代微積拾級

代

TA 7060/6340 (V.1)

THE CHINESE-JAPANESE LIBRARY
OF THE HARVARD-YENCHING INSTITUTE
AT HARVARD UNIVERSITY

JUN 11 1954

Exchange fr. Yale

ALGEBRAIC GEOMETRY, WITH DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS.

The present work, which is a translation of Loomis' ANALYTICAL GEOMETRY, AND DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS, is issued in pursuance of a project formed some time since, as the continuation of a course of mathematics, the first of which, a Compendium of Arithmetic, was published by the undersigned in 1854. The next in order is a Treatise on Algebra, which should have preceded this, but in consequence of unavoidable delays in the publication, it will not be issued till some weeks later. A tolerable acquaintance with the last-named treatise, will put the student in a position to understand the work now presented to the public. Although this is the first time that the principles of Algebraic Geometry have been placed before the Chinese (so far as the translator is aware), in their own idiom, yet there is little doubt that this branch of the science will commend itself to native mathematicians, in consideration of its obvious utility; especially when we remember the readiness with which they adopted Euclid's Elements of Geometry, Computation by Logarithms, and other novelties of European introduction. A spirit of inquiry is abroad among the Chinese, and there is a class of students in the empire, by no means small in number, who receive with avidity instruction on scientific matters from the West. Mere superficial essays and popular digests are far from adequate to satisfy such applicants; and yet when anything beyond that is attempted, the want of a common medium of communication at once appears as an insuperable obstacle; and it is evident that how clearly soever we may be enabled to lay results before the native mind, yet until they understand something of the processes by which such results are obtained, thinkers of the above class can scarcely be supposed to appreciate the achievements of modern science, to repose absolute confidence in the results, or to rest satisfied till they are in a position to some extent to verify the statements which are laid before them. It is hoped that the present translation will in some measure supply what is now a desideratum; and the translator, while taking this opportunity to testify to the exceeding care and accuracy displayed in the work of Professor Loomis, considers it is but justice to the native scholar Le Shen-lan, who has assisted in the translation throughout, to state that whatever degree of perfection this version may have attained, is almost entirely due to his efforts and talents.

A list of technical terms used in the works above-named is subjoined.

Abbreviated expression 簡式 *Këën shĭh.*
Abscissa 橫線 *Hwăng sëën.*
Acute angle 銳角 *Jûy këŏ.*
Add 加 *Këa.*
Addition 加法 *Këa fă.*
Adjacent angle 旁角 *Pang këŏ.*
Algebra 代數學 *Taé soó hëŏ.*
Algebraic curve 代數曲線 *Taé soó k'eŭh sëën.*
Altitude 高 *Kaou,* 股 *Koò,* 中垂線 *Chung ch'uy sëën.*
Anomaly 奇式 *K'e shĭh.*
Answer 答 *Tă.*
Antecedent 前率 *Tsëên sŭh.*
Approximation 密率 *Meĭh sŭh.*
Arc 弧 *Hoo.*
Area 面積 *Mëén tseĭh.*
Arithmetic 數學 *Soó hëŏ.*
Asymptote 漸近線 *Tsëèn k'ìn sëën.*
Axiom 公論 *Kung lún.*
Axis 軸 *Ch'ŭh,* 軸線 *Ch'ŭh sëën.*
Axis major 長徑 *Ch'âng king,* 長軸 *Ch'âng ch'ŭh.*
Axis minor 短徑 *Twàn king,* 短軸 *Twàn ch'ŭh.*
Axis of abscissas 橫軸 *Hwăng ch'ŭh.*
Axis of coordinates 縱橫軸 *Tsúng hwăng ch'ŭh.*
Axis of ordinates 縱軸 *Tsúng ch'ŭh.*
Base 底 *Tè,* 句 *Keú.*
Binomial 二項式 *Urh heàng shĭh.*
Binomial theorem 合名法 *Hŏ mîng fă.*
Biquadratic parabola 三乘方拋物線 *San shíng fang p'aou wŭh sëén.*
Bisect 平分 *Pîng fun.*
Brackets 括弧 *Kwŏ hoo.*
Centre of an ellipse 中點 *Chúng tëèn.*
Chord 通弦 *T'ung hëën.*
Circle 平圜 *Pîng yuen.*
Circular expression 圜式 *Yuen shĭh.*
Circumference 周 *Chow.*
Circumscribed 外切 *Waé ts'ëĕ.*
Coefficient 係數 *Hé soó.*
Common algebraic expression 代數常式 *Taé soó ch'âng shĭh.*
Coincide 合 *Hŏ.*
Commensurable 有等數 *Yèw tăng soó.*
Common 公 *Kung.*
Complement 餘 *Yû.*
Complementary angle 餘角 *Yû këŏ.*
Concave 凹 *Yaòu.*
Concentric 同心 *T'ûng sin.*
Cone 圜錐 *Yuen chuy.*
Conjugate axis 相屬軸 *Sëang shŭh ch'ŭh.*
Conjugate diameter 相屬徑 *Sëang shŭh king.*
Conjugate hyperbola 相屬雙曲線 *Sëang shŭh shwang k'eŭh sëën.*
Consequent 後率 *Hów sŭh.*
Constant 常數 *Ch'âng soó.*
Construct 作圖 *Tsŏ t'oô.*
Contact 切 *Ts'ëĕ.*
Converging series 歛級數 *Lëen keĭh soó.*
Convex 凸 *T'ŭh.*
Coordinates 縱橫線 *Tsúng hwăng sëën.*
Corollary 系 *E.*
Cosecant 餘割 *Yû kŏ.*
Cosine 餘弦 *Yû hëën.*
Cotangent 餘切 *Yû ts'ëĕ.*
Coversedsine 餘矢 *Yû shè.*
Cube 立方 *Leĭh fang.*
Cube root 立方根 *Leĭh fang kăn.*
Cubical parabola 立方拋物線 *Leĭh fang p'aou wŭh sëén.*
Curvature 曲率 *K'eŭh sŭh.*
Curve 曲線 *K'eŭh sëën.*
Cusp 歧點 *K'e tëèn.*
Cycloid 擺線 *Paé sëën.*

Cylinder 圜柱 *Yuen ch'oó.*
Decagon 十邊形 *Shĭh pëen hîng.*
Decrease 損 *Sùn.*
Decreasing function 損函數 *Sùn hân soó.*
Definition 界說 *Keaé shwŏ.*
Degree of an expression 次 *Tszé.*
Degree of angular measurement 度 *T'oó.*
Denominator 分母 *Fun moò,* 母數 *Moò soó.*
Dependent variable 因變數 *Yin pëén soó.*
Diagonal 對角線 *Túy kĕŏ sëén.*
Diameter 徑 *King.*
Difference 較 *Keaóu.*
Differential 微分 *Wê fun.*
Differential calculus 微分學 *Wê fun hĕŏ*
Differential coefficient 微係數 *Wê hé soó.*
Differentiate 求微分 *K'ĕw wê fun.*
Direction 方向 *Fang hëáng.*
Directrix 準線 *Chùn sëén.*
Distance 距線 *K'eú sëén.*
Diverging lines 漸遠線 *Tsëèn yuèn sëén.*
Diverging series 發級數 *Fă keĭh soó.*
Divide 約 *Yŏ.*
Dividend 實 *Shĭh*
Division (absolute) 約法 *Yŏ fă.*
Division (concrete) 除法 *Ch'oô fă.*
Divisor 法 *Fă.*
Dodecahedron 十二面體 *Shĭh ûrh mëén t'è.*
Duplicate ratio 倍比例 *Peì pè lé.*
Edge of polyhedron 稜 *Lang.*
Ellipse 橢圜 *T'ò yuen.*
Equal 等 *Tăng.*
Equation 方程式 *Fang ch'ing shĭh.*
Equation of condition 偶方程式 *Gòw fang ch'ing shĭh.*
Equiangular 等角 *Tăng kĕŏ.*
Equilateral 等邊 *Tăng pëen.*
Equimultiple 等倍數 *Tăng peì soó.*
Evolute 漸申線 *Tsëèn shin sëén.*
Evolution 開方 *K'ae fang.*
Expand 詳 *Tsëáng.*
Expansion 詳式 *Tseáng shĭh.*
Explicit function 陽函數 *Yâng hân soó.*
Exponent 指數 *Ché soó.*
Expression 式 *Shĭh.*
Extreme and mean ratio 中末比例 *Chung mŏ pè lé.*
Extremes of a proportion 首尾二率 *Shòw weì ûrh sŭh.*
Face 面 *Mëén*
Factor 乘數 *Shíng soó.*
Figure 形 *Hîng,* 圖 *T'oô.*
Focus of a conic section 心 *Sin.*
Formula 法 *Fă.*
Fourth proportional 四率 *Szé sŭh*
Fraction 分 *Fun.*
Fractional expression 分式 *Fun shĭh.*
Frustrum 截圜錐 *Tsëĕ yuen chuy.*
Function 函數 *Hân soó.*
General expression 公式 *Kung shĭh.*
Generate 生 *Săng.*
Generating circle 母輪 *Moò lûn.*
Generating point 母點 *Moò tëèn.*
Geometry 幾何學 *Ke hô hëŏ.*
Given ratio 定率 *Tíng sŭh.*
Great circle 大圈 *Tá k'euen.*
Greater 大 *Tá.*
Hemisphere 半球 *Pwán k'ew.*
Hendecagon 十一邊形 *Shĭh yĭh pëen hîng.*
Heptagon 七邊形 *Ts'eĭh pëen hîng.*
Hexagon 六邊形 *Lŭh pëen hîng.*
Hexahedron 六面體 *Lŭh mëén t'è*
Homogeneous 同類 *T'ûng lúy.*

Homologous 相當 *Sëang t'ang.*
Hyperbola 雙曲線 *Shwang k'eŭh sëēn,* 雙線 *Shwang sëēn.*
Hyperbolic spiral 雙線螺線 *Shwang sëēn lo sëēn.*
Hypotheneuse 弦 *Hëēn.*
Icosahedron 二十面體 *Urh shĭh mëēn t'è.*
Implicit function 陰函數 *Yin hân soó.*
Impossible expression 不能式 *Pŭh năng shĭh.*
Inclination 倚度 *E t'oó*
Incommensurable 無等數 *Woô tăng soó.*
Increase 增 *Tsăng.*
Increasing function 增函數 *Tsăng hân soó.*
Increment 長數 *Ch'áng soó.*
Indefinite 無定 *Woô tíng.*
Independent variable 自變數 *Tszé pëen soó.*
Indeterminate 未定 *Wê tíng.*
Infinite 無窮 *Woô k'eûng.*
Inscribed 內切 *Núy ts'eĕ,* 所容 *Sò yûng.*
Integral 積分 *Tseĭh fun.*
Integral calculus 積分學 *Tseĭh fun hëŏ.*
Integrate 求積分 *K'êw tseĭh fun.*
Interior 裏 *Lè.*
Intersect 交 *Keaou.*
Intersect at right angles 正交 *Chíng keaou.*
Inverse circular expression 反圜式 *Fàn yuen shĭh.*
Inverse proportion 反比例 *Fàn pè lé.*
Irrational 無比例 *Woô pè lé.*
Isolated point 特點 *T'ĭh tëèn.*
Isosceles triangle 二等邊三角形 *Urh tăng peen san keŏ hîng.*
Join 聯 *Leên.*
Known 已知 *E chè.*
Law of continuity 漸變之理 *Tseèn peen che lé.*
Leg of an angle 夾角邊 *Keă keŏ peen.*
Lemma 例 *Lé.*
Length 長短 *Ch'âng twàn.*
Less 小 *Seaòu.*
Limit 限 *Heén.*
Limited 有限 *Yèw heén.*
Line 線 *Seén.*
Logarithm 對數 *Túy soó.*
Logarithmic curve 對數曲線 *Túy soó k'eŭh seén.*
Logarithmic spiral 對數螺線 *Túy soó lo seén.*
Lowest term 最小率 *Tsúy seaòu sŭh.*
Maximum 極大 *Keĭh tá.*
Mean proportional 中率 *Chung sŭh.*
Means 中二率 *Chung ûrh sŭh.*
Measure 度 *T'ŏ.*
Meet 遇 *Yû.*
Minimum 極小 *Keĭh seaòu.*
Modulus 對數根 *Túy soó kăn.*
Monomial 一項式 *Yĭh heàng shĭh.*
Multinomial 多項式 *To heàng shĭh.*
Multiple 倍數 *Peì soó.*
Multiple point 倍點 *Peì teèn.*
Multiplicand 實 *Shĭh.*
Multiplication 乘法 *Shíng fă.*
Multiplier 法 *Fă.*
Multiply 乘 *Shíng.*
Negative 負 *Foó.*
Nonagon 九邊形 *Kèw peen hîng.*
Normal 法線 *Fă seén.*
Notation 命位 *Míng wei,* 紀法 *Kè fă.*
Number 數 *Soó.*
Numerator 分子 *Fun tszè,* 子數 *Tszè soó.*
Oblique 斜 *Seay.*
Obtuse 鈍 *Tun.*
Octagon 八邊形 *Pă peen hîng.*
Octahedron 八面體 *Pă meén t'è.*
Opposite 對 *Túy.*
Ordinate 縱線 *Tsúng seén.*

Origin of co-ordinates 原點 *Yuên teèn.*
Parabola 抛物線 *P'aou wŭh seén.*
Parallel 平行 *Pîng hîng.*
Parallelogram 平行邊形 *Pîng hîng peen hîng.*
Parallelopiped 立方體 *Leĭh fang t'è.*
Parameter 通徑 *T'ung king.*
Part 分 *Fun,* 段 *T'wan.*
Partial differential 偏微分 *P'een wê fun.*
Partial differential coefficient 偏微係 *P'een wê hé.*
Particular case 私式 *Sze shĭh.*
Pentagon 五邊形 *Woò peen hîng.*
Perpendicular 垂線 *Ch'uy seén,* 股 *Koò.*
Plane 平面 *Pîng meén.*
Point 點 *Teèn.*
Point of contact 切點 *Ts'eĕ teèn.*
Point of inflection 彎點 *Wan teèn.*
Point of intersection 交點 *Keaou teèn.*
Polar curve 極曲線 *Keĭh k'eŭh seén.*
Polar distance 極距 *Keĭh k'eú.*
Pole 極 *Keĭh.*
Polygon 多邊形 *To peen hîng.*
Polyhedron 多面體 *To meèn t'è.*
Polynomial 多項式 *To heàng shĭh.*
Positive 正 *Chíng.*
Postulate 求 *K'ëw.*
Power 方 *Fang.*
Primitive axis 舊軸 *K'ëw ch'ŭh.*
Problem 題 *Te.*
Produce 引長 *Yin ch'âng.*
Product 得數 *Tĭh soó.*
Proportion 比例 *Pè lé.*
Proposition 欵 *K'wàn.*
Quadrant 象限 *Seang heén.*
Quadrilateral figure 四邊形 *Szé pëen hîng.*
Quadrinomial 四項式 *Sze heàng shĭh.*
Quam proxime 任近 *Jĭn k'ìn.*
Quantity 幾何 *Ke hô.*
Question 問 *Wăn.*
Quindecagon 十五邊形 *Shĭh woò peen hîng.*
Quotient 得數 *Tĭh soó.*
Radius 半徑 *Pwán king.*
Radius vector 帶徑 *Taé king.*
Ratio 率 *Sŭh.*
Rational expression 有比例式 *Yèw pè lé shĭh.*
Reciprocal 交互 *Keaou woò.*
Rectangle 矩形 *Keù hîng.*
Rectangular 正 *Chíng.*
Reduce 化 *Hwa.*
Reduce to a simple form 相消 *Seang seaou.*
Regular 正 *Chíng.*
Relation 連屬之理 *Leĕn shŭh che lé.*
Represent 顯 *Heèn.*
Reverse 相反 *Seang fàn.*
Revolution 匝 *Tsă.*
Right angle 直角 *Chĭh këŏ.*
Right-angled triangle 句股形 *Keú koò hîng.*
Round 圜 *Yuen.*
Root 根 *Kăn.*
Root of equation 滅數 *Meĭh soó.*
Scalene triangle 不等邊三角形 *Pŭh tăng pëen san këŏ hîng.*
Scholium 案 *Gán.*
Secant 割線 *Kŏ seén.*
Secant (trigonometrical) 正割 *Chíng kŏ.*
Segment 截段 *Tseĕ t'wan.*
Semicircle 半圜周 *Pwán yuen chow.*
Semicubical parabola 半立方抛物線 *Pwán leĭh fang p'aou wŭh seén.*
Semibiquadratic parabola 半三乘方抛物線 *Pwán san shing fang p'aou wŭh seén.*
Series 級數 *Keĭh soó.*

Homologous 相當 *Sëang t'ang.*
Hyperbola 雙曲線 *Shwang k'eŭh sëĕn,* 雙線 *Shwang sëĕn.*
Hyperbolic spiral 雙線螺線 *Shwang sëĕn lo sëĕn.*
Hypotheneuse 弦 *Hëĕn.*
Icosahedron 二十面體 *Urh shĭh mëĕn t'è.*
Implicit function 陰函數 *Yin hân soó.*
Impossible expression 不能式 *Pŭh năng shĭh.*
Inclination 倚度 *E t'oó*
Incommensurable 無等數 *Woô tăng soó.*
Increase 增 *Tsăng.*
Increasing function 增函數 *Tsăng hân soó.*
Increment 長數 *Ch'áng soó.*
Indefinite 無定 *Woô ting.*
Independent variable 自變數 *Tszé pëen soó.*
Indeterminate 未定 *Wê tíng.*
Infinite 無窮 *Woô k'eûng.*
Inscribed 內切 *Núy ts'eĕ,* 所容 *Sò yûng.*
Integral 積分 *Tseĭh fun.*
Integral calculus 積分學 *Tseĭh fun hëŏ.*
Integrate 求積分 *K'êw tseĭh fun.*
Interior 裏 *Lè.*
Intersect 交 *Keaou.*
Intersect at right angles 正交 *Chíng keaou.*
Inverse circular expression 反圜式 *Fàn yuen shĭh.*
Inverse proportion 反比例 *Fàn pè lé.*
Irrational 無比例 *Woô pè lé.*
Isolated point 特點 *T'ĭh tëèn.*
Isosceles triangle 二等邊三角形 *Urh tăng peen san keŏ hîng.*
Join 聯 *Leên.*
Known 已知 *E chè.*
Law of continuity 漸變之理 *Tseèn peen che lé.*
Leg of an angle 夾角邊 *Keă keŏ peen.*
Lemma 例 *Lé.*
Length 長短 *Ch'âng twàn.*
Less 小 *Seaòu.*
Limit 限 *Heén.*
Limited 有限 *Yèw heén.*
Line 線 *Seén.*
Logarithm 對數 *Túy soó.*
Logarithmic curve 對數曲線 *Túy soó k'eŭh seén.*
Logarithmic spiral 對數螺線 *Túy soó lo seén.*
Lowest term 最小率 *Tsúy seaòu sŭh.*
Maximum 極大 *Keĭh tá.*
Mean proportional 中率 *Chung sŭh.*
Means 中二率 *Chung ûrh sŭh.*
Measure 度 *T'ŏ.*
Meet 遇 *Yû.*
Minimum 極小 *Keĭh seaòu.*
Modulus 對數根 *Túy soó kăn.*
Monomial 一項式 *Yĭh heàng shĭh.*
Multinomial 多項式 *To heàng shĭh.*
Multiple 倍數 *Peì soó.*
Multiple point 倍點 *Peì teèn.*
Multiplicand 實 *Shĭh.*
Multiplication 乘法 *Shíng fă.*
Multiplier 法 *Fă.*
Multiply 乘 *Shíng.*
Negative 負 *Foó.*
Nonagon 九邊形 *Kèw peen hîng.*
Normal 法線 *Fă seén.*
Notation 命位 *Míng wei,* 紀法 *Kè fă.*
Number 數 *Soó.*
Numerator 分子 *Fun tszè,* 子數 *Tszè soó.*
Oblique 斜 *Seay.*
Obtuse 鈍 *Tun.*
Octagon 八邊形 *Pă peen hîng.*
Octahedron 八面體 *Pă meén t'è.*
Opposite 對 *Túy.*
Ordinate 縱線 *Tsúng seén.*

Origin of co-ordinates 原點 *Yuên teèn.*
Parabola 抛物線 *P'aou wŭh seén.*
Parallel 平行 *Pîng hîng.*
Parallelogram 平行邊形 *Pîng hîng peen hîng.*
Parallelopiped 立方體 *Leĭh fang t'è.*
Parameter 通徑 *T'ung king.*
Part 分 *Fun*, 段 *T'wan.*
Partial differential 偏微分 *P'een wê fun.*
Partial differential coefficient 偏微係 *P'een wê hé.*
Particular case 私式 *Sze shĭh.*
Pentagon 五邊形 *Woò peen hîng.*
Perpendicular 垂線 *Ch'uy seén*, 股 *Koò.*
Plane 平面 *Pîng meén.*
Point 點 *Teèn.*
Point of contact 切點 *Ts'eĕ teèn.*
Point of inflection 彎點 *Wan teèn.*
Point of intersection 交點 *Keaou teèn.*
Polar curve 極曲線 *Keĭh k'eŭh seén.*
Polar distance 極距 *Keĭh k'eú.*
Pole 極 *Keĭh.*
Polygon 多邊形 *To peen hîng.*
Polyhedron 多面體 *To meèn t'è.*
Polynomial 多項式 *To heàng shĭh.*
Positive 正 *Chíng.*
Postulate 求 *K'êw.*
Power 方 *Fang.*
Primitive axis 舊軸 *K'éw ch'ŭh.*
Problem 題 *Te.*
Produce 引長 *Yin ch'âng.*
Product 得數 *Tĭh soó.*
Proportion 比例 *Pè lé.*
Proposition 欵 *K'wàn.*
Quadrant 象限 *Seang heén.*
Quadrilateral figure 四邊形 *Szé pëen hîng.*
Quadrinomial 四項式 *Sze heàng shĭh.*
Quam proxime 任近 *Jîn k'ìn.*
Quantity 幾何 *Ke hô.*
Question 問 *Wăn.*
Quindecagon 十五邊形 *Shĭh woò peen hîng.*
Quotient 得數 *Tĭh soó*
Radius 半徑 *Pwán king.*
Radius vector 帶徑 *Taé king.*
Ratio 率 *Sŭh.*
Rational expression 有比例式 *Yèw pè lé shĭh.*
Reciprocal 交互 *Keaou woò.*
Rectangle 矩形 *Keù hîng.*
Rectangular 正 *Chíng.*
Reduce 化 *Hwa.*
Reduce to a simple form 相消 *Seang seaou.*
Regular 正 *Chíng.*
Relation 連屬之理 *Leên shŭh che lé.*
Represent 顯 *Heèn.*
Reverse 相反 *Seang fàn.*
Revolution 匝 *Tsă.*
Right angle 直角 *Chĭh kĕŏ.*
Right-angled triangle 句股形 *Keú koò hîng.*
Round 圜 *Yuen.*
Root 根 *Kăn.*
Root of equation 滅數 *Meĭh soó.*
Scalene triangle 不等邊三角形 *Pŭh tăng pëen san kĕŏ hîng.*
Scholium 案 *Gán.*
Secant 割線 *Kŏ seén.*
Secant (trigonometrical) 正割 *Chíng kŏ.*
Segment 截段 *Tseĕ t'wan.*
Semicircle 半圜周 *Pwán yuen chow.*
Semicubical parabola 半立方抛物線 *Pwán leĭh fang p'aou wŭh seén.*
Semibiquadratic parabola 半三乘方抛物線 *Pwán san shíng fang p'aou wŭh seén.*
Series 級數 *Keĭh soó.*

Sextant 記限 *Ké heĕn.*

Side 邊 *Peen.*

Sign 號 *Haou.*

Similar 相似 *Seang szê.*

Sine 正弦 *Ching heên.*

Singular point 獨異點 *Tŭh é teèn.*

Smaller 少 *Shaòu.*

Solid 體 *T'è.*

Solidity 體積 *T'è tseĭh.*

Sphere 立圜體 *Leĭh yuen t'è,* 球 *K'ew*

Spiral 螺線 *Lo seen.*

Spiral of Archimides 亞奇默德螺線 *A k'e meĭh tĭh lo seén.*

Square 方 *Fang,* 正方 *Ching fang,* 羃 *Meĭh.*

Square root 平方根 *Píng fang kăn.*

Straight line 直線 *Chĭh seén.*

Subnormal 次法線 *Tsze fă seen.*

Subtangent 次切線 *Tszé ts'eè seén.*

Subtract 減 *Keèn.*

Subtraction 減法 *Keèn fă.*

Sum 和 *Hô.*

Supplement 外角 *Waé kĕŏ.*

Supplementary chord 餘通弦 *Yû t'ung heên.*

Surface 面 *Meén.*

Surface of revolution 曲面積 *K'eŭh meén tseĭh.*

Symbol of quantity 元 *Yuên.*

Table 表 *Peaòu.*

Tangent 切線 *Ts'eè seen.*

Tangent(trigonometrical) 正切 *Ching ts'eè.*

Term of an expression 項 *Heàng.*

Term of ratio 率 *Sŭh.*

Tetrahedron 四面體 *Szé meen t'è.*

Theorem 術 *Shŭh*

Total differential 全微分 *Tseûen wê fun.*

Transcendental curve 越曲線 *Yuĕ k'eŭh seen.*

Transcendental expression 越式 *Yuĕ shĭh.*

Transcendental function 越函數 *Yuĕ hân soó.*

Transform 易 *Yĭh.*

Transverse axis 橫軸 *Hwăng ch'ŭh,* 橫徑 *Hwăng king.*

Trapezoid 二平行邊四邊形 *Urh ping hing peen sze peen hing.*

Triangle 三角形 *San keŏ hing.*

Trident 三齒線 *San ch'ê seen.*

Trigonometry 三角法 *San kĕŏ fă.*

Trinomial 三項式 *San heàng shĭh.*

Triplicate 三倍 *San peì.*

Trisection 三等分 *San tăng fun.*

Unequal 不等 *Pŭh tăng.*

Unit 一 *Yĭh.*

Unknown 未知 *Wê che.*

Unlimited 無限 *Woô heên.*

Value 同數 *T'ŭng soó.*

Variable 變數 *Peen soó.*

Variation 變 *Peen.*

Verification 証 *Ching.*

Versedsine 正矢 *Ching shè.*

Vertex 頂點 *Tìng teèn.*

Vertical plane 縱面 *Tsúng meen.*

SYMBOLS.

a	甲	*Këă*	*A*	呷	*Këă*	α	角	*Këŏ*	Α	⿰口角	*Këŏ*
b	乙	*Yĭh*	*B*	⿰口乙	*Yĭh*	β	亢	*K'ang*	Β	吭	*K'ang*
c	丙	*Ping*	*C*	⿰口丙	*Ping*	γ	氐	*Tè*	Γ	呧	*Tè*
d	丁	*Ting*	*D*	叮	*Ting*	δ	房	*Fâng*	Δ	⿰口房	*Fâng*
e	戊	*Mow*	*E*	⿰口戊	*Mow*	ζ	尾	*Weì*	Ε	吣	*Sin*
f	己	*Kè*	*F*	⿰口己	*Kè*	η	箕	*Kê*	Ζ	⿰口尾	*Weì*
g	庚	*Kăng*	*G*	⿰口庚	*Kăng*	θ	斗	*Tòw*	Η	⿰口箕	*Kê*
h	辛	*Sin*	*H*	⿰口辛	*Sin*	ι	牛	*Nêw*	Θ	⿰口斗	*Tòw*
i	壬	*Jìn*	*I*	⿰口壬	*Jìn*	κ	女	*Neù*	Ι	吽	*Nêw*
j	癸	*Kweì*	*J*	⿰口癸	*Kweì*	λ	虛	*Heu*	Κ	⿰口女	*Neù*
k	子	*Tszè*	*K*	吇	*Tszè*	μ	危	*Weî*	Λ	噓	*Heu*
l	丑	*Chòw*	*L*	吜	*Chòw*	ν	室	*Shĭh*	Μ	喟	*Weî*
m	寅	*Yin*	*M*	⿰口寅	*Yin*	ξ	壁	*Peĭh*	Ν	⿰口室	*Shĭh*
n	卯	*Maòu*	*N*	⿰口卯	*Maòu*	ο	奎	*K'wei*	Ξ	⿰口壁	*Peĭh*
o	辰	*Shîn*	*O*	⿰口辰	*Shîn*	ρ	胃	*Weí*	Ο	⿰口奎	*K'wei*
p	巳	*Szè*	*P*	⿰口巳	*Szè*	σ	昴	*Maòu*	Π	嘍	*Lôw*
q	午	*Woó*	*Q*	吘	*Woó*	τ	畢	*Peĭh*	Ρ	⿰口危	*Weí*
r	未	*Wé*	*R*	味	*Wé*	υ	觜	*Tsuy*	Σ	⿰口昴	*Maòu*
s	申	*Shin*	*S*	呻	*Shin*	χ	井	*Tsìng*	Τ	嗶	*Peĭh*
t	酉	*Yèw*	*T*	唒	*Yèw*	ω	柳	*Lèw*	Υ	嘴	*Tsuy*
u	戌	*Seŭh*	*U*	⿰口戌	*Seŭh*	*F*	⿰口函	*Hân*	Φ	⿰口參	*San*
v	亥	*Haé*	*V*	咳	*Haé*	*f*	函	*Hân*	Χ	⿰口井	*Tsìng*
w	物	*Wŭh*	*W*	⿰口物	*Wŭh*	φ	⿰木函	*Hân*	Ψ	⿰口鬼	*Kweì*
x	天	*T'ëen*	*X*	⿰口天	*T'ëen*	ψ	涵	*Hân*	Ω	⿰口柳	*Lèw*
y	地	*T'é*	*Y*	⿰口地	*T'é*	Μ	根	*Kăn*	ε	訥	*Nŭh*
z	人	*Jîn*	*Z*	⿰口人	*Jîn*	π	周	*Chow*	*d*	彳	*Wê*
									∫	禾	*Tseĭh*

A. WYLIE.

SHANGHAE,

July, 1859.

代微積拾級

胡遠題

咸豐己未
孟夏之月
墨海刊行

序

中法之四元卽西法之代數也諸元諸乘方諸互乘積四元別以位次代數別以記號法雖殊理無異也我

朝康熙時西國來本之奈端二家又創立微分積分二術其法亦借徑於代數其理實發千古未有之奇秘代數以甲乙丙丁諸元代已知數以天地人物諸元代未知數微分積分以甲乙丙丁諸元代常數以天地人物諸元代變數其理之大要凡線面體皆設爲由小漸大一刹那中所增之積卽微分也其

全積即積分也故積分逐層分之爲無數微分合無數微分仍爲積分其法之大要恒設縱橫二線以天代橫線以地代縱線以𢓍代橫線之微分以彵代縱線之微分凡代數式皆以法求其微係數係於𢓍或彵之左爲一切線面體之微分故一切線面體之微分與縱橫線之微分皆有比例而纍求微係數可得線面體之級數曲線之諸異點是謂微分術旣有線面體之微分可反求其積分而最神妙者凡同類諸題皆有一公式而每題又各有一本式公式中恒兼

有天地或兼有伕佌但求得本式中天與伕之同數
或地與佌之同數以代之乃求其積分卽得本題之
全積是謂積分術由是一切曲線曲線所函面曲面
曲面所函體昔之所謂無法者今皆有法一切八線
求弧背弧背求八線眞數求對數對數求眞數昔之
視爲至難者今皆至易嗚呼算術至此觀止矣蔑以
加矣羅君密士合衆之天算名家也取代數微分積
分三術合爲一書分款設題較若列眉嘉惠後學之
功甚大偉烈君亞力聞而善之亟購求其書請余共

事譯行中國偉烈君之功豈在羅君下哉是書先代數次微分次積分由易而難若階級之漸升譯既竣即名之曰代微積拾級時幾何原本刊行之後一年也

咸豐九年龍在己未孟夏八日海寧李善蘭自序

幾何之學、自歐几里得至今、專門名家、代不乏人、粤在古昔希臘最究心此學、爾時以圜錐諸曲線之理爲最精深、亞奇默德而後、其學日進、至法蘭西代加德立縱橫二軸線、推曲線內諸點距軸遠近、自有此法、而凡曲線無不可推、故曲線之數、多至無窮、而以直線爲限、一例用曲線之法馭之、既得諸曲線、依代數理推之、可得諸平面、諸曲面、諸體、其已推定之曲線、略舉其目、曰平圜線、撱圜線、雙線、拋物線、半立方拋物線、薛荔葉線、蚌線、擺線、餘擺線、和音線、次擺線、

弦切諸線、指數線、對數線、亞奇默德螺線、對數螺線、等角螺線、交互螺線、兩端懸線、葛西尼諸橢圜線、平行動線、而圜錐諸曲線與他曲線、統歸一例、無或少異、此代數幾何學也、自有代數幾何、而微分學之用益大、微分學非一時一國一人所作、其源流遠矣、數學有數求數、代數無數求數、然所推皆常數、微分能推一切變數、剏法者不一家、理同而術異、來本之者、日爾曼人也、立界說曰、以小至無窮之點、積至無窮多、推其幾何、名爲推無窮小點法、難者曰、無窮小之

點、雖積之至無窮、不能成幾何、解之曰、但易無窮小爲任何小、卽有積可推矣、故其說雖若難解、而其理未始不合也、而英國奈端造首末比例法、不用無窮小之長數、乃用有窮最小長數之比例、而推其漸損之限、其幾何變大、則爲末限、變小則爲首限、此法便于幾何而不便于代數、後造流數術、棄不用、而謂萬物皆自變、其變皆有速率、凡幾何俱可用直線顯之、故速率之增損、可用直線之界顯之、此說學者皆宗之、嘉慶末、法蘭西特浪勃造限法、自云不過用奈端

首末比例耳、而蘭頓別創新法、凡微分一憑代數、不云任近限而云已得限、名曰臏理、拉格浪亦造法、多依附戴老之理、大略與蘭頓同、總論之、微分不過求變幾何最小變率之較耳、家數雖多、理實一焉、奈端來本之同時各精思造法、未嘗相謀相師也、奈端于元上加點以顯流數、如甲為甲之流數是也、用以推算、覺不便、故用來氏之彳號以顯之積分者、合無數微分之積也、亦用來氏之禾號以顯之、微分積分、為中土算書所未有、然觀當代天算家、如董方立氏、項

梅侶氏、徐君青氏、戴鄂士氏、顧尙之氏、暨李君秋紉、所著各書、其理有甚近微分者、因不用代數式、故或言之甚繁、推之甚難、今特偕李君譯此書、爲微分積分入門之助、異時中國算學日上、未必非此書實基之也、

咸豐九年歲在己未夏日耶穌弟子偉烈亞力序

代微積拾級

凡例

一、書中諸記號、為古算書所未有、今詳釋之、⊥者正也、加也、T者負也、減也、右減左也、×者相乘也、又並列亦為相乘、如甲乙即甲乙二元相乘也、÷者約也、右約左也、或作一法居上、實居下、如$\frac{乙}{甲}$即以甲約乙也、∷者指四率比例也、()者括諸數為一數也、名曰括弧、√者開方根也、如$\sqrt{甲}$謂甲之平方根、$\sqrt[3]{甲}$謂甲之立方根、$\sqrt[4]{甲}$謂甲之三乘方根、餘類推、元

右上角之小字名指數、有整指數、如$甲^{二}$謂甲之自乘方也、$甲^{三}$謂甲之再乘方也、$甲^{四}$謂甲之三乘方也、有分指數、如$甲^{\frac{一}{二}}$謂甲之平方根也、$甲^{\frac{一}{三}}$謂甲之立方根也、$甲^{\frac{一}{四}}$謂甲之三乘方根也、有負整指數、如$甲^{-一}$謂以甲約一也、$甲^{-二}$謂以甲自乘方約一也、$甲^{-三}$謂以甲再乘方約一也、有負分指數、如$甲^{-\frac{一}{二}}$謂以甲之平方根約一也、$甲^{-\frac{一}{三}}$謂以甲之立方根約一也、餘類推、$=$者、左右二數相等也、如$甲=乙$謂甲等于乙也、$<$者、右大于左也、$>$者、左大于右也、彳者微分也、如伏言

天之微分也、禾者、積分也、如禾彳天言天微分之積分也、○者、無也、∞者、無窮也、

一、凡同類之元、及圖中同類之點、皆同用一字、而以丿彡別之、如夭 夭 甲 甲之類、欲令讀者便記憶也、又或于元之右下角記一二三四等小字、如呋一 呋二之類、亦係同類之元、而其理則異、

一、有簡式、有詳式、如天地和自乘其簡式為(天丄地)二、其詳式為天二丄二天地丄地二、凡書中言詳之者、謂依簡式、用代數乘除開方法、改為詳式也、

一凡代數式推定後、天元之同數、或僅有一數、或有二三四數、以至多數、皆謂之滅數、言其數代天元、能令式中正負恰消盡也、

一舊法八線表之半徑、或爲十萬、或爲百萬千萬不等、今以半徑爲一、以一乘除、位無升降、故凡以半徑乘除者、皆不言、

一式中諸字、有代數者、如甲乙子丑天地等字、又如周代周率、根代對數根、訥代對數底之類是也、有指實者、如弦指某角度之正弦、切指某角度之正

切、對指某數之對數、是也、

一、諸數字之旨各異、函數者、言其數中函元之加減乘約開方自乘諸數也、長數者、言幾何漸增漸減之微數也、變數者、言其數或漸變大或漸變小非一定之數也、常數者、言其數一定不變也、

一、凡代數字皆橫書、幾何字皆直書、而弦切諸字、配代數字亦橫書、如甲弦乙切之類、是也、配幾何字亦直書、如甲乙丙弦丁戊己切之類、是也、

代微積拾級目錄

代微積拾級卷一

米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯
海甯李善蘭筆述

代數幾何一

以代數推幾何

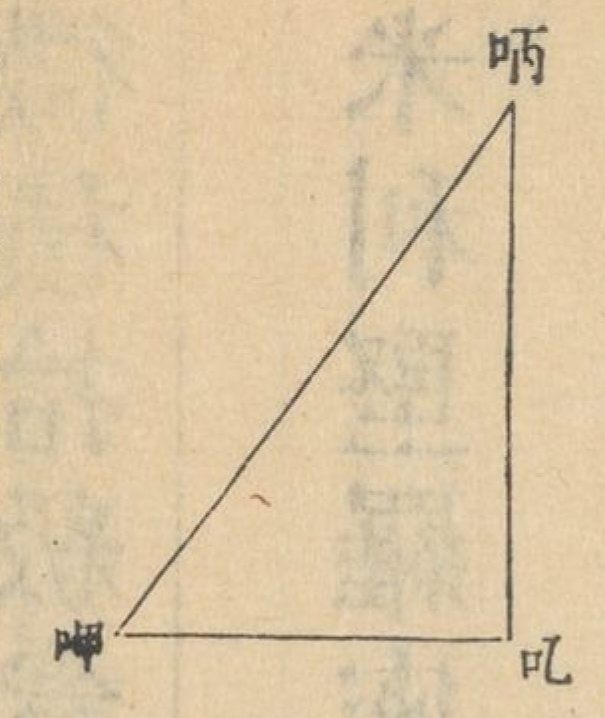
凡幾何題理、以代數號顯之、簡而易明、代數號益幾何匪淺、故近時西國論幾何諸書恒用之、

幾何題中用代數之位、覺甚便、凖之作圖、能顯題之全、所設所求諸數、俱包其內、法用代數已知未知諸

元代題已知未知諸數視圖中諸段有連屬之理者、依幾何諸題理推之、本題有若干未知數、須推得若干代數式、善蘭案此卽四元法立天地二元則必用二式立天地人三元則必用三式也既有若干式、以代數術馭之、卽得諸數、

設題

今有句、有股弦和、求股、



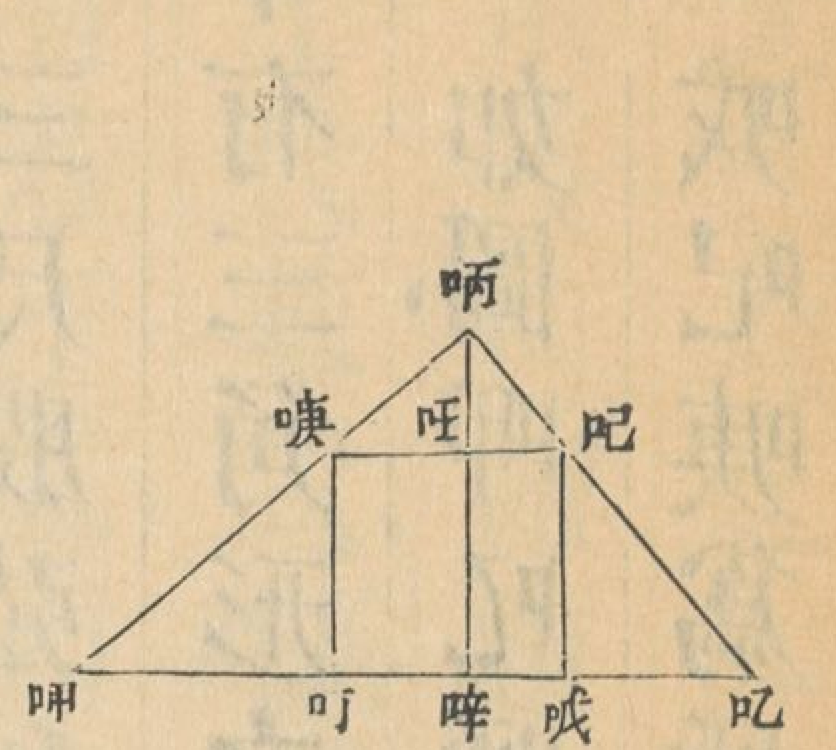
如圖、呷叱哂句股形、命句呷叱爲乙、股叱哂爲天、股弦和爲申、則弦必爲申丁天、

依幾何理、$呷吃^{二}+吃呐^{二}=呷呐^{二}$代作$乙^{二}+天^{二}=(甲-天)^{二}$$=甲^{二}-二甲天+天^{二}$．式两邊各去$天^{二}$、則得$乙^{二}=甲^{二}-二甲天$卽爲$二甲天=甲^{二}-乙^{二}$故得$天=\frac{二甲}{甲^{二}-乙^{二}}$、觀此式卽知凡句股形之股、等于股弦和冪內減句冪、以倍股弦和約之之數、如句三尺、股弦和九尺、則$\frac{二甲}{甲^{二}-乙^{二}}$卽$\frac{二\times九}{九^{二}-三^{二}}$等于四、卽股也、

今有三角形之底與中垂線、求所容正方邊、

如圖、呷吃呐三角形、呷吃爲底、呐哷爲中垂線、吖吠吧咦爲所容正方形、命底爲乙、中垂線爲辛、方

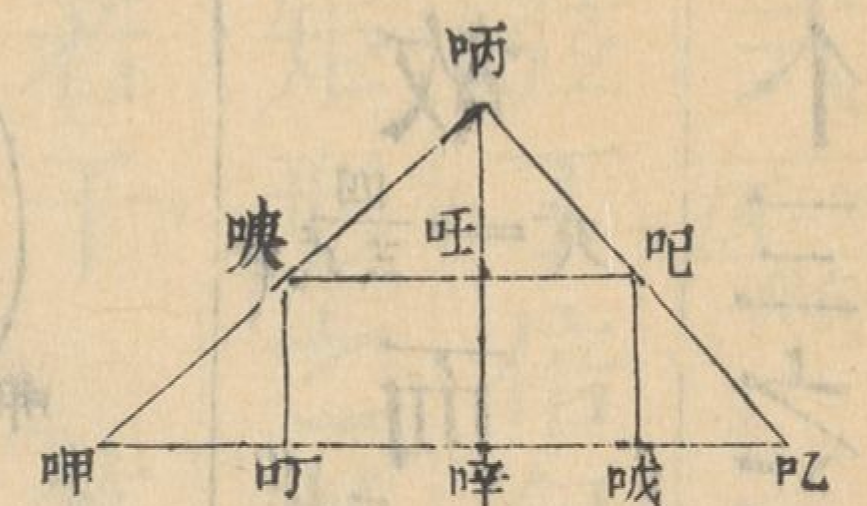
邊爲天、則呐㖂必爲天丁辛　㖂𠯌與呷叱平行、故依相似三角形之理有比例、



呷叱・㖂𠯌・・呐啐・呐𠯈　代作　天丁辛・辛・・天・乙　凡四率比例首尾二率相乘等于中二率相乘、故有式　天辛＝乙天丁辛乙、　所以　$\frac{辛\,丄\,乙}{乙\,辛}$＝天、　即知所容正方之邊、等于底與中垂線相乘、以底垂和約之、如底爲十二尺、中垂線爲六尺、則得所容方邊四尺、

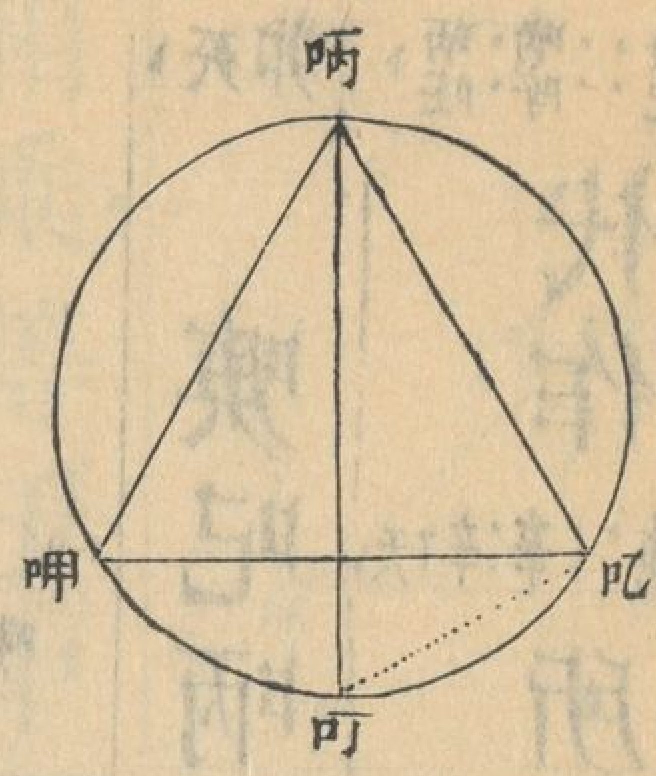
今有三角形之底與中垂線、求所容長廣有定率之

矩形、



如圖、呷𠮙呐三角形、叮𠯌爲所容矩形、命底呷𠮙爲乙、中垂線呐𠯐爲辛、矩形之廣叮嗹爲天、其長叮𠯈爲地、又設天地定率、若一與卯、卽地等于卯天、嗹𠯌呐與呷𠮙呐二三角形相似、故有比例、呷𠮙:嗹𠯌::呐𠯐:呐𠯗、代作乙:地::辛:辛丅天、所以乙辛丅乙天＝辛地、惟地＝卯天、故乙辛丅乙天＝辛卯天、而天＝$\frac{卯辛\perp乙}{乙辛}$、設卯等于一則矩形之長廣等、與前題同、

今有圓徑、求所容等邊三角形之邊、



如圖、呷叮叱呐圖、呐叮爲徑、呷叱呐爲所容三角形、命呐叮爲丁、呐叱爲天、又作叮叱線、成呐叱叮句股形、識别得叮叱爲呐叮之半、所以 $呐叮^2 = 叱叮^2 丄 呐叱^2$、卽

$天^2 丄 \frac{四}{丁^2} = 丁^2$、

故

$天^2 = \frac{四}{三丁^2}$、

而

$天 = \frac{二}{丁\sqrt{三}}$、

卽知所容三角形之邊、等于圜徑乘半个三之平方根、

今有句乙、股弦較丁、求其股若干　答式 $\frac{二丁}{乙^2 丅 丁^2}$、

今有弦辛、有句股之定率若寅與卯、求其股若干、

答式 $\frac{卯辛}{\sqrt{寅^{2}+卯^{2}}}$

今有弦丁、倍句股和己、求句股各若干、 答式 $\frac{己+\sqrt{二丁^{2}-己^{2}}}{二}$、

今有矩形之對角線十尺、四邊和二十八尺、求長廣各若干、 答曰、長八尺、廣六尺、 式如前題、

今有圜半徑丁、求所容等邊三角形之每邊若干、

答式 $丁\sqrt{三}$、

今有等邊三角形、于內任取一點、至三邊作三垂線、三垂線之和若干、 答曰、和等于中垂線、

今有正方對角線與一邊之較丁、求邊若干、　答式

$丁丄丁\sqrt{二}$

今有從句股形二銳角至平分句股二點之線甲乙、求句股各若干、　答式

$二\sqrt{\frac{四乙^{二}丅甲^{二}}{一五}}$

$二\sqrt{\frac{四甲^{二}丅乙^{二}}{一五}}$

今有等邊三角形內任一點至三邊之垂線甲乙丙、求其邊若干、　答式

$\frac{二(甲丄乙丄丙)}{\sqrt{三}}$

代微積拾級卷二

米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯

海甯李善蘭筆述

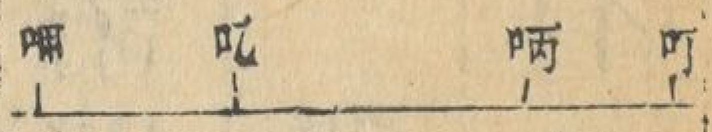
代數幾何二

作方程圖法

作方程圖者、謂作幾何之圖、以顯代數式之數、令圖中諸段相連屬之理、與式之諸項相應、

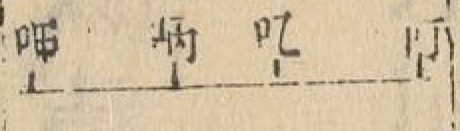
設題

今有 天＝甲丄乙 試作圖、



甲與乙皆代數、則可以線顯之、凡線先取一已定之長短、或一寸或一尺不一定為本線、設有呷吃線、甲倍本線、即可顯甲數、又設有吃㖑線、乙倍本線、即可顯乙數、故作甲丄乙之圖、法任作呷叮線、乃以本線自呷度至吃、等于甲數、又自吃度至㖑、等于乙數、則呷㖑線即顯甲丄乙之數、

今有天＝甲丅乙試作圖、



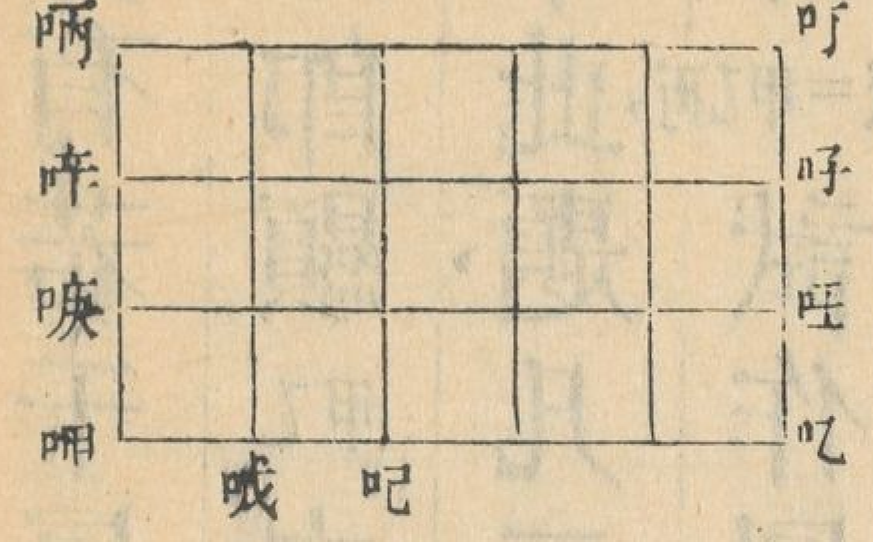
法任作呷叮線、乃自呷度至吃、等于甲、又自吃逆度至㖑、等于乙、則呷㖑一段必為呷吃

叱呐之較卽顯甲丅乙之數、

準上二題凡元數可用線顯之故一次諸項之圖、

恒任作一線正項順度之負項逆度之、

今有天＝甲乙試作圖、

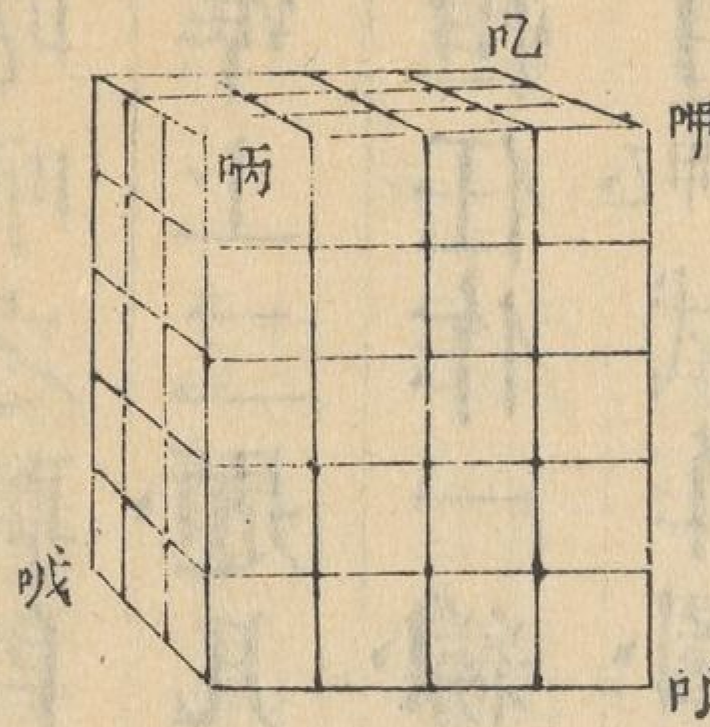


法作呷叮矩形令呷叱邊甲倍本線呷呐邊乙倍本線、呷哦哦叱呷咦咦啐諸段皆等于本線、從哦叱諸點作線、皆與呷呐平行、又從咦啐諸點作線皆與呷叱平行、則下層呷旺矩形有甲个本線

之正方、次層咦呼亦然、呷哂線中有若干本線、則亦有若干層、故呷叮矩形中、有乙乘甲个本線正方、即顯甲乙之數、

準此題、凡二元相乘、可以面顯之、

今有天=甲乙丙、試作圖、

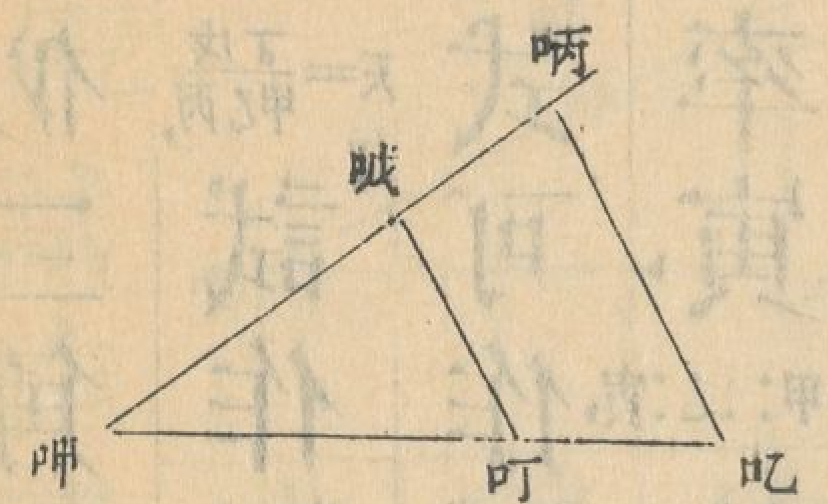


法作呷哦立方體、令呷叱邊甲倍本線、呷哂邊乙倍本線、呷叮邊丙倍本線、試于三邊諸本線之界點作諸平面、與叱哂哂叮哂哦三面

平行、分本體為若干本線之立方、其立方之數為甲×乙×丙、理易明、故此本體可顯甲乙丙之數、

準此題、凡三元相乘、可以體顯之、

今有$天=\frac{甲乙}{丙}$、試作圖、



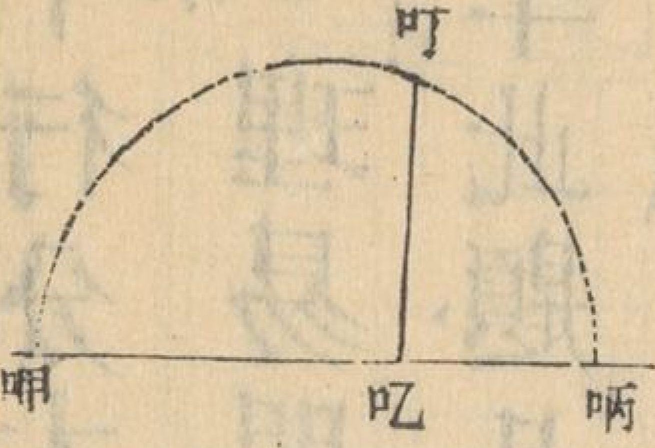
別得$天=\frac{甲乙}{丙}$則有比例$丙:甲::乙:天$丙甲乙為一二三率、天為第四率、法從呷點任作呷𠮙呷呐二線、不論成何角、乃從呷度至叮、令等于丙、又從呷度至𠮙、令等于甲、次從呷度至哦、等于乙、次作叮哦線、次從𠮙

點與吋哦平行作吃哂線、則呷哂必等于天、蓋準相似三角形之理、有比例$呷吋:呷吃::呷哦:呷哂$、卽$丙:甲::乙:呷哂$、故$呷哂=\frac{丙}{甲乙}$

今有$天=\frac{丁戊}{甲乙丙}$、試作圖、

此式可作$\frac{丁\times戊}{甲乙\times丙}$、卽$\frac{丁}{甲乙}\times\frac{戊}{丙}$、先以丁甲乙爲一二三率、求其四率寅、$丁:甲::乙:寅$、故$寅=\frac{丁}{甲乙}$、是所求爲$\frac{戊}{寅丙}$、法依前題作圖、

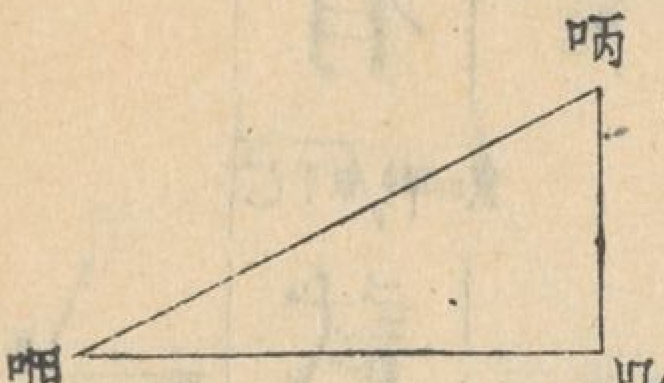
今有$天=\sqrt{甲乙}$、試作圖、



別得$\sqrt{甲乙}$爲甲乙之中率、法任作一直線、乃于線內取呷吃、等于甲、取吃哂、等于乙、次以甲乙之和呷哂爲全徑、作呷吋

呐半圜、次從叱點作呷呐之垂線、至圜周叮、則叱叮為呷叱叱呐二線之中率、所以叱叮即顯$\sqrt{甲乙}$之數、

今有$天=\sqrt{甲^{二}丄乙^{二}}$、試作圖、

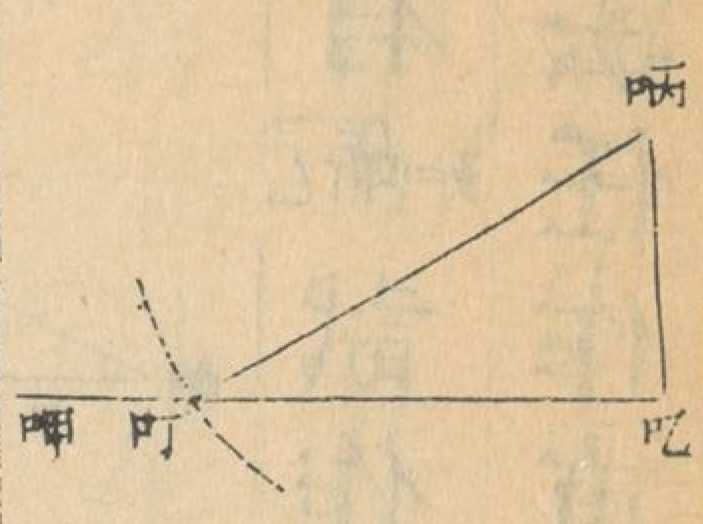


法作呷叱線、等于甲、從叱作呷叱之垂線叱呐、等于乙、次作呷呐聯線、即顯$\sqrt{甲^{二}丄乙^{二}}$之數、蓋$呷呐^{二}$等于$呷叱^{二}丄叱呐^{二}$故也、

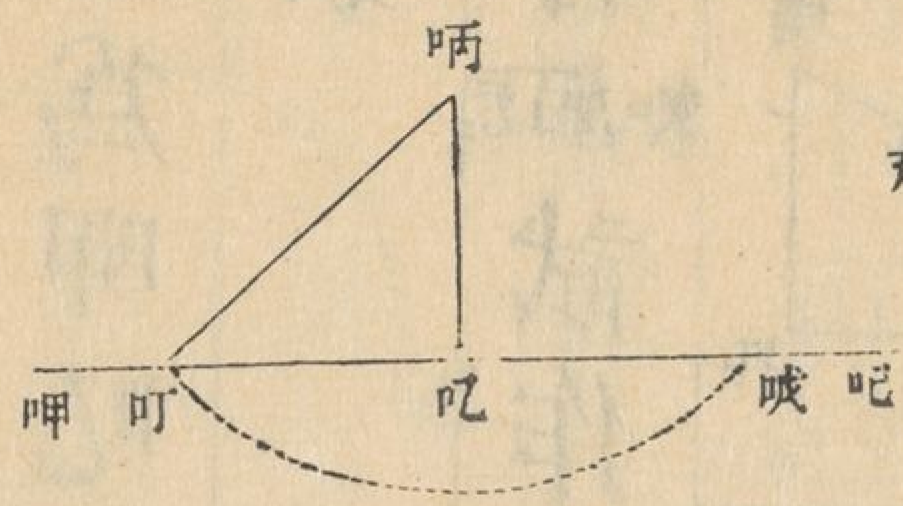
今有$天=\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$、試作圖、

法任作直線呷叱、從叱點作呷叱之垂線叱呐、令

等于乙、次以呬爲心甲爲半徑、作短弧、交呷叱于叮、則叮叱必顯$\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$之數、蓋$叮叱^{二}$等于$叱呬^{二}丅呬叮^{二}$即$甲^{二}丅乙^{二}$、所以叮叱等$\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$、



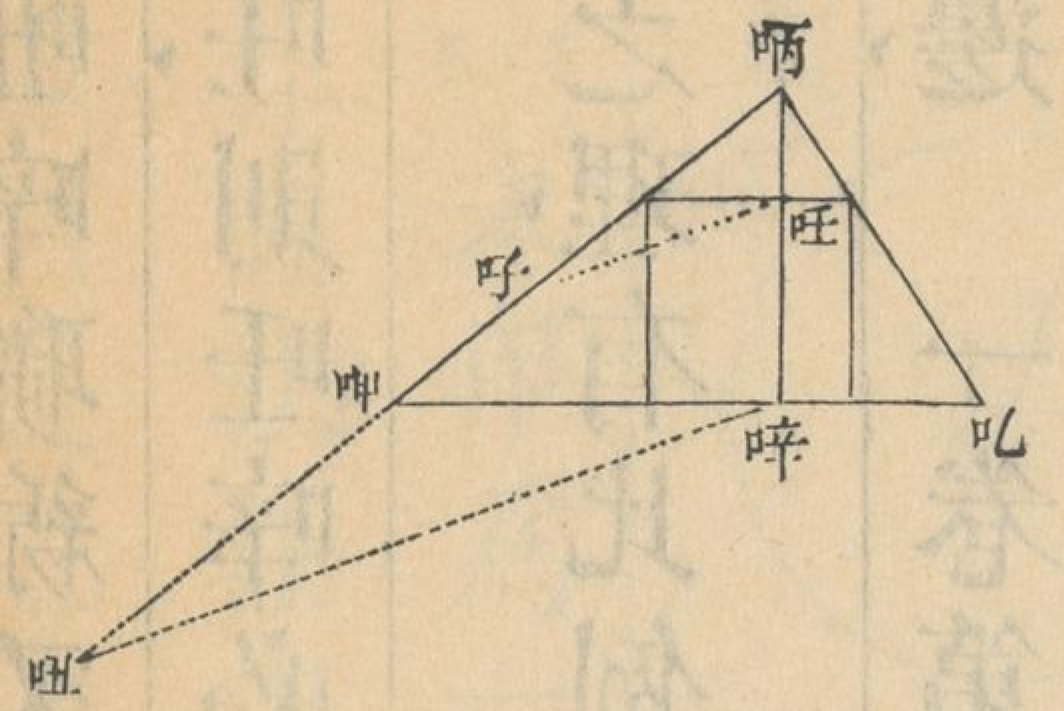
今有$天=甲\mp\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$試作圖、



法任作呷吧線、于線內取呷叱分、等于甲、從叱點作呷叱之垂線叱呬、令等于乙、次以呬爲心甲爲半徑旋規作弧線、交呷吧于叮哦二點、則叱叮叱哦俱等于$\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$、蓋從叱點起、正則順度至哦、負則逆度至叮

也、故呷叮呷戊皆顯所求之數、蓋呷戊等于呷吃丄吃戊、卽$甲丄\sqrt{甲^{二}丁乙^{二}}$、呷叮等于呷吃丁吃叮、卽$甲丁\sqrt{甲^{二}丁乙^{二}}$、所以此二數爲下式$天^{二}丁二甲天=丁乙^{二}$之二減數、

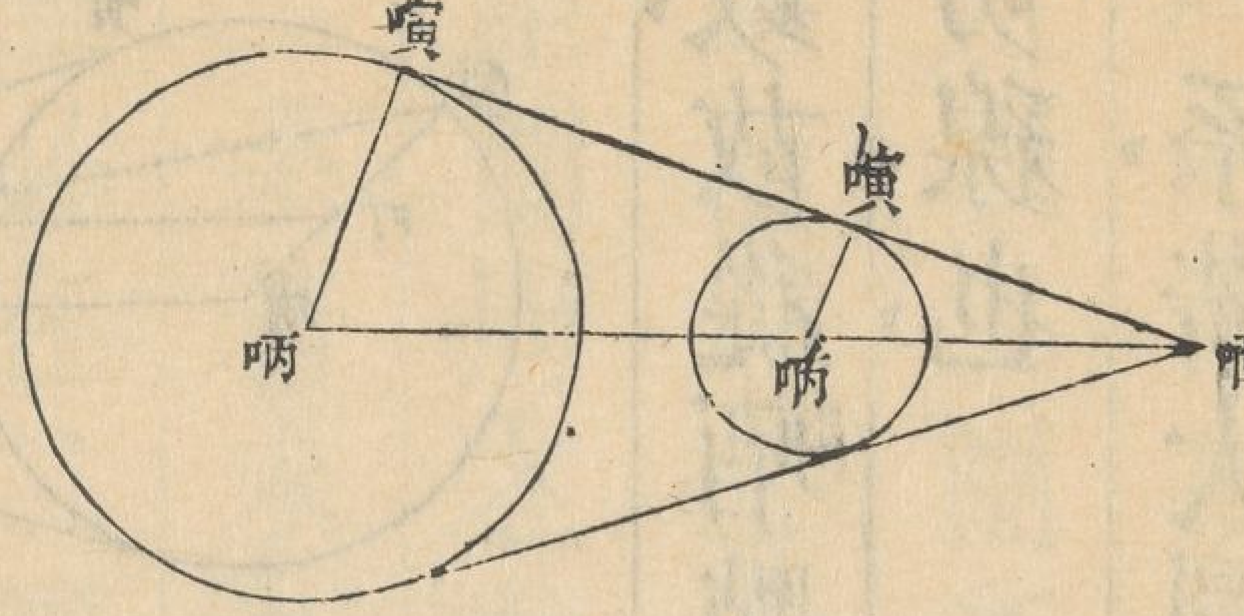
今有三角形、已知底與中垂線、試作形內所容正方形圖、



前求得正方形之邊爲$\frac{乙辛}{乙丄辛}$、一卷二題故乙丄辛乙辛爲一二三率、方邊爲四率、法作呷吃哂三角形、亦作中垂線哂啐、卽辛、呷吃底卽乙、于呷哂內取哂吁、等于辛、引長吁呷成吁吜、等于乙、次作

吜啐聯線、又與吜啐平行作吁壬線、遇中垂線于壬、則壬啐必等于所求正方邊、蓋準相似三角形之理、有比例壬啐:丙啐::吁吜:丙吜、即壬啐:辛::乙:辛上乙、所以$壬啐=\frac{辛乙}{辛上乙}$、故壬啐顯所求正方之邊、一卷第三題、若欲作圖、但取丙吁等于辛卯、餘如本題法、即得、

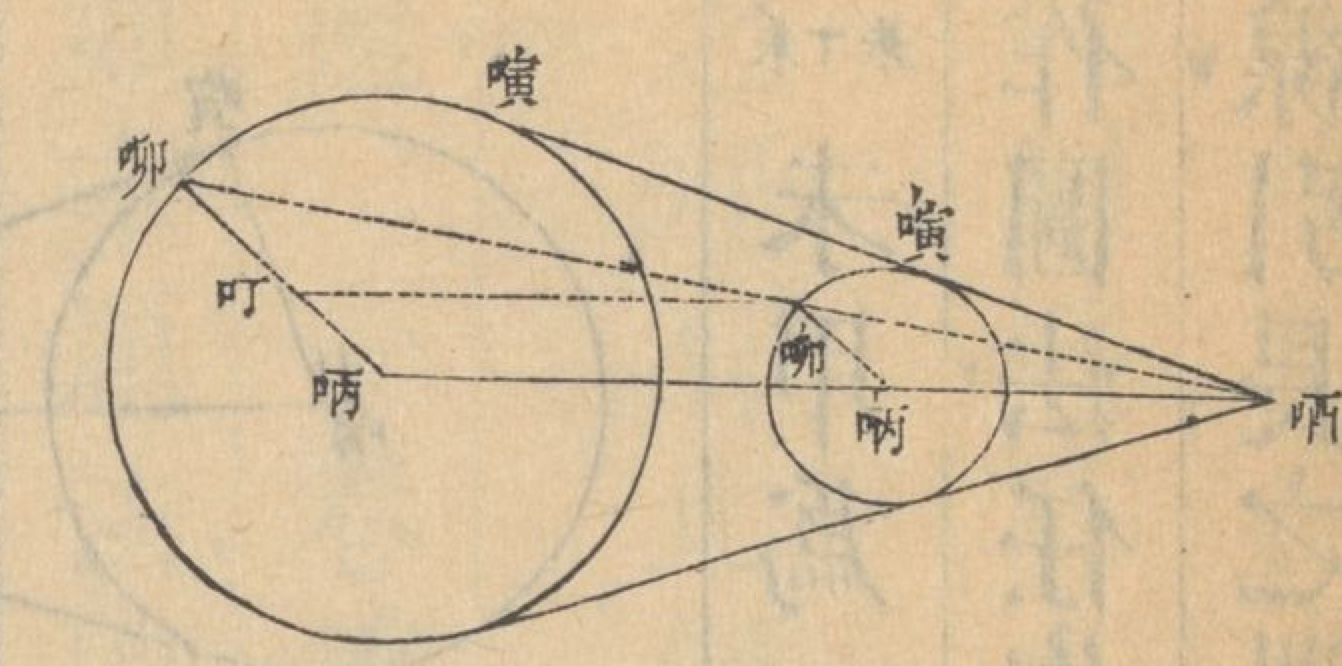
今有大小二圜、在一个平面內、試作二圜之公切線、丙丙為二圜心、丙丙唒為過二心線、若已知公切線寅寅、引長之、與過心線遇于唒、于二切點作寅



呐嗔呐二半徑成呐嗔哂呐嗔哂二相似三角形、因嗔嗔皆爲直角故也、乃以未代呐嗔、以末代呐嗔、以甲代呐呐、以天代呐哂、則呐哂必爲天丁甲、有比例率如下、呐嗔：呐嗔：：呐哂：呐哂、即未：未：：天：天丁甲、則未天丁未甲一未天、而天一$\frac{未丁未}{未甲}$、即知未甲爲一二三率、天即呐哂爲四率、依幾何理得未丁未

作圖法、任作呐卯呐卯二平行半徑、次作卯卯聯線、引長之遇過心線于哂、乃自哂作小圓之切線

哂嗊、引長之、亦必爲大圜之切線哂嗊也、試自唧與哂呐平行作唧叮線、必等于呐吶、即甲唧叮即未丁未、叮唧唧與呐唧哂爲相似三角形、故有比例、呐哂∶吶唧∷叮唧∶叮唧、即呐哂∶未∷甲∶未丁未、所以呐哂＝$\frac{未丁未}{甲未}$、其右邊即前天之同



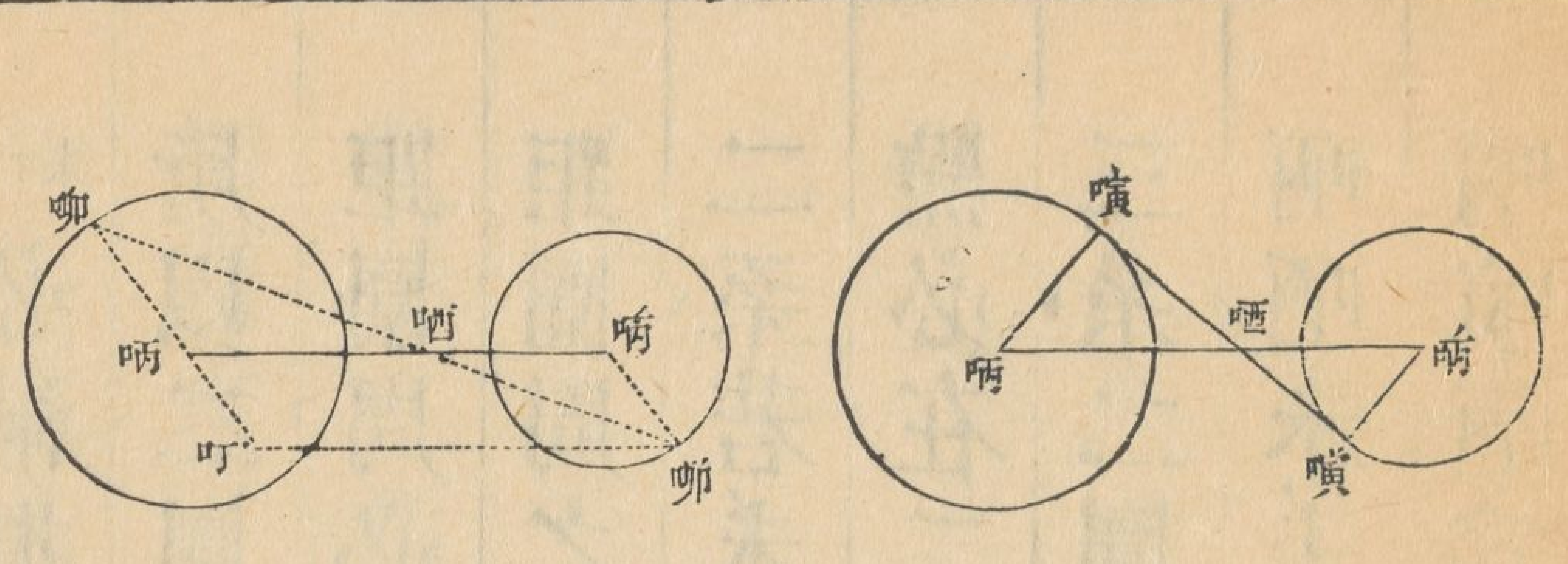
數、故從哂點作此圜之切線、引長之、亦爲彼圜之切線也、

一系、若大圜半徑未、爲常數、小圜半徑未漸長、則

耒丅未必漸損、而分子未甲為常數、故天之同數必漸增、所以二圜漸近相等、則公切線與過心線之交點、距圜周必漸遠、若未耒相等、則分母為○而交點距圜周之數為∞、而天之同數無窮大、

二系、若耒漸長至大于未、則天之同數變為負、哂點必在二圜之左、

三系、二圜之間、可另作互相視之公切線、以天代呐哂、未耒代二半徑、甲代二心相距線、則呐嗔哂呐嗔哂為相似三角形、故有比例如左、



呐哂:呐哂::呐嗔:呐嗔即天丨甲:天::未:未、所以$\frac{未丄未}{甲未}$=天、此式亦可依前例作圖、法于過心線左右作呐唧呐唧二平行半徑、次作唧唧聯線、交過心線于哂、乃從哂作此圜之切線、引長之亦必爲彼圜之切線、試引長唧呐、從唧點與呐呐平行作唧叮線、等于呐呐、即甲唧叮即未丄未、唧呐哂唧叮唧爲相似三角形、故有比例、呐哂:唧呐::叮唧:唧叮、即呐哂:未::甲:未丄未、故$\frac{未丄未}{甲未}$=呐哂、式右邊即前天之同

數、故知前後兩圖之⿰口丙哂不異、

凡代數式可作圖者、其式之諸項、必元數相等、或俱一次（謂單元）表線、或俱二次（謂二元相乘）表面、或俱三次（謂三元連乘）表體、是謂同類之式、若異類之式、不能相加減、不可作圖也、

或有式似不同類、而亦可作圖者、則因中有一元以一代之、故凡乘約諸項之法數母數俱隱不見、若此諸項內各紀代一之元、則仍爲同類之式、如下、

丙⊥乙甲＝天

此

式似不同類、以丑代一、則得丑天＝甲乙丄丑丙、即天＝$\frac{丑}{甲乙}$丄丙、即爲同類式、故可作圖、

代微積拾級卷三

米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

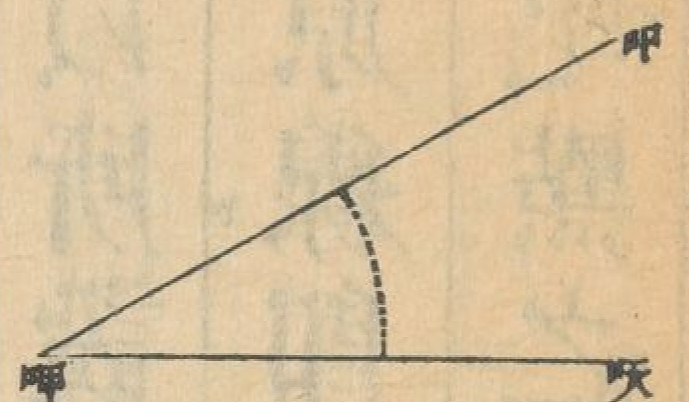
代數幾何三

論點

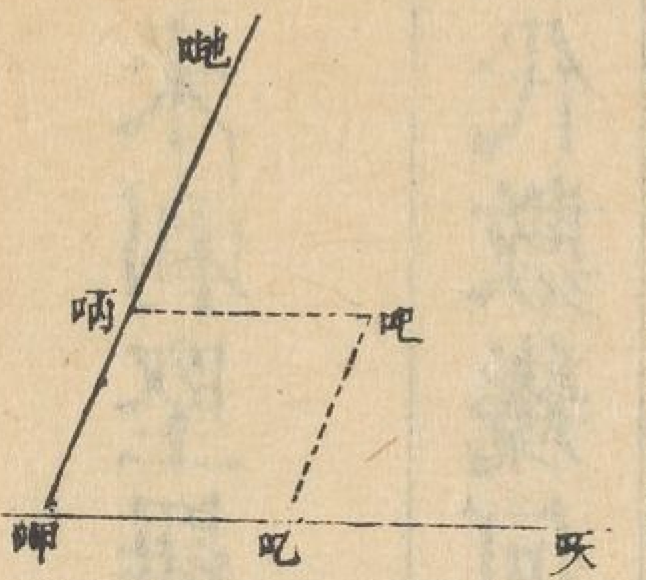
題面內之點有二法、

一以所設點距原點及方向顯之、如呷爲原點、呷吠爲原線、即所知方向、若知呷吧之距、及吧呷吠角、即知吧點之方位　原點呷名曰極、吧呷距名曰帶徑、

帶徑與原線之交角及帶徑名極角距、



二用相交兩線知所設點與兩線之距、即知點之方位、是謂顯點捷法、如呷呹呷㕭二線相交于呷點、吧

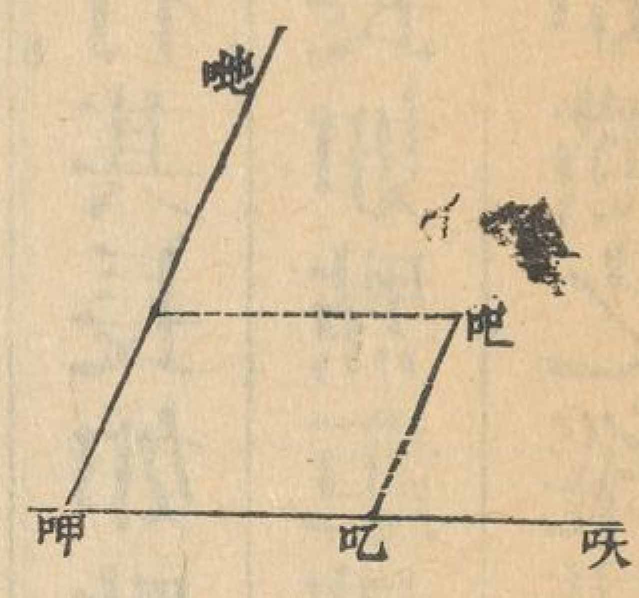


爲同面內所設之點、吧吃與呷㕭平行、吧呐與呷呹平行、知吧吃吧呐各若干、即知吧點方位、　呷呹呷㕭名二軸線、交點呷名原點、呐吧與呷吃等、名爲吧點之橫線、吃

吧與呷哂等名爲吧點之縱線、呷呋名曰橫軸、呷呲名曰縱軸　縱橫二線合稱之曰縱橫線、可互爲縱橫也、二軸亦合稱曰縱橫軸、呲呷呋角、或直或銳或鈍無一定、故二軸或正交、或斜交、俱可然、恆用正交、取其便也、　橫線恆用天代縱線、恆用地代、故橫軸恆誌以呋縱軸恆誌以呲、　點之橫線恆與橫軸平行、其長如點距縱軸、　點之縱線恆與縱軸平行、其長如點距橫軸、

知點之縱橫線、則亦知其方位、如點之橫線爲甲、縱

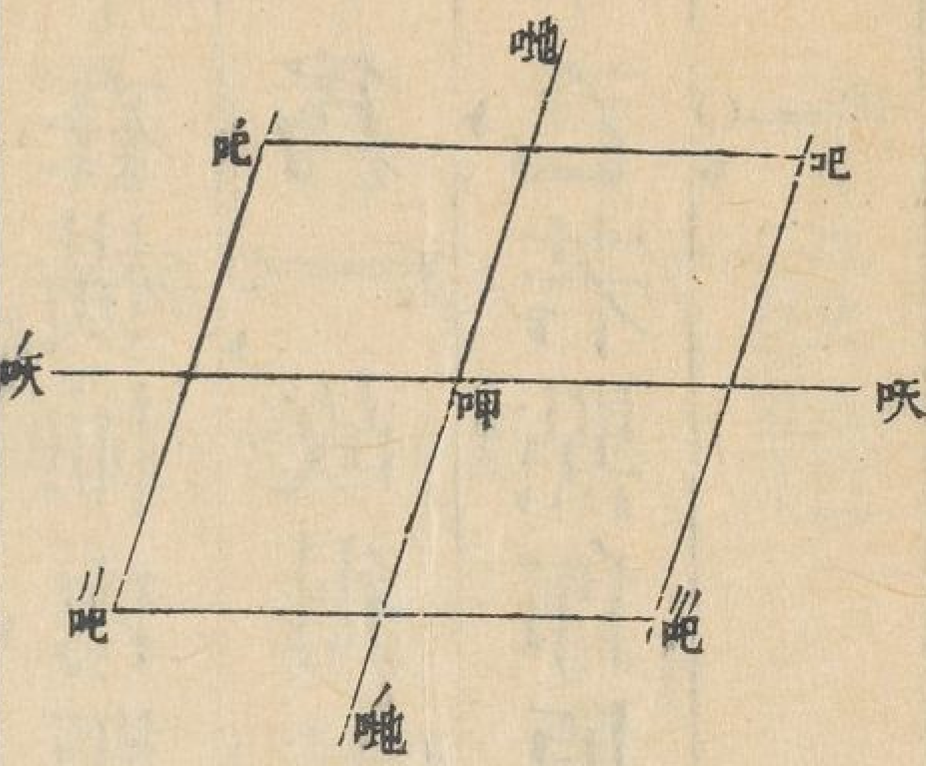
線爲乙定點之方位法從原點呷度橫線至吃等于甲從吃點與縱軸平行作吃吧等于乙則吧即所求之點



求點之方位但用二式天＝甲、地＝乙、甲乙爲已知數此二式名曰點式

欲知點之方位必先知甲乙二數又必知二數之正負縱橫軸過原點呷引長之至呹哋二點則從呷度橫線向呹與向呹之號必相反度縱線向哋與向哋之號必相反點之方位若無此分別則式所指必混

而不明、如吧吧′吧″吧‴四點、其縱橫線之式無異、則點在軸之上下左右莫辨、今以順度之線爲正、逆度之線爲負、而後方位犁然、約言之、橫線自呷



點向右爲正、向左爲負、縱線自呷點向上爲正、向下爲負、

以哋呷呋角爲第一角、哋呷呋′角爲第二角、哋′呷呋′角爲第三角、哋′呷呋角爲第四角、四角內各點式列如左、

第一角內吧點之式　天＝丄甲　地＝丄乙　第二角內′吧點之式　天＝丅甲　地＝丄乙

第三角內″吧點之式　天＝丅甲　地＝丅乙　第四角內‴吧點之式　天＝丄甲　地＝丅乙

若點在橫軸內、則　地＝乙　變爲　地＝〇、故得　天＝±甲　地＝〇、此式指點在橫軸內、距原點等于甲、若點在縱軸內、則　天＝甲　變爲　天＝〇、故得　天＝〇　地＝±乙、此式指點在縱軸內、距原點等于乙、若點卽原點、則爲縱橫軸內之公點、其式爲　天＝〇　地＝〇、

設題

今有天=丄四、地=丅三、求其點之方位、

今有天=丅二、地=丄七、求其點之方位、

今有天=〇、地=丅五、求其點之方位、

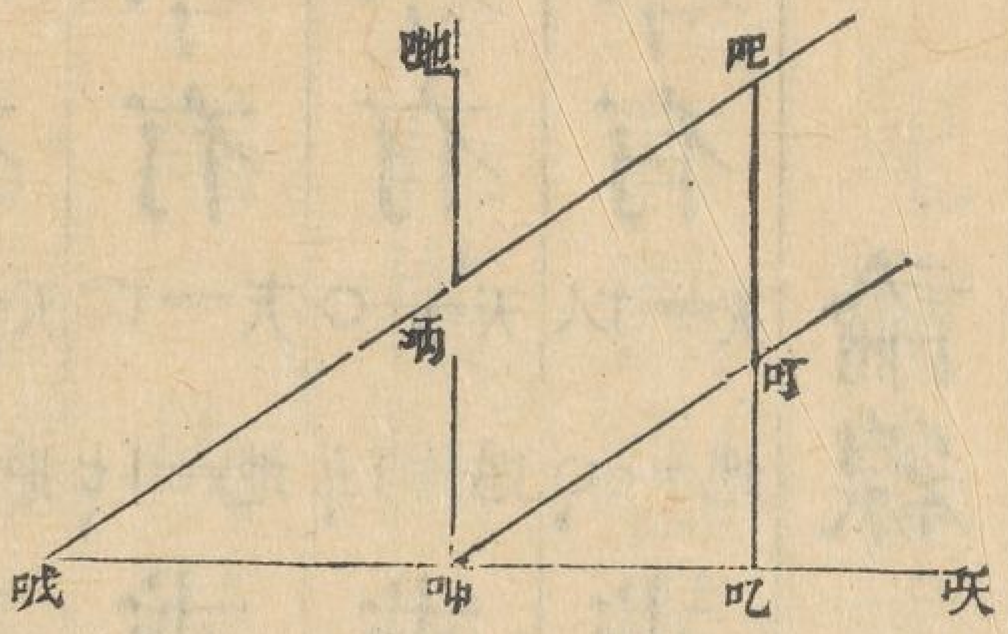
今有天=丅八、地=〇、求其點之方位、

論線

凡線之式、乃以縱橫線表諸點之相聯、

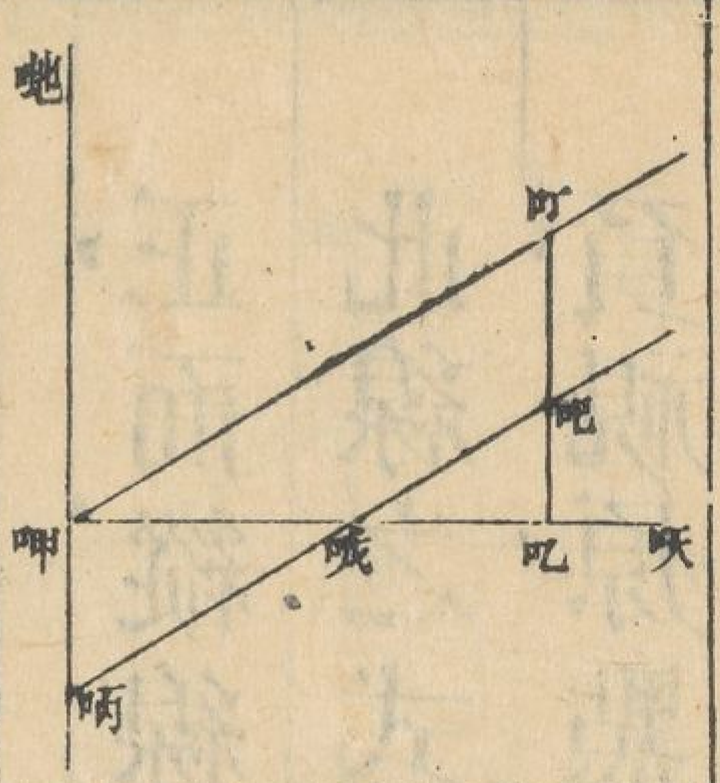
第一款 直角縱橫軸之線式爲地=甲天丄乙、式中天與地、爲線內諸點之縱橫線、甲爲線與橫軸交角之正切、

乙為線交縱軸點距原點、分甲乙俱或正或負不定、

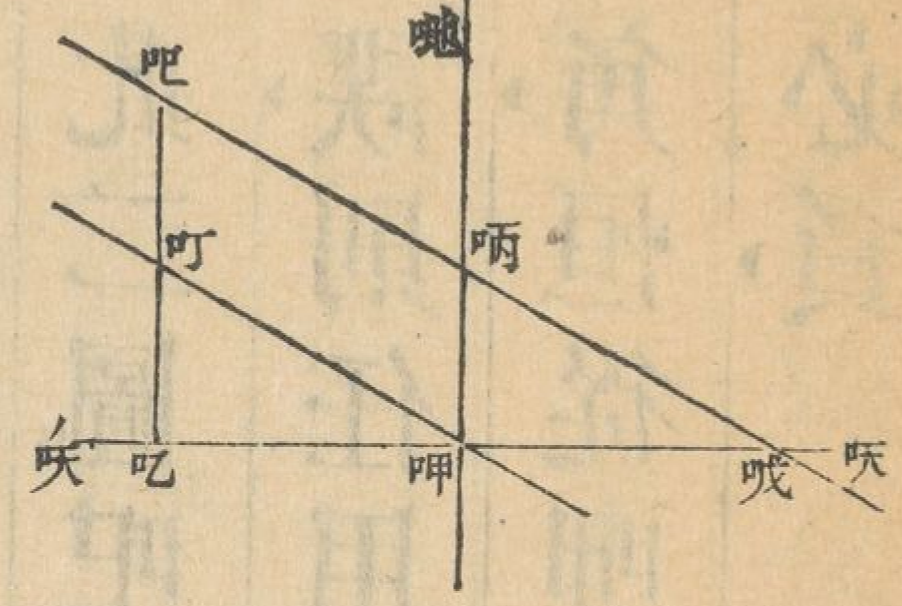


如圖、呷為縱橫軸之原點、呷呹呷咃為正交二軸、吧㖈為所求之線、此線內任取吧點、作呷呹之垂線吧叱、即為吧點之縱線、呷叱為吧點橫線、從呷點與㖈吧平行作呷叮線、遇吧叱于叮、命呷叱為天、叱吧為地、㖥角即叮呷呹角正切為甲、呷㖈即叮吧為乙、半徑為味、準三角術、有比

例味：呷吃：：叮呷呋切：吃叮、即味：天：：甲：吃叮、以半徑爲一、則得吃叮＝甲天、惟吃吧等于吃叮加叮吧、故地＝甲天丄乙、若呐吧線交縱軸點在原點呷下、則吃吧等于吃叮少叮吧、即得式地＝甲天丅乙、



此二圖吧呐與橫軸交、皆成銳角、若式之正負不誤、則任用銳鈍諸角皆同、凡所求線與橫軸之交角、恒從呷呋軸左旋取其度、故若爲鈍角、其正切必負、

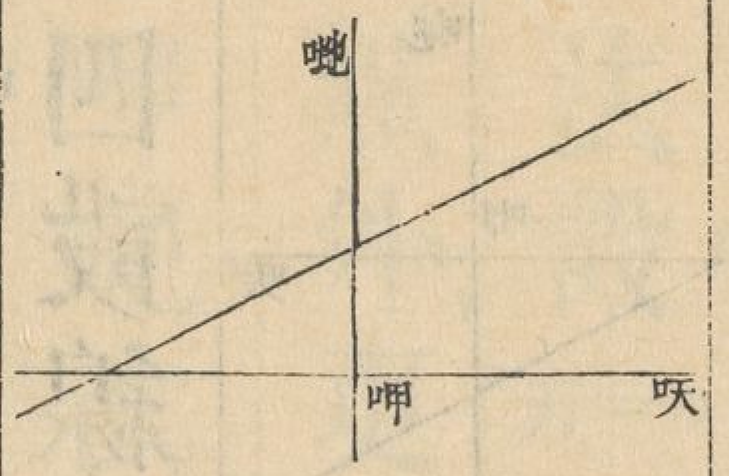


如圖呷呋呷咃爲正交二軸、吧哂爲所求之線、哂哎呋爲鈍角、準三角理有比例吃叮∶叮呷呋切∷呷吃∶味橫線呷吃在原點左、爲負、叮呷呋之正切亦爲負、是二三率俱負、故乘得正、而縱線吃叮向上、恰爲正、故與前銳角無異、而此線之式爲地＝丅甲天丄乙、式中負號、指甲非指天、蓋天之正負、視原點左右方向、設吧哂線過呷咃軸向右引長之、則其橫線必爲正矣、

準此論推之、線在二軸之上下左右、其勢有四、各

以式中甲乙二元顯之、如下、

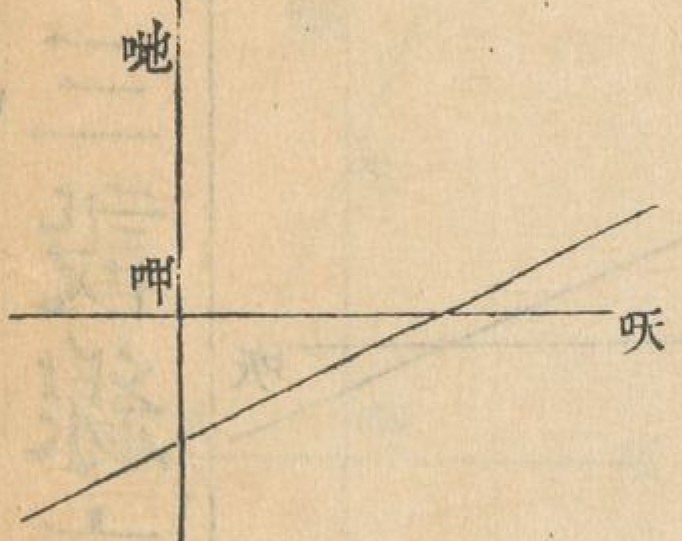
一、設線交呹軸在原點之左、交呭軸在原點之上、



則甲乙皆爲正、而得式

地＝丄甲天丄乙、

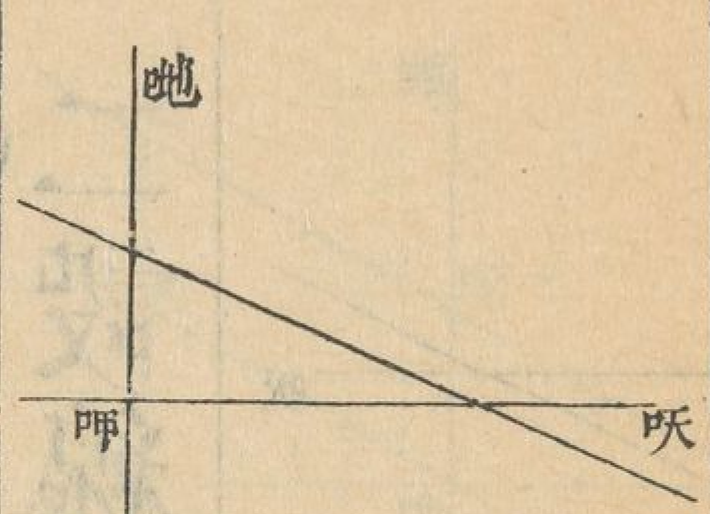
二、設線交呹軸在原點之右、交呭軸在原點之下、



則甲爲正、乙爲負、而得式

地＝丄甲天丅乙、

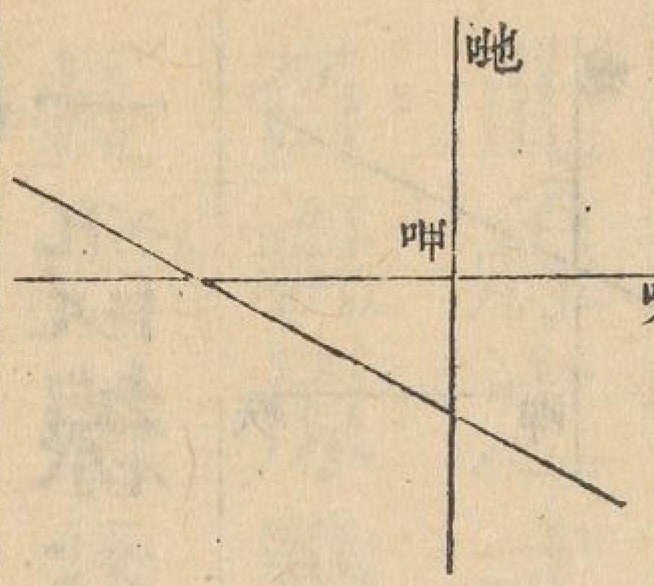
三、設線交呹軸在原點之右、交哋軸在原點之上、



則甲爲負、乙爲正、而得式

地＝丅甲天丄乙、

四、設線交呹軸在原點之左、交哋軸在原點之下、



則甲乙皆爲負、而得式

地＝丅甲天丅乙、

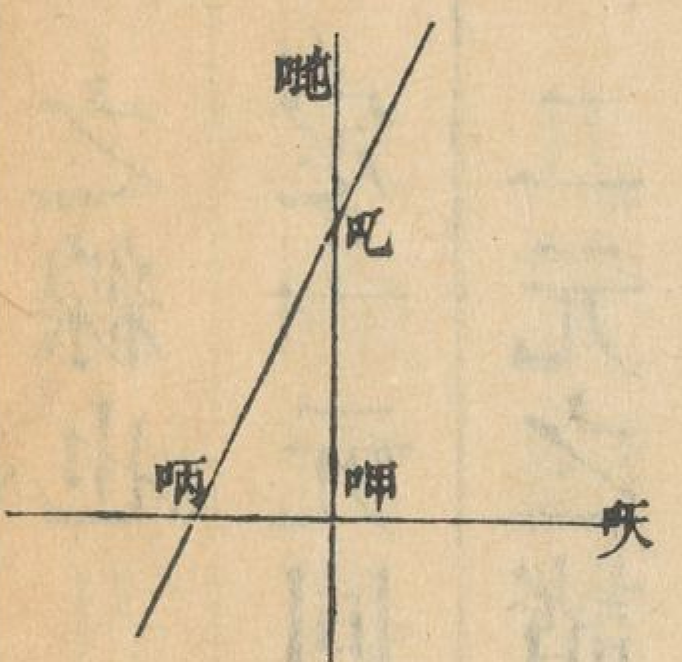
又設線過原點呷、則乙必等于〇、而得式

地＝甲天、

設題

今有四丄二天＝地、求作式之線、

法設天＝〇、則地＝四、地之同數、顯線與縱軸之交點、蓋此點外、更無橫線等于〇之點者、先作縱橫軸呷呋呷咃、次從呷度至吃、等于四、則吃為所求線內之一點、又設地＝〇、則二天＝丅四、卽天＝丅二、天之同數、顯線與橫軸之交點、蓋此點外、更無縱線等于〇之點者、從呷度至㖪、等于二、則㖪為所求線內之又一點、乃過吃㖪二點作線、卽式



之線也、

定一元同數、依式可得餘一元同數、如法取天地

二元之諸同數、可得本線諸點之方位、　次第取

諸同數如下、

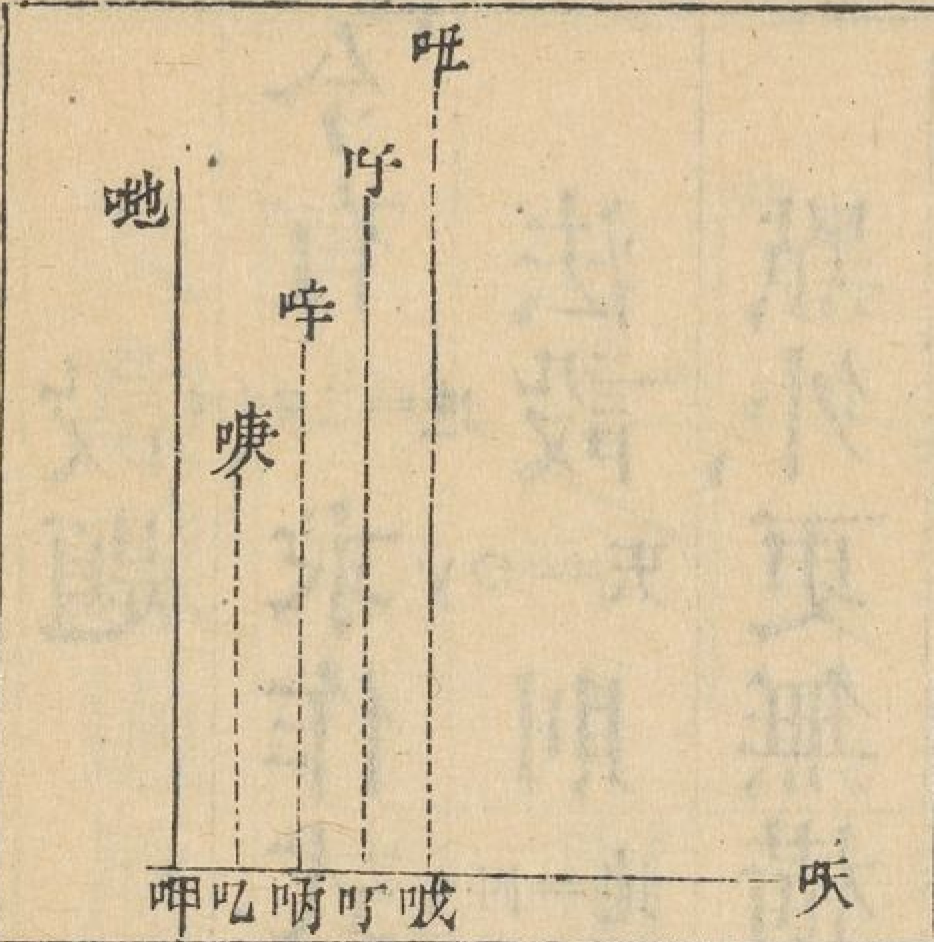
天＝一　地＝六

天＝二　地＝八

天＝三　地＝一〇

天＝四　地＝一二

餘類推、



以圖明之、作正交二軸呷呹呷哋、依天＝一　地＝六二同數、于橫軸內取呷吃、等于一、作吃咦垂線、等于六、則咦爲線之第一點、又依天＝二　地＝八、取呷哂、等于二、作

呞哼垂線、等于八、則哼爲線之第二點、如法又取呼呬二點、式之線必過嘆哼呼呬諸點、

今有地＝二天丄三、求作式之線、

今有地＝三天丅七、求作式之線、

今有地＝丅天丄二、求作式之線、

今有地＝丅二天丅五、求作式之線、

凡直線式地＝甲天丄乙、甲乙二數不變、而縱橫線天地隨所求線內各點而變、故甲乙爲常數、天地爲變數、

第二款　凡函二變數一次方程式、恒爲直線式、

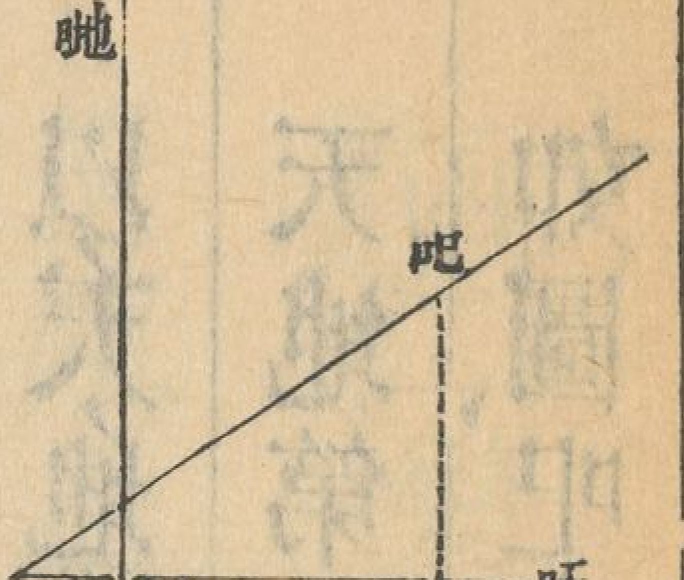
函二變數之一次式、可變之、如下式$呷地=吃天丄吶$、即$地=\frac{呷}{吃}天丄\frac{呷}{吶}$、以甲代$\frac{呷}{吃}$、乙代$\frac{呷}{吶}$、則變為$地=甲天丄乙$、㈠、法作正交縱橫二軸呷呋、呷吔、取呷吃、等于乙、取呷吶、等于$\frac{甲}{乙}$、過吃吶二點作吧吃吶線、即㈠式線、蓋線式為$地=\frac{\frac{呷}{吶}}{\frac{呷}{吃}}天丄\frac{呷}{吃}$、㈡、準圖$\frac{\frac{呷}{吶}}{\frac{呷}{吃}}=乙\div\frac{甲}{乙}=甲$、$\frac{呷}{吃}=乙$、故㈠㈡兩式同、皆為吶吃吧線式、

設題

今有二地一三天丁五、求作式之線、

第三款　凡直線過所設點、其式爲地丁地′一甲(天丁天′)、天′地′爲本點之縱橫線、天地爲線內任一點之縱橫線、甲爲線與橫軸交角之正切、凡所知諸點之縱橫線、例以天′地′、天″地″、天‴地‴諸元指之名爲第一天地、第二天地、第三天地、餘仿此、

如圖、吧爲所設點、其縱橫線命爲天′地′、凡線內諸



點之公式、爲　地′=甲天′丄乙　㊀、若天變天、地必變爲地、則式變爲　地=甲天丄乙　㊁、㊀式四元俱爲未知數、得㊁式、四元方有界限、因兩式須對合故也、對合可消去一元、法以、㊁式減㊀式、得　地丅地′=甲(天丅天′)、卽爲過吧點之線式、

正切甲定線之方向、而甲尙爲未定數、故過吧點可作無數直線、皆與式合、

欲令過所設點之線有定方向、必令線交橫軸有定角、命其正切爲甲、則線之式爲　地丅地′=甲(天丅天′)、

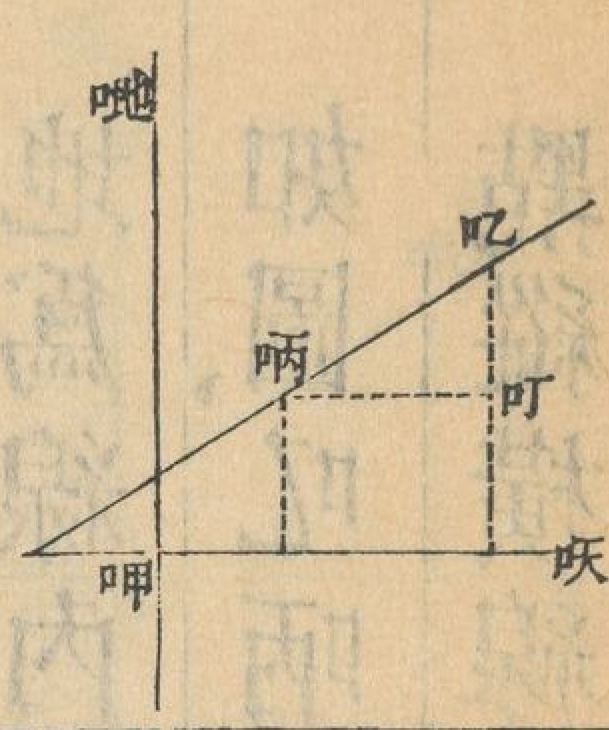
設題

今有點之橫線爲五、縱線爲三、求作過此點之線、令交橫軸之正切爲二、

第四款　凡直線過所設二點、其式爲 $地丅地' = \frac{天''丅天'}{地''丅地'}(天丅天')$、天′地′爲所設第一點之縱橫線、天″地″爲第二點之縱橫線、天地爲線內諸點之公縱橫線、

如圖、乙丙爲所設之二點、乙點縱橫線爲天′地′、丙點縱橫線爲天″地″、凡線內諸點之公式爲 $地 = 甲天丄乙$ ㊀若

天變爲天′、地必變爲地′、則式變爲 $地'=甲天'+乙$ ㊁、又若天變爲天″、地必變爲地″、則式變爲 $地'=甲天''+乙$ ㊂、



㊀式有四未知數、得㊁㊂兩式、此四數始有定限、三式對合爲一式、則有二未知數可消去、法以㊁式減㊀式、得 $地-地'=甲(天'-天)$ ㊃、以㊂式減㊁式、得 $地'-地''=甲(天'-天'')$、即 $甲=\frac{天'-天''}{地'-地''}$、以此甲之同數代㊃式中之甲、則得式 $地-地'=\frac{天'-天''}{地'-地''}(天-天')$、即過吃呐二點之線式、甲等于 $\frac{天'-天''}{地-地''}$ 者、蓋 $地'-地''$ 即

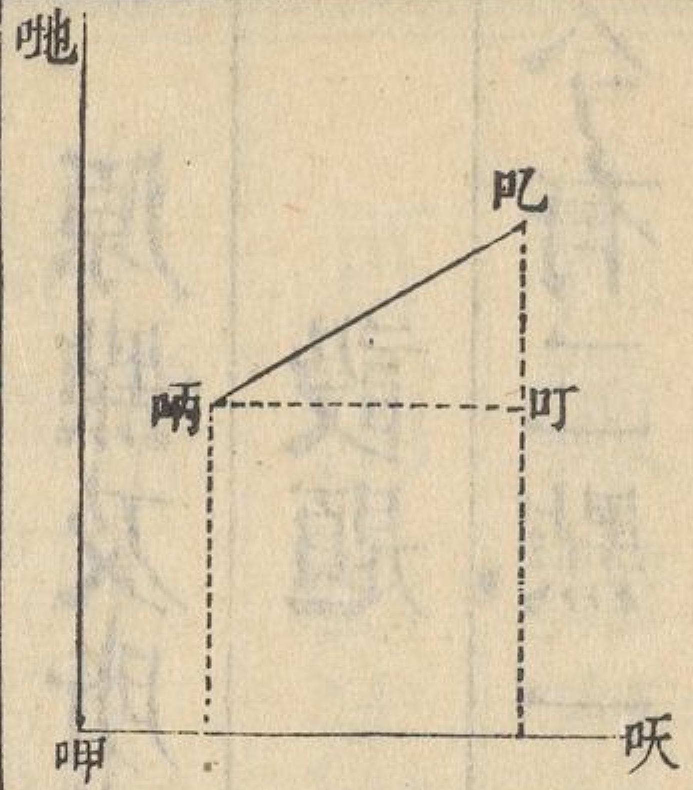
𠮙叮、$天'丅天$ 即㖠叮、故 $\frac{天'丅天}{地'丅地}$ 即 $\frac{呷叮}{𠮙呷}$、所以等于𠮙㖠叮角之正切、若所設線過原點、則 $天=〇$、$地=〇$、而得式 $地丅地'=\frac{天'}{地'}(天丅天')$、即過原點及所設𠮙點之線式、

設題

今有二點、一點之縱橫線爲 $天'=七$、$地'=四$、一點之縱橫線爲 $天''=五$、$地''=三$、求過二點之線式、及線交橫軸之角、

今有二點、一點爲 $天=二$、$地=三$、一點爲 $天''=四$、$地''=五$、求過二點之線式、

第五款　凡二點相距線之式爲 $\sqrt{(天''丅天')^{2}\perp(地''丅地')^{2}}$、天′地′爲第一點之縱橫線、天″地″爲第二點之縱橫線、



如圖、吃呐爲所設二點、吃之縱橫線爲天″地″、呐之縱橫線爲天′地′、試與呷吠平行作呐叮線、則二點相距線吃呐等于 $\sqrt{呐叮^{2}\perp吃叮^{2}}$

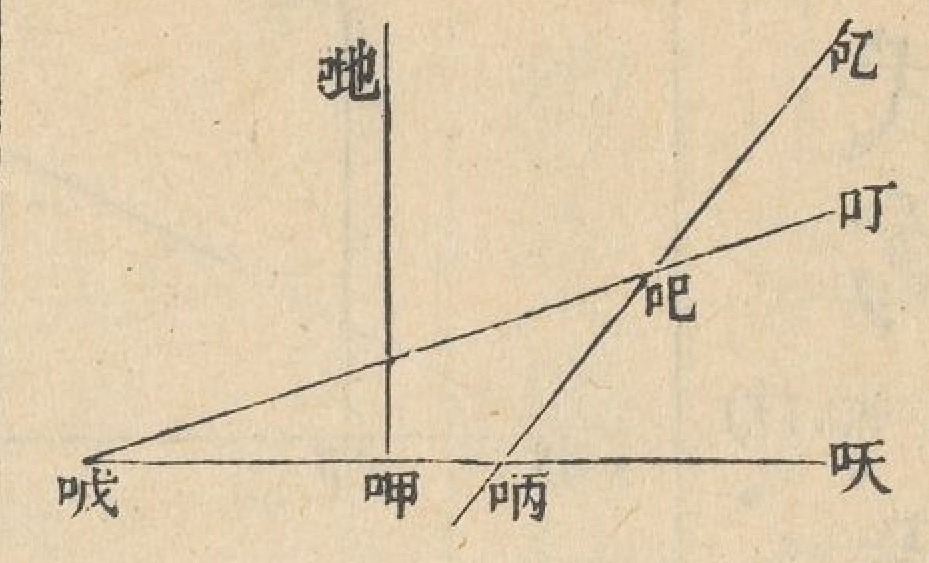
惟 呐叮＝天″丅天′、吃叮＝地″丅地′、

故吃呐相距之線式爲 $\sqrt{(天''丅天')^{2}\perp(地''丅地')^{2}}$、

第六款　凡二直線交角之正切式爲 $\frac{甲''丅甲'}{一\perp甲''甲'}$、甲′甲″爲二

線與橫軸交角之二正切、

如圖、𠮙呐叮哦爲所設二線、交于吧點、假令叮哦線之式爲 地=甲天丄乙 𠮙呐線之式爲 地=甲′天丄乙′、 則甲爲吧哦呋角之正切、甲′爲吧呐呋角之正切、吧呐呋角爲吧呐哦之外



角、故等于呐吧哦呐哦吧二角和、而呐吧哦角等于吧呐呋吧哦呋二角較、命吧哦呋角爲角、吧呐呋角爲角′則有式

哦吧呐=吧呐呋丅吧哦呋=角′丅角、

故

哦吧呐切=(吧呐呋丅吧哦呋)切=(角′丅角)切、

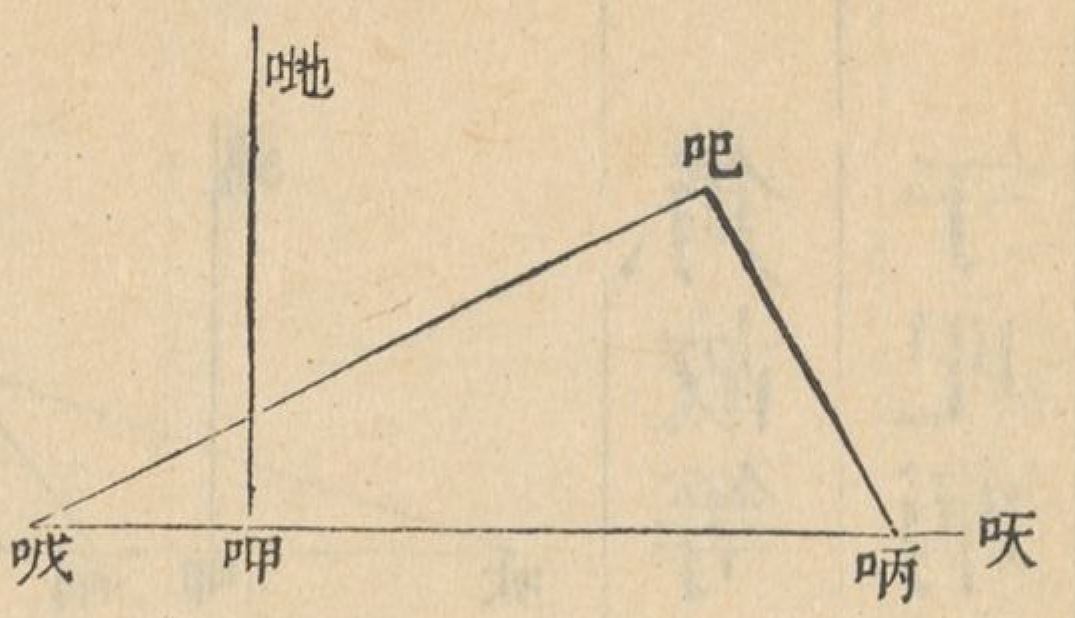
惟

$$(角′丅角)切=\frac{一丄角′切角切}{角′切丅角切}$$

故

$$哦吧呐切=\frac{一丄甲′甲}{甲′丅甲}、$$

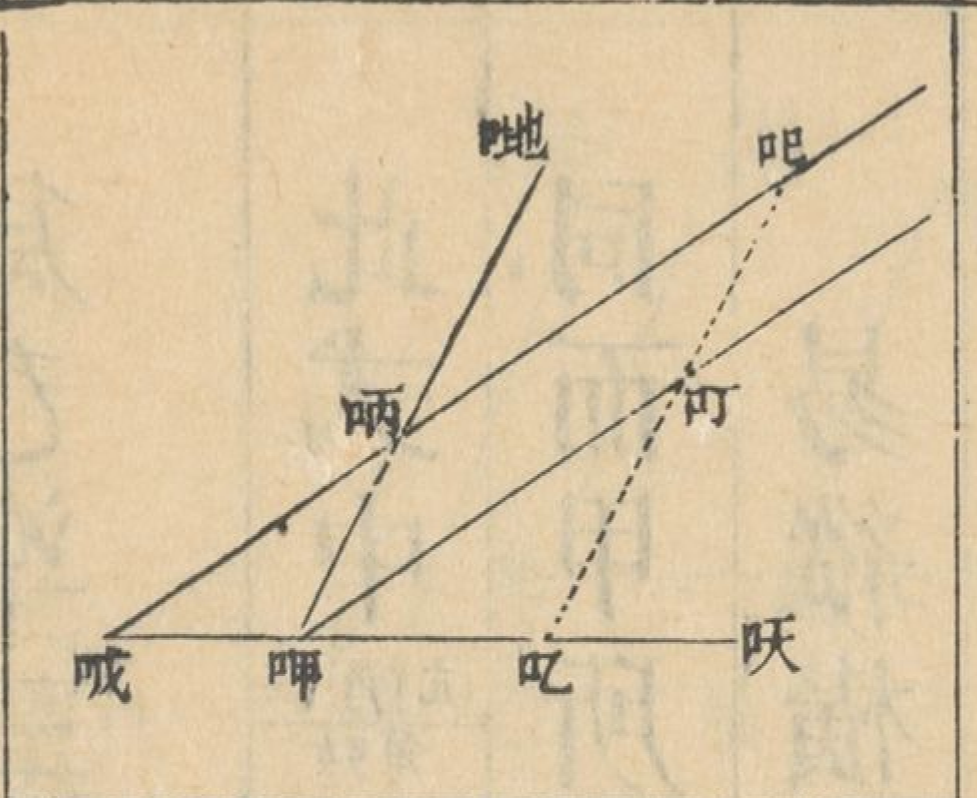
若二線正交、其角之正切無窮大、必令$\frac{一丄甲甲'}{甲'丅甲}$亦無窮大、故母數一丄甲甲'必為〇、所以甲甲'＝丅一、而甲＝丅$\frac{一}{甲'}$、遇式如此、二線必成直角、以三角理明之、如吧呐哎



吧為正交二線、則吧呐哎為吧哎呐之餘角、凡切×餘切＝一、即一、所以吧呐哎切吧哎呐切＝一、而吧呐呋為吧呐哎之外角、則正切同而正負異、所以吧呐呋切吧哎呐切＝丅一、即甲甲'＝丅一、準前款、本卷三款過所設點之線式為地丅地'＝甲(天丅天')、求線之垂線、必以丅$\frac{一}{甲'}$代甲、則得地丅地'＝丅$\frac{一}{甲'}$(天丅天')、即顯過

所設點一線爲餘一線之垂線、

第七款　凡直線以斜交二軸爲準、其式爲乙⊥天甲=地、甲爲線交橫軸角與交縱軸角二正弦之比例數、



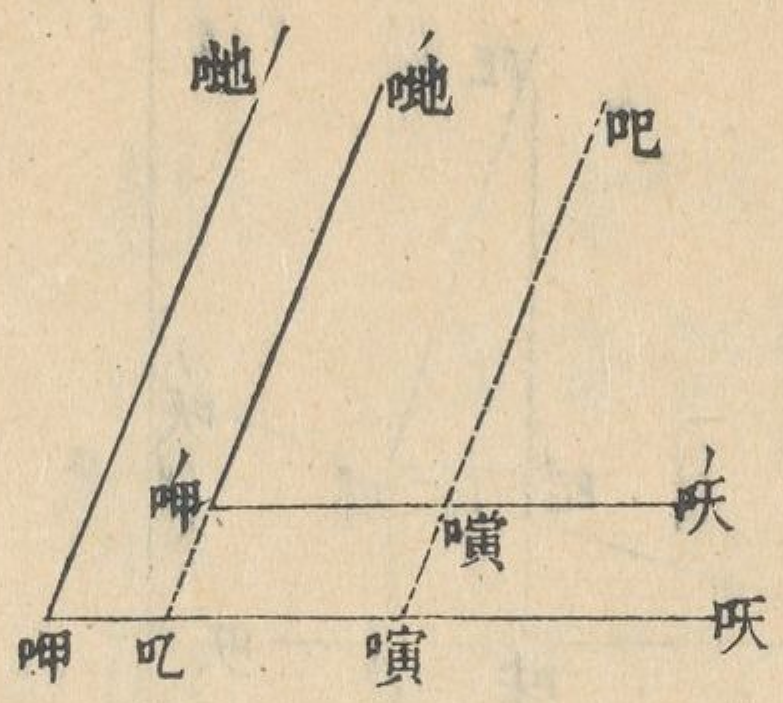
如圖、呷爲原點、呷呋呷哋爲斜交二軸、吧呐爲式線、于線內任取吧點、與呷哋平行作吧吃、爲吧點之縱線、呷吃爲吧點橫線、自呷與呐吧平行作呷叮線、遇吃吧于叮、吧哦呋角卽叮呷呋角、命爲角、哋呷呋角命爲亢、吧吃與呷哋平行、故呷叮吃等叮呷哋

角、即等于亢丁角、命呷吔為天、吔吧為地、呷呐即叮吧、為乙、準三角例有比例$吔叮:呷吔::角弦:(亢丁角)弦$即$吔叮:天::角弦:(亢丁角)弦$、故$吔叮=天\frac{(亢丁角)弦}{角弦}$惟$吔吧=吔叮丄叮吧$所以$地=天\frac{(亢丁角)弦}{角弦}丄乙$、此式中$\frac{(亢丁角)弦}{角弦}$之數以甲代之、得下式$地=甲天丄乙$、與第一款式同、而甲所代之數不同、

易縱橫軸法

凡線既準二軸得式、可任易他二軸而變其式、其法有三、原點易而二軸方向不易、一也、二軸方向易而原點不易、二也、原點與二軸方向俱易、三也、

第八款　凡線準二軸得式、易其原點、不易二軸方向、法如下、天=甲丄天、地=乙丄地、甲乙爲準新原點之縱橫線、



如圖呷吠呷哋爲二舊軸、呻吠呻哋爲二新軸、所設之線皆準之、命新原點之縱橫線呷𠮙𠮙呻爲甲乙、任取線內吧點、命其準舊軸之縱橫線爲天地、準新軸之縱橫線爲天地、則得式呻嗔=呷𠮙丄𠮙嗔、吧嗔=嗔嗔丄吧嗔、卽天=甲丄天、地=乙丄地、爲易軸之式、新原點呻、于舊軸之四角內俱可置之、但

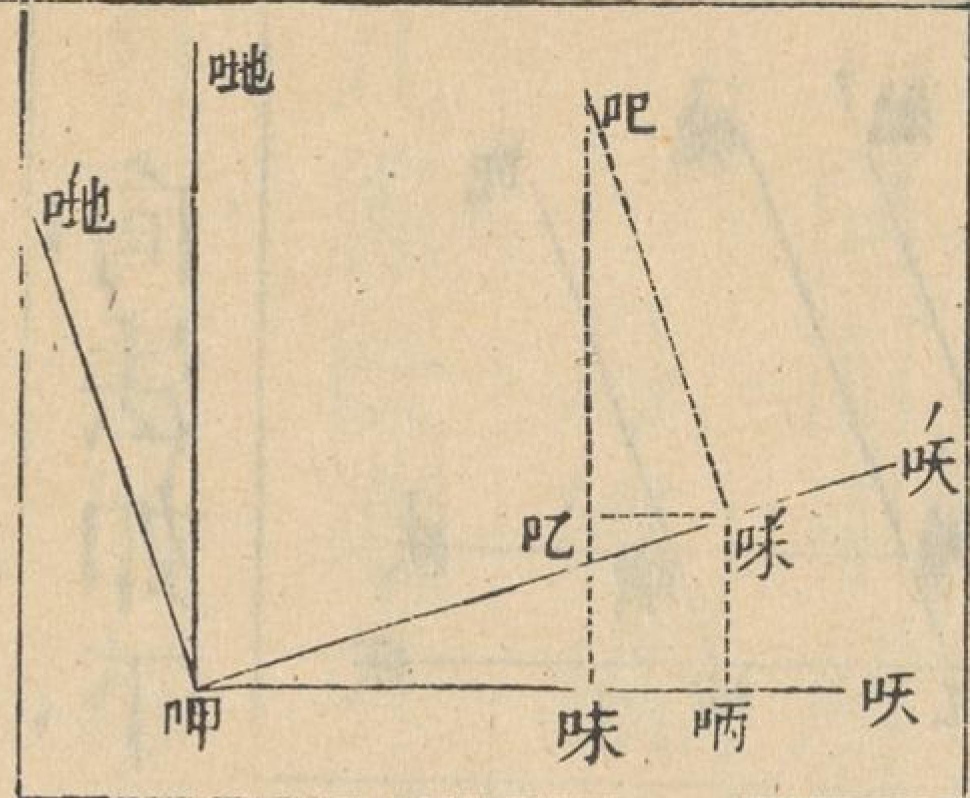
甲乙之正負須分別

第九款　凡正交二軸、易其方向、原點與角俱不易、線之式爲

天＝天′角餘弦丅地′角弦、

地＝天′角弦丄地′角餘弦、

角爲二呋軸之交角、



如圖、呷呋呷哋爲二舊軸、呷呋′呷哋′爲二新軸、命吧點準舊軸之縱橫線爲天地、準新軸之縱橫線爲天′地′、命呋呷呋′角爲角、從吧作呷呋之垂線吧味、作呷呋′之垂線吧咮、又與吧味平行作咮呐、與呷呋平

行作味吃、則 $\frac{呷}{味}=\frac{呷}{呐}$丅$\frac{呐}{味}$、惟 $\frac{呷}{味}=$天、$\frac{呷}{呐}=\frac{呷}{味}$乂呋呷′呋餘弦＝天′角餘弦、$\frac{呐}{味}=\frac{吃}{味}=\frac{吧}{味}$乂吃吧味弦＝地′角弦、所以 天＝天′角餘弦丅地′角弦、又 $\frac{吧}{味}=\frac{吃}{味}$⊥$\frac{吧}{吃}$、惟 $\frac{吧}{味}=$地、$\frac{吃}{味}=\frac{味′}{呐}=\frac{呷}{味}$乂呋呷′呋弦、＝天′角弦、$\frac{吧}{吃}=\frac{吧}{味}$乂吃吧味餘弦＝地′角餘弦、所以 地＝天′角弦⊥地′角餘弦、若軸之方向與原點俱易、而新原點之縱橫線爲甲乙、則式爲

天＝甲⊥天′角餘弦丅地′角弦

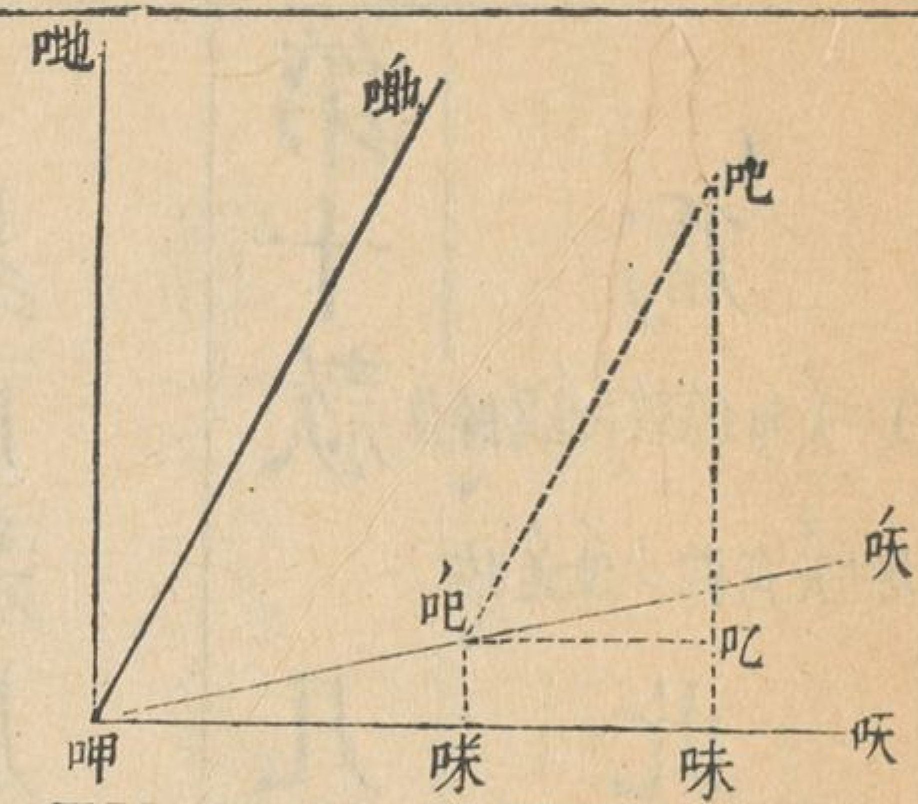
地＝乙⊥天′角弦⊥地′角餘弦、

第十款 凡正交二軸、易爲斜交二軸、則其線之式爲

天＝天′角餘弦⊥地′角餘弦、

地＝天′角弦⊥地′角弦、

此式角角指二新軸交舊橫軸之二角



如圖、呷呋呷吔爲二舊軸、呷呋呷吔爲二新軸、命呋呷呋角爲角、呋呷吔角爲角、任取吧點、與呷吔平行作吧咊、與呷吔平行作吧吧、又從吧點與呷吔平行作吧咊、與呷呋平行作吧吃、則有式

呷咊=呷咊丄咊´咊

惟

呷咊=天、

呷咊=呷吧呋呷呋餘弦=天´角餘弦、

咊´咊=吧´吃=吃吧吃吧吧餘弦=地´角餘弦、

所以

天=天´角餘弦丄地´角餘弦、

又

吧咊=吃咊丄吧吃、

惟

吧咊=地、

吃咊=吧´咊=呷吧呋呷呋弦=天´角弦、

吧吃=吧吧吧吧吃弦=地´角弦、

所以

地=天´角弦丄地´角弦、

若并易原點而新原點準舊軸之縱橫線爲甲乙、其式

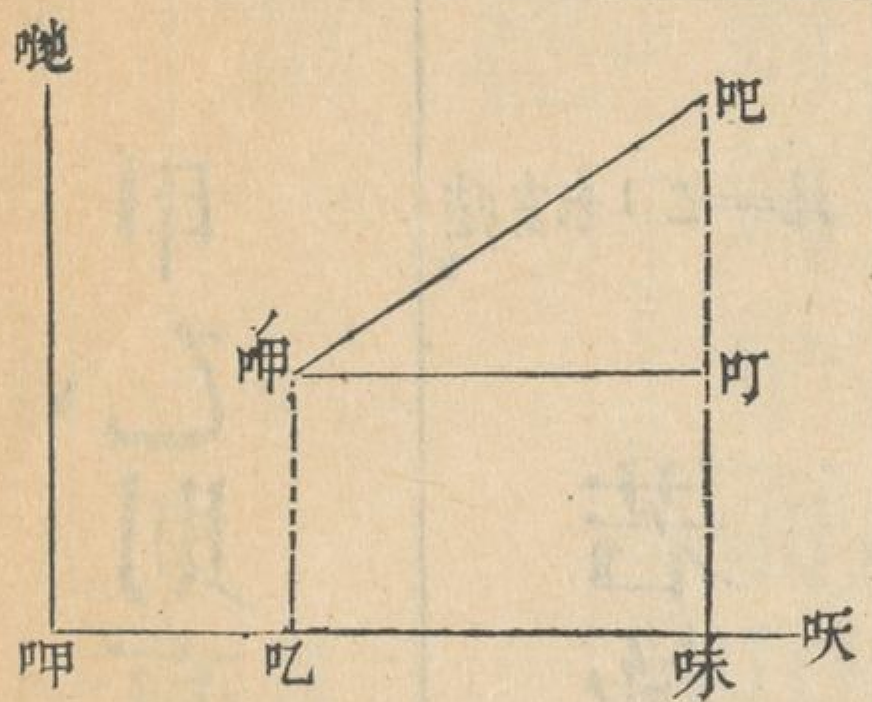
爲

天＝甲丄天′角餘弦丄地′角餘弦、
地＝乙丄天′角弦丄地′角弦、

第十一款　準正交縱橫線易爲準極角距、其式爲

天＝甲丄未亥餘弦
地＝乙丄未亥弦、

未爲帶徑、亥爲帶徑交橫軸之角、



如圖、呷呋呷呲爲二舊軸、呻爲極點、呻叮與呷呋平行、爲極角起度之線、命帶徑呻吧爲未、吧呻叮角爲亥、準舊軸吧點之縱橫線爲天地、呻點之縱橫線爲

甲乙、則有式 $\frac{呷}{味}=\frac{呷}{吃}丄\frac{吃}{味}$、惟 $\frac{吃}{味}=\frac{呷}{叮}=\frac{呷}{吧}\frac{吧呷}{叮餘弦}=未亥餘弦$ 所以 天＝一甲丄未亥餘弦、又 $\frac{吧}{味}=\frac{叮}{味}丄\frac{吧}{叮}$、惟 $\frac{吧}{叮}=\frac{呷}{吧}\frac{吧呷}{叮弦}=未亥弦$ 所以 地＝乙丄未亥弦、

若極點呷在呷、則式為 天＝未亥餘弦 地＝未亥弦、

代微積拾級卷四

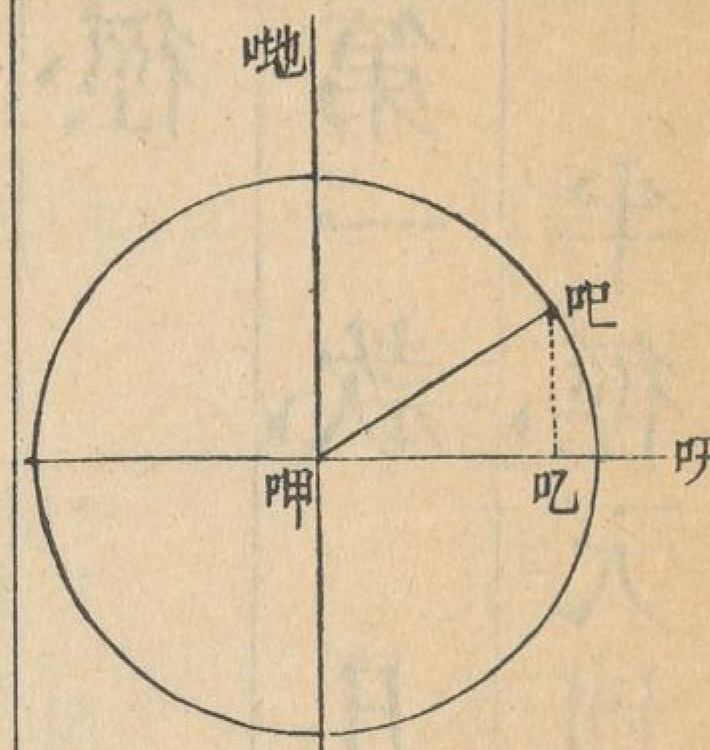
米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆述

代數幾何四

論圜

圜爲平面、其界距心俱等、界名圜周、界心距線名半徑、

第一款、　凡縱橫線之原點在圜心、其式爲 $天^{二}\perp地^{二}=味^{二}$、　味爲半徑、天地爲弧線任一點之縱橫線、



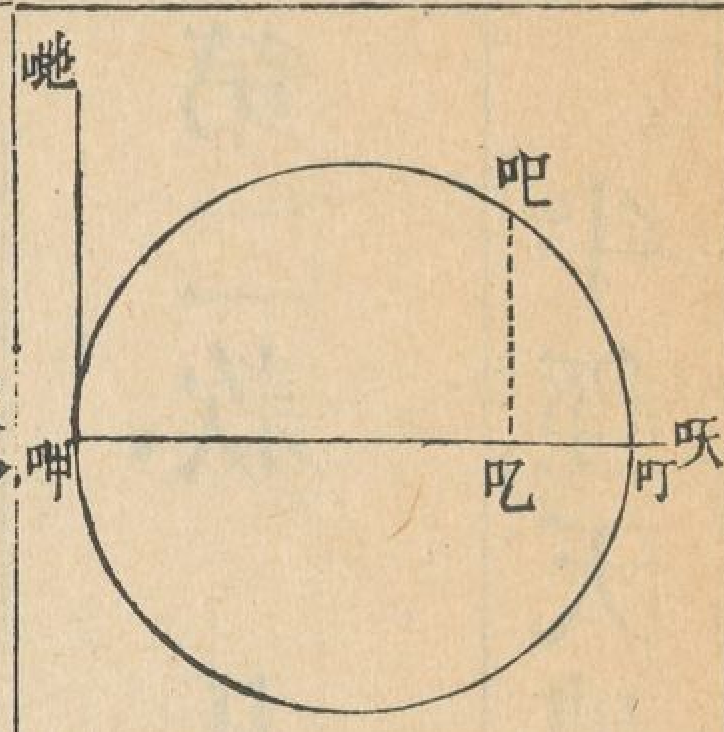
如圖、呷爲圜心、任取半徑、旋規作弧、弧內諸點距呷俱等、命距線爲味、任取弧之吧點、命其縱橫線呷吃吃吧爲天地、準幾何理、得式 $\text{呷吃}^2 \perp \text{吃吧}^2 = \text{呷吧}^2$、即 $\text{天}^2 \perp \text{地}^2 = \text{味}^2$、爲所求式、

欲定弧線交橫軸之點、則當令 $\text{地} = 〇$、即得 $\text{天} = \pm\text{味}$、所以弧線交橫軸之點有二、在原點之左右、距原點皆爲半徑、欲定弧線交縱軸之點、則當令 $\text{天} = 〇$、即得 $\text{地} = \pm\text{味}$、所以弧線交縱軸之點亦有二、在原點上下、距原點皆爲半徑、

欲盡推弧分內之諸點、則變式爲 $地=十\sqrt{味^{2}丅天^{2}}$、 凡天之每同數、俱可求得地之正負二同數、其二點至橫軸之弧線相等、設天爲正、則從 $天=〇$ $地=十味$ 起、地之同數漸損、至 $天=丄味$ $地=〇$ 而止、若天大于味、則地爲虛、故弧線交正橫軸、不能過 $天=丄味$、交負橫軸、亦不能過 $天=丅味$ 也、

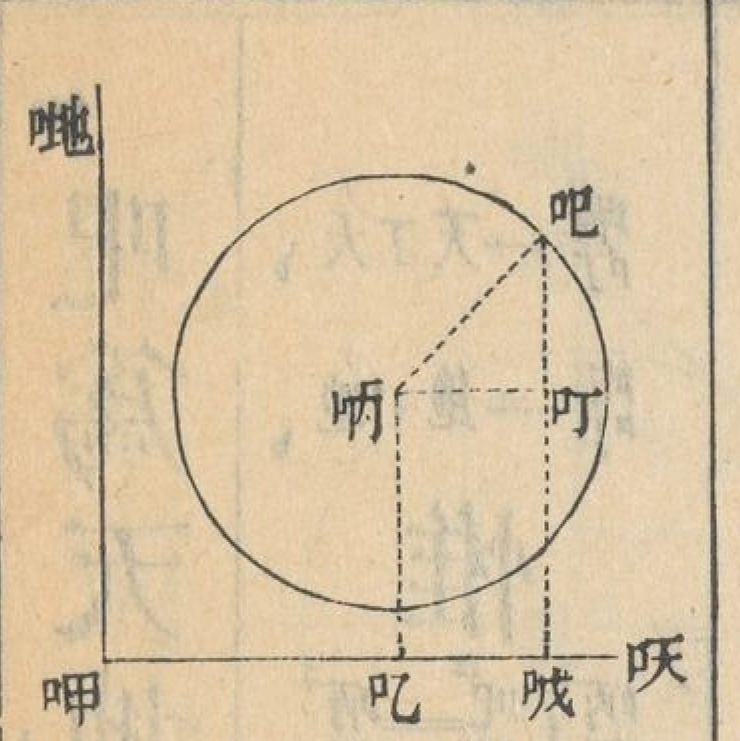
第二款、 凡縱橫線之原點在圜周、其式爲 $地^{2}=二味天丅天^{2}$、 味爲半徑、天地爲圜周任一點之縱橫線、

如圖、原點在圜周呷、横軸呷呋過圜心、任取圜周吧、作呷呋之垂線吧吃、乃命呷吃爲天、吧吃爲地、呷叮爲二味、則吃叮



爲二味丅天、又别得吃吧爲呷吃吃叮之中率、故得式吃叮×呷吃=吧吃^{二}、即地^{二}=天(二味丅天)=二味天丅天^{二}、合款之式、欲定圜周交横軸之點、則令地=〇、即得天(二味丅天)=〇、此式天=〇、二味丅天=〇、俱合、二味丅天=〇、則天=二味、故圜周交横軸之點有二、一在原點、一與原點距等于二味、欲定圜

周交縱軸之點、則令天=○、即得地=○、故圜周交縱軸之
點只一、即原點也、
第三款、原點任在何處、其公式為(天丅夭)²丄(地丅𡌾)²=昧²、昧為半徑、夭
地為圜心點之縱橫線、天地為圜周任一點之縱
橫線、



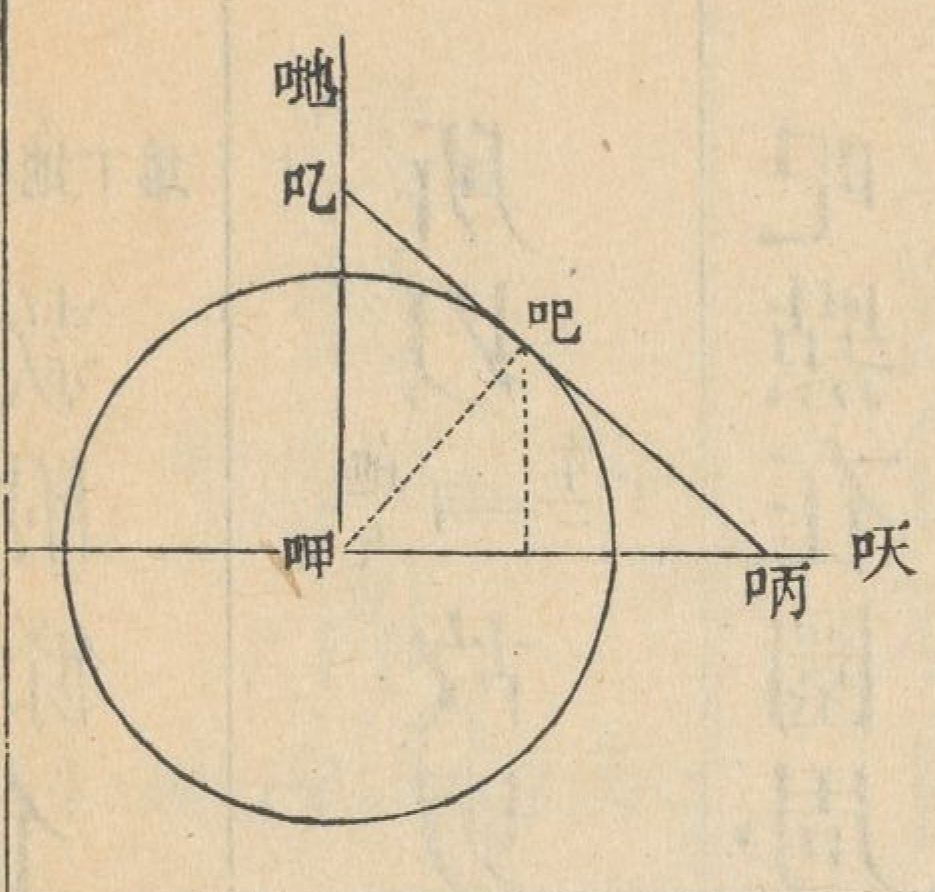
如圖、㖈為圜心、任置原點呷、作呷呋呷
哋二軸、命心點之縱橫線呷吃吃㖈為
夭𡌾命圜周任一點之縱橫線呷㖂㖂

吧為天地乃作半徑呐吧、及呷呋平行線呐叮、則 $\frac{呐}{叮}=天丅天'$、$\frac{吧}{叮}=地丅地'$、惟 $\frac{呐^{二}}{叮}丄\frac{吧^{二}}{叮}=\frac{呐^{二}}{吧}$、所以得 $(天丅天')^{二}丄(地丅地')^{二}=味^{二}$、即款之式、

設圜周交橫軸、欲定其交點、則令 $地=〇$、即得 $(天丅天')^{二}丄地^{二}=味^{二}$、故 $(天丅天')^{二}=味^{二}丅地'^{二}$、而 $天丅天'=\pm\sqrt{味^{二}丅地'^{二}}$、即 $天=天'\pm\sqrt{味^{二}丅地'^{二}}$、若地大于味、則天為虛、故心點距橫軸、若大于半徑則不能交、設圜周交縱軸、欲定其交點、則令 $天=〇$、即得 $地=地'\pm\sqrt{味^{二}丅天'^{二}}$、若天大于味、則地為虛而不

能交理如前、

第四款、凡圜之切線式爲天夫丄地地＝味^{二}、味爲半徑、夫地爲切點之縱橫線、天地爲切線內任一點之縱橫線、



如圖、呷爲原點、在圜心、吃哂爲切線、吧爲切點、命其縱橫線爲夫地、作半徑呷吧、過原點亦過切點、所以得式、地＝$\frac{夫}{地}$天、三卷四款附條凡切線必正交切點之半徑準前論、過所設點之線、爲他線之垂線、其式爲

地丅地＝丅甲/二(天丅天)、三卷六款附條、依八線理、正切等于餘弦約正弦、即巾＝天/地、

所以丅甲/二＝丅地/天、故切線之式爲地丨地＝丅地/天(天丅天)、去其母、移其項、得天天丄地地＝天二丄地二、惟

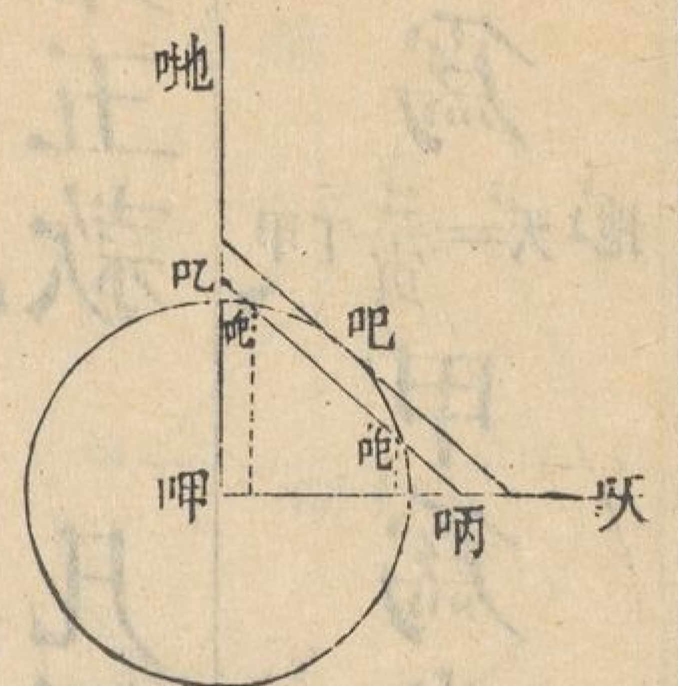
吧點在圜周、則縱橫線必合前式天二丄地二＝味二、本卷一款所以得

天天丄地地＝味二、爲本款式、

求切線式另有公法、一切曲線俱可用之、

如圖、先作叱哂線交曲線于吧吧二點、命吧點之

縱橫線爲天地、吧點之縱橫線爲天′地′、則叱呐線之式爲 $地丅地^{\prime}=\frac{天^{\prime\prime}丅天^{\prime}}{地^{\prime\prime}丅地^{\prime}}(天丅天^{\prime})$ ㈠、三卷四款吧吧二點俱在曲線內、故有式 $天^{\prime二}丄地^{\prime二}=味^{二}$ ㈡、$天^{\prime\prime二}丄地^{\prime\prime二}=味^{二}$ ㈢、以㈢式減㈡式得 $地^{\prime\prime二}丅地^{\prime二}丄天^{\prime\prime二}丅天^{\prime二}=〇$、即 $(地^{\prime\prime}丄地^{\prime})(地^{\prime\prime}丅地^{\prime})丄(天^{\prime\prime}丄天^{\prime})(天^{\prime\prime}丅天^{\prime})=〇$、故 $\frac{天^{\prime\prime}丅天^{\prime}}{地^{\prime\prime}丅地^{\prime}}=丅\frac{地^{\prime\prime}丄地^{\prime}}{天^{\prime\prime}丄天^{\prime}}$、前㈠式中易此右邊數、則得 $地丅地^{\prime}=丅\frac{地^{\prime\prime}丄地^{\prime}}{天^{\prime\prime}丄天^{\prime}}(天丅天^{\prime})$

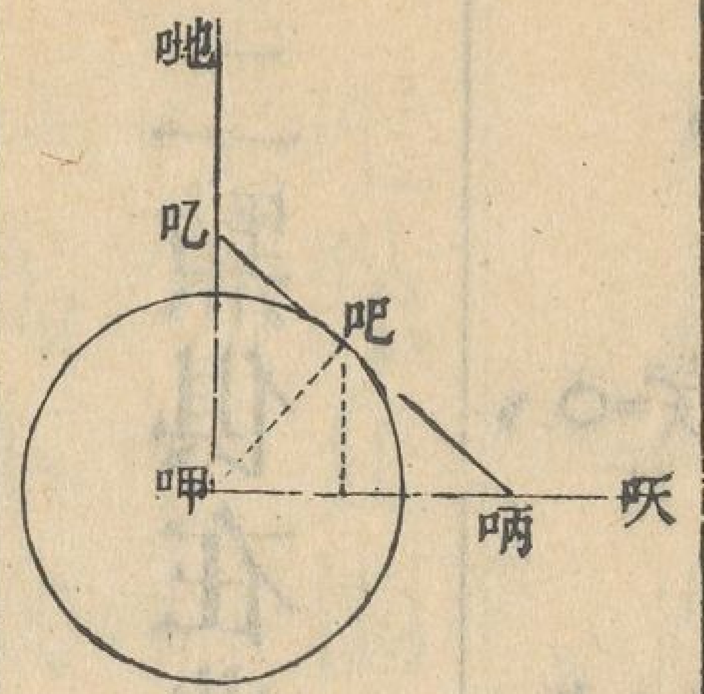


㈣、叱呐線漸移近吧點、則吧吧二點漸相近、至合

為一、則叱呐變為切線、而 夭＝夭 地＝地、㊃式變為 地丁地＝丁$\frac{地}{夭}$(天丁夭)、與本

款式合、欲定切線交橫軸之點、必令 地＝〇、即得 天夭＝二呋、

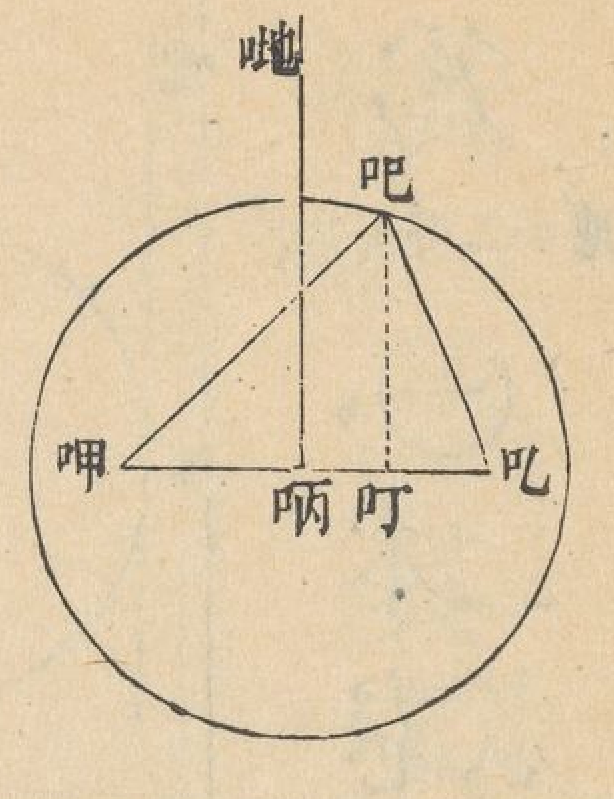
故 天＝$\frac{夭}{呋}$＝呷呐、欲定切線交縱軸之點、必令 天＝〇



即得 地地＝二呋、故 地＝$\frac{地}{呋}$＝呷叱、

第五款、凡原點在三角形底邊之平分點、頂點式

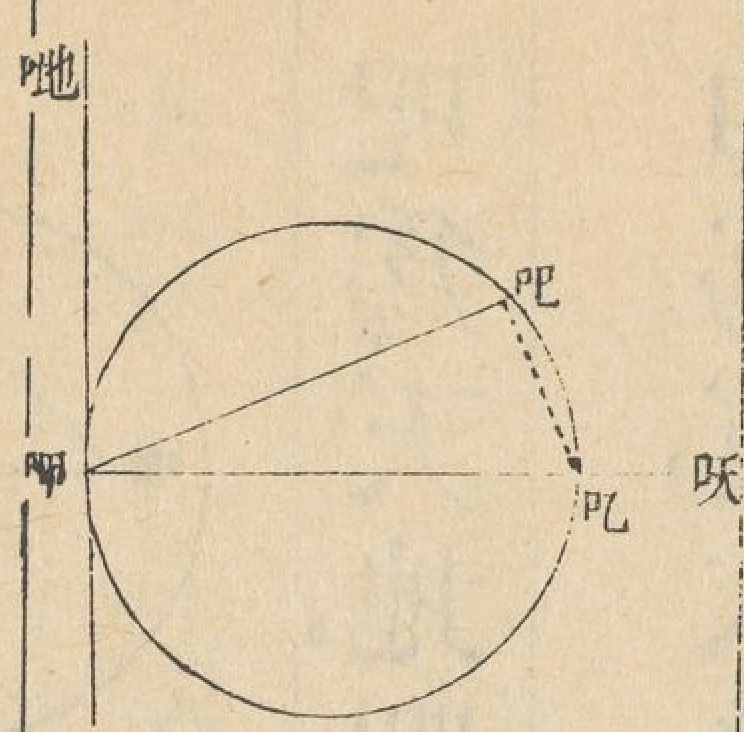
為 地二丄天二＝二寅丁甲、甲為半底邊、寅為二腰正方之和、



如圖、呷吃爲三角形底邊、平分于呐、呐哋爲呷吃垂線、與呐吃成正交二軸、命三角頂吧點之縱橫線呐叮叮吧爲天地、呷呐呐吃俱爲甲、呷吧吧吃之二正方和爲寅、依幾何理得式 $吧叮^{二}丄呷叮^{二}＝呷吧^{二}$、$吧叮^{二}丄吃叮^{二}＝吃吧^{二}$、即 $地^{二}丄(天丄甲)^{二}＝呷吧^{二}$、$地^{二}丄(天丅甲)^{二}＝吃吧^{二}$、二式并之得 $二地^{二}丄二天^{二}丄二甲^{二}＝呷吧^{二}丄吃吧^{二}＝寅$、故 $地^{二}丄天^{二}＝\frac{寅}{二}丅甲^{二}$、合前款觀之、本卷一款知此式乃原點在心之圓線式、其半徑等于 $\sqrt{\frac{寅}{二}丅甲^{二}}$、若以呐爲心任作圓周從

呷吃二點任至圜周之一點作二線成三角形皆與款合

第六款、凡原點在圜周、圜之極式爲$未＝二味亥餘弦$、味爲半徑、未爲帶徑、亥爲變角、



如圖、呷爲原點、卽極點、呷呋爲角之一界、呷吧爲帶徑、吧呷呋爲變角、準前凡正交二軸、原點在圜周、其式必爲$地^{二}＝二味天丅天^{二}$（一）、本卷二款凡準正交縱橫線易爲準極角距、卷三

十一款 附條 其式爲 天＝未亥餘弦 地＝未亥弦、 二式左右各自乘用所得天²地²二同數及天之同數代(一)式中天²地²天、則得 未²亥弦²＝二味未亥餘弦丅未²亥餘弦²

移其項、得 未²(亥弦²丄亥餘弦²)＝二味未亥餘弦、 惟 亥弦²丄亥餘弦²＝一、 所以 未²＝二味未亥餘弦、 以未約之、得 未＝二味亥餘弦、 與款式合、又依三角法、有比例、 呷吧：叱呷吧餘弦：：呷叱：半徑 即 未：亥餘弦：：二味：一、 故得 未＝二味亥餘弦、 亦合、

若亥＝〇、則亥餘弦＝一、而得未＝二味＝$\frac{\text{嘟}}{\text{吃}}$、亥從〇起、漸增至九十度、則帶徑盡定半周線內諸點、若亥＝九〇度、則亥餘弦＝〇、而得未＝〇、自亥＝二七〇度起、至亥＝三六〇度、則帶徑盡定餘半周諸點、

代微積拾級卷五

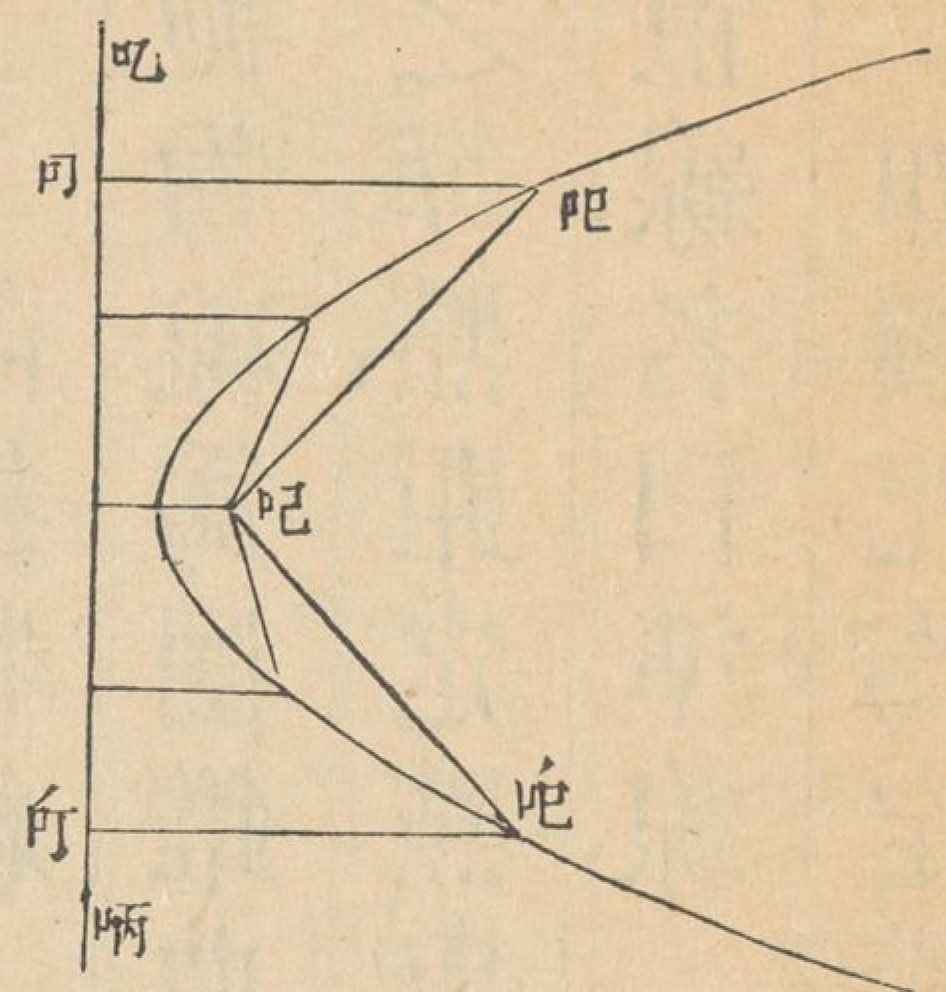
米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯
　　　　　　　　海寧李善蘭筆述

代數幾何五

論拋物線

拋物線爲圜錐曲線之一、設一定點、一直線、拋物線之每點、距定點與距直線恒等、定點即拋物線之心、直線名曰準線、

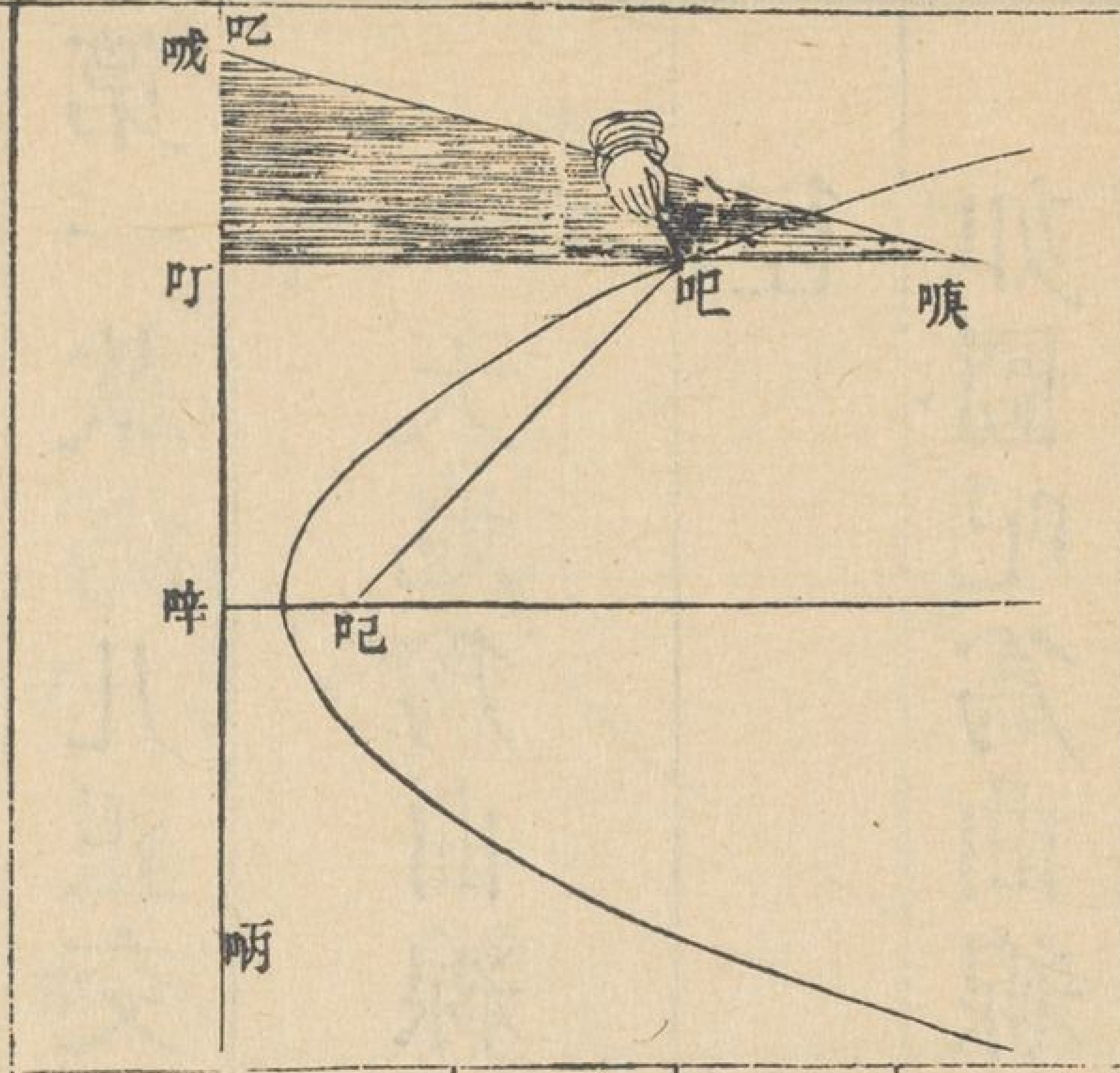
如圖、吧爲定點、叱呬爲直線、吧點繞吧點、成拋物



線、吧點所至之處、距𠯌點及吃哂線恒等、如吧𠯌等于吧叮、呝𠯌等于呝吁、是也、𠯌即心點、吃哂為準線、凡曲線每點距心之線、即帶徑也、

依此理、拋物線可以器作之、　如圖、吃哂為界尺、置平面上、哎叮噢為矩尺、取一線與叮噢等長、一端著于矩尺之噢點、一端著于平面𠯌點、矩尺之叮哎邊、恒緊貼界尺吃哂、而叮噢邊初與軸線𠯌

啐合、吧點在抛物線頂、用鉛筆緊逼吧點、令不離



叮嚷、乃漸移矩尺向吃點、吧點即行成抛物線、吧點即曲線心、界尺吃哂即準線、葢矩尺貼吃哂而移、任至何處、必得吧嚷丄吧叮＝吧嚷」吧吧、所以吧叮＝吧吧、故吧點距心與準線恒等、又反置矩尺于軸線吧啐下、成下邊之曲線、與上相對、

曲線內每點作線背準線行、其方向正交準線、爲徑、

徑與曲線交點、為徑頂點

過心之徑為軸線、

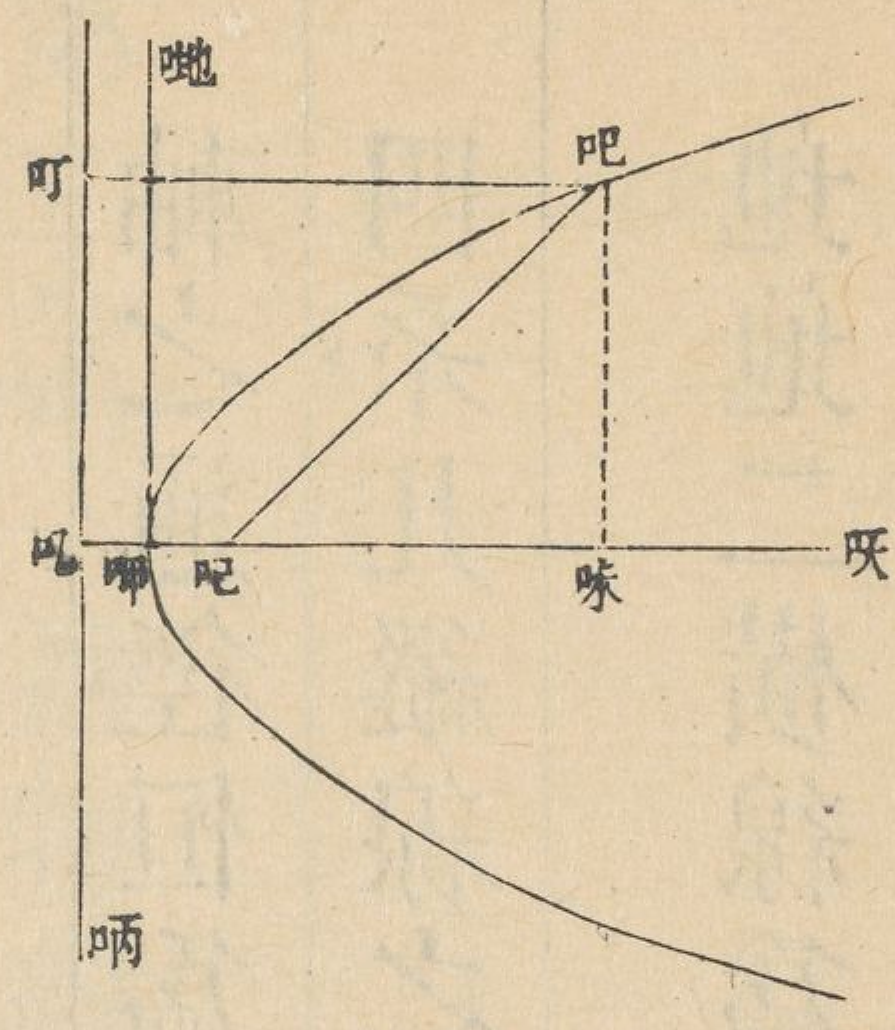
徑上過心之倍縱線、為通徑、

第一款　凡正交二軸原點在拋物線之頂、其式為

天巳二＝地^{二}、

天地為曲線任一點之縱橫線、二巳為軸線之通徑、

如圖、叱為曲線、心叮呥為準線、呷吙為橫軸、原點在呷、平分叱吧、命叱吧為巳、則呷叱等于$\frac{巳}{二}$、曲線



內任取吧點、命其縱橫線呷味味吧為天地、命帶徑吧吧為末、準前論得式$吧吧=吧叮=呷味\perp呷叱=天\perp\frac{巳}{二}$、而$吧味=天\top\frac{巳}{二}$、惟$吧味^{二}\perp吧味^{二}=吧吧^{二}$、即$地^{二}\perp(天\top\frac{巳}{二})^{二}=(天\perp\frac{巳}{二})^{二}$、故詳之移其位、則得$地=二巳天$、與款合、

一系、設$天=〇$、則$地=〇$、得曲線頂點、設$天=\frac{巳}{二}$、則$地^{二}=巳^{二}$、即$地=巳$、亦即$二地=二巳$、$二巳$為常數、即通徑、故云徑線上過心之倍縱線為通徑也、本卷總論末條

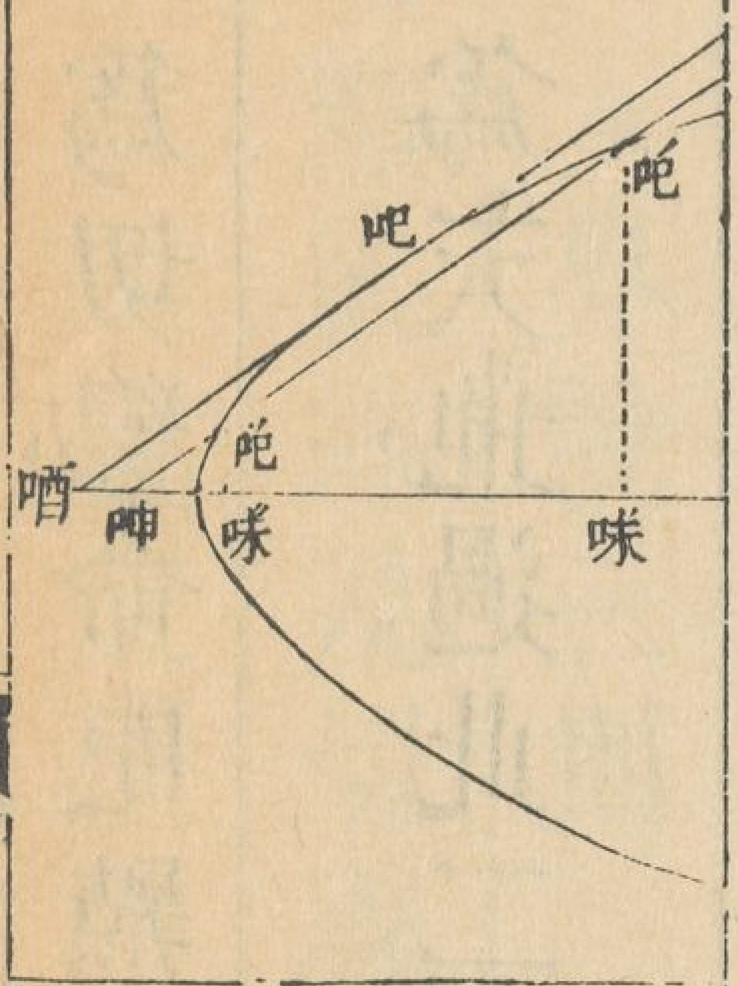
二系、準拋物線式、得$地^{二}=丄丅\sqrt{二巳天}$、故知横軸每點上下必有相等二縱線、正負異、所以拋物線以呎線為軸、其兩邊必等、

三系、設拋物線式$地^{二}=二巳天$故為比例四率、得$天:地::地:二巳$故曲線軸之通徑、恒為横線縱線連比例之三率、

四系、凡縱線之平方、與横線有比例、命二縱線為$地'$、$地''$二横線為$天'$、$天''$、則得
$$地'^{二}=二巳天'$$
$$地''^{二}=二巳天''$$、
故有比例率如下、

地″∶地″地′∷二巳天′∷二巳天″∶天′∶天″、

第二款、拋物線之切線式為地地＝己(天丄天)、夫地為切點之縱橫線、巳為曲線軸之半通徑、



如圖、任作吧吧線、交曲線于吧吧二點、此線向吧點漸移、吧吧二點必漸近至合為一點、則吧吧線變

爲切線命呻點之縱橫線爲天地、呻點之縱橫線爲天地、過此二點之線式爲$地丅〡地=\frac{〡天丅〢天}{〡地丅〢地}(天丅〡天)$㈠、三卷四款此乃凡直線過二點之公式、不獨割拋物線爲然也、若欲作割拋物線之直線式、必求$\frac{〡天丅〢天}{〡地丅〢地}$之同數、用于㈠式中、而曲線之呻呻二點有式、$〡地^{二}=二巳〡天$㈡、$〢地^{二}=二巳〢天$㈢、以㈢式減㈡式、得$〡地^{二}丅〢地^{二}=二巳(〡天丅〢天)$、故$\frac{〡天丅〢天}{〡地丅〢地}=\frac{〡地丅〢地}{二巳}$、用此右邊數代㈠式中$\frac{〡天丅〢天}{〡地丅〢地}$、則呻呻線

式變爲 $地丅地' = \frac{二乙}{地'丄地''}(天丅天')$ 四、若叱叱二點合爲一、則割線變爲切線、而 $天''=天'$、$地''=地'$、故四式變爲 $地丅地' = \frac{乙}{地'}(天丅天')$、即叱點切線之式、去其分母、得 $地'地丅地'^{二}=乙天丅乙天'$、惟 $地'^{二}=二乙天'$、所以 $地'地=乙天丅乙天'丄二乙天'$、即 $地'地=乙(天丄天')$、與款合、

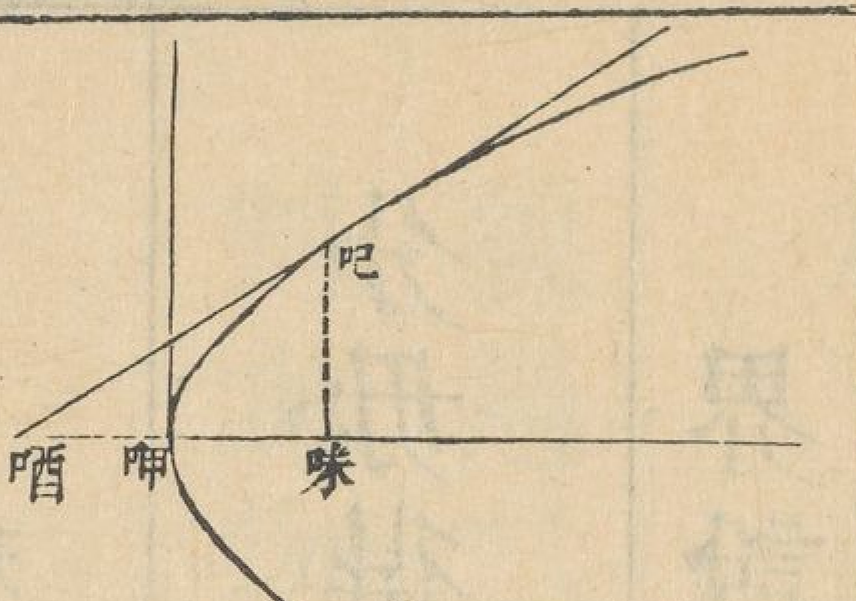
界說三則

切點縱線及切線二交軸點之距線、爲次切線、

求切線交橫軸點法、令切線式中 $地=〇$、則得 $〇=乙(天丄天')$、故 $天=丅天'$、

即$\text{呷味}\,\text{丅}=\text{呷酉}$、所以次切線平分于頂點、

準此理可任作曲線各點之切線、設取吧點作曲



線軸之垂線吧味、次取呷酉、等于呷味、

乃作吧酉線、即吧點之切線也、

案、前所得$\text{地}\,\text{丅}\,\text{彳地}=\frac{\text{彳地}}{\text{巳}}(\text{天}\,\text{丅}\,\text{彳天})$式中$\frac{\text{彳地}}{\text{巳}}$、乃切線與軸交角

之正切也、

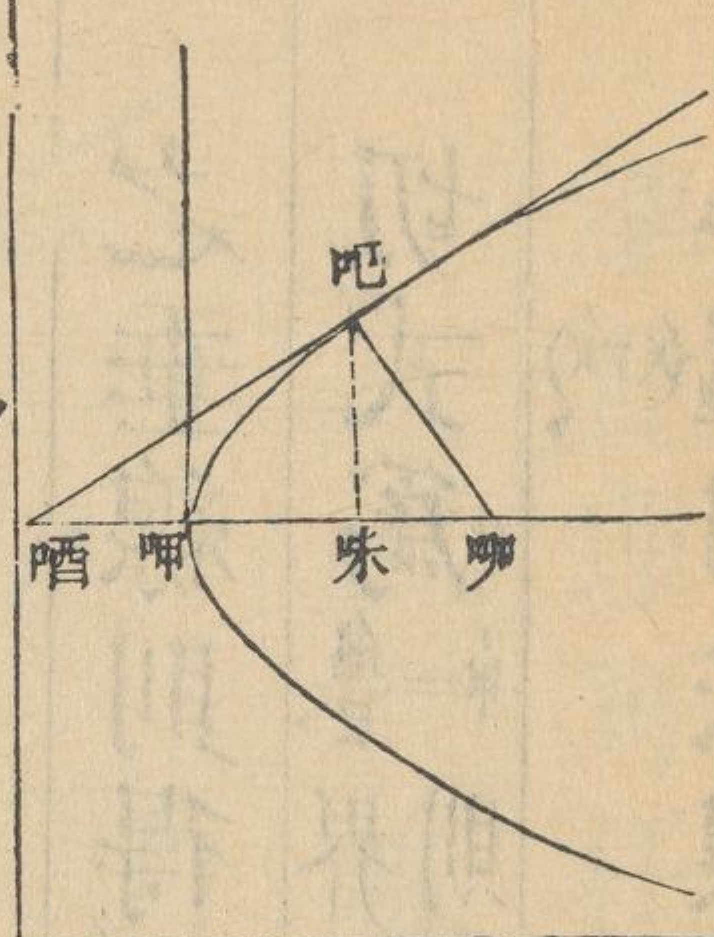
自切點至軸作切線之垂線、爲法線、

切點縱線及法線二交軸點之距線、爲次法線、

第三款、抛物線之法線式為$地丅地''=丅\frac{巳}{地''}(天丅天'')$、天″地″為切點之縱橫線、

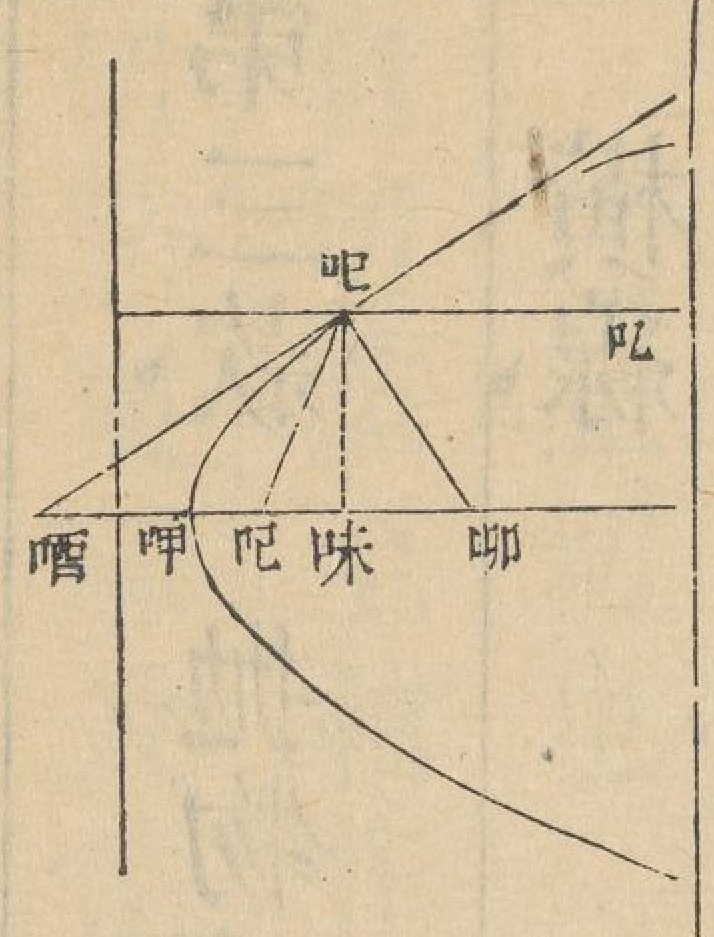
凡直線過所設點之式為$地丅地''=甲(天丅天'')$㊀、三卷三款法線為切線之垂線、則得$甲'=丅\frac{甲}{一}$、三卷六款附條準前切線與軸交角之正切式為$甲=\frac{地''}{巳}$、界說一則案故$甲'=丅\frac{巳}{地''}$、以此同數代㊀式之甲、則得$地丅地''=丅\frac{巳}{地''}(天丅天'')$、即法線之式與款合、

系求法線交橫軸點，令法線式中地＝〇，則得天丅彳天＝巳，惟天＝呷卯



彳天＝呷味，所以天丅彳天＝巳＝味卯，卽次法線，故次法線爲常數，恒等于曲線軸之半通徑。

第四款　凡拋物線之法線，平分切點上徑與帶徑二線之交角。



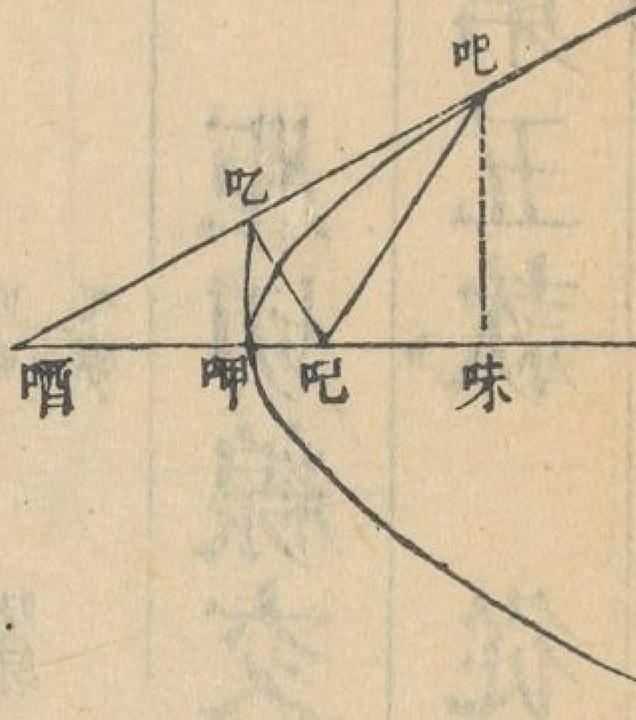
如圖，吧哂爲拋物線之切線，吧爲切點，吧叱爲帶徑，吧卯爲法線，吧叺爲切點之徑線，吧卯平分叱吧叺角，命

吧點之橫線爲天則呷咊＝天、又咊唎＝巳、本卷三款系呷吧＝二巳、本卷一款一系別得吀唎＝呷咊⊥咊唎⊤唎吧、卽吧唎＝天⊥巳⊤二巳＝天⊥二巳、準前吧吧＝天⊥二巳、本卷一款解故吧唎＝吧吧、所以吧吧唎角等于吧唎吧角、亦等于其互角吃吧唎也、

系、吧咊＝呷咊⊤呷吧＝天⊤二巳而唒咊＝二天、界說一則所以唒吧＝唒咊⊤吧咊＝天⊥二巳＝吧吧、故拋物線之心距切點與距切線交軸點等、

第五款、從心作切線之垂線爲心至頂點及至切點二線之中率、

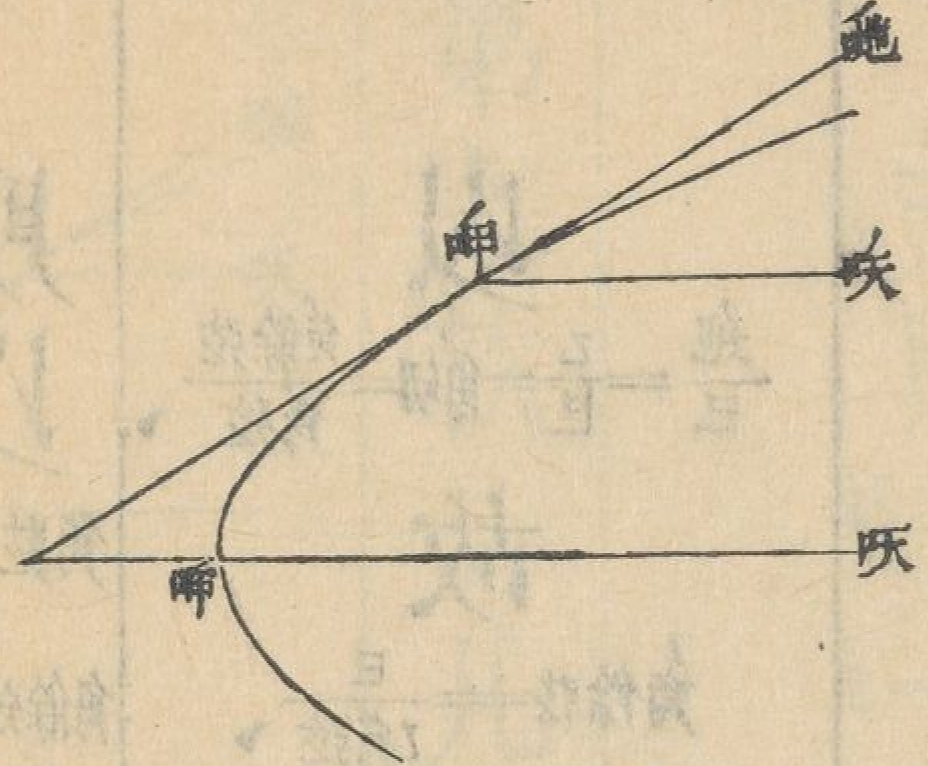
如圖、吧為心點、作切線之垂線吧叱、又作呷叱及縱線吧味、吧唒既等于吧吧、系四款而吧叱為吧唒之垂線、則吧叱必等于叱唒、又味呷等于呷唒、界說一則附條故



有比例呷味：唒呷：：叱吧：唒叱、故呷叱與吧味必平行、惟吧味為曲線軸之垂線、故呷叱必正交唒吧、而吧呷叱吧叱唒為相似三角形、有比例吧唒：吧叱：：吧叱：吧呷、所以吧叱為吧呷吧唒

之中率、

第六款、以切點爲原點、切點之徑與切線爲斜交二軸、其式爲 地²=二巳天 二巳爲過切點徑之通徑、



如圖、以切點呷爲原點、呷吠呷咆爲斜交二軸、凡正交二軸易爲斜交二軸并易原點、其式爲

天=甲⊥矢角餘弦⊥地角餘弦 ㈠、

地=乙⊥矢角弦⊥地角弦 ㈡、三卷十款附條新原點在曲線內、則其縱橫線必合曲線式、而爲 乙²=二巳甲、卽

$甲=\frac{二巳}{乙}$、又凡徑皆與曲線軸平行、則式中之角必為〇、

所以$角弦=〇$　$角餘弦=一$、又切線交軸角之正切為$\frac{地}{巳}$、則案界說一所

以$\frac{地}{巳}=\frac{乙}{巳}=角切=\frac{角餘弦}{角弦}$、故$角餘弦=\frac{巳}{乙角弦}$、用此諸同數于㊀㊁二式中、得$天=\frac{二巳}{乙^{二}}丄天丄\frac{巳}{乙地角弦}$　$地=乙丄地角弦$、又

用此二同數于拋物線公式$地^{二}=二巳天$中、得$乙^{二}丄二乙地角弦丄地^{二}角弦^{二}=乙^{二}丄二巳天丄二乙地角弦$、即為$地^{二}=\frac{角弦^{二}}{二巳天}$、

設取$巳=\frac{角弦^{二}}{巳}$、去地之丿、則得$地^{二}=二巳天$、與款式合、而二巳為呷吠

徑之通徑、（本卷七款案）準款凡徑上縱線之正方、與其橫線有比例、設命二縱線為地′″地二橫線為天′″天、則

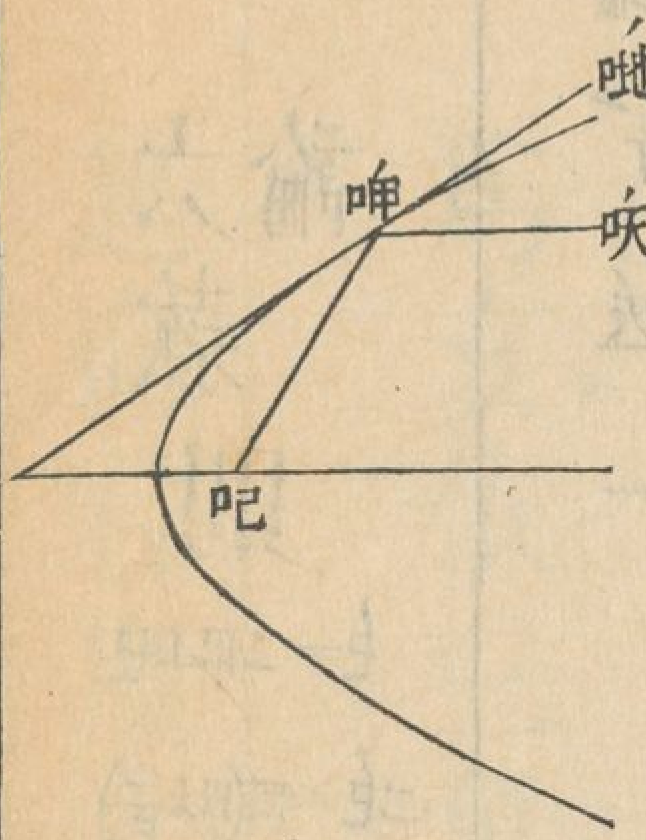
$地'^{二}=二巳天'$、

$″地^{二}=二巳″天$、

即得

$地'^{二}:″地^{二}::二巳天':二巳″天::天':″天$

第七款、凡徑之通徑、四倍徑頂距心線、



準上 $\frac{乙}{巳}=\frac{角餘弦}{角弦}$、（本卷六款論）所以

$乙角弦=巳角餘弦$

而

$乙^{二}角弦^{二}=巳^{二}角餘弦^{二}$

$=巳^{二}(一丅角弦^{二})$

$=巳^{二}丅巳^{二}角弦^{二}$、

故

$角弦^{二}=\frac{乙^{二}丄巳^{二}}{巳^{二}}$、

惟準式

$乙^{二}=二甲巳$、

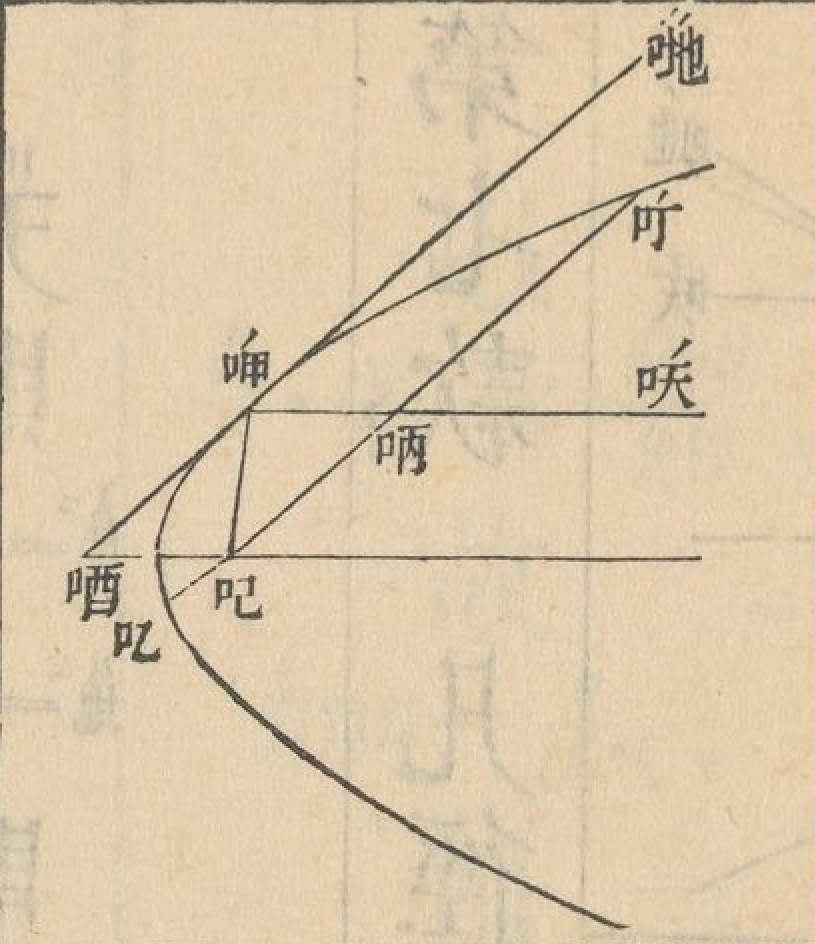
故

$角弦^{二}=\frac{二甲巳丄巳^{二}}{巳^{二}}$

$=\frac{二甲丄巳}{巳}$、

取巳等于 $\frac{角弦^{二}}{巳}$、本卷

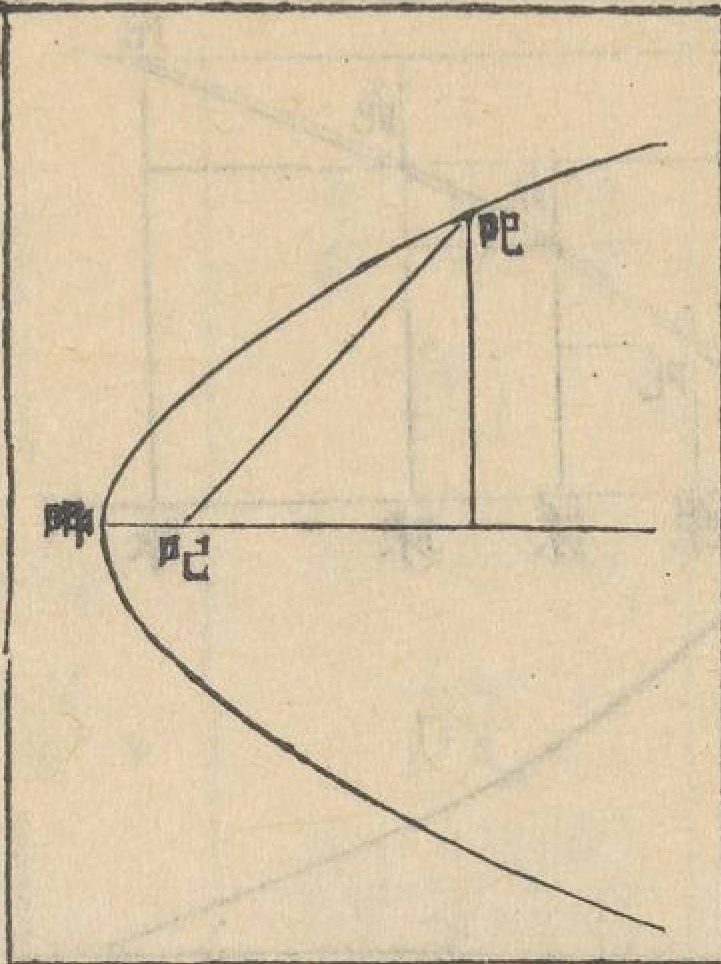
六款論則 巳＝二甲丄巳 二巳＝四(甲丄巳²)、惟 呷叱＝甲丄巳²、所以 二巳＝四呷叱、即呷呋徑之通徑、



案若過心作叱叮線與切線哂呷平行、命叮點之縱橫線為天地則 天＝呷呞＝哂叱＝呷叱＝二巳、本卷

四款系又又 地²＝二巳天、本卷六款 所以 地²＝二巳×巳²＝巳²、即 地＝巳 二地＝二巳、故呷呋之通徑²、等于過心之倍縱線二地、與總論合、

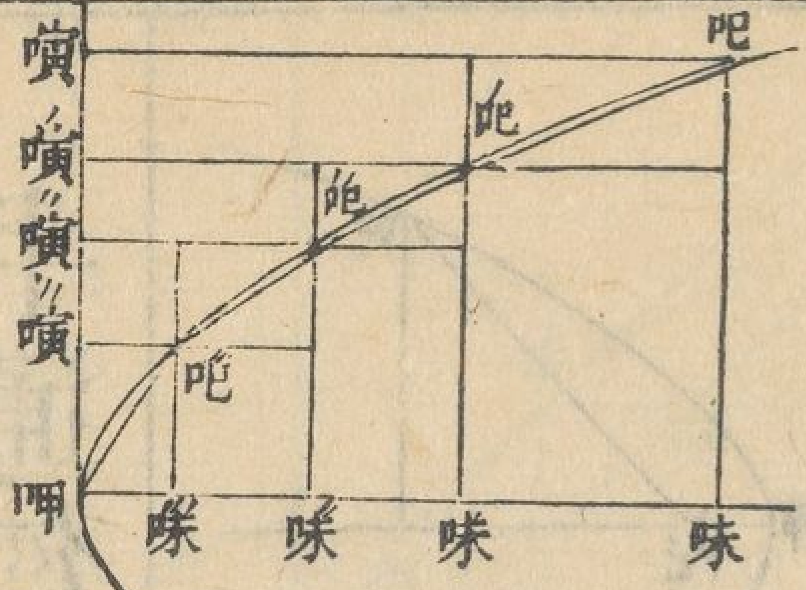
第八款、凡曲線心為極、拋物線之極式為 $未=\frac{巳}{一丄亥餘弦}$、巳為半通徑、亥為帶徑交軸之角、



凡拋物線任一點之距心線為 $未=𠯌𠯆=天丄\frac{巳}{二}$、橫線本從頂點呷起、今原點從呷移至𠯆、則當以 $天丄\frac{巳}{二}$ 代天、故 $未=天丄巳$、命𠯌𠯆呷角為亥、依三角理得 $天=丅未亥餘弦$、所以 $未=巳丅未亥餘弦$、即 $未=\frac{巳}{一丄亥餘弦}$、亥角從頂點呷起向右度之、善蘭案此圖亥為鈍角則餘弦為負、以丅乘之則得正而母數作丄號實

減也後凡用鈍角俱倣此

第九款、凡截拋物線一段面積、等于縱橫線所成矩形三分之二、



如圖、呷吧味為拋物線一段面積、以橫軸呷味縱線吧味為界、作呷嗔吧味矩形、則此面積為矩形三分之二、試于曲線裏作吧吧吧吧呷味多邊形、與呷味吧味二線平行作吧嗔吧味諸線、成吧味吧味等線裏之矩形、及吧嗔吧嗔等線外之矩

形、命線裏諸形形爲吧咆𠯈等、線外諸形形爲巳㔾

㔾巳等、諸縱橫線爲天地夭地等、則得 $\frac{咆}{咏}=\frac{咆}{咏'}\times\frac{咏'}{咏}$、卽 $吧=地(天-夭)$、又

$\frac{咆}{嗩}=\frac{咆}{嗩'}\times\frac{嗩'}{嗩}$ 卽 $巳=夭(地'-地)$、故 $\frac{吧}{巳}=\frac{地(天-夭)}{夭(地'-地)}$ ㊀、吧咆諸點皆在曲線內、故得 $地^{2}=二巳天$ $地'^{2}=二巳夭$、

所以 $天-夭=\frac{地^{2}-地'^{2}}{二巳}$ $夭=\frac{地'^{2}}{二巳}$、用此二同數于㊀式中、則得 $\frac{吧}{巳}=\frac{地(地'^{2}-地^{2})}{地^{2}(地'-地)}=\frac{地+地'}{地}=一+\frac{地'}{地}$、同例

推得 $\frac{咆}{㔾}=一+\frac{地''}{地'}$ $\frac{𠯈}{㔾'}=一+\frac{地'''}{地''}$、若令吧咆𠯈諸點之縱線皆成連比例、

則得$\frac{地'}{地}=\frac{地''}{地'}=\frac{地'''}{地''}\cdots$而各線裏矩形與所對線外矩形之比、皆若$一+\frac{地'}{地}$與一之比、故依合理得$\frac{巳+巳'+巳''+\cdots}{吧+吧'+吧''+\cdots}=一+\frac{地'}{地}$、卽線裏諸矩形和積與線外諸矩形和積之比、若$一+\frac{地'}{地}$與一之比、吧吧吧諸點相距愈近、則線裏諸矩形和積愈近于曲線面積、而地愈近于地、幾欲相等、故命呷吧味面爲呻、呷嗔吧面爲申、則得$\frac{申}{呻}=一+一=二$、而$\frac{申}{呻+申}=三$、所以$呻=\frac{三}{二}(呻+申)$、$呻+申$卽呷

噴吧味矩形、故截拋物線一段面積、等于外切矩形三分之二、

代微積拾級卷六

米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆述

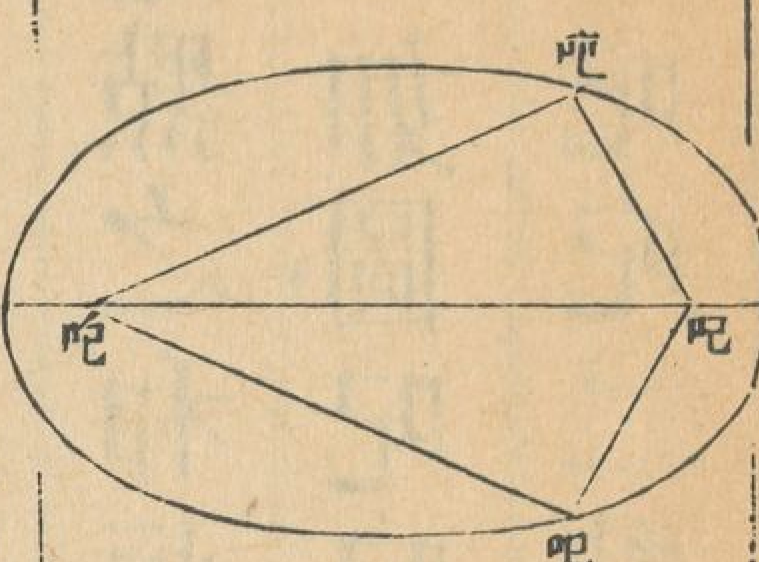
代數幾何六

論撱圜

撱圜亦圜錐曲線之一、平面曲線也、周之各點距二定點之和恒等、二定點乃曲線之二心

如圖呷吔爲二定點、設吧點繞呷吔點、任至何處距呷吔二點之和恒等、即成撱圜、以呷吔爲二心吧

點距二心之線、俱爲帶徑、依此理、撱圜可以法作之、法用一線、必長于𠮙𠮙二心之距、以二端著于二心、以鉛筆于



𠮙點逼線令直、乃繞二心一周、即成撱圜、

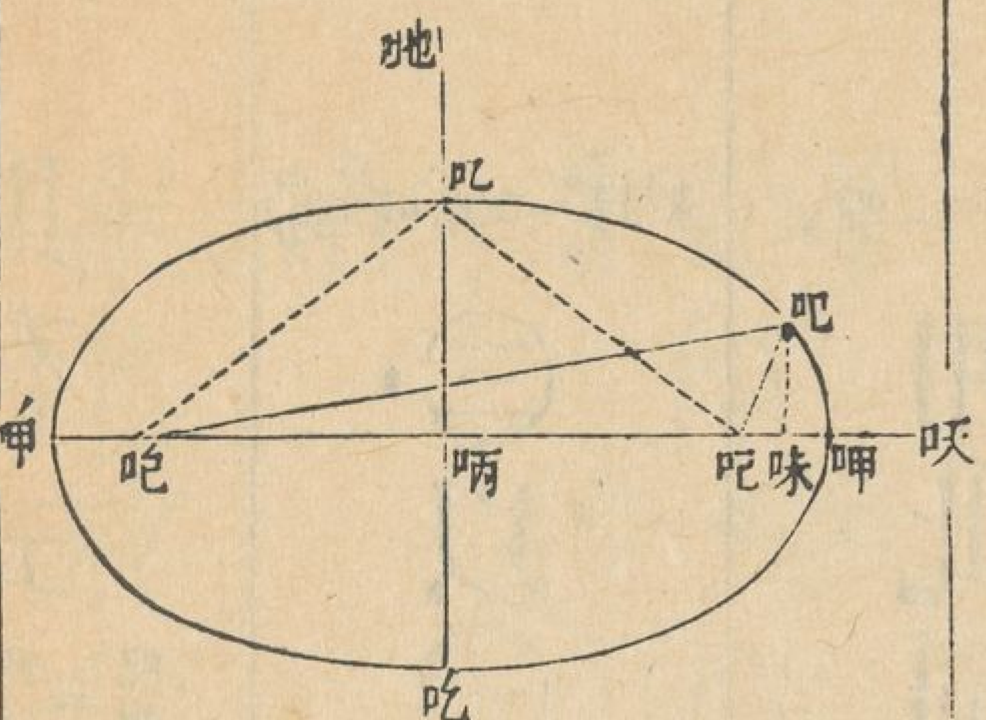
平分二心距之點爲中點、

過中點、兩端抵撱圜周之線爲徑、

過二心之徑曰長徑、亦曰長軸、正交長徑之徑曰短徑、亦曰短軸、

過心之倍縱線、爲長軸之通徑、

第一款 以中點爲原點、長短二徑爲縱橫二軸、撱圜之式爲 $吃^2呷^2＝吃^2天^2丄呷^2地^2$ 呷吃爲長短二半徑、天地爲曲線任一點之縱橫線、



如圖、吃吃爲二心、取吃吃之中點呐爲原點、作呐呎呐哋二軸線、任取曲線內一點吧、作呐呎之垂線吧味、命吧距二心之和爲二呷、呐吃或呐吃爲丙、吃吧爲未吃吧爲朱、未吧點之縱橫線、呐味爲天、吧味爲地

則有式 $\frac{吒^{二}}{吒}=\frac{吒^{二}}{咊}\perp\frac{咊^{二}}{吒}$ 即 $未^{二}=地^{二}\perp(天丅丙)^{二}$ ㈠、$\frac{吒^{二}}{吒}=\frac{吒^{二}}{咊}\perp\frac{咊^{二}}{吒}$ 即 $朱^{二}=地^{二}\perp(天\perp丙)^{二}$ ㈡、以㈠式加㈡式、則得 $未^{二}\perp朱^{二}=二(地^{二}\perp天^{二}\perp丙^{二})$ ㈢、以㈠式減㈡式、則得 $朱^{二}丅未^{二}=四丙天$、變作 $(朱\perp未)(朱丅未)=四丙天$ ㈣、準總論得 $朱\perp未=二呷$、用此同數于㈣式中、得 $朱丅未=\frac{呷}{二丙天}$、以加上式、折半、得 $朱=呷\perp\frac{呷}{丙天}$ ㈤、以減上式、折半得 $未=呷丅\frac{呷}{丙天}$ ㈥、以㈤㈥式二同數各自乘、用于㈢式中、則得下式 $呷^{二}\perp\frac{呷^{二}}{丙^{二}天^{二}}=地^{二}\perp天^{二}\perp丙^{二}$、去其分母、得 $呷^{二}地^{二}\perp(呷^{二}丅丙^{二})天^{二}=呷^{二}(呷^{二}丅丙^{二})$ ㈦、

即橢圜式試命半短徑吃呐為吃、夫吃呐吧吃呐

咆二句股形之呐吧呐咆二邊既等、而吃呐為公

邊、所以吃吧等于吃咆、準總論 $\frac{吃}{吧}丄\frac{吃}{咆}＝二呷$、故 $\frac{吃}{吧}＝呷$、準句股理、

$\frac{吃^{二}}{呐}＝\frac{吧^{二}}{吧}丅\frac{吧^{二}}{呐}$、即 $吃^{二}＝呷^{二}丅丙^{二}$、八、用此左邊數代七式中 $呷^{二}丅丙^{二}$、即得 $呷^{二}地^{二}丄吃^{二}天^{二}＝呷^{二}吃^{二}$、與款

合、

案、若移款式之項、以呷約之、則得 $地^{二}＝\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(呷^{二}丅天^{二})$、

一系、求曲線交橫軸之點、則令 $地＝○$、即得 $天＝±呷$、即呷呐

亦卽呷呐、故曲線交橫軸爲呷呷二點、在原點左右距原點相等、而二呐呷卽呷呷、等于二呷、故撱圜周任一點距二心之和恒等于長徑、

二系、若天＝〇、則地＝丄叽、卽呐叽、亦卽呐叽、故曲線交縱軸在叽叽二點、距原點相等、

三系、設叽＝呷、則式變爲呷二＝天二丄地二卽平圜式、故撱圜之長短二徑相等、卽變爲平圜、

四系、叽叽既等于叽叽、則亦等于呷、所以心距短

徑之端、等于半長徑、

五系、準本款案 $\text{地}^2=\frac{\text{呷}^2}{\text{叱}^2}(\text{呷}^2-\text{天}^2)$、設 $\text{天}=\frac{\text{口丙}}{\text{叱}}=\text{丙}$、則 $\text{地}^2=\frac{\text{呷}^2}{\text{叱}^2}(\text{呷}^2-\text{丙}^2)$、又準本款(八)式 $\text{呷}^2-\text{丙}^2=\text{叱}^2$、故 $\text{地}^2=\frac{\text{呷}^2}{\text{叱}^2}\times\text{叱}^2$、則有比例 $\text{呷}:\text{叱}::\text{叱}:\text{地}$、即 $二\text{呷}:二\text{叱}::二\text{叱}:二\text{地}$、$二\text{地}$ 爲過心之倍縱線、即長徑之通徑、本卷總論故長徑之通徑、爲長短二徑連比例之末率

六系、中點距心點線、以半長徑約之、得 $\frac{\text{呷}}{\text{丙}}$、爲橢率、以戊代之、得 $\frac{\text{呷}}{\text{丙}}=\text{戊}$、即 $\text{丙}=\text{呷}\text{戊}$、惟 $\text{丙}^2=\text{呷}^2-\text{叱}^2$、所以 $\text{口丙}-\text{叱}^2=\text{呷}\text{戊}^2$、即 $\frac{\text{呷}^2}{\text{叱}^2}=一-\text{戊}^2$、用此同數

于橢圓式中、得 $地^{二}=(一丅戊^{二})(呷^{二}丅天^{二})$、

七系本款㊄㊅二式為 $朱=呷上\frac{呷}{丙}天$、$朱=呷丅\frac{呷}{丙}天$、式中俱用戊代 $\frac{呷}{丙}$、則

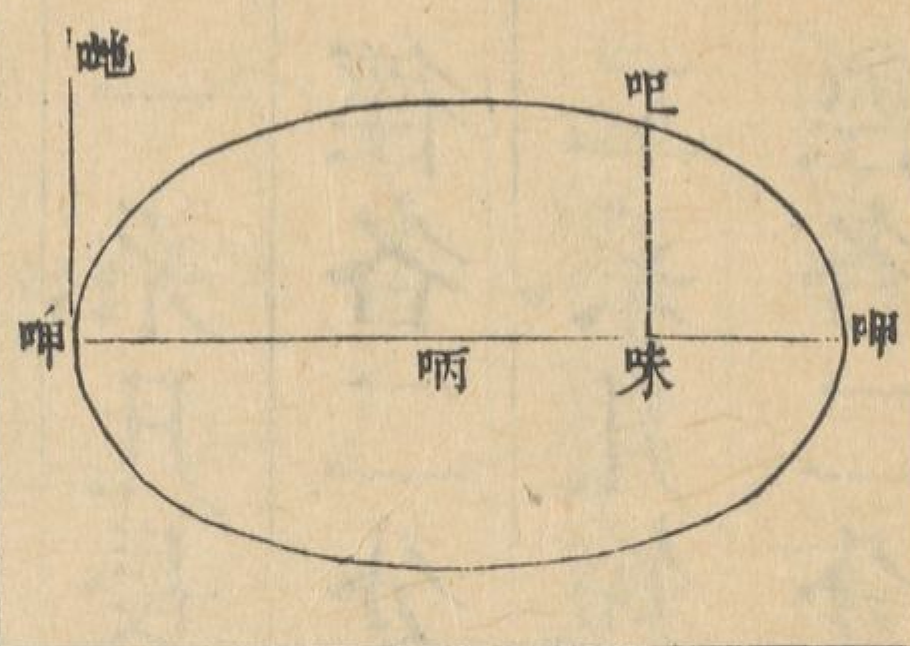
變為 $朱=呷上戊天$、$朱=呷丅戊天$、乃橢圓周任一點距二心之式、相乘得

$朱絲=呷^{二}丅戊^{二}天^{二}$、為距二心線相乘之式、

第二款　原點在橢圓長徑之端、其式為 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{乙^{二}}(二呷天丅天^{二})$、呷乙為

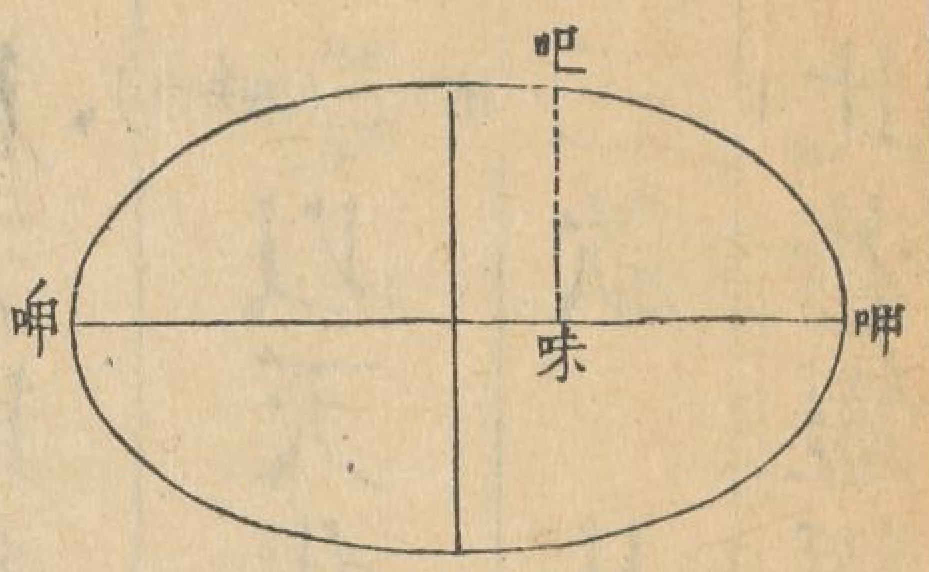
長短二半徑、天地為曲線內任一點之縱橫線、

原點在中點、其式爲$呷^{二}地^{二}丄吃^{二}夭^{二}＝呷^{二}吃^{二}$㊀、（本卷一款）移原點于呷、則縱線仍同、而橫線異、命新橫線



爲夭、則得$丙味＝呷味丅呷丙$、即$天＝夭丅呷$、用此同數于㊀式中、得$呷^{二}地^{二}丄吃^{二}夭^{二}丅二呷吃^{二}夭＝〇$、變作$地^{二}＝\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(二呷夭丅夭^{二})$、以天代夭、則得$地^{二}＝\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(二呷天丅天^{二})$、與款合、

第三款　凡縱線之正方、與所分長徑二分之矩形比、若短徑之正方、與長徑之正方比、



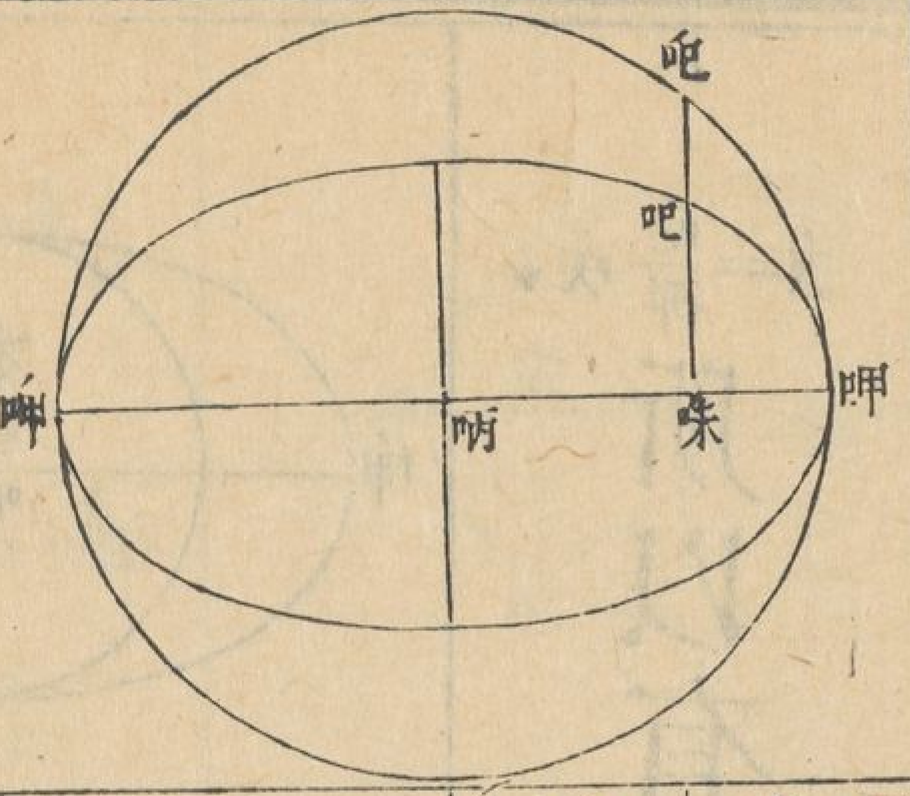
原點在呻、其式爲 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(二呷丅天)天$、本卷二款 此式可列爲

比例率 $地^{二}:(二呷丅天)天::吃^{二}:呷^{二}$、$二呷$ 即呷呻、天即呻味、故 $二呷丅天$ 即呷味、所以 $(二呷丅天)天$、即縱線吧味所分長徑二分之矩積、

一系、凡長徑上二縱線之正方比、若縱線所分長徑各二分之矩形比、

二系、凡短徑上二縱線之正方比、若縱線所分短徑各二分之矩形比、

第四款　于橢圓長徑上作一平圓、則同橫線平圓之縱線與橢圓之縱線比、若長徑與短徑比、

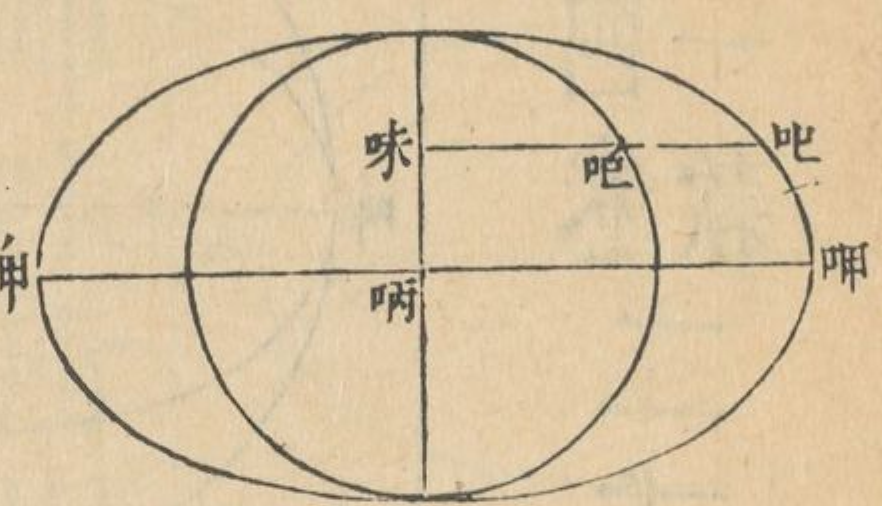


如圖、吧咮為橢圓之縱線、命為地、吧咮為平圓之縱線、命為㘈、其橫線同為呐咮、則橢圓式為$地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(呷^{二}丅天^{二})$、本卷一款案平圓式為$㘈^{二}=呷^{二}丅天^{二}$

四卷一款二式相消、得$地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}㘈^{二}$、即$地=\pm\frac{呷}{吃}㘈$、故有比例$㘈:地::呷:吃$
$::^{二}呷:^{二}吃$、與款合、

系、若橢圓之短徑上作平圓、則同橫線橢圓之縱

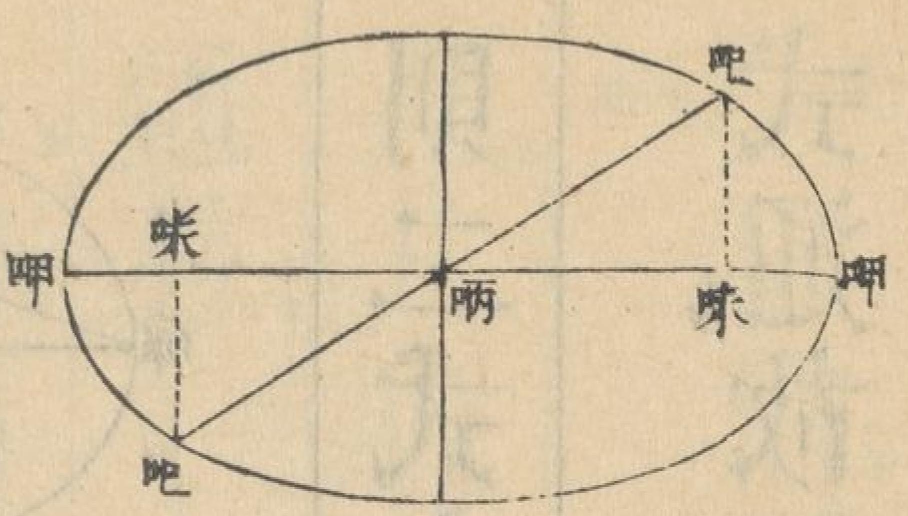
線與平圜之縱線比、若長徑與短徑比、



如圖、吧味為撱圜縱線、命為矢、吔味為平圜縱線、命為吙、俱以味呐為橫線、則得 $矢^{二}=\frac{吃^{二}}{呷^{二}}(吃^{二}丅地^{二})$、本卷一款案 $吙^{二}=吃^{二}丅地^{二}$、四卷一款二式相消、得 $矢^{二}=\frac{吃^{二}}{呷^{二}}吙^{二}$、即 $矢=\frac{吃}{呷}吙$、所以有比例 矢∶吙∷呷∶吃 ∷二呷∶二吃、

第五款 凡撱圜之諸徑、皆平分于中點、

如圖、吧吔為撱圜之斜徑、命吧點之縱橫線為矢



地吧點之縱橫線爲天地準撱圜式得

$地'^2=\frac{呷^2}{吃^2}(呷^2-天'^2)$

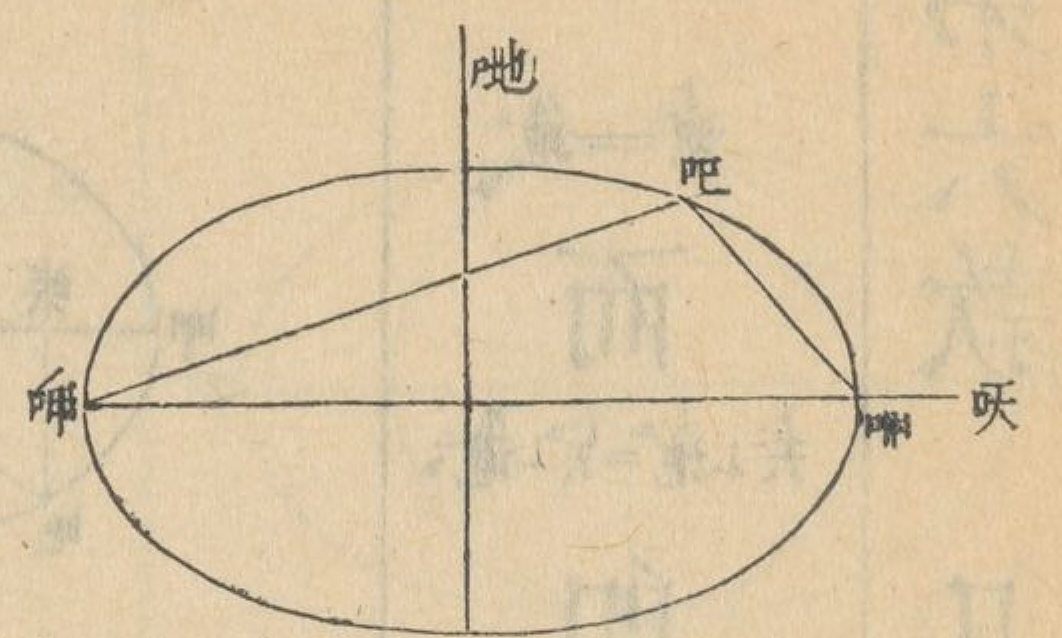
$地''^2=\frac{呷^2}{吃^2}(呷^2-天''^2)$、

本卷一款案

故 $\frac{地'^2}{地''^2}=\frac{呷^2-天'^2}{呷^2-天''^2}$、吧呐味吧呐味爲相似三角形、故 $\frac{地'}{地''}=\frac{天'}{天''}$、則 $\frac{天'^2}{天''^2}=\frac{呷^2-天'^2}{呷^2-天''^2}$、去其分則得 $天''=天'$、故 $地'=地''$、而 $天'^2+地''^2=天''^2+地'^2$ 即 $呐吧'^2=呐吧''^2$、亦即 $呐吧'=呐吧''$、與款合、

第六款　凡自長徑二端同至撱圜周任一點、其二距線與長徑交角之二正切相乘冪爲負、等于長

短半徑之二正方相約數、如圖呷點之縱橫線爲 $矢=呷$ $地=〇$、故呷吧線之式爲 $地=甲(天丅呷)$、三卷三款 呷點之縱橫線爲 $矢=丅呷$ $地=〇$、故呷吧線之式爲 $地=申(天丄呷)$、三卷三款 二線旣相交、則二式必相合、又交點在撱圜周、則亦與撱圜之式通、故以二式相乘、得 $地^{2}=甲申(天^{2}丅呷^{2})$、與交點之撱圜式 $地^{2}=\frac{呷^{2}}{叱^{2}}(呷^{2}丅天^{2})$ 即



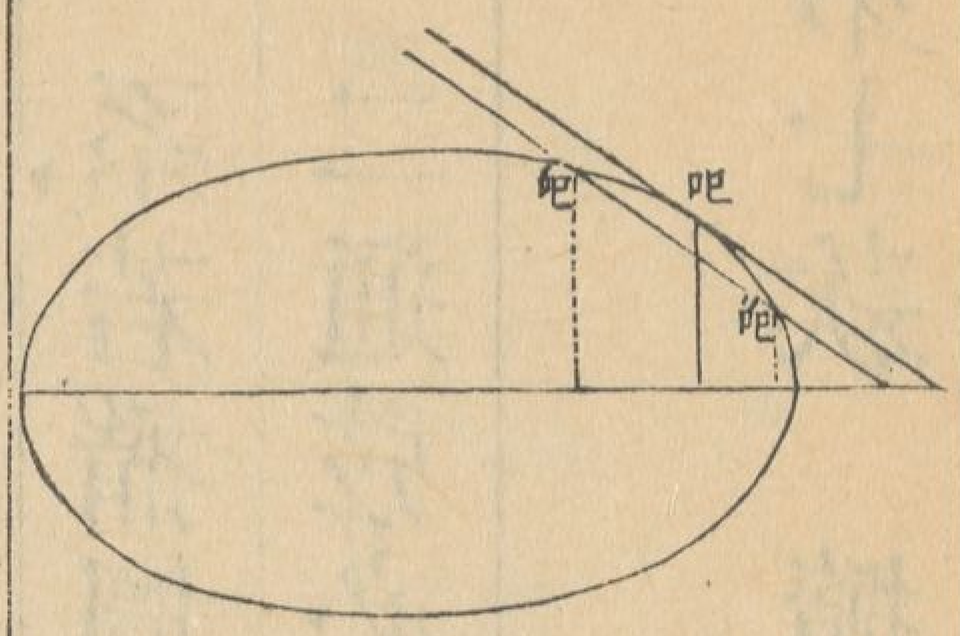
$地^{二}=丁\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(天^{二}丁呷^{二})$相消、得$甲申=丁\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、與款合、

案、凡徑二端至曲線內任一點之二線、名正餘二通弦、

系、若橢圓變爲平圓、長短二徑相等、則$甲申=丁一$、而正餘二通弦必成直角、三卷六款附條

第七款　橢圓之切線式爲$呷^{二}地地^{\prime}\perp吃^{二}天天^{\prime}=呷^{二}吃^{二}$、天地爲切線任一點

之縱橫線、天地爲切點之縱橫線、



如圖、任作吧吧、爲切線之平行線、交曲線于吧吧二點、此線若向吧點漸移、則吧吧二點漸近、至合于吧點、則此線變爲切線、命吧點之縱橫線爲天地、吧點之縱橫線爲天地、則過吧吧二點之線式爲

$$地'丅地''＝\frac{天'丅天''}{地'丅地''}(天丅天')$$ 一

三卷四款、吧吧二點俱在橢圜周、故得

$$呷^2地'^2丄吃^2天'^2＝呷^2吃^2$$ 二、

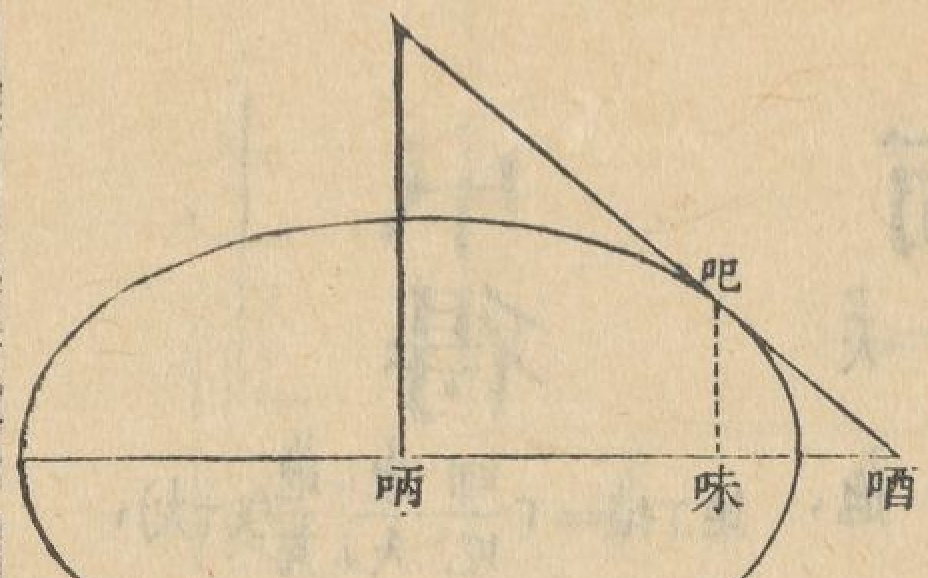
$$呷^2地''^2丄吃^2天''^2＝呷^2吃^2$$ 三、

一本卷一款

以㊂式減㊁式、得 呷²(地′丅地″)(地′丄地″)丄吃²(天′丅天″)(天′丄天″)=〇、即 呷²(地′丅地″)(地′丄地″)=丅吃²(天′丅天″)(天′丄天″) 故 (天′丅天″)/(地′丅地″)=丅(呷²/吃²)((地′丄地″)/(天′丄天″))、用此同數于㊀式中、得 地丅地′=丅(呷²(地′丄地″)/吃²(天′丄天″))(天丅天′)、㊃、若吧吧二點合爲一、吧吧線變爲切線、而 天″=天′ 地″=地′、則㊃式變爲 地丅地′=丅(呷²地′/吃²天′)(天丅天′)、即吧點切線之式、去其分數、則得 呷²地地′丅呷²地′²=丅吃²天天′丄吃²天′² 即 呷²地地′丄吃²天天′=呷²地′²丄吃²天′² 準前款得 呷²地地′丄吃²天天′=呷²吃²、本卷一款與款合

一系、四式變式中之丅$\frac{呷^{二}地}{叱^{二}矢}$、爲切線與長徑交角之正切、

二系、求切線交橫軸點、則令切線式中地＝○、即得天＝$\frac{夫}{呷^{二}}$＝呐哂
爲交點距原點、其內除呐味、卽天、得次

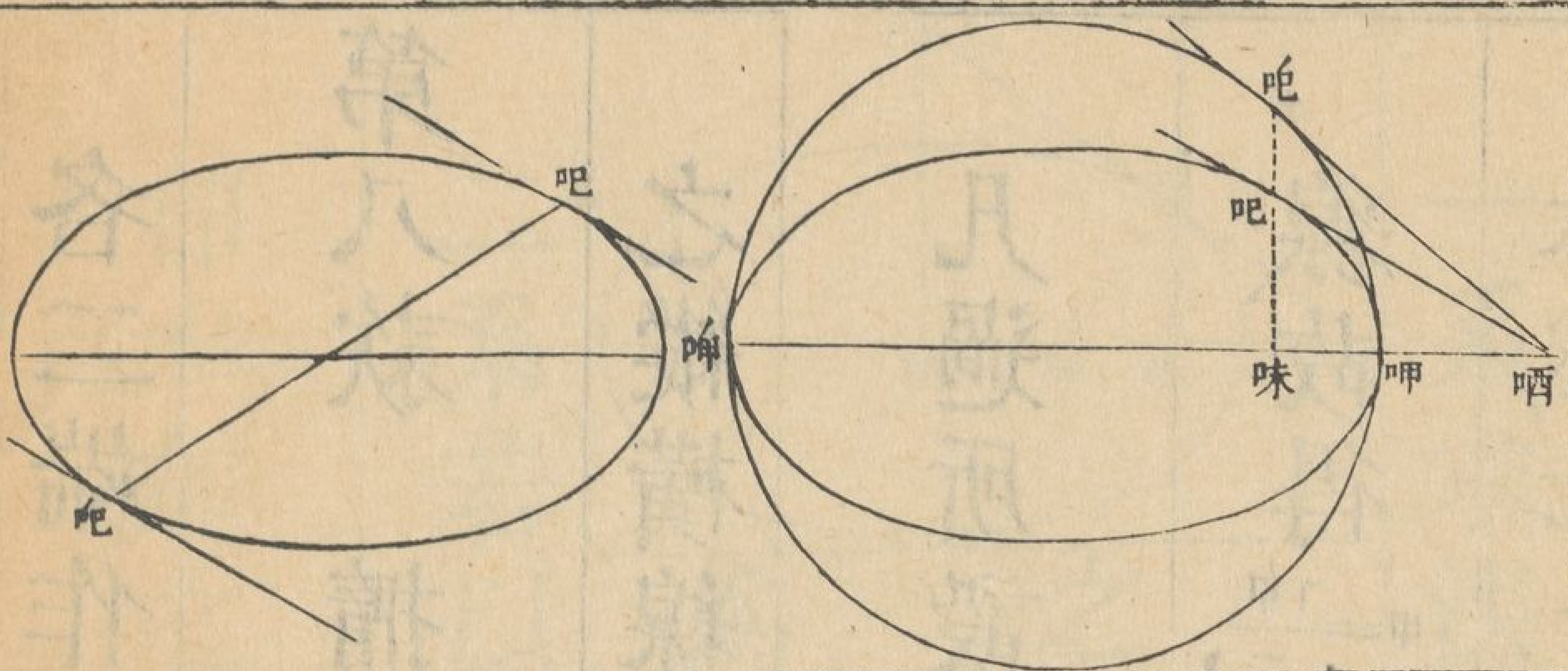


切線式

味哂＝$\frac{夫}{呷^{二}}$丅天＝$\frac{矢}{呷^{二}丅矢}$、

三系、上次切線式與短徑無涉、故凡同長徑之撱
圜、切點之橫線同、則次切俱同、卽爲平圜次切仍

同也、善蘭案凡同短徑之橢圜若切點之縱線同則縱軸內之次切俱同



四系依三系、可任取一點、作橢圜之切線、如吧爲所取點、法于長徑呷呻上作平圜、于吧點作縱線吧味、引長之至平圜周吔、次作平圜切線吔哂、次作吧哂聯線、卽橢圜吧點之切線、

五系凡斜徑之兩端吧吔二點、其縱橫線俱等、故準一系、其二切線交長徑角亦必等、而二切線平行、是以于二徑之

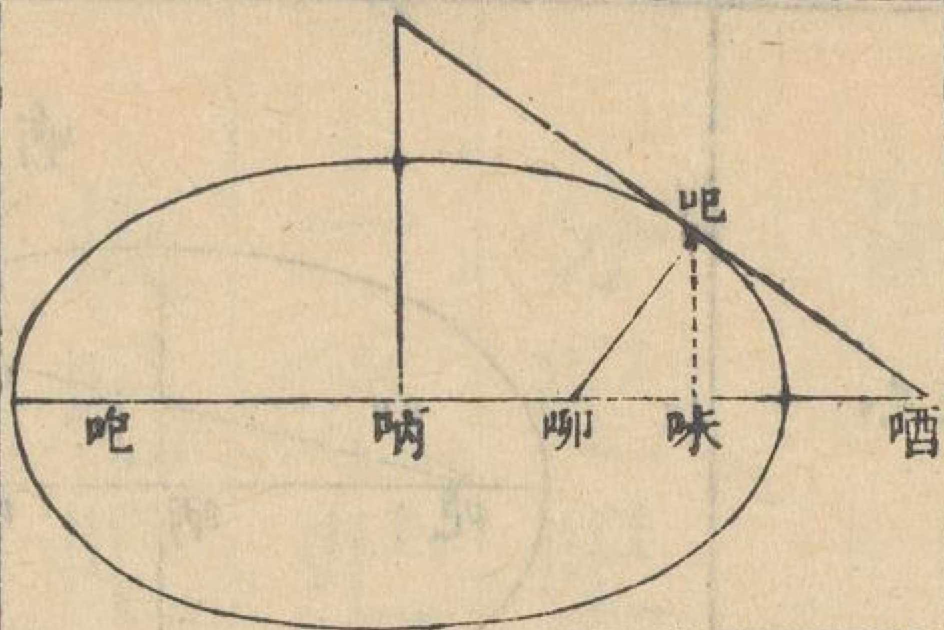
各二端作四切線、必成容橢圜之平行邊形、

第八款　橢圜之法線式爲 $地丅地＝\frac{甲^{二}地}{乙^{二}天}(天丅天)$、天地爲法線任一點之縱橫線、天地爲切點之縱橫線、

凡過所設點之直線式爲 $地丅地＝甲(天丅天)$ ㊀、三卷三款 法線正交切線、故得 $甲＝\frac{一}{丅甲}$、三卷六款附條 切線交長徑角之正切式爲 $甲＝丅\frac{乙^{二}天}{甲^{二}地}$ 本卷七款一系 故 $甲＝\frac{甲^{二}地}{乙^{二}天}$、用此同數于㊀式中、則得 $地丅地＝\frac{甲^{二}地}{乙^{二}天}(天丅天)$、卽法線

式、與款合、

一系、求法線交橫軸點之式、令法線式中 $地=○$、餘化之、卽得 $呥呩=天=\frac{呷^2}{呷^2丅吪^2}天$、以此同數減呥味、卽減天、得 $呩味=天丅\frac{呷^2}{呷^2丅吪^2}天=丅\frac{呷^2}{吪^2天}$

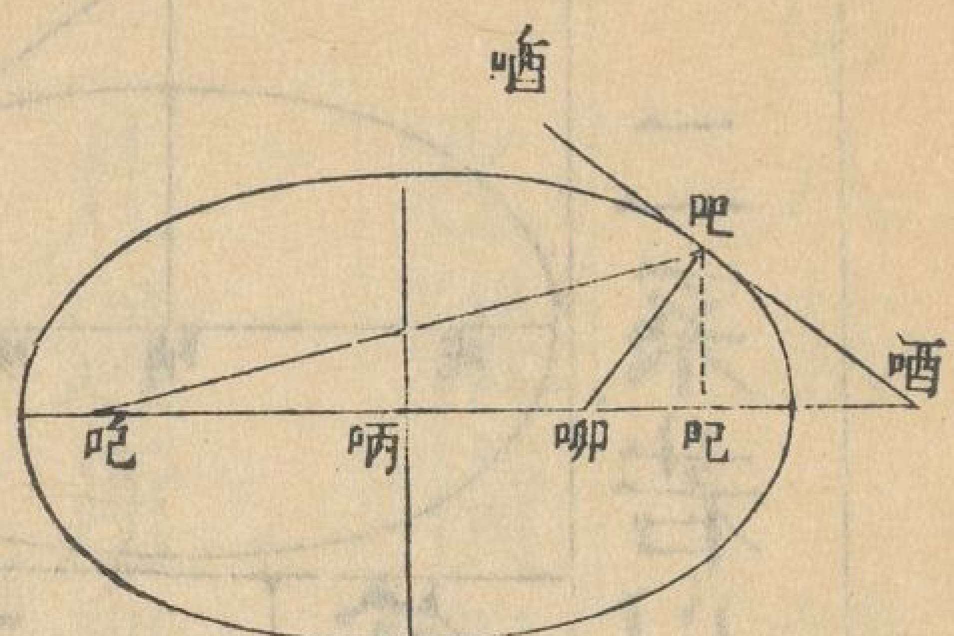


爲次法線式、

二系、若以 $戊^2$ 代 $\frac{呷^2}{呷^2丅吪^2}$ 則得 $呥呩=戊天$、本卷一款六系 以吪呥卽丙亦卽 $\frac{戊}{呷}$ 加之得 $呥呩=呷戊丄戊天=戊(呷丄戊天)$ 爲心與法線交橫軸點之距、

第九款　撱圜之法線、平分切點距二心線之交角、

如圖、吧哂爲撱圜切線、吧吧吔爲切點距二心線、作吧咖線、平分吧吧吔角、



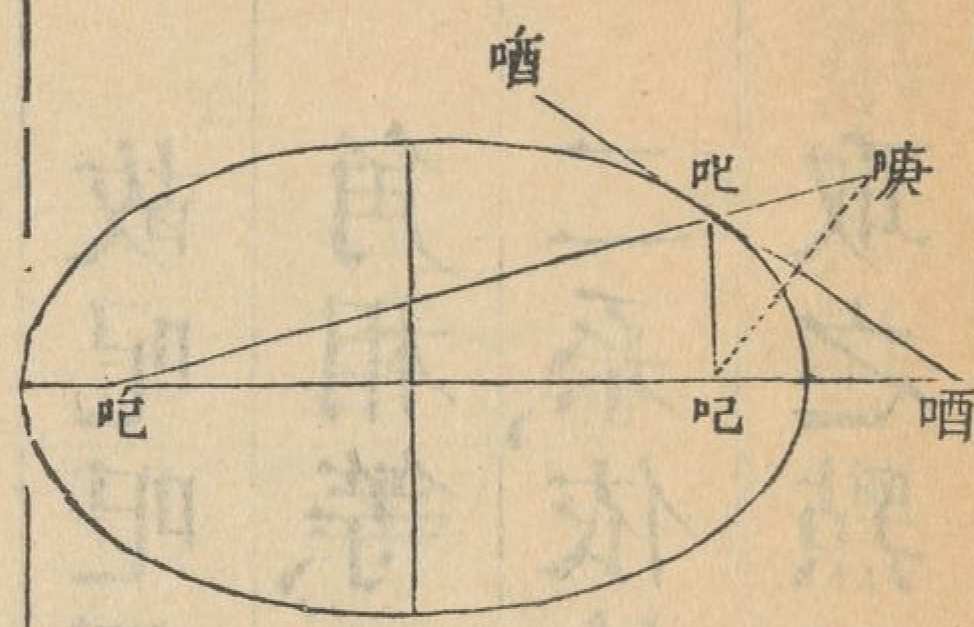
依幾何理有比例 吧吧∶吔吔∷吧咖∶吔咖 ㊀、別得 吧吧⊥吧吔＝二呷 吧吔＝二丙＝二呷戊、本卷一款六系 吔吧＝呷⊥戊天、本卷一款七系 用此諸同數于㊀式中則得 二呷∶二呷戊∷呷⊥戊天∶吔咖 所以

叱/嗍＝一戊(卯丄戊天)小

惟戊(卯丄戊天)爲心距法線末點線、本卷八款二系故吧唧必平分吧吧𠯁角、而爲法線、

一系、吧唧正交哂哂、而吧吧唧與𠯁吧唧二角等、故吧吧哂與𠯁吧哂二角亦等、即二帶徑交切線角相等、

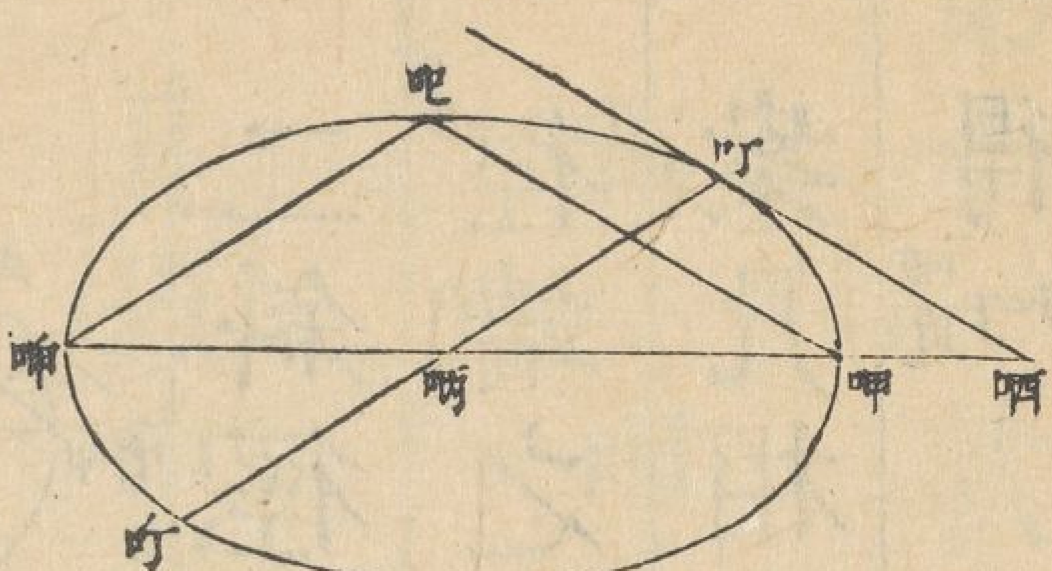
二系、依款可任取撱圓周一點作切線、如吧爲所取之點、吧吧吧𠯁爲二帶徑、引長𠯁吧至咦、令吧



咦等于吧𠮙、次作吧咦聯線、次過吧點作正交吧咦之線唒吧唒、卽吧吧點之切線、蓋吧吧唒角等于咦吧唒角、卽等于𠮙吧唒角故也、

第十款　自長徑端作通弦、與切線平行、則餘通弦必與切點上之徑線平行、反言之理同、

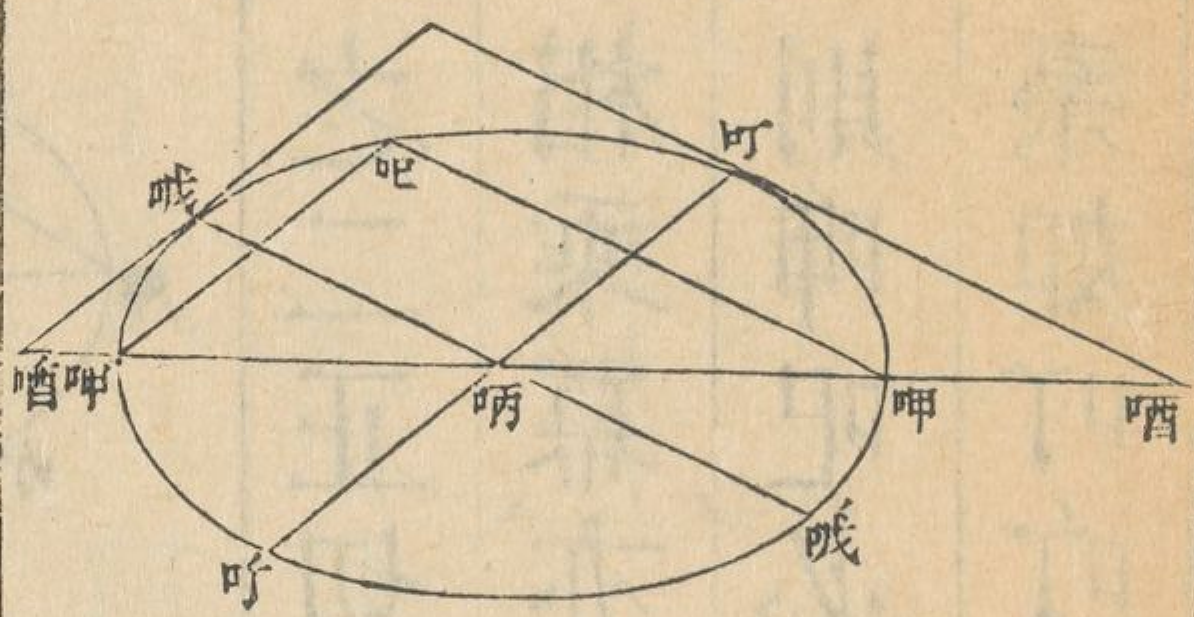
如圖、叮唒爲撱圓之切線、于呷點作通弦呷吧、與切線平行、則餘通弦呷吧必與切點上之徑線叮叮平行、試命叮點之縱橫線爲天地、則吶叮線之



式為$地^{一}=帳天$三卷一款附例即$帝^{二}=\frac{天}{地}$而切線與長徑交角之正切為$甲=丁\frac{呷地}{吃天}$、本卷七款一系以此二式相乘、得$甲帝=丁\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、此為呐叮叮哂二線與呐哂交角之二正切相乘羃、而吧呻哂吧呻呷二角之正切相乘羃、亦等于$丁\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、本卷六款所以若呻吧與叮哂平行、則呻吧必與呐叮平行、反言之理同、

系如叮吋為橢圜之斜徑、叮哂為其端之切線、作

呷吧通弦與叮哂平行、則餘通弦呻吧與叮吁平行、本款作哦哂切線、與呻吧平行、亦與叮吁平行、交從切點哦作哦哦斜徑、呻吧既與哂哦平行、則呷吧叮哂必皆與哦哦平行、本款故凡



二斜徑、此徑與彼徑端之切線平行、彼徑必與此徑端之切線平行、名曰相屬徑、

案凡相屬徑與長徑交角之二正切、命為甲申、則得

$甲申 = 丅\frac{呷^{二}}{吧^{二}}$

第十一款　中點爲原點。相屬徑爲縱橫軸。則其式

爲 $呷^{2}地^{2}丄吃^{2}天^{2}=呷^{2}吃^{2}$。呷吃爲相屬二半徑。

凡以中點及長短二徑爲準。橢圜之式爲 $呷^{2}地^{2}丄吃^{2}天^{2}=呷^{2}吃^{2}$。本卷一款

而正交縱橫線。易爲斜交縱橫線。原點不易。天地

之同數爲 $天=天'角餘弦丄地'角'餘弦$。$地=天'角弦丄地'角'弦$。三卷十款 此二右邊數各自乘。代上式

中之 $天^{2}$ $地^{2}$。得左式。

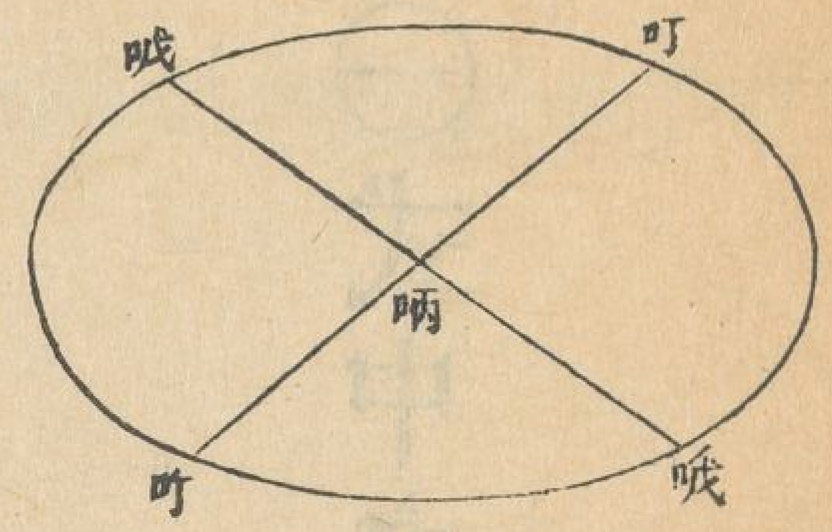
(呷二角弦二丄叱二角餘弦二)地二丄二(呷二角弦角弦丄叱二角餘弦角餘弦)天地丄(呷二角弦二丄叱二角餘弦二)天二＝呷二叱二

㈠為斜交縱橫線與長徑成二角之橢圓式二

新軸爲相屬徑、則得甲′甲二＝一丅呷二/叱二、系十款卽角切′角切＝一丅呷二/叱二、故呷二角切′角切丄叱二＝〇準三角理、

餘弦乘正切、等于正弦、故以角餘弦′角餘弦乘上式、則得呷二角弦′角弦丄叱二角餘弦′角餘弦＝〇、而

㊀式中之天′地消盡、得(呷二角弦二丄叱二角餘弦二)地二丄(呷二角弦二丄叱二角餘弦二)天二＝呷二叱二、㊁卽以相屬徑爲準之牖



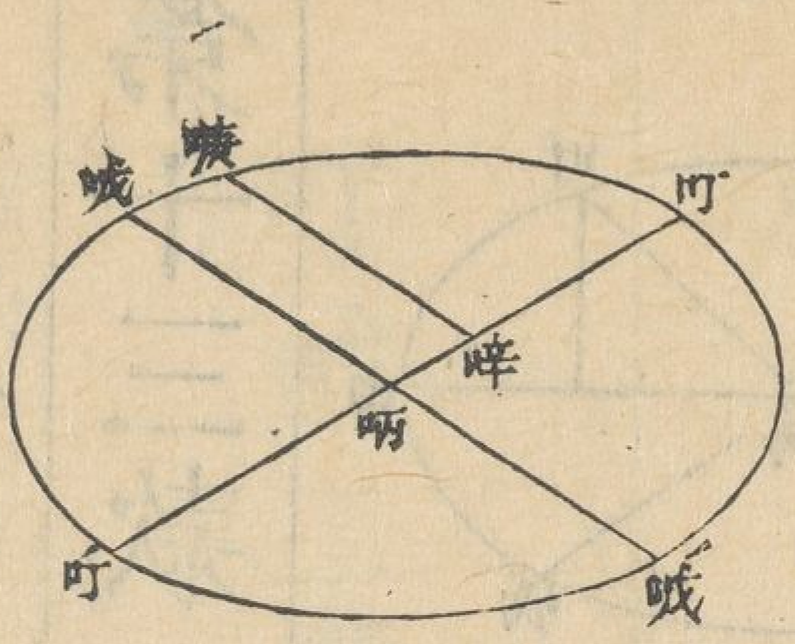
圜式、若令地＝〇、則得$天^{2}=\frac{呷^{2}吃^{2}}{呷^{2}角弦^{2}\perp吃^{2}角餘弦^{2}}=呐叮^{2}$、若令天＝〇、則得$地^{2}=\frac{呷^{2}吃^{2}}{呷^{2}角弦^{2}\perp吃^{2}角餘弦^{2}}=呐哦^{2}$、命

呐叮為呻、呐哦為吃、則㈡式變為$\frac{天^{2}}{呻^{2}}\perp\frac{地^{2}}{吃^{2}}=一$、故以天地

代天地、則得$呻^{2}地^{2}\perp吃^{2}天^{2}=呻^{2}吃^{2}$、與款合、

第十二款　本徑與屬徑之二正方比、若縱線所分

本徑二分之矩形、與縱線之正方比、



以相屬徑爲準之橢圜式爲 呷²地²丄吃²天²＝呷²吃² 本卷十一款

變爲 呷²地²＝吃²(呷²丅天²)、此可作比例率 呷²∶吃²∷呷²丅天²∶地² 即爲 (二呷)²∶(二吃)²∷(呷丄天)(呷丅天)∶地²、二呷 二吃

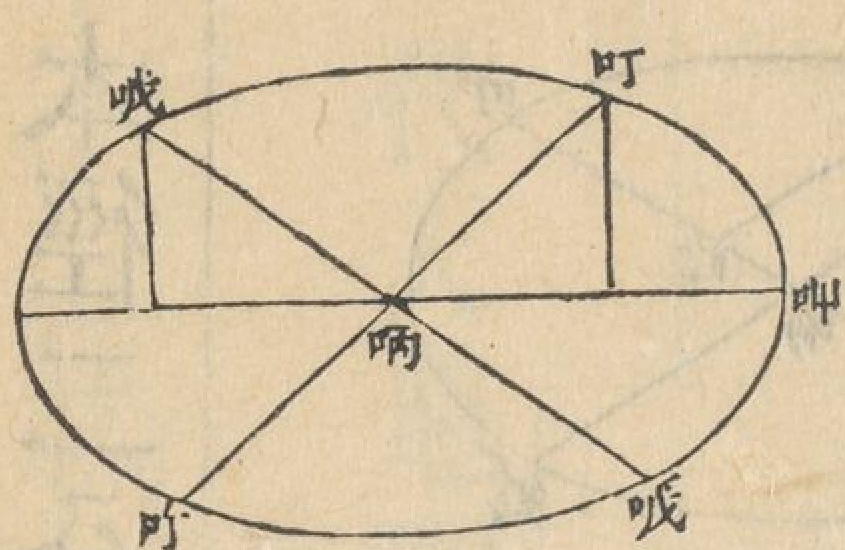
即相屬徑叮吋、吷吷、天即呐啐、故呷丄天爲吋啐、呷丅天爲

叮啐、地即嘆啐、所以上比例率即 叮吋²∶吷吷²∷叮啐×吋啐∶嘆啐²、與款合、

系凡徑線上二縱線之正方比若所分徑線各二分之矩形比

案凡本徑與屬徑連比例之末率爲通徑長徑之通徑等于$\frac{\text{呷}}{\text{二吃二}}$本卷一款五系短徑之通徑等于$\frac{\text{吃二}}{\text{二呷}}$

第十三款　凡相屬徑之二正方和等于長短徑之二正方和



如圖叮吖哎哎爲相屬二徑命叮點之縱橫線爲天地哎點之縱橫線爲天地叮呐呷角爲角哎呐呷角爲角則必得

$角切=\frac{天}{地}$

$角切=\frac{天'}{地'}$

故

$角切\times角切=\frac{天'天}{地'地}=丅\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$

本卷十款案

此式二邊各自乘去分得

$呷^{四}地^{二}地'^{二}=叱^{四}天^{二}天'^{二}$

㊀、叮吰二點在撱圜周、故有式

$呷^{二}地^{二}=呷^{二}叱^{二}丅叱^{二}天^{二}$、

$呷^{二}地'^{二}=呷^{二}叱^{二}丅叱^{二}天'^{二}$

本卷一款相乘、得式

$呷^{四}地^{二}地'^{二}=呷^{四}叱^{四}丅呷^{二}叱^{四}天^{二}丅呷^{二}叱^{四}天'^{二}丄叱^{四}天^{二}天'^{二}$

㊁、以㊀㊁兩式相消、得

$呷^{四}叱^{四}丅呷^{二}叱^{四}天^{二}丅呷^{二}叱^{四}天'^{二}=〇$、

以

$呷^{二}叱^{四}$

約之、得

$呷^{二}丅天^{二}丅天'^{二}=〇$、

即

$呷^{二}=天^{二}丄天'^{二}$

㊂、同例得

$叱^{二}=地^{二}丄地'^{二}$

㊃、以㊂㊃兩式相加、得左式、

$呷^{2}丄吃^{2}=天'^{2}丄地'^{2}丄天''^{2}丄地''^{2}=呷'^{2}丄吃'^{2}$、（本卷十一款）與款合、

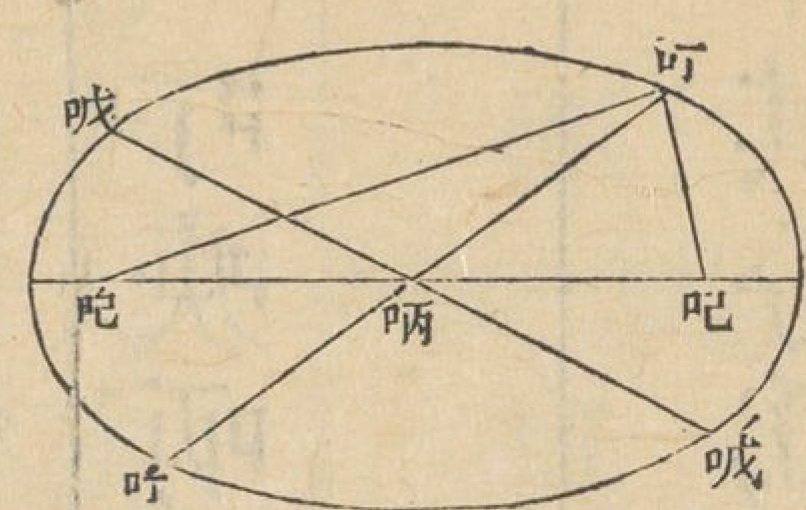
系、準本款㊂式、$天'^{2}=呷^{2}丅天''^{2}$、又準前、（本卷一款）$呷^{2}地''^{2}=吃^{2}(呷^{2}丅天'^{2})$、故 $天'^{2}=\frac{吃^{2}}{呷^{2}}地''^{2}$ 即 $天'=\frac{吃}{呷}地''$、同例

得 $天''=\frac{呷}{吃}地'$

第十四款　徑端距二心線之矩形等于半屬徑之

正方、

設以正交二軸爲準命叮點之縱橫線爲天地、則



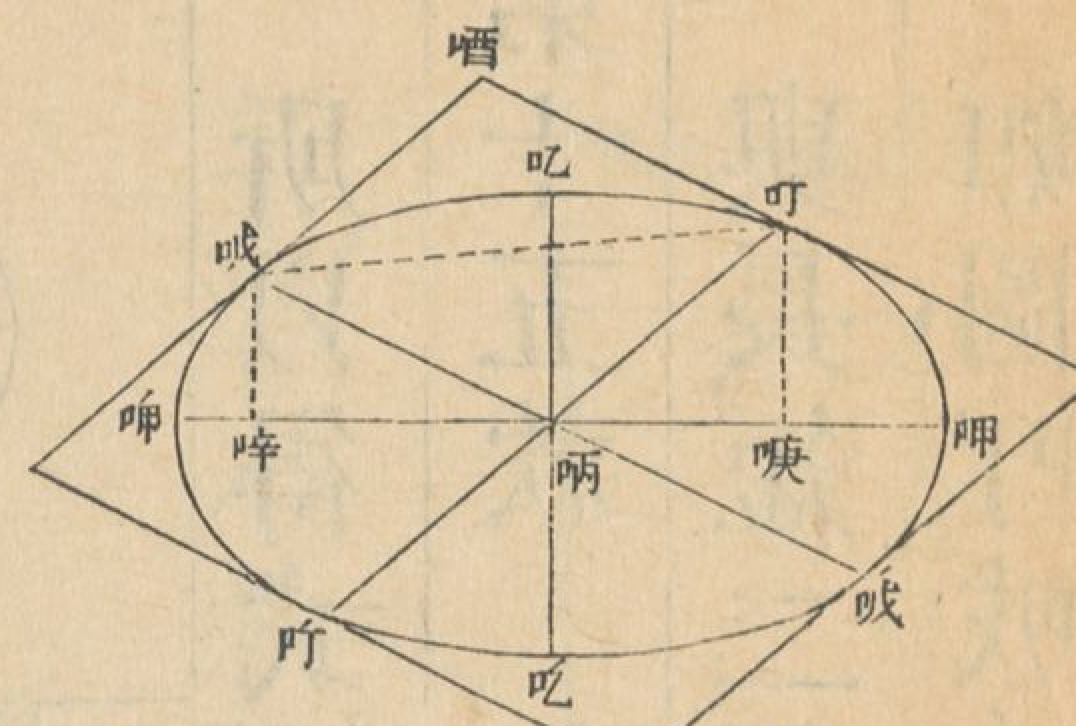
叮點距中點線之式爲$呻^{二}=天^{二}丄地^{二}$、而撱圓式爲$地^{二}=叱^{二}丅\frac{呷^{二}}{叱^{二}}天^{二}$、本卷一款案以此同數代上式地、得$呻^{二}=叱^{二}丄\frac{呷^{二}}{呻^{二}丅叱}天^{二}=叱^{二}丄戊天^{二}$、本卷一款六系惟$呻^{二}丄叱^{二}=呷^{二}丄叱^{二}$本卷十三款故$叱^{二}=呷^{二}丅戊^{二}天^{二}$、而$秝=呷^{二}丅戊^{二}天^{二}$、本卷一款七系所以得式$秝=叱^{二}$與款合、

第十五款　相屬徑四端之四切線成平行四邊形、與長短二徑之矩形等積、

如圖叮哦吁哦爲相屬徑之四端、于此四點作四

切線、成平行四邊形、其積等于$\begin{matrix}\text{呷}\\ \text{呷}'\end{matrix}\times\begin{matrix}\text{吃}\\ \text{吃}'\end{matrix}$、

試用正交二軸、命叮點之縱橫線爲天′地′、戊點之縱橫線爲天″地″、丙叮戊三角形、等于叮庚辛戊四邊形內少



叮庚丙戊辛丙二三角形、卽

$\text{二丙叮戊}=(\text{天}'\text{丄天}'')(\text{地}'\text{丄地}'')\text{丅天}'\text{地}'\text{丅天}''\text{地}''$、

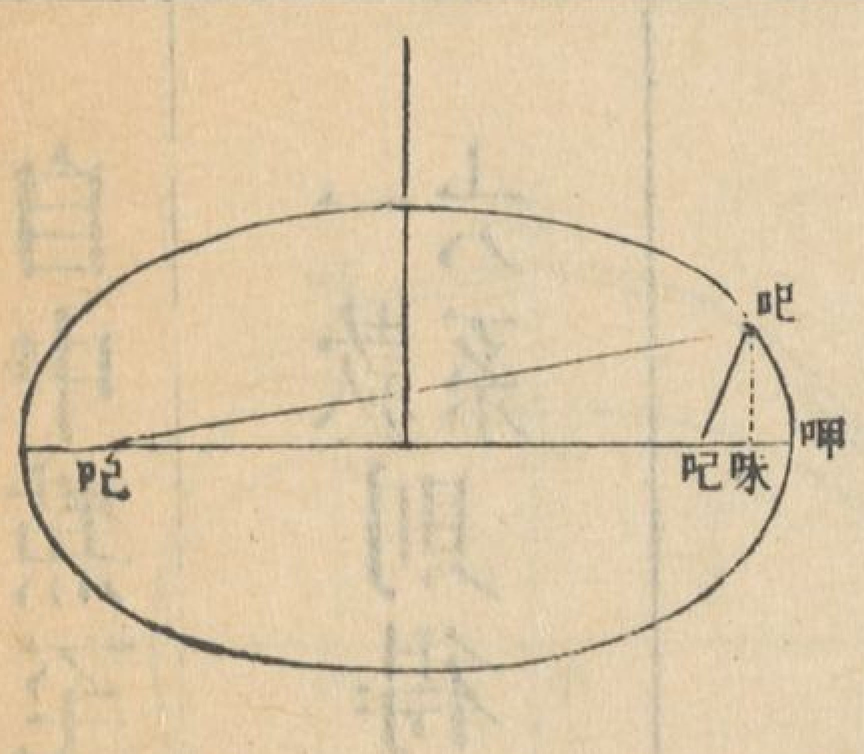
$=\text{天}'\text{地}''\text{丄天}''\text{地}'=\text{天}'\frac{\text{呷}}{\text{吃}}\text{天}'\text{丄地}'\frac{\text{吃}}{\text{呷}}\text{地}'$、

本卷十三款系右邊通其分爲同母、得$\frac{\text{呷吃}}{\text{吃}^{二}\text{天}'^{二}\text{丄呷}^{二}\text{地}'^{二}}=\frac{\text{呷吃}}{\text{呷吃}^{二}}$、故丙戊酉叮平行四邊形、等于

呷𠮙、而吅吰吖吙四切線所成平行四邊形等于四呷𠮙

即 二呷二𠮙＝$\frac{呷}{呷}$乂𠮙、與款合

第十六款　以心點為極、橢圓之極式為 未＝一 $\frac{一\bot戊亥餘弦}{巳}$、巳為半通徑、戊為橢率、亥為帶徑交長徑之角、



凡橢圓周任何點距二心之式為

未＝吧吧＝呷丅戊天

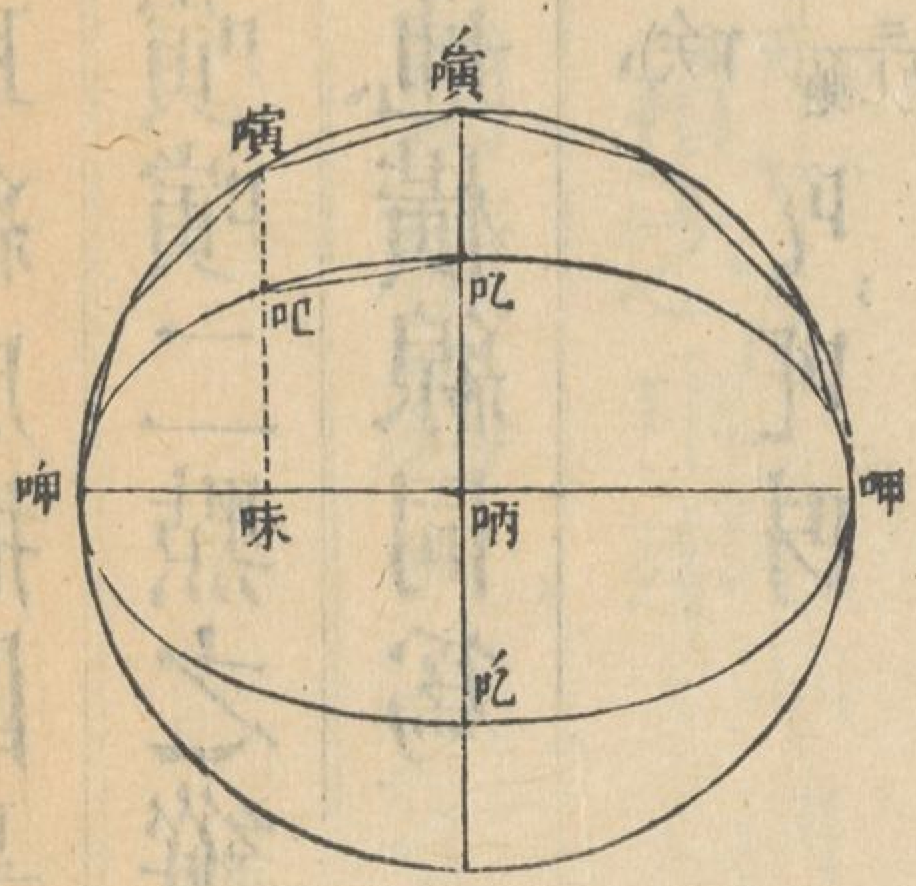
禾＝吧′吧＝呷⊥戊天

本卷一款七系　此橫線天從中點起若移原點

自中點至心吧、則天當以天ˊ丄丙代之、又以呷戊代丙、本卷一款六系則得天=天ˊ丄呷戊、命吧吧呷角爲亥、則得天=未亥餘弦、所以天=未亥餘弦丄呷戊、用此同數代前未同數中之天、得吧吧=未=呷丅戊未亥餘弦丅呷戊二、移其項、則得下式未(一丄戊亥餘弦)=呷丅呷戊二=呷(一丅戊二)、命長徑之通徑爲吧、等于$\frac{呷}{二叱^{二}}$、本卷十二款案則得

$(戊丅一)呷＝巳$、本卷一款六系故$\frac{弦餘亥戊丄一}{巳}＝未$、與款合

第十七款　凡橢圜面積、為長短徑上二平圜面積之中率、



如圖、呷呻為呷叱呻吃橢圜之長徑、即以為圜徑、作平圜、于平圜裏任作多等邊形、自諸邊之界嗔嗔等點、作呷呻之諸垂線、交橢圜叱吧諸點、作諸交點之

聯線、成撱圜裏多邊形、其邊數與平圜裏形等、命㖆㖆二點之縱線爲𠯈𧊅、吧叱二點之縱線爲地地、橫線同爲天矢、則㖆㖆味㕲四邊形面積、等于（天丅矢）$\frac{二}{𠯈地丄𠯈地}$、叱吧味㕲四邊形面積、等于（天丅矢）$\frac{二}{地丄地}$故$\frac{地丄地}{𠯈地丄𠯈地}$＝$\frac{㖆嗚}{嗚㕲}$惟$\frac{呷}{叱}$＝$\frac{𠯈地}{地}$、$\frac{呷}{叱}$＝$\frac{𠯈地}{地}$、本卷四款所以$\frac{呷}{叱}$＝$\frac{𠯈地丄𠯈地}{地丄地}$即$\frac{呷}{叱}$＝$\frac{㖆嗚}{嗚㕲}$同例得撱圜與平圜裏相當各四邊形比、皆若叱與呷比、故撱圜與平圜裏二多邊形比、亦若叱與呷比、命二多邊形爲巳吧、則得$\frac{呷}{叱}$＝$\frac{吧}{巳}$、

其形無論若干邊皆合邊多至無窮亦合𢰅圜平圜為多邊形之限故亦合命𢰅圜平圜二面積為申呻則得$\frac{\text{呻}}{\text{申}}=\frac{\text{呷}}{\text{吆}}$即$\text{申}=\text{呻}\frac{\text{呷}}{\text{吆}}$惟平圜之半徑為呷其面積為$\text{周呷}^{\text{二}}$故𢰅圜之面積為$\text{周呷}^{\text{二}}\frac{\text{呷}}{\text{吆}}=\text{周呷吆}$即𢰅圜長短徑上二平圜積之中率蓋長徑上之平圜積為$\text{周呷}^{\text{二}}$短徑上之平圜積為$\text{周吆}^{\text{二}}$二數之中率為$\text{周呷吆}$也與款合

代微積拾級卷七

米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯

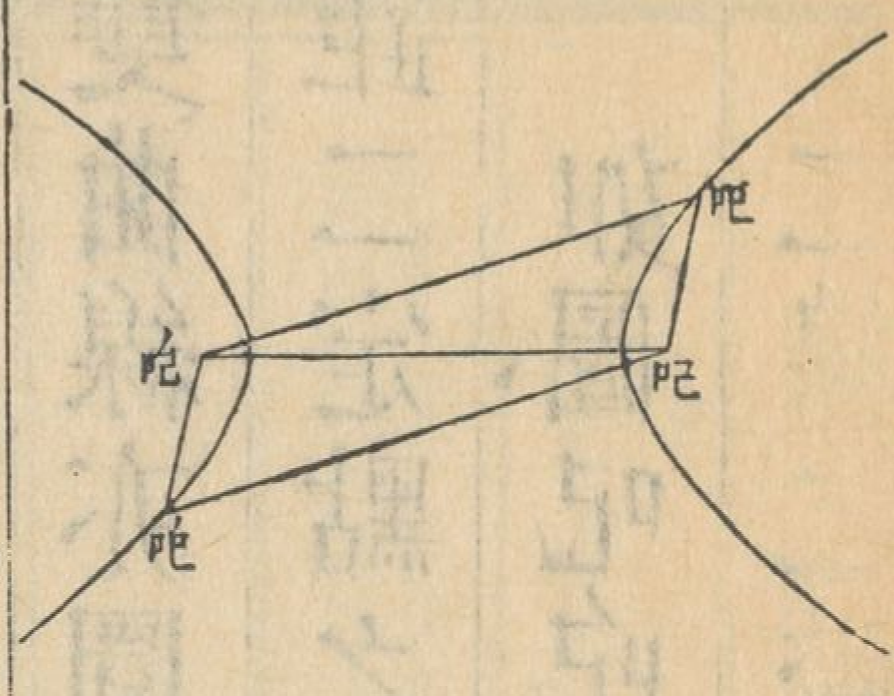
海甯李善蘭筆述

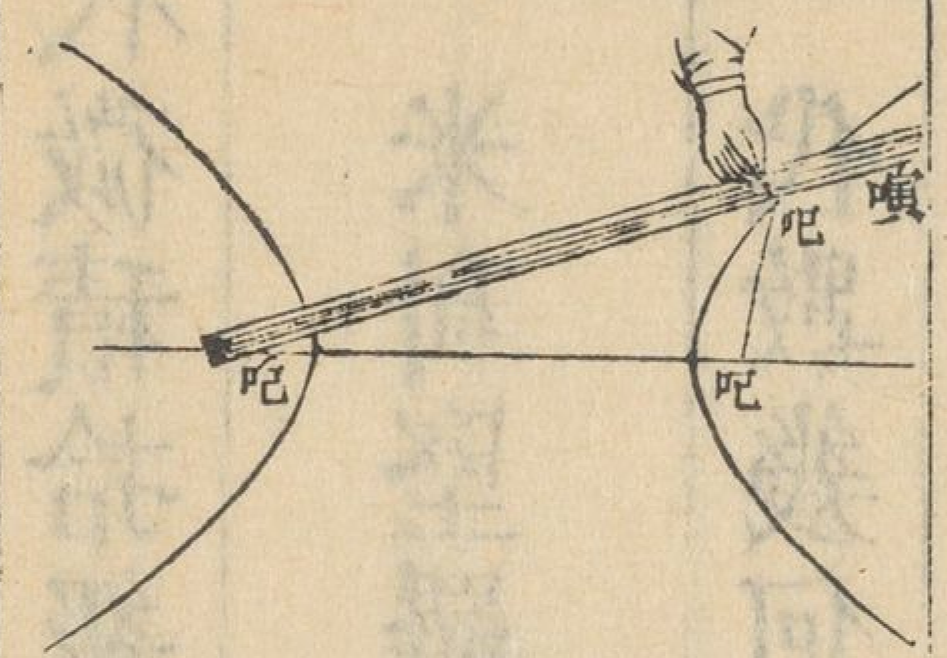
代數幾何七

論雙曲線

雙曲線亦圜錐曲線之一、平面曲線也、曲線之每點、距二定點之較恆等、二定點乃曲線之二心、

如圖、𠯆咆為二定點、設吧點繞𠯆點、令吧𠯆咆二線之較恆等、則吧點必行成雙曲線、𠯆咆即二





心也、又設吃點繞吃點、令吒吃丅吃𠮙恆等于吧吃丅吧吃、則吃點必行成對面曲線、與本線相似、二曲線爲相對曲線、因有相對曲線、故名曰雙曲線、或省曰雙線、

依此理、雙曲線可以器作之、如圖、𠮙吃爲二定點、取一界尺、長于𠮙吃之距、一端之角銷定于吃點、令活動可旋轉、又取一線、短于界尺、一端着于𠮙點、一端着于界尺又一端之嗔點、乃以鉛筆緊偪其線、

令附界尺之𠮠㖤邊而旋轉界尺、鉛筆必行成雙曲線之一邊、葢界尺任在何方向、吧吧吧𠮠二線之較、恆等于尺線較故也、以線尺反之、如法成又一邊、更以尺之一端銷定于呢點、線之一端着于𠮠點、如法成對面曲線、

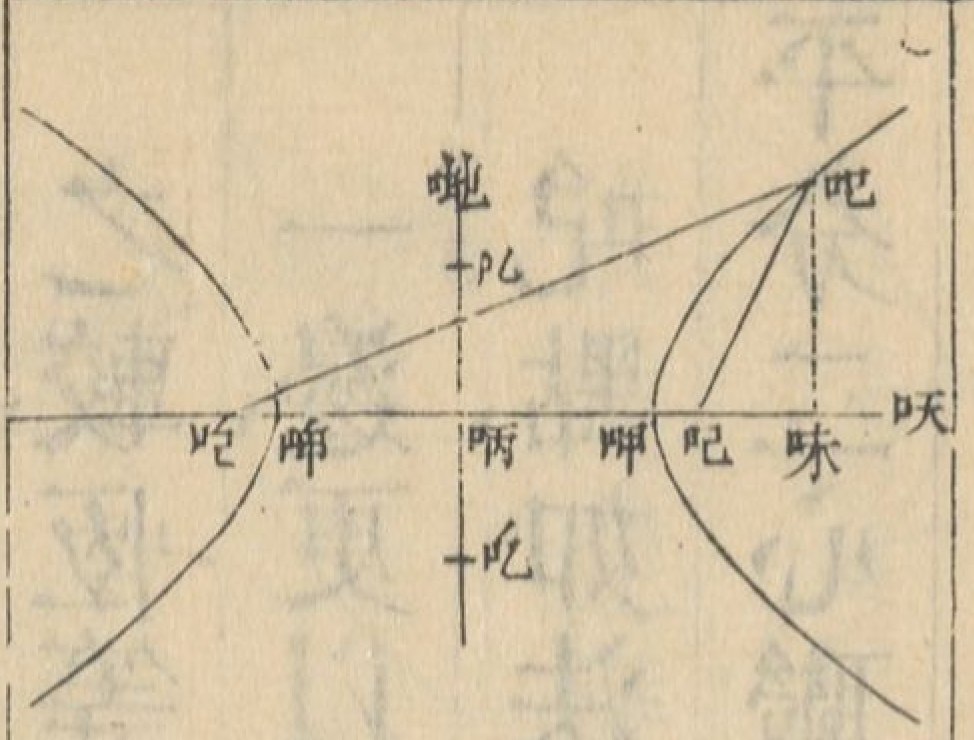
平分二心聯線之點、曰中點、

過中點以雙線爲界之線、爲雙線徑、

徑引長之能過二心者、爲橫徑、

過心之倍縱線、爲橫徑之通徑、

第一款、凡雙曲線以中點及二軸為準、其式為 $呷^{二}地^{二}丅叱^{二}天^{二}=丅呷^{二}叱^{二}$、呷叱為二半軸、天地為曲線上任一點之縱橫線、



如圖吧吧為二心、作呐呹呐哋二軸、以中點呐為原點、吧為曲線上任一點、作吧味正交呐呹、命吧點距兩心線之較為二呷、呐吧即呐吧為丙、吧吧為末、吧吧為未、吧點之縱橫線為天地、則有式 $\frac{叱^{二}}{吧}=\frac{吧^{二}}{味}丄\frac{叱^{二}}{味}$、即 $未^{二}=地^{二}丄(天丅丙)^{二}$ ㈠、又

$\frac{\text{吔}^2}{\text{吧}}=\frac{\text{吧}^2}{\text{味}}\perp\frac{\text{吔}^2}{\text{味}}$ 即 $\text{耒}^2=\text{地}^2\perp(\text{天}\perp\text{丙})^2$、㊁、以㊀㊁兩式相加、得 $\text{未}^2\perp\text{耒}^2=\text{二}(\text{地}^2\perp\text{天}^2\perp\text{丙}^2)$、㊂、以㊀式減㊁式、則得 $\text{未}\top\text{耒}=\text{四丙天}$、即 $(\text{耒}\perp\text{未})(\text{耒}\top\text{未})=\text{四丙天}$ ㊃、準總論、得 $\text{耒}\top\text{未}=\text{二卯}$、用此同數于㊃式中、得 $\text{耒}\perp\text{未}=\frac{\text{呷}}{\text{二丙天}}$、以上式加減之、得下式 $\text{耒}=\text{卯}\perp\frac{\text{呷}}{\text{丙天}}$ ㊄、$\text{未}=\top\text{卯}\perp\frac{\text{呷}}{\text{丙天}}$ ㊅、以此二式之同數各自乘用于㊂式中、得下式 $\text{卯}^2\perp\frac{\text{呷}^2}{\text{丙}^2\text{天}^2}=\text{地}^2\perp\text{天}^2\perp\text{丙}^2$、化之、則

得 $呷^{2}地^{2}丄(呷^{2}丅丙^{2})天^{2}＝呷^{2}(呷^{2}丅丙^{2})$ ㊆、即雙線之式、試置 $乙^{2}＝丙^{2}丅呷^{2}$、則㊆式即變爲 $呷^{2}地^{2}丅乙^{2}天^{2}＝丅呷^{2}乙^{2}$、與

款合

案、雙線式較之撱圜式、惟乙之記號不同耳、撱圜之乙爲正、而雙線之乙爲負也、若移項以呷約之、則爲 $地^{2}＝\frac{呷^{2}}{乙^{2}}(天^{2}丅呷^{2})$、

一系、求曲線交橫軸之點、必令 $地＝○$ 則 $天＝十呷$、即兩呷亦

即呐呻、故曲線交橫軸爲呷呻二點、在中點左右、距中點相等、二呐呷、即呷呻、等于二呷、則曲線任何點、距二心之較、恆等于橫徑、過中點正交橫徑之線、爲相屬徑、

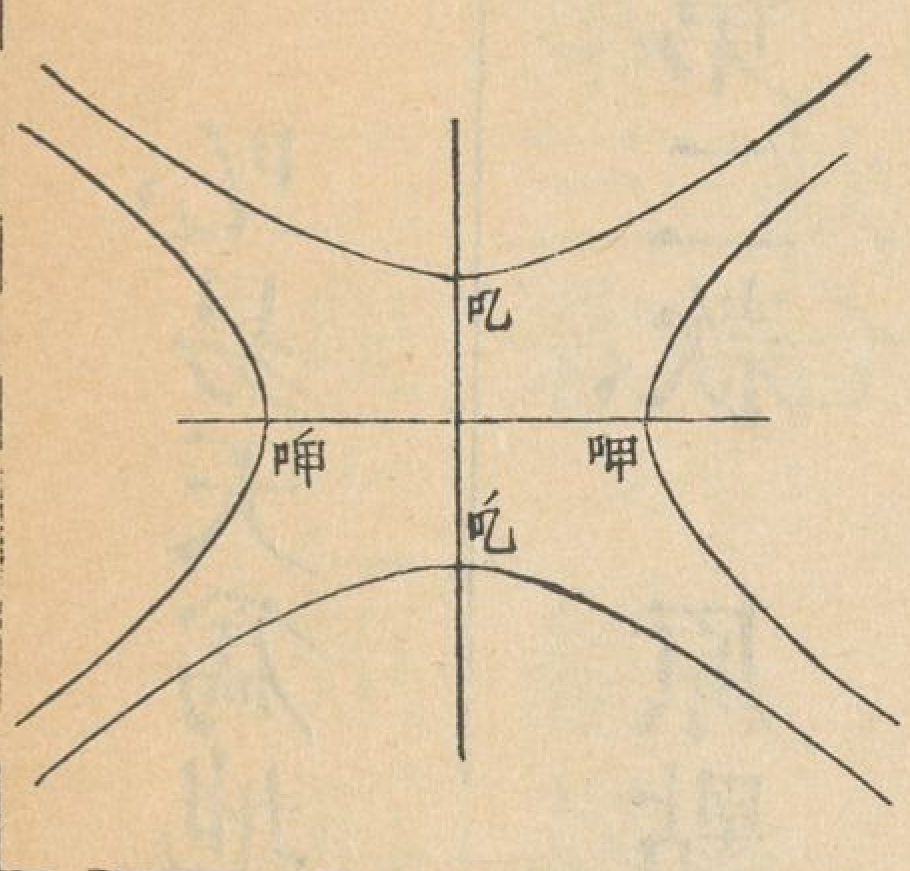
二系、若吒=呷、則款式變爲地丅天²=丅呷²、此名等邊雙線、

三系、吒²=丙²丅呷²、則呷²丄吒²=丙²、即呐²吒、故中點距心線之平方等于二半徑之平方和、

四系、求通徑準案 $地^{2}=\frac{呷^{2}}{吃^{2}}(天^{2}\,丅\,呷^{2})$、令 $天=丙=\frac{呐}{吃}$、則 $地^{2}=\frac{呷^{2}}{吃^{2}}(丙^{2}\,丅\,呷^{2})$、惟 $吃^{2}=丙^{2}\,丅\,呷^{2}$、故 $地^{2}=\frac{呷^{2}}{吃^{2}}\times 吃^{2}$、則有比例 $呷:吃::吃:地$、$二呷:二吃::二吃:二地$、故通徑為橫徑與相屬徑連比例之三率、

五系、中點距心線、以半橫徑約之、得 $\frac{呷}{丙}$、為雙線兩心差率、命為戊、則 $\frac{呷}{丙}=戊$ 即 $丙=呷戊$、惟 $吃^{2}=丙^{2}\,丅\,呷^{2}$ 故 $呷^{2}\,丄\,吃^{2}=呷^{2}戊^{2}$、即 $\frac{呷^{2}}{吃^{2}}=戊^{2}\,丅\,一$、用此同數于案式中變為 $地^{2}=(戊^{2}\,丅\,一)(天^{2}\,丅\,呷^{2})$

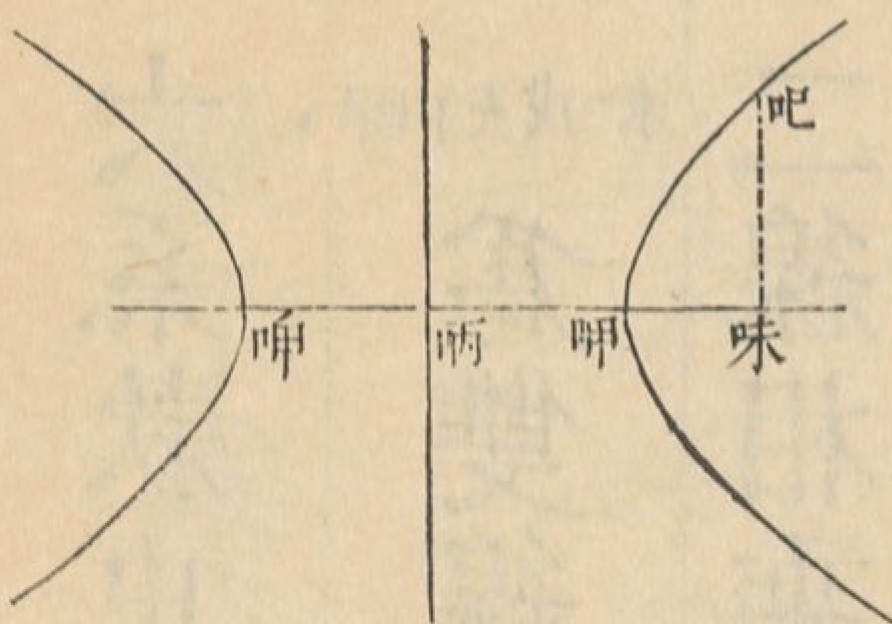
六系款中㊄㊅二式爲 $未=呷丄\frac{呷}{丙}天$ $未=丅呷丄\frac{呷}{丙}天$、以戊代 $\frac{呷}{丙}$、則變爲 $未=戊天丄呷$、$未=戊天丅呷$、爲雙線任一點距二心之式、相乘得 $未未=戊^二天^二丅呷^二$ 爲距心二線相乘冪、



又案、以乙乙爲橫徑、作相對雙線、而以呷呻爲相屬徑、此雙線必爲本雙線之相屬雙線、求相屬雙線之式、法置 $呷^二地^二丅乙^二天^二=丅呷^二乙^二$、易呷爲

吃、易天為地、得$吃^2天^2丅呷^2地^2=丅呷^2吃^2$即相屬雙線之式、

第二款、原點在橫徑之端、則其式為$地^2=\frac{吃^2}{呷^2}(天^2丄二呷天)$、呷吃為二半徑、天地為曲線上任一點之縱橫線、



凡以中點為原點、雙線之式為$呷^2地^2丅吃^2天^2=丅呷^2吃^2$（一）、本卷一款今原點移至呷、則橫線改而縱線不

改、命新橫線呷味爲天則得 $\frac{呷}{丙}\perp\frac{呷}{味}=\frac{丙}{味}$ 卽 $天=天^{\prime}\perp呷$、用此同數代

㊀式中之天、則得 $呷^{二}地^{二}丅乙^{二}天^{\prime二}丅二乙^{二}呷天^{\prime}=○$、變作 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{乙^{二}}(天^{\prime二}\perp二呷天^{\prime})$、以天代天、卽得 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{乙^{二}}(天^{二}\perp二呷天)$、與

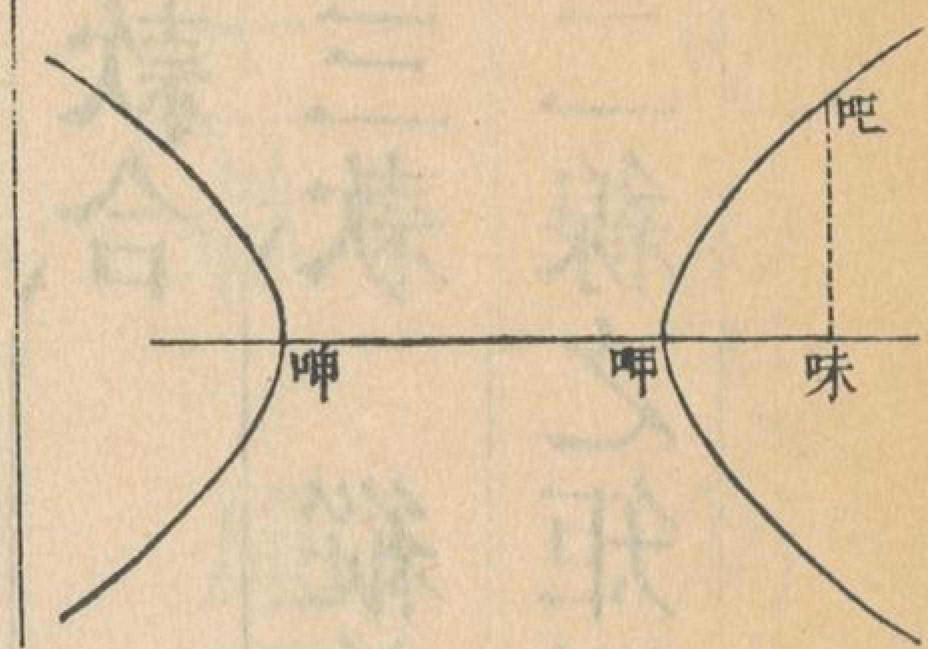
款合、

第三款、縱線之正方、與其交橫軸點距橫徑兩端

二線之矩形比、若相屬徑與橫徑之二正方比、

原點在橫徑端呷、則其式爲 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(天丄二呷)天$、本卷二款

故有比例 $呷^{二}:叱^{二}::(天丄二呷)天:地^{二}$ 二呷即橫徑呷呻、天即呷



味、故 天丄二呷 即呻味、而 $(天丄二呷)天$ 爲味點距呷距呻二線之矩

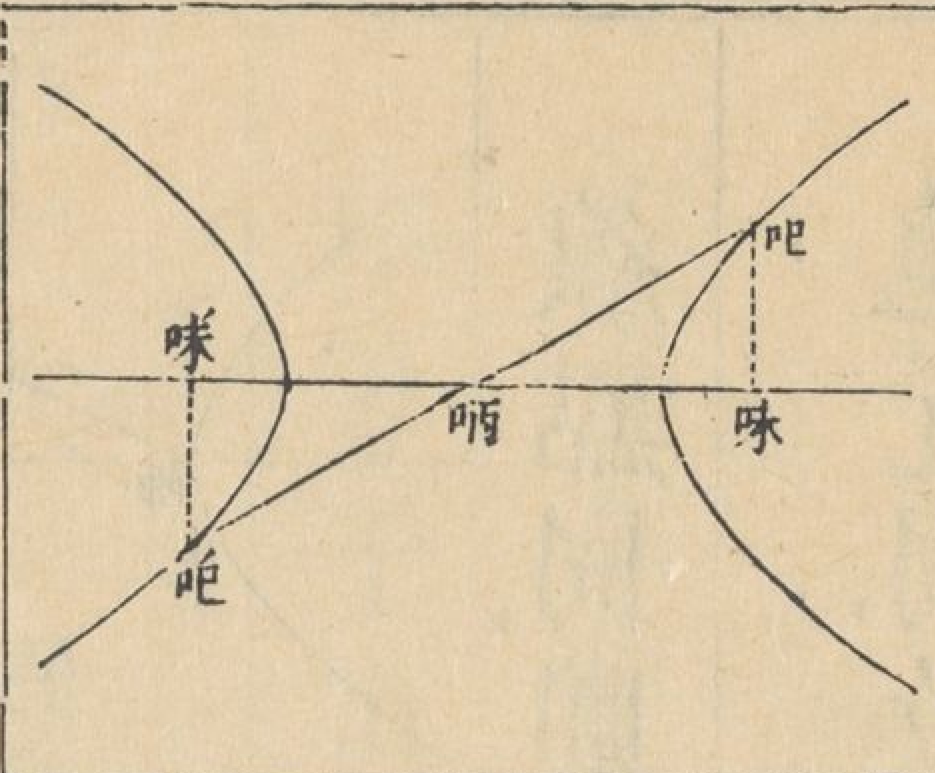
形、

系凡二縱線之正方比、若其二交點距橫徑兩端

各二線之矩形比

第四款　凡雙線之徑平分之必于中點、

如圖、任作雙線之斜徑吧咆、命吧點之縱橫線為天′地′、咆點之縱橫線為天″地″



依前得式

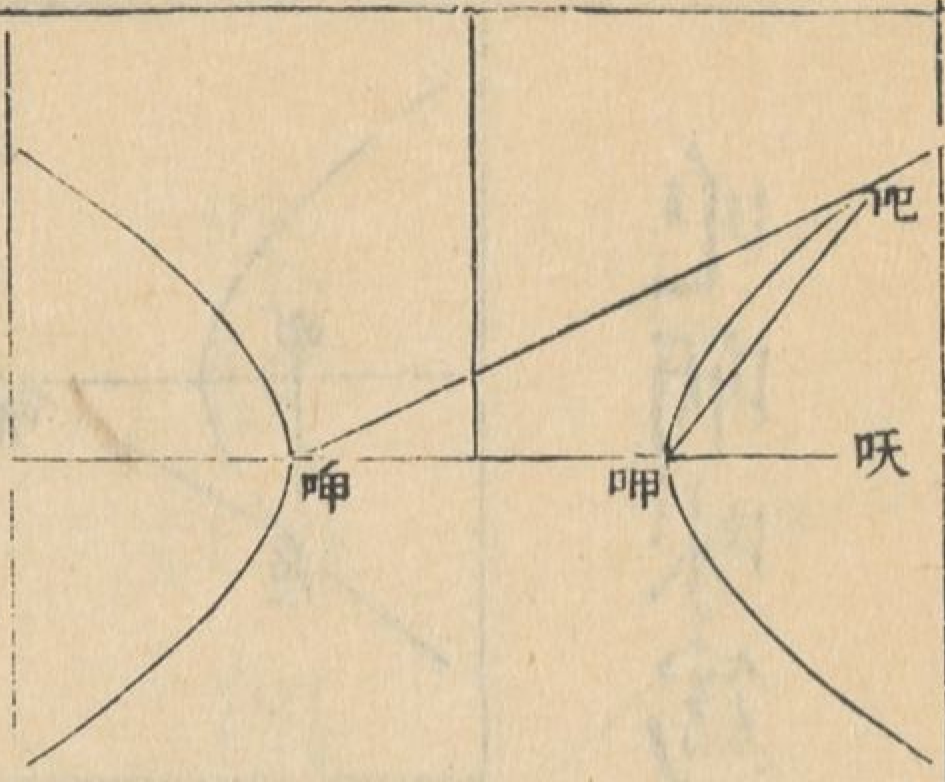
$\text{地}'^{2}=\frac{\text{呷}^{2}}{\text{叱}^{2}}(\text{天}'^{2}\text{丅}\text{呷}^{2})$

$\text{地}''^{2}=\frac{\text{呷}^{2}}{\text{叱}^{2}}(\text{天}''^{2}\text{丅}\text{呷}^{2})$、本卷一款案

故 $\frac{\text{地}'^{2}}{\text{地}''^{2}}=\frac{\text{天}'^{2}\text{丅}\text{呷}^{2}}{\text{天}''^{2}\text{丅}\text{呷}^{2}}$、而吧呥味咆呥味為相似三角形、則得式 $\frac{\text{地}''}{\text{地}'}=\frac{\text{天}''}{\text{天}'}$、是以 $\frac{\text{天}''^{2}}{\text{天}'^{2}}=\frac{\text{天}''^{2}\text{丅}\text{呷}^{2}}{\text{天}'^{2}\text{丅}\text{呷}^{2}}$、去其分

得 $\text{天}'=\text{天}''$、則 $\text{地}'=\text{地}''$、所以 $\text{天}'\text{丄}\text{地}'=\text{天}''\text{丄}\text{地}''$、即 $\text{呥吧}=\text{呥咆}$、亦 $\text{呥吧}=\text{呥咆}$、與款合

第五款　雙線上任一點、距橫徑兩端之線、交橫軸角二正切之矩形、等于半橫徑冪約相屬徑冪、

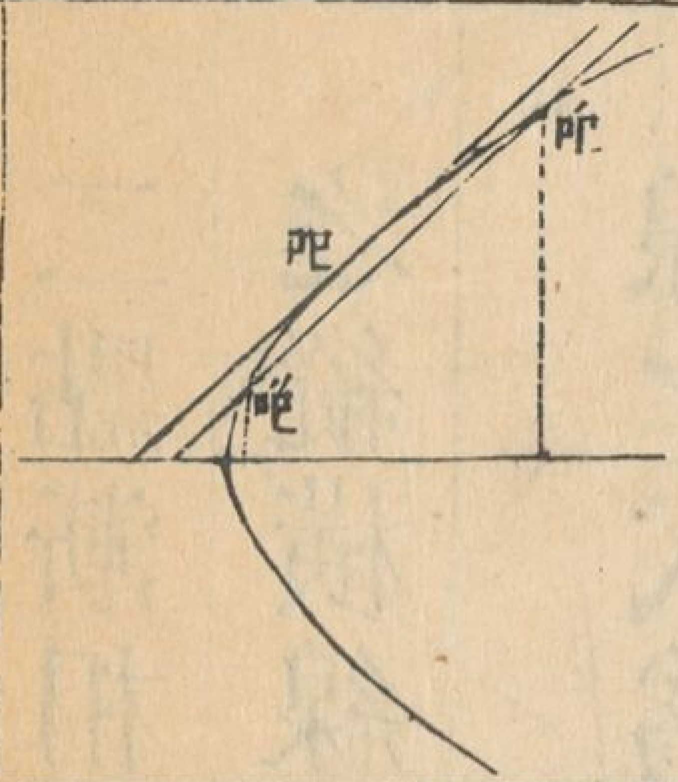


呷吧線內呷點之縱橫線為 天=呷、地=〇、其線之式為 地=甲(天丅呷)、三卷三款 呻吧線內呻點之縱橫線為 天=丅呷、地=〇、其線之式為 地=甲′(天丄呷)、此二線交曲線點同、則交點之天地二元相同、亦與雙線之天地元同、故以二式相乘得 $地^2=甲甲'(天^2丅呷^2)$ 與雙線式 $地^2=\frac{呷^2}{吧^2}(天^2丅呷^2)$、本卷一款案

相消得 $甲彳甲\,丁\,\frac{呷^{二}}{叱^{二}}=〇$、即 $甲彳甲=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、與款合、

系、等邊雙線 $呷=叱$、則得 $甲彳甲=一$、故二距線與橫軸交角之和、等于直角、三卷六款附條

第六款、雙線之切線式為 $呷^{二}地彳地\,丨\,叱^{二}天彳天=丁\,呷^{二}叱^{二}$、天地為切線任一點之縱橫線、夭地為切點之縱橫線、



如圖、任與切線平行作咆咆線交曲線于咆咆二點、此線向吧點而移、則咆咆

二點漸相近至合于吧、則此線變為切線、命吧點之縱橫線為天′地′、吧′點之縱橫線為天″地″、則吧吧′線之式為

$$地丅地^{\prime}=\frac{天^{\prime}丅天^{\prime\prime}}{地^{\prime}丅地^{\prime\prime}}(天丅天^{\prime})$$

㈠、三卷四款吧吧′二點俱在雙線內、故得

$$呷^{二}地^{\prime 二}丅吃^{二}天^{\prime 二}=丅呷^{二}吃^{二}$$

㈡、

$$呷^{二}地^{\prime\prime 二}丅吃^{二}天^{\prime\prime 二}=丅呷^{二}吃^{二}$$

㈢、本卷一款以㈢式減㈡式、得下式

$$呷^{二}(地^{\prime 二}丅地^{\prime\prime 二})丅吃^{二}(天^{\prime 二}丅天^{\prime\prime 二})=〇$$

、即

$$呷^{二}(地^{\prime}丄地^{\prime\prime})(地^{\prime}丅地^{\prime\prime})丅吃^{二}(天^{\prime}丄天^{\prime\prime})(天^{\prime}丅天^{\prime\prime})=〇$$

、故

$$\frac{天^{\prime}丅天^{\prime\prime}}{地^{\prime}丅地^{\prime\prime}}=\frac{呷^{二}(地^{\prime}丄地^{\prime\prime})}{吃^{二}(天^{\prime}丄天^{\prime\prime})}$$

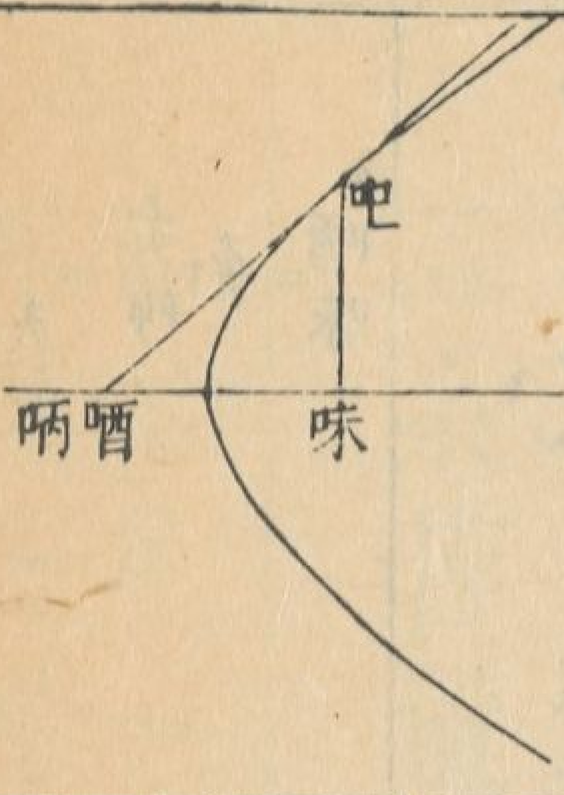
、用此同數于㈠式中、則得

$$地丅地^{\prime}=\frac{呷^{二}(地^{\prime}丄地^{\prime\prime})}{吃^{二}(天^{\prime}丄天^{\prime\prime})}(天丅天^{\prime})$$

㈣、吧吧′合為一點、

則天=天、地=地、而㊃式變爲地−地=$\frac{呷地}{吃天}$(天−天)、即雙線吧點切線之式、通其分、得呷地地−呷地地=吃天天−吃天天、即呷地地−吃天天=−呷吃、與本卷一款一款合、

一系、㊃式變式中之$\frac{呷地}{吃天}$、爲切線與横軸交角之正切、



二系、求切線與横軸之交點、令本款式中地=〇、則得天=$\frac{天}{呷}$=$\frac{呐}{哂}$、天即呐味、以呐哂減之得

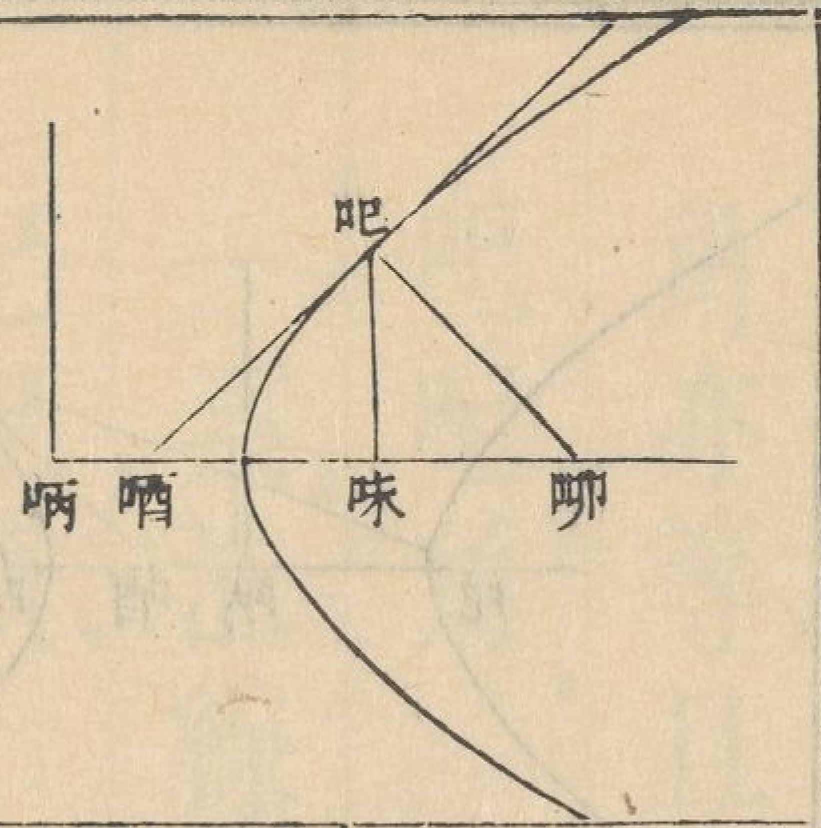
$\frac{酉}{味}=天'丅\frac{天}{呷}=\frac{天}{天'丅呷}$

第七款、雙線之法線式爲$地丅地'=丅\frac{叱地'}{呷天'}(天丅天')$、天地爲法線任一點之縱橫線、天′地′爲法線交曲線點之縱橫線、

過吧點之線、其式爲$地丅地'=甲(天丅天')$㊀、三卷三款法線爲切線之垂線、則有式$甲=\frac{丅呷}{一}$三卷六款惟正切之式爲$甲'=\frac{呷地'}{叱天'}$、本卷六款一系所以$甲=丅\frac{叱天'}{呷地'}$、用此同數于㊀式中、則得$地丅地'=丅\frac{呷地'}{叱天'}(天丅天')$㊁、卽法線式與款

合、

一系、求法線交橫軸之點、法令㊁式中地$=$〇則變為



⿰口丙⿰口卯$=$天$=\dfrac{\text{呷}^{2}}{\text{呷}^{2}\text{丄}\text{叱}^{2}}$天、若以⿰口丙味之代數天減之、則得次法

線式

味⿰口卯$=\dfrac{\text{呷}^{2}}{\text{呷}^{2}\text{丄}\text{叱}^{2}}$天丄天$=\dfrac{\text{呷}^{2}}{\text{叱}^{2}}$天、

二系、若置戊$^{2}=\dfrac{\text{呷}^{2}}{\text{呷}^{2}\text{丅}\text{叱}^{2}}$、本卷一款五系則得⿰口丙⿰口卯$=$戊天、以⿰口丙吔見八款圖即丙即

戊呷本卷一款五系加之、則得吔⿰口卯$=$呷戊丄戊天$=$戊(呷丄戊天)、為心距法線交橫軸點、

第八款　雙線之切線、平分切點距二心線之交角、

如圖吧哂爲切線、吧吧吧咆爲切點距二心線、試引長咆吧至⿰口寅、作吧⿰口卯線、平分吧吧⿰口寅外角、依幾何例有比例

$\frac{\text{咆}}{\text{吧}} : \frac{\text{吧}}{\text{吧}} :: \frac{\text{咆}}{\text{⿰口卯}} : \frac{\text{吧}}{\text{⿰口卯}}$、

轉理得

$\frac{\text{咆}}{\text{吧}} 丅 \frac{\text{吧}}{\text{吧}} : \frac{\text{咆}}{\text{吧}} :: \frac{\text{咆}}{\text{吧}} : \frac{\text{咆}}{\text{⿰口卯}}$

㊀、別得

$\frac{\text{咆}}{\text{吧}} 丅 \frac{\text{吧}}{\text{吧}} = 二呷$、

總論

$\frac{\text{咆}}{\text{吧}} = 二⿰口丙 = 二呷戊$、

本卷一款五系一

$\frac{\text{咆}}{\text{吧}} = 呷丄戊天$、

本卷一款六系一

用此諸同數于㊀式中得

$二呷 : 二呷戊 :: 呷丄戊天 : \frac{\text{咆}}{\text{⿰口卯}}$、

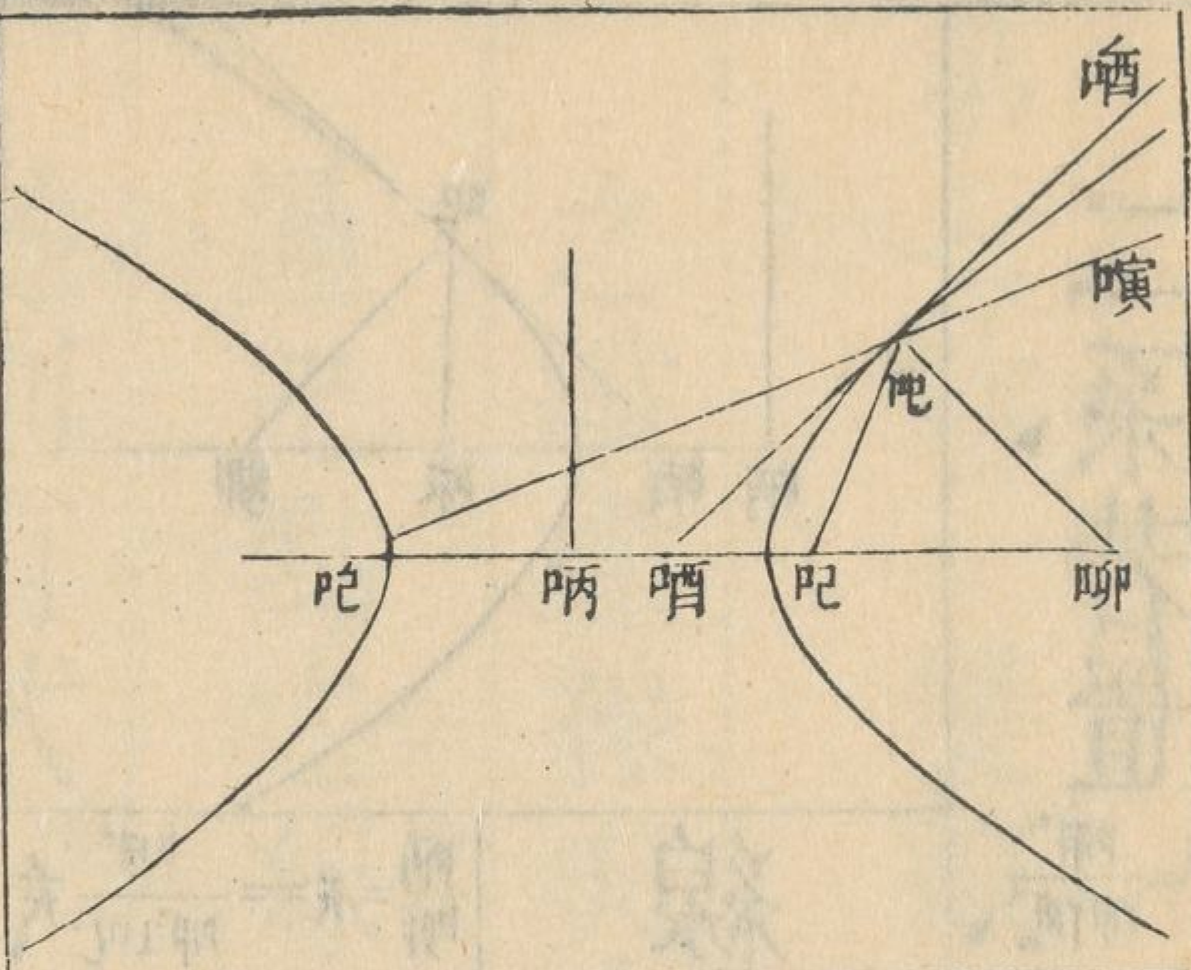
故

$\frac{\text{咆}}{\text{⿰口卯}} = 戊(呷丄戊天)$、

惟

$戊(呷丄戊天)$、

爲心距法

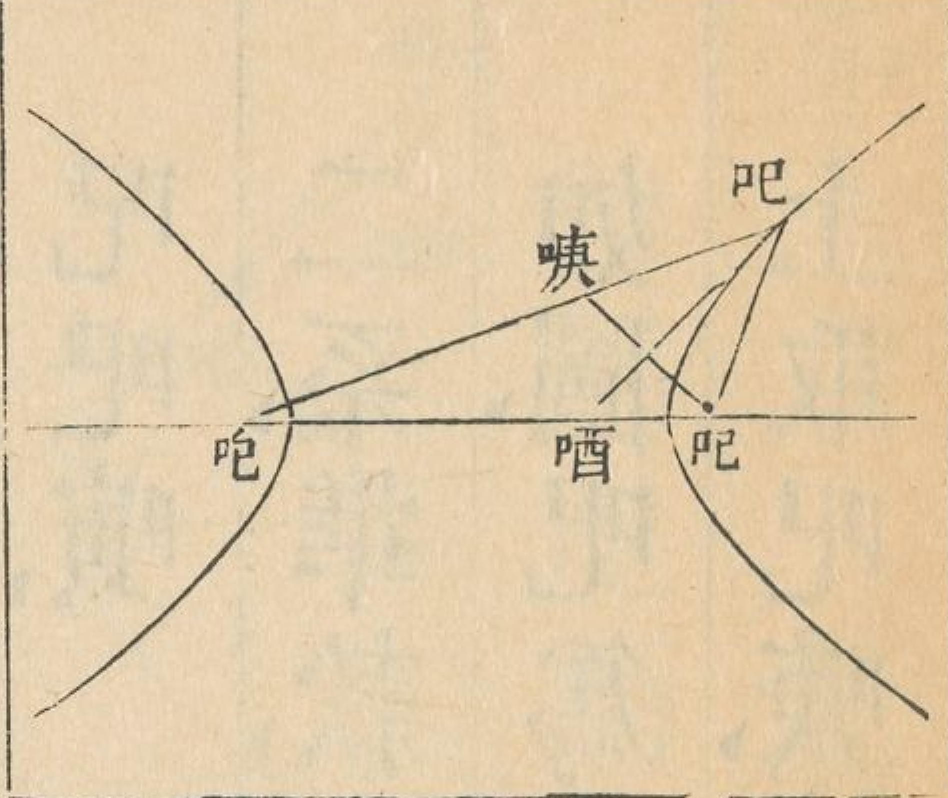


線交橫軸點、本卷七款一系故吧咿卽法線、正交切線哂哂、而吧吧咿嗔吧咿二角等、則吧吧哂嗔吧哂二角亦等、且卽與吃吧哂角等、故切線吧哂平分吧吧吃角、

一系、法線吧咿平分切點距二心線交角之外角吧吧嗔、

二系、準款、可任設一點、作雙線之切線、

如圖、吧爲任設之點、作二帶徑吧吧吧吃于吧吃上取吧咦、等于吧吧、作聯線吧咦、乃從吧點作吧

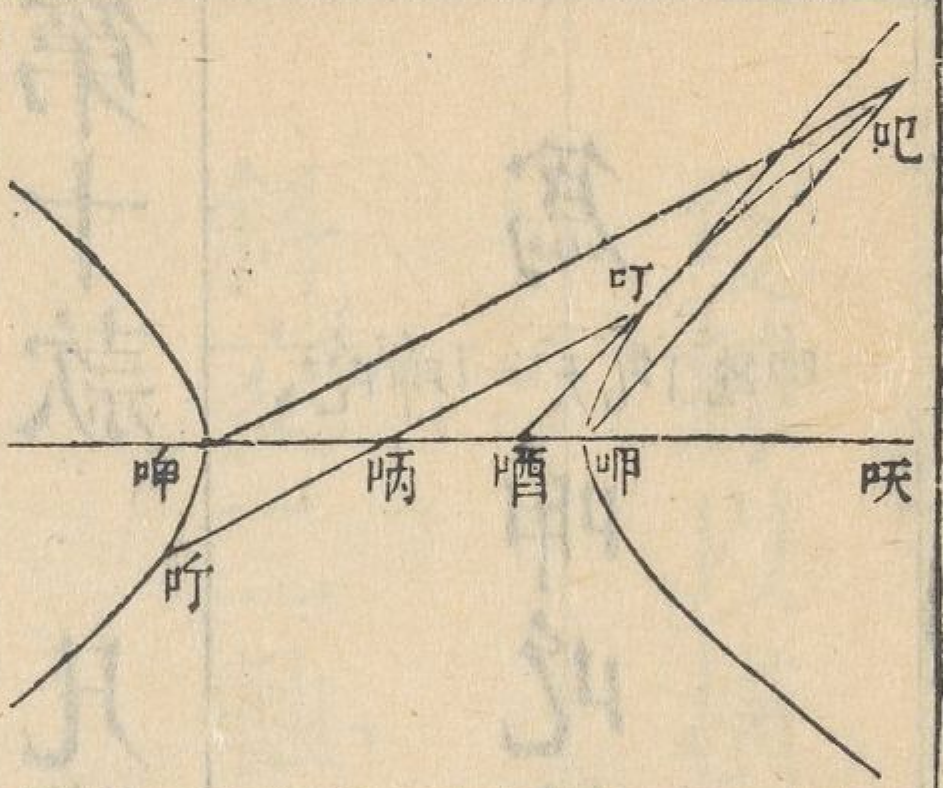


咦之垂線吧唒、卽切線、因吧唒平分吧吔角故也、

第九款、自橫徑一端作通弦、與切線平行、則餘通弦必與切點上之斜徑平行、反之亦然、

如圖、叮唒爲雙線之切線、通弦呷吧與之平行、則餘通弦呷吧必與切點上斜徑叮吋平行、命叮點之縱橫線爲天地、則呐叮線式爲地=彳天、三卷一款附條、卽彳一天地、

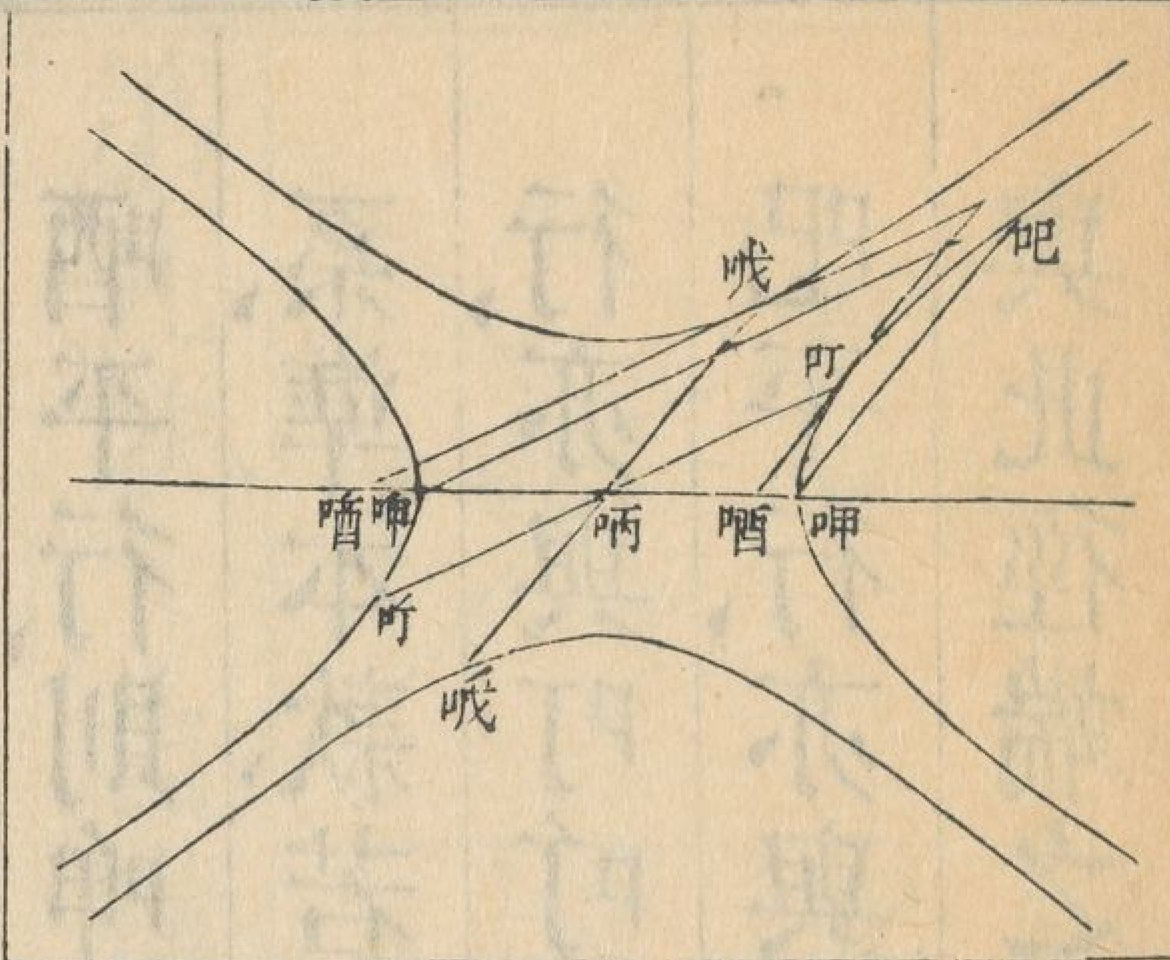
而切線交橫徑角之正切爲$甲=\frac{呷^{二}地}{吃^{二}天}$、二式左右各相乘得$甲呻=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、爲叮哂哂叮哂呋二角正切之矩形、惟吧呷呋吧呻呷二角正切之矩形、亦等于$\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、本卷五款故呷吧與叮哂平行、則呻吧必與哂叮平行也、



系準本款、若作相屬雙線之切線呲哂、與呻吧平行、亦與叮吋平行、則從呲點作呲哦斜徑、必與呷吧平行、亦與叮哂平行、故叮吋呲哦二斜徑、彼徑與此徑端之切線平行、此徑亦必與彼徑端之切

線平行、名曰相屬徑、

案、凡雙線二徑、若彼徑與此徑端切線平行、卽爲相屬徑、命二相屬徑交橫徑角之二正切爲甲申、則有式 $甲申=\frac{呷^2}{吃^2}$、



第十款 凡雙線以中點與相屬二徑爲準、則其式爲 $呻^2地^2丅吃^2天^2=丅呻^2吃^2$、呻吃爲相屬二半徑、

雙線以橫直二徑爲準、其式爲

呷地丅吃天＝呷吃、

正交二軸易爲斜交二軸、原點不易、得

天＝天角餘弦丄地角餘弦

地＝天角弦丄地角弦、

三卷十款以此二同數各自乘、用于上式中、則得如下式

(呷角弦丅吃角餘弦)地丄(二呷角弦角弦丅二吃角餘弦角餘弦)天地

丄(呷角弦丅吃角餘弦)天＝呷吃

(一)、爲斜交縱

橫二線與橫徑成角之雙線式、惟二新軸爲相屬徑、則有式 $呷帀=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、本卷九款案卽 $角切角切=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$ 故 $呷角切角切丅吃^{二}=○$ 以 $角餘弦角餘弦$ 乘之、得下式

$呷角弦角弦丅吃^{二}角餘弦角餘弦=○$、

凡 $角餘弦角切=角弦$ 故也、所以㊀式中函天地之項自消、得

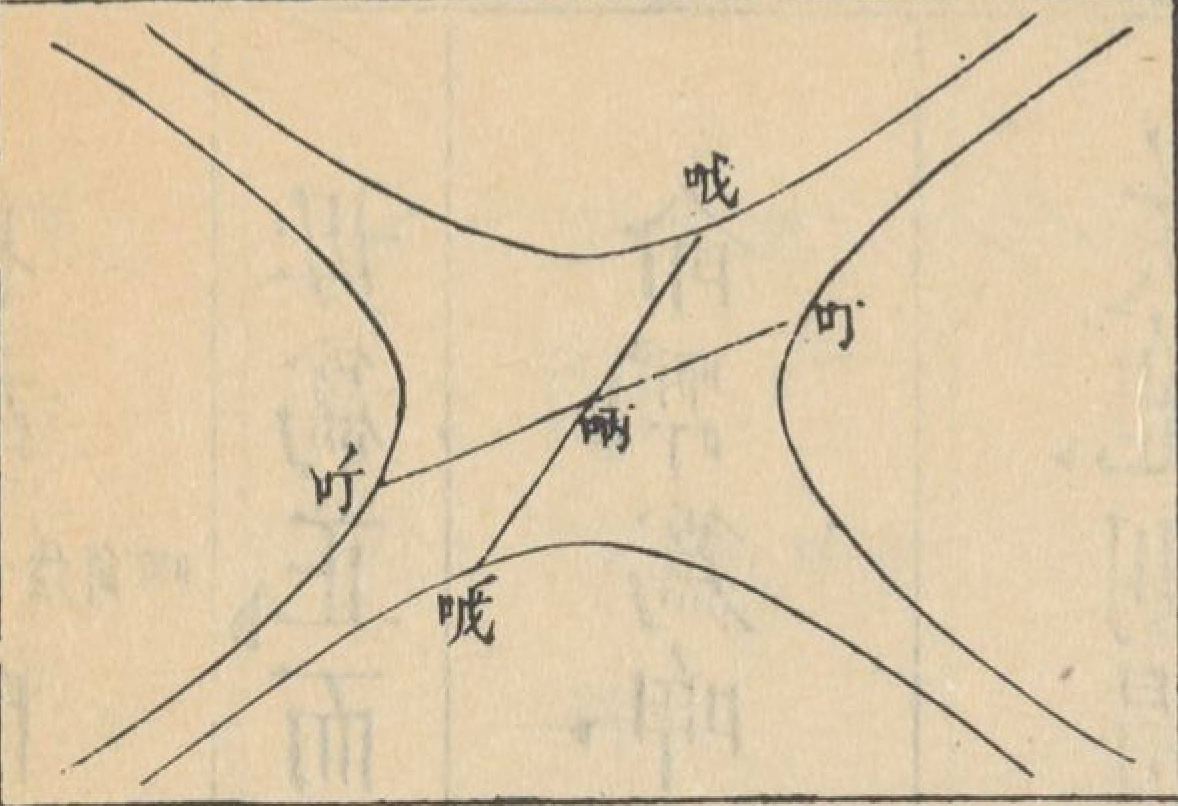
$(呷^{二}角弦^{二}丅吃^{二}角餘弦^{二})地^{二}丄(呷^{二}角弦^{二}丅吃^{二}角餘弦^{二})天^{二}=丅呷^{二}吃^{二}$

㊁、

此即以相屬二斜徑爲準之式、若令 $地=〇$、則得

$$天^2 = \frac{呷^2角弦^2 \ 丅 \ 吆^2角餘弦^2}{丅呷^2吆^2} = \frac{呐^2}{叮}$$

若



令 $天=〇$、則得

$$地^2 = \frac{呷^2角弦^2 \ 丅 \ 吆^2角餘弦^2}{丅呷^2吆^2} = \frac{呐^2}{哦}$$

設 $\frac{呐^2}{叮}$ 爲正、則 $\frac{呐^2}{哦}$ 必爲負、蓋 $\frac{呐^2}{叮}$ 之同數、其子爲負、則其母亦必爲負、方能得正

也、故 呷二角弦二<吔角餘弦二 即 角切二<呷二/吔二、惟 角切角切二=呷四/吔四、本卷九款系 故 角切二>呷二/吔二、即 呷二角弦二>吔角餘弦二 故 呞二/呡 同數之

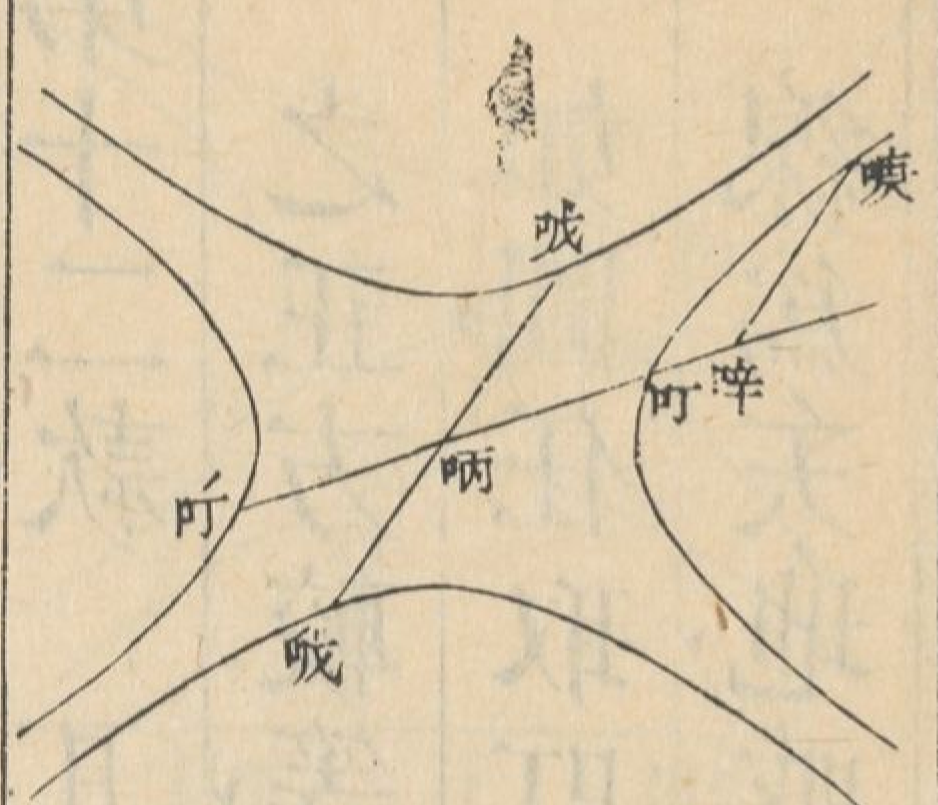
毋為正、而其子為負、則約得數必負、故 呞二/呡 為負、乃

命 呞二/叮 為呷、呷二/呡 為丅吔二、則㊁式變為 丅吔二/地二丄呷二/天二=一、故 呷二地二丅吔二天二=丅呷二吔二、以天地代

天′地′、則得 呷二地二丅吔二天二=丨呷二吔二、與款合、

第十一款　本徑與屬徑之二正方比、若縱線交橫

軸點距本徑二界二線之矩形與縱線之正方比、



以中心及相屬徑爲準、雙線式爲 呷⁼地⁼丅吔⁼天⁼＝丅呷⁼吔⁼、

本卷十款變作 呷⁼地⁼＝吔⁼(天⁼丅呷⁼) 即可化爲比例率如下

呷⁼：吔⁼∷天⁼丅呷⁼：地⁼ 即 (二呷)⁼：(二吔)⁼∷(天丄呷)(天丅呷)：地⁼ 二呷、二吔爲叮吋、哦哦二相屬徑、天爲哂啐、則

天丄呷爲吋啐、天丅呷爲叮啐、地爲嚊啐、故比例率爲 叮吋⁼：哦哦⁼∷叮啐×吋啐：嚊啐⁼、與

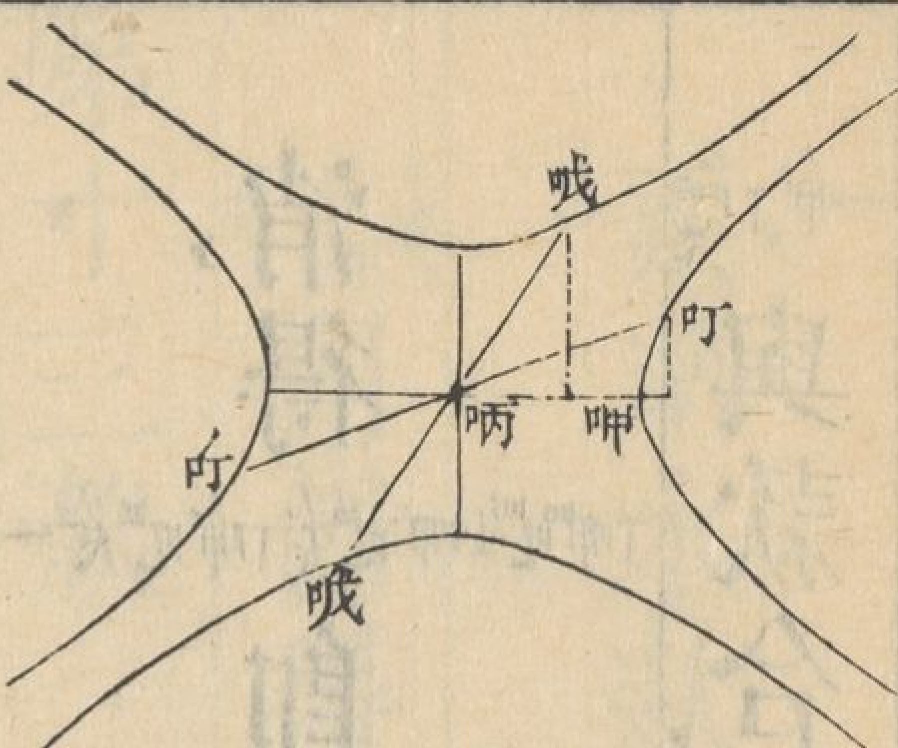
款合、

系凡同徑二縱線之正方比、若二縱線交橫軸點距本徑二界各二線之矩形比、

案凡徑之通徑、爲本徑與屬徑連比例之末率、橫徑之通徑、等于$\frac{\text{呷}}{二\text{吃}^{二}}$、本卷一款四系縱徑之通徑等于$\frac{\text{吃}}{二\text{呷}^{二}}$、

第十二款、　凡二相屬徑之正方較、恆與縱橫二徑之正方較等、

如圖、任取叮吋哎哦爲二相屬徑、命叮點之縱橫線爲天地、哎點之縱橫線爲天地、叮呐呷角爲角、



戊丙甲角為角、則 $\text{角切}=\frac{\text{天}}{\text{地}'}$，$\text{角切}'=\frac{\text{天}'}{\text{地}}$、故 $\text{角切}\,\text{角切}'=\frac{\text{天}\,\text{天}'}{\text{地}\,\text{地}'}$、即等于 $\frac{\text{呷}^2}{\text{吃}^2}$、

叮叮′戊戊′係相屬故也、本卷九款案以兩邊

數 $\frac{\text{天}\,\text{天}'}{\text{地}\,\text{地}'}$ 與 $\frac{\text{呷}^2}{\text{吃}^2}$、去其分各自乘得下式

$$\text{呷}^2\text{地}'^2\text{地}^2=\text{吃}^2\text{天}'^2\text{天}^2$$

㊀、叮點在曲線內、故有式

$$\text{呷}^2\text{地}'^2=\text{丅}\,\text{呷}^2\text{吃}^2\ \text{丄}\ \text{吃}^2\text{天}'^2$$

、本卷一款戊點在相屬曲線內、故有式

$呷^{二}地^{〃二}=丄呷^{二}叱^{二}丄叱^{二}天^{〃二}$、

本卷一款又案二式相乘得下式

$呷^{四}地^{〃二}地^{二}=丅呷^{四}叱^{四}丄呷^{二}叱^{四}天^{二}丅呷^{二}叱^{四}天^{〃二}丄叱^{四}天^{二}天^{〃二}$

㊁、以㊀㊁兩式相消、得

$丅呷^{四}叱^{四}丄呷^{二}叱^{四}天^{二}丅呷^{二}叱^{四}天^{〃二}=〇$

即

$呷^{二}=天^{二}丅天^{〃二}$

㊂、同例得

$叱^{二}=地^{〃二}丅地^{二}$

㊃、以㊃式減㊂式、得

$呷^{二}丅叱^{二}=天^{二}丄地^{二}丅天^{〃二}丅地^{〃二}$

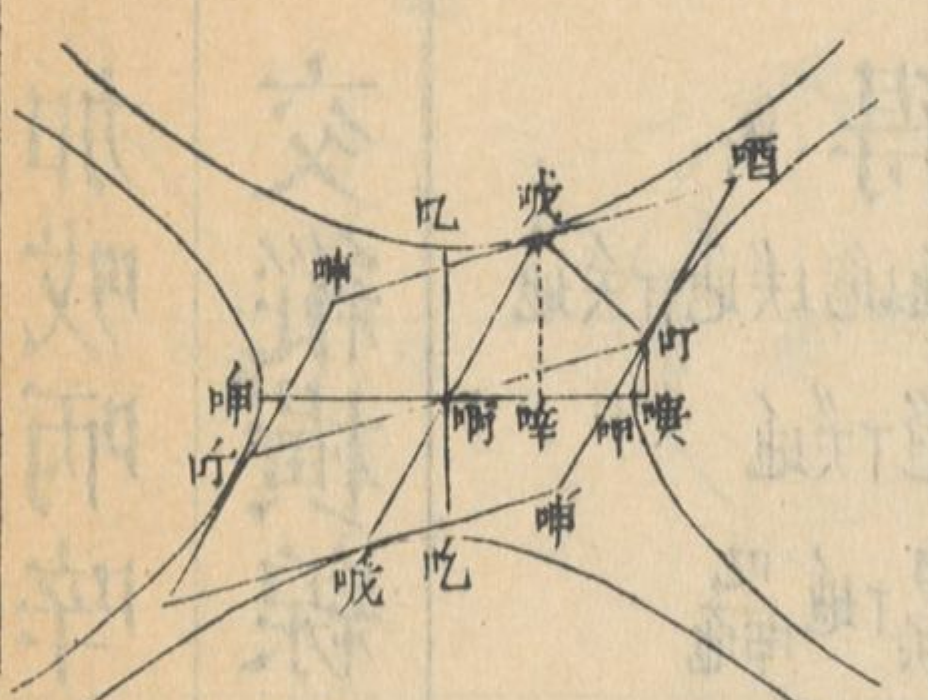
$=呷^{二}丅叱^{二}$、

與款合、

系、準本款(三)式天=呷丄矢、又準雙線式呷丄地〃=吃〃(呷丄矢〃)、本卷一款又案一故天=吃/呷地〃、即

天=吃/呷地〃、同例得地=呷/吃天〃、

第十三款　過相屬二徑界之四切線所成平行邊形、等于縱橫二徑之矩形、



如圖叮吋哦哦為相屬二徑之四界、過此四界作四切線成平行邊形、其面積必等于呷㖍乘吃㖿、則得哂叮哦三角形、等于叮哦啐唊四邊形、

加戊丙哼三角形少丙叮庚三角形、命叮點之正交縱橫線為天地、戊點之正交縱橫線為天′地′、則得

二丙叮戊＝(天丁天′)(地′丄地)丄天′地″丁天地

＝天′地′丁天′地

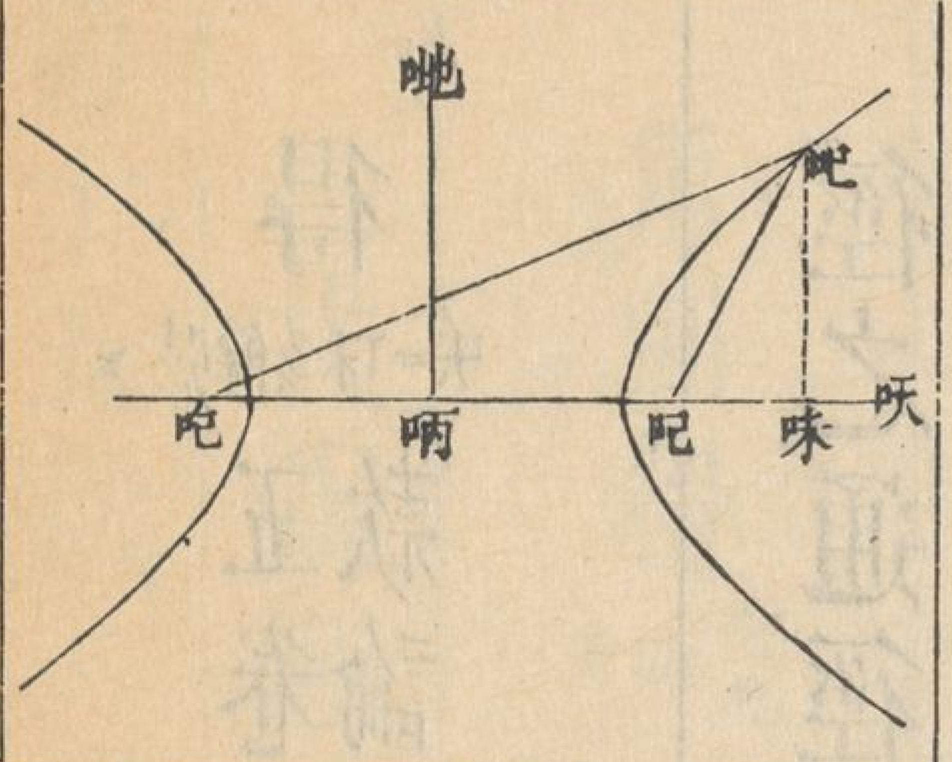
＝天′呷/吃天′丁地′吃/呷地′

＝呷吃/吃天′丁呷地′、

二本卷十二款系、亦等于呷吃/呷吃、本卷一款、即呷吃、故丙戊叮平行邊形等于呷吃、叮戊吋戊平行邊形等于酉旂吃、即吃/呷吃＝吃二乂呷二、與款合、

第十四款、以心爲極、雙線之極式爲 $未=\frac{一丄戊亥餘弦}{巳}$、巳爲半通徑、戊爲撱率、亥爲帶徑交橫徑角、

雙線內任何點距心點之式爲 $未=\frac{吧}{吧}=丅呷丄戊天$ $未=\frac{吧}{吧}=呷丄戊天$、本卷一款六系此式橫線天從中點起、今原點從中點呴移至心點吧、則當以 $天丄丙$ 代天、又以 $呷戊$ 代丙、本卷一款五系則得 $天=天丄呷戊$、設命吧吧呴角爲亥、則



得 天=丅未亥餘弦、五卷八款論 所以 天=丅未亥餘弦丄呷戊、故 吧/吧=未=丅呷丅戊未亥餘弦丄呷戊、移其項、得 未(一丄戊亥餘弦)=丅呷丄呷戊 =呷(戊二丅一)、若命橫

徑之通徑爲二巳等于 呷二/三吧二、本卷十三款案 則得下式 巳=呷(戊二丅一)、本卷一款

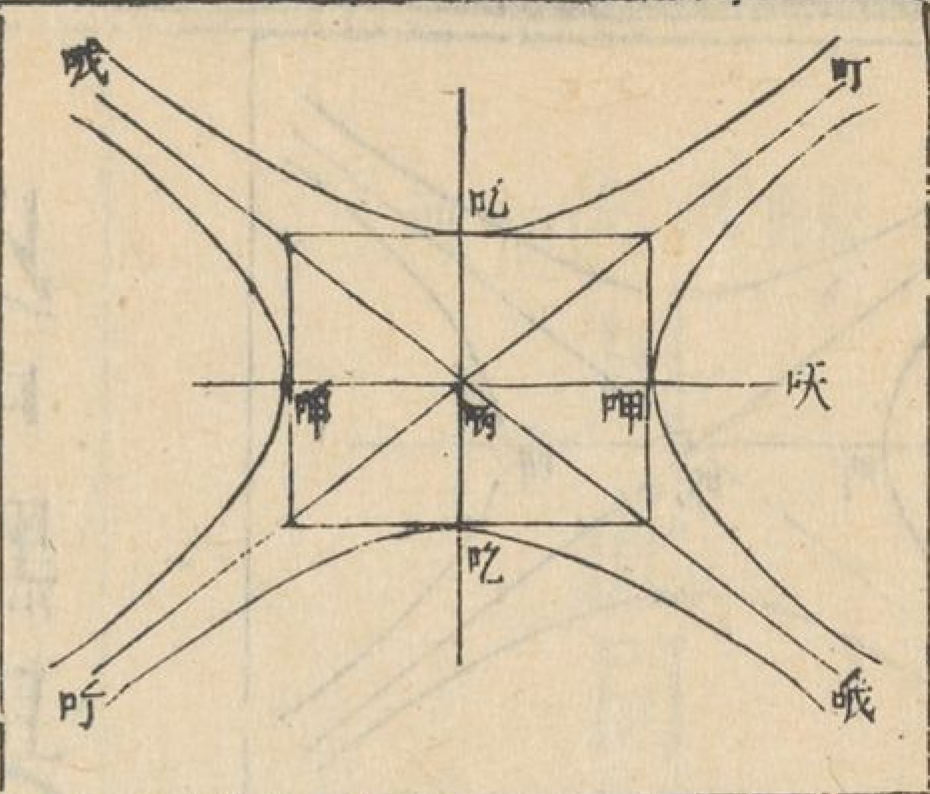
五系 所以得 未=(一丄戊亥餘弦)/巳、與款合、

論雙線之漸近線

過縱橫二徑界作四切線、成矩形、次作二對角線、引

長之至無窮、必與雙線漸相近、而永不相遇、名曰雙

線之漸近線、



如圖、呷呻叱吃為相屬四雙線之縱橫二徑、過呷叱呻吃四界點作四切線、次作叮吁哦哦二對角引長線、即雙線之漸近線、命叮呐吠角為角、哦呐吠角為角、則得

$$\text{角切}=\frac{\text{呷}}{\text{叱}}$$

$$\text{角切}=\text{丅}\frac{\text{呷}}{\text{叱}}、$$

惟

$$\text{角切}=\frac{\text{角餘弦}}{\text{角弦}}、$$

故

$$\frac{\text{角餘弦}^{2}}{\text{角弦}^{2}}=\frac{\text{呷}^{2}}{\text{叱}^{2}}、$$

即

$$\frac{\text{一}\,\text{丅}\,\text{角弦}^{2}}{\text{角弦}^{2}}=\frac{\text{呷}^{2}}{\text{叱}^{2}}、$$

所以

$$\text{角弦}^{2}=\frac{\text{呷}^{2}\perp\text{叱}^{2}}{\text{叱}^{2}}、$$

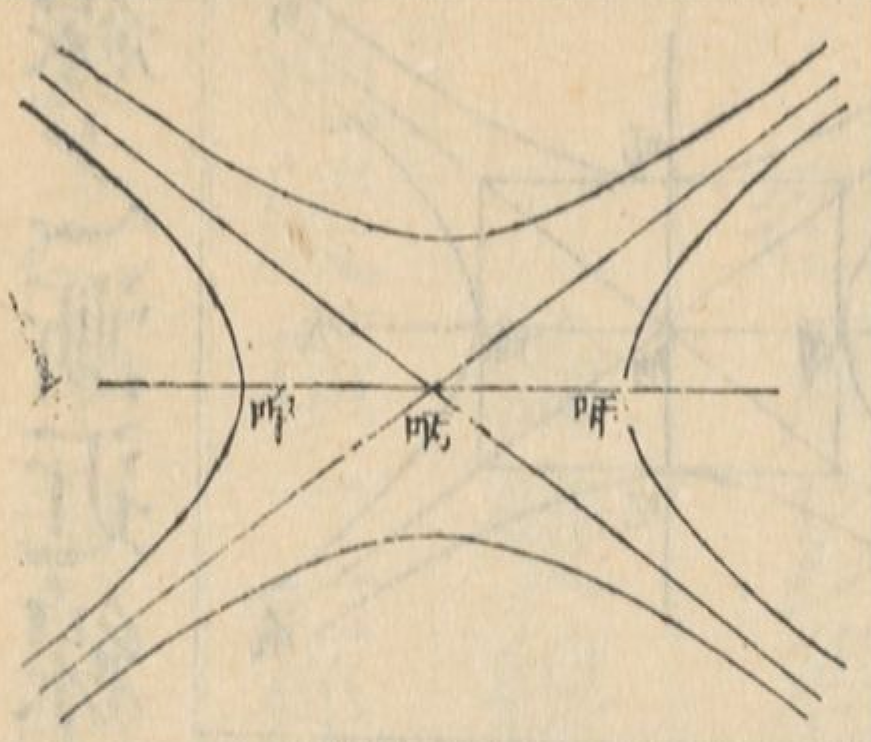
同例得

$$\text{角餘弦}^{2}=\frac{\text{呷}^{2}\perp\text{叱}^{2}}{\text{呷}^{2}}、$$

此二式為漸近線與橫徑交角之式、

第十五款　雙曲線以中點與漸近線為準、其式為

天地＝$\frac{四}{呷^{二}上吃^{二}}$、呷吃為縱橫二半徑、天地為曲線任一點之縱橫線、



以中點與縱橫二徑為準、其式為 $呷^{二}地^{二}丅吃^{二}天^{二}＝丅呷^{二}吃^{二}$（一）、本卷一款凡易正交縱橫線為斜交縱橫線、原點不變、則其式為

天＝天角餘弦上地角餘弦

地＝天角弦上地角弦、

三卷十款今 角＝丅角、故式變為

天＝（天上地）角餘弦

$地=(天丅地)角弦$

用此同數于㊀式中、則得

$呷^{二}(天丅地)角弦^{二}丅叱^{二}(天丄地)角餘弦^{二}=丅呷^{二}叱^{二}$

惟

$角弦^{二}=\frac{呷^{二}丄叱^{二}}{叱^{二}}$

$角餘弦^{二}=\frac{呷^{二}丄叱^{二}}{呷^{二}}$

本卷論

故式

又變爲

$\frac{呷^{二}丄叱^{二}}{呷^{二}叱^{二}}(天丅地)^{二}丅\frac{呷^{二}丄叱^{二}}{呷^{二}叱^{二}}(天丄地)^{二}=丅呷^{二}叱^{二}$、

卽

$\frac{呷^{二}丄叱^{二}}{四呷^{二}叱^{二}}天地=呷^{二}叱^{二}$、

卽

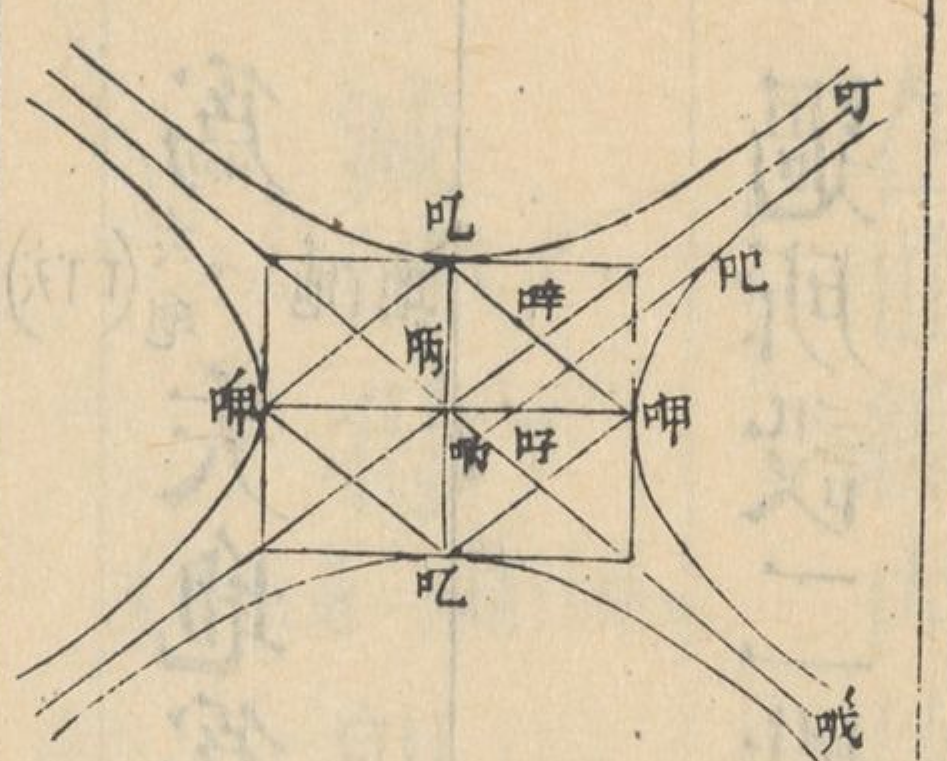
$天地=\frac{四}{呷^{二}丄叱^{二}}$、

與款合、

系雙曲線愈長愈近于漸近線、而永不相遇、本款之式爲 $天地=\frac{呷^{二}丨吆^{二}}{四}$、以 $嗔^{二}$ 代右邊數、得 $天地=嗔^{二}$、即 $地=\frac{嗔^{二}}{天}$、$嗔^{二}$ 既爲常數、則地變天必反變、天不至無窮大、地不能至〇、所以漸近線自中點引長之、任至若干遠、與曲線漸相近而永不相遇、故漸近線爲曲線無窮界之切線、

第十六款　任自雙線一點作二線、與二漸近線平行、亦以二漸近線爲界、成平行四邊形、其面積爲

縱橫二徑之矩形八分之一、



二漸近線之交角叮哂哦命為亢、命吧點之縱橫線為天地、準前款式本卷十五款得$天地亢弦=\frac{四}{呷^{二}丄叱^{二}}亢弦$、此式之左邊、即吧哂平行邊形、別得$\begin{matrix}呷\\叱\end{matrix}=\sqrt{呷^{二}丄叱^{二}}$故呷啐即呼哂等于$\frac{二}{\sqrt{呷^{二}丄叱^{二}}}$又呷呼即啐哂亦等于$\frac{二}{\sqrt{呷^{二}丄叱^{二}}}$所以得$\begin{matrix}哂\\啐\end{matrix}\times\begin{matrix}哂\\呼\end{matrix}=\frac{四}{呷^{二}丄叮^{二}}$、惟哂啐呷呼平行四邊形等于

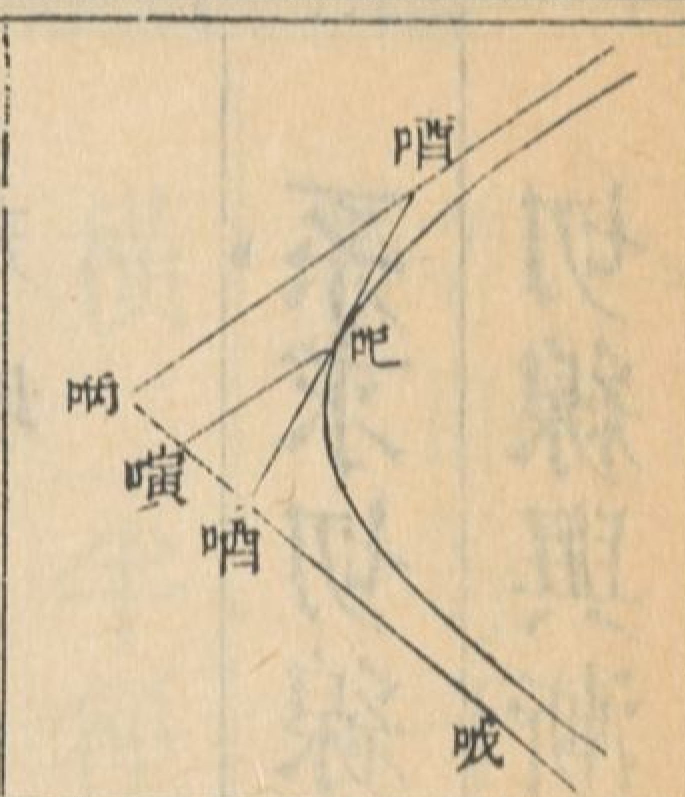
$\frac{呐}{哱}$乂$\frac{呐}{呼}$六弦、即等于$\frac{四}{呻二工吃}$二六弦故吧哂平行邊形等于哱呼形、爲縱橫二半徑矩形之半、即二徑矩形八分之一、

第十七款　以中點及漸近線爲準、雙線之切線式爲地丅地＝丅$\frac{夫}{地}$(丅丅天)夫地爲切點之縱橫線、

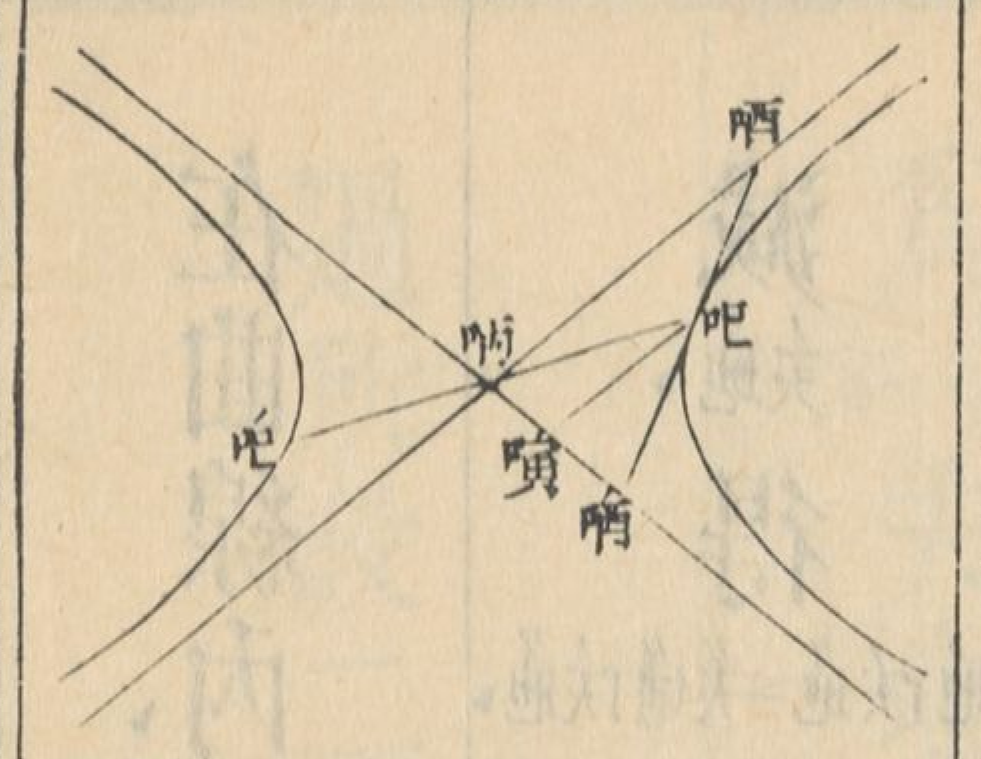
過所設二點之直線式爲地丅地＝$\frac{夫丅夫}{地丅地}$(大丅天)㊀、三卷四款所設二點俱

在曲線內、故得 $天'地'=寅^{二}$ $天''地''=寅^{二}$、本卷十五款系則 $天'地'=天''地''$、此式之兩邊各減 $天''地'$、得 $天'地'丅天''地'=天''地''丅天''地'$、即 $天''(地'丅地'')=丅地'(天'丅天'')$、即 $\frac{天'丅天''}{地'丅地''}=丅\frac{天''}{地'}$、用此同數于㈠式中、得 $地丅地'=丅\frac{天''}{地'}(天丅天')$ 設 $天''=天'$ $地''=地'$、則過二點之線變為切線、而得 $地丅地'=丅\frac{天'}{地'}(天丅天')$ 與款合

系、求切線交橫軸之點、令切線式中 $地=〇$、則得 $天=二天'$、故切線與漸近線兩戍交點之橫線兩酉、倍切點之



橫線呬嗔、則呬嗔等于嗔哂、而哂呬哂吧嗔哂二三角形相似、所以切線哂哂平分于切點吧、故任作雙線之切線、以二漸近線爲界、必平分于切點、



第十八款

任作雙線之切線、以二漸近線爲界、必與切點上徑之相屬徑等、

如圖、哂哂爲曲線吧點之切線、于吧點作吧吧徑、與漸近線平行、作吧嗔線、成吧嗔呬吧嗔哂二三角形、命二漸近線

之交角爲亢準三角例有式

$\text{吧嚬呩餘弦}=\frac{\text{二呩嚬}\times\text{嚬吧}}{\text{呩嚬}^{二}\text{丄嚬吧}^{二}\text{丅呩吧}^{二}}$

卽

$\text{丅亢餘弦}=\frac{\text{二天地}}{\text{天}^{二}\text{丄地}^{二}\text{丅呩吧}^{二}}$

又

$\text{吧嚬哂餘弦}=\frac{\text{二吧嚬}\times\text{嚬哂}}{\text{吧嚬}^{二}\text{丄嚬哂}^{二}\text{丅吧哂}^{二}}$

卽

$\text{亢餘弦}=\frac{\text{二天地}}{\text{天}^{二}\text{丄地}^{二}\text{丅吧哂}^{二}}$

故得

$\text{呩吧}^{二}=\text{天}^{二}\text{丄地}^{二}\text{丄二天地亢餘弦}$

$\text{吧哂}^{二}=\text{天}^{二}\text{丄地}^{二}\text{丅二天地亢餘弦}$

所以

$\text{呩吧}^{二}\text{丅吧哂}^{二}=\text{四天地亢餘弦}$

惟

$\text{亢}=\text{二角}$

故

$\text{亢餘弦}=\text{角餘弦}^{二}\text{丅角弦}^{二}$

卽

$\text{亢餘弦}=\frac{\text{呷}^{二}\text{丄吃}^{二}}{\text{呷}^{二}\text{丅吃}^{二}}$

本卷漸近線論又準前款式

$\text{天地}=\frac{\text{四}}{\text{呷}^{二}\text{丄吃}^{二}}$

本卷十五款

卽

$\text{四天地}=\text{呷}^{二}\text{丄吃}^{二}$

所以

$\text{四天地亢餘弦}=\text{呷}^{二}\text{丅吃}^{二}$

卽

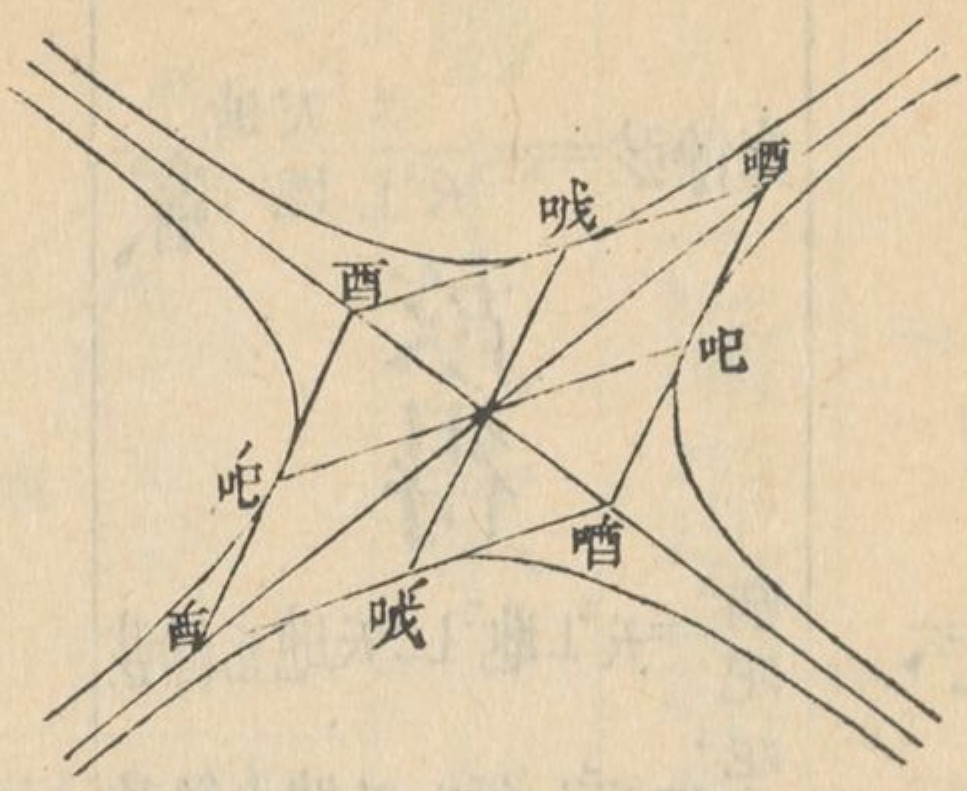
$\text{呩吧}^{二}\text{丅吧哂}^{二}=\text{呷}^{二}\text{丅吃}^{二}=\text{呷}^{二}\text{丅吃}^{二}$

本卷十二款

惟

$\text{呩吧}=\text{呷}$

是以$\frac{𠮙}{吧哂}$即知切線哂哂′與吧吧′徑之屬徑等、系準本款理、于對面曲線吧′點之切線酉酉′亦合、



故作哂酉哂′酉′二聯線、成哂酉酉′哂′平行四邊形、其邊兩兩相等、而與吧吧′即二呻、吠吠′即二吃、二線平行、則漸近線爲相屬徑界點四切線所成平行邊形之對角線、

代微積拾級卷八

米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯
海甯李善蘭筆述

代數幾何八

諸曲線依代數式分類

前諸卷所論平圜橢圜拋物雙曲諸線之式、皆二次式也、凡二次式之線俱歸入此四種、

凡二變數二次之公式、中函二變數之一方二方、與其相乘數、及太數如左、

呷地^{二}丄吼天地丄呐天^{二}丄叮地丄哦天丄吧＝○

㈠、

第一款　二次公式中二變數之相乘數、可易正交二軸之方向而消去之、

依款推之、公式中當用下二同數代天地

天＝夭角餘弦丅地角弦
地＝夭角弦丄地角餘弦

㈡、

此易正交二軸之方向、而原點不動、三卷九款代得式

$(呷角餘弦^{二}丅𠮙角弦角餘弦丄𠰌角弦^{二})地^{二}丄(呷角弦角餘弦丄𠮙角餘弦^{二}丅𠮙角弦^{二}丅𠰌角弦角餘弦)天地丄$

$(呷角弦^{二}丄𠮙角弦角餘弦丄𠰌角餘弦^{二})天^{二}丄(叮角餘弦丅𠯈角弦)地丄(叮角弦丅𠯈角餘弦)天丄吃＝○$、

㊙甲、角之同數無一定、則可置角之同數、令㊙甲

式中之第二項消盡、而得

〇＝弦餘角𠰳二丅弦角丅吃弦餘角丄吃弦餘角弦角呷二

即

〇＝(弦角丅弦餘角)吃丄弦餘角弦角二(𠰳丅呷)、

惟

弦(二角)＝弦餘角弦角二

弦餘(二角)＝弦角丅弦餘角、

故

〇＝弦餘(二角)吃丄弦(二角)(𠰳丅呷)、

以

弦餘(二角)約之得

$\frac{呷丅𠰳}{吃}$、丅二＝切(二角)

所以若令㈡式中角之倍度正切等

于$\frac{呷丅𠰳}{吃}$丅二、則㊀式中

天地

之項消去而得式

〇＝吧丄天丅呷地丅洓丄天二丄地二寅

㊂、

第二款　二次公式中、二變數之一方二項、可易二軸之原點、而消去之、

依款推之、前款㊂式中當用下二同數代天地、

天丄甲＝天

地丄乙＝地、

此易原點、而新二軸與舊二軸平行、三卷八款代後

得左式、

$\text{嗊地}^{二}\text{丄咖天}^{二}\text{丄(二嗊乙丄味)地丄(二咖甲丄呻)天丄嗊乙}^{二}\text{丄咖甲}^{二}\text{丄味乙丄呻甲丄吧}=\text{○}$、

欲天地二項消去、必令

$\text{二嗊乙丄味}=\text{○}$

$\text{二咖甲丄呻}=\text{○}$、

即

$\text{乙}=\text{丅}\frac{\text{二嗊}}{\text{味}}$

$\text{甲}=\text{丅}\frac{\text{二咖}}{\text{呻}}$、

用此同數

代上式甲乙二元、又用吧代 丅⿰口寅乙^{二}丅⿰口卯甲^{二}丅味乙丅呻甲丅吧、則㊂式變爲 ⿰口寅地^{二}丄⿰口卯天^{二}＝吧、此

式一方二項消去、

㊂式中若無天^{二}或地^{二}之項、則得式稍異、如無天^{二}項

則 ⿰口卯＝○ 而甲之同數必爲$\frac{○}{呻}$即無窮、然欲太項消去、

必令 ⿰口寅乙^{二}丄味乙丄呻甲丄吧＝○ 即 甲＝丁$\frac{呻}{⿰口寅乙^{二}丄味乙丄吧}$、用此與 乙＝丁$\frac{二⿰口寅}{味}$ 之二同數、則得 ⿰口寅地^{二}丄呻天＝○、又以咋

代$丁\frac{嗔}{呻}$、則$地^{二}=吘天$、故二變數二次公式、可變爲$嗔地丄唡天=吧$㊃、或爲$地^{二}=吘天$㊄、

㊃式或表平圜、或表橢圜、或表雙線、

一、設嗔唡吧皆爲正、而令$呷^{二}=\frac{唡}{吧}$、$吃^{二}=\frac{嗔}{吧}$、用此二同數于㊃式中、則得$\frac{吃^{二}}{吧地^{二}}丄\frac{呷^{二}}{吧天^{二}}=吧$、即$呷^{二}地^{二}丄吃^{二}天^{二}=呷^{二}吃^{二}$、此爲橢圜式、六卷一款若$嗔=唡$、則$呷^{二}=吃^{二}$、而爲平圜式、

二、設唡吧皆爲負、而令$呷^{二}=\frac{唡}{吧}$、$吃^{二}=\frac{嗔}{吧}$、用此同數于負㊃式

$嗔地^{二}丅𠰭天^{二}〓丅吧$、中、則得$\frac{𠮙^{二}}{吧地^{二}}丅\frac{呷^{二}}{吧天^{二}}〓丅吧$、卽$呷^{二}地^{二}丅𠮙^{二}天^{二}〓丅呷^{二}𠮙^{二}$　此爲雙線式、七卷一款

三、設𠰭爲負、而令$呷^{二}〓\frac{𠰭}{吧}$　$𠮙^{二}〓\frac{嗔}{吧}$、用此同數于較數四式$嗔地^{二}丅𠰭天^{二}〓吧$中、則得$\frac{𠮙^{二}}{吧地^{二}}丅\frac{呷^{二}}{吧天^{二}}〓吧$、卽$呷^{二}地^{二}丅𠮙^{二}天^{二}〓呷^{二}𠮙^{二}$、此爲相屬雙線式、七卷一款又案

五式表拋物線、蓋令$咋〓二巳$　則得$地^{二}〓二巳天$　也、五卷一款

所以平圜橢圜拋物雙線而外、更無二次式之曲線、

若縱橫線之原點、在橫徑之界、則橢圜線之式為$地^{二}=\frac{呷^{二}}{呞^{二}}(二甲天丅天^{二})$、六卷二款拋物線之式為$地^{二}=二巳天$、五卷一款雙線之式為$地^{二}=\frac{呷^{二}}{呞^{二}}(二甲天丄天^{二})$、七卷二款平圜之式為$地^{二}=二味天丅天^{二}$、四卷二款此諸式俱可變為$地^{二}=寅天丄卯天^{二}$、在橢圜式為$寅=\frac{二呷^{二}}{呞}$ $卯=丅\frac{呷^{二}}{呞^{二}}$在拋物線式為$寅=二巳$ $卯=〇$在雙線式為$寅=\frac{二呷^{二}}{呞}$ $卯=\frac{呷^{二}}{呞^{二}}$在平圜式為$寅=二味$ $卯=丅一$也、各式皆以寅為曲線之通徑、以卯為二半徑連比例末率之平方、卯在平圜橢圜為負、在雙線為正、在拋物線為〇、

凡線、準其式之次數、分爲諸類、

一次式

呷地丄吃天丄呥＝○、

此式惟有直線爲一類、

二次式

呷地^{二}丄吃天地丄呥天^{二}丄叮地丄戊天丄己＝○、

此式有平圜線、橢圜線、拋物線、雙曲線、

凡四線、共爲一類、

三次式

呷地³丄吃地²天丄呥地天²丄叮天³丄哦地²丄吧地天丄庚天²丄哞地丄呼天丄丑＝○、

奈端云、凡三次式之線、有四類、合爲一

類、其式如下、一

天地^{2}丄㖂地＝呷天^{3}丄𠮙天^{2}丄㖪天丄叮、

二

天地＝呷天^{3}丄𠮙天^{2}丄㖪天丄叮、

三

地^{2}＝呷天^{3}丄𠮙天^{2}丄㖪天丄叮、

四

地＝呷天^{3}丄𠮙天^{2}丄㖪天丄叮、

此四式中呷𠮙㖪叮㖂諸數、若非令式降次、則或正、或負、或變、俱可、第一類、初有六十五種曲線、後施德靈加四種、狄誇又加四種、共有曲線七十三種、第二類、只有一曲線、奈端名曰三齒線、第三類有五種曲線、每種內有二線爲抛物支、其中有一乃半立

方抛物線、第四類、只有一曲線、乃立方抛物線也、四類共八十種、皆三次式線也、

四次式

卯地四丄吃地三天丄㖪地二天二丄叮地天三丄吙天四
丄吒地三丄嗔地二天丄哼地天二丄吁天三
丄咄地二丄嗊地天丄咧天二
丄吧地丄咋天
丄味

〇

歐樓分四次式曲線為一百四十六類、共五千餘種、

五次以上、曲線之種類愈多、未能悉攷也、

凡若干種曲線、共用一未定之公式、則歸一宗、如橫線與縱線之無論何乘方、有比例、其曲線卽歸拋物線宗、故拋物線之種數無窮、其內有平方拋物線、卽常用之拋物線、其式爲$天=甲地^{二}$、有立方拋物線、其式爲$天=甲地^{三}$、有三乘方拋物線、其式爲$天=甲地^{四}$、四乘以上、可類推、又有半立方拋物線、其式則爲$天^{二}=甲地^{三}$、又有半三乘方拋物線、其式則爲$天^{三}=甲地^{四}$、餘可類推、其公式爲$天=甲地^{卯}$是也、

代微積拾級卷九

米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯
　　　　　　　　海寧李善蘭筆述

代數幾何九

論越曲線（越者超越尋常也）

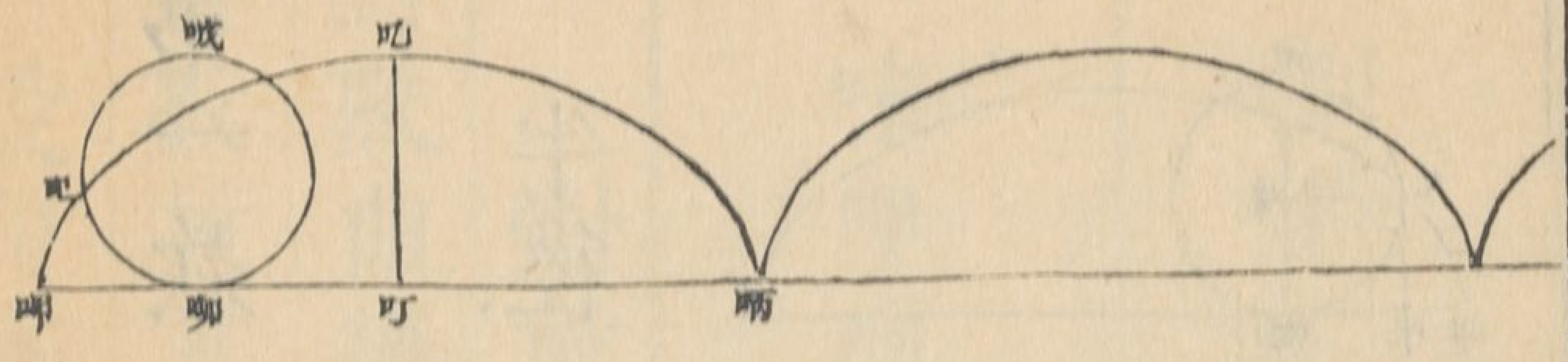
凡曲線分爲二大類、一爲代數曲線、一爲越曲線、曲線之縱橫線相聯屬之理、可以代數顯之、則爲代數曲線、若代數不能顯、必兼用越數顯之、則爲越曲線、

越曲線中、擺線、及對數曲線、爲最要之線、對數曲線能顯風氣輕重之理、擺線能顯鐘擺、及重物向地心之理也、

又有螺線、其中大有精理、

擺線

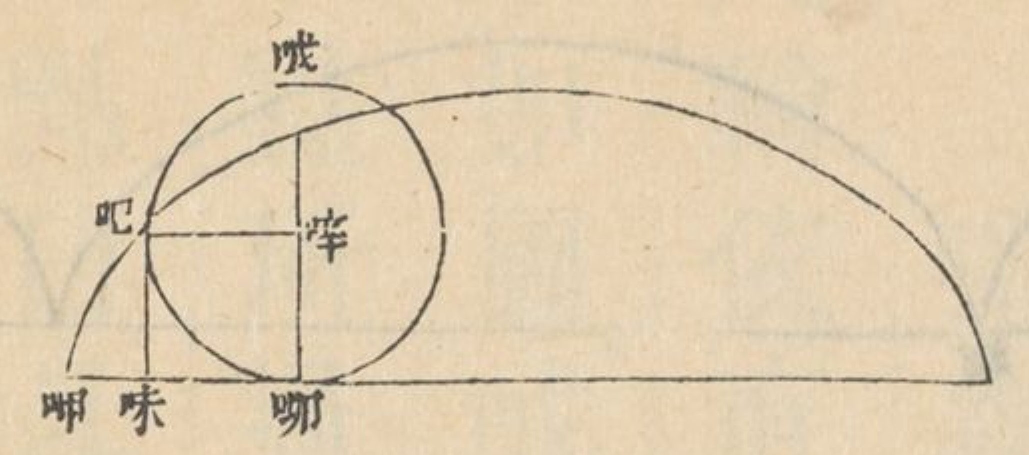
凡輪依直線輾于平面其周一點所過之道、成擺線、如圖、戊巳卯輪輾于甲丙直線、巳爲輪周一點、此點所過之道甲乙丙、卽擺線、戊巳卯名曰母輪、巳點曰母點、



𠯆點行至𠰳、已成呷𠮙𠰳擺線、再輾、又成第二擺線、與第一同、如此成第三第四以至無窮皆然、故輪每一周、即成一擺線、俱相等、但攷呷𠮙𠰳一線、餘可盡知也、

輪輾一周、則周之各點、俱有一時切呷𠰳直線、而母點必于輾初切呷點、輾末切𠰳點、故呷𠰳必等于輪周、呷𠰳名擺線底、𠮙叮為底中點之垂線、名擺線軸、與輪之全徑等、

第一款　擺線之式為天＝弧丅√(二未地丅地²)地為弧之正矢、未為母輪半徑、



如圖、呷為縱橫線之原點、吧為母點、呷吧為母點所已過擺線一段、啣為母輪切底之點、呷啣直線必等于吧啣弧線自啣點作啣戊徑、必為底之垂線、又作吧啐、正交戊啣、則吧味必等于吧啣弧之正矢啐啣、

別得

$吷咖=二未$

$呷味=天$

$吧味=哔咖丄地$、

準幾何例、得

$味咖=吧哔$

$=\sqrt{哔咖\times哔吷}$

$=\sqrt{地(二未丅地)}$、

$=\sqrt{二未地丅地^{二}}$、

又

$呷味=呷咖丅味咖$

$=吧咖弧丅吧哔$

用呷

：

味呷咖味咖三線之同數代之得

$天=弧丅\sqrt{二未地丅地^{二}}$

與款合、

對數曲線

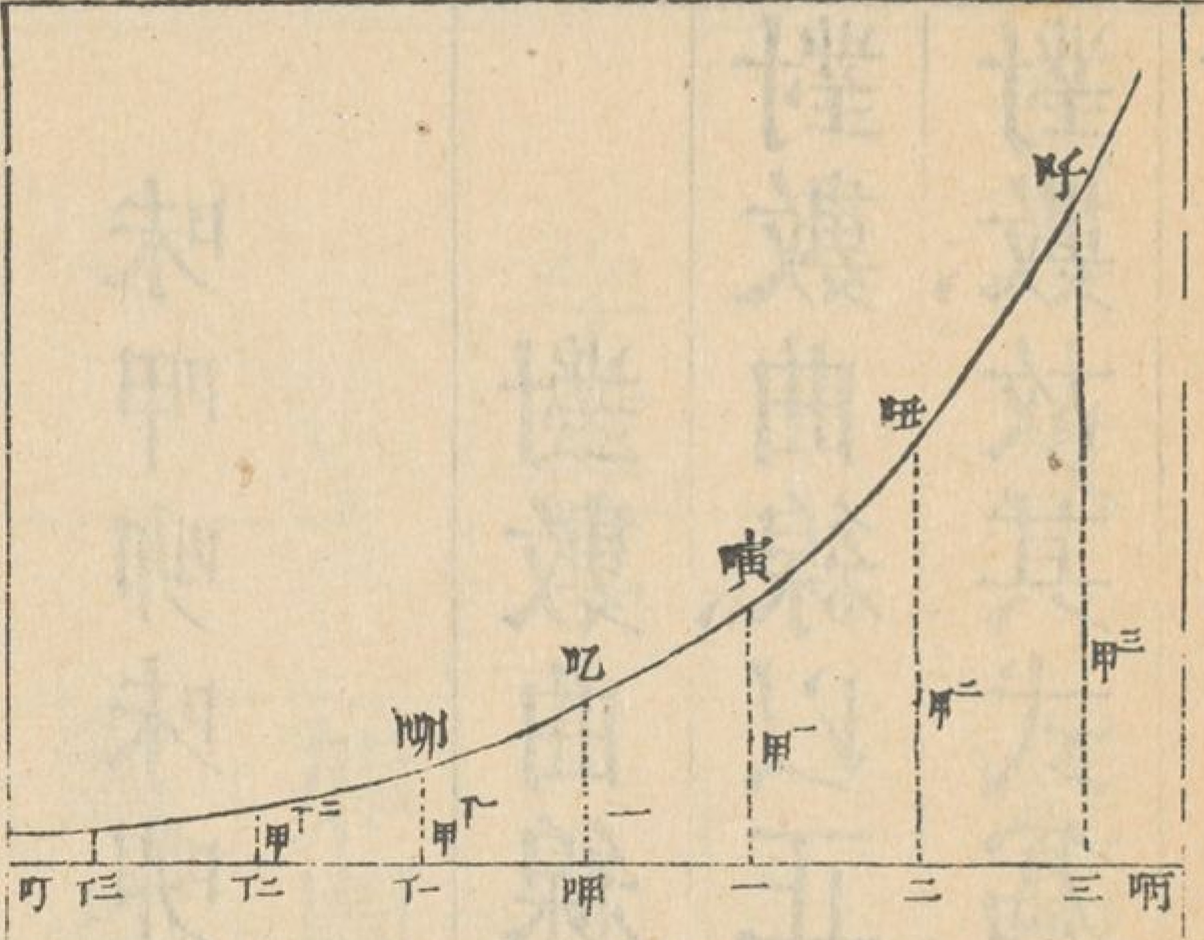
對數曲線、以正交二軸推之、則橫線恆等于縱線之對數、故其式為

$天=對地$

設甲為對數之底、則得

$甲^{天}=地$

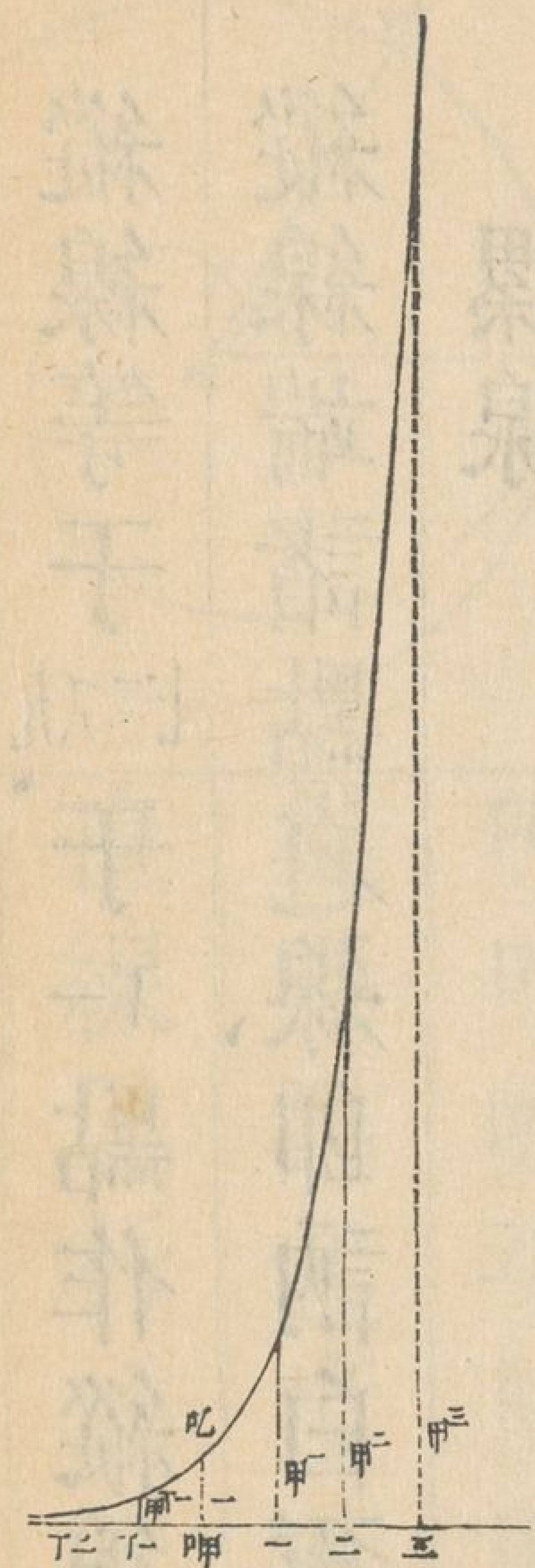
準此式、可取諸點而作對數曲線、



如圖、呷吃正交呐叮、呷吃爲一分、呷呐呷叮爲諸分、皆等于呷吃、取甲^{一}線等于一六、取甲^{二}甲^{三}諸縱線、令與甲之諸方數合、又取甲^{丅一}甲^{丅二}甲^{丅三}諸縱線、與甲之諸負方數合、則呷點右呷一呷二呷三諸橫線、必爲甲^{一}甲^{二}甲^{三}諸縱線之對數、呷點左呷丅一呷丅二呷丅三諸負橫線、必爲甲^{丅一}甲^{丅二}甲^{丅三}諸縱線之負對數、則過縱線端呼哑嗔吻諸點者、卽對數曲線、

對數曲線于呷叱之左邊、引長之至無窮、永不遇橫軸、若天爲一定之幾何、則縱線漸小、而不至于〇、若天爲無限、則縱線至無窮小、橫線無窮大而負、故〇之對數爲ㄒ∞、

無論何對數、其曲線之作法同、



如訥白爾之對數、爲

$甲^{一}$=二.七一八

$甲^{二}$=七.三八九

$甲^{三}$=二〇.〇八五

$甲^{ㄒ一}$=〇.三六八

$甲^{ㄒ二}$=〇.一三五

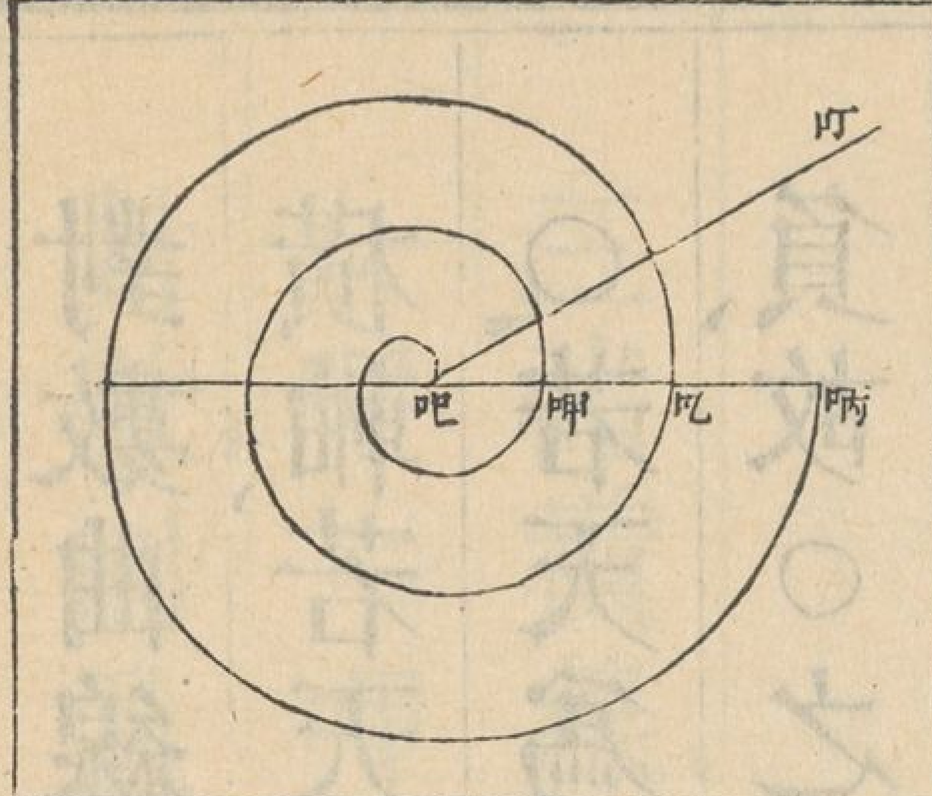
如前取

呷叱縱線及分橫線

諸分俱等一、乃于一點作縱線等于二七一八、于二點作縱線等于七三八九、于丅一點作縱線等于〇三六八、餘仿此、則過縱線端諸點之線、即訥白爾對數曲線、

螺線

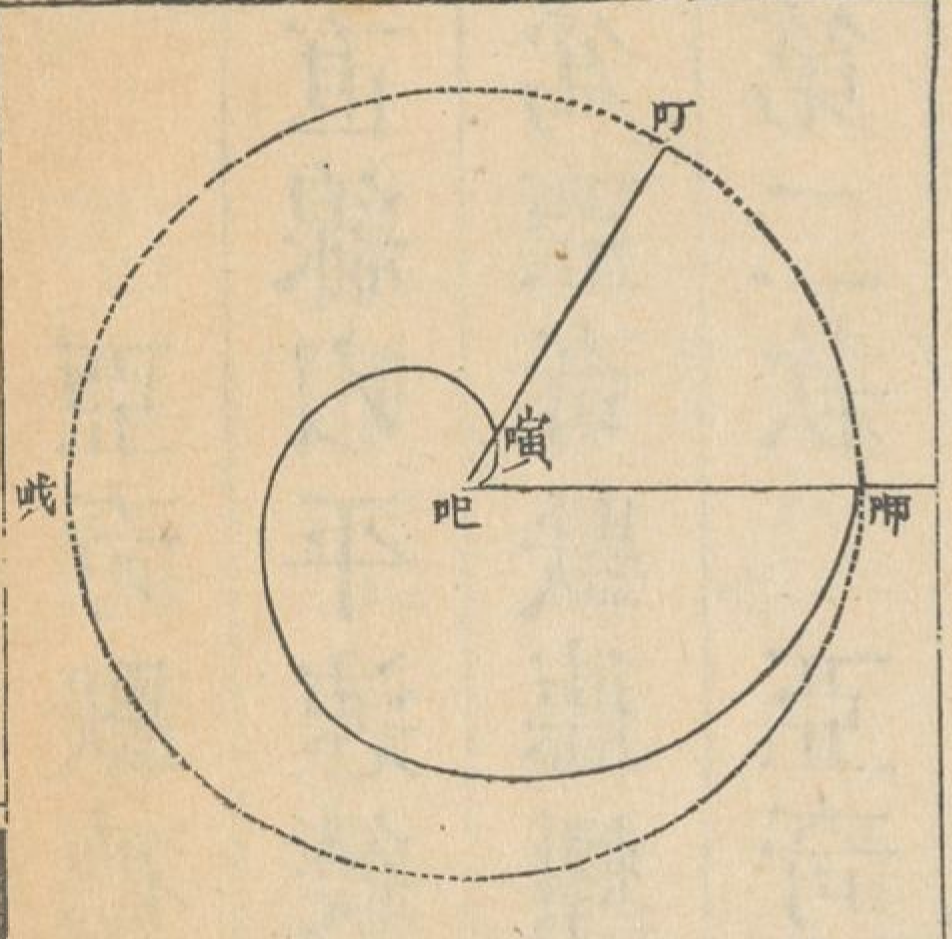
凡點以定法行于直線、而直線以平速繞一端旋轉、



則點所過之道、成螺線、如圖、吧叮為直線、繞吧點以平速轉、而吧點以定法向叮行、徑過呷吃哂諸點、成曲線、即螺線也、

中點吧爲極、直線吧叮繞極一周、所成曲線名一匝螺線、繞極二周所成名二匝螺線、若繞極不止、則母點必行成無數匝螺線、凡直線過螺線極、其交曲線必有無窮點、

欲知直線繞極度法、以吧爲心、以吧呷爲半徑、作呷叮哦平圜、則直線繞極任至何處、從呷點起度其弧、卽知若干度也、如直線己行成吧嗔一段曲線、欲知其繞極度、則度呷叮弧、卽得、



亞奇默德螺線

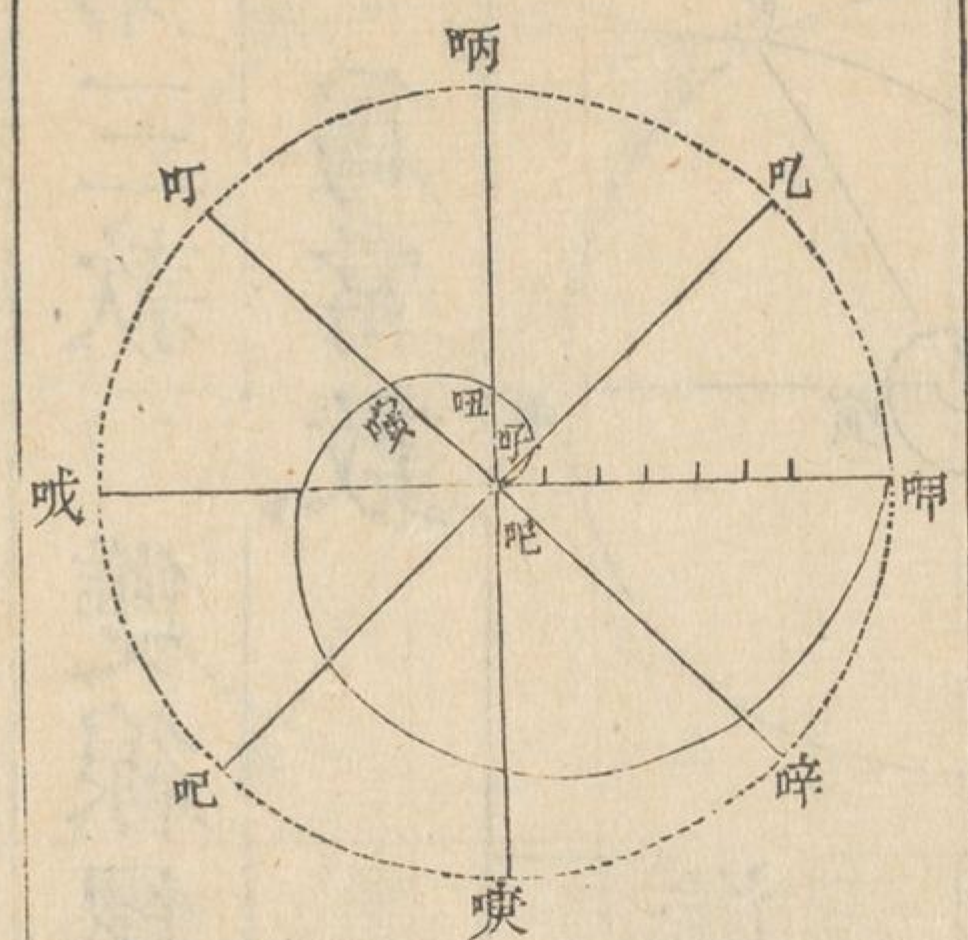
直線以平速繞極、母點以平速行于直線、所成曲線爲亞奇默德螺線、

第二款　亞奇默德螺線之式爲 $未=\frac{二周}{酉}$、未爲帶徑、酉爲帶徑繞極弧、

準本款說、帶徑與繞極弧有比例、$呷叮戌圜:呷叮弧::吧呷:吧嗔$ 前圖命帶徑吧嗔爲未、吧呷爲甲、呷叮弧爲酉、則得 $未:甲::酉:二周甲$、故 $未=\frac{二周甲}{甲酉}=\frac{二周}{酉}$、

與款合

作亞奇氏螺線法

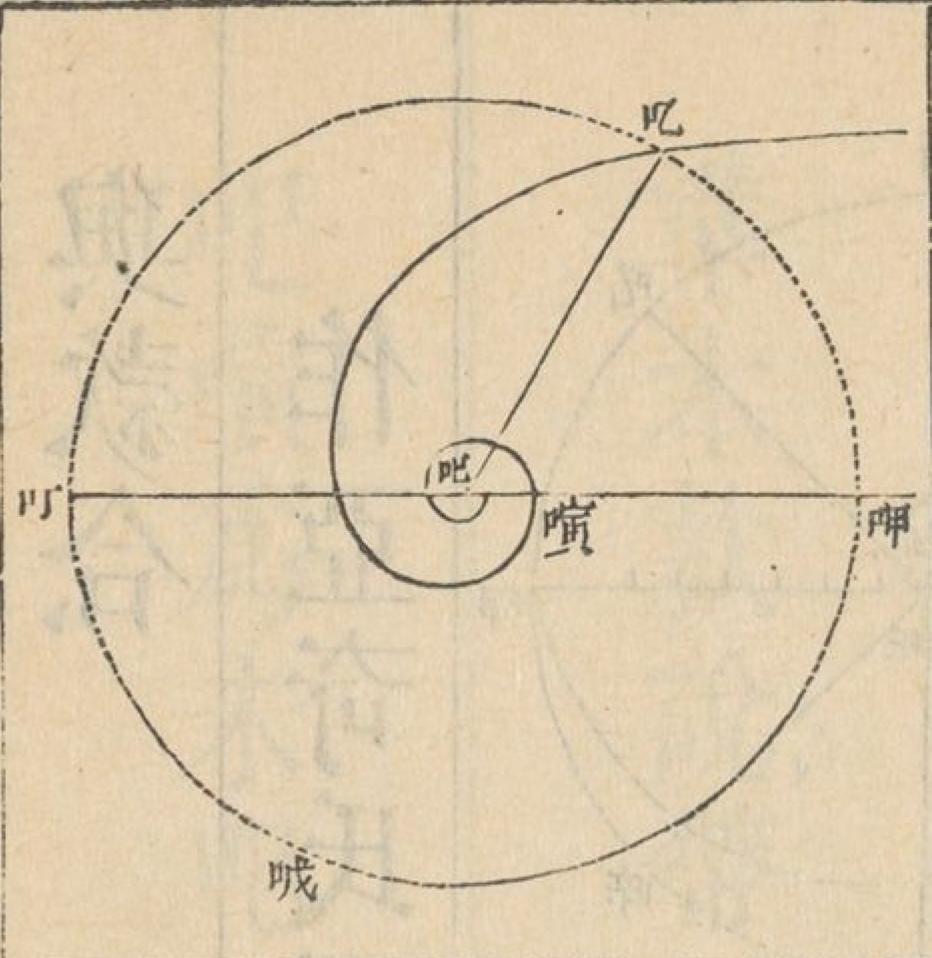


如圖、任平分圜周為若干分、亦平分半徑為若干分、周徑之分數必相等、乃于吧叱半徑內取一分、于吧呐內取二分、于吧叮內取三分、以下仿此遞多一分、俱作點識之、過此諸點之曲線、即亞奇氏螺線、蓋吧呼吧哑吧嗔諸帶徑、與呷叱呷呐呷叮諸弧、比例皆同也、

雙曲線螺線

直線以平速繞極、母點以減速退行于直線、令帶徑與繞極弧、恆有反比例、則成雙線螺線、

第三款　雙線螺線之式為 $未=\frac{酉}{甲}$ 未為帶徑、酉為弧、甲為常數、

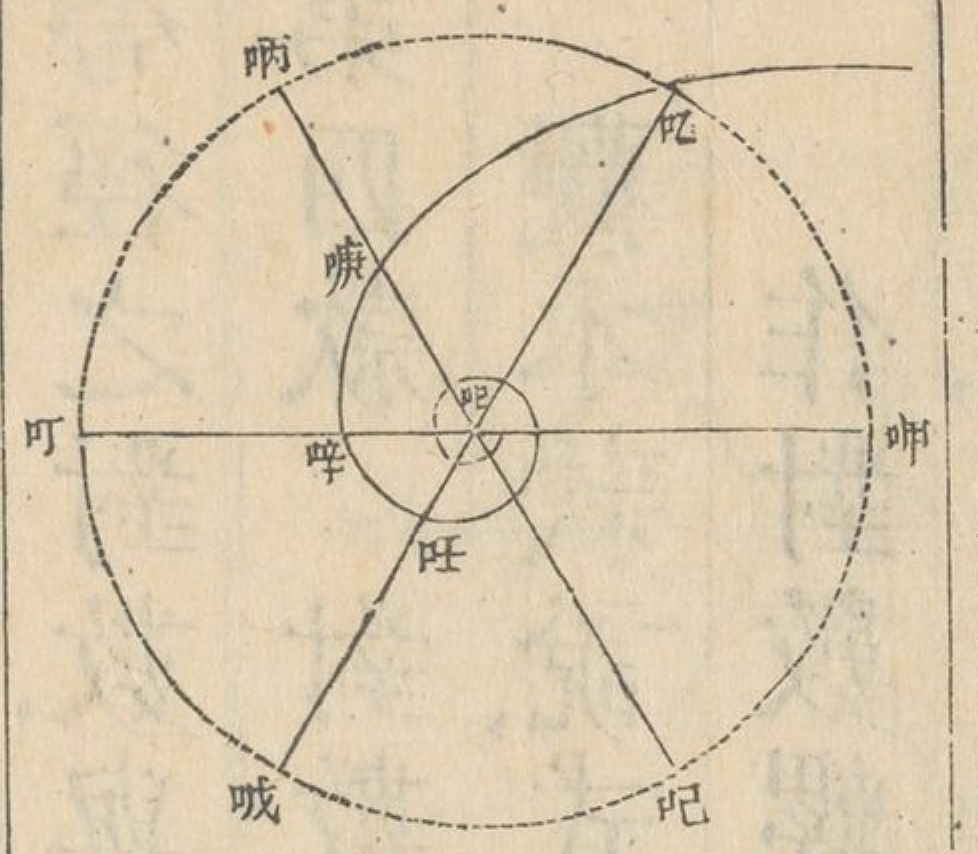


準本款說有比例 呷吃弧、呷吃叮哦圜∷吧嗔、吧吃 命帶徑吧吃為未、吧嗔為一、呷吃弧為酉、則為

$未：一∷二周：酉$

所以$未=\frac{酉}{二周}$、命二周為甲、即得$未=\frac{酉}{甲}$、與款合、

作雙線螺線法



如圖、任分圜周、為呷叱叱呐呐叮諸相等分、取吧咦、等于半吧叱、取吧晬、等于三分吧叱之一、取吧旺、等于四分吧叱之一、餘仿此、則過叱咦晬旺諸點之曲線、即雙線螺線、葢吧叱吧咦諸帶徑、與呷叱呷呐諸弧、有反比例故也、

案、上二螺線、以$未=甲^{寅}酉^{申}$為公式、寅卯皆或正或負、葢$\frac{二周}{酉}$

即甲丅一酉、$\frac{酉}{二周}$即甲丅一酉也、

對數螺線

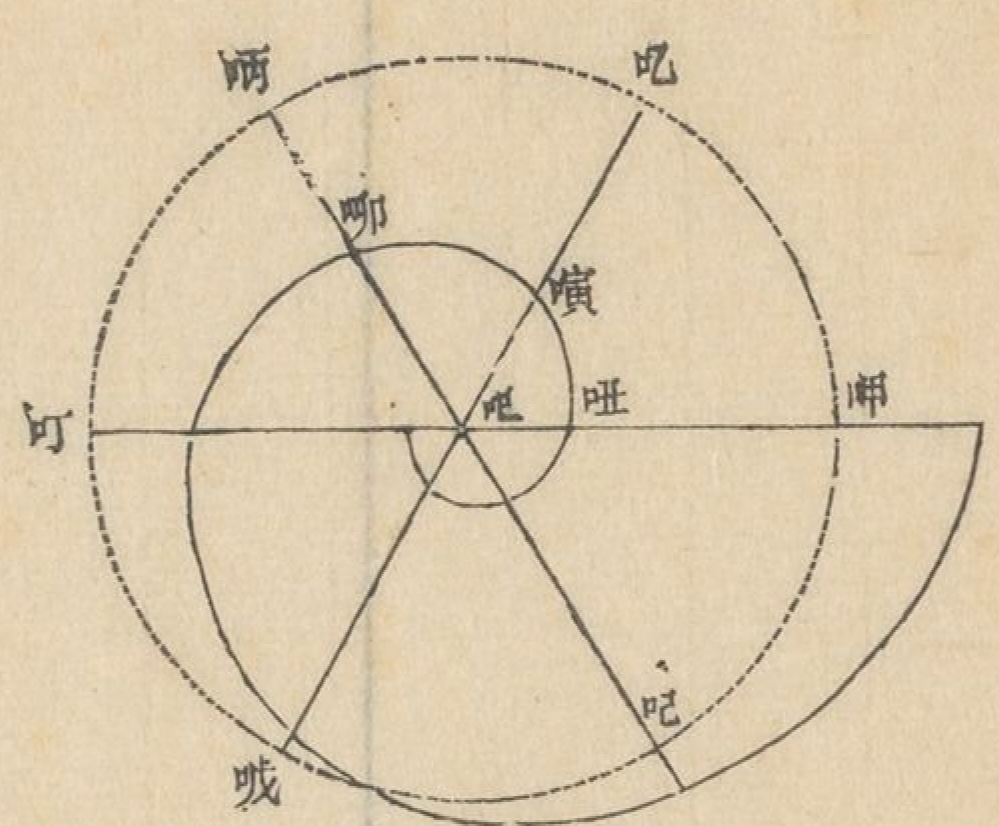
直線以平速繞極、母點于直線上、以減速向極行、令帶徑之對數、與弧恆有比例、則成對數螺線、

第四款　對數螺線之式爲對未＝酉、未爲帶徑、酉爲弧、

觀本款說、式自明、無須解、

作對數螺線法

如圖、任分圜周爲呷𠮙𠮙㕲㕲叮諸相等分、于分界作諸半徑、遞取吧吜吧𡁶吧𠰱等諸分令皆爲



連比例則過呷嗔唎諸點之曲線、為對數螺線、蓋呷吃呷哂諸弧、有遞加之比例、若吧呷吧嗔諸率之對數比例故也、