CORRESPONDANCE

ENTRE

EUNE DIRICHLET ET LIOUVILLE

PUBLIÉE

Par J. TANNERY,

Sous-directeur de l'École Normale.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
U BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910


EX
LIBRIS
ISTVAN FARY

CORRESPONDANCE

ENTRE

LEJEUNE DIRICHLET ET LIOUVILLE

CORRESPONDANCE

ENTRE

LEJEUNE DIRICHLET ET LIOUVILLE

PUBLIÉE

Par J. TANNERY,
Sous-directeur de l'École Normale.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

CORRESPONDANCE ENTRE LIOUVILLE ET DIRICHLET (¹);

PUBLIÉE PAR M. J. TANNERY.

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Paris, 5 février 1840.

MON CHER MONSIEUR DIRICHLET,

Permettez-moi de vous exprimer d'abord tout le plaisir que j'ai éprouvé en recevant le diplôme de l'Académie de Berlin; je suis fier d'être deux fois votre collègue. Présentez, je vous prie, à

(¹) Mme de Blignières, à qui le *Bulletin* doit déjà d'avoir publié les inédits de Galois, a bien voulu me confier dix lettres de Lejeune-Dirichlet, dont sept à Liouville et trois à Mme Liouville; elle a retrouvé avec ces lettres plusieurs brouillons de la main de son père, qui correspondent en partie aux lettres de Dirichlet.

Tous ceux qui ont connu Liouville savent qu'il était très droit et très vif; l'âge n'a jamais éteint chez lui la chaleur de ses sentiments. il écrivait avec la même vivacité qu'il sentait : on s'en apercevra assez aux lettres que nous publions; j'ai cru toutefois devoir supprimer quelques lignes et quelques noms propres; sans doute, ces lettres, ou ces brouillons, appartiennent à l'Histoire, mais il ne s'est pas écoulé beaucoup plus de 50 ans depuis que les dernières ont été écrites. D'ailleurs, c'est à un ami très cher qu'il écrivait, et Liouville, bien qu'il ne craignît pas de dire aux gens leurs vérités en face, n'aurait sans doute pas voulu que ses appréciations fussent rendues publiques.

Les lettres de Dirichlet à Mme Liouville n'intéressent pas la Science; elles contribueront à faire connaître celui qui les a écrites et la nature des relations, évidemment très affectueuses, qui existaient entre lui et la famille Liouville.

Des longues conversations de son père avec Dirichlet, Mme de Blignières a conservé un souvenir amusant : tous les deux étaient fort loquaces; ils avaient sans doute beaucoup de choses à dire. Liouville ne pouvait pas souffrir les lampes; il s'éclairait avec deux bougies et deux chandelles; pour mesurer le temps aux deux interlocuteurs, on avait recours non à une pendule, ni à un sablier, mais à une vieille méthode que je crois qui remonte au moyen âge : on fichait, à des intervalles réguliers, un certain nombre d'épingles dans une des chandelles; entre l'Académie l'expression de ma bien sincère et bien vive reconnaissance. J'ajouterai que votre lettre m'a fait autant de plaisir au moins que le diplôme : il n'y a pas de géomètre que j'ai estimé et aimé autant que vous, avant même de vous connaître personnellement, et depuis que je vous connais, je n'ai pas assurément changé d'avis. Jugez avec quel empressement j'accepte votre idée d'une correspondance mathématique. Il est vrai que mon empressement pourra passer quelque peu pour de l'égoïsme, car c'est moi qui ai tout à gagner à une telle correspondance.

Je dois maintenant vous expliquer pourquoi j'ai tant tardé à vous répondre.

Le bien-être moral ne guérissant pas le mal physique, j'ai été malade pendant une huitaine de jours. J'ai eu une fièvre assez forte ; j'ai été obligé de garder le lit et de renoncer à tout travail quelconque. Première cause de retard.

Ayant communiqué à diverses personnes les détails mathématiques contenus dans votre lettre, toutes en ont été enchantées et m'ont dit qu'il fallait absolument en présenter un extrait destiné à être imprimé dans le compte rendu; j'ai résisté, j'ai répondu que je n'avais pas votre autorisation; on n'a pas voulu entendre mes raisons; on m'a dit que votre lettre était si bien faite que vous n'auriez rien à y changer dans le cas où vous auriez désiré qu'elle fût rendue publique, etc., etc. Bref, on a tant insisté que j'ai été obligé de céder, en sorte qu'un extrait de votre lettre se trouve dans le compte rendu de la séance du 27 février (¹) et dans

---

deux épingles, celui qui parlait avait le droit de ne pas être interrompu. Quand la dernière épingle tombait, les deux géomètres allaient dormir. J. T.

A la remarque de M. Tannery j'ajouterai la suivante : Liouville, que j'ai eu l'honneur de suppléer dans son cours de Mécanique rationnelle à la Sorbonne, de 1872 à 1878, m'a répété plus d'une fois que Humboldt, ayant fait à Paris la connaissance de Dirichlet, l'avait fait nommer à Berlin *pour avoir le plaisir de causer avec lui.* Liouville ajoutait : « Si, à cette époque, Dirichlet avait pu obtenir une petite place à Paris, nous l'aurions sans doute gardé parmi nous. »

G. D.

(¹) *Comptes rendus*, t. X, p. 285; *Œuvres de Dirichlet*, t. I, p. 621. Il s'agit surtout de la proposition suivante :

« Si l'équation

$$s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0,$$

à coefficients entiers, n'a pas de diviseur rationnel, et si parmi ses racines

$$\alpha, \beta, \ldots, \omega$$

le cahier de février seulement de mon *Journal* (¹), lequel cahier paraîtra demain seulement. Peut-être ai-je eu tort, peut-être ai-je commis une indiscrétion; si cela est, il faudra me le dire, afin que je ne recommence pas. Et même désormais peut-être feriez-vous bien de m'indiquer ce qui peut se montrer ou se publier et ce qui doit rester entre nous. Quoi qu'il en soit, si j'ai commis ici une faute, pardonnez-la-moi, je vous en prie, en faveur des circonstances atténuantes et considérez qu'après tout vous êtes le premier coupable, car si vous n'aviez pas rendu votre lettre si intéressante, personne n'en aurait demandé la publication.

Cette publication a été une seconde cause du retard pour la réponse que je vous devais, voici comment :

M. Libri ne s'est-il pas avisé [*Compte rendu* du 24 février (²)] de présenter sans la lire une Note renfermant des remarques critiques sur votre lettre : j'ai dû attendre que la Note fût imprimée pour en prendre connaissance et y répondre, ce que j'ai fait lundi dernier; désirant, d'ailleurs, vous donner des détails complets sur cette affaire, j'ai cru devoir reculer encore de quelques jours le plaisir de causer avec vous.

Voici les points principaux de la Note de M. Libri :

1° Vous aviez avancé que deux conditions *suffisantes* étant remplies (savoir que l'équation $s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0$ ait au moins une racine réelle et n'ait pas de diviseurs rationnels), l'équation indéterminée $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega) = 1$ a une infinité de solutions en nombres entiers. M. Libri dit que l'on pourrait peut-être croire que vous regardez ces conditions comme *nécessaires*. J'ai répondu que je ne voyais pas pourquoi, lorsque vous avez raison dans tout ce que vous dites, on irait supposer que

---

il y en a au moins une qui soit réelle, je dis que l'équation indéterminée

$$F(x, y, \ldots, z) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega) = 1,$$

où l'on a posé pour abréger

$$\varphi(\alpha) = x + \alpha y + \ldots + \alpha^{n-1} z,$$

a toujours une infinité de solutions entières. »

(¹) T. V, p. 72.

(²) *Note de M. Libri sur un théorème de M. Dirichlet* (*Comptes rendus*, t. X, p. 311).

vous avez des idées fausses sur les choses dont vous ne parlez pas. Dans une lettre de trois pages qui n'était pas même consacrée tout entière aux Mathématiques, était-il naturel (ai-je ajouté), était-il possible de descendre aux détails minutieux que demande M. Libri?

N'ayant eu la Note à ma disposition que le dimanche matin, ce n'est que mardi (par conséquent après ma réponse faite) que j'ai vu qu'il aurait été possible de rendre cette réponse bien plus piquante. En effet, M. Libri avance et croit démontrer que l'équation $\underset{\cdot}{\varphi}(\alpha)\underset{\cdot}{\varphi}(\beta)\ldots\underset{\cdot}{\varphi}(\omega)=1$ a toujours une infinité de solutions dès que le dernier terme h de l'équation

$$s^n+as^{n-1}+\ldots+gs+h=0$$

est égal à ± 1, et cela quelle que soit la nature des racines $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ et malgré les diviseurs rationnels que l'équation en s pourrait avoir. Or, ce théorème de M. Libri est, par exemple, inexact lorsque l'équation en s se réduit à $s^2+1=0$, car on en conclurait que l'équation

$$(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})=x^2+y^2=1$$

a une infinité de solutions, ce qui est absurde. Toutefois, il est juste de dire que dans le cas de l'équation $s^2+2s+1=0$, dont le premier membre est décomposable en deux facteurs rationnels, on arrive à l'équation indéterminée $(x-y)^2=1$ qui a, en effet, une infinité de solutions. Mais en quoi cela contredit-il ce que vous avez avancé? Quelle rage a M. Libri de présenter à propos d'une lettre très concise des remarques qui seraient encore ridicules lors même qu'il s'agirait d'un Mémoire détaillé. Surtout, il n'aurait pas dû avancer un théorème faux. N'est-ce pas le cas de dire qu'en voulant mettre des points sur les *i* de votre lettre, le sot critique les a mis à côté?

Au reste, je présenterai sans doute lundi prochain (¹) une addition à ma Note, et je relèverai le théorème inexact de M. Libri.

2° Il a aussi essayé de répondre à votre ancienne remarque sur

---

(¹) *Sur un théorème d'Analyse indéterminée ou additions aux observations sur une Note de M. Libri insérée dans le dernier Compte rendu* (*Comptes rendus*, t. X, p. 381).

les formules de Gauss et la détermination du signe du radical carré. Il déclare n'avoir jamais compris le sens ou le but de votre observation. Je crois, dans ma réponse, l'avoir bien fait comprendre sinon à lui, du moins au public. Croiriez-vous que, dans sa réplique, il a été jusqu'à vous citer vous-même comme une autorité en sa faveur et qu'il a rapporté (en altérant passablement) ce que vous lui avez dit un jour à ce sujet en présence de M. Cournot Voyez pourtant à quel rôle stupide on s'expose quand on veut régner par le charlatanisme.

Voilà une bien longue lettre et pourtant une lettre bien vide. Excusez-moi; ce n'est pas tout à fait ma faute. Il faut même que j'ajoute encore deux mots. A propos de votre théorème sur les formes quadratiques qui renferment une infinité de nombres premiers, M. Libri *croit qu'il serait peut-être possible* de le déduire d'un théorème connu par Euler dès l'année 1770 : il n'a pas même dit quel est ce théorème d'Euler. J'ai beaucoup ri de cette phrase, mais j'ai eu soin de déclarer que je n'avais rien à répondre à une assertion si prudente et si vague.

Vous trouverez aussi dans son factum un pompeux éloge de ses propres méthodes pour la résolution des équations indéterminées. Ce sera à vous de voir si vous daignez oui ou non répondre à toutes ces pauvretés.

Permettez-moi de ne pas compter cette lettre comme une réponse suffisante à la vôtre et de vous écrire de nouveau d'ici à une quinzaine de jours. Je tâcherai de trouver un sujet plus intéressant que celui d'aujourd'hui (¹).

Vale et me ama.

DIRICHLET A LIOUVILLE

Monsieur et très cher Ami,

L'amitié que vous voulez bien avoir pour moi et dont vous m'avez donné récemment de nouvelles preuves qui m'ont vivement pé-

---

(¹) En tête de sa lettre, Liouville a bien écrit 5 février; d'après le contenu, il est clair que la lettre a été écrite dans la semaine qui précédait le lundi 9 mars. C'est sans doute 5 *mars* qu'il faut lire.

nétré, me font espérer que vous excuserez mon long silence et que vous ne l'attribuerez qu'à des occupations indispensables et qui ne souffraient aucun retard. Sans ces occupations, je n'aurais pas attendu jusqu'à présent pour vous remercier de l'accueil indulgent que vous avez bien voulu faire aux communications mathématiques contenues dans ma dernière lettre. En vous parlant de ces premiers essais sur une matière encore neuve, j'étais loin de penser que vous les jugeriez assez favorablement pour les croire dignes des honneurs du compte rendu. Mais comme en définitive dans ce que j'ai avancé, il n'y a rien qui ne soit littéralement exact, je ne vois d'autre mal à la publicité que ces essais ont reçue, que l'ennui que vous avez eu de faire justice des sottes attaques de M. Libri. Permettez-moi de vous exprimer toute ma reconnaissance pour le service de véritable amitié que vous m'avez rendu par votre excellente réponse et de vous assurer que l'obligation que je vous en dois est d'autant plus grande que je sens bien que vous m'avez beaucoup mieux défendu et pour le fond et pour la forme que je n'aurais pu le faire moi-même.

En voyant le dédain avec lequel M. Libri parle des fonctions homogènes que Lagrange a le premier considérées et qui ont le malheur de n'être pas les plus générales de leur degré, je n'ai pas pu m'empêcher de rire. Il faut avoir un esprit aussi superficiel que l'est celui de M. Libri pour mesurer l'importance d'une expression analytique sur le nombre plus ou moins grand des indéterminées qu'elle renferme. Pour juger ainsi, il faudrait donc dire aussi que la congruence binome $x^n - a \equiv 0 \pmod{k}$, qui dès que $n > 2$ n'est plus la plus générale de son degré, ne présente aucun intérêt et cependant il n'y [a] personne qui ne sache, et M. Libri lui-même devrait le savoir, à combien de difficultés et à combien de résultats intéressants la théorie de cette congruence particulière (théorie qui ne s'étend, même jusqu'à présent, malgré les travaux de plusieurs géomètres, qu'aux cas où $n = 3$ et $n = 4$) donne lieu. Si M. Libri s'était livré à une étude approfondie et laborieuse du sujet, il aurait reconnu que les fonctions homogènes décomposées en facteurs linéaires (plus générales que celles de Lagrange en ce seul point qu'on ne suppose aucun de leurs coefficients égal à l'unité) présentent, malgré leur forme particulière ou plutôt en vertu de cette forme, le plus grand intérêt et sont aussi étendues que les formes quadratiques auxquelles elles se réduisent dans le cas du second degré. Je crois pouvoir assurer, d'après les recherches suivies que j'ai faites sur cette matière depuis plus de six mois, qu'il y a peu de sujets plus féconds et que les propriétés de ces expressions répandent une vive lumière non seulement sur la science des nombres, mais encore sur le calcul intégral et particulièrement sur les transcendantes abéliennes avec lesquelles le sujet a des rapports très intimes et très nombreux et je puis ajouter que la théorie de ces fonctions se lie aussi à une branche d'analyse encore très peu cultivée et qui se réduit presque dans son état actuel au théorème si célèbre de Lambert sur l'irrationnalité de π et de son carré. Les résultats que j'ai déjà obtenus et ceux que j'entrevois d'une manière assez distincte pour être sûr d'y parvenir dans un temps donné, sont déjà assez nombreux pour fournir matière à un Ouvrage d'une certaine étendue et j'ai lieu d'espérer qu'à mesure que j'avancerai dans mon travail, le sujet s'étendra de plus en plus. Lorsque j'aurai réuni un certain nombre de résultats sous une forme que je pourrai croire définitive, je vous demanderai la permission de vous les communiquer, et votre approbation, si je suis assez heureux pour l'obtenir, sera pour moi un encouragement à entreprendre la rédaction d'un Traité étendu sur la matière.

Je viens de voir avec le plus vif intérêt l'extension que vous avez donnée à vos recherches sur les fonctions elliptiques (¹) et que vous êtes parvenu à prouver que ces transcendantes, considérées comme fonctions de leur module, ne sauraient s'exprimer sous forme finie. J'espère que votre travail ne tardera pas à paraître dans votre journal à moins que vous ne l'ayez destiné pour la collection de l'Académie. Dans ce dernier cas, je vous prierai de m'en faire parvenir un exemplaire particulier dès que l'impression en sera achevée.

Quoique depuis l'été dernier, où j'ai vu M. Poisson n'étant déjà plus que l'ombre de lui-même, je fusse préparé à sa mort, la nouvelle de cet événement m'a vivement affecté. La perte que la Science a faite sera longtemps et vivement ressentie; elle est malheureusement déjà assez grande pour qu'il ne soit pas nécessaire

---

(¹) Mémoire *Sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module* (*Comptes rendus*, t. X, p. 2; *Journal de Liouville*, t. V, p. 441).

de l'exagérer en disant avec M. Cousin que nous avons perdu le premier de nos géomètres. Pourquoi faut-il qu'aux regrets universels qu'inspire le mort illustre se mêle le souvenir des nombreuses injustices dont s'est rendu coupable l'homme au pouvoir? Parmi ces injustices, il n'y en a pas de plus grandes et qui exigent une réparation plus prompte que celle qui a été commise envers notre ingénieux ami Sturm qui a été laissé dans une position subalterne et qui s'est vu préférer des charlatans adroits pour qui la Science n'est qu'un moyen de parvenir. Espérons que M. Poinsot s'empressera de faire à notre ami une position digne de lui et qui lui permette d'ajouter de nouvelles découvertes à celles dont la Science lui est déjà redevable : quoique j'aie écrit à M. Sturm, il y a près de six mois, comme il est correspondant encore plus paresseux que moi-même, je n'espère guère avoir de ses nouvelles directes; veuillez donc me dire ce qui a été fait ou ce qui sera fait pour lui.

Me permettrez-vous de vous charger d'une petite commission? Voici de quoi il s'agit : M. de Humboldt vient de publier dans le *Journal de Crelle* (¹), ainsi que dans celui de Schumacher, la première lettre que Lagrange, encore à Berlin, a écrite à Laplace, et de laquelle résulte ce fait très curieux et entièrement inconnu que Laplace, qui venait seulement de débuter, a eu le désir de s'établir à Berlin et a été sur le point d'y être nommé comme Membre de l'Académie. Il paraît que le succès de la négociation a été empêché par la nomination de Laplace à l'Académie des Sciences de Paris, et pour éclaircir entièrement ce point historique qui a beaucoup d'intérêt pour M. de Humboldt, il désirerait connaître l'époque précise de cette nomination. Si vous pouviez me fournir ce renseignement qui doit résulter de l'inspection des plumitifs (²) pour 1773 et 1774, vous rendriez un véritable service à M. de Humboldt qui paraît y attacher le plus grand prix.

Adieu, cher ami, et ne manquez pas de me donner promptement de vos nouvelles. Je sais bien que mon long silence ne me donne

---

(¹) *Ein früherer Brief Lagrange's an Laplace* (*Journal de Crelle,* t. 20, p. 309).

(²) Peut-être n'est-il pas inutile de dire que Dirichlet emploie ce mot dans son vrai sens : « Papier original sur lequel on écrit les sommaires des jugements d'un tribunal, les délibérations d'une compagnie » (LITTRÉ).

pas le droit de compter sur une réponse prompte; mais je vous promets d'être plus exact à l'avenir.

Présentez, s'il vous plaît, mes respects à M^{me} Liouville, et rappelez-moi au souvenir de nos amis.

Tout à vous

LEJEUNE-DIRICHLET.

Berlin, le 6 mai 1840.

Si vous voyez M. Riess, qui est enchanté de l'excellent accueil que vous lui avez fait, dites-lui bien des choses de ma part.

M. Gauss (¹), qui est beaucoup occupé de problèmes généraux relatifs à l'attraction, vient de lire un Mémoire étendu sur cette matière à la Société de Göttingen. Il en a donné un extrait de trois pages dans les *Göttinger Gelehrte Anzeigen* (²), mars 1840, que vous jugerez peut-être convenable d'insérer dans votre journal. Si la feuille littéraire citée ne se trouve pas à Paris, faites-le-moi savoir, je vous ferais alors parvenir la traduction de l'article en question. J'appelle également votre attention sur les *Œuvres complètes d'Abel,* qui viennent de paraître et dans lesquelles se trouvent plusieurs morceaux inédits.

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Mon Cher Monsieur Dirichlet

Je dois d'abord vous remercier de votre bonne lettre. Vous comprenez sans peine quel vif plaisir j'ai eu en la lisant. Je ne regrette plus l'indiscrétion que j'ai commise en publiant sans autorisation votre Note dans le *Compte rendu;* je m'en félicite, au contraire, puisqu'elle m'a valu un témoignage d'amitié si flatteur pour moi. Il y a là, sans doute, de quoi compenser cent fois pour une l'ennui que j'éprouve à m'occuper de M. Libri, c'est-à-dire

---

(¹) Ce dernier paragraphe est écrit dans la marge de la première page.

(²) Gauss, *Werke,* t. V, p. 305; c'est un court résumé des célèbres *Allgemeine Lehrsätze, etc.* (t. V, p. 197), dont Liouville a publié une traduction dans son Journal, t. VII, p. 273.

d'un homme qui, dans l'Académie du moins, commence à être méprisé presque autant qu'il le mérite.

Vous avez bien raison de dire qu'il ne faut pas mesurer l'importance d'une expression analytique sur le nombre plus ou moins grand des arbitraires qu'elle renferme. C'est presque toujours en limitant le nombre et l'étendue de ces arbitraires que l'on parvient à découvrir des propriétés saillantes et à saisir la clef des théories. Le cercle n'est pas, assurément, la courbe la plus générale de son espèce. S'avisera-t-on de blâmer les géomètres qui ont consacré leurs veilles à l'étude des propriétés si fécondes et si nombreuses du cercle?

Continuez donc vos recherches et laissez votre critique intégrer *toutes* les équations linéaires aux différences finies, et *toutes* les équations différentielles du premier ordre : laissez-le renfermer dans une *seule* formule toute la théorie des nombres, ou bien résoudre le fameux problème des échecs : *Deux personnes jouant le mieux possible, trouver en série convergente après combien de coups l'une d'elles sera nécessairement échec et mat.* Ces théories *générales* sont bien belles, mais comment se fait-il qu'elles ne puissent servir dans aucun cas *particulier?*

J'ai étudié depuis un an, avec beaucoup de soin, ce que vous avez écrit sur la théorie des nombres, et j'ai parcouru les Auteurs qui vous ont précédé. Il est sûr à mes yeux que vous êtes dans la bonne voie et que vos derniers Mémoires renferment des théories absolument neuves dont rien jusqu'ici ne pouvait donner l'idée. J'ai profité du Cours dont je suis chargé au Collège de France pour développer au public quelques-unes de vos méthodes : malheureusement, le Cours est spécialement consacré à la Physique mathématique, en sorte que je n'ai pu donner à cette espèce d'excursion dans le domaine de l'analyse pure le temps que j'aurais désiré. Je me suis borné à exposer votre démonstration des séries périodiques, celle des séries de M. Gauss, le théorème sur la progression arithmétique dans le cas seulement où la raison est un nombre premier, enfin les propositions relatives aux signes des quantités (¹) $\Sigma b - \Sigma a$, $A - B$, etc. C'est une bien petite partie

---

(¹) Ces notations sont celles de Dirichlet dans son Mémoire *Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 18, p. 259;

de vos belles recherches, mais vous comprendrez que je ne pouvais faire davantage, ayant devant moi des auditeurs étrangers aux premiers principes de la théorie des nombres et pour lesquels il fallait reprendre chaque question *ab ovo*.

En préparant ces leçons, j'ai naturellement essayé d'ajouter quelques gouttes d'eau à votre rivière. Ainsi, j'ai reconnu que la relation entre $\Sigma b - \Sigma a$ et $A - B$ que l'on obtient en éliminant le déterminant (¹) h entre les deux formules que vous avez données peut (ainsi que beaucoup d'autres relations du même genre) être obtenue directement par les principes les plus élémentaires; ces relations ne dépendent nullement des séries de M. Gauss. Mais vous pensez bien qu'une telle remarque (qui n'a pas pu, d'ailleurs vous échapper) n'a jamais eu à mes yeux grande importance. J'en attachais moins encore à quelques exemples de détermination de signe différents des exemples $\Sigma b - \Sigma a$, $\Sigma a^2 - \Sigma b^2$, etc., que vous avez présentés. Une telle généralisation s'offrait d'elle-même et vous appartenait d'avance : il aurait fallu être stupide pour ne pas l'apercevoir à la première lecture des quelques lignes consacrées par vous à ce sujet. Jugez donc de mon étonnement de me voir cité par M. Cauchy dans les deux Notes (²) qu'il s'est avisé de publier à votre suite, surtout dans celle du 11 mai. Je ne vois guère dans ces Notes qu'une amplification de bon écolier, rédigée sur le texte du maître : . . . .

. . . .

Je n'ai pas pu travailler beaucoup cette année : outre le Mémoire sur les fonctions elliptiques, j'ai composé une Note sur l'équation

---

Œuvres, t. I, p. 360) ; a et b désignent respectivement les résidus et non-résidus quadratiques d'un nombre premier, moindres que ce nombre; A et B désignent respectivement combien il y a de résidus et de non-résidus quadratiques, moindres que la moitié du nombre premier.

(¹) Dans le Mémoire de Dirichlet, h représente non le déterminant d'une forme quadratique, mais le nombre de formes quadratiques distinctes (non proprement équivalentes) d'un déterminant donné. Au reste, Liouville avait primitivement écrit : « en éliminant le radical des deux formules que vous avez ».

(²) *Théorèmes divers sur les résidus et les non-résidus quadratiques* (*Comptes rendus*, t. X, 16 mars 1840, p. 437; *Œuvres*, 1ʳᵉ série, t. V, p. 135). — *Sur quelques séries dignes de remarques, qui se présentent dans la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. X, 11 mai 1840, p. 719; *Œuvres*, 1ʳᵉ série, t. V, p. 199).

de Riccati (¹) dont je trouve directement les cas d'intégrabilité et de non-intégrabilité : je tâcherai de vous donner une idée de cela dans une lettre que je remettrai à M. Riess. J'ai une réponse (un peu longue) à votre objection sur les séries dont les termes dépendent des fonctions V; et de plus une nouvelle méthode pour sommer ces séries : je suis très content de cette méthode dont je vous avais déjà indiqué le principe lors de votre séjour à Paris; elle est très simple et très élégante (²) : j'attends les vacances pour polir tout cela. Au milieu des ennuyeuses occupations qui m'accablent, le temps me manque pour des recherches suivies.

Adieu, tout à vous.

P. S. Condorcet ayant été adjoint à M. de Fouchy, secrétaire, la place d'associé mécanicien qu'il occupait à été donnée à M. Desmarest, adjoint mécanicien, et celle d'adjoint à M. Delaplace. Voici les dates. Samedi 20 mars 1773 : L'Académie ayant procédé suivant la forme ordinaire à l'élection de deux sujets pour remplir la place d'associé mécanicien de M. de Condorcet, les premières voix ont été pour M. Desmarest et les secondes pour M. Delaplace. Mercredi 24 mars 1773 : On donna avis que le Roi a nommé M. Desmarest pour remplir la place d'associé mécanicien vacante par l'adjonction de M. de Condorcet au secrétariat. Sa Majesté désire aussi que l'Académie procède à l'élection pour la place d'adjoint vacante par la promotion de M. Desmarest. Mercredi 31 mars : L'Académie ayant procédé suivant la forme ordinaire à l'élection de deux candidats pour remplir la place d'adjoint mécanicien vacante par la promotion de M. Desmarest, MM. les Pensionnaires et Associés mécaniciens ont proposé MM. Delaplace, Marguerit, Monge, Legendre et Mauduit. Après quoi, l'Académie ayant été au scrutin, les premières voix ont été pour M. Delaplace et les secondes pour M. Marguerit. Samedi 24 avril 1773 : Le Roi a nommé M. Delaplace pour remplir à l'Académie des Sciences la place d'adjoint mécanicien vacante par la promotion de M. Desmarest à celle d'associé.

(¹) *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati* (*Comptes rendus*, t. XI, p. 729).

(²) *Sur les conditions de convergence d'une certaine classe de séries* (*Comptes rendus*, t. XI, p. 615).

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Paris, 7 juillet 1840.

Mon cher Monsieur Dirichlet,

M. Cauchy vient de nous communiquer un théorème à la fois si général et si simple, que je crois vous rendre un vrai service en vous donnant l'énoncé huit jours avant le compte rendu (¹). Ce théorème est relatif à l'intégration des équations différentielles ou à différences partielles linéraires, à coefficients constants ou variables. M. Cauchy prouve que, si l'on sait intégrer ces équations lorsqu'elles n'ont aucun terme indépendant des variables principales, on en conclura de suite les intégrales relatives au cas où l'on ajouterait à leurs seconds membres des fonctions connues quelconques.

Par exemple, pour intégrer

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} + F(x, y, t)\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \varpi(x, y, t),$$

on cherchera une fonction ψ ou $\psi(x, y, t, \theta)$ qui pour $t = \theta$ se réduise à $\varpi(x, y, \theta)$ et satisfasse en outre à l'équation (1) privée de second membre. Cela posé, la valeur complète de φ sera

$$\varphi = \int_0^t \psi \, d\theta + u,$$

u désignant l'intégrale de l'équation (1) privée de second membre. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que l'équation (1) est satisfaite pour $\varphi = \int_0^t \psi \, d\theta$. Or on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \psi(x, y, t, t) + \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial t} \, d\theta,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varpi(x, y, t) + \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial t} \, d\theta,$$

(¹) *Comptes rendus*, t. X, p. 957, et t. XI, p. 1. — *Œuvres de Cauchy*, 1^re^ série, t. V, p. 236 et 249.

puisque l'équation $\psi(x, y, \theta, \theta) = \varpi(x, y, \theta)$, où θ est indéterminé, entraîne celle-ci $\psi(x, y, t, t) = \varpi(x, y, t)$.

Dès lors la quantité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m} + \mathrm{F}(x, y, t)\frac{\partial^n\varphi}{\partial y^n}$$

est égale à

$$\varpi(x, y, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^n\psi}{\partial x^m} + \mathrm{F}(x, y, t)\frac{\partial^n\varphi}{\partial y^n}\right]\partial\theta,$$

c'est-à-dire $\varpi(x, y, t)$, puisque la fonction

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m\psi}{\partial x^m} + \mathrm{F}(x, y, t)\frac{\partial^n\psi}{\partial y^m} = 0.$$

Il y a des règles tout aussi simples et que vous trouverez de suite soit pour une équation contenant des dérivées d'ordre supérieur par rapport à t, soit pour un système quelconque d'équations linéaires d'ordre quelconque. Au surplus tous les cas peuvent se ramener (en augmentant, s'il le faut, le nombre des variables principales) à celui où il n'existe que des dérivées du premier ordre par rapport à t et où, de plus, chaque équation ne contient qu'une seule dérivée relative à cette variable t.

Adieu, mon cher ami, tout à vous,

J. LIOUVILLE.

P. S. La place de professeur de Mécanique rationnelle est vacante à la Sorbonne. Croiriez-vous que les chances se balancent entre *Sturm* et *Libri* (¹). Pauvres mathématiques! Je n'ai pas besoin de vous dire que M. Lacroix est tout entier pour Libri. Faut-il qu'après tant de services honorables, un homme digne de tous nos respects termine sa carrière en devenant l'esclave et le jouet d'un vil intrigant?

(¹) Sturm fut nommé, par arrêté ministériel du 21 novembre 1840, professeur de Mécanique, en remplacement de M. Poisson : il avait été présenté à la fois par la Faculté des Sciences et par le Conseil académique; cette double présentation est visée dans la notification de l'arrêté au doyen de la Faculté, arrêté dont M. Guillet, secrétaire de la Faculté, a bien voulu me donner communication.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

J'espère, mon cher Monsieur Liouville, que vous ne m'en voudrez pas de mon long silence lorsque vous saurez quel temps pénible j'ai traversé depuis que j'ai reçu votre dernière lettre, lettre si intéressante et dont à mon regret je n'ai pas encore pu vous remercier. Ma femme a tant souffert pendant sa grossesse que son état me donnait les plus vives préoccupations et ce n'est que depuis ses couches que j'ai recommencé à respirer. Si sa santé est maintenant loin d'être satisfaisante, elle n'a du moins heureusement rien qui puisse m'inquiéter.

Ayant l'esprit si peu libre, je n'ai pas pu me livrer avec suite aux recherches dont je vous ai entretenu dans mes précédentes lettres. Tout ce que j'ai pu faire, ç'a été de considérer par intervalles quelques points isolés au sujet du travail que je me suis choisi, de sorte que sous le rapport de la rédaction de l'ensemble je ne suis guère plus avancé qu'il y a 5 ou 6 mois.

C'est avec le plus vif intérêt que j'ai appris par le compte rendu (¹) que notre ami Sturm est enfin dans une position digne de lui. Maintenant qu'il se trouve débarrassé de l'ennuyeuse obligation de rabâcher les éléments aux élèves de Rollin, nous pouvons espérer de voir prendre son génie un nouvel essor et nous ne tarderons sans doute pas à apprendre quelque chose.

Que fait donc M. Steiner à Paris? Se borne-t-il à savourer les délices de votre capitale? Tâchez donc de le pousser un peu au travail. Il avait de si beaux projets en partant d'ici que s'il revenait sans avoir rien produit de ses trésors, on ne pourrait manquer de vous accuser, vous et vos amis, de l'avoir entièrement absorbé par

---

(¹) Il ne s'agit pas ici de la nomination de Sturm comme professeur à la Sorbonne, dont les *Comptes rendus* n'avaient pas à parler, mais de sa présentation au Ministre de la Guerre comme « candidat de l'Académie » pour la place de professeur d'Analyse et de Mécanique à l'École Polytechnique, vacante par suite de la nomination de Duhamel comme « examinateur permanent ». Sturm fut présenté par 36 voix, contre 3 données à Auguste Comte (*Comptes rendus,* t. XI, p. 606, séance du 12 octobre 1840) et nommé le 19 octobre. Il était d'ailleurs répétiteur à l'École Polytechnique depuis le 28 novembre 1838. Je dois ces derniers renseignements à M. Mercadier.

les charmes de votre commerce. J'appelle particulièrement votre attention sur un manuscrit qu'il a avec lui et qui a pour objet de donner une vue résumée de ses principales recherches. Je suis sûr que ce travail, si M. Steiner veut se résigner à ne pas dire tout ce qu'il sait sur ce sujet, chose presque inévitable pour un auteur si fécond, ne demanderait pas beaucoup de temps pour être en état d'être imprimé (¹) et aurait le plus éclatant succès. Quoique je ne sois qu'un simple amateur en fait de Géométrie, j'en sais pourtant assez pour être assuré que les juges compétents ne pourront accueillir qu'avec le plus vif intérêt un travail qui fait dériver d'une source commune des théories que rien ne paraissait lier jusqu'à présent.

Ce n'est pas le tout de prêcher les bons préceptes, il faut aussi s'y conformer soi-même. Faisant un retour sur moi-même, je vais me mettre en train dès demain de rédiger mes premières recherches (²).

Adieu mon cher Monsieur Liouville, présentez, s'il vous plaît, mes devoirs à Madame Liouville et rappelez-moi au souvenir de nos amis communs.

Tout à vous
LEJEUNE-DIRICHLET.

Berlin, le 3 février 1841.

Quoique M. Steiner m'ait donné son adresse, comme je ne suis pas sûr qu'elle soit encore la même, je prends la liberté de vous prier de lui faire parvenir la lettre ci-jointe.

(¹) Il s'agit sans doute du Mémoire *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général,* dont un extrait figure dans le *Compte rendu* du 15 mars 1841 (XII, p. 479) et sur lequel Liouville a fait un rapport élogieux (XII, p. 931). Liouville a imprimé la première Partie de ce Mémoire, traduite par Wertheim, dans le Tome VI de son Journal, p. 105. Elle est reproduite dans le *Journal de Crelle,* t. 24, p. 93; la seconde Partie, traduite en français par Foelsing, a été publiée dans le même Tome, p. 189. Le texte allemand se trouve dans les *Œuvres de Steiner,* t. II, p. 179.

(²) Les œuvres de Lejeune-Dirichlet contiennent un seul Mémoire (en deux Parties) daté de 1841 : *Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen* (t. I, p. 503). Il a été *lu* à l'Académie de Berlin le 27 mai. — Les *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (t. I, p. 533), qui ont paru dans le quatrième Cahier du Tome 24 (1842) du *Journal de Crelle,* ne sont pas datées.

LIOUVILLE A DIRICHLET (1).

Quand vous m'avez adressé votre dernière lettre, j'étais à Toul ; j'y suis encore et n'ai pas vu par conséquent M. Steiner. J'apprends avec bien du plaisir qu'il va passer l'hiver à Paris : nous profiterons de cette occasion pour le prier de nous communiquer les trésors de sa géométrie : il apprendra le français et je tâcherai de me mettre un peu à l'étude de l'allemand.

Je n'ai pas beaucoup profité de mes vacances, du moins scientifiquement parlant : la politique commence en effet à nous préoccuper beaucoup. Toutefois, je vais essayer de vous donner ici une idée de quelques-unes de mes nouvelles recherches sur le développement des fonctions en séries procédant suivant les fonctions V ou U. Vous savez que les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ dépendent de l'intégration des équations

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \rho^2 U = \lambda U,$$

$$\frac{dU}{dz} - h'U = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \qquad \frac{dU}{dz} + H'U = 0 \quad \text{pour} \quad z = Z.$$

Quand l'indice n est très grand, ces équations fournissent aisément des valeurs simples et très approchées de ρ_n et de U_n, lesquelles contiendront en outre tout naturellement tous les paramètres que l'on voudra introduire dans λ, h', H' : je puis, par exemple, admettre dans ces trois quantités un paramètre positif m avec lequel elles seront supposées s'évanouir, et la question sera

---

(1) Ce brouillon de lettre n'est pas daté; on peut supposer qu'il répond à la précédente lettre de Dirichlet, datée du 3 février 1841, en raison de ce que Liouville dit de Steiner et des *trésors* de sa géométrie. C'est l'expression même de Dirichlet. La phrase « il va passer l'hiver à Paris » n'est pas incompatible avec la supposition d'une lettre écrite au commencement de février.

Je n'ai pas la prétention d'éclaircir cette lettre; elle en suppose d'autres qui sont perdues. Il est presque inutile de dire au lecteur qu'elle se rapporte au même ordre d'idées que Liouville a développées dans les trois *Mémoires sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable,* insérés dans les deux premiers Tomes du *Journal de Mathématiques* (t. I, p. 253; t. II, p. 16 et 418) et dans quelques autres Notes de la même époque, dont une en collaboration avec Sturm. Je ne connais pas de Mémoire de Liouville sur ce sujet, postérieur à 1837.

de prouver que, pour une valeur quelconque de m, on a

$$\mathrm{F}(z, m) \quad \text{ou} \quad \sum \frac{\mathrm{U}_n \int_0^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_n f(z)\, dz}{\int_0^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_n^2\, dz} = f(x)\, dz :$$

cette équation a évidemment lieu pour $m = 0$, auquel cas U_n est un simple cosinus; il s'agit de l'étendre aux autres valeurs de m.

Je vais prouver que, si l'équation proposée a lieu pour une certaine valeur de m et pour une fonction $f(z)$ quelconque, elle aura lieu pour d'autres valeurs de m, comprises dans un certain intervalle que l'on peut fixer.

Considérons l'équation

$$\int_0^{\mathrm{Z}} [\mathrm{F}(z, m) - f(z)]\, \mathrm{U}_n\, dz = 0,$$

laquelle a lieu, comme on sait, quel que soit m, puis changeons m en $m + \Delta m$: en posant $\mathrm{F}(z, m) - f(z) = \varphi$, il viendra

$$\int_0^{\mathrm{Z}} (\varphi \Delta \mathrm{U}_n + \mathrm{U}_n \Delta\varphi + \Delta \mathrm{U}_n \Delta\varphi)\, dz = 0.$$

Mais, si la valeur de m jouit de la propriété énoncée plus haut et exprimée par l'équation $\varphi = 0$, il viendra simplement

$$\int_0^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_n \Delta\varphi = -\int_0^{\mathrm{Z}} \Delta \mathrm{U}_n \Delta\varphi\, \Delta z.$$

Dans l'hypothèse admise [en remplaçant $f(z)$ par $\Delta\varphi$], on peut développer $\Delta\varphi$ en série sous la forme

$$\Delta\varphi = -\sum \frac{\mathrm{U}_n \int_0^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_n \Delta\varphi\, dz}{\int_0^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_n^2\, dz},$$

en désignant par φ' et U'_n ce que φ et U_n deviennent en changeant z en z', puis posant

$$\sum \frac{\mathrm{U}_n \Delta \mathrm{U}'_n}{\int_0^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_n^2\, dz} = \zeta,$$

après avoir substitué à $\int_0^Z U_n \Delta\varphi\, dz$ sa valeur $-\int_0^Z \Delta U'_n \Delta\varphi'\, dz'$, on a donc

$$\Delta\varphi = -\int_0^Z \Delta\varphi' \zeta\, dz'.$$

Or, pour toutes les valeurs de m et à l'aide d'une valeur approchée de U_n, il est très facile de prouver que la série ζ est convergente et que son rapport à Δm ne peut surpasser une certaine limite A, en sorte que, numériquement parlant, on a toujours $\zeta < A\Delta m$. Cela étant, soit M la plus grande valeur que $\Delta\varphi$ puisse prendre lorsque z croît de o à Z. Le second membre de cette dernière équation est $\leqq MAZ\Delta m$; mais, d'un autre côté, il peut devenir égal à M : on a donc

$$M \leqq MAZ\Delta m,$$

d'où résulte $M = 0$ et par suite $\Delta\varphi = 0$, $F(z, m) = f(z)$, toutes les fois que le produit $MA\Delta m$ est < 1 : par exemple, en supposant $2A\gamma = 1$, on voit que $\Delta\varphi = 0$ toutes les fois que Δm est $< \gamma$: ainsi l'équation $F(z, m) = f(z)$ ayant lieu pour $m = 0$, aura lieu jusqu'à $m = \gamma$, puis jusqu'à $m = 2\gamma$, $m = 3\gamma$, ..., c'est-à-dire aura lieu pour m quelconque. C. Q. F. D.

Cette démonstration suppose démontrée *a priori* la convergence de la série qui exprime $\Delta\varphi$; mais on peut, si l'on veut, à l'aide d'une modification très légère, prouver à la fois que cette convergence existe et que $\Delta\varphi = 0$. Au reste, j'aurais beaucoup d'autres remarques à vous transmettre sur ce sujet; mais l'espace me manque : ce sera pour une autre fois.

Tout à vous,

J. LIOUVILLE.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Mon cher Liouville,

Depuis huit jours j'ai voulu chaque jour vous écrire pour vous faire part de la perte cruelle que nous venons de faire, mais les occupations nombreuses qui ont été naturellement pour moi la suite de ce funeste événement ne m'en ont pas laissé le temps. Quoique je sois ainsi devancé par les journaux qui cette fois malheureusement ont dit vrai, je me hâte de répondre à votre lettre que je reçois à l'instant, et de vous donner quelques détails sur les derniers moments de notre illustre ami. Lorsqu'il revint, vers le 20 janvier, de Gotha où il venait de passer quelques semaines dans sa famille et où il avait été atteint de la grippe, — nous le trouvâmes bien changé, sans toutefois concevoir une inquiétude sérieuse. Des bains de vapeur que son médecin lui prescrivit parurent lui faire beaucoup de bien et, comme il se remettait au travail avec son ardeur ordinaire, je me flattais de l'espoir que la belle saison, qu'il se proposait de passer à la campagne, ferait le reste et le rétablirait autant du moins qu'il pouvait être rétabli, le diabète dont il était atteint depuis plus de huit ans étant malheureusement une maladie incurable. Le mardi 11 février, il vint dîner chez moi; après le dîner, nous passâmes dans mon cabinet, où nous eûmes une de ces délicieuses conversations mathématiques que je regretterai éternellement. En se retirant vers 9 heures, il me recommanda de ne pas manquer à la séance de l'Académie du jeudi suivant, dans laquelle il voulait faire une communication sur l'orbite de Sirius, déterminée d'après les observations de Bessel et Peters. Ce fut là sa dernière sortie. Ne l'ayant pas trouvé le surlendemain à l'Académie, je me rendis chez lui le vendredi matin et j'appris qu'il avait été pris de la fièvre le soir même où il m'avait quitté. Ce jour-là, il avait encore la tête assez libre pour pouvoir causer mathématiques pendant plus d'une heure; le soir il tomba dans un assoupissement qui ne fut plus interrompu que par des intervalles de lucidité très courts; le lundi ses médecins reconnurent qu'il était atteint de la petite vérole, le mardi à 11 heures $\frac{1}{4}$, huit jours après les premiers symptômes de la maladie, cette puissante intelligence s'éteignit sans douleur.

M. Jacobi laisse une nombreuse famille, une veuve et sept enfants, dont l'aîné n'a que 18 ans, n'ayant d'autre ressource qu'une chétive pension de 1400 à 1600 francs. Espérons que la proposition que nous avons faite hier à l'Académie, et que l'Académie a adoptée à l'unanimité, ne restera pas sans effet et que l'état se chargera de pourvoir aux besoins de la famille d'un homme qui a honoré notre pays par ses brillantes découvertes et donné une si puissante impulsion à l'étude des sciences mathématiques parmi nous.

En attendant que le gouvernement fasse son devoir, les amis de l'illustre géomètre et ceux de ses élèves qui sont favorisés sous le rapport de la fortune, ont cru faire le leur, en pensant au plus pressant et en réunissant les fonds nécessaires pour que le fils aîné de notre illustre ami puisse se livrer pendant 3 ou 4 ans à ses études universitaires. Je n'ai pas besoin de vous dire que c'est là un détail tout confidentiel, que je ne vous donne que parce que votre attachement pour notre excellent ami vous donne le droit d'être instruit de toutes les circonstances qui le concernent lui et sa famille.

Ayez la bonté de faire part à votre Académie [1] de la perte douloureuse qu'elle vient de faire. Je voulais le faire moi-même au nom de Madame Jacobi, mais je n'ai plus le temps d'écrire aujourd'hui une nouvelle lettre et demain ma lettre n'arriverait plus avant la prochaine séance.

Excusez le désordre de cette lettre et rappelez moi au souvenir de Madame Liouville ainsi qu'à celui de nos amis Mrs Chasles, Poncelet, Sturm et Lamé.

Votre dévoué

DIRICHLET.

Berlin, ce 28 fév. 1851.

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Paris, 10 février 1853.

Cher et excellent ami,

Vous connaissez déjà M. Holmgren, qui vous remettra cette lettre, et qui restera quelque temps à Berlin avant de retourner en Suède. Je fais de M. Holmgren beaucoup de cas : c'est un bon géomètre, un homme d'esprit et, ce qui est mieux encore, un homme d'un caractère solide. Il vous donnera quelques nouvelles de notre Académie, où les ..... ont remplacé le *Libri,* et il vous dira que je continue à remplir consciencieusement mes devoirs,

---

[1] La mort de Jacobi avait été annoncée à l'Académie par Arago, le 25 février, d'après un article du *Moniteur* du même jour; le lundi suivant, Arago confirma la nouvelle, en ajoutant quelques mots sur la maladie qui avait emporté Jacobi et sur la situation précaire de sa famille (*Comptes rendus,* t. XXXII, p. 261 et 313).

n'ayant guère peur de ces gens de mauvaise compagnie et de méchant cœur, mes anciens élèves, hélas! et que je n'ai que trop aidés quand ils étaient gelés et faibles. Ils se sont réchauffés depuis comme le serpent de La Fontaine. Mais vous savez que je crois en Dieu, ne craignez donc rien pour moi — J'ai épuisé, cher et excellent ami, la coupe amère de la douleur, le jour où j'ai perdu mon pauvre père, que vous avez vu, auquel vous avez même, je crois, rendu visite, *à Toul*. Ce père au dessus de tout éloge, qui faisait la moitié de ma vie, et la moitié de la vie de mon frère, est mort le 25 avril dernier. J'aurais dû peut-être vous écrire alors; je ne l'ai pas fait, et je n'ai été que [trop] souvent négligeant envers vous. Mais M. Holmgren vous dira que, si je n'écris pas, je parle; que votre nom est sans cesse prononcé par moi, que vos ouvrages sont toujours cités dans mes cours, comme les vrais ouvrages classiques, enfin que je conserve toute l'amitié dont vous m'avez vu animé pour vous quand j'ai eu le bonheur de vous voir à Paris en 1839.

Que devient la famille de notre Jacobi? Que fait-on pour elle? Que devient (1) la publication de ses ouvrages? Y a-t-il quelque
. Quand pourrai-je vous serrer la main? Que de choses j'aurais à vous dire!

Adieu, cher et excellent ami,

Votre tout dévoué,

J. L.

P. S. Madame Liouville prétend que vous lui avez promis autrefois de revenir en France avec Madame Dirichlet. Venez donc, venez donc. Vous verriez en France, à l'Observatoire, un grand et beau jeune homme, qu'on appelle Ernest Liouville.

Il était à Toul, quand vous avez mis une carte chez mon père, il avait cinq ans et se souvient d'avoir lu votre carte.

Mes respects à Madame Dirichlet. Mais faites donc le voyage promis.

---

(1) Ces deux mots sont barrés.

DIRICHLET A LIOUVILLE (¹).

CHER ET EXCELLENT AMI,

Admirant, comme je le fais, vos belles productions et votre talent vraiment inépuisable, et n'appréciant pas moins la noblesse de votre caractère, qui vous fait prendre la défense de tout ce qui est vrai et généreux, j'ai éprouvé une satisfaction bien vive lorsque par la lettre que notre ami Holmgren m'a apportée de votre part, j'ai acquis la certitude que vous me conservez toujours l'amitié dont vous me donnâtes jadis tant de preuves lors de mon séjour à Paris. Je n'aurais certainement pas tardé jusqu'à présent à vous remercier de vos sentiments pour moi si malheureusement je n'avais été accablé cet hiver de tant de cours et d'autres occupations indispensables que je n'avais aucun instant dont je pusse disposer à mon gré. Je m'en consolais en me promettant bien de me dédommager de cet assujettissement dès que les vacances seraient venues mais en cela j'avais compté sans l'hôte ou plutôt sans la grippe à laquelle j'ai eu à payer mon tribut comme tout le monde dans ce pays, grâce à l'inversion qui s'est exercée (?) cette année entre les saisons, l'hiver ayant succédé au printemps. Quoiqu'à peine remis je ne puis pas différer plus longtemps de vous adresser ces quelques lignes, deux jeunes Anglais auxquels j'avais promis de les introduire auprès de vous et qui jusqu'à présent avaient l'intention de passer encore une partie de l'été avec nous, m'ayant annoncé hier soir qu'ils avaient changé d'avis et qu'ils partaient dès demain pour Paris. L'aîné de ces deux jeunes gens que je recommande vivement à votre bon accueil, M. le doct. Hirst, a étudié les mathématiques en Allemagne et ne fera à Paris qu'un séjour assez court, ayant accepté en Angleterre une chaire de mathématiques dont il aura à exercer les fonctions au mois de juin prochain. Son jeune ami M. Dickinson, qui est moins avancé dans ses études, a le projet de suivre à Paris les cours de la Sorbonne et du collège de France. Comme il est très peu familiarisé avec la langue française, il pourrait mettre à profit les 5 ou 6 mois qui nous séparent

---

(¹) Cette lettre n'est pas datée; mais la mention de la lettre apportée par Holmgren ne laisse guère de doute sur sa place.

de l'époque où les cours commencent chez vous, pour bien apprendre votre langue. Il a appris l'allemand en très peu de temps en entrant comme pensionnaire dans une maison bourgeoise. Peut-être votre bienveillante intervention pourrait-elle lui fournir l'occasion d'user du même moyen pour l'étude du français.

Veuillez présenter mes hommages respectueux à Madame Liouville et la remercier en mon nom de ce qu'elle veut bien se souvenir qu'elle m'a autrefois engagé à venir à Paris avec Mad. Dirichlet. Nous avons toujours ce projet, mais je vous avoue franchement qu'il me serait trop pénible de revoir la France dans l'état actuel des affaires publiques. En attendant ne pourrions-nous pas nous voir ailleurs? Dites-moi s'il vous plaît, quels projets vous avez pour les vacances prochaines. Nous trouverons peut-être moyen de convenir d'un rendez-vous à portée des uns et des autres. J'ai été interrompu trois fois dans cette lettre; comme je dois l'envoyer à mes amis anglais ce soir même, il faut que je la termine telle quelle.

Votre dévoué

DIRICHLET.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Ne vous étonnez pas, cher et excellent ami, si je réponds un peu tard à votre lettre qui ne m'a pas trouvé ici lorsqu'elle est arrivée mercredi dernier. Je viens de faire une absence de plusieurs jours, ayant profité avec quelques amis, Riess, Magnus, Rose et Poggendorf, des vacances de Pâques et du printemps si précoce dont nous jouissons cette année pour faire une petite excursion dans les environs de Dresde. C'est seulement la veille de notre départ que j'avais eu connaissance de la liste présentée par vous au nom de la Commission (¹), grâce à l'obligeante attention

---

(¹) La Commission élue le 6 mars 1854, afin de présenter une liste de candidats pour la place d'Académicien étranger vacante par suite de la mort de Léopold de Buch, était composée de : Liouville, Élie de Beaumont, Biot (Sciences mathématiques); Flourens, Thénard, Chevreul (Sciences physiques); Combes, président en exercice; la liste présentée le 10 avril comprenait Dirichlet en première ligne et, en seconde ligne : Airy, Ehrenberg, Herschel, Liebig, Melloni, Müller, Murchison, Owen, Plana, Struve. Le 17 avril, Dirichlet fut élu par 41 voix contre 6 à Airy, 2 à Müller et 1 à Ehrenberg.

de M. de Humboldt qui l'avait extraite pour moi du journal du savant abbé (¹). En voyant cette liste qui porte si visiblement l'empreinte de votre indulgente amitié, j'avais bien conçu quelque espoir de réussir sans toutefois partager la confiance de Mr de H. qui ne doutait plus de ma nomination. Mais l'incertitude où j'étais a enfin cessé vendredi dernier au moment de me rendre à la gare de Dresde pour revenir ici, ayant lu dans un journal que l'Académie des Sciences m'avait fait l'honneur insigne de me recevoir, moi chétif géomètre, au nombre de ses huit associés étrangers. Je n'ai pas besoin de vous dire combien cette heureuse nouvelle me rendait impatient de rentrer chez moi, où j'étais sûr de trouver une lettre de vous, et de vous témoigner ma reconnaissance la plus vive. C'est à mon très grand regret qu'un refroidissement gagné en route et qui m'a retenu plusieurs jours au lit, ne m'a pas permis plus tôt de m'acquitter d'un devoir qu'il me tardait tant de remplir. En prenant enfin la plume pour vous écrire, je ne sais comment vous exprimer les sentiments de gratitude si vifs qui m'animent et comment vous remercier dignement vous et nos amis communs, de la bonté pleine d'indulgence que vous avez montrée dans une circonstance si importante pour moi. Veuillez être l'interprète de ma reconnaissance auprès de Mrs Chasles, Lamé, Pelouze, Sturm, Poncelet et Duhamel et être assuré avec eux que le souvenir d'un si grand bienfait est à jamais gravé dans mon cœur et que tous mes efforts tendront désormais à justifier dans la mesure de mes faibles moyens la bienveillance de tant d'hommes éminents qui m'a valu d'une manière si prématurée la plus haute distinction qu'un savant puisse ambitionner.

En attendant que je puisse adresser mes remerciements (²) à l'Académie, ce que je ne dois faire, à ce que je suppose, qu'après que ma nomination m'aura été annoncée par Mr de Beaumont, je prends la liberté de vous prier, cher ami, de vouloir exprimer ma vive reconnaissance aux membres de la Commission qui, sans me connaître personnellement et pour la plupart étrangers aux sciences mathématiques, m'ont traité si favorablement sur votre autorité à

(¹) La composition de la Commission est annoncée dans le *Cosmos* du 10 mars 1854, p. 300.

(²) Ils sont mentionnés aux *Comptes rendus* de la séance du 22 mai.

juste titre si puissante, mais que dans le cas particulier l'amitié que vous me portez pouvait rendre un peu suspecte.

Je suis si loin de vous en vouloir de votre long silence que je me suis au contraire reproché plus d'une fois à moi-même de ne pas vous avoir écrit pour vous témoigner la vive part que je prenais aux chagrins que devaient vous causer les persécutions odieuses exercées contre vos amis et même contre votre fils (¹) au début dans sa carrière. C'est avec une satisfaction bien vive que j'apprends de vous même que vous ne perdez pas courage et je pense comme vous que lorsqu'on ne veut que ce qui est juste et vrai, on peut attendre l'avenir avec confiance.

Ayez la bonté de présenter mes respects à Madame Liouville et de lui dire que je pense souvent avec délices aux jours si agréables qu'il m'a été donné de passer dans votre intérieur. Ne m'oubliez pas non plus auprès de Mesdemoiselles Louise et Marie, ainsi qu'auprès de Mrs votre fils et votre frère et recevez encore une fois l'assurance de la gratitude et de l'amitié éternelle de

Votre dévoué

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Berlin, ce 25 avril 1854.

N'oubliez pas de m'envoyer la note de ce qui vous manque du journal de Crelle. Les anciens volumes commencent à être rares et il n'y a pas de temps à perdre pour compléter votre collection.

DIRICHLET A MADAME LIOUVILLE.

MADAME,

Ce n'est pas parce que, comme vous le disiez le jour de mon départ, depuis l'établissement des chemins de fer tout voyageur a le devoir d'accuser promptement son arrivée, je me hâte de vous écrire, c'est bien plutôt parce que j'éprouve le besoin de vous renouveler à vous et à toute votre famille l'expression de ma vive reconnaissance pour les marques de bienveillance dont vous m'avez comblé pendant mon séjour dans la capitale du monde. Grâce à cette bienveillance j'ai pu, en même temps que je jouissais de

---

(¹) Le Verrier avait été nommé directeur de l'Observatoire le 30 janvier 1854.

tous les agréments de la grande ville, me croire chez moi lorsque je me trouvais dans votre intérieur.

Mon voyage a été singulièrement favorisé par le beau temps et la première nuit, la seule que j'ai passée en route, était très belle quoique un peu fraîche ; je m'étais bien promis de saluer la bonne ville par le beau clair de lune que nous avions, mais ma bonne volonté n'a pas résisté aux suites des fatigues de la journée et à celles de votre copieux dîner. Je n'ai qu'un souvenir confus que notre arrivée à Épernay et Bar-le-Duc a été annoncée, mais je ne me suis nullement aperçu de notre passage à Toul et je ne me suis entièrement réveillé que dans la gare de Metz. C'est là sans doute un grand méfait dont je demande humblement pardon à Mademoiselle Louise.

J'ai trouvé Mad. Dirichlet assez souffrante à mon arrivée, les fatigues du déménagement et un refroidissement gagné plus tard ayant fortement agi sur ses nerfs, qui, comme vous savez, Madame, sont loin d'être dans un état normal ; mais le beau temps dont nous jouissons depuis quelques jours et nos deux jardins ne tarderont pas à lui rendre son état de santé ordinaire. Elle se joint à moi pour vous remercier des nombreuses commissions que vous avez bien voulu faire pour elle. Tout ce que j'ai apporté fait sensation ici et personne ne veut m'écouter lorsque je réclame une part, bien modeste sans doute, dans le choix des robes pour moi. A propos de modestie, veuillez dire à Mr Liouville que si l'envoi de l'épreuve de ma lettre (¹) datée de Paris lui cause le moindre embarras, je le prie d'y faire tous les changements qu'il jugera convenables. En réfléchissant à ce que je viens de dire je vois qu'il ne s'agit pas là de modestie, les changements qu'il y ferait ne pouvant que tourner à mon profit.

Remerciez, s'il vous plaît, M. Ernest de toutes les complaisances qu'il a eues pour moi et remerciez-le surtout de sa bienveillante attention de me conduire au chemin de fer. Son étoile changeante (²) avait déjà attiré l'attention de notre astronome

---

(¹) *Sur l'équation* $t^2+u^2+v^2+w^2=4m$ (*Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. I, 1856, p. 210) ; il en est question dans la dernière lettre de Dirichlet.

(²) Le Tome XLII (1856) des *Comptes rendus* contient (p. 546) une Note d'Ernest Liouville *Sur deux étoiles variables*.

Les observations d'Ernest Liouville remontent à l'année 1853 ; il avait eu l'intention de les poursuivre : « Mais, dit-il, les moyens de travail me manquent. »

adjoint (¹) qui ne manquera pas d'en faire une étude suivie. En attendant que M. Ernest devienne célèbre au barreau, il est donc sûr d'acquérir l'immortalité par son étoile.

Agréez, s'il vous plaît, Madame, les compliments de Mad. Dirichlet, faites agréer mes souvenirs affectueux à toute la famille et recevez les hommages respectueux de

Votre dévoué

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Göttingen, ce 25 avril 1856.

LIOUVILLE A DIRICHLET (²).

MON CHER AMI,

Vous me comblez. Il y a quelques jours, M. Deville m'a remis de votre part la médaille de Gauss. J'allais vous en faire mes remerciements quand une lettre de M. Haussmann arrive et m'apprend que je viens d'être nommé associé étranger de la Société royale des Science de Gœttingue. Je réponds à M. Haussmann et je le prie de transmettre au corps illustre qu'il représente comme secrétaire l'expression de ma vive gratitude. Mais c'est à vous surtout que je dois une éternelle reconnaissance. Vos bontés me soutiennent et m'encouragent. Je vais me remettre au travail avec une ardeur nouvelle. J'ai été content de mes vacances, et je me porte mieux qu'à l'ordinaire. Tous les miens se rappellent à votre souvenir. Mes respects à vos Dames.

Mille amitiés pour vous.

J. L.

P. S. — Deux mots de réponse, s'il vous plaît, pour me dire si M. Haussmann a reçu ma lettre et si j'ai autre chose [à faire]. Dois-je, par exemple, écrire au Ministre à Gœttingue qui a confirmé mon élection?

(¹) D'après l'indication donnée au Compte rendu (*en marge*).

(²) Cette lettre et la suivante à I.-F. Haussmann sont sur la même feuille.

Les *Nachrichten* de Göttingen pour l'année 1856 (p. 285) mentionnent la nomination de Joseph Liouville, E. Kummer, F.-C. Neumann comme associés étrangers dans la Classe mathématique, et celle de Henri Sainte-Claire Deville comme correspondant dans la Classe de Physique. Étaient nommés correspondants dans la Classe mathématique : G. Rosenhain, C. Weierstrass, O. Hesse, P. Riess, R. Kohlrausch.

LIOUVILLE A HAUSSMANN.

Paris, 4 décembre 1856.

Monsieur,

Je reçois la lettre par laquelle vous m'annoncez que la Société royale des Sciences de Gœttingue vient de m'admettre au nombre de ses associés étrangers. Ce témoignage d'estime de la part d'un corps si distingué me touche vivement et me pénètre de reconnaissance.

Veuillez, Monsieur, recevoir mes remerciements empressés et transmettre à mes nouveaux confrères l'expression de ma profonde gratitude.

A M. Haussmann, secrétaire perpétuel.

DIRICHLET A MADAME LIOUVILLE.

Oui, Madame, après tant de services que vous avez daigné me rendre, j'ose vous en demander un nouveau qui aurait pour moi plus de prix encore que l'emplette de la fameuse robe qui fait toujours l'admiration de la société de Gœttingue. Mais malgré l'importance que j'attache à la chose que je voudrais obtenir par votre bienveillante intervention, je dois vous prier instamment de regarder ma prière comme non avenue, si la chose pouvait vous causer le moindre embarras et ne se trouvait pas, en quelque sorte, sous votre main. Voici, Madame, de quoi il s'agit. Je crois vous avoir dit qu'une de mes nièces prévoyant qu'à la mort de son père — événement survenu depuis — elle se trouverait presque sans fortune, avait eu le bon esprit de se former à l'état d'institutrice et qu'après avoir fait un bon examen et obtenu un diplôme, elle s'était engagée dans un pensionnat de Londres où elle fonctionne depuis près de deux ans. Cette jeune personne — et en la nommant ainsi, je la flatte un peu puisque ma nièce a passé la trentaine — avant de retourner en Allemagne, voudrait se perfectionner dans la langue française et se placer à cet effet vers Pâques, où son engagement actuel finit, dans quelque pensionnat de Paris. Si donc, Madame, parmi les personnes avec lesquelles vous êtes en relation à Paris, se trouvait quelque maîtresse de pension et que, l'occasion se présentant, vous voulussiez vous informer auprès d'elle, si elle pourrait employer une jeune allemande sachant, outre sa langue, assez bien l'anglais et les éléments des nombreuses sciences dont on est dans l'usage de donner une teinture aux jeunes demoiselles, je vous devrais une éternelle reconnaissance. Dans le cas où la réponse serait favorable, veuillez, Madame, me le dire en deux mots et me donner en même temps l'adresse de la maîtresse de pension pour que ma nièce puisse lui écrire et lui envoyer ses certificats. — Mais, je le répète, Madame, prenez que je n'ai rien dit si vous ne connaissez pas de maîtresse de pension et si le service que je vous demande pouvait exiger des démarches qui vous donnassent le moindre souci.

Puis-je vous prier d'agréer les amitiés de Mad. Dirichlet ainsi que mes hommages respectueux et [de] nous rappeler au souvenir de toute votre famille?

P. S. — Il est sans doute superflu d'ajouter que si ma nièce pouvait se placer dans quelque famille, cela vaudrait mieux encore.

Votre dévoué

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Gœttingue, ce 12 déc. 1856.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Mon cher ami,

Par le plus singulier des hasards, je me trouve en mesure de lever la difficulté qui vous tourmente, sans que cela me coûte aucun effort d'esprit et voici comment. Outre M. Riemann dont je vous ai déjà parlé, nous avons ici un autre jeune agrégé de l'Université, fort distingué, M. Dedekind (¹) qui s'est beaucoup occupé de la théorie des équations — il connaît à fond les travaux de Galois — et de celle des congruences. Ce jeune savant ayant

---

(¹) *En marge :* il y a de lui deux ou trois Mémoires *Crelle.*

remarqué, il y a déjà quelque temps, la lacune dont il s'agit dans le Mémoire de M. Kummer (¹) s'est attaché à la combler et, après y être parvenu à la suite de plusieurs tentatives infructueuses, il m'a fait part du moyen très simple dont il avait fait usage, et c'est ce moyen de Dedekind que je vais vous indiquer.

Conservant les notations de Kummer, il s'agit de prouver que la congruence $\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$ aura e racines réelles si le nombre premier q satisfait à la condition $q^f \equiv 1 \pmod{n}$. Avant de le faire, précisons bien le sens de la proposition qui consiste en ceci : il existe toujours des entiers $u, u_1, \ldots, u_{e-1}$ tels qu'on a *identiquement*

$$\varphi(y) \equiv (y-u)(y-u_1)\ldots(y-u_{e-1}) \qquad (\bmod q),$$

c'est-à-dire qu'en développant suivant les puissances de la quantité entièrement indéterminée y, les coefficients des puissances semblables sont congrus $\bmod q$.

Le sens d'une congruence renfermant une indéterminée y ainsi fixé, rien n'empêche d'étendre la définition au cas où les coefficients ne sont plus des entiers, mais des fonctions entières à

(¹) Je n'ai pas su préciser le Mémoire auquel il est fait allusion ici. Un peu plus loin, Dirichlet signale le Mémoire du Tome 53 (1857), p. 142-148, du *Journal de Crelle : Ueber die den Gaussischen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln,* où Kummer « revient sur le point en litige et le traite rigoureusement » ; il est à remarquer que Kummer, après avoir énoncé le théorème en question, et avant d'en donner une nouvelle démonstration, renvoie le lecteur d'une part au Mémoire du Tome 35 (1839), p. 327 : *Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren,* où il a donné divers développements relatifs à ce théorème, et, d'autre part, au Mémoire du Tome 30 (1845), p. 107-116 : *Ueber die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen,* où il en aurait donné une première démonstration rigoureuse : « *Dieses habe ich zuerst in der Abhandlung...streng bewiesen.* »

Quant aux notations qui ne sont pas expliquées dans la lettre de Dirichlet, leur sens résulte sans difficulté des divers Mémoires de Kummer.

Le nombre n est premier, $n-1 = ef$; $\eta_a (a = 0, 1, \ldots, e-1)$ est une période au sens de Gauss, c'est-à-dire qu'on a

$$\eta_a = \alpha^{g^a} + \alpha^{g^{a+e}} + \alpha^{g^{a+2e}} + \ldots + \alpha^{g^{a+(f-1)e}},$$

en désignant par α une racine imaginaire de l'équation $x^n - 1 = 0$ et par g une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$; enfin $\varphi(y)$ est le polynome $y^e + A_1 y^{e-1} + \ldots + A_e$, à coefficients entiers, dont les racines sont les périodes η, $\eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$.

coefficients entiers des périodes η, η_1, ..., les coefficients étant regardés comme congrus lorsque, dans leur différence qu'on peut mettre, et cela d'une manière unique, sous la forme $c\eta + c_1\eta_1 + \ldots$, c, c_1, ... sont tous divisibles par le module q.

Cela posé, considérons la congruence évidemment identique

$$z(z-1)\ldots(z-q+1) \equiv z^q - z \pmod{q},$$

qui ne perdra pas ce caractère en y remplaçant z par $y - \eta_a$, y étant une nouvelle variable; il vient ainsi

$$(y-\eta_a)(y-1-\eta_a)\ldots(y-q+1-\eta_a)$$
$$\equiv (y-\eta_a)^q - (y-\eta_a) \equiv y^q - y - (\eta_a^q - \eta) \pmod{q}.$$

En remplaçant η_a par la somme des racines que cette lettre désigne et ayant ensuite égard à la condition $q^f \equiv 1 \pmod{n}$, on trouve facilement

$$\eta_a^q \equiv \eta_a \pmod{q},$$

ce qui réduit le second membre à $y^q - y$. Posant

$$a = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad e-1$$

et multipliant, il viendra

$$\varphi(y)\varphi(y-1)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv (y^q-y)^e \equiv y^e(y-1)^e\ldots(y-q+1)^e \pmod{q}.$$

De cette dernière congruence on conclut sur le champ la proposition qu'il s'agit d'établir; il suffit d'y appliquer un théorème connu et d'ailleurs facile à prouver. Pour énoncer ce théorème, soient $f(y)$, $f_1(y)$, $f_n(y)$ des polynomes à coefficients entiers, les coefficients des plus hauts termes étant supposés pour plus de simplicité égaux à l'unité. Si maintenant nous disons que $f(y)$ est divisible par $f_1(y) \pmod{q}$ lorsqu'il existe une congruence identique

$$f(y) \equiv f_1(y) f_n(y) \pmod{q}$$

et que nous appellions le polynome $f(y)$ irréductible suivant le module q lorsqu'il n'est divisible par aucun polynome de degré inférieur, en exceptant le degré zéro, $\bmod q$, le théorème en question consiste en ce qu'un polynome irréductible $\pmod{q}$ qui divise $\pmod{q}$ le produit d'autres polynomes, divise nécessairement $\pmod{q}$ l'un de ces derniers. Or, toute expression du premier degré étant irréductible, l'application du théorème à notre dernière cong. donne immédiatement comme je l'ai déjà dit, la proposition en question.

Il y a deux Mémoires très intéressants de M. Schönemann sur les congruences renfermant une variable y et rapportées à un module premier [*Crelle,* vol. 19, p. 306 (¹), vol. 31, p. 269 (²)] dont le premier contient (à la page citée) une proposition qui est au fond la même que celle dont M. Kummer fait usage et dont nous venons de nous occuper (³). M. Kummer ne faisant pas mention des ingénieuses recherches de Schönemann, il faut croire qu'il ne les a pas connues. J'ajoute en terminant cette longue lettre que dans le dernier cahier de Crelle-Borchardt, vol. 53, cah. 2, que je viens de recevoir, M. K. revient de son côté sur le point en litige et le traite rigoureusement, mais, je crois, d'une manière moins simple que Dedekind.

Veuillez remercier Madame Liouville en mon nom de la communication qu'elle a bien voulu me faire, lui présenter mes respects et les compliments de Mad. Dirichlet, et nous rappeler au souvenir de toute la famille.

Votre tout dévoué

DIRICHLET.

Gœttingue, ce 1er fév. 1857.

P. S. — Comme vous étiez souffrant, j'attends *sans retard* des nouvelles de votre santé ainsi que de celle de Mr Chasles sur laquelle vous gardez obstinément le silence.

(¹) *Theorie der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben,* p. 231-243 et 289-308.

(²) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höheren Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist,* p. 269-325.

(³) Au lieu de considérer le polynome $\varphi(y)$ dont les racines sont les diverses périodes, Schönemann considère, d'une façon générale, le polynome

$$\Phi(y) = y^e + A'_1 y^{e-1} + \ldots,$$

à coefficients entiers, dont les racines s'obtiendraient en remplaçant, dans une fonction symétrique entière à coefficients entiers des variables $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{f-1}$, ces variables par les racines de $x^n - 1 = 0$ dont les périodes sont les sommes respectives; Schönemann démontre que si q est un nombre premier, non inférieur à e, satisfaisant à la condition $q^f \equiv 1 \pmod{n}$, la congruence $\Phi(y) \equiv 0 \pmod{q}$ a q racines réelles.

DIRICHLET A MADAME LIOUVILLE.

Permettez-moi, Madame, de vous adresser une nouvelle et je crois pouvoir ajouter dernière prière en faveur de ma nièce Mademoiselle Baerns dans l'intérêt de laquelle vous avez déjà eu la bonté de prendre quelques informations et qui vous remettra ces lignes. Je regrette infiniment la peine qu'ont dû vous donner ces informations maintenant sans objet par un changement récemment survenu dans la position de ma nièce. Ayant accepté une place avantageuse qui lui était offerte en Allemagne, elle a dû renoncer à l'idée de prendre un engagement à Paris, où elle se trouve en ce moment pour ainsi dire de passage et pour un temps très limité. Si pendant les quelques semaines qu'elle se propose de passer à Paris, vous vouliez bien, Madame, lui permettre de vous voir quelquefois et lui accorder un peu de cette bienveillance à laquelle vous avez habitué depuis longtemps, vous et toute la famille, l'oncle de la jeune personne, je vous en aurais la plus grande obligation. Je ne dirai toutefois pas que cela augmenterait la reconnaissance dont les bienfaits de la famille Liouville m'ont pénétré depuis longtemps, car mariée à la Géométrie vous savez aussi bien que moi que les quantités infinies ne sont pas susceptibles d'accroissement.

Mad. Dirichlet me charge de ses compliments auxquels je joins mes souvenirs affectueux pour toute la famille, sans en excepter le chef, quoique cet illustre chef me traite d'une manière peu amicale. Croiriez-vous, Madame, qu'ayant fourni et fourni de suite, il y a près de 4 mois, à Mons. Liouville un renseignement qu'il m'avait demandé, et l'ayant prié en même temps de me donner promptement des nouvelles de sa santé dont il paraissait peu content, je suis resté sans réponse. Heureusement que le *Compte rendu* et le *Journal des Mathé.* sont là pour me rassurer, un homme productif à ce point ne peut pas être un homme bien malade.

Veuillez, Madame, agréer les hommages respectueux de

Votre dévoué serviteur

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Gœttingue, ce 21 mai 1857.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Gœttingue, ce 27 août 1858.

MON CHER ET EXCELLENT AMI,

Pour vous prouver que je ne suis pas incorrigible, je me hâte de vous remercier de la promptitude au-dessus de tout éloge avec laquelle vous avez bien voulu me répondre et de vous exprimer en même temps mes regrets les plus vifs de voir renvoyé aux calendes grecques la visite sur laquelle nous avions compté pour cette année. — Mad. Dirichlet est de retour depuis quelques jours, je ne tarderai pas à me mettre en route moi-même. Je me dirigerai probablement vers la Bavière rhénane, le Palatinat (¹), pays renommé pour la cure de raisins qui y doit commencer cette année vers le premier septembre, si l'on peut s'en rapporter aux annonces dans les journaux. Comme je me trouverai là sur la frontière de France, à 5 ou 6 heures de Toul, je n'ai pas besoin de vous dire si je suis tenté de faire une apparition dans la ville antique que vous appelez la capitale de la Lorraine. Je crois pourtant que j'aurai la force morale nécessaire pour m'abstenir et pour ne pas pécher de nouveau contre une loi qui doit être sacrée à nous autres surtout *viri arithmetici* comme nous appelait Jacobi, je veux dire la loi de réciprocité.

A propos d'arithméthique, je dois vous exprimer le vif plaisir que m'a causé le beau théorème que vous avez donné dans le cahier d'avril (²). Je n'en ai eu connaissance que hier soir à la bibliothèque, mon exemplaire ne m'étant pas encore parvenu. Comme ce premier article ne contient pas la démonstration de cette pro-

---

(¹) D'après la *Gedächtnissrede auf Gustav-Peter Lejeune-Dirichlet* de Kummer (*Œuvres de Dirichlet,* t. II, p. 339), c'est en Suisse que voyagea Dirichlet; il s'arrêta à Montreux. C'est là qu'il ressentit la première et violente atteinte de la maladie de cœur qui devait l'emporter quelques mois plus tard (5 mai 1859), après la mort subite de sa femme.

(²) *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres* (*Journal de Liouville,* 2ᵉ série, t. III, 1858, p. 143). J'extrais de ce Mémoire l'énoncé que Dirichlet démontre; dans ce qui suit, $f(x)$ désigne une fonction paire.

« Soit m un nombre impair donné à volonté. Décomposons $2m$ en deux parties position si riche en conséquences, je me hasarderai à vous communiquer celle que j'ai trouvée dans ma promenade du soir, juste à la suite de cette lecture. Comme cette démonstration est fondée sur le même principe que la démonstration du théorème de Jacobi telle que je l'ai exposée dans un article de votre journal (¹) je conserverai les notations de cet article, je désigne de plus par $\varphi(x,y)$ une fonction paire en x et y et en outre telle que

$$\varphi(y, x) = -\varphi(x, y).$$

Cela posé considérons la somme

$$\mathrm{A} = \sum \varphi(a-b, c+d)$$

qui doit être étendue à toutes les solutions de l'équation

$$ad + bc = 2m. \tag{1}$$

---

impaires m', m'', de manière qu'on ait

$$2m = m' + m'',$$

m' prenant successivement les valeurs

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,\quad 2m-3,\quad 2m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires ou correspondantes

$$2m-1,\quad 2m-3,\quad \ldots,\quad 5,\quad 3,\quad 1.$$

» Désignons généralement par d' un quelconque des diviseurs de m' et par d'' un quelconque des diviseurs du nombre correspondant m'', puis formons la somme triple

$$\mathrm{S} = \sum \left\{ \sum \sum [f(d'-d'') - f(d'+d'')] \right\}.$$

» Les deux premières sommations se rapportent aux diviseurs d', d'' de chacun des groupes m', m'' et le troisième Σ indique qu'on doit faire le total des sommes partielles ainsi obtenues pour les groupes successifs

$$1,\ 2m-1;\quad 3,\ 2m-3;\quad \ldots;\quad 2m-1,\ 1.$$

» La valeur de la somme complète S peut toujours être exprimée simplement au moyen des diviseurs d de l'entier impair donné m. Je trouve en effet que

$$\mathrm{S} = \sum d[f(0) - f(2d)]. \text{ »}$$

(¹) *Sur l'équation*

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4m,$$

par M. G. Lejeune-Dirichlet. (*Journal de Liouville,* 2ᵉ série, t. I, 1856, p. 210. — *Œuvres de Dirichlet,* t. II, p. 203.) « ... Tous les entiers que nous désignerons par des lettres latines sont positifs et impairs .... »

quelles
bler le
n sont
r deux

u'on a

ruisent
esquels

mainte-
e fonc-
ause de
roupes

ellip-
raction

quence

nérale
quel-
rmule

raction

pour le cas de $\frac{}{ra+2}$, pourvu qu'on n'ait pas $a' = 2$.

Mais en voilà assez de grimoire.

positio
niquer
la suite
sur le r
telle q
conserv
$\varphi(x, y$

Cela p

qui doi
(1)

---

impaires

m' pren

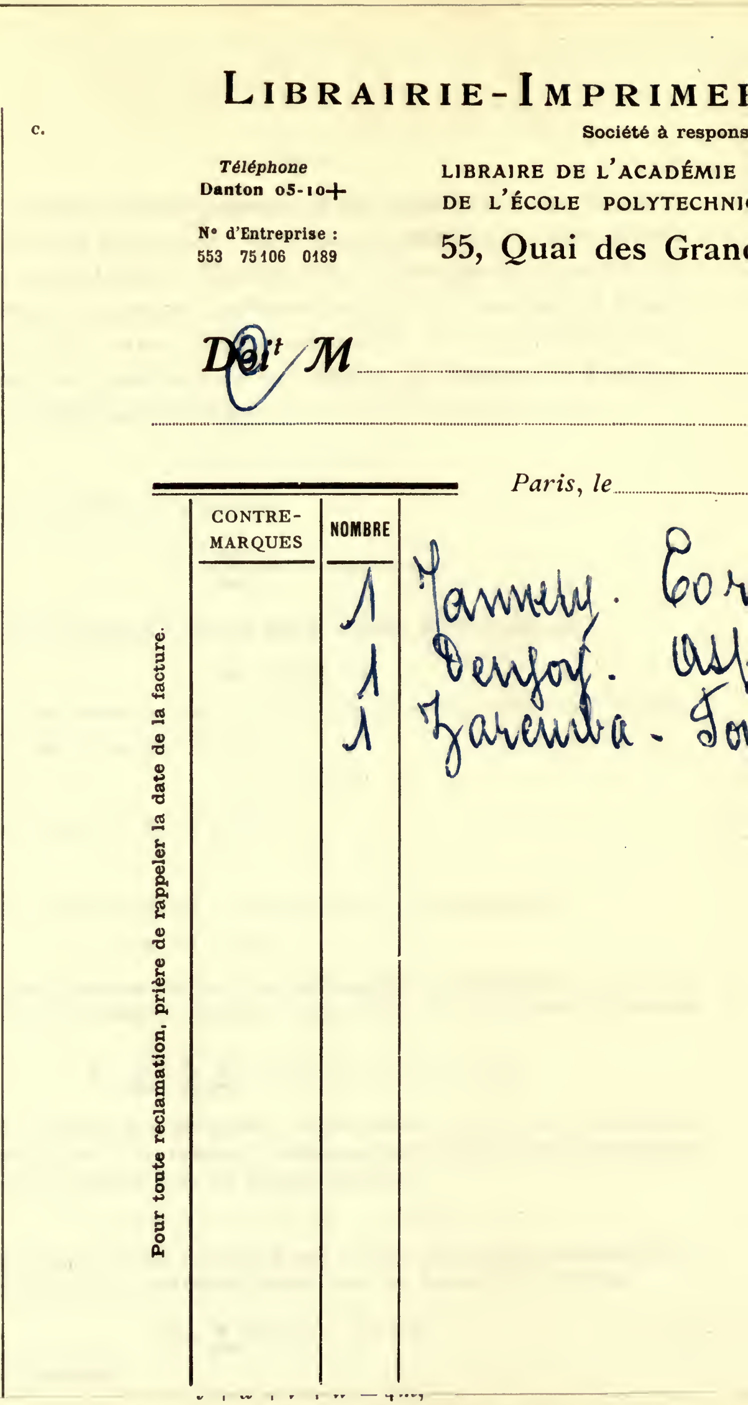
tandis q

» Dési
quelcon
triple

» Les
des gro
partielle

» La
moyen

(1) *S*



c.

LIBRAIRIE-IMPRIME

Société à respons

Téléphone
Danton 05-10+

N° d'Entreprise :
553 75106 0189

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNI

55, Quai des Gran

Doit M

Paris, le

CONTRE-MARQUES	NOMBRE	
	1	Janney. Cor
	1	Denjoy. as
	1	Zaremba - To

Pour toute reclamation, prière de rappeler la date de la facture.

par M. G. Lejeune-Dirichlet. (*Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. I, 1856, p. 210. — *Œuvres de Dirichlet*, t. II, p. 203.) « ... Tous les entiers que nous désignerons par des lettres latines sont positifs et impairs .... »

GAUTHIER-VILLARS

e au capital de 1080000 fr. Capital porté à 81.000.000

ES, DU BUREAU DES LONGITUDES,
L'OBSERVATOIRE DE PARIS, ETC.
stins, 55 — PARIS (6^e)

DÉBIT

Producteur Seine C.A. 4.806
Chèques Postaux : 29.323
Registre du Commerce : 99.506
C.O.I.A.C.L. 96.0020

N° 10339

133674

.........19

	FR.	FR.	C.
isance		60	
		100	
s Harm.		60	
		220	
ille 4%		9	
		211	
mulle 10%		21	
		190	

quelles
bler le
n sont
r deux

qu'on a

ruisent
esquels

mainte-
e fonc-
ause de
groupes

n ellip-
traction
équence
générale
sse quel-
formule
ttraction

pour le cas de $\frac{}{pa+2}$, pourvu qu'on n'ait pas $a = 2$.

Mais en voilà assez de grimoire.

positi
niquei
la suit
sur le
telle q
conser
$\varphi(x,y$

Cela p

qui do
(1)

---

impaires

m' pren

tandis q

» Dési
quelcon
triple

» Les
des gro
partielle

» La
moyen

(1) *S*
par M. G. Lejeune-Dirichlet. (*Journal de Liouville*, 2e série, t. I, 1856, p. 210. — *Œuvres de Dirichlet*, t. II, p. 203.) « ... Tous les entiers que nous désignerons par des lettres latines sont positifs et impairs .... »

Laissant de côté pour un instant les solutions pour lesquelles $a = b$, il est évident qu'on peut supposer $a > b$ et doubler le résultat. Mais les solutions qui remplissent cette condition sont toujours associées deux à deux de cette manière que, pour deux solutions associées a, b, c, d; a', b', c', d'; on a

$$a - b = c' + d', \qquad c + d = a' - b';$$

il suit de là et de l'hypothèse faite sur la fonction $\varphi(x, y)$ qu'on a

$$\varphi(a' - b', c' + d') = \varphi(c + d, a - b) = - \varphi(a - b, c + d).$$

Les termes répondant à des solutions associées se détruisent ainsi deux à deux ; il ne reste dans A que les termes pour lesquels on a $a = b$, et l'on aura

$$\sum \varphi(a - b, c + d) = \sum e\, \varphi(0, 2e),$$

cette dernière somme s'étendant aux diviseurs e de m. Si maintenant on suppose $\varphi(x + y) = f(x) - f(y)$, $f(x)$ étant une fonction paire, on obtient votre théorème, en observant qu'à cause de la manière symétrique dont l'équation (1) contient ces deux groupes a, b ; c, d, on peut au lieu de

$$\sum [f(a - b) - f(c + d)]$$

écrire plus simplement

$$\sum [f(a - b) - f(a + b)].$$

J'ai oublié l'autre jour de vous dire que l'attraction d'un ellipsoïde plein s'exprime sous forme finie pour toute loi d'attraction de la forme $\frac{1}{2m}$, m étant un entier > 1. C'est une conséquence très simple du cas particulier où $m = 2$ et de la propriété générale presque évidente que de l'attraction exercée par une masse quelconque pour le cas d'une loi d'attraction exprimée par la formule $\frac{1}{r^a}$, on peut déduire par de simples différentiations l'attraction pour le cas de $\frac{1}{r^{a+2}}$, pourvu qu'on n'ait pas $a = 2$.

Mais en voilà assez de grimoire.

Ayez la bonté de présenter les compliments de Mad. Dirichlet et mes respects à vos dames.

Totus tibi

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

P. S. Quoique je doive être absent de Gœttingue pour un mois à peu près, ce n'est pas une raison pour que vous n'écriviez pas pendant ce temps. Votre lettre adressée ici me sera envoyée quelque part que je me trouve.

LIOUVILLE A DIRICHLET (¹).

Toul, 21 octobre 1858.

J'étais si souffrant hier en vous écrivant que je crains fort de vous avoir très mal expliqué les éléments de la formule dont je vous faisais part. Il faut se donner à volonté un nombre entier m et considérer toutes les solutions de l'équation $m = m'^2 + m''$, où l'on prend pour m' un entier positif, nul ou négatif, indifféremment et pour m'' un entier essentiellement positif. Pour chaque groupe m', m'' ainsi obtenu on décompose m'' dans le produit $2^{\alpha''} d'' \delta''$, où d'' et δ'' sont des entiers positifs impairs, et où l'exposant α'' doit être supposé égal à zéro quand m'' est impair. Cela posé, soit $F(x, y)$ une fonction telle que l'on ait

$$\begin{aligned} F(x, -y) &= +F(x, y), \\ F(-x, y) &= -F(x, y), \\ F(0, y) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une fonction qui change de signe avec x et se réduise à zéro pour $x = 0$, tandis qu'elle ne dépend pas du signe de y.

(¹) Mme de Blignières a retrouvé récemment le brouillon de cette lettre qui, quoi qu'en dise Liouville, est écrit avec le plus grand soin. Il est bien vraisemblable qu'elle était destinée à Dirichlet, mais il n'y a pas certitude. Elle est inachevée, il n'est pas certain non plus qu'elle ait été envoyée. Pour le contenu, le lecteur pourra consulter les articles de Liouville dans son Journal : *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres,* qui se trouvent dans le Tome III (1858) de la deuxième série et plus spécialement le septième, le huitième, le neuvième et le dixième, p. 1, 73, 111, 195 du Tome IV (1859).

Faisons la somme des expressions de la forme

$$(-1)^{m''}\,\mathrm{F}(2^{\alpha''}d''+m',\,2m'-\delta'')$$

pour toutes les valeurs de $2^{\alpha''}d''$ et δ'' dont le produit est m'', m' et m'' restant fixes; puis sommons de nouveau le résultat pour tous les groupes (m', m'') dont il a été question plus haut et qui donnent $m = m'^2 + m''$.

Cette somme double

$$\sum\sum(-1)^{m''}\,\mathrm{F}(2^{\alpha''}d''+m',\,2m'-\delta'')$$

sera généralement égale à zéro. Mais il y a exception quand m est un carré, et alors la somme est égale à

$$-\left[\mathrm{F}(\sqrt{m},1)+\mathrm{F}(\sqrt{m},3)+\mathrm{F}(\sqrt{m},5)+\ldots+\mathrm{F}(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1)\right].$$

Vous voyez que les valeurs de y employées dans $\mathrm{F}(x,y)$ sont toutes impaires; mais les valeurs de x sont paires ou impaires, suivant que m est pair ou impair.

Prenons $m = 3$. Nous aurons ces quatre décompositions :

$$m = m'^2 + m''; \quad m' = 0, \quad m'' = 1.3 \quad \text{et} \quad m'' = 3.1;$$
$$m' = \pm 1, \quad m'' = 2.1.$$

De là, pour notre somme double,

$$-\mathrm{F}(1,-3)-\mathrm{F}(3,-1)+\mathrm{F}(3,1)+\mathrm{F}(1,-3),$$

et, comme $\mathrm{F}(3,-1) = \mathrm{F}(3,1)$, on trouve bien *zéro* pour résultat.

Mais si $m = 1$, on n'a que cette décomposition $1 = 0^2 + 1.1$, et notre somme devient $(-1)^2\mathrm{F}(1,-1)$ ou $-\mathrm{F}(1,1)$, vu que $\mathrm{F}(1,-1) = \mathrm{F}(1,1)$.

Cela s'accorde avec ce que j'ai dit ci-dessus, parce que 1 est un carré.

Pour $m = 4$, on doit trouver

$$-[\mathrm{F}(2,1)+\mathrm{F}(2,3)],$$

et cela résulte en effet des décompositions $m = m'^2 + m''$, qui sont alors au nombre de cinq, savoir : $m' = 0$, $m'' = 4.1$; $m' = \pm 1$

avec $m'' = 3.1$ et avec $m'' = 1.3$; ce qui donne

$$F(4, -1) - F(4, 1) - F(2, -3) - F(2, -1) - F(0, 5);$$

il suffit d'observer à présent que $F(4, -1) = F(4, 1)$,

$$F(2, -3) = F(2, 3), \qquad F(2, -1) = F(2, 1), \qquad F(0, -5) = 0.$$

Il me semble qu'hier j'ai écrit pour la valeur de la somme double, dans le cas de m carré,

$$-\sqrt{m}\left[F(\sqrt{m}, 1) + F(\sqrt{m}, 2) + \ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right],$$

au lieu de

$$-\left[F(\sqrt{m}, 1) + F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) + \ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right],$$

barbouillant à la hâte le papier (ce que je fais encore aujourd'hui) et prenant une formule pour une autre dans mes cahiers qui sont tout en désordre. Excusez-moi et croyez bien que du moins je ne me trompe pas en vous répétant que tout dépend des identités

$$\begin{aligned} m'^2 + (p - m')\delta'' &= (\delta'' - m')^2 + (p + m' - \delta'')\delta'' \\ &= (2p + m' - \delta'')^2 + (\delta'' - p - m')(4p - \delta'') \\ &= (m' - 2p)^2 + (p - m')(\delta'' - 4p). \end{aligned}$$

Une autre formule d'une importance égale dépend de cette autre identité

$$m'^2 + (p - m')\delta'' = p^2 + (p - m')(\delta'' - p - m').$$

Pour l'écrire, il faut d'abord décomposer m comme ci-dessus et considérer la somme double

$$\sum\sum (-1)^{m''}(2^{\alpha''}d'' + m' - \delta'')f(2^{\alpha''}d'' + m', 2m' - \delta''),$$

$f(x, y)$ étant cette fois une fonction paire tant par rapport à x que par rapport à y. Il faut ensuite, avec les mêmes éléments, former cette seconde somme

$$\sum\sum (2^{\alpha''}d'' - \delta'')f(m', 2^{\alpha''}d'' + \delta'').$$

Le théorème consiste en ce que les deux sommes sont égales.

Soit $m = 1$. La première somme sera égale à zéro, la seconde aussi. Soit $m = 2$; la première somme sera [à cause de $2 = 0^2 + 2 . 1 = (\pm 1)^2 + 1 . 1$]

$$(2-1)f(2,-1) - (1+1-1)f(2,1) - (1-1-1)f(0,-3) \quad \text{ou} \quad f(0,-3),$$

et la seconde (¹)

$$(2-1)f(0,3) + (1-1)f(1,2) + (1-1).$$

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. E. CAHEN A M. JULES TANNERY (²).

……

La faute en question se trouve dans le Mémoire en allemand du Tome XXX (1845) du *Journal de Crelle*, et elle est reproduite dans le Mémoire en français du *Journal de Liouville*, t. XVI (1851).

C'est probablement à ce dernier que Liouville fait allusion. Cette faute est la suivante :

Kummer veut démontrer que la congruence

$$\varphi(y) = 0 \qquad (\operatorname{mod} q)$$

a toutes ses racines réelles. Pour cela, il démontre (p. 409, ligne 19 du Mémoire français) que

$$\varphi(y)\varphi(y-1)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} q^e).$$

Ce n'est d'ailleurs pas là une congruence identique : c'est seulement une congruence qui est vérifiée pour toute valeur entière de y. Kummer ajoute qu'on en conclut aisément le théorème annoncé. Or cela n'est pas ; on ne peut en conclure que l'existence

---

(¹) La lettre et même la formule finale sont interrompues. Dans cette formule le dernier terme devrait être écrit

$$(1-1)f(-1,2).$$

(²) *Voir* dans le présent Volume la lettre de Dirichlet à Liouville qui commence à la page 30 et la note de la page 31.

d'une racine. Dans son Mémoire de 1857, Kummer ne commet plus cette faute, comme le remarque Dirichlet.

Reste la question suivante :

Si, en 1857, Kummer s'est aperçu que son ancienne démonstration n'était pas rigoureuse, pourquoi dit-il qu'elle l'est? Et s'il ne l'a pas remarqué, pourquoi en donne-t-il une nouvelle?

....

E. Cahen.

(Extraits du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2^e série, t. XXXII, 1908, et t. XXXIII, 1909.)

41478 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins 55.

ARS,
(6e).

umération, choix,
.... 16 fr.

'Analyse mathé-
Cours professé à
de VII-714 pages,
5........ 24 fr.

ulté des Sciences.
les applications
n-8 (25-16), avec
.... 60 fr.

nes. Surfaces mi-

ires aux dérivées
89....... 15 fr.
ésique. Invariants
.... 15 fr.
ntation sphérique;
.... 15 fr.

lois, publiés par
5-16) de 69 pages;
..... 2 fr. 75 c.

iées sous les aus-
e Introduction par
vec un portrait de
.... 3 fr.

es de Caen, Lauréat de l'Institut. — **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.** In-8 (25-16) de XXIII-590 pages avec figures; 1910.......... 20 fr.

TANNERY (Jules), Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et **MOLK (Jules)**, Professeur à l'Université de Nancy. — **Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.** 4 volumes in-8 (25-16), avec figures.

TOME I : *Introduction. Calcul différentiel* (Ire Partie); 1893.	7 fr. 50 c.
TOME II : *Calcul différentiel* (IIe Partie); 1896..........	9 fr. »
TOME III : *Calcul intégral* (Ire Partie); 1898.............	8 fr. 50 c.
TOME IV : *Calcul integral* (IIe Partie) *et Applications*; 1902.	9 fr. »

41478. — Paris, Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.