Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 58

Übungsaufgaben

Aufgabe 58.1.*

Drücke das Dachprodukt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.

Aufgabe 58.2. Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu $\bigwedge^2 \varphi$ bezüglich den Standardbasen der Dachprodukte.

Aufgabe 58.3. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V. Beschreibe die Matrix zur natürlichen Abbildung (n Faktoren)

$$V \otimes_K \cdots \otimes_K V \longrightarrow \bigwedge^n V$$

bezüglich der zugehörigen Basen.

Aufgabe 58.4. Es sei

$$V = U \oplus W$$

eine direkte Zerlegung in Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(U) = s$. Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie

$$\bigwedge^{r+s} V \cong \bigwedge^r U \otimes \bigwedge^s W$$

gibt.

Aufgabe 58.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $u_1, \ldots, u_n \in V$. Zeige, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k+n} V$$

mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ gibt.

Aufgabe 58.6.*

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Es sei

$$\bigwedge^m \varphi\colon \bigwedge^m V \longrightarrow \bigwedge^m V$$

das m-te Dachprodukt von φ. Es seien $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängige Eigenvektoren zu φ zu den Eigenwerten $a_1, \ldots, a_m$. Zeige, dass $a_1 \cdots a_m$ ein Eigenwert von $\bigwedge^m \varphi$ ist.

Aufgabe 58.7. Es sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine diagonalisierbare K-lineare Abbildung. Zeige, dass auch das Dachprodukt

$$\bigwedge^n \varphi\colon \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 58.8. Es sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine trigonalisierbare K-lineare Abbildung. Zeige, dass auch das Dachprodukt

$$\bigwedge^n \varphi\colon \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$$

trigonalisierbar ist.

Aufgabe 58.9. Beweise den Determinantenmultiplikationssatz mit Hilfe des Dachproduktes.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 58.10. (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

im $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Dachprodukte $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ und $e_2 \wedge e_3$ aus.

Aufgabe 58.11. (2 Punkte)

Drücke das Dachprodukt $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.

Aufgabe 58.12. (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$-2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in der Standardbasis von $\bigwedge^3 \mathbb{R}^4$ aus.

Aufgabe 58.13. (5 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ und die dadurch induzierte Basis

$$\mathfrak{v} = v_1 \wedge v_2, \, v_1 \wedge v_3, \, v_2 \wedge v_3$$

von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Bestimme die Übergangsmatrizen (in beide Richtungen) zwischen der Basis $\mathfrak{v}$ und der Standardbasis $e_1 \wedge e_2, \, e_1 \wedge e_3, \, e_2 \wedge e_3$.

Aufgabe 58.14. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu $\bigwedge^2 \varphi$ bezüglich den Standardbasen der Dachprodukte.