Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 8

Aufgabe 8.1. Sei R ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring. Zeige unter Verwendung des Lemmas von Zorn, dass es maximale Ideale in R gibt.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem kommutativen Ring R ein Primideal ist.

Aufgabe 8.3.*

Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 8.4. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{a}$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to K$ in einen Körper K ist.

Aufgabe 8.5. Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $M \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $\mathfrak{a} \cap M = \emptyset$. Zeige mit dem Lemma von Zorn, dass es dann auch ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und mit $\mathfrak{p} \cap M = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 8.6. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.

Aufgabe 8.7. Sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in R_S genau denjenigen Primidealen in R entsprechen, die mit S einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 8.8. Beschreibe das Spektrum Spek$\,(R_\mathfrak{p})$ einer Lokalisierung eines kommutativen Ringes R an einem Primideal $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 8.9. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 8.10. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen R und S und es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(S)$ ein Primideal. Zeige, dass es natürliche Ringhomomorphismen

$$R_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \longrightarrow S_{\mathfrak{p}}$$

(zwischen den Lokalisierungen) und

$$\kappa\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\big) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$$

(zwischen den Restekörpern) gibt.

Aufgabe 8.11.*

Sei K ein Körper und seien R und S integre, endlich erzeugte K-Algebren. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein K-Algebrahomomorphismus und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_{\mathfrak{m}} \to S_{\mathfrak{n}}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \to S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 8.12. Zeige, dass die Spektrumsabbildung zur Reduktion

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{n}_R$$

eines kommutativen Ringes R eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 8.13. Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobeniushomomorphismus* nennt.

Aufgabe 8.14. Es sei R ein kommutativer Ring der positiven Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Spektrumsabbildung zum Frobeniushomomorphismus

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 8.15. Es sei R ein kommutativer Ring. Bestimme die Fasern zur Spektrumsabbildung zur Ringerweiterung $R \subseteq R[X_1, \ldots, X_n]$.

Aufgabe 8.16. Bestimme die Fasern der Spektrumsabbildung zu $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$.

Wenn der Grundkörper die komplexen Zahlen sind, so gibt es auf dem $\mathbb{C}$-Spektrum auch eine komplexe Topologie, die wesentlich feiner als die Zariski-Topologie ist. Dies wird in den folgenden Aufgaben entwickelt.

Aufgabe 8.17. Es sei R eine endlich erzeugte kommutative $\mathbb{C}$-Algebra. Zeige, dass es auf dem $\mathbb{C}$-Spektrum $\mathbb{C}-\text{Spek}\ (R)$ eine *natürliche Topologie* (oder *komplexe Topologie*) gibt, die im Falle des Polynomringes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ mit der metrischen Topologie auf dem $\mathbb{C}^n$ übereinstimmt. Zeige ferner, dass zu einem $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus $\varphi \colon R \to S$ zwischen endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebren R und S die induzierte Abbildung

$$\mathbb{C}-\text{Spek}\ (S) \longrightarrow \mathbb{C}-\text{Spek}\ (R)$$

stetig in der natürlichen Topologie ist.

Aufgabe 8.18. Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto P(z),$$

die Eigenschaft besitzt, dass Urbilder von beschränkten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt sind.

Aufgabe 8.19. Es seien $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome mit der Eigenschaft, dass der dadurch definierte $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus

$$\mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_k] \longrightarrow \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n],\ Y_j \longmapsto F_j,$$

ganz ist. Zeige, dass die zugehörige Abbildung

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

die Eigenschaft besitzt, dass Urbilder von beschränkten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}^k$ wieder beschränkt sind.

Man folgere, dass in der vorstehenden Situation die Abbildung F eigentlich ist, dass also Urbilder kompakter Teilmengen wieder kompakt sind, und dass F abgeschlossen ist.

Aufgabe 8.20. Bestimme die Fasern der Spektrumsabbildung zu $\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$. Welche sind endlich?

Aufgabe 8.21. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*\colon \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Zeige, dass die Faser über einem Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$ in kanonischer Weise homöomorph zu $\operatorname{Spec}(S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))$ ist.

Abbildungsverzeichnis