算學叢書

第五種

近世綜合幾何學

日本吉川實夫著

王邦珍譯

商務印書館發行

目　錄

近世綜合幾何學

序

純正數學分解析學幾何學二門解析學爲基於數之概念諸分科之總稱幾何學乃包括空間概念諸研究

幾何學發源甚古肇自埃及迄希臘大哲 Euclid 出集其大成編幾何原本一書最爲詳盡沿用至今不少衰氏沒 Archimedes, Apollonius 繼之益臻完備自茲以後八百年間無甚進步至十六世紀 Descartes 出創坐標法施解析法於幾何學由是純粹幾何學幾爲解析學所倂其命運不絕如縷學者憂之遂起反動乃發明一種幾何學與之對立卽綜合幾何學是也

綜合幾何學(Synthetic Geometry)亦稱射影幾何學 (Projective Geometry)或位置幾何學 (Geometry of Position) 其研究方法與解析幾何學全不相同不由數量純據位置以探求圖形之性質且加入無窮遠原素及虛原素又應用連續原理雙對原理而其所求之圖形性質與解析幾何學所得者無異由是純粹幾何學大放光明成此大功者首推 Monge, Carnot, Poncelet, Steiner, Von Standt, Cremona 諸氏

我國數學書出版頗多卽就幾何學而言如初等幾何學,近世幾何學,畫法幾何學,非由克力得幾何學等俱有專書唯

綜合幾何學則無成本故余不揣譾陋特將日儒吉川實夫所著之綜合幾何學譯之以爲研究高等圖形之助譯本內容大都與原書相同唯間有參考他書增補萬一至於說明概採最淺易之法以期學者便於討究非敢更改原書也但鄙人學識淺陋謬誤之處自知不免閱者諸君幸指正焉

十四年四月閩侯王邦珍識於烏麗學舍

近世綜合幾何學

第一章

基礎概念

第一節　基礎圖形

點,直線,平面爲幾何學基礎元素。通例

點　以 A,B,C,………

直線以 a, b, c,………

平面以 α,β,γ,………表之。

此等元素之集合。卽成圖形。其簡單者有六種。稱幾何學基礎圖形。

定義 1　在一直線上諸點之集合。稱點列。或單稱列。直線稱爲臺。

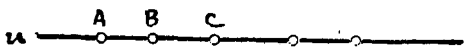


圖 1

成點列之元素者。點 A,B,C,……也。其書式爲 u(A B C……) 或列 u。

定義 2　在一平面上通過一點諸線之集合成直線束。或單稱線束。平面及點俱稱爲臺。又點特稱線束之心。

成線束之元素者。直線 a,b,c,……也。其書式爲 S (abc……),

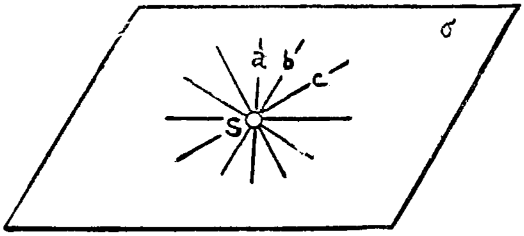


圖 2

σ(abc……),線束S或線束σ。

定義 3　通過一直線諸平面之集合成平面束。或稱面束。直線稱面束之臺或軸。

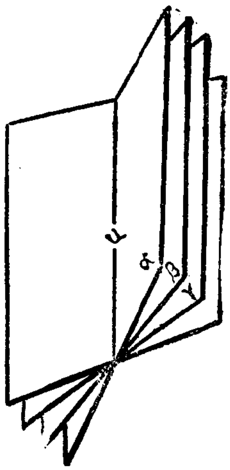


圖 3

成面束之元素者。平面α, β, γ,……也。其書式爲u (αβγ……)或面束u。

定義 4　在一平面上點線之集合成爲野。平面稱野之臺。

定義 5　通過一點之線面之集合成爲把。此點稱把之臺或心。

定義 6　在空間點線面之集合成空間系。

第二節　截斷,射影

I. 作二平面之交線。

II. 作同面二直線之交點

III. 作一平面與一直線之交點。

I. 結二點之直線。

II. 連相交二直線之平面。

III. 連一點與一直線之平面。

定義 7　通觀以上三種問題與二元素。

定其共有之第三元素。名爲<u>截斷術</u>。

生其倂有之第三元素。名爲<u>射影術</u>。

今適用此術於基礎圖形。則得各圖形相互之關係如下。

先於某平面上

線束S (abc……)。以不過其心之一直線 u 截斷之。則線束之線 a, b, c,……爲 u 所截斷。得交點 A, B, C,……。此等點成以 u 爲臺之點列。故

點列 u (ABC……)。以不在其臺之一點 S 射影之。則點列之點 A, B, C,……爲 S 所射影。得連線 a, b, c,……。此等直線成以S爲心之線束。故

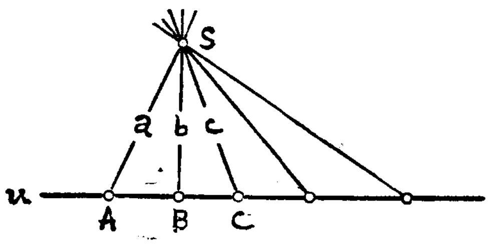


圖 4

定理 1 線束S爲不過其心之一直線u所截斷。則成點列u。

定理 1 點列u爲不在其臺之一點S所射影。則成線束S。

次於空間

面束u($\alpha\beta\gamma$……)。以不在各平面上之直線v截斷之。則面束之面$\alpha,\beta,\gamma,$……爲線v所截斷。得交點A, B, C,……。成v爲臺之點列。故

定理 2 面束u爲不在其面上之一直線v所截斷。則成點列v。

點列v(ABC……)。以不過各點之直線u射影之。則點列之點A, B, C,……爲線u所射影。得結面$\alpha,\beta,\gamma,$……。成u爲軸之面束。故

定理 2 點列v爲不過其點之一直線u所射影。則成面束u。

同樣

定理 3 面束爲不過其軸之平面截斷時成線束。

定理 4 把爲不過其心之平面截斷時得一野。

定理 3 線束爲不在其臺上之一點射影時成面束。

定理 4 野爲不在其臺上之一點射影時得一把。

第三節 基礎圖形

在近世幾何學六種圖形之內。

I. 就點列,線束,面束三種考之。

線束 一線截斷之成點列。	點列 一點射影之成線束。
面束 一線截斷之成點列。	點列 一線射影之成面束。
面束 一面截斷之成線束。	線束 一點射影之成面束。

卽點列,線束,面束施截斷射影之術。亦得點列,線束,面束。

定義 8 以上三種圖形含同等元素。總稱爲第一級基礎圖形。

II. 就野把考之。

把	野
各線認爲面束之軸。	各線認爲點列之臺。
各面認爲線束之臺。	各點認爲線束之心。
故把含無數之面束及線束。	故野含無數之點列及線束。

卽野把二種俱含無數之第一級基礎圖形。且

把 一面截斷之則爲野。	野 一點射影之則爲把。

定義 9 野,把含同等元素。總稱爲第二級基礎圖形。

III. 就空間系考之。

各平面視爲野之臺。

各點視爲把之心。

各直線視爲點列之臺或面束之軸。

卽空間系含有無數之第一級,第二級基礎圖形。故

定義10 空間系稱第三級基礎圖形。

第四節 無窮遠元素

定義11 近世幾何學認平行線有交點。但在無窮遠之距離。稱無窮遠點。

定義12 同平面上互平行直線之集合。得視爲以無窮遠點爲心之直線束。稱平行線束。

定義13 在空間互平行直線之集合。稱平行線把。

定義14 平行面之交線。稱無窮遠線。

定義15 互平行平面之集合。形成以無窮遠線爲軸之平面束。稱平行面束。

定義16 空間總無窮遠點,無窮遠線之集合。形成無窮遠面。

第五節 位置幾何學

定義17 幾何學分爲兩種。專論圖形位置者。曰位置幾何學。根據量之觀念而攷究圖形之性質者。曰計量幾何學。

以少數圖形爲基礎。由一定法則而配合之。成二次,三次,四次等圖形。且不含有計量之性質。則此種幾何學與解析幾何學相對立。稱爲綜合幾何學。

第六節　雙對法則

定義18　純正位置幾何學。專用射影截斷兩術以探究圖形之性質。用此術之際。設立一定理。交換其元素得他定理爲前定理之反像。而兩者有對立關係。名爲幾何學之雙對。

元素之交換。應以何者爲標準。不可不細加研究。茲條述於下。

截斷	射影
I. 二線(同平面)定一點。	I. 二點定一線。
II. 二平面定一直線。	II. 二直線(相交)定一平面。
III. 一平面一直線定一點。	III. 一點一直線定一平面。

卽　I.　點與直線交互對立。

II.　平面與直線交互對立。

III.　平面與點交互,直線與直線對立。

且　I.　之元素在一平面上(平面幾何學)。

II.　之元素皆過一點(把幾何學)。

III.　之元素無制限(空間幾何學)。

今於各種幾何雙對的對立之基礎概念。分記左右兩欄。作表於下。

I.　平面幾何學之雙對

二線a,b定一點a·b	二點A,B定一線$\overline{AB}$。
一線a。	一點A。

在同一線 u 上之三點 A,B,C。

點列 u (A B C……)。

點之集合(點之軌跡)。

過同一點 U 之三線 a, b, c。

線束 U(a b c……)。

線之集合(線之包絡)。

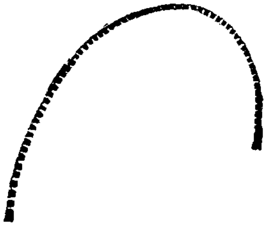


圖 5

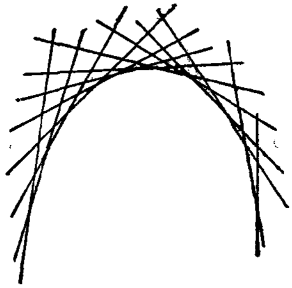


圖 6

II. 把幾何學之雙對

二直線 a,b 定一平面 $\overline{ab}$。

一平面 α。

在同一平面 σ 上之三直線 a, b, c。

直線束 σ(a b c……)。

二平面 α,β 定一直線 $\overline{\alpha\beta}$。

一直線 a。

過同一直線 s 之三平面 α, β, γ,

平面束 s ($\alpha\beta\gamma$……)。

III. 空間幾何學之雙對

平面 α, 直線 b 定一點 α·b。

二平面 α,β 定一直線 $\overline{\alpha\beta}$。

同一平面上之二線 a,b 定一點 a·b。

點 a·b

一點 A, 直線 b 定一面 $\overline{Ab}$。

二點 A,B 定一直線 $\overline{AB}$。

過同一點之二線 a,b 定一平面 $\overline{ab}$。

平面 $\overline{ab}$。

一平面α。	一點A。
一直線(二面交線)。	一直線(二點連線)。
三平面α,β,γ定一點$\alpha\dot{\beta}\gamma$。	三點A,B,C定一平面$\overline{ABC}$。
過同一直線u之三平面α,β,γ。	在同一直線u上之三點A,B,C。
直線束σ(a b c……)。	直線束S(a b c……)。
野$\sigma\begin{pmatrix}ABC\cdots\cdots\\ a\ b\ c\cdots\cdots\end{pmatrix}$。	把$S\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\cdots\cdots\\ a\,b\,c\cdots\cdots\end{pmatrix}$。

從上列之表。舉例於次。以明雙對之用。

I　平面幾何學

定義19　四點A,B,C,D中。每二點相聯成完全四角形。ABCD四點稱頂點。六線$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$稱爲邊。不過同頂點之二邊稱對邊。

定義19　四線a, b, c, d中。每二線相交。成完全四邊形。a b c d四線稱爲邊。六點a·b, a·c, a·d, b·c, b·d, c·d稱頂點。不在同邊上之二頂點稱對點。

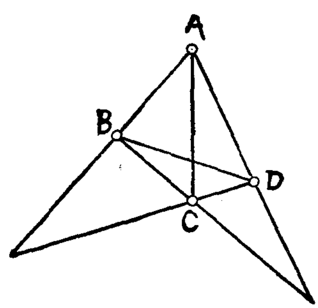


圖 7

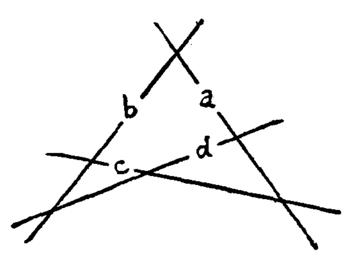


圖 8

上記兩圖形。由其平面外一點射影之。得屬於把之圖形。即

II 把幾何學

定義20　完全四稜形者。把之四直線每兩直線所結之六平面之集合也。

定義20　完全四面形者。把之四平面每兩平面所交之六直線之集合也。

III 空間幾何學

定義21　完全四點形ABCD者。空間四點A, B, C, D每二點之連線與每三點之結面之集合也。

定義21　完全四邊形$\alpha\beta\gamma\delta$者。空間四平面$\alpha,\beta,\gamma,\delta$每二面之交線與每三面之交點之集合也。

今欲明瞭雙對之關係。特解二三重要問題於次。以結本章。

問題 1　過與點A。交與線b, c。作直線x。

問題 1　在與平面α上。交與線b, c。作直線x。

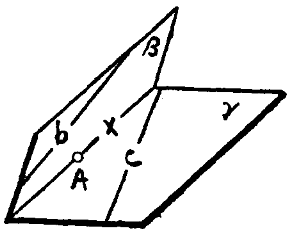


圖 9

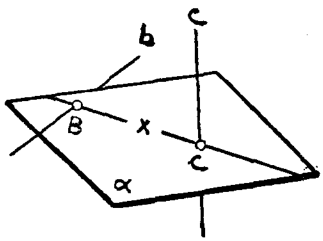


圖 10

解　結A,b之平面β。　A, C之平面γ。　β,γ之交線即所求x線。

解　定α,b之交點B。　α, c之交點C。　B,C之連線。即所求x線。

問題 2　任兩線不在一平面上之三直線a, b, c。求作交此三線之直線x。

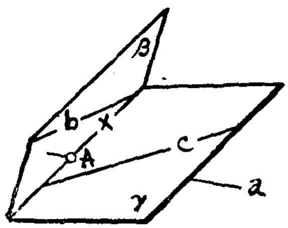


圖 11

解　於a上任取一點A作二平面$\overline{Ab}\equiv\beta$。$\overline{Ac}\equiv\gamma$。此兩面之交線。即所求之x線。

問題 2　任兩線不交於一點之三直線a, b, c。求作交此三線之直線x。

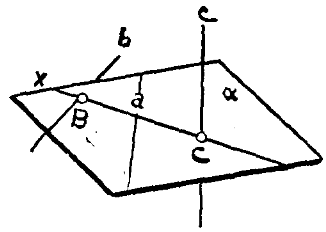


圖 12

解　過a任作一平面α。得二交點　$\alpha\cdot b\equiv B$。$\alpha\cdot c\equiv C$。此兩點之連線。即所求之x線。

由上說明。知雙對關係實縱斷位置幾何學之全範圍爲二。其一方得由他方機械的誘出之。誠至重要至巧妙之法則也。

第二章

調和圖形

第七節 圖形之關聯

定義 1 二個圖形。其一之各元素與他之一元素相配合時。兩者爲互關聯。相配合之元素。稱對應元素。通例以同樣之文字表之。如 A,B,C 之對應點。以 A',B',C' 或 A_1,B_1,C_1 表之。

定理 1 在異平面上二個互關聯之三角形 ABC, A'B'C'。三雙對應邊 $(\overline{BC},\overline{B'C'})$ $(\overline{CA},\overline{C'A'})$ $(\overline{AB},\overline{A'B'})$ 各相交。則三雙對應頂點之結線 $\overline{AA'},\overline{BB'},\overline{CC'}$ 會於一點。其逆亦眞。

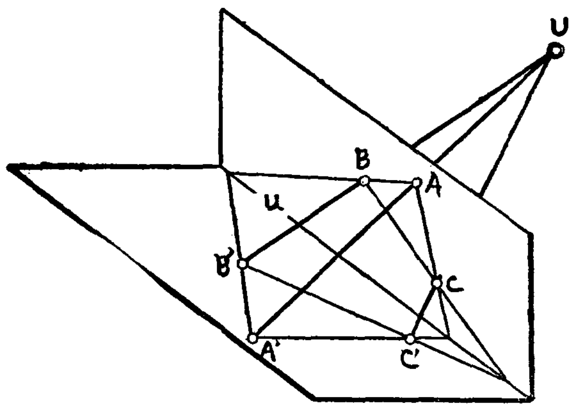


圖 13

證 三雙對應邊定平面 $\overline{BCB'C'}$, $\overline{CAC'A'}$, $\overline{ABA'B'}$。此三平面定一交點 U。然三線 $\overline{AA'},\overline{BB'},\overline{CC'}$ 爲此三面相互之交線。故亦過 U。

逆定理

證　三結線 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ 之內。任取二線 $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ 定一平面。則二線 $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$ 在此面內相交。他雙對應邊亦然。

定理 2　異平面上二個相關聯之完全四角形 ABCD, A′B′C′D′。五雙對應邊 ($\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$) 等各相交。則第六雙對應邊 (CD, C′D′) 亦相交。

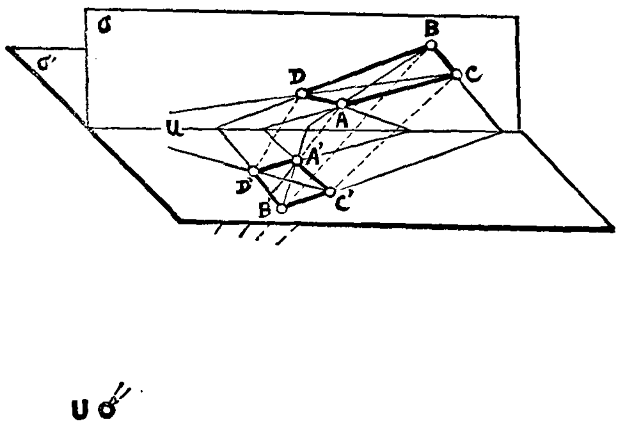


圖 14

證　二三角形 A B C, A′B′C′ 相關聯。由前定理得 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ 會於一點。同樣二三角形 ADB, A′D′B′ 相關聯。$\overline{AA'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{BB'}$ 會於一點。即 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ 皆會於一點 U。

故二三角形 BCD, B′C′D′ 相關聯。由前定理之逆。得三雙對應邊各相交。即 $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$ 相交。

上定理之四角形在異平面上。故其對應邊之交點在兩平面之交線 u 上。若旋轉其一面使兩面一致。則得次之定理。

定理 3 二個相關聯之完全四角形。其五雙對應邊各相交。其交點在一直線上。則第六雙對應邊亦在此線上相交。

定理 4 與線u上有三定點 P, Q, R。在過 u 之任一平面 σ 上作四角形 A B C D。使一雙對邊 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 過第一點 P。一對角線 $\overline{AC}$ 過第二點 Q。他雙對邊 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 過第三點 R。則第二對角線 $\overline{BD}$ 截 u 之點 S。無論平面 σ, 四角形 ABCD 如何變動。常爲定點。

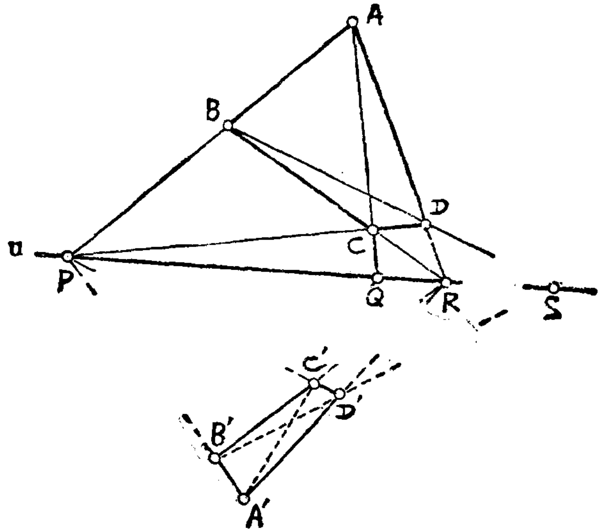


圖 15

證 在過 u 之他平面上。任作一適合於上記要件之四角形 A′B′C′D′。則 ABCD, A′B′C′D′ 爲互關聯之完全四角形。其五雙對應邊各在 u 線上相交於 P, Q, R。由定理 3。知第六雙對應邊 $\overline{BD}$, $\overline{B'D'}$ 亦於u線上相交於S。

第八節 調和圖形

定義 2 點列 u 之四點 A, B, C, D。對於某四角形。其二雙對邊過A(第一點),C(第三點)。二對角線過 B(第二點),D(第四點)。則 A, B, C, D, 稱調和點或調和點列。四角形稱母形。D 為 A,B,C 之第四調和點。

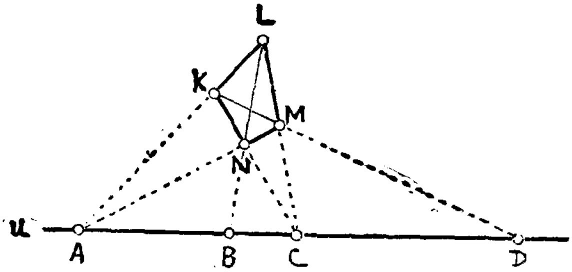


圖 16

定義 3 線束 S 之四線 a, b, c, d。各過調和點 A, B, C, D 則此線束稱調和線束。

定義 4 平面束 v 之四面 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$。各過調和點 A, C, C, D. 則此面束稱調和平面束。

定理 5 調和圖形截斷之射影之。亦得調和圖形。

本定理有七場合。條證於下。

I. 調和點列由一點射影之。得調和線束。

II. 調和點列由一線射影之。得調和面束。

III. 調和線束由一點射影之。得調和面束。

I,II,III, 由定義第三第四知之。

IV.　調和線束由一線截斷之。得調和點列。

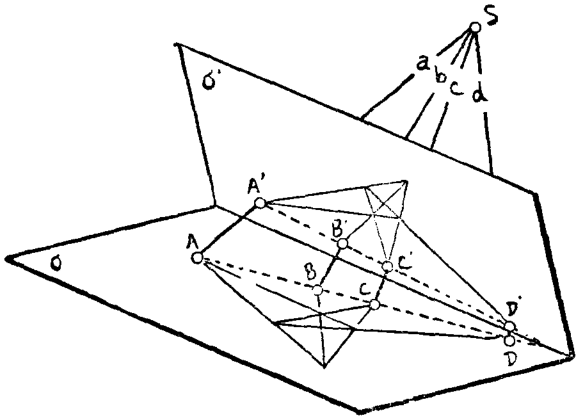


圖 17

證　調和線束 S (a b c d) 者。由一點 S 射影於調和點列 A B C D 所生也。今由 S 射影於 A B C D 之母形。得 S 爲頂之四稜形　過截斷線 u' 任作一平面 σ'。截斷此四稜形。得一四角形。其二雙對邊過 A', C'。二個對角線過 B', D'。

V.　調和線束由一面截斷之得調和點列。

證法同 IV。

VI.　調和面束由一線截斷之。得調和點列。

證　調和面束 v ($\alpha\beta\gamma\delta$) 者。由一線 v 射影於調和點列 A B C D 所生也。過 A B C D 引平面 σ。截斷此面束。得調和線束 a b c d。　過截斷線 u' 引平面 σ'。截斷 σ (a b c d)。　得調和點列。從而 a' b' c' d' 爲調和線束。　故 A' B' C' D' 爲調和點列。

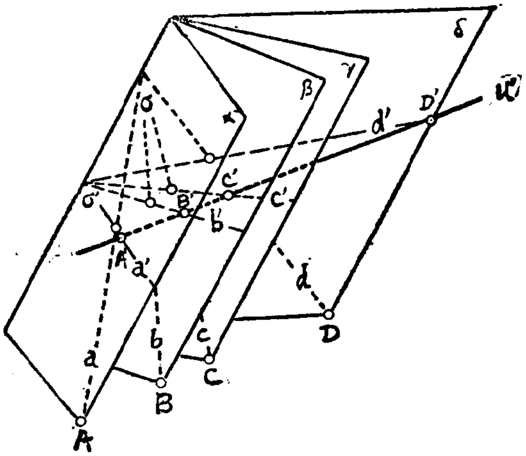


圖 18

VII. 調和面束由一面截斷之。得調和線束。

證法同 VI。

第九節　問題

問題 1　三點 A, B, C 在與線 u 上。求其第四調和點 D。

問題 1　三線 a, b, c 過與點 U。求其第四調和線 d。

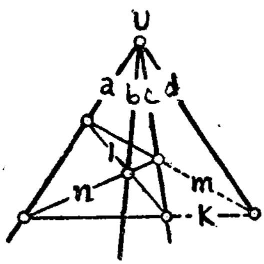


圖 19

解　過 A 任引二線。過 B 任引一線。得交點 N, L。更結 $\overline{CN}$,

解　a 上任取二點。b 上任取一點。結 n, l 直線。更得 c·n,

$\overline{CL}$。交過A點之二線於M,K。結$\overline{MK}$與u之交點卽D點。

問題 2 二點A,B之連線s。有物阻之不能相連。求定線p與s之交點。

$\overset{\bullet}{c}$l。與a線上之二點結m,k。交點m·k與U之聯線卽d線。

問題 2 二線a,b之交點S。有物阻之不能相交。求定點P與S之連線。

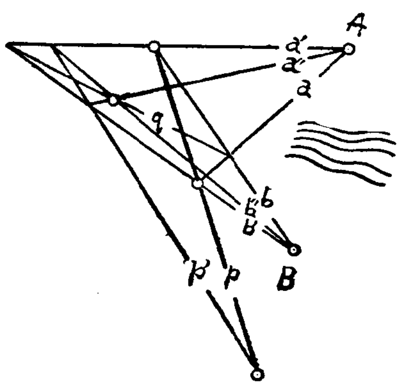


圖 20

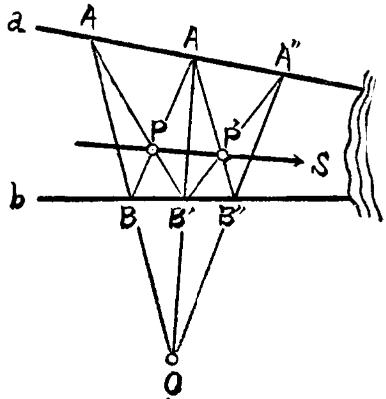


圖 21

解 於p上任取二點。與A,B結aa′, bb′。得a·b, a′·b′之連線q。於q上任取一點。與A,B結a″,b″。得a″·b″, a″·b′之連線p′。p·p′卽所求。

解 過P任引二線。交a,b於AA′,BB′。得$\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$之交點Q。過Q任引一線。交a,b於A″,B″。得$\overline{A'B''}$, $\overline{A''B'}$之交點P′。$\overline{PP'}$卽所求。

第十節 二對元素

定義 5 就點列u上二對之點PP′, QQ′考之。其位置關

係。有次之二種。

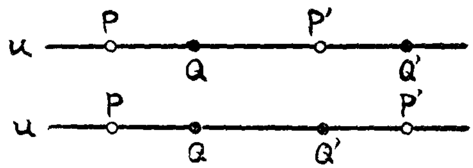


圖 22

I. 動點 P 到 P′ 時。必經過 Q,Q′ 之一。

II. 動點 P 到 P′ 時。經過 Q,Q′ 或不過 Q, Q′。

第一種之二個點對互相分。稱橢圓的二點對。

第二種之二個點對不相分。稱雙曲的二點對。

線束面束。亦有同樣之線對面對。

定理 6　直線上四點 A, B, C, D 順列時。則二個點對 AC•BD 爲橢圓的。

定理 7　一直線上四點。惟有一組橢圓的二點對。

證　一直線上順列四點 A, B, C, D。得分爲 AB•CD, AC•BD, AD•BC 三組二點對。其中二組爲雙曲的。惟一組 AC•BD 爲橢圓的。

定理 8　二點對爲橢圓的或雙曲的。施截斷射影。其性質不變。即所謂射影的性質也。

證　二點對 AC•BD 爲橢圓的。由 S 射影之二線對 ac•bd 亦橢圓的。此四線以線 u′ 截斷之。二點對 A′C′•B′D′ 亦橢圓的。

系　線束,面束有同樣之性質。

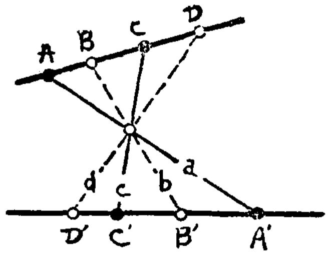


圖 23

第十一節　共軛元素對

定理 9　調和點列ABCD。其二點對AC·BD爲楕圓的。

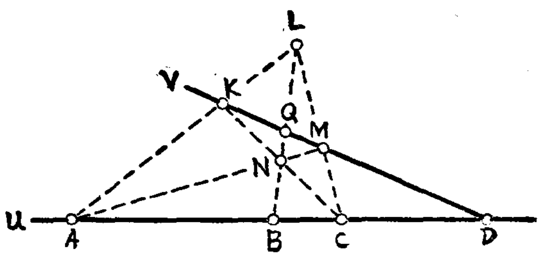


圖 24

證　在直線V上。A,B,CD四點

由L射影之。得點列K,Q,M,D。

由N射影之。得點列M,Q,K。D。

今於V上之四點。考其孰爲楕圓的二點對。

先設二點對KQ,MD爲楕圓的。由定理8施二回射影。得二點對MQ·KD亦楕圓的。是背定理7。

次設二點對KD·QM爲楕圓的。則二點對MD·QK亦楕圓的。是不合理。

故由定理7。知二點對KM·QD爲楕圓的。

故由定理8。知二點對AC·BD爲楕圓的。

定理10　ABCD爲調和點列。則ADCB, CBAD, CDAB亦調和點列。

證　母形KLMN。其二雙對邊各過第一點,第三點。二對角線各過第二點,第四點。

定理11　ABCD爲調和點列。則BADC亦調和點列。

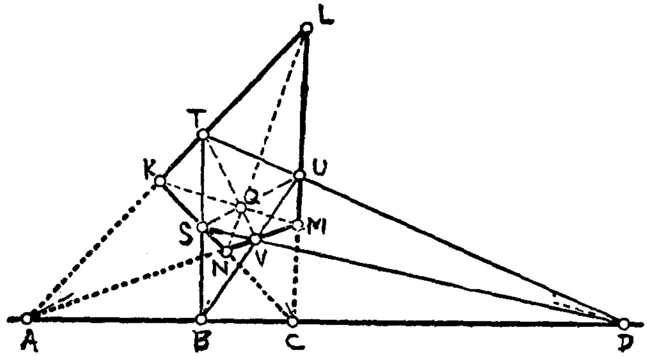


圖 25

證　調和點列ABCD之母形爲KLMN。對角線之交點爲Q。結$\overline{QA}$, $\overline{QC}$交各邊於S,T,U,V。則

$\overline{ST}$爲四角形SKTQ之第二對角線必過B。

$\overline{TU}$爲四角形TLUQ之第二對角線必過D。

$\overline{UV}$爲四角形UMVQ之第二對角線必過B。

$\overline{VS}$爲四角形VNSQ之第二對角線必過D。

故四角形STUV之二雙對邊過B, D。二對角線過A,C。

從而BADC爲調和點列。

定義 6　二個點對AC·BD。稱互共軛或互分調和。

系　調和線束面束有同樣之性質。

第十二節　共軛元素對之定理

定理 12　兩點對 BD·B′D′ 爲橢圓的。同時分調和第三點對不存在。

兩點對BD·B′D′爲雙曲的。同時分調和第三點對存在。

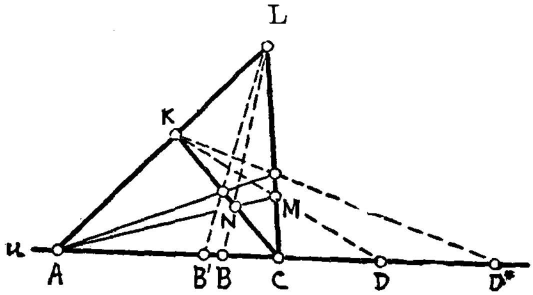


圖 26

證　調和點列ABCD。其母形爲KLMN。

固定其三邊 $\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{NK}$。第四邊 $\overline{MN}$ 迴轉於A點之周圍。則二對角線迴轉於L,K之周圍。B,D同時動於u上。而B,D無論何位置。常與固定點對AC分調和

次考B,D之運動。

動邊 $\overline{MN}$ 在 $\overline{AC}$ 之位置。則B,D合於C。

動邊離 $\overline{AC}$ 向 $\overline{AL}$ 而進。則兩點向反對之向CBB′, CDD′

而進。即 B,D 俱離 C 向 A 而行。動邊愈近於 $\overline{AL}$。則 B,D 愈近於 A。動邊合於 $\overline{AL}$。則 B,D 合於 A。

故兩動點與 A,C 之距離。近則俱近。遠則俱遠。

任取兩動點之二位置如 B,D, B',D' 考之。而二點對 BD·B'D' 必爲雙曲的。不爲橢圓的。

故雙曲的二點對 BD·B'D'。同時分調和第三點對 A C 存在。而橢圓的則否。

系　二個之線對面對有同樣之性質。

第十三節　調和圖形計量的性質

定理13　一直線上任意二點 A, C。與其中點 B, 及無窮遠點 D 分調和。

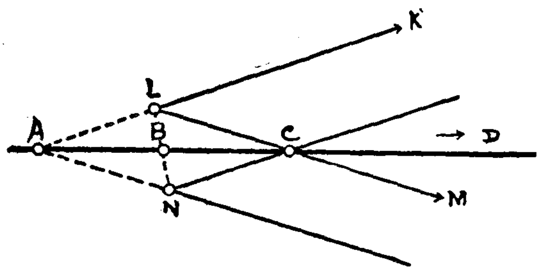


圖 27

證　以 AC 爲對角線作平行四角形 ALCN。則 $\overline{LN}$ 過 B 而母形之二頂點 K, M 在無窮遠。故第四點 D 亦在無窮遠。

定理14　$\hat{ac}$ 之二等分線 b,d。與 a,c 分調和。

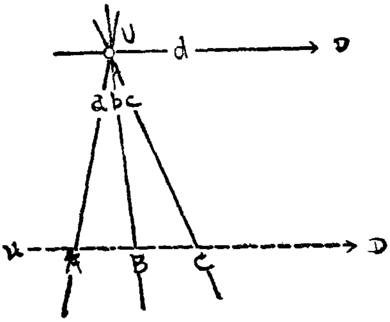
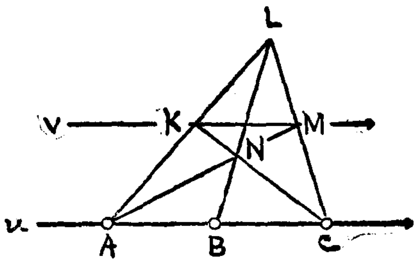


圖 28

證　作直線 u 平行於 d 而截斷此線束。則三角形 UAC 爲二等邊。故 b 過線分 A C 中點B。又 d 與 $\overline{AC}$ 交於無窮遠點D。由定理 13 知 A B C D 爲調和點列。故 a b c d 爲調和線束。

系　調和線束 a b c d。若 b,d 互垂直。則 b,d 平分 a,c 之交角。

問題 3　已知線分AC及其中點B。試過他點K引$\overline{AC}$之平行線(不用圓規)。



解　於連線 $\overline{AK}$ 上任取一點 L。結 $\overline{BL}$, $\overline{CL}$。又結 $\overline{CK}$

交 $\overline{BL}$ 於 N。結 $\overline{AN}$ 交 $\overline{CL}$ 於 M。連線 $\overline{KM}$ 卽所求。

問題 4　已知平行二直線 u,v。求二等分其一之線分 AC。(不用圓規。)　(29 圖)

解　於同平面上任取一點 L。結 $\overline{LA}$, $\overline{LC}$ 交 V 於 K, M。結 $\overline{AM}$, $\overline{CK}$。得交點 N。結 $\overline{LN}$ 交 u 於 B。卽所求之分點。

問題 5　過一點 U 之三線 b, c, d 定時。求其第四調和線 a。 (28 圖)

解　任引一線 u 平行於 d。截 b, c 於 BC。延長線分 CB。截線分 BA 等於 CB。得 A 點。$\overline{UA}$ 卽所求之 a。

問題 6　直線 u 上有三與點 A, B, C。求第四調和點 D。

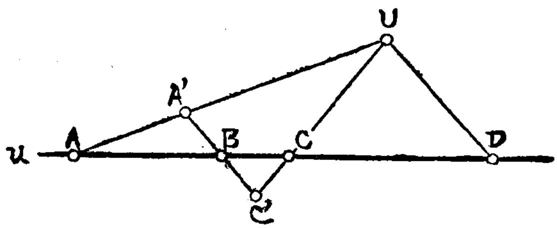


圖 30

解　過 B 任引一直線。於其線上截線分 C'B 等於 BA'。結 $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$ 得交點 U。過 U 引 $\overline{UD}$ 平行於 $\overline{A'C'}$。交 u 於 D。卽得。

問題 7　ABCD 爲調和點列。則線分 AB : BC = AD : CD。(30 圖)

證　ABCD 由一點 U 射影之。過 B 引直線平行於 $\overline{CD}$。交 $\overline{UA}$, $\overline{UC}$ 於 A', C'。則

$\triangle AA'B \backsim AUD$。 $\qquad \dfrac{AB}{A'B}=\dfrac{AD}{UD}$。

$\triangle BCC' \backsim DCU$。 $\qquad \dfrac{BC}{BC'}=\dfrac{CD}{UD}$。

故 $$\frac{AB}{A'B}:\frac{BC}{BC'}=\frac{AD}{UD}:\frac{CD}{UD}.$$

然 $$A'B=BC'。\quad UD\equiv UD.$$

故 $$AB:BC=AD:CD.$$

問題 8 ABCD爲調和列點。線分 BD 之中點爲 M。則線分 BM 爲線分 AM, CM 之比例中項。(31圖)

證 由問題7。得 $AB:BC=AD:CD$。

卽 $$AM-BM:BM-CM=AM+MD:CM+MD.$$

然 $$BM=MD.$$

故 $$AM:BM=BM:CM.$$

問題 9 調和點列ABCD之三線分 AB, AC, AD成調和級數。卽 $\dfrac{1}{AB}-\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{AC}-\dfrac{1}{AD}$。 (31圖)

證 由問題7得 $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{CD}{AD}$。

卽 $$\frac{AC-AB}{AB}=\frac{AD-AC}{AD}.$$

卽 $$\frac{AC}{AB}-1=1-\frac{AC}{AD}.$$

故 $$\frac{1}{AB}-\frac{1}{AC}=\frac{1}{AC}-\frac{1}{AD}.$$

問題 10 abcd爲調和線束。則

$$\sin\widehat{ab}:\sin\widehat{bc}=\sin\widehat{ad}:\sin\widehat{cd}.$$

證 作直線 u 截斷此線束。得調和點列 ABCD。則線分

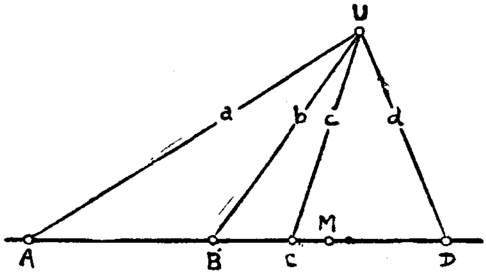


圖 31

$$AB:BC=\triangle UAB:\triangle UBC$$
$$=\tfrac{1}{2}UA\cdot UB\sin\widehat{ab}:\tfrac{1}{2}UB\cdot UC\sin\widehat{bc}$$
$$=UA\sin\widehat{ab}:UC\sin\widehat{bc}。$$

同理。 $AD:CD=UA\sin\widehat{ad}:UC\sin\widehat{cd}$。

然 $$AB:CB=AD:CD。$$

故 $$UA\sin\widehat{ab}:UC\sin\widehat{bc}=UA\sin\widehat{ad}:UC\sin\widehat{cd}。$$

即 $$\sin\widehat{ab}:\sin\widehat{bc}=\sin\widehat{ad}:\sin\widehat{cd}。$$

問題11　a b c d 爲調和線束。m 爲 $\widehat{ac}$ 之二等分線。則

$$\tan\widehat{mb}:\tan\widehat{mc}=\tan\widehat{mc}:\tan\widehat{md}。\qquad (31\text{ 圖})$$

證 $$\sin\widehat{ab}:\sin\widehat{bc}=\sin\widehat{ad}:\sin\widehat{cd}。$$

則 $$\frac{\sin\widehat{ab}+\sin\widehat{bc}}{\sin\widehat{ab}-\sin\widehat{bc}}=\frac{\sin\widehat{ad}+\sin\widehat{cd}}{\sin\widehat{ad}-\sin\widehat{cd}}。$$

即 $$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\widehat{ab}+\widehat{bc})\cos\frac{1}{2}(\widehat{ab}-\widehat{bc})}{2\cos\frac{1}{2}(\widehat{ab}+\widehat{bc})\sin\frac{1}{2}(\widehat{ab}-\widehat{bc})}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\widehat{ad}+\widehat{cd})\cos\frac{1}{2}(\widehat{ad}-\widehat{cd})}{2\cos\frac{1}{2}(\widehat{ad}+\widehat{cd})\sin\frac{1}{2}(\widehat{ad}-\widehat{cd})}.$$

卽 $$\frac{\sin\widehat{mc}\cos\widehat{mb}}{\cos\widehat{mc}\sin\widehat{mb}}=\frac{\sin\widehat{md}\cos\widehat{mc}}{\cos\widehat{md}\sin\widehat{mc}}.$$

卽 $$\frac{\tan\widehat{mc}}{\tan\widehat{mb}}=\frac{\tan\widehat{md}}{\tan\widehat{mc}}.$$

問題 12　abcd 爲調和線束。則

$$\frac{1}{\tan\widehat{ab}}-\frac{1}{\tan\widehat{ac}}=\frac{1}{\tan\widehat{ac}}-\frac{1}{\tan\widehat{ad}}。\qquad (31\ 圖)$$

證　$$\sin\widehat{ab}:\sin\widehat{bc}=\sin\widehat{ad}:\sin\widehat{cd}。$$

則　$$\frac{\sin\widehat{ab}}{\sin(\widehat{ab}-\widehat{ac})}=\frac{\sin\widehat{ad}}{\sin(\widehat{ac}-\widehat{ad})}。$$

卽　$$\frac{\sin\widehat{ab}}{\sin\widehat{ab}\cos\widehat{ac}-\cos\widehat{ab}\sin\widehat{ac}}=\frac{\sin\widehat{ad}}{\sin\widehat{ac}\cos\widehat{ad}-\cos\widehat{ac}\sin\widehat{ad}}。$$

反商之。得 $\cos\widehat{ac}-\cot\widehat{ab}\sin\widehat{ac}=\sin\widehat{ac}\cot\widehat{ad}-\cos\widehat{ac}$。

卽　$$2\cos\widehat{ac}=(\cot\widehat{ab}+\cot\widehat{ad})\sin\widehat{ac}。$$

卽　$$2\cot\widehat{ac}=\cot\widehat{ab}+\cot\widehat{ad}。$$

故　$$\frac{1}{\tan\widehat{ab}}-\frac{1}{\tan\widehat{ac}}=\frac{1}{\tan\widehat{ac}}-\frac{1}{\tan\widehat{ad}}。$$

題問 13　問題10至12可擴張之於調和面束。

證　垂直於面束之軸作平面 σ 截斷之。則線束 σ 各線所夾之角。爲其對應二面角之平面角。

第三章
第一級圖形之射影的關聯

第十四節　配景位置

定義 1　兩個關聯圖形各雙對應元素之連線過同一點。則此等圖形在配景位置。此交點稱配景心。

之交點在一直線上。則此等圖形在配景位置。此線稱配景軸。

配景之記號爲$\barwedge$。

例如下圖

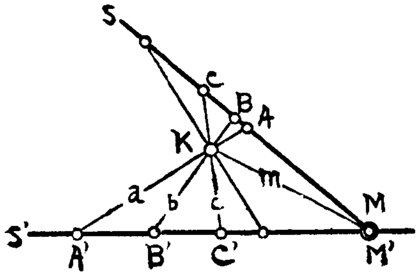


圖 32

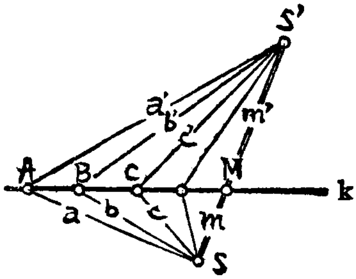


圖 33

$s(ABC\cdots\cdots)\barwedge K(abc\cdots\cdots)$

$K(abc\cdots\cdots)\barwedge s'(A'B'C'\cdots\cdots)$

$s(ABC\cdots\cdots)\barwedge s'(A'B'C'\cdots\cdots)$

K稱配景心。

$S(a\,b\,c\cdots\cdots)\barwedge k(ABC\cdots\cdots)$。

$k(ABC\cdots\cdots)\barwedge S'(a'b'c'\cdots\cdots)$。

$S(a\,b\,c\cdots\cdots)\barwedge S'(a'b'c'\cdots\cdots)$。

k稱配景軸。

由上定義。得基礎圖形在配景位置者。有次之各種。

線束與其所截斷之點列。

面束與其所截斷之點列。

點列與其所射影之線束。

點列與其所射影之面束。

面束與其所截斷之線束。	線束與其所射影之面束。
同線束所截斷之二個點列。	同點列所射影之二個線束。
同面束所截斷之二個點列。	同點列所射影之二個面束。
同面束所截斷之二個線束。	同線束所射影之二個面束。

第十五節　射影的關聯

定義 2　連續數個配景的關聯圖形。其中任意二個圖形互關聯。稱此關聯爲射影的關聯。

例如35圖。

$$
\begin{aligned}
S(a\,b\,c\,d) &\barwedge s\,(A\,B\,C\,D)\\
&\barwedge S_1\,(a_1b_1c_1d_1)\\
&\barwedge s'\,(A'B'C'D')\\
&\barwedge S'\,(a'b'c'd')。
\end{aligned}
$$

則五圖形中任取二圖形如 $S\,(a\,b\,c\,d)$, $s'\,(A'B'C'D')$ 有射影的關聯。以

$$S(a\,b\,c\,d) \barwedge s'\,(A'B'C'D')$$

記之。

系 1　配景的關聯者。射影的關聯之特別場合也。

系 2　二個圖形各與第三個圖形有射影的關聯。則前二圖形亦互爲射影的關聯。

系 3　二個射影的關聯之圖形。其一形爲調和羣。則他形亦以調和羣對應。

系 4　二個互關聯之圖形。其一形之調和羣。他形以調和羣對應。則此兩形有射影的關聯。

第十六節　順次的關聯

定理 1　有射影的關聯二個一級圖形。一形之各元素與他形之對應元素。其排列次序相同。

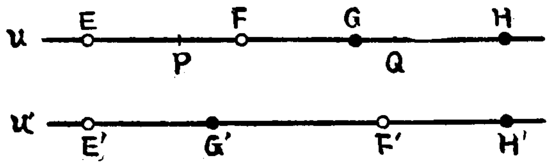


圖 34

證　就二個射影的點列u, u'考之。

在u上取順列四點 E, F, G, H。在u'上E,' F,' G,' H'排列之次序。若不爲E' F' G' H'而爲E' G' F' H'。則二點對EF·GH爲雙曲的。同時分調和第三點對PQ存在(12節定理)。

然u,u'互射影的。從而二點對E'F'·G'H'對於第三點對P'Q'同時分調和。是背12節定理。

故E'G'F'H'之序列不合理。

線束面束。得依同理證之。

第十七節　射影的關聯之作圖

定理 2　二個一級圖形有對應三元素。得定爲射影的關聯。

射影的關聯之記號爲⊼。

本題分二種解之。

一平面上

線束S之三線 a, b, c。各對應於線束S′之三線a′,b′,c′。定兩束爲射影的關聯。

點列s之三點A, B, C。各對應於點列s′之三點A′,B′,C′。定兩列爲射影的關聯。

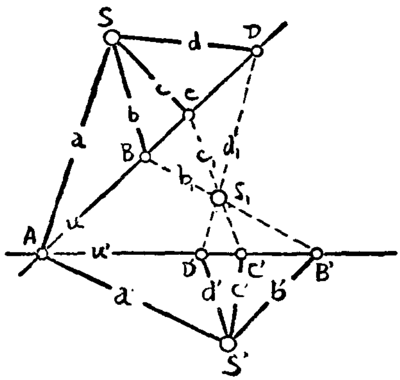


圖 35

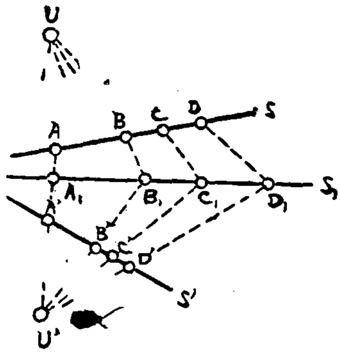


圖 36

解　過一雙對應線a a′之交點A。任引二助線u,u′。得二點列u(ABC),u′(A′B′C′)

而B, B′之連線b_1與C, C′之連線C_1。得交點S_1。

解　在一雙對應點AA′之連線a上。任取二助點U,U′。得二線束U (a b c), U′ (a′ b′ c′)。

而b, b′之交點B_1。與c, c 之交點C_1。得連線s_1。

則　$S(abc) \overline{\wedge} S_1(a_1b_1c_1)$

$\overline{\wedge} S'(a'b'c')$。

從而　$S(abc) \overline{\wedge} S'(a'b'c')$。

此二線束對應於助線束各線d_1之d,d'。卽其對應線。

則　$s(ABC) \overline{\wedge} s_1(A_1B_1C_1)$

$\overline{\wedge} s'(A'B'C')$

從而　$s(ABC) \overline{\wedge} s'(A'B'C')$。

此二點列對應於助點列各點D_1之D,D'。卽其對應點。

第十八節　基礎定理

定理 3　射影的關聯二個一級圖形。有三雙對應元素相重時。則他雙對應元素悉相重。卽兩圖形爲同物。

設二個射影的點列u, u'三雙對應點AA', BB', CC'相一致。

證　在u, u'線上求A, B, C及A', B', C'之第四調和點。各得三點。*此三雙之點各相重(第7節定理4)。且爲二點列u, u'對應點(第15節系3)。

再於u, u'線上求前六點(A, B, C三點加第四調和點三點)之第四調和點。各得九個新點。此九雙新點各相重。且爲點列u, u'對應點。

遞次如斯。可得無數之對應點各相重。

故點列u, u'對應點均重合。

線束面束,得以同理證之。

* 卽求ABC, ACB, BAC之第四調和點。

第十九節 配景定理

定理 4 點列u與其射影的線束U。有三雙對應元素A,B,C;a,b,c相重。則兩者在配景位置。

證 由定理3。知對應元素a, b, c, d……與A, B, C, D……相重。即各射線均過其對應點。故在配景位置。

系 線束S與其射影的面束s有三雙對應元素相重。則兩者在配景位置。

定理 5

一平面上

二個互射影的點列

s(ABM)⊼s′(A′B′M′)。

其一雙對應點M, M′一致。則兩者在配景位置。(32圖)

證 對應點AA,′ BB′之連線爲a, b。得交點K。則此二點列共爲線束K之截斷。故配景。

二個互射影的線束

S(a b m)⊼S′(a′b′m′)。

其一雙對應線m, m′一致。則兩者在配景位置。(33圖)

證 對應線aa′,bb′之交點爲A, B。得連線k。則此二線束共爲點列k之射影。故配景。

系 二射影的平面束v, v′。其一雙對應面σ, σ'相一致。則兩者在配景位置。

定理 6

一平面上

二個互射影的點列

s(ABC)⊼s′(A′B′C′)。

二個互射影的線束

S(a b c)⊼S′(a′b′c′)。

其三雙對應點之連線過同一點K。則兩者在配景位置。(32圖)

證　兩點列s,s′乃同線束K所截斷。故配景。

其三雙對應線之交點在一直線k上。則兩者在配景位置。(33圖)

證　兩線束S,S′乃同點列k所射影。故配景。

問題1　某平面上二個三角形ABC, A′B′C′。

其三雙對應頂點AA′,BB′,CC′之連線過同一點U。則三雙對應邊(BC,B′C′)(CA,C′A′)(AB,A′B′)之交點在一直線u上。

其三雙對應邊(BC, B′C′) (CA, C′A′)(AB,A′B′)之交點在一直線u上。則三雙對應頂點AA′,BB′,CC′之連線過同一點U。

證　先證左方。右方得以同樣解之。　(13圖)

線束U爲二線BC,B′C′所截斷。得配景的二點列。各由二點A,A′射影之。得射影的二線束。然此線束一雙對應線$\overline{AA'}$一致。故在配景位置。從而其對應線(AB, A′B′) (AC, A′C′) (AX A′X)*必相交於配景軸u上。卽(CA, C′A′) (AB,A′B′) (BC, B′C′)交點在一直線u上。

第二十節　四元素之羣

定理7　一級圖形順列四元素之羣。其中兩組二元素各同時互交換之。與原圖形爲射影的。

---

* X爲$\overline{BC}$,$\overline{B'C'}$之交點。卽點列BC,B′C′之對應點。從而$\overline{AX}$,$\overline{A'X}$爲二線束A,A′之對應線。

例如點列ABCD。則 ABCD $\barwedge$ BADC $\barwedge$ CDAB $\barwedge$ DCBA。

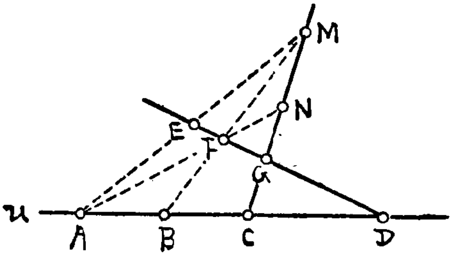


圖 37

證　由 u 線外取一點 M 射影之。過 D 引直線截射線於 E,F,G,D。結 $\overline{AF}$ 交 $\overline{MC}$ 於 N。則

$$ABCD \barwedge EFGD \quad \text{(同線束M所截斷)}$$

$$\barwedge MNGC \quad \text{(同線束A所截斷)}$$

$$\barwedge BADC \quad \text{(同線束F所截斷)}$$

故　$ABCD \barwedge BADC$。

其餘得以同理證之。

同樣得證線束,面束。

第二十一節　複比

定義 3　點列四點 A B C D 所作之比 $\dfrac{AB}{CB} : \dfrac{AD}{CD}$。稱爲此點列之複比。* 以(A B C D)表之。†

---

* 複比亦稱非調和比(Anharmonic),十字比,叉比(cross ratio)等。德文稱爲(Doppel Verhältuiss)。故譯複比。與算術之複比不同。

† 多數幾何學從克來莫拿(Cremona)之法則。(ABCD)之記號。其點列次序爲ACBD。不爲ABCD。與本書稍異。宜注意。

線束四線 a, b, c, d 所作之比 $\dfrac{\sin\widehat{ab}}{\sin\widehat{cb}}:\dfrac{\sin\widehat{ad}}{\sin\widehat{cd}}$ 稱此線束之複比。以 (a b c d) 表之。

面束四線 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 所作之比 $\dfrac{\sin\widehat{\alpha\beta}}{\sin\widehat{\gamma\beta}}:\dfrac{\sin\widehat{\alpha\delta}}{\sin\widehat{\gamma\delta}}$。稱此面束之複比。以 $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ 表之。

定理 8　二個射影的圖形。其一形任意四元素之複比。等於他形對應四元素之複比。

證　先取在配景位置之點列 A B C D 與線束 a b c d 證之。(31 圖)

$$\frac{AB}{CB}=\frac{\triangle UAB}{\triangle UCB}=\frac{UA\cdot UB\sin\widehat{ab}}{UC\cdot UB\sin\widehat{cb}}=\frac{UA\sin\widehat{ab}}{UC\sin\widehat{cb}}。$$

同理。
$$\frac{AD}{CD}=\frac{UA\sin\widehat{ad}}{UC\sin\widehat{cd}}。$$

故
$$\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}=\frac{\sin\widehat{ab}}{\sin\widehat{cb}}:\frac{\sin\widehat{ad}}{\sin\widehat{cd}}。$$

即
$$(ABCD)=(abcd)。$$

應用上式。得　(35 圖)

$(a\,b\,c\,d)=(ABCD)=(a_1b_1c_1d_1)=(A_1B_1C_1D_1)=(a'b'c'd')$。

定理 9　$(ABCD)=(\widehat{BA}\widehat{DC})=(\widehat{CD}AB)=(D\widehat{CB}A)$。

證　$(BADC)=\dfrac{BA}{DA}:\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{-AB}{-CB}:\dfrac{-AD}{-CD}=\dfrac{AB}{CB}:\dfrac{AD}{CD}$。

故
$$(BADC)=(ABCD)。$$

同理。$(CDAB)=(ABCD)$, $(DCBA)=(ABCD)$。

問題 2　設 $(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=DCBA)=\lambda$。

則 $(ADCB)=(DABC)=(CBAD)=(BCDA)=\frac{1}{\lambda}$。

$(ACBD)=(CADB)=(BDAC)=(BCDA)=1-\lambda$。

$(ADBC)=(DACB)=(BCAD)=(CBDA)=\frac{1}{1-\lambda}$。

$(ACDB)=(CABD)=(DBAC)=(BDCA)=\frac{\lambda-1}{\lambda}$。

$(ABDC)=(BACD)=(DCAB)=(CDBA)=\frac{\lambda}{\lambda-1}$。

證 $(ADCB)=\frac{AD}{CD}:\frac{AB}{CB}=\frac{1}{\lambda}$。

$$
\begin{aligned}
(ACBD)&=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}\\
&=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}\\
&=\frac{(AB+BC)(CD+BC)}{BC\cdot AD}\\
&=\frac{AB\cdot CD+BC\cdot CD+AB\cdot BC+BC^2}{BC\cdot AD}\\
&=\frac{AB\cdot CD}{BC\cdot AD}+\frac{BC(CD+AB+BC)}{BC\cdot AD}\\
&=-\lambda+\frac{BC\cdot AD}{BC\cdot AD}\\
&=1-\lambda。
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ACDB)&=\frac{AC}{DC}:\frac{AB}{DB}\\
&=\frac{DB\cdot AC}{AB\cdot DC}\\
&=\frac{(CB+DC)(AD+DC)}{AB\cdot DC}\\
&=\frac{CB\cdot AD}{AB\cdot DC}+\frac{DC(AD+CB+DC)}{AB\cdot DC}\\
&=-\frac{1}{\lambda}+\frac{DC\cdot AB}{AB\cdot DC}=\frac{\lambda-1}{\lambda}。
\end{aligned}
$$

問題 3　若 $(ABCD)=-1$。則 ABCD 爲調和點列。

證
$$(ABCD)=\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}=-1。$$

即
$$\frac{AB}{-CB}=\frac{AD}{CD}。$$

即
$$AB:BC=AD:CD。$$

故 ABCD 爲調和點列。

問題 4　若 ABCD 爲調和點列。即

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)=-1。$$

則
$$(ADCB)=(DABC)=(CBAD)=(BCDA)=-1。$$

$$(ACBD)=(CADB)=(BDAC)=(BCDA)$$

$$=(ADBC)=(DACB)=(BCAD)=(CBDA)=2。$$

$$(ACDB)=(CABD)=(DBAC)=(BDCA)$$

$$=(ABDC)=(BACD)=(DCAB)=(CDBA)=\frac{1}{2}。$$

證　以 -1 代入問題 2 之 λ。即得。

第四章
對合
第二十二節　同臺之射影的關聯

玆解同臺射影的關聯圖形二三問題於下。以確實其概念。

問題 1　五點MABA′B′在一直線t上。今以t為臺作二點列。使三點MAB對應於MA′B′定射影的關聯。

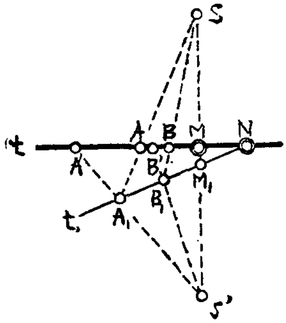


圖 38

解　過M之任意線上取二點S,S′。由S射影MAB。S′射影MA′B′。

作助點列　$t_1(M_1A_1B_1)$。

則　$t_1(M_1A_1B_1)\begin{cases}\doublebarwedge t(MAB)\\ \doublebarwedge t(MA'B')\text{。}\end{cases}$

故　$t(MAB)\barwedge t(MA'B')$。

問題 1　五線maba′b′過同一點T。今以T為心作二線束。使三線mab對應於ma′b′定射影的關聯。

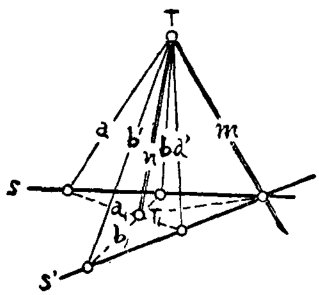


圖 39

解　過m上之任意點引二線s,s′。以s截斷mab。s′截斷ma′b′。

作助線束　$T_1(m_1a_1b_1)$。

則　$T_1(M_1a_1b_1)\begin{cases}\doublebarwedge T(mab)\\ \doublebarwedge T(ma'b')\text{。}\end{cases}$

故　$T(mab)\barwedge T(ma'b')$。

定義 1　上圖之 M, N, m, n。乃同臺上射影的關聯圖形對應元素相重。稱貳重元素。

貳重元素最多只有二個。因若有三個貳重元素。則兩圖形爲同物(第18節定理3)。故貳重元素之數有三種。

I. 有二個貳重元素。稱雙曲的關聯。

II. 只一個貳重元素。稱拋物的關聯。

III. 無一個貳重元素。稱橢圓的關聯。

問題 2　在線 t 上有橢圓的二點對 MN, M′N′。今求此點對之調和共軛點 AB, A′B′。則得同臺 t 射影的二點列。然此種關聯無貳重點。

問題 2　過 T 點有橢圓的二線對 mn·m′n′。今求此線對之調和共軛線 ab, a′b′。則得同臺 T 射影的二線束。然此種關聯無貳重線。

證　由十五節系 4。易知其爲射影的關聯。所以無貳重元素者。因橢圓的元素對同時分調和第三元素對不存在故也。

第二十三節　對合

定理 1　同臺射影的點列 u, u′。其一雙對應點 A, A′ 二重相對應時。則他雙對應點 P, P′ 亦二重相對應。

證　列 u 之三點 AA′P 各與列 u′ 之三點 A′AP′ 對應。

則

$$u(AA'P)\barwedge u'(A'AP').$$

設 P′ 為列 u 之點。則 P 必為列 u′ 之對應點。因四元素羣有次之關係。

$$AA'PP' \barwedge A'AP'P$$

卽 P,P′ 亦二重相對應。

定義 2　同臺二個射影的圖影。一雙對應元素二重相對應時。此等圖形稱對合。其二重對應元素對。稱共軛元素。

由上定義。定理 1 可改書為

定理 1　同臺二個射影的圖形。其任意二元素 A,A′ 二重相對應時成對合。

定理 2　對合由其二雙共軛元素決定之。

證　以點列為例。線束,面束得以同理求之。

直線 u 上與二雙共軛點 AA′, PP′。則

$$AA'P \barwedge A'AP'。$$

然此二點列三雙對應點已定。則其射影的關聯。亦從之而定。

定義 3　共軛元素相一致時。稱對合之貳重元素。

對合有二個貳重元素。稱雙曲的對合。

只有一個貳重元素。則稱拋物的對合。

無貳重元素者。稱橢圓的對合。

系 1　對合由其二個貳重元素決定之。

系 2　對合由其一個貳重元素及一雙共軛元素決定之。

第二十四節 雙曲的對合定理

定理 3 雙曲的對合二個貳重元素M,N。與各雙共軛元素對AA′分調和。

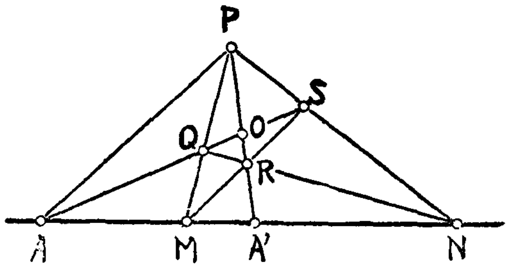


圖 40

證 以雙曲的對合點列爲例。

在直線u上。有

$$AMA'N \barwedge A'MAN。$$

今由u外任意點P射影之。過A任引一直線。截斷此四射線。得點列AQOS。則

$$AQOS \barwedge AMA'N。$$

故
$$AQOS \barwedge A'MAN。$$

然由四元素羣。
$$A'MAN \barwedge ANA'M。$$

故
$$AQOS \barwedge ANA'M。$$

然此射影的關聯。其一雙對應點A,A′一致。故在配景位置。

從而$\overline{QN}$,$\overline{OA'}$,$\overline{SM}$過同一點。名此點爲R。

於是得四角形PQRS。其二雙對邊過M, N。二個對角線過AA′。即AMA′N爲調和點列。

第二十五節　完全四角形定理

定理 4

在某平面上

任引一直線u。其與完全四角形PQRS三雙對邊之交點爲AA′,BB′, CC′。*成對合共軛點對。

任取一點U。其與完全四邊形pqrs三雙對點連線爲a a′,b b′, c c′。* 成對合共軛線對。

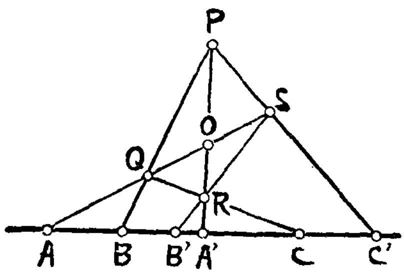


圖 41

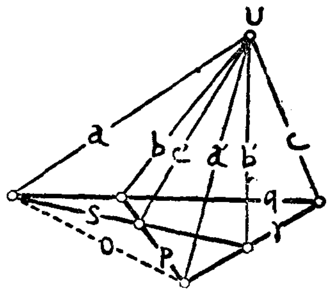


圖 42

證　$AA'BC' \doublebarwedge AOQS$。

$AOQS \doublebarwedge AA'CB'$。

$AA'CB' \barwedge A'AB'C$。

故　$AA'BC' \barwedge A'AB'C$。

而u上二點列

$ABC \barwedge A'B'C'$

又點對AA′二重相對應。

故兩點列成對合。

證　$aa'bc' \doublebarwedge aoqs$。

$aoqs \doublebarwedge aa'cb'$。

$aa'cb' \barwedge a'ab'c$。

故　$aa'bc' \barwedge a'ab'c$

而過U二線束

$abc \barwedge a'b'c'$。

又線對aa′二重相對應。

故兩線束成對合。

* 此六點亦稱六點形

* 此六線亦稱六線形

第二十六節　點對合之計量的性質

定義 4　在對合點列中。無窮遠點之共軛點。稱對合中心。

定理 5　點對合由其中心至任意共軛點對距離之積有定值。

證　任取三雙共軛點 AA', BB', OO' 考之。得

$$AOBO' \barwedge A'O'B'O。$$

以複比表之。得

$$\frac{AO}{BO} : \frac{AO'}{BO'} = \frac{A'O'}{B'O'} : \frac{A'O}{B'O}。$$

若 O' 點在無窮遠。則 O 點爲對合中心。

則上式變爲
$$\frac{AO}{BO} = \frac{B'O}{A'O}。$$

卽
$$AO \cdot A'O = BO \cdot B'O。$$

定義 5　此定值名對合常數。

定義 6　過二定點之圓集合成圓束。

定理 6　任意直線截圓束成對合點列。

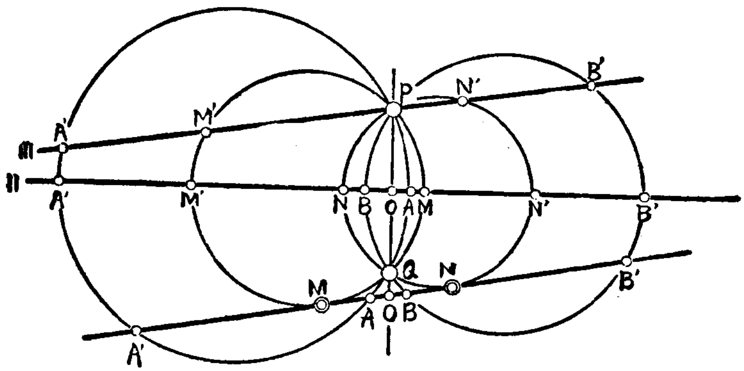


圖 43

證
$$OP\cdot OQ=OA\cdot OA'$$
$$=OB\cdot OB'$$
$$=OC\cdot OC'$$
$$=\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

系　上圖截線之位置有三種。

I.　二點P,Q在O之同側。

則對合常數$OP\cdot OQ$爲某正數a^2。即

$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=a^2。$$

又過P,Q可作二圓切於截線。設其切點爲M,N。則

$$OM^2=ON^2=a^2。$$

故M,N爲貳重點。

從而此種爲雙曲的。

II.　二點P,Q在O之異側。

則對合常數$OP\cdot OQ$爲某負數。其平方根爲虛數。故不有貳重點,即此種對合爲橢圓的。

III.　點O合於P或Q。

則對合常數$OP\cdot OQ$等於零。

各雙共軛點AA'。其一點A常重於P或Q。

從而只此P或Q爲貳重點。故此種對合爲拋物的。

第二十七節　線對合之計量的性質

定理 7　對合線束常有一雙垂直共軛線。

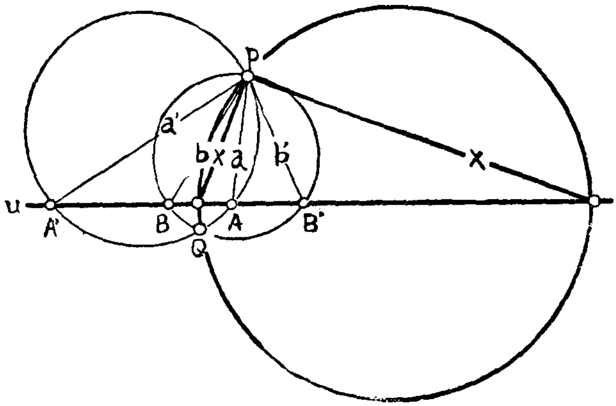


圖 44

證　所與線對合爲 P(aa'bb')。任意直線 u 截斷之。得點列 u(AA'BB')。

畫二圓 PAA', PBB'。得其第二交點 Q。則 PQ 爲臺之圓束中。必有一圓其中心在 u 線上。此圓與 u 之交點 X, X' 爲共軛點。由 P 射影之。則射線 x, x' 互垂直。即所要之共軛線對。

定義 7　x, x' 稱對合軸。

問題 3　雙曲的對合線束 P 之對合軸。必平分其貳重線 m.n 之夾角。

證 $mxnx'$ 爲調和線束(定理3)。而 x 垂直於 x'。故 x, x' 平分 m,n 之夾角(第13節系)。

定理 8 對合線束 P 有二雙垂直共軛線時。則他雙共軛線亦互垂直。

證 二雙共軛線 aa', bb' 各互垂直。以任意直線 u 截斷之。得點對 AA', BB'。

畫二圓 PAA', PBB'。得其第二交點 Q。

然 P,Q 關於截線 u 在對稱位置。

從而圓束 PQ 之圓心均在 u 線上。

故各雙共軛線互垂直。

定義 8 此種對合稱垂直對合或圓的對合。

第五章

射影的一級圖形之產物(其一)

第二十八節　新圖形

定義 1　二個射影的圖形。其元素各爲一與一相對應。此對應二元素。由截斷或射影定一新元素。由此無數對應元素對生無數新元素。乃成一新圖形。名此新圖形爲射影的圖形之產物

例和　二個射影的點列

$$u(ABC\cdots\cdots)\barwedge u'(A'B'C'\cdots\cdots).$$

其對應點對由射影之術得連線

$$\overline{AA'},\overline{BB'},\overline{CC'},\cdots\cdots$$

此等直線集合遂成一點列 u, u′ 所產出之新圖形。

本章專就在同一平面上或屬於一把之二個射影的圖形而論其產物。其一般場合。俟於第七章詳論之。

第二十九節　二次點列,二次線束

定義 2　在同平面上不同心不在配景位置二個射影的線束。其對應線之交點所成圖形稱二次點列。

定義 2　在同平面上不同臺不在配景位置二個射影的點列。其對應點之連線所成圖形稱二次線束。

其記號爲k^2(ABC……)或k^2。

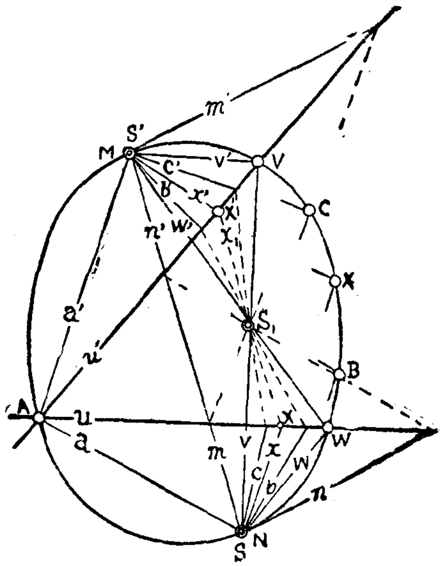


圖 45

與二個射影的線束S,S′之三雙對應線aa′, bb′, cc′。

過一雙對應線aa′之交點A。引二助線u,u′。

作助線束S_1相當於線束S_1之各線x_1。在兩束S,S′各得一線x,x′。即對應線對。此等線對交點之集合。即成二次點列。

定理 1 兩線束之心S,S′。

其記號爲K^2(abc……)或K^2。

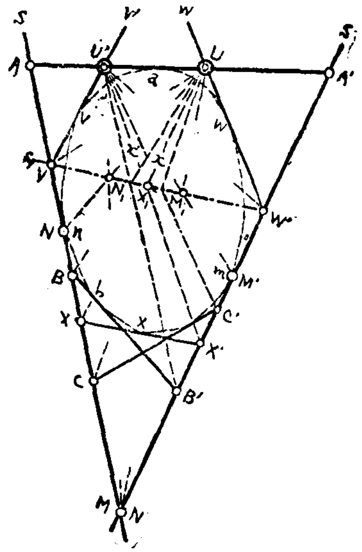


圖 46

與二個射影的點列s, s′之三雙對應點AA′,BB′,CC′。

在一雙對應點AA′之連線a上。取二助點U,U′。

作助點列s_1。相當於點列s_1之各點X_1。在兩列s,s′各得一點X,X′。即對應點對。此等點對連線之集合。即成二次線束。

定理 1 兩點列之臺s,s′。

亦爲k^2之元素。　(45圖)

證　連線$\overline{SS'}$視爲束S之一線m。作其對應線m'。

則m,m'之交點M與S'一致。卽S'爲k^2之一點。

同理S亦然。

定理2　二次點列在同直線上之點。不能多於二。(45圖)

證　若有三點在一直線上。則線束S,S'在配景位置。

亦爲K^2之元素。　(46圖)

證　交點$\dot{ss'}$視爲列s之一點M。作其對應點M'。

則M,M'之連線m與s'一致。卽s'爲K^2之一線。

同理s亦然。

定理2　二次線束過同一點之線。不能多於二。(46圖)

證　若有三線過同一點。則點列s,s'在配景位置。

此種點列,線束有此特徵。故冠以二次之名。因此以前所論之點列線束。稱一次點列,一次線束。

定理3　二次點列之點,在$\overline{SS'}$之對應線m',n'上。只有一個。　(45圖)

證　二次點列之點。在線x上本有二個。S及X是也。

惟m,n則否。其一點M,N合於S',S。

故只有一點。

定理3　二次線束之線,過$\dot{ss'}$之對應點M',N'。只有一個。　(46圖)

證　二次線束之線,過點X本有二個。s及x是也。

惟M,N則否。其一線m,n合於s',s。

故只有一線。

定義 3 某直線只含 k^2 之一點時。則稱此線為 k^2 之切線。

定義 3 某點只含 K^2 之一直線時。則稱此點為 K^2 之切點。

定義 4 二次點列之跡(或二次線束之包)成二次曲線。亦稱二級曲線。

附記 I 過二次曲線上一點 S 引各直線 a。則 a 除 S 外尙與曲線交於 A 點。若 a 爲切線。則點 A 合於 S。

動線 a 由切線 n 之位置起。順次迴轉而終於 u。或線束 S。則動點 A 由 S 起。畫曲線全部而終於 S。故二次曲線爲閉曲線。

附記 II.

33 圖

兩線束 S,S′ 若在配景位置。則其對應線之交點。在配景軸 k 及連線 $\overline{SS'}$ 上。因 $\overline{SS'}$ 上各點。可視爲對應線對 m, m′ 之交點。

在此場合。其產物爲二個一次點列 m,k。

故二次點列可分解爲二個一次點列。

32 圖

兩點列 s′s′ 若在配景位置。則其對應點之連線。過配景心 K 及交點 $\dot{ss'}$。因過 $\dot{ss'}$ 各線。可視爲對應點對 M, M′ 之連線。

在此場合。其產物爲二個一次線束 M,K。

故二次線束可分解爲二個一次線束。

附記III

45圖

取助線束S_1之一線$\overline{SS_1}$考之。相當於此線兩線束S,S'之對應線v,v',決定一點V。則此點爲二次點列之一點。又爲助線u與$\overline{SS_1}$之交點。

同理。W爲助線u而$\overline{S_1S'}$之交點。

故助點S_1得由V,W決定之。與點A毫無關涉。

46圖

取助點列s_1之一點$\dot{s}s_1$考之。相當於此點兩點列s,s'之對應點V,V'。決定一線v。則此線爲二次線束之一線。又爲助點U與$\dot{s}s_1$之連線。

同理。w爲助點U與$s_1\dot{s}'$之連線。

故助線s_1得由v,w決定之與線a毫無關涉。

問題 1　某平面上。三角形ASA'之二頂點A,A'。常動於二定線s,s'上他頂點S爲定點。頂角S有定值。則其底邊$\overline{AA'}$畫一二次線束。且此線束含二定線s,s'。

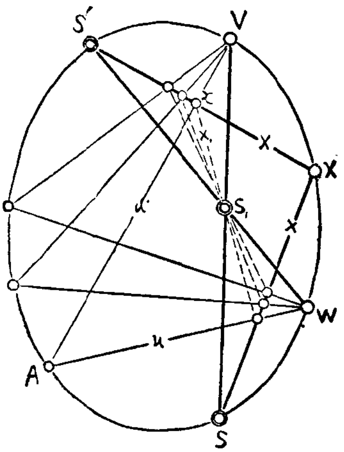
證　角S有定值。故邊$\overline{SA}$所成之線束A與$\overline{SA'}$所成之線束A'爲射影的。從而點列s,s'爲射影的。故其對應點之聯線$\overline{AA'}$畫二次線束。

若A,A'合於ss'之交點。則$\overline{AA'}$合於s,s'。故s,s'爲此線束之射線。

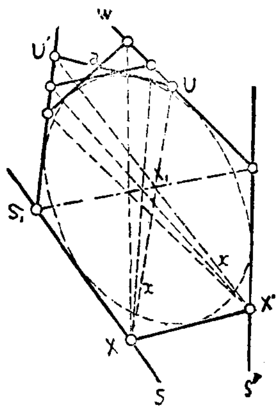
第三十節　史替耨 Steiner 定理

定理 4 由二次點列中任意二點射影其餘各點。得二個射影的線束。

定理 4 由二次線束中任意二線截斷其餘各線。得二個射影的點列。



47 圖



48 圖

證　固定k^2之五點S,S′,V,W,X。(S_1從之亦定。)

點A動於k^2上。則

點X動於線x上。

點X′動於線x′上。

而兩動點X, X′之連線常過S_1。則得

證　固定K^2之五線s,s′,U w,x。(S_1從之亦定。)

線a動於K^2上。則

線x過點X。

線x′過點X′。

而兩動線x,x′之交點常在s_1上。則得

束 $S_1\begin{cases}\barwedge \text{列}\ x \barwedge \text{束}\ W\\ \barwedge \text{列}\ X' \barwedge \text{束}\ V。\end{cases}$

故線束 V,W 爲射影的。

列 $s_1\begin{cases}\barwedge \text{束}\ X \barwedge \text{列}\ w\\ \barwedge \text{束}\ X' \barwedge \text{列}\ u。\end{cases}$

故點列 u,w 爲射影的。

第三十一節　巴斯喀 Pascal 定理

定理 5　由 k^2 之六點 A, B, C,D,E,F 所成簡單六角形。其三雙對邊之交點在一直線上。(Pascal)

定理 5　由 K^2 之六線 a, b, c, d, e, f 所成簡單六邊形。其三雙對點之連線過同一點。布立安深(Brianchon)

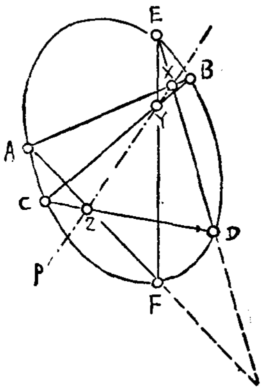


圖 49

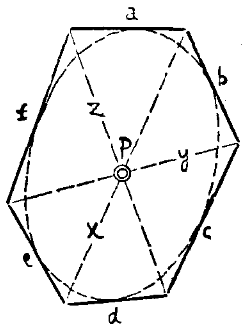


圖 50

證　ABCDEF 爲二次點列之點。故

$$A(EFDB)\barwedge C(EFDB)。$$

線束 A, C 以 $\overline{ED}$, $\overline{EF}$ 截斷之。得射影的點列 $\overline{ED}$, $\overline{EF}$。

證　a b c d e f 爲二次線束之線。故

$$a(e\,f\,d\,b)\barwedge c(e\,f\,d\,b)。$$

點列 a,c 由 $\dot{e}\dot{d}$, $\dot{e}\dot{f}$ 射影之。得射影的線束 $\dot{e}\dot{d}$, $\dot{e}\dot{f}$。

此兩點列有相合對應點E。故在配景位置$\overline{AF},\overline{CD}$之交點Z爲其配景心。

則對應點X$(\overline{AB}\cdot\overline{ED})$, Y$(\overline{CB}\cdot\overline{EF})$之連線必過Z。

卽三雙對邊$(\overline{AB},\overline{ED})$ $(\overline{CB},\overline{EF})$ $(\overline{AF},\overline{CD})$之交點在一直線上。

定義 5 此直線P稱六角形之巴斯咯(Pascal)線。

定義 6 簡單六角形三雙對邊交點在一直線上。則其頂點屬於某二次點列。(49 圖)

證 六角形ABCDEF三雙對邊之交點X,Y,Z在一直線P上。

則點列$\overline{FD},\overline{EF}$三雙對應點之連線$\overline{XY},\overline{CD},\overline{AF}$過同一點Z。故在配景位置。

從而線束A(B F D E),C(B F D E)爲射影的。

此兩線束有相合對應線e。故在配景位置。$\overset{\cdot}{af}$, $\overset{\cdot}{cd}$之連線z爲其配景軸。

則對應線x$(\overset{\cdot}{ab}-\overset{\cdot}{ed})$ y$(\overset{\cdot}{cb}-\overset{\cdot}{ef})$之交點在z上。

卽三雙對點$(\overset{\cdot}{ab},\overset{\cdot}{ed})$ $(\overset{\cdot}{cb},\overset{\cdot}{ef})$ $(\overset{\cdot}{af},\overset{\cdot}{cd})$之連線過同一點。

定義 5 此點P稱六邊形之布立安深(Brianchon)點。

定理 6 簡單六邊形三雙對點之連線過同一點。則其邊屬於某二次線束。(圖 50)

證 六邊形a b c d e f三雙對點之連線x, y, z過同一點P。

則線束$\overset{\cdot}{ed},\overset{\cdot}{ef}$三雙對應線之交點$\overset{\cdot}{xy},\overset{\cdot}{cd},\overset{\cdot}{af}$在直線z上。故在配景位置。

從而點列a(b f d e),c(b f d e)爲射影的。

故 A, B, C, D, E,F 屬於二次點列。

系 1　二次點列若分解爲二個一次點列。則得

故 a, b, c, d, e, f 屬於二次線束。

系 1　次線束若分解爲二個一次線束。則得

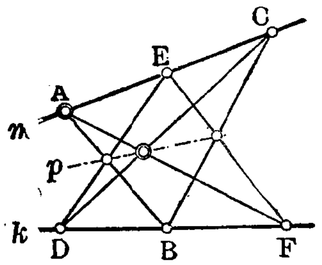


圖 51

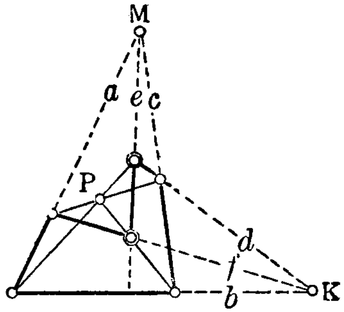


圖 52

簡單六角形 ABCDEF 之頂點。更迭在於二定線m,k 上。則其三雙對邊之交點在一直線p上。

系 2　若二頂點 A,B 相一致。則其連線 $\overline{AB}$ 爲切線。因此得

簡單六邊形 a b c d e f 之各邊。更迭過二定點M,K。則其三雙對點之連線通過一點P。

系 2　若二邊 a,b 相一致，則其交點 ab 爲切點。因此得

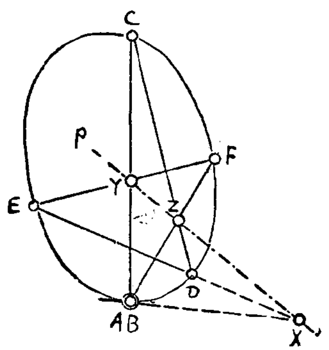


圖 53

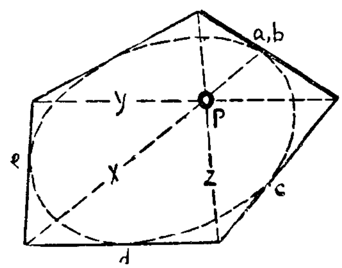


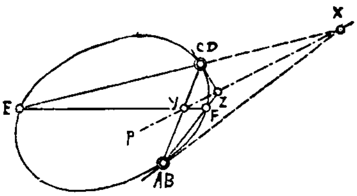
圖 54

由 k^2 之五點所成簡單五角形。其一頂點之切線與對邊之交點，及他二雙不相鄰邊之交點，在一直線上。

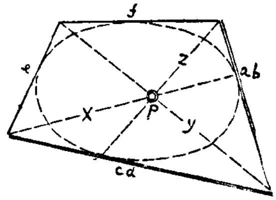
系 3　若二雙頂點 AB,CD 相一致。則邊 $\overline{AB},\overline{CD}$ 變為切線。因此得

由 K^2 之五線所成簡單五邊形。其一邊之切線與對點之連線，及他二雙不相鄰頂之連線，通過同一點。

系 3　若二雙之邊 ab,cd 相一致。則頂點 $\mathring{ab}$, $\dot{cd}$ 變為切點。因此得



55 圖



56 圖

由 k^2 之四點所成簡單四角形。其二雙對邊之交點，與二雙對點切線之交點，在一直線上。

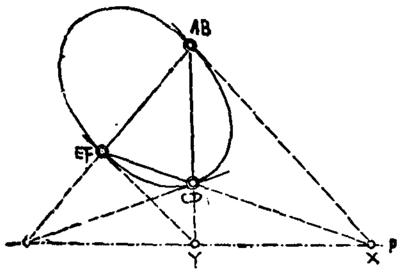
系 4　若三雙頂點 AB,CD, EF 相一致。則 $\overline{AB},\overline{CD},\overline{EF}$ 為切線。因此得

由 k^2 之三點所成三角形。其各頂點切線與對邊之交點在一直線上。

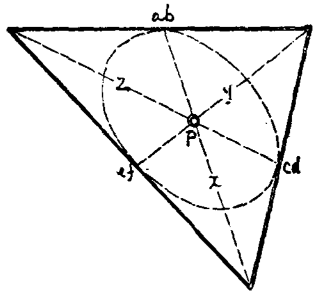
由 K^2 之四線所成簡單四邊形。其二雙對點之連線，與二雙對邊切點之連線，遇同一點。

系 4　若三雙之邊 ab, cd, ef 相一致。則 $\dot{ab}$, $\dot{cd}$, $\dot{ef}$ 為切點。因此得

由 K^2 之三線所成三邊形。其各邊切點與對頂之連線遇同一點。



57 圖



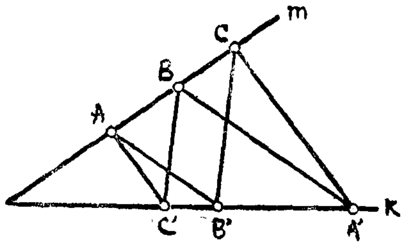
58 圖

直線上。　　　　　　　　　　　　　| 點

系 5　系1至4系。其逆皆眞。

注意　本章之定理及系。應用極廣。學者宜熟讀焉。

問題 2　二線m,k上各有三點ABC, A′B′C′。若二雙直線$(\overline{BC'},\overline{B'C})$ $(\overline{CA'},\overline{C'A})$互平行。則第三雙之直線$(\overline{AB'},\overline{A'B})$亦平行。



59 圖

證　$(\overline{BC'},\overline{B'C})$ $(\overline{CA'},\overline{C'A})$ $(\overline{AB'},\overline{A'B})$之交點在一直線上。

然$(\underline{BC'},\underline{B'C})$ $(\underline{CA'},\underline{C'A})$各平行。則其交點在無窮遠線上。

故$(\overline{AB'},\overline{A'B})$交點亦在無窮遠線上。即$(\overline{AB'},\overline{A'B})$互平行。

問題 3　由二次曲線上一點引切線。　　　(53圖)

解　設A為與點。於曲線上任取C, D, E, F四點。過交點$(\overline{CD}\cdot\overline{AF})$ (EF•AC)連直線P。交$\overline{DE}$於X。$\overline{AX}$連線即所求之切線。

第三十二節　二次曲線之決定

定理7　任意五點可定一二次點列。然以一為限。

定理7　任意五線可定一二次線束。然以一為限。

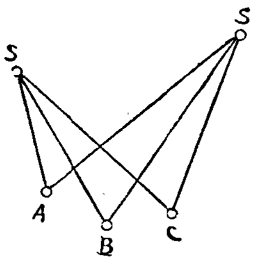


圖 60

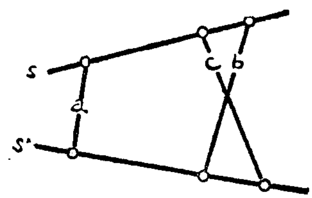


圖 61

證　S,S′,A,B,C為與點。由其二點S_1S'射影於他三點A, B,C。使三線S (A B C)各與三線S′(A B C)配合之。得射影的兩線束S_1S'。故上記五點可定一二次點列k^2。

若k^2外尚有二次點列h^2亦過此五點。由二點S,S′射影於ABC……。此兩線束互射影。

證　s, s′, a, b, c為與線。由其二線s,s′截斷他三線a,b,c。使三點s (a b c)各與三點s′(a b c)配合之。得射影的兩點列s,s′。故上記五線可定一二次線束K^2。

若K^2外尚有二次線束H^2亦含此五線。由二線s, s′截斷abc……。此兩點列互射影。

然此射影的關聯與前記之關聯。社三雙共同對應線。

故 k^2, h^2 實同物。

注意　若有三點 A,B,C 在一直線上。則兩線束 S,S′ 在配景位置。乃定分解的二次點列。

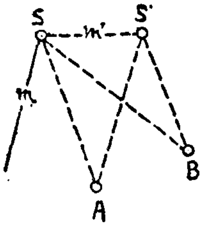
系 1　若五點中有二點 S,C 相一致。則 $\overline{SC}$ 變爲切線 m。因此得

然此射影的關聯與前記之關聯。有三雙共同對應點。

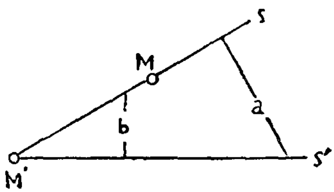
故 K^2, H^2 實同物。

注意　若有三線 a, b, c 過同一點。則兩線列 s, s′ 在配景位置。乃定分解的二次線束。

系 1　若五線中有二線 s′ c 相一致。則 $\overset{\circ}{sc}$ 變爲切點 M。因此得



62 圖



63 圖

四點 $S_1 S'$,A, B 及 S 點切線 m。可定一二次點列。

系 2　二雙之點 SB,S′C 相一致。則 $\overline{SB}, \overline{S'C}$ 變爲切線 m,n。因此得

三點 S, S′, A 及過 S, S′ 點之切線 m,n。可定一二次點列。

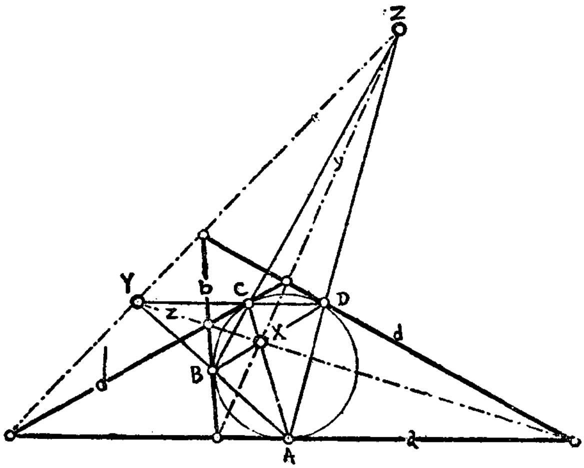
四線 s,s′,a,b 及 s 線切點 M。可定一二次線束。

系 2　二雙之線 sb,s′c 相一致。則 $s\dot{b}, s'\dot{c}$ 變爲切點 M, N。因此得

三線 s,s′,a 及 s,s′ 線上之切點 M,N。可定一二次線束。

第三十三節　二次點列與二次線束之歸一

定理 8　二次曲線 k^2 上任意取四點 A,B,C,D。及其切線 a,b,c,d。則完全四角形 ABCD 之對邊點 X,Y,Z。與完全四邊形 abcd 之對角線 x,y,z。成同一三角形。



64 圖

證　分解完全四角形 ABCD 爲三個簡單四角形 ABCD, ADBC, ACDB。由 Pascal 定理。得

I. 四角形 ABCD 之四點 Y,Z, $\dot{a}\dot{c}$, $\dot{b}\dot{d}$ 在一直線 x 上。

II. 四角形 ADBC 之四點 Z,X, $\dot{a}\dot{b}$, $\dot{c}\dot{d}$ 在一直線 y 上。

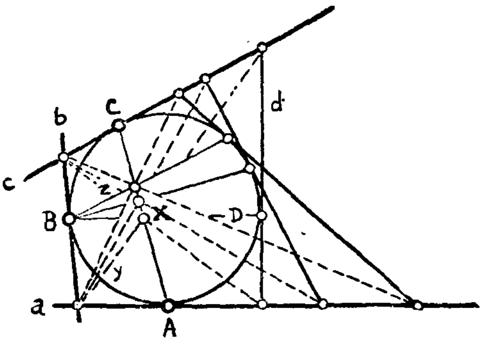
III. 四角形 ACDB 之四點 X,Y, $\dot{a}\dot{d}$ $\dot{b}\dot{c}$ 在一直線 z 上。

即兩三角形 XYZ, xyz 爲同物。

定義 6　上圖稱馬格老臨(Maclaurin)圖系。

定理 9　二次點列總切線之集合。成二次線束。

定理 9　二次線束總切點之集合。成二次點列。



65 圖

證　於二次點列上任取四點 A,B,C,D 及其切線 a,b,c,d。固定其三點 A,B,C 而移動 D。由 Maclaurin 圖系。知動點 D 無論在何處。彼四線 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, y, z 皆遇同一點 X。故

$$列(X)\begin{cases}\barwedge 束(y)\barwedge 列(c)\\ \barwedge 束(z)\barwedge 列(a)。\end{cases}$$

從而兩點列 a,c 互射影的。故其對應點之連線 d 爲二次線束。

證　於二次線束中任取四線 a,b,c,d 及其切線 A,B,C D。固定其三線 a,b,c 而移動 d。由 Maclaurin 圖系。知動線 d 無論在何處。彼四點 $a\dot{c}$, $b\dot{d}$, Y, Z 皆在一直線 x 上。故

$$束(x)\begin{cases}\barwedge 列(y)\barwedge 束(C)\\ \barwedge 列(z)\barwedge 束(A)。\end{cases}$$

從而兩線束 A,C 互射影的。故其對應線之交點 D 爲二次點列。

系　二次曲線上各點及其隨伴切點。前者由其中一列點射影之。得一次線束。後者由其中一切線截斷之。得一次點列。

此兩圖形互射影的。

於上圖　　束(B)$\doublebarwedge$列(x)$\doublebarwedge$列(a)。

故　　束(B)$\barwedge$列(a)。

第三十四節　二次線把,二次面把

定義 7

屬於同一把 O

不同軸不配景之二個射影的面束s,s'。其各雙對應面定過 O 之數多直線。稱此圖形三次線把。

定理10　二次線把爲不屬其把之任一平面ϵ截之。得一二次點列。

不同臺,不配景之二個射影的線束σ,σ'。其各雙對應線定過O之數多平面。稱此圖形爲三次面把。

定理10　二次面把爲不屬其把之任一平面ϵ截之。得一二次線束。

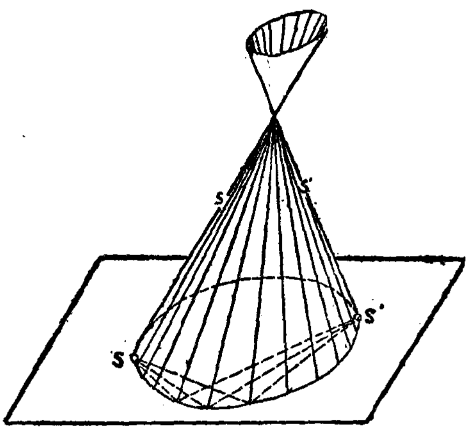


圖 66

證　二次線把之母形。乃射影的二個面束s,s'。此面束為平面ϵ截斷。得二個射影的線束S,S'。此兩線束可定一二次點列。

定理11　二次點列由其平面外一點P射影之。得二次線把。

證　二次面把之母形。乃射影的二個線束σ,σ'。此線束為平面ϵ所截斷。得二個射影的點列s,s'。此兩點列可定一二次線束。

定理11　二次線束由其平面外一點P射影之。得二次面把。

二次線把，二次面把。與二次點列。二次線束有同類之定理數則。述之於下。其證法略同。姑從略。

定理12　兩面束之軸。亦為二次線把之元素。

定理13　二次線把在同平面上之直線。不能多於二個。

此圖形本屬於把又具此性質。故稱二次線把。

定理14　ss'之對應面含二次線把之線。只有一個。

定義8　此面稱切面。

定理12　兩線束之[illegible]。亦為二次面把之元素。

定理13　二次面把過同直線之平面。不能多於二個。

此圖形本屬於把又具此性質。故稱二次面把。

定理14　$\sigma\sigma'$之對應線含二次面把之面。只有一個。

定義8　此線稱切線。*

* 此處所論之切線。與前所用之切線性質不同。以前關於點。此則關於面。

定理15 二次線把之總直線。由其中任意二直線射影之。得二個射影的一次面束。

定理16 二次線把之總直切面成二次面把。

定理17 由二次線把中六直線所成之六角錐。其三雙對面之交線在同一平面上。

定理15 二次面把之總平面。由其中任意二平面截斷之。得二個射影的一次線束。

定理16 二次面平之總切線成二次線把。

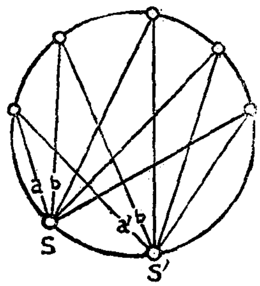
定理17 由二次面把中六平面所成之六面錐。其三雙對稜之結面過同一直線。

定義9 二次線把之跡或二次面把之包。稱二次錐形。

第三十五節　圓錐曲線

由二個射影的圖形產出四個二次圖形。此等圖形在古代幾何學實爲何形。不可不考究之。因此分數層論之於下。

I　平圓者。二次曲線也。



67 圖

證　於周上任取二點S,S'。對其餘各點射影之。作線束$S(abc\cdots\cdots)$,　$S'(a'b'c'\cdots\cdots)$。

然　　　$\hat{ab}=\hat{a'b'}$,　　$\hat{bc}=\hat{c'b'}$,……

故 S (a b c……),S′ (a′b′c′……) 得重合。從而影射影的。

故平圓得視爲射影的二線束S, S′之產物。卽爲二次曲線。

II.　圓錐者。二次錐形也。

證　由平面外一點射影於周上各點所成之圖形。稱圓錐。然平圓乃二次曲線。從而此圖形得稱二次錐形。

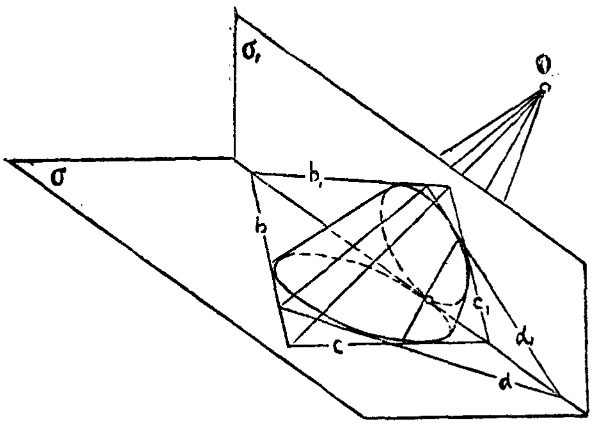
故圓錐卽二次錐形。

III.　凡圓錐曲線者。*二次曲線也。

證　不過圓錐(卽二次錐形)之頂點 σ 作平面 ϵ 截斷之。其結果一面得圓錐曲線(視原形爲圓錐)。一面得二次曲線(視原形爲二次錐形)。

故圓錐曲線卽二次曲線。

IV.　凡二次曲線者。圓錐曲線也。



68 圖

* 任意一平面截斷圓錐。其截口之平曲線。稱圓錐曲線。

證 k^2加任意二次曲線。於曲線上任取一點A作切線a。

過A切於a作任意圓k_1^2。

則a爲兩曲線所含平面σ,σ'之交線。於a上任取三點。引兩曲線之切線bb_1, cc_1, dd_1。此三雙直線所定之平面$\overline{bb_1}\ \overline{cc_1}\ \overline{dd_1}$得交點$\sigma$。由$\sigma$射影於圓$k_1^2$得圓錐。此圓錐爲平面$\sigma$所截斷。得圓錐曲線(卽二次曲線)$k'^2$。

因此平面σ上。有二個二次曲線k^2, k'^2同切於a, b, c, d。且同過A而切於a。故k^2, k'^2爲同物。卽k^2爲圓錐曲線。

由上觀之。知近世幾何學之二次曲線。卽古代幾何學之圓錐曲線。否雖不同。其實則一。

第三十六節 橢圓,拋物線,雙曲線

定義10 二次曲線與無窮遠線相交稱雙曲線。相切稱拋物線。不交亦不切稱橢圓。

故橢圓周上各點均在有限距離。其各切線爲普通直線。

拋物線則含有一個無窮遠點。

雙曲線含有二個無窮遠點。(因一直線與二次曲線相交。最多只有二交點)。無無窮遠切線。其總切線均爲普通直線。過二個無窮遠點之切線。稱漸近線。

再就圓錐截斷說明之。

先過圓錐頂點σ引平面σ。則σ之位置不外三種。

I.　只過頂點σ。

II.　切圓錐於一線p。

III.　截圓錐於二線q,r。

次作圓錐之截面τ平行於σ。則τ面

在I場合。其截點均在有限距離(橢圓)。

在II場合。截一線P於無窮遠點(拋物線)。兩面之交線。卽其無窮遠切線。

在III場合。截二線q,r於無窮遠點(雙曲線)。q,r切面與τ面之交線。卽漸近線。

問題 4　知次之五條件。畫圓錐曲線。

I.　五點。	I.　五切線。
II.　四點與其中一點之切線。	II.　四切線與其中一切線之切點。
III.　三點與其中二點之切線。	III.　三切線與其中二切線之切點。

解　先解左方。其右方得依雙對法則求之。

I.　A,B,C,D,E爲與點。過A任引一直線a。則a與曲線尙有一交點F。按Pascal定理得求之。　(49圖)

卽　$\overline{AB}\cdot\overline{DE}$交於X。$a\cdot\overline{DC}$交於Z。$\overline{XZ}\cdot\overline{BC}$交於Y。因X,Y,Z在

一直直線上。故 F 乃 $a \cdot \overline{EY}$ 之交點。

然 a 爲動線。按法可求無數曲線上之點 F。聯此等點卽得所求曲線。

II. 已知切線 a 及四點 B, C, D, E。過 B 任引一線 b。則 b 與曲線尙有一交點 F。按 Pascal 定理系 2 得求之。 (53 圖)

卽 $a \cdot \overline{DE}$ 交於 X。$b \cdot DC$ 交於 Z。$\overline{XZ} \cdot \overline{BC}$ 交於 Y。因 X,Y,Z 在一直線 P 上。故 F 乃 $b \cdot \overline{EY}$ 之交點。

按法求無數之 F 點聯之卽得。

III. 已知切線 a,c 及三點 B,D,E。過 B 任引一線 b。則 b 與曲線尙交一點 F。按 Pascal 定理系 3 得求之。 (55 圖)

卽 $a \cdot \overline{DE}$ 交於 X。$b \cdot c$ 交於 Z。$\overline{XZ} \cdot \overline{BD}$ 交於 Y。因 X,Y,Z 在 P 上。故 F 乃 $b \cdot EY$ 之交點。

按法求無數之點聯之卽得。

問題 5 知一漸近方向及四點。畫雙曲線。

解 設一點爲無窮遠點。依前問左邊 I 之法求之。惟遇無窮遠點。則用平行線。餘均同樣。

問題 6 知二漸近方向及三點。畫雙曲線。

解 依問題 4 左邊 I 之法求之。

問題 7 知一漸近線及三點。畫雙曲線。

解 設一切點在無窮遠。餘按問題 4 左邊 II 之法求之。

問題 8　知一漸近線一切線及二點。畫雙曲線。

解　依問題4左方III之法求之。

問題 9　知一漸近線及三切線。畫雙曲線。

解　依問題4右邊II之法求之。

問題 10　知二漸近線及一點。畫雙曲線。

解　依問題4左邊III之法求之。

問題 11　知二漸近線及一切線。畫雙曲線。

解　依問題4右邊III之法求之。

問題 12　已知四點。求畫拋物線

解　設一點在無窮遠。依問題4左邊I之法求之。

問題 13　知四切線。畫拋物線。

解　設一切線在無窮遠。依問題4右邊I之法求之。

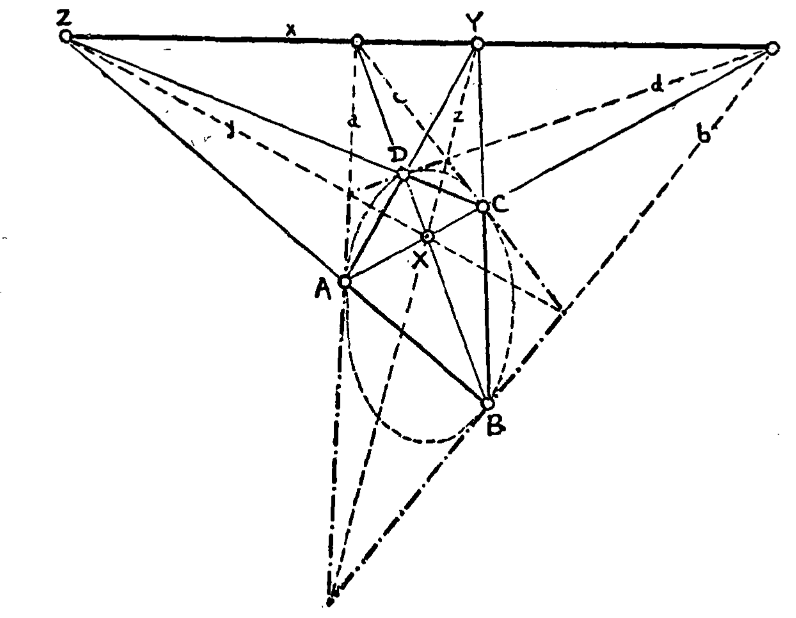
第六章

圓錐曲線

第三十七節 極點,極線

定義 1 由過定點 X 引二直線。與圓錐曲線 k^2 之截點爲 A C,B D。則 Y ($\overline{A\,D}\cdot\overline{B\,C}$), Z ($\overline{AB}\cdot\overline{CD}$)之連線稱 x。關於 k^2, X 點之極線。

定義 1 於定線 x 上取二點。引圓錐曲線 k^2 之切線爲 ac,bd。則 y($\dot{a}d-\dot{b}c$), Z($\dot{a}b-c\dot{d}$)之交點 X。稱關於 K^2, x 線之極點。



69 圖

系 曲線上點之極線。卽其點之切線。

定理 1 過 A, B, C, D 之切線爲 a, b, c, d。則 $\dot{ac}$, $\dot{bd}$ 在極

系 曲線切線之極點。卽其線之切點。

定理 1 a, b, c, d 上之切點爲 A, B, C, D。則 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 過爲

線 x 上。

證 x 之四角形 ABCD 之 Pascal 線。

故 $\dot{ac}$, $\dot{bd}$ 在此線上。

定理 2 關於二點 A,C 或 B,D。X 之調和共軛點。均在其極線 x 上。

證 以四角形 A B C D 爲母形卽得。

定理 3 一點只有一個極線。

證 固定 $\overline{AC}$。則 $\dot{ac}$ 及關於 AC, X 之調和共軛點。均爲定點。故只用一線 AC 可定 x。卽不關 $\overline{BD}$ 位置如何。x 常有定位。

同理。不關 $\overline{AC}$ 位置如何。x 有定位。

卽不關 $\overline{AC}$,$\overline{BD}$ 在何位置。而 X 點定時。極線 x 從之亦定。

極點 X。

證 X 爲四邊形 a b c d 之 Briancpon 點。

故 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 過此點。

定理 2 關於二線 a,c 或 b,d。x 之調和共軛線。均過其極點 X。

證 以四邊形 abcd 爲母形卽得。

定理 3 一線只有一個極點。

證 固定 $\dot{ac}$,則 $\overline{AC}$ 及關於 ac, x 之調和共軛線。均爲定線。故只用一點 $\dot{ac}$ 可定 X。卽不關 $\dot{bd}$ 位置如何。X 常有定位。

同理。不關 $\dot{ac}$ 位置如何。X 有定位。

卽不關 $\dot{ac}$, $\dot{bd}$ 在何位置。而線 x 定時。極點 X 從之亦定。

定理 4 x爲X之極線。則X爲x之極點。 (69 圖)

定理 4 X爲x之極點。則x爲X之極線。

證 於 x 上,任取二點。引二雙切線 a, c, 及 b, d。其切點之連線 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 必過 X。

何則。abcd 爲外切完全四邊。ABCD 形爲內接完全四角形由 Maclaurin 圖系。知此兩形有同一之對角三角形。而 x,X 爲此三角形之一邊及其對角點。

故 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 過 X。卽 X 爲 x 之極點。

右邊得同樣證之。

問題 1 關於已知五點或五切點之圓錐曲線。

作與點 X 之極線 x。

作與線 x 之極點 X。

解 設 A,B,C,D,E 爲與點。求 $\overline{XA}$, $\overline{XB}$ 與曲線之第二交點 A,′ B′。$\overline{AB'}$, $\overline{A'B}$ 交點與 $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ 交點之連線卽所求。

設 a, b, c, d, e 爲與切線。先於 a,b 上求切點 A,B。次求 $\overline{XA}$, $\overline{XB}$ 與曲線之第二交點 A,′B.′ $\overline{AB'}$, $\overline{A'B}$ 交點與 $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ 交點之連線卽所求。

右邊得同樣求之。

第三十八節　共軛點,共軛線

定理 5 關於圓錐曲線二點 X,Y 之極線爲 x,y。

若 X 在 y 上。則 Y 亦在 x 上。

若 x 通過 Y。則 y 亦通過 X。

(69 圖)

證　過 X 引一線與曲線之截點為 A, C。結 $\overline{YA}$, $\overline{YC}$ 各得截點 D,B。則 $\overline{BD}$ 必過 X。

因由 Y 觀之。內接四角形 ACBD 對邊 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 之交點。在其極線 y 上卽 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, y 過同一點。然 X 在 $\overline{AC}$ 及 y 上。卽 X 為 $\overline{AC}$ 與 y 之交點。

故 X 為 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, y 之交點。

次就 X 觀之。四角形 ABCD 對邊交點 Y。必落於其極線 x 上。

若 X 為曲線一點。則其極線 x 為 X 點切線。因此 X 在 y 上。則 Y 亦在 x 上不待證而明。

定義 2　二點 X,Y。X 之極線過 Y。Y 之極線過 X。則稱 X, Y 關於圓錐曲線為共軛點。

證　於 x 上取一點。引曲線之切線 a, c。過 $\dot{ya}$, $\dot{yc}$ 各引切線 b,d。則 $\dot{bd}$ 必在 x 上。

因由 y 觀之。外切四邊形 acbd 對點 $\dot{ac}$, $\dot{bd}$ 之連線。必過其極點 Y。卽 $\dot{ac}$, $\dot{bd}$, Y 在一直線上。然 x 過 $\dot{ac}$ 及 Y。卽 x 為 $\dot{ac}$ 與 Y 之連線。

故 x 為 $\dot{ac}$, $\dot{bd}$, Y 之連線。

次就 x 觀之。四邊形 abcd 對點連線 y 必通過其極點 X。

若 x 為曲線切一。則其極點 X 為 x 線切點。因此 x 通過 Y。則 y 亦通過 X 不待證而明。

定義 2　二線 x, y。x 之極點在 y 上。y 之極點在 x 上。則稱 x,y 關於圓錐曲線為共軛線。

系 1　曲線上之點。各自共軛。

系 2　二點 X,Y 皆與第三點 Z 為共軛。則結線 $\overline{XY}$ 為 Z 之極線。

系 1　曲線之切線。各自共軛。

系 2　二線 x,y 皆與第三線 z 為共軛。則交點 $\dot{xy}$ 為 z 之極點。

第三十九節　極三角形

定義 3　關於某圓錐曲線,三角形之頂點。各為他頂點之共軛點。或三邊各為他邊之共軛線。則稱此形為自共軛三角形。或稱極三角形。

定理 6　內接於圓錐曲線之完全四角形。其對角三角形為自共軛三角形。

定理 6　外切於圓錐曲線之完全四邊形。其對角三角形為自共軛三角形。

由定義 1 及 3 得證明之,

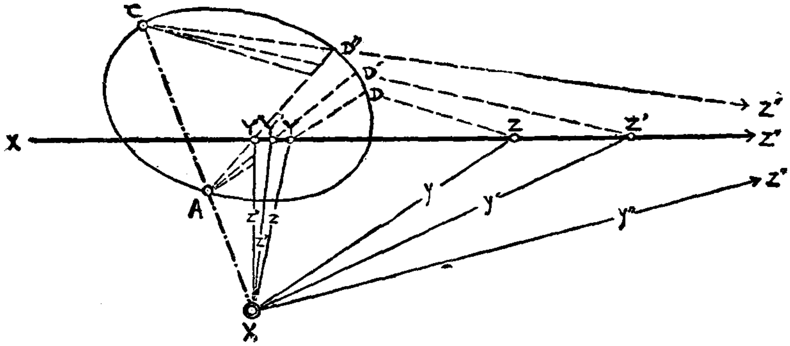
定理 7　某點 Y 動於定線 x 上。其極線 y 迴轉於 x 之極點 X 之周。則得

列(x)⊼束(X)。

定理 7　某線 y 動於定點 X 之周。其極點 Y 移動於 X 之極線 x 上。則得

束(X)⊼列(x)。

證　過 X 任引一割線 $\overline{AC}$ 固定之。結 $\overline{AY}$。交曲線於 D.



70 圖

經 $\overline{CD}$。交與線 x 於 z。則三角形 XYZ 爲自共軛。(前定理)

即 $\overline{XZ}$ (=y) 爲 Y 之極線。

依同法。於 Y 之各位置各作其極線 y。

則得　　列 x(YY'Y''……) $\overline{\wedge}$ 束 A(DD'D''……),

　　　　束 A(DD'D''……) $\overline{\wedge}$ 束 C(DD'D''……),

　　　　束 C(DD'D''……) $\overline{\wedge}$ 束 X(yy'y''……),

故　　　列 x(YY'Y''……) $\overline{\wedge}$ 束 X(yy'y''……)。

系　由圓錐曲線上一點 U。射影於曲線上各點 A,B,C,……其隨伴切線 a,b,c,……爲 U 點切線 u 截斷之。則

束(U) $\overline{\wedge}$ 列(u)。

定理 8　在某圓錐曲線平面上。

任意一線上共軛點對之集合。成對合點列。其直線與曲線之交點。爲對合貳重點。

過任意一點共軛線對之集合。成對合線束。由其點引曲線之切線。爲對合貳重線。

圖 70

證 由前定理,得 列x(YY′Y″……)⊼束X(yy′y″……)。

故 列x(YY′Y″……)⊼列x(ZZ′Z″……)。

其各雙對應點YZ(關於曲線爲共軛)互二重對應。

故 x(YZ,Y′Z′,X″y,″……)爲對合點列。

X(yz,y′z,′y″z,″……)爲對合線束,

x與曲線之交點卽YZ之重點。故爲貳重點。

第四十節 極圖形

定義 1 在某圓錐曲線平面上。作一圖形Ω。其各點之極線,各線之極點。成一新圖形W。稱此兩形互爲極圖形,或相反形。

例如內接n邊形與外切n角形。是爲相反形。

系 一點之極圖形爲一線。

二點連線極圖形爲其極線之交點。

定理 9 一次點列之極圖形爲射影的一次線束。

定理 9 一次線束之極圖形爲射影的一次點列。

本定理卽前節之定理 7。

定理 10 二次點列之極圖形爲二次線束。

定理 10 二次線束之極圖形爲二次點列。

證 二次點列之母形爲

證 二次線束之母形爲

射影的二線束。此線束之極圖形爲射影的二點列。此點列所產出之二次線束。卽所要之極圖形。

系　圓錐曲線內接多角形之極圖形爲外切多邊形。

射影的二點列。此點列之極圖形爲射影的二線束。此線束所產出之二次點列。卽所要之極圖形。

系　圓錐曲線內接多邊形之極圖形爲外切多角形。

第四十一節　史泰阿脫Staudt定理

定理11　在某圓錐曲線平面上。

有二個非共軛線 s, s′。第一線上各點 P 與第二線上共共軛點 p′ 配合之。則兩點列 s,s′ 爲射影的。乃產出二次線束。

證　線 s 之極點爲 S。

點 P 之極線爲 p。

則　列 $s(P) \barwedge$ 束 $S(p)$。

束 $S(p) \doublebarwedge$ 列 $s'(P')$。

故　列 $s(p) \barwedge$ 列 $s'(P')$。

有二個非共軛點 S, S′ 過第一點各線 p 與過第二點共共軛線 P′ 配合之。則線 S,S′ 爲射影的。乃產出二次點列。

證　點 S 之極線爲 s。

線 p 之極點爲 P。

則　束 $S(p) \barwedge$ 列 $s(P)$。

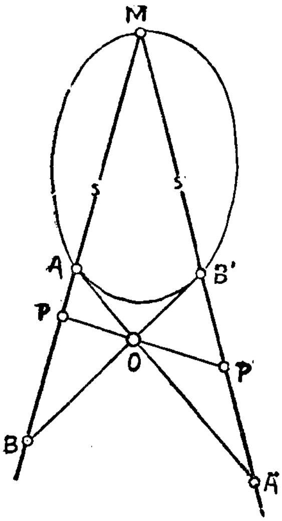
列 $s(P) \doublebarwedge$ 束 $S'(p')$。

故　束 $S(p) \barwedge$ 束 $S'(p')$。

定理12　圓錐曲線內接三角形之二邊 $\overline{MA}, \overline{MB}$ 上共

定理12　圓錐曲線外切三邊形過二頂點 $m\dot{a}$, $m\dot{b}$ 共

軛點之連線必過第三邊$\overline{AB'}$之極點(Staudt)。



71 圖

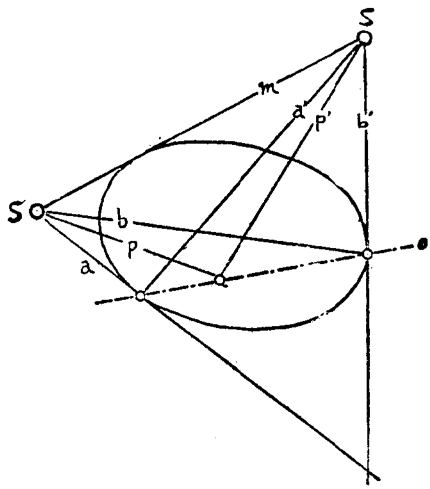
證　點列$\overline{MA}$, $\overline{MB}$為射影的。且有共通對應點M。故在配景位置。即各雙共軛點之連線過同一點。

次過A,B'引切線$\overline{AA}$,' $\overline{B'B}$。交$\overline{MB}$,'$\overline{MA}$於A,'B。則$\overline{AA}$,' $\overline{B'B}$為A,B'之極線。因此為A,' B—A, B'之共軛點。其交點O即配景中心。

然O為$\overline{AB'}$之極點。

故共軛點聯線均過$\overline{AB'}$之極點O。

軛線之交點。必在第三頂點$\dot{a}b'$之極線上。



72 圖

證　線束$m\dot{a}$, $m\dot{b}'$為射影的。且有共通對應線m。故在配景位置。即各雙共軛線之交點在一直線上。

次於a,b'上求切點$a\dot{a}$,' $b'\dot{b}$。與$m\dot{b}'$, $m\dot{a}$連a,'b。則$a\dot{a}$,'$b'\dot{b}$為a, b'之極點。因此a,' b為a, b'之共軛線。其聯線o即配景軸。

然o為ab'之極線。

故共軛線交點均在$\dot{a}b'$之極線o。

定理13　圓錐曲線內接三角形AMB′一邊$\overline{AB'}$之極點為O。過O引各直線。截斷他二邊為共軛點P,P′。

證　於$\overline{MA}$線上任取P點。結$\overline{PO}$交$\overline{MB'}$於P′。則P′為P之共軛點。

何則。若P′不為P之共軛點。而P_1為共軛點。則由前定理$\overline{PP_1}$過O。是$\overline{PP'}$,$\overline{PP_1}$有P,O兩點相一致。則二線為同物。故其與$\overline{MB'}$之交點P′,P_1必一致。即P′為P之共軛點。

定理13　圓錐曲線外切三邊形amb′一頂點$\dot{a}b'$之極線為o。o上各點射影於各二項點為共軛線p,p′。

證　重$\dot{m}a$任引一線p。交$\dot{p}o$結$\dot{m}b'$為p′。則p′為p之共軛線。

何則。若p′不為p之共軛線。而p_1為共軛線。則由前定理$\dot{p}p_1$在o上是$\dot{p}p'$,$\dot{p}p_1$有p,o兩線同過之。則二點為同物。故其與$\dot{m}b'$之連線p′,p_1必一致。即p′為p之共軛線。

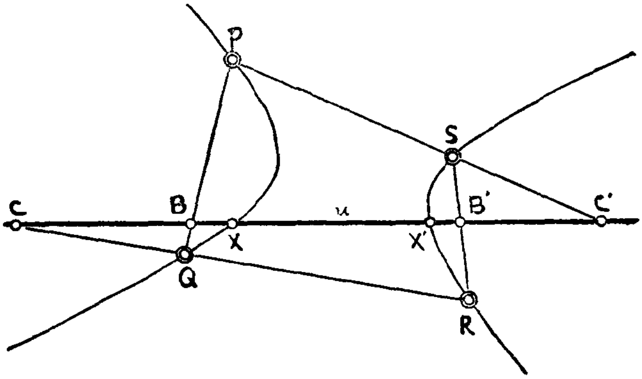
第四十二節　狄薩孤Desargues定理

定理14　圓錐曲線與其內接四角形之對邊。為一線u所截斷之點對。成對合共軛點對。

定理14　對圓錐曲線與其外切四邊形之對點。為一點U所射影之線對。成對合共軛線對。

證　截線u截曲線之點對為XX′。內接四角形PQRS對

邊之點對爲BB,′CC.′



73 圖

今由P,R射影於曲線上之點XX′QS。則

束P(XX′QS)⊼束R(XX′QS)。

此二線束爲截線u所截斷。得

列u(XX′BC′)⊼列u(XX′CB′)。

又由四元素羣之定理。得

列u(XX′BC′)⊼列u(X′XB′C)。

卽二點列(XBC) (X′B′C′)成對合。

右邊得以同樣證之。

定義 5 過四點之圓錐曲線之集合。成<u>圓錐曲線束</u>。其四點稱<u>曲線束之臺</u>。

定理 15 圓錐曲線束爲截線所截。成對合點列。

證 PQRS爲曲線束之臺。

截線u截四角形對邊之點對爲BB,′CC′。

截曲線束之點對爲XX,′YY,′……。

則u(BB,′CC,′XX′)爲對合點列。u(BB,′CC,′YY′)等亦然。

此等對合點列有共通之二雙共軛點BB,′CC。′故爲同物。

卽u(BB,′CC,′XX,′YY,′……)爲對合點列。

第四十三節 中心直徑

定義6 關於圓錐曲線。無窮遠線之極點。稱曲線中心。無窮遠點之極線。稱曲線直徑。

系 圓錐曲線之直徑均過中心(38節定理5)。且爲中心所平分(37節定理2)。

玆將各圓錐曲線中心之位置。述之於下。

I 拋物線切於無窮遠線。則無窮遠切點卽無窮遠線之極點。故其中心在無窮遠。從而各直徑互平行。

II 雙曲線交無窮遠線。故其兩漸近線(無窮遠點切線)之交點卽中心。且在形外。

III 橢圓不交亦不切於無窮遠線。故其中心在形內。

定義7 拋物線中心在無窮遠。稱無心圓錐曲線。橢圓及雙曲線中心爲實在之點。稱有心圓錐曲線。

定義8 關於圓錐曲線之共軛線爲直徑。稱共軛直徑。

系1 共軛直徑之一必二等分平行於他直徑之弦。

系2 共軛直徑之一平行於他直徑兩端點之切線。

系 3 系1系2之逆皆眞。

問題 2 外切於圓錐曲線之平行四邊形。其二個對角線爲曲線之共軛直徑。

證 ABCD爲圓錐曲線之外切平行四邊形。O爲對角線$\overline{AC}$, $\overline{BD}$之交點。因二雙對邊互平行。故O爲無窮遠線之極點。即曲線中心。

又$\overline{AC}$, $\overline{BD}$爲外切四邊形ABCD之對角線。故爲共軛線。

因此$\overline{AC}$, $\overline{BD}$爲共軛直徑。

問題 3 內接於圓錐曲線之平行四邊形。其各邊平行於一雙共軛直徑。

證 ABCD爲圓錐曲線之內接平行四邊形。O爲對角線$\overline{AC}$, $\overline{BD}$之交點。因二雙對邊互平行。故O爲無窮遠線之極點。即曲線中心。

由O引直線$\overline{EF}$平行於$\overline{AB}$。$\overline{GH}$平行於$\overline{BC}$。則$\overline{EF}$, $\overline{GH}$各過對邊中點。即一直徑$\overline{EF}$二等分平行於他直徑$\overline{GH}$之直線$\overline{AD}$, $\overline{BC}$。

故$\overline{EF}$, $\overline{GH}$爲共軛直徑。

第四十四節　軸

共軛直徑之集合成對合線束(定理8)然對合線束常有一

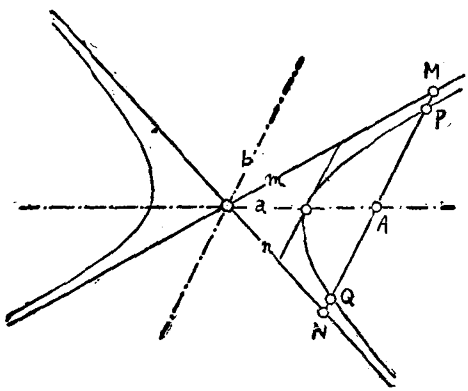
雙垂直共軛線。即許多共軛直徑中。必有一雙互垂直之共軛直徑。因得次之定義。

定義 8　圓錐曲線之垂直共軛直徑。稱曲線之軸。軸與曲線之截斷點。稱頂點。

定理 16　圓錐曲線有二雙或比二雙多之軸。則此曲線爲圓。

證　於曲線上任取一點 X。引 $\overline{XY}, \overline{XY'}$……平行於直徑 a,a'……。則 $\overline{XY}, \overline{XY'}$……爲其共軛直徑 b, b'……所平分。然此等共軛直徑 ab, a'b'……互垂直。故 b,b'……爲 $\overline{XY}, \overline{XY'}$……之中垂線。從而 OY, OY'……(O 爲曲線中心)均等於 OX。卽此曲線上各點與 O 點之距離爲同一。故此曲線爲圓。

定理 17　一直線夾於雙曲線與兩漸近線間之線分等長。



74 圖

證　$\overline{MN}$ 爲截線。截曲線於 P, Q。漸近線於 M, N。引共軛直

徑a b。使b平行於$\overline{MN}$。a與$\overline{MN}$交於A。

則 $PA=AQ$。

又ab與漸近線mn成調和線束。

故 $MA=AN$。

從而 $MP=QN$。

定理18 圓錐曲線關於軸爲對稱。

證 曲線之軸平分其垂直弦。故以軸爲折痕。將曲線之一半重於他半上。得全符合。故對稱。

定義9 橢圓中心在形內。故其頂點有四個A,A,' B,B'。線分AA,'BB'爲兩軸之長。其中長者稱長軸。短者稱短軸。

雙曲線中心在形外。其頂點只有AA'兩個。含頂點之軸稱主軸。不含頂點之軸稱副軸。AA'爲主軸之長。欲求副軸之長。則以AA'爲中線。兩漸近線爲對角線。作矩形。其第二中線BB'之長卽是(78圖)。

兩軸等長之雙曲線。稱等邊雙曲線。此時矩形AB'變爲正方形。則兩漸近線互垂直。故亦稱直角雙曲線。

拋物線中心在無窮遠。不能計其軸之長。頂點二個中。一爲無窮遠點。故實在只有一個頂點。

作圖題1 求圓錐曲線之中心及軸。

解 I 有心圓錐曲線。

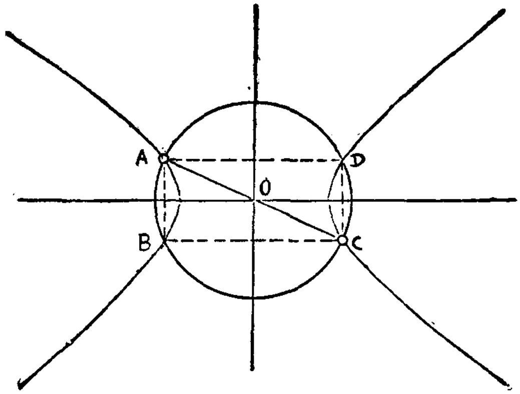


圖 75

任引二雙平行弦。過其各雙平行弦中點聯直線。其交點卽中心。

次過中心任引一徑 AC。以 AC 爲徑規圓。再交曲線於 B,C。過中心作直線平行於 AB,BC。卽得所求之軸。

II　無心圓錐曲線。

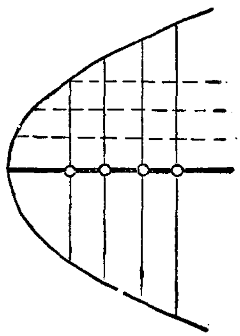


圖 76

其總直徑在同方向。垂直此方向作二弦。聯此弦之中點卽得軸。

問題 4　已知二個漸近線及一點。求作雙曲線。　(74 圖)

解　mn 爲漸近線。P 爲與點。過 P 爲任引一直線 $\overline{MN}$。交

m,n於M,N。截QN=MP。則Q爲曲線上之點。依此法可得無數之Q點。聯之卽得。

問題 5　知三點及一軸。作二次曲線。

解　關於與軸求此三點之對稱點。餘按36節問題4左邊I之法求之。

問題 6　作圓錐曲線之弦。爲與點P所平分。

解　過P引直徑P。作p之共軛直徑q。引q′平行於q。卽得。

問題 7　雙曲線之兩軸。平分兩漸近線所夾之角。

證　兩軸與兩漸近線爲調和共軛線。而兩軸互垂直。故平分兩漸近線之夾角。

問題 8　各切線夾於兩漸近線間線分。爲切點所平分。

證　定理17之$\overline{MN}$。不論在何位置。此定理常成立。若P,Q兩點一致時。則$\overline{MN}$爲切線。P爲切點。而MP=QN之式變爲MP=PN。

第四十五節　焦點

定義10　通過一點關於某圓錐曲線之共軛線對成垂直對合時。則此點稱曲線焦點。

系　圓之中心。卽其焦點。

定理19　圓錐曲線之焦點在曲線內部。

證 垂直對合爲橢圓的。不有貳重線。即由焦點不能引曲線之切線。故焦點在形內。

定理20 圓錐曲線之焦點在曲線之軸上。

證 過焦點之直徑垂直其共軛線。

定理21 二焦點之聯線爲其曲線之軸。

證 二焦點 F,F′ 聯一直線 $\overline{FF'}$。過 F,F′ 引 $\overline{FF'}$ 之垂線 f,f′。則 f,f′ 與 $\overline{FF'}$ 爲共軛。從而 $\overline{FF'}$ 之極點爲 ff。即無窮遠點。故 $\overline{FF'}$ 爲直徑。又過 F,F′。故爲軸。

定理22 圓錐曲線之兩軸中。只有一軸含焦點。

證 若二軸均含焦點。則兩焦點之聯線又得一軸。是一曲線有二個以上之軸。實背定理。故只有一軸含焦點。

定義11 含焦點之軸稱主軸。

作圖題 2 求有心圓錐曲線之焦點。

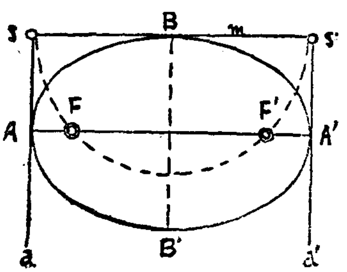


圖 77

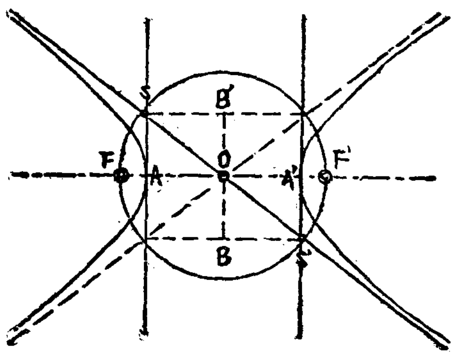


圖 78

作圖法 過頂點 A, A′ 引切線 a, a′。交他切線 m 於 S, S′。以

SS′爲徑規圓。交軸於F,F′。卽焦點。

證　aa′m爲圓錐曲線之外切三邊形。一頂點 $\dot{a}a$ 在無窮遠。故軸 $\overline{AA'}$ 爲其極線。

由 Standt 定理之右邊。得過頂點S, S′之共軛線。其交點在 $\overline{AA'}$ 上。

故 FS,FS′; F′S,F′S′ 爲垂直共軛線。從而F,F′爲焦點。

系 1　有心圓錐曲線。只有二個焦點。

因SS′爲徑之圓。與 $\overline{AA'}$ 交點只有二。

系 2　設 $AA'=2a$, $BB'=2b$, $FF=2c$　則

$$C=\sqrt{a^2\pm b^2}\qquad\text{(橢圓用負,雙曲用正)}$$

在橢圓設m爲B點切線。在雙曲線設m爲漸近線。再用派遠哥拉士 Pythagoras 定理求之卽得。

系 3　過頂點A,A′引切線。截任意切線m之線分。對於焦點張直角。其逆亦眞

作圖題 3　求拋物線之焦點。

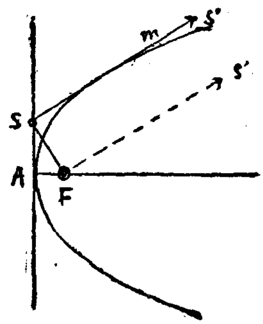


圖 79

解　拋物線之頂點A′在無窮遠。其切線a爲無窮遠線。S′爲無窮遠點。故FS′平行於m。然$\overline{SF}$，$\overline{FS'}$互垂直。故$\overline{SF}$，m亦互垂直。因得次之作圖。

過頂點A引切線a。與他切線m交於S，過S引m之垂線。交軸於F。卽焦點。

系　由拋物線之焦點引各切線之垂線。其垂趾軌跡。乃切於頂點之一直線。

問題9　固定一線a及一點F。以三角板之直角頂S動於a線上。直角一鄰邊常過F。則他鄰邊m之包線。爲焦點F之拋物線。

證　$\overline{FS}$爲m之垂線。而a爲定線。故m爲焦點F之拋物線之切線。

第四十六節　準線

定義12　關於圓錐曲線焦點之極線稱<u>準線</u>。

系1　準線在形外垂直於主軸。

系2　有心曲線有二個準線。

系3　拋物線只有一個準線。

系4　平圓有一個準線。惟在無窮遠。

系5　各焦點與其隨件準線及主軸之二頂點分調和。

系 6　拋物線之頂點。在焦點與準線之中央。

定理23　<u>圓錐曲線上各點至一點與其隨件準線距離之比有定值。</u>

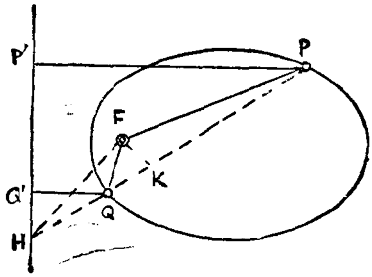


圖 80

設 P,Q 爲曲線上任意二點。與焦點 F 之距離爲 FP, FQ。與準線 f 之距離爲 P'P,Q'Q.則

$$\frac{FP}{P'P}=\frac{FQ}{Q'Q}$$

證　結 $\overline{PQ}$。交準線 f 於 H。關於二點 P,Q 作 H 之調和共軛點 K。則 $\overline{FK}$ 爲 H 之極線。從而 $\overline{FH}$, $\overline{FK}$ 關於曲線爲共軛。

此共軛線過焦點。故互垂直。

在調和線束 F 互垂直之二直線 $\overline{FH}$, $\overline{FK}$。必二等分他二線 $\overline{FP}$, $\overline{FQ}$ 之夾角。

故　　$FP:FQ=HP:HQ$。

然　　$HP:HQ=P'P:Q'Q$。

故　　$FP:FQ=P'P:Q'Q$。

即　　$FP:P'P=FQ:Q'Q$。

定義13　此定比稱曲線之偏率。通常以e表之。

茲計算各曲線之偏率於下。

I.　有心圓錐曲線。

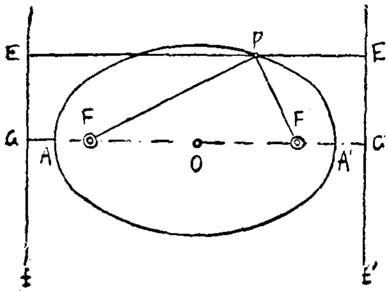


圖 81

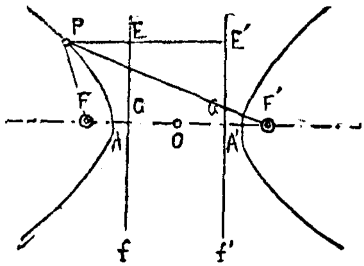


圖 82

由定義偏率　$e=\frac{AF}{AG}$　(不考線分之符號)

$=\frac{AO-FO}{AO-GO}$　(O為曲線中心)

$=\frac{a-c}{a-\frac{a^2}{c}}$　(GAFA′為調和點列)

$=\frac{c}{a}$。　(不考符號)

故　$e=\frac{\sqrt{a^2\pm b^2}}{a}$。　$\left(\begin{array}{l}\text{負號為橢圓}\\\text{正號為雙曲線}\end{array}\right)$

系 1　橢圓周上各點距兩焦點距離之和有定值。

系 2　雙曲線周上各點距兩焦點距離之差有定值。

$$e=\frac{PF}{PE}=\frac{PF'}{PE'}。$$

故　$e=\frac{PF\pm PF'}{PE\pm PE'}$

$=\frac{PF\pm PF'}{EF'}$。

故　$PF\pm PF'=e\cdot EE'=$常數。

II. 拋物線。

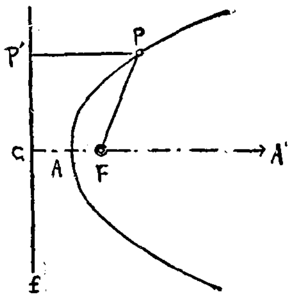


圖 83

點 A' 在無窮遠。而 GAFA' 為調和點。故 A 為 GF 中點。

故 $$e=\frac{GA}{AF}=1.$$

由上二段觀之。則圓錐曲線之偏率。

在橢圓為 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$。

在拋物線為 $e=\qquad\qquad=1$。

在雙曲線為 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$。

第七章

射影的一級圖形之產物(其二)

第四十七節　新圖形

二個射影的一級圖形。在一平面上或屬一把。其產物爲二次圖形。已於第五章詳論矣。本章就其一般研究之。卽二個射影的圖形。不論占空間何位置而考其產物。

二個射影的一級圖形之配合。不外六種。

I. 面束與線束

其對應元素所定爲點。故兩圖形之產物。爲無數點集合所成之圖形。且在線束之台上。

又面束爲線束之台所截斷。得新線束。與舊線束爲射影的。則其產物爲二次點列。然此點列卽面束與線束之產物。

II. 點列與線束

其對應元素所定爲面。故兩圖形之產物。爲無數面集合所成之圖形。且均過線束之心。

又點列爲線束之心所射影。得新線束。與舊線束爲射影的。則其產物爲二次面把。然此面把卽點列與線束之產物。

III. 線束與線束

此種配合不有產物。因各雙對應線未必有交點。又不能定平面。

IV. 點列與面束

此種配合亦無產物。因相對應之點與平面。不能決定何種新元素。

因此以上四種配合不生新圖形。

V. 二個不在同面上之點列

此配合 u(ABC)$\barwedge$v(A′B′C′)。其各雙對應點定連線。故得線圖形(abc……)。

VI. 二個不屬同一把之面束

此配合 u($\alpha\beta\gamma$)$\barwedge$v($\alpha'\beta'\gamma'$)。其各雙對應面定交線。故得線圖形(abc……)。

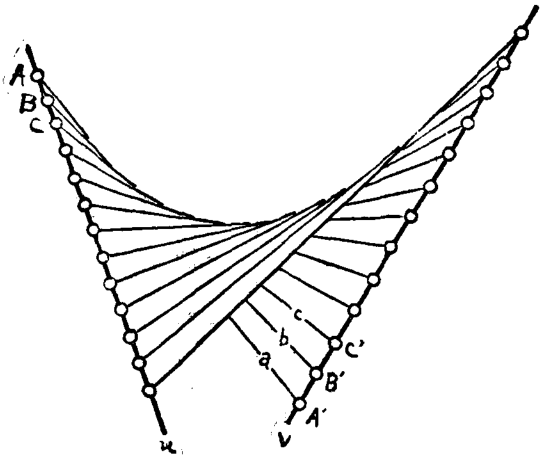


圖 84

又由

線u射影點列v(A′B′C′)。
線v射影點列u(ABC)。
得二個射影的面束。其產物亦爲上記之線圖形(abc……)。

線u截斷面束 v($\alpha'\beta'\gamma'$)。
線v截斷面束 u($\alpha\beta\gamma$)。
得二個射影的點列。其產物亦爲上記之線圖形(abc……)。

定義 1　上記之新圖形。稱二次線聚。其所被之曲面。稱三次線織面。

問題 1　在空間有不相交之三直線a,b,c。動線 u 常密接此三線而移動。則此動線畫一二次線聚。

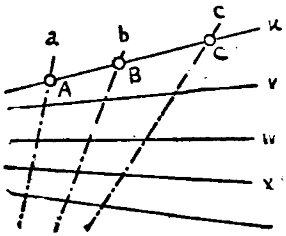


圖 85

證　以其一線 a 爲軸。作一次面束　a(αα′α″……)。

線 b 截斷之。得點列 b(BB′B″……)。

線 c 截斷之。得點列 c(CC′C″……)。

此兩點列互射影。其對應點之連線 $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{B''C''}$,……。實占動線u之位置。

證　以其一線 a 爲臺。作一次點列　a(AA′A″……)。

線 b 射影之。得面束 b (ββ′β″……)。

線 c 射影之。得面束 c (γγ′γ″……)。

此兩面束互射影。其對應面之交線 $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\beta'\gamma'}$, $\overline{\beta''\gamma''}$,……。實占動線u之位置。

第四十八節　二次線聚

定理 1　二次線聚。由任意一點 S 射影之。得二次面把。

定理 1　二次線聚。由任意一面 σ 截斷之。得二次點列。

證 線聚之母形。爲二個射影的點列u, v。由S射影之。得屬於把S之兩個射影的線束。其對應線之結平面。形成二次面把。

證 線聚之母形。爲二個射影的面束u, v。以σ截斷之。得屬於面σ之兩個射影的線束。其對應線之交點。形成二次點列。

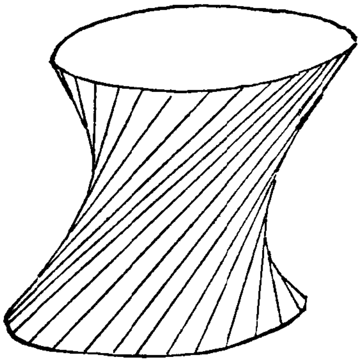


圖 86

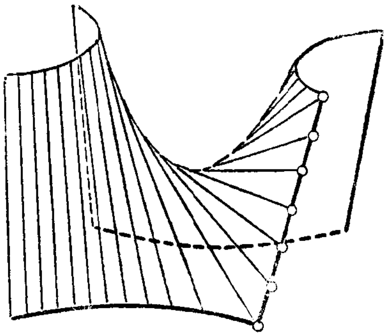


圖 87

定理 2 二次線聚中。不有二直線在同平面上。 | 過同一點。

證 若有二線 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 在同平面上。則二線 $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ 卽u, v亦在同平面上。

證 若有二線 $\overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{\beta\beta'}$ 過同一點。則二線 $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha'\beta'}$ 卽u, v亦過同一點。

系 二次線織面者。展開不能之曲面也。*

定理 3 交二次線聚中任意三線之各直線。亦交此線聚之總直線。

* 一般線織面(卽其面之全部爲直線所被之曲面)。分爲二種。一任意相鄰二線相交。如圓錐面圓柱面是也。一則不然。前者順次二線在一平面上。故漸次開其曲面。得展於一平面上。稱展開可能面。後者則否。稱展開不能面

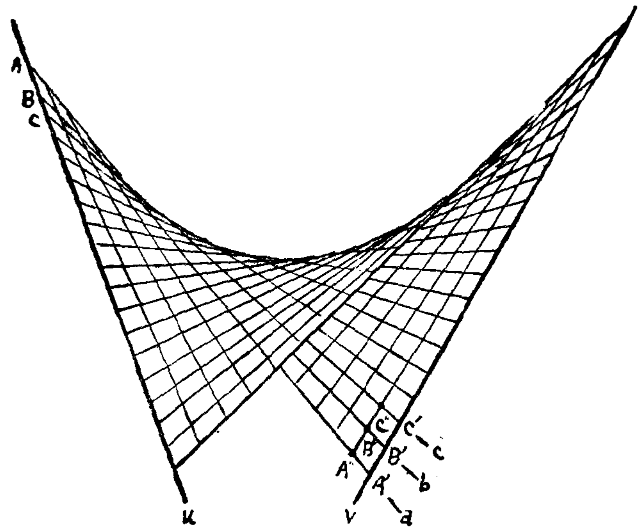


圖 88

證　一線 w 交二次線聚之任意三線 a, b, c。由線 w

射影於點列 u (A B C……)。得面束 w ($\overline{wA}$, $\overline{wB}$, $\overline{wC}$, ……)。

射影於點列 v (A'B'C'……)。得面束 w ($\overline{wA'}$, $\overline{wB'}$, $\overline{w,C'}$……)。

此兩面束爲射影的。其三雙對應面 ($\overline{wA}$, $\overline{wA'}$) ($\overline{wB}$, $\overline{wB'}$)

($\overline{wC}$, $\overline{wC'}$) 相一致。故各雙對應面 ($\overline{wD}$, $\overline{wD'}$) 必一致。

卽 w 與線聚之各線 $\overline{DD'}$ 可定一平面。

卽 w 交線聚之各線 d。

系 1　兩個線聚 A^2, U^2 爲同一二次線織面所被。則其一聚之各線。交他聚之總直線。

系 2　一直線與二次線織面之交點。不能多於二個。若有二個以上之交點。則此線全在此曲面上。

定義 2 系 1 之二聚 A^2, U^2。互爲他聚之準聚。其一聚之各直線。稱他聚之準線。

定理 4 二次線聚。爲其任意二準線 u, v

截斷時。得二個射影的點列。

證 以第三準線 w 爲軸。作面束 w $(\overline{wa}, \overline{wb}, \overline{wc}, \cdots\cdots)$。

二線 u,v 截斷之。得二個射影的點列。即所論之點列也。

射影時。得二個射影的面束。

證 以第三準線 w 爲臺。作點列 w $(\dot{wa}, \dot{wb}, \dot{wc}, \cdots\cdots)$。

二線 u, v 射影之。得二個射影的面束。即所論之面束也。

定理 5 二次線織面。含其一聚一線 a 之任意平面 σ。必含其第二聚之一線 u。此外不含曲面上一點。

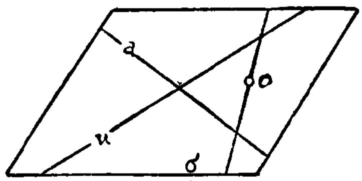


圖 89

證 若含曲面上一點 O。則在平面 σ 上過 O 之各直線。含曲面上三點。是此等線均在曲面上。即平面 σ 合於曲面。

定義 3 此性質之平面 σ。稱點 $\dot{au}$ 之切平面。點 $\dot{au}$ 稱切點。

定理 6 過空間任一線 l 引二次線織面之切平面。不能多於二個。

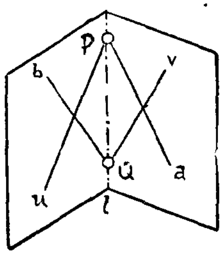


圖 90

證　直線 l 截曲面之點。只有二個 P, Q。在兩聚上過 P, Q 之直線。各有二個。得四線。ab, uv。平面 $\overline{av}$, $\overline{bu}$。卽所論唯一之一雙切平面。

問題 2　二次線織面爲某平面所截斷。得二次點列。過其各點引切平面 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$。形成一二次面把。

證　由任意三平面 α, β, γ 之交點 S。射影於二次點列。得二次線把。

包此線把之二次面把。卽由 S 射影此曲面之面把。因兩面把之三面 α, β, γ 有共通切線故也。

問題 2　二次線織面由某點射影之。得二次面把。在其各面上之切點 A,B,C,……。形成一二次點列。

證　由任意三點 A,B,C 之結平面 σ。截斷此二次面把。得二次線束。

包此線束之二次點列。卽以 σ 截斷此曲面之點列。因兩點列之三點 A,B,C 有共通切線故也。

問題 3　過二次曲線 k^2 之二點。有二定線 u, v。若此三者不在一平面上。則過 k^2 及 u, v 可定一二次線織面。然以一爲限。

證　曲線之總點 A, B, C,……。由二線 u, v 射影之。得二個射影的一次面束 u, v。此兩面束之產物爲二次線聚。其所被之曲面即所求。

第四十九節　雙曲抛物體,一張雙曲體

定義 4　二次線織面含有二個無窮遠線者。稱雙曲抛物體。不含無窮遠線者。稱一張雙曲體。

I　雙曲抛物體

無窮遠面含有此曲面上二線 a_∞, u_∞。是爲切平面。

任意一平面截斷此曲面。

A.　交二線 a_∞, u_∞。則其所截之二次曲線。有二個無窮遠點。故爲雙曲線。

B.　過二點 a_∞, u_∞ 之交點。即平行於某定線(含 a_∞, u_∞ 無窮遠交點)。則其所截之二次曲線。有一個無窮遠點。故爲抛物線。

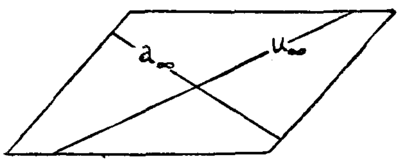


圖 91

再就雙曲拋物體所含之兩線聚 A^2, U^2 考之。

1　A^2 之各線皆交無窮遠線 u_∞。即平行於某定面（含 u_∞ 之平面）。

2　U^2 二各線亦平行於某定面(含 a_∞ 之平面)。

故雙曲拋物線體者。由某動線 a 常交二定線 u,v 且平行於某平面(例含 u_∞ 之平面)展動所生也。(實動線 a 交三線 u,v, u_∞ 所生之線聚。)

定義 5　此定平面 (u_∞)。稱線聚 A^2 之準平面。

例　空間簡單四角形 ABCD。其一雙對邊 AB, CD 同數等分之。聯其對應分點。得一線聚。此線聚含 AD, BC。平行於此兩線之平面。即其準平面。

同樣於他雙對邊 AD, BC。得第二線聚。此線聚含 AB, CD。其準平面乃平行於此二線之平面也。

此兩準面之交線。即 B 之所謂定直線也。

II　一張雙曲體

此曲面不含無窮遠線。即無窮遠面不爲切面而爲截面。其截口之無數無窮遠點成某二次曲線。

定義 6　過無窮遠截點。引曲面之切平面。皆爲普通平面。稱一張雙曲體之漸近平面。漸近面所包之二次錐形。稱曲面之漸近錐。

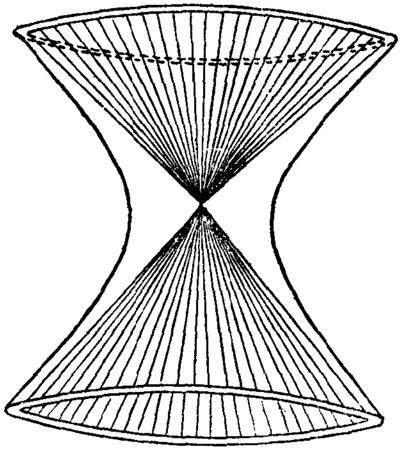


圖 92

漸近錐之各線通過曲面上一無窮遠點即以此點交曲面之二線a,u。因得

漸近錐中任一線平行於被曲面之兩聚各一線a, u。從而一聚中之任一線平行於他聚中之一線。

一張雙曲體任意一平面截斷之此平面平行於漸近錐之直線。

1. 有二個者即其截口曲線含二個無窮遠點故爲雙曲線。

2. 只有一個者則其截曲線含一個無窮遠點故爲拋物線。

3. 無一個者則其截口曲線不含無窮遠點故爲橢圓。

第八章

初等圖形之射影的關係

第五十節　初等圖形

前各章所論之一次二次圖形。不外下列八種。

點圖形二種 { 一次點列 / 二次點列 }

面圖形二種 { 一次面束 / 二次面把 }

線圖形四種 { 一次線束 / 二次線束 / 二次線把 / 二次線聚 }

定義 1　上列八種圖形。統稱爲初等圖形。

第五十一節　射影的關聯

定義 2　互關聯之二個初等圖形。一形之各元素屬於他形之對應元素。則兩者在配景位置。

例如　二次點列與由其中一點射影所成之一次線束。

二次線束與由其中一線截斷所成之一次點列。

二次線聚與由其中一準線截斷所成之一次點列。

二次點列與由某一點射影所成之二次線把。

……………………………………………………

二次點列與其所包之二次線束等。在配景位置。

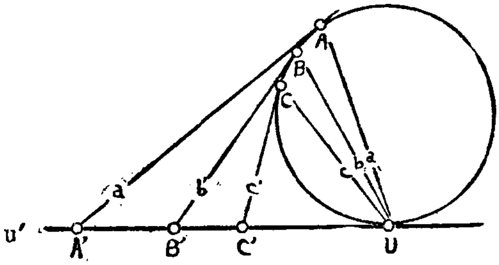


圖 93

定義 3 連續在配景位置之一羣初等圖形。其中任意兩圖形。有射影的關係。

例如上圖。 線束U(abc)$\doublebarwedge$點列k^2(ABC)

$\doublebarwedge$線束K^2(a′b′c′)

$\doublebarwedge$點列u′(A′B′C′)。

則其中任意二圖形。

線束U(abc)$\barwedge$線束K^2(a′b′c′)。

系 初等圖形四元素成一調和羣時。則其射影的圖形。亦以調和羣對應。其逆亦眞。

定理 1 二個射影的一次線束。屬於同一面不同心。

定理 1 二個射影的一次線束。屬於同一把不同臺。

兩者配景之。則產出一次點列或二次點列。

定理 2　異臺二個射影的一次點列。兩者配景之。產出一次線束，二次線束，或二次線聚。

兩者配景之。則產出一次面束或二次面把。

定理 2　異軸二個射影的一次面束。兩者配景之。產出一次線束，二次線把，或二次線聚。

以上定理。不過將29, 34, 47各節定理總括之。

第五十二節　射影的關聯之作圖

欲定二個二次圖形之射影的關聯。先各取其配景的一次圖形。次定此兩個一次圖形射影的關聯遂定前兩圖形之關聯。

定理 3　二個二次曲線有三雙對應元素 AA′, BB′, CC′。得定爲射影的關聯。

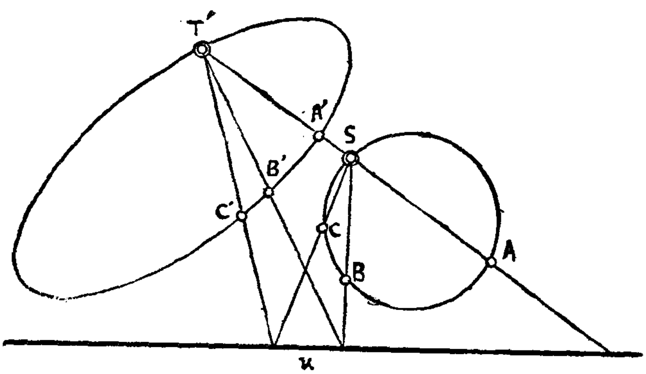


圖 94

證　結任意一雙對應點 $\overline{AA'}$。截兩曲線於S, T′。由S, T′各

射影於兩曲線之諸點。得一次線束 S(ABC……), T′(A′B′C′……)。

此兩線束一對雙應線 $\overline{AA'}$ 一致。故在配景位置。其配景軸爲 u。因此得

$$\text{點列 } u\begin{cases}\barwedge \text{線束 } S \barwedge \text{點列 } k^2(ABC\cdots\cdots)\\ \barwedge \text{線束 } T' \barwedge \text{點列 } k'^2(A'B'C'\cdots\cdots)。\end{cases}$$

故　　點列 $k^2(ABC\cdots\cdots) \barwedge k'^2(A'B'C'\cdots\cdots)$。

系 1　同臺之二個射影的初等圖形。有三雙對應元素各相一致。則其餘對應元素亦相一致。

系 2　二個射影的二次點列。有四個自對應點。則兩點列爲同物。

第五十三節　射影軸，射影心

定理 4　同臺之二個射影的二次點列。任取其二雙對應點 AA', BB' 連線 $\overline{AB}$, $\overline{A'B}$ 之交點。必在某定線上

(95 圖參照)

證　再任取一雙對應點 cc'。

則　$A'(ABC) \barwedge A(A'B'C')$。

而共通線 $\overline{AA'}$ 自應對。故在配景位置。

定理 4　同臺之二個射影的二次線束。任取其二雙對應線 aa', bb' 交點 $\dot{a}\dot{b}'$, $\dot{a'}b$ 之連線。必過某定點。

證　再任取一雙對應線 cc'。

則　$a'(abc) \barwedge a(a'b'c')$。

而共通點 $\dot{a}a'$ 自對應。故在配景位置。

從而二雙對應線$(\overline{A'B},\overline{AB'})$ $(\overline{A'C},\overline{AC'})$之交點。在其配景軸u上。

又$AB'CA'BC'$視爲內接六角形。其三雙對邊$(\overline{A'B},\overline{AB'})$ $(\overline{B'C},\overline{BC'})$ $(\overline{C'A},\overline{CA'})$之交點在u線上。

因此線u不特爲兩線束A, A'之配景軸。且爲兩線束B,B'或C,C'之配景軸。故爲定線。

定義4　線u爲此關聯之射影軸。

從而二雙對應點$(a'\dot{b}, a\dot{b}')$ $(a'\dot{c}, a\dot{c}')$之連線。過其配景心U。

又$ab'ca'bc'$視爲外切六邊形。其三雙對點$(a'\dot{b},a\dot{b}')$ $(b'\dot{c}, b\dot{c}')$ $(c'\dot{a}, c\dot{a}')$之連線過U點。

因此點U不特爲兩點列a, a'之配景心。且爲兩點列b,b'或c,c'之配景心。故爲定點。

定義4　點U爲此關聯之射影心。

第五十四節　對合

定義5　同臺射影的關聯圖形。其各雙對應元素互二重對應時。稱對合。對應元素稱對合共軛元素。共軛元素對相一致。稱對合貳重元素。其貳重元素爲二個一個或零。從而此對合爲雙曲的，拋物的，或橢圓的。

定理5　同臺射影的關聯圖形。其一雙對應元素互二重對應時。則其關聯爲對合。

一次圖形已證明於前。今取二次圖形證之。

設二個同臺射影的二次點列

$$k^2(ABC) \barwedge k'^2(A'B'C')。$$

其一雙對應元素BB'貳重對應。則各雙對應元素CC'亦貳重對應。

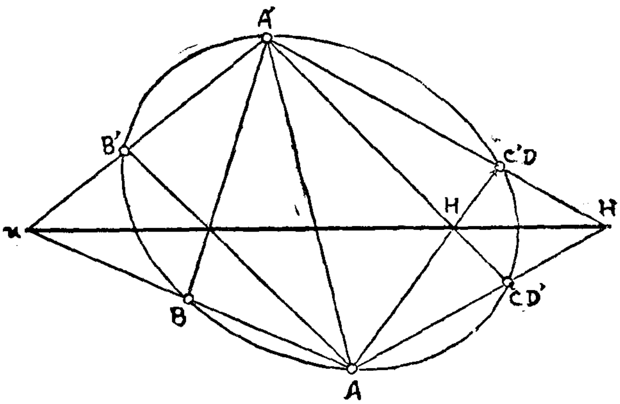


圖 95

證　所與兩點BB'互二重對應，

故　$$k^2(ABB') \barwedge k'^2(A'B'B)。$$

此二個二次點列各由AA'射影之。則

$$線束\ A'(ABB') \barwedge A(A'B'B)。$$

此兩線束有共通對應線$\overline{AA'}$。故在配景位置。其配景軸由二雙對應線$(\overline{A'B}, \overline{AB'})$ $(\overline{A'B'}, \overline{AB})$決定之。

今於二次曲線上任取一點c ($\equiv D'$)。

先視此點爲k'^2之一點D'。作其對應點D。

次視此點爲k^2之一點C。作其對應點C'。

則C'必與D一致。

即任意對應點(C=D′)(C′=D)二重相對應。故此關聯爲對合的。

定理 6　對合可由其二雙共軛元素決定之。

定理 7　雙曲的對合。其二個貳重元素與其共軛元素分調和。

定理 8　圓錐曲線上之對合。

其共軛點之聯線。悉過一定點U。

定義 6　點U稱圓錐曲線之對合心。

系　對合軸爲對合心之極線。

其共軛切線之交點。悉在一定線u上。

定義 6　線u稱圓錐曲線之對合軸。

系　對合心爲對合軸之極點。

定理 9　二次錐形上之對合。

其共軛線之結平面。悉過一定線w。

定義 7　線w稱二次錐形之對合線。

系　對合線爲對合面之極線。

其共軛切面之交線。悉在一定面ω上。

定義 7　面ω稱二次錐形之對合面。

系　對合面爲對合線之極面。

第五十五節　配景定理

定理10　一次圖形與二次圖形互射影的。若一形之元素含其對應元素超過三個。則兩圖形在配景位置。

設一次線束S(abc)與二次點列k^2(ABC)互射影的。若線束之線x通過其對應點X超過三個。則兩者在配景位置。

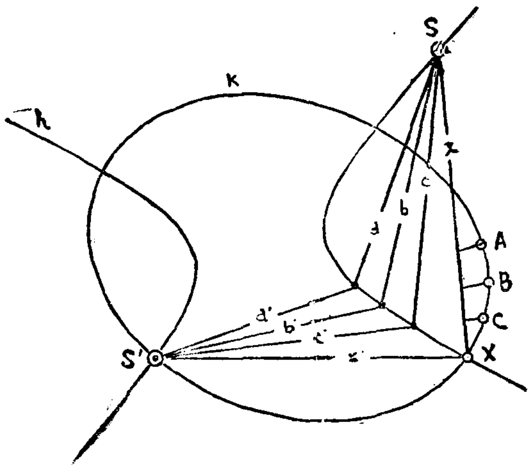


圖 96

證　由曲線上任意點S′。射影其各點A,B,C。

得　$S'(a'b'c')\barwedge k^2(ABC)$。

故　$S'(a'b'c')\barwedge S(abc)$。

此兩線束可產出一二次點列h^2且含二點S,S′。

又X在其對應線x上。必爲k^2,h^2之共通點。

若X等點超過三個。則兩點列除S′公共外。尙有三個以上共通點。故兩點列k^2,h^2爲同物。

故線束S配景於點列h^2。即配景於點列k^2。

他場合得以同樣證之。

第五十六節　三次圖形

定理 11　在某平面上

一次點列 s 與二次點列 k^2 相互射影的。對應點之連線成一線圖形。則通過任意點 S 之直線。不能多於三個。

證　設點列

$$s(ABCX)\barwedge k^2(A'B'C'X')。$$

由 S 射影點列 s。得

$$S(abcx)\doublebarwedge s(ABCX)。$$

故　$S(abcx)\barwedge k^2(A'B'C'X')$。

於此關聯。線束 S 之線 x 過其對應點 X'。不能超過三個。

一次線束 S 與二次線束 K^2 相互射影的。對應線之交點成一點圖形。則在任意線 s 上之點。不能多於三個。

證　設線束

$$S(abcx)\barwedge K^2(a'b'c'x')。$$

由 s 截斷線束 S。得

$$s(ABCX)\doublebarwedge S(abcx)。$$

故　$s(ABCX)\barwedge K^2(a'b'c'x')$。

於此關聯。點列 s 之點 X 在其對應線 x' 上。不能超過三過。

定義 8　此線圖形

$$(\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'},\cdots\cdots\overline{XX'})$$

稱三次線束。

定義 8　此點圖形

$$(\dot{a}\dot{a}', \dot{b}\dot{b}', \dot{c}\dot{c}'\cdots\cdots\dot{x}\dot{x}')$$

稱三次點列（或稱三次平點列）。

定義 9　三次線束之包或三次點列之跡。稱三次曲線。或稱三次平曲線。

定理 12　在空間

一次面束 s 與二次線把 K^2

一次點列 s 與二次線束 K^2

相互射影的。其對應平面與直線之交點。形成點圖形。此圖形不有三個以上之點在一平面上。

證 任作一平面截斷兩母形。得射影的一次線束及二次點列。

於此關聯。線束之線通過其對應點。不能超過三個。

定義10 此點圖形稱三次空間點列。

相互射影的。其對應點與直線之結面。形成面圖形。此圖形不有三個以上之平面過同一點。

證 任取一點射影兩母形。得射影的一次線束及二次面把。

於此關聯。線束之線在其對應面上。不能超過三個。

定義10 此面圖形稱三次平面束。

定義11 三次空間點列之跡。稱三次空間曲線。

定理13 在空間

一次面束與二次線聚相互射影時。其產物爲三次空間點列。

一次點列與二次線聚相互射影時。其產物爲三次平面束。

證同前。

定理14 在空間

有三個一次面束相互射影時。對應三平面之交點。集成三次空間點列。

證 其中二個面束配景

有三個一次點列相互射影時。對應三點之結面。集成三次平面束。

證 其中二個點列配景

之。產出二次線聚或線把。	之。產出二次線聚或線把。
此二次圖形與第三面束配合之。產出三次空間點列。	此二次圖形與或三點列配合之。產出三次平面束。

第五十七節　三次圖形之分解

問題 1　在空間一次點列 s 與二次點列 k^2 相互射影的。其一雙對應點 AA′ 一致。則其產物爲一個二次線聚。

證　所與點列 k^2 及二雙對應點之聯線 $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$。可定一二次線織面(48節問題3)。

點列 s 之臺與此線聚。有三個共通點 A, B, C。故符合。

從而此兩點列爲此線聚之截斷。

卽此線聚爲此兩點列之產物。

問題 2　在空間一次面束 s 與二次面把 K^2 相互射影的。其一雙對應面 aa′ 一致。則其產物爲一個二次線聚。

證法同前。

問題 3　在一平面上。一次點列 s 與二次點列 k^2 相互影射的。其一雙對應點 AA′ 相一致。則其產物爲一個二次線束。

證　由空間一點射影於問題1之圖形。得射影的一次線束與二次線把。一雙對應線 a 一致。則其產物爲二次面把。

今以一面截斷之。卽得本題。

問題 4 在一平面上，一次線束S與二次線束K^2相互射影的。其一雙對應線 aa' 相一致。則其產物爲一個二次點列。

證同前問

問題 5 在一平面上。一次點列 s 與二次點列k^2互射影時。且其二雙對應點AA', BB' 一致，則其產物爲一次線束。

問題 6 在一平面上。一次線束S與二次線束K^2互射影時。且其二雙對應線aa', bb'一致。則其產物爲一次點列。

以上數例。兩母形

有自對應點$A=A'$時。過此點之各線。得視爲對應點之聯線。	有自對應線$a=a'$時。則此線上各點。得視爲對應線之交點。

由此見解。則

問題1之產物。爲 二次線聚， 一次線束A。	問題2之產物。爲 二次線聚， 一次線束a。
問題3之產物。爲 二次線束， 一次線束A。	問題4之產物。爲 二次點列， 一次點列a。
問題5之產物。爲 一次線束， 一次線束A,	問題6之產物。爲 一次點列， 一次點列a,

一次線束B。	一次點列b。

於此場合。三次圖形分解爲一次圖形與二次圖形。或三個一次圖形。

第五十八節　配景定理

定理15　射影的二次點列σ^2與二次面把S^2。

$$\sigma^2(ABCDE)\barwedge S^2(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon)。$$

把之五平面$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$。各過其對應點A,B,C,D,E。則兩者在配景位置。

證　設平面α截點列σ^2之第二點爲A'。在此平面上。過A'任引一線s。射影於點列各點。作一次面束s。得

$$面束s(\overline{sA},\ \overline{sB},\ \overline{sC},\ \overline{sD},\ \overline{sE})\barwedge 點列\sigma^2(ABCDE)。$$

故　$$面束s(\overline{sA},\ \overline{sB},\ \overline{sC},\ \overline{sD},\ \overline{sE})\barwedge 面把S^2(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon)。$$

由此二個射影的圖形配景之。產出二次線聚(bcde)(57節問題2)。

以此線聚爲介。考所與兩圖形。

I.　二次點列(BCDE)爲此線聚之截斷。

II.　此線聚配景於二次面把$(\beta\gamma\delta\epsilon)$。

故所與之點列,面把。以此線聚爲介。而在配景位置。

系1　互射影的之二次點列σ^2與二次面把S^2。而點列之

平面 σ 爲面把之一元素。若面把之四面 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 過其對應點 A,B,C,D。則兩者在配景位置。

以平面 σ 截斷面把。作一次線束。得

$$\text{線束}\,\sigma\,(\overline{\sigma\alpha},\overline{\sigma\beta},\overline{\sigma\gamma},\overline{\sigma\delta})\overline{\wedge}\,\text{面束}\,S^2\,(\alpha\beta\gamma\delta)。$$

故 $$\text{線束}\,\sigma\,(\overline{\sigma\alpha},\overline{\sigma\beta},\overline{\sigma\gamma},\overline{\sigma\delta})\wedge\,\text{點列}\,\sigma^2(ABCD)。$$

此射影的關聯。線束之線過其對應點超過三個。故爲配景的。從而二次點列與二次面把。以線束 σ 爲介。在配景位置。

系 2 有同上性質之二次點列與二次線束。或二次線把與二次面把。均在配景位置。

由本定理施截斷射影之術得證之。

定理 16 互射影的之

I	二次點列與二次線把,	II.	二次面把與二次線束,
III	二次點列與二次線聚。	IV.	二次面把與二次線聚。

有三雙以上對應元素相一致時。則兩者在配景位置。

證

I 以二次點列 σ^2 之平面 σ 截斷線把 U^2。得新點列 σ'^2。

則 點列 $\sigma'^2\overline{\wedge}$ 線把 U^2。

故 點列 $\sigma'^2\wedge$ 點列 σ^2。

然此兩點列有三雙以上

II. 以二次面把 S^2 之點 S 射影線束 τ^2 得新面把 S'^2。

則 面把 $S'^2\overline{\wedge}$ 線束 τ^2。

故 面把 $S'^2\wedge$ 面把 S^2。

然此兩面把有三雙以上

共通對應點。故爲同物。

從而　點列 $\sigma^2 \barwedge$ 線把 U^2。

共通對應面。故爲同物。

從而　面把 $S^2 \barwedge$ 線束 τ^2。

III. IV. 得同樣證之。

第五十九節　四次圖形

二次射影的二次圖形配合之。一般產出四次圖形。今舉數例於下。

定理17　某平面上

二個射影的二次點列 $h^2(ABCDE) \barwedge k^2(A'B'C'A'E')$。對應點之連線成線圖形。此圖形之線。不有四個以上過同一點S。

二個射影的二次線束 $H^2(abcde) \barwedge K^2(a'b'c'd'e')$。對應線之交點成點圖形。此圖形之點。不有四個以上在一直線s上。

證　若新圖形有五線 $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{EE'}$ 會於一點S。

配景於所與一點列 h^2。作二次線聚。由點S射影之。成二次面把 $S^2(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon)$。

此面把配景於所與兩點列。因有五雙對應元素相一致。

由是兩點列對應點之連線悉過S。

右邊得同樣證之。

定義12　此圖形稱四次線束。

定義12　此圖形稱四次點列。

定義13 四次線束之包或四次點列之跡。稱四次曲線。

定理18 某平面上

二個互射影的二次點列 h^2, k^2。有二雙對應點 AA', BB' 相一致。則其產物為一個二次線束。	二個互射影的二次線束 H^2, K^2。有二雙對應線 aa', bb' 相一致。則其產物為一個二次點列。

證 配景於點列 $h^2(ABCDE)$。作二次線聚。

此線聚與點列 $k^2(A'B'C'D'E')$ 為互射影。且其二線 a,b 各過對應點 A', B'。

更由三平面 $\overline{cC'}$, $\overline{dD'}$, $\overline{eE'}$ 之交點S。射影此線聚。作二次面把。

此面把本含點列 h^2。又配景於點列 k^2。因有五雙對應元素 $(\overline{Sa}, A')$ $(\overline{Sb}, B')$……相一致。故此面把為兩點列 h^2, k^2 所含平面截斷之二次線束。卽所論之產物。

右邊得以同樣證之。

自對應點 AA' 為心之一次線束。亦成其產物之一部。故四次圖形。得分解為

二次線束,	二次點列,
一次線束 A,	一次點列 a,
一次線束 B。	一次點列 b。

定理19　某平面上

二個射影的二次點列。有三雙自對應點 A, B, C。則其產物得分解為四個一次線束 A, B, C, S。但 S 為兩點列所含曲線之第四公用點。

二個射影的二次線束。有三雙自對應線 a, b, c。則其產物得分解為四個一次點列 a, b, c, s。但 s 為兩線束所包曲線之第四公切線。

（注意）此類之定理甚多。學者宜以同理推之。

第九章

作圖題

第六十節　一次問題與二次問題

以下各章。專就平面幾何學論究之。即以點線二稱爲所論之元素。

吾人取一紙面代表一平面。次用鉛筆於紙面上畫點及直線。對於幾何學的理想之點及直線爲近似的表示。更用定規畫二點之直線或二線之交點。因此用定規得爲射影及截斷之作圖。吾人只用此作圖以釋數多問題。如

I. 知一直線上三點A, B, C。求其第四調和點D (9節問題1)。

II. 知二個一次點列與其三雙對應點。設立射影的關聯(17節定理)。

III. 某圓錐曲線與某直線a。已知其一交點S。求其第二交點A。

IV. 知五條件。求作圓錐曲線之諸元素。

定義1　以上各題。只用定規得解之。其所要元素惟一個。即唯有一種解答。稱爲<u>一次問題</u>。

又有一種問題。只用定規不能解之。即定規之外。常用圓錐曲線(例如圓)。此種問題所要之元素。一般有二個。即有二種

解答。名爲<u>二次問題</u>。

第六十一節 作圖題 1

問題 1 同臺 u 上。有二個射影的一次點列。求其貳重點。

問題 1 過同心 U。有二個射影的一次線束。求其貳重線。

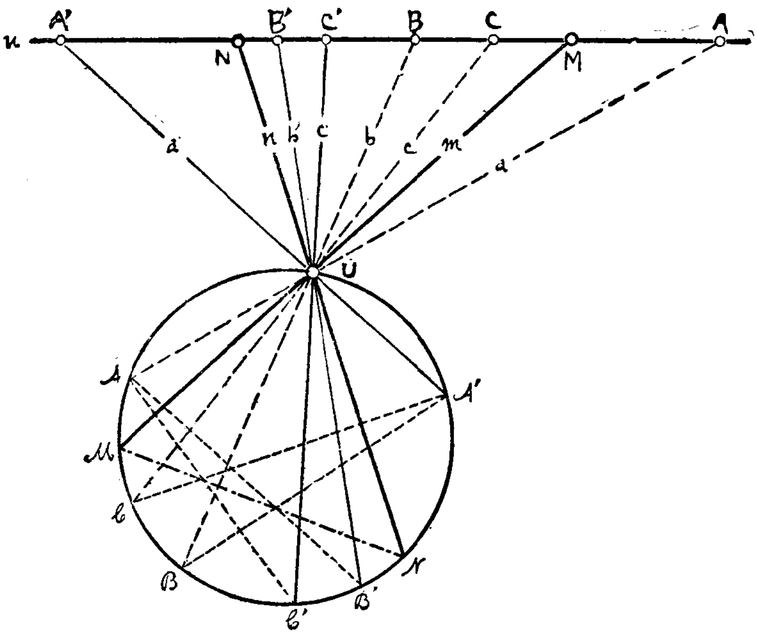


圖 97

解 與線u上二個射影的一次點列

$$n(ABC)\barwedge u(A'B'C')。$$

任作一圓錐曲線(例如圓)。

由曲線上一點U射影於所與二點列 (ABC), (A'B'C')。作二線束(abc) (a'b'c')。此線束截圓之點爲$(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}),(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$。

則　　點列 $u(ABC) \barwedge$ 線束 $U(abc) \barwedge$ 點列 $k^2(\mathscr{A}\,\mathscr{b}\,\mathscr{c})$。

點列 $u(A'B'C') \barwedge$ 線束 $U(a'b'c') \barwedge$ 點列 $k^2(\mathscr{A}'\mathscr{b}'\mathscr{c}')$。

故　　點列 $k^2(\mathscr{A}\,\mathscr{b}\,\mathscr{c}) \barwedge k^2(\mathscr{A}'\mathscr{b}'\mathscr{c}')$。

作此關聯之射影軸。截圓於 $\mathscr{M}, \mathscr{N}$。為其關聯貳重點。

從二點 $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ 由 U 反射影之。交 u 於 M, N。即所要貳重點。*

右邊得以同理推之。

問題 2　求點對合 $u(AA'BB')$ 之貳重點。

解　點對合 $u(AA'BB')$。即

$$u(AA'BB') \barwedge u(A'AB'B)$$

次按前問求之。

問題 2　求線對合 $U(aa'bb')$ 之貳重線。

解　線對合 $U(aa'bb')$。即

$$U(aa'bb') \barwedge u(a'ab'b)。$$

次按前問求之。

第六十二節　虛元素†

定義 2　橢圓的點對合。設想有二個貳重點。則稱此點為<u>虛點</u>。

定義 2　橢圓的線對合。設想有二個貳重線。則稱此線為<u>虛線</u>。

由此定義有數多定理。得一般的陳述之。

凡直線均截圓錐曲線於兩點。(相交則有二實點。相切則二實點重合。不相交則交點為虛點)。

同臺上影射的二個圖形。常有二個貳重元素。

* 此種作圖稱史替搿(Steiner)作圖法　† 虛元素始於史泰阿脫(Standt)

凡對合圖形。均有二個貳重元素。

定義 3 垂直對合線束截斷無窮遠線所生之點對合。稱絕對對合。絕對對合之貳重點。稱虛圓點。垂直對合之貳重線。稱極小線。

定理 1 某圓錐曲線爲圓時。其必要且充分之條件。爲此曲線必過其平面上之虛圓點。

證 關於圓之共軛點所成對合。在無窮遠線上。必爲絕對對合。然此對合之貳重點。乃其臺截圓錐曲線之點。卽虛圓點爲無窮遠線截圓之點。

系 1 凡圓均過其平面上之虛圓點。從而圓束亦圓錐曲線束之一種。

系 2 同心圓乃以虛圓點爲臺之圓束。

定理 2 由虛圓點至其平面上之圓錐曲線引切線。必相交於焦點。

證 在圓錐曲線平面上。過任意點F。作共軛線之對合其貳重線爲此曲線之切線。若F爲焦點。則其貳重線(卽切線)爲極小線。

第六十三節 作圖題 2

問題 3 知某圓錐曲線	**問題 3** 知某圓錐曲線

上之五點。求作任意線 u 與此曲線之交點。

解 設 S,S′,A,B,C 爲與點。由 S,S′ 射影 A,B,C。作

S(abc)⊼S′(a′b′c′)。

以此兩線束爲曲線之母形。由線 u 截斷之。得射影的二點列。求此二點列之貳重點卽得。

系 由所求之點爲二實點,二虛點,或一實點。卽知線 u 與曲線相交,或不相交,或相切。

之五切線。求由任意點 U 引此曲線之切線。

解 設 s, s′, a, b, c 爲與線。以 s, s′ 截斷 a, b, c。作

s(ABC)⊼s′(A′B′C′)。

以此兩點列爲曲線之母形。由點 U 射影之。得射影的二線束。求此二線束之貳重線卽得。

系 由所求之線爲二實線,二虛線,或一實線。卽知點 U 在曲線外部,或內部,或其上。

問題 4 已知圓錐曲線上之五點。試判別此曲線爲何種。

解 欲判別曲線之種類。當先求其所含無窮遠點有幾個。卽求其兩母形有幾對平行對應線。因得次之作圖。

將兩線束 S, S′ 之一。平行移動之。使其心一致。由史替耨(Steiner)作圖求此同心線束之貳重線。而此貳重線爲二實線,一實線,或二虛線。從而此曲線爲雙曲線,拋物線,或橢圓。

問題 5 已知圓錐曲線上四點。及切於其中一點之

問題 5 已知圓錐曲線之四切線。及其中一切線之

切線。求作某定線 u 與曲線之截點。

問題 6　知圓錐曲線上三點。及切於其中二點之切線。求作某定線 u 與曲線之截點。

問題 7　已知圓錐曲線上五點。求由任意點 U 引曲線之切線。

切點。求由某定點 U 引曲線之切線。

問題 6　知圓錐曲線之三切線。及其中二切線之切點。求由某定點 U 引曲線之切線。

問題 7　已知圓錐曲線之五切線。求作任意線 u 與曲線之交點。

解　設 A,B,C,D,E 爲與點。作 $\overline{UA}$, $\overline{UB}$ 與曲之之第二交點(36節問題4)。次決定二雙之點 AA,′ BB′ 爲曲線上之點對合。而求其對合軸 u(54節定理8)。則U 爲對合心。

更求線u與曲線之交點M, N。卽上記對合之貳重點。故爲所求切線之切點。

第六十四節　作圖題 3

問題 8　過四與點 P,Q,R,S, 且切於定線 u, 作圓錐曲線。

解　四角形 PQRS 二雙對邊爲線 u 截斷之點對 BB,′ CC′。與其截曲線之點對 XX′

問題 8　切於四與線 p,q,r,s, 且過定點 U,作圓錐曲線。

解　四邊形 pqrs 二雙對點爲點 U 射影之線對bb′, cc′。與其切曲線之線對 xx′ 成對

成對合(42節定理14)。然此線u切於曲線,故XX′一致。從而求對合點列BB′,CC′之貳重點。即得其切點。

若所與四點中有二點爲虛圓點。即得

問題 9　過二與點P, Q,且切於與線u,作圓。

若與線u在無窮遠。即得

問題 10　過四點P,Q,R,S畫拋物線。

合(42節定理14)。然此點U在曲線上。故xx′一致。從而求對合線束bb′,cc′之貳重線。即得其切線。

若所與四線中有二線爲極小線。即得

問題 9　切於二與線p,q,且過與點U,作圓。

若與點U在無窮遠。即得

問題 10　切於四線p,q,r,s畫拋物線。

解　於平面上任取一點O。過O引線對bb′,cc′。平行於四角形PQRS二雙對邊。作對合線束O (bb′cc′)之貳重線m, n。知此線之方向及四點P,Q,R,S可畫拋物線。

若一點爲無窮遠點。即得

問題 11　過三點P, Q, R,且切一線u,畫拋物線。

若一線爲無窮遠線。即得

問題 11　切於三線p,q,s,且過一點U,畫拋物線。

第六十五節　作圖題 4

問題 12　作內接於所與圓錐曲線之三邊形。其邊各

問題 12　作外切於所與圓錐曲線之三角形。其頂各

過與點 U,U_1,U_2。	在與線 u,u_1,u_2 上。

解　於曲線上任取一點 A。求

$\overline{UA}$ 與曲線之第二交點 A_1。

$\overline{U_1A_1}$ 與曲線之第二交點 A_2。

$\overline{U_2A_2}$ 與曲線之第二交點 A'。

若 A' 合於 A。則三邊形 AA_1A_2 卽所求。

然 A' 爲任意點。A,A' 未必能重合。於是在曲線上任取 A, B,C 三點。過各點依前法作圖。順次得三點之羣 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A'B'C'$。則

點 U 爲對合心。　$(ABC)\barwedge(A_1B_1C_1)$。

點 U_1 爲對合心。　$(A_1B_1C_1)\barwedge(A_2B_2C_1)$。

點 U_2 爲對合心。　$(A_2B_2C_2)\barwedge(A'B'C')$。

故　$(ABC)\barwedge(A'B'C')$

求此關聯之射影軸與曲線交點(卽此關聯之貳重點) MN。以 M,N 爲出發點。卽得所求之三角形 MM_1M_2, NN_1N_2。

問題13　作內接於所與圓錐曲線之 n 邊形。其邊各過與點。	**問題13**　作外切於所與圓錐曲線之 n 角形。其頂各在與線上。

問題14　知二個三角形 UU_1U_2, VV_1V_2。作一三角形內接於 UU_1U_2 而外接於 VV_1V_2。

問題15 求作一n邊形。內接於所與之n邊形。其邊各過所與之n點。

第六十六節 作圖題5

問題16 一圓錐曲線上。知二組對合點(AA',BB'),(A_1A_1',B_1B_1')。求此二對合之公共共軛點。

解 先於一對合作二線$\overline{AA'}$,$\overline{BB'}$之交點U。則U爲其對合心。過U各線截曲線於共共軛點。

同樣。於第二對合作其對合心V。

$\overline{UV}$截曲線之點P,P′卽所求。

若$\overline{UV}$切於曲線。則其切點爲共通貳重點。若$\overline{UV}$不交於曲線。則其共軛點爲虛點。

問題17 同心S之二個線束。求其共通共軛線。

解 過S任畫一圓錐曲線。例如圓。按前問於圓周上求其截斷點之共通共軛點P,P′。則$\overline{SP}$,$\overline{SP'}$卽所求。

問題18 知圓錐曲線之二雙共軛直徑aa′,bb′。求其曲線之兩軸。

解 直徑之交點S卽曲線中心。過S畫圓。截直徑於AA′,BB′。由$\overline{AA'}$,$\overline{BB'}$之交點U定對合心。U與圓心V結直線$\overline{UV}$。交圓周於二實點P,P′。則$\overline{SP}$,$\overline{SP'}$卽所求之軸。

系 1　對合心U在圓外。則對合(AA', BB')之貳重點爲二個實點M, N。從而$\overline{SM}$, $\overline{SN}$乃曲線之漸近線。

系 2　$\overline{SP}$, $\overline{SP'}$爲垂直共軛線。故求對合線束之垂直共軛線。得依本法解之。

第六十七節　作圖題 6

問題19　已知二個圓錐曲線之

三個共通點A, B, C。求其第四共通點D。	三個共通切線a, b, c。求其第四共通切線d。

解　設五點$(ABCM_1N_1)$, $(ABCP_2Q_2)$爲所與圓錐曲線之條件。

由A, B各射影於第一曲線之二點$M_1 N_1$。截第二曲線於M_2N_2。M_1N_1, M_2N_2之交點爲U。考其過U所引之各截線。此截線截

第一曲線及其內接四角形AM_1N_1B之對邊(AB, M_1N_1), (AM_1, BN_1)。

第二曲線及其內接四角形AM_2N_2B之對邊(AB, M_2N_2), (AM_2, BN_2)。

各成對合點列。然此二對合有二雙共通共軛點。故爲同物。

從而其截線若過兩曲線之共通點C。則此線又過他共通點D。故求UC與曲線之第二交點D卽得。

右方得以同法求之。

問題20　已知二個圓錐曲線之

二個共通點 A, B。求其他共通點 C,D。

二個共通切線 a, b。求其他共通切線 c,d。

解　五點(ABLMN),($ABP_2Q_2R_2$)爲兩曲線上之與點。

由二點A, B射影於第一曲線L, M, N。截第二曲線之點爲 $L_1M_1N_1$, $L_2M_2N_2$。此三雙之點定一射影的關聯。求此關聯之貳重點。卽所要之二點C,D。因此得次之作圖法。

先求$(L_1M_1N_1)\barwedge(L_2M_2N_2)$之射影軸u。次求u與一曲線之交點卽得。

第 十 章

二級及三級圖形之關聯

第六十八節　相稱的關聯

定義 1　二個二級圖形。有次之各情形。則在配景位置。

二野	爲同一把之截斷。
二把	爲同一野之射影。
一野一把	前者爲後也之截斷。

二個配景的二級圖形。其中一平面移動時。忽失其配景位置。然猶保持其關聯。名此關聯爲相稱的關聯。即

定義 2　甲乙二個二級圖形。甲之各元素P及過 P 之各元素s。對應於乙之一元素 P′ 及過 P′ 之一元素 s′ 時。則兩圖形之關聯爲互相稱的。

例如　甲乙兩把互相稱時。甲之各線 p 及過 p 之平面 σ。對應於乙之一線 p′ 及過 p′ 之一平面 σ'。

甲野與乙把互相稱時。甲之各點 P 及過 P 之各線 s。對應於乙之一線 p 及過 p 之一平面 σ。

定理 1　在二個相稱的平面 σ, σ' 上。

σ 之四點 A, B, C, D 成調和點列。則 σ 之對應點 A′,B′,C′,D′ 亦成調和點列。

σ 之四線 a, b, c, d 成調和線束。則 σ' 之對應線 a′,b′,c′,d′ 亦成調和線束。

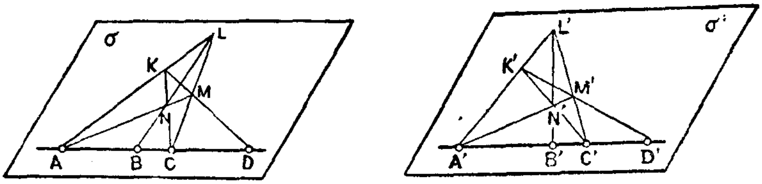


圖 98 甲乙

證 在平面σ上作母形KLMN。則其二雙對邊過A,C。二個對角線過B,D。

今於平面σ'上作其對應形K'L'M'N'。由定義知其二雙對邊過A',C'。二個對角線過B',D'。故A'B'C'D'爲調和點列。

系 相稱的二野。其相對應之點列,線束爲射影的。

定理 2 二個相稱的二級圖形。其中二個相對應一級圖形互爲射影的。

第六十九節 相反的關聯

同平面上之二野。關於某圓錐曲線互爲相反形。兩野位置移動時。尙保持其關聯。名此關聯爲相反的關聯。即

定義 3 甲乙二個二級圖形。甲之各元素P及過P之各元素s。對應於乙之一元素P'及其上之一元素S'。則兩圖形之關聯爲互相反的。

例如 甲乙兩把互相反時。則甲之各線p及過p之各平面σ。對應於乙之平面π'及其面上之一線s'.

甲野乙把互相反時。則甲之各點P與過P之各線s。對應於乙之平面π'及π'面上之一線s'。

定理 3　二個相反的平面σ,σ'。而σ上之四點A, B, C, D爲調和點列。則σ'上之對應線a,b,c,d成調和線束。

系　相反的二野。其中相對應之點列,線束互爲射影的。

定理 4　二個相反的二級圖形。其中二個相對應一級圖形互爲射影的。

第七十節　射影的關聯

定義 4　甲乙二個二級圖形相關聯時。甲之一級圖形各元素。常對應於乙之一級圖形一元素。則甲乙兩形爲互射影的。

定理 5　二個二級圖形互射影的。則其二個相對應之一級圖形亦互射影的。

定理 6　甲乙二平面上。各取

線束A,B及A',B'。而$A \barwedge A'$, $B \barwedge B'$。共通線$\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$相對應。則甲乙爲相稱。

點列a,b及a',b'。而$a \barwedge a'$, $b \barwedge b'$。共通點$\dot{ab}$, $\dot{a'b'}$相對應。則甲乙爲相稱。

證　先在甲平面上$\overline{AB}$線外取一點X。引$\overline{AX} \equiv a$, $\overline{BX} \equiv b$。於線束A',B'求其對應線a',b'。此二線之交點X'爲定點。卽X之

對應點。

次於甲平面上任取一線x。於x上各點X。在乙平面上作其對應點X′。即得定線x′爲其對應線。

又於$\overline{AB}$上任取P點。過P任引x線。作對應線x′。則x′截$\overline{A'B'}$於定點P′。

如斯甲乙兩圖形或立一種關聯。即甲之各點及過此點之各線。各對應於乙之一點及過此點之一線。故兩平面爲相稱。

右邊得以同樣證之。

定理 7　甲乙二平面。甲的二線束A, B與乙之二點列a′, b′。其$A\barwedge a'$, $B\barwedge b'$。線$\overline{AB}$對應於點$a'\dot{b}'$。則兩平面爲相反的。

證法同前題。

第七十一節　射影的關聯之作圖

定理 8　於甲乙二平面上。得取四雙之任意

對應線abcd, a′b′c′d′ (每三線不過同一點)。則兩平面爲相稱。

證　交點$a\dot{b}$, $a'\dot{b}'$, $c\dot{d}$, $c'\dot{d}'$爲A, A′, B, B′。連線$\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$爲p, p′。

則　$A(abp)\barwedge A'(a'b'p')$。

　　$B(cdp)\barwedge B'(c'd'p')$。

對應點ABCD, A′B′C′D′ (每三點不在一線上)。則兩平面爲相稱。

證　連線$\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$爲a, a′, b, b′。交點$a\dot{b}$, $a'\dot{b}'$爲P, P′。

則　$a(ABP)\barwedge a'(A'B'P')$。

　　$b(CDP)\barwedge b'(C'D'P')$。

故兩平面爲相稱。

故兩平面爲相稱。

定理 9　甲乙二平面甲之任意四點 ABCD 各對應於乙之任意四線 a′b′c′d′。則兩平面間成一相反的關聯。

附記　左方相稱切合。實際作圖。

先於各面上以所與四線完成完全四邊形。作其對角線。就兩四邊形

頂點(線束心)A,B,C,……各射影於頂點(線束心)A′,B′,C′,……。

各邊(點列臺) a,b,c,……各射影於各邊(點列臺)a′,b′,c′,……。

因此得

I.　甲平面上取一點 X。在乙平面上求其對應點 X′。

此點 X 與任意點 A, B 結直線 y,z 於乙平面上。過 A′,B′ 作其對應線 y′z′。此二線之交點 X′ 即所求。

II.　甲平面上取一線 x。在乙平面上求其對應線 X′。

此線 x 與任意線 a,b 之交點爲 Y,Z。於乙平面上。在 a′,b′ 求其對應點 Y′,Z′。此二點之連線 x′ 即所求。

第七十二節　配景定理

定理 10　二個相稱平面。其共通線 u 上之點均自對應時。則此二面在配景位置。

定理 10　二個相稱把。過其共通線 u 之平面均自對應時。則此二把在配景位置。

證　先就任意二雙對應點AA',BB'考之。

對應線$\overline{AB},\overline{A'B'}$之交點必在線u上。(因$\overline{AB},\overline{A'B'}$與u之交點爲自對應點)。從而上記四點在一平面上。故任意對應點之聯線$\overline{AA'},\overline{BB'}$必相交。

如斯總對應點對之結線$\overline{AA'},\overline{BB'},\overline{CC'}$……悉相交。然此等線不在一平面上。故過同一點。

右方得以同樣求之。

第七十三節　同平面上之相稱

定義5　同臺上二個相稱野。謂之一平面上相稱。其對應元素相一致時。稱貳重元素。

定理11　一平面上之相稱。具貳重點(每三點不在一直線上)及貳重線(每三線不過同一點)不能有三個以上。

證　若有四點或四線爲兩野之相重對應元素。從而各雙對應點或對應線悉相重。則兩野爲同物。

定義6　二個貳重點之連線上。若有第三貳重點存在。則此線上各點均爲貳重點。稱爲二重點點列。貳重線線束亦然。

定理12　一平面上相稱之二野。其

各雙對應線之交點。必在於貳重點點列u上。	各雙對應點之聯線。必通過貳重線線束U。

逆定理　一平面上相稱之二野。其

各雙對應線之交點在某定線上。則此線上之點悉爲貳重點。

各雙對應點之聯線過某定點。則過此點之線悉爲貳重線。

系　此逆定理。爲貳重元素之一級圖形存在必要且充分之條件。

定理 13　同臺之相稱二野 σ, σ'。若

貳重點點列 u 存在。則貳重線線束 U 亦存在。

貳重線線束 U 存在。則貳重點點列 u 亦存在。

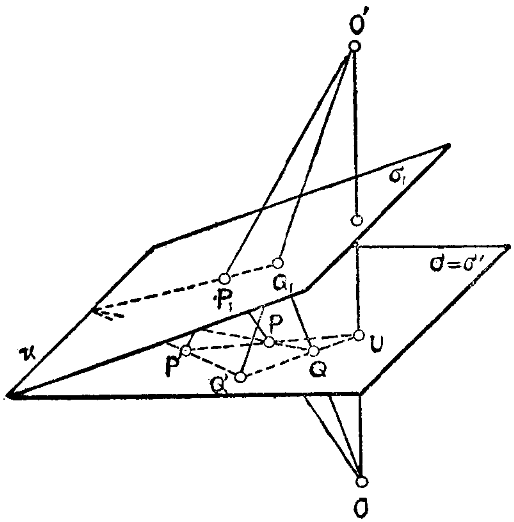


圖 99

證　過 u 作一平面 σ_1。由某點 O′ 射影於第二野 σ'。在 σ_1 上得新野 σ_1。則 σ_1 相稱於 σ。又 u 線上各點自對應。故兩者在配景位置。從而其對應點 $P_1P, Q_1Q, \cdots\cdots$ 藐連線悉過一定點 o。故

所與二野 σ, σ' 各由 o, o' 射影於同一野 σ_1。從而其對應點 PP', QQ'……之結線。悉過一定點 U。此 U 即所要貳重線線束之心。

右方得以同樣證之。

定義 7 一平面相稱之二野。有貳重點點列 u 及貳重線線束 U。則稱此相稱爲相應。u 爲相應軸。U 爲相應心。

系 一平面相應時。其

對應線之交點必在相應軸上。	對應點之聯線必過相應心。

定理 14 一平面相應。其軸 u 與其心 U 並其一雙

對應點 AA′ (其結線過 U) 定時。則其相應亦從之而定。	對應線 aa′ (其交點在 u 上) 定時。則其相應亦從之而定。

證 先任取一點 B。連線 $\overline{AB} \equiv x$ 截 u 於一點。此交點與 A′ 結直線 x′。而連線 $\overline{UB}$ 截 x′ 於定點 B′。即 B 之對應點。

次任取一直線 b。按前法求 b 上一點 B 之對應點 B′。此點與交點 $\dot{b u}$ 之連線 b′。即 b 之對雙線。

如斯得定一平面相應。

定義 8 一平面相應各雙對應點 B,B′ 與 u,U 分調和。各應線亦然。稱此爲調和相應。

定義 9 一平面相應各雙對應點 AA′ 於此相稱爲貳重對應。各雙對應線亦然。稱此相應爲對合。

定理15　調和相應者。一個對合也。

證　面上各對應點，對應線均與u，U分調和。故爲對合。

定理16　對合者。調和相應也。

證　各雙對應線aa′之交點爲貳重點。故此平面相稱。有數收貳重點。即有貳重點點列。由是此相稱爲一相應。然過其心之各直線上。其對應點AA′，BB′，……成雙曲的對合。故此相應爲調和的。

第七十四節　同一平面上之相反

定義10　同平面上二個相反野。其對應元素(點與線)悉貳重互對應。則此平面關聯稱極系。其貳重對應之點及線。各稱爲他之極點及極線。

例如　甲乙二個相反野在同平面時。甲之點A對應於乙之線a′。乙之點B′對應於甲之線b。若$A\equiv B'$，$a'\equiv b$。則Aa′爲二重相對應。而A爲a′之極點。a′爲A之極線。

由此特種關聯。逕得次之定理。

I.　某直線x上諸點之極線。均過同一點(x之極點)。

II.　一動點Y畫點列x。則其極線y畫線束X。且

I.　過某點X諸線之極點。均在一直線上(X之極線)。

II.　一動線y畫線束X。則其極點X畫點列x。且

點列x$\barwedge$線束X。

線束X$\barwedge$點列x。

定義 11 一點與其極線上之任一點。稱互共軛。線亦然。

III. 二點Y,Z各與第三點X爲共軛。則其連線$\overline{YZ}$爲X之極線。

III. 二線y,z各與第三線x爲共軛。則其交點$\dot{yz}$爲x之極點。

定理 17 一平面上相反某三角形之頂點。各對應於其對邊。則此關聯成一極系。

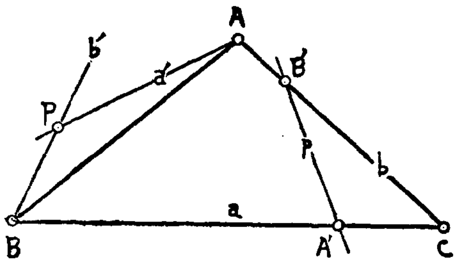


圖 100

證 頂點A,B,C各對應於對邊a,b,c。故邊$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$各對應於頂點$\dot{bc}$, $\dot{ca}$, $\dot{ab}$。卽各頂點與其對邊互二重對應。

又 列a(BC……)$\barwedge$束A(bc……)。

束A以a截斷之。得

列a(BC……)$\barwedge$列a(CB……)。

卽一直線a上二點列有兩點B,C互二重對應。故成對合。卽點列a之點,線束A之線互二重對應。點列b,線束B;點列c,線束C亦然。

今任取一點P與其對應線p考之。

對應於結線$a'(=\overline{AP})$。爲點列a之一點$A'(=\dot{a}p)$。

對應於結線$b'(=\overline{BP})$。爲點列b之一點$B'(=\dot{b}p)$。

從而與點$P(=a\dot{}b')$與其對應線$p(=\overline{A'B'})$互貳重對應。卽其關聯爲極系。

定義12　此性質之三角形。稱極三角形。

定理18　知一點及其極線並一極三角形。可定一極系。

證　一點P與其極線p並一極三角形ABC。其對邊爲a, b, c。則四點ABCP與四線abcp配合之。可設立一相反的關聯(71節定理9)。又三角形ABC爲極三角形。故此關聯爲極系。

第七十五節　二次曲面

定義13　二個相稱把。其各雙對應面之交線。形成一線圖形。稱線叢。其對應線之交點。形成三次空間點列。

定義14　二個相反把。其相對應之直線，平面所定之交點。產出一點圖形。稱二次點聚。

定義13　二個相稱野。其各雙對應點之連線。形成一線圖形。稱線叢。其對應線之結面。形成三次平面束。

定義14　二個相反野。其相對應之直線，點所定之平面。產出一面圖形。稱二次面束。

定義15 二次點聚之跡或二次面束之包。成二次曲面。

定理19 兩把之心S,S′爲二次曲面之點。

證 設$\overline{SS'}$爲第一把S之一線，此線與其對應面之交點必爲S′。故S′爲二次曲面之點。S得以同理證之。

定理20 兩把之各平面。截二次曲面爲二次曲線。

證 α爲把S之任一面。由兩把之相反的關聯。得

$$\alpha(\text{直線束})\barwedge a'(\text{平面束})。$$

a′(平面束)以α截斷之。則得

$$\alpha(\text{直線束})\barwedge \dot{\alpha}a'(\text{直線束})。$$

此射影的二線束。在平面α上產出過二點S,$\dot{\alpha}a'$之二次曲線。

把S′之任意平面。得以同理證之。

系 若兩線束α,$\dot{\alpha}a'$配景時。則二次曲線分解爲二直線。即平面α截二次曲面爲二個直線。

定理21 任意直線截二次曲面之點。不能超過二個，故此曲面有二次之稱。

證 x爲任意直線。作平面$\overline{Sx}$截曲面的爲二次曲線。在此平面上。直線x與其二次曲線之交點不能多於二個。即x與曲面之交點不能多於二個。

定義16 一直線a只截二次曲面於一點S。則線a爲S

點之切線。

定義17　一平面α只截二次曲面於一點S。則面α為S點之切面。

定理22　各把S之直線a為平面$\overline{SS'}$之對應線時。則a為S點之切線。

證　直線a截曲面之點有二。一為S。一為a與$\overline{SS'}$之交點。然而$\overline{SS'}$過S。故a與$\overline{SS'}$之交點為S。卽直線a與曲面只交於一點S。故為切線。

定理23　各把S之平面α為直線$\overline{SS'}$之對應面時。則α為S點之切面。

證　平面α對應於直線$\overline{SS'}$。故

$$\text{線束}\ \alpha(abc\cdots\cdots)\ \barwedge\ \text{面束}\ \overline{SS'}(\alpha\beta\gamma\cdots\cdots)。$$

卽α面上各線abc……各對應於過$\overline{SS'}$之平面$\alpha\beta\gamma$……。由前定理知abc……為S點之切線。卽α面上過點S之各線abc……。均只交曲線於一點S。從而平面α亦只交曲面於一點S。卽為切面。

系　在二次曲面之切面上過切點之直線。均為切線。反之。切於同一點切線之軌跡。為切於同點之切面。

定理24　二把心S,S′外。在曲面上任取一點S″為把心。對於二把S,S′各產新曲面。均與原曲面一致。

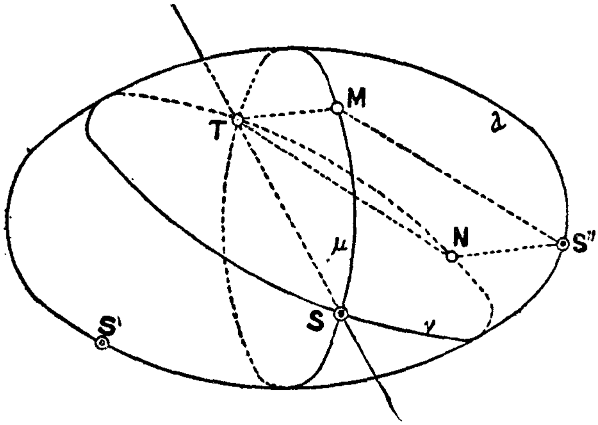


圖 101

證 過S作二平面。截曲面為二個二次曲線μ,ν。此曲線之第二交點為T。作平面$\overline{S''T}$。截曲線μ,ν於M,N。

由S射影於曲線μ,之直線束。與由$\overline{S''M}$射影於曲線ν之平面束。為射影的。

由S射影於曲線ν之直線束。與由$\overline{S''N}$射影於曲線μ之平面束。為射影的。

而二線束之共通線$\overline{ST}$。對應於二面束之共通面$\overline{S''MN}$。

從而二把S。S″為相反的。

次由相反的二把S,S″產出一個新二次曲面。此曲面與原曲面有共通二點S,S″及二個二次曲線μ,ν。

過二點S,S″任作一平面。截二曲面為二個二次曲線λ,λ'。此平面各截曲線μ,ν於二點。從而此四交點及二點S,S″為

曲線λ, λ'所共通。故λ, λ'一致。卽新舊兩曲面尙有第三共通二次曲線$\lambda \equiv \lambda'$。

再於一曲面上任取一點P。平面$\overline{PSS''}$截兩曲面爲二個二次曲線π, π'。此二曲線除二個共通點S, S″外。在λ, μ, ν上各有一個共通點。故π, π'相一致。從而點P亦在第二曲面上。

故新舊兩曲面爲同物。

第七十六節　二次曲面之分類

二次曲面大別爲二。

I. 含有直線。

II. 不含有直線。

(第一) 含有直線者。

二次曲面含某直線u。過此線之各平面。尙截曲面於第二線a (前節定理20系)。此平面以u爲軸旋轉時。則第二線a動於曲面上。從而全曲面由直線a展動所生。故爲線織面。

此種曲面。又分爲二。

I. 有二線相交者。

II. 無二線相交者。

I. 設有二線a,b相交於O。則O在u上(因二平面$\overline{ua}$, $\overline{ub}$不一致)。今於曲面上三線u, a, b外。任取二線C, D。過C, D各

作平面。截曲面為二個圓錐曲線 μ,ν。更由O點射影此二曲線。得二次錐形。然此二個二次錐形。有共通之五線 a, b, u, $\overline{CO}$, $\overline{DO}$。故為同物。且此錐形之各線含所與曲面二個以上之點。(點O外尙含曲線 μ,ν 之交點 M,N。)故錐面合於所與曲面。從而此場合之二次曲面。乃以O為頂之二次錐形。

II. 任取 a,b,c 三線 (每二線不相交)。截此三線之各直線。全在所與曲面上 (因與此曲面有三交點)。卽其曲面乃交三定線 a,b,c 之某動線所畫者。故此種曲面為二次線織面。卽為雙曲拋物體或一張雙曲體。

(第二) 全不含直線者。

此種曲面。又分三種。

I. 全不含無窮遠點者。此種二次曲面。稱橢圓體。以任一平面截斷之。常為橢圓。橢圓體以橢圓形之軸為軸旋轉所生者。特稱為迴轉橢圓體。

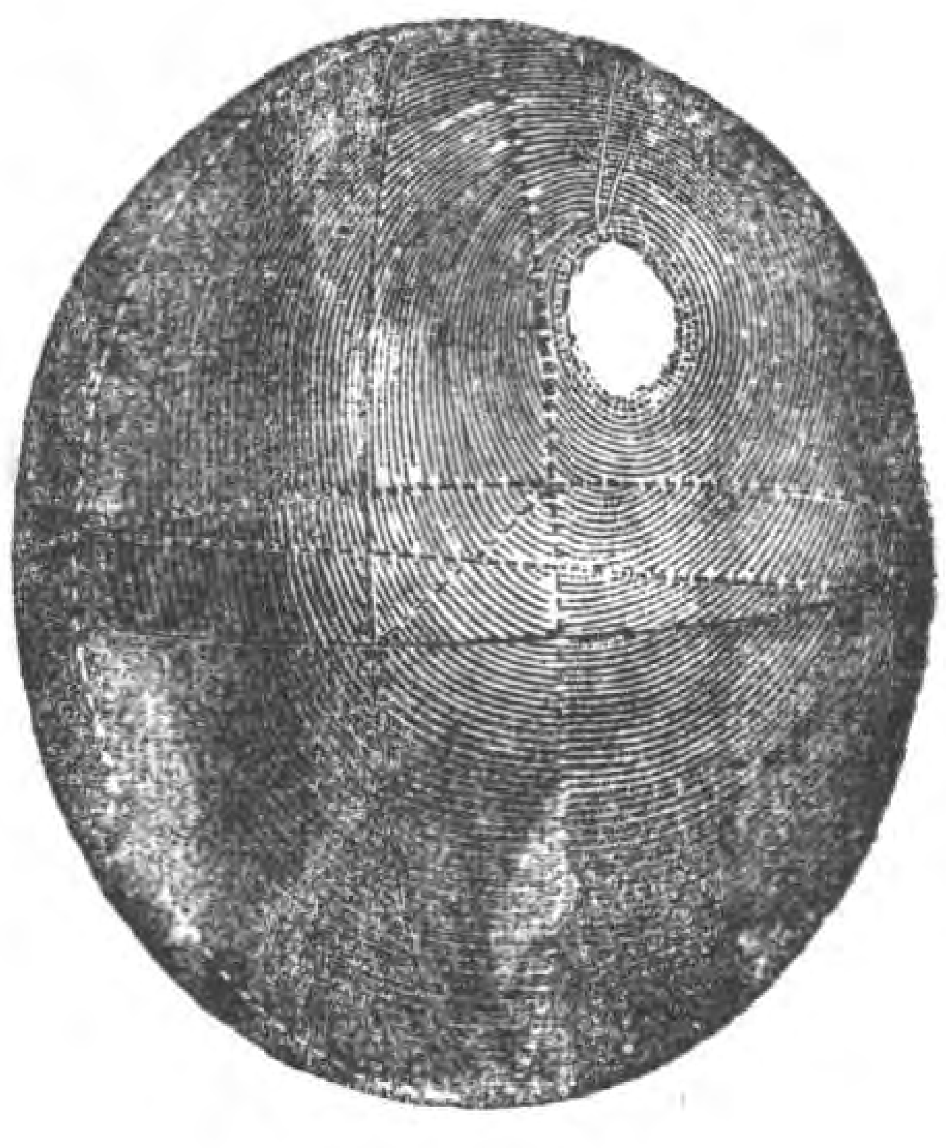


圖 102

II. 切於無窮遠面者。此種曲面。稱橢圓拋物體。以平面截

斷之過無窮遠切點。則成拋物線。否則爲橢圓。橢圓拋物體以拋物線之軸爲軸旋轉所生者。特稱迴轉拋物體。

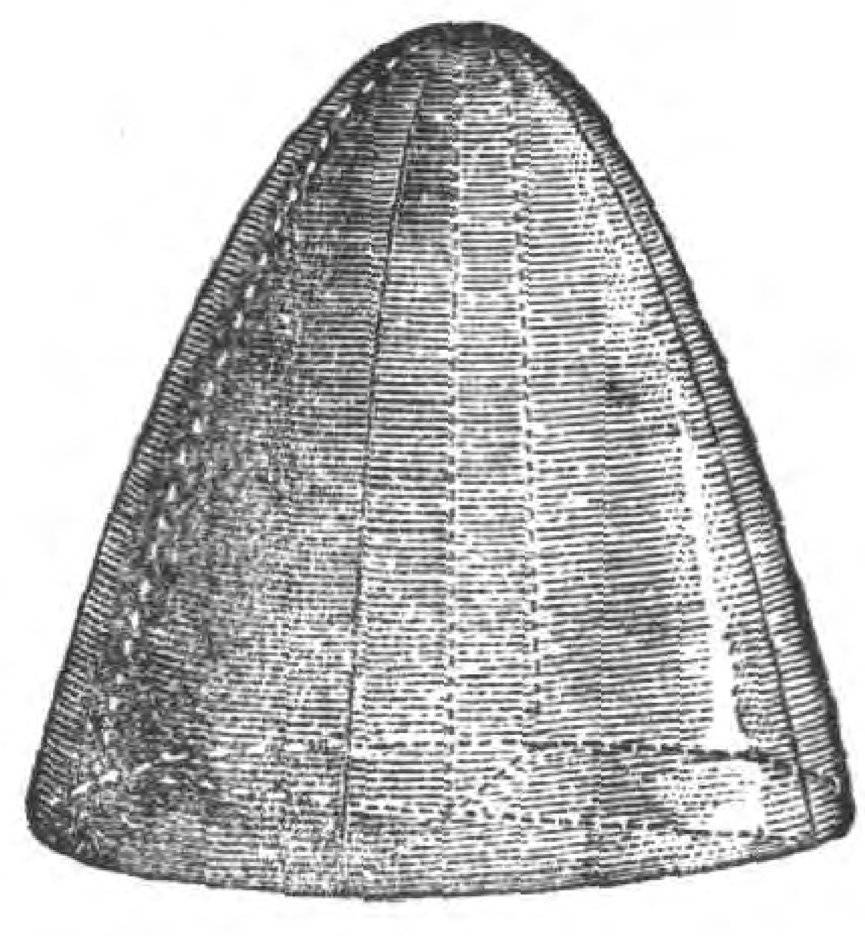


圖 103

III. 交無窮遠面者。稱二張雙曲體。以平面截斷此曲面時。從其截無窮遠曲線之點數。定其截口爲橢圓,拋物線或雙曲線。二張雙曲體以雙曲線之主軸爲軸旋轉所生者。特稱爲二張迴轉雙曲體。以副軸旋轉所生者。則稱一張迴轉雙曲體。(即一張雙曲體。參看49節)。

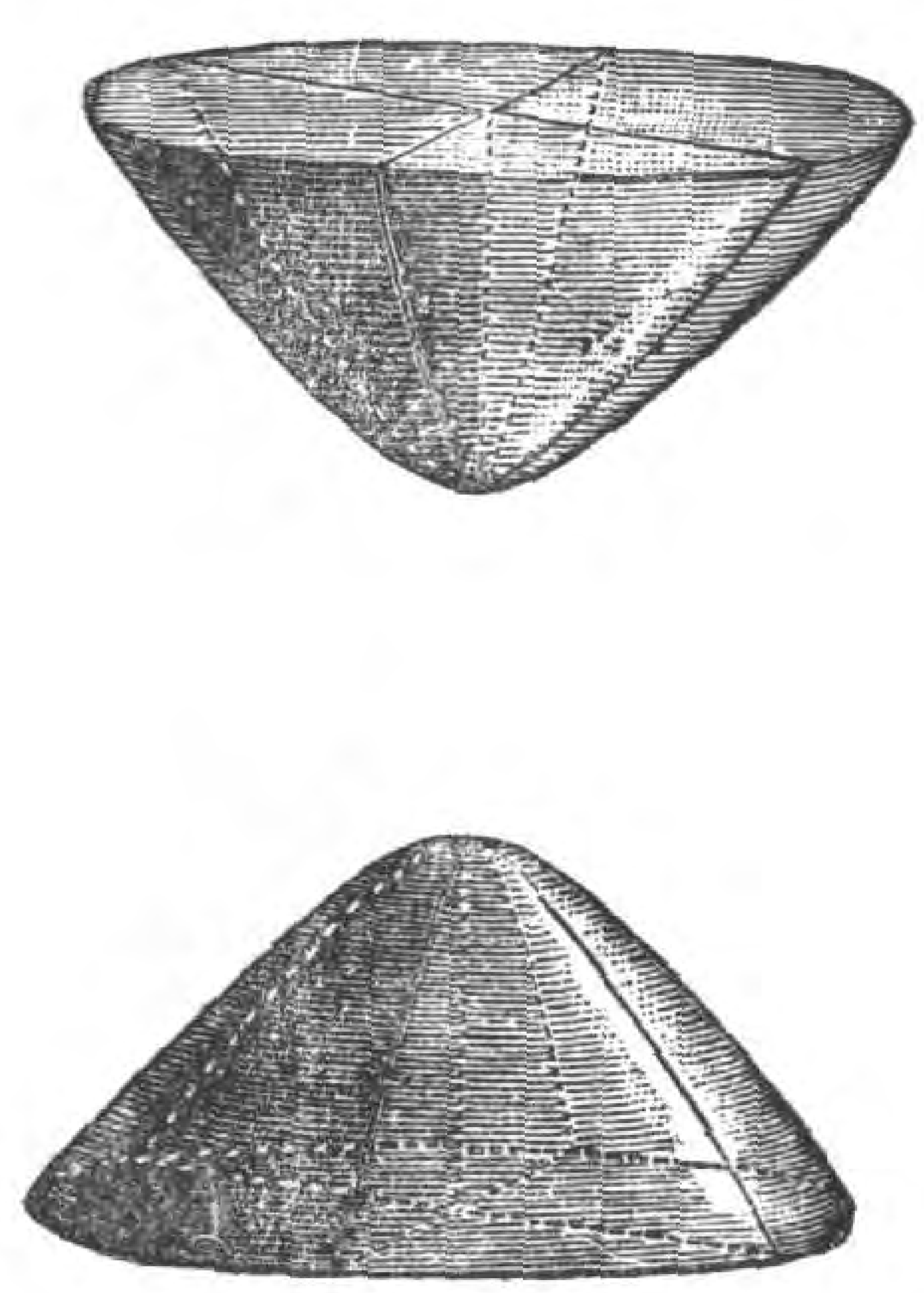


圖 104

統上所論各種二次曲面。列表於下。

- 二次曲面
  - 含有直線
    - 有二線相交者。(二次錐形)(若其交點在無窮遠則爲二次柱形)
    - 無二線相交者(二次線織面)
      - 含二個無窮遠線(雙曲拋物體)
      - 不含無窮遠線(一張雙曲體)
  - 不含有直線
    - 交無窮遠面(二張雙曲體)
    - 切於無窮遠面(橢圓拋物體)
    - 不交亦不切於無窮遠面(橢圓體)

以上就含直線與否以區別二次曲面。今再就曲面之母形相反二把S,S′考其分類。

第一把之一線t($=\overline{SS'}$)對應於點S′之切平面τ'。又過t之平面$\alpha\beta\gamma$……各對應於點S′之切線a′b′c′……。若平面α含其對應線a′。則a′線上各點。得視爲第一把之一線與其對應平面之交點。故此線全在曲面上。今從此等平面之數。得分二次曲面爲數種。

I. 三個平面α,β,γ各含其對應線a′, b′, c′。則面束t之各面亦含其對應線。從而線束τ'之總直線全在曲面上。即二次曲面分解爲二個平面(其一爲τ')。

II. 二個平面 α, β 含其對應線 a′, b′。則切平面 τ' 含有曲面之二線 a′, b′。故此曲面為二次線織面。

III. 唯一平面 α 含其對應線 a′。則切平面 τ' 只含曲面上一線 a′。故此曲面為二次錐面。

IV. 無一個平面含其對應線者。則此曲面全不含直線。

第七十七節　空間系之射影的關係

定義18　甲乙二個空間系互關聯時。甲之各點 P 及含 P 之各平面 π。各對應於乙之一點 P′ 及含 P′ 之一平面 π'。則甲乙兩者為互相稱。

定義19　甲乙二個空間系互關聯時。甲之各點 P 及含 P 之各平面 π。各對應於乙之一平面 π' 及 π' 上之一點 P′。則甲乙兩者為互相反。

由上定義。逕得次之定理。

定理25　甲乙丙三空間系。甲乙俱與丙相稱或相反。則甲乙亦互相稱。若丙與甲相稱，與乙相反。則甲與乙互相反。

定理26　甲乙二空間系相稱時。

在甲之一線 a 上各點。對應於乙之對應線 a′ 上一點。	過甲之一線 a 各平面。對應於過乙之對應線 a′ 一面。

證　含此線 a 之二平面 α, β。各對應於乙之二平面 α', β'。

從而a上各點P。在α上亦在β上。故對應於α',β',之交線a′上之一點P′。

右方以雙對法則求之。

定理27 甲乙二空間系互關聯時。

在甲之各直線a上之各點P。相對應於乙之一直線a′上之一點P′。則兩系之關聯爲一相稱。

過甲之各直線a之各平面π。相對應於過乙之一直線a′之一平面π'。則兩系之關聯爲一相稱。

定理28 二空間系互相稱時。

對應二野σ,σ'互相稱。二個對應點列a,a′互射影的。

對應二把S,S′互相稱。二個對應面束a,a′互射影的。

又二個對應線束互射影的。

由上記之結果。總括於下。

定理29 甲乙二空間系互相稱時。

I. 甲之各二級圖形之各元素。對應於乙之對應二級圖形之一元素。

II. 二個相對應之二級圖形及二個相對應之一級圖形。各相互射影的。

定理30 甲乙二空間系互相反時。亦有上列I,II.之性質。

定義20 凡甲乙二空間系具上列I之性質者。稱爲射影

的。卽相稱相反總括之爲射影的。

定理31　甲乙二空間系。各任取

二把 A, B 及 A′, B′。而 A⊼A′, B⊼B′。又 AB 共有之各平面。對應於A′B′共有之一平面。則二系之間成立一定之相稱。

二野 α, β 及 α', β'。而 α⊼α', β⊼β'。又 α β 共有之各點。對應於 α' β' 共有之一點。則二系之間成立一定之相稱。

證　由上記之假定。考甲乙兩系元素相互之配合。

先於甲之 $\overline{AB}$ 外任取一點 X。求其對應點 X′。

於甲引連線 $\overline{AX}\equiv a$, $\overline{BX}\equiv b$。在把 A′,B′ 作其對應線 a′,b′。(因把 AB, A′B′ 各互射影)。此二線交於定點 X′。卽所求之對應點。

次在甲任取一平面 ϵ。求其對應面 ϵ'。

就 ϵ 面上之各點 X 作其對應點 X′。則 X′ 之跡畫一定面 ϵ'。(兩把 A,B 以平面 ϵ 爲介。在配景位置。其對應之兩把 A′,B′ 互相稱。故過結線 $\overline{A'B'}$ 之各平面自對應。則兩把 A′,B′ 在配景位置(定理10)。故其對應線交點 X′ 之軌跡。必成一平面 ϵ'。)卽所求之對應面。

終於 $\overline{AB}$ 上取一點 P。過 P 引任意平面 ϵ。作其對應面 ϵ'。截 $\overline{A'B'}$ 於定點 P′。而 P 與 P′ 互對應。

如斯甲乙之間成立一種關聯。卽甲之各點及過此點之各平面。對應於乙之一點及過此點之一平面。故兩系之間成立

一定之相稱。

右方得以雙對法則求之。

定理32 甲乙二空間系。有五雙任意對應點 ABCDE 及 A′B′C′D′E′(每四點不在一平面上)。則甲乙之間成立一定之相稱。 | 對應面 $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ 及 $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\epsilon'$ (每四面不過同一點)。則甲乙之間成立一定之相稱。

證 二雙之把 AA′ 及 BB′ 間。

$A(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BD}, \overline{AE}) \barwedge A'(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}, \overline{A'E'})$。

$B(\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}) \barwedge B'(\overline{B'A'}, \overline{B'C'}, \overline{B'D'}, \overline{B'E'})$.

故得成立一定之相稱。(定理8)

然於此關聯。

兩把A,B之三個共通面 $\overline{ABC}$, $\overline{ABD}$, $\overline{ABE}$

兩把A′,B′之三個共通面 $\overline{A'B'C'}$, $\overline{A'B'D'}$, $\overline{A'B'E'}$

各互相應。故面束 $\overline{AB}$ 之各平面對應於面束 $\overline{A'B'}$ 之一平面。乃由前定理定甲乙兩系爲相稱。

定理33 甲乙二空間系甲之二把A,B與乙之二野 α', β'. 其 $A \barwedge \alpha'$, $B \barwedge \beta'$。又二把A,B共有之各平面。對應於二野 α', β' 共有之一點。則此二系間成立一定之相反。

定理34 甲乙二空間系。甲之任意五點(每四點不在一平面上)。與乙任意五平面(每四平面不過同一點)互對應時。則甲乙間成立一定之相反。