始

數學

吉江琢兒著

三省堂刊行

序

數學ノ專門家デナイ人デモ普通ノ數學例ヘバ微分積分學トハドンナモノカ位ハ心得テ居テモヨイデアラウ．斯樣ナ目的ニ適スル書物ヲ書イテ見タイト豫々思ツテ居タノデ，遂ニ此ノ書ヲ編ンデ見タ．ソレデアルカラ，專門家ニ要求サレル樣ナ嚴密ナ論理ハ斷念シテ，專門家デナイ人ナラ一應ハ首肯出來ル程度ニ止メタ．又面倒ナ計算ハ成ルベク本文カラ除イテ附錄ニ讓ツタノデアル．

斯クシテ出來上ツタ此ノ書ハ初ノ目的ニ適シナイモノニ成ツタカモ知レナイ．諸方面ノ方々カラ御叱正ヲ賜ハラバ幸デアル．

昭和十六年八月

著者識ス

目　次

引　用　書　目

本書ヲ編ムニ際シ参考シタル書名ヲ下ニ掲ゲル.

Ball : A short history of mathematics.

Chauvenet : A treatise on elementary geometry.

Czuber : Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Feldman : Biomathematics.

Fink : Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik.

Fischer : The mathematical theory of probabilities.

Godfrey and Siddons : Solid geometry.

Kowalewski : Einführung in die Infinitesimalrechnung.

三好學 : 中等教育 植物學教科書

中川銓吉, 黒河龍三 : 高等立體幾何學通論.

Puckle : An elementary treatise on conic sections and algebraic geometry.

Reinhertz : Geodäsie.

坂井英太郎 : 最新幾何教科書.

Schips : Mathematik und Biologie.

Serret-Harnack : Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.

Seydlitz : Lehrbuch der Geographie. Grösste Ausgabe.

寺尾壽 : 天體ノ距離及大キサ (明治四十二年東京數學物理學會學術通俗講演集)

Todhunter : Trigonometry for beginners.

Todhunter : Plane Trigonometry.

Zoretti : Leçons de mathématiques générales.

Weber und Wellstein : Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

Wieleitner : Geschichte der Mathematik.

Wilson : Solid geometry and conic sections.

1　數學ノ發達

數學ノ知識ハ古昔えじぷと人並ニばびろにあ人等モ可ナリノ程度ニ有ツテ居タ事ハ確デアルトイフ. 實際上ノ必要カラ又一部ノ人々ノ知識慾カラ算術並ニ幾何學ノ發達ヲ見タノデアラウ. ばびろにあ人ニ關シテハ参考資料ハ尠イガ, 今日尚使用シテ居ル時間及ビ角ノ度盛ノ六十進法ナドハばびろにあニ始マルトイフ. えじぷとニテハ皇紀前千年以上(西紀前千七百年頃)モ前ニ書カレタトイフあはめす[1]ノ數學書ガアル, 現在大英博物館[2]ニ保存サレテ居ルガ, 此ノ書ハソレヨリモ尚千年位前ノ數學書ニ據ツタモノトイハレテ居ル.

古代えじぷと及ビばびろにあノ數學ヲ傳ヘテコレヲ大ニ發達セシメタノハぎりしや民族デアル. 平面幾何學デ有名ナぴたごらす[3]ノ定理ハ彼ガえじぷとノ僧侶カラ傳習シタノデアルガ, ソノ眞ナルコトガ彼ニヨツテ確メラレタノデアルトイフ. ぎりしや人ノ間ニハ特ニ幾何學ガ盛ンニナツタ. 卽チおいくりっど[4], あるきめです[5], えらとすてねす[6], あぽろにうす[7]ナドノ時代デアル. 併シアマリ永クハ續カナカツタ. 此ノ以後ハ幾何學ヨリハ算術的ノ研究ニ向ツタ樣デアルガ程ナクろーま人ノ侵略等ノ爲ニ混亂ニ陷ツテシマツタ. 後ニナツテぎりしや數學ノ種子ハ他ノ地方ニ芽ヲフイタノデアル. ぎりしや數學ハ論理ノ嚴密ナルヲソノ特徴トスル.

ぎりしやニ打勝ツタろーまハ美ジイぎりしや數學ヲ受繼イデ之ヲ更ニ發展セシメサウナモノデアルガ, 事實ハサウデ無カツタ樣デアル. ろーま人ハ測量術ノ如キ政治ニ有用ナモノハ利用シタガ數學上ノ新シキ研究ナドハアマリシナカツタ樣デアル.

數學ハいんどニモ發達シタ. 多分餘程夙クカラ發達シタノデアラウガ記錄書籍ナドガ無イノデ明ラカデナイトイフ. 後ニナツテぎりしや數學ノ影響ヲ

---

1) *Ahmes* (發音 *Achmes*) 尚モ少シ精密ニハやはもし, (*Jachmosche*) デアルトイフ人モアル. 2) *British Museum*. 3) *Pythagoras* (西紀 *569–470?*).
4) *Euklid*. 5) *Archimedes*. 6) *Eratosthenes*. 7) *Apollonius*.

受ケタ．嘗テハいんど數學ガぎりしやニ影響ヲ與ヘタトイフ人モアル．いんど人ハ計算ガ上手デ從ツテ其ノ數學ハ幾何學ヨリモ算術，代數學方面ニ優レテ居テ今日ノ整數論ノ萌芽ヲナシタトモイフ．

古代あらびや人モ亦代數學三角法等ノ數學ヲ有ツテ居タガ，其ノ最大ノ功績ハいんど，ぺるしや，ぎりしや等ノ數學書ヲ蒐集翻譯シタコトニアル．

支那ニモ古クカラ獨特ノ數學ガ發達シタ樣デアルガ古イ書物ノ傳ハルモノガ少イノデ，ヨクハ判ラヌトイフ．

僧侶ハ往々學問ニ關係深イモノデアルガ，歐洲ノ中世ノ初期ニ於テハ數學ノ進步發達ニハ殆ンド關係シナカツタ．之ニ反シテ回教國ナル西部あふりか及ビ南部すぺいんトノ交通上實際ノ必要ヨリ，いたりや商人ハ普通計算ヲ學ンダ．コレガ漸ク新研究ヲ促シタ．ソノ最初ノ大ナル收穫ハたるたりや[1]ニヨル三次方程式解法ノ發見デアル．彼ガ此ノ解法ヲ未ダ發表シナイ時，かるだの[2]ハ公ニシナイ堅イ約束デ彼ヨリソノ傳授ヲ受ケタガ，コノ約束ヲ無視シテソノ著書[3]ノ中ニ此ノ解法ヲ掲ゲタ．たるたりやハ之ヲ知ツテ大ニ怒リ數學試合ヲ申込ミ，みらの[4]ノ寺院デ出會スル約束デアツタガ，かるだのハ遂ニ來ラズ，弟子ふぇらり[5]ヲ代人トシテ出シタ．雙方トモ勝ヲ主張シタ樣デアルガ，たるたりやノ方ガ分ガ良カツタトイフ事デアル．サレバ今日三次方程式ノ解法ヲかるだんノ解法ト呼ンデ居ルノハ正當デナイ．後ニ至ツテハ僧侶ハあらびや數學書ヲらてん語ニ翻譯スルコトニ努力シタ樣デアル．

又一書ニハ次ノ樣ニ書イテアル。

三次方程式ノ解法ハかるだんノ著書あるす・まぐなニ出テ居ル．併シ彼ハ此ノ解法ノ發見者デハナイ，寧ロ彼ハ夫レニ就キふぇろ[6]トたるたりやトノ名ヲ擧ゲテ居ル．ふぇろハ解法ヲ公表シナカツタガ，千五百六年ニ其ノ一友人ニ告ゲタ．此ノ友人ハ是ヲ以テたるたりやニ試合ヲ挑ンダ．たるたりやハ又自カラ

1) *Tartaglia (1500–1557).* 2) *Cardano (1501–1576)*. 3) *Ars Magna.*
4) *Milano.* 5) *Ferrari.* 6) *Scipione del Ferro.*

一解法ヲ發見シタノデアラウ．ふぇろノ解ハ其ノ死後義子ニ委ネラレタ．ふぇろノ他ノ友人ニモ亦之ヲ知ルモノガアツタデアラウ．併シたるたりやガ夫レヲ聞キ傳ヘタトハ立證出來ナイ．兎ニ角ふぇろハ疑モナク最初ノ發見者デアル、かるだんハたるたりやニ請フテ知リ得タル解法ニ對シ，彼自身ノ幾何學的證明ヲ發見シタノデアル．

數學研究ノ新シキ時代ハ皇紀二千三百年頃（西紀十七世紀ノ中頃）ニ始マル．でかると[1]ハ幾何學ノ研究ヲ代數式ノ研究ニ歸セシメル解析幾何學[2]ノ基礎ヲ築キ，にゅーとん[3]トらいぷにっつ[4]ハ殆ンド同時ニ微分學[5]，積分學[6]ヲ考案シタ．本邦ニ於テモ之ト相前後シテ關孝和，建部賢弘ナドガ積分學ノ根本思想ト同樣ナル考案ヲ用キタトイフ．支那ニモ古クヨリ多少ノ發達ハアツタ．

微分積分學ノ發見以後ノ時代ニハおいれる[7]，らぐらんじゅ[8]，らぷらーす[9]，ふーりえー[10]，がうす[11]，こーしー[12]，すたいねる[13]，あーべる[14]，やこびー[15]，がろあ[16]，りーまん[17]，わいえるすとらす[18]，ぽあんかれー[19]，ひるべると[20]等ガ輩出シテ今日ノ數學ノ殿堂ヲ造リ上ゲタ．ソノ主ナル種目ヲ擧ゲルト整數論，代數學，射影幾何學，微分幾何學，函數論，變分法，確率論等デアル．

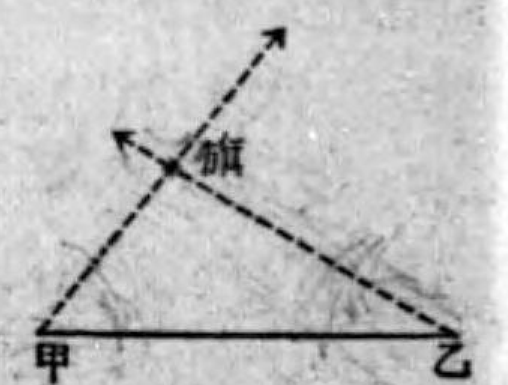
2 測量，距離

えじぷとハ極メテ暑イトコロデ，且雨量ガ少イガ，ないる河ガ年々期ヲ定メテ溢レルノデ，土地ハ肥エ農業牧畜ニ適シテ居ルトイフ．併シ毎年ノ洪水後ニハ各人所領ノ位置境界ガ判ラナクナルノデ，之ヲ復活シタリ，又ハ耕地整理ヤ運河水門ナドヲ設ケル必要ガアルノデ，自然測量術ガ發達シタトイフ．

1) *Descartes (1596–1650).* 2) *Analytical geometry.* 3) *Newton (1642–1727).*
4) *Leibniz (1646–1716).* 5) *Differential calculus* 6) *Integral calculus.*
7) *Euler (1707–1783).* 8) *Lagrange (1736–1813).* 9) *Laplace (1749–1827).*
10) *Fourier (1768–1830).* 11) *Gauss (1777–1855).* 12) *Cauchy (1789–1857).*
13) *Steiner (1796–1863).* 14) *Abel (1802–1829).* 15) *Jacobi (1804–1851).*
16) *Galois (1811–1832).* 17) *Riemann (1826–1866).* 18) *Weierstrass.*
19) *Poincaré.* 20) *Hilbert.* 尙 *Bernoulli* 一門アリ．

然ラバ如何ニシテ舊境界線ナドヲ定メ，主要地點ナドヲ洪水後ニモ判然トワカル樣ニシタデアラウカ．古ノえじぷと人ノ行ツタ方法ハ別トシテ，我々ガ左樣ナ境遇ニアツタトシテ，其ノ方法ヲ考案シテ見ルノモ無益デハアルマイ．

今吾人ガえじぷとノ平野ニ四角形ノ土地ヲ記錄シテ洪水ノ後ニモソノ位置形狀ヲ再發見出來ル樣ニスルニハ如何ニスレバヨイデアラウカ．ソレニハ四角形ノ土地ノ四隅ノ點ヲ再發見出來ルナラバ目的ハ達セラレルノデアル．ソコデ先ヅ見易キ樣ニ是等ノ點ニ旗デモ樹テ，附近ヲ探シテ洪水ニモ堪ヘ得ル樣ナルモノヲ二箇見出スコトニ努メル．例ヘバ二本ノ大木ナリ，小丘ナリ又ハ相當ニ深イ池デモヨイノデアル．此ノ二ツノモノヲ假リニ甲點乙點ト稱ヘ是等ノ二點カラ夫々旗ヲ望ンデ甲乙ヲ連ヌル線トナス角ノ大サヲ紙上ニ記錄スル（圖形ニテ又ハ角度ニテ）．斯クスレバ，洪水後ニ旗ハ失ハレテモ二人ノ人ガ夫々甲乙二點ヨリ，記錄シタ角ニ等シキ方向ヲ見テ，ソノ二方向線上ニ在ル點ヲ探索スレバ卽チ原ノ旗ノ位置ヲ求メ得ラレル筈デアル．[1]



斯ノ如ク甲乙二點ヨリ二ツノ角ヲ記錄スル代リニ，甲乙ヨリノ距離ヲ測リテ記錄スルノモヨイデアラウ．但シ甲乙二點ト旗トノ距離ガ近ケレバ，繩ヲ用キテモ目的ハ達セラレルガ，遠イ時ニハコレヲ測ル事ヲ考ヘナケレバ，此ノ方法ハ困難デアル．

此ノ二法ハ平面幾何學ニ於ケル次ノ二ツノ定理ノ應用ニ外ナラナイ．

（1）　二角ト一邊ヲ與フレバ三角形ハ確定スル．

（2）　三邊ヲ與フレバ三角形ハ確定スル．

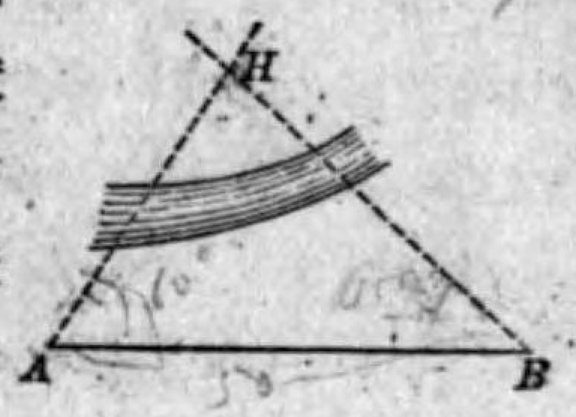
平面幾何學ニハ此ノ外ニ最モヨク用キラレル三角形ノ定理ガアル．卽チ

（3）　二邊ト夾角ヲ與フレバ三角形ハ確定スル．

1) 斯ノ樣ナ點ハ勿論甲乙線ノ反對側ニモアルケレドモ，ソレハ遠方ノ山ナドノ方角ヲ利用シテ容易ニ區別シ得ルデアラ．　第12頁參照．

此ノ定理ヲ應用セントスルニハ，甲乙中ノ一點ヨリ旗ヲ望ンデ甲乙線トノ間ノ角ヲ測リ，次ニソノ點ト旗トノ間ノ距離ヲ測レバヨイ．

斯クシテ旗ノ位置ヲ確實ニ記錄シテ置クコトハ出來ルガ，ソノ甲乙ヨリノ距離ヲ知ルニハ如何ニスレバヨイデアラウカ．甲ト乙トヨリ旗ニ至ル線ニ沿ウテ尺度ヲ當テレバヨイノハ勿論デアル．併シ萬一甲乙ト旗トノ間ニ障碍物デモアツテ，直接尺度ヲ當テラレナイ樣ナ事ガアルナラバ如何ニスレバヨイカ．便宜ノ爲ニ甲乙二點ヲ夫々 A,B ニテ表ハシ旗ノ位置ヲ H ニテ示シ，H ト A,B トノ間ニ川ガ流レテ居ルトスル．



此ノ問題ヲ解ク爲ニハ幸ニ平面幾何學ニ次ノ事ガ能ク知ラレテ居ル．

二ツノ三角形ガ互ニ等角（卽チ相似）ナラバ，對應スル邊ハ互ニ比例スル．故ニ現地ノ三角形 ABH ト等角（卽チ相似）ナル三角形ヲ紙上ニ小サク畫イテ，コレヲ $A'B'H'$ トスル．モシ $A'B'$ ノ長サガ AB ノ長サノ千分ノ一ナラバ，$A'H'$, $B'H'$ モ亦夫々 AB, BH ノ千分ノ一ニナツテ居ル筈デアル．ヨツテ先ヅ AB ノ距離ヲ測リ，次ニ紙上ノ $A'B'$ ノ長サヲ測ツテ AB ノ長サガ $A'B'$ ノ n 倍ト判レバ，紙上ノ $A'H'$, $B'H'$ ノ長サノ n 倍ガ夫々現地ノ AH, BH ノ距離デアルコトガワカル．

問題　AB ノ距離ガ 50m デ角 HAB ハ 60°，角 HBA ハ 45° デアル．距離 AH, BH ヲ作圖ニ依ツテ求メヨ．

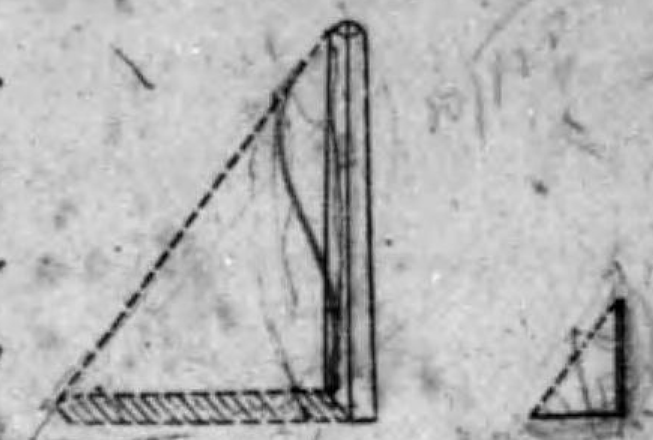
3　高　　サ

上ノ考ヘヲ利用シテないる河畔ニ聳ユル金字塔[1]ヤ方尖塔[2]ノ高サヲ測ルコトハ出來ナイデアラウカ．

先ヅ方尖塔カラ考ヘテ見ヨウ．此ノ場合ニモ相似三角形ノ性質ヲ利用スレ

1) *Pyramid.*　2) *Obelisk.*

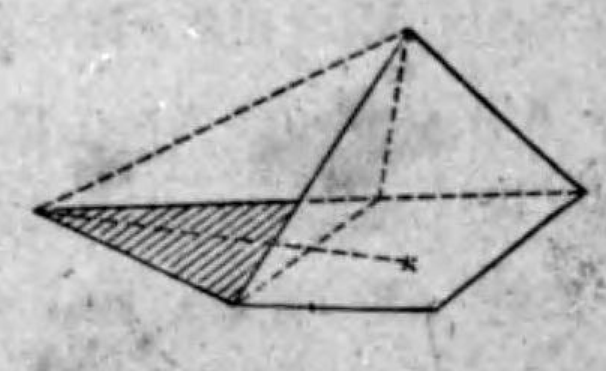
バヨイ.



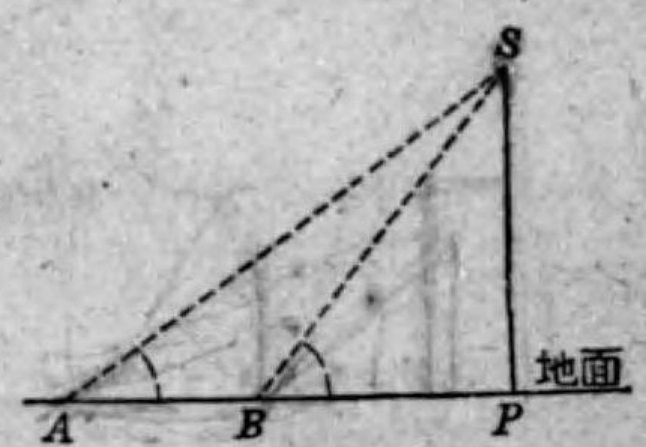
日中方尖塔ト其ノ影トガ作ル直角三角形ハ同ジ時刻ニ同ジ場所デ地上ニ立テタ杖ガ其ノ影ト共ニ作ル直角三角形ト相似デアル. サレバ杖ノ長サガ其ノ影ノ長サノ何倍デアルカヲ計算シテ置ケバ, 影ノ長サカラ方尖塔ノ高サヲ計算シテ見出スコトガ出來ルコトハ明ラカデアラウ. 例ヘバ一米二十糎ノ長サノ杖ノ影ガ八十糎デアツタトスレバ杖ノ長サハ其ノ影ノ大サノ $\frac{3}{2}$ デアルカラ, ソノ時ソノ場所ニアル方尖塔ノ影ガ二十四米デアレバ, ソノ高サハ明ラカニ $24\times\frac{3}{2}=36\mathrm{m}$ デアル.

高ク聳ユル樹木ノ高サモ同ジ樣ニシテ測ルコトガ出來ルノデアル.

此ノ方法ヲソノ儘用キテ金字塔ノ高サヲ測ルコトハ出來ナイ. 金字塔ノ影ノ長サヲ其ノ頂點ノ眞下カラ測ルコトガ難シイカラデアル. 金字塔ノ底部ハ可ナリ大キナ矩形デアルカラ, 頂點ノ影(卽チ影ノ尖端)カラ塔ノ尖端ノ眞下(卽チ底部ノ中央)ニ至ル距離ヲ測ルノニ, 影ガ底部ノ一邊ニ直角ナル方向ニ在ル場合ハ左程困難デハナイガ, サモナイ時ニハ容易デナイ. マシテ山ノ高サヲ測ル時ノ如ク底部ガ規則正シキ多角形デナイ時ニハ上ノ方法ハ全ク役ニ立タナイ. 然ラバ斯ノ如キ場合ニハ如何ニシタラバヨイカ. コレヲ工夫スルノモ面白イコトデアラウ.



此ノ目的ニハ種々ノ方法ガ考ヘ得ラレヨウガ, 次ノ樣ニスルノモ亦一法デアル.



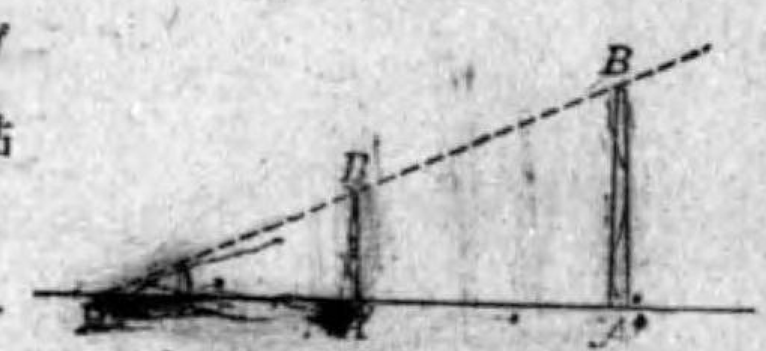
地面ヨリ上方ニ在ル一點 S ノ高サヲ見出サントスルニ先ヅ地上 A 點ニ於テ S ヲ望ンデ地表面カラノ仰角 ∠A ヲ測リ, 次ニ S ニ向ツテ m 米進ンデ B 點ニ到リ再ビ S ノ仰角 ∠B ヲ測レバ, 紙面ニ

三角形 ABS ノ相似形ヲ畫クコトハ容易デアルカラ, ソノ紙上デ AB ニ S カラ垂線ヲ下シテ, ソノ長サヲ尺度ヲ當テテ測リ, 比例ヲ用キテ S ノ高サヲ見出スコトガ出來ル筈デアル.

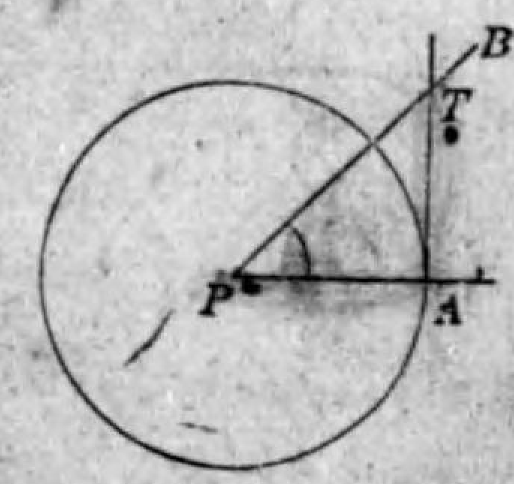
問題 高サ 3 米ノ樹木ノ影ノ長サ 2 米 40 糎ナルトキ, ソノ場所ニ於テ幅(卽チ深サ) 1 米ノ日陰ヲ作ルニハ幾何ノ高サノ塀ヲ作ルベキカ.

4 三 角 法[1]

高サヲ測量スル爲ニ棒ノ高サト其ノ影ノ長サトノ比ヲ利用スルコトヲ述ベタガ, ソレハ結局右圖ニ於ケル角 P ガ定マツテ居レバ, 直線 AP 上ノ隨意ノ點 A′ ヨリ垂線 A′B′ ヲ立テテモ A′P ト A′B′ ノ長サノ比ハ, 何處デモ同ジデアルコトニ起因スルノデアル. 故ニ測ルニ最モ都合好キ點 A′ ヲ選ンデ $\frac{A'B'}{A'P}$ ノ比ヲ一度計算シテ置ケバ AP 上ノ如何ナル場所ニ垂線ヲ立テテモ PB 線マデノソノ長サハ容易ニ見出シ得ルノデアル. 卽チ AP ノ長サヲ測ツテ, ソレニ前ニ計算シテ置イタ比 $\frac{A'B'}{A'P}$ ヲ乘ズレバヨイ. ヨツテ角 P ノ凡ユル値卽チ $1°, 2°, 3°\ldots$ 等ニ對スル $\frac{A'B'}{A'P}$ ノ如キ比ヲ全部計算シテ表ニ作ツテ置ケバ頗ル便利デアルノハ言フヲ俟タナイ.



角 P ノ此ノ樣ナ比ヲ表ハスニ角 P ノ正切[2]トイヒ, 記號デハ tanP, tgP, 又ハ tangP ナドト書ク. 此ノ名稱ノ起リハ次ノ事實デハナイカト想像セラレル. 先ヅ P ヲ中心トシ PA ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, A ニ於テ此ノ圓ニ切線ヲ引ケバ, PB ト點 T ニ於テ交ハルトスル. 半徑 AP ノ長サヲ單位トシテ測レバ (卽チ AP ノ長サヲ 1 ト定ムレ



1) *Trigonometry.* 2) *Tangont of the angle P.* 英國デハ tan *P*. 獨逸デハ tg *P*. 佛國デハ tang *P*. ト書クノガ普通デアル.

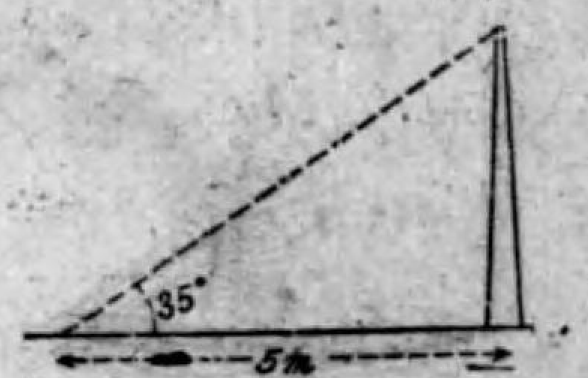
バ)線分 AT ノ長サハ卽チ $\frac{AT}{AP}$ デアツテ，P ノ正切ニ他ナラナイ．故ニ切線ノ長サノ意味デ正切ト呼ンダモノデアラウ．下ニ 0° ヨリ 90° ニ至ル各角ノ正切ノ最モ簡單ナル表ヲ掲ゲテ置ク[1]．コレハ唯見本ニ過ギナイ．注意スベキハ 45° ノ正切ハ 1 デ($\because$ AP=AT) 90° ノ極ク近傍デハ正切ハ限リ無ク大キクナル．

正 切 ノ 表

0°	0.00	18°	0.32	36°	0.73	54°	1.38	72°	3.08
1°	0.02	19°	0.34	37°	0.75	55°	1.43	73°	3.27
2°	0.03	20°	0.36	38°	0.78	56°	1.48	74°	3.49
3°	0.05	21°	0.38	39°	0.81	57°	1.54	75°	3.73
4°	0.07	22°	0.40	40°	0.84	58°	1.60	76°	4.01
5°	0.09	23°	0.42	41°	0.87	59°	1.66	77°	4.33
6°	0.11	24°	0.45	42°	0.90	60°	1.73	78°	4.70
7°	0.12	25°	0.47	43°	0.93	61°	1.80	79°	5.44
8°	0.14	26°	0.49	44°	0.97	62°	1.88	80°	5.67
9°	0.16	27°	0.51	45°	1.00	63°	1.96	81°	6.31
10°	0.18	28°	0.53	46°	1.04	64°	2.05	82°	7.12
11°	0.19	29°	0.55	47°	1.07	65°	2.14	83°	8.14
12°	0.21	30°	0.58	48°	1.11	66°	2.25	84°	9.51
13°	0.23	31°	0.60	49°	1.15	67°	2.36	85°	11.43
14°	0.25	32°	0.62	50°	1.19	68°	2.48	86°	14.30
15°	0.27	33°	0.65	51°	1.23	69°	2.61	87°	19.08
16°	0.29	34°	0.67	52°	1.28	70°	2.75	88°	28.64
17°	0.31	35°	0.70	53°	1.33	71°	2.90	89°	57.49

此ノ表ヲ使用スル實例ヲ示サウ．

例　高サ未知ノ柱ガ立ツテ居ル．其ノ影ノ長サハ 5m デアル．當時太陽ノ光線ガ地表面トナス角ハ 35° デアルコトヲ知ツタ．然ラバ 35° ノ正切ニ 5 ヲ乘ズレバ柱ノ高サガワカル譯デアル．上ノ表カラ 35° ノ正切ハ 0.70 デアルカラ，

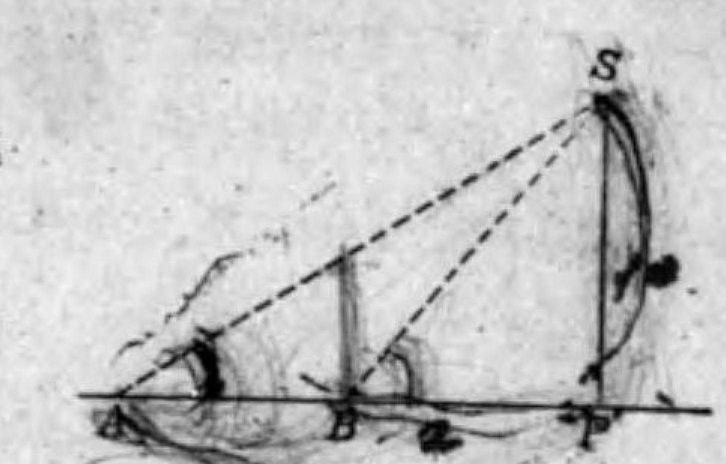


1) 卷末ニ今少シ詳シイ表ガアル．

$$0.70\times5=3.5$$

卽チ柱ノ高サハ約 3m 50 デアルコトガワカル．

前ニ第 6—7 頁ニ述ベタ所ノ近寄リ得ラレナイ物ノ高サヲ測ル問題ニ正切ヲ利用出來ルカ否カヲ考ヘテ見ヨウ．第 6 頁ノ圖ノ S 點ヨリ地面ニ下シタ垂線ノ足ヲ P トスル．A ニ居テ S ヲ望ンデ ∠A ヲ測リ，S ニ向ツテ m 米進ンデ B ニ到リ ∠B ヲ測ツタノデアル．コレダケノ要素ガアレバ SP ノ長サハ確定スル譯デアルカラ，既知ノ三ツノ量カラ計算デキテモヨイ筈デアル．求メル量 SP ノ高サヲ x デ表ハセバ正切ノ定義カラ



$$\frac{x}{AP}=\tan A \qquad \frac{x}{BP}=\tan B$$

デアルコトハ容易ニワカル．コレヲ書キ替ヘルト

$$\frac{x}{\tan A}=AP \qquad \frac{x}{\tan B}=BP$$

トナル．然ルニ AP ト BP トノ差ガ m 米デアルカラ，兩式ヲ邊々相減ジテ

$$\frac{x}{\tan A}-\frac{x}{\tan B}=m$$

ヨツテ x ヲ括リ出シテ

$$x\left(\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}\right)=m$$

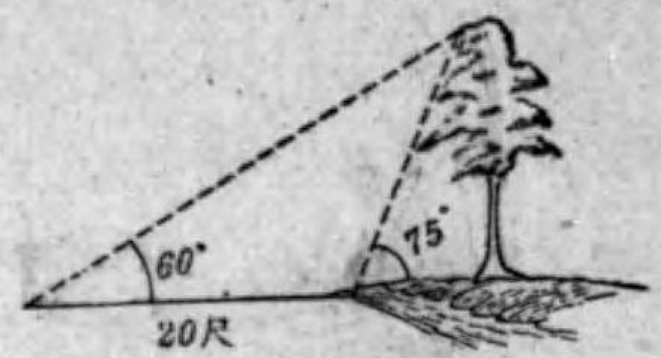
トナル．tanA モ tanB モ既知ノ量(A, B ガ夫々何度ト判ツテ居レバ，表ヲ引イテ讀取レバヨイ)デアルカラ

$$x=\frac{m}{\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}}$$

ニ依ツテ x ヲ計算出來ルコト明ラカデアル.

例　とゞはんたー氏小三角法[1]ニ次ノ問題ガアル.

人アリ小川ノ岸邊ニ立ツテ對岸ニ立ツ大木ヲ望ミ地表面上 75° ノ仰角ヲ得, 川岸ヨリ 20 尺退イテ仰角 60° ヲ得タリ. 木ノ高サ及ビ川幅ヲ計算セヨ.



解　問題ノ木ノ高サヲ x ニテ表ハシ, 川幅ヲ y ニテ表ハセバ, 上ニ述ベタ通リニシテ二ツノ關係式

$$\frac{x}{20+y}=\tan 60^\circ \qquad \frac{x}{y}=\tan 75^\circ$$

ヲ得ル. ヨツテ

$$\frac{x}{\tan 60^\circ}=20+y \qquad \frac{x}{\tan 75^\circ}=y$$

ノ様ニ書キ直シテ後相減ズレバ

$$x\left(\frac{1}{\tan 60^\circ}-\frac{1}{\tan 75^\circ}\right)=20$$

卽チ

$$x=\frac{20}{\dfrac{1}{\tan 60^\circ}-\dfrac{1}{\tan 75^\circ}}$$

トナル. コレヲ實際ニ計算スル爲ニ, 前揭ノ表カラ $\tan 60^\circ$, $\tan 75^\circ$ ヲ索ムレバ

$$\tan 60^\circ=1.73 \qquad \tan 75^\circ=3.73$$

デアルカラ

$$\frac{1}{\tan 60^\circ}-\frac{1}{\tan 75^\circ}=\frac{1}{1.73}-\frac{1}{3.73}=\frac{2}{1.73\times 3.73}$$

故ニ

1) *Todhunter: Trigonometry for beginners. p. 35.*

$$x=20\times\frac{1.73\times 3.73}{2}=10\times 1.73\times 3.73=64.53$$

卽チ對岸ノ木ノ高サハ 64.53 尺デアル.

コレデ樹高ヲ測ルコトハ出來タガ問題ノ後ノ半分卽チ川幅ノ問題ハ如何ニスレバヨイカ. 上ニ得タ式ノ一ツ

$$\frac{x}{y}=\tan 75^\circ$$

又ハコレヲ書キ直シタ式

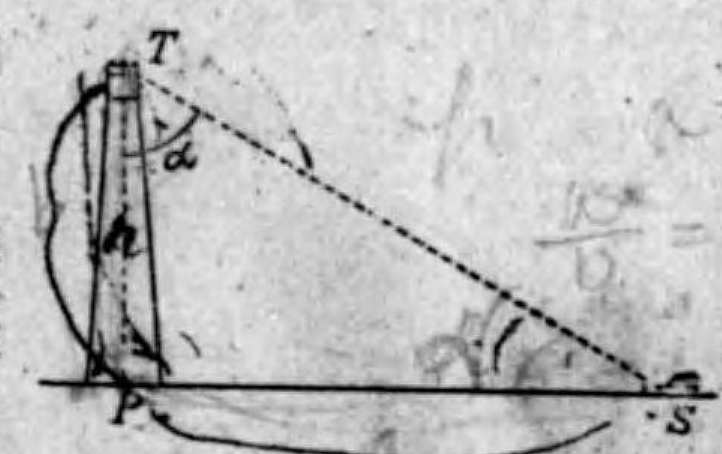
$$\frac{x}{\tan 75^\circ}=y$$

ヲ取ツテ見ルト, 此ノ式中ノ x ハ樹高デ, ソレガ 64.53 尺デアルコトハ今見出シタノデアルカラ, コレヲ用ヰレバ此ノ式ニヨツテ y 卽チ川幅ガワカル譯デアル. 實際ニ計算シテ見ルト

$$y=\frac{x}{\tan 75^\circ}=\frac{64.53}{3.73}=17.3$$

トナツテ, 川幅ハ 17 尺 3 寸デアルコトガワカル.

此ノ例カラ考ヘ得ラレル樣ニ, 高サヲ計算スル爲ニ用ヰタ正切ヲ逆用シテ距離ヲ索メルコトモ出來ルノデアル. 例ヘバ豫メ高サヲ知ツテ居ル望樓ニ上ツテ海上ノ船ヲ望ミ見テ, 水平線又ハ鉛直線トノ間ノ角ヲ測レバ, ソノ船マデノ距離ガ計算デキル.



望樓ノ頂ヲ T, 基脚ヲ P, 高サ卽チ PT ヲ h トシ, 船ヲ S トシ, 角 PTS ヲ測ツテ角 α ヲ得タトスレバ

$$\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PT}}=\tan\alpha \qquad 卽チ \qquad \frac{\mathrm{PS}}{h}=\tan\alpha$$

デアルカラ, 求メル距離 PS ハ

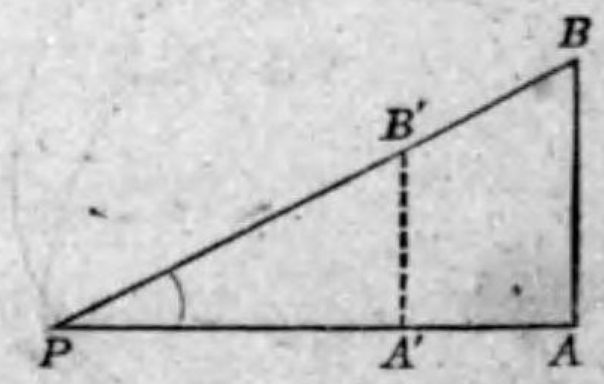
$$\mathrm{PS}=h\tan\alpha$$

ナル式カラ得ラレル．卽チ角 a ノ正切ヲ表ニテ索メテ，コレニ h ヲ乘ズレバヨイノデアル．

水面ヨリノ高サノ知レテ居ル檣ニ登ツテ敵船マデノ距離ヲ測ルコトニモ上ノ式ヲ應用デキル．

前ニ第4頁ニ於テ，甲乙二地點ヨリ旗ヲ望ンデ甲乙ノ線トナス角ヲ測リ，甲乙間ノ距離ヲ知ツテ旗ノ位置ヲ確定スルコトヲ述ベタガ，角ノ代リニ甲乙ヨリ旗マデノ距離ヲ求メテモ目的ハ達セラレル．然ラバ是等ノ距離ヲ如何ニシテ索メルカ．コノ樣ナ問題ノ爲ニハ正切ニ準ズル正弦，餘弦ト稱スルモノヲ用キルノガ便利デアル．

正切ヲ考ヘタ時ノ樣ニ直角三角形 PAB ヲ畫ク．$\dfrac{AB}{PA}$ ヲ角 P ノ正切ト呼ンダノデアルガ，弦 PB ヲ以テ AB, PA ヲ除シタルモノハ正切ノ如ク角 P ニ固有ナル量デ，角 P ガ定マツテ居レバ，PA 線上ノ隨意ノ點 A′ カラ垂線ヲ立テテ得ラレル直角三角形 PA′B′ ニ就テ $\dfrac{A'B'}{PB'}$, $\dfrac{PA'}{PB'}$ ヲ作ツテモ前ト夫々同ジ値ヲ得ルコトハ，相似三角形ノ性質カラ明ラカデアラウ．



故ニ $\dfrac{AB}{PB}$ ヲ角 P ノ正弦[1]ト名ヅケテ記號 sinP デ表ハス．卽チ

$$\sin P=\frac{AB}{PB}$$

デアル，同樣ニ弦 PB デ PA ヲ除シタルモノヲ角 P ノ餘弦[2]ト呼ンデ，コレヲ記號 cosP デ表ハス．卽チ

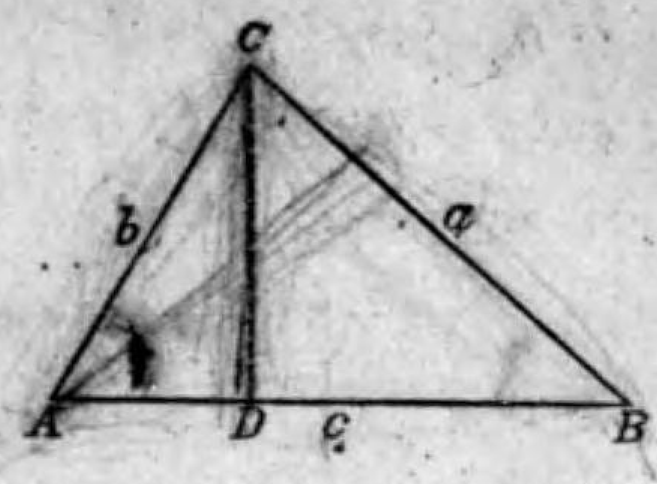
$$\cos P=\frac{PA}{PB}$$

デアル．

正弦モ餘弦モ正切ト同ジ樣ニ表ヲ作ツテ置ケバ便利デアルカラ，各種ノ表ガ出來テ居ル．

1) *Sine.* 2) *Cosine.*

正弦，餘弦，正切ナドヲ三角函數[1]又ハ圓函數[2]トイフノデアル．此ノ外ニモ餘切[3]，正割[4]，餘割[5]，正矢[6]，餘矢[7]ナドモアルガ，ソレ等ヲ使用シナイデモ大體用ニ足ルカラ省クコトニスル．



三角形 ABC ガアル．頂點 A, B, C ノ對邊ノ長サヲ夫々 a, b, c デ表ハス．頂點 C カラ對邊 AB ニ垂線 CD ヲ下セバ正弦ノ定義カラ直チニ CD ノ長サハ $b\sin A$ デアリ，又 $a\sin B$ デモアルカラ

$$b\sin A=a\sin B$$

又ハ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

トナル．A 又ハ B カラソノ對邊ニ垂線ヲ下セバ，同樣ニシテ

$$b\sin C=\cancel{a}\sin B$$ b×sinC = c×sinB

從ツテ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ガ得ラレル．卽チ三角形ノ一性質トシテ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ヲ得ル．言葉デイヘバ

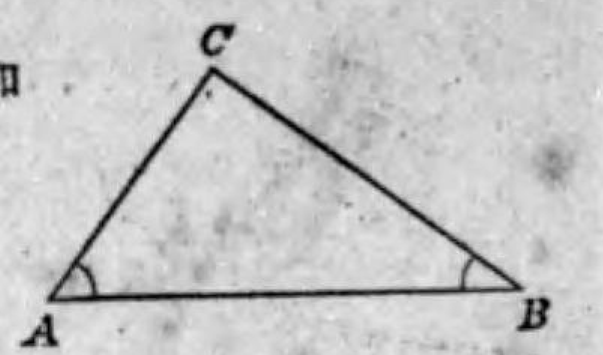
三角形ノ各邊トソノ對角ノ正弦トハ比例スル．

トイフノデアル．三角形ノ各邊ノ長サハソノ對角ノ大サニ直接比例シナイデソノ正弦ニ比例スルノデアル．コノ性質ヲ正弦法則[8]トイフ．

第4頁ニ於ケル甲乙ノ二點ヲ A, B トシ，旗ノ位置ヲ C トスレバ，AB

1) *Trigonometrical functions.* 2) *Circular functions.* 3) *Cotangent.*
4) *Secant.* 5) *Cosecant.* 6) *Versed sine.* 7) *Coversed sine.*
8) *Law of sines.*

ノ長サ及ビ角 A ト角 B トヲ測ツタノデアルカラ，角 A ト角 B ト邊 $AB=c$ トガ既知デアル．然ルニ三角形ノ三ツノ角 A, B, C ヲ皆相加ヘルト 180° トナルノデアルカラ



$$C=180^\circ-(A+B)$$

カラ角 C ガワカルノデアル．ヨツテ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

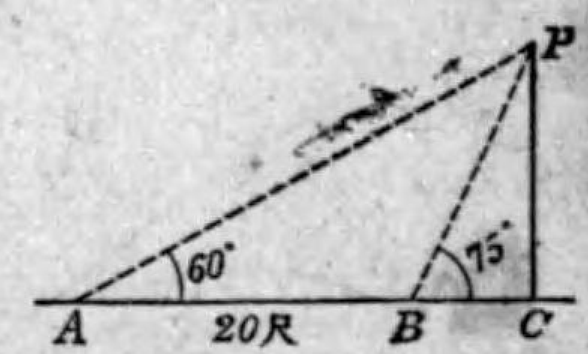
ヨリ

$$a=c\frac{\sin A}{\sin C}\qquad b=c\frac{\sin B}{\sin C}$$

ヲ得テ，長サ a, b 卽チ BC, AC ヲ計算シ得ルノデアル．

玆ニ得タ正弦法則ヲ應用シテ第 10 頁ニ揭ゲタ問題卽チ小川ノ對岸ニ立ツ樹木ノ高サ及ビ川幅ヲ計算スルコトモ出來ル．次ノヤウニスレバヨイ．

BC ヲ川幅，CP ヲ樹木ノ高サトシ A ヨリ P ヲ望ミ見テ仰角 60° ヲ得，後 20 尺進ンデ B 點ニ至ツテ仰角 75° ヲ得タノデアルカラ



$$AB=20\text{尺}\quad \angle A=60^\circ\quad \angle B=75^\circ$$

デアル．求ムル CP, BC ヲ夫々 x, y トシタノデアルカラ

$$CP=x\qquad BC=y$$

平面幾何學デ學ンダヤウニ，角 B ハ角 A ト角 APB トノ和デアルカラ

$$\angle APB=\angle B-\angle A=75^\circ-60^\circ=15^\circ$$

トナル．又角 ABP ハ $180^\circ-75^\circ=105^\circ$ デアル．

正弦法則ニヨレバ

$$\frac{BP}{\sin 60^\circ}=\frac{AP}{\sin 105^\circ}=\frac{20(\text{尺})}{\sin 15^\circ}$$

デアルカラ

$$BP=20(\text{尺})\frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}\qquad AP=20(\text{尺})\frac{\sin 105^\circ}{\sin 15^\circ}$$

ヲ得ル．從ツテ

$$CP=BP\sin 75^\circ=20(\text{尺})\frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}\sin 75^\circ$$

卽チ先ヅ BP ヲ計算シテ，次ニ CP ヲ求メレバヨイ．

川幅 BC ヲ求メルニハ先ヅ角 BPC ヲ求メル．C ガ直角デアルカラ

$$\angle BPC=90^\circ-75^\circ=15^\circ$$

正弦ノ定義カラ

$$\frac{BC}{BP}=\sin BPC=\sin 15^\circ$$

故ニ

$$BC=BP\sin 15^\circ=20(\text{尺})\frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}\sin 15^\circ=20(\text{尺})\sin 60^\circ$$

既製ノ表カラ sin75°, sin60°, sin15° ヲ索ムレバ AP, BP, CP, BC ヲ計算スルコトガ出來ルノデアル．卽チ卷末ノ表カラ

$$\sin 75^\circ=0.966\qquad \sin 60^\circ=0.866\qquad \sin 15^\circ=0.259$$

ガ得ラレルカラ

$$BP=20\times\frac{866}{259}=66.87$$

$$x=CP=66.87\times 0.966=64.59$$

$$y=BC=20\times 0.866=17.32$$

y 卽チ BC ヲ求メルニハ角 BPC ヲ求メナイデ直接餘弦ノ定義カラ

$$BC=BP\cos 75^\circ$$

トシテモヨイ．サウスルト表カラ

$$\cos 75^\circ=0.259$$

ヲ得ルカラ

$$BC=66.87\times 0.259=17.31$$

トナルノデアル．

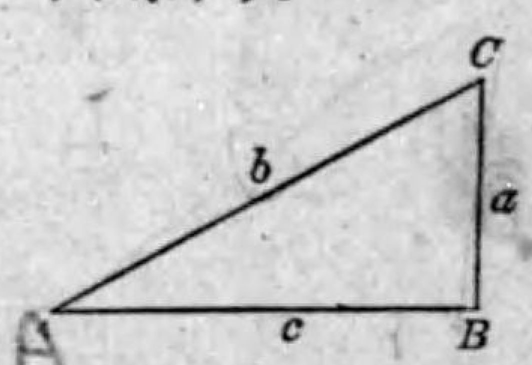
カクテ，前ニ第10–11頁ニ得タル結果ト大體同ジ答ヲ得タ，最後ノ桁ニ多少ノ差ノアルノハ，正弦，餘弦ノ値ガ近似値デアルカラデアル．

5 三角形ヲ解クコト

三角形ニハ三ツノ邊ト三ツノ角トガアル，是等六ツノ量ノ內三ツガ判ツテ居レバ他ノ角ト邊トハ計算デキルコトヲ示サウ．併シ角ノミ三ツ與ヘラレテ居ル場合ハ，ソノ三ツノ角ノ和ハ必ズ 180° トナルカラ，ソノ內唯二ツノ角ガ與ヘラレタ場合ト同ジデアリ，從ツテ他ノ邊ヲ計算シ得ナイノハ當然デアル．幾何學的ニ考ヘテモ，三ツノ角(卽チ二ツノ角)ガ定マレバ，ソノ樣ナ三角形ハ皆相互ニ相似デアルガ，ソノ大サハ一定シナイ．故ニ邊ノ大サヲ計算出來ル筈ガナイノデアル．ヨツテ與ヘテアル三ツノ量ノ內，少クモ一ツハ邊デアルトスル．

最初ニハ最モ簡單ナ直角三角形ノ場合ヲ考ヘテ見ヨウ．此ノ場合ニハ，一ツノ角ハ直角デアルコトガ判ツテ居ルノデアルカラ，外ニ二邊ヲ知ルカ又ハ一邊ト一角トヲ知レバ他ノ邊ト角トハ計算デキルコトヲ示サウ．

ABC ヲ與ヘラレタル直角三角形トシ，角 B ヲ直角トスル．



三邊 a, b, c ノ中二ツガ與ヘテアルトスレバ，其ノ比ヲ作ル．此ノ比ハ角 A カ又ハ角 C ノ正弦カ餘弦カ正切カ又ハ此等ノモノノ逆數トナツテ居ルコトハ明ラカデアルカラ，表ヲ用キテ角 A, C ノ中一ツハ直ニワカル．然ラバ，ソレヲ 90° ヨリ減ジテ他ノ角モ亦直ニワカル．ヨツテ又ソレ等ノ角ノ正弦，餘弦又ハ正切ヲ表カラ見出シ，ソレヲ用キテ未知ノ一邊ヲ計算出來ルコトハ明ラカデアル．

ハ又既知ノ二邊ヨリぴたごらすノ定理[1]ヲ用キテ他ノ未知ノ一邊ヲ計算ス

1) $a^2+c^2=b^2$ (*The theorem of Pythagoras*).

ルコトモ出來ル．

例ヘバ a, b ガ與ヘラレテ居ルトスレバ

$$\sin A=\frac{a}{b}$$

デアルカラ，$\frac{a}{b}$ ヲ計算シ，表ヲ用キテ角Aガワカル．ヨツテ $90°-A=C$ ナル關係カラ角 C モワカル．邊 c ヲ見出スニハ

$$\frac{c}{b}=\cos A \qquad c\tan A=a \qquad a\tan C=c$$

ナル三ツノ關係式ノ中孰レカ一ツヲ用キテ c ヲ計算スルコトヲ得ル．

又知ラレテ居ル二邊ガ a, c デアルナラバ上ノ三式ノ中ノ中間ノ式

$$c\tan A=a$$

カラ tanA ヲ計算シ，從ツテ表ヲ用キテ角 A ガ得ラレル．次ニ上ニ掲ゲタ關係式

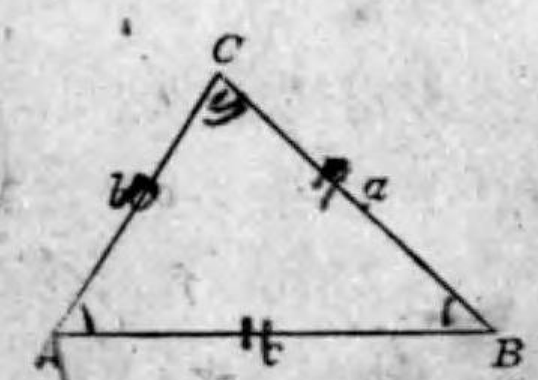
$$\sin A=\frac{a}{b} \qquad 卽チ \qquad b\sin A=a$$

カラ

$$b=\frac{a}{\sin A}$$

トナリ，邊 b ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル．

次ニ必ズシモ直角三角形デナイ一般ノ三角形ノ場合ヲ考ヘテ見ヨウ．



先ヅ三ツノ角 A, B, C ノ中ノ二ツト三ツノ邊 a, b, c ノ中一ツトガ知レテ居ルトスル．二角ガワカツテ居ルカラ，コレ等ヲ 180° カラ減ジテ殘リノ一ツノ角ガワカル．前ニ第 13 頁ニ述ベタ正弦法則

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ニ於テ a, b, c ノ中一ツガ知レテ居リ，分母ノ値ハ皆ワカツテ居ルカラ，他ノ邊ハ此ノ式カラ皆求メラレル筈デアル．例ヘバ三邊ノ中 c ガワカツテ居レ

バ

$$a=c\frac{\sin A}{\sin C}\qquad b=c\frac{\sin B}{\sin C}$$

ヲ用ヰテ a, b ガ計算出來ル.

第二段トシテ, 三ツノ角 A, B, C ノ中一ツト, 三ツノ邊 a, b, c ノ中二ツトガ知レテ居ル場合ハ如何ニスレバヨイカ. コレハ二ツノ場合ニ分ケテ考ヘル必要ガアル. 卽チ

（1）二邊ト其ノ一ツノ對角ガ知レテ居ル場合

（2）二邊ト其ノ夾角トガ知レテ居ル場合

デアル.

第一ノ場合卽チ二邊ト其ノ一ツノ邊ノ對角ガ知レテ居レバ, 例ヘバ邊 a, b ト角 A トガ與ヘラレテ居ルトスレバ正弦法則カラ

$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A$$

ヲ得テ, 角 B ガワカル. ヨツテ $180°-(A+B)=C$ カラ角 C ガワカル. 從ツテ又正弦法則ニヨツテ

$$c=a\frac{\sin C}{\sin A}$$

デアルカラ邊 c ガワカル. コレデ全部ノ要素 (a, b, c, A, B, C) ガ皆ワカツタノデアル.[1]

第二ノ場合卽チ二邊ト其ノ夾角トガ知レテ居ル場合ヲ調ベヨウ. 三角形ヲ ABC トシ, 邊 a, c ト角 B トガ與ヘラレテ居ルトスル. 角 A, 角 C 及ビ邊 b ガ未知デアル. コレヲ解クニハ次ノヤウニシテモ出來ル. 先ヅ A カラ對邊 BC ニ垂線 AM ヲ引ケバ, 直角三角形 ABM ニ於テ邊 c ト角 B トガ既知デ

1) 第22頁參照.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

アルカラ, 他ノ邊ヤ角ハ計算出來ル. 例ヘバ

$$AM=c\sin B,\qquad BM=c\cos B\ \text{又ハ}\ c\sin(90°-B)$$

ニヨツテ AM, BM ハ直チニ計算出來ル. 故ニ直角三角形 ACM ノ二邊 AM ト $CM=a-BM$ トガ知レテ居ルノデ, コノ三角形ヲ解キ得ルコトハ第16–17頁ニ述ベタ通リデアル. 例ヘバ

$$\tan C=\frac{AM}{CM}$$

カラ角 C ヲ見出シ,

$$b\sin C=AM\quad \text{又ハ}\quad AM^2+CM^2=b^2$$

ヲ用ヰテ邊 b ヲ計算シ得ルコトハ明ラカデアル.

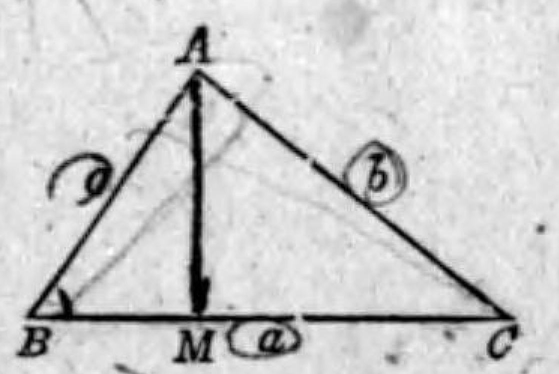
以上述ベ來ツタ様ニ僅ニ正弦, 餘弦, 正切ノ知識ヲ以テ大概ノ三角形ヲ解クコト（既知ノ邊, 角ヲ用ヰテ未知ノ邊, 角ヲ計算スルコト）ガ出來ルノデアルガ, 唯一ツ, 三邊ヲ知ツテ三ツノ角ヲ計算スルニハ少シ困難ガアル.

此ノ問題ヲ解ク爲ニ三角形ノ邊ト角トノ關係ヲ今少シ調ベテ見ヨウ. 圖カラ直ニ

未知

$$BM=c\cos B\qquad CM=b\cos C$$

ヲ得ルカラ, 邊々相加ヘテ



$$a=b\cos C+c\cos B \qquad (1)$$

トナル, コレト同様ニシテ

$$b=c\cos A+a\cos C \qquad (2)$$

$$c=a\cos B+b\cos A \qquad (3)$$

ガ得ラレル. ヨツテ是等ノ式ノ兩邊ニ夫々 $a, b, -c$ ヲ乘ジテ後相加ヘルト, $\cos A$, $\cos B$ ハ自然消滅シテ

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$$

トナル. 書キ替ヘルト

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \qquad (1)'$$

ヲ得ル. 同ジ樣ニシテ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad (2)'$$

$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B \qquad (3)'$$

ヲ得ルコトハ容易ニワカルデアラウ．是等最後ノ三式ハ屢々用キラルヽ式デアル．コレヲ第二餘弦法則[1]，ソノ原トナツテ居ル (1), (2), (3) ノ三式ヲ第一餘弦法則[2]ト呼ブ人モアル．

第二餘弦法則卽チ (1)′, (2)′, (3)′ ヲ A, B, C ノ餘弦ニ關シテ解ケバ

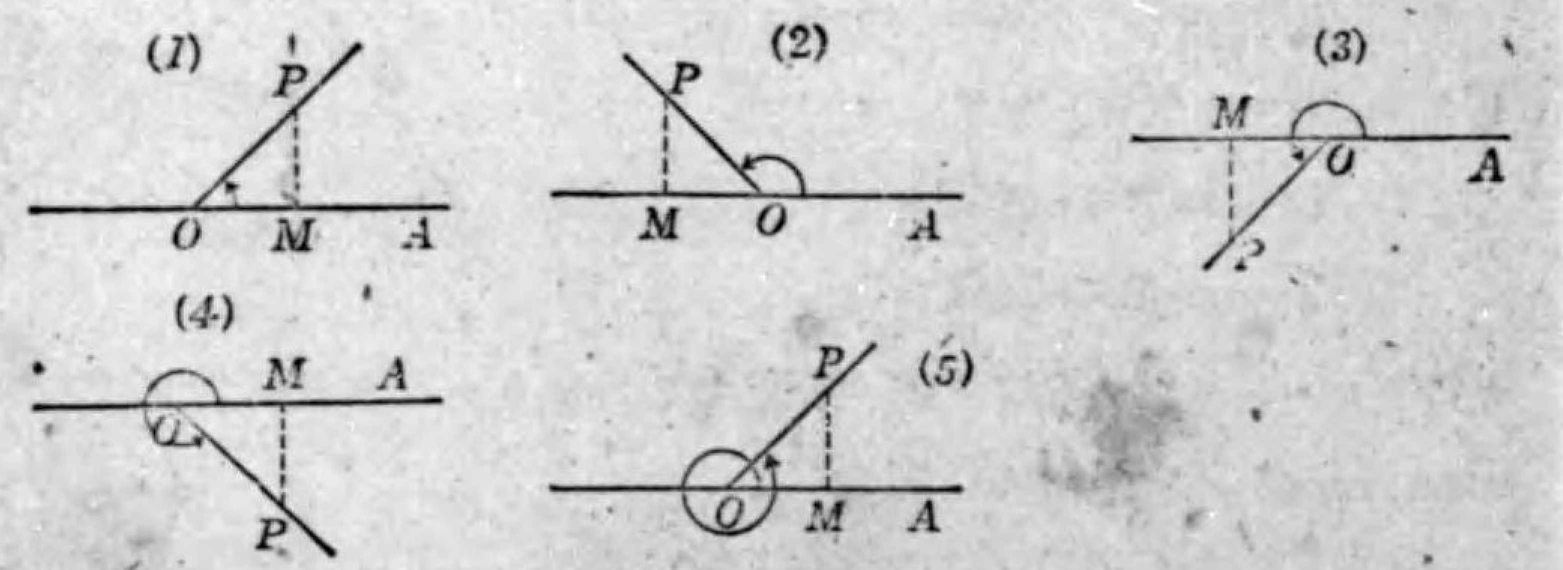
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

トナルカラ，コレヲ用キレバ，三角形ノ三邊 a, b, c ヲ知ツテ三ツノ角ヲ計算スルコトガ出來ル譯デアル．

斯クノ如ク未知ノ邊，角ヲ求メルコトヲ三角形ヲ解ク[3]トイフ．

6　直角ヨリ大ナル角ノ三角函數

今マデハ 0° カラ 90° ニ至ル間ノ角卽チ鋭角ノ正弦，餘弦，正切ヲ說明シタガ，コレヨリ大ナル角ノ場合ニハ，其ノ正弦，餘弦，正切等卽チ三角函數ハ如何ニ考ヘタラヨイカ．



先ヅ一直線 OA ヲ取リ，ソノ上ニ一點 O ヲ印シ，OA 直線ヨリ上方ニ與

1) *Second law of cosines*,　2) *First law of cosines*.　3) *Solution of triangles* (三角形ヲ解クコト).

ヘラレタル角ヲ測リ，ソノ角ノ邊ヲ OP トスル．コノ角ガ鋭角ナラバ (1) ノ様ナ位置ニアル．直角ヲ越エテモ二直角卽チ 180 以下ナラバ (2) ノ位置，二直角以上三直角以下ナラバ (3) ノ如ク，三直角以上四直角以下卽チ 270°–360° ナラバ(4)，四直角ヲ少シ越エレバ (5) 圖ノヤウニ，順次角ガ增大スルニ連レテ OP ハ O ヲ軸トシテ何度デモ廻轉スルト考ヘテヨイ．但シソノ向ハ時計ノ針ト反對ノ向キニ廻ルノヲ正ノ方向トスル．故ニ逆ノ方向ニ廻ツテ出來タ角ハ負ノ角ト見ルノデアル[1]．

廻轉スル直線(實ハ半直線)上ニ一點 P ヲ取リ，P ヨリ直線 OA 上ニ垂線 PM ヲ下セバ，ソノ足 M 點ハ上圖ノヤウニ O 點ノ右又ハ左ニ落チル．OM ノ長サヲ a トスル．左右ヲ定メル爲ニ便宜上 M 點ガ O 點ノ右ニ在レバ a ハ正トシ，左ニ在レバ負ト定メル．又垂線 PM ノ長サヲ b トシ，P 點ガ原直線 OA ノ上方ニ在ルカ下方ニ在ルカヲ定メル爲ニ，上方ニ在レバ b ヲ正，下方ニ在レバ負トスル．原チ上圖 (1), (2), (5) ニ於テハ PM ハ正デ，(3), (4) ノ場合ニハ負デアル．

角 POM (α デ表ハス) ノ正弦，餘弦，正切ハ，コノ角ガ如何ニ大キクトモ又正デモ負デモ常ニ，前ノ如ク，

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}}$$

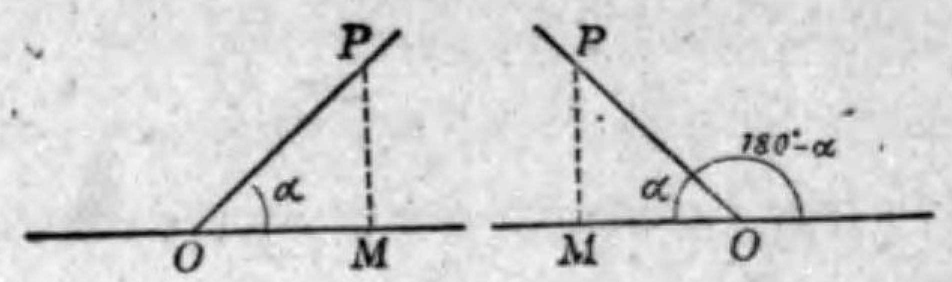
$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}}$$

ト定義スル．OP ハ廻轉スル直線デアルカラ，ソノ長サハ常ニ正ト定メルト，PM ハ (1), (2), (5) ノ場合ニハ常ニ正デアルカラ，正弦ハ正ノ數デ，(3), (4) ノ場合ニハ負ノ數トナル．餘弦ハ (1), (4), (5) ノ場合ニハ正ノ數デ (2), (3) ノ場合ニハ負ノ數トナル．正切ハ (1), (3), (5) デハ分母子ガ同符號デアルカラ，正

1) 第26頁參照．

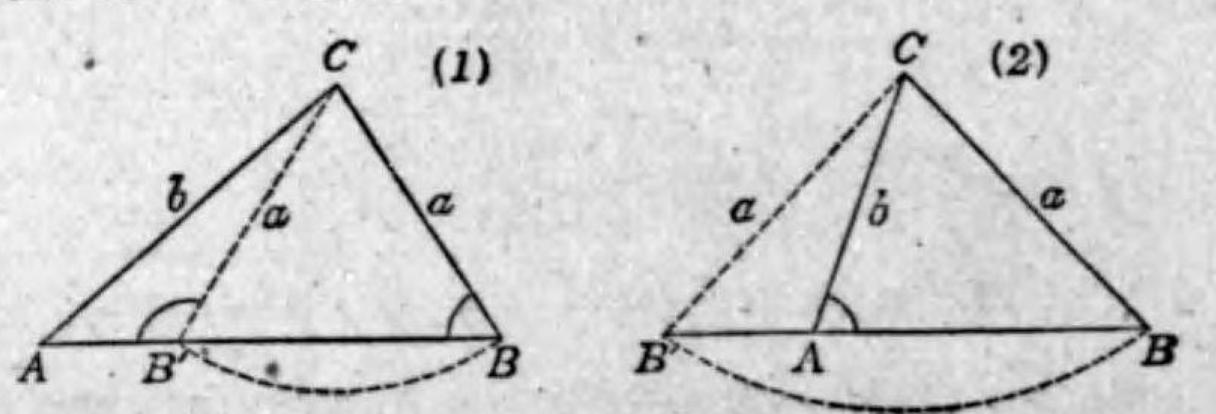
ノ數デ，ソノ他ノ場合卽チ (2),(4) デハ分母子ガ異符號ヲトルカラ負ノ數トナル.

此ノ樣ニ定メルト，下圖デワカル樣ニ，α 角ノ正弦ト $(180^\circ-\alpha)$ 角ノ正弦トハ孰レモ $\frac{PM}{OP}$ デ，全ク同ジ値ヲ有ツコトガ明ラカデアル．故ニ正弦卽チ $\frac{PM}{OP}$ ガ一定ノ値ヲ有ツ角ハ α ト $180^\circ-\alpha$ トニツアルコトガワカル．例ヘバ 30° ノ正弦ハ 0.5 デアルガ，$180^\circ-30^\circ=150^\circ$ ノ正弦モ亦 0.5 デアル．此ノタメニ第 18 頁ニ述ベタ問題 (1) ノ場合卽チ三角形ノ二邊トソノ一ツノ對角 A トヲ知ツテ他ノ要素ヲ求ムル問題デハ，正弦法則カラ簡單ニワカル式



$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A$$

ヲ用キテ $\sin B$ ヲ計算シ，正弦ノ表ニ依ツテ角 B ヲ求メルノデアルガ，ソノ答卽チ角 B ノ値トシテ二ツノ角ヲ得ルノデアル．卽チ一ツノ角ヲ B トスレバ，$180^\circ-B$ モ亦答デアル．是等二ツノ角ノ正弦ハ互ニ等シイノデアル．併シ是等二ツノ角ハ孰レモ問題ノ答トシテ適當ナモノデアルコトモアルシ，又ソノ中ノ一ツハ問題ニ適合シナイコトモアル．答ガ二ツアル場合ガ起リ得ルノハ次ノ圖ヲ見レバ不思議デハアルマイ．圖ノ (1) ノ場合ハ二ツノ答ノア

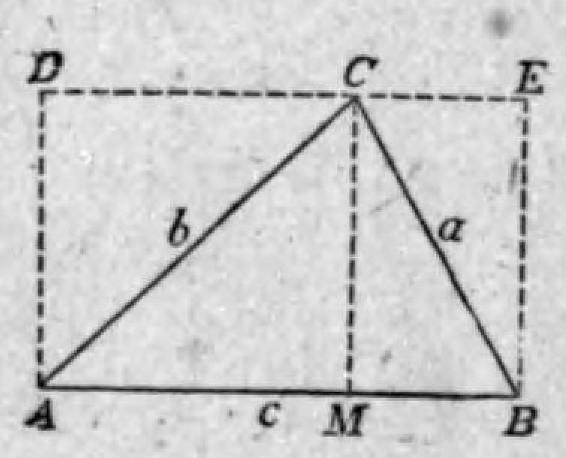


ル場合デ，(2) ハ唯一ツノ角ノミガ答トナル場合デアル．(1) ノ場合ハ b ガ a ヨリ大卽チ $b>a$ ノ場合デ，C ヲ中心トシテ半徑 a ノ圓ヲ畫ケバ圖ノ如ク二點 B ト B′ トデ AB ニ出會フ．此ノ時三角形 ABC ハ AB′C ト共ニ二邊

ガ a, b デ a ニ對スル角ハ A デアルガ，唯角 B ト角 B′ トノ關係ハ $B'=180^\circ-B$ デアル．圖 (2) ハ $b<a$ ナル場合デ，從ツテ平面幾何學デ學ンダ樣ニ夫等ノ對角 A,B ノ間ニハ $B<A$ ナル關係ガナケレバナラナイ．(大角ハ大邊ニ對ス)．ヨツテ角 B ハ鋭角デアル筈デアル (モシ鈍角ナラバ，$B<A$ ヨリ，A モ亦鈍角デアリ，從ツテ三角形ノ三角ノ和ガ二直角ヨリ大トナル)．然ルニ B ト $180^\circ-B$ トハ一ツガ鋭角ナラバ他ハ鈍角デアルカラ，鋭角ノ方ダケガ答トナリ得ルノデアル．

7 三角形ノ面積

以上デ三角形ヲ解クコトハ出來タガ尚一歩進ンデ其ノ面積ヲ知ルコトモ簡單ニ出來ル．前ノ通リ三角形ヲ ABC トシ，C ヨリ對邊 AB ニ垂線 CM ヲ下ス．三角形 ABC ノ面積ハ AB ノ長サニ，ソノ高サ CM ノ長サヲ乘ジタルモノノ半分デアルコトハ普通知ラレテ居ル通リデアル．卽チ圖ノヤウニ AB ト CM トヲ二邊トスル矩形 ABED ヲ作レバ，三角形 ACM ハ矩形 AMCD ノ半分，三角形 BCM ハ矩形 BECM ノ半分デアルカラ，是等ヲ合セタ三角形 ABC ハ矩形 ABED ノ半分デアルコトカラ直ニ明ラカデアル．故ニ垂線 CM ノ長サガワカレバ，ソレニ $AB=c$ ヲ乘ジテ二分スレバ面積ガワカル筈デアル．



正弦ノ定義カラ

$$\sin A=\frac{CM}{AC}=\frac{CM}{b}$$

卽チ

$$CM=b\sin A$$

デアルカラ，コレニ $AB=c$ ヲ乘ジテ二分スレバ

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$$

トナリ，三[illegible]ABC ノ面積ヲ計算スル公式ガ得ラレル．此ノ公式カラワカ

ル通リ

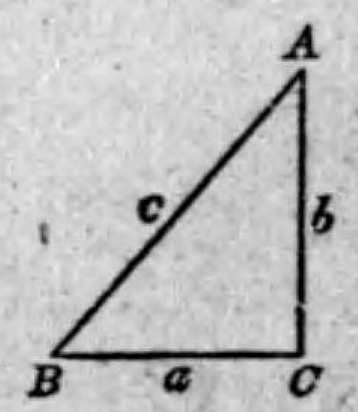
三角形ノ面積ヲ計算スルニハ隨意ノ二邊ヲ相乘ジテコレニ其ノ間ノ角（夾角）ノ正弦ヲ乘ジ二デ除スレバヨイ．

ノデアル．

問題　三角形ヲ ABC トシ頂點 A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c トスル．次ノ與ヘラレタル要素ヲ用ヰテ三角形ヲ解ケ．

（1）	$c=50$cm	$A=30°$	$C=90°$
（2）	$c=20$cm	$a=10$cm	$C=90°$
（3）	$a=8$cm	$B=15°$	$C=90°$
（4）	$a=15$cm	$b=15$cm	$C=90°$
（5）	$a=3$cm	$b=4$cm	$C=90°$
（6）	$c=8$cm	$B=45°$	$C=30°$
（7）	$b=24$cm	$c=12$cm	$A=60°$
（8）	$a=25$m	$b=34$m	$c=40$m

8　三角函數相互間ノ關係

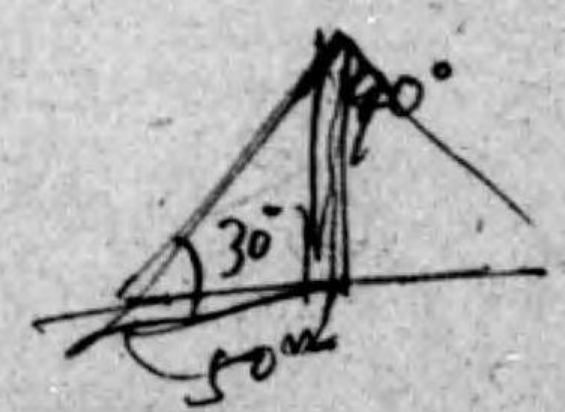


正弦，餘弦，正切ナドノ間ニハ不易ノ關係ガアル．三角形 ABC ノ C 角ヲ直角トスレバ，A 角ノ正弦，餘弦，正切ハ次ノ如クデアル．

$$\sin A=\frac{a}{c}\qquad \cos A=\frac{b}{c}\qquad \tan A=\frac{a}{b}$$

然ルニぴたごらすノ定理ニヨレバ

$$a^2+b^2=c^2$$



デアルカラ，コレヲ c^2 デ除スレバ

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

トナル．此ノ恆等式ヲ正弦，餘弦ノ記號デ書キ記セバ

$$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$$

トナル．$(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ナドヲ通常 $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ナドト書クカラ上式ハ

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

ト書クノガ普通デアル．

又 $\tan A=\frac{a}{b}$ デアルカラ右邊ノ分母子ヲ c デ除シテ

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin A}{\cos A}$$

從ツテ

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

ナル恆等式ヲ得ル．

此ノ式ノ兩邊ヲ二乘シテ夫々 1 ヲ加フレバ

$$1+\tan^2 A=1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}$$

即チ

$$1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$$

ナル恆等式ガ得ラレル．

又前ノ圖カラ直ニワカル樣ニ

$$\sin B=\frac{b}{c}\qquad \cos B=\frac{a}{c}\qquad \tan B=\frac{b}{a}$$

デアル．然ルニ C 角ハ直角デアルカラ $B=90°-A$ デアルコトハ明ラカデアル．故ニ $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$ ハ夫々 $\sin(90°-A)$, $\cos(90°-A)$, $\tan(90°-A)$ デアリ，且前ニ述ベタ樣ニ

$$\frac{b}{c}=\cos A\qquad \frac{a}{c}=\sin A\qquad \frac{a}{b}=\tan A$$

デアルカラ，上式ト考ヘ合セテ次ノ恒等式ガ得ラレル．

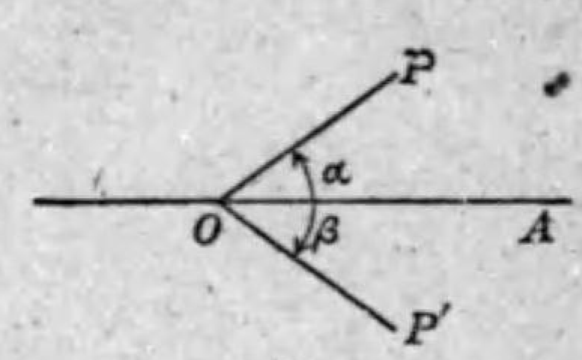
$$\sin(90^\circ-A)=\cos A$$

$$\cos(90^\circ-A)=\sin A$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{1}{\tan A}$$

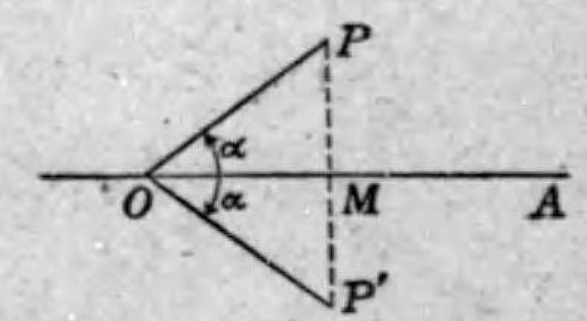
9 負　角

第20頁以後ニ述ベタヤウニ直線 OA 上ノ一點 O ヲ中心トシテ，線分 OP（又ハ半直線 OP）ガ OA ノ位置ヨリ時計ノ針ト反對ノ向キニ廻轉シタトスレバ，∠POA=α ハ正ノ角ナリトイヒ，又時計ノ針ト同ジ向キニ廻轉シテ OP′ ノ位置ニ來タトスレバ ∠P′OA=β ハ負ノ角ナリトイフノデアル．



モシ角 β ノ大サガ角 α ト等シケレバ

$$\beta=-\alpha$$



デアル．OP′ ノ長サヲ OP ト同ジニスレバ，P, P′ ヨリ直線 OA ニ下ス垂線ノ足ハ同ジ點デアルカラ，コレヲ M トスル．此ノ時ニハ，三角形 POM ハ明ラカニ三角形 P′OM ト全等形デアル．故ニ PM ノ長サハ P′M ノ長サニ等シイ．併シ第21頁ニ述ベタ樣ニ長サニ正負ヲ附ケテ考ヘルト，(PM ハ OA ノ上方ニ在ルカラ正デ，P′M ハ下方ニ在ルカラ M ヨリ上方ニ向ツテ進ンデ P ニ達シ，又 P′ ニ達スルニハ M カラ下方ニ進マナケレバナラナイコトヲ意味スル)負デアル．故ニ

$$\overline{P'M}=-\overline{PM}$$

トナル．OP ト OP′ トハ同ジ動徑デアルトシテ，正トスルカラ

$$\frac{P'M}{OP'}=-\frac{PM}{OP}$$

デアル．コレヲ正弦ノ記號デ書ケバ

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

トナル．

餘弦ノ場合ハ同樣ニ考ヘテ

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}\qquad \cos(-\alpha)=\frac{OM}{OP'}$$

デアルカラ，

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

トナル．次ニ正切ヲ考ヘルト

$$\tan\alpha=\frac{PM}{OM}\qquad \tan(-\alpha)=\frac{P'M}{OM}=-\frac{PM}{OM}$$

即チ

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

ヲ得ルノデアル．コノコトハ前ニ第25頁ニ擧ゲタ關係式

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

カラデモ直ニ得ラレル．即チ A ヲ $-\alpha$ トスレバ

$$\tan(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$$

デアルガ，右邊ノ分母子 $\sin(-\alpha)$，$\cos(-\alpha)$ ハ上ニ得タ通リ夫々 $-\sin\alpha$，$\cos\alpha$ ニ等シイカラ

$$\tan(-\alpha)=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

トナツテ同結果ヲ得ルノデアル．

以上得タ結果ヲ次ニ纏メテ置ク．

$\sin^2A+\cos^2A=1$	$\sin(90^\circ-A)=\cos A$
$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$	$\cos(90^\circ-A)=\sin A$
$1+\tan^2A=\frac{1}{\cos^2A}$	$\tan(90^\circ-A)=\frac{1}{\tan A}$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

(茲ニアル角 A, α ハ如何ナル角デモヨイ)

前頁下部右列ノ三式ニヨツテ，モシ角 A ガ 45° 以上 90° 以下ノ角ナラバ，ソノ正弦，餘弦ハ 90°−A ナル 45° 以下ノ正ノ角ノ餘弦，正弦ニ等シク，又正切ハソノ逆數ニ等シイカラ，0° 乃至 45° ノ角ノ正弦，餘弦，正切ノ表ヲ作レバ 45° 乃至 90° ノソレ等三角函數ノ値ハコノ表ヲ用ヰテ知リ得ル筈デアル．下ニ簡單ナル表ヲ揭ゲル．(正切ノ表ハ第 8 頁ニアル[1])

附記 正弦，餘弦，正切等ハ皆二ツノ線分ノ長サノ比デアルカラ，ソレ等線分ノ長サヲ測ルニ尺寸ヲ用ヰテモ，m, cm ヲ用ヰテモ，ソノ比卽チ正弦，餘弦，正切等ハ同ジニナル (但シ二ツノ線分ヲ異ナル單位デ測ツテハイケナイコト勿論デアル)．ツマリ是等ノ函數ハ不名數卽チ唯ノ數デアツテ量デハナイ．

正弦，餘弦ノ表

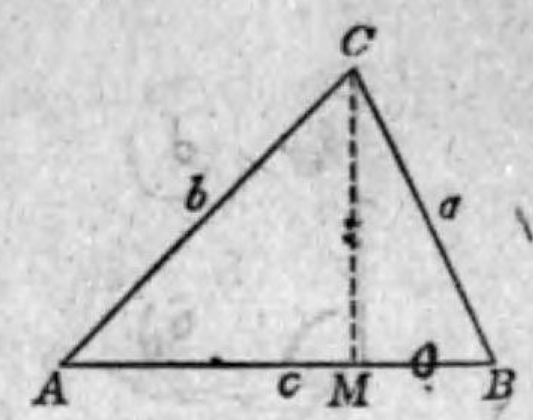
角	正弦	餘弦	角	正弦	餘弦	角	正弦	餘弦
0°	0.00	1.00	15°	0.26	0.97	30°	0.5	0.87
1°	0.01	1.00	16°	0.28	0.96	31°	0.52	0.86
2°	0.03	1.00	17°	0.29	0.96	32°	0.53	0.85
3°	0.05	1.00	18°	0.31	0.95	33°	0.54	0.84
4°	0.07	1.00	19°	0.33	0.95	34°	0.56	0.83
5°	0.09	1.00	20°	0.34	0.94	35°	0.57	0.82
6°	0.10	0.99	21°	0.36	0.93	36°	0.59	0.81
7°	0.12	0.99	22°	0.37	0.93	37°	0.60	0.80
8°	0.14	0.99	23°	0.39	0.92	38°	0.62	0.79
9°	0.16	0.99	24°	0.41	0.91	39°	0.63	0.78
10°	0.17	0.98	25°	0.42	0.91	40°	0.64	0.77
11°	0.19	0.98	26°	0.44	0.90	41°	0.66	0.75
12°	0.21	0.98	27°	0.45	0.89	42°	0.67	0.74
13°	0.23	0.97	28°	0.47	0.88	43°	0.68	0.73
14°	0.24	0.97	29°	0.48	0.87	44°	0.69	0.72
						45°	0.71	0.71

1) 卷末附表參照．

例 三角形 ABC ニ於テ

$$A=60^\circ \quad b=6\text{尺} \quad c=3\text{尺}$$

デアル．此ノ三角形ヲ解ケ．



解 二邊ト夾角トヲ與ヘタ場合デアルカラ，第 18 頁ニ述ベタヤウニ C ヨリ AB ニ垂線 CM ヲ下シ，先ヅ AM ヲ求メル．

$$AM=b\cos A=6\cos 60^\circ$$

デアル．前々頁ノ公式ヨリ

$$\cos 60^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\sin 30^\circ$$

卽チ 30° ノ正弦ノ値ヲ表ニ索ムレバ

$$\sin 30^\circ=0.5,$$

ヨツテ

$$AM=6\times 0.5=3$$

卽チ AM ハ 3 尺デアル．從ツテ

$$BM=c-AM=3-3=0$$

トナリ，結局 B 點ハ M 點ニ他ナラナイ，故ニ B 角ハ AMC 角ト一致シテ，90° デアル．ヨツテ三角形 ABC ハ直角三角形デアル．他ノ一角 C ハ

$$C=90^\circ-A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$$

デアル．又 a ヲ求メルニハ，B 角ガ直角デアルカラ

$$a^2=b^2-c^2=36-9=27$$

$$a=\sqrt{27}=5.196$$

卽チ約 5 尺 2 寸ナルコトガワカル．コレヲ三角函數ヲ用ヰテ求メルニハ

$$a=CM=b\sin A=6.\sin 60^\circ=6.\cos 30^\circ$$

$$=6\times 0.87=5.22$$

トナツテ前ヨリハ少シ大キクナル．コノ違ヒハ餘リ簡單ナ表ヲ用ヰタカラ起ツタノデ，今少シ精密ナ表ヲ用ヰレバ

$$\cos 30^\circ=0.8660$$

デアルカラ

$$a=6\times0.8660=5.196$$

ヲ得テ，前ト同ジ結果トナル．

三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}bc\sin A$ デアルカラ(第23頁)

$$\frac{1}{2}\times6\times3\sin60^\circ=9\times0.87=7.83$$

卽チ約 7.83 平方尺デアル．

10 地球ト月トノ大キサト距離

前ニ述ベタ樣ニ，三角法ヲ用ヰテ高サ距離等ヲ計算スルコトガ出來ルノデアルカラ，一歩進ンデ天體ノ大キサヤ，距離ナドヲ測定スルニ應用出來ナイデアラウカ．實ハ三角法ハ天文學ノ爲ニ發達シタノデアツテ，前ニ第1頁ニ揭ゲタあはめすノ數學書ノ中ニモ多分餘弦ニ相當スルモノデアラウト思ハレル量ノ事ガ載セテアルサウデアル．併シ眞ノ三角法ハ天文學上ノ必要カラぎりしやトあらびやニ創マリ，特ニ後者ニ於テ發達シタトイフ．以下當面ノ問題ヲ明治四十二年ニ東京帝國大學ノ教室ニ於テ催サレタ日本數學物理學會(當時ノ東京數學物理學會)ノ通俗講演會ニ於ケル故理學博士寺尾壽氏ノ講演ヲ基礎ニシテ述ベテ見ヨウ．

11 地球ノ大キサ

天體ノ大キサ及ビ距離ヲ測ルニハ地球ノ大キサガ基ニナルノデアルカラ，先ヅ地球ノ大キサカラ測定シテ掛ラナケレバナラナイ．コレヲヤルノハ測地學[1]デアル．地球ノ形ハ球ニ近イガ，嚴密ニイヘバ球デハナク，赤道ノ直徑ヨリハ南北極ノ距離ガ約三百分ノ一短イノデアル．併シ以下球トシテ話ヲ進メル．

球ハ平面上ニ描イタ圓ヲ，ソノ直徑ヲ軸トシテ廻轉シテ出來タモノト考ヘ

1) *Geodesy.*

ラレル；又中心ト稱スル一點ヨリ一定ノ距離ニ在ル總テノ點ノ集リト見テモヨイカラ，球ヲ平面デ截レバ，截口ハ必ズ圓デアル．ソノ截平面ガモシ中心ヲ通ルナラバ，ソノ截口ハ最モ大キナ圓デ，此ノ場合ニコレヲ球ノ大圓又ハ大圏[1]トイヒ，中心ヲ通ズル平面ナラバ，ドレデ截ツテモ皆等大ノ圓トナルノデアル．地球上ノ二點間ノ距離トイフノハ，此ノ二點ヲ通ズル地球ノ大圓ニ沿ウテ測ツタ長サノ事デアル．

地球ノ大キサヲ知ルニハ，地球ノ周圍卽チ地球ノ大圓ノ圓周ノ長サヲ測レバヨイ．コレガワカレバ直ニ，ソノ圓ノ半徑卽チ地球ノ半徑ガワカルカラデアル．平面幾何學デ學ンダ通リ，半徑ヲ r トシ，圓周ノ長サヲ l トスレバ

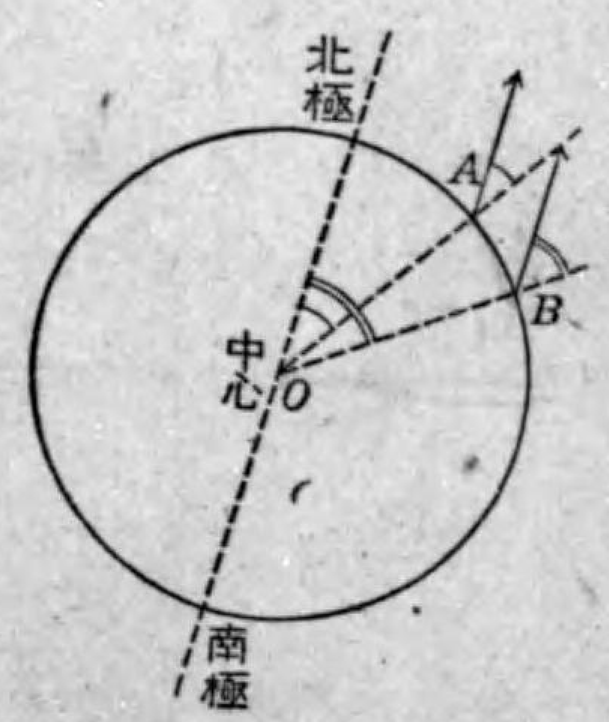
$$l=2\pi r\quad(\pi\fallingdotseq3.1416)$$

トイフ關係ガアルカラ，l ヲ知レバ

$$r=\frac{l}{2\pi}$$

ニヨツテ半徑 r ヲ計算シ得ルノデアル．

然ラバ周圍 l ヲ測ルニハ如何ニスレバヨイカ．先ヅ地球ノ廻轉軸(南極，北極ヲ連ヌル直線デ，勿論地球ノ中心ヲ通ル) ヲ通ズル一平面デ地球ヲ截ツタト想像スルト，ソノ截口ハ地球ノ大圓デ，所謂子午線[2]ノ一ツデアル．今地球ノ中心ニ於ケル一度ノ角ニ對スル子午線ノ弧ノ長サヲ知レバ，ソレヲ360倍シテ子午線ノ全長卽チ地球ノ周圍ノ長サガワカルノデアル．實際ニハ同一子午線ノ上ニ適宜ニ二地點 A ト B トヲ選ンデ，ソノ間ノ子午線ノ長サヲ測ル．コノ測量ハ，AB ノ長サガ短ケレバ直接測鎖ヲ當



1) *Great circle.*　2) *Meridian*，時ニ北極ト南極トノ間ノ半圓ダケヲ子午線トイフコトモアル．

テルコトモ出來ルガ，餘リ短クテハ，以後ノ計算ニ誤差ガ大キクナルカラ，A ト B トハ相當ノ距離ヲ隔テル必要ガアル．ヨツテ，ソノ距離ノ測量ハ結局三角法ヲ應用シテ三角測量ニ賴ルコトニナルノデアル．斯クテ適當ノ方法ヲ用ヰテ AB ノ距離ガワカツタトスル．

地球上 A 點ニ於テ北極星ヲ望ンデ，ソノ地點ノ鉛直線トノ間ノ角（又ハ水平面トノ間ノ角デモヨイ）ヲ測レバ，ソレハ地球ノ中心 O ニ於テ A 點ヲ通ル半徑ト地軸トノナス角（又ハ赤道面トナス角）ニ他ナラヌ．如何トナラバ，北極星ハ吾人ノ位置 A 點ヨリ非常ニ遠クシテ，ソレヲ望ム直線ハ殆ンド地軸ト平行ト見テヨイカラデアル．コレト同ジク B 點ニ於テモ，地球ノ中心 O ト B 點トヲ結ブ直線ト地軸トノ間ノ角ヲ測ルコトガ出來ル．A 點 B 點ニ於テ測リタル是等二角ノ差ハ卽チ A, B 二地點ノ緯度ノ差デアル（A 點ノ緯度トハ O ト A トヲ結ブ直線ト赤道面卽チ地軸ニ直角ニシテ且 O ヲ通ズル平面トノ間ノ角デアル）．斯クシテ知リ得タル AB 二地點ノ距離ヲ d 緯度ノ差ヲ α 度トスレバ，α° ニ對スル地球ノ子午線ノ弧ノ長サハ d デアル．故ニ緯度 1° ニ對スル子午線ノ弧ノ長サハ $\frac{d}{\alpha}$ デ從ツテ子午線ノ全長 l ハ

$$l=\frac{d}{\alpha}\times 360$$

デナケレバナラナイ．此ノ方法デ獨國天文學者べっせる[1]ガ皇紀二千五百一年（西暦 1841）ニ調査シテ得タノガ

$$\text{子午線全長ノ}\ \frac{1}{4}=10000.856\ \text{km}$$

デ，從ツテ

極半徑　$=6356.079$ km

デアルガ，氏ガ得タ赤道半徑ハ

赤道半徑　$=6377.397$ km

1) *Bessel.*

デアツタ．ソノ後二三ノ調査ガアツタガ，へいふぉーど[1]ノ調査ニヨルト

$$\text{子午線全長ノ}\ \frac{1}{4}=10002.286\ \text{km}$$

極半徑　$=6356.909$ km

赤道半徑　$=6378.388$ km

デアルカラ，極半徑デモ，赤道半徑デモべっせるノ得タ結果ニ較ベテ約一粁卽チ 1000m ノ差ガアル．他ノ人々ノ調査ノ結果ハ是等二人ノ結果ノ中間ニ在ルノデアルカラ，地球ノ半徑ノ測定ノ誤差ハ約 1000m 卽チ約九町十間ヲ超過シナイト見テヨイデアラウ．コノ半徑ヲ里法ニ書キ直スト約千六百二十四里トナルカラ，千六百里ノ測量ニ誤差ガ僅カニ九町程度デアルコトハ好結果トイフベキデアラウ．

元來一「メートル」ノ長サハ皇紀二千四百五十一年（西暦 1791）ニふらんす國民議會ニ於テ地球ノ子午線全長（地球全周圍）ノ四千萬分ノ一ト定メラレ，二年後皇紀二千四百五十三年（西暦 1793）ニ實施セラレタル測量[2]ノ結果ニヨツテ定メラレタトノ事デアルカラ，子午線ノ全長ハ丁度四千萬「メートル」卽チ四萬粁デアルベキナルニ，前ニ述ベタ樣ニ精密實測ノ結果ハ

$$10002.286\times 4\text{km}$$

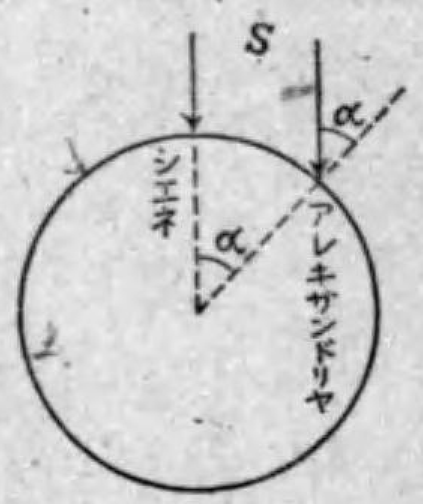
デアルカラ，所謂一「メートル」ハ地球全周ノ

$$\frac{1}{4\times 10002.286}$$

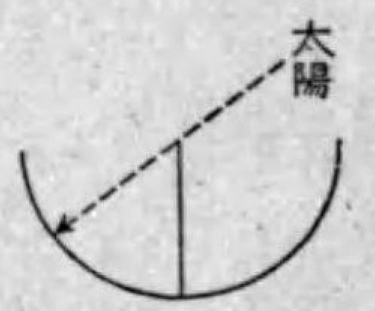
デアツテ，眞ノ四千萬分ノ一ヨリハ稍〻短イノデアル．ヨツテ現今デハ周知ノ通リ，1m ノ長サハ地球全周ノ四千萬分ノ一トセズ，佛國ぱり市ニ保管セラレテアル「メートル」原器ノ兩端標線ノ間ノ長サト規定スル必要ガ起ツタノデアル．

1) *Hayford.* 2) ばるせろな（*Barcelona*）だんけるく（*Dunkirk*）間ノ子午線ノ弧ノ長サヲどらんぶる（*Delambre*）めしぇん（*Méchain*）ガ測リタル結果ヲ用ヰタルモノトイフ．二地點共ニ大約東經 2° ノ子午線上ニ在ル．

以上述ベタル方法ニヨツテ地球ノ周ノ長サヲ測ルコトハ西暦紀元前二百五十年卽チ皇紀四百十一年(又ハ二百二十年卽チ皇紀四百四十一年トモイフ)ニえらとすてねす[1]ノ試ミタル所デアルトイフ. 彼ハしえね[2](現今ノあすあん[3]ニシテないる河ノ上流ニ在リ)ニ於テ, 夏至ニハ深キ井戸ノ水ニ太陽ノ影ノ映ルコトヲ見タ. コレハ, 其ノ時ニ太陽ハ其ノ井戸ノ天頂(眞上)ニ在ルコトヲ意味スルノデアル (井戸ハ深キガ故ニ光線ガソノ眞上ノ方向ヨリ射入スルニ非ザレバ, 又其ノ井戸ノ側壁ニ遮ギラレテ再ビ眞上ノ井戸ロマデ反射シ來リ難キガ故デアル). 然ルニあれきさんどりやニ於テハ, 是ト同ジ時刻ニ太陽ハ天頂ヨリ下方 7°12′ 卽チ地球ノ全周ノ$\frac{7.12}{360}\fallingdotseq\frac{1}{50}$ ニ在ルコトヲ知ツタ. コレヲ測ルニハ, 半球形ノ器具ノ中央ニ其ノ半徑ニ等シキ棒ヲ立テ, 太陽ニヨル其ノ半球上ノ影ヲ用ヰタトイフコトデアル.



しえねトあれきさんどりやトガ同一子午線上ニ在リトスレバ, 此ノ角ハ兩地點ノ緯度ノ差デアル. 上ニ述ベタ樣ニ此ノ兩地點ヲ結ブ子午線ノ弧ノ長サハ地球全周ノ約五十分ノ一デアル. 故ニ此ノ兩地點間ノ距離ヲ知レバ地球ノ全周ガワカル筈デアル. 此ノ距離ヲ測ツテ約五千「スタヂウム[4]」(ぎりしやノ長サノ單位デ約 185 m)デアルコトガワカツタカラ,



地球全周 =5000「スタヂウム」×50
=250000「スタヂウム」
=46250 km

トナル. 然ルニ現今デハ地球全周ハ前ニ述ベタ通リ約四萬粁デアルコトガ知レテ居ルカラ, 約六千粁長過ギタ譯デアル. えらとすてねすノ選ンダ二地點

1) *Eratosthenes.* 2) *Syene.* 3) *Assuan.* 4) *Stadium.*

ノ經度ヲ調ベテ見ルト

しえねノ經度 32°55′E
あれきさんどりやノ經度 30° 0′E

デアツテ, 同一子午線上ニナイノデアル. コレモ誤差ノ起ツターツノ原因デアラウ.

附記 西暦紀元前 85 年 (皇紀五百七十六年)ニぽしどにうす[1]ハあれきさんどりやト地中海ノろどす島トノ間ニ此ノ方法ヲ用ヰタトイフ. 併シ眞ノ意味ニ於ケル最初ノ子午線ノ測量ハ西暦 827 年 (皇紀千四百八十七年)ニかりふ・ある・まぬん[2]ノ下ニばくだっど地方ニ於テあらびや測量家ノ試ミタモノデアル. 一地點ヲ南北ニ通過スル子午線ニ沿ウテ南北ニ向ツテ測量技師ヲ派シ, 太陽ノ正午ノ高度ヲ測リツヽ原點ニ於ケル高度トノ差ガ各$\frac{1}{2}^{\circ}$ナル兩地點ヲ定メ, 是等二地點ノ間ノ距離ヲ測鎖又ハ紐ヲ以テ測リ, コレヲ反復數度試ミテ, 終ニ子午線上一度ノ長サ $56\frac{2}{3}$ あらびや「マイル」ヲ得タガ, コレハ今日ヨリ見レバ$\frac{1}{100}$乃至$\frac{1}{10}$大ニ過ギルトノ事デアル.

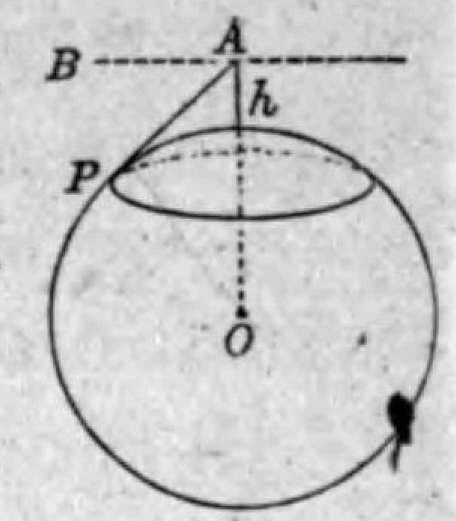
七百年ノ後佛國ノ醫師ふぇるねる[3]ハ同樣ノ方法ヲぱり, あみあん間ニ試ミ, 其ノ後種々ノ人ニヨツテモ亦試ミラレタノデアル. 此ノ方法ノ難點ハ子午線ノ一部ノ長サヲ正シク測ルコトノ困難ナルコトデアル. 此ノ困難ヲ克服シタノハ十七世紀ノ初期ノ和蘭人すねりうす[4]デアル. 彼ハ三角法ヲ應用シタル所謂三角測量ヲ考案シタノデアル.

12 視界半徑[5]

地球ノ形ハ正シイ球デハナイガ, コレヲ球ト假定スレバ, 地表面上ノ高サ

1) *Posidonius.* 2) *Kalif al Manun.* 或ハまむん (*Mamun*)トアリ 3) *Fernel.* 4) *Snellius.* 5) *Distance of the horizon.*

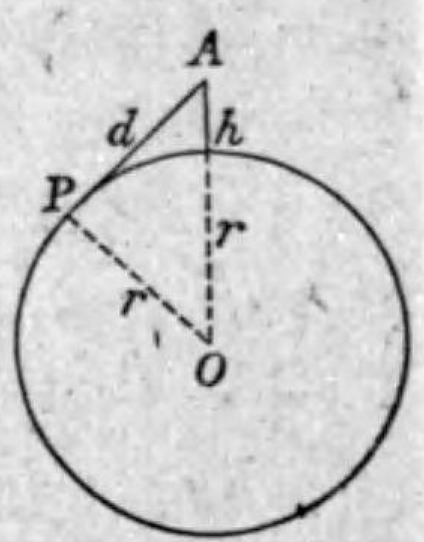
h ナル點 A ヨリ見得ル地平線[1]ハ一ツノ圓デアル．ソレハ A ヨリ地球ノ表面ニ引イタ切線 AP ノ切點 P ノ軌跡デアル．コノ圓ガ A 點ヨリ展望シ得ル限界デアル．AP ノ長サヲ d トスレバ，d ハ所謂視界半徑デアル．此ノ直線 AP ガ A ニ於ケル水平線 AB ト作ス角 BAP ヲ A 點ニ於ケル地平線俯角(視界俯角[2])トイフノデアル．



地球ノ半徑ヲ r デ表セバ，半徑 OP ハ切線 AP ニ垂直デアルカラ，ぴたごらすノ定理ニヨツテ

$$d^2+r^2=(r+h)^2$$

デアル．書キ直セバ



$$d=\sqrt{(r+h)^2-r^2}$$

$$=\sqrt{h(2r+h)}$$

トナル．然ルニ

$$h(2r+h)=2hr\left(1+\frac{h}{2r}\right)$$

デアリ，$\dfrac{h}{2r}$ ハ通常1ニ對シテ非常ニ小サイト見テヨイカラ(h ハ地球ノ半徑ニ比シテ小サイカラ)之ヲ省略シテ

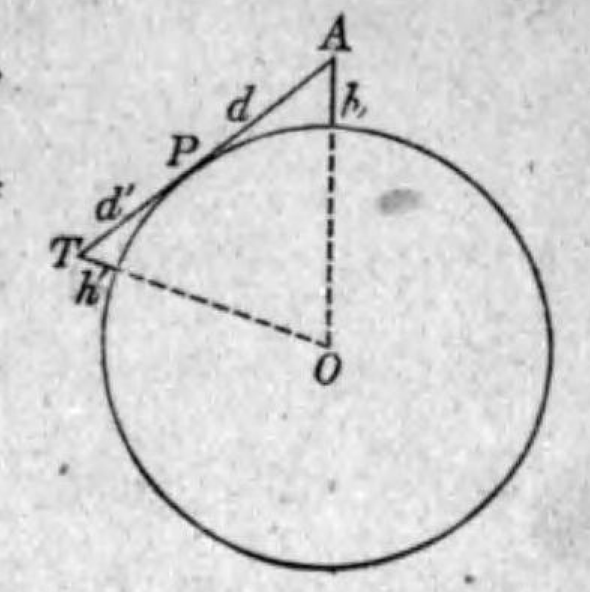
$$d\fallingdotseq\sqrt{2hr}\ ^{3)}$$

トシテモ誤差ハ極メテ小サイデアラウ．今地球ノ半徑 r ヲ大約 6370m トシテ h ノ種々ノ値ニ對スル d ノ値ヲざいどりっつノ地理書ヨリ取ツテ次ニ掲ゲル

h	d
10m	11.3 km
100m	45.2 km
300m	61.8 km
9000m	338.7 km

1) *Horizon.* 2) *Dip of the horizon.* 3) ≒ ハ殆ンド等シノ略符.

下圖ノ如ク海上 A ニ於テ燈臺 T ヲ丁度水面上ニ望見シ得タトシ，T ノ高サ h' ハ既知デアルカラ AT ノ距離ハ A 點ノ高サ h ト T 點ノ高サ h' トニ對スル視界半徑ノ和 $d+d'$ デアル．卽チ A ヨリ $d+d'$ ノ距離ニ陸地ノ在ルコトヲ知リ得ルノデアル．



上ニ得タ式 $d\fallingdotseq\sqrt{2hr}$ ニ於テ r ヲ「キロメートル」デ表シタモノトシ，地球ノ半徑ヲ大約

$$r=6370\text{ km}$$

トスレバ，上式ハ

$$d\fallingdotseq\sqrt{2\times6370\times h}=\sqrt{12740\times h}$$

トナリ，從ツテ次ノ樣ニ書キ得ル

$$d\fallingdotseq\sqrt{25480\times\frac{h}{2}}$$

今便宜上 h ヲ米デ表シタトスレバ，ソレハ $\dfrac{h}{1000}$km デアルカラ，上式ハ又

$$d\fallingdotseq\sqrt{25480\times\frac{h}{2\times1000}}$$

$$\fallingdotseq\sqrt{25.480\times\frac{h}{2}}$$

$$\fallingdotseq5\times\sqrt{\frac{h}{2}}\ \text{(km)}$$

トナル．故ニ，假リニ人ノ步行速度ハ一時間ニ 5 km ヲ普通トスレバ d ハ $\sqrt{\dfrac{h}{2}}$ 時間行程トナル．海岸ニ於テ海拔 50 m ノ高所ニ居ル人ハ $\sqrt{\dfrac{h}{2}}=\sqrt{25}=5$ 卽チ5時間行程ノ視界半徑(視界マデノ距離)ヲ有ツ譯デアル．

更ニ r ヲ哩[1]デ表シテ見ルト，1 km ハ 0.621382 哩デアルカラ大約

1) 英哩.

$r=3960$ 哩トナル．又 h ヲ呎(フート)ニテ表シタモノトスレバ 1 哩ハ 5280 呎デアルカラ h 呎ハ $\frac{h}{5280}$ 哩デアル．是等ヲ $\sqrt{2rh}$ ニ入レレバ

$$d=\sqrt{2\times3960\times\frac{h}{5280}}\text{哩}\fallingdotseq\sqrt{\frac{3}{2}h}\text{哩}$$

トナル．故ニ假ニ $h=30$ 呎トスレバ

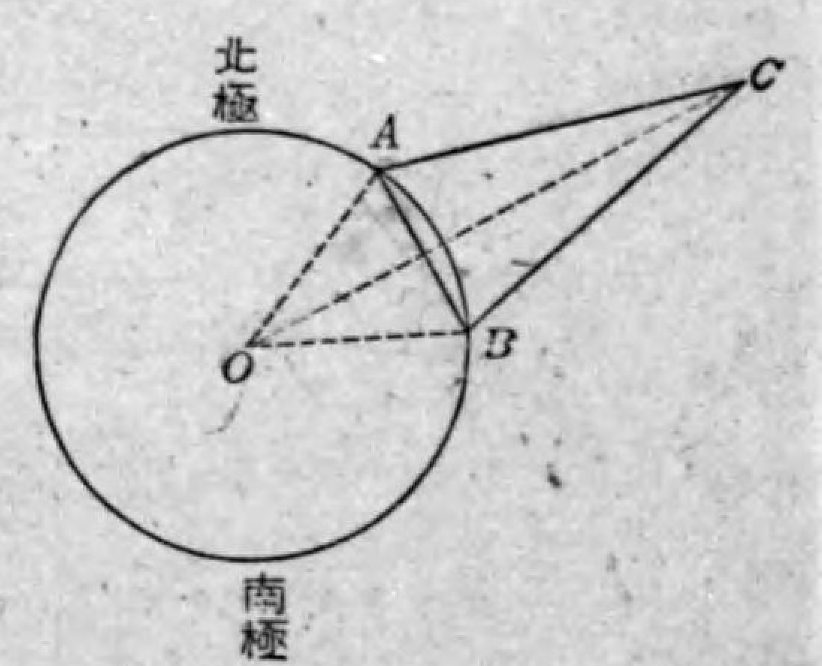
$$d\fallingdotseq\sqrt{\frac{90}{2}}=\sqrt{45}=6.7\text{哩}$$

トナツテ，6.7 哩ノ視界ヲ有スルコトヲ知ルノデアル．

以上ヲ以テ大體地球ノ大キサニ就テノ談ヲ措イテ，次ニ他ノ天體ノ距離ト大キサヲ考ヘテ見ヨウ．先ヅ吾人ニ最モ近イ月カラ始メル．

13　月ト地球トノ間ノ距離

地球ノ同一子午線上ニ二ツノ地點 A, B ヲ選ビ，月ガ此ノ子午線上ヲ通過スル時，是等ノ地點ニ於テ同時ニ月 C ヲ觀測シテ，夫々ノ地點ニ於ケル鉛直線(重力ノ方向)ト月ノ方向トノ間ノ角ヲ測ル．A, B 地點ノ緯度ハ知レテ居ルカラ，地球ノ中心 O ニ於ケル角 AOB ガワカル．OA ト OB トハ地球ノ半徑デアルカラ互ニ相等シイト見レバ，三角形 AOB ハ二等邊三角形デ，從ツテ ∠OAB=∠OBA デアリ，其ノ大キサハ 180° ヨリ ∠AOB ヲ減ジタルモノノ半分デアル．コレト，前ニ A ト B トニ於テ測ツタ角ヲ用ヰテ ∠CAB ト ∠CBA トハ容易ニワカル．又二等邊三角形 AOB ニ於テ OA=OB=地球ノ半徑 デ既知デアリ，ソノ夾角 AOB ハ知レテ居ルカラ，此ノ三角形ヲ解クコトガ出來ル(第 18 頁)．卽チ AB ノ長サヲ計算シ得ル筈デアル．從ツテ三角形 ABC ヲ解クコトガ出來ル．卽チ AC, BC ノ



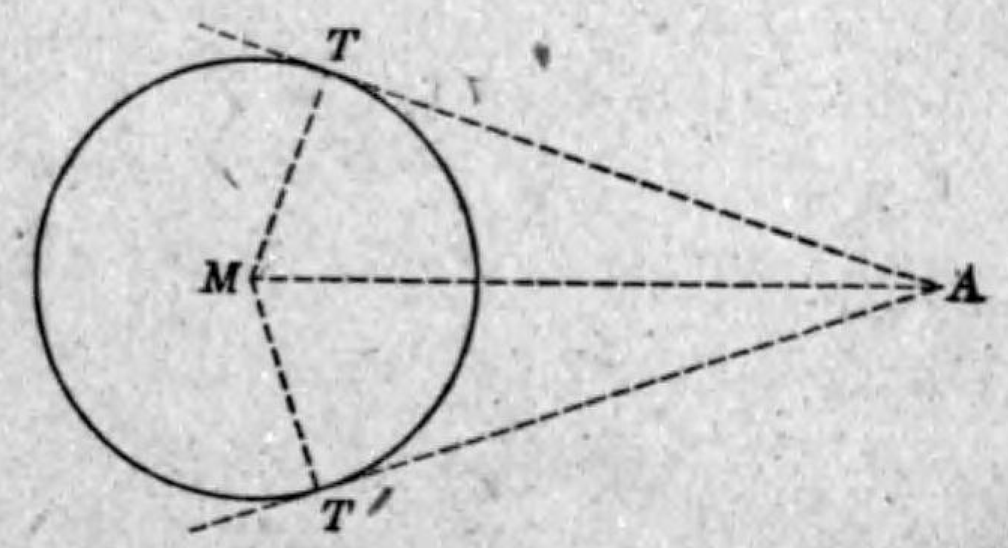
長サガワカル．故ニ三角形 OAC (又ハ OBC) ニ於テ二邊 OA ト AC トガワカリ，其ノ夾角 OAC ガワカルカラ邊 OC ガ計算シ得ラレル．卽チ地球ノ中心カラ月ニ至ル距離ヲ計算シ得ル譯デアル．

西曆 1750 年(皇紀二千四百十年)ニ此ノ方法ヲ用ヰテ伯林[1]ト喜望峰[2]トニテ同時觀測ヲナシ，地球ヨリノ月ノ距離 384400 km ヲ得タノデアル．コレハ地球ノ半徑 6370 km ノ約 60.3 倍デアル．コレヲ里法ニテ記セバ地球半徑 1624 里ノ 60.3 倍卽チ九萬七千九百二十七里トナル．此ノ數字ニハ五十里以下ノ誤差ハアリ得ルガ，ソレ以上ノ間違ハナイトイフコトデアル．故ニ地球ト月トノ間ノ距離ハ九萬七千九百里トシテヨイデアラウ．

14　月　ノ　大　キ　サ

月ノ樣ニ望遠鏡ヲ用ヰテ圓形(一點デナイ)ニ見エルモノニ於テハ，ソノ距離ヲ知レバ直ニ其ノ大キサヲ計算シ得ルノデアル．

右圖ニ於テ MT, MT′ ヲ月ノ半徑トシ，A 點ニテ觀測シテ月ヲ見込ム角 ∠TAT′ ヲ測ル．此ノ角ヲ月ノ視直徑[3]，ソノ半ヲ月ノ視半徑[4]トイフ．後者ハ角 MAT デアル．月ト地球ノ距離 MA ヲ知レバ，角 MTA ハ直角デアルカラ



$$MT=MA\sin MAT$$

ナル關係式カラ MT ヲ計算スルコトヲ得ル．卽チ月ノ半徑ヲ知リ得ルノデアル．月ノ視半徑ハ 14′ 45″ ト 16′ 37.6″ トノ間ニアルトイフ．コレヲ假ニ

1) *Berlin.* 2) *Cape of Good Hope.* 3) *Angular diameter.*
4) *Semi-diameter.*

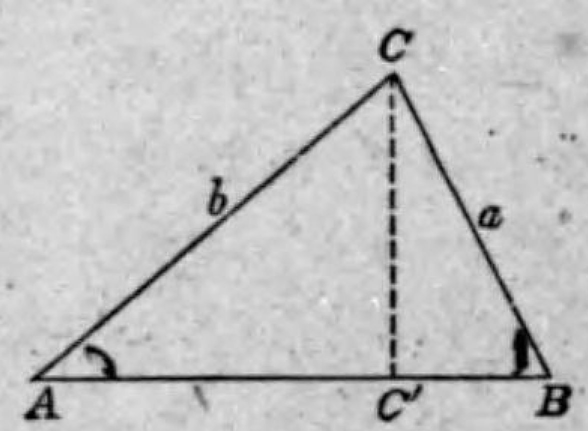
15′ 33″ トスレバ，月ノ半徑ハ 1739km 卽チ地球ノ半徑ノ $\frac{3}{11}$ トナル．里法ニテ記セバ四百四十三里トナル．コノ値ノ誤差ハ一里ヲ超過シナイトイフ，十萬里ノ遠方ニ在ル月ノ半徑ヲ一里以下ノ誤差ヲ以テ測リ得タノデアル．月ノ半徑ハ大體仙臺―長崎間ノ距離ニ相當スル．

15 太　　陽

太陽ノ距離及大キサモ亦同ジ樣ニシテ測ルコトガ出來ルカトイフニ，コレニハ困難ガアル．太陽ハ月ニ比較シテ非常ニ遠イノデ，第 38 頁ノ圖ニ於テ，C ヲ太陽トスルト AC ト BC トガ殆ンド平行スル．ヨツテ月ノ場合ニ用キタ方法ヲ其ノ儘用キテ距離ヲ測ルコトハ難シイ．併シ太陽ノ場合ニハ他ノ惑星(遊星)ノ旣知ノ距離トノ比ヲ求メテ計算スルコトガ出來ルノデアル．斯クシテ得タル太陽ノ地球カラノ平均距離ハ 147801000km デ，コレニヨリ月ノ場合ノ方法ヲ用キ，視半徑ヲ 16′ トシテ計算スレバ太陽ノ半徑ハ 687870km トナルノデアル．

16 三角函數ノ加法定理

三角法ヲ解クコトノ大要ハ旣ニ述ベタガ，最後ニ三角法中最モ大切トサレテ居ル加法定理[1]ヲ添ヘテ置ク．



A 角及ビ B 角ヲ隨意ニ定メテ三角形 ABC ヲ作レバ C 角ハ 180° ヨリ (A+B) ヲ減ジタルモノニ等シイコトハ旣知ノ事實デアル．

$$\mathrm{C}=180°-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

又第 19 頁ニ述ベタ樣ニ次ノ關係式ガアルコトモ上圖カラ容易ニワカル．

$$c=a\cos\mathrm{B}+b\cos\mathrm{A}$$

尙正弦法則ニヨレバ

1) *Addition theorem.*

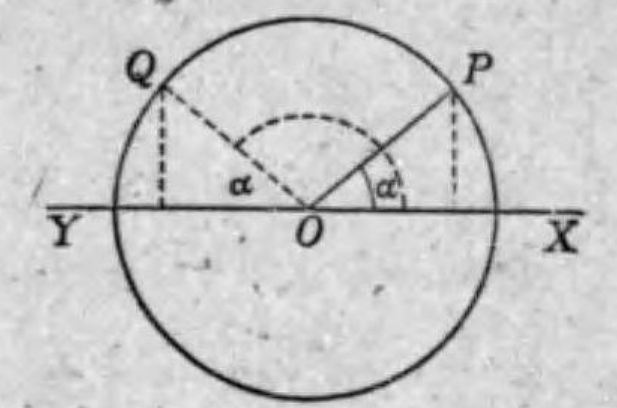
$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{b}{\sin\mathrm{B}}=\frac{c}{\sin\mathrm{C}}$$

デアル．

然ルニ $\mathrm{C}=180°-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ デアルカラ

$$\sin\mathrm{C}=\sin\{180°-(\mathrm{A}+\mathrm{B})\} \qquad (1)$$

トナル．



今半徑 1 ナル圓ノ中心 O ニ於テ任意ノ角 α ニ等シク $\angle\mathrm{POX}=\alpha$，$\angle\mathrm{QOY}=\alpha$ ヲ作レバ，角 QOX ハ $(180°-\alpha)$ デアルコトハ明ラカデアル．點 P 及ビ Q ヨリ直線 XY ニ下ス垂線ノ長サハ(半徑卽チ OP, OQ ハ 1 デアルカラ)夫々角 POX，角 QOX ノ正弦デアリ，且相互ニ等シイコトモ明ラカデアル．故ニ

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$$

ナルコトガワカル．コノ結果カラ

$$\sin\{180°-(\mathrm{A}+\mathrm{B})\}=\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

デアルコトガワカルカラ上記 (1) ヨリ

$$\sin\mathrm{C}=\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

デナケレバナラナイ．ヨツテ前記正弦法則ハ

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{b}{\sin\mathrm{B}}=\frac{c}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$$

ト書イテモヨイ．此ノ式ノ相互ニ等シイ各分數ノ値ヲ假ニ k デ表セバ

$$a=k\sin\mathrm{A} \qquad b=k\sin\mathrm{B} \qquad c=k\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

トナルカラ，コレヲ前記ノ式

$$c=a\cos\mathrm{B}+b\cos\mathrm{A}$$

ニ入レテ，共通因子 k ヲ取リ去レバ

$$\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{B}$$

トナル．コノ式ヲ正弦函數ノ加法定理トイフ．コノ式ノ A,B ハ三角形ノ角デアルカラ餘リ大キナ角デナイ場合ニ上式ヲ證明シタノデアルガ，A ト B トハ如何ナル角デアツテモ上式ノ正シイコトハ證明出來ルノデアル．併シ吾人ハソノ證明ヲ略スルコトニスル．

上式ノ B ノ代リニ −B ヲ書イテ見ルト第 28 頁ニ掲ゲタ關係式

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

ヲ用キテ

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

ヲ得ルノデアル．コレモ亦加法定理トイウテヨイ．

次ニ上式中ノ A ノ代リニ 90°−A ヲ用キレバ

$$\sin\{90^\circ-(A+B)\}=\sin(90^\circ-A)\cos B-\cos(90^\circ-A)\sin B$$

トナル．第 27 頁ノ公式

$$\sin(90^\circ-A)=\cos A \qquad \cos(90^\circ-A)=\sin A$$

ヲ用キテ書キ替ヘルト上式ハ變ジテ

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

トナル．再ビ B ノ代リニ −B ヲ入レルト，コノ式ヨリ

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

ヲ得ルノデアル．最後ノ二式ヲ餘弦函數ノ加法定理トイフノデアル．

正切函數ノ加法定理ハ正弦，餘弦ノ加法定理カラ容易ニ求メラレル．

前ニ第 25 頁ニ示シタ通リ

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

デアルカラ

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

デアルコト勿論デアル．然ルニ今得タ樣ニ

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

デアルカラ

$$\tan(A+B)=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

トナル．コノ右邊ノ分母子ヲ $\cos A\cos B$ デ除スレバ

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

トナツテ，右邊ハ角 A 角 B ノ正切ノミデ表サレテ居ル．コレガ正切函數ノ加法定理デアル．

前ト同樣ニ B ヲ替ヘテ −B トスルト，上式ハ變ジテ

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

トナルノデアル．

以上得タ加法定理ヲ纏メテ書クト

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B, \qquad \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B, \qquad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}, \qquad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

是等ノ式ハ三角法デ最モ大切ナ式デ，三角法ノ殆ンド總テノ關係式ハ皆加法定理ヨリ誘導シ得ラレルト言ツテモヨイ程デアル．又前ニ述ベタ樣ニ是等ノ式ハ角 A,B ガ正負大小如何ナル場合デモ通用スルノデアル．

最後ニ注意スベキ事ガアル．第 41 頁ノ圖ニ於テ α ハ角 POX ヲ表スノデアルガ，コレニ 360° ヲ加ヘタ $360^\circ+\alpha$ ニ對シテハ P 點ハ如何ナル位置ニ來ルカヲ考ヘテ見ルニ，OP 直線ハ O 點ヲ軸トシテ時計ノ針ト反對ノ方向ニ一廻轉シテ再ビ OP ノ位置ニ來ルデアラウ．故ニ $360^\circ+\alpha$ ノ正弦，餘弦，正切ハ皆 α ニ對スル値ト全ク同ジ値ヲ有ツコトハ明ラカデアル．ヨツテ

$$\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(360^\circ+\alpha)=\tan\alpha$$

トナル，卽チ $\alpha = 360°$ ヲ加ヘテモ是等函數ノ値ニハ變化ハナイノデアル。斯カル數 360° ヲ是等函數ノ週期[1]トイフ．又是等函數ヲ週期函數[2]トイフノデアル．唯正切ノ場合ハ $\alpha = 180°$ ヲ加ヘテモ變化ガナイカラ，正切ノ週期ハ 180° デアル．

以上デ三角法ノ大要ヲ終ルコトニスル．測量又ハ天文ナドノ研究ニ三角法ノ必要ナルコトハ理解出來タト思フ．古代ニ於テモ天文研究ノ必要カラ三角法ガ起ツタトイフ．ソノ第一期ニ於テハぎりしや人及ビあらびや人ハ三角法ノ基礎ノ式ノ一部ヲ發見シテコレヲ計算ニ使用シタトイフガ今日ノ如ク完備シタル形ノモノデナイノハ勿論デアラウ．中世紀ノ初ヨリ第十七世紀ノ半バニ至ル第二期ニ於テハ數學上ノ知識モ漸次向上シテ三角函數ノ如ク角ノ函數ヲ用キテ計算シ，ソノ數値表ヲ調製スルコトヲ始メタ．ソノ後第三期ニ於テハ平面上ノ平面三角法ノ外ニ球面上ノ計算卽チ天文航海等ニ使用スル爲ノ球面三角法ノ發達ヲ見ルニ至ツタ．

17 對　數[3]

三角函數ハ天文，測量，航海等ノ學ニ必要ナルモノデアルガ，夫等ハ如何ナル値ヲ有ツテ居ルデアラウカ．特殊ナ角ニ對シテハ比較的簡單ナル値ヲ有ツコトモアル．例ヘバ

$\sin 0° = 0$	$\cos 0° = 1$	$\tan 0° = 0$
$\sin 30° = 0.5$	$\cos 60° = 0.5$	$\tan 45° = 1$
$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$	$\tan 90° = \infty$(無限大)

ノ如キデアル．併シ一般ノ角ニ對シテハ無限ニ續ク小數又ハ帶小數デアルノガ普通デアル．例ヘバ

$\sin 18° = 0.3090170...$　$\cos 30° = 0.8660254...$　$\tan 60° = 1.7320508...$

等デアル．故ニ是等ヲ多數乘除スルコトハ可ナリ骨ノ折レル仕事デアル．

1) *Period.*　2) *Periodic function.*　3) *Logarithm.*

ヨツテ乘除ヲ容易ニスル希望ノ起ルノハ自然デアラウ．コノ目的ノ爲ニ發明サレタノガ對數デアル．對數ノ發明ハ面倒ナル乘除ニ加減算ヲ代用セントスルニ在ル．先ヅ氣付クノハ等差級數[1]ト等比級數[2]トノ利用デアル．之ヲ少シク考ヘテ見ヨウ．

初項ガ 1 デ公比ガ正ノ數 r ナル等比級數ト初項ガ 0 デ公差ガ正ノ數 d ナル等差級數トヲ並記シテ見ル[3]．

等比級數	$1 \quad r \quad r^2 \quad r^3 \ldots\ldots r^n \ldots\ldots$
等差級數	$0 \quad d \quad 2d \quad 3d \ldots\ldots nd \ldots\ldots$

等比級數ノ初項ニハ等差級數ノ初項ヲ，第二項ニハ第二項ヲ，第 n 項ニハ第 n 項ヲ對應セシメテ考ヘテ見ル．等比級數ノ第 $m+1$ 項ト第 $n+1$ 項トノ相乘積ハ

$$r^m \times r^n = r^{m+n}$$

デアツテ，等比級數ノ第 $(m+n+1)$ 項デアル．等差級數ノ第 $m+1$ 項ト第 $n+1$ 項トノ和ハ

$$md + nd = (m+n)d$$

デアルカラ，等差級數ノ第 $(m+n+1)$ 項デアル．卽チ丁度等比級數ノ第 $(m+n+1)$ 項ニ對應スル項デアル．故ニ r^m ト r^n トノ相乘積ヲ求ムルニハソレ等ニ對應スル等差級數ノ二項 md ト nd トノ和ヲ求メ，ソノ和 $(m+n)d$ ニ對應スル等比級數ノ項ヲ索ムレバ丁度 r^{m+n} ヲ得テ，乘法演算ヲ行ハズシテ結果ガ得ラレル筈デアル．等比級數 $r, r^2, \ldots r^n \ldots$ 及ビ之ニ對應スル等差級數 $d, 2d, \ldots nd \ldots$ 等ノ各項ガ豫メ計算シテアツテ表ニ作ツテアレバ r^m ト r^n トノ乘積ハ唯 md ト nd トノ加算ヲ行ツテ後表ヲ見レバ得ラレルノデアル．コレデ最初ノ目的ハ達セラレタ譯デアル．等比級數ノ各項 r^n ニ對應スルト考ヘタ等差級數ノ項 nd ヲ r^n ノ對數トイヒ，コレニ對

1) *Arithmetical progression.*　2) *Geometrical progression.*
3) r ハ 0 デモ，1 デモナク，d ハ 0 デナイトスル．

シテ r^n ヲ對數 nd ノ眞數トイフ. 眞數ト其ノ對數トノ關係ヲ式デ表スニハ

$$\log(r^n)=nd$$

ノ樣ニ書ク.

二ツノ數 r ト d トハ前ニ述ベタ樣ニ隨意デアルカラ, ソノ選定ノ異ナルニ隨ツテ異ナル種類ガ得ラレル筈デアル. 例ヘバ $r=10$, $d=1$ トスレバ

眞數	1	10	100	1000	10000......
對數	0	1	2	3	4......

(1)

又 $r=3$, $d=2$ トスレバ

眞數	1	3	9	27	81...............
對數	0	2	4	6	8...............

(2)

ヲ得ル. 表(2) ヲ利用シテ 3×27 ヲ計算シテ見ヨウ. 3 ノ對數2ト27ノ對數6トヲ表 (2) カラ求メテ, 其ノ和 $2+6=8$ ヲ作リ, 又表(2)中對數8ニ對スル眞數81ヲ得テ答

$$3\times27=81$$

ヲ得ルノデアル.

對數ニハ種々ノ種類ノアリ得ルコトヲ述ベタガ, ソノ種類ヲ識別スル爲ニ對數1ノ眞數 N ヲ求メ. 之ヲ其ノ對數ノ底數[1]ト稱スル. 底數ヲ定メレバ, 其ノ對數ノ種類ガ定マルノデアル. 實際ニ最モ多ク用キラレル所謂常用對數[2]トハ底數ヲ10トシタモノデ上記 (1) ノ對數ガソレデアル.

表 (1) ニヨツテ, 常用對數ニテハ, 1ノ對數ハ0デアリ, 10ノ對數ハ1デアルコトハワカツテ居ルガ, 其ノ中間ノ數例ヘバ0.5ノ如キ數ノ對數ニ就イテハ表(1) カラハ何モ判ラナイ. コレヲ知ル爲ニ眞數1ト10トノ間ニ等比級數ヲ爲ス若干項ヲ挿入シ, 同時ニ其ノ對數0ト1トノ間ニモ亦等差級數ヲ爲ス同數ノ項ヲ挿入スル. 斯クテ互ニ相對應スル項ヲ眞數及ビ其ノ對數トスルノデアル. 例ヘバ1ト10トノ間ニ一項 $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ ヲ挿入スレバ, 1, $10^{\frac{1}{2}}$,

1) *Base*. 2) *Common logarithm*.

10 ハ等比級數(公比 $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$)ヲ爲スコトハ明ラカデアル. 同時ニ 0 ト 1 トノ間ニモ一項 $\frac{1}{2}$ ヲ挿入スレバ 0, $\frac{1}{2}$, 1 ハ公差 $\frac{1}{2}$ ナル等差級數ヲナスカラ, 眞數 $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3.1623$ ノ對數ハ $\frac{1}{2}=0{,}5$ デアル事ヲ知ルノデアル. 又眞數1ト10トノ間ニ二項 $10^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}$, $10^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{10})^2$ ヲ挿入スレバ公比$10^{\frac{1}{3}}$ナル等比級數

$$1\qquad 10^{\frac{1}{3}},\qquad 10^{\frac{2}{3}},\qquad 10$$

ヲ得ル. コレニ應ジテ 0 ト 1 トノ間ニ二項 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ヲ挿入スレバ公差 $\frac{1}{3}$ ナル等差級數

$$0,\qquad \frac{1}{3},\qquad \frac{2}{3},\qquad 1$$

ヲ得ルカラ, 眞數 $10^{\frac{1}{3}}=2.1544......$ ノ對數ハ $\frac{1}{3}=0.333......$ デアリ, 眞數 $10^{\frac{2}{3}}=4.6414......$ ノ對數ハ $\frac{2}{3}=0.666......$ デアル. コレカラ判カル樣ニ, 一般ニ 10^p ノ對數ハ p デアル. 式デ書ケバ

$$\log10^p=p$$

トナル. 尤モ對數ノ種類卽チ對數1ニ對スル眞數ガ N ナラバ左邊ハ

$$\log_N10^p$$

ト書クノデアルガ, 今ノ場合卽チ常用對數ノ場合ニハ $10^1=10$ 卽チ右邊 10 ノ對數ガ左邊ノ指數1デアルカラ N=10 デアル. 從ツテ詳シク書ケバ上式ハ

$$\log_{10}10^p=p$$

トナルノデアル. 併シ常用對數ノ場合ニハ N ヲ略シテ上記ノ如ク, 單ニ $\log10^p=p$ ト書クノガ普通デアル.

眞數及ビ對數ノ項間ニ益々多クノ項ヲ挿入スレバ, 益々精密ナル對數ノ表ガ得ラレル.

以上述ベタ所ハ皆1及ビ1ヨリ大ナル數ノ對數ノミデアツタ. 1ヨリ小ナル正ノ數ノ對數ヲ求ムルニハ第46頁ノ表 (1)ヲ左方ニ擴張スレバヨイ. 卽チ

眞數 ......10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, $10^0=1$, 10^1, 10^2, 10^3......

對數 ...... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ......

1 ヨリ小ナル數ノ對數ハ皆負ノ數デアル.

下ニ小數點以下四位マデ計算シタ對數ノ例ヲ示ス.

眞數	對數	眞數	對數	眞數	對數
0.1	−1.	0.8	−0.0969	1.5	0.1761
0.2	−0.6990	0.9	−0.0458	1.6	0.2041
0.3	−0.5229	1.0	0.	1.7	0.2304
0.4	−0.3979	1.1	0.0414	1.8	0.2553
0.5	−0.3010	1.2	0.0792	1.9	0.2788
0.6	−0.2218	1.3	0.1139	2.0	0.3010
0.7	−0.1549	1.4	0.1461		

問題 方程式 $10x^2+x-2=0$ ノ根ヲ對數ニ有ツ數ヲ求メヨ.

(對數ノ底數ハ 10 トス) 答 $10^{\frac{2}{5}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

18 對數ノ性質

次ニ述ベル對數ノ諸性質ハ如何ナル種類ノ對數ニモ通ズルモノデアルガ, 便宜上常用對數ニ就イテ説明スル.

前ニ第 46 頁ニ掲ゲタ式

$$\log r^n = nd$$

ハ, 常用對數ノ場合ニハ $r=10$, $d=1$ デアルカラ

$$\log 10^n = n$$

トナルノデアル. 今 n ヲ順次ニ p, q, $p+q$ トスレバ

$$\log 10^p = p \qquad \log 10^q = q \qquad \log 10^{p+q} = p+q$$

トナル.

10^p ヲ a トシ, 10^q ヲ b ニテ表ハセバ, $10^{p+q}=10^p\times 10^q=ab$ デアル. ヨツテ上式ヲ a, b ニテ表ハセバ

$$\log a = p \qquad \log b = q \qquad \log(ab) = p+q$$

卽チ $$\log(ab) = \log a + \log b$$

ナル關係式ヲ得ル. コレハ

二ツノ數ノ積ノ對數ハ各數ノ對數ノ和ニ等シイコトヲ示シテ居ル.

同ジ様ニシテ

$$\log 10^{p-q} = p-q$$

デアリ, $10^{p-q}=10^p\div 10^q=a\div b$ デアルカラ

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$$

トナル. 卽チ

甲數ヲ乙數ニテ除シタルモノノ對數ハ甲數ノ對數ヨリ乙數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シイノデアル.

又 $$\log 10^p = p$$

$$\log(10^p)^n = \log 10^{np} = np$$

デアルカラ

$$\log a^n = n\log a$$

卽チ

一ツノ數ノ n 乘ノ對數ハ其ノ數ノ對數ノ n 倍デアル.

上式ノ n ハ分數デモ又負數デモ差支ナイ. モシ n ヲ分數 $\dfrac{1}{m}$ トスレバ

$$\log a^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log a$$

トナルカラ,

一ツノ數ノ m 乘根ノ對數ハ其ノ數ノ對數ヲ m ニテ除シタモノニ等シイ.

又 n ヲ負數 $-n$ トスレバ

$$\log a^{-n} = -n\log a$$

トナルノデアル.

問題 (1) 1.2 ト 1.5 トノ相乘積ノ對數ヲ求メヨ.

但シ　$\log 1.2=0.0792$　　$\log 1.5=0.1761$

（2）　$\log 2=0.3010$ ヲ知ツテ $\frac{1}{2}=0.5$ ノ對數ヲ求メヨ.

（3）　$2^3=8$ ノ對數ヲ計算セヨ.

（4）　$\log 4=0.6020$ ヲ用キテ $\sqrt{4}$ ヲ計算セヨ.

19 對　數　表

對數ハ計算ヲ容易ニスルモノデハアルガ，コレヲ用キルニハ豫メ表ヲ作製シテ如何ナル數ノ對數ニテモ直ニ索メ得ラレル様ニ準備シテ置カナケレバナラナイ. 卽チ對數表[1]ノ必要ナル所以デアル. 併シアラユル數ノ對數ノ表ヲ作リ置クコトハ不可能デアルカラ，一部ノ數ノ對數表ヲ以テアラユル場合ニ應用シ得ル様ニ整備シテアル. 又コレヲ三角形ノ解法ニ使用スルノニ便利ナルヤウニ各角度ニ對スル正弦，餘弦，正切等ノ値ノ對數ヲ表ニ製作シテアル. ヨツテ所要ノ角度ノ三角函數ノ値ヲ求メテ後ソノ對數ヲ索ムル代リニ，直接函數ノ値ノ對數ヲ見出シ得ルノデアル.

今 1.8 ナル數ノ對數ヲ求ムレバ 0.2553 デアル. 卽チ

$$\log 1.8=0.2553$$

然ルニ $18=1.8\times 10$ デアルカラ，前頁ノ公式

$$\log ab=\log a+\log b$$

ヲ用キテ

$$\log 18=\log(1.8\times 10)=\log 1.8+\log 10$$
$$=0.2553+1=1.2553 \qquad (\log 10=1)$$

ヲ得ル.

又 $180=1.8\times 100$ デアルカラ

$$\log 180=\log 1.8+\log 100=0.2553+2$$
$$=2.2553 \qquad (\log 100=2)$$

1) *Logarithmic table.*

同様ニシテ

$$\log 1800=3.2553$$

ヲ得ル.

一般ニ 1 ト 10 トノ間ノ數ノ對數ニ於テハ其ノ整數部（コレヲ指標[1]トイフ）ハ 0 デアリ，10 ト 100 トノ間ニ在リテハ其ノ整數部ハ 1，100 ト 1000 トノ間ニテハ 2 デアル. 一言ニシテ言ハバ 1 以上ノ數ノ對數ノ指標ハ其ノ眞數ノ整數部ノ桁數ヨリ 1 ヲ減ジタルモノデアル.

上記ノ例デモワカル様ニ 1.8，18，180，1800 等ノ對數ノ小數部（コレヲ假數[2]トイフ）ハ皆同一デアル.

次ニ 1 ヨリ小ナル數ノ對數ヲ考ヘテ見ヨウ. $0.18=1.8\times\frac{1}{10}=1.8\times 10^{-1}$ デアルカラ

$$\log 0.18=\log 1.8-\log 10$$
$$=0.2553-1=-0.7447 \qquad (\log 10^{-1}=-1)$$

デアルガ，對數使用ノ實際ノ便宜上，コレヲ

$$\log 0.18=\bar{1}.2553$$

ト書クノデアル. コレハ $-1+0.2553$ ノ意味デアル.

同ジ様ニ　$0.018=1.8\times\frac{1}{100}=1.8\times 10^{-2}$ デアルカラ

$$\log 0.018=0.2553-2$$

デアリ，コレヲ

$$\log 0.018=\bar{2}.2553$$

ト書クノデアル. 右邊ハ前同様 $-2+0.2553$ ノ意味デアル.

故ニ 1 ヨリ小ナル數ノ對數ノ指標ハ常ニ負數デ，ソノ絶對値ハ小數點以下初メテ零ニ非ラザル數字(卽チ有效數字)ノ顯ハルヽマデノ連續セル 0 ノ數ニ 1 ヲ加ヘタルモノデアル. 又其ノ假數ハ常ニ正ノ數デアル.

1) *Characteristic.*　2) *Mantissa.*

以上述ベタ樣ナ記法ヲ用キレバ，全部ノ數ノ對數ヲ表ニスル必要ハナク，唯 1 ト 10 トノ間ニ在ル總テノ數ノ對數ヲ表ニスレバ，唯其ノ數ヲ假數トシテ，適當ナル指標ヲ書キ添ヘルダケデ如何ナル數ノ對數ヲモ求メルコトガ出來ルノデアル．併シ 1 ト 10 トノ間ノ數ノ對數ハ其ノ指標ハ常ニ 0 デアルカラ對數表ニハ通常之ヲ略シテ唯ソノ假數卽チ小數部ノミヲ揭ゲテアル．

例 (1) 234 ノ對數ヲ求メヨ．

解 對數表カラ 2.34 ノ對數ハ 0.3692 ナルコトガワカル．234 ノ假數ハコレト同一デアルカラ，指標ダケヲ適當ニ定メレバヨイ．234 ハ皆整數部バカリデ(小數部ガナイ)ソノ桁數ハ 3 デアルカラ $3-1=2$ ガ指標デアル．故ニ

$$\log 234=2.3692$$

ヲ得テ答トスル．

例 (2) 234.3 ノ對數ヲ求メヨ．

解 大キイ對數表ヲ用キレバ四桁ノ數 2343 ノ對數ハ直ニ表ヨリ求メ得ラレルガ，簡單ナル表ニハ四桁ノ數ノ對數ハ載セテナイ．此ノ場合ニハ如何ニスレバヨイデアラウカ．問題ノ數 234.3 ハ 234 ト235トノ間ノ數デアルカラ，其ノ對數モ亦是等二數ノ對數ノ中間ノモノデアラウ．234 ト 235 トノ對數ヲ表ニ探レバ

$$\log 234=2.3692 \qquad \log 235=2.3711$$

デアルカラ，其ノ差ハ 0.0019 デアル．卽チ眞數ガ 234 ヨリ 1 ダケ增シテ 235 トナレバ，其ノ對數ハ 0.0019 ダケ增スノデアル．ヨツテ眞數ガ 234 ヨリ 1 ダケ增ス代リニ 0.3 ダケ增スナラバ，其ノ對數ハ幾何增スデアラウカヲ見レバヨイノデアル．コノ增シ方ハ嚴密ニ言ヘバ必ズシモ常ニ同ジ割合デ增スモノデハナイデアラウガ，差ガ孰レモ小サイノデアルカラ，コレヲ假ニ同ジ割合デ增ストシテモ大キナ差ハ起ラヌデアラウ．ヨツテ

$$1:0.0019=0.3:x$$

トシテ增分 x ヲ計算スレバ

$$x=0.0019\times0.3=0.00057$$
$$\fallingdotseq 0.0006$$

ヲ得ル．コレヲ 234 ノ對數ニ加ヘテ

$$\log 234.3=2.3692+0.0006=2.3698$$

ヲ得ルノデアル．

問題 次ノ諸數ノ對數ヲ求メヨ．

13　206　3.47　0.045　0.0009　1234

對數ヲ知ツテ其ノ眞數ヲ求メル場合ニ，其ノ對數ガ表ニ見當ラナケレバ，ソレヲ挾ム二ツノ假數ヲ取ツテ上ノ樣ニ比例ヲ用キテ眞數ヲ求メレバヨイ．(卽チ眞數ノ增分ハ對數ノ增分ニ比例スルト見ルノデアル)．

問題 次ノ數ヲ對數トスル眞數ヲ求メヨ．

1.0334　0.3054　2.4190　1.7650　0.9327

對數ヲ用キテ平方根ヲ求メルコトヲ次ノ例デ示サウ．

例 (1) 2 ノ平方根ヲ求メヨ．

解 先ヅ表カラ $\log 2=0.3010$

$$\log\sqrt{2}=\log 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 2=\frac{0.3010}{2}=0.1505$$

對數表カラ　$\log 1.41=0.1492$　$\log 1.42=0.1523$

$$\log 1.42-\log 1.41=0.0031$$

故ニ

$$0.01:0.0031=x:0.1505-0.1492$$

$$x=\frac{0.1505-0.1492}{0.0031}\times0.01=0.0042$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}=1.4142$$

例 (2) 0.009 ノ平方根ヲ求メヨ．

解

$$\log 0.009=\bar{3}.9542$$

$$\log\sqrt{0.009}=\bar{3}.9542\div2=(-3+0.9542)\div2$$

$$=(-4+1.9542)\div 2=-2+0.9771$$

$$=\bar{2}.9771=\log 0.0949$$

$$\therefore\quad \sqrt{0.009}=0.0949$$

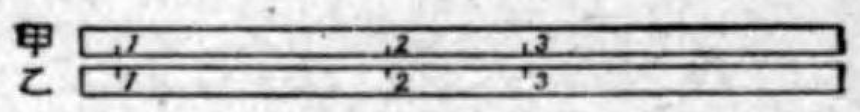
此ノ例ノ如ク，負ノ指標ヲ有スル對數ヲ除スルニハ，其ノ指標ガ整除シ得ラレザル時ハ，整除シ得ラルルニ至ルマデ指標ノ絕對値ヲ增シ，ソノ增加シタル整數ヲ假數ニ加ヘテ後除算ヲ實行スレバヨイ．假數ヲ常ニ正ノ數トシテ置ク爲デアル．

問題　對數ヲ用ヰテ次ノ計算ヲセヨ．

$$12\times 13 \quad \frac{1}{20} \quad 15^2 \quad 7^3 \quad \sqrt{9} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{2}$$

20 計　算　尺[1]

二ツノ數ノ積又ハ商ヲ求ムルニハ，其ノ對數ヲ加減スレバヨイコトハ前ニ述ベタ．今二ツノ細長キ紙片ノ左端ニ印ヲ付ケテコレヲ1トス



ル．コレヨリ右ニ，一定ノ單位ヲ用ヰテ，2 ノ對數 0.3010 ニ當ル長サヲ測リ，其ノ點ヲ 2 トスル．又 3 ノ對數 0.4771 ノ長サニ相當スル點ヲ 1 ヨリ右ニ測リテ，コレヲ 3 トシ，同樣ニ 4,5 等ノ點ヲ付ケル．斯クシテ出來タ甲乙二ツノ紙片ヲ取リ，乙尺ノ 1 ヲ甲尺ノ 2 ノ點ト一致セシムレバ，乙尺上ノ 3 ニ對スル甲尺上ノ點ハ，2 ト 3 トノ對數ノ和ニ等シキ長サノ點 6 デアル筈デアル．卽チ $2\times 3=6$ ヲ示スノデアル．

甲尺ノ點 6 ト乙尺ノ點 2 トヲ相對セシムレバ，甲尺ノ點 1 ト乙尺ノ點 1 トノ距離ハ 6 ト 2 トノ對數ノ差ニ等シイカラ，$\frac{6}{2}=3$ ノ對數ニ等シイ，卽チ乙尺ノ 1 ハ甲尺ノ點 3 ノ位置ニ在ル筈デアル．斯クシテ二ツノ紙片ヲ以テ乘除ヲ行フコトヲ得ルノデアル．要スルニ二ツノ對數ヲ計算ニヨツテ加減スル代リニ，紙片ヲ繼キ合セテ之ヲ行フノデアル．

1) *Slide rule.*

1,2,3 等ノ點ノ間ニ尙 1.1, 1.2... 等ノ點ヲ其ノ對數ニ應ジテ記セバ，尙精密ナル計算ニ役立ツノデアル．以上ガ計算尺ノ原理デアル．計算尺ヲ用ヰレバ，唯目盛シタ尺度ヲ滑ラセルダケデ，乘除ヲ迅速ニ行フコトガ出來ル．但シ目盛ヲ目分量デ讀ムノデアルカラ，餘リ精密ナル結果ハ得ラレナイ．

21 對數ノ應用例

日本帝國ニ於ケル每年ノ出產數ハ其ノ年ノ初ノ人口ノ $\frac{29.9}{1000}$ デ，死亡數ハ同ジク $\frac{17.5}{1000}$ デアルトシ，ソノ外ニハ人口ノ增減ナシト假定スルナラバ，槪ネ幾年後ニ人口ハ二倍トナルデアラウカ．

此ノ問題ヲ解ク爲ニ現在ノ年ノ初ノ人口ヲ a トスレバ，年ノ終ニハ人口ハ

$$a+\frac{29.9}{1000}a-\frac{17.5}{1000}a=\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)a$$

トナル，卽チ年初ノ人口ノ $\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)$ 倍トナル．ヨツテ其ノ翌年ノ終ニハ又ソノ $\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)$ 倍卽チ

$$\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)^2 a$$

トナル．故ニ x 年後ニハ

$$\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)^x a$$

トナルデアラウ．コレガ a ノ二倍卽チ $2a$ ニナルトスレバ

$$\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)^x a=2a$$

a ヲ約シテ

$$\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)^x=2$$

コノ關係式ヨリ x ヲ求ムレバヨイノデアル．

兩邊ノ對數ヲ取レバ第 49 頁ノ公式ニヨツテ

$$x.\log\left(1+\frac{12.4}{1000}\right)=\log 2$$

$a\left(1+\frac{r}{100}\right)+$

從ツテ

$$x=\frac{\log 2}{\log\frac{1012.4}{1000}}=\frac{0.3010}{0.0054}=55.7$$

卽チ約五十六年後ニ人口ハ槪ネ二倍トナルコトガワカル.

此ノ問題ヲ解クノト全ク同ジ考ヘ方デ次ノ事ガワカル.

或國ノ人口ガ現在 a デアルトシ, 毎年ソノ $\frac{r}{100}$ ヅツ增加スルトスレバ n 年後ニハ總人口

$$a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

トナルノデアル.

コノ問題ハ金 a 圓ヲ年利 $\frac{r}{100}$(r 分)デ複利增殖(一年ノ終リニ利子ヲ元金ニ繰入レルトスル)スレバ n 年後ノ元利合計ハ幾何ニナルカヲ計算スル問題ト同ジデアル. 卽チ n 年後ノ元利合計ハ上ノ樣ニ

$$a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

トナルノデアル.

斯ノ如キ增殖ヲ爲スモノハ自然界ニ少クナイノデ, けるびん卿[1]ハコレヲ自然界ニ於ケル複利法則[2]ト呼ンダノデアル. 例ヘバ一枚ノ玻璃板ヲ光ガ通過スルトキ, ソノ $\frac{5}{100}$ ヲ吸收セラレルトスレバ, 光ノ强サハ原ノ光ノ 0.95 ニ減ズル. 引續イテ尙一枚ヲ通過スレバ $(0.95)^2$ トナル. 故ニ n 枚通過後ハ原ノ光ノ $(0.95)^n$ トナル. 卽チ複利法則ニ從フノデアル. 又砒化水素[3]ハ熱ニヨツテ容易ニ砒素ト水素トニ分解スルトイフ. ソノ分解スル分量ハ現在殘レル砒化水素ノ量ニ比例スルトスレバ, コレモ同ジク複利法則ニ從ツテ分解スルコ

1) *Lord Kelvin (William Thomson).* 2) *The compound interest law in Nature.* 3) *Arsine.*

トトナルノデアル.

瘢痕ノ生成ノ現象[1]ニ於テモ亦複利法則ガ行ハレルトイフコトデアル.

是等ノ問題ト關聯シテ次ノ問題ガ考ヘラレル.

積立金　毎年ノ初ニ 120 圓ヅツ預金シタナラバ, 滿二十年ノ終ニハ元利合計何程トナルカ. 但シ年四分ノ利息ヲ毎年ノ終ニ元金ニ加算シ複利デ計算スル.

先ヅ最初ニ預金シタ120圓ニハ初年ノ終ニ利子 $120\times\frac{4}{100}=4.80$ 圓ガ加ハリ

$$120+120\times\frac{4}{100}=120\times\left(1+\frac{4}{100}\right)=124.80$$

トナル. 二年目ノ終ニハ 124.80 圓ニ 4 分ノ利ガ付クカラ

$$124.80\times\left(1+\frac{4}{100}\right)=120\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$$

トナル. 同樣ニ三年目ノ終ニハ元利合計

$$120\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$$

デ, 同ジク二十年目ノ終ニハ元利合計

$$120\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^{20}=120\times\left(\frac{104}{100}\right)^{20}$$

トナルノデアル. コレヲ實際ニ計算スルニハ $(1.04)^{20}$ ヲ計算シナケレバナラナイ. 此ノ計算ハ不可能デハナイガ可ナリ面倒ナ仕事デアル. 併シ對數ヲ用キレバ左程ノ困難ハナイ. 1.04 ノ對數ハ 0.0170 デアルカラ $(1.04)^{20}$ ノ對數ハソノ二十倍卽チ $0.0170\times 20=0.3400$ デアル, 故ニ $120\times(1.04)^{20}$ ノ對數ハ, コレニ 120 ノ對數 2.0792 ヲ加ヘタモノデ 2.4192 デアル. コノ眞數ヲ求メルト約 262.5 トナル. 卽チ 120 圓ヲ滿二十年間据置クト年四分ノ利デ約 262 圓 50 錢ニナルノデアル.

第二年目ノ初ニ積立テタ 120 圓ハ前ノ場合ヨリ一年少ク 19 年間預ケルコ

1) *The rate of cicatrisation of a wound.*

トニナルカラ最後ニハ 120圓×$(1.04)^{19}$ トナル.

第三年目ノ初ニ積立テタ 120 圓ハ結局 18 年間預ケルコトニナルカラ最後ニハ 120圓×$(1.04)^{18}$ トナル.

最後ノ年卽チ第二十年目ノ初ニ積立テタ 120 圓ハ最後ノ年ノ終リニハ $120\times(1.04)$ トナルノデアル.

以上列擧シタモノ全部ヲ加ヘ合セタモノガ求メル所ノ積立金ノ元利合計デアルカラ逆ノ順ニ書イテ見ルト

$$120\times(1.04)+120\times(1.04)^2+120\times(1.04)^3+\cdots\cdots+120\times(1.04)^{20}$$

トナル. コレヲ假ニ S デ表スト

$$S=120\times(1.04)\{1+(1.04)+(1.04)^2+\cdots\cdots+(1.04)^{19}\}$$

トナル. 括弧 { } 內ハ初項 1 デ公比 1.04 ナル等比級數デアル. コレヲ計算スル爲ニ假ニコレヲ T ト名付ケテ置クト

$$T=1+(1.04)+(1.04)^2+(1.04)^3+\cdots\cdots+(1.04)^{19}$$

デアルカラ, コレニ (1.04) ヲ乘ズレバ

$$(1.04)\times T=(1.04)+(1.04)^2+(1.04)^3+(1.04)^4+\cdots\cdots+(1.04)^{19}+(1.04)^{20}$$

トナルガ, コノ右邊ヨリ最後項ヲ除キテ見レバ T ノ右邊ノ最初ノ項ヲ除キタルモノト全ク同一デアル. ヨツテ是等二式ノ差ヲ作レバ

$$(1.04)\times T-T=(1.04)^{20}-1$$

書キ替ヘテ　$$(1.04-1)\times T=(1.04)^{20}-1$$

卽チ　$$0.04\times T=(1.04)^{20}-1$$

ヨツテ

$$T=\frac{(1.04)^{20}-1}{0.04}$$

トナルノデアル. 然ルニ求メル元利合計 S ハ $S=120\times(1.04)\times T$ デアルカラ

$$S=120\times\frac{(1.04)^{20}-1}{0.04}\times(1.04)$$

ヲ得ルノデアル. コノ計算モ亦前ノヤウニ對數ヲ用キレバ左程ノ困難ハナイ.

前ニ第 57 頁ニ計算シタ通リ $(1.04)^{20}$ ノ對數ハ 0.3400 デアルカラ, 其ノ眞數ハ約 2.188 デアル. ヨツテ $(1.04)^{20}-1=1.188$, コレニ 120 ト 1.04 トヲ乘ジテ後 0.04 デ除スレバ求ムル二十年後ノ積立金元利合計ガ得ラレル.

$$\log 1.188=0.0748$$
$$\log 120=2.0792$$
$$\begin{array}{rl}\log 1.04= & \underline{0.0170} \\ & 2.1710 \end{array}\Big(+$$
$$\begin{array}{rl}\log 0.04= & \underline{\bar{2}.6021} \\ & 3.5689 \end{array}\Big(-$$

對數 3.5689 ノ眞數ハ約 3706 デアル. ヨツテ二十年後ニ積立金ハ 3706 圓トナルコトガワカル.

以上ノ計算ノ筋道ヲ公式ノ形ニ書イテ見ルト次ノヤウニナル.

每年ノ初ニ a 圓ヅツ預金シタナラバ第 n 年目ノ終ニハ元利合計 (S) ハ何程トナルカ. 但シ利率ハ年 r トシ每年ノ終ニ元金ニ繰入レ, 複利法デ計算スル.

$$答\quad S=a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

此ノ公式ヲ用キテ次ノ問題モ亦容易ニ解キ得ラレル.

每年ノ初ニ何程ヅツ預金シタナラバ, n 年ノ終ニ S 圓ノ預金ガ得ラレルカ, 但シ利率ハ年 r トシ每年ノ終ニ元金ニ繰入レルモノトスル.

問題デハ上ノ公式中 S ト r トガ知レテ居ルノデアルカラ, $(1+r)\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$ ヲ計算シテ, ソレデ S ヲ除スレバ每年ノ預金額 a ガ得ラレル.

例 15 年後ニ 3000 圓ノ金ヲ得ルニハ每年何程ヅツ積立テレバヨイカ. 但シ利率ハ年四分トシ複利計算トスル.

解 此ノ問題デハ

$$S=3000圓\qquad r=0.04\qquad n=15$$

デアル．從ツテ $1+r=1.04$ デアルカラ

$$\log(1.04)^{15}=15\times\log(1.04)=15\times0.0170=0.2550$$

表ニ依ツテ對數 0.2550 ノ眞數ハ 1.799 ナルコトガワカル．

ヨツテ $$(1.04)^{15}=1.799$$

故ニ $$(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}=(1.04)\times\frac{0.799}{0.04}=19.2$$

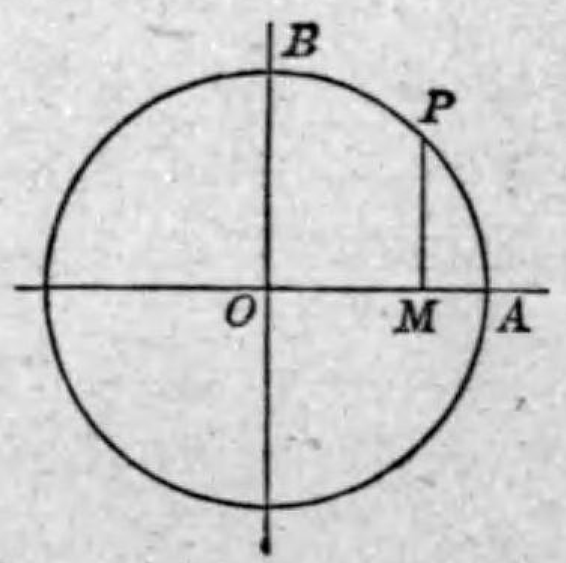
是ニテ $S=3000$ ヲ除シテ

$$a=\frac{3000}{19.2}=156.3$$

ヲ得ル．卽チ每年ノ初ニ 156 圓 30 錢ヲ積立テレバヨイノデアル．之ヲ每月ニ割當レバ 13 圓ノ月掛トナル．

22 對 數 ノ 發 見

對數ノ發見者ハ通常すこっとらんどノ人ねぴやー[1]トシテアル．併シけぷれる[2]ハ，ねぴやーヨリ前ニすゝつる人びゅるぎー[3]ガ對數計算ヲ知ツテ居タガ，ソノ發表ガ遲カツタノデアルトイフタ．びゅるぎーハ等差級數 $0,1,2,3,\ldots$ ト等比級數 $2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots$ トヲ比較シテ對數ヲ得タノデアルガ，後ニ等比級數ノ公比ヲ 10 トスル方ガ便利デアルコトニ氣付イタノデアル．併シびゅるぎーハ對數(ロガリズム)ナル言葉ハ用ヰナカツタ．唯ソノ著書ニ印刷シタ數ノ色ニ因ツテ對數ヲ赤數，眞數ヲ黑數ト呼ンダノデアル．



ねぴやーハ半徑 1 ノ圓ヲ取リ，其ノ中心 O 點ヲ過ギリ互ニ直交スル直徑 OA, OB ヲ引キ圓周上ノ隨意ノ點 P ヨリ直線 OA ニ垂線 PM ヲ下セバ，點 M ガ O ヨリ A ニ向ツテ

1) *John Napier* (*1550–1617*). 2) *Johann Keppler* (又ハ *Kepler*) (*1571–1630*). 3) *Bürgi* (*1552–1632*).

移動スルニ從ツテ，PM ノ長サハ減ズルコトハ明ラカデアルガ，OM ノ長サガ等差級數ヲ爲シテ増大スルニ對シテ，PM ノ長サハ等比級數ヲ爲シテ減ズルト考ヘタノデアル[1]．彼ハ等差級數的ニ增ス OM ヲ初メ人工數[2]ト呼ンダガ，後ニ對數[3]ト改メタ．然ルニ圖カラ見テモワカル樣ニ眞數ガ增セバ其ノ對數ハ減ズルノデアル．當時ろんどんニ居タ天文學敎授ぶりっぐす[4]ハ此ノ點ヲ指摘シテ，實際ノ計算ニ應用スルニハ，對數ハ眞數ト共ニ增減シナクテハ困ルトイヒ，1 ノ對數ハ 0，10 ノ對數ハ 1 トナル樣ニスルコトヲ申出タ．是ガ前ニ第 46 頁ニ述ベタモノデ，今日ニテハ常用對數[5]又ハぶりっぐす對數ト呼ブノデアル．是ニ對シテねぴやーノ對數(多少變更シテ居ルガ)ヲ自然對數[6]又ハねぴやー對數[7]ト呼ンデ居ル．

常用對數ノ底數ハ，前ニ第 46 頁ニ述ベタ通リ，10 デアルガ自然對數ノ底數ハ通常 e ト記シ，其ノ値ハ

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$
$$=2.718281828\cdots\cdots$$

デアルコトガワカツテ居ル．

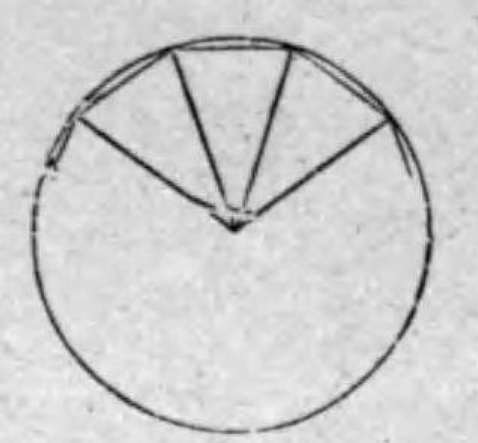
23 正多角形[8]，圓[9]

幾何圖形ノ中デ美シイノハ正多角形デアラウ．正多角形トハ言フマデモナク各邊ノ長サガ互ニ相等シク，各角ガ互ニ相等シイ多角形ノ意味デアル．故ニコレニ外接圓モ有リ，內接圓モアルコトハ常識カラモ明ラカデアル．是等ノ圓ノ中心ハ又正多角形ノ中心デアル．

正 n 角形ノ中心ヲ各頂點ニ結ベバ，中心ニ於テ n 個ノ角ガ出來ルガ，ソ

1) 變化ガ小サケレバ夫ニ近イ． 2) *Numerus artificialis.* 3) *Logarithmus.* 4) *Henry Briggs* (*1560–1630*). 5) *Common logarithms.* 6) *Natural logarithms.* 7) *Napierian logarithms.* 8) *Regular polygon.* 9) *Circle.*

レ等ハ皆 $\frac{360^\circ}{n}$ ニ等シイコトハ勿論デアル．中心ニ於ケル是等ノ角ノ二等分線ヲ引イテ，圓周トノ交點ヲ各頂點ニ結ベバ明ラカニ正 $(2n)$ 角形ヲ得ル．故ニ正 n 角形ヲ畫クコトヲ得レバ，正 $(2n)$ 角形ハ容易ニ畫キ得ラレル．



問題　正多角形ノ中心ノ求メ方ヲ工夫セヨ．

古來次ノ四種類ノ正多角形ノ描法ガ知ラレテ居ル．

正三角形	正六角形	正十二角形	....
正四角形	正八角形	正十六角形	....
正五角形	正十角形	正二十角形	....
正十五角形	正三十角形	正六十角形	....

第十九世紀ノ初頭マデハ，初等幾何學ニテ描キ得ル（定規ト兩脚規ノミニテ描キ得ル）正多角形ハ以上ノ外ニハナイト考ヘラレテ居タノデアルガ，西暦 1801 年(皇紀 2461 年)ニ至ツテ古今ノ大數學者獨逸人ガウス[1]ガ，2^n+1（n ハ正ノ整數）ガ素數[2]ナル場合ニハ，定規ト兩脚器ノミヲ用ヰテ正 (2^n+1) 角形ヲ畫キ得ルコトヲ證明シタノデアル．n ヲ順次ニ 1, 2, 3, ... トスレバ 2^n+1 ハ

3　5　9　17　33　65　129　257　......

トナルガ，ソノ中素數ハ

3　5　17　257　......

デアル．正三角形，正五角形ノ畫法ハ古來明ラカデアルガ，正十七角形ノ畫法モ亦研究セラレテ，知レテ居ルノデアル．尚正三，四，五，六，八，十角形ハ畫キ得ラレルガ，殘ル正七角形，正九角形，正十一角形ハ定規ト兩脚器ノミデハ畫キ得ラレヌコトハ證明シ得ラレル．

1) *Karl Friedrich Gauss* (1777–1855).　2) *Prime number.*

24 第一種ノ正多角形

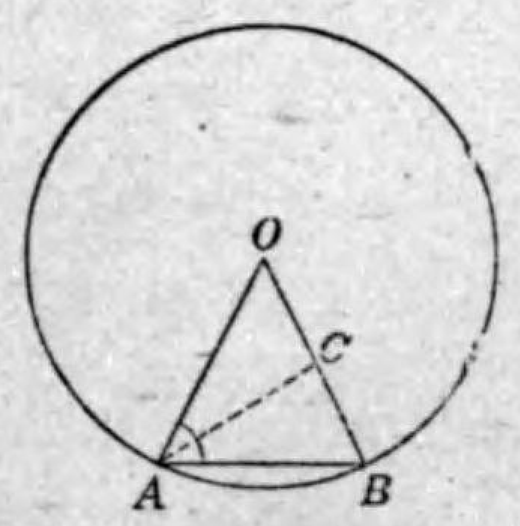
一定ノ圓ニ內接スル正六角形ヲ作ルニハ如何ニスルカハ既ニ能ク知ラレテ居ルノデアルガ，蛇足ヲ厭ハズ次ニ之ヲ述ベヨウ．內接正六角形ノ各頂點ヲ中心ト結ベバ，中心ニ於テ相等シイ六ツノ角ガ得ラレルカラ，ソノ一ツハ $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$ デアル筈デアル．又正六角形ノ一邊ノ兩端ヲ中心ト結ンデ作ル三角形ハ明ラカニ二等邊三角形デアルカラ，其ノ底角ハ相等シイ．故ニソノ大キサハ $\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$ デアル．故ニ此ノ三角形ハ三角トモ皆 60° デアルカラ，正三角形デアル．卽チ內接正六角形ノ一邊ハ圓ノ半徑ト等シイノデアル．ヨツテ圓周上ノ隨意ノ一點ヨリ始メテ半徑ノ長サニ等シク開イタ兩脚器ヲ以テ圓周ヲ切ツテ行ケバ正六角形ノ頂點ガ得ラレル．

正六角形ノ頂點ヲ隔番ニ結ベバ正三角形ヲ得ルコトハ明ラカデアラウ．正十二角形，正二十四角形等第一種ニ屬スル正多角形ハ前頁ノ方法デ正六角形カラ作ラレル．

25 第二種ノ正多角形

圓ニ內接スル正四角形ヲ作ルニハ，其ノ中心ヲ通ジテ互ニ垂直ナル二直線ヲ引ケバ，ソノ圓周トノ交點ハ卽チ正四角形ノ頂點デアル．

コレヨリ正八角形，正十六角形，正三十二角形等ハ容易ニ得ラレル．



26 第三種ノ正多角形

先ヅ正十角形カラ始メル．AB ヲ正十角形ノ一邊トスルト角 AOB ハ $\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$ デアル．三角

形 AOB ハ二等邊三角形デアルカラ $\angle A=\angle B$. ヨツテ

$$\angle A=\angle B=\frac{180^\circ-\angle O}{2}=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=\frac{144^\circ}{2}=72^\circ$$

角 A ノ二等分線 AC ヲ引イテ見ルト

$$\angle OAC=\angle CAB=\frac{\angle A}{2}=\frac{72^\circ}{2}=36^\circ$$

故ニ三角形 OAC ハ $\angle O$ ト $\angle A$ トガ共ニ 36° デ, 從ツテ二等邊三角形デアリ

$$OC=AC$$

デアル. 又三角形 OAB ノ角ハ $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ デアリ, 三角形 ABC ニ於テハ

$$\angle CAB=36^\circ \qquad \angle ABC=72^\circ$$

デアルカラ, 殘リノ角 ACB ハ $180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$ デ, 從ツテ三角形 ABC モ二等邊三角形デ

$$AC=AB$$

デアル. 又是等二ツノ三角形 OAB, ABC ハ相互ニ等シイ三ツノ角ヲ有ツカラ, 互ニ相似形デアル. 故ニ三角形 ABC ニ於ケル比 BC : AB ハ三角形 OAB ニ於ケル比 AB : OB ニ等シイ, 卽チ

$$BC : AB=AB : OB$$

然ルニ $AB=AC=OC$ デアルカラ

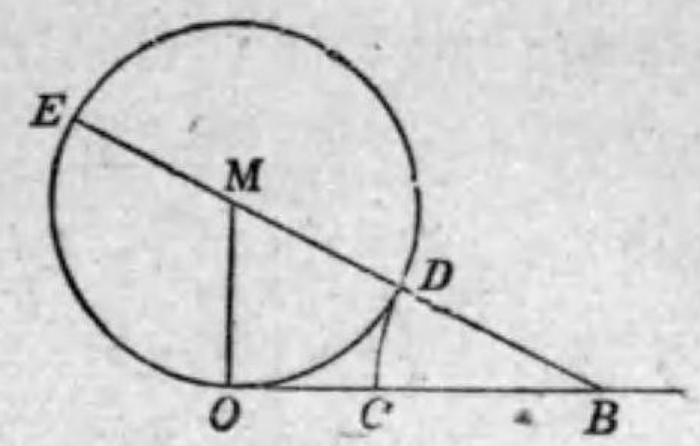
$$BC : OC=OC : OB$$

トナル. ヨツテ C 點ハ OB ヲ大小二部ニ分ケテ

小部ノ大部ニ對スル比ヲ大部ノ全部ニ對スル比ニ等シカラシムル點デアル. 斯カル分ケ方ヲ黄金截[1]トイフノデアル.

故ニ圓ノ半徑ヲ黄金截ニ分テバ, 其ノ二部分ノ中大ナル線分ガ此ノ圓ニ內接スル正十角形ノ一邊デアル. 然ラバ與ヘラレタル線分 OB ヲ黄金截ニ分ツニハ如何ニスレバヨイカ. 次ニコレヲ考ヘテ見ヨウ.

1) *Golden section: Sectio aurea: Sectio divina.*



線分 OB ノ一端 O ニ垂線 OM ヲ立テ, OM ノ長サヲ OB ノ半分トスル. M ヲ中心トシ, OM ヲ半徑トシテ圓 OED ヲ畫キ, BM ヲ結ブ直線ヲ引イテ圓ト D 及ビ E デ交ハルトスル. BD ニ等シク BC ヲ取レバ C 點ガ求メル點デアル. 何故ナラバ OB ハ切線デアルカラ

$$BD\times BE=OB^2$$

デアリ, 從ツテ

$$\frac{BE}{OB}=\frac{OB}{BD}$$

デアル. 故ニ兩邊カラ 1 ヲ減ジテ

$$\frac{BE}{OB}-1=\frac{OB}{BD}-1$$

書キ直シテ

$$\frac{BE-OB}{OB}=\frac{OB-BD}{BD}$$

然ルニ　$BE-OB=BE-2\times OM=BE-DE=BD$

$$OB-BD=OB-BC=OC$$

デアルカラ上式ハ

$$\frac{BD}{OB}=\frac{OC}{BD}$$

書キ替ヘテ

$$OB\times OC=BD^2$$

トナル. BD ニ等シク BC ヲ取ツタノデアルカラ, コノ式ハ

$$OB\times OC=BC^2$$

卽チ

$$OC : BC=BC : OB$$

トナリ, 線分 OB ガ C 點ニヨツテ黄金截ニ分ケラレテ居ルコトヲ示シテ居ル.

幾何學的ニ解ケバ以上ノ如クデアルガ，同ジ問題ヲ代數的ニ解ケバ次ノヤウニナル．

線分 OB ノ長サヲ a トシ，コレヲ C 點デ黄金截ニ分割シタトスル．長イ部分ヲ x トスレバ，短イ方ハ $a-x$ トナルカラ，黄金截ノ定義カラ

$$a-x : x = x : a$$

ナル關係式ガアル筈デアル．此ノ式ハ

$$x^2=a(a-x)$$

トナルカラ，書キ替ヘテ

$$x^2+ax-a^2=0$$

ヨツテ $$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{5}{4}a^2=0$$

卽チ $$x+\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

從ツテ x ノ値ハ

$$x=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

トナルケレドモ，$\sqrt{5}>2$ デアルカラ $\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{5}}{2}a$ デ，上式ノ複號中負號ヲ取レバ x ノ値ハ負トナリ吾人ノ答トシテハ不適當デアル．併シ正號ノ方ヲ取レバ x ノ値トシテ正ノ値ヲ得ル．故ニ

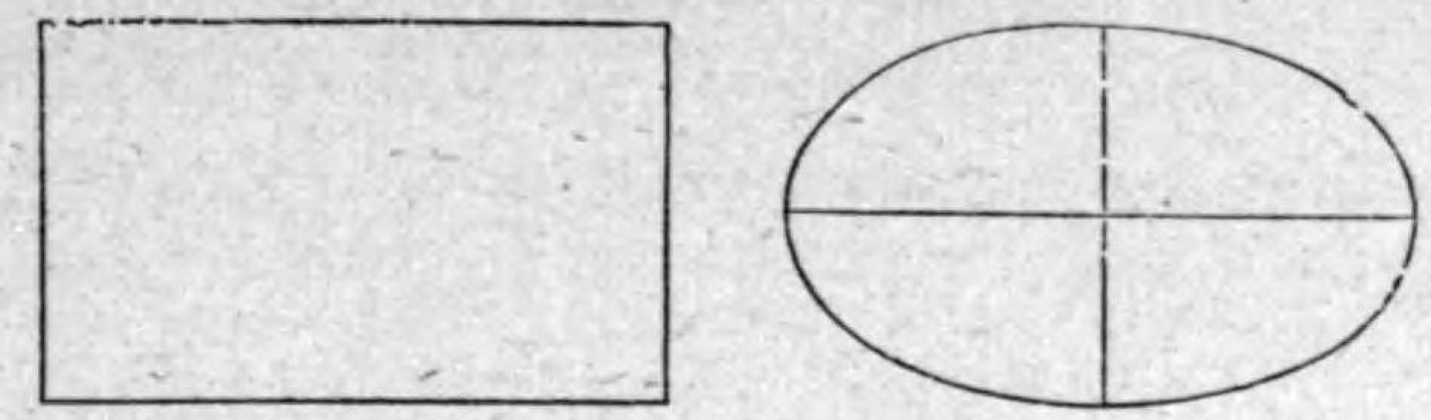
$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\fallingdotseq 0.62a$$

ヲ得ルノデアル．コレハ分割サレタ長イ方ノ長サデ，短イ方ノモノハ

$$a-x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a\fallingdotseq 0.38a$$

デアルカラ，黄金截トハ線分ヲ 62 ト 38 (又ハ 31 : 19) ノ比ニ分ツコトデアル．モ少シ省略スレバ 8 : 5 又ハ 3 : 2 ノ比ニ分割スルコトデアル．

此ノ比ガ黄金截ト言ハレルノハ，ソレガ幾何學及ビ美術ニ於テ大ナル意義ヲ有ツカラデアルトイフ．例ヘバ矩形ノ長サト幅トガ此ノ比ヲ爲シテ居ルトキ，又楕圓ノ長軸，短軸ノ比ガ此ノ比デアルトキ，ソレ等ノ形ガ最モ美シイ好イ形デアルトイハレル．



此ノ比ハ好キ形ヲ與フル故ニぎりしや建築術ニ多分ニ應用セラレタトイフ．是等美的意義ハ，れおなるど・だ・ぶぃんち[1]ノ助力ニ因リテ西暦 1509 年(皇紀二千百六十九年)ニ完成シタるか・ぱちうおろ[2]ノ著書神比[3]ニ詳シイトイフ事デアル．併シ黄金截ノ名ハ十八世紀ノ教科書ニハ見エテ居ナイ．けぷれる[4]ハ此ノ比ヲ嘆美シテ次ノ様ニ言ツタトイフ事デアル．

幾何學ニハ二ツノ寶ガアル．ぴたごらすノ定理ト黄金截トデ，一ハ金塊ノ如ク他ハ寶玉ニモ比スベキデアル．

ト．

扨テ黄金截ヲ用キテ正十角形ヲ圓內ニ畫クコトガ出來タカラ，其ノ頂點ヲ隔番ニ結ベバ正五角形ヲ得ル．又正二十角形，正四十角形等モ畫キ得ル筈デアル．

27 第四種ノ正多角形

正六角形ノ一邊ガ其ノ中心ニ作ル角ハ 360° ノ $\frac{1}{6}$ デ，正十角形ノ場合ハ同ジク其ノ $\frac{1}{10}$ デアルカラ，ソノ差ハ

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$$

1) *Lionardo da Vinci.* 2) *Luca Paciuolo.* 3) *Divina proportione.*
4) *Keppler.*

卽チ 360° ノ $\frac{1}{15}$デアル．此ノ事實ヲ利用シテ圓內ニ正十五角形ヲ內接セシメルコトガ出來ル，ソノ工夫ハ讀者ニ委ネテモヨイデアラウ．

正十五角形ガ畫ケルカラ，正三十角形，正六十角形等モ畫ケル筈デアル．

正多角形ノ事項ハコレデ終リトスルガ，唯正三角，正四角，正五角，正六角，正八角，正十角形等ハ皆畫キ得ルガ，正七角形，正九角形ヲ畫キ得ナイノハ如何ニモ殘念デアル．併シコレハ定規ト兩脚器ノ有限回ノ使用ノミニテハ不可能デアルコトガ證明セラレテ居ルノデ致シ方ガナイ．但シ近似的ニ畫クコトハ出來ル．正七角形ノ一邊ハ同ジ圓內ニ畫イタ正三角形ノ邊ノ半分ニ近イノデアル．ソレヲ知ルニハ次ノ樣ニ考ヘレバヨイ．

半徑 1 ノ圓ニ內接スル正七角形ノ一邊ノ長サハ

$$2\sin\frac{360^\circ}{14}=2\sin 25^\circ 43' \fallingdotseq 2\times 0.4339212=0.8678424$$

デアルニ對シテ正三角形ノ一邊ノ半分ハ

$$\sin 60^\circ=0.8660254$$

デアルカラ，殆ンド相等シイノデアル．

28 黃金截ニ就イテ

黃金截ハ往々自然界ニ認メラレルモノデ，從ツテ藝術ニモ應用セラルヽモノダトイフ事デアル．植物界ニ顯ルヽ一例ヲ述ベテ見ヨウ．

葉ガ莖ニ(又ハ枝ニ)付ク配列ノ狀態ニハ種々アル．對生，輪生，互生等デアル．互生ノ場合ニハ，各葉ノ間ヲ莖ヲ廻リテ順次ニ連續スル線ヲ引イテ見ルト必ズ螺旋狀ヲ爲スノデアル．ソノ連續二葉間ノ隔リガ，莖ノ橫斷面カラ見テ全周ノ二分ノ一ナルトキ之ヲ $\frac{1}{2}$ デ表ハシ，三分ノ一ナラバ $\frac{1}{3}$，五分ノ二ナラバ(卽チ六葉ヲ以テ全周ヲ二周廻スル) $\frac{2}{5}$ ヲ以テ表ハス．コレ卽チ葉ノ開度[1]デアル．例ヘバ楡（ニレ），禾本類ハ $\frac{1}{2}$，莎草（カヤツリグサ）ハ $\frac{1}{3}$，櫻桃（サクラ），林檎（リンゴ），槲（カシハ）等ハ

1) *Angle of divergence.*

$\frac{2}{5}$ ノ開度ヲ有ツ植物デアル．大麻（アサ），車前（オホバコ）ハ $\frac{3}{8}$ トイフ開度ノ植物デアル．又針葉樹ニハ $\frac{5}{13}$，$\frac{8}{21}$ 等ノ開度ヲ有ツモノガアルトイフ．是等ヲ列記シテ見ルト

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{13}\ \frac{8}{21}\ \frac{13}{34}\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(A)}$$

トナルガ，面白イコトニハ最初ノ二ツ卽チ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ カラ順次ニ以下ノ開度ガ組立テラレル．$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ ノ分母子ヲ夫々加ヘテ分數ヲ作ルト $\frac{2}{5}$ トナル．$\frac{1}{3}$ ト $\frac{2}{5}$ トノ分母子ヲ夫々加ヘテ $\frac{3}{8}$ ヲ得ル．以下同樣ニ前記 (A) ノ各分數ノ分母子ハソノ前ノ二分數ノ分母子ヲ加ヘテ得ラレルノデアル．

同一ノ葉ノ配列ノ螺旋ヲ反對ノ向ニ(例ヘバ右廻リニ對シテ左廻リ)廻レバ分數ハ上記ノモノヲ夫々 1 ヨリ減ジタルモノトナリ[1]

$$\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{8}{13}\ \frac{13}{21}\ \frac{21}{34}\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(B)}$$

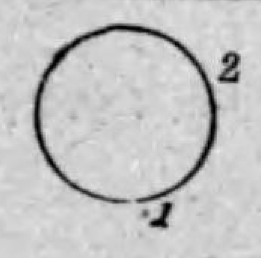
ヲ得ル．

一般ニ言ヘバ，此ノ外ニモ，n ヲ正ノ整數トシテ

$$\frac{1}{n}\ \frac{1}{n+1}\ \frac{2}{2n+1}\ \frac{3}{3n+2}\ \frac{5}{5n+3}\ \frac{8}{8n+5}\ \frac{13}{13n+8}\cdots\cdots \text{(C)}$$

ノヤウニ最初ノ二ツカラ順次分母子ヲ加ヘテ作ラレル分數列ノ開度モアルトイフコトデアル．$n=2$ トスレバ (A) ヲ得，$n=1$ トスレバ (B) ノ最初ニ $\frac{1}{1}$ ヲ補ツタモノトナルノデアル．(C) ノ分數列ノ第三番目以下ノモノノ値ハ總テ最初ノ二ツ卽チ $\frac{1}{n}$ ト $\frac{1}{n+1}$ ノ間ニ在ルコトハ次ノ如ク直グニワカル．

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},\quad \frac{3}{3n+2}=\frac{1}{n+\frac{2}{3}},\quad \frac{5}{5n+3}=\frac{1}{n+\frac{3}{5}},\cdots\cdots\cdots$$

1) 

左圖莖ノ橫斷面ニ於テ葉 1 ノ次ノ高サノ葉ヲ 2 トシ右廻リ $\overset{\frown}{12}$ ノ間隔ヲ全周ノ $\frac{m}{n}$ トスレバ，左廻リ $\overset{\frown}{12}$ ハ全周ノ $1-\frac{m}{n}$ トナル．

故ニ (C) ノ分數列ヲ限リナク押シ進ムレバ, $\frac{1}{n}$ ト $\frac{1}{n+1}$ トノ間ノ何處カニ落チ着クデアラウ. 此ノ落チ着ク場所所謂極限[1]ヲ見出ス爲ニ次ノ樣ニスル. 先ヅ各分數ヲ所謂連分數[2]ニ書キ直ス. 例ヘバ

$$\frac{3}{3n+2}=\frac{1}{n+\frac{2}{3}}=\frac{1}{n+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$$

$$\frac{5}{5n+3}=\frac{1}{n+\frac{3}{5}}=\frac{1}{n+\frac{1}{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}$$

$$\frac{8}{8n+5}=\frac{1}{n+\frac{5}{8}}=\frac{1}{n+\frac{1}{\frac{8}{5}}}$$

$$=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{3}}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}$$

$$=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}=\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}}$$

....

斯ノ如ク皆同ジ樣ナル連分數ニ書キ直シ得ラレル. コレヲ限リ無ク續ケレバ

1) *Limit.* 2) *Continued fraction.*

$$\frac{1}{n+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\cdots}}}}$$

ノ樣ニナルデアラウ. ヨツテ之ヲ x ト名ヅケテ, x ノ値ヲ計算シテ見ヨウ.

上ノ連分數 x ノ內, 分母ノ n ニ加ヘル部分ヲ假ニ y トスレバ

$$y=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\cdots}}}$$

デ, 從ツテ

$$x=\frac{1}{n+y}$$

トナルコトハ明ラカデアラウ.

y ハ其ノ成立カラ明ラカナル樣ニ1ヨリ大ナル數ヲ以テ1ヲ除シタルモノデアルカラ, 勿論1ヨリ小ナル正ノ數デアル. 然ルニ又 y ノ式ヲ見ルニ, 分母ノ1ニ加ヘル部分ハ, 其ノ形狀カラ亦 y ニ他ナラヌノデアル. 故ニ

$$y=\frac{1}{1+y}$$

ナル關係ガアル. 分母ヲ拂ヘバ

$$y^2+y-1=0$$

ナル二次方程式ヲ得ル. 此ノ方程式ハ第66頁ノ黄金截ノ方程式 $x^2+ax-a^2=0$ ニ於テ $a=1$ トシタモノト同一デアル. 故ニ同頁ト同樣ニ

$$y=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

ヲ得ル. コレカラ分數列 (A) ノ値ノ落チ着ク値ハ

$$x=\frac{1}{n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

トナルノデアル．コレヲ書キ直スト

$$\frac{2}{2n+\sqrt{5}-1}$$

トナル．

$n=1$ ノ場合ニハ此ノ値ハ

$$\frac{2}{2+\sqrt{5}-1}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

分母子ニ $\sqrt{5}-1$ ヲ乘ジテ

$$\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ヲ得ル．

又 $n=2$ トスレバ上式ハ

$$x=\frac{1}{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{2}{4+\sqrt{5}-1}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

分母子ニ $3-\sqrt{5}$ ヲ乘ジテ

$$x=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

ヲ得ル．

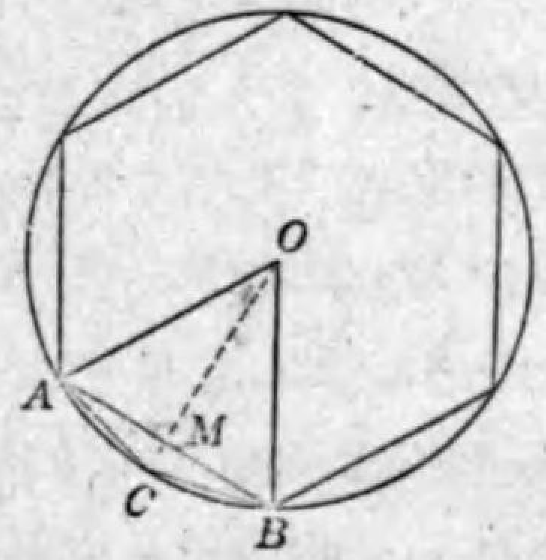
是等二ツノ x ノ値ハ前ニ第66頁ニ得タ x ト $a-x$ トノ値ニ於テ $a=1$ トシタモノト全ク同一デアル．卽チ此處ニモ黄金截ガ顯レテ居ルノデアル．

29 圓周ノ長サ

圓ニ內接スル正多角形ノコトハ已ニ述ベタガ，ソノ邊數ヲ順次增シテ行ケバ正多角形ハ漸次圓ニ近キ形トナリ，限リ無ク邊數ヲ增セバ限リ無ク圓ノ形ニ近似スルコトハ明ラカデアル．此ノ事實ヲ利用シテ圓周ノ長サ及ビ圓ノ面積ヲ計算出來ナイデアラウカ．

先ヅ圓內ニ正 n 角形ヲ畫イタトスル．其ノ一邊ノ長サヲ n 倍スレバ，此ノ正多角形ノ周圍ノ全長ガワカル．モシ圓ノ半徑ガ，此ノ圓ノ半徑ノ二倍デ

アツタナラバ，其ノ內接正 n 角形ノ一邊ノ長サモ亦二倍デアルコトハ比例ノ性質カラ明ラカデアル．從ツテ全周ノ長サモ亦二倍デアルデアラウ．半徑ガ三倍，四倍等ノ時モ亦同樣ニ周圍ガ三倍，四倍トナルノデアル．故ニ圓ノ半徑ガ $\frac{1}{2}$ (直徑ガ 1) ノ場合ノ圓周ノ長サヲ求ムレバ，半徑ガ n ノ場合ニハ其ノ周モ亦 $2n$ 倍トナルコトハ明ラカデアル．卽チ問題ハ直徑 1 (卽チ半徑 $\frac{1}{2}$) ナル圓ノ圓周ノ長サヲ求メル問題ニ歸スル．尙注意スベキ事ハ，圓ニ內接セシメル多角形ハ殊更ニ正多角形デナクトモ，邊數ガ增シ各邊ガ短クナレバ其ノ全周ハ圓ノ周ノ長サニ近ヅクコトニ違ヒハナイ．併シナガラ，其ノ全周ヲ計算スルノニ，正多角形ノトキノ樣ニ一邊ノ長サヲ n 倍スル樣ナ簡單ナ方法ガナク，各邊ノ長サヲ一ツヅツ加ヘ合セナケレバナラナイ．此ノ不便ガアルカラ正多角形ヲ用ヰルノデアル．



先ヅ一點Oヲ中心トシテ半徑 $\frac{1}{2}$ ナル圓ヲ畫キ，コレニ正 n 角形(右圖ニテハ正六角形)ヲ內接セシメタトスル．其ノ一邊ガ AB ナラバ，角 AOB ハ $\frac{360^\circ}{n}$ デアル．三角形 AOB ハ二等邊三角形 (OA=OB) デアルカラ角 AOB ノ二等分線 OC ハ邊 AB ト直角ニ交ハリ，ソノ交點 M ハ AB ノ中點デアル．又 AC=BC デアルコトモ明ラカデアラウ．然ラバ AC ハ此ノ圓ニ內接スル正 $(2n)$ 角形ノ一邊デアルコトモ亦明ラカデアラウ．ヨツテ，最初ニ畫イタ正 n 角形ノ一邊 AB ノ長サガ何等カノ方法デ求メラレタトスレバ，AM ハソノ半分デアルカラ既知デアル．然ルニ OM ハ AM ニ直交スルカラ OAM ハ直角三角形デアル，從ツテぴたごらすノ定理ヲ用ヰレバ OM ノ長サハワカル．OC ハ半徑デ $\frac{1}{2}$ デアルカラ，コレヨリ OM ヲ減ジテ MC ノ長サガ得ラレル．AM ト CM トカラ再ビぴたごらすノ定理ヲ用ヰテ AC ノ長サヲ計算シ得ル．卽チ圓ノ半徑ト，コレニ內接スル正 n 角形ノ一邊ノ長サトヲ知レバ，同ジ圓ニ內

接スル正 $(2n)$ 角形ノ一邊ノ長サヲ計算シ得ル．コレヲ $2n$ 倍シテ正$(2n)$ 角形ノ全周ヲ計算シ得ルノデアル．

此ノ方法ヲ繰返シテ正$(2n)$ 角形ヨリ正 $(4n)$ 角形，正 $(8n)$ 角形等ノ全周ガ計算シ得ラレル筈デアル．

斯ノ如クーツノ圓ニ內接スル正多角形ノ全周ヲ知レバ，ソレノ二倍ノ邊數ノ內接正多角形ノ全周ヲ計算出來ル．從ツテ又ソノ二倍ノ邊數ノ內接正多角形ノ全周ガワカル．然ルニ半徑 $\frac{1}{2}$ ナル圓(卽チ直徑1ナル圓)ニ內接スル正四角形ノ一邊ハ容易ニ計算出來ルカラ，正八角形ノ全周從ツテ正十六角形，正三十二角形等ノ全周ハ順次ニ計算出來ル筈デアル[1]．又半徑 $\frac{1}{2}$ ナル圓ニ內接スル正六角形ノ一邊ハ同ジク $\frac{1}{2}$ デアルカラ，其ノ全周ハ $\frac{1}{2}\times6=3$ デアル．コレヲ基礎トシテ順次ニ內接正十二角形，正二十四角形等ノ全周ノ長サヲ計算シ得ル．コレヲ續ケルナラバ終ニハ直徑1ナル圓(卽チ半徑 $\frac{1}{2}$ ナル圓)ノ全周ニ近イモノトナルデアラウコトハ想像シ得ラレル．計算ノ二三ノ結果ヲ小數點以下七桁マデ書キ記シテ見ルト，直徑1ナル圓ニ內接スル正四角形ノ周ハ約 2.8284371 デ，正八角形ノ周ハ 3.0614675 デアル．邊數ヲ順次二倍シテ 16, 32...... 等トシ，進ンデ正 2048 角形トナルト周ハ 3.1415914 トナル．次ノ正 4096 角形ノ周ハ 3.1415923 デ，前者トノ差 0.0000009 ハ小數第六位ノ一ニ達シナイ．ヨツテ相當圓ノ周ニ近イモノデアラウト想像セラレル．

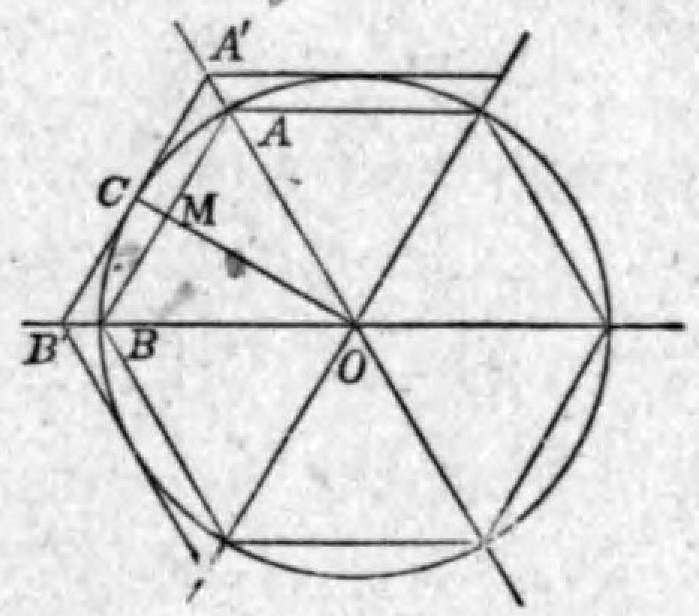
最初內接正四角形ヲ取ル代リニ內接正六角形カラ始メテ見ルト正十二角形，正二十四角形等漸次邊數ヲ二倍シテ正 $6\times2^9=3072$ 角形トモナレバ，其ノ周ハ

正六角形	3
正十二角形	3.1058285
....	....
正 1536 角形	3.1415904
正 3072 角形	3.1415921

1) 實際ニ計算スルニハ，此ノ方法ハ可ナリ面倒デアルガ，同ジ圓ノ內接正 n 角形ト外接正 n 角形トノ全周ヲ知レバ內接，外接正 $(2n)$ 角形ノ全周ヲ簡單ニ計算スル式ガ知ラレテ居ル．

トナル．

斯ク正四角形カラ出發シテモ，又ハ正六角形カラ始メテモ相當ニ邊數ガ多クナルト，ソノ全周ハ 3.14159...... ニ近クナルコトガ看取サレル．多分之ガ圓周ニ近イ値デアラウ．併シ疑ヘバ，如何ニ邊數ヲ增シテモ，多角形タルコトニ變リハナクヤハリ圓トハ異ナルノデアルカラ，全周ハ或ル一定ノ値ニ落着キテモ，ソノ落着ク値ハ圓周トハ差ガアルカモ知レナイ．此ノ點ヲ明確ニスル爲ニハ如何ニスレバヨイデアラウカ．



此ノ問題ハ次ノ樣ニ考ヘテ解決セラレタノデアル．直徑1ナル圓ニ內接スル正 n角形(右圖デハ正六角形)ヲ畫クト同時ニ外接スル正 n角形ヲ畫クトスレバ，圓周ノ長サハ是等內接及ビ外接正多角形ノ周ノ長サノ間ニアル（卽チ內接正多角形ノ全周ヨリ長ク，外接正多角形ノ全周ヨリ短イ）コトハ明ラカデアラウ．右圖ニ於テ AB ヲ內接正 n 角形ノ一邊トシテ OA, OB ノ間ノ角ノ二等分線 OC ヲ引イテ，其ノ圓周ト交ル點 C ヲ通ジ AB ニ平行ナル線ヲ引キ，OA, OB ト A′, B′ ニ於テ交ルトスレバ，A′B′ ハ明ラカニ此ノ圓ニ外接スル正 n 角形ノ一邊デアル．然ルニ是等二ツノ正多角形ハ相似形デアルカラ，其ノ邊 AB ト A′B′ トノ比ハ O ヨリノ距離 OM ト OC トノ比ニ等シイコトハ明瞭デアル．AB ノ長サト半徑トガ知レテ居レバ，OM ノ長サハぴたごらすノ定理ヲ用キテ容易ニ計算出來ルカラ

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OC}{OM}=\frac{1}{2\times OM}\quad (\text{OC ハ半徑デ，}\ \tfrac{1}{2}\ \text{デアル})$$

$$\therefore \ \mathrm{A'B'}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OM}}$$

ニヨツテ，A'B' ノ長サヲ計算シ得ル．是ヲ n 倍スレバ外接正 n 角形ノ全周ガワカル．(實際ニ計算スルニハ他ニ便利ナル式ガアル)

斯クシテ n ヲ漸次增大シテ外接正多角形ノ全周ヲ計算シタ結果ヲ小數七桁ダケ記シテ見ルト次ノ樣デアル．

外接正 6 角形ノ全周	3.4641016
〃 12 〃	3.2153903
....	....
〃 1536 〃	3.1415970
〃 3072 〃	3.1415937

又外接正四角形カラ出發スレバ

外接正 4 角形ノ全周	4.
〃 8 〃	3.3137085
....	....
〃 1024 〃	3.1416025
〃 2048 〃	3.1415951
〃 4096 〃	3.1415933

ヲ得ル．

直徑1ナル圓ノ周ノ長サ卽チ隨意ノ圓ノ全周ヲ其ノ直徑ニテ除シタル商(卽チ圓周ノ直徑ニ對スル比) ヲ國際的ニぎりしや文字 π ニテ表スカラ，此ノ記號ヲ用キルト，以上ノ結果ヨリ正四角形カラ出發シテモ，又ハ正六角形カラ出發シテモ

$$3.141592<\pi<3.141594$$

デアルコトハ明ラカデアル．故ニ小數第四位マデノ π ノ値ハ

$$\pi \fallingdotseq 3.1416$$

トシテヨイコトガワカル．斯クトレバ眞ノ π ノ値トノ差ハ 0.0001 ニ達シナ

イコトヲ確言デキルノデアル．

30 圓周率 π ノ値

圓ノ直徑ニ乘ジテ其ノ圓周ノ長サヲ與ヘル圓周率 π ノ値ハ，日常生活ニ於テ往々圓形ノモノヲ用キル事ヨリ，ソノ必要ナル事ハ想像セラレ得ルノデアル．ソノ故ニカ古昔カラ近似値ガ求メラレテ居ル．古代えじぷとノあはめすノ書[1]ニハ，圓ノ面積ハ其ノ直徑ヨリソノ $\frac{1}{9}$ ヲ減ジタル長サヲ一邊トスル正方形ノ面積ニ等シトイヘル意味ノ事ガ記サレテアルトイフ．r ヲ圓ノ半徑トスレバ，直徑ハ $2r$ デ，ソノ $\frac{1}{9}$ ヲ減ジタルモノハ

$$2r\times\frac{8}{9}=\frac{16}{9}r$$

デアル，是ヲ一邊トスル正方形ノ面積ハ $\left(\frac{16}{9}r\right)^2$ デアル．一方ニ半徑 r ナル圓ノ面積ハ $r^2\pi$ デアルカラ

$$\left(\frac{16}{9}r\right)^2 \fallingdotseq r^2\pi$$

トナル筈デアル．兩邊カラ r^2 ヲ約シ去レバ

$$\pi \fallingdotseq \left(\frac{16}{9}r\right)^2 \fallingdotseq 3.1605$$

トナツテ，3.1416 ヨリモ少シク大デアル．コレハ西紀前約二千年 (皇紀前約千四百年)ニ知ラレテ居タ圓周率デアル．

ばいぶるニハ西暦紀元前約一千年(皇紀前約四百年)ニ建造セラレタさろもん聖堂ノ前庭ニ在ル大水盤ノ徑 10 えれ[2]ニシテ周圍 30 えれト記サレテアル．コレガ實測シテ得タ數字ナラバ斯クキツカリトハナラヌデアラウカラ，多分 $\pi=3$ トシテ計算シタモノト思ハレル．

西曆紀元前 122 年ニ死シタルあるきめですハ

1) 大英博物館ニ在ル *Papyrus* (*Rhind* 蒐集品).
2) 古代尺度ニシテ約 1m ノ $\frac{2}{3}$: *Elle*

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

ナル關係ヲ發見シテ居ル．コレハ π ガ 3.1408 ト 3.1428 トノ間ニ在ルコトヲ示スノデアル．右邊ノ分數 $3\frac{10}{70}$ ハ

$$3\frac{10}{70}=\frac{22}{7}$$

デ，コノ分數 $\frac{22}{7}$ ハ今日尚 π ノ略率トシテ廣ク使用セラレテ居ル．

印度ニ於テモ圓周率ハ研究セラレ西曆紀元 476 年(皇紀 1136 年) ニ歿シタありやばった[1]ハ正 384 角形ヲ用ヰテ 3.1416 ヲ得タトイフ．

支那ニ於テモ此ノ程度ノ圓周率ハ知ラレテ居タガ，本邦ニ於テハ江戸時代ニ至リテ甚ダ精密ナル率ガ計算セラレ，小數以下五十桁ノモノモ見ラレル．

圓周率ノ最モ精密ナルハ英人しゃんくす[2]ガ西曆 1873年 (皇紀2533年)ニ七百七位マデ計算シタモノデアラウ．同氏ノ言フ所ニヨルト，西曆 1853 年ニりひてる教授ノ計算シタル五百位ノモノハ同年ニり氏以前ニ發表シタルし氏ノモノト全ク一致セリトイフ．

斯樣ニ精密ナルモノハ勿論，本邦並ニ支那ノ五十位，百位ニ達スル如キモノノ計算ハ，正多角形ノ全周ヲ求ムル方法ヲ使用シタノデハナク，他ノ方法ニ依ツタモノデアラウ．多クハ級數ノ方法ニ依ツタモノト思ハレル．實際 π ノ値ヲ與フル無限級數ニハ種々ノモノガアル．又無限級數ニ依ラズトモ，一歩一歩眞ノ値ニ近ヅク方法モアリ得ルノデアル．

圓周率 π ノ値ヲ試ミニ小數第十六位マデ書イテ見ルト

$$3.1415926535897932\ldots\ldots$$

デアルガ，此ノ樣ニ精密ナ値ハ日用ニハ必要デナイ．便利ナル普通ノ近似値トシテハ

$$\frac{22}{7} \qquad \frac{355}{113} \qquad \sqrt{10}$$

1) *Aryabhatta.* 2) *William Shanks: Proceed. R. Soc. of London, XXI.*

ナドガ用ヰラレル．是等ヲ計算シテ見ルト

$$\frac{22}{7}=3.14285\ldots\ldots$$

$$\frac{355}{113}=3.141592920\ldots\ldots$$

$$\sqrt{10}=3.1622\ldots\ldots$$

トナルカラ，第二ノ $\frac{355}{113}$ ガ最モ精密デ六桁マデハ眞ノ値ト一致スル．コレハ西洋デハめちうす[1]ノ與ヘタモノトイフガ，支那ニモ古クカラ(西曆 500 年)知ラレテ居ルトイフ．本邦ニテモ亦知ラレテ居タ．此ノ分數ヲ書クニハ最初ノ奇數 1, 3, 5 ヲ二箇ヅヅ並ベテ 113355 ト書キ，コレヲ中央デ折半シテ分母分子トスレバヨイノデアルカラ，記憶ニ甚ダ便デアル．

尚此ノ外ニ

$$\frac{333}{106}=3.141509\ldots\ldots$$

其ノ他ヲ擧ゲル人モアル．

附記 ぎりしや人ノ間ニハ古來有名ナル三ツノ難問ガアツタ．

1. 一ツノ正六面體(立方體)ノ二倍ノ體積ヲ有スル正六面體ヲ作ルコト．卽チ定規ト兩脚器ノ有限回數ノ使用ニヨツテ，與ヘラレタル正六面體ノ二倍ノ體積ヲ有スル正六面體ノ一稜ノ長サヲ求ムルコト．
2. 與ヘラレタル隨意ノ角ヲ三等分スルコト．定規ト兩脚器ヲ有限回使用スルコトハ前ト同ジ．
3. 與ヘラレタル圓ト等積ノ正方形ノ一邊ヲ求ムルコト．定規ト兩脚器ヲ有限回使用スルコトハ前ト同ジ．

以上三問題ノ中第一，第二ノ問題ハ，代數學ノ問題ニ直セバ孰レモ三次方程式ヲ解クコトニ歸スルノデアル．然ルニ圓ト直線トノ有限箇ノ組合セデハ特殊ノ二次方程式ヲ何回カ解クコトニナルノデ，結局加減乘除ノ外ニ開平法

1) *Adrien Métius.*

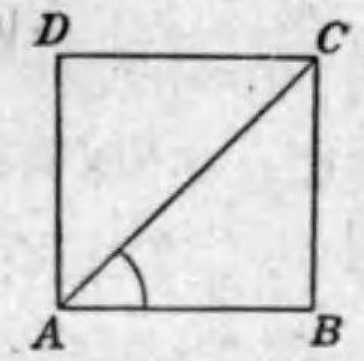
ヲ何回カ應用スルコトニ外ナラナイ．然ルニ一般ノ三次方程式ニ開平法ヲ何回カ應用シテモ解キ得ナイ場合ガアル．例ヘバ有理數ヲ係數トスル三次方程式ハ，ソレガ有理根ヲ有タナイ場合ニハ，開平法ヲ繰返シ應用シテモ解キ得ラレナイコトガ證明セラレテ居ルノデアル．結局第一，第二ノ問題ハ，平面幾何學ニ於テ通常許サレル方法デハ，一般的ニハ解キ得ナイ問題デアルコトガ證明セラレタノデアル．第三ノ問題ハ最モ困難ナル問題デアル．半徑ヲ r トスレバ，圓ノ面積ハ $r^2\pi$ デアルコトハ平面幾何學デ判カツテ居ルノデアル．$r^2\pi=r\times r\pi$ デアルカラ，各邊ノ長サガ夫々 r 及ビ $r\pi$ ナル矩形ノ面積ニ等シイ．然ルニ此ノ矩形ト面積ノ等シイ正方形ヲ作ルコトハ定規ト兩脚器ダケデ簡單ニ出來ルカラ，問題ハ要スルニ $r\pi$ ニ等シイ長サヲ作圖スル問題ヲ解クコトニ歸スル．特ニ r ヲ單位ニトレバ，單位ノ長サヲ與ヘテ π ニ等シイ長サヲ作圖スルコトニ歸スルノデアル．假ニ定規ト兩脚器トヲ有限回使用シテ，此ノ作圖ガ出來タトスルナラバ，コレヲ代數的ニ考フレバ，結局 π ハ整數ヲ係數トスル代數方程式ノ根ニナツテ居ル筈デアル．

モシ π ガ一次方程式 $ax+b=0$ ノ根デアリ，a ト b トガ整數デアルナラバ，$\pi=-\dfrac{b}{a}$ デアルカラ，π ハ有理數デアルコトニナル．併シ π ハ有理數デナイコトヲ西暦1766年(皇紀二千四百二十六年)ニらむべると[1]ガ證明シタ．ソノ大體ヲ說明スルト次ノ樣デアル．

角ヲ測ルニ通常ハ一點ノ周圍ヲ三百六十ニ分ケテ其ノ一ヲ一度トスルノデアルガ，又此ノ點ヲ中心トシテ半徑1ノ圓ヲ畫キ，與ヘラレタル角ノ間ニ挾マレル圓弧ノ長サヲ以テソノ角ヲ測ルコトモ出來ル譯デアル．然ルニ半徑1ナル圓周ノ全長ハ 2π デアルカラ，360° ハ 2π，180° ハ π，90° ハ $\dfrac{\pi}{2}$，60° ハ $\dfrac{\pi}{3}$，45° ハ $\dfrac{\pi}{4}$ 等デ表ハシ得ルノデアル[2]．此ノ記法ヲ用ヰレバ $\tan 45^\circ$ ハ $\tan\dfrac{\pi}{4}$ トナルノデアル．らむべるとガ證明シタノハ x ヲ弧度法デ表ハシタ

1) *Lambert*.　2) 此ノ表ハシ方ヲ弧度法トイヒ，弧ノ長サ1ニ相當スル角ヲ1らぢあん (*Radian*) トイフ．1らぢあんハ $57^\circ17'$ 餘ニ當ル．

角トスルナラバ，x ガ有理數(0ヲ除ク)デアル限リ，$\tan x$ ハ決シテ有理數デハアリ得ナイトイフコトデアル．故ニモシ $\tan x$ ガ有理數デアルナラバ，x ハ有理數デハアリ得ナイノデアル．然ルニ $\tan 45^\circ=\tan\dfrac{\pi}{4}$ ノ値ハ幾何デアルカヲ調ベテ見ヨウ．正方形 ABCD ノ對角線 AC ヲ引ケバ，角 BAC ハ明ラカニ $\dfrac{90^\circ}{2}=45^\circ$ 卽チ $\dfrac{\pi}{4}$ デアル．又 AB=BC デアルカラ



$$\tan \mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=1$$

デアル．卽チ

$$\tan\frac{\pi}{4}=1$$

トナル．右邊ノ1ハ有理數デアルカラ，前述ノ結果ニヨツテ，$\dfrac{\pi}{4}$ ガ有理數デナイコトガ證明セラレルノデアル．

以上デ π ハ一次方程式ノ根ニハナラナイコトガ明ラカニサレタノデアルガ，其ノ後りうーびる[1]ガ自然對數ノ底數 e ハ係數ガ皆有理數デアル二次方程式ノ根ニハナラナイコトヲ證明シ，次イデ西暦1873年(皇紀二千五百三十三年)ニ至ツテえるみーと[2]ガ e ハ係數ガ皆有理數ナル如何ナル代數方程式ニモ適合シナイ(卽チ根ニナラナイ)コトヲ證明スルニ成功シタ．此ノえるみーとノ發見ヲ用ヰテりんでまん[3]ハ西暦1882年(皇紀二千五百四十二年卽チ明治十五年)ニ至ツテ終ニ π ハ係數ガ皆有理數ナル如何ナル代數方程式ニモ適合シナイコトヲ證明シテ，圓ヲ等積ノ正方形ニ直ス難問題ニ結末ヲ付ケタノデアル．コレデ二千年來ノ問題ハ不可能ナ問題デアツタコトガ明ラカニナツタ．

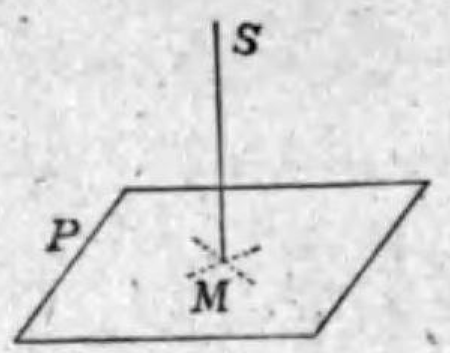
31 正多面體，球

平面上ノ正多角形ニ對シテ空間ニハ正多面體ガアル．多面體[4]トハ蓋ヲシタ箱ノヤウニ數枚ノ平面ガ集マツテ空間ノ一部ヲ完全ニ隙ナク圍ンダ形ヲイフ

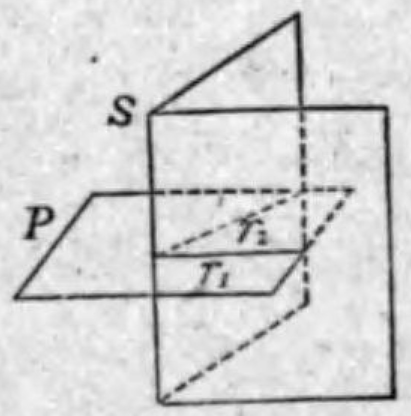
1) *Liouville*.　2) *Hermite (1822–1901)*.　3) *Lindemann*.　4) *Polyhedron*.

ノデ，特ニ同形同大ノ正多角形ガ圍ンダ空間ノ場合ニ，各面ノ間ノ角ガ皆相等シイ時ニハ，之ヲ正多面體[1]トイフ．コヽニイフ各面ノ間ノ角トハ，二ツノ平面ノ作ス角ノコトデアルガ，是ハ平面幾何學ニハナイ事デアルカラ，少シク說明シテ見ヨウ．

先ヅ平面ト直線トガ互ニ垂直デアル場合ヲ考ヘテ見ヨウ．

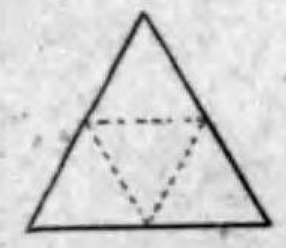


直線 S ガ平面 P ニ交ル點 M ヲ通ジテ平面 P 上ニ數多ノ直線ヲ引イテ見ルト，孰レノ直線モ皆直線 S ト M 點ニ於テ直角ニ交ツテ居ルデアラウ．又直線 S ガ平面 P ニ垂直デアルトハ，S ガ P 平面上ニ在リテ，M ヲ通ズル一ツノ直線ニ垂直ナルノミデハ不充分デ，少クトモ M ヲ通ジ P 平面上ニ在ル二ツ以上ノ直線ニ垂直デナケレバナラナイ．

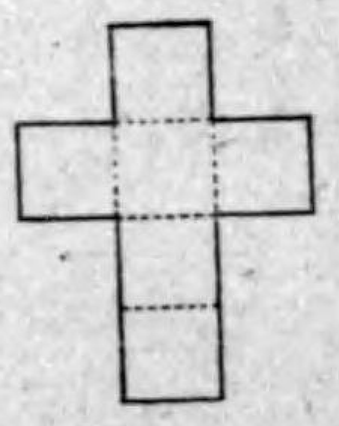


次ニ二ツノ平面ガ相交ツテ居リ，ソノ交線ヲ S トスル．S ハ直線デアルコトハ分ルデアラウ．S 直線ノ隨意ノ點ヲ通ジテ，此ノ直線ニ垂直ナル平面 P ヲ作レバ，二ツノ平面ト r_1, r_2 ノヤウナ二ツノ直線デ交ルデアラウ．r_1, r_2 ハ勿論 S ト直角ヲナシテ居ルノデアル．是等二直線 r_1, r_2 ノ間ノ角ヲ原ノ二ツノ平面ノ間ノ角トイフノデアル．結局交線 S 上ノ隨意ノ一點ニ於テ各平面上ニ S ト垂直ナル直線 r_1, r_2 ヲ引イテ，ソノ間ノ角ヲ求ムレバヨイコトガ分ルデアラウ．

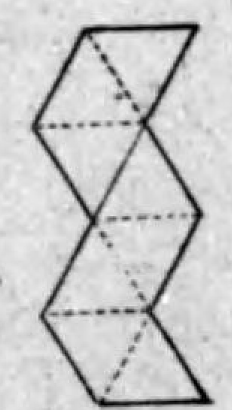
正多面體（詳クハ凸正多面體）トハ如何ナルモノカト言フニ，次ノヤウニ容易ニ作リ得ラレルモノガ五種知ラレテ居ル．圖ノ實線ニ沿ウテ紙片ヲ切リ取リ，點線ノ如ク折リ目ヲ付ケテ，折リ曲ゲルト夫々正多面體ガ出來ル．(1) ハ同大ノ正三角形四ツ，(2) ハ同大ノ正方形六ツ，(3) ハ同大ノ正三角形八ツ，(4) ハ同大ノ正五角形十二，(5) ハ同大ノ正三角形二十ヲ連ネタノデアル．



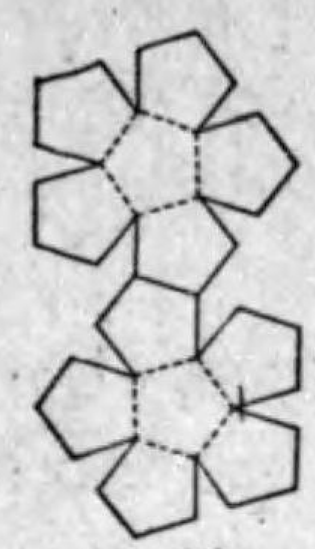
(1)



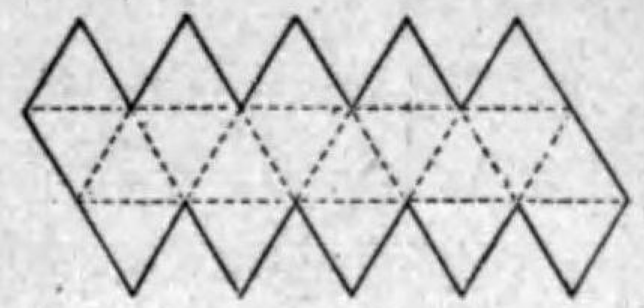
(2)



(3)



(4)



(5)

1) *Regular polyhedron.*

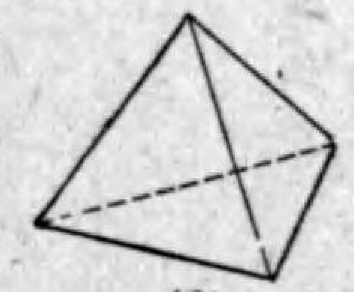
出來タ正多面體ハ，ソノ面ノ數ニ從ツテ

(1) 正四面體[1]　(2) 正六面體(又ハ立方體[2])
(3) 正八面體[3]　(4) 正十二面體[4]
(5) 正二十面體[5]

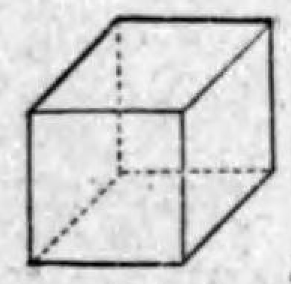
ト呼バレテ居ル．

出來タ形ハ下圖ノ如クデアル．

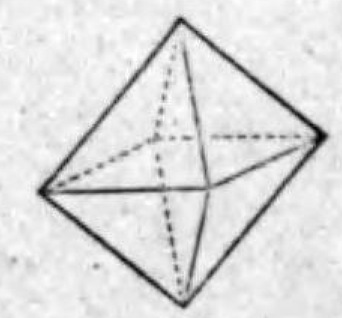
正四面體 (1) デハ各頂點ニ三ツノ正三角形ガ相會シテ居ル．正六面體 (2) 卽チ立方體デハ各頂點ニ三ツノ正方形，正八面體 (3) デハ各四ツノ正三角形，正十二面體 (4) デハ三ツノ正五角形，正二十面



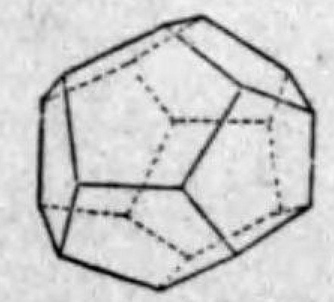
(1)



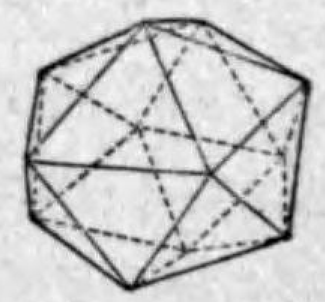
(2)



(3)



(4)



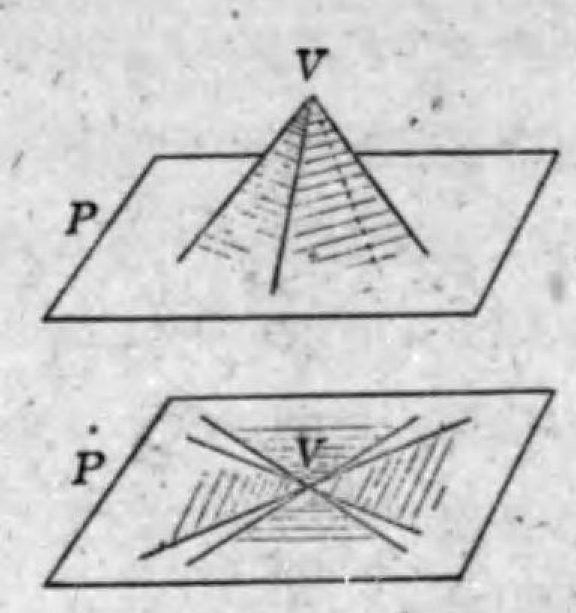
(5)

1) *Regular tetrahedron.* 2) *Cube.* 3) *Regular octahedron.*
4) *Regular dodecahedron.* 5) *Regular icosahedron.*

體 (5) デハ五ツノ正三角形ガ相會シテ居ルコトヲ見ルデアラウ.

以上五種ノ外ニ如何ナル正多面體ガアルカヲ考ヘテ見ヨウ.

先ヅ頂點ニ於テ面ガ少クモ三ツ相會スルコトハ明ラカデアル (二ツデハ頂點ニナラナイ). 圖ノヤウニ頂點 V ニ於テ幾ツカノ面ガ相會シテ居ルトシテ, 點 V ヲ一ツノ平面 P ニ向ツテ押シ潰シタト考ヘルト, 右圖ノ樣ニ各面ノ間ニ隙間ガ出來ルデアラウ (隙間ガ出來ナイ樣ニスレバ各面ハ平面デハナクナリ皺ガ出來ル). 此ノ場合點 V ノ周リノ角(押シ潰サレタ時ノ)ハ平面角デアルカラ四直角(卽チ 360°) デアル. ヨツテ原ノ頂點ヲ作ツテ居タ各面ノ V ニ於ケル角ハ皆合セテモ四直角ニハ達シナイコトハ明ラカデアラウ. ヨツテ



如何ナル頂點ニ於テモ, 各面ノ角ノ總和ハ 360° ニ達シナイ. モシ達スレバ, ソノ點ハ頂點デハナク, 平ラカニナツテ居ルノデアル.

茲ニ於テ正三角形, 正四角形, 正五角形, 正六角形等ノ一ツノ角ノ大サヲ調ベテ見ルト, 平面幾何學デ學ンダヤウニ

正三角形ノ一角	60°
正四角形ノ一角	90°
正五角形ノ一角	108°
正六角形ノ一角	120°

以下漸次大キクナルノデアル.

立體ノ一ツノ頂點ニハ少クモ三ツノ面ガ相會スルノデアリ, ソノ頂角ノ總和ガ 360° ヲ超エルコトハナイノデアルカラ, 正多面體ニ於テハ, 一ツノ頂點ニ會スル各面ノ角ハ $\frac{360°}{3}=120°$ ヲ超エルコトハ出來ナイ. 卽チ正六角形ヨリ邊數ノ多イ正多角形ハ正多面體ヲ作ルコトハ出來ナイ. 正六角形デモ三ツ一點ニ會スレバ角ノ總和ハ $120°\times3=360°$ デアルカラ, 其ノ點ハ頂點ニハナラナイデ平面ニナツテシマフ. 故ニ正多面體ヲ作リ得ル正多角形ハ正三角形, 正四角形, 正五角形ノ三種ニ限ルノデアル.

次ニ是等ノ正多角形ハ頂點ニ何枚相會シ得ルカヲ考ヘテ見ルニ

正三角形ノ場合

$60°\times3=180°$　　$60°\times4=240°$　　$60°\times5=300°$

正四角形ノ場合

$90°\times3=270°$

正五角形ノ場合

$108°\times3=324°$

以上五ツノ場合ヨリ外ニハナイコトハ明ラカデアル. 卽チ頂點ニ於ケル正多角形ノ箇數ハ

正三角形ナラバ	三箇	四箇	五箇
正四角形ナラバ	三箇		
正五角形ナラバ	三箇		

ノ五種ニ限ルノデアル. 然ラバ是等五種ニ相當スル正多面體ハ實在スルカトイフニ, 前ニ第 83 頁ニ述ベタ五種ノ正多面體ハ丁度ソレデ, 一頂點ニ會スル正多角形ガ, 正三角形三箇ノ場合ハ正四面體, 四箇ノ場合ハ正八面體, 五箇ノ場合ハ正二十面體, 又正四角形三箇ノ場合ハ立方體, 正五角形三箇ノ場合ハ正十二面體デアル.

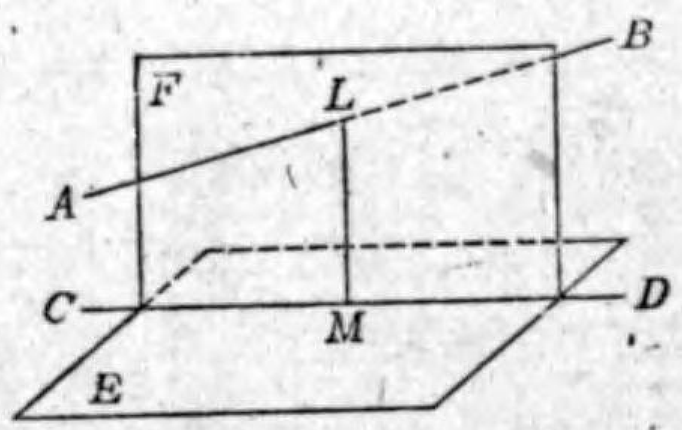
以上デ實在スル凸正多面體ハ以上ノ五種ニ限ルコトガ明カニナツタト思フ.

附記　正多面體ニ就イテハ次ノヤウナ話ガ傳ハツテ居ル. ぎりしやノさもす島ノぴたごらす[1]ハ皇紀 92 年 (西紀前 569) (?) ニ生レ同 191 年 (前 470) (?) ニ歿シタト言ハレテ居ルガ, 伊太利ニ於テ一ツノ黨派ヲ建テタ. コレハ祕密結社デ政治上ノ活動ヲモシタノデアル. コレニ屬

1) *Pythagoras.*

スル人々ノ學術上ノ發見發明ハ皆流祖ノ名ニ歸セシメル固イ誓約ガアツタ．其ノ頃既ニ或種ノ正多面體ハ知ラレテ居タノデアルガ，黨ノ一人ひっぱすす[1]（皇紀百九十一年頃ノ人）ハぴたごらすノ列擧シタル正多面體ノ外ニ正十二面體ヲ發見シタリトシ，自己ノ發見トシテ世ニ誇ツタノデ，誓ヲ破ツタ科ニヨリ海ニ沈ラメレタトイフ．

斯ノ如ク，空間デハ正多面體ハ唯五種ニ限ルノデアルカラ，平面ノ場合ニ正多角形ノ邊數ヲ漸次ニ增シテ遂ニ圓ニ達スルノト同ジ事ヲ試ミルコトハ出來ナイ．ツマリ球ハ正多面體ノ面數ノ限リ無ク增シタモノトハ見做シ得ナイノデアル．是デ見ルト，空間ニ於ケル圖形ノ關係ヲ平面ノ場合カラ類推スルコトハ危險ヲ伴フノデアル．例ヘバ平面ノ上デハ二ツノ直線ハ互ニ相交ルガ（平行線ハ限リ無ク遠イ處デ交ルト考ヘ得ラレル），空間ノ二直線ハ必ズシモ交ラナイ．例ヲ取レバ，天井ニ引イター直線ト床ノ上ニ引イク直線トハ必ズシモ平行デハナイガ，決シテ交ラナイコト明白デアル（尤モ平行ノ時ダケハ限リ無ク遠イ處デ交ルト考ヘテモヨイ）．然ルニ面白イコトニハ，相交ラザル二直線ノ場合ニハ，各ノ直線ニ直交スル線分ガアツテ，ソレガ是等二直線間ノ最短距離デアル．此ノ事ハ次ノ樣ニ考ヘレバ明瞭デアル．先ヅ AB, CD ガ是等二直線トスル．CD ヲ含ンデ，直線 AB ニ平行ナル平面 E ヲ想像スル．次ニ又直線 CD ヲ通ジテ平面 E ニ垂直ナル平面 F ヲ想像スル．此ノ平面ハ直線 AB トー點 L ニ於テ交ルデアラウ（AB ガ CD ト平行ナル場合ニハ交ラナイガ，其ノ時ハ AB, CD ニ共通ナル垂直線ガアルコト明白デアル）．此ノ L 點カラ直線 CD ニ垂線 LM ヲ下セバ，コレハ直線 CD ニ垂直ナルコトハ明瞭デアルガ，又直線 AB ニモ垂直



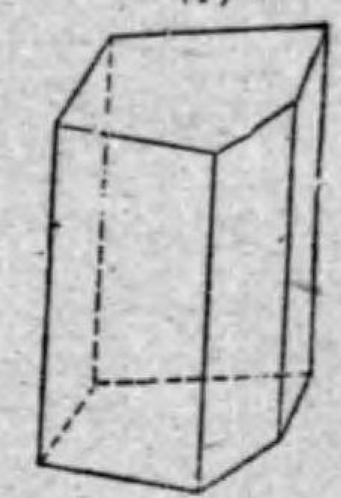
1) *Hippasus.*

デアル．ソレハ M 點ヲ通ジテ，E 平面上ニ，AB ニ平行ナル直線ヲ引イテ見レバ明ラカデアル．

今直線 AB ヲ含ンデ平面 E ニ平行ナル平面ヲ想像シテ見レバ，直線 LM ハ是等二平面ノ各ニ垂直デ，ツマリ二平面ノ共通垂線デアルカラ，是等二平面間ノ最短距離デアル．從ツテ是等平面ノ上ニ横タハル二直線 AB, CD 間ノ最短距離デアルコトガ理解サレヨウ．同ジ事ヲ次ノ樣ニ考ヘテモヨイ．AB ハ天井ニ引イタ直線デ，CD ハ床ノ上ニ引イタ直線デアルト考ヘテ，人ガ CD 線ヲ傳ツテ步メバ何時カハ頭ノ眞上ニ直線 AB ヲ見ルコトガアラウ．此ノ時ノ頭上ノ點ハ L デ自分ハ丁度 M 點ニ立ツテ居ルコトハ常識デ理解デキルデアラウ．

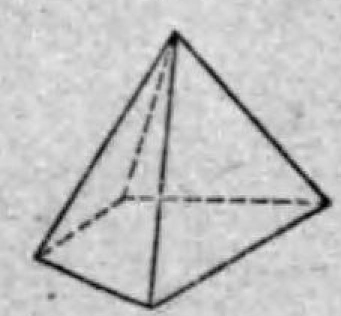
32 角壔，角錐，圓壔，圓錐

(1)

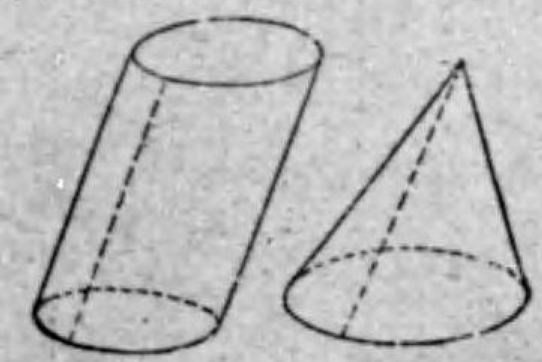


右圖 (1) ノ如キ柱狀ノモノヲ角壔[1]トイヒ，(2) ノ如ク金字塔ノ形ノモノヲ角錐[2]トイフノデアルガ，(1) ハ底面ガ五角形デアルカラ五角壔，又 (2) ノ底面ハ四角形デアルカラ四角錐トイフノデアル．モシ角壔又ハ角錐ノ底面ガ多角形ノ代リニ圓ニナレバ，コレヲ圓壔[3]又ハ圓錐[4]トイフ．

(2)



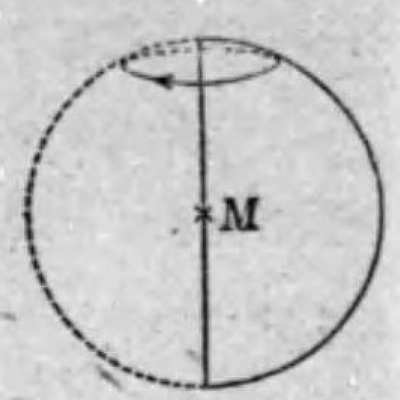
圓壔ハ一ツノ個ノ圓周ニ沿ウテ一ツノ直線ガ平行ニ動イテ作ツタトモ見ラレ，圓錐ハ一定點（卽チ頂點）ヲ通ル一ツノ直線ノ他ノ端ガ一ツノ圓周ニ沿ウテ動イテ作ツタト見テモヨイ．此ノ時是等直線ヲ圓壔又ハ圓錐ノ母線[5]トイフノデア



1) *Prism.* 2) *Pyramid.* 3) *Circular cylinder.* 4) *Circular cone.*
5) *Generator* 又ハ *Generating line.*

ル．圓壔ノ場合ニ，其母線ガ底面ニ垂直ナラバ，コレヲ直圓壔[1]トイヒ，圓錐ノ場合ニ，其ノ頂點ヨリ底面ヘノ垂線ガ底面ノ圓ノ中心ヲ通ルナラバ，コレヲ直圓錐[2]トイフノデアル．

圓ニ一ツノ直徑ヲ引イテ，コノ圓ヲ二等分シ，此ノ直徑ヲ軸トシテ半圓ヲ一廻轉サセルナラバ一ツノ球[3]ヲ得ルコトハ明ラカデアラウ．此ノ場合ニ，圓ノ中心 M ハ又此ノ球ノ中心トナリ，球面上ノ各點ト M トノ距離ハ皆相等シク，丁度圓ノ半徑ト等シイコトモ亦明瞭デアラウ．



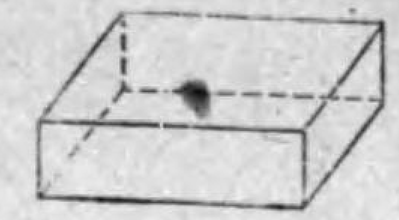
球面ヲ平面デ截ルト，ソノ截リロハ一ツノ圓トナル．
特ニ球ノ中心ヲ通ル平面デ截ツタ場合ガ最大ノ圓ヲ得ルノデアリ，此ノ截ロノ圓ヲ球ノ大圓[4](又ハ大圏)ト呼ブ．之ニ對シテ中心ヲ通ラナイ平面デノ截ロヲ球ノ小圓[5]トイフノデアル．地球上ノ赤道，子午線等ハ皆地球ノ大圓デアルガ，緯度ノ線ハ赤道ヲ除イテハ小圓デアル．地球上ノ二地點間ノ距離ハ此ノ二地點ヲ通ズル大圓（卽チ此ノ二地點ト地球ノ中心トヲ通ズル平面ヲ以テスル截ロ)ノ劣弧ニ沿ウテ行クノガ最モ近イノデアル．例ヘバめるぼるん市(緯度南 37°50′) トけーぷたうん市(緯度南 34°)トハ殆ンド同緯度ニアル二地點デアルガ，ソノ間ノ最短距離ハ正東又ハ正西ニ向フ同緯度ノ線デハナクテ，コノ二地點ヲ通ズル大圓ノ弧デアル．此ノ大圓ノ弧ハ同緯度ノ線ヨリモ遙ニ南方ニ偏シテ居ルケレドモ，ソノ長サハ地球上デハ最モ短イノデアル．又めきしこノ西海岸ヨリ本邦ニ至ル大圓ハ米國ノ西海岸ニ沿ウテ北上シさんふらんしすこヲ過ギテ居ル．横濱港ハ北緯約 35°，さんふらんしすこ港ハ北緯約 38° デアルガ，横濱港ヨリさんふらんしすこ港ニ行クノニ，針路ヲ正東ニ取レバ其ノ距離約 4880 海里デアルケレドモ，大圓ノ弧ニ沿ウテ航海スレバ約 4530 海里デアルトイフ．實際ニ航海スルニハ，風ヤ潮流等ノ關係モアルカ

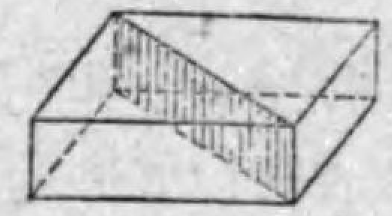
1) *Right circular cylinder.* 2) *Right circular cone.* 3) *Sphere.*
4) *Great circle.* 5) *Small circle.*

ラ必ズシモ此ノ大圓ニ沿ウテバカリハ航海シナイノデアラウ．

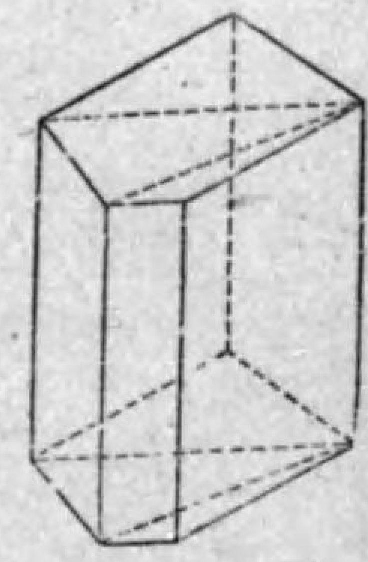
33 體　　積

圖ニ示ス如キ直四角壔卽チ直六面體ノ體積ハ其ノ高サ長サ及ビ幅ノ相乘積ヲ以テ表スコトハ普通ニ知ラレテ居ル．然ルニ長サト幅トノ相乘積ハ底面ノ面積ヲ表スカラ，コノ體積ハ底面積ト高サトノ相乘積ト見做シテモヨイ．此ノ直六面體ヲ圖ノ如ク縦ニ二等分シタトスレバ，二ツノ直三角壔ガ出來ルガ，ソノ各ノ體積ハ明ラカニ全體ノ體積ノ半分デアルカラ，コレモ亦三角形ヲナス底面ノ面積ト高サトノ相乘積ト見ルコトガ出來ル（コノ三角形ノ面積ハ直六面體ノ底面ヲナス矩形ノ面積ノ半分デアルカラ)．



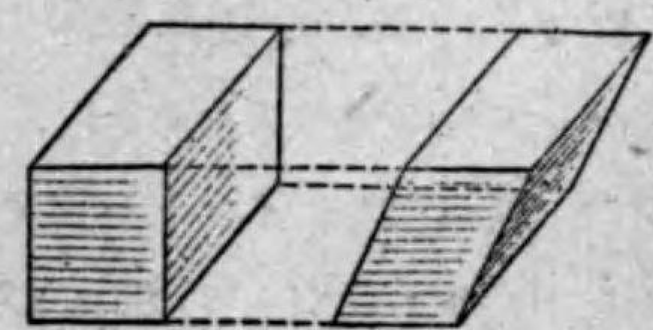


隨意ノ直角壔ハ圖ノ如ク同ジ高サノ數箇ノ直三角壔ニ分ツコトガ出來ルカラ，其ノ體積モ亦底面ノ面積ト高サトノ相乘積ヲ以テ表スコトガ出來ルコトハ明ラカデアル．直圓壔モ亦直角壔ノ邊數ノ增大シタモノト考ヘレバ，其ノ體積ハ底面ノ圓ノ面積ト其ノ高サトノ相乘積ニナル譯デアル．



34 かばりえりー[1]ノ原理

とらんぷノかるた又ハ小倉百人一首ノかるたヲ全部正シク積ミ重ネルト直六面體ガ出來ル．コレヲ圖ノ如ク左カラ押セバ右圖ノ如ク斜ナ平行六面體トナルガ，其ノ底面積，高サ及ビ體積ハ原ノ直六面體ト全ク同ジデアル．シカノミナラズ左圖ノ下カラ n 枚目ノかるたハ右圖デモヤハリ下カラ同ジ高サニアルデアラウ．



1) *Cavalieri* (*1598–1647*).

此ノ事ハかるたノ形ガ矩形デナクトモ圓形デモ楕圓形デモヨク，其ノ形ニハ關係ガナイカラ，コレヲ押擴メテ次ノヤウニ言ヒ得ラレルノデアル．

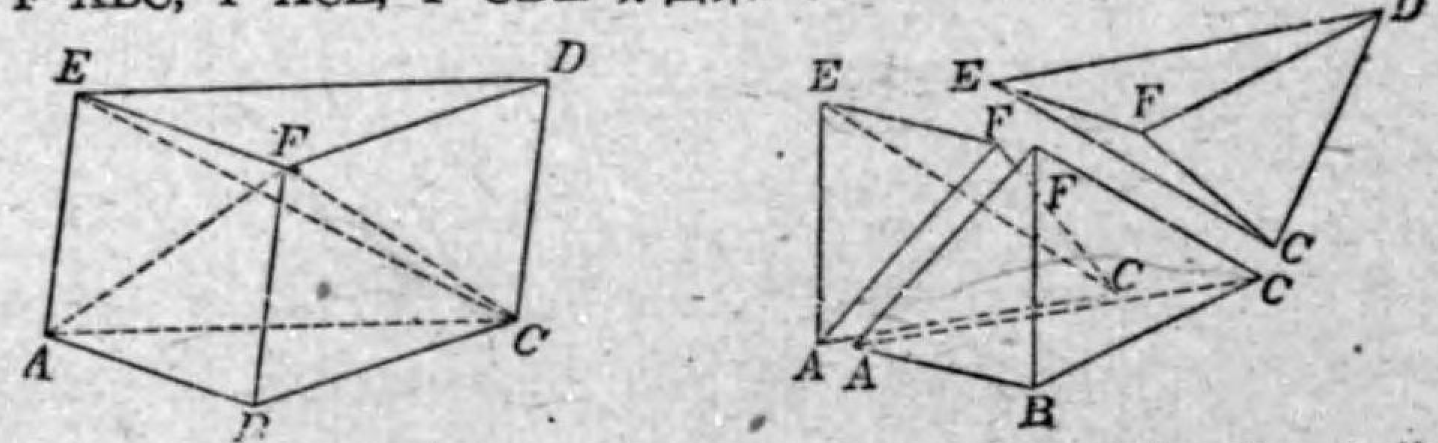
二ツノ平行平面ノ間ニ狹マレタ二ツノ立體ガアリ，コレヲ是等平面ニ平行ナル如何ナル第三ノ平面デ切ツテモ二ツノ截口(卽チ同ジ高サノ截口)ハ恆ニ互ニ相等シキ面積ノモノナラバ，是等二ツノ立體ハ互ニ相等シキ體積ヲ有ツ．

コレヲかばりえりーノ原理[1]トイフノデアル．

此ノ原理ニ依ツテ上圖ノ右側ノ斜ナ立體ノ體積ノ計算ヲ左側ノヤウナ直立シタ立體ノ體積ノ計算ニ引直スコトガ出來ルノデアル．卽チ右圖ノ斜ナ四角壔ノ體積ハソノ底面ノ面積ニ，其ノ高サ卽チ上下兩底面ノ間ノ垂直距離ヲ乘ジテ得ラレル(高サノ代リニ斜ナ稜線ノ長サヲ乘ジテハイケナイ)．

35 角 錐 ノ 體 積

一ツノ三角壔 ABC-EFD ヲ平面 FAC 及ビ FCE デ切レバ，玆ニ三ツノ三角錐 F-ABC, F-ACE, F-CDE ガ出來ル．



最初ノ二ツノ三角錐 F-ABC ト F-ACE ニ於テ C ヲ頂點ト見レバ，其ノ底面 ABF, AEF ハ原三角錐ノ一面 ABFE (平行四邊形)ヲ對角線 AF デ二等分シタ各半分デアルカラ，全ク合同ナル三角形デアル．從ツテ，ソレ等ノ面積ハ互ニ相等シイコトハ言フマデモナイ．又ソレ等三角形ノ面カラ頂點 C マデノ高サハ孰レモ C 點ヨリ平面 ABEF ニ下シタ垂線ノ長サデアルカラ，

1) *Cavalieri's principle.*

互ニ相等シイノデアル．故ニ是等二ツノ三角錐ハ高サガ相等シク，底面ノ面積モ亦互ニ等シイカラ，底面カラ等シイ高サノ斷面ハ等シイ面積ヲ有ツコトハ首肯サレヨウ．ヨツテかばりえりーノ原理ニヨツテ相等シキ體積ヲ有ツデアラウ．

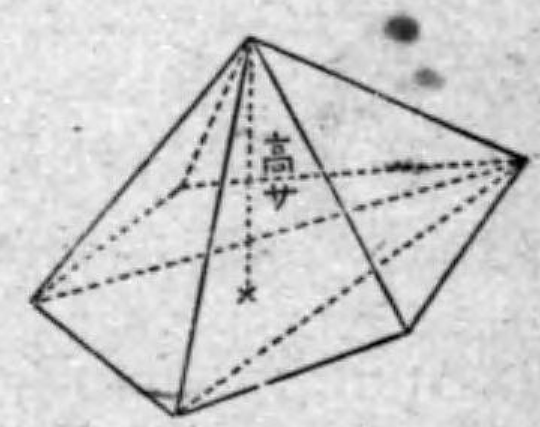
同樣ニ三角錐 F-ACE ト F-CDE トヲ比較シテ見テモ F ヲ頂點ト見レバ同ジ高サト同ジ底面積ヲ有ツコトハ容易ニワカル．故ニ是等三ツノ三角錐ハ皆互ニ相等シイ體積ヲ有ツコトガワカル．

以上デ見ルト，原三角壔ヲ分解シテ生ジタル三ツノ三角錐ハ皆同體積ヲ有ツカラ，各ノ體積ハ原三角壔ノ體積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイコトガワカル．ヨツテ

三角錐ノ體積ハ，其ノ高サト底面積トノ相乘積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ．

トイフコトニナル．

以上ノ結果ハ多角錐及ビ圓錐ニモ擴張出來ル．何故ナラバ多角錐ハ下圖ノ如ク，其ノ頂點ヲ通ズル數箇ノ平面デ數箇ノ三角錐ニ分解出來ルシ，ソレ等三角錐ハ皆共通ノ高サヲ有ツト見テヨイカラデアル．



故ニ

多角錐ノ體積ハ其ノ高サト底面積トノ相乘積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ

コトガワカル．

此ノ結果ハ多角錐ノ底面ガ無數ノ邊ヲ有スル正多角形デアツテモ，從ツテ圓デアツテモ同樣デアルカラ

圓錐ノ體積ハ其ノ高サト底面積トノ相乘積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ．

トイヒ得ル．

問題

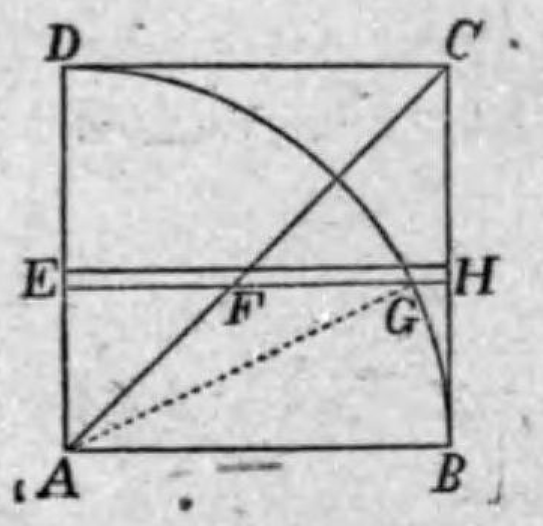
(1) 一邊ノ長サ 3cm ナル正方形ヲ底トシ高サ 5cm ナル四角錐ノ體積ヲ計算セヨ．

(2) 一邊ノ長サ 5cm ナル正八面體ノ體積ヲ計算セヨ.

(3) 半徑 6cm ナル圓ヲ底面トシ, 體積 300cm^3 ナル圓錐ノ高サヲ求メヨ.

36 球 ノ 體 積

球ノ體積ノ問題ハ今迄ノ樣ニ簡單デハナク, 大分難カシイガ, あるきめですハコレヲ次ノ樣ニ巧妙ナル考ヘデ解イタトイフ.



右圖ニ於テ ABCD ハ正方形デアルトシ, A ヲ中心トシ, AB ヲ半徑トシテ四分ノ一圓 BGD ヲ畫キ, 又對角線 AC ヲ引ク. 今直線 AD ヲ軸トシテ全圖形ヲ廻轉セシムレバ, 三角形 ACD ハ A ヲ頂點トスル圓錐ヲ生ジ, 弧 BGD ハ A ヲ中心トスル半球ヲ生ジ, 最後ニ正方形 ABCD ハ圓壔ヲ生ズルコトハ明ラカデアル.

AD 上ノ隨意ノ一點 E ヲ通ジテ AD ニ垂線 EFH ヲ引キ, 又コレニ密接平行シテ一線ヲ引イテ置クトスレバ, AD ヲ軸トシテ全圖形ヲ廻轉セシムルトキ, 是等二直線ハ二ツノ密接平行ナル二平面ヲ生ジ, 是等平面ト前述ノ圓錐, 半球, 圓壔トノ交リハ皆圓トナルデアラウ. 先ヅ是等ノ圓ノ全面積ヲ求メテ見ヨウ.

圓ノ面積ハ半徑ノ二乘ニ $\pi \fallingdotseq 3.1416$ ヲ乘ジテ得ラレルコトハ平面幾何學デ學ンダ所デアルカラ, 是等ノ圓ノ面積ハ夫々

$$\pi\cdot\overline{EF}^2 \qquad \pi\cdot\overline{EG}^2 \qquad \pi\cdot\overline{EH}^2$$

デアル. 今 EH ノ所ニ引イタ密接平行線ノ間ノ距離ヲ h トスレバ, 是等平行線ノ作ル密接二平面間ニ挾マレタル圓錐, 半球, 圓壔ノ薄片ノ體積ハ夫々

$$\pi h\cdot\overline{EF}^2 \qquad \pi h\cdot\overline{EG}^2 \qquad \pi h\cdot\overline{EH}^2$$

デアルデアラウ.

扨直角三角形 AEF ヲ考ヘテ見ルニ, 直線 AFC ハ正方形ノ對角線デアルカラ, 角 EAF, 角 AFE ハ各 45° デアル. ヨツテ

$$AE=EF$$

デアル筈デアル. 從ツテ

$$\overline{EF}^2+\overline{EG}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2$$

デアルガ, ぴたごらすノ定理ニヨツテ, 右邊ハ $\overline{AG}^2$ ニ等シイ. 然ルニ AG ハ圓 BGD ノ半徑デアルカラ AB 卽チ EH ニ等シイ. ヨツテ上式ハ

$$\overline{EF}^2+\overline{EG}^2=\overline{EH}^2$$

ノヤウニ書替ヘラレル. コレニ πh ヲ乘ズレバ

$$\pi h\overline{EF}^2+\pi h\overline{EG}^2=\pi h\overline{EH}^2$$

ヲ得ル. 此ノ式ノ各項ハ前ニ述ベタ通リ夫々圓錐, 半球, 圓壔ノ薄片ノ體積デアルカラ, 此ノ式ハ是等ノ間ノ關係ヲ示ス式デアル. 卽チ AB ニ平行ナル密接平行線ヲ引クトキハ, 其ノ位置ノ如何ニ關セズ常ニ圓錐ト半球ノ薄片ノ體積ノ和ハ圓壔ノ薄片ノ體積ニ等シイコトヲ示シテ居ル. 廻轉ニ依ツテ生ズル圓錐, 半球, 圓壔ヲ斯ノ如キ無數ノ密接平行平面デ無數ノ薄片ニ分ツタト考フレバ, 其ノ各片ニ就イテ, 上述ノ關係ガアルノデアルカラ, 夫等ノ總和タル圓錐, 半球, 圓壔ノ體積ノ間ニモ亦同樣ナル關係アルコトハ明ラカデアラウ. 卽チ三角形 ACD ノ作ル圓錐ノ體積ト圓弧 BGD ノ作ル半球ノ體積トノ和ハ正方形 ABCD ノ作ル圓壔ノ體積ニ等シイノデアル.

然ルニ此ノ圓錐ト圓壔トノ底面ハ AB 又ハ CD ヲ半徑トスル圓デアツテ互ニ相等シイ大キサノ圓デアリ, 高サハ孰レモ AD デアルカラ, 前ニ述ベタ通リ此ノ圓錐ノ體積ハ此ノ圓壔ノ體積ノ $\frac{1}{3}$ デアル. 故ニ上ニ得タ關係

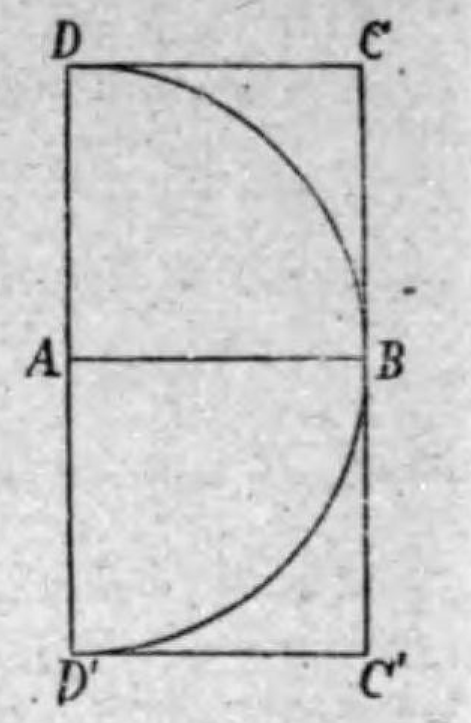
圓錐ノ體積＋半球ノ體積＝圓壔ノ體積

ノ兩邊カラ, 圓錐ノ體積ヲ減ズレバ

半球ノ體積＝圓壔ノ體積ノ $\frac{2}{3}$

トナルコトハ確カデアル.

次ニ，前ノ四分ノ一圓弧 BGD ノ代リニ半圓弧 DBD′ ヲ用ヰ，正方形 ABCD ノ代リニ矩形 CDD′C′ ヲ用ヰレバ，直線 DD′ ヲ軸トシテ廻轉シテ生ズルモノハ，全球トコレニ外接スル圓壔デアラウ．前ノ場合ノ半球ト圓壔トヲ各二倍シタモノニ他ナラナイカラ，ヤハリ前ト同樣ノ關係ガアル，ヨツテ



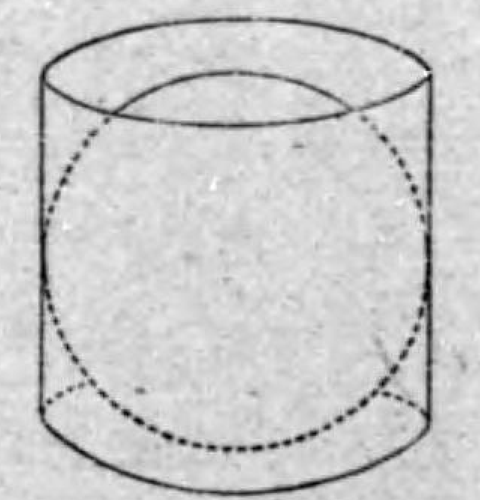
球ノ體積＝外接スル圓壔ノ體積ノ $\frac{2}{3}$

デアルコトガワカツタ．

此ノ關係ハあるきめですがろーま人ニ殺サレル時ニ墓石ニ刻ミ付ケルコトヲ依賴シタノデ，彼ノ墓碑ニハ球ト外接圓壔トノ圖ガ彫刻シテアツタトイフコトデアルガ，今ハ最早見當ラナイトイフコトデアル．

上ノ結果ヲ用ヰテ球ノ體積ヲ表ハス式ヲ出シテ見ヨウ．

球ノ半徑ヲ r トスレバコレニ外接スル圓壔ノ高サハ明ラカニ $2r$ デ，其ノ底面ハ半徑 r ノ圓デアルカラ，底面ノ面積ハ $r^2\pi$ デアル，從ツテ圓壔ノ體積ハ



$$2r\times r^2\pi=2r^3\pi$$

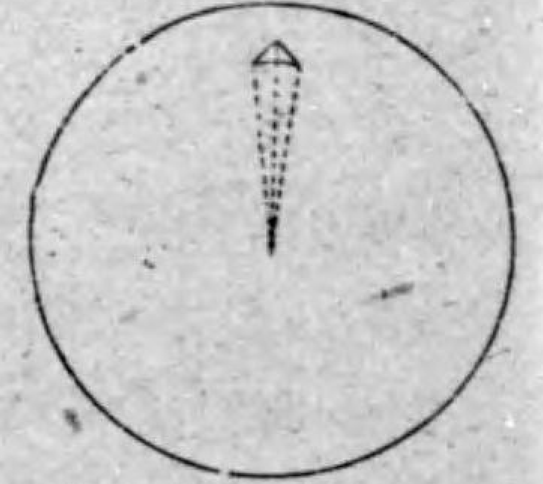
トナル．球ノ體積ハ，コレノ $\frac{2}{3}$ デアルカラ

$$\text{球ノ體積}=\frac{2}{3}\times 2r^3\pi=\frac{4}{3}r^3\pi$$

トナル．故ニ

半徑 r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル．

37 球ノ表面積



球ノ表面上ニ互ニ密接シテ三點ヲ取リ，球面上ニ三角形ヲ作レバ，此ノ三角形ハ平面三角形ト見做シ得ルデアラウ．(此ノ三角形ノ三邊ハ夫々球ノ大圓ノ弧デ作ルノデアルガ，非常ニ短カケレバ直

線ト見做シテモヨイ）此ノ三角形ノ各頂點ヲ球ノ中心ニ結ベバ，三角錐ヲ生ジ，ソノ高サハ r ニ等シイト見做シテヨイ．故ニ其ノ體積ハ底面ノ三角形ノ面積ニ高サ r ヲ乘ジタルモノノ $\frac{1}{3}$ デアル(角壔ノ體積ノ $\frac{1}{3}$).

球ノ體積ハ，其ノ中心ヲ頂點トシ球ノ表面上ニ底面ヲ有ツ斯カル無數ノ角錐ノ體積ノ總和ト考ヘ得ラレルカラ，球ノ全表面積ヲ S デ表ハセバ，球ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}r\mathrm{S}$$

デアラウ．然ルニ球ノ體積ハ上ニ述ベタ通リ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアルカラ

$$\frac{1}{3}r\mathrm{S}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

ナル關係式ガ成立ツ筈デアル．兩邊ニ 3 ヲ乘ジ r デ除スレバ

$$\mathrm{S}=4\pi r^2$$

ヲ得ル．卽チ球ノ全表面積ヲ計算スル式ヲ得タノデアル．

半徑 r ナル球ノ全表面積ハ $4\pi r^2$ デアル．

此ノ表面積ヲ球ニ外接スル圓壔ノ表面積ト比較シテ見ヨウ．

圓壔ノ底面ノ周圍ハ半徑 r ナル圓デアルカラ其ノ全長ハ $2\pi r$ デアル．コレニ高サ $2r$ ヲ乘ズレバ圓壔ノ側面ヲ爲ス曲面ノ表面積ガ得ラレル．卽チ $2r\times 2\pi r=4\pi r^2$ デアル．上部ト下部ノ底面ハ孰レモ，相同ジク，半徑 r ナル圓デアルカラ，其ノ面積ハ各 πr^2 デアル．故ニ兩面合シテ $2\pi r^2$ デアル．之ヲ側面ノ面積 $4\pi r^2$ ニ加ヘルト圓壔ノ總面積ハ $6\pi r^2$ トナル．前ニ得タル球ノ全表面積 $4\pi r^2$ ハ丁度此ノ $\frac{2}{3}$ ニ當ル．故ニ

球ノ全表面積ハ其ノ外接圓壔ノ全表面積ノ $\frac{2}{3}$ デアル．

此ノ結果ヲ前ニ得タ體積ノ場合ト併セ考ヘルト

球ノ體積及ビ表面積ハ孰レモ其ノ外接圓壔ノ體積及ビ全表面積ノ $\frac{2}{3}$ デアル

トイフ結果ニナル．此ノ關係ハあるきめですノ發見ニカヽルトイフコトデアル．

球ニ外接スル圓壔ノ側面積ダケガ前ニ述ベタ樣ニ $4\pi r^2$ デアツテ，丁度球ノ表面積ト同ジデアルカラ，側面ヲ爲ス曲面ヲ曲ゲテ球ト爲シタト想像スレバ同ジ結果ヲ得ルノデアル（實際ニハ側面ヲ曲ゲレバ皺ガ出來テ如何ニシテモ球ニハナラナイ）．

問題

（1） 地球ノ赤道ノ長サハ約四萬粁デアル．地球ノ表面積及ビ體積ヲ概算セヨ．

（2） 日本本州，九州，四國及ビ北海道本島ノ總面積ハ約三十六萬方粁デアル．地球ノ全表面積ニ對スル比ハ幾何カ．

（3） ぎぜーニ在ル最大ナル金字塔（ピラミツド）ノ高サハ 147 米デ，其ノ底面ハ邊ノ長サ 233 米ナル正方形デアルトイフ．其ノ體積ヲ計算セヨ．

38 列ベ方，組合セ方

列國ノ中ニハ赤白青ノ三色ヲ上下ニ列ベテ其ノ國旗トシタ國々ガアル．例ヘバおらんだノ國旗ハ上カラ順ニ赤白青，ゆーごすらびやハ上カラ青白赤，もんてねぐろ（今ハナイガ）ハ同ジク赤青白デ，世界第一次大戰前ろしやノ商用旗ハ白青赤デアツタサウデアル．斯樣ニ，同ジ三色デモ色ノ列ベ方ヲ異ニスレバ，異ナル國ヲ代表シ得ルノデアルガ，以上擧ゲタ外ニ三色ノ列ベ方ガアルデアラウカ．アル事ハ確カデアル．次ノ列ベ方ヲ見レバワカル．

青赤白　　白赤青

コレヲ併セテ六通リノ列ベ方ヲ數ヘルガ，此ノ外ニモマダアルデアラウカ．此ノ問題ヲ考ヘルニハ上述ノ樣ニ唯思ヒ付クマヽニ數ヘ擧ゲタノデハ，幾通リアルカ判然シナイ．ヨツテ次ノ樣ニ順序ヲ立テテ考ヘテ見ルコトニスル．

列ベ方ノ數ハ上下デモ，左右デモ同ジデアルカラ，赤青白ノ三文字ヲ左カラ右ヘ列ベル問題トシテ考ヘヨウ．

先ヅ第一ノ文字トシテ赤ヲ取ツタトスル．其ノ右ニ青白ノ二文字ヲ列ベルノデアルガ，ソノ順序ハ青白トスルカ白青トスルカ二通リノ外ニナイ．故ニ第一ノ文字ガ赤デアル場合ハ二通リダケデアル．

次ニ青ヲ第一位ニ置イテ見ルト，其ノ右ニ赤ト白トヲ列ベル方法ハ前ト同ジク二通リアル．白ヲ第一位ニ置イテモ亦同樣デアル．赤青白ノ孰レヲ最初ニ置イタ場合モ皆二通リヅツデアルカラ，全體デハ $2\times3=6$ 通リノ異ル列ベ方ガアルノガ判然トスルデアラウ．卽チ前ニ擧ゲタ六通リノ排列ヨリ他ニハナイノデアル．

斯樣ニ赤白青，白赤青ナドノ樣ニ列ベタモノヲ通常赤白青ノ順列[1]ト呼ンデ居ル．故ニ

三箇ノモノ（前例デハ赤白青）ノ順列ノ數ハ 6 デアル

トイヒ得ル．

此ノ問題ヲ押擴メテ

四箇ノモノ，a,b,c,d ノ中カラ三箇ヅツ取リ出シテ作リ得ル順列ハ全部デ幾通リアルカヲ考ヘテ見ヨウ．

先ヅ此ノ四箇ノ文字ノ中カラ二箇ヅツ取ツテ作リ得ル順列ノ數ヲ調ベテ見ル．a,b,c,d ノ中ノ一ツヲ取ツテ第一位ニ置ク，例ヘバ a ヲ初メニ置クトスレバ，其ノ右ニハ殘リノ三ツ卽チ b,c,d ノ中ノ一ツヲ置クノデアルカラ

ab　　ac　　ad

ノ三通リ出來ル．又 a ノ代リニ b ヲ第一位ニ置ケバ，其ノ右ニハ殘リノ三ツ a,c,d ノ中ノ一ツヲ置クノデアルカラ

ba　　bc　　bd

1) *Permutation.*

ノ三通リ出來ル．c 又ハ d ヲ最初ニ置イテモ同ジク三通リヅツ出來ル．コノ他ニハナイコトハ明ラカデアル．

故ニ是等ノ總數ハ三通リヅツノモノ四種(最初ニ取ルモノ a, b, c, d ノ四通リ)デ $4\times3=12$ デアル．故ニ

相異ル四箇ノモノノ中ヨリ二箇ヅツ取リテ作ル順列ノ數ハ $4\times3=12$ デアル．

此ノ考ヘ方ヲ一歩進メテ，四箇ノ中カラ三箇ヅツデ作ル順列ノ數ハ次ノ樣ニシテ知リ得ル．

四ツノ文字 a，b，c，d ノ中カラ最初ニ置ク文字ハ，ドレデモヨイカラ，四通リアル．例ヘバ a ヲ最初ニ置イタ場合ニ，其ノ右ニ置クモノハ殘リノ $4-1=3$ ノ中ノドレデモヨイカラ三通リアル．故ニ最初ノ二文字ノ取リ方ハ總數 $4\times(4-1)=4\times3$ デアル．其ノ中ノ一ツ例ヘバ bc ノ右ニ置クモノハ殘リノ文字 a, d ノ中ノドレデモヨイカラ，二通リアル．最初ノ二文字ノ置キ方ガ 4×3 通リアツテ，ソノ各ノ右ニ置クベキ文字ハ殘リノ $4-2=2$ 文字ノドレデモヨイノデアルカラ二通リヅツデ，結局三文字ノ順列ノ數ハ

$$4\times(4-1)\times(4-2)=4\times3\times2=24$$

トナル．

此ノ考ヘヲ進メテ一般化シ，次ノ問題ヲ考ヘルコトニスル．

n 箇ノモノノ中カラ r 箇 $(n\geqq r)$ ヅツ取ツテ作リ得ル順列ノ數如何．

n 箇ノモノヲ

$$a, b, c, d, \ldots\ldots s, t$$

デ表ハストスル．是等ノモノノ中カラ最初(卽チ最左)ニ置クモノハドレデモ宜イカラ，ソノ選ビ方ハ n 通リアル．ソノ次ニ列ベルモノハ，ソレ以外ノ $(n-1)$ 箇ノ文字ノ中ノドレデモ良イカラ，ソノ選ビ方ハ $(n-1)$ 通リアル．コレヲ最初ノモノノ選ビ方ト併セ考ヘルト，最初ノ二文字ノ選ビ方ハ全部デ $n(n-1)$ 通リアル筈デアル．次ニ第三位ニ列ベル文字ハ最初ノ二文字ヲ除イタ殘リノ $(n-2)$ 箇ノ文字中ノ孰レカデアルカラ(又ドレデモ宜イカラ)，ソノ選ビ方ハ $(n-2)$ 通リアル．ヨツテ最初ノ三文字ノ選ビ方卽チ順列ハ全部デ $n(n-1)(n-2)$ 通リアルコトガワカル．此ノ考ヘ方デ進ンデ行ケバ，r 文字ノ順列ハ全部デ

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\overline{r-1})$$

デアル．コレガ問題ノ答卽チ n 箇ノモノノ中カラ r 箇ヅツトツテ作リ得ル順列ノ數デアル．

n 箇ノ中カラ，r 箇ノモノノ順列ヲ通常 ${}_nP_r$ ナル記號デ表ハスノデアル．是ヲ用キテ前ノ結果ヲ記セバ

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

トナル．${}_nP_r$ ヲ計算スルニハ，n ヨリ始メテ一ヅツ減ジテ $n-r+1$ ニ至ルマデノ全部ノ數ヲ乘ケ合セレバヨイノデアル．

上ノ式ノ中ノ r ハ n ヨリ小ナルカ又ハコレニ等シイ正ノ整數デアル場合ニ上ノ式ガ成立スルノデアルガ，特ニ $n=r$ ノ場合ニハ，上式ハ

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots2\cdot1^{1)}$$

卽チ n 箇ノ文字全部ヲ一列ニ列ベル列ベ方ノ數ハ n トソレヨリ小サナ總テノ正ノ整數ヲ乘ジテ得ラレル．コノ實例トシテ最初ニ考ヘタ赤白青ノ順列ヲ調ベルト，コノ場合ニハ $n=3$ デアルカラ

$${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$$

トナツテ前ノ結果ト一致スル．

又ソノ次ニ考ヘタ所ノ a, b, c, d ノ中カラ三ツヅツノ順列ヲ計算スルト，

$${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$$

トナツテ，同ジク前ノ結果ヲ得ルノデアル．

此ノ問題ノ實例トシテ思ヒ當ルノハ短歌ト發句ノ總數ノ事デアル．短歌ハ

1) 最後ノ因數 1 ハ無クトモヨイガ，唯形ヲ整ヘル爲ニ書イタ．又右邊ノ累乘積ヲ n ノ階乘トイヒ，$n!$ 又ハ $\underline{n|}$ ト書ク．

いろは四十七文字ノ假名文字ヲ三十一列ネテ作ルノデアルカラ全體デ $_{47}P_{31}$ デアルガ，モシんヲモ許セバ $_{48}P_{31}$ トナル．然ルニ

$$_{47}P_{31}=47\times46\times45\times\ldots\ldots\times17 \qquad (47-31+1=17)$$

デアルカラ，ソノ總數ハ大變ナ數ニナル．

發句ノ場合ハ十七字デアルカラ

$$_{47}P_{17}=47\times46\times\ldots\ldots\times31 \qquad (47-17+1=31)$$

トナリ，稍〻少イガ，ソレデモ可ナリ大キナ數デアル．

扨尙能ク考ヘテ見ルト，歌ヤ發句デハ三十一文字又ハ十七文字ガ悉ク異ナツテ居ルトハ限ラナイ，同ジ文字ガ度々現ハレル．例ヘバ

あしひきの　やまとりのをの　したりをの
なかなかしよを　ひとりかもねむ　　柿本人麿

デハのガ四ツ，かしをガ夫々三度ヅツ現レテ居ル．

又

はるのうみ　ひねもす　のたりのたりかな　　蕪　村

ニ於テハのガ三度，たりハ二ツヅツ出テ來テ居ル．

斯樣ニ同ジ文字ヲ許スナラバ，ソノ總數ハ $_nP_r$ ニテハ表シ得ナイ．此ノ問題ハ更ニ考ヘ直ス必要ガアル．

考ヘ易クスル爲ニ先ヅ三箇ノ文字 a, b, c ノ中一箇，二箇，三箇ヅツノ順列ヲ考ヘテ見ヨウ．一箇ヅツ取ツタ順列ハ a, b, c ノ三通リノ外ニハナイガ，二箇ヅツノ場合ハ a, b, c ノ右ニ夫々一ツヅツ a, b, c ヲ添ヘテ得ラレルカラ a ノ右ニ a, b, c ヲ一箇ヅツ添ヘタモノ三ツ，b ノ右ニ a, b, c ヲ添ヘタモノ三ツ，c ノ右ニ a, b, c ヲ添ヘタモノ三ツ，合計 $3\times3=9$ 種類ノ順列ヲ得ル．同樣ニ三箇ヅツノ順列ヲ作ルニハ，上記二箇ヅツノ各順列ノ右ニ a, b, c ヲ一ツヅツ添ヘレバヨイノデアルカラ，$9\times3=27$ 通リアル譯デアル．此ノ樣ニ考ヘレバ直ニ

n 箇ノモノカラ，同ジモノヲ何回採ツテモヨイトシテ作ル r 箇ヅツノ順列ノ數ハ明ラカニ n^r デアル

コトヲ知リ得ルデアラウ．

此ノ結果ヲ短歌ト發句ノ場合ニ應用スレバ，47 文字カラ 31 文字ノ順列ハ 47^{31} デ，發句ノ數ハ 47^{17} デアル．勿論此ノ中ニハあノ字バカリ 31 又ハ 17 列ベタモノモ含ンデ居ルノデアル．又文字ノ排列ハ同ジデモ意味ノ異ナル場合モアリ得ルガ，短歌ヤ發句ノ總數ハ大體ニ於テ是等ノ數ヲ多クハ超過シナイデアラウト思ハレル．

問題

(1) 五冊ノ書ヲ書棚ニ立テ並ベル順序ハ幾通リアルカ．

(2) 六人ニテ圓卓ヲ圍ムニ其ノ方法幾種類アルカ．

(3) n 箇ノモノノ中ヨリ 4 箇ヅツ取ツテ作ル順列ノ數ハ 2 箇ヅツ取ツテ作ル順列ノ數ノ 12 倍ナリトイフ．n 箇トハ何箇ヲ意味スルカ．

今マデハ列ベ方ヲ考ヘタノデアルガ，コレト少シ異リタル組合セ[1]トイフ問題ヲ考ヘテ見ヨウ．

赤黄青ノ三色ノ繪具ヲ同ジ分量ヅツ取ツテ，二色ヅツ混合スレバ種々ノ色ガ出來ルデアラウ．ソノ種類ノ數ハ幾種デアルカヲ考ヘルト

赤黄　　赤青　　黄青

ヲ混合シテ得ル三種類ヨリ外ニハナイコトハ明ラカデアル．此ノ所デ前ノ順列ト異ナルノハ，ソノ排列ノ順序ニ關セザルコトデ，赤ト黄トノ混合ハ黄ト赤トノ混合ト同ジデアル．斯ノ如キ混合ノ數ヲ組合セノ數トイフノデアル．

組合セノ數ヲ計算スル爲ニ，コノ問題ヲ順序立テテ考ヘテ見ヨウ．

先ヅ問題ハ

四箇ノモノ a, b, c, d ヨリ三箇ヅツ取リテ作ル組合セハ幾通リアルカ

デアルトスル．コノ組合セノ中ノ一ツ例ヘバ (a, b, c) ヲ考ヘテ見ルト，コレ

1) *Combination.*

ハ組合セトスレバ一ツデアルガ, abc ノ列ベ方ヲ種々ニ變ヘルト ${}_3P_3=3!=6$ 通リアルコトハ前ノ順列ノ計算デワカル. 又 abc ノ代リニ bcd トイフ組合セヲ取ツテ考ヘテ見テモ, ソノ順ヲアラユル仕方デ變ズルト結局 ${}_3P_3=6$ 通リノ順列ヲ得ルコトハ abc ト同様デアル. 故ニ三箇ヅツノモノノ組合セノ孰レヲ取ツテ見テモ, ソレカラ作リ得ル順列ノ數ハ皆 ${}_3P_3=6$ デアル. 然ルニ斯カル順列ヲ全部ノ組合セカラ作レバ, ソノ全部ハ卽チ四箇ノモノ a, b, c, d カラ三箇ヅツデ作ル順列全部デアルコトハ明ラカデアルカラ, ソノ總數ハ ${}_4P_3=4!=24$ デアル. 結局 a, b, c, d ヨリ作リ得ル三箇ヅツノ組合セノ數ニ ${}_3P_3=6$ ヲ乘ズレバ ${}_4P_3=24$ ニナルノデアルカラ組合ノ總數ハ

$${}_4P_3\div{}_3P_3=24\div6=4$$

デナケレバナラナイ.

實際ニ組合セヲ作ツテ見ルト

$$abc\qquad abd\qquad acd\qquad bcd$$

ノ四通リヨリ外ニハナイコトヲ知リ得ルノデアル.

此ノ問題ヲ擴張シテ, 一般ニ次ノ如キ問題トシテモ考ヘ方ニ變リハナイ.

n 箇ノモノノ中カラ r 箇 $(n\geqq r)$ ヅツ取ツテ作リ得ル組合セノ數如何.

コノ組合セノ總數ヲ通常 ${}_nC_r$ デ表ハスノデアル. r 箇ノモノノ組合セノ一ツヲ取ツテ, ソノ列ベ方ヲアラユル仕方デ變ヘテ得ル順列ノ數ハ明ラカニ ${}_rP_r$ デアル. 各組合セカラ ${}_rP_r$ 箇ヅツノ順列ヲ得ルノデアルカラ, 全部ノ組合セカラ作リ得ル順列ノ總數ハ

$${}_nC_r\times{}_rP_r$$

デアル. 然ルニ又コレガ卽チ n 箇ノ中ヨリ r 箇ヅツ取ツテ作リ得ル順列ノ全部デアルカラ, ソノ數ハ ${}_nP_r$ デアル. 式デ書ケバ

$${}_nC_r\times{}_rP_r={}_nP_r$$

トイフ關係ニナル. 兩邊ヲ ${}_rP_r$ デ除スレバ

$${}_nC_r={}_nP_r\div{}_rP_r$$

トナツテ, ${}_nC_r$ ヲ計算スル式ヲ得ル.

前ニ述ベタ樣ニ

$${}_nP_r=n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)\qquad {}_rP_r=r(r-1)\ldots\ldots2\cdot1$$

デアルカラ

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots2\cdot1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

トナル.

此ノ式ヲ覺エ易クスル爲ニ, 分母子ニ

$$(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots2\cdot1=(n-r)!$$

ヲ乘ズレバ分子ハ

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\times(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots2\cdot1=n!$$

トナルカラ, 上式ハ變ジテ

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

トナル. 此ノ方ガ上式ヨリハ覺エ易イデアラウ.

此處ニ用ヰタ符號 ${}_nC_r$ ノ代リニ $\binom{n}{r}$ ヲ用ヰル人モアル. 上ノヤウニ $\binom{n}{r}$ ノ値ヲ二通リニ書キ得ル.

$$\binom{n}{r}=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\\[2ex]\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\end{cases}$$

第二ノ書キ方ノ方ガ覺エ易イガ, 唯一ツ注意ヲ要スルコトガアル. r ガ n ト等シイトキニハ, 卽チ $r=n$ デアルトキニハ, 第一ノ式ハ

$${}_nC_n=\binom{n}{n}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1}{n!}=1$$

トナツテ何等不都合ハナイガ, 第二ノ式ハ

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,0!}$$

トナツテ分母ニ $0!$ ノ如キモノガ現レル，コレハ符號ノ意味カラ考ヘレバ何等ノ意味ヲ有タナイモノデアル．元來第二ノ式ハ第一ノ式ノ分母子ニ $(n-r)!$ ヲ乘ジテ出來タ式デアルガ，$r=n$ ノ場合ニハ此ノ樣ナ小細工ハ不用ナノデアル(此ノ場合 $n-r+1=1$ ニナルカラ分子ハ $n!$ ニナル)．否反ツテ其ノ爲ニ第二ノ式デハ分母ニ $0!$ ガ現レルノデアル．コノ不都合ヲ如何ニ調整シタラヨイカ．ソレニハ $\frac{n!}{n!0!}$ ガ第一式ト同ジニ1トナル樣ニスルガヨイノデアルガ，幸ヒ $0!$ ハ意味ヲ有タナイ記號デアルカラ，コレニ $0!=1$ トイフ意味ヲ付ケレバ，此ノ問題ハ解決スルノデアル．ヨツテ通常

$$0!=1$$

ト定メル．

問題　正五角形ノ對角線ハ幾本アルカ（對角線トハ相隣ツテ居ナイ二ツノ頂點ヲ結ブ直線ノ意味デアル）．

39 二項式定理

組合セノ應用トシテ二項式定理ヲ説明シテ見ヨウ．

初等代數學ニ於テ示サレテ居ル如ク乘算ヲ實行スレバ次ノ式ノ正シイコトハ直ニワカル．

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

……………………………………………

上式ニ於テ左邊ハ $x+a$，$x+b$…… ノ如キ式ヲ幾箇カ乘ジタモノデ，右邊ハ乘算ノ結果ヲ x ノ降冪ノ順ニ列ベタモノデアル．各式トモ初項ハ左邊ノ x ヲ全部乘ケ合セタモノデ，x^2, x^3 等デアル．故ニ x ノ指數ハ左邊ノ因子ノ數ト同ジク，二箇ノ因子ノ積ナラバ x^2，三箇ノ因子ノ積ナラバ x^3 等デアル．ソノ次ノ第二項ニ於テハ x ノ指數ハ初項ヨリ一ツ低ク，ソノ係數ハ左邊ノ各因子ノ第二項ノ和卽チ $a+b+c$…… 等デアル．第三項ハ x ノ指數ガ又一ツ低クナツテ，ソノ係數ハ各因子第二項ノ a，b，……等ヲ二ツヅツ乘ケ合セタルモノノ和デアル．第四項ハ x ノ指數ガ又一ツ降下シテ，ソノ係數ハ a, b，……等ノ中カラ三ツヅツ取ツタ，アラユル乘積ノ和デアル．此ノ關係ハ乘算ヲ實行シテ見レバ容易ニワカルコトデアル．ソコデ一般ニ左邊ノ因子ガ n 箇アツテモ同樣デ，ソノ積ヲ

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$$

ト書ケバ，係數 $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ハ

$$p_1=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

$$p_2=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+\cdots\cdots \quad (a_1a_2\ldots a_n \text{ ノ中カラ二箇ヅツノ積ノ和})$$

$$p_3=a_1a_2a_3+\cdots\cdots \quad (a_1a_2\ldots a_n \text{ ノ中カラ三箇ヅツノ積ノ和})$$

……………………………………

$$p_n=a_1a_2\ldots\ldots a_n \quad (a_1a_2\ldots\ldots a_n \text{ 全部ノ積})$$

デアル．最後ノ項ハ x ヲ含マナイ．

上式ノ a_1, a_2……等ハ皆隨意ノ數デアツテモヨイノデアルガ，特別ノ場合トシテ，ソレ等ハ皆一定數 a ニ等シイトスルト左邊ノ各因子ハ皆相等シイ $(x+a)$ トナルカラ結局左邊ハ $(x+a)^n$ トナル．右邊ノ p_1 ハ明ラカニ na トナリ，p_2 ノ各項ハ皆 a^2 トナルガ，ソノ數ハ幾箇デアラウカ．p_2 ハ $a_1, a_2\ldots\ldots a_n$ ナル n 箇ノモノノ中二箇ヅツ取ツテ積ヲ作ルノデアルカラ結局 n 箇ノ中二箇ヅツノ組合セノ數 $\binom{n}{2}$ デアル．故ニ

$$p_2=\binom{n}{2}a^2$$

トナル．同樣ニ p_3 ハ n 箇ノモノノ中三箇ヅツノ組合セノ數ダケ a^3 ヲ集メルノデアルカラ

$$p_3=\binom{n}{3}a^3$$

トナル．全ク同ジ事デ p_k ハ

$$p_k=\binom{n}{k}a^k \qquad (k\leqq n)$$

トナルノデアル．故ニ

$$(x+a)^n=x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$\cdot+\binom{n}{k}a^kx^{n-k}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}a^{n-1}x+\binom{n}{n}a^n$$

ヲ得ル．是ヲ二項式定理[1]トイフノデアル．上式中ノ記號 $\binom{n}{k}$ ヲ詳シク書ケバ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{n-3}+$$

$$\cdots\cdots+na^{n-1}x+a^n \qquad (a)$$

トナル．最後カラ二番目ノ係數ガ n デ初メカラ二番目ノ係數ト等シイコトガ目ニ付クガ，コレハ一般ニ始ド終カラ等シイ番號ノ，例ヘバ k 番目ノ係數ハ互ニ相等シイノデアル．如何トナレバ始カラ k 番目ノ係數ハ $\binom{n}{k-1}$ デ又終カラ k 番目ノ係數ハ $\binom{n}{n-k+1}$ デアルカラ

$$\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \qquad \binom{n}{n-k+1}=\frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!}$$

デ互ニ相等シイコトハ明ラカデアル．

此ノ公式ヲ用ヰルト，$n=2$ ノ場合ニハ

$$(x+a)^2=x^2+\binom{2}{1}ax+\binom{2}{2}a^2$$

$$=x^2+\frac{2!}{1!\,1!}ax+a^2=x^2+2ax+a^2$$

又 $n=3$ ノ場合ニハ

$$(x+a)^3=x^3+\binom{3}{1}ax^2+\binom{3}{2}a^2x+\binom{3}{3}a^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

同ジク $n=4$ ノ場合ニハ

---

1) *Binomial theorem.*

$$(x+a)^4=x^4+\binom{4}{1}ax^3+\binom{4}{2}a^2x^2+\binom{4}{3}a^3x+\binom{4}{4}a^4$$

$$=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$$

トナツテ實際乘ケ合セタモノト全ク一致スル．

二項式定理ノ簡單ナル場合ハ古クヨリ知ラレテ居タノデアルガ，茲ニ述ベタ形ノ一般ノ式ハにゅーとん[1]ガ與ヘタモノデアルトイフコトデアル．

今マデハ $(x+a)^n$ ノ指數 n ガ正ノ整數ノ場合ニ就イテ論ジタノデアルガ，n ガ分數，小數，負數ノ場合ニモ，適當ナル考慮ヲシテ，適用シ得ルコトヲ證明シ得ルノデアル．例ヘバ x ト a トノ中，ソノ絶對値ノ大ナル方ヲ x トスルト $\frac{a}{x}$ ノ絶對値ハ1ヨリ小トナル．今 $(x+a)^n$ ヲ書キ替ヘテ

$$(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$

トスレバ $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ ニ二項式定理ヲ適用シテ

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^n=1+\frac{n}{1}\left(\frac{a}{x}\right)+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{a}{x}\right)^3+\cdots\cdots$$

トスルコトガ出來ルノデアル．

一般ニ n ガ整數デナクトモ有限ナル數デアリサヘスレバ分數デモ，小數デモ，又ハ負數デモ，x ノ絶對値ガ1ヨリ小ナラバ

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_3+\cdots\cdots \qquad (a')$$

ナル式ハ正シイノデアル．（證明ハ略スル）

此ノ式ノ n ガ正ノ整數ナラバ右邊ハ x^n ノ項デ止マリ（以後ノ項ノ係數ノ分子ニ因子 $n-n=0$ ガ必ズアルカラ皆零トナル）n 次ノ多項式トナルガ，ソノ他ノ場合ニハ限リ無ク續イテ所謂無限級數[2]トナルノデアル．

實例トシテ先ヅ $n=-1$ ノ場合ニ上式 (a') ヲ適用シテ見ヨウ．$n=-1$ デアルカラ

---

1) *Sir Isaac Newton* (1642–1727). 2) *Infinite series.*

$$\frac{n}{1}=-1,\quad \frac{n(n-1)}{1\cdot2}=\frac{-1\times-2}{1\cdot2}=1$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{-1\times-2\times-3}{1\cdot2\cdot3}=-1,\ldots\ldots$$

トナツテ結局

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots$$

トナル．此ノ式ハ $1+x$ デ 1 ヲ除スル計算ヲ實行シテモ得ラレルガ，右邊ノ式ハ x ノ絶對値ガ 1 ヨリ小サイ時ニノミ意義ガアルノデアル．例ヘバ此ノ範圍ヲ超エテ $x=1$ トシテ見ルト左邊ハ $\frac{1}{2}$ デアルガ，右邊ハ

$$1-1+1-1+\ldots\ldots$$

トナツテ，第一項，第二項ト順次ニ加ヘテ行クト交替ニ $+1$, 0 トナツテ如何ナル値ニ落着クカ見透シガ付カナイ，結局無意味デアル．

今得タ上ノ式ヲ應用シテ 1.2 デ 1 ヲ除シタ商ヲ求メテ見ヨウ．上式ノ x ヲ 0.2 トスレバ $1+x=1.2$ トナリ

$$\frac{1}{1.2}=1-0.2+0.04-0.008+\ldots\ldots$$

トナルカラ上記四項デ止メテ計算スルト 0.832 ヲ得ルガ，實際ニ 1.2 デ 1 ヲ除シテ見ルト 0.833… トナツテ小數以下二桁マデハ正シク出ルノデアル．

又 $n=\frac{1}{2}$ トシテ見ルト (α') 式ハ

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3}{48}x^3\ldots\ldots$$

トナル．此ノ式ノ應用トシテ $\sqrt{12}$ ヲ計算シテ見ヨウ．

先ヅ $12=9+3$ トスルト

$$\sqrt{9+3}=\sqrt{9\left(1+\frac{1}{3}\right)}=3\times\sqrt{1+\frac{1}{3}}$$

トナルカラ，$\sqrt{1+\frac{1}{3}}$ ヲ計算シテ後三倍スレバヨイ．ヨツテ

$$x=\frac{1}{3}$$

トスレバ，上式カラ

$$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{6}-\frac{1}{72}+\frac{1}{432}\ldots\ldots$$

トナル．此ノ四項ダケデ止メテ計算スルト

$$\frac{1}{6}=0.1666\ldots\ldots\quad \frac{1}{72}=0.013888\ldots\ldots\quad \frac{1}{432}=0.00231466\ldots\ldots$$

デアルカラ

$$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=1.15509233\ldots\ldots$$

従ツテ

$$3\times\sqrt{1+\frac{1}{3}}=3.46527\ldots\ldots$$

トナルガ，實際ニ $\sqrt{12}$ ヲ開平方ヲ用ヰテ計算シテ見ルト

$$3.4641\ldots\ldots$$

トナル．卽チ小數以下二桁マデハ正シイノデアル．

以上ノ計算デワカル樣ニ $\frac{1}{1.2}$ 又ハ $\sqrt{12}$ ヲ小數以下二位ダケ知リタイ時ニハ前記ノ樣ニ割合ニ簡單ナ計算デ間ニ合フノデアル．

附記　開平方ニ就イテハ古代ニ於テモ中々面白イ方法ガ知ラレテ居タ樣デアル．丁度整數ノ二乘デナイ數ノ開平ニ關シ西暦紀元前百二十年頃(皇紀五百四十年頃)ニあれきさんどりやノへろん[1]ガ知ツテ居タトイフ方法ヲ述ベテ見ヨウ．

D ハ平方數デナイ(卽チ整數ノ二乘デナイ)數トスル．然ラバ $(a-1)^2$ ハ D ヨリ少シ小サイガ，a^2 ハ D ヨリ大デアル如キ整數 a ガアルコトハ確カデアル．ツマリ D ハ $(a-1)^2$ ト a^2 トノ間ニ挾マレテ居テ

$$(a-1)^2<D<a^2$$

ノ關係ニアルノデアル．故ニ D ハ a ト $a-1$ トノ間ノ數ノ平方(卽チ二乘)デアラウ．此ノ數ヲ $a-r$ トスルト，r ハ 1 ヨリ小サナ正ノ數デアル．ヨツテ

$$D=(a-r)^2$$

1) *Heron* 又ハ *Hero.*

トオクト，右邊ヲ展開シテ

$$D=a^2-2ar+r^2$$

右邊第二項ヲ左邊ニ移シテ左邊ノ D ヲ右邊ニ移シ $2a$ デ除スレバ

$$r=\frac{1}{2}\left(a-\frac{D}{a}\right)+\frac{r^2}{2a}$$

トナルカラ，コレヲ a カラ減ジテ

$$a-r=\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)-\frac{r^2}{2a}$$

トナル．右邊ノ最終項ノ分子 r^2 ハ絶對値ガ 1 ヨリ小ナル r ノ二乘デアルカラ r ヨリモズツト小サイ．ソレヲ整數 $2a$ デ除シタモノハ尙小サイカラ，コレヲ無視スレバ

$$\sqrt{D}=a-r\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)$$

トナル．卽チ D ノ平方根ハ a ト $\frac{D}{a}$ トノ平均値ニ近イ．サテ

$$a-r=\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)-\frac{r^2}{2a}\qquad\therefore\ a-\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)=r-\frac{r^2}{2a}>0$$

$$(\because\ 0<r<1,\ 2a>1)\ 卽チ\ a>\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)$$

又 $$\sqrt{D}=a-r=\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)-\frac{r^2}{2a}<\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)$$

$$\therefore\ a>\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)>\sqrt{D}$$

卽チ $\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)$ ハ a ヨリ小サク，a ヨリハ尙一層 $\sqrt{D}$ ニ近イ．ヨツテ a ヨリハ一層近似値デアル．

此ノ値ヲ更ニ a ト見テ同樣ノ手續ヲ繰返セバ更ニヨイ近似値ヲ得ルデアラウ．コレヲ纏メテ D ノ平方根ヲ求メルニハ $(a-1)^2<D<a^2$ ナル如キ a ヲ求メ，次イデ

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right)\qquad a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{D}{a_1}\right)\qquad a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{D}{a_2}\right)\ \cdots\cdots$$

等ノ數列ヲ作レバ $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$ ハ漸次 $\sqrt{D}$ ニ近ヅクノデアル．

此ノ方法ヲ用キテ前ノ例 $\sqrt{12}$ ヲ計算シテ見ヨウ．

問題ノ數 D=12 ヲ挾ム平方數ハ 3^2 ト 4^2 トデアル，卽チ

$$9<12<16$$

デアルカラ，$a=4$ デアル．ヨツテ

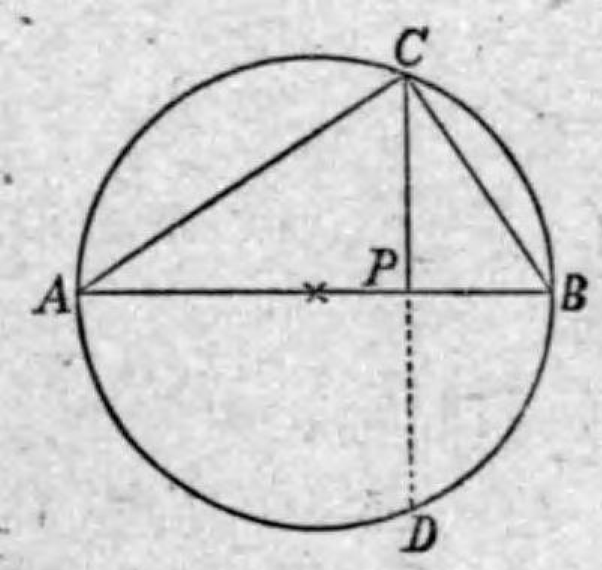
$$a_1=\frac{1}{2}\left(4+\frac{12}{4}\right)=\frac{7}{2}=3.5$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(3.5+\frac{12}{3.5}\right)=\frac{1}{2}(3.5+3.42857)=3.46428$$

トナルカラ $\sqrt{12}$ ノ眞ノ値 3.4641…… ト較ベテ小數三桁マデ正シイノデアル．

平方根ヲ求メルニハ大工ノ用キル指金(曲尺)ヲ使用スレバ簡單ニ出來ル．ソノ方法ヲ述ベテ見ヨウ．

平面幾何學デ學ンダ如ク，圓内ニアル一點 P ヲ通ジテ二本ノ弦 AB, CD ヲ引ケバ



$$AP\times PB=CP\times PD$$

デアル．故ニ定點 P ヲ通ジテ引イタ直徑ヲ AB トシ（卽チ P ト中心トヲ結ブ直線），P ヲ通ジテ是ニ垂直ナル弦ヲ CD トスレバ明ラカニ

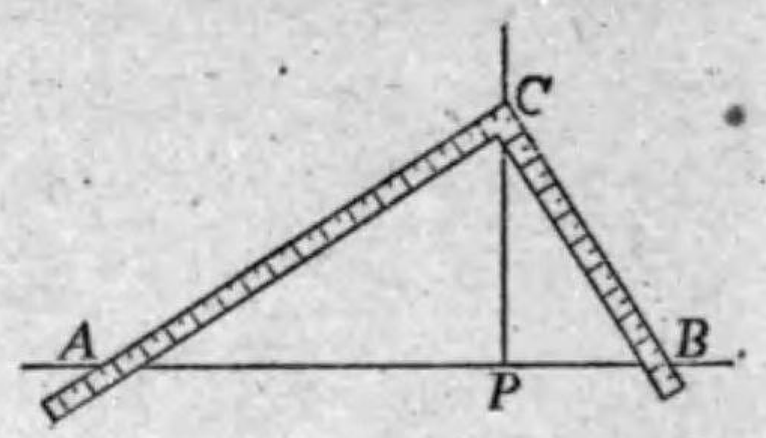
$$CP=PD$$

デアルカラ，上式ノ右邊 CP×PD ハ $\overline{CP}^2$ ニナル．ヨツテ

$$AP\times PB=\overline{CP}^2$$

トナル．故ニ PB ノ長サヲ 1（單位例ヘバ1寸）ニトリ，AP ヲ D 單位(例ヘバ D 寸)ノ長サニスレバ，CP ノ長サガ $\sqrt{D}$ ニナル譯デアル．AP ト PB トヲ與ヘテ CP ヲ作ルノハ容易デアル．AB ガ直徑デアルカラ，∠ACB ガ直角ニナレバヨイノデアル．故ニ實際ニハ，先ヅ單位ヲ 1 寸ナリ 5cm ナリ隨意ニ定メテ D 單位（例ヘバ D 寸）ノ長サニ等シク AP ヲ作リ，コレ

ヲ伸バシテ1單位(例ヘバ1寸)ノ長サニ等シク PB ヲ作リ，次ニ P 點ヲ通ジテ此ノ線ヘ直角ニ CP 線ヲ立テル，然ル後指金(曲尺)ヲ取リ(曲尺デナクトモ直角ヲ爲ス板片デモヨイ)其ノ直角頭ヲ CP 線ノ上ニ置キナガラ．其ノ兩脚ガ A 點ト B 點トヲ同時ニ通ル樣ニスレバ，直角頭ノ位置ガ自然ニ定マルカラ，ソノ位置ヲ C トスル．CP ノ長サヲ測ツタ結果 r 單位（例ヘバ r 寸）トスレバ，コノ r ガ $\sqrt{D}$ デアルコトハ明ラカデアラウ．



實例トシテ AP ヲ4寸ニトリ PB ヲ一寸トシテ曲尺ヲ當テレバ CP ノ長サハ2寸トナル．

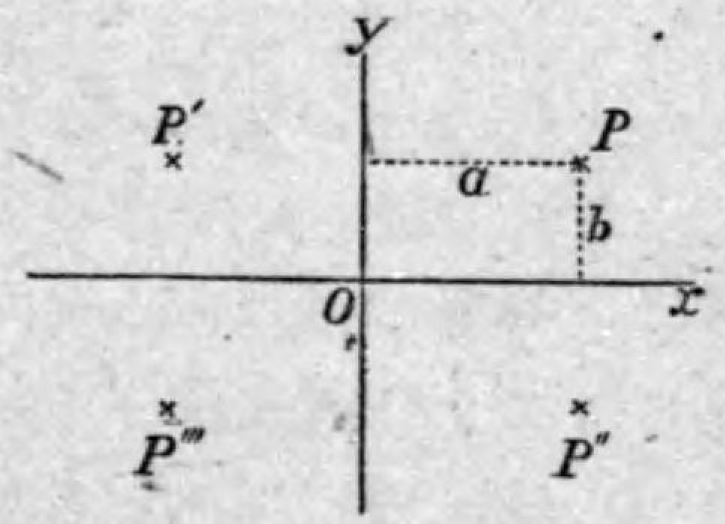
注意 此ノ方法ノ基礎ハ前ニ述ベタ樣ニ AP×PB ガ CP^2 ニナルコトニアルノデアルカラ，モシ D ナル數ガ $D=d_1d_2$ ノ樣ニ二ツノ數ノ相乘積ニ分解シテアレバ，AP, PB ヲ夫々 d_1 單位 d_2 單位ノ長サニ取ツテモヨイコトハ勿論デアル．

尙此ノ方法ハ立方根，四乘根等ヲ索メルコトニモ擴張出來ルガ，ソレニ連レテ曲尺ヲ二本，三本等用キナケレバナラヌ．

40 平面解析幾何學

幾何學ノ問題ヲ解クノハ中々難カシイモノデアル．例ヘバ，三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下ス三ツノ垂線ハ一定點ニ會スルコトヲ證明スルノモ可ナリ工夫ヲ要スル，從ツテソノ證明ヤ工夫ヲ見ルト巧妙ナノニ感心スルノガ常デアル．併シソノ問題ヲ代數計算ノ問題ニ書キ直シ得タナラバ，解答ハ餘程樂ニナルデアラウ．勿論線分ノ長サナドヲ a, b ナドデ表ハシ，コレヲ計算シテ他ノ量ヲ見出スコトナドハ幾何學デモ屢々用キラレテ居ル．併シ今一歩進ンデ直線全部ヤ又ハ圓全體ナドヲ代數的記號デ表ハスコトガ出來レバ一層便利デ

アラウ．コレヲ用キレバ三ツノ直線ガ一點ニ會スルコトヤ，四ツノ點ガ同一圓周上ニ在ルコトナドヲ證明スル事ガ容易ニナルノデハナカラウカ．此ノ問題ニ解答ヲ與ヘタノガ佛國人でかると[1]デアル．ソノ方法ノ根本ハ．直線ヤ圓ノ最モ基本的ナ性質ヲ數式ニ書キ表ハシテ，ソレヲ其ノ儘直線ヤ圓ノ記號トスルノデアル．例ヘバ，所定ノ一點ヲ通ジテ所定ノ方面ニ進ム直線，又ハ一定ノ點ヲ中心トシテ，一定ノ距離ニ在ル總テノ點ガ集マツテ作ル圓ナドヲ示ス式ヲ作ルノデアル．ソノ爲ニハ先ヅ平面ノ上ノ點ヲ書キ記ス方法ガ必要デアル．點ノ位置ヲ言ヒ表ハスニハ，何カ他ノモノニ關係付ケルコトガ必要デアルカラ（海上ニ在ル船ガ自己ノ位置ヲ定メルニ星又ハ燈臺ナドノ方向ヲ測ル樣ニ）平面上隨意ノ場所ニ互ニ直角ニ交ハル二ツノ直線ヲ引イテ置イテ，コレヲ基準ニスル．此ノ準備ガ出來タ後ハ問題ノ點ガ各直線ヨリ幾何ノ距離ニ在ルカヲ記セバ，其ノ點ノ位置ハワカルノデアル．今二直線ヲ夫々 Ox, Oy トシテ O ヲソノ交點トスル．Ox 線ヨリノ P 點ノ距離ヲ b トシ，Oy ヨリノ距離ヲ a トスレバ，a ト b トニヨツテ P 點ノ位置ハ定マル樣デアル．併シ今少シ深ク考ヘルトコレデハ不充分デアルコトニ氣付ク．ソレハ，同ジク Ox, Oy 線ヨリ夫々 b, a ノ距離ニ在ル點ハ P ノ外ニ圖ノ如ク P′, P″, P‴ ノヤウニ三ツアルカラデアル．是等合計四ツノ點，P, P′, P″, P‴ ヲ相互ニ識別スルニハ如何ニスレバヨイカ，幸ヒソレニハ正負ノ符號ヲ利用シテ目的ガ達セラレル．先ヅ a, b ノ中，a ニ就イテハ P ガ Oy 直線ノ右ニ在レバ正號，左ニ在レバ負號ノ量デアルト定メル，又 b ニ關シテハ，P ガ Ox 線ノ上方ニ在レバ正ノ量，下方ニ在レバ負ノ量デアルト定メル．モシ又 P 點ガ Ox 又ハ Oy 線ノ上ニ在レバ，b 又ハ a ハ丁度零トナルカラ正負ノ必要ハナクナルノデア



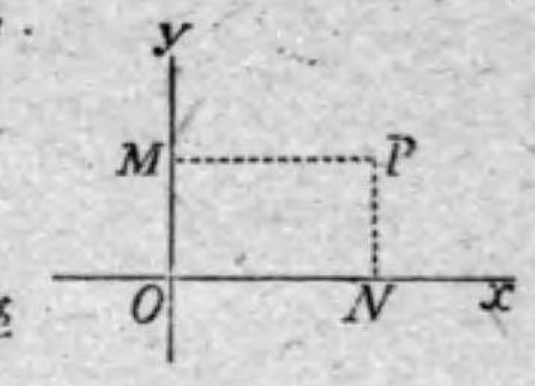
1) *René Descartes* (*1596–1650*) (*Renatus Cartesius*).

ル. 斯ク定ムレバ

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{P} & \mathrm{P'} & \mathrm{P''} & \mathrm{P'''} \\ \begin{cases} a+ \\ b+ \end{cases} & \begin{cases} a- \\ b+ \end{cases} & \begin{cases} a+ \\ b- \end{cases} & \begin{cases} a- \\ b- \end{cases} \end{array}$$

トナツテ相互ノ區別ガ出來ルノデアル.

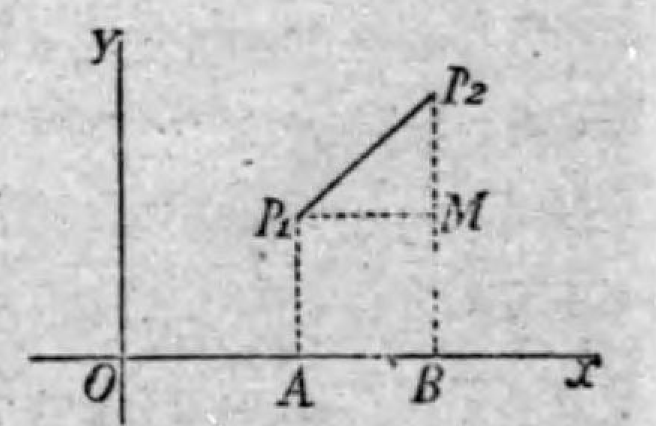
P 點ヨリ Oy, Ox 直線ニ夫々垂線ヲ下シテ, ソノ足ヲ M, N トスレバ



$$\mathrm{ON}=a \qquad \mathrm{OM}=b$$

デアル. ヨツテ a ヲ P 點ノ x-座標[1], b ヲ y-座標[2]トイヒ, Ox ヲ x-軸[3], Oy ヲ y-軸[4], Ox ト Oy トヲ併セテ座標軸[5], O 點ヲ原點[6]トイフノデアル. P 點ヲ示スニハ點 (a, b) トイヒ, x-座標 a ヲ第一ニ, y-座標 b ヲ次ニ書クノガ一般ノ習慣デアル. 故ニ點 (a, b) ヲ圖上ニ畫クニハ, 先ヅ O ヨリ x-軸ニ沿ウテ a ノ長サヲ測リ, (a ガ正ノ量ナラバ右ニ, 負ノ量ナラバ左ニ), 其ノ終點ヨリ y-軸ニ平行ニ b ノ長サヲ測レバ (b ガ正ナラバ上方ニ, 負ナラバ下方ニ)ソノ終點ガ卽チ點 (a, b) デアル.

此ノ方法デ示サレタル二點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ノ間ノ距離ナドハ直ニ計算出來ルノデアル. P_1, P_2 ヨリ x 軸ニ垂線 P_1A, P_2B ヲ下セバ, $OA=x_1$, $AP_1=y_1$ デアリ, $OB=x_2$, $BP_2=y_2$ デアル. P_1 ヨリ P_2B ニ垂線 P_1M ヲ下セバ



$$P_1M=AB=OB-OA=x_2-x_1$$

$$MP_2=BP_2-BM=y_2-y_1$$

デアルカラ, ぴたごらすノ定理

1) *Abscissa.* 2) *Ordinate.* 3) *x-Axis.* 4) *y-Axis* 5) *Coordinate-axes.* 6) *Origin.*

$$\overline{P_1M}^2+\overline{MP}^2=\overline{P_1P_2}^2$$

ニヨツテ直ニ

$$\overline{P_1P_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

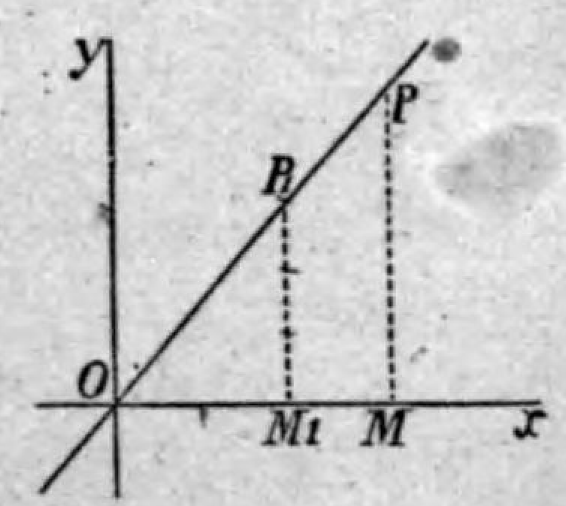
卽チ

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ナル式ヲ得テ, $\overline{P_1P_2}$ ハ計算出來ルコトガワカル, 距離ハ絕對値ノ意味デアルカラ $\sqrt{\ }$ ハ單ニ正號ヲ取レバヨイ.

41 直 線[1]

直線ハ如何ナル記號デ表ハスベキデアラウカ. 直線ハ點ガ無數ニ集ツテ眞直ニ列ンデ出來タモノト考ヘテモヨシ, 又ハ一點ガ一定ノ方向ニ直進シテ畫イタト見テモヨイ. 孰レニシテモ直線ヲ作ス點ハ總テ一定ノ約束ニ從ツテ居ルデアラウ. 點ノ集合ト見ル場合ニハ, 一定ノ約束ニ適合スル總テノ點ノ集合デアリ, 一點ガ運行シテ畫イタモノト見ル場合ニハ, 其點ガ全ク隨意ニ彷徨スルノデハナク, 或ル約束ニ從ツテ動クノデナケレバ直線ヲ作サナイ. 然ラバ其ノ約束トハ如何ナルモノデアラウカ. 先ヅ簡單ナ例ヲ取ツテ見ヨウ. 原點卽チ點 $(0, 0)$ ト P 點例ヘバ點 $(2, 3)$ トヲ通ル直線ノ各點ハ如何ナル約束ニ從ツテ居ルデアラウカ. P ヨリ x 軸ニ垂線ヲ下シ, ソレヲ PM トスル. $OM=2$, $MP=3$ デアルカラ $\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{3}{2}$ デアルコトハ明ラカデアルガ, 此ノ性質ハ P 點ニ限ラズ, 直線 OP 上ノ隨意ノ點 P_1[2] ヨリ垂線 P_1M_1 ヲ下シテ $\dfrac{M_1P_1}{OM_1}$ ヲ作レバ, PM ト P_1M_1 トガ平行デアルコトヨリ, 直ニ $\dfrac{MP}{OM}$ ニ等シク, 同ジク $\dfrac{3}{2}$ ナル値ヲ有ツコトハ明ラカデアラウ. モシ此ノ割合 $\dfrac{M_1P_1}{OM_1}$ ガ $\dfrac{3}{2}$ ト異ナルナラバ, 點 P_1 ハ OP 直線上ニハナク,



1) *Straight line.* 2) P_1 ハ OP 直線上 O 點ヨリ左下ニアルヲ妨ゲナイ.

此ノ直線カラ外レテ居ルデアラウ．故ニ $\frac{M_1P_1}{OM_1}$ ガ $\frac{3}{2}$ ニ等シイコトガ點 P_1 ニ課セラレタ約束デ，此ノ約束ニ從ツテ居リサヘスレバ，P_1 ハ常ニ直線 OP ノ上ニ在ルノデアル．從ツテ此ノ約束ヲ守リツヽ平面上ニ動ケバ，ソレハ直線 OP ヲ畫イテ行クノデアル．此ノ事ヲ數式ニ書クノハ容易デアル．卽チ動點 P_1 ノ座標ヲ (x, y) トスレバ，$OM_1=x$，$M_1P_1=y$ デアルカラ

$$\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$$

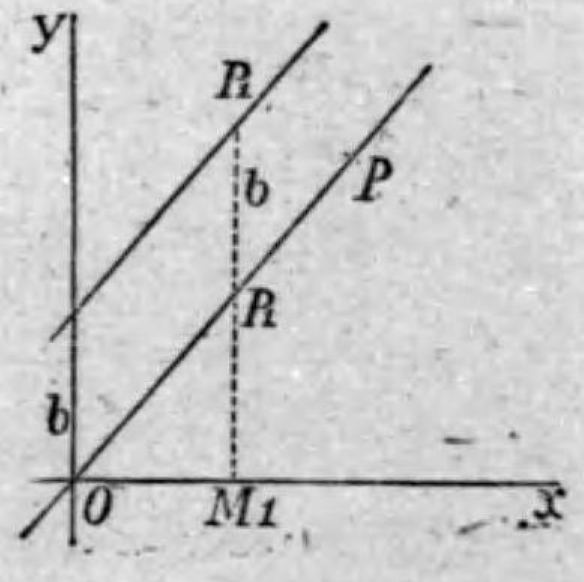
トナルノデアル．此ノ式ニ適合スル x ト y トノ値ヲ座標ニ有ツ點ハ總テ直線 OP 上ノ點デアルノミナラズ，直線 OP 上ノ各點ノ座標 (x, y) ハ必ズ上式ニ適合スルノデアル．卽チ上式ヲ，直線 OP ノ記號トシテモヨイデアラウ．又ハ上式ノ分母ヲ拂ツテ

$$2y-3x=0$$

トシテモヨイ．或ハ又

$$y=\frac{3}{2}x$$

ト書イテモヨイ．



今直線 OP ヲ b ノ長サダケ上ニ平行ニ上ゲタトスレバ P_1 ハ直線上何處ニ在ツテモソノ y 座標ハ原ノ場合ノ $\frac{3}{2}x$ ヨリ唯 b ダケ增スダケデアルカラ，上式ノ右邊ニ b ヲ加フレバヨイノデ新位置ニ在ル直線ノ記號ハ

$$y=\frac{3}{2}x+b$$

トナルノデアル．

今得タル直線ノ記號卽チ直線ノ方程式中ノ係數ノ意味ヲ考ヘテ見ルニ，x ノ係數 $\frac{3}{2}$ ハ $\frac{M_1P_1}{OM_1}$ デアルカラ，直線 OP ガ x 軸ト作ス角 $\angle POx$ ノ正切デアル．ヨツテ此ノ角ヲ知レバ，ソノ値ハ定マルノデアル．又 b ハ直線ト y

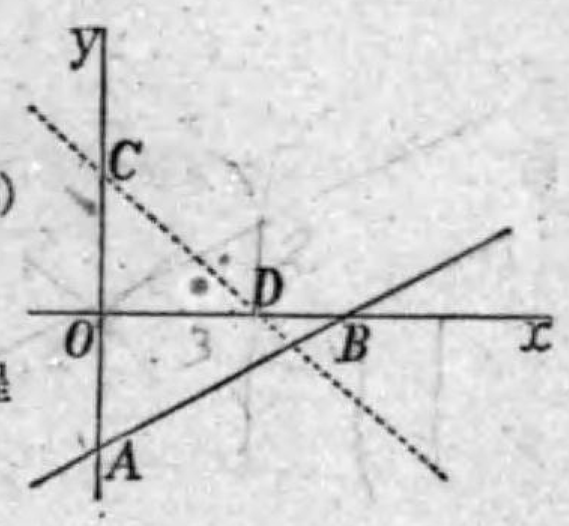
軸トノ交點ノ y 座標デアル，故ニ x 軸ト作ス角ノ正切ガ m デアリ，y 軸トノ交點ノ y 座標ガ b ナル如キ直線ノ方程式ハ

$$y=mx+b$$

トナルデアラウ．コレガ一般ノ直線ノ方程式デアル．

右圖ニ示ス如キ直線 AB ハ x 軸ヲ B(OB=3) ナル點ニテ切リ，y 軸ヲ A(OA=−2) ナル點ニテ切ルトスレバ，コノ直線ノ方程式卽チ是ヲ示ス記號ハ

$$y=+\frac{2}{3}x-2$$

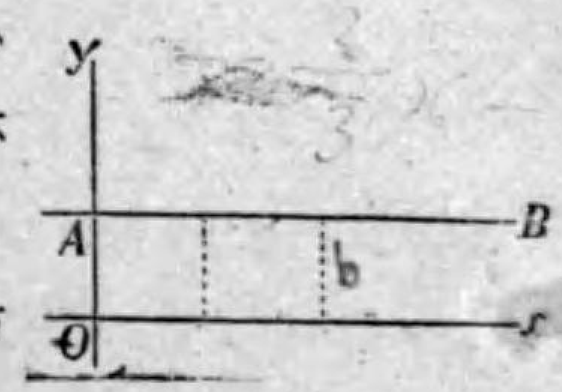


デアルガ，直線 CD ノヤウニ x 軸ト D(OD=2) ニテ交リ，y 軸ト C(OC=2) ニテ交ルトキハ，角 xDC ノ正切ハ −1 デアルカラ，直線ノ方程式ハ

$$y=-x+2$$

トナルノデアル．

上述ノ式ハ普通ノ場合ノ方程式デアルガ，モシ直線ガ x 軸カ又ハ y 軸ニ平行ナル場合ニハ方程式ガ特殊ナル形ヲ取ルノデアル．



先ヅ x 軸ニ平行ナル直線 AB ノ著シイ性質ハソノ上ノ如何ナル點モ x 軸カラノ距離ガ一定不變デアルコトデアル，卽チ y 座標ガ一定デアル．ヨツテ，コノ一定ノ距離ヲ b トスレバ，AB ノ方程式ハ

$$y=b \quad 又ハ \quad y-b=0$$

デヨイノデ，是ガ卽チ直線 AB ノ記號デアル．

次ニ y 軸ニ平行ナル直線ニ於テハ，其ノ各點ノ x 座標ハ一定デアルカラ假ニ其ノ x 座標卽チ y 軸カラノ一定ノ距離ヲ a トスレバ，コノ直線ノ方程式ハ

$x=a$ 又ハ $x-a=0$

トナルノデアル.

特ニ x 軸又ハ y 軸自身ノ方程式ハ

$y=0$ 及ビ $x=0$

デアルコトハ明ラカデアラウ.

一般ノ直線ノ方程式

$$y=mx+b$$

ニ於テ m ハ直線ノ方向ヲ示ス數デアルカラ, コレヲ方向係數[1]トイヒ, b ハ y 軸上ニ切リ取ル長サデアルカラ, コレヲ y 軸上ノ截片[2]ト稱スル.

上ニ述ベテ來タ事カラ, 直線ハ總テ x ト y トノ間ノ一次方程式デ表ハサレ得ルコトガワカツタガ, 逆ニ斯カル一次方程式ハ必ズ直線ヲ表ハスモノデアルコトモ亦見易イ. 一般ノ一次方程式

$$Ax+By+C=0$$

ノ y ノ項ダケヲ左邊ニ殘シテ他ノ項ヲ皆右邊ニ移シ, 兩邊ヲ B デ除スレバ

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

トナルカラ, 方向係數ガ $-\frac{A}{B}$ デ, y 軸上ノ截片ガ $-\frac{C}{B}$ ナル直線ヲ表ハスコトガ判カルデアラウ. 尤モ, コノ説明ハ B ガ零デアルトキニハ通用シナイガ(數學デハ 0 デ除スルコトハ出來ナイカラ), 其ノ時ニハ B=0 ノ爲ニ式中 y ノ項ハナク, 方程式ハ

$$Ax+C=0$$

ノ様ナモノデアルカラ, C ヲ右邊ニ移シテ A デ除スレバ

$$x=-\frac{C}{A}$$

トナリ, x軸上ノ $x=-\frac{C}{A}$ ナル點ヲ通ジテ(卽チx軸上ノ截片ガ $-\frac{C}{A}$ デ)

1) *Angular coefficient.* 2) *Intercept.*

y 軸ニ平行スル直線ヲ表ハスノデアル.

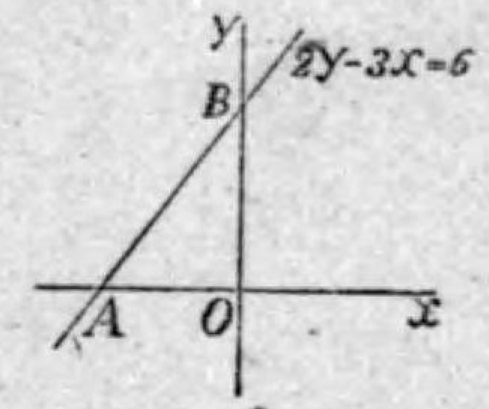
此ノ時, A モ亦零デアツタナラバ, 上ノ變形ハ出來ナイガ, 併シ其ノ時ハ原ノ方程式ハ x モ y モ含マナイ式ニナリ, 一次方程式デハ無クナルカラ, 斯カル場合ハ考ヘナクテモヨイデアラウ.

次ニ提示セラレタル一次方程式ガ表ハス直線ハ如何ナル位置ヲ占メルカヲ知リ, 實際ニ其ノ直線ヲ畫クコトガ出來ルカヲ考ヘテ見ヨウ.

與ヘラレタル方程式ヲ

$$2y-3x=6$$

トスル. 此ノ式ハ x ト y トノ間ノ一次方程式デアルカラ直線ヲ表スコト勿論デアルガ, 總テ直線ハ其ノ上ノ二點ノ位置ガワカレバ, ソレヲ畫クコトガ出來ルカラ, 求メル直線ガ x 軸及ビ y 軸ト交ル點ヲ見出セバヨイ. x 軸ト交ル點ニ於テハ, 其ノ y 座標ガ 0 トナルノデアルカラ, 方程式ニ於テ $y=0$ トオイテ得ル式



$$-3x=6$$

ヲ解イテ $x=-2$ ヲ得ル. 卽チ x 軸上ニ $x=-2$ ナル點 A ヲ求ムレバ, コレガ求ムル直線上ノ一點デアル. 次ニ y 軸トノ交點ヲ求ムルニハ, コノ點ハ直線上 x 座標ガ 0 トナル點デアルカラ, 方程式ニ於テ $x=0$ トオイテ得ル式

$$2y=6$$

ヲ解イテ $y=3$ ヲ得ル. 卽チ y 軸上 $y=3$ ナル點 B ハコノ直線上ノ一點デアル. 斯クシテ求メ得タル二點 A,B ヲ結ブ直線ヲ引ケバ, コレガ求ムル直線デアル.

附記 此處デハ求メル直線ガ x 軸, y 軸ト交ル點ヲ求メタノデアルガ必シモ斯樣ニシナクトモヨイノデ, 如何ニカシテ, 直線上ノ二ツノ點ヲ求メルカ又ハ一點ト方向係數カラ x 軸ト作ス角ヲ見出シテモヨ

イ譯デアル.

モシ方程式ガ

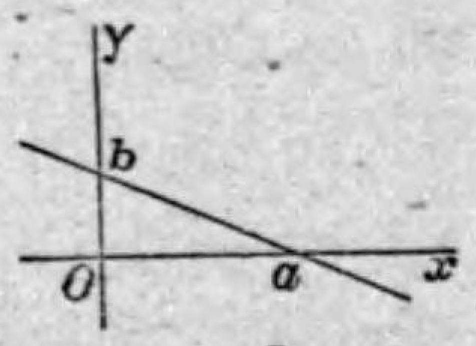
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ノ様ナ形デ與ヘラレタ時ニハ，其ノ直線ハ如何ナルモノデアルカ，x 軸トノ交點ヲ求メル爲ニ $y=0$ トシテ見ルト上式カラ

$$\frac{x}{a}=1 \text{ 卽チ } x=a$$

トナルカラ，x 軸上ノ截片ハ a デアル．又 y 軸上ノ截片ヲ求メル爲ニ $x=0$ トオイテ見ルト

$$\frac{y}{b}=1 \quad \text{卽チ} \quad y=b$$



トナツテ，b デアルコトガ判カル．ヨツテ直線ハ圖ノ如ク $(a,0)$ $(0,b)$ ナル二點ヲ通ル直線デアル.

42　與ヘラレタル二點ヲ通ル直線ノ式

與ヘラレタル二點 P, Q ノ座標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トスル．求ムル直線ノ方程式ハ兎ニ角（y 軸ニ平行ナラザル限リ）

$$y=mx+b$$

ノ形ヲ有ツテ居ルノデアルカラ，コレガ P ト Q トヲ通ルナラバ係數 m ト b トノ値ハ何程ニナルカヲ見レバヨイノデアル.

先ヅ $P_1(x_1, y_1)$ ヲ通ルトスレバ，上式中ノ x ト y トヲ夫々 x_1, y_1 トスレバ，方程式ノ左右邊ガ相等シキ値ヲ有ツ筈卽チ x_1, y_1 ハ此ノ式ニ適スル筈デアル．ヨツテ m ト b トノ間ニ

$$y_1=mx_1+b$$

ナル關係式ガ得ラレル．同ジク x_2, y_2 モ亦適合スルノデアルカラ

$$y_2=mx_2+b$$

ナル關係式モ m ト b トノ間ニアル譯デアル．是等兩式ヲ m ト b トノ聯立二

元一次方程式ト見テ解ケバ，m ト b トノ値ガ得ラレル譯デアル．ソノ爲ニ第一式カラ第二式ヲ減ジテ

$$y_1-y_2=m(x_1-x_2) \quad \text{卽チ} \quad m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

ヲ得テ，m ガワカツタ．b ヲ求ムル爲ニ第二式ニ x_1，第一式ニ x_2 ヲ乘ジテ，相減ズレバ

$$x_1y_2-x_2y_1=b(x_1-x_2) \quad \text{卽チ} \quad b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

トナツテ b ヲ定メ得タノデアル．ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ

$$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

デアル.

此ノ式ヲ得ルニハ次ノ様ニシテモヨイ.

求ムル直線ハ (x_1, y_1) ヲ通ルノデアルカラ，其ノ方程式ハ x ト y トノ一次式デ且 (x_1, y_1) ガ適合スル方程式デアル．故ニソレハ必ズ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ノ如キ形ノモノデアラウ．此ノ式ノ x, y ニ夫々 x_1, y_1 ヲ代入スレバ，左右トモニ零トナツテ滿足セシメラレルコトハ明ラカデアル．故ニ此ノ直線ガ又 Q 點ヲ通ルコトカラ係數 m ヲ定ムレバヨイ．卽チ (x, y) ヲ (x_2, y_2) トスレバ

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1)$$

デアルカラ

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \left(=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)$$

トナル．ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ前ノ通リ

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

デヨイ譯デアル.

43 二直線ノ交點[1]

與ヘラレタル二直線ヲ

$$ax+by+c=0$$
$$a'x+b'y+c'=0$$

トスル．又其ノ交點ヲ (x_1, y_1) トスレバ，コノ點ハ上記二直線ノ孰レノ上ニモ在ル故ニ，其ノ座標 x_1, y_1 ハ上ノ二式ノ孰レニモ適合スルコトハ確カデアル．故ニ次ノ二ツノ關係式ガアル．

$$ax_1+by_1+c=0$$
$$a'x_1+b'y_1+c'=0$$

是等二式ヲ x_1 ト y_1 トノ間ノ聯立一次方程式ト見レバ，是ヲ解イテ x_1, y_1 ガワカル譯デアル．コレヲ解クノハ與ヘラレタ原二方程式ヲ x ト y トニ關シテ解クノト全ク同ジデアル．ヨツテ與ヘラレタル二直線ノ交點ノ座標ハ

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \qquad y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

デアル．

例　二直線

$$3x+2y=13$$
$$7x+3y=27$$

ノ交點ヲ求メヨ．

解　上式ヲ適用シテ　$x=\frac{2\times(-27)-3\times(-13)}{3\times3-2\times7}=\frac{15}{5}=3$

$$y=\frac{7\times(-13)-3\times(-27)}{3\times3-2\times7}=\frac{10}{5}=2$$

卽チ (3, 2) デアル．

---

1) *Point of intersection.*

6.29

44 二直線間ノ角

直線ノ方程式

$$ax+by+c=0$$

ハ，x ノ項及ビ c ヲ右邊ニ移シテ兩邊ヲ b デ除スレバ

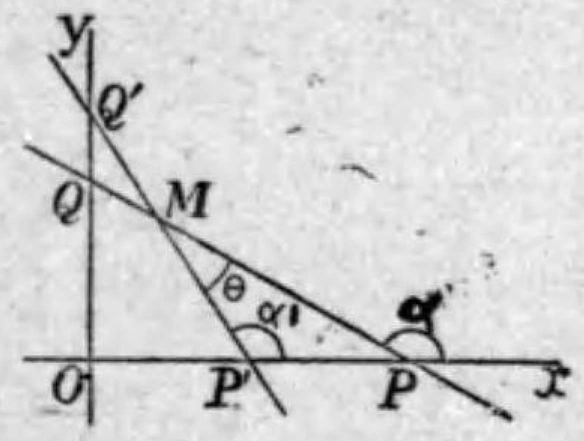
$$y=mx+n$$

ノ様ナ形トナルカラ，直線ノ方程式ハ此ノ形デ與ヘテアルトシテモ差支ナイ．[1]

ヨツテ與ヘラレタル二直線 PQ, P′Q′ ヲ夫々

$$y=mx+n \qquad y=m'x+n'$$

トスル．直線 PQ, P′Q′ ガ x 軸ト作ス角ヲ夫夫 α, α' トスレバ，二直線ノ間ノ角 θ ハ ∠PMP′ デアルガ，平面幾何學デ學ンダヤウニ



$$\theta+\alpha'=\alpha$$

デアルカラ

$$\theta=\alpha-\alpha'$$

デアル．直線 PQ ノ方程式中ノ係數 m ハ角 α ノ正切卽チ $\tan\alpha$ デアリ (第117頁)，同ジク m' ハ $\tan\alpha'$ デアル．卽チ

$$m=\tan\alpha \qquad m'=\tan\alpha'$$

ガワカツテ居ルノデアルカラ，$\theta=\alpha-\alpha'$ ヲ既知ノ量 m, m' 卽チ $\tan\alpha$, $\tan\alpha'$ デ表ハシ得レバヨイノデアル．ソレハ果シテ可能デアラウカ．前ニ第43頁ニ掲ゲタ加法定理ニヨレバ

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\alpha')=\frac{\tan\alpha-\tan\alpha'}{1+\tan\alpha\tan\alpha'}$$

トナル．然ルニ $\tan\alpha=m$, $\tan\alpha'=m'$ デアルカラ，此ノ式ハ

---

1) 勿論 y 軸ニ平行ナル場合ハ除ク．

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

トナルノデアル．卽チ與ヘラレタル數 m, m' ヲ用キテ求ムル θ ノ正切ヲ計算シ得ルノデアルカラ，三角函數表ヲ用キレバ直ニ角 θ ガワカルノデアル．

例 二直線

$$2y-x+1=0 \qquad 3y+x-1=0$$

ノ間ノ角ヲ求メヨ．

解 $m=\frac{1}{2}$, $m'=-\frac{1}{3}$ デアルカラ

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1$$

正切ガ 1 デアル角ハ 45° デアルカラ（第 8 頁）

$$\theta=45^\circ$$

ヲ得ルノデアル．尤モ $\tan\theta=1$ ナル角ハ此ノ外ニ，k ヲ隨意ノ整數トシテ $45^\circ+180^\circ\times k$ ナル角ガアル．是等ノ角ハ皆其ノ正切ハ 1 デアル．併シ，ドノ角ヲ取ツテモ二直線ノ圖ノ關係ハ變ラナイカラ，ドレデモ宜イノデアル．

二直線

$$y=mx+n \qquad y=m'x+n'$$

ノ間ノ角 θ ヲ與ヘル式

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

ニ於テ，モシ $m=m'$ ナラバ，分子ハ零トナルカラ

$$\tan\theta=0$$

デ，從ツテ $\theta=0$ 又ハ 180° ノ整數倍ノ角デアルガ，孰レニシテモ，圖上ニテハ，二直線ハ互ニ平行スルコトヲ示ス．逆ニ是等二直線ガ平行ナラバ，$\theta=0$ デアルカラ，$\tan\theta=0$ デ，從ツテ $\frac{m-m'}{1+mm'}$ ガ零デナケレバナラズ，從ツテ分子ハ零デナケレバナラナイ．ヨツテ

$$m-m'=0 \quad 卽チ \quad m=m'$$

デアル．尤モ分子ハ零デナクトモ分母ガ無限大ニナレバ，ヤハリ $\tan\theta=0$ トナルト考ヘル人ガアルカモ知レナイ．今モシ假ニ m ガ無限ニ大キクナルトスレバ，分母子ヲ共ニ m デ除シテ見ルト

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{1-\frac{m'}{m}}{\frac{1}{m}+m'}$$

トナルカラ，m ガ無限ニ大キクナルトキノ極限値ハ $\frac{1}{m'}$ トナル．卽チ m' ガ有限ナラバ零ニハナラナイ．是ガ零トナルニハ m' モ亦無限大ニナラナケレバナラナイ．卽チ m モ m' モ共ニ無限大ニナルノデアルカラ $m=m'$ ノ特別ノ場合ト見做シ得ルデアラウ[1)]．故ニ二直線ガ互ニ平行スルコトヲ式ニ書ケバ $m=m'$ トナル．

次ニ，モシ $1+mm'=0$ デアレバ $\tan\theta$ ハ無限大トナルカラ，θ ハ 90° トナリ，二直線ハ互ニ垂直ニ交ル場合デアル．併シ分子モ同時ニ零トナルナラバ，此ノ結論ハ正シクナイト思ハレルガ，其ノ心配ハナイ．何トナレバ，分子ガ零トナルノハ $m=m'$ ノトキニ限ルカラ，ソノ時ニハ $1+mm'=1+m^2$ デアリ，m^2 ハ正ノ數デアルカラ $1+m^2$ ハ零ニハナリ得ナイ．故ニ斯ノ如キ事ハアリ得ナイ．卽チ $1+mm'=0$ ノ場合ニハ m ト m' トハ相等シクハナリ得ナイノデアル．

モシ又二直線ガ互ニ直角ニ交ハルトスレバ $\theta=90^\circ$ デアルカラ，$\tan\theta$ ハ無限大ニナラナケレバナラナイ．故ニ

$$\frac{m-m'}{1+mm'}$$

ノ分子ガ無限大ニナルカ，分母ガ零ニナルカ孰レカデアル．分子ガ無限大ニ

1) 嚴密ニ言ヘバ $m=\infty$, $m'=\infty$ デアツテモ必ズシモ $m=m'$ デハナイ．併シ此ノ時ハ，二直線トモ y-軸 ニ平行ニナル．

ナルノハ m ト m' トノ中ノ一ツガ無限大ニナル場合デアル．(二ツナガラ無限大ニナルノハ平行ノ場合デアル) 假ニ m ガ無限大ニナルトスレバ

$$\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{1-\frac{m'}{m}}{\frac{1}{m}+m'}$$

ノ中ノ $\frac{1}{m}$, $\frac{m'}{m}$ ハ共ニ零ニナリ上式ノ値ハ $\frac{1}{m'}$ トナツテ無限大トハナラナイ (尤モ $m'=0$ ノ場合ハ此ノ限デハナイ[1])．故ニ $1+mm'=0$ デナケレバナラナイ．卽チ二ツノ直線ガ互ニ直交スルナラバ必ズ $1+mm'=0$ デアリ，又 $1+mm'=0$ ナラバ互ニ直交スルノデアル．是等ノ事ヲ通常次ノ樣ニ書キ記ス．

二直線 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ ガ互ニ平行スル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ハ $m=m'$ デアリ，互ニ直交スル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ハ $1+mm'=0$ デアル[2]．

二直線ガ平行デアル爲ノ條件 $m=m'$ ハ常識的ニモ明瞭デアル．二直線ガ x 軸ト作ス角ガ互ニ相等シイコトヲ示スカラデアル．

例ヲ擧ゲテ見ルト，二直線

$$y=2x+3 \qquad y=2x-5$$

ハ互ニ平行デアリ，二直線

$$y=2x+3 \qquad y=-\frac{1}{2}x-5$$

ハ互ニ垂直デアル．

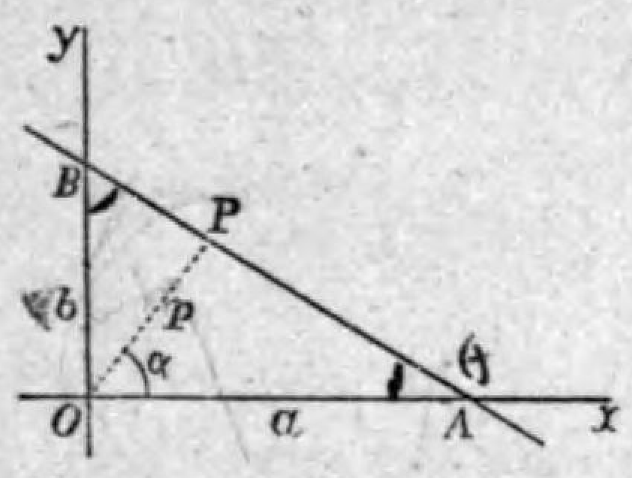
45 直線ト原點トノ距離

直線ノ方程式ヲ

1) 故ニ $m'=0$ ノトキハ, $m=\infty$ デアレバ二直線ハ直交スル．　2) $m'=0$, $m=\infty$ ノ場合ハ $1+mm'=0$ ニ含マレルト考ヘテモヨイ．ソレハ $m'=0$ ナラバ $m=-\frac{1}{m'}=\infty$ トナルカラデアル．

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ノ形ニ書ケバ a, b ハ x 軸，y 軸上ノ截片デアルコトハ前ニ述ベタ (第 120 頁)．此ノ直線ト原點トノ距離ハ幾許アルカ，言ヒ換ヘレバ，原點 O ヨリ此ノ直線ニ下ス垂線 OP ノ長サヲ求メルニハ如何ニスレバヨイカ．此ノ問題ヲ解決スル爲ニ，垂線ノ長サヲ p トシ，OP ガ x 軸ト作ス角ヲ α トスル．α ハ直線ノ式カラ求メ得ラレル．何故ナラバ，直線ガ x 軸ト作ス角 θ ハ直線ノ式カラ知リ得ルカラ，$180°-\theta$ モワカル．圖カラモ明ラカナル樣ニ此ノ角ト α トノ和ハ $90°$ トナルカラ $\alpha=90°-(180°-\theta)=\theta-90°$ デアル．卽チ α ガワカツタ．次ニ本來ノ目的タル p ヲ求ムル爲ニ直線ノ式ニ p ヲ乘ズルト



$$\frac{p}{a}x+\frac{p}{b}y=p$$

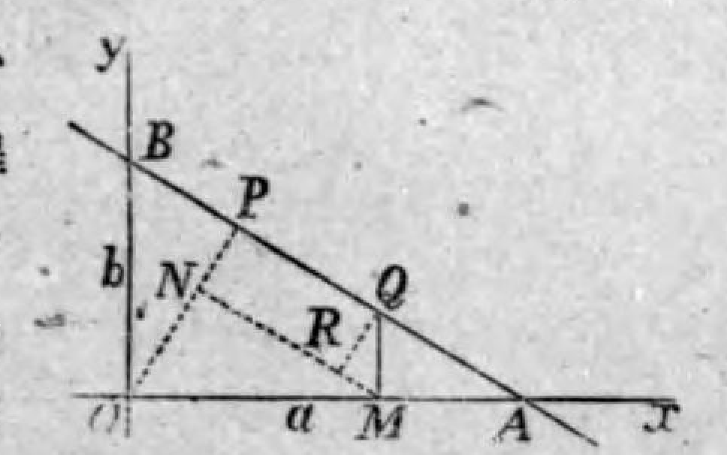
トナルガ，圖カラワカル通リ

$$\frac{p}{a}=\cos\alpha \qquad \frac{p}{b}=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$$

デアル．故ニ上式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

トモ書キ得ラレル．斯ク書キ替ヘテモ，此ノ式ハ原方程式ト同ジ直線ヲ表ハスコトハ勿論デアル．故ニ原方程式ノ表ハス直線上ノ各點ノ x, y 座標ハ皆此ノ方程式ニ適合スル筈デアル．圖ニ於テ AB ヲ與ヘラレタル直線トシ，原點ヨリノ垂線ヲ OP トスル，OP ノ長サガ p デアル．此ノ直線上ノ隨意ノ點 Q(x, y) ヨリ x 軸ニ垂線 QM ヲ下シ，M ヨリ AB ニ平



行ニ直線 MN ヲ引キ，Q ヨリ MN ニ垂線 QR ヲ引イテ見ルト，明ラカニ

$$p=\mathrm{OP}=\mathrm{ON}+\mathrm{NP} \qquad x=\mathrm{OM} \qquad y=\mathrm{MQ}$$

デアリ，角 AOP ハ α デアルカラ

$$\mathrm{ON}=\mathrm{OM}\cos\alpha=x\cos\alpha$$

角 QMR ト角 MON トハ孰レモ角 OMN ヲ加フレバ直角トナル角デアルカラ，互ニ相等シク，從ツテ角 QMR ハ α デアル．故ニ

$$\mathrm{NP}=\mathrm{RQ}=\mathrm{MQ}\sin\angle\mathrm{QMR}=\mathrm{MQ}\sin\alpha=y\sin\alpha$$

デアル．ヨツテ

$$p=\mathrm{ON}+\mathrm{NP}=x\cos\alpha+y\sin\alpha$$

トナツテ前記ノ直線ノ方程式ト全ク同一ノ式ヲ得タノデアル．コレハ直線 AB 上ノ各點ノ座標ガ直線ノ方程式

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

ニ適合スルコトヲ示スノデアル．

與ヘラレタル直線ノ式ヲ上記ノ形ニ書キ直シ得タトスレバ，此ノ式中 x, y ヲ含マヌ項ノ絕對值 p ガ求ムル原點ヨリノ距離ヲ與ヘル筈デアル．又係數 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ ノ α ハ原點ヨリ直線ニ下シタ垂線ガ x 軸ト爲ス角 α ヲ與ヘルノデアル．ヨツテ問題ハ與ヘラレタル AB ノ方程式ヲ上記ノ形ニ書キ直スコトニ歸スル．

直線 AB ノ方程式ガ

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

デアルトスル．係數 A, B, C ハ既知ノ數デアル．コレヲ上記

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

ナル形ニ書キ直シ得レバ，此ノ直線ノ p ト α トガワカルノデアル．先ヅ方程式ヲ

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=-\mathrm{C}$$

ト書キ，全體ヲ $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$ デ除スレバ

$$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}x+\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}y=-\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

トナル．x ノ係數

$$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

ハソノ絕對值ガ 1 ヨリ大ナラザル數デアル．何トナレバ，ソノ分母 $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$ ハ B ガ零ノ時 $\sqrt{\mathrm{A}^2}=\mathrm{A}$ デアリ，零デナケレバ常ニ A ヨリ大ナル絕對值ヲ有スル數デアル．卽チ分母ノ絕對值ハ分子ノソレヨリ決シテ小デナイ，故ニ此ノ分數ノ絕對值ハ 1 ヨリ大デハナイ．ヨツテ $\dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$ ヲソノ餘弦ノ值トスル角ハ必ズ三角函數表カラ見出サレル筈デアル．ソノ角ヲ α トスル．卽チ

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

然ルニ直線ノ方程式中 y ノ係數

$$\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

ノ二乘ニ x ノ係數 $\dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$ ノ二乘ヲ加フレバ明ラカニ 1 トナルカラ

$$\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}\right)^2}=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\sin\alpha \qquad \text{(第 25 頁又ハ 27 頁)}$$

デアル．故ニ直線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=-\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

トナル．右邊ハ常數デアルカラ，之ヲ p トオケバ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

トナツテ所要ノ形トナル．卽チ求ムル p ノ值ハ

$$p=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

デ計算出來ル. 尤モ長サ p ノ値ハ右邊ノ絶對値デヨイノデアル. 第127頁ノヤウニ原方程式ヲ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ トスレバ $A=\frac{1}{a}$, $B=\frac{1}{b}$, $C=-1$ デアルカラ $p=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ トナル.

例トシテ直線

$$3x-4y-5=0$$

ヲ取ツテ見ルト,

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

デアルカラ, 上式ヲ 5 デ除シテ

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=1$$

ヲ得ル. 故ニ原點ト此ノ直線トノ距離ハ 1 デアリ, 又 53° ノ餘弦ハ大體 0.6018 デアルカラ角 α ハ大約 53° デアル.

直線ノ方程式ヲ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \text{又ハ} \quad x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

ノヤウナ形ニ書イタ時, 此ノ式ヲヘッセノ標準形[1]トイフ. 是ハ甚ダ便利ナ式デ, 原點ヨリノ距離ハ一目シテワカリ, 又 x 軸ト作ス角モ直ニワカル. 卽チ $\alpha+\frac{\pi}{2}=\alpha+90°$ デアル.

二直線

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad x\cos\beta+y\sin\beta=q$$

ノ間ノ角ハ明ラカニ $\alpha-\beta$ (又ハ $\beta-\alpha$) デアル. 故ニ正弦又ハ餘弦ノ加法定理ヲ用キテ, $\alpha-\beta$ ノ正弦又ハ餘弦ヲ直線式ノ係數カラ直ニ計算スルコトモ出來ル. 卽チ

1) *Hesse: Normal form.*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

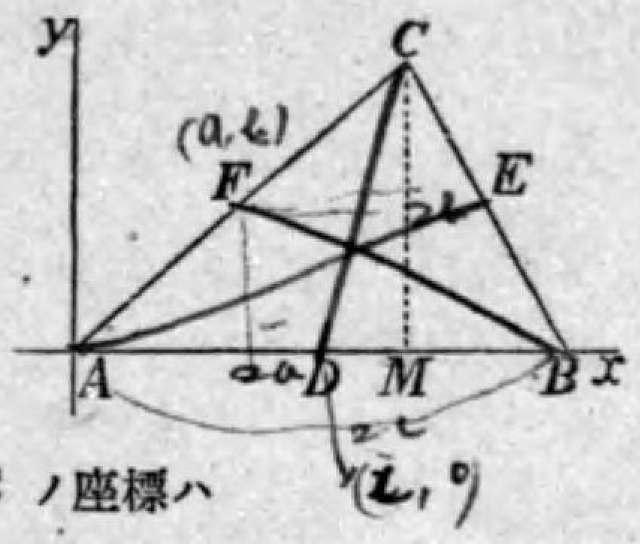
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ノ右邊ハ與ヘラレタル二直線ノ方程式ノ係數カラ直ニ計算出來ル式デアル.

46 直線式ノ應用

平面幾何學ニ於テ巧妙ナル方法デ證明セラレテ居ル有名ナル問題ノ一ヲ解析幾何學ヲ用キテ證明シテ見ヨウ.

問題 三角形ノ三ツノ中線[1]ハ一點ニ會スルコトヲ證明セヨ.



三角形ヲ ABC トスル, 一邊 AB ヲ x 軸ニトリ, A ヲ原點トスル. A ヲ通リテ Ax ニ垂直ナル線ヲ y 軸トスル. D, E, F ヲ各邊ノ中點トシ, C ヨリ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ M トスル. AM, CM, AB ノ長サヲ夫々 $2a, 2b, 2c$ トスレバ, 頂點 A, B, C ノ座標ハ

$$A:(0,0) \qquad B:(2c,0) \qquad C:(2a,2b)$$

デアル. 次ニ各邊ノ中點 D, E, F ノ座標ヲ求メテ見ヨウ. D ノ座標ハ明ラカニ $(c,0)$ デアル. F ハ AC ノ中點デアルカラ容易ニ (a,b) デアルコトガワカル. E ノ座標ヲ求メルト x 座標ハ AM ト BM ノ半分トノ和デアルカラ

$$2a+\frac{2c-2a}{2}=a+c$$

デアリ, y 座標ハ CM ノ半分デアルカラ b デアル. 求メ得タ座標ハ

$$D:(c,0) \qquad E:(a+c,b) \qquad F:(a,b)$$

デアル.

次ニ直線 CD, BF, AE ノ方程式ヲ求メナケレバナラナイ. CD ノ式ハ直ニ

$$y-2b=\frac{2b}{2a-c}(x-2a)$$

1) *Median*, 頂點ト對邊ノ中點トヲ結ブ直線.

デアルコトガワカル．卽チ上式ニ C ノ座標 $(2a, 2b)$ ヲ代入シテ見ルト，左右兩邊トモ零トナリテ適合スル，又 D ノ座標 $(c, 0)$ ヲ代入スレバ兩邊トモニ $-2b$ トナルカラ，ヤハリ適合スル，ヨツテ上式ハ直線 CD ノ方程式デアルコトニ間違ハナイ．直線 BF ノ式ハ

$$y-b=\frac{b}{a-2c}(x-a)$$

デアルコトハ，B ノ座標 $(2c, 0)$ 及ビ F ノ座標 (a, b) ニテ滿足セシメラレルコトカラ明ラカデアル．最後ニ直線 AE ノ方程式ハ

$$y-b=\frac{b}{a+c}(x-a-c)$$

デアルコトモ亦，A ノ座標 $(0, 0)$，E ノ座標 $(a+c, b)$ ヲ代入シテ見レバ直ニワカル．

以上ノ三直線

$$y-2b=\frac{2b}{2a-c}(x-2a)$$

$$y-b=\frac{b}{a-2c}(x-a)$$

$$y-b=\frac{b}{a+c}(x-a-c)$$

ガ一點ヲ共有スルコトヲ證明スレバヨイノデアル．ソノ爲ニ第二，第三ノ直線ノ交點ヲ求メル，ツマリ聯立方程式

$$y-b=\frac{b}{a-2c}(x-a)$$

$$y-b=\frac{b}{a+c}(x-a-c)$$

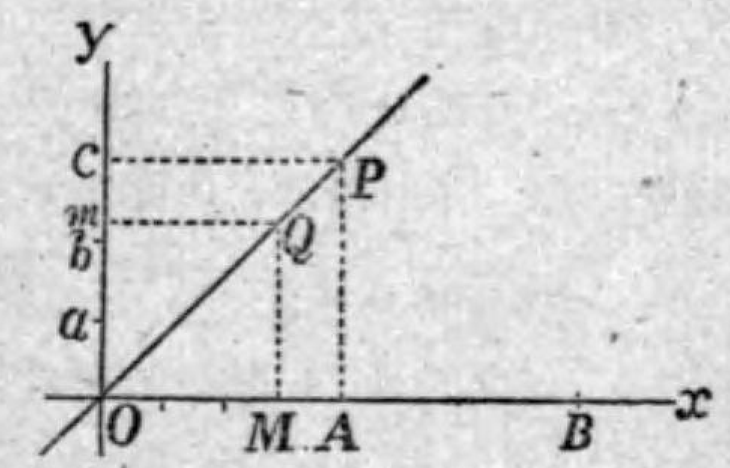
ヲ解イテ

$$x=\frac{2}{3}(a+c) \qquad y=\frac{2}{3}b$$

ヲ得ル．コレガ交點ノ座標デアル．此ノ點ノ座標ガ第一ノ方程式ヲ滿足セシムレバ，此ノ點ハソノ直線上ニアルノデアルカラ，三直線ハ此ノ一點ニ相會スルコトガ證明セラレル譯デアル．此ノ座標ヲ第一ノ方程式ニ代入スレバ左右兩邊トモ $-\frac{4}{3}b$ トナリテ正シク適合スル．コレデ證明ハ終ツタノデアル．

此ノ點ハ三角形 ABC ノ重心[1]ト呼バレル點デ，此ノ點ノ y 座標ハ上記ノヤウニ $\frac{2}{3}b$ デアルカラ，直線 AB カラノ高サハ CM ノ $\frac{1}{3}$ デアル，故ニ又 CD 直線ノ一端 D ヨリ $\frac{1}{3}$ ノ點卽チ C ヨリ $\frac{2}{3}$ ノ點デアルコトモ直ニワカル．此ノ證明デハ邊 AB ヲ x 軸トシタガ，ドノ邊ヲ x 軸トシテモ同樣ニ論ジ得ルノデアルカラ，重心ハ各中線ノ上ノ頂點ヨリ $\frac{2}{3}$ ノ點デアルコト勿論デアル．

直線ノ方程式ヲ實際ニ應用シテ便利ナ事モアル．例ヘバ尺貫法トめーとる法トノ比較ナドハソノ一ツデアル．今糎ト尺寸トノ關係ヲ考ヘルト1尺ハ 30.303 糎デ，1 寸ハ 3.0303 糎デアル樣ニ互ニ比例シテ居ルノデアルカラ，尺寸ノ長サヲ x 座標トシ，是ヲ糎デ表ハシタモノヲ y 座標トスレバ直線ヲ表ハス筈デアル．先ヅ x 軸ト y 軸上ニ夫々隨意ニ單位ヲ定メル．（例ヘバ x 軸上デハ OA ヲ 1 寸トシ，y 軸上デハ Oa ヲ 1 糎）0 寸ハ勿論 0 糎デアルカラ，直線ハ原點 O ヲ通ルコトハ明ラカデアル．次ニ 1 寸ハ 3.0303 糎デアルカラ $x=1$，$y=3.0303$ ナル點 P ヲ求メテ OP ヲ結ベバ，コレガ求メル直線デアル．此ノ直線ノ方程式ハ，方向係數ガ 3.0303 デアルカラ，



$$y=3.0303x$$

デアル．

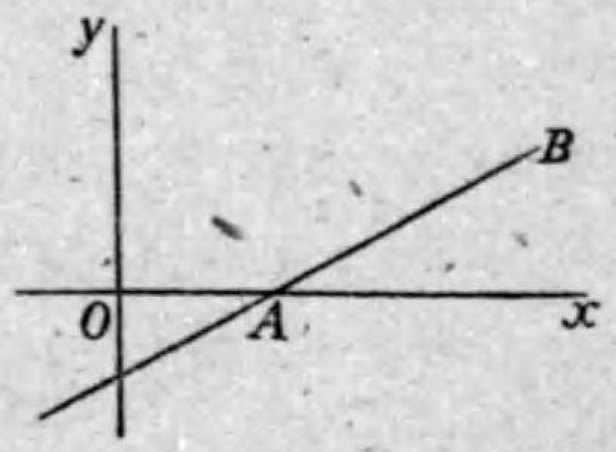
今 7 分 5 厘ノ長サハ何糎デアルカヲ見ルニハ上式デ x ヲ 0.75 トスレバ

$$y=3.0303\times0.75=2.3$$

1) *Centre of gravity.*

卽チ大約 2.3 糎トナルノデアルガ，圖上 x 軸上 0.75 ノ點 M ヲ求メテ垂線 MQ ヲ引キ Q ヨリ垂線 Qm ヲ引イテ，Om ヲ測レバ Om ハ大約 2.3 ナル筈デアル．又此ノ式及ビ此ノ圖ヲ用ヰテ何糎ハ幾寸分厘ニナルカヲ求ムルノモ容易デアル．

同樣ニ攝氏ト華氏ノ溫度ノ換算ニ役立ツ式及ビ圖モ亦簡單ニ出來ル．水ノ氷點ハ攝氏デハ 0° デ，華氏デハ 32° デアリ，沸騰點ハ夫々 100° ト 212° デアル，卽チ是等二點ノ間ヲ攝氏デハ百度華氏デハ百八十度ニ等分シテアル．x 軸上ニ華氏，y 軸上ニ攝氏ノ溫度ヲ盛ルトスレバ，攝氏 0° ト 100° ノ間ハ華氏ノ溫度ト比例シテ居ルノデアルカラ直線ヲ表ハスデアラウ．兩軸上ノ單位ノ長サハ前ト同ジク隨意ニ定メテヨイ．



0°C ハ 32°F デアルカラ x 軸上 32 ニ相當スル點 A ハ求ムル直線上ノ點デアル．次ニ (212, 100) ナル點ヲ B トスレバ AB ハ兩種ノ溫度ノ關係ヲ表ハス直線トナルノデアル．併シ華氏ノ 180° ガ攝氏ノ 100° ニ相當スルノデアルカラ，此ノ直線ノ方向係數ハ

$$\frac{100}{180}=\frac{5}{9}\fallingdotseq 0.56$$

トナリ，0.56 ナル正切ヲ有スル角卽チ大約 29°20′ ガ x 軸ト此ノ直線トノ間ノ角デアル．

此ノ直線ノ方程式ヲ求メルニハ，(32, 0) ナル點ヲ通過シ方向係數ガ $\frac{5}{9}$ ナルコトヨリ直ニ

$$y=\frac{5}{9}(x-32)$$

ナルコトガワカル．書キ替ヘテ

$$5x-9y=160$$

トシテモヨイ．

試ミニ此ノ式中 x ヲ 95 トスレバ $y=35$ ヲ得ルカラ，華氏 95° ハ攝氏 35° ニ當ルコトガワカル．

問題

（1） 攝氏零下 7 度ハ華氏ノ何度ニ當ルカ．

（2） 華氏 90° ハ攝氏ノ何度デアルカ．

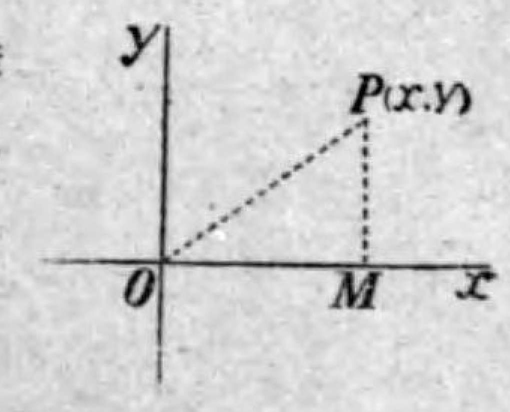
（3） 直交軸ニ於ケル三點 A(0, 0), B(α, β), C(γ, δ) ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ．　答 $\frac{1}{2}\left|\alpha\delta-\beta\gamma\right|$

［直線 BC ノ方程式ヲ作リ，A ヨリノ距離ヲ見出シ之ニ $\overline{\mathrm{BC}}$ ヲ乘ジテ二分スレバヨイ．］

47　圓

解析幾何學デ圓[1]トイフノハ圓周ノ意味デアル．圓ノ記號卽チ方程式ハ如何ナルモノデアラウカ．直線ノ場合ト同ジク，其ノ根本ノ性質卽チ其ノ定義ヲ方程式ノ形ニ書キ表ハセバヨイノデアル．

圓ハ平面上一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル總テノ點ノ集リデアルカラ，コノ事ヲ方程式ニ書キ表ハシテ見ヨウ．先ヅ具體的ナル場合ニ就イテ考ヘテ見ル爲ニ原點ヲ中心トスル半徑[2] 1 ナル圓ヲ考ヘル．圓周上ノ隨意ノ點ヲ P(x, y) トスル．P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ下シテ見ルト，原點 O ト P トノ距離ハ OP デアルガ，三角形 OPM ハ直角三角形デアルカラ，ぴたごらすノ定理ニヨツテ



$$\overline{\mathrm{OM}}^2+\overline{\mathrm{MP}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2$$

ナル關係ガアル．然ルニ OM, MP ハ P點ノ x 座標，y 座標デアルカラ，上式ヲ

$$x^2+y^2=1$$

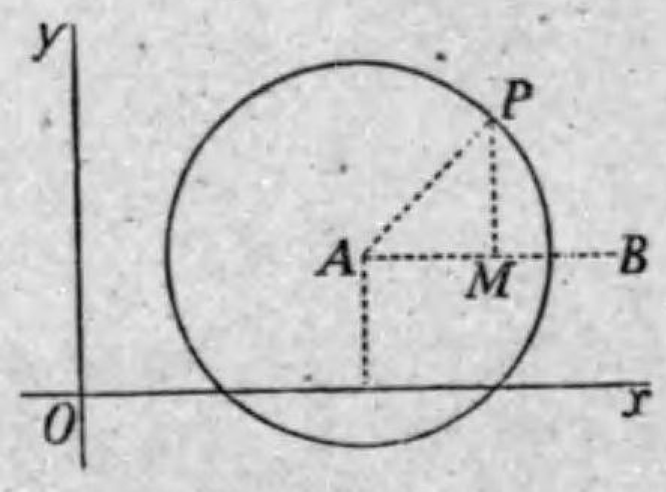
1) *Circle.*　2) *Radius.*

ト書キ得ルノデアル．此ノ關係ハ求ムル圓周上ノ各點ニ於テ同ジデアリ且又此ノ關係式ニ適合スル x, y ヲ座標ニ有ツ點ハ皆 O ヨリ 1 ノ距離ニ在ル點デアルカラ，求ムル圓周上ノ點ニ相違ナイ．卽チ原點ヲ中心トシ，半徑1ナル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=1$$

デアル．

點 (a, b) ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ，コレト同ジ考ヘ方デ求メ得ラレナイデアラウカ．前ト同様ニ圓周上ノ隨意ノ點 P ノ座標ヲ (x, y) トスル．此ノ問題ヲ前ノ問題ニ引キ直ス爲ニ中心 A 點ヲ通ジテ x 軸ニ平行ナル線 AB ヲ想像シテ見ル． 又 P ヨリ AB ニ垂線 PM ヲ下シタト想像スル．AMP ハ直角三角形デアル． AP ハ半徑卽チ r デアルカラ，ぴたごらすノ定理ニヨッテ，



$$AM^2+MP^2=r^2$$

デアル．然ルニ AM ハ點 P ノ x 座標ト點 A ノ x 座標 a トノ差デアルカラ，明ラカニ

$$AM=x-a$$

デアル．同様ニ MP ハ P ノ y 座標ト A ノ y 座標トノ差デ

$$MP=y-b$$

デアル．故ニ上ノ關係式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トナル．是ガ求ムル圓ノ方程式デアルコトハ前ト同様ニ明ラカデアラウ．此ノ式ハ次ノ様ニモ書キ得ル．

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

是デ見ルト，直角座標軸ニ關シテ圓ノ方程式ヲ作レバ，x ト y トニ關シテ二

次式トナリ，x^2 ト y^2 トノ係數ハ相等シク，xy ノ項ハナイコトガワカル．此ノ二ツノ事ガ圓ノ方程式ノ特徵デアル．此ノ特徵ヲ有ツ二次式ハ皆圓ヲ表ハスコトハ次ノ様ニ考ヘレバワカル．

上述ノ特徵ヲ有ツ二次方程式ハ

$$ax^2+ay^2+gx+fy+c=0$$

デアル．コレヲ x^2, y^2 ノ係數 a デ除シテ

$$x^2+y^2+\frac{g}{a}x+\frac{f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$

トシ，末項 $\frac{c}{a}$ ヲ右邊ニ移シテ後，兩邊ニ $\left(\frac{g}{2a}\right)^2+\left(\frac{f}{2a}\right)^2$ ヲ加フレバ

$$x^2+\frac{g}{a}x+\left(\frac{g}{2a}\right)^2+y^2+\frac{f}{a}y+\left(\frac{f}{2a}\right)^2=\left(\frac{g}{2a}\right)^2+\left(\frac{f}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

書キ替ヘテ

$$\left(x+\frac{g}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{2a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-4ac}{4a^2}$$

トナル．コレヲ前掲ノ式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ト比較シテ，中心ノ座標ガ

$$-\frac{g}{2a},\ -\frac{f}{2a}$$

デ，半徑ガ

$$\frac{\sqrt{g^2+f^2-4ac}}{2a}$$

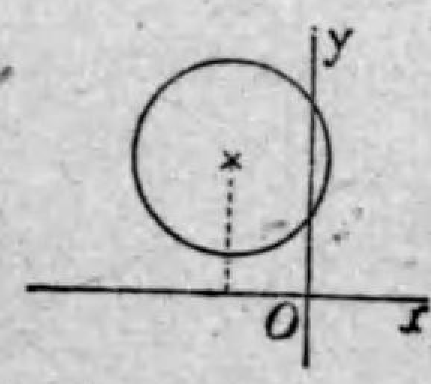
ナル圓ヲ表ハスコトヲ知リ得ルノデアル．

例 (1) $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ ハ何ヲ表スカ．

解 此ノ式ヲ上述ノ様ニ變形スルト

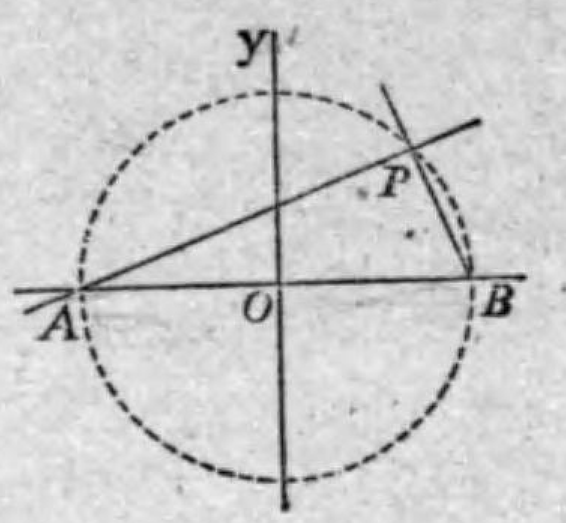
$$(x+1)^2+(y-3)^2=1+9-6=4$$

トナルカラ，$(-1, 3)$ ヲ中心トシ 2 ヲ半徑トスル圓ヲ表ハス．



例 (2)　二定點 A, B ノ間ノ距離ガ $2a$ デアル．A ヲ通ル數多ノ直線ヲ引キ，又 B ヲ通ジテ是等ニ直交スル直線ヲ引クトスル．夫等交點ノ軌跡如何．

解　AB ヲ結ブ直線ヲ x 軸ニ取リ，AB ノ中點ヲ原點トスルト



$$\mathrm{OA}=-a \qquad \mathrm{OB}=a$$

デアル．

A ヲ通ル直線ノ式ハ

$$y=k(x+a)$$

デアル．(k ハ隨意ノ數)　實際此ノ式ニ A ノ座標 $(-a,\ 0)$ ヲ代入スレバ，左右兩邊トモニ零トナツテ上式ハ滿足セシメラレル．方向係數 k ニ種々ノ異ナル値ヲ與ヘルニ從ツテ直線ハ變ルノデアルガ，皆 A 點ヲ通ルコトニ變リハナイ．k ニアラユル異ナル値ヲ與フレバ A ヲ通ルアラユル直線ガ得ラレル．此ノ直線ニ直交シテ且 B 點ヲ通ル直線ノ式ハ如何ニシテ求メ得ラレルカ．先ヅ B ヲ通ル直線ノ式ハ，A ヲ通ル直線ノ式ノ場合ト同ジク

$$y=m(x-a)$$

ナル形ヲ有ツコトハ明ラカデアラウ (m ハ直線ニヨツテ異ル數)．實際此式ニ B ノ座標 $(a,\ 0)$ ヲ代入スレバ，左右兩邊トモニ零トナツテ適合スルカラ B ヲ通ルコトハ確カデアル．ヨツテ問題ハ m ヲ如何ニ定メタナラバ，前ニ得タル直線

$$y=k(x+a)$$

ト直交スルカデアル．前ニ第 126 頁ニ得タル結果ニヨレバ，直交スル爲ノ條件ハ

$$km+1=0$$

デアル．故ニ

$$m=-\frac{1}{k}$$

トナツテ，m ノ値ガ定マツタノデアル．ヨツテ B ヲ通リ直線 AP ニ直交スル直線 BP ノ式ハ

$$y=-\frac{1}{k}(x-a)$$

デアル．ヨツテ與ヘラレタル問題ハ二直線

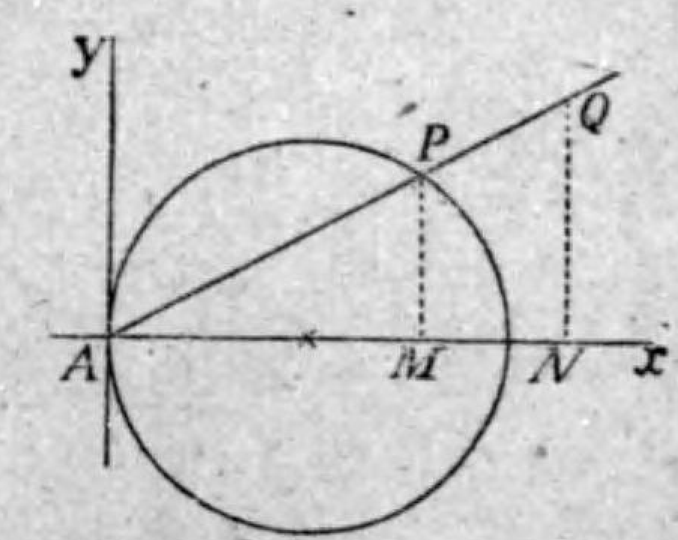
$$y=k(x+a) \qquad y=-\frac{1}{k}(x-a)$$

ノ交點ノ軌跡ヲ求ムルコトデアル．

此ノ交點ノ座標 x, y ノ値ハ，上記二直線ノ方程式ノ孰レニモ適合スル筈デアルカラ，上ノ二式ノ x, y ヲ同ジモノト見レバ，x ト y トニ關スル二ツノ關係式ヲ得ルノデアル．ヨツテ此ノ二式ヲ聯立一次方程式ト見テ解ケバ x ト y トノ値ガ得ラレル．然ルニ上式カラワカル樣ニ，斯クシテ得タル x, y 座標ノ値ハ k ヲ含ンデ居ルカラ，k ノ値ガ變ズレバ，x ト y トノ値モ共ニ變化スルデアラウ．卽チ交點ノ位置ガ變ジテ軌跡ガ畫カレルノデアル．故ニ x ト y トノ値カラ k ヲ追出シテ得タ x ト y トノ間ノ式ハ，k ニ無關係ナル x ト y トノ間ノ關係デアリ，シカモ交點 P ノ座標 x, y ガ常ニ滿足セシメル式デ，從ツテ求ムル P ノ軌跡ノ方程式デアル．上記二式カラ k ヲ追出スニハ，二式ヲ夫々 k ニ關シテ解イテ後是等二ツノ k ノ値ヲ等シトオケバヨイノデアルガ，今ノ場合ハ幸ヒニモ斯カル手數ヲ要セズ，唯二式ヲ邊々相乘ズレバ k ハ自ラ消失シテ

$$y^2=-(x^2-a^2)$$

卽チ書キ直シテ



$$x^2+y^2=a^2$$

トナル．ヨツテ求ムル軌跡ハ原點ヲ中心トシ，半徑 a ナル圓デアル．

例 (3)　一ツノ圓周上ノ一定點 A ヨリ弦ヲ引キ，他ノ端ヲ P トスル．直線 AP

上(延長上トナルコトモアリ)ニ $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=a^2$ (a ハ常數)ナルヤウニ點 Q ヲ取ル．此ノ弦ガ A 點ヲ軸トシテ廻轉スルトキ，點 Q ハ如何ナル曲線ヲ畫クカ．

解 此ノ問題ヲ解ク爲ニ A 點ヲ原點トシ，A ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ヲ x 軸トシ，A ニ於テ之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トスル．此ノ圓ノ方程式ハ，半徑ヲ r トスレバ，中心ガ $(r, 0)$ 點デアルカラ

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

デ，書キ替ヘレバ

$$x^2+y^2-2rx=0$$

トナル．點 P 及ビ Q カラ x 軸ニ垂線 PM, QN ヲ下シ P 點ノ座標ヲ (x, y), Q 點ノ座標ヲ (ξ, η) トスルト，三角形 APM, AQN ハ互ニ相似デアルコトカラ

$$\frac{y}{x}=\frac{\eta}{\xi}$$

トナル．問題ハ Q ノ軌跡ヲ求メルノデアルカラ，x ト y トヲ含マナイ，ξ ト η トノ間ノ關係式ヲ求メレバヨイノデアル．ソノ爲ニ P ト Q トノ間ノ關係ヲ示ス式ヲ求メルト，

$$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AQ}}=a^2$$

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{MP}}^2=x^2+y^2$$

$$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AN}}^2+\overline{\mathrm{NQ}}^2=\xi^2+\eta^2$$

デアルカラ

$$\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{\xi^2+\eta^2}=a^2$$

ヲ得ル．故ニ Q ノ軌跡ノ方程式ヲ求ムルニハ，次ノ三ツノ關係式

$$x^2+y^2-2rx=0 \qquad (1)$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\eta}{\xi} \qquad (2)$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\xi^2+\eta^2}=a^2 \qquad (3)$$

カラ x ト y トヲ追出シテ，ξ ト η トノ間ノ關係式ヲ作レバヨイ．式 (1)カラ $x^2+y^2=2rx$ ヲ得ルカラ，之ヲ (3) ニ代入スレバ

$$\sqrt{2rx}\cdot\sqrt{\xi^2+\eta^2}=a^2 \qquad (4)$$

トナル．此ノ式中ノ x ヲ ξ ト η トデ表ハセバヨイカラ，其ノ爲ニ (2)ヲ二乘シテ 1 ヲ加ヘ

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}=\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2}$$

トスルト，左邊ノ分子ハ (1) ニヨリ $2rx$ デアルカラ

$$\frac{2r}{x}=\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2}$$

分母ヲ拂ツテ

$$x(\xi^2+\eta^2)=2r\xi^2$$

トナル．然ルニ (4) 式ハ

$$\sqrt{2rx(\xi^2+\eta^2)}=a^2$$

デアルカラ，根號內ノ $x(\xi^2+\eta^2)$ ノ代リニ $2r\xi^2$ ト書ケバ

$$\sqrt{4r^2\xi^2}=a^2$$

卽チ $\pm 2r\xi=a^2$

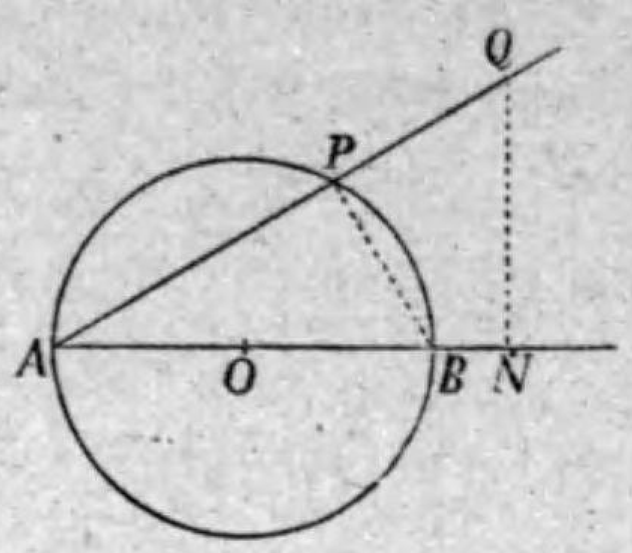
トナルガ，r, ξ, a^2 ハ皆正ノ數トシテヨイカラ，複號 $\pm$ ハ $+$ ヲ取リ

$$2r\xi=a^2$$

ヲ得テ，目的ヲ達シタノデアル．此ノ軌跡ハ $\xi=\dfrac{a^2}{2r}$ デ，卽チ A 點ヨリ $\dfrac{a^2}{2r}$ ナル距離ニアル x 軸上ノ點ヲ通ジテ y 軸ニ平行ナル直線デアル．(圖ノ QN ガ夫デアル)．

此ノ事實ハ又次ノヤウニ初等幾何學ヲ用ヰテモ證明出來ル．前圖ノ樣ニ O ヲ中心トスル圓周上ノ一點 A ヨリ直線 AP ヲ引キ其上ニ Q ヲトリテ $\mathrm{AP}\times\mathrm{AQ}=a^2$ ニナル樣ニスル．A ト中心 O トヲ結ブ直線 AB ヲ引キ，其ノ直線ニ Q ヨリ垂線 QN ヲ下ス．P ト B トヲ結ベバ $\triangle\mathrm{APB}$ ト $\triangle\mathrm{AQN}$

トハ一角 A ヲ共通ニシ，∠APB，∠ANQ ハ夫々直角デアルカラ，互ニ相似形デアル．從ツテ次ノ比例式ガ成リ立ツ．



$$AB : AP = AQ : AN$$

故ニ

$$AP \times AQ = AB \times AN$$

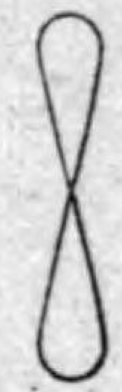
デアル．左邊 $AP \times AQ$ ハ常數 a^2 ニ等シト爲シタノデアルカラ右邊 $AB \times AN$ モ亦一定數 a^2 ニ等シイ．然ルニ AB ハ圓ノ直徑デ，從ツテ一定ノ量デアル．ヨツテ又 AN ガ一定ノ量デナケレバナラナイ．故ニ N ハ一ツノ定點デアルコトガワカツタ．卽チ直線 AP ノ一端 P 點ガ圓周上ノ何處ニ在ツテモ $AP \times AQ = a^2$ ナル如キ點 Q ヲ作レバ、Q ヨリ定直線 AB ニ下ス垂線 QN ハ常ニ一定ノ點 N ヲ通ル．故ニ點 Q ハ定點 N ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線上ヲ動ク筈デアル．コレデ證明ガ出來タノデアル．

48 圓 ノ 應 用

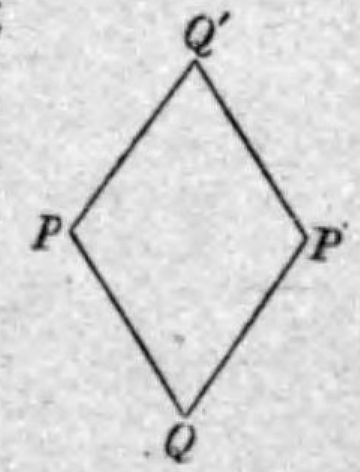
いたりや人ますけろに[1]ハ皇紀二千四百五十七年（西曆 1797）ニ出版シタ彼ノ書物兩脚器ノ幾何學[2]ニ於テ幾何學的ノ作圖ニハ直線ヲ用ヰズ圓ノミヲ用ヰルガヨイト主張シタ由デアル．吾人ハ紙上ニ直線ヲ引イテハ居ルガ，ソレハ定規ノ助ニヨツテ引イタ線ヲ直線トスルノデアル．是ガ果シテ直線デアルカドウカ．定規ハ何ヲ基準ニ直線ノ緣ヲ作ツタカト考ヘルト少シク心配ニナル．何カノ方法デ直線ヲ一本引クコトガ出來ルナラバ，ソレニ合セテ定規ノ端ヲ眞直ニスル可能性モアルガ，唯眼デ見テ直線ヲ作ルノデハ心許ナイ．是ニ引更ヘ圓ヲ畫クニハ木片又ハ紙片ニ二ツノ穴ヲアケテ，其ノ一ツニ針ヲサシテ紙ニ留メ，他ノ穴ニ鉛筆ヲ入レテ廻セバ，少クモ理論的ニハ

1) *Mascheroni.* 2) *La geometria del compasso.*

正シイ圓ガ畫カレル筈デアル．ヨツテ問題ハ圓ノミヲ利用シテ直線ヲ引ク裝置ガ可能デアラウカトイフコトデアル．此ノ問題ハ圖上ニ直線ヲ書クノミデナク，機械ナドニ必要ガ起ルコトガアル．例ヘバ蒸汽機關ノピストンノ上端ヲ眞直ニ上下サセルニハ，コレヲ眞ニ直線運動ヲ爲ス裝置ニ結合シテ置クコトガヨイデアラウ．わっと[1]ガ蒸汽機關ヲ考ヘタ時ニ用ヰタノハ直線デハナク，唯直線ニ近イ運動ヲスル裝置ヲ用ヰタノデアル．卽チ圖ニ在ル樣ナ運動ノ中間ニ在ル交點ノ附近ガ稍，直線ニ近イノデ之ヲ用ヰタノデアル．



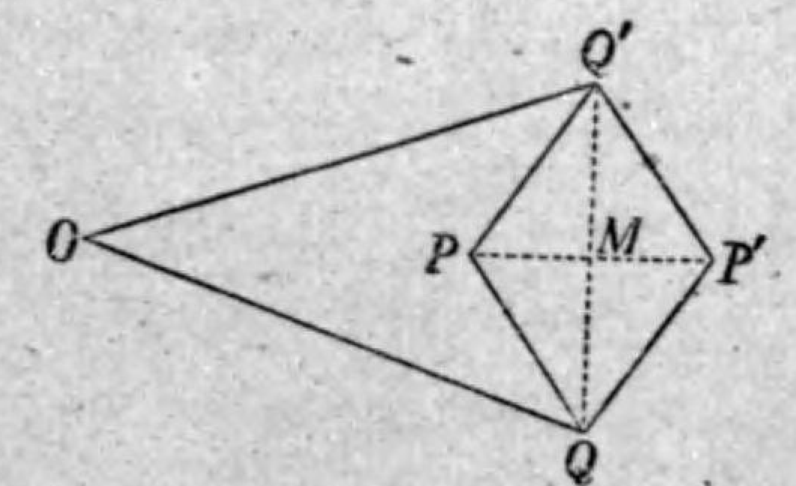
此ノ問題ニ初メテ解答ヲ與ヘタノハぽーせりえー[2]デアルトイフ．或ル書物ニハ，彼ハふらんす陸軍ノ大尉[3]デ，皇紀二千五百三十三年（1873）ニコレヲ發明シタトアルガ，他ノ書ニハふらんす陸軍ノ將官[4]デ皇紀二千五百二十四年（1864）ノ事ダト記シテアル．彼ハ此ノ問題ノ解決ニ，前ニ述ベタ例 (3) ノ圓ノ性質ヲ利用シタノデアル．卽チ先ヅ第 139 頁ノ圖ニ於ケル A ヲ定點トシテ AP・AQ ガ一常數ニ等シクナル樣ナ二點 P, Q ヲ與ヘル裝置ヲ考案シタノデアル．



先ヅ菱形 PQP′Q′ ヲ作ル．卽チ

$$PQ = QP' = P'Q' = Q'P$$

デ且各角點ニ於テハ二ツノ邊ハ互ニ廻轉自在デアルトスル，唯各邊 PQ, QP′, P′Q′, Q′P ハ其ノ長サハ一定デ互ニ相等シイノデアル．次ニ二ツノ邊 OQ, OQ′ ヲ作リ，OQ＝OQ′ デアリ且一定ノ長サトスル．OQ, OQ′ モ亦 O 點及ビ Q, Q′



1) *James Watt.* 2) *Peaucellier.* 3) *Capitaine.* 4) *Général.*

點デ廻轉自在トスル．斯クスレバ上下對稱デアルカラ，三點 O, P, P′ ハ常ニ一直線上ニ在ルコトハ明ラカデアラウ．又直線 QQ′ ヲ引クト想像スレバ，ソレハ直線 PP′ ヲ垂直ニ二等分スルコトモ明白デアル．其ノ交點ヲ假ニ M トスル．然ラバぴたごらすノ定理ニヨツテ

$$\overline{\mathrm{MP}^2}=\overline{\mathrm{PQ}^2}-\overline{\mathrm{MQ}^2}\quad \overline{\mathrm{OM}^2}=\overline{\mathrm{OQ}^2}-\overline{\mathrm{MQ}^2}\qquad (\alpha)$$

又　$\mathrm{OP}=\mathrm{OM}-\mathrm{MP}\quad \mathrm{OP}'=\mathrm{OM}+\mathrm{MP}'=\mathrm{OM}+\mathrm{MP}$

デアルカラ

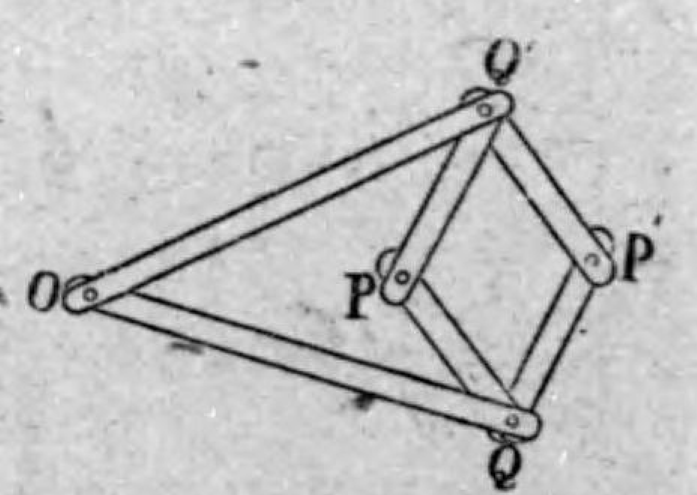
$$\mathrm{OP}\times\mathrm{OP}'=(\mathrm{OM}-\mathrm{MP})\times(\mathrm{OM}+\mathrm{MP})=\overline{\mathrm{OM}^2}-\overline{\mathrm{MP}^2}$$

關係式 (α) ヲ用キテ

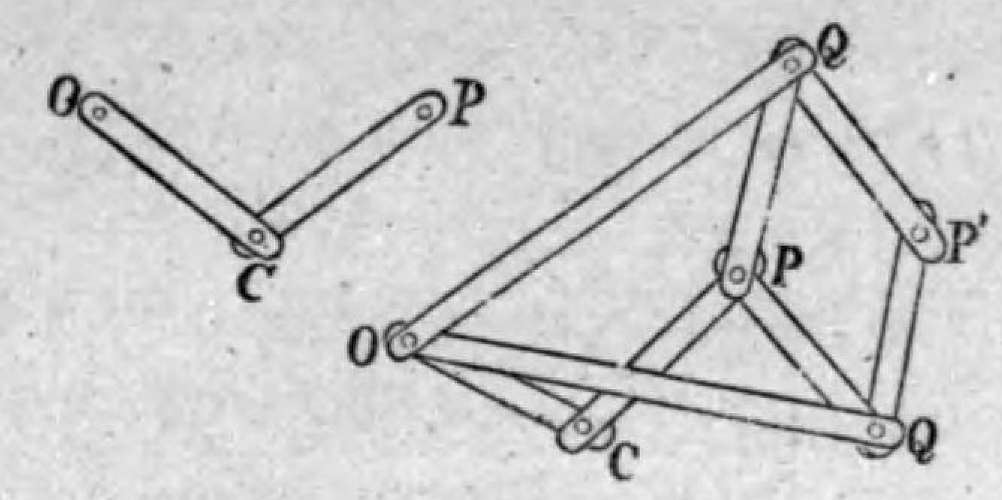
$$\mathrm{OP}\times\mathrm{OP}'=(\overline{\mathrm{OQ}^2}-\overline{\mathrm{MQ}^2})-(\overline{\mathrm{PQ}^2}-\overline{\mathrm{MQ}^2})=\overline{\mathrm{OQ}^2}-\overline{\mathrm{PQ}^2}$$

然ルニ OQ 及ビ PQ ハ夫々一定ノ長サヲ有ツテ居ルノデアルカラ右邊從ツテ又 OP×OP′ ハ常ニ一定ノ値ヲ有スル(角 O ガ變ジテモ)．是ヲ以テ當初ノ目的ヲ達シタノデアル．卽チ PQ, QP′, P′Q′, Q′P ヲ等長ノ四木片トシ，OQ 及ビ OQ′ モ亦互ニ等長ナル木片トシテ圖ノ如ク連結スレバ，三點 O, P, P′ ハ常ニ直線ヲ爲シ，且 OP×OP′ ハ一定ノ値ヲ有スルノデアル．故ニ例 (3) (第139頁)ニヨレバ，點 O ヲ紙上ニ固定シテ P ガ O 點ヲ過グル圓周 (中心ヲ C トスル)ヲ畫ケバ，P′ 點ハ直線 OC ニ垂直ナル直線ヲ畫キツヽ動ク筈デアル．

此ノ原理ヲ用キテ目的ヲ達スル爲ニ先ヅ四本ノ等長ノ木片ヲ以テ菱形 PQP′Q′ ヲ圖ノ如ク作ル．次ニ又二本ノ互ニ等長ナル木片 OQ, OQ′ ヲ圖ノ如クニ取リ付ケル．O, P, Q, P′, Q′ ノ各點ニ於テハ二本乃至三本ノ木片ヲピンデ留メテ互ニ廻轉出來ル樣ニスル．今 O點ヲ紙上ニ固定シテ, P 點ガ O ヲ通ズル圓周上ヲ動ク樣ニスルニハ圖ノ如ク O ト P トヲ互ニ等長ナル二ツノ木片 OC, PC デ結ビ付ケ，木片



OC ヲ紙上ニ固定シ，木片 PC ハ C 點ノ周リニ廻轉出來ル樣ニスレバヨイ．



全部ヲ組合セテ見ルト右圖ノ如クニナル．

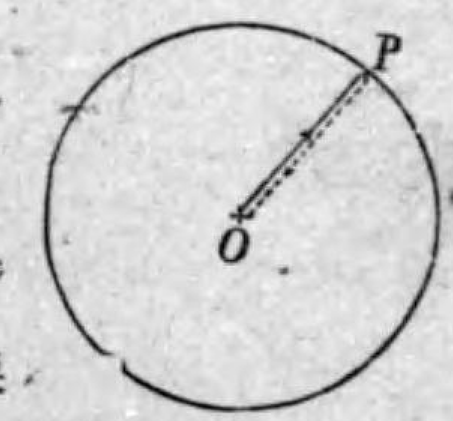
是ヲ用キルニハ，木片 OC ヲ紙上ニ固定シテ，機構ヲ動カセバ，點 P′ ハ O, C ヲ連ヌル直線ニ垂直ナル一直線ヲ畫クデアラウ．コレガぽーせりえーノ機械[1]デアル．

直線ヲ引ク機械ハ此ノ外ニモ數多考案セラレタ．

49 楕圓

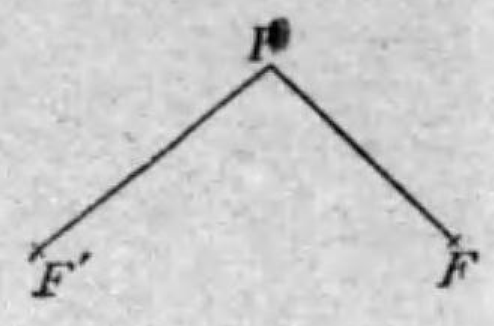
今迄說明シタ圓トイフノハ，中心[2]ト稱スル一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル總テノ點ノ集マリデアリ，卽チソノ軌跡[3]デアル．今コノ圓ノ考ヘヲ少シク擴張シテ見ヨウ．圓ヨリハ少シク廣イ範圍ノ曲線デ，圓ハ其ノ一種デアル樣ナモノヲ考ヘテ見ヨウトスルデノアル．

圓ノ中心ヲ O トシ圓周ノ隨意ノ一點ヲ P トスル．又半徑卽チ OP ノ長サヲ a トスル．圓ヲ定義シテ，OP ノ長サガ常ニ a ナル點ノ軌跡トスルノヲ，同ジコトデハアルガ，O ヨリ P ニ至リ又引返シテ O ニ戻ルマデノ道程ガ $2a$ ナル如キ點 P ノ軌跡ト考ヘ直スコトニスル．

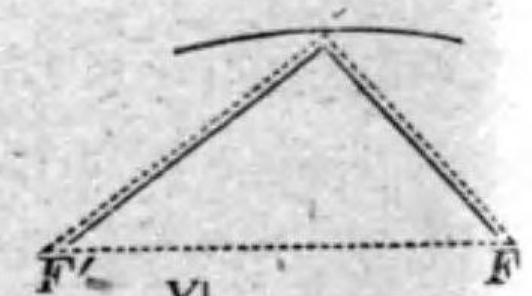


圓ノ場合ハ，O ヨリ出發シテ P ニ至リ再ビ原ノ點 O ニ戻ルノデアルガ，此ノ出發點 O ト到着點トヲ異ナルトスル，ツマリ O 點ヲ二ツニ別ケテ二點

1) *Peaucellier's Cell* (又ハ *linkage*) 又ハ *Peaucellier's Inversor*.
2) *Centre*.　3) *Locus*.

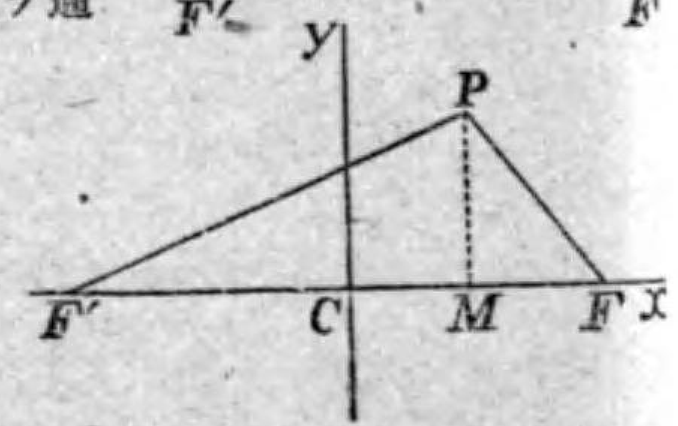


F, F′ トシ，一ツノ點ガ F カラ出發シテ直路 P ニ至リ，引返シテ眞直ニ F′ 點ニ到着スルトスル．此ノ時通過シタ距離 FP+PF′ ガ前ト同樣ニ $2a$ デアルトスル．F ト F′ トヲ二ツノ定點トスレバ，斯樣ナル點 P ハ無數ニアルデアラウ．夫等總テノ點ノ集マリ，ツマリ斯カル P 點ノ軌跡ヲ楕圓[1]トイフノデアル．上述ノ P ノ如キ點ハ F,F′ ノ下方ニモ兩側ニモ在ルデアラウカラ，此ノ曲線ハ F,F′ ヲ取リ卷ク曲線デアルコトハ想像シ得ラレル．F,F′ ニ針ヲ立テ FF′ 間ノ距離ノ二倍ヨリ長イ絲ヲ輪ニシテ F,F′ ヲ其ノ内ニ入レ，絲ヲ張リナガラ鉛筆ヲ初メ P ニ置イテ後動カセバ，大體ノ形ハワカルデアラウ．



先ヅ此ノ曲線ノ方程式ヲ索メテ見ヨウ．

二定點 FF′ ノ間ノ距離ヲ $2c$ トシ，ソノ中點 C ヲ原點トシテ，FF′ ノ線ヲ x 軸トシ，C ヲ通リ，コレニ垂直ナル直線ヲ y 軸トスル．P 點ヲ曲線上ノ一點トスルト，其ノ性質カラ



$$FP+F'P=2a$$

デアル．先ヅ FP, F′P ノ長サヲ求メヨウ．P 點カラ x 軸ニ下シタ垂線ノ足ヲ M トスレバ，P 點ノ座標 x, y ハ

$$x=CM \qquad y=MP$$

デアル．故ニ

$$F'M=x+F'C \qquad MF=CF-x$$

然ルニ $FF'=2c$ デ，從ツテ $F'C=CF=c$，ヨツテ

$$F'M=x+c \qquad MF=c-x$$

故ニぴたごらすノ定理ニヨツテ

1) *Ellipse.*

$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad PF=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

是等二式ヲ加ヘ合セルト，$PF'+PF=2a$ デアルカラ，

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$$

トナル．コレガ，求ムル曲線上ノ總テノ點ガ有ツ性質ヲ表ハシテ居ルノデアル．故ニ此ノ式卽チ求ムル曲線ノ方程式デアル．唯此ノ式ハ稍〻複雜デアルカラ，今少シ簡單ナ形ニ書キ直シ得ラルレバ幸デアル．此ノ目的ノ爲ニ，通常用キラレル方法ニ從ツテ，左右ニ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

ヲ乘ズレバ

$$[(x+c)^2+y^2]-[(c-x)^2+y^2]=2a[\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(c-x)^2+y^2}]$$

トナル．左右ヲ入レ替ヘテ $2a$ デ除スレバ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(c-x)^2+y^2}=\frac{1}{2a}\{[(x+c)^2+y^2]-[(c-x)^2+y^2]\}$$

トナル，右邊ヲ計算シテ見ルト $\frac{1}{2a}(4cx)=\frac{2c}{a}x$ トナリ，上式ハ結局

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(c-x)^2+y^2}=\frac{2c}{a}x$$

トナル．之ヲ最初ニ得タ方程式

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$$

ト相加フレバ[1]，係數 2 ヲ除イテ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x$$

ヲ得ル．左右ヲ二乘シテ

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2$$

卽チ $$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

1) 加ヘル代リニ相減ジテモヨイ．最後ノ結果ハ同ジニナル．

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2$$

又ハ
$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$$

$2a$ ハ PF+PF′ デアリ，$2c$ ハ FF′ デアルカラ，三角形ノ二邊ノ和ハ常ニ他ノ一邊ヨリ大デアルコトヨリ，$a>c$ トシテ差支ナイ[1]．故ニ $a^2-c^2\neq0$ デ，從ツテ之デ兩邊ヲ除スレバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (a^2-c^2>0)$$

トナル．之ガ求ムル曲線ノ方程式デアルガ，尙見易クスル爲ニ，式中ノ常數 a^2-c^2 ナル正ノ數ヲ b^2 ト置ケバ，上式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (b^2=a^2-c^2)$$

トナル．

此ノ方程式ノ表ハス曲線ノ大體ノ形ヲ調ベテ見ヨウ．

先ヅ具體的ノ例トシテ方程式

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

ヲ考ヘル．コヽデハ

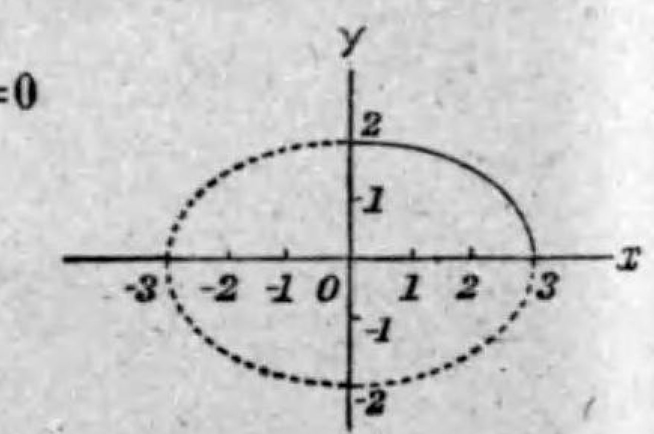
$a^2=9 \quad b^2=4$ （a, b ハ ±3, ±2 トナルガ，單ニ長サヲ考フレバ $+3$, $+2$ デヨイ.）

卽チ $a=3 \quad b=2$

デアル．

x 軸ト此ノ曲線トノ交點ヲ求メル爲ニ $y=0$ トスレバ

$$\frac{x^2}{9}=1 \qquad x^2=9 \qquad x=\pm3$$



卽チ曲線ハ x 軸上 $+3$ 及ビ -3 ノ二ツ

1) 尤モ $a=c$ ナルコトモアリ得ルガ，ソノ時ハ P ハ常ニ直線 FF′ ノ上ニ在ルカラ，軌跡ハ FF′ デアル．

ノ點ヲ通過スル．y 軸トノ交點ヲ索メルニハ $x=0$ トシテ

$$\frac{y^2}{4}=1 \qquad y^2=4 \qquad y=\pm2$$

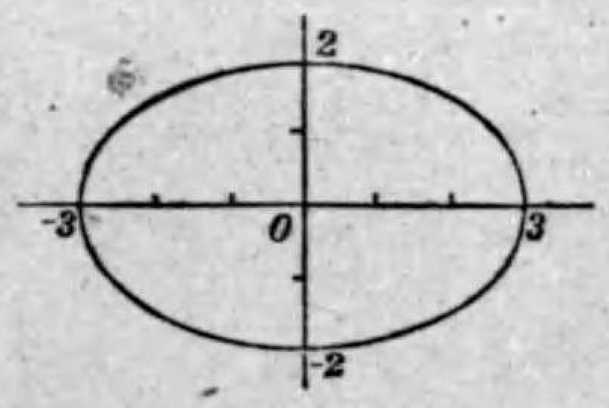
ヲ得ル．卽チ y 軸上 $+2$ ト -2 ナル二ツノ點ヲ通過スルノデアル．是等四ツノ點以外ノ曲線ノ點ヲ索ムル爲ニ方程式ヲ y ニ就イテ解イテ見ルト，分母ヲ拂ツテ

$$4x^2+9y^2=36$$

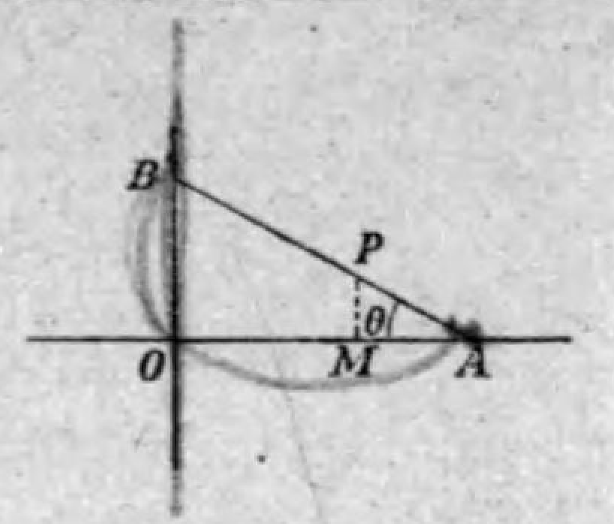
トナルカラ

$$y^2=\frac{1}{9}(36-4x^2)$$

トナル．今 $x=0$ トスレバ，以前ノ通リ $y=\pm2$ トナルガ，逐次增シテ行クト，右邊ノ $36-4x^2$ ハ漸次減少シテ行クコトハ明ラカデアル．故ニ y ノ絕對値モ亦減少スル．x ガ增大シテ3トナルト，y ハ零トナル．x ガ3ヨリ大トナレバ，y^2 ハ負數トナルカラ，y ノ實數値ハナクナル．故ニ第一象限デハ曲線ノ形ハ大體圖中實線ノ部分ノヤウニナルコトハ分ルデアラウ．然ルニ原方程式中ノ x ト y トハ孰レモ x^2, y^2 ノヤウニ二乘ノミデアルカラ，x ノ代リニ假ニ $-x$ ト書イテモ方程式ニハ何ノ變化モナイ．故ニ曲線ハ y 軸ニ關シテ左右同ジ形(對稱ノ)ヲ有ツテ居ルデアラウ．例ヘバ (α,β) ガ曲線上ノ點ナラバ，$(-\alpha,\beta)$ モ亦曲線上ノ點デアル筈デアル．次ニ y ヲ $-y$ ト置キ換ヘテモ方程式ハ變ラナイカラ，曲線ハ x 軸ニ關シテモ上下同ジ形(對稱)デアル．結局求ムル曲線ノ形ハ圖ノヤウニ第一，第二，第三，第四象限トモ同ジ形ノモノデアルコトガ分カル．是ガ楕圓ノ形デアル．x 軸ヲ切ル二點ノ距離，及ビ y 軸ヲ切ル二點ノ距離ヲ楕圓ノ長徑[1]，短徑[2]トイフ，O 點ヲ楕圓ノ中心トイヒ，第146頁ノ圖ニ於ケル二點 F, F′ ヲ楕圓ノ焦點[3]トイフ．



1) *Axis major.* 2) *Axis minor.* 3) *Focus.*



例　直交スル二本ノ棒 OA, OB アリ．他ノ棒 AB ノ兩端 A，B ガ夫々 OA 上 OB 上(又ハ延長上)ニ在ル如ク動クトキ，AB 上ノ一點 P ハ如何ナル線ヲ畫イテ動クカヲ調べヨ．

解　OA, OB ヲ夫々 x 軸 y 軸ニトリ，BP ノ長サヲ a トシ，AP ノ長サヲ b トスル．a, b ハ元ヨリ常數デアル．棒 AB ガ或ル位置ニ在ルトキ，角 OAB ヲ θ トスル．θ ハ勿論棒ノ位置ト共ニ變化スルノデアル．

P 點ノ畫ク線ヲ求メルノデアルカラ，其ノ座標ヲ (x, y) トスル．P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ下セバ

$$x=\mathrm{OM} \qquad y=\mathrm{MP}$$

デアル．圖カラ明ラカナ樣ニ

$$\mathrm{OM}=x=\mathrm{BP}\cos\theta=a\cos\theta$$

$$\mathrm{MP}=y=\mathrm{AP}\sin\theta=b\sin\theta$$

デアル．故ニ

$$\frac{x}{a}=\cos\theta \qquad \frac{y}{b}=\sin\theta$$

トナル．問題ハ x ト y トノ間ノ θ ヲ含マヌ關係式ヲ見出セバヨイノデアルカラ，上ノ二式カラ θ ヲ追出セバヨイ．ソノ爲ニハ二式ヲ二乘シテ相加フレバ

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

デアルカラ容易ニ

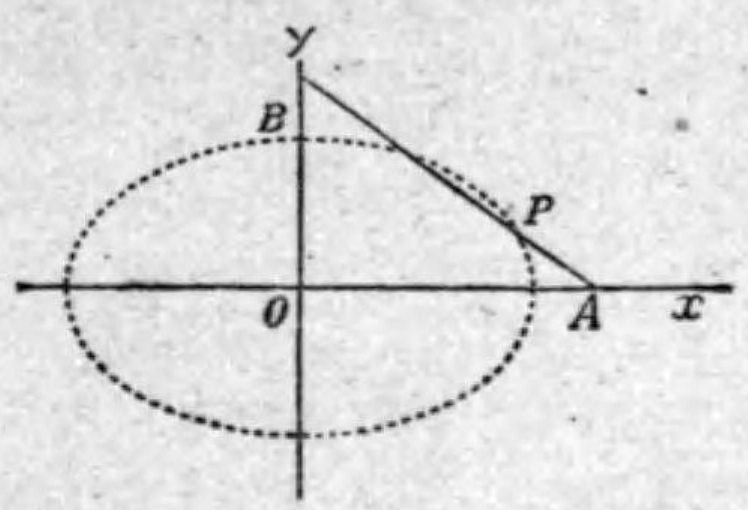
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ヲ得ル．卽チ求ムル曲線ハ a, b ヲ長短半徑トスル楕圓デアルコトガワカツタ．

50 楕圓ノ畫法

上ノ結果ヲ利用シテ長短半徑 a, b ナル楕圓ヲ畫クコトガ容易ニ出來ル．

先ヅ紙上ニ直交スル二直線 Ox, Oy ヲ引ク．又一ツノ細長キ紙片ノ縁ニ三點 A, P, B ヲ記シテ



$$\mathrm{BP}=a \qquad \mathrm{AP}=b$$

ナル樣ニスル．此ノ紙片ノ A, B 兩點ヲ夫々常ニ Ox, Oy 上ニ在ル樣ニ動カシツヽ P 點ノ位置ヲ紙上ニ印シテ行ケバ，求メル楕圓上ノ點ヲ得ルカラ，是等ヲ適當ニ曲線ニテ結べバ楕圓ヲ畫キ得ルノデアル．

點 P ヲ直線 AB ノ延長上ニ取ツテモ楕圓ヲ畫クコトニ變リハナイ．

斯クシテ出來タ楕圓ノ二ツノ焦點ヲ索ムルニハ長軸上ニ中心 O ヨリ左右ニ c ナル距離ニアル點ヲ見出セバヨイノデアルガ，第148頁ニ見ルヤウニ

$$a^2-c^2=b^2$$

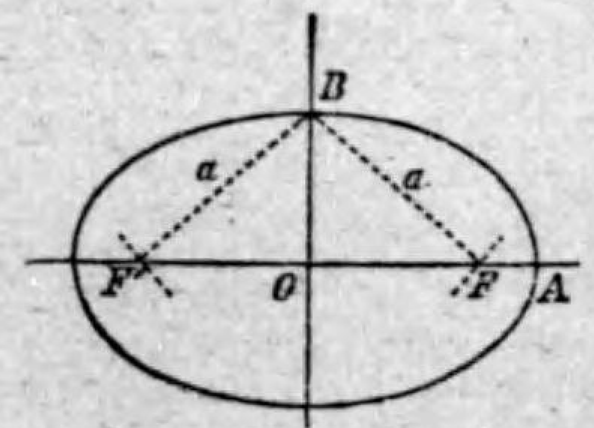
トオイタノデアルカラ，

$$c^2=a^2-b^2 \qquad (\text{又ハ } a^2=b^2+c^2)$$

デアル．

然ルニ右圖ニ於テ

$$\mathrm{OA}=a \qquad \mathrm{OB}=b$$



デアルカラ，B ヲ中心トシテ半徑 a ナル圓ヲ畫ケバ，長軸ト焦點 F, F′ デ交ハルコトハ上式ヲ考へレバぴたごらすノ定理ニヨツテ明ラカデアル．

圓ノ場合ニハ F, F′ ハ中心ト一致スルカラ $\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}$ ハ圓カラ楕圓ニ至ル歪

加減ヲ示スモノトモ考ヘ得ラレル．此ノ量ヲ楕圓ノ離心率[1]トイヒ通常 e 字デ表ハス．此ノ量ヲ a, b デ表ハセバ次ノ樣ニナル．

$$e=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

e ガ 0 ナラバ楕圓ハ圓トナリ，漸次增シテ 1 ニ近ヅクニ從ツテ楕圓ハ細長クナル．

51 雙　曲　線

平面上二ツノ定點 F, F′ カラノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ハ楕圓デアツタガ，和ノ代リニ差ニシタナラバ如何，卽チ定點 F, F′ カラノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ考ヘテ見ヨウ．

第 146 頁ノ式 $\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=2a$ ノ代リニ

$$\mathrm{FP}-\mathrm{F'P}=\pm 2a$$

トスレバヨイノデアル．$2a$ ノ前ノ $\pm$ ハ FP ト F′P トノ孰レガ大デアルカニヨツテ異ナル符號ヲ取ルノヲ示スノデアル．

第 147 頁ニ計算シタ樣ニ

$$\mathrm{F'P}=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \mathrm{FP}=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

デアルカラ，上式ハ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(c-x)^2+y^2}=\pm 2a$$

トナル．ヨツテ此ノ兩邊ニ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

ヲ乘ズレバ

$$[(x+c)^2+y^2]-[(c-x)^2+y^2]=\pm 2a\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}\right]$$

トナルカラ，左右ヲ入レ換ヘテ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=\pm\frac{2cx}{a} \quad \left(\begin{array}{l}\pm \text{ ハ上式ノ } \pm \text{ ト}\\ \text{同ジ符號ヲ取ル}\end{array}\right)$$

1) *Eccentricity.*

ヲ得ル．之ヲ最初ノ式ニ加ヘテ，2 デ除スレバ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2)}=\pm\left(a+\frac{cx}{a}\right)$$

兩邊ヲ二乘スレバ第 147 頁ニ於ケルト全ク同ジ形ノ式

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2$$

ヲ得ル，從ツテ第 148 頁ト同樣ニ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

ヲ得ルノデアル．

前ノ場合ニハ $2a$ ハ第 146 頁ノ圖ニ於ケル $\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}$ 卽チ三角形 FPF′ ノ二邊ノ和デアツタカラ，他ノ一邊 $\mathrm{FF'}=2c$ ヨリ大ナルコト勿論デ，從ツテ $a^2-c^2>0$ デアルカラ之ヲ正ノ數 b^2 トシタノデアル．然ルニ今ノ場合ニ於テハ FP ト F′P トノ差ガ $2a$ デアル．三角形ノ二邊ノ差ハ第三邊ヨリ小デアルカラ，$a^2-c^2<0$ デ，從ツテ c^2-a^2 ガ正ノ數デアルカラ，

$$c^2-a^2=b^2$$

トオイテモヨイ．サスレバ上式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (b^2=c^2-a^2)$$

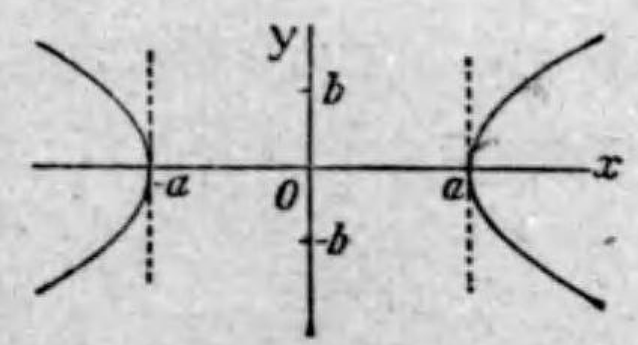
トナル．コレガ求メル軌跡ノ方程式デアル．

此ノ方程式ノ軌跡ノ大體ノ形ヲ調ベテ見ヨウ．

先ヅ $x=a$ 又ハ $-a$ トスレバ，上式ヨリ $y=0$ ヲ得ルカラ，曲線ハ二點

$$(a, 0) \qquad (-a, 0)$$

ヲ通ル．上式ヲ



$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$$

ト書イテ見ルト，x^2 ガ a^2 ヨリ小サケレバ，卽チ x ガ $-a$ ト $+a$ トノ

間ノ値ヲ取ルナラバ $\frac{x^2}{a^2}$ ハ1ヨリ小ナル正ノ數デ，從ツテ $\frac{x^2}{a^2}-1$ ハ負ノ數トナルカラ，方程式ニ適スル y ノ値ハナイ．卽チ圖中二本ノ平行ナル點線ノ間ニハ曲線ハナイ．x^2 ヲ增スト，卽チ x ヲ a ヨリ大ニシ，又ハ $-a$ ヨリ小ニスレバ，$\frac{x^2}{a^2}-1$ ハ正ノ數トナルカラ，

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

トナツテ絕對値ノ相等シイ正負二ツノ値ヲ得ル．卽チ x軸ニ關シテ上下對稱ノ點ヲ得ル．x^2 ヲ尙增大スレバ y ノ絕對値ハ益〻增大スル．尙 x ノ値ノ正負ヲ變ジテモ同ジ正負二ツノ y ノ値ヲ與ヘルカラ，y 軸ニ關シテモ亦左右對稱デアル．故ニ方程式ノ表ハズ曲線ハ圖ノ如ク上下對稱デ，左右モ亦對稱デアリ，左右ニ遠ザカルニ從ツテ，益〻上下ニ遠ザカル形ヲ取ルノデアル．斯ク左右對稱ナル二枝ノ曲線ヲ得ルガ，之ヲ合セテ一ツノ曲線ト見テ雙曲線[1]ト呼ブノデアル．F, F′ 二點ヲ橢圓ノ時ノ如ク焦點[2]トイヒ，$2a$ ヲ主軸[3]（又ハ交軸）$2b$ ヲ副軸[4]トイフ．x 軸上原點ヨリ $+a, -a$ ノ距離ニ在ル二點（主軸ノ兩端）ハ曲線ガ通過スルケレドモ，y 軸上原點ヨリ $+b, -b$ ノ距離ニ在ル二點（副軸ノ上下端）ハ曲線上ノ點デハナイ．

雙曲線ノ方程式ヲ次ノ樣ニ書キ改メテ見ル．

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$$

兩邊ヲ x^2 デ除スレバ

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x^2}$$

トナル．x 座標ノ絕對値ガ非常ニ大ナル曲線上ノ點ニ於テハ右邊ノ第二項 $\frac{b^2}{x^2}$ ノ絕對値ハ非常ニ小サイカラ，其ノ點ハ上式ノ末項ヲ無視シテ得ル線

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

1) *Hyperbola.*　2) *Focus.*　3) *Transverse axis.*　4) *Conjugate axis.*

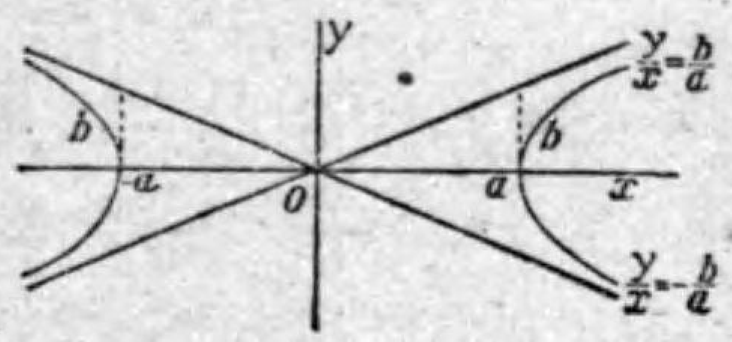
ノ上ノ點ニ非常ニ近イ．然ルニ此ノ式ハ

$$\frac{y^2}{x^2}-\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{y}{x}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{b}{a}\right)=0$$

卽チ

$$\frac{y}{x}-\frac{b}{a}=0 \quad 及ビ \quad \frac{y}{x}+\frac{b}{a}=0$$

ナル二直線ノ方程式ニ分解サレル．換言スレバ，是等二直線上ノ點ハ總テ $\frac{y^2}{x^2}=\frac{b^2}{a^2}$ ノ上ノ點デアル．是等二直線ハ孰レモ原點ヲ通リ，x 軸トノ傾キノ角ノ正切ハ $\frac{b}{a}$ 又ハ $-\frac{b}{a}$ デアル．故ニ x 座標ノ絕對値ガ非常ニ大ナル雙曲線上ノ點卽チ原點ヨリ左右非常ニ遠方ノ點ハ是等ノ直線ニ非常ニ接近スルノデアル．卽チ右圖ノヤウナ關係ニナル．ヨツテ是等ノ二直線ヲ雙曲線ノ漸近線[1]トイフ．其ノ方程式ハ雙曲線ノ式



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ左邊ヲ零ニ等シトオイテ得ラレルコト前述ノ通リデアル．

雙曲線ノ方程式ハ今マデ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ形ニ書イタ．此ノ式ノ左邊ハ二乘ノ差デアルカラ因數分解出來テ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$

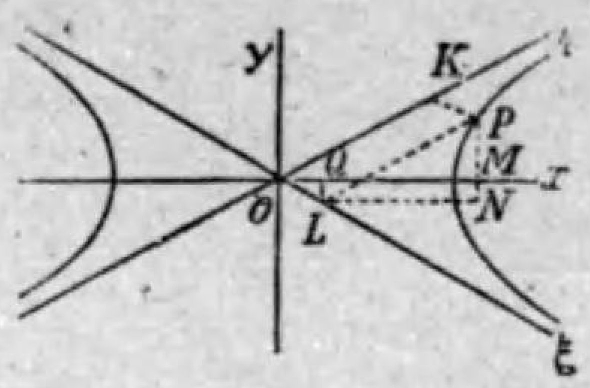
ノ形ニ書キ得ラレル．各因子ヲ零トスレバ漸近線ノ方程式トナルノデアルカラ，二ツノ漸近線ヲ座標軸トシタナラバ雙曲線ノ方程式ハ簡單ナル形ヲ取ルノデハナイカト想像シ得ラレナイコトモナイ．以下コレヲ試ミテ見ヨウ．

漸近線ヲ座標軸ニトレバ，新座標軸ハ必ズシモ直交軸デハナイコトニ注意

1) *Asymptote.*

シナケレバナラナイ．

右圖ニ於テ Ox，Oy ハ原ノ座標軸デ，漸近線 $O\xi$ ヲ新シイ ξ 軸，$O\eta$ ヲ新シイ η 軸トスル．雙曲線上ノ隨意ノ一點 P カラ ξ，η 軸ニ平行ニ PK，PL ヲ引キ，又舊軸 Ox ニ垂線 PM ヲ引キ，之ヲ延長シテ Ox ニ平行ニ引イタ LN ト N 點ニ於テ交ルトスル．又漸近線 $O\xi$，$O\eta$ ガ Ox 軸ト作ス角ヲ α トスル，卽チ



$$\angle KOx=\alpha \qquad \angle LOx=\alpha$$

漸近線 $O\eta$ ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad 卽チ \quad y=\frac{b}{a}x$$

デアルカラ，

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}$$

デアル．又點 (a,b) ハ此ノ漸近線上ノ點デアルカラ

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

デアル．圖ヨリ

$$OM=OQ+QM=OQ+LN=OL\cos\alpha+PL\cos\alpha$$

$$PM=PN-MN=PN-QL=PL\sin\alpha-OL\sin\alpha$$

然ルニ OL ハ P 點ノ新座標 ξ，PL ハ同新座標 η デアルカラ上式ハ次ノ樣ニナル．

$$OM=(\xi+\eta)\cos\alpha$$

$$PM=(\eta-\xi)\sin\alpha$$

OM，PM ハ P 點ノ舊座標 x，y デアリ，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ ハ夫々 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ デアルカラ上式ハ

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(\xi+\eta) \qquad y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(\eta-\xi)$$

トナル．卽チ雙曲線ノ原方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ x，y ニ上式 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(\xi+\eta)$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(\eta-\xi)$ ヲ代入スレバ新座標軸 ξ，η ニ關シテノ同雙曲線ノ方程式ヲ得ルノデアル．實際代入シテ

$$\frac{1}{(a^2+b^2)}(\xi+\eta)^2-\frac{1}{(a^2+b^2)}(\eta-\xi)^2=1$$

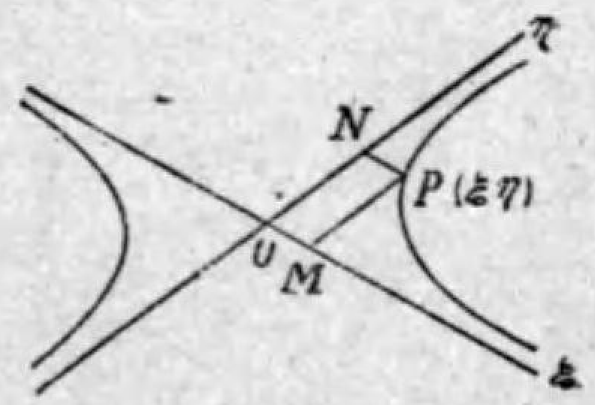
$$\frac{4}{a^2+b^2}\xi\eta=1$$

結局

$$\xi\eta=\frac{a^2+b^2}{4}$$

ヲ得ル．是ガ漸近線ヲ座標軸トシタ場合ノ雙曲線ノ方程式デアル．

此ノ方程式カラ次ノ事ガワカル．雙曲線上ノ隨意ノ點 P ノ座標（二ツノ漸近線ヲ座標軸トシテ）ヲ (ξ,η) トスレバ



$$\xi\eta=\frac{a^2+b^2}{4}$$

ナル關係式ガアル．然ルニ第 23 頁ニ述ベタ樣ニ P 點ヨリ漸近線ニ平行ニ引イタ線 PM，PN デ作ツタ平行四邊形 OMPN ノ面積ハ $OM\times ON\times\sin\angle MON$ デアルガ，

$$OM=\xi \qquad ON=\eta \qquad \angle MON=2\alpha$$

デアルカラ

$$OM\times ON\times\sin\angle MON=\xi\eta\sin2\alpha$$

$$=\frac{a^2+b^2}{4}\sin2\alpha$$

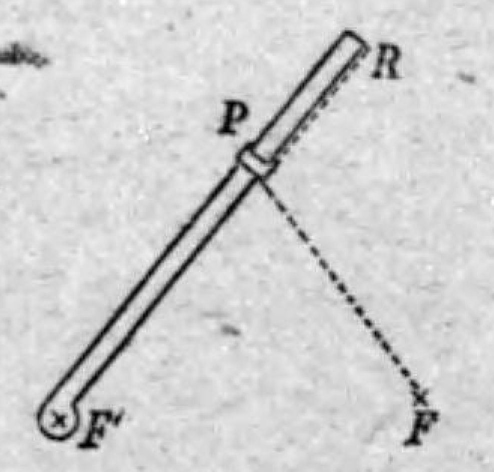
トナル．ヨツテ點 P ハ雙曲線上何處ニ在ツテモ平行四邊形 OMPN ノ面積ハ同ジデアルコトヲ知ルノデアル．

例　一定質量ノ氣體ヲ外界ト遮斷シタ器中ニ入レテ置ケバ壓力ガ變ズルニ從ツテ其ノ體積ガ變ズルガ，溫度ニ變化ノナイ限リ次ノ法則ニ從フ．一定質量ノ氣體ノ體積ハソレガ受ケル壓力ニ逆比例スル．　コレ卽チぼいるノ法則[1]又ハまりおっとノ法則[2]デアル．體積ヲ v，壓力ヲ p デ表ハセバ，此ノ法則ハ

$$vp=\text{常數}$$

ナル方程式ト同ジデアル．故ニ v ト p トヲ x 軸，y 軸ニトレバ，コノ方程式卽チ體積ト壓力トノ關係ハ雙曲線デ表ハサレルノデアル．直線 $v=0$ 及ビ $p=0$ ハ其ノ漸近線デアル．

雙曲線ヲ畫ク裝置　雙曲線ハ其ノ定義ニ述ベタ通リ二ツノ焦點 F, F′ ヨリノ距離ノ差ガ一定量例ヘバ $2a$ ニ等シキ點ノ軌跡デアルカラ，次ノ樣ニ裝置スレバ雙曲線ヲ畫キ得ル筈デアル．



先ヅ定點 F′ ヲ軸トシテ廻轉シ得ル定規 F′R ヲ作リ，F′R ノ長サヨリ $2a$ ダケ短キ絲ノ一端ヲ F 點ニ，他端ヲ R ニ結ビ付ケ，定規ニ添ウテ移動シ得ル環 P ヲ嵌メレバ絲ノ一部 RP ハ定規ニ添ヒ，P ニテ定規ヲ離レテ PF 直線ヲ作ルデアラウ．PF′ ト PF トノ差ハ

$$\begin{aligned} PF'-PF &= (PF'+PR)-(PF+PR) \\ &= F'R-(\text{絲ノ長サ})=2a \end{aligned}$$

デアルカラ，絲ヲ緊張シツヽ定規 RF′ ヲ廻轉セシムレバ，P ハ自カラ定規ニ添ウテ移動シテ，雙曲線ヲ畫クノデアル．

52　拋　物　線

平面ノ上デ，二ツノ定點 F, F′ ヨリノ距離ノ和ガ一定數 $2a$ ニ等シイ點ノ軌跡ハ楕圓デアリ，和デナク差ガ一定ナル點ノ軌跡ハ雙曲線デアルコトヲ學

1) *Boyle's law.*　2) *Mariotte's law.*

ンダガ，是等二者ノ中間ニ在ルヤウナ者ハ無イデアラウカ．此ノ點ヲ考ヘテ見ルコトニスル．

二點 F, F′ ノ間ノ距離ヲ前ノ如ク $2c$ デ表ハシ

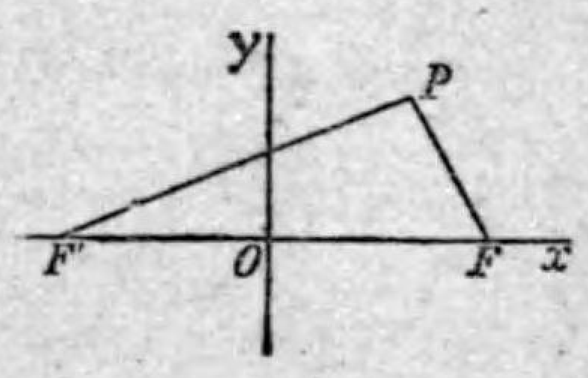
$$a^2-c^2=b^2 \quad \text{卽チ} \quad a^2=b^2+c^2$$

トスルノモ楕圓ノ時ノ通リトスル．

楕圓ニ在リテハ第146頁ノ圖ニ於テ P 點ハ何處ニ在ツテモ FP+F′P＝一定デアリ，雙曲線ニ於テハ FP−F′P＝一定デアル．ソノ中間ノモノガ在ルトスレバ，其ノ曲線上デハ，是等兩者ノ性質ヲ共有スルノデアルカラ

$$FP+F'P \qquad FP-F'P$$

ガ共ニ一定デアルコトヲ要スル．併シ變動スル二數ノ和ト差トガ同時ニ一定デアルコトハ，通常ノ場合ニハ不可能ニ近イ．尤モ $F'P=0$ デアレバヨイガ P ハ動クノデアルカラ常ニ零デハアリ得ナイ．其ノ他ニ斯カル事ガ有リ得ルカヲ考ヘルニ，唯 FP+F′P 及ビ FP−F′P ガ共ニ限リナク大ナル時ニノミ可能デアルカモ知レナイ．言ヒ換ヘレバ，FP ガ限リナク大ナル値ヲ有ツ場合ニハ，F′P ガ有限ナラバ FP ニ加ヘテモ又ハ減ジテモ，ソノ影響ハ無イト考ヘテモヨイカラ，二者孰レモ限リナク大キク，ソレヲ共ニ一定ト見做サレナイコトモナイ．此ノ樣ナ考ヘデ進ンデ見ヨウ．



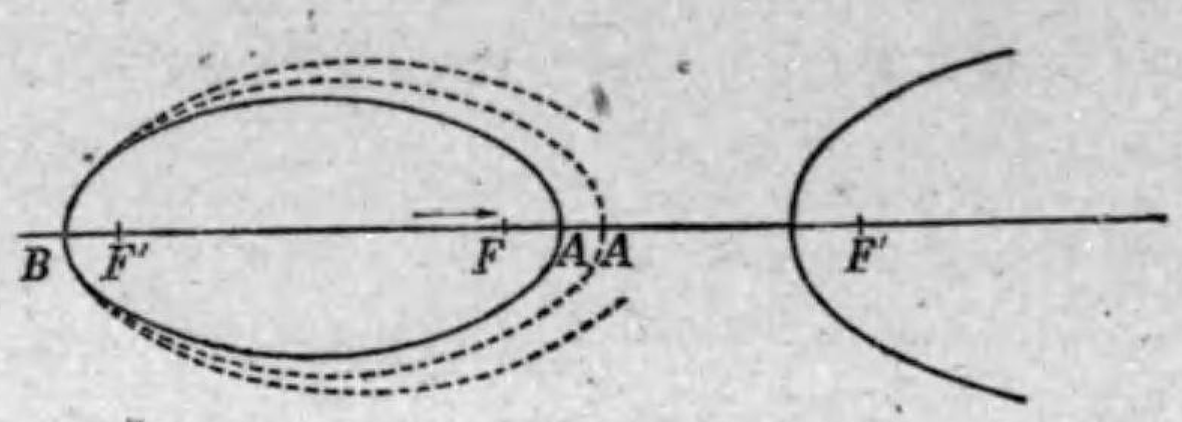
先ヅ P 點ガ何處ニ在ツテモ FP ガ限リ無ク大キイナラバ，點 F ガ右方限リ無イ大距離ニ在ルコトハ確デアル．卽チ F ハ x 軸上右方ニ無限ノ遠方ニ退去スルト考ヘル．然ラバ，ソレニツレテ c ハ限リ無ク大トナルデアラウ．ヨツテ又關係式

$$a^2=b^2+c^2$$

カラ，a モ亦限リ無ク大キクナルデアラウ．

斯ク一ツノ焦點 F ガ右方ニ遠ク退去スルトスレバ，楕圓ハ如何ニナルカ．頂點 A ハ漸次右方ニ遠ザカリ，左方ノ變化ハ少イガ，右方ハ限リ無ク伸ビテ

右圖ノ如クナルコトハ想像出來ルデアラウ.



雙曲線ニ於テ焦點ノ一ツ F ガ右方無限ニ遠ク退去スレバ右方ノ枝ガ遠方ニ飛ビ去ツテ左方ノ枝ノミ多少變化シテ殘ルデアラウ.

此ノ考ヘ方ニ從ツテ式ヲ計算シテ見ルコトニスル.

先ヅ前ニ述ベタ樣ニ, 楕圓及ビ雙曲線ノ式中 a ト c トハ限リ無ク增大スルガ, B 點ト F′ 點トヲ手許ニ殘スノデアルカラ

$$BF'=a-c$$

ハ其ノ儘變化セズニ居ルトスル.

座標原點ガ遠方ニ飛ビ去ツテハ困ルノデ, 先ヅ原點ヲ B 點ニ移ス. 勿論 x 軸ハ原ノ儘デ, 唯 y 軸ガ B 點ヲ通ジテ x 軸ニ垂直ナル直線トナルノデ, P 點ノ座標ハモト (x, y) デアツタトスレバ, 新シキ座標系ニ關シテノ座標 (X, Y) ハ

$$X=x+a \qquad Y=y$$

トナル, ツマリ原點ヲ a ダケ左ヘ寄セタダケデアルカラ, y 座標ニ變化ハナイ. 上式ヲ書キ直シテ

$$x=X-a \qquad y=Y$$

ヲ楕圓及ビ雙曲線ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ x ト y トニ代入スレバ

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{(X-a)^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

書キ替ヘテ

$$\frac{X^2-2aX+a^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{X^2-2aX+a^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

又ハ
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{2}{a}X+\frac{Y^2}{b^2}=0, \qquad \frac{X^2}{a^2}-\frac{2}{a}X-\frac{Y^2}{b^2}=0$$

移項シテ b^2 ヲ乘ジ

$$Y^2=\frac{2b^2}{a}X-\left(\frac{b}{a}\right)^2X^2, \qquad Y^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2X^2-2\frac{b^2}{a}X$$

トナル. 前ニ述ベタ樣ニ a ト c トハ共ニ限リ無ク大キクナルガ, ソノ差 $a-c$ ハ有限ノ量デアルトスルノデアルカラ

$$a-c=p \qquad (p \text{ ハ有限量})$$

トオイテ, 兩邊ヲ a デ除シテ

$$1-\frac{c}{a}=\frac{p}{a}$$

ヲ得ルガ, $\frac{p}{a}$ ハ有限ナル量 p ヲ限リ無ク增大スル a デ除スルノデアルカラ, 漸次減少シテ終ニ零ニ歸着スル. 故ニ a ガ限リ無ク增大スレバ, $\frac{c}{a}$ ハ限リ無ク 1 ニ近ヅクノデアル. 卽チ a ト c トハ全ク同程度ニ增大シテ終ニハ同大ノ量ト見做シ得ルニ至ルノデアル. 次ニ b ト a, c トノ關係ハ

$$b^2=a^2-c^2=(a-c)(a+c) \quad \left(\begin{array}{c}\text{雙曲線ノ場合ニハ}\\ b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)\end{array}\right)$$

デアルカラ

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{(a-c)(a+c)}{a^2}=(a-c)\frac{a+c}{a^2}=p\frac{a+c}{a^2}=p\frac{1+\frac{c}{a}}{a}$$

デ, a ガ增大スレバ $\frac{c}{a}$ ハ 1 ニ近ヅキ, 從ツテ右邊ノ分子ハ 2 ニ近ヅク, ソレヲ a デ除シタルモノハ零ニ近ヅク, 故ニ a ガ限リ無ク增大スレバ $\frac{b^2}{a^2}$ ハ零ニ近ヅクノデアル.

然ルニ

$$\frac{b^2}{a}=\frac{(a-c)(a+c)}{a}=(a-c)\left(1+\frac{c}{a}\right)=p\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

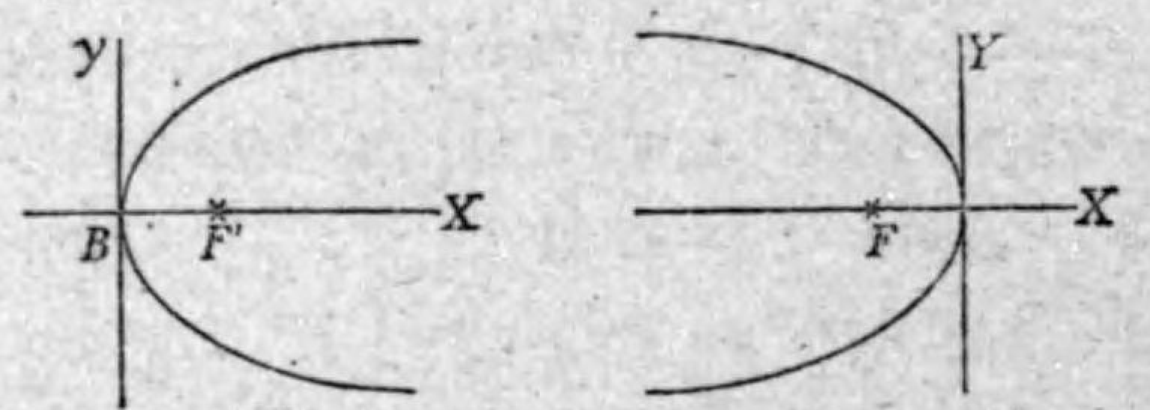
デアルカラ，a ノ增大ト共ニ右邊第二因子ハ 2 ニ近ヅキ，結局 $\frac{b^2}{a}$ ハ $2p$ ニ歸着スル.

故ニ第 160—161 頁ニ於ケル楕圓及ビ雙曲線ノ方程式ハ，a ガ限リ無ク增大スルトキ，結局夫々

$$Y^2=4pX, \quad Y^2=-4pX$$

ニ落チ着クノデアル.

是ガ，一ツノ焦點 F ガ右方遙カニ飛ビ去ツタ場合ニ，楕圓及ビ雙曲線ガ結局ニ於テ取ル姿デアル. 楕圓ト雙曲線ノ場合ハ，同種ノ曲線デハアルガ，唯左右ノ向キガ異ルノミデアル. 故ニ雙曲線ノ場合ニハ左ノ焦點 F′ ガ左方ニ飛ビ去ルトスレバ楕圓ノ場合ト全ク同ジ曲線トナルノデアル. 斯クシテ得タル曲線ヲ抛物線[1]トイフノデアル. 空氣ノ無イ場所デ小石ヲ投ゲタ時ニ，其ノ經路ノ曲線ガ之デアルノデ此ノ名ガアル. 眞空内ニ於ケル彈丸ノ進路モ亦抛物線デアルコト勿論デアル. 圖ニ畫イテ見ルト上圖ノヤウニナル.



$Y^2=4pX$ $(p>0)$ $Y^2=-4pX$

抛物線ハ楕圓又ハ雙曲線ノ焦點ノ一ガ無限ノ遠方ニ飛ビ去ツタモノデアルカラ，其ノ焦點ハ唯一ツデアル.

抛物線ノ畫キ方ヲ一ツ述ベル.

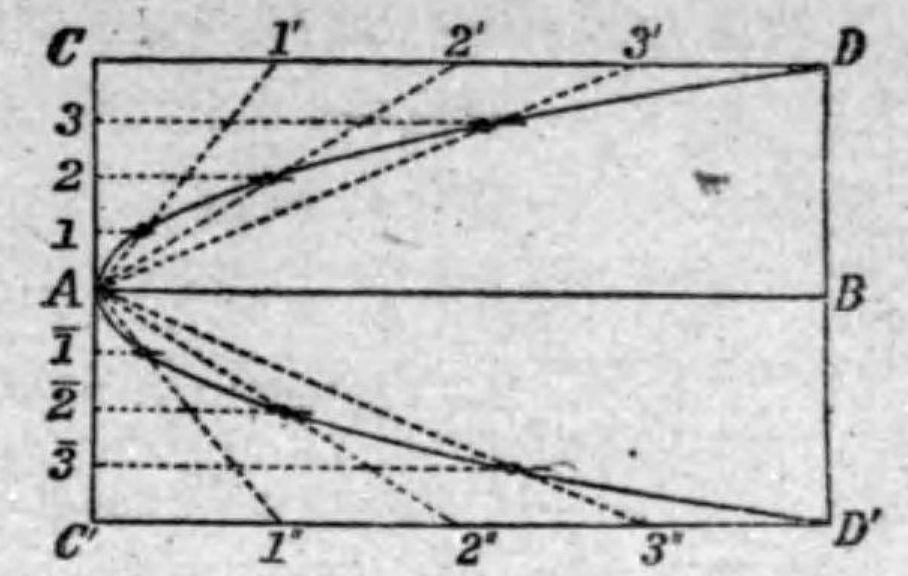
抛物線ノ頂點 B ト焦點 F′ トノ距離ヲ p トスレバ，此ノ曲線ノ方程式ハ

$$y^2=4px$$

トナルコトハ前ニ述ベタ. 先ヅ二ツノ相等シキ矩形 ABCD ト ABC′D′ トヲ，右圖ノ樣ニ畫キ，AC ノ長サヲ k トシ，CD ノ長サヲ

$$\frac{1}{p}\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

ニ等シクスル.



AC, AC′ ヲ夫々 n 等分シテソノ分點ヲ夫々 1, 2, 3, $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ 等トスル. 又 CD 及ビ C′D′ ヲ夫々 n 等分シテ，ソノ分點ヲ夫々 1′, 2′, 3′, 1″ 2″, 3″ 等トスル. AC, AC′ ノ分點 1, 2, 3, $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ，直線 A1′, A2′, A3′, A1″, A2″, A3″ 等ト交ハラシムレバ，其ノ交點ガ上記抛物線ノ點デアル. ヨツテ是等ヲ連結スル曲線ヲ畫イテ抛物線ヲ得ル. ソノ證明ハ次ノ通リデアル.

先ヅ AC 上ノ r 番目ノ分點ヲ通ル AB ノ平行線ト CD 上ノ之ニ應ズル分點 r' ヲ通ル直線 Ar' トノ交點ヲ P トスレバ，P ノ y 座標ハ Ar ノ長サ $\frac{AC}{n}\times r=\frac{rk}{n}$ デアル. 三角形 ArP ト ACr' トガ互ニ相似デアルコトカラ

$$\frac{Ar}{rP}=\frac{AC}{Cr'}$$

卽チ

$$\frac{y}{x}=\frac{k}{r\frac{CD}{n}}=\frac{k}{\frac{r}{n}\,\frac{1}{p}\left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

之ト上ニ得タ $y=\frac{r}{n}k$ トヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{y^2}{x}=\frac{k^2}{\frac{1}{p}\left(\frac{k}{2}\right)^2}=4p$$

トナリ，從ツテ

$$y^2=4px$$

ヲ得ル. 之ニ依ツテ P 點ハ抛物線 $y^2=4px$ ノ一點デアルコトガワカル.

1) *Parabola.*

問題　次ノ曲線ノ大體ノ形ヲ畫ケ

$$x^2+y^2=9$$

$$x^2+(y-1)^2=4$$

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

$$9x^2+4y^2=36$$

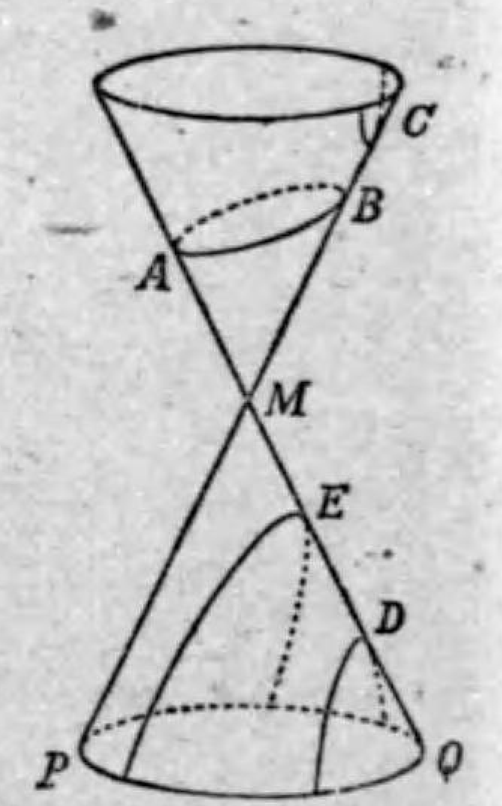
$$x^2-y^2=9$$

$$xy=4$$

$$y^2=4x$$

53 圓 錐 曲 線

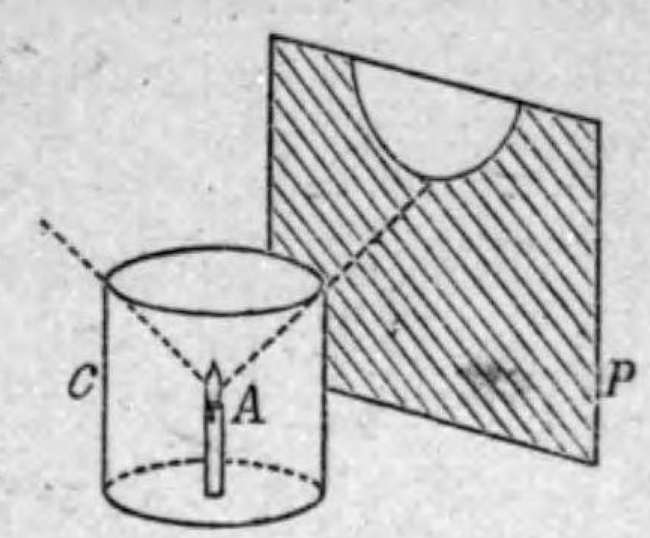
上ニ述ベタ橢圓，雙曲線，抛物線（圓ハ橢圓ノ二焦點ガ合一シタルモノト見做ス）ヲ總稱シテ圓錐曲線[1]トイフ．其ノ由來ヲ次ニ述ベル．



一ツノ圓 PQ ノ眞上ニ在ル一點 M(卽チ M ヨリ PQ 圓ノ平面ニ下ス垂線ガ此ノ圓ノ中心ヲ貫ク）ヲ圓周 PQ ノ各點ニ結ブ直線ノ全部ハ一ツノ直圓錐ヲ作ルガ，是等ノ直線卽チ母線[2]ハ上下ニ無限ニ延伸シテ居ルト考ヘレバ M 點ノ上方ニモ全ク同ジ形ノ直圓錐ガ倒ニ連結シテ作ラレテ居ルデアラウ．是等圓錐ノ一ツヲ AB ノ如キ平面デ截レバ，其ノ截口ノ橢圓ニナルコトガ證明セラレル(證明略)．又此等二ツノ圓錐ヲ同時ニ一平面デ截レバ截口ハ C, D ノ如キ雙曲線トナリ，此ノ平面ノ傾キヲ漸次變更シテ(卽チ平面ヲ廻轉シテ)C, D ノ中一ツノ枝ガ無限ノ遠方ニ飛ビ去ルトキニ，其ノ截口ハ E ノ如キ抛物線トナル事モ亦證明サレルノデアル(證明略)．平面ノ廻轉ガ度ヲ過ギレバ截口

1) *Conic sections* 又ハ *Conics*.　2) *Generating line*.

ハ再ビ橢圓トナルノデアル．此ノ事實ヨリ圓錐曲線ノ名ガ出タノデアル．



此ノ事ヲ實際ニ試ミルニハ圖ノ如ク圓壔 C ノ底ニ蠟燈 A ヲ立テ，ソノ上線ノ影ヲ平面 P 上ニ投ズレバ，P 平面ノ傾キヲ種々ニ變ジテ橢圓，雙曲線，抛物線ヲ容易ニ作ルコトガ出來ル．A ノ光點ヨリ圓壔ノ上線ニ添ウテ射出セラルヽ光線ハ直圓錐ヲ作ツテ居ルカラ，ソレヲ平面 P ニテ截ルコトニナル故デアル．

圓錐ノ頂點 M ガ遙カニ上方ニ飛去レバ圓錐ハ直圓壔ニ變ズルカラ，圓壔ハ圓錐ノ一種ト見做シ得ラレル．從ツテ之ヲ平面ニテ斜ニ截レバ截口ハ橢圓トナルノデアル．但シ此ノ場合ニハ雙曲線又ハ抛物線ハ得ラレナイ．

54 二 次 曲 線

前述ノ橢圓，雙曲線，抛物線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y^2=4px$$

デ，皆 x ト y トノ間ノ二次式デアル．直線ノ方程式ハ x ト y トニ關シテ一次式デアツタノニ對シテ，是等ノ曲線ヲ二次曲線[1]トイフノデアル．

x ト y トノ間ノ一般ノ二次方程式ハ，適當ナル位置ニ在ル直交二直線ニ座標軸ヲ移スコトニ依ツテ上記ノ三種ノ式又ハ夫等ノ特別ノ場合（例ヘバ $b=0$, $p=0$ ナドノ場合）ニ變形スルコトガ出來ルノデアル(證明略)．故ニ一般ノ二次方程式ハ橢圓，雙曲線，抛物線ノ孰レカ（又ハソノ退化シタ直線，點等)ヲ表ハスト言ヒ得ルデアラウ．退化シタ形ノ場合ニハ

1) *Curves of the second order*.

$$x^2-y^2=0 \quad \text{卽チ} \quad (x-y)(x+y)=0$$

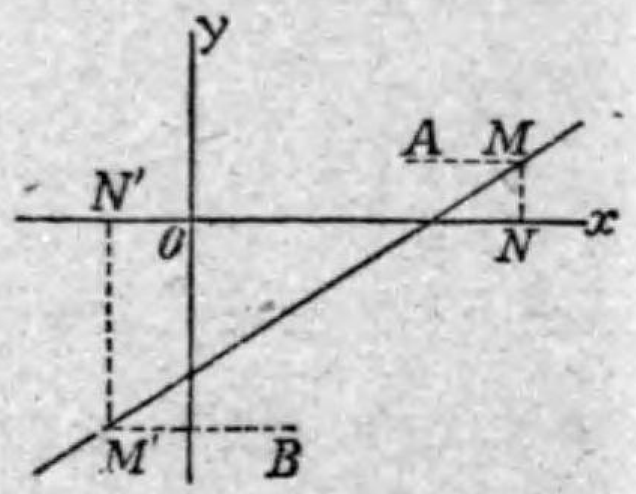
ノ樣ニ $x-y=0$, $x+y=0$ ノ二直線ニ分裂シタリ，又ハ

$$x^2+y^2=0$$

ノ樣ナ式ニナリ（此ノ場合ニハ二ツノ正ノ數ノ和ガ零デアルコトヲ要スルカラ，$x=0$, $y=0$ ノ外ニハナイ）$x=0$, $y=0$ 卽チ原點ノミヲ表ハス樣ナコトモアル.

55 軌跡ノ方程式ノ意義

x ト y トノ間ノ一次方程式ハ直線ヲ表ハスコトハ前ニ說イタ．前ニ例トシテ舉ゲタ方程式



$$y=\frac{2}{3}x-2$$

又ハ分母ヲ拂ツタ式

$$2x-3y-6=0$$

ハ x 軸ヲ $(3,0)$ デ，又 y 軸ヲ $(0,\ -2)$ デ切ル直線ヲ表ハス．卽チ此ノ直線上ノ點ハドレモ皆此ノ方程式ニ適合スル座標ヲ有ツテ居ルノデアル.

然ルニ此ノ直線ノ上方ニ在ル A ノヤウナ點ノ座標ヲ方程式ノ左邊(各項ヲ左邊ニ移シタ式ノ)

$$2x-3y-6$$

ニ代入スレバ，其ノ値ハ零ニナラナイコトハ明ラカデアルガ，其ノ正負ヲ考ヘテ見ルニ，A ヨリ假ニ x 軸(又ハ y 軸ニテモヨシ）ニ平行ニ AM ヲ引キ直線ト M 點デ交ラシメ，M ヨリ x 軸ニ垂線 MN ヲ引ケバ M 點ノ座標ハ ON, NM デアル．M 點ハ此ノ直線ノ上ニ在ルカラ，此ノ方程式ニ適合スルノデ，$2x-3y-6$ ハ零トナルデアラウ．併シ A ノ y 座標ハ M ノ座標ト同ジク NM デアルガ，x 座標ハ明ラカニ ON ヨリ小サイ．故ニ A ノ座標ヲ $2x-3y-6$ ニ代入スレバ，x ノ値ダケガ前ノ場合ヨリ小サイノデアルカラ，結果ハ明ラカニ負トナル (M ノ座標ヲ代入スレバ零トナルカラ，ソレヨリ減少シテ)．卽チ此ノ直線ヨリ上方ニ在ル點ノ座標ニ對シテハ

$$2x-3y-6<0$$

トナルノデアル.

之ニ反シテ B ノ如ク此ノ直線ヨリ下方ニ在ル點ノ座標ヲ代入スレバ，同樣ニ考ヘテ，正ノ値ヲ取ルコトガワカル．卽チ

$$2x-3y-6>0$$

デアル.

是デ見ルト直線

$$2x-3y-6=0$$

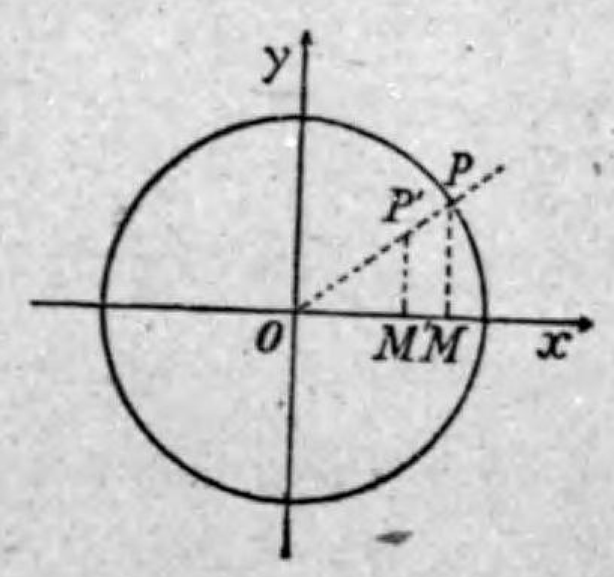
ハ全平面ヲ兩分シテ，其ノ一部ノ點ノ座標ニ對シテハ上式ノ左邊ハ負トナリ，他ノ部ニ在ル點ノ座標ヲ代入スレバ左邊ハ正ノ値ヲ取ルノデアル．是等二ツノ部分ノ境界ヲ爲スノガ卽チ此ノ直線デ，此ノ直線上ノ點ニ對シテハ，左邊ハ正負ノ中間ノ値卽チ 0 トナルノデアル.

同樣ノ方針デ圓ノ方程式

$$x^2+y^2=r^2$$

ヲ考ヘテ見ル．先ヅ此ノ式ノ右邊ノ項ヲ左邊ニ移シテ右邊ヲ零トスル.

$$x^2+y^2-r^2=0$$



此ノ方程式ハ座標ノ原點 O ヲ中心トシテ半徑 r ナル圓デアル，此ノ圓周上ノ隨意ノ一點 P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ下セバ P 點ノ x 座標及ビ y 座標ハ夫々 OM, MP デアルカラ

$$\overline{\mathrm{OM}^2}+\overline{\mathrm{MP}^2}=\overline{\mathrm{OP}^2}$$

卽チ $\qquad x^2+y^2=r^2$

トナルノデアル．モシ圓ノ內部ノ點 P′ ノ樣ナモノヲ考ヘルトスル．P′ カラ x 軸ニ垂線 P′M′ ヲ下セバ

$$\overline{\mathrm{OM}'}^2+\overline{\mathrm{M}'\mathrm{P}'}^2=\overline{\mathrm{OP}'}^2$$

ナル關係ガアルカラ，P′ ノ座標ヲ (x', y') トスレバ

$$x'^2+y'^2=\overline{\mathrm{OP}'}^2$$

然ルニ OP′ ハ明ラカニ OP 卽チ半徑 r ヨリ短イカラ

$$x'^2+y'^2<r^2$$

デアリ，從ツテ

$$x'^2+y'^2-r^2<0$$

卽チ圓ノ方程式ノ左邊(右邊ヲ全部左邊ニ移シテ)

$$x^2+y^2-r^2$$

ノ x, y ノ代リニ圓ノ內部ノ點ノ座標ヲ入レレバ，此ノ式ノ値ハ負ニナル．之ニ反シテ，圓ノ外部ノ點ノ座標ヲ代入スレバ正ノ値ニナルコトハ上ト同樣ニ直ニ分カル．故ニ圓周ハ全平面ヲ二ツノ部分ニ分チ，ソノ內部デハ

$$x^2+y^2-r^2$$

ノ値ハ負トナリ，外部ノ點ニ於テハ正トナル．圓周ハ丁度ソノ境界デ，上式ノ値ガ零ニナルノデアル．

コレト全ク同樣ニ，楕圓，雙曲線，拋物線等ハ全平面ヲ，或ル二次式例ヘバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$$

$$y^2-4px$$

ノ如キモノガ正ナル値ヲ有ツ部分ト負ナル値ヲ有ツ部分トニ分カツ境界ヲ爲シテ居ルノデアル．

56 函 數

算術デハ整數，小數，分數ナドノ一定ノ數ヲ計算スルコトヲ學ビ，代數デハ是等ノ數ノ代リニ文字 $a, b, \ldots\ldots x, y$ ナドヲ用ヰル．唯是等ノ文字ヲ定マレル數ヲ代表スルモノトシテ用ヰルノデアルカラ，常ニ定マツタ數ヲ意味スルノデ，計算ノ途中デ，其ノ代表スル數値ガ變ズルコトハナイノガ常デ，方程式

$$2x-3=5, \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$$

ナドニ用ヰル x, y ナドハ未知ノ數デハアルガ，一定ノ値ヲ表ハシテ居ルト考ヘルノデアル．第一ノ方程式ノ x ハ 4 ニ相異ナク第二ノ聯立方程式ノ x ハ 2 デ y ハ 1 デアル．卽チ唯最初ニハ値ハ未知デハアルガ，一定ノ値ヲ有スルコトハ疑ナイノデアル．然ルニ上ニ說イタ解析幾何學デハ，直線，圓ナドノ方程式，例ヘバ

$$2x-3y-6=0, \qquad x^2+y^2-4=0$$

ニ於ケル x, y ハ一定ノ數ヲ表ハスモノデハナク，直線又ハ圓周上ノ隨意ノ點ノ x 座標，y 座標ヲ表ハスモノデアルカラ，ソレ等ノ點ガ直線又ハ圓ノ上ヲ移動スルニ連レテ，其ノ値ガ刻々ニ變化スルノデアル．故ニ此ノ場合 x, y ハ變動スル數ヲ表ハスノデアル．直線ノ方程式ニ於テハ x, y ノ中一ツノ値ヲ隨意ニ選ベバ他ノモノノ値ハ方程式カラ自然ニ定マル．上ノ圓ノ方程式ニ於テハ x ト y トノ中ノ一ツハ隨意ニ選ンデヨイガ，唯其ノ絕對値ガ 2 ヨリ大キクテハナラナイトイフ條件ガアル．然ラザレバ他ノ一ツノ値ガ虛數トナルカラデアル．

斯ク二ツノ量ガアツテ，其ノ値ハ變動シ得ルトシテモ相互ニ相關係シテ變ズルノデ，一方ガ一ツノ値ヲ得レバ他ノモノハソレニツレテ，一ツノ定マリタル値ヲ取ルトイフ關係ニアルトキ，卽チ前ニ述ベタ直線又ハ圓ノ方程式ノ x ト y トノ關係ノヤウナモノデアルトキ，數學デハ是等ノ量ノ間ニ函數關

係[1]ガアルトイフ．x ノ値ヲ選ベバ y ノ値ガ自然ニ定マルト考ヘレバ x ハ獨立變數デアルトイヒ，y ハ x ノ函數[2]デアルトイフノデアル．

一ツノ量 y ガ他ノ一ツノ量 x ノ函數デアルトイフニハ，唯 x ノ値ヲ一ツ選ベバ，ソレニ對シテ y ノ一ツノ値ガ常ニ對應スレバヨイノデ，ソノ間ニ數學ノ式デ表ハシタ關係ガ必要ナノデハナイ．例ヘバ自分ノ家ノ猫ノ尾ノ長サト獨逸國ノ友人ノ家ノ庭ニ在ル一本ノ木ノ高サトヲ考ヘ，同ジ時刻ニ於ケル夫々ノ長サト高サトガ相對應スルト考ヘレバ，一方ノ値ニ對シテ他方ノ値ガ常ニ定ツテ居ルノデアルカラ是等ノ間ニモ函數關係ガアルト見得ル．卽チ獨逸ニ在ル木ノ高サハ自宅ノ猫ノ尾ノ長サノ函數デアル．又逆ニ猫ノ尾ノ長サハ其ノ木ノ高サノ函數デアルトモイヘルノデアル．

斯ノ如ク考ヘレバ，數量的ニ表ハシ得ル量ハ互ニ他ノモノノ函數デアルトモ言ヘルノデ，函數トハ非常ニ廣ク應用セラレ得ル概念デアル．函數ノ概念ハ古ヘヨリ漸次發達シタモノデ，じよん・べるぬゐー[3]，おいれる[4]ナドモ既ニ持ツテ居タノデアルガ，ソレハ主トシテ數學的ノ式デ表ハシタモノノ謂デ今日ノ如ク數式カラ全ク離脫シタノハぢりくれ[5]ノ功ニ歸サナケレバナラナイ．

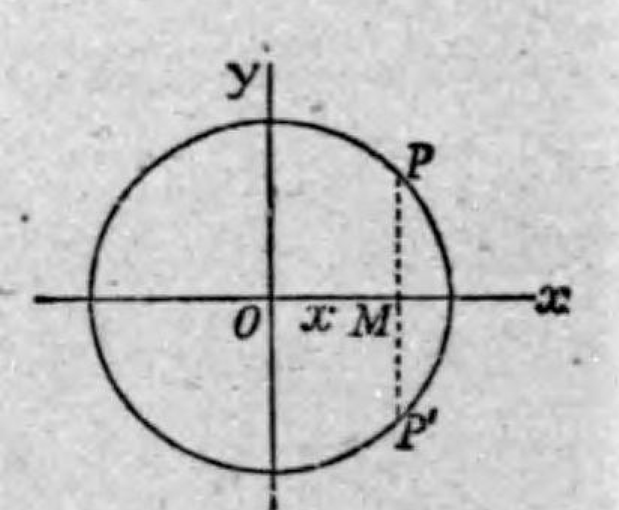
函數トイフ概念カラ考ヘルト，方程式

$$2x-3y-6=0$$

ノ表ハス直線ハ上式ヲ y ニ關シテ解イタ式

$$y=\frac{2}{3}x-2$$

ニヨツテ表ハサレル函數 y 卽チ $\frac{2}{3}x-2$ ノ圖的表示卽チ所謂ぐらふデアリ，方程式



$$x^2+y^2-4=0$$

ノ表ハス圓 O ハ，コレヲ y ニ關シテ解イテ得ル函數

$$y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

1) *Functional relation*. 2) *Function*. 3) *John Bernoulli* (1667–1748). 4) *Euler* (1707–1783). 5) *Dirichlet* (1805–1859).

ノぐらふデアルト考ヘテヨイ．但シ x ニ一定ノ値ヲ與ヘルト，ソレニ對シテ y ニハ $+\sqrt{4-x^2}$ 及ビ $-\sqrt{4-x^2}$ ナル二ツノ値ヲ得ル．是等二ツノ値ハ絕對値ガ互ニ相等シクシテ唯符號ヲ異ニスルノミデアル．コノ事ハ圖ヲ見テモ明ラカデ，x 軸上ノ點 M ニ對シテ P ト P′ ノ如キ二ツノ點ガ對應スルコトヲ意味スルノデアル．

橢圓デモ雙曲線デモ亦拋物線デモ同樣ニ一定ノ函數ノ圖示ト見做シ得ルノデアル．

函數トイフ考ヘハ一般ノ事ニモ應用デキルモノデ，一定ノ利率デノ預金又ハ貸金ハ時日ノ長短ニヨツテ元利合計ノ金高ハ夫々異ナルノデ，元利合計ハ時ノ函數ト見做シ得ルノデアル．一度沸カシタ風呂ノ湯モ，ソノ儘ニ放置スレバ漸次冷却スルカラ，ソノ溫度ハ同ジク時ノ函數デアル（假令ヘ冷却シナクトモ函數デアルヿト勿論デアル）．又圓ノ面積ハ，其ノ半徑ヲ r トスレバ，πr^2 デアルカラ，半徑ガ定マレバ，其ノ面積モ亦定マル．卽チ圓ノ面積ハ其ノ半徑ノ函數デアル．其ノ他日常生活ニ於ケル米ノ値段，日ノ長サ（卽チ晝間ノ長サ），空氣ノ溫度ナド皆時ノ函數ト見テヨイ．米ノ値段，日ノ長サ，氣溫ナド時ノ函數トモ考ヘラレルガ，又場所ニヨツテモ一定デアルカラ，場所ノ函數トモ考ヘ得ラレルノデアル．

一ツノ量 y ガ他ノ量 x ノ函數デアルト考ヘタ時ニ x ヲ獨立變數[1]ト呼ブ．故ニ逆ニ x ヲ y ノ函數ト考ヘレバ獨立變數ハ y デ，x ハ其ノ函數トナルノデアル．

前ニ屢〻顯レタ $x^2, x^3, \cdots\cdots$, $a+bx+cx^2+\cdots\cdots$, $\log x, \sin x, \cos x, \tan x$ 等ハ皆 x ノ函數デアル．從ツテ $\log y$, $\sin y$, ……ハ y ノ函數デアルコト勿論デアル．是等ハ夫々代數函數[2]，對數函數[3]，三角函數[4]（又ハ圓函數[5]）ト呼バ

1) *Independent variable*. 2) *Algebraic functions*. 此處ニ擧ゲタモノハ特ニ有理整函數 (*Rational integral function*) トモイフ．3) *Logarithmic function*. 4) *Trigonometrical functions*. 5) *Circular functions*.

レルモノデアルガ，コノ外ニ屢〻用ヰラレル指數函數[1]トイフモノガアル．a^x ノ形ノモノデ，特ニ常數 a ガ通常 e ト書カレル特殊ノ常數デアルトキ卽チ e^x ガ重要ナル函數デアル．此ノ常數 e ハ次ノ如キモノデアル．m ヲ一定ノ正ノ整數トスレバ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

ハ一定ノ値ヲ有ツガ，m ガ漸次增大スルニ從ツテ其ノ値ヲ變ズル．但シ m ガ無制限ニ增大スルニ從ツテ，其ノ値ガ一定ノ常數ニ近ヅクコトヲ證明シ得ル．其ノ極限ヲ e ト呼ブノデアル．嚴密ナル證明ハ茲ニハ述ベナイガ，唯大體ノコトヲ說イテ見ヨウ．

m ハ正ノ整數デアルカラ二項式定理(第107頁)ニヨレバ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}\cdot\frac{1}{m^p}+\cdots\cdots$$

トナルノデアル．一般ノ項

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}\cdot\frac{1}{m^p}$$

ハ次ノ如ク書キ替ヘ得ル．

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{m\cdot m\cdots m}\cdot\frac{1}{p!}=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{p!}$$

m ガ無限ニ增大スレバ右邊ノ各括弧ハ皆1ニナルカラ一般項ハ丁度 $\frac{1}{p!}$ ニナル．故ニ m ガ無限ニ增大スルトキ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ノ落チ着ク極限ノ値ハ

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}+\cdots\cdots$$

卽チ　$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{p!}+\cdots\cdots$$

デアル．

1) *Exponential function.*

此ノ級數ヲ計算スルト 2.718281828…… トナルカラ

$$e=2.718281828\cdots\cdots$$

ナル結果ヲ得ル．コレデ常數 e ハ分カツタデアラウ．

今 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ノ代リニ

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

ヲ考ヘ，x ヲ一定ノモノトシテ m ヲ無限ニ增大セシムレバ，其ノ極限ハ如何ニナルデアラウカ．

先ヅ次ノ樣ニ書キ改メル．

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x$$

此ノ式ガ正シイコトハ次ノ計算デワカル．

一般ニ　$$(y^a)^b=y^{ab}$$

デアルカラ

$$\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x=\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}\cdot x}=\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

然ルニ $1+\frac{x}{m}=1+\frac{1}{\frac{m}{x}}$ デアルカラ，上式ハ又

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x$$

トナル．右邊ノ角括弧ノ內ノ $\frac{m}{x}$ ヲ前ノ場合ノ m ノ樣ニ考フレバ，m ガ增大スルニ連レテ $\frac{m}{x}$ モ亦大キクナルノデ，前ノ結果ヲ用ヰテ

$$\left(1+\frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}$$

ノ極限ハ e トナルコトガ分カル．故ニ m ガ無限ニ增大スルトキノ $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ ノ極限ハ e^x トナル．他方ニ於テ

$$\left(1+\frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{x}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{m}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}\left(\frac{x}{m}\right)^p+\cdots\cdots$$

デアリ，又

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}\left(\frac{x}{m}\right)^p=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{p!}$$

ノ極限ハ $\frac{x^p}{p!}$ トナルカラ $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ ノ極限ハ

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^p}{p!}+\cdots\cdots$$

トナリ，從ツテ

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^p}{p!}+\cdots\cdots$$

ヲ得ル.

此ノ式中 $x=1$ トスレバ

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$

トナツテ，前ニ得タ e ノ級數ト同一ノモノヲ得ルコトハ當然デアル.

函數ノコトヲ調ベルノニ，ソレヲ表ハス記號ガアレバ便利デアラウ. 圓函數，對數函數，指數函數ナドニハ夫々定マツタ記號ガアルガ，一般ノ函數ヲ表ハスニモ記號ノアル方ガヨイ. 獨立變數ヲ x トスレバ，其ノ函數ヲ

$$f(x),\qquad \varphi(x),\qquad \psi(x)\qquad \cdots\cdots\cdots$$

ナドト書クノガ普通デアル. 是等ハ x ヲ獨立變數トスル或ル函數ノ意味デアル. 故ニ y ナル量ガ x ノ函數デアルトスレバ,

$$y=f(x)$$

ト書イテソノ意味ヲ表ハスノデアル.

57 函數ノ研究，微分法

或ル函數 $f(x)$ ガ與ヘラレタトシテ，コレヲ調ベルニハ如何ニスレバヨイカ，x ガ最モ小サキ値 $-\infty$ カラ始マツテ最モ大ナル値 $+\infty$ ニ至ルマデアラユル値ヲ取ルトキ，ソレニ對スル $f(x)$ ノ値ガ悉ク分カレバヨイガ，ソレダケデハ函數ノ全體ノ模樣ヲ見透スコトハ中々困難デアル. 併シ函數 $f(x)$ ノ全部ヲぐらふニテ圖示スルコトガ出來レバ一目瞭然デアルガ，ソレハぐらふ上ノ各點ニ於テ其ノ前後ノ關係ガ一目デ判カルカラデアラウ.

一例ヲ取ツテ見ルニ，東京驛ヲ午前十時三十分ニ出發シタ急行列車ガ 556.4 粁ヲ走ツテ午後八時四十五分ニ大阪驛ニ到著シタトスル. 此ノ列車ノ運行ヲ調ベルニ[1]，東京驛ヲ基點トシテ 1.9 粁ノ新橋驛通過ガ午前十時三十四分，6.5 粁ノ品川驛ガ同十時四十二分...，366 粁ノ名古屋驛通過ガ午後五時六分...，513.6 粁ノ京都驛ガ午後七時五十四分，大阪驛到著ガ午後八時四十五分ナドノ樣ニ列擧スレバ運行ノ模樣ガ良ク分カル筈デアルガ，實際ニハ，是デハ大體ノ樣子ハ良ク分カラナイ. 然ルニ東京驛ヲ午前十時三十分ニ出發シテ大阪驛著ガ午後八時四十五分デアルカラ，ソノ所要時間ハ十時間十五分デアル. 其ノ間ニ 556.4 粁ヲ走ツタノデアルカラ，平均一時間ニ

$$\frac{556.4}{10_{\text{時}}15_{\text{分}}}=\frac{556.4}{615_{\text{分}}}\times 60=54.28\text{粁}$$

五十四粁二八ヲ走ツタコトニナル. ヨツテ此ノ列車ハ東京驛ヲ午前十時三十分ニ出發シテ一時間平均五十四粁餘ノ速サデ走リ午後八時四十五分ニ大阪驛ニ著イタトイヘバ列車運行ノ模樣ガ稍〻考ヘ易クナル. 何時頃ニハ大凡何處ノ邊ヲ走ツテ居タカガ分ルノデアル.

速サ[2]トハ常識デモ分ツテ居ル筈デアルガ，詳シク言ヘバ通過シタ距離ノ變ズル(增加スル)割合デアル. 例ヘバ東京驛發ノ列車ガ名古屋驛ヲ通過スルト

1) 列車ノ通過シタ距離ハ時間ノ函數ト考ヘ得ラレル. 2) *Velocity* 又ハ *Speed*.

キノ速サガ一時間五十四粁デアルトイフ意味ハ，名古屋驛ヲ通過スルトキノ速サ卽チ運動ノ模樣ヲ其儘ニ一時間變ヘズニ進行スレバ五十四粁ダケ前進スルトイフ事デアル．換言スレバ東京ヨリ列車マデノ距離ガ一時間ニ五十四粁增スコトヲ意味スル．

斯ノ如ク，函數ヲ研究スルニハ，獨立變數ノ變化スルニ連レテ其ノ函數ノ變化スル遲速ヲ知ルノガ肝要デアル．獨立變數ノ變化トコレニ伴フ函數ノ變化ノ割合ヲ調ベルコトガ問題トナル譯デアル．前例デハ東京，大阪間ヲ走ル時間ヲ以テ其ノ間ノ距離ヲ除シテ，ソノ割合ヲ求メタノデアルガ，コレハ全距離ヲ通ジテノ平均ノ速サヲ計算シタノデアツテ，此ノ列車ハ東京發車ノ瞬間ニモ亦大阪著驛ノ瞬間ニモ同ジク一時間五十四粁ノ速サデ進行シテ居ルノデハナイコト勿論デアル．各驛發車直後ヤ著驛直前ニハ非常ニ緩ヤカニ動イテ居ルノデアル．箱根山ヲ登ルトキハ緩ヤカニ下リハ速クナルデアラウ．又驛ニ停車中ノ速サハ勿論零デアル．故ニ嚴密ニハ速サハ各瞬間每ニ或ハ各地點每ニ異ナルト見ナケレバナラナイ．是ヲ知ルニハ如何ニスレバヨイカ．ソレニハ其ノ瞬間又ハ地點ノ前後ニ例ヘバ各五分間ヅツヲ取リ，ソノ間ニ列車ノ通過シタ距離ヲ測ツテ，之ヲ十分卽チ $\frac{1}{6}$ 時間デ除スレバ，其ノ十分間ノ列車ノ平均速度ヲ得ルガ，コレハ前ノ每時五十四粁ヨリハ其ノ地點ニ於ケル眞ノ速サニ餘程近イモノデアラウ．又ハ其ノ地點ノ前後數米ノ距離ヲ列車ガ通過スル時間ヲ測ツテモ同ジク其ノ地點附近ヲ走ル時ノ列車ノ平均ノ速サヲ知ルコトガ出來ル．此ノ地點ノ前後ニ取ル距離又ハ時間ハ短イ程眞ノ速サニ近イモノヲ得ルデアラウ[1)]．

此ノ考ヘヲ推シ進メテ，極端ニ短イ時間ニ通過スル距離ヲソノ時間デ除スレバ，ソノ地點ニ於ケル列車ノ眞ノ速サヲ得ルコトハ考ヘ得ラレルデアラウ．唯實際ニハ極端ニ短イ時間及ビ其ノ間ニ走ル距離ヲ實測スルコトハ可ナリ困難ナ事ガアラウ．併シ理論ノ上デハ斯ク考ヘ得ルノデアル．

1) 距離又ハ時間ヲ測ルトキニ誤差ハナイモノトスル．

以上ノ考ヘ方ヲ整頓シテ見ヨウ．

考ヘ易クスル爲ニ一ツノ點ガ直線ノ上ヲ進行スルモノトスル．或ル時刻例ヘバ零時カラ測ツタ現在迄ノ時間ヲ x トシ[1)]，其ノ間ニ點ノ進行シタ距離ハ x ノ函數デアルカラ，之ヲ $f(x)$ デ表ハスコトニスル．今ヨリ尙 h ダケノ時間ヲ經過スレバ，此ノ點ノ進ンダ全距離ハ時間 $x+h$ ニ對スル距離デアルカラ $f(x+h)$ トナルデアラウ．然ラバ時間 h ノ間ニ點ノ移動シタ距離ハ明ラカニ

$$f(x+h)-f(x)$$

デアル．

モシモ點ノ運動ガ等速運動デアルナラバ，卽チ常ニ同ジ速サデ動クナラバ，$f(x+h)-f(x)$ ノ h ニ對スル比ハ常ニ一定デアルカラ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ノ値ハ x ヤ h ノ如何ニ關セズ一定ノ常數デ，コレガ卽チ此ノ點ノ速サデアル．

之ニ反シテ，モシモ點ノ運動ガ等速運動デナイナラバ，此ノ比ハ x ト h トノ値ガ變ズルニ從ツテ異ナル値ヲ有ツデアラウ．今 x ノ値ヲ一定トシテ(定マツタ時刻トイフニ同ジ)考フルニ，前ニ說イタ如ク，h ガ小サイ程

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ノ値ハ x 時刻ニ於ケル點ノ速サニ近イモノトナル．h ヲ漸次小サクシテ零ニ近ヅケレバ近ヅケル程上式ノ値ハ x 時刻ニ於ケル眞ノ速サニ近ヅクノデアル．此ノ事ヲ

h ガ限リナク零ニ近ヅク時

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ノ極限値ハ x 時ニ於ケル速サヲ表ハス

1) x ハ其ノ時ノ時刻ト見テモヨイ．

トイフノデアル．之ヲ記號デ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{點ノ速サ}\ [1]$$

ト書イテモヨイ．

左邊ノ分母分子ハ共ニ，h ガ減少スルニ從ツテ，無限ニ小サクナルノデアルカラ，上式ノ極限ヲ微分商[2]又ハ微分係數[3]ト呼ブ．微分係數ノ名ハ主トシテ英語國ニ於テ用キラレ，獨逸國ニテハ微分商ヲ用キテ居ル．之ヲ表ハスニハ $f(x)$ ノ前ニ $\dfrac{d}{dx}$ ヲ書キ添ヘテ

$$\frac{d}{dx}f(x)\quad \text{又ハ}\quad \frac{df}{dx}$$

トスルノデアル．此ノ記號ハらいぷにっつ[4]ガ始メテ用キタモノデアルトイフ．

微分商ノ値即チ獨立變數ノ變化ニ對スル函數値變化ノ速サハ時刻即チ獨立變數 x ノ値ニヨツテ定マツテ居ルノデアルカラ，x ノ函數ト見テヨイデアラウ．故ニ之ヲ x ノ函數ト見做ス場合ニ微分商ヲ $f(x)$ ノ導函數[5]トイフノデアル．通常之ヲ $f'(x)$ ト書ク．

上ニ述ベタ例デハ，x ヲ時間，$f(x)$ ヲ x 時間内ニ點ガ進行シタ距離ト考ヘタノデアルガ，必ズシモ斯ク考ヘナクトモヨイ．x ガ獨立變數デ，$f(x)$ ハ其ノ函數デアルトキ，x ノ値ニ少シノ增分 h ヲ與ヘタトキ函數 $f(x)$ ノ値ノ增減スル量ハ明ラカニ

$$f(x+h)-f(x)$$

デアルカラ，之ヲ x ノ增分 h デ除シテ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ヲ作レバ，前ニ述ベタ樣ニ，h ヲ漸次小サクシテ零ニ近ヅカシメル時，其ノ

1) lim ハ極限ノ意デらてん語 *Limes* ノ略デアルトイフ．2) *Differential quotient.* 3) *Differential coefficient.* 4) *Leibniz.* 5) *Derived function of* $f(x)$ 又ハ *Derivative of* $f(x)$.

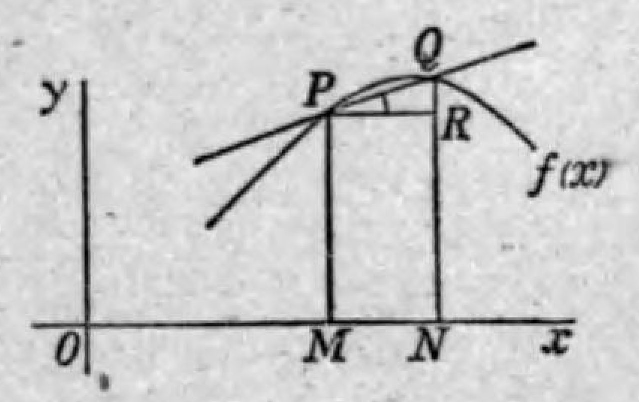
極限ガ x ノ變化ニ對スル函數 $f(x)$ ノ變動スル割合ヲ表ハスノデアル．即チ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

ガ x ノ變化ニ對スル $f(x)$ ノ變動ノ速サヲ表ハス量デアル．

函數 $f(x)$ ガ x ノ代數式，對數函數，三角函數，指數函數ナドデアレバ，其ノ導函數ヲ計算スルコトハ左程困難デハナイ．斯ク導函數ヲ計算スルコトヲ稱シテ函數ヲ微分スル[1]トイフ．微分學[2]デハ與ヘラレタ函數ヲ微分スルコト並ニ其ノ應用ヲ研究スルノデアル．故ニ微分學デハ種々ノ初等函數ノ微分法ガ最初ノ問題トナルノデアル．

58 微分商ノ幾何學的意義



函數 $f(x)$ ヲ圖示シテ圖ノ樣ナ曲線ヲ得タトスル．x 軸上ノ $x=a$ ナル點ヲ M トシ，M ニ於テ垂線ヲ立テ曲線ト P 點ニ於テ交ハルトスレバ P 點ノ座標ハ

$$x=\mathrm{OM}=a\qquad y=\mathrm{MP}=f(a)$$

デアル．x ヲ小量 h ダケ增シテ $a+h$ ナル x 軸上ノ點ヲ N トシ N ヨリ垂線 NQ ヲ立テレバ Q 點ノ座標ハ

$$\mathrm{ON}=a+h\qquad \mathrm{NQ}=f(a+h)$$

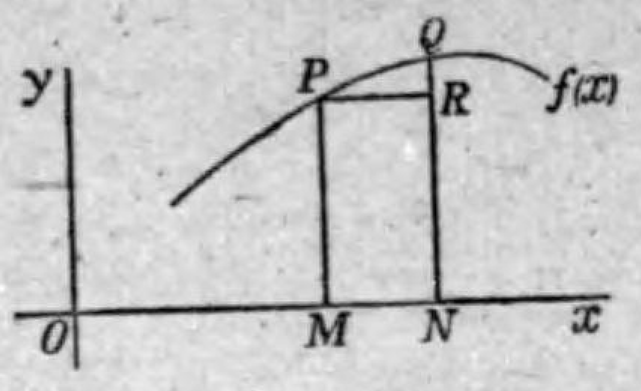
デアル．$\mathrm{MN}=h$ デ，P カラ x 軸ニ平行ニ PR ヲ引ケバ NR ハ MP ト等長デアルカラ

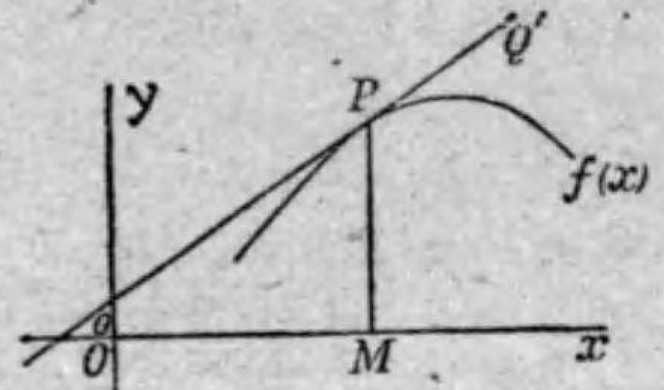
$$f(a+h)-f(a)=\mathrm{NQ}-\mathrm{MP}=\mathrm{NQ}-\mathrm{NR}=\mathrm{RQ}$$

從ツテ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PR}}=\tan\angle\mathrm{QPR}$$

1) *to differentiate.* 2) *Differential calculus.*





デアル．今モシ h ヲ漸次小サクシテ零ニ近ヅケレバ，Q 點ハ漸次 P 點ニ近寄リ，從ツテ直線 PQ ハ P 點ヲ軸トシテ少シヅツ廻轉シテ漸次 P 點ニ於ケル切線ニ接近スルコトハ明ラカデアル．故ニ $h\to 0$ ノ極限ニ於テハ直線 PQ ノ極限ハ P 點ニ於ケル切線 PQ′ デアリ角 QPR ノ極限ハ P 點ニ於ケル切線ガ x 軸ト作ス角 θ デアラウ．故ニ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\tan\theta$$

卽チ

$$f'(a)=\tan\theta$$

トナル．ヨツテ函數 $f(x)$ ノ點 $x=a$ ニ於ケル微分係數，換言スレバ導函數 $f'(x)$ ノ $x=a$ ニ於ケル値 $f'(a)$ ハ $f(x)$ ヲ圖示スル曲線ガ P 點ニ於テハ何ノ方向ニ向ツテ進行スルカヲ示スモノト考ヘ得ラレルデアラウ．

微分係數ノ此ノ性質ヲ利用シテ，曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 (a,b) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ作ルコトガ容易ニ出來ル．卽チ點 (a,b) ヲ通リ，方向係數 $f'(a)$ ヲ有ツ直線ノ方程式ヲ作レバヨイカラ

$$y-b=f'(a)\cdot(x-a)$$

ガ求ムルモノデアル．實際 $x=a$, $y=b$ トスレバ上式ハ滿足セシメラレルシ，方向係數卽チ y ノ係數ヲ 1 トシタ時ノ右邊 x ノ係數ガ $f'(a)$ デアルカラデアル．

是ヲ以テ見レバ，函數 $f(x)$ ヲ微分スルトハ，曲線 $y=f(x)$ ノ切線ヲ求メルコトデアルトモ考ヘ得ルノデアル．

以上說イタ所ハ微分學ノ根本ノ考ヘデアツテ，要スルニ函數變動ノ速サ（獨立變數ノ變化ニ對スル）ヲ求メルニ外ナラナイ．此ノ考ヘハ英國ノ大數學者

兼大物理學者にゅーとん[1]ト獨逸國ノ大哲學者ニシテ大數學者ナルらいぷにっつ[2]トガ殆ンド同時ニ發明シタノデアツタガ，併シ其ノ以前カラ數學ハ徐々ニ其ノ方向ニ向ツテ發達シ遂ニ此ノ兩人ニ至ツテ明確ナル形ヲ整ヘタノデアル．にゅーとんハ運動ノ速サノ考ヘカラコヽニ至リ，らいぷにっつハ曲線ニ切線ヲ引ク問題カラ微分學ニ到達シタノデアルトイフ．兎ニ角前カラノ數學者ノ硏究ガ集積シテ遂ニ此處ニ至ラザルヲ得ナカツタノデアラウ．サレバ佛國ニ於テハふぇるまー[3]ヲ以テ其ノ創始者ト考ヘテ居ル人モアル．我國ニ於テハ斯カル準備卽チ前人ノ硏究ナシニ關孝和（1640?–1708，皇紀二千三百年頃ヨリ同二千三百六十八年マデ）ガ發明シタ圓理トイフ算法ニ多少コレニ似通ツタモノガ有ルトイフコトデアルガ，誠ニ驚歎ニ値スルコトデアル．

にゅーとんトらぷにっつノ孰レガ前ニ發見シタカニ關シテ學者ノ間ニ論議ガアツタノハ當然デアルガ，其ノ間多少ナリトモ惡聲ガ放タレタトイフコトハ苦々シイコトデアル．

微分學ノ根本ノ考ヘハ既ニ說明シタノデアルカラ，以下ソノ計算法ヲ述ベテ見ヨウ．

59 微　分　法

今茲ニ獨立變數 x ノ函數 y ガアリ，其ノ値ハ常ニ x^2 ニ等シイトスル．然ラバ $y=x^2$ トシテモヨイデアラウ．x ガ一ツノ値 $x=a$（a ハ常數）ヲ取ツタトキ y ノ値ハ a^2 デアル．モシ x ノ値ヲ a ヨリ少シ變ジテ $a+h$[4] トシタナラバ，y ノ値ハ $(a+h)^2$ トナル．故ニ此ノ場合，函數 y ノ增シハ

$$(a+h)^2-a^2$$

1) *Sir Isaac Newton* (1642–1727).　2) *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716)（英國ニテハ Leibnitz ト綴ル）．　3) *Pierre de Fermat* (1601–1665).

4) h ハ正デモ負デモヨイ．正ナラバ增分デアルガ，モシ負ナラバ $a+h$ ハ實ハ a ヨリ減少スルノデアル．

デ，x ノ增シハ h デアル．故ニ x ノ變化ニ對スル y ノ變化ノ割合ハ

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

デアル．h ノ値ヲ漸次零ニ近ヅケルトキ，此ノ式ノ値ノ極限ヲ求メ得レバ則チ微分係數ヲ得ルノデアル．此ノ極限値ヲ見出スニハ上式ノ儘デハ不便デ簡單ニハ判ラナイ．ヨツテ是ヲ都合ノヨイ形ニ書キ改メルコトニスル．先ヅ初等代數學デ敎ヘルヤウニ(又ハ二項式定理ニヨリ)

$$(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$$

デアルカラ

$$(a+h)^2-a^2=2ah+h^2$$

トナル．此ノ兩邊ヲ h デ除スレバ

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=2a+h$$

limit

トナルコトハ明ラカデアル．左右兩邊ハ常ニ相等シイノデアルガ，h ヲ零ニ近ヅケルト，右邊第二項ノ h ガ 0 ニ近寄ルカラ結局右邊ハ $2a$ ニ近ヅクコトニナル．h ガ 0 ニ近ヅケバ近ヅク程右邊ノ値ハ $2a$ ニ限リ無ク近ヅク．故ニ右邊ノ極限ハ $2a$ デアル．然ルニ左邊ハ，常ニ右邊ニ等シイノデアルカラ，其ノ極限モ亦同ジク $2a$ デナケレバナラナイ．故ニ

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=2a$$

デアル．此ノ結果ハ

函數 $y=x^2$ (又ハ $f(x)=x^2$) ノ $x=a$ ニ於ケル微分係數ハ $2a$ デアルコトヲ示ス．a ハ如何ナル値デアツテモ上ノ計算ハ正シイノデアルカラ，之ヲ x ト書イテモヨイ．サウスレバ

函數 $f(x)=x^2$ ノ導函數ハ $2x$ デアル．又ハ $\dfrac{d(x^2)}{dx}=2x$ デアル．

トシテヨイノデアル．

同ジ手段デ函數 $y=x^3$ ノ導函數ヲ計算シテ見ヨウ．

x ヲ一定ノ値ト考ヘテ是ニ增分 h ヲ與ヘレバ函數 y ノ變化ハ

$$(x+h)^3-x^3$$

デアル　然ルニ

$$(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

デアルコトハ代數學ノ乘法ニヨツテ容易ニワカルカラ

$$(x+h)^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3$$

コレヲ h デ除スレバ

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

トナル．玆デ h ヲ限リ無ク零ニ近ヅケレバ，卽チ $h\to 0$ ノトキ，右邊ノ第一項ハ何等影響ヲ受ケナイガ，第二項 $3xh$ ハ x ガ一定有限ノ値デアルカラ，h ト共ニ零ニ近ヅクノデアル．第三項 h^2 ハ h ト共ニ零ニ近ヅクコトハ勿論デアル．故ニ h ガ 0 ニ近ヅケバ右邊ハ結局 $3x^2$ ニ限リ無ク近ヅクノデアル．卽チ右邊ノ極限ハ $3x^2$ デアル．故ニ

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2 \quad 又ハ \quad \frac{dx^3}{dx}=3x^2$$

トナルノデアル．

同ジ方法ヲ繰返セバ $y=x^4$ ノトキハ

$$\frac{dx^4}{dx}=4x^3$$

トナリ，$y=x^5$ ノトキハ

$$\frac{dx^5}{dx}=5x^4$$

トナルコトハ，計算ニヨツテ容易ニワカル．故ニ一般ニ，$y=x^n$ ノトキハ

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1} \quad 又ハ \quad f'(x)=nx^{n-1}$$

トナルデアラウコトハ想像ニ難クナイ．又實際ソレデヨイノデアル．コレヲ證明シテ見ヨウ．

x ニ增分 h ヲ與フレバ，ソレニ對スル函數 x^n ノ增分ハ

$$(x+h)^n-x^n$$

デアルカラ，函數變化ノ割合ハ

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

デアル．二項式定理ニヨルト

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+h^n$$

デアルカラ

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h+\cdots\cdots+h^{n-1}$$

トナル．茲ニ於テ h ヲ 0 ニ近ヅケレバ右邊ノ第二項以下ハ h ト共ニ零ニ近ヅクカラ，右邊ノ極限ハ第一項ノ nx^{n-1} デアルコトガ分カル．ヨツテ前ト同樣ニ

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

トナル．此ノ結果ハ n ガ 2, 3 ノ場合ニハ，前ノ結果ト同一ノ答ヲ與ヘルノデアル．又上ニ使用シタ二項式定理ハ n ガ分數デモ，小數デモ又負數ノ場合ニモ正シイノデアルカラ

$f(x)=x^n$ ナルトキ $f'(x)=nx^{n-1}$ 即チ $\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$

ナル關係ハ n ガ如何ナル整數，分數，小數デモ又負數ノ場合ニモ通用スルノデアル．

函數 x^n ノ導函數ハ nx^{n-1} デアルガ，逆ニ x^n ヲ nx^{n-1} ノ原函數[1]トイフコトモアル．nx^{n-1} ノ原函數ガ x^n デアルカラ，n ヲ $n+1$ トスレバ[2] ($n=-1$ ノ場合ヲ除ク) $(n+1)x^n$ ノ原函數ハ x^{n+1} デアル．是ニ依ツテ考ヘルト，x^n ノ原函數ハ $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ デハナカラウカ．此ノ點ヲ確メテ見ヨ

1) *Primitive function.*　2) $n=-1$ ナラバ $n+1=0$ トナルカラ，$n\neq -1$ トスル．

ウ．ソレニハ函數 $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ ノ導函數ヲ求メテ見テソレガ x^n トナレバヨイ．$f(x)$ ヲ $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ トスレバ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{n+1}(x+h)^{n+1}-\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{h}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}+(n+1)x^nh+\cdots\cdots+h^{n+1}-x^{n+1}}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[(n+1)x^n+\frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}h+\cdots\cdots\right]$$

右邊ノ式中點ノ部分ハ h ニ關シテ二次以上ノ式デアル．ヨツテ $h\to 0$ ノトキ，h ト共ニ零ニ近ヅキ，ソノ極限ハ零デアル．故ニ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x^n \quad 即チ \quad f'(x)=x^n$$

トナツテ豫期シタ通リデアル．故ニ

函數 x^n ノ原函數ハ $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ デアル．n ハ -1 ノ外如何ナル實數デモヨイコトガ判ツタ．

此ノ機會ニ次ノ事ヲ注意スル．

函數 $f(x)$ ガ常數デアルトキ，即チ $f(x)=C$ (常數)デアレバ，x ガ變化シテモ $f(x)$ ニ變動ガナイカラ，從ツテ其ノ變動ノ割合ハ 0 デアルコトハ明ラカデアル．實際計算シテ見テモ亦 $f'(x)=0$ デアルコトハ分カル．即チ

$$f(x+h)=C \qquad f(x)=C$$

$$\therefore \quad f(x+h)-f(x)=0 \quad 從ツテ \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

右邊ハ常ニ零デアルカラ，$h\to 0$ ノトキニモ亦常ニ零デアル．故ニ其ノ極限モ亦 0 デアル．即チ

$$f'(x)=0$$

故ニ

常數ノ導函數ハ 0 デアル．