Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ ein K-Automorphismus. Es sei λ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass λ eine Einheitswurzel ist.

Aufgabe 18.2. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\delta \in G^\vee$ ein Charakter auf der Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$. Man mache sich die Gleichheit

$$L_\delta = \{x \in L |\, \varphi(x) = \delta(\varphi) \cdot x \text{ für alle } \varphi \in G\} = \bigcap_{\varphi \in G} \operatorname{Eig}_{\delta(\varphi)}(\varphi)$$

klar.

Aufgabe 18.3. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobeniushomomorphismus auf $\mathbb{F}_{125}$.

Aufgabe 18.4. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobeniushomomorphismus auf $\mathbb{F}_{p^p}$.

Aufgabe 18.5. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Z}/(13) \subseteq \mathbb{F}_{2197}$ eine Kummererweiterung zum Exponenten 3 ist.

Aufgabe 18.6. Bestimme die Matrizen zu sämtlichen Körperautomorphismen in Beispiel 17.9 bezüglich einer geeigneten Basis.

Aufgabe 18.7.*

Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Der Körper K enthalte eine m-te primitive Einheitswurzel, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass es ein Element $v \in L$ derart gibt, dass die Menge

$$\{\varphi(v) |\, \varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)\}$$

eine K-Basis von L bildet.

Aufgabe 18.8.*

Sei $D = \mathbb{Z}/(n)$ und sei K ein Körper, der eine n-te primitive Einheitswurzel ζ enthält. Es sei L eine D-graduierte Körpererweiterung von K. Beschreibe die Matrizen der K-Algebraautomorphismen auf L (also die Elemente der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$) bezüglich einer geeigneten K-Basis von L.

Aufgabe 18.9.*

(1) Bestimme den Zerfällungskörper L zum Polynom $X^4 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
(2) Was ist der Grad $\mathbb{Q} \subseteq L$?
(3) Ist die Körpererweiterung graduierbar (mit welcher graduierenden Gruppe?).
(4) Was sind die homogenen Automorphismen, welche Gruppe bilden sie?
(5) Ist die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ abelsch?
(6) Handelt es sich um eine Kummererweiterung (zu welchem Exponenten)?

Aufgabe 18.10. Es sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine n-te primitive Einheitswurzel, und $K = \mathbb{Q}[\zeta_n]$ der zugehörige Kreisteilungskörper. Zeige, dass es galoissche Körpererweiterungen $K \subseteq L$ gibt, deren Galoisgruppe zyklisch der Ordnung n ist.

Aufgabe 18.11. Es seien $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ normierte Polynome mit der Eigenschaft, dass $F = GH$ ist mit $H \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass $H \in \mathbb{Z}[X]$ ist.

Aufgabe 18.12. Formuliere und beweise das „verschobene Eisensteinkriterium". Man gebe auch ein Beispiel eines Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]$, wo man die Irreduzibilität nicht mit dem Eisensteinkriterium, aber mit dem verschobenen Eisensteinkriterium nachweisen kann.

Aufgabe 18.13. Formuliere und beweise das *umgekehrte Eisensteinkriterium*, bei dem die Rollen des Leitkoeffizienten und des konstanten Koeffizienten vertauscht werden.

Aufgabe 18.14. Wende eine Form des *Eisensteinkriteriums* an, um die Irreduzibilität der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ nachzuweisen.

(1) $X^4 + 2X^2 + 2$,
(2) $20X^5 - 15X^4 + 125X^3 - 10X + 4$,
(3) $X^4 + 9$.

Aufgabe 18.15. Zeige mit Hilfe des verschobenen Eisensteinkriteriums, dass das Polynom $X^3 - 3X - 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 18.16. Zeige, dass das Polynom $X^3 + 2X^2 - 5$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 18.17. Zeige, dass ein Polynom der Form $X^n - p^2 \in \mathbb{Q}[X]$ mit einer Primzahl p im Allgemeinen nicht irreduzibel ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.18. (1 Punkt)

Es sei p eine Primzahl. Zeige, dass die Polynome $X^n - p \in \mathbb{Q}[X]$ für jedes $n \geq 1$ irreduzibel sind.

Aufgabe 18.19. (6 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Betrachte das Polynom

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X^2 + X + 1.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 18.20. (3 Punkte)

Betrachte das Polynom

$$P = x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 3x + 1.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 18.21. (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel sind.

a) $y^4 + 3x^2y^2 + 4x^7y + 2x$.

b) $y^6 + 3xy^4 + 3x^2y^2 + x^3$.

Aufgabe 18.22. (3 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobeniushomomorphismus auf $\mathbb{F}_{343}$.

Abbildungsverzeichnis