中國初中教科書

幾何學

上冊

吳淵在編

中國科學圖書儀器公司發行

目　錄

頁數

中國初中教科書

幾何學

第一編

實驗幾何學

第一章　基本概念

1.　體

在一間教室裏,上有天花板,下有地板,四面有墻壁,門窗,黑板,這許多東西總叫做**物體**.　這種種物體的質料,有化學家去研究;硬度,牢固,等,有物理學家去研究.除去了質料,硬度,色澤,等等以外,還餘形狀,大小,位置三件事,這是我們現在所要研究的.

我們以後所說物體,單認他有形狀,大小,位置三事,不管他有其餘種種性質.　在物體中,單單抽出形狀,大小,位置來研究,其實已經脫離了物了,這樣無質的東西,便是空間的部份,特別叫他做**立體**,或單叫做**體**(solid).

那麼,這間教室是不是立體呢? 是的. 可是用立體的眼光來看這教室,所看見的只有把門窗都關閉了所得與外間隔絕的空間一部份,和這一部份在校中所居的地位.

一塊黑板也可以看做立體. 不過看到的是這塊黑板在教室中什麼地方,他是怎樣形狀,和他佔了多少空間的部份.

照此說來,可知**隨物都有體,體却不是物.**

教室從天花板到地板有多少尺,普通叫**高**,從進門到對壁有多少尺叫**深**,從左壁到右壁多少尺叫**長**. 黑板也有**高**,**厚**,**長**. 這叫做立體的三個**向度**(Dimensions).

講立體的大小有三個向度

例題一

1. 以下各物是不是立體

鉛筆,　書本,　泥塊,　墨水瓶.

2. 以下各物有沒有體:

雲片,　紙張,　火焰,　雨滴.

3. 一皮球,一木球,大小完全相同,他的體相同不相同?

4. 取一粉筆匣指出他的三個向度.

5. 一個皮球有沒向度? 若有,如何去定他?

6.　二個立體能不能疊合起來?

2.　表面.

現在把教本和粉筆都放在教桌面上.　這桌面兩個字,在你們意想中是指什麼?　是不是指桌子上面鑲的一塊板?　倘若是的,你們試把上款所講的體來想一想,這塊板和體有何分別?　這是物體啊!　幾何學的面另外有一種意味與體是絕對不能混的.

體是脫離了物說的,面也應當離開物說.

體的界限叫做表面(Surface).　這界限兩字,便是表明面是不屬於物的.

怎麼叫做界限呢?　譬如說,教桌所佔空間的部份是體,那末,桌的上面(不離開桌),桌上空間的下面(不侵進桌),這一個位置便是桌所佔立體的一部份分界處,此位置可說是此處的一個界限.　我們試將教本緊壓着桌面,則教本下面桌子上面絲毫無隙的一個地位,可說是同時在此兩件東西上,却也可說是同時在此兩件東西外,這一個地位便是界限的一部份,便是前所說的位置.也便是表面的一部份.　物所有體的完全表面處處都是這樣,故此表面不但脫離了物,而且也不是體了.

從此可以知道**表面沒有厚.**

立體有長和廣,他的界限—(表面)—當然仍有長和廣. 故**表面有二個向度.**

照這樣說,表面這東西是看不見拿不到的,虛無縹緲,怎麼研究呢? 而且研究了有甚用呢? 這個麼? 儘不用慌,眞實的表面雖然得不到,代表的東西却隨處可以取得,表面上的種種花樣便能研究;而且立體有位置,

表面自然亦有位置.

那末,幾個表面的關係也便可研究了. 如此,便建築,工程,測量等等都可以用了.

面是體的界限,倒過來便可說體是面包圍出來的.

例題二

1. 隨意舉幾個表面的實例.

2. 教室是幾個面圍成的?

3. 粉筆是幾個面圍成的?

4. 墨水瓶是幾個面圍成的?

5. 紙張是面不是面?

6. 將蘿菔切斷,切口是一個面還是兩個面? 倘把兩段蘿菔分開了,此切口當然分而為兩,此兩個面的異點何在?

7. 將立體切開,切到薄極還切,能不能變成面?

8. 將無數個面重疊起來能不能變成體?

3. 線

教室裏天花板和墻壁相接的地位,兩垛墻壁相接的地位,墻壁和地板相接的地位,都叫做**交界**. 面的交界猶如體的界限. 墻壁與地板的交界,是同時在墻壁和地板上的一個地位,也可以說是同時在墻壁和地板外的一個地位.

附着墻壁地板而不是墻壁地板的地位是面,這兩個面的交界便是同附着墻壁地板而不是這牆壁地板的一個地位. 這個地位叫做**線** (Line). 線是這二個面的交,也是各個面的界限. 故此線雖在面中却不是面了,他是失去了面的廣. 當然,他的長還是有的.

面的交是線,線有一個向度,有位置.

譬如有人買了一塊地,便要在地的轉角處立幾塊界石,每相離兩塊界石中間彷彿畫了一條界線,好和鄉鄰分疆劃界,這界線是無形的東西,可是他有位置,便有劃分的功用.

例題三

1. 就粉筆匣舉出各面的交線. 交線有幾條?
2. 就一枝不削動的鉛筆舉出各面的交線.
3. 一條細絲是不是線?
4. 線的向度叫什麼名詞?

5. 線能不能完全在一面中?

6. 線爲什麽沒有厚,沒有寬?

7. 要是面能切絲,將面切做細而又細能不能成線?

4. 點

兩個面既然有交界,兩個線當然亦有交界.

你看一只粉筆匣有六個面,每兩個面交成一個稜,共有十二個稜,附着在這十二個稜上有十二條線. 每三個稜有一個公共交界,是這匣的一個角,共有八個角,這八個角中每一個角的地位,便是附着在三個稜上的三個線的交界,這個交界叫他做點(Point). 這個點是附着在匣角上的,却不是匣角. 因此,我們可以說

線的交是點.

線是沒有廣沒有厚的,到了他們的交,便連長也縮去了. 故此

點沒有向度,只有位置.

點沒有向度,便是沒有大小.

將繡花針尖立在玻璃面上,可見玻璃的上面針尖的下面可有一個位置. 這位置同時在玻璃和針尖上,也可以說同時在玻璃和針尖外. 這位置便是點. 若把這繡花針拿開,這點雖然看不見了,然而他的位置仍

在是無疑的.

例題四

1. 將一張紙摺出交叉的三個摺痕,再放開來看他可得幾個點.

2. 前題中的紙再摺第四個摺痕,放開來看他共得幾點.

3. 下面所舉是不是眞點:

炭盆裏爆出的火星,　太陽光裏的灰塵.

4. 點能不能完全在線裏?

5. 一毫米厚的體可以包含多少面?　一毫米廣的面可以包含多少線?　一毫米長的線可以包含多少點?

5. 點,線面,體.

兩面的交處是線,此線可叫做兩面的**交線**(line of intersection). 兩線交處是點,此點可叫做兩線的**交點**(Point of intersection).

從 2, 3, 4 款可見

體的盡處是面,面的盡處是線,線的盡處是點

點只是一個位置.

若將點左右移動,他在位置以外便又生出一個長,

便成了一條綫。

再將綫上下移動則在位置和長以外又生出一個廣,便成了一個面.

再將此面前後移動,則在長,廣,和位置以外又生了一個厚,便成了一個體. 故此,

點運動可成線,線運動可成面,面運動可成體.

例題五

1. 舉例說明點運動可成綫.

2. 舉例說明線運動可成面.

3. 舉例說明面運動可成體.

4. 一線運動成面時,此線中各點運動成什麼?

5. 一面運動成體時,此面中各線運動成什麼?又面中各點同時運動成什麼?

6. 從上 4 題說明一個面中可包含無數個線.

7. 從上 5 題說明一個體中可包含無數個面,也可包含無數個線.

8. 一個體或一個面中能不能包含無數個點?

9. 點如何運動可不成線? 線如何運動可不成面? 面如何運動可不成體?

6. 點,線的代表.

以前已經知道點線面體都不是實物,不過可用代表他的東西來研究。代表他們的東西最便當的是用圖畫.

在紙上用墨筆或鉛筆作一極小的黑漬如(·),或作一極小的交叉如(×),可用做代表點的**記號**.

將墨筆或鉛筆尖在紙上畫一黑痕,可用做代表線的**記號**.

面若是一個或幾個線包圍出來的一部份,則面的記號已經跟着線的記號一同解決了.

體是一個或幾個面包圍出來的一部份,故此面的記號既然解決,體的記號便也跟著解決了.

有幾個人在一處,便各人要有一個姓名,於是趙大,錢二,呼喚方纔不至錯誤。有幾個點在一處,也要各點有個稱呼纔行。最簡便的法子,是在各點旁各寫一個大體字母A,B等,叫起來便可叫做點A,點B,等。一條線,隨便在其中取兩點記著大體字母,把記這兩點的字母連着叫,便是稱呼這條線,如線AB,線CD等,

例題六

1. 憑着什麼理由可以畫線?

2. 隨便畫兩條線,各自附上字母稱呼出來.

3. 隨便畫一段線,用三點分做兩小段,三點旁各

附上字母．試將此兩小段與全段各別叫他出來．

7. 直線．

將一根細絲拉緊繞在兩隻相離的小釘上，則此兩釘中間絲的部份必直．若將幾根細絲和在一起同樣拉緊繞在兩隻相離的小釘上，這幾根細絲都直了，一定合在一起彷彿一根．要是一放鬆，讓這幾根細絲自由，他們一定各自駝腰曲背根根分離．我們想像這細絲逐漸縮細細到沒有，便變成了線，而他怎樣方能直的影像我們仍舊可以保留著．便是，我們兩手拿了一條線(假定是可以的)放在第二線上，兩手拿處叫他與第二線上的兩點重合，再輕搓拿線的手指，拿的線一定因此打滾，這時兩手拿處仍舊時時與第二線上的兩點重合，要是這兩線自始至終都能合在一起(不用拉緊，自然合拍)，這兩線都是直線是無二無疑的了．照這樣，一條直線的直不直當然可如下去定他：

一線，打着滾，但其中兩點不離原處，若此線在打滾中各新位置始終與其原位置相合，則此線叫做直線(Straight line)，**不是這樣的線叫做曲線**(Curved line or curve)．

例　題　七

1.　就實物舉直線的例.

2.　就教室中實物舉曲線的例.

3.　過二點能不能作兩個直線?

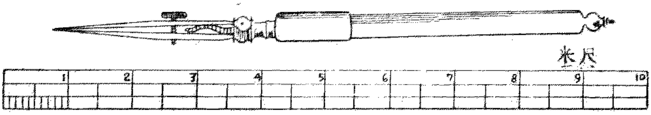
4.　兩個直線的交點有幾個?

5.　兩個曲線的交點有一定個數沒有?

8.　直線作圖法.

實用幾何學的第一目的是要會畫幾何圖. 畫圖的第一步是畫直線.

畫直綫時少不了的器具是一枝直綫筆,一管直尺,

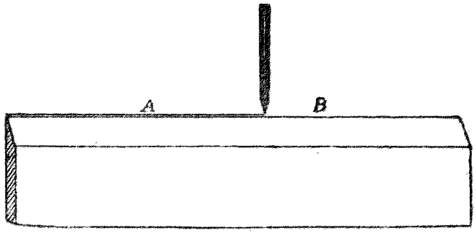


(圖 1)

直尺可用米尺(俗稱密達尺),畫直線外,兼可量長.

過二點 A, B 畫直線:

先將直尺的邊緣靠緊此二點.左手用力壓住此尺.右手用筆尖沿此尺邊從左畫到右.



(圖 2)

如此作圖一定是可能的.故我們可說:

經過二點必能畫一直線.

畫出來A, B中間的一段線,叫做**線份**(Segment of line). 若過B再向右畫,或過A再向左畫,這叫做將線份AB**延長**(to produce). 延長出來的部份,叫做線份的**延線**(Prolongation).

從上畫直線的方法,可以知道:

線份一定能夠隨意將他延長.

照上法畫了一條直線,這線眞確是直的不是,要看直尺的邊是不是眞直. 直尺的邊怎樣纔能靠得住是眞直呢?這可以用下一法來試驗的:

儻使第一次畫直線AB是把直尺放在兩點A, B下邊畫的,那可以將直尺調換放在兩點A, B的上邊去,再畫一下. 或者將直尺隨便移過一段再畫一下. 若是各次所畫過A, B的線完全合一,那麼,這直尺的邊靠得住是直的,所畫的線是眞直的便也無疑了.

注意. 凡作圖以前,器具先要豫備整齊. 作圖已完,器具須要揩拭乾淨.

作圖前,再要豫備削尖的硬鉛筆一二枝,軟橡皮一塊,小刀一柄.

要作一圖,先用鉛筆打樣,再用墨筆罩上,候墨已乾,擦去紙上的鉛筆痕跡. 若墨筆畫壞,壞處尚少,則可候

墨乾後用小刀將敗墨痕輕輕刮去,再用橡皮輕去刮痕,用指甲輕磨滅去橡皮擦痕,如此則可省去重新再畫的辛苦.

例題八

1. 畫一個長2.5釐米的線份,再向右延長1釐米.

2. 作一個長2.5釐米的線份,再向左延長1釐米.

3. 作一個長2釐米的線份,再作第二個線份,叫他等於前一個線份長的3倍.

4. 作一個長2釐米的線份,再作第二個線份,叫他等於前一個線份長的$\frac{1}{4}$.

5. 本款試驗直線的方法根據什麼理由得來?

6. 作A,B兩點,離開一釐米. 用直尺,銀圓,銅圓的邊分別靠緊此二點畫線. 看畫得A,B間三個線中那個最長? 那個最短?

7. 二個直線上有兩雙點已經合了,此二個直線合一不合一? 若直線變做曲線又怎樣?

8. 1, 2兩題中所得全線份等長不等長?

9. 平面

我們已經知道怎樣的線可以叫做直,現在再要知道怎樣的面可以叫做平.

「一個表面處處沒有高低不平的地方,這表面可以

說是平面.」這一句話自然不能說他錯;但是這個平字說得很含糊,第一你無從實驗起,便還不出平的憑據來.

有人說:「你只要看靜水的面,便是很好的一個平面模範.」這話也不錯,可是對於如何算做平,還是一個囫圇吞棗,沒有能叫人有眞切的認識. **凡是科學中的名詞,必須給與一種確切一定的意義,以後用他方纔不至發生游移,騎牆,舞弄等種種的毛病.** 現在我們來看面怎樣纔算是平的:

我們用一根直尺的邊壓在一個面上(如桌面),若這個面有凸處,則此尺至少有一頭要翹在空處;若這個面有凹處,則此尺至少有一段貼不著面;若全無凹凸,則此尺邊與面應該完全貼合. 故此抽象一些說,便是:

過表面中隨意二點畫直線,若所畫直線完全在此面中,則此表面叫做平面(Plane).

不是這種的表面叫做曲面(Curved surface).

例題九

1. 就教室中實物舉平面曲面的例.
2. 舉凸面的實例.
3. 舉凹面的實例.
4. 將二個平面相重能不能完全合成一個?

5. 要用一枝鉛筆試驗畫圖板面是不是平面應當如何試法?

10. 無窮遠．方向．

我們設想將一個直線向兩端儘着延長,逢著阻礙,也能夠穿將過去,這樣永久延長,便永久沒有止境,遠而又遠,遠到我們想不到的境地,他還可以遠出去,如此無窮盡的遠,我們叫他做**無窮遠**(Infinitefy Distant).

無窮遠是永遠達不到的一點,然而幾何中的直線兩頭都到無窮遠處,換一句話來說,便是直線的兩頭都是沒有住境的. 所以凡是說到直線這個名詞都是指的**無盡直線**(An unlimited straight line). 兩頭都有止境的直線不過是無盡直線的一部份,所以叫他做**線份**(Line-segment, 或 Segment). 還有一頭有止境一頭沒有止境的直線叫做**半射線**(Half-ray). 半射線有止境的一頭叫做**原點**(Origin).

設 O 是一個半射線的原點,A 是半射線上的隨意一點,則此半射線可表示從 O 往 A 的**向**(Sense).

A, B 是一個無盡直線上的隨意二點,則此直線 AB 可表示一個**方向**(Direction).

例如向南,向北,都是一個向,南北是一個方向. 南北的方向,最靠得住的是指南針,其實便是沿著指南針

延長的一條直線

有人以為方向是人人都知道的一件事,其實不然;要是直線和無窮遠的概念弄不清楚,方向的概念一定含糊影響不會得清楚的. 方向這概念,不但在理論裏少不了他,在實用中尤其重要,現在應當知道了罷.

實用中的直線,原來都是線份,不過他既然是直線的一部份,便不可不知道怎樣的是直線.

線份當然有長短,可以定了一個長的單位來量他,便是度量衡裏的一個度. 所以線份是一個量(見算術 6 款).

線份可以代表定長.

定長將度表出來是一個定數,照代數學,可將小體文字 a, b, c, l, m, n 等表這個定數. 因此,線份有時也可在他旁邊記一個小體文字 a, l, 等,叫他做線份 a, 線份 l 等.

記好:**線份 AB, 線份 CD, 等是幾何記法,是舉此線份本身;線份 a, 線份 l, 等是代數記法,單指此等線份的長短.**

完全直線兩頭沒有窮盡,即其一個向度是無窮大,

照樣,完全平面四邊都沒有窮盡,即其二個向度是無窮大. 完全立體上下四方都沒有窮盡,即其三個向

度都是無窮大.

一個完全立體可充塞了空間,一個完全平面可劈分空間成兩半;一個完全直線可劃分他所居的平面成兩半,也可穿通了空間.

一個完全直線若繞著其中一點在其所居的平面中旋轉,則在此平面中所有位置可無一不被此直線轉過. 換一句話來說:一直線圍繞其中一點旋轉,可轉成一個完全平面.

一個完全平面若繞著其中一線旋轉,則可經過空間的所有位置. 換一句話來說:一平面圍繞其中一線旋轉可轉成一個完全立體.

一個完全立體已經塞滿了空間,可見三個向度以外,更容不下第四個向度. 故幾何到立體而止.

自然,在實用方面,所見到的立體都是完全立體的一部份,所見到的平面都是完全平面的一部份.

注意. 空間只有三向度,是指現在所講幾何的對像.

例題十

1. 直線何以能夠穿過阻礙永久延長? 試用方向的概念來說明這事.

2. 你們看過地圖麼? 地圖上南北,東西,兩個方

向是如何定的?

3. 試畫四個半射線,表示南東,南西,北東,北西四個向.

4. 前題中四個半射線的原點是代表怎樣一個位置?

5. 線份既然是一種長度,量長度的種種單位名稱和關係你們記得不記得? 記得的列舉出來.

6. 一個完全立體圍繞其中一直線旋轉,可成一個什麼東西?

11. 圖形.

點,線,面,體,或一種,或幾種,或分離,或集合的叫做圖形(Figure),**或省稱做圖.**

可是要注意**將點,線,面,體描摹,裝飾,或彫刻在無論何種表面上,必定要兼管他的形狀,大小,位置,方能稱做圖形,不然,便只能叫做圖畫**(Diagram). 例如畫師所畫山水不用比例尺,便不是幾何圖形.

一圖形完全在一個平面中的,叫做**平面圖形**(Plane figure), 不完全在一個平面中的,叫做**立體圖形** (Solid figure).

12. 幾何學.

研究圖形的科學叫做幾何學(Geometry).

單單研究平面圖形的幾何學叫做**平面幾何學**(Plane Geometry),研究立體圖形的幾何學叫做**立體幾何學**(Solid Geometry).

我國幾何學的一個名詞雖然不見經傳,其實很古的時候已經用他了. 唐虞的「璇璣玉衡齊七政」,三代的井田溝壑制度,可見幾何實用的發展已是很盛. 漢劉徽將九章稱做黃帝九章,九章中句股,圭田,都是幾何實用,周髀經解中的測高,測深,測遠完全是句股的應用,九章雖然不能確定出於軒轅,但出在三代以前是無疑的.

在西方,最初埃及人因爲經界尼羅河旁水淹過的田地發見一種簡單測量法,這種測量的人便稱做幾何學家. 巴比侖人在航海,建築,測量方面都能發明幾何的應用. 自然,他們所曉得的全靠經驗,偏重計算,對於許多定法都是知其然而不知其所以然的. 到了希臘人,方纔用科學方法來研究,集大成的一個人叫歐幾里得(Euclid),開始編成幾何學十三卷,後世奉他做幾何學的始祖,至今英國人尚把幾何學呼做 Euclid, 彷彿我們把文字學喚做許學一般.

幾何學經過了歐氏整理以後,便完全注重在理論方面. 自然,理論幾何是很嚴密的,很偉大的,但是初學的人入手時往往覺得很困難. 爲便利初學者起見,先可從觀察,實量,及作圖入手,推知多少圖形的性質,然後再作謹嚴的理論,似乎能便當些. 此後一種的幾何學叫做**實驗幾何學** (Experimental Geometry),前一種的幾何學,便是正當的幾何學,叫做**證明幾何學** (Demonstrative Geometry),或者叫做**理論幾何學** (Theoretrial Geometry).

我國在明季上海徐光啓譯了幾何原本,方始有幾何學的名稱. 幾何二字原是 Geometry 開始的譯音,其意義從量地得來,已見前文. 後來有人把幾何叫做形學的,這形學二字,一看上去似乎覺得很顯明,但是他把大小,位置都略去了,反而變成不完全. 幾何一名詞在我國已經有了三百多年的歷史,日本人後起繙譯西書也採這個名詞,所以這名詞當然有沿用的價值.

例題十一

1. 兩個平面的交界是什麽?

2. 過一個直線是不是只有一個平面?

3. 兩個立體能不能相交?

4. 將一個平面移到第二個平面上,叫這兩個平面上的一條直線相合,再在此直線外若還有一點相合,

則此兩個平面能不能合成一個?

5. 過一個點是不是只有一條直線?

6. 兩個直線若是一部份已經相合,則其餘部份怎樣?

7. 兩個平面若是已有一部份相合,則其餘部份怎樣?

8. 將一平面中一條直線做摺痕摺將起來,則在此摺痕兩旁二個平面部份能不能相合?

9. 將一平面摺疊時此平面中一線份能不能叫他兩端相合?

10. 將一直線中一點做樞,叫此點一旁的直線部份圍繞此點旋轉,轉到此部份中隨意一點與他部份中有一點相合時,此做樞的一點對於相合兩點的位置有如何的關係?

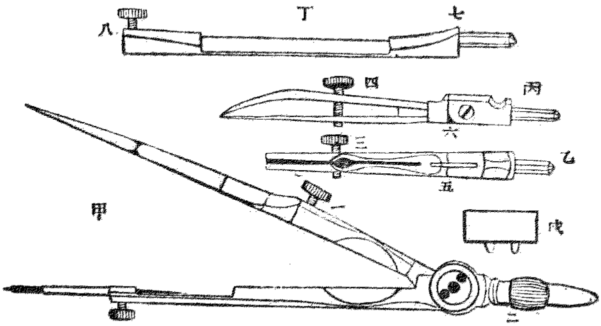
第二章　平面圖形及作圖

13.　截取定長的線份

前在第 8 款中,已知經過兩定點作一綫份或一直綫的方法. 現在要在一定直綫上從一點起截取一個綫份,叫此綫份的長是定長,或等於又一個已知的線份

自然,最簡單最容易想到的方法是用尺來量,實用

上原是常常用的。不過用尺量的方法是不很精密的，要精密却要用器具的幫助。



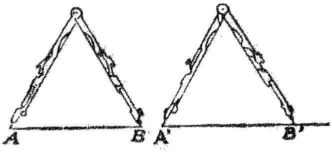
（圖 3 ）

上圖是兩脚規筆，其一脚可以開閉，又一脚固定，末端是一鋼針。全體是最下層的甲，可以將活動的一脚放開來量長短。又可用鉛筆或墨汁畫圖或曲線。若用鉛筆，可將乙中螺釘三旋鬆，插進削好的鉛筆，再將甲的螺釘一旋鬆，取去尖頭，將乙換進。若用墨汁，則在甲的活動一脚取去尖頭後，可將丙換進。用時要叫脚尖與筆尖等長，其乙，丙中五或六的關節，可使彎曲，叫筆尖與脚尖同時直立於針對的紙面。若所畫的圖要放大，可將丁的七插進甲的一，再在丁的八接上乙或丙。戊是管甲兩脚開閉時鬆緊的鑰。鬆緊要恰好，不可亂用，亂用則機關易於損壞。

在一直線上從一點 A' 起截取一線份 $A'B'$.

使 $A'B'$ 等於一已知線份 AB.

先,將規筆的兩脚放開,使兩脚尖的相去恰是線份 AB 的長.



(圖 4)

次,將此比好的規筆一個脚尖定在要截取線份的直線中點 A' 上,將此規筆旋轉,叫第二脚尖劃過此直線,即得點 B'.

於是 $A'B'$ 便是所截線份.

這樣的事情又可以叫做將線份 AB **移置**在 $A'B'$ 上.

於是**在一直線中必能截取一定長.**

線份 AB 叫做二點 A, B 間的**距離** (Distance).

於是有二個線份 AB, CD,要比較他們的大小,可將線份 AB 移置在線份 CD 上,叫 A 點與 C 點相合.

若 B 點恰好與 D 點相合,則此二線份當然相等. 此可用式表做　　$AB=CD$.　　(= 讀做等於)

若 B 點落在 C, D 之間,則線份 AB 顯然比線份 CD 小. 可用式記做　　$AB<CD$;　　(< 讀做小於)

若 B 點落在 CD 的延線上,則線份 AB 顯然比線份 CD 大. 用式可記做　　$AB>CD$.　　(> 讀做大於)

14. 移置公理. 合同圖.

前款的移置線份,其中默認二事,今特爲表明:

幾何圖可不變其形狀及大小而隨意變其位置.

此公共默認的理叫做**幾何公理**(Geomtric Axioms).

移置一圖,疊在第二圖上,若第一圖中所有點線一一與第二圖中所有點線相合,第二圖中所有點線亦一一與第一圖中所有點線相合,則此二圖叫做合同圖,又名全等形(Congruent figures).

二個合同圖可看做一個圖在第一位置移到第二位置的,故此他們的大小一定相等.

將二圖重疊起來看他們合同不合同,這種方法叫做疊置法(Superposition).

例題十二

1. 在二張紙上隨意畫二個線份,將此二紙重疊後把一紙移動,使此二線份相合,比較他們的大小. 說出比較時如何使此二線份重合的次序.

2. 在一張紙上隨意畫二個線份,將此紙裁開,使每份上各有一線份,再用前題方法比較此二個線份的

大小

3. 前二題中的方法根據什麼理由得來的?

4. 在一紙上先隨意作一個線份 AB,再作兩個線份 CD, EF,令 $CD=AB$, $EF=AB$. 於是比較CD與EF的大小,用一等式表此大小的關係.

5. 在一紙上先隨意作一個線份 AB,再作二個線份 CD, EF,令 $CD<AB$, $EF<CD$. 於是比較AB與EF的大小,用一不等式表此所得大小的關係.

6. 在一紙上,先隨意作二個線份 AB, CD, 但要 $AB>CD$. 再作一個線份 EF,令 $EF=CD$. 於是比較AB與EF的大小,用一不等式表此所得大小的關係.

7. 在一紙上隨意作二個等長線份 AB, CD,再作一線份 EF,令 $EF<CD$. 於是比較AB與EF的大小,用不等式表此所得大小的關係.

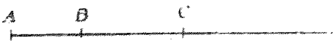
8. 在一直線中從一點 A 起截取三個線份 AB, BC, CD,使他們都等於另一已知線份KL. 說明線份AD與線份KL大小間的關係,用等式表示出來.

9. 用一個銅圓貼緊紙上,沿其邊分別畫兩個圓,此兩個圓的大小等不等?

15. 線份的和差及倍數.

在一直線上有三點 A, B C.

若B在A的右邊,C在B的右邊,則C必在A的右邊.



(圖 5)

如此二個線份AB, BC叫做**隣線份**(Adjacent segments),二點A,C叫做此二線份的**外端.**

線份AC叫做二線份AB,BC的**和**(Sum),可用等式表示.如

$$AB+BC=AC.$$ (+讀做加

又線份BC叫做從線份AC中減去線份AB的**差**(Remainder)可用式表示爲

$$AC-AB=BC.$$ (－讀做減

從此可知:

在第一線份中加第二線份,可在第一線份的延線上截取一等於第二線份的隣線份,而取兩外端間的線份做所求和.

在第一線份中減第二線份,可在第一線份中取去一個等於第二線份的線份,而將其餘做所求差.

n個(例如$n=3$)等長線份的和叫做原來一線份的n**倍.** 例如線份AB的n倍是線份CD,則可記做$CD=n.AB$. 倒過來說,線份AB是線份CD的n**分之一**,記做$AB=\frac{1}{n}.CD$.

線份與線份不能行乘法.

二個隣線份若相等,則其公共的一點B叫做全線

份 AC 的中點 (mid-point).

例題十三

1. 隨意作一雙等長線份 $AB, A'B'$; 再隨意作第二雙等長線份 $CD, C'D'$. 於是作出二個和 $AB+CD$ 及 $A'B'+C'D'$,比較此二個和的大小,用式表示此大小的關係.

2. 隨意作一雙等長線份 $AB, A'B'$; 再隨意作第二雙較小的等長線份 $CD, C'D'$. 於是作出二個差 $AB-CD$ 及 $A'B'-C'D'$, 比較此二個差的大小,用式表示此大小的關係.

3. 隨意作二個不等長的線份 AB, CD,使 $AB>CD$; 再隨意作一雙等長線份 $EF, E'F'$. 於是作出二個和 $AB+EF$ 及 $CD+E'F'$, 比較此二個和的大小,且用式表示此大小的關係.

4. 隨意作一雙等長線份 $AB, A'B'$; 再隨意作二個不等長的線份 CD, EF, 令 $CD>EF$. 於是作出二個和 $AB+CD$ 及 $A'B'+EF$, 比較此二個和的大小,且用式表示此大小的關係.

5. 隨意作二個不等長的線份 AB, CD,使 $AB>CD$; 再隨意作一雙等長線份 $EF, E'F'$, 使比 CD 還小一些. 於是作出二個差 $AB-EF$ 及 $CD-E'F'$, 比較此二個差

的大小,且用式表示此大小的關係.

6.　隨意作一雙等長線份 $AB, A'B'$; 再隨意作二個比較小一些的不等長線份 CD, EF, 使 $CD>EF$. 於是作出二個差 $AB-CD$ 及 $A'B'-EF$, 比較此二個差的大小,且用式表示此大小的關係.

7.　隨意作一雙等長線份 $AB, A'B'$; 再作此一雙線份二倍長的線份 $CD, C'D'$, 及三倍長的線份 $EF, E'F'$. 於是比較 CD 與 $C'D'$ 的大小,再比較 $EF, E'F'$ 的大小,用式表示此大小的關係.

8.　將一個線份圍繞他的一端旋轉一周,則又一端成一如何的曲線? 又全線份所掃過的平面部份如何?

16. 圓及其作圖.

一個線份圍繞其一端旋轉一周,此線份所經過平面的部份叫做**圓** (Circle), 旋轉的一端從此運動所成的曲線叫做**圓周** (Circumference), 固定的一端叫做圓的**中心** (Center), 此線份在旋轉中任意一位置叫做**半徑** (Radius).

圓周是一曲線,圓是平面的一部份,此亦是線運動成面的一例.也可以說圓是圓周所包圍出來的,這樣便可以照下邊的說法來定圓:

包圍平面一部份的一個曲線其上隨意一點與其中一定點的距離恆能相等,則此包圍平面的部份叫做**圓**,此曲線叫做**圓周**,定點叫做**中心**,定點與圓周上隨意一點所聯的線份叫做**半徑**.

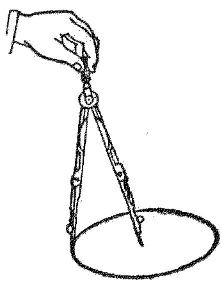
圓與圓周雖然是兩件東西,可是世人把他們混亂了都叫做圓,已經成了習慣了.

照上邊所說立刻可以知道:

一圓的半徑都相等

從第一種說法,立刻可以得到圓的作圖法:

將一定點做中心用定長的半徑作圖.



(圖 6)

先,將規筆的兩足放開,使脚尖與筆尖的距離等於定長的半徑.

次,將規筆脚尖固定在做圓心的定點上.

於是令筆尖著紙,將規筆圍繞固定的一脚旋轉一周,筆尖即畫出所要的圓.

圓的記號,可將一個大體字母記在圓的中心,如兩個圓心一個記 C,一個記 O,則可喚他做圓 C,圓 O,等,簡記可記做 $\odot C$,$\odot O$,等.　或者將三個大體字母記圓周上的三點,如記 A,B,C,此圓便可喚做圓 ABC.

過中心而兩頭都停在圓周上的線份叫做圓的直徑(Diameter),或省稱做徑.　顯然

直徑是半徑的二倍,故一圓的直徑都相等.

用同半徑畫兩個異中心的圓,此兩圓必相等.　即

等半徑的圓相等.

倒過來看,兩個相等的圓是合同圓,他們的半徑自然也相等的.　即

等圓的半徑都相等.

若用異半徑畫同中心的兩個圓,則一個圓必定完全在別一個圓的裏邊.　如此的兩個圓叫做同心圓(Concentric circles).

例題十四

1.　隨意畫三個圓,就第一個註明圓的本身,就第二個註明圓周及中心,就第三個註明半徑和直徑.

2.　隨意畫一個圓,並在此圓外取一點,過此點作無數個異方向的直線.　於是觀察如此所畫直線中有與圓周會於兩點的,有與圓周只會於一點的,有與圓周不相會的,各種直線的個數有沒有限制?

3.　隨意畫一個圓,並在圓周上隨意取一點,過此點作無數個異方向的直線.　於是照前題的目的觀察,

看出與前題有何種相異的結果.

4. 隨意畫一個圓並在此圓內取一點,過此點作無數個異方向的直線. 於是照前二題的目的觀察,看出與前二題有何種相異的結果.

5. 隨意畫一個圓C,並在此圓外隨意取一點A. 將A做中心,用種種不同的半徑再畫無數個同心圓. 於是觀察如此所畫諸圓中,有與$\odot C$會於兩點的,有與$\odot C$會於一點的,有與$\odot C$不相會的,各種圓的個數有沒有限制?

6. 隨意畫一個圓C,並在此圓內隨意取一點A. 將A做中心,用種種不同的半徑再畫無數個同心圓. 於是照前題的目的觀察,看出與前題有何種相異的結果.

7. 一直線與一圓的關係位置有幾種?

8. 兩個圓的關係位置有幾種?

9. 一個圓完全在第二個圓的外邊,此二圓能不能會於兩點?

10. 一個圓完全在第二個圓的裏邊,此二圓能不能會於兩點?

11. 一個圓的一部份在第二個圓的裏邊,又一部份在第二個圓的外邊,此二圓互相關係的位置如何?

12. 一個直線既經過一圓內的一點,又經過此圓外的一點,則此直線與圓互相關係的位置如何?

13. 一個直線經過一圓外邊的兩點,此直線與圓互相關係的位置能不能確定?

14. 一直線經過第二直線兩邊的兩點,此二個直線的關係位置如何?

17. 點,線,圓的關係位置.

隨意取一點與一直線,則點或在直線中,或在直線外.

隨意取一點與一圓,則點或在圓內,或在圓周中,或在圓外.

隨意取一直線與一圓,則直線與圓周或會於兩點,或會於一點,或不相會.

隨意取二個圓,則其中一圓或全在第二圓外而與第二圓不相會,或全在第二圓外而與第二圓會於一點,或與第二圓會於兩點,或全在第二圓內而與第二圓會於一點,或全在第二圓內而與第二圓不相會.

與圓周會於兩點的直線,叫做圓的割線(Secant);與

圓周會於一點的直線,叫做圓的**切線** (Tangent),切線與圓周相會的一點叫做**切點**(Point of Contact). 割線在圓內的一部份,卽兩端在圓周上的一線份,叫做圓的**弦**(Chord).

兩圓會於二點叫做**相交** (to mtersect); 會於一點,叫做**相切** (to touch), 此所會一點叫做**切點** (Point of Contact, or Point of Tangency). 一圓在第二圓外而相切的叫做**外切** (to touch externally), 一圓全在第二圓內而相切的叫做**內切** (to touch internally).

經過二個圓中心的直線叫做**聯心線** (Center-line), 二圓中心間的線份叫做**聯心線份** (Center-segment).

從例題十四中各題觀察的結果,顯然可得下邊的幾個公理:

二點在一直線的兩邊,則此二點的聯線必與直線相交.

一直線若過一圓內的一點,則此直線必是圓的割線.

一圓周若過第二圓的內外各一點,則此圓必與第二圓相交.

例　題　十　五

1. 隨意畫一圓及此圓的一個割線,並註明割線中那一段是此圓的弦.

2. 隨意畫一圓及此圓的一個切線,並註明那一點是切點.

3. 隨意畫兩個相交的圓,過一個交點畫兩圓的半徑,再畫聯心線份. 作二圓半徑的和及差,將此和,差各與聯心線份比較大小,用不等式表示此大小的關係.

4. 隨意畫兩個外切的圓及其聯心線份. 作此二圓半徑的和,將此和與聯心線份比較大小而用式表此大小的關係.

5. 隨意畫兩個內切的圓及其聯心線份. 作此二圓半徑的差,將此差與聯心線份比較大小而用式表此大小的關係.

6. 隨意畫兩圓令一圓在又一圓外而不相會,且畫聯心線份. 再作此兩圓半徑的和,將此和與聯心線份比較大小而用式表此大小的關係.

7. 隨意畫兩圓,令一圓在又一圓內而不相會,且畫聯心線份. 再作此兩圓半徑的差,將此差與聯心線份比較大小而用式表此大小的關係.

8. 隨意畫一圓,在圓內隨意取一點,過此點畫圓的半徑. 於是將此點與中心的距離與半徑比較大小.

9. 隨意畫一圓,在圓外隨意取一點,聯此點與圓心. 於是將此點與圓心的距離與半徑比較大小,

18. 弧.

隨意畫一圓,在圓內隨意畫一直徑,將此直徑做摺痕摺疊此圓所居的平面,則平面的兩部份重合時,圓被此直徑所分的兩份亦必完全重合(此二個圓的部份可看做二個相合動線份旋轉所經的路). 於是可知:

圓的一個直徑等分圓做兩半.

此每一份叫做**半圓** (Semicircle).

再將疊得的半圓摺疊,叫前一摺痕的一半重在又一半上,前一直徑的兩端相合,此第二次摺疊又得第二個摺痕,在此第二次摺痕兩旁半圓的二部份又可完全重合. 於是全圓被兩次的摺痕分成四等份,每一份叫做**象限** (Quadrant). **象限顯然是半圓的一半.**

圓周的隨意一部份叫做**弧** (Arc).

半圓的弧叫做**半圓周** (Semicircumference).

在一紙上已有一圓,若在第二紙上再畫一與此相等的圓,則此第二紙上的圓可看做將原圓變位置變得來的. 於是將此兩紙相疊,兩個圓心相合,則兩圓亦必相合. 再將一針貫串兩圓心,定住第一紙不動而將第二紙旋轉,此可看做原圓在本身上圍繞中心旋轉. 於

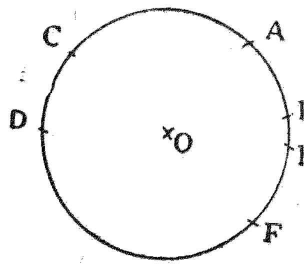
是可使圓的一個弧圍繞中心旋轉至落於另一弧上,而原弧上的一點可使與另一弧上的一點相重合.

一個圓周上二點將全圓周分成兩個弧,此各個弧互相叫做他一個弧的**相屬弧** (Conjugate Arcs).

設一圓周有二個弧,將第一弧圍繞中心旋轉,轉至與第二弧相重而一端相合; 若此二弧的第二端亦恰好相合時則此二弧叫做**相等**; 若第一弧的第二端落在第二弧中時,叫做第一弧**小於**第二弧; 若第一弧的第二端落在第二弧的相屬弧中時,叫做第一弧**大於**第二弧.

凡比半圓周小的弧叫做**劣弧** (Minor Arc), 比半圓周大的弧叫做**優弧** (Major Arc).

再,設在一圓 0 的周上有二個弧 AB, CD. 將弧DC圍繞中心 0 旋轉,轉至弧AB的相屬弧上, D 與 B 合, C 落於 F, 則弧AF為二個弧 AB, DC 的和. 次, DC 轉至弧AB上, D 與 A 合, C 落於 E, 則弧EB為從弧AB減去弧DC的**差**.



（圖 7）

二個弧若分居二個等圓周上,則如上所言,可將一圓重在又一圓上旋轉,故亦可比較此二弧的大小及求

其和,差.

在不等二圓周上的弧,不能比較大小,亦不能求其和,差.

弧AB常省記做$\frown AB$. 單說一弧不指明是劣弧還是優弧,普通常取劣弧.

一圓中一弧與一弦所包圍此圓的一部份叫做**圓份**,或叫**弓形** (Segment of circle).

一圓的一弧與此弧兩端的半徑所包圍此圓的一部份,叫做**扇形** (Sector).

例題十六

1. 隨意畫二個等圓,在各圓周上隨意取一弧,比較其大小.

2. 隨意畫二個等圓,在各圓周上隨意取一弧,再在此二圓的一個周上作此二弧的和及差.

3. 隨意畫二個等圓,在各圓周上取等長的弧,再過各弧的兩端畫弦成二個弓形. 比較此二個弓形弦的大小.

4. 隨意畫二個等圓,在各圓周上隨意取不等長的劣弧,聯其兩端各成弓形. 比較此二個弓形弦的大小.

5. 隨意畫二個等圓,在各圓周上隨意取不等長

的優弧,聯其兩端各成弓形。比較此二個弓形弦的大小。

6. 列舉前三題的結果,特別注意 4, 5 二題結果中的相異處。

7. 隨意畫二個等圓,在各圓周上取等長的弧,聯其兩端至圓心使各成扇形。比較此二個扇形的大小。

8. 隨意在二個等圓中各作扇形,使此二扇形的弧不等。比較此二個扇形的大小。

19. 弧度法.

量弧的單位在實用方面有種種,列表於下:

1 圓周 = 4 象限弧

1 象限弧 = 90度 (Degree)

1 度 = 60分 (Minute)

1 分 = 60秒 (Second).

度,分,秒的略號爲 0, ′, ″. 例如 38 度 45 分 21 秒可記做 $38^\circ 45' 21''$.

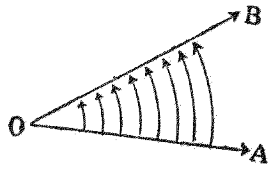
例題十七

1. 將1.3285象限弧化成諸等數.

2. 將$89^\circ 53' 25''$化成象限弧的小數.

3. 將$23^\circ 31' 45''$化成度的單名數.

20. 角



（圖 8）

一個半射線OA圍繞其原點O旋轉到OB，所經過平面的部份就原點看他開口處的大小(卽旋轉的程度)叫做**角**(Angle)，原點O叫做角的**頂點**(Vertex)，或略稱做**角頂**，半射線的前後兩個位置OA，OB都叫做角的**邊**(Sides)。

角的記法，在二邊上各記一點，如A及B，又在角頂記O，於是將記各邊上點的字母寫在兩旁，將記角頂的文字寫在正中，喚做角AOB，省記做$\angle AOB$，有時最省可記做$\angle O$.　後一記法，要在不至於發生混亂的時候方纔可用.

角的二邊現在規定是半射線，故**一角的二個邊都是無窮長的.**　自然，有時要看二個線份所成的角，但既看到角，做角二邊的線份便可延長到無窮遠，雖然事實上延長不延長是另一件事情，但角的二邊總把他當做半射線看待.

譬如我們先看正南一個塔，此時的眼光是一條線份從眼珠聯到此塔，此線叫做**視線.**　我們既看塔後，再轉看南東方的一個高樓，此時又有一條視線從眼珠聯到此樓.　此兩條視線便在我們眼珠中張一個角　這

可以說是兩個線份所成的角．其實，向南的視線並不是到塔爲止，是直向無窮遠的，假使塔能夠搬動的，將此塔直往南移，只要移的方向始終在這條視線中，此塔無論移到多少遠，此視線的位置始終不變．對樓的視線也是這樣．所以但就角說，根本談不到他的邊的長短

將一個半射線圍繞其原點旋轉，可以有兩種旋轉方向：一種方向與鐘錶面上計時針行的方向相反，如圖 8 所示，叫做**正轉**；一種方向與計時針行的方向相同，叫做**倒轉**．照慣例，從正轉發生的角叫他做**正角**(Positive Angle)，從倒轉發生的角叫做**負角**(Negative Angle)．凡不說明是正角或負角的角必指正角．

旋轉一個半射線，若沒有說明他那一個是原位置時，此二個半射線當然可成兩個角，這兩個角的隨意一個叫做他一個的**相屬角**(Conjugate Angles)．

若將一個半射線OA圍繞原點O旋轉一周，轉到仍與原位置OA相合，此時就射線經過的地位看，已經轉成了完全一個平面，但若就原點O看此半射線旋轉的程度，便還是一個角，叫他做**周角**(Perigon)．倒過來，就平面中隨意一點看此平面，則全平面在此點的周圍可看成一個周角．

在一平面中隨意有一個半射線，將此半射線做摺

痕摺疊此平面,則摺痕的又一部份是原有半射線的延線. 展開此平面,則此全摺痕將半射線原點周圍的周角分成兩個角,此兩個角的二邊公共,一邊即是原半射線,一邊是原半射線的延線. 如此二個角各叫做**直線角** (Straight Angle). 照上邊摺疊一事看來,可知**直線角是周角的一半.** 直線角常用記號$\measuredangle^{st}$來表他.

倒過來,就一直線中隨意一點看此直線所分一半的平面,可看成一個直線角.

在一紙面上畫一個直線角,將此紙摺疊,叫摺痕經過角頂,再叫此直線角的兩邊重合. 這樣得一摺痕,在此摺痕兩邊各有直線角的一部份,此直線角的各部份叫做**直角** (Right Angle). 因爲此二個直角是重合的,必定相等,又他們總共是一個直線角,故此可知**直角是直線角的一半.** 直角常用記號$R\measuredangle$來表他.

將一個角的頂點做中心,用隨意的長做半徑畫一個圓,則此角就圓說起來,叫做圓的**中心角**(Central Angle).

一圓中任意二個半徑所夾的角亦叫**中心角.**

一個中心角的二邊夾一個圓弧,我們可以叫做此弧與此中心角**相對.** 若再將弧的兩端聯一弦,我們亦說此弦與弧及中心角都**相對.**

21. 關於圖形變位置的幾個公理.

我們利用幾何圖可以不變形狀,大小而隨意變他位置的一個性質,在18款及20款中已經做了許多事情,其中變更圖的位置有各條路徑,都沒有明舉出來,現在可以聚來說一說;

一個平面可以摺疊起來,叫他的摺痕經過一定點,並且叫分居摺痕兩旁而與定點距離相等的兩點重合;

一個平面可將其一部份圍繞此面中的一點旋轉,叫在此旋轉平面部份中的圖落在又一平面部份中.

二個平面可將一個移置到又一個上,叫各平面中的一個直線重合,同時叫此各直線中的一點疊合.

這四個公理自然都成立的,因爲我們都已經實驗過了. 還有別的公理到後邊用到了再提.

例題十八

1. 隨便畫一圓作一中心角,叫他成一直角,則此角所對的弧是多少大?

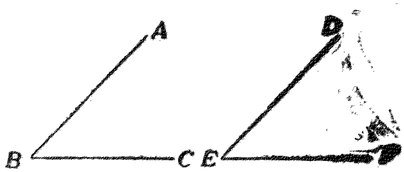
2. 圓與角都是圍繞一點旋轉發生的. 假使畫圓的線份與角的半直線一端相合而重疊了旋轉,則線份畫一扇形時,半射線所畫的中心角與此扇形的弧大小間有沒有關係?

3. 隨意畫一個角,將此角頂點做中心,用隨意二個不等的長做半徑畫二個同心圓. 此二個同心圓夾

在此角二邊間的二個弧的長相等不相等？表此二弧長的度數同不同？

4. 表一個圓弧長的度數與此弧的眞長有分別沒有？有何種關係？

22. 角的大小及其作圖法



（圖 9）

要比較二個角ABC, DEF的大小,可將角DEF移置到角ABC上,令DE與AB相重,E與B疊合,於是看EF落在何處:

若EF恰好與BC相重,則此二角叫做**相等**,用式來表可得

$$\measuredangle ABC = DEF;$$

若EF落在ABC的角內,則叫做角ABC**大於**角DEF,可記做

$$\measuredangle ABC > DEF;$$

若EF落在角ABC的相鄰角內,則叫做角ABC**小於角**DEF,此事可記做　$\measuredangle ABC < DEF$.

取一角與一直線角比較大小,此角若比直線角大,則叫做**凹角**（Reflex Angle），比直線角小,則叫做**凸角**（Convex Angle）。

又一角與一直角比較大小,此角若比直角大,則叫做**鈍角**（Obtuse Angle），若比直角小,則叫做**銳角**（Acute

Angle).

以上四種角總稱做**斜角**(Obligue Angle).

二個直線(或半直線)交成斜角,則略稱此二直線成**斜交**,斜交二直線中一線可叫做他一綫的**斜線**(Oblique Line). 又二個直線(或半直線)交成直角,則略稱此二線成**直交**,直交二直線中的一個可叫做又一個的**垂線**(Perpendicular),或稱做一線**垂直於**(Perpendicular to)又一線. 一線與又一線不問斜交或直交,其交點叫做此線在又一線上的**足**(Foot).

角與圓同是圍繞一點旋轉出來的,角的大小與圓弧的長短當然有對應的關係. 我們平常看輪盤旋轉,看他輪裏小梗所轉的角,不如看輪廓轉過的長來得親切. 故此角的大小可以叫他與圓弧的大小發生關係. 我們將角的頂點做中心,隨意用一長做半徑畫一個圓,則一個周角所對的弧是一個圓周,一個直線角所對的弧是半圓周,一個直角所對的弧是象限弧,直角以下的小單位簡直便用弧的各小單位的名稱,如下表:

1周角 = 2直線角

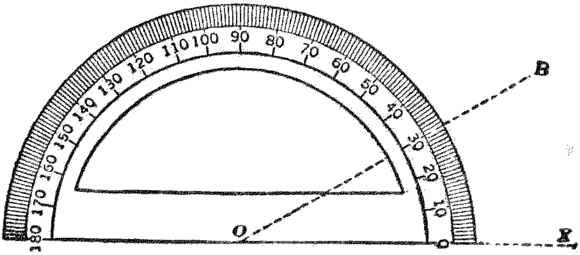
1直線角 = 2直角

1直角 = 90度

1度 = 60分

1分 = 60秒

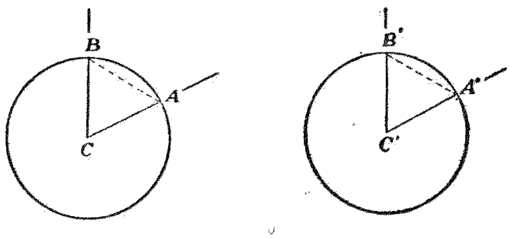
此種單位叫做角的**六十分法**,在實用上已經用過二千多年了. 在幾何的理論方面,常用直角做角的單位.



(圖 10)

因此,量角儀器是一個分度的半圓,將此儀的中心及一個半徑重合於角的頂點及一邊上,看角的第二邊經過量角儀上的何處,便可知道此角的度數.

儻使我們取兩個等角的頂點做中心,用隨意等長的半徑畫兩個圓,於是將一角 ACB 移置第二角 $A'C'B'$ 上. 因為此二角相等,故令 C 與 C' 合, CA 與 $C'A'$ 相重以後, BC 必定與 $C'B'$ 相重. 又因為二個圓的半徑相等,故令 C 與 C' 合後,二圓周必定相重. 二角的各雙邊既然相重,二個圓周又相重,則角的邊與



(圖 11)

圓周的交點A與A',B與B'亦必各自相合,即二個圓弧AB,$A'B'$不能不相合,即$\frown AB=A'B'$. 再聯二個弦AB,$A'B'$,此二個弦的兩端既能各自相合,故二弦的線份全相合,而$AB=A'B'$.

上邊是先假定$\measuredangle ACB=A'C'B'$推得$\frown AB=A'B'$,弦$AB=A'B'$. 儻使先假定$\frown AB=A'B'$,用疊置法,亦可推得$\measuredangle ACB=A'C'B'$,弦$AB=A'B'$. 又,先假定弦$AB=A'B'$,也可推得$\measuredangle ACB=A'C'B'$,$\frown AB=A'B'$.

這個性質正式提出來說,便是

在同圓或等圓中;

等中心角所對的弧相等,所對的弦相等;

等弧所對的中心角相等,所對的弦相等;

等弦所對的中心角相等,所對的弧相等,

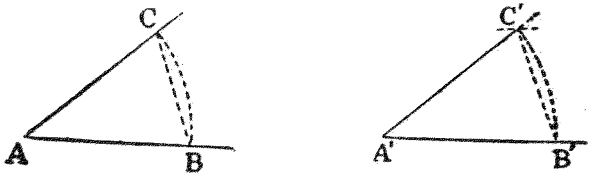
用此性質,則:

欲在一圓周上截取一定長的弧,可歸到截取一弦令等於定長弧的弦.

欲截取一定大小的角,可歸到畫等圓截取等弧.

從此立卽可得下邊作角方法:

在定直線$A'B'$上作一角,令此線上一定點A'做角頂,而角的大小等於一定角ABC.



（圖 12）

先,將定角頂點A做中心,用隨意半徑畫圓弧,與定角的二邊交於B及C.

次,將取做要作角頂的定點A'做中心,用與前等長的半徑畫圓弧,交定直線$A'B'$於B'.

再,將B'做中心,用BC的長做半徑畫圓弧,與前一圓弧交於C'.

聯$A'C'$作半射線,則所得角$B'A'C'$卽等於定角BAC,爲所求的角.

這樣的作圖亦可以叫做**將定角BAC移置在半射線$A'B'$的上邊.**

例題十九

1. 隨意畫一直線,在此線中隨意取一點. 用分角儀從所取點作此直線的垂線.

2. 隨意畫一直線,在此線外隨意取一點. 用分角儀從所取點作此直線的垂線.

3. 隨意作銳角,鈍角,凸角,凹角,且在所畫各角旁各註角名.

4. 隨意作一角AOB,再作等於此的角$A'O'B'$, $A''O''B''$.比較此所作後兩角的大小,用式表此大小的關係.

5. 隨意作二個角ABC, DEF,令$\measuredangle ABC>DEF$,再作第三個角GHK,令$\measuredangle DEF>GHK$.比較二角ABC, GHK的大小,用式表此大小的關係.

6. 隨意作二個角ABC, DEF,令$\measuredangle ABC<DEF$,再作第三個角$D'E'F'$,令$\measuredangle DEF=D'E'F'$. 比較二角$ABC$, $D'E'F'$ 的大小,且用式表此大小的關係.

7. 將$25°\ 30'\ 42''$ 化做直角的分數.

8. 將 0.3125 直角化做諸等數.

9. 隨意畫一圓 O,在圓內作兩個凸中心角AOB, COD,令$\measuredangle AOB>COD$,截得二弧AB, CD,且聯二弦 AB, CD. 比較二弧的大小,及二弦的大小,用式表此大小的關係.

10. 隨意畫一圓 O,在圓內作兩個凹中心角AOB COD,令$\measuredangle AOB>COD$,截得二弧AB, CD,且聯二弦 AB, CD. 比較此二弧的大小,二弦的大小,且用式表此大小的關係.

11. 隨意畫一圓 O,在圓周上截取二個劣弧 AB, CD,令$\frown AB>CD$. 聯弦AB, CD,再過A, B, C, D各畫半徑,得二個中心角AOB, COD. 於是比較此二弦的大小,

再比較此二個中心角的大小,用式表此大小的關係.

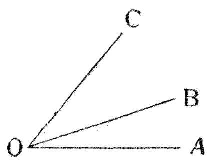
12. 隨意畫一圓 0,在圓周上截取二個優弧 AB, CD,令 $\frown AB > CD$. 聯弦 AB, CD,再過 A, B, C, D 各畫半徑得二個中心角 AOB, COD. 於是比較此二弦的大小,再比較此二個中心角的大小,而用式表此大小的關係.

13. 就 9, 10 兩題的結果提出相同的關係與相異的關係.

14. 就 11,12 兩題的結果提出相同的關係與相異的關係.

23. 角的和,差及倍數.

二個角 AOB, BOC 共有一個頂點 O,共有一邊 OB,此二個角互相叫做**隣角** (Adjacent Angles). 不公共的二個邊叫做隣角的**外邊**.



(圖 13)

二角 AOB, BOC 互爲隣角,則 $\measuredangle AOC$ 叫做 AOB, BOC 的**和**,可用式記做 $\measuredangle AOC = AOB + BOC$;

又 $\measuredangle BOC$ 叫做從 $\measuredangle AOC$ 減 $\measuredangle AOB$ 的**差**,可用式記做

$$\measuredangle BOC = AOC - AOB.$$

故**欲在一角中加入第二角**,可移置第二角叫他做第一角的隣角而得兩外邊所夾的角,是加到的和.

欲在第一角中減去第二角,可移置第二角叫他重

疊在第一角上,二角的頂點及第一邊都相重合,得二角中第二邊所夾的角,是減到的差.

二個角的和等於一直角,則此二角中的隨意一個叫做又一個的**餘角**(Complement). 二個角的和等於一直線角,則此二角中的隨意一個叫做又一個的**補角**(Supplement).

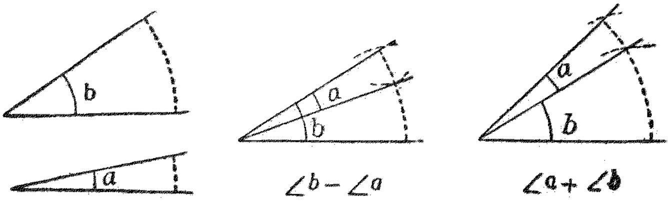
有三個以上的角求和,可移置各角叫他順次接續都成鄰角,他最外兩邊所夾角便是此諸角的**和**.

n 個(例如 $n=3$)角都相等,則其和叫做原來一角的 **n 倍**. 例如 $\measuredangle COD$ 是 $\measuredangle AOB$ 的 n 倍,則可用式記做 $\measuredangle COD=n.AOB$. 倒過來說 $\measuredangle COD$ 是 $\measuredangle AOB$ 的 n 倍,則 $\measuredangle AOB$ 是 $\measuredangle COD$ 的 n 分之一,可記做 $\measuredangle AOB=\frac{1}{n}.COD$.

二個角不能行乘法.

在圖 13 中,二鄰角 AOB, BOC 若相等,則其公共邊 OB 叫做角 AOC 的**二等分線**,或者省稱做**等分線**(Bisector).

角有大小,當然是一個**量**(參看算術第 6 款),故有時在角內記一個數字或一個小體字母表示此角的大小於是可喚做 $\measuredangle a$, $\measuredangle b$ 等. 例如求兩角的和及差,兩角便可用如此記法,如圖 14.



（圖 14）

記好，$\measuredangle AOB, COD$ 是幾何記法，是舉此等角的本身；$\measuredangle a, \measuredangle b$ 是代數記法，不過舉此等角的大小.

例題二十

1. 隨意作三個銳角. 再作一角，等於前三個銳角的和.

2. 隨意作一個銳角. 再作此銳角的餘角.

3. 一角大 $18^\circ 23' 40''$. 求其餘角的度數.

4. 一角大 $123^\circ 45' 30''$. 引用代數學上負數求其餘角的諸等數.

5. 一角大 $145^\circ 30' 54''$. 求其補角及相屬角的諸等數.

用代數學簡單方程式解以下各題〔6—8〕:

6. 一角的補角等於其餘角的三倍. 求此角的度數.

7. 一角的相屬角等於其餘角的七倍. 求此角的度數.

8. 有一角,其餘角的補角等於其補角的三倍. 求此角的度數.

9. 隨意作一雙等角 a, a'; 再隨意作第二雙等角 b, b'. 於是作出二個和 $\measuredangle a+b$ 及 $\measuredangle a'+b'$, 比較此二個和的大小,用式表示此大小的關係.

10. 隨意作一雙等角 a, a'; 再隨意作第二雙較小的等角 b, b'. 於是作出二個差 $\measuredangle a-b$ 及 $\measuredangle a'-b'$, 比較此二個差的大小,用式表此大小的關係.

11. 隨意作二個不等角 a, b, 使 $\measuredangle a>b$; 再作一雙等角 c, c'. 於是作出二個和 $\measuredangle a+c$ 及 $\measuredangle b+c'$, 比較此二和的大小,且用式表此大小的關係.

12. 隨意作一雙等角 a, a'; 再隨意作二個不等角 b, c, 令 $\measuredangle b>c$. 於是作出二個和 $\measuredangle a+b$ 及 $\measuredangle a'+c$, 比較此二個和的大小,用式表此大小的關係.

13. 隨隨意作二個不等角 a, b, 使 $\measuredangle a>b$; 再隨意作一雙等角 c, c', 使此 $\measuredangle b$ 較小. 於是作出二個差 $\measuredangle a-c$ 及 $\measuredangle b-c'$, 比較此二個差的大小,用式表此大小的關係.

14. 隨意作一雙等角 a, a'; 再隨意作二個小一些的不等角 b, c, 使 $\measuredangle b>c$. 於是作出二個差 $\measuredangle a-b$ 及 $\measuredangle a'-c$, 比較此二個差的大小,用式表此大小的關係.

15. 隨意作一雙等角 a, a'; 再作此一雙角的二倍

角 b, b'；及三倍角 c, c'. 於是比較 $\measuredangle b, b'$ 的大小，再比較 $\measuredangle c, c$ 的大小，用式表示此大小的關係.

24. 普通公理.

從以前到現在已經有了三種量：線份是第一種，圓弧是第二種，角是第三種. 各種量裏大小的關係，已經說過許多，用過許多，實驗過許多. 在例題十二，十三，十九，二十中大家也已曾發見過許多量的大小關係. 現在將大家已發見的歸納攏來，普遍提出，這些結果，是大家值得記憶的.

代數學中，用小體字母代表無論什麼的數；我們現在可以用大體字母代表無論什麼的量.

(一) A, B, C, D, 都是 S 的部份，而 S 所有的部分已經盡在於此，則當然

$$S=A+B+C+D.$$

全量等於其所有部份的和.

(二)　若是　$S=A+B$,

則當然　$S>A,\quad S>B.$

全量比他的部份大.

(三)　若是　$A=B,\quad B=C,$

可得　$A=C.$

等於同量或等量的量相等. 故一量可以

將他的等量來替換.

(四) 若是 $A>B$, $B>C$, 或 $B=C$,

則 $A>C$.

第一量比第二量大,第三量不比第二量大,則第一量比第三量大.

(五) $A>B$, $A=B$, $A<B$

中必有一種成立. 此一種已經成立了,其餘二種便決不能同時成立.

比較二量的大小,或者第一量比第二量大,或者第一量與第二量等,或者第一量比第二量小,此三種中,必佔一種情形,決不能同時佔兩種以上情形.

(六) 若 $A=B$, $C=D$,

$A+C=B+C$.

等量加等量,其和相等.

(七) 若 $A=B$, $C=D$,

則 $A-C=B-D$.

從等量中減去等量,其差相等.

(八) 若 $A=B$,

則 $nA=nB$.

等量的同倍數量相等.

(九)　若　$A=B,$

則　$\frac{A}{n}=\frac{B}{n}.$

等量的同分數量相等.

(十)　若　$A=B,\quad C>D,$

則　$A+C>B+D.$

等量加不等量,或者不等量加等量,所得的和不等,原來大的一方面和還是大.

(十一)　若　$A>B,\quad C=D,$

則　$A-C>B-D.$

從不等量減去等量,所得的差不等,被減量大的一方面差還是大.

(十二)　若　$A=B,\quad C>D,$

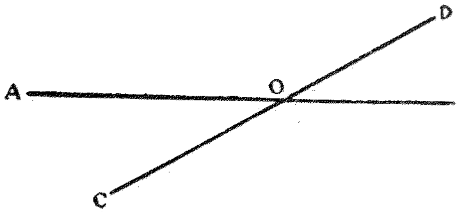
則　$A-C<B-D.$

從等量減去不等量,所得的差不等,減去大量的一方面差比較小.

25. 直線的交角.

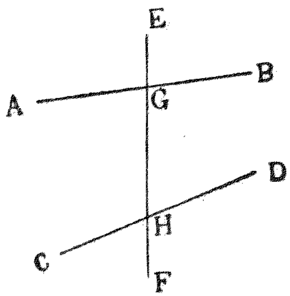
以前所講的角都是將半射綫做兩邊的,若是兩條直綫或三條直綫(無盡直綫)相交,當然也能成角,現在且將此種的角來看.

兩個有定向的直綫相交成角，與二個半射線所成的角全同，不過角頂不是原點罷了。



（圖 15）

兩個無向直線相交所成的角是四個**交角**（Angles of Intersection）．便是此二個直綫可以看做四個半射線，把交點做公共原點．此四個交角中可分成兩對，每一對中一個角的二邊是又一角二邊的延綫．如此的每對角叫他做**對頂角**（Vertical Angles）．如圖 15 中 AOB, COD 是相交於 O 的二個直線，$\measuredangle AOC$ 與 $\measuredangle BOD$ 是一雙對頂角，$\measuredangle AOD$ 與 $\measuredangle BOC$ 是第二雙對頂角．



（圖 16）

若二個直線 AB, CD 各與第三個直線 EF 交於 G 及 H，可得到八個交角，此八個交角因位置的關係給與各種名稱如下：

$\measuredangle AGE$, EGB, CHF, FHD 叫做**外角**（Exterior Angles）；

$\measuredangle AGH$, HGB, GHC, GHD 叫做**內角**（Interior Angles）；

$\measuredangle AGE, CHG$; $\measuredangle EGB, GHD$; $\measuredangle AGH, CHF$; $\measuredangle BGH, DHF$ 此四對角的各對都叫做**同位角** (Corresponding Angles);

$\measuredangle AGE, DHF$; $\measuredangle EGB, CHF$; $\measuredangle AGH, GHD$; $\measuredangle BGH, GHC$ 此四對角的各對都叫做**錯角** (Alternate Angles), 再分別得細一些,前兩對都叫做**外錯角**,後兩對都叫做**內錯角**.

$\measuredangle AGH, GHC$; $\measuredangle BGH, GHD$ 此兩對角往往特別叫做**同側內角**.

與二直線相交的第三條直線往往叫他做**截線**(Transversal).

例題二十一

1. 隨意畫一直線,從其中一點隨意作一半射線,得二個角. 此二個角互相有何名稱? 若所作一個角是30°,則第二個角當是多少度?

2. 隨意畫一個角,作出他的補角來.

3. 二個直線相交所得四個角中,一角是30°. 求其餘三個角的大小(可照1題的求法挨次求出).

4. 從前題看一雙對頂角的大小有什麼關係?

5. 照圖16, 若 $\measuredangle BGE=85°$, $\measuredangle CHF=75°$. 求其餘六個角的大小.

6. 將一個直線截二直線,所得一雙內錯角的大小相等,都是45°. 試將此圖畫出. 再求其餘六個角的大小,將得到的幾雙等角一雙雙喚出他們的名稱來.

7. 將一個直線截二直線,所得一雙同位角的大小相等,都是30°. 試將此圖畫出. 再求其餘六個角的大小,將得到的幾雙等角一雙雙喚出他們的名稱來;再看各雙同側內角的大小有什麼關係?

8. 將一個直線截二直線,所得一雙同旁內角互成補角,其小的一個是60°. 試將此圖畫出. 再求其餘六個角的大小,將得到的幾雙等角一雙雙喚出他們的名稱來.

26. 公理的應用. 幾個初步定理.

從量法,已經知道凡是直線角都是180°,凡是直角,都是90°,凡是周角都是360°. 故此凡是直線角自然相等,直角自然亦都相等,周角自然亦都相等. 但是不從量法而從圖形方面來看,這種定理也很容易證明.

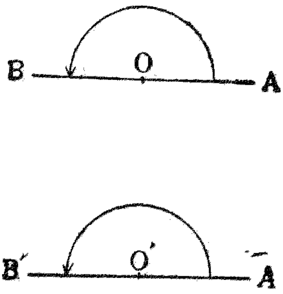
(一) 凡是直線角都相等.

如**已知** $\measuredangle AOB, A'O'B'$ 都是直線角,

欲證 $\measuredangle AOB = A'O'B'$.

將 $\measuredangle AOB$ 移置於 $\measuredangle A'O'B'$ 上,令 OA 與 $O'A'$ 相重, O 與 O' 相合.

因為 OB 是 AO 的延線, $O'B'$ 是 $A'O'$ 的延線(這是直線角的意義,看20款),而兩個直線已經有一部份 AO, $A'O'$ 相合,則其餘部份不能不相合(看7款),故此 OB 與 $O'B'$ 相重.



（圖 17）

故　$\measuredangle AOB = A'O'B'$ (看22款)

移置公理的應用)

(二) 凡是周角都相等.

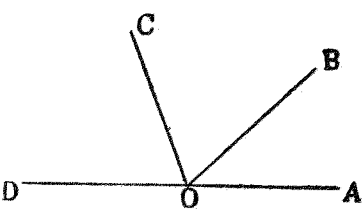
周角是直綫角的二倍(看20款),直綫角是已經知道他相等的了. 因為等量的同倍數量必定相等,故周角必定相等.　(普通公理八的應用)

(三) 凡是直角都相等.

直角是直綫角的 $\frac{1}{2}$ (看20款),直綫角已知相等,等量的同分數量相等,故直角必相等.　(普通公理九的應用)

(四) 順次諸隣角的兩外邊成一直線,則此諸角的和等於一直線角.

如已知 $\measuredangle AOB, BOC, COD$ 是順次三個隣角,其兩外邊 OA, OD 成一直綫.



（圖 18）

欲證$\angle AOB+BOC+COD=st\angle$.

先，$\angle AOB+BOC+COD=AOD$,（全量等於其諸部份和）

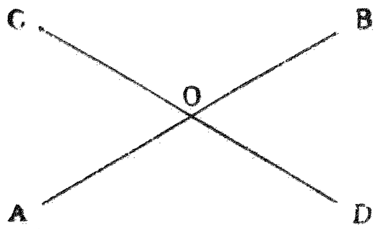
令OA, OD成一直綫,則 $\angle AOD=st\angle$.

故此 $\angle AOB+BOC+COD=st\angle$.（普通公理一的應用）

(五)對頂角必定相等.

已知二個直線AOB, COD相交成一雙對頂角$\angle AOC, BOD$.

欲證$\angle AOC=BOD$.



（圖 19）

因為OA, OB成一直線,故

$\angle AOC+COB=st\angle$,（看上圖的四）

照樣, $\angle COB+BOD=st\angle$.

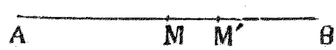
於是 $\angle AOC+COB=COB+BOD$,（看上面的一）

減去 $\angle COB=COB$,

卽得 $\angle AOC=BOD$,（普通公理七的應用）

(六)一線份的中點只有一個.

已知AB是一個綫份,M是AB的一個中點.



（圖 20）

欲證此綫份AB的中點只有M一點.

我們在M點以外隨意再取一點M'. 自然,此M'不是在M的左邊便是在M的右邊.

要是M'在M的右邊,則AM是AM'的一部份,$M'B$是MB的一部份,全量必定比他的部份大,故此

$$AM'>AM, \qquad MB>M'B,$$

因爲M是AB的一個中點,故此

$$AM=MB, \qquad \text{(看15款中點的意義)}$$

今AM'比AM大,$M'B$不比MB大,卽不比AM大,故此

$$AM'>M'B.$$

要是M'在M的左邊,做照上邊,可證到

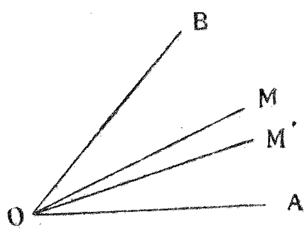
$$AM'<M'B.$$

總之决不能　$AM'=M'B$　(看24款五)

便是M'决不能也做AB的中點.

AB綫份中除去M一點外隨便取那一點都不能做AB的中點,那麼綫份AB的中點只有M一個是毫無疑義的了.　(普通公理二,四,五的應用)

(七)一角的等分線只有一個



(圖21)

已知 OM是$\angle AOB$的一個等分綫.

欲證 $\angle AOB$的等分綫只

有 OM.

我們過角頂 O 向 $\measuredangle AOB$ 內隨意作一個 OM 以外的分角綫 OM'. 自然,此 OM' 不是在 $\measuredangle AOM$ 內便是在 $\measuredangle MOB$ 內.

若是 OM' 在 $\measuredangle AOM$ 內,則 $\measuredangle AOM'$ 是 $\measuredangle AOM$ 的一部份, $\measuredangle MOB$ 是 $\measuredangle M'OB$ 的一部份,全量必定比他的部份大.

故此　　$\measuredangle M'OB > MOB$,　　$\measuredangle AOM > AOM'$.

因爲 OM 是 $\measuredangle AOB$ 的一個等分綫,故此

$\measuredangle MOB = AOM$, (看23款等分綫的意義

$\measuredangle M'OB$ 比 MOB 大, $\measuredangle AOM'$ 不比 AOM 大,卽不比 MOB 大,

故此　　$\measuredangle M'OB > AOM'$.

若是 OM' 在 $\measuredangle MOB$ 內,做照上邊,可證得

$$\measuredangle M'OB < AOM'.$$

總之,決不能　　$\measuredangle M'OB = AOM'$, (看24款五)

便是 OM' 決不能也做 $\measuredangle AOB$ 的等分綫.

$\measuredangle AOB$ 的分角綫,除去 OM 以外,都不能做 $\measuredangle AOB$ 的等分綫,故此 $\measuredangle AOB$ 的等分綫只有 OM 一個.

(普通公理二,四,五的應用)

(八) M 是線份 AB 的中點, C 是 AB 中 M,B 間的隨意一點,則　$MC = \frac{1}{2}(AC - CB)$.

M 旣是線份 AB 的中點,則　$AM = MB$.

從圖22,可知 $AC = AM + MC$ (看15款),因爲一量可將他的等量來代替,故此式又可寫做

(圖22)

$$AC = MB + MC,$$

再從圖22, $CB = MB - MC$,

將此二式行減法, $AC - CB = 2MC$, (看24款七)

兩邊將2來除,卽得 $MC = \frac{1}{2}(AC - CB)$. (看24款九)

(普通公理三,七,九的應用)

（九）M 是線份 AB 的中點,D 是 B 外延線中的隨意一點,則 $MD = \frac{1}{2}(AD + BD)$.

M 是線份 AB 的中點,則

$$AM = MB.$$

(圖23)

從圖23,可知 $AD = MD + AM$,

此可改寫做 $AD = MD + MB$, (看15款)

再從圖23,知 $BD = MD - MB$, (仝　上)

加此兩式,得 $AD + BD = 2MD$, (看24款六)

兩邊將2除,卽得 $MD = \frac{1}{2}(AD + BD)$. (看24款九)

(普通公理三,六,九的應用)

例題二十二

以下諸題,先作圖解釋題意,再做照本款方法說明各憑何種理由可以成立:

1. **等角的補角相等.**

2. **等角的餘角相等.**

3. 等角的相屬角相等.

4. **二隣角的和是一直線角,則其兩外邊成一直線.**

5. **在一點周圍諸隣角的和等於一周角.**

6. **一角等分線的延線是此角對項角的等分線.**

7. **從一直線上一點所作此直線的垂線只有一個.**

8. M 角是線份的中點,C 是在 AB 中 A 及 M 間隨意的一點,則 $CM=\frac{1}{2}(CB-AC)$.

9. OM 是 $\measuredangle AOB$ 的等分線,OC 是 $\measuredangle AOB$ 的隨意一個分角線而落於 $\measuredangle MOB$ 中,則 $\measuredangle MOC=\frac{1}{2}(AOC-COB)$.

10. OM 是 $\measuredangle AOB$ 的等分線,OD 是過 O 而在 $\measuredangle AOB$ 相屬角內的隨意一個半射線,則 $\measuredangle MOD=\frac{1}{2}(AOD+BOD)$.

27. 多角形

平面圖可分二類,一類是點,線,角等的集合,又一類是包圍出平面的一部份,此後一類的圖叫做**封閉圖**(Closed Figure),一圖中所有的線若全是直線或線份的,此種圖叫做**直線圖**(Rectilinear Figure),全是曲線的圖叫做**曲線圖**(Curved Figure),又有直線又有曲線的圖叫做混

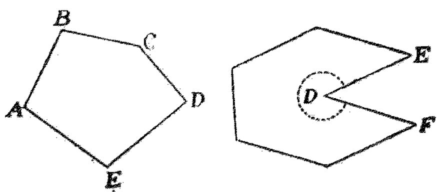
合圖 (Mixed Figure).

圓是曲線圖的一種,弓形,扇形都是混合圖.

諸線份所圍直線圖叫做**單多角形**(Simple Polygon),省稱**多角形**. 圍此圖的各線份都叫做多角形的**邊**(Sides),隣接二邊所成的角叫做多角形的**角**(Angles),諸角的頂點叫做形的**頂點**(Vertices),聯不相隣二個頂點的線份叫做形的**對角線**(Diagonal),一多角形所有諸邊的和叫做形的**周**(Perimeter),一邊的延線與隣邊所成的角叫做形的**外角**(Exterior Angle).

多角形的各角都是凸角的叫做**凸多角形**(Convex Polygon),有一個或二個凹角的叫做**凹多角形**(Concave Polygon),本書所講的多角形都是凸多角形.

多角形的邊數是 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …, 12, …, 15, …, n 的,我們分別叫他做**三角形**(Triangle),**四角形**(Quadrilateral),**五角形**(Pentagon),**六角形**(Hexagon),**七角形**(Heptagon),**八角形**(Octagon),**九角形**(Nonagon),**十角形**(Decagon),…,**十二角形**(Dodecagon),…,**十五角形**(Pentedecagon),…,n**角形**(n-gon).



凸多角形　　凹多角形

(圖 24)

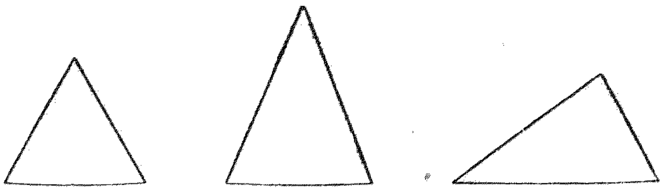
單多角形角頂的個數與其邊數相同,因此單多角形亦常稱做**單多邊形**,省稱做**多邊形**.

封閉圖所圍平面的部份叫做圖的**面積**(Area).

28. 三角形

有三邊的多角形叫做三角形,前款已經說過的了.

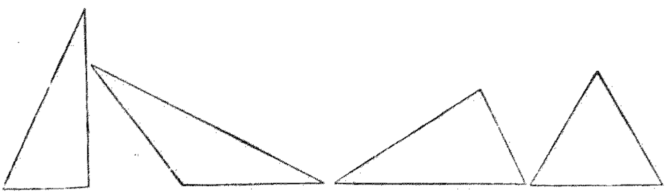
三角形中又可將邊分類,將角分類,給與種種名稱.



等邊三角形 二等邊三角形 不等邊三角形

(圖 25)

將邊分類: 三邊都不相等的三角形叫做**不等邊三角形**(Scalene Triangle),有二個邊相等的三角形叫做**二等邊三角形**(Isosceles Triangle),三邊互相等的三角形叫做**等邊三角形**(Equilateral Triangle).但是單稱三角形,必定指**不等邊**的一種.



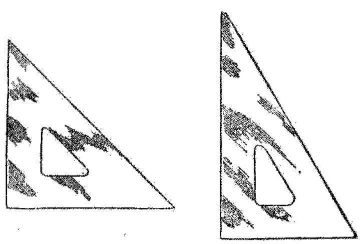
直角三角形 鈍角三角形 銳角三角形 等角三角形

(圖 26)

將角分類: 三個角都是銳角的三角形叫做**銳角三角形** (Acute Triangle),有一個角是鈍角的三角形叫做**鈍角三角形** (Obtuse Triangle), 有一個角是直角的三角形叫做**直角三角形** (Right Triangle),又三個角互相等的三角形叫做**等角三角形** (Equiangular Triangle). 但是單稱三角形必定指**銳角**的一種.

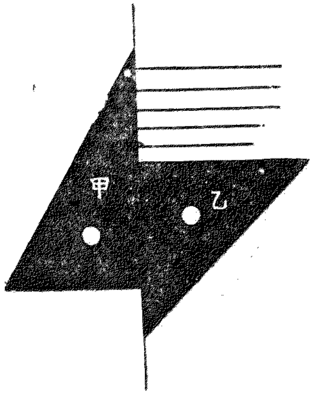
三角形的略號是△.

直角三角形中對直角的一邊特別叫做**斜邊** (Hypotenus). 直角三角形,我國古時叫他做**句股形**,直角二邊中最小的一邊叫做**句**,又一邊叫做**股**,斜邊叫做**弦**. 其實句股是木匠所用的曲尺,弦是加上去的一條線. 曲尺,古時叫做**矩**. 規,矩,是從古以來作圓作方的器具,可是古人測量也全靠這個矩,周髀裏面說的仰矩以測高,偃矩以測遠,覆矩以測深」 此矩便是曲尺,便是不完全的直角三角形. 到了現在,測量有很精的器具可用,這種簡陋的矩無人用他了,可是畫圖時還少不了他. 畫圖所用的比曲尺也還進步,是用硬木或明角做好了的直角三角形,叫做**三角板**. 三角板一套有兩塊,一塊,直



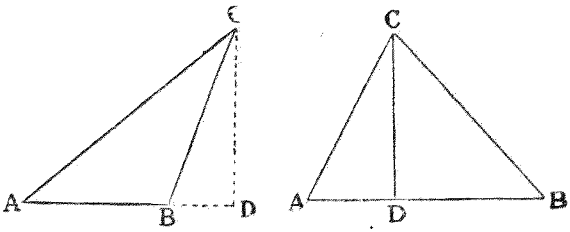
（圖 27）

角二邊相等,二個銳角都是45°。又一塊,二個銳角是30°及60°。邊可以代直尺的用處,直角可以利用他作一直線的垂線,如圖28。固然,這種作垂線的方法,在理論方面是不承認的,但在實用方面却很便。



（圖28）

隨意的三角形,即不等邊三角形,可將其隨意的一邊叫做**底**(Base),對底的角叫做**頂角**(Vertex Angle),從頂角的頂點作一垂線到底



（圖29）

爲止,此垂線可以叫做三角形的**垂線**,或者叫做三角形的**高**(Altitude)。如圖29,將邊AB看做ΔABC的底,CD是從C到AB的垂線,CD便是此三角形對於底AB的高。

二等邊三角形慣常將等邊以外的第三邊做**底**。

直角三角形常將夾直角二邊中的一邊做底,又一邊做高.

底兩端的角叫做**底角**.

例題二十三

1. 隨意作四角形五角形,六角形,七角形. 從各形一個角頂作所有能作的對角線.

2. 從前題說出從一個多角形角頂能作幾個對角線. 此對角線的個數與多角形角頂的個數有何關係?

3. 從1題說出從一個多角形角頂作出所能有的對角線時,此諸對角線可將原多角形分成幾個三角形? 此三角形的個數與多角形角頂的個數有何關係?

4. 隨意作一個三角形,挨次將各邊向右延長得到三個外角,再作此三個外角的和.

5. 隨意作一個四角形,挨次將各邊向右延長得到四個外角,再作此四個外角的和.

6. 隨意作一個五角形,挨次將各邊向右延長得到五個外角,再作此五個外角的和.

7. 隨意作一個銳角三角形,從各角頂到對邊作垂線,看出此三個垂線位置的關係.

8. 隨意作一個鈍角三角形,從各角頂到對邊作

垂線,再將此各垂線延長,看出此三個垂線位置的關係.

9. 隨意作一個直角三角形,從各角頂到對邊作垂線,此中有無特別的情形發生?

10. 從直線外一點到此直線作二個垂線,此二個垂線的位置有何關係?

11. 隨意作一個等邊三角形. 比較三個角的大小.

12. 隨意作一個二等邊三角形. 比較三個角的大小. 其中有無相等的角,此相等的角所對的邊如何?

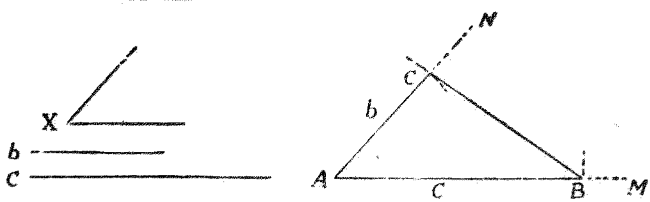
13. 隨意作一個不等邊三角形, 比較三個角的大小. 此角的大小與所對邊的大小有無關係?

14. 隨意作一個二等邊三角形,從各角頂到對邊作垂線,比較此三個垂線的大小.

15. 隨意作一個不等邊三角形,從各角頂到對邊作垂線,比較此三個垂線的大小.

29. 三角形的作圖.

(一) 用已知二邊及夾角作一三角形.



(圖 30)

先,隨意畫二個線份 b, c, 做三角形已知二邊的長.再隨意畫一角 x 做此二邊的夾角. 作圖如下:

(一)照22款的方法作一角 MAN, 令等於 x.

(二)在 AM 上從 A 起截取一線份 AB,令等於線份 c.

(三)在 AN 上從 A 起截取一線份 AC,令等於線份 b.

(四)聯 B, C 作線份 BC. 得 ΔABC 爲所求三角形.

從此作圖可知:

一三角形中,二邊及其所夾角一定,則此三角形一定.

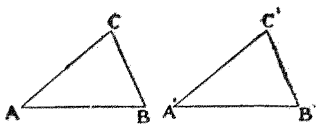
二個三角形中,二雙邊及其所夾角若各相等,則此二個三角形必爲全等形.

例如二個三角形 ABC, $A'A'C'$ 中,

$AC = A'C'(=b)$, $AB = A'B'(=c)$,

$\measuredangle A = A'(=x)$,

則此二個三角形必全等,故又必

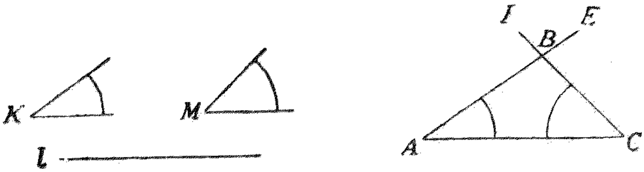


(圖 31)

$$BC = B'C', \qquad \measuredangle B = B', \qquad \measuredangle C = C'.$$

因爲將 $AC = b$, $AB = c$, 及其夾角 $\measuredangle A = x$ 作得的三角形 ABC, 與將 $A'C' = b$, $A'B' = c$, 及其夾角 $\measuredangle A' = x$ 作得的三角形 $A'B'C'$, 只是一種更無兩樣,故此不得不全等也.

(二) 用已知二角及其間的一邊作一三角形.



(圖 32)

隨意畫二個角 K, M,做三角形的已知二角. 再隨意畫一線份 l 做三角形中在此二角間的邊長. 作圖如下:

(一)照 13 款的方法截取線份 AC, 令其長等於線份 l.

(二)照 22 款的方法從 A 作 AE, 令 $\measuredangle CAE=K$; 從 C 作 CF, 令 $\measuredangle ACF=M$.

(三) AE, CF 交於 B. 得 ABC, 是所求三角形.

從此作圖可知:

一三角形中,二角及其間的邊一定,則此三角形一定. 故:

二個三角形中,二雙角及其間的邊若各相等,則此二個三角形必為全等形.

例如(圖 31)二個三角形 ABC, $A'B'C'$ 中,若

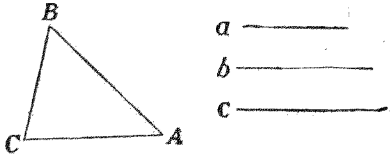
$$\measuredangle A=A'(=K),\quad \measuredangle C=C'(=M),\quad AC=A'C'(=l),$$

則此二個三角形必全等,故又必

$$\measuredangle B=B',\qquad AB=A'B',\qquad BC=B'C'.$$

(三)用已知三邊作一三角形.

先,隨意畫三個線份 a, b, c, 做三角形的已知三邊. 作圖如下:



(圖 33)

(一)先用13款的方法截取一線份 CA, 令 $CA=b$.

(二)將 C 做中心 a 做半徑畫一圓弧.

(三)將 A 做中心 c 做半徑畫一圓弧.

(四)(二),(三)所畫兩圓弧交於 B. 聯 AB, BC,得 ΔABC, 爲所求三角形.

從此作圖可知:

一三角形的三邊一定,則此三角形一定.

二個三角形中,三雙邊若各相等,則此二個三角形爲全等形.

例如圖31)二個三角形 ABC, $A'B'C'$ 中,若

$$BC=B'C'(=a),\quad CA=C'A'(=b),\quad AB=A'B'(=c),$$

則此二個三角形必全等,故又必

$$\measuredangle A=A', \quad \measuredangle B=B'. \quad \measuredangle C=C'.$$

以前曾經說過,若單舉線份的長,可用一個小體字母表此線份. 慣例,三角形的三個角頂若記做A, B, C,則三個對邊的長常記做a, b, c.即

$$BC=a, \quad CA=b, \quad AB=c.$$

例題二十四

1. 已知三角形二邊的長是$b=2$釐米,$c=3$釐米,及其夾角$X=120°$. 作此三角形.

2. 已知三角形二邊的長是$b=2$釐米,$c=3$釐米,及其夾角$X=180°$. 作此三角形. 作圖的結果發見何事?

3. 已知三角形二邊的長是$b=2$釐米,$c=3$釐米,及其夾角$X=240°$. 作此三角形, 角X是不是在作出的形內? 在此作圖的結果發見何事?

4. 已知三角形二角的大小是$\measuredangle K=60°$,$\measuredangle M=100°$,及其間的邊$l=3$釐米, 作此三角形.

5. 已知三角形二角的大小是$\measuredangle K=60°$,$\measuredangle M=120°$,及其間的邊$l=3$公分. 作此三角形, 作圖的結果發見何事?

6. 已知三角形二角的大小是$\measuredangle K=60°$,$\measuredangle M=150°$,及其間的邊$l=3$釐米. 作此三角形. 二角K及M是

不是在作出的形內? 在此作圖的結果發見何事?

7. 將已知長 $a=3$ 釐米, $b=3$ 釐米, $c=5$ 釐米做三角形的三邊,作此三角形.

8. 將已知長 $a=2$ 釐米, $b=3$ 釐米, $c=5$ 釐米做三角形的三邊,作此三角形. 作圖的結果發見何事?

9. 將已知長 $a=1$ 釐米, $b=3$ 釐米, $c=5$ 釐米做三角形的三邊,作此三角形. 作圖的結果發見何事?

10. 總核 1, 2, 3 題的結果說出29款第一種的作圖在何種情形之下方能成立.

11. 總核 4, 5, 6 題的結果說出29款第二種的作圖在何種情形之下方能成立.

12. 總核 7, 8, 9 題的結果說出29款第三種的作圖在何種情形之下方能成立.

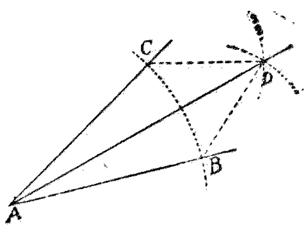
30. 幾個基本作圖.

〔第一〕作一角的等分線

隨意畫一角 A.

欲作其等分線.

(一)將角頂 A 做中心,用隨意長的半徑畫圓弧,與角 A 的二邊各交於 B 及 C.



(圖 34)

(二)將 B, C 各做中心,用

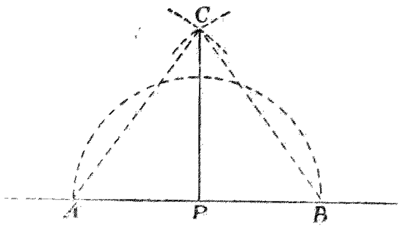
適當等長的半徑畫二個圓弧,此二個圓弧交於D.(要叫此二圓弧能相交),

(三)聯AD作直線. 此直線AD即$\angle A$的等分線.

我們試聯二個線份BD, CD. 從作圖(一),知道$AB=AC$;從(二),知道$BD=CD$; 加上$AD=AD$; 二個三角形,ABD, ACD中三雙邊各相等;故從前款(三),知道此二個三角形是全等形. 於是$BAD=CAD$,即AD確是$\angle A$的等分線.

〔第二〕從一直線中一點作此直線的垂線.

AB是一個定直線,P是AB中的一定點.今欲從P作AB的垂線.



(圖 35)

(一)將P做中心,用隨意長的半徑畫圓弧,交直線於A及B.

(二)將A, B各做中心用適當等長的半徑畫二個圓弧,此二個圓弧交於C.(要叫此二圓弧能相交)

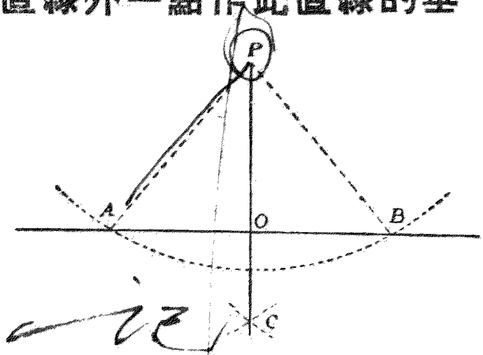
(三)聯CP作直線. 此直線CP即是AB中P點的垂線.

你們將此作圖法與前一題的作圖法比較,可以見

到完全相同．其實是將APB當做一個直線角,作他的等分線．PC既然是直線角APB的等分線,則$\measuredangle APC$當然是直線角的一半,便是直角．故此PC當然是AB的垂線．

PC是AB的垂線省記做$PC\perp AB$，讀做PC垂直於AB．

〔第三〕從一直線外一點作此直線的垂線．



（圖 36）

AB是一個定直線,P是AB外的一定點。今欲從P作AB的垂線．

(一)將P做中心用適當的半徑畫圓弧,叫此圓弧能交到直線,得其交點A及B。

(二)將A, B各做中心用適當等長的半徑畫二個圓弧,叫此二個圓弧能相交,得其交點C.

(三)聯CP作直線,交AB於O．此PO卽從P所作AB的垂線．

你們試聯PA,PB,得到$\measuredangle APB$,則第一步以後的作圖法分明與第一題的作圖法完全相同,可見PC是$\measuredangle APB$

的等分線,故此$\measuredangle APO=BPO$;從第一步,知道$PA=PB$;再加上$PO=PO$;二個三角形PAO, PBO中二雙邊及其夾角各相等;故此二個三角形是全等形。

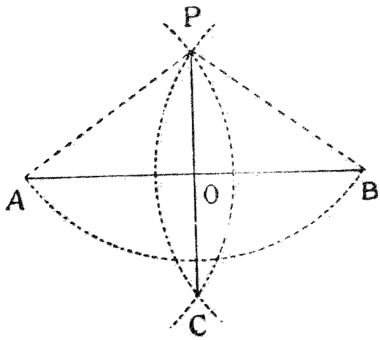
於是$\measuredangle POA=POB$,即$\measuredangle POA$是直線角AOB的一半,即是直角. 故PO確是AB的垂線.

〔第四〕求一個線份的中點.

AB是一個定線份. 今欲求AB的中點.

(一)將A, B各做中心用適當等長的半徑畫兩個圓弧,叫此二圓弧能相交,得其交點P及C.

(二)聯PC作直線,此PC線與線份AB交於O. 此O即爲線份AB的中點.



(圖 37)

你們試聯PA, PB二線份,再將P做中心用PA或PB做半徑畫圓弧AB所得的圖當與前題相同,便是以後的作圖方法也與前題絲毫無異. 從前題已經知道二個三角形. PAO, PBO是全等形. 故此$AO=OB$,即O確是線份AB的中點.

一直線過一線份的中點,且垂直於此線份,則此直線叫做線份的**垂直等分線**(Perpendicular bisector).

如上題中的PC便是線份AB的垂直等分線.

從以上諸題的結果可知以下各事:

(一) 一角必有一個等分線.

(二) 過一直線中一點的垂線必有一個.

(三) 過一直線外一點的垂線必有一個.

(四) 一線份必有一個中點.

三角形三個內角的等分線叫做三角形的**等分線**(Bisector), 各外角的等分線叫做**外等分線**(The bisector of an exterior angle).

從三角形各角頂到對邊中點的聯線叫做**三角形的中線**(Median).

例題二十五

1. 隨意畫一個三角形,作其三個角的等分線. 說出此三個等分線的位置有何關係.

2. 隨意畫一個三角形,作其三邊的垂直等分線. 說出此三個垂直等分線的位置有何關係.

3. 隨意畫一個三角形,求三邊的中點,再作三個中線. 說出此三個中線的位置有何關係.

4. 隨意畫一個三角形,就一個角頂的內角及外角各作等分線. 用三角板來量此二個等分線的角.

5. 隨意畫一個三角形,作他各角的內外等分線.

看出此六個等分線中每三個關係的位置.

6. 隨意畫一個三角形ABC,從A到BC作垂線AD再求出AB的中點C', AC的中點B', BD的中點K, CD的中點L. 於是將此三角形從紙上剪下,將$C'B'$, $C'K$, $B'L$各做摺痕覆摺$AC'B'$, $BC'K$, $CB'L$三部份到第四部份上.看三個角頂是不是聚在一點D. 再看出以下各事:

(1) AC', $C'B$, $C'D$三個線份大小的關係;

(2) AB', $B'C$, $B'D$三個線份大小的關係.

(3) 三個角A, B, C和的大小.

7. 隨意畫一個圓,在圓周上隨意取三點A, B, C,聯三個弦AB, BC, CA. 於是作此三個弦的垂直等分線. 此三個垂直等分線有幾個交點? 交點與圓有何關係?

8. 從前題中三個垂直等分線的交點到原取三點A, B, C聯線份. 此各線份大小的關係如何? 又此各線份與圓的關係如何?

9. 隨意畫一個圓,若失去他中心的時候,能不能想法求此中心?

10. 隨意取不在一直線上的三點,要過此三點作一個圓,有什麼方法可作?

11. 隨意畫一個圓O,在此圓周上隨意取一點A.

取半徑OA. 過A作OA的垂線,再過A隨意作OA的幾個斜線. 報告此所作諸線各與圓周交點的個數. 此所作垂線對於圓O有什麼名稱?

12. 根據前題,要從圓周上一點作此圓的切線有什麼方法可想?

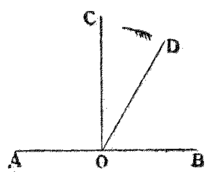
13. 隨意作一圓且隨意作此圓的一個弦. 從圓的中心作此弦的垂線,延長兩端到圓周爲止. 比較此所作線分弦所得兩份的大小.

14. 前題中的弦,分圓周做二個弧;前題中所作的垂線將此各弧都分做二份. 比較每一弧上二份的大小.

31. 關於垂線的定理.

在前款中,曾說過一個直線中一點的垂線必有一個,又說過一個直線外一點的垂線必有一個,這都是從作圖得來的概念,現在再從別一方面來看此性質.

(一) 過一直線中一點所作此直線的垂線必有一個而只有一個.



(圖 38)

AB是一直線,O是AB中的一點.

我們想像有一個將O做原點的半射線OD,起初合於OB上此後連續向正方向旋轉,在旋轉時二個隣補角

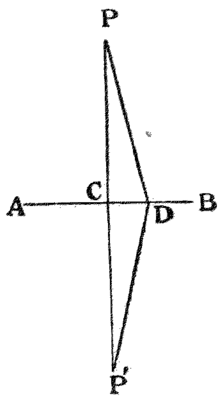
BOD, DOA 不絕地變化著. 初時自然 $\measuredangle BOD < DOA$, 但是 $\measuredangle BOD$ 連續增加, $\measuredangle DOA$ 連續減少,必有一時此二角相等,此時 OD 在 OC 的位置. 因

$$\measuredangle BOC = COA$$

時此二角都是直角而 $OC \perp AB$. 故過 O 必有一個 AB 的垂線.

但 OD 若是不到 OC 的地位一些,或是稍稍轉過一些, $\measuredangle BOD$ 與 $\measuredangle DOA$ 便立刻不相等. 故過 O 而垂直於 AB 的線只有一個.

(二) 過一直線外一點所作此直線的垂線必有一個而只有一個.



(圖 39)

AB 是一直線, P 是 AB 外的一點.

將 AB 做摺痕摺疊此平面, P 點落於又一部份上的 P' 點,再展放開來,聯 PP' 作一線份,此線份交 AB 於 C, 則 $\measuredangle ACP$ 與 $\measuredangle ACP'$ 是重合角,當然相等,故

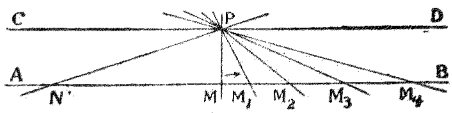
$$\measuredangle ACP = \tfrac{1}{2}ACP' = \tfrac{1}{2}\text{直線角} = R\measuredangle,$$

而 $PC \perp AB$. 故過 P 而垂直於 AB 的直線必有一個.

再,在 AB 中隨意取 C 以外的一點 D. 聯 PD, $P'D$. 再

將AB做摺痕摺疊此平面,則PD與$P'D$可重合,故$\measuredangle ADP$與$\measuredangle ADP'$亦是重合角而相等,於是$\measuredangle ADP=\frac{1}{2}P'DP$. 但過二點只能有一個直線,因為從直線的意義,要是二個直線有兩點相合這二直線便要完全合成一個的;故此PD, $P'D$當然不成一直線, $\measuredangle PDP'$便不是直線角,於是$\measuredangle ADP=\frac{1}{2}PDP'$便不是直角, PD便不是AB的垂線. 故過P而垂直於AB的直線只有PC一個.

32. 平行線.



(圖 40)

現在有一個直線AB與AB外一點P. 我們從P向AB作垂線PM, 再過P作PM的垂線CPD. 假使過P的一個半射線起初與PM合,以後逐漸向正方向旋轉,其陸續的位置如圖 40 中PM_1, PM_2, PM_3, PM_4. 等. 這樣,可見此半射線逐漸接近於PD時,他與AB的交點逐漸向右沿着MB移遠;轉到半射線與PD相合,他與AB的交點遠到在有盡的位置已不能看見,有無已不得而知了. 再此半射線若從PM起向負方向旋轉,如PN, 則照上邊的觀察,可見此半射線逐漸接近於PC時,他與AB的交點逐漸向左沿着MA移遠;到半射線與PC相合,他與AB的交點也遠到在有

的地位不能看見,其有無不得而知.

今將PM做摺痕將此圖所居的平面摺疊,則因$\measuredangle PMB$與$\measuredangle PMA$都是直角而相等,故此MB與MA可相合;又因$\measuredangle MPD$與$\measuredangle MPC$都是直角而相等,故此PD與PC可相合. 從此可知原圖中在PM左右兩邊的情形應該完全相同. 於是CD與AB若是右邊有交點,則在左邊應該亦有交點;若在右邊無交點,則左邊亦無交點.

倘使CD與AB在左右兩邊都有交點,則此二直線便有二點重合,照直線的意義,此二直線便應完全重合. 然而CD是過AB外的一點P的,決不與AB完全重可知. 故此若以為CD與AB在左右兩邊都有交點,便與前面定直線的意義發生了自相矛盾的事情了,這是不可以的.

於是此CD與AB二直線只能在左右兩邊都不相交.

於是可見過直線AB外一點P的許多直線中有一直線與AB不相交. 又因從P向AB所作AB的垂線只有PM一個,過P所作PM的垂線又只有CD一個,故此過P而不交AB的直線只有CD一個.

無論如何延長決不相交的二個直線叫做平行線(Parallels).

CD是AB的平行線記做$CD /\!/ AB$,讀做CD平行於AB.

平行二直線在同平面中.

一平面中的二直線或者相交,或者平行.

過一直線外一點有一個此直線的平行線而只有一個平行線.

一直線的二個垂線互相平行

例題二十六

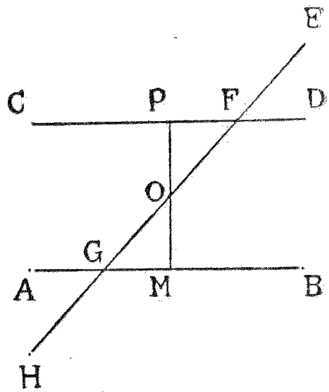
1. 能不能根據本款所說的實驗作一個直線的平行線?

2. 隨意作二個平行線,在此中一直線上隨意取一點,從此點到又一線作垂線,此所作又一線的垂線與原一直線有何關係?

3. 隨意畫二個平行線,再作第三直線與二平線中的一個相交,則此第三直線與二平行線中的又一個相交不相交?

4. 隨意畫二個平行線,再過此二直線外的一點作此中一直線的平行線. 看出此所作線與原二線中第二直線位置的關係.

33. 平行線的性質及作圖.



（圖 41）

隨意作二平行線AB, CD與其一個公共垂線PM. 取PM的中點O, 過O再隨意作第三個直線$EFGH$, 與CD交於F, 與AB交於G, 在二個三角形OPF, OMG中,

$OP=OM$(因O是PM的中點),

$\measuredangle OPF=OMG(=R\measuredangle)$,

$\measuredangle FOP=GOM$ (對頂角相等)

從29款(二),此二個三角形中二雙角各相等,其間的邊亦相等,故此二個三角形全等而一雙錯角$\measuredangle PFO=MGO$. 又因爲$\measuredangle PFO=DFE$ (對頂角相等),故此$\measuredangle DFE=MGO$.

將一直線截二平行線則一雙同位角相等,一雙內錯角亦相等.

再倒過來看,先有二個直線AB, CD,及第三個直線$EFGH$. 此第三個直線與CD交於F, 與AB交於G, 且已知其一雙同位角DFE, BGE相等. 我們取FG的中點O. 過O作AB的垂線OM, 延長去,交CD於P. 先

$\measuredangle PFO=DFE$ (對頂角相等)

$=MGO$ (等於等量的量相等),

又 $\measuredangle FOP=GOM$ (對頂角相等), $FO=OG$.

於是二個三角形FOP, GOM中有二雙角及其間的邊各相等．於是從29款(2),知此二個三角形全等.故

$$\measuredangle OPF=OMG=R\measuredangle,$$

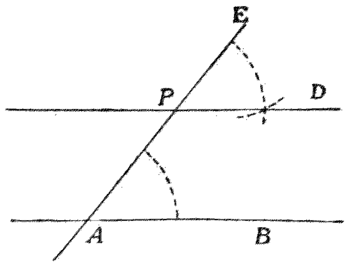
卽PM垂直於AB,而CD又垂直於PM．故從前款,知$CD /\!/ AB$.

若將一直線截二直線所得一雙同位角或者一雙內錯角相等則此二直線必平行.

利用此性質可得作平行線的方法.

過一點作一直線的平行線.

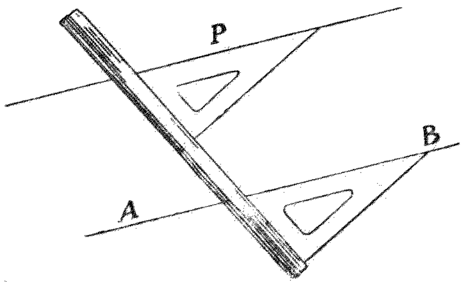
隨意作一直線AB及AB外的一點P．欲過P作AB的平行線.



（圖42）

(一)過P及AB上的一點A隨意作一直線EPA,得一角EAB.

(二)從P作一直線PD,令$\measuredangle EPD=EAB$.此所作PD,卽所求AB的平行線.



（圖43）

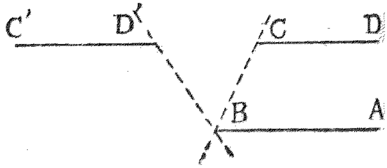
實用方面,還有一個作平行線更便

當的方法:

先,安放三角板,叫他的一邊與直線AB密合. 次,壓住三角板,將一直尺(再用一三角板亦可)緊合上三角板的第二邊. 再,撳緊直尺,將三角板沿着直尺滑動,移到三角板上本來密合AB的一邊過P點. 於是再撳住此三角板,用筆沿着過P的一邊畫線,卽得所求的平行線.

若有兩個互相平行的半射線,聯他們的原點作直線,看此二個半射在原點聯線的一邊還是分居兩邊.在聯線一邊的叫他們做**同向** (Same direction),分居兩邊的叫做**異向** (Different direction).

同向的概念現在可以定了. 原來二個半射線所成的角是他們所定向的差,同向二射線向的差應該是0,可是他們的交點却跑到不知去向了.



(圖 44)

回過頭來看用三角板作平行線的方法,這樣將三角板沿直尺移動叫做**平行移動** (Par..llel translation),移動後的三角板當然與前的無異.

一個圖可將其位置平行移動而其形狀大小都不變.

例題二十七

1. 畫二個角,叫他們的二雙邊各是同向平行. 比較此二角的大小.

2. 畫二個角,叫他們的二雙邊各是異向平行. 比較此二角的大小.

3. 畫二個角,叫他們的一雙邊是同向平行,又一雙邊是異向平行. 再作此二角的和.

4. 隨意畫一個圓,再在圓內畫幾個平行的弦. 從圓心向一個弦作垂線,延長到交各弦. 量(用分角儀)此線與各弦的交角,再就各弦被此線所分的兩份比較大小.

5. 隨意畫一個圓,再在圓內畫幾個平行的弦. 求各弦的中點,將此各中點逐一與圓心聯作直線. 看此諸線位置互相的關係,再看與各弦位置的關係.

6. 隨意畫一個三角形,在形內畫幾個平行於三角形一邊的線份. 聯此一邊中點到對角頂作一三角形的中線,此中線將形內的各線份一一分成二份. 比較各線份上二份的大小.

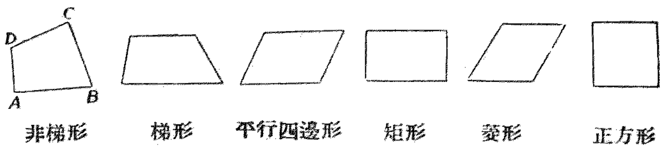
7. 隨意畫一個三角形,延長其一邊得一外角. 從此角頂在外角中作一半射線,叫他與此角頂的對邊平行,此半射線將外角分成二份. 將此外角的各份與

三角形中各角逐一比較大小而看出與他相等的角.

8. 隨意畫一個三角形,過一個角頂作對邊的平行線,此平行線與三角形的邊在形外兩旁做成二個角,將此各角與此角頂對邊兩端的角比較大小而看出何角與何角相等.

34. 四邊形.

有四個邊的多角形叫做四角形,又叫四邊形,前在27款中已經說過了. 四邊形又可用邊分類給與種種名稱.



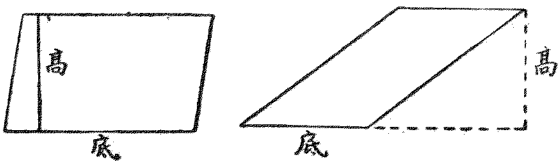
(圖 45)

四邊形中兩雙邊沒有一雙是平行的,叫做**非梯形**(Trapezuim). 有一雙邊平行的,叫做**梯形**(Trapezoid). 二雙對邊都平行的,叫做**平行四邊形** (Parallelogrem). 梯形的一雙不平行邊相等的,叫做**二等邊梯形** (Isosceles Trapezoid). 平行四邊形的各角都是斜角的,叫做**非矩形** (Rhomboid), 各角都是直角的,叫做**矩形** (Rectangle). 非矩形的諸邊都相等的,叫做**菱形** (Rhombus). 矩形的諸邊都相等的,叫做**正方形**,亦叫**平方** (Square). 菱形的

各角都是直角的亦是正方形.

用▱做平行四邊形的記號,▭做矩形的記號,□做正方形的記號.

梯形的一雙平行邊,慣常都叫做**底**,放在下邊的叫做**下底**,放在上邊的叫做**上底**. 各種平行四邊形,隨便那一邊都可用做**底**. 不問是梯形或是平行四邊形,底與對邊間的公共垂線的長叫做**高**. 矩形或正方形,底的隣邊便是高.



(圖 46)

依理說,若將一個四邊形放平他的一邊做底,從離底最遠的一點(在圖中)到底所作的垂線應派是高;但在非梯形(即隨意四邊形),慣例不問他的高.

例題二十八

1. 知道了平行四邊形的二個隣邊及此二邊的夾角,試作此平行四邊形.

2. 隨意給與菱形的一邊及一角,作此菱形.

3. 隨意給與矩形的二個隣邊,作此矩形.

4. 隨意給與正方形的一邊,作此正方形.

5. 作一個平行四邊形,比較其各雙對邊的大小,再比較其各雙對角的大小.

6. 作一個平行四邊形,再作一個對角線分此形做二個三角形. 此二個三角形中各雙邊各雙角有何關係?

7. 作一個平行四邊形,再作二個對角線. 此二個對角線的交點在各對角線上的何處?(就每一個對角線比較他二份的長短).

8. 作一個矩形及其二個對角線. 比較此二對角線的大小,將言語述此大小的關係.

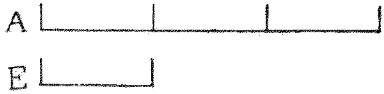
9. 將前題中的矩形沿一個對角線裁去一半,則前題所得結果在此賸下的圖中應當怎樣改變說法?

10. 作一個菱形及其二對角線,用分角儀量此二對角線的交角.

35. 比.

要量長短,在實用方面用尺做單位,不滿一尺的長可用小單位寸來量,不滿一寸的長可用更小的單位分來量,這些在算術諸等數中已經講過. 在理論方面,長的單位不限於用尺,可隨意取一個長做單位長. 角亦是這樣,實用方面用度,分秒做單位,理論方面則除直角外可隨意取一個角做單位角.

例如有一線份A,要知道他的長,可隨意取另一線份E做量他的單位.用E量A,便是在A中截取一個E,二個E,……的長.假使截取三回恰好截完,便可記做$A=3E$,或者$E=\frac{1}{3}A$.換一句話來表示,可說A對E的比是3,記做$A:E=3$;或者說E對A的比是$\frac{1}{3}$,記做$E:A=\frac{1}{3}$.


(圖 47)

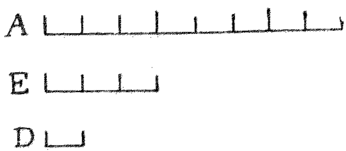
自然,A不必是E的整倍量.我們可以再看一個普遍一些的例:

如圖48,再將E量A,量過二回後,賸下一個不滿E的餘長.便將此餘長來量E,量過一回後,又得一個較小的餘長D.再將第二個餘長D來量第一個餘長,量二回,恰好量完.於是將D量E得E是D的3倍,將D量A得A是D的8倍,便是$A=8D$,$E=3D$,從此

$$A:E=8D:3D=8:3=\frac{8}{3},$$

此式與$A=\frac{8}{3}E$同意.

此法實在是算術代數中求最大的公約數的根源,所得的D叫做A,E二量的公約量,或叫**公度**


(圖 48)

(Comnon Measure). 求得到公約量的二量 A, E 叫做**可通約量** (Commensurable Quantity). 此法再可用簡單一些的話來普遍說明他:

將 E 量 A 若不能恰好量盡,可將 E 再等分做 n 份(例中 $n=3$),得他的一份 D, 使 A 恰是 D 的 m 倍(例中 $m=8$),

則 $$A=mD, \qquad E=nD,$$

而 $$A:E=mD:nD=m:n=\frac{m}{n}.$$

$A:E$ 叫做 A 對 E 的**比** (Ratio), $\frac{m}{n}$ 叫做**比值**(Value of Ratio).

二個可通約量的比值是一個整數或分數.

二量 A, E 沒有公約量,則叫做**不可通約量** (Incommensurable Quantity). 不可通約量的比是一個無盡小數.

二個量 A, E 的比值是一個數,可用一個小體字母 r 來代表. 如 $A:E=r$, 讀做 A 比 E 等於 r. 此式表示 A 是 E 的 r 倍,即 $A=rE$.

$A:E$ 中 A 叫做比的**前項** (The Antecedent), E 叫做**後項** (The Consequent), 總稱叫比的**項**(Terms).

一個比的兩項必須是同類的量.

將 r 除 $A=rE$ 的兩邊可得 $E=\frac{1}{r}A$(等量等分數的量相等), 用比的形式寫出來便是 $E:A=\frac{1}{r}$.

$E:A$ 叫做 $A:E$ 的**反比** (Reverse Ratio) 或叫做**倒比** (Reciprocal Ratio).

$A=rE$, 則 $mA=r(mE)$ (等量等倍數量相等),

將此二式用比的形式寫出來可得

$$A:E=r,\quad mA:mE=r,$$

於是
$$\boldsymbol{A:E=mA:mE.}$$

又,若 $A=mB$, $B=nC$, 則 $A=mnC$,

將此三式用比的形式表出來可得

$$A:B=m,\quad B:C=n,\quad A:C=mn,$$

於是
$$\boldsymbol{A:C=(A:B)\,(B:C)}$$

$A:B$ 與 $B:C$ 的比值都是不名數,當然可以相乘. 如此二個比的相乘積叫做此二比的**複比** (Compound Ratio).

例題二十九

1. 隨意畫二個角.用本款方法求他們的公約量,從此再求此二個角的比值(近似值)

2. 隨意畫一圓,在圓周上隨意截取二個弧. 用本款的方法求此二弧的公約量,於是求此二弧的比值.(近似值)

3. 隨意畫二個等圓,在各圓內隨意各作一中心角. 求此二中心角的比值,再求此二角所對弧的比值.此二個比值有何關係?

36. 比例

A, B, C, D 是四個量,若 A 對 B 的比值等於 C 對 D

的比值,則此四個量叫做成**比例** (Proportion), 記做

$$A:B=C:D, \quad (\text{亦有記做}\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D}\ \text{的})$$

A, D 叫做比例的**外項** (Extremes), B, C 叫做**內項** (Means), D 叫做**第四比例項** (Fourth Proportional). 依照前款,可知 A 與 B 應當是同類量, C 與 D 應當是同類量;至於 A, B 與 C, D 可以同類,亦可以不同類,但此四個量中倘若已經知道三個是同類,則第四個亦必與前三個同類.

若 A, B, C 是三個同類量,而 A 對 B 的比值等於 B 對 C 的比值,則此三個量叫做成**連比例** (Continued Proportion), 記做 $A:B=B:C$, (亦有記做 $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$ 的), 此中 B 叫做**比例中項** (Mean Proportional), D 叫做**第三比例項** (Third Proportional).

數的比例,你們在算術中是學過的了,在代數中,還許沒有學到,可是將文字來代表數是早應該清楚了. 現在幾何中講的是量的比例,與數的比例大致可說相同,但有一很不同的地方,便是二個量不能相乘,故此算術,代數中「**比例中兩外項的積等於兩內項的積**」這個定理是移不到**幾何中來的.**

量的比是數,凡是定了單位計算出數目來的事情實在都是求比,故此幾何中的比與比例是打通量與數的一個關鍵,在既打通以後,量與數自能融成一片,但在

未打通前,却不應界限不分,要是急不及待隨便混合了,好處不會多得一些,根本却再也不會清楚,於是線份可以相乘,點線面體可以互變種種的笑話便自然而然地都來了.

例題三十

1. A, B, C, D 是四個線份.已知 A, B, C 各長 2 釐米, 3 釐米, 4 釐米,要從 $A:B=C:D$ 求 D 的長. 先,求 $A:B$ 的比值,再叫 $C:D$ 等於此比值求 D.

2. A, B 是兩個線份,各長 a 釐米及 b 釐米. C, D 是兩個角,已經知道 D 是 α 度,又知道 $A:B=C:D$. 求 C 的角度應該如何求法?

3. A, B 是兩個角,其大小各爲 α 度及 β 度. C, D 是兩個等圓周上的弧,已經知道弧 D 長是 β 度,要從 $A:B=C:D$ 求弧 C 的度數,應如何求法?

4. 隨意畫一個銳角 O, 在其一邊上取二點 A, B, 在又一邊上取一點 C, 令 OA, AB, OC 的長各爲 2 釐米, 3 釐米, 4 釐米. 於是在 OC 的延線上求一點 D, 使 $OA:AB=OC:CD$. 再聯二個線份 AC, BD, 量此二線份的長,求其比值. 再,考察此二線份 AC, BD 有沒有交點.

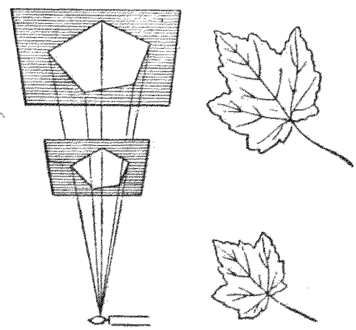
5. 隨意畫二個平行直線,再從此二線外一點 O

隨意畫二個截線OAB, OCD, 於是量OA, AB; OC, CD; AC, BD三對線份的長,考察此六個線份中有沒有比例的關係在內。

37. 相似形

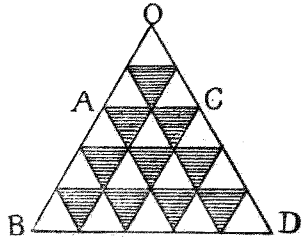
兩個圖形大小不等,式樣相同的,叫做**相似形**.

例如用照像術將一個像放大,則此一大一小的兩個像便互相相似.原物的一線照到兩個像裏做成在同位置的一雙線,叫此一雙線做**對應線**(Corresponding lines). 原物的一點或一角,照到兩個像裏做成在同位置的一雙點或一雙角,叫做**對應點**或**對應角**. 於是兩個像中的對應角必保持着一定大小,對應線必保有一定的比例.故此相似形的意義可確實一些地如下決定:



(圖 49)

二個等邊數的多角形中各雙角逐一相等,各雙等角間邊的比都相等,則此二形叫做**相似多角形**省稱**相似形**(Similar Polygons),各雙等的角叫做**對應角**,各雙等角間的邊叫做**對應邊**.



(圖 50)

現在有一個角O,角的一邊上有二點 A,B. 先,照35的方法求二個線分OA,AB的公約量,在OA及AB中各截取此公約量,得各分點,從此各分點隨意畫平行線,在角O的第二邊上得各交點,此中過A及B的二個平行線爲AC,BD. 於是如圖50,從OB上各分點各作OD的平行線,從OD各分點各作OB的平行線,便成許多合同的小三角形,此許多小三角形的各對應邊都相等. 從此可見

$OA:OB=\frac{2}{5}$, $OC:OD=\frac{2}{5}$, $AC:BD=\frac{2}{5}$, 故$OA:OB=OC:OD=AC:BD$;

又　$\angle OAC=OBD$, $\angle ACO=BDO$, $\angle COA=DOB$;

於是$\triangle OAC$與$\triangle OBD$是相似形. 相似形的略號是$\backsim$, 如$\triangle OAC\backsim OBD$讀做三角形$OAC$相似於$OBD$.

從三角形(OBD)一邊(OB)上一點(A)到第二邊(OD)作第三邊(BD)的平行線(AC),與原二邊的部份(OA,OC)所成一新三角形(OAC)爲原三角形(OBD)的相似形.

二個三角形(OAC,OBD)有二雙角相等

($\measuredangle A = B$, $\measuredangle C = D$), **則此二形爲相似形.**

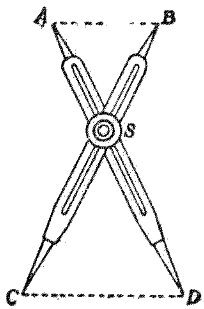
用二個平行線 (AC, BD) **截一角** (O) **的二邊所得對應部份成比例** ($OA:AB = OC:CD$).

再從圖50中, OB 上各點等分 OB, 則 OD 上各點亦等分 OD, 可知:

諸平行線的一個截線若被此諸平行線所等分,則第二個截線亦必被此諸平行線所等分.

利用相似三角形的理有一種**比例分線規**(Proportional Dividers),如圖51, AD,BC 是銅做的兩桿,上面刻有數目,中有空槽, S 是一螺旋輪,可以自由升降, SAB,SDC 是二個相似三角形,故

$$AB:DC = AS:SD = BS:SC.$$



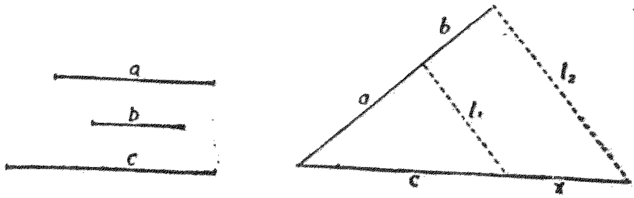
(圖 51)

於是知道了 AB, CD 的比值,再知道他們一個的長,便可求又一個的長.

38.　關於比例線的作圖.

利用前款所得的性質可以做如下的作圖:

給與三個線份作其第四比例項.



(圖 52)

a, b, c 是隨意給與的三個線份. 欲作合於

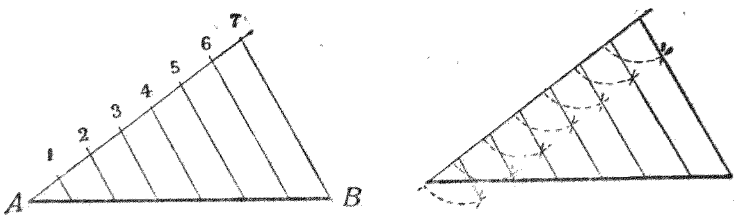
$$a:b = c:x$$

的第四線份 x.

(一)隨意作一個銳角,在第一邊上截取二個長 a, b, 在第二邊上截取長 c.

(二)將二邊上截取 a, c 所得二點聯作線份 l_1,從截取 b 所得點作 l_1 的平行線 l_2. 此 l_1, l_2 在角的第二邊上所夾線份便是所求的第四比例項 x.

將一個已知線份等分做 n 份.



(圖 53)

AB 是已知線份,欲將 AB 等分做七份 $(n=7)$。

(一)過線份 AB 的一端 A 隨意作一個半射線,叫他與 AB 成一銳角。

(二)從 A 起,在半射線上用隨意的長截取七回,得分點 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7。

(三)聯 7 與 B 作線份. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 各作 $7B$ 的平行線. 此諸平行線卽將線份 AB 等分做七份.

例題三十一

1. 作二個三角形,叫他們的一雙角相等,夾此等角的二雙邊成比例. 考察第三雙邊的比. 再比較其餘二雙對應角的大小.

2. 作二個三角形,叫他們的三雙邊成比例. 比較其三雙對應角的大小.

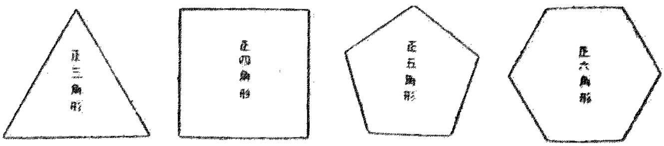
3. 從圖 50 舉出二個三角形 OAC, OBD 面積的比是怎樣的比值,與一雙對應邊的比值有何關係?

4. 隨意畫一線份 OA, 要在 OA 間求一點 A', 使 $OA':OA$ 等於隨意給與二個長 a, b 的比. 但 $a<b$

5. 隨意畫一四角形 $ABCD$, 在形外隨意取一點 O, 聯 OA, OB, OC, OD 四個線份,在此四線份上各取一點 A', B', C', D', 令 $OA':OA=OB':OB=OC':OC=OD':OD=a:b$, 但 a, b 是隨意給與的二個長 $(a<b)$. 於是得一新四角

形 $A'B'C'D'$.說出四個比 $A'B':AB$, $B'C':BC$, $C'D':CD$, $D'A':DA$ 的比值是多少.再比較此二個四角形各雙對應角的大小.

39. 正多角形及其作圖.



(圖 54)

一多角形諸角都相等,諸邊亦都相等的叫做**正多角形** (Regular Polygon).

一個多角形的諸角頂都在同一圓周上,則此多角形叫做圓的**內接多角形** (Inscribed Polygon),此圓便叫做多角形的**外接圓** (Circumscribed Circle).

一個多角形的諸邊都是同一圓的切線,則此多角形叫做圓的**外接多角形** (Circumscribed Polygon),此圓便叫做多角形的**內接圓** (Inscribed Circle).

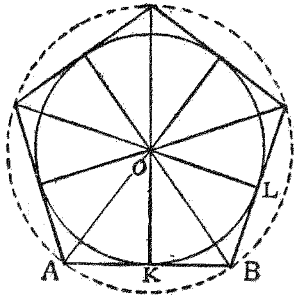
凡是正多角形必定有一個外接圓也必定有一個內接圓. 爲什麼能有,現在暫且不能說,到以後能說的時候再講.

作正多角形的外接圓法.

(一)隨意取正多角形的兩邊,作垂直等分線OK,OL,得其交點O.

(二)聯O及隨意一角頂A作OA.

(三)將O做中心OA做半徑畫圓.得所求圓.



(圖 55)

作正多角形的內接圓法. (看圖 55).

(一)隨意取正多角形的二個角,作他們的等分線OA,OB,得其交點O.

(二)從O到隨意一邊AB作垂線OK.

(三)將O做中心OK做半徑畫圓,得所求圓.

正多角形的外接圓心與內接圓心是公共的一點,叫做正多角形的**中心**(Center),外接圓的半徑(OA)便叫做正多角形的**半徑**(Radius),內接圓的半徑叫做**邊心距**(Apothem).

從正多角形的中心到各角頂作諸半徑,則此正多角形可分成諸合同的三角形.

若能將一個圓周等分成多少份,則挨次聯此各分點作線份,即可得一此圓內接正多角形.

此二個性質都能作好了圖來實量驗明他的不誤.

但是一個圓周如何能等分成多少份是成一問題的.現在爲便利起見,舉一個近似的方法以便作圖.

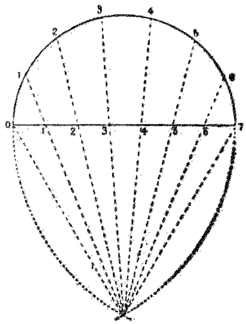
等分半圓周做 n 份的近似法.

先,隨意假定 $n=7$.

(一)將半圓的直徑等分做七份.

(二)將直徑07做等邊三角形的一邊,作出等邊三角形,得到他第三個角頂.

(三)從此第三個角頂作線過直徑上各分點,延長到與半圓周交,即得所求的分點.



(圖56)

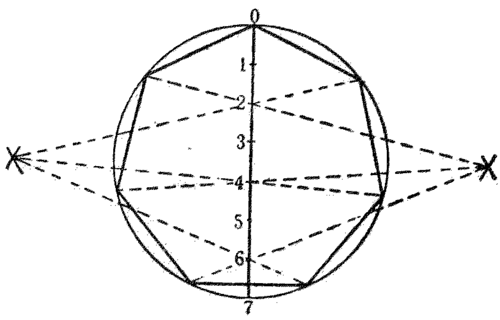
利用此法,便可作一個已知圓的內接正多角形.

作已知圓的內接正多角形.

先,隨意假定要作圓內接正七角形.

(一)照前一法,等分全圓周做 7 份.

(二)用綫挨



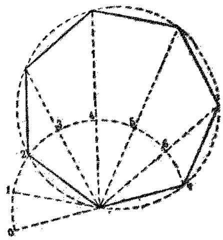
(圖57)

次聯各分點,便得圓內接正七角形.

注意, 若從各分點作圓的切線,便可得圓的外接正七角形.(叁看例題二十五 11,12 兩題)

此一作法雖然是近似法,可是錯誤很小,實用也很便,所以不妨常用.

隨意給與一線份做正多角形一邊在此線份上作正多角形的近似法.



(圖58)

先,隨意假定要作正七角形.

(一)將給與線份做半徑作一半圓周.

(二)等分此半圓周做七份.

(三)從半圓中心聯周上第二分點作線份,得多角形的第二邊.

(四)從多角形已知的兩邊作此多角形的外接圓.

(五)從半圓中心聯其周上 3, 4, 5, 6 等點,延長,與多角形的外接圓周各得交點.

(六)挨次聯外接圓周上各分點,便得正七角形.

例題三十二

1. 隨意畫一個圓,用本款方法作此圓內接正八角形.

2.　作一前題的等圓,在圓內作互相垂直的二直徑,且作各直角的等分線,在圓周上得八個交點,挨次聯此八個交點,得此圓的內接八角形．試量此八角形的各邊看他們是不是等長．再比較前題與本題所得二個八角形各邊的長．

3.　隨意畫一個圓,用本款方法作此圓內接正六角形．

4.　作前一題的等圓,在圓周上隨意取一點 A 做中心,用圓的半徑畫弧,交原圓周於 B 及 C,再將 B,C 各做中心,用圓的半徑畫弧,又在原圓周上得交點 D 及 E,再將 D 做中心用同半徑畫弧,在原圓周上又得交點 F,於是挨次聯此六個交點 A, B, D, F, E, C,得一六角形．比較此六角形各邊的長,再比較前題與本題所得二個六角形各邊的長．

5.　隨意畫一正方形,作其二個對角線．將正方形各角頂做中心,用半對角線的長做半徑,畫四個圓弧,在正方形的四邊上得八個交點．於是用此八個交點做角頂可得一八角形．比較此八角形各邊的大小,再比較八角的大小．

6.　隨意畫一線份,用本款方法在此線份上作一正五角形．

第三章 平面圖形的度量

40. 圖形的度量.

實驗幾何學在作圖以外,最重要的目的便是考察圖形的度量.

考察圖形的度量有二條路徑: **第一是比較大小.** 我們對於此一事,在前面已經做過不少的工作,非但曾經講過比較線份的大小,比較角的大小等,而且在例題裏提出這一類的問題很多很多,不必再化時間去講他了; **第二是求出量的數值來,進一步還要表成公式.** 這一事,在前面講的比與比例,已經開了求數值的門,現在便要做進一步的考察.

度量的數值,是此量與同類單位量的比. 在實用方面,算術諸等數一編與本書第19,22款,已經規定了各種量的各單位;可是在理論方面,還是不妨隨意自定單位以求比值. 因為比例還沒有詳細講過,有時抹去了比的形式偷天換日地來講,圖初學的人容易了解,但是歸根還跳不出比的掌心,不過暫時變變面貌罷了. 量和數並不是不一貫,可是要經過了比例纔能完全一貫.

一線份長 r,是指此線份與單位長的比值是 r.

41. 圓周的長

圓周的長,在算術111款曾經講過,從實驗可知圓周與直徑的比是一個定數. 如叫圓周的長做C,半徑的長是r,定數是π,則可得

$$C:2r=\pi. \quad \text{或} \quad C=2\pi r.$$

π叫做**圓周率**,漢朝的劉徽推得**疏率是**

$$\pi=\frac{22}{7}, \quad \text{或} \quad \pi=3.14,$$

密率是 $$\pi=\frac{355}{113}, \quad \text{或} \quad \pi=3.1416,$$

所以這種種數值總叫做**徽率**.

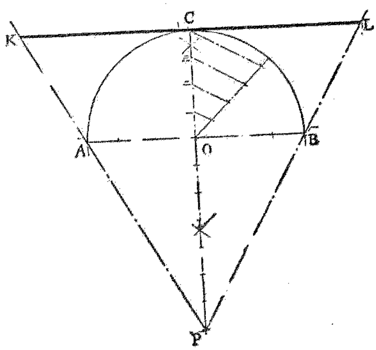
因為π是不盡小數,故此將半徑做長的單位來量圓周,只能得到近似值.

所以**已知一圓半徑的長,要作一線份等於圓周的長是不可能的事**. 但是近似的長卻能作出:

作一線份,令等於一已知半圓周的近似長.

先,我們取圓周率$\pi=\frac{22}{7}$, 則半圓周的長是 $\frac{C}{2}=\frac{22}{7}r$. 於是可作圖如下:

(一)半圓的直徑是AB. 從中心O作垂直於AB的半徑OC.



(圖59)

(二)等分 OC 做四份.

(三)將 CO 向 O 外延長,在延線上截取 OC 上分得一份的長,共截七回,得 P 點

(四)聯 PA,PB 作直線再向上延長.

(五)從 C 作 OC 的垂線,與 PA, PB 的延線各交於 K, L. 此線份 KL 即等於半圓周 ACB 的近似長.

注意. KL **是⊙**O **周上一點** C **的切線**,從例題二十五12題可知.

例題三十三

1. 隨意畫一圓,作內接正三角形,正六角形,正十二角形. 於是用本款方法作出此圓周的近似長,再作其內接各多角形的周(即多角形各邊的和). 報告各周與圓周逐一比較所得挨次的大小.

2. 在前題所作各圓內接多角形的各角頂作圓的切線,做成圓外接的正三角形,正六角形,正十二角形,於是作出此各多角形的周. 將此各周與圓周逐一比較,報告所得的挨次的大小.

3. 隨意畫一圓,作內接正四角形,正八角形,正十六角形. 作各形的周及圓周的近似長. 將此各周與圓周逐一比較,報告所得挨次的大小.

4. 在前題各形的各角頂作圓的切線,做成圓外

接的正四角形,正八角形,正十六角形. 於是作出此各多角形的周. 將此各周與圓周逐一比較,報告所得挨次的大小.

5. 總核以上四題得一如何的結論?

42. 面積

前在27款中,已經說過**封閉圖所圍平面的一部份叫做面積**. 面積當然是一種量.

要計算面積,先要定出面積的單位來,於是求已有的面積與面積單位的比值,得到數.

面積的單位是將長的單位做一邊的正方形. 這樣,可以使面積與長發生密切的關係. 此正方形的一邊是尺,便叫他做**平方尺**,一邊是寸,便叫做**平方寸**,一邊是米,便就叫做平方米等. 其餘所能有的各種單位,在算術諸等數裏都已說過了.

(圖 60)

二個圖形,有形狀同而大小不同的,相似形便是此一種;也有大小同而形狀不同的,如圖60,兩塊合同三角板可以拚成一種平行四邊形,一種矩形,大小當然相等,形狀却不相同. 還有合同形,是形狀,大小都相同的.

形狀同而大小不同的用∽做記號,前已說過的了.大小同而形狀不同的,用＝做記號,放在兩形記號的中間,讀他做等於. 形狀大小都相同的,便用≅做記號,放在兩形記號的中間讀做合同於.

43. 矩形的面積.

從前面43款,知道矩形是四角都是直角,兩雙對邊各相等的一種平面圖. 此兩雙對邊,一雙叫他做底,又一雙便叫做高;或者將一雙叫做長,又一雙便叫做廣.總之,矩形是兩種線份包圍出來的平面圖. 所以

矩形的二個隣邊若是 AB 及 BC, 可叫此矩形做 AB, BC 所**包** (to be contained) 的矩形,省稱此二線份的矩形,略記做矩形 $AB \cdot BC$. 又若一個矩形的底與高記做 B 與 H,則此矩形可記成矩形 $B.H$.

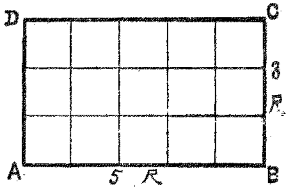
正方形,是底與高相等的特別矩形. 若正方形的一邊是 A,則此正方形可稱做 A 上的正方形,略記做 $\overline{A}^2$.

注意. 我們前曾說過,用大體字母表量,小體字母表數. 現在的 B, H, A 都表線份,以後亦是這樣.

我們現在來看怎樣用矩形兩邊的度量求他面積的度量.

例一. 一矩形,底長 5 尺,高長 3 尺,求其面積是幾平方尺.

如圖61,矩形 $ABCD$,底 AB 長 5 尺,等分做 5 份,從各分點作 AB 的垂線. 又高 BC 長 3 尺,等分做 3 份,從各分點作 BC 的垂線.



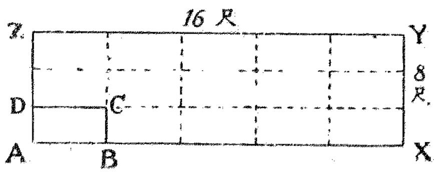
（圖 61）

此縱橫的垂線將矩形 $ABCD$ 分成許多每邊都長一尺的正方塊,每塊都是一個平方尺. 此平方尺的方塊有 5 行,3 排,故共有 $5\times3=15$ 塊. 故 $ABCD$ 的面積是15平方尺.

注意. $5\times3=15$ 中,5 是底 AB 的尺數,便是 AB 對於 1 尺長的比值是5; 3是高 BC 的尺數,便是 BC 對於 1 尺長的比值是3; 15是矩形 $ABCD$ 所含的平方尺數,便是矩形 $ABCD$ 對於平方尺的比值是15. 5,3,15都是比值,都是不名數,並不是矩形的邊與面積,若是說「矩形的面積等於底乘高」這句話便根本錯誤了.

例二. 有一矩形,底長 $3\frac{1}{5}$ 尺,高長 $2\frac{2}{3}$ 尺,求其面積是幾平方尺.

如圖62,矩形$ABCD$,底 AB 長 $3\frac{1}{5}$尺,即 $\frac{16}{5}$尺,高 AD 長 $2\frac{2}{3}$尺,



（圖 62）

即 $\frac{8}{3}$ 尺.

先,延長 AB 到 X,延長 AD 到 Z,令 $AX=5.AB$, $AZ=3.AD$. 於是將 AX 與 AZ 做底及高作成一新矩形 $AXYZ$. 如前例,將 AX 等分做 5 份(AB 是他一份), 從各分點作 AX 的垂線;將 AZ 等分做 3 份(AD 是他一份), 從各分點作 AZ 的垂線. 於是此等縱橫的垂線將新矩形 $AXYZ$ 分成15個小矩形;而各小矩形都與原有矩形 $ABCD$ 全等. 故此

$$\square AXYZ=15.\square ABCD, \text{或} \ \square ABCD=\frac{1}{15}\square APYZ.$$

次,因爲 $AX=5.AB$, 而 $AB=\frac{16}{5}$尺, 故$AX=16$尺;

又 $AZ=3.AD$, 而 $AD=\frac{8}{3}$尺, 故$AZ=8$尺;

矩形 $AXYZ$ 底與高的長都是整尺數,故照例一,可知他面積所含的平方尺數是16×8,即 $AXYZ$ 的面積是16×8平方尺

於是,因爲 $\square ABCD=\frac{1}{15}\square AXYZ$, 今$\square AXYZ$的面積已知是 16×8 平方尺,故此, $\square ABCD$ 的面積應當是 $\frac{16\times 8}{15}$ 平方尺,即 $8\frac{8}{15}$ 平方尺.

注意. $3\frac{1}{5}\times 2\frac{2}{3}=\frac{16}{5}\times\frac{8}{3}=\frac{128}{15}=8\frac{8}{15}$.

從上二例可知:

矩形底長 b 尺,高長 h 尺,面積是 s 平方尺,則

$$s = bh.$$

我們在前面說過:矩形的底與高若記做 B 與 H,則此矩形可記做 $\square B.H.$ $B.H$ 與上式中的 bh 截然不同: $B.H$ 是二個線份 B 與 H 所包矩形的簡記法,bh 是二個不名數的相乘積.

正方形是底與高等長的矩形,故從此立可推知下一公式.

正方形一邊長 a 尺,面積是 s 平方尺,則

$$s = a^2.$$

例題三十四

1. 作一圖,表示一平方步等於幾平方尺.

2. 一矩形,底長 4 尺,高長 3 尺 7 寸. 求其面積有幾平方尺.

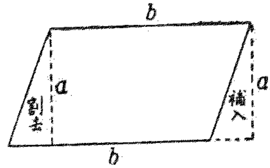
3. 一矩形地面,長 9 丈 3 尺 5 寸,廣 4 丈 6 尺 8 寸. 求此地面的面積,用諸等數表結果.

4. 一矩形,底長 1分米2釐米,面積是 1平方分米56平方釐米. 求此矩形的高.

5. 一正方形面積是 3平方分米61平方釐米. 求其一邊的長.

44. 平行四邊形的面積.

平行四邊形,將一部份割去,移補到別一部份,可以改成矩形,看圖63自可知.



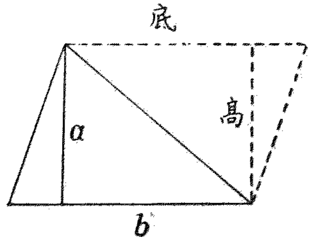
(圖63)

平行四邊形等於其底及高所包矩形.

平行四邊形底長 b 尺,高長 a 尺,面積是 s 平方尺,則 $s=ab.$

45. 三角形的面積.

過三角形二個角頂作對邊的平行線,便可成一個平行四邊形. 因爲平行四邊形的一個對角線可將全形分成兩個合同三角形,故此三角形的面積當然是此平行四邊形面積的一半. 故



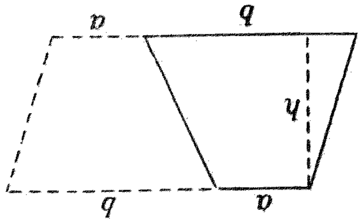
(圖 64)

三角形等於其底及高所包矩形的一半.

三角形底長 b 尺,高長 a 尺,面積是 s 平方尺,則 $s=\frac{1}{2}ab.$

46. 梯形的面積.

將二個合同梯形一正一倒(倒而兼反)拚合起來,可成一平行四邊形,如圖65,此平行四邊形的底是梯形上下二底的和,高是原梯形的高.梯形顯然是此平行四邊形的一半.



(圖65)

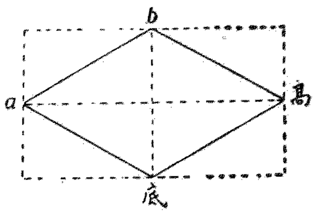
故

梯形等於其二底和與高所包矩形的一半.

梯形二底各長 a 尺及 b 尺,高長 h 尺,面積是 s 平方尺,則 $s=\frac{(a+b)h}{2}$.

47. 菱形的面積.

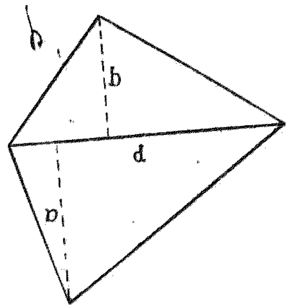
菱形的兩個對角線是互相垂直的,故如圖66,過菱形各角頂作對角線的垂線,便可成一矩形,此矩形的底與高等於菱形的二對角線.我們看圖66,矩形中有八個全等直角三角形,菱形中有四個,可知菱形恰是此矩的形一半.



(圖66)

菱形等於其二對角線所包矩形的一半.

48. 隨意四角形求面積法.



(圖 67)

欲將隨意四角形求面積,可隨意畫一對角線,分此四角形成二個三角形,於是分別求各三角形面積的度量,加其結果. 如圖67,一四角形一個對角線長 d 尺,從餘二角頂到此對角線各作垂線,量得此二垂線一長 a 尺,一長 b 尺,四角形的面積若是 s 平方尺,卽可得 $s=\dfrac{(a+b)d}{2}$.

例 題 三 十 五

1. 有一直角三角形的地面,夾直角的兩邊一長二引,一長一引五丈. 求此地面所含平方丈數.

2. 一個三角形其面積大36平方米,其底長 8 米其. 求高的長.

3. 三角形 ABC 中,已知邊 BC 長12寸,CA 長 8 寸,從 A 到 BC 所作的垂線長 6 寸. 求從 B 到 CA 所作垂線的長.

4. 直角三角形三邊各長 3 尺,4 尺,5 尺. 求從

直角頂到斜邊所作垂線的長.

5. 三角形的一個中線將原形分成二個相等的小三角形. 能不能說明他的緣故?

6. 一平行四邊形的二雙邊一長14寸,他一長6寸. 若將第一雙邊做底,對此的高長3寸,則將第二雙邊做底,對此的高長幾寸?

7. 一塊梯形的地面,上下二底各長3丈3尺及2丈6尺,高長1丈8尺. 求此地面面積有幾平方尺.

8. 一菱形的面積有35平方寸,一個對角線長1尺. 求第二個對角線的長.

9. 一矩形,周長432尺,底比高多長26尺. 求此矩形底及高的長.

解. 設此矩形的高長 x 尺,則底應長 $x+26$ 尺,於是周的長是 $2x+2(x+26)$ 尺. 故從題意可得方程式

$$2x+2(x+26)=432.$$

即 $4x+52=432$, 故 $x=95$.

於是 $x+26=121$.

答. 高長95尺,底長121尺.

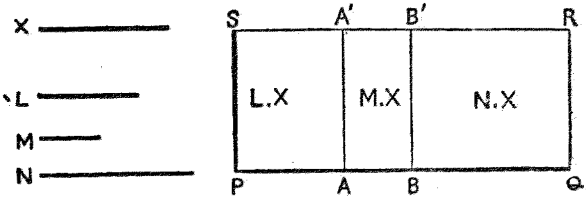
10. 一矩形足球場,長比廣多65碼,長廣和是164碼,求長與廣的碼數.

11. 一矩形底比高的3倍多12尺,周圍共長80尺,

求其各向度的尺數.

12. 一長方花園,長是廣的 6 倍,周圍築一籬笆,其長 154 尺. 求此花園長與廣的尺數.

49 線份所包的矩形.



(圖 68)

我們看圖 68.一個矩形 $PQRS$ 底 PQ 是三部份 PA, AB, BQ 的和,此三部份各與三個線份 L, M, N 相等,又高 PS 等於又一線份 X.

從底上分點 A, B 各作底 PQ 的垂線 AA', BB', 到對邊 SR. 則 AA', BB' 的長都等於 X. 於是

$$\square PQRS=(L+M+N).X,\quad \square PAA'S=L.X,\quad \square ABB'A'=M.X,$$
$$\square BQRB'=N\cdot X.$$

因為全量等於其諸部份的和,故此

(一) $(L+M+N).X=L.X+M.X+N.X.$

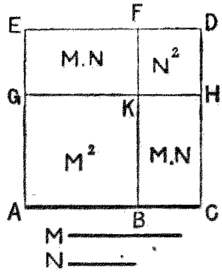
一線份與諸線份和所包矩形等於此一線份與諸線份中各線份所包矩形的和.

注意. 為簡便起見，▭$PQRS$ 可省記做 ▭PR，或 ▭QS. 以後都是這樣。

再看圖 69，□$ACDE$ 各邊都等於二個線份 M, N 的和，如

$$AB=EF=AG=CH=M,$$

$$BC=FD=GE=HD=N.$$



（圖 69）

聯BF,GH,則將原正方形分成四部份,顯然

$$▭GB=M^2,\quad ▭FH=N^2,\quad ▭FG=M.N=▭HB.$$

又因 $$□AD=(M+N)^2,$$

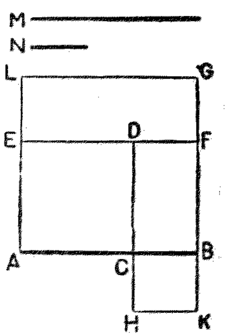
故(二) $$(M+N)^2=M^2+N^2+2.M.N.$$

二線份和上正方形等於各線份上正方形和加上此二線份所包矩形的二倍.

次,再看圖 70. 線份 $AB=M$. 在 AB 中取 C,命 $BC=N$. 從 AB 向上作正方形 $ABGL=M^2$. 從 BC 向下作正方形 $BCHK=N^2$. 於是

$$AC=AB-CB=M-N.$$

從 AC 向上作正方形 $ACDE=(M-N)^2$, E 當然在 AL 上. 延長 ED,交 BG 於F,則



（圖70）

$FB=M-N$，故$FK=(M-N)+N=M$，$GF=M-(M-N)=N$，

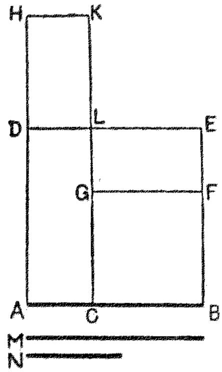
於是 $\quad \square LF=M.N=\square FH.$

因爲 $\square AD=\square AG+\square BH-\square LF-\square FH$，故此

（三）$\quad (M-N)^2=M^2+N^2-2.M.N.$

二線份差上正方形等於各線份上正方形和,減去此二線份所包矩形的二倍.

末,看圖71. 取線份$AB=M$,在AB中再取線份$BC=N$. 從AB向上作正方形$ABED=M^2$. 從BC向上作正方形$BCGF=N^2$. F當然在BE上. $AC=EF=M-N$. CG延線交DE於L. 將$\square LF$割下,移放在$\square LH$. 於是$AH=AD+DH=AD+GF=AB+CB=M+N$,



（圖71）

$$HK=EF=M-N,$$

故 $\quad \square HC=(M+N)(M-N).$

因爲 $\quad \square AE-\square CF=\square DC+\square FL=\square HL+\square DC=\square HC.$

故此

（四）$\quad M^2-N^2=(M+N)(M-N).$

二線份上正方形的差等於此二線份和

與差所包矩形.

注意. (一),(二),(三),(四)四個公式都是表圖形本身的關係,與長及面積的數目無關. 代數學中類此的乘法公式,是從此產生出來的,毋子不可混爲一談.

例題三十六

1. 畫一圖,表示一線份與別二線份差所包矩形等於此一線份與別二線份中各線份所包矩形的差.

2. 畫一圖,表示一線份上的正方形等於此線份一半上正方形的四倍.

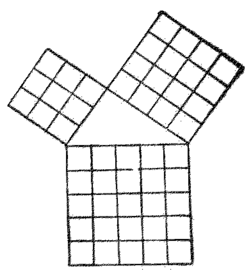
3. 隨意畫一個線份 AB,取他的中點M,再在MB上隨意取一點P. 作圖表示$\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=2.\overline{AM}^2+2.\overline{MP}^2$.

4. AB,M,P都依照前題,作圖表示

$\overline{AP}^2-\overline{PB}^2=AB.2MP$.

50. 商高定理.

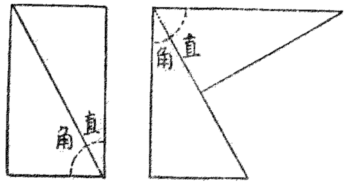
先,看圖72,可知直角三角形三邊的長若是3尺,4尺,5尺時,直角二邊上正方形面積的和等於斜邊上正方形的面積.



(圖72)

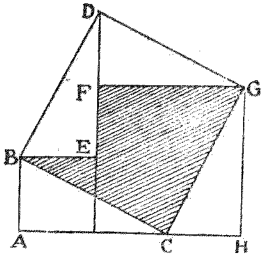
現在要看此性質能不能普徧成立,第一要先知道一個直角三角形中二個銳角的和是一直角. 這事將兩塊全等

的直角三角板拚湊起來,如圖73,便可以量得確實不誤.



(圖73)

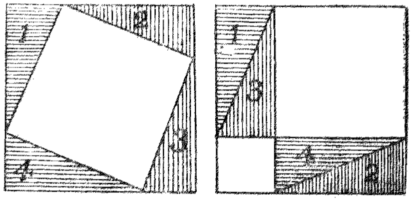
於是照圖74,隨意畫一個直角三角形ABC,在AC延線上取CH,叫他等於BA,從H作CH的垂線HG,叫他等於AC,於是ΔCHG完全與ΔBAC合同. 故HG上正方形與AB上正方形便是直角三角形二個直角邊上的正方形. $\measuredangle BCA+HCG$已經知道是直角,故$\measuredangle BCG=2R_{\measuredangle}-R_{\measuredangle}=R_{\measuredangle}$. 在二正方形和$AHGFEB$中割出$\Delta ABC$移放在$\Delta FDG$,再割出$\Delta CHG$,移放在$\Delta BED$. 於是$BCGD$的四邊都是合同三角形的對應邊,當然相等;他的四角照圖74看來都是直角;故此他是BC上的正方形. 如此,直角三角形直角二邊上正方形的和等於斜邊上的正方形,不問三邊的長短怎樣,普遍成立的了.



(圖74)

我們再看圖75. 將直角三角形直角二邊的和做正方形的一邊,作出左右二個合同的正方形. 在此二

個正方形中各自割去四個合同直角三角形,則賸下的面積應該相等. 但依右邊的割法,賸下的是



(圖 75)

直角三角形直角二邊上正方形的和;依左邊的割法,賸下的是直角三角形斜邊上的正方形. 這個相等也普遍成立了.

直角三角形直角二邊上正方形的和等於斜邊上的正方形.

此定理,在歐美叫他做畢氏(Pythagoras)定理,但是我們在三代時商高已與周公講此定理了. 依照第一發明人應享榮名的慣例,此定理應該叫做**商高定理.**

若直角三角形直角二邊的長是 a 尺,b 尺,斜邊的長是 c 尺,則

$$a^2+b^2=c^2.$$

(參看算術 116 款).

上面圖 75 是畢氏當時的證法. 我國文獻散亡,商高當時有無證法已無從查考,但歷代來對此定理的證法很多,以前有一專書,叫做青出朱入圖,完全是用割補

法證此定理,證法不下幾十種,圖74亦是此中的一種,不過最初證的是誰,何人發見何圖,都一無記載,大抵前輩對於此方面很不重視,我們也便無從推定了.

例題三十七

1. 作一個二等邊三角形,從頂點到底作垂線.(1)比較此垂線分底所得兩份的大小.(2)若等邊長13釐米,底長10釐米.求此垂線長幾釐米.

2. 一個二等邊三角形,等邊長 a 寸,底長 b 寸.求對底的高長幾寸.

3. 一個等邊三角形每邊長 a 寸.求其隨意一高長幾寸.

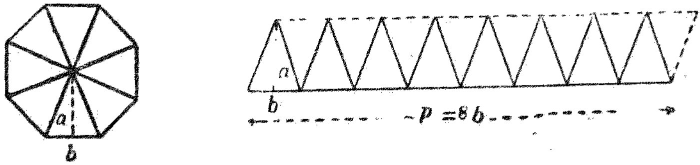
4. 一個正多角形,半徑長 a 寸,一邊長 b 寸.求其邊心距長幾寸.

5. 一個正多角形,一邊長 b 寸,邊心距長 c 寸.求其半徑長幾寸.

51. 正多角形的面積.

從正多角形中心到各角頂作半徑,可將此正多角形分成許多二等邊三角形,各三角形的底是正多角形的邊,高是正多角形的邊心距.每一三角形的面積等於其底高與所包矩形的一半,故此正多角形的面積等於各邊與邊心距所包矩形一半的和,即

正多角形的面積等於其周與邊心距所包矩形的一半.



（圖 76）

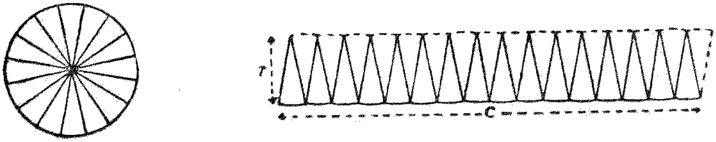
若正多角形周長 p 尺,邊心距長 a 尺,面積爲 s 平方尺,則 $s=\frac{1}{2}pa.$

又若正多角形的邊數是 n, 每邊長 b 尺,則 $p=nb$, 而 $s=\frac{n}{2}ab.$

52. 圓的面積.

將圓周隨意等分做多少份,挨次聯兩兩分點作弦,便可得圓內接正多角形,這是39款中已知的事. 要是等分的份數非凡之多,每份便非凡之小,此每份弧所對的弦便差不多與弧相合,故此一個圓的面積可以當做邊數非凡多的內接正多角形的面積,此時正多角形的邊心距簡直可化成圓的半徑. 因爲正多角形的面積等於其周與邊心距所包矩形的一半,故此

圓面積等於圓周與半徑所包矩形的一半.



（圖 77）

圓的半徑長 r 尺,周長 $C=2\pi r$ 尺,面積是 s 平方尺,則 $$s=\frac{1}{2}rc=\pi r^2.$$

例題三十八

1. 半徑長 2 釐米的一圓內接正三角形一邊的長是 3.46 釐米. 求邊心距的長,及此正三角形面積的平方釐米數.

2. 半徑長 2 釐米的圓內接正六角形一邊的長是 2 釐米. 求邊心距的長及此正六角形面積的平方釐米數.

3. 半徑長 2 釐米的圓內接正十二角形一邊的長是 1.04 釐米. 求此正十二角形邊心距的長及其面積的平方釐米數.

4. 半徑長 2 釐米的圓內接正四角形一邊的長是 2.8 釐米. 求此正四角形邊心距的長及其面積的平方釐米數.

5. 半徑長 2 釐米的圓內接正八角形一邊的長是 1.5 釐米. 求此正八角形邊心距的長,並求其面積的

平方釐米數.

6.　半徑長 2 釐米的圓內接正十六角形一邊約長 0.78 釐米. 求此正十六角形邊心距的長,並求其面積的平方釐米數.

7.　半徑長 2 釐米的圓,求其面積的平方釐米數.

8.　比較 1, 2, 3, 7 四題所得面積的大小.

9.　比較 4, 5, 6, 7 四題中所得面積的大小.

第四章　立體圖形及其度量

53. 關於平面的公理.

用一平面中一直線做軸,將此平面繞軸旋轉一周,則此平面可經過空間的任何位置,故可經過軸外的隨意一點. 若此點的位置一定,則過此點與軸的平面,其位置亦一定. 因未轉到此點前的平面不含此點,已轉過此點後的平面亦不含此點,故含軸與此點的平面只有一個.

含一直線及此線外一點的平面有一個而只有一個.

又因為過二點可作一直線,故

經過不在一直線上的三點可有一個平面而只有一個平面.

次,我們已知一個半射線在一平面中圍繞原點旋轉一周,則此半射線可經過平面中的任何位置. 今設二個平面有公共一點O,在第一平面中,將O做原點隨意畫一個半射線,再將此半射線在第一平面中繞O旋轉一周,則此半射線必在第二平面的一邊轉到又一邊再回原處,故必經過第二平面;然此半射線所過的路便是第一平面,故第一平面必在O以外更經過第二平面,即此二個平面在O以外至少必尚有一處公共.

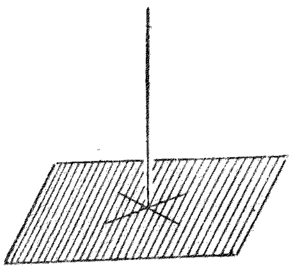
二個平面若有一點公共,則必尚有第二點公共.

再,已經知道經過不在一直線上的三點必有一個平面,而一個圖形不是完全在一平面上的方纔是立體圖形,故

一立體圖形中至少要有四點.

53. 平面與直線的特別關係位置.

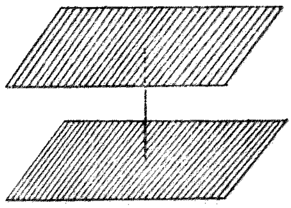
用一個直角的一邊做軸,將此直角繞軸旋轉一周,則此角的第二邊轉成一平面,此時角的第一邊叫做**立**於此平面上,原來的角頂叫做第一邊的足,若此旋轉隨意在半路停止,則第二邊便成



（圖 78）

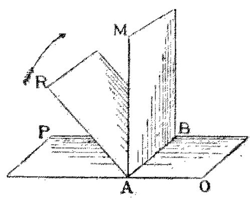
經過第一邊的脚而在平面中的一個半射線,此半射線當然仍與第一邊成直角,即與第一邊垂直。如此一個直綫立在一平面上,與經過其足而在平面中的隨意直綫垂直,此直綫叫做平面的**垂線**.

次,若有二個平行直綫,用他們的一個公共垂綫做軸,將全圖繞軸旋轉一周,則一雙平行綫旋轉成一雙平面。因一雙平行綫不相交,故其轉成的一雙平面亦决不相會。如此不相會的二平面叫做**平行平面**(看圖79)。



(圖79)

又二個平行直綫,依此法將一綫旋轉成一平面,一綫照舊,則照舊的一綫與轉成的平面當然不相會。如此的直綫與平面叫做**平行**.



(圖80)

復次,如圖80,將一個平面OP的一部份AP圍繞此平面中的一個直綫AB旋轉,旋轉到一個位置BM,此時轉過的路程恰等於從AP直轉到合於平面OP又一部份BO所要旋轉路程的一半,則此平面BM叫做**垂直於**平面OP.

例題三十九

1. 就實物舉二個平面相會的例.

2. 就實物舉二個平面平行的例.

3. 就實物舉一平面垂綫的例.

4. 就實物舉二個平面互相垂直的例.

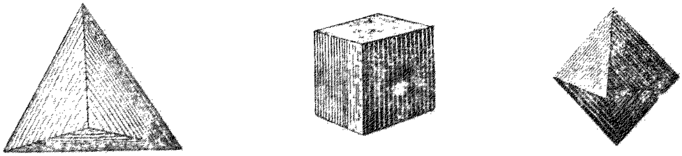
55. 多面體.

不論平面或曲面包圍出空間一部份來的叫做**立體** (Solid),所包圍的空間一部份叫做**體積** (Volume).

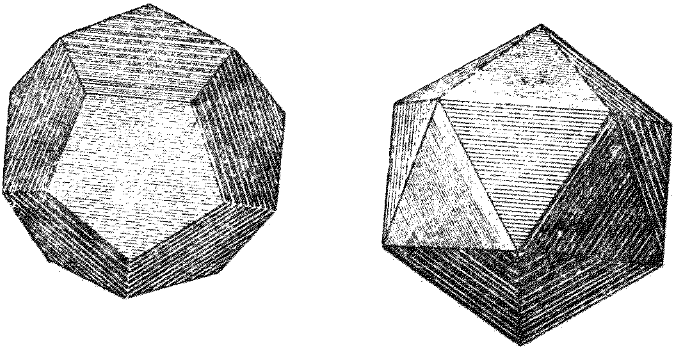
許多平面圍成的立體叫做**多面體** (Polyhedron).圍此多面體的各個平面,都是平面中的多角形,都叫做多面體的**面** (Faces),各兩個面的交綫叫做多面體的**稜** (Edges),許多稜的交點叫做多面體的**頂點** (Vertices).

許多合同正多角形圍成的多面體叫做**正多面體** (Regular Polyhedron).正多面體共有五種:有四個面的叫做**正四面體** (Regular Tetrahedron);有六個面的叫做**正六面體** (Regular Hexahedron);有八個面的叫做**正八面體** (Regular Octahedron);有十二個面的叫做**正十二面體** (Regular Dodecahdron);有二十個面的叫做**正二十面體** (Regular Jcosahedron).正六面體又叫做**正方體**省稱做**立方** (Cube).

自然,多面體不必定是正多面體,例如六面體的六個面不必定要是正四角形,是六個平行四邊形也可以,



（圖 81）



（圖 82）

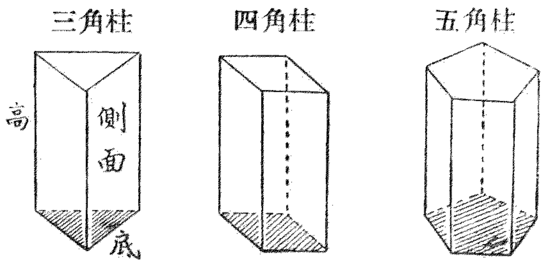
是六個距形也可以。六個距形包圍成的六面體叫做**矩平行面體**省稱做**長方體**(Rectangular Parallelopiped)。

一間教室普通是一個長方體,他有三個向度,是**長**,**深**,**高**.

56. 角柱體及角錐體.

兩個合同正多角形分居兩頭,四側都是與此二面垂直的許多合同矩形,如此的多面體叫做**正角柱體**(Reguiar Prism),二個正多角形叫做柱體的**底**(Bases),許多矩形叫做柱體的**側面**(Lateral Faces),側面與側面的交綫叫做**側稜**(Lateral Edges),側稜的長便是正角柱體的

高 (Altitude). 許多側面面積的和叫做柱體的**側面積** (Lateral Area), 側面積再加上二個底面的面積叫做此柱體的**全面積** (Total Area).



(圖 83)

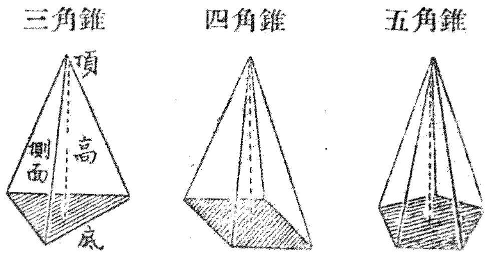
正角柱的底面是三角形, 四角形, 五角形, 等, 此角柱便叫做**三角柱** (Triangular), **四角柱** (Quadrangular), …等,

正四角柱顯然便是長方體.

次, 從一平面正多角形的中心作此面的垂綫, 從此垂綫上一點聯正多角形的各角頂作諸綫份, 此諸綫份與正多角形的邊圍出許多合同二等邊三角形, 此諸合同二等邊三角形與正多角形包圍成一多面體, 叫做**正角錐體** (Regular Pyramid), 正多角形叫做此錐體的**底**, 許多三角形叫做錐體的**側面**, 二個側面的交綫叫做**側稜**, 諸側面的公共角頂叫做此錐體的**頂點** (Vertex), 從頂點到底的垂線部份叫做此錐體的**高**, 各側面即各二等邊三角形的高, 叫做錐體的**斜高** (Slant height). 許多側面面積的和叫做錐體的**側面積**. 側面積再加上底面

的面積叫做錐體的**全面積**.

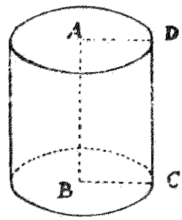
正角錐的底面是三角形,四角形等,此角錐便叫做**三角錐**,**四角錐**,等.



(圖 84)

正三角錐顯然便是四面體.

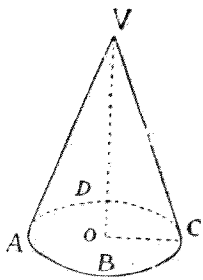
57. 圓柱體及圓錐體.



(圖85)

用一個矩形的一邊做軸,將此矩形繞軸旋轉一周,則得一曲面體叫做**直圓柱體**(Right circular Cylinder),旋轉的軸AB便叫做此柱體的**軸** (Axis),軸的二隣邊AD, BC轉成的二個圓叫做此柱體的**底**,軸的對邊DC轉成的曲面叫做此柱體的**側面**.軸便是此直圓柱體的**高**. 側面的面積叫做柱體的**側面積**. 側面積再加上二個底面積叫做柱體的**全面積**.

次,用一個直角三角形的直角一邊做軸,將此三角形繞軸旋轉一周,則得一曲面體叫做**直圓錐體**(Right circular Core),旋轉的軸VO便叫做此錐體

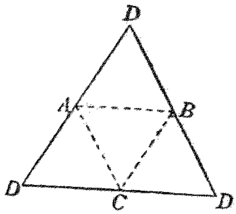


(圖86)

的**軸**,軸的隣邊OC轉成的圓叫做此錐體的**底**,斜邊VC所轉成的曲面叫做錐體的**側面**,V叫做錐體的**頂點**,軸VO便是此直圓錐體的**高**,斜邊VC叫做此錐體的**斜高**. 側面的面積叫做錐體的**側面積**. 側面積再加底面積叫做錐體的**全面積**.

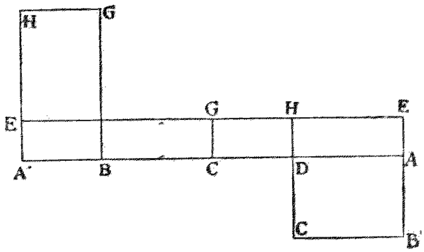
例題四十

1. 照圖87,在另紙上畫四個合同正三角形,將此全圖剪下,沿邊須留少些餘紙以便粘合. 於是粘成一個正四面體.



(圖87)

2. 將圖88畫在另紙上,注意 $AD=CB$, $DC=BA'$, $EH=AD$, 所有六個矩形中兩兩合同. 於是將全圖剪下(沿邊稍留餘紙),粘成一個長方體.

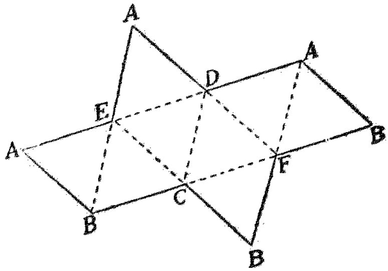


(圖88)

3. 做照前題,自己畫六個相連的合同正方形,再剪粘成一個正方體.

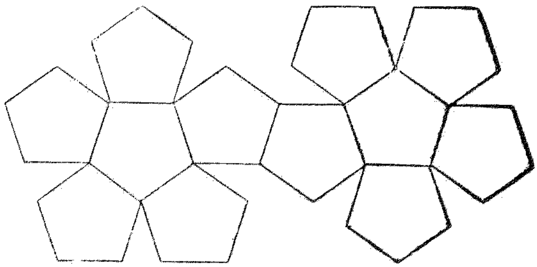
4. 將圖89畫在另紙上,注意是相連的八個合同

正三角形。於是將全圖剪下(沿邊外稍留餘紙),粘成一個正八面體。



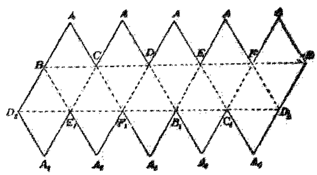
(圖 89)

5. 將圖90畫在另紙上,注意是相連的十二個合同正五角形。於是將全圖剪下(沿邊外稍留餘紙)粘成一個正十二面體。



(圖 90)

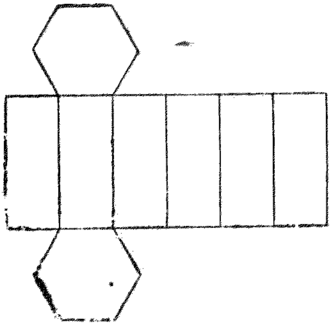
6. 將圖91畫在另紙上,注意是相連的二十個合同正三角形。於是將全圖剪上,粘成一個正二十面體。



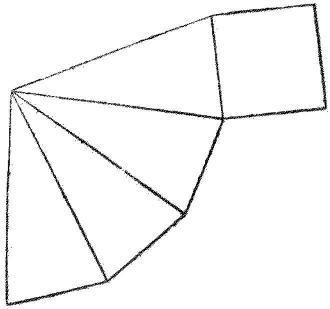
(圖 91)

7. 將圖92畫在另一紙上,注意上下是二個合同正六角形,中間是六個相連合同矩形,矩形的短邊等於正六角形的一邊。於是將全圖剪下粘成一正六角柱

體.



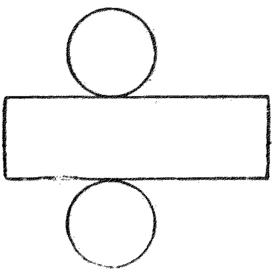
(圖 92)



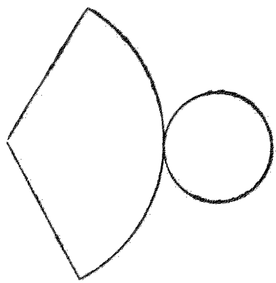
(圖 98)

8. 將圖93畫在另一紙上,注意是相連的四個合同二等邊三角形及一個正方形. 於是將全圖剪下粘成一正四角錐體.

9. 將圖94畫在另一紙上,注意上下二圓相等,中間矩形的長邊等於上下二圓的圓周. 於是將全圖剪下,粘成一直圓柱體.



(圖 94)



(圖 95)

10. 將圖95畫在另一紙上,注意扇形的弧等於小

圓周.　於是將全圖剪下,粘成一直圓錐體.

58. 立體表面積.

立體的表面積是立體外面各面面積的和.　我們從例題四十的前六題,可以知道:

正四面體的表面積是四個正三角形面積的和;

正六面體的表面積是六個正方形面積的和;

正八面體的表面積是八個正三角形面積的和;

正十二面體的表面積是12個正五角形面積的和;

正二十面體的表面積是20個正三角形面積的和.

次,從圖92,知**正角柱體的側面積等於底的周圍與高所包的矩形.**　故

正角柱體底的周圍是P,高是H,側面積是L,底面積是B,全面積是T,則

$$L=H.P,\qquad T=2B+H.P.$$

再,從圖93,知**正角錐體的側面積等於底面的周圍與斜高所包矩形的一半.**

正角錐體底的周圍是P,斜高是S,側面積是L,底面積是B,全面積是T,則

$$L=\frac{S.P}{2}\qquad T=B+\tfrac{1}{2}S.P.$$

又,從圖 94,知**直圓柱體的側面積等於底的周圍與高所包的矩形.** 故

直圓柱體底的半徑是 R, 高是 H, 側面積是 L, 全面積是 T, 則

$$L=2\pi RH, \qquad T=2\pi R(H+R).$$

末,從圖 95,知直圓錐的側面積等於一個扇形的面積,此扇形的弧等於錐底的周圍,扇形的半徑等於錐的斜高. 依照 52 款圓求面積的理論,可知一個扇形的面積等於其弧與其半徑所包矩形的一半. 於是

直圓錐的側面積等於底的周圍與斜高所包矩形的一半. 故

直圓錐體底的半徑是 R, 斜高是 S, 側面積是 L, 全面積是 T, 則

$$L=\pi R.S, \qquad T=\pi R(S+R).$$

例題四十一

1. 每邊長 2 寸的正方體表面積共有多少平方寸?

2. 一正三角柱的底邊長 6 寸,底面積是 12.6 平方寸,全面積是 102.6 平方寸. 求此角柱體高的寸數.

3. 一正三角錐體,底的每邊長 6 寸,高長 8 寸.

求此錐體側稜的長,斜高的長,及側面積.

4. 一圓柱體底的半徑長 7 寸,高長 11 寸. 試用 $\pi=\frac{22}{7}$ 求此柱體的側面積及全面積.

5. 一圓錐體底的半徑長 2 寸 1 分,高 2 寸 8 分. 用 $\pi=\frac{22}{7}$ 求此錐體斜高的長,側面積及全面積的大小.

59. 體積單位及長方體的體積.

我們已經知道**平面或曲面封閉得的空間一部份叫做體積**. 體積自然又是一種量.

要計算體積,要先定出體積的單位來,求所有的體積與體積單位的比值,得分數.

體積的單位,是將長的單位做各邊的一個正方體. 這樣,可使體積與長及面積都發生密切的關係. 此正方體的一邊是尺,便叫他做**立方尺**,一邊是寸的叫做**立方寸**,一邊若是米的叫做**立方米**等等,其餘各種單位都已經記在算術諸等數裏了.

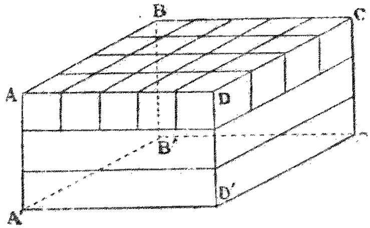
與正方體最相類的是長方體,他有三個向度,叫長,深,高,或者叫做長,廣,高,長方體的體積全靠此三個向度來決定的,所以可將長方體當做其長,廣,高所包的體. 於是,一個長方體的長,廣,高若是 A, B, C, 則可略記做長方體 $A.B.C.$ 又若長方體的底是 S, 高是 H, 則可略記

做長方體$S.H.$　照此推廣,正方體的每邊是A,可略記做正方體$\overline{A}^3$,讀做A上的正方體.

現在我們來看怎樣用長方體的向度求他體積的度量.

例.　一長方體,長五尺,廣四尺,高三尺.　求其體積包含多少立方尺.

如圖96,長方體$ABCD-A'B'C'D'$,AD是長,AB是廣,AA'是高.　等分AA'做三份,每份的長都是1尺,過各分點作垂直於AA'的平面,則將此立體分成三層,每層是高一尺的小長方體,各小長方體的體積當然相等.　次,等分AB做四份,每份的長都多1尺,過各分點作垂直於AA'的平面,則將各層都分做四條,每條的長還是5尺,廣與高都是1尺.　再,將AD等分做5份,每份長1尺,從各分點再作垂直於AD的平面,則又將各條都分做五塊,每塊都是長廣高都是1尺的正方體,即每塊都是一個立方尺.　每條有五個立方尺,每層有四條,共有$5\times4=20$個立方尺,三層有$5\times4\times3=60$個立方尺,故長方體的體積是60個立方尺.



(圖96)

普偏說,若一個長方體的長是 a 尺,廣是 b 尺,高是 c 尺,而其體積是 v 立方尺,則

$$v=a\times b\times c.$$

次,看圖96中底面 $ABCD$ 是長5尺廣4尺的矩形。照43款,知道此底面的面積是 $5\times4=20$ 平方尺. 於是如上,將長方體分做三層,每層的高是1尺,則每層的體積是 $20\times1=20$ 立方尺,故三層的體積共是 $20\times3=60$ 立方尺. 即將長方體中底面積所含平方尺的倍數,與長所含尺的倍數乘起來,亦可得體積中所含立方尺的倍數.

若一個長方體的底面積是 s 平方尺,高是 h 尺,體積是 v 立方尺,則

$$v=s\times h.$$

60. 柱體及錐體的體積.

將洋鐵作出種種角柱及圓柱形的桶,叫他們的底面積都相等,高也都相等. 將水灌滿一個桶,於是將此桶中的水倒入他桶中,便恰好可以倒滿他桶. 此一實驗告訴我們:

凡是等底等高的柱體,他們的體積必定相等.

因爲長方體是一種四角柱.照前款,若是已經知道長方體的底面積與高,便可求他的體積. 故此合上本款的實驗便可知道:

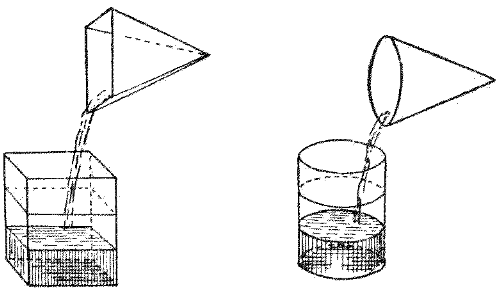
若柱體的底面積是 s 平方尺,高是 h 尺,體積是 v 立方尺,則

$$v = s \times h.$$

又若圓柱的底半徑是 r 尺,高是 h 尺,體積是 v 立方尺,則

$$v = \pi r^2 h.$$

次,再將洋鐵皮做成各種角錐體及圓錐體,叫他的底與上面所說各種柱體的底全等,高也與柱體的高相等. 於是將錐體杯盛滿水倒進柱體桶中,連倒三回桶恰滿,可見:



(圖 97)

錐體的體積等於等底等高柱體體積的三分之一. 次

若錐體底面積是 s 平方尺,高是 h 尺,體積是 v 立方尺,則

$$v = \frac{1}{3}sh.$$

又若體錐的底半徑是 r 尺,高是 h 尺,體積是 v 立方尺,則

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

例題四十二

1. 一正六角柱,底是每邊 3 尺的正六角形,底的邊心距是2.6尺,柱高10尺. 求此柱體積有幾立方尺.

2. 一圓柱底半徑是$2\frac{1}{2}$尺,高 8 尺. 求此圓柱的體積.

3. 一空心鐵柱,外面的底半徑是28寸,裏面的底半徑是26寸,高32寸. 求此柱含有鐵幾立方寸.

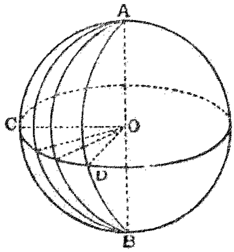
4. 一正六角錐與 1 題中的正六角柱等底等高,求此錐的體積.

5. 一正方錐,底的每邊長 8 尺,高12尺. 求此錐的體積.

6. 一盛水的漏斗,口的周圍是22寸,從頂到口的高是 5 寸. 求此漏斗可盛水多少立方寸.

61. 球. 地球,及經緯度.

如圖 98,ACB 是一個半圓周,AOB 是其直徑,O 是中心,OC 是垂直於 AB 的半徑,用 AB 做軸,將此半圓圍繞 AB 旋轉一周,則半圓從此旋轉所生的立體叫做**球**(Sphere),半圓周旋轉成球的表面,OC 旋轉成一個圓,叫做球的**大圓** (Great circle).O 便叫做球的**中心**,圓的半徑便叫做球的**半徑**.圓的直徑便叫做球的**直徑**.



(圖98)

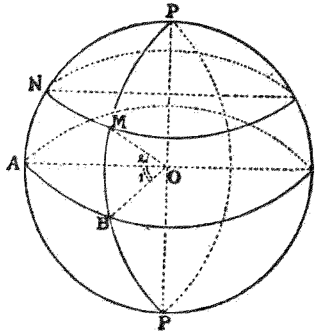
若從半圓周 ACB 上隨意一點到 AB 引垂線,則當半圓圍繞 AB 旋轉一周時,此垂線可轉成一個圓,叫做此球的**小圓** (Small circle).一個球面上大圓與小圓的分別,大圓是通過球心的,小圓是不過球心的.

不問球的大圓小圓,垂直於圓的平面所作球的直徑叫做此圓的**軸**(Axis),軸的兩端叫做此圓的**極** (Poles).例如在圖 98 中,AB 是大圓 OCD 的軸,A 與 B 都是極.

我們所居的地球便是一個球,**赤道**是地球面上的一個大圓周,他的兩個極一個叫**北極**,一個叫**南極**. 經過南北兩極的許多大圓周叫做**經線**,經過某一地的經線叫做此地的**子午線**(Meridian). 平行於赤道的許多小圓周叫做**緯線圈** (Parallels of Latitude). 如圖 99, 大

圓 AB 是赤道,大圓 PNA,PMB 都是經線,小圓 NM 是緯線圈.

設地球面上有一位置 M,可過此 M 作經線 PMB,及緯線 NM. 若 B 在赤道上,N 在經過英國格林威契 (Greenwich) 天文台的經線上,則弧 BM 的度數便叫做 M 的**緯度** (Latitude),弧 NM 的度數便叫做 M 的**經度** (Longitude),M 的位置可從他的經緯度完全決定. 在圖 99 中,弧 NM 的度數等於弧 AB 的度數,也等於角 AOB 的度數;又弧 BM 的度數等於角 BOM 的度數,所以經度也可以說是二經線間的角,緯度也可說是二緯線間的角.



(圖 99)

經度從經過格林威契的子午線量起,從此向東叫**東經**,向西叫**西經**,東西各一百八十度.

緯度從赤道量起,從此向北叫**北緯**,向南叫**南緯**,南北各九十度.

今將我國各省城的經緯度列表於下:

江蘇	江寧(京都)	北緯32度　3分	東經 118度53分
陝西	西安(陪都)	北緯34度　5分	東經 108度50分

河北	保定	北緯 38 度 53 分	東經 115 度 28 分
山東	濟南	北緯 36 度 42 分	東經 117 度 15 分
安徽	安慶	北緯 30 度 36 分	東經 117 度 6 分
山西	太原	北緯 37 度 53 分	東經 112 度 29 分
甘肅	蘭州	北緯 36 度 2 分	東經 103 度 48 分
四川	成都	北緯 30 度 42 分	東經 104 度 6 分
貴州	貴陽	北緯 26 度 18 分	東經 106 度 40 分
雲南	雲南	北緯 25 度 15 分	東經 102 度 48 分
廣東	廣州	北緯 33 度 12 分	東經 113 度 17 分
江西	南昌	北緯 28 度 30 分	東經 115 度 50 分
廣西	桂林	北緯 25 度 16 分	東經 110 度 18 分
湖北	武昌	北緯 30 度 35 分	東經 114 度 46 分
湖南	長沙	北緯 28 度 22 分	東經 112 度 50 分
河南	開封	北緯 34 度 53 分	東經 114 度 40 分
福建	福州	北緯 26 度 7 分	東經 119 度 18 分
浙江	杭州	北緯 30 度 15 分	東經 120 度 16 分
遼寧	瀋陽	北緯 41 度 54 分	東經 123 度 58 分
吉林	吉林	北緯 43 度 52 分	東經 126 度 53 分
黑龍江	龍江	北緯 47 度 28 分	東經 124 度 6 分
蒙古	庫倫	北緯 48 度	東經 107 度
新疆	迪化	北緯 43 度 27 分	東經 88 度 28 分

西藏　拉薩	北緯29度48分	東經　91度　5分

又世界各大都會的經緯度如下:

洛陽(行都)	北緯34度48分	東經　112度29分
北平	北緯39度53分	東經　116度29分
上海	北緯31度13分	東經　121度27分
漢口	北緯30度35分	東經　114度18分
天津	北緯39度　8分	東經　117度16分
倫敦	北緯51度32分	西經　0度　5分
紐約	北緯41度　6分	西經　74度
柏林	北緯52度31分	東經　13度23分
巴黎	北緯48度50分	東經　2度20分
東京	北緯35度43分	東經　139度40分

62.　經差及時差

兩地經線度數的差叫做**經差**.

若兩地的經度同是東經,或同是西經,則其經差可用減法得到;若一是東經,又一是西經,則其經差可用加法得到.

例一. 有兩地,一在東經156度30分處,一在東經125度23分處.求此兩地的經差.

運算. (156度30分)−(125度23分)=31度7分.　答.

例二. 華盛頓在西經77度4分處,求與我國京都的經差

運算. (118度53分)+(77度4分)=195度57分. 答

地球每日從西向東自轉一周,即每24時轉過360度. **地球轉到太陽正照某一經線時,在此經線上的各地是正午,在此線東面的各地是午後,西面的各地是午前.** 故各地的時刻要用此地的經度來定,其時刻的差叫做**時差.** 當然,

360°與兩地經差的比等於24時與其時差的比.

例三. 有甲乙兩地,甲地一點鐘時乙地三點二十八分四十八秒. 已知甲地的經度是東經119度20分求乙地的經度.

解. 兩地的時差是

$$(3^{時}28^{分}48^{秒})-(1^{時})=2^{時}28^{分}48^{秒}=2\frac{28\frac{48}{60}}{60}時=2\frac{12}{25}時.$$

從上,可得比例式

$$24時:2\frac{12}{25}時=360度:x,度$$

故得兩地的經差是 x度$=37\frac{1}{5}$度$=37$度12分.

因乙地的時刻在甲地前,故乙在甲的東面,而乙地的經度是東經

(119度20分)+(37度12分)=156度32分．答．

例四． 德國柏林的經度是東經13度23分,美國華盛頓的經度是西經77度4分．當柏林上午11點鐘時,求華盛頓的時刻．

解． 兩地的經差是

(13度23分)+(77度4分)=90度27分=$90\frac{27}{60}$度=$90\frac{9}{20}$度．

於是得比例式　$360:90\frac{9}{20}=24:x$,

而兩地的時差是　x時=$6\frac{3}{100}$時=6時1分48秒．

華盛頓在柏林西面,則華盛頓的時刻應在柏林後．於是從　(11時)−(6時1分48秒)=4時58分12秒．

得華盛頓的時刻是上午4時58分12秒．

例題四十三

1. 我國吉林東境的經度是東經136度35分,葉爾羌西境的經度是東經72度12分．求此兩地的時差．

2. 朝鮮京城的經度是東經126度57分．求我京都正午時朝鮮京城的時刻．

3. 德國柏林的時刻比俄國彼得堡的時刻後1時8分．求彼得堡的經度．

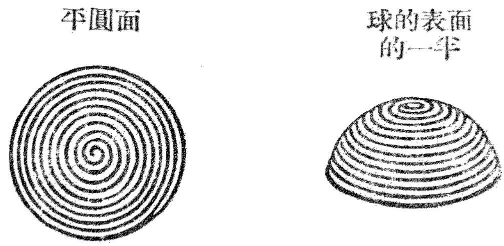
4. 土耳其都城君士坦丁的時刻比巴黎前1時46分．求君士坦丁的經度．

5. 一地的晝夜與我京都完全相反,求此地的經

度.

63. 球的表面積及體積.

取半球與一個平面的圓,叫他們的半徑相等. 用柔軟的小繩盤繞在半球的曲面上,



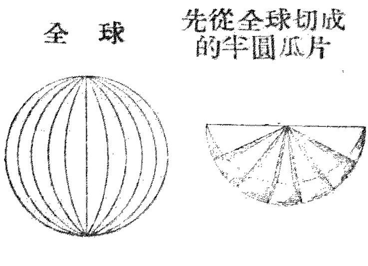
(圖 100)

同時盤繞在平圓的面上,於是放開來比較兩繩的長短,你便可以發見半球上盤的繩等於平圓上所盤繩的二倍. 那麼,要是將繩盤滿全球表面,這些繩一定可以盤滿四個平圓面. 此實驗告訴我們:

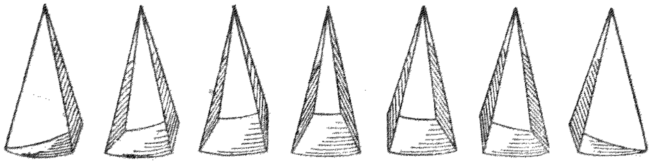
球的全表面積等於其大圓面積的四倍.

若球的半徑是 r 尺,球的表面積是 s 平方尺,則

$$s = 4\pi r^2.$$



再從每片切成的角錐



（圖 101）

次,將一個球像切西瓜的樣子切成許多半圓的瓜片,再將每片切成許多很細的角錐. 瓜片愈薄,角錐愈細,那角錐的底愈與平面相近,角錐的高當然便是球的半徑.

假使球半徑是 r 尺,各角錐的底面積是 $b_1, b_2\, b_3, \cdots$ 平方尺;各角錐的體積是 $v_1\, v_2\, v_3 \cdots$, 立方尺,則照 60 款,

$$v_1 = \tfrac{1}{3} rb_1, \quad v_2 = \tfrac{1}{3} rb_2, \quad v_3 = \tfrac{1}{3} rb_2 \cdots.$$

又若球的體積是 v 立方尺,則

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots = \tfrac{1}{3} r(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots).$$

再,球的表面積若是 s 平方尺,則顯然,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots = s = 4\pi r^2.$$

於是　$$v = \tfrac{1}{3} r \times 4\pi r^2 = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

若球的半徑是 r 尺,球的體積是 v 立方尺,則　$v = \frac{4}{3}\pi r^3$.

例題四十五

1. 一球的直徑長10寸,求其表面積.

2. 地球的半徑大約是4000哩. 求地面(連洋海在內)約有多少方哩.

3. 兩個球的半徑各是5寸及10寸. 求此兩球表面積的比.

4. 兩個球的半徑各是5寸及10寸. 求此兩球體積的比.

5. 求地球的體積約有多少立方哩.

6. 鋼每立方呎重490磅. 求半徑3吋的鋼球約重多少磅.

問題集一

1. 若二個直線中二雙點已經相合,此二直線位置的關係如何?

2. 若二個直線的一部份已經相合,此二直線位置的關係如何?

3. 經過一點的直線是不是只有一個?

4. 經過一直線的平面是不是只有一個?

5. 一直線中可含多少個點? 若要此直線的位置一定,則在此許多點中要先定幾點的位置?

6. 一平面中可含多少個線? 若要此平面的位置一定,則在此許多線中要先定幾個線的位置?

7. 一直線中的兩點已經在一平面中,則此直線中其餘各點與此平面位置的關係如何?

8. 不在一直線中的圖至少要有幾點?

9. 不在一平面中的圖至少要有幾點?

10. 同平面中二直線位置的關係有幾種?

11. 二個平面位置的關係有幾種?

12. 一平面與不含於此面中的一直線位置的關係有幾種?

13. 在一直線中挨次取三點A, B, C,指出何點在他二點之間.

14. 在一直線中取A, C二點,於是表示在此直線中必能在A, C間更取一點B,又必能在A, C外更取一點D.

15. 三個直線兩兩相交於A, B, C三點. 試隨意畫一第四直線,不使經過A, B, C中的任一點,而使交原有三直線的一個,則此第四直線能不能不交其餘二個?

16. 隨意畫一直線XY及此線外一點A. 從A到XY作垂線AD及許多斜線. 於是將各斜線與垂線比較大小,再將各斜線比較大小,報告所得的結果.

(圖 102)

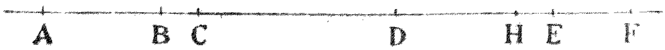
17. 在圖 102 中，$AB=DE$，$BC=EF$，$CD>FG$. 說明 $AC=DF$.

18. 再就圖 102 說明 $AD=BE$.

19. 再就圖 102 說明 $BD>EG$.

20. 再就圖 102 說明 $CF>DG$.

21. 再就圖 102 說明 $BE>DG$.



（圖 103）

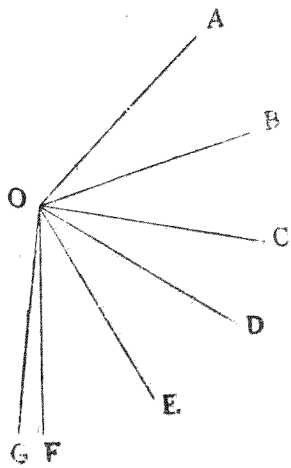
22. 在圖 103 中，$AC=DE$，$BC=HE$，$CD>EF$. 說明 $AB=DH$.

23. 再就圖 103 說明 $AD>DF$.

24. 在圖 104 中，$\measuredangle AOB=BOC=DOE=EOF$，$\measuredangle BOD>EOG$. 說明 $\measuredangle AOC=DOF$.

25. 再就圖 104 說明 $\measuredangle COD>FOG$.

26. 再就圖 104 說明 $\measuredangle BOE>DOG$.



（圖104）

27. 再就圖 104 說明 $\measuredangle BOD = COE.$

28. 再就圖 104 說明 $\measuredangle AOD > DOG.$

29. 在圖 105 中

$\measuredangle COD > AOB,\quad AOB = DOH,$

$DOH > BOC,\quad BOC = HOE,$

$\measuredangle HOE > EOF.$

說明 $\measuredangle AOC = DOE.$

30. 再就圖 105 說明

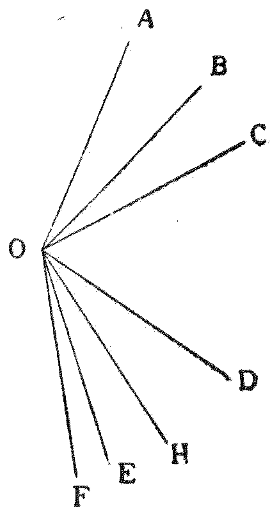
$\measuredangle BOD < COH.$

31. 再就圖 105 說明

$\measuredangle BOD > HOF.$

32. 再就圖 105 說明

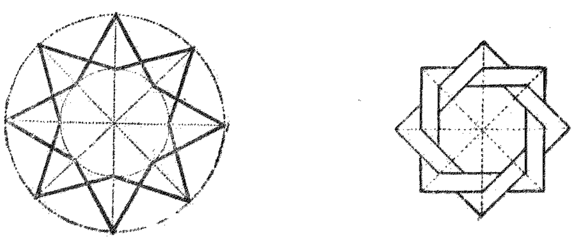
$\measuredangle AOD = COE.$



(圖105)

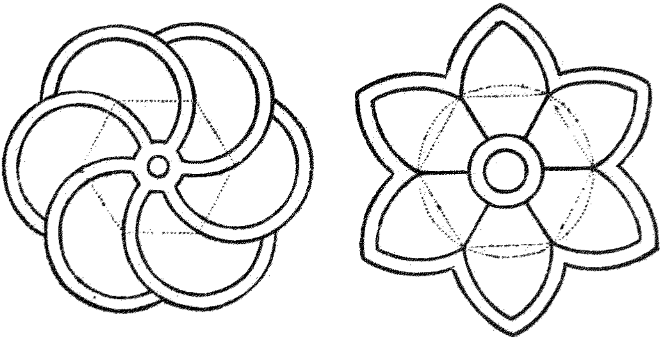
33. 圖再就 105 說明 $\measuredangle COE > DOF.$

34. 用等分角線及圓的作圖畫圖 106:



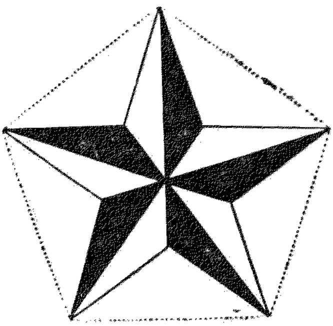
(圖 106)

25. 利用正六角形作圖畫圖107:

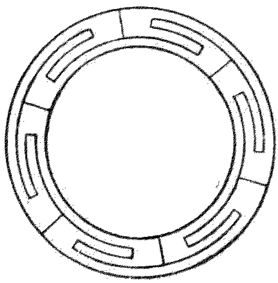


(圖 107)

36. 用正五角形的作圖法畫出圖108:



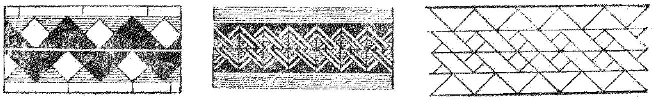
(圖108)



(圖109)

37. 用同心圓及六等分圓周來畫圖109:

38. 用平行線的作法將圖 110 比例放大.



（圖 110）

公式

(1) 圓的半徑長 r 尺,周長 c 尺,面積大 s 平方尺,則

$$c=2\pi r, \qquad s=\pi r^2.$$

但 $\pi=\dfrac{22}{7}=3.14$ 强, 或 $\pi=\dfrac{355}{113}=3.1416$ 弱.

以下各公式中, s 表各種面積所含平方尺數:

(2) 矩形底長 b 尺,高長 h 尺,則 $s=bh$.

(3) 正方形一邊長 a 尺,則 $s=a^2$.

(4) 平行四邊形底長 b 尺,高長 a 尺,則 $s=ab$.

(5) 三角形底長 b 尺,高長 a 尺,則 $s=\frac{1}{2}ab$.

(6) 梯形二底各長 a 尺, b 尺,高長 h 尺,則 $s=\frac{1}{2}(a+b)h$

(7) 正多角形周長 p 尺,邊心距長 a 尺,則 $s=\frac{1}{2}pa$.

以下各公式中, L 及 T 各表各種立體的側面積及全面積所含平方尺數:

(8) 正角柱體底的周長 P 尺,高長 H 尺,底面積是 B 平方尺,則 $L=H.P$, $T=B+H.P$.

(9) 正角錐體底的周長 P 尺,斜高長 S 尺,底面積是 B 平方尺,則 $L=\frac{1}{2}S.P$, $T=B.+\frac{1}{2}S.P$.

(10)直圓柱體底半徑是 R 尺,高長 H 尺,則

$$L=2\pi RH,\qquad T=2\pi R(H+R).$$

(11)直圓錐體底半徑長 R 尺,斜高長 S 尺,則

$$L=\pi RS,\qquad T=\pi R(S+R).$$

以下各公式中,v 表各種立體所含立方尺數:

(12)長方體的長,廣,高各長 a 尺,b 尺,c 尺,則 $v=abc$

(13)正方體一邊長 a 尺,則 $v=a^3$.

又,以下各公式中,s 表底面積所含平方尺數,h 表高所含尺數;若底是圓,則 r 表底半徑所含尺數:

(14)長方體 $v=sh.$

(15)角柱體 $v=sh.$

(16)角錐體 $v=\frac{1}{3}sh.$

(17)圓柱體 $v=\pi r^2h.$

(18)圓錐體 $v=\frac{1}{3}\pi r^2h.$

(19)球半徑長 r 尺,其表面積是 s 平方尺,其體積含 v 立方尺,則 $s=4\pi r^2,\quad v=\frac{4}{3}\pi r^3.$

第二編

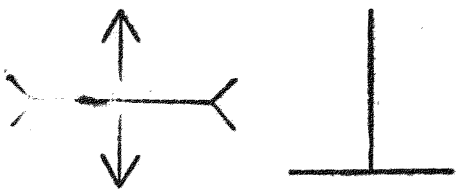
理論幾何學 直線圖

第一章 緒論

64. 理論幾何學

前一編講的幾何學,雖然也有一些初步理論,但是主要的部份,還是觀察,實量,作圖,計算,等等,然而:

(一)觀察很靠不住. 你們看圖111中,左邊一圖,總覺橫線比縱線長,右邊一圖,總覺橫線比縱線短,其實都錯了. 這種的錯誤,時常會發生,所以將觀察做根據是很危險的;

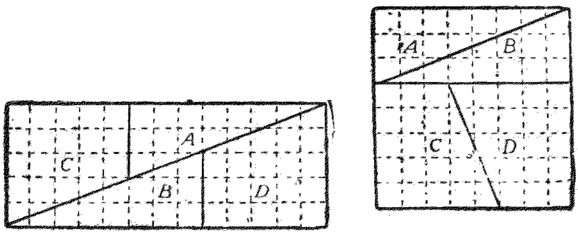


(圖 111)

(二)實量不能精密. 不要說儀器不精,錯誤可以很

大,便是儀器精了,錯誤不過小一點;況且還有圓的面積,球的體積等等,不能用儀器來直接實量的很多,故此實量一件事也萬不能用做研究的根據;

(三)割移也不可靠. 截長補短,移東補西,似乎是最可靠的工作了,然而也靠不住. 你們看圖 112, 將左一



(圖 112)

圖割開來移拚做右一圖,本來左一圖是長方形,算他的長是13尺,廣是 5 尺,面積是65 ($=13\times5$) 平方尺,右一圖却是正方形,每邊長 8 尺,面積是64($=8^2$)平方尺. 65平方尺的面積一變成64平方尺的面積,此種割移的靠不住也便可想而知了;

(四)作圖要與理論相輔而行,不能獨立;

(五)計算依據實量,實量既不能精密,計算自然只能得到近似的程度.

故此實驗幾何學,初學雖覺容易,進一步看,却處處暴露弱點,值得研究的還是理論幾何學.

理論幾何學,先定多少淺顯易明的基礎,從此一步步進行推出眞理,語語要有根據,次序不能絲毫紊亂.

於是前編所已知的許多方法和性質,爲理論的系統起見,有些要重加整理.

65. 定義

說明一種名稱意義的言語叫做**定義** (Definition).

66. 定義一. 體,向度.

空間的有盡部份,就他的形象,大小,位置來看,叫做**體**(一編 1 款). 體有長,廣,高,叫做三個**向度**.

67. 定義二. 面.

體的界限叫做**面**. 面有形象,位置,有二個向度(長及廣) (一編 2 款). 面運動可成體(一編 5 款).

68. 定義三. 線.

面的交界叫做**線**. 線有形象,位置,有一個向度是長(一編 3 款). 面的盡處亦是線,線運動可成面(一編 5 款).

69. 定義四. 點.

線的交界叫做**點**. 點無形象,無向度,只有位置(一編 4 款). 線的盡處也是點,點運動可成線(一編 5 款).

70. 定義五. 直線,半射線,線份,向,

將一線打滾而其中二點不離原位置,若在打滾中全線的各新位置始終與原位置相合,則此線叫做**直線**(一編 7 款).

直線無界限,即兩方都伸張到無窮遠(一編 10 款).

一端有界限一端無界限的直線叫做**半射線**,其一端的界限叫做**原點**,從原點起沿此半射線進行叫做**向**(一編 8 款).

兩端都有界限的直線叫做**線份**.

不論半射線或線份,可引伸成一完全直線,此全直線中,在半射線或線份界限外的部份叫做原半射線或原線份的**延線**(一編 8 款),這樣引伸叫做**延長**.

線份可以代表定長(一編 10 款).

71. 定義六. 二點的距離.

二點間線份的長叫做此二點間的**距離**(一編 13 款).

72. 定義七. 折線及曲線.

(圖 113)

諸線份挨次啣接所成的線叫做**折線**(Broken line). 全身沒有一部份是直的線叫做**曲線**(Curve).

73. 定義八. 平面及曲面.

過一面中隨意二點畫直線,若所畫直線完全在此面中,則此面叫做**平面**(一編 9 款). 沒有一部份是平的表面叫做**曲面**.

平面無界限,即平面的二個向度都可以是無窮大,但是做立體界限的平面却是有盡的,這是平面的一部份.

一個完全直線在一完全平面中可將此平面劃分成兩半(一編 10 款).

74. 定義九. 圖形.

點,線,面,體;或一種,或幾種,不論分離的集合的,就他們的形象,大小,位置來看,叫做**圖形**,或省稱做**圖**(一編 11 款).

完全在一個平面中的圖叫做**平面圖**,不完全在一個平面中的圖叫做**立體圖**. 祇有直線,點等所組織成的平面圖叫做**直線圖**.

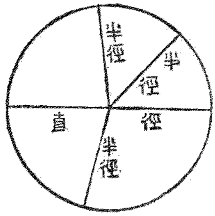
75. 定義一〇. 幾何學.

研究圖形的科學叫做**幾何學**. 祇講平面圖的幾何學叫做**平面幾何學**,講立體圖的幾何學叫做**立體幾何學**.

(本書是照最新中學標準編輯的平面幾何學).

76. 定義一一. 圓,圓周及弧.

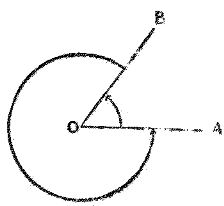
包圍平面一部份的一個曲線,其上隨意一點與其內一定點的距離恆能相等,則此包圍平面的部份叫做**圓**,此曲線叫做**圓周**,定點叫做**中心**,定點與圓周上隨意一點所聯的線份叫做**半徑**,經過中心而兩端都停在圓周上的線份叫做**直徑**,或省稱做**徑**. 圓周的隨意一部份叫做**弧**(一編16款及18款).



(圖 114)

77. 定義一二. 角,旋轉方向,周角,直線角.

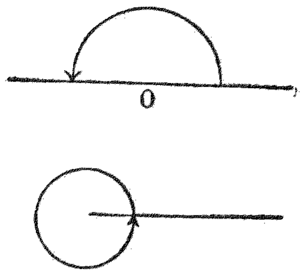
一個半射綫OA圍繞其原點O旋轉到OB,所經過平面的部份就原點來看他開口處的大小(即旋轉的程度)叫做**角**. 原點O叫做角的**頂點**,或省稱**角頂**. 半射線的前後兩個位置OA,OB叫做角的**邊**. 旋轉的方向與鐘錶面上計時針行的方向相反的叫做**正轉**,相同的叫做**倒轉**. 從正轉發生的角叫做**正角**,從倒轉發生的角叫做**負角**. 但沒有申明旋轉方向的我們總當他是正轉.



(圖115)

兩邊位置一定的角可以有兩個. 如圖 115,

假定旋轉的方向是正轉,則一個角是從 OA 轉到 OB 的,叫他做 $\measuredangle AOB$, 又一個角是從 OB 轉到 OA 的,叫他做 $\measuredangle BOA$. 這二個角中,若沒有申明是那一個角,我們慣常用小的一個 $\measuredangle AOB$。



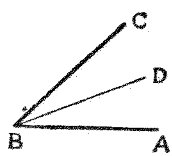
(圖116)

若一角的第二邊轉到與第一邊的延線相合,即角的兩邊合成一個直線,如此的角叫做**直線角**,圖116中的上一圖便是. 再,半射線 OB 若圍繞原點旋轉一周轉到仍與 OA 相合,這樣的角叫做**周角**. 周角顯然等於 2 倍直線角.

注意. 第一編中所已說過點,線,圓,角等記法及略號,當然沿用,不再複述.

再,第一編中,比較線份的大小(15 款),比較弧的大小(18 款),比較角的大小(22 款),都是很重要的基本工作,今不複述,但須溫習到極熟.

78. 定義一三. 隣角,角的等分線.



(圖117)

二個角(AOB, BOC)中間有一公共邊 OB),並且有公共頂點(O), 如此二角叫做**隣角**. (看圖13).

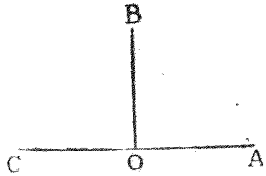
從一角(ABC)的頂點(B)向角內作

一半射線(BD)若此線將原角分成的二隣角相等($\measuredangle ABD = DBC$),則此線叫做原角(ABC)的**等分線**．於是 $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$．(看圖 117)

79. 定義一四. 直角及垂線.

一個直線角(AOC)的等分線(OB)將此直線角分成相等二部份(AOB, BOC).此各部份都叫做**直角**.

直角當然等於直線角的一半.



(圖118)

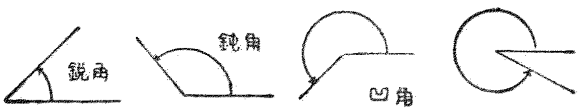
夾一直角的二直線叫做互相**垂直**,各線叫做他一線的**垂線**.

不是直角的角叫做**斜角**．一線與第二線成斜角,則此線叫做第二線的**斜線**.

一線無論是第二線的垂線或斜線,此線與第二線的交點叫做**足**.

80. 定義一五. 從比較大小定角.

比直角小的角叫做**銳角**,比直角大而比直線角小

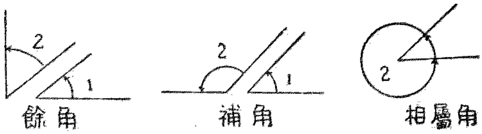


(圖 119)

的角叫做**鈍角**．無論銳角鈍角,凡是比直線角小的角

都可叫做**凸角**,比直線角大而比周角小的角叫做**凹角**.

二角的和是一直角,則此二角互相叫做**餘角**;二角的和是一直線角,則此二角互相叫做**補角**;二角的和是一周角,則此二角互相叫做**相屬角**.

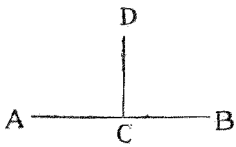


(圖120)

81. 定義一六. 線份的中點及垂直等分線.

一點(C)將一個線份(AB)分成相等二部份,則此點(C)叫做線份(AB)的**中點**.

過一線份(AB)中點(C)所作線份的垂線(CD)叫做此線份的**垂直等分線**.



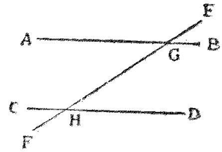
(圖121)

82. 定義一七. 直線的交角.對頂角.

二個直線相交成四個交角(看圖122).此四個交角可分成兩對,每一對中一個角的二邊是又一角二邊的延線,如此各對角叫做**對頂角**. (25款)

83. 定義一八. 截線及從此所生的角.

一直線若與二個以上直線相交,則此一線叫做其餘諸線的**截線**.



(圖122)

二直線AB, CD將一直線$EGHF$來截,得到八個交角因位置的關係給與如下的各種名稱:

$\measuredangle BGE, EGA, CHF, FHD$ 都叫做**外角**

$\measuredangle AGH, HGB, DHG, GHC$ 都叫做**內角**.

四對角 BGE, DHG; EGA,GHC; AGH,CHF; HGB, FHD;各對叫做**同位角**,

四對角BGE,CHF; EGA,FHD; AGH,DHG; HGB,GHC;各對叫做**錯角**,再分別一些說,前二對叫做**外錯角**,後二對叫做**內錯角**.

二對角DHG, HGB; AGH, GHC叫做**同側內角**.

例題四十五

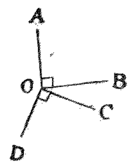
1. 在圖123中,已知$\measuredangle BOA=DOC=90°$.

(a)若$\measuredangle COB=60°$,求$\measuredangle AOD$的度數.

(b)若$\measuredangle COB=x°$,求$\measuredangle AOD$的度數.

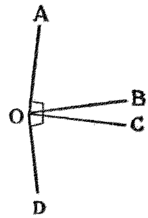
(c)說出$\measuredangle COB$與$\measuredangle AOD$有何關係.

(d)若$\measuredangle AOD=4\measuredangle COB$,求$\measuredangle COB$, AOD的度數.



(圖123)

2. 在圖124中,$OA\perp OC$, $OB\perp OD$,



(圖124)

(a)若$\measuredangle COB=40^\circ$,求$\measuredangle DOA$及$\measuredangle AOD$的度數.

(b)若$\measuredangle COB=x^\circ$,求$\measuredangle DOA$及$\measuredangle AOD$的度數.

(c)說出$\measuredangle COB$與$\measuredangle DOA$有何關係.

(d)若$\measuredangle DOA=5\measuredangle COB$,求$\measuredangle COB, DOA$的度數.

(e)若$\measuredangle AOD=7\measuredangle COB$,求$\measuredangle COB$, $\measuredangle AOD$的度數.

3. 試作一圖,畫二個互爲補角的隣角AOB, BOC,且作此二角的等分線OD, OE.

(a)叫$\measuredangle AOB=60^\circ$,求$\measuredangle BOC$及$\measuredangle DOE$的度數.

(b)叫$\measuredangle AOB=x^\circ$,求$\measuredangle BOC$及$\measuredangle DOE$的度數.

(c)報告$\measuredangle DOE$是何種大小的一個定角.

(d)若$\measuredangle BOC=2\measuredangle AOB$,求$\measuredangle AOB, BOC$,及$\measuredangle DOE$的度數.

4. 試作一圖,畫二個互爲餘角的隣角AOB,BOC,且作此二角的等分線OD, OE,

(a)叫$\measuredangle AOB=30^\circ$,求$\measuredangle BOC$及$\measuredangle DOE$的度數.

(b)叫$\measuredangle AOB=x^\circ$,求$\measuredangle BOC$及$\measuredangle DOE$的度數.

(c)報告$\measuredangle DOE$是何等大小的一個定角.

(d)若$\measuredangle BOC=3\measuredangle AOB$,求$\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$及$\measuredangle DOE$的度數.

84. 定義一九. 平行線.

二個直線,在同一平面中,隨意延長決不相會的叫做平行線(參看32款).

85. 定義二〇. 線份,角的和,差.

一點將一線份分成二個小線份,則原線份叫做此二小線份的和,隨意取一小線份可叫做從原線減去又一小線份的差. 一個半射線將一角分成二個小隣角,則原角叫做此二小角的和,二小角中隨意一角可叫做從原角減去又一小角的差.

在一直線中諸啣接線份的和,是將此中最外兩端做界限的一個線份. 諸挨次隣角的和,是此中最外兩邊所夾的一個角.

86. 定義二一. 公理及系.

我們從實驗所得最簡單的事理,假定其眞確而人人都公認的,叫做公理(Axiom).

從已知是眞確的事理再稍稍推斷便能知其眞確的理叫做系(Corollary).

公理分二種,能夠應用到一切量上的公理叫做普通公理,祇能用在幾何圖上的公理叫做幾何公理.

87. 普通公理.

今舉重要的普通公理於下:

(一) 全量等於其所有部份的和.

系. 全量比其各部份都大.

(二) 等於同量或等量的量相等.

(三) 一量可將他的等量來代替.

(四) 第一量比第二量大,第三量不比第二量大,則第一量必比第三量大.

(五) 比較同種類二量的大小,或第一量比第二量大,或第一量與第二量等,或第一量比第二量小,在此三種情形中,必佔一種而祇能佔一種.

(六) 用任意次序加諸量,所得的和不變.

(七) 等量加等量,其和相等.

(八) 從等量中減去等量,其差相等.

(九) 等量的同倍數量相等.

(十) 等量的同分數量相等.

(十一) 等量加不等量,或者不等量加等量,所得的和不等,原來大的一方面,和還是大.

系. 諸大量的和比諸小量的和大.

（十二）從不等量減去等量,所得的差不等,被減量大的一方面,差還是大.

（十三）從等量減去不等量,所得的差不等,減去大量的一方面,差比較小.

（十四）不等量的同倍數量不等,原來大的倍量還是大.

（十五）不等量的同分數量不等,原來大的分量還是大.

88. 幾何公理.

（一）線份是其兩端間的最短路徑.

系. 直線是其上隨意二點間的最短路徑.

（二）共有兩端的折線或曲線,包圍在外的比較大.

（三）經過二點的直線有一個而只有一個.

系一. 二直線共有二點,或共有一部份,則必定合成一線.

系二. 二直線的交點只能有一個.

(**四**)一線份可含無窮多個點.

(**五**)經過一點的直線可有無窮多個.

(**六**)不在一直線中的圖至少要有三點.

(**七**)一直線中二點已在一平面中,則全線必在此平面中.

(**八**)已在一直線中定二點的位置,則在此直線中,至少必有一點在所定二點間,亦必有一點在所定二點外.

(**九**)二點在一直線的兩旁,則此二點的聯線必與直線相交.

(**十**)二直線(同平面)或相交,或平行,在此二種情形中必佔一種而只佔一種.

(**十一**)隨意取一點與一直線,則點或在直線中,或在直線外,在此二種情形中必佔一種而只一種.

(**十二**)幾何圖可不變其形象大小而隨意變其位置.

(十三) 二個圖能完全重合,則其大小必相等.

(十四) 等線份及角都是完全重合圖.

現在能舉出來的幾何公理祗有這一些,以後到能說的地步再說.

89. 定義二二. 公設.

公衆假設一種可能的事,用做證理或畫圖根據的,叫做**公設**(Postulate).

90. 公設.

(一) 經過二點可作一直線.

系. 可隨意延長一線份.

(二) 可將一點做中心用定長做半徑畫圓.

(三) 在一直線中可截取一定長.

(四) 一直線可圍繞其中一點旋轉,轉過一定角,或隨意角度.

(五) 可摺疊一平面,使摺痕過一定點,且使在摺痕兩旁與此定點等距離的二點相合.

從此兩平面部份全相合.

（六）可將一圖的一部份圍繞其中一定點旋轉,使其旋轉部份上的圖落在又一部份上.

（七）可用一平面中一直線做摺痕,將此平面的一部份摺到與又一部份相合.

（八）一圖可移置又一圖上,使此二圖的一雙直線相重,同時使此一雙直線上的一雙點疊合.

91. 定義二三. 定理.

拿定義,公理,等已經認做眞確的事理做根據,從此再加推斷而得的眞理,叫做**定理**(Theorem).

92. 定義二四. 定理的假設與終決.

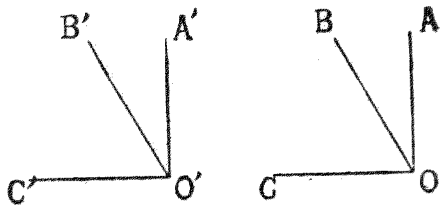
凡定理都是判斷辭,常可分成二部份;前一部份叫做**假設**(Hypothesis),是假定圖中已有某種關係;後一部份叫做**終決**(Conclusion),是從假設推斷後所得的眞理.譬如刑庭判案,假設是案情,終決是判決,此二事當然絕不相同. 照理,凡是定理的辭句都可以改成下面的格式:　　倘若A為B,則必X為Y.

如此,則 A 爲 B 是假設,X 爲 Y 是終决,一望可知. 但是因爲文字要簡潔,文氣不許拖沓,所以定理的辭句决不會如此明顯,於是學生要從定理的簡潔辭句增補到完成上面所舉的格式,然後能分別出假設,終决兩部份.而且定理若是普偏語,還要畫圖,記字母,分別說明. 此事很重要,因爲這是學走的第一步,倘使第一步不會走,第二步自絕無希望了.

今舉一二例於下:

例一. 凡是等角的餘角都相等

先畫圖釋明題意.圖125中,$\measuredangle AOB$, $A'O'B'$ 是一雙等角,$\measuredangle BOC$, $B'O'C'$ 各是 $\measuredangle AOB$, $A'O'B'$ 的餘角. 於是在心中將本題增改成上面所舉的標準格式,便是



(圖125)

倘使 $\measuredangle BOC, B'O'C'$ 是一雙等角 $AOB, A'O'B'$ 的餘角,

則必 $\measuredangle BOC=B'O'C'$.

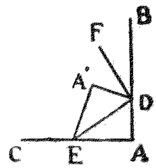
於是發表如下:

假設. $\measuredangle AOB=A'O'B'$, 而 $\measuredangle BOC$ 是 $\measuredangle AOB$ 的餘角, $\measuredangle B'O'C'$ 是 $\measuredangle A'O'B'$ 的餘角.

終決.　$\measuredangle BOC = B'O'C'$.

例二.　有長方紙一張,將他的一隅隨意摺疊到全紙上,則其一邊的一部份摺轉與原邊成一角,此角的等分線必與摺痕垂直.

圖126表示　長方紙被摺的一隅,隅DAE摺到$DA'E$,成一角$A'DB$. 心中將本題改成標準格式,是:



(圖126)

倘使將長方紙一隅DAE摺到$DA'E$,其一邊被摺部份DA'與原邊BD所成角BDA'的等分線是DF,

則必$DF \perp$摺痕DE,

於是發表如下:

假設.　將長方紙一隅DAE摺到$DA'E$,摺痕是DE,一邊AB的摺轉部份$A'D$與原邊DB成一角BDA',而此角的等分線是DF.

終決　$OF \perp DE$.

例題四十六

分別畫圖說明以下各定理的假設及終決:

1.　等角的補角相等.

2.　凡是直線角都相等.

3.　凡是周角都相等.

4.　凡是直角都相等.

5.　挨次諸隣角的兩外邊成一直線,則此諸角和等於一直線角.

6.　在一點周圍挨次諸隣角的和等於一周角.

7.　二隣角的和等於一直線角,則其兩外邊成一直線.

8.　對頂角必相等.

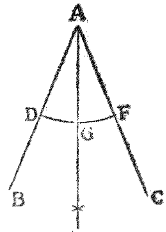
9.　一線份的中點有一個而只有一個.

10.　一角的等分線有一個而只有一個.

93. 定義二五.　定理的證.

凡是定理,都要從假設推斷出終決來,這樣推斷的工作叫做證(Proof). 證是要用已知的事理來斷定當前終決的眞確,故語語要有根據,不可有半句落空,所謂根據,便是假設,定義,公理,公設,及已證明的定理. 凡此根據,「無徵不信」,故此都要在所說各語的旁邊註明,不可忽略.

所謂理論幾何學,便指此證的工作,此事是幾何學最重要的部份.



(圖127)

例一. 一角必定有一個等分線,而只有一個等分線.

假設. BAC是隨意一角.

終決　此$\measuredangle BAC$必定有一個等分線而只能有一個等分線.

證.	根據
(1) 將A做中心,用隨意半徑畫圓,此圓與AB, AC各交於D,F	公設二.
(2) 於是$AD=AF$.	定義一一.
(3) 將$\measuredangle BAC$所居平面摺疊,使摺痕過A,且使F點與D點相合,得摺痕AG.	公設五.
(4) 此時AB與AC相重,而$\measuredangle BAG$與$\measuredangle GAC$完全重合,故相等.	幾何公理三系一,及十三.
(5) 故AG是$\measuredangle BAC$的等分線.	定義一三.
(6) 倘使AG外尚有$\measuredangle BAC$的等分線AG',則$\measuredangle BAG, BAG'$是$\measuredangle BAC$的同分數量,	定義一三.
(7) 故$\measuredangle BAG'=BAG$.	普通公理十.
(8) 於是因為$\measuredangle BAG'$與$\measuredangle BAG$頂點A相合,一邊AB相重,則第二邊AG'與AG亦應相重.	幾何公理十四.
(9) 故AG'便是AG,而$\measuredangle BAC$的等分線只有一個.	

本題的終決有二層,第一層要證必有一個等分線,第二層要證只有一個等分線. 證中前五步是證終決的第一層,後四部是證終決的第二層,看起來似繁,分開來却並不長. 你們不要看着面貌便怕他太繁,現在是教給你們怎樣來做證,舉的例若一些沒有轉折,便絲毫得不到益處,要容易最易,不過白學許多時候,還是不能入門,何苦要這種的容易呢?

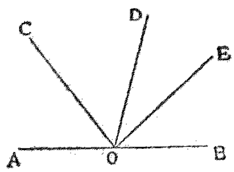
本題第一層是要證$\measuredangle BAC$有一等分線. 我們想怎樣可以證到有,當然先要注意怎樣是等分線,角的等分線有甚麼性質. 從等分線的定義,知道此線將原角分成相等二隣角,此二隣角中每一角是原角的$\frac{1}{2}$. 於是從相等方面想起了能夠重合的角方纔能相等. 可是走怎樣的路徑纔能得重合二隣角呢? 自然只有摺疊的一條路. 於是找到公設五是可用的. 公設五中的摺痕便是所要的等分線,那是無疑的了. 可是還要想法使摺後原角的二邊能夠相重. 於是利用與角頂等距離的點可使相合的一事,取此等距離點在二邊上便成,故此添出第一步作圓的一事來. 如此步步倒推已經澈底,於是再順着應取的次序寫出來,證的第一層便「告厥成功」.

第二層要證這樣的等分線只有一個,可從兩個方

面入手：(一)是凡是$\measuredangle BAC$的等分線都與AG相合,所以只有AG一個；(二)是AG以外的線都不是等分線,所以亦只有AG一個．現在取的是(一)的路徑．要證凡是$\measuredangle BAC$的等分線必與AG相合,當然也要借重到重合上面．怎麼方能重合？等角能夠重合．怎樣可得等角？二角都是原角的$\frac{1}{2}$當然是等角．於是這條路已經打通,題中要證的第二層也便告成(也是步步倒推得來的)．至於(二)的路徑,自然也走得通,你們去找26款的(七)來看,便是走的這一條路,你們最好把26款(七)也照着本題的格式嚴格的逐步寫出來,這是很好的練習呵！

例二． 挨次諸隣角的和若等於一直線角,則其兩外邊成一直線．

假設． $\measuredangle BOE, EOD, DOC, COA$是挨次諸隣角,且$\measuredangle BOE+EOD+DOC+COA=1$ st.



(圖128)

終決． 此諸角的兩外邊OB, OA成一直線．

證．	根據
(1) $\measuredangle BOA=BOE+EOD+DOC+COA$	定義二〇．
(2) 今$\measuredangle BOE+EOD+DOC+COA$	假設．

$=1\measuredangle st.$

(3) 故 $\measuredangle BOA=1\measuredangle st.$	普通公理二.
(4) 故 OA 與 BO 的延線相合.	定義一二.

即 OB, OA 成一直線.

注意. $\measuredangle st.$ 是直線角的略記,已見20款. 因爲,故此,證的言語中時常說到,以後可用略號 $\because$ 及 $\therefore$ 來代替.

本例可算得簡單的了. 將假設,諸角和的定義,直線角的定義,合起來看,馬上便得證法.

凡一題中有何名稱在內,第一先要將此名稱的定義背誦(字句不必照書,意義却須深曉),這是工作入手不可少的事情.

例題四十七

以下各題都要照上面所舉例的格式,寫出他的假設,終決,及證來:

1. 凡是直線角都相等.

提示. 本題可用26款(一)的證改寫成本款的格式,能夠簡省處不妨改簡.

2. 凡是周角都相等.

提示. 本題不得將26款(二)的證法照抄,却可將前題的證法變更來用. 下題同.

3. 凡是直角都相等.

4. 挨次諸隣角的兩外邊成一直線,則此諸角的和等於一直線角.

提示. 本題及下一題,可將26款(四)及(五)改寫成本款的格式.

5. 對頂角必定相等.

6. 過一直線中一定點的此直線的垂線必有一個而只有一個.

提示. 將直線一旁的平面當做直線角,將定點當做角的頂點,可將本款例一的證法來用.

7. 過一直線外一定點的此直線的垂線必有一個而只有一個.

提示. 將31款(二)的證法另分步驟改寫成本款的格式.

8. 在一點周圍諸隣角的和等於一周角.

提示. 將隨意一角的一邊延長,可應用本例題4的結果.

9. 等角的補角相等.

提示. 本題及下一題可用題中名稱的定義,本例題1題及3題,與普通公理八來證.

10. 等角的餘角相等.

94. 定理.

定理一. 凡是直線角都相等.

系一. 凡是周角都相等.

系二. 凡是直角都相等.

系三. 等角的補角必定相等.

系四. 等角的餘角必定相等.

定理二. 對頂角必定相等.

定理三. 挨次諸隣角的兩外邊成一直線,則此諸角的和等於一直線角.

系. 在一點周圍諸隣角的和等於一周角.

定理四. 挨次諸隣角的和若等於一直線角,則其兩外邊成一直線.

系. 二隣角的和等於一直線角,則其兩外邊成一直線.

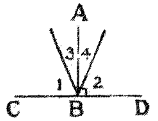
定理五. 一角必有一個等分線而只有一個等分線.

系. 過一直線中一定點的此直線的垂線,必有一個而只有一個.

定理六. 過一直線外一定點的此直線的垂線必有一個而只有一個.

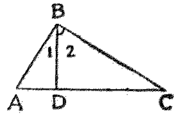
例 題 四 十 八

1. AB是一角的等分線,$CBD \perp AB$,則CBD與角的二邊必成等角.



(圖 129)

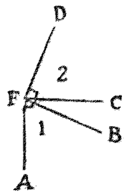
2. $\measuredangle ABC = R$,$BD \perp AC$. 若$\measuredangle A$與$\measuredangle 1$互爲餘角,則必$\measuredangle A = \measuredangle 2$.



(圖 130)

提示. 1, 2, 3 三題都用定理一系四.

3. 如圖 131, $FA \perp FC$, $FB \perp FD$, 則$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$.

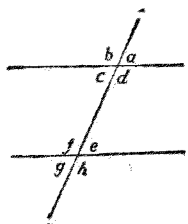


(圖 131)

4. 二個角中兩雙邊兩兩垂直,則此二個角或者相等,或者互成補角.

提示. 看圖 131, 第一種的二個角如$\measuredangle AFB$, CFD; 第二種的二個角如$\measuredangle AFD$, BFC.

5. 一直線截他二直線,若所得一雙同位角相等,則四個銳角都相等,四個鈍角亦都相等.



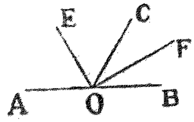
(圖 132)

提示. 5, 6, 7 三題注意定理一系三及定理二.

6. 一直線截他二直線,若所得一雙內錯角相等,則四個銳角都相等,四個鈍角亦都相等.

7. 一直線截他二直線,若所得一雙同旁內角互成補角,則所得的一個銳角都相等,四個鈍角亦都相等.

8. 二隣角 (BOC, COA) 互成補角,則其等分線 (OF, OE) 互相垂直.

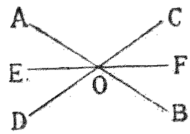


(圖 133)

9. 若二隣角的等分線互相垂直,則此二隣角必互成補角.

提示. 8, 9 兩題注意角的等分線,餘角,補角等定義.

10. 一雙對頂角的等分線成一直線.

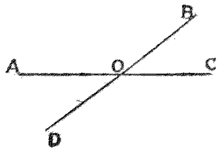


(圖 134)

提示. 本題及下一題注意定理二及定理四. 下題更注意上面 7 題.

11. 相交二直線四個交角的等分線合成互相垂直的二個直線.

12. 從一直線AC上一點O向此直線兩旁各引半射線OB, OD. 若 $\measuredangle COB = AOD$, 則 OB, OD 成一直線.



(圖 135)

提示. 注意普通公理七及定理四.

95. 定義二六. 作圖題.

給與一圖的性質,要用幾何方法作出此圖來,如此的問題叫做**作圖題** (Problem of Construction).

作圖題包含二部份,一是給與的性質,略稱做**與件**,又一是**要作**何圖. 題中言語普徧的,應該隨意給與[與件]中所說圖的各部份,再行解說明白. 作圖的方法叫做**作法** (Construction),所作的圖叫做**解答** (solution).解答是不是確合與件應要**證**. 查考作法能有的範圍研究解答種種特別情形,叫做**討論**.

幾何方法,是指用理論幾何所許用的器具,靠着公設或已經作出的圖,來作圖的方法.

理論幾何所許用的器具,只有一根不劃分寸的直尺,與一枝規筆,三角版分角儀種種都是不許用的.

96. 定義二七. 命辭

定理及作圖題,總叫做命辭 (Proposition).

97. 記號及記法.

記　　法

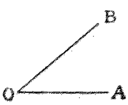
點 A, 點 B.

直線 AB (A, B 是線中隨意兩點)

半射線 OA (O 是原點, A 是隨意點)

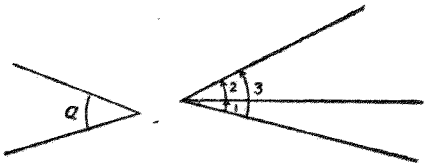
線份 AB (A, B 是線份的兩端)

長 e (小體字母表大小)

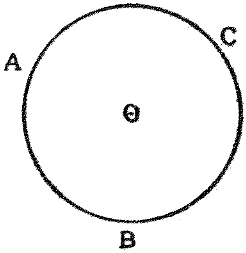


角 AOB (O 是頂點, A, B 是各在一邊上的隨意點)

角 A（A 是頂點）



角 a，角 1，角 2，角 3 都表一角的大小（小體字母及數字是表大小）



圓 ABC（A, B, C 是圓周中隨意三點）

圓 O（O 是圓的中心

記號

$+$	加	$-$	減
$\sim$	差	$=$	等於，或等積於
$\neq$	不等於	$\equiv$	恆等於
$>$	大於	$\not>$	不大於
$<$	小於	$\not<$	不小於
$\backsim$	相似於	$\cong$	全等於
$\parallel$	平行於	$\perp$	垂直於
$\sphericalangle$	角	$R\sphericalangle$	直角
st$\sphericalangle$ $\sphericalangle$st	直線角	$\triangle$	三角形

▱	平行四邊形	▭	矩形
□	正方形	⊙	圓
⌒	弧	∵	因爲
∴	故此	Q.E.D	已經證明
Q.E.F	已經解得		

第二章　三角形的合同

98. 定義二八. 多角形.

許多線份圍出平面一部份來,這樣的直線圖叫做**單多角形**(Simple Polygon),省稱**多角形**. 此各線份都叫做多角形的**邊**,隣接二邊交成形內的角叫做多角形的**角**,諸角的頂點叫做多角形的**頂點**,聯不相隣二頂點的線份叫做多角形的**對角線**,一邊的延線與隣邊所成的角叫做多角形的**外角**,多角形的角對於外角說時叫做**內角**.

多角形的各角若都是凸角,則此多角形叫做**凸多角形**,有一角或二角是凹角的多角形叫做**凹多角形**. 本書所講的多角形都是凸多角形.

多角形的邊數若是 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, ⋯, n, 我們分別叫此多角形做**三角形**,**四角形**,**五角形**,**六角形**,⋯,**八角形**,⋯,**十角形**,⋯,**十二角形**,⋯,**十五角形**,⋯,n **角形**.

單多角形的邊數與其角頂的個數相同,故此單多角形亦常叫做**單多邊形,**省稱做**多邊形.**

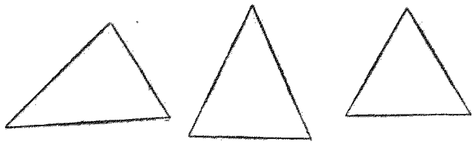
99. 定義二九. 封閉圖,其面積及周.

多角形及圓都包圍出平面的一部份來,所以都叫做**封閉圖,**他所包圍的平面部份叫做**面積.** 多角形各邊的和叫做多角形的**周.**

100. 定義三〇. 三角形的分類.

三角形有兩種分類的方法:

(一)用邊分類. 三邊中沒有兩邊相等的三角形叫做**不等邊三角形,**

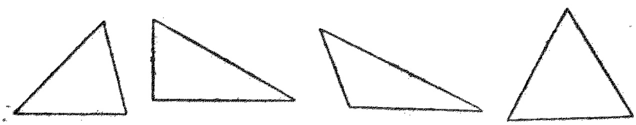


不等邊三角形 二等邊三角形 等邊三角形

(圖136)

有二邊相等的三角形叫做**二等邊三角形**三邊都互相相等的三角形叫做**等邊三角形.** 但是單稱三角形,必定指不等邊的一種.

(二)用角分類. 三個角都是銳角的三角形叫做**銳**



銳角三角形 直角三角形 鈍角三角形 等角三角形

(圖 137)

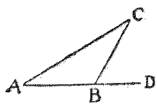
角三角形有一個角是直角的三角形叫做**直角三角形.**

有一個角是鈍角的三角形叫做**鈍角三角形**,三個角互相等的三角形叫做**等角三角形**. 但是單稱三角形,必定指銳角的一種.

直角三角形中對直角的一邊特別叫做**斜邊**.

101. 定義三一. 內隣角與內對角.

三角形內,與外角相隣的內角叫做**內隣角**(Adjacent Interior Angle),其餘兩內角都叫做**內對角**(Opposite Interior Angle).



(圖 138)

如圖 138,$\measuredangle ABC$ 是 $\measuredangle CBD$ 的內隣角,$\measuredangle A$ 與 $\measuredangle B$ 都是 $\measuredangle CBD$ 的內對角.

102. 定義三二. 三角形的底與高.

三角形可看做載在隨意的一邊上,此邊叫做三角形的**底**,對底的一角叫做**頂角**,頂角的角頂叫做三角形的**頂點**,從頂點作一垂線到底爲止,此垂線叫做三角形的**垂線**,或者叫做三角形的**高**. 底兩端的角叫做**底角**.

因爲三邊都可看做三角形的底,故此三角形有三個垂線.

二等邊三角形慣例將等邊以外的第三邊做底.

直角三角形常將夾直二邊的一個做底一個做高.

103. 定義三三. 三角形的中線.

從三角形的隨意一角頂到對邊中點所畫的線份

叫做三角形的**中線**(Median).

104. 幾何公理十五及十六.

幾何公理十五. 從三角形的一個角頂向形內隨意畫一直線,此線必與對邊相交.

幾何公理十六. 從三角形一邊上的一點向形內隨意畫一直線,此線必與他兩邊的一邊相交.

105. 定義三四. 疊置法及合同圖.

移一圖疊放在第二圖上,使此二圖中的一雙直線相重,此一雙直線上的一雙點相合,叫做**疊置法**(superposition). 兩圖疊置後,若兩圖中所有各雙線都相重,所有各雙點都相合,則此二圖叫做**合同圖**,或叫做**全等形**(Congruent figures).

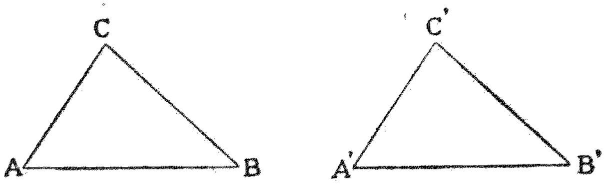
二個合同圖中,可重合的各雙點叫做**對應點**(Corresponding Points), 可重合的各雙線叫做**對應線**,可重合的各雙角叫做**對應角**. 從幾何公理十三,十四,可知合同圖中的各雙對應線份必相等,各雙對應角必相等.

106. 幾何公理十七

幾何公理十七. 二圖若各與第三圖合同,則此二圖亦自相合同.

107. 定理七.

二個三角形中兩雙邊及其所夾的角各相等,則此兩形是合同圖.



(圖 139)

假設. $\triangle ABC, A'B'C'$ 中, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\measuredangle A=A'$.

終決. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證	根據
移置 $\triangle A'B'C'$ 疊放在 $\triangle ABC$ 上,令 $A'B'$ 與 AB 相重, A' 與 A 相合.	公設八,幾何公理十四.
因 $\measuredangle A'=A$, $\therefore A'C'$ 與 AC 相重:	幾何公理十四.
又因 $A'B'=AB$, $A'C'=AC$,	仝上.
$\therefore B'$ 與 B 相合, C' 與 C 相合.	
$B'C'$ 與 BC 中已有二點相合,故 $B'C'$ 與 BC 亦相重.	幾何公理三.
於是 $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 中,所有各點都相合,所有各線都相重,	定義三四.
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ Q.E.D.	

注意. 二個三角形中有三雙邊三雙角,共六雙原素,凡合同三角形的定理,先已知三雙原素各相等,到已證明是合同圖後則其餘三雙原素亦各相等了(定義三四).

本定理用處極廣,應用本定理時常簡寫做

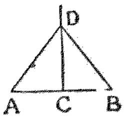
$$s.a.s. = s.a.s.$$

s 是邊 side 的略號.a 是角 angle 的略號.

系. 二個直角三角形中,二雙直角邊各相等,則此二形是合同圖. (你們自己可作圖證明)

例題四十九

1. 在一個線份的垂直等分線上隨意一點與此線份的兩端距離相等.

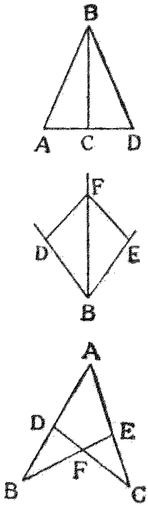


(圖140)

2. 二等邊三角形頂角的等分線必過底的中點. (圖141上)

3. 在一角 DBE 的二邊上隨意取等長線份 $BD=BE$, 再在此角等分線上隨意取一點 F. 聯 FD, FE, 則 $FD=FE$. (圖141中)

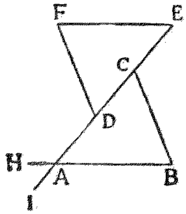
4. 在一角 A 的二邊上截取二對相等線份 $AD=AE$, $DB=EC$. 聯 BE, CD,



(圖141)

則 $\measuredangle B=C$（圖141下）。

5.　在相交二直線 BFE, CFD 上取二雙點 $B, C; D, E$，使 $FB=FC$, $FD=FE$. 聯 BD, CE，則 $BD=CE$.

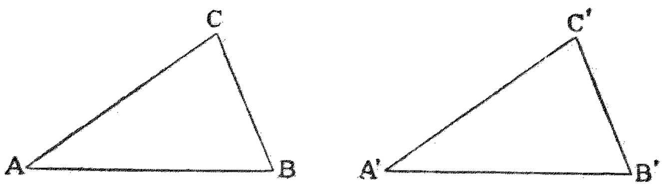


（圖142）

6.　I, A, D, C, E 是一直線上的挨次五點，$AD=CE$. 過 A 畫 HB，過 E 畫 EF. 聯 BC, FD. 若 $\measuredangle HAI=FEC$，且 $AB=EF$，則　$BC=FD$.

108. 定理八.

二個三角形中，兩雙角及其間的邊各相等，則此二形是合同圖 (a.s.a.=a.s.a.)



（圖 143）

假設　$\triangle ABC, A'B'C'$ 中，$\measuredangle B=B'$, $BC=B'C'$, $\measuredangle C=C'$.

終決　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證	根據
(1)　移 $\triangle A'B'C'$ 疊放在 $\triangle ABC$ 上，使 $B'C'$ 與 BC 相重，B' 與 B 相合	公設八，定義三四

(2) ∵ $BC=B'C'$, ∴ C' 與 C 相合, 又 ∵ $\measuredangle B=B'$, $\measuredangle C=C'$, ∴ $A'B'$ 與 AB 相重, $A'C'$ 與 AC 相重. 幾何公理十四.

(3) 於是 $A'B'$ 及 $A'C'$ 的交點 A' 不得不與AB及AC的交點A相合. 幾何公理三系二.

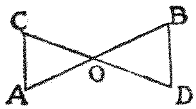
(4) ⓢ ABC, $A'B'C'$ 中,所有各雙點都已相合,所有各雙線都已相重, 定義三四.

故 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ Q. E. D.

系. 二個直角三角形中,一雙直角邊及其一端的一雙銳角各相等,則此二形是合同圖.

例題五十

1. AB, CD二線份交於O點,聯AC, BD. 若 $\measuredangle A=B$, 且 O是 AB 的中點,則 O 亦是CD的中點.



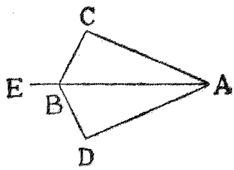
(圖144)

2. AC, BD是等長二線份. 聯AB, CD, 得其交點 O. 若 $\measuredangle A=B$, $\measuredangle C=D$, 則 AB, CD 互相等分於 O.

3. A, O, B 三點在一直線上. 從 A 作AC,從 B 作BD,使 $\measuredangle A=B$, $AC=BD$. 聯CO, OD. 若 $\measuredangle C=D$, 則 CO, OD 必成一直線.

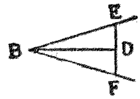
4 E, B, A 是一直線上的三點 從 A 作 AC, AD

從 B 作 BC, BD; 令使 $\measuredangle EAC = EAD$ $\measuredangle EBC = EBD$, 則 $AC = AD, BC = BD$.



(圖145)

5. 三角形一角的等分線若垂直於對邊,則此三角形是二等邊三角形.

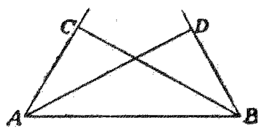


(圖146)

6. 三角形一邊的垂直等分線若過對角的頂點,則此三角形是二等邊三角形.

7. 從一直線外一點到此直線作一個垂線與二個斜線. 若二斜線的足與垂線的足距離相等則此二斜線的長相等.

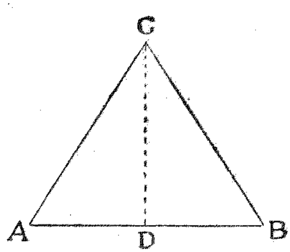
8. 在圖 147 中,已知 $\measuredangle BAC = DBA$, $\measuredangle DAC = DBC$, 則 $AC = BD$, $AD = BC$.



(圖147)

109. 定理九.

三角形的二邊相等,則此二邊所對的角亦相等.



(圖148)

假設. $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$.

終決. $\measuredangle B = A$.

證.	根據
(1)畫頂角C的等分線,與底AB交於D.	定義一三.
(2)在$\triangle$ ACD, BCD中, $AC=BC$,	假設.
$\measuredangle ACD=DCB$, $CD=CD$.	定義一三.
(3) $\therefore$ $\triangle ACD\cong\triangle BCD$,而$\measuredangle B=A$.	$s.a.s=s.a.s$
Q. E. D.	

從此證,可知$AD=DB$,即D是AB的中點;又$\measuredangle BDC=CDA$,即$CD\perp AB$. 故得下系:

系一. 二等邊三角形頂角的等分線便是底的垂直等分線.

次,若有一線份AB,可在其上隨意作一二等邊三角形ABC($AC=CB$),於是$\measuredangle C$的等分線交AB於其中點,可見AB必有一個中點. 如此中點顯然只有一個. 何以呢? 倘說D'也是AB的中點,那麼,$AD'=\frac{1}{2}AB=AD$,今AD與AD已相重,A與A已合一,則D'與D也應合一,即D'便是D,AB的中點始終仍是一個也. 故又可得下一系:

系二. 一線份有一個中點而只有一個中點.

再,從圖148用一新觀察點,立即可得下一系:

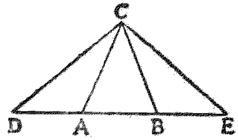
系三. 從一直線外一點到此直線畫垂線及二斜線,此二斜線分居垂線的兩旁,(a)若二斜線相等,則此二

斜線的足與垂線的足距離相等(本定理; (b)若二斜線的足與垂線的足距離相等,則此二斜線相等(定理七).

系四. 等邊三角形的三個角互相等.

例題五十一

1. $\triangle CDE$ 中 $CD=CE$. 在底 DE 中取二點 A, B, 使 $DA=BE$, 則 $\triangle CAB$ 是二等邊.



(圖149)

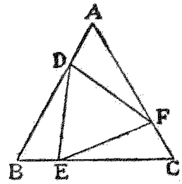
2. $\triangle CAB$ 中 $CA=CB$. 在底兩端的延線中各取一點 D, E, 使 $DA=BE$, 則 $\triangle CDE$ 是二等邊.

3. $\triangle CDE$ 中 $CD=CE$. 從 C 向形內畫二線 CA, CB, 使 $\measuredangle DCA=BCE$, 而 A, B 在底 DE 上,則 $\triangle CAB$ 是二等邊.

4. 二等邊三角形中,二底角的等分線相等.

5. 二等邊三角形中,對於等邊的二中線必相等.

6. $\triangle ABC$ 是等邊三角形,在 AB, BC, CA 中各取點 D, E, F, 使 $AD=BE=CF$, 則 $\triangle DEF$ 亦是等邊三角形.

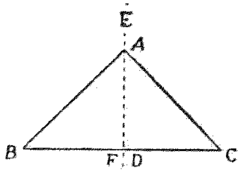


(圖150)

7. 從一直線外一點到此直線畫一垂線及二斜線,若此二斜線與垂線所成的角相等,則此二斜線必相等

110. 定理一〇.

三角形的二角相等,則此二角所對的邊亦相等.



(圖151)

假設. $\triangle ABC$ 中, $\measuredangle B = C$.

終決. $AC = AB$.

證.	根據
(1) 畫底 BC 的垂直等分線 EF, 此 EF 交 BC 於 D.	定理五.
(2) 用 EF 做摺痕將 EF 右邊的平面部份摺到與左邊的平面部份相合.	公設七.
(3) $\because \measuredangle CDE = EDB$,	幾何公理十四.
$\therefore DC$ 與 DB 相重.	
(4) $\because BD = DC$,	本題(1).
$\therefore C$ 與 B 相合;	幾何公理十四.
(5) $\because \measuredangle B = C$	假設.
$\therefore CA$ 與 BA 相重.	幾何公理十四.
(6) 於是 CA 與摺痕 EF 的交點亦必是 BA 與 EF 的交點,即頂點 A 必在 EF 上.	幾何公理三系二.

(7) $\therefore CA=BA$.　　Q.E.D　|　幾何公理十三.

已經此證法的第6步後便又可得 $\measuredangle BAD=DAC$.

故:

系一. 二等邊三角形底的垂直等分線便是頂角的等分線.

系二. (a)一線份的垂直等分線上隨意一點,與此線份兩端的距離相等(本定理); **(b)一點與一個線份兩端的距離相等,則此點在線份的垂直等分線上**(定理九).

系三. 等角三角形的三邊互相等.

111. 定義三五. 特別多角形.

諸邊都相等的多角形叫做**等邊多角形**(Equilateral Polygon),諸角都相等的多角形叫做**等角多角形**(Equiangular Polygon),諸邊都相等,同時諸角亦都相等的多角形叫做**正多角形**(Regular Polygon).

從此,定理九的系四與定理十的系三可改述如下:

等邊三角形或等角三角形,便是正三角形

112. 定義三六. 倒定理.

第一個定理的假設,是第二個定理的終決,第一個定理的終決,又是第二個定理的假設,則此二個定理互相叫做**倒定理**(Converse Theorem).

如定理九與定理十互相做倒定理,此二個定理的

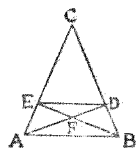
系一也互相做倒定理.

一個定理的眞確雖然已經證明,但他的倒定理能夠眞確不能夠是不一定的,故此應當看做另外一個定理拿來再證.

例 題 五 十 二

1. 二等邊三角形兩底角的等分線與底邊所成三角形,亦是二等邊三角形.

2. 從二等邊三角形 ABC 的頂點 A 起,在等邊 AC, BC 上各取一點 E, D, 使 $CE=CD$. 聯 AD, BE, 交於 F, 則 $\triangle ABF$ 亦是二等邊三角形.



(圖152)

提示. 先證 $\triangle ADC \cong \triangle BEC$.

3. 在前題的圖中,再證 $\triangle DEF$ 亦是二等邊三角形.

4. 從二等邊三角形 ABC 兩底角頂 A, B 各向形內畫線 AF, BF, 使 $\measuredangle BAF = FBA$. 聯 CF, 則 CF 是 AB 的垂直等分線.

提示. 先證 $\triangle AFC \cong \triangle BFC$, 再用定理九系一.

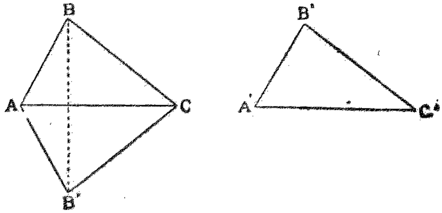
113. 定理十一.

二個三角形中三雙邊各相等,則此二形

是合同圖。(s.s.s.＝s.s.s).

假設. $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 中, $AB=A'B$. $BC=B'C'$, $CA=C'A'$.

終決. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



(圖153)

證.	根據
(1) 先將 $\triangle A'B'C'$ 反過來,移到 $\triangle ABC$ 的下面,使 $A'C'$ 與 AC 相重, A' A 點相合.	公設八.
(2) $\because CA=C'A'$, $\therefore C'$ 與 C 相合.	幾何公理十四.
(3) 聯 BB', 則 $\triangle ABB'$ $\triangle CBB'$ 都是二等邊三角形,	假設.
(4) $\therefore \measuredangle ABB'=BB'A$, $\measuredangle B'BC=CB'B$,	定理九.
(5) 由是 $\measuredangle ABC=CB'A$	普通公理七.
(6) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle AB'C$	s.a.s.＝s.a.s.
(7) 但 $\triangle AB'C \cong \triangle A'B'C'$	幾何公理十五.
(8) $\therefore \triangle ABC \cong A'B'C'$　Q.E.D.	幾何公理十七

系. 二點 (A, C) 都與一線份 (BB') 的兩端 (B, B') 等距離 $(AB=AB', CB=CB')$, 則此二點的聯線 (AC) 是線份

(BB')的垂直等分線.

例題五十三

1. 二等邊三角形對底邊的中線必等分頂角.

2. 四邊形的二雙對邊各相等則其二雙對角亦各相等.

3. 四邊形的二雙隣邊各相等則其一個對角線等分一雙對角.

4. 四邊形的二雙對邊各相等,四個角又都是直角,則其二個對角線相等.

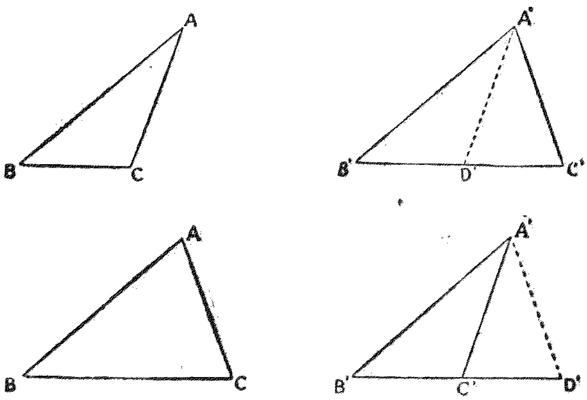
5. 四邊形的四邊都相等,則其二個對角線互相垂直等分.

114. 定理十二.

二個三角形中二雙邊各相等,對於一雙等邊的角又相等,則對於第二雙等邊的角,或者相等,或者互相爲補角;在第二雙角也相等的一種,此二個三角形是合同圖.

假設. $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 中, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\measuredangle B=B'$.

終決. 或者 $\measuredangle C=C'$, 因而 $\triangle ABC \cong A'B'C'$; 或者 $\measuredangle C+C'=2R\measuredangle$



(圖 154)

證.	根據
(1) 移 $\triangle ABC$ 疊放在 $\triangle A'B'C'$ 上,使 AB 與 $A'B'$ 相重, A 與 A' 相合.	公設八,定義三四.
(2) $\because AB=A'B'$, $\therefore B$ 與 B' 相合;	幾何公理十四.
又 $\because \measuredangle B=B'$, $\therefore BC$ 落於 $B'C'$ 上.	
(3) 比較 BC 與 $B'C'$ 的大小,或者 $BC=B'C'$, 或者 $BC<B'C'$, 或者 $BC>B'C'$.	普通公理五.
(4) 若 $BC=B'C'$,	s.s.s.=s.s.s.
則 $\triangle ABC\cong A'B'C'$,而 $\measuredangle C=C'$. Q.E.D.	
(5) 若 $BC<B'C'$, 則 C 落於 B', C' 的中間,若 $BC>B'C'$, 則 C 落在 $B'C'$	普通公理一系.

的延線上,如圖154, C 所落點爲 D',

即 $\triangle ABC \cong A'B'D'$.

(6) $\because A'D' = AC = A'C'$,	假設.
$\therefore \angle AC'D' = A'D'C'$,	定理九.
而 $\angle A'D'B' + A'C'B' = 2R\angle$,	
即 $\angle ACB + A'C'B' = 2R\angle$　Q.E.D.	

系. **二個直角三角形中一雙直角邊與一雙斜邊各相等,則此二形是合同圖.**

例題五十四

1. 從二等邊三角形頂點至底邊所引垂線必等分底邊.

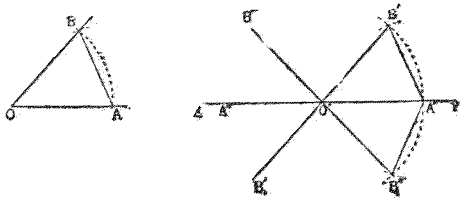
2. 一角 BAC 內一點 O 若與此角二邊 AB, AC 的距離相等,則 OA 必是此角的等分線.

3. 在 $\triangle ABC$ 邊 AB 上取 D 點,令 $AD = AC$. 又在 AC 的延線上取 E 點,令 $AE = AB$. DE 與 BC 交於 F,則 AF 等分 $\angle BAC$.

115. 作圖題一.

從定直線上一點作一半射線,使與此定直線所成的角等於一所與角.

與件. $\angle AOB$ 爲所與角, XY 爲定直線, O' 爲其上



（圖 155）

一定點.

要作. 要從 O' 作一半射線,令與 XY 所成的角等於 $\measuredangle AOB$.

作法.	根據
(1) 將所與角頂 O 做中心,用隨意半徑畫圓弧,與角的二邊各交於 A, B.	公設二
(2) 將定點 O' 做中心用(1)中所用的半徑畫圓弧,與定直線 XY 交於 A'.	同上.
(3) 將 A' 做中心,用 AB 的距離做半徑畫圓弧,與(2)所畫圓弧交於 B' 及 B_1''.	公設二.
聯 $O'B'$, $O'B_1''$, 為所要作的半射線 $Q.E.F.$	
證. (1) 聯 AB, $A'B'$, 及 $A'B_1''$.	公設一.

(2)$\because OA=OB=O'A'=O'B'=O'B_1''$ 本題作法及定義一一.

$$AB=A'B'=A'B_1'',$$

$\therefore$ $\triangle OAB \backsim O'A'B' \cong O'A'B_1'$, 定理一一.

而 $\measuredangle A'O'B'=AOB=A'O'B_1''$. Q.E.D.

討論. 延長$B'O'$得$O'B_1'$,又延長$B_1''O'$得$O'B''$, 則在$O'X$上取一點A''時, $\measuredangle A''O'B_1'=A'O'B'$, 定理二.

$$\measuredangle A''O'B''=A'O'B_1'',$$

故$O'B'_1$, $O'B''$亦可做解答,而解答共有四個.

系一. **給與三角形的二邊及夾角,作此三角形.**

系二. **給與三角形的二角及其間的一邊作此三角形.**

例題五十五

1. 隨意給與二角而作此二角的和.
2. 隨意給與二角而作此二角的差.
3. 作一角,使等於一已知角的二倍.

116. 作圖題二.

給與三角形的三邊,作此三角形.

(可參看29款(三),自作自證).

例題五十六

1. 二圓半徑各長r_1及r_2,其中心的距離爲d.試歷舉在以下各種情形中此二圓會於幾點:—

(1) $r_1-r_2>d$; (2) $r_1-r_2=d$;

(3) $r_1-r_2<d<r_1+r_2$; (4) $r_1+r_2=d$;

(5) $r_1+r_2<d$.

2. 給與三邊作三角形. 欲所作三角形成立,三邊間的大小應當給與怎樣的關係?

3 給與二等邊三角形的底及等邊,作此形.

4. 給與等邊三角形的一邊,作此三角形.

117. 作圖題三.

作一角的等分線.

〔看30款(第一),可自作自證〕

例題五十七

1. 四等分一個已知角.

2. 作一定三角形三個角的等分線.

3. 給與一二等邊三角形的頂角及一個等邊,作此二等邊三角形,且作其頂角的等分線.

118. 作圖題四.

從一直線中的一點作此直線的垂線.

〔看30款(第二),自作自證〕.

例題五十八

1. 作一已知角的餘角.

2. 作一已知角的補角.

3. 給與直角三角形的二個直角邊,作此三角形

4. 作一角,令等於45°.

119. 作圖題五.

從一直線外的一點作此直線的垂線.

〔看30款(第三),可自作自證〕

120. 作圖題六.

求一個線份的中點.

〔看30款(第四),可自作自證〕

例題五十九

1. 隨意作一銳角三角形再作其三個垂線.

2. 隨意作一鈍角三角形,再作其三個垂線.

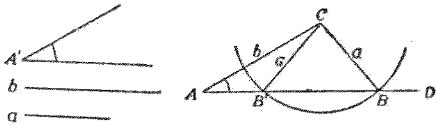
3. 隨意作一三角形再作三個中線.

4. 隨意作一三角形,再作其三邊的垂直等分線.

121. 作圖題七.

給與三角形的二邊及此中一邊所對的角,作此三角形.

與件 三角形的二邊 a, b, 及對 a 的一角 A'.



(圖 156)

要作. 要作合此條件的三角形.

作法.	根據
(1) 作一角 A, 令等於所與角 A'.	作圖題一.
(2) 在 $\measuredangle A$ 一邊上取長 AC, 令 $AC=b$.	公設三.
(3) 以 C 做中心, 用半徑 a 畫圓弧, 交 $\measuredangle A$ 的第二邊 AD 於 B, B', $\triangle ACB$, ACB' 都能做解答　Q.E.F.	公設二.
證. 略.	

例題六十

1. 在作圖題七中, 設 $\measuredangle A' < R\measuredangle$, 又設從 C 到 AD 所引垂綫的長是 d, 考察在以下各種情形中所有解答的個數;

(1) $a<d$;　(2) $a=d$;　(3) $d<a<b$;

(4) $a=b$;　(5) $a>b$.

2. 若在作圖題七中, $\measuredangle A'=R\measuredangle$, 考察在以下各種情形中所有解答的個數:

(1) $a<b$; (2) $a=b$; (3) $a>b$.

3. 若在作圖題七中, $\measuredangle A'>R\measuredangle$, 考察在以下各種情形中所有解答之個數:

(1) $a<b$; (2) $a=b$; (3) $a>b$.

4. 將上三題所得結果彙集來做一表,便成作圖題七的討論. 試正式寫出此討論.

122. 證題的注意.

要證二個線份或二個角相等,可證他是合同三角形的對應邊或對應角,儻使他們不是合同三角形的部份,我們可試添補助線,將他們變做合同三角形的對應部份. 也有簡單的可以認做二等邊三角形的等邊或等角.

要證一角是直角,可證其與一已知直角相等,或證其與隣補角相等.

例題六十一

1. 在二等邊三角形中,對於等邊的二個中線必相等.

2. 在二等邊三角形中,二底角的等分線必相等.

3. 在二等邊三角形中,對底的中線必垂直於底.

4. 一四邊形中,二雙隣邊各相等,則其二個對角

線必互相垂直.

5.　一個三角形中,對於二邊的垂線相等,則此形是二等邊三角形.

6.　$\triangle ABC$ 是等邊三形,延長 CA 至 D, AB 至 E, BC 至 F, 令　$AD=BE=CF$.

聯 DE, EF, FD, 則 $\triangle DEF$ 亦是等邊三角形.

7.　$\triangle ABC$ 是等邊三角形,在邊 AB, BC, CA 上各取點 F, D, E 令　$AF=BD=CE$.

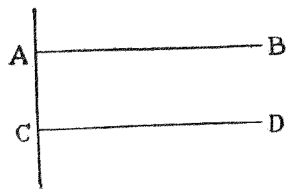
聯 AD, BE, CF, 此三線兩兩交於 K, L, M, 則 $\triangle KLM$ 亦是一等邊三角形.

8.　$\triangle ABC$ 是正三角形,從各角頂向形內各作線份 AD, BE, CF, 令　$\measuredangle BAD=CBE=ACF$, 且 D, E, F 各在 BE, CF, AD 上,則 $\triangle DEF$ 亦是正三角形.

第三章　平行直線

123.　定理一三.

同直線的二個垂線互相平行.



假設.　$AB\perp AC$,　$CD\perp AC$.

終決.　$AB//CD$,

(圖157)

證.	根據
(1) 如說AB不平行於CD,則延長他們終必相交,便是從交點到一直線AC可作AC的兩個垂線.	定義十九.
(2) 這樣顯然是不可以的,故此AB與CD不能不平行.	定理六.

系. **從一直線外一點可引此直線的一個平行線.**

124. 定義三七. 歸謬證法.

要證一定理,先否認其終決,示導得的結果與已證明的定理或公理相矛盾,於是斷定終決的不可否認,如此證法,叫做**歸謬證法**(Reductio ad absurdum).

定理一三的證法便是歸謬證法.

125. 關於平行線的公設.

公設九. 過一直線外一點只能引此直線的一個平行線.

系一. 二直線平行,則與其一相交的直線亦必與其二相交.

系二. 二直線平行,則與其一平行的直

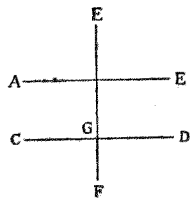
線亦必與其二平行.

126. 幾何公理十八.

幾何公理十八. 同平面上平行二直線若共有一點,則必合成一直線.

127. 定理一四.

一直線垂直於二平行直線的一線則亦必垂直於第二線.



(圖158)

假設. $AB\,||\,CD,\quad EF\perp AB.$

終決. $EF\perp CD.$

證.	根據
(1) EF 必與 CD 相交,名其交點為 G.	公設九系一.
(2) 過 G 引 EF 的垂線 $C'D'$,則 $C'D'\,||\,AB.$	定理一三.
(3) $C'D'\,||\,AB,\quad CD\,||\,AB,$ $\therefore C'D'\,||\,CD.$	公設九系二.
(4) 然 $C'D'$ 與 CD 共有一點 G,故 CD 與 $C'D'$ 合一, 因 $EF\perp C'D'$, $\therefore EF\perp CD.$	幾何公理十九.

128. 定義三八. 同一證法

要證一定理,先在某位置另作一圖,使含有終決的性質,於是證此所作實與要證的終決是一非二,終決的性質因此便真確了. 如此證法叫做**同一證法**.(Rule of Identity).

定理一四的證法便是同一證法.

例題六十二 (看定義一八)

1. 將一直線截二直線,若得一雙內錯角相等,則又一雙內錯角亦相等,四雙同位角皆相等,二雙同旁內角皆互相補.

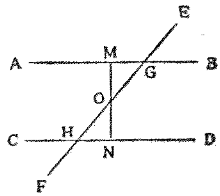
2. 將一直線截二直線,若得一雙同位角相等,則餘三雙同位角亦相等,二雙內錯角皆相等,二雙同旁內角互相補.

3. 將一直線截二直線,若得一雙同旁內角互相補,則又一雙同旁內角亦互相補,二雙內錯角皆相等,四雙同位角皆相等.

4. 若一直線垂直於二平行直線的一線,則四雙同位角皆相等,二雙內錯角皆相等,二雙同旁內角亦皆相等,

129. 定理一五.

一直線截二平行線,所得內錯角必相等.


(圖159)

假設. $AB \parallel CD$, 截線 EF 截 AB 於 G, 截 CD 於 H.

終決. 內錯角 $AGH = DHG$, 及 $\measuredangle HGB = GHC$

證.	根據
(1) 過 GH 的中點 O 作 AB 的垂線 OM, 延長,交 CD 於 N.	作圖題五.
(2) 然則 $MON \perp CD$.	定理一四.
(3 將圖中 O 以下一部份圍繞 O 點轉過二直角,則 ON 與 OM 相重, OHF 與 OGE 相重.	公設六.
(4) 因 $OH = OG$, 故 H 與 G 相合.	幾何公理十四.
(5) 於是 HN 與 GM 相重,	定理六.
故 $\measuredangle MGO = NHO$, 卽 $\measuredangle AGH = DHG$,	幾何公理十三.
因此, $\measuredangle HGB = GHC$	定理一系三.

系一. 一截線截二平行線,則(一)所得同位角必相等;(二)所得同側內角必互相補.

系二. 一直線截二直線,(一)所得內錯角不相等;或(二)所得同位角不相等;或(三)所得同側內角不互相補;

則此二直線不平行.

此系二,從定理一五顯然易知其眞確. 試證其(一)如下:

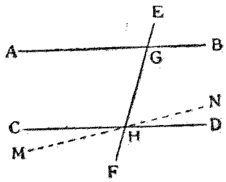
若設二直線平行,則從本定理,內錯角必相等,此與(一)的假設矛盾,不可,故二直線決不平行.

例題六十三

1. 同直線的垂線及斜線必相交.
2. 相交二直線的垂線必相交.
3. 三角形中二角的等分線必相交.
4. 三角形中,對於二邊的中線必相交.

130. 定理十六.

二直線被一直線所截,若所得內錯角相等,則此二直線必平行.



(圖160)

假設. EF 截 AB 於 G, 截 CD 於 H, 而 $\measuredangle AGH=DHG$.

終決. $AB \parallel CD$.

證.	根據
(1) 過 H 引 AB 的平行線 MN,	公設九.
則 $\measuredangle AGH=NHG$.	定理一五.
(2) $\because \measuredangle AGH=DHG$,	假設.

$\therefore \measuredangle DHG = NHG.$	普通公理二.
(3) 由是 DH 與 NH 相重,	幾何公理一四.
卽 CD 與 MN 相重.	幾何公理三系一.
(4) $\because MN \parallel AB,$	本題假定.
$\therefore CD \parallel AB.$	

系一. 二直線被一直線所截,若(一)所得同位角相等,或(二)所得同側內角互相補,則此二直線平行.

系二. 一截線截不平行二直線,則(一)所得內錯角不相等; (二)所得同位角不相等; (三)所得同側內角不互相補.

例題六十四

1. 一截線截二平行線,所得一雙內錯角的等分線互相平行.

2. 一截線截二平行線,所得一雙同位角的等分線互相平行.

3. 二直線被一截線所截,若所得一雙同側內角的等分線互相垂直,則此二直線平行.

4. 四邊形的二個對角線若互相等分,則此四邊形的二雙對邊兩兩平行.

5. 四邊形的二雙對邊各相等,則此二雙對邊必兩兩平行.

6. 四邊形的一雙對邊相等而且平行,則其第二雙對邊亦必相等而且平行.

131. 定義三九. 否定理及倒否定理

有兩個定理,此中一個的假設是他一個假設的否定辭,又終決是他一個終決的否定辭,則此二個定理互相叫做**否定理** (Obverse).

例如定理一五與定理一六系二的(一)互相爲否定理,定理一六與定理一五系二的(一)亦互相爲否定理.

有二個定理,此中一個的假設是他一個終決的否定辭,又終決是他一個假設的否定辭,則此二個定理互相叫做**倒否定理**(Contra-position).

例如定理一五與其系二的(一), 又定理一六與其系二的(一)都互相爲倒否定理.

凡一個定理真確,其否定理能不能真確不能一定,應看做另外一個定理再證,而倒否定理則必伴着原定理同時真確.

132. 定義四〇. 同向及反向.

如有二個平行半射線,將直線聯此二半射線的原

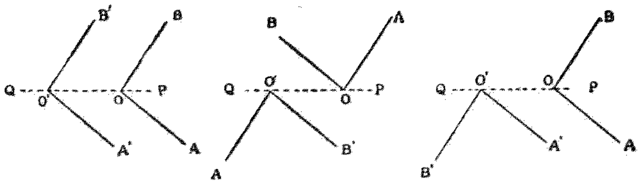
點,此二個半射線若在聯線的同側,則叫他們做**同向**(Same sense), 若在聯線的兩側,則叫他們做**反向**(Opposite sense).

133. 定義四一. 一角的左右邊.

從一個角的頂點向角內看去,角的邊在左側的叫做**左邊**,在右側的叫做**右邊**.

134. 定理一七.

有二角:(一)若左右邊各自平行,則此二角相等;(二)若左右邊交互平行,則此二角互相補.



(圖 161)

(一) **假設.** 二角 AOB, $A'O'B'$ 中,

二個右邊 $OA \parallel O'A'$, 　　二個左邊 $OB \parallel O'B'$.

終決. $\measuredangle AOB = A'O'B'$.

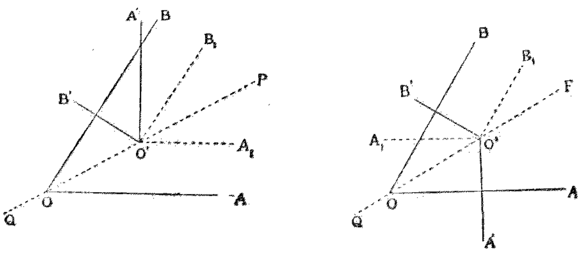
證.	根據
(1) 聯二角頂 $O'O$ 引線 QP.	

(2) 在左一圖中,	在中一圖中,	定理一五。
$\measuredangle AOP = A'O'P$	$\measuredangle POA = QO'A'$,	
$\measuredangle POB = PO'B'$.	$\measuredangle POB = QO'B'$.	
(3) 加此二式,	減此二式,	幾何公理七
$\measuredangle AOB = A'O'B'$	$\measuredangle AOB = A'O'B'$.	及八。

(二) **假設.** 二角 $AOB, B'O'A'$ 中（圖 161 最右一圖）一左邊一右邊 $OA \parallel O'A'$ $OB \parallel O'B'$.

終決. $\measuredangle AOB + B'O'A' = 2R\measuredangle$.

證.	根據
(1) 聯二角頂 O, O' 引直線 QP.	
(2) 則 $\measuredangle AOP = A'O'P$,	定理一五。
$\measuredangle POB = QO'B'$,	
(3) $\therefore$ $\measuredangle AOB = A'O'P + QO'B'$,	普通公理七。
(4) 於是	
$\measuredangle AOB + B'O'A' = QO'B' + B'O'A' + A'O'P$ $= QOP$	普通公理六。



（圖 162）

系. 有二角:(一)若左右邊各自垂直,則此二角相等;(二)若左右邊交互垂直,則此二角互相補.

(將一個角圍繞頂點轉過一直角,則與又一角的關係歸到定理一七. 學生可自己證明.)

例題六十五

1. 有二角:(一)若其左右邊各自平行,則其等分線亦互相平行;(二)若其左右邊交互平行,則其等分線互相垂直.

2. 有二角:(一)若其左右邊各自垂直,則其等分線亦互相垂直;(二)若其左右邊交互垂直,則其等分線互相平行.

3. 隨意作二個三角形,令其三雙邊兩兩平行.

4. 隨意作二個三角形,令其三雙邊兩兩垂直.

135. 作圖題八.

過一定點作一定直線的平行線.

(可自作自證)

註. 用定理一三,可得一作法;由定理一五,又可得一作法. 33款的作圖法,是用定理一五系一(一).

例題六十六

1. 過$\angle ABC$等分線上一點O引BC的平行線,與

AB 交於 M,則 $\triangle BOM$ 成一二等邊三角形.

2. ABC 是正三角形,其二角B,C的等分線交於 O. 過 O 引 AB, AC 的平行線,各交 BC 於 D, E,則$BD=DE=EC$.

3. $\triangle ABC \measuredangle C$ 的等分線會 AB 於 D. 從 D 引 BC 的平行線,與 AC 交於 E,與$\measuredangle C$ 外角的等分線交於 F,則 $DE=EF$.

4. 過三角形各角頂引直線各與對邊平行,則可得四個合同三角形.

5. AD 是 $\triangle ABC$ 邊 BC 所對的一個中線.延長 AD 至 E,令 $DE=AD$. 聯 CE,則 $CE \underline{\parallel} AB$.

6. 二個三角形中,有二雙邊及一雙對應中線各相等,則此二形是合同形.

注意. 本題包含二類合同圖.

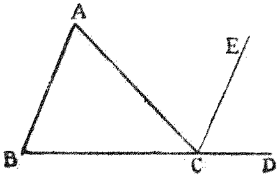
7. $\triangle ABC$ 二角 B,C 的等分線交於 I. 過 I 引 BC 的平行線,與 AB 交於 M,與 AC 交於 N,則 $MN=MB+NC$.

8. $\triangle ABC$ 角 B 的等分線與$\measuredangle C$ 外角的等分線交於 I_2. 過 I_2 引 BC 的平行線,與 AB 交於 M_2,與 AC 交於 N_2,則 $M_2N_2=M_2B \backsim N_2C$.

第四章 多角形的角

136. 定理一八.

三角形三個內角的和等於 $2R\measuredangle\,(=180^\circ)$。



(圖163)

假設. $\measuredangle A, B, C$ 是 $\triangle ABC$ 的三個內角.

終決. $\measuredangle A+B+C=2R\measuredangle$.

證.	根據
(1) 延長邊 BC, 得外角 ACD.	?
(2) 過 C 引 BA 之平行線 CE.	作圖題八.
(3) 於是 $\measuredangle ECA=A$, $\measuredangle DCE=B$.	定理一五及系一.
(4) $\therefore \measuredangle A+B+C=DCE+ECA+C$	普通公理六及七.
$=DCB$	定義二〇.
$=2R\measuredangle$	定義一二.

系一. 三角形一個外角等於其二個內對角的和. 故三角形一外角比其任意一個內對角大.

系二. 三角形任意一角或二角的和必比二直角小. 故三角形至多有一個直角或一個鈍角

系三. 直角三角形的二個銳角互相為餘角.

系四. 兩三角形中二雙角相等,則其第三雙角亦必相等.

系五. 二個三角形中,二雙角各相等,對於一雙等角的邊又相等,則此二形是合同圖.$(a.a.s.=a.a.s.)$

(從系四,本系可歸到定理八.)

系六. 二個直角三角形中一雙銳角與一雙對應邊各相等,則此二形是合同圖.

注意. 此系六詳細分別可分成三類如下:

(第一) 二個直角三角形中,一雙銳角及夾此銳角的一雙直角邊各相等,此二形是合同圖;

(第二) 二個直角三角形中,一雙銳角及對此角的一雙直角邊各相等,此二形是合同圖.

(第三) 二個直角三角形中,一雙銳角與一雙斜邊各相等,此二形是合同圖.

(第一)歸到定理八,(第二)及(第三)皆歸到本款系五.

系七. 正三角形的各角是$\frac{2}{3}R\measuredangle$,即60°.

例題六十七

1. 求二等邊直角三角形各銳角的大小.

2. 二等邊三角形頂角的等分線分此形成二個合同三角形.

3. 二等邊三角形中,對於等邊的二垂線相等.

4. 挨次延長三角三邊得三個外角,求此三個外角和的大小.

5. 若三角形二個外角的和是$3R\measuredangle$,則此形是直角三角形.

6. 從直角三角形ABC斜邊AC延線上隨意一點D引AC的垂線,與AB交於E,則$\measuredangle E=ACB$.

7. ABC是不等邊三角形,AD,BE是此形的二個垂線,則$\measuredangle DAC=CBE$.

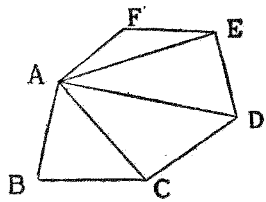
8. 給與一個三角形的二個角,作出其第三角.

9. 給與二等邊三角形的頂角,作出其底角.

10. 二等邊三角形頂角的外角等分線與底平行.

137. 定理一九.

n邊多角形內角的和等於$2R\measuredangle$的$(n-2)$倍.



(圖 164)

假設. $ABC\cdots EF$是一個多角形,他的邊數是n.

終決. $\measuredangle A+B+C+\cdots+E+F$
$=(n-2)2R\measuredangle$.

證.	根據
(1)從一個角頂A引可能引的對角線,將原形分成諸三角形.	定義二八,公式一.
(2)除去過A的二邊AB,AF以外,其餘每一邊有一對應的三角形,故共得$(n-2)$個三角形.	其餘每邊做每一三角形的底.

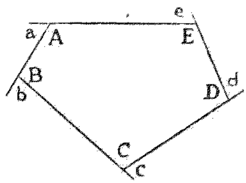
(3) 因各三角形內角的和是 $2R\measuredangle$，故 $(n-2)$ 個三角形內角的和是 $(n-2)\cdot 2R\measuredangle$，即此多角形內角的總和是 $2(n-2)R\measuredangle$。 —— 定理一八。

系一. n **邊正多角形每一個角等於** $2R\measuredangle$ **的** $\frac{n-2}{n}$ **倍.**

系二. **四角形內角的和等於** $4R\measuredangle$.

138. 定理二〇.

順次延長多角形各邊所得諸外角的和等於 $4R\measuredangle$.



(圖165)

假設. 順次延長 n 多角形 $ABC\cdots\cdots E$ 各邊,得諸外角 $a, b, c, \cdots, e$.

終決. $\measuredangle a+b+c+\cdots+e=4R\measuredangle$.

證. —— 根據

(1) $A, a; B, b; C, c; \cdots, E, e;$ 是各雙相隣的內角與外角,則

$$\measuredangle A+a=2R\measuredangle,\quad \measuredangle B+b=2R\measuredangle, \cdots,$$

$$\measuredangle E+e=2R\measuredangle.$$ —— 定義一二。

(2) 故

$$(\measuredangle A+B+\cdots+E)+(\measuredangle a+b+\cdots+e)=n\ 2R\measuredangle)$$ —— 普通公理七及六。

(3) 因$\measuredangle A+B+\cdots+E=(n-2)2R\measuredangle$, 定理一九.

故得

$\measuredangle a+b+\cdots+e=n(2R\measuredangle)-(n-2)2R\measuredangle$ 普通公理八.

$=4R\measuredangle$.

例題六十八

1. 求正四角形,正六角形,正十角形各一個內角的度數.

2. 若四角形有一雙對角互相補,則其又一雙對角亦必互相補.

3. 二等邊三角形兩底內外角的等分線成一四邊形,則此四邊形的各雙對角互相補.

4. 銳角三角形或直角三角形的各外角決不是銳角.

5. 三角形中二角的和若等於第三角,則此形必是直角三角形.

6. 二個二等邊三角形的頂角若互相補,則一形的一底角與又一形的一底角必互相爲餘.

7. 三角形二個垂線的一個夾角與形中第三角互相爲補.

8. 三角形二個外角等分線所夾角等於第三個外角的一半.

9. 四邊形相隣二角的等分線所夾角等於餘二角的半和.

10. 四邊形相對二角的等分線所夾角等於餘二角的半差.

11. 凸多角形的內角至多只能有三個銳角.

12. 四邊形各外角的等分線所成第二個四邊形中,各雙對角互相補.

第四章 四邊形

139. 定義四二. 四邊形的分類.

四角形中,兩雙對邊都不平行的,叫做**不平行四邊形**. 以後凡是單稱四邊形的,都指這種不平行四邊形.

不平行四邊形中,二雙隣邊各自相等的叫做**鳶形**. 一雙對邊平行的,叫做**梯形**. 梯形的平行二邊都叫做**底**,在上面的叫**上底**,在下面的叫**下底**,非底的二邊便叫**邊**. 梯形中,不平行二邊不等的叫做**不等邊梯形**,二邊相等的叫做**二等邊梯形**. 凡是單稱梯形,都指不等邊梯形.

四角形中,兩雙對邊各相平行的叫做**平行四邊形**.

平行四邊形中,各邊都相等的叫做**菱形**. 各角都是直角的叫做**矩形**. 各邊都相等,各角又都是直角的

叫做**正方形**. 菱形亦叫**斜方形**,矩形亦叫**長方形**,正方形,即**正四角形**亦叫**平方**.

平行四邊形可取隨意一雙對邊做**底**.

無論梯形或平行四邊形,二底間所夾公共垂線的長叫做**高**. 矩形,則一雙對邊做底時,又一雙對邊便是高.

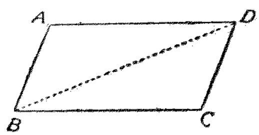
聯梯形中不平行二邊中點的線份叫做梯形的**中線**.

140. 定義四三. 平行直線間的距離.

平行二直線間所夾公共垂線的長叫做此二線間的**距離**.

141. 定理二一.

在平行四邊形中,(一)對邊相等;(二)對角相等;(三)二對角線互相等分.



(學生可自己證明)

(圖166)

系一. 平行四邊形的一個對角線分全形做二個合同三角形.

系二. 夾在兩平行線中間的平行線份必相等.

系三. 平行二直線間的距離處處相等.

系四.　平行四邊形的二個隣邊相等,則此形是菱形.

系五.　平行四邊形的一角是直角,則此形是矩形.

系六　菱形的一角是直角或矩形的二隣邊相等,則此形是正方形.

例題六十九

1.　從平行四邊形一雙對角頂點到同一對角線所引垂線的長相等.

2.　一個四邊形中,若一雙對邊相等而且平行,則又一雙對邊亦必相等而且平行.

3.　平行四邊形的一個對角線若等分一角,則此形必是菱形.

4.　菱形的兩個對角線必互相垂直.

5.　一平行四邊形的二個對角線若互相垂直,則此形是菱形.

142.　定理二二.

在一四邊形中,若(一)二雙對邊各相等;或(二)二雙對角各相等;或(三)二對角線互相等分;或(四)一雙對邊相等而且平行;則此形是平行四邊形.

(學生可自己證明)

例題七十

1. 一個四邊形中,各雙鄰角互相補,則此形是平行四邊形.

2. 一個四邊形中,一雙對邊平行,又一雙對邊相等,則此形或是平行四邊形,或是二等邊梯形.

3. 平行四邊形一雙對角的等分線與他二邊仍圍一平行四邊形.

4. 在▱$ABCD$一對角線AC上取二點E, F,令$AE=FC$,則$BEDF$亦爲一平行四邊形.

143. 定理二三.

二個平行四邊形中,二雙邊及其一雙夾角各相等,則此二形是合同圖.

(學生可自己證明)

系一. **二個矩形中,二雙隣邊各相等,則二形是合同圖.**

注意. 此系亦可換一種說法如下: **等底等高的矩形是合同圖.**

系二. **二個正方形中,有一雙邊相等,則二形是合同圖.**

例題七十一

1.　給與平行四邊形的二邊及一角,作此形.

2.　給與矩形的二邊,作此矩形.

3.　給與正方形的一邊,作此正方形.

144.　定理二四.

(一)矩形的二個對角線相等;　(二)二個對角線相等的平行四邊形是矩形.

(學生可自己證明)

系.　直角三角形斜邊的中點與三個角頂距離相等.

例題七十二

1.　從三角形頂點到底的中線若等於底的一半,則此頂角必是直角.

2.　直角三角形的一銳角是又一銳角的二倍,則其最小邊等於斜邊的一半.

3.　若直角三角形的最小邊等於斜邊的一半,則其一個銳角必等於又一銳角的二倍.

4.　不平行四邊形四角的等分線若圍成一四角形,則此新四角形的二雙對角各互相補.

5. 平行四邊形四角的等分線可圍成一矩形。

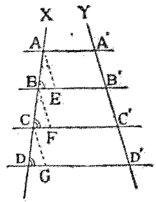
6. 矩形四角的等分線可圍成一正方形。

7. 正方形的二個對角線相等而且互相垂直。

145. 定理二五.

若諸平行線在一截線上截取諸相等部份,則在隨意他直線上亦必截取諸相等部份.

假設. AA', BB', CC', DD', … 為諸平行直線. 截線 X 被此諸平行線分於 A, B, C, D, …, 截線 Y 被此諸平行綫分於 A', B', C', D', …, 而 $AB=BC=CD=$ ….



(圖167)

終決. $A'B'=B'C'=C'D'=$ ….

證. | 根據

(1) 過 A, B, C, … 作線份,命各平行於 Y 而止於次一個平行綫上,如 AE, BF, CG, …. | 作圖題八

(2) 於是在 △s ABE, BCF, CDG, … 中, | 定理一五系一(一).

$\measuredangle ABE=BCF=CDG=$ …,

$\measuredangle EAB=FBC=GCD=$ ….

(3) 故因 $AB=BC=CD=$ …, 得 | $a.s.a.=a.s.a.$

$\triangle ABE \cong BCF \cong CDG \cdots$

而　$AE = BF = CG = \cdots$.

(4) 又因　　　　　　　　定理二一

$A'B' \perp\!\!\!\perp AE$, $B'C' \perp\!\!\!\perp BF$, $C'D' \perp\!\!\!\perp CG, \cdots$,

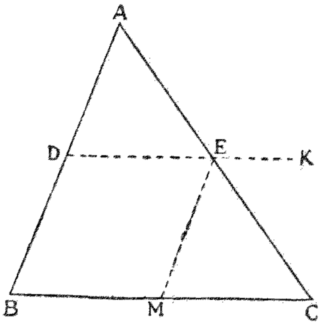
故　$A'B' = B'C' = C'D' = \cdots$,

系一. **一直線過三角形一邊中點而與第二邊平行,則此直線必又過第三邊的中點.**

系二. **一直線過梯形不平行邊的中點而與二底平行,則此直線必又過第二不平行邊的中點.**

146. 定理二六.

聯三角形二邊中點的線份必平行於第三邊而等於第三邊的一半.



(圖168)

假設. D, E 各是 $\triangle ABC$ 邊 AB, AC 的中點.

終決. $DE \perp\!\!\!\perp \frac{1}{2}BC$.

證.　　　　　　　　根據

(1) 過 D 引 BC 的平行線 DK, 則 DK 必過 E.　　　　定理二五系一

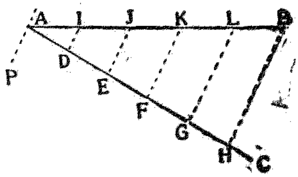
(2) 故 DE 必與 DK 相合而　　　　幾何公理三系

$DE \parallel BC$.　　Q.E.D.	一.
(3)取 CB 的中點 M, 聯 EM, 則同理,知　$EM \parallel DB$	同上.
(4)於是 $BDEM$ 是平行四邊形,故　$DE=BM$,	定理二一(一).
卽　$DE=\frac{1}{2}BC$.　　Q.E.D.	

系. 梯形的中線平行於二底而等於二底的半和.

147. 作圖題九.

將一個定線份隨意等分成 n 份.



(圖169)

與件. AB 爲定綫份, $n=5$.

要作. 要等分 AB 成 5 等份.

作法.	根據
(1)過 A 隨意引一直線 AC, 令與 AB 成一銳角.	幾何公理五
(2)從 A 起,用隨意一定長在 AC 上截取 5 回,得點 D, E, F, G, H.	公設三
(3)聯 BH. 過各點 D, E, F, G 作 HB 的平行綫. 此諸平行線與線	作圖題八

份 AB 各交於 I, J, K, L, 則

$$AI=IJ=JK=KL=LB.$$

證 (一)過 A 再引 HB 的平行線 AP, 則得 (作圖題八)

$$AP \parallel ID \parallel JE \parallel KF \parallel LG \parallel BH.$$ (公設九系二)

(二) 此諸平行線既在截線 AC 上截取諸相等部份,故在截線 AB 上亦截取諸相等部份. (定理二五)

例題七十三

1. 順次聯三角形各邊的中點,可將全形分成四個合同三角形.

2. 順次聯不平行四邊形各邊的中點,則諸聯線可圍成一新的平行四邊形.

3. 順次聯鳶形各邊的中點則諸聯線可圍成一矩形.

4. 順次聯矩形各邊的中點則諸聯線可圍成一菱形.

5. 順次聯菱形各邊的中點,則諸聯線可圍成一矩形.

6. 不平行四邊形一雙對邊的中點與二個對角線的中點順次聯結,可得一平行四邊形.

7. 梯形中,二個不平行邊的中點,與二個對角線的中點,在同一直線上.

8. 從三角形頂點隨意到底邊引一線份,此線份的中點在一個定直線上.

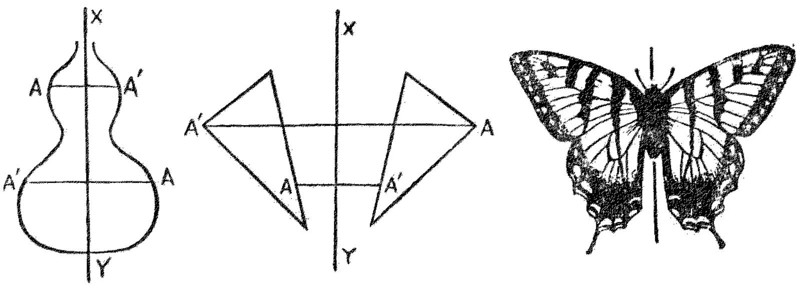
9. $ABCD$ 是一平行四邊形,M,L 是一雙對邊 AB,DC 的中點,則 BL,DM 將對角線 AC 等分成三份.

10. 聯梯形二個對角線中點的線份等於此梯形二底的半差.

148. 定義四四. 對稱.

聯二點 A,A' 的線份,被一直線 XY 所垂直等分,則二點 AA' 關於線 XY 為**對稱** (Symmetric),此二點叫做**對稱點** (Symmetric points),AB 叫做**對稱軸** (Axis of symmetry).

一平面圖中各雙點都關於一直線為對稱,則全圖叫做關於此直線為**軸對稱**.



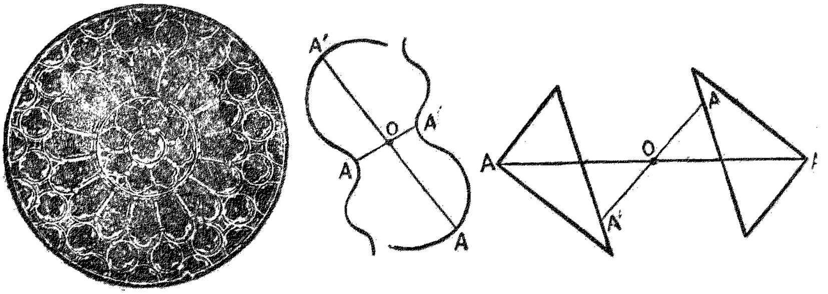
(圖 170)

軸對稱的圖,取軸做摺痕來摺疊,則在軸兩旁的兩部份可完全重合.

聯二點 A, A' 所得線份的中點是 O, 則二點 A, A' 關於點 O 爲對稱, O 叫做**對稱中心** (Center of Symmetry),

一平面圖中各雙點都關於一中心爲對稱,則全圖叫做關於此中心爲**中心對稱**.

中心對稱的圖若圍繞中心轉過二直角,則其隨意一部份可與他一部份完全重合.



(圖 171)

軸對稱的圖亦叫做**有軸圖**,中心對稱的圖亦叫做**有中心圖**.

例題七十四

1. 二雙點關於一軸爲對稱,則其聯線份關於此軸亦爲對稱.

2. 二雙點關於一中心爲對稱,則其聯線份關於

此中心亦爲對稱.

3.　二等邊三角形關於頂角的等分線爲軸對稱.

4.　平行四邊形關於二對角線的交點爲中心對稱.

5.　菱形有二個對稱軸,亦有一個對稱中心.

6.　矩形有二個對稱軸,亦有一個對稱中心.

第五章　三角形的不等性

149.　定義四五.　不等式.

表示一量比第二量大(或小)的關係式叫做**不等式**(Inequality).

例如　$A>B$ 是 A 比 B 大,　$C<D$ 是 C 比 D 小.

三角形的不等性,前面已經有過一二種,現在特別表出於下:

(一)**三角形的一個外角比任意一個內對角大**(定理一八系一)

(二)**在鈍角三角形或直角三角形中,鈍角或直角必是此三角形的最大角**(從定理一八系二可知).

150.　定理二七.

一個三角形隨意二邊的和必比第三邊

大.

(學生可用幾何公理一證此定理)

系一.　三角形隨意二邊的差必比第三邊小.

系二.　多角形的隨意一邊必比其餘各邊的和小.

例題七十五

1.　D 是二等邊三角形 ABC 底 BC 的中點, E 是一邊 AC 上的隨意一點,則 $DB \sim DE < AB \sim AE$.

2.　三角形中對於一邊的中線,比餘二邊的半和小.

3.　O 是 $\triangle ABC$ 內的隨意一點,則 $OB+OC<AB+AC$, 又 $\measuredangle BOC > BAC$.

4.　二點 A, B 在一直線的同旁, P 在此直線上而 AP, BP 與此直線成等角. 若 Q 是直線上的隨意一點,則 $AP+BP<AQ+BQ$.

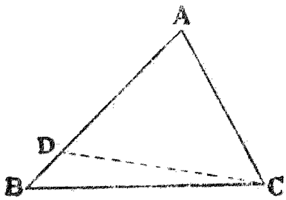
5.　前題中二點 A, B 若在直線的兩旁,則 $AP \sim BP > AQ \sim BQ$.

151. 定理二八.

三角形的二邊不相等,則此二邊所對的角也不相等,大邊必對大角.

假設.　$\triangle ABC$ 中 $AB>AC$.

終決.　$\measuredangle C > B$.



(圖 172)

證.	根據
(1) 在 AB 上取 D 點,令	公設三.
$AD=AC$,	比較線份的大小.
則 D 必在 A, B 中間.	普通公理一系.
(2) 聯 CD, 則 CD 在 $\measuredangle ACB$ 內,	比較角的大小.
故 $\measuredangle ACB>ACD$.	普通公理系一.
(3) $\because$ $AD=AC$,	本題(1).
而 $\measuredangle ACD=ADC$.	定理九.
(4) 然 $\measuredangle ADC>ABC$,	定理一八系一.
故 $\measuredangle ACB>ABC$.	普通公理四.

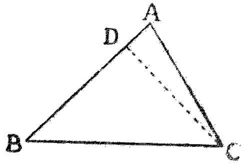
152. 定理四六. 點與直線的距離.

從一點到一直線所引垂線的長叫做此點與直線的距離.

153. 定理二九.

三角形的二角不相等,則此二角所對的

邊也不相等,大角必對大邊.



(圖173)

假設. $\triangle ABC$ 中, $\measuredangle C>B$.

終決. $AB>AC$.

證.

	根據
(1)從 C 引直線 CD, 令 $\measuredangle DCB=DBC$,	作圖題一.
(2)然則 $DB=DC$.	定理一〇.
(3)因 $\measuredangle DCB=DBC<ACB$, 故 CD 全在 $\measuredangle ACB$ 內,而 D 在 A,B 中間.	假設. 比較角的大小. 普通公理一系.
(4) 於是 $AB=AD+DB=AD+DC>AC$.	普通公理二,七. 定理二七.

注意. 同理可證若 $AB<AC$, 則 $\measuredangle C<B$.

系一. 鈍角三角形中,對鈍角的一邊是最大邊. 直角三角形中,斜邊是最大邊.

系二. 從直線外一點到直線引垂線及斜線,則(一)垂線最短; (二)若二斜線的足與垂線的足距離相等,則二斜線亦不等,足離得較遠的斜線較大.

例題七十六

1. 二等邊三角形的底角必是銳角.

2. 三角形中最大邊兩端的角必都是銳角,

3.　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．　D 爲 AB 上隨意一點，則 $DC>DB$．

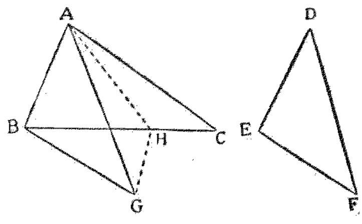
4.　四角形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$BC\perp CD$，而 $AB>BC$，則　$AD<CD$．

5.　$\triangle ABC$ 中 $AB>AC$．　$\measuredangle B,C$ 的等分線交於 D，則　$BD>CD$．

6.　$\triangle ABC$ 中 $AB>AC$．　AA' 是對於 BC 的中線，則 $\measuredangle BAA'<A'AC$．

154.　定理三〇．

在甲乙二個三角形中，有二雙角各相等；若甲形中二邊所夾角比乙形中的夾角大，則甲形的第三邊必比乙形的第三邊大．



（圖174）

假設　在 $\triangle\!\!\!\!\!\text{s}\ ABC, DEF$ 中，$AB=DE$，　$AC=DF$，

而　　$\measuredangle BAC>EDF$．

終決．$BC>EF$．

證．	根據
(1) 將 $\triangle DEF$ 移置於 $\triangle ABC$ 上，令 DE 與 AB 相重，D 與 A 相合	公設八

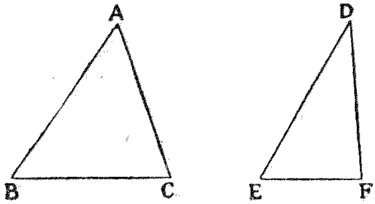
(2) 因 $DE=AB$，故 E 與 B 亦相合.	?
(3) 設 F 落於 G，	
即　$\triangle ABG \cong DEF$.	
(4) 因　$\measuredangle BAC > EDF$，	?
即　$\measuredangle BAC > BAG$，	
故 AG 在 $\measuredangle BAC$ 內	?
(5) 引 $\measuredangle CAG$ 的等分線，與 BC 交於 H，聯 HG.	
(6) 於是 $\triangle AHC \cong AHG$，	$s.a.s.=s.a.s.$
而　$HC=HG$.	
(7) $\therefore BC=BH+HC$	?　?　?
$=BH+HG>BG$，	
即　$BC>EF$.	

155. 定理三一.

在甲乙二個三角形中，有二雙邊各相等；若甲形的第三邊比乙形的第三邊大，則甲形中前二邊所夾角必比乙形中的夾角大.

假設.　在 Ⓢ ABC，DEF 中，$AB=DE$，$AC=DF$，而 $BC>EF$.

終決.　$\measuredangle BAC > EDF$.



(圖 175)

證.	根據
(1)比較二角 BAC, EDF 的大小,不出如下三種以外: $\measuredangle BAC > EDF$, $\measuredangle BAC = EDF$, $\measuredangle BAC < EDF$.	普通公理五.
(2)若 $\measuredangle BAC = EDF$, 便應當 $BC = EF$, 這是與假假相背,不可以的.	定理七.
(3)若 $\measuredangle BAC < EDF$, 便應當 $BC < EF$, 這也與假設相背,不可以的.	定理三〇.
(4)所以只能 $\measuredangle BAC > EDF$.	

156. 定理四七. 窮舉證法.

在某一類定理中,其假設已盡其可起的

各種,其終決不能相容,則其倒定理可用下一方法來證.

要證明一定理,盡舉與其終決同類而異種的事一一證其發生的結果與假設矛盾,於是決定原終決的真確,如此的證法叫做**窮舉證法**(Exhaustion).

例如已知定理七及定理三〇則定理一一及定理三一都可用窮舉證法來證. 前款的證法便是窮舉證法.

例題七十七

1. AA' 是 $\triangle ABC$ 中對 BC 的中線,若 $\measuredangle AA'B$ 是銳角,則 $AC>AB$, 又 $\measuredangle B>C$.

2. $\triangle ABC$ 中, $\measuredangle B>C$. 引 $\measuredangle A$ 的等分線交 BC 於 D, 則 $BD<DC$.

3. 一點不在一線份的垂直等分線上,則此點與線份兩端的距離必不相等.

4. 延長 $\triangle ABC$ 邊 BC 到 D, 令 $CD=AB$, 則 $AD>BC$.

5. $\triangle ABC$ 中, $AC>BC$. CC' 是對於 AB 的中線,則 $\measuredangle AC'C$ 是鈍角.

6. $\triangle ABC$ 中 $AC>BC$. CC' 是對 AB 的中線,而 D

是 CC' 上隨意一點,則 $AD>BD$.

第六章　點的軌跡

157. 定義四八. 軌跡.

鄉人駕牛戽水,將二槓縛在牛肩,使牛曳槓繞一輪心旋轉,槓撥輪動,輪齒再撥動戽水的桔槔,於是水便從河塘戽入田中. 此牛離輪心約四尺,既不能近,也不能遠,只能磨旋,於是此牛足跡遂成一圓,圓心卽輪心,半徑長四尺. 牛走幾轉以後,每一舉步,卽踏進前跡,轉數既多,跡更連續,圓周中各點無一非跡,而圓周外絕無一跡;此一圓周,我們可用幾何學名義稱他做牛足的軌跡.

一條線,或幾條線,或線的一部份,其上的點,都合於某一條件,合於某條件的點,都在此上,則此線或線羣或線的部份叫做合於某條件的點的軌跡.

158. 軌跡要證兩方面.

照前款軌跡的定義,一個點的軌跡,不論是一條線,幾條線,線的一部份,要證明他是合於某條件的點的軌跡,一定要證如下的兩方面:

第一. 凡是線上的點都合於某條件;

第二. 凡是合於某條件的點都在線上.

第一層是證合於某條件的點,將線上的位置都充滿了,更沒有一部份要不得的,這是證軌跡的**充分性.** 第二層是證合於某條件的點,已竟完全在這些線上了,不必再去外求,這是證軌跡的**完全性.**

若將第一層當做一個定理看待,第二層恰好是第一層的倒定理(定義三六), 一個定理眞確,他的倒定理眞確不眞確是要另外給與證明的,故此這兩層的證缺一不可.

但是一個定理與他的倒否定理可以同時眞確(定義三九), 所以上面的兩層,各種拿他的倒否定理來替代. 第一層是:

(1) 凡是線上的點,都合於某條件;

他的倒否定理是:

(2) 凡是不合於某條件的點,都不在線上;

第二層是:

(3) 凡是合於某條件的點都在線上.

他的倒否定理是:

(4) 凡是不在線上的點都不合於某條件.

於是要證一軌跡,可就下面四種組合中挑選最便利的一種來用:

$\left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\}$互相為倒　或　$\left.\begin{matrix}(2)\\(4)\end{matrix}\right\}$互相為倒

$\left.\begin{matrix}(1)\\(4)\end{matrix}\right\}$互相為否　或　$\left.\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\right\}$互相為否

總之,一個定理有四方面,軌跡要證的兩方面,是互相為倒或互相為否的兩面.

再,我們早已知道將一個定理的假設與終決對換,便可得其倒定理(定義三六),但若一個定理的假設或終決不止包含一件事項,則在假設中隨意取一事項,在終決中亦隨意取一事項,將此所取二事項對換,便可得一個倒定理.於是一個定理有時可有好幾個倒定理.

例如定理:「二等邊三角形頂角的等分線是底的垂直等分線」,假設中包含三事,為:

二等邊三角形,　一線過頂點,　等分頂角,

終決中包含二事,為

此線垂直於底,　又等分其底.

於是便有五個倒定理如下:

(1)　二等邊三角形對底的中線等分頂角,且垂直於底;

(2)　從二等邊三角形頂點所引底的垂線等分頂角,且等分其底;

(3) 三角形頂角的等分線若垂直於底,則此線又等分底,且此三角形是二等邊;

(4) 三角形頂角的等分線若過底的中點,則此線又必垂直於底,且此三角形有二邊相等;

(5) 二等邊三角形底的垂直等分線必過頂點,且等分頂角.

倘使將軌跡要證的一方面看做一個定理,而此定理的倒定理有很多,證起來便應當一一都證明他,這事自然很麻煩,但在初學時還不會逢到這種複雜題,故不必好了.

例題七十八

1. 述定理九的否定理及倒否定理.

2. 述定理一三的倒定理,否定理,及倒否定理.

就以下各定理述其倒定理,否定理,及倒否定理:

3. 一動點與一定直線的距離一定,則此動點必在定直線的平行線上.

4. 一動點與二定點的距離恆相等,則此動點必在聯此二定點所得線份的垂直等分線上.

5. 一動點與相交二定直線的距離恆相等,則此動點必在此二定直線交角的等分線上.

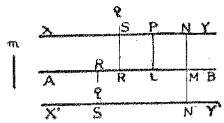
6. 一動點與一個定點的距離一定,則此動點必

在一圓周上.

159. 定理三二.

一動點與一定直線的距離一定,則此動點的軌跡是與定直線有定距離的二個平行直線.

條件. AB是定直線,m是定距離.一動點運動時與AB的距離恆等於m.



(圖176)

軌跡. AB的二個平行直線,各線與AB的距離都是m.

證.	根據
(1)先在AB上隨意取一點M,過M作AB的垂線,在此垂線上從M起向上下各截取一定長m,得二點N及N'.	作圖題四. 公設三.
(2)過N及N'各作AB的平行直線XY及$X'Y'$,則此二直線與AB的距離都是m. 於是	作圖題八. 定義四三.

第一. 證XY,或$X'Y'$上各點與AB的距離等於m.

(3) XY上隨意一點P,從P到	作圖題五.

AB 引垂線 PL, 則 PL 是 P 點與 AB 的距離,亦是平行線 XY 與 AB 的距離.

定義四六.

定理一四.及定義四三.

(4)　$PL=NN=m$

定理二一系三.

第二. 證不在 XY, 或 $X'Y'$ 上各點與 AB 的距離不等於 m.

(5) 在 XY 及 $X'Y'$ 以外隨意取一點 Q, 從 Q 到 AB 的距離是 QR. QR 或其延線與 XY 或 $X'Y'$ 交於 S,則從 (4), 知　$SR=m$.

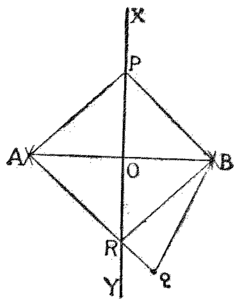
(6)　$\therefore\ QR\neq m$.

160. 定義四九. 等距.

二個距離相等,簡稱做等距.

161. 定理三三.

一動點與二定點恆等距,則此動點的軌跡是聯二定點所得線份的垂直等分線.



(圖 177)

假設.　A, B 是二定點, P 是動點, $PA=PB$.

軌跡．　P的軌跡是線份AB的垂直等分線．

證．	根據
(1) 作XY，垂直等分線份AB於O．	作圖題六．

第一．　證XY中的各點都與A，B二點等距．

(2) P是XY上隨意一點，則 $PA=PB$．	定理一〇系二(a)

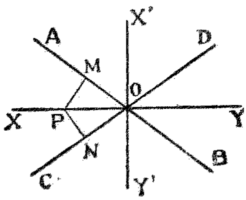
第二．　證XY外的各點都與A　B二點不等距．

(3) Q是XY外的隨意一點，則Q或者在XY的左側，或者在XY的右側，二種情形中必佔一種而只佔一種．	
(4) 假定Q在XY的右側而與A分居XY的兩傍，則AQ必與XY相交，名其交點爲R．	幾何公理九
(5) R在XY中，則$RA=RB$．	定理一〇系二(a)
(6) 由是	普通公理一，七．
$QA=QR+RA=QR+RB>QB$．	幾何公理一．

162.　定理三四．

一動點與相交二定直線恆等距，則此動點的軌跡是二定直線交角的二個等分角線．

條件.　二定直線 AB, CD 交於 O.　一動點運動時恆與 AB, CD 等距.



(圖178)

軌跡.　AB, CD 所成二雙對頂角的等分線 XY, 及 $X'Y'$ 便是動點的軌跡.

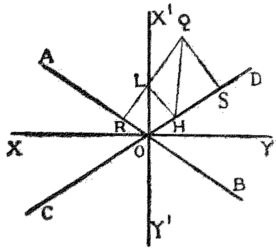
證.　**第一.**　**證 XY 或 $X'Y'$ 中的各點都與 AB 及 CD 等距.**

(1) P 是 XY 中的隨意一點, 引 $PM \perp AB$, $PN \perp CD$, 則 PM, PN 是 P 點與 AB 及 CD 的距離.　　定義四六

(2) $\because \quad \triangle OPM \cong \triangle OPN$,　　定理一八系六.

$\therefore \qquad PM = PN$.

第二.　**證 XY 或 $X'Y'$ 外的各點都與 AB 及 CD 不等距.**



(圖179)

(3) Q 在 XY 及 $X'Y'$ 以外.

假定 Q 在 $\measuredangle DOA$ 內而與 OA 在 $X'Y'$ 的兩旁.

(4) 作 $QR \perp AB$, $QS \perp CD$, 則從(3), 知 QR 必交 $X'Y'$ 於 L, 而 QR, QS 是 Q 點各與 AB, CD 的距離.　　?

(5) 從 L 作 $LH \perp CD$, 則從 (2), 知 $LR = LH$.	定理一八系六。
(6) 於是 $QR = QL + LR = QL + LH > QH$.	?
(7) $\because QS \perp HS$, 而 $QH > QS$.	定理二九系二(一).
$\therefore QR > QS$, 卽 $QR \neq QS$.	普通公理四。

例題七十九

1. 在一定直線AB中求一點,令其與二定點 P 及 Q 等距。

2. 求點,令與一定直線AB的距離是定長 m,同時與二定點 P, Q 等距。

3. 求點,令與一定直線XY的距離是定長 m,同時又與相交二定直線 AB, CD 等距。

4. 求點,令與二定點 P, Q 等距,同時又與相交二定直線 AB, CD 等距。

5. 求點,令與三個定點等距。

6. 求點,令與三個定直線等距。

7. 許多二等邊三角形都載在一定底邊 AB 上。求此許多三角形頂點的軌跡。

8. 從一定直線外一定點到此定直線隨意引線份求此隨意線份中點的軌跡

9. 一動點恆與二個平行定直線等距. 求此動點的軌跡.

163. 定義五〇. 共線的點.

三個以上的點在同一直線上,叫做共線(Co-linear).

164. 定義五一. 共點的線.

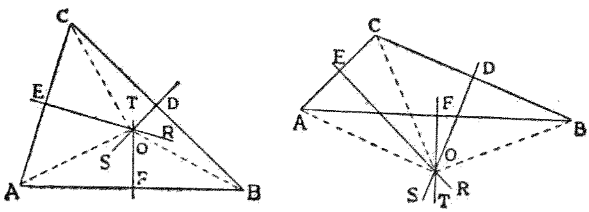
三個以上的直線都過同一點,叫做共點 (Concurrent).

165. 定理三五.

三角形各邊的垂直等分線必共點. 此點與三個角頂等距.

假設. $\triangle ABC$ 三邊 BC, CA, AB 的中點是 D, E, F, 其垂直等分線是 DS, ER, FT.

終決. DS, ER, FT 共點. 此點與 A, B, C 都等距.



(圖 180)

證.	根據
(1) 設 DS, ER 交於 O.	定理一五系二

(2) O 在 DS 上,則 $OB=OC$;　　定理三三.

又　O 在 ER 上,則 $OC=OA$,

(3) $\therefore OC=OA$,而 O 又在 FT 上,　　定理三三.

即 DS, ER, FT 共點 O,而

$OA=OB=OC$.

系. 與不共線三點等距的點有一個而只有一個.

166. 定義五二. 三角形的外心.

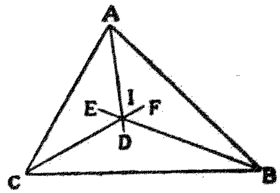
與三角形 ABC 三個角頂等距的一點 O 叫做此三角形的**外心** (Circum-center).

167. 定理三六.

三角形三個內角的等分線共點. 此點與三邊等距.

假設. AD, BE, CF 是 $\triangle ABC$ 三內角的等分線.

終決. AD, BE, CF 共點. 此點與三邊 BC, CA, AB 的距離皆相等.



(圖181)

證.　　根據

(1) 設 AD, BE 交於 I.　　定理一五系二.

(2) I 在 AD 上,則與 AB, AC 等距;又 I 在 BE 上,則又與 AB, BC 等距.　　定理三四.

(3) 故 I 與 AC, BC 等距,而 I 又在 CF 上. 即 AD, BE, CF 共點 I, 且 I 與 BC, CA, AB 的距離都相等.	定理三四.

系一. 三角形一個內角等分線與他二個外角等分線共點. 此點與三角形的一邊及他二邊的延線等距.

注意. 如此的點,在各角 A, B, C 內(同時在形外)各有一個.

系二. 與不共點不平行三直線等距的點有四個而只有四個.

168. 定義五三. 三角形的內心及旁心.

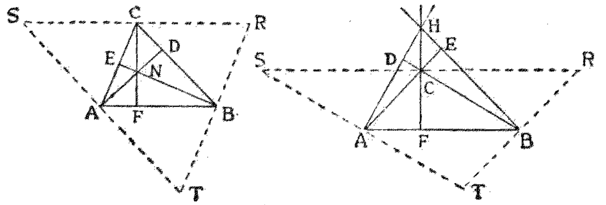
與三角形三邊等距的點,叫做三角形的**內心** (Incenter), 與三角形一邊及他二邊的延線等距的點,叫做三角形的**外心** (Ex-center).

169. 定理三七.

三角形的三個垂線共點.

假設. AD, BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的三個垂線.

終決. AD, BE, CF 共點.



（圖 182）

證.	根據
(1) 過 A, B, C 各引對邊的平行線 ST, TR, RS.	作圖題八.
(2) 於是 $ABRC$ 及 $ABCS$ 都是平行四邊形,而 $RC \mathrel{\underline{\parallel}} BA \mathrel{\underline{\parallel}} CS$. 故 C 是 RS 的中點.	定理二一(一).
(3) 因 $CF \perp BA$, 及 $RS \parallel BA$, 故 $CF \perp RS$, 即 CF 是 RS 的垂直等分線.	定理一四.
(4) 同理, AD, BE 各是 ST, TR 的垂直等分線.	
(5) 故 AD, BE, CF 共點	定理三五.

170. 定義五四. 三角形的垂心.

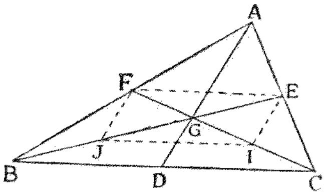
三角形三個垂線所共的點叫做三角形的**垂心** (Ortho-center).

171. 定理三八.

三角形的三個中線共點. 此點與各角頂的距離等於全中線的三分之二.

假設. AD, BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的三個中線.

終決. AD, BE, CF 共點. 此點與各角頂的距離等於全中線的 $\frac{2}{3}$.



(圖 183)

證.	根據
(1) BE, CF 交於 G. 取 BG, CG 的中點 J, I.	幾何公理九.
(2) 聯 EF, FJ, JI, IE, 及 AG,	
則 $EI \stackrel{\parallel}{=} \frac{1}{2}AG \stackrel{\parallel}{=} FJ$, 故 $EFJI$ 是一平	定理二六
行四邊形,而 $JG=GE$, $IG=GF$.	定理二二(四)
(3) 於是	定理二一(三).
$BJ=JG=GE$. $CI=IG=GF$,	
卽 $BG=\frac{2}{3}BE$, $CG=\frac{2}{3}CF$,	
卽二中線 BE, CF 交於 CF 的 $\frac{2}{3}$ 一點.	
(4) 同理,可證二中線 CF, AD 亦交於 CF 的 $\frac{2}{3}$ 一點.	
(5) 故 AD, BE, CF 共點 G. 而 $AG=\frac{2}{3}AD$, $BG=\frac{2}{3}BE$, $CG=\frac{2}{3}CF$.	

172. 定義五五．三角形的重心．

三角形三個中線所共的點叫做三角形的**重心**(Center of Gravity).

例題八十

1. 等邊三角形的外心,內心,垂心,重心,都合一.

2. 二等邊三角形的外心,內心,垂心,重心,都共線.

3. 一個三角形的外心與內心合一,則此三角形是等邊三角形.

4. 一個三角形的外心與重心合一,則此三角形是等邊三角形.

5. 三角形內心與旁心的聯線必經過一個角頂.

6. 三角形二個旁心的聯線必經過一個角頂.

7. 一截線截二個平行線.　求與此三個線等距的點.

8. 直角三角形的垂心在何處?　外心在何處?

9. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,則 $\triangle ABH$ 的垂心在何處?

10. 將 $\triangle ABC$ 三個旁心 I_1, I_2, I_3, 做角頂成一新三角形,則 $\triangle ABC$ 的內心 I 是 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心.

11. 將三角形三邊的中點做角頂成一新三角形,則原三角形的重心仍是新三角形的重心.

173. 本編摘要.

(一) 二個三角形合同的條件.

(1) 二雙邊及夾角各相等.

(2) 二雙角及其間的邊各相等.

(3) 二雙角及一雙對邊各相等.

(4) 三雙邊各相等.

(5) 二雙邊及一雙對角各相等,他一雙對角不能互相為補角.

(二) 二個直角三角形合同的條件.

(1) 二雙直角邊各相等.

(2) 一雙直角邊及在其一端的銳角各相等.

(3) 一雙直角邊與一雙斜邊各相等.

(4) 一雙銳角與一雙對應邊各相等.

(三) 有一定大小的角.

(1) 凡直線角都相等,周角都相等,直角都相等.

(2) 順次諸鄰角兩外邊成一直線,則諸角和等於一直線角.

(3) 一點周圍諸鄰角的和等於一周角.

(4) 平行二直線被一直線所截,其同側內角的和等於$2R\measuredangle$.

(5) 三角形三個內角的和等於$2R\measuredangle$.

(6) 直角三角形二個銳角的和等於$R\measuredangle$.

(7)　正三角形的各角是$\frac{2}{3}R\measuredangle$或$60^\circ$.

(8)　n邊正多角形內角的和是$2(n-2)R\measuredangle$.

(9)　n邊正多角形每一個角等於$\frac{2(n-2)}{n}R\measuredangle$.

(10)　四角形內角的和是$4R\measuredangle$.

(11)　順次延長多角形各邊所得各外角的和等於$4R\measuredangle$.

(四)　相等的角.

(1)　等角的補角，　等角的餘角.

(2)　對頂角.

(3)　合同圖的對應角.

(4)　二等邊三角形的兩底角.

(5)　等邊三角形的各內角.

(6)　截線截平行二直線所得的內錯角,或同位角.

(7)　左右二雙邊各自平行的二個角.

(8)　左右二雙邊各相垂直的二個角.

(9)　三角形的一個外角與其內對角的和.

(10)　已有二雙角各相等的二個三角形中第三雙角.

(11)　平行四邊形的對角.

(五)　相等的線份.

(1)　合同三角形的對應邊.

(2)　二等邊三角形的等邊.

(3)　等角三角形的各邊.

(4)　從一直線外一點到此直線所畫斜線中,其足離垂線足等遠的二個.

(5)　從一直線外一點到此直線所畫相等二斜線足與垂線足的距離.

(6)　平行四邊形的對邊.

(7)　二平行線的二個距離.

(8)　夾在二平行線間的平行線份.

(9)　矩形的二個對角線.

(10)　直角三角形斜邊中點與三個角頂的距離.

(11)　三角形二邊中點聯線份與第三邊的一半.

(12)　梯形中線與二底的半和.

(13)　一個線份的垂直等分線上各點與此線份兩端的距離.

(14)　一角等分線上各點與此角二邊的距離.

(15)　三角形外心與各角頂的距離.

(16)　三角形內心或旁心與各邊的距離.

(六)　垂直的二線.

(1)　成相等隣補角的二線(定義一四).

(2)　二等邊三角形頂角的等分線與底邊.

(3)　二定點的聯線,與此二定點等距二點的聯線.

(4)　一線的平行線垂直於他一線.

(5)　已知有二角互相爲餘的三角形中二邊.

(6)　已知一邊中點與三個角頂等距的三角形中二邊.

(7)　已知二個對角線相等的平行四邊形中二隣邊.

(8)　菱形的二對角線.

(9)　三角形垂心及一個角頂的聯線與對邊.

(七)　平行的二線.

(1)　平行於同一線.

(2)　垂直於同一線.

(3)　被一直線所截,則須內錯角相等,或同位角相等,或同側內角互相補.

(4)　與他二線圍一四邊形,則須二雙對角各相等,或二雙對邊各相等,或二個對角線互相等分,或他一雙對邊平行而且相等.

(5)　一線是三角形的一邊,則又一線是此形他二邊中點的聯線.

(6)　梯形的二底或一底與一中線.

(7)　處處距離都相等的二線.

(八) 有一無二.

(1) 一線份的中點有一無二.

(2) 一角的等分線有一無二.

(3) 過一直線中一點的垂線有一無二.

(4) 過一直線外一點的垂線有一無二.

(5) 過一直線外一點的平行線有一無二.

(6) 與不共線三點等距的點有一無二.

(7) 與不共點又不平行三個直線等距的點有四個而只有四個.

(九) 不等的角.

(1) 三角形的一個外角比其任一內對角大.

(2) 二邊不相等的三角形中,大邊所對的角必比小邊所對的角大.

(3) 鈍角三角形中鈍角最大. 直角三角形中直角最大.

(4) 有二雙邊各相等的二個三角形,第三邊較大的,此二邊所夾的角亦較大.

(十) 不等的線份.

(1) 三角形隨意二邊的和比第三邊大.

(2) 三角形一邊比他二邊的差大.

(3) 二角不等的三角形中對大角的邊必比對小

角的邊大.

(4)　鈍角三角形中對鈍角的一邊最大,　直角三角形中斜邊最大.

(5)　從一直線外一點到此直線作垂線及斜線,則垂線最短;　又斜線足離垂線足較遠的此斜線必較大.

(6)　兩三角形二雙邊各相等而夾角不等,則夾大角的三角形中第三邊必較大.

(十一)　過一線份中點.

(1)　二等邊三角形頂角的等分線過底的中點.

(2)　平行四邊形的一個對角線過第二對角線的中點.

(3)　從三角形一邊中點引第二邊的平行線,此線過三角形第三邊的中點.

(4)　從梯形不平行一邊的中點引二底的平行線,則此線過第二不平行邊的中點.

(5)　三角形一個角頂與重心的聯線,過對邊的中點.

(十二)　四邊形的合同.

(1)　兩平行四邊形,二雙邊及其夾角各相等.

(2)　兩矩形二雙隣邊各相等.

(3)　兩正方形,有一雙邊相等.

(十三)　成一直線(共線).

(1)　二直線共有二點,或共有一部份,則必合成一直線(幾何公理三系一).

(2)　同平面上平行二直線,若共有一點,則必合成一直線(幾何公理一八).

(3)　順次諸隣角和等於一直線角,則其兩外邊成一直線.

(十四)　共點.

(1)　三線做成一個三角形中三邊的垂直等分線,或做成三角的等分線,　或做成一個內角及他二個外角的等分線,　或做成三個垂線,　或做成三個中線,則此三線共點.

(2)　二線的交點在第三線上,則三線共點(如定理三五及三六的證法).

(3)　兩線的交點都是其中一定線上的定點,則此三線共點(如定理三八的證法).

174.　證題的注意.

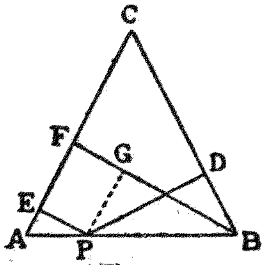
學生學得定理,第一,要澈底清楚;第二,要熟極而化;然後能隨時隨處自在應用,不然,便如面牆而立,寸步不能行.

一題到手,先看要證何事,可到前款摘要中尋覓,決

定用何定理最為相宜,要達此目的,應走何路徑. 簡單問題,一索可得;題稍複雜,中有曲折,便當照他曲折層層推想,經過一二關節,也便迎刃而解了.

證角的大小,有時可用代數計算,使路徑簡捷.

例一. 從二等邊三角形底中隨意點到等邊上二距離的和是一定長



(圖184)

假設. $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$. P 是底 AB 中隨意一點. $PD\perp BC$, $PE\perp AC$.

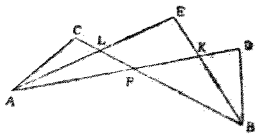
終決. $PD+PE$ 是一個定長.

證.

(1) 從 $\triangle ABC$ 底角頂 B 到邊 AC 引垂線 BF, 則因 B 及 AC 的位置都一定,故 BF 的長一定. 又 $BF\parallel PE$.	作圖題五.
(2) 從 P 作 AC 的平行線,交 BF 於 G, 則	作圖題八.
$\measuredangle GPB=A=PBD$, $\measuredangle G=F=R\measuredangle$.	定理一五系一(一).
(3) 於是 $\triangle PBD\cong\triangle BPG$,	定理一八系六.
而 $PD=BG$.	
(4) 又因 $PGFE$ 是平行四邊形而 $PE=GF$.	定理二一.

(5) 故 $PD+PE=BG+GF$	?
$=BF$ 是定長.	

例二. 二個三角形 ACF, BDF 中的 F 互爲對頂角，二角 A, B 的等分線交於 E，則 $\measuredangle E=\frac{1}{2}(C+D)$.



(圖185)

假設. Ⓢ ACF, BDF 中邊 AF, FD 成一直線，BF, FC 亦成一直線. EA, EB 各等分 $\measuredangle FAC$, DBF.

終決. $\measuredangle AEB=\frac{1}{2}(C+D)$.

證.	根據
(1) 設 AE 交 BC 於 L, BE 交 AD 於 K，則	定理一八系二.
$\measuredangle AEB=AKB-EAK$	
$=D+DBK-EAK$	
$=D+\frac{1}{2}DBF-\frac{1}{2}FAC$,	
又 $\measuredangle AEB=ALB-EBL$	定理一八系二.
$=C+LAC-EBL$	
$=C+\frac{1}{2}FAC-\frac{1}{2}DBF$.	
(2) 故 $2\measuredangle AEB=C+D$	?
而 $\measuredangle E=\frac{1}{2}(C+D)$.	?

別證.

(1)　聯 AB, 則

$\measuredangle C \equiv ACB = 2R\measuredangle - (BAC + CBA)$

$\measuredangle D \equiv ADB = 2R\measuredangle - (BAD + DBA)$

定理一八.

(2)　於是

$\measuredangle C + D = 4R\measuredangle - [(BAC + BAD)$　?

$+ (CBA + DBA)]$　?

$= 4R\measuredangle - [2BAE + 2EBA]$　?

$= 2[2R\measuredangle - (BAE + EBA)]$　?

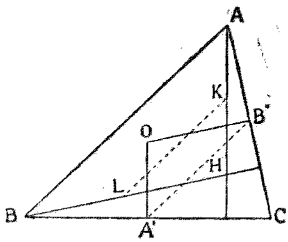
$= 2AEB,$

$\therefore \measuredangle E = \frac{1}{2}(C + D)$

注意.　此別證與原證其實相同,不過化式稍異.

例三.　三角形垂心與角頂的距離等於外心與對邊距離的二倍.

假設.　$\triangle ABC$ 中垂心爲 H, 外心爲 O, $OA' \perp BC$,　$OB' \perp CA$.



(圖 186)

終決.　$AH = 2.OA'$,　$BH = 2.OB'$.

第一證.

(1)　取 AH, BH 的中點 K, L.

(2　聯 KL, 則 $KL \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB$.

(3) 因 A', B' 各為 BC, CA 的中點，故聯 $A'B'$，則 $B'A' \perp\!\!\!\perp \frac{1}{2}AB$。 定理三五,二六.

(4) ∵ $HK \parallel OA'$, $KL \parallel A'B'$, $LH \parallel B'O$, 定理一七(一).

故 $\measuredangle OA'B' = HKL$, $\measuredangle A'B'O = KLH$,

(5) 又因 $A'B' \perp\!\!\!\perp KL$, $a.s.a. = a.s.a$

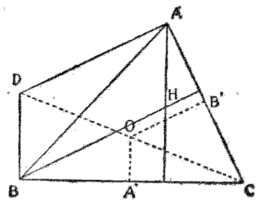
而 $\triangle OA'B' \cong \triangle HKL$,

∴ $KH = OA'$, $LH = OB'$.

(6) 因 $AH = 2KH$, $BH = 2LH$

故 $AH = 2OA'$, $BH = 2OB'$.

第二證



(圖 187)

(1) 從 A 引 CA 的垂線,從 B 作 BC 的垂線,此二垂線會於 D, 聯 CD.

(2) A', B' 各為 BC, CA 的中點,而 $OA' \perp BC$, 即 $OA' \parallel DB$, 故 OA' 必過 CD 的中點. 定理二五系一.

同理, OB' 必過 CD 的中點.

(3) 於是 O 必是 CD 的中點 定理二六.

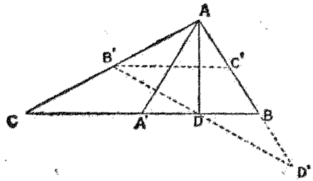
而 $DB = 2OA'$, $DA = 2OB'$.

(4) 因 $DA \parallel BH$, $DB \parallel AH$, 定理一三

故 $AHBD$ 是平行四邊形,而

$AH=DB=2.OA'$, $BH=DA=2.OB'$.	定理二一(一).

例四 $\triangle ABC$ 中 $\measuredangle B=2C$. D 是從 A 到 BC 所引垂線的足, A' 是 BC 的中點,則 $AB=2.A'D$.



(圖 188)

第一證.	根據
(1) 取 CA, AB 的中點 B', C', 聯 $B'C'$, 則 $B'C'\parallel CB$, 而 $\measuredangle AB'C'=C$, 又 $\measuredangle B'C'B=B$ 的外角.	定理二六.
(2) 聯 $B'D$, 延長,交 AB 的延線於 D', 則因 A, D 關於 $B'C'$ 為軸對稱,而	定義四四. 定理一〇系一.
$\measuredangle D'B'C'=C'B'A=DCB'$.	定理一五系一(一).
(3) 於是	全上.
$\measuredangle B'C'D'=DBD'=2R\measuredangle-B$	
$=2R\measuredangle-2C=CB'D$.	本題(2).
(4) 故 $\measuredangle D'=B'DC$	定理一八系四.
$=BDD'$	定理二.
$=DB'C'$	定理十五.

而 $BD'=BD,\quad C'D'=C'B'=BA'.$ 定理一〇,二六.

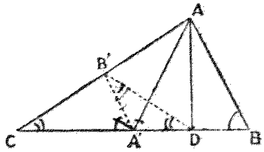
(5) 故 $C'B=C'D'-BD'$ 普通公理八.

$=BA'-BD$

$=DA',$

而 $AB=2C'B=2A'D.$

第二證.



(圖 189)

(1) 取 CA 的中點 B'. 聯 $A'B'$,

則 $A'B' \underline{\parallel} \frac{1}{2}BA$ 定理二四.

而 $\measuredangle CA'B'=B=2C.$ 定理九.

(2) 聯 $B'D$, 則 $B'D=B'C$, 定理一八系一.

而 $\measuredangle A'DB'=C.$

(3) 於是

$\measuredangle DB'A'=CA'B'-A'DB'$

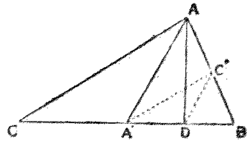
$=2C-C=C$

$=A'DB',$

而 $A'D=A'B'.$ 定理一〇.

(4) 故 $AB=2B'A'=2A'D.$

第三證.



(圖 19

(1) 取 AB 的中點 C', 聯 $C'D$,

則 $C'D=C'B$, 而 $\measuredangle C'DB=B.$

(2) 聯 $A'C'$, 則 $A'C'\parallel CA$, 而

$\measuredangle DA'C'=C$。	定理一五系一(一).
(3)　於是	定理一八系一。
$\measuredangle A'C'D=C'DB-DA'C'=B-C=C$	
$=DA'C'$,	本題(2)。
而　$A'D=C'D$,	
∴　$AB=2C'D=2A'D$。	

問題集二

1.　線份 AB 的中點爲 M, 此線份中隨意一點是 P, 延線中隨意一點是 Q, 則

$PM=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$,　　$QM=\frac{1}{2}(AQ+BQ)$.

2.　角 AOB 的等分線是 OM, OP 是在此角內的隨意一半射線, OQ 是在相屬角內的隨意一半射線,則

$\measuredangle MOP=\frac{1}{2}(AOP\sim BOP)$,　$\measuredangle MOQ=\frac{1}{2}(AOQ+BOQ)$.

3.　A, B, C 是一直線上的順次三點, L, M, N 各爲 BC, CA, AB 的中點,則

$MN=\frac{1}{2}BC$,　　$NL=\frac{1}{2}CA$　　$LM=\frac{1}{2}AB$.

4.　延長 $\triangle ABC$ 的兩邊 BA, CA 到 B', C', 使 $AB'=BA$, $AC'=CA$, 又 M 及 M' 各爲 BC 及 $B'C'$ 的中點,則

(a)　$B'C'=BC$;

(b)　M, A, M' 共線;

(c)　A 是線份 MM' 的中點.

5.　二等邊三角形的等角若比$\frac{1}{2}R\measuredangle$大,則頂角是銳角;若等於$\frac{1}{2}R\measuredangle$,則頂角是直角;若比$\frac{1}{2}R\measuredangle$小,則頂角是鈍角.

6.　二等邊三角形二個底角等分線所夾的角與原形的底角互相補.

7.　從一直線外一點到此直線可引二個相等斜線而只能引二個相等斜線.

8.　在二等邊三角形底邊 BC 上取一點 X,從 X 引 BC 的垂線,與 AB, AC 各交於 Y 及 Z,則 AYZ 爲一二等邊三角形.

9.　三角形 ABC 頂角 A 的等分線與底 BC 交於 D,則　$AB>BD$,　$AC>CD$.

10.　三角形一角的等分線,與從此角頂到對邊的高,此二線的夾角等於三角形他二角的半差.

? 11.　M 是直角三角形 ABC 斜邊 BC 的中點.　從 M 引 BC 的垂線,與直角 A 的等分線交於 D,則

$AM=MD$.

12.　$\triangle ABC$ 的最大角是 A.　在 AB, AC 中各隨意取點 D, E,則　$DE<BC$.

13.　$\triangle ABC$ $\measuredangle C$ 的等分線交 AB 於 D.　從 D 引 BC 的平行線交 AC 於 E,交 $\measuredangle C$ 外角的等分線於 F,則

$DE=EF$.

14. O 是 $\triangle ABC$ 中的隨意一點,則

$CA+AB+BC>OA+OB+OC>\frac{1}{2}(CA+AB+BC)$.

15. 四角形中二個對角線的和比此形的周小而比半周大.

16. 三角形的一角比他二角的和或小或等或大,則此角是銳角,或直角或鈍角.

17. 從三角形一角頂到對邊的中線比對邊的一半或大或等或小則此角爲銳角或直角或鈍角.

√18. D, E 各是 $\triangle ABC$ 邊 AC 及 BC 的中點. 在邊 AB 上隨意取一點 P. 聯 PD, 延長到 F, 令 $DF=PD$; 聯 PE, 延長到 G, 令 $EG=PE$. 於是 F, C, G 共線.

19. $\triangle ABC$ 中 $AB>AC$. 在 AB 上取 D 點令 $AD=AC$, 聯 CD, 則 $\measuredangle BCD=\frac{1}{2}(BCA-ABC)$.

20. P 是 $\triangle ABC$ 頂角 A 等分線中的隨意一點,則 $PB\sim PC<AB\sim AC$.

21. $\triangle ABC$ 是不等邊三角形,在各邊上同時向形內或向形外各作正三角形 ABF, BCD, CAE, 則

$AD=BE=CF$.

22. XY 是 $\triangle ABC$ $\angle A$ 外角的等分線. 在 XY 上隨意取一點 M, 則 $\triangle MBC$ 的周比 $\triangle ABC$ 的周大.

23. 兩三角形ABC, ADE的A角互爲鄰補角,二角E及C的等分線交於F,則 $\measuredangle F=\frac{1}{2}(B+CDE)$

24 從$\triangle ABC$各角頂向形內各引線AD, BE, CF,令$\measuredangle DAB=EBC=FCA$,而$AD$, BE交於G; BE, CF交於H; CF, AD交於K,則

$\measuredangle KGH=ABC$, $\measuredangle HKG=CAB$, $\measuredangle GHK=BCA$.

25. 二底角相等的梯形必是二等邊梯形.

26. 二等邊梯形的二底角必相等.

27. 二等邊梯形的二個對角線必相等.

28. 二個對角線相等的梯形必是二等邊.

29. 從二等邊三角形底上隨意點到等邊各作又一等邊的平行線份,則此二個線份的和是定長.

30. 從二等邊三角形底邊延線上隨意一點到等邊的距離的差是一個定長.

31. 從等邊三角形內隨意一點到三邊距離的和是一個定長.

32. 在$\triangle ABC$中, $AB>AC$. 今過BC的中點M引一直線,令與AB, AC各交於P, Q,而$AP=AQ$,則$BP=CQ$.

33. 在$\triangle ABC$中$AB>AC$. 若在AB, AC或其延線上取二點P, Q,令$BP=CQ=\frac{1}{2}(AB+AC)$,則PQ必過BC的中點.

34.　一三角形中對於二邊的中線相等,則此形是二等邊三角形.

35.　平行四邊形一雙對邊的中點與一個對角線兩端的聯線,必分又一對角線爲三等分.

36.　在任意三角形中,垂心與外心的聯線在中線三分之一處與中線相交.

37.　三角形的垂心,重心,外心,三點共線而重心在垂心與外心的正中.

38.　從一定直線外一定點,作一直線令與定直線所成的角等於一給與的定角.

39.　一個三角形中頂角的大小及位置都一定,底邊的長短及方向亦一定,作此三角形.

40.　給與二等邊三角形的底,及對等邊的高,作此三角形.

41.　給與直角三角形的一銳角,及二個直角邊的和,作此形.

42.　過一定點作一直線,令與二個定直線成等角.

43.　給與二線份令其延線可相交,但今不許延長而作其延長後交角的等分線.

44.　給與正方形一邊與對角線的差,作此正方形.

45.　給與矩形的周圍,及一對角線,作此矩形.