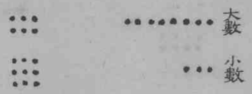
陔餘丛考

御製數理精蘊上編卷五

算法原本一

第一

一者數之原也。衆一相合而數繁焉。不能無大小多寡之不齊。而欲知其所以分合之故。必有一定之法。始可以得其準。若夫累積小數與大數等者。此小數卽度盡大數之準也。如大數有八。小數有二。四倍其二。與八必等。則二卽為度盡八之準。苟累積小數不能與大數等者。此小數卽非度盡大數之準也。



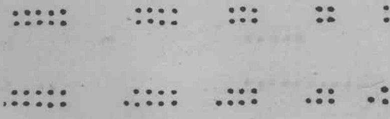
如大數有八。小數有三。二倍其三為六。小於八矣。三倍其三為九。又大於八矣。若此者即為非度盡大數之準。要之小數為大數之平分者。即能度盡大數。而小數非大數之平分者。即不能度盡大數。是故以小度大。以寡御多。求其恰符而豪無舛者。惟在得其平分之法而已。

第二

數之目雖廣。總不出奇偶二端。何謂偶。兩整平分數是也。何謂奇。不能兩整平

偶數

奇數

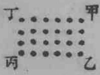


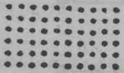
分數是也。如二。四。六。八。十之類。平分之俱為整數。斯謂之偶數矣。若三。五。七。九十一之類。平分之俱不能為整數。斯謂之奇數矣。又如小偶數分大偶數得偶分。則謂之偶分之偶數。如小偶數四。分大偶數三十二得八。平分。是為偶分。其三十二。即為偶分之偶數。小偶數分大偶數得奇分。則謂之奇分之偶數。如小偶數六。分大偶數三十。得五。平分。是為奇分。其三十。即為奇分之偶數。又如小奇數分大奇數得奇分。則謂之奇分

之奇數矣。如小奇數五。分大奇數十五。得三平分。是爲奇分。其十五即爲奇分之奇數。

第三

乘者。兩數相因而成也。蓋有兩數。視此一數有幾何。彼一數有幾何。將此一數照彼一數加幾倍。則兩數積而復成一數。故謂之相因而成。然不用加而用乘者何也。蓋加須層累而得。乘則一因即得。此立法之精。而理則實相通也。如有





六與十兩數。以十爲主而加六次得六十。以六爲主而加十次亦得六十。今以十爲主而以六乘之。或以六爲主而以十乘之。皆得六十。其數無異。而比加捷矣。

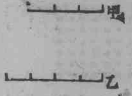
第四

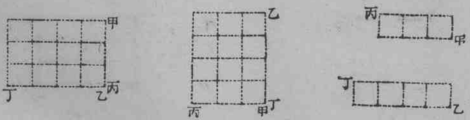
凡兩數相乘爲平方數。如四與六相乘得二十四是也。試將四六兩數作點排之。縱立四點爲甲乙。橫列六點爲甲丁。

將此六點累四次。卽成甲乙丙丁平方數矣。又若相等兩數相乘得數則爲正方數。如五與五乘得二十五是也。苟將五數縱橫各列五點。或依縱數。或依橫數累五次。卽成戊己庚辛正方數矣。

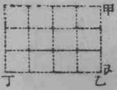
第五

凡數之相乘。可用線以表之。然線雖無廣分。如依一線之長分廣爲小方面。看此線所有方面若干。將彼線所有方面。





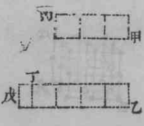
加作幾倍。或看彼線所有方面若干。將此線所有方面。加作幾倍。則二線相積而成面矣。設如有甲。乙。二線。甲線之分爲三。乙線之分爲四。將此二線相乘。則依甲線三分之一分作廣分爲甲丙。依乙線四分之一分作廣分爲乙丁。其甲丙有三小方形。乙丁有四小方形。若依甲丙所有之數。將乙丁加爲三倍。或依乙丁所有之數。將甲丙加爲四倍。俱成

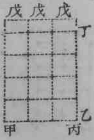


圖十二小方形之乙丙甲丁之二直角形矣。蓋面爲線之積。以一線爲橫。一線爲縱。縱橫相因而成。故測面者必於線知線。卽可以知面也。

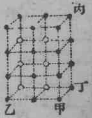
第六

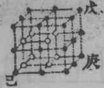
凡二線。彼此各分不均而有零分者。其相乘所成方面。亦有零分也。設有甲乙二線。甲線爲三分。今將甲線依三分之一分作廣分爲三小方形。並無餘積。而





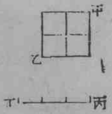
乙線照甲線分。則為四分有零。亦將乙線依甲線一分作廣分。則為四小方形。而餘戊一小形。以所作甲丙為橫。乙丁為縱。則成一丁甲四方形。而此形之內。必有十二小方形。仍有三小戊形。附於十二方形。乃為二線相乘之總積也。又如此類一線有零分者。其餘分在一邊。若二線俱有零分者。則其餘分亦在二邊矣。





第七

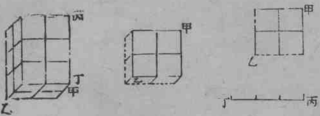
凡三數遞乘。為立方數。如二與三相乘得六。又以四乘之得二十四是也。試將二三四之三數作點排之。縱列二點為甲丁。橫列三點為甲乙。將此三點累二次成丁乙平方數。又直立四點為丙丁。依丙丁數將丁乙平方數累四次。即成丙乙立方數矣。又若相等三數遞乘得數則為正立方數。如三與三乘得九再



以三乘得二十七是也。試將三數縱横各排三點。平列三次。成庚己平方數。又直立三點。將庚己平方數累三次。即成戊己正立方數矣。

第八

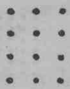
凡數之遞乘爲體。可用面以表之。蓋面雖無厚分。如依一面之積分廣爲小方體。看面所有積分。得線之長分若干。將面所有小方體。加作幾倍。則線面因之



而成體矣。設如有甲乙面之分爲四。丙丁線之分爲三。將此面線相乘。則依甲乙面四分之一作厚分爲四小方體。乃依丙丁線分數。將甲乙加爲三倍。卽成函十二小方體之丙乙直角立方體矣。蓋體爲面之積。而面爲線之積。故線可以測面。幷可以測體也。

第九

除者兩數相較而分也。蓋視大數內有

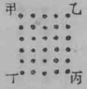


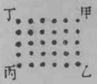
小數之幾倍。將大數照小數減幾次。則大數分而復爲一小數。故謂之相較而分。然不用減而用除者何也。葢減必遞消其分。除則一歸而卽得。除之與減。卽猶乘之與加。正相對待者也。如有大數十二。小數四。若用十二以四減之。三次而盡。卽知十二爲四之三倍。若用除法。則三倍其四與十二較。其數適等。卽知十二爲四之三倍矣。此除之與減。理相

通而用較捷也。

第十

凡兩數相乘之平方數以一數除之。必得其又一數也。設如甲乙五。乙丙六。兩數相乘之甲乙丙丁平方數三十。若以甲乙五除之。卽得乙丙六。或以乙丙六除之。卽得甲乙五。蓋此三十中有五之六倍。六之五倍。如作點排之。五點爲橫。則縱排六次。六點爲橫。則縱排五次。皆

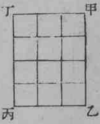


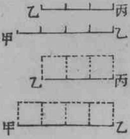


成方數。故兩數不等平方面。知其一數。或知兩數相差之較。始能得其兩邊線也。又若正方數。則其縱橫皆同。如戊己庚辛之正方數二十五。其縱橫皆五。是已。故凡正方面有積數。即可得其每邊者。蓋因其縱橫兩邊皆等故也。

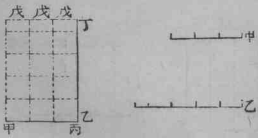
第十一

凡以線乘線。即成面。而以線除面。亦復得線。故數之乘者。可用線以表之。而除





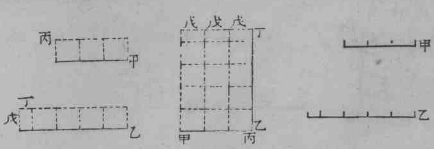
者亦可用線以表之也。設如有甲乙丙丁一方面積一十二。以甲乙線四分除之。得乙丙線之三分。或以乙丙線三分除之。亦得甲乙線之四分。試將甲乙。乙丙。二線作廣分。則甲乙線成四小方形。乙丙線成三小方形。若依甲乙線所有數。以分甲乙丙丁面。即每分得三小方形。如乙丙線。依乙丙線所有數。以分甲乙丙丁面。即每分得四小方形。如甲乙



線。蓋除之與乘。猶分合之相對。以線合者。仍以線而分。返本還原之義。有不爽矣。

第十二

凡有零分不均二線相乘之方面。以整分線除之。必得零分線。以零分線除之。必得整分線也。設如甲線三分。乙線四分有零。相乘成丁甲面。若以甲線三分除之。卽得乙線四分有零。或以乙線四

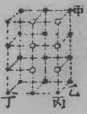


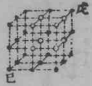
分有零除之。亦得甲線三分。試將甲線作廣分。成三小方形。爲甲丙乙線作廣分。則成四小方形。爲乙丁。餘戊一小形。若依甲丙線所有數。以分丁甲面。卽每分得四小方形一戊小形如乙丁線。或依乙丁線所有數。以分丁甲面。卽每分得三小方形如甲丙線矣。此爲二線一整一零相乘之總積。故以整線除之得零。以零線除之得整。若二線俱有零分

者。彼此除之。必俱得零分也。

第十三

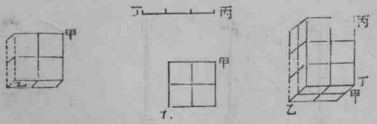
凡三數遞乘之立方數以兩數遞除之始得其又一數也。設如甲乙四乙丙二。丙丁三。遞乘得甲丁立方數二十四。若以甲乙四除之。得乙丁平方數六。再以乙丙二除之。始得丙丁三。蓋乙丁平方中有三之二倍。而甲丁立方中有六之四倍。如作點排之。二點爲縱。橫排三次。



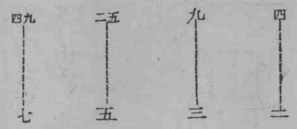


直累四次。即成方體。故三數不等立方體。知其兩數。或知其三數相差之較。始能得各邊也。又若正立方體。其縱橫厚度。皆爲一數。即以一數遞除二次。則其原數自得。如戊己正立方數二十七。其縱橫厚皆三是已。故凡正立方體。有積數。即可得其每邊者。正爲其縱橫厚度皆等故也。

第十四



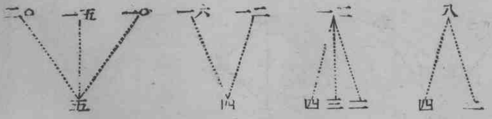
凡以線除體即得面。而以面除體亦復得線。故線可以除面。而面亦可以除體也。設如有丙乙體積一十二。以丙丁線三分除之。得甲乙面之四分。或以甲乙面四分除之。亦得丙丁線之三分。試將甲乙面作厚分。則成四小方體。若依丙丁線所有數。以分丙乙體。即每分得四小方體。如甲乙面。依甲乙面所有數。以分丙乙體。即每分得三分。如丙丁線。蓋



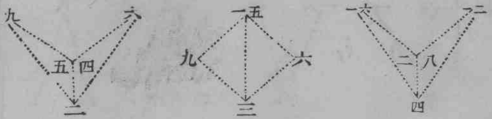
體本以線面相乘而得故可以線面相除也

第十五

凡大數用小數可以度盡者此大數必爲此小數之所積也然所謂小數可以度盡大數者復有幾種有大數惟一數可以度盡者如四九二十五四十九之類惟用二可以度四三可以度九五可以度二十五七可以度四十九是也有



大數用兩數三數俱可以度盡者。如八與十二之兩數。用二用四。俱可以度盡八。用二用三用四。俱可以度盡十二是也。有兩大數。或三大數。用一小數俱可以度盡者。如十二。十六之兩數。或一十。十五。二十之三數。用四可以度盡十二。十六之兩數。用五可以度盡一十。十五。二十之三數是也。又有一小數可以度盡幾大數。將此幾大數相加爲一總數。



此小數亦可以度盡此總數。如四可以度盡十二。十六兩數。若將十二。十六相加為二十八。則此四亦可以度盡此二十八也。又或一小數可以度盡幾大數。將此大數不拘幾分分之。此小數可以度盡一分。亦必可以度盡其餘幾分也。如三可以度盡十五。將十五分為六。九兩數。此三可以度盡六。亦必可以度盡九也。又如六與九兩數。用三俱可以度

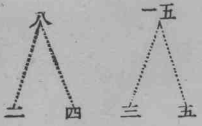
五　七　一一　一三

盡。若將六與九相乘得五十四。此小數三仍可以度盡此五十四也。凡此類者。皆爲彼此有度盡之數也。

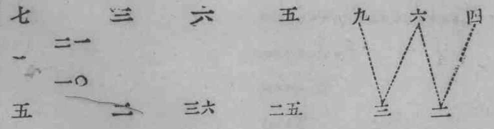
第十六

凡大數用小數不可以度盡者。此大數必非此小數之所積也。然用一以度之。無不可以度盡者。蓋一爲數之根。諸數皆自一而積之故也。所謂度不盡者。亦復有幾種。有大數無小數可以度盡者。

五　七　一一　一三



如五。七。十一。十三之類。任用二用三用四。俱不能度盡也。有兩大數。或三大數。用小數彼此不可以度盡者。如十五與八之兩數。用二用四可以度盡八。而不能度盡十五。用三用五可以度盡十五。而不能度盡八。又如四。六。九之三數。用二可以度盡四。六。而不能度盡九。用三可以度盡六。九。而不能度盡四也。又有彼此不能度盡之數。或將一數自乘或

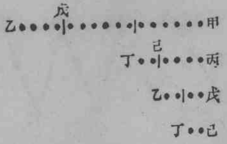


將兩數俱自乘。彼此仍俱不可以度盡也。如五與六之兩數。彼此不能度盡。亦無一小數可以度盡此兩數。即將五自乘爲二十五。或將六自乘爲三十六。則六仍不能度盡二十五。而五仍不能度盡三十六。即二十五亦不能度盡三十六也。又如三。七。兩數。與二。五。兩數。俱爲彼此不能度盡之數。或將三與七相乘得二十一。將二與五相乘得一十。此一

三　二

二一　一〇

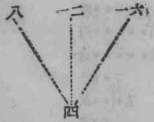
五　七



十與二十一之兩數。仍爲彼此不能度盡之數也。凡此類者。皆爲彼此無度盡之數也。

第十七

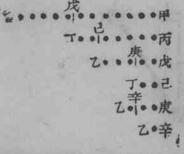
凡兩數互轉相減。未至於一而即可以減盡者。此減盡之最小數。即可以度盡此兩數也。設如有甲乙十六。丙丁六之兩數。將丙丁六與甲乙十六減二次。餘戊乙四。將此戊乙四轉與丙丁六相減。



餘巳丁二。又將此巳丁二轉與戊乙四相減二次。卽無餘。則此巳丁二。卽可以度盡甲乙十六及丙丁六矣。蓋八倍其二與十六等。三倍其二與六等也。又如十六與十二與八。此三數亦爲彼此有度盡之數。何也。蓋十六與十二相減餘四。以四轉與十二相減。三次而盡。則四可以度盡十六與十二矣。又二倍其四。卽與八等。則四又可以度盡八。然則十

六十二與八之三數爲彼此有度盡之數可知矣

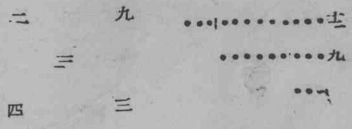
第十八



凡兩數互轉相減至於一始可以減盡者一之外別無他小數可以度盡此兩數也設如有甲乙十二丙丁七之兩數將丙丁七與甲乙十二相減餘戊乙五將此戊乙五轉與丙丁七相減餘巳丁二將此巳丁二又轉與戊乙五相減餘

九　一三　二〇

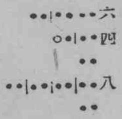
庚乙三又將庚乙三轉與已丁二相減餘辛乙一既至於一始可以度盡甲乙丙丁兩數而一之外如一二三四雖可以度盡十二而不能度盡七也又如九與十三及二十之三數亦爲彼此無度盡之數何也葢將九與十三互轉相減必至於一即用十三與二十轉減或用九與二十轉減亦皆至於一則除此一之外皆無可以彼此度盡此三數之小數



矣。

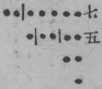
第十九

凡有大數。約為相當比例之最小數以從簡易。則為約分法也。然數有可約不可約之分。可約者度盡之數。不可約者度不盡之數也。設如有九與十二之兩數。欲約為相當比例之最小數。乃用求小數度盡大數法。以九與十二互轉相減。得減盡之數為三。則三為度盡九與



六　三
四　二　二
八　四

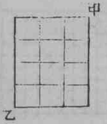
十二之數矣以三除九得三以三除十二得四此三四兩數即爲九與十二相當比例之最小數也又如有六四八之三數欲約爲相當比例之最小數乃以六與四互轉相減得減盡之數爲二又以二與八相減四次而盡則二爲度盡六四八之小數矣以二除六得三以二除四得二以二除八得四此三二四三數即六四八相當比例之最小數也此

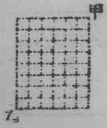


皆數之可約者也。若夫數之不可約者。互轉相減。必至於一而不可以度盡也。如有五。七兩數。以五減七餘二。復以二減五二次餘一。既餘一。則自一之外。必無可以度盡之數而不可約矣。

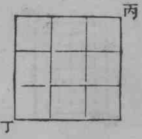
第二十

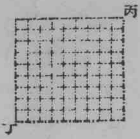
凡有大分。以分母乘之。通爲小分。則爲通分法也。然不曰乘而曰通者何也。蓋乘則積少成多。其得數溢於原數之外。



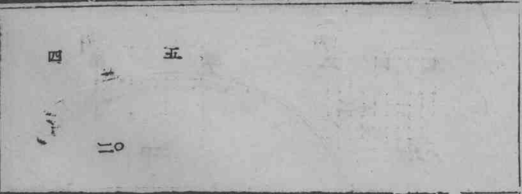


通則變大爲小。其得數仍函於原數之中也。如有大分十二。其分母爲四。欲得其小分則以分母四。乘大分十二。得小分四十八是已。試作甲乙方形以明之。其中所函方形十二。卽大分也。若將中函之方形。每分俱分爲四小方。則十二方形。共分爲四十八小方形矣。其數雖比原大數加四倍。然其每分之分只得原數之四分之一。故仍函於甲乙方形





之內。而未嘗溢出原數之外也。又如有大分九。其分母爲九。欲得其小分。則以分母九乘大分九。得小分八十一是已。試作丙丁方形以明之。其中所函方形九。卽大分也。若將其中函之方形。每分俱分爲九小方。則九方形共分爲八十一小方形矣。其數雖比原大數加九倍。而仍函於丙丁方形之內者。以其每分之分。只得原數之九分之一也。由此推



之。其每分之毋。或爲八或爲十二或爲數十。亦皆倣此通之。其所通之數。雖至千萬。而要皆未有溢於所通原分之外者矣。

第二十一

凡有幾小數。欲求俱可以度盡之大數。則以此幾小數連乘之得數。始爲此幾小數度盡之一大數也。設如有四。五兩小數。欲求用四用五俱可以度盡之一

四　五

二〇

三　四　五

一二

六〇

數。則以四與五相乘得二十。即爲四、五兩數俱可度盡之一大數矣。又如有三、四、五之三小數。欲求用三用四用五俱可以度盡之一數。則以三與四相乘得十二。又以五乘十二得六十。即爲三、四、五俱可度盡之一大數矣。葢小數爲大數之根。始能度盡大數。如四、五可以度盡二十者。二十乃四之五倍。亦即五之四倍也。三、四、五可以度盡六十者。六十

甲 三 一二　二八

乙 四 一二　三九

乃十二之五倍。而十二乃三之四倍也。

第二十二

凡有兩數。彼此互乘所得之數。與原數比例必同也。葢數有多寡。而分又有大小。則紛紜難御。故必依此數之分。將彼數加為幾倍。又依彼數之分。將此數加為幾倍。則兩分數既同。而比例亦同矣。如甲。乙二數。甲為三分之二。乙為四分之三。欲辨其孰大。則依甲數。將乙數加

甲 三 二　十二 八

乙 四 三　十二 九

三倍。為十二分之九。依乙數。將甲數加四倍。為十二分之八。如是則所加之兩大分。同為十二。而所生之兩小分相比。即同於原甲數與乙數之相比矣。何也。甲數本三分之二。而為十二分之八者。乃加四倍之比例。十二為三之四倍。八為二之四倍。而十二分之八之比例。仍同於三分之二之比例也。乙數本四分之三。而為十二分之九者。乃加三倍之比例。十二為四之三倍。九

為三之三倍。而十二分之九之比例。仍同於四分之三之比例也。此即互乘同母之法。如甲為三分之二者。三即母數。二即子數也。乙為四分之三者。四即母數。三即子數也。因兩母數不同。故用互乘以同之。

第二十三

凡子母分有幾數。而子數同為一者。先以各母求俱能度盡之一數。次以各母除之。則為各子數也。如甲。乙。丙三數。甲為二分之一。乙為三分之一。丙為四分

甲二之一		十二
乙三之一	二四	八
丙四之一		六

甲二之一		十二
乙三之一	二四	八
丙四之一		六

之一。則先以三母數連乘得二十四。爲甲乙丙之共母數。又以二除共母數得十二。爲甲之子數。以三除共母數得八。爲乙之子數。以四除共母數得六。爲丙之子數。蓋甲本二分之一。子母各加十二倍。即爲二十四分之十二。而二十四與十二之比例。仍同於二與一之比例也。乙本三分之一。子母各加八倍。即爲二十四分之八。而二十四與八之比例。

仍同於三與一之比例也。丙本四分之一。子母各加六倍。即爲二十四分之六。而二十四與六之比例。仍同於四與一之比例也。

第二十四

凡子母分有幾數。而子母數俱不等者。亦先以各母求俱能度盡之一數。次以各母除之。得數。復以各子數乘之。即爲各子數也。如有甲乙丙三數。甲爲三分

甲	乙	丙
三之二	四之三	五之四
	六○	
四○	四五	四八

甲　三分之二　　　四〇
乙　四分之三　六〇　四五
丙　五分之四　　　四八

之二。乙爲四分之三。丙爲五分之四。則先以三母數連乘得六十。爲甲乙丙之共母數。次以三除共母數得二十。以乘子數二。得四十。爲甲之子數。又以四除共母數得十五。以乘子數三。得四十五。爲乙之子數。又以五除共母數得十二。以乘子數四。得四十八。爲丙之子數。蓋甲本三分之二。子母各加二十倍。卽爲六十分之四十。而六十與四十之比例

仍同於三與二之比例也。乙本四分之三。子母各加十五倍。卽爲六十分之四十五。而六十與四十五之比例。仍同於四與三之比例也。丙本五分之四。子母各加十二倍卽爲六十分之四十八。而六十與四十八之比例。仍同於五與四之比例也。

六	一八
四	一二
一○	三○

算法原本二

第一

凡有幾小數與幾大數相比。其比例若同。則小數相加所得之總數。與大數相加所得之總數相比。仍同於原數之比例也。設如有一小數六。一小數四。一大數十八。一大數十二。其小數六。爲大數十八之三分之一。而小數四。亦爲大數十二之三分之一。將兩小數六。四。相加。

六	一八	二	六
四	一二	三	九
		四	一二
一〇	三〇	九	二七

得一十。將兩大數十八。十二。相加。得三十。此一十與三十之比。卽如六與十八。四與十二之比。皆爲三分之一之比例也。又如三小數二。三。四。與三大數六。九。十二。相比。皆爲三分之一。將二。三。四。相加。得九。將六。九。十二。相加。得二十七。其比例亦爲三分之一也。又或四小數四大數相加其總數之比例亦皆同。如三與十二。四與十六。五與二十。六與二十

三	一二
四	一六
五	二〇
六	二四
一八	七二

一〇	二〇
六	一八
四	一二

四。俱爲四分之一、將三。四。五。六。四小數相加。得十八、將十二。十六。二十。二十四。四大數相加。得七十二。其比例仍爲四分之一矣。

第二

凡有幾小數。與幾大數之比例若同。則小數相減所得之餘數。與大數相減所得之餘數相比。仍同於原數之比例也。

設如有一小數十。一小數六。一大數三

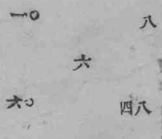
一〇	三〇	八	二四
六	一八	四	一二
四	一二	四	一二
		三	九
		一	三

十。一大數十八。其小數十。為大數三十之三分之一。而小數六。亦為大數十八之三分之一。將兩小數十與六相減餘四。將兩大數三十與十八相減餘十二。此四與十二之比。即如十與三十。六與十八之比。皆為三分之一之比例也。又如三小數八。四。三。與三大數二十四。十二。九。相比。皆為三分之一。將四。三。與八遞相減。餘一。將十二。九。與二十四遞相

七	二	一	八
二			三
六	〇	一	二
二	六		四
四	四	一	一
二	〇		五
二	四		六

減餘三。其比例亦爲三分之一也。又或四小數四大數相減。其餘數之比例亦皆同。如十八與七十二。爲四分之一。而三與十二。四與十六。五與二十。俱爲四分之一。將小數三。四。五與十八遞相減。餘六。將大數十二。十六。二十與七十二遞相減。餘二十四。其比例仍爲四分之一矣。

第三



凡有一數乘兩數。其所得兩數相比。仍同於原兩數之相比也。設如一數六。與八與一十兩數相乘。以六乘八得四十八。以六乘一十得六十。此四十八與六十相比。即同於原數八與一十之相比矣。夫八與四十八。一十與六十。皆為六分之一。故一與六之比。同於八與四十八之比。而一與六之比亦同於十與六十之比也。然則八與四十八之比。例必

三

一二　一五

四　五

同於十與六十之比例而四十八與六十之比例。亦必同於八與一十之比例可知矣。

第四

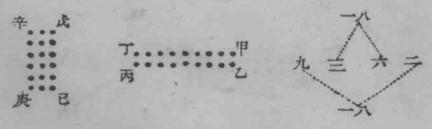
凡有一數除兩數。其所得兩數相比。仍同於原兩數之相比也。設如一數三。除十二與十五之兩數。以三除十二得四。以三除十五得五。則此四與五相比。卽同於原數十二與十五之相比矣。夫十

	三	
一五		一二
五		四

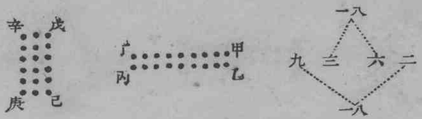
二與四。十五與五。皆為三分之一。故一與三之比。同於四與十二之比。而一與三之比。亦同於五與十五之比也。然則四與十二之比例。必同於五與十五之比例。而四與五之比例。亦必同於十二與十五之比例可知矣。

第五

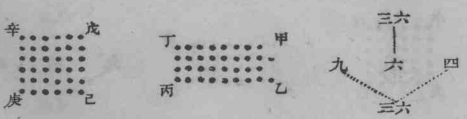
凡相當比例四數。其第一數與第四數相乘。第二數與第三數相乘。所得之數



等者何也。蓋兩方面以其縱橫界互相爲比之比例若等。則兩方積必等。見幾何原本七卷第三節。今以第一數與第四數相乘。卽如以第一數爲縱。第四數爲橫。成一方數。而第二數與第三數相乘。卽如以第二數爲縱。第三數爲橫。成一方數。其積必相等也。設如有二與六、三與九。相當比例四數。將第一數二爲縱。第四數九爲橫。相乘得十八。爲甲丙一方數。將第

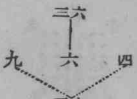


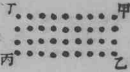
二數六爲縱。第三數三爲橫。相乘亦得十八。爲戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界。大三分之二。而戊庚方之戊己縱界。比甲丙方之甲乙縱界。亦大三分之二。其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等。則相當比例四數。其第一數與第四數相乘。第二數與第三數相乘。所得之數相等無疑矣。

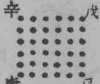


第六

凡相連比例三數。其首數與末數相乘。與中一數自乘所得之數等者何也。葢兩方面相等者。其縱橫界之互相比例必等。見幾何原本七卷第三節今將首數與末數相乘。即如以首數爲縱。末數爲橫。成一方數。而中數自乘。即是以中數爲縱。復以中數爲橫。成一方數。其積必相等也。設如有四。六。九。相連比例三數。將首數四







為縱。末數九為橫。相乘得三十六。為甲丙一方數。將中數六為縱。仍復為橫。相乘。即是自乘。亦得三十六。為戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界。比戊庚方之戊辛橫界。大三分之一。而戊庚方之戊己縱界。比甲丙方之甲乙縱界。亦大三分之一。其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等。則相連比例三數。其首末兩數相乘之數。與中數自乘所得之數相等

二　一八　九

三　六

二　三　六　九

無疑矣。

第七

凡有兩數除一數。其所得兩數之比例。卽同於原兩數之轉相比例也。設如有一數十八。以二。三兩數除之。二除十八得九。三除十八得六。以此九與六兩數相比。卽同於原兩數三與二之相比也。蓋二與三。六與九。爲相當比例之四數。以第一數二與第四數九相乘。第二數

二　一八　九

三　六

二　三　六　九

三與第三數六相乘。皆得十八。故二除十八得九。卽如以第一數除第二數與第三數相乘之數而得第四數也。以三除十八得六。卽如以第二數除第一數與第四數相乘之數而得第三數也。夫相當比例數。其第二數與第四數之比。原同於第一數與第三數之比。故第一數二除十八所得之九。與第二數三除十八所得之六相比。卽同於第二數三

四　　六
三十六
九　　六

四　六　六　九

與第一數二之相比也。

第八

凡有兩數除一數。其所得之兩數內有一數與原兩數內一數相等者。則所得之兩數與原兩數互轉相比。卽成相連比例之數也。設如有一數三十六。以四六兩數除之。四除三十六得九。六除三十六仍得六。與原數六相等。則此九與六兩數之比。卽同於原數六與四之比

四　九

三六

六　六

四　六　六　九

也。蓋四與六。六與九。爲相連比例之四數。以四爲首數。九爲末數。相乘。以六爲中數自乘。皆得三十六。今以四除三十六得九。即如以首數除中數自乘之數而得末數也。以六除三十六。復得六。即如以中數除首末兩數相乘之數而仍得中數也。夫相連比例數。其末數與中數之比。原同於中數與首數之比。則首數四除三十六所得九。與中數六除三

二　六　三　九

十六所得六相比。即同於中數六與首數四之相比也。

第九

凡相當比例四數。其第一數度盡第二數。則第三數亦必度盡第四數也。如有二。六。三。九。相當比例四數。其第一數二。可以度盡第二數六。則第三數三。亦可以度盡第四數九矣。夫相當比例四數。第一與第二之比。必同於第三與第四

二　六　三　九

二　四　八

之比。今第一爲二。第二爲六。乃加三倍之比例。則第四與第三。亦必爲加三倍之比例。故三倍其二。可以度盡六者。三倍其三。卽可以度盡九也。

第十

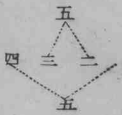
凡相連比例三數。其第一數度盡第二數亦必度盡第三數也。如有二。四。八。相連比例三數。其第一數二。可以度盡第二數四。亦必可以度盡第三數八矣。夫

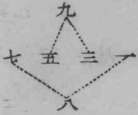
二　四　八

相連比例三數。第一與第二之比。同於第二與第三之比。今第一數爲二。第二數爲四。乃加倍之比例。則第二與第三。亦必爲加倍之比例。而第一與第三。則爲再加一倍之比例。故一倍其二。可以度盡四者。再倍其二。即可以度盡八也。

第十一

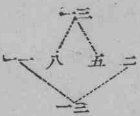
凡依次遞加取四數。其第一第四兩數相加。與第二第三兩數相加之數等也。





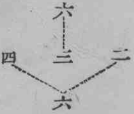
加一。二。三。四。遞加之四數。將第一數一與第四數四相加得五。以第二數二與第三數三相加亦得五。又如一。三。五。七。遞加之四數。一。三。五。七。爲隔一數以遞加者也。將第一數一與第四數七相加得八。以第二數三與第三數五相加亦得八也。又如二。五。八。十一。遞加之四數。二。五。八。十一。爲隔二數以遞加者也。將第一數二與第四數十一相加得十三。以第二數五與第三數八相加亦

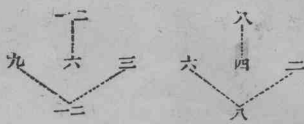
得十三。由此推之。或隔三數。或隔四數。或隔五六數。以至極多數。但依次遞加取四數。無有不如此也。



第十二

凡依次遞加取三數。其首末兩數相加。與中數加倍之數等也。如二三四遞加之三數。將首末二四相加。得六。以中數三倍之。亦得六。又如二。四。六遞加之三數。二。四。六隔一數以遞加者也。將首末二六相加得

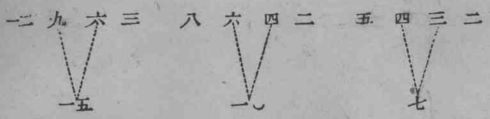




八。以中數四。倍之。亦得八也。又加三。六。九遞加之三數。三。六。九隔二數以遞加者也。將首末三九相加。得十二。以中數六。倍之。亦得十二。由此推之。或隔三數。或隔四數。或隔五六數。以至極多數。但依次遞加取三數。無有不合者也。

第十三

凡依次遞加三數。以第二第三兩數相加。減去第一數。即得挨次之第四數也。



如二三四之三數。以第二數三第三數四相加得七。內減去第一數二得五。卽是第四數。又如二。四。六隔一數遞加之三數。以第二數四第三數六相加得一十。內減去第一數二得八。卽是第四數。亦爲隔一數。又如三。六。九隔二數遞加之三數。以第二數六第三數九相加得十五。內減去第一數三得十二。卽是第四數。亦爲隔二數矣。葢此卽四率相當

比例之理。四率中兩率相乘與首末兩率相乘之數等。故中兩率相乘。以首率除之。即得末率。而此則中兩數相加與首末兩數相加之數等。故以首一數減之。即得末一數。其義一也。

第十四

凡依次遞加兩數。以第二數倍之。減去第一數。即得挨次之第三數也。如二。三兩數。將第二數三。倍之得六。內減去第

二

三⋯⋯⋯⋯六

四

二

四……八

六

三

六……一二

九

一數二。餘四。卽是第三數。又如二。四隔一數之兩數。將第二數四倍之得八。內減去第一數二。餘六。卽是第三數。四與六亦爲隔一數也。又如三。六隔二數之兩數。將第二數六。倍之得十二。內減去第一數三。餘九。卽是第三數。九與六亦爲隔二數也。葢此卽三率相連比例之理。三率以中率自乘。與首末兩率相乘之數等。故中率自乘。以首率除之。卽得

末率而此則中數倍之與首末兩數相加之數等故以首數減之即得末數於此見加減乘除之相對待而加減可以代乘除之理亦可從此推矣

四	八	
四	八	一六

第十五

凡有彼此可以度盡兩數欲求相連比例之數則以一數自乘以一數除之即得相連比例之第三數也如有四八兩數欲求第三數如四與八之相連比例

四　八　一六

四　八　一六　三二

乃以八自乘得六十四。以四除之得十六。此十六即爲四與八相連比例之第三數。蓋八者四之二倍。而十六又爲八之二倍。則八與十六之比例。必同於四與八之比例矣。如有三數。求第四數。仍如四與八之比例。則以第三數十六自乘。得二百五十六。以第二數八除之。得三十二。即爲四。八。十六相連比例之第四數。蓋一十六者四之四倍。而三十二者

四　八　一六

四　八　一六　三二

八之四倍。則十六與三十二之比例。必同於四與八。八與十六之比例矣。如欲求連比例之第五數。或第六數。即以相近兩數依前法算之。由此遞生。可至於無窮焉。然此皆四與八之比例。或四與十六。或三與六。五與十之類。凡有彼此度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆如此求之。無不可得矣。

第十六

	五	三
二五	一五	九

凡有彼此不可以度盡之兩數。欲依此兩數比例。求相連比例之數。則以一數自乘爲第一率。而以又一數自乘爲第三率。以兩數互乘爲第二率。即爲相連比例之三數也。如有三五兩數。欲求相連比例三數。皆如三與五之比例。乃以三自乘得九。以五自乘得二十五。以三與五相乘得十五。此九與十五。十五與二十五之三數。即如三與五之相連比

三	五		
九	一五	二五	
二七	四五	七五	一二五

例三數。蓋九爲三之三倍。而十五爲五之三倍。則九與十五爲三與五之比例矣。而十五爲三之五倍。二十五爲五之五倍。則十五與二十五。亦爲三與五之比例矣。又或已有三數。欲求第四數。皆如三與五之連比例。則以三乘九得二十七。以三乘十五得四十五。以三乘二十五得七十五。復以五乘九得四十五。五乘十五得七十五。五乘二十五得一

三	五		
九	一五	二五	
二七	四五	七五	一二五

百二十五。此所得六數內。四十五。七十五。各得二。今止用其一。故二十七。四十五。七十五。一百二十五之四數。即如三與五之相連比例數也。蓋二十七者三之九倍。而四十五者五之九倍。則二十七與四十五之比例。同於三與五之比例矣。又四十五者三之十五倍。而七十五者五之十五倍。則四十五與七十五之比例。同於三與五之比例矣。又七十

三	五		
九	一五	二五	
二七	四五	七五	一二五

五者三之二十五倍。而一百二十五者五之二十五倍。則七十五與一百二十五之比例。亦同於三與五之比例矣。如欲求連比例之第五數或第六數。以原一數遞乘先得之幾數。復以又一數遞乘先得之幾數。去其相同者。所餘即成相連比例之數。由此求之。亦可至於無窮也。然此皆三與五之比例。或三與七。四與九。五與八之類。凡彼此不可以度

盡之數欲求相連比例幾數者亦皆倣此求之而卽得矣

第十七

凡相當比例四數其前兩數之間有相連比例二數其後兩數之間亦必有相連比例二數也設如有甲二十四乙八十一丙三十二丁一百零八相當比例之四數甲數二十四與乙數八十一之間有戊三十六己五十四之相連比例

甲二四	戊三六	己五四	乙八一
壬八	癸一二	子一八	丑二七
丙三二	庚四八	辛七二	丁一〇八

甲二四	壬八	丙三二
戊三六	癸一二	庚四八
己五四	子一八	辛七二
乙八	丑二七	丁一〇八

兩數。則丙數三十二與丁數一百零八之間。亦必有庚四十八辛七十二之相連比例兩數也。試將甲戊己乙四數。求其相當比例之至小數。則得壬八癸十二子十八丑二十七之四數。其甲與乙之比。即同於壬與丑之比。而丙與丁之比。原同於甲與乙之比。則丙與丁之比。亦必同於壬與丑之比矣。其比例既同。則壬可以度盡丙。丑亦可以度盡丁。而

甲 二四	戊 三六	己 五四	乙 八一
壬 八	癸 一二	子 一八	丑 二七
丙 三二	庚 四八	辛 七二	丁 一〇八

癸與子亦必可以度盡庚與辛。壬。癸。子。丑各四倍之。即與丙。庚。辛。丁。等。是四次可以度盡也。是丙。庚。辛。丁四數之比。皆與壬。癸。子。丑四數之比相同也。夫壬。癸。子。丑原爲甲。戊。己。乙連比例相當之小數。今丙。庚。辛。丁之比。既與之相同。則丙。庚。辛。丁亦爲相連比例之四數矣。既俱爲相連比例數。則戊。己爲甲。乙兩數間之連比例數。庚。辛爲丙。丁兩數間之連比例數無疑矣。

甲　乙一八　丙一六二

丁六　戊五四

第十八

凡相連比例三數。其第一數與第二數之間。有相連比例一數。則第二數與第三數之間。亦必有相連比例一數也。設如有甲二。乙十八。丙一百六十二。相連比例之三數。其甲數二與乙數十八之間。有相連比例之丁數六。則乙數十八與丙數一百六十二之間。亦必有相連比例之戊數五十四也。葢甲與乙之比。

甲二　乙一八　丙一六二

丁六　戊五四

同於乙與丙之比。今丁六爲甲二之三倍。戊五十四亦爲乙十八之三倍。則甲與丁之比。同於乙與戊之比。而丁六爲乙十八之三分之一。戊五十四亦爲丙一百六十二之三分之一。則丁與乙之比。亦同於戊與丙之比。因其比例皆同。故甲。丁。乙。戊。丙。爲相連比例之五數。而丁。戊。兩數。爲甲與乙。乙與丙。三數間之相連比例數可知矣。

四　八　十六

四　六　九

第十九

凡相連比例三數。其首數與末數。有用一數可以度盡者。有用一數不可以度盡者。如四。八。十六相連比例之三數。其首數四與末數十六。爲彼此有一數可以度盡之數也。如四。六。九相連比例之三數。其首數四與末數九。爲彼此無一數可以度盡之數也。然此兩種相連比例。雖有度盡度不盡之分。因其首數與

四	八	一六
二	四	八
一	二	四

中數之比。同於中數與末數之比。故總謂之相連比例之數焉。蓋末數可用首數平分。卽爲有度盡之連比例數。末數不可用首數平分。卽爲無度盡之連比例數也。且首末兩數彼此有一數可以度盡者。此三數非相當比例之至小數若首末兩數彼此無一數可以度盡者。此三數卽爲相當比例之至小數也。如四。八。十六之三數。其首末兩數爲彼此

四　二　一

八　四　二

十六　八　四

四

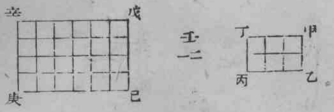
六

九

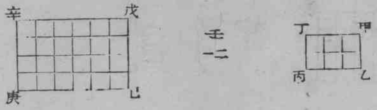
有一數可以度盡之數。而中數亦必爲此一數可以度盡之數。試用二以度之。則得二。四。八之連比例三數。或用四以度之。則得一。二。四之連比例三數。皆與四。八。十六之比例相同。而比四。八。十六之數爲小。故四。八。十六。非相當比例之至小數也。如四。六。九之三數。其首末兩數爲彼此無一數可以度盡之數。故中數亦爲無一數可以度盡之數。既無一

數可以彼此度盡。則爲相當比例數內之至小數也明矣。

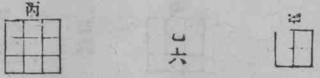
第二十



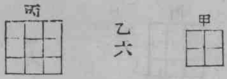
凡同式兩平方數。其間必有相連比例一數也。如有甲乙丙丁六。戊己庚辛二十四。同式兩平方數。此兩數之間。必有壬十二爲相連比例之一數焉。蓋甲乙丙丁。戊己庚辛。旣爲同式平方數。則其每邊皆可爲比例。如甲乙二與甲丁三



之比。同於戊己四與戊辛六之比。而甲乙二與戊己四之比。亦同於甲丁三與戊辛六之比也。今以甲丁三與甲乙二相因得六。甲丁三與戊己四相因得十二。則六與十二之比。同於甲乙二與戊己四之比矣。又戊己四與甲丁三相因得十二。戊辛六與戊己四相因得二十四。則十二與二十四之比。同於甲丁三與戊辛六之比矣。夫甲丁三與戊辛六



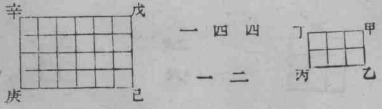
之比。原同於甲乙二與戊已四之比。則六與十二之比。亦必同於十二與二十四之比矣。又若兩正方數之間。亦必有相連比例之一數也。如有甲四。丙九兩正方數。此四與九兩數之間。必有乙六爲相連比例之一數焉。蓋兩正方數其式既同。故必有相連比例一數。且兩正方數之比例。同於其兩邊所作連比例隔一位之比例。見幾何原本七卷第五節。今甲方邊



爲二。丙方邊爲三。求其與二。三相當連比例之第三數。則以二自乘得四。以三自乘得九。以二乘三得六。此四與六。六與九之三數。即爲與二。三相當之連比例數。而其首數四與末數九。既與甲丙兩方數等。則中數六亦必爲甲丙兩方數間之連比例數矣。

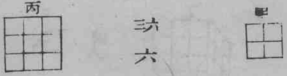
第二十一

凡同式兩平方數相乘。得數爲正方數



也。如有甲乙丙丁六。戊己庚辛二十四。爲同式兩平方數相乘得一百四十四。卽爲正方數矣。蓋同式兩平方數之間。原有相連比例一數。今此六與二十四之間。必有十二之一數。且連比例三率。以首末兩率相乘。與中率自乘之數等。則此六與二十四兩平方數相乘所得之一百四十四。卽爲中率十二自乘之數矣。又若兩正方數相乘得數亦仍爲

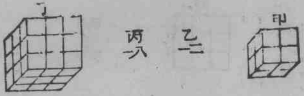
正方數。其方根卽原兩方根相乘之數也。如有甲四。丙九。兩正方數。此兩數相乘得三十六。仍爲正方數。其方根爲六。亦卽甲方根二與丙方根三相乘之數也。蓋此兩方數俱爲正方。卽爲同式兩平方數矣。因其式同。故相乘亦仍得正方數也。凡數有先各自乘而後相乘者。有先相乘而後自乘者。其理無異。故其得數皆等。今以二自乘得四。以三自乘



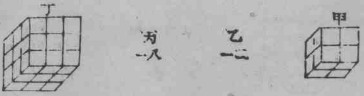
得九。復以四九相乘得三十六。此先各自乘而後相乘也。以二與三相乘得六。復以六自乘得三十六。此先相乘而後自乘也。且四與九積也。積與積乘仍得積。二與三根也。根與根乘仍得根。此亦理之必然者也。

第二十二

凡兩正立方數之間。必有相連比例之兩數也。如有甲八。丁二十七。兩正立方



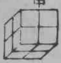
數。此八與二十七之間。必有乙十二丙十八。為相連比例之兩數焉。葢兩正立方之比例。同於其兩邊所作連比例隔二位之比例。見幾何原本十卷第四節今甲方邊為二。丁方邊為三。求其與二。三。相當連比例之第三第四數。則以二自乘得四。以三自乘得九。以二與三相乘得六。此四。六。九。為連比例三數。又以二遞乘此四。六。九。三數得八。十二。十八。之三連比例



數復以三遞乘四六九三數得十二十八二十七之三連比例數除相同者不計其二十七即連比例之第四數則八與十二十二與十八十八與二十七皆爲與二三相當之連比例數而其首數八與末數二十七既與甲丁兩立方數等則其中數之十二十八爲甲丁兩立方數間連比例之兩數可知矣

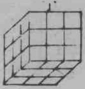
第二十三

甲



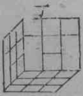
一一六

六



凡兩正立方數相乘得數。仍爲正方數。而其方根卽原兩立方根相乘之數也。

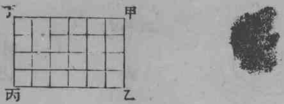
如有甲八。丁二十七。兩正立方數。此兩數相乘。得二百一十六。仍爲正立方數。而其方根爲六。亦卽甲立方根二與丁立方根三相乘之數也。蓋此兩立方數俱爲正方。卽爲同式兩立方數矣。因其式同。故相乘亦仍得正立方也。凡數有先自乘再乘。而後以所得之數相乘者。



二一六

六

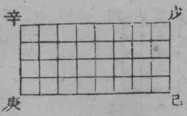
有先以兩數相乘。而後以所得之數自乘再乘者。其得數皆等。故二自乘再乘得八。三自乘再乘得二十七。復以八與二十七相乘得二百一十六。此先各自乘再乘而後以所得之數相乘也。以二與三相乘得六。復以六自乘再乘亦得二百一十六。此先以兩數相乘而後以所得之數自乘再乘也。且八與二十七積也。以積乘積仍得積。二與三根也。以



根乘根仍得根。此又理之自然者也。

第二十四

凡兩平方數若一邊相等。則此兩平方之比例同於其不等邊之比例也。如有甲丙戊庚兩平方數。其甲丙平方之甲乙邊為四。而戊庚平方之戊己邊亦為四。甲丙平方之乙丙邊為六。而戊庚平方之己庚邊為八。則此兩平方數二十四與三十二之比。即同於其不等邊六

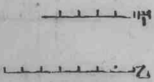


與八之比也。蓋甲乙平方數二十四者。四之六倍而戊庚平方數三十二者。四之八倍也。然則二十四與三十二之比。卽同於六與八之比矣。二十四與三十二之比。既同於六與八之比。則兩平方數之比。例同於其不等邊之比例可知矣。

第二十五

凡兩立方數。其底積相等。則此兩立方

之比例同於其高之比例也。如有甲乙丙丁兩立方數。其甲乙立方之戊乙底爲六。而丙丁立方之己丁底亦爲六。甲乙立方之甲戊高爲四。而丙丁立方之丙己高爲五。則此兩立方數二十四與三十之比。卽同於其兩立方之高四與五之比也。葢甲乙立方數二十四者。六之四倍。而丙丁立方數三十者。六之五倍也。然則二十四與三十之比。卽同於

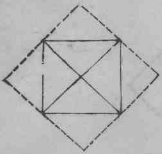


四與五之比矣。二十四與三十之比。既同於四與五之比。則兩立方數之比例。同於其高之比例可知矣。

第二十六

凡兩線、兩面、兩體。用一度如尺寸之屬。可以度盡者。此類之線、面、體。皆為有整分可以度盡者也。設如有甲、乙兩線。甲線分為五分。乙線如甲線度分之。得七分無餘。則此二線即為一度彼此可以度盡

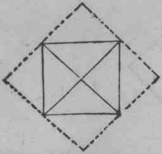
者矣若將此二線各爲正方面各爲正方體則其兩面兩體亦皆爲整分彼此可以度盡者也至如兩線兩面兩體不可以一度度盡者此類之線面體皆爲無整分可以度盡者也如丙丁戊巳方面其丙丁邊線爲五分而丙戊對角線則爲七分有餘乃爲彼此無度盡之數矣蓋以丙丁邊之五分爲度則丙戊線得七分以得或將丙戊線爲七分整而



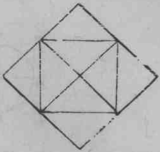
以其分爲度則丙丁線得五分不足凡此類之線面體皆爲無整分彼此可以度盡之數也

第二十七

凡正方一邊線與對角線無一度可以彼此度盡者蓋以本方積與對角線所成方積比之必有一數非正方數也夫對角線自乘所作之方數爲本方積之二倍如本方積一則對角線所作之方



爲二。本方積四。則對角線所作之方爲八。此一與二。四與八之間無相連比例之整數。故一爲正方數。則二非正方數。四爲正方數。而八亦非正方數。二與八既非正方數。則邊必有零餘而不能盡矣。或對角線所作方積爲四。則本方積爲二。對角線所作方積爲十六。則本方積爲八。此四與二。十六與八之間。亦無相連比例之整數。故四爲正方數。而二

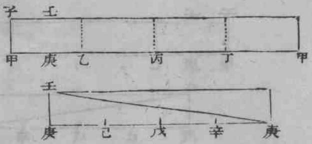


非正方數、十六爲正方數、而八又非正方數。然則對角線所作方積固爲正方數。而本方積復不能成正方數。其邊必有零餘而不能盡矣。故凡正方邊線與對角線、斷無一度可以彼此度盡之理也。

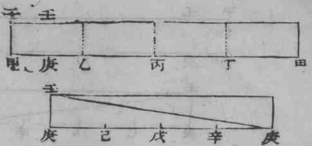
第二十八

凡正方面與平圓面同徑者。其積之比例、同於其周圍邊線之比例也、如甲乙

丙丁正方面。戊巳庚辛平圓面。其戊壬庚之徑相等。則此方積與圓積之比例。同於方周於圓周之比例也。何以見之。以正方面之壬庚半徑爲高。甲乙。乙丙。丙丁。丁甲之全周爲底。作一子甲直角長形方。則此長甲形之積。比正方形之積。必大一倍。又以壬庚半徑爲高。庚巳。巳戊。戊辛。辛庚全周爲底。作一壬庚直角長方形。則此長方形之積。比平圓形



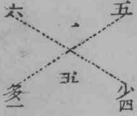
之積亦必大一倍。凡直角三角形之小邊與圓形之半徑等。而三角形之大邊與圓形之全周等者。三角形之積與圓形之積等也。今此長方形與三角形同底同高。其積比三角形必大一倍。然則壬庚長方形比圓形大一倍可知也。夫壬庚子甲兩長方形。既同以壬庚為高。則一邊數等。一邊相等。則其積之比例。必同於其不等邊之比例。而全與全之



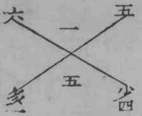
比例。原同於半與半之比例。故兩長方形之比例。必同於庚庚與甲甲之比例。而方與圓之比例。亦必同於庚庚與甲甲之比例矣。甲甲卽方周。而庚庚卽圓周。然則方周與圓周之比例。豈非方積與圓積之比例乎。

第二十九

凡有不知之一大數。用兩小數度之不盡而一有餘一不足者。其一多一少之



數相併。以兩小數之較度之。卽得其度戊。次之分與大數之幾何也。如有一大數。用小數五度之多一數。用小數六度之又少四數。則以多一與少四相加得五。以六與五兩小數相減。餘一。為較數除之。仍得五。卽知兩小數各度五次也。試排點以明之。其甲乙五。卽小數五。丙丁六。卽小數六。以甲乙五累五次。則為甲乙已丙正方二十五。多一為丁。以丙

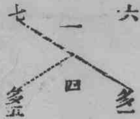


丁六累五次則爲甲戊丁丙長方三十。少四爲戊庚於甲戊丁丙長方三十內。減去少數戊庚四爲二十六。於甲乙巳丙正方二十五。加入多數丁一亦爲二十六。是知大數有二十六。用此五六兩小數各度五次之分也。以丁一與戊庚四相加三丁戊五。以小數甲乙五與丙丁六相減餘一。以一除丁戊五仍得五。與甲丙相等。故[illegible]兩爲度大數二十六

之五次數也若以其例言之其小數五與六相減所餘一者乃度一次之較而一多一少相併之戊丁五者又爲度五次之較故以所餘一與度一次之比即同於戊丁五與度五次之比其比例既同故其數亦相等也

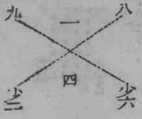
第三十

凡有不知之一大數用兩小數度之不盡而俱有餘或俱不足者其兩有餘或

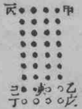


兩不足之數俱相減。以兩小數之較度之。卽得其度幾次之分與大數之幾何也。如有一大數用小數六度之多五數。用小數七度之仍多一數。則以兩多數相減餘四。以六與七兩小數相減餘一。為較數除之。仍得四。卽知兩小數各度四次也。試排點以明之。其甲乙六卽小數六。丙丁七卽小數七。以甲乙六累四次。則為甲乙庚丙方二十四。多五為戊

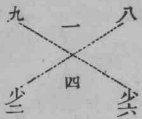
丁己。以丙丁七纍四次。則爲甲戊丁丙方二十八。多一爲己。於甲乙庚丙方二十四。加入多數戊丁己五得二十九。於甲戊丁丙方二十八。加入多數己一。亦得二十九。是知大數有二十九。用此六七兩小數各度四次之分也。以己一與戊丁己五相減餘戊丁四。以小數甲乙六與丙丁七相減餘一。以一除戊丁四仍得四。與甲丙相等。故甲丙爲度大數

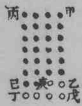


二十九之四次數也。若以比例言之。其兩小數相減所餘之一。乃度一次之較。兩多數相減所餘之戊丁四。乃度四次之較。故以一與度一次之比。即同於戊丁四與度四次之比也。又如有不知之一大數。用小數八度之少二數。用小數九度之少六數。則以兩少數相減餘四。以八與九兩小數相減餘一。為較數除之。仍得四。即知兩小數各度四次也。今



作點排之。其甲乙八。即小數八。丙丁九卽小數九。以甲乙八累四次。則爲甲乙巳丙方三十二。內少二數。爲乙庚。以丙丁九累四次。爲甲戊丁丙方三十六。內少六數爲乙庚丁戊。於甲乙巳丙方三十二內。減去少數乙庚二。爲三十。於甲戊丁丙方三十六內。減去少數乙庚丁戊六亦爲三十。是知大數有三十。用此八。九兩小數各度四次之分也。以乙庚





二。與乙庚丁戊六相減餘戊丁四。以小數甲乙八與丙丁九相減餘一。以一除戊丁四仍得四。與甲丙爲相等。故甲丙爲度大數三十之四次數也。其比例亦以兩小數相減所餘之較。比度一次之分。卽同於兩少數相減所餘之較。比度幾次之分也。復有不知之一大數。用兩小數度之。一小數度之而盡。一小數度之而不盡。或有餘。或不足。卽以不盡之數。或有餘之

數。或不足之數。用兩小數之較度之。卽得其度幾次之分。與大數之幾何。其理皆相同也。

第三十一

凡數自少至多。遞加之而各有定率者。謂之平加比例數也。夫平加之數。有每次遞加一者。爲挨次遞加之數。如一。二。三。四之類是也。有每次遞加二者。爲超位平加之數。如一。三。五。七之類是也。或遞

一	二	三	四
一	三	五	七

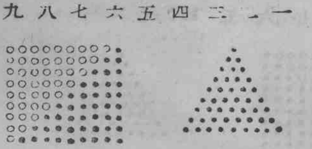
一 三 六 一〇	一 二 四 八
一 四 九 一六	一 三 九 二七

加三。或遞加四。或遞加五六。皆是一理。有每次增一加者。為挨位相加之數。如一。三。六。十之類。其第二次加二。第三次加三。第四次加四是也。有每次增二加者。為挨位自乘之數。如一。四。九。十六之類。其第二次加三。第三次加五。第四次加七是也。復有一種倍加者。為挨次倍加之數。如一。二。四。八之類。每次皆加二倍。又如一。三。九。二十七之類。每次皆加三倍是也。遞加之

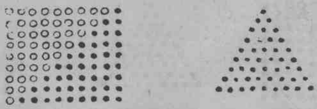
數雖多。按其條理求之。大抵不出此數端。今各列數分析於後。

第三十二

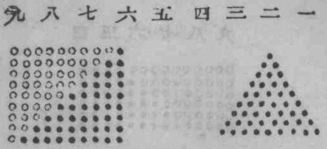
凡挨次遞加之數。將首數與末數相加。以位數乘之。所得之數折半。即爲總數也。如一。二。三。四。五。六。七。八。九之九數。其每次所加之數爲一。將首數一與末數九相加得十。以位數九乘之得九十。折半得四十五。即是此九數之總數也。何



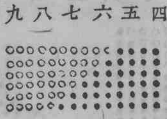
一二三四五六七八九



也夫挨次遞加之數爲等邊三角平面形而兩數相乘卽成四方形今以位數九爲高末數九爲底相乘所得之正方形其數八十一較之總數則多較之總數加倍之數又少此所少卽一行之數矣知位數與底數相乘所得之數比總數加倍之數少一行之數矣既知挨次遞加之數爲三角形而位數與底數相乘之數爲正方形又知位數與底數相

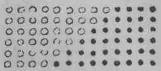


乘之數。幾等於總積加一倍之數。則合兩三角形之數。適當總積加一倍之方數矣。兩三角形所合。其底數必比高數大一數。故末數九為底數者。加首數一。與高相乘。始成兩三角形所合之一方形焉。試將此九數作點排之。自上而下。上一下九。作為直角三角形。復將此九數另作一直角三角形。合於原三角形之側。則成一長方形。其高即位數。其底



即末數與首數相加之數。其積即爲總數加一倍之數也。然則首數末數相加與位數相乘。爲總數之倍數可知矣。又如四。五。六。七。八。九之六數。欲知其總數。亦以首數四與末數九相加得十三爲底。以位數六乘之。得七十八爲長方形。折半得三十九爲總數。其理與前同。若但知首數爲四。末數爲九不知位數。則視首數四以上至一虛幾位。今虛三位。

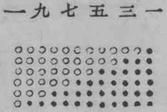
四　五　六　七　八　九



故以三與末數九相減餘六即位數也。何也。凡自一遞加之數。其末數即位數。今首數爲四。計自一是少三位矣。故用三即爲所少之位數。於末數內減去所少之位。即爲今之所有之位數也。

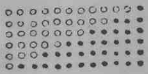
第三十三

凡超位平加之數。亦將首數與末數相加。以位數乘之。得數折半爲總數也。如一。三。五。七。九。十一之六數。每次皆加二數。將首



數一與末數十一相加得十二。以位數六乘之得七十二。折半得三十六。爲此六位之總數也。蓋此超位平加之數。與挨次平加之理無異。其以首末兩數相加。與位數相乘者。總欲得此總數之倍數。以便折半取之也。試將此六位之數作六層排之。上一下十一。以首末數相加得十二。而以位數乘之。則六層皆爲十二矣。上層本首數一加末數十一而

一三五七九一



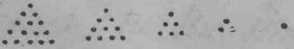
成十二下層本末數十一加首數一而成十二。是首數末數俱加倍矣。二層本第二數三加第五數九而成十二。五層本第五數五加第二數三而成十二。是第二數第五數俱加倍矣。三層本第三數五加第四數七而成十二。四層本第四數七加第三數五而成十二。是第三數第四數亦俱加倍矣。其每位之數皆倍。則相乘所得之數。豈非此總數之倍

數乎。由此推之。每次加三加四或加五加六以至加七加八加九之類。凡係超位平加之數。其理無不相同也。

第三十四

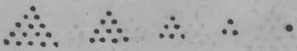
凡每次按位相加之數。將位數加二與末數相乘。取其三分之一。即為總數也。

如一。三。六。一十。十五之五數。其每次皆按位加之。如第二位於第一位一上加二為三。第三位於第二位三上加三為六是也。將位數五加二與末數十五



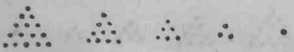
相乘得一百零五。以三除之得三十五。即是此五數之總數也。如或止有位數。或止有每一邊數。求總數。則以位數加一與位數相乘。得數。復以位數加二乘之。取其六分之一。即得總數也。若止有每一邊數。即以每一邊數加一與每邊數相乘。得數。復以邊數加以得之取其六分之一。得數亦同。蓋每次按位相加之數層疊排之。其式成等邊三角體。其末一數即三角體底面數。而位數即每一邊之數。今

一　三　六　一〇　一五



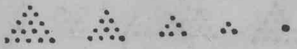
以位數加二爲高。末數爲底。相乘即成平行面之三稜體。凡同底同高之平行面體。爲尖體之三倍。則此平行面三稜體內。必有等邊三角體之三倍。故以三除之即得也。然必以位數加二爲高者何也。以三三角體相湊。乃成上下相等之平行面體。其高必比原有之位數多二層。兩三角面相合。比原位數多一層。今三三角體相合。故必比原位數多二得也。如止以位數爲高。即少二層之數。

一　三　六　一〇　一五



而不足三三角體之分。故必以位數加二乘之也。其止有位數。或每一邊數。求總數。以位數加一。與位數相乘。復以位數加二乘之。而用六除者何也。蓋位數卽底面之每邊數。而底面又爲等邊之三角面。今以邊數加一與邊數相乘。成長方面。爲三角體底面之倍數。卽如前挨次遞加數之兩三角面相合所成之長方形也。凡等高之體底數倍者。積數

一　三　六　一〇　一五



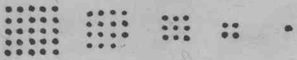
亦倍。彼以位數加二乘三角體之底。所成之平行面三稜體既爲等邊三角體之三倍矣。今以位數加二乘三角體之倍底所成之平行面長方體。又必爲等邊三角體之六倍矣。以兩三稜體相合即成長方體。一三稜體爲三角體之三倍。則兩三稜體。必爲三角體之六倍矣。故以六除平行面長方體之數。而得等邊三角體之數也。又或但知首數末數。而不知位數。則以末數倍之。用一爲較數。開

縱平方。即得位數焉。蓋末數倍之者。即兩三角面所合之長方也。其闊即三角每邊數。其長比闊多一數。故用一爲較。開帶縱平方。則得三角每邊之數。既得每邊數。即得位數矣。

第三十五

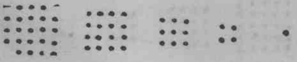
凡每次按位自乘相加之數。將位數折半。與末數相加。復以位數加一乘之。取其三分之一。即爲總數也。如一。四。九。十

一　四　九　一六　二五



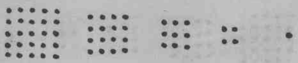
六○二十五之五數。其每位之數。皆按位自乘之數。如第二位之四。即二自乘數。第三位之九。即三自乘數也。將位數五折半為兩個半。與末數二十五相加。得二十七個半。復以位數五加一為六乘之。得一百六十五。以三除之。得五十五。即為此五數之總數也。如止有位數。或止有每一邊數。求總數。則以位數加半個。與位數相乘。得數。復以位數加一乘之。取其三分之一。即得總數

一　四　六　一六　二五

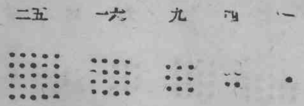


也。若只有每一邊數。個以每一邊數加半個。以每二邊數相乘。得數。復以每邊數加加乘之。取其三分之多。得數亦同。蓋按位自乘相加之數。層疊排之。其式成方底四角尖體。其末一數。卽四角尖體底面數。而位數卽每一邊之數。今以位數折半與末數相加。則成長方面爲底。再以位數加一爲高乘之。卽成平行面之長方體。凡同底同高之平行面體。爲尖體之三倍。則此平行面長方體內。必有四角尖體之

二五　一六　九　四　一

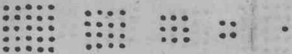


三倍。故以三除之卽得也。然必以位數折半與末數相加爲底。復以位數加一爲高者何也。蓋三四角尖體相湊。乃成上下相等之長方體。其底比正方面必多半行。其高必比原有之位數多一層。三等邊三角體相合。比三角體原位數多二層。今三方底四角尖體相合。比原位數止多一層。蓋因方底比三角底式大一倍。故四角體高比三角體高所加之數減一半也。如止以末數爲底。則底必少半行之數。止以位數爲高。則高復少一層

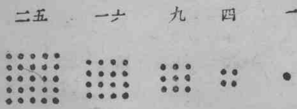


之數必不足三四角尖體之分故以末數加位數之半而以位數加一乘之適足三四角尖體之分也其止有位數或每一邊求總數以位數加半個與位數相乘復以位數加一乘之而用三除之者何也蓋位數即底面之每邊數而底面又爲正方面今以邊數加半個與邊數相乘成長方面比正方止多半行之分其理即如求三角體總數以邊數加

一　四　九　一六　二五



一與邊數相乘。爲三角體底之倍數也。以位數加一與底面相乘。成長方體。比方底四角尖體大三倍。即如求三角體總數。以位數加二與倍底相乘。爲三角體之六倍也。彼三角體底倍之爲長方。此四角體底數加半行即爲長方。彼三角體總數六倍爲同邊長方體。此四角體總數三倍爲同邊長方體。故三角體以邊數加一與邊數相乘者。今四角體



以邊數加半與邊數相乘。而三角體以位數加二爲高與倍底相乘者。今四角體以位數加一與本底加半行相乘總之四角體底式。比三角體底式大一倍。故立法時三角體加數幾何。而此四角體皆用其半也。又或但知首數末數而不知位數。則以末數開平方。卽得位數焉。蓋末數本爲正方數。故開方卽得每邊數。既得每邊數。則得位數矣。

二　四　八　一六

第三十六

凡每次倍加之數。將末數與加倍之數相乘。減去首數。復以所加之分數除之。卽得總數也。如二。四。八。十六四數。爲每次以二倍之之數。欲求其總數。則以末數十六用二乘之。因以二倍之。故用二乘。得三十二。減去首數二爲三十。復以其所加分數一除之。仍得三十。卽此四數之總數也。蓋以二加倍之數。其末一數。比前幾

三　九　二七　八一

位之總數。止多一首數。故二乘末數。則比末數多一分。仍多一首數。故減去首數二。而以一除之。卽得總數也。又如三九二十七八十一。四數。爲每次以三倍之之數。欲求其總數。則以末數八十一用三乘之。以三倍之故用三。得二百四十三。減去首數三。爲二百四十。復以其所加分數二。除之。得一百二十。卽爲此四數之總數也。蓋以三加倍之數。其末一數爲

四　一六　六四　二五六

前幾數之倍數。而仍多一首數。今三乘末數。則比末數多二分。仍多一首數。三乘末數八十一。則爲八十一者有三。除本數八十一。仍爲多二分也。故必減去首數三。而以二除之。即得總數也。

又如四。十六。六十四。二百五十六。四數。爲每次以四倍之之數。欲求總數。則以末數二百五十六。用四乘之。以四倍之。故用四。得一千零二十四。減去首數四。爲一千零二十。復以其所加分數三除之。得三

四　一六　六四　二五六

百四十。為此四數之總數也。蓋以四加倍之數其末一數為前幾數之三倍而仍多一首數。今四乘末數則比末數多三分。仍多一首數。四乘末數二百五十六。則為二百五十六者有四。除本數二百五十六。仍為多三分也。故必減去首數四。而以三除之。卽得總數也。凡此倍加之數。不論加倍幾何。皆為相連比例之數。故其比例皆同。如遞加二倍之數。其四與八之比。同於二與四之比。卽八與

二	三	四
四	九	一六
	二七	六四
一六	八一	二五六

十六之比。亦皆同於二與四之比也。又如遞加三倍之數。其九與二十七之比。同於三與九之比。即二十七與八十一之比。亦皆同於三與九之比也。即遞加四倍之數。其十六與六十四之比。同於四與十六之比。即六十四與二百五十六之比。亦皆同於一與四之比也。總之以二倍加者。皆一與二之連比例。以三倍加者。皆一與三之連比例。以四倍加

者皆一與四之連比例即推之以五倍加六倍加者其理亦無不相同也