Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 76

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 76.1. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi \colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von M. Zeige, dass φ genau dann differenzierbar ist, wenn alle Einschränkungen $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$ differenzierbar sind.

Aufgabe 76.2. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

eine Karte (also $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Zeige, dass α ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 76.3. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$f, g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen auf M. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung
$$f \times g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$
ist differenzierbar.
(2) $f + g$ ist differenzierbar.
(3) $f \cdot g$ ist differenzierbar.
(4) Wenn f keine Nullstelle besitzt, so ist auch f^{-1} differenzierbar.

Aufgabe 76.4. Es sei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Sphäre. Zeige unter Verwendung der stereographischen Karten, dass die Einschränkungen der Koordinaten x, y, z des Raumes auf die Sphäre differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 76.5. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi \colon M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^* \colon C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}),\, f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

Aufgabe 76.6. Zeige, dass zu $m \leq n$ die Einbettung des Unterraumes $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$, die durch $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ gegeben ist, beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 76.7. Zeige, dass die offene Zylinderoberfläche $S^1 \times]0,1[$ zu $S^1 \times \mathbb{R}$, zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und zu $S^2 \setminus \{N, S\}$ diffeomorph ist.

Die nächste Aufgabe verwendet folgende Definition.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt *homogen vom Grad d*, wenn für jeden Punkt $P \in \mathbb{K}^n$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$f(\lambda P) = \lambda^d f(P)$$

gilt.

Aufgabe 76.8. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare homogene Funktion, die in der Faser F über $a \neq 0$ regulär sei. Zeige, dass jede Faser zu $b \neq 0$ eine zu F diffeomorphe Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 76.9. Es sei $]a,b[$ ein offenes Intervall und

$$f\colon \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei M die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers. Zeige, dass diese Menge eine zu einem offenen Zylinder diffeomorphe Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 76.10. Zeige, dass eine Ellipsoidoberfläche und die Einheitssphäre C^∞-diffeomorph sind.

Aufgabe 76.11. Man gebe ein Beispiel einer zweidimensionalen zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und einem Punkt $P \in M$ derart, dass M und $M \setminus \{P\}$ zueinander diffeomorph sind.

Die folgenden Aufgaben sollen erläutern, warum man Mannigfaltigkeiten mit offenen Überdeckungen ansetzt.

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum M. Man sagt, dass die Folge gegen $x \in M$ *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jeder offenen Umgebung $U \subseteq M$ von x gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder x_n zu U gehören.

In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Aufgabe 76.12. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn es ein Kartengebiet von M gibt, das fast alle Glieder der Folge enthält und so, dass die entsprechende Bildfolge im Kartenbild konvergiert.

Aufgabe 76.13. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und

$$\alpha_i \colon U_i \longrightarrow V_i$$

eine Familie von Karten mit den Übergangsabbildungen

$$\varphi_{ij} = \alpha_j \circ (\alpha_i)^{-1} \colon V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j).$$

Zeige, dass man aus der Familie der V_i, $i \in I$, den Teilmengen $V_{ij} \subseteq V_i$ und den Übergangsabbildungen

$$\varphi_{ij} \colon V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$$

die Mannigfaltigkeit M rekonstruieren kann.

a) Betrachte auf

$$N := \biguplus_{i\in I} V_i$$

die Äquivalenzrelation, unter der zwei Punkte $P \in V_i$ und $Q \in V_j$ gleich sind, wenn sie unter φ_{ij} ineinander abgebildet werden.

b) Versehe die Quotientenmenge $N/\sim$ mit einer geeigneten Topologie.

c) Definiere auf $N/\sim$ Karten.

d) Zeige, dass M und $N/\sim$ homöomorph sind.

Das in der vorstehenden Aufgabe beschriebene Konstruktionsverfahren für eine Mannigfaltigkeit funktioniert für eine Familie von offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ mit Übergangsabbildungen, die die Kozykelbedingung aus Aufgabe 75.15 erfüllen. Allerdings ist der dabei entstehende topologische Raum nicht ohne weiteres ein Hausdorff-Raum. Man spricht vom *offenen Verkleben* von Räumen.

Aufgabe 76.14. Wir betrachten die reelle Gerade zweifach, also $G_1 = \mathbb{R}$ und $G_2 = \mathbb{R}$ zusammen mit der Verklebungsabbildung

$$\varphi \colon G_1 \setminus \{0\} \longrightarrow G_2 \setminus \{0\},\ x \longmapsto x^{-1}.$$

Es sei M der entstehende topologische Raum gemäß der in Aufgabe 76.13 beschriebenen Konstruktion. Zeige, dass M homöomorph zur 1-Sphäre ist.

Aufgabe 76.15. Wir betrachten die reelle Gerade zweifach, also $G_1 = \mathbb{R}$ und $G_2 = \mathbb{R}$ zusammen mit der Verklebungsabbildung

$$\mathrm{Id}\colon G_1 \setminus \{0\} \longrightarrow G_2 \setminus \{0\}.$$

Es sei M der entstehende topologische Raum gemäß der in Aufgabe 76.13 beschriebenen Konstruktion. Zeige, dass M keine Mannigfaltigkeit ist.

Aufgaben zum Abgeben

In der folgenden Aufgabe interpretiere man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 76.16. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ (z,w) \longmapsto zw.$$

Für welche Punkte $u \in \mathbb{C}$ ist die Faser über u eine Mannigfaltigkeit? Man gebe jeweils eine möglichst einfache Beschreibung des Diffeomorphietyps.

Aufgabe 76.17. (6 Punkte)

Es seien zwei Punkte P und Q auf der Einheitssphäre gegeben. Zeige, dass es einen Diffeomorphismus der Sphäre in sich gibt, der P in Q überführt.

Aufgabe 76.18. (4 (1+1+2) Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ betrachten wir die Menge $C^1(U,\mathbb{R})$ der differenzierbaren Funktionen auf U. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.

(1) Zeige, dass zu $V \subseteq U$ offen und $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ auch die Einschränkung $f|_V$ zu $C^1(V,\mathbb{R})$ gehört.
(2) Sei $f \in C^1(M,\mathbb{R})$. Zeige, dass $f = 0$ genau dann ist, wenn sämtliche Einschränkungen $f|_{U_i} = 0$ sind.
(3) Es sei eine Familie $f_i \in C^1(U_i,\mathbb{R})$ von Funktionen gegeben, die die „Verträglichkeitsbedingung“ $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i,j erfüllen. Zeige, dass es ein $f \in C^1(M,\mathbb{R})$ gibt mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle i.

Aufgabe 76.19. (5 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die mindestens zwei Elemente besitze. Zeige, dass es differenzierbare Funktionen

$$f,g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit $f,g \neq 0$, aber $fg = 0$.