

C Ueber die
Bewegungen geschlagener Saiten.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)

DER

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

Walter Kaufmann

AUS BERLIN.



BUCHDRUCKEREI VON FUNCKE & NAETER

KÖPENICKER STRASSE 114.

Über die

Bewegungen geschlagener Saiten.

IN ABBANDLUNG-DISSERTATION

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT AN DER UNIVERSITÄT

DEUTSCHER UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN



Walter Kaufmann

DRUCKER: JOHANN NEUBAUER, MÜNCHEN

Seinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet

vom

Verfasser.

beden haben bitten

in Dankbarkeit gewidmet



Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung:	
a) Bisherige Untersuchungsmethoden	7
b) Raps'sche Methode	8
Erster Teil:	
a) Litteratur	10
b) Versuchsanordnung	11
c) Definition der in den Rechnungen vorkommenden Grössen	13
Zweiter Teil: Die Bewegung der Saite während der Berührungszeit des Hammers.	
a) Theoretische Untersuchungen	18
1. Unendlich lange Saite	20
2. In der Mitte geschlagene Saite	23
3. In der Nähe des Endes geschlagene Saite	30
b) Ausgeführte Messungen	34
1. In der Mitte geschlagene Saiten	36
2. In der Nähe des Endes geschlagene Saiten	39
3. Anschlag mit weichem Hammer	41
4. Zusammenfassung der bisherigen Resultate	43
5. Bewegung eines beliebigen Saitenpunktes während der Berührungszeit	44
Dritter Teil: Die Schwingungsform der Saite nach dem Hammerabfall	47
a) Geometrische Methode zur Vorausbestimmung der Schwingungsform	48
b) Empirische Untersuchung des Einflusses der einzelnen Konstanten auf die Schwingungsform	52
1. Einfluss der Anschlagstelle	52
2. Einfluss des Verhältnisses zwischen Hammer- und Saitenmasse	56
3. Einfluss der Beschaffenheit des Hammers	57
4. Einfluss der Anschlagstärke	59

Inhaltsverzeichnis

1	1. Einleitung
2	2. Die Bedeutung der Arbeit
3	3. Die Aufgaben der Arbeit
4	4. Die Methoden der Arbeit
5	5. Die Organisation der Arbeit
6	6. Die Verantwortung der Arbeit
7	7. Die Zusammenarbeit der Arbeit
8	8. Die Entwicklung der Arbeit
9	9. Die Zukunft der Arbeit
10	10. Die Bedeutung der Arbeit für die Gesellschaft
11	11. Die Bedeutung der Arbeit für die Umwelt
12	12. Die Bedeutung der Arbeit für die Kultur
13	13. Die Bedeutung der Arbeit für die Politik
14	14. Die Bedeutung der Arbeit für die Wirtschaft
15	15. Die Bedeutung der Arbeit für die Wissenschaft
16	16. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
17	17. Die Bedeutung der Arbeit für die Religion
18	18. Die Bedeutung der Arbeit für die Philosophie
19	19. Die Bedeutung der Arbeit für die Ethik
20	20. Die Bedeutung der Arbeit für die Medizin
21	21. Die Bedeutung der Arbeit für die Pädagogik
22	22. Die Bedeutung der Arbeit für die Psychologie
23	23. Die Bedeutung der Arbeit für die Soziologie
24	24. Die Bedeutung der Arbeit für die Anthropologie
25	25. Die Bedeutung der Arbeit für die Biologie
26	26. Die Bedeutung der Arbeit für die Chemie
27	27. Die Bedeutung der Arbeit für die Physik
28	28. Die Bedeutung der Arbeit für die Astronomie
29	29. Die Bedeutung der Arbeit für die Geographie
30	30. Die Bedeutung der Arbeit für die Geschichte
31	31. Die Bedeutung der Arbeit für die Linguistik
32	32. Die Bedeutung der Arbeit für die Musik
33	33. Die Bedeutung der Arbeit für die Literatur
34	34. Die Bedeutung der Arbeit für die Theater
35	35. Die Bedeutung der Arbeit für die Film
36	36. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
37	37. Die Bedeutung der Arbeit für die Architektur
38	38. Die Bedeutung der Arbeit für die Malerei
39	39. Die Bedeutung der Arbeit für die Skulptur
40	40. Die Bedeutung der Arbeit für die Fotografie
41	41. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
42	42. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
43	43. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
44	44. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
45	45. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
46	46. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
47	47. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
48	48. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
49	49. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst
50	50. Die Bedeutung der Arbeit für die Kunst

Einleitung.

a) Bisherige Untersuchungsmethoden.

Die Methoden zur Untersuchung schwingender Saiten sind teils rein subjektive, akustische, teils optische oder graphische.

Zu den akustischen Methoden gehört vor allen Dingen die Helmholtz'sche Resonatormethode: dieselbe gestattet zwar, das Vorhandensein von Obertönen nachzuweisen, ist jedoch zu einer exakten Messung der Schwingungsform nicht geeignet.

Auch mit Hülfe der optischen Methoden — stroboskopische Methode, Vibrationsmikroskop — ist eine wirkliche Messung nur bei fast vollkommen periodischen Schwingungen ausführbar, d. h. bei solchen Bewegungen, die weder die Amplitude, noch die Phase ihrer Teiltöne innerhalb einiger Sekunden wesentlich ändern.

Die graphische Methode — an der Saite befestigter Schreibstift, der auf einer berussten Trommel schreibt — hat vor der optischen zwar den Vorzug, dass sie auch schnell veränderliche Schwingungen zu beobachten gestattet; doch steht dem der Fehler entgegen, dass sie die Bewegungen der Saite nicht rein wiedergibt, sondern dieselben durch die Reibung und das Gewicht des Schreibstiftes mehr oder weniger verändert.

b) Raps'sche Methode.

Erst durch die von den Herren A. Raps und O. Krigar-Menzel*) zuerst angewandte photographische Methode wurde es möglich gemacht, jede beliebige Bewegungsart schwingender Saiten mathematisch genau zu registrieren und mikrometrisch auszumessen.

Zur Erläuterung der Methode zitiere ich mit einigen Abkürzungen bezw. Veränderungen die betreffende Stelle aus der Arbeit der beiden Herren:

Der Lichtbogen einer elektrischen Bogenlampe — von 22 Ampère — befindet sich im Brennpunkte eines Linsensystems, durch welches ein mikrometrisch verstellbarer Spalt beleuchtet wird. Von diesem entwirft ein photographisches Objektiv (französisches Universalaplanat von 25 mm Oeffnung) ein verkleinertes reelles Bild in der Ebene, in welcher die Saite schwingt. Ein zweites, dem ersten völlig gleiches Objektiv projiziert dieses Bild auf eine durch ein Uhrwerk in Rotation versetzte Trommel, welche mit photographischem Papier bespannt ist. Die Trommel ist zum Schutze gegen fremdes Licht mit einem Gehäuse umgeben, in dessen Vorderwand ein Momentverschluss angebracht ist; die Geschwindigkeit des letzteren wird so reguliert, dass seine Oeffnungszeit mit der Dauer einer Umdrehung der Trommel übereinstimmt. Das durch diese Anordnung erzeugte, negative, photographische Bild besteht aus einem schwarzen Bande, dessen Breite gleich der Höhe des Spaltbildes ist, und einer in demselben verlaufenden weissen Kurve, welche die Bewegung des im ersten Spaltbilde befindlichen

*) Sitzungsber. d. Königl. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 25. Juli 1891: „Ueber die Bewegung gestrichener Saiten“ von O. Krigar-Menzel und A. Raps.

Saitenpunktes als Funktion der Zeit darstellt. Das zweite Objektiv wurde dabei immer so eingestellt, dass die Bilder des Spaltes beide gleich gross waren; die photographierte Kurve giebt deshalb die Elongationen der Saite in natürlicher Grösse wieder.*)

Nach jeder Aufnahme wurde die Trommel durch eine Schraubspindel um ein bestimmtes Stück gehoben, und so auf einem Streifen photographischen Papiers sieben Aufnahmen gemacht. Die dieser Arbeit beigelegten Photographieen sind aus den 50 cm langen und 12 cm hohen Originalstreifen ausgeschnitten und durch Lichtdruck vervielfältigt.

Das benutzte Bromsilberpapier stammte aus der Fabrik von Dr. Stolze in Charlottenburg; entwickelt wurde mit Hydrochinon-Potasche-Entwickler.

Die Herren Raps und Krigar-Menzel haben ihre Methode nur auf gestrichene und gezupfte Saiten (und später, mittels des Jamin'schen Interferenzrefraktors, auch auf die Schwingungen der Luft) angewandt.

Von Herrn Geheimrat Prof. Dr. A. Kundt wurde mir die Aufforderung zu teil, nach derselben Methode die Bewegungen geschlagener Saiten zu untersuchen. Den Herren, welche mich bei dieser Arbeit in liebenswürdigster Weise unterstützt haben, Herrn Prof. A. Kundt, Prof. M. Planck, Dr. A. Raps und Dr. L. Arons, sage ich an dieser Stelle meinen besten Dank.

*) Bei der Reproduktion ist das Format der Bilder auf etwa $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Grösse verkleinert worden. Ebenso sind die Figuren auf Taf. I und II um $\frac{1}{3}$ verkleinert.

Erster Teil.

a) Litteratur.

Obgleich das allgemeine Problem der Saitenschwingungen seit der Zeit d'Alembert's und Euler's bis in unsere Tage sehr häufig der Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen ist, so findet sich doch der Spezialfall der geschlagenen Saiten so gut wie gar nicht behandelt; wo derselbe überhaupt erwähnt wird, sei es in physikalischen Lehrbüchern oder in technischen Schriften über Klavierbau, wird immer auf Helmholtz' „Lehre von den Tonempfindungen“ hingewiesen. Auf die Bedeutung der im Anhang dieses Werkes befindlichen Theorie werde ich weiter unten näher eingehen. Ausserdem ist noch eine Experimentaluntersuchung von Ch. K. Weak*) zu erwähnen, welcher am Klavier selbst die Berührungszeit zwischen Hammer und Saite untersuchte; er überzog zu diesem Zwecke den Hammerkopf mit Schaumgold und schaltete Hammer und Saite in den Stromkreis eines ballistischen Galvanometers, aus dessen Ausschlägen er die Berührungszeit bestimmte. Seine Resultate stimmen der Grössenordnung nach mit den meinigen überein.

*) Americ. Journ. of Science XXXII, 366—368.

b) Versuchsanordnung.

Da das von den Herren Raps und Krigar-Menzel zur Untersuchung gestrichener und gezupfter Saiten benutzte Holzgestell zu schwach und zu klein war, um die dicken und schweren Klaviersaiten darauf zu spannen, so konstruierte ich einen Apparat von folgender Form (s. Taf. I, Fig. I):

Auf einem 150 cm langen eisernen Gestell sind zwei Stege S und S₁ verschiebbar, mittels deren beliebig lange Saitenstücke abgegrenzt werden können. Auf dem Stege S befindet sich ein Wirbel W, durch welchen die Saite gespannt wird; das andere Ende der Saite läuft bei R über eine Rolle und durch eine durchlochte Platte P und wird unterhalb der letzteren durch eine Schraubzwinde gehalten. Diese Anordnung ermöglicht es, die Saite an jeder beliebigen Stelle einzuklemmen, ohne sie zu zerschneiden.

Zum Anschlagen der Saite diente eine gewöhnliche Klaviertaste, welche mir der Klavierfabrikant, Herr Kommerzienrat Duysen in Berlin, gütigst überlassen hatte. Die Taste wurde so aufgestellt, dass der Hammer von unten zwischen den beiden Längsträgern des Saitengestells hindurchschlug.

Es standen mir vier verschieden schwere Hämmer zur Verfügung, von denen drei mit Filz überzogen waren, während der vierte mit einer Stahlschneide versehen war. Das Trägheitsmoment der einzelnen Hämmer liess sich innerhalb ziemlich weiter Grenzen dadurch verändern, dass ein kleiner Ring aus Blei auf dem Stiele verschoben wurde.

Ueber die Konstruktion der Taste möchte ich, um etwaigen Zweifeln vorzubeugen, einige Bemerkungen

machen: Der Hammer ist mit der ihn antreibenden Taste nicht fest verbunden, sondern er wird durch eine ihn von unten berührende Stosszunge in die Höhe getrieben; die letztere nun ist so eingerichtet, dass sie den Hammer nicht ganz bis zur Saite treibt, sondern nur bis zu einer Entfernung von etwa 3 bis 5 mm unterhalb der Saite; der Hammer fliegt also lediglich durch seine Trägheit weiter. Ich glaubte diese Bemerkung machen zu müssen, weil in der weiter unten folgenden theoretischen Untersuchung der Hammer als frei beweglicher Körper betrachtet wird.

Es kam mir bei der Untersuchung darauf an, nicht nur die Bewegung der Saite, sondern auch die des Hammers zu photographieren: bei den breiten Filzhämmern macht dies durchaus keine Schwierigkeit, da der Hammerkopf, so lange er die Saite berührt, den unteren Teil des Spaltbildes verdeckt, und deshalb aus dem photographischen schwarzen Bande ein Stück heraus-schneidet, dessen Randkurve die Bewegung des Hammers darstellt (s. z. B. Taf. III, Fig. 25 b).

Etwas anders musste bei Benutzung des Stahlhammers verfahren werden, da die schmale Schneide desselben ein genaues Verdecken des Spaltbildes nicht zuliess. Ich befestigte deshalb an dem Hammerkopfe ein etwa 5 mm langes Drahtstück in solcher Höhe, dass es, wenn der Hammer die Saite berührte, sich etwa 1 mm unterhalb derselben befand. Indem ich dann das Spaltbild so einstellte, dass der kleine Draht in dasselbe hineinragte, erhielt ich auf der Photographie zwei untereinander befindliche, und während der Berührungszeit parallel laufende Kurven, von denen die obere, wie gewöhnlich, die Bewegung der Saite, die untere die des

Hammers darstellte. Einigemale wurde auch bei Filzhämmern von diesem Mittel Gebrauch gemacht. Die kleine Ungenauigkeit, welche dadurch entsteht, dass man hier nicht die Anschlagstelle selbst, sondern einen 2 bis 3 mm davon entfernten Punkt photographiert, kann für die Messung nicht in Betracht kommen, da die Bewegung zweier so benachbarter Saitenpunkte keine messbare Verschiedenheit aufweisen kann.

Zur Ausmessung der Figuren wurde das Kathetometer benutzt; dasselbe war mit einem wagerecht gestellten Okularmikrometer versehen, sodass man die Abscisse und Ordinate jedes einzelnen Kurvenpunktes gleichzeitig messen konnte. Bei der grossen Schärfe der photographischen Kurven kann man annehmen, dass die Fehler der Mittelwerte aus je sechs Einstellungen nicht mehr als etwa 0,02 mm betragen.

In betreff der später folgenden ausgeführten Messungen möchte ich schon hier bemerken, dass sich sämtliche Zahlenangaben auf Centimeter, Gramm, Sekunden beziehen.

c) Definition der in den Rechnungen vorkommenden Grössen.

Um die in dem theoretischen Teil dieser Arbeit vorkommenden Grössen nicht jedesmal besonders definieren zu müssen, stelle ich sie hier zusammen. Die in den endgültigen Gleichungen auftretenden Grössen sind folgende:

1. Seitenmasse (in g) M
2. Hammermasse (in g) m
3. Schwingungsdauer (in Sek.) Θ
4. Berührungszeit des Hammers T

- | | |
|---|--------------------|
| 5. Saitenlänge (in cm) | l |
| 6. Entfernung des Anschlagpunktes
von den beiden Endpunkten | a und b
(a < b) |
| 7. Geschwindigkeit des Hammers im
Augenblick des Stosses (in $\frac{\text{cm}}{\text{Sek.}}$) | v_0 |
| 8. Die (variable) Zeit | t |
- Ausserdem treten im Verlauf der Rechnung noch folgende Grössen auf:
- | | |
|--|-------------------------------|
| 9. Spannung der Saite (in g) | S |
| 10. Spezif. Masse der Saite (in $\frac{\text{g}}{\text{cm}}$) | μ |
| 11. Beschleunigung der Schwere | g |
| 12. Fortpflanzungsgeschwindigkeit
der Wellen in der Saite | c
$(c^2 = \frac{Sg}{\mu})$ |

Was nun die numerische Bestimmung der Konstanten anbetrifft, so ist wohl die von 1., 5. und 6. ohne weiteres klar.

Die Schwingungsdauer Θ ergibt sich durch Vergleichung der Tonhöhe mit einer Normalstimmgabel, und hieraus die Berührungszeit des Hammers durch einfache Längenmessung an der Photographie. Da übrigens in den Gleichungen stets nur die Verhältnissgrössen $\frac{T}{\Theta}$ und $\frac{t}{\Theta}$ vorkommen, so ist eine grosse Genauigkeit bei der Bestimmung der Tonhöhe unnötig, ja man kann diese Grösse sogar ganz entbehren. Ich habe gleichwohl in der am Schlusse beigelegten Tabelle überall die Werte von Θ angegeben.

Auch v_0 kommt in den Gleichungen nie allein vor, sondern nur in der Verbindung $v_0 \Theta = \frac{dy}{dt}$, eine

Grösse, welche sich an der Photographie ohne weiteres messen lässt. Gerade dieser Grösse wegen ist es jedoch interessant, den wahren Werth von Θ zu kennen, da man daraus den absoluten Betrag von v_0 bestimmen kann.

Einer etwas eingehenderen Besprechung bedarf die als Hammermasse m bezeichnete Grösse.

In den theoretischen Untersuchungen muss der Hammer als ein materieller Punkt betrachtet werden, der eine gradlinige, senkrechte Bewegung besitzt. In Wirklichkeit dagegen ist der Hammer ein ausgedehnter Körper, und seine Bewegung ist nicht geradlinig, sondern kreisförmig.

„Unter m ist deshalb diejenige Masse zu verstehen, welche, im Berührungspunkt zwischen Hammer und Saite konzentriert gedacht, dasselbe Trägheitsmoment um den Drehpunkt besitzt, wie der wirkliche Hammer.“

Bezeichnet man deshalb mit dm ein Massenelement des Hammers, mit x den Abstand desselben vom Drehpunkt, mit x_0 den grössten Wert von x , und mit λ den Abstand des Anschlagpunktes vom Drehpunkte, so ist nach obiger Definition:

$$\lambda^2 m = \int_0^{x_0} x^2 dm$$

$$\text{oder: } m = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{x_0} x^2 dm$$

Dieses Integral ist natürlich nur ausführbar, wenn der Hammer eine geometrisch definirte Gestalt besitzt. Dies ist nun zwar in Wirklichkeit nicht der Fall; man kann jedoch durch eine Näherungsrechnung ziemlich genau zum Ziele kommen:

Der benutzte Hammer besteht im Wesentlichen aus drei Teilen (s. Taf. I Fig. II):

1. der cylindrische Stiel,
2. der Kopf,
3. das verschiebbare Laufgewicht.

Im Momente des Anschlages steht der Stiel waagrecht, der Kopf senkrecht; und da die von der Saite ausgeübte Kraft senkrecht nach unten wirkt, so kann man ihren Angriffspunkt von A nach B verlegen und erhält dann dadurch, dass man λ durch x_0 ersetzt, für m den Wert:

$$m = \frac{1}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2 \, dm$$

Es bezeichne nun:

m_k die Masse des Kopfes,

m_s „ „ „ Stieles,

m_l „ „ „ Laufgewichts.

Dann lässt sich das Integral in 3 Teile zerlegen, die sich auf m_k , m_l und m_s beziehen.

Bedenkt man nun, dass sowohl der Kopf, als auch das Laufgewicht eine nur geringe Ausdehnung in Richtung der x -Axe haben, so kann man mit genügender Annäherung setzen:

$$\frac{1}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2 \, dm_k = m_k$$

$$\frac{1}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{x_1^2}{x_0^2} m_1$$

wenn x_1 der Abstand der Mitte des Laufgewichts vom Drehpunkt ist.

Für den Stiel endlich erhält man:

$$\frac{1}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{1}{x_0^2} q \sigma \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{m_s}{3}$$

(hierbei bedeutet q den Querschnitt, σ das spezifische Gewicht des Stieles).

Durch Addition der drei Integrale erhält man dann:

$$1. \quad m = m_k + \frac{x_1^2}{x_0^2} m_1 + \frac{m_s}{3}$$

Unter m ist im Folgenden immer die durch Gleichung 1. definierte Grösse zu verstehen.

Zweiter Teil.

Die Bewegung der Saite während der Berührungszeit des Hammers.

a) Theoretische Untersuchungen.

Wie schon erwähnt, findet sich eine Theorie der geschlagenen Saiten im Anhang zu Helmholtz' „Lehre von den Tonempfindungen“. Es wird dort zunächst die Bewegung der Saite für den Fall untersucht, dass mit einem vollkommen harten Hammer angeschlagen wird; daraufhin wird dann die Wirkung eines Filzhammers berechnet. In beiden Fällen wird angenommen, dass die durch die Kompression der Berührungsstelle geweckten elastischen Kräfte hinreichend sind, um den Hammer zurückzuwerfen, sodass die Berührungszeit nur von der Masse des Hammers und dem Grade seiner Elastizität abhängt. Da nun die Elastizität einer Stahlschneide ausserordentlich gross ist, so nimmt Herr von Helmholtz an, dass ein mit einer solchen versehener Hammer die Saite nur während einer im Vergleich zur Schwingungsdauer unendlich kleinen Zeit berührt; die Entwicklung der Saitenbewegung in eine Fourier'sche Reihe wird deshalb unter der Annahme durchgeführt,

dass zur Zeit $t = 0$ die ganze Saite in Ruhe sei, bis auf ein kleines Stück, welches eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt, deren Richtung mit der des anschlagenden Hammers übereinstimmt.

Bei der Berechnung des Anschlags weicher Hämmer werden noch einige Annahmen hinzugefügt, nämlich: 1. dass die Bewegung der Saite klein sei gegenüber der Kompression des Hammers; 2. dass sich der Druck zwischen Hammer und Saite durch die Grösse $A \sin 2\pi \frac{t}{T}$ darstellen lasse, wobei A eine von der Anschlagstärke abhängige Konstante ist; 3. dass die sich auf der Saite ausbreitende Welle zwar an den Enden reflektirt werde, aber nicht wieder bis zum Anschlagpunkt zurückgelange, bevor der Hammer abgefallen ist.

Da es bisher an einer geeigneten Methode fehlte, um die Richtigkeit der Helmholtz'schen Theorie zu prüfen, so hielt ich es für das beste, mich vorläufig an dieselbe zu halten, und untersuchte deshalb zunächst die Bewegungen, welche durch einen stählernen Hammer hervorgebracht werden. Das Ergebnis war, um es kurz zu sagen, dass sämtliche Versuchsergebnisse mit der Helmholtz'schen Theorie völlig im Widerspruch standen. Die Berührungszeit des harten Hammers war durchaus nicht unmessbar klein, sondern betrug, selbst wenn der Hammer möglichst leicht war, immer noch einen erheblichen Bruchteil der Schwingungsdauer. Ferner war die Berührungszeit nicht nur von dem Gewicht des Hammers, sondern auch von der Spannung der Saite abhängig, und zwar so, dass bei Veränderung der Spannung das Verhältnis $\frac{T}{\Theta}$ konstant blieb. Aus dieser Thatsache

geht zur Evidenz hervor, dass es in erster Linie die Spannung der Saite ist, welche den Hammer zurückwirft; dass dagegen die elastische Kompression nur einen verschwindend geringen Einfluss besitzt.

Noch sicherer wurde dies, als ich mit weichen Hämmern operierte. Es zeigte sich, dass die Berührungszeit eines weichen Hammers dieselbe ist, wie die eines gleichschweren harten. Ich gehe hier nicht weiter auf diese Thatsachen ein, da ich die Einzelheiten weiter unten noch ausführlich besprechen werde.

Jedenfalls ergab sich aus alledem die Notwendigkeit, die Theorie unter der Annahme neu zu entwickeln, dass nur die von der Spannung herrührenden Kräfte bei der Bewegung des Hammers in Betracht kommen. Ich möchte es nicht versäumen, bei dieser Gelegenheit nochmals Herrn Prof. M. Planck für die wertvolle Hilfe, welche er mir bei der Entwicklung der Theorie zu teil werden liess, meinen besten Dank auszusprechen.

1. Unendlich lange Saite.

(Wegen der Bedeutung der benutzten Buchstaben siehe die Definitionen auf S. 13 und 14.)

Man mache den Anschlagpunkt zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die Saite zur x -Axe, die Richtung des Anschlags zur y -Axe. Die Elongationen der Saite mögen folgendermassen bezeichnet werden:

für $x < 0$ mit y_1

„ $x = 0$ „ y_0

„ $x > 0$ „ y_2

Dann ist, wie aus der allgemeinen Bewegungsgleichung gespannter Saiten $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]$ hervorgeht:

1. für $x < 0$. . . $y_1 = f(x + ct)$
2. „ $x > 0$. . . $y_2 = f(-x + ct)$
3. „ $x = 0$. . . $y_0 = f(ct)$

wobei f eine ganz beliebige Funktion bedeutet. Ferner ist die von der Saite auf den Hammer ausgeübte Kraft:

$$4. \quad m \frac{d^2 y_0}{dt^2} = -Sg \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$$

und da aus Symmetrie:

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

und ausserdem nach Gleichung 1.: $\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{c} \frac{dy_0}{dt}$, so

geht Gleichung 4. über in:

$$5. \quad m \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{2Sg}{c} \frac{dy_0}{dt} = 0$$

Dies ist die Differentialgleichung für die Bewegung des Anschlagpunktes. Das allgemeine Integral derselben ist:

$$y_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc} \cdot t}$$

Berechnet man die beiden Integrationskonstanten mittels der Anfangsbedingungen für $t = 0$; $y_0 = 0$; $\frac{dy_0}{dt} = v_0$, so erhält man:

$$6. \quad y_0 = v_0 \frac{mc}{2Sg} \left[1 - e^{-\frac{2Sg}{mc} \cdot t} \right]$$

(Die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung ist identisch mit der Bewegung einer trägen Masse in einem Medium, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist.)

Es ist klar, dass Gleichung 6. nur so lange gilt, als

der Hammer die Saite berührt; man muss deshalb den Zeitpunkt zu bestimmen suchen, in welchem der Hammer abfällt. Im Augenblick der Trennung muss die wirkende Kraft 0 werden, man erhält T also aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} = -v_0 \frac{2Sg}{mc} e^{-\frac{2Sg}{mc} \cdot T} = 0$$

folglich: T = ∞

d. h.: Bei einer unendlich langen Saite fällt der Hammer überhaupt nicht ab.

y_0 nähert sich für $t = \infty$ asymptotisch dem Werte $v_0 \frac{mc}{2Sg}$; die Wirkung des Anschlages besteht also darin, dass die ganze Saite um das Stück $v_0 \frac{mc}{2Sg}$ in die Höhe gerückt ist, während im Unendlichen die Anschlagwelle nach beiden Seiten fortläuft.

Es ist bei dieser Berechnung angenommen, dass die Schwerkraft überhaupt nicht auf den Hammer einwirkt; die Untersuchung gilt also streng genommen nur, wenn der Hammer ausbalanciert ist.

Auch in den nächsten Untersuchungen über begrenzte Saiten ist die Schwerkraft vernachlässigt, und zwar mit vollem Recht, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht:

Bestimmt man die Schwingungszahl der Saite mit einer Normalstimmgabel, so ist es möglich, den absoluten Wert von v_0 zu ermitteln, derselbe beträgt im Durchschnitt etwa 2 bis 4 $\frac{m}{\text{Sek.}}$; die Geschwindigkeit des Hammers im Augenblick der Trennung beträgt etwa

1 bis $3 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$, und da sie v_0 entgegengesetzt gerichtet ist, so beträgt die Gesamtbeschleunigung während der Berührungszeit 3 bis 7 m.

Nun beträgt aber die Dauer der Berührung immer nur einen Bruchteil einer Schwingungsdauer, sodass bei mittleren Tönhöhen die Erdbeschleunigung während dieser Zeit nur wenige Centimeter beträgt. Man findet deshalb auch durch Ausmessen der Bewegung des Hammers vor oder nach der Berührung keine über die Beobachtungsfehler hinausgehende Abweichung von der geraden Linie.

2. In der Mitte geschlagene Saite.

Bevor ich zu diesem Spezialfalle übergehe, möchte ich noch eine Thatsache besprechen, die für jede beliebige Anschlagstelle gilt:

Betrachtet man die Bewegung einer endlichen Saite, so sieht man, dass die durch den Anschlag erzeugte Welle nicht mehr ungestört bis ins Unendliche fortläuft, sondern an den Enden reflektiert wird und schliesslich wieder an den Anschlagpunkt zurückgelangt. In der Bewegung dieses Punktes selbst kann sich der Einfluss der Enden aber erst in dem Augenblick bemerkbar machen, in welchem die an dem näherliegenden Ende reflektierte Welle ihn wieder erreicht; folglich bewegt sich der Anschlagpunkt bis dahin genau so, wie bei einer unendlichen Saite, d. h. nach Gleichung 6. (S. 21). Es kann also während dieser Zeit der Hammer nicht abfallen. Ist a die Länge des kürzeren Saitenstücks, so ist deshalb:

$$\frac{T}{G} > \frac{a}{l}$$

(In der oben erwähnten Helmholtz'schen Theorie war dagegen die Annahme gemacht worden, dass

$$\frac{T}{\Theta} < \frac{a}{l} \text{ sei.})$$

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der in der Mitte geschlagenen Saiten über. Die Bedeutung der benutzten Zeichen ist dieselbe, wie früher; a bedeutet hier die halbe Saitenlänge:

Die allgemeinen Gleichungen lauten jetzt:

$$1. \ x < 0 \quad ; \quad y_1 = f(x + ct) + \varphi(x - ct)$$

$$2. \ x > 0 \quad ; \quad y_2 = f(-x + ct) + \varphi(-x - ct)$$

$$3. \ x = 0 \quad ; \quad y_0 = f(ct) + \varphi(-ct)$$

$$3b. \ x = \pm a \quad ; \quad y_a = 0$$

Gleichung 3b. wird erfüllt, wenn:

$$\varphi(x - ct) = -f(-x + ct - 2a)$$

$$\text{oder: } \varphi(-x - ct) = -f(x + ct - 2a)$$

Die Gleichungen 1. bis 3. gehen deshalb über in:

$$1a. \ x < 0 \quad ; \quad y_1 = f(x + ct) - f(-x + ct - 2a)$$

$$2a. \ x > 0 \quad ; \quad y_2 = f(-x + ct) - f(x + ct - 2a)$$

$$3a. \ x = 0 \quad ; \quad y_0 = f(ct) - f(ct - 2a)$$

Für die auf den Hammer wirkende Kraft erhält man, wie früher:

$$4. \ m \frac{d^2 y_0}{dt^2} = -2 S g \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{\lim x=0}$$

Nun folgt aus den Gleichungen 1a. bis 3a., dass für $x = 0$ folgende Beziehungen gelten:

$$5. \ \frac{dy_0}{dt} = c [f'(ct) - f'(ct - 2a)]$$

$$6. \ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = c^2 [f''(ct) - f''(ct - 2a)]$$

$$7. \ \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{\lim x=0} = [f'(ct) + f'(ct - 2a)]$$

Setzt man diese Werte in 4. ein, so erhält man:

$$8. \quad \frac{m c^2 [f''(c t) - f''(c t - 2 a)] =}{- 2 S g [f'(c t) + f'(c t - 2 a)]}$$

Um diese Gleichung zu integrieren, muss erst eine Beziehung zwischen $f(c t)$ und $f(c t - 2 a)$, oder allgemein zwischen $f(z)$ und $f(z - 2 a)$ hergestellt werden, wobei z ein beliebiges Argument bedeutet, welches in irgend einer Weise aus x , $c t$ und $2 a$ zusammengesetzt ist.

Nun ist für $t < 0$:

$$y_0 = \frac{d y_0}{d t} = \frac{d^2 y_0}{d t^2} = 0$$

folglich für $z < 0$:

$$f(z) = f'(z) = f''(z) = 0$$

Ferner ist:

$$\frac{d y_0}{d t} \Big|_{(t=0)} = c [f'(0) - f'(-2 a)] = c f'(0) = v_0$$

$$\text{also: } f'(0) = \frac{v_0}{c}$$

Für das Argument $z = 0$ springt also $f'(z)$ von dem Werte 0 auf $\frac{v_0}{c}$.

Ebenso ist:

$$\frac{d y_0}{d t} \Big|_{(t=2 a)} = c [f'(2 a) - f'(0)] = c \left[f'(2 a) - \frac{v_0}{c} \right]$$

Da sich nun $\frac{d y_0}{d t}$, d. h. die Geschwindigkeit der Masse m nur stetig ändern kann, so muss auch für $z = 2 a$ eine sprungweise Vermehrung von $f'(z)$ um $\frac{v_0}{c}$ stattfinden. Dasselbe findet statt für $z = 4 a, 6 a \dots 2 n a$.

Mit Hilfe dieser Angaben ist die Bestimmung von

f(z) möglich, doch muss die Integration von Gleichung 8. für jedes der Intervalle:

$$\begin{array}{l} 0 < z < 2 a \\ 2 a < z < 4 a \\ \dots \end{array}$$

einzelnen ausgeführt werden.

I. 0 < z < 2 a

$$f(z - 2 a) = f'(z - 2 a) = f''(z - 2 a) = 0$$

Gleichung 8. geht über in:

$$10. m c^2 \cdot f''(z) = -2 S g \cdot f'(z)$$

woraus durch Integration erhalten wird:

$$f(z) = C_1 + C_2 \cdot e^{-\frac{2 S g}{m c^2} \cdot z}$$

Bestimmt man die Konstanten so, dass f(0) = 0

und f'(0) = $\frac{v_0}{c}$ wird, so erhält man:

$$11. f(z) = v_0 \frac{m c}{2 S g} \left[1 - e^{-\frac{2 S g}{m c^2} z} \right]$$

Diese Gleichung gilt für:

$$z = c t, \text{ wenn: } 0 < c t < 2 a$$

$$z = c t - 2 a, \text{ wenn: } 2 a < c t < 4 a.$$

Nun ist nach Gleichung 3a : $y_0 = f(ct) - f(ct - 2a)$;

da nun f(ct - 2a) = 0 ist für ct < 2a, so ist:

$$12. y_0 = f(ct) = v_0 \frac{m c}{2 S g} \left[1 - e^{-\frac{2 S g}{m c^2} \cdot t} \right]$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung 6. (S. 21), sie bestätigt also die schon gemachte Bemerkung, dass sich der Anschlagpunkt bis zur Rückkehr der reflektierten Welle wie bei einer unendlich langen Saite bewegt.

Man kann Gleichung 12. auf die praktisch bequemer

bestimmbaren Konstanten: Θ , l , M (s. S. 13 und 14) umrechnen; es ist nämlich:

$$c = \frac{2l}{\Theta}; \quad Sg = c^2 \mu = \frac{4l^2 \mu}{\Theta^2} = \frac{4lM}{\Theta^2}$$

Daraus ergibt sich:

$$12a. \quad y_0 \underset{\left(0 < \frac{t}{\Theta} < \frac{a}{l}\right)}{=} v_0 \cdot \Theta \frac{m}{4M} \left(1 - e^{-\frac{4M}{m} \frac{t}{\Theta}}\right)$$

II. $2a < z < 4a$

Es ist (nach Gleichung 11. [S. 26]):

$$13. \quad f(z - 2a) \underset{(2a < z < 4a)}{=} v_0 \frac{mc}{2Sg} \left[1 - e^{-\frac{4Sga}{mc^2}} \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc^2} z} \right]$$

$$14. \quad f'(z - 2a) = \frac{v_0}{c} e^{-\frac{4Sga}{mc^2}} \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc^2} z}$$

$$15. \quad f''(z - 2a) = -\frac{2Sg}{mc^2} \frac{v_0}{c} e^{-\frac{4Sga}{mc^2}} \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc^2} z}$$

Setzt man die Werte aus Gleichung 14. und 15. in 8. ein, so erhält man für $2a < z < 4a$:

$$16. \quad mc^2 \left\{ f'(z) + \frac{2Sg}{mc^2} \frac{v_0}{c} e^{-\frac{4Sga}{mc^2}} \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc^2} z} \right\}$$

$$= -2Sg \left\{ f''(z) + \frac{v_0}{c} e^{-\frac{4Sga}{mc^2}} \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc^2} z} \right\}$$

Durch einmalige Integration erhält man hieraus:

$$17. \quad f(z) = -\frac{2Sg}{mc^2} f(z) + \frac{2v_0}{c} e^{-\frac{4Sga}{mc^2}} \cdot e^{-\frac{2Sg}{mc^2} z} + C;$$

um C zu finden, setze man $z = 2a$; dann erhält man $f(2a)$ aus Gleichung 11.; $f'(2a)$ durch differenzieren von $f(2a)$ und addieren von $\frac{v_0}{c}$ (s. S. 25).

Es ergibt sich $C = 0$.

Aus Gleichung 17. erhält man dann durch Integration (Methode der Variation der Konstanten):

$$18. f(z) = e^{-\frac{2Sg}{mc^2}z} \left\{ \frac{2V_0}{c} z \cdot e^{\frac{4Sga}{mc^2}} + C_1 \right\}$$

Hieraus ergibt sich, wenn man wieder $z = 2a$ setzt und für $f(z)$ den aus Gleichung 11. sich ergebenden Wert substituiert:

$$C_1 = \left(\frac{mcV_0}{2Sg} - \frac{4V_0a}{c} \right) e^{\frac{4Sga}{mc^2}} - \frac{mcV_0}{2Sg}$$

und:

$$19. f(z) = \frac{V_0}{c} e^{-\frac{2Sg}{mc^2}z} \left\{ 2e^{\frac{4Sga}{mc^2}} \left[z + \frac{mc^2}{4Sg} - 2a \right] - \frac{mc^2}{2Sg} \right\}$$

(2a < z < 4a)

Diese Gleichung gilt für:

$$z = ct; \text{ wenn } 2a < ct < 4a$$

$$z = ct - 2a; \text{ wenn } 4a < ct < 6a$$

Nun ist:

$$y_0 = f(ct) - f(ct - 2a)$$

Setzt man hierin für $f(ct)$ den Wert aus Gleichung 19., für $f(ct - 2a)$ den Wert aus Gleichung 11. ein, so erhält man:

$$20. y_0 = \frac{V_0}{c} \left\{ e^{-\frac{2Sg}{mc}t} \left[2e^{\frac{4Sga}{mc^2}} \left(ct - 2a + \frac{mc^2}{2Sg} \right) - \frac{mc^2}{2Sg} \right] - \frac{mc^2}{2Sg} \right\}$$

(2a < ct < 4a)

oder nach Umformung auf die Konstanten:

$$\Theta, 1, M:$$

$$20a. \quad \frac{y_0}{\left(\frac{a}{1} < \frac{t}{\Theta} < \frac{2a}{1}\right)} = v_0 \Theta \left\{ e^{-\frac{4M}{m} \frac{t}{\Theta}} \left[2 e^{\frac{2M}{m}} \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{1}{2} + \frac{m}{4M} \right) - \frac{m}{4M} \right] - \frac{m}{4M} \right\}$$

Es ist jetzt zu untersuchen, ob in diesem Intervall die Kraft zwischen Saite und Hammer gleich Null werden und der Hammer abfallen kann. Die Kraft ist $m \frac{d^2 y_0}{dt^2}$; setzt man diese Grösse, welche aus Gleichung 20a. zu entnehmen ist, gleich Null, so erhält man die Berührungszeit des Hammers:

$$21. \quad \frac{T}{\Theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{m}{M} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2M}{m}} \right)$$

Nun ist: $\Theta = \frac{2l}{c} = \frac{4a}{c}$; ferner, da $c \cdot T$ in dem Intervall $2a$ bis $4a$ liegen soll: $T \leq \frac{4a}{c}$ also: $\frac{T}{\Theta} \leq 1$.

Ergibt sich deshalb für $\frac{T}{\Theta}$ ein Wert, der grösser ist als 1, so ist die Rechnung ungültig; man müsste dann, um einen richtigen Wert zu erhalten, erst die ganze Rechnung für das Intervall $4a < z < 6a$ durchführen. Die Rechnung ist sehr umständlich und bietet nichts neues, es soll daher nicht näher darauf eingegangen werden. Der grösste Wert von $\frac{m}{M}$, für welchen Gleichung 21. noch gilt, ist $\frac{m}{M} = 1,71$.

Es war früher gezeigt worden, dass $\frac{T}{\Theta} > \frac{a}{l}$ sein

müsse; in diesem Falle nun ist $\frac{a}{1} = \frac{1}{2}$, es muss also $\frac{T}{\Theta} > \frac{1}{2}$ sein. Gleichung 21. erfüllt diese Forderung; denn das erste Glied ist $\frac{1}{2}$, das zweite stets positiv.

Ich stelle hier die endgültigen Gleichungen für die in der Mitte geschlagene Saite nochmals zusammen.

$$\text{I. (Gl. 12a.) } \frac{y_0}{\left(0 < \frac{t}{\Theta} < \frac{a}{1}\right)} = v_0 \Theta \frac{m}{4M} \left[1 - e^{-\frac{4M}{m} \frac{t}{\Theta}} \right]$$

$$\text{II. (Gl. 20a.) } \frac{y_0}{\left(\frac{a}{1} < \frac{t}{\Theta} < \frac{2a}{1}\right)} = v_0 \Theta \left\{ e^{-\frac{4M}{m} \frac{t}{\Theta}} \left[2e^{\frac{2M}{m}} \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{1}{2} + \frac{m}{4M} \right) - \frac{m}{4M} \right] - \frac{m}{4M} \right\}$$

$$\text{III. (Gl. 21.) } \frac{T}{\Theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{m}{M} \left[1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2M}{m}} \right] \quad \left(0 < \frac{m}{M} < 1,71\right)$$

Die Richtigkeit dieser drei Gleichungen lässt sich durch Ausmessen der photographischen Kurven leicht prüfen; doch sollen die Resultate sämtlicher Messungen, welche sich auf die Anliegezeit des Hammers und die Bewegung während derselben beziehen, erst am Schlusse dieses Teiles mitgeteilt werden.

3. In der Nähe des Endes geschlagene Saite.

Ich mache bei der Rechnung die in den meisten Fällen gültige Voraussetzung, dass der Hammer abfällt, bevor die auf dem längeren Saitenstück erzeugte Welle

den Anschlagpunkt wieder erreicht; oder mathematisch ausgedrückt, dass $\frac{T}{\Theta} \leq \frac{b}{l}$; nur unter dieser Bedingung gelten die zu entwickelnden Gleichungen. Die Grenzwerte von $\frac{l}{a}$ und $\frac{M}{m}$, für welche die Bedingung noch erfüllt wird, können natürlich erst aus den endgültigen Gleichungen selbst bestimmt werden.

Man könnte nun zur Berechnung denselben Weg einschlagen, wie bei der Untersuchung der in der Mitte geschlagenen Saite. Man müsste dann wieder für die einzelnen Perioden von ct , von 0 bis $2a$, $2a$ bis $4a$, u. s. w., besonders integrieren. Dieses Verfahren würde zu äusserst komplizierten Gleichungen führen, zumal, da man sich hier nur in den seltensten Fällen schon mit der zweiten oder dritten Periode begnügen darf. Es soll deshalb versucht werden, die Rechnung zu vereinfachen, indem man sich die wirkliche Kurve der Hammerbewegung, welche aus mehreren kleinen, in Bezug auf ihre Krümmung un stetigen, Stücken besteht, durch eine stetige Kurve ersetzt denkt, die sich der wirklichen möglichst nahe anschmiegt. Man kann dies um so eher, als die einzelnen Stücke meist so klein und die Unstetigkeiten so gering sind, dass die Kurve auf der Photographie den Eindruck einer stetigen macht.

Man gelangt zu dieser Annäherungskurve dadurch, dass man das kürzere Saitenstück als starre Linie betrachtet, und unter dieser Voraussetzung die Rechnung durchführt.

Man kann sich dann die Masse dieses Saitenstücks in geeigneter Weise durch einen im Anschlagpunkte angebrachten materiellen Punkt ersetzt denken, dessen

Trägheitsmoment in Bezug auf den Endpunkt gleich dem Trägheitsmoment des wirklichen Saitenstücks ist; diese Masse ist:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a \mu x^2 dx = \frac{1}{3} \mu a$$

d. i. ein Drittel der Masse des Saitenstücks. Fügt man diese Grösse zur Hammermasse hinzu, so erhält man eine Summe, welche im Folgenden mit m_0 bezeichnet werden soll; also: $m_0 = m + \frac{1}{3} \mu a$.

Es sei wieder der Anschlagpunkt der Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems; das kleinere Saitenstück a liege auf der Saite der positiven x .

Man erhält dann folgende Gleichungen:

$$1. \quad x < 0: \quad y_1 = f(x + ct)$$

$$2. \quad x > 0: \quad y_2 = y_0 \frac{a - x}{a}$$

$$3. \quad x = 0: \quad y_0 = f(ct)$$

$$4. \quad m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = -Sg \left[\frac{y_0}{a} + \frac{\partial y_1}{\partial x} \right]_{\lim x=0}$$

und da: $\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{dy_0}{dt}$
 $\lim x=0$

so wird:

$$5. \quad m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{Sg}{c} \frac{dy_0}{dt} + \frac{Sg}{a} y_0 = 0.$$

Es ist dies die bekannte Differentialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Integration ergibt:

$$6. \quad \begin{array}{l} y_0 \\ (0 < ct < 2b) \end{array}$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{\frac{Sg}{m_0 a} - \frac{S^2 g^2}{4 m_0^2 c^2}}} = \frac{v_0}{e^{\frac{2Sg}{m_0 c} t}} \cdot \sin \left\{ t \sqrt{\frac{Sg}{m_0 a} - \frac{S^2 g^2}{4 m_0^2 c^2}} \right\}$$

oder, nach Umrechnung auf die Konstanten M, l und Θ :

$$6a. \quad \begin{array}{l} y_0 \\ (0 < \frac{t}{\Theta} < \frac{b}{l}) \end{array}$$

$$= \frac{v_0 \Theta}{\sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)}} e^{-\frac{M}{m_0} \frac{t}{\Theta}} \sin \left\{ \frac{t}{\Theta} \sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)} \right\}$$

Die Berührungszeit des Hammers erhält man wieder durch Null setzen von $\frac{d^2 y_0}{dt^2}$.

Es ergibt sich:

$$7. \quad \frac{T}{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)}} \cdot \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)}}{-2 \frac{l}{a} + \frac{M}{m_0}} \right\}$$

In vielen Fällen, wo $\frac{M}{m_0}$ klein ist gegen $\frac{l}{a}$, kann man mit sehr grosser Annäherung die arctg-Funktion in Gleichung 7. durch die Zahl π ersetzen und erhält dann:

$$8. \quad \frac{T}{\Theta} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)}}$$

$$9. \quad y_0 = \frac{v_0 \Theta}{\sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)}} \cdot e^{-\frac{M}{m_0} \frac{t}{\Theta}} \cdot \sin \pi \frac{t}{T}$$

Die Unterschiede, welche sich zwischen den nach Gleichung 6a. und 7. resp. 8. und 9. berechneten Grössen ergeben, sind fast immer geringer, als die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung.

Es bleibt noch übrig, den Gültigkeitsbereich der Gleichungen zu bestimmen.

Der kleinste Wert von $\frac{M}{m_0}$, der in der Praxis wohl noch vorkommen kann, ist etwa 0,5; wenn man diesen Wert in Gleichung 8. einsetzt, und gleichzeitig für $\frac{T}{\Theta}$ den Wert $\frac{b}{1} = \frac{1-a}{1}$ einführt, so erhält man $\frac{1}{a} = 6,9$.

Da nun am Klavier $\frac{1}{a}$ fast immer grösser als 7 ist und auch $\frac{M}{m_0}$ fast nie den sehr kleinen Wert 0,5 erreicht, ausser bei den allerhöchsten Saiten, so kann man wohl sagen, dass die Gleichungen 6. bis 9. für alle in der Praxis vorkommenden Fälle gültig sind.

b) Ausgeführte Messungen.

Bevor ich zur Besprechung der Messungen selbst übergehe, möchte ich über den zu erwartenden Grad der Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung einige Andeutungen machen:

Da in der Theorie die Saite als unendlich dünn und biegsam und die Elongationen als unendlich klein gegenüber der Länge angenommen wurden, so ist es ohne weiteres klar, dass (abgesehen von den Beobachtungsfehlern) Abweichungen zwischen Beobachtung und

Rechnung stattfinden werden; denn die gemachten Voraussetzungen sind beide nur sehr unvollkommen erfüllt. Es lässt sich nun zwar nicht die Grösse der zu erwartenden Abweichungen angeben, wohl aber ihr Vorzeichen; es wird nämlich ein Teil der sichtbaren lebendigen Kraft des Hammers verloren gehen, indem derselbe teils zur Deformation des Saitenquerschnitts verwendet wird, teils durch innere Reibung in Saite und Hammer absorbiert und in Wärme verwandelt wird. Man kann deshalb von vornherein den Schluss ziehen, dass die beobachteten Geschwindigkeiten kleiner sein werden, als die berechneten.

Ausserdem kann man bei sehr dicken Saiten die Bemerkung machen, dass die Kurve der Saitenbewegung während der Berührungszeit kleine Kräuselungen zeigt, wohingegen die Hammerkurve stetig fortläuft; es findet also eine abwechselnde Berührung und Trennung von Hammer und Saite statt. Dem Ohre macht sich dies durch ein schnarrendes Geräusch, ähnlich wie beim Anschlag einer Glocke, bemerkbar. Sehr gut zu sehen sind die Kräuselungen auf Taf. V, Fig. 55.

Die als Messungsergebnisse angeführten y_0 sind die Mittelwerte aus je sechs Einstellungen, und zwar wurde immer je dreimal von oben, dreimal von unten auf den Rand der Kurve eingestellt.

Die erste Spalte der folgenden Tabelle enthält unter n die Umdrehungen der Mikrometerschraube (s. S. 13); in der zweiten Spalte sind dieselben auf $\frac{t}{6}$ umgerechnet, die dritte und vierte Spalte enthalten die berechneten und beobachteten y_0 in cm, die fünfte die Differenz beider in Prozenten des berechneten Wertes.

1. In der Mitte geschlagene Saiten.

I. Messung (Taf. I, Fig. III; Taf. III, Fig. 1):

Konstanten:

$$l = 136$$

$$M = 4,8 \text{ (Durchmesser } d = 0,095 \text{ cm)}$$

$$m = 4,4$$

$$\Theta = \frac{1}{128}$$

$$v_0 \text{ (gemessen)} = 215,5 \text{ cm.}$$

Zwischen $n = 8$ und $n = 9$ findet die Rückkehr der reflektierten Anschlagwelle statt; die Werte für $n = 1$ bis 8 sind deshalb nach Gleichung 12a. (S. 27), die folgenden Werte nach Gleichung 20a. (S. 29), berechnet. Bei $n = 12,02$ fällt der Hammer ab.

n	$\frac{t}{\Theta}$	y_0		Differenz in pCt.
		berechnet	beobachtet	
0	0	0	0	0
1	0,0588	0,088	0,081	— 7,96
2	0,1176	0,1555	0,147	— 5,47
3	0,176	0,208	0,191	— 8,17
4	0,235	0,249	0,228	— 8,43
5	0,294	0,280	0,260	— 7,15
6	0,353	0,304	0,272	— 10,5
8	0,470	0,337	0,296	— 12,15
9	0,529	0,339	0,303	— 10,6
10	0,588	0,310	0,281	— 9,35
11	0,648	0,255	0,240	— 5,88
12	0,707	0,190	0,186	— 2,1
12,02	0,708			

$$\frac{T}{\Theta} \left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet: } 0,742 \\ \text{beobachtet: } 0,708 \end{array} \right. \quad \text{Differenz: } - 4,58 \text{ pCt.}$$

Wie man sieht, sind sämtliche beobachteten Werte kleiner als die berechneten, es sind also auch, entsprechend der früher gemachten Erörterung, sämtliche beobachteten Geschwindigkeiten kleiner als die berechneten. Obgleich die Abweichungen sehr gross sind, ist jedoch die Ähnlichkeit der berechneten und der beobachteten Kurve bei einem Blick auf die Figur (Taf. I, Fig. III) unverkennbar.

Aus dem etwas unregelmässigen Verlauf der Abweichungen scheint übrigens zu folgen, dass noch irgend eine störende Ursache mitgewirkt haben muss, wie z. B. senkrechte Erschütterungen der rotierenden Trommel. Auf die Messung der Berührungszeit können diese Störungen natürlich keinen Einfluss haben, deshalb sind die Abweichungen dieser Grösse von der Berechnung auch relativ geringer.

II. Messung (Taf I, Fig. IV; Taf. III, Fig. 2):

Konstanten:

wie bei der I. Messung, nur:

$$v_0 = 435 \text{ cm.}$$

Bei dieser Messung verlaufen die Abweichungen viel regelmässiger. Es ist, wenigstens für die Werte vor der Reflexion, ziemlich genau $\frac{\delta^2}{y}$ eine Konstante, wenn δ den prozentualen Fehler bedeutet.

n	$\frac{t}{\Theta}$	y_0		Differenz in pCt.
		beobachtet	berechnet	
0	0	0	0	0
1	0,0582	0,174	0,159	— 8,62
2	0,1164	0,310	0,272	— 12,25
3	0,1746	0,415	0,356	— 14,2
4	0,2328	0,497	0,421	— 15,3
5	0,2910	0,560	0,473	— 15,5
6	0,3492	0,610	0,512	— 16,05
7	0,4074	0,648	0,539	— 16,7
9	0,524	0,697	0,562	— 19,4
10	0,582	0,618	0,515	— 18,3
11	0,640	0,515	0,433	— 15,9
12	0,698	0,412	0,344	— 16,5

$$\frac{T}{\Theta} \left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet: } 0,742 \\ \text{beobachtet: } 0,698 \end{array} \right. \quad \text{Differenz: } - 5,93 \text{ pCt.}$$

Bei mehreren anderen gleichartigen Messungen wurden ganz ähnliche Resultate erhalten.

Die folgende Messungsreihe möge die zufälligen Abweichungen der Berührungszeit zeigen:

III. Messung (Taf. III, Fig. 3 bis 7):

$$l = 86,8; \quad M = 3,065; \quad m = 4,4; \quad \Theta = \frac{1}{205}$$

$$\frac{T}{\Theta} \left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet: } 0,902 \\ \text{beobachtet: } 1. \ 0,900 \\ \phantom{\text{beobachtet: }} 2. \ 0,950 \\ \phantom{\text{beobachtet: }} 3. \ 0,900 \\ \phantom{\text{beobachtet: }} 4. \ 0,870 \\ \phantom{\text{beobachtet: }} 5. \ 0,885 \end{array} \right.$$

im Mittel: 0,901

Der Mittelwert stimmt mit der Berechnung auf 0,1 pCt. Die Abweichungen sind ganz zufällig und stehen in keinem Zusammenhang mit der Anschlagstärke.

2. In der Nähe des Endes geschlagene Saiten.

Da die für diesen Fall entwickelte Theorie nur eine angenäherte ist, so ist von vornherein zu sehen, dass die Abweichungen der beobachteten und der berechneten y_0 sehr gross ausfallen müssen. Da ausserdem in der Nähe des Endes die y_0 nur sehr klein sind, so werden hier auch die Beobachtungsfehler in viel stärkerem Masse in Betracht kommen. Ich habe deshalb auf die Messung der y_0 ganz verzichtet und nur die Berührungsdauer gemessen, da man aus dieser ja auch die Richtigkeit der Theorie beurteilen kann.

I. Messung: Um einen etwaigen Einfluss der Anschlagstärke zu bestimmen, wurde bei dieser Messungsreihe dieselbe möglichst verändert; in der Tabelle ist als Mass der Anschlagstärke die grösste Elongation des Anschlagpunktes während der Berührungszeit angegeben (Taf. III. Fig. 8 bis 12).

$$l = 70 \text{ cm}; a = 7; m_0 = 4,5; m = 4,4; M = 2,47.$$

$y_{0 \text{ max}}$	$\frac{T}{\Theta}$ beobachtet	$\frac{T}{\Theta}$ berechnet	Differenz in pCt.
1,7	0,625		+ 1,625
1,85	0,625		+ 1,625
2,00	0,625	0,615	+ 1,625
3,35	0,625		+ 1,625
3,8	0,63		+ 2,44

Ein Einfluss der Anschlagstärke ist also nicht zu bemerken; die Abweichungen sind sehr gering.

II. Messung (Taf III, Fig. 13 bis 16):
(Änderung von a bei sonst gleichbleibenden Konstanten.)

$$l = 90; m = 4,4; M = 3,175; \Theta = \frac{1}{128};$$

a	$\frac{T}{\Theta}$ berechnet	$\frac{T}{\Theta}$ beobachtet	Differenz in pCt.
8	0,515	0,455	— 11,6
12	0,622	0,590	— 5,15
16	0,71	0,73	— 2,82
20	0,81	0,82	— 1,23

III. Messung (Taf. III, Fig. 17 bis 19):
(Änderung von m)

$$l = 92; M = 3,25; a = 4,5;$$

m	$\frac{T}{\Theta}$ berechnet	$\frac{T}{\Theta}$ beobachtet	Differenz in pCt.
4,4	0,382	0,39	+ 2,09
9,0	0,553	0,525	— 5,06
11,4	0,624	0,65	+ 4,17

Wie man aus den Tabellen sieht, sind die Abweichungen im allgemeinen nicht sehr bedeutend; der ziemlich grosse Fehler von 11,6 pCt. in der ersten Spalte der II. Messung muss wohl von einer zufälligen Störung herrühren.

3. Anschlag mit weichem Hammer.

Sowohl die theoretischen Untersuchungen, als auch die Messungen bezogen sich bisher nur auf die durch einen harten Hammer hervorgebrachten Bewegungen. Da jedoch in der Praxis nur weiche, mit Filz oder Leder überzogene Hämmer gebraucht werden, so ist es von grossem Interesse, zu untersuchen, wie sich die Bewegung in diesem Falle von der für harte Hämmer gefundenen unterscheidet.

Um eine theoretische Untersuchung des Anschlags weicher Hämmer durchzuführen, müsste man die elastischen Eigenschaften des Filzes kennen; diese sind jedoch erstens sehr veränderlich, da der Filz, wenn er einmal zusammengedrückt ist, seine ursprüngliche Gestalt nicht völlig wieder annimmt; zweitens ist der Zusammenhang zwischen der auf den Hammer wirkenden Kraft und der dadurch hervorgerufenen Kompression jedenfalls sehr kompliziert, da der Hammerfilz aus mehreren verschieden elastischen Schichten besteht. Man müsste sich also mit Annäherungen begnügen, deren Begründung immerhin sehr unsicher wäre.

Ich habe deshalb auf eine mathematische Theorie der Bewegung weicher Hämmer verzichtet und mich lediglich auf die experimentelle Untersuchung beschränkt.

Das Resultat derselben ist im wesentlichen folgendes:

1. Die Berührungszeit ist bei schwachem Anschlag grösser als bei starkem.

(Diese Thatsache wurde auch von Herrn Weak in seiner auf Seite 10 erwähnten Arbeit gefunden.)

2. Bei stärkerem Anschlag nähert sich die Berührungszeit rasch einem Grenzwert, der mit

dem für einen gleichschweren harten Hammer berechneten Werte übereinstimmt.

(Anmerkung: Um den Hammer möglichst weich zu machen, wurde derselbe vor jeder Versuchsreihe mit einer Nadel aufgelockert. Es ist dies ein Verfahren, welches auch die Klavierstimmer benutzen, um den hartgewordenen Ton eines Klaviers wieder weich zu machen.)

I. Messung: (In Betreff der Bestimmung der Anschlagstärke s. S. 39.) (Taf. III, Fig. 20 bis 24.)

$$l = 80; a = 7,4; M = 2,47; m = 6,7; \Theta = \frac{1}{205};$$

Anschlag- stärke	$\frac{T}{\Theta}$ beobachtet	$\frac{T}{\Theta}$ berechnet für harten Hammer	Differenz in pCt.
1,0	0,95	0,80	+ 18,8
1,6	0,825	0,80	+ 3,13
2,2	0,82	0,80	+ 2,5
3,8	0,78	0,80	— 2,5
4,3	0,79	0,80	— 1,25

II. Messung: Bei dieser Versuchsreihe wurde abwechselnd mit einem harten und einem genau gleichschweren weichen Hammer angeschlagen. (Die Konstanten sind in der am Schlusse dieser Arbeit beigefügten Tabelle zu finden.)

1. $\frac{T}{\Theta}$ beobachtet $\left\{ \begin{array}{l} \text{hart: } 1,21 \text{ Fig. 25a auf Taf. III.} \\ \text{weich: } 1,5 \text{ " 25b " " " } \end{array} \right.$
2. $\frac{T}{\Theta}$ beobachtet $\left\{ \begin{array}{l} \text{hart: } 0,74 \text{ " 26a " " " } \\ \text{weich: } 0,74 \text{ " 26b " " " } \end{array} \right.$

3. $\frac{T}{\Theta}$ beobachtet $\left\{ \begin{array}{l} \text{hart: } 1,75 \text{ Fig. 27a auf Taf. III.} \\ \text{weich: } 1,85 \text{ " 27b " " " } \end{array} \right.$
4. $\frac{T}{\Theta}$ beobachtet $\left\{ \begin{array}{l} \text{hart: } 1,3 \text{ " 28a " " " } \\ \text{weich: } 1,42 \text{ " 28b " " " } \end{array} \right.$

Beobachtet man bei den zugehörigen Figuren die Bewegung der Saite während der Berührungszeit (bei 2. und 4. ist nicht der Anschlagpunkt selbst beobachtet worden), so findet man, dass dieselbe bei weichem Hammer fast dieselbe ist, wie bei hartem; nur an der Stelle, wo die Saite aus der Ruhe in Bewegung übergeht, findet man an den durch weichen Hammer hervorgebrachten Figuren eine kleine Rundung, d. h. einen allmählichen Übergang von Ruhe in Bewegung; wohingegen ein harter Hammer eine scharfe Kante an der betreffenden Stelle erzeugt.

4. Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

Die bis jetzt gefundenen Resultate lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Auf die Bewegung der Saite während der Berührungszeit wirken folgende Faktoren ein:

a) die Anschlagstelle $\left(\frac{1}{a}\right)$;

b) das Verhältnis zwischen Hammer- und Saitenmasse $\left(\frac{m}{M}\right)$;

c) die materielle Beschaffenheit des Hammers;

d) (bei weichem Hammer) die Anschlagstärke.

2. Während die unter 1. a) und 1. b) genannten Grössen von sehr starkem Einfluss sind, wirken 1. c) und 1. d) nur als Korrektionsglieder.

(Auf den sehr geringen Einfluss der Spannung und

Steifigkeit kann hier nicht näher eingegangen werden; ich habe bei den Versuchen den Saiten möglichst die im Klaviere gebräuchlichen Dimensionen gegeben; die Spannung ist hierbei immer fast bis zur Elastizitätsgrenze getrieben.)

3. Eine theoretische Berechnung der Bewegung während der Berührungszeit ist möglich, wenn man nur die von der Spannung herrührenden Kräfte in Rechnung zieht.
4. Die Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungsergebnissen ist ziemlich gut.
5. Bewegung eines beliebigen Saitenpunktes während der Berührungszeit.

Es wurde bisher nur die Bewegung des Anschlagpunktes selbst betrachtet; es bleibt deshalb noch übrig, die Bewegung eines um die Strecke x von demselben entfernten Punktes zu bestimmen:

1. Der Punkt bleibt offenbar in Ruhe, bis die vom Anschlagpunkte ausgehende Welle ihn erreicht hat.
2. Die Bewegung des Punktes ist stetig vom Beginn der Bewegung bis zu dem Augenblick, in welchem die am Saitenende reflektierte Anschlagwelle ihn wieder trifft.
3. Die Bewegung erleidet auch fernerhin eine Unstetigkeit jedesmal, wenn von der einen oder der anderen Seite her die Spitze der Anschlagwelle über den Punkt hinwegläuft.
4. Bezeichnet man die Abscissen der einzelnen stetigen Stücke mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ und die Länge des Saitenstückes, auf welchem der be-

obachtete Punkt liegt, mit a , so folgt aus der gleichmässigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen:

$$1. \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_3 = \alpha_5 = \dots \\ \alpha_2 &= \alpha_4 = \alpha_6 = \dots \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{\alpha_5}{\alpha_6} = \dots = \frac{a - x}{x}$$

Ist ferner α_0 die Abscisse einer ganzen Schwingung der frei schwingenden Saite, so ist:

$$3. \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\alpha_3}{\alpha_0} = \dots = \frac{a - x}{l}$$

$$4. \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{\alpha_4}{\alpha_0} = \dots = \frac{x}{l}$$

Die Richtigkeit der Gleichungen lässt sich durch Auflegen eines Glasmasstabes auf die Figuren leicht bestätigen; irgend welche nennenswerte Abweichungen kommen nicht vor.

In den meisten Fällen läuft die Welle (auf dem längeren Saitenstück) nur einmal hin und her; man kann dann nur α_1 resp. $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ bestimmen (s. Taf. IV, Fig. 29, 30, 32, 33, 34b bis 41b). Ich habe deshalb auch einige Versuche mit sehr leichten und dünnen Saiten, resp. sehr schweren Hämmern, ausgeführt, bei welchen die Berührungszeit so lange dauert, dass die Welle sehr oft hin- und herläuft. Auf diesen Figuren sieht man dann als Bewegung des Beobachtungspunktes während der Berührungszeit eine zierliche Zickzacklinie (s. Taf. IV, Fig. 31a und 31b).

Von dem Moment des Hammerabfalls an ist die Bewegung jedes Saitenpunktes periodisch; man kann

deshalb die Grösse $\frac{T}{\Theta}$ aus der Beobachtung eines beliebigen Punktes bestimmen, indem man die Zeit vom Anfang der Bewegung bis zu dem Punkte misst, wo die periodische Schwingung beginnt, und hierzu noch die Grösse $\frac{t}{\Theta} = \frac{x}{2l}$ addirt, wobei t , wie leicht zu sehen ist, die Zeit darstellt, während welcher sich die Bewegung vom Anschlagpunkte bis zum Beobachtungspunkte fortpflanzt. Praktisch stösst man bei dieser Messung manchmal auf Schwierigkeiten, da der Beginn der periodischen Bewegung nicht immer genau feststellbar ist.

Ist $\frac{T}{\Theta} < \frac{x}{2l}$, so ist die Bewegung von vornherein periodisch (Taf. IV, Fig. 43b bis 46b).

(In der am Schlusse beigefügten Tabelle ist nicht die Grösse x angegeben, sondern die Entfernung des Beobachtungspunktes von dem Endpunkte, welcher dem Anschlagpunkt am nächsten liegt. Dieselbe ist dort mit ξ bezeichnet, die Entfernung des Anschlagpunktes mit a . Es ist deshalb:

$$x = \xi - a.)$$

Dritter Teil.

Die Schwingungsform der Saite nach dem Hammerabfall.

Wenn man die Bewegung des Anschlagpunktes während der Berührungszeit kennt, so kann man auch die Bewegung aller übrigen Punkte bestimmen; es ist also der Zustand der Saite im Augenblick des Hammerabfalls vollständig bestimmt.

Zur Berechnung der Schwingungsform der freischwingenden Saite ist dieser Zustand als Anfangszustand zu betrachten.

Man kann nun entweder analytisch verfahren, indem man die Bewegung durch eine Fourier'sche Reihe ausdrückt, oder aber die Bewegungsform geometrisch konstruieren.

In akustischer Beziehung ist zwar die erste Methode vorzuziehen, da man durch sie unmittelbar die Intensitäten der einzelnen Obertöne erhält; bei der komplizierten Form der Gleichungen ist jedoch die Rechnung ausserordentlich schwierig und verwickelt.

Viel leichter und eleganter führt dagegen die geometrische Methode zum Ziele; dieselbe gilt freilich

nur für diejenigen Fälle, in welchen die auf Seite 33 aufgestellten Gleichungen 8. und 9. gelten. Da jedoch gerade die in der Praxis vorkommenden Fälle innerhalb des Gültigkeitsbereiches liegen, so gewinnt die Methode trotz obiger Einschränkung eine ziemliche Bedeutung.

a) Geometrische Methode zur Vorausbestimmung der Schwingungsform.

Die Gleichungen 8. und 9. auf Seite 33 lauteten:

$$8. \quad \frac{T}{\Theta} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{M}{m_0} \left(4 \frac{l}{a} - \frac{M}{m_0} \right)}}$$

$$9. \quad y_0 = C \cdot e^{-\frac{M}{m_0} \frac{t}{\Theta}} \cdot \sin \left(\pi \frac{t}{T} \right)$$

(Der erste Faktor in 9. ist, da er die willkürliche Grösse v_0 enthält, durch die willkürliche Konstante C ersetzt worden.)

Die Bewegung des Anschlagpunktes besteht also aus einer gedämpften halben Sinusschwingung; bis zum Augenblick des Hammerabfalls hat sich diese Welle auf dem längeren Saitenstück um die Strecke

$$x_1 = 2l \frac{T}{\Theta}$$

ausgebreitet.

Vernachlässigt man nun die von dem kürzeren Saitenstück herrührenden Bewegungen, welche ihrer Kleinheit wegen höchstens zu kleinen Kräuselungen Anlass geben können, so besteht jetzt die Bewegung nur aus einem Hin- und Herlaufen der einen Anschlagwelle.

Die Bestimmung der Bewegung eines beliebigen Saitenpunktes gestaltet sich deshalb sehr einfach.

Es sei ξ die Entfernung des beobachteten Punktes von dem dem Anschlagpunkte zunächst liegenden Saitenende. Der Anfangspunkt der Zeit sei der Augenblick, in welchem die Spitze der vorwärtsschreitenden Welle ihn berührt.

Es läuft dann zuerst die Welle über den Punkt hinweg; die hierzu nötige Zeit ist, wie leicht zu sehen, gleich der Berührungszeit des Hammers: $t_1 = T$.

Dann bleibt der Punkt so lange in Ruhe, bis die Spitze der reflektierten Welle ihn wieder erreicht:

$$t_2 = \Theta \frac{1 - \xi}{1} - T.$$

Hierauf läuft die infolge der Reflexion nach unten gekehrte Welle über ihn hinweg: $t_3 = T$.

Endlich bleibt der Punkt so lange in Ruhe, bis die am anderen Ende reflektierte und dadurch wieder nach oben gerichtete Welle ihn wieder erreicht: $t_4 = \frac{\xi}{1} \Theta - T$.

Aus diesen vier Teilen setzt sich eine ganze Periode zusammen:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \Theta.$$

Es ergibt sich daraus folgendes Verfahren für die geometrische Konstruktion:

Man berechne zuerst die Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4 , oder besser, da es ja nur auf die relativen Grössen ankommt, $\frac{t_1}{\Theta}, \frac{t_2}{\Theta}, \frac{t_3}{\Theta}, \frac{t_4}{\Theta}$, und trage dieselben in einem beliebigen Massstabe als Abscissen auf. Es ist hierbei zu beachten, dass t_2 und t_4 auch negativ sein können; sie müssen dann in negativer Richtung aufgetragen werden.

Hierauf konstruiere man über t_1 nach oben und

über t_3 nach unten die Welle nach Gleichung 9., wobei zu beachten, dass im Falle eines negativen t_2 oder t_4 die übereinander fallenden Kurvenstücke algebraisch addirt werden müssen.

Beim Zeichnen der Kurven ist es manchmal bequemer, nicht mit t_1 sondern mit t_3 anzufangen; da die Bewegung periodisch ist, so kann man natürlich die Reihenfolge cyklich verändern.

Was die zu erwartende Genauigkeit anbetrifft, so liegt dieselbe innerhalb derselben Grenzen, wie sie sich für die Berührungszeit des Hammers ergeben. Besonders auffällige Abweichungen entstehen nur dann, wenn t_2 oder t_4 sehr klein sind, es ergibt sich dann oft in der Rechnung ein positiver Wert, während die Beobachtung einen negativen ergibt; die berechnete Figur sieht dann ganz anders aus, als die beobachtete. Beispiel VI (s. weiter unten) dürfte hierfür wohl typisch sein.

Beispiele (s. Taf. II, Fig. I bis VI):

(Die positive Richtung der Abscissen ist von rechts nach links angenommen, um die gezeichneten Figuren in Übereinstimmung mit den Photographieen zu bringen.)

I. Beispiel (Taf. II, Fig. I; Taf. III, Fig. 13):

$$\frac{l}{a} = 11,25; \quad \frac{M}{m_0} = 0,722; \quad \frac{\xi}{l} = \frac{1}{11,25}$$

$$\text{berechnet: } \frac{T}{\Theta} = \frac{t_1}{\Theta} = \frac{t_3}{\Theta} = 0,555 \quad (\text{beob.: } 0,55)$$

$$\frac{t_2}{\Theta} = 0,35 \quad (\text{beob.: } 0,37)$$

$$\frac{t_4}{\Theta} = -0,46$$

II. Beispiel (Taf. II, Fig. II; Taf. IV, Fig. 43a):

$$\frac{l}{a} = 8,35; \quad \frac{M}{m_0} = 0,7; \quad \frac{\xi}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{berechnet: } \frac{T}{\Theta} = \frac{t_1}{\Theta} = \frac{t_3}{\Theta} = 0,66$$

$$\frac{t_2}{\Theta} = \frac{t_4}{\Theta} = -0,16$$

(Wenn $\frac{\xi}{l} = \frac{1}{2}$ ist, d. h. wenn die Mitte der Saite beobachtet wird, so ist immer $\frac{t_2}{\Theta} = \frac{t_4}{\Theta}$.)

III. Beispiel (Taf. II, Fig. III; Taf. IV, Fig. 44b):

$$\frac{l}{a} = 11,7; \quad \frac{M}{m_0} = 0,7; \quad \frac{\xi}{l} = \frac{2}{3}$$

$$\text{berechnet: } \frac{T}{\Theta} = \frac{t_1}{\Theta} = \frac{t_3}{\Theta} = 0,55$$

$$\frac{t_2}{\Theta} = -0,22$$

$$\frac{t_4}{\Theta} = 0,12 \text{ (beob.: } 0,17)$$

IV. Beispiel (Taf. II, Fig. IV; Taf. IV, Fig. 45a).

$$\frac{l}{a} = 19,7; \quad \frac{M}{m_0} = 0,7; \quad \frac{\xi}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{berechnet: } \frac{T}{\Theta} = \frac{t_1}{\Theta} = \frac{t_3}{\Theta} = 0,355 \text{ (beob.: } 0,4)$$

$$\frac{t_2}{\Theta} = \frac{t_4}{\Theta} = 0,145$$

V. Beispiel (Taf. II, Fig. V; Taf. IV, Fig. 46b).

$$\frac{l}{a} = 62,1; \quad \frac{M}{m_0} = 0,7; \quad \frac{\xi}{l} = \frac{2}{3}$$

$$\text{berechnet: } \frac{T}{\Theta} = \frac{t_1}{\Theta} = \frac{t_3}{\Theta} = 0,2$$

$$\frac{t_2}{\Theta} = 0,13$$

$$\frac{t_4}{\Theta} = 0,47 \text{ (beob.: 0,43)}$$

VI. Beispiel (Taf. II, Fig. VI; Taf. III, Fig. 24):

$$\frac{l}{a} = 10; \quad \frac{M}{m_0} = 0,37; \quad \frac{\xi}{l} = \frac{1}{10}$$

$$\text{berechnet: } \frac{T}{\Theta} = \frac{t_1}{\Theta} = \frac{t_3}{\Theta} = 0,82 \text{ (beob.: 0,79)}$$

$$\frac{t_2}{\Theta} = 0,08$$

$$\frac{t_4}{\Theta} = -0,72$$

b) Empirische Untersuchung des Einflusses der einzelnen Konstanten auf die Schwingungsform.

Obgleich die bisher entwickelte Theorie für alle Bedürfnisse der Praxis ausreichend ist, so ist es doch nicht möglich, hierbei stehen zu bleiben, es zeigte sich nämlich im weiteren Laufe der Beobachtungen, dass es eine Reihe von Allgemeinerscheinungen giebt, die sich wohl nur vom Standpunkte einer streng mathematischen, alle Fälle umfassenden Theorie erklären lassen. So lange eine derartige Theorie noch nicht vorhanden ist, muss ich die im Folgenden zu beschreibenden Resultate als rein empirische, und, wegen der beschränkten Zahl der Beobachtungen, nicht immer ganz einwurfsfreie hinstellen.

1. Einfluss der Anschlagstelle.

Dass die Anschlagstelle die Schwingungsform beeinflusst, ist eine den Klavierbauern seit lange bekannte Thatsache; dieselben haben nämlich, lediglich durch ihr

Gehör, gefunden, dass die beste Anschlagstelle zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$ der Saitenlänge liegt. In den meisten Büchern über Klavierbau, und auch in Helmholtz' „Lehre von den Tonempfindungen“, findet man als Grund hierfür angegeben, dass dadurch der siebente und neunte Oberton, die unharmonisch zum Grundton sind, zum Ausfallen gebracht würden. Dieser Grund scheint jedoch keineswegs stichhaltig zu sein; denn ein Oberton fällt nur dann aus, wenn genau in seinem Knoten angeschlagen wird (s. z. B. Taf. IV, Fig. 34b [zweiter Oberton]; Taf. III, Fig. 28a, 28b, Taf. V, Fig. 47 [dritter Oberton]), während er bei einem Anschlag in der Nähe des Knotens sogar ein Maximum hat. (Ich fand dieses Maximum, soweit eine Bestimmung ohne eingehende Spezialuntersuchung überhaupt möglich war, etwa in $\frac{1}{8}$ des Abstandes zweier Knoten liegend.)

Um nun vor allen Dingen zu bestimmen, ob vielleicht wirklich die Anschlagstelle im Klavier, wenigstens bei besseren Instrumenten, genau in $\frac{1}{7}$ der Saitenlänge liege, untersuchte ich mehrere Flügel, die sich durch besonders schönen und weichen Klang auszeichneten; es waren nur Instrumente neuester Konstruktion und aus bekannten Fabriken stammend, wie z. B. Steinweg (Braunschweig), Chickering (Boston), Bechstein (Berlin).

Ich fand bei keinem die Anschlagstelle in $\frac{1}{7}$ sondern überall in $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{9}$, meist in der Nähe von

$\frac{1}{8}$: bei den höchsten Diskantsaiten geht die Anschlagstelle sogar bis zu $\frac{1}{10}$ und noch darüber hinaus. Wenn trotzdem der siebente und neunte Oberton nicht hörbar sind, so liegt dies daran, dass dieselben an und für sich schon sehr schwach sind, und besonders durch Anwendung weicher Filzhämmer fast völlig ausgelöscht werden.

Es muss also eine andere Ursache geben, um derentwillen die Klavierbauer gerade die Anschlagstelle zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$ bevorzugen. Um diesen Grund aufzufinden machte ich mehrere Beobachtungsreihen folgender Art:

Bei sonst gleichbleibenden Konstanten und möglichst gleichmässiger Anschlagstärke, wurde die Anschlagstelle um kleine Strecken von der Mitte der Saite bis zum Ende verschoben, so dass auf die halbe Saitenlänge 13 Beobachtungen kamen. Es wurden jedesmal zwei zusammengehörige Beobachtungsreihen gemacht, indem das eine Mal in der Mitte beobachtet wurde (nur die ungeraden Teiltöne sichtbar), das andere Mal in $\frac{2}{3}$ (gerade Teiltöne sichtbar, dritter nicht vorhanden, fünfter, siebenter . . . sehr schwach).

Eine solche doppelte Beobachtungsreihe ist in Taf. IV, Fig. 34a bis 46b dargestellt; der Index a bei der Nummer bedeutet, dass in der Mitte, der Index b, dass in $\frac{2}{3}$ beobachtet ist. Ich habe mich bemüht, bei den photographischen Aufnahmen die Anschlagstärke

möglichst konstant zu halten, doch sind kleine Unterschiede natürlich nicht zu vermeiden.

Um vergleichbare Resultate zu erhalten, muss man die Anschlagstärken der einzelnen Figuren bestimmen. Man kann dies sehr leicht dadurch, dass man den Winkel misst, welchen die Kurve im Beginn der Bewegung mit der Abscissenaxe bildet, der tangens dieses Winkels ist der Anfangsgeschwindigkeit des Hammers proportional; hat man diese ermittelt, so kann man sämtliche Figuren auf gleiche Anschlagstärke reduzieren.

(Es ist dabei schon eine Voraussetzung gemacht, die erst später genauer besprochen werden kann; dass nämlich die Schwingungsform in allen Fällen von der Anschlagstärke unabhängig sei.)

Eine genaue Ausmessung der Figuren behufs numerischer Bestimmung der einzelnen Obertöne wurde nicht ausgeführt, da das, worauf es hauptsächlich ankommt, mit blossem Auge deutlich zu sehen ist.

Das Resultat aller Beobachtungsreihen lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

„Bei gleich starkem Anschlag ist die Amplitude des Grundtons am grössten, wenn zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$ der Saitenlänge angeschlagen wird; dagegen sind die Obertöne, besonders der dritte, an dieser Stelle äusserst schwach.“

Der Klang der Saite ist also, wenn zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$ angeschlagen wird, nicht nur am stärksten, sondern auch am vollsten, da man ja einen Klang als voll zu bezeichnen pflegt, wenn der Grundton die Obertöne an Intensität bedeutend überragt.

Man könnte — um einen der Technik entlehnten Ausdruck zu gebrauchen — auch sagen:

„Bei einem Anschlag zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$

ist der „Nutzeffekt“ des Anschlags am grössten.“

2. Einfluss des Verhältnisses zwischen Hammer- und Saitenmasse.

Während die Klavierbauer die günstigste Anschlagstelle auf Grund ihrer praktischen Erfahrung schon vor langer Zeit gefunden haben, scheint dies in Bezug auf das Massenverhältniss von Hammer und Saite nicht der Fall zu sein. Es sind zwar die Hämmer so angeordnet, dass ihr Gewicht mit steigender Tonhöhe abnimmt, aber die Hammermasse steht in keinem konstanten Verhältnis zur Saitenmasse; ausserdem nimmt auch die Masse der Saiten bei jedem Übergang von einer „Saitennummer“ zur anderen sprungweise ab, während die der Hämmer stetig fällt.

Diese Nichtbeachtung des Massenverhältnisses ist um so auffälliger, als der Einfluss desselben ebenso bedeutend ist, wie der der Anschlagstelle. Es geht dies am besten daraus hervor, dass man durch geeignet gewählte Hammermassen einzelne Obertöne ganz zum Ausfallen bringen kann. Als Beispiele mögen die folgenden beiden Reihen dienen:

1. Taf. V, Fig. 48 bis 50:

Bei Fig. 50 Ausfallen des dritten Obertons.

2. Taf. V, Fig. 51 bis 54:

Bei Fig. 52 starkes Minimum des dritten Obertons.

(Bei beiden Versuchsreihen sind nur die Hammermassen variiert worden. Die Zahlen sind in der Tabelle zu finden.)

Unbewusst, wie es scheint, wird übrigens die Wirkung des Massenverhältnisses von den Klavierbauern im „Una-Corda-Pedal“ benutzt. Durch das Niederdrücken dieses Pedals wird die ganze Hammermechanik um ein Stück zur Seite geschoben, so dass von den dreihörigen Saiten nur zwei, von den zweihörigen nur eine angeschlagen wird. Es wird also die relative Hammermasse im Verhältnis von 3 : 2, resp. 2 : 1, verändert; das Resultat ist eine völlig veränderte Klangfarbe. Die Wirkung wird freilich noch dadurch verstärkt, dass durch die Verschiebung weniger abgenutzte und daher weichere Teile des Hammerfilzes zum Anschlag kommen. Die alleinige Ursache der Klangänderung — wie viele Praktiker meinen — ist dies jedoch nicht, da man die Wirkung auch bei ganz neuen, noch gleichmässig weichen Hämmern wahrnimmt.

Nach Alledem muss es als sehr wunderbar erscheinen, dass die Klavierbauer noch nicht darauf gekommen sind, nicht nur die Anschlagstelle, sondern auch das Massenverhältnis, soweit es möglich, konstant, oder doch wenigstens stetig veränderlich zu machen. Die Berechnung würde allerdings etwas umständlich sein, da es sich dabei nicht um die wirkliche Hammermasse, sondern um die auf Seite 17 definierte Grösse m handelt.

3. Einfluss der Beschaffenheit des Hammers.

Es wurde schon im zweiten Teil dieser Arbeit gezeigt, dass die Bewegung während der Berührungszeit nur wenig von der Natur des Hammers abhängt. Da nun die Schwingungsform der freischwingenden Saite nur von der Bewegung während der Berührungszeit abhängig ist, so folgt daraus, dass die Saite bei einem

Anschlag mit weichem Hammer im wesentlichen dieselbe Bewegung vollführt, als wenn mit hartem Hammer angeschlagen wird. Der Unterschied besteht hauptsächlich in einem Verschwinden der schärfsten Diskontinuitäten (was gleichbedeutend ist mit einem Ausfallen der höheren Obertöne), und manchmal auch in kleinen Phasenverschiebungen, deren Ursache wohl in der etwas veränderten Berührungszeit zu suchen ist. Man kann die Schwingungsformen am besten auf Taf. III, Fig. 25a bis 28b, vergleichen.

Den Umstand, dass trotz der so geringen Verschiedenheit der von verschiedenen harten Hämmern erzeugten Schwinkungskurven dennoch der Klang der Saite, wenn sie mit einem harten Hammer angeschlagen wird, so viel unangenehmer ist, als bei einem Anschlag mit Filzhammer, kann man wohl als eine neue Bestätigung der Helmholtz'schen Annahme betrachten, dass das menschliche Ohr für die höheren Obertöne ganz besonders empfindlich ist.

Mit wenigen Worten möchte ich noch auf die Ursache des Verschwindens der schärferen Diskontinuitäten bei weichen Hämmern eingehen. Eine Ursache wurde früher schon erwähnt, nämlich, dass die Saite nur allmählich sich in Bewegung setzt; eine andere Ursache besteht aber noch darin, dass die Anschlagwelle bei jeder Reflexion an dem Hammerfilze eine Dämpfung erleidet; es müssen durch diese Einwirkung auch die kleinen Kräuselungen, wie sie durch das kürzere Saitenstück hervorgebracht werden, verschwinden (s. Taf. III, Fig. 28a und 28b).

Direkt sichtbar ist die Dämpfung in Taf. IV, Fig. 31a und 31b; bei der ersten, welche mit hartem

Hammer erzeugt ist, ist keine Dämpfung vorhanden, und die Zickzacklinie bleibt bis zum Ende scharf und eckig; bei der zweiten Figur dagegen, zu welcher ein weicher Hammer benutzt wurde, sieht man deutlich eine immer stärker werdende Abrundung.

An dieser Stelle drängt sich eine Frage auf, deren Beantwortung allerdings zum Teil in das Gebiet der Physiologie gehört:

Das Hin- und Herlaufen der Anschlagwelle auf dem kürzeren Saitenstück bedeutet doch offenbar nichts anderes, als dass das Saitenstück einen Ton von sich giebt, dessen Höhe sich zu der des Grundtones wie die Länge des Stückes zu der Länge der ganzen Saite verhält; nun ist es allerdings fraglich, ob man bei einem Ton von hoher Schwingungszahl, der aber nur wenige — etwa vier bis acht — Schwingungen wirklich ausführt, die Tonhöhe mit dem Ohre bewusst wahrnimmt. Sollte Letzteres zu bejahen sein, so würde sich daraus die Forderung ergeben, diesen „Anschlagton“ harmonisch zum Grundton zu machen. Diese Forderung lässt sich aber mit der früher aufgestellten Regel, zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$ der Saitenlänge anzuschlagen, leicht vereinigen; man schlage in $\frac{1}{8}$ an, dann ist der Anschlagton die dritte Oktave des Grundtons.

4. Einfluss der Anschlagstärke.

In den im zweiten Teil dieser Arbeit aufgestellten Gleichungen für die Bewegung des Anschlagpunktes findet sich v_0 immer nur als gemeinschaftlicher Faktor; die Gleichungen von $\frac{T}{\Theta}$ sind völlig unabhängig von v_0 .

Bestimmt man deshalb den Zustand der Saite im Moment des Hammerabfalls, so sieht man, dass sowohl die Elongationen, als auch die Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte lineare Funktionen von v_0 sind; hieraus folgt, dass bei einer Veränderung von v_0 sich sämtliche Teiltöne in demselben Verhältnis ändern, dass also die Klangfarbe unabhängig von v_0 ist; es ist wohl erlaubt, den Analogieschluss zu machen, dass dies auch in den Fällen richtig ist, wo die oben erwähnten Gleichungen keine Gültigkeit mehr haben.

Schlägt man mit weichem Hammer an, so ist die Berührungszeit nicht mehr unabhängig von v_0 ; es ist dann also die Klangfarbe in geringem Grade von der Anschlagstärke abhängig.

1. 1. 1.

Tafel I.

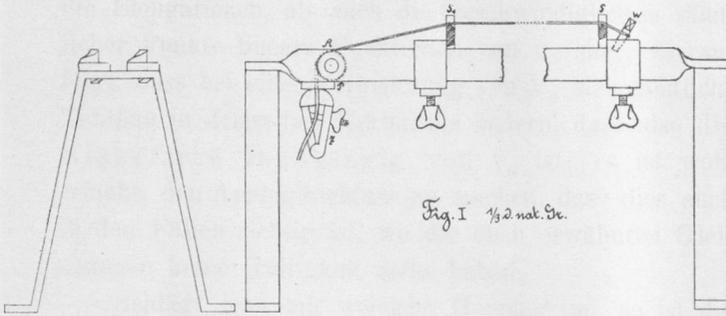


Fig. I $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

Fig. II $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

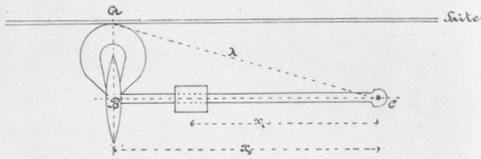


Fig. III

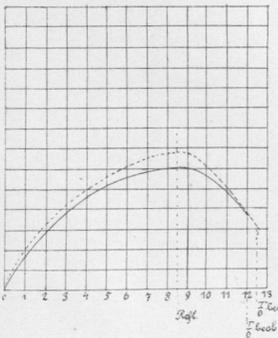
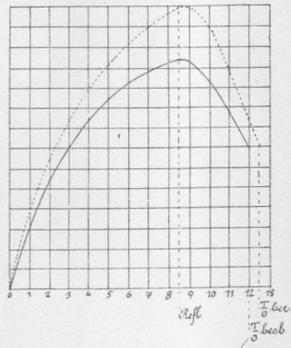


Fig. IV



Tafel II.

Fig. I.

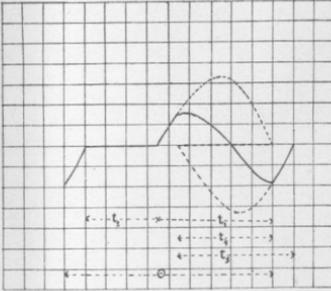


Fig. II.

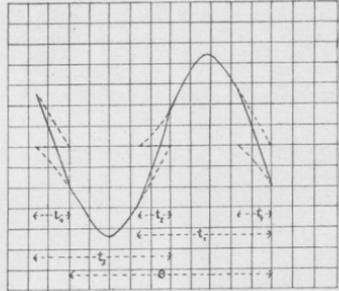


Fig. III.

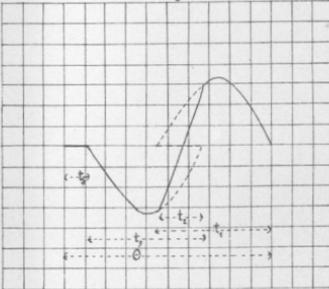


Fig. IV.

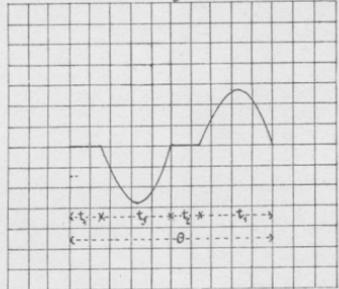


Fig. V.

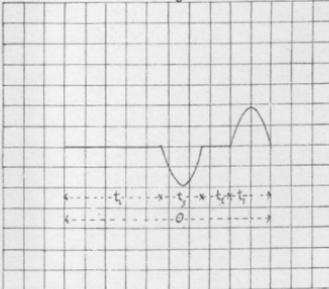
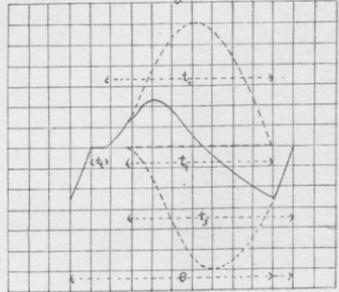
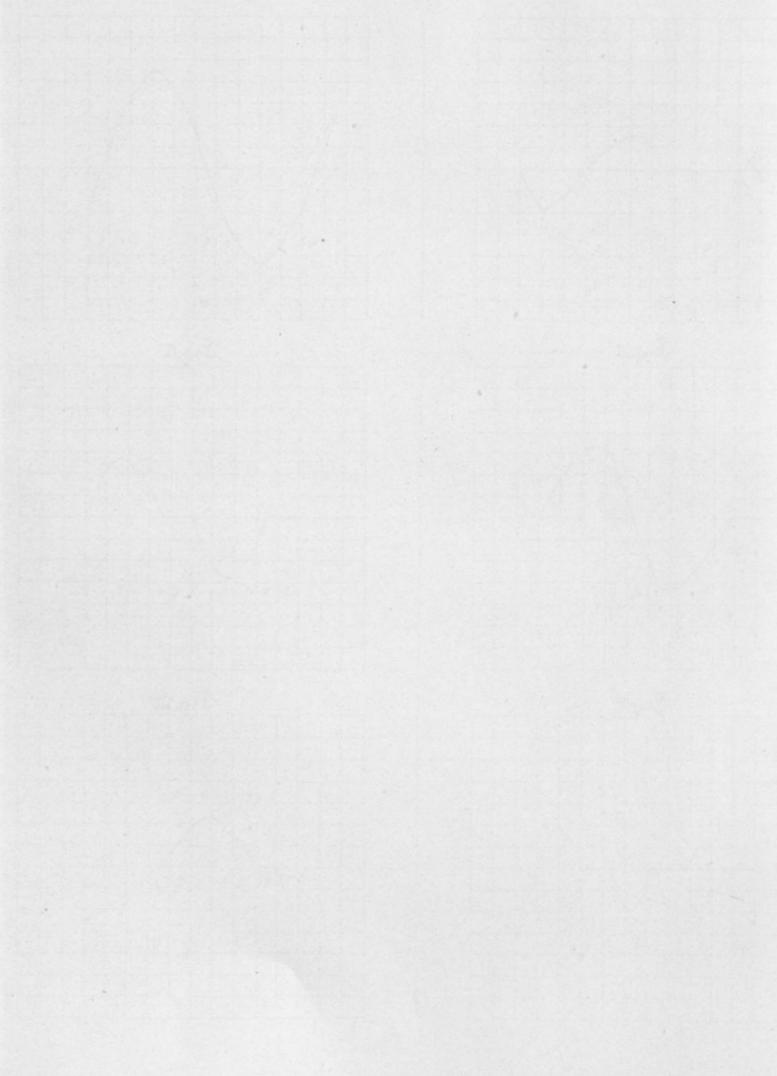
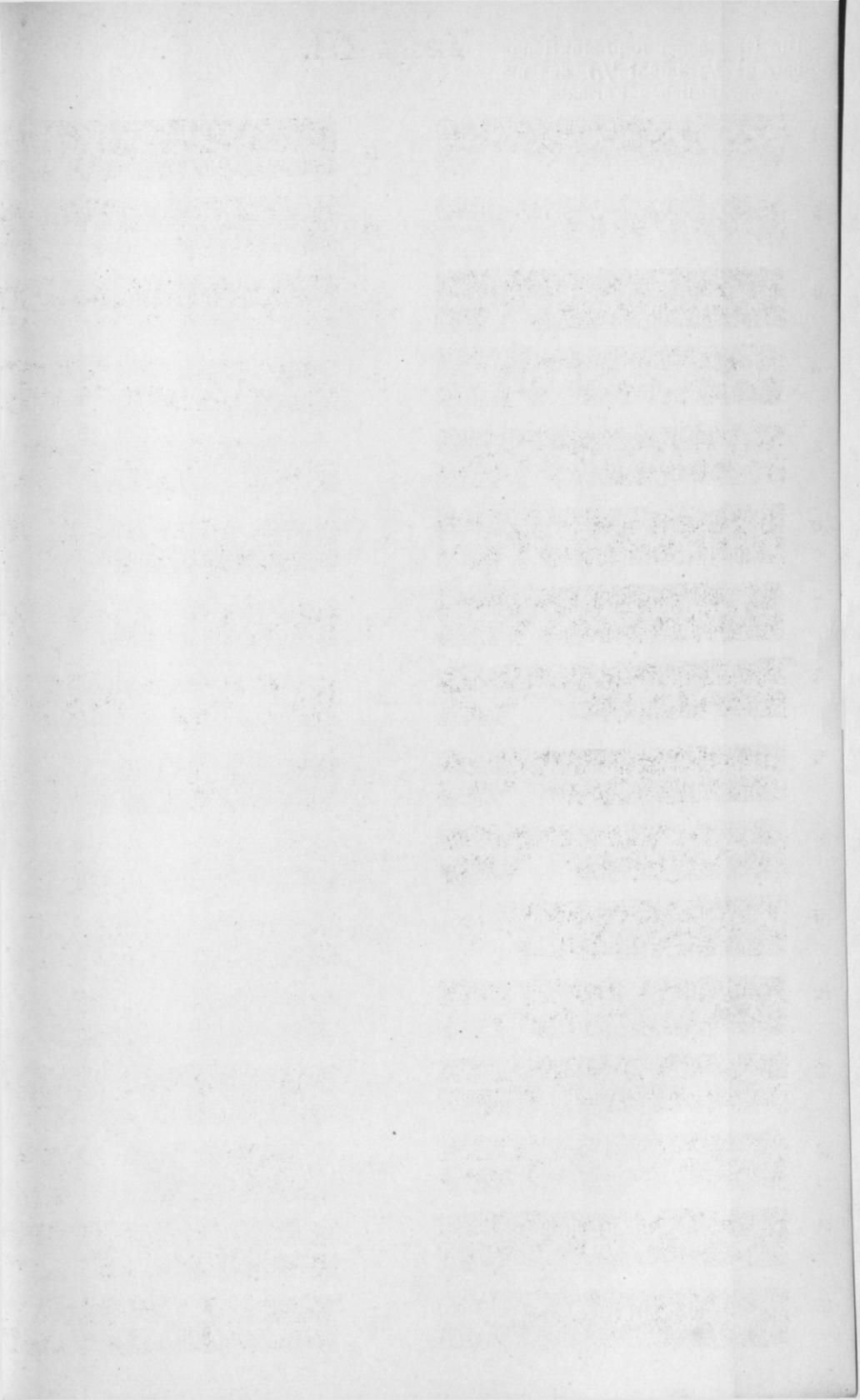


Fig. VI.



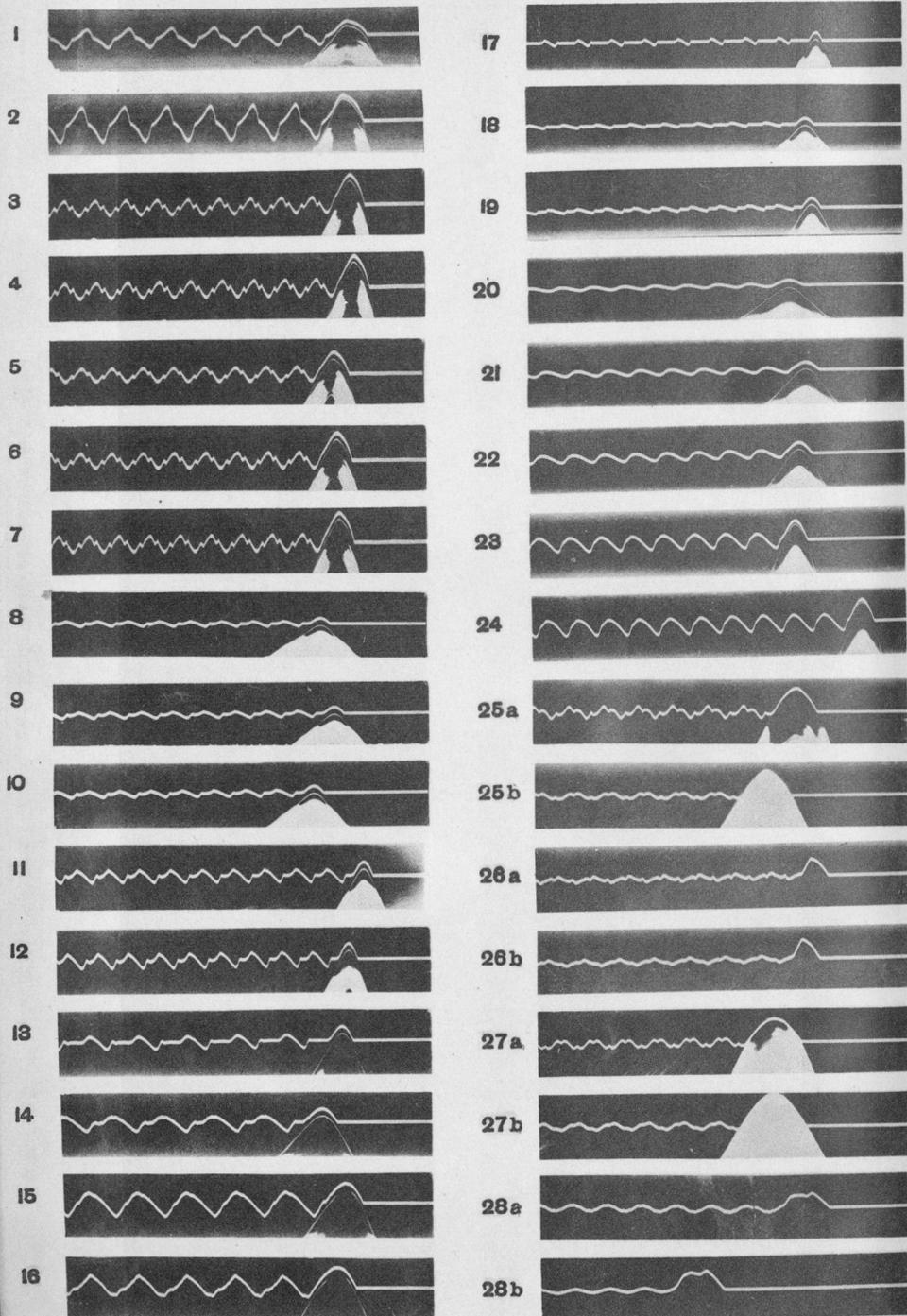
11. 29. 65



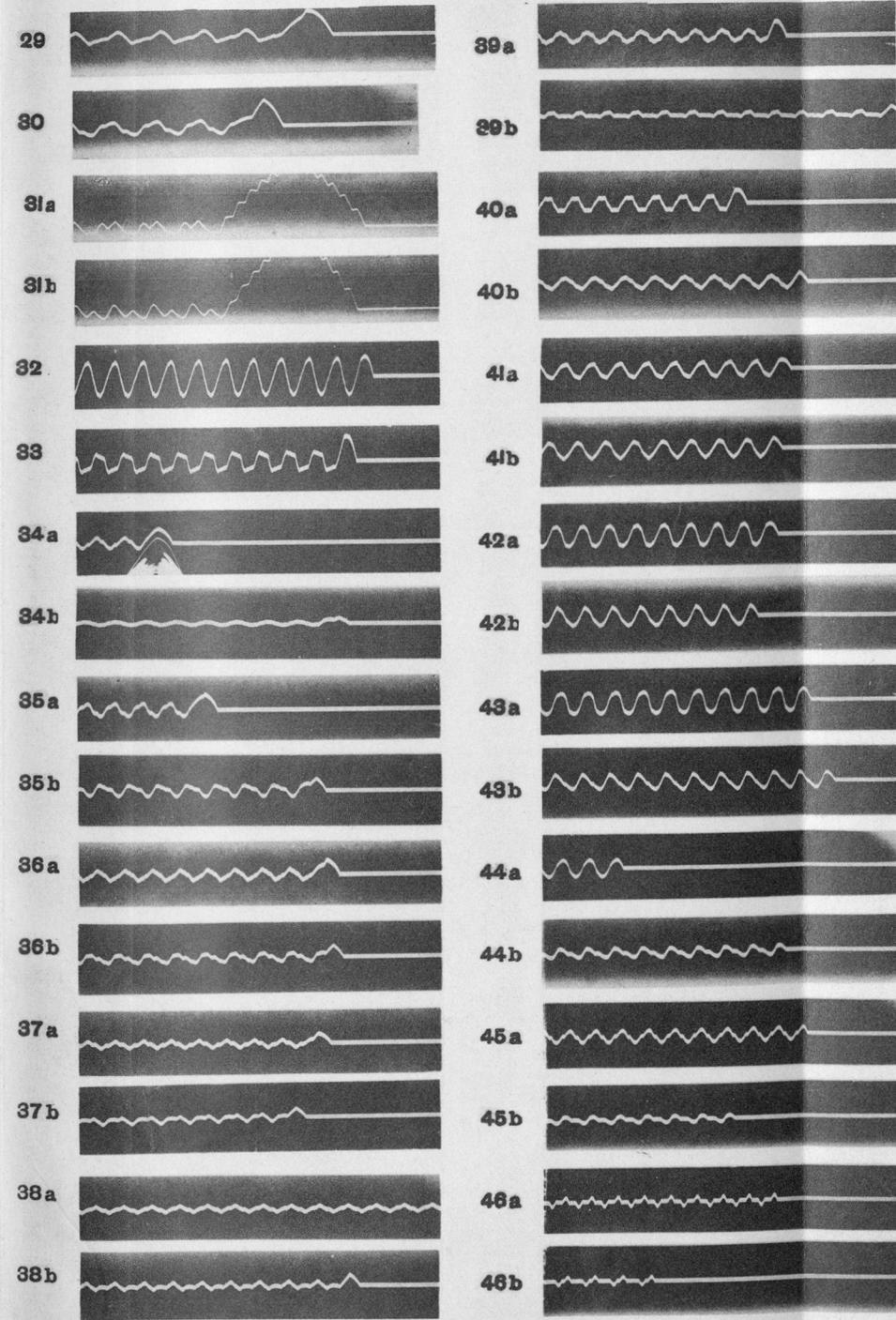


Die Grösse der Reproduktionen beträgt $\frac{2}{3}$ (nicht $\frac{1}{4}$) des ursprünglichen Formats.

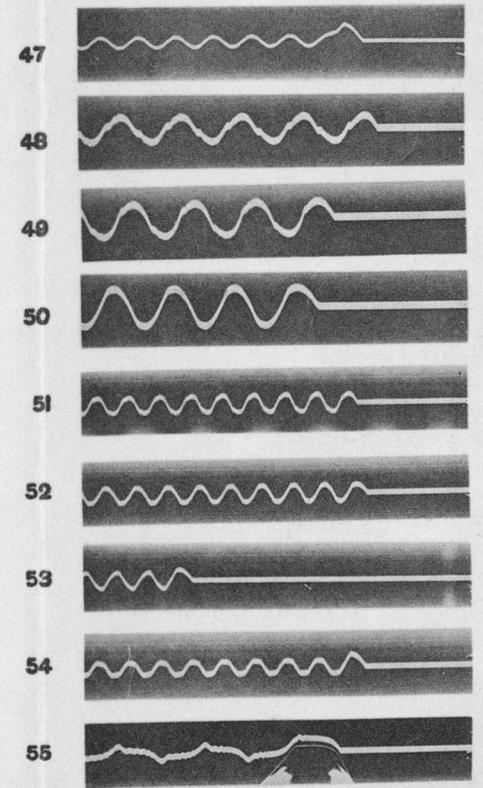
Tafel III.



Tafel IV.



Tafel V.



ie Gr
eträgt
spr



Figurentabelle.

Es bedeutet: l = Saitenlänge; a = Entfernung des Anschlagpunktes vom zunächst gelegenen Endpunkte; ξ = Entfernung des Beobachtungspunktes von demselben Endpunkte; M = Saitenmasse; m = Hammermasse (s. S. 17); Θ = Schwingungsdauer. Ein * bei m bedeutet „Filzhammer“. Masseinheiten: Centimeter, Gramm, Sekunden.

No.	l	a	ξ	M	m	$\frac{l}{a}$	$\frac{M}{m}$	$\frac{1}{\Theta}$
1	136	68	68	4,8	4,4	2	1,09	128
2	136	68	68	4,8	4,4	2	1,09	128
3	86,8	43,4	43,4	3,06	4,4	2	0,697	205
4	86,8	43,4	43,4	3,06	4,4	2	0,697	205
5	86,8	43,4	43,4	3,06	4,4	2	0,697	205
6	86,8	43,4	43,4	3,06	4,4	2	0,697	205
7	86,8	43,4	43,4	3,06	4,4	2	0,697	205
8	70	7	7	2,47	4,4	10	0,562	205
9	70	7	7	2,47	4,4	10	0,562	205
10	70	7	7	2,47	4,4	10	0,562	205
11	70	7	7	2,47	4,4	10	0,562	205
12	70	7	7	2,47	4,4	10	0,562	205
13	90	8	8	3,175	4,4	11,25	0,722	128
14	90	12	12	3,175	4,4	7,5	0,722	128
15	90	16	16	3,175	4,4	5,625	0,722	128
16	90	20	20	3,175	4,4	4,5	0,722	128
17	92	4,5	4,5	3,25	4,4	20,5	0,739	192
18	92	4,5	4,5	3,25	9,0	20,5	0,361	192
19	92	4,5	4,5	3,25	11,4	20,5	0,285	192

No.	l	a	ξ	M	m	$\frac{l}{a}$	$\frac{M}{m}$	$\frac{1}{\Theta}$
20	70	7	7	2,47	6,7*	10	0,369	205
21	70	7	7	2,47	6,7*	10	0,369	205
22	70	7	7	2,47	6,7*	10	0,369	205
23	70	7	7	2,47	6,7*	10	0,369	205
24	70	7	7	2,47	6,7*	10	0,369	205
25a	82,9	41,45	41,45	2,93	6,7	2	0,438	192
25b	82,9	41,45	41,45	2,93	6,7*	2	0,438	192
26a	82,9	20,75	41,45	2,93	6,7	4	0,438	192
26b	82,9	20,75	41,45	2,93	6,7*	4	0,438	192
27a	82,9	41,45	41,45	2,93	13,7	2	0,214	192
27b	82,9	41,45	41,45	2,93	13,7*	2	0,214	192
28a	82,9	20,75	41,45	2,93	13,7	4	0,214	192
28b	82,9	20,75	41,45	2,93	13,7*	4	0,214	192
29	80	20	26,7	3,3	9,7*	4	0,34	?
30	80	20	40	3,3	9,7*	4	0,34	?
31a	80	26,7	13,3	0,317	4,4	3	0,0722	?
31b	80	26,7	13,3	0,317	9,7*	3	0,0327	?
32	86,8	15,4	43,4	3,07	4,4	5,63	0,698	?
33	86,8	22,4	43,4	3,07	4,4	3,875	0,698	205
34a	86,8	43,4	$43,4 \left[\leq \frac{1}{2} \right]$	3,07	4,4	2	0,698	205
34b	86,8	43,4	$58 \left[\leq \frac{2}{3} 1 \right]$	3,07	4,4	2	0,698	205
35a	86,8	39,4	43,4	3,07	4,4	2,205	0,698	205
35b	86,8	39,4	58	3,07	4,4	2,205	0,698	205
36a	86,8	35,4	43,4	3,07	4,4	2,45	0,698	205
36b	86,8	35,4	58	3,07	4,4	2,45	0,698	205
37a	86,8	31,4	43,4	3,07	4,4	2,765	0,698	205
37b	86,8	31,4	58	3,07	4,4	2,765	0,698	205
38a	86,8	27,4	43,4	3,07	4,4	3,17	0,698	205
38b	86,8	27,4	58	3,07	4,4	3,17	0,698	205
39a	86,8	23,4	43,4	3,07	4,4	3,71	0,698	205
39b	86,8	23,4	58	3,07	4,4	3,71	0,698	205

No.	l	a	α	M	m	$\frac{l}{a}$	$\frac{M}{m}$	$\frac{l}{\Theta}$
40a	86,8	19,4	43,4	3,07	4,4	4,475	0,698	205
40b	86,8	19,4	58	3,07	4,4	4,475	0,698	205
41a	86,8	16,4	43,4	3,07	4,4	5,29	0,698	205
41b	86,8	16,4	58	3,07	4,4	5,29	0,698	205
42a	86,8	13,4	43,4	3,07	4,4	6,48	0,698	205
42b	86,8	13,4	58	3,07	4,4	6,48	0,698	205
43a	86,8	10,4	43,4	3,07	4,4	8,35	0,698	205
43b	86,8	10,4	58	3,07	4,4	8,35	0,698	205
44a	86,8	7,4	43,4	3,07	4,4	11,73	0,698	205
44b	86,8	7,4	58	3,07	4,4	11,73	0,698	205
45a	86,8	4,4	43,4	3,07	4,4	19,75	0,698	205
45b	86,8	4,4	58	3,07	4,4	19,75	0,698	205
46a	86,8	1,4	43,4	3,07	4,4	62,1	0,698	205
46b	86,8	1,4	58	3,07	4,4	62,1	0,698	205
47	87	29	43,5	3,07	6,7	3	0,458	205
48	125,5	16	$62,75 \left[\leq \frac{1}{2} \right]$	11,4	9,2*	7,84	1,24	96
49	125,5	16	62,75	11,4	11,7*	7,84	0,975	96
50	125,5	16	62,75	11,4	17,8*	7,84	0,641	96
51	80	11,6	$40 \left[\leq \frac{1}{2} \right]$	5,03	4,7	6,89	1,07	205
52	80	11,6	40	5,03	9,2	6,89	0,547	205
53	80	11,6	40	5,03	11,7	6,89	0,43	205
54	80	11,6	40	5,03	14	6,89	0,36	205
55	136	68	$68 \left[\leq \frac{1}{2} \right]$	12,35	4,4	2,0	2,81	64

V i t a.

Verfasser, Walter Kaufmann, wurde am 5. Juni 1871 zu Elberfeld als Sohn des Bankiers Albert Kaufmann geboren. Er besuchte das Elberfelder städtische Gymnasium bis zur Ober-Tertia und darauf, nach der Übersiedelung seiner Familie nach Berlin, das dortige Königliche Wilhelms-Gymnasium, welches er zu Ostern 1890, mit dem Reifezeugnis versehen, verliess. Nachdem derselbe dann ein halbes Jahr behufs praktischer Ausbildung in einer staatlichen Eisenbahnwerkstätte gearbeitet hatte, studierte er Maschinenbaukunde und Naturwissenschaften auf den technischen Hochschulen und Universitäten in Berlin und München. In Berlin besuchte Verfasser die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten:

Consentius, Lampe, Kossack (†), Hauck, Paalzow, Rüdorff, Koch, Slaby, Hörmann, Reuleaux, Wehage, Kundt, Planck, Fock;

in München: Voss, Sohncke, Bauschinger (†), E. Voit, Ultsch, Lommel, Boltzmann, Bauer.

Allen seinen Lehrern sagt Verfasser seinen besten Dank.

