Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Definiere auf der Menge der Wörter zum einelementigen Alphabet $A = \{|\}$ ein Dedekind-Peano-Modell. Worauf beruht die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 12.2. Zeige ausgehend von den Dedekind-Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

Aufgabe 12.3. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} | \, x \geq n\}$$

ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgeabbildung) erfüllt.

Aufgabe 12.4. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' \colon M \to M$ an, die je zwei der Dedekind-Peano-Axiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 12.5. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Addition durch die Bedingungen

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 12.6. Zeige, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ und assoziativ ist und dass die Abziehregel (d.h., dass aus $n+k = m+k$ für ein k stets $n = m$ folgt) gilt.

Aufgabe 12.7. Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle der natürlichen Zahlen. Es sei

$$\varphi \colon N_1 \longrightarrow N_2$$

der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\varphi(0_1) = 0_2$ und $\varphi(n') = (\varphi(n))'$ für alle $n \in N_1$. Zeige, dass φ die Addition respektiert, dass also

$$\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n)$$

für alle $m, n \in N_1$ gilt.

Aufgabe 12.8. Wie verhält sich die über die Nachfolgerbeziehung eingeführte Addition auf den natürlichen Zahlen (das *Umlegungsmodell*) zu dem *Vereinigungsmodell*, dass die Summe $a + b$ zweier natürlichen Zahlen sich als Anzahl von Objekten (Äpfel) ergibt, wenn man eine Menge von a Objekten und eine Menge von (dazu disjunkten) b Objekten zusammenschmeißt.

Aufgabe 12.9. Begründe, dass die Addition von natürlichen Zahlen im Dezimalsystem (das *schriftliche Addieren*) das Umlegungsprinzip respektiert und auch die 0 richtig verarbeitet. Schließe daraus, dass die schriftliche Addition korrekt ist.

Aufgabe 12.10. Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Multiplikation durch die Bedingungen

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 12.11. Definiere auf einem Dedekind-Peano-Modell $(\mathbb{N}, 0, ')$ für die natürlichen Zahlen die Abbildung $Q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv durch die Bedingungen (die Addition sei mit den wesentlichen Eigenschaften etabliert)

$$Q(0) = 0$$

und

$$Q(n') = Q(n) + n + n + 1.$$

Zeige

$$Q(n) = n \cdot n.$$

Aufgabe 12.12. Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

$$nRm \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen). Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$ ergibt und skizziere exemplarisch diese Ordnung.

Zeige ferner, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}$, $n^\star \neq n$, derart gibt, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren). Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Dedekind-Peano-Axiome?

AUFGABE 12.13. Betrachte die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Nachfolgerfunktion

$$(a, b)' := (a, b')$$

und der sogenannten *lexikographische Ordnung*, für die

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$$

genau dann gilt, wenn $a_1 < a_2$ oder $a_1 = a_2$ und $b_1 \leq b_2$ ist. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es handelt sich um eine totale Ordnung.
(2) Es ist
$$x' \geq x$$
für alle $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(3) $(0, 0)$ ist das kleinste Element.
(4) Es liegt eine Wohlordnung (nach unten) vor.
(5) Diese Menge mit der Nachfolgerfunktion erfüllt nicht das Dedekind-Peano-Induktionsaxiom

AUFGABE 12.14. Es sei M die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{N}$ und aus $\mathbb{Z}$.[1] Wir definieren auf M eine Nachfolgerfunktion, die auf den beiden Bestandteilen durch den üblichen Nachfolger gegeben ist (also durch $+1$), und wir betrachten die $0 \in \mathbb{N}$ als die Null von M.

a) Zeige, dass M die ersten beiden Axiome aus den erststufigen Peano-Axiomen für die Nachfolgerfunktion erfüllt.

b) Zeige, dass es keine Addition auf M gibt, die mit den Additionen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathbb{Z}$ übereinstimmt und für die die Abziehregel gilt.

c) Gilt das erststufige Induktionsaxiom (formuliert für die Nachfolgerfunktion)?[2]

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.15. (5 Punkte)

Sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ das Ziffernalphabet. Definiere die Teilmenge $N \subseteq A^*$, die aus den korrekt gebildeten Ziffernddarstellungen einer natürlichen Zahl besteht. Definiere auf N eine Nachfolgerabbildung und zeige, dass N zu einem Dedekind-Peano-Modell wird. Worauf beruht die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome?

[1] Dabei muss man darauf achten, die Elemente aus $\mathbb{N}$ nicht mit denen aus $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ zu verwechseln. Beispielsweise kann man die Elemente einerseits mit 5 und andererseits mit $5_{\mathbb{Z}}$ bezeichnen.

[2] Diese Aufgabe ist wohl schwierig.

Aufgabe 12.16. (7 Punkte)

Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 12.7 festgelegten Multiplikation. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.

(2)
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, d.h. $1 = 0'$ ist das neutrale Element für die Multiplikation.

(3)
$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(4) Die Multiplikation ist kommutativ.

(5) Die Multiplikation ist assoziativ.

(6) Aus einer Gleichung $n \cdot k = m \cdot k$ mit $k \neq 0$ folgt $n = m$ (*Kürzungsregel*).

(7) Für beliebige $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$
(Distributivgesetz).

Aufgabe 12.17. (3 Punkte)

Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle der natürlichen Zahlen. Es sei
$$\varphi \colon N_1 \longrightarrow N_2$$
der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\varphi(0_1) = 0_2$ und $\varphi(n') = (\varphi(n))'$ für alle $n \in N_1$. Zeige, dass φ die Multiplikation respektiert, dass also
$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$
für alle $m, n \in N_1$ gilt.

Aufgabe 12.18. (3 Punkte)

Es sei $(N, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass das erststufige Axiomenschema für die Induktion in N gilt.