TAMPEREEN YLIOPISTO

Informaatiotieteiden yksikkö

Lineaarialgebra 1A

Pentti Haukkanen

Puhtaaksikirjoitus: Joona Hirvonen

.

Sisältö

Luku 1

Matriisit, determinantit ja lineaariset yhtälöryhmät

1.1 Matriisin määritelmä

Määritelmä 1.1.1. *Matriisi* on suorakulmainen taulukko muotoa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

jossa m on *rivien* lukumäärä ja n on *sarakkeiden* lukumäärä. Lukuja a_{ij} sanotaan matriisin *alkioiksi* tai *elementeiksi*. Matriisin A *koko* eli *kertaluku* on $m \times n$. Sanotaan, että A on $m \times n$–matriisi. Matriisia voidaan lyhyesti merkitä

$$A = [a_{ij}]\,.$$

Huomautus. Luonnollisesti $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Huomautus. Mikäli matriisin koko halutaan kirjoittaa näkyviin, käytetään merkintää

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Huomautus. Matriisit A ja B ovat samat, jos ja vain jos ne ovat samankokoisia ja $a_{ij} = b_{ij}$ aina, kun $i = 1, 2, \dots, m$ ja $j = 1, 2, \dots, n$.

Esimerkki 1.1.1. Matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & \sqrt{2} & 6 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

on 3×4–matriisi, jossa esimerkiksi $a_{21} = 4$ ja $a_{12} = 5$.

Merkintä. Joukko $\mathbb{R}^{m\times n}$ on kaikkien reaalialkioisten $m\times n$–matriisien joukko.

Määritelmä 1.1.2. Kokoa $n \times n$ oleva matriisi on *neliömatriisi.* Neliömatriisin alkioita $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ kutsutaan *diagonaalialkioiksi.* Jos $a_{ij} = 0$, kun $i \neq j$, niin A on *diagonaalimatriisi* ja sitä merkitään notaatiolla $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

Esimerkki 1.1.2. Matriisi
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$
on 3×3–neliömatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat $1, 4$ ja -1. Tämä matriisi ei ole diagonaalimatriisi.

Esimerkki 1.1.3. Matriisi
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
on 3×3–neliömatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat $3, 5$ ja 0. Tämä matriisi on diagonaalimatriisi.

Määritelmä 1.1.3. Matriisin *alimatriisi* on sellainen matriisi, joka saadaan poistamalla alkuperäisestä matriisista rivejä ja/tai sarakkeita. Alkuperäinen matriisi on myös itsensä alimatriisi.

Esimerkki 1.1.4. Matriisin
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$
alimatriiseja ovat mm.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, [0]\,.$$

1.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 1.2.1 (Matriisien summa)**.** Olkoot A ja B samaa kokoa olevia matriiseja. Silloin niiden *summa* $A + B$ on
$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]\,.$$
Toisin sanoen matriisit lasketaan alkioittain yhteen.

Esimerkki 1.2.1. Lasketaan
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+1 & 3+(-1) \\ -1+0 & 2+0 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 1.2.2. Summaa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ei ole määritelty.

Määritelmä 1.2.2 (Matriisin kertominen skalaarilla)**.** Olkoon A matriisi ja $c \in \mathbb{R}$ skalaari. Niiden tulo cA on

$$cA = [ca_{ij}] .$$

Toisin sanoen matriisi A kerrotaan alkioittain skalaarilla c.

Esimerkki 1.2.3. Lasketaan

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -5 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

Huomautus. Skalaarilla kertominen on aina määritelty.

Määritelmä 1.2.3 (Matriisien tulo)**.** Olkoon A $m \times r$–matriisi ja B $r \times n$–matriisi. Niiden *tulo* AB on $m \times n$–matriisi

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \right] .$$

Toisin sanoen $AB = C$, missä $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$.

Esimerkki 1.2.4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} .$$

Silloin

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 8 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3} . \end{aligned}$$

Esimerkki 1.2.5. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
ja
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Tällöin AB ei ole määritelty, sillä A on 2×2–matriisi ja B on 3×2–matriisi mutta $2 \neq 3$.

Huomautus. (Ks. pykälä 1.8.) Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

1.3 Matriisialgebraa

Lause 1.3.1. *Olkoot $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Silloin*

(1) $A + B = B + A$ (kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus)

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (assosiatiivisuus eli liitännäisyys).

Todistus. Valitaan mielivaltaiset $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Todistetaan ensin kohta (1). Nyt

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A,$$

joten kohta (1) on todistettu.

Todistetaan sitten kohta (2). Nyt

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] && \text{[merkintä, määr. 1.1.1]} \\
&= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] && \text{[matriisien summan määr. 1.2.1]} \\
&= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] && \text{[matriisien summan määr. 1.2.1]} \\
&= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] && \text{[reaalilukujen yhteenlaskun assosiatiivisuus]} \\
&= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] && \text{[matriisien summan määr. 1.2.1]} \\
&= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) && \text{[matriisien summan määr. 1.2.1]} \\
&= A + (B + C), && \text{[merkintä, määr. 1.1.1]}
\end{aligned}$$

joten kohta (2) on todistettu. $\square$

Lause 1.3.2. *Matriisitulo on assosiatiivinen, tarkemmin sanottuna*

$$(AB)C = A(BC),$$

kun kertolaskut ovat määriteltyjä.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Huomautus. Matriisien tulo ei ole kommutatiivinen eli vaihdannainen, toisin sanoen on olemassa sellaiset matriisit A ja B, että

$$AB \neq BA.$$

Esimerkki 1.3.1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 1.3.2. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ja $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Tällöin tulo AB on määritelty, mutta tulo BA ei ole määritelty.

Lause 1.3.3 (Osittelulait)**.** *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$, ja olkoot $B, C \in \mathbb{R}^{r\times m}$. Tällöin*

(1) $A(B + C) = AB + AC$.

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{r\times m}$, ja olkoot $B, C \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Tällöin

(2) $(B + C)A = BA + CA$.

Todistus. Todistetaan kohta (1). Oletetaan sitä varten, että $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ja $B, C \in \mathbb{R}^{r\times m}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
A(B + C) &= [a_{ij}]\,([b_{ij}] + [c_{ij}]) && \text{[määr. 1.1.1]} \\
&= [a_{ij}]\,[b_{ij} + c_{ij}] && \text{[matriisien summan määr. 1.2.1]} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right] && \text{[matriisien tulon määr. 1.2.3]} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj}\right] && \text{[reaalilukujen ominaisuudet]} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj}\right] && \text{[matriisien summan määr. 1.2.1]} \\
&= [a_{ij}]\,[b_{ij}] + [a_{ij}]\,[c_{ij}] && \text{[matriisien tulon määr. 1.2.3]} \\
&= AB + AC, && \text{[määr. 1.1.1]}
\end{aligned}$$

joten kohta (1) on saatu todistettua.

Kohta (2) on harjoitustehtävä. $\square$

Lause 1.3.4. *Olkoot* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *ja* $a, b \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

(1) $a(A+B) = aA + aB$

(2) $(a+b)A = aA + bA$

(3) $a(bA) = (ab)A$

(4) $1A = A$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 1.3.5 (Skalaarin siirto)**.** *Olkoon* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ *ja* $a \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$(aA)B = A(aB) = a(AB).$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Määritelmä 1.3.1 (Nollamatriisi)**.** Tarkastellaan $m \times n$–matriiseja. Silloin *nollamatriisi* $\underline{0}$ on sellainen matriisi, että

$$A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$$

aina, kun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Voidaan myös merkitä täsmällisemmin $\underline{0} = \underline{0}_{m\times n}$.

Lause 1.3.6. *Nollamatriisi on sellainen* $m\times n$*–matriisi, jonka jokainen alkio on* 0*; ts.* $\underline{0} = [0]$.

Todistus. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tällöin

$$[a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A,$$

jossa ensimmäinen yhtäsuuruus saadaan matriisien yhteenlaskun ja toinen reaalisen yhteenlaskun perusteella. Lauseen 1.3.1 nojalla puolestaan $A+[0] = [0] + A$. Siis on saatu, että

$$A + [0] = [0] + A = A.$$

Nyt määritelmän 1.3.1 mukaan $[0]$ on nollamatriisi. $\square$

Huomautus. Nollamatriisi on yksikäsitteinen. (Vain matriisi $[0]$ toteuttaa määritelmän 1.3.1 ehdot.)

Huomautus. On olemassa sellaiset matriisit $A \neq \underline{0}$ ja $B \neq \underline{0}$, että $AB = \underline{0}$.

Määritelmä 1.3.2 (Vastamatriisi)**.** Matriisin A *vastamatriisi* $-A$ on sellainen matriisi, että

$$A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}.$$

Lause 1.3.7. *Olkoon A matriisi. Tällöin matriisi $[-a_{ij}]$ on matriisin A vastamatriisi, ts. $-A = [-a_{ij}]$.*

Todistus. Oletetaan, että A on matriisi. Tällöin

$$A + [-a_{ij}] = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [0] = \underline{0}.$$

Kommutatiivisuuden perusteella $[-a_{ij}] + A = \underline{0}$, joten määritelmän 1.3.2 nojalla $[-a_{ij}]$ on matriisin A vastamatriisi. □

Huomautus. Kullakin matriisilla A on yksi ja vain yksi vastamatriisi; se on $[-a_{ij}]$.

Määritelmä 1.3.3 (Erotus)**.** Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisien erotus $A - B$ on

$$A - B = A + (-B).$$

Lause 1.3.8. *Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tällöin*

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 1.3.3. Lasketaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 1.3.4 (Identiteettimatriisi)**.** Tarkastellaan $n\times n$–neliömatriiseja. Matriisia I sanotaan *identiteettimatriisiksi*, jos

$$AI = IA = A$$

aina, kun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Voidaan myös merkitä täsmällisemmin $I = I_{n\times n}$ tai $I = I_n$.

Huomautus. Identiteettimatriisia voidaan kutsua myös *identtiseksi matriisiksi* tai *yksikkömatriisiksi*.

Lause 1.3.9. *Identiteettimatriisi on sellainen $n \times n$–diagonaalimatriisi, jonka jokainen diagonaalialkio on* 1.

Todistus. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja että B on sellainen $n\times n$–diagonaalimatriisi, jonka jokainen diagonaalialkio on 1. Tällöin

$$\begin{aligned}
AB &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right] && \text{[matriisien tulon määr. 1.2.3]}\\
&= [a_{i1}\cdot b_{1j} + \ldots + a_{ij}\cdot b_{jj} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj}] && \text{[sigma-merkintä]}\\
&= [a_{i1}\cdot 0 + \ldots + a_{ij}\cdot 1 + \ldots + a_{in}\cdot 0] && \text{[oletus]}\\
&= [0 + \ldots + a_{ij} + \ldots + 0] && \text{[reaalilukujen kertolasku]}\\
&= [a_{ij}] && \text{[reaalilukujen yhteenlasku]}\\
&= A, && \text{[määr. 1.1.1]}
\end{aligned}$$

joten $AB = A$. Vastaavasti saadaan, että $BA = A$. Siis $AB = BA = A$. Siis määritelmän 1.3.4 nojalla B on identiteettimatriisi. □

Esimerkki 1.3.4. Esimerkiksi

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomautus. Identiteettimatriisi on yksikäsitteinen. Siis $n \times n$–diagonaalimatriisi, jonka jokainen diagonaalialkio on 1, on ainoa $n \times n$–identiteettimatriisi eli matriisi, joka toteuttaa määritelmän 1.3.4 ehdot.

Määritelmä 1.3.5 (Käänteismatriisi)**.** Olkoon A neliömatriisi. Silloin B on matriisin A *käänteismatriisi*, jos

$$AB = BA = I.$$

Jos tällainen B on olemassa, niin sanotaan, että A on *kääntyvä.*

Esimerkki 1.3.5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = BA.$$

Siis matriisi A on kääntyvä ja B on sen käänteismatriisi.

Lause 1.3.10. *Jos käänteismatriisi on olemassa, se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, että A on kääntyvä matriisi ja B, C ovat sen käänteismatriiseja. Tällöin

$$AB = BA = I$$

ja

$$AC = CA = I.$$

Nyt

$$\begin{aligned} B &= IB && \text{[identiteettimatriisi, määr. 1.3.4]} \\ &= (CA)B && \text{[oletus]} \\ &= C(AB) && \text{[matriisitulon assosiatiivisuus, lause 1.3.2]} \\ &= CI && \text{[oletus]} \\ &= C. && \text{[identiteettimatriisi, määr. 1.3.4]} \end{aligned}$$

Siis käänteismatriisi on yksikäsitteinen. □

Merkintä. Kääntyvän matriisin A käänteismatriisia merkitään symbolilla A^{-1}.

Huomautus. Kun A on matriisi, niin

$$A + \underline{0} = A, A + (-A) = \underline{0},$$

ja kun A on neliömatriisi, niin

$$AI = A \text{ ja } AA^{-1} = I, \quad \text{kun } A \text{ on kääntyvä.}$$

Vastaavasti kun a on reaaliluku, niin

$$a + 0 = a, a + (-a) = 0,$$

ja

$$a1 = a \text{ ja } aa^{-1} = 1, \quad \text{kun } a \neq 0.$$

Lause 1.3.11 (Tulon käänteismatriisi)**.** *Olkoot A ja B kääntyviä matriiseja. Silloin*

(a) AB on kääntyvä,

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Todistus. Oletetaan, että A ja B ovat kääntyviä matriiseja. Siis on olemassa matriisit A^{-1} ja B^{-1}. Nyt

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

ja

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

joten $B^{-1}A^{-1}$ on matriisin AB käänteismatriisi. Siis AB on kääntyvä eli kohta (a) pätee ja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ eli kohta (b) pätee. □

Määritelmä 1.3.6 (Potenssi)**.** Olkoon A neliömatriisi ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

(a) $A^0 = I$,

(b) $A^n = AA^{n-1} = \overbrace{A \cdots A}^{n \text{ kpl}}$,

(c) $A^{-n} = (A^{-1})^n = \overbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}^{n \text{ kpl}}$, kun A on kääntyvä.

Lause 1.3.12. *Olkoon A kääntyvä matriisi. Silloin*

(a) A^{-1} on kääntyvä ja $(A^{-1})^{-1} = A$,

(b) A^n on kääntyvä ja $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$,

(c) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$*, kun* $k \neq 0$*.*

Todistus. Kohdat (a) ja (b) ovat harjoitustehtäviä. Todistetaan kohta (c). Oletetaan, että A on kääntyvä matriisi ja $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Nyt

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = 1I = I$$

ja

$$(\frac{1}{k}A^{-1})(kA) = (\frac{1}{k}k)(A^{-1}A) = 1I = I,$$

joten $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$. □

Määritelmä 1.3.7 (Transpoosi)**.** Olkoon $A = [a_{ij}]$ $m \times n$–matriisi. Sen *transpoosi* on sellainen $n \times m$–matriisi B, että

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Merkitään $B = A^{\mathsf{T}}$.

Esimerkki 1.3.6. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Tällöin

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ja

$$(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = A.$$

Lause 1.3.13. *Olkoot A ja B kussakin kohdassa sopivan kokoisia matriiseja, ja olkoon $k \in \mathbb{R}$ skalaari. Silloin*

(a) $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$*,*

(b) $(A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$*,*

(c) $(kA)^{\mathsf{T}} = kA^{\mathsf{T}}$*,*

(d) $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$*.*

Todistus. Kohdat (a), (b) ja (c) ovat harjoitustehtäviä. Todistetaan tässä kohta (d). Oletetaan sitä varten, että A on $m \times n$-matriisi ja B on $n \times k$-matriisi. Silloin AB on $m \times k$-matriisi ja sen alkio paikassa ij (ts. rivillä i ja sarakkeella j) on

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj},$$

joten matriisi $(AB)^\top$ on $k \times m$-matriisi, jonka alkio paikassa ij on

$$\sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}.$$

Merkitään $A^\top = [c_{ij}]$ ja $B^\top = [d_{ij}]$. Silloin $A^\top$ on $n \times m$-matriisi ja $B^\top$ on $k \times n$-matriisi, joten $B^\top A^\top$ on $k \times m$-matriisi, jonka alkio paikassa ij on

$$\sum_{k=1}^{r} d_{ik} c_{kj}.$$

Nyt $c_{kj} = a_{jk}$ ja $d_{ik} = b_{ki}$. Näin ollen matriisin $B^\top A^\top$ alkio paikassa ij on

$$\sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}.$$

Siis matriisit $(AB)^\top$ ja $B^\top A^\top$ ovat samaa kokoa ja niiden alkiot paikassa ij ovat samat. Täten $(AB)^\top = B^\top A^\top$. $\square$

Määritelmä 1.3.8. Matriisia A sanotaan *symmetriseksi*, jos

$$A^\top = A.$$

Esimerkki 1.3.7. Matriisi

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

on symmetrinen.

Huomautus. Vain neliömatriisi voi olla symmetrinen.

1.4 Determinantti

Määritelmä 1.4.1. Olkoon A $n \times n$–matriisi. Sen *determinantti* on

$$\det A = \sum_{(j_1, \ldots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

missä $(j_1, \ldots, j_n)$ käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatiot. Merkintä $\operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n)$ tarkoittaa permutaation merkkiä.

Huomautus. Determinantin määritelmä 1.4.1 ei kuulu tämän kurssin vaatimuksiin. Se käsitellään tarkemmin kurssilla Algebra 1.

Merkintä. Matriisin A determinanttia merkitään notaatioilla $\det A$ ja $|A|$.

Huomautus. Reaalialkioisen matriisin determinantti on kuvaus $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$.

Huomautus. Seuraavassa luvussa tarkastellaan determinantin laskemista ja sen ominaisuuksia ns. kofaktoriesityksen avulla.

Huomautus. Determinanttia käytetään muun muassa käänteismatriisien laskemiseen, yhtälöryhmien ratkaisemiseen ja tilavuuksien määrittämiseen.

1.5 Kofaktori

Määritelmä 1.5.1. Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi ($n \geq 2$), ja olkoot $1 \leq i, j \leq n$. Silloin *minori* M_{ij} on sellaisen matriisin determinantti, joka saadaan poistamalla i. rivi ja j. sarake matriisista A. Lukua $(-1)^{i+j}M_{ij}$ sanotaan (alkion a_{ij}) *kofaktoriksi*. Merkitään $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Esimerkki 1.5.1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Saadaan esimerkiksi, että

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

ja $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$. Saadaan myös, että

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

ja $C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32}$.

Lause 1.5.1 (Kofaktoriesitys 1. rivin suhteen)**.** *Olkoon A $n \times n$–neliömatriisi ($n \geq 2$). Tällöin*

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Huomautus. Kofaktoriesitys voidaan toteuttaa muiden kuin 1. rivin suhteen.

Lause 1.5.2. *Olkoon $A = [a]_{1\times 1}$. Silloin*

$$\det A = a.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 1.5.3. *Olkoon*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2×2–matriisi. Silloin

$$\det A = ad - bc.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 1.5.2. Lasketaan

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

ja

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Esimerkki 1.5.3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13} \\ &= 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot (-10) + 1 \cdot (-1) \cdot 10 + 0 \cdot 1 \cdot 20 \\ &= -40. \end{aligned}$$

Lause 1.5.4. *Olkoon A 3×3–matriisi. Silloin* $\det A$ *voidaan laskea kaavalla*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 1.5.4. Lasketaan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 2 - 0 = -1.$$

Määritelmä 1.5.2 (Kolmiomatriisi)**.** Neliömatriisi $A = [a_{ij}]$ on *yläkolmiomatriisi*, jos jokainen alkio diagonaalin alapuolella on 0. Toisin sanoen $a_{ij} = 0$, kun $i > j$.

Neliömatriisi $A = [a_{ij}]$ on *alakolmiomatriisi*, jos jokainen alkio diagonaalin yläpuolella on 0. Toisin sanoen $a_{ij} = 0$, kun $i < j$.

Ylä- ja alakolmiomatriisit ovat *kolmiomatriiseja*.

Esimerkki 1.5.5. Matriisi

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

on yläkolmiomatriisi. Matriisi

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

on alakolmiomatriisi. Matriisi

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

on diagonaalimatriisi ja tällöin sekä ylä- että alakolmiomatriisi.

Lause 1.5.5. *Jos A on kolmiomatriisi, niin*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Todistus. Todistetaan 3×3–alakolmiomatriisille. Yleinen tapaus voidaan todistaa induktiolla. Olkoon A 3×3–alakolmiomatriisi. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} &= a\cdot C_{11} + 0\cdot C_{12} + 0\cdot C_{13} \\ &= a\begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= a(cf - 0e) \\ &= acf. \end{aligned}$$

□

Lause 1.5.6 (Rivioperaatiot)**.** *1) Olkoon A' matriisi, joka saadaan matriisista A vaihtamalla kahden rivin paikkaa keskenään. Silloin*

$$\det A' = -\det A.$$

2) Olkoon A' matriisi, joka saadaan matriisista A kertomalla yksi rivi skalaarilla $k \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\det A' = k\det A.$$

3) Olkoon A' matriisi, joka saadaan matriisista A lisäämällä yksi rivi vakiolla kerrottuna toiseen riviin. Silloin

$$\det A' = \det A.$$

Todistus. Luennot ja harjoitukset. □

Esimerkki 1.5.6. Lasketaan

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(-1) \cdot 5 \cdot 1 = 5.
\end{aligned}$$

Lause 1.5.7 (Nollarivi)**.** *Olkoon A neliömatriisi, jonka jokin rivi koostuu pelkistä nollista. Silloin*

$$\det A = 0.$$

Todistus. Oletetaan, että A on neliömatriisi, jonka jokin rivi koostuu pelkistä nollista. Jos nollarivi ei ole ensimmäinen rivi, niin olkoon A' matriisi, joka on saatu matriisista A vaihtamalla nollarivi ja ensimmäinen rivi keskenään. Tällöin

$$\det A = -\det A' = -(0 \cdot C'_{11} + 0 \cdot C'_{12} + \cdots + 0 \cdot C'_{1n}) = -0 = 0.$$

Jos nollarivi on ensimmäinen rivi, niin

$$\det A = 0 \cdot C'_{11} + 0 \cdot C'_{12} + \cdots + 0 \cdot C'_{1n} = 0.$$

□

Lause 1.5.8. *Olkoon A neliömatriisi. Silloin*

$$\det A = \det A^{\mathsf{T}}.$$

Todistus. Seuraa määritelmistä. Sivuutetaan. □

Seuraus. Rivioperaatioiden lisäksi voidaan käyttää sararakeoperaatioita samaan tapaan.

Lause 1.5.9 (Tulon determinantti)**.** *Olkoot A ja B samankokoisia neliömatriiseja. Silloin*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Todistus. Sivuutetaan yleisessä tapauksessa. □

Esimerkki 1.5.7. Olkoon A neliömatriisi. Tällöin

$$\det A^2 = (\det A)(\det A) = (\det A)^2 \geq 0.$$

Lause 1.5.10. *Olkoot* A,B,$C\in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sellaiset matriisit, että* $c_{1j} = a_{1j} + b_{1j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *ja* $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$, *kun* $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Silloin*

$$\det C = \det A + \det B.$$

Todistus. Saadaan kofaktoriesityksestä. □

Huomautus. Rivin 1 sijasta voidaan tarkastella muutakin riviä tai saraketta.

Esimerkki 1.5.8. Lauseen 1.5.10 perusteella

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Huomautus. Yleensä

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Määritelmä 1.5.3 (Matriisin aste)**.** Olkoon A $m \times n$–matriisi. Sen *aste* on r, jos matriisilla A on ainakin yksi $r \times r$-alimatriisi, jonka determinantti ei ole nolla, ja jokaisen $(r + 1) \times (r + 1)$-alimatriisin determinantti on nolla. Merkitään $r = \operatorname{rank} A$.

Huomautus. Jos A on $m \times n$-matriisi, sen aste on korkeintaan $\min\{m, n\}$.

Esimerkki 1.5.9. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

aste on $= 2$, sillä matriisin A kaikkien 3×3-alimatriisien (mitkä ne ovat?) determinantit ovat nollia ja matriisilla A on 2×2-alimatriisi, jonka determinantti poikkeaa nollasta (nimittäin

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0. \end{vmatrix} = -1 \neq 0).$$

Esimerkki 1.5.10. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

aste on $= 1$, sillä matriisin A kaikkien 2×2-alimatriisien (mitkä ne ovat?) determinantit ovat nollia ja matriisilla A on 1×1-alimatriisi, jonka determinantti poikkeaa nollasta (esimerkiksi $\det[1] = 1 \neq 0$).

1.6 Käänteismatriisin kaava ja olemassaolo

Määritelmä 1.6.1. Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *adjungaatti* on

$$\operatorname{adj} A = [C_{ij}]^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Lause 1.6.1. *Olkoon A neliömatriisi ja* $\det A \neq 0$*. Silloin matriisi A on kääntyvä ja*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Todistus. Oletetaan, että A on sellainen neliömatriisi, että $\det A \neq 0$. Merkitään $[C_{ij}]^\mathsf{T} = [d_{ij}]$. Tällöin

$$\begin{aligned} A(\operatorname{adj} A) &= [a_{ij}]\,[C_{ij}]^\mathsf{T} && \text{[adjungaatin määr. 1.6.1]} \\ &= [a_{ij}]\,[d_{ij}] && \text{[merkintä]} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} d_{kj}\right] && \text{[matriisitulon määr. 1.2.3]} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} C_{jk}\right] && \text{[transpoosin määr. 1.3.7]} \\ &= B. && \text{[otetaan käyttöön tämä merkintä]} \end{aligned}$$

Tarkastellaan matriisin B alkioita. Jos $i = j$, niin

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} C_{ik} = \det A.$$

Jos $i \neq j$, niin

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} C_{jk} = \det A',$$

missä A' on matriisi, joka on saatu matriisista A korvaamalla j. rivi i. rivillä. Tällöin matriisin A' i. ja j. rivi ovat samat, joten $\det A' = 0$. Siis

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I.$$

Nyt

$$A(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A) = \frac{1}{\det A}(A(\operatorname{adj} A)) = \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

ja vastaavasti $(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A)A = I$, joten $\operatorname{adj} A = A^{-1}$. □

Esimerkki 1.6.1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tällöin $\det A = -40$ ja

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 \\ C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 \\ C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 20. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan, että $C_{21} = -5$, $C_{22} = 15$, $C_{23} = -10$, $C_{31} = 2$, $C_{32} = -6$, $C_{33} = -4$, jolloin

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 2 \\ -10 & 15 & -6 \\ 20 & -10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Siis

$$A^{-1} = \frac{1}{-40} \begin{bmatrix} -10 & -5 & 2 \\ -10 & 15 & -6 \\ 20 & -10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Lause 1.6.2. *Neliömatriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos* $\det A \neq 0$.

Todistus. Olkoon A neliömatriisi. Oletetaan ensin, että A on kääntyvä. Tällöin A^{-1} on olemassa. Nyt

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I && \text{[määr. 1.3.5]} \\ \det(AA^{-1}) &= \det I \\ (\det A)(\det A^{-1}) &= 1, && \text{[tulon determinantti, lause 1.5.9]} \end{aligned}$$

joten $\det A \neq 0$.

Oletetaan sitten, että $\det A \neq 0$. Tällöin lauseen 1.6.1 nojalla käänteismatriisi on olemassa ja näin ollen A on kääntyvä. □

Esimerkki 1.6.2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Silloin

$$\det A = 1 \neq 0,$$

joten A on kääntyvä, mutta

$$\det B = 0,$$

joten B ei ole kääntyvä.

Seuraus. Jos A on kääntyvä, niin

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Todistus. Oletetaan, että A on kääntyvä. Tällöin $\det A \neq 0$. Lauseen 1.6.2 todistuksen nojalla

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1,$$

joten tästä saadaan, että

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

□

Esimerkki 1.6.3. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sellaisia, että $BA = I$. Silloin

$$B = A^{-1}.$$

Todistus. Oletetaan, että $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $BA = I$. Nyt

$$\begin{aligned}
BA &= I && \text{[oletus]}\\
\det(BA) &= \det I &&\\
\det B \det A &= 1, && \text{[tulon determinantti, lause 1.5.9]}
\end{aligned}$$

joten $\det A \neq 0$. Siis A^{-1} on olemassa. Tällöin

$$\begin{aligned}
BA &= I &&\\
(BA)A^{-1} &= IA^{-1} && \text{[kerrotaan oik. käänteismatriisilla } A^{-1}\text{]}\\
B(AA^{-1}) &= A^{-1} && \text{[matriisitulon assos., lause 1.3.2 ja määr. 1.3.4]}\\
BI &= A^{-1} && \text{[määr. 1.3.5]}\\
B &= A^{-1}. && \text{[määr. 1.3.4]}
\end{aligned}$$

□

1.7 Lineaariset yhtälöryhmät

Määritelmä 1.7.1. *Lineaarinen yhtälöryhmä* on muotoa

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
\qquad\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}$$

missä

- luvut x_1, x_2, ..., x_n ovat *tuntemattomia muuttujia*,
- termit a_{ij} ovat *vakiokertoimia*,
- ij on *indeksi*,
- termit b_i ovat *vakiotermejä*.

Huomautus. Määritelmässä 1.7.1 yhtälöitä on siis m kappaletta ja tuntemattomia muuttujia n kappaletta.

Huomautus. Jos tuntemattomia muuttujia on kolme, merkitään niitä usein symboleiden x_1, x_2, x_3 sijaan symboleilla x, y, z. Jos tuntemattomia muuttujia on kaksi, merkitään niitä usein symboleiden x_1, x_2 sijaan symboleilla x, y.

Huomautus. Lineaarisen yhtälöryhmän yhtälöt koostuvat siis vakiolla kerrotuista muuttujista, joita on laskettu yhteen, sekä vakiotermeistä.

Esimerkki 1.7.1. Esimerkiksi

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on kolme tuntematonta muuttujaa ja kolme yhtälöä.

Esimerkki 1.7.2. Yhtälöryhmät

$$\begin{cases} x + xy = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = \sin x \end{cases}$$

ovat eivät ole lineaarisia, mutta yhtälöryhmät

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2x \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

ovat lineaarisia.

Ratkaiseminen. Yhtälöryhmän ratkaisemisessa käytetään seuraavia *elementaarisia rivioperaatioita*:

1. Kahden yhtälön paikkaa voidaan vaihtaa.
2. Yhtälö voidaan kertoa puolittain nollasta eroavalla vakiolla.
3. Yhden yhtälön puolittainen monikerta voidaan lisätä puolittain toiseen yhtälöön.

Esimerkki 1.7.3. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 6y = -3. \end{cases}$$

Tehdään ratkaisu ensin niin, että eliminoidaan y toisesta yhtälöstä. Tällöin

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 6y = -3 & \mid +2\mathrm{I} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \;\; x + 3y = 3 \\ 3x \qquad = 3 & \mid \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 3y = 3 & \mid x = 1 \\ x \qquad = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 1 + 3y = 3 \\ \qquad x = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y = 2 & \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \;\; x = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = 1. \end{cases}$$

Toisaalta voitaisiin ratkaista yhtälöryhmä eliminoimalla x ensimmäisestä yhtälöstä. Tällöin

$$\begin{cases} x + 3y = 3 & \mid -\mathrm{II} \\ x - 6y = -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \qquad 9y = 6 \\ x - 6y = -3. \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan, että $y = \frac{2}{3}$, jolloin sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} x &= 6y - 3 \\ &= 6 \cdot \frac{2}{3} - 3 \\ &= 4 - 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tarkistetaan ratkaisun oikeellisuus sijoittamalla se alkuperäiseen yhtälöryhmään. Saadaan

$$\begin{aligned} 1 + 3 \cdot \frac{2}{3} &= 1 + 2 = 3, \\ 1 - 6 \cdot \frac{2}{3} &= 1 - 4 = -3, \end{aligned}$$

joten ratkaisu on oikein.

Esimerkki 1.7.4. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1. \end{cases}$$

Saadaan

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & \mid -\mathrm{II} \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 & \mid -\mathrm{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x - z = 0 & \mid +\mathrm{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 & \mid +\mathrm{III} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2z = 0 & \mid \cdot \tfrac{1}{2} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 1 & \mid z = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 & \mid y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Esimerkki 1.7.5. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x+y+2z=1. \end{cases}$$

Saadaan

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 & \mid -\mathrm{II} \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x+y+2z=1 & \mid -\mathrm{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x+z=0. \end{cases}$$

Merkitään $z=t$, jolloin saadaan ensimmäisestä yhtälöstä $y=1-t$ ja toisesta yhtälöstä $x=-t$. Siis yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} x=-t \\ y=1-t, & t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$$

Huomautus. Käytännössä lineaarisia yhtälöryhmiä ratkotaan usein matemaattisilla ohjelmistoilla, esimerkiksi WolframAlphalla.

Määritelmä 1.7.2. Lineaarinen yhtälöryhmä on *homogeeninen*, jos $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

Huomautus. Homogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua tai vain ratkaisu $x_1 = \cdots = x_n = 0$ eli ns. triviaaliratkaisu.

Jos homogeenisessa lineaarisessa yhtälöryhmässä on enemmän muuttujia kuin yhtälöitä eli jos $n>m$, niin ratkaisuja on ääretön määrä.

Esimerkki 1.7.6. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0. \end{cases}$$

Saadaan

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 & \mid -\mathrm{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \mid -\mathrm{II} \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y+z=0. \end{cases}$$

Merkitään $y=t$, jolloin saadan, että $z=-t$. Siis ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-t, & t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$$

1.8 Lineaariset yhtälöryhmät matriiseilla

Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Merkintä. Merkitään $X = [x_1, \ldots, x_n]^\mathsf{T}$, $B = [b_1, \ldots, b_n]^\mathsf{T}$ ja $A = [a_{ij}]$.

Tällöin saadaan matriisiyhtälö

$$AX = B.$$

Jos A on kääntyvä, niin ratkaisu on

$$X = A^{-1}B.$$

Lause 1.8.1 (Cramerin sääntö)**.** *Tarkastellaan yhtälöä*

$$AX = B, \tag{1.1}$$

missä $\det A \neq 0$*. Olkoon* A_j *matriisi, joka saadaan matriisista* A *korvaamalla* j*. sarake matriisilla* B*. Toisin sanoen*

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ja niin edelleen. Silloin yhtälön (1.1) *ratkaisu on*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Todistus. Oletetaan, että A on kääntyvä matriisi, $X = [x_1, \ldots, x_n]^\mathsf{T}$ ja $B = [b_1, \ldots, b_n]^\mathsf{T}$. Nyt

$$\begin{aligned}
X = A^{-1}B &= \left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)\right)B && \text{[lause 1.6.1]}\\
&= \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj}(A)B) && \text{[skalaarin siirto, lause 1.3.5]}\\
&= \frac{1}{\det A}\left([C_{ij}]^\mathsf{T}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\right) && \text{[adjungaatin määr. 1.6.1 ja oletus]}\\
&= \frac{1}{\det A}\left[\sum_{k=1}^{n} C_{ki}b_k\right]. && \text{[tulon määr. 1.2.3 ja transp. määr. 1.3.7]}
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k C_{ki}\\
&= \frac{1}{\det A}\det A_i\\
&= \frac{\det A_i}{\det A},
\end{aligned}$$

missä A_i on kuten lauseessa määriteltiin. □

Esimerkki 1.8.1. Olkoon

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 6\\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30\\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Tällöin saadaan, että

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ -3 & 4 & 6\\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6\\ 30\\ 8 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2\\ 30 & 4 & 6\\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2\\ -3 & 30 & 6\\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6\\ -3 & 4 & 30\\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan determinantit, jolloin saadaan $\det A = 44$, $\det A_1 = -40$, $\det A_2 = 72$ ja $\det A_3 = 152$. Näiden avulla saadaan yhtälöryhmän ratkaisu

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11},\\
x_2 &= \frac{72}{44} = \frac{18}{11},\\
x_3 &= \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.
\end{aligned}$$

Huomautus. Olkoon A $n \times n$-matriisi. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää $AX = B$. Jos $\det A \neq 0$, niin yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, joka saadaan esimerkiksi Cramerin säännöllä. Jos $\det A = 0$, niin yhtälöryhmällä joko on ääretön määrä ratkaisuja tai ei ole yhtään ratkaisua. Jos ratkaisuja on ääretön määrä, ratkaisun parametrien lukumäärä on $n - \operatorname{rank} A$. Tällöin yhtälöryhmä ratkaistaan eliminointimenetelmällä. (Todistus sivuutetaan.)

Lause 1.8.2. *Olkoon A neliömatriisi. Silloin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

1. *A on kääntyvä,*
2. $\det A \neq 0$,
3. *yhtälöryhmällä $AX = \underline{0}$ on vain triviaali ratkaisu $X = \underline{0}$,*
4. *yhtälöryhmä $AX = B$ on ratkeava aina, kun $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.*

Todistus. Kohtien (1) ja (2) yhtäpitävyys on todistettu lauseessa 1.6.2. Oletetaan, että A on kääntyvä. Tällöin

$$\begin{aligned} AX &= \underline{0} \\ X &= A^{-1}\underline{0} \\ X &= \underline{0}, \end{aligned}$$

joten kohdasta (1) seuraa kohta (3).

Oletetaan sitten, että A on kääntyvä ja $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Tällöin

$$\begin{aligned} AX &= B \\ X &= A^{-1}B, \end{aligned}$$

joten kohdasta (1) seuraa kohta (4).

Muut suunnat sivuutetaan. □

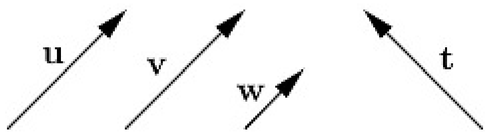
Luku 2

Vektorialgebraa

2.1 Geometriset vektorit

Vektorit ovat suuntajanojen ekvivalenssiluokkia. Yleensä ekvivalenssiluokan edustaja ja vektori eli ekvivalenssiluokka samaistetaan. Kaksi vektoria ovat samat, jos ja vain jos

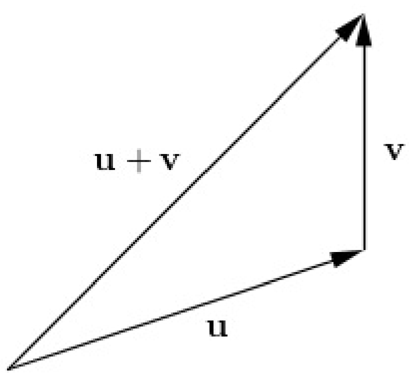
1. niillä on sama suunta,
2. ne ovat yhtä pitkät.



Kuva 2.1: Vektoreita.

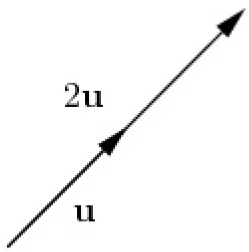
Kuvassa 2.1 $\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{t}$.

Summa. Vektoreiden summa saadaan yhdistämällä vektorit alku- ja loppupisteistään kuvan 2.2 tavalla.



Kuva 2.2: Vektoreiden summa.

Skalaarilla kertominen. Skalaarilla kerrottu vektori saadaan venyttämällä (kun skalaari on > 1) alkuperäistä vektoria kuvan 2.3 tavalla.



Kuva 2.3: Skalaarilla kertominen.

2.2 Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$

Joukko $\mathbb{R}^n$ on

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ kpl}} \\ &= \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mid u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Summa. Olkoot $(u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Silloin

$$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + u_n).$$

Skalaarilla kertominen. Olkoon $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$. Silloin

$$k(u_1, \ldots, u_n) = (ku_1, \ldots, ku_n).$$

Nyt joukko $\mathbb{R}^n$ (varustettuna yo. laskutoimituksilla) on *vektoriavaruus* ja sen alkiota kutsutaan *vektoreiksi*. Merkitään

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n).$$

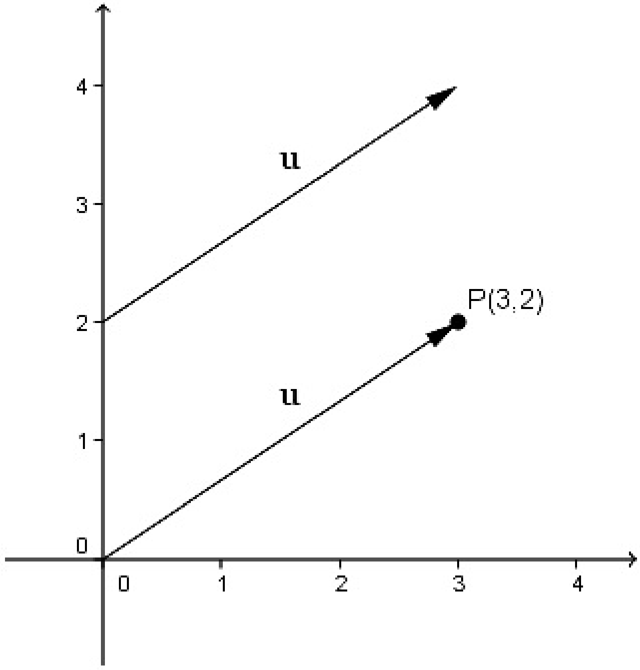
Huomautus. Vektoreiden yhtäsuuruudelle pätee

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n.$$

Esimerkki 2.2.1. Vektoriavaruuden

$$\mathbb{R}^2 = \{(u_1, u_2) \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$$

alkioita voidaan havainnollistaa xy-tason nuolilla. Kuvassa 2.4 $P(3, 2)$ on piste ja $\boldsymbol{u} = (3, 2)$ on vektori. Suuntajana $\overrightarrow{OP}$ on vektorin $\boldsymbol{u}$ yksi edustaja.



Kuva 2.4: Vektoreiden havainnollistus xy-tasossa.

2.3 Vektorialgebraa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$

Määritelmä 2.3.1. *Nollavektori* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ on sellainen vektori, että

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

aina, kun $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$.

Vektorin $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *vastavektori* $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ on sellainen vektori, että

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Lause 2.3.1. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $k, l \in \mathbb{R}$. *Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ *(kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus),*

(2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ *(assosiatiivisuus eli liitännäisyys),*

(3) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ *(nollavektori),*

(4) $-\boldsymbol{u} = (-u_1, \ldots, -u_n)$ *(vektorin* $\boldsymbol{u}$ *vastavektori),*

(5) $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$,

(6) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$,

(7) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$,

(8) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $k, l \in \mathbb{R}$. Todistetaan kohta (1). Nyt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) && \text{[merkintä, luku 2.2]} \\
&= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) && \text{[summa, luku 2.2]} \\
&= (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) && \text{[reaalialgebraa]} \\
&= (v_1, \ldots, v_n) + (u_1, \ldots, u_n) && \text{[summa, luku 2.2]} \\
&= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, && \text{[merkintä, luku 2.2]}
\end{aligned}$$

joten kohta (1) on voimassa.

Todistetaan kohta (3). Merkitään $\mathbf{0} = (t_1, \ldots, t_n)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + \mathbf{0} &= (u_1, \ldots, u_n) + (t_1, \ldots, t_n) && \text{[merkintä, luku 2.2]} \\
&= (u_1 + t_1, \ldots, u_n + t_n). && \text{[summa, luku 2.2]}
\end{aligned}$$

Nollavektorin ominaisuuksien nojalla $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$, joten

$$u_1 + t_1 = u_1, \ldots, u_n + t_n = u_n.$$

Tästä saadaan, että

$$t_1 = 0, \ldots, t_n = 0,$$

joten kohta (3) on voimassa.

Todistetaan kohta (8). Nyt

$$1\boldsymbol{u} = (1u_1, \ldots, 1u_n) = (u_1, \ldots, u_n) = \boldsymbol{u},$$

joten kohta (8) on voimassa. Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä. □

Määritelmä 2.3.2. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Silloin vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ *erotus* on

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$

Lause 2.3.2. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. *Silloin*

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) && \text{[erotuksen määr. 2.3.2]} \\
&= (u_1, \ldots, u_n) + [-(v_1, \ldots, v_n)] && \text{[merkintä, luku 2.2]} \\
&= (u_1, \ldots, u_n) + (-v_1, \ldots, -v_n) && \text{[lause 2.3.1, kohta 4]} \\
&= (u_1 + (-v_1), \ldots, u_n + (-v_n)) && \text{[summa, luku 2.2]} \\
&= (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n). && \text{[reaalialgebraa]}
\end{aligned}$$

□

2.4 Vektoreiden skalaaritulo eli pistetulo

2.4.1 Määritelmä

Määritelmä 2.4.1. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Silloin niiden *skalaaritulo* (eli *pistetulo*) on

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Esimerkki 2.4.1. Olkoon $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ ja $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$. Silloin

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Huomautus. Pistetulo on ns. *euklidinen sisätulo.*

2.4.2 Algebrallisia ominaisuuksia

Lause 2.4.1. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$, *(kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus)*

(2) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$, *(osittelulaki)*

(3) $(k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})[= \boldsymbol{u} \cdot (k\boldsymbol{v})]$, *(skalaarin siirto)*

(4) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$, *ja* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$,

(5) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{0} = 0[= \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{u}]$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ ja että $k \in \mathbb{R}$.

Todistetaan kohta (1). Nyt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (u_1, \ldots, u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) && \text{[merkintä, luku 2.2]} \\
&= u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n && \text{[skalaaritulon määr. 2.4.1]} \\
&= v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n && \text{[reaalialgebraa]} \\
&= (v_1, \ldots, v_n) \cdot (u_1, \ldots, u_n) && \text{[skalaaritulon määr. 2.4.1]} \\
&= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}, && \text{[merkintä, luku 2.2]}
\end{aligned}$$

joten kohta (1) pätee.

Todistetaan kohta (3). Nyt

$$\begin{aligned}
(k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} &= (k(u_1, \ldots, u_n)) \cdot (v_1, \ldots, v_n) && \text{[merkintä, luku 2.2]} \\
&= (ku_1, \ldots, ku_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) && \text{[skalaarilla kertominen, luku 2.2]} \\
&= (ku_1)v_1 + \cdots + (ku_n)v_n && \text{[skalaaritulon määr. 2.4.1]} \\
&= k(u_1 v_1) + \cdots + k(u_n v_n) && \text{[reaalialgebraa]} \\
&= k(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n) && \text{[reaalialgebraa]} \\
&= k((u_1, \ldots, u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n)) && \text{[skalaaritulon määr. 2.4.1]} \\
&= k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}), && \text{[merkintä, luku 2.2]}
\end{aligned}$$

joten kohta (3) pätee. Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä. $\square$

Huomautus. Onko voimassa

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})?$$

Onko olemassa sellaista vektoria $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, että

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

aina, kun $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$? Onko olemassa käänteisvektoria pistetulon suhteen?

2.4.3 Geometrisia ominaisuuksia

Määritelmä 2.4.2. Vektorin $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *pituus* $\|\boldsymbol{u}\|$ on

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}.$$

Kyseessä on ns. *euklidinen pituus.*

Huomautus. Pituudelle pätee

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Esimerkki 2.4.2. Määritelmän 2.4.2 nojalla

$$\|(1,1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Lause 2.4.2 (Cauchy-Schwarz)**.** *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$*. Silloin*

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, .$$

Määritelmä 2.4.3. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Silloin vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen *kulma* $\theta \in [0, \pi]$ määritellään kaavalla

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|}$$

ts.

$$\theta = \arccos \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|}.$$

Esimerkki 2.4.3. Olkoon $\boldsymbol{u} = (2, 0)$ ja $\boldsymbol{v} = (1, 1)$. Silloin

$$\cos\theta = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

joten $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Määritelmä 2.4.4. Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan, jos

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Silloin merkitään $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Lause 2.4.3. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. *Silloin*

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\theta = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \cos\theta = 0 && [\theta \in [0, \pi]] \\
&\Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} = 0 && [\text{kulman määr. 2.4.3}] \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}. && [\text{kohtisuoruuden määr. 2.4.4}]
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.4.4. Vektoreille $(1, 1)$ ja $(1, -1)$ pätee $(1, 1) \perp (1, -1)$, koska

$$(1, 1) \cdot (1, -1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

Määritelmä 2.4.5. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos

$$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}, \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Silloin merkitään $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$.

Huomautus. Jos $k > 0$, sanotaan, että vektorit ovat *samansuuntaiset*. Jos $k < 0$, sanotaan, että vektorit ovat *vastakkaissuuntaiset*.

Huomautus. Kun $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$,

$$\|k\boldsymbol{v}\| = \sqrt{k\boldsymbol{v} \cdot k\boldsymbol{v}} = \sqrt{k^2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})} = |k| \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = |k| \, \|\boldsymbol{v}\| \, .$$

Lause 2.4.4. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. *Silloin*

$$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ tai } \theta = \pi.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$. Siis on olemassa sellainen $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, että $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$. Tällöin

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (k\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) = k \, \|\boldsymbol{v}\|^2$$

ja

$$\|\boldsymbol{u}\| = \|k\boldsymbol{v}\| = |k| \, \|\boldsymbol{v}\| \, .$$

Nyt

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{k \, \|\boldsymbol{v}\|^2}{|k| \, \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{k}{|k|} = \pm 1,$$

joten $\theta = 0$ tai $\theta = \pi$.

Toinen suunta sivuutetaan. □

Esimerkki 2.4.5. Pitääkö paikkansa, että

1. $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \Rightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{w}$,

2. $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \Rightarrow \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{w}$?

Ratkaisu. Väite (1) on oikein. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$. Tällöin $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$, missä $k \neq 0$, ja $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$. Nyt

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = (k\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = k(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) = k0 = 0,$$

joten $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{w}$.

Väite (2) on väärin. Annetaan tästä vastaesimerkki. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,1,0)$ ja $\boldsymbol{w} = (0,0,1)$. Tällöin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ja $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$, mutta $\boldsymbol{u} \neq k\boldsymbol{w}$, koska $1 = k0$ ei päde millään luvun k arvolla.

Huomautus. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Silloin

$$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \Leftrightarrow |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, .$$

Lause 2.4.5 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Silloin*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| \, .$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) && \text{[pituuden määr. 2.4.2]} \\
&= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} && \text{[osittelulait, lause 2.4.1]} \\
&= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} && \text{[osittelulait, lause 2.4.1]} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2 && \text{[pituuden määr. 2.4.2]} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 && \text{[kommutatiivisuus, lause 2.4.1]} \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| + \|\boldsymbol{v}\|^2 && [\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \leq |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|] \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\, \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 && \text{[Cauchy-Schwarzin lause 2.4.2]} \\
&= (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2. && \text{[binomin neliö]}
\end{aligned}$$

□

Lause 2.4.6 (Pythagoraan lause)**.** *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ sellaiset, että $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. Silloin*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \, .$$

Todistus. Todistus on samanlainen kuin kolmioepäyhtälön todistus.

Luennot/harjoitustehtävä. □

Lause 2.4.7 (Kosinilause)**.** *Olkoot kolmion sivujen pituudet a, b, c, ja olkoon pituudeltaan a olevan sivun vastakkainen kulma α. Silloin*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Todistus. Luennot/harjoitustehtävä. □

Esimerkki 2.4.6. Olkoot kolmion sivujen pituudet $1, 1, 1$. Mikä on kulma?

Ratkaisu. Lasketaan kulma kosinilauseella. Saadaan

$$\begin{aligned}1^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

2.4.4 Projektio

Olkoon $\boldsymbol{a}$ annettu suunta. Kirjoitetaan vektori $\boldsymbol{u}$ muodossa

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},$$

missä $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{a}$ (tai $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) ja $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{a}$, mikäli se on mahdollista. Silloin $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - k\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{a} = 0$. Siis osittelemalla erotuksen suhteen (luennot/harj) saadaan

$$\begin{aligned}0 &= (\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} && \text{[oletukset]} \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} - (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} && \text{[osittelu erotuksen yli]} \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} - k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) && \text{[skalaarin siirto, lause 2.4.1]} \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} - k\left\|\boldsymbol{a}\right\|^2, && \text{[pituuden määr. 2.4.2]}\end{aligned}$$

joten saadaan, että

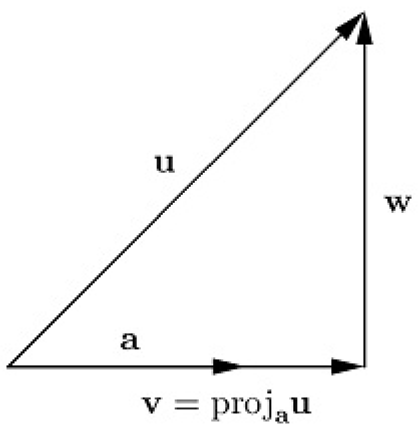
$$k = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{\left\|\boldsymbol{a}\right\|^2}.$$

Näin ollen

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{\left\|\boldsymbol{a}\right\|^2}\boldsymbol{a}.$$

Määritelmä 2.4.6. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Silloin vektorin $\boldsymbol{u}$ *projektio* suuntaan $\boldsymbol{a}$ on

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{\left\|\boldsymbol{a}\right\|^2}\right)\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}.$$



Kuva 2.5: Projektio.

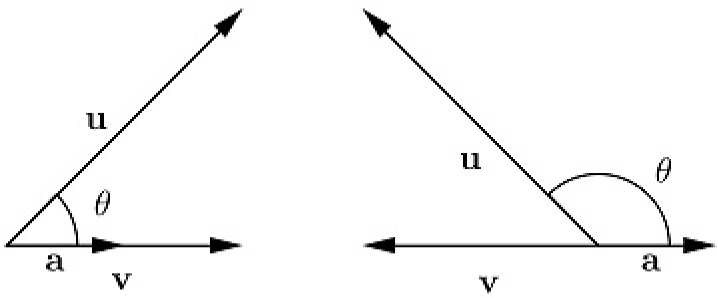
Kuvassa 2.5 on vektorin $\boldsymbol{u}$ projektio suuntaan $\boldsymbol{a}$.

Huomautus. Projektioille pätee

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \operatorname{proj}_{-\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u}.$$

Huomautus. Projektion pituudelle pätee

$$\begin{aligned}\|\operatorname{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u}\| &= \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\|\boldsymbol{a}\| \\ &= \frac{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{a}\|\,|\cos\theta|}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\|\boldsymbol{a}\| \\ &= \|\boldsymbol{u}\|\,|\cos\theta|\,.\end{aligned}$$



Kuva 2.6: Projektiokulma.

Kuvassa 2.6 vasemmanpuoleisessa tapauksessa $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\cos\theta$ ja oikeanpuoleisessa tapauksessa $\|\boldsymbol{v}\| = -\|\boldsymbol{u}\|\cos\theta$.

Esimerkki 2.4.7. Olkoon $\boldsymbol{a} = (1,1)$ ja $\boldsymbol{u} = (3,5)$. Silloin

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} &= \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} \\ &= \frac{3\cdot 1 + 5\cdot 1}{(\sqrt{1^2+1^2})^2}(1,1) \\ &= \frac{8}{2}(1,1) \\ &= 4(1,1) \\ &= (4,4) \\ &= \boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

Siis $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (-1,1)$, joten

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (4,4) + (-1,1),$$

missä $(4,4) \perp (-1,1)$.

2.5 Vektoritulo eli ristitulo

2.5.1 Määritelmä

Merkintä. *Yksikkökoordinaattivektorit* vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^3$ ovat

$$\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1).$$

Siis jokaista vektoria $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ kohti on olemassa sellaiset $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$, että

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}.$$

Määritelmä 2.5.1. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. Silloin niiden *vektoritulo* eli *ristitulo* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ on

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.5.1. Olkoon $\boldsymbol{u} = (1,2,0)$ ja $\boldsymbol{v} = (3,0,1)$. Silloin

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\ &= (2 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\boldsymbol{u} - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 3)\boldsymbol{j} + (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3)\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

2.5.2 Algebrallisia ominaisuuksia

Lause 2.5.1. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ (antikommutatiivisuus),

(2) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$ (osittelulaki),

(3) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ (osittelulaki),

(4) $k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v})$ (skalaarin siirto),

(5) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (nollavektorin tulo),

(6) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ ja $k \in \mathbb{R}$. Todistetaan kohta (1). Nyt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}),$$

joten kohta (1) pätee.

Todistetaan kohta (4). Nyt

$$k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = k \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ ku_1 & ku_2 & ku_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v}$$

ja

$$k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = k \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ kv_1 & kv_2 & kv_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v}),$$

joten kohta (4) pätee.

Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä. □

Huomautus. Yleisesti

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \neq (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}.$$

2.5.3 Geometrisia ominaisuuksia

Lause 2.5.2. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. *Silloin*

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$,

2. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Todistetaan kohta (1). Pitää siis osoittaa, että $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \\
&= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

joten määritelmän 2.4.4 nojalla $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}$. Kohta (2) todistetaan vastaavasti. □

Lause 2.5.3 (Lagrange)**.** *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. *Silloin*

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 2.5.4. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. *Silloin*

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta.$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Lauseen 2.5.3 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 &= \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 && \text{[Lagrangen lause 2.5.3]} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta)^2 && \text{[kulman määr. 2.4.3]} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 \cos^2\theta && \text{[reaalilukujen potenssisäännöt]} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) && \text{[reaalilukujen ominaisuudet, yht. tekijä]} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 \sin^2\theta. && \text{[trigonometrian peruskaava]}
\end{aligned}$$

Ottamalla tästä yhtälöstä neliöjuuri puolittain saadaan

$$\Big|\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|\Big| = \Big|\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta\Big|.$$

Vektorin pituus on aina ei–negatiivinen ja $\sin\theta \geq 0$, koska $\theta \in [0, \pi]$. Siis

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta.$$

$\square$

Lause 2.5.5. *Vektoreiden* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ *määräämän suunnikkaan pinta-ala on* $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$.

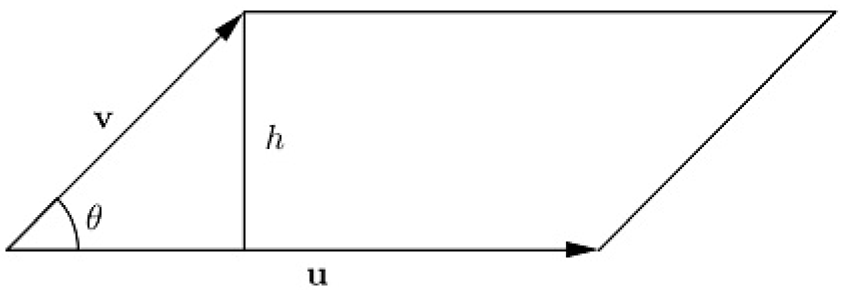
Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Olkoon $\boldsymbol{u}$ suunnikkaan kanta ja h suunnikkaan korkeus. Tällöin $h = \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta$. Siis

$$A = \|\boldsymbol{u}\| h = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta,$$

joten lauseen 2.5.4 nojalla

$$A = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|.$$

$\square$



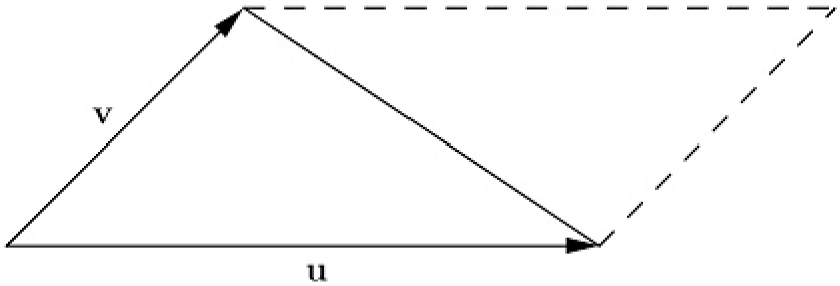
Kuva 2.7: Suunnikas.

Kuvassa 2.7 on havainnollistus lauseen 2.5.5 todistuksesta, kun θ on terävä kulma.

Huomautus. Kahden vektorin määräämän kolmion pinta-ala on puolet niiden määräämän suunnikkaan pinta-alasta eli

$$A = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| .$$

Kuva 2.8 havainnollistaa tilannetta.

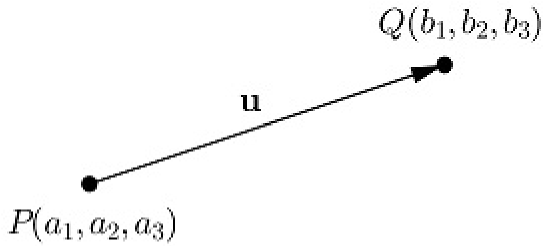


Kuva 2.8: Suunnikkaan määräämä kolmio.

Huomautus. Pisteestä $P(a_1, a_2, a_3)$ pisteeseen $Q(b_1, b_2, b_3)$ kulkeva vektori on

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Vektori voidaan laskea samalla tavalla missä tahansa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kuvassa 2.9 on vektori $\overrightarrow{PQ}$ vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^3$.



Kuva 2.9: Vektori pisteestä P pisteeseen Q.

Lause 2.5.6. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Silloin*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}.$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Nyt $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, jos ja vain jos $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = 0$. Lauseen 2.5.4 nojalla $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta$, joten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, jos ja vain jos $\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta = 0$. Koska $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\| \neq 0$, tämä on voimassa, jos ja vain jos $\sin\theta = 0$. Edelleen tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\theta = 0$ tai $\theta = \pi$. Lauseesta 2.4.4 saadaan, että tämä pätee, jos ja vain jos $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$. Siis on osoitettu, että

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}.$$

□

Huomautus. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Silloin

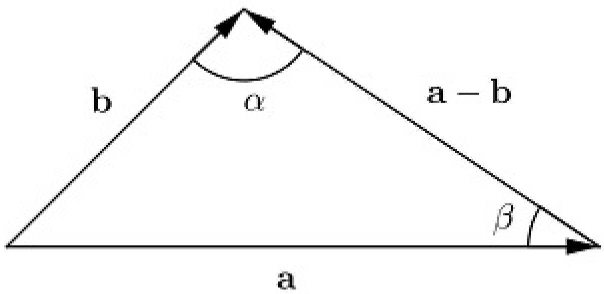
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ &|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| \end{aligned}$$

Lause 2.5.7 (Sinilause)**.** *Kolmiossa sivun pituuden suhde vastakkaisen kulman siniin on vakio.*

Todistus. Olkoon kolmion kaksi sivua vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Tällöin kolmas sivu on vektori $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Havainnollistus tästä on kuvassa 2.10.



Kuva 2.10: Vektoreiden muodostama kolmio.

Nyt saadaan yhtälöt

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

ja

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

Yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

ja edelleen

$$\|\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\| = \|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\|.$$

Lauseen 2.5.4 avulla saadaan nyt, että

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{b}\|\,\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \sin\alpha &= \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \sin(\pi - \beta) \\ \|\boldsymbol{b}\|\,\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \sin\alpha &= \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \sin\beta \\ \|\boldsymbol{b}\| \sin\alpha &= \|\boldsymbol{a}\| \sin(\beta) \\ \frac{\|\boldsymbol{a}\|}{\sin\alpha} &= \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\sin\beta}. \end{aligned}$$

□

2.5.4 Skalaarikolmitulo

Määritelmä 2.5.2. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Silloin

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

on vektoreiden ns. *skalaarikolmitulo*

Lause 2.5.8. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Silloin*

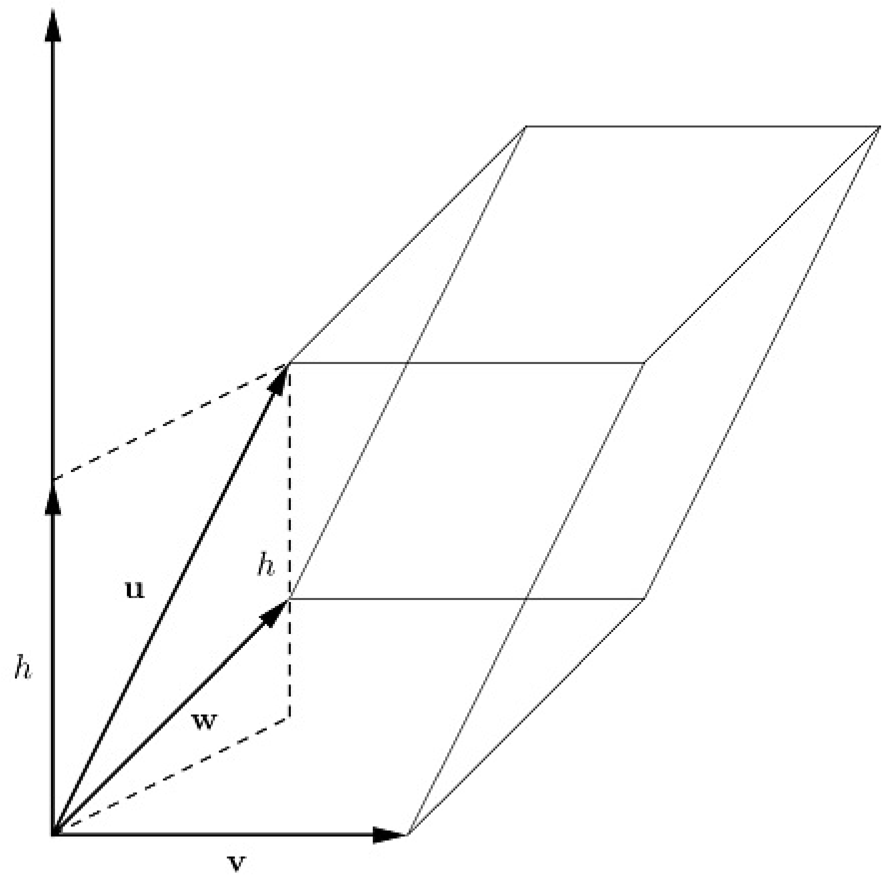
$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.5.9. *Vektoreiden $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ määräämän suuntaissärmiön tilavuus on*

$$V = |\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|\,.$$

Kuvassa 2.11 on havainnollistettu, kuinka tietyt vektorit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ määräävät suuntaissärmiön.



Kuva 2.11: Vektoreiden määräämä suuntaissärmiö.

Todistus. Lauseen 2.5.5 nojalla särmiön pohjan pinta-ala on

$$A = \|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|.$$

Särmiön korkeus saadaan vektorin $\boldsymbol{u}$ projektion pituutena suuntaan $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}$ eli

$$h = \|\mathrm{proj}_{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{u}\| = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{z}|}{\|\boldsymbol{z}\|}.$$

Siis

$$V = Ah = |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|.$$

□

Esimerkki 2.5.2. Lasketaan $\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$. Ristitulon ja pistetulon määritelmien avulla saadaan, että

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}$$

ja

$$\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1.$$

Vastaavasti skalaarikolmitulon kaavalla saadaan

$$\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Esimerkki 2.5.3. Skalaarikolmitulo

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0,$$

koska $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Geometrisesti tämä tarkoittaa tapausta, jossa suuntaissärmiön korkeus on 0 eli särmiö on luhistunut suunnikkaaksi.

2.5.5 Vektorikolmitulot

Määritelmä 2.5.3. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Silloin

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

ja

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$$

ovat vektoreiden ns. *vektorikolmituloja.*

Lause 2.5.10 (kehityskaava)**.** *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Silloin*

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.$$

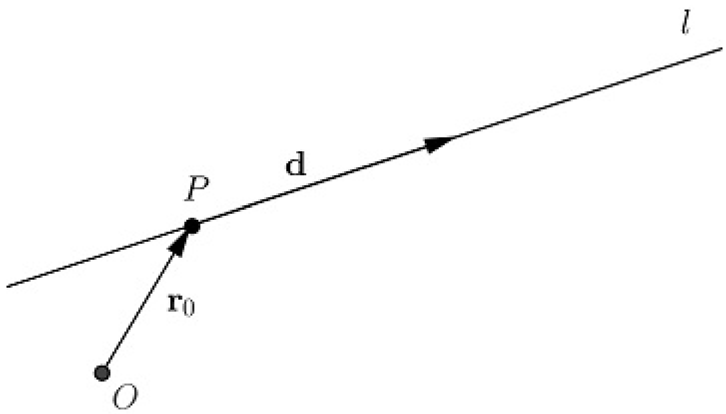
Todistus. Harjoitustehtävä. □

Luku 3

Suoran ja tason yhtälöt

3.1 Suora avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Suora tunnetaan, kun tunnetaan sen yksi piste ja suunta.



Kuva 3.1: Pisteen ja vektorin määräämä suora.

Kuvassa 3.1

- l on suora,
- $P = P(x_0, y_0, z_0)$ on suoran l yksi piste,
- $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ on suoran *paikkavektori*,
- $\boldsymbol{d} = d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$ on suoran *suuntavektori*.

Edellä mainitut P ja $\boldsymbol{d}$ eivät ole yksikäsitteisiä.

Suoran yhtälöitä

Parametriesitys vektorimuodossa

Suoran *parametriesitys vektorimuodossa* on

$$l: \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Tulkinta. Kun t käy läpi kaikki joukon $\mathbb{R}$ arvot, vektorin $\boldsymbol{r}(t)$ kärki piirtää suoran l. Muuttuja t on ns. *parametri*.

Parametriesitys koordinaattimuodossa

Merkitään

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d} \\ &= x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k} + t(d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k}) \\ &= (x_0 + td_1)\boldsymbol{i} + (y_0 + td_2)\boldsymbol{j} + (z_0 + td_3)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Siis

$$l: \begin{cases} x(t) = x_0 + td_1 \\ y(t) = y_0 + td_2 \\ z(t) = z_0 + td_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Tulkinta. Kun t käy läpi kaikki joukon $\mathbb{R}$ arvot, piste $Q(x(t), y(t), z(t))$ käy läpi suoran l pisteet.

Symmetrinen muoto

Oletetaan, että $d_1, d_2, d_3 \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} t &= \frac{x(t) - x_0}{d_1} \\ t &= \frac{y(t) - y_0}{d_2} \\ t &= \frac{z(t) - z_0}{d_3}. \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{x(t) - x_0}{d_1} = \frac{y(t) - y_0}{d_2} = \frac{z(t) - z_0}{d_3},$$

ts.

$$l: \quad \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}. \tag{3.3}$$

Tulkinta. Suora l koostuu niistä pisteistä $Q(x, y, z)$, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön (3.3).

Esimerkki 3.1.1. Määritetään suoran yhtälöt, kun suora kulkee pisteiden $P(1, 2, 3)$ ja $Q(4, 1, 5)$ kautta. Valitaan $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Valitaan suuntavektoriksi

$$\boldsymbol{d} = \overrightarrow{PQ} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Tästä saadaan yhtälö (3.1) muodossa

$$\begin{aligned} l: \quad \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d} \\ &= (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) + t(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \\ &= (1+3t)\boldsymbol{i} + (2-t)\boldsymbol{j} + (3+2t)\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

joten saadaan yhtälö (3.2) muodossa

$$l: \quad \begin{cases} x(t) = 1 + 3t \\ y(t) = 2 - t \\ z(t) = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Edelleen

$$\begin{aligned} t &= \frac{x(t) - 1}{3} \\ t &= \frac{y(t) - 2}{-1} \\ t &= \frac{z(t) - 3}{2}, \end{aligned}$$

joten saadaan yhtälö (3.3) muodossa

$$l: \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

3.2 Suora avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Asetetaan pykälän 3.1 yhtälöihin, että $z_0 = 0$ ja $d_3 = 0$. Tällöin saadaan yhtälöt

(3.4) $$l: \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(3.5) $$l: \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + td_1 \\ y(t) = y_0 + td_2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

(3.6) $$l: \quad \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}, \text{ kun } d_1, d_2 \neq 0.$$

Yhtälö (3.6) voidaan kirjoittaa muodossa

(3.7) $$l: \quad y - y_0 = \frac{d_2}{d_1}(x - x_0)$$

tai muodossa

$$l: \quad y = \frac{d_2}{d_1}x + \frac{d_1 y_0 - d_2 x_0}{d_1} = kx + m, \tag{3.8}$$

jotka ovat *kulmakerroinmuotoisia yhtälöitä*. Luku k on suoran kulmakerroin.

Suora voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$d_2(x - x_0) = d_1(y - y_0).$$

Kun merkitään $d_2 = a$ ja $-d_1 = b$, saadaan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{3.9}$$

Määritelmä 3.2.1. Vektori $\boldsymbol{n}$ ($\neq \mathbf{0}$) on suoran l *normaalivektori*, jos

$$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{d},$$

missä $\boldsymbol{d}$ on suoran l suuntavektori. Merkitään

$$\boldsymbol{n} \perp l.$$

Lause 3.2.1. *Olkoon l suora*

$$l: \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{3.10}$$

missä $a, b \neq 0$. Silloin

$$(a, b) \perp l,$$

ts. (a, b) on suoran l normaalivektori.

Todistus. Nyt

$$\boldsymbol{d} = (-b, a).$$

Tällöin

$$(a, b) \cdot \boldsymbol{d} = (a, b) \cdot (-b, a) = a(-b) + ba = 0,$$

joten

$$(a, b) \perp \boldsymbol{d},$$

ja edelleen

$$(a, b) \perp l.$$

□

Määritelmä 3.2.2. Suoran yhtälö (3.10) on *normaaliyhtälö*.

Huomautus. Suoran normaaliyhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$ax + by + c = 0. \tag{3.11}$$

Esimerkki 3.2.1. Olkoon l suora

$$l: \quad \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2},$$

missä $d_1, d_2 \neq 0$. Etsi jokin suoran l normaalivektori $\boldsymbol{n}$ eli vektori, jolle pätee

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{d} = 0.$$

Ratkaisu. Selvästi

$$\boldsymbol{n} = (d_2, -d_1) \perp (d_1, d_2) = \boldsymbol{d}.$$

Esimerkki 3.2.2. Olkoon l suora

$$l: \quad y = kx + m,$$

missä $k \neq 0$. Saadaan

$$\frac{y - m}{k} = \frac{x - 0}{1}.$$

Tällöin

$$\boldsymbol{d} = (1, k) = \boldsymbol{i} + k\boldsymbol{j},$$

joten

$$\boldsymbol{n} = -k\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},$$

sillä tällöin

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{d} = 0.$$

Lause 3.2.2. *Pisteen $P(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta*

$$l: \quad ax + by + c = 0$$

on

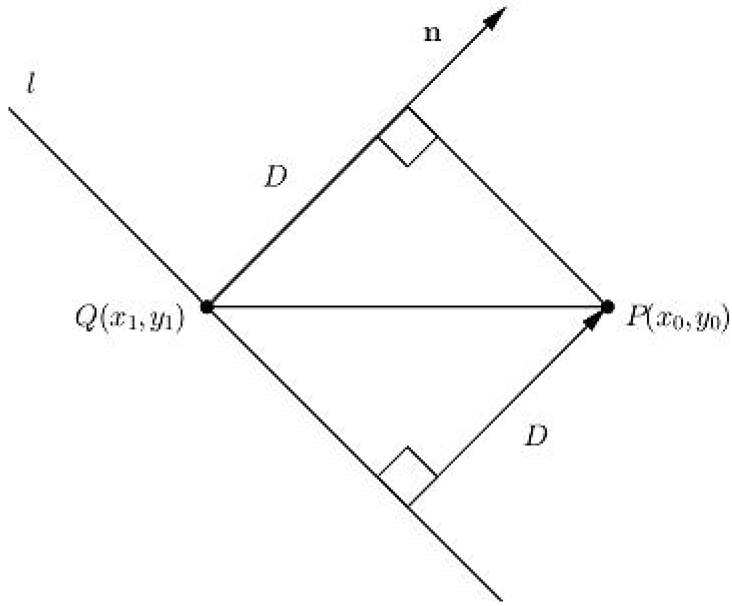
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Todistus. Olkoon $Q(x_1, y_1)$ jokin suoran l piste. Lauseen 3.2.1 nojalla vektori $\boldsymbol{n} = (a, b)$ on suoran l normaalivektori. Tällöin

$$\begin{aligned}
D &= \left\| \operatorname{proj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{QP} \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2} \right) \boldsymbol{n} \right\| \\
&= \frac{\left| \overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n} \right|}{\|\boldsymbol{n}\|} \\
&= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned}$$

□

Kuvassa 3.2 on havainnollistettu lausetta 3.2.2.



Kuva 3.2: Pisteen P etäisyys suorasta l.

3.3 Taso avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Taso p tunnetaan, kun tiedetään tason yksi piste P ja tason (yksi) normaalivektori $\boldsymbol{N}$.

Oletetaan, että $P = P(x_0, y_0, z_0)$ ja $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ tunnetaan.

Normaaliyhtälö koordinaattimuodossa

Piste $Q(x, y, z) \neq P$ kuuluu tasoon p, jos ja vain jos

$$\overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{N}.$$

Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{N} &= 0 \\ ((x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}) \cdot (A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) &= 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0. \end{aligned}$$

On siis johdettu yhtälö

$$p: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{3.12}$$

joka on tason p *normaaliyhtälö koordinaattimuodossa*. Kun merkitään

$$E = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

saadaan vaihtoehtoinen muoto yhtälölle (3.12)

$$Ax + By + Cz + E = 0. \tag{3.13}$$

Esimerkki 3.3.1. Kirjoita taso

$$p: \quad x + 2y - z - 5 = 0$$

muodossa (3.12).

Ratkaisu. Valitaan

$$\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

ja

$$P(x_0, y_0, z_0) = P(0, 1, -3).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} p: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ 1(x - 0) + 2(y - 1) + 1(z + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.3.2. Kirjoita taso

$$p: \quad (x - 1) + 3(y - 2) - 2(z - 5) = 0$$

muodossa (3.13).

Ratkaisu. Yksinkertaisella algebralla

$$\begin{aligned} (x - 1) + 3(y - 2) - 2(z - 5) &= 0 \\ x + 3y - 2z - 1 - 6 + 10 &= 0 \\ x + 3y - 2z + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.3.3. Etsi tasojen

$$\begin{aligned} p: &\quad x + y + z - 6 = 0 \\ q: &\quad x - y + z = 0 \\ r: &\quad 2x + 3y + z - 3 = 0 \end{aligned}$$

leikkauspiste.

Ratkaisu. Leikkauspisteen on kuuluttava kaikkiin tasoihin eli sen on toteutettava jokaisen tason yhtälö. Siis saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 3. \end{cases}$$

Sen ratkaisu on

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 3 \\ z = 12, \end{cases}$$

joten leikkauspiste on $P(-9, 3, 12)$.

Esimerkki 3.3.4. Etsi tason

$$p: \quad 2x + 3y + z - 5 = 0$$

ja suoran

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$$

leikkauspiste.

Ratkaisu. Nyt

$$\boldsymbol{N} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ja

$$\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Tällöin

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{d} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0,$$

joten

$$\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{d}.$$

Siis suora l on tason p suuntainen ja näin ollen joko suoran l jokainen piste on tasossa p tai suoralla l ja tasolla p ei ole yhtään yhteistä pistettä. Huomataan, että piste $P(1,2,3) \in l$, mutta $P(1,2,3) \notin p$. Siis leikkauspistettä ei ole.

Toinen tapa ratkaista tehtävä on muodostaa yhtälöryhmä. Leikkauspisteen on kuuluttava tasoon ja suoraan, joten sen on toteutettava molempien yhtälöt. Suoran yhtälöstä saadaan

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \quad \text{eli} \quad x + 2y = 5$$

ja

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{eli} \quad x + 2z = 7,$$

jolloin ratkaistavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y \phantom{{}+2z} = 5 \\ x \phantom{{}+2y} + 2z = 7. \end{cases}$$

Tällä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten leikkauspisteitä ei ole.

Normaaliyhtälö vektorimuodossa

Merkitään, että tason tunnetun pisteen P paikkavektori on $\boldsymbol{r}_0$. Olkoon $\boldsymbol{r}$ pisteen Q $(\neq P)$ paikkavektori. Silloin vektorin $\boldsymbol{r}$ kärkipiste (eli piste Q) kuuluu tasoon, jos ja vain jos

$$\overrightarrow{PQ} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \perp \boldsymbol{N}.$$

Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0.$$

On siis saatu johdettua yhtälö

$$p:\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0, \tag{3.14}$$

joka on tason p *normaaliyhtälö vektorimuodossa.*

Esimerkki 3.3.5. Kirjoita tason

$$p:\quad x+2y-z-5=0$$

vektorimuotoinen normaaliyhtälö.

Ratkaisu. Valitaan $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ja $P=P(0,1,-3)$, jolloin $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$. Tällöin yhtälö on siis

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}&=0\\ ((x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}))\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})&=0.\end{aligned}$$

Lause 3.3.1. *Pisteen $P(x_0,y_0,z_0)$ etäisyys tasosta*

$$p:\quad Ax+By+Cz+E=0$$

on

$$D=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+E|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Todistus. Olkoon $Q(x_1,y_1,z_1)$ jokin tason p piste ja $\boldsymbol{N}$ tason p normaalivektori. Silloin

$$\begin{aligned}D&=\left\|\operatorname{proj}_{\boldsymbol{N}}\overrightarrow{QP}\right\|\\ &=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{N}\right|}{\|\boldsymbol{N}\|}\\ &=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ &=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1))|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ &=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+E)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

□

Parametriesitys vektorimuodossa

Taso tunnetaan, kun tiedetään jokin tason piste $P(x_0, y_0, z_0)$ ja kaksi tason sellaista vektoria $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$, että $\boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Näitä vektoreita sanotaan tason *virittäjävektoreiksi.* Olkoon $\boldsymbol{r}_0$ pisteen $P(x_0, y_0, z_0)$ paikkavektori. Silloin saadaan tason yhtälö

$$p: \quad \boldsymbol{r}(t,s) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Normaaliyhtälö vektorimuodossa on

$$p: \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0.$$

Parametriesitys koordinaattimuodossa

Merkitään $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Tällöin voidaan kirjoittaa yhtälön (3.15) koordinaatit erikseen yhtälöryhmäksi

$$p: \quad \begin{cases} x(t,s) = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y(t,s) = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z(t,s) = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R}). \tag{3.16}$$

Esimerkki 3.3.6. Oletetaan, että taso p sisältää pisteen $P(1,1,1)$ ja sen virittävät vektorit

$$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ja

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Kirjoita p muodossa (3.13).

Ratkaisu. Lasketaan

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$

Valitaan tason normaalivektoriksi

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Siis

$$\begin{aligned} p: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ 1(x-1) + 3(y-1) + 1(z-1) &= 0 \\ x + 3y + z - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.3.7. Taso sisältää pisteet $P(1,1,1)$, $Q(2,3,1)$ ja $R(5,2,0)$. Määritä tason yhtälö.

Ratkaisu. Valitaan tason pisteeksi $P(1, 1, 1)$ ja virittäjävektoreiksi

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \text{ ja } \overrightarrow{PR} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Valitaan vielä normaaliksi

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \times (4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}.$$

Tällöin saadaan, että

$$p: \quad \begin{cases} x(t,s) = 1 + t + 4s \\ y(t,s) = 1 + 2t + s \\ z(t,s) = 1 - s \end{cases} \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

ja

$$p: \quad -2(x-1) + (y-1) - 7(z-1) = 0.$$