Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 19

Aufgabe 19.1. Zeige, dass zu $R = K[X,Y]/(XY)$ der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ im Nullpunkt nicht frei ist.

Aufgabe 19.2. Zeige, dass es ein glattes Schema von endlichem Typ über einem Körper gibt, bei dem der Rang des Moduls der Kähler-Differentiale nicht konstant ist.

Aufgabe 19.3. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra. M ein A-Modul und $\delta\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige, dass auf jeder offenen Menge $U \subseteq \operatorname{Spek}(A)$ eine R-Derivation

$$\delta_U\colon \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \Gamma\left(U, \widetilde{M}\right)$$

existiert, die mit δ kommutiert.

Betrachte zuerst die offenen Mengen $D(f)$.

Aufgabe 19.4. Es sei X ein integres Schema über einem integren Basisschema S. Zeige, dass eine auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ definierte $p^{-1}\mathcal{O}_S$-Derivation $\delta\colon \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ eine $Q(S)$-Derivation

$$Q(X) \longrightarrow Q(X)$$

definiert.

Aufgabe 19.5. Es sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Basisschema S. Zeige, dass $\Omega_{X|S}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Aufgabe 19.6. Es sei $p\colon X \to S$ ein Schema über dem Schema S. Zeige, dass die Garbe der Kähler-Differentiale $\Omega_{X|S}$ auf X die Vergarbung der Prägarbe

$$U \longmapsto \operatorname{colim}_{V \subseteq S \text{ offen}, U \subseteq p^{-1}(V)} \Omega_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)|\Gamma(V,\mathcal{O}_S)}$$

ist.

Aufgabe 19.7. Zeige, dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{\mathbb{P}^1_R|R}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_R$ über einem kommutativen Ring R isomorph zur getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(-2)$ ist.

Aufgabe 19.8. Betrachte die Tangentialgarbe $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_R,R}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_R$ über einem kommutativen Ring R mit der Isomorphie

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_R,R} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2).$$

Bestimme die globalen Schnitte von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2)$, die den globalen Derivationen $X\frac{\partial}{\partial X}$, $Y\frac{\partial}{\partial X}$, $X\frac{\partial}{\partial Y}$, $Y\frac{\partial}{\partial Y}$ entsprechen.

Aufgabe 19.9. Bestimme auf der projektiven Ebene

$$\mathbb{P}^2_K = \operatorname{Proj}\left(K[X,Y,Z]\right)$$

die Ableitung $Y\frac{\partial f}{\partial X}$ zur rationalen Funktion $f = \frac{XY-YZ+3Z^2-X^2}{4X^2-YZ}$. Auf welcher offenen Teilmenge sind f und $Y\frac{\partial f}{\partial X}$ definiert?

Aufgabe 19.10.*

Wie betrachten die Kurve

$$C = V_+(X^3+Y^3+Z^3) \subseteq \mathbb{P}^1_K$$

über einem Körper der Charakteristik $\neq 3$. Zeige, dass die Differentialformen

$$\frac{X^2}{Y^2}d\frac{Z}{X} \text{ auf } D_+(XY),\ \frac{Y^2}{Z^2}d\frac{X}{Y} \text{ auf } D_+(YZ) \text{ und } \frac{Z^2}{X^2}d\frac{Y}{Z} \text{ auf } D_+(XZ),$$

auf den Durchschnitten übereinstimmen und daher eine nichttriviale Differentialform auf der Kurve C definieren.

Aufgabe 19.11. Drücke die Einschränkungen der globalen Derivationen $X_i\frac{\partial}{\partial X_j}$ des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}\left(R[X_0,X_1,\ldots,X_n]\right)$ auf die offene Teilmenge

$$D_+(X_0) = \operatorname{Spek}\left(R[Y_1,\ldots,Y_n]\right) \subseteq \mathbb{P}^n_R$$

(mit $Y_k = \frac{X_k}{X_0}$) als Linearkombinationen der Form $\sum_{k=1}^n g_k\frac{\partial}{\partial Y_k}$ mit $g_k \in R[Y_1,\ldots,Y_n]$ aus.

Aufgabe 19.12. Wir betrachten die Fermat-Kubik in vier Variablen, also

$$V = V_+(X^3+Y^3+Z^3+W^3) \subseteq \mathbb{P}^3_K$$

und den affinen Ausschnitt

$$U = D_+(W)\cap V = \operatorname{Spek}\left(K[X,Y,Z]/(X^3+Y^3+Z^3+1\right)$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 3$. Zeige, dass durch

$$x(s,t) = \frac{3t-\frac{1}{3}(s^2+st+t^2)^2}{t(s^2+st+t^2)-3},$$

$$y(s,t) = \frac{3s + 3t + \frac{1}{3}(s^2 + st + t^2)^2}{t(s^2 + st + t^2) - 3}$$

und

$$z(s,t) = \frac{-3 - (s^2 + st + t^2)(s + t)}{t(s^2 + st + t^2) - 3}$$

eine rationale Parametrisierung

$$K^2 \longrightarrow U$$

gegeben ist.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5