

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

AUFGABE 11.1. Wir betrachten die Untergruppe $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{Q}, 0, +)$ und die zugehörige Äquivalenzrelation (im Sinne von Definition 11.1).

- (1) Welche der folgenden rationalen Zahlen sind zueinander äquivalent

$$7, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{9}{7}, -13 \text{ ?}$$

- (2) Was ist ein möglichst einfaches Repräsentantensystem für diese Äquivalenzrelation?
(3) Was hat das mit gemischten Brüchen zu tun?

AUFGABE 11.2. Wir betrachten die Untergruppe $H = \{10^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq (\mathbb{Q}_+, 1, \cdot)$ und die zugehörige Äquivalenzrelation (im Sinne von Definition 11.1).

- (1) Welche der folgenden rationalen Zahlen sind zueinander äquivalent

$$100, \frac{1}{7}, \frac{10}{7}, 101, \frac{1}{10}, \frac{7}{10} \text{ ?}$$

- (2) Bilden die natürlichen Zahlen ein Repräsentantensystem für diese Äquivalenzrelation?
(3) Was hat das mit der Dezimalentwicklung von rationalen Zahlen zu tun?

AUFGABE 11.3. Es seien $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen $\neq 0$. Zeige, dass diese genau dann äquivalent bezüglich der durch die Untergruppe $(\mathbb{Q}^\times, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot)$ gegebenen Äquivalenzrelation sind, wenn es eine reelle Zahl $t \neq 0$ und ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $r = bt$ und $s = at$ gibt.

AUFGABE 11.4. Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

- (1) $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(2) $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.

- (3) $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$.
 (4) $(\mathbb{Z}d, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$ (zu $d \in \mathbb{N}$).
 (5) $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$.
 (6) $(\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot)$ (zu $n \in \mathbb{N}$).

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

AUFGABE 11.5.*

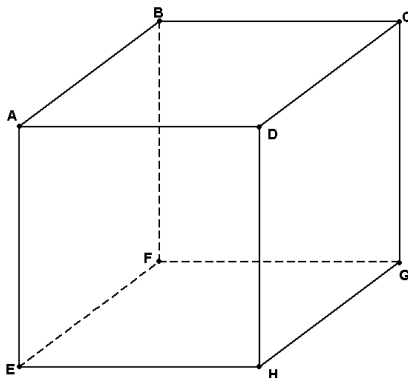
Es sei p eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung p . Zeige, dass G eine zyklische Gruppe ist.

AUFGABE 11.6.*

Es sei R ein kommutativer Ring mit p Elementen, wobei p eine Primzahl sei. Zeige, dass R ein Körper ist.

AUFGABE 11.7. Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(15)$.

AUFGABE 11.8. Es sei $G = S_3$ die Permutationsgruppe zu einer dreielementigen Menge. Welche Zahlen treten als Ordnungen von Untergruppen und welche als Ordnungen von Elementen auf?



Eine *eigentliche Würfelsymmetrie* ist eine Bewegung an einem Würfel, die ihn in sich selbst überführt.

AUFGABE 11.9. Welche Zahlen treten als Ordnungen von eigentlichen Würfelsymmetrien auf? Beschreibe die Wirkungsweise der Symmetrie auf den Eckpunkten, den Kanten und den Seiten des Würfels sowie auf den Raumdiagonalachsen, den Seitenmittelpunktsachsen und den Kantenmittelpunktsachsen.

AUFGABE 11.10.*

Es seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

AUFGABE 11.11. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern N_i , $i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

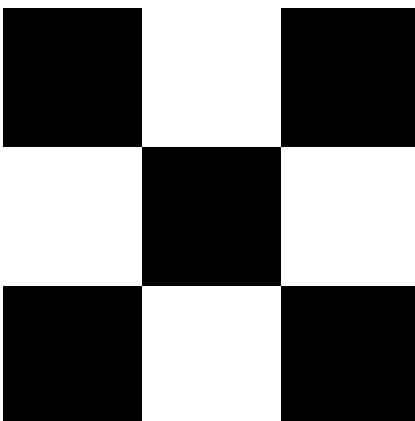
AUFGABE 11.12. Es seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ist das Bild von φ ein Normalteiler in H ?

In den folgenden Aufgaben werden Äquivalenzrelationen wiederholt.

AUFGABE 11.13. Auf den ganzen Zahlen \mathbb{Z} lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?



AUFGABE 11.14. Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8 -Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3 -Schachbrett aus?

AUFGABE 11.15. Es sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

- (1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (6) Es sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (8) Es sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

AUFGABE 11.16. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V , die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

AUFGABE 11.17. (2 Punkte)

Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(20)$.

AUFGABE 11.18. (3 Punkte)

Es sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von \mathbb{Z} ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\text{ord}_x \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\text{ord}(\sigma) = \text{kgV} \{\text{ord}_x \sigma \mid x \in M\}.$$

AUFGABE 11.19. (4 Punkte)

Es sei $G = S_4$ die Permutationsgruppe zu einer vierelementigen Menge. Welche Zahlen treten als Ordnungen von Untergruppen und welche als Ordnungen von Elementen auf?

AUFGABE 11.20. (2 Punkte)

Es seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

AUFGABE 11.21. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

AUFGABE 11.22. (2 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und sei M eine Menge mit einer Verknüpfung. Es sei

$$\varphi: G \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Zeige, dass M eine Gruppe und φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 11.23. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von drei Untergruppen $F \subseteq G \subseteq H$ an derart, dass F ein Normalteiler in G und G ein Normalteiler in H , aber F kein Normalteiler in H ist.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Snijden kruisen evenwijdig.png , Autor = Benutzer MADe auf nl.wikipedia, Lizenz = cc-by-sa 3.0 2
- Quelle = TwoTone.svg , Autor = Benutzer Stevo auf Commons, Lizenz = PD 3
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7