐標".

這兩根軸把這個平面分成四部分,叫做"第一,第二,第三,第四象限".

自 y 軸向右的線段是正的,向左的是負的;自 x 軸向上的線段是正的,向下的是負的.

這樣看來,每一對可能的實數 x 和 y 在這平面上必有一點可與相應,而且只有一點;反過來說,在這平面上的每一點必有一對固定的實數可與相應.

點在平面上這樣的定位法,對於學生本不算新異,從前已說過,不過在這里爲以後作用重大,說得更精詳些罷了.

【練習】 1. 畫以下各點,牠們的坐標是

$(-3,1)$; $(4,-2)$; $(0,2)$; $(-6,0)$.

2. 畫以下的三角形,牠們的頂點是

$(1,-4)$, $(3,2)$, $(-5,-6)$; $(-2,-3)$, $(1,3)$, $(0,0)$.

91. 極坐標. 在平面上的一點 P (圖 72),牠的位置也可用牠對於一定點 O 的"方向"和"距離"來決定.這點 O 叫做"極", OP 與這根"始線" OX 所成的角 XOP 叫做 P 點的"動角",這距離 OP 叫做 P 點的"動徑".這根始線 OX 叫做"極軸".

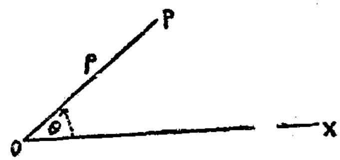

圖 72

這根動徑 ρ*,和這個動角 θ,叫做 P 點的"極坐標".

在平面上的一點 P 可用 ρ 和 θ 的正負值來定牠的位置。θ 的值爲正爲負;只須看動徑是反鐘針方向旋轉還是同鐘針方向旋轉的。這根動徑 OP (圖 73) 總當作牠是正的，但反 OP 的方向所測得的距離是負的，如 OP' 就是負的。

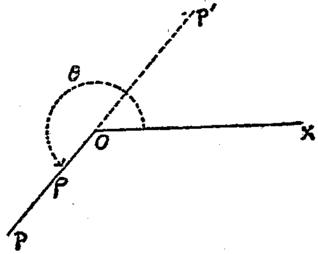

圖 73

【練習】 定以下各點的位置:

1. $(\rho,\theta)=\left(2,-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $(-4,60°)$, $(-2,-45°)$.

2. $(3,\text{arc tan }1)$; $\left(-5,\text{arc cos }\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(4,\text{arc sin }\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

92. 直線坐標與極坐標的關係.*

下列的這幾個方程式是用直線坐標來表明極坐標的。這幾個方程式怎樣能從圖 74 引導出來?

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}.\\ \theta=\text{arc tan }\dfrac{y}{x}.\\ \theta=\text{arc sin }\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\\ \theta=\text{arc cos }\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}$$

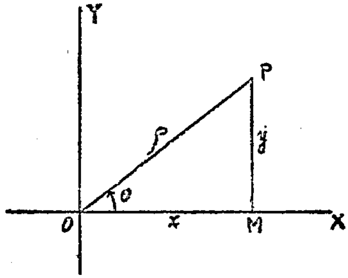

圖 74

* 這是一個希臘字母，讀如 Rho.

* 以後如無特別聲明，說直線坐標就是說垂直坐標.

又這幾個方程式

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ x^2+y^2=\rho^2$$

是用極坐標來表明直線坐標的,試證之.

習　題

1. 試用 §92 的方程式求以下各點的直線坐標:

$$(2,-30°);\left(-3,\frac{2\pi}{3}\right);\ (2,60°);\ \left(-2,\frac{\pi}{4}\right);\ \left(16,\frac{\pi}{6}\right).$$

2. 求以下各點的極坐標:$(2,-2)$;$(1,\sqrt{3})$;$(-2,-2\sqrt{3})$.
3. 將這個方程式 $x^2-y^2=a^2$ 變成極坐標式.
4. 把這個方程式 $\rho=2a\cos\theta$ 改做直線坐標式.
5. 從這個方程式 $\rho\sin 2\theta=2a^2$ 變到直線坐標式.
6. 從這個方程式 $x^2+y^2=2rx$ 變到極坐標式.

複素數

93. 虛數, 我們在 §89 已經見到解二次方程式有時可以引導出負數的平方根來.例如,x 沒有一個實在的值可以適合於這個方程式 $x^2+3=0$. 當初算學家因為對於這個符號 $\sqrt{-3}$ 要給以一種意義是不可能的,便叫這樣的數是"虛數",就是沒有意義的數.到後來他們才覺到解釋這種新符號的意義是必要的,並且要承認牠和實數同

樣受加,減,乘,除那些基本法則的支配.

但是對於虛數的解說,不像負數和無理數那樣簡便.一個實數可由一根線段放在 $X'X$ 上從定點 O 起向已知的方向代表出來.反過來說,在 $X'X$ 上從定點 O 起,每一根線段必與一個實數相應.所以虛數決不能用 $X'X$ 上的線段來代表.代表虛數的方法可以從下面的情形得着一種暗示.

設線段 OA (圖 75) 代表一個實數 a. 把 OA 繞着 O 點旋過兩個直角,就旋到 OA' 的地位,OA' 這根線段是代表 $-a$ 這個數的.從此可知一個正數用 -1 這個因數乘了一乘,可以當作牠朝反鐘針方向旋過了 $180°$. 現在我們當作 $\sqrt{-1}$ 是一個數,牠自乘後等於 -1, 就是 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$. 這樣看來,我們也可以說,一個正數用 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ 乘了一乘,就可當作牠朝反鐘針方向旋過了 $180°$, 那麼一個正數用 $\sqrt{-1}$ 乘了一乘,豈不可以當作牠朝反鐘針方向旋過了 $90°$ 嗎?

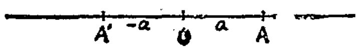

圖 75

94. 虛單位. 這個符號 $\sqrt{-1}$ 通常用"i"這個字來代表."i"叫做"虛單位".因為虛數,如 $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a}$. 可變為 $2\sqrt{-1}=2i$, $3\sqrt{-1}=3i$, $\sqrt{a}\sqrt{-1}=\sqrt{a}\,i$, 而牠們都可用 YY' 上的線段來代表的,如圖 76.

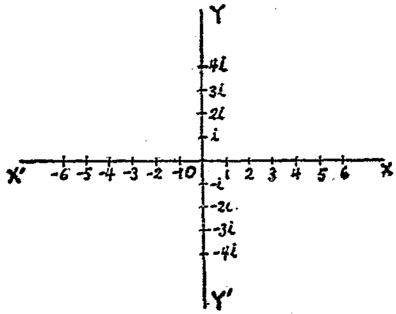

圖　76

【練習】將下面各數寫成 ai 的形式並各以直線代表之: $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-36}$, $\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-2}$.

95. 複素數. 我們已經見到實數是用在 x 軸上從原點畫出的線段代表,虛數是用在 y 軸上從原點畫出的線段代表.反之,在 x 軸上從 O 點畫起的每一根線段代表一個實數,在 y 軸上從 O 點畫起的每一根線段代表一個虛數.但是有一個問題要發生了,就是凡從 O 點畫起而不沿兩軸的線段都可以代表數的嗎?如線段 OP (圖 77).

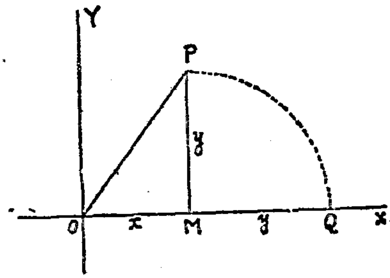

圖　77

這個 P 點的位置由牠的坐標, x 和 y, 而決定的.我們從 O 到 P, 可以先從 O 到 M 再從 M 到 P.設 $OM=x$, $MP=y$, 又取 $MQ=y$.我們從 O 到 P, 也可以先從 O 到 M, 再從 M

到 Q，而後把 MQ 繞着 M 朝反鐘針方向旋過 $90°$。這樣從 O 到 P 可用 $x+iy$ 來表示，x 表明從 O 到 M 的距離，y 表明從 M 到 Q 的距離，而 i 這個因數表明 MQ 經過 $90°$ 的旋轉。

總而言之，每有一根像 OP 這種線段必有一個像 $x+iy$ 這種形式的符號和牠相應，而 x 和 y 是 P 點的坐標。

$x+iy$ 這個符號就叫做"複素數"。

這複素數 $x+iy$ 可變成實數，設或 $y=0$；又可變成虛數，設或 $x=0$。當 $x=y=0$，那麼 $x+iy$ 變成 0，就可用原點來代表牠。所以實數和虛數都是複素數的"特別情形"。

96. 以極坐標表示複素數。

因 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，(圖 78)，

所以 $$x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta,$$

或 $$\boldsymbol{x+iy=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)}.$$

這根距離 OP 或 r (圖 78) 叫做這個複素數的"模數"；θ 叫做牠的"變向"

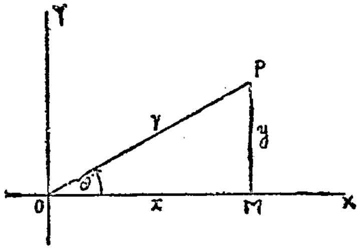

圖 78

習 題

畫出動徑代表下面各數:

1. $2+i$.　　2. $2-i$.　　3. $-3i$.

4. $-5+2i$.　　5. $-3-i\sqrt{5}$.　　6. $-2+6i$.

用極坐標寫出下面各數並各作一圖:

7. $1+i\sqrt{3}$.　　8. $-1-i\sqrt{3}$.　　9. $\sqrt{3}-i$.

10. $1+i$.　　11. $-1-i$.　　12. $-1+i$.

把下面各數寫成 $x+iy$ 的形式:

13. $2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$.　　14. $4(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$.

15. $3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$.　　16. $5(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$.

17. $2(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$.　　18. $\cos 150^\circ+i\sin 15)^\circ$.

97. 相等的複素數. 兩個複素數 x_1+iy_1 和 x_2+iy_2,只有當牠們是用同一動徑來代表的時候,才能相等.所以,假使兩個複素數 $a+ib$ 和 $c+id$ 相等,那麽 $a=c$, $b=d$.反過來說,只有當 $a=c$, $b=d$ 的時候,兩個複素數 $a+ib$ 和 $c+id$ 才能相等.所以,假使 $a+ib=0$, 那麽 $a=0$, $b=0$.

98. 共軛複素數. 在複素數 $a+ib$ 中, a 叫做"實數部分",而 ib 叫做"虛數部分'.兩個複素數,如 $a+ib$ 和 $a-ib$,牠們的實數部分完全相同而牠們的虛數部分數同而號異,這就叫做"共軛複素數".

【練習】 求 x 和 y 的值適合下面的方程式:

1. $x+y+(x-y)i=4+6i$.
2. $x+y+i(x-y)=24.5+i(8.5)$.
3. $5x+3y+i(4x-7y)=26+2i$.

複素數的演算

99. 複素數的加法. $x+yi$ 的意義已經解釋過,就是,先從 O 到 M (圖 79), $OM=x$, 又從 M 到 N, $MN=y$, 而後把 MN 繞着 M 朝反鐘針方向旋過 $90°$ 達到 MP 的位置. 這線段 OP 就是代表 $x+yi$ 的.

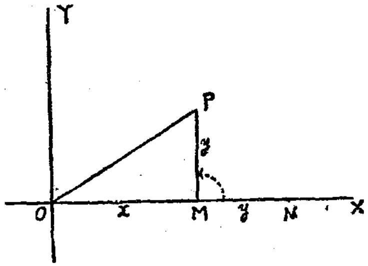

圖 79

現在要求兩個複素數 x_1+y_1i 和 x_2+y_2i 的"和", 可照以下的手續進行:第一步,把這根動徑 OP 畫出來(圖 80), 牠就是代表 x_1+y_1i 的.第二步,從 P 起(可以代替從 O 起),把 PR 這根動徑畫出來,畫得等於動徑 OQ; OQ 是代表 x_2+y_2i 的, 所以 PR 也可以代表 x_2+y_2i.

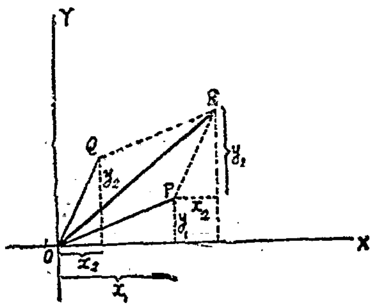

圖 80

最後聯結 O, R 兩點,得了一根動徑 OR, 這就是 x_1+y_1i 和 x_2+y_2i 的"和".

定了 R 的位置便可表明 x_1+y_1i 和 x_2+y_2i 的和.因爲 R 的坐標是 x_1+x_2 和 y_1+y_2,所以從 O 到 R 的這根動徑就是代表這個和.

又因 OQ 與 PR 相等且平行,故 $OPRQ$ 是一個平行四邊形.從此要畫出兩個複素數的和可另得一法:先畫 OP 和 OQ 代表這兩個複素數.再把 OP 和 OQ 當作兩鄰邊,畫成一個平行四邊形 $OPRQ$. 那麼經過 O 點的這根對角線就是代表這兩個複素數的和.因爲 R 的坐標是 x_1+x_2 和 y_1+y_2, 所以 OR 代表複素數 $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$.

這樣看來,我們當然可把 $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ 作爲 x_1+y_1i 和 x_2+y_2i 的和,就是,

$$(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i.$$

習 題

1. 一個輪船對 OP 方向開行(圖 81),同時風對着 OQ 方向吹去.問過了一點鐘這船離出發處多少遠,並且是朝着什麼方向進行的?

把下面的複素數加起來,並用圖形法和代數法:

2. $(5+3i)+(-1+7i)$.

圖形法：設 OP (圖 82) 代表 $5+3i$, OQ 代表 $-1+7i$. 畫成平行四邊形 $OPRQ$. 這對角線 OR 就是代表所求的和.

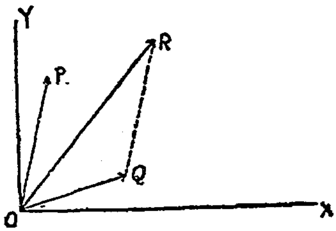

圖 81

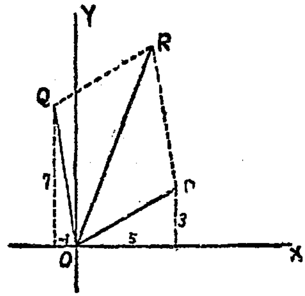

圖 82

代數法：

$$\begin{array}{r} 5+\ 3i \\ -1+\ 7i \\ \hline 4+10i \end{array}$$

3. $(4+i)+(1+5i)$.　　4. $(-3-2i)+(5+3i)$.

5. $(-6+8i)+(-3-6i)$.　　6. $(8-i)+(8+i)$.

7. 有兩種力同加於一點，一種力是15磅對東南方向用去，一種力是22磅對西南方向用去. 求這個合力的大小和牠作用的方向，用圖形表示出來.

100. 複素數的減法. 我們已經知道 x_1+y_1i 加 x_2+y_2i 可用平行四邊形的一根對角線來代表，那麼平行四邊形的一邊就可以表示被牠的對角線和鄰邊所代表的兩個數的"差". 所以要用圖形求得 x_1+y_1i 和 x_2+y_2i 的差，可設 OP (圖 83) 代表 x_1+y_1i, 而 OQ 代表 x_2+y_2i.

畫 QP.

畫 $OR // QP$, 而 $RP // OQ$.

那麼 OR 就是代表這個差.

試證 OR 代表這個數

$$(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i.$$

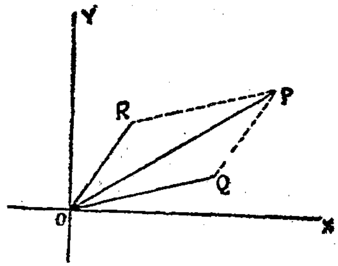

圖　83

所以我們可以解釋這兩個複素數 x_1+y_1i 和 x_2+y_2i 的"差"是這個複素數 $(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$, 就是,

$$(x_1+y_1i)-(x_2+y_2i)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i.$$

【練習】 演算下列各題,並各作一圖;

1. $(4-3i)-(2+i)$.　　2. $(2+i)-(1+4i)$.

3. $(7+8i)-(5+6i)$.　　4. $(2-3i)-(-1+i)$.

101. 複素數的乘法. 我們旣認可了代數上許多通常的法則對於複素數是適用的,那麼

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=x_1x_2+x_2y_1i+x_1y_2i+y_1y_2i^2$$
$$=x_1x_2+y_1y_2i^2+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

因 $i^2=-1$, 故

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

至於兩個複素數的圖形乘法是很容易表示的,只要應用極坐標,如下:

設　　$x_1+y_1i=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,

$$x_2+y_2i=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

那麼 $$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}.$$

$$\therefore\quad (x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.$$

最後所得的積仍是一個複素數,牠的模數是已知二數的模數的積.牠的變向是已知二數的變向的和.

習　題

求以下各積並各作一圖:

1. $(2+2i)(1+\sqrt{3}i)$.

$$(2+2i)(1+\sqrt{3}i)=2+(2+2\sqrt{3})i+2\sqrt{3}i^2$$
$$=(2-2\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})i.$$

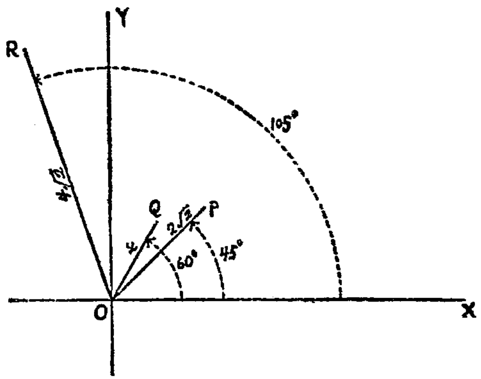

圖　84

應用極坐標則得:

$$2+2i=2\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ),$$

$$1+\sqrt{3}i=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ).$$

∴ 這個積的模數是 $r_1r_2=4\sqrt{2}$ 而牠的變向是 105°.

∴ 要畫出這個積來,只須畫 OR (圖 84) 與 OX 成 105° 的角,而取其長等於 $4\sqrt{2}$.

2. $(2+3i)(3+5i)$. **3.** $(-2-2i)(2+2i)$.

4. $(3+3\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}+2i)$.

5. $(\sqrt{2}+\sqrt{5}i)(\sqrt{5}+\sqrt{2}i)$.

6. $(3-i)(4+3i)$. **7.** $(3-2i)(4+3i)$.

102. 一個複素數的 n 次冪.

假使一個複素數自乘,那麼

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta).$$

兩邊乘以 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 則得

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).$$

照這個道理推算下去可得

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

n 是任何正整數.

但是還可證明這個定理對於 n 是任何有理數總得成立的.

103. 複素數的除法. $\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}$ 的分母可使變成

有理數,只須上下同乘以x_2+y_2i的共軛數,演算如下:

$$\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}.$$

$$\therefore\ \frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

這結果是一個複素數.

倘用極坐標來演算,那麼兩個複素數相除所得的商很容易作圖表示.

化分母為有理數則得

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{1}.$$

$$\therefore\ \frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}.$$

這樣看來,兩個複素數相除所得的商仍是一個複素數,牠的模數是已知二數的模數的商,而牠的變向是已知二數的變向的差.

畫OP_3(圖85)等於$\frac{r_1}{r_2}$,而$\angle XOP_3=\theta_1-\theta_2$.那麼$OP_3$就是代表所求的商.

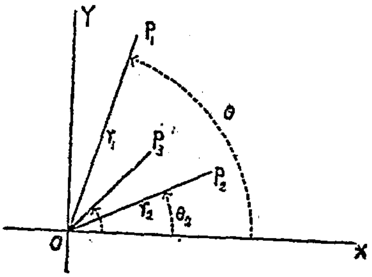

圖 85

習 題

演算以下各題並用代數法和圖形法:

1. $(-2+2\sqrt{3}i)\div(1+\sqrt{3}i)$.

化分母爲有理數,則得

$$\frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{(-2+2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{-2+i(2\sqrt{3}+2\sqrt{3})+6}{1+3}$$

$$=\frac{4+4\sqrt{3}i}{4}=1+\sqrt{3}i.$$

各以極坐標寫出,則得

$$-2+2\sqrt{3}i=4(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ),$$

$$1+\sqrt{3}i=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ).$$

$$\therefore\ \frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ).$$

2. $(2+2i)\div(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}i)$.　　3. $(1+i)\div(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i)$.

4. $(3-5i)\div(2-3i)$.　　5. $(2-2\sqrt{3}i)\div(1+i)$.

6. $\frac{5-3i}{5+3i}$.　　7. $\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}$.　　8. $\frac{3}{2i}$.

9. $\frac{2+5i}{4i}$.　　10. $\frac{2+3i}{3-2i}$.　　11. $\frac{(2+3i)^2}{1+2i}$.

12. 化 $\frac{11-3i}{1-3i}$ 與 $\frac{9-2i}{-4-i}$ 爲最簡式,並圖示其和.

13. $x=3+2i$, 計算 $\frac{2x^2-(2-3i)x+i}{x^2+x+1}$ 的值,並化其結果爲 $a+bi$ 的形式.

14. 化簡 $\dfrac{4i\sqrt{10}}{2-3i\sqrt{5}}$.

15. 先化 $\dfrac{8+i}{1+2i}$ 與 $\sqrt{2+12i}$ 爲 $a+bi$ 的形式而後圖示其和.

104. 我們已經曉得點在直線上的定位法和在平面上的定位法了,點在平面上的定位法有二:一是直線坐標一是極坐標而這二法可以互換.

我們又曉得數的系統了,現在更作一簡明的表如下:

- 數一複素數
  - 實數
    - 有理數
      - 整數
      - 分數
    - 無理數
  - 虛數

複素數的形式是 $a+bi$,前面用圖形來表示牠,似乎我們憑空臆造,故意變把戲,其實不然,複素數這個東西是當解某種二次方程式的時候自然產生的,如解

$$x^2+x+1=0,\ 則得$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ 或\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ 就是$$

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2},\ 或\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

這個方程式的根就表示一個複素數,就是 $a+bi$ 的形式.既發見了這樣的數,才想法用圖形來表示牠的.

第　七　章

直線　直線函數

直　線　的　斜　率

105. 直線的斜率. 這個正角 α (圖 86) 是一根直線 AB 和 x 軸相交而成，叫做這線的"傾角". 這傾角可用牠的三角比來決定牠的大小. 在幾何學上一根線的傾角的大小通常是用牠的正切比 (tangent ratio) 來測量的. 這個傾角的正切就叫做這根線的"斜率".

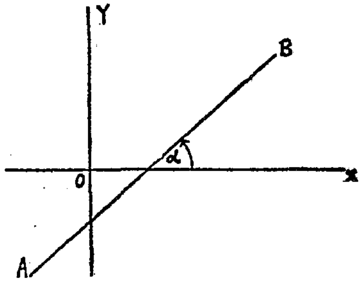

圖　86

設 P_1 和 P_2 (圖 87) 是一直線上的任何二點，又設牠們的坐標是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2).

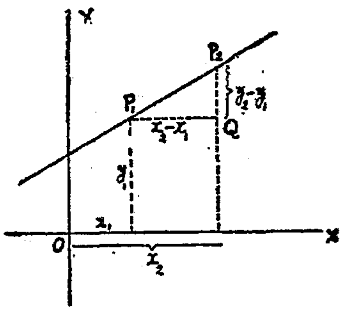

圖　87

那麼 P_1P_2 的斜率是等於

$$\frac{QP_2}{P_1Q}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

今以 m 表斜率,則得一公式

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

這兩個差數 x_2-x_1 和 y_2-y_1,為了簡便起見可用 Δx_1 (讀為 Delta x_1)和 Δy_1 (讀為 Delta y_1)表出.用了這種記法,$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 可寫做 $m=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$. 因為這個方程式對於這根線上的每一點都能成立,所以附屬在下邊的小字可以取消,而得 $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

【練習】 1. 從圖上試證斜率是正或是負只要看這根線是自左而右升高或是自左而右降低.所以看了 m 的號子就可決定這根線的升降.

2. 試證一根線平行於 x 軸,牠的斜率是零.

3. 試證平行於 y 軸的一根線沒有斜率.

4. 被以下各點決定的線,求牠們的斜率和傾角:
$(-2,4)$, $(3,6)$; $(3,8)$, $(-6,-6)$; $(0,-4)$, $(-3,1)$.

直線的方程式

106. 點的記法. 一個定點的坐標和一個動點的坐標通常用下邊附屬小字來區別.如定點可以 (x_1,y_1), (x_2,y_2), 等等表示,但 (x,y) 是表示平面上的任何一點.

又,倘若一點沿着一直線或一曲線移動,那麼牠的坐

標也是 x 和 y，下邊不附屬小字.

倘使一點是遵循了已知的條件移動,那麼這已知的條件可以表示在一個含有 x 和 y 的方程式中,而 x 和 y 就是這點的坐標.決定一根直線有幾種方法,所以 x 和 y 的關係也就有了幾種.這幾種關係將在 §107 至 §121 表明出來.

107. 點斜式. (The point-slope form). 倘使一根線上有一點的坐標已知,牠的斜率也已知,由是而立出牠的方程式就叫做"點斜式".

設 m 是 P_1P_2 (圖 88) 的斜率, (x_1, y_1) 是在 P_1P_2 上一已知點 P_1 的坐標, 而 (x, y) 是在 P_1P_2 上除 P_1 點外任何一點 P 的坐標.

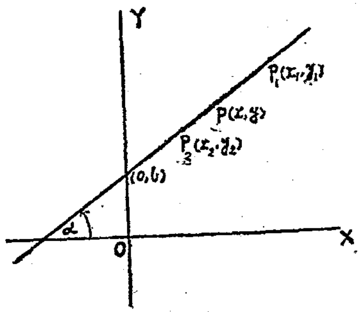

圖　88

那麼 (x, y) 必適合這個方程式　$m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$　何故?

就是　$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$.

這是一個二元 (x 和 y) 一次方程式.這個方程式是被 P_1P_2 線上每一點的坐標 x 和 y 所適合的,所以牠就叫做直線 P_1P_2 的方程式.

【練習】 1. 一根線經過這點 $(4, -3)$,又牠的斜率是 5. 求這根線的方程式.

2. 一根線的斜率是$\frac{3}{5}$,又經過這點$(-4,-3)$.立出牠的方程式來.

3. 一根線的斜率是$-\frac{2}{3}$,又線上一點的坐標是$(5, 7)$.把牠的方程式立出來.

108. 斜截式. (The slope-intercept form). 儻使一根線的斜率已知,又牠有一根截段已知,由是而立出牠的方程式就叫做"斜截式".

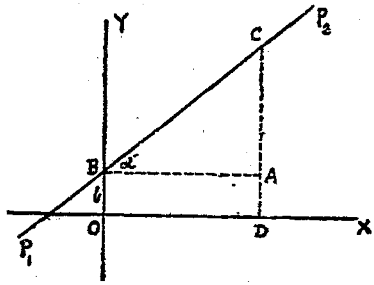

圖 89

設(o, b)(圖89)是P_1P_2和y軸的交點B的坐標.那麼把$(x_1, y_1)=(o, b)$代入這個方程式$y-y_1=m(x-x_1)$,便得$y-b=m(x-o)$,或

$$y=mx+b.$$

b這個數叫做直線P_1P_2的"y截段(y-intercept)",而$y=mx+b$就是牠的斜率是m,牠的y截段是b這樣的線的方程式.

試用圖89,求證$y=mx+b$.

109. 二點式. (The two-point form). 由一根線上的兩個已知點立出牠的方程式就叫做"二點式".

設(x_1, y_1)和(x_2, y_2)是兩定點的坐標,又設

$$y=mx+b \tag{1}$$

是經過這兩點的線的方程式.那麼

$$y_1=mx_1+b, \tag{2}$$

而

$$y_2=mx_2+b. \tag{3}$$

從 (1) 減 (2),又從 (3) 減 (2),則得

$$y-y_1=m(x-x_1), \tag{4}$$

而

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1). \tag{5}$$

以 (5) 除 (4),則得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

或

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

【練習】 1. 在方格紙上畫一根線.選這根線上的兩點而決定牠的方程式.

2. 寫出經過下列各點的線的方程式:

(5, 6), (1, −2); (0, 2), (6, −5); (−1, 3), (−4, −3).

110. 行列式. (The determinant form). 前節的直線的方程式又可寫成行列式如下:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

把這個行列式展開 (展開方法待後說明),即得

$$x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0.$$

【練習】 若這三點(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)同在一直線上,試證

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

111. 截段式. (The intercept form). 設a是直線PQ的x截段,而b是牠的y截段(圖 90).那麼

$$\frac{y-b}{x-o}=\frac{o-b}{a-o},$$

$$\therefore \quad \frac{y-b}{x}=-\frac{b}{a},$$

$$\therefore \quad y=-\frac{b}{a}x+b,$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

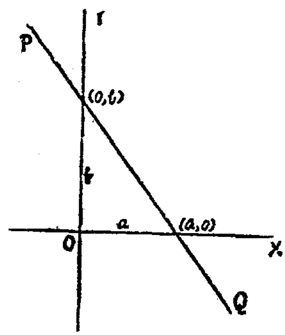

圖 90

這就是一根直線的方程式而以截段式表示的.

【練習】 1. 在方格紙上,畫一根直線截兩軸.求牠的截段並決定牠的方程式.

2. 求經過下列各點的直線的截段.

$(5,-2)$ 與 $(1,-3)$; $(5,-8)$ 與 $(-4,3)$.

112. 與x軸平行的線. 當一根線平行於x軸的時候,$m=o$,所以這個方程式$y=mx+b$變成

$$y=b.$$

113. 與 y 軸平行的線. 設 PQ (圖 91) 平行於 y 軸.那麼所有在 PQ 上一切的點, $x=k$, 不論 y 的值是什麼. 又所有不在 PQ 上一切的點, $x\neq k$. 所以 PQ 的方程式是

$$x=k.$$

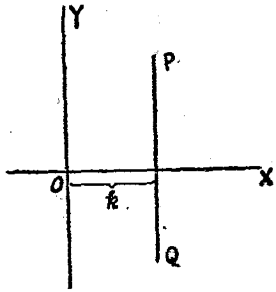

圖 91

114. 經過原點的線.

把 $x=0$ 和 $y=0$ 代入這個方程式 $y=mx+b$, 即得 $b=0$. 所以一根經過原點的線的方程式是

$$y=mx.$$

115. 定理. 一個一元或二元一次方程式必是代表一根直線的.

二元一次方程式的普通形式是

$$Ax+By+C=0.$$

設 $B=0$, 這個方程式 $Ax+By+C=0$ 可變爲

$$x=-\frac{C}{A}=k.$$

這是一根平行於 y 軸的線的方程式, §113.

設 $B\neq 0$, 這個方程式 $Ax+By+C=0$ 可變爲

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \text{就是}$$

$$y=mx+b.$$

這是表示在(o, b)點截y軸的一根直線, §108.

設$m=0(A=0)$, 即得$y=b$, §112, 這是一根平行於x軸的線的方程式.

設$b=0(C=0)$, 即得$y=mx$, §114, 這是一根經過原點的線的方程式.

這樣看來, A, B, C無論取什麼值, 這方程式$Ax+By+C=0$總可變爲$x=k, y=b, y=mx, y=mx+b$這幾個形式當中的一個, 所以牠必是代表一根直線的.

116. 直線方程式. 一個一次的方程式叫做"直線方程式".

117. 直線函數. 一個一次的函數, 如$mx+b$, 叫做"直線函數".

118. 直線方程式的作圖法. x和y有一對值適合於這個方程式$Ax+By+C=0$, 就是這個方程式的一個解答, 而被這一對值所決定的一點必在被這方程式所代表的這根線上.

因爲兩點可以決定一根直線, 所以一個方程式的圖很容易畫出, 只要先求得這方程式的兩個解答, 而後畫一直線經過這兩點, 這根直線就是所求的圖.

習題

作下列各方程式的圖:

1. $x=3$.　　2. $y=4x$.

3. $y=-5$.　　4. $y=-2x+3$.

設 $x=0$ 而求 y 的相應值;又設 $y=0$ 而求 x 的相應值:

5. $2x+2y=8$.　　6. $y=3x+5$.

7. $2x-5y=0$.　　8. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

9. $y=-7$.　　10. $-4x+3y=12$.

把下列各方程式寫做斜截式和截段式:

11. $2y+5x-6=x+3$.　　12. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=2$.

13. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{7}$.　　14. $x-2y=6$.

以下各方程式的直線都經過 $(2,-3)$, 試決定 C:

15. $4x+5y+C=0$.　　16. $7x+y+C=0$.

17. $-5x+3y+C=0$.　　18. $10y+C=0$.

19. 一根直線經過 $(5,3)$,而有相等的兩截段.試求其方程式.

20. 有一物體在真空中自上落下,其初速為 v_0, 經 t 秒後,牠的速度可照這個方程式 $v=v_0+gt$ 計算.設 $g=32$, $v_0=3$, 試作這方程式的圖.

21. 一人投資1200元,每年得單利3%.試求 n 年後的總額 a.

試證 a 爲 n 的直線函數.

原來 n 的係數爲總額每年的增加率, 但在圖上, n 的係數有何意義?

22. 設兩個變數 x 和 y 有一個定比 m. 用一個方程式來表明 x 和 y 的函數的關係, 更證明一個變數是那一變數的直線函數.

23. 一個物體的重量 w 和牠的體積 v 成正比. 試證 w 是 v 的直線函數. 代表這個函數的直線, 牠的斜率就是表示這個物體的密度.

24. 一個以等速運動的物體, 牠所經過的距離 s 和時間 t 成正比. 試證 s 是 t 的直線函數. 代表這函數的直線, 牠的斜率有何意義?

25. 試證直角三角形的一銳角是那一銳角的直線函數. 畫圖代表這函數.

119. 以極坐標立直線的方程式.

設 AB (圖 92) 爲任一直線. 設 OX 爲始線, 而 O 爲極, §91. 自 O 至 AB 的垂線 OC 令爲 p, 而 COX 角令爲 ω.

設 $P(\rho,\theta)$ 爲 AB 上的任一點.

那麼 $$\cos POC=\frac{p}{\rho}.$$

因 $$\angle POC=\theta-\omega,$$

$$\therefore\quad \rho\cos(\theta-\omega)=p.$$

這就是直線 AB 的方程式而以極坐標表示的。

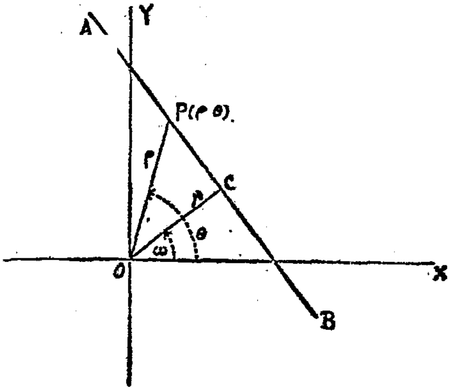

圖 92

習 題

畫以下各方程式的圖:

1. $\rho\cos\theta=5$.　　　　2. $\rho\cos(\theta-30^\circ)=6$.

3. $\rho\cos(\theta-120^\circ)=4$.　　4. $\rho\sin(\theta+\frac{2}{3})=4$.

5. 一根直線經過極的,其方程式如何?

6. 立出始線的方程式來。

120. 法線式. (The normal form). 從原點到一根線上的垂線(如圖 92 的 OC),叫做這根線的"法線".以一根線的法線關係而立出牠的方程式就叫做"法線式"。

前節的方程式

$$\rho\cos(\theta-\omega)=p$$

可寫做 $$p\cos\theta\cos\omega+p\sin\theta\sin\omega=p.$$ 何故？

$$\text{試證}\begin{cases}\rho\cos\theta=x.\\ p\sin\theta=y.\end{cases}$$

$$\therefore\quad x\cos\omega+y\sin\omega=p.$$

這就是一個直線方程式的法線式.

121. 變 $Ax+By+C=0$ 爲法線式.

因爲這兩個方程式

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

和 $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0, \qquad (2)$$

是代表同一直線的,所以牠們所不同的只在一個定值的因數.那麼這直線方程式由 (1) 變 (2) 可寫做

$$kAx+kBy+kC=0.$$

$$\therefore\quad \cos\omega=kA,$$

$$\sin\omega=kB,$$

$$-p=kC.$$

$$\therefore\quad \cos^2\omega=k^2A^2,$$

$$\sin^2\omega=k^2B^2.$$

相加, $$\cos^2\omega+\sin^2\omega=k^2(A^2+B^2).$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$\therefore\quad \cos\omega=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\omega=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$-p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因 p 常爲正數,故最後這個方程式可以決定這個根式的號子.所以這個根式的號子必與 C 的號子相反.何故?

習 題

將下面各方程式變爲法線式,並從 ω 和 p 的值將各線畫出,最後用兩截段檢驗所得各結果:

1. $4x+3y-25=0.$

各項除以 $\sqrt{4^2+3^2}$,則得

$$\frac{4x}{5}+\frac{3y}{5}-5=0.$$

$$\therefore\quad \cos\omega=\frac{4}{5},\ \sin\omega=\frac{3}{5},\ p=5.$$

因爲 $\cos\omega$ 和 $\sin\omega$ 都是正的,所以這根法線必在第一象限內.從此可以決定 ω 的值而畫出這根線(圖 93).

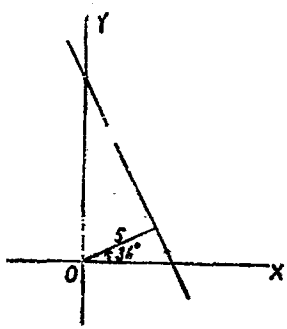

圖 93

2. $-x+3y-4=0.$
3. $x+8=-2y.$
4. $3x+4y+6=0.$
5. $x-y=0.$

$3x-5y=4.$

7. $3x-4y=0$.

從下面的條件畫出各線並寫其方程式:

8. $p=3,\ \omega=30°$.

9. $p=5,\omega=150°$.

10. $p=4,\ \omega=74°$.

11. $p=5,\omega=135°$.

12. 求下面兩平行線間的距離:

$$7x-8y-40=0 \text{ 與 } 7x-8y-15=0.$$

13. 一個圓以原點為中心而與 $5x+12y-25=0$ 相切. 問這圓的半徑多少長?

122. 自一點至一線的距離. 設 AB (圖 94) 為一已知線, $P(x_1,y_1)$ 為一已知點, d 為自 P 至 AB 的距離.

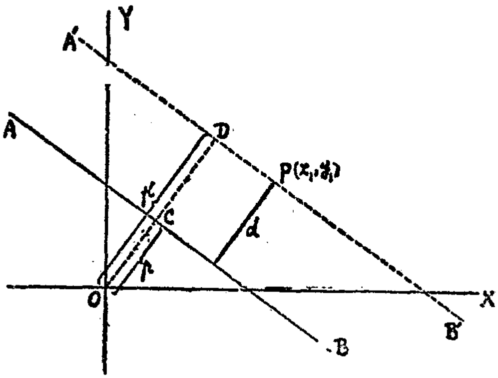

圖 94

經過 P 畫 $A'B'//AB$.

設 OD 垂直於 $A'B'$ 而等於 p', 又設 $OC=p$.

那麼 AB 和 $A'B'$ 的方程式,以法線式表示,可寫做

$$x\cos\omega+y\sin\omega=p,$$

和 $$x\cos\omega+y\sin\omega=p'.$$

因爲 (x_1, y_1) 適合於 $A'B'$ 的方程式的,所以

$$x_1\cos\omega+y_1\sin\omega=p'.$$

$$\therefore\quad d=p'-p=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p.$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p.}$$

所以,要求自一點至一線的距離,先化這線的方程式爲法線式 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$,而後將這點的坐標代替變數 x 和 y.

若 d 爲負,那麼這已知點和原點同在這已知線的一邊;若 d 爲正,那麼牠們必分在這已知線的兩邊.

習 題

1. 試證 $$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

若 C 是正的當用 $-$ 號,若 C 是負的當用 $+$ 號.

2. 求自 $(1, 2)$ 至 $3x-10=4y$ 的距離.

3. 求自 $(-3, 4)$ 至 $5x+12y=25$ 的距離.

4. 求自 $(1, 1)$ 至 $3x+4y+6=0$ 的距離.

5. 求自 $(2, 3)$ 至 $3x+4y=-12$ 的距離.

123. 一個角的平分線. 設 $P(x, y)$ (圖 95) 代表

包含原點的一對對頂角的平分線上的任一點.

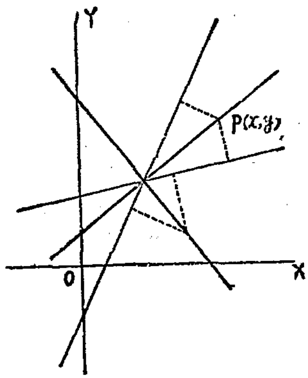

圖 95

因 P 離這兩根已知線等遠,故這根平分線的方程式爲

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=x\cos\omega'+y\sin\omega'-p'.$$

同樣,得那一對對頂角的平分線的方程式

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=-(x\cos\omega'+y\sin\omega'-p').$$

【練習】 求下面兩根線相交所成的角的平分線的方程式: $3x-4y=12$ 與 $12x+5y=30$.

124. 兩點間的距離. 試證 QP_2 (圖 96) 等於 y_2-y_1, 而 P_1Q 等於 x_2-x_1.

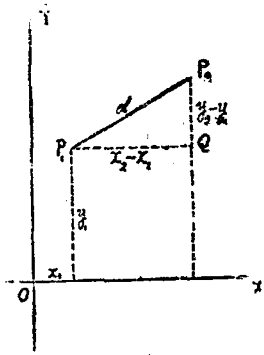

圖 96

$$\therefore\quad d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

或 $$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

125. 離二定點等遠的一個動點的軌跡.

設有一點 $P(x,y)$ 移動,離二定點 $P_1(1.2)$ 與 $P_2(4,1)$ 常是等遠,試求 P 點的軌跡的方程式

並作其圖.

因 $$PP_1 = PP_2,$$

即 $$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}. \qquad \S 124$$

$$\therefore \quad (x-1)^2+(y-2)^2 = (x-4)^2+(y-1)^2.$$

化簡後得 $$6x-2y-13=0.$$

再畫出這個方程式的軌跡.

【練習】一點移動,離以下各對點等遠,試求其方程式並作其軌跡:

$(-3, 4)$ 與 $(3, 2)$; $(0, 0)$ 與 $(4, 6)$; $(3, 2)$ 與 $(-5, 1)$.

126. 依照定比分割一根線段. 設 P_3 (圖 97) 把線段 P_1P_2 分成 m 和 n 兩段. P_3 的坐標可以決定如下:

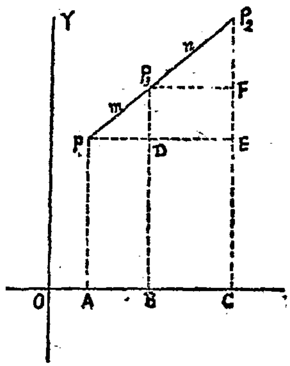

圖 97

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} = \frac{P_1D}{DE} = \frac{P_1D}{P_3F},$$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_3},$$

$$\therefore \quad mx_2 - mx_3 = nx_3 - nx_1,$$

$$\therefore \quad (m+n)x_3 = mx_2 + nx_1,$$

$$\therefore \quad x_3 = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

同樣得 $$y_3 = \frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

127. 一根線段的中點. 在前節的公式中,設

$m=n$.那麽 P_3 就變爲線段 P_1P_2 的中點,而

$$\begin{cases} x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \\ y_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2). \end{cases}$$

習　題

1. 在§124,設 P_1 在第一象限,P_2 在第二象限,試立出這個距離公式.

2. 設 P_1 與 P_2 在各種地位,求證這個距離公式,然後知這個公式是普徧成立的.

3. 求 $(3, -4)$ 和 $(8, -2)$ 中間的距離.

4. 求證直角三角形斜邊的中點是牠的外接圓的中心.

5. 求一個三角形各邊的長,其各頂點的坐標爲 $(2, 2)$, $(4, 3)$, $(-3, 5)$.

6. 求一個三角形各中線的長,其頂點爲 $(7, -3)$, $(-4, 7)$, $(5, -2)$.

7. 設三角形的三頂點爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), 求牠的中線的交點的坐標.

8. 試證這四點 $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(1, 7)$ 是一個平行四邊形的頂點.

9. 試證長方形的兩根對角線是相等的.

10. 求證聯結一個三角形兩邊的中點的線等於第三

邊的一半.

11. 求證以 $(2,-1)$ 爲中心的一個圓可經過 $(6,2)$, $(-1,3)$, $(-2,-4)$.

12. 離 $(-3,-3)$ 和 $(0,4)$ 等遠的點,其軌跡的方程式如何?

13. 有一點分線段 $(-1,4)$, $(5,3)$ 成 $2:3$, 求其坐標.

14. 把聯結 $(0,3)$ 和 $(6,-3)$ 的線段分作三等份,試求這兩個分點的坐標.

15. 將線段 AB 引長至 C, 而令 BC 等於 $\frac{1}{2}AB$. 設 A 與 B 的坐標爲 $(5,6)$ 與 $(7,2)$, 求 C 的坐標

16. 設 $(3,k)$ 與 $(k,-1)$ 各離 $(4,2)$ 等遠,求 k 的值.

17. 一根線段的一個端點爲 $A(4,6)$, 而其中點爲 $M(5,2)$, 試求其另一端點 B.

18. 一個三角形的頂點爲 $A(-4,-3)$, $B(-1,5)$, $C(3,-4)$, 試求其高.

19. 試證 $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$ 三點在一直線上.

20. 有一點 $P(x,y)$, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=68$, A 與 B 爲 $(3,0)$ 與 $(-3,0)$. 試求 P 的軌跡的方程式.

21. 有一點 $P(x,y)$, 牠與 $(0,6)$ 的距離等於牠與 OX 的距離.試求 P 的軌跡的方程式.

【證法示例】 一個三角形若有二中線相等,牠必是一

個等腰三角形,試證之.

要證這種題,先要把這個圖形和兩根坐標軸佈置得恰好;佈置得當,就很容易證,佈置失當,就很難證,也許證不出來.

一個證法

把三角形和坐標軸佈置如圖98.

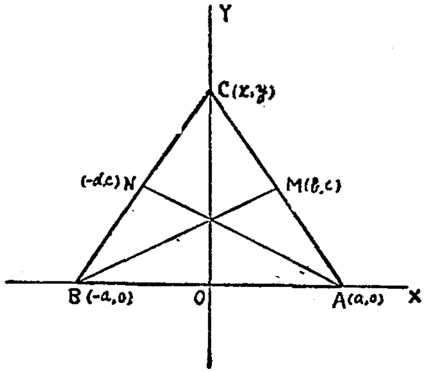

圖 98

設 A 爲 $(a,0)$, B 爲 $(-a,0)$.

因爲 M 是 AC 的中點, N 是 BC 的中點,所以 MN 與 OX 平行,所以 M 與 N 的縱距必相等.

故設 M 與 N 的坐標爲 (b,c) 與 $(-d,c)$.

又設 C 的坐標爲 (x,y).

因 $AN=BM$, 故 $\sqrt{(a+d)^2+c^2}=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$,

$$\therefore\quad b=d.$$

$$AM=\sqrt{(a-b)^2+c^2}.$$

$$BN=\sqrt{(a-d)^2+c^2}=\sqrt{(a-b)^2+c^2}.$$

$$\therefore\quad AM=BN,\quad 即\quad \tfrac{1}{2}AC=\tfrac{1}{2}BC.$$

$$\therefore\quad AC=BC.$$

所以 $\triangle ABC$ 是一個等腰三角形.

又 一 證 法

把三角形和坐標軸佈置如圖99.

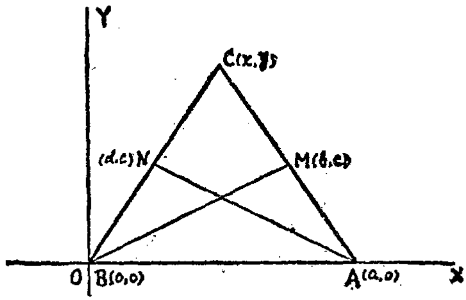

圖 99

因 $AN=BM$, 故 $\sqrt{(a-d)^2+c^2}=\sqrt{b^2+c^2}$,

$$\therefore\quad a-b=d.$$

因 $b=\dfrac{a+x}{2}$, 故 $x=2b-a$.

因 $d=\dfrac{x}{2}$, 故 $x=2d$.

$$AC=\sqrt{(a-x)^2+y^2}=\sqrt{4(a-b)^2+y^2}.$$

$$BC=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4d^2+y^2}.$$

$$\therefore\quad AC=BC.$$

注意:——習題4, 9, 10的證法同上.

第 八 章

幾 根 直 線

聯立二元一次方程式 面積

幾 根 直 線

128. 平行線. 設二線平行,則其斜率相等,即

$$m_1=m_2 \tag{1}$$

又設 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 爲二平行線的方程式,則得

$$y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1}, \qquad \text{何故?}$$

$$y=-\frac{A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2}. \qquad \text{何故?}$$

因
$$m_1=-\frac{A_1}{B_1},\ m_2=-\frac{A_2}{B_2},$$

$$\therefore\quad -\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2},$$

或
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \tag{2}$$

所以,設二線平行,則 x 和 y 的係數互成比例.

由此可知在二直線方程式內,若 x 和 y 的係數互成

比例,則此二線必平行.

129. 矛盾方程式. 一對平行線的方程式叫做"矛盾方程式".這樣的方程式是沒有共通的解答的.所以在兩個方程式 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 內,如若 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, 即 $m_1=m_2$, 那麼牠們是矛盾的,沒有共通的解答的,而牠們所代表的線是平行的.

【練習】 1. 試證以下兩對直線是平行的:

$$\begin{cases}3x-4y=4,\\3x-4y=9.\end{cases}\qquad\begin{cases}3x+5y=2,\\6x+10y=2.\end{cases}$$

2. 試求一根直線的方程式,牠與 $3x-5y=-6$ 平行又經過 $(-2, 3)$.

130. 垂直線. 設二直線(圖 100)互相垂直,則

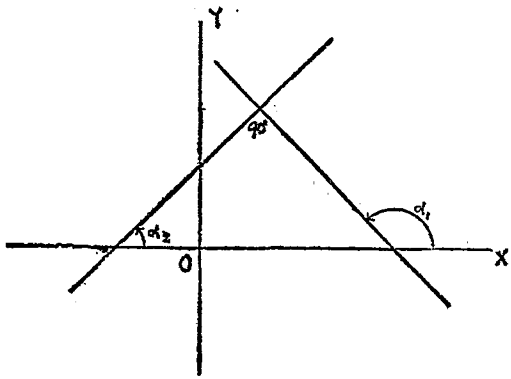

圖 100

$$\alpha_1=\alpha_2+90°.$$

$$\therefore\quad \tan\alpha_1=-\cot\alpha_2=-\frac{1}{\tan\alpha_2},$$

或 $$m_1=-\frac{1}{m_2},$$ §128.

即 $$-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{1}{-\frac{A_2}{B_2}},$$

或 $$A_1A_2=-B_1B_2.$$

這樣看來,如若 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 是二垂直線的方程式,那麼 $m_1=-\frac{1}{m_2}$, 或 $A_1A_2=-B_1B_2$.

我們也可以說:在方程式 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 內,如若 $A_1A_2=-B_1B_2$, 那麼這兩個方程式所代表的直線必互相垂直.

【練習】 1. 求證這二線 $2x-y+3=0$ 和 $x+2y-7=0$ 互相垂直.

2. 寫出一根線的方程式來,牠是垂直於 $2x-y=8$ 的.

3. 寫出這根線的方程式來,牠垂直於 $7x+9y=-1$ 又經過 $(5,3)$.

131. 二線所夾的角.

設 AB 與 CD 兩線(圖 101)相交於 P. 設 β 為自 CD 至 AB 的正角.又設 $\alpha_1>\alpha_2$.

那麼 $$\beta=\alpha_1-\alpha_2,$$ 何故?

$$\therefore\quad \tan\beta=\tan(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}.$$

因爲 $\tan\alpha_1=m_1,\ \tan\alpha_2=m_2,$

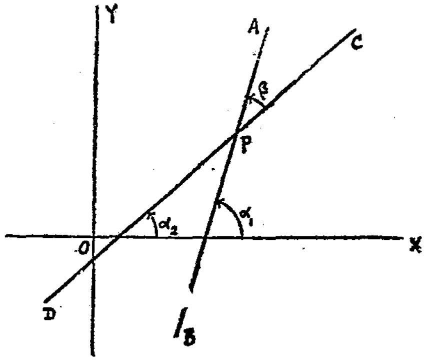

圖 101

故得 $$\tan\beta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

【練習】求夾在$x+2y=3$和$3x-y=-4$兩線中間的角.

聯立直線方程式

132. 相交的二直線. 因爲在一根線上任何一點的坐標必適合於這線的方程式,由是而知相交二線的交點的坐標必適合於各個方程式.所以解兩個聯立方程式可以決定交點的坐標.

133. 用行列式解一組的直線方程式.

有了一組的二元直線方程式,我們可把含未知數的

各項彙集在等號的一邊,而把不含未知數的各項彙集在他邊;等到各同類項集合終了,這組的方程式就如以下的形式:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x+b_1y=c_1. \end{cases}$$

爲要消去 y, 第一個方程式乘以 b_1 而第二個方程式乘以 b. 因此卽得

$$\begin{cases} ab_1x+bb_1y=cb_1, \\ a_1bx+b_1by=c_1b. \end{cases}$$

從第一個方程式減去第二個並以 x 的係數除之,則得

$$x=\frac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b}.$$

同樣,得

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}.$$

試看 cb_1-c_1b, ab_1-a_1b, 和 ac_1-a_1c, 每個式子是兩個乘積的差的形狀.這樣的式子就叫做"行列式".

這個行列式 cb_1-c_1b 可用下面的符號代表:

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

牠的意義就是從乘積 cb_1 減去乘積 bc_1.

同樣, ab_1-a_1b,和 ac_1-a_1c 可以寫做

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, 和 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

所以這一組方程式

$$\begin{cases} a\,x+b\,y=c, \\ a_1x+b_1y=c_1, \end{cases}$$

的答案可取下列的形式:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

注意,這兩個分母是相同的,在第一行裏的兩個數是 x 的係數,而在第二行裏的兩個數是 y 的係數.這樣,這個分母是很容易記住了.第一式的分子可從牠的分母得來,只要把 c 和 c_1 這兩個常數替代在分母的第一行裏的兩個數(x 的係數).第二式的分子也可從牠的分母得來,只要把 c 和 c_1 這兩個常數替代在分母的第二行裏的兩個數(y 的係數).

習題

試解下列各組方程式:

1. $\begin{cases} 4x+6y=9, \\ 2x+9y=7. \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}=\frac{9\cdot 9-7\cdot 6}{4\cdot 9-2\cdot 6}=\frac{81-42}{36-12}=\frac{39}{24}=\frac{13}{8},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 9\\ 2 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 6\\ 2 & 9\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot7-2\cdot9}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$

所以, $(x, y)=\left(\frac{13}{8}, \frac{5}{12}\right).$

2. $\begin{cases}2x+3y=6,\\ 3x-5y=4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}5x+y=9,\\ 3x+y=5.\end{cases}$

4. $\begin{cases}4x+2y=1,\\ 3x-2y=\frac{5}{2}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}2x=53+y,\\ 19x-17y=0.\end{cases}$

6. $\begin{cases}ax-by=c,\\ dx-ey=f.\end{cases}$

7. $\begin{cases}ax-by=0,\\ x-\ y=c.\end{cases}$

8. $\begin{cases}kx+ly+n=0,\\ 3x-4y=4n.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\\ \frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\frac{3x}{4}-\frac{5y}{6}=1,\\ \frac{5x}{6}-\frac{3y}{4}=2.\end{cases}$

11. $\begin{cases}3x+4my=8mn,\\ \frac{x}{7m}-7y+3n=0.\end{cases}$

12. $\begin{cases}ax+\frac{b}{y}=2ab,\\ bx+\frac{a}{y}=a^2+b^2.\end{cases}$

13. $\begin{cases}(a+b)x+(a-b)y=4ab,\\ (a-b)x-(a+b)y=2a^2-2b^2.\end{cases}$

14. $\begin{cases}a(x+y)+b(x-y)=a,\\ (a+b)x-(a-b)y=b.\end{cases}$

15. $\begin{cases}(a+b)x-(a-b)y=2ac,\\(a+c)x-(a-c)y=2ab.\end{cases}$

134. 矛盾方程式和同值方程式.

我們已經知道兩個二元一次方程式是代表兩根直線的,而這兩根直線的交點的坐標就是這一組方程式的解答.但是二線不常相交,牠們可以平行也可以重合.

1. 我們如若畫出這兩根線 $2x+y=5$ 和 $6x+3y=18$,可得二平行線圖(102).在這個情形中,這兩個方程式沒有共通的解答.牠們就叫做"矛盾方程式".

又設使我們用行列式解這組方程式,則得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&1\\18&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\6&3\end{vmatrix}}=\frac{-3}{0},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&5\\6&18\end{vmatrix}}{0}=\frac{6}{0}.$$

因爲以零除 -3 和 6 是不可能的,這也表明這兩個方程式沒有共通的解答

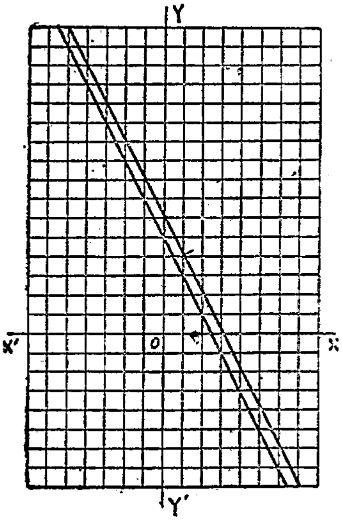

圖 102

2. 我們如若畫出這兩根線 $x-y=2$ 和 $5x-5y=10$,則見牠們是代表同一直線的(圖103).所以一個方程式的任一

個解答必是他方程式的一個解答.這樣的方程式就叫做"同值方程式".

現在發生的困難並不是沒有解答,倒是解答太多了.

若用行列式來解這組方程式,則得

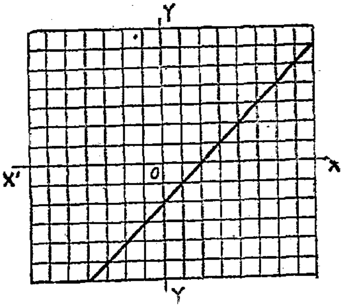

圖 103

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & -5\end{vmatrix}}=\frac{-10+10}{-5+5}=\frac{0}{0},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 10\end{vmatrix}}{0}=\frac{0}{0}.$$

因爲一個數乘以零常等於零,$\frac{0}{0}$這個式子可以代表任何數.所以這裏的解答是不定的.這是顯而易見的,一個方程式可從別一個裏引導出來,只要用一個常數把別個方程式的兩邊乘一乘.

以上的兩個例題即可表明下列的幾種道理:

1. 這兩個直線方程式

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0,\end{cases}$$

是聯立的,只有一個解答,又是代表兩根相交的線,設使這個行列式

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

所以這件事實可以用來決定一組方程式是否只有一個解答,又二線是否相交.

2. 這兩個方程式沒有共通的解答,是矛盾的,是代表兩根平行的線,設使

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,$$

或設使
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=k.$$

3. 這兩個方程式是同值的,是代表同一直線的,設使

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0,$$

或設使
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=k.$$

習　題

試證下列各組方程式爲同值抑爲矛盾:

1. $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{4}=6, \\ 4x+\dfrac{y}{3}=8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-2y=14, \\ 9x-6y=36. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+\dfrac{2}{7}y=2, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{7}y=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+5y-19=0, \\ 2x=20-5y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x-8=4y-2x, \\ 18x-8y=16. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 3x+4y=12, \\ 6x+8y=14. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 4x+y=16. \end{cases}$

135. 線系. 經過一點可畫無數的線,成爲一個"線系",如圖104.

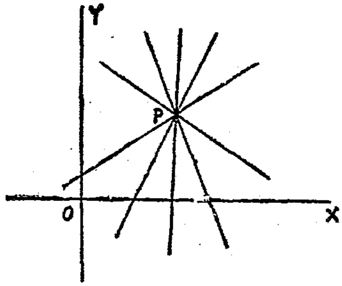

圖 104

設
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{cases} \quad (1)$$
是一個線系中的兩根線.

又設 k 是一個任意常數.

試證這方程式

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

總是代表一根直線的, k 的值儘可任意指定.

又這方程式能被 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 二線的交點的坐標適合.何故?

所以這方程式

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (2)$$

是代表一根直線,經過 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 二線的交點的.

【練習】 應用方程式(2),解以下的問題:

1. 試求這根線,牠是經過原點和 $4x-3y+3=0$ 和 $3x+$

$5y-34=0$ 二線的交點的.

2. 一根線經過 $3x-2y-1=0$ 和 $2x+3y-15=0$ 的交點和 $(-1, 4)$, 試求其方程式.

3. 今有二線 $2x+y-13=0$ 和 $5x-2y+11=0$, 在這個線系中有一根線,牠的傾角是60°,牠的方程式怎樣?

136. 平行線系.

在這方程式

$$Ax+By+k=0$$

內,A 和 B 的值是固定的,k 是一個任意常數,對於 k 每指定一個值就可決定一根直線.因爲一切這樣的直線都是平行的,就說牠們成爲一個"平行線系",如圖 105.

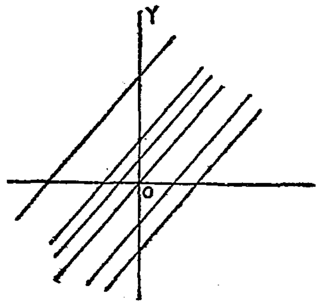

圖 105

137. 雙線方程式.

設

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{cases} \qquad (1)$$

爲已知二直線的方程式.試證這方程式

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (2)$$

能被這二已知線上所有一切點的坐標適合.又此外絕無一點可以適合這方程式.所以方程式(2)可以說是代表方程式(1),就是代表雙線.

【練習】 作圖代表下列方程式:

1. $x^2+6xy+9y^2+5x+15y+6=0.$

2. $x^2+y=x+y^2.$

3. $x^2+3xy+2y^2=0.$

聯立三元一次方程式

138. 消去法. 解三元或多於三元的方程式可用解二元方程式的方法.通常是先消去其中一元而獲得其餘二元的方程式兩個,然後解這兩個方程式.

習　題

試解下列各組方程式:

1. $\begin{cases}4x-y+z=1,\\ x+2y+7z=7,\\ 3x-y-5z=5.\end{cases}$

從第一式減第三式, $x+6z=-4.$

以2乘第三式而加於第二式, $7x-3z=17.$

試解
$$\begin{cases} x+6z=-4, \\ 7x-3z=17, \end{cases}$$

則得
$$(x, z)=(2, -1).$$

再將這兩個值代入第一式,則得

$$y=6.$$

$$\therefore \quad (x, y, z)=(2, 6, -1).$$

2. $\begin{cases} 2a-b+c=1, \\ a-7b-8c=1, \\ 7a+14b+2c=7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x=3y, \\ y-4z=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 3x-2y+2z=0, \\ 5x-4y+3z=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-7y-z=16, \\ 3x-2y+2z=10, \\ 2x+y+3z=6. \end{cases}$

139. 三次行列式. 這個符號

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

叫做"三次行列式".牠是代表下式的:

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3,$$

這就是三次行列式的展開式.這九個數 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 叫做"元素".在行列式中,橫的線叫做'列',縱的線叫做"行".在展開式裏的每項是三個元素的乘積,這三個元素

沒有兩個是在同一列的,或是在同一行的.

三次行列式可用下法展開:

畫一根對角線經過第一元素 a_1 (圖 106),又畫兩根線經過 a_2 和 a_3 各與這根對角線平行.從此得了三項 $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$ 和 $a_3c_2b_1$.

畫一根對角線經過 c_1,和兩根平行線經過 c_2 和 c_3.這樣得來的三項須變號子,就是 $-c_1b_2a_3$, $-c_2b_3a_1$ 和 $-c_3a_2b_1$.

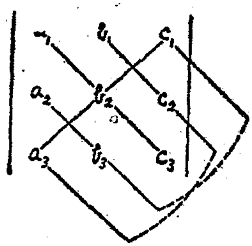

圖 106

【練習】 定以下各行列式的值:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot4\cdot1+1\cdot3\cdot(-6)+2\cdot7\cdot2 - (-6)\cdot4\cdot2-7\cdot3\cdot5-1\cdot1\cdot2 = 20-18+28+48-105-2=-29.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

140. 以行列式解方程式.

我們解下面這組方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

可得一個公式,這個公式可用以解任意的三個三元一次方程式.

從第一第二兩式消去 y, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)z=d_1b_2-d_2b_1. \tag{1}$$

再從第一第三兩式消去 y, 得

$$(a_3b_1-a_1b_3)x+(c_3b_1-c_1b_3)z=d_3b_1-d_1b_3. \tag{2}$$

解 (1) 與 (2),得

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3c_2b_1-c_1b_2d_3-c_2b_3d_1-c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3c_2b_1-c_1b_2a_3-c_2b_3a_1-c_3a_2b_1}.$$

從 §139 看來,這個式子可以寫做

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

試看這個分母是一個行列式,牠的元素是 x, y, z 的係數,而這個分子是從分母裏引導出來的,只要把各個常數去替代 x 的各個係數.

同樣,

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

習　題

用行列式解下面各組方程式:

1. $\begin{cases} 2x+3y+4z=16, \\ 5x-8y+2z=1, \\ 3x-\ y-2z=5. \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 16 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 5 & -8 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}.$$

$$\therefore\quad (x, y, z)=(3, 2, 1).$$

2. $\begin{cases} 5x+2y-4z=-3, \\ 4x+5y+2z=20, \\ 3x-3y+5z=12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-y+2z=9, \\ x-2y+3z=2, \\ 2x-3y+z=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} a+3b+9c=23, \\ a+2b+4c=15, \\ a+\ b+\ c=9. \end{cases}$　　5. $\begin{cases} a+b+c=2, \\ a+3b=4, \\ b-2c=6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=12, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=14. \end{cases}$　　7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=15, \\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{5}{x+y}=17. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+3y+5=0, \\ 6y+5z=7, \\ 3x+10z=1. \end{cases}$　　9. $\begin{cases} \dfrac{3}{4x-y}-\dfrac{5}{2x-y}=2, \\ \dfrac{3}{y-2x}+\dfrac{4}{y-4x}=\dfrac{23}{5}. \end{cases}$

10. 有一事，A, B 二人合做，12日可成．A 獨做 5 日後，B 接着去做，再過 26 日完畢．問二人獨做各需幾日？

11. 一個人有兩個兒子，大兒子比小兒子大 6 歲．二年以後父親的年齡是二子年齡的和的二倍，六年以前，父親的年齡是二子年齡的和的四倍．求各人的現年．

12. 兩個火車頭 A 和 B，同時在兩條互相垂直的軌道上行走．當 B 在交點時，A 離交點尚有675尺遠．5 秒後，兩火車頭離交點等遠，再過 40 秒，牠們又離交點等遠．問每秒各行幾尺？

13. 有一個三位數，牠的數字相加等於16．又第一第三兩數字相加等於第二數字．若把個位數字和十位數字對調，則比原數少27．求原數．

面　　積

141. 有一個頂點在原點上的一個三角形的面積 在圖107內,

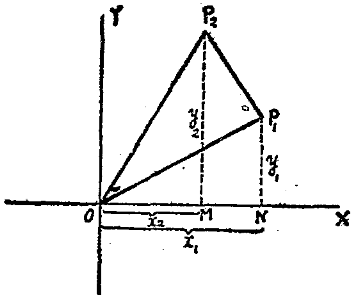

圖 107

$\triangle OP_1P_2=\triangle OMP_2+$ 梯形 $MNP_1P_2-\triangle ONP_1$.

所以 $\triangle OP_1P_2=\frac{x_2y_2}{2}+\frac{(x_1-x_2)(y_1+y_2)}{2}-\frac{x_1y_1}{2}$

$$=\tfrac{1}{2}(x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2-x_1y_1)$$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1).$$

$$\therefore\quad \triangle OP_1P_2=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

這個行列式的號子是+或−,要看原點是在 P_1P_2 的左邊或右邊.

【練習】 求下面兩三角形的面積:

1. (0, 0), (−1, −3), (5, 3).

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=\frac{-3+15}{2}=6.$$

2. (0, 0), (2, 5), (4, 3).

142. 任何三角形的面積.

設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 和 $P_3(x_3, y_3)$, (圖 108), 是一個三角形的頂點.

畫 OP_1, OP_2 和 OP_3,

那麼
$$\triangle OP_1P_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},$$

$$\triangle OP_1P_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix},$$

$$\triangle OP_3P_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

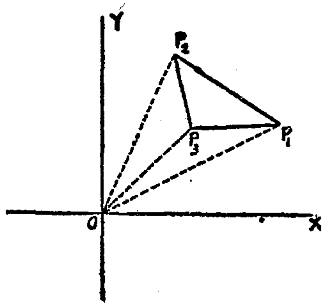

圖 108

$$\therefore\ \triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

$$\therefore\ \triangle P_1P_2P_3=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

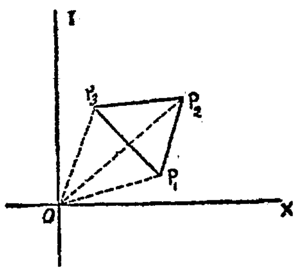

圖 109

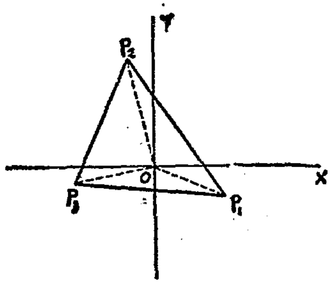

圖 110

【練習】 試證 §142 的公式適用於圖 109 和 110 的兩三角形.

雜 題

1. 一根線經過 $(-3, 4)$ 又平行於 $5x+4y=6$. 試求其方程式.

2. 一根線經過 $(-3, 4)$ 又與聯結 $(4, 1)$ 和 $(7, 3)$ 的線垂直.試求其方程式.

3. 一根線經過 $(-3, 4)$ 而其二截段之和為 12.試求其方程式.

4. 一根線與二坐標軸圍成一個面積 6) 的等腰三角形.試求這根線的方程式.

5. 一根線通過 $(0,0)$ 又與 $4x-y=7$ 和 $x+2y=8$ 圍成一個等腰三角形.牠的方程式怎樣?

6. 有三點 $A(2,4)$, $B(8,8)$, $C(11,3)$, 把牠們聯成一個三角形,試求三中線的交點 M, 外接圓的中心 L, 和三高的交點 N.

7. 試證上題的三點 L, M, N 在一直線上, 又 $NM:ML=2:1$.

8. 有三點 $A(0,1)$, $B(0,9)$, $C(3,5)$; 另有一點 P, $\triangle BAP$, $\triangle ACP$ 和 $\triangle CBP$ 的面積相等.試求 P 點.

9. 對於任何直線,試證

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{p^2}.$$

這里的 a, b 代表二截段, p 代表法線.

10. 對於任何直線,試證:

$$(a)\quad b=-ma.$$

$$(b)\quad a^2m^2=p^2(1+m^2).$$

這里的 a, b, p, 其意義與上題相同, m 代表斜率.

11. 一根線通過 $4x+y-11=0$ 和 $3x-y=3$ 的交點, 又與 $x+10y=7$ 垂直.這線的方程式怎樣?

12. 設使 $y=mx+b$ 和 $(4,1)$ 的距離爲 6, 又牠和原點的距離爲 2. 試求 m 和 b 的值.

13. $Ax+By+10=0$ 平行於 $3x+y=7$, 又在 x 軸上與 $x+y=7$ 相交.試求 A, B 的值.

14. $\angle APB=45°$, A 為 $(4,-1)$ 而 B 為 $(-2,3)$. 試求 P 點的軌跡的方程式.

15. 設 $\triangle PAB=\triangle PQR$, A 為 $(2,5)$, B 為 $(2,1)$, Q 為 $(3,0)$, R 為 $(5,3)$, 則 P 點的軌跡的方程式如何?

第 九 章

行 列 式

行列式的意義

143. 行列式. 這個符號

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

是表示行列式 $a_1b_2-b_1a_2$ 的,叫做"二次行列式".

這個符號
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

是表示一個"三次行列式".至於'四次行列式",“五次行列式”,…可依此類推.現在只把三次行列式的意義表明如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$

$$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3-c_1b_2a_3.$$

144. 元素,列,行,對角線. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3,\ldots\ldots$

這許多數叫做行列式的"元素".所有橫線叫做"列",所有縱線叫做"行".$a_1b_2c_3$這根對角線叫做"主對角線".

145. 子式. 在一個行列式內,把任意指定的一個元素a_k所在的一列和一行同時勾消,剩餘各元素所排成的這個小行列式叫做a_k的"子式"

例如在行列式
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
內,a_2的子式是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\text{就是}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

試寫出b_2. c_1, a_3, c_3的子式來.

為求簡便起見,一個元素的子式常用下法表出:a_1的子式可寫作A_1,b_2的子式可寫作B_2,c_3的子式可寫作C_3,……,就是所用的字母和附屬數字(如 1, 2, 3,……)都與元素相同,但字母須是大體.

因此,這個行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1.$$

在這展開式內,放在各項前面的號子是+和−輪流的,就是一列或一行當中,各元素的子式的號子是正負交替的.例如 a_1, a_2, a_3 的子式的號子是+,−,+.

總而言之,一個元素的子式的號子是+或是−,要把牠所在的列數和行數相加,看是一個偶數還是一個奇數才能決定.

146. 用子式展開行列式. 試看上節,這個行列式是用第一列各元素的子式展開的.其實這個行列式的值是不會變的,任用何列何行各元素的子式來展開.

因為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2A_2+b_2B_2-c_2C_2$$

$$= -a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_2b_1c_3+a_2c_1b_3+b_2a_1c_3-b_2c_1a_3-c_2a_1b_3+c_2b_1a_3.$$

這和上節的展開式完全一樣.

用子式展開下面的行列式並證其值為零:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

於此可知一個行列式的值必爲零,設使其中有一列或一行的元素都等於零.

【練習】照以下所說的展開這個行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

並各求其值:

1. 用第一列的子式.
2. 用第三行的子式.
3. 用第三列的子式.

147. 三次以上的行列式. 把三次行列式的展開式一加考察,便可知道這是一個每三個元素相乘的積的總和(代數和),而每三個元素當中沒有兩個是同列或同行的,就是在每列和每行中只取出一個元素來做因數.在這個展開式裏的項數等於6,就是 $3\cdot2\cdot1=3!$ (讀作"階乘" 3).

同樣,我們可以展開一個四次行列式如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 - d_1 D_1 =$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},$$

在這四項中,每項展開後有$3!$項,所以當這個四次行列式展開後共有$4\cdot 3!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$項.試看每項是四個元素相乘的積,而這四個元素是從每列每行裏只取出一個來的.

於此可見四次行列式可用三次行列式表明出來,而三次行列式又可用二次行列式表明出來.同樣可以展開五次,六次,……,任何次的行列式.

用子式陸續展開一個行列式,牠的值便可求得,但是對於高次的行列式這種手續很覺麻煩,以後應用幾個定理可使手續簡捷.

行列式的特性

148. 以下所說的幾個定理雖只關於二次和三次行列式,其實對於三次以上的行列式亦可通用.

149. 行列交換. 設以主對角線$a_1b_2c_3$為軸,將這個行列式
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

轉過 180°,則得另一行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

試看這個行列式的第一列,第二列和第三列恰是原行列式的第一行,第二行和第三行.

把兩個行列式展開,看牠們的結果是否相等?

於此可知一個行列式的值是不變的,當牠所有的列和行保持原有的次序而互相調換.

150. 二列或二行對調. 這個行列式

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

是把下面那個行列式的第一列和第二列對調得來的:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

把兩個行列式展開後比較一下,就可見得牠們的數值相等而號子相反. 這便證明在一個行列式裏,若把相鄰的(不相鄰的亦可)二列或二行

對調,則此行列式的絕對值不變,而號子變了.

設有一個行列式,牠有二列或二行完全相同,如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

並令其值爲 D. 因爲把那相同的二列對調,牠的值就變爲 $-D$, 但是前後兩式完全一樣,所以

$$D=-D,$$

或 $2D=0.$

$$\therefore \quad D=0.$$

於是可知一個行列式的值等於零,設使牠有二列或二行相同.

151. 以一數乘一行列式. 在一個行列式內,把一個數 m 去乘一列或一行中的各元素,如

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

用子式展開這個行列式,則得

$$ma_1A_1-mb_1B_1+mc_1C_1=m(a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1),$$

這和原行列式乘以 m 是一樣的.

所以,設使一個行列式的一列或一行中

各元素都乘以一個數,就等於把這數乘這行列式.

根據這個道理,我們可以證明一個行列式的值是零,倘若牠有一列或一行的各元素是另一列或另一行的各相當元素的同倍數(整數或分數).

152. 行列式的分化. 一個行列式可以分為兩個行列式相加的形式,只要牠有一列或一行中的各元素都分作二項,即如

$$\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因為

$$\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_2+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+k_1)A_1-(a_2+k_2)A_2+(a_3+k_3)A_3$$

$$=(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3)+(k_1A_1-k_2A_2+k_3A_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

同樣可以證明

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由是得一定理如下:

一個行列式的值是不會變的,設使先把一列或一行中的每個元素乘一個數,而後把各乘積加到另一列或另一行的各相當元素上去.

153. 行列式的求值法. 求一個行列式的值,儻能利用149節至152節所說的定理,手續有時可以弄得非常簡便.

這個行列式 $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{vmatrix}$

的值可用下法求得:

從第四行減去第一行,

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 7 & -3 \\ 8 & 10 & 11 & -3 \\ 1 & 15 & 14 & 3 \end{vmatrix}.$$

把第四行裏的因數3提出,

$$3\begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 6 & 7 & -1 \\ 8 & 10 & 11 & -1 \\ 1 & 15 & 14 & 1 \end{vmatrix}.$$

從第二行減去第三行,

$$3\begin{vmatrix} 13 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 7 & -1 \\ 8 & -1 & 11 & -1 \\ 1 & 1 & 14 & 1 \end{vmatrix}.$$

因為第二行和第四行相同,所以這個行列式消滅,就是原行列式的值等於零.

合寫如下:

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 7 & -3 \\ 8 & 10 & 11 & -3 \\ 1 & 15 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 6 & 7 & -1 \\ 8 & 10 & 11 & -1 \\ 1 & 15 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 13 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 7 & -1 \\ 8 & -1 & 11 & -1 \\ 1 & 1 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

習題

求以下各行列式的值:

1. $\begin{vmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 16 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

從第一行裏提出因數 4,

$$4\begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

把第三行加到第二行上去,

$$4\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

把第二行裏的因數 2 提出,

$$4\times2\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ -3 & -7 & -11 & -9 \\ 0 & 6 & 9 & 9 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 11 & 11 \\ 6 & 4 & 10 & 2 \\ 8 & -4 & 13 & 10 \end{vmatrix}$.　　5. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.　　7. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 14 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 14 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.　　9. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.　　11. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

154. 用行列式解方程式. 三元或三元以上的一次方程式可用行列式解答,如下面第一題的算法便是

習　題

解答以下各組方程式:

1. $\begin{cases} 3a+b+d=20, \\ 2c+6a+d=40, \\ 2c+a+4b=30, \\ 5c+8b+3d=50. \end{cases}$

先將這組方程式改換形式如下:

$$\begin{cases}3a+\ b+0c+\ d=20,\\6a+0b+3c+\ d=40,\\ \ a+4b+3c+0d=30,\\0a+8b+5c+3d=50.\end{cases}$$

$$a=\frac{\begin{vmatrix}20&1&0&1\\40&0&3&1\\30&4&3&0\\50&8&5&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&1&0&1\\6&0&3&1\\1&4&3&0\\0&8&5&3\end{vmatrix}}=5.$$

同樣可求得 b, c, 和 d.

2. $\begin{cases}3a+2c-b+2=0,\\2a+\ b-c+1=0,\\a+2b+c+17=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+y+z-14=0,\\6x-3y-7z=0,\\4x-9y+7z=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x+3y-4z=1,\\3x+4z-5y=2,\\4y+5z-6x=3.\end{cases}$

5. $\begin{cases}8x-3y-7z=85,\\x+6y-4z=12,\\2x-5y+\ z=33.\end{cases}$

6 $\begin{cases}7a+14b+2c=7,\\2a-\ b+\ c=1,\\a-\ 7b-8c=1.\end{cases}$

7. $\begin{cases}a+2b-4c-11=0,\\2a-3b=0,\\b-4c=0.\end{cases}$

8. $\begin{cases}2a-c-3=0,\\b+4c-2=0,\\a-3b-1=0.\end{cases}$

9. $\begin{cases}3x+2y-z+u=2,\\x+3y+z-u=5,\\x+y=4,\\z+u=6.\end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+4y-10=0, \\ 2y+3z-13=0, \\ z+4u-25=0, \\ 4u+5x-21=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2p-4q+3r+4s=-3, \\ 3p-2q+6r+5s=-1, \\ 5p+8q+9r+3s=9, \\ p-10q-3r-7s=2. \end{cases}$

12. 求 c 的值: $\begin{vmatrix} 1-c & 1 & 1 \\ 2 & -\left(1+\frac{c}{2}\right) & 2 \\ 2 & 5 & 2-c \end{vmatrix}=0.$

13. 求 x 的值: $\begin{vmatrix} a & a & x \\ b & x & b \\ c & c & c \end{vmatrix}=0.$

14. 求 x 的值: $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 5 \\ 3 & 5 & 8-x \end{vmatrix}=0.$

第十章

二次函數 拋物線

155. 二次函數. $y=mx+b$ (§108), 這個函數叫做 x 的一次函數,因爲 x 只有一次;又叫做 x 的直線函數,因爲牠的圖形是一根直線 (§115).

$y=ax^2+bx+c$, 在這個函數中, x 的最高指數是二,所以牠叫做 x 的二次函數.係數 a, b, c 可以是任何實值,但 $a=0$ 是不可以的,因爲 $a=0$, x^2 就消滅,而這個函數變爲一次了.

一次函數 $y=mx+b$, 我們已經曉得牠的圖形是一根直線了,那麼二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形是什麼呢?這便是我們往後要研究的.

156. 二次函數 $y=ax^2$ 的圖形. 這個函數是從 ax^2+bx+c 得來的,只要令 $b=c=0$.

儻若我們命 $a=1$, 並指定 x 種種數值,就可以求得 y 種種相當的數值,列成一表,如圖 111.

x	y
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
+1	1
+2	4
+3	9
+4	16
+5	25

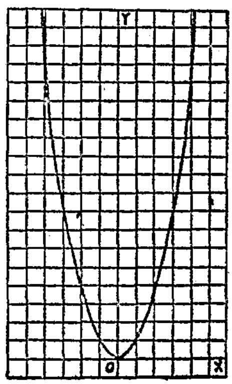

圖 111

照表把各點一一描出,然後畫一根曲線聯結各點,這便是函數$y=x^2$的圖形(圖111),這根曲線叫做"拋物線"。

【練習】畫出以下各拋物線來:

$y=2x^2$; $y=-2x^2$; $x=2y^2$; $x=-3y^2$; $y^2=-2x$; $y^2=3x$.

157. 討論 $y=ax^2$. 命$a=3$和-2,則得兩個方程式$y=3x^2$和$y=-2x^2$.(參看上面的【練習】).

從這兩個方程式的圖形上看來,可知當$a>0$,這根拋物線從原點向上伸張;當$a<0$,這根拋物線從原點向下伸張.但是當$a=0$, $y=ax^2$變爲$y=0$,這是x軸的方程式.

158. 拋物線 $y=ax^2$ 的對稱軸. 一根直線說是一根曲線的"對稱軸",設使牠平分一切垂直於牠的弦.

看了圖112,試證x的值有兩個,數同而號異,相當於這兩個值的y可從方程式$y=ax^2$中計算出來,但是完全一樣的.

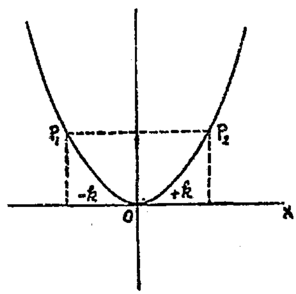

圖　112

所以,設使在這根曲線的一根弦上有二端點P_1和P_2,牠們各自的縱距相等,那麼牠們的橫距必是同數而異號.

所以y軸就是這拋物線$y=ax^2$的一根對稱軸.

O這個點是軸OY和拋物線的交點,叫做"頂點".

在$y=ax^2$這個方程式內,當x的數值增大,y的數值

跟着增大;所以這根曲線是不能閉合的.

159. 拋物線的畫法. 有一個動點,從一個定點和一根定線的距離若是常等,那麼牠的軌跡就是一根拋物線.所以拋物線可依下法畫出:

命 F (圖 113) 爲一定點,AB 爲一定線.

經過 F 畫一根線 AF 垂直於 AB.

在 AF 上取一點 O, 令 $AO=OF$; 又在 O 的右邊取 $C, D, E, K, L, M, N,$ 等點,並經過這各點畫垂線.

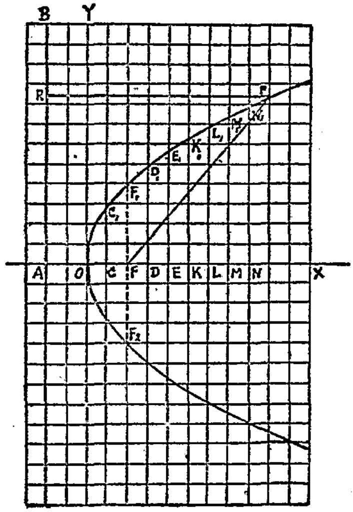

圖 113

以 F 爲圓心, CA 爲半徑,畫一弧割 CC_1 於 C_1, 則 $FC_1=AC$. 再以 F 爲圓心, FA 爲半徑,畫一弧割 FF_1 於 F_1, 則 $FF_1=AF$. 仍以 F 爲圓心, DA 爲半徑,畫一弧割 DD_1 於 D_1, 則 $FD_1,=AD$. 同樣畫出 $E_1, K_1, L_1,\cdots\cdots$.

畫一根曲線經過 $O, C_1, F_1, D_1, E_1,\cdots\cdots$. 這就是一根拋物線.

這個定點 F 叫做"焦點",這根定線 AB 叫做"準線",這個點 O 叫做"頂點".

160. 拋物線的標準方程式. 在圖 113 內,命 AF 爲 x 軸, OY (與 AF 垂直) 爲 y 軸.

命 $P(x,y)$ 爲這曲線上任意一點,並以 p 表明 OF 與 OA 畫 FP, 又畫 $PR\perp OY$.

因爲 $FP=RP$, 又因爲 F 的坐標是 $(p,0)$, 所以

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x+p)^2},$$

$$\therefore\quad x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2,$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y^2=4px.}$$

這是拋物線的標準方程式.

這根曲線的位置依 p 的值而定.若 p 是正數牠從頂點 0 向右伸張;若 p 是負數,牠從頂點 0 向左伸張.

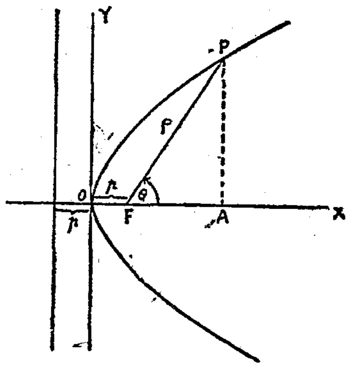

圖 114

161. 拋物線的極方程式. 取焦點 F 當作極,取 x 軸當作始線 (圖 114).

命 ρ 和 θ 爲這曲線上任意一點 P 的極坐標.

$\rho=FP=OA+p=x+p.$

因爲　　$x=OA=FA+p=\rho\cos\theta+p,$

所以　　$\rho=\rho\cos\theta+2p.$

$$\therefore\quad \rho=\frac{2p}{1-\cos\theta}.$$

【練習】 1. 已知 $p=3$，用極方程式畫出這根拋物線來.

2. θ 從 0 變到 2π，ρ 的變化怎樣?

3. $y^2=4px$ 經過 $(3, 5)$，求 p 的值.

162. $y=ax^2+bx+c$ 的圖形.

這個方程式 $y=ax^2+bx+c$ 可以改寫如下:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a},$$

或
$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

以 k 代表 $c-\frac{b^2}{4a}$，h 代表 $-\frac{b}{2a}$，則得　$y-k=a(x-h)^2$.

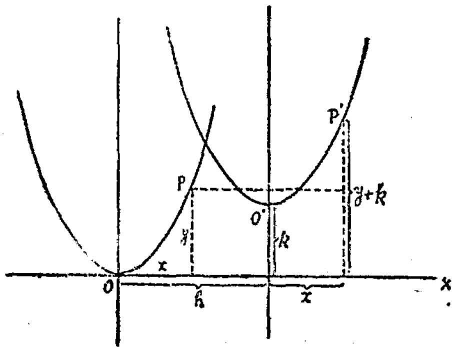

圖　115

$y=ax^2+bx+c$ 的圖形和 $y=ax^2$ 的圖形所不同的只在各自的位置.因爲,設使我們令 $x=x'-h$, $y=y'-k$, (圖 115),那麼 $y=ax^2$ 這個方程式就變爲 $y'-k=a(x'-h)^2$. 這是一根拋物線的方程式,這根拋物線的形狀和 $y=ax^2$ 完全一樣,但是牠的頂點在 $O'(h, k)$.

在這個方程式

$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

內,命 $x=-\frac{b}{2a}+m$, 或命 $x=-\frac{b}{2a}-m$, 那麼所得 y 的對應值是一樣的.於是可知這根直線 $x=-\frac{b}{2a}$ 是這根拋物線的軸.

163. 結論. 以下的結論對於畫曲線 $y=ax^2+bx+c$ 是很有幫助的:

(1) 這曲線的頂點的坐標是 $\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

(2) 這曲線的軸是直線 $x=-\frac{b}{2a}$.

(3) 這曲線向上伸張或向下伸張須看 $a>0$ 或 $a<0$.

這曲線的一個略圖就可畫出,只要先依照上述的第一步定出頂點,再定出這曲線上的另一點(最好莫如牠與 y 軸的交點).

【練習】決定以下各拋物線的頂點和軸,並各畫一個略圖:

1. $y=\frac{1}{3}x^2-2x+1$.
2. $y=3-x-2x^2$.
3. $y=x^2-4$.
4. $y=-2-3x^2$.

164. 曲線的斜率. 一根直線的斜率(§ 105)可以求得,只要用這個方程式

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

這 m 的值在直線上無論何點是一定不變的.所謂曲線的斜率是這曲線上任一點的切線的斜率.這是顯而易見的,曲線的斜率不能如直線的斜率有固定性了.

165. 割線的斜率. 設 P 和 P_1 (圖 116) 為同一曲線上的二點.直線 PP_1 是這曲線的一根割線.試證這割線 PP_1 的斜率是

$$m=\frac{y_1-y}{x_1-x}.$$

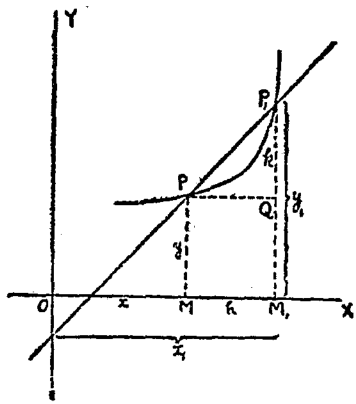

圖 116

假如 $y=ax^2$ 是這曲線的方程式,那麼,把 ax^2 和 ax_1^2 代替 y 和 y_1,便得割線 PP_1 的斜率等於

$$m=\frac{ax_1^2-ax^2}{x_1-x}=\frac{a(x_1^2-x^2)}{x_1-x}=a(x_1+x).$$

這個結果就可表明這割線的斜率是 x 的函數,所以不是一個常數.

普泛說來,設 $y=f(x)$ 表示圖 116 這根曲線的方程式.

以 $h=MM_1$,則 $OM_1=x_1=x+h$, $M_1P_1=y_1=f(x_1)=f(x+h)$.

這根割線 PP_1 的斜率是

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x},$$

或
$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

把這個式子當作一個公式,那麼對於 $f(x)=ax^2$ 這根曲線就有割線的斜率

$$m=\frac{a(x+h)^2-ax^2}{h}=\frac{a[(x+h)^2-x^2]}{h}=a(2x+h).$$

看了圖,試證這里所得結果和上面所得結果是一樣的,就是試證 $a(x_1+x)=a(2x+h)$.

166. 曲線的切線. 設 P_1 (圖 117) 在曲線上逐漸向 P 移近,則割線 PP_1 逐漸與 PT 合併. PT 就說是在這曲

線上 P 點的切線.

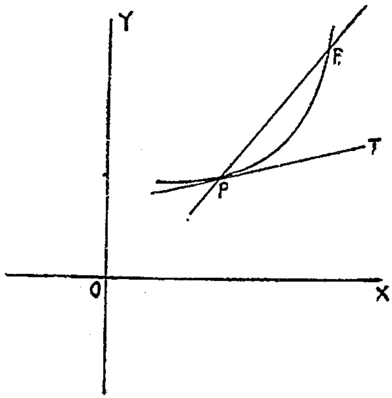

圖 117

把這里對於切線所下的定義和通常平面幾何學上關於切線的定義,試比較一下看.

167. 切線的斜率. 在 $P(x,y)$ 點的切線的斜率可以看做割線的斜率 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的極限值,當 h 漸近於零.

假如這根曲線是一根拋物線 $f(x)=ax^2$, 那麼在 P 點的切線的斜率是 $\frac{a(x+h)^2-ax^2}{h}$ 的極限值,當 h 漸近於零.

因爲

$$\frac{a(x+h)^2-ax^2}{h}=\frac{a(x^2+2hx+h^2-x^2)}{h}=a(2x+h),$$

所以在 $P(x,y)$ 點拋物線的斜率等於 $2ax$.

168. 有理整函數. 這些函數 ax^2, ax^2+bx+c, ax^3+bx^2+cx+d 都是 x 的"有理整函數".同樣,一個函數如 $f(x)=$

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 叫做 x 的 n 次的有理整函數.這里 $a_0, a_1, a_2,\cdots\cdots, a_n$ 都是常數,而 x 所有的指數都是正整數.

【練習】 下面的函數哪幾個是 x 的有理整函數?並須說出理由來:

1. x^2.
2. $3x^2+4x$.
3. $5x^{-2}+2x^{-1}+7-x$.
4. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+6$.
5. x^4+5x^2+4.
6. $x^3+2x^2-\frac{1}{x}+3$.
7. $x+x^{\frac{1}{2}}-5$.

169. 引申函數. 設 $f(x)$ 是 x 的一個有理整函數,那麼當 h 漸近於零,這個極限值

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

叫做 $f(x)$ 的"引申函數".

以 $f'(x)$ 表明 $f(x)$ 的引申函數,則得

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

習 題

1. 試證 ax^2 的引申函數是 $2ax$.
2. 試求 ax^2+bx+c 的引申函數.

$$f(x+h)=a(x+h)^2+b(x+h)+c$$

$$=ax^2+2ahx+ah^2+bx+bh+c$$

$$=ax^2+(2ah+b)x+ah^2+bh+c.$$

$$\therefore\quad f(x+h)-f(x)=2ahx+ah^2+bh.$$

兩邊除以 h, $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2ax+ah+b.$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=2ax+b.$$

試求以下各函數的引申函數:

3. x^2. **4.** x^2-4x+1.

5. x^3-20x^2+2. **6.** x^3-2x^2+3x-7.

170. 切線的方程式. 設 P (x_1, y_1) 爲在曲線 $y=f(x)$ 上的任一點,又設經過 (x_1, y_1) 的直線的方程式(§ 107)爲

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

因爲$f'(x_1)$是在這曲線 $y=f(x)$ 上 (x_1, y_1) 點的切線的斜率,所以 $m=f'(x_1)$.所以在這曲線 $y=f(x)$ 上 (x_1, y_1)點的切線的方程式是

$$\boldsymbol{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}.$$

習題

求以下各曲線的切線的方程式,並畫出圖來:

1. $y=x^2$, 切點爲 $(-2, 4)$.

2. $y=x^3$, 切點的橫距爲 2.

3. $y=x^2+4x$, 切點的橫距爲 3.

171. 拋物線和彈丸的歷程. 設有一個彈丸從槍口 O (圖 118) 放射出去,速率爲 v, 方向爲 OQ, OQ 傾斜於 x 軸成 α 角.

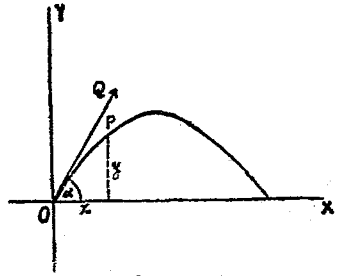

圖 118

設 $P(x, y)$ 爲彈丸經過 t 時間所達到的位置.

根據力學的原理,略去空氣的阻力,那麼這個彈丸在 t 秒內對於水平方向進行了 $v(\cos\alpha)\,t$ 尺,同時對於垂直方向進行了 $[v(\sin\alpha)\,t-\frac{1}{2}gt^2]$ 尺

所以 $$x=v(\cos\alpha)\,t,$$

而 $$y=v(\sin\alpha)\,t-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

g 是一個常數大約等於 32.2.

消去 t, 卽得 $$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

這就是彈丸的歷程的方程式,也就是拋物線的方程式(因爲牠是一個 x 的二次函數),所以彈丸的歷程是一根拋物線.

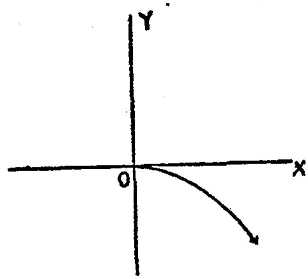

圖 119

假如這個彈丸在水平方向放射出去 (圖 119), 那麼 α 角等於零. 所以 $\tan\alpha=0$, $\cos^2\alpha=1$, 而這個方程式就變爲

$$y=-\frac{gx^2}{2v^2},$$

或
$$x^2=-\frac{2v^2}{g}y.$$

注意,這仍是拋物線的方程式,牠的軸是 y 軸.

【練習】 有一飛艇在離地5280英尺高處向南飛行,每小時行 5英里在飛艇上擲下炸彈一枚.試以出發點爲原點,求這炸彈經路的方程式.又問這炸彈在出發點之南何處落地?

第 十 一 章

二次以上的有理整函數

有 理 整 函 數

172. 有理整函數. 已經學過的一次和二次函數都是"有理整函數".總而言之,如下形式的函數

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

是一個"n次的有理整函數",只要n是一個正整數,而a_0, a_1, a_2,……, a_{n-1}, a_n都是常數.

例如$(x+h)^n$的展開式,只要指數n是一個正整數,牠便是一個有理整函數. $(x+h)^n$的展開式可用二項式定理得來,而二項式定理在下節內證明.

173. 二項式定理. 這個公式

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+h^n$$

可以證明如下:

我們先假定當$n=k$時,這個公式是眞的,就是先假定

$$(x+h)^k=x^k+kx^{k-1}h+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^{k-2}h^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot 2\cdots\cdots\cdots\cdots(r-1)}x^{k-r+1}h^{r-1}+\cdots\cdots+h^k$$

這方程式的兩邊同乘以$(x+h)$，則得

$$(x+h)^{k+1}=x^{k+1}+kx^kh+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}x^{k-1}h^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdots\cdots\cdots(r-1)}x^{k-r+2}h^{r-1}+\cdots\cdots$$

$$+x^kh+\qquad kx^{k-1}h^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+3)}{1\cdot2\cdots\cdots\cdots(r-2)}x^{k-r+2}h^{r-1}+\cdots\cdots$$

把相似項合併，則得

$$(x+h)^{k+1}=x^{k+1}+(k+1)x^kh+\frac{(k+1)k}{1\cdot2}x^{k-1}h^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\cdots(k-r+3)}{1\cdot2\cdots\cdots\cdots(r-1)}x^{k-r+2}h^{r-1}$$

$$+\cdots\cdots+(k+1)xh^k+h^{k+1}.$$

試看$(x+h)^{k+1}$的展開式和$(x+h)^k$的展開式具同樣形式，並且$(x+h)^{k+1}$的展開式可從$(x+h)^k$的展開式得來，只要把$k+1$去代替$(x+h)^k$的展開式裏所有的k.

所以，設使當$n=k$，這個定理是眞的；那麼牠仍是眞的，當$n=k+1$.

但是我們知道當$n=2$，這個定理是眞的，因爲$(x+h)^2=x^2+2hx+h^2=x^2+2x^{2-1}h+\frac{2(2-1)}{1\cdot2}x^{2-2}h^2$. 所以當$n=3$也是眞的；當$n=3$旣是眞的，那麼當$n=3+1=4$也是眞的.

我們可以照樣推論下去，至於無窮，所以不拘n是什麼正整數，這個定理常是眞的.

如此的證法叫做"算學歸納法"

習　題

試用算學歸納法證明下列各公式:

1. $1+\ \ +5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2,\ n\geqq 1.$

$$\text{當 } n=1,\ 1 \qquad\quad =1^2.$$

$$\text{當 } n=2,\ 1+3 \qquad =2^2.$$

$$\text{當 } n=3,\ 1+3+5=3^2.$$

足見這個公式是眞的,當 $n=1, 2, 3.$

假定當 $n=r$ 時也是眞的,那麼

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2r-1)=r^2. \tag{1}$$

這方程式的兩邊各加 $2(r+1)-1$, 則得

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2r-1)+[2(r+1)-1]=r^2+2r+2-1,$$

即 $$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2r-1)+[2(r+1)-1]=(r+1)^2. \tag{2}$$

(2) 和 (1) 具同樣形式,只要把 $r+1$ 代替 (1) 中的 r 便可得 (2).

於是可知當 $n=r$, 設使這個公式是眞的, 那麼當 $n=$ $+1$, 牠也是眞的。

因爲我們已知當 $n=2$, 這個公式是眞的,所以當 $n=3$, $4,\cdots\cdots$, 也都是眞的。

2. $1+\ \ +3+4+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

3. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

4. $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n=2(2^n-1).$

5. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$

6. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}.$

7. $1+2^2+2^4+2^6+\cdots+2^{2n-2}=\dfrac{2^{2n}-1}{3}.$

8. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

174. 有理整函數的圖形. 一次函數如$f(x)=ax+b$,牠的圖形已經知道是一根直線了.設使一個函數不是一次的,那麼牠的圖形通常是一根曲線.例如函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形是一根拋物線.剛才所舉的兩種函數都是有理整函數.對於有理整函數的圖形作更進一步的研究也是本章目的之一.

175. 函數的求值法. 要作函數$f(x)$的圖形,我們必須選取許多x的值而後算出$f(x)$的各對應值.

當$x=a$, $f(x)$的值可以$f(a)$表示;這個值只要把a去代替$f(x)$裏的x就可求得,但是應用"綜合除法"來求這個值更覺簡便.

現在舉一個例來說明這綜合除法:

已知$f(x)=2x^3-5x^2+7x-8$, 求$f(3)$.

【說明】

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & -5 & 0 & 7 & -8 \\ & 6 & +3 & +9 & +48 \\ \hline 2 & +1 & +3 & +16 & +40 \end{array}$$

(1) 把各係數 2, −5, 0, 7, −8, 列出來.

(2) 把 x^4 的係數 2 搬下來.

(3) 以 3 乘 2, 而加其積於 −5, 則得 +1.

(4) 以 3 乘 +1, 而加其積於 0, 則得 +3.

(5) 以 3 乘 +3, 而加其積於 7, 則得 +16.

(6) 以 3 乘 +16, 而加其積於 −8, 則得 +40.

$\therefore\ f(3)=40.$

【練習】 1. 設 $f(x)=2x^4-5x^3+7x-8$, 應用綜合除法求 $f(2)$, $f(-1)$, $f(5)$.

2. 畫出 $f(x)=x^3-6x^2+7x+4$ 的圖形來 (圖 120).

指定 x 的值 0, 1, 2, 3, 4, 5, −1, −2, −3, 用綜合除法求 $f(x)$ 的各對應值. 畫出各點, 再畫一根曲線把各點聯結起來.

3. 試作 $f(x)=-x^3+5x^2-2x-8$ 的圖形.

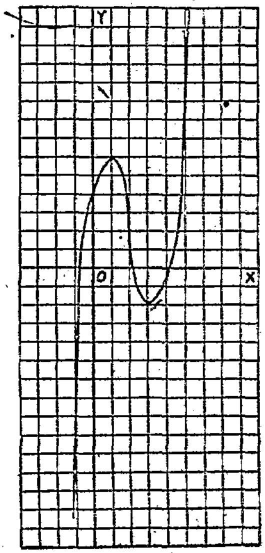

圖 120

176. $f(x)$ 的連續性. 當我們作 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的圖形

時(圖 21),可以見到下列 x 和 $f(x)$ 的對應值.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$+2$
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	無值	$+2$	$+1$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$

試看,當 $x=0$ 時,這個函數的曲線是中斷的,或是不連續的了.所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 這個函數叫做不連續函數.

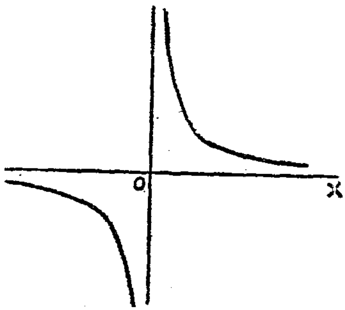

圖 121

當 $x=a$ 時,$f(x)$ 這個函數要是連續的,$f(a)$ 必須是一個實數值又是一個有限值.

如圖 122 的曲線也是不連續的.在這種情形之下,$f(x)$ 漸近於兩個不同的值,看 x 是從左邊漸近於 a 還是從右邊漸近於 a.

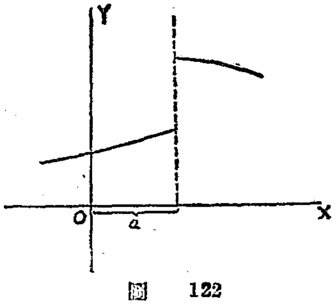

圖 122

設使 $f(x)$ 是一個有理整函數,那麼這樣的不連續決不會有的.因為對於 x 的每個實數值和有限值,$f(x)$ 必有而且只有一個對應的實數值和有限值.所以一個有理整函數是連續的,不拘 x 是任何有限值.

照此看來,當 x 從 a 值變到 b 值, $f(x)$ 的值從 $f(a)$ 變到 $f(b)$, 並且對於 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中間的各值至少取得一次.

又設 $f(a)<0$ 而 $f(b)>0$, 那麼在 a, b 之間, x 至少有一個值能使 $f(x)$ 等於零.

這個意義從圖形上看來就是:如圖 123 的曲線是一根不斷的線,牠在 A, B 之間截 x 軸至少一次.

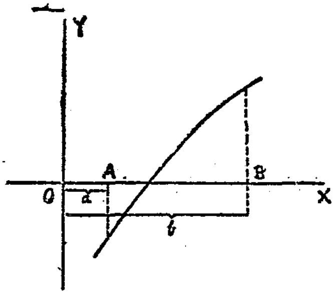

圖 123

【練習】 指定了 x 的許多值而把 $f(x)$ 的各對應值列成一表,並定出以下各函數的曲線截 x 軸所在的地位:

1. $2x^2+x-6$. 2. x^3-5x^2+2x+8.

3. $x^4-6x^3+24x-16$.

177. x 的一個有理整函數的引申函數.

$f(x)$ 的引申函數,前已說過,就是

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

從 §172 的 (1) 式和 §173 的二項式定理,得

$$f(x+h)-f(x)=h[na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}]$$
$$+h^2\left[\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_0x^{n-2}+\cdots\cdots\right]+\cdots\cdots.$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}$$

$$+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

$$+h\left[\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_0x^{n-2}+\cdots\cdots\right]$$

$$+h^2[\cdots\cdots]$$

$$+\cdots\cdots.$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}$$

$$+\cdots\cdots+a_{n-1}.$$

就是，$\boldsymbol{f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots}$

$$\boldsymbol{+a_{n-1}.}$$

於是可知,設使 $f(x)$ 是 x 的一個有理整函數,那麼牠的引申函數 $f'(x)$ 可用下法求得:

把每項 x 的指數乘本項的係數,又從 x 的指數上減去 1.

【練習】 1. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$, 求 $f'(x)$.

試求以下各函數的引申函數:

2. $f(x)=3x^2-7x+2.$

3. $f(y)=4y^2+3y-6.$

4. $f(x)=6x^4-2x^3+3x+1.$

178. $f(x+h)$ 的計算法.

$f(x+h)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$+h[na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots+a_{n-1}]$$
$$+h^2\left[\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_0x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}a_1x^{n-3}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right]+\cdots\cdots.$$

試看,在這個展開式內,第一列是 $f(x)$,第二列在大括弧裏面的是 $f(x)$ 的引申函數,第三列在大括弧裏面的是 $f'(x)$ 的引申函數乘了 $\frac{1}{1\cdot 2}$.

$f'(x)$ 的引申函數叫做 $f(x)$ 的二次引申函數,而以 $f''(x)$ 表示牠.

同樣,$f(x)$ 的三次,四次……,k 次引申函數是以 $f'''(x)$, $f^{(iv)}(x)$, ……, $f^{(k)}(x)$ 表示的.

用了這樣的符號,我們便有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x)+\cdots\cdots.$$

這個公式是"台洛的定理 (Taylor's theorem)"中的一個特殊情形.

因爲 $f(x)$ 是 x 的一個有理整函數,所以剛才求得的這個公式可用以求 $f(x+h)$ 的值.

【練習】 1. 設 $f(x)=3x^4-2x^2-3x+1$, 求 $f(x+h)$.

$f'(x)=12x^3-4x-3.$

$f''(x)=36x^2-4.$

$$f'''(x)=72x.$$

$$f^{(\mathrm{iv})}(x)=72.$$

$$f^{(\mathrm{v})}(x)=0.$$

$$\therefore\ f(x+h)=3x^4-2x^2-3x+1+h(12x^3-4x-3)+\frac{h^2}{1\cdot 2}(36x^2-4)$$
$$+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}(72x)+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(72)$$
$$=3x^4-2x^2-3x+1+h(12x^3-4x-3)+h^2(18x^2-2)$$
$$+h^3(12x)+h^4(3).$$

2. 從上題的結果,求 $f(1+h)$; $f(2+h)$; $f(-1+h)$.

3. 設 $f(x)=x^3+18x^2+105x$, 求 $f(x+h)$.

4. 設 $f(x)=3x^3-2x+4$, 求 $f(x+h)$.

179. 餘數定理. 設 $f(x)$ 是一個 n 次的有理整函數,即

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

那麼 $f(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+a_3r^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}r+a_n.$

兩式相減,

$$f(x)-f(r)=a_0(x^n-r^n)+a_1(x^{n-1}-r^{n-1})+a_2(x^{n-2}-r^{n-2})$$
$$+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-r)$$
$$=(x-r)[a_0(x^{n-1}+x^{n-2}r+x^{n-3}r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})$$
$$+a_1(x^{n-2}+x^{n-3}r+x^{n-4}r^2+\cdots\cdots+r^{n-2})$$
$$+\cdots\cdots+a_{n-1}].$$

以 $Q(x)$ 表示在大括弧裏面的函數,

$$f(x)-f(r)=(x-r)Q(x).$$

所以　$$f(x)=(x-r)Q(x)+f(r),\qquad (1)$$

這里的 $Q(x)$ 是 x 的 $(n-1)$ 次的有理整函數.

把 (1) 式和下面的關係比較一下,

被除數＝除數×商＋餘數;

因此我們斷定把 $x-r$ 除 $f(x)$ 所得的餘數是 $f(r)$.

這個結論可以申說如下:

設使把 $x-a$ 除一個有理整函數 $f(x)$,所得餘數等於以 a 代 x 後這個函數的值.

說得更簡單一點就是:設使 $f(x)$ 被 $x-a$ 除過,所得餘數是 $f(a)$.

這個定理通常稱為"餘數定理".

180. 因數定理. 設使 $f(x)$ 被 $x-a$ 除過所得餘數為零,那麼 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一個因數.

因為那個時候的餘數 R 等於 $f(a)$, $f(a)$ 既等於零, $x-a$ 自然是 $f(x)$ 的一個因數.

【練習】 試說出並證明因數定理的逆定理.

第十二章

以數係數解方程式

代數的解法

181. 代數的解法. 設使$f(x)$是一個一次有理整函數,那麼方程式$f(x)=0$是常常可解的.因爲設使$f(x)=ax+b$,那麼方程式$ax+b=0$的解答卽可從下面的公式求得:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

設使$f(x)$是一個二次有理整函數,如ax^2+bx+c,那麼方程式$f(x)=ax^2+bx+c=0$的根,卽可從下面的公式求得:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

注意,這兩種方程式的根都是各自係數的函數.凡用了公式求得的解答都叫做"代數的解法",只要在這些公式裏面所有的運算方法不外乎有限的加,減,乘,除,和開根.

往後將要論到三次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

和四次方程式

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

也都有代數的解法.但是用高等算學可以證明方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

不能常有代數的解法,設使 $n>4$.

182. 方程式的根數. 我們已經見到每個直線方程式有一個根,每個二次方程式有兩個根,實數或複素數.我們現在應該認可每個 n 次的有理整方程式,不拘牠的係數是實數或複素數,至少有一個根,實數或複素數.

設 r_1 是 $f(x)=0$ 的一個根。

那麼 $x-r_1$ 必是 $f(x)$ 的一個因數. §180.

$\therefore$ $f(x)=(x-r_1)f_1(x)$, 這里的 $f_1(x)$ 是 $\dfrac{f(x)}{x-r_1}$, 而是 x 的一個 $(n-1)$ 次的有理整函數.

那麼,依據我們上面的認可,$f_1(x)=0$ 至少須有一個根 r_2. 於是 $f_1(x)=(x-r_2)\,f_2(x)$, 這里的 $f_2(x)$ 是 $(n-2)$ 次了.替代之後得　　$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)f_2(x)$.

這樣演算下去,就有

$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)A$, 這里的 A 是 x^n 的係數而不含有 x.

這正足以表明 x 的每個有理整函數是 n 個直線因數相乘的積.

設使在 $r_1, r_2,\cdots\cdots, r_n$ 中,任意取一個值去代替 x, 那麼 $f(x)$ 就變爲零.設使我們在 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 之外取一個值去

代替 x, 那麼這些因數 $(x-r_1)$, $(x-r_2)$, ……, $(x-r_n)$ 都不是零,而 $f(x)$ 也就不能等於零了.

所以每個 n 次的有理整函數,不拘牠的係數是實數或複素數,有 n 個根,也只有 n 個根,實數或複素數.

這個定理叫做"代數的基本定理".

183. 倍根. $f(x)$ 的 n 個因數當中可以有幾個相等的,例如 $f(x)=5(x-1)^2(x-3)$. 在這樣情形之下,方程式 $f(x)=0$ 叫做有等根,或"倍根".

以圖形代表 $f(x)=0$ 的根

184. 不等的實數根. 設 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 是 $f(x)=0$ 所有不等的實數根,又設

$$x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n;$$

例如,設 $x_1=1, x_2=3, x_3=4$, 又設 $f(x)=2(x-1)(x-3)(x-4)$

當 $x<1$ 時, $f(x)$ 所有的二項式因數都是負.所以 $f(x)$ 也是負,而牠的曲線是在 x 軸之下 (圖 124). 試看, 當 $x=0$, $f(x)=2(-1)(-3)(-4)=-24$.

當 $1<x<3$ 時, $f(x)$ 裏第一個因數是正,而其餘兩個都是負.所以 $f(x)$ 是正,而牠的曲線是在 x 軸之上.試看,當 $x=2$

時，$f(x)=2(1)(-1)(-2)=4$.

當 $3<x<4$ 時，前兩個因數是正，最後一個是負．所以 $f(x)$ 是負，而牠的曲線是在 x 軸之下．

當 $x>4$，$f(x)$ 所有的因數都是正，而牠的曲線是在 x 軸之上．

所以這曲線截 x 軸在這三點 $x=1, 3,$ 和 4.

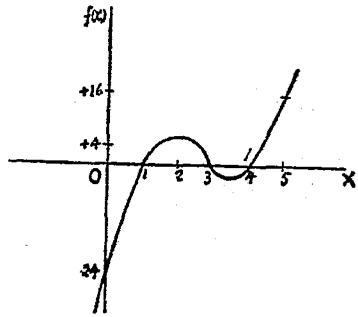

圖　124

【練習】畫出以下各方程式的圖形來：

1. $x(x-2)(x-4)=0$.　2. $(x+2)(x-2)(x)=0$.

3. $\frac{1}{6}(x-\frac{1}{2})(x-2)(x-3)=0$.　4. $3(x+\frac{2}{3})(x-1)(x-4)=0$.

185. 相等的實數根． 設

$$f(x)=a_0(x-r_1)(x-r_2)^2(x-r_3)=0,$$

又設 $r_1<r_2<r_3$．試證：

當 $x<r_1$，$f(x)$ 是正的；

當 $r_1<x<r_2$，$f(x)$ 是負的；

當 $x=r_2$，$f(x)$ 是零；

當 $r_2<x<r_3$，$f(x)$ 是負的．

所以當 $x=r_2$ 時，這曲線並不截 x 軸，但與 x 軸相切於 C 點（圖 2）．

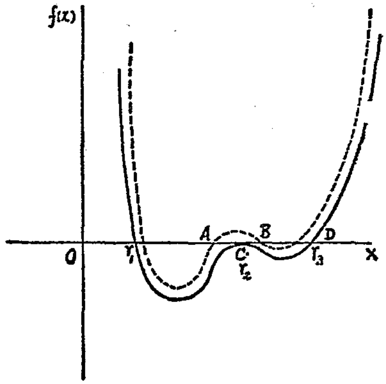

圖 125

這個 C 點我們可以設想牠是這樣得來的: 假如把那根點線向下移動,直等到 A, B 兩點合而為一,那就變成一個切點 C 了.

在原方程式中,設使 r_3 的值漸變而漸近於 r_2,那麼 $f(x)$ 成為 $a_0(x-r_1)(x-r_2)^3$ 的形式.

當 $x<r_1$, $f(x)$ 是正的;

當 $r_1<x<r_2$, $f(x)$ 是負的;

當 $x=r_2$, $f(x)$ 是零;

當 $x>r_2$, $f(x)$ 是正的.

所以這曲線在 C 點截 x 軸 (圖 126).

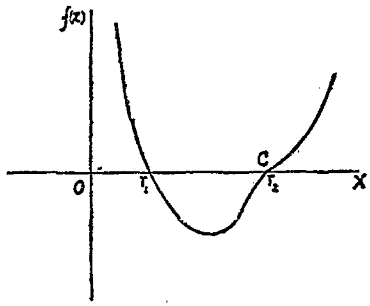

圖 126

這個 C 點可以當作牠由 D 點 (圖 125) 變化而來,假如把 D 點向左移動,直等到牠和 A, B 合而為一,那就成了這

里的 C 點.

概括言之,設使在 $f(x)$ 內,一個因數 $(x-r_n)$ 自乘的次數是偶數,那麼這曲線不截 x 軸;設使牠自乘的次數是奇數,那麼這曲線必截 x 軸.

【練習】 畫出以下各方程式的圖形來:

1. $3(x-1)(x-3)^2=0.$　　2. $\frac{1}{4}(x+2)x^2(x-3)=0.$

3. $(x-2)(x-3)^3=0.$　　4. $x(x-1)^2(x-3)^3=0.$

186. 複素數根. 設 $a+bi$ 是方程式 $f(x)=0$ 的一個根,那麼 $a+bi$ 必適合這個方程式 $f(x)=0$, 而

$$f(a+bi)=a_0(a+bi)^n+a_1(a+bi)^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}(a+bi)+a_n=0.$$

先把 $a+bi$ 的各乘方展開,而後把實數各項歸併成一組,把虛數各項歸併成一組,這方程式便有如下的形式:

$$f(a+bi)=A+Bi=0.$$

根據 §97, $A=0$, $B=0$.

同樣,設使我們把 $a-bi$ 替代 x, 則得

$$f(a-bi)=A-Bi.$$

因為　$$A=0, B=0,$$

$$A-Bi=0,$$

就是　$$f(a-bi)=0.$$

這就是說 $a-bi$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一個根.

因此得一個定理如下:

所有係數都是實數的一個有理整方程式,倘若牠有一個複素數的根 $a+bi$,那麼 $a-bi$ 也是牠的一個根.

所以,設使 $f(x)$ 含有一個因數 $x-(a+bi)$,牠也必含有這個因數 $x-(a-bi)$;所以牠也必含有這個二次因數

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=(x-a)^2+b^2.$$

對於 x 的一切實數值,這因數常是正的,並且不能等於零,所以牠不能使 $f(x)$ 變為零,也就是這曲線既不能切 x 軸也不能截 x 軸.

習　題

試作以下各方程式的圖形:

1. $(x+2)(x^2-3x+5)=0.$

2. $\frac{1}{2}(x+4)(x^2-3x+4)=0.$

3. $x(x+3)(x^2-8x+20)=0.$

試解以下各方程式:

4. $2x^3-15x^2+46x-42=0$ 的一根是 $3+\sqrt{-5}$. 求其餘二根.

5. $x^4-8x^3+21x^2-26x+14=0$ 的一根是 $3+\sqrt{2}$. 求其餘

各根.

6. $x^4-3x^2-42x-40=0$ 的一根是 $\frac{-3+\sqrt{-31}}{2}$. 求其餘三根.

實數根的定位法

187. 笛卡兒的符號定則. (Descartes' rule of signs). 設 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ 是一個有理整函數中 x 的係數而依照降冪排列的.

設使其中有兩個鄰接的係數號子相反,我們就說有一個"變號".例如

$$x^4-3x^3-2x^2+5x-4$$

所有的號子是

$$+\quad -\quad -\quad +\quad -$$

這里共有三個變號.

設使所有的號子都是相同,那麼把一個正數替代 x 後,$f(x)$ 必不能等於零.所以方程式 $f(x)=0$ 決不能有一個正根,儻若牠連一個變號都沒有.

設使 $f(x)$ 依照 x 的降冪排列,x 的各冪從 n 到 0 完全無缺,而所有的號子又是正負交隔的,試證以任何負數替代 x,$f(x)$ 終不能等於零.

從此看來,$f(x)$ 所有的變號必與其正負根的有無有

什麼關係.

以下的研究就是說明 $f(x)$ 所有正根的個數和牠所有變號的個數,其間關係如何.

設 $f_1(x)=2x^8+6x^7-2x^6-x^5-2x^4+3x^3-7x^2+4x+3$ 是代表 x 的一個有理整函數而依照 x 的降冪排列的.

$f_1(x)$ 所有的號子可以排列如下:

$$+\,+\quad -\,-\,-\quad +\quad -\quad +\,+,$$

或
$$+\,(+\,+)-(+\,+\,+)+(+)-(+)+(+\,+)\qquad(1)$$

設使把 $x-r_1$ 乘 $f_1(x)$ (r_1 是一個正數),則得下列的號子:

$$\begin{array}{ccccc} +\,+ & -\,-\,- & + & - & +\,+ \\ - & -\,+\,+ & + & - & +\,-\,- \end{array}$$

這兩列號子還可以組合起來,得 $(x-r_1)f_1(x)$ 全式的號子如下:

$$\begin{array}{l} +\,(+\,+)-(+\,+\,+)+(+)-(+)+(+\,+) \\ +\,(\quad -)-(+\,-\,-)+(+)-(+)+(+\,-)- \\ \hline \end{array}$$

相加, $+\,(+\,\pm)-(+\,\pm\,\pm)+(+)-(+)+(+\,\pm)-\qquad(2)$

現在我們可以比較 $f_1(x)$ 所有的號子和 $(x-r_1)f_1(x$ 所有的號子了,就是只要把 (1) 和 (2) 相比.在括弧裏的兩可的號子暫時不管,我們就可見到 (2) 所有的變號比 (1) 所有的變號多一個.設使對於那些兩可的號子隨意取一

種,那麼(2)所有的變號或者和以前一樣或者還要加多.所以 $f_1(x)$ 所有的變號至少要比 $(x-r_1)\ f_1(x)$ 所有的變號減少一個.

設 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_k$ 都是 $f(x)=0$ 的正根.

因為 $\dfrac{f(x)}{x-r_1}$ 所有的變號至少要比 $f(x)$ 所有的變號減少一個,所以 $f(x)$ 至少有一個變號.

因為 $\dfrac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)}$ 所有的變號至少要比 $f(x)$ 所有的變號減少兩個,所以 $f(x)$ 至少有兩個變號.

同樣,推論下去,因為 $\dfrac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_k)}$ 所有的變號至少要比 $f(x)$ 所有的變號減少 k 個,所以 $f(x)$ 至少有 k 個變號,這就是說 $f(x)=0$ 所有的變號至少和牠所有正根的個數一樣.

這樣研究的結果可以寫成一個定理如下:

定理. $f(x)=0$ 所有正根的個數必不能大於牠所有變號的個數.

因為 $f(x)=0$ 的負根就是 $f(-x)=0$ 的正根,所以 $f(x)=0$ 所有負根的個數必不能大於 $f(-x)=0$ 所有變號的個數.

上述的定理就稱為"笛卡兒的符號定則".

習題

應用笛卡兒的定則,對於以下各方程式的根說些斷案出來:

1. $x^3+5x-7=0$.

把號子寫出,

$f(x)=++-$, $\therefore$ 至多只有一個正根.

$f(-x)=---$, $\therefore$ 沒有負根.

$\therefore$ 有兩個根是複素數.

2. $x^3+3x+7=0$.
3. $x^3+3x+2=0$.
4. $x^3+1=0$.
5. $2x^3-7x^2+3x-1=0$.
6. $y^3-y=21.3$.
7. $z^3+z+3=0$.
8. $y^3-4y^2-3y+19=0$.
9. $x^4-2x^2+1=0$.
10. $x^4-5x^3+20x-16=0$.
11. $x^5-3x^2+6=0$.
12. $x^7+2x^4-x^2-5=0$.
13. $x^7-2x^6+x^4-1=0$.

188. 定理. 一個有理整函數

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的首項可以做到大於其餘各項之和,只要把 x 的值取得夠大.

設 m 是 a_0 a_1, a_2,……,a_{n-1}, a_n 諸係數中最大的一個.

把首項 a_0x^n 和其餘各項之和比較,則得

$$\frac{a_0x^n}{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}>\frac{a_0x^n}{m(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)}$$

$$=\frac{a_0x^n}{\frac{m(x^n-1)}{x-1}}>\frac{a_0x^n(x-1)}{mx^n}=\frac{a_0}{m}(x-1),$$

$$\therefore\quad \frac{a_0x^n}{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}>\frac{a_0}{m}(x-1).$$

把 x 的值取得夠大, $\frac{a_0}{m}(x-1)$ 可以做到大於 1.

$\therefore$ $\frac{a_0x^n}{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}$ 可以做到大於 1.

$\therefore$ a_0x^n 可以做到大於 $a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

【練習】 1. 試證以 x 的正值和負值替代 x, 可以使 $2x^4-3x^3+7x^2-4x-2$ 變爲正數,只要把 x 的絕對值取得夠大.

2. 把 x 的正值逐漸加大,能使 $3x^3-4x^2+7x-2$ 變爲正數;把 x 的負值逐漸加大(絕對值),能使 $3x^3-4x^2+7x-2$ 變爲負數.試證之.

189. 定理. 設使 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的號子相反, 那麼在 a, b 中間至少有一個或奇數個實數根.

因爲:設 $f(x)$ 是一個有理整函數.設 A 和 B 是在 $f(x)$ 曲線上的兩點(圖 127),而分在 x 軸的兩邊.

因爲這曲線是一根連續的曲線(§ 176),所以牠從 A

到 B 必截 x 軸,並且截的次數,必是奇數.

在 a, b 中間,所有 x 的值能使 $f(x)$ 等於零的,都是 $f(x)=0$ 的根.

因為 $f(x)$ 是一個連續函數,所以當牠的值從正變到負或從負變到正,必須經過零,至少一次.

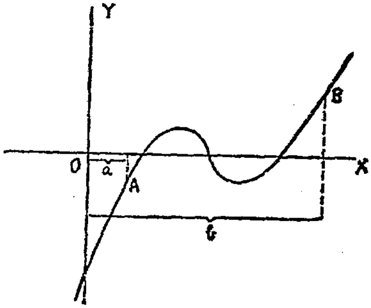

圖　127

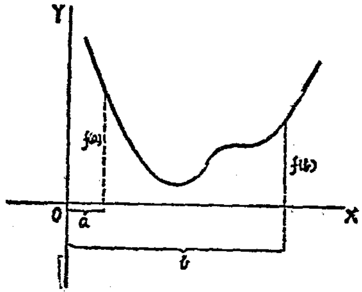

圖　128

190. 定理. 設使 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的號子相同,那麼在 a, b 中間或沒有實數根,或有偶數個實數根.

這個意義從圖形上說來就是:這根曲線可以完全不與 x 軸相交,如圖 128; 或只與 x 軸相切;或有兩處截 x 軸,如圖 129;或有四處截 x 軸,如圖 13 .

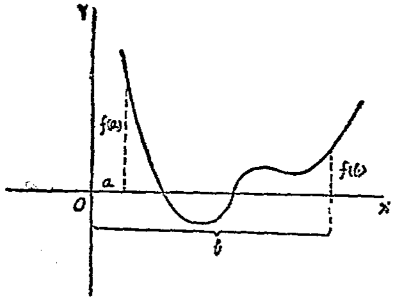

圖　129

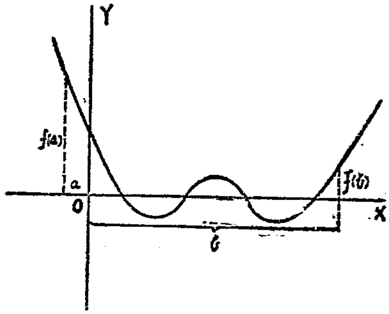

圖　130

191. 定理. 每個方程式的次數是奇數的, 牠至少有一個實數根.

因爲:根據§188, 設使把 x 的絕對值 a 取得夠大,而又加上負號,那麼 $f(a)$ 和牠的首項有一樣的號子; 但是首項是負的,所以 $f(x)$ 也是負的.又設使把 a 加上正號,那麼 $f(a)$ 和牠的首項同是正的.

所以 $f(x)=0$ 至少有一個實數根,其值在 $+a$ 和 $-a$ 之間 (§189).

192. $f(x)=0$ 的實數根所在的推測.

推測一個方程式的實數根的所在, 187節到191節的各定理是需用的.下面習題1便是詳論這種推測法的.

習　題

推測以下各方程式的根的所在:

1. $f(x)=x^3+5x-7=0$.

(1) $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的號子排列如下:

$f(x)=++-$, $\therefore$ $f(x)$ 至多只有一個正根,(§ 187).

$f(-x)=---$, $\therefore$ 這里沒有負根, (§ 187).

$\therefore$ 兩個根是虛根,第三個是正根.何故?

(2) $f(x)$ 的一個略圖可以畫出如下:

把一個夠大的正值替代了 x, 可使 $f(x)$ 得正數, (§ 188). 試看圖 131.

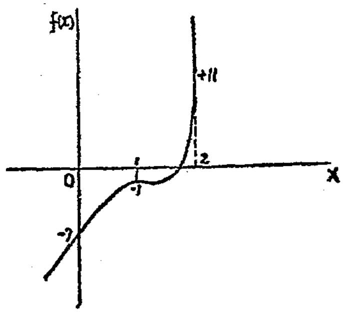

圖 131.

當 $x=0$, $f(x)=-7$.

把一個夠大的負值替代了 x, 可使 $f(x)$ 得負數, (§ 188).

(3) 當 $x=1$, $f(x)=-1$.

當 $x=2$, $f(x)=+11$.

從此可知這個正根必在 1 與 2 之間.

2. $x^3+2x^2+8=0$.

3. $x^3-3x-1=0$.

4. $x^3-2x^2-3x+5=0$.

5. $x^3+4x^2-2x-40=0$.

6. $x^5+2x^3-5x^2+x+11=0$.

7. $6x^4+29x^3-54x^2-51x-10=0$.

193. 整數根. 在一個方程式

$$x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+px+q=0$$

內,x的最高冪的係數是1,又其餘諸係數都是整數,設使這方程式有有理根,那麼這些有理根必都是整數.

先假定這方程式所有的有理根不都是整數;設$\frac{s}{t}$是一個分數根,而s和t沒有公因數.

把$\frac{s}{t}$替代原方程式裏的x,則得

$$\frac{s^n}{t^n}+b\frac{s^{n-1}}{t^{n-1}}+c\frac{s^{n-2}}{t^{n-2}}+\cdots\cdots+p\frac{s}{t}+q=0.$$

兩邊用t^{n-1}一乘,

$$\frac{s^n}{t}+bs^{n-1}+cts^{n-2}+\cdots\cdots+pt^{n-2}s+qt^{n-1}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{s^n}{t}=-(bs^{n-1}+cts^{n-2}+\cdots\cdots+pt^{n-2}s+qt^{n-1}).$$

因為這方程式的右式是一個整數,所以左邊的$\frac{s^n}{t}$也必是個整數.

但這是不可能的,因為早已聲明s裏面不含有因數t.

$\therefore$ 假定$\frac{s}{t}$是一個分數根是錯的,而原方程式所有的有理根都是整數也就此證明了.

194. 定理. 設使上節所說的方程式$f(x)=0$有一個整數根s,那麼s必是q的一個因數.

因為$f(s)=0$,所以

$$s^n+bs^{n-1}+cs^{n-2}+\cdots\cdots+ps=-q.$$

把 s 除兩邊,

$$s^{n-1}+bs^{n-2}+cs^{n-3}+\cdots\cdots+p=-\frac{q}{s},$$

因爲左式是整數,所以 q 必能被 s 除盡,本定理於是證明.

195.　求 $f(x)=0$ 的整數根.　一個方程式的整數根,我們現在可以探求了,只要取用這方程式裏的常數項(即不含 x 的項)所有的各整因數.當一個根求得了,把這個根對原方程式行綜合除法,就可得一個低一次的方程式.同樣又可探求這低一次的方程式的整數根.

習　題

解以下各方程式:

1. $x^4-12x^3+48x^2-68x+15=0.$

由笛卡兒的符號定則,斷定這方程式沒有負根.

若有整數根,必都是15的因數.

所以我們可用 1, 3, 5, 和 15 去探試.

應用綜合除法,

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -12 & +48 & -68 & +15 & \underline{1} \\
 & 1 & -11 & +37 & -31 & \\
\hline
1 & -11 & +37 & -31 & \boxed{-16} &
\end{array}$$

$\therefore$ 1 不是 $f(x)=0$ 的根.

$$\begin{array}{lrl}
 & 1-12+48-68\ \ +15\ \underline{|3} & \\
 & 3-27+63\ \ -15 & \\
\text{以 5 除之,} & \overline{1-\ 9+21-\ 5\qquad \boxed{0}} & \therefore\ 3\ \text{是}\ f(x)=0\ \text{的根.}\\
 & 5-20+\ 5 & \\
 & \overline{1-\ 4+\ 1\qquad \boxed{0}} & \therefore\ 5\ \text{是}\ f(x)=0\ \text{的根.}
\end{array}$$

現在原方程式降低為一個二次方程式了,就是

$$x^2-4x+1=0,$$

這可用二次方程式的公式來解答.

2. $x^3-5x^2+2x+8=0.$　　**3.** $x^3-9x^2+23x-15=0.$

4. $x^3+x^2-17x+15=0.$　　**5.** $x^3-6x^2+7x+4=0.$

6. $x^4-10x^2+9=0.$　　**7.** $x^4-20x^2-21x-20=0.$

8. 已知 $6x^4+7x^3-37x^2-8x+12=0$ 的二根為 2 和 ·5, 求其餘二根.

根與係數的關係

196. 恆等式. 前曾說過,每個 n 次的有理整方程式,不拘牠所有的係數是實數還是複素數,必有也只有 n 個根,而這樣的一個函數常常可以化為

$$f(x)=A(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n).$$

但是設使 A 等於零,那麼在 $f(x)$ 內 x 的各係數都要等於零,而 x 的任何值都能適合這方程式 $f(x)=0$ 了.換一句話說,就是只有當 $A=0$,那麼 x 的值除 $r_1, r_2,\cdots\cdots, r_n$ 以外還有

能使 $f(x)$ 等於零.

所以,設使 x 的值比 n 個還多能使 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 等於零,那麼

$$a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{n-1}=a_n=0.$$

設使 x 的任何值都能適合 $f(x)=0$,那麼這方程式稱爲"恆等式".

197. 定理. 設使

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n,$$

那麼 $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\cdots\cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n.$

因爲,把原式變做 $f(x)\equiv 0$ 的形式,則得

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\cdots\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)\equiv 0.$$

所以 $a_0-b_0=a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots\cdots=a_{n-1}-b_{n-1}=a_n-b_n=0$,

而 $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\cdots\cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n,$ (§ 196).

198. 根與係數的關係. 設 $r_1, r_2,\cdots\cdots, r_n$ 爲方程式 $f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 的各根,那麼

$$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n).$$

實行連乘,

$$f(x)=x^n-x^{n-1}(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_n)+x^{n-2}(r_1r_2+r_1r_3+\cdots\cdots+r_2r_3+r_2r_4+\cdots\cdots+r_{n-1}r_n)$$

$$-x^{n-3}(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n(r_1r_2r_3\cdots\cdots r_n).$$

根據 §197, 則有

$$p_1=-(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_n),$$

$$p_2=+(r_1r_2+r_1r_3+\cdots\cdots+r_2r_3+r_2r_4+\cdots\cdots+r_{n-1}r_n),$$

$$p_3=-(r_1r_2r_3+\cdots\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n=(-1)^n(r_1r_2\cdots\cdots r_n).$$

所以,設使把一個方程式 $f(x)=0$ 變做如下的形式:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

那麼 x^{n-1} 的係數等於各根之和(代數和)而變其號子; x^{n-k} 的係數等於於 n 個根當中儘可能方法取出 k 個根連乘所得諸乘積之和(代數和)而變其號子(如若 k 是個偶數,這號子不可變);常數項(即不含 x 的項)等於各根的連乘積,但須變其號子,如若 n 是個奇數.

習 題

立出各方程式來,已知其根為:

1. 1, 2, 3.

$$f(x)=x^3-(1+2+3)x^2+(1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3)x-(1\cdot2\cdot3)=0$$

$$=x^3-6x^2+11x-6=0.$$

2. $1, 3, -4.$ **3.** $2, -1, 3, 0.$

4. $\pm 1, \pm 2.$ **5.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}.$

6. $1\pm\sqrt{5}, 2\pm\sqrt{3}.$

由前二根,得函數 x^2-2x-4;由後二根,得函數 x^2-4x+1.

$$\therefore \quad f(x)=(x^2-2x-4)(x^2-4x+1)=0.$$

7. $4\pm\sqrt{3}, -1\pm\sqrt{5}.$ **8.** $2\pm\sqrt{-3}, -3\pm\sqrt{-2}.$

9. $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$ **10.** $2-\sqrt{3}, \sqrt{5}.$

11. 一個方程式的根是 2, −3, 5, 4, − 1, 寫出牠的第二.第五,和第六項來,

12. $y^3-6y^2-4y+24=0$, 牠的根互成算術級數.試求各根.

設令其根爲 $a-d, a, a+d.$

那麼, $-(a-d+a+a+d)=-6,$

$$\therefore \quad 3a=6,$$

$$\therefore \quad a=2.$$

又, $(a-d)(a)(a+d)=-24,$

$$a(a^2-d^2)=-24,$$

$$4-d^2=-12,$$

$$\therefore \quad d^2=16,$$

$$d=\pm 4.$$

這方程式的根是 $-2,\ 2,\ 6.$

13. $x^3-\frac{11}{2}x^2+6x+\frac{9}{2}=0$, 牠有兩根相等.求各根.

14. $y^3-8y^2+5y+14=0$, 牠有二根之和等於 9. 求各根.

15. $y^3-\frac{9}{2}y^2-\frac{27}{2}y+27=0$, 牠的各根成爲幾何級數.求各根.

16. $4x^4-14x^3+16x^2-9x+2=0$ 有一根是整數; 還有一根是這個根的倒數.求各根.

17. 已知 $x^3-6x^2+kx+10=0$ 的根成爲算術級數.解這方程式並求 k.

18 $x^4+x^3+3x^2+4x+6=0$ 有二根之和是 -2, 而其餘二根之積爲 3. 試解這方程式.

第十三章

三次和四次方程式的代數的解法

三次方程式

199. 三次方程式的解法. 三次方程式的普通形式是
$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{1}$$

先要變換這個方程式的形式:把 $y+k$ 代替 x, 則得
$$a(y+k)^3+b(y+k)^2+c(y+k)+d=0,$$
即
$$ay^3+(3ak+b)y^2+(3ak^2+2bk+c)y+(ak^3+bk^2+ck+d)=0.$$

又要消去含有 y^2 的項,故令 $3ak+b$ 等於零,就是令 $k=-\frac{b}{3a}$, 則得
$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\left(d-\frac{cb}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}\right)=0. \tag{2}$$

先以 a 除這方程式的兩邊,而後以 p 表示 y 的係數, q 表示常數項,則得
$$y^3+py+q=0; \tag{3}$$
這裡的
$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2},\quad q=\frac{d}{a}-\frac{cb}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}. \tag{4}$$

y^3+py+q 的形式可以化爲 $y(y^2+p)+q$, 牠可以等於零,設使
$$y(y^2+p)=-q. \tag{5}$$

要解這個方程式,就令
$$p=-3uv \text{ 和 } -q=u^3+v^3,$$

那麼 (5) 的形式就變為

$$y(y^2-3uv)=u^3 \tag{6}$$

這是顯而易見的了，$y=u+v$ 必能適合方程式 (6)，也就必能適合方程式 (3)。

以下我們必須用 p 和 q 來表明 u 和 v，然後 $u+v$ 才是方程式 (3) 的解答。

由方程式 $-3uv=p$，得

$$v=-\frac{p}{3u}.$$

把這個 v 的值代入方程式 $u^3+v^3=-q$，得

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0,$$

或

$$27u^6+27qu^3-p^3=0.$$

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

而

$$v=-\frac{p}{3u}=\frac{-p}{3\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}.$$

分子分母同乘以

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$v=\frac{-p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\cdot\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]\left[-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]}}$$

$$=\frac{-p\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\cdot\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}=\frac{-p\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\cdot-\frac{p}{3}},$$

或 $$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

$$\therefore\quad y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

根式前面的雙號,無論取上一個或下一個,這算式的結果是一樣的,所以我們選定

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

設使 u_1 是 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 的三個立方根之一,而 v_1 是 v 的一個值,適合這方程式 $-3u_1v_1=p$, 那麼方程 (3) 的一個答數是 $$y=u_1+v_1.$$

又,設使 u_1 是 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 的三個立方根之一,那麼其餘二個是 $u_2=\omega u_1$ 和 $u_3=\omega^2u_1$, 這裏的 ω 和 ω^2 是 $-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ 和 $-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$, 就是 1 的三個立方根當中的兩個複素數根.

所以 v 的對應值是

$$v_2=-\frac{p}{3u_2}=-\frac{p}{3\omega u_1}=\frac{v_1}{\omega}=\frac{\omega^2v_1}{\omega^3}=\omega^2v_1,$$

$$v_3=-\frac{p}{3u_3}=-\frac{p}{3\omega^2u_1}=\frac{v_1}{\omega^2}=\frac{\omega v_1}{\omega^3}=\omega v_1.$$

所以 $y^3+py+q=0$ 的三個根是

$$y_1=u_1+v_1,$$

$$y_2=\omega u_1+\omega^2 v_1,$$

$$y_3=\omega^2 u_1+\omega v_1;$$

這里的

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

而 u_1 和 v_1 的關係必須是

$$-3u_1v_1=p.$$

200. 這三個根的討論. 這個方程式 $y^3+py+q=0$ 的根的性質與 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 的值有密切關係.這叫做三次方程式的'判別式".

p 和 q 通常都是實數.

設使 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, 那麼一個根是實數,兩個根是共軛複素數.

設使 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, 那麼三個根都是實數,而其中兩個是相等的. 因爲:

$$u_1=v_1,\ y_1=2u_1=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},\ y_2=-(\omega+\omega^2)u_1,\ y_3=-(\omega^2+\omega)u_1.$$

但　　$\omega^2+\omega+1=0.$　　$\therefore\ y_2=y_3=u_1.$

設使$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$,那麼三個根也都是實數,但各不相等;這個證明頗爲繁難,這里只好不說了.

所述三次方程式的普通解法,理論固極圓滿,但在實用上並不覺得如何便利,所以苟可避免不用,還是以不用爲妥.

習題

用公式解以下的三次方程式:

1. $x^3-3x^2+6x-4=0.$

$$a=1,\ b=-3,\ c=6,\ d=-4.$$

$$k=1,\ p=3,\ q=0.$$

$$\therefore\quad u_1=1,\ v_1=-1.$$

$$\therefore\quad y_1=0,\ y_2=\omega-\omega^2=i\sqrt{3},\ y_3=\omega^2-\omega=-i\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x_1=1,\ x_2=1+i\sqrt{3},\ x_3=1-i\sqrt{3}.$$

2. $x^3-7x+6=0.$ 3. $x^3-4x^2-3x+12=0.$

4. $6x^3-7x^2-14x+15=0.$

四次方程式

201. 四次方程式的解法. 每個方程式如這種形式

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0. \tag{1}$$

總可以變做另一個方程式,在這另一個方程式裏,含有x^3

的一項是消去了的.所以這便完事了,只要能解

$$f(y)=y^4+py^2+qy+r=0, \tag{2}$$

這方程式裏沒有含着 y^3 的一項的.

設令 $$y=u+v+w; \tag{3}$$

兩邊平方, $$y^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+vw),$$

或 $$y^2-(u^2+v^2+w^2)=2(uv+uw+vw);$$

又兩邊平方,

$$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2+(u^2+v^2+w^2)^2=4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)$$
$$+8(u^2vw+uv^2w+uvw^2),$$

或 $$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-8uvw(u+v+w)+(u^2+v^2+w^2)^2$$
$$-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=0,$$

或 $$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-8uvwy+(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2$$
$$+v^2w^2)=0. \tag{4}$$

(2) 和 (4) 形式雖異,實則完全相同,所以可令牠們的同類項的係數相等,

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{p}{2}, \tag{5}$$

$$uvw=-\frac{q}{8}, \tag{6}$$

$$(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=r.$$

最後的這個方程式又可寫做

$$\frac{p^2}{4}-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=r;$$

所以

$$u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=\frac{p^2-4r}{16}. \tag{7}$$

從(5),(7),(6)三個方程式可得

$$\left.\begin{aligned} -(u^2+v^2+w^2)&=\frac{p}{2} \\ +(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)&=\frac{p^2-4r}{16} \\ -(u^2v^2w^2)&=\frac{-q^2}{64} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

根據§198, u^2, v^2 和 w^2 是方程式

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{p^2-4r}{16}t-\frac{q^2}{64}=0 \tag{9}$$

的三個根.

設令 t_1, t_2 t_3 是這方程式的三個根,那麼

$$y_1=u+v+w=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3},$$

選擇這些根式前面的號子,只要依據了這個關係

$$uvw=-\frac{q}{8}.$$

要適合這個條件 $uvw=-\frac{q}{8}$,只須按照下面的配合:

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=\sqrt{t_1}(-\sqrt{t_2})(-\sqrt{t_3})=(-\sqrt{t_1})\sqrt{t_2}(-\sqrt{t_3})$$

$$=(-\sqrt{t_1})(-\sqrt{t_2})\sqrt{t_3}.$$

所以方程式(2)的四個根是

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3} \\ y_2&=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3} \\ y_3&=-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3} \\ y_4&=-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

習　　題

試解以下各方程式;

1. $x^4+x^2+4x=3$.

2. $x^4-10x^2+20x=16$.

3. $x^4-9x^2-12x+10=0$.

第十四章

偏分數

202. 偏分數. 這個恆等式

$$\frac{x-5}{x^2-1}\equiv\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-1}$$

表示一個眞分數$\frac{x-5}{x^2-1}$是兩個眞分數$\frac{3}{x+1}$和$\frac{-2}{x-1}$之和.在本章內我們研究怎樣把一個有理眞分數拆做幾個更簡分數之和,而這幾個更簡分數自身無法再拆.這樣拆成的分數叫做"偏分數".這就是把幾個分數倂成一個分數的逆法

我們的問題只在眞分數上,只要研究眞分數就夠了眞分數就是牠的分子的次數比分母的次數低的分數.至於任何假分數總可以化做一個整數和一個眞分數之和.

例如,
$$\frac{3x^2-2}{x^2-5}\equiv 3+\frac{13}{x^2-5}.$$

203. 第一種情形. 設使

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\cdots\cdots+l}{a_1x^n+b_1x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots\cdots+l_1}$$

是一個最簡的有理眞分數, $g(x)$是n個一次因數的連乘積,而這些因數各不相等,就是,

$$g(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n).$$

我們假定 $R(x)$ 可以拆做 n 個偏分數,牠們的分母是 $x-r_1, x-r_2, \cdots\cdots, x-r_n$. 因爲每個分數的分子的次數比分母的次數低,所以各分子都是常數.

於是我們有

$$R(x)=\frac{A}{x-r_1}+\frac{B}{x-r_2}+\frac{C}{x-r_3}+\cdots\cdots+\frac{L}{x-r_n}.$$

把這些偏分數加攏來,就有

$$R(x)=$$

$$\frac{A(x-r_2)\cdots(x-r_n)+B(x-r_1)(x-r_3)\cdots(x-r_n)+\cdots+L(x-r_1)\cdots(x-r_{n-1})}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)}$$

這是顯而易見的,這個分數的分子的次數比分母的次數低,所以牠是一個眞分數.

這分數的分母和 $g(x)$ 完全相同,當牠的分子化簡以後和 $f(x)$ 也有同一的形式.

所以,設使我們從這恆等式

$$f(x)\equiv A(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n)+B(x-r_1)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$$
$$+\cdots\cdots+L(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_{n-1})$$

決定了 $A, B, C, \cdots\cdots, L$ 的值,那麼

$$\frac{A}{x-r_1}, \frac{B}{x-r_2}, \cdots\cdots, \frac{L}{x-r_n}$$

就是 $R(x)$ 的偏分數.

在下的習題1就是表示把一個已知分數拆成偏分數的方法.

習　題

拆成以下各分數的偏分數:

1. $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}$.

我們先假定這個分數可以拆成偏分數,而其分子各爲常數.

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}.$$

$\because\quad x^2\equiv A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1).$

因爲這是一個恆等式,所以不拘 x 是什麼值,這個關係常能成立的.現在爲計算便利起見,令 $x=-1$, 2, 和 1.

當 $x=-1$, 代入後得

$$1=0+B(-2)(-3)+0.$$

$$\therefore\quad B=\frac{1}{6}.$$

當 $x=2$,代入後得

$$4=c\ (1)(3).$$

$$\therefore\quad c=\frac{4}{3}.$$

當 $x=1$,代入後得

$$1=A\ (2)(-1).$$

$$\therefore\quad A=-\frac{1}{2}.$$

所以 $$\frac{x^3}{(x^2-1)(x-2)}\equiv-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{6(x+1)}+\frac{4}{3(x-2)}.$$

2. $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x+2)}$.　　3. $\dfrac{x^2+2}{x(x-1)(x-2)}$.

4. $\dfrac{?x(x+4)}{(2x+1)(x+1)(x-2)}$.　　5. $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$.

6. $\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$.　　7. $\dfrac{(1+3x)(1-2x)}{x(x^2-1)}$.

204. 第二種情形. 設使要拆做偏分數的這個分數的分母是許多個一次因數的連乘積,但這許多個一次因數並非完全各不相等.

設令這個分數的分母有一個因數 $(x-a)^m$,那麼對於這個因數,這里至少必有一個以 $(x-a)^m$ 爲分母的偏分數.不僅如是,這裏還可有許多個別的偏分數,而其分母爲

$$(x-a)^{m-1},\ (x-a)^{m-2},\cdots\cdots,\ (x-a)^2,\ x-a;$$

所以對於如 $(x-a)^m$ 這種形式的每個因數.我們可以假定有許多個偏分數之和如下:

$$\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B}{(x-a)^{m-1}}+\frac{C}{(x-a)^{m-2}}+\cdots\cdots+\frac{L}{(x-a)^2}+\frac{M}{x-a}.$$

這里的 $A, B, C, \cdots\cdots, L, M$ 都是常數.

在下的習題 1 就是表示怎樣決定 $A, B, C, \cdots\cdots$ 的值的方法.

習題

把以下各分數拆做偏分數:

1. $\dfrac{3x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}$.

假定這分數可以拆做偏分數如下:

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

那麼 $\quad 3x^2+1\equiv A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1).$

令 $x=1$, 則

$$3+1=C(2). \qquad \therefore \quad C=2.$$

令 $x=-1$, 則

$$3+1=A(-2)^2. \qquad \therefore \quad A=1.$$

選取 x 的一個別的值,令 $x=2$, 則

$$12+1=A(1)^2+B(3)(1)+C(3),$$

或 $\quad A+3B+3C=13.$

$$\therefore \quad 3B=6.$$

$$\therefore \quad B=2.$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

2. $\dfrac{5}{(x^2-1)(x+1)}$. 3. $\dfrac{3}{(x-1)^3}$. 4. $\dfrac{x+1}{x(x+1)^3}$.

5. $\dfrac{6x^2-x+1}{x(1-x)^2}$. 6. $\dfrac{x^2+1}{x^3(x-1)}$. 7. $\dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2-x+1}$.

205. 第三種情形. 設使要拆做偏分數的這個分數的分母有一個或幾個因數是二次式,而這些二次式再不能分為一次式的.

對於每個這樣的因數,我們可以假定有一個偏分數,而其分子為一次式,如

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

又對於每個因數如$(x^2+px+q)^m$這種形式,我們可以假定有許多個偏分數之和如下:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{Lx+M}{x^2+px+q},$$

這里的$A, B, C, \cdots\cdots$都是待決的常數.

習　題

把以下各分數拆做偏分數:

1. $\dfrac{8x^4+5x^3+13x^2+14x+13}{(x^2+1)^2(x+2)}$.

假定這分數可以拆做偏分數如下:

$$\frac{8x^4+5x^3+13x^2+14x+13}{(x^2+1)^2(x+2)}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{E}{x+2}.$$

$$\therefore\quad 8x^4+5x^3+13x^2+14x+13$$
$$=(Ax+B)(x+2)+(Cx+D)(x^2+1)(x+2)$$
$$+E(x^2+1)^2$$

$$\equiv (C+E)x^4+(2C+D)x^3+(A+C+2D+2E)x^2$$
$$+(2A+B+2C+D)x+(2B+2D+E).$$

令兩邊同類項的係數相等,

$$C+E=8.$$
$$2C+D=5.$$
$$A+C+2D+2E=13.$$
$$2A+B+2C+D=14.$$
$$2B+2D+E=13.$$

解這些方程式,則得

$$A=2,\ B=5,\ C=3,\ D=-1,\ E=5.$$

$$\therefore\quad \frac{8x^4+5x^3+13x^2+14x+13}{(x^2+1)^2(x+2)}\equiv\frac{2x+5}{(x^2+1)^2}+\frac{3x-1}{x^2+1}+\frac{5}{x+2}.$$

2. $\dfrac{4}{x^3-1}$.　　**3.** $\dfrac{1-3x}{2-x+2x^2-x^3}$.

4. $\dfrac{1+x^3}{x(1+x+x^2)}$.　　**5.** $\dfrac{2}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

6. $\dfrac{1+2x-5x^2+x^3}{(x^2+5)(x^2+1)}$.　　**7.** $\dfrac{x^2-4x+5}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}$.

第十五章

排列法 組合法 或然率

排列法

206. 元素. 排列法. 我們把幾件東西沿着一直線排列,可以排成許多式樣.例如我們有三本書要在書架上排列,可有如下的方法:

把 a, b, c 分別代表這三本書.我們可以把 a 放在第一位, b 放在第二位, c 放在第三位;或 c 放在第二位, b 放在第三位.於是可以排做 abc 和 acb.

若把 b 放在第一位,那就可以排做 bac 和 bca.

若把 c 放在第一位,那就可以排做 cab 和 cba.

這樣看來,這三本書在書架上排列,可以排成不同的六種樣子:

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

被排列的東西叫做"元素".

把 n 個元素排做許多式樣,而這許多式樣的不同,只是各元素的次序變換,並非元素本身有何更改.這許多式

樣叫做'排列法'.所以照上面所舉的例看來,三個元素有六種排列法.

四個元素的排列法有多少,我們討究如下:

因爲這里有四個元素,每個可以放在第一位,所以對於第一位共有四法.第一位旣已放定了一個元素,其餘三位把其餘三個元素放進去,如以上所說,共有六法.於是可知四個元素的排列法共有 4×6, 或 24 個,一一表示如下:

$abcd$	$bacd$	$cabd$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

照樣推論下去,把五個元素排列可得五行,而每行有 24 個排列法.所以五個元素共有 5×24 個排列法.

207. n 個元素的排列法. 以 P_n 代表 n 個元素所有的排列法.

先舉一個例來說,假如我們把 n 本書在書架上排列,看可以排成多少樣子.把數字 1, 2, 3, 4,……, 分別代表這許多書,那麼,一本書自然只有一個排法;兩本書可排做 12 和 21 共有兩個排法;三本書可排做

123 213 312

132　　231　　321

共有 3×2,或 6 個排法;四本書有 $4\times3\times2$, 或 24 個排法;……

把這些結果製成下表,

n	P_n
1	1
2	$1\cdot2$
3	$1\cdot2\cdot3$
4	$1\cdot2\cdot3\cdot4$
5	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$
6	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$
7	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$
……	………………

由此我們可以推斷 n 個元素所有的排列法可從下面的公式求得:

$$P_n=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots\cdots n,$$

這些連乘積 1, $1\cdot2$, $1\cdot2\cdot3$, ……, $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$, 叫做階乘 1, 階乘 2, 階乘 3, ……, 階乘 n, 通常寫做

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ \cdots\cdots,\ n!\ \text{或}\ \underline{1|},\ \underline{2|},\ \underline{3|},\ \cdots\cdots,\ \underline{n|}.$$

所以　　$P_n=n!$.

這個公式又可用算學歸納法證明 (§ 173). 我們暫時假定　$P_n=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1.$

要求得 P_{n+1}, 我們把 $n+1$ 個元素排成 $n+1$ 行 (§ 206),

每行當有 P_n 個排列法.

$$\therefore\quad P_{n+1}=(n+1)P_n=(n+1)(n)(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$
$$=(n+1)!.$$

所以設使這個公式對於 n 個元素是眞的,那麼牠對,於 $(n+1)$ 個元素也是眞的.

因為我們已知當 $n=4$,這個公式是對的,所以當 $n=5$ 也是對的,當 $n=6$, ……,不拘 n 是什麼正整數都是對的.

208. 基本定理. 上節所述的那個公式是建設在下面的一個原理上的:

設使一件事可用 m 個方法做成,當這件事任用一個方法做成後,又有一件事可用 n 個方法做成,那麼這兩件事聯合做成可有 mn 個方法.

例如,從上海到漢口,有十個輪船可搭,但回來不可搭原船.問往返共有幾法?因為去時有十個輪船可搭,就是有10法;回來不可搭原船,只有九個輪船可搭,就是有 9 法,所以往返共有 $10\times9=90$ 法.

習 題

1 排列 a, b, c, d, e 五個字母.

2. 排列 a, b, c, d 但首尾須是 b 和 d.

3. 8 個元素可有多少排列法?

4. 把"April"這個字裏的字母排列可有多少方法?

5. 7 個人坐在一條長櫈上可有多少坐法?

209. n 個元素的排列法,但其中有相同的元素. 以前所研究的排列法,所有元素我們都當作各不相同;設使 n 個東西,其中有幾個是一樣的,則其排列法可求得如下:

先把這幾個相同的東西用符號來分別清楚,好像牠們是各不相同的了.例如,把 $abbb$ 寫作 $ab_1b_2b_3$. $ab_1b_2b_3$ 可以排成四組如下,第一組 a 在第一位,第二組 a 在第二位,第三組 a 在第三位,第四組 a 在第四位,而每組有六種排列法.

$ab_1b_2b_3$	$b_1ab_2b_3$	$b_1b_2ab_3$	$b_1b_2b_3a$
$ab_1b_3b_2$	$b_1ab_3b_2$	$b_1b_3ab_2$	$b_1b_3b_2a$
$ab_2b_1b_3$	$b_2ab_1b_3$	$b_2b_1ab_3$	$b_2b_1b_3a$
$ab_2b_3b_1$	$b_2ab_3b_1$	$b_2b_3ab_1$	$b_2b_3b_1a$
$ab_3b_1b_2$	$b_3ab_1b_2$	$b_3b_1ab_2$	$b_3b_1b_2a$
$ab_3b_2b_1$	$b_3ab_2b_1$	$b_3b_2ab_1$	$b_3b_2b_1a$

我們如若把 b 所有的附屬數字取消,那麽每組只有一個排列法了.於是原有的4!個排列法,只留下 $\frac{1}{6}(4!)$,或 $\frac{4!}{3!}$ 個排列法.

推想起來,求 n 個東西的排列法,若其中有 p 個東西

相同,我們可暫用符號把牠們分別清楚,於是所有的排列法也是$n!$;這里可分爲若干組,每組中的排列法,其相異之處只是這 p 個東西的位置互相調動,此外的東西絕不變位.這樣看來,每組所有的排列法等於 p 個東西的排列法,就是$p!$,所以共有$\frac{n!}{p!}$組.

把分別的符號取消,那麼每組中所有的排列法完全相同,就是一組只有一個排列法.所以這里共有$\frac{n!}{p!}$個排列法.

設使在這 n 個東西中,除有 p 個東西相同外,另有 q 個東西相同;我們把$\frac{n!}{p!}$個排列法分成若干組,每組有 $q!$ 個排列法;其相異之處只是這 q 個東西的位置互相調動.

所以這里共有$\dfrac{\frac{n!}{p!}}{q!}=\dfrac{n!}{p!\,q!}$組.

把分別這 q 個東西的符號取消,那麼每組只有一個排列法;所以排列法的數等於組數,就是$\frac{n!}{p!\,q!}$.

同樣推論下去,在 n 個元素中若有一種是 p 個,另一種是 q 個,……,那麼排列法共有

$$P_n=\frac{n!}{p!\,q!\cdots\cdots}.$$

習　題

1. 排列 $aabbbc$.

2. "Short" 這個字裏的字母共有多少排列法?

3. "Mathematics" 這個字裏的字母,可排成多少式樣?

4. 3 個白球, 1 個藍球, 2 個紅球,可排成多少式樣?

210. 從 n 個元素中取出 r 個來排列.

這里共有 r 個位置,就是第 1 位,第 2 位,第 3 位, ……, 第 $(r-1)$ 位,第 r 位.

1 2 3 $r-1$ r

○ ○ ○…………………○ ○

n $(n-1)$ $(n-2)$ $[n-(r-1-1)]$ $[n-(r-1)]$

n 個元素每個都可以放在第 1 位; 第 1 位既放定了一個元素,那麽其餘 $(n-1)$ 個元素每個都可放在第 2 位; 第 2 位既放定了一個元素,那麽其餘 $(n-2)$ 個元素每個都可放在第 3 位;同樣推論到第 r 位.根據基本定理 (§208), 可知從 n 個元素中取出 r 個來排列,其方法共有

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

習 題

1. 10 個兵排成一隊,有多少排法?

2. "player" 這個字裏的字母取出 3 個來排列, 有多少方法?

3. 顏色不同的旗有 7 面, 同時展開 4 面排做標記, 可

做成幾種標記?

4. 把"Illinios"的字母排列,可有幾法?

5. 從 1122334 中取出 6 個數字來排列,可排成多少不同的數?

6. 把11面旗排做標記,可做多少種?但其中 3 面是白的, 4 面是藍的, 2 面是黑的, 1 面是紅的.

7. 5 個學生有 8 個坐位,可有多少坐法?

211. 圓周上的排列法. 當許多東西排列在一個圓周上,或任何閉合曲線上,設使把牠們對同一方向移過同一位數,那麼牠們相互的次序沒有改變;所以其中有一個東西的位置沒有關係.我們可以設想在 n 個東西中把一個放在指定的位置而求其餘 $(n-1)$ 個東西的排列法.例如,有四個人, A, B, C, D 坐在一張圓桌的周圍;無論我們從 $A, B, C,$ 或 D 起頭,只要對着同一方向,排列的次序是一樣的.

因為 $(n-1)$ 個東西有 $(n-1)!$ 個排列法,所以 n 個東西的圓周排列法有 $(n-1)!$

習題

1. 6 個人圍着一張圓桌而坐,有多少坐法?

2. 試證 n 個鑰匙扣在一個鋼圈上有 $\frac{(n-1)!}{2}$ 個扣法.

(把這個鋼圈繞着牠自己的一根直徑轉過180°,每個排列法就有兩次)。

3　把30粒顏色不同的小珠穿成手鐲,可成多少種?

組　合　法

212. 組合法. 設使選取 A, B, C 爲一組,那麽雖變更 A, B, C 的次序,這一組的性質是不改的. $ABC, ACB, BCA, BAC,$ ……說是三個東西的不同的"排列法",但是牠們的"組合法"只算是一個.普泛說來,只是一組東西不管牠們的排列怎樣,那就叫做"組合法".

213. 組合法的計算. 從 n 個東西中取出 r 個來排列,其排列法的數,我們曾以 ${}_nP_r$ 表示.在每次取出 r 個東西的組合法中,一個組合法有 $r!$ 個排列法.所以從 n 個東西中取出 r 個成一組,其組合法的數乘以 $r!$ 必等於 ${}_nP_r$. 以符號表明這個關係,就是

$$r!\,({}_nC_r)={}_nP_r,$$

或
$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

分子分母同乘以 $(n-r)!$, 則得

$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

所以
$$ {}_nC_r={}_nC_{n-r},$$
何故?

這就是說從 n 個東西中取出 r 個來和從 n 個東西中取出 $(n-r)$ 個來,兩方所有組合法的數是相等的.

214. 組合法的總數. 在二項式的公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

內,各係數是 $1, {}_nC_1, {}_nC_2, {}_nC_3, \cdots\cdots$.

設令 $a=b=1$, 則得

$$2^n=1+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n.$$

所以從 n 個東西中取出 1 個, 2 個, 3 個, ……, $(n-1)$ 個, n 個來,其組合法的總數是 2^n-1.

習　　題

1. 從15人中選出 4 人,有多少選法?

2. 今有10點, 沒有 3 點在一直線上,從中聯結兩點畫一直線,能畫多少根?

3. 從 7 個律師和 6 個商人中,選出 3 個律師和 4 個商人合成一組,共有幾法?

4. 從16人中選出 8 人,選法有多少?

5. 從 A 到 B 有 2 條路,從 B 到 C 有 3 條路,從 C 到 D 也有 3 條路.一個人要從 A 到 D, 有多少走法?

6. 8 個人排成一列,其中有2人各不得排在兩端.共有

多少排法?

7. 今有20點,沒有3點在一直線上,聯結其中3點畫一三角形,可畫多少三角形?設使其中有4點在一直線上,可畫三角形若干?

8. 從14人中選出4人,有多少選法?選出4人中,A必須在內,有多少方法?選出4人中,A必須在內而B不可在內,有多少方法?

9. 於30點中作平面,能作多少?但其中沒有4點同在一平面上.

10. 今有男8人女6人,從中選出7人須有3男和4女,有多少方法?

11. 從1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8中選取3個數字排成偶數,能成多少個?

12. 從10人中選出3人:(1) A須被選,有幾法?(2) A須落選,有幾法?

13. 一個人有22個朋友,其中有14個是男的;他請17個朋友喫飯,其中有10個須是男的,共有幾法?

14. 某校有60個學生和5個先生,選出3個先生和2個學生成一組,可成多少組?

15. 顏色不同的旗有6面,掛起1面,2面,……,或6面,一旗掛在他旗之上.這樣可做成多少不同的標記?

或然率

215. 或然率. 一個袋裏裝着3個白球和4個黑球,把手伸進去隨便取出一個球來,試問取出來的要是一個白球,機會的多少何如?

這個問題可以解答如下:在這袋裏共有7個球,不論哪個球,都有被取的可能性,絕無這球比那球容易取得的分別,就是各球被取的可能性是絕對均等的.於是我們從這袋裏取出一個球來可有7個不同的方法,而在這7個可能方法中有3個都是取得一個白球.所以取得白球的機會是3比7或$\frac{3}{7}$,而取得黑球的機會是$\frac{4}{7}$.

現在我們可從這個例子推廣起來說,**設有一事,其成功的方法可有p個,其失敗的方法可有q個,而且無論成敗,每個方法的可能性是絕對均等的,那麼這事成功的機會爲$\frac{p}{p+q}$,而失敗的機會爲$\frac{q}{p+q}$.**

事無論成敗,機會無論大小多少,如$\frac{p}{p+q}$或$\frac{q}{p+q}$統稱爲"或然率".$\frac{p}{p+q}$叫做成功的或然率,$\frac{q}{p+q}$叫做失敗的或然率.

這是顯而易見的,一事成敗或然率之和等於 1.

216. 或然率應用的一斑 現在舉幾個例子來略示或然率的用處如下:

(1) 把兩顆骰子擲下去,只要有一個 6 點向上,試求其或然率.

把兩顆骰子擲下去,可有 $6\times6=36$ 個式樣.這 36 就是 $p+q$. 既然只要有一個 6 點向上,所以一顆骰子有了 6 點向上,另一骰子向上的點數須是 1, 2, 3, 4, 5, 那麼共有 5 個式樣.於是 p 等於 $5\times2=10$. 故所求的或然率爲

$$\frac{p}{p+q}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}.$$

(2) 把八個銅元同時丟在地上,其中至少要有一個銅元是面向上的,問這個或然率當是什麼?

遇到這樣的問題,應該先求失敗的或然率,因爲至少要有一個銅元是面向上的,足見沒有一個銅元的面向上才算是失敗,就是八個銅元個個背向上,但這是唯一的方法.所以失敗的或然率爲 $\frac{1}{2^8}$.因知成功的或然率當爲 $1-\frac{1}{2^8}=\frac{255}{256}$.

(3) 把六顆骰子擲下去,何以"不同"常有,"滿盈"則絕無而僅有?(一,二,三,四,五,六各點都有,叫做"不同";有六個六

點,叫做"滿盆".)

$$\text{"不同"的或然率}=\frac{p}{p+q}=\frac{6!}{6^6}.$$

$$\text{"滿盆"的或然率}=\frac{p}{p+q}=\frac{1}{6^6}.$$

"不同"的或然率比"滿盆"的或然率大得多,所以"不同"常有而"滿盆"不常有.

(4) 一個瓶裏裝着6個白球,4個紅球,2個黑球:(a)從瓶裏取出四個球來,要都是白的,或然率該是什麽?(b)從瓶裏取出六個球來,要其中三個是白的,二個是紅的,一個是黑的,試求這個或然率.(c)哪個或然率大?

(a) 這里 $p+q={}_{12}C_4$, $p={}_6C_4$.

所以或然率 $=\dfrac{{}_6C_4}{{}_{12}C_4}=\dfrac{1}{33}$.

(b) 這里 $p+q={}_{12}C_6$, $p={}_6C_3\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_1$.

所以或然率 $=\dfrac{{}_6C_3\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_1}{{}_{12}C_6}=\dfrac{20}{77}$.

(c) $\dfrac{20}{77}>\dfrac{1}{33}$.

習題

1. 一個袋裏裝着4個紅球,8個黑球,12個白球.今從袋裏取出一個球來要是(a)紅的,(b)白的,(c)非黑的,試求各或然率.

2. 擲下一顆骰子,既不要 3 點也不要 4 點,這或然率該是什麼?

3. 擲下兩顆骰子,合算起來要得 7 點,這或然率該是什麼?

4. 把三顆骰子擲下去,要得三個 5 點,應有什麼或然率?

5. 同時擲下兩個銅元,要都是面向上的,應有什麼或然率?把一個銅元連擲兩次,要每次是面向上,這或然率該是什麼?

6. 同時擲下 3 個銅元,只要有一個的面向上,其或然率何如?

7. 12個人排成一列,其中有 A, B 二人要並立一處,問有多少機會?

8. 一個瓶裏裝了16個球,其中 7 個是白的, 6 個是黑的, 3 個是紅的.從瓶裏一次取出三個球來,要都是紅的,要都不是紅的,要白的,紅的,黑的各一個.試求各或然率.

9. 擲下兩顆骰子,要點數相同,又擲下三顆骰子,只要其中有兩顆同點數.試求各或然率.

10. 從 factor 和 banter 兩個字裏,各取一個字母出來,要這兩個字母相同,其或然率該是什麼?

11. 有八個人圍圓桌而坐,要指定其中二人並坐一處,

應有什麼或然率?

12. 把一顆骰子連擲三次, 1 點向上至少要有一次, 這或然率該是什麼?

第十六章

極限論和不定式

極　限　論

217. 極限的意義. 在初等算學上關於極限的例子是常有的.在幾何學上,一個有n邊的內接正多邊形,當n無限地增加時,圓的面積就是牠的面積的極限值.又如這個幾何級數

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots$$

當n無限地增加時,我們可求得S_n的極限值.又如在一根曲線上某點的切線,我們看做是通過某點而轉移到極限地位的一根割線(§166).

一個變數x的極限可以解釋如下:

"設δ為一個任何微小的正數.倘若變數x和常數a的絕對差可使小於δ並永小於δ,那麼就說變數x漸近於常數a而以a為其極限".

若用符號來表示,那麼"x的極限等於a"一語可寫做

$\lim x=a$;"x漸近於a而以a為其極限"一語可寫做$x\to a$;"x和a的絕對差"可寫做$|x-a|$.

對於極限的定義應該特別注意的地方就是$|x-a|$不但可使小於δ並須永小於δ. 例如,對於這個幾何級數

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots,$$

我們可把$S_1, S_2, S_3,\cdots\cdots$的值列成下表:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$

當n經過這些連續值1, 2, 3, 4的時候,$\left|S_n-\frac{15}{16}\right|$可使小於指定的一個任何微小正數$\delta$,當$n$恰等於4,牠就恰等於零.但是當$n$增加而超過了4,$\left|S_n-\frac{15}{16}\right|$也增加而不能永小於$\delta$的任何指定值;若指定$\delta$的值小於$\frac{1}{32}$(圖132),$\left|S_n-\frac{15}{16}\right|$便不能比$\delta$更小了.

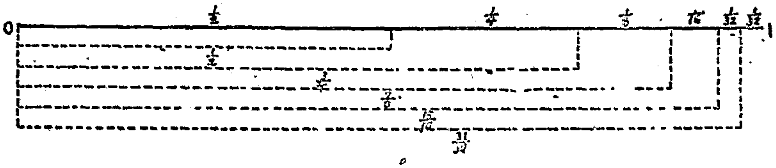

圖　132

所以S_n不是漸近於$\frac{15}{16}$而以$\frac{15}{16}$為其極限S_n是一個漸

大的變數而常小於其極限.

然而一個變數也可大於其極限.例如,有 n 邊的一個外切正多邊形,當 n 逐漸增加時,牠的面積 A_n 逐漸縮小,漸近於圓的面積 A 而以 A 爲其極限,但是 A_n 終比 A 要大些.

還有的呢,一個變數可以輪流地大小於其極限.如這個幾何級數 $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16}, \cdots\cdots$ 的 n 項之和就是這樣的一個變數.這和的極限是 $\frac{2}{3}$. S_n 的連續值是 $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \cdots\cdots$ 這些值是輪流地大小於 $\frac{2}{3}$,但是當 n 逐漸加大,$\left|S_n-\frac{2}{3}\right|$ 必逐漸減小而近於零.

由此看來,一個變數只能有一個極限.

218. 無限小. 一個以零爲其極限的變數 x 叫做"無限小"或"無窮小".用符號表示,可寫做 $\lim x=0$,或 $x\to 0$.

設 x 爲一變數,漸近於 a 而以 a 爲其極限.則 $x-a$ 爲無限小,以符號表示則可寫爲

$$\lim_{x\to a}|x-a|=0.$$

無限小是一個變數而不是一個常數;嚴格說來,牠已不是一個通常的數了,這是應該特別留意不可含糊過去的.

219. 無限大. 當 n 無限地增加時,這個級數 1, 2 4,

8, 16……的 n 項之和是沒有極限的,這和可使大於並永大於指定的任何大的正數.總而言之,一個變數,如可使大於並永大於指定的任何大的正數,那麼牠就叫做"無限大"或"無窮大".x 變成無限大時,若以符號表示則可寫爲 $x\to\infty$.

從無限小和無限大的定義看來,可得以下二說:

設 n 是一個有限常數,又設 x 爲無限小,則 $\frac{n}{x}$ 變成無限大,就是若 $x\to 0$, 則 $\frac{n}{x}\to\infty$.

設 n 是一個有限常數,又設 x 爲無限大,則 $\frac{n}{x}$ 變成無限小,就是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{x}=0$.

220. 定理. 設 u 和 v 都是無限小, 又設 X 和 Y 是兩個變數,但都小於一個有限正數 K, 那麼 $Xu+Yv$ 必是無限小.

設 δ 是一個任何微小的正數,那麼 u 和 v 都可使小於並永小於 δ, 就是

$$|u|<\delta, \qquad |v|<\delta;$$

又 $$|X|<K, \qquad |Y|<K.$$

$$\therefore \quad |Xu|<\delta K, \qquad |Yv|<\delta K.$$

因 $$|Xu+Yv|\leqq|Xu|+|Yv|,$$

$$\therefore \quad |Xu+Yv|<2\delta K.$$

現在設使我們選取這樣的一個 δ, 就是 $2\delta K<\varepsilon$, 這 ε 是一個任何微小的正數,那麼

$$|Xu+Yv|<\varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}}(Xu+Yv)=0,$$ 於是可知 $Xu+Yv$ 必是無限小了.

本定理所證明的,只有 X 和 Y 兩個變數,其實不拘有多少個變數也可同樣證明.

221. 定理. 設 x 和 y 是兩個變數,各漸近於 a 和 b 而各以 a 和 b 爲其極限,那麼牠們的和,差,積,商各有如下的關係:

1. $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(x+y)=\lim_{x\to a}x+\lim_{y\to b}y.$$

2. $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(x-y)=\lim_{x\to a}x-\lim_{y\to b}y.$$

3. $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(xy)=(\lim_{x\to a}x)(\lim_{y\to b}y).$$

4. $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim_{x\to a}x}{\lim_{y\to b}y},$$ 設 $b\neq 0$.

先求證 1:

因爲 $|x-a|\to 0,\ |y-b|\to 0,$ § 217

$$\therefore\quad X(x-a)+Y(y-b)\to 0, \qquad \text{§ 220}$$

就是 $$\lim\,[X(x-a)+Y(y-b)]=0.$$

令 $$X=Y=1,$$

那麼 $$\lim\,[x-a+y-b]=0,$$

或 $$\lim\,[x+y-(a+b)]=0;$$

這就是證明 $$\lim\,(x+y)=a+b=\lim x+\lim y.$$

用同樣方法可求證2,只須令

$$X=1,\ Y=-1.$$

求證3,設 $x-a=u$, $y-b=v$, 而 u 和 v 都是無限小,

那麼 $$x=a+u,\ y=b+v.$$

相乘, $$xy=ab+bu+(a+u)v,$$

就是 $$xy-ab=bu+(a+u)v.$$

但 $bu+(a+u)v$ 是無限小, § 220.

$$\therefore\quad xy-ab \text{ 也是無限小.}$$

所以 $$\lim xy=ab=(\lim x)(\lim y).$$

求證4,以 $y=b+v$ 除 $x=a+u$.

那麼
$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b+v}+\frac{u}{b+v}$$
$$=\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b+v}-\frac{a}{b}\right)+\frac{u}{b+v}$$
$$=\frac{a}{b}-\frac{a}{b(b+v)}v+\frac{1}{b+v}u.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{+1}{b+v}u+\frac{-a}{b(b+v)}v.$$

因為 $b\neq 0$, 所以 $\frac{1}{b+v}$ 漸近於 $\frac{1}{b}$, 而 $\frac{-a}{b(b+v)}$ 漸近於 $-\frac{a}{b^2}$.

所以 $\frac{1}{b+v}u+\frac{-a}{b(b+v)}v$ 是無限小, § 220.

$\therefore\quad \frac{x}{y}-\frac{a}{b}$ 也是無限小.

$\therefore\quad \lim \frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{\lim x}{\lim y}$, 只要 $\lim\ y\neq 0$.

從 3 看來,下列的關係卽能成立:

5. $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n=(\lim\limits_{x\to a} x)^n$. 6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} x}$.

7. $\lim\limits_{x\to a} Kx=Ka=K\lim\limits_{x\to a} x$, K 是一個常數.

不定式

222. 函數的極限值. 設 $f(x)$ 是 x 的一個有理整函數,又設 a 是一個有限數,那麼

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

因為一個有理整函數是永具連續性的,不論 x 取任何有限值.

設有一個有理函數 $f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$, $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是 x 的有理整函數,又設 a 是一個有限數,那麼

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\phi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)}=\frac{\phi(a)}{\psi(a)}=f(a),$$

只要當 $x=a$ 時, $\psi(x)$ 不等於零.

但是假使 $\psi(a)=0$ 而這個有理函數 $f(x)$ 是一個最簡分數——就是分子分母沒有公因數——那麼 $f(x)\to\infty$.

習題

試求下面各函數的極限值:

1. $\dfrac{x+3}{x+1}$, 當 $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{1+3}{1+1}=2.$$

2. $\dfrac{x^2+1}{x-3}$, 當 $x\to 3$.

因 $f(3)=\dfrac{9+1}{0}$, 故這函數無極限值,就是

$$\frac{x^2+1}{x-3}\to\infty, \text{ 當 } x\to 3.$$

3. $\dfrac{x^2-4}{x+1}$, 當 $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{0}{3}=0.$$

4. $\dfrac{x^2-9}{x-2}$, 當 $x\to 3$.

5. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2}$, 當 $x\to 2$.

6. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^4-4}$, 當 $x\to 2$.

7. $\dfrac{x^3+27}{x^3-27}$, 當 $x\to -3$.

223. 不定式. 當 $x=3$, 這個函數

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

變成$\frac{0}{0}$，這樣一個形式在計算上是毫無意義的.將$f(x)$簡約後,則得

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3,$$

這是一個恆等式,牠的恆等性不至消失,除非$x=3$

倘若我們不令x直等於3，只令x漸近於3而以3為其極限,那麼

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6.$$

因為若先把3代替了x，這個分數$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$就變為無意義的符號$\frac{0}{0}$了,所以我們不如先從x不等於3着想而把這個情形連續下去,直到x等於3，我們儘可承認$f(x)$的值等於$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$; 這是很便當又很合理的.

當$x\to\infty$，這個函數$f(x)=\frac{x^2+3}{2x^2+x-1}$變成$\frac{\infty}{\infty}$；這樣一個形式在計算上也是毫無意義的.

把x^2同除$f(x)$的分子和分母,則得

$$\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

因為當$x\to\infty$，$\frac{3}{x^2}$，$\frac{1}{x}$，$-\frac{1}{x^2}$都是無限小,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

以上兩個例子可以表明求$f(x)$的極限值的方法,當$f(x)$變成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$兩種形式的時候.

這兩種形式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$就叫做"不定式".還有別種不定式如$0\cdot\infty$和$\infty-\infty$. $0\cdot\infty$可以化做$\frac{0}{0}$,只須先做乘法而後設法求其極限.求$\infty-\infty$的極限,只須先做減法而後設法求其極限.

習　題

試求下面各函數的極限值:

1. $\frac{x^3-1}{x-1}$, 當 $x\to 1$.
2. $\frac{n-1}{n+1}$, 當 $n\to\infty$.
3. $\frac{x+1}{x-2}$, 當 $x\to 2$.
4. $\frac{x-3}{x(x-3)^2}$, 當 $x\to 3$.
5. $\frac{(x-1)^2}{x(x-1)^2}$, 當 $x\to 1$.
6. $\frac{x+1}{x}$, 當 $x\to\infty$.
7. $\frac{x^3-2x}{3x^3+5x^2}$, 當 $x\to\infty$.
8. $\frac{x^2-x+3}{2x^2+x-4}$, 當 $x\to\infty$.
9. $\frac{x^2+x+1}{x+1}$, 當 $x\to -1$.
10. $\frac{x^2+x-2}{2x+4}$, 當 $x\to\infty$.
11. $(x^2+2x-3)\cdot\frac{1}{x-1}$, 當 $x\to 1$.
12. $\frac{3}{x}-\frac{1}{x(x+3)}$, 當 $x\to 0$.

第十七章

微分法

224. 引申函數. 翻閱 §169, 何謂"引申函數"? 若以 $f'(x)$ 表明 $f(x)$ 的引申函數,則得

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

這樣看來,引申函數原是 $\frac{0}{0}$, 但是這里的 $\frac{0}{0}$ 和前章所論的 $\frac{0}{0}$ 略有不同.在本章內專論這樣的 $\frac{0}{0}$.

從前論及引申函數的時候, 限定 $f(x)$ 是 x 的一個有理整函數其實 $f(x)$ 可以是 x 的任何函數;凡 $f(x)$ 都有牠的引申函數的.

225. 所加數. 設有一個變數 x, 把另一個數加到 x 上去,不論所加的這個數是正的還是負的,我們都稱牠爲"所加數".若以符號表示,則 x 的所加數可寫做 Δx, y 的所加數可寫做 Δy, z 的所加數可寫做 Δz, ……例如,

設 $y=x^2$, 則 $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$;

設 $y=\sin x$, 則 $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$;

設 $y=a^x$, 則 $y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$;

設 $y=f(x)$, 則 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

226. 微分法. 前已說過，$f(x)$的引申函數是

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

我們現在還可改用一個更便當而更有意義的形式來表示牠.

設 $y=f(x)$. x 起了變化，y 必跟着牠起變化.

設 x 增加 Δx，則 y 必增加 Δy，就是

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

那麼 $$\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

兩邊除以 Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

這就是 y 的所加數和 x 的所加數之比. 當 $\Delta x\to 0$，那麼 $\Delta y\to 0$，而 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限值就是 y 對於 x 的引申函數，可用符號 $\frac{dy}{dx}$ 來表示.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

這里 $\frac{dy}{dx}$ 不可當作一個分數，只可當作一種符號，用來表示這個分數 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限值的. 這 $\frac{dy}{dx}$ 有時叫做"微分係數"

設 $y=3x^2+5x-4$，試求 $\frac{dy}{dx}$，就是 y 的引申函數或微分係數.

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)-4.$$

$$\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)-4-y=6x\Delta x+3(\Delta x)^2+5\Delta x.$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+5+3\Delta x.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+5+3\Delta x)=6x+5.$$

已知 $y=f(x)$ 而求$\frac{dy}{dx}$,這個動作叫做"微分",這個方法叫做"微分法",求得的$\frac{dy}{dx}$叫做 y 對於 x 的"引申函數"或"微分係數".

227. 微分法的例示. 微分一個函數,其進行方法可分四步如下:

(a)　把 Δx 加到 x 上去,又把 $x+\Delta x$ 代替 x,於是決定了 $y+\Delta y$,就是 y 的新值.

(b)　從 y 的新值上減去其原值則得 Δy.

(c)　除以 Δx 則得 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(d)　令 $\Delta x=0$ 則得 $\frac{dy}{dx}$.

用這個方法演算幾個例題如下:

1. 微分 $y=2x^3-6x+5$.

x 加 Δx,則得

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^3-6(x+\Delta x)+5;$$

故 $$\Delta y=2(x+\Delta x)^3-6(x+\Delta x)+5-2x^3+6x-5$$
$$=(6x^2-6)\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3;$$

以 Δx 除之,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2-6+6x\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2-6.$$

2. 微分 $y=\dfrac{x}{x+1}$.

$$y+\Delta y=\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}.$$

$$\Delta y=\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{\Delta x}{(x+\Delta x+1)(x+1)}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{(x+\Delta x+1)(x+1)}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{(x+1)^2}.$$

3. 微分 $y=\sqrt{x}$.

$$y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}.$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

卽令 $\Delta x=0$, 則 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{0}{0}$, 這是一個不定式,故須另想方法如下:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

習　題

微分下面各函數:

1. $y=x^4-2x^2+3x-4.$
2. $y=(x-a)^3.$
3. $y=(t+2)(3-2t).$
4. $y=\frac{1}{x^3}.$
5. $y=\frac{mx}{n-x}.$
6. $x=\frac{2y-5}{y+2}.$
7. $y=\frac{x^2+a^2}{x+a}.$
8. $x=\frac{t}{(t-1)^2}.$
9. $y=\sqrt{x+2}.$
10. $x=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}.$
11. $y=x^{\frac{3}{2}}.$

228. $\frac{dy}{dx}$在幾何學上的意義. $\frac{dy}{dx}$在代數學上的意義總算說得明明白白了,牠在幾何學上有無意義?能否使我們對於牠的概念更加瞭解?

方程式$y=f(x)$在幾何學上不是根直線就是根曲線.設P和Q(圖 133)是曲線$y=f(x)$上的二點.

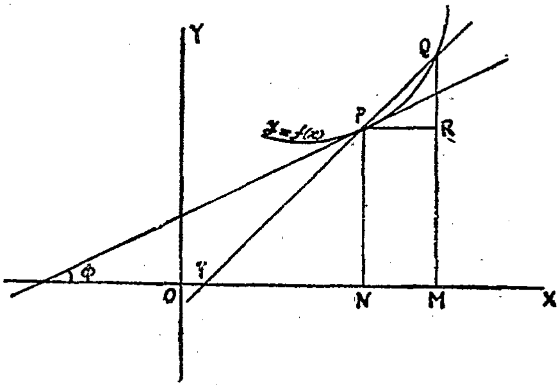

圖 133

設 (x, y) 是 P 的坐標, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 是 Q 的坐標.

書 PN 和 QM 垂直於 OX, 又畫 PR 平行於 OX 而遇 QM 於 R, 所以 $QR=\Delta y$, $PR=\Delta x$. 聯結 PQ. 引長 QP 使遇 OX 於 T.

那麼 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{QR}{PR}=\tan QPR=\tan PTN.$$

當 Q 漸近於 P, TPQ 就變成這曲線的一根切線, 所以 $\tan PTN$ 變成這切線的斜率.

於是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 變爲 $\frac{dy}{dx}$.

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\tan\phi$, ϕ 是這切線和 OX 所成的角.

所以 $\frac{dy}{dx}$ 是在曲線 $y=f(x)$ 上任何點 (x, y) 的切線的斜率.

229. 引申函數可以表示速率. 設有一個動體(圖134)在 t 時間內經過距離 $OP=s$, s 是 t 的函數;現在我們要表明這個動體在 P 點的速率.

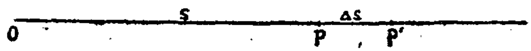

圖　134

設 Δs 是這個動體在 Δt 時間內所經過的距離 PP' 在 P 點以前的運動是等速的還是不等速的,儘可不管,假使在 P, P' 中間的運動是等速的,那麼牠的速率應等於 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. 如若在 P, P' 中間的運動是不等速的,那麼 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 只是一種平均速率,並且當 Δt 愈小, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 愈近於在 P 點的速率.

所以在 P 點的速率 $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$.

若以 v 表示速率,則 $v=\frac{ds}{dt}$.

於是可知 $\frac{ds}{dt}$ 是 s 的增加率.

同樣, $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 各是 x 和 y 的增加率.

230. 加速率. 距離 s 的增加率叫做速率 v. 上面已經說過,速率 v 的增加率叫做"加速率",若以 α 表之,則得

$$\alpha=\frac{dv}{dt}.$$

設有一動體依照 $s=t^3$ 的關係運動.

那麼牠的速率 $v=\frac{ds}{dt}=3t^2$,

而牠的加速率 $\alpha=\frac{dv}{dt}=6t$.

231. 為要更了解引申函數起見,可研究下面的兩個問題.

1. 一個人從 A 到 B (圖 135) 穿過一條街道,每秒鐘走5

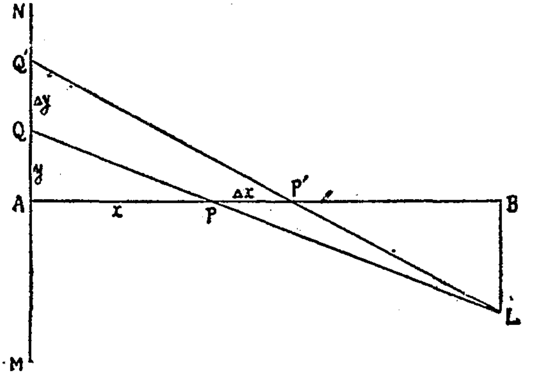

圖 135

尺.放在 L 地方的一盞燈投射他的影子在 MN 牆上. AB 長36尺, BL 長 4 尺.這個影子在牆上移動得多少快,當他在離 A 16尺的地方?在離 A 26尺的地方?在離 A 30尺的地方?

設 P 和 Q 是人和影子的所在地,又設 $AP=x$, $AQ=y$.

那麼 $$\frac{y}{x}=\frac{BL}{PB}=\frac{4}{36-x},\quad y=\frac{4x}{36-x}. \tag{1}$$

當他從 P 走到 P', 影子從 Q 動到 Q'; 就是 $\Delta x=PP'$, $\Delta y=QQ'$. 設所需時間為 Δt.

那麼
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}. \tag{2}$$

設想 Δt 逐漸減少，Δy 和 Δx 也必同時逐漸減小，於是(2)的兩邊都達到了極限，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y\text{的增加率}}{x\text{的增加率}};$$ §229

這就是
$$\frac{\text{在任何點}Q\text{影子的速率}}{\text{人的速率}}=\frac{dy}{dx}.$$

將(1)微分，則得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{144}{(36-x)^2}.$$

所以在任何點 Q 影子的速率

$$=\frac{144}{(36-x)^2}\cdot(\text{人的速率})$$

$$=\frac{144}{(36-x)^2}\cdot(5\text{ 尺每秒鐘})$$

$$=\frac{720}{(36-x)^2}\text{ 尺每秒鐘}$$

$=1.8$ 尺每秒鐘當 $x=16$;

$=7.2$ 尺每秒鐘，當 $x=26$;

$=20$ 尺每秒鐘，當 $x=30$.

2. 有一條20尺長的梯，牠的頂靠在牆上，牠的脚在地

上以每秒鐘 2 尺的速率從牆滑動出去.梯頂動得多少快,當梯脚在離牆12尺遠的地方?在離牆16尺遠的地方?

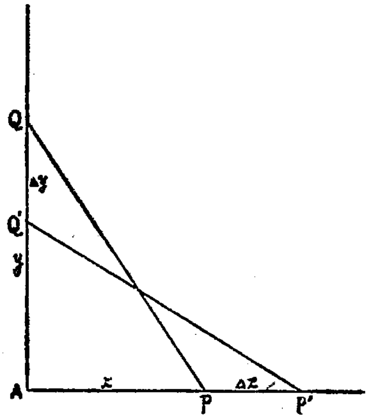

圖 136

設 PQ (圖 136) 是這梯所在的一個位置.

設 $AP=x$, $AQ=y$;

那麼 $$y=\sqrt{400-x^2}. \tag{3}$$

當梯脚從 P 動到 P', 梯頂從 Q 動到 Q'; 就是 $\Delta x=PP'$, $\Delta y=QQ'$.

與問題 1 同理,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

於是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}};$$

這就是 $$\frac{\text{梯頂在}Q\text{點的速率}}{\text{梯脚的速率}}=\frac{dy}{dx}.$$

微分(3), $$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{400-x^2}}.$$

所以,梯頂在 Q 點的速率

$$=-\frac{x}{\sqrt{400-x^2}}\cdot(\text{梯脚的速率})$$

$$=-\frac{2x}{\sqrt{400-x^2}}\text{尺每秒鐘.}$$

從圖上看來,就可曉得這個負號是表示 x 增加同時 y 減少的意義.所以 x 和 y 的增加率是不同號的.

當 $x=12$, 梯頂的速率 $=-1\frac{1}{2}$ 尺每秒鐘.

當 $x=16$, 梯頂的速率 $=-2\frac{2}{3}$ 尺每秒鐘.

從這兩個問題看來,我們就可知道 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是 y 和 x 的"所加數之比",而 $\frac{dy}{dx}$ 是牠們的"增加率之比".

【練習】 1. 有半徑等於 r 寸的一塊金屬圓板,受熱膨脹,牠的半徑每秒鐘膨脹 m 寸.試求其面積的膨脹率.

2. 有半徑等於 r 寸的一個金屬球受熱膨脹,牠的半徑每秒鐘膨脹 m 寸.試求其體積的膨脹率.

3. 什麼時候這個分數 $\frac{x^3}{x^2+a^2}$ 的增加率和 x 的增加率一樣?

第十八章

微分法的公式

232. 微分法前已說過,但以前所舉的例子都是些很簡單的函數,使用這個基本方法去微分那些很簡單的函數,自然還不覺得怎麼費事,若要微分複雜一點的函數那就麻煩不堪,難於進行了.所以我們要先把函數分做幾類然後微分各類函數立成公式,那麼不拘何等函數總可使用公式去微分牠,便利得很.

在這些公式內,u 和 v 都是代表變數,都是 x 的函數;c 和 n 都是代表常數.

$\frac{du}{dx}$也可寫做$\frac{d}{dx}u$;這個符號$\frac{d}{dx}$表明"的引申函數".於是$\frac{d}{dx}u$就是表明 u 的引申函數;$\frac{d(u+v)}{dx}$可寫做$\frac{d}{dx}(u+v)$,就是表明$(u+v)$的引申函數,餘類推.

233. 代數函數的微分法的公式.

$$\text{I.}\quad \frac{dx}{dx}=1.$$

$$\text{II.}\quad \frac{dc}{dx}=0.$$

$$\text{III.}\quad \frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{V.}\quad \frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}.$$

$$\text{VI.}\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

$$\text{VII.}\quad \frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

234. 公式I的證法. 這從引申函數的定義就可證明的. 因爲 $\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$, 所以牠的極限 $\frac{dx}{dx}=1.$

235. 公式II的證法. 所謂常數是一個不起變化的數,就是牠的所加數加上去以後不能使牠發生變化也就是牠的所加數等於零.

所以 $\Delta c=0$ 又 $\frac{\Delta c}{\Delta x}=0$; 所以牠的極限 $\frac{dc}{dx}=0.$

236. 公式III的證法. 設 $y=u+v$, 又設 x 得了所加數 Δx, 同時 u 和 v 各得所加數 Δu 和 Δv. 於是 y 的新值是

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v,$$

所以

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v.$$

兩邊除以 Δx, 則得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

當 Δx 漸近於零,則得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx},$$

就是
$$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

同樣可證明

$$\frac{d}{dx}(u\pm v\pm w\pm\cdots\cdots)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{dw}{dx}\pm\cdots\cdots.$$

237. 公式IV的證法. 設 $y=uv$,

那麼
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$

而
$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\Delta u+(u+\Delta u)\Delta v.$$

兩邊除以 Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+(u+\Delta u)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

當 $\Delta x\to 0$, 則得

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},$$

就是
$$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}.$$

同樣,

$$\frac{d}{dx}(uvw)=\frac{d}{dx}(uv\cdot w)=w\frac{d}{dx}(uv)+uv\frac{dw}{dx}$$

$$=w\left(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\right)+uv\frac{dw}{dx}$$

$$=vw\frac{du}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+uv\frac{dw}{dx}.$$

由此推得

$$\frac{d}{dx}(u_1u_2\cdots\cdots u_n)=u_2u_3\cdots\cdots u_n\frac{du_1}{dx}+u_1u_3u_4\cdots\cdots u_n\frac{du_2}{dx}+\cdots\cdots$$
$$+u_1u_2\cdots\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}.$$

238. 公式V的證法. 這是公式IV的一個特殊情形,因爲$\frac{dc}{dx}=0$.但是也可獨立證明如下:

$$y=cu.$$
$$y+\Delta y=c(u+\Delta u).$$
$$\Delta y=c\Delta u.$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$
$$\frac{dy}{dx}=c\frac{du}{dx},\text{ 或 }\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}.$$

239. 公式VI的證法. 設 $y=\frac{u}{v}$.

那麼 $$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v};$$

所以 $$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v},$$

而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}.$$

當 $\Delta x\to 0$, 則得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \text{或} \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

本公式也可從公式IV證明如下:

因 $$y=\frac{u}{v},$$

故 $$yv=u.$$

從公式IV, $$v\frac{dy}{dx}+y\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx},$$

所以 $$v\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-y\frac{dv}{dx}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

240. 公式VII的證法. 第一種情形,設n是一個正整數.

這是公式IV的一個特殊情形,只要令$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$各等於$u$.

於是 $$\frac{d}{dx}(u^n)=u^{n-1}\frac{du}{dx}+u^{n-1}\frac{du}{dx}+\cdots\cdots \text{共有} n \text{項}$$

$$\therefore =nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

第二種情形,設n是一個正分數$\frac{p}{q}$.

$$y=u^{\frac{p}{q}},$$

$$y^q = u^p.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(y^q) = \frac{d}{dx}(u^p).$$

從第一種情形, $qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = pu^{p-1}\frac{du}{dx}$;

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\cdot\frac{u^{p-1}}{y^{q-1}}\frac{du}{dx},$$

就是 $$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\cdot\frac{u^{p-1}}{u^{p-\frac{p}{q}}}\frac{du}{dx} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}\frac{du}{dx}.$$

第三種情形,設 n 是一個負數 $-m$.

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

從公式 VI,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{d}{dx}(u^m)}{u^{2m}} = \frac{-mu^{m-1}\frac{du}{dx}}{u^{2m}}$$

$$= -mu^{-m-1}\frac{du}{dx}.$$

習　題

微分下面各函數:

1. $y = x^4$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^{4-1}\frac{dx}{dx} = 4x^3.$$

2. $y = 3x^4 + 4x^3$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(3x^4+4x^3)=\frac{d}{dx}(3x^4)+\frac{d}{dx}(4x^3)$$

$$=3\frac{d}{dx}(x^4)+4\frac{d}{dx}(x^3)=3\cdot 4x^3+4\cdot 3x^2$$

$$=12x^3+12x^2=12x^2(x+1).$$

3. $y=x^{\frac{3}{2}}+2.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}+2)=\frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}})+\frac{d}{dx}(2)$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}\frac{dx}{dx}+0=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

4. $y=3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}+a.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(3\sqrt{x})-\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{d}{dx}(a)$$

$$=\frac{d}{dx}(3x^{\frac{1}{2}})-\frac{d}{dx}(2x^{-\frac{1}{2}})+\frac{d}{dx}(x^{-3})+\frac{da}{dx}$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}+(-3)x^{-3-1}+0$$

$$=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3x^{-4}$$

$$=\frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{x^4}.$$

5. $y=\frac{x+3}{x^2+3}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right)=\frac{(x^2+3)\frac{d}{dx}(x+3)-(x+3)\frac{d}{dx}(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+3-(x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-6x-x^2}{(x^2+3)^2}.$$

6. $y=(x^2+2)^{\frac{2}{3}}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+2)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{2}{3}-1}\frac{d}{dx}(x^2+2)$$

$$=\frac{2}{3}(x^2+2)^{-\frac{1}{3}}2x$$

$$=\frac{4x}{3(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}.$$

7. $y=(x^2+1)\sqrt{x^3-x}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[(x^2+1)\sqrt{x^3-x}]$$

$$=(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^3-x)^{\frac{1}{2}}+(x^3-x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^2+1).$$

$$\frac{d}{dx}(x^3-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^3-x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x^3-x)$$

$$=\frac{1}{2}(x^3-x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2-1).$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)=2x.$$

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}(x^3-x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2-1)+(x^3-x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$=\frac{(x^2+1)(3x^2-1)+4x(x^3-x)}{2(x^3-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{7x^4-6x^2-1}{2(x^3-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

8. $y=3x^{10}-2x^6+x^3-5.$

9. $y=6\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{\sqrt{x^3}}-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}.$

10. $y=(x+2a)(x-a)^2.$

11. $y=(x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})^4.$

12. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$

13. $y=x(x^3+5)^{\frac{4}{3}}.$

14. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

15. $y=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}.$

16. $y=\sqrt{\frac{a-x}{x}}.$

17. $x=t(t^2+a^2)^{\frac{n-1}{2}}.$

18. $y=\frac{(2t^2-3)^3}{(t^3+2)^2}.$

19. $y=(x+1)^3(3x-8)^4(x+2)^6.$

20. $y=\frac{2x^2+1}{x^3}\sqrt{1-x^2}.$

21. $y=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}.$

22. 有一個器皿是倒正圓錐形,牠的半個頂角是30°.現在放水到器皿裏去,每分鐘放進一立方尺.水面升起的速率怎樣,當水深 6 寸時?當水深 1 尺時?當水深 2 尺時?

23. 有一火車正午從 A 向西出發,牠的運動方程式是 $s=9t^2$.同時另一火車在 A 西 40 里的 B 也向西出發,牠的運動方程式是 $s'=2t^3$.這里 s, s' 表明里數,t 表明時數.問何時這兩火車最接近,其時相距若干里?又何時牠們的加速率

相等?

24. 已知 $s=\frac{a}{t}+bt^2$, 試求其速率和加速率.

25. 有一個等邊三角形,牠的邊每分鐘加長10尺,而牠的面積每秒鐘放大10平方尺.問這三角形多大?

241. 對數和指數函數的微分法的公式.

$$\text{VIII.}\quad \frac{d}{dx}\log_a u=\log_a e\cdot\frac{\frac{du}{dx}}{u}.$$

$$\text{IX.}\quad \frac{d}{dx}\log_e u=\frac{\frac{du}{dx}}{u}.$$

$$\text{X.}\quad \frac{d}{dx}a^u=\log_e a\cdot a^u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XI.}\quad \frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XII.}\quad \frac{d}{dx}u^v=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+\log_e u\cdot u^v\frac{dv}{dx}.$$

242. 公式VIII的證法.

設 $y=\log_a u$,

那麼 $y+\Delta y=\log_a(u+\Delta u)$,

$$\Delta y=\log_a(u+\Delta u)-\log_a u=\log_a\frac{u+\Delta u}{u}$$

$$=\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)=\frac{\Delta u}{u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}.$$

兩邊除以 Δx, $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\cdot\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{u}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

當 Δx 漸近於零, Δu 也必漸近於零.

現在 $$\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z.$$

因爲, 設令 $$\frac{u}{\Delta u}=z,$$

則 $$\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}=\left(1+\frac{1}{z}\right)^z,$$

於是當 Δu 漸近於零, z 必漸近於無限大.

但是我們已經知道 * $$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e,$$

所以 $$\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}=e.$$

所以對於 (1) 的兩邊各取極限,則得

---

* 試求 $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$.

用二項式定理展開這個式子,

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=1+z\frac{1}{z}+\frac{z(z-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{z}\right)^2+\frac{z(z-1)(z-2)}{\underline{|}}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots\cdots,$$

就是, $$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=1+1+\frac{1-\frac{1}{z}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

當 z 無限地加大,這些分數 $\frac{1}{z}$, $\frac{2}{z}$, $\frac{3}{z}$, ……都漸近於零,所以

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots=e.$$

$$\frac{dy}{dx}=\log_a e\cdot\frac{\frac{du}{dx}}{u}.$$

243. 公式IX的證法. 這是公式VIII的一個特殊情形.當 $a=e$, 則 $\log_a e=\log_e e=1$.

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\log_e u=\frac{\frac{du}{dx}}{u}.$$

注意——以後凡不寫明底的對數都是以 e 爲底的,如 $\log u$ 就是 $\log_e u$.

244. 公式X的證法. 設 $y=a^u$.

兩邊各取對數,則得

$$\log y=u\log a.$$

從公式IX,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\log a\frac{du}{dx}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\log a\cdot a^u\frac{du}{dx}.$$

245. 公式XI的證法. 這是公式X的一個特殊情形,只要把 e 代替 a.

246. 公式XII的證法. 設 $y=u^v$.

兩邊各取對數, $\log y=v\log u$.

從公式IX,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{v\frac{du}{dx}}{u}+\log u\frac{dv}{dx}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+\log u\cdot u^v\frac{dv}{dx}.$$

習　　題

微分以下各函數:

1. $y=\log(2x^3+3x^2)$.
2. $y=x^n\log(ax+b)$.
3. $y=\frac{1}{x\log x}$.
4. $y=\log\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$.
5. $y=a^xe^x$.
6. $y=\log(a^x+b^x)$.
7. $y=(e^{2x}-1)^4$.
8. $y=\log\log x-\frac{1}{\log x}$.
9. $y=\log\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.
10. $y=x[(\log x)^2-2\log x+2]$.
11. $y=\log\frac{\log x}{1+\log x}$.
12. $y=\log_x(x+a)$.
13. $y=x^{nx}$.
14. $y=(ax^2)^x$.
15. $y=x^{ax^2}$.
16. $y=(\log x)^x$.
17. $y=x^{(\log x)^n}$.
18. $y=\left(\frac{x}{x+a}\right)^{\frac{x}{a}}$.

247. 三角函數的微分法的公式.

在以下諸公式中,角 u 是用弧度法表明的.

$$\text{XIII.}\quad \frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XIV.}\quad \frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XV.}\quad \frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XVI.}\quad \frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XVII.}\quad \frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}.$$

$$\text{XVIII.}\quad \frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}.$$

248. 公式XIII的證法. 設 $y=\sin u$,

那麼 $$y+\Delta y=\sin(u+\Delta u);$$

所以 $$\Delta y=\sin(u+\Delta u)-\sin u.$$

在三角法上,

$$\sin A-\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B).$$

設以 $u+\Delta u$ 代 A, 以 u 代 B, 則得

$$\Delta y=2\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}.$$

所以, $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

當 Δx 漸近於零, Δu 也必漸近於零.

於是 $$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}=1.\qquad\left[\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right]$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}.$$

249. 公式XIV的證法. 這可從公式XIII轉化出來,只要把$\frac{\pi}{2}-u$代替u.

於是 $$\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-u\right).$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cos u,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\sin u,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=-\frac{du}{dx},$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}.$$

250. 公式XV的證法. 因為 $\tan u=\frac{\sin u}{\cos u}$,

所以 $$\frac{d}{dx}\tan u=\frac{\cos u\frac{d}{dx}\sin u-\sin u\frac{d}{dx}\cos u}{\cos^2 u}\quad\text{公式 VI}$$

$$=\frac{\cos^2 u\frac{du}{dx}+\sin^2 u\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

$$=\frac{\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

$$=\sec^2 u\frac{du}{dx}.$$

251. 公式XVI的證法. 這可從公式XV轉化出

來,只要把$\frac{\pi}{2}-u$代替u.

252. 公式XVII的證法. 因爲 $\sec u=\frac{1}{\cos u}$,

所以 $$\frac{d}{dx}\sec u=\frac{-\frac{d}{dx}\cos u}{\cos^2 u}=\frac{\sin u\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}=\sec u\tan u\frac{du}{dx}.$$

253. 公式XVIII的證法. 這可從公式XVII轉化出來,只要把$\frac{\pi}{2}-u$代替u.

習題

微分下面各函數:

1. $y=3\sin 3x\cos 2x-2\cos 3x\sin 2x.$

2. $y=\log\cos^2 x+2x\tan x-x^2.$

3. $y=\log(\sec mx+\tan mx).$

4. $y=(m-1)\sec^{m+1}x-(m+1)\sec^{m-1}x.$

5. $r=\log[\sec\theta\tan\theta(\sec\theta+\tan\theta)^2].$

6. $y=2\tan^3 x\sec x+\tan x\sec x-\log(\sec x+\tan x).$

7. $y=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}.$ 8. $y=\sin^3 4x\cos^4 3x.$

9. $y=(\sin 2x)^x.$ 10. $y=(\tan x)^{\sin x}$

11. $y=(\sin x)^{\log\cos x}$

254. 反三角函數的微分法的公式.

$$\text{XIX.}\quad \frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\text{XX.}\quad \frac{d}{dx}\cos^{-1}u=-\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\text{XXI.}\quad \frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}.$$

$$\text{XXII.}\quad \frac{d}{dx}\cot^{-1}u=-\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}.$$

$$\text{XXIII.}\quad \frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

$$\text{XXIV.}\quad \frac{d}{dx}\csc^{-1}u=-\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

255. 公式XIX的證法. 設 $y=\sin^{-1}u$,

那麽 $$\sin y=u.$$

兩邊微分, $$\cos y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx},$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\cos y}.$$

但是 $$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}=\pm\sqrt{1-u^2}.$$

若限定 y 角在第一和第四象限內,則 $\cos y$ 爲正

所以 $\cos y=\sqrt{1-u^2}$,

而 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

256. 公式XX的證法. 設 $y=\cos^{-1}u$,

那麼 $\cos y=u$.

兩邊微分, $$-\sin y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx},$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\sin y}.$$

但是 $\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}=\pm\sqrt{1-u^2}$.

若限定 y 角在第一和第二象限內,則 $\sin y$ 爲正.

所以 $\sin y=\sqrt{1-u^2}$,

而 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

257. 公式XXI的證法. 設 $y=\tan^{-1}u$,

那麼 $\tan y=u$.

兩邊微分, $$\sec^2 y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx},$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\sec^2 y}.$$

但是 $\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+u^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}.$$

258. 公式XXII的證法. 這可從公式XXI轉化出來,因爲 $\cot^{-1}u=\tan^{-1}\frac{1}{u}.$

於是
$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{1}{u}=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}$$

$$=-\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}.$$

259. 公式XXIII的證法. 設 $y=\sec^{-1}u,$

那麼
$$\sec y=u.$$

但是
$$\sec y=\frac{1}{\cos y},$$

所以
$$\frac{1}{\cos y}=u,$$

兩邊微分,
$$-\frac{-\sin y\frac{dy}{dx}}{\cos^2 y}=\frac{du}{dx},$$

就是
$$\sec y\tan y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\sec y\tan y}=\frac{\frac{du}{dx}}{\sec y\sqrt{\sec^2 y-1}}=\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

260. 公式XXIV的證法. 因爲 $\csc^{-1}u=\sin^{-1}\frac{1}{u},$

所以 $$\frac{d}{dx}\csc^{-1}u=\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{1}{u}=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{u^2}}}=-\frac{\dfrac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

習題

微分下面的函數:

1. $y=\tan^{-1}\frac{5x-1}{2}$.

2. $y=\sec^{-1}\frac{2x}{3}$.

3. $y=\sin^{-1}\frac{2x-7}{3}$.

4. $y=\tan^{-1}\frac{x-a}{x+a}$.

5. $y=\tan^{-1}(3\tan\theta)$.

6. $y=\sec^{-1}\sec^2\theta$.

7. $y=a\tan^{-1}\frac{x}{a}-b\tan^{-1}\frac{x}{b}$.

8. $y=\sin^{-1}\frac{m\sin x-n\cos x}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

9. $y=\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$.

10. $y=\sin^{-1}\frac{2}{e^x+e^{-x}}$.

11. $y=\tan^{-1}\frac{3x-2}{5}+\cot^{-1}\frac{3x-12}{6x+1}$.

12. $y=x^2\sec^{-1}\frac{x}{2}-2\sqrt{x^2-4}$.

13. $y=\tan^{-1}\frac{4(x-x^3)}{1-6x^2+x^4}$.

14. 下面是一個圓院子的平面圖(圖 137). AB 和 CD 是兩根互相垂直的直徑,長 200 尺. 一個人從 A 走到 B, 每秒鐘走 5 尺. C 處放了一盞燈,把人影投射在圍牆上. 試求這

人影沿圓牆移動的速率,當他在圓心時;當他在離圓心20尺,50尺,75尺的地方;當他在圓周上.

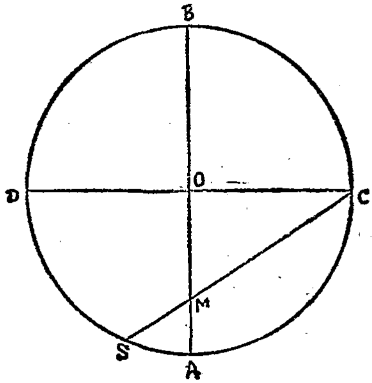

圖　137

261. 引申函數$\frac{dy}{dx}$從前不是說過只可看做一種符號,不可當作一個分數嗎?但是牠竟有與分數相同的幾種關係,現在分說於下:

(a) 以$\frac{dx}{dy}$表明$\frac{dy}{dx}$. 若y是x的函數,則x亦可當作y的函數.從前一種關係則有$\frac{dy}{dx}$,從後一種關係則有$\frac{dx}{dy}$;而這兩個引申函數可由一種簡單關係聯結起來.

這是顯而易見的, $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

不拘Δx和Δy小到如何程度.所以當Δx和Δy都漸近於零,

則得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{1}$$

這就是$\frac{dy}{dx}$和$\frac{dx}{dy}$的關係好像牠們都是尋常分數一樣.

例如，
$$x=\frac{a}{y+1}.$$

對於 y 微分，
$$\frac{dx}{dy}=-\frac{a}{(y+1)^2}.$$

依據(1)的關係，
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(y+1)^2}{a}=-\frac{a}{x^2}.$$

變更原式，
$$y=\frac{a}{x}-1.$$

對於 x 微分,亦得
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2}.$$

(b) 以$\frac{dy}{dz}$和$\frac{dz}{dx}$表明$\frac{dy}{dx}$,就是求函數的函數的引申函數. 若 y 是 z 的函數，z 又是 x 的函數,那麼 y 也是 x 的函數.遇到這樣情形，本可先消去了 z，而後求$\frac{dy}{dx}$,但是不必經過這消去 z 的手續,$\frac{dy}{dx}$也能求得.

因為 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}$,不拘 Δx, Δy, 和 Δz 小到如何程度.

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

這個關係好像三個引申函數$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{dz}{dx}$都是尋常分數一樣.例如，
$$\left.\begin{aligned}&y=z^5,\\&z=a^2-x^2.\end{aligned}\right\}$$

微分這兩個方程式,第一個對於 z, 第二個對於 x, 則得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dz}&=5z^4,\\ \frac{dz}{dx}&=-2x.\end{aligned}\right\}$$

依據 (2) 的關係,

$$\frac{dy}{dx}=5z^4(-2x)=-10x(a^2-x^2)^4.$$

先消去 z, $y=(a^2-x^2)^5$.

對於 x 微分,亦得 $\dfrac{dy}{dx}=-10x(a^2-x^2)^4.$

(1) 可算是 (2) 的一個特殊情形,只要令 $y=x$, 則得

$$\frac{dx}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dx}{dx}=1.$$

(2) 也可寫做

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dz}{dx}}=\frac{dy}{dz}. \tag{3}$$

這也時常用到的.

習　題

先求 $\dfrac{dx}{dy}$ 而後求 $\dfrac{dy}{dx}$(1—4):

1. $x=\dfrac{ay-h}{by-k}$.

2. $x=\sqrt{1+\sin y}$.

3. $x=\frac{y}{1+\log y}$.　　4. $x=a\log\frac{\sqrt{y+a}+\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$.

先求 $\frac{dy}{dz}$ 和 $\frac{dz}{dx}$ 而後求 $\frac{dy}{dx}$ (5—8):

5. $y=\frac{3z}{2z-1}$, $z=\frac{2x}{3x-2}$.　　6. $y=\log\frac{z^2+1}{z}$, $z=e^x$.

7. $y=e^z+e^{2z}$, $z=\log(x-x^2)$.

8. $y=\log\frac{az+b}{bz+a}$, $z=\sec x+\tan x$.

9. 微分 $(x^2+2)^2$ 對於 x^3.

設 $y=(x^2+2)^2$, $z=x^3$. 這就是要求 $\frac{dy}{dz}$.

$$\frac{dy}{dx}=4x(x^2+2),\qquad \frac{dz}{dx}=3x^2.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dz}=\frac{4x(x^2+2)}{3x^2}=\frac{4(x^2+2)}{3x}.$$

10. 求 $\frac{x^3}{a^3}+\frac{a^3}{x^3}$ 的引申函數對於 $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$.

11. 求 $\sin 3x$ 的引申函數對於 $\sin x$.

12. 微分 $\tan^{-1}\sqrt{x}$ 對於 $\log(1+x)$.

13. 微分 $\log\frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x-b\cos x}$ 對於 $\frac{1}{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x}$.

14. 已知 $x=5\cos\phi-\cos 5\phi$, $y=5\sin\phi-\sin 5\phi$; 求 $\frac{dy}{dx}$.

262. 引申函數的引申函數,或微分係數的微分係數. 微分 x 的一個函數則得引申函數,我們早

已知道了.所得的這個引申函數多半還是 x 的函數,所以還可微分,微分後所得的叫做"二次引申函數"或"二次微分係數";連續微分三次所得的結果,叫做"三次引申函數"或"三次微分係數";餘類推.

例如,

$$y=x^4,$$

$$\frac{dy}{dx}=4x^3,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=12x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=24x.$$

263. 記法. y 對於 x 的二次引申函數是以 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 表示的.

於是,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}.$$

同樣,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}.$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

例如,

$$y=x^4,$$

$$\frac{dy}{dx}=4x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=24x.$$

若 x 的原函數是以 $f(x)$ 表示的,那麽牠連續各次的引申函數表示如下:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \cdots\cdots, f^n(x).$$

264. 顯函數和隱函數. 專以 x 表明 y 如 $y=f(x)$,或專以 y 表明 x,如 $x=\phi(y)$,這叫做"顯函數",我們在前所論的都是顯函數.若 y 和 x 的關係混雜表示在一個方程式裏,如 $f(x,y)=0$,既不專以 x 表明 y,也不專以 y 表明 x,這叫做"隱函數".

265. 隱函數的微分法. 隱函數的微分法本沒有什麽特别,只須先把牠化做顯函數就好了.但是隱函數有時很難化做顯函數或竟化不來.不管牠容易化,很難化或化不來,總而言之,微分隱函數用不到先化做顯函數,今示例於下:

設有 $$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

對於 x 微分,

$$\frac{d}{dx}(a^2y^2+b^2x^2)=0;$$

$$\frac{d}{dx}a^2y^2+\frac{d}{dx}b^2x^2=0;$$

$$a^2\frac{d}{dx}y^2+2b^2x=0;$$

$$a^2\frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx}+2\,b^2x=0; \qquad \S\ 261,\ (2)$$

$$2a^2y\frac{dy}{dx}+2\,b^2x=0.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

若還要求二次微分係數,那麼

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{a^2yb^2-b^2xa^2\frac{dy}{dx}}{a^4y^2}=-\frac{b^2\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)}{a^2y^2}.$$

將$\frac{dy}{dx}$的值代入,則得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

若再微分,則得

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3b^6x}{a^4y^5}.$$

習　　題

1. $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$.

2. $x=y\log(xy)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. $(\cos\theta)^\phi=(\sin\phi)^\theta$, 求 $\frac{d\phi}{d\theta}$.

4. $ax^2+2hxy+by^2=1$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2x}{dy^2}$.

5. $ax^2+2hxy+by^2=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

6. $\tan\theta\tan\phi=m$, 求 $\frac{d\phi}{d\theta}$.

7. $(3x+y+6)^3(3y-3x+2)=c$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

8. $e^{xy}=a^xb^y$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

9. $\log(x^2+y^2)=2\tan^{-1}\frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

第十九章

圓

266. 普通二元二次函數. 二元二次函數的普通形式是

$$f_0(x, y)=Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C,$$

這里的係數 A, B, C, F, G 和 H, 除了 $A=B=H=0$ 以外,什麼值都可有的;就是 A, B, H 不可都等於零,因爲如此則二次的性質消失了.

267. 普通二元二次方程式. 這方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

是二元二次方程式中的一個最普通的形式,x 和 y 每有一對值適合這個方程式就是這方程式有一個解答.

我已經研究過也已經知道了,方程式 $y=mx+b$ (就是方程式 $Ax+By+C=0$, 也就是二元一次方程式) 是代表直線的.我們已經研究過也已經知道了,方程式 $y=ax^2+bx+c$ 或 $x=ay^2+by+c$ 是代表拋物線的.只有普通二元二次方程式 $Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$ 的圖形是什麼,我們還沒有知道,正待研究.但是爲便利起見,我們在研

究普通二元二次方程式以前應研究各種特殊的二元二次方程式,如 $y=ax^2+bx+c$ 或 $x=ay^2+by+c$ 就是特殊的二元二次方程式,就是在普通二元二次方程式裏令 B 和 H 都等於零,或令 A 和 H 都等於零.

268. 圓的標準方程式. 圓可以當作一個動點的軌跡,這動點在一平面上移動而離一定點等遠.圓的方程式可求得如下:以 (h, k) 表示圓心 C (圖 138),以 (x, y) 表示圓周上任一點 P,以 r 表示 P 與 C 的距離.那麼,$CP=r$ 不拘 P 的位置如何.

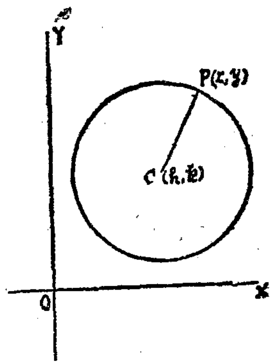

圖　138

但　$CP=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$.

$$\overline{CP}^2=(x-h)^2+(y-k)^2,$$

就是　$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

這就是圓的標準方程式.

在這方程式內,令 $h=k=0$,則圓心恰在原點上,而原方程式變爲　$$x^2+y^2=r^2.$$

習　題

寫出以下各圓的方程式並作其圖:

1. 圓心 $(2, 4)$,半徑 $=6$.

2. 圓心 $(-3\ 2)$, 半徑 $=5$.

3. 圓心 $(1,0)$, 半徑 $=7$.

4. 圓心 $(3,4)$ 並通過原點.

5. 圓心在 x 軸上,半徑 $=a$

6. 圓心在 y 軸上,半徑 $=b$.

7. 切於 x 軸,半徑 $=4$.

8. 切於兩軸,半徑 $=8$.

269. 圓的普通方程式. 這方程式

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{1}$$

展開後就變為

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0. \tag{2}$$

把方程式 (2) 和普通二元二次方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0 \tag{3}$$

比較一下,就知道要從 (3) 變到 (2), 只須令 $H=O$ 和 $A=B$; 如此則得

$$Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0. \tag{4}$$

方程式 (4) 是代表一個圓,只要 A, G, F 和 C 的值都是實數,但 A 不可等於零;這可證明如下: 先以 A 除各項,則得

$$x^2+y^2+2\frac{G}{A}x+2\frac{F}{A}y+\frac{C}{A}=0. \tag{5}$$

把 (5) 和 (2) 比較一下就可看出若要化 (5) 為 (2) 只須令

$$h=-\frac{G}{A},\ k=-\frac{F}{A}.\ \frac{C}{A}=\frac{G^2}{A^2}+\frac{F^2}{A^2}-r^2. \tag{6}$$

將$\frac{G^2}{A^2}$和$\frac{F^2}{A^2}$加入方程式(5)同時又減去,則有

$$\left(x^2+2\frac{G}{A}x+\frac{G^2}{A^2}\right)+\left(y^2+2\frac{F}{A}y+\frac{F^2}{A^2}\right)+\left(\frac{C}{A}-\frac{G^2}{A^2}-\frac{F^2}{A^2}\right)=0,$$

就是
$$\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+\left(y+\frac{F}{A}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{G^2}{A^2}+\frac{F^2}{A^2}-\frac{C}{A}}\right)^2. \qquad (7)$$

我們把方程式(7)觀察一下就曉得牠所表明的一件事實是:從(x, y)到$\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{A}\right)$的距離的平方是一定的,是等於$\frac{G^2}{A^2}+\frac{F^2}{A^2}-\frac{C}{A}$.這就是說:方程式(7)是一個圓的方程式,而這個圓是以$\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{A}\right)$爲中心,以$\frac{\sqrt{G^2+F^2-CA}}{A}$爲半徑的.但方程式(7)和方程式(4)形式雖異實際一樣,所以方程式(4)必是代表一個圓.

還有特殊情形,現在說明如下:

1. 當$G^2+F^2=C\cdot A$,那麼這圓的半徑是零,只有這一點$(x, y)=\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{A}\right)$適合於這方程式,而這圓叫做"點圓".

2. 當$G^2+F^2<C\cdot A$,那麼方程式(7)終不能被適合的,無論x和y有何實值.在這種情形之下,我們叫這個圓是"虛圓".

從此看來,一個方程式而有這樣的形式

$$Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0$$

必是代表一個圓,只要$A\neq 0$和$G^2+F^2>A\cdot C$.所以方程式

(4) 是圓的普通方程式.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{圓心是} & (h,k)=\left(-\dfrac{G}{A},-\dfrac{F}{A}\right) \\ \text{半徑是} & r=\sqrt{\dfrac{G^2}{A^2}+\dfrac{F^2}{A^2}-\dfrac{C}{A}}\end{array}\right\}. \tag{8}$$

270. 圓的特殊位置.

圓在特殊的位置時,牠的方程式是很簡單的.

設圓心在原點上,則

$$-\frac{G}{A}=h=0,\ -\frac{F}{A}=k=0,\ \frac{C}{A}=-r^2,$$

而原方程式變爲 $x^2+y^2=r^2$.

設圓心在 x 軸上,則

$$k=-\frac{F}{A}=0,\ \text{就是}\ F=0.$$

設圓心在 y 軸上,則

$$h=-\frac{G}{A}=0,\ \text{就是}\ G=0.$$

【練習】 寫出圓的方程式來,設令圓心在 x 軸上;在 y 軸上;在 x 軸的正邊而與原點相距 r.

271. 求一個已知圓的中心和半徑.

一個已知圓(就是牠的方程式已知)的中心和半徑很容易求得,只須用 § 269 的公式 (8),或將這已知的方程式化做 § 269 的方程式 (1). 試看下面的例題就可明瞭這

兩種求法:

現在有一個圓的方程式是

$$7x^2+7y^2-4x-y-3=0.$$

1. 全式以 7 除之並完成其平方,則有

$$x^2-\frac{4}{7}x+\frac{4}{49}+y^2-\frac{1}{7}y+\frac{1}{196}=\frac{3}{7}+\frac{4}{49}+\frac{1}{196},$$

或
$$\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{1}{14}\right)^2=\frac{101}{196}.$$

所以
$$h=\frac{2}{7},\ k=\frac{1}{14},\ r=\frac{\sqrt{101}}{14}.$$

2. 用 § 269 的公式 (8) 卽得

$$h=-\frac{G}{A}=\frac{2}{7},\ k=-\frac{F}{A}=\frac{1}{14},\ r=\sqrt{\frac{2^2}{7^2}+\frac{(\frac{1}{2})^2}{7^2}+\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{101}}{14}.$$

習　題

試求以下諸圓的中心和半徑;若是可能,並把圓畫出來:

1. $x^2+y^2=-4x$.　　2. $x^2+y^2+6y=0$.

3. $x^2+y^2-6x-8y=24$.　　4. $2x^2+2y^2+10x-6y-1=0$.

5. $x^2+y^2+10x+110=0$.　　6. $4x^2+4y^2-4x+16y-19=0$.

7. 試證 x 軸和 y 軸都是圓 $x^2+y^2=r^2$ 的對稱軸.

8. 試求圓 $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ 的截段,並比較在 x 軸上二截段相乘之積和在 y 軸上二截段相乘之積.

272. 從已知條件中求圓的方程式.

這方程式 $$Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0$$
內含有四個常數 A, G, F, C. 但全式若除以 A, 並把常數 b, c, d 代替 $\frac{2G}{A}, \frac{2F}{A}, \frac{C}{A}$, 則原方程式變為

$$x^2+y^2+bx+cy+d=0; \tag{1}$$

牠就只含有三個常數了.當圓的方程式以這個形式

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{2}$$

表示時,也只含有三個常數 $h, k,$ 和 r.

從幾何學上看來,要決定一個圓只須有三個條件,例如經過不在同一直線上的三點.所以要求得一個圓的方程式可先把已知點的坐標代入方程式 (1) 或 (2), 而後使用解聯立方程式的方法求出這些常數 b, c, d 或 h, k, r. 下面習題中的 1 和 2 就是表明這個方法.

習題

1. 有一三角形其頂點為 $A(-1, 2)$, $B(0, -3)$, $C(2, 3)$. 試求這三角形的外接圓的方程式.

把 A, B, C 的坐標代入方程式 $x^2+y^2+bx+cy+d=0$,則有

$$1+4-b+2c+d=0,$$
$$0+9+0-3c+d=0,$$
$$4+9+2b+3c+d=0.$$

解這三個聯立方程式則得

$$b=-\frac{11}{4},c=\frac{1}{4},d=-\frac{33}{4}.$$

所以這個外接圓的方程式是

$$4x^2+4y^2-11x+y-33=0.$$

2. 有一個圓,牠的半徑是$\sqrt{13}$,又通過 (0,4) 和 (6,0),試求其方程式.

設這個圓的方程式為

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

於是

$$(0-h)^2+(4-k)^2=13,$$

$$(6-h)^2+(0-k)^2=13.$$

解這兩個聯立方程式可得 h 和 k 的值.

試求通過以下各點的圓的方程式:

3. (0, 0), (5, 0), (0, 4).　　4. (−1, 2), (0, −3), (2, 3).

5. (a, 0), (−a, 0), (0, b).　　6. (2, −1), (3, −2).

7. 試求這樣一個圓的方程式,牠的中心是 (3, 4),又通過 (4, −3).

8. 試證這樣一個動點的軌跡必是一個圓, 牠移動時對於兩個定點的距離的平方之和是一定的.

9. 一個圓的中心是 (6, 8) 並與直線 $4x+3y+1=0$ 相切,試求其方程式.

10. 試求這樣一個圓的方程式,牠包圍着一個三角形,

而這三角形的三邊是在這三根線 $x+y+1=0$, $x-y-1=0$, 和 $y=4$ 上的.

11. 有一個點,牠與原點的距離是牠與 $(0,6)$ 的距離的二倍,試求牠的軌跡.

12. 有一個三角形,第一頂點與第二,第三頂點的距離之比是 $\frac{m}{n}$,試求第一頂點的軌跡.

13. 試求這樣一個圓的方程式,牠通過 $(-2,5)$ 並與兩坐標軸相切.

14. 試求這樣一個圓的方程式,牠的中心在直線 $3y+x=18$ 上,並通過 $(2,-3)$ 和 $(4,-1)$.

15. 試求直線 $x+2y+1=0$ 和圓 $x^2+y^2-12x=0$ 的交點.

273. **$f(x,y)=0$ 的切線的斜率.** 這裏 $f(x,y)=0$ 就是
$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$
$f(x,y)=0$ 的圖形雖還不曉得是個什麼樣子,但牠必是曲線決非直線,已是毫無疑義的了.牠既是曲線,那麼牠的斜率必隨着 x, y 的值而變;所謂牠的斜率就是牠的切線的斜率.我們要求 $f(x,y)=0$ 的切線的斜率,只要求 $\frac{dy}{dx}$ (§ 228). $f(x,y)=0$ 是一個隱函數的形式,當用隱函數的微分法 (§ 265) 求 $\frac{dy}{dx}$.

於是 $$\frac{d}{dx}(Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C)=0;$$

$$2Ax+2H\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+2By\frac{dy}{dx}+2G+2F\frac{dy}{dx}=0;$$

$$Ax+Hy+Hx\frac{dy}{dx}+By\frac{dy}{dx}+G+F\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{Ax+Hy+G}{Hx+By+F}.$$

今以 m 表示 $f(x,y)=0$ 的切線的斜率,

$$m=-\frac{Ax+Hy+G}{Hx+By+F}.$$

【練習】 試求以下各曲線的 m:

1. $y-x^2=0$.

這里　　$A=-1,\ B=0,\ F=\frac{1}{2},\ G=0,\ H=0.$

$$\therefore\quad m=-\frac{-x}{\frac{1}{2}}=2x.$$

2. $x^2+y^2=4$.

3. $x^2-xy+3=0$.

4. $x^3+xy+2=0$. $\left(m=\dfrac{dy}{dx}\right)$

5. $2y^2-3x+5=0$.

6. $x^2y-6x+3=0$. $\left(m=\dfrac{dy}{dx}\right)$

274. $f(x,y)=0$ 的切線的方程式. 設 (x_1,y_1) 爲切點,又設 m 爲這根切線的斜率.那麼依據了直線的點斜式 (§ 107),即得 $f(x,y)=0$ 的任何切線的方程式

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

275. 圓的切線的方程式. 在圓 $x^2+y^2-r^2=0$ 上任意指定一點 (x_1,y_1),以 (x_1,y_1) 爲切點的切線,其方程

式不難求得.

這里 $A=1, B=1, F=0, G=0, H=0.$

$$\therefore\quad m=-\frac{x}{y}.$$

所以在 (x_1, y_1) 的切線的方程式是

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

這可化爲 $$y_1y+x_1x=y_1^2+x_1^2,$$

就是 $$x_1x+y_1y=r^2.$$

276. 曲線的法線. 過切點垂直於切線的這根線叫做法線.所以法線的斜率是切線的斜率的負倒數.例如圓 $x^2+y^2=r^2$ 的法線的斜率是 $m=-\dfrac{1}{-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{y}{x}.$

習　題

1. 試求在 $x^2+y^2=r^2$ 圓上 (x_1, y_1) 點的法線的方程式.

試求在下面各曲線上 (x_1, y_1) 點的切線和法線的方程式:

2. $y=x^2.$　　　　3. $y^2=x^3.$

4. $xy=4.$　　　　5. $x^2+y^2=25.$

6. 在圓 $Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0$ 上任意指定一點 (x_1, y_1), 試證以 (x_1, y_1) 爲切點的切線的方程式是

$$Ax_1x+Ay_1y+G(x+x_1)+F(y+y_1)+C=0.$$

7. 試求這樣一個圓的方程式,牠以 $(3, 4)$ 爲中心並與直線 $4x-3y+22=0$ 相切.

8. 在圓 $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ 上有一點 $(6, 0)$, 試求過此點的切線和法線的方程式.

9. 在圓 $x^2+y^2-3x-11y-40=0$ 上有一點 $(2, -3)$, 試求過此點的切線和法線的方程式.

10. 有一個圓與 x 軸相切並經過二點 $(4, 9)$ 和 $(-3, 2)$, 試求其方程式.

11. 在圓 $x^2+y^2=25$ 內有一直徑通過 $(3, -4)$, 試求在這直徑兩端的切線的方程式.

12. 在圓 $x^2+y^2=25$ 和直線 $x+2y=10$ 的交點作二切線, 試求這二切線的交點與其夾角.

13. 直線 $ax+by+c=0$ 和圓 $x^2+y^2=r^2$ 相切.試求出在 a, b, c 中間的關係來.

14. 圓 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ 有一切線,其斜率爲 $\dfrac{-x_1-2}{y_1-3}$. 試求這切線的方程式及其切點.

15. 試求在 $3x-2y=6$ 和 $x^2+y^2=36$ 中間的夾角(在這直線和這圓的交點作切線,一切線和這直線所成的角便是).

277. 次切線和次法線. 在 x 軸上(圖 139), 切線 TP 的射影 TQ 叫做"次切線". 法線 PN 的射影 QN 叫做

"次法線".

因爲 $\tan\alpha = m = \frac{y_1}{TQ}$,

∴ 次切線 $TQ = \frac{y_1}{m}$.

因爲 $\tan\alpha_1 = n = \frac{y_1}{QN}$, 所以 $QN = \frac{y_1}{n}$. 但是 $n = -\frac{1}{m}$,

∴ 次法線 $QN = -my_1$.

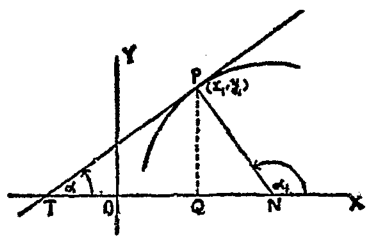

圖 139

【練習】 1. 試以 P 點 (圖 139) 的縱坐標和 PT 的斜率表明 PT 的長.

2. 試以 P 點的縱坐標和 PT 的斜率表明 PN 的長.

3. 在圓 $x^2+y^2=r^2$ 上任意指定一點 (x_1,y_1), 試求在這點的切線, 法線, 次切線, 和次法線的長.

278 從一個已知點到一個已知圓上的切線的長. 今以 t 表明切線 TP, 以 r 表明半徑 TC, 以 d 表明 CP (圖 140), 則有

$$t^2 = d^2 - r^2.$$

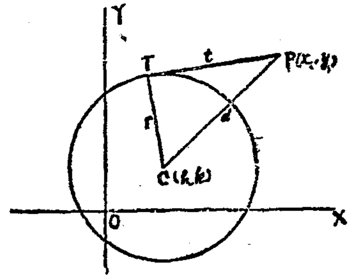

圖　140

但是　$$d^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2,$$

所以　$$t^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2.$$

由此可知我們要求從一個已知點(x_1,y_1)到一個已知圓$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$上的切線的長的平方,只須把這個已知點的坐標x_1和y_1代入這個圓的方程式

$$(x-h)^2+(y-k)^2-r^2=0.$$

【練習】 1. 從(x_1, y_1)到$x^2+y^2+2Gx+2Fy+C=0$的切線,其長可用公式$t^2=x_1^2+y_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C$求得.試證明之.

2. 試求從(4,5)到$x^2+y^2-4x-6y+10=0$的切線的長.

3. 試求這樣的一點,從牠到兩圓$x^2+y^2-8x+12=0$和$x^2+y^2-1=0$的切線的長同等於6.

279. 圓系. 根軸. 設有兩個已知圓(圖141)的方程式是

$$(1)\quad x^2+y^2+2G_1x+2F_1y+C_1=0,$$

和 (2) $x^2+y^2+2G_2x+2F_2y+C_2=0.$

那麼這方程式(3)

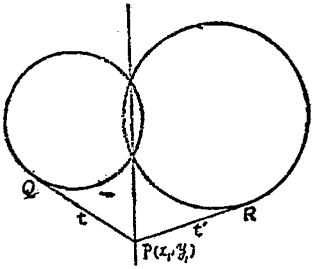

圖 141

$$(x^2+y^2+2G_1x+2F_1y+C_1)+k(x^2+y^2+2G_2x+2F_2y+C_2)=0.$$

代表一個圓系,而在這一系中的圓都通過這兩個已知圓的交點的.今將方程式(3)改爲另一形式 $(1+k)x^2+(1+k)y^2+2(G_1+kG_2)x+2(F_1+kF_2)y+(C_1+kC_2)=0.$ 這是顯而易見的了,方程式(3)代表一個圓.又一點的坐標,如若適合於(1)和(2),亦必適合於(3);可知圓(3)必通過圓(1)和圓(2)的交點了.

當 $k=-1$,方程式(3)變爲

$$2(G_1-G_2)x+2(F_1-F_2)y+C_1-C_2=0.$$

這是一根直線的方程式,這直線通過二已知圓的交點的,牠就叫做這二圓的"根軸."

兩個圓常有一根軸,牠們不必要相交.

習　題

1. 從根軸上的一點畫到二圓的切線必相等,試證之.

設二圓的方程式爲

$$x^2+y^2+2Gx+2Fy+C=0,$$

和 $$x^2+y^2+2G'x+2F'y+C'=0.$$

於是 $$t^2=x_1{}^2+y_1{}^2+2Gx_1+2Fy_1+C,$$

$$t'^2=x_1{}^2+y_1{}^2+2G'x_1+2F'y_1+C'.$$

$$\therefore \quad t^2-t'^2=2(G-G')x_1+2(F-F')y_1+C-C'.$$

因爲 (x_1, y_1) 在根軸上,所以 $2(G-G')x_1+2(F-F')y_1+C-C'=0$,

就是 $$t^2-t'^2=0.$$

$$\therefore \quad t=t'.$$

2. 試求以下二圓的根軸的方程式:

$$x^2+y^2-4x-6y-1=0,$$

$$x^2+y^2+6x+4y+7=0.$$

3. 試證二圓的根軸必垂直於牠們的聯心線.

4. 設有三圓,每二圓取一根軸,可得三根軸若這三根軸不相平行,則必同交於一點,試證之.

5. 試求以下三圓的三根軸的交點(叫做"根心"):

$$x^2+y^2-6x-4y+12=0,$$

$$x^2+y^2-\ \ 0x+91=0,$$

$$x^2+y^2=64.$$

6. 有一圓經過二圓 $x^2+y^2+2x-1\ \ y+25=0$ 和 $x^2+y^2=25$ 的交點和一點 $(6,8)$. 試求其方程式.

7. 試求下面二圓的根軸的方程式:

$$x^2+y^2+6x-16=0,$$

$$x^2+y^2-10x+21=0;$$

並畫出這二圓和這根軸來.

280. 圓的極方程式.

要求圓的極方程式(圖 142), 只須把

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ h=b\cos\alpha, \\ k=b\sin\alpha, \end{cases}$$

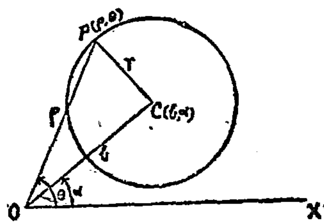

圖 142

代入這個方程式

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

圓的極方程式又可直接從餘弦定律得來, 因為依據餘弦定律而知 $\rho^2+b^2-2\,\overline{OP}\cdot\overline{OC}\cos(\theta-\alpha)=r^2,$

就是 $$\rho^2-2\rho b\cos(\theta-\alpha)+b^2-r^2=0, \qquad (1)$$

這就是圓的極方程式.

當極在圓心, 則 $b=0$ 而方程式 (1) 變為

$$\rho=r.$$

當極在圓周,則 $b=r$ 而方程式 (1) 變爲

$$\rho=2r\cos(\theta-\alpha);$$

這可寫做 $$\rho=2r\cos\theta\cos\alpha+2r\sin\theta\sin\alpha,$$

或 $$\rho=p\cos\theta+q\sin\theta;$$

這里 p 和 q 是在極軸上的截段和在 $90°$ 軸上的截段.

當極在圓周且極軸與圓相切,則方程式 (1) 變爲

$$\rho=2r\sin\theta.$$

第二十章

橢圓 雙曲線 拋物線

橢圓

281. 橢圓．焦點． 有一動點，牠與二定點的距離之和是一定的，牠的軌跡叫做"橢圓"．這兩個定點叫做這橢圓的"焦點"．設 F 與 F_1 為焦點(圖 143)，又設 P 為這軌跡

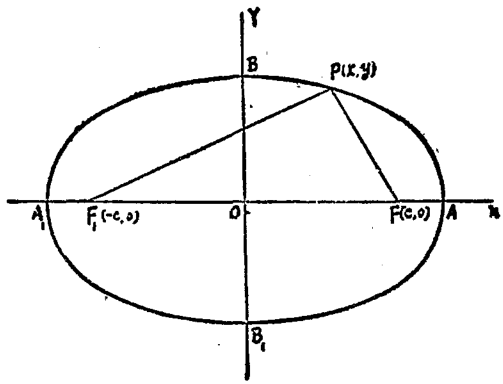

圖 143

上的任何一點，那麼 FP 與 F_1P 叫做這橢圓的"焦半徑"．

282. 橢圓的方程式． 因為 $FP+F_1P$ 是個常數，所以用 $2a$ 表明牠，令 O 為 FF_1 的中點，又令 $OF=OF_1=c$，以

O 爲原點, OF 爲 x 軸,則二焦點的坐標爲 (c, o) 和 $(-c, o)$.

因爲 $$F_1P+PF=2a,$$

所以 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a;$$

兩邊平方,則有

$$x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2+2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx)}=2a^2.$$

$$\therefore\quad (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=[2a^2-(x^2+y^2+c^2)]^2,$$

$$\therefore\quad -4c^2x^2=4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2),$$

$$\therefore\quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

把 b^2 代替 a^2-c^2,這方程式就變做

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

這就是橢圓的標準方程式.

283. 討論這方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 把 0 代替了 x, 則 y 的對應值爲 $+b$ 和 $-b$. 當 $y=0$, 則 x 的對應值爲 $+a$ 和 $-a$. 所以這橢圓在 x 軸和 y 軸上的截段是 a 和 b. 所以 $OA=OA_1=a$, $OB=OB_1=b$.

因爲 $F_1B=BF$, 又 $F_1B+BF=2a$, 所以 $F_1B=BF=a$. 於是 $a^2=b^2+c^2$.

A_1A 叫做"長軸", B_1B 叫做"短軸".

若 a 小於 b, 則橢圓的二焦點在 y 軸上.

若 a 和 b 的值相差愈少，則 c 的值愈小，而二焦點愈近於原點.當 $a=b$，則 c 的值爲零，而橢圓的方程式變爲圓的方程式 $x^2+y^2=a^2$. 所以一個圓可以當作一個橢圓的特殊情形，其二焦點與中心合而爲一.

橢圓的大小:——從橢圓的方程式 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 得

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{1}$$

由此可知 x 要有實值，y 的絕對值必須小於 b (寫做 $|y|<b$)；y 要有實值，x 的絕對值必須小於 $a(|x|<a)$.

這是顯而易見的了.這橢圓全在這長方形 $MNRS$ (圖 144) 之內，這長方形以原點爲中心，其邊與坐標軸平行而等於 $2a$ 和 $2b$.

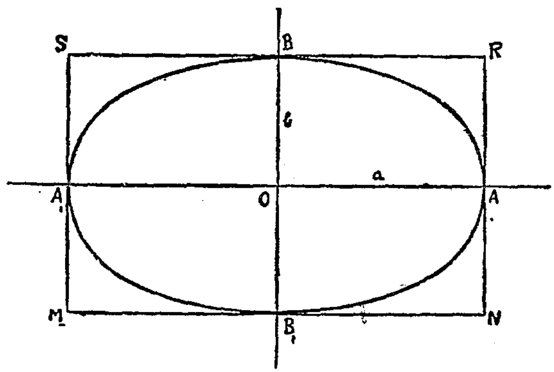

圖 144

橢圓的對稱性:——從方程式(1)看來，橢圓對於兩根坐標軸都是對稱的，因爲 x 每有一個值，y 必有兩個數同

而號異的對應值; y 每有一個值, x 必有兩個數同而號異的對應值.

284. 焦半徑. 今以 r_1 和 r 表明焦半徑 F_1P 和 FP 圖 145) 之長,則有

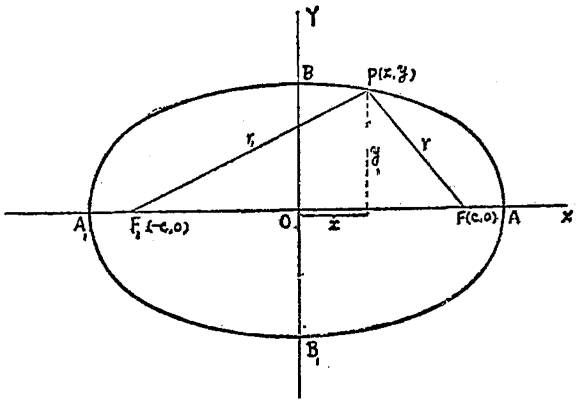

圖 145

$$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(x-c)^2+\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x^2-2cx+c^2)a^2+a^2b^2-b^2x^2}{x^2}}.$$

把 b^2+c^2 代替 a^2, 那麼

$$r=\sqrt{\frac{a^4-2ca^2x+c^2x^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2-cx}{a}$$

$$=a-\frac{c}{a}x.$$

同樣, $$r_1=a+\frac{c}{a}x.$$

於此可見 $$r+r_1=2a,$$

對於原有條件完全適合.

285. 橢圓的機械畫法. 從 $r+r_1=2a$ 的關係中,我們悟到橢圓的弧可用機械畫出,說明如下:

把一根無彈性的線的兩端固定在一張紙上的二點 F_1 和 F (圖 146).

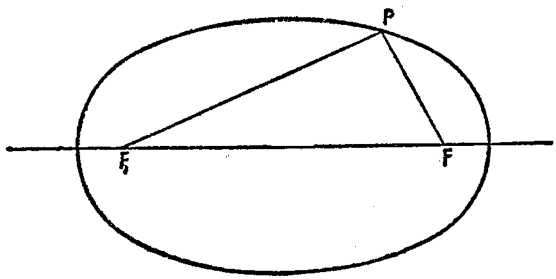

圖 146

用鉛筆的尖端 P 把這線拉得很緊張,這尖端移動就能在紙上畫出橢圓的弧來.

286. 偏心率. 在二焦點間的距離 $2c$ 和長軸 $2a$ 的比叫做橢圓的"偏心率 e".

於是 $$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

因爲$a>c$,所以橢圓的偏心率小於1.

習　題

1. 中心在原點,而焦點在y軸上的橢圓,牠的方程式是$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$或$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$,試證明之.

2. 試求以下各橢圓的半長軸,半短軸和偏心率,並畫出各橢圓的圖形來:

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; $x^2+2y^2=4$; $3x^2+2y^2=6$; $15x^2+14y^2=960$.

3. 試求橢圓$x^2+3y^2=3$和直線$x-y=1$的交點,並求這個橢圓的焦點.

4. 長軸等於6,焦點是$(\pm2,0)$,試求這個橢圓的方程式.

5. 試求這樣一個橢圓的方程式,牠的長軸是10,並經過$(3,1)$.

6. 有一橢圓,其頂點爲$(9,0)$, $(-9,0)$, $(0,6)$, $(0,-6)$,試求其方程式.

7. 有一橢圓,其焦半徑之和爲10,其焦點間的距離爲8,而其中心在原點,試求其方程式.

8. 試求直線$x+3y=3$和橢圓$9x^2+16y^2=144$的交點.

9. 試求在橢圓$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$上各點的縱坐標的中點的軌跡.

10. 有一點P在直線AB上,而這直線的兩端A和B常

沿着互相垂直的二線移動.試求P點的軌跡.

(設 $AP=m$, $PB=n$.)

287. 橢圓的極方程式. 令F_1(圖147)爲極,F_1X

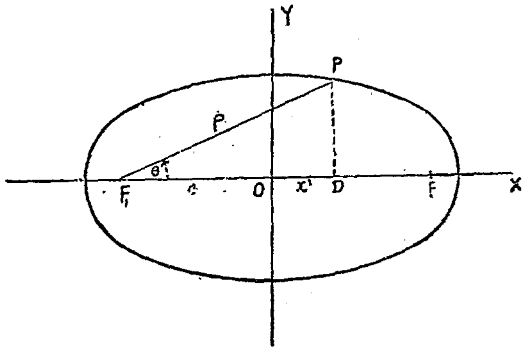

圖 147

爲極軸.於是$F_1P=a+ex$.因爲$OD=x=F_1D-F_1O=\rho\cos\theta-c$,

所以 $$F_1P=\rho=a+e\rho\cos\theta-ec.$$

$$\therefore\quad (1-e\cos\theta)\rho=a-ec,$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{a-ec}{1-e\cos\theta}.$$

又因 $$e=\frac{c}{a},$$

所以 $$\rho=\frac{\frac{a^2-c^2}{a}}{1-e\cos\theta}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}.$$

設 $$\frac{b^2}{a}=p,$$

則橢圓的極方程式爲

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta},\text{ 這里 } e<1.$$

試把這個方程式和拋物線的極方程式(§161)比較一下.

288. 討論這方程式 $\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$. 當 $\theta=0°$ 和 $180°$, ρ 的對應值就是這曲線在極軸上的截段. 牠在 $90°$ 軸上的截段,只要令 $\theta=90°$ 和 $270°$, 便可求得.所以牠所有的截段如下:

θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
ρ	$a+c$	$\frac{b^2}{a}$	$a-c$	$\frac{b^2}{a}$

這曲線的大小:——當 $\theta=0°$, $1-e\cos\theta$ 的值最小,而 ρ 的值最大.當 $\theta=180°$, $1-e\cos\theta$ 的值最大,而 ρ 的值最小.對於 θ 的一切值, ρ 的值常是有限的,因為 $1-e\cos\theta$ 不能等於零.

對稱性:——因為 $\cos\theta=\cos(-\theta)$, 所以 ρ 的值對於 θ 和 $(-\theta)$ 都是相同的.由此可知這曲線對於極軸是對稱的.

【練習】 1. 討論這方程式 $\rho=\frac{8}{5-2\cos\theta}$. 這方程式所代表的是什麼曲線?

2. 把這方程式 $\rho=\frac{8}{5-2\cos\theta}$ 改為標準式 $\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$.

3. 試用極坐標改變這方程式 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 由此而得橢圓的極方程式(但這里是以橢圓的中心為極).

289. 今將 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 代入橢圓方程式 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 則得

$$b^2a^2\cos^2 t+a^2b^2\sin^2 t=a^2b^2,$$

就是 $$\cos^2 t+\sin^2 t=1.$$

由此可知不論 t 有何值, $x=a\cos t$ 和 $y=b\sin t$ 常能適合這個橢圓方程式.那麼 t 究竟有什麼幾何的意義呢?這可說明如下:

以長軸爲直徑畫一個圓 (圖 148). 引長 $P(x, y)$ 的縱坐標 MP 遇這圓於 $P_1(x, y_1)$, 而以 t 表明 P_1 的動角.

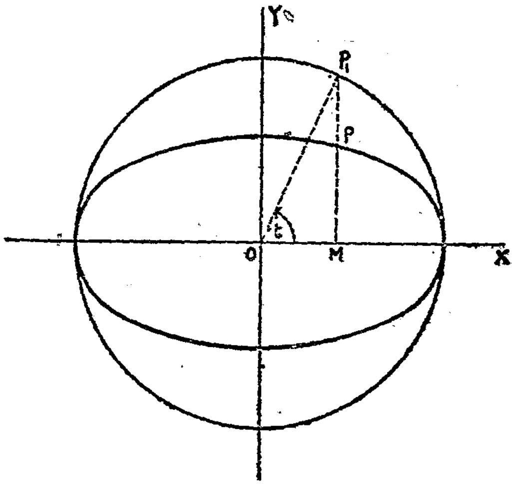

圖 148

那麼 $$x=a\cos t,\ y_1=a\sin t.$$

因爲 $y_1=\sqrt{a^2-x^2}$ (這圓的方程式是 $x^2+y^2=a^2$), 又 $y=$

$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,

所以　　　　　　$y=\frac{b}{a}y_1,\ y_1=\frac{a}{b}y.$

於是　　　　$\frac{a}{b}y=a\sin t$, 即 $y=b\sin t$.

這個角 t 叫做在橢圓上一點 $P(x,y)$ 的"偏心角".

290. 橢圓的幾何畫法. 從 § 289 我們悟得橢圓的幾何畫法,說明如下:

設 a 與 b 為一個橢圓的半長軸與半短軸.

畫兩個同心圓,一個的半徑是 a,一個的半徑是 b(圖 149). 畫 OP_1 遇小圓於 P_2.

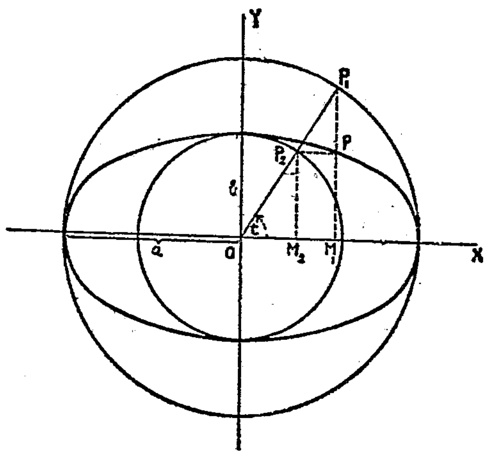

圖　149

畫 $M_1P_1 \perp OX$, $P_2P // OX$.

這樣決定的 P 點就是在我們所要畫的橢圓上的一

點.因為設令 $t=\angle P_1OM_1$, 則 $OM_1=a\cos t$, $M_1P=M_2P_2=b\sin t$

同樣決定許多點,把這許多點聯結起來便成一個橢圓.

這兩個同心圓叫做這橢圓的'助圓".

291. 橢圓的切線和法線的方程式.

把橢圓的方程式

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

和普通二元二次方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

比較一下,就知道橢圓的方程式也是一個特殊的二元二次方程式,只要在普通二元二次方程式內令 H, G, 和 F 都等於零,又 A 和 B 異值而同號,即得 $Ax^2+By^2+C=0$.

於是在橢圓上任何點的切線的斜率可由公式

$$m=-\frac{Ax+Hy+G}{Hx+By+F} \qquad \S\ 273$$

求得.

這里 $A=b^2$, $B=a^2$, $H=0$, $G=0$, $F=0$,

$$\therefore \quad m=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

法線是通過切點而垂直於切線的,所以牠的斜率

$$n=\frac{a^2y}{b^2x}.$$

於是在橢圓上一點 (x_1,y_1) 的切線的方程式是

$$y-y_1=m(x-x_1)=-\frac{b^2x_1(x-x_1)}{a^2y_1},$$

就是
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1;$$

而在同點的法線的方程式是

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

習 題

1. 求以下二曲線的切線和法線的斜率:

$$9x^2+16y^2=73,\ 在\ (1,\ 2);$$

$$5x^2+18y^2=182,\ 在\ (2,\ -3).$$

2. 寫出以下各曲線的切線和法線的方程式來:

$$4x^2+25y^2=100,\ 在\ \left(4,\ \frac{6}{5}\right);$$

$$x^2+4y^2=16,\ 在\ (0,\ -2).$$

3. 試求橢圓 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 的切線的方程式,牠的斜率是 $.5$.

4. 試求在 $x^2+4y^2=5$ 和 $y=\frac{x^2}{8}$ 中間的一個角(就是在一個交點的二切線中間的角).

5. 通過拋物線的焦點畫一根垂直於 x 軸的弦,從這弦的兩端點所畫的二切線必互相垂直,試證明之.

6. 在橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上互相垂直的二切線,其交

點必在圓 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上,試證明之.

292. 次切線和次法線的長. 看了圖150,參考§277,試證次切線

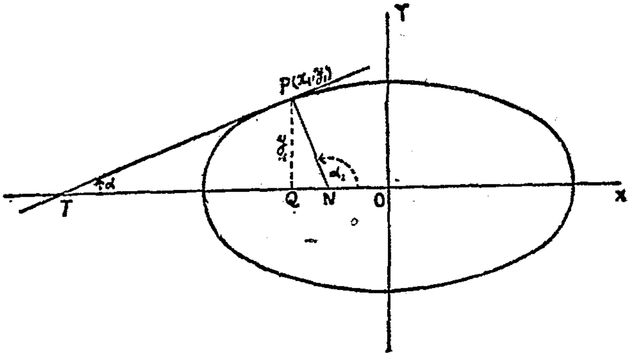

圖 150

$$TQ=\frac{y_1}{m}=-\frac{a^2y_1{}^2}{b^2x_1};$$

並證次法線

$$QN=my_1=\frac{-b^2x_1}{a^2}.$$

習 題

1. 看了圖150求切線 PT 和法線 PN 的長.

2. 從橢圓上一點畫兩根焦半徑,其中所夾的角必被過這點的法線平分,試證之.

證: 這法線(圖151)的方程式是

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

當　　　　$y=0$,

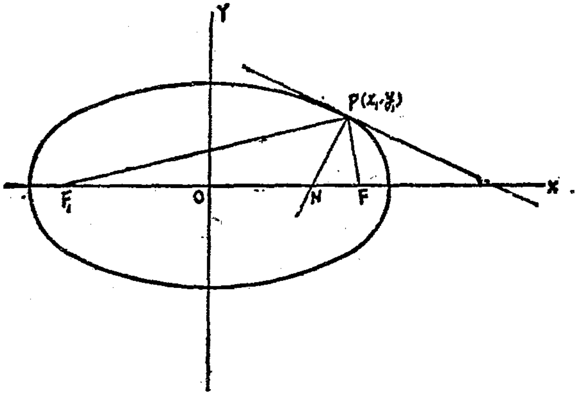

圖　151

$$x=ON=-\frac{b^2x_1}{a^2}+x_1=\frac{(a^2-b^2)x_1}{a^2}=e^2x_1.$$

$$\therefore\quad F_1N=F_1O+ON=a\,e+e^2x_1,$$

又　　　$$NF=OF-ON=a\,e-e^2x_1.$$

$$\therefore\quad \frac{F_1N}{NF}=\frac{a+e\,x_1}{a-e\,x_1}=\frac{F_1P}{PF}.\qquad §\ 284,\ §\ 286.$$

於是根據平面幾何學上的定理,這法線 NP 必平分 $\angle F_1PF$.

3. 從習題 2, 試說明怎樣在橢圓上一點畫一切線.

4. 有一直線平行於 $x-3y+15=0$ 又與 $9x^2+36y^2=18$ 相切,試求其方程式.

5. 從外點 $(1, 2)$ 至橢圓 $9x^2+36y^2=18$ 作切線,試求其方程式.

6. 從外點 $(6, -1)$ 至橢圓 $x^2+4y^2=9$ 作切線,試求其方程式.

7. 在橢圓 $x^2+4y^2=8$ 上一點 $(2, 1)$ 作切線和法線,試求這切線和法線的長,並求次切線和次法線的長.

雙曲線

293. 雙曲線. 焦點. 雙曲線是一個動點的軌跡這個動點與二定點的距離之差是一定的. 這二定點叫做雙曲線的"焦點". 在雙曲線上的一點至二焦點的距離叫做"焦半徑".

294. 雙曲線的方程式. 以 $2a$ 表明這個常差 F_1P-FP (圖 152), 又令 $F_1F=2c$.

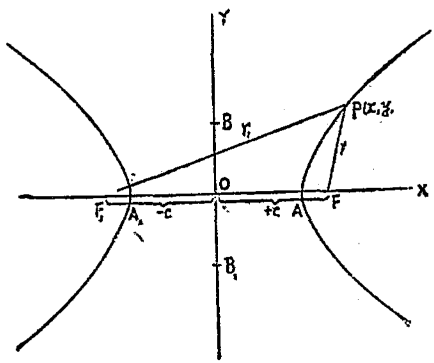

圖　152

取 F_1F 的中點 O 爲原點 OF 爲 x 軸.

因爲 $F_1P-FP=2a$, 所以 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. 這可變爲

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{1}$$

因爲 $F_1P-FP<F_1F$(F_1PF 是一個三角形),所以 $2a<2c$, 即 $a<c$, 即 $a^2<c^2$.

設 $$a^2-c^2=-b^2.$$

於是方程式(1)可化爲

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

或 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

這是雙曲線的標準方程式.

295. 討論這方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 當 $y=0$, $x=\pm a$, 就是在 x 軸上的二截段.所以雙曲線與 x 軸相交於二點 A_1 和 A. 這根線段 A_1A 叫做雙曲線的"截軸". A_1 和 A 叫做"頂點",這根線段 B_1OB($OB_1=OB=b$) 叫做"共軛軸".

當 $x=0$, y 的值是虛數.所以雙曲線與 y 軸不相交.

雙曲線的大小:—— 從方程式 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

於是可知 x 的絕對值若小於 a, 則 y 的值爲虛數;若 x 的絕對值大於 a 而又逐漸增加,則 y 的值爲實數而亦逐漸

增加.所以雙曲線由二支合成,這二支都是無限長;在二直線 $x=+a$ 和 $x=-a$ 所夾的範圍內沒有雙曲線上的點.

雙曲線的對稱性:——對於 x 每個值(大於 a 的),y 必有兩個同數異號的值.所以 x 軸把雙曲線的二支各分成兩個對稱部分.

從方程式 $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ 看來,雙曲線對於 y 軸也是對稱的.

296. 焦半徑. 參照 §284 可得

$$F_1P=r_1=\frac{cx}{a}+a$$

和

$$FP=r=\frac{cx}{a}-a.$$

297. 偏心率. 因為 $c>a$,所以雙曲線的偏心率

$$e=\frac{c}{a}>1.$$

298. 等邊雙曲線. 當 $a=b$,這方程式 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 變為

$$x^2-y^2=a^2.$$

這叫做"等邊或垂直雙曲線".

299. 漸近線. 設 $y=mx$ 是經過原點的一根直線的方程式.今將

$$\begin{cases} y=mx, \\ b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2, \end{cases}$$

當作聯立方程式而解之,則其交點的坐標為

$$(x,\ y)=\left(\frac{+ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}},\ \frac{\pm mab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right).$$

由此可知當 $b^2<a^2m^2$, 或 $b<am$, 則沒有交點存在.

這里有兩根特別的直線很值得我們注意的,就是當

$$b^2=a^2m^2,$$

即
$$m=\pm\frac{b}{a}(\text{圖 }153).$$

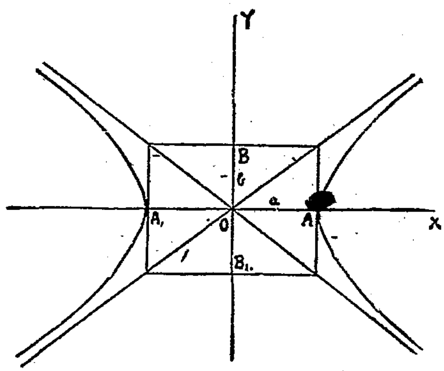

圖　153

現在把這方程式
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

的形式改為
$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}.$$

這是顯而易見的,當 x 的值無限地增加,雙曲線的二支逐漸接近這直線
$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

這兩根直線叫做雙曲線的"漸近線".

要畫漸近線,只要先畫四根直線 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$, 而

後畫由這四直線圍成的長方形的對角線卽得.在畫雙曲線時,若先把牠的兩根漸近線畫出,是很有幫助的.

300. 焦點在 y 軸上的雙曲線的方程式.

焦點在 x 軸上的雙曲線的方程式是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 在這方程式內把 x 和 y 對調卽得焦點在 y 軸上的雙曲線的方程式.故所求的方程式是

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

牠的截軸是 $2a$,牠的頂點是 $(0, \pm a)$,牠的焦點是 $(0, \pm c)$.

301. 共軛雙曲線.

這兩個方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 和 } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

是代表共軛雙曲線的 (圖 154).從此看來,有二雙曲線若是

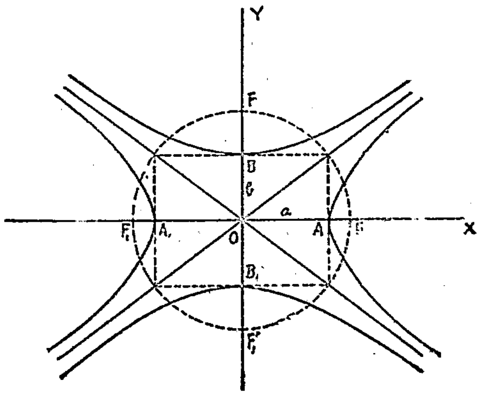

圖 154

共軛的,那麼一雙曲線的截軸和共軛軸必是他雙曲線的共軛軸和截軸.

因爲這方程式 $c^2=a^2+b^2$ 對於二雙曲線有同值的 c,所以牠們的焦點離原點必是等遠.所以這四個焦點必同在以 c 爲半徑以原點爲中心的圓周上,就是

$$F_1(-c,\ 0),\ F(c,\ 0),\ F_1'(0,\ -c),\ F'(0,\ c).$$

這二共軛雙曲線的偏心率,一是 $e=\frac{c}{a}$, 一是 $e=\frac{c}{b}$.

習 題

1. 試求這雙曲線 $4x^2-9y^2=36$ 的截段和漸近線,並畫其略圖.

2. 試求以下雙曲線的截段和漸近線,並畫其略圖:

$$9x^2-y^2=16;\ x^2-y^2=9.$$

3. 在這曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上,試求這樣的一點,牠的橫坐標等於縱坐標.

4. 試求雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 和直線 $3y-4x=2$ 的交點.

5. 寫出與 $6x^2-3y^2=8$ 共軛的雙曲線的方程式.

6. 有一動點,牠和這二點 $(0,\ \pm 6)$ 的距離之差常等於 10. 試求其方程式.

7. 有一雙曲線,牠的中心在原點,牠的焦點在 x 軸上,牠又經過 $(3\sqrt{2}, 5)$ 和 $(-9, 5\sqrt{8})$. 試求其方程式

8. 試畫出雙曲線 $x^2-9y^2=9$ 和牠的共軛雙曲線的略圖來.

9. 試求雙曲線 $9x^2-16y^2=144$ 的焦點.

10. 有一等邊雙曲線經過 $(-5, 2)$, 試求其方程式.

11. 有一雙曲線經過 $(1, -3)$ 和 $(2, 4)$, 試求其方程式.

12. 在雙曲線 $4x^2-9y^2=36$ 上有一點 $(x>0, y=1)$, 試求這點的焦半徑.

302. 雙曲線的極方程式. 參照 § 287 可得雙曲線 (圖 155) 的極方程式

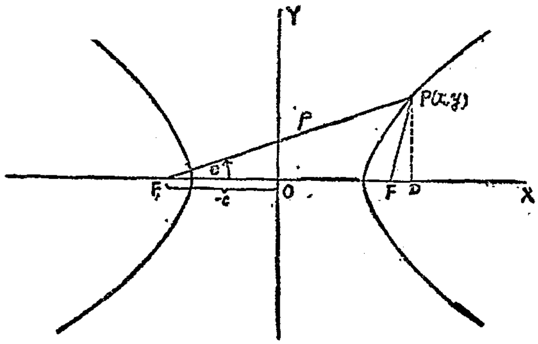

圖 155

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}.$$

這里 $e>1$, $e=\frac{c}{a}$, $p=\frac{-b^2}{a}$, $b^2=c^2-a^2$.

303. 討論這個極方程式. 這曲線的截段表

明於下:——

θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
ρ	$a+c$	$\frac{-b^2}{a}$	$-(c-a$	$\frac{-b^2}{\ }$

這曲線的大小:—— ρ 的值漸無限地增加,當 $1-e\cos\theta$ 漸近於零,就是當 $\cos\theta\to\frac{a}{c}$.

當 $\cos\theta>\frac{a}{c}$, 則 $1-e\cos\theta<0$, 而 $\rho>0$. 所以 P 點必在 O 點右邊的一支上.

當 $\cos\theta<\frac{a}{c}$, 則 $1-e\cos\theta>0$, 而 $\rho<0$. 所以 P 點必在 O 點左邊的一支上.

θ 從 $0°$ 到 $360°$, ρ 的變化如下表:

θ	$0°$	$\cdots$	$\cos^{-1}\frac{a}{c}$	$\cdots$	$90°$	$\cdots$	$180°$	$270°$	$\cdots$	$\cos^{-1}\frac{a}{c}$	$\cdots$	$360°$
ρ	$a+c$	$+$	∞	$-$	$-\frac{b^2}{a}$	$-$	$-(c-a)$	$-\frac{b^2}{a}$	$-$	∞	$+$	$a+c$

對稱性:—— 因為 $\cos(-\theta)=\cos\theta$, 所以這曲線對於極軸是對稱的.

304. 雙曲線的切線和法線的方程式.

參照 §291 可得雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 的切線的斜率

$$m=\frac{b^2x}{a^2y};$$

而法線的斜率是

$$n=-\frac{a^2y}{b^2x}.$$

於是在這雙曲線上一點 (x_1, y_1) 的切線的方程式是

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

就是
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1;$$

而在同點的法線的方程式是

$$y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

這兩個方程式又可直接從橢圓的切線和法線的方程式(§ 291)求得,只要把 $(-b^2)$ 代替 b^2.

305. 次切線和次法線的長. 次切線和次法線的長可直接從 § 292 的公式求得,只須把 $(-b^2)$ 代替 b^2.

所以雙曲線的次切線是 $\dfrac{a^2y_1^2}{b^2x_1}$,

而牠的次法線是 $\dfrac{b^2x_1}{a^2}$.

習題

1. 在雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上一點 $\left(-6\frac{2}{3},4\right)$ 有一切線,試求其方程式.

2. 試求從外點 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 到雙曲線 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上所作二切線的方程式.

3. 從雙曲線上一點作二焦半徑,夾在焦半徑中間的

角必被這點的切線平分,試證明之.

4. 試畫這個方程式

$$\rho=\frac{2}{1-2\cos\theta}.$$

拋 物 線

306. 關於拋物線的道理在第十章內已經討究過了,現在只把牠的主要公式申說一下或補充一下.

1. 牠的標準方程式是　$y^2=4px.$
2. 牠的極方程式是　$\rho=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}.$
3. 牠的切線方程式是　$y_1y=2p(x+x_1).$
4. 牠的法線方程式是　$y-y_1=-\dfrac{y_1}{2p}(x-x_1)$
5. 牠的次切線是　$2x_1.$
6. 牠的次法線是　$2p.$
7. 牠的焦半徑是　$r=x_1+p.$

習 題

1. 拋物線的方程式是 $y^2=8x$, 試求其焦點的坐標,並求這點 (2, 4) 的焦半徑.

2. 試求在 $y^2=8x$ 和 $8x^2+2y^2=10$ 中間的一個角.

3. 拋物線 $y^2=4x$ 有一切線與 x 軸成 45° 的角,試求這

切線的方程式.

4. 拋物線 $y^2=4x$ 有一根弦,其中點為 $(4,2)$,試求其方程式.

5. 在拋物線上二切線所成的角必等於這二切點的焦半徑的夾角的一半,試證明之.

6. 試求 $y^2=4x+5$ 和 $y=2x+1$ 的交點並作其圖.

7. §306 的公式 3, 5, 6, 7 怎樣得來?試一一說明之.

雜題

1. 有一個圓,牠的中心是 $(3,-4)$,並與直線 $2x+5y=15$ 相切,試求其方程式.

2. 試證包圍在半圓內的角必是直角.

3. 試證這二圓 $x^2+y^2-4y-4=0$ 和 $x^2+y^2+2x+10y+8=0$ 必相切.

4. 有一個圓經過 $(0,1)$ 和 $(-6,3)$,而其中心在直線 $x+2y=22$ 上,試求其方程式,並作其圖.

5. 有一個圓切直線 $4x+3y=26$ 於 $(5,2)$,又經過 $(-2,3)$,試求其方程式並作其圖.

6. 一個圓與二直線 $x+3y=6$ 和 $x-3y=10$ 相切,而其中心在直線 $y=2x$ 上,試求其方程式並作其圖.

7. 有一三角形由三直線 $3x-4y=5$, $4x-3y+10=0$, $y=2$

包圍而成,試求其內切圓的方程式.

8. 這二圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=b^2$ 和 $x^2+y^2=a^2$ 相交於實點,其應有的條件若何?

9. 試求圓 $2x^2+2y^2=13$ 所有平行於直線 $x-5y=1$ 的切線.

10. 試求圓 $x^2+y^2-4x+6y-4=0$ 所有垂直於直線 $4x+y=0$ 的切線.

11. 儘所有方法求證 $4x-3y=17$ 是圓 $x^2+y^2+4x=21$ 的一根切線.

12. 已知圓 $x^2+y^2+2ax=0$ 與直線 $y=x+1$ 相切,試求 a 的值.

13. 試求這二圓 $x^2+y^2=6x+8y$ 和 $x^2+y^2=25$ 的公切線.

14. 有一個圓經過二圓 $x^2+y^2-x+y=2$ 和 $x^2+y^2=5$ 的交點,又經過 $(2,-2)$,試求其方程式.

15. 有一個圓經過二圓 $x^2+y^2-4x=10$ 和 $4x^2+4y^2=24x+4y+23$ 的交點,又經過 $(1,0)$,試求其方程式.

16. 一個橢圓的偏心率是 $\frac{1}{2}$,兩焦點間的距離是 5,試求其方程式.

17. 有一橢圓,兩焦點間的距離是 $4\sqrt{6}$,長軸和短軸相乘等於20,試求其方程式.

18. 有一橢圓經過 $(2,1)$,而其二焦點爲 $(\pm\sqrt{3},0)$,試求

其方程式.

19. 有一雙曲線,其焦點爲 $(\pm 2, 0)$,其漸近線的斜率爲 ± 3,試求其方程式.

20. 有一動點,牠與$(4, 2)$和$(4, -6)$的距離之差常爲4,試求其方程式.這軌跡是什麼?

21. 有一動點,牠與 $(0, 0)$ 和 $(4, 2)$ 的距離之和常爲10試求其方程式.這軌跡是什麼?

22. 一個圓經過一定點並與一定圓相切,試求這個圓心的軌跡.對四種情形須分別研究,就是當這定點在定圓外,在圓周上;在定圓內,在定圓的中心.

23. 有一個圓常與二圓 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2-12x=64$ 相切試求這個圓心的軌跡.

24. 有一動點,牠與二線 $x+3y=6$ 和 $x+y=5$ 的距離的積是 $4\sqrt{5}$,試求牠的軌跡.

25. 從雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上一點到二漸近線的距離,其積不變,試證明之.

26 在圓 $x^2+y^2=r^2$ 上,在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上,在雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上,在拋物線 $y^2=4px$ 上各畫二切線令相交於 (x_1, y_1),試求聯結二切點的各弦的方程式.

27. 已知圓 $x^2+y^2=r^2$ 的切線的斜率爲 m,試求其方程式.

設這切線的方程式爲 $y=mx+b$.

今將 $x^2+y^2=r^2$ 和 $y=mx+b$ 當作聯立方程式而解之如下:

$$x^2+(mx+b)^2=r^2;$$

$$(1+m^2)x^2+2mbx+b^2-r^2=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-2mb\pm\sqrt{(2mb)^2-4(1+m^2)(b^2-r^2)}}{2(1+m^2)}.$$

因爲 $y=mx+b$ 是 $x^2+y^2=r^2$ 的切線,所以牠們的交點只有一個.

$$\therefore\quad \sqrt{(2mb)^2-4(1+m^2)(b^2-r^2)}=0,$$

卽

$$b=\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

故所求的方程式爲

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

28. 已知橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 和拋物線 $y^2=4px$ 的切線的斜率各爲 m, 試各求其方程式.

對於以下各曲線上指定的點求斜率 (29—33):

29. $2x^2+xy-y^2=14$, $(3, -1)$.

$$\frac{d}{dx}(2x^2+xy-y^2)=0;$$

$$4x+y+x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{4x+y}{x-2y}\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

將 $x=3, y=-1$ 代入 (E)，則得所求斜率為 $-\frac{11}{5}$.

30. $x^2-y^2+2y=1$, $(2, 3)$.

31. $y^2=\frac{x}{1-x}, \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

32. $y^2=x(x-1)(x+8)$, $(4, 12)$.

33. $x^3-x^2y+3y^2+2x+y=0$, $(0, 0)$.

在以下各曲線上指定的點求切線和法線 (34－40):

34. $y=x^3-3x^2+4x+5$, $x=2$.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-6x+4.$$

$$x=2, \ y=9.$$

∴ 在 $(2, 9)$ 的切線的斜率為 4.

∴ 在 $(2, 9)$ 的切線的方程式為

$$y-9=4(x-2),$$

即 $$4x-y+1=0;$$

而在同點的法線的方程式為

$$y-9=-\tfrac{1}{4}(x-2),$$

即 $$x+4y-38=0.$$

35. $y=2x^3-x^2-5$, $x=1$.

36. $y=2x^2-2x+5$, $y=6$.

37. $ay^2=x^3$, $x=2a$.

38. $y^2=\frac{x}{2a-x}$, (a, a).

39. $x^2-2y^2+3x+4y=0,\ y=0.$

40 $(2x-y)^2+x-3y=4,\ x=0.$

41. 試求在拋物線 $y^2=3x$ 上而平行於直線 $3x+y=2$ 的切線.

微分 $y^2=3x$, $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2y}.$

因為這切線平行於 $3x+y=2$, 所以牠的斜率等於 -3.

於是 $$\frac{3}{2y}=-3.$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{12}.$$

故所求的切線為

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-3\left(x-\frac{1}{12}\right),$$

即 $$12x+4y+1=0.$$

42. 試求在曲線 $xy+8=0$ 上而垂直於直線 $x+2y=0$ 的切線.

微分 $xy+8=0$, $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}.$

因為這切線垂直於 $x+2y=0$, 所以牠的斜率是 2.

於是 $$-\frac{y}{x}=2,\ 即\ y=-2x.$$

解聯立方程式 $\begin{cases} xy+8=0, \\ y=-2x, \end{cases}$

得 $x=\pm2$, $y=\mp4$ 故所求的切線為

$$y-(\mp 4)=2\{x-(\pm 2)\},$$

卽

$$2x-y=\pm 8.$$

43. 試求在圓 $x^2+y^2=10$ 上而垂直於直線 $3x+y=6$ 的切線.

44. 試求在 $x^2+2x-3y+4=0$ 上而平行於 $x+2y+1=0$ 的切線.

45. 試求在 $y=3x^2-x^3$ 上而垂直於 $x+3y=1$ 的切線.

46. 試求在 $x^4+y=2$ 上而垂直於 $2x+y=3$ 的切線.

47. 試求在 $y=\frac{1}{4}x^4-x^3+5x$ 上而與 x 軸成 $45°$ 角的切線.

48. 在曲線 $y=x^4-4x^3-18x^2+3$ 上有能使 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 的點,試求在這種點的切線.

49. 在 $2xy=a^2$ 上的一根切線和兩根坐標軸圍成一個三角形,試證這三角形的面積是一定的.

50. 在 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上的一根切線,牠的 x 截段與 y 截段之和是一定的,試證明之.

51. 拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 和直線 $y=3x-2$ 相切於 $(2,4)$,並經過 $(0,0)$,試求 a, b, c 的值.

52. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 與直線 $3x+5y=11$ 相切於 $(2,1)$,試求 a 和 b 的值.

53. 在拋物線 $y^2=4px$ 上,試求互相垂直的二切線的交點的軌跡.

54. 在橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上,試求互相垂直的二切線的交點的軌跡.

55. 試求在雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上互相垂直的二切線的交點的軌跡.

第二十一章

圓錐曲線 改變坐標法

圓錐曲線

307. 圓錐曲線. 圓,橢圓,雙曲線,拋物線統稱"圓錐曲線".設有一個平面割截一個正圓錐體,因了割截的情形不同,在這正圓錐體上呈現出來的截面,其形狀或是圓,或是橢圓,或是雙曲線,或是拋物線,總不外乎這四種,所以統稱牠們爲圓錐曲線.

這樣看來,圓,橢圓,雙曲線,和拋物線是從一個系統上分化出來的.但在另一方面看,橢圓,雙曲線和拋物線是從另一個系統上分化出來的;而在這個系統上,圓是沒有地位的,牠只可算是一種特殊的橢圓.於是所謂圓錐曲線專指橢圓,雙曲線和拋物線三者而言."圓錐曲線是一個動點的軌跡,這動點和一定點的距離又和一定線的距離,兩距離的比值是一定的".這個定點叫做圓錐曲線的'焦點',這根定線叫做圓錐曲線的"準線",這一定的比值叫做圓錐曲線的"偏心率".今以 e 表明偏心率,因了 e 的值不同,圓錐曲線就分爲三種:

當 $e<1$, 這圓錐曲線就是橢圓;

當 $e=1$, 這圓錐曲線就是拋物線;

當 $e>1$, 這圓錐曲線就是雙曲線.

從這樣一個系統上分化出來的橢圓,雙曲線和拋物線,似乎對於正圓錐體毫無關係,不該仍稱為圓錐曲線了;這話誠然,但為省免多立名目起見,不妨仍稱為圓錐曲線.

308. 拋物線. 拋物線是圓錐曲線的一種,牠的偏心率等於1;說得更明顯一點就是:"拋物線是一個動點的軌跡,這動點離一定點和離一定線常是等遠".

經過焦點 F 到準線 DD' (圖 156) 畫垂線 FK. 設以 FK 為 x 軸,以 FK 的中點 O 為原點.令 $P(x, y)$ 為拋物線上的任

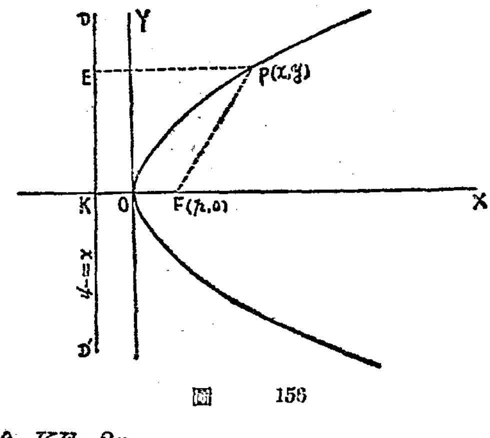

圖 156

何一點.又令 $KF=2p$.

因 $$\frac{PF}{PE}=1,$$

故 $$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=p+x,$$

卽 $$(x-p)^2+y^2=(p+x)^2,$$

卽 $$y^2=4px.$$

這和以前所得抛物線的標準方程式完全一樣.

309. 橢圓. 橢圓是圓錐曲線的一種,牠的偏心率小於1. 牠的方程式怎樣?現在探求如下:

設 F 為焦點, l 為準線(圖157).

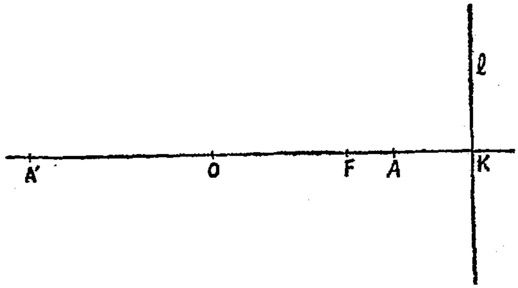

圖 157

這是顯而易見的,經過 F 垂直於 l 的這根線 FK 必與這個橢圓交於二點 A 和 A'. 因為我們可依照定比 e(偏心率)而把 FK 內分和外分,內分點就是 A, 外分點就是 A';於是 $\frac{AF}{AK}=\frac{A'F}{A'K}=e<1$, 所以 A 和 A' 必在這個橢圓上. A 和 A' 叫做橢圓的"頂點". AA' 的中點 O 叫做橢圓的"中心".

令 $$OA=a;\ OF=c,\ OK=d.$$

於是 $$a-c=e(d-a),\ a+c=e(d+a).$$

$$\therefore\ 2c=2ae.\ 2ed=2a.$$

這就是說,從中心到焦點的距離是 ae, 從中心到準線的距離是 $\frac{a}{e}$.

設使我們現在把 FK 當做 x 軸,把中心 O 當做原點,那麼準線 l 的方程式是

$$x=\frac{a}{e}.$$

又設 $P(x,y)$ (圖 158) 是在這橢圓上的任何一點.

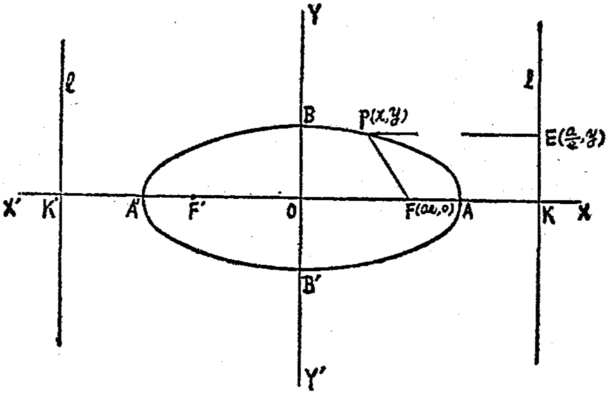

圖 158

$$\frac{PF}{PE}=e,$$

即 $$PF=e\,PE.$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left(\frac{a}{e}-x\right),$$

$$x^2-\ aex+a^2e^2+y^2=a^2-2aex+e^2x^2,$$

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

因為 $e<1$,所以 $a^2(1-e^2)$ 必是一個正數.令 $b^2=a^2(1-e^2)$,

則有
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

這和以前所得橢圓的標準方程式完全一樣.

因為對稱的關係,這里必有一個第二焦點 $F(-ae,0)$,和一根第二準線 $x=-\frac{a}{e}$.

310. 雙曲線. 雙曲線是圓錐曲線的一種,牠的偏心率大於 1.

現在要求雙曲線的方程式,我們便回想到在 § 309 探求橢圓方程式的方法可以同樣使用.因為在 § 309, 成立這個橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$,不要依據 $e<1$, 所以我們卽可斷定雙曲線的方程式也是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

但這里 $e>1$, 所以 $a^2(1-e^2)$ 必是一個負數.令 $a^2(1-e^2)=-b^2$,則有

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

這和以前所得雙曲綫的標準方程式完全一樣.

因為對稱的關係,雙曲線必有兩個焦點 $(\pm ae,0)$ 和兩

根準線 $x=\pm\frac{a}{e}$(圖 159).

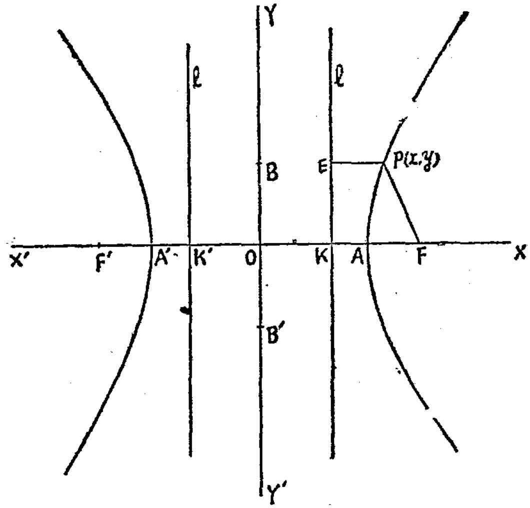

圖 159

311. 定理. 拋物線,橢圓,雙曲線各自的標準方程式都是二次方程式,那麼我們就可以說凡圓錐曲線的方程式必是二次的嗎?這尙待證明.

設圓錐曲線的焦點爲(i,j),又設牠的準線爲$x\cos\omega+y\sin\omega=p$.於是在圓錐曲線上的一點$P(x,y)$和焦點的距離爲$\sqrt{(x-i)^2+(y-j)^2}$,而從$P$到準線的距離爲$x\cos\omega+y\sin\omega-p$.

由圓錐曲線的定義(§ 307)而知

$$\frac{\sqrt{(x-i)^2+(y-j)^2}}{x\cos\omega+y\sin\omega-p}=e.$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-i)^2+(y-j)^2}=e(x\cos\omega+y\sin\omega-p),$$

或 $$(x-i)^2+(y-j)^2=e^2(x\cos\omega+y\sin\omega-p)^2.$$

這就是圓錐曲線的普通方程式,但這是一個二次方程式,所以我們已經證明這個重要定理:

"凡圓錐曲線的方程式必是二次".

習 題

1. 有一個圓既和圓 $x^2+y^2=16$ 相切又和直線 $x=6$ 相切,試求這圓心的軌跡.

2. 抛物線 $y^2=4px$ 有一切線 $y=3x+4$, 試決定這抛物線的方程式.

3. 從準線上的一點到抛物線上所畫的二切線必互相垂直,試證明之.

4. 從準線上一點 P 到抛物線上畫二切線, 試證聯結這二切點的弦必垂直於聯結 P 和焦點 F 的線

5. 從準線上一點到抛物線上畫二切線, 試證聯結這二切點的弦必通過焦點.

6. 通過抛物線的焦點畫一根弦, 在這根弦的兩端畫二切線, 試證這二切線必互相垂直.

7. 已知橢圓的兩焦點和在橢圓上的一點, 試求其二軸.

8. 已知雙曲線的兩焦點和在雙曲線上的一點,試求其二軸.

9. 已知圓錐曲線的一個焦點,這個焦點的對應準線,和在這曲線上的一點,試求其二軸.

10. 從橢圓的一個焦點畫垂線到任一切線上,又把中心和切點聯成一線,這線和垂線的交點必在準線上,試證之.

11. 前題所說的,對於雙曲線也能成立,試證明之.

12. 從橢圓的兩焦點各畫垂線到任一切線上,這二垂線相乘,其積必等於 b^2, 試證明之.

13. 前題所說的,對於雙曲線也能成立,試證明之.

14. 試證圓的準線在無窮遠處.

15. 從 P 點畫二切線到圓 $x^2+y^2=a^2$ 上,設聯結這二切點的弦和圓 $4x^2+4y^2=a^2$ 常相切,那麼 P 點必在圓 $x^2+y^2=4a^2$ 上,試證明之.

改變坐標法

312. 改變坐標法. 一種軌跡的方程式是表明 x 和 y 相互的關係,而 x 和 y 是表明這軌跡上各點從縱軸和橫軸的距離,所以兩根坐標軸是方程式的基礎,方程式完全建築在兩根坐標軸上的.這是必然之理,坐標軸一有變動, x 和 y 就跟着變化,方程式也就不能維持原狀了.但

是坐標軸無論有何變動,對於軌跡本身毫無影響,所以方程式儘可隨坐標軸而變化,而牠所代表的軌跡依然如故.譬如我立在這里,在我前面的人說我立在他的後面;在我後面的人說我立在他的前面;在我左面的人說我立在他的右面;在我右面的人說我立在他的左面;無論他們怎樣說我,都是對的,他們的說法雖各不同,我始終立在這里沒有變位.正好在方程式雖變而軌跡不變,所以若有複雜的方程式,我們可斟酌移動坐標軸把方程式變得很簡單,使牠所代表的軌跡容易認識,容易描畫.例如有一個圓,牠的中心是(h, k),牠的半徑是r,那麼牠的方程式是$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.若將坐標軸搬動,令原點和圓心合一,則原方程式變爲$x^2+y^2=r^2$,不是簡單得多了嗎?這樣的方法就叫做"改變坐標法".

313. 遷移法. 當新軸$O'X'$和$O'Y'$(圖160)平行於舊軸OX和OY,只把原點遷移而不變更軸的方向。這樣改變坐標叫做"遷移法".

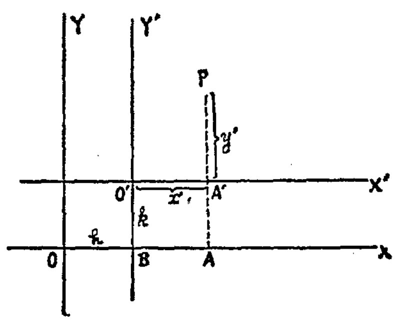

圖 160

設(h, k)是新原點O'對於舊軸的坐標.

設有一點P,牠對於

舊軸的坐標是 (x, y)，牠對於新軸的坐標是 (x', y'). 於是

$$OA=x,\ AP=y;$$

$$O'A'=x',\ A'P=y'.$$

因爲 $\qquad OA=OB+BA,\quad \therefore\quad x=h+x'. \qquad (1)$

因爲 $\qquad AP=AA'+A'P,\quad \therefore\quad y=k+y'. \qquad (2)$

方程式 (1) 和 (2) 叫做"遷移法的公式".設在一種軌跡的方程式內,我們把 $h+x'$ 代替 x, 並把 $k+y'$ 代替 y, 那麼所得新方程式仍是代表這種軌跡的,不過原點是 (h, k), 而新軸平行於舊軸罷了.

習　題

1. 試證遷移法的公式,當 O' 在如圖161的位置.

2. 新軸相交於 $(2, -1)$ 且與舊軸平行,試求這點 $(x, y)=(-2, 3)$ 對於新軸的坐標 (x', y').

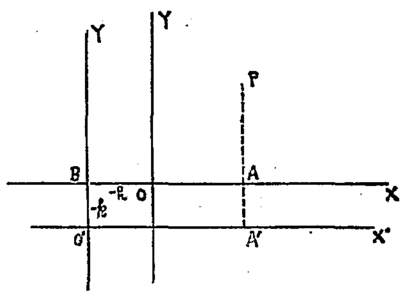

圖　161

因爲 $(h, k)=(2, -1)$, 所以 $\qquad x=2+x',\ y=-1+y'.$

$$\therefore\quad x'=x-2,\ y'=y+1,$$

卽 $\qquad x'=-4,\quad y'=4.$

試用遷移法改變以下各方程式:

3. $2x^2+3y^2-12x+2y+10=0$, 新原點 $(3,\ -2)$.

這里 $$x=3+x',\ y=-2+y'.$$

代入以後,原方程式變爲

$$2(3+x')^2+3(-2+y')^2-12(3+x')+2(-2+y')+10=0,$$

即 $$2x'^2+3y'^2-10y'=0.$$

現在“′”可以除去,因爲舊軸已用不到,對牠不需有區別了.所以新方程式可寫做

$$2x^2+3y^2-10y=0.$$

4. $y=3x-5$, 新原點 $(3,\ -2)$.

5. $y^2-3x+3y+12=0$, 新原點 $(1,\ 5)$.

6. $x^2+y^2+4x+8=0$, 新原點 $(2,\ -3)$.

7. $y^2-2y-2x+4=0$, 新原點 $(2,\ -1)$.

314. 圓錐曲線的又一標準方程式.

從前以拋物線的軸爲 x 軸並以其頂點爲原點,故拋物線的標準方程式爲 $y^2=4px$; 以橢圓的長軸爲 x 軸並以其中心爲原點,故橢圓的標準方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 以雙曲線的橫軸爲 x 軸並以其中心爲原點,故雙曲線的標準方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 現在設想圓錐曲線的位置對於坐標軸不是這樣了,牠們各自的標準方程式應該起什麼變化?

先就橢圓研究,設橢圓的位置對於坐標軸是如圖162,

(a),(b)所示,就是牠的中心是(h,k),而牠的軸與坐標軸平行.

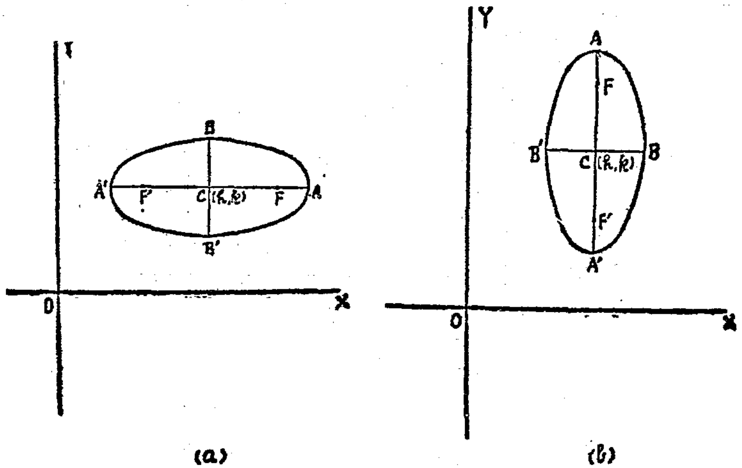

圖　162

在(a),若以AA'當作x軸,C當作原點,那麼這橢圓的方程式是$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$.

但 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 故 $x'=x-h$, $y'=y-k$.

所以這橢圓對於舊軸的方程式是

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

在(b),這橢圓對於新軸的方程式是$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$, 所以牠對於舊軸的方程式是

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$$

同樣研究雙曲線和拋物線.

於是總括如下:

橢圓

中心 (h, k), 其軸與坐標軸平行

$(a)\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 \cdots (1)$

$(b)\ \dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1 \cdots (2)$

雙曲線

$(a)\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 \cdots (3)$

$(b)\ \dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1 \cdots (4)$

拋物線: 頂點 (h, k), 其軸與坐標軸平行

$(a)\ (y-k)^2=4p(x-h) \quad \cdots (5)$

$(b)\ (x-h)^2=4p(y-k) \quad \cdots (6)$

上列各方程式都隸屬於這個普通形式

$$Ax^2+By^2+2Gx+2Fy+C=0, \tag{A}$$

因爲牠們都可從這個形式中分化出來.

(A) 可變爲

$$A\left(x^2+2\frac{G}{A}x\right)+B\left(y^2+2\frac{F}{B}y\right)=-C,$$

$$A\left(x^2+2\frac{G}{A}x+\frac{G^2}{A^2}\right)+B\left(y^2+2\frac{F}{B}y+\frac{F^2}{B^2}\right)=\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C,$$

$$A\left\{x-\left(-\frac{G}{A}\right)\right\}^2+B\left\{y-\left(-\frac{F}{B}\right)\right\}^2=\frac{B\cdot G^2+A\cdot F^2-ABC}{AB}=K$$

$$\frac{\left\{x-\left(-\frac{G}{A}\right)\right\}^2}{\frac{K}{A}}+\frac{\left\{y-\left(-\frac{F}{B}\right)\right\}^2}{\frac{K}{B}}=1. \tag{B}$$

試將 (1), (2), (3), (4) 與 (B) 比較一下

令 $A=0$, 則 (A) 變爲

$$By^2+2Gx+2Fy+C=0,$$

$$B\left(y^2+2\frac{F}{B}y\right)=-2Gx-C,$$

$$B\left[y-\left(-\frac{F}{B}\right)\right]^2=-2Gx-C+\frac{F^2}{B},$$

$$\left[y-\left(-\frac{F}{B}\right)\right]^2=-\frac{2G}{B}\left(x-\frac{F^2-BC}{2BG}\right). \qquad (C)$$

試將 (5) 與 (C) 比較一下.

令 $B=0$, 則 (A) 變爲

$$Ax^2+2Gx+2Fy+C=0,$$

$$A\left(x^2+2\frac{G}{A}x\right)=-2Fy-C,$$

$$A\left[x-\left(-\frac{G}{A}\right)\right]^2=-2Fy-C+\frac{G^2}{A},$$

$$\left[x-\left(-\frac{G}{A}\right)\right]^2=-\frac{2F}{A}\left(y-\frac{G^2-AC}{2AF}\right) \qquad (D)$$

試將 (6) 與 (D) 比較一下.

習　題

判别以下各方程式代表何種圓錐曲線: (1—13)

1. $x^2-y^2-4x-12y-20=0.$

$$(x^2-4x)-(y^2+12y)=20,$$

$$(x-2)^2-(y+6)^2=-12,$$

$$\frac{(y+6)^2}{12}-\frac{(x-2)^2}{12}=1.$$

∴ 這是等邊雙曲線,牠的中心在 $(2, -6)$,而牠的截軸平行於 y 軸.

2. $9x^2+4y^2-54x+40y+145=0.$

3. $9x^2-16y^2+90x+128y-175=0.$

4. $y^2+4x+6y+9=0.$

5. $3y^2-5x+7y+2=0.$

6. $x^2-7x-4y+3=0.$

7. $2y^2-7x-9y=0.$

8. $7x^2+8y^2-28x+80y+172=0.$

9. $16x^2+4y^2-16x-4y-11=0.$

10. $x^2+4y^2=4y.$

11. $9x^2-16y^2-36x+96y+36=0.$

12. $x^2-2y^2+2y=0.$

13. $y^2=x^2-3x+4.$

14. 頂點在 $(2, 3)$,焦點在 $(6, 3)$,試求這拋物線的方程式.

15. 頂點在 $(3, 4)$,準線是 $x=4$,試求這拋物線的方程式

16. 以直線 $x=3$ 爲軸,又經過 $\left(2, -\frac{9}{2}\right)$ 和 $(5, -6)$,試求這拋物線的方程式.

17. 有一拋物線經過 $(-1, 1)$, $(8, 2)$ 和 $(-4, -2)$,而其軸平行於 OX,試求其方程式.

315. 撤消方程式中一次各項. 把方程式化

得簡單是改變坐標法的一種主要功用.有了遷移法可以撤消方程式中 x 和 y 的一次各項而使方程式簡單,現在舉一個例題來說明這種方法.

試化簡這方程式 $x^2+y^2-2x+2y-7=0$.

令 $x=x'+h$, $y=y'+k$.

代入以後,原方程式變為

$$(x'+h)^2+(y'+k)^2-2(x'+h)+2(y'+k)-7=0,$$

即 $$x'^2+y'^2+(2h-2)x'+(2k+2)y'+(h^2+k^2-2h+2k-7)=0.$$

令 $2h-2=0$, $2k+2=0$, 則 $h=1$, $k=-1$.

於是得一最簡方程式

$$x'^2+y'^2=9.$$

這是一個圓的方程式,牠的半徑是3.

所以原方程式就是代表這個圓.

習　題

用遷移法撤消下列方程式中一次各項:

1. $x^2+y^2-2x+2y+3=0$.
2. $4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$.
3. $9x^2+4y^2-36x+16y=-16$.
4. $x^2+3y^2+x-9y=-4$.
5. $2x^2-4y^2+4x+4y-1=0$.

6. $x^2+4y^2-16x+24y+84=0.$

7. $x^2+2y^2+2x=0.$

8. $xy-6x-8y+20=0.$

316. 旋轉法.

設令這個角 XOY (圖 163) 繞着原點 O 轉到一個新位置 $X'OY'$, 而以 θ 表明 $\angle XOX'$.

設 (x, y) 是 P 點對於坐標軸 OX 和 OY 的坐標, 又設 (x', y') 是 P 點對於坐標軸 OX' 和 OY' 的坐標.

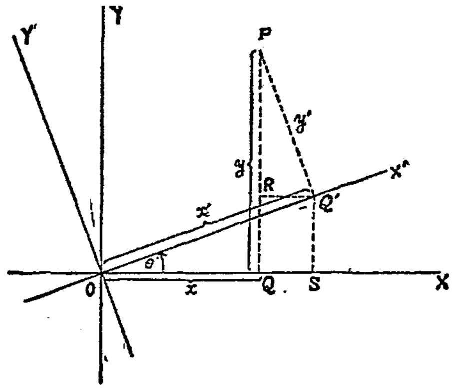

圖 163

畫 $Q'R \perp QP$.

於是

$$x=OQ=OS-QS=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$

$$y=QP=SQ'+RP=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

所以, 當坐標軸不移動其原點而轉過一個已知角時, 一點的舊坐標和新坐標間的關係是

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases}$$

這叫做"旋轉法的公式".

用了這公式可把一種軌跡的方程式變做一個新方程式,其時新坐標軸和舊坐標軸的原點相同而方向不同,這種改變坐標法叫做"旋轉法"

θ 這個角本可隨意選定,但若方程式中有一項 xy, 我們可選取一個 θ 能使新方程式中沒有 xy 一項存在, 當要化簡一個方程式的時候,這是常用到的.

習　題

用旋轉法改變以下各方程式:

1. $xy=8$, $\theta=45°$.

這里　$x=x'\cos 45°-y'\sin 45°=\dfrac{x'\sqrt{2}}{2}-\dfrac{y'\sqrt{2}}{2}$,

$$y=x'\sin 45°+y'\cos 45°=\frac{x'\sqrt{2}}{2}+\frac{y'\sqrt{2}}{2}.$$

代入原方程式後得

$$\frac{x'^2-y'^2}{2}=8,$$

即

$$x'^2-y'^2=16.$$

這是代表等邊雙曲線的.

2. $x^2+12xy+9y^2=16$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

3. $29x^2-24xy+36y^2-180=0,\ \theta=\text{arc}\tan\frac{3}{4}$.

4. $x^2+y^2=a^2,\ \theta=\frac{\pi}{6}$. 試證這方程式永不改變無論 θ 是什麼.

5. $16y^2-24xy+9x^2-20x+110y=75,\ \theta=\text{arc}\sin\frac{3}{5}$.

317. 改變坐標法已說過的有兩種,就是遷移法和旋轉法,也只有這兩種.一種軌跡的方程式無論怎樣變化,所用的總是這兩法;看事實上的需要,或專用遷移法,或專用旋轉法,或兩法並用.在兩法並用時,先用遷移法而後用旋轉法或先用旋轉法而後用遷移法,所得結果是一樣的.

先用遷移法而後用旋轉法:

$$x=x'+h,\ y=y'+k.$$

$$x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta,\ y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta.$$

$$\therefore\quad x=x''\cos\theta-y''\sin\theta+h,$$

$$y=x''\sin\theta+y''\cos\theta+k.$$

先用旋轉法而後用遷移法:

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\qquad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

$$x'=x''+h\cos\theta+k\sin\theta,\ y'=y''+k\cos\theta-h\sin\theta.$$

$$\therefore\quad x=x''\cos\theta-y''\sin\theta+h,$$

$$y=x''\sin\theta+y''\cos\theta+k.$$

第二十二章

普通二元二次方程式與圓錐曲線

318. 圓錐曲線的普通方程式.

二元二次方程式的最普通的形式是

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0. \qquad (1)$$

這方程式的圖形是什麽,我們在§267早就提問,但當其時爲了便利起見,把這個問題擱置下來,隨後陸續研究各種特殊的二元二次方程式所代表的圖形.現在我們可以斷言這個普通二元二次方程式是代表各種圓錐曲線的,也可以稱牠是圓錐曲線的普通方程式.

我們在§311曾經證明圓錐曲線的普通方程式是

$$(x-i)^2+(y-j)^2=e^2(x\cos\omega+y\sin\omega-p)^2.$$

這可化爲

$$\begin{aligned}(1-e^2\cos^2\omega)x^2-2(e^2\sin\omega\cos\omega)xy+(1-e^2\sin^2\omega)y^2\\+2(e^2p\cos\omega-i)x+2(e^2p\sin\omega-j)y\\+i^2+j^2-e^2p^2=0. \qquad (2)\end{aligned}$$

(2)與(1)的形式完全相同,所以(1)是圓錐曲線的一個總方程式.

319. 經過五個已知點的一種圓錐曲線.

在§318,方程式(1)和(2)都含有五個不定常數.在(2)的五個不定常數是i, j, p, ω,和e.在(1)的不定常數看來雖有六個,其實只有五個,因為在A, H, B, G, F和C六個不定常數中,可任取一個以除全式,於是變為五個不定常數.所以要決定一種圓錐曲線須有五個獨立的條件.例如一種圓錐曲線可使經過同一平面上的五點.

經過五個已知點的一種圓錐曲線,牠的方程式可以求得,只要先把這五個已知點的坐標分別代入這個普通方程式

$$x^2+axy+by^2+cx+dy+e=0,$$

即得五個一次方程式,而後解這五個聯立方程式便可決定a, b, c, d, e的值.

但是還有一個更簡捷的方法可用來決定這種經過已知的五點的圓錐曲線的方程式,現在說明於下:

設P, Q, R,和S(圖164)是五個已知點中的四個.

成立這四根直線PQ, QR, RS,和SP的方程式.

設以l_1, l_2, l_3,和l_4表明這四根直線的方程式.

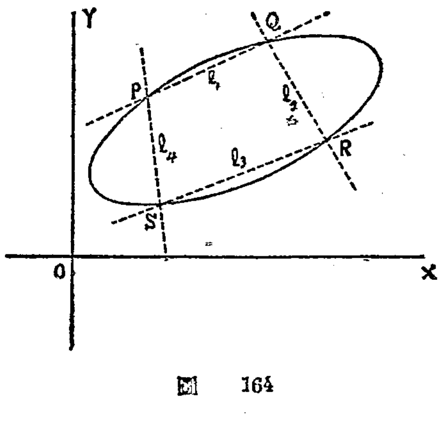

圖 164

那麼 $l_1l_3=0$ 和 $l_2l_4=0$ 都是 x 和 y 的二次方程式,而 P, Q, R, S 四點的坐標都適合於這兩個二次方程式.

所以這個二次方程式

$$l_1l_3+kl_2l_4=0$$

是代表經過 P, Q, R, S 四點的一切圓錐曲線. k 的值只要把第五個已知點的坐標代入這個方程式即可決定,而所求的方程式也就決定了,

注意——拋物線的方程式可從四個已知點決定, 以後將要論及.

習　題

試求經過以下各點的圓錐曲線的方程式:

1. $(1, -2)$, $(2, -1)$, $(1, 2)$, $(-3, -1)$, $(-2, 4)$.

$$l_1=-x+y+3=0;\qquad l_2=-3x-y+5=0;$$

$$l_3=3x-4y+5=0;\qquad l_4=-x-4y-7=0.$$

$$\therefore\quad l_1l_3+kl_2l_4=(-x+y+3)(3x-4y+5)+k(-3x-y+5)(-x-4y-7)=0.$$

以 $(x, y)=(-2, 4)$ 代入後,則得

$$(9)(-17)+k(7)(-21)=0.$$

$$\therefore\quad k=-\frac{51}{49}.$$

2. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ $(3, 1)$, $(-1, 2)$.

3. $(2,1)$, $(-2,1)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(-2,-1)$.

4. $(2,4)$, $(-3,-1)$, $(0,5)$, $(3,2)$, $(3,3)$.

5. $(0,0)$, $(1,3)$, $(-1,1)$, $(-2,3)$, $(-4,8)$.

6. $(0,4)$, $(3,3)$, $(-3,3)$, $(-5,-1)$, $(-4,2)$.

7. $(1,1)$, $(-1,2)$, $(2,3)$, $(-3,-1)$, $(0,-4)$.

320. 撤消 xy 項. 用了旋轉法的公式, 這個方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

可使變為

$$A'x'^2+2H'x'y'+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0.$$

這里
$$A'=A\cos^2\theta+2H\sin\theta\cos\theta+B\sin^2\theta;$$

$$H'=(B-A)\sin\theta\cos\theta+H(\cos^2\theta-\sin^2\theta);$$

$$B'=A\sin^2\theta-2H\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta;$$

$$G'=G\cos\theta+F\sin\theta;$$

$$F'=F\cos\theta-G\sin\theta;$$

$$C'=C.$$

令
$$H'=(B-A)\sin\theta\cos\theta+H(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0.$$

這就是
$$(B-A)\sin 2\theta+2H\cos 2\theta=0.$$

$$\therefore\quad \tan 2\theta=\frac{2H}{A-B},\ 或\ \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arc}\tan\frac{2H}{A-B}.$$

當 2θ 從 $0°$ 變到 $180°$, 或當 θ 從 $0°$ 變到 $90°$, $\tan 2\theta$ 可有一切的正值和負值.所以我們常能求得一個 θ, 其值小於

$90°$，而適合於這方程式 $\tan 2\theta=\dfrac{2H}{A-B}$.

若把坐標軸轉過了 θ 角，在新方程式中的 $x'y'$ 項就要消失。

所以我們與其討論那個複雜的原方程式，寧可討論這個比較簡單的新方程式

$$A'x^2+B'y^2+2G'x+2F'y+C'=0,$$

因為牠們所代表的圖形是同一的。

習　題

撤消以下各方程式中的 xy 項：

1. $8x^2+4xy+5y^2=36$.

這里 $\qquad \tan 2\theta=\dfrac{4}{3}$.

所以 $\qquad \cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$.

$$\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

於是 $\qquad x=x'\sqrt{\dfrac{4}{5}}-y'\sqrt{\dfrac{1}{5}},\qquad y=x'\sqrt{\dfrac{1}{5}}+y'\sqrt{\dfrac{4}{5}}.$

所以新方程式是 $\qquad 9x^2+4y^2=36$.

這是一個橢圓。

2. $x^2-2xy+y^2-2y-1=0.$

3. $16y^2-24xy+9x^2-20x+110y-75=0.$

4. $x^2+xy+y^2=4.$

5. $5x^2-6xy+5y^2=8.$

6. $9x^2+24xy+16y^2+90x-130y=0.$

7. $4xy-3y^2=8.$

321. 討論這個方程式 $Ax^2+By^2+2Gx+2Fy+C=0$. 這個方程式在 §314 雖已討論過,但尚有許多未盡的意義隱藏在內,現在表達於下:

配成平方後,這方程式可寫做

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=\frac{A\cdot F^2+B\cdot G^2-ABC}{AB}.$$

依據遷移法,把原點移到 $\left(-\frac{G}{A},-\frac{F}{B}\right)$, 這方程式變為

$$Ax'^2+By'^2=k.$$

(1) 設 A, B 的號子相同,又設 k 的號子也相同,那麼這方程式所代表的是橢圓.設 k 的號子和 A, B 的相反,那麼 x 和 y 沒有實值可以適合於這方程式,這軌跡必是虛的.設 $k=0$,那只有這一點 $(x',y')=(0,0)$,或 $(x,y)=\left(-\frac{G}{A},-\frac{F}{B}\right)$ 可以適合於這方程式.這點可當作這橢圓的極限情形.

(2) 設 A 與 B 的號子相反,而 $k\neq 0$,那麼這方程式所代表的是雙曲線.設 $k=0$,那麼這方程式代表通過 $(x',y')=$

$(0, 0)$, 或 $(x, y)=\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{B}\right)$ 的兩根直線.這兩根直線可當作這雙曲線的極限情形.

(3)　設 A 是零,或 B 是零;令 $A=0$, $B\neq 0$, 那麼這原方程式該寫做 $$By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

配成平方後得

$$B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=-2G\left(x+\frac{C}{2G}-\frac{F^2}{2GB}\right).$$

設 $G\neq 0$, 可將原點移到 $\left[\left(-\frac{C}{2G}+\frac{F^2}{2GB}\right), -\frac{F}{B}\right]$, 於是這方程式變爲 $$y'^2=-\frac{2G}{B}x'.$$

這是代表拋物線的.

設 $G=0$, 這原方程式該寫做

$$By^2+2Fy+C=0.$$

這可分解爲 $$B(y-r_1)(y-r_2)=0.$$

r_1 和 r_2 是方程式 $By^2+2Fy+C=0$ 的二根. 所以這軌跡或是兩根平行線,或是兩根合一線(就是一根線),或是虛線,只要看 r_1 和 r_2 是不等實數,還是相等實數,還是虛數.

322. $AB-H^2$ 的值不因坐標軸旋轉而變.

因爲 $$A'B'-H'^2=(A\cos^2\theta+2H\sin\theta\cos\theta+B\sin^2\theta)$$
$$\times(A\sin^2\theta-2H\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta)$$
$$-\{(B-A)\sin\theta\cos\theta+H(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= A^2\sin^2\theta\cos^2\theta \quad +2AH\sin^3\theta\cos\theta \quad +AB\sin^4\theta \\
&-4H^2\sin^2\theta\cos^2\theta \quad -2BH\sin^3\theta\cos\theta -2AH\sin\theta\cos^3\theta \\
&+B^2\sin^2\theta\cos^2\theta \quad +2BH\sin\theta\cos^3\theta+AB\cos^4\theta \\
&-(B-A)^2\sin^2\theta\cos^2\theta+2(B-A)H\sin^3\theta\cos\theta \quad -H^2\sin^4\theta \\
&\qquad -2(B-A)H\sin\theta\cos^3\theta \\
&+2H^2\sin^2\theta\cos^2\theta \quad -H^2\cos^4\theta \\
&=(AB-H^2)\sin^4\theta+2(AB-H^2)\sin^2\theta\cos^2\theta+(AB-H^2)\cos^4\theta \\
&=(AB-H^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2 \\
&=AB-H^2.
\end{aligned}
$$

323. 討論這個方程式$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$. 把坐標軸轉過一個角$\theta=\frac{1}{2}\text{arc tan}\frac{2H}{A-B}$, 這方程式就變爲

$$A'x'^2+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0,$$

而 $$AB-H^2=A'B'-H'^2=A'B'(H'=0).$$

所以,根據 § 321, 設 A' 和 B' 的號子相同,就是:

(1) 設 $AB-H^2>0$, 這原方程式代表一橢圓,或一點,或一虛線.

(2) 設 $AB-H^2<0$, 這原方程式代表一雙曲線,或二相交直線.

(3) 設 $AB-H^2=0$, 這原方程式代表一拋

物線,或二平行線,或一直線,或一虛線.

所有結論可總括如下表:

	$A'F'^2+B'G'^2-A'B'C'\neq0$	$A'F'^2+B'G'^2-A'B'C'=0$
$AB-H^2>0$	這軌跡是一橢圓,實的或虛的.	這軌跡是一點.
$AB-H^2<0$	這軌跡是一雙曲線.	這軌跡是二相交直線.
$AB-H^2=0$	這軌跡是一拋物線.	這軌跡是二平行線,或一直線,或一虛線.

這個式子 $A'F'^2+B'G'^2-A'B'C'$ 可以原方程式中各係數表明,只須把 § 320 所示各值來代替.但先用遷移法撤消原方程式中一次各項而後計算其絕對項的分子,亦能得同一結果.這結果就是

$$\Delta=ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2,\ 或\ \Delta=\begin{vmatrix}A&H&G\\H&B&F\\G&F&C\end{vmatrix}$$

這叫做方程式 $Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$ 的"判別式".

324. 圓錐曲線的中心的坐標. 在圓錐曲線中,只有拋物線沒有中心,橢圓和雙曲線都有中心的.設牠們的中心的坐標是 h 和 k. 用了遷移法的公式 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 可把原點移到 (h, k), 於是這代表各種圓錐曲線的普通二元二次方程式變為

$$Ax'^2+2Hx'y'+By'^2+2(Ah+Hk+G)x'$$

$$+2(Hh+Bk+F)y'+C'=0.$$

$$(C'=Ah^2+2Hhk+Bk^2+2Gh+2Fk+C)$$

h 和 k 是中心的坐標,所以必適合於這兩個方程式

$$\begin{cases} Ah+Hk+G=0, \\ Hh+Bk+F=0. \end{cases} \qquad (1)$$

解這兩個聯立方程式則得

$$h=\frac{HF-BG}{AB-H^2},\ k=\frac{HG-AF}{AB-H^2}.$$

只要 $AB-H^2\neq 0$, 方程式 (1) 必有一個共通的解答.

325. 一種圓錐曲線的方程式化爲最簡式.

首先決定 $AB-H^2$.

I. (1) 設 $AB-H^2\neq 0$;

(2) 判別這圓錐曲線是橢圓或是雙曲線; (§ 323)

(3) 求其中心的坐標; (§ 324)

(4) 把原點移到中心,卽得一個沒有一次各項的新方程式;

(5) 把坐標軸轉過一個角 $\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arc}\tan\frac{2H}{A-B}$, 撤消新方程式中的 xy 項卽得最簡式.

II. (1) 設 $AB-H^2=0$;

(2) 設這圓錐曲線是拋物線;

(3) 沒有中心可把原點移到,所以先撤消原方程

式中的 xy 項,即得一個新方程式 $B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0$.

(4) 把原點移到 $\left[\left(-\dfrac{C'}{2G'}+\dfrac{F'^2}{2G'B'}\right),-\dfrac{F'}{B'}\right]$,即得最簡式

$$y''^2=-2\frac{G'}{B'}x''.$$

習　題

化簡以下各方程式並判別其軌跡:

1. $32x^2+8xy+5y^2+16x-16y-16=0$.

2. $4x^2-4xy+y^2-2y-1=0$.

3. $x^2+2xy+y^2-4=0$.

4. $3x^2-3xy-y^2+15x+10y-24=0$.

5. $8x^2-3y^2+16x-6y+11=0$.

6. $4x^2+8xy+4y^2+4x+3=0$.

7. $36x^2-48xy+16y^2-6x+4y-6=0$.

8. $4x^2+12xy+9y^2-20x+80y+200=0$.

9. 試求這雙曲線 $x^2-4y^2+2x+12y=9$ 的頂點,焦點,和漸近線.

10. 試畫這曲線 $x=2-3\cos t$, $y=3+2\sin t$ 的略圖,並求其坐標方程式.(先消去 t)

試求經過以下四點的各拋物線的方程式:

11. $(0, -3)$, $(-4, -2)$, $(2, 0)$, $(2, 7)$。

當用 § 319 的方法和 $AB-H^2=0$.

這里 $l_1=3x-2y+8=0$; [聯結 $(-4, -2)$ 和 $(2, 7)$]

$l_2=x-2=0$; [聯結 $(2, 0)$ 和 $(2, 7)$]

$l_3=3x-2y-6=0$; [聯結 $(0, -3)$ 和 $(2, 0)$]

$l_4=x+4y+12=0$. [聯結 $(-4, -2)$和 $(0, -3)$]

$$\therefore \quad (3x-2y+8)(3x-2y-6)+k(x-2)(x+4y+12)=0,$$

即 $9x^2-12xy+4y^2+6x-4y-48+k(x^2+4xy+10x-8y-24)=0$,

或 $$(k+9)x^2+(4k-12)xy+4y^2+(10k+6)x-(8k+4)y-(24k+48)=0.$$

這是拋物線的方程式,所以

$$4(k+9)=(2k-6)^2.$$

$$\therefore \quad k=7, \text{ 或 } 0.$$

所以經過這四點的拋物線有二:

一是 $16x^2+16xy+4y^2+76x-60y-216=0$,

一是 $9x^2-12xy+4y^2+6x-4y-48=0$ (極限情形).

12. $(0, 0)$, $(9, -3)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$.

$l_1=x-y=0$; [$(0, 0)$, $(1, 1)$]

$l_2=x+3y=0$; [$(0, 0)$, $(9, -3)$]

$l_3=x+y-6=0$; [$(4, 2)$, $(9, -3)$]

$l_4=x-3y+2=0$. [$(1, 1)$, $(4, 2)$]

$$\therefore\quad (x-y)(x+y-6)+k(x+3y)(x-\ y+2)=0,$$

即 $$x^2-y^2-6x+6y+k(x^2-9y^2+2x+6y)=0,$$

或 $$(k+1)x^2-(9k+1)y^2+(2k-6)x+(6k+6)y=0.$$

這里 $$H=0.$$

$$\therefore\quad (k+1)[-(9k+1)]=0.$$

$$\therefore\quad k=-1,\ 或\ -\frac{1}{9}.$$

所以經過這四點的拋物線是

$$y^2=x\ 和\ x^2-7x+6y=0.$$

13. (2, 1), (6, 9), (−4, 4), (−12, 36).

14. (0, 0), (4, 2), (9, 6), (1, 2).

15. (1, 1), (7, −2), (3, 2), (7, 3).

16. (6, −1), (4, −4), (9, 4), (5, −2).

17. (4, 0), (0, 4), (1, 1), (9, 1).

第二十三章

無窮級數

326. 級數的和. 有許多數按照一種規則排成一列,如

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

或
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n},$$

這就叫做"級數";這許多數相加所得的和就是"級數的和".

凡級數的和可以

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_k+\cdots+u_n$$

表明,爲簡便起見,也可以S_n表明.於是

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_k+\cdots\cdots+u_n.$$

但是還有一法可以表明級數的和,就是把希臘字母Σ (讀 igma) 來代替S.例如在任何級數中,取出k項相加從$k=1$到$k=n$,則應寫做

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}.$$

由此看來,一種級數的 k 項的和的值須依據 k 的值而定,所以這和的值可當作 k 的函數.

327. 無窮級數. 倘若一個級數的項數准予無限地增加,這級數就稱爲"無窮級數".例如:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k=1+2+3+4+5+\cdots\cdots. \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k=1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots. \tag{3}$$

328. 收斂級數和發散級數. 在 § 327 所舉無窮級數的三個例正可用來說明"收斂"和"發散"的意義.

1 級數(1)恰是一個幾何級數,所以牠的和是 $\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{1-1(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$. 這是顯而易見的,當 n 無限地增加,級數(1) 的 n 項的和 S_n 必漸近於其極限 2. 這個 2 就叫做這無窮級數的和.

不論何種無窮級數,倘若當牠的項數 n 無限地增加,而牠的 n 項的和漸近於一個有限數,那麼這種級數就叫做"收斂級數".這個極限值就是這級數的和.

2. 這是顯而易見的,當 n 無限地增加,級數 (2) 的 n 項

的和S_n也將無限地增加.這種級數就叫做"發散級數".

3. n雖無限地增加,級數(3)的S_n終是有限的,但不漸近於一個極限值.這樣的級數也叫做發散級數,又稱爲"擺動級數".因爲S_n的值是永在 1, 0, 1, 0, …… 中間輪迴的.總而言之,一種無窮級數,只要牠不是屬於收斂的,就必是發散的.

正級數

329. 無窮級數既是只有收斂的和發散的兩大區別,現在我們要來研究怎樣判別某一級數是收斂的呢還是發散的呢的問題了.讓我們先來研究正級數,就是牠所有各項都是正的這種級數.

330. 定理. 若這級數$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$是收斂的,則$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

$$u_n=(u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_{n-1}+u_n)-(u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_{n-1})=S_n-S_{n-1}.$$

設 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. (因爲這級數是收斂的)

於是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S,\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S,$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(S-S_n)=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}(S-S_{n-1})=0.$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[(S-S_{n-1})-(S-S_n)]=0,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0,$$
即
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

這個定理就此證明了,但這並不是說,若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 則這級數是收斂的務須注意.

331. 定理. 有一正級數,當 n 無限地增加,若 S_n 終小於一個有限數 N, 則這級數必是收斂的.

因為這級數是正級數,所以牠不能成為擺動級數並且當 n 增加,牠的和也必增加.假設牠是發散級數,那麼當 n 無限地增加, S_n 也必無限地增加.但這是不可能的,因為 S_n 終比 N 小.所以這級數必是收斂的.

332. 比較檢驗法. 有了以前的兩個定理,我們可把某一級數與已知其為收斂的或發散的另一級數比較,由是决定這某級數為收斂的或發散的.這方法叫做"比較檢驗法".

333. 定理. 設
$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots \tag{1}$$
為一正級數,又設
$$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots \tag{2}$$

為一已知正收斂級數.儻若從某項起,級數(1)的每項是等於或小於級數(2)的相當項,那麼級數(1)也是收斂的.

這里必有一個 n 的值能使下列各不等式成立:

$$u_{n+1}\leqq v_{n+1},\quad u_{n+2}\leqq v_{n+2},\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots\leqq v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots.$$

設 $$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n,$$

又設 $$S'_n=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n.$$

級數(2)既是收斂的,S'_n 就必漸近於一個有限值.所以 $v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots$ 的值可任意減小,只須把 n 放大.

因此 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots$ 也可任意減小,只須把 n 放大.

所以 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$ 常小於一個有限數 N,而級數(1)必是收斂的.

334. 定理. 設

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots \tag{1}$$

為一正級數,又設

$$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots \tag{2}$$

為一已知正發散級數.儻若從某項起,級數(1)的每項是等於或大於級數(2)的相當項,那麼級數(1)也是發散的.

假設級數(1)不是發散的,那麼級數(2)該是收斂的.

但級數(2)是發散的,所以級數(1)也必是發散的.

對於某一級數增加了若干項或減少了若干項,只要所加或所減的項數是有限的,這級數固有的收斂性或發散性決不因之改變,這是應該特別留心的.

335. 定理. 設

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u\ +\cdots\cdots$$

和
$$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

都是正級數.若前一級數的每項與後一級數的相當項的比值是有限的,那麼這二級數或都是收斂的或都是發散的.

設 R 是一個有限數,但牠大於一切比值 $\frac{u_n}{v_n}$ 中的最大值.

於是 $\quad \frac{u_1}{v_1}<R; \qquad \frac{u_2}{v_2}<R; \qquad \frac{u_3}{v_3}<R;\cdots\cdots$

$$\therefore\ u_1<R\,v_1; \qquad u_2<R\,v_2; \qquad u_3<Rv_3;\cdots\cdots$$

$$\therefore\ u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots<R(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots).$$

若 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ 是收斂級數,則 $R\,(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots)$ 的值是有限的.

$\therefore\ u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 也是收斂級數.

設 r 是一個有限數,但牠小於一切比值 $\frac{u_n}{v_n}$ 中的最小

值.

那麼 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots>r(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots)$.

所以若 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ 是發散級數, $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 也是發散級數.

336. 標準級數. 從比較檢驗法看來,一種標準級數是決不可沒有的,沒有了,就無從比較.這里有兩種標準級數,已知其爲收斂的或發散的了,在比較時大有用處,今分說於下:

1. $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$,

這是一個幾何級數, a 是牠的首項, r 是牠的公比.當 $r<1$,這級數是收斂的;當 $r\geqq1$, 這級數是發散的.

2. $\dfrac{1}{1^p}+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots\cdots$,

當 $p>1$, 這級數是收斂的;當 $p\leqq1$, 這級數是發散的.

這可證明如下:

先設 $p>1$.

於是
$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}},$$
$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}=\frac{1}{4^{p-1}},$$
$$\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{15^p}<\frac{8}{8^p}=\frac{1}{8^{p-1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

兩邊相加,

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots<\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots\cdots;$$

這不等式的右邊是一個幾何級數,其公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}$.

因為 $p>1$, $\therefore\ \frac{1}{2^{p-1}}<1$. 所以這個幾何級數是收斂的.

$\therefore$ 這級數 $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots$

必是收斂的.

次設 $p=1$.

於是

$$1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

兩邊相加,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots,$$

這不等式的右邊是無限大的.所以在左邊的級數是發散的,這級數叫做"調和級數".

最後設 $p<1$

那麼這級數

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots$$

的每項除第一項外都大於這剛纔證明的發散級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$$

的相當項,所以前一級數必是發散的.

習　題

判別下列各級數是收斂的還是發散的:

1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots.$

2. $1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\frac{1}{\sqrt{4^3}}+\cdots\cdots.$

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots.$

4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots.$　　收斂.

　　(與 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\cdots\cdots$ 比較).

5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\cdots\cdots.$　　收斂.

6. $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots\cdots.$

7. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots.$　　發散.

8. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots.$ 發散.

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^3}+\cdots\cdots.$ 收斂.

10. $\frac{2}{1+2\sqrt{2}}+\frac{3}{1+3\sqrt{3}}+\frac{4}{1+4\sqrt{4}}+\cdots\cdots.$ 發散.

337. 比值檢驗法 檢驗某一級數是收斂的或發散的,除比較法以外,還有一種叫做"比值檢驗法".這種方法是下述的一個定理的應用,這定理是:

這正級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots$ 是收斂的,若當 n 無限地增加,第 $n+1$ 項與第 n 項的比值漸近於其極限 r,只須 $r<1$.若 $r>1$,則這級數是發散的.

若 $r=1$,則這級數是收斂的或發散的,不能從這個比值檢驗法來決定了.

今分說於下:

先設 $r<1$.

因為 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r,$$

所以我們必能求得這樣一個正整數 m,對於 n 所有一切的值只要是大於 m 的,這兩個不等式

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}-r<\delta \text{ (一個正數)}$$

和 $$r+\delta<1$$

可使同時成立.試看圖165更可明瞭.

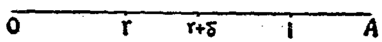

圖 165

今以 a 表明 $r+\delta$, 則有

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}<a;\quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<a;\quad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<a;\ \cdots\cdots$$

$$u_{m+1}<au_m;$$

$$u_{m+2}<au_{m+1}<a^2u_m;$$

$$u_{m+3}<au_{m+2}<a^3u_m;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots\cdots<au_m+a^2u_m+a^3u_m+\cdots\cdots$$
$$=u_m(a+a^2+a^3+\cdots\cdots).$$

這是一個幾何級數牠的公比 $a<1$, 所以牠是收斂級數.

$\because$ 這級數 $u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots\cdots$ 也是收斂的.

$\therefore$ $u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots+u_m+u_{m+1}+\cdots\cdots$ 必是收斂級數.

次設 $r>1$.

這里也必有這樣一個正整數 m, 當 $n>m$, 下列各不等式可使成立:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}>1;\quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}>1;\quad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}>1;\ \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad u_{m+1} > u_m;$$

$$u_{m+2} > u_{m+1} > u_m;$$

$$u_{m+3} > u_{m+2} > u_m;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots\cdots > u_m + u_m + u_m + \cdots\cdots.$$

$\therefore \quad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_m + u_{m+1} + \cdots\cdots$是發散級數,當$r > 1$.

若$r=1$,則這級數可以是收斂的也可以是發散的,試看以下所舉二例自明:

1. 這級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$$

已知其爲發散的,但牠的第$n+1$項與第n項的比值是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

2. 試看這級數

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots,$$

牠的第$n+1$項與第n項的比值是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{n}{n+2}=\frac{1}{1+\frac{2}{n}}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1.$$

但這級數是收斂的,可以證明如下:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$, 就此證明這級數是收斂的.

習　　題

以比值檢驗法判別下列各級數:

1. $3+\frac{3^2}{2}+\frac{{}^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{3^n}{n}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}\cdot n}{(n+1)\,3^n}=\frac{3}{1+\frac{1}{n}}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=3>1.$$

$\therefore$　這是發散級數.

2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\cdots.$　　　　收斂.

3. $1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\cdots\cdots.$　　　　收斂.

4. $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{6}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots.$　發散.

5. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots.$

收斂.

6. $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{3^2\cdot 4}+\cdots\cdots.$　收斂.

7. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{\lfloor\!\underline{2}}{3^2}+\frac{\lfloor\!\underline{3}}{4^2}+\cdots\cdots.$　發散.

8. $\frac{5}{2^2}+\frac{5^2}{3^2}+\frac{5^3}{4^2}+\cdots\cdots.$　發散.

9. $\frac{2^2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{3^2}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{4^2}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots.$　收斂

正負項都有的級數

338. 定理. 設有一無窮級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$, 牠的各項雖都是實數但不都是同號.儻若這正級數 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots$ 是收斂的,那麼這原級數也是收斂的.

這是顯而易見的:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots<|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots.$$

但在右邊的級數是收斂的,所以這原級數也是收斂的.

339. 絕對收斂級數. 設有一收斂級數,牠的各

項有正有負,若將所有負項都改爲正的,而牠仍是收斂級數,那就稱牠爲"絕對收斂級數".如$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\cdots$就是絕對收斂級數.

340. 定理. 設

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

爲一正負項都有的無窮級數.

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$,則這級數是收斂的.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$,則這級數是發散的.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$,則這級數是收斂的或發散的,須用其他方法才能決定.

從 § 338 的定理就能證明 1, 不必再說.

對於任何收斂級數, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ (§ 330). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, 則這個必要條件不能存在.所以這原級數必是發散的,這就證明了 2.

341. 定理. 設有一無窮級數,牠的各項是正負循環的,若每項的絕對值小於其前項,又當 n 無限地增加,第 n 項的極限爲零,那麼這級數必是收斂的.

設這級數爲$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\cdots\cdots$.

若 n 是一個偶數,則S_n可寫做

$$S_n=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots+(u_{n-1}-u_n);$$

這和必是一個正數,因爲$u_1>u_2>u_3\cdots\cdots$.

但是S_n又可寫做

$$S_n=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots-(u_{n-2}-u_{n-1})-u_n,$$

因爲所有在括弧內的數都是正數,所以

$$S_n<u_1.$$

∴ 這級數必是收斂的.

由此可知若n是偶數,S_n必漸近於一個有限數S.

因爲
$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=\lim_{n\to\infty} S_n+\lim_{n\to\infty} u_{n+1},$$

卽
$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=S+0=S.$$

但$n+1$是奇數,所以不論 n 是偶數或奇數,這級數總是收斂的.

習　題

檢驗下列各級數或是收斂的或是發散的:

1. $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots\cdots$.　收斂

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots\cdots$.　收斂

3. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}-\cdots\cdots.$ 收斂.

4. $1-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}-\cdots\cdots.$ 收斂.

5. $1+\frac{4}{5}+\frac{9}{5^2}+\frac{16}{5^3}+\cdots\cdots.$ 收斂.

6. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots.$ 收斂.

各項是 x 的函數的級數

342. 有一種級數,牠的各項是 x 的函數,要檢驗這種級數是收斂的還是發散的,現在可舉一個例來說明其方法.

試檢驗這級數

$$\frac{1}{2}+\frac{2x}{2^2}+\frac{3x^2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{nx^{n-1}}{2^n}+\cdots\cdots.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}}{\dfrac{nx^{n-1}}{2^n}}=\frac{(n+1)x^n\cdot 2^n}{2^{n+1}nx^{n-1}}=\frac{(n+1)x}{2n}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x}{2}.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{2}\,|x|.$$

這級數是收斂的,若 $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, 或 $|x|<2$.

這級數是發散的,若 $\left|\frac{x}{2}\right|>1$, 或 $|x|>2$.

當$\left|\frac{x}{2}\right|=1$,或$|x|=2$,那麼該先把$\pm2$去替代$x$而後檢驗這已經替代的級數是收斂的還是發散的.

習 題

x要有什麼值,下列各級數才是收斂的?x要有什麼值,下列各級數才是發散的?

1. $2(2x)^2+3(2x)^3+2(2x)^4+3(2x)^5+\cdots\cdots$. $|x|\leqq\frac{1}{3}$; $|x|>\frac{1}{3}$.

2. $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^2}+\cdots\cdots$. 發散.

3. $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot3^3}+\frac{x^5}{5\cdot3^5}+\cdots\cdots$. $|x|<3$; $|x|\geqq3$.

4. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{x}{2\cdot3}+\frac{x^2}{3\cdot4}+\cdots\cdots$. $|x|\leqq1$; $|x|>1$.

5. $\frac{1\cdot3}{2}+\frac{3\cdot5x}{2^2}+\frac{5\cdot7x^2}{2^3}+\cdots\cdots$. $|x|<2$; $|x|\geqq2$.

6. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$. $|x|<1, x=-1$; $|x|>1, x=1$.

雜 題

檢驗下列各級數或是收斂的或是發散的:

1. $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots\cdots$. 收斂.

2. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots\cdots$. 發散.

3. $u_n=\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$.

設 $v_n=\frac{(2n-1)+1-n}{(n+n)(n+n)}=\frac{n}{2n\cdot 2n}=\frac{1}{4n}$.

$v_n<u_n$, 當 $n>1$

但 $v_n=\frac{1}{4n}$是這發散級數

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\right)$$

的公項,所以這以 $u_n=\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$ 爲公項的級數也是發散級數.

4. $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

設 $v_n=\frac{\sqrt{n}}{(n^2+1)-1}=\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$v_n>u_n$, 對於 n 一切的值.

但 $v_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是這收斂級數

$$1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}+\cdots\cdots \qquad (\text{因爲 } p=\frac{3}{2}>1)$$

的公項,所以這以 $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ 爲公項的級數也是收斂級數.

5. $u_n=\frac{n^2-(n-1)^2}{n^3+(n+1)^3}$. 收斂.

6. $u_n=\frac{n+1}{n(n+2)}$. 發散.

7. $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$. 發散.

8. $u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 發散.

9. $\dfrac{2}{3}+2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots$. 收斂.

10. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{a^2+2}+\cdots\cdots$. 發散.

11. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{11}-\cdots\cdots$. 發散(擺動).

12. $\dfrac{1}{1+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\cdots\cdots$. 發散.

13. $\log\dfrac{2}{1}-\log\dfrac{3}{2}+\log\dfrac{4}{3}-\log\dfrac{5}{4}+\cdots\cdots$. 收斂.

14. $\sec\dfrac{\pi}{3}-\sec\dfrac{\pi}{4}+\sec\dfrac{\pi}{5}-\sec\dfrac{\pi}{6}+\cdots\cdots$. 發散(擺動).

15. $\sin^2\dfrac{\pi}{2}+\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{4}+\sin^2\dfrac{\pi}{5}+\cdots\cdots$. 收斂.

x要有什麼值下列各級數才是收斂的:

16. $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$. $|x|<1$.

17. $\dfrac{x}{1\cdot2}+\dfrac{x^2}{2\cdot3}+\dfrac{x^3}{3\cdot4}+\cdots\cdots$. $|x|\leqq1$.

18. $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$. $x=1, |x|<1$.

19. $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots\cdots$. $|x|\leqq1$.

20. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots.$ $\qquad |x|\leqq1.$

21. $1+x+\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{x^3}{\lfloor\underline{3}}+\frac{x^4}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots.$

$$u_n=\frac{x^{n-1}}{\lfloor\underline{n-1}}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n}{\lfloor\underline{n}}\div\frac{x^{n-1}}{\lfloor\underline{n-1}}=\frac{x}{n}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=0<1.$$

所以這級數總是收斂的,無論 x 有什麼值.

22. $1-\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{x^4}{\lfloor\underline{4}}-\frac{x^6}{\lfloor\underline{6}}+\cdots\cdots.$ $\qquad x$ 不拘何值.

23. $x-\frac{x^3}{\lfloor\underline{3}}+\frac{x^5}{\lfloor\underline{5}}-\frac{x^7}{\lfloor\underline{7}}+\cdots\cdots.$ $\qquad x$ 不拘何值

24. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots\cdots.$ $\qquad |x|>1$

25. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots\cdots.$($x$是正數) $\qquad x>1.$

26. $\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{x^3}{1+x^4}+\cdots\cdots.$($x$是正數) $\qquad x<1.$

27. $\frac{x}{x^2+1}+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\cdots\cdots.$ $\qquad x$不拘何值.

28. $\frac{3x}{x+4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^3+\cdots\cdots.$ $\qquad -1\leqq x<2.$

第二十四章

函數展開法

343. 用了任何方法把 x 的一個函數化爲 x 的一個冪級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots,$$

這函數就說是被"展開"爲這樣的級數.

例如,用尋常的除法可使

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots. \tag{1}$$

用二項式定理可使

$$(x+a)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4,$$

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots. \tag{2}$$

這些展開法只限用於某種函數,不是可以通用的.現在我們要求得一個較爲普徧的展開法,而上述兩法只算得其中的特殊情形.

這務須特別留心的,當一個函數被展開爲一個無窮的冪級數,如 (1) 和 ( ) 只對於 x 的值凡能使這級數收斂的,這個展開式才有效而這個展開法才可用.

這個較爲普徧的展開法就是"台洛的定理"和"麥克

老令的定理 (Maclaurin's Theorem)'. 現在先來研究麥克老令的定理.

344. 麥克老令的定理. 這個定理可以下式表明:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{\underline{|2}}+f'''(0)\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

若要把 x 的一個函數展開爲 x 的一個冪級數就須用這個定理. $f(x)$ 是要展開的一個函數, $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots\cdots$ 是連續各次的引申函數, $f(0), f'(0), f''(0), \cdots\cdots$ 是 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots\cdots$ 的值, 當 $x=0$.

345. 麥克老令的定理的證法. 要把 $f(x)$ 展開爲 x 的一個冪級數,假設這是可能的,那麼令

$$f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots\cdots; \tag{1}$$

這里 $A, B, C, \cdots\cdots$ 是表明常係數.

將 (1) 連續微分則得

$$f'(x)=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\cdots\cdots. \tag{2}$$

$$f''(x)=2C+2\cdot3Dx+3\cdot4Ex^2+\cdots\cdots. \tag{3}$$

$$f'''(x)=2\cdot3D+2\cdot3\cdot4Ex+\cdots\cdots. \tag{4}$$

$$f^{IV}(x)=2\cdot3\cdot4E+\cdots\cdots, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因爲對於 x 一切的值,假設 (1) 是真的,所以 (2), (3), ⋯⋯也都是真的,而當 $x=0$ 各式自然也都是真的了.以 0 代

x 後則

從 (1) 得　$f(0)=A,$　卽 $A=f(0),$

從 (2) 得　$f'(0)=B,$　卽 $B=f'(0),$

從 (3) 得　$f''(0)=2C,$　卽 $C=\dfrac{f''(0)}{\underline{|2}},$

從 (4) 得　$f'''(0)=2\cdot 3D,$　卽 $D=\dfrac{f'''(0)}{\underline{|3}},$

從 (5) 得　$f^{IV}(0)=2\cdot 3\cdot 4E,$　卽 $E=\dfrac{f^{IV}(0)}{\underline{|4}},$

....

把 $A, B, C,$...... 的值代入 (1) 則得

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{\underline{|2}}+f'''(0)\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

346. 現在我們要把 $\log(1+x)$ 展開爲 x 的一個冪級數,就當作在麥克老令的定理的應用上所舉的一個例.

$$f(x)=\log(1+x),\qquad f(0)=\log 1=0.$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\quad f'(0)=1.$$

$$f''(x)=-(1+x)^{-2},\qquad f''(0)=-1.$$

$$f'''(x)=2(1+x)^{-3},\qquad f'''(0)=2.$$

$$f^{IV}(x)=-\underline{|3}\,(1+x)^{-4},\quad f^{IV}(0)=-\underline{|3}.$$

$$f^{V}(x)=\underline{|4}\,(1+x)^{-5},\qquad f^{V}(0)=\underline{|4}$$

....

於是 $\log(1+x)=0+1\cdot x-1\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{|\underline{3}}-\frac{|\underline{3}\,x^4}{|\underline{4}}+\frac{|\underline{4}\,x^5}{|\underline{5}}-\cdots\cdots,$

即
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots.$$

347. 用了麥克老令的定理去展開一個函數以後,在 $f(0), f'(0), f''(0),\cdots\cdots$ 當中,若有一個是無窮大,這函數就不可展開為 x 的一個羃級數,而麥克老令的定理不適用於牠.如函數 $\log x$, $\cot x$, $x^{\frac{3}{2}}$ 都不適用麥克老令的定理.

習　題

用麥克老令的定理展開以下各函數爲羃級數:

1. $e^x=1+x+\frac{x}{|\underline{2}}+\frac{x^3}{|\underline{3}}+\frac{x^4}{|\underline{4}}+\cdots\cdots.$　　x 不拘何值.

2. $\sin x=x-\frac{x^3}{|\underline{3}}+\frac{x^5}{|\underline{5}}-\frac{x^7}{|\underline{7}}+\cdots\cdots.$　　x 不拘何值.

3. $\cos x=1-\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^4}{|\underline{4}}-\frac{x^6}{|\underline{6}}+\cdots\cdots.$　　x 不拘何值.

4. $(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{|\underline{2}}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{|\underline{3}}a^{n-3}x^3+\cdots\cdots.$　　$|x|<a.$

5. $\log_a(1+x)=\log_a e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right).$　　$|x|<1.$

6. $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots.$　　$|x|<1$

7. $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots.$ $|x|<1.$

這里 $f(x) = \tan^{-1}x,$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\cdots,$$

$$f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

8. $\sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots\cdots.$ $|x|<1.$

這里 $f(x) = \sin^{-1}x,$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

以二項式定理展開之,

$$f'(x) = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \cdots\cdots,$$

這里 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1\cdot3}{2\cdot4},\ c = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}, \cdots\cdots,$

$$f''(x) = 2ax + 4bx^3 + 6cx^5 + \cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

9. $\sin(x+a) = \sin a + x\cos a - \frac{x^2}{\underline{|2}}\sin a - \frac{x^3}{\underline{|3}}\cos a + \cdots\cdots.$

x 不拘何值.

10. $\log(1+x+x^2) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots.$ $|x|<1.$

11. $e^x\sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \cdots\cdots.$ x 不拘何值.

12. $e^x\cos x=1+x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}-\cdots\cdots.$ x 不拘何值.

13. $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\cdots\cdots.$

14. $\sec x=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+\cdots\cdots.$

15. $\log\sec x=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^6}{45}+\cdots\cdots.$

16. 以習題 1, 2, 3, 證明

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x.$$

348. 以級數求值. 試求$\sqrt{e}$的值到小數點後五位.

因為 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots,$$

所以 $$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^2}{\lfloor 2}+\frac{(\frac{1}{2})^3}{\lfloor 3}+\frac{(\frac{1}{2})^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

$$=1.64872.$$

試求$\sqrt[10]{e}$的值到小數點後十位.

試求$\sin 1'$的值到小數點後八位. $(\pi=3.14159265)$.

試求$\log\dfrac{180^\circ}{\pi}$的值到小數點後四位.

349. 對數的計算法. 用了$\log(1+x)$的展開式,

任何數的自然對數(就是以e爲底的對數)都可計算出來

試問下列各對數怎樣求得?

$$\log 2=0.6931,$$
$$\log 3=1.0986,$$
$$\log 4=1.3862,$$
$$\log 5=1.6094,$$
$$\log 6=1.7917,$$
$$\log 7=1.9459,$$
$$\log 8=2.0793,$$
$$\log 9=2.1972,$$
$$\log 10=2.3025.$$

只要先直接求得這些質數 2, 3, 5, 7 的對數就好了,因爲其餘各數的對數都可間接算出.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots.$$

$$\therefore\quad \log 2=\log(1+1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots.$$

這級數是收斂的,但是牠收斂得非常緩慢,雖然取到 100 項還只有小數點後兩位是準確的.於是我們不得不另想一個收斂很快的級數來代替牠,演算如下:

$$\log 2=\log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\log\left(1+\frac{1}{3}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

因爲 $\log\frac{1+x}{1-x}=\log(1+x)-\log(1-x)$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right). \qquad |x|<1$$

所以 $\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots\cdots\right)$.

在這級數中只取四項卽得 $\log 2=0.6931$.

關於計算上的佈置如下較便:

$\frac{1}{3}=.333333$	$\frac{1}{3}=.333333$
$\frac{1}{3^3}=.037037$	$\frac{1}{3\cdot 3^3}=.012346$
$\frac{1}{3^5}=.004115$	$\frac{1}{5\cdot 3^5}=.000823$
$\frac{1}{3^7}=.000457$	$\frac{1}{7\cdot 3^7}=.000065$
$\frac{1}{3^9}=.000051$	$\frac{1}{9\cdot 3^9}=.000006$
	$.34657$
	2
	$.69314$

任何數都可化爲這個形式 $\frac{1+x}{1-x}$, 所以 $\log 3=\log\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$, 其值可以求 $\log 2$ 的方法求得.

但既有了 $\log 2$, 則可先計算

$$\log\frac{3}{2}=\log\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}},$$

然後
$$\log 3=\log\frac{3}{2}+\log 2.$$

同樣，$\log 5$ 的值可從 $\log\frac{5}{3}=\log\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$ 求得，而 $\log 7$ 的值可從 $\log\frac{7}{5}=\log\frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}$ 求得.

既求得 2, 3, 5, 7 的對數，要求 4, 6, 8, 9, 10 的對數就很容易了.

$\log 4=\log 2^2=2\log 2;\ \log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3;\ \cdots.$

要求常用對數（以 10 爲底的對數），只須以 .4343 乘自然對數.

350. π 的計算法.

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots.$$

令 $x=1$ 則
$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots,$$

這是一個收斂很慢的級數.

爲要求得一個收斂較快的級數可用這個關係

$$\tan^{-1}1=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

於是
$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots\cdots.$$

在第一級數中取 9 項,在第二級數中取 5 項,則得

$$\frac{\pi}{4}=0.463647\cdots\cdots+0.321751\cdots\cdots$$

即 $$\pi=3.14159\cdots\cdots.$$

下列二式也都可用,曾有計算到小數點後200位的:

$$\tan^{-1}1=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}.$$

$$\tan^{-1}1=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

351. 台洛的定理. 這個定理可以下式表明:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{\underline{|2}}+f'''(x)\frac{h^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

用了這個定理可把兩個變數的和的函數展開爲其中一個變數的冪級數.

352. 要證明台洛的定理須依據下述的原理:

若微分 $f(x+h)$ 對於 x 而把 h 當作常數,若微分 $f(x+h)$ 對於 h 而把 x 當作常數,雙方所得結果是一樣的.這就是說:

$$\frac{d}{dx}f(x+h)=\frac{d}{dh}f(x+h).$$

令 $$z=x+h.$$

那麼 $$\frac{d}{dx}f(x+h)=\frac{d}{dx}f(z)=\frac{d}{dz}f(z)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d}{dh}f(x+h)=\frac{d}{dh}f(z)=\frac{d}{dz}f(z)\frac{dz}{dh}.$$

但 $$\frac{dz}{dx}=1,\quad \frac{dz}{dh}=1.$$

所以 $$\frac{d}{dx}f(x+h)=\frac{d}{dh}f(x+h).$$

353. 台洛的定理的證法. 要把 $f(x+h)$ 展開爲 h 的一個冪級數,假設這是可能的,那麼令

$$f(x+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\cdots\cdots, \tag{1}$$

這里 $A, B, C,\cdots\cdots$ 都是 x 的函數,其中絕不含有 h.

微分(1),先對於 x, 後對於 h,

$$\frac{d}{dx}f(x+h)=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}h+\frac{dC}{dx}h^2+\frac{dD}{dx}h^3+\cdots\cdots,$$

$$\frac{d}{dh}f(x+h)=B+2Ch+3Dh^2+\cdots\cdots.$$

因爲 $$\frac{d}{dx}f(x+h)=\frac{d}{dh}f(x+h),$$

所以 $$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}h+\frac{dC}{dx}h^2+\cdots\cdots=B+2Ch+3Dh^2+\cdots\cdots.$$

依據不定係數的原理,令兩邊所有 h 的同冪各項相等,則有

$$\frac{dA}{dx}=B,\qquad 即\quad B=\frac{dA}{dx},$$

$$\frac{dB}{dx}=2C,\qquad 即\quad C=\frac{1}{2}\frac{d^2A}{dx^2},$$

$$\frac{dC}{dx}=3D,\qquad 即\quad D=\frac{1}{\underline{|3}}\frac{d^3A}{dx^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

A 可從 (1) 求得,只須令 $h=0$, 因為假設 (1) 是真的,不拘 h 有什麼值.

於是 $$A=f(x).$$

所以 $$B=\frac{dA}{dx}=f'(x),$$

$$C=\frac{1}{2}\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{1}{2}f''(x),$$

$$D=\frac{1}{\underline{|3}}\frac{d^3A}{dx^3}=\frac{1}{\underline{|3}}f'''(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

把 $A, B, C,\cdots\cdots$ 各式代入 (1),則得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{\underline{|2}}+f'''(x)\frac{h^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

354. 這是顯而易見的,麥克老令的定理可從台洛的定理中得來,只須令 $x=0$. 於是

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+f''(0)\frac{h^2}{\underline{|2}}+f'''(0)\frac{h^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

這就是麥克老令的定理,不過把原有的 x 換做 h 罷了.

355. 現在我們要把 $\sin(x+h)$ 展開為 h 的一個冪級數,就當作在台洛的定理的應用上所舉的一個例.

$$f(x+h)=\sin(x+h);$$

所以 $$f(x)=\sin x,$$

$$f'(x)=\text{o}\ \ x,$$

$$f''(x) = -\sin x,$$

$$f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

把這些式子代入台洛的公式則得

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{\underline{|2}}\sin x - \frac{h^3}{\underline{|3}}\cos x + \frac{h^4}{\underline{|4}}\sin x + \cdots\cdots.$$

習 題

用台洛的定理立出以下各展開式:

1. $\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{\underline{|2}}\cos x + \frac{h^3}{\underline{|3}}\sin x + \cdots\cdots.$

2. $e^{x+h} = e^x\left(1 + h + \frac{h^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots\right).$

3. $(x+h)^7 = x^7 + 7x^6h + \cdots\cdots.$

4. $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}h^2 + \cdots\cdots.$

5. $\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \cdots\cdots.$

6. $\tan(x+h) = \tan x + h\sec^2 x + h^2\sec^2 x\tan x$

$$+\frac{h^3}{3}(3\sec^4 x - 2\sec^2 x) + \cdots\cdots.$$

7. 從習題 1 計算 $\cos 62° = 0.4695.$

8. 從習題 6 計算 $\tan 44° = 0.9657$, $\tan 46° = 1.0355.$

9. $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)}{2}=f(x)+\dfrac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\dfrac{h^4}{\underline{|4}}f^{IV}(x)+\cdots\cdots.$

10. $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2}=hf'(x)+\dfrac{h^3}{\underline{|3}}f'''(x)+\dfrac{h^5}{\underline{|5}}f^{V}(x)+\cdots\cdots.$

由此試證 $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+h}{x-h}=\dfrac{h}{x}+\dfrac{h^3}{3x^3}+\dfrac{h^5}{5x^5}+\cdots\cdots.$

11. $f(2x)=f(x)+xf'(x)+\dfrac{x^2}{\underline{|2}}f''(x)+\dfrac{x^3}{\underline{|3}}f'''(x)+\cdots\cdots.$

12. $$f\left(\frac{x^2}{1+x}\right)=f(x)-\frac{x}{1+x}f'(x)+\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{f''(x)}{\underline{|2}}$$
$$-\frac{x^3}{(1+x)^3}\frac{f'''(x)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

13. 設 $y=f(x)$, 試證

$$\Delta y=\frac{d}{dx}\Delta x+\frac{d^2y}{dx^4}\frac{(\Delta x)^2}{\underline{|2}}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{(\Delta x)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

第二十五章

再論不定式

356. 決定不定式$\frac{0}{0}$的值. 設有一個分數$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$,當$x=a$時,$\phi(a)$和$\psi(a)$都不是0或∞,那麼這分數的值必是$\frac{\phi(a)}{\psi(a)}$,這是不成問題的.或只有分子$\phi(a)$是0或∞,或只有分母$\psi(a)$是0或∞,或分子和分母一個是0一個是∞,那麼這分數的值都不難即刻決定.若分子$\phi(a)$和分母$\psi(a)$同是0或同是∞,這分數的值就成爲問題了.

關於不定式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$,在第十六章內已討論過,但是說得很簡略,所以在這里有再加討論的必要.

現在專對於$\frac{0}{0}$討究一下:

如 $$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{0}{0},\text{ 當 } x=1.$$

但 $$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+2}{x+1}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

又如 $$\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{0}{0},\text{ 當 } x=2.$$

但 $$\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}=\sqrt{x-1}+1.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x-1}+1)=2.$$

又如 $$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{0}{0},\ 當\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

但 $$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\cos\theta+\sin\theta.$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{2}.$$

從以上所舉的三個例子看來,要決定$\frac{0}{0}$的值須先把原式變換為另一形式.從變換形式以達到目的,恐怕這不是一件常有把握的事,剛才所舉的三個例子都很簡單,所以都不覺得費力;想來必有許多不定式,牠們的原式很難變換,或竟不能變換,那麼牠們的值又將怎樣決定呢?這里有一個既簡易又普通的方法可以決定$\frac{0}{0}$的值,但是這個方法須依據一個叫做"中值定理(Mean Value Theorem)",所以必先述中值定理.

357. 中值定理. 設$f(x)$是一個函數,從$x=a$到$x=b$,這個函數是連續的,那麼在a, b中間x必有一個值x_1能適合這個方程式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1).$$

這就叫做中值定理.

這是顯而易見的,在 l 點 (圖 166) 必有一切線平行於這割線 SQ. 現在這割線的斜率是

$$\frac{RQ}{SR}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

這切線的斜率是 $f'(x_1)$.

所以

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1),$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_1),$$

$$a<x_1<b.$$

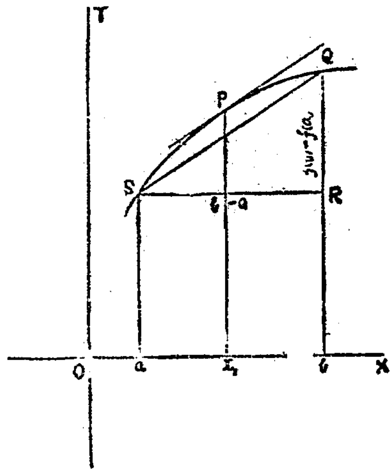

圖 166

令　$a=x,\ b=x+\Delta x$, 則得

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x f'(x+\theta\,\Delta x),\qquad 0<\theta<1.$$

習　題

1. 在這拋物線 $y=x^2$ 上的什麼點有一切線平行於經過這二點 (0, 0) 和 (2, 4) 的割線?

2. 在這曲線 $y=x^3-x$ 上的什麼點有一切線平行於經過這二點 (1,0) 和 (2,6) 的割線?

3. 在這曲線 $y=\log x$ 上的什麼點有一切線平行於經

過這二點 $(1,0)$ 和 $(2,\log 2)$ 的割線?

4. 在這曲線 $y=e^x$ 上的什麼點有一切線平行於經過這二點 $(0,1)$ 和 $(1,e)$ 的割線?

5. 在這曲線 $y=\frac{1}{3}x^3-x$ 上,從 $x=-1$ 到 $x=1$,其中必有二點,而從這二點所畫切線都必與經過 $\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ 的割線平行,試證明之.

試證中值定理不適用於下述的情形:

6. 曲線 $xy=1$, 從 $x=-1$ 到 $x=1$.

7. 曲線 $y=x^{\frac{2}{3}}$, 從 $x=-1$ 到 $x=1$.

8. 曲線 $y=\log x$, 從 $x=0$ 到 $x=1$.

9. 曲線 $y=\tan x$, 從 $x=0$ 到 $x=\pi$.

358. 不定式 $\frac{0}{0}$ 的普通定值法. 設有一個分數 $\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$, 當 $x=a$ 時,牠是 $\frac{0}{0}$, 那麼

$$\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}.$$

在這公式 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_1)$ 中,令 $b=x$, 則有

$$\phi(x)=\phi(a)+(x-a)\phi'(x_1),$$

$$\psi(x)=\psi(a)+(x-a)\psi'(x_2),$$

這里 x_1 和 x_2 都是在 a 和 x 中間的值.

但是 $\phi(a)=\psi(a)=0.$

所以 $$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{(x-a)\phi'(x_1)}{(x-a)\psi'(x_2)}=\frac{\phi'(x_1)}{\psi'(x_2)}.$$

當 x 漸近於 a, x_1 和 x_2 也必漸近於 a, 所以

$$\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\phi'(x_1)}{\psi'(x_2)}=\lim_{x\to a}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}.$$

由此可知要決定不定式 $\frac{0}{0}$ 的值,須先微分分子和分母,得 $\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$;而後以 a 代 x, 得 $\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}$, 這就是要求的值.

若 $\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}$ 仍是 $\frac{0}{0}$, 則可再微分分子和分母,而得

$$\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\phi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{\phi''(a)}{\psi''(a)}.$$

這樣微分可以連續下去直到恰能決定爲止.

現在把這個普通定值法應用到 § 356 的第一個例上,看結果如何.

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{0}{0}, \text{ 當 } x=1.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{2x+1}{2x}=\frac{3}{2}, \text{ 當 } x=1.$$

所以要求的值是 $\frac{3}{2}$.

另舉一個例,試求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}, \text{ 當 } x=0.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}, \text{ 當 } x=0.$$

$$\frac{\phi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2, \text{ 當 } x=0$$

所以要求的值是2.

習　題

試求下列各分數的極限值:

1. $\dfrac{x(x-1)^n-2}{x^2-2x}$, 當 $x=2$.

2. $\dfrac{\log(3x^2+x-3)}{\log x}$, 當 $x=1$.

3. $\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$, 當 $x=0$.

4. $\dfrac{x-\tan^{-1}x}{x-\sin^{-1}x}$, 當 $x=0$.

5. $\dfrac{\log(x^2-4x+5)}{\log\cos(x-2)}$, 當 $x=2$.

6. $\dfrac{xe^x-\log(x+1)}{x^2}$, 當 $x=0$.

7. $\dfrac{\sin m\alpha-\sin n\alpha}{\sin(m-n)\alpha}$, 當 $m=n$.

8. $\dfrac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\log\sin 2\theta}$, 當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $\dfrac{a^a-b^b}{a^b-b^a}$, 當 $a=b$. $\qquad \dfrac{1+\log b}{1-\log b}$.

10. $\dfrac{\log_b a-\log_a b}{a-b}$, 當 $a=b$. $\qquad \dfrac{2}{b\log b}$.

11. $\dfrac{x^5-2x^3-4x^2+9x-4}{x^4-2x^3+2x-1}$, 當 $x=1$.

12. $\dfrac{\tan nx-n\tan x}{n\sin x-\sin nx}$, 當 $x=0$.

13. $\dfrac{\tan nx-n\tan x}{n\sin x-\sin nx}$, 當 $n=1$.

14. $\dfrac{m\sin x-\sin mx}{(x-1)e^x+(x+1)e^{-x}}$, 當 $x=0$.

15. $\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-4x^2-2}{\log\sec^2 x-x^2}$, 當 $x=0$.

359. 決定不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的值. 要決定 $\frac{\infty}{\infty}$ 的值無異於要決定 $\frac{0}{0}$ 的值,所用方法完全一樣.這可證明於下:

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\infty}{\infty}, \text{ 當 } x=a.$$

設
$$\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=K.$$

因為
$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\dfrac{1}{\psi(x)}}{\dfrac{1}{\phi(x)}},$$

所以
$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}, \text{ 當 } x=a.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{\psi(x)}\right]}{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{\phi(x)}\right]}.$$

但 $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]=-\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi(x)}\right]=-\frac{\phi'(x)}{[\phi(x)]^2},$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{\psi(x)}\right]}{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{\phi(x)}\right]}=\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]^2.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]^2\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]^2$$

$$=\left[\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]^2\cdot\lim_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}.$$

這可寫做

$$K=K^2\lim_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}.$$

$$\therefore \quad K=\lim_{x\to a}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}.$$

例. 試求 $\dfrac{\log x}{\cot x}$ 的極限值,當 $x=0$.

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\log x}{\cot x}=\frac{\infty}{\infty},\text{ 當 } x=0.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=-\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{0}{0}，當\ x=0.$$

$$\frac{\phi''(x)}{\psi''(x)}=-\frac{2\sin x\cos x}{1}=\frac{0}{1}=0，當\ x=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\cot x}=0.$$

360. 決定不定式 $0\cdot\infty$ 和 $\infty-\infty$ 的值.

先把原式化爲分數式，可得 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，然後用前法決定其值.

例 1. 試求 $(\pi-2x)\tan x$ 的值，當 $x=\frac{\pi}{2}$.

$$(\pi-2x)\tan x=0\cdot\infty，當\ x=\frac{\pi}{2}.$$

但是
$$(\pi-2x)\tan x=\frac{\pi-2x}{\cot x}=\frac{0}{0}，當\ x=\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{-2}{-\csc^2 x}=2，當\ x=\frac{\pi}{2}.$$

所以要求的值是 2.

例 2. 試求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

$$\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}=\infty-\infty，當\ x=1.$$

但是
$$\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}=\frac{0}{0}，當\ x=1.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\log x}=\frac{0}{0},\text{ 當 } x=1.$$

$$\frac{\phi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},\text{ 當 } x=1.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

361. 決定不定式 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 的值.

先取原式的對數,可得 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$;然後求這個對數的極限值卽能決定這不定式的值.

例 1. 試求 x^x 的極限值,當 $x=0$.

$$x^x=0^0,\text{ 當 } x=0.$$

設 $$y=x^x,$$

那麼 $$\log y=x\log x=\frac{\log x}{x^{-1}}=\frac{\infty}{\infty},\text{ 當 } x=0.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x=0,\text{ 當 } x=0.$$

這就表明 $\log y$ 的極限值是 0.

所以 y 的極限值是 $e^0=1$, 卽 $\lim\limits_{x\to 0} x^x=1$.

例 2. 試求 $$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}.$$

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty},\ \text{當}\ x=0.$$

設
$$y=(1+ax)^{\frac{1}{x}},$$

那麼
$$\log y=\frac{\log(1+ax)}{x}=\frac{0}{0},\ \text{當}\ x=0.$$

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{a}{1+ax}}{1}=a,\ \text{當}\ x=0.$$

$\log y$ 的極限值是 a.

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^{a}.$$

習 題

試求下列各式的極限值:

1. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)$, 當 $x=0$.

2. $2^x\tan\dfrac{3}{2^x}$, 當 $x=\infty$.

3. $x\tan x-\dfrac{\pi}{2}\sec x$, 當 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

4. $\dfrac{\log\tan ax}{\log\tan bx}$, 當 $x=0$.

5. $\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\tan x}$, 當 $x=0$.

6. $\dfrac{\sec 3x}{\sec x}$, 當 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

7.	$\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$,	當 $x=1$,	$e^{\frac{3}{2}}$.
8.	$(\csc\theta)^{\tan^2\theta}$,	當 $\theta=\frac{\pi}{2}$.	$\sqrt{e}$.
9.	$(\tan\theta)^{\cos\theta}$,	當 $\theta=\frac{\pi}{2}$.	1.
10.	$\left(\frac{2\sec^2\theta-1}{3}\right)^{\tan 2\theta}$	當 $\theta=\frac{\pi}{4}$.	$e^{-\frac{4}{3}}$.
11.	$\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$,	當 $x=0$.	abc.
12.	$(\log x)^{\frac{1}{x-e}}$,	當 $x=e$.	$e^{\frac{1}{e}}$.
13.	$(a^x+x)^{\frac{1}{x}}$,	當 $x=0$.	ae
14.	$\left(\frac{\cos ax+\cos bx}{2}\right)^{\frac{4}{x^2}}$,	當 $x=0$.	$\frac{1}{e^{a^2+b^2}}$.
15.	$\frac{\tan\theta}{\sec\theta}$,	當 $\theta=\frac{\pi}{2}$.	1.

第二十六章

極大與極小

362. 升函數和降函數. 若 x 的一個函數的引申函數是正的,則當 x 增加,這個函數也必增加;若這個引申函數是負的,則當 x 增加,這個函數必將縮減.

這可算一個定理;這個定理可說得更明顯些如下:

設 $y=f(x)$. 若 $\frac{dy}{dx}$ 是正的,則當 x 增加, y 也必增加;若 $\frac{dy}{dx}$ 是負的,則當 x 增加, y 必將縮減.

這可以幾何方法證明:

在圖 167, 這曲線代表這方程式 $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ 是這曲線的斜率.

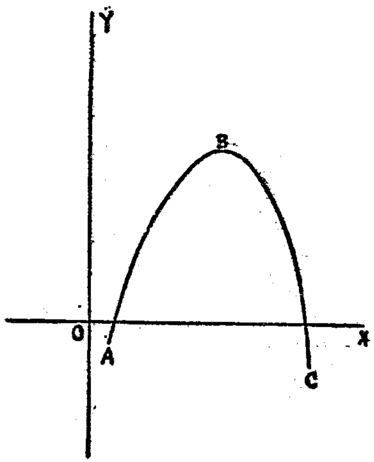

圖 167

沿着曲線從 A 到 B, x 增加 y 跟了增加;但從 B 到 C, x 增加 y 跟了縮減.

這是顯而易見的,在 A 和 B 中間的斜率 $\frac{dy}{dx}$ 是正的,而

在B和C中間的斜率是負的.

在前一種情形,y稱爲"升函數";在後一種情形,y稱爲"降函數".

363. 定義. 一個函數若有一個值大於其前鄰後鄰的各值,那麽這一個值就叫做牠的"極大值";若有一個值小於其前鄰後鄰的各值,那麽這一個值就叫做牠的"極小值".這可說得更明顯些如下:

設$f(x)$是x的一個函數.若當$x=a$,牠有一個極大值$f(a)$,若當$x=b$,牠有一個極小值$f(b)$,那麽

$$f(a-\delta)<f(a)>f(a+\delta),\quad f(b-\delta)>f(b)<f(b+\delta);$$

這里δ是一個很小的正數.

又看圖168,這曲線的方程式是$y=f(x)$.PM代表y或$f(x)$的一個極大值,QN代表y或$f(x)$的一個極小值.

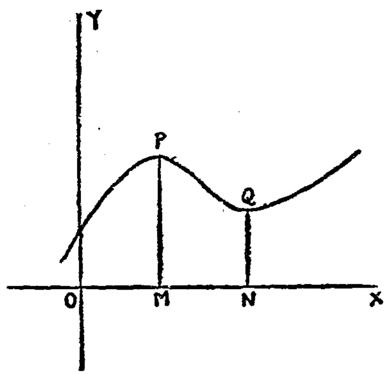

圖 168

364. 關於極大和極小的問題,在事實上是常有的,其解法約有兩種,一種可稱"代數法",一種可稱"幾何法";當用何法須隨問題的性質而定.雖有二法可用,但要解決問題多半是不容易的,是少把握的,現在舉幾個例以示一斑.

例 1. 試求 x^2+6x-7 的極大值或極小值.

現在我們還不知道 x^2+6x-7 只有極大值呢,或只有極小值呢,或二值都有.

設
$$y=x^2+6x-7.$$

$$x^2+6x-7=x^2+6x+9-9-7=(x+3)^2-16.$$

$$\therefore\quad y=(x+3)^2-16.$$

$(x+3)^2$ 是正數,16 是常數. $(x+3)^2$ 可以變到無窮大,所以 y 沒有極大值.只要 $(x+3)^2$ 變到極小, y 的值就是極小了.所以當 $x=-3$, y 有一個極小值 -16.

例 2. 把一根定長的線段分做兩部,怎樣分割才可使以這兩部為邊的長方形有最大的面積?

設以 $2a$ 表明這根線段的長,以 x 和 $2a-x$ 表明這兩部的長,以 y 表明這長方形的面積.

於是
$$y=x(2a-x)=2ax-x^2=a^2-(a-x)^2.$$

a^2 是常數, $(a-x)^2$ 是正數.只要 $(a-x)^2$ 變到極小, y 的值就是極大了.所以當 $x=a$, y 有一個極大值 a^2, 就是要把這根線段平分,而這個長方形是一個正方形,其面積是 a^2.

例 3. $y=\dfrac{4x^2-2}{4x-3}$, 試求 y 的極大值和極小值.

去分母並以 y 表明 x, 則有

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-3y+2}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{(y-1)(y-2)}}{2}.$$

x 的值須是實數.所以 $(y-1)(y-2)$ 須是正數(或0);這就是說 y 的值必須 $\leqq 1$ 和 $\geqq 2$. 由此可知 1 是 y 的極大值, 2 是 y 的極小值.

例 4. $\triangle ABC$(圖 169) 的高是 a, 底是 b. 在這三角形內有一個長方形,其一邊與這三角形的底平行.試求最大的一個長方形.

設這長方形的二邊是 x 和 y, 牠的面積是 A.

那麼 $A=xy$.

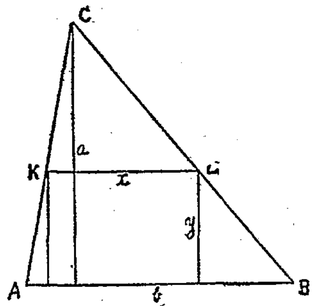

圖 169

$\triangle KLC$和$\triangle ABC$是相似的,所以

$$\frac{x}{b}=\frac{a-y}{a},$$

即

$$x=b-\frac{by}{a}.$$

$$\therefore\quad A=\left(b-\frac{by}{a}\right)y$$

$$=b\left(y-\frac{y^2}{a}\right)$$

$$=\frac{b}{a}(ay-y^2)$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-y\right)^2\right].$$

$\frac{a^2}{4}$ 是常數, $\left(\frac{a}{2}-y\right)^2$ 是正數.只要 $\left(\frac{a}{2}-y\right)^2$ 變到極小, A 的值就是極大了.所以當 $y=\frac{a}{2}$, A 有一個極大值 $\frac{ab}{4}$.

例 5. 在直線 AB (圖 170) 的同一邊有 P, Q 二點,要在 AB 上求一點 X 而使 $PX+XQ$ 爲最短的距離.

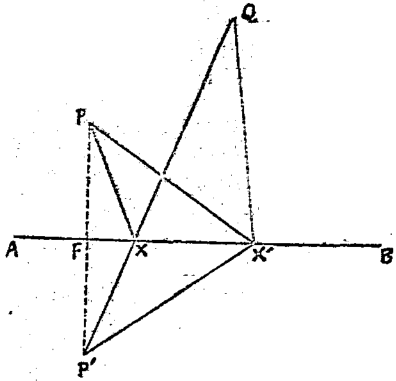

圖 170

從 P 到 AB 作垂線 PF, 引長 PF 到 P',而令 $FP'=PF$.

聯結 $P'Q$, 與 AB 交 X.

X 就是要求的一點.於是 $PX+XQ$ 是最短的距離.

倘若不然,在 AB 上另取一點 X'.

但是 $$PX'+X'Q>PX+XQ.$$

因爲 $$PX+XQ=P'X+XQ=P'Q,$$

$$PX'+X'Q=P'X'+X'Q>P'Q.$$

從以上所舉的五個例子看來,所用的雖不外乎代數法和幾何法二種,但變化無常,應付非易.如例 5 純用幾何法,若對於幾何法一時想不到使用,那就只得從代數法上着想,但使用代數法又有如下述的困難:

從 P 到 AB 畫垂線 PF, 又從 Q 到 AB 畫垂線 QG.

令 $$PF=a,\ QG=b,\ FG=c,\ FX=x.$$

這里 a, b, c 都是常數,

於是 $$\overline{PX}^2=a^2+x^2,\ \overline{XQ}^2=(c-x)^2+b^2.$$

$$\therefore \quad PX+XQ=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}. \qquad (E)$$

現在要變換 (E) 右邊的形式使 x 的值便於決定，簡直困難到幾乎無法可想。

所舉的五個例子還算簡單的，尚感困難，所以解決極大和極小的問題還需要一個比較普通的方法，這可叫做"微分法"，容後說明。

365. 極大與極小的必具條件. 這是顯而易見的，在 P 和 Q(圖 171) 的切線都平行於 OX，所以對於 y 的極大值和極小值必有

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

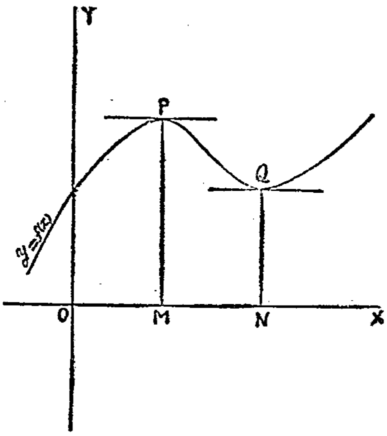

圖 171

又且，當一根切線沿着這曲線自左至右移轉，到了 P 點牠的斜率將從正的變到負的；但到了 Q 點牠的斜率又將從負的變到正的了。這也可以這樣說：

在 P 點 x 增加，這斜率跟了縮減. $\qquad (a)$

在 Q 點 x 增加，這斜率跟了增加. $\qquad (b)$

依據 §361 的定理，可知必有情形 (a) 發生，只要

$$\frac{d}{dx}(\text{斜率})<0. \qquad (1)$$

但是　$$\frac{d}{dx}(\text{斜率})=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2},$$

而(1)可寫做　$$\frac{d^2y}{dx^2}<0.$$

所以當　$$\frac{dy}{dx}=0\text{ 和 }\frac{d^2y}{dx^2}<0, \qquad (2)$$

則必有一個 y 的極大值存在.

也是依據 §362 的定理,可知必有情形 (b) 發生,只要

$$\frac{d^2y}{dx^2}>0.$$

所以當　$$\frac{dy}{dx}=0\text{ 和 }\frac{d^2y}{dx^2}>0, \qquad (3)$$

則必有一個 y 的極小值存在.

例. 試求 $\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ 的極大值和極小值.

令　$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

那麽　$$\frac{dy}{dx}=x^2-4x+3, \qquad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x-4. \qquad (5)$$

令 (4)=0, 則 $x^2-4x+3=0$,

所以　$$x=1\text{ 或 }3.$$

把這二值代入(5),則

當 $x=1$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0$;

當 $x=3$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2>0$.

依據 (2) 和 (3),所以

當 $x=1$, y 有一個極大值 $2\frac{1}{3}$;

當 $x=3$, y 有一個極小值 1.

366. 這里有一種特別情形有時遇到,就是從 $\frac{dy}{dx}=0$ 中得來 x 的值能使 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, 那麼對於§365的(2)和(3)無一適合.在這種情形之下,這里可有這樣的一點 R(圖172)叫做"轉變點",在這點的切線平行於 OX,而這點的縱坐標 RL 既非極大又非極小.

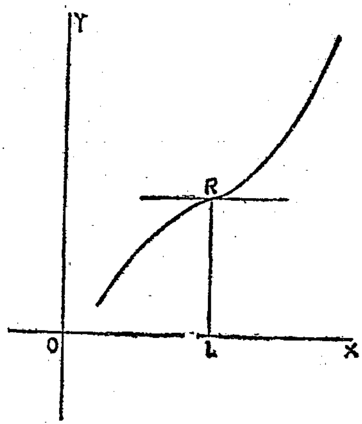

圖 172

但是當 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, y 也可有一一個極大值或極小值,只要 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 經過這點不變號子.

367. 判別極大和極小的第二法.

極大和極小專從 $\frac{dy}{dx}$ 即可決定用不到 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

在§3 5我們已經見到,當 y 有一極大值時,如在 P 點,這斜率 $\frac{dy}{dx}$ 從+變到−;當 y 有一極小值時,如在 Q 點,這斜

率$\frac{dy}{dx}$從$-$變到$+$.(一根切線沿着這曲線自左至右移轉,這是不待言的了)

先把$\frac{dy}{dx}$寫做因數形式,然後檢驗這個形式便可決定牠對於x的一個指定值是從$+$變到$-$,還是從$-$變到$+$,而極大極小就此判別了.

現在就把這個方法應用到§365的例子上去:

$$\frac{dy}{dx}=x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

由此可知只當$x=1$或$x=3$,$\frac{dy}{dx}$才能變號.

設想x從比1略小的一個值變到比1略大的一個值,$(x-1)$將從$-$變到$+$;但$(x-3)$總是負的,所以當$x=1$,$\frac{dy}{dx}$是從$+$變到$-$,而y必有一個極大值.同樣,當$x=3$,$\frac{dy}{dx}$是從$-$變到$+$,所以y必有一個極小值.

再舉一個例,試求$y=(x-4)^5(x+2)^4$的極大值和極小值.

微分並將其結果寫做因數式,則有

$$\frac{dy}{dx}=3(3x-2)(x-4)^4(x+2)^3.$$

當$x=\frac{2}{3}$, $\frac{dy}{dx}$從$-$變到$+$.

當$x=-2$, $\frac{dy}{dx}$從$+$變到$-$.

當$x=4$, $\frac{dy}{dx}$不變號子,

因爲 $(x-4)^4$ 不能是負的.

所以我們斷定當 $x=\frac{2}{3}$, y 的值是極小的;當 $x=-2$, y 的值是極大的;但是當 $x=4$, y 的值既非極大又非極小.

習　題

1. 試求 $32x-x^4$ 的極大值.

試求下列各函數的極大值和極小值:

2. $2x^3-3x^2-12x+12$.

3. $2x^3-11x^2+12x+10$.

4. $x^3+9(a-x)^3$.

5. $(x-1)(x-2)(x-3)$.

6. $2(3x+2)^2-3x^4$.

7. 試證 $\frac{x^4-4x^3+8x-8}{x-1}$ 既無極大值又無極小值.

8. $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{c-x}$, 這里 a, b, c 都是正的.

9. 試證 $\frac{\log x}{x^n}$ 的最大值是 $\frac{1}{ne}$.

10. 試證 $\cos 2\theta+\sin\theta$ 的最大值是 $\frac{9}{8}$.

11. 試證 $\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ 的極大值和極小值是 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$.

12. 試求 $a\sin x+b\cos x$ 的極大值.

13. 試求 $\tan^{-1}x-\tan^{-1}\frac{x}{4}$ 的極大值,但這二角都是在第一象限內的.

14. 試證 $a^2\tan^2\theta+b^2\cot^2\theta$ 的最小值和 $a^2e^{nx}+b^2e^{-nx}$ 的最小值相同,各等於 $2ab$.

15. $y=\frac{(a-x)^3}{a-2x}$.

16. $y=(x-1)^4(x+2)^3$.

17. $y=(x-2)^5(2x+1)^4$.

實用問題

1. 把10分成這樣的二部,一部的平方與另一部的立方相乘,其積須是最大的.

設以 x 和 $10-x$ 表明這分成的二部,又設 $u=x^2(10-x)^3$

$$\frac{du}{dx}=5x(4-x)(10-x)^2=0.$$

當 $x=4$, u 的值最大.所以這分成的二部是 4 和 6.

2. 有一片正方形的厚紙,邊長是 a;在這紙的四個角上各切去一個小正方形,可使其餘的紙做成一個容量極大的盒子.試求這小正方形的邊長.

設以 x 表明這小正方形的邊長(圖173).那麼這盒子的容量是 $(a-2x)^2x$.

令 $$u=(a-2x)^2x.$$

$$\frac{du}{dx}=(a-2x)(a-6x)=0.$$

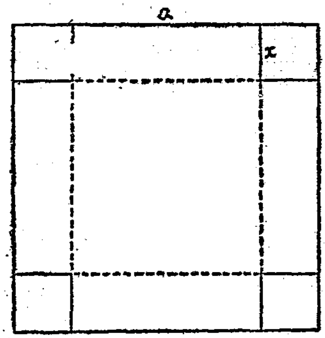

圖 173

所以當 $x=\frac{a}{6}$, u是極大的容量.

3. 試求包圍在一個正圓錐體內的一個最大的正圓柱體.

設 $AD=a$, $DC=b$ (圖 174).

設 $x=DQ=$ 這正圓柱體的底的半徑, $y=PQ=$ 這正圓柱體的高.

因爲 $\triangle ADC$ 和 $\triangle PQC$ 是相似的所以

$$\frac{y}{b-x}=\frac{a}{b},$$

或

$$y=\frac{a}{b}(b-x).$$

這正圓柱體的體積是

$$\pi x^2 y=\pi\frac{a}{b}x^2(b-x).$$

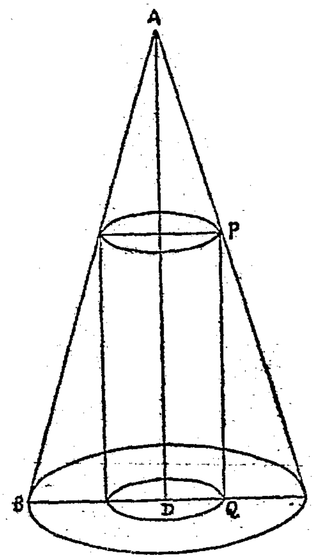

圖 174

令 $$u=\frac{a}{\pi b}x^2(b-x).$$

$$\frac{du}{dx}=\pi\frac{a}{b}(2bx-3x^2)=\pi\frac{a}{b}x(2b-3x)=0.$$

∴ 當 $x=\frac{2}{3}b$, u 的值最大.

4. 於包圍在一個球內的正圓柱體中, 試求其側面積最大的一個.

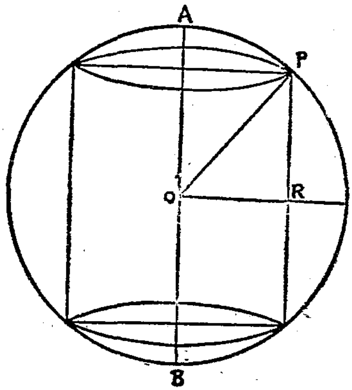

圖 175

設 $r=OP=$ 這球的半徑, $x=OR=$ 這正圓柱體的底的半徑, $y=PR=$ 這正圓柱體的半高.

$\triangle OPR$是一個直角三角形, 所以 $$x^2+y^2=r^2.$$

這正圓柱體的側面積是

$$2\pi x\cdot 2y=4\pi x\sqrt{r^2-x^2}.$$

若 $x\sqrt{r^2-x^2}$ 是極大的, $4\pi x\sqrt{r^2-x^2}$ 就是極大的;

若 $r^2x^2-x^4$ 是極大的, $x\sqrt{r^2-x^2}$ 就是極大的

那麼我們只須令 $u=r^2x^2-x^4$.

$$\frac{du}{dx}=2r^2x-4x^3=2x(r^2-2x^2)=0.$$

所以當 $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$, 這正圓柱體的側面積最大.

於是 $y=\frac{r}{\sqrt{2}}$, $2y=r\sqrt{2}=$ 這正圓柱體的高.

別　法

這正圓柱體的側面積 $=A=4\pi xy.$ (1)

$$x^2+y^2=r^2. \tag{2}$$

微分 (1), $$\frac{dA}{dx}=4\pi\left(y+x\frac{dy}{dx}\right). \tag{3}$$

微分 (2), $$x+y\frac{dy}{dx}=0. \tag{4}$$

因為 A 當極大時, $\frac{dA}{dx}=0$. 所以可令 (3) $=0$,

就是令 $$y+x\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

但從 (4), $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

$$\therefore\quad -\frac{y}{x}=-\frac{x}{y}.$$

即 $$x=y \tag{5}$$

試解 (2) 和 (5), 則得

$$x=y=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

由此可知當這正圓柱體的側面積最大時, 牠的高是 $r\sqrt{2}$, 底的半徑是 $\frac{r}{\sqrt{2}}$. 這個結論和第一法的完全一樣.

5. 試把48分成這樣的二部, 一部的平方與另一部的

立方相加,其和要是極小的.

6. 試把20分成這樣的二部,四倍一部的倒數加上九倍另一部的倒數,其和要是極小的.

7. 有一張長方形的厚紙,長15寸,闊8寸,在牠的四個角上各切去一個正方形,要把其餘的紙可做成一個容量極大的盒子.試求這個正方形的邊.

8. 牆上有一個窗,高5尺,窗底離地9尺.對了窗立着一個人,他的眼睛離地5尺.(圖176).當他的眼睛夾着這窗的最大角時,他該立在離牆多少遠的地點? 6尺

9. 有一排牆高27尺,牠離一個房子的邊8尺遠.有一架梯,梯脚放在地上,梯身擱在這牆頂上,梯頂接着這房子(圖177).試問最短的一架梯該是多少長? $13\sqrt{13}=46.87$ 尺.

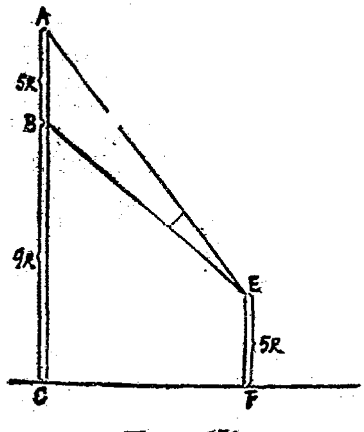

圖 176

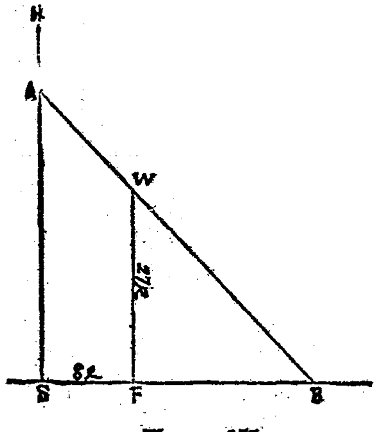

圖 177

10 有一個橢圓,牠的半長軸是 a 半短軸是 b. 試求被這橢圓包圍着的一個最大的長方形. $\sqrt{2}a\times\sqrt{2}b$.

11. 要用最省料的方法造一個沒有蓋子的箱子,牠的底是一個正方形,牠的容量是 500 立方寸,試求各邊的長.

高 5 寸,底邊10寸.

12. 用鉛皮造一個正圓柱體的桶,牠的容量是一定的鉛皮要用得最少,試問牠的高和底的直徑該有什麼比值

高＝直徑.

13. (a) 一個圓的半徑是 r, 試求被這圓包圍着的一個最大的長方形. 一個正方形 $(r\sqrt{2})^2$.

(b) 一個球的半徑是 r, 試求被這球包圍着的一個最大的正圓柱體的高. $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

14. (a) 一個圓的半徑是 r, 試求被這圓包圍着的一個最大的等腰三角形的高. $\frac{3r}{2}$.

(b) 一個球的半徑是 r, 試求被這球包圍着的一個最大的正圓錐體的高. $\frac{4r}{3}$.

15. (a) 一個圓的半徑是 r, 試求包圍着這圓的一個最小的等腰三角形的高. $3r$.

(b) 一個球的半徑是 r, 試求包圍着這球的一個最小的正圓錐體的高. $4r$.

16. 有一個船離岸上最近的一點 P 是5里,沿岸離 P 點

5里有一點Q.這船上有一個人,每點鐘能步行6里,但只能搖船4里,現在他想於最短時間內達到Q點,該把這船搖到什麼地方登岸? 離$P2\sqrt{5}$里.

17. 有一個正圓錐體C,牠包圍着一個正圓錐體C',C'的頂點在C的底面的中心.試證當C'變到極大時,牠的高是C的高的$\frac{1}{3}$.(圖178).

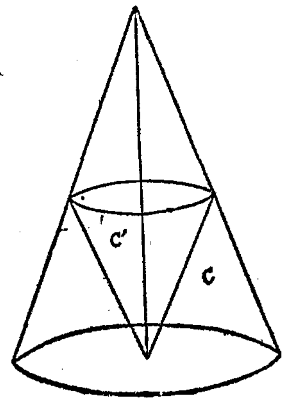

圖 178

18. 在直線$2x+y=16$上試求這樣的一點,牠與(4, 5)的距離的平方加了牠與(6,−3)的距離的平方,其和須是極小的. (7, 2)

19. 試求從原點到直線$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$的最短距離. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

20. 從一張圓紙上剪去一個扇形,要使其餘的紙可做一個極大的正圓錐體,試求這扇形的角. $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)2\pi=66°4'$.

21. 有一個橢圓,牠的半長軸是a,半短軸是b,牠被一個等腰三角形包圍着,但這三角形的底常與長軸平行.試求一個最小等腰三角形的高. $3b$.

22. 有一個橢圓,牠的半長軸是a,半短軸是b,試在這橢圓上畫這樣一根切線,這切線夾在二軸中間的一段須

是極小的.試證這線段的長是 $a+b$.

23. 在 §364 的例 5, 到了用代數法不易解決的地步用微分法可能解決?　　$x=\frac{ac}{a+b}$.

第二十七章

積分法

368. 微分. 因爲$\frac{dy}{dx}$是代表一個極限值的符號,所以我們一向不把牠當作一個分數看待,雖然牠也有和尋常分數相同的幾種性質(§ 261).這就是說我們不可把dy當做分子,把dx當作分母,也就是dy和dx不可拆開,好像對於$\sin\theta$不可分爲$\sin$和θ一樣.但是旣然如此,代表一個極限值爲何不用一個別的符號,而必要用一個形同分數的符號令人易致誤會呢?這正是因爲$\frac{dy}{dx}$可以看做一個尋常分數,就是dy和dx可以當作分子和分母,也就是$\frac{dy}{dx}=dy\div dx$.現在說明於下:

設
$$y=f(x),$$

於是
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

這裏ε是一個很小的數,牠將漸近於零,當Δx漸近於零.

$$\therefore\quad \Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x.$$

當Δx漸小,$\varepsilon\Delta x$將比$f'(x)\Delta x$小得更快,所以可寫

$$\Delta y \doteq f'(x)\Delta x,$$

或
$$dy = f'(x)\,dx.$$

這里 dy 和 dx 只可都當作無限小,不可都當作零.

我們設想 $\frac{dy}{dx} = dy \div dx$, 或 $dy = f'(x)dx$, 這在嚴正的意義上說來雖稍欠圓滿,但也有不少的便利處.

* dy 就叫做"y 的微分", dx 就叫做"x 的微分", 設 y 是 x 的函數,那麼 y 的微分等於牠的引申函數和 x 的微分的乘積. 於是從前所有關於引申函數的公式(第十八章)都可成爲微分的公式,只須一一乘以 dx.例如

(1)　$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, 這是引申函數的公式;

(2)　$d(uv) = udv + vdu$, 這是微分的公式.

【練習】 試求 dy:

1. $y = 5x - 3$.	**2.** $y = x^2$.	**3.** $y = 2x^2 + 4$.
4. $y^2 = x$.	**5.** $y = \sin 2x$.	**6.** $y = \sin^2 x$.
7. $y = \sec^2 \frac{x}{2}$.	**8.** $y = \sqrt{1+x}$.	**9.** $x - y = \sqrt{y^2 - a^2}$.

369. 積分和積分法. 學過微分法的人必定會發生這樣一個疑問:有了一個函數,用微分法卽可求得牠的引申函數或牠的微分,那麼有了一個引申函數或一個

* "微分"二字可以當作動詞用,也可以當作名詞用;以前把牠當作動詞用,這裏把牠當作名詞用.

微分;能否求得牠的原函數呢?想來這是一定可能的,因爲只須經過一番倒退的手續.

微分法的倒退法叫做"積分法".用了微分法能求得一個已知函數的微分,用了積分法能求得一個已知微分的對應函數,這個對應函數叫做這個已知微分的"積分".從一個已知微分求牠的積分,這個動作也叫做"積分".所以微分和積分是相反的名稱,也是相反的動作;微分法和積分法是相反的演算法.

例. 因爲 $2x dx$ 是 x^2 的微分,

所以 x^2 是 $2x\,dx$ 的積分.

這個符號 $\int$ 是用來表明一個積分的.於是上例所說的關係可寫做

$$d(x^2)=2x\,dx,\quad \int 2x\,dx=x^2.$$

我們說這個積分的微分是 $2xdx$ 可以的,我們說這個積分的引申函數是 $2x$ 也可以的,因爲這總是同一件事.不過在習慣上當寫

$$\int 2x\,dx=x^2,\text{ 不當寫 }\int 2x=x^2.$$

這就是說 $\int$ 是 d 的反號而不是 $\frac{d}{dx}$ 的反號.

於是微分和積分相互的關係可以下式表明:

$$d[F(x)]=f(x)dx,\ \int f(x)\,dx=F(x).$$

370. 積分常數. 這是顯而易見的,我們可寫

$$\int 2x\,dx=x^2+2,\ 或\ \int 2x\,dx=x^2-5,\ 或\ \int 2x\,dx=x^2;$$

因為 x^2+2, x^2-5, 和 x^2 的微分同是 $2x\,dx$. 所以為表示普通起見當寫

$$\int 2x\,dx=x^2+C.$$

這里 C 是代表一個任何常數,叫做"積分常數".

每個積分若要寫做最普通的形式,必須加入這一項"$+C$".因為在一個積分式中有了這樣一個不定常數,我們就說這個積分是"不定積分".

371. 定理. 有二函數,若其引申函數相同則其差必為一常數.

設這二函數為 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$, 又設

$$y=\phi(x)-\psi(x),$$

那麼

$$\frac{dy}{dx}=\phi'(x)-\psi'(x).$$

因為 $\phi'(x)$ 和 $\psi'(x)$ 是相同的,所以

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

$\therefore$ y 必是一個常數.

這個定理本不必證,只要看 §370 自可了解.

習題

試求下列各積分:

1. $\int x^3 dx.$ 2. $\int (x-3)\,dx.$ 3. $\int (1-2x)\,dx.$

4. $\int (t^2-3)\,dt.$ 5. $\int \frac{dx}{x^2}.$ 6. $\int (1-y)^2 dy$

7. $\int \frac{dx}{x}.$ 8. $\int \frac{dx}{1+x}.$ 9. $\int \frac{dz}{1-z}.$

10. $\int \sqrt{1-x}\,dx.$ 11. $\int \sin 2\theta\,d\theta.$ 12. $\int e^{2u}\,du.$

13. $\int \sec^2\phi\,d\phi.$ 14. $\int (1+3x)^6\,dx.$ 15. $\int \sin\theta\cos\theta\,d\theta.$

16. 有一曲線 $y=f(x)$, 牠與這直線 $y=3x$ 在 $(2, 6)$ 相切, 又 $f''(x)=4$. 試決定這曲線的方程式.

因爲 $f''(x)=4,$

所以
$$f'(x)=\int f''(x)\,dx$$
$$=\int 4\,dx$$
$$=4x+C.$$
$$\therefore\ f(x)=\int (4x+C)\,dx$$
$$=2x^2+Cx+C',$$

即
$$y=2x^2+Cx+C'.$$

因爲在 $(2, 6)$, $f'(x)=4\times 2+C=3,$

所以
$$C=-5.$$

又這曲線經過 (2, 6),所以

$$6=2\times2^2-5\times2+C',$$

$$\therefore\quad C'=8.$$

所以這曲線的方程式是

$$y=2x^2-5x+8.$$

17. 有一曲線 $y=f(x)$ 經過 (3, 1) 和 (−1, 2), 又 $\frac{d^2y}{dx^2}=2$. 試決定這曲線的方程式.

18. 有一曲線,牠有一切線 $y=3\ -1$, 而其切點爲 (1, 2); 又 $\frac{d\,y}{dx^2}=12x$. 試求這曲線的方程式.

第二十八章

積分法的基本公式

372. 基本公式. 微分法是一個直接的演算法,所以只要運用幾個基本公式就能求得任何初等函數的引申函數或微分.積分法則不然,牠只算是一個間接的演算法.有了一個已知函數,要求牠的積分,我們須先研究有沒有這樣一個函數,牠的引申函數就是這個已知函數;所以這件事多少含有嘗試的性質,不是確有把握的.由此可知積分不必有成;下面所列積分法的各種基本公式對於積分很有幫助應該記住.

I. $\int du = u + C.$

II. $\int (du + dv) = \int du + \int dv.$

III. $\int C\,du = C\int du.$

IV. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1).$

V. $\int \frac{du}{u} = \log u + C.$

VI. $\int e^u\,du = e^u + C.$

VII. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

VIII. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$

IX. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C.$

X. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C.$

XI. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C.$

XII. $\int u\, dv = uv - \int v du.$

有了一個已知函數,求得牠的積分,若要檢驗這個積分的眞不眞,只須微分這個積分,看牠的引申函數是否與這個已知函數相同.所以上面各公式用了微分法都可即刻證明.

373. 公式 I—IV 的例題.

例 1. $\int \left(3x^3+1+\frac{1}{2x^2}\right)dx$

$$=3\int x^3dx+\int dx+\frac{1}{2}\int x^{-2}\,dx$$

$$=\frac{3x^4}{4}+x-\frac{1}{2}x^{-1}+C$$

$$=\frac{3x^4}{4}+x-\frac{1}{2x}+C.$$

例 2. $\int x(1+x^2)^2\,dx=\int(x+2x^3+x^5)\,dx$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+C.$$

別法: $\int x(1+x^2)^2dx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^2\cdot 2x\,dx.$

因爲 $2x\,dx$ 是 $1+x^2$ 的微分,所以公式IV可用.於是

$$\frac{1}{2}\int(1+x^2)^2\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^3}{3}+C=\frac{1}{6}(1+x^2)^3+C.$$

例 3. $\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{1}{b}\int\sqrt{a+bx}\cdot b\,dx$

$$=\frac{1}{b}\int(a+bx)^{\frac{1}{2}}\cdot b\,dx.$$

用公式 IV, $=\frac{1}{b}\,\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

$$=\frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}}+C.$$

習　題

試求下列各積分:

1. $\int(3x^3-2x^2+4x-1)\,dx.$　　2. $\int\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

3. $\int(\sqrt{x}-2\sqrt{x^3})\,dx.$　　4. $\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}\right)dx.$

5. $\int(2-x)^5dx.$　　6. $\int 3(y+1)^3dy.$

7. $\int\sqrt{1-3t}\,dt.$

8. $\int x(a^2-x^2)^2\,dx.$

9. $\int x^2(1-x^2)\,dx.$

10. $\int\frac{dz}{(1-z)^3}.$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}.$

12. $\int\frac{v^2\,dv}{\sqrt{1+v^3}}.$

13. $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx.$

14. $\int\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta.$

15. $\int\sin 3\theta\cos 3\theta\,d\theta.$

16. $\int e^y\sqrt{1+e^y}\,dy.$

17. $\int\frac{\sin\phi\,d\phi}{\cos^2\phi}.$

18. $\int\frac{x^2-2x+2}{\sqrt{x}}\,dx.$

19. $\int\cos\theta\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta.$

20. $\int e^x(1-2e^x)^2\,dx.$

374. 公式 V—VI 的例題.

例 1. $\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\log(a^2+x^2)+C.$

例 2. $\int\frac{x^2-x}{x+1}dx=\int\left(x-2+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2-2x+2\log(x+1)+C.$$

例 3. $\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot 3\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$

習題

試求下列各積分:

1. $\int \frac{dx}{x-3}$.	2. $\int \frac{dx}{3x-5}$.	3. $\int \frac{2\,du}{5-4u}$.
4. $\int \tan\theta\, d\theta$.	5. $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{1+\cos\theta}$.	6. $\int \frac{y^2 dy}{1-2y^3}$.
7. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}$.	8. $\int \frac{3x-1}{2x+2}dx$.	9. $\int e^{\frac{x}{2}}dx$.
10. $\int e^{-5t}dt$.	11. $\int xe^{-x^2}dx$.	12. $\int \frac{e^x dx}{e^x-1}$.
13. $\int \frac{x^2-x+2}{x+3}dx$.	14. $\int \frac{x^3 dx}{x^2+1}$.	15. $\int \frac{e^{2x}dx}{(1-e^{2x})^2}$.
16. $\int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2+x-1}$.	17. $\int t^3 e^{-2t^4}dt$.	

375. 公式 VII—IX 的例題.

例 1.
$$\int \tan^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= \int \sec^2\theta\, d\theta - \int d\theta$$
$$= \tan\theta - \theta + C.$$

例 2.
$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} = \int (\sin x)^{-3}\cdot\cos x\, dx$$

用公式 IV,
$$= \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

習　題

試求下列各積分:

1. $\int \sin 2x\,dx.$

2. $\int \sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta.$

3. $\int x\sin x^2 dx.$

4. $\int \cos kt\,dt.$

5. $\int \frac{\sin 3\theta\,d\theta}{1-2\cos 3\theta}.$

6. $\int \tan 5\theta\,d\theta.$

7. $\int e^x\cos e^x dx.$

8. $\int \sin^2 2\alpha\cos 2\alpha\,d\alpha.$

9. $\int \sin\theta(1-2\cos\theta)^2 d\theta.$

10. $\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}.$

11. $\int e^{\cos t}\sin t\,dt.$

12. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^5 x}.$

13. $\int \frac{2\sin\theta\,d\theta}{3\cos\theta-1}.$

14. $\int \frac{d\theta}{\sin\theta\tan\theta}.$

15. $\int \csc^2\theta\cot\theta\,d\theta.$

16. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

17. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}\,dx.$

376. 公式 X—XI 的例題

例. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}+C.$

習題

試求下列各積分:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.　　2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

3. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.　　4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.　　6. $\int \frac{dz}{3z^2+6z+4}$.

7. $\int \frac{du}{\sqrt{3+2u-u^2}}$.　　8. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+4}$.

9. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+4x+3}$.　　10. $\int \frac{e^{2u}du}{\sqrt{1+e^{2u}}}$.

11. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$.　　12. $\int \frac{x^2-3x-5}{x^2+4}\,dx$.

13. $\int \frac{x^3\,dx}{1+2x^2}$.

377. 公式XII的例題. 這個公式是從一個乘積的微分公式得來的.因為

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

所以

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du,$$

即

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

使用這個公式以求積分叫做"偏積分法".

例 1. 試求 $\int xe^x dx$.

設

$$u=x,\ dv=e^x dx,$$

那麼

$$du=dx,\ v=\int e^x dx=e^x.$$

$$\therefore \quad \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

例 2. 試求 $\int \log x \, dx$.

設 $$u = \log x, \quad dv = dx,$$

那麼 $$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

$$\therefore \quad \int \log x \, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \log x - x + C.$$

例 3. 試求 $\int e^x \sin x \, dx$.

令 $$u = e^x, \quad dv = \sin x \, dx,$$

則 $$du = e^x dx, \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

$$\therefore \quad \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \qquad (1)$$

求 $\int e^x \cos x \, dx$ 不比求 $\int e^x \sin x \, dx$ 來得容易,所以我們要何退回來求這個原積分.

令 $$u = \sin x, \quad dv = e^x dx,$$

則 $$du = \cos x \, dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

$$\therefore \quad \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \qquad (2)$$

(1) 與 (2) 相加,消去了 $\int e^x \cos x \, dx$, 則得

$$2\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x.$$

所以　$$\int e^x \sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x).$$

偏積分法是很重要的,關於積分的問題有許多不能用前幾節裏的方法解決,用了牠就能做成.但是使用偏積分法能否成功要看我們所選取的 u 和 dv 能否使新積分 $\int v\,du$ 比原積分 $\int u\,dv$ 更易求得.選取 u 和 dv 沒有定法;倘若這新積分不比這原積分更易求得,我們只好回過來另選 u 和 dv 了.

習　題

試求下列各積分:

1. $\int xe^{2x}dx.$
2. $\int t\sin t\,dt.$
3. $\int x^2e^{2x}dx.$
4. $\int z^2\log z\,dz.$
5. $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx.$
6. $\int u\sqrt{1+u}\,du.$
7. $\int u\sqrt{1-2u}\,du.$
8. $\int xe^{-2x^2}dx.$
9. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}.$
10. $\int \theta(1-\cos\theta)d\theta.$
11. $\int \frac{y\,dy}{(1-y)^2}.$
12. $\int \sin^{-1}x\,dx.$
13. $\int x^3\sqrt{a^4-x^4}dx.$
14. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

15. $\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$.

16. $\int x^2 \sin^{-1} x\, dx$.

17. $\int x \sec^2 x\, dx$.

18. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

19. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$.

20. $\int \sin^3\theta\, d\theta$.

21. $\int \sec^4\theta\, d\theta$.

22. $\int e^{\theta} \cos\theta\, d\theta$.

23. $\int e^{-\theta} \sin 2\theta\, d\theta$.

24. $\int e^{3\theta} \cos 2\theta\, d\theta$.

雜　題

試求下列各積分:

1. $\int \frac{x^3-x}{2+3x}\, dx$.

2. $\int x \cos 3x\, dx$.

3. $\int \frac{\log x}{x}\, dx$.

4. $\int x(1-x^4)\, dx$.

5. $\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$.

6. $\int \frac{\sec^2 2\theta}{1-\tan 2\theta}\, d\theta$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

8. $\int \cos\theta \log \sin\theta\, d\theta$.

9. $\int \frac{dx}{x(\log x)^2}$.

10. $\int \log(1-2x)\, dx$.

11. $\int e^{\tan t} \sec^2 t\, dt$.

12. $\int \frac{x^3+x^2+x}{x^2+9}\, dx$.

13. $\int \frac{(x+x^3)\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$.

14. $\int x \tan^2 x\,dx$.

15. $\int \arctan x\,dx$.

16. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

17. $\int e^{-x}(1+e^{-x})^3 dx$.

18. $\int \sec^2\theta \tan^3\theta\,d\theta$.

19. $\int \frac{dx}{x\log x}$.

20. $\int \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$.

21. $\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$.

22. $\int \theta \csc^2\theta\,d\theta$.

23. $\int \cos^3\theta\,d\theta$.

第二十九章

三角函數的積分法 替代積分法 有理分數的積分法

三角函數的積分法

378. 有幾種微分式含着各種三角函數,往往不能直接使用公式來得牠們的積分,必須把牠們所含的三角函數變化一下才有辦法.現在分別舉例說明於下:

第一種形式: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, **這里** m **和** n **有一個是正奇數.**

設 n 是一個正奇數.那麼我們可把原式寫做 $\int \sin^m x \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$ 並寫

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

於是得了一個式子,其中各項是 $\sin x$ 的各次冪乘 $\cos x \, dx$.所以即刻可以積分.設 m 是一個正奇數,同樣方法可以使用.

例. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$

$$=\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$=\int \sin^2 x\cos x\,dx-\int \sin^4 x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

第二種形式: $\int \tan^n x\,dx$, 或 $\int \cot^n x\,dx$, 這里 n 是一個整數.

從這兩個公式

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1,$$

$$\cot^2 x=\csc^2 x-1$$

卽能求得 $\tan^n x\,dx$, 或 $\cot^n x\,dx$ 的積分.

例. $\int \tan^4 x\,dx=\int \tan^2 x\,(\sec^2 x-1)\,dx$

$$=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int \tan^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\int (\sec^2 x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C.$$

第三種形式: $\int \tan^m x\sec^n x\,dx$, 或 $\int \cot^m x\csc^n x\,dx$, 這里 n 是一個正偶數.

例. $\int \tan^2 x\sec^4 x\,dx=\int \tan^2 x\sec^2 x\,(1+\tan^2 x)\,dx$

$$=\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx+\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$$

習 題

試求下列各積分:

1. $\int \sin^3 x\, dx.$
2. $\int \cos^3 x\, dx.$
3. $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx.$
4. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x}.$
5. $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx.$
6. $\int \sin^5 2\theta\, d\theta.$
7. $\int \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta.$
8. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^4 x}.$
9. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx.$
10. $\int \cos^7\theta\, d\theta.$
11. $\int x \sin x \cos^2 x\, dx.$
12. $\int x \sin^3 x\, dx.$
13. $\int \cot^4 x\, dx.$
14. $\int \tan^3\theta\, d\theta.$
15. $\int \cot^3\phi\, d\phi.$
16. $\int \tan^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta.$
17. $\int \tan^6 x\, dx.$
18. $\int \tan^5 x\, dx.$
19. $\int \sec^4 x\, dx.$
20. $\int \csc^4 x\, dx.$

21. $\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx.$　　22. $\int \tan\theta \sec^4\theta \, d\theta.$

23. $\int \csc^6 x \, dx.$　　24. $\int x \sec^4 x \, dx.$

第四種形式: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, 這里 m 和 n 都是正偶數.

這種形式可使變爲易於積分的式子,只要用以下三個公式:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

例 1.
$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

例 2.
$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

習　　題

試求下列各積分:

1. $\int \cos^2 x\, dx.$ 2. $\int \cos^4 x\, dx.$

3. $\int \sin^4\theta \cos^2\theta\, d\theta.$ 4. $\int \sin^6\theta\, d\theta.$

5. $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$ 6. $\int x \sin^2 x\, dx.$

7. $\int x \cos^2 x\, dx.$ 8. $\int x \sin x \cos x\, dx.$

9. $\int \theta \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta.$

替代積分法

379. 有一種微分式,若選一個新變數去替代牠的原變數,可使牠變為易於積分的式子.這個方法叫做"替代積分法",也是很重要的.怎樣才替代得恰好?那是沒有定法的,只有從積久的經驗上得來.

例 1 試求 $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x}.$

設 $\sqrt{x}=z,\ x=z^2,\ dx=2z\, dz.$

於是

$$\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x}=2\int \frac{z^2\, dz}{1+z^2}=2\int \left(1-\frac{1}{1+z^2}\right) dz$$

$$=2z-2\tan^{-1}z+C$$

$$=2\sqrt{x}-2\tan^{-1}\sqrt{x}+C.$$

例 2. 試求 $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^2}$.

設 $x+1=z,\ x=z-1,\ dx=dz.$

於是

$$\int \frac{x^2dx}{(x+1)^2}=\int \frac{z^2-2z+1}{z^2}dz=\int\left(1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$=z-2\log z-\frac{1}{z}+C$$

$$=x+1-2\log(x+1)-\frac{1}{x+1}+C$$

$$=x-2\log(x+1)-\frac{1}{x+1}+C'.$$

例 3. 試求 $\int \frac{(e^x-1)e^xdx}{e^x+1}$.

設 $e^x+1=z,\ e^xdx=dz.$

於是

$$\int \frac{(e^x-1)e^xdx}{e^x+1}=\int \frac{(z-2)\ dz}{z}=z-2\log z+C$$

$$=e^x-2\log(e^x+1)+C'.$$

習 題

試求下列各積分:

1. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$.　　　　2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1+2x}}dx$.

3. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^3}$.

4. $\int x^3 e^{x^2} dx$.

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

6. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

7. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$.

8. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

9. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

10. $\int \frac{x^3dx}{(a^2+x^2)^2}$.

11. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin x}$.

12. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

13. $\int \frac{\sec^2\theta\ \tan^2\theta\ d\theta}{\sqrt{1+\tan\theta}}$.

380. 還有許多微分式中的變數 x, 若以一個三角函數替代後就易於積分,大抵:

當原式中含有 a^2-x^2, 可令 $x=a\sin\theta$;

當原式中含有 a^2+x^2, 可令 $x=a\tan\theta$;

當原式中含有 x^2-a^2, 可令 $x=a\sec\theta$.

例. 試求 $$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $x=a\sin\theta$, $dx=a\cos\theta\,d\theta$, 則得

$$\int\frac{a\cos\theta\,d\theta}{(a^2-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos^3\theta}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{a^2}\tan\theta+C.$$

因為 $\sin\theta=\frac{x}{a}$, 所以 $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

習　題

試求下列各積分:

1. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.　　2. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$.

3. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.　　4. $\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$.

5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.　　6. $\int\frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.　　8. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

9. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$. (令 $x=2a\sin^2\theta$)

10. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax+x^2}}$. (令 $x=2a\tan^2\theta$)

11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2ax}}$. (令 $x=2a\sec^2\theta$)

12. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2ax}}$.　　13. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

14. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

有理分數的積分法

381. 當求一個有理分數式的積分時,若可拆做偏分數(第十四章),則先拆做偏分數,然後積分便利得多.

例 1. 試求 $\int\frac{x^3+2}{x^3-x}dx.$

$$\frac{x^3+2}{x^3-x}=1+\frac{x+2}{x^3-x};$$

拆做偏分數, $\frac{x+2}{x^3-x}=-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}.$

$$\therefore \frac{x^3+2}{x^3-x}=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

於是

$$\int\frac{x^3+2}{x^3-x}dx=\int\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=x-2\log x+\frac{1}{2}\log(x+1)+\frac{3}{2}\log(x-1)+C.$$

習　　題

試求下列各積分:

1. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}.$

2. $\int\frac{x^2dx}{x^2-4}.$

3. $\int\frac{x^3dx}{x^2+3x+2}.$

4. $\int\frac{(x^2-3x)\,dx}{x^2+7x+6}.$

5. $\int\frac{(2x^3+x-1)\,dx}{x^3+x^2-4x-4}.$

6. $\int\frac{x\,dx}{x^4+4x^2+3}.$

7. $\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{3\cos\theta-\cos^2\theta}.$

8. $\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}dx}{x}.$

9. $\int \csc\theta\, d\theta.$ $\qquad \left(\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\right)$

10. $\int \sec\theta\, d\theta.$

例 2. 試求 $\qquad \int \frac{x^3-1}{x(x+1)^3}\, dx.$

拆做偏分數,

$$\frac{x^3-1}{x(x+1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}.$$

所以

$$\int \frac{x^3-1}{x(x+1)^3}\, dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}\right) dx$$

$$= -\log x - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + 2\log(x+1) + C.$$

習　題

試求下列各積分:

1. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$

2. $\int \frac{(x^2+3x-1)\, dx}{(x+1)^2}.$

3. $\int \frac{(x^3-1)\, dx}{x(x-2)^2}.$

4. $\int \frac{x\, dx}{(1-x)^5}.$

5. $\int \frac{x^4-2x^2+3x+1}{(x^2-1)^2}\, dx.$

6. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x}.$

7. $\int \frac{d\theta}{\cos\theta \sin^2\theta}.$

8. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2}.$

9. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}.$

10. $\int \sec^3\theta\, d\theta.$ $\left(\sec^3\theta = \frac{1}{\cos^3\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta} = \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\right)$

11. $\int \csc^3\theta\, d\theta.$

12. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

例 3. 試求 $\int \frac{x^2+4x+10}{x^3+2x^2+5x}dx.$

拆做偏分數,

$$\frac{x^2+4x+10}{x^3+2x^2+5x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{x^2+2x+5}.$$

所以

$$\int \frac{x^2+4x+10}{x^3+2x^2+5x}dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{x^2+2x+5}\right) dx$$

$$= 2\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2} + C.$$

習 題

試求下列各積分:

1. $\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+5}.$

2. $\int \frac{xdx}{4x^2-4x+3}.$

3. $\int \frac{x^3dx}{x^2-2x+10}.$

4. $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+8x}.$

5. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}.$

6. $\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4}.$

7. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^3+x^2+4x+4}.$

9. $\int \frac{x^3dx}{(1+x^2)^2}$.　　**10.** $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^3}dx$

11. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2(1+x^2)}dx$.　　**12.** $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta+\sin^3\theta}$.

第三十章

定限積分

382. 定限積分. 設$f(x)$是一個已知函數,$F(x)$是$f(x)$的積分,又$x=a$和$x=b$是x的兩個已知值.當x從a變到b,$F(x)$也從$F(a)$變到$F(b)$.這個差$F(b)-F(a)$叫做"在a,b中間$f(x)$的定限積分",或簡稱"從a到b的定限積分"並以這個符號$\int_a^b f(x)\,dx$表明牠.a叫做"下限",b叫做"上限".

要求一個定限積分的值,只須先求得不定積分,然後從這個不定積分,在上限b的值減去牠在下限a的值.在習慣上常用這個符號$F(x)\Big]_a^b$來表明$F(b)-F(a)$.於是

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

在一個定限積分中,牠的積分常數恰因正負相消,所以不必再寫出來.

例 1. $\int_0^1(x+1)^2dx=\dfrac{(x+1)^3}{3}\Big]_0^1=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}.$

*例 2. $\int_1^e \log x\,dx=x\log x\Big]_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1.$

* 參看§377, 例2.

習　題

試求下列各定限積分:

1. $\int_{-2}^{2} x^2(x+2)\,dx$,

2. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1-x}$.

3. $\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

4. $\int_{0}^{2}\frac{x\,dx}{4+x^2}$.

5. $\int_{-1}^{1}(x^2+2x+2)\,dx$.

6. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$.

7. $\int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x}$.

8. $\int_{0}^{2}\frac{x^3\,dx}{x+1}$.

9. $\int_{1}^{2} ye^y dy$.

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sin^2\theta}$.

11. $\int_{0}^{\log 3} e^{2z} dz$.

12. $\int_{0}^{\pi}\cos^8\phi\,d\phi$.

13. $\int_{0}^{\log 2}\frac{e^{x}dx}{5e^x-1}$.

14. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$.

383. 上下限交換. 把一個定限積分的上下限交換猶如改變這個積分的號子,因爲

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

384. 在一個定限積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 中牠的變數 x 若換了一個新變數 z,如 $x=\phi(z)$,那麼牠原有的定限 a 和 b 也必隨着這新變數換做相當的新定限.

例. 試求 $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx.$

設 $1-x=z,\ x=1-z,\ dx=-dz.$

當 $x=-1,\quad z=2;$

當 $x=1,\quad z=0.$

所以

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx=-\int_{2}^{0}(1-z)\,z^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=\int_{2}^{0}(z^{\frac{3}{2}}-z^{\frac{1}{2}})\,dz$$

$$=\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big]_{2}^{0}$$

$$=-\frac{4}{15}\sqrt{2}.$$

習 題

用替代法求下列各定限積分:

1. $\int_{1}^{6}\frac{x\,dx}{\sqrt{3+x}}.$

2. $\int_{1}^{2}x^{3}\sqrt{x^{2}-1}\,dx$

3. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

4. $\int_{0}^{a}\frac{x^{3}dx}{(a^{2}+x^{2})^{\frac{5}{2}}}.$

5. $\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{(1+x)^{4}}.$

6. $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}{x^{2}}\,dx.$

7. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\,dx.$

8. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x(x^{2}+1)}.$

9. $\int_a^{2a}\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 10. $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

385. 我們有時要求這類形式的定限積分 $\int_a^b y\,dx$, $\int_a^b y^2\,dx$, $\int_a^b xy\,dx$,……,這里 y 是 x 的函數.我們只要以 x 表明 y, 如下例 (a),但也可以 y 和 dy 替代 x 和 dx, 並把定限換過,如下例 (b),這樣更覺便利.

例. 已知 $x^2+y^2=a^2$, (E)

試求 $\int_0^a xy\,dx$.

(a) $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

$$\therefore \int_0^a xy\,dx=\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot(-2x\,dx)$$

$$=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a=\frac{a^3}{3}.$$

(b) 從 (E) 得 $2x\,dx+2y\,dy=0$,

所以 $x\,dx=-y\,dy$.

又,當 $x=0$, $y=a$; 當 $x=a$, $y=0$;

所以

$$\int_0^a xy\,dx=-\int_a^0 y^2\,dy=\frac{a^3}{3}.$$

習 題

試求下列各定限積分:

1. $\int_1^{e^2} y\,dx$, 這里 $y=\log x$.

2. $\int_0^a y\,dx$, 這里 $y^2=4ax$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\,dx$, 這里 $y=\sin 2x$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2\,dx$, 這里 $y=\tan x$.

5. $\int_0^a xy\,dx$, 這里 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6. $\int_0^1 yx\,dy$, 這里 $y=\log x$.

7. $\int_0^1 yx\,dy$, 這里 $y=\sin x$.

8. $\int_0^1 x^2\,ydx$, 這里 $y=e^x$.

第三十一章

面積與體積

386. 面積. 在圖 179, 包圍在曲線 $y=f(x)$, x 軸, 定縱坐標 $x=a$, 和變縱坐標 $x=x$ 中間的一個面積設爲 A.

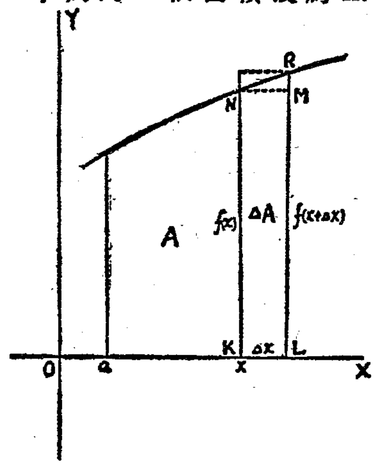

圖 179

當 x 增加了 Δx, A 就增加了 $\Delta A(KLRN)$. 這是顯而易見的, ΔA 大於 $f(x)\Delta x$ $(KLMN)$, 而小於 $f(x+\Delta x)\Delta x$, 就是

$$f(x)\Delta x<\Delta A<f(x+\Delta x)\Delta x.$$

所以 $f(x)<\dfrac{\Delta A}{\Delta x}<f(x+\Delta x)$.

當 Δx 漸近於 0,

$f(x+\Delta x)$ 漸近於 $f(x)$; 因爲 $\dfrac{\Delta A}{\Delta x}$ 常在 $f(x)$ 和 $f(x+\Delta x)$ 中間, 所以牠也漸近於 $f(x)$. 於是

$$\frac{dA}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=f(x).$$

現在 $$dA=f(x)\,dx,$$

所以 $$A=\int f(x)\,dx.$$

於是得一個結論如下:

“這個不定積分$\int f(x)\,dx$是代表一個面積的,這個面積包圍在這根曲線$y=f(x)$,牠的x軸,一根定縱坐標和一根變縱坐標的中間.至於這個定限積分$\int_a^b f(x)\,dx$所代表的一個面積是包圍在這根曲線$y=f(x)$,牠的x軸和這兩根直線$x=a$, $x=b$的中間”.

倘若我們所要求的一個面積是包圍在這根曲線$y=f(x)$,牠的y軸,和這兩根直線$y=g$, $y=h$的中間,那麼可用這個公式

$$\int_g^h \phi(y)\,dy,$$

這里$\phi(y)=x=f^{-1}(y)$,就是以y表明x.

例. (*a*) 試求包圍在這拋物線$y=x^2$, x軸,和這二直線$x=1$, $x=3$中間的面積.

$$A=\int_1^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big]_1^3=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}.$$

(*b*) 試求包圍在這拋物線$y=x^2$, y軸,和這二直線$y=1$, $y=9$中間的面積.

$$A'=\int_1^9 \sqrt{y}\,dy=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big]_1^9$$

$$=18-\frac{2}{3}=17\frac{1}{3}.$$

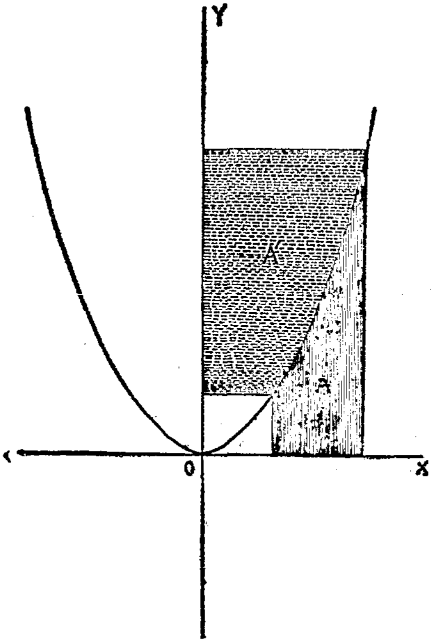

圖　180

習　題

試求包圍在以下各曲線,牠的 x 軸,和指定的縱坐標中間的面積(1—5):

1. $y=x^3$, $x=0$, $x=4$.

2. $y^2=4x$, $x=0$, $x=1$.

3. $xy=1,\ x=1,\ x=3.$

4. $x^2y=a^3,\ x=a,\ x=2a.$

5. $y=e^x,\ x=0,\ x=1.$

6. 試求包圍在這曲線 $y=4-x^2$ 和牠的 x 軸中間的面積. $\frac{32}{3}$.

7. 試求包圍在這曲線 $y=\log x$, 牠的 x 軸, 和這直線 $x=2$ 中間的面積. 0.386.

8. 試求正弦曲線的一個弓形的面積。 2

9. 試求包圍在這曲線 $y=x^4$, 牠的 x 軸和這直線 $x=1$ 中間的面積。

10. 試求包圍在這拋物線 $y=x^2$, 牠的 y 軸,和這二直線 $y=1,\ y=3$ 中間的面積.. 2.8).

11. 試求包圍在這曲線 $ay^2=x^3$ 和這直線 $x=a$ 中間的面積 $\frac{4}{5}a^2$.

12. 試求這曲線 $y=\cos x$ 的半個弓形的面積. 1.

13. 試求這曲線 $y=\frac{1}{3}\cos 2x$ 的一個弓形的面積. $\frac{1}{3}$.

14. 試求包圍在這曲線 $2y=x^2$ 和這直線 $x-y+4=0$ 中間的面積. 18.

15. 試求包圍在這曲線 $y=(x-4)^2(x-3)$ 和 x 軸中間的面積. $\frac{1}{12}$.

16 試求包圍在這二拋物線 $y^2=4ax$ 和 $x^2=4ay$ 中間的面積. $\frac{16}{3}a^2$.

17. 試求包圍在這曲線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 和兩根坐標軸中間的面積. $\frac{1}{6}a^2$.

18. 試用積分法求一個三角形的面積.

19. 試求一個圓的面積.

20. 試求一個橢圓的面積. πab.

21. 試求包圍在這曲線 $y=xe^x$ 和牠的漸近線中間的面積. 1.

22. 試求包圍在這曲線 $y=(x^2-1)^2$ 和 x 軸中間的面積. $\frac{16}{15}$.

23. 試求包圍在這二拋物線 $y^2=2ax$ 和 $y^2=4ax-a^2$ 中間的面積. $\frac{1}{3}a^2$.

24. 試求包圍在這曲線 $y=\log x$ 和兩根坐標軸中間的面積. 1.

25. 試求包圍在這曲線 $y^3=x^3(1-x)$ 和 x 軸中間的面積. $\frac{9}{28}$.

26. 試求包圍在這雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ 和這直線 $x=2a$ 中間的面積. $[2\sqrt{3}-\log(2+\sqrt{3})]a^2$.

387. 旋成體的體積. 在圖 181, 設這根曲線的

方程式是 $y=f(x)$. P 和 Q 是在這曲線上的二點,從 P 和 Q 到 x 軸上作二垂線 PA 和 QB. 把這個平面 $APQB$ 繞着 OX 旋轉一周就得一個"旋成體". 現在我們要求這種旋成體的體積.

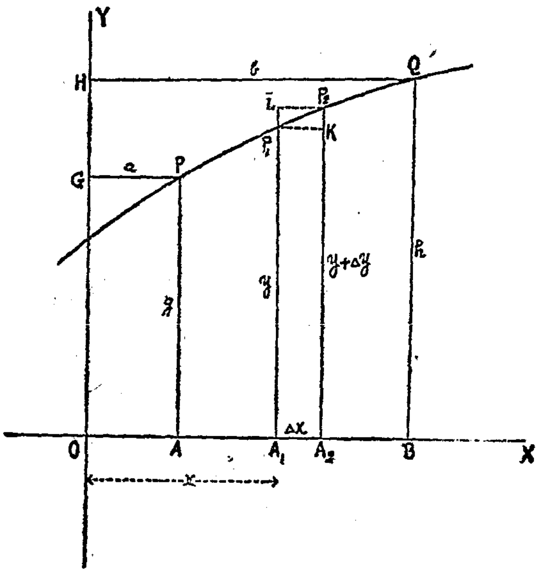

圖 181

設 P_1 的坐標是 (x, y), P_2 的坐標是 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

又設旋成體 APP_1A_1 的體積為 V, 則旋成體 $A_1P_1P_2A_2$ 的體積為 ΔV.

這是顯而易見的, ΔV 大於旋成體 $A_1P_1KA_2$ 的體積而小於旋成體 $A_1LP_2A_2$ 的體積.

但旋成體 $A_1P_1KA_2$ 和 $A_1LP_2A_2$ 都是扁的正圓柱體，所以牠們的體積是 $\pi y^2\Delta x$ 和 $\pi(y+\Delta y)^2\Delta x$.

於是
$$\pi y^2\Delta x<\Delta V<\pi(y+\Delta y)^2\Delta x,$$

即
$$\pi y^2<\frac{\Delta V}{\Delta x}<\pi(y+\Delta y)^2.$$

當 Δx 漸近於 0, $y+\Delta y$ 漸近於 y, 而 $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ 漸近於 πy^2.

$$\therefore\quad \frac{dV}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=\pi y^2,$$

即
$$dV=\pi y^2dx.$$

所以
$$V=\pi\int y^2dx.$$

設 $OA=a$, $OB=b$, 則旋成體 $APQB$ 的體積等於這個定限積分

$$\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (\mathrm{V}_x)$$

儻若我們要求繞着 OY 的旋成體的體積，如旋成體 $PGHQ$, 則當改用這個定限積分

$$\pi\int_g^h x^2dy, \qquad (\mathrm{V}_y)$$

這里 $g=OG$, $h=OH$, $x=\phi(y)=f^{-1}(y)$.

例 (a)　設包圍在這拋物線 $y^2=4ax$ x 軸，和這直線 $x=a$ 中間的面積繞着 x 軸旋轉，試求其所生的體積：

$$V_x=\pi\int_0^a 4ax\,dx=4\pi a\int_0^a x\,dx=2\pi ax^2\Big]_0^a$$

$$=2\pi a^3.$$

(b) 設剛纔所說的面積繞着 y 軸旋轉,試求其所生的體積.

$$V_y=\pi\int_0^{2a}\frac{y^4}{16a^2}dy=\frac{\pi}{16a^2}\int_0^{2a}y^4dy=\frac{\pi y^5}{80a^2}\Big]_0^{2a}$$

$$=\frac{2}{5}\pi a^3.$$

$$\pi a^2\cdot 2a-V_y=2\pi a^3-\frac{2}{5}\pi a^3=\frac{8}{5}\pi a^3.$$

所以要求的體積是 $\frac{8}{5}\pi a^3$.

習題

1. 一個橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞着牠的長軸 OX 旋轉,試求其所生的體積. $\frac{4}{3}\pi a b^2$

2. 一個橢圓繞着牠的短軸 OY 旋轉,試求其所生的體積. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$

3. 這拋物線 $x^2-3x+2y=0$ 在 OX 上的部分繞着 OX 旋轉,試求其所生的體積. $\frac{81}{40}\pi.$

4. 試求一個球的體積.

5. 在一個圓內,有一直徑平行於一個弓形的弦.設這個弓形繞着這直徑旋轉,試證這樣所生的體積等於以這

弦爲直徑的一個球的體積.

6. 包圍在這橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和這拋物線 $2ay^2=3b^2x$ 中間的面積繞着 x 軸旋轉,試求其所生的體積. $\frac{19}{48}\pi ab^2$.

7. 設這拋物線 $y^2=4ax$ 繞着 OX 旋轉,則從 $x=0$ 到 $x=2a$ 的體積是從 $x=2a$ 到 $x=4a$ 的體積的 $\frac{1}{3}$,試證明之.

8. 包圍在這雙曲線 $x^2-y^2=a^2$, 牠的 x 軸,和這直線 $x=2a$ 中間的面積繞着 OX 旋轉,試求其所生的體積. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

9. 包圍在這雙曲線 $xy=a^2$, 這直線 $x=a$, 和 x 軸中間的面積繞着 OX 旋轉,試求其所生的體積. πa^3.

10. 包圍在這曲線 $y=\log x$, 這直線 $y=-1$, 和兩根坐標軸中間的面積繞着 OY 旋轉,試求其所生的體積. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

11. 試求一個正圓錐的體積.

12. 一個面積在第二象限內並在這曲線 $y=e^x$ 下,牠繞着 OY 旋轉,試求其所生的體積. 2π.

13. 這雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞着 OY 旋轉,試求從 $y=0$ 到 $y=b$ 的體積. $\frac{4}{3}\pi a^2b$.

14. 正弦曲線的一個弓形繞着 x 軸旋轉,試求其所生的體積. $\frac{1}{2}\pi^2$.

15. 正弦曲線的一個弓形繞着 y 軸旋轉,試求其所生的體積. $2\pi^2$.

16. 一個橢圓繞着牠的短軸端點的切線旋轉, 試求其所生的體積. $2\pi^2ab^2$.

17. 一個面積包圍在這曲線 $y=\frac{\sin x}{x}$ 和兩根坐標軸中間,牠繞着 y 軸旋轉,試求其所生的體積. 4π.

388. 曲線的長. 在圖 182, 設以 s 表明在這曲線 $y=f(x)$ 上從 P_0 到 $P\ (x, y)$ 的弧的長.這弧可當作 x 的函數,

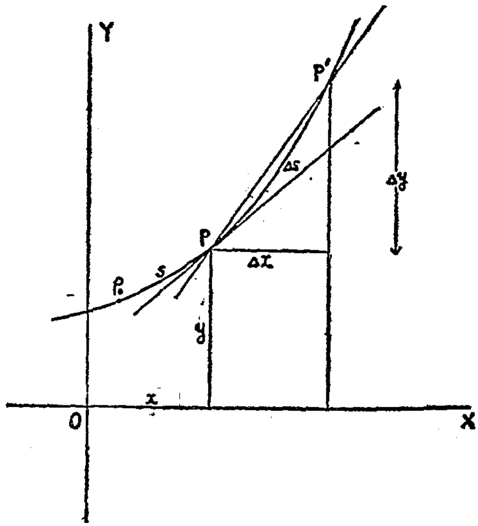

圖 182

牠的引申函數 $\frac{ds}{dx}$ 求得如下:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s}{PP'}\cdot\frac{PP'}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta s}{PP'}\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta s}{PP'}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

這里 Δs 是從 $P(x, y)$ 到 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 的弧的長，PP' 是從 P 到 P' 的弦的長.

因為
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{PP'}=1,$$

所以
$$\frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{1}$$

同樣可證
$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}. \tag{2}$$

於是
$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,$$

或
$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy;$$

但是在實用上當以定限積分表明：
$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx. \tag{A}$$

這上下限都是 x 的值；

或
$$s=\int_g^h\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy. \tag{B}$$

這上下限都是 y 的值.

例. 在這拋物線 $y^2=4ax$ 上，試求從頂點到 $(a\ 2a)$ 的弧長.

這里
$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}},$$

所以 $$s=\int_0^a\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^a\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

$$\int\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\sqrt{ax+x^2}+a\log\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x}\right)+C.$$

$$\therefore\quad\int_0^a\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=a\left[\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=2.29558a.$$

若用公式 (B),則有

$$s=\int_0^{2a}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

$$x=\frac{y^2}{4a},\quad\frac{dx}{dy}=\frac{y}{2a}.$$

$$\therefore\quad s=\int_0^{2a}\sqrt{1+\frac{y^2}{4a^2}}\,dy=\frac{1}{2a}\int_0^{2a}\sqrt{y^2+4a^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+4a^2}+\frac{4a^2}{2}\log\left(y+\sqrt{y^2+4a^2}\right)\right]_0^{2a}$$

$$=a\left[\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

習　題

1. 在這曲線 $ay^2=x^3$ 上,試求從 $x=\frac{a}{4}$ 到 $x=5a$ 的弧長。

$\frac{97}{8}a.$

2. 試求這曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的全長。　$6a.$

3. 試求一個圓的圓周。

4. 試求一個橢圓的圓周。

5. 在這曲線 $y=\log\sec x$ 上, 試求從 $x=0$ 到 $x=\frac{\pi}{3}$ 的弧長. $\log(2+\sqrt{3})$.

6. 在這曲線 $y=\log\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 上,試求從 $x=1$ 到 $x=2$ 的弧長. $\log(e+e^{-1})$.

7. 試求這曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 的一個象限的長. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

8. 在這曲線 $9y^2=4(1+x^2)^3$ 上,試求從 $x=0$ 到 $x=2$ 的弧長. $\frac{22}{3}$.

9. 在這曲線 $y=\frac{x^4+3}{6x}$ 上,試求從牠的極低點到 $x=2$ 的弧長. $\frac{17}{12}$.

389. 旋成面的面積. 在圖 183, 設這根曲線的方程式是 $y=f(x)$. 在這曲線上任取一段弧 PQ; 把這弧繞着 x 軸或 y 軸旋轉一周就得一個"旋成面."設以 S 表明這個旋成面的面積.

繞 OX 的旋成面的面積是

$$S_x=\int 2\pi y\,ds.$$

繞 OY 的旋成面的面積是

$$S_y=\int 2\pi x\,ds,\ \text{這里}\ x=\phi(y)=f^{-1}(y).$$

但是 $$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad \S 388,(1).$$

今以 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ 代 ds 並寫做定限積分式,則有

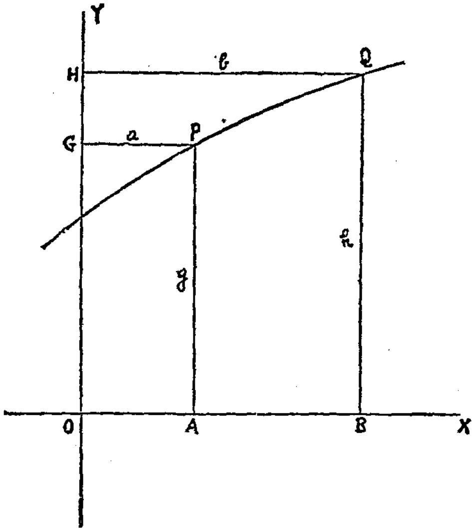

圖 183

$$S_x=2\pi\int_a^b y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx. \tag{A}$$

$$S_y=2\pi\int_a^b x\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx. \tag{B}$$

或以 $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ §388,(2).

代入 (A) 和 (B),則有

$$S_x=2\pi\int_g^h y\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy. \tag{A'}$$

$$S_y=2\pi\int_g^h x\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy. \tag{B'}$$

例. 把這曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 繞着 OX 旋轉一周, 試求其所生的面積.

這里 $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{dx}=-(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}$.

從 (A), $$\frac{1}{2}S_x=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$=2\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$=\frac{6\pi a^2}{5}.$$

$$\therefore\quad S_x=\frac{12\pi a^2}{5}.$$

或用 (A'), $$\frac{dx}{dy}=-(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}};$$

$$\frac{1}{2}S_x=2\pi\int_0^a y\left[1+\frac{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}dy$$

$$=2\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a y^{\frac{2}{3}}dy$$

$$=\frac{6\pi a^2}{5}.$$

習 題

1. 試求一個球的面積.

2. 一個橢圓 (a) 繞着牠的長軸旋轉, (b) 繞着牠的短

軸旋轉試求其所生的兩個面積.

$$(a)\ 2\pi b\left(b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

3. 這曲線 $a^2y=x^3$ 繞着 OX 旋轉,試求從 $x=0$ 到 $x=a$ 的面積. $\frac{1}{27}\pi a^2(10\sqrt{10}-1)$.

4. 這曲線 $8a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$ 繞着 OX 旋轉, 試求其全面積. $\frac{1}{2}\pi a^2$.

5. 正弦曲線的一個弓形繞着 OY 旋轉,試求其所生的面積. $2\pi[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$.

6. 這曲線 $y^2=4ax$ 繞着 OX 旋轉, 試證從 $x=0$ 到 $x=3a$ 的面積是從 $x=3a$ 到 $x=15a$ 的面積的 $\frac{1}{8}$.

7. 這曲線 $6a^2xy=x^4+3a^4$ 繞着 OX 旋轉, 試求從 $x=a$ 到 $x=2a$ 的面積. $\frac{47}{16}\pi a^2$.

8. 這曲線 $4y=x^2-2\log x$ 繞着 OY 旋轉, 試求從 $x=1$ 到 $x=4$ 的面積. 24π.

9. 這雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞着 OY 旋轉,試求從 $x=a$ 到 $x=\sqrt{a^2+b^2}$ 的面積.

$$\frac{2\pi b^2}{a}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{\sqrt{2a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right).$$