Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 34

Unterräume

Definition 34.1. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $U \subseteq K^n$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Eine Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in U$ heißt wieder ein *Erzeugendensystem* von U, wenn man jeden Vektor aus U als eine Linearkombination $u = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i$ schreiben kann, und eine *Basis* von U, wenn darüber hinaus diese Darstellung eindeutig ist. Mit einem Erzeugendensystem kann man einen Untervektorraum U in der Form

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{k} s_i v_i | \, s_i \in K \right\}$$

beschreiben. Umgekehrt definiert dabei die rechte Seite stets einen Untervektorraum, der der von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ *erzeugte Untervektorraum* heißt. Er wird mit $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ bezeichnet.

Lemma 34.2. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 34.5. □

Für einen Untervektorraum $U \subseteq K^n$ gibt es grundsätzlich zwei Beschreibungsmöglichkeiten: Als Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems und als ein von Vektoren erzeugter Untervektorraum. Durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems wird die zuerst genannte Darstellungsmöglichkeit in die zweite Darstellungsmöglichkeit umgewandelt. Man nennt zu einem homogenen linearen Gleichungssystem Lösungen $v_1, \ldots, v_k$ *Basislösungen*, wenn man jede Lösung eindeutig als Linearkombination dieser Basislösungen darstellen kann.

Definition 34.3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Eine Teilmenge $S \subseteq K^n$ heißt (affiner) *Unterraum*, wenn (S leer ist oder) es einen Untervektorraum $U \subseteq K^n$ und einen Punkt $P \in K^n$ mit

$$S = P + U = \{P + v | \, v \in U\}$$

gibt.

Statt von einem Unterraum spricht man auch von einem *affinen Unterraum.* Der Punkt P heißt ein *Aufpunkt* des Raumes und U heißt der zugehörige Untervektorraum. Ein Unterraum ist ein in eine bestimmte Richtung parallel verschobener Untervektorraum, wobei der Aufpunkt den Verschiebungsvektor bezeichnet.

Lemma 34.4. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge S aller Lösungen des Gleichungssystems ein (affiner) Unterraum des K^n. Dabei kann man jede Lösung $P \in S$ als Aufpunkt nehmen, und der zugehörige Untervektorraum ist der Lösungsraum zum zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystem.

Beweis. Sei die Lösungsmenge S nicht leer und sei $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in S$ ein beliebig gewählter Punkt. Es sei U der Lösungsraum zum zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystem, der nach Lemma 34.2 ein Untervektorraum von K^n ist. Wir müssen die Mengengleichheit $S = P + U$ zeigen. Wenn $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in U$ ist, so bedeutet dies

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = 0$$

für alle $i = 1, \ldots, m$. Für $P + v = \begin{pmatrix} p_1 + v_1 \\ \vdots \\ p_n + v_n \end{pmatrix}$ ist dann

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(p_j + v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = c + 0 = c,$$

also ist dieser Punkt eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und somit ist $P + v \in S$. Wenn umgekehrt $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in S$ eine Lösung ist, so ist

$$Q - P = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

und diese Differenz erfüllt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(q_j - p_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j = c - c = 0.$$

Also ist $Q - P \in U$ und somit $Q = P + (Q - P) \in P + U$. $\square$

Wenn man also die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems beschreiben möchte, so nimmt man eine spezielle Lösung als Aufpunkt und eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Der leere Raum und jeder einzelne Punkt ist für sich ein affiner Unterraum. Richtig interessant wird es mit Geraden.

Definition 34.5. Unter einer *Geraden (in Punktvektorform)* versteht man einen affinen Unterraum $G \subseteq K^n$ der Form

$$G = P + Kv = \{P + sv \mid s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor $v \in K^n$ und einem Aufpunkt $P \in K^n$.

Man spricht auch von der *Punktrichtungsform* oder der Parameterdarstellung der Geraden, wobei das s als Parameter bezeichnet wird. Für eine Gerade gibt es stets die bijektive Abbildung

$$K \longrightarrow G,\ s \longmapsto P + sv,$$

die auch eine *Parametrisierung* der Geraden heißt.

Geraden in der Ebene

Wir besprechen die vorstehenden Begriffe und Aussagen in niedrigen Dimensionen.

Wir betrachten Geraden in der Ebene K^2. Unter der *Gleichungsform* einer Geraden in der Ebene versteht man eine lineare Gleichung der Form

$$ax + by = c$$

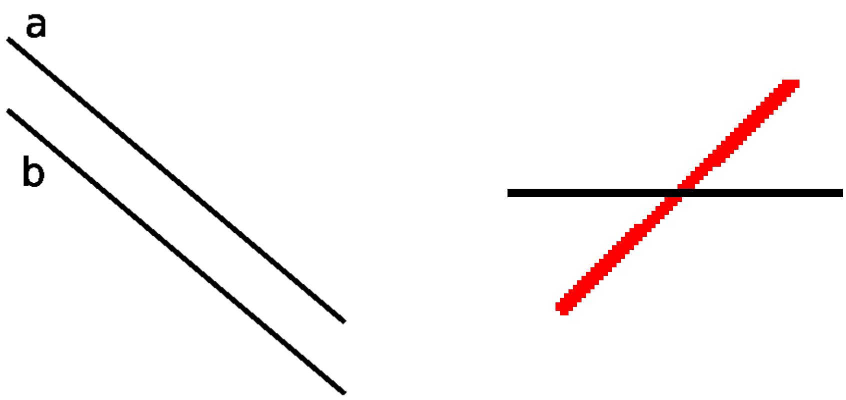
mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Es ist einfach, aus der Gleichungsform eine Punktrichtungsform zu erhalten.

KOROLLAR 34.6. *Es sei K ein Körper und sei*

$$ax + by = c$$

eine lineare Gleichung in zwei Variablen über K mit $(a, b) \neq 0$. Dann ist die Lösungsmenge eine Gerade in K^2. Als Richtungsvektor kann man den Vektor $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ nehmen.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 34.4, da $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ eine Basislösung der zugehörigen homogenen linearen Gleichung $ax + by = 0$ ist. □



KOROLLAR 34.7. *Es seien im K^2 zwei Geraden G und H in Gleichungsform durch*

$$ax + by = c$$

bzw.

$$rx + sy = d$$

(mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(r, s) \neq (0, 0)$) gegeben. Dann ist der Durchschnitt $G \cap H$ der beiden Geraden die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, das aus diesen beiden Gleichungen besteht. Dabei gibt es die drei Möglichkeiten:

(1) *Es ist $G = H$.*
(2) *Es ist $G \cap H = \emptyset$.*
(3) *Der Durchschnitt besteht aus einem einzigen Punkt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 34.15. □

Im zweiten Fall (manchmal auch im ersten Fall) spricht man von *parallelen Geraden*. Der dritte Fall tritt genau dann ein, wenn zwischen (a, b) und (r, s) keine Vielfachheitsbeziehung besteht.

Beispiel 34.8. Wir berechnen zu den durch

$$4x - 7y = 13$$

bzw.

$$5x - 8y = -9$$

gegebenen Geraden den Durchschnitt. Wenn man von der zweiten Gleichung das $\frac{5}{4}$-fache der ersten Gleichung abzieht, so erhält man

$$\left(-8 + \frac{5}{4} \cdot 7\right) y = -9 - \frac{5}{4} \cdot 13,$$

also

$$\frac{3}{4} y = -\frac{101}{4}$$

und somit

$$y = -\frac{101}{3}$$

und

$$x = -\frac{167}{3}.$$

Der Durchschnitt besteht also aus einem einzigen Schnittpunkt mit den Koordinaten $\left(-\frac{167}{3}, -\frac{101}{3}\right)$.

Geraden und Ebenen im Raum

Definition 34.9. Unter einer *Ebene* (in Punktvektorform oder Parameterform) versteht man einen affinen Unterraum $E \subseteq K^n$ der Form

$$E = P + Kv + Kw = \{P + sv + tw |\, s, t \in K\}$$

mit zwei Vektoren $v, w \in K^n$, die kein Vielfaches voneinander[1] sind, und einem Aufpunkt $P \in K^n$.

Dabei heißen hier die Zahlen s, t die Parameter. Für eine Ebene gibt es stets die bijektive Abbildung

$$K^2 \longrightarrow G,\ (s, t) \longmapsto P + sv + tw,$$

die auch eine *Parametrisierung* der Ebene heißt. Die Bijektivität beruht dabei darauf, dass keine Vielfachheitsbeziehung zwischen den Richtungsvektoren v und w besteht.

[1]D.h. dass weder v noch w der Nullvektor ist und dass der eine Vektor nicht ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

Lemma 34.10. *Es sei K ein Körper und sei*

$$ax + by + cz = d$$

eine lineare Gleichung in drei Variablen über K mit $(a, b, c) \neq 0$. Dann ist die Lösungsmenge eine Ebene im K^3. Wenn $a \neq 0$ ist, so kann man als Richtungsvektoren die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ *nehmen.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 34.4 und daraus, dass die beiden angegebenen Vektoren offenbar Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Gleichung sind, die wegen $a \neq 0$ kein Vielfaches voneinander sind. Man kann auch jede Lösung als Linearkombination dieser beiden Lösungen schreiben, es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{y}{a} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{z}{a} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}.$$

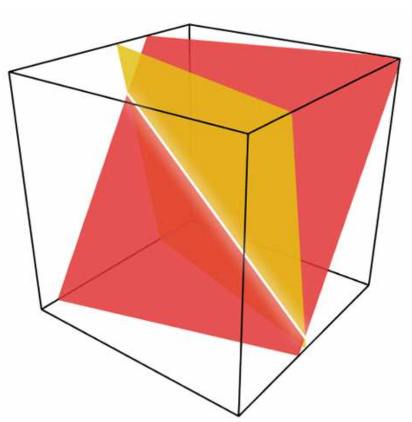
Also handelt es sich um Basislösungen. □

Beispiel 34.11. Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 | \, 5x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Nach Lemma 34.10 hat diese Ebene in Punktrichtungsform die Beschreibung

$$E = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} | \, r, s \in \mathbb{Q} \right\}.$$



Zwei Ebenen im Raum, die sich in einer Geraden schneiden.

BEISPIEL 34.12. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 | \, 5x - y + 3z = 0 \right\}$$

(aus Beispiel 34.11) und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 | \, 4x + 2y - 7z = 0 \right\}$$

und interessieren uns für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 | \, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 2y - 7z = 0 \right\}.$$

Ein Punkt liegt genau dann im Durchschnitt, wenn er simultan beide Bedingungen, also beide Gleichungen (nennen wir sie I und II), erfüllt, es geht also um die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x \quad - y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y - 7z &= 0\,. \end{aligned}$$

Mit dem Eliminationsverfahren erhält man die Gleichung

$$4I - 5II = -14y + 47z = 0.$$

Daher ist

$$y = \frac{47}{14} z$$

und

$$x = \frac{1}{5} y - \frac{3}{5} z = \frac{1}{5} \cdot \frac{47}{14} z - \frac{3}{5} z = \frac{47}{70} z - \frac{42}{70} z = \frac{1}{14} z$$

sein. Somit ist

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{14} z \\ \frac{47}{14} z \\ z \end{pmatrix} | \, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir besprechen ein geometrisches Beispiel ähnlich zu Beispiel 34.12, wobei jetzt die Gleichungen nicht homogen sehen müssen.

BEISPIEL 34.13. Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Ebenen

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, 4x - 2y - 3z = 5 \right\}$$

und

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, 3x - 5y + 2z = 1 \right\}$$

gegeben. Wie kann man die Schnittgerade $G = E \cap F$ beschreiben? Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt genau dann auf der Schnittgerade, wenn er die beiden *Ebenengleichungen* erfüllt; es muss also sowohl

$$4x - 2y - 3z = 5 \text{ als auch } 3x - 5y + 2z = 1$$

gelten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3 und ziehen davon das 4-fache der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$14y - 17z = 11\,.$$

Wenn man $y = 0$ setzt, so muss $z = -\frac{11}{17}$ sein und $x = \frac{13}{17}$. D.h. der Punkt $P = \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right)$ gehört zu G. Ebenso findet man, indem man $z = 0$ setzt, den Punkt $Q = \left(\frac{23}{14}, \frac{11}{14}, 0\right)$. Damit ist die Schnittgerade die Verbindungsgerade dieser Punkte, also

$$G = \left\{ \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right) + t\left(\frac{209}{238}, \frac{11}{14}, \frac{11}{17}\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Abbildungsverzeichnis