球面三角術

李光蔭著

商務印書館出版

書號 51114
定價人民幣4,500元

球面三角術

(51114)

著作者 李光蔭

出版者 商務印書館
上海河南中路二一一號

發行者 中國圖書發行公司
三聯中華商務開明聯營聯合組織
北京絨線胡同六十六號

發行所 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店 各地分店

印刷者 商務印書館印刷廠

1937年1月初版
1951年3月4版

定價人民幣4,500元

(滬)4500-6500

序

球面三角術之應用甚廣.就其應用於天文學者言之,如球面天文學,應用天文學,航海天文學等之主要算法多惟球面三角是賴.就其應用於測地學者言之,如測定地球之形狀與體量及地面上一部分之圖形等,均先定一基線;基線既定,選設測站,分成三角網,是項三角形皆球面三角形也.他如鐵道工程等計算亦多應用之.現今我國建設事業日興,其需用斯學者更亟.惜乎我國尙無是書出版,以供參考.

一九三四年夏余任職中央研究院天文研究所時,因推算上之需要,復將斯學從新整理一次,遂成本書,茲特公之於世,以求同好者之教正.

本書編成後,蒙天文研究所所長余青松先生專任研究員高平子陳遵嬀二先生詳爲審查,特此鳴謝.

李光蔭一九三五年七月

於南京紫金山天文臺

目 錄

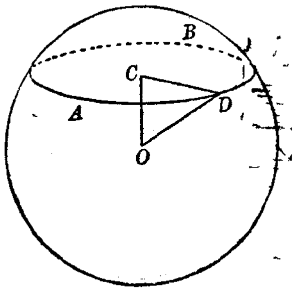
球面三角術

I

大圓及小圓

1. 空間距一定點等遠之點之軌跡曰球面，球面所包容之立體曰球，該定點爲球心．連結球心及球面上任一點之直線曰球之半徑，任一經過球心而兩端抵於球面之直線曰球之直徑．

2. 球面與任一平面之相交處必爲一圓．



(圖 1)

命 O 爲球心，AB 爲球面與任一平面之相交處．作 OC

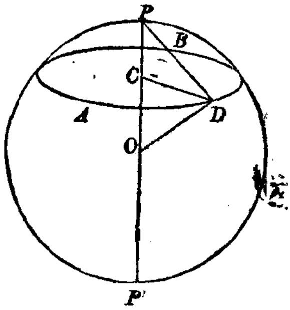
垂直於平面取相交處之任一點D,連接OD,CD;因OC垂直於平面,故角OCD爲直角,因之$CD=\sqrt{OD^2-OC^2}$.今O與C皆爲定點,故OC爲定長;且OD乃球之半徑,故亦爲定長;故CD爲定長.故知相交處所有之點距定點C等遠;故此相交處必爲以C爲圓心之圓.

若此平面經過球心,其與球面之相交處爲一大圓;否則爲一小圓.由之可知大圓之半徑與球之半徑相等.

3. 經過球心及球面上之任兩點(惟非同一直徑之兩端)必可作一平面,且僅可作一平面.故經過球面上任二已知點(須非同一直徑之兩端)僅可作一大圓,且此大圓必被此二已知點分爲不相等之兩段;茲爲簡便起見,稱此兩段中之較短者爲連接此二已知點之大圓弧.

4. 垂直於球面上任一圓所在之平面之直徑名曰該圓之軸,軸之兩端名曰該圓之兩極.大圓之兩極距該圓之平面等遠.小圓之兩極距該圓之平面不等遠,距其平面近者曰近極,遠者曰遠極,近極亦恆簡稱曰極

5. 圓之任一極距該圓上所有之點等遠.

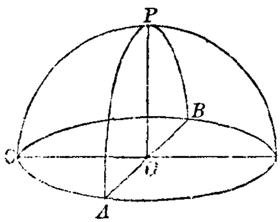


(圖 2)

命 O 爲球心，AB 爲球面上之任一圓．C 爲圓心．P 與 P' 爲圓之兩極．取圓上之任一點 D；連接 CD, OD, PD. 於是 $PD=\sqrt{PC^2+CD^2}$. 今 PC 與 CD 爲定長，故 PD 爲定長．設經 P 與 D 作大圓；因 PD 爲定長，故無論 D 在 AB 圓上位於何處，P 與 D 間之大圓弧亦必爲定長．

故圓之一極與圓上任一點之距離均相等．

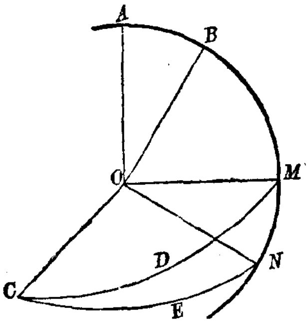
6 由一大圓之一極至此大圓之圓周所作之大圓弧必爲一象限．



(圖 3)

命P爲大圓ABC之一極,O爲球心,PA爲由P至ABC之圓周之任一大圓弦.作OP;因P爲ABC之一極,故PO垂直於平面ABC,故角POA爲直角,PA弧爲一象限.

7. 連結兩大圓之極之大圓弧在球心所對之角必等於此兩大圓之平面之傾斜角.



(圖 4)

命O爲球心,CD與CE爲相交於C之兩大圓,A爲CD之極,B爲CE之極.

經A與B作大圓遇CD於M,遇CE於N;則AO垂直於平面OCD內之OC,而BO垂直於平面OCE內之OC;故OC垂直於平面AOB且垂直於平面AOB內之OM及ON.故角MON爲平面OCD與平面OCE之傾斜角.且

$$角AOB=角AOM-角BOM=角BON-角BOM=角MON.$$

8 兩大圓間之角卽指兩大圓之平面之傾斜角而言.故圖 4 中大圓 CD 與大圓 CE 間之角爲角 MON

因 PO (圖 2) 垂直於平面 ACB, 故凡包含 PO 之平面必垂直於平面 ACB. 故任一圓與任一經過該圓之兩極之大圓間之角必爲一直角.

9. 兩大圓必互相平分.

因每大圓之平面經過球心,故兩大圓之平面之相交線必爲球之直徑,且必爲其每大圓之直徑.故此兩大圓必在其相遇之兩點互相平分.

10. 設 P, A, C 爲球面上之任三點,惟 A 與 C 非爲同一直徑之兩端;若 P 與 A 間及 P 與 C 間之兩大圓弧各等於一象限, P 必爲經過 A 與 C 之大圓之一極 (參閱圖 3).

設 PA 與 PC 各爲一象限, O 爲球心;則 POC 與 POA 必各爲一直角,故 PO 必垂直於平面 AOC, P 必爲大圓 AC 之一極.

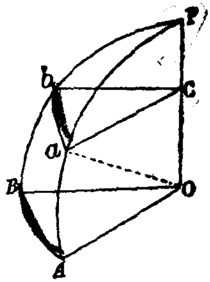
11. 經過大圓之兩極之諸大圓稱爲該大圓之諸副圓.例如圖 4 中 C 爲大圓 $ABMN$ 之一極,故 CM 與 CN 爲大圓 $ABMN$ 之副圓之部分.且大圓 CM 與大圓 CN 間之角以大圓弧 MN 度之;卽一大圓之任兩副圓間之

角恆以此兩副圓在該大圓上所夾之弧度之

12 設由球面上一點作不在同一大圓上之大圓弧二;若此兩大圓弧之平面皆垂直於某已知圓之平面,則該點必爲此已知圓之一極.

因此兩大圓弧之平面皆垂直於已知圓之平面,故此兩大圓弧之平面之相交線必垂直於此已知圓之平面,故爲此已知圓之軸.故該點爲已知圓之一極.

13. 設某小圓弧在其圓心所對之角等於某大圓弧在球心所對之角,求此小圓弧與大圓弧之比.



(圖 5)

命 ab 爲小圓弧,C 爲圓心 P 爲其極;O 爲球心.

經 P 作大圓 PaA 與 PbB 各遇以 P 爲一極之大圓於 A 與 B;連結 Ca, Cb, OA, OB. 因平面 aCb 與平面 AOB 皆垂直於 OP,故 Ca, Cb, OA, OB 皆垂直於 OP;故 Ca 與 OA 平

行，Cb 與 OB 平行．故角 aCb = 角 AOB．故

$$\frac{\widehat{ab}}{\overline{Ca}}=\frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}};\quad \text{故}$$

$$\frac{\widehat{ab}}{\widehat{AB}}=\frac{Ca}{OA}=\frac{Ca}{Oa}=\sin POa.$$

II

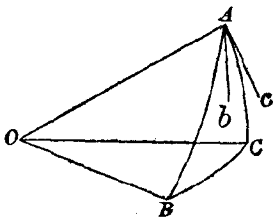
球面三角形

14. 設有三平面相交於球心,而在球心構成一三面角,則此三平面各與球面相交於一大圓弧,此三大圓弧在球面上所構成之圖形即爲一球面三角形.

構成球面三角形之三大圓弧名曰該球面三角形之邊,每兩邊相交之點名曰該球面三角形之頂,每兩邊在頂所成之角名曰該球面三角形之角.

球面三角術之主要目的在講求解球面三角形之方法.

15. 球面三角術之主要部分爲球面三角形之角



(圖 6)

與邊之相互關係之討論;故讀者對於球面三角形及其形素須先獲得一正確而淸晰之概念.

命 O 爲球心,設三平面在 O 點構成一三面角,更命 AB, BC, CA 爲此三平面與球面相交之弧;則 ABC 卽爲一球面三角形,而 AB, BC, CA 皆爲其邊.設 Ab 爲與 AB 相切於 A 之直線,Ac 爲與 AC 相切於 A 之直線,且 Ab 與 Ac 皆爲由 A 而分向 B 與 C 所作者;則角 bAc 卽爲此球面三角形之一角.其在 B 點與 C 點之他二角亦以同法而成者.

可見球面三角形之角乃構成該三面角之平面間之角;蓋 Ab 與 Ac 皆垂直於 OA,故角 bAc 爲平面 OAB 與平面 OAC 之傾斜角.

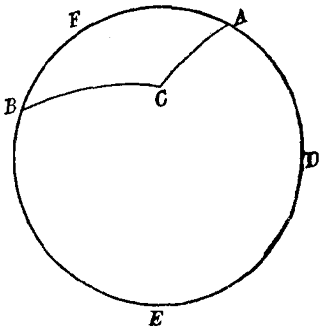
所謂球面三角形之邊實際皆爲大圓弧,而此諸大圓弧與構成三面角之平面角成正比.如 AB (圖 6) 爲球面三角形 ABC 之邊,而平面角 AOB 以 $\frac{\widehat{AB}}{OA}$ 度之;故就同一球言,AB 與角 AOB 實成正比.

16. A, B, C 等字母通常用以名球面三角形之角,而 a, b, c 等用以名其邊.惟吾人若確知角之單位,A, B, C 等字母亦可用以表角之數值;例如若 C 爲直角,卽可言 $C=90^\circ$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$,前者乃以度爲角之單位,後者乃

以與半徑等長之弧在圓心所對之角(本位弧)爲角之單位.球面三角形之邊亦如之;因各邊與在球心所對之平面角成正比,故可用a, b, c等字母以表此諸平面角之數值,初不論其單位爲何種也.

17. 球面三角形之各邊均限定小於半圓.

此僅爲便於研究起見所設之限制;惟今已成爲公認之慣例矣.



(圖 7)

$ADEB$實大於半圓.若吾人欲以$BC, CA, ADEB$爲構成一球面三角形之三大圓弧亦未嘗不可.惟吾人已同意將此類球面三角形置之而不予討論;且所謂球面三角形ABC者不言而知其爲AFB, BC與CA所構成之球面三角形

18 由17節之限制知球面三角形之任一角必小於二直角

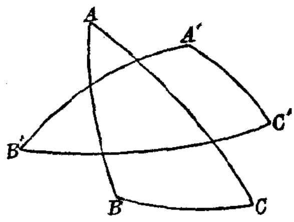
設 BC (圖 7), CA, $ADEB$ 所構成之球面三角形中之角 BCA 大於二直角；命 D 爲 BC 延長後與 AE 相遇之點,則 BED 必爲一半圓(參閱9節),故 BEA 必大於半圓；故所設之球面三角形不屬於吾人所討論者.

III

關於球面三角形之幾何定理

19 球面三角形之角與邊之相互關係在球面三角術中皆應用角與邊之三角函數討論之.今先蒐集關於球面三角形之角與邊之關係之諸幾何定理於下,暫不涉及其三角函數.

20. 極三角形.



(圖 8)

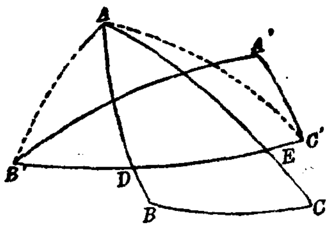
命 ABC 爲任一球面三角形,更命 A' 爲 BC 之極, B' 爲 CA 之極, C' 爲 AB 之極;且 A' 與 BC 之對頂 A 位於 BC 之同側, B' 與 CA 之對頂 B 位於 CA 之同側, C' 與 AB 之對頂 C 位於 AB 之同側;則球面三角形 $A'B'C'$ 名爲 ABC

之極三角形.

因 ABC 之每邊有兩極,故以 ABC 之邊之諸極爲頂可構成之球面三角形凡八;求以 A', B', C' 等極爲頂之球面三角形(即 A' 與 A 位於 BC 之同側,B' 與 B 位於 CA 之同側,C' 與 C 位於 AB 之同側)只其一.此唯一之球面三角形方爲 ABC 之極三角形.

對 $A'B'C'$ 言,ABC 名曰原三角形.

21. 若甲球面三角形爲乙球面三角形之極三角形,則乙球面三角形亦必爲甲球面三角形之極三角形.



(圖 9)

命 ABC 爲任一球面三角形,$A'B'C'$ 爲其極三角形.因 B' 爲 CA 之一極,故 AB' 爲一象限;因 C' 爲 AB 之一極,故 AC' 亦爲一象限(參閱 6 節);故 A 爲 $B'C'$ 之一極(參閱 10 節).且依假定 A 與 A' 位於 BC 之同側,故 $A'A$ 小於

一象限.因 A 爲 $B'C'$ 之一極而 AA' 小於一象限,故 A 與 A' 位於 $B'C'$ 之同側.

以同理可說明 B 爲 $C'A'$ 之一極且 B 與 B' 位於 $C'A'$ 之同側,C 爲 $A'B'$ 之一極且 C 與 C' 位於 $A'B'$ 之同側.故 ABC 爲 $A'B'C'$ 之極三角形.

22. 極三角形之邊及角與原三角形之相當角及邊彼此相補.

命 $B'C'$(圖 9) 遇 AB 於 D, 遇 AC 於 E ($B'C'$, AB, AC 於必要時各可延長). 因 A 爲 $B'C'$ 之一極,故球面角 A 以弧 DE 度之(參閱 11 節). 但 $B'E$ 及 $C'D$ 各等於一象限;故 DE 與 $B'C'$ 之和等於半圓;即 $B'C'$ 在球心所對之角爲角 A 之補角.以同理可說明 $C'A'$ 爲角 B 之補角, $A'B'$ 爲角 C 之補角.

且因 ABC 爲 $A'B'C'$ 之極三角形,故亦知 BC 爲角 A' 之補角, CA 爲角 B' 之補角, AB 爲角 C' 之補角.

原三角形與極三角形因有以上諸性質,故恆名之曰互補三角形.

如以 A, B, C, a, b, c 表某球面三角形之角與邊而以 A', B', C', a', b', c' 表其極三角形之角與邊(均以本位弧爲單位),則

$$A'=\pi-a,\qquad B'=\pi-b,\qquad C'=\pi-c,$$

$$a'=\pi-A,\qquad b'=\pi-B,\qquad c'=\pi-C.$$

23 以上六式甚爲重要,讀者當牢記之;蓋取關於球面三角形之角與邊之任一定理,若將其角易以其極三角形中之相當邊之補角而將其邊易以其極三角形之相當角之補角,其定理仍爲眞確也.

24 球面三角形任兩邊之和必大於第三邊(參閱圖 6).

因在球心構成三面角之三平面角中任兩平面角之和必大於第三平面角,故 AB, BC, CA 中任兩弧之和必大於第三弧.

由此定理可知球面三角形任兩邊之差必小於第三邊.

25 球面三角形三邊之和必小於一大圓周(參閱圖 6).

因在球心構成三面角之三平面角之和小於四直角,故

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{OA}}+\frac{\overset{\frown}{BC}}{\overline{OA}}+\frac{\overset{\frown}{CA}}{\overline{OA}}<2\pi,$$

故 $$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}<2\pi\cdot\overline{OA};$$

卽三弧之和小於一大圓周.

26. 球面三角形三角之和必大於二直角而小於六直角.

命 A, B, C 爲球面三角形之角; a', b', c' 爲其極三角形之邊.

依25節, $$a'+b'+c'<2\pi;$$

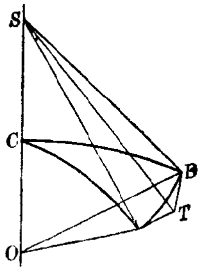
故依23節 $$\pi-A+\pi-B+\pi-C<2\pi;$$

故 $$A+B+C>\pi.$$

且依18節 A, B, C 各小於 π, 故

$$A+B+C<3\pi.$$

27. 等腰球面三角形之二底角必等.



(圖 10)

命 ABC 爲球面三角形, 且 $AC=BC$; O 爲球心由 A 作 AC 之切線, 由 B 作 BC 之切線, 此二切線必同遇 OC 之延長線於 S, 且 AS 必等於 BS.

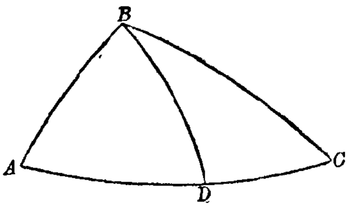
由 A, B 作 AB 之切線 AT 與 BT, 則 $AT=BT$; 連接 TS. 在三角形 SAT 與 SBT 中, $SA=SB$, $AT=BT$, $TS=TS$; 故角 SAT = 角 SBT; 角 SAT 與角 SBT 卽球面三角形 ABC 之二底角.

圖 10 中 AC 與 BC 皆假定小於一象限; 若其大於一象限, 則 AC 與 BC 之切線卽將相遇於 CO 之延長線, 不復相遇於 OC 之延長線矣; 遇此情形其證法亦同. 若 AC 與 BC 各爲一象限, 則依 10 節, 與 8 節二底角皆爲直角.

28 若球面三角形有兩角相等, 則其對此兩等角之兩邊必等.

因原三角形中有兩角相等, 故其極三角形必有兩邊相等; 故依 27 節在極三角形中對等邊之兩角必等; 故在原三角形中對等角之兩邊必等.

29. 若球面三角形之兩角不等, 則其對不等角之兩邊亦不等, 且大邊必對大角.



(圖 11)

命 ABC 爲球面三角形,且角 $ABC>$ 角 BAC.

在 B 點作角 $ABD=$ 角 BAD;於是 $BD=AD$(參閱28節),且 $BD+DC>BC$ (參閱24節);故 $AD+DC>BC$;即

$$AD>BC.$$

30. 若球面三角形之兩邊不等,則其對不等邊之兩角亦不等,且大角必對大邊.

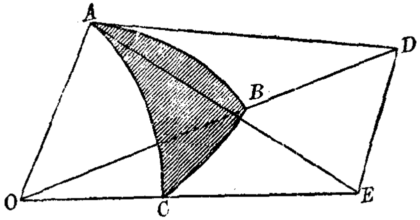
設 $AC>BC$ (圖11).

依28節角 ABC 絕不小於角 BAC,又依27節角 ABC 絕不等於角 BAC;故角 ABC 必大於角 BAC.

IV

球面三角形之角與邊之三角函數關係

31. 以球面三角形各邊之正弦與餘弦表其一角之餘弦.



(圖 12)

命 ABC 爲球面三角形, O 爲球心; 更命由 A 所作 AC 之切線遇 OC 之延長線於 E 由 A 所作 AB 之切線遇 OB 之延長線於 D; 連接 ED. 則角 EAD 卽 ABC 之角 A, 且其邊 a 以角 EOD 度之.

由三角形 ADE 與 ODE 得

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos A, \tag{1}$$

與 $$DE^2=OD^2+OE^2-2OD\cdot OE\cdot\cos a;\qquad(2)$$

且因角OAD與角OAE均爲直角,故

$$OD^2=OA^2+AD^2,\qquad(3)$$

$$OE^2=OA^2+AE^2.\qquad(4)$$

將(3),(4)代入(2),得

$$DE^2=OA^2+AD^2+OA^2+AE^2-2OD\cdot OE\cdot\cos a.\qquad(5)$$

(5)−(1), $0=2OA^2+2AD\cdot AE\cdot\cos A-2OD\cdot OE\cdot\cos a;$

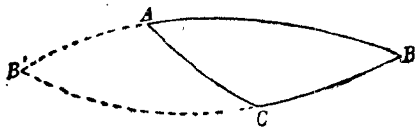
故 $$\cos a=\frac{OA}{OE}\cdot\frac{OA}{OD}+\frac{AE}{OE}\cdot\frac{AD}{OD}\cos A;$$

卽 $$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A;$$

故 $$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

32 在圖12中由A所作之二切線分遇OD與OC之延長線,按圖之如此作法乃假定夾角A之邊皆小於一象限.今須證驗若夾角A之邊非皆小於一象限,公式$\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$亦爲眞確;其證驗如下:

(1) 設夾角A之邊中只一邊大於一象限,姑命AB當此邊.延長BA與BC命其相遇於B';且命$AB'=c'$,$CB'=a'$.



(圖 13)

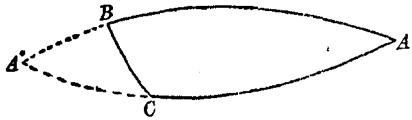
由球面三角形 $AB'C$,得

$\cos a' = \cos b \cdot \cos c' + \sin b \cdot \sin c' \cdot \cos B'AC$, (參閱 31 節)

但 $a' = \pi - a$, $c' = \pi - c$, $B'AC = \pi - A$; 故

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

(2) 設夾角 A 之兩邊皆大於一象限,延長 AB 與 AC 命其相遇於 A'; 命 $A'B = c'$, $A'C = b$; 則由球面三角形 $A'BC$, 得



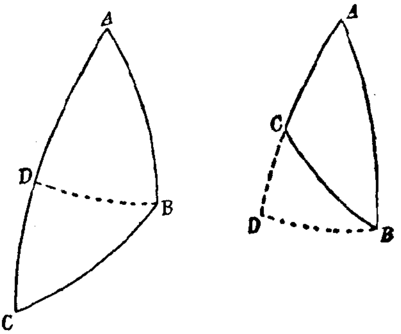
(圖 14)

$$\cos a = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos A';$$

但 $b' = \pi - b$, $c' = \pi - c$, $A' = A$; 故

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

(3) 設夾角 A 之邊中只一邊等於一象限,姑命 AB 當此邊.在 AC (遇必要時延長之)上取 AD 等於一象限,



(圖 15)

且作BD. 若BD爲一象限, B必爲AC之一極(參閱10節); 於是$a=\frac{\pi}{2}$, $A=\frac{\pi}{2}$, $c=\frac{\pi}{2}$. 故所證驗之公式化爲恆等式$0=0$矣.若BD非爲一象限,則由球面三角形BDC,得

$$\cos a=\cos CD\cdot\cos BD+\sin CD\cdot\sin BD\cdot\cos CDB;$$

但$\cos CDB=0$, $\cos CD=\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\sin b$ (右圖) 或$\cos CD=\cos\left(b-\frac{\pi}{2}\right)=\sin b$ (左圖), $\cos BD=\cos A$; 故

$$\cos a=\sin b\cdot\cos A;$$

此正爲$c=\frac{\pi}{2}$時 $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$ 所化得之結果.

(4) 設夾角A之兩邊各爲一象限. 則公式$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$化爲$\cos a=\cos A$矣; 此顯然眞確,因此時$A$爲$BC$之一極. 故$A=a$.

總上所述,知公式 $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$ 永為真確.

33. 公式 $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$ 可用之為以球面三角形之邊之正弦與餘弦表其任一角之餘弦之公式;分書之有三公式:

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A, \qquad (\mathrm{I}_a)$$

$$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B, \qquad (\mathrm{I}_b)$$

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C. \qquad (\mathrm{I}_c)$$

(I_a), (I_b), (I_c) 為球面三角術中之基本公式,因由之可演化而得其他諸公式也

34. 以球面三角形之邊之三角函數表其一角之正弦.

今 $$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}, \qquad (\mathrm{I}_a)$$

故 $$\sin^2 A=1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c};$$

故 $$\sin A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin b\sin c}. \qquad (\mathrm{II}_a)$$

$$\sin A=\frac{\sqrt{1-\sum\cos^2 a+2\prod\cos a}}{\sin b\sin c}$$

因 $\sin b$ $\sin c$. $\sin A$ 皆爲正值,故 (II_a) 之根式須給以正號.

由 (I_b), (I_c) 入手如法滀化可得

$$\sin B=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin c}, \quad (\mathrm{II}_b)$$

與 $$\sin C=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b}. \quad (\mathrm{II}_c)$$

35. 球面三角形各角之正弦與其對邊之正弦成正比.

由 (II_a), (II_b), (II_c), 知

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c},$$

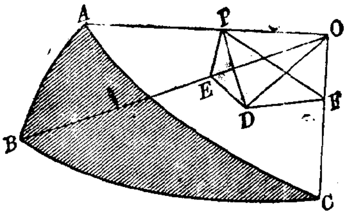
$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c},$$

$$\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c};$$

故 $$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}. \quad (\mathrm{III})$$

(III) 亦可用下法求得之.

命 ABC 爲球面三角形, O 爲球心. 於 OA 上取任一點 P, 作 PD 垂直於平面 BOC, 由 D 作 DE 垂直於 OB, 由 D 作 DF 垂直於 OC; 連結 PE, PF, OD.



(圖 16)

因PD垂直於平面BOC,故在此平面上凡與PD相遇之直線皆垂直於PD;故

$$PE^2=PD^2+DE^2=PO^2-OD^2+DE^2$$

$$=PO^2-(OD^2-DE^2)=PO^2-OE^2;$$

故角PEO爲直角;故$PE=OP\cdot\sin POE=OP\sin c$;

而 $$PD=PE\sin PED=PE\sin B=OP\sin c\sin B.$$

同法 $PD=OP\sin b\sin C$;故

$$OP\sin c\sin B=OP\sin b\sin C;\text{ 故}$$

$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

同法 $$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}\qquad\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{\sin A}{\sin a};$$

故 $$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

圖16中假定b, c, B, C各小於一直角;經證驗後,知此證明在任何情形之下莫不爲眞.例如若B獨大於直

角，則D即不復位於OB與OC之間，而位於OB之外矣；惟此時角PED爲角B之補角，故$\sin PED$仍等於$\sin B$.

36. 求證$\cot a\sin b=\cot A\sin C+\cos b\cos C$.

今
$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A, \qquad (\mathrm{I}_a)$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C, \qquad (\mathrm{I}_c)$$
$$\sin c=\sin a\frac{\sin C}{\sin A}. \qquad (\mathrm{III})$$

將(I_c)中$\cos c$之値與(III)中$\sin c$之値代入(I_a)，得

$$\cos a=(\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C)\cos b+\frac{\sin a\sin b\cos A\sin C}{\sin A};$$

即
$$\cos a=\cos a\cos^2 b+\sin a\sin b\cos b\cos C+\sin a\sin b\cot A\sin C;$$

即
$$\cos a(1-\cos^2 b)=\sin a\sin b\cos b\cos C+\sin a\sin b\cot A\sin C;$$

即
$$\cos a\sin^2 b=\sin a\sin b\cos b\cos C+\sin a\sin b\cot A\sin C.$$

以$\sin a\sin b$除兩節，得

$$\cot a\sin b=\cos b\cos C+\cot A\sin C.$$

將此公式中之字母更換之，可另得與其相似之五

公式;總書六公式如下:

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C, \tag{IV$_a$}$$

$$\cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C, \tag{IV$_b$}$$

$$\cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A, \tag{IV$_c$}$$

$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A, \tag{IV$_d$}$$

$$\cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B, \tag{IV$_e$}$$

$$\cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B. \tag{IV$_f$}$$

37. 以球面三角形之邊之三角函數表其一角之半之正弦,餘弦與正切.

今
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}; \tag{I$_a$}$$

故
$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c};$$

故
$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c}.$$

命 $2s = a+b+c$, 卽 s 爲球面三角形之邊之和之半;則

$a+b-c = 2s-2c = 2(s-c)$, $a-b+c = 2s-2b = 2(s-b)$;

於是
$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c},$$

而
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}. \tag{V$_a$}$$

同法
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}},\qquad (\mathrm{V}_b)$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\qquad (\mathrm{V}_c)$$

再者 $1+\cos A=1+\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\dfrac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c};$

故 $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}=\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c};$$

而
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.\qquad (\mathrm{VI}_a)$$

同法
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}},\qquad (\mathrm{VI}_b)$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}.\qquad (\mathrm{VI}_c)$$

由 (V_a) 與 (VI_a), 得

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}.\qquad (\mathrm{VII}_a)$$

同法
$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-b)}},\qquad (\mathrm{VII}_b)$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}.\qquad (\mathrm{VII}_c)$$

因 $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ 各小於一直角, 故 $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ 皆爲正值;故本節

中之各根式均須給以正號.

38. 以球面三角形各角之正弦與餘弦表其一邊之餘弦.

依23節將公式(I_a)中之各邊易以其相當角之補角,且將其各角易以其相當邊之補角;得

$$\cos(\pi-A)=\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)$$

$$+\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-a),$$

即 $$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a. \qquad (\mathrm{VIII}_a)$$

同法 $$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b, \qquad (\mathrm{VIII}_b)$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c. \qquad (\mathrm{VIII}_c)$$

39. 以球面三角形各角之三角函數表其一邊之半之正弦,餘弦與正切.

令 $$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}, \qquad (\mathrm{VIII}_a)$$

故 $$1-\cos a=1-\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=-\frac{\cos A+\cos(B+C)}{\sin B\sin C};$$

即 $$\sin^2\frac{a}{2}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}.$$

命 $2S=A+B+C$, 則 $B+C-A=2(S-A)$;

於是 $$\sin^2\frac{a}{2}=-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C},$$

而 $$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}. \qquad (\mathrm{IX}_a)$$

同法 $$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-B)}{\sin C\sin A}}, \qquad (\mathrm{IX}_b)$$

與 $$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}. \qquad (\mathrm{IX}_c)$$

再者 $$1+\cos a=1+\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos A+\cos(B-C)}{\sin B\sin C};$$

即 $$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C},$$

故 $$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}. \qquad (\mathrm{X}_a)$$

同法 $$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C\sin A}}, \qquad (\mathrm{X}_b)$$

與 $$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}. \qquad (\mathrm{X}_c)$$

由 (IX_a) 與 (X_a), 得

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \qquad (\mathrm{XI}_a)$$

同法 $$\tan\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-C)\cos(S-A)}}, \qquad (\mathrm{XI}_b)$$

與 $$\tan\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}.\qquad (\mathrm{XI}_e)$$

因 $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ 各小於一直角,故本節中之根式均爲正值.

吾人且知 $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\tan\frac{a}{2}$, ……均爲實值;蓋 S 大於一直角而小於三直角(參閱26節),故 $\cos S$ 爲負值;且在極三角形中任一邊必小於他兩邊之和,故 $\pi-A$ 小於 $\pi-B+\pi-C$, 卽 $B+C-A$ 小於 π, 故 $S-A$ 小於 $\frac{\pi}{2}$; 若 $B+C-A$ 爲負值,其必大於 $-\pi$(以代數值言,非以絕對值言),是以若 $S-A$ 爲負值,其必大於 $-\frac{\pi}{2}$;故 $\cos(S-A)$ 爲正值.依同理知 $\cos(S-B)$ 與 $\cos(S-C)$ 亦均爲正值.故知 $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\tan\frac{a}{2}$, $\sin\frac{b}{2}$, $\cos\frac{b}{2}$, $\tan\frac{b}{2}$, $\sin\frac{c}{2}$, $\cos\frac{c}{2}$, $\tan\frac{c}{2}$ 均爲實值.

40. 奈辟爾氏公式.

今 $$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}.\qquad (\mathrm{III})$$

命 $$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\rho,$$

則 $$\sin A=\rho\sin a,\quad \sin B=\rho\sin b;$$

故 $$\sin A+\sin B=\rho(\sin a+\sin b),$$

$$\sin A-\sin B=\rho(\sin a-\sin b);$$

卽
$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin a+\sin b}=\rho, \tag{1}$$

與
$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin a-\sin b}=\rho. \tag{2}$$

由 (VIII_a), (VIII_b), 得

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\cos a$$
$$=\rho\sin C\sin b\cos a,$$

與
$$\cos B+\cos A\cos C=\sin A\sin C\cos b$$
$$=\rho\sin C\sin a\cos b.$$

加之,得 $$(\cos A+\cos B)(1+\cos C)=\rho\sin C\sin(a+b). \tag{3}$$

由 (1), (3), 得

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin a+\sin b}{\sin(a+b)}\cdot\frac{1+\cos C}{\sin C},$$

卽
$$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}. \tag{XII}$$

同法由 (3), (2), 得

$$\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin a-\sin b}{\sin(a+b)}\cdot\frac{1+\cos C}{\sin C},$$

卽
$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}. \tag{XIII}$$

於 (XII), (XIII) 中書 $\pi-A$ 以代 a, $\pi-B$ 以代 b, $\pi-C$ 以代 c; 得

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{c}{2},\qquad\text{(XIV)}$$

與
$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{c}{2}.\qquad\text{(XV)}$$

(XII), (XIII), (XIV), (XV) 乃奈辟爾 (Napier) 所發現，故稱之曰奈辟爾氏公式 (Napier's Analogies).

(XIV), (XV) 由 (I_a) (I_b) 入手，亦可求得.

(XII) 中 $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ 與 $\cot\frac{C}{2}$ 恆為正值，故知 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 為同號值；故 $\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\frac{1}{2}(a+b)$ 非皆小於直角卽皆大於直角. 兩角之同小於直角或同大於直角者稱為同類；一小於直角而一大於直角者稱為異類.

41. 戴拉貝氏公式.

今
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C;\qquad(\mathrm{I}_c)$$

故
$$\begin{aligned}1+\cos c&=1+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\\&=\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}C\\&\quad+\cos a\cos b\left(\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}C\right)\\&\quad+\sin a\sin b\left(\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C\right)\\&=\{1+\cos a\cos b+\sin a\sin b\}\cos^2\frac{1}{2}C\end{aligned}$$

$$+\{1+\cos a\cos b-\sin a\sin b\}\sin^2\frac{1}{2}C$$

$$=\{1+\cos(a-b)\}\cos^2\frac{1}{2}C$$

$$+\{1+\cos(a+b)\}\sin^2\frac{1}{2}C;$$

故 $$\cos^2\frac{1}{2}c=\cos^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C. \qquad (1)$$

同法 $$\sin^2\frac{1}{2}c=\sin^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C+\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C. \qquad (2)$$

今 $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C, \qquad \text{(XII)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C; \qquad \text{(XIII)}$$

故 $$\tan^2\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot^2\frac{1}{2}C,$$

$$\tan^2\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot^2\frac{1}{2}C;$$

故 $$1+\tan^2\frac{1}{2}(A+B)=1+\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot^2\frac{1}{2}C,$$

$$1+\tan^2\frac{1}{2}(A-B)=1+\frac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot^2\frac{1}{2}C;$$

即 $$1+\tan^2\frac{1}{2}(A+B)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C},$$

$$1+\tan^2\frac{1}{2}(A-B)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+\sin^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C};$$

但 $$\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C=\cos^2\frac{1}{2}c, \tag{1}$$

$$\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+\sin^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C=\sin^2\frac{1}{2}c; \tag{2}$$

故 $$\sec^2\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C},$$

$$\sec^2\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}.$$

因 $\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\frac{1}{2}(a+b)$ 爲同類, 故

$$\sec\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C},$$

$$\sec\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C};$$

即 $$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C, \tag{XVI}$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C. \tag{XVII}$$

以 (XII) 乘 (XVI), 以 (XIII) 乘 (XVII); 得

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C, \qquad (\text{XVIII})$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C. \qquad (\text{XIX})$$

(XVI), (XVII), (XVIII), (XIX) 亦恆稱爲高斯方程式 (Gauss's equations)；惟戴拉貝 (Delambre) 於1809年已先行發表,故本書稱之曰戴拉貝氏公式 (Delambre's Analogies).

42. 互補三角形之性質已在22節中用幾何方法證明,且應用此諸性質以求得38節之公式.惟38節之公式亦可由33節之公式用解析方法求之;若然,則全部球面三角術皆惟33節之公式是賴矣.今由33節之公式求38節之公式如下:

由33節得 $\cos A, \cos B, \cos C$ 之值;由之得

$$\cos A+\cos B\cos C$$
$$=\frac{(\cos a-\cos b\cos c)\sin^2 a+(\cos b-\cos a\cos c)(\cos c-\cos a\cos b)}{\sin^2 a\sin b\sin c}$$

書 $1-\cos^2 a$ 以代右節分子中之 $\sin^2 a$, 則分子卽化爲

$$\cos a(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c),$$

惟此式等於 $\cos a\sin B\sin C\sin^2 a\sin b\sin c$ (參閱35節);

故 $$\cos A+\cos B\cos C=\cos a\sin B\sin C.$$

同法可求得其他二公式.

$(VIII_a)$, $(VIII_b)$, $(VIII_c)$既亦可如斯求得,可見若假定無極三角形之性質之存在,吾人可有下一定理:若將球面三角形之邊易以其相當角之補角且將其角易以其相當邊之補角,則30節之基本爲眞,且由其演化而得之諸結果皆爲眞.

43. 本章中之公式可應用之以解析方法,而能求得若干關於球面三角形之命題.例如公式(XIII)爲

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}.$$

由此公式卽可知$\frac{1}{2}(A-B)>0$, $=0$, 或<0乃視$\frac{1}{2}(a-b)>0$, $=0$, 或<0爲斷;由之可推知27節至30節之諸定理.

44. 若兩球面三角形有兩邊彼此各相等,其夾角亦相等;則其他兩角必彼此相等,且其第三邊亦必相等.

命甲球面三角形之二已知邊爲b, c,其夾角爲A;乙球面三角形之二已知邊爲b', c',其夾角爲A';且$b=b'$, $c=c'$, $A=A'$.

依(I_a), $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

但 $b=b'$, $c=c'$, $A=A'$；故

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$

故 $$\cos a = \cos a',$$

故 $$a = a'.$$

依 (I_b), $$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$$

$$\cos b' = \cos c' \cos a' + \sin c' \sin a' \cos B';$$

卽 $$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

$$\cos B' = \frac{\cos b' - \cos c' \cos a'}{\sin c' \sin a'}.$$

但 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$；故

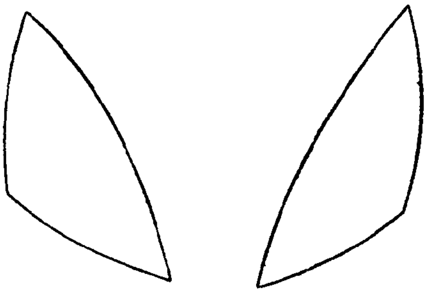
$$\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} = \frac{\cos b' - \cos c' \cos a'}{\sin c' \sin a'},$$

故 $$\cos B = \cos B',$$

故 $$B = B'.$$

同法依 (I_c), $$C = C'.$$

吾人須知此兩球面三角形未必能以疊置法使之密合;甲形各邊之次序或適與乙形各邊之次序相反,如下圖:



(圖 17)

如斯相等之兩球面三角形稱爲對稱相等;兩球面三角形之能以疊置法使其密合者稱爲絕對相等.

45. 若兩球面三角形有兩邊彼此各相等,但甲形之夾角大於乙形之夾角;則甲形之第三邊亦必大於乙形之第三邊.此定理之逆定理亦眞.

命 a, b, c 爲甲球面三角形之邊, A 爲對 a 之角; a', b', c' 爲乙球面三角形之邊, A' 爲對 a' 之角;且 $b=b'$, $c=c'$, $A \neq A'$.

依 (I_a), $$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A';$$

故 $$\cos a-\cos a'=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A-(\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A');$$

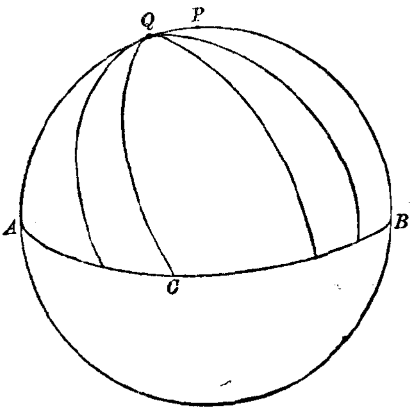
即 $$\cos a-\cos a'=\sin b\sin c(\cos A-\cos A');$$

卽
$$\sin\frac{1}{2}(a+a')\sin\frac{1}{2}(a-a')$$
$$=\sin b\sin c\sin\frac{1}{2}(A+A')\sin\frac{1}{2}(A-A');$$

由此可知 $\frac{1}{2}(a-a')$ 與 $\frac{1}{2}(A-A')$ 爲同號值.

習題 1

1.



設 O 爲球心, ACB 爲球面上之一大圓, P 爲其一極. 今由另一點 Q 至 ACB 之圓周作諸大圓弧 試證明此諸大圓弧中 $\overset{\frown}{QPB}$ 爲最大者 $\overset{\frown}{QA}$ 爲最小者;且弧之較靠近於 $\overset{\frown}{QA}$ 者爲較小, 較靠近於 $\overset{\frown}{QPB}$ 者爲較大;且由 Q 至

ACB 之圓周之相等弧僅二,此二等弧在最小弧之兩側與最小弧所成之角必等.

2. 設 $A=a$, 試證明:

B 與 b 非相等卽相補;

C 與 c 非相等卽相補.

3. 若球面三角形之一角等於他二角之和,則最長邊必爲由其中點至其對頂之距離之二倍.

4. 述原三角形與極三角形密合之條件

5. 若 D 爲 AB 之中點,證明

$$\cos AC+\cos BC=2\cos\frac{1}{2}AB\cos CD.$$

6. 證明在等邊三角形中

$$2\cos\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}=1,$$

$$\tan^2\frac{a}{2}=1-2\cos A,$$

$$\sec A=1+\sec a.$$

7. 設 $b+c=\pi$ 證明 $\sin 2B+\sin 2C=0$.

8. 證明

$$\cos b\cdot\cos c\cdot\cos A+\sin b\sin c$$

$$=\sin B\cdot\sin C-\cos B\cdot\cos C\cdot\cos a.$$

9. 設 D 為球面三角形 ABC 之邊 BC 上之任一點,求證

$$\cos AD \sin BC = \cos AB \sin DC + \cos AC \sin BD.$$

10. 證明

$$1-\cos A = 1+\cos(B+C)+\sin B \sin C \operatorname{vers} a,$$

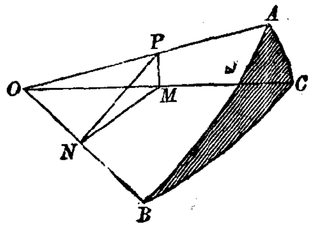
$$1-\cos a = 1-\cos(b-c)+\sin b \sin c \operatorname{vers} A.$$

V

直角球面三角形之解法

46. 每球面三角形有六形素,即其三角與其三邊是也.概括言之,若六形素中已知其三,則其餘三形素可計算而知其值.由球面三角形充分件數之已知形素計算其餘形素之法謂之球面三角形之解法.在解直角球面三角形中,除直角爲已知外,尙須有其他任二已知形素.

取上章中之公式而設定其中之一角爲直角(即以C爲直角),即得解直角球面三角形所應用之公式.此諸公式亦可以下法求得之:



(圖 18)

命 ABC 爲球面三角形，就中 C 爲直角；O 爲球心。由 OA 中任一點 P 作 PM 垂直於 OC，由 M 作 MN 垂直於 OB，連結 PN。因平面 AOC 垂直於平面 BOC，故 PM 垂直於 MN；故

$$PN^2=PM^2+MN^2=OP^2-OM^2+OM^2-ON^2=OP^2-ON^2,$$

故 PNO 爲直角；且

$$\frac{ON}{OP}=\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{OP},\quad \text{即}\quad \cos c=\cos a\cos b. \qquad \text{(XX)}$$

$$\frac{PM}{OP}=\frac{PM}{PN}\cdot\frac{PN}{OP},\quad \begin{array}{ll}\text{即} & \sin b=\sin B\sin c.\\ \text{同法} & \sin a=\sin A\sin c.\end{array}\Bigg\}\qquad \text{(XXI)}$$

$$\frac{MN}{ON}=\frac{MN}{PN}\cdot\frac{PN}{ON},\quad \begin{array}{ll}\text{即} & \tan a=\cos B\tan c.\\ \text{同法} & \tan b=\cos A\tan c.\end{array}\Bigg\}\qquad \text{(XXII)}$$

$$\frac{PM}{OM}=\frac{PM}{MN}\cdot\frac{MN}{OM},\quad \begin{array}{ll}\text{即} & \tan b=\tan B\sin a.\\ \text{同法} & \tan a=\tan A\sin b.\end{array}\Bigg\}\qquad \text{(XXIII)}$$

將 (XXIII) 之二公式乘之，依 (XX) 得

$$\tan A\tan B=\frac{\tan a\tan b}{\sin a\sin b}=\frac{1}{\cos a\cos b}=\frac{1}{\cos c},$$

即 $$\cos c=\cot A\cot B. \qquad \text{(XXIV)}$$

將 (XXI) 之第二公式與 (XXII) 之第一公式交錯乘之，得

$$\sin a\cos B\tan c=\tan a\sin A\sin c.$$

依(XX),得 $\cos B=\frac{\sin A\cos c}{\cos a}=\sin A\cos b,$

$$\left.\begin{aligned}&\text{即}\quad \cos B=\sin A\cos b.\\&\text{同法}\quad \cos A=\sin B\cos a.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XXV)}$$

有以上六公式中之十方程式,解直角球面三角形所需之公式已備矣,蓋此十方程式中無雷同者且各方程式均含 a, b, c, A, B 等五形素中之三形素,故若此五形素中已知任二形素而欲求其某第三形素,則此十方程式中必有可用以定此第三形素之值之公式.

吾人前言以上六公式可由前章中公式求得之.因前章中之公式已證明永爲眞確;故此六公式若用以解任何直角球面三角形,當無不眞確,自無特別證驗之必要矣.

47. 由以上六公式可求知直角球面三角形之諸性質:

由(XX),知 $\cos c$ 與 $\cos a$ 及 $\cos b$ 之積爲同號,故 $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ 非皆爲正值卽只其一爲正值.故直角球面三角形之邊非各小於一象限,卽其一邊小於一象限而他二邊各大於一象限.

由(XXIII),知 $\tan a$ 與 $\tan A$ 爲同號值;故 A 與 a 爲同

類;同理知 B 與 b 亦爲同類.

48. 讀者當將以上六公式妥爲記憶,以備應用.今將六公式用文字述之如下,並標以原公式之號數以便對照:

弦之餘弦=邊之餘弦之積 (XX)

弦之餘弦=角之餘切之積 (XXIV)

邊之正弦=對角之正弦×弦之正弦 (XXI)

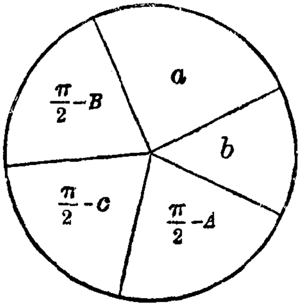
邊之正切=弦之正切×夾角之餘弦 (XXII)

邊之正切=對角之正切×他邊之正弦 (XXIII)

角之餘弦=對邊之餘弦×他角之正弦 (XXV)

49. 奈辟爾氏法則

圖中 $a, b, \frac{\pi}{2}-A, \frac{\pi}{2}-c, \frac{\pi}{2}-B$ 名曰直角球面三角形之輪環部分(其直角不計入);其排列之次序値與其在直角球面三角形中之自然次序同.



(圖 19)

擇圖中之任一部分以爲中部,則與其相鄰之兩部分卽爲其鄰部,而其餘兩部分爲其對部;例如若擇 $\frac{\pi}{2}-B$ 爲中部,則 a 與 $\frac{\pi}{2}-c$ 卽其鄰部,而 b 與 $\frac{\pi}{2}-A$ 爲其對部.

奈辟爾氏法則:

(1) 中部之正弦 = 其鄰部之正切之積;即

$$\sin(\text{中部}) = \tan(\text{鄰部}) \times \tan(\text{鄰部})$$

(2) 中部之正弦 = 其對部之餘弦之積;即

$$\sin(\text{中部}) = \cos(\text{對部}) \times \cos(\text{對部})$$

今列表以示依奈辟爾氏法則所書之方程式與直角球面三角形之六公式相符合:

中部	依奈辟爾氏法則所書之方程式	對照之公式	公式號數
$\frac{\pi}{2}-c$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$	$\cos c=\cot A\cot B$	XXIV
	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\cos a\cos b$	$\cos c=\cos a\cos b$	XX
$\frac{\pi}{2}-B$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\tan a\tan\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\cos B=\tan a\cot c$	XXII
	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos b\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$	$\cos B=\cos b\sin A$	XXV
a	$\sin a=\tan b\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$	$\sin a=\tan b\cot B$	XXIII
	$\sin a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\sin a=\sin A\sin c$	XXI
b	$\sin b=\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\tan a$	$\sin b=\cot A\tan a$	XXIII
	$\sin b=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\sin b=\sin B\sin c$	XXI
$\frac{\pi}{2}-A$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\tan b\tan\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\cos A=\tan b\cot c$	XXII
	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos a\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$	$\cos A=\cos a\sin B$	XXV

50 依17, 18節之限制,吾人假定已知邊各須小於半圓,已知角各須小於二直角;且根據此假定應用以上六公式以解直角球面三角形.待解之直角球面三角形以其已知形素凡分六例:

(1) 已知弦c與一角A.

今 $\tan b=\tan c\cos A$ (XXII), $\cot B=\cos c\tan A$ (XXIV), $\sin a=\sin c\sin A$ (XXI); 由之b與B卽可確定;且a與A爲同類(參閱47節),故a亦可確定.

由(XXII), (XXIV), (XXI),知本例永有解.

若c與A皆爲直角,則a爲直角而b與B爲不定.

(2) 已知一邊b與鄰角A.

今 $\tan c=\dfrac{\tan b}{\cos A}$ (XXII), $\tan a=\tan A\sin b$ (XXIII), $\cos B=\cos b\sin A$ (XXV); 由之c, a, B均可確定;且本例永有解.

(3) 已知二邊a與b.

今 $\cos c=\cos a\cos b$ (XX), $\cot A=\cot a\sin b$ (XXIII), $\cot B=\cot b\sin a$ (XXIII); 由之c, A, B均可確定;且本例永有解.

(4) 已知弦c與一邊a.

今 $\cos b=\dfrac{\cos c}{\cos a}$ (XX), $\cos B=\dfrac{\tan a}{\tan c}$ (XXII), $\sin A=\dfrac{\sin a}{\sin c}$ (XXI); 因 A 與 a 爲同類, 故此三公式可確定 b, B, a. 且由此三公式知欲本例有解, 其已知形素須予以相當限制; 卽 c 必須介於 a 與 $\pi-a$ 之間, $\cos b$, $\cos B$ 與 $\sin A$ 之絕對值方不大於1.

若 c 與 a 爲直角, 則 A 爲直角而 b 與 B 爲不定.

(5) 已知二角 A 與 B.

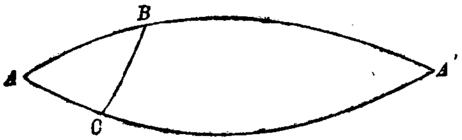
今 $\cos c=\cot A\cot B$ (XXIV), $\cos a=\dfrac{\cos A}{\sin B}$ (XXV), $\cos b=\dfrac{\cos B}{\sin A}$ (XXV); 由之 c, a, b 均可確定. 欲本例有解, 其已知形素須予以限制; 設 A 小於 $\dfrac{\pi}{2}$, 則 B 須介於 $\dfrac{\pi}{2}-A$ 與 $\dfrac{\pi}{2}+A$ 之間; 設 A 大於 $\dfrac{\pi}{2}$, 則 B 須介於 $\dfrac{\pi}{2}-(\pi-A)$ 與 $\dfrac{\pi}{2}+(\pi-A)$ 之間, 亦卽須介於 $A-\dfrac{\pi}{2}$ 與 $\dfrac{3\pi}{2}-A$ 之間.

(6) 已知一邊 a 與其對角 A.

今 $\sin c=\dfrac{\sin a}{\sin A}$ (XXI), $\sin b=\tan a\cot A$ (XXIII), $\sin B=\dfrac{\cos A}{\cos a}$ (XXV); 惟 c, b, B 各由其正弦定之, 故有複解. 若 $\sin a$ 小於 $\sin A$, 則 c 可得二值; 對於 c 之二值中之每一值, b 通常只得一值, 因其須適合 $\cos c=\cos a\cos b$

也；對於 c 之二值中之每一值，B 通常亦只得一值，因其須適合 $\cos c=\cot A\cot B$ 也．故若以已知形素 a 與 A 能構成直角球面三角形，則所構成之直角球面三角形通常有二，且僅有二．若 $a=A$ 而 a 與 A 各非直角，則只可構成一個直角球面三角形；若 a 與 A 均爲直角，則 b 與 B 爲不定；故言"通常"以示有此例外之意．

本例通常所遇之複解可用下圖說明之：



(圖 20)

設 ABC 爲適合已知條件之直角球面三角形；延長 AB 與 AC 命其相遇於 A'；則球面三角形 $A'BC$ 亦適合已知條件，蓋其有直角 C，已知邊 BC，且角 A' 等於已知角 A 也．

若 $a=A$，則由解本例所應用之公式知 c, b, B 爲直角，因之 A 必爲 BC 之極而 $A'BC$ 與 ABC 爲對稱相等矣(參閱 44 節)．

若 a 與 A 均爲直角，則 B 爲 AC 之極；因之 B 與 b 必相等，但可爲任何值．

欲本例有解,其已知形素須予以限制:A 與 a 爲同類(參閱47節);且由解本例所應用之公式知若 A 與 a 均爲銳角,則 a 須小於 A;若 A 與 a 均爲鈍角,則 a 須大於 A.

習題 II

設 ABC 爲球面三角形,C 爲直角,證明以下六方程式:

1. $\sin^2\frac{c}{2}=\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$.

2. $\tan\frac{1}{2}(c+a)\tan\frac{1}{2}(c-a)=\tan^2\frac{b}{2}$.

3. $\sin(c-b)=\tan^2\frac{A}{2}\sin(c+b)$.

4. $\sin a\cdot\tan\frac{1}{2}A-\sin b\tan\frac{1}{2}B=\sin(a-b)$.

5. $\sin(c-a)=\sin b\cos a\tan\frac{1}{2}B$.

6. $\sin(c-a)=\tan b\cos c\tan\frac{1}{2}B$.

7. 設 $A=\frac{\pi}{5}$, $B=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{2}$, 證明

$$a+b+c=\frac{\pi}{2}.$$

8. 已知 $a=57°48'12''$, $b=59°14'16''$, $C=90°$；試求 c.
A, B. 結果: $c=66°32'6''$, $A=41°55'45''$, $B=70°19'15''$.

9. 已知 $A=55°32'45''$, $c=98°14'24''$, $C=90°$；試求 a.
b, B. 結果: $a=54°41'35''$, $b=104°21'28''$, $B=101°47'56''$.

10. 已知 $A=46°15'25''$, $a=42°18'45''$, $C=90°$；試求 c,
b, B. 結果: $c=68°42'59''$ 或 $111°17'1''$, $b=60°36'10''$ 或 $119°23'50''$
$B=69°13'47''$ 或 $110°46'13''$.

11. *試取上章之公式設定 $C=90°$ 以求本章之六公式.

* 取 (I_c), (III), (IV_d), (IV_e), (IV_a), (IV_b), ($VIII_c$), ($VIII_a$), ($VIII_b$).

VI

斜球面三角形之解法

51. 斜球面三角形之可用直角球面三角形解者:

(1) 設斜球面三角形之已知邊中有一邊等於一象限,則極三角形中之相當角即爲直角;此極三角形當可用上章之法則解之,由之可求得原三角形之形素.

(2) 設斜球面三角形之已知形素中有兩邊或兩角相等,則由頂至底之中點作一弧必將此球面三角形分爲相等之二直角球面三角形;解其一即可求得斜球面三角形之需要形素.

(3) 設斜球面三角形之已知形素中有兩邊或兩角相補,例如 $b+c=\pi$ 或 $B+C=\pi$; 延長 BA 與 BC 命其相遇於 B' (圖 13), 則球面三角形 $B'AC$ 即具有相等之二已知邊或相等之二已知角;依上例其解法可由解直角球面三角形得之,由之可求得斜球面三角形之

需要形素.

52 普遍待解之斜球面三角形以其已知形素分為六例:

(1) 已知其三邊.

令
$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}, \qquad (\mathrm{I}_a)$$

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a}, \qquad (\mathrm{I}_b)$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}; \qquad (\mathrm{I}_c)$$

因之可求得 A, B, C. 為便於對數演算起見,本例可用37節中半角之正弦,餘弦或正切公式解之.

(2) 已知其三角.

令
$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}, \qquad (\mathrm{VIII}_a)$$

$$\cos b=\frac{\cos B+\cos C\cos A}{\sin C\sin A}, \qquad (\mathrm{VIII}_b)$$

$$\cos c=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}; \qquad (\mathrm{VIII}_c)$$

用此三公式即可得 a, b, c. 為便於對數演算起見,本例可用39節中半邊之正弦,餘弦,或正切公式解之.

以上二例均無複解;惟有時以已知形素不能構成

球面三角形故無解.

(3) 已知二邊及其夾角 (a, C, b).

先用 $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C, \tag{XII}$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C$$

定 $\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\frac{1}{2}(A-B)$, 由之卽得 A 與 B; 求得 A 與 B 後, 以 $\sin c=\dfrac{\sin a\sin C}{\sin A}$ (III) 求 c; 惟 c 乃以其正弦定者, 故有二值;二值之中應取何值當依 29 節之定理決之. 若用 (XVI) 以定 c, 當可避免複解之疑難.

若問題中只需求 c, 自不必先定 A 與 B 而求之, 因其法太嫌迂繞也. 將

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \tag{I_c}$$

化爲 $$\cos c=\cos b(\cos a+\sin a\tan b\cos C);$$

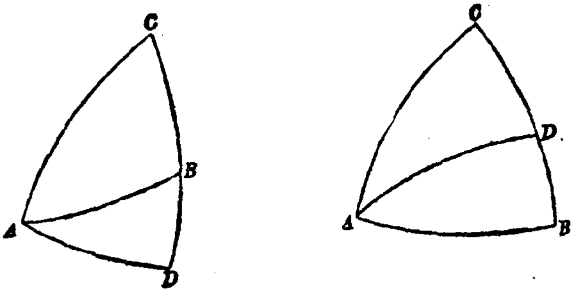
命 $$\tan\theta=\tan b\cos C; \text{ 則}$$

$$\cos c=\cos b(\cos a+\sin a\tan\theta)$$

$$=\cos b\left(\frac{\cos a\cos\theta+\sin a\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{\cos b\cos(a-\theta)}{\cos\theta};$$

用此方程式定 c 既適於對數演算,又可避免複解之疑難.

本例亦可解之如下:



(圖 21)

由 A 作 AD 垂直於 CB 或 CB 之延長弧,則依(XXII), $\tan CD = \tan b \cos C$; 由之可定 CD, 隨即可求得 BD. 依(XX), $\cos c = \cos AD \cos DB = \cos DB \dfrac{\cos b}{\cos CD}$; 由之可求得 c. CD 顯然即本例中前所言之 θ.

依(XXIII), $$\tan AD = \tan C \sin CD,$$

$$\tan AD = \tan ABD \sin DB;$$

故 $$\tan ABD \sin DB = \tan C \sin \theta;$$

就中若 D 在 CB 上,則 $DB = a - \theta$; 若 D 在 CB 之延長弧上,則 $DB = \theta - a$; 且角 ABD 非等於已知之 B 即爲 B 之補角. 由此方程式不賴於 A 即可求得 B.

由上可知本例無實在複解.

(4) 已知二角及其夾邊 (A, c, B).

用 $$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c, \qquad \text{(XIV)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c \qquad \text{(XV)}$$

定 $\frac{1}{2}(a+b)$ 與 $\frac{1}{2}(a-b)$, 由之可求得 a 與 b. 求得 a 與 b 後, 用 $\sin C=\frac{\sin A\sin c}{\sin a}$ (III) 求 C;因 C 乃由其正弦求得者, 故有二值;二值之中應取何值當取決於30節之定理. 若用 (XVIII) 定 C 自可避免複解之疑難.

若問題中只需求 C, 可將

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c \qquad (\text{VIII}_c$$

化爲 $$\cos C=\cos B(-\cos A+\sin A\tan B\cos c);$$

命 $$\cot\phi=\tan B\cos c; \text{ 則}$$

$$\begin{aligned}\cos C&=\cos B(-\cos A+\cot\phi\sin A)\\&=\cos B\left(\frac{-\sin\phi\cos A+\cos\phi\sin A}{\sin\phi}\right)\\&=\frac{\cos B\sin(A-\phi)}{\sin\phi};\end{aligned}$$

用此方程式求 C 適於對數演算,亦可避免複解之疑難.

本例亦可解之如下:

由 A 作 AD 垂直於 CB (圖 21 之右圖); 則依 (XXIV),

$\cos c = \cot B \cot DAB$; 用此方程式定角 DAB, 由之可得角 CAD. 且依 (XXV), $\cos AD \sin CAD = \cos C$, $\cos AD \sin BAD = \cos B$; 故 $\dfrac{\cos C}{\sin CAD} = \dfrac{\cos B}{\sin BAD}$; 此方程式即可定 C. 角 AB 顯然即本例中前所言之 ϕ.

依 (XXII),
$$\tan AD = \tan AC \cos CAD,$$
$$\tan AD = \tan AB \cos BAD;$$

故
$$\tan b \cos CAD = \tan c \cos \phi,$$

就中 $\angle CAD = A - \phi$; 由此公式不賴於 a, 即可求得 b.

若垂直弧 AD 落於 CB 之延長弧上(圖21之左圖), 亦可如法爲之.

本例無實在複解, 且永有解.

(5) 已知二邊及此二邊中一邊之對角 (a, b, A).

先用
$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}, \qquad \text{(III)}$$

求 B; 然後用
$$\tan\frac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A+B), \qquad \text{(XII)}$$
$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b) \qquad \text{(XIV)}$$

求 C, c. 因 B 乃由其正弦求得者,故通常有二解;若 $\sin B$ 大於1, 則竟無解. 關於此點當於53節中討論之.

吾人亦可不必先求 B 而後求 C, c.

依 (IV_a), $\cot a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\cot A$

$$=\cos b\left(\cos C+\frac{\cot A}{\cos b}\sin C\right);$$

命 $$\tan\phi=\frac{\cot A}{\cos b},$$

則 $$\cot a\sin b=\cos b(\cos C+\tan\phi\sin C)$$

$$=\cos b\left(\frac{\cos C\cos\phi+\sin C\sin\phi}{\cos\phi}\right)$$

$$=\frac{\cos b\cos(C-\phi)}{\cos\phi};$$

故 $\cos(C-\phi)=\cos\phi\cot a\tan b$; 由此方程式求 $C-\phi$, 由之可得 C. 若此方程式中之 $C-\phi$ 適逢等於 a, 則 $\phi-C$ 亦適合此方程式, 故仍有複解之存在; 故若 $\phi+a<\pi$, 而 $\phi-a$ 爲正值, C 可得二值.

且 $$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \qquad (\mathrm{I}_a)$$

$$=\cos b(\cos c+\sin c\tan b\cos A);$$

命 $$\tan\theta=\tan b\cos A,$$

則 $$\cos a=\cos b(\cos c+\sin c\tan\theta)$$

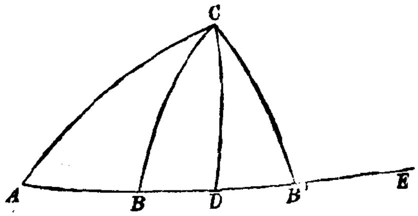
$$=\cos b\left(\frac{\cos c\cos\theta+\sin c\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos b\cos(c-\theta)}{\cos\theta};$$

故
$$\cos(c-\theta)=\frac{\cos a\cos\theta}{\cos b};$$

用此方程式求$c-\theta$,由之可得c.與前同,亦有複解.

本例亦可解之如下:



(圖 22)

命$CA=b$, $CAE=A$;由C作CD垂直於AE,命$CB=CB'=a$;則由圖知具有已知形素之球面三角形有二.依(XXIV), $\cos b=\cot A\cot ACD$,由此可求得ACD.又依(XXII), $\tan CD=\tan AC\cos ACD$, $\tan CD=\tan CB\cos BCD$或$=\tan CB'\cos B'CD$;故$\tan AC\cos ACD=\tan CB\cos BCD$或$=\tan CB'\cos B'CD$;由此可求得$BCD$或$B'CD$.

ACD顯然卽本例中前所言之ϕ.

且依(XXII), $\tan AD=\tan AC\cos A$;由此可求得AD.又依(XX), $\cos AC=\cos CD\cos AD$, $\cos CB=\cos CD\cos BD$或$\cos CB'=\cos CD\cos B'D$;故$\dfrac{\cos AC}{\cos AD}=\dfrac{\cos CB}{\cos BD}$或$\dfrac{\cos CB'}{\cos B'D}$;由此可求得$BD$或$B'D$.

AD顯然即本例中前所言之θ.

(6) 已知二角及此二角中一角之對邊(A, B, a).

本例與例(5)相似,且有同樣之複解.由

$$\sin b=\frac{\sin B\sin a}{\sin A}\quad \text{(III)}$$ 求b,然後由

$$\tan\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A+B), \qquad \text{(XII)}$$

$$\tan\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b) \qquad \text{(XIV)}$$

求C與c.

吾人亦可不必先求b而後求C與c;蓋

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a \qquad (\text{VIII}_a)$$

$$=\cos B(-\cos C+\tan B\sin C\cos a),$$

命 $\cot\phi=\tan B\cos a$, 則

$$\cos A=\cos B(-\cos C+\sin C\cot\phi)$$

$$=\cos B\left(\frac{-\cos C\sin\phi+\sin C\cos\phi}{\sin\phi}\right)$$

$$=\frac{\cos B\sin(C-\phi)}{\sin\phi},$$

故 $$\sin(C-\phi)=\frac{\cos A\cos\phi}{\cos B};$$

由此可求得$C-\phi$,由之可得C.因$C-\phi$乃以其正弦定者,故有複解.

又依 (IV$_{l}$)，
$$\cot A\sin B=\cot a\sin c-\cos c\cos B$$
$$=\cos B\left(-\cos c+\frac{\cot a\sin c}{\cos B}\right),$$

命
$$\cot\theta=\frac{\cot a}{\cos B};$$

則
$$\cot A\sin B=\cos B(-\cos c+\sin c\cot\theta)$$
$$=\frac{\cos B\sin(c-\theta)}{\sin\theta};$$

故
$$\sin(c-\theta)=\cot A\tan B\sin\theta;$$

由此求 $c-\theta$，由之可得 c. 因 $c-\theta$ 爲由其正弦求得者，故亦許有複解. 若於球面三角形 ACB' 中作 CD 垂直於 AB'，則 $B'CD$ 將等於 ϕ 而 $B'D$ 將等於 θ；如此以二直角球面三角形解之，其結果亦符.

53. 例 (5) 之複解之討論甚冗長，惟尚易明瞭. 在作概括之討論以前，先取 $a=b$ 時之特例言之. 若 $a=b$，則 $A=B$；於是依 (XII)，(XIV)，得
$$\cot\frac{1}{2}C=\tan A\cos a,\quad \tan\frac{1}{2}c=\tan a\cos A;$$
$\cot\frac{1}{2}C$ 與 $\tan\frac{1}{2}c$ 恆爲正值，故 A 與 a 須爲同類. 故當 $a=b$ 時若 A，a 爲異類，則必無解；若 A 與 a 爲同類，則僅得一解；若 A 與 a 皆爲直角，則 $\cot\frac{1}{2}C$ 與 $\tan\frac{1}{2}c$ 爲不定，故有無限多解.

今作概括之討論如下:

若 $\sin b\sin A>\sin a$, 則無球面三角形可適合已知條件, 故無解. 若 $\sin b\sin A\not>\sin a$, 則由 $\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a}$ 知 B 可有二值; 以 β 與 β' 表此二值, 則 $\beta'=\pi-\beta$; 姑假定 β 為 B 之二值中之較小者.

欲 B 之此二值可用, 其必要與充分條件為: $\cot\frac{1}{2}C$ 與 $\tan\frac{1}{2}c$ 之值須皆為正值, 卽依 (XIII) 與 (XX), $A-B$ 與 $a-b$ 須為同號值. 故吾人須以 $A-\beta$ 與 $A-\beta'$ 之號與 $a-b$ 之號比較之.

今命 A 小於直角, 分三項討論之.

(A) 命 $b<\frac{\pi}{2}$.

(1) 命 $a<b$; 則由 $\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A$ 知 $\beta>A$, $\beta'>A$; 二值皆可用, 故有二解.

(2) 命 $a=b$, 則有一解, 前已知之.

(3) 命 $a>b$; 則 $a+b$ 可小於 π, 等於 π, 或大於 π. 若 $a+b<\pi$, 則 $\sin a>\sin b$; 由之 $\beta<A$, 故可用; $\beta'>A$ 而不可用; 故有一解. 若 $a+b=\pi$, 則 $\beta=A$ 而 $\beta'>A$; 皆不可

用,故無解.若$a+b>\pi$,則$\sin a<\sin b$而β與β'皆大於A;二者皆不可用,故無解.

(B) 命$b=\frac{\pi}{2}$.

(1) 命$a<b$,則β與β'皆大於A;二者皆可用,故有二解.

(2) 命$a=b$;則無解,前已知之.

(3) 命$a>b$,則$\sin a<\sin b$而β與β'皆大於A;二者皆不可用,故無解.

(C) 命$b>\frac{\pi}{2}$.

(1) 命$a<b$,則$a+b<\pi$, $=\pi$ 或 $>\pi$ 若$a+b<\pi$,則$\sin a<\sin b$而β與β'皆大於A;二者皆可用,故有二解.若$a+b=\pi$,則β等於A而不可用,β'大於A而可用;故有一解.若$a+b>\pi$,則$\sin a>\sin b$;β小於A而不可用,β大於A而可用;故有一解.

(2) 命$a=b$,則無解,前已知之.

(3) 命$a>b$,則$\sin a<\sin b$而β與β'皆大於A且皆不可用,故無解.

即$A<\frac{\pi}{2}$時得以下諸結果:

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b & \text{二解} \\ a=b & \text{一解} \\ a>b \text{ 而 } a+b<\pi & \text{一解} \\ a>b \text{ 而 } a+b=\pi \text{ 或 } >\pi & \text{無解} \end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b & \text{二解} \\ a=b \text{ 或 } a>b & \text{無解} \end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 而 } a+b<\pi & \text{二解} \\ a<b \text{ 而 } a+b=\pi \text{ 或 } >\pi & \text{一解} \\ a=b \text{ 或 } >b & \text{無解} \end{cases}$$

(注意) 以上凡標明二解之諸例若$\sin a<\sin b\sin A$,即無解

$A=\frac{\pi}{2}$時與$A>\frac{\pi}{2}$時之各例亦可如法討論之.今將其諸結果分列於下:

當$A=\frac{\pi}{2}$時:

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 或 } a=b & \text{無解} \\ a>b \text{ 而 } a+b<\pi & \text{一解} \\ a>b \text{ 而 } a+b=\pi \text{ 或 } >\pi & \text{無解} \end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 或 } a>b & \text{無解} \\ a=b & \text{無限多解} \end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 而 } a+b>\pi & \text{一解} \\ a<b \text{ 而 } a+b=\pi \text{ 或 } <\pi & \text{無解} \\ a=b \text{ 或 } a>b & \text{無解} \end{cases}$$

當 $A>\frac{\pi}{2}$ 時:

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 或 } a=b & \text{無解} \\ a>b \text{ 而 } a+b=\pi \text{ 或 } <\pi & \text{一解} \\ a>b \text{ 而 } a+b>\pi & \text{二解} \end{cases}$$

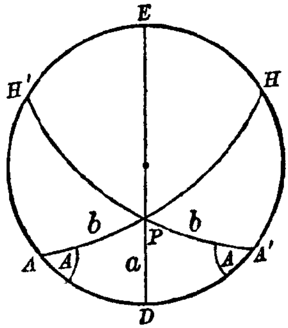
$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 或 } a=b & \text{無解} \\ a>b & \text{二解} \end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ 而 } a+b>\pi & \text{一解} \\ a<b \text{ 而 } a+b=\pi \text{ 或 } <\pi & \text{無解} \\ a=b & \text{一解} \\ a>b & \text{二解} \end{cases}$$

(注意) 以上凡標明二解之諸例,若 $\sin a<\sin A$, 則無解.

由以上討論知若 a 介於 b 與 $\pi-b$ 之間,則有一解;若 a 非介於 b 與 $\pi-b$ 之間,則非有二解即爲無解;惟 $a=b$ 或 $=\pi-b$ 時之諸例爲例外.

54　上節中之諸結果可以下圖說明之:



(圖 23)

命$ADA'E$爲大圓;設PA與PA'各爲等於b而各與ADA'成等於A之角之兩弧在此大圓之平面上之投影;命PD與PE爲由P至此大圓之最小及最大距離(參閱習題I之第一題).如是則圖中乃假定A與b各小於$\frac{\pi}{2}$.

若a小於PD所代表之弧,則無球面三角形可成立;若a介於PD與PA之間,則可有兩球面三角形,因B點將落於ADA'上而有兩球面三角形BPA與BPA'也;若a介於PA與PH之間,則僅有一球面三角形,因B將落於$A'H$或AH'上,則此球面三角形非A'與H間之B所在之APB即A與H'間之B所在之$A'PB$;惟此二球面三角形實爲對稱相等者.若a大於PH,則無球面三角形.此圖應用於各例均甚便當;例如若A大於$\frac{\pi}{2}$,即可

假設PAE與$PA'E$等於A；若b大於$\frac{\pi}{2}$，即可取PH與PH'以代表b.

例(6)之複解可如討論例(5)之複解之法討論之；或應用極三角形，例(6)即可化爲例(5).

習題 III

1. 設$A=B=2C$，證明

$$8\sin\left(a+\frac{2}{c}\right)\sin^2\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin^3 a.$$

2. 設$A=B=2C$，證明

$$8\sin^2\frac{C}{2}\left(\cos s+\sin\frac{C}{2}\right)\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos a}=1.$$

3. 已知 $a=70^\circ 14' 20''$，$b=49^\circ 24' 10''$，$c=38^\circ 46' 10''$；試求 A, B, C.

結果：$A=110^\circ 51' 16''$，$B=48^\circ 56' 4''$，$C=38^\circ 26' 48''$.

4. 已知 $a=68^\circ 20' 25''$，$b=52^\circ 18' 15''$，$C=117^\circ 12' 20''$；試求 A, B, c.

結果：$A=56^\circ 16' 15''$，$B=45^\circ 4' 41''$，$c=98^\circ 20' 44''$.

5. 已知 $a=50^\circ 45' 20''$，$b=69^\circ 12' 40''$，$A=44^\circ 22' 10''$，試求 B, c, C.

結果: $B=57°34'51.4''$ 或 $122°25'8.6''$,

$c=95°18'16.4''$ 或 $28°45'5.2''$,

$C=115°57'50.6''$ 或 $25°44'31.6''$.

6. 已知 $c=90°$, $a=138°4'$, $b=109°41'$; 試求 A, B, C.

結果: $A=142°11'38''$, $B=120°15'57''$, $C=113°28'2''$.

7. 已知 $A=129°5'28''$, $B=142°12'42''$, $C=105°8'10'$; 試求 a, b, c.

結果: $a=135°49'20''$, $b=144°37'15''$, $c=60°4'54''$.

8. 已知 $A=35°46'$, $B=115°9'$, $c=51°2'$; 試求 C.

結果: $C=47°21'$.

9. 已知 $A=108°40'$, $B=134°20'$, $a=145°46'$; 試求 b, c, C.

結果: $b=1$[illegible]$4°45'$, $c=84°9'$, $C=70°18'$.

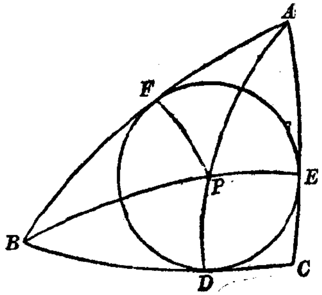
10. 已知 $B=70°$, $C=81°20'$, $b=122°40'$; 試求 A, a, c.

結果: 無解.

VII

內切圓與外切圓

55. **求已知球面三角形之內切小圓之角半徑.**



(圖 24)

命 ABC 為已知球面三角形,更命平分角 A 與平分角 B 之弧相遇於 P;由命作 PD, PE, PF 垂直於各邊,則 $PD=PE=PF$ 且 $AE=AF, BF=BD, CD=CE$ 故 $BC+AF$ $=$各邊之和之半$=s$; 故 $AF=s-a$. 命 $PF=r$.

依 (XXII), $\tan PF=\tan PAF \sin AF$;

故 $$\tan r=\tan\frac{A}{2}\sin(s-a). \qquad \text{(XXVI)}$$

$\tan r$ 之值尚可以以下各方程式表之:

令 $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}. \qquad (\mathrm{VII}_a)$$

將此值代入(XXVI),得

$$\tan r=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}. \qquad (\mathrm{XXVII})$$

更換(XVII)中之字母,可得

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}a=\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A;$$

故 $$\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}A}\cos\frac{1}{2}(B-C). \qquad (1)$$

更換 XV) 中之字母,可得

$$\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}a=\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A;$$

故 $$\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}A}\cos\frac{1}{2}(B+C). \qquad (2)$$

令 $$\sin(s-a)=\sin\left\{\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a\right\}$$

$$=\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}a,$$

將(1)與(2)代入,

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}A}\left\{\cos\frac{1}{2}(B-C)-\cos\frac{1}{2}(B+C)\right\}$$

$$=\frac{\sin a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

將 $\sin(s-a)$ 之值代入(XXVI),得

$$\tan r=\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a. \qquad \text{(XXVIII)}$$

今 $$\sin a=2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a,$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}, \qquad (\mathrm{IX}_a)$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}; \qquad (\mathrm{X}_a)$$

故 $$\sin a=\frac{2}{\sin B\sin C}\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}.$$

將 $\sin a$ 之值代入 (XXIII), 得

$$\tan r=\frac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}. \qquad \text{(XXIX)}$$

今 $$\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)$$

$$=\cos\frac{1}{2}(A+B+C)+\cos\frac{1}{2}(B+C-A)$$

$$+\cos\frac{1}{2}(A+C-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B-C)$$

$$=\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B+C)-\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(B+C)$$

$$+\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}A$$

$$+\cos\frac{1}{2}(C-B)\cos\frac{1}{2}A-\sin\frac{1}{2}(C-B)\sin\frac{1}{2}A$$

$$+\cos\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}A-\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}A$$

$$=\cos\frac{1}{2}A\left\{2\cos\frac{1}{2}(B+C)+2\cos\frac{1}{2}(B-C)\right\}$$

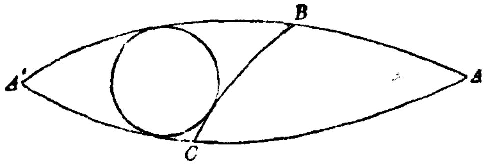
$$-\sin\frac{1}{2}A\left\{\sin\frac{1}{2}(C-B)+\sin\frac{1}{2}(B-C)\right\}$$

$$=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$$

故依(XXIX),得

$$\tan r=\frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)}. \qquad \text{(XXX)}$$

56 求切於已知球面三角形之一邊及他二邊之延長弧之小圓之角半徑.



(圖 25)

命ABC為已知球面三角形;設吾人欲求切於BC及AB與AC之延長弧之小圓之半徑.延長AB與AC命其相遇於A';於是所求之半徑正為球面三角形$A'BC$之內切小圓之半徑矣. $A'BC$之邊為: $a, \pi-b, \pi-c$;其角為: $A', \pi-B, \pi-C$.命r_1=所求之半徑,$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$;則

依 (XXVI)，

$$\tan r_1=\tan\frac{A'}{2}\sin\left(\frac{a+\pi-b+\pi-c}{2}-a\right)=\tan\frac{A'}{2}\sin\left(\pi-\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$=\tan\frac{A'}{2}\sin(\pi-s)=\tan\frac{A}{2}\sin s. \tag{XXXI}$$

依 (XXVII)，

$$\tan r_1=\sqrt{\frac{\sin\left\{\frac{a+\pi-b+\pi-c}{2}-a\right\}\sin\left\{\frac{a+\pi-b+\pi-c}{2}-(\pi-b)\right\}\sin\left\{\frac{a+\pi-b+\pi-c}{2}-(\pi-c)\right\}}{\sin\left(\frac{a+\pi-b+\pi-c}{2}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\left(\pi-\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin\left(\pi-\frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(\pi-s)\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin\{\pi-(s-a)\}}}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)}}. \tag{XXXII}$$

依 (XXVIII)，

$$\tan r_1=\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi-B)\sin\frac{1}{2}(\pi-C)}{\cos\frac{1}{2}A'}\sin a=\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a. \tag{XXXIII}$$

依 (XXIX)，

$$\tan r_1=\frac{\sqrt{-\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}\right\}\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-A'\right\}\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-(\pi-B)\right\}\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-(\pi-C)\right\}}}{2\cos\frac{1}{2}A'\cos\frac{1}{2}(\pi-B)\cos\frac{1}{2}(\pi-C)}$$

$$=\frac{\sqrt{-\cos\left(\pi-\frac{B+C-A}{2}\right)\cos\left(\pi-\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C-B}{2}\right)}}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\sqrt{-\{-\cos(S-A)\}\{-\cos S\}\{\cos(S-C)\}\{\cos(S-B)\}}}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}. \qquad \text{(XXXIV)}$$

依（XXX），

$$\tan r_1=\frac{2\sqrt{-\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}\right\}\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-A'\right\}\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-(\pi-B)\right\}\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-(\pi-C)\right\}}}{\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}\right\}+\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-A'\right\}+\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-(\pi-B)\right\}+\cos\left\{\frac{A'+\pi-B+\pi-C}{2}-(\pi-C)\right\}}$$

$$=\frac{2\sqrt{-\cos\left\{\pi-\frac{B+C-A}{2}\right\}\cos\left\{\pi-\frac{A+B+C}{2}\right\}\cos\left\{\frac{A+B-C}{2}\right\}\cos\left\{\frac{A+C-B}{2}\right\}}}{\cos\left\{\pi-\frac{B+C-A}{2}\right\}+\cos\left\{\pi-\frac{A+B+C}{2}\right\}+\cos\left\{\frac{A+B-C}{2}\right\}+\cos\left\{\frac{A+C-B}{2}\right\}}$$

$$=\frac{2\sqrt{-\cos\{\pi-(S-A)\}\cos\{\pi-S\}\cos\{S-C\}\cos\{S-B\}}}{\cos\{\pi-(S-A)\}+\cos\{\pi-S\}+\cos\{S-C\}+\cos\{S-B\}}$$

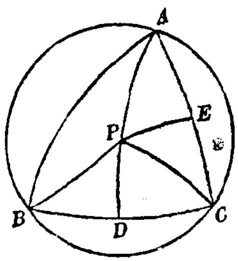
$$=\frac{2\sqrt{-\{-\cos(S-A)\}\{-\cos S\}\cos(S-C)\cos(S-B)}}{-\cos(S-A)-\cos S+\cos(S-C)+\cos(S-B)}$$

$$=\frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)}. \qquad \text{(XXXV)}$$

57. 切於球面三角形之一邊及他二邊之延長弧之圓爲該球面三角形之傍切圓；故任一球面三角形必有三傍切圓.以r_2表切於CA之傍切圓之半徑,r_3表切於AB之傍切圓之半徑；將求$\tan r_1$之公式中之字母更換之,卽可得求$\tan r_2$與$\tan r_3$之公式.

上節中球面三角形$A'BC$乃延長AB與AC使其相遇於A'而構成者；同法若延長BC與BA使其相遇,可另得一球面三角形；若延長CA與CB使其相遇,又另得一球面三角形.原來之球面三角形及如斯產生之三球面三角形合稱曰聯合三角形,ABC爲基本三角形.故已知球面三角形之內切圓與傍切圓卽以已知球面三角形爲基本三角形之一組聯合三角形之諸內切圓也.

58. 求已知球面三角形之外切小圓之角半徑.



(圖 26)

命 ABC 爲已知球面三角形, D 爲 CB 之中點, E 爲 CA 之中點; 由 D 作弧垂直於 CB, 由 E 作弧垂直於 CA, 命 P 爲此二弧之交點. 作 PA, PB, PC; 則由直角球面三角形 PCD 與 PBD, 知 $PB=PC$; 又由直角球面三角形 PCE 與 PAE, 知 $PA=PC$; 故 $PA=PB=PC$. 故 P 卽 ABC 之外切圓之極. 且 $PAB=PBA$, $PBC=PCB$, $PCA=PAC$; 故 $PCB+A=\frac{1}{2}(A+B+C)$, 而 $PCB=S-A$. 命 $PC=R$.

依 (XXII), $\tan CD=\tan CP\cos PCD$,

故 $$\tan\frac{1}{2}a=\tan R\cos(S-A);$$

故 $$\tan R=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}. \qquad \text{(XXXVI)}$$

$\tan R$ 之值亦可以以下各法表之:

今 $$\tan\frac{1}{2}a=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \qquad (\mathrm{XI}_a)$$

將 $\tan\frac{1}{2}a$ 之值代入 (XXXVI), 得

$$\tan R=\sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \qquad \text{(XXXVII)}$$

今 $$\cos(S-A)=\cos\left\{\frac{1}{2}(B+C)-\frac{1}{2}A\right\}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}A$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}a}\left\{\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}(b-c)\right\}^*$$

$$=\frac{\sin A}{\cos\frac{1}{2}a}\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c.$$

將 $\cos(S-A)$ 之值代入 (XXXVI), 得

$$\tan R=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \qquad \text{(XXXVIII)}$$

今 $$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}, \qquad (\mathrm{V}_a)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}; \qquad (\mathrm{VI}_a)$$

故 $$\sin A=\frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}.$$

將 $\sin A$ 之值代入 (XXXVIII), 得

$$\tan R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}. \qquad \text{(XXXIX)}$$

今 $$4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$$

$$=\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s^*.$$

* 讀者自證之.

故依(XXXIX),得

$$\tan R=\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s}{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}. \qquad \text{(XL)}$$

59. 求以已知球面三角形爲基本三角形之一組聯合三角形之各外切小圓之角半徑.

基本三角形之外切小圓之角半徑可以上節中之公式求得之.

命 R_1 爲延長 AB 與 AC 使其相遇於 A' 所構成之球面三角形之外切圓之半徑; R_2 與 R_3 爲同法構成之他二球面三角形之外切圓之半徑.由上節表 $\tan R$ 之各方程式卽可化得表 $\tan R_1$, $\tan R_2$, $\tan R_3$ 之各方程式.球面三角形 $A'BC$ 之邊爲 a, $\pi-b$, $\pi-c$; 其角爲: A, $\pi-B$ $\pi-C$. 命 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$; 則依上節各方程式,可得以下諸結果:

$$\tan R_1=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}, \qquad \text{(XLI)}$$

$$\tan R_1=\sqrt{\frac{\cos(S-A)}{-\cos S\cos(S-B)\cos(S-C)}}, \qquad \text{(XLII)}$$

$$\tan R_1=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \qquad \text{(XLIII)}$$

$$\tan R_1=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}, \qquad \text{(XLIV)}$$

$$\tan R_1=\frac{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)}{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}. \qquad \text{(XLV)}$$

表 $\tan R_2$ 與 $\tan R_3$ 之各方程式可如法求得之.

60. 設將圖24中之 DP 延長於 A' 以使 DA' 等於一象限, 則 A' 爲 BC 之極而 $PA'=\frac{\pi}{2}-r$; 同法將 EP 延長至 B' 以使 EB' 等於一象限, 且將 FP 延長至 C' 以使 FC' 等於一象限; 則球面三角形 $A'B'C'$ 即爲 ABC 之極三角形, 且 $PA'=PB'=PC'=\frac{\pi}{2}-r$; 故 P 爲此極三角形之外切小圓之極, 而此極三角形之外切小圓之角半徑爲其原三角形之內切小圓之角半徑之餘角. 且極三角形之內切小圓之極亦即原三角形之外切小圓之極, 此二圓之角半徑互爲餘角.

習題 IV

證明下列各方程式*:

1. $\tan r_1 \tan r_2 \tan r_3 = \tan r \tan^2 s$.

2. $\tan R + \cot r = \tan R_1 + \cot r_1 = \tan R_2 + \cot r_2$

$$= \tan R_3 + \cot r_3$$

$$= \frac{1}{2}(\cot r + \cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3).$$

3. $\tan^2 R + \tan^2 R_1 + \tan^2 R_2 + \tan^2 R_3$

$$= \cot^2 r + \cot^2 r_1 + \cot^2 r_2 + \cot^2 r_3.$$

4. $\tan R_1 \tan R_2 \tan R_3 = \tan R \sec^2 S$.

---

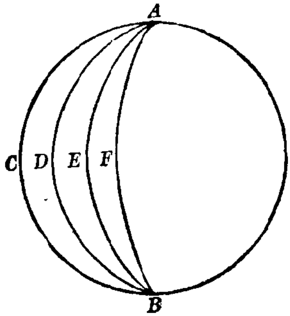
* 題中 $R, R_1, \cdots\cdots r, r_1, \cdots\cdots$ 所代表之角半徑各與本章中同.

VIII

球面三角形之面積與球面過剩

61 求月形之面積.

兩半大圓間之球面部分謂之月形.



(圖 27)

設月形 $ACBDA$ 之角 A 等於月形 $ADBEA$ 之角 A; 則將其一月形疊置於他月形之上必確相密合; 故知月形之具有等角者必相等. 吾人且知月形之面積與其角之大小成正比. 因球面之全部可設想爲具有等於

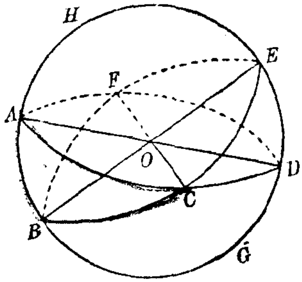
四直角之角之月形,故若月形之角爲 A(以本位弧爲單位),則

$$\frac{\text{月形之面積}}{\text{球之全面積}}=\frac{A}{2\pi}.$$

設 r 爲球之半徑,則球之全面積爲 $4\pi r^2$;故

$$\text{月形之面積}=\frac{A}{2\pi}4\pi r^2=2Ar^2 \qquad \text{(XLVI)}$$

62. 求球面三角形之面積



(圖 28)

命 ABC 爲球面三角形;將其各邊均延長之使其再行兩兩相遇.於是 ABC 爲三個月形之每月形之一部分,此三個月形即 $ABDCA$, $BCEAB$ 與 $CAFBC$ 是也.今球面三角形 CDE 與 AFB 在 O 點所對之三面角爲對頂三面角.吾人假定 CDE 與 AFB 之面積相等;故月形 $CAFBC$ 等於球面三角形 ABC 與 CDE 之和.故若以 A,

B, C（以本位弧爲單位）表球面三角形之角，則

$$ABC+BGDC=ABDCA=2\,Ar^2,$$

$$ABC+AHEC=BCEAB=2\,Br^2,$$

$$ABC+CDE=CAFBC=2\,Cr^2.$$

相加之，

球面三角形之二倍＋半球之面積$=2(A+B+C)r^2$，

故　　球面三角形 $ABC=(A+B+C-\pi)r^2.$　　(XLVII)

平面三角形之三角之和等於 π，而球面三角形三角之和超過 π 之量爲 $A+B+C-\pi$；故 $A+B+C-\pi$ 通常稱之曰球面過剩；本書以 E 表之，卽 $E=A+B+C-\pi$. 若知球面三角形之 E 與球之半徑，其面積當可由 (XLVII) 求得之.

63. 蓋努里氏定理 (Cagnoli's theorem)：

$$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\sin\frac{1}{2}E=\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)=\sin\left\{\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(\pi-C)\right\}$$

$$=\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left\{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b)\right\}^*$$

* 讀者自證之.

$$=\frac{\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\frac{2}{\sin a\sin b}$$

$$\times\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \qquad \text{(XLVIII)}$$

64 侯利爾氏定理(Lhuilier's theorem):

$$\tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)},$$

$$\tan\frac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(\pi-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(\pi-C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}C^{*}}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

故依(VII$_e$),得

$$\tan\frac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}$$

$$=\sqrt{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)}. \qquad \text{(XLIX)}$$

---

* 讀者依(XVIII)與(XVI)自證之.

65. 含球面過剩之三角函數之公式可求得者尚多；例如：

$$\cos\frac{1}{2}E=\cos\left\{\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(\pi-C)\right\}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C$$

$$=\left\{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C\right\}\sec\frac{1}{2}c^*$$

$$=\left\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\left(\cos^2\frac{1}{2}C+\sin^2\frac{1}{2}C\right)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\left(\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C\right)\right\}\sec\frac{1}{2}c$$

$$=\left\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C\right\}\sec\frac{1}{2}c. \quad (1)$$

由63節，知

$$\sin\frac{1}{2}E=\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c;$$

故 $$\tan\frac{1}{2}E=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}. \quad (2)$$

今 $$\cos\frac{1}{2}E=\left\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C\right\}\sec\frac{1}{2}c, \quad (1)$$

故 $$\cos\frac{1}{2}E=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

---

* 讀者自證之.

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \tag{3}$$

書 $1-2\sin^2\frac{1}{4}E$ 以代 $\cos\frac{1}{2}E$,

$$\sin^2\frac{1}{4}E=\frac{1+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

惟 $1+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c$

$$=4\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)^*;$$

故 $$\sin^2\frac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \tag{4}$$

同法,

$$\cos^2\frac{1}{4}E=\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \tag{5}$$

由 (4) 與 (5), 可得 (XLIX).

又 $$\frac{\sin(C-\frac{1}{2}E)}{\sin\frac{1}{2}E}=\sin C\cot\frac{1}{2}E-\cos C$$

依 (2), $$=\sin C\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}$$

$$-\cos C=\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b;$$

* 讀者自證之.

故依63節，

$$\sin\left(C-\frac{1}{2}E\right)=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

又 $$\cos\left(C-\frac{1}{2}E\right)=\cos C\cos\frac{1}{2}E+\sin C\sin\frac{1}{2}E$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)\cos C+\sin a\sin b\cos^2 C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$+\sin^2 C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)\cos C+\sin a\sin b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\left\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\right\}\sec\frac{1}{2}c$$

$$=\frac{\sin a\sin b\cos C+4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos c-\cos a\cos b+(1-\cos a)(1-\cos b)}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b+1}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \tag{6}$$

習題 V

1. 設 $C=90^\circ$，證明

$$\sin\frac{1}{2}E=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c,$$

$$\cos\frac{1}{2}E=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c.$$

2. 設 $a=b=\frac{\pi}{3}$, $c=\frac{\pi}{2}$; 證明

$$E=\cos^{-1}\frac{7}{9}.$$

3. 設 $C=\frac{\pi}{2}$, 證明

$$\frac{\sin^2 c}{\cos c}\cos E=\frac{\sin^2 a}{\cos a}+\frac{\sin^2 b}{\cos b}.$$

4. 設 $a=b$, $C=\frac{\pi}{2}$; 證明

$$\tan E=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}.$$

5. 已知球面三角形之 $A=80°$, $B=35°$, $C=70°$; 球之半徑 $r=10$; 試求其面積.

結果: 8.7265.

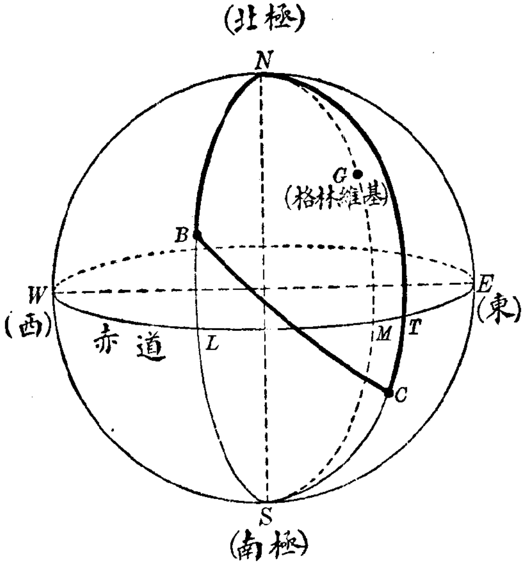
6. $a=133°26'19''$, $b=64°50'53''$, $c=144°13'45''$; 試求 E.

結果: 200°46'46''.

IX

球面三角術之應用

66. 地球:——地球近似球形,其半徑約爲3960哩.經地球南北極與某地方之大圓名曰該地方之子



(圖 29)

午圈.圖29表示地球.NGS為格林維基之子午圈;NBS為B地方之子午圈.NCS為C地方之子午圈.

某地方之子午圈上由赤道至該地方之弧為該地方之緯度.南北緯度皆由0°至90°計之.如圖中B地之北緯即以LB度之,C地之南緯以TC度之.

赤道上由零子午圈至某地之子午圈間之弧為該地之經度.東西經度均由格林維基子午圈起由0°至180°計之.圖29中C地之東經度以MT度之,B地之西經度以ML度之.因弧MT與角MNT同度,弧ML與角MNL同度,故某地之經度亦可謂為該地之子午圈與參考子午圈間之角.例如圖29中角MNT為C地之東經度,角MNL為B地之西經度.

由乙地至甲地所作之大圓弧與乙地之子午圈所成之角為由乙地所計之甲地之方位角.如圖29中由B所計之C地之方位角即以角CBN或角CBL度之,由C所計之B地之方位角即以角NCB或角SCB度之.

67. 兩地之地面距離:——經地面上任兩點之兩大圓弧中之較短者為該兩點間地面上之最短距離.圖29中B與C兩地方間地面上之最短距離為大圓弧BC.閱圖可知BC,CN BN成一球面三角形.且因

弧 $BN = 90° -$ 弧 $LB = 90° - B$ 地之北緯度，

弧 $CN = 90° +$ 弧 $TC = 90° + C$ 地之南緯度，

角 $BNC =$ 角 $MNL +$ 角 MNT

$= B$ 地之西經度 $+ C$ 地之東經度

$= B, C$ 兩地經度之差.

故若知 B, C 兩地之經緯度，卽已知球面三角形 BNC 之兩邊及其夾角；而此球面三角形卽爲已定. 其第三邊 BC 卽爲 B, C 兩地之地面最短距離.

北緯度恆以“+”號表之，南緯度恆以“−”號表之.

已知兩地之經緯度求其地面最短距離及由彼此所計之各方位角之步驟如下：

1. 將每地方之緯度由 $90°$ 減之*卽得球面三角形之兩邊.

2. 若兩地之經度皆爲西經度或皆爲東經度，取其較小者由較大者減之；若一爲東經度一爲西經度，將二者加之；卽得(1)求得之兩邊所夾之角†.

---

* 此乃代數減法；例如若兩地之緯度爲北緯 25° 與南緯 42°，則球面三角形之兩邊須爲

$$90° - 25° = 65° \text{ 與 } 90° - (-42°) = 90° + 42° = 132°.$$

† 遇兩地經度之差大於 180° 時，須將此差由 360° 減之，以減得之結果爲夾角.

3. 用52節例(3)之法解求其第三邊卽得兩地間地面上之最短距離之度數*,其他二角卽所求之方位角.

68. 天球:——吾人晴夜仰觀天空,見其似一巨大之內空半球,吾人値位於其球心.星似在此球面上由東向西旋動者.各星旋動之軌道爲垂直於地軸之平行圓,各圓之圓心均在地軸之延長線上.每星於尋常時23時56分內旋動一整周.此球之面與吾人之距離爲何,吾人弗能估定之;蓋以其遠甚也.觀測者見所有天體似距渠等遠,此因肉眼只能估計方向而不能估計距離故耳.吾人可設想天體皆射影於此理想上球面上,此球之半徑爲無限長者;如此設想頗爲便當而不牽強.此球名曰天球.太陽系全部在天球之球心有如一大氣球中央之幾顆塵粒,天球之巨大可想見矣.星間相對之位置無改變,正如地上各地方相對之位置無改變同.由地球上觀測,太陽,月亮,行星,彗星亦射影於天球上,惟其關於星及關於其彼此間之位置時在

---

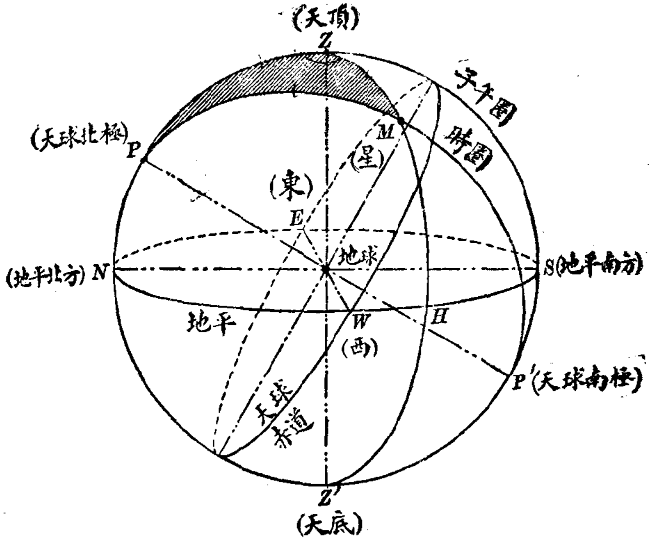
* 此弧之分數爲兩地間距離之海里數,其浬數當以公式

$$L=\frac{3.1416\times 3960\times N}{180}$$

求之,就中 N=弧之度數.

改變中.太陽關於星之視動約爲每日東移 1 度,月亮關於星之視動約爲每日東移13度.

下圖表示天球,地球僅爲位於球心之一點.



(圖 30)

將觀測者所持之錘線向上延長之,此延長線遇天球之點曰該觀測者之天頂(Z).

將觀測者所持之錘線向下延長之,此延長線遇天球之點曰該觀測者之天底(Z).

天球上以觀測者之天頂爲一極之大圓曰該觀測

者之地平;可知地平($SWNE$)之每點均距天頂與天底各90°.

地面上所有之點各有其天頂與地平.

所有經過天頂之大圓均與地平垂直;此諸大圓名曰地平經圈.如圖30中之$ZMHZ'$與$ZQSP'Z'$是.

地球之赤道之平面與天球相交之大圓名曰天球赤道($EQWQ'$).

地軸之延長線與天球之交點名曰天球赤道之兩極(P與P').可知若有星値位於天球之一極,該星必無周日運動.北極星距天球北極約$1\frac{1^\circ}{4}$.天球赤道上所有之點距天球之兩極各90°.

地面上所有之點有共同之天球赤道與天球南北極.

地面上一點之天球子午圈為該點之地理子午圈之平面與天球相交之大圓($ZQSP'Z'Q'NP$).故經觀測者之北方與南方之地平經圈卽該觀測者之天球子午圈.地面上所有不在同一南北線上之點其天球子午圈必各異.

天球上經某天體與天球兩極之大圓曰該天體之時圈.圖中$PMDP'$為星M之時圈.對於任一觀測者所

有天體之時圈無不在繼續改變中.

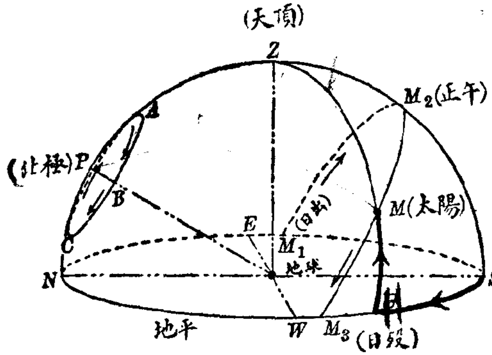
以北極,天頂,一天體爲頂之球面三角形爲天文學推算上甚重要之三角形,名曰定位三角形.

69. **球面座標**:——吾人作函數之圖解時恆以平面上兩固定而互相垂直之直線作參考線;此兩參考線名曰座標軸.量取距各座標軸之距離卽可定一點在平面上之位置;此兩距離名曰該點之直角座標.

今設想此面非爲平面而爲球面,以球面上固定而互相垂直之兩大圓作參考圓,則球面上一點距此兩大圓之角距卽爲該點之球面座標.因此兩大圓互相垂直,故其每大圓必經過他大圓之兩極.

地面上每點之經緯度卽該點之球面座標,其參考圓爲赤道與零子午圈(通常以格林維基子午圈爲零子午圈).故圖29中弧 ML(西經度)與弧 LB(北緯度)爲 B 地之球面座標;弧 MT(東經度)與弧 TC(南緯度)爲 C 地之球面座標.同法,吾人亦可用球面座標法定天球上任一點之位置.

70. **地平與子午圈制**:——在此座標制中其固定而互相垂直之參考大圓爲觀測者之地平 $(SHWNE)$ 與其子午圈 (SM_2ZPN),天體之球面座標爲其地平緯



(圖 31)

度與地平經度.

天體之地平緯度爲其地平經圈上由地平向上至該天體之角距(由 0° 至 90°);如太陽 M 之地平緯度爲 HM. 由天頂至天體之角距名曰該天體之天頂距(ZM),故天體之天頂距乃其地平緯度之餘角. 天頂之地平緯度爲 90°, 日出與日沒處之地平緯度爲 0°.

天體之地平經度爲其地平經圈與觀測者之子午圈間之角, 此角恆在地平上由南方向西以至該天體之地平經圈與地平之交點度之;如太陽 M 之地平經度爲以弧 SH 所度之角 SZH. 正午時太陽之地平經度爲 0°, 夜午時爲 180°. 在觀測者之正西之星之地平經度爲 90°, 正北者之地平經度爲 180°, 正東者之地平

經度爲 270°.

若已知天體之地平經度與地平緯度(球面座標),卽可如下法在天球上定其位置:由地平之南方 S (S 可用爲座標之原點,因其爲參考圓之交點也).取定其地平經度如 SH 然後在經過 H 之地平經圈上取定其地平緯度如 HM,則 M 卽該天體之位置.

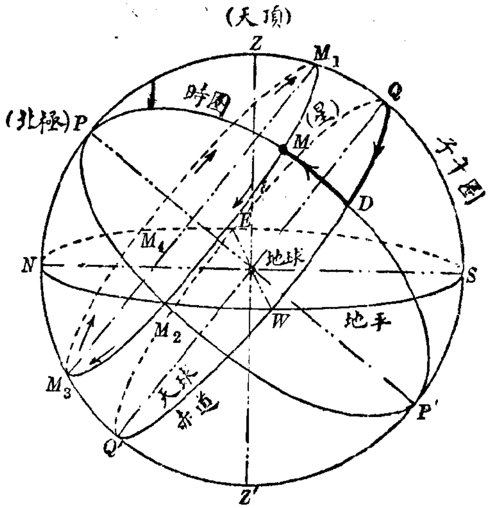
通常地面之任兩點之子午圈與地平各有不同,故知此球面座標制中天體之座標完全依觀測者之所在地而定.太陽出自 M_1 (此時其地平緯度爲 0°),由 M_1 在天空中漸漸昇起,其昇起所循之路徑爲與天球赤道平行之大圓 $M_1M_2M_3$,直至觀測者之子午圈上之 M_2 (此時爲正午,本日太陽之地平緯度之最大時也)繼又落於地平之西方 M_3.

同理,任一其他天體之地平緯度與地平經度亦在,繼續改變中.

對於俱有如圖所示之天頂之觀測者北天中近於北極之星永不沒落而靠近南極之星永不昇起.若將星在天球上動轉之路徑描述之必得一圓(如 ABC),其中心在極軸上,其平面與赤道平行.

71. 赤道與子午圈制:——此座標制中其固定而

互相垂直之兩參考大圓爲天球赤道 $(EQDWQ')$ 與觀測者之子午圈 $(NPZQSP'Z'Q')$；天體之球面座標爲其赤緯與時角.



(圖 32)

天體之赤緯爲循其時圈所測得其在天球赤道南或北之角距(由 $0°$ 至 $90°$),例如圖中弧 DM 爲星 M 之北赤緯. 北赤緯恆以"+"號表之. 南赤緯恆以"−"號表之.故北極之赤緯爲 $+90°$ 而南極之赤緯爲 $-90°$.

太陽,月亮及諸行星之赤緯各繼續改變,但星之赤緯終年改變之量極些微. 天體在其時圈上與天球北

極之角距曰該天體之極距(如圖中之PM是),可見每星之極距爲其赤緯之餘角.

由觀測者之子午圈西向至星之時圈間之角名曰該星之時角(由$0°$至$360°$),例如圖中以弧QD所度之角QPD卽星M之時角.此角常用以測定時間故名.星M於每24小時(恆星時)內旋轉一整周,卽其時角QPD以每24小時$360°$之等速逐漸增大(卽每小時$15°$).執斯之故,天體之時角常以0時至24時計之,蓋1小時等於$15°$也.當星在M_1時(卽在觀測者之子午圈上時),其時角爲0;自此其時角逐漸增大以至爲角M_1PM(當星在M時).星在M_1之12小時後,必在M_3.此時其時角爲$180°$(=12小時).星在其路徑上繼續旋動,其將必又由M_4昇起而復達於M_1,此時其時角爲$360°$(=24小時),亦卽又爲$0°$矣.

若已知天體之時角與赤緯,卽可如下法以定其在天球上之位置:由兩參考大圓之交點(如Q)起,量取其時角(如QD);然後在經D之時圈上量取其赤緯(如DM);M卽該天體之位置.

72. 實際應用:——在天文學上之應用有下列最重要之數事:

(a) 測定觀測者在地面上之位置(卽測定其經緯度).

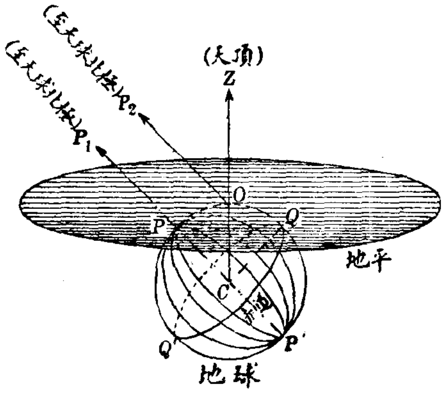
(b) 測定地面上某地之子午圈.

(c) 測定觀測者之所在地之正確時間.

(d) 測定天體之位置.

關於測定船在海洋中之位置,(a)爲天文學在經濟方向佔有重要地位之問題.操縱世界商業之主要國家,均早有國立天文臺之設立,且每年編算航海通書,以便航海家在航行中隨時確定其位置之用

73 觀測者之緯度與天球北極之關係:——若觀測者在地球之赤道上(緯度爲0°),則北極星卽在其地平上;卽北極星之地平緯度爲0°也.若觀測者由赤道

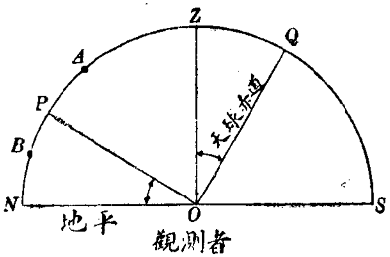


(圖 33)

起向北遊歷,則見北極星逐漸昇起;即觀測者之緯度與北極星之地平緯度均漸增大也.最終,當觀測者抵達地球之北極時,其緯度與北極星之地平緯度皆增至90°矣.於是知所視北極星在天空中之位置乃因觀測者之緯度而變異.今證明天極之地平緯度等於觀測者之緯度.

設O為觀測地(任便在北半球所擇之一地);則角QCO(或弧QO)與其北緯同度.將地軸CP延長之,終必遇天球於天球北極.由O向天球北極作一線(如OP_2),此線必與CP_1平行,蓋天球北極距地球無限遠也(見68節).角NOP_2與北極之地平緯度同度,但CO垂直於ON且OQ垂直於OP_2;故角NOP_2與角QCO相等,即在O視之,天極之地平緯度與O地之緯度相等也.

74. 測定地面上某點之緯度:——若將地平上之



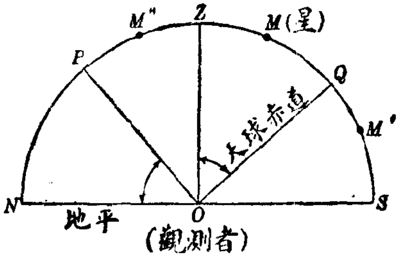
(圖 34)

天球部分射影於觀測者之子午圈之平面上,則其地平必射影而成一直線(如NS)而天球赤道之上半部亦必射影而成一直線(如OQ).由上節知觀測者之緯度等於天極之地平緯度(弧NP),即等於天頂與天球赤道之角距(弧ZQ).故設有星確位於天極,則量得該星在地平上之角距即知觀測者之緯度矣.但地軸之延長線遇天球之處實無星,所謂北極星者尚距天球北極$1\frac{1}{4}^{\circ}$也.今分述測定地方緯度之數法如下:

第一法. 用拱極星以測定地方緯度.最顯明方法爲以適當之儀器於某拱極星在天極上過子午圈時測得其地平緯度,再於12小時後測得在天極下過子午圈時之地平緯度;其在天極上過子午圈時乃其地平緯度最大時,其在天極下過子午圈時爲其地平緯度最小時;此最大與最小兩地平緯度之平均值顯然即爲觀測者之緯度.例如圖中若NA爲拱極星之最大地平緯度,NB爲其最小地平緯度;則

$$\frac{NA+NB}{2}=NP=\text{天極之地平緯度}$$
$$=\text{觀測者之緯度}.$$

第二法. 已知天體之赤緯,由該天體之子午圈地平緯度測定觀測者之緯度.當星M過觀測者之子午



(圖 85)

圈時,測得其地平緯度.若將此子午圈地平緯度(SM)由90°減之,則得該星之天頂距(ZM).在航海通書中,查得觀測時該星之赤緯,則知弧QM矣.將其天頂距與赤緯加之,得

$$QM+MZ=QZ=NP=\text{天極之地平緯度}$$
$$=\text{觀測者之緯度}.$$

故若觀測者在北半球,星在子午圈而在天頂南;則

$$\text{北緯}=\text{天頂距}+\text{赤緯}^*.$$

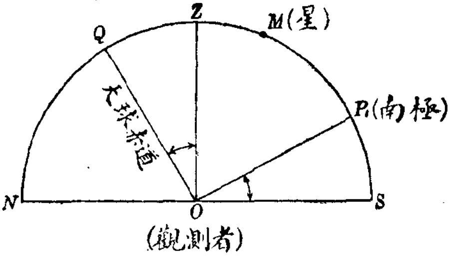
若星在子午圈上而在天頂與天極間(如M''†),則

$$\text{北緯}=NP=ZQ=QM''-ZM''$$
$$=\text{赤緯}-\text{天頂距}.$$

* 若星在天球赤道南(如M_1),此公式亦爲眞,因此星之赤緯爲負值,故其與天頂距之代數和仍爲弧QZ.

† 若星爲拱極星,卽得其最大地平緯度.

若觀測者在南半球，星在其子午圈上而在南極與天頂之間，則



(圖 86)

$$南緯 = SP' = SM - MP'$$

$$= SM - (90° - QM)$$

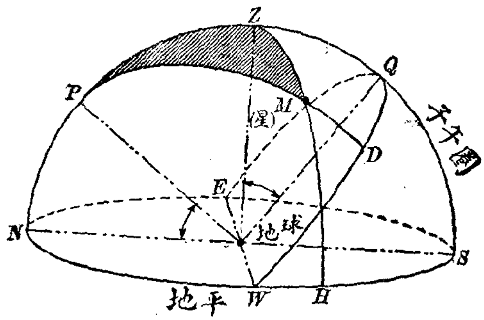
$$= 地平緯度 - 赤緯之餘角.$$

第三法. 已知天體之地平緯度，赤緯與時角，測定觀測地之緯度. 由定位三角形 PZM 知

邊 $MZ = 90° - HM$ (地平緯度) = 地平緯度之餘角[星之地平緯度可於觀測時測定之].

邊 $PM = 90° - DM$ (赤緯) = 赤緯之餘角 [星之赤緯可由航海通書中查得之].

角 ZPM = 已知之時角 [若所觀測者為太陽，此時角卽為地方時].



(圖 37)

卽已知球面三角形 PZM 之兩邊及此兩邊中一邊之對角. 依52節例(5)之法解求 PZ, 可得

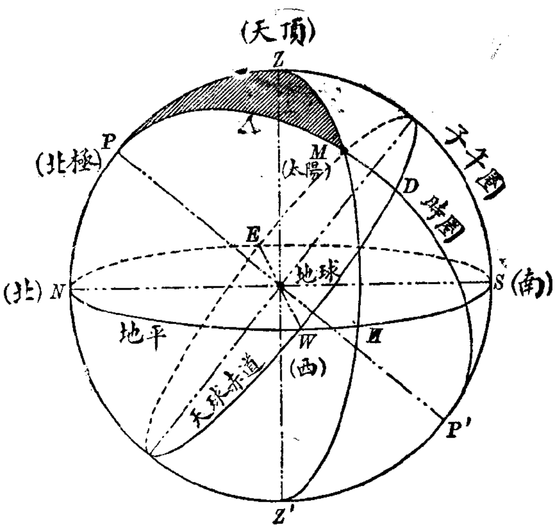
$$\text{觀測者之緯度} = NP = 90° - PZ.$$

75. 時間之測定:——太陽與任一地方一日中之時間有簡單之關係. 太陽似由東以每小時15°之等速運動向西移動;當其過某地之子午圈時, 該時卽該地方之視午. 今將太陽之時角及其相當之時間錄之於下以作比較:

太陽之時角	一日之時間
0°	正午
15°	13點
30°	14點
45°	15點

90°	18 點
180°	夜午
195°	1 點
210°	2 點
270°	6 點
300°	8 點
360°	正午

太陽 M 之時角即定位三角形 PZM 之角 P. 若已知此定位三角形 P 以外之任三形素,則解求角 P, 即得其時間.



(圖 38)

DM= 太陽之赤緯(可由航海通書中查得之).

∴ 邊 $PM=90°-DM$= 太陽赤緯之餘角.

HM= 太陽之地平緯度(用六分儀或中星儀測得之).

∴ 邊 $MZ=90°-HM$= 太陽之地平緯度之餘角.

NP= 天極之地平緯度 = 觀測者之緯度(見73節).

∴ 邊 $PZ=90°-NP$= 觀測者之緯度之餘角.

故若已知觀測者之緯度與觀測時太陽之赤緯及其地平緯度;當以下述步驟求其時間.

1. 以下列三事為球面三角形之三邊:

a. 太陽之地平緯度之餘角.

b. 太陽之赤緯之餘角.

c. 觀測者之緯度之餘角.

2. 解求此球面三角形中對以 a 為邊之角.若觀測時為下午,此求得之角卽為太陽之時角之度數;若觀測時為上午,則太陽之時角等於 360°－所求得之角.

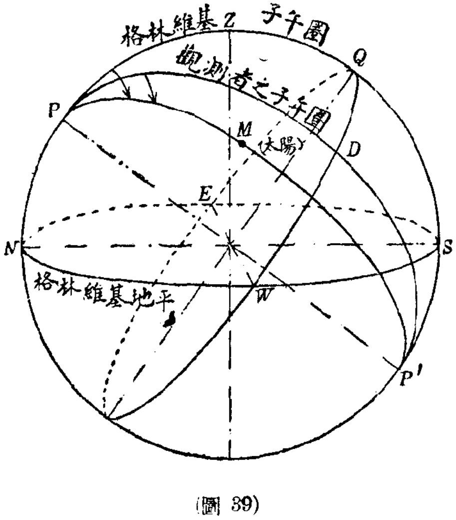
3. 若觀測時為下午,則觀測時為 $\left(\frac{\text{時角}}{15}+12\right)$ 點;

若觀測時為上午,則觀測時為 $\left(\frac{\text{時角}}{15}-12\right)$ 點.

76. 日出與日沒時間之測定:——若知觀測者之

緯度與太陽之赤緯,卽可推算日出或日沒之時間,因日出或日沒時太陽在地平,其地平緯度爲零也.此實前節所言問題之特例.在此例中球面三角形之一邊(地平緯度之餘角)爲90°.

77. 地方經度之測定:——由66節經度之定義,知地球之子午圈皆在天球射影而爲時圈.故觀測者之天球子午圈與格林維基之天球子午圈間之角(或弧)可用之以爲觀測地之經度.例如圖中若PQP'爲格林



(圖 39)

維基之子午圈(時圈),PDP'爲觀測者之子午圈(時圈)則角QPD(或弧QD,)卽爲該觀測地之西經度.若PMP'

爲太陽之時圈.則知

角QPM=格林維基所測得之太陽之時角

=格林維基之地方時,

角DPM=觀測者所測得之太陽之時角

=觀測地之地方時;

且　角QPM−角DPM=角QPD=觀測地之經度.

故觀測地之經度等於標準子午圈之地方時與該地之地方時之差.即格林維基之正午早於或遲於觀測地之正午之量爲觀測地之經度.若格林維基之時間較早於觀測地之時間,觀測地之經度爲東經度;若格林維基之時間較遲於觀測地之時間,觀測地之經度爲西經度.

觀測者求其地方時之法已於75節中知之.現須知者乃不須往格林維基而如何求得格林維基之地方時.普通所用之方法有二:

第一法.　用有線或無線電報之通訊法以得知格林維基之地方時.例如某輪船之船主測得其地方時爲$14^h\ 25^m$,渠由電報得悉格林維基之太陽平時爲$16^h\ 30^m$,其船之經度當如下法定之:

今格林維基之時間較遲於觀測地之時間,

$$\text{故}\quad \begin{array}{r} 16^h\ 30^m \\ -14^h\ 25^m \\ \hline 2^h\ \ 5^m \end{array} = \text{船之西經度};$$

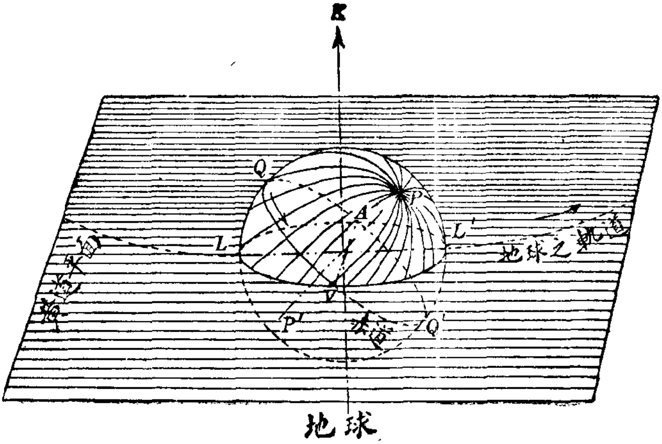
$$\text{即}\quad \begin{array}{r} 2^h\ \ 5^m \\ \times\quad 15 \\ \hline 31^\circ\ 15' \end{array} = \text{船之西經度}.$$

第二法. 由格林維基計時錶求格林維基之時間.計時錶乃準確之時錶.吾人在任一已知經度之地方,將計時錶校爲格林維基時後,即可將其攜帶於任何地方,隨時閱之即得當時之格林維基時.例如某旅行團至一地,測得其地之地方時爲10^h按伊等所攜帶之格林維基計時錶爲$8^h\ 30^m$;其地之經度當可求之如下:

今格林維基之時間較早於觀測者之時間,

$$\text{故}\quad \begin{array}{r} 10^h\qquad \\ -\ 8^h\ 30^m \\ \hline 1^h\ 30^m \end{array} = 22^\circ 30' = \text{該地之東經度}.$$

78. **黃道與二分點:**——地球每年繞日運行一周.以吾人看來,似地球靜止而太陽運動者.太陽一年中在星所在之背景上之視動之路徑爲天球上之一大圓,名曰黃道.由此可知地球軌道之平面與天球相交於黃道.赤道之平面與黃道之平面約成$23\frac{1^\circ}{2}(=e)$之角,名曰黃赤交角,即圖中之角LVQ是.



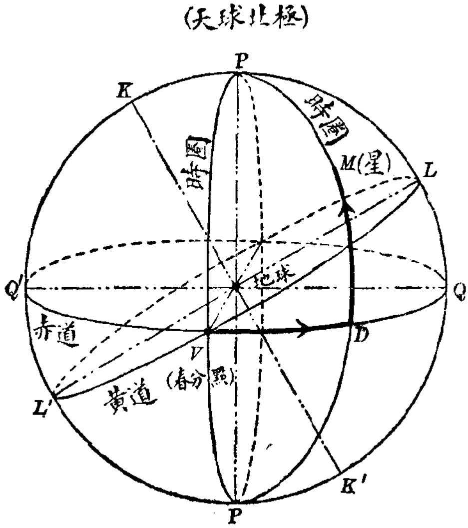
(圖 40)

黃道與天球赤道之兩交點名曰二分點.當太陽北移(約在3月21日),其過天球赤道之點曰春分點;當其南移(約在9月21日),而過天球赤道之點曰秋分點.

若將圖中V, A兩點射影於天球上,則V射影於春分點,A射影於秋分點.

79. 赤道與春分點之時圈制(亦曰赤道制):——此座標制中其固定而互相垂直之兩參考大圓爲天球赤道 QVQ')與春分點之時圈(PVP'),亦名二分圈;此座標制中天體之座標爲其赤緯與赤經.

天體之赤緯之定義已於71節中述之,卽在該天體



(圖 41)

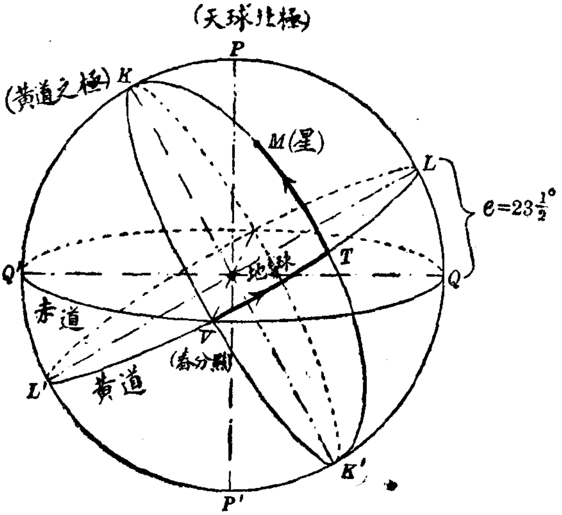
之時圈上由天球赤道至該天體之角距(由天球赤道向北或向南由0°至90°計之);北赤緯爲正,南赤緯爲負.圖中DM爲星M之北赤緯.

天體之赤經爲該天體之時圈與春分點之時圈間之角,由春分點之時圈向東由0°至360°(卽由0^h至24^h)計之.圖中角VPD(或弧VD)爲星M*之赤經.太陽,月亮,行星之赤經時有更變.圖中角LVQ(=e爲黃赤交角.

80. 以黃道及經過黃道極與春分點之大圓爲參考圓之座標制(亦曰黃道制):——在此座標制中天體

之座標為其天球緯度與天球經度.

天體之天球緯度為其在黃道以北或南在經過該天體與黃道極之大圓上所測得之角距.圖中弧TM即星M之北緯.

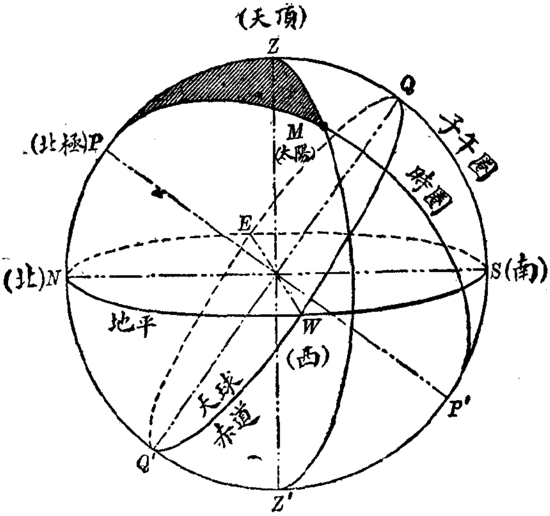


(圖 42)

天體之天球經度為經過該天體與黃道極之大圓及經過春分點與黃道極之大圓間之角.由經過春分點與黃道極之大圓起由0°至360°向東計之.圖中角VKT(或弧VT)為星M之天球經度.太陽,月亮,行星之天球經度時有改變.圖中角$LVQ(=e)$即黃赤交角.

因黃道爲太陽終年視動之軌道,故太陽之天球緯度永爲0°. 惟太陽之赤緯則爲由 $+23\frac{1^\circ}{2}$(=弧 QL, 此時爲6月21日,爲北半球一年中白晝最長之日,亦太陽達其最大高度 L 點時也)至 $-23\frac{1^\circ}{2}$(=弧 $Q'L'$, 此時爲12月22日,爲一年中白晝最短之日,亦太陽達其最小高度 L' 點時也). 太陽在二分點時(3月21日與9月21日)之赤緯爲0°.

81. 定位三角形:——總上所述知許多重要天文



(圖 43)

問題皆基於定位三角形PZM之解法.吾人於解決此諸問題之先,務須認清由問題中之已知件可直接獲得定位三角形之何形素,且須認清所需求之件可由定位三角形之何形素求得之.在此諸問題中常遇者不外以下諸量:

HM=天體之地平緯度,

DM=天體之赤緯,

角ZPM=天體之時角,

角SZM=天體之地平經度,

NP=天極之地平緯度

=觀測地之緯度;

而在定位三角形PZM中所用爲形素者則爲:

邊 $MZ=90^\circ-HM$=地平緯度之餘角,

邊 $PM=90^\circ-DM$=赤緯之餘角,

邊 $PZ=90^\circ-NP$=緯度之餘角,

角ZPM=時角,

角$PZM=180^\circ-$地平經度(角SZM)*.

*若天體之位置正如圖所示,其時角$=180^\circ-$平地經度;若天體在觀測者子午圈東,其時角等於地平經度-180°.

習題 VI

1. 求南京*與北京間,波斯頓與探普坦間地面上之最近距離. 結果: 475海里即547哩;4094海里.

2. 已知下列之球面座標試繪圖以定天體在天球上之位置:

	地平經度	地平緯度
(*a*)	45°	45°
(*b*)	120°	75°
(*c*)	300°	60°
(*d*)	225°	0°
(*e*)	0°	0°

	時角	赤緯
(*a*)	45°	+30°
(*b*)	180°	0°
(*c*)	6 hr.	+79°
(*d*)	20 hr.	+60°
(*e*)	9 hr.	−45°

3. 今測得某近極星之最大地平緯度為54°16′,12

* 各地經緯度見附錄III與IV.

小時後又測得其最小地平緯度爲40°24′;求觀測地之緯度. 結果: 北緯47°20′.

4. 北半球之某觀測者測得某星於其天頂南過其天球子午圈時之地平緯度爲63°40′,渠由航海通書中查得觀測時該星之赤緯爲+21°15′;求觀測地之緯度. 結果: 北緯47°35′.

5. 某地之緯度爲北緯40°43′.在該地測得太陽之地平緯度爲[illegible]0°40′今知太陽之赤緯爲+10°而觀測之時間在下午,問觀測時爲何時? 結果: 15 hr. 51 min.

6. 已知下列觀測者之時間與相當之格林維基時間,試求觀測地之經度.

觀測者之地方時	相當之格林維基時	結果
正午	$15^h 30^m$	西 52°30′
正午	$7^h 20^m$	東 70°
夜午	$22^h 15^m$	東 27°15′
$10^h 26^m$	$5^h 16^m$	東 77°30′
$22^h 55^m$	$8^h 35^m$	西 145°

7. 已知下列之球面座標,試繪圖以示各天體在天球上之位置:

赤經	赤緯
0°	0°
90°	−90°
6h	+15°
120°	+30°
90°	0°

8. 某行星之赤經爲 10 hr. 40 min. 其赤緯爲 −6°, 某星之赤經爲 3 hr. 20 min. 其赤緯爲 +48°. 試求二者之角距. 結果: 角距 = 107°48′.

9. 已知下列之球面座標, 試繪圖以示各天體在天球上之位置:

天球經度	天球緯度
0°	0°
270°	0°
135°	+15°
60°	+30°
30°	−60°

10. 已知某星之赤經爲 2 hr. 40 min. 其赤緯爲 +24°20′; 求其天球經緯度*. 結果: 經度 = 45°8′, 緯度 = +8°8′

* $e = 23\frac{1°}{2}$.

11. 觀測地之緯度爲北緯$51°32'$;太陽在子午圈西之地平緯度爲$35°15'$,其赤緯$+21°27'$.求地方時.

結果: 15 hr. 59 min.

12. 某星之緯度爲$+51°$,其經度爲$315°$;設$\epsilon=23°27'$,求其赤緯.

結果: 赤緯$=+32°23'$.

13. 某星之赤緯爲$+7°54'$,其地平緯度爲$22°45'$,其地平經度爲$50°14'$.求該星之時角與觀測地之緯度.

結果: 時角$=45°41'$,
緯度$=+67°59'$.

14. 已知觀測地之緯度爲北緯$51°19'$;某星之極距爲$67°59'$,其時角爲$15°8'$.試求該星之地平經度與地平緯度.

結果: 地平經度$=27°30'$,
地平緯度$=58°23'$.

15. 已知觀測地之緯度爲北緯$52°30'$;某星之赤緯爲$38°$,其時角爲$28°17'$.求該星之地平緯度.

結果: 地平緯度$=65°33'$.

附　錄

I

平面三角術公式彙錄

1. $\sin x \csc x = \cos x \sec x = \tan x \cot x = 1.$

2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \sec^2 x - \tan^2 x = 1,\ \csc^2 x - \cot^2 x = 1$

3. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x} = \dfrac{\sec x}{\csc x} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}.$

4. $\sin x = \cos x \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}} = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$

5. $\cos x = \sin x \cot x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}.$

6. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$

7. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$

8. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$

9. $\cot(x \pm y) = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}.$

10. $\sin x + \sin y = 2 \sin\dfrac{1}{2}(x+y)\cos\dfrac{1}{2}(x-y).$

11. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$.

12. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$.

13. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$.

14. $\tan x \pm \tan y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$.

15. $\cot x \pm \cot y = \pm\dfrac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$.

16. $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\frac{1}{2}(x+y)$.

17. $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(x+y)}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}$.

18 $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$.

19 $\cos^2 x - \cos^2 y = -\sin(x+y)\sin(x-y)$.

20. $\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x+y)\cos(x-y)$.

21 $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

22. $\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x = 2\cos^2\frac{1}{2}x - 1$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{1}{2}x}.$$

23. $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan^2\frac{1}{2}x}=\dfrac{2\cot\frac{1}{2}x}{\cot^2\frac{1}{2}x-1}=\dfrac{2}{\cot\frac{1}{2}x-\tan\frac{1}{2}x}.$

24. $\cot x=\dfrac{\cot^2\frac{1}{2}x-1}{2\cot\frac{1}{2}x}=\dfrac{1}{2}\left(\cot\dfrac{1}{2}x-\tan\dfrac{1}{2}x\right).$

25. $\sin\dfrac{1}{2}x=\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos x)}.$

26. $\cos\dfrac{1}{2}x=\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos x)}.$

27. $\tan\dfrac{1}{2}x=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}.$

28. $\sin 2x=2\sin x\cos x,\ \cos 2x=\cos^2x-\sin^2x.$

29. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x,\ \cos 3x=4\cos^3x-3\cos x.$

30. $\sin 4x=\sin x(8\cos^3x-4\cos x),$

$\cos 4x=8\cos^4x-8\cos^2x+1.$

31. $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x},\quad \tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3x}{1-3\tan^2x}.$

32. $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}=\dfrac{1}{2R}$, 就中 R 爲外切圓之半徑.

33. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

34. $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$

35. $$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\ \cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\\ \tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};\end{aligned}\right\}\text{就中 } 2s=a+b+c$$

36. 三角形之面積 $=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=sr,$$

就中 r 為內切圓之半徑.

II

球面三角術公式彙錄

1. $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$

2. $\sin A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin b\sin c}$

3. $\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$

4. $\cot a\sin b=\cot A\sin C+\cos b\cos C.$

5. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$

6. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.$

7. $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$.

8. $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$.

9. $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}$.

10. $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}$.

11. $\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$.

12. $\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}$.

13. $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}$.

14. $\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}$.

15. $\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}$.

16. $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

17. $\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

18. $\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

19. $\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$

20. $\cos c=\cos a\cos b.$

21. $\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\sin c\\ \sin a=\sin A\sin c\end{array}\right\}.$

22. $\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\tan c\\ \tan b=\cos A\tan c\end{array}\right\}.$

23. $\left.\begin{array}{l}\tan b=\tan B\sin a\\ \tan a=\tan A\sin b\end{array}\right\}$

24. $\cos c=\cot A\cot B.$

25. $\left.\begin{array}{l}\cos B=\sin A\cos b\\ \cos A=\sin B\cos a\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{ll}
26. & \tan r=\tan\frac{A}{2}\sin(s-a)\\
27. & \qquad=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}\\
28. & \qquad=\dfrac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a\\
29. & \qquad=\dfrac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\\
30. & \qquad=\dfrac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)}.
\end{array}\right\}$$

31. $$\tan r_1 = \tan\frac{A}{2}\sin s$$

32. $$= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)}}$$

33. $$= \frac{\cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$$

34. $$= \frac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

35. $$= \frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)}$$

36. $$\tan R = \frac{\tan\frac{a}{2}}{\cos(S-A)}$$

37. $$= \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$

38. $$= \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

39. $$= \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

40. $$= \frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s}{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$41.\quad \tan R_1=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}$$

$$42.\quad =\sqrt{\frac{\cos(S-A)}{-\cos S\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$

$$43.\quad =\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

$$44.\quad =\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$45.\quad =\frac{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)}{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

46. 月形之面積$=2Ar^2$.

47. 球面三角形之面積$=(A+B+C-\pi)r^2=Er^2$.

$$48.\quad \sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

$$49.\quad \tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)}.$$

III

我國各都市經緯度表

（根據天文研究所出版之天文年曆）

地名		經度（度）				經度（時）			緯度			
			°	′	″	時	分	秒		°	′	″
北京	（首都）	東	116	28	13	7	45	52.9	北	39	54	23
南京			118	46	33	7	55	06.2		32	03	38
鎮江	（江蘇）		119	25	02	7	57	40.1		32	13	05
懷寧	（安徽）		117	02	13	7	48	08.9		30	37	00
南昌	（江西）		115	51	13	7	43	24.9		28	37	12
杭州	（浙江）	東	120	09	37	8	00	38.5	北	30	18	20
福州	（福建）		119	27	13	7	57	48.9		26	02	24
武昌	（湖北）		114	11	13	7	36	44.9		30	34	48
長沙	（湖南）		112	46	13	7	31	04.9		28	13	00
廣州	（廣東）		112	54	58	7	31	39.9		23	10	00
桂林	（廣西）	東	110	13	33	7	20	54.2	北	25	13	07
開封	（河南）		114	32	13	7	38	08.9		34	52	26
濟南	（山東）		117	08	13	7	48	32.9		36	45	24
太原	（山西）		112	30	31	7	30	02.1		47	53	30
西安	（陝西）		108	54	33	7	15	38.2		34	16	00
成都	（四川）	東	104	12	13	6	56	48.9	北	30	41	00
昆明	（雲南）		102	51	13	6	51	24.9		25	00	00
貴陽	（貴州）		106	35	33	7	06	22.2		26	30	20
皋蘭	（甘肅）		103	52	13	6	55	28.9		36	08	00
寧夏	（寧夏）		106	15	00	7	05	00.0		38	29	47
承德	（熱河）	東	117	54	00	7	51	36.0	北	41	00	00
張北	（察哈爾）		114	49	00	7	39	16.0		40	48	00
歸綏	（綏遠）		111	38	00	7	26	32.0		40	48	00
瀋陽	（遼東）		123	43	13	8	14	52.9		41	51	00
吉林	（吉林）		126	55	13	8	27	40.9		43	47	00
龍江	（黑龍江）	東	123	57	13	8	15	48.9	北	47	46	00
迪化	（新疆）		88	32	13	5	54	08.9		43	27	00
西寧	（青海）		101	49	17	6	47	17.1		36	34	03
康定	（西康）		102	13	00	6	48	52.2		30	03	00
布達拉	（前藏）		91	38	13	6	06	32.9		30	30	00
扎什倫布	（後藏）		89	08	13	5	56	32.9		30	00	00

IV

外國著名城市經緯度表

地名		經度	緯度
原名	譯名	° ′ ″	° ′ ″
Baltimore	(巴爾的摩爾)	西 76 37 0)	北 39 17 00
Batavia	(巴塔維亞)	東 106 53 00	南 06 09 00
Boston	(波士頓)	西 71 04 00	北 42 21 00
Calcutta	(加爾各答)	東 88 19 00	北 22 33 00
Cape Town	(揆普坦)	東 18 26 00	南 33 56 00
Chicago	(芝加哥)	西 87 38 00	北 41 53 00
Greenwich	(格林維基)	00 00 00	北 51 29 00
Honolulu	(火奴魯魯)	西 157 55 00	北 21 18 00
Liverpool	(利物浦)	西 3 04 00	北 53 24 00
Maderia	(馬得拉)	西 16 55 00	北 32 28 00
New York	(紐約)	西 74 00 00	北 40 43 00
Pernambuco	(伯南布哥)	西 34 00 00	南 8 00 00
Rio de Janeiro	(里約熱內盧)	西 43 10 00	南 22 54 00
San Francisco	(聖佛蘭西斯科-即舊金山)	西 122 24 00	北 37 48 00
Sandy Hook	(聖的湖刻)	西 74 01 00	北 40 28 00
Valparaiso	(法爾巴來索)	西 71 41 00	南 33 02 00
Washington	(華盛頓)	西 77 03 00	北 38 54 00

V

化度分秒爲本位弧表 (半徑=1)

度						分		秒	
0°	0.0000000	60°	1.0471976	120°	2.0943951	0′	0.0000000	0″	0.0000000
1	0.0174533	61	1.0646508	121	2.1118484	1	0.0002909	1	0.0000048
2	0.0349066	62	1.0821041	122	2.1293017	2	0.0005818	2	0.0000097
3	0.0523599	63	1.0995574	123	2.1467550	3	0.0008727	3	0.0000145
4	0.0698123	64	1.1170107	124	2.1642083	4	0.0011636	4	0.0000194
5	0.0872665	65	1.1344640	125	2.1816616	5	0.0014544	5	0.0000242
6	0.1047198	66	1.1519173	126	2.1991149	6	0.0017453	6	0.0000291
7	0.1221730	67	1.1693706	127	2.2165682	7	0.0020362	7	0.0000339
8	0.1396263	68	1.1868239	128	2.2340214	8	0.0023271	8	0.0000388
9	0.1570796	69	1.2042772	129	2.2514747	9	0.0026180	9	0.0000436
10	0.1745329	70	1.2217305	130	2.2689280	10	0.0029089	10	0.0000485
11	0.1919862	71	1.2391838	131	2.2863813	11	0.0031998	11	0.0000533
12	0.2094395	72	1.2566371	132	2.3038346	12	0.0034907	12	0.0000582
13	0.2268928	73	1.2740904	133	2.3212879	13	0.0037815	13	0.0000630
14	0.2443461	74	1.2915436	134	2.3387412	14	0.0040724	14	0.0000679
15	0.2617994	75	1.3089969	135	2.3561945	15	0.0043633	15	0.0000727
16	0.2792527	76	1.3264502	136	2.3736478	16	0.0046542	16	0.0000776
17	0.2967060	77	1.3439035	137	2.3911011	17	0.0049451	17	0.0000824
18	0.3141593	78	1.3613568	138	2.4085544	18	0.0052360	18	0.0000873
19	0.3316126	79	1.3788101	139	2.4260077	19	0.0055269	19	0.0000921
20	0.3490659	80	1.3962634	140	2.4434610	20	0.0058178	20	0.0000970
21	0.3665191	81	1.4137167	141	2.4609142	21	0.0061087	21	0.0001018
22	0.3839724	82	1.4311700	142	2.4783675	22	0.0063995	22	0.0001067
23	0.4014257	83	1.4486233	143	2.4958208	23	0.0066904	23	0.0001115
24	0.4188790	84	1.4660766	144	2.5132741	24	0.0069813	24	0.0001164
25	0.4363323	85	1.4835299	145	2.5307274	25	0.0072722	25	0.0001212
26	0.4537856	86	1.5009832	146	2.5481807	26	0.0075631	26	0.0001261
27	0.4712389	87	1.5184364	147	2.5656340	27	0.0078540	27	0.0001309
28	0.4886922	88	1.5358897	148	2.5830873	28	0.0081449	28	0.0001357
29	0.5061455	89	1.5533430	149	2.6005406	29	0.0084358	29	0.0001406
30	0.5235988	90	1.5707963	150	2.6179939	30	0.0087266	30	0.0001454
31	0.5410521	91	1.5882496	151	2.6354472	31	0.0090175	31	0.0001503
32	0.5585054	92	1.6057029	152	2.6529005	32	0.0093084	32	0.0001551
33	0.5759587	93	1.6231562	153	2.6703538	33	0.0095993	33	0.0001600
34	0.5934119	94	1.6406095	154	2.6878070	34	0.0098902	34	0.0001648
35	0.6108652	95	1.6580628	155	2.7052603	35	0.0101811	35	0.0001697
36	0.6283185	96	1.6755161	156	2.7227136	36	0.0104720	36	0.0001745
37	0.6457718	97	1.6929694	157	2.7401669	37	0.0107629	37	0.0001794
38	0.6632251	98	1.7104227	158	2.7576202	38	0.0110538	38	0.0001842
39	0.6806784	99	1.7278760	159	2.7750735	39	0.0113446	39	0.0001891
40	0.6981317	100	1.7453293	160	2.7925268	40	0.0116355	40	0.0001939
41	0.7155850	101	1.7627825	161	2.8099801	41	0.0119264	41	0.0001988
42	0.7330383	102	1.7802358	162	2.8274334	42	0.0122173	42	0.0002036
43	0.7504916	103	1.7976891	163	2.8448867	43	0.0125082	43	0.0002085
44	0.7679449	104	1.8151424	164	2.8623400	44	0.0127991	44	0.0002133
45	0.7853982	105	1.8325957	165	2.8797933	45	0.0130900	45	0.0002182
46	0.8028515	106	1.8500490	166	2.8972466	46	0.0133809	46	0.0002230
47	0.8203047	107	1.8675023	167	2.9146999	47	0.0136717	47	0.0002279
48	0.8377580	108	1.8849556	168	2.9321531	48	0.0139626	48	0.0002327
49	0.8552113	109	1.9024089	169	2.9496064	49	0.0142535	49	0.0002376
50	0.8726646	110	1.9198622	170	2.9670597	50	0.0145444	50	0.0002424
51	0.8901179	111	1.9373155	171	2.9845130	51	0.0148353	51	0.0002473
52	0.9075712	112	1.9547688	172	3.0019663	52	0.0151262	52	0.0002521
53	0.9250245	113	1.9722221	173	3.0194196	53	0.0154171	53	0.0002570
54	0.9424778	114	1.9896753	174	3.0368729	54	0.0157080	54	0.0002618
55	0.9599311	115	2.0071286	175	3.0543262	55	0.0159989	55	0.0002666
56	0.9773844	116	2.0245819	176	3.0717795	56	0.0162897	56	0.0002715
57	0.9948377	117	2.0420352	177	3.0892328	57	0.0165806	57	0.0002763
58	1.0122910	118	2.0594885	178	3.1066861	58	0.0168715	58	0.0002812
59	1.0297443	119	2.0769418	179	3.1241394	59	0.0171624	59	0.0002860
60	1.0471976	120	2.0943951	180	3.1415927	60	0.0174533	60	0.0002909
度						分		秒	

VI

本書名詞中英對照

(以名詞首字筆畫多寡爲序)

二　畫

二分點 equinoxes

三　畫

大圓 great circle
大圓弧 arc of a great circle
小圓 small circle
三面角 trihedral angle
子午圈 meridian

四　畫

中部 middle part
中星儀 transit
內切圓 inscribed circle
方位角 bearing
六分儀 sextant
月形 lune
天文學 astronomy
天頂 zenith
天底 nadir
天極 celestial poles
天體 heavenly body
天頂距 zenith distance
天球 celestial sphere
天球緯度 celestial latitude
天球經度 celestial longitude
天球赤道 celestial equator
天球子午圈 celestial meridian
互補三角形 supplementary triangles

五　畫

外切圓 circumscribed circle
本位弧 radian
北極星 polaris (polar star)
北方 north point

六　畫

同類角 angles of the same affection
地平 horizon
地平緯度 altitude
地平經度 azimuth
地平經圈 vertical circle
地方時 local time

七　畫

角距 angular distance
角半徑 angular radius
赤道 equator

赤道與子午圈制 the equator and meridian system
赤道與春分點之時圈制 the equator and hour circle of the vernal equinox system
赤道制 the equator system
赤經 right ascension
赤緯 declination

八 畫

奈辟爾氏公式 Napier's analogies
奈辟爾氏法則 Napier's rules of circular parts
直角座標 rectangular coördinates
定位三角形 astronomical triangle
周日運動 diurnal motion

九 畫

拱極星 circumpolar star
恆星時 sidereal time
計時錶 chronometer
春分點 vernal equinox
秋分點 autumnal equinox
侯利爾氏定理 Lhuilier's theorem
南方 south point

十 畫

原三角形 primitive triangle
原點 origin
高斯定理 Gauss's theorems
時圈 hour circle
時角 hour angle
航海通書 nautical almanac
座標,座標軸 coördinates, coördinate axis.
海里 nautical mile
格林維基 Greenwich

十一畫

球 sphere
球面 spherical surface
球面三角形 spherical triangle
球面三角術 spherical trigonometry
球面過剩 spherical excess
球面座標 spherical coördinates
球心 center of a sphere
基本三角形 fundamental triangle
副圓 secondary circle

十二畫

象限 quadrant
傍切圓 escribed circle
極 pole
極距 polar distance
極三角形 polar triangle
極軸 polar axis
軸 axis
黃道 ecliptic
黃道制 the ecliptic system
黃赤交角 obliquity of the ecliptic

十三畫

經度 longitude

傾斜角 inclination

十四畫

嘉努里氏定理 Cagnoli's theorems

十五畫

輪環部分 circular parts

鄰部 adjacent part

緯度 latitude

十七畫

戴拉貝氏公式 Delambre's analogies

聯合三角形 associated triangles