M426

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

60. Band. 1. Heft.

Mit 15 Figuren im Text.

Ausgegeben am 17. Januar.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

60. Band.

Mit 42 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Inhalt des sechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$.

Von

H. v. Mangoldt in Danzig.

B. Riemann hat in seiner Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe"*) ohne Beweis die Behauptung ausgesprochen, daß die dort mit $\xi(t)$ bezeichnete Funktion unendlich viele Nullstellen habe, und daß die Anzahl derjenigen dieser Nullstellen, deren reelle Teile zwischen 0 und einer großen positiven Zahl T enthalten sind, näherungsweise durch den Ausdruck

$$\frac{T}{2\pi}\, l\, \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\text{**)}$$

dargestellt werde.

In einer früheren Arbeit***) habe ich gezeigt, daß der Unterschied zwischen diesem Näherungswerte und der darzustellenden Anzahl für $T > 12$ absolut genommen kleiner bleibt als

$$0{,}34 \cdot (lT)^2 + 1{,}35 \cdot lT + 2{,}58.$$

Im Nachfolgenden soll dargetan werden, daß sich unter der Voraussetzung $T > 28{,}558$, für den absoluten Wert des erwähnten Unterschiedes eine noch tiefer liegende, *nur bis zur Größenordnung von lT ansteigende* Grenze angeben läßt, nämlich

$$0{,}43200\, lT + 1{,}91662\, llT + 13{,}07873.$$

*) B. Riemann, Monatsberichte der Berliner Akademie 1859, S. 671 = Gesammelte Mathematische Werke, Leipzig, 1. Auflage, 1876, S. 136; 2. Auflage, 1892, S. 145.

**) Das Zeichen la bedeutet hier, so wie überall im Nachfolgenden, den natürlichen Logarithmus von a.

***) H. v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 266.

1.

Nach willkürlicher Annahme einer positiven Konstanten a, die größer als $\frac{1}{2}$ ist, denke man sich (Fig. 1) in der Ebene der komplexen Veränderlichen t durch den Punkt $(-ia)$ eine Parallele zur Achse des Reellen und durch den Punkt T eine Parallele zur Achse des Imaginären gezogen. Den Wert T selbst denke man sich so gewählt, daß die letztere

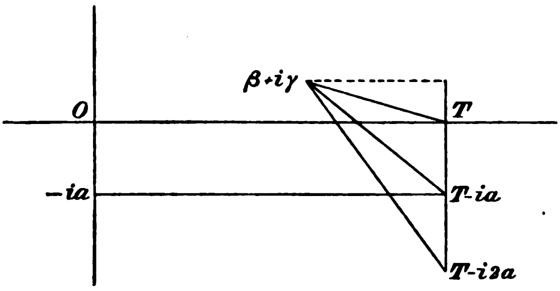


Fig. 1.

Parallele durch keine Nullstelle der Funktion $\xi(t)$ hindurchgeht. Wenn dann N die Anzahl derjenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ bezeichnet, deren reelle Teile zwischen 0 und T liegen, jede so oft gezählt, als ihre Ordnungszahl angibt, so ist das Produkt $2\pi N$, wie aus bekannten Eigenschaften der Funktion $\xi(t)$ folgt, gleich dem Doppelten des Zuwachses, welchen der Koeffizient von i in dem Ausdruck $l\xi(t)$ erfährt, wenn t stetig fortschreitend nacheinander die beiden Strecken

$$-ia \cdots T-ia \quad \text{und} \quad T-ia \cdots T$$

durchläuft. Als Anfangswert von $l\xi(t)$ für $t=-ia$ kann hierbei der reelle Wert angenommen werden und aus diesem sind dann die übrigen in Betracht kommenden Werte von $l\xi(t)$ durch stetige Fortsetzung abzuleiten.

Für die erste der beiden erwähnten Strecken hat die Berechnung des entsprechenden Zuwachses $\Phi_1(a, T)$ des Koeffizienten von i in dem Ausdruck $l\xi(t)$ keine Schwierigkeit. Aus der Formel, welche nach Riemann die Funktionen $\xi(t)$ und $\zeta(s)$ miteinander verbindet, folgt nämlich zunächst

$$(1)\quad \xi(T-ia)=\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}-i\frac{T}{2}}\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right).$$

Nun denke man sich eine reelle Veränderliche τ, welche stetig wachsend das Intervall $0\cdots T$ durchläuft, und verstehe unter

$$l\xi(T-ia);\quad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right);\quad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)$$

diejenigen Werte der Logarithmen

$$l\xi(\tau-ia);\quad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{\tau}{2}\right);\quad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+i\tau\right),$$

welche sich aus den reellen Werten der Logarithmen

$$l\xi(-ia);\quad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right);\quad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a\right)$$

durch stetige Fortsetzung für $\tau = T$ ergeben. Für alle anderen vorkommenden Logarithmen mögen die Hauptwerte genommen werden.

Dann folgt aus (1)

$$(2)\quad l\xi(T-ia) = l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)+l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)l\pi$$
$$+\,l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)\cdot$$

Nun ist nach T. J. Stieltjes*)

$$l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)=l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)+l\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}l(2\pi)+J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right),$$

wo $J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ ein Ergänzungsglied bedeutet, dessen absoluter Wert mit genügender Genauigkeit abgeschätzt werden kann und bei unbegrenzt wachsendem T dem Grenzwert 0 zustrebt.

Durch Einführung dieses Ausdrucks für $l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ in Gleichung (2) folgt

$$(3)\quad l\xi(T-ia)=\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)(1+l\pi)$$
$$+\,l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)$$
$$+\frac{1}{2}l(2\pi)+l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)+J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\cdot$$

Infolge der Festsetzungen, welche zur eindeutigen Erklärung der vorkommenden Logarithmen getroffen wurden, ist nun der oben erwähnte Zuwachs $\Phi_1(a, T)$, um dessen Berechnung es sich handelt, nichts anderes als der Koeffizient, den i erhält, wenn man die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in ihren reellen und ihren imaginären Teil zerlegt. Man hat aber

*) T.-J. Stieltjes, Journal de Mathématiques pures et appliquées (4) 5, 1889, S. 431, Formel (20).

$$l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)=l\left(\frac{T}{2}-i\frac{1+2a}{4}\right)+li$$
$$=l\frac{T}{2}+l\left(1-i\frac{1+2a}{2T}\right)+i\frac{\pi}{2}$$
$$=l\frac{T}{2}+\frac{1}{2}l\left[1+\left(\frac{1+2a}{2T}\right)^2\right]+i\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1+2a}{2T}\right),$$

wo für das Zeichen arctg der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Bogen zu nehmen ist. Hieraus erhält man, wenn man durch ϑ_1 und ϑ_2 reelle zwischen 0 und 1 enthaltene Zahlen bezeichnet, deren genaue Werte für das Nachfolgende nicht erforderlich sind,

$$l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)=l\frac{T}{2}+\frac{\vartheta_1}{2}\left(\frac{1+2a}{2T}\right)^2+i\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_2\frac{1+2a}{2T}\right).$$

Ähnlich ist

$$l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)=l\left(T-i\frac{2a-1}{2}\right)+li$$
$$=lT+l\left(1-i\frac{2a-1}{2T}\right)+i\frac{\pi}{2}$$
$$=lT+\frac{1}{2}l\left[1+\left(\frac{2a-1}{2T}\right)^2\right]+i\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_3\frac{2a-1}{2T}\right)\quad(0<\vartheta_3<1).$$

Endlich ist, wenn R den absoluten Wert und Θ die Abweichung der komplexen Zahl $\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ bedeutet, nach T. J, Stieltjes*)

$$\left|J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\right|<\frac{1}{12R\left(\cos\frac{\Theta}{2}\right)^2}.$$

Nun ist aber im vorliegenden Falle

$$R>\frac{T}{2}\quad\text{und}\quad\Theta<\frac{\pi}{2},$$

folglich

$$\cos\frac{\Theta}{2}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und daher

$$\left|J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\right|<\frac{1}{3T}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse erhält man aus Gleichung (3) durch Vergleichung der imaginären Teile, wenn man zur Abkürzung den Koeffizienten von i in dem Ausdruck $l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)$ durch

$$Z(a,T)$$

bezeichnet und unter η eine reelle zwischen -1 und $+1$ enthaltene Zahl versteht,

*) T.-J. Stieltjes, a. a. O. S. 433, Formel (26).

$$\Phi_1(a, T) = \frac{T}{2} l \frac{T}{2} - \frac{T}{2}(1 + l\pi) + \left(\frac{7}{4} + \frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{2} + Z(a, T)$$
$$+ \frac{\eta}{3T} + \left\{\vartheta_1 \frac{(1+2a)^2}{16} - \vartheta_2\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)\frac{1+2a}{2} - \vartheta_3 \frac{2a-1}{2}\right\}\frac{1}{T},$$

und nach Zusammenfassung der Anfangsglieder und Vereinigung der beiden negativen Korrektionen zu einer einzigen

$$(4)\quad \Phi_1(a, T) = \frac{T}{2} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} + \left(\frac{7}{4} + \frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{2} + Z(a, T) + \frac{\eta}{3T} + \left\{\vartheta_1 \frac{(1+2a)^2}{16} - \vartheta \frac{4a^2 + 16a - 1}{8}\right\}\frac{1}{T} \qquad \begin{pmatrix} -1 < \eta < 1 \\ 0 < \vartheta_1 < 1 \\ 0 < \vartheta < 1 \end{pmatrix}.$$

2.

Mehr Schwierigkeit bereitet die Abschätzung des Zuwachses Φ_2, den die Abweichung von $\xi(t)$ erfährt, wenn t die Strecke vom Punkte $(T - ia)$ bis zum Punkte T durchläuft. Man gelangt zum Ziel, indem man diesen Zuwachs mit demjenigen Zuwachs Φ_3 vergleicht, um welchen die Abweichung von $\xi(t)$ zunimmt, wenn t auf dem geraden Verbindungswege vom Punkte $(T - i2a)$ zum Punkte $(T - ia)$ übergeht, und sich Φ_2 gemäß der Gleichung

$$\Phi_2 = \Phi_3 + (\Phi_2 - \Phi_3)$$

in zwei Bestandteile zerlegt denkt.

Um den ersten dieser Bestandteile zu finden, hat man nur nötig, in Gleichung (4) die Konstante a durch $2a$ zu ersetzen und den so sich ergebenden neuen Wert von Φ_1 von dem ursprünglichen abzuziehen. So erhält man, wenn man immer die Korrektionen gleichen Vorzeichens in eine einzige zusammenzieht,

$$(5)\qquad \Phi_3 = -a\frac{\pi}{4} + Z(a, T) - Z(2a, T) + \eta\frac{2}{3T} + \left\{\vartheta \frac{36a^2 + 68a - 1}{16} - \vartheta' \frac{24a^2 + 40a - 1}{16}\right\}\frac{1}{T}$$
$$(0 < \vartheta < 1;\ 0 < \vartheta' < 1).$$

Zur Abschätzung der Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ dienen folgende Überlegungen: Man denke sich die Funktion $\xi(t)$ als Produkt ihrer Linearfaktoren in der Weise dargestellt, daß man je zwei Linearfaktoren $\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)$ und $\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)$, welche zwei entgegengesetzt gleichen Nullstellen α und $(-\alpha)$ entsprechen, unmittelbar aufeinander folgen läßt, oder doch nur um eine unter einer festen Grenze bleibende Anzahl von Plätzen voneinander trennt. Nun lasse man die Veränderliche t irgend einen durch keine Nullstelle der Funktion $\xi(t)$ führenden Weg von endlicher Länge stetig durchlaufen. Dann bilden die Änderungen, welche die Abweichungen der einzelnen Linearfaktoren von $\xi(t)$ hierbei erfahren, in derjenigen Anordnung, die der Reihenfolge der Linearfaktoren entspricht, eine konvergente unendliche Reihe, deren Summe mit der Änderung der Abweichung der Funktion $\xi(t)$ übereinstimmt. Ebenso kann auch die Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ in eine konvergente unendliche Reihe von Gliedern aufgelöst werden, die der Reihe nach den in der oben angegebenen Weise geordneten Linearfaktoren der Funktion $\xi(t)$ entsprechen.

Nun sei

$$\alpha = \beta + i\gamma,$$

wo β und γ reelle Zahlen bedeuten, irgend eine der Nullstellen der Funktion $\xi(t)$, und es werde im Nachfolgenden unter dem Zeichen arctg immer der zwischen $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ und $\frac{\pi}{2}$ enthaltene Bogen verstanden. Dann wird der Zuwachs, den die Abweichung des der erwähnten Nullstelle entsprechenden Linearfaktors

$$1 - \frac{t}{\beta + i\gamma} = -\frac{1}{\beta + i\gamma}[t - (\beta + i\gamma)]$$

erfährt, wenn t die Strecke $(T - ia) \cdots T$ durchläuft, in allen Fällen durch den Ausdruck

$$\operatorname{arctg} \frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{T-\beta}$$

dargestellt (vgl. Fig. 1).

Ähnlich ist der Zuwachs der Abweichung des nämlichen Linearfaktors für den Fall, daß t die Strecke $(T - i2a) \cdots (T - ia)$ durchläuft, in allen Fällen gleich

$$\operatorname{arctg} \frac{2a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg} \frac{a+\gamma}{T-\beta}.$$

Folglich ist der Beitrag, den der betrachtete Linearfaktor zu der Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ liefert, gleich

$$-\left\{\operatorname{arctg} \frac{2a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg} \frac{a+\gamma}{T-\beta} - \left(\operatorname{arctg} \frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right\}.$$

Nun mögen, nach willkürlicher Annahme einer positiven Zahl k, zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem

$$|T - \beta| < 2k \quad \text{oder} \quad |T - \beta| \geqq 2k$$

ist, und dementsprechend möge die Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ in eine Summe zweier Teile ω_1, ω_2 gespalten werden, deren erster ω_1 aus der Summe der Beiträge derjenigen Linearfaktoren $\left(1 - \frac{t}{\beta + i\gamma}\right)$ besteht, bei denen $|T - \beta| < 2k$, also

$$T - 2k < \beta < T + 2k$$

ist, während der zweite ω_2 die Beiträge aller übrigen Linearfaktoren umfaßt.

Zur Abschätzung von ω_1 denke man sich das Intervall $(T - 2k) \cdots (T + 2k)$ in die beiden Teile

$$(T - 2k) \cdots T \quad \text{und} \quad T \cdots (T + 2k)$$

zerlegt und für jeden derselben die Anzahl derjenigen Nullstellen $\beta + i\gamma$ abgezählt, für welche β im Innern des betreffenden Teiles liegt. Falls mehrfache Nullstellen vorkommen sollten, wäre hierbei jede einzelne derselben so oft in Anschlag zu bringen, als ihre Ordnungszahl angibt. Die größere der beiden so sich ergebenden Anzahlen heiße K. Dann zeigt sich, daß

$$|\omega_1| < K\frac{\pi}{2}$$

sein muß.

Ist nämlich zunächst $\gamma = 0$, also β eine reelle Nullstelle der Funktion $\xi(t)$, so ist der Beitrag des entsprechenden Linearfaktors zu der Differenz $\Phi_2 - \Phi_3$ gleich der Differenz zweier *spitzen* Winkel von *gleichem* Vorzeichen, nämlich der beiden Winkel, unter welchen die Wege $(T - ia) \cdots T$ und $(T - i2a) \cdots (T - ia)$ vom Punkte β aus gesehen erscheinen. Der absolute Wert dieses Beitrages ist daher $< \frac{\pi}{2}$.

Ist zweitens $(\beta + i\gamma)$ wo $\gamma \gtrless 0$ ist, eine imaginäre Nullstelle der Funktion $\xi(t)$, so gehört zu ihr eine konjugiert imaginäre Nullstelle $(\beta - i\gamma)$, und der absolute Wert der Summe der Winkel φ_1, φ_2 (Fig. 2), unter

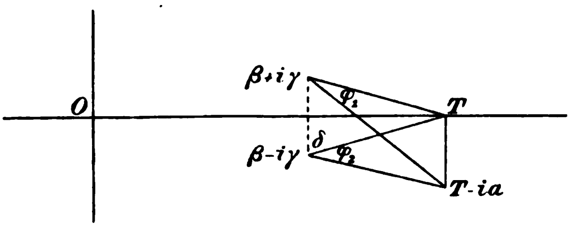


Fig. 2.

welchen der Weg $(T - ia) \cdots T$ von den Punkten $(\beta + i\gamma)$ und $(\beta - i\gamma)$ aus erscheint, liegt zwischen 0 und π. Denn $|\varphi_1|$ ist kleiner als der Basiswinkel δ des gleichschenkeligen Dreiecks mit der Spitze T und

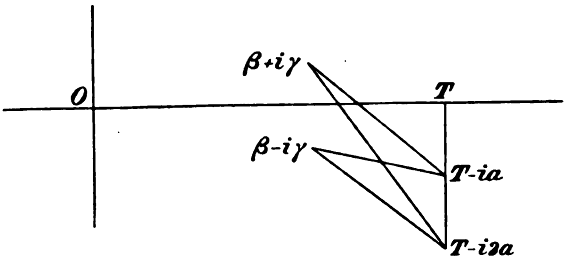


Fig. 3.

$(\delta + |\varphi_2|)$ ist $< \pi$. Ebenso ist (Fig. 3) die Summe der Winkel, unter welchen die Strecke $(T - i2a) \cdots (T - ia)$ von den Punkten $(\beta + i\gamma)$ und

$(\beta - i\gamma)$ erscheint, absolut genommen $< \pi$, weil beide Gesichtswinkel spitz sind. Zugleich hat diese Summe stets das nämliche Vorzeichen wie die Summe $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Die Differenz der beiden eben erwähnten Summen ist daher absolut genommen $< \pi$. Diese Differenz stellt aber den Beitrag dar, welchen die den Nullstellen $(\beta + i\gamma)$ und $(\beta - i\gamma)$ entsprechenden Linearfaktoren zusammengenommen zu der Zahl ω_1 liefern. Jeder solche Gesamtbeitrag ist somit absolut genommen $< \pi$, so daß durchschnittlich auf den *einzelnen* Linearfaktor ein Beitrag entfällt, dessen absoluter Wert $< \frac{\pi}{2}$ ist.

Da ferner zwei Nullstellen, deren reelle Teile auf verschiedenen Seiten von T liegen, zu Beiträgen von *entgegengesetzten* Vorzeichen Anlaß geben, so erhält man bei der Abschätzung von $|\omega_1|$ sicher zu viel, wenn man nur diejenigen Nullstellen in Betracht zieht, deren reelle Teile im Innern des *einen* der beiden Intervalle $(T-2k) \cdots T$ und $T \cdots (T+2k)$ liegen, nämlich desjenigen, dem die *meisten* Nullstellen entsprechen, und für jede einzelne derselben $\frac{\pi}{2}$ in Ansatz bringt. So ergibt sich

$$|\omega_1| < K\frac{\pi}{2},$$

wie behauptet wurde.

Im zweiten Fall, wenn $|T-\beta| \geqq 2k$ ist, empfiehlt es sich, den oben angegebenen Beitrag des Linearfaktors $\left(1 - \frac{t}{\beta + i\gamma}\right)$ zu der Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ durch Anwendung des Taylorschen Satzes in der einfachsten Form umzuformen. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
&-\left\{\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right\} \\
&= -\frac{a}{T-\beta}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{a(1+\vartheta)+\gamma}{T-\beta}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{a\vartheta+\gamma}{T-\beta}\right)^2}\right\} \\
&= \frac{a(T-\beta)\{[a(1+\vartheta)+\gamma]^2 - (a\vartheta+\gamma)^2\}}{\{(T-\beta)^2 + [a(1+\vartheta)+\gamma]^2\}\{(T-\beta)^2 + (a\vartheta+\gamma)^2\}} \\
&= a^2[a(1+2\vartheta)+2\gamma]\cdot\frac{(T-\beta)^2}{(T-\beta)^2+(a\vartheta+\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(T-\beta)\{(T-\beta)^2+[a(1+\vartheta)+\gamma]^2\}} \\
&\qquad (0 < \vartheta < 1).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right| \\
&< a^2(3a+2\gamma)\cdot\frac{1}{|T-\beta|^3} \\
&< a^2(3a+1)\cdot\frac{1}{|T-\beta|^3}.
\end{aligned}$$

Die Reihe der Beiträge, welche diejenigen Linearfaktoren $\left(1-\frac{t}{\beta+i\gamma}\right)$, bei denen $|T-\beta| \geqq 2k$ ist, zu der Differenz $(\Phi_2-\Phi_3)$ liefern, ist daher *unbedingt* konvergent. Deswegen kann die früher angedeutete Voraussetzung über die Anordnung der Glieder dieser Reihe jetzt fallen gelassen und an Stelle der früheren jede andere Anordnung gesetzt werden. Insbesondere kann man zunächst alle positiven Glieder, das sind diejenigen, in welchen $\beta < T$ ist, zu einer Summe Σ_1, und dann alle negativen Glieder, das sind diejenigen, wo $\beta > T$ ist, zu einer Summe $(-\Sigma_2)$ vereinigen, und die Summe ω_2 der Beiträge aller Linearfaktoren der betrachteten Art gleich der Differenz $(\Sigma_1-\Sigma_2)$ setzen. Hieraus geht hervor, daß $|\omega_2|$ kleiner ist als die größere der beiden Zahlen Σ_1, Σ_2, also erst recht kleiner als

$$a^2(3a+1)\Sigma' \frac{1}{(T-\beta)^2},$$

wo die Summe Σ' entweder nur über diejenigen Nullstellen $(\beta+i\gamma)$ zu erstrecken ist, für welche $\beta \geqq T+2k$ ist, oder nur über diejenigen, für welche $\beta \leqq T-2k$ ist, je nachdem der eine oder der andere Fall den größeren Wert von Σ' ergibt.

Durch Zusammenfassung der Ergebnisse, zu denen die Betrachtung der beiden vorhin unterschiedenen Fälle geführt hat, erhält man

$$(6) \qquad |\Phi_2-\Phi_3| < K\frac{\pi}{2} + a^2(3a+1)\Sigma' \frac{1}{(T-\beta)^2}.$$

Nun ist die Abschätzung von Φ_2 ausführbar. Durch Verbindung der Formeln (5) und (6) ergibt sich nämlich aus

$$\Phi_2 = \Phi_3 + (\Phi_2-\Phi_3)$$

die Gleichung

$$(7) \quad \begin{aligned} \Phi_2 = & -a\frac{\pi}{4} + Z(a, T) - Z(2a, T) \\ & + \eta\left\{K\frac{\pi}{2} + a^2(3a+1)\Sigma' \frac{1}{(T-\beta)^2} + \frac{2}{3T}\right\} \\ & + \left\{\vartheta\frac{36a^2+68a-1}{16} - \vartheta'\frac{24a^2+40a-1}{16}\right\}\frac{1}{T} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1<\eta<1 \\ 0<\vartheta<1 \\ 0<\vartheta'<1 \end{pmatrix}.$$

Und für die durch die Gleichung

$$N = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{\pi}$$

bestimmte Anzahl N derjenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$, deren reelle Teile zwischen 0 und T liegen, folgt aus den Gleichungen (4) und (7) der Ausdruck

$$(8)\quad \begin{aligned} N = {} & \frac{T}{2\pi}\, l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{2Z(a,T) - Z(2a,T)}{\pi} \\ & + \eta\left\{\frac{K}{2} + \frac{a^2(3a+1)}{\pi} \Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3} + \frac{1}{\pi T}\right\} \\ & + \left\{\vartheta\,\frac{5a^2+9a}{2} - \vartheta'\,\frac{32a^2+72a-3}{16}\right\}\frac{1}{\pi T} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1<\eta<1 \\ 0<\vartheta<1 \\ 0<\vartheta'<1 \end{pmatrix}.$$

3.

Wenn man sich nun lediglich davon überzeugen will, daß der absolute Wert des Unterschiedes zwischen der Anzahl N und dem Riemannschen Näherungswert $\frac{T}{2\pi}\, l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ bei unbegrenzt wachsendem T höchstens von der Ordnung lT unendlich werden kann, so genügt es, in Gleichung (8) $a = \frac{3}{2}$ zu setzen und für k den Wert

$$\varkappa = \operatorname{tg} 1 = 1{,}55741$$

zu wählen. Dann wird nämlich

$$\begin{aligned} Z(a,T) & \leqq |l\zeta(2+iT)| \\ & \leqq \left|\sum\left\{\frac{1}{p^{2+iT}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p^{2(2+iT)}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{p^{3(2+iT)}} + \cdots\right\}\right|, \end{aligned}$$

wo die Summe über alle Primzahlen p von 2 bis ins Unendliche zu erstrecken ist, folglich

$$|Z(a,T)| \leqq \sum\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p^4} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{p^6} + \cdots\right\} = l\zeta(2) = l\frac{\pi^2}{6}.$$

Ebenso ergibt sich, daß auch $|Z(2a,T)|$ den endlichen Wert $l\frac{\pi^2}{6}$ nicht zu überschreiten vermag.

Ferner bleibt die Anzahl K bei den angegebenen Werten von a und k nach einem Satze, den ich früher bewiesen habe*) beständig kleiner als

$$\varkappa l(T+\varkappa) < \varkappa l T + \frac{\varkappa^2}{T}.$$

Daß endlich auch die Summe $\sum' \frac{1}{|T-\beta|^3}$ höchstens von der Ordnung lT unendlich werden kann, ergibt sich durch folgende Betrachtung:

Wenn ν irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist dafür, daß

$$(9)\qquad 2\nu\varkappa \leqq |T-\beta| < 2(\nu+1)\varkappa$$

sei, notwendig, daß β entweder dem Intervall

$$T + 2\nu\varkappa \cdots T + 2(\nu+1)\varkappa,$$

oder dem Intervall

$$T - 2(\nu+1)\varkappa \cdots T - 2\nu\varkappa$$

*) v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 265.

angehöre. Die Anzahl derjenigen Nullstellen $\beta + i\gamma$ der Funktion $\xi(t)$, für welche β nicht außerhalb des zuerst erwähnten Intervalles liegt, ist aber nach dem gleichen Satze wie oben kleiner als

$$\varkappa l[T + (2\nu + 1)\varkappa],$$

und dieser Ausdruck stellt, wie aus der zum Nullpunkt symmetrischen Verteilung der Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ folgt, auch für das zweite Intervall eine Grenze dar, hinter welcher die Anzahl derjenigen Nullstellen, für die β dem zweiten Intervall angehört, in allen Fällen zurückbleibt. Daher erhält man für $k = \varkappa$, indem man in der Summe Σ' immer alle diejenigen Glieder, für welche ein und dieselbe Ungleichung von der Form (9) besteht, zu einer Gruppe zusammenfaßt,

$$\begin{aligned}\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} &< \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varkappa l[T + (2\nu+1)\varkappa]}{8\nu^3\varkappa^3} \\ &< \frac{1}{8\varkappa^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}\cdot lT + \frac{1}{8\varkappa^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{l\left(1+\frac{(2\nu+1)\varkappa}{T}\right)}{\nu^3} \\ &< \frac{\zeta(3)}{8\varkappa^2}lT + \frac{1}{8\varkappa}\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{\nu^3}\cdot\frac{1}{T} \\ &< \frac{\zeta(3)}{8\varkappa^2}lT + \frac{2\zeta(2)+\zeta(3)}{8\varkappa}\cdot\frac{1}{T}.\end{aligned}$$

Die Summe Σ' kann daher höchstens wie lT unendlich werden, womit auch die hinsichtlich der Anzahl N ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

4.

Wenn man nun aber für den absoluten Wert des Unterschiedes zwischen der Anzahl N und dem Riemannschen Näherungswert

$$\frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

eine obere Schranke von der Form

$$AlT + B$$

gewinnen will, in welcher A eine *möglichst kleine* positive Konstante und B einen Ausdruck von niedrigerer Größenordnung als lT bedeutet, so sind noch einige weitere Betrachtungen erforderlich: Man setze in Gleichung (8)

$$a = \frac{1}{2} + u,$$

wo u eine später in geeigneter Weise zu bestimmende Zahl bedeutet, welche, wie sich herausstellen wird, zweckmäßig von der Ordnung $\frac{1}{lT}$ zu wählen ist und von vorn herein der Ungleichung

(10) $$0 < u < 0{,}97413$$

unterworfen werden kann. Dann erhält man zunächst

$$|Z(a, T)| = \left|Z\left(\tfrac{1}{2} + u, T\right)\right| \leqq |l\zeta(1+u+iT)| \leqq l\zeta(1+u).$$

Nun ist aber

$$\zeta(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+u}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+u}} = 1 + \frac{1}{u} = \frac{1+u}{u},$$

also

$$l\zeta(1+u) < l(1+u) - lu < u - lu,$$

folglich auch

(11) $$\left|Z\left(\tfrac{1}{2} + u, T\right)\right| < -lu + u.$$

Zweitens ist

$$|Z(2a, T)| = |Z(1+2u, T)| \leqq \left|l\zeta\left(\tfrac{3}{2} + 2u + iT\right)\right|,$$

folglich

(12) $$|Z(2a, T)| \leqq l\zeta\left(\tfrac{3}{2} + 2u\right) < l\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right).$$

Um drittens für K eine obere Grenze zu gewinnen, fasse man zunächst diejenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ ins Auge, deren reelle Teile nicht außerhalb des Intervalles $T \cdots (T+2k)$ liegen. Die Anzahl K_1 dieser Nullstellen genügt der Ungleichung

(13) $$K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u} < \Phi_1\left(\tfrac{1}{2} + u, T + 2k\right) - \Phi_1\left(\tfrac{1}{2} + u, T\right).$$

Denn, wenn die Veränderliche t stetig die Strecke

$$T - i\left(\tfrac{1}{2} + u\right) \cdots T + 2k - i\left(\tfrac{1}{2} + u\right)$$

durchläuft, erfährt die Abweichung jedes einzelnen Linearfaktors der Funktion $\xi(t)$ einen *positiven* Zuwachs*), und dabei entspricht jeder Nullstelle, deren reeller Teil nicht außerhalb des Intervalles $T \cdots (T+2k)$ liegt, ein Zuwachs, der größer ist als $\operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}$.

Schon die Summe dieser Zunahmen übersteigt daher den Wert $K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}$. Umsomehr muß der Gesamtzuwachs der Abweichung der Funktion $\xi(t)$, welche durch die Differenz $\Phi_1\left(\tfrac{1}{2} + u, T+2k\right) - \Phi_1\left(\tfrac{1}{2} + u, T\right)$ dargestellt wird, größer sein als $K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}$.

*) Vgl. H. v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 258f.

Nun folgt aber aus Gleichung (4)

$$\Phi_1(a, T+2k) - \Phi_1(a, T) = \left(\frac{T+2k}{2} l \frac{T+2k}{2} - \frac{T+2k}{2}\right) - \left(\frac{T}{2} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2}\right)$$
$$+ Z(a, T+2k) - Z(a, T) + \frac{\eta}{T}\left\{\frac{2}{3} + \frac{12a^2+36a-1}{16}\right\}.$$

Für $a < \frac{1}{2} + 0{,}97413 = 1{,}47413$ ergibt sich hieraus nach Umformung der am Anfang der rechten Seite stehenden Differenz mittels des Taylorschen Satzes

$$\Phi_1(a, T+2k) - \Phi_1(a, T) = 2k \cdot \frac{1}{2} l \frac{T+\vartheta 2k}{2\pi} + Z(a, T+2k) - Z(a, T + \frac{\eta}{T} \cdot 5{,}5511$$
$$= kl\frac{T}{2\pi} + kl\left(1+\frac{\vartheta 2k}{T}\right) + Z(a, T+2k) - Z(a, T)$$
$$+ \frac{\eta}{T} \cdot 5{,}5511$$
$$= kl\frac{T}{2\pi} + Z(a, T+2k) - Z(a, T) + \frac{\eta}{T}(2k^2 + 5{,}5511).$$

Setzt man nunmehr $a = \frac{1}{2} + u$, so erhält man unter Berücksichtigung der Ungleichung (11)

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T+2k\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T\right) < kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{1}{T}(2k^2 + 5{,}5511).$$

Folglich ist

$$K_1 < \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left\{kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{1}{T}(2k^2 + 5{,}5511)\right\}. \tag{14}$$

Wie sich später herausstellen wird, ist für k ein zwischen 0,67 und 0,68 enthaltener Wert zu wählen. Ferner kann $T > 12$ genommen werden, da die Funktion $\xi(t)$ keine Nullstelle hat, deren reeller Teil absolut genommen $\leqq 12$ wäre. Für Werte von k und T, welche diese Bedingungen erfüllen, nimmt aber die rechte Seite der Ungleichung (14) mit wachsendem T zu. Diese rechte Seite stellt daher, falls $T > 12$ ist, nicht nur für das Intervall $T \cdots (T+2k)$ eine obere Grenze für die Anzahl derjenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ dar, deren reelle Teile diesem Intervall angehören, sondern zugleich auch für jedes andere Intervall von der Länge $(2k)$, dessen dem Nullpunkt zunächst gelegenes Ende von diesem einen Abstand hat, der $< T$ ist. Insbesondere ist die rechte Seite der Ungleichung (14) auch eine obere Grenze für die Anzahl derjenigen Nullstellen, deren reelle Teile dem Intervall $(T-2k) \cdots T$ angehören, also auch für die früher mit K bezeichnete Anzahl, so daß auf der linken

Seite der Ungleichung (14) der Index 1 wegbleiben darf. Berücksichtigt man nun noch, daß $k < 0{,}68$, also $2k^2 < 0{,}9248$ ist, so erhält man

$$(15) \qquad K < \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left(kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{6{,}4759}{T}\right).$$

Für den ersten Faktor der rechten Seite dieser Ungleichung liefert die Entwickelung nach dem Mac-Laurinschen Satze

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2ku}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+\vartheta u}\right)^2[(1+\vartheta u)^2+4k^2]}$$

und, wenn man noch um ein Glied weitergeht,

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2}\cdot\frac{2k}{1+4k^2}u$$
$$+ 2k\frac{2k-(1+\vartheta u)\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+\vartheta u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+\vartheta u}\right)^3[(1+\vartheta u)^2+4k^2]^2}u^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} < \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2ku}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2(1+4k^2)},$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} < \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2}\cdot\frac{2k}{1+4k^2}\cdot u$$
$$+ 2k\cdot\frac{2k-\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3(1+4k^2)^2}\cdot u^2.$$

Somit ergibt sich

$$K < \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)}\cdot l\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2}\cdot\frac{2k^2}{1+4k^2}ul\frac{T}{2\pi} - \frac{2lu}{\operatorname{arctg}(2k)}$$
$$+ 2k^2\frac{2k-\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3(1+4k^2)^2}u^2 l\frac{T}{2\pi} - \frac{4kulu}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2(1+4k^2)}$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left(2u + \frac{6{,}4759}{T}\right).$$

Wird nun im zweiten Gliede der rechten Seite für $l\frac{T}{2\pi}$ die Differenz $lT - l(2\pi)$ eingesetzt und sodann zur Abkürzung

$$M = \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)} \cdot l\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2} \cdot \frac{2k^2}{1+4k^2}\, u l T - \frac{2lu}{\operatorname{arctg}(2k)} \tag{16}$$

und

$$P = 2k^2 \frac{2k - \operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3 (1+4k^2)^2}\, u^2 l \frac{T}{2\pi} - \frac{4kulu}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2 (1+4k^2)} \tag{17}$$

$$- \frac{2k^2 l(2\pi) u}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2 \cdot (1+4k^2)} + \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} \left(2u + \frac{6{,}4759}{T}\right)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$K < M + P. \tag{18}$$

Zur Abschätzung der Summe $\sum' \frac{1}{|T-\beta|^3}$ dienen ähnliche Überlegungen wie früher. Die Anzahl derjenigen in Betracht zu ziehenden Nullstellen $(\beta + i\gamma)$, für welche

$$2\nu k \leqq |T - \beta| \leqq 2(\nu+1)k$$

ist, erweist sich auf Grund der eben durchgeführten Betrachtungen kleiner als derjenige Ausdruck, der aus der Summe $(M+P)$ hervorgeht, wenn man T durch $(T + 2\nu k)$ ersetzt, also bei Berücksichtigung der Ungleichungen

$$l(T+2\nu k) < lT + \frac{2\nu k}{T} \quad \text{und} \quad \frac{1}{T+2\nu k} < \frac{1}{T}$$

kleiner als

$$M + P + \frac{2\nu k}{T} Q,$$

wo zur Abkürzung

$$Q = \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2k^2 u}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2 (1+4k^2)} + 2k^2 \frac{2k - \operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3 (1+4k^2)^2} u^2 \tag{19}$$

gesetzt ist. Daher ist

$$\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{M + P + \frac{2\nu k}{T} Q}{8\nu^3 k^3},$$

oder

$$\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} < \frac{M+P}{8k^3}\, \zeta(3) + \frac{\zeta(2)}{4k^2}\, Q.$$

Ferner ist

$$a^2(3a+1) = \left(\frac{1}{4} + u + u^2\right)\left(\frac{5}{2} + 3u\right) = \frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11}{2}u^2 + 3u^3,$$

also

$$\frac{a^2(3a+1)}{\pi} \sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} = \left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11+6u}{2}u^2\right) \frac{\zeta(3)}{8\pi k^3} M$$

$$+ \frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11}{2}u^2 + 3u^3\right)\left[\frac{\zeta(3)}{2k} P + \frac{\zeta(2)}{T} Q\right],$$

und, da $u < 0{,}97415$ ist,

$$(20)\qquad \frac{a^2(3a+1)}{\pi}\sum{}'\frac{1}{|T-\beta|^3} < \left(\frac{5}{8}+\frac{13}{4}u+8{,}4225u^2\right)\frac{\zeta(3)}{8\pi k^3}M + \frac{94{,}272}{32\pi k^2}\left[\frac{\zeta(3)}{2k}P+\frac{\zeta(2)}{T}Q\right].$$

Mit Hilfe der Formeln (11), (12), (18), (20) und der Ungleichung

$$a < 1{,}47415$$

folgt jetzt aus Gleichung (8)

$$\begin{aligned} N = {} & \frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8} \\ & + \eta\left\{\left[\frac{1}{2}+\frac{5\zeta(3)}{64\pi k^3}\right]M-\frac{2}{\pi}lu+\frac{13\zeta(3)}{32\pi k^3}uM+\frac{1}{\pi}l\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right. \\ & \qquad + \frac{2}{\pi}u+\frac{8{,}4225}{8\pi k^3}\zeta(3)u^2M+\frac{P}{2}\left[1+\frac{94{,}272}{32\pi k^3}\zeta(3)\right] \\ & \qquad \left. + \frac{1}{\pi T}\left[13{,}067+\frac{94{,}272}{32k^2}\zeta(2)Q\right]\right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hier für M den durch Gleichung (16) gegebenen Wert ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} (21)\quad N = {} & \frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8} \\ & + \eta\left\{\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{64\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)}l\frac{T}{2\pi}\right. \\ & \qquad + \left[\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{32\pi k[\operatorname{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)}+\frac{13\zeta(3)}{32\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)}\right]ulT \\ & \qquad - \left[\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{32\pi k^3\operatorname{arctg}(2k)}+\frac{2}{\pi}\right]lu+\frac{1}{\pi}l\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{\pi}u \\ & \qquad + \frac{8{,}4225\zeta(3)}{8\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)}u^2lT \\ & \qquad + \frac{\zeta(3)(13+33{,}6900u)u}{32\pi k^3\operatorname{arctg}(2k)}\left[\frac{2k^2ulT}{\operatorname{arctg}(2k)(1+4k^2)}-2lu-kl(2\pi)\right] \\ & \qquad \left. + \frac{P}{2}\left[1+\frac{94{,}272}{32\pi k^3}\zeta(3)\right]+\frac{1}{\pi T}\left[13{,}067+\frac{94{,}272}{32k^2}\zeta(2)Q\right]\right\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{64\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)} = \frac{1}{64\pi}\cdot\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{k^2\operatorname{arctg}(2k)}$$

wird ein Minimum, wenn k die Gleichung

$$k^2\operatorname{arctg}(2k)\cdot 96\pi k^2-[32\pi k^3+5\zeta(3)]\left[2k\operatorname{arctg}(2k)+\frac{2k^2}{1+4k^2}\right]=0$$

oder

$$48\pi k^3\operatorname{arctg}(2k)-[32\pi k^3+5\zeta(3)]\left[\operatorname{arctg}(2k)+\frac{k}{1+4k^2}\right]=0$$

oder

$$\operatorname{arctg}(2k) = \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{16\pi k^3 - 5\zeta(3)} \cdot \frac{k}{1 + 4k^2} \tag{22}$$

befriedigt. Der Wert von $\zeta(3)$ findet sich in einer von Herrn J. P. Gram mitgeteilten Tabelle*) bis auf 15 Dezimalen angegeben. Bei Abrundung auf fünf Dezimalen ist

$$\zeta(3) = 1{,}2020\underline{6}.$$

Unter Benutzung dieses Ergebnisses zeigt die numerische Rechnung, daß die Gleichung (22) eine zwischen 0,67 und 0,68 enthaltene Wurzel hat, die näherungsweise gleich 0,675 ist. Nimmt man für k diesen Näherungswert

$$k = 0{,}675$$

so findet man

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{64\pi k^2 \operatorname{arctg}(2k)} < 0{,}43200. \tag{23}$$

Ferner ergeben sich erstens, wenn man $k = 0{,}675$ setzt, für die Koeffizienten von ulT und von $(-lu)$ auf der rechten Seite der Gleichung (21) die folgenden etwas zu großen Näherungswerte:

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k[\operatorname{arctg}(2k)]^2(1 + 4k^2)} + \frac{13\zeta(3)}{32\pi k^2 \operatorname{arctg}(2k)} < 0{,}58704, \tag{24}$$

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k^3 \operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2}{\pi} < 1{,}91662, \tag{25}$$

und es handelt sich zweitens darum, auch den Ausdruck

$$0{,}58704\, ulT - 1{,}91662\, lu$$

zu einem Minimum zu machen. Dies wird erreicht, wenn

$$0{,}58704\, lT - 1{,}91662\, \frac{1}{u} = 0$$

oder

$$u = \frac{1{,}91662}{0{,}58704} \frac{1}{lT} = \frac{3{,}2650}{lT}$$

ist.

Nun darf man mit Rücksicht auf die hinsichtlich der kleinsten Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ bis jetzt sichergestellten Ergebnisse die Veränderliche T der Bedingung

$$T > 28{,}558$$

unterwerfen, was für u die im Vorangehenden bereits benutzte Ungleichung

$$u < 0{,}97413$$

zur Folge hat. Denn über diejenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$, deren reelle Teile zwischen 0 und 28,558 liegen, ist man vollständig unter-

*) J. P. Gram, Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague (6) 2, 1884, S. 269.

richtet. Diese Nullstellen sind nämlich, wie Herr Ch. J. de la Vallée Poussin*) bewiesen hat, sämtlich *reell*. Ferner sind sie sämtlich *einfach*, was zwar von Herrn de la Vallée Poussin nicht ausdrücklich hervorgehoben worden ist, aber aus seinen Betrachtungen ohne weiteres folgt. Endlich sind die numerischen Werte der fraglichen Nullstellen durch die von Herrn J. P. Gram**) durch geführten Rechnungen mit großer Schärfe bekannt geworden, nämlich

$$\alpha_1 = 14{,}134725; \quad \alpha_2 = 21{,}022040; \quad \alpha_3 = 25{,}010856.$$

Nimmt man nunmehr

$$k = 0{,}675; \quad u = \frac{3{,}2650}{lT} \quad \text{und} \quad T > 28{,}558,$$

so ergibt sich durch numerische Ausrechnung

$$\log \frac{2k}{1+u} > 9{,}83495 \quad \text{und} \quad \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u} > 0{,}59977$$

und hierauf aus (17)

$$\frac{P}{2} < k^3 \frac{2k - 0{,}59977}{(0{,}59977)^3(1+4k^2)^2} u^2 lT - k^3 \frac{2k - 0{,}59977}{(0{,}59977)^3(1+4k^2)^2} l(2\pi) u^2$$
$$- \frac{2k}{(0{,}59977)^2(1+4k^2)} ulu + \left(\frac{1}{0{,}59977} - \frac{k^2 l(2\pi)}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)}\right) u + \frac{3{,}2380}{0{,}59977} \cdot \frac{1}{T}.$$

Wenn man nun im ersten Gliede der rechten Seite

$$ulT = 3{,}2650$$

setzt und sodann die Koeffizienten numerisch ausrechnet, so erhält man:

$$\frac{P}{2} < 0{,}64943u - 0{,}36555u^2 - 1{,}3298ulu + 1{,}32677u + \frac{5{,}3990}{T}$$
$$< 1{,}97620u - 0{,}36555u^2 - 1{,}3298ulu + \frac{5{,}3990}{T}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{lT} \cdot \frac{lT}{T} = \frac{1}{3{,}2650} \cdot \frac{lT}{T} \cdot u,$$

und da $\frac{lT}{T}$ höchstens den Wert $\frac{l28{,}558}{28{,}558}$ hat, so ist

$$\frac{5{,}3990}{T} < 0{,}19410u.$$

Also ist

$$\frac{P}{2} < 2{,}17030u - 0{,}36555u^2 - 1{,}3298ulu.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung nimmt für die in Betracht kommenden Werte von u mit wachsendem u zu, so daß man aus ihr für

*) Ch.-J. de la Vallée Poussin, „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, Bd. 59, 1899, S. 23.

**) J.-P. Gram, „Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark, 1902, S. 8.

$\frac{P}{2}$ eine obere Schranke erhält, wenn man $u = 0{,}97413$ setzt. So ergibt sich

$$\frac{P}{2} < 1{,}80131. \tag{26}$$

Ferner folgt aus (19) für $k = 0{,}675$ und $u < 0{,}97413$

$$Q < 1{,}46195. \tag{27}$$

Endlich ist

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}612\underline{4} \tag{28}$$

und

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449\underline{4}. \tag{29}$$

Wendet man nunmehr die durch die Formeln (23) bis (29) ausgedrückten Ergebnisse zur Abschätzung der rechten Seite der Gleichung (21) an, so erhält man, für $T > 28{,}558$, nach Ausführung der numerischen Rechnungen

$$\begin{aligned} N = \frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} \\ + \eta(0{,}43200\, lT + 1{,}91662\, llT + 12{,}20373) \quad (-1 < \eta < 1). \end{aligned}$$

Aachen, den 6. Mai 1904.

Zur Theorie der Moduln und Ideale.

Von

E. Lasker in New-York.

Kapitel I.

Eliminationssätze.

1. Es sollen im folgenden einige Sätze über Systeme von Formen bewiesen werden, deren Resultante nicht verschwindet. Neben den Sätzen I, II, III, welche neu und für vielerlei Anwendungen der vorliegenden Untersuchung von Bedeutung sind, sind einige Sätze, vornämlich Satz IV und V, aufgestellt, die bereits bekannt und Gegenstand strengster Forschung gewesen sind. Dies könnte befremden und bedarf daher der Erläuterung. In zwei späteren Kapiteln (nämlich III und IV) werden die Grundlagen der Untersuchung, wie sie bis dorthin vorgeschritten ist, erweitert werden, und zwar in der Weise, daß ganze Serien von Schlüssen aus den vorangehenden Kapiteln übernommen werden können. Es ist daher zweckmäßig, die Beweise der bekannten Sätze von vornherein so zu stellen, daß ihre Übertragbarkeit auf die modifizierenden Verhältnisse ohne weiteres einleuchtet. Dies geschieht, indem jene Beweise auf das geringste Maß von Voraussetzungen gegründet werden.

Die Voraussetzungen, von denen die folgende Untersuchung ausgeht, mögen daher genau präzisiert werden. Sie sollen sich beschränken auf

1) die formalen Grundgesetze der Algebra und Arithmetik,
2) den Irreduzibilitätsbegriff der Formen,
3) den Zerlegungssatz der Formen in irreduzible Teiler,
4) den Gaußschen Fundamentalsatz über binäre Formen im komplexen Zahlgebiete,
5) die Eigenschaften der Determinanten,
6) die Eigenschaften der Resultante zweier binärer Formen,
7) die Theorie der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung beliebigen Grades.

Dazu sollen noch einige funktionentheoretische Begriffe und Sätze treten, die sich auf Konvergenzbetrachtungen und Grenzübergänge einfacher Art zurückführen lassen.

Obwohl die Mittel der Untersuchung auf diese Weise sehr beschränkte sein sollen, so wird doch die Notation und Symbolik der neueren Mathematik, z. B. der Invariantentheorie, benutzt werden. Es ist dies keine Inkonsequenz, da diese Notationen und Symbole keinerlei Sätze anderer Art als die angeführten voraussetzen, ja in ihrer Mehrheit auf rein arithmetische Folgerungen aus den Rechnungsgesetzen der Algebra sich stützen.

2. Zunächst geben wir in knappen Worten den Ideengang des Nachweises der folgenden Tatsachen: Sind $x_1, \cdots, x_m$ m Variable, $f_1, \cdots, f_k, \cdots$ homogene Formen derselben, wird ein bestimmtes Wertsystem der Proportionen $x_1 : x_2 : \cdots : x_m$ „Punkt" genannt, so haben, wenn die Koeffizienten der $f_1, \cdots, f_m$ unbestimmt sind, die Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad \cdots, \quad f_m = 0$$

keinen Punkt gemein. Dagegen haben $m - 1$ solcher Gleichungen immer zum mindesten *einen* Punkt gemein. $f_1 = 0, \cdots, f_m = 0$ haben nur dann und immer dann einen Punkt gemein, wenn die Koeffizienten eine bestimmte Relation erfüllen. Dieselbe ist durch das Verschwinden einer Invariante von $f_1, \cdots, f_m$, der Resultante, ausdrückbar. Wird die Resultante von $f_1, \cdots, f_m$, deren Koeffizienten Unbestimmte sind, mit R bezeichnet und ist l eine Linearform mit unbestimmten Koeffizienten, so kann man immer eine positive ganze Zahl M und ganzzahlige Formen $p_1, \cdots, p_m$ nicht bloß der $x_1, \cdots, x_m$, sondern auch der unbestimmten Koeffizienten von $f_1, \cdots, f_m$ und l finden, so daß identisch

$$R \cdot l^M = p_1 \cdot f_1 + \cdots + p_m f_m$$

ist.

Wir erweisen die Behauptung durch Induktion, von $m - 1$ Variablen auf m Variable schließend. Jene Sätze sind nach dem oben Gesagten bereits als erwiesen angenommen für $m = 2$. Machen wir nun die Annahme, daß sie für $m - 1$ Variable richtig seien, und betrachten wir irgend eine der m Variablen, z. B. x_m, als unbestimmte Linearform der übrigen Variablen, sie etwa $= \eta x_1$ setzend. Alsdann sind

$$f_1, \cdots, f_{m-1}$$

$m - 1$ Formen der $m - 1$ Variablen $x_1, \cdots, x_{m-1}$, deren Koeffizienten Polynome von η mit unbestimmten Koeffizienten sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen $f_i = 0$ ist das Verschwinden der Resultante, die ein Polynom von η sein wird, das von η nicht unabhängig sein kann, da ja in dem speziellen Falle, wo die f_i Linearformen oder Produkte von Linearformen sind, diese

Resultantenform nicht von η unabhängig ist. Somit haben $f_1, \cdots, f_{m-1}$ in der Tat eine endliche Anzahl von Nullwerten gemein.

Bezeichnen wir die den gemeinsamen Punkten $P_1, P_2, \cdots, P_\alpha$ entsprechenden Linearformen ebenfalls mit $P_1, \cdots, P_\alpha$ und schreiben wir die Linearinvariante zweier kontragredienter Formen F, Φ derselben Ordnung symbolisch $F \times \Phi$, und bezeichnen wir mit μ die Ordnung von f_m, so ist $f_m \times P_1^\mu \cdot f_m \times P_2^\mu \cdots f_m \times P_\alpha^\mu$ dann und nur dann gleich Null, wenn $f_1, \cdots, f_m$ einen gemeinsamen Punkt besitzen. Dieser Wert

$$f_m \times P_1^\mu \cdot f_m \times P_2^\mu \cdots f_m \times P_\alpha^\mu$$

ist eine Form der Unbestimmten von $f_1, \cdots, f_m$, wie jetzt zu zeigen ist.

$\Theta = P_1 \cdot P_2 \cdots P_\alpha$ ist eine Form der Unbestimmten von $f_1, \cdots, f_{m-1}$ und der kontragredienten Variabelen $\xi_1, \cdots, \xi_m$ von $x_1, \cdots, x_m$. Wir können nämlich statt des Systems von Variablen

$$x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m$$

das andere $x_1, \cdots, x_{m-1}, y = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_m x_m$ einführen und $f_1, \cdots, f_{m-1}$ nach Potenzen dieser Variablen geordnet denken, wobei, weil ja

$$\xi_m x_m = y - \xi_1 x_1 - \cdots - \xi_{m-1} x_{m-1},$$

nur eine Potenz von ξ_m als Nenner auftritt. Die Resultante R von $f_1, \cdots, f_{m-1}$ als Formen von $x_1, \cdots, x_{m-1}$, wenn y noch $= \eta x_1$ gesetzt wird, ist nach der Annahme des Induktionsschlusses eine Form der Koeffizienten von $f_1, \cdots, f_{m-1}$, als Formen von $x_1, \cdots, x_m$ betrachtet, von den $\xi_1, \cdots, \xi_m$ und von η. R ist mit einem Nenner behaftet, der eine Potenz von ξ_m ist, und den wir einfach fortlassen. $R = 0$, als Gleichung für η betrachtet, definiert dann die Werte von η, für welche $f_1 = 0, \cdots, f_{m-1} = 0$. R ist nach dem Gaußschen Fundamentalsatz als Produkt darstellbar, wo jeder der Faktoren linear von η abhängt:

$$R = A(\eta - a_1)(\eta - a_2) \cdots (\eta - a_\alpha),$$

nur einer derselben, A, von η nicht abhängt.

Ist nun $P_1 \equiv a_{1,1} : a_{1,2} : \cdots : a_{1,m}$ ein den $f_1, \cdots, f_{m-1}$ gemeinsamer Nullpunkt, so muß einer der Linearfaktoren von R, z. B. $\eta - a_1$, durch das Einsetzen jener Werte von $x_1, \cdots, x_m$ verschwinden.

ηx_1 war $= y = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_m x_m$, somit ist

$$\eta x_1 - a_1 x_1 = 0,$$

wenn

$$x_1 = a_{1,1}, \cdots, x_m = a_{1,m}.$$

Auch ist a_1 nur von den $\xi_1, \cdots, \xi_m$ und den Koeffizienten von $f_1, \cdots, f_{m-1}$ abhängig. Also ist

$$\xi_1 a_{1,1} + \xi_2 a_{1,2} + \cdots + \xi_m a_{1,m} = a_1 \cdot a_{1,1}$$

d. h.

$$P_1 = a_1 \cdot a_{1,1}.$$

Ebenso ist

$$P_\alpha = a_\alpha \cdot a_{\alpha,1}.$$

Aus $R = A(\eta - a_1) \cdots (\eta - a_\alpha)$ folgt für $\eta = 0$

$$(R)_{\eta=0} = A a_1 \cdot a_2 \cdots a_\alpha.$$

A wie $(R)_{\eta=0}$ sind Formen der Unbestimmten von $f_1, \cdots, f_{m-1}$ und der $\xi_1, \cdots, \xi_m$. Es zeigt sich also, daß

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_\alpha = (\xi_1 a_{1,1} + \cdots + \xi_m a_{1,m})(\xi_1 a_{2,1} + \cdots + \xi_m a_{2,m}) \cdots = \Theta$$

eine berechenbare Form der Unbestimmten von $f_1, \cdots, f_{m-1}$ und der ξ_i ist.

Die $P_1, \cdots, P_\alpha$ genügen infolgedessen, wie wir nun zeigen werden, einer Gleichung α^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten rationale Formen der Unbestimmten von $f_1, \cdots, f_{m-1}$ sind. Es sei p irgend eine Linearform der $x_1, \cdots, x_m$ und bezeichne $P_i \times p$ die Linearinvariante von P_i und p. Ist ferner q irgend eine Form von kleinerer Ordnung als Θ, so bezeichne

$$q \times \Theta$$

die Polarform von q in bezug auf Θ. Es ist dann identisch

$$p^\alpha \times \Theta = P_1 \times p \cdot P_2 \times p \cdots P_\alpha \times p,$$

$$\frac{n p^{\alpha-1} \times \Theta}{p^\alpha \times \Theta} = \frac{P_1}{P_1 \times p} + \frac{P_2}{P_2 \times p} + \cdots + \frac{P_\alpha}{P_\alpha \times p},$$

$$\frac{(n)_2 p^{\alpha-2} \times \Theta}{p^\alpha \times \Theta} = \frac{P_1 \cdot P_2}{P_1 \times p \cdot P_2 \times p} + \frac{P_1 \cdot P_3}{P_1 \times p \cdot P_3 \times p} + \cdots \text{ etc.},$$

mithin sind die α Werte

$$H = \frac{P_i}{P_i \times p}$$

Wurzeln der Gleichung

$$p^\alpha \times \Theta \cdot H^\alpha - n \cdot p^{\alpha-1} \times \Theta \cdot H^{\alpha-1} + (n)_2 \cdot p^{\alpha-2} \times \Theta \cdot H^{\alpha-2} - \cdots = 0.$$

Die Größe

$$f_m \times P_1^\mu \cdot f_m \times P_2^\mu \cdots f_m \times P_\alpha^\mu$$

ist von den Wurzeln der obigen Gleichung in symmetrischer Weise abhängig. Daher ist sie ein Polynom der Koeffizienten jener Gleichung, und, da sie von den $\xi_1, \cdots, \xi_m$ unabhängig ist, also ein Polynom der Unbestimmten von $f_1, \cdots, f_m$. Sie läßt sich übrigens berechnen, indem man für f_m Aronholdsche Symbole

$$r_1, r_2, \cdots, r_\alpha$$

einführt und obigen Wert symbolisch als

$$\sum (r_{i_1} \times P_1 \cdot r_{i_2} \times P_2 \cdots r_{i_\alpha} \times P_\alpha)$$

ansetzt, die Summation ausgedehnt über alle verschiedenen Permutationen der $r_1, \cdots, r_\alpha$. Man könnte auf diesem Wege auch eine Rekursionsformel gewinnen für die Aronholdschen Symbole der Resultante von m Formen und ähnlichen später einzuführenden Bildungen.

Damit ist die Existenz der Resultantenform außer Zweifel gestellt. Es erübrigt nur noch zu erweisen, daß, wenn R die Resultante von m gegebenen Formen $u_1, \cdots, u_m$ bezeichnet und l eine gegebene Linearform ist, eine Zahl M und Formen $a_1, \cdots, a_m$ der x_i wie der Koeffizienten von u_i existieren, so daß $R \cdot l^M = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$. Die genaue Ausführung dieses Beweises hat für uns wenig Wert, da späterhin für ihn keine Verallgemeinerung nötig wird. Wir können daher auf das ausgezeichnete Buch von J. König verweisen, in dem der Beweis streng durchgeführt ist. Hier sei nur der Ideengang skizziert. Zunächst werde durch fortgesetzte Elimination einzelner Variabler erwiesen, und zwar am einfachsten bei Annahme nicht homogener Variabler, daß überhaupt eine Form F der Koeffizienten von $u_1, \cdots, u_m$ existiert, für die es eine Identität der obigen Gestalt

$$F = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$$

gibt. Alsdann erweise man die Irreduzibilität der Form F, welche diese Eigenschaft besitzt und von der niedrigsten Ordnung ist, und zwar einfach dadurch, daß man im obigen die u_i als Linearformen ihrer Koeffizienten, die $x_1, \cdots, x_m$ aber als Parameter betrachtet, so daß aus

$$G \cdot H = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$$

sogleich folgt entweder

$$G = b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m$$

oder

$$H = c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m.$$

Schließlich zeige man, daß F teilbar sein muß durch die Resultante von $u_1, \cdots, u_m$, da ja $F = 0$, wenn in irgend einem Punkte $P = x_1 : x_2 : \cdots : x_m$ die u_i gleichzeitig verschwinden. Macht man dann durch Ansetzen von $l = 1$ die Beziehung $R = a_1 u_1 \cdots$ in den x_i homogen, so folgt die Behauptung.

Die Resultante ist offenbar, als Polynom der Koeffizienten irgend *einer* der Formen u_i betrachtet, in ein Produkt von Linearformen auflösbar, wie sogleich aus der benutzten Identität

$$R = f_m \times P_1^\mu \cdots f_m \times P_\alpha^\mu$$

ersichtlich ist. Dieselbe Identität zeigt auch die Richtigkeit der Relation

$$\text{Res.}(u_1, \cdots, u_{m-1}, g) \cdot \text{Res.}(u_1, \cdots, u_{m-1}, h) = \text{Res.}(u_1, \cdots, u_{m-1}, g \cdot h)$$

in leicht verständlicher Schreibweise.

3. Wir erweisen nun

Satz I. „Sind $u_1, u_2, \cdots, u_h$ h Formen, wobei

$$h \leqq m,$$

derart, daß die Resultante von $u_1, \cdots, u_h$ und $m-h$ lineare Formen mit unbestimmten Koeffizienten nicht identisch verschwindet, und besteht eine identische Beziehung

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_h u_h = 0,$$

wo die $p_1, \cdots, p_h$ Formen darstellen, so gibt es Formen $q_{i,j}$ derart, daß identisch

$$q_{i,i} = 0,$$
$$q_{i,j} + q_{j,i} = 0,$$
$$p_i = q_{i,1} u_1 + q_{i,2} u_2 + \cdots + q_{i,h} u_h.\text{“}$$

Der Nachweis von Satz I wird zunächst erbracht werden für den Fall $h = m$, später für $h < m$. Der Beweis des genannten besonderen Falles wird durch Induktion erbracht werden, und zwar indem wir den Satz verifizieren, wenn $h = m = 2$, und dann aus der vorausgesetzten Richtigkeit des Satzes für einen Wert $m = m'$ die Richtigkeit des Satzes auch für den Wert $m = m' + 1$ erschließen.

Es sei also $m = 2$ und angenommen

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 = 0.$$

Wenn die Resultante von u_1 und u_2 nicht verschwindet, so haben u_1 und u_2 keine gemeinsamen Nullpunkte und folglich muß p_1 durch u_2, p_2 durch u_1 teilbar sein. Es sei

$$p_1 = u_2 \cdot \Theta,$$

also

$$p_2 = -u_1 \cdot \Theta,$$

alsdann genügt es $q_{1,2} = \Theta$, $q_{2,1} = -\Theta$ zu setzen, um Satz I für den Fall $h = m = 2$ zu verifizieren.

Es sei nun die Richtigkeit des Satzes angenommen, wenn h und m den Wert $m' - 1$ annehmen. Alsdann beweisen wir zunächst, daß, wenn h und m gleich m' sind, aus einer Beziehung

$$p_1 u_1 + \cdots + p_{m-1} u_{m-1} + p_m \cdot l = 0,$$

wo l eine Linearform ist, deren Resultante mit $u_1, \cdots, u_{m-1}$ nicht verschwindet, die Existenz von Größen $q_1, q_2, \cdots, q_{m-1}$ folgt derart, daß

$$p_m = q_1 l + q_2 u_2 + \cdots + q_{m-1} u_{m-1}.$$

Zu diesem Zwecke wählen wir irgend ein System von $m-1$ Linearformen

$$l_1, l_2, \cdots, l_{m-1},$$

deren Determinante mit l nicht verschwindet, und entwickeln die

$$p_1, p_2, \cdots, p_{m-1}, u_1, \cdots, u_{m-1}$$

nach Potenzprodukten der $l_1, l_2, \cdots, l_{m-1}$ und l. Indem wir dann noch die von l unabhängigen Glieder absondern, können wir schreiben

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_1' + l \cdot p_1'',\\
p_2 &= p_2' + l \cdot p_2'',\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
p_{m-1} &= p_{m-1}' + l \cdot p_{m-1}'',\\
u_1 &= u_1' + l \cdot u_1'',\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
u_{m-1} &= u_{m-1}' + l \cdot u_{m-1}''.
\end{aligned}
$$

Die p_i' und u_i' sind hier also homogene Formen der $l_1, \cdots, l_{m-1}$. Die Relation

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_m \cdot l = 0$$

zerspaltet sich nach Einsetzung obiger Werte in die beiden anderen

$$p_1' u_1' + p_2' u_2' + \cdots + p_{m-1}' u_{m-1}' = 0$$

und

$$p_1'' u_1 + p_1' u_1'' + p_2'' u_2 + p_2' u_2'' + \cdots + p_m = 0.$$

Da nun nach der gemachten Voraussetzung der Satz I richtig ist im Bereiche von $m-1$ Veränderlichen, so folgt aus der vorletzten Relation die Existenz von Formen $q_{i,j}'$ derart, daß für jeden Wert des Index i

$$
\begin{aligned}
p_i' &= q_{i,1}' u_1' + q_{i,2}' u_2' + \cdots,\\
q_{i,j}' &+ q_{j,i}' = 0,\\
q_{i,i}' &= 0.
\end{aligned}
$$

Danach ist der Wert von

$$p_1' u_1'' + p_2' u_2'' + \cdots = q_{1,j}' u_j' \cdot u_1'' + q_{2,j}' u_j' \cdot u_2'' + \cdots$$

oder auch (da $q_{i,j}' + q_{j,i}' = 0$)

$$
\begin{gathered}
= \sum q_{i,j}' \cdot (u_j' u_i'' - u_i' u_j'')\\
i = 1, 2, \cdots, m-1\\
j = 1, 2, \cdots, m-1,
\end{gathered}
$$

wo die Summation über alle Wertsysteme von i, j, in denen $i < j$, auszudehnen ist.

Nun war

$$u_j' + l \cdot u_j'' = u_j,$$

sonach ist

$$u_j' u_i'' - u_i' u_j'' = u_j \cdot u_i'' - u_i \cdot u_j''$$

und es zeigt sich somit aus der zweiten der obigen Relationen, daß Formen $q_1, \cdots, q_{m-1}$, für welche $p_m = q_1 u_1 + \cdots + q_{m-1} u_{m-1}$ ist, wirklich existieren.

Auch aus der Gleichung

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_{m-1} u_{m-1} + p_m \cdot l^n = 0$$

folgt die Existenz solcher Formen q. Denn nach dem, was eben bewiesen, folgt zum mindesten die Existenz von $r_1, r_2, \cdots, r_{m-1}$, so daß

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_{m-1} u_{m-1} + p_m \cdot l^{n-1} = 0$$

und auf diese Beziehung läßt sich derselbe Schluß wiederum anwenden und so immerfort.

Wir gehen nun zur ursprünglich gegebenen Beziehung zurück:

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_m u_m = 0.$$

Wir wählen irgend eine Linearform l, deren Resultante mit $u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}$ nicht verschwindet. Da die Resultante von $u_1, u_2, \cdots, u_m$ nicht verschwindet, so gibt es eine Zahl M derart, daß

$$l^M = s_1 \cdot u_1 + s_2 \cdot u_2 + \cdots + s_m \cdot u_m.$$

Somit ist

$$s_m p_1 u_1 + s_m p_2 u_2 + \cdots + s_m p_{m-1} u_{m-1} = p_m (s_1 u_1 + s_2 u_2 + \cdots - l^M)$$

oder

$$(s_m p_1 - p_m s_1) u_1 + (s_m p_2 - p_m s_2) u_2 + \cdots + p_m \cdot l^M = 0.$$

Es folgt also die Existenz von Formen $q_1, q_2, \cdots, q_{m-1}$, derart, daß

$$p_m = q_1 u_1 + q_2 u_2 + \cdots + q_{m-1} u_{m-1}.$$

Sobald also Satz I im Bereiche von $m-1$ Variablen gilt, folgt aus der Beziehung

$$p_1 u_1 + \cdots + p_m u_m = 0,$$

in welcher die Resultante von $u_1, \cdots, u_m$ nicht verschwindet, die obige Gleichung für p_m, welches auch die Ordnungen der $u_1, \cdots, u_m$ sein mögen. Daraus zeigt sich aber, daß auch aus

$$p_1 u_1 + \cdots + p_h u_h = 0,$$

wenn $h < m$, und die Resultante von $u_1, \cdots, u_h$ mit $m-h$ Linearformen nicht identisch verschwindet, eine Beziehung $p_h = q_1 u_1 + \cdots + q_{h-1} u_{h-1}$ folgt. Denn sind $g_1, g_2, \cdots, g_{m-h}$ irgend $m-h$ bestimmte Linearformen, deren Resultante mit $u_1, \cdots, u_h$ nicht verschwindet, ist ferner t irgend eine Form, deren Resultante mit $u_1, \cdots, u_{h-1}$ und den g_i nicht verschwindet, und ist n eine Zahl größer als die Ordnung von p_h, so folgt aus

$$p_1 u_1 + \cdots + p_h u_h = 0:$$

$$p_1 \cdot t \cdot u_1 + \cdots + p_{h-1} \cdot t \cdot u_{h-1} + p_h \cdot t \cdot u_h + 0 \cdot g_1^n + 0 \cdot g_2^n + \cdots = 0.$$

Mithin folgt, nach dem oben Bewiesenen, die Existenz von Formen $q_1, \cdots, q_{m-1}$, derart, daß

$$p_h = q_1 u_1 + \cdots + q_{h-1} u_{h-1} + q_{h+1} g_1^n + q_{h+2} \cdot g_2^n + \cdots$$

Die $q_{h+1}, q_{h+2}, \cdots$ müssen aber identisch 0 sein, wegen der Höhe der Zahl n.

Satz I ist damit im wesentlichen bewiesen, denn es ist nun leicht, die Werte der $q_{i,j}$ festzulegen. Sei $p_1 u_1 + \cdots + p_m u_m = 0$. Wir bestimmen Formen $Q_1, \cdots, Q_{m-1}$ derart, daß

$$p_m = Q_1 u_1 + \cdots + Q_{m-1} u_{m-1}$$

und setzen

$$q_{m,j} = Q_j, \quad q_{m,m} = 0.$$

Alsdann setzen wir diesen Wert von p_m in die obige Relation ein und ordnen dieselbe um, so daß sich ergibt

$$u_1(p_1 + q_{m,1} u_m) + u_2(p_2 + q_{m,2} u_m) + \cdots + u_{m-1}(p_{m-1} + q_{m,m-1} u_m) = 0.$$

Jetzt bestimmen wir wieder die Formen $R_1, R_2, \cdots, R_{m-2}$ derart, daß

$$p_{m-1} + q_{m,m-1} u_m = R_1 u_1 + R_2 u_2 + \cdots + R_{m-2} u_{m-2}$$

und setzen

$$q_{m-1,j} = R_j, \quad q_{m-1,m-1} = 0,$$

$$q_{m-1,m} = -q_{m,m-1}.$$

So fahren wir fort. Es zeigt sich daraus die Richtigkeit des Satzes I einfach auf arithmetischem Wege.

Die Bedingung $h = m$ ist, wie wir jetzt sehen können, ganz überflüssig. Für kleinere Werte von h ist Satz I a fortiori richtig.

4. Ehe wir nun, auf Satz I fußend, weitergehen, wollen wir eine Bezeichnung einführen, welche Beziehungen wichtiger Art, die häufig wiederkehren, zweckmäßig abkürzend zum Ausdruck bringen wird. Es sei $f(R)$ irgend eine Funktion einer ganzen Zahl R, alsdann definieren wir einen Operator Δ_a durch die Gleichung $\Delta_a f(R) = f(R) - f(R-a)$. Ferner bezeichnen wir die Anzahl der Koeffizienten einer Form R^{ter} Ordnung im Bereiche von m Variablen mit $\varphi(R)$. Es ist also

$$\varphi(R) = \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+m-1)}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)}.$$

Schließlich wollen wir, wenn $u_1, u_2, \cdots, u_h$ irgendwelche gegebene Formen sind, die Mannigfaltigkeit oder Anzahl der Konstanten, welche die Involution von Formen R^{ter} Ordnung hat, der die Multipla von u_1 oder $u_2 \cdots$ oder u_h angehören, mit

$$\varphi(R) - H(u_1, u_2, \cdots, u_h)(R)$$

bezeichnen, so daß also

$$H(u_1, u_2, \cdots, u_h)(R)$$

die Anzahl der linearen Bedingungen angibt, welchen die Koeffizienten einer Form R^{ter} Ordnung genügen müssen, damit eine solche Form der oben beschriebenen Involution angehöre.

5. Nach diesen Festsetzungen lautet

Satz II: „Die Anzahlfunktion

$$H(u_1, u_2, \cdots, u_h)(R)$$

ist $= \Delta_{a_1}\Delta_{a_2}\cdots\Delta_{a_h}\varphi(R)$, wenn die Resultante von $u_1, u_2, \cdots, u_h$ und $m-h$ Linearformen nicht identisch verschwindet, die $a_1, \cdots, a_h$ die Ordnungen der $u_1, \cdots, u_h$ angeben, und $R > a_1 + a_2 + \cdots + a_h - m$.

Ist aber unter denselben Bedingungen

$$R = a_1 + a_2 + \cdots + a_h - m,$$

so ist $H(u_1, \cdots, u_2)(R)$ um eins größer oder kleiner als der obige Wert, je nachdem $m-h$ gerade oder ungerade ist."

Der Beweis dieses Satzes wird durch Induktion erbracht. Sei zunächst $h = 1$. Alsdann besteht die Involution von Formen R^{ter} Ordnung, welche Multipla von u_1 sind, aus allen Formen

$$p \cdot u_1,$$

wo p irgend eine Form $(R-a_1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Mannigfaltigkeit dieser Involution ist sonach $\varphi(R-a_1)$, wenn $R \geqq a_1$, und 0, wenn $R < a_1$. Nun ist aber $\varphi(R-a_1) = 0$, wenn $R - a_1 = -1$ oder $= -2 \cdots$ oder $= -m+1$. Dagegen ist $\varphi(R-a_1) = (-1)^{m-1}$, wenn $R - a_1 = -m$. Mit anderen Worten: $H(u_1)(R)$ ist $= \Delta_{a_1}\varphi(R)$, wenn $R > a_1 - m_1$ und $= \Delta_{a_1}\varphi(R) + (-1)^{m-1}$, wenn $R = a_1 - m_1$, Satz II also richtig, wenn $h = 1$.

Die Richtigkeit des Satzes II sei nun angenommen für einen beliebigen Wert von h, wir müssen dann zeigen, daß daraus die Richtigkeit von Satz II für einen um die Einheit größeren Wert von h folgt.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns eines sehr einfachen und augenscheinlichen, jedoch trotzdem häufig anwendbaren Hilfssatzes. Derselbe besagt, daß die Involution von Formen R^{ter} Ordnung, welche von beliebig gegebenen Formen R^{ter} Ordnung

$$f_1, f_2, \cdots, f_u$$

gebildet wird, die Mannigfaltigkeit

$$u - v$$

hat, wo v die Anzahl der voneinander linear independenten Beziehungen der Gestalt

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_u f_u = 0$$

angibt. Danach ist die Mannigfaltigkeit der von den Multipla der $u_1, \cdots, u_h$ gebildeten Involution gleich der Mannigfaltigkeit der von den Multipla von $u_1, \cdots, u_{h-1}$ gebildeten Involution, vermehrt um die Mannigfaltigkeit der Multipla von u_h und vermindert um die Anzahl der linear independenten Beziehungen der Gestalt

$$p_1 u_1 + \cdots + p_{h-1} u_{h-1} = p_h u_h.$$

Die beiden ersteren Mannigfaltigkeiten lassen sich leicht bestimmen, da Satz II für $h-1$ Formen Geltung haben soll. Die letztere Mannigfaltigkeit ergibt sich aus Satz I, da aus der obigen Beziehung folgt

$$p_h = q_1 u_1 + q_2 u_2 + \cdots + q_{h-1} u_{h-1}.$$

Wenn $R > a_1 + a_2 + \cdots + a_h - m$, ist die Mannigfaltigkeit der Involution $p_1 u_1 + \cdots + p_{h-1} u_{h-1}$, nämlich $\varphi(R) - H(u_1, \cdots, u_{h-1})(R)$, nach der gemachten Annahme gleich $\varphi(R) - \Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_{h-1}} \varphi(R)$. Die Mannigfaltigkeit der Multipla von u_h ist $= \varphi(R - a_h)$. Ferner wenn $R - a_h$, welches die Ordnung von p_h ist, $> a_1 + \cdots + a_{h-1} - m$ ist, so ist die Anzahl der linear independenten Relationen der Gestalt $p_1 u_1 + \cdots + p_h u_h = 0$ nach Satz I gleich der Mannigfaltigkeit der Formen p_h, die der Involution von Formen $(R-a_h)^{\text{ter}}$ Ordnung der Multipla von $u_1, \cdots, u_{h-1}$ angehören, also $= \varphi(R - a_h) - H(u_1, \cdots, u_{h-1})(R - a_h)$; und nur wenn $R - a_h = a_1 + \cdots + a_{h-1} - m$ ist, ist letztere Anzahl

$$= \varphi(R - a_h) - H(u_1, \cdots, u_{h-1})(R - a_h) + (-1)^{m-h}.$$

Also ist

$$\varphi(R) - H(u_1, \cdots, u_h)(R) = \varphi(R) - \Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_{h-1}} \varphi(R) + \Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_{h-1}} \varphi(R - a_h),$$

wenn

$$R > a_1 + \cdots + a_h - m,$$

und um $(-1)^{m-h}$ kleiner, wenn $R = a_1 + \cdots + a_h - m$. Danach ist schließlich

$$H(u_1, \cdots, u_h)(R) = \Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_{h-1}} \Delta_{a_h} \varphi(R),$$

wenn

$$R > a_1 + \cdots + a_h - m$$

und

$$\Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_h} \varphi(R) + (-1)^{m-h},$$

wenn

$$R = a_1 + \cdots + a_h - m.$$

Satz II also damit verifiziert.

6. Satz II wenden wir zunächst für den Fall

$$h = m$$

an. $\Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_h} \varphi(R)$ ist dann $= 0$. Jede beliebige Form F, deren Ordnung $> a_1 + a_2 + \cdots + a_m - m$ ist, läßt sich danach in der Gestalt

$$p_1 u_1 + \cdots + p_m u_m$$

darstellen, wenn die Resultante der u_i nicht verschwindet. Die Formen der Ordnung

$$a_1 + \cdots + a_m - m$$

dagegen haben genau eine Bedingung zu erfüllen, wenn sie in dieser Weise darstellbar sein sollen. Nach den Bezeichnungen der Invariantenrechnung und der Begriffsbildung von Rosanes kann man sagen, daß eine ganz bestimmte Form Ω in kontragredienten Variablen und der Ordnung $a_1 + \cdots + a_m - m$ existiert, zu der alle Formen derselben Ordnung, welche Multipla von einem der u_i sind, konjugiert sind, zu der also die $u_1, \cdots, u_m$ selbst sämtlich apolar sind. Wir können dann den Satz aufstellen:

Satz III. „Wenn die Resultante von $u_1, \cdots, u_m$ nicht verschwindet, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Form F durch $p_1 u_1 + \cdots + p_m u_m$ die Apolarität von F zu Ω."

Wir beweisen Satz III durch den folgenden Prozeß. Zuerst zeigen wir, daß Satz III zutrifft, wenn die $u_1, \cdots, u_m$ sämtlich Potenzen von Linearformen sind. Alsdann weisen wir nach, daß aus der Annahme der Richtigkeit von Satz III, wenn k der u_i Potenzen von Linearformen sind, auch die Richtigkeit des Satzes folgt, wenn nur $k-1$ der Formen u_i solche Potenzen sind.

Es seien $u_i = l^{a_i}$, wo $l_1, l_2, \cdots, l_m$ Linearformen, deren Determinante nicht verschwindet, welche also als die unabhängigen Variablen gedeutet werden können. Demgemäß bezeichnen wir l_i mit x_i und führen ein System kontragredienter Variablen $y_1, \cdots, y_m$ ein, welche mit den $x_1, \cdots, x_m$ durch die Gleichung

$$x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m = l$$

verbunden sein mögen. Nach dem Ergebnisse des Satzes II gibt es eine einzige Form Ω der Ordnung $a_1 + a_2 + \cdots + a_m - m$, zu der die $x_i^{a_i}$ sämtlich apolar sind. Da $y_1^{a_1-1} \cdot y_2^{a_2-1} \cdots y_m^{a_m-1}$ eine solche Form ist, so muß Ω mit diesem Ausdruck, abgesehen von einem numerischen Faktor, identisch sein. Satz III sagt für das vorgeschlagene System der $u_1, \cdots, u_m$ aus, daß die hinreichende Bedingung dafür, daß eine Form F in der Gestalt

$$p_1 x_1^{a_1} + p_2 x_2^{a_2} + \cdots + p_m x_m^{a_m}$$

darstellbar sei, in der Apolarität von F zu Ω ruhe.

Es sei nun $x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_m^{b_m}$ irgend ein Potenzprodukt. Die Polare desselben in bezug auf $y_1^{a_1-1} \cdot y_2^{a_2-1} \cdots y_m^{a_m-1}$ ist, abgesehen von einem numerischen Faktor, identisch mit $y_1^{a_1-b_1-1} \cdot y_2^{a_2-b_2-1} \cdots y_m^{a_m-b_m-1}$ und nur $= 0$, wenn eines der b_i zum mindesten gleich dem entsprechenden a_i. Somit kann auch eine beliebige Summe von Potenzprodukten der obigen Gestalt nur zu Ω apolar sein, wenn in jedem einzelnen der Potenzprodukte der Summe mindestens einer der Exponenten gleich oder größer ist, als das entsprechende a_i. Dann ist diese Summe von Potenzprodukten darstellbar in der Gestalt

$$p_1 x_1^{a_1} + \cdots + p_m x_m^{a_m}.$$

Jede Form F ist aber ausdrückbar als eine Summe von Potenzprodukten. Somit ist die Apolarität von F zu Ω in der Tat hinreichende Bedingung der Darstellbarkeit von F in der Gestalt $p_1 x_1^{a_1} + \cdots + p_m x_m^{a_m}$.

Wir gehen nun zu dem Induktionsschlusse über, wie er vorhin charakterisiert war. Es seien $u_1, \cdots, u_m$ m Formen, deren Resultante nicht verschwindet, $k-1$ derselben seien Potenzen von Linearformen und u_1 sei keine solche Potenz. Es sei l irgend eine Linearform, deren Resultante mit $u_2, u_3, \cdots, u_m$ nicht verschwindet. Ist die positive ganze Zahl M groß genug gewählt, so gibt es Formen $s_1, s_2, \cdots, s_m$, derart, daß

$$l^M = s_1 u_1 + s_2 u_2 + \cdots + s_m u_m.$$

Die Form Ω, welche zu dem System

$$l^M, u_2, u_3, \cdots, u_m$$

gehört, hat die Ordnung $M + a_2 + \cdots + a_m - m$ und sei mit $\Omega(l^M, u_2, \cdots, u_m)$ bezeichnet. Dieselbe ist apolar zu $u_2, u_3, \cdots, u_m$ und l^M, also auch zu $s_1 \cdot u_1$. s_1 ist nicht apolar zu $\Omega(l^M, \cdots, u_m)$, denn sonst wäre, nach der gemachten Annahme, da die Reihe $l^M, \cdots, u_m$ k Potenzen von Linearformen enthält, s_1 darstellbar in der Gestalt $p_1 l^M + p_2 u_2 + \cdots + p_m u_m$, und dies würde wegen des offenbaren identischen Verschwindens von p_1 und der Gleichung $l^M = s_1 u_1 + s_2 u_2 + \cdots$ damit in Widerspruch stehen, daß die Resultante von l und $u_2, \cdots, u_m$ nicht verschwinden soll. $s_1 \times \Omega(l^M, u_2, \cdots, u_m)$, wie ich die Polare von s_1 in bezug auf $\Omega(l^M \cdots)$ bezeichnen will, ist eine Form der Ordnung $a_1 + \cdots + a_m - m$, apolar zu $u_1, u_2, \cdots, u_m$, also bis auf einen konstanten Faktor identisch mit $\Omega(u_1, u_2, \cdots, u_m)$. In Wahrheit besteht die Relation

$$s_1 \times \Omega(s_1 \cdot u_1, u_2, \cdots, u_m) = \operatorname{Res}(s_1, u_2, \cdots, u_m) \cdot \Omega(u_1, \cdots, u_m).$$

Doch kommt es auf den Wert des konstanten Faktors für die zu machende Schlußfolgerung gar nicht an. Sei nun F irgend eine Form apolar zu $\Omega(u_1, u_2, \cdots, u_m)$. Da identisch

$$s_1 \cdot F \times A = F \times (s_1 \times A),$$

welches auch die Form A sei, so ist, abgesehen von einem konstanten Faktor,

$$s_1 \cdot F \times \Omega(l^M, u_2, \cdots, u_m) = F \times \Omega(u_1, u_2, \cdots, u_m) = 0.$$

$s_1 \cdot F$ ist also apolar zu $\Omega(l^M, u_2, \cdots, u_m)$ und daher, nach der gemachten Annahme, darstellbar in der Gestalt

$$s_1 F = p_1 l^M + p_2 \cdot u_2 + \cdots + p_m \cdot u_m,$$

was wegen $l^M = s_1 \cdot u_1 + s_2 \cdot u_2 + \cdots$ zu einer Beziehung der Art

$$s_1(F - p_1 u_1) = q_2 \cdot u_2 + \cdots + q_m \cdot u_m$$

führt. Nun verschwindet aber die Resultante von $s_1, u_2, \cdots, u_m$ nicht, da ja die Beziehung besteht

$$\operatorname{Res}(l^M, u_2, \cdots, u_m) = \operatorname{Res}(s_1, u_2, \cdots, u_m) \cdot \operatorname{Res}(u_1, \cdots, u_m).$$

Somit folgt aus obiger Relation nach Satz I die andere

$$F - p_1 u_1 = r_2 u_2 + \cdots + r_m u_m,$$

wo die $r_2, \cdots, r_m$ Formen. Jede zu $\Omega(u_1, \cdots u_m)$ apolare Form ist also in der Gestalt $t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots$ darstellbar, wie Satz III behauptet.

7. Um einen Weg zur genaueren Berechnung und Charakterisierung von Ω zu zeigen, wenden wir Satz III für den Fall $h = m - 1$,

$$R = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} - m$$

an. Da

$$\Delta_{a_1} \Delta_{a_2} \cdots \Delta_{a_{m-1}} \varphi(R) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1},$$

so sagt uns Satz II, daß, wenn die Resultante von $u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}$ und einer Linearform nicht identisch verschwindet, es eine

$$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1} - 1)\text{-}$$

fache Bedingung für eine Form F der Ordnung $a_1 + a_2 + \cdots a_{m-1} - m$ sei, in der Gestalt

$$p_1 u_1 + \cdots + p_{m-1} u_{m-1}$$

darstellbar zu sein. Sind die Koeffizienten von $u_1, \cdots, u_{m-1}$ lauter unbestimmte Größen, so zerfällt die Resultante von $u_1, \cdots, u_{m-1}$ und einer Linearform l mit den unbestimmten Koeffizienten $y_1, \cdots, y_m$ in $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1}$ Linearformen von $y_1, \cdots, y_m$. Denn einerseits ist es nach Satz II eine $a_1 \cdots a_{m-1}$-fache Bedingung für eine Form F von genügend hoher Ordnung, in der Gestalt

$$F = p_1 u_1 + \cdots + p_{m-1} u_{m-1}$$

darstellbar zu sein. Andererseits muß F für alle Wertsysteme verschwinden, welche $u_1, \cdots, u_{m-1}$ zugleich zu Null machen. Und, wie man aus dem besonderen Falle, daß die $u_1, \cdots, u_{m-1}$ in lauter Linearfaktoren zerfallen, ersehen kann, haben die $u_1, \cdots, u_{m-1}$ für unbestimmte Werte ihrer Koeffizienten zum mindesten

$$a_1 \cdots a_{m-1}$$

distinkte Wertsysteme gemein, für die sie verschwinden. Daher ist $a_1 \cdots a_{m-1}$ die genaue Zahl der gemeinsamen „Nullpunkte“ von

$$u_1, \cdots, u_{m-1}.$$

Es sei

$$\operatorname{Res}(u_1, \cdots, u_{m-1}, l) = A_1 A_2 \cdots A_n$$

für

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1}.$$

Soll F in der Gestalt $p_1 u_1 + \cdots + p_{m-1} u_{m-1}$ darstellbar sein, so muß F jeden der Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_n$ enthalten, und da ersteres nur eine $(n-1)$-fache Bedingung ist, so müssen (nach den Ausführungen von Hesse, Bonnet, Rosanes u. a.) die Potenzen

$$A_1^r, A_2^r, \cdots, A_n^r,$$

wo

$$r = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} - m$$

ist, zum mindesten durch *eine* lineare Bedingung verknüpft sein. Es seien nun $c_1, \cdots, c_n$ solche Konstanten, daß

$$c_1 \cdot A_1^r + c_2 \cdot A_2^r + \cdots + c_n \cdot A_n^r = 0.$$

Alsdann ist, wie man leicht sieht,

$$W = c_1 \frac{A_1^{r+a_m}}{u_m \times A_1^{a_m}} + c_2 \frac{A_2^{r+a_m}}{u_m \times A_2^{a_m}} + \cdots$$

eine Form der Variablen $y_1, \cdots, y_m$ von der Ordnung

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m - m,$$

zu der $u_1, u_2, \cdots, u_m$ sämtlich apolar sind. Um dieselbe von Nennern zu befreien, multiplizieren wir sie mit

$$u_m \times A_1^{a_m} \cdot u_m \times A_2^{a_m} \cdots = \mathrm{Res}\,(u_1, \cdots, u_m).$$

Diese Form ist es, die wir mit Ω identifizieren. Ω ist also eine kontragrediente Form der Ordnung $a_1 + \cdots + a_m - m$, deren Koeffizienten von den unbestimmt gedachten Koeffizienten der $u_1, \cdots, u_m$ rational und ganz abhängen und die z. B. die Koeffizienten von u_m in der Ordnung

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1} - 1$$

enthält. Ω wird die $(a_1 + \cdots + a_m - m)^{\text{te}}$ Potenz einer Linearform A, wenn die Resultante von $u_1, u_2, \cdots, u_m$ verschwindet, wobei A der dann den $u_i = 0$ gemeinsame Punkt ist. Haben aber $u_1, \cdots, u_m$ mehr als *einen* Punkt gemeinsam, oder berühren sich die $u_1 = 0, \cdots, u_m = 0$ in einem gemeinsamen Punkte, so verschwindet Ω identisch.

Ist D die Funktionaldeterminante der $u_1, u_2, \cdots, u_m$, so ist

$$D \times \Omega = \mathrm{Res},$$

wo Res die Resultante von $u_1, u_2, \cdots, u_m$ bezeichnet. Wenn nämlich Res verschwindet, so ist, abgesehen von einem konstanten Faktor,

$$\Omega = A^{a_1 + \cdots + a_m - m};$$

andererseits, wenn $u_1, \cdots, u_m$ in A verschwinden, enthält auch die Funktionaldeterminante D den Punkt A. $D \times \Omega$ ist also immer 0, wenn $\mathrm{Res} = 0$. Nun enthält $D \times \Omega$ die Koeffizienten von u_m z. B. genau zur selben Ordnung wie Res. $D \times \Omega$ ist also nicht bloß teilbar durch Res, sondern ist gleich einem numerischen Multiplum von Res. Daß $D \times \Omega$ nicht identisch verschwindet, ergibt sich sogleich aus dem speziellen Falle

$$u_1 = x_1^{a_1}, \cdots, u_m = x_m^{a_m}, \; D = x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2 - 1} \cdots x_m^{a_m - 1},$$
$$\Omega = y_1^{a_1 - 1} \cdots y_m^{a_m - 1}.$$

Man ersieht übrigens aus obigem, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Relation

$$D = p_1 u_1 + \cdots + p_m u_m$$

das Verschwinden von Res $(u_1, \cdots, u_m)$ ist.

Es wäre wohl möglich, obige nur kurz angedeutete Beziehungen zwischen D, Ω, Res $(u_1, \cdots, u_m)$ und der Gleichung $c_1 \cdot A_1{}^r + \cdots + c_n \cdot A_n{}^r = 0$ etc. bedeutend zu vertiefen. Doch liegen die Ziele dieser Arbeit nach einer so ganz anderen Richtung, daß es unstatthaft erscheint, die erwähnte Linie der Forschung hier noch weiter zu verfolgen.

8. Ein Wertsystem $x_1 : x_2 : \cdots : x_m$ nannten wir einen Punkt. Die Gesamtheit aller solcher Punkte heiße der „Raum" $x_1, \cdots, x_m$. Sind die $x_1 : x_2 : \cdots : x_m$ durch funktionale Beziehungen voneinander abhängig gemacht, etwa dergestalt:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_1, \cdots, x_i), \\ x_{i+2} &= g(x_1, \cdots, x_i), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_m &= h(x_1, \cdots, x_i), \end{aligned}$$

so heißt die Gesamtheit der solchergestalt zusammengefaßten Punkte ein „Gebilde". Für uns genügt es, die $f, g, \cdots, h$ als *algebraische* Funktionen anzunehmen und im übrigen darauf hinzuweisen, daß bei einer Erweiterung des Bereiches, aus dem die $f, g, \cdots, h$ gewählt sind, wenn nur der Resultantenbegriff sich auch entsprechend erweitern läßt, unsere gesamten Ergebnisse sich fast ohne weiteres übertragen lassen auf den größeren Funktionsbereich.

Eine durch die Gleichungen

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \cdots, \; f_h = 0,$$

wo $f_1, \cdots, f_h$ Formen sind, definierte Mannigfaltigkeit von Punkten werden wir ein „algebraisches Gebilde" oder genauer eine „Konfiguration" von algebraischen Gebilden nennen. Es wird nun unsere Aufgabe sein, zu zeigen, daß eine solche Konfiguration sich in eindeutiger Weise darstellen läßt, als eine Nebeneinanderlagerung von algebraischen derartigen Konfigurationen besonderer Art.

9. Jede Form F läßt sich in eindeutiger Weise als Produkt irreduzibler Formen darstellen, wie sich aus den Elementen der Algebra in bekannter einfacher Weise folgern läßt. Es sei F eine irreduzible Form, F' eine zweite. Wir bilden die Resultante von F, F' und $m-2$ Linearformen $l_1, \cdots, l_{m-2}$, deren Koeffizienten durchweg Unbestimmte sind und mit

$$\begin{matrix} y_{1,1}, \cdots, y_{1,m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{m-2,1}, \cdots, y_{m-2,m} \end{matrix}$$

bezeichnet sein mögen. Dieselbe ist eine Form der $y_{i,j}$ und daher darstellbar als Produkt

$$\mathrm{Res}(F, F', l_1, \cdots, l_{m-2}) = G_1^{\alpha_1} \cdot G_2^{\alpha_2} \cdots G_k^{\alpha_k},$$

wo die G_i sämtlich irreduzible Formen der $y_{i,j}$ sind. Es sei Γ irgend eine der irreduziblen Formen G. Alsdann definieren wir einen Bereich von Formen $F, F', F'', \cdots$ durch die Festsetzung, daß er nur und alle die Formen umfassen soll, deren Resultante mit F und $l_1, \cdots, l_{m-2}$ als Form der $y_{i,j}$ aufgefaßt durch Γ teilbar ist. Von diesem Bereich werden wir zeigen, daß das Verschwinden seiner Formen

$$F = 0, F' = 0, F'' = 0, \cdots$$

ein Gebilde definiert, welches niemals auf dem Produkt zweier Formen $A \cdot B$ gelegen sein kann, ohne daß einer der Faktoren A oder B es vollständig enthalten, und das wir daher als irreduzibles algebraisches Gebilde bezeichnen werden.

Die Resultante $\mathrm{Res}(F, F', l, \cdots, l_{m-2})$, als Form der $y_{m-2,1}, \cdots, y_{m-2,m}$ allein betrachtet, läßt sich in ein Produkt von lauter Linearfaktoren zerlegen, dasselbe trifft daher zu für jeden der Teiler der Resultante, also auch für Γ. Schreiben wir

$$\Gamma = (b_1 y_{m-2,1} + b_2 y_{m-2,2} + \cdots)(c_1 y_{m-2,1} + c_2 y_{m-2,2} + \cdots) \cdots,$$

wo die $b_1, b_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots$ irrationale Funktionen der $y_{i,j}$ $(i \leq m-3)$ sein werden, so bestimmen $b_1 : b_2 :$ etc. und $c_1 : c_2 :$ etc. Punkte, die zufolge der Bedeutung der Resultante die Formen $F, F', l_1, l_2, \cdots, l_{m-2}$ zugleich verschwinden machen. Es ist die Gesamtmannigfaltigkeit all dieser Punkte, für alle Wertsysteme der $y_{i,j}$ $(i \leq m-3)$, welche das algebraische Gebilde ausmachen, das der Untersuchung unterliegt. Nennen wir diese Punktmannigfaltigkeit C. Ist F'' irgend eine Form, die die betreffende Mannigfaltigkeit enthält, so muß die Resultante von F, F'', $l_1, l_2, \cdots, l_{m-2}$ den Faktor Γ haben, denn $F = 0$, $F'' = 0$, $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $\cdots, l_{m-2} = 0$ haben zum mindesten jene oben erwähnten Punkte $b_1 : b_2 \cdots$, $c_1 : c_2 \cdots$ etc. gemein. Andererseits, wenn die Resultante von F, F'', l_1, $\cdots, l_{m-2}$ den Faktor Γ hat, so muß F'' die Mannigfaltigkeit C enthalten. Gehört $A \cdot B$ der Menge der Formen an, welche für alle Punkte von C verschwinden, so muß die Resultante von $F, A \cdot B, l_1, l_2, \cdots, l_{m-2}$ den Faktor Γ enthalten. Die betreffende Resultante ist jedoch das Produkt der Resultanten von $F, A, l_1, \cdots, l_{m-2}$ und $F, B, l_1, \cdots, l_{m-2}$ und Γ ist irreduzibel. Mithin muß entweder die Resultante von $F, A, l_1, \cdots, l_{m-2}$ oder die von $F, B, l_1, \cdots, l_{m-2}$ durch Γ teilbar sein, also C entweder in A oder in B enthalten sein.

Die Punktmenge C hat mit $m-3$ beliebig gewählten Linearformen $l_1, \cdots, l_{m-3}$ Punkte gemein, wir sagen daher, C hat die Mannigfaltigkeit $m-2$, oder die Dimension $m-3$ oder die Stufe (oder Rang) 2.

Es sei f eine Form, welche C nicht enthalte. Das „Schnittgebilde" von $f=0$ und C wird dann wie folgt bestimmt.

Wir gehen aus von der Identität

$$\Gamma = (b_1 y_{m-2,1} + b_2 y_{m-2,2} + \cdots)(c_1 y_{m-2,1} + c_2 y_{m-2,2} + \cdots),$$

die wir $\Gamma = L_1 \cdot L_2 \cdots L_u$ schreiben, unter $L_1, \cdots, L_u$ die Linearfaktoren der $y_{m-2,i}$ verstanden. Indem wir nun wieder die Linearinvariante zweier kontragredienter Formen F, Φ derselben Ordnung symbolisch mit $F \times \Phi$ bezeichnen, definieren wir eine Zahl $\Delta = f \times L_1^r \cdot f \times L_2^r \cdots f \times L_u^r$, wo r die Ordnung von f bezeichnet.

Dieselbe ist, wie nach der schon früher benutzten Methode erweisbar, eine Form der unbestimmten Koeffizienten von $l_1, \cdots, l_{m-3}$, und verschwindet nur, wenn C, f und $l_1, \cdots, l_{m-3}$ einen Punkt gemeinsam haben. Δ kann als Form der Koeffizienten von $l_1, \cdots, l_{m-3}$ in seine irreduziblen Teiler zerlegt werden

$$= \Delta_1^{a_1} \Delta_2^{a_2} \cdots$$

Jedem der Δ_i entspricht dann ein „irreduzibles Gebilde" dritter Stufe, die Gesamtheit aller der Punkte, die $C, f, l_1, \cdots, l_{m-4}$ gemein sind, wenn die Koeffizienten von l_{m-3} als Parameter gedeutet werden. Enthält ein Produkt von Formen $A \cdot B$ das Δ_1 entsprechende Punktgebilde, so muß der wie oben konstruierte Schnitt von $C, A \cdot B$ und $l_1, \cdots, l_{m-3}$ den Faktor Δ_1 enthalten.

Und ist umgekehrt jener Schnitt teilbar durch Δ_1, so muß $A \cdot B$ das Δ_1 entsprechende Punktgebilde enthalten. Da nun der Schnitt in den von $C, l_1, \cdots, l_{m-3}, A$ und den von $C, l_1, \cdots, l_{m-3}, B$ zerfällt, Δ_1 aber irreduzibel ist, so muß entweder A oder B das Δ_1 entsprechende Punktgebilde enthalten. Darin beruht der Charakter der Irreduzibilität dieses Gebildes.

Auf diesem Wege kann man weitergehen und den Begriff des irreduziblen Gebildes n^{ter} Stufe definieren.

10. Satz IV. „Die durch das Nullsetzen von beliebig vielen Formen $f_1, f_2, \cdots, f_h$ definierte Punktmannigfaltigkeit läßt sich in eine endliche Zahl von irreduzibeln Gebilden zerspalten und zwar in eindeutiger Weise."

Um dieselben zu finden, zerspalten wir f_1 in seine irreduziblen Teiler und legen diejenigen in eine Gruppe G, welche jede der $f_2, \cdots, f_h$ teilen, die übrigen in eine andere Gruppe G'. Aus G' wählen wir irgend eine Form F, bringen irgend eine der sie nicht enthaltenden Formen f_i mit ihr zum Schnitt und bestimmen die irreduziblen Schnittgebilde von (F, f_i).

Alle diejenigen dieser Gebilde, welche in $f_2, \cdots, f_k$ enthalten sind, fügen wir der Gruppe G zu, aus den übrigen bilden wir eine Gruppe G''. So verfahren wir mit allen verschiedenen Formen von G'. Alsdann entnehmen wir G'' irgend ein Schnittgebilde zweiter Stufe, repräsentiert durch eine Form Φ, und bringen dasselbe zum Schnitt mit irgend einer der Formen f_i, welche es nicht enthält. Die entstehenden irreduziblen Gebilde dritter Stufe fügen wir entweder der Gruppe G zu, nämlich wenn alle f_i sie enthalten, oder einer anderen Gruppe G''', wenn dies nicht der Fall ist, und setzen dies Verfahren fort. Die Gruppe G wird schließlich alle und nur die gemeinsamen Punkte von $f_1 = 0, \cdots, f_k = 0$ enthalten und diese in irreduziblen Gebilden verschiedener Stufen zusammengefaßt. Auch ist klar, daß ein den $f_i = 0$ gemeinsames irreduzibles Gebilde der Gruppe G angehören muß. Somit ist die Behauptung des Satzes IV verifiziert.

Jedem irreduziblen Punktgebilde entsprach eine irreduzible Form von Unbestimmten $y_{i,j}$. Es ist klar, daß an Stelle der Linearformen l_i auch Formen höherer Ordnung mit unbestimmten Koeffizienten hätten in derselben Weise zur Verwendung gelangen können, die Schlüsse wären dadurch in keiner Weise beeinflußt worden. Dies ist wichtig, weil in Kap. IV eine Algebra definiert wird, die derartiger Formen höherer Ordnung als Hilfsformen wirklich bedarf. Andrerseits hätten wir unser Ziel auch erreichen können, indem wir auf die Variablen $x_1, \cdots, x_m$ eine lineare Transformation mit unbestimmten Koeffizienten $y_{i,j}$ ausführten und die Resultantenbildungen der Formen f_i in bezug auf den „Raum" einiger der neuen Variablen x_i benutzten; diese Methode ist nicht wesentlich von der hier benutzten verschieden, denn es macht keinen Unterschied, ob die obige Transformation erst ausgeführt wird und nachher einige der Variablen eliminiert werden, oder ob die Elimination ausgedehnt wird auf alle Variablen, nachdem lineare Beziehungen zwischen denselben statuiert sind. Die letzterwähnte Methode ist im Werke von J. König im Anschluß an die Kroneckersche Eliminationsmethode streng durchgeführt, weswegen hier darauf verwiesen sein mag.

11. Die Erwägungen, welche zu obigen Resultanten führten, lassen sich wiederholen, wenn von den Koeffizienten aller vorkommenden Formen die Ganzzahligkeit gefordert wird. Denn auch ganzzahlige Formen sind nur auf *eine* Weise in irreduzible Faktoren zerlegbar. Der Charakter des Irreduzibilitätsbegriffes ändert sich allerdings beim Übergang von Formen mit beliebig gegebenen Koeffizienten zu ganzzahligen Formen, da irreduzible ganzzahlige Formen unter dem Gesichtspunkte der Algebra mit beliebigen Koeffizienten reduzibel sein können. Dies ändert aber nichts an den Schlüssen des Satzes IV.

Die verschiedenen Teiler einer im Bereiche der ganzen Zahlen irreduziblen Form heißen „konjugiert". Nennen wir die Gesamtheit der Punkte, die eine Anzahl von ganzzahligen Formen $f_1, \cdots, f_k$ zu Null machen, die ganzzahlige Konfiguration $f_1 = 0, \cdots, f_k = 0$, so können wir sagen:

Satz V. „Jede ganzzahlige Konfiguration zerfällt in eine endliche Anzahl konjugierter irreduzibler Gebilde."

Oder wenn wir das Produkt von konjugierten irreduziblen Gebilden im Sinne der Algebra der ganzen Zahlen als irreduzibel auffassen:

„Jede ganzzahlige Konfiguration zerfällt in eine endliche Anzahl ganzzahliger irreduzibler Gebilde."

Kapitel II.

Über Moduln und Ideale im Raume $x_1, \cdots, x_m$.

12. Ein Bereich von Formen, dadurch gekennzeichnet, daß, wenn p und q ihm angehören und a und b beliebige Formen sind, auch $ap + bq$ ihm angehört, heißt ein *Modul.*

Ein Bereich von ganzzahligen Formen, dadurch gekennzeichnet, daß, wenn p und q ihm angehören und a und b beliebige ganzzahlige Formen sind, auch $ap + bq$ ihm angehört, heißt ein *Ideal.*

Die beiden Begriffe, welche wir soeben definiert haben, haben eine sehr langsame Entwicklung durchgemacht, und ihre hohe Bedeutung ist erst etwa in den letzten 40 Jahren erkannt worden. Im Keime ist der Idealbegriff bereits in den Schriften von Gauß enthalten. Gauß führte in seinem Werke „Disquisitiones Arithmeticae" die folgende Notation ein: $a \equiv b \bmod. c$, wo a, b und c ganze Zahlen bedeuten, um auszudrücken, daß $a - b$ durch c ohne Rest teilbar sei. Auch wenn a und b ganzzahlige Formen von Unbestimmten $x_1, \cdots, x_m$ bedeuten, benutzte Gauß die obige Schreibweise, sobald jeder Koeffizient von $a - b$ durch c ohne Rest teilbar war. Gauß und nach ihm Schönemann, Galois und neuerdings Hensel zeigten in Untersuchungen, welche sich auf alle Teile der Algebra und algebraischen Funktionentheorie beziehen, daß das Zeichen $\equiv$, wie es oben definiert war, viele, und wenn c eine Primzahl ist, alle algebraischen Eigenschaften des Gleichheitszeichens $=$ hat. Von den tiefsinnigen Untersuchungen von Galois und denen von Hensel können und wollen wir hier absehen, doch sind die Ideenbildungen von Schönemann, wie er sie in Crelles Journal veröffentlichte, für unseren Zweck von Bedeutung. Wenn c eine Primzahl ist und zwei modulo c kongruente Zahlen oder Formen als identisch angesehen werden, so gelten für die Gesamtheit aller modulo c inkongruenten Zahlen und Formen das assoziative und distributive Gesetz der Addition und Multiplikation, ferner gilt

$$a_1(a_2 + a_3) \equiv a_1 a_2 + a_1 a_3,$$

sowie die Eigenschaft der Null, nur dann einem Produkt gleich sein zu können, wenn einer der Faktoren ihr gleich ist. Da nun die Algebra nur auf den angeführten Gesetzen basiert, so kann man, ohne Irrtümer zu begehen, in einer Kette irgendwelcher algebraischen Identitäten oder Operationen das Zeichen $=$ überall durch $\equiv$ mod. c ersetzen.

Diesen wichtigen Grundsatz wollen wir das Prinzip von Schönemann nennen.

Das Wort „Ideal", wiewohl noch nicht der Begriff, wie er hier bestimmt ist, entstammt den schönen Untersuchungen von Kummer über algebraische Zahlen. Zu der Zeit, als Dirichlet, Eisenstein und Kummer an der Berliner Universität gemeinsam wirkten, entstanden viele der Untersuchungen, die in Dedekinds Ausgabe von Dirichlets Zahlentheorie durchgeführt sind. Danach werden Zahlen, welche einer ganzzahligen Gleichung

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

genügen, ganze algebraische Zahlen genannt, und, wenn α einer irreduziblen Gleichung n^{ten} Grades genügt, alle Zahlen der Gestalt

$$a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_{n-1} \alpha^{n-1},$$

wo die a_i rational, zum *Körper* (α) zusammengefaßt. Die verschiedenen Wurzeln einer und derselben irreduziblen Gleichung nennt man „konjugierte" Zahlen, das Produkt einer Zahl w mit ihren konjugierten die Norm derselben $N(w)$. Dirichlets Untersuchungen über die Einheiten eines gegebenen Körpers (α), d. h. diejenigen ganzen algebraischen Zahlen von (α), deren Norm $= \pm 1$ ist, sind klassisch geworden und gehören mit zu den schönsten der ganzen Mathematik. Kummer versuchte Jahre hindurch, die Teilbarkeitsgesetze der gewöhnlichen ganzen Zahlen auf diejenigen eines Körpers auszudehnen, doch lange Zeit ohne Erfolg, bis ihm die Lösung des Problems schließlich mit Hilfe der Konzeption der Idealzahlen gelang. Sind w_1, w_2 und $\frac{w_1}{w_2}$ *ganze* Zahlen des Körpers (α), so nennt er w_1 teilbar durch w_2. Ist sowohl $\frac{w_1}{w_2}$ wie $\frac{w_2}{w_1}$ ganz, so sind w_1 und w_2 für die Teilbarkeitsgesetze äquivalent. Da dann sowohl $N\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$ wie $N\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$ eine ganze Zahl, so muß $N(w_1) = \pm N(w_2)$, $\frac{w_1}{w_2}$ also eine Einheit sein. Eine ganze Zahl des Körpers (α), die nur durch sich selbst oder die Einheiten teilbar ist, könnte man eine Primzahl von (α) nennen, doch fand Kummer, daß ein Produkt von solchen Primgrößen sehr wohl durch andere solche Primgrößen teibar sein könne, die wesentliche Bedeutung der Primzahl bei diesen Primgrößen also verloren ging. Darum erfand er die *„Primideale"*.

Wenn eine Gleichung existiert

$$\beta_1\beta_2\cdots = \gamma_1\gamma_2\cdots,$$

wo die β_i und γ_i verschiedene Primgrößen in (α), so nahm Kummer Idealzahlen $(\beta_1, \gamma_1\gamma_2\cdots)$ und $(\beta_2, \gamma_1\gamma_2\cdots)$ an, welche sowohl β_1 wie $\gamma_1\gamma_2\cdots$ resp. β_2 wie $\gamma_1\gamma_2\cdots$ teilen. Die Idealzahl (β, γ) teilt jede Zahl $u\beta + v\gamma$, wo u, v ganze Zahlen von (α), und nur diese. Das Ideal (β, γ) teilt (δ, ε), wenn jede durch (δ, ε) teilbare Zahl durch (β, γ) teilbar ist. Ein Ideal, welches eine Einheit teilt, wird ausgeschieden, oder selbst Einheit. Ein Primideal ist ein solches, welches nur durch sich oder Einheiten teilbar ist. Alsdann ist in (α) jede ganze Zahl, wie auch jede Idealzahl, abgesehen von Einheiten als Produkt von Primidealen eindeutig bestimmt. Dies ist im Kern die Theorie von Kummer.

Ein interessanter Hilfsbegriff in Kummers Theorie ist der der „Äquivalenz" von Idealen. Danach sind zwei Ideale (β, γ), (δ, ε) äquivalent, wenn zwei ganze Zahlen λ, μ in (α) existieren, derart, daß

$$(\lambda\beta, \lambda\gamma) = (\mu\delta, \mu\varepsilon),$$

d. h. daß die Gesamtheit der Zahlen

$$\lambda\beta u + \lambda\gamma v$$

identisch ist mit der Gesamtheit der Zahlen

$$\mu\delta u + \mu\varepsilon v,$$

unter u, v beliebige ganze Zahlen in (α) verstanden.

Äquivalente Ideale faßte Kummer in einer „Idealklasse" zusammen und nannte diejenige Klasse, der die Einheit angehört, die Hauptklasse. Es stellte sich heraus, daß in jedem Körper (α) die Anzahl der verschiedenen Klassen endlich sei.

13. Die Kummersche Theorie wurde von Dedekind in folgerichtiger Weise nach jeder Richtung hin vervollkommnet. Der Begriff der Idealzahl, so wie ihn Kummer bestimmt hatte, schien noch etwas in der Luft zu schweben. Darum gab ihm Dedekind ein greifbares Substrat, indem er ein Ideal

$$(\beta, \gamma, \cdots, \lambda)$$

als die Gesamtheit der Zahlen der Gestalt

$$\beta u + \gamma v + \cdots + \lambda t$$

definierte, unter $u, v, \cdots$ ganze Zahlen verstanden, und nun an dieser Konzeption Kummers Ergebnisse nachwies. Er wandte dieselbe Methode auf die Theorie der algebraischen Funktionen und deren Integrale mit Erfolg an. Er führte den „Modul"-Begriff ein, indem er einen Modul $(\beta, \cdots, \lambda)$ als die Gesamtheit der Zahlen der Gestalt $\beta u + \gamma v + \cdots + \lambda t$

bestimmte, unter $u, v, \cdots, t$ rationale Zahlen verstanden. Er rechnete mit diesen Konzeptionen wie mit Zahlen, damit die Unabhängigkeit und Einheitlichkeit der eingeführten Begriffe drastisch vor Augen führend.

Dedekinds Zeitgenosse Kronecker realisierte den Kummerschen Idealbegriff auf ganz andere Weise. Die Idealzahl (β, γ) ersetzte er durch

$$N(\beta u + \gamma v) = k \cdot f(u, v),$$

unter $f(u, v)$ eine primitive homogene Form der Unbestimmten u, v, unter k eine ganze Zahl verstanden. Weber hat in einem neuerdings erschienenen Werke*) die Konsequenzen dieser Kroneckerschen Theorie gezogen. Auch J. König lehnt sich in seinem 1903 veröffentlichten ausgezeichneten Buche „Einleitung in die Theorie der algebraischen Größen" an die Ideen von Kronecker an. Der Modulbegriff erscheint bei Kronecker in der Gestalt von „Divisoren-Systemen". Um auszudrücken, daß eine Form F in der Gestalt

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_k u_k$$

darstellbar sei, benutzt Kronecker die Schreibweise

$$F \equiv 0 \bmod. (u_1, u_2, \cdots, u_k).$$

Dabei sind die u_i, p_i und F Polynome von Variablen und Unbestimmten in einem vorgegebenen „Rationalitätsbereiche" oder „Gattungsbereiche" (s. Festschrift zu Kummers Doktorjubiläum, Crelles Journal 92).

Die Begründung der Kummer-Dedekindschen Idealtheorie wurde neuerdings von Hurwitz in einfacher Weise erledigt. In seiner Abhandlung „Über die Theorie der Ideale", Gött. Nachrichten 1894, verfährt er wie folgt. In einem Körper K seien $\alpha, \cdots, \lambda$ bestimmte Zahlen, dann ist das Ideal

$$J = (\alpha, \cdots, \lambda),$$

die Gesamtheit der Zahlen

$$\alpha u + \cdots + \lambda t.$$

Ein „Hauptideal" besteht aus den Multipla einer einzigen ganzen Zahl von K. Ein Ideal J „teilt" ein anderes, J', wenn es alle Zahlen von J' enthält. Die Gesamtheit der ganzen Zahlen des Körpers K ist selbst als Ideal darstellbar, denn es läßt sich zeigen, daß es möglich ist, ganze Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_j$ in K zu finden, so daß jede ganze Zahl in K darstellbar ist in der Gestalt

$$\omega_1 u_1 + \cdots + \omega_j u_j,$$

unter $u_1, \cdots, u_j$ ganze rationale Zahlen verstanden. Das Ideal $(\omega_1, \cdots, \omega_j)$ heißt die „Einheit", und wird mit 1 bezeichnet. Die Einheit teilt alle Ideale. Das „Produkt" zweier Ideale

*) Lehrbuch der Algebra, Bd. 2.

$$J = (\alpha, \cdots, \lambda),$$
$$J' = (\alpha', \cdots, \mu')$$

wird JJ' geschrieben und ist

$$= (\alpha\alpha', \cdots, \lambda\mu').$$

Dasselbe ist offenbar teilbar durch J wie durch J'. Nach diesen Definitionen beweist Hurwitz

1) daß jedes Ideal J durch Multiplikation mit einem andern passend gewählten J' zu einem Hauptideal (a) gemacht werden kann, wo a eine rationale ganze Zahl; 2) daß irgend eine gegebene ganze rationale Zahl a nur zu einer *endlichen* Zahl von Idealen von K gehört; 3) daß aus einer Idealgleichung

$$J_1 J_2 = J_1 J_3$$

folgt

$$J_2 = J_3.$$

Denn ist J_1 so gewählt, daß $J_1 J' = a$ eine ganze rationale Zahl, so ergibt sich durch Multiplikation mit $J' : aJ_2 = aJ_3$, und hier läßt sich jede Seite offenbar durch a dividieren; 4) daß, wenn H ein Teiler von J, ein Ideal L existiert, das der Beziehung genügt

$$J = HL.$$

Wir brauchen, um L so zu bestimmen, nur H' so zu wählen, daß $HH' = (a)$. Alsdann ist jede Zahl von JH' teilbar durch a, und durch Ausführung der Division kommt

$$JH' = a \cdot L = HL \cdot H'$$

und nach 3)

$$J = HL.$$

5) Ein Ideal hat nur eine endliche Zahl von Teilern. Denn wenn $JJ' = (a)$, so gehört a zu jedem Teiler von J, die also nach 2) nur in endlicher Zahl vorhanden sein können. Aus diesen Sätzen erschließt Hurwitz genau nach der Methode der Theorie der ganzen rationalen Zahlen die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Ideals

$$J = (p_1^{n_1}, \cdots, p_j^{n_j})$$

in ein Produkt von „Primidealen". Der einzige einigermaßen verwickelte Nachweis der Sätze 1) bis 5) ist der des Satzes 1). Hurwitz erbringt ihn nach zwei Methoden (die zweite findet sich in den Göttinger Nachrichten Okt. 1895 veröffentlicht).

Von den Anwendungen der Kummerschen Idealtheorie seien hier diejenige von Kummer zum Beweise der Unmöglichkeit der ganzzahligen Auflösung der Beziehung $x^p + y^p = z^p$ (außer der trivialen $x = 0$, $y = z$) für eine unendliche Anzahl von Zahlen p, sowie diejenige von Hurwitz über die Gruppe von linearen Substitutionen, deren Koeffizienten ganze Zahlen des Körpers K sind und deren Determinante $= 1$ ist, erwähnt.

14. Von weittragendster Bedeutung für die Entwicklung des Modulbegriffes waren die Schriften von Salmon, welche um das Jahr 1850 entstanden und außerordentlich reich waren an anregenden Gedanken. In seinen geometrisch-algebraischen Untersuchungen benutzte Salmon sehr häufig Formen der Gestalt:

$$au + bv + \cdots + cw,$$

wenn $u, v, \cdots, w$ gegebene, $a, b, \cdots, c$ unbestimmte Formen bezeichnen. Zu seiner Theorie der Raumkurven macht Cayley eine Bemerkung, welche einige Jahrzehnte später mit die Veranlassung gab zu dem schönen Theorem I von Hilbert. Es heißt dort, daß es möglich sein müsse, Formen $u, v, \cdots, w$, die eine vorgegebene Raumkurve enthalten, so auszuwählen, daß eine beliebige sie enthaltende Oberfläche F in der Gestalt

$$F = au + bv + \cdots + cw$$

ausdrückbar sein müsse. Salmon sowohl wie Cayley benutzen einen erst viel später, 1902, von Severi bewiesenen Satz, daß eine Form F, welche in den Punkten des „vollständigen Schnittes" eines Formensystems $u, v, \cdots, w$ (dessen Oskulante nicht verschwindet) verschwindet, darstellbar sein müsse durch $au + \cdots$. Diese Vermutung spielt besonders in den Untersuchungen über „the order of restricted systems of equations", in welchen viele merkwürdige Tatsachen zum erstenmal zum Vorschein kamen, eine große Rolle. Man hat Salmons Werk unterschätzt, weil seinen Methoden die Strenge der Beweisführung abging. Wie groß dieser Fehler auch sein mag, so darf man niemals die Bedeutung Salmons als des großen Problemstellers und Wegweisers vergessen.

15. Das Verdienst, die Mittelpunktstellung, welche die Methode der Modulsysteme in allen Fragen der Algebra einnimmt, klar und scharf erfaßt und erwiesen zu haben, gebührt M. Noether. In seinem „Fundamentaltheorem" schrieb er der weiteren Entwicklung die Bahnen vor, welche sie fortan wandeln mußte. Die einleitenden Worte, mit welchen Noether die Veröffentlichung seines Fundamentaltheorems in den Göttinger Nachrichten 1872 und den Math. Ann. Bd. 6 begleitete, sind noch heute von Interesse. Die Tendenz seiner Untersuchungen, so sagte er, sei, eine Lücke auszufüllen, welche in einer Reihe von Arbeiten über Geometrie und Funktionentheorie zu finden sei. Der Satz, daß die Gleichung einer ebenen algebraischen Kurve $f = 0$, welche das vollständige Schnittpunktsystem zweier anderer solcher Kurven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ enthält, notwendig von der Gestalt

$$0 = f = A\varphi + B\psi,$$

unter A, B Polynome verstanden, sei, hört auf gültig zu sein, wenn das System von Werten, für welches $\varphi = 0, \psi = 0$, mehrfache Punkte enthält. Nichtsdestoweniger hat man von dem erweiterten Satze Gebrauch gemacht, ohne die notwendigen Voraussetzungen seiner Gültigkeit zu untersuchen. — Die von Noether konstatierte Lücke wurde durch Angabe seines Fundamentaltheorems vollständig ausgefüllt. Die notwendigen Beziehungen, welche eine um einen Schnittpunkt α, β von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ entwickelte Potenzreihe F

$$F = \sum_{0,0}^{\infty,\infty} {}_{n,m}\, c_{n,m}(x-\alpha)^n (y-\beta)^m$$

erfüllen muß, damit bis zu Termen beliebig hoher Ordnungen n, m Potenzreihen

$$a = \sum_{0,0}^{\infty,\infty} {}_{n,m}\, a_{n,m}(x-\alpha)^n (y-\beta)^m,$$

$$b = \sum_{0,0}^{\infty,\infty} {}_{n,m}\, b_{n,m}(x-\alpha)^n (y-\beta)^m$$

sich der Relation $F = a\varphi + b\psi$ gemäß finden lassen, mögen die „Koinzidenzrelationen“ von (φ, ψ) im Punkte (α, β) genannt werden. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ein Polynom f, in der Gestalt $f = A\varphi + B\psi$ darstellbar zu sein, wo A und B Polynome sind, beruht dann darin, daß f die Koinzidenzrelationen von (φ, ψ) in allen Schnittpunkten von $\varphi = 0, \ \psi = 0$ erfülle. Dies ist das Fundamentaltheorem. Dasselbe hat zu einer ausgedehnten Literatur Veranlassung gegeben. Voß, Stickelberger, Noether (1887), Bertini, Noether (1889 und 1892), Brill, Baker, Scott behandelten das Theorem in den Mathematischen Annalen, F. Severi bewies eine Ausdehnung des Theorems auf den vollständigen Schnitt einer Anzahl von Formen für einen speziellen Fall, wie bereits früher angegeben (in den „Rendiconti della R. Accademia dei Lincei“, Rom 1902). J. König in seinem 1903 in deutscher Ausgabe, 1902 in ungarischer Sprache erschienenen Werke „Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen“ bewies die Verallgemeinerung des Satzes auf m Polynome von m Variablen, die im Endlichen eine endliche Zahl von Schnittpunkten haben („Der verallgemeinerte Noethersche Satz“ findet sich auf S. 389 des Buches). Eine ganze Reihe von Autoren untersuchten die zahlentheoretischen Analoga des Noetherschen Satzes, z. B. Hensel in Crelle 1897 und 1898 „Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reduzierte Form“, Hancock in Crelle 1898 und 1900 „Canonical forms for the representation of Kroneckers modular systems“, „On the reduction of

Kronecker's modular systems whose elements are functions of two and three variables", Landsberg in Schriften, die in den Göttinger Nachrichten, wie auch der Encyklopädie der Math. Wissenschaften erschienen sind.

Nach einer andern Richtung ging Hilbert vor, der in einer 1893 in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Arbeit nachwies, daß, wenn $F_1, \cdots, F_h$ beliebige Formen und F eine Form bedeutet, die in allen $F_1 = 0, \cdots, F_h = 0$ gemeinsamen Punkten verschwindet, eine Zahl k existieren muß, so daß

$$F^k = A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h,$$

wo $A_1, \cdots, A_h$ Formen.

16. Die Anwendungen, welche Noether von seinem Satze machte in bezug auf die Theorie der Berührung von Kurven, die der algebraischen Funktionen einer Variablen (Brill-Noether), sowie die der Abelschen Integrale, hatten die Bedeutung des Modulbegriffes in ein helles Licht gerückt, aber es dauerte doch noch fast 20 Jahre, bis der nächste bedeutende Fortschritt sich vollzog. Derselbe ist D. Hilbert zu verdanken. Seine in den Math. Ann. Bd. 36, 1890, veröffentlichten Theoreme I—IV sind grundlegend für eine Theorie der Moduln. Die Theoreme haben den folgenden Inhalt.

Theorem I: Ist $F_1, \cdots, F_k, \cdots$ eine beliebig vorgegebene Folge von Formen, so läßt sich immer eine ganze Zahl h angeben, so daß für jeden Index $k > h$ Formen $p_1, \cdots, p_h$ existieren, welche die Beziehung $F_k = p_1 F_1 + \cdots + p_h F_h$ erfüllen.

Theorem II: Ist $F_1, \cdots, F_k, \cdots$ eine beliebig vorgegebene Folge ganzzahliger Formen, so läßt sich immer eine ganze Zahl h angeben, so daß für jeden Index $k > h$ ganzzahlige Formen $p_1, \cdots, p_h$ existieren, die die Beziehung $F_k = p_1 F_1 + \cdots + p_h F_h$ erfüllen.

Theorem III: Es seien $f_1, \cdots, f_h$ gegebene Formen.

Alle Lösungen der Gleichung

$$0 = X_1 f_1 + \cdots + X_h f_h$$

in Formen $X_1, \cdots, X_h$ sind dann darstellbar in der Gestalt

$$X_i = Y_1 A_{1,i} + Y_2 A_{2,i} + \cdots + Y_k A_{k,i},$$

wo $A_{j,i}$ für alle Indexpaare $j, i\,(j = 1, \cdots, k;\ i = 1, \cdots, h)$ berechenbare Formen, wo $Y_1, \cdots, Y_k$ beliebige Formen sind und wo die weitere Gleichung $X_i = 0$ keine Lösung $Y_1, \cdots, Y_k$ zuläßt, in der irgend eines der Y_i gleich 1 wäre.

Diese Gestalt der Lösungen sei „die erste Syzygie" von $(f_1, \cdots, f_h)$ genannt. Die Gleichungen $X_i = 0$ führen dann auf ein System von Lösungen $Y_i = Z_1 B_{1,i} + Z_2 B_{2,i} + \cdots + Z_l B_{l,i}$, in welchem die B und Z_i die den A und Y_i auferlegten Bedingungen analogen Beschränkungen erfahren. Dieses letztere System von Lösungen sei „die zweite Syzygie" von $(f_1, \cdots, f_h)$ genannt. Wird die dritte, vierte, $\cdots$ Syzygie von $(f_1, \cdots, f_h)$ genau ebenso definiert, so bricht die Reihe derselben ab. Die Kette der Syzygien jedes Formensystems $(f_1, \cdots, f_h)$ ist endlich.

Theorem IV: Ist $f_1, \cdots, f_h$ die Basis eines Moduls, so ist die Anzahl der Bedingungen, die einer Form R^{ter} Ordnung auferlegt werden, wenn von ihr die Zugehörigkeit zum Modul $(f_1, \cdots, f_h)$ gefordert wird, eine Funktion von R, welche für genügend große Werte von R durch ein Polynom in R dargestellt wird.

17. Die Schriften, welche sich mit der Weiterentwicklung der Kummer-Dedekindschen Idealtheorie befassen, sind bereits zu zahlreich, als daß hier eine vollständige Liste derselben zu geben versucht werden könnte. Übrigens sind die in dieser Theorie behandelten Probleme wesentlich von den allgemeineren in dieser Schrift behandelten verschieden.

Von allem, was vorhergeht, benutzen wir für die nun folgende Deduktion nur die Definition, welche wir voraufgeschickt haben, und die im wesentlichen von Dedekind und Hilbert stammt, die Schreibweise von Gauß-Kronecker, das Prinzip von Schönemann und die Theoreme I und II von Hilbert. Der Beweis dieser Theoreme beruht auf einem Divisionsverfahren und auf einem Induktionsschlusse, ist somit ganz im Rahmen der elementaren Mittel zu erledigen, welche für unser Kapitel I in Anwendung kamen.

Theorem I schließt in sich ein, daß, wenn M irgend ein Modul ist, sich dann immer eine Anzahl Formen

$$u_1, u_2, \cdots, u_h$$

angeben lassen, so daß jede Form des Moduls M darstellbar ist in der Gestalt

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_h u_h,$$

wo die $p_1, \cdots, p_h$ Formen sind. Denn man brauchte ja nur alle linearunabhängigen Formen R^{ter} Ordnung des Moduls M für alle sukzessiven Werte von R aufschreiben und dann das Theorem I auf diese Folge anzuwenden. Man kann daher jeden Modul als die Gesamtheit der Formen, die $\equiv 0$ nach einem gewissen Divisorensystem sind, auffassen, wie umgekehrt jede solche Gesamtheit von Formen auch einen Modul bildet. Um anzudeuten, daß eine Form F einem Modul M angehört, schreiben wir daher

$$F \equiv 0 \text{ mod. } M$$

und nennen ein System von Formen $u_1, \cdots, u_h$, welches für M die oben angegebene Eigenschaft erfüllt, ein Fundamentalsystem oder eine Basis von M.

Sind M und N zwei Moduln, so bilden die Gesamtheit der Formen, die sowohl M wie N angehören, wieder einen Modul. Denn gehören p und q M und N an, so gehört $ap + bq$ sowohl M wie N an, die Gesamtheit der Formen, welche sowohl M wie N angehören, hat daher die Eigenschaft, welche einen Modul definiert. Dieser durch M und N eindeutig bestimmte Modul wird von uns

$$[M, N]$$

geschrieben und „kleinstes Vielfaches" von M, N genannt werden.

Die Formen, welche als Summe zweier andern darstellbar sind, von denen die eine M, die andere N angehört, bilden einen Modul. Denn ist

$$p = p' + p'',$$
$$q = q' + q'',$$

wo

$$p' \equiv 0 \text{ mod. } M, \quad p'' \equiv 0 \text{ mod. } N,$$
$$q' \equiv 0 \text{ mod. } M, \quad q'' \equiv 0 \text{ mod. } N,$$

so ist

$$ap + bq = (ap' + bq') + (ap'' + bq''),$$

wo

$$ap' + bq' \equiv 0 \text{ mod. } M,$$
$$ap'' + bq'' \equiv 0 \text{ mod. } N,$$

$ap + bq$ genügt also auch der Forderung.

Dieser durch M und N eindeutig bestimmte Modul wird (M, N) geschrieben und „größter gemeinschaftlicher Teiler" von M und N genannt werden.

Sind $M_1, M_2, \cdots, M_k$ eine Anzahl von Moduln, so ist

$$[M_1, M_2, \cdots, M_k] = [[M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}], M_k],$$
$$(M_1, M_2, \cdots, M_k) = ((M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}), M_k).$$

Nach dieser Definition ist es klar, daß in bezug auf die Operation $[\cdots]$ wie $(\cdots)$ das assoziative wie distributive Gesetz Geltung hat.

Es sei $u_1, u_2, \cdots, u_h$ eine Basis von M. Die Formen, welche mit irgend einem der u_i multipliziert Formen ergeben, die N angehören, bilden einen Modul.

Denn ist

$$p \cdot u_1 \equiv 0 \text{ mod. } N, \quad q \cdot u_1 \equiv 0 \text{ mod. } N,$$
$$p \cdot u_2 \equiv 0 \text{ mod. } N, \quad q \cdot u_2 \equiv 0 \text{ mod. } N,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$p \cdot u_h \equiv 0 \text{ mod. } N, \quad q \cdot u_h \equiv 0 \text{ mod. } N,$$

so ist auch $(ap + bq)u_i = 0$ mod. N für jeden Index i.

Der Modul, der soeben definiert ist, ist von der besonderen Auswahl der Basis $u_1, \cdots, u_h$ ganz unabhängig und hängt nur von M und N ab, die sie eindeutig bestimmen. Denn aus obigen Kongruenzen folgt, daß, wenn f dem eben definierten Modul angehört, und

$$F = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_h u_h$$

irgend eine Form von M ist, dann immer

$$f \cdot F \equiv 0 \text{ mod. } N.$$

Der Modul solcher Formen f wird $\frac{N}{M}$ geschrieben und „Residualmodul" von M in bezug auf N genannt werden.

Die Formen R^{ter} Ordnung, welche einem Modul M angehören, bilden eine „Involution", denn mit F_1 und F_2 gehört immer $c_1F_1 + c_2F_2$ zu diesem Formenbereiche, wo c_1, c_2 unbestimte Konstante bedeuten. Die Mannigfaltigkeit dieser Involution wird

$$\varphi(R) - H(M)(R)$$

geschrieben werden, wo $\varphi(R)$ die in Kap. I statuierte Bedeutung hat. $H(M)(R)$ wird „die Hilbertsche Funktion von M" genannt werden. Die Eigenschaften, welche Hilbert von ihr bewiesen hat, setzen wir nicht als bekannt voraus, so daß wir von ihr vorläufig weiter nichts wissen, als daß für jeden Wert von R ist: $H(M)(R) \leqq \varphi(R)$.

Es ist immer

$$H[M, N](R) + H(M, N)(R) = HM(R) + HN(R).$$

Diese Beziehung stammt von Hilbert und wird von ihm wie folgt bewiesen. Es sei

$$u_1, \cdots, u_h \text{ eine Basis von } M,$$
$$v_1, \cdots, v_k \text{ eine solche von } N.$$

Alsdann ist $u_1, \cdots, u_h, v_1, \cdots, v_k$ eine Basis von (M, N), da jede Form f, die zu (M, N) gehört, sich als Summe zweier Formen, die zu M und N gehören, schreiben lassen muß. Die Mannigfaltigkeit der Involution von Formen der Ordnung R, die sich schreiben lassen:

$$p_1u_1 + \cdots + p_hu_h + q_1v_1 + \cdots + q_kv_k,$$

ist also einerseits $= \varphi(R) - H(M, N)(R)$, andererseits gleich der Mannigfaltigkeit der Involution von Formen, die sich

$$p_1u_1 + \cdots + p_hu_h$$

schreiben lassen, vermehrt um die Mannigfaltigkeit der Formen, die sich

$$q_1v_1 + \cdots + q_kv_k$$

schreiben lassen, und vermindert um die Anzahl der linear-dependenten Relationen zwischen Formen dieser beiden Involutionen, d. h. die Mannigfaltigkeit der Involution von Formen der Ordnung R, die sowohl $\equiv 0$ mod. M, wie $\equiv 0$ mod. N sind, also $[M, N]$ angehören.

Damit zeigt sich, daß

$$\varphi(R) - H(M,N)(R) = \varphi(R) - HM(R) + \varphi(R) - HN(R)$$
$$- \{\varphi(R) - H[M, N](R)\},$$

was die Behauptung verifiziert.

Wir fügen den obigen Definitionen noch die weiteren zu:

Ein Modul M, welcher die Eigenschaft hat, daß aus einer Beziehung $p \cdot q \equiv 0 \bmod. M$, wo p, q Formen sind, notwendig folgt, daß entweder

$$p \equiv 0 \bmod. M$$

oder

$$q \equiv 0 \bmod. M,$$

heißt ein „Primmodul".

Z. B. bildet die Gesamtheit der Formen, die in einem gegebenen Punkte verschwinden, elnen Primmodul.

Schließlich wollen wir eine Form p, die die Eigenschaft hat, daß aus

$$p \cdot f \equiv 0 \bmod. M$$

unbedingt folgt

$$f \equiv 0 \bmod. M,$$

„relativ prim in bezug auf M" nennen.

Ist P ein Primmodul, so ist jede Form entweder $\equiv 0 \bmod. P$ oder relativ prim zu P.

Der Residualmodul von (p), der Multipla einer Form p, in bezug auf den Modul (P) ist immer mit p identisch, wenn p nicht $\equiv 0 \bmod. P$.

18. Wir gehen nun zu einer Reihenfolge von Schlüssen über, ausgehend von

Satz VI. „Wenn die Formen eines Moduls M keinen gemeinsamen Nullpunkt haben, so ist für genügend große Werte von R

$$HM(R) = 0."$$

Um dies zu erweisen, wählen wir aus M irgend eine Form f_1 aus, dann eine zweite f_2, welche mit f_1 keinen gemeinsamen Teiler hat. Eine solche existiert, da ja nicht *alle* Formen von M einen gemeinsamen Teiler haben können, der Voraussetzung nach. Wir wählen dann eine dritte f_3, deren Resultante mit f_1 und f_2 nicht verschwindet. Auch solche muß es geben, da kein Teil des Schnittes von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ auf jeder der Formen von M liegen kann, der gemachten Voraussetzung nach. So fortfahrend erhalten wir schließlich m Formen $f_1, \cdots, f_m$, welche sämtlich M angehören und deren Resultante nicht verschwindet.

Nun gehört jede Form der Gestalt

$$p_1 f_1 + \cdots + p_m f_m$$

M an, nach Satz II und III also jede Form einer genügend hohen Ordnung überhaupt. Damit ist Satz VI evident.

19. Ist $f_1, f_2, \cdots, f_k$ eine Basis eines Moduls M, so verschwinden die Formen von M in den Punkten der Konfiguration und nur in diesen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \cdots.$$

Wenn die Formen von M Gebilde der Mannigfaltigkeit h, jedoch keines von höherer Mannigfaltigkeit als h enthalten, so sagen wir, der Modul M habe die Mannigfaltigkeit h.

Wir definieren nun den Hauptbegriff der Modultheorie. Es sei P ein Primmodul der Mannigfaltigkeit h und Q ein Modul von höchstens der Mannigfaltigkeit h, welcher die Eigenschaft hat, daß aus einer Beziehung

$$A \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } Q,$$

in welcher A eine gegebene Form, die *nicht*

$$\equiv 0 \text{ mod. } P,$$

immer folgt

$$X \equiv 0 \text{ mod. } Q.$$

Alsdann wird Q „ein primärer Modul", P der dazu gehörige Primmodul genannt. Besteht P aus der Gesamtheit der Formen, die das irreduzible Gebilde C enthalten, so enthalten alle Formen von Q C oder Q besteht aus der Gesamtheit *aller* Formen. Denn sei F eine Form von Q, die C nicht enthält, f eine beliebige Form, so ist $F \cdot f \equiv 0$ mod. Q, also, da F C nicht enthalten soll, $f \equiv 0$ mod. Q.

Es zeigt sich daher, daß der primäre Modul Q entweder die Mannigfaltigkeit h oder 0 hat; denn es folgt leicht, z. B. aus dem am Schlusse von Nr. 15 erwähnten Hilbertschen Satze, daß zu jedem Primmodul P ein irreduzibeles Gebilde C gehört, so daß jede C enthaltende Form P angehört, und vice versa.

Es gilt nun der folgende Satz, der Fundamentalsatz der Modultheorie, den ich den Noether-Dedekindschen Satz nennen will.

Satz VII. „Jeder Modul M ist darstellbar in der Gestalt

$$M = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, R],$$

wo $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ primäre Moduln und R ein Modul, dessen Formen keinen gemeinsamen Nullpunkt besitzen."

Es sei M von der Mannigfaltigkeit h. Die irreduziblen Bildungen der Mannigfaltigkeit h, welche den Formen von M gemein sind, seien mit $C_1, C_2, \cdots, C_j$ bezeichnet. Wir definieren nun einen Modul M_{C_1} durch folgende Bestimmung. M_{C_1} besteht aus der Gesamtheit der Formen F, deren Residualmodul $\frac{M}{(F)}$ nicht C_1 als ein ihren Formen gemeinsames Gebilde enthalte. Die Formen F sind also dadurch charakterisierbar, daß eine Form Φ existiert, welche C_1 nicht enthält und für welche

$$F \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Daß die Formen F einen Modul bilden müssen, zeigt sich leicht folgendermaßen:

Wenn $F_1\Phi_1 \equiv 0$ mod. M und Φ_1 nicht C_1 enthält, sowie $F_2\Phi_2 \equiv 0$ mod. M und auch Φ_2 nicht C_1 enthält, so ist für beliebige Formen A_1, A_2

$$(A_1F_1 + A_2F_2)\Phi_1\Phi_2 \equiv 0 \text{ mod. } M,$$

also genügt, da $\Phi_1\Phi_2$ ja C_1 nicht enthält, auch $A_1F_1 + A_2F_2$ der gestellten Forderung.

Man kann M_{C_1} etwa dadurch bilden, daß man in der Involution der Formen R^{ter} Ordnung, die M angehören, die zerfallenden Formen aufsucht, und die Teiler, welche C_1 nicht enthalten, fortfallen läßt. Den Residualmodul von M_{C_1} in bezug auf M bezeichnen wir mit M'_{C_1}. Derselbe umfaßt also alle Formen X, die der Beziehung genügen

$$F_i X \equiv 0 \text{ mod. } M,$$

wenn F_i ein Basissystem von M_{C_1} durchläuft. Die Formen von M'_{C_1} enthalten C_1 nicht als gemeinsames Gebilde. Denn sei $F_1, \cdots, F_j$ eine Basis von M_{C_1} und seien $\Phi_1, \cdots, \Phi_j$ Formen, die C_1 nicht enthalten und derart, daß $F_i \cdot \Phi_i \equiv 0$ mod. M. Alsdann ist

$$F_i \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdots \Phi_j \equiv 0 \text{ mod. } M$$

für jeden Index i, somit gehört $\Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdots \Phi_j$ dem Modul M'_{C_1} an. $\Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdots \Phi_j$ enthält aber C_1 nicht.

Die Formen von M gehören sowohl dem Modul M_{C_1}, wie demjenigen M'_{C_1} an, da sie der an die Formen von M_{C_1} wie M'_{C_1} beziehungsweise gestellten Forderung genügen.

Ist F eine Form, welche dem Modul

$$[M_{C_1}, M_{C_2}]$$

angehört, und Φ eine solche, die dem Modul

$$(M'_{C_1}, M'_{C_2})$$

angehört, so ist $F \cdot \Phi \equiv 0$ mod. M. Denn Φ läßt sich zerlegen in eine Summe

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

wo

$$\Phi_1 \equiv 0 \text{ mod. } M'_{C_1},$$

$$\Phi_2 \equiv 0 \text{ mod. } M'_{C_2}$$

und F gehört sowohl M_{C_1} wie M_{C_2} an, daher ist $F \cdot \Phi_1 \equiv 0$ mod. M, $F \cdot \Phi_2 \equiv 0$ mod. M und $F \cdot \Phi \equiv 0$ mod. M.

Ebenso ist, wenn F eine Form von $[M_{C_1}, \cdots, M_{C_j}]$ und Φ eine Form von $(M'_{C_1}, \cdots, M'_{C_j})$, $F \cdot \Phi \equiv 0$ mod. M.

Der Modul $(M'_{C_1}, \cdots, M'_{C_j})$ enthält weder C_1 noch $C_2 \cdots$ noch C_j als ein seinen Formen gemeinsames Gebilde, denn dieser Modul enthält z. B. irgend eine Form von M'_{C_1}, die C_1 nicht enthält.

Wir können nun zeigen, daß identisch

$$M = [M_{C_1}, \cdots, M_{C_j}, (M, \Phi)],$$

wo Φ irgend eine Form von $(M'_{C_1}, M'_{C_2}, \cdots, M'_{C_j})$, die weder C_1 noch $C_2 \cdots$ noch C_j enthält. Jede Form von M gehört jedem der Moduln

$$M_{C_1}, \cdots, M_{C_j}, (M, \Phi)$$

an. Umgekehrt, gehört F jedem dieser Moduln an, so existiert, da F auch (M, Φ) angehört, eine Form f, für die

$$F \equiv f \cdot \Phi \text{ mod. } M.$$

Da nun F dem Modul M_{C_1} angehört, M_{C_1} aber ein Teiler von M ist, so ist auch

$$f \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M_{C_1}.$$

Nun ist der Modul M_{C_1} ein *primärer* Modul in bezug auf den Primmodul, der aus der Gesamtheit der C_1 enthaltenden Formen besteht. Denn ist A irgend eine Form, die C_1 nicht enthält, und ist angesetzt

$$A \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } M_{C_1},$$

so wird diese Beziehung nur befriedigt, wenn eine Form Φ existiert, die C_1 nicht enthält und für die

$$A \cdot X \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Da nun A nicht C_1 enthalten soll, so ist

$$X \equiv 0 \text{ mod. } M_{C_1}.$$

Die Mannigfaltigkeit des erwähnten Primmoduls ist h, die von M_{C_1}, eines Teilers von M, höchstens h. Also ist M_{C_1} primär. Mithin folgt aus der Beziehung

$$f \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M_{C_1},$$

da Φ C_1 nicht enthält,

$$f \equiv 0 \text{ mod. } M_{C_1};$$

und genau so zeigt sich

$$f \equiv 0 \text{ mod. } M_{C_i}$$

für jeden Index $i = 1, 2, \cdots, j$. Nun gehörte aber Φ dem Modul

$$(M'_{C_1}, \cdots, M'_{C_j})$$

an, somit ist nach dem schon früher Bewiesenen

$$f \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M,$$
$$F \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Daher gehört jede Form, welche

$$[M_{C_1}, M_{C_2}, \cdots, M_{C_j}, (M, \Phi)]$$

angehört, M an, und da auch das Umgekehrte der Fall ist, so ist in der Tat

$$M = [M_{C_1}, M_{C_2}, \cdots, M_{C_j}, (M, \Phi)].$$

Der Modul (M, Φ) ist von der Mannigfaltigkeit $h-1$. Da er alle Formen von M enthält, so können seine Formen nur $C_1, \cdots, C_j$ und Gebilde niederer Mannigfaltigkeit gemein haben, und da Φ in $C_1, \cdots, C_j$ nicht verschwindet, so ist klar, daß die gemeinsamen Gebilde der Formen von (M, Φ) nur die Schnittgebilde von $\Phi = 0$ mit $C_1, \cdots, C_j$ und Gebilde niederer Mannigfaltigkeit sein können. Auf (M, Φ) wenden wir dasselbe Zerlegungsprinzip an, wie wir es bereits auf M angewandt haben, und schließlich erhalten wir so eine Beziehung:

$$M = [Q_1, \cdots, Q_j, R],$$

durch welche M in der Tat dargestellt ist als kleinstes Vielfaches von primären Moduln, deren zugehöriger Primmodul aus den Formen besteht, die in irreduziblen Gebilden verschwinden, und einem Modul, dessen Formen keinen gemeinsamen Nullpunkt haben. Aus obiger Reihe scheiden wir noch die (bei unserem Verfahren immer vorhandenen) Teiler Q aus, die bereits in anderen Q der Reihe enthalten sind, und erhalten dann als Schlußresultat eine Darstellung von M, wie sie Satz VII behauptete.

20. Satz VIII. „Wenn u eine Form der Ordnung a und relativ prim zu M ist, so ist

$$H(M, u)(R) = \Delta_a HM(R),$$

für alle Werte von $R \geqq a - m + 1$. Ist aber u nicht relativ prim zu M, so ist

$$H(M, u)(R) > \Delta_a HM(R).“$$

Es sei

$$f = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_j f_j$$

ein unbestimmtes Glied der Involution von Formen der Ordnung R, die M angehören. Die Involution $pu + f$, wo p eine Form der Ordnung $R - a$, hat einerseits die Mannigfaltigkeit $\varphi(R) - H(M, u)(R)$, andererseits, nach dem schon mehrfach benutzten Satze, die von pu, plus der von f, vermindert um die von Identitäten der Form $pu + f = 0$. Es ist also

$$\varphi(R) - H(M, u)(R) = \varphi(R-a) + \varphi(R) - HM(R) - x,$$

wenn x die Mannigfaltigkeit der Identitäten

$$pu + f = 0.$$

Diese Beziehung ist sicherlich erfüllt, wenn

$$p \equiv 0 \bmod. M,$$

und, wenn u relativ prim zu M, *nur* unter dieser Bedingung. Mithin ist

$$x = \varphi(R-a) - HM(R-a);$$

denn dies ist die Mannigfaltigkeit von Formen p der Ordnung $R - a$, welche M angehören. Daraus folgt

$$H(M, u)(R) = \Delta_a HM(R).$$

Ist $R < a$, so ist $x = 0$, weswegen für die Gültigkeit der Formel sich die untere Grenze

$$R = a - m + 1$$

ergibt. Für kleinere Werte von R ist die Formel durch Einsetzen von $x = 0$ zu korrigieren.

Es zeigt sich noch, daß, wenn für eine bestimmte Ordnung R

$$H(M, u)(R) = \Delta_a HM(R),$$

dann aus einer Beziehung der Ordnung R

$$p \cdot u \equiv 0 \text{ mod. } M$$

unbedingt folgen muß

$$p \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

21. Satz IX. „Die Hilbertsche Funktion eines Moduls ist für genügend große Werte von R gleich einem Polynom von R, dessen Grad um 1 kleiner ist als die Mannigfaltigkeit des Moduls."

Wir wissen bereits aus Satz VI, daß die Hilbertsche Funktion eines Moduls, dessen Formen keinen gemeinsamen Nullpunkt haben, für genügend große Werte von R Null ist. Sei nun ein Modul M vorgelegt, dessen Formen nur eine Anzahl Punkte gemein haben. Nach Satz VII können wir denselben als kleinstes Vielfache darstellen

$$M = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_j, R],$$

wo die

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_j$$

in bezug auf je einen der gemeinsamen Punkte der Formen von M primär. Ist u irgend eine Form, die keinen dieser Punkte enthält, so ist u relativ prim in bezug auf $Q_1, \cdots, Q_j$. Aus der Beziehung

$$u \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } M$$

folgt daher

$$X \equiv 0 \text{ mod. } Q_1,$$
$$X \equiv 0 \text{ mod. } Q_2 \text{ etc.}$$

Soll X von genügend hoher Ordnung sein, so ist auch

$$X \equiv 0 \text{ mod. } R,$$

also

$$X \equiv 0 \text{ mod. } [Q_1, \cdots, Q_j, R] \equiv 0 \text{ mod. } M;$$

u ist somit relativ prim zu M, wenigstens wenn R genügend groß, und nach Satz VIII ist dann

$$H(M, u)(R) = \Delta_a HM(R),$$

wenn a die Ordnung von u. Nun haben die Formen von (M, u) keinen gemeinsamen Punkt, somit ist für genügend großes R

$$H(M, u)(R) = 0.$$

Demnach ist für genügend große R

$$\Delta_a HM(R) \equiv 0.$$

Wählen wir a der Einfachheit halber $= 1$, so zeigt diese Differenzengleichung, daß für genügend große R

$$HM(R) = a,$$

wo a eine von R unabhängige ganze Zahl, die nicht 0 sein kann, da die Formen von M Punkte gemein haben, nicht jede Form also M angehören kann.

Es mögen nun die Formen von M Kurven und Punkte gemein haben. Wir stellen wieder M als kleinstes Vielfache nach Satz VII dar

$$M = [Q_1, \cdots, Q_j, R].$$

Ist u irgend eine Linearform, welche keines der Gebilde enthält, in bezug auf welche die Q_i primär sind, so ist genau wie früher zu zeigen, daß für genügend große R u relativ prim zu M ist. Somit ist nach Satz VIII für genügend große R

$$H(M, u)(R) = \Delta_1 HM(R).$$

Die Formen von (M, u) haben Punkte gemein, nämlich die Schnittpunkte der den Formen von M gemeinsamen Kurven mit $u = 0$, somit existiert eine von 0 verschiedene ganze Zahl a derart, daß

$$a = \Delta_1 HM(R).$$

Es ist daher $HM(R) = aR + b$, wo b eine positive oder negative ganze Zahl, die auch 0 sein kann. Durch genau dieselben Schlüsse wird nun der Satz IX allgemein bewiesen.

22. Satz X. „Ist M ein primärer Modul und ist der zugehörige Primmodul P die Gesamtheit der Formen, welche das irreduzible Gebilde C enthalten, so läßt sich eine positive ganze Zahl k bestimmen, die derart ist, daß die k^{te} Potenz irgend einer Form von P dem Modul M angehört."

Zum Beweise der Behauptung entwickeln wir zunächst einen Hilfssatz. Derselbe besagt, daß, wenn $M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots$ eine unendliche Reihe von Moduln ist, sich immer eine Zahl n angeben läßt, so daß der Modul

$$(M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n)})$$

jeden Modul $M^{(N)}$ teilt, wie groß auch N sei.

Bezeichnen wir nämlich eine Basis von $M^{(i)}$ mit

$$u_{i,1}, u_{i,2}, \cdots, u_{i,j_i}$$

und wenden wir Hilberts Theorem (I) (s. Nr. 16) auf die unendliche Reihe dieser Formen, von $i = 1$ bis $i = \infty$ an, so zeigt sich, daß man eine Zahl n bestimmen kann, derart, daß jede Form $u_{i,j}$, wo $i > n$, dem

Modul $(u_{1,1}, \cdots, u_{n,j_n})$ angehört. Für dieselbe Zahl n ist daher $(M^{(1)}, \cdots, M^{(n)})$ ein Teiler von $M^{(i)}$, wo $i > n$.

Ist insbesondere jedes der $M^{(i)}$ obiger Reihe ein Teiler von $M^{(i-1)}$, so ist die wie oben bestimmte Zahl n so beschaffen, daß $M^{(n)} = M^{(n+1)} =$ etc., denn $(M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n)})$ ist $= M^{(n)}$, weil $M^{(n)}$ ein Teiler aller $M^{(i)}$, wo $i < n$. Da nach obigem Hilfssatze $(M^{(1)}, \cdots, M^{(n)})$ $M^{(i)}$ teilt, für $i > n$, so teilt $M^{(n)}$ jedes $M^{(i)}$, wo $i > n$. Andererseits teilt auch $M^{(i)}$ das $M^{(n)}$ für $i > n$, nach Voraussetzung. Also ist $M^{(i)} = M^{(n)}$, wenn $i > n$.

Sei nun $F_1, F_2, \cdots, F_k$ eine Basis von P. Wir bilden

$$F = p_1 F_1 + p_2 F_2 + \cdots + p_k F_k,$$

wo die $p_1, \cdots, p_k$ Formen irgend eines positiven Grades, der auch Null sein kann, deren Koeffizienten aber sämtlich in der nun folgenden Rechnung unbestimmt sein sollen. Alsdann bilden wir den Residualmodul $M' = \frac{M}{(F)}$, was trotz der Unbestimmtheit der Koeffizienten von F möglich ist, denn die Kongruenz

$$F \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } M$$

verlangt zu ihrer Auflösung für jede gegebene Ordnung von X nur die Auflösung einer Reihe von linearen Gleichungen, und dies ist eine Operation, die auch mit Unbestimmten sich vollziehen läßt. Ebenso bilden wir den Modul $M'' = \frac{M'}{(F)}$, dann $M''' = \frac{M''}{(F)}$ und so fort. In dieser Reihe ist jeder Modul $M^{(i)}$ ein Teiler des vorhergehenden, somit muß eine Zahl k existieren, so daß $M^{(k)} = M^{(k+1)}$. Jeder der $M^{(i)}$ ist ein primärer Modul in bezug auf P. Beweisen wir dies z. B. von M'. Sei A eine Form, die nicht in P enthalten ist. Sei ferner angesetzt

$$A \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } M'.$$

Alsdann ist

$$F \cdot A \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } M,$$

somit, da M primär,

$$F \cdot X \equiv 0 \text{ mod. } M$$

und

$$X \equiv 0 \text{ mod. } M'.$$

Auch ist die Mannigfaltigkeit von M', da es M enthält, kleiner als oder gleich der von P. Somit ist M' primär. $M^{(k)}$ ist also ein in bezug auf P primärer Modul, dessen Residualmodul in bezug auf F mit sich selbst identisch ist. F ist also relativ prim zu $M^{(k)}$.

Wir haben schon früher (Nr. 19) gezeigt, daß die Formen eines in bezug auf P primären Moduls, welcher das Gebilde C nicht enthält, mit der Gesamtheit aller Formen identisch ist.

Da nun F relativ prim zu $M^{(k)}$, so kann $M^{(k)}$ nach Satz VIII und IX

C nicht enthalten. Somit ist $M^{(k)}$ mit der Gesamtheit aller Formen überhaupt identisch. Es ergibt sich also, gemäß der Definition von $M^{(k)}$

$$F \equiv 0 \text{ mod. } M^{(k-1)}$$

ebenso

$$F^2 \equiv 0 \text{ mod. } M^{(k-2)}$$

etc., bis sich zeigt

$$F^k \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Nun war

$$F = p_1 F_1 + \cdots + p_h F_h,$$

also

$$F^k = p_1^k F_1^k + k_1 p_1^{k-1} p_2 F_1^{k-1} F_2 + \cdots \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Auch waren die Koeffizienten der p sämtlich Unbestimmte. Durch die gewöhnlichen Methoden (Nullsetzen einiger der Unbestimmten, Anwendung der Substitution $u + u'$ für eine Unbestimmte u etc.) zeigt sich daraus

$$F_1^k \equiv 0 \text{ mod. } M,$$
$$F_1^{k-1} F_2 \equiv 0 \text{ mod. } M,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_h^k \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Somit ist auch $f^k \equiv 0$ mod. M, wo f irgend eine Form

$$f = q_1 F_1 + \cdots + q_h F_h$$

des Moduls P.

Als ein Korollar des Satzes X zeigt sich, daß die Formen eines in bezug auf P primären Moduls nur die Gebilde C gemein haben. Eine andere Folge des Satzes X ist der Satz von Hilbert:

Es sei f eine Form, die in allen den Formen $f_1, \cdots, f_h$ gemeinsamen Punkten verschwindet. Dann läßt sich immer eine Zahl n bestimmen, derart, daß

$$f^n \equiv 0 \text{ mod. } (f_1, f_2, \cdots, f_h).$$

Denn ist $(f_1, \cdots, f_h) = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_j, R]$ nach Satz VII, so können die Gebilde, die zu den Q_i gehören, nur Punkte enthalten, welche gleichzeitig $f_1 = 0, \cdots, f_h = 0$ machen. f wird also jedes der zu den Q_i gehörigen Gebilde umfassen. Gehören nun zu $Q_1, \cdots, Q_j$ gemäß Satz X die Zahlen $k_1, \cdots, k_j$, so genügt es, n gleich der größten dieser Zahlen anzunehmen — wenn nur die Ordnung von f genügend groß ist —, um den Hilbertschen Satz zur Evidenz zu bringen. Nur dann, wenn die Ordnung von f nicht groß genug ist, muß man n größer wählen.

23. Satz XI. „Wenden wir Satz VII auf das Modulsystem

$$M = (u_1, u_2, \cdots, u_h)$$

an, wo $h \leqq m - 1$ und die Resultante von $u_1, \cdots, u_h$ mit $m - h$ Linearformen nicht identisch verschwindet. Es zeigt sich dann, daß identisch

$$M = [M_{C_1}, M_{C_2}, \cdots, M_{C_j}],$$

wo $C_1, C_2, \cdots, C_j$ die irreduziblen Gebilde, welche den Schnitt von $u_1 = 0, \cdots, u_h = 0$ ausmachen."

Nach Satz VII ist für jedes Modulsystem

$$M = [M_{C_1}, M_{C_2}, \cdots, M_{C_j}, N],$$

wo $C_1, C_2, \cdots, C_j$ die Gebilde höchster Mannigfaltigkeit, welche den Formen von M gemein sind, und wo N von niederer Mannigfaltigkeit als M ist. Sei nun eine solche Entwicklung auch für den Modul $M = (u_1, u_2, \cdots, u_h)$ angenommen und sei Φ irgend eine Form von N, welche keines der $C_1, \cdots, C_j$ enthält. Sei F eine Form des Moduls $[M_{C_1}, \cdots, M_{C_j}]$. Alsdann ist

$$F \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } \quad [M_{C_1}, \cdots, M_{C_j}, N] \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Nun verschwindet aber die Resultante von $\Phi, u_1, \cdots, u_h$ und $m - h - 1$ Linearformen nicht identisch, also ist nach Satz I (Kap. I) $F \equiv 0$ mod. M.

24. Genau dieselbe Reihe von Definitionen und Schlüssen, wie sie oben durchlaufen war, führt auch in bezug auf die Theorie der *ganzzahligen* Formen zu bedeutsamen Ergebnissen.

Die Formen, welche ein gegebenes irreduzibles ganzzahliges Gebilde enthalten, bilden ein Ideal, genauer ein Primideal, wenn wir als ein solches jedes Ideal J definieren, derart, daß $A \cdot B \equiv 0$ mod. J zu

$$A \equiv 0 \text{ mod. } J \quad \text{oder} \quad B \equiv 0 \text{ mod. } J$$

führt, unter A, B ganzzahlige Formen verstanden. Auch in der Algebra mod. p, wo p irgend eine Primzahl, gilt der Zerlegungssatz der Formen in irreduzible Teiler und gelten daher alle Erwägungen des Satzes IV, nach dem Prinzip von Schönemann. In dieser Algebra gibt es daher auch irreduzible Gebilde.

Sind $J_1, J_2, \cdots, J_k$ eine Anzahl von Idealen, so definiert $[J_1, J_2, \cdots, J_k]$ ein Ideal, das wir kleinstes Vielfaches von $J_1, \cdots, J_k$ nennen werden, und $(J_1, J_2, \cdots, J_k)$ ein anderes, das größter Teiler von $J_1, \cdots, J_k$ heißen wird. Die Definition dieser Ideale ist mit genau denselben Worten möglich, wie die der Moduln $[M_1, \cdots, M_k]$ und $(M_1, \cdots, M_k)$.

Ist G in der Algebra mod. p ein irreduzibles Gebilde, und ist J das Primideal, welches dem irreduziblen ganzzahligen Gebilde G entspricht, so ist (p, J) ein Primideal.

Denn ist angesetzt

$$A \cdot B \equiv 0 \text{ mod. } (p, J),$$

so ist

$$A \cdot B \equiv 0 \text{ mod. } J$$

in der Algebra mod. p, also, da G in dieser Algebra irreduzibel,

$$A \equiv 0 \text{ mod. } J$$

oder

$$B \equiv 0 \text{ mod. } J$$

in der Algebra mod. p, mithin A oder $B \equiv 0$ mod. (p, J).

Ist G ein mod. p irreduzibles ganzzahliges Gebilde der Mannigfaltigkeit h, J das entsprechende Primideal, und $J' = (p, J)$, so wollen wir das Primideal J' einen Primdivisor, p seine Grundzahl nennen und als seine Mannigfaltigkeit die Zahl $h - 1$ bezeichnen. J dagegen wollen wir einen ganzzahligen Primmodul nennen. Auf diese Weise zerteilen sich die Primideale in die beiden Klassen der Primdivisoren und ganzzahligen Primmoduln.

Es sei irgend ein Ideal A vorgelegt. Wir definieren seine Mannigfaltigkeit auf folgendem Wege: Nach dem Theorem II von Hilbert (Nr. 16) bleibt der Inhalt des Theorems I von Hilbert bestehen auch bei Beschränkung auf ganzzahlige Formen. Mithin hat jedes Ideal eine Basis ganzzahliger Formen, vorausgesetzt, daß man auch ganze Zahlen mit als Formen rechnet. Sei die Basis von A

$$F_1, F_2, \cdots, F_k.$$

Wir zerlegen irgend eine der F_i, z. B. F_1, in seine irreduziblen Teiler und spalten die Gruppe derselben in zwei Systeme S_1 und S_2. S_1 enthält diejenigen, welche auch $F_2, \cdots, F_k$ teilen.

Ist F' irgend ein Individuum von S_2, so bringen wir dasselbe zum „Schnitt" mit einem der F_i, sagen wir F_2, welche nicht durch F' teilbar sind. Wir bilden also die Resultante von

$$F', F_2, l_1, \cdots, l_{m-2},$$

unter $l_1, \cdots, l_{m-2}$ Linearformen mit unbestimmten Koeffizienten $y_{i,j}$ verstanden, und spalten sie als Form derselben in ihre irreduziblen Teiler. Diese Teiler bestehen aus zwei Gruppen, nämlich Primzahlen und wirklichen irreduziblen ganzzahligen Formen der $y_{i,j}$. Ist p eine Primzahl der ersten Gruppe, so verschwindet in der Algebra mod. p die Resultante von F' und F_2, mithin haben nach dem Prinzip von Schönemann beide Formen in jener Algebra einen gemeinsamen irreduziblen Teiler t und daher sind sowohl F', wie $F_2 \equiv 0$ mod. (p, t). Sind auch $F_3, F_4, \cdots, F_k \equiv 0$ mod. (p, t), so ist (p, t) ein den $F_1, F_2, \cdots, F_k$ gemeinsamer Primdivisor.

Wenn dies nicht der Fall, so bringen wir t in der Algebra mod. p mit einem der F_i zum Schnitt, welche nicht durch t mod. p teilbar sind, und verfahren weiterhin in der Algebra mod. p ganz nach der Vorschrift des Satzes IV. Ist andererseits G ein von den $y_{i,j}$ abhängiger irreduzibler Teiler der Resultante der $F', F_2, l_1, \cdots, l_{m-2}$, so entspricht ihm ein ganzzahliger Primmodul P. Entweder ist nun $F_i \equiv 0 \bmod. P$ für jeden Index i, oder dies ist nicht der Fall. In letzterem Falle bringen wir das P entsprechende Gebilde genau nach der Vorschrift des Satzes V zum Schnitt mit einem der F_i, das nicht $\equiv 0 \bmod. P$, und erhalten dabei wieder eine von Unbestimmten abhängige Form, die als irreduzible Teiler sowohl Primzahlen, wie irreduzible Formen zuläßt. In jedem Falle schreitet der Prozeß nach der Vorschrift des Satzes V vorwärts. Das schließliche Ergebnis ist, daß wir eine Reihe von Primdivisoren J und ganzzahligen Primmoduln P erhalten, derart, daß für jedes J und P der Reihe und für jeden Index i

$$F_i \equiv 0 \bmod. J$$

und

$$F_i \equiv 0 \bmod. P$$

und auch derart, daß irgend ein Punkt, der in der Algebra der ganzen Zahlen oder der Algebra mod. irgend einer Primzahl die $F_1, \cdots, F_k$ verschwinden macht, auf irgend einem der zu dem J oder P gehörigen Gebilde gelegen ist. Die Maximalmannigfaltigkeit der Ideale der Gruppe P, J nennen wir die Mannigfaltigkeit des Ideals A. Dabei ist es offenbar, daß sowohl die Gruppe der P, J wie jene Mannigfaltigkeit von der Auswahl der Basis von A unabhängig ist.

25. **Satz XII.** „Ist A ein Ideal, welches weder Primdivisoren noch ganzzahlige Primmoduln als Teiler zuläßt, so ist jede ganzzahlige Form F genügend hoher Ordnung $F \equiv 0 \bmod. A$."

Es sei $f_1, \cdots, f_k$ eine Basis von A. Wir setzen, der Methode von Kronecker folgend,

$$\begin{aligned} F_1 &= p_1 f_1 + \cdots + p_k f_k, \\ F_2 &= q_1 f_1 + \cdots + q_k f_k, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_m &= r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k, \end{aligned}$$

wo die $p_1, \cdots, p_k, \cdots, r_1, \cdots, r_k$ Formen mit lauter unbestimmten Koeffizienten, und bilden die Resultante von $F_1, \cdots, F_m$. Dieselbe kann weder in der Algebra der ganzen Zahlen, noch in derjenigen mod. irgend einer Primzahl identisch verschwinden, da sonst die $F_1, \cdots, F_m$, also auch $f_1, \cdots, f_k$, einen Primdivisor J oder ganzzahligen Primmodul t als Teiler zulassen müßten. Ist nun F von genügend hoher Ordnung und bezeichnen wir jene Resultante, die eine Form der Unbestimmten sein wird, mit Res, so besteht eine Identität:

$$\mathrm{Res} \cdot F = A_1 \cdot F_1 + A_2 \cdot F_2 + \cdots + A_m \cdot F_m,$$

wo auch die $A_1, \cdots, A_m$ ganzzahlige Formen der Unbestimmten sein werden. Ordnen wir jede der Seiten obiger Identität nach den Potenzprodukten der Unbestimmten und vergleichen wir die Koeffizienten der nämlichen Potenzprodukte, so ergibt sich eine Reihe von Kongruenzen

$$a_1 \cdot F \equiv 0 \text{ mod. } (f_1, \cdots, f_k) \equiv 0 \text{ mod. } A,$$
$$a_2 \cdot F \equiv 0 \text{ mod. } A,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die ganzen Zahlen $a_1, a_2, \cdots$ können keinen gemeinsamen ganzzahligen Teiler haben, da sie die Koeffizienten der Potenzprodukte der Unbestimmten in der Form Res sind und diese Form modulo keiner Primzahl verschwindet. Mithin existieren nach den Elementen der Zahlentheorie ganze Zahlen n_1, $n_2, \cdots$, so daß $n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots = 1$, und es findet sich in der Tat

$$F \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

26. Wir definieren nun ein primäres Ideal, in genauer Analogie mit der Definition des primären Moduls. Wenn aus

$$A \cdot B \equiv 0 \text{ mod } J,$$

wo J ein Ideal, A und B ganzzahlige Formen, von denen bekannt ist, daß

$$A \text{ nicht } \equiv 0 \text{ mod. } J',$$

wo J' ein Primideal, unbedingt folgt

$$B \equiv 0 \text{ mod. } J,$$

so ist J primär in bezug auf J', sobald die Mannigfaltigkeit von J' mindestens derjenigen von J gleich ist. Indem wir nun den Betrachtungen des Satzes VII dieses Kap. Wort für Wort folgen, erhalten wir

Satz XIII. „Jedes Ideal ist darstellbar als kleinstes Vielfache von primären Idealen und einem Ideale R, dessen Formen weder in der Algebra der ganzen Zahlen, noch in derjenigen modulo irgend einer Primzahl einen gemeinsamen Punkt haben."

27. Jedem Ideal entspricht ein Modul. Sind

$$u_1, u_2, \cdots, u_h$$

eine Serie ganzzahliger Formen, die eine Basis von J bilden, so definieren dieselben als Basis eines Moduls J' den J entsprechenden Modul. Dabei ist J' von der speziellen Auswahl der Basis $u_1, \cdots, u_h$ von J unabhängig, da ja jede Basis durch lineare Kombinationen einer andern ersetzbar ist. Gehört eine ganzzahlige Form f dem Modul J' an, so lassen sich Formen $p_1, \cdots, p_h$ bestimmen, derart, daß

$$f = p_1 u_1 + \cdots + p_h u_h.$$

Die Koeffizienten der p_i sind dabei aus einer Serie linearer Gleichungen, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, bestimmbar. Somit gibt es Formen p_i, die obige Relation erfüllen, und deren Koeffizienten rationale Brüche sind. Zudem sind die Nenner dieser Brüche von den Koeffizienten von f unabhängig, wie bereits die elementare Theorie der Determinanten und linearen Gleichungen zeigt, wohl aber abhängig von der Ordnung R. Sei für eine bestimmte Ordnung R

$$g(R)$$

der Generalnenner der Brüche, welche die Koeffizienten von $p_1, \cdots, p_k$ bilden. Alsdann ist

$$g(R) \cdot f \equiv 0 \text{ mod. } J.$$

Alle ganzzahligen Formen von J' bilden ebenfalls ein Ideal, da mit zwei ganzzahligen Formen p, q, die J' angehören, auch $ap + bq$, wo a, b ganzzahlige Formen, eine ganzzahlige Form von J' ist. Sei dieses Ideal kurz $((J'))$ geschrieben. Auch $((J'))$ hat eine Basis

$$f_1, f_2, \cdots, f_k,$$

und da es ganze Zahlen gibt

$$g_1, g_2, \cdots, g_k,$$

so daß

$$g_i \cdot f_i \equiv 0 \text{ mod. } J,$$

so ist also, wenn

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_k$$

gesetzt wird

$$g \cdot f \equiv 0 \text{ mod. } J,$$

wo f irgend eine ganzzahlige Form von J'.

Wir definieren nun wie folgt:

Ein Primideal, welches eine ganze Zahl enthält, heiße ein Primdivisor.

Ein primäres Ideal, welches eine ganze Zahl enthält, heiße ein primärer Divisor.

Ein Produkt von primären Divisoren heiße ein Divisor.

Ein Primideal, welches kein Primdivisor ist, heiße ein ganzzahliger Primmodul.

Ein primäres Ideal, welches kein Divisor ist, heiße ein ganzzahliger primärer Modul.

Ein Produkt von ganzzahligen primären Moduln heiße ein ganzzahliger Modul.

Es zeigt sich dann: „Das zu einem primären Divisor gehörige Primideal ist ein Primdivisor.“ Denn genau wie früher für primäre Moduln bewiesen ist, kann gezeigt werden, daß jede Form eines primären Ideals zu seinem Primideal gehören muß. Wenn das primäre Ideal ein Divisor, so gehört ihm eine Zahl an, diese gehört also auch dem entsprechenden Primideal an, dasselbe ist also ein Divisor.

Umgekehrt gilt: „Ein zu einem Primdivisor d gehöriges primäres Ideal J ist ein Divisor.“ Zu d gehört eine Zahl, die wegen der fundamentalen Eigenschaft der Primideale eine Primzahl sein muß. Dieselbe sei p. Wir bilden nun die Reihe der Ideale

$$J,\ J_1 = \frac{J}{(p)},\ J_2 = \frac{J_1}{(p)},\ J_3 = \frac{J_2}{(p)}, \cdots, J_k = \frac{J_{k-1}}{(p)}, \cdots,$$

von denen jedes das vorhergehende teilt. Nach dem früher (Nr. 22) bewiesenen Satze muß es eine Zahl k geben, so daß

$$J_k = J_{k+1} = \cdots$$

J_k ist, wie nach dem schon früher angewandten Schlußverfahren gezeigt wird, ein primäres Ideal, dessen Primideal d ist. Bezeichnen wir J_k mit I, so ist

$$\frac{I}{(p)} = I.$$

Daraus ergibt sich aber

$$I = ((I')).$$

Denn ist f irgend eine Form von $((I'))$, so gibt es eine Zahl g, so daß

$$g \cdot f \equiv 0 \text{ mod. } I.$$

Da aber g in Faktoren zerfällt, die entweder relativ prim zu d oder Potenzen von p sind — denn d enthält nur die Multipla der einen Primzahl p oder die Einheit, wie aus den Elementen der Zahlentheorie erweisbar —, andererseits $\frac{I}{(p)} = I$ war, so folgt

$$f \equiv 0 \text{ mod. } I,$$

d. h. in der Tat

$$I = ((I')).$$

Sei die Mannigfaltigkeit von d gleich h, so wird auch diejenige von J gleich h sein, und da alle Formen von J enthalten sind in $J_1, J_2, \cdots$, so wird die Mannigfaltigkeit von I höchstens $= h$.

Die Formen von I' werden eine Anzahl von Gebilden höchstens der Mannigfaltigkeit h gemeinsam haben, und diese Gebilde werden sich in Gruppen konjugierter Gebilde trennen lassen, nach Satz V. Sei f irgend eine ganzzahlige Form, welche jede Gruppe dieser konjugierten Gebilde enthält. Alsdann wird nach dem Satze X eine Zahl n existieren, so daß

$$f^n \equiv 0 \text{ mod. } I',$$

also, da f ganzzahlig,

$$f^n \equiv 0 \text{ mod. } ((I')),$$

$$f^n \equiv 0 \text{ mod. } I,$$

somit, da I primär in bezug auf d,

$$f \equiv 0 \text{ mod. } d,$$

wenn nicht I die Gesamtheit aller Formen bedeutet. Verweigern wir letztere Annahme, so müssen wir zugestehen, daß d Formen enthält, die irreduzible Gebilde von höchstens der Mannigfaltigkeit h gemein haben. Außerdem enthält d noch p, müßte also von minderer als der Mannigfaltigkeit h sein und dies ist nicht der Fall. Somit muß zugestanden werden, daß I die Gesamtheit aller Formen ist. Daher enthält wegen der Identität $J_k = I$, J die Zahl p^k, J ist also ein Divisor.

Das Primideal, das zu einem primären ganzzahligen Modul gehört, ist also ein ganzzahliger Modul und vice versa.

Ist J irgend ein Ideal und seine Darstellung nach Satz XIII als Produkt von primären Idealen ausgeführt, so können wir nach obigem die primären ganzzahligen Moduln in eine Gruppe und die primären Divisoren in eine andere Gruppe zusammenfassen, so daß erhalten wird

$$J = [G,\, d,\, R],$$

wo G ein ganzzahliger Modul, d ein Divisor ist und R die frühere Bedeutung beibehalten hat.

G hat die durch $((G')) = G$ ausgedrückte Eigenschaft. G läßt sich nämlich zerspalten in ein Produkt primärer ganzzahliger Moduln

$$G = [A, B, \cdots, C],$$

und es ist

$$((G')) = [((A')), ((B')), \cdots, ((C'))],$$

weil, wenn eine ganzzahlige Form $F((A')), \cdots, ((C'))$ angehört, eine Zahl j existiert, so daß jF $[A, \cdots, C]$, also G angehört. Andererseits ist für primäre ganzzahlige Moduln $((A')) = A$, denn das zu A gehörige Primideal ist nach früherem ein ganzzahliger Modul, aus einer Beziehung

$$g \cdot f \equiv 0 \text{ mod. } A$$

folgt daher

$$f \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

Aus $J = [G,\, d,\, R]$ folgt

$$((J')) = [((G')) \cdot ((d')) \cdot ((R'))].$$

Nun gibt es eine Zahl g, welche d angehört, somit enthält (d') die Einheit und besteht aus der Gesamtheit aller Formen. Damit zeigt sich schließlich

$$((J')) = [G_1((R'))].$$

Die Formen eines ganzzahligen Moduls sind also definiert durch ihre Zugehörigkeit zu einem Modul im ursprünglichen Sinn des Wortes und durch ihre Ganzzahligkeit. Die Formen eines Divisors haben aber ganz andere Eigentümlichkeiten. Es erübrigt noch, dieselben festzulegen.

28. Wir definieren, in Analogie mit den Festsetzungen der Zahlentheorie, ein *vollständiges Restsystem R^{ter} Ordnung des Divisors* d als eine Gruppe Γ von Formen, derart, daß jede beliebig ausgewählte ganzzahlige Form F einer Form der Gruppe Γ mod. d kongruent ist. Γ wird für jeden

Wert von R aus einer endlichen Anzahl von Formen bestehen, vorausgesetzt, daß nicht zwei Formen Γ angehören dürfen, die mod. d kongruent sind; denn selbst wenn die Basis von d nur aus der Zahl, die sie enthält, bestände, würde ja ein derartiges Restsystem eine endliche Zahl Glieder haben, und die anderen Glieder der Basis können die betreffende Anzahl nur verringern. Die Anzahl der Glieder von Γ sei als „Dedekindsche Funktion des Divisors d für die Ordnung R" bezeichnet und $Dd(R)$ geschrieben. Für sie gilt

Satz XIV: „Die Dedekindsche Funktion eines Divisors ist ein Produkt von Primzahlpotenzen

$$D\,d(R) = p_1^{a_1},\ p_2^{a_2}, \cdots, p_n^{a_n},$$

deren Basen von R unabhängig sind, und deren Exponenten von R abhängen, und zwar sind diese Exponenten für genügend große Werte von R Polynome von R. Dabei ist zum mindesten eines dieser Polynome vom Grade h, wenn die Mannigfaltigkeit von d gleich h ist, und keines ist von höherem Grade als h."

Wir erweisen den Satz durch Induktion. Er ist offenbar richtig, wenn die Resultante von m unbestimmten Formen von d eine primitive Form der Unbestimmten ist, denn dann gehört jede Form einer genügend hohen Ordnung d an. Hat d die Mannigfaltigkeit 0 (oder die Stufe m) und ist u irgend eine Form relativ prim zu den Primdivisoren der primären Teiler von d, mithin zu d, so haben die Formen von (d, u) kein Gebilde m^{ter} Stufe miteinander gemein und die Resultante von m seiner Formen mit unbestimmten Koeffizienten liefert eine primitive Form derselben. Jede beliebige Form F genügend hoher Ordnung genügt also einer Kongruenz

$$F \equiv qu \text{ mod. } d.$$

Ist $F_1, \cdots, F_j$ ein vollständiges Restsystem R^{ter} Ordnung von d, $q_1, \cdots, q_{k_i}$ ein solches der Ordnung $R-1$, u der Ordnung 1, so ist also

$$F_1 \equiv q_1 u \text{ mod. } d,$$
$$F_2 \equiv q_2 u \text{ mod. } d,$$
$$\cdots\cdots$$

j ist $= i$. Denn einerseits ist keines der qu einem der anderen qu mod. d kongruent, weil ja aus

$$(q_i - q_j)u \equiv 0 \text{ mod. } d$$

folgen würde, da u relativ prim zu d,

$$q_i - q_j \equiv 0 \text{ mod. } d;$$

und diese Kongruenz widerspricht der Definition eines vollständigen Restsystems. Andrerseits kann nicht zu zwei mod. d inkongruenten Formen F dasselbe q gehören. Somit ist die Anzahl der Glieder eines vollständigen

Restsystems R^{ter} Ordnung von d für genügend hohe Werte von R konstant, wenn die Stufe von d gleich m ist.

Sei nun die Richtigkeit von Satz XIV angenommen, wenn die Stufe von d gleich k ist, und erschließen wir daraus seine Richtigkeit für die Stufenzahl $k-1$. Es sei wieder eine zu d relativ prime lineare Form u gewählt und das vollständige Restsystem R^{ter} Ordnung von (d, u) betrachtet.

Dasselbe sei $\Phi_1, \cdots, \Phi_b$. Das vollständige Restsystem R^{ter} Ordnung von d sei $F_1, \cdots, F_a$, das $(R-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $q_1, \cdots, q_c$. Es ist dann für jeden Index i

$$F_i \equiv \Phi_j \text{ mod. } (d, u)$$

oder

$$F_i \equiv \Phi_j + q_l u \text{ mod. } d.$$

Der Definition von $\Phi_1, \cdots, \Phi_b$ nach ist für verschiedene Indizes i, i_1 $\Phi_i - \Phi_{i_1}$ immer inkongruent mod. (d, u). Eine Kongruenz

$$\Phi_j + q_l u \equiv \Phi_{j_1} + q_{l_1} u \text{ mod. } d$$

führt also zu $j = j_1$ und

$$(q_l - q_{l_1}) u \equiv 0 \text{ mod } d$$

d. h.

$$q_l \equiv q_{l_1}.$$

Somit ist die Anzahl a der F_i gleich der Anzahl aller Systeme von Φ_j und q_l, d. h. $= b \cdot c$. a ist aber $= Dd(R)$ und $c = Dd(R-1)$; b ist $= D(d,u)(R)$, also für genügend große R nach der gemachten Annahme, da ja (d, u) eine um 1 höhere Stufe als d hat, darstellbar in der Gestalt

$$p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n},$$

wo $p_1, \cdots, p_n$ verschiedene Primzahlen, $a_1, \cdots, a_n$ Polynome von R sind. Aus der Beziehung

$$\frac{Dd(R)}{Dd(R-1)} = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

folgt daher

$$Dd(R) = p_1^{A_1} \cdot p_2^{A_2} \cdots p_n^{A_n} \cdot c,$$

wo die $A_1, \cdots, A_n$ Polynome von R sind, deren Grad um 1 höher ist als der der entsprechenden Polynome $a_1, \cdots, a_n$, und wo c eine ganze von R unabhängige Zahl ist. Damit ist Satz XIV vollständig erwiesen.

29. Die Dedekindsche Funktion $Dd(R)$ eines Divisors d hat die Eigenschaft, daß eine mit ihr multiplizierte ganzzahlige Form F R^{ter} Ordnung dem Divisor d angehörte. Ist $u_1, \cdots, u_k$ eine Basis von d, F eine Form R^{ter} Ordnung mit lauter unbestimmten Koeffizienten y_i, sind $p_1, \cdots, p_k$ Formen mit lauter unbestimmten Koeffizienten z_i, und ist

$$F = p_1 u_1 + \cdots + p_k u_k,$$

so sind damit die y_i als ganzzahlige homogene lineare Funktionen der z_i definiert. Da d ein Divisor ist, so ist es möglich, wenn die y_i irgendwie gegeben sind, zugehörige z_i aus obigen Beziehungen zu berechnen. Beschränken wir aber die z_i auf ganzzahlige Werte, so werden die y_i nicht *beliebige* ganzzahlige Werte sein können, sondern sie werden gewissen *Bedingungen genügen müssen.* Ein Gesetz, welches in bezug auf derartige Beziehungen statt hat, ist von Stephen Smith und Frobenius entdeckt worden, und hat in seiner weiteren Ausgestaltung zu der fruchtbaren Theorie der „Elementarteiler" Anlaß gegeben. Dies Gesetz besagt folgendes: Sind $l_1, l_2, \cdots, l_n$ eine Reihe ganzzahliger linearer Formen von Unbestimmten z_i und ist die Zahl der Unbestimmten größer als n, so ist die Anzahl N der Systeme Γ ganzer Zahlen

$$(y_{1,1}, \cdots, y_{n,1}),\ (y_{1,2}, \cdots, y_{n,2}), \cdots, (y_{1,N}, \cdots, y_{n,N}),$$

von der Art, daß keines der Systeme von Gleichungen

$$y_{1,i} - y_{1,j} = l_1,\ y_{2,i} - y_{2,j} = l_2, \cdots, y_{n,i} - y_{n,j} = l_n$$

für verschiedene Indizes i, j eine Lösung besitzt, wohl aber jedes System

$$a_1 - y_{1,h} = l_1,\ a_2 - y_{2,h} = l_2, \cdots,$$

wo $a_1, \cdots, a_n$ beliebig gegebene ganze Zahlen, für einen der N Indizes $h = 1 \cdots N$ — diese Zahl ist genau gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Determinanten der von den Koeffizienten der l_i gebildeten Matrix. — Die Unterdeterminanten jener Matrix haben eine Serie gemeinsamer Teiler, deren Verhältnisse die „Elementarteiler" bestimmen. Man kann alle betreffenden Sätze wohl am besten an der Hand der „Normalform" studieren, die Frobenius für das System der $l_1, \cdots, l_n$ aufstellt. Er ersetzt einerseits die z_i durch ein System von n ganzzahlig linear mit ihnen verbundenen Variablen z_i', derart, daß der größte gemeinsame Teiler aller Transformationsdeterminanten 1 ist; und andrerseits führt er denselben Prozeß auf die $l_1, \cdots, l_n$ aus, danach erhält er die transformierten l_i, die wir l_i' schreiben wollen, ausgedrückt in den z_i' in dieser Weise

$$l_1' = e_1 z_1',\ l_2' = e_1 e_2 z_2',\ l_3' = e_1 e_2 e_3 z_3', \cdots, l_n' = e_1 e_2 \cdots e_n z_n',$$

wo $e_1, \cdots, e_n$ ganze Zahlen sind. Für den Beweis dieses Satzes sei die klassische Abhandlung von Frobenius in Crelles Jounal 86 und 88 (Über lineare Formen) konsultiert.

Jedem beliebigen System von ganzzahligen Werten der z_i' und l_i' entsprechen infolge der Festsetzung über die Transformationsdeterminante ganzzahlige Werte der z_i und l_i, wie auch umgekehrt. Danach sind die Bedingungen, unter denen eine Serie von Gleichungen

$$l_1 = y_1,\ l_2 = y_2, \cdots, l_n = y_n$$

ganzzahlige Lösungen hat, genau angegeben durch

$$l_1' \equiv 0 \text{ mod. } e_1, \quad l_2' \equiv 0 \text{ mod. } e_1 e_2, \quad l_n' \equiv 0 \text{ mod. } e_1 e_2 \cdots e_n,$$

wo die l_i' gewisse ganzzahlig umkehrbare lineare Formen der l_i sind. Ist $a_1, \cdots, a_n$ ein System unbestimmter ganzer Zahlen, so ist $e_1 \cdots e_n = g$ die kleinste ganze Zahl, für die das Gleichungssystem $l_i = g \cdot a_i$ eine ganzzahlige Lösung hat. $e_1^n e_2^{n-1} \cdots e_n$ ist die früher N genannte Zahl.

Übertragen wir die Sätze von Frobenius auf die durch die Gleichung

$$F = p_1 u_1 + \cdots + p_k u_k$$

vermittelte Beziehung zwischen den y_i und z_i, so zeigt sich, daß für die Zahlen e_i des Systems dieser linearen Formen der z_i die Beziehung gilt

$$e_1 e_2 \cdots e_n = g(R),$$

wo $g(R)$ die kleinste ganze Zahl, für welche bei beliebiger ganzzahliger Form R^{ter} Ordnung F

$$g(R) \cdot F \equiv 0 \text{ mod. } d.$$

Ferner ist

$$e_1^n e_2^{n-1} \cdots e_n = Dd(R).$$

Ist d ein Primdivisor, p die in d enthaltene Primzahl, so ist $g(R) = p$. Mithin ist nur *einer* der d entsprechenden Elementarteiler $= p$, die übrigen sind sämtlich $= 1$. $Dd(R)$ ist eine Potenz von p, deren Exponent für genügend hohe Werte von R, nach Satz XIV, ein Polynom ist. Dieser Exponent gibt nach der zweiten der obigen Beziehungen den Index des Elementarteilers an, der $= p$ ist. Ist d' ein primärer Divisor, so ist die kleinste ganze Zahl g, für die

$$g \cdot F \equiv 0 \text{ mod. } d',$$

wo F irgend eine Form, eine Potenz p^k einer Primzahl. Mithin ist aus

$$e_1 \cdots e_n = p^k$$

jeder der Elementarteiler eine Potenz von p und auch $Dd'(R)$ eine Potenz von p.

Man kann aus den Sätzen von Frobenius noch weitere Folgerungen ziehen. Ist d ein beliebiger Divisor, R eine bestimmte ganze Zahl, so lassen sich die Formen R^{ter} Ordnung von d in die Gestalt bringen

$$e_1 u_1 f_1 + e_1 e_2 u_2 f_2 + \cdots + e_1 \cdots e_n u_n f_n,$$

wenn $u_1, \cdots, u_n$ beliebige ganze Zahlen, $f_1, \cdots, f_n$ ein passend bestimmtes Fundamentalsystem aller ganzzahligen Formen R^{ter} Ordnung, $e_1, \cdots, e_n$ die wie oben durch die Elementarteiler bestimmten Zahlen sind. Obiges ist in der Tat nur eine Schreibweise der Normalform von Frobenius, für den vorliegenden Fall zur Anwendung gebracht. Nun ist $g = e_1 \cdots e_n$ die kleinste ganze Zahl, mit welcher multipliziert alle ganzzahligen Formen

R^{ter} Ordnung d angehören, und diese Zahl ist von R unabhängig. g ist bestimmbar als kleinste d angehörige Zahl. Aus der Beziehung $e_1 \cdots e_n = g$ geht hervor, daß nur eine endliche Zahl der e_i von 1 verschieden sind. Seien diese von 1 verschiedenen Zahlen e_i $E_1, E_2, \cdots, E_s$ genannt. Es ist dann

$$g = E_1 E_2 \cdots E_{s-1} E_s.$$

Die Indizes der von 1 verschiedenen e_i lassen sich dann immer, für genügend große Werte von R, als Polynome von R erweisen. Es ist nämlich die Darstellung der Formen R^{ter} Ordnung des Divisors, der aus allen Formen besteht, die mit $E_1 E_2 \cdots E_{s-1}$ multipliziert zu d gehören

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_h f_h + E_s(u_{h+1} f_{h+1} + \cdots + u_n f_n),$$

denn diese und nur diese haben die angegebene Eigenschaft. Der Index E_s in diesem Divisor ist $h + 1$, mithin ist

$$E_s^{n-h} = D\left(\frac{d}{E_1 \cdots E_{s-1}}\right)(R),$$

h also für genügend große Werte von R, nach Satz XIV, ein Polynom von R. Ebenso ist die Darstellung der Formen R^{ter} Ordnung des Divisors $\left(\frac{d}{E_1 \cdots E_{s-2}}\right)$

$$u_1 f_1 + \cdots + u_k f_k + E_{s-1}(u_{k+1} f_{k+1} + \cdots) + E_s E_{s-1}(U_{h+1} f_{h+1} + \cdots + U_n f_n).$$

Seine Dedekindsche Funktion ist

$$E_{s-1}^{2n-k-h} E_s^{n-k},$$

also ist auch der Index k von E_{s-1} ein Polynom von R. Und so kann man weiterschließen.

30. Satz XV. „Sind d_1, d_2 zwei beliebige Divisoren, so gilt für jeden Wert von R

$$D[d_1, d_2] \cdot D(d_1, d_2) = Dd_1 \cdot Dd_2.\text{“}$$

Um dies zu erweisen, stellen wir vollständige Restsysteme R^{ter} Ordnung für d_1 und d_2 in folgender Weise her.

Sind A und B zwei Formen R^{ter} Ordnung dieses vollständigen Restsystems für d_1, so ist

$$A - B \text{ nicht } \equiv 0(d_1).$$

Sollen A und B auch zu einem vollständigen Restsystem für (d_1, d_2) gehören, so darf auch nicht $A - B \equiv 0(d_1, d_2)$ sein. Sicher wird es Formen geben, deren Differenz wohl zu (d_1, d_2), aber nicht zu (d_1) gehört. Sind A und B zwei solche Formen, so wird es möglich sein, $A - B$ als Summe $C + D$ zweier Formen herzustellen, von denen die erste d_1, die zweite d_2 angehört. B kann man nun in seinen Eigenschaften modulo d_1

durch $B' = B + C$ ersetzen, da $C \equiv 0 \bmod. d_1$. Tun wir dies, so wird, wegen $A - B = C + D$, $A - B' = D$ d_2 angehören.

Denken wir uns nun ein vollständiges Restsystem Γ von Formen R^{ter} Ordnung für d_1 hingeschrieben. Ist F irgend eine Form, so wird Γ eine Form A enthalten, von der Art, daß $F \equiv A \bmod. d_1$. Dann ist auch $F \equiv A \bmod. (d_1, d_2)$. Mithin werden die Formen von Γ mehr als genügen, ein Restsystem von (d_1, d_2) zu bilden. Greifen wir aus Γ diejenigen $a_1, \cdots, a_h$ heraus, welche ein vollständiges Restsystem von (d_1, d_2) bilden. Ist B irgend eine Form von Γ, die nicht gleich einem der a_i, so ist für irgend einen Index i

$$a_i - B \equiv 0 \bmod. (d_1, d_2),$$

denn sonst würden die a_i kein vollständiges Restsystem für (d_1, d_2) bilden. Ersetzen wir B durch $B' = B + C$ in der Weise, wie vorhin angegeben, so daß $a_i - B' \equiv 0 \bmod. d_2$ und $C \equiv 0 \bmod. d_1$, und nennen wir $(a_i - B')$ b_2, so ist $a_i + b_2$ ein Glied von Γ. Wenn dies für irgend einen Index i der Fall ist, so muß es auch der Fall sein für jeden Index i. $a_j + b_2$ kann nämlich nicht $\equiv a_i + b_2 \bmod. d_1$ sein, da a_j nicht $\equiv a_i \bmod. d_1$, und auch nicht $\equiv a_i$, da $a_j - a_i$ nicht $\equiv 0 \bmod. (d_1, d_2)$. Γ besteht somit zum mindesten aus den Formen a_i und $a_i + b_2$. Es sei B eine Form von Γ, die nicht unter den eben genannten enthalten ist. Alsdann verfahren wir genau wie oben und finden damit, daß B sich ersetzen läßt durch $a_i + b_3$, wo $b_3 \equiv 0 \bmod. d_1$ und i irgend ein bestimmter Index. Man kann nun wieder zeigen, daß $a_i + b_3$ für jeden Index i Γ angehören muß. Denn einerseits kann $a_i + b_3$ nicht $\equiv a_j + b_3 \bmod. d_1$ sein, weil a_i nicht $\equiv a_j \bmod. d_1$, noch $a_i + b_3 \equiv a_j$ oder $a_j + b_2 \bmod. d_1$, da $a_i - a_j$ ja auch nicht $\equiv 0 \bmod. (d_1, d_2)$. So fortfahrend erschließen wir, daß Γ sich in die Gestalt bringen läßt

$$\begin{array}{l} a_1,\ a_1 + b_2,\ \cdots,\ a_1 + b_k \\ a_2,\ a_2 + b_2,\ \cdots,\ a_2 + b_k \\ \cdots \\ a_h,\ a_h + b_2,\ \cdots,\ a_h + b_k. \end{array}$$

Ebenso läßt sich das vollständige Restsystem von d_2 in die Gestalt bringen

$$\begin{array}{l} a_1,\ a_1 + c_2,\ \cdots,\ a_1 + c_l \\ a_2,\ a_2 + c_2,\ \cdots,\ a_2 + c_l \\ \cdots \\ a_h,\ a_h + c_2,\ \cdots,\ a_h + c_l, \end{array}$$

wo die c_i dem Modul d_1 angehören.

Ich behaupte nun, wenn noch der Kürze halber $b_1 = 0$, $c_1 = 0$ gesetzt wird, daß die $h \cdot k \cdot l$ Formen

$$a_i + b_j + c_n$$

ein vollständiges Restsystem für $[d_1, d_2]$ ausmachen.

Keine zwei dieser Formen sind mod. $[d_1, d_2]$ kongruent. Denn aus

$$a_i + b_j + c_n \equiv a_{i'} + b_{j'} + c_{n'} \text{ mod. } [d_1, d_2]$$

folgt

$$a_i \equiv a_{i'} \text{ mod. } (d_1, d_2),$$

also

$$i = i'$$

$$c_n \equiv c_{n'} \text{ mod. } (d_2),$$

also

$$a_i + c_n \equiv a_i + c_{n'} \text{ mod. } (d_1)$$

und

$$n = n',$$

ebenso

$$j = j'.$$

Ist F eine beliebige Form, so lassen sich Indizes i, j finden, derart, daß

$$F - a_i - b_j \equiv 0 \text{ mod. } d_1$$

und Indizes

$$i', n,$$

so daß

$$F - a_{i'} - c_n \equiv 0 \text{ mod. } d_2.$$

Dann ist

$$F - a_i - b_j - c_n \equiv 0 \text{ mod. } d_1$$

und

$$F - a_{i'} - b_j - c_n \equiv 0 \text{ mod. } d_2.$$

Durch Subtraktion kommt, wie leicht ersichtlich,

$$a_i - a_{i'} \equiv 0 \text{ mod. } (d_1, d_2),$$

somit $i = i' \cdot F - a_i - b_j - c_n$ gehört also sowohl d_1 wie d_2, d. h. $[d_1, d_2]$ an. F war aber eine beliebig zu wählende Form R^{ter} Ordnung.

Das System $a_i + b_j + c_n$ ist danach in der Tat ein vollständiges Restsystem R^{ter} Ordnung für $[d_1, d_2]$.

Nun ist

$$D[d_1, d_2] = hkl,$$

$$D(d_1, d_2) = h,$$

$$Dd_1 = hk,$$

$$Dd_2 = hl,$$

Satz XV infolgedessen evident. Es zeigt sich überdies, daß $D(d_1, d_2)$, Dd_1, Dd_2 Teiler sind von $D[d_1, d_2]$, und daß $D(d_1, d_2)$ ein Teiler ist von Dd_1.

31. Satz XVI. „Ist M ein ganzzahliger Modul, so lassen sich seine Formen R^{ter} Ordnung darstellen in der Gestalt

$$u_1 f_1 + \cdots + u_n f_n,$$

wo $u_1, \cdots, u_n$ beliebige ganze Zahlen und $f_1, \cdots, f_n$ geeignet ausgewählte ganzzahlige Formen sind. Dabei ist $n = \varphi(R) - HM(R)$, und es ist möglich, $h = HM(R)$ ganzzahlige Formen

$$f_{n+1}, \cdots, f_{n+h}$$

anzugeben, die mit $f_1, \cdots, f_n$ ein Fundamentalsystem aller ganzzahligen Formen R^{ter} Ordnung bilden."

Ist $F_1, \cdots, F_{n+h}$ irgend ein beliebiges Fundamentalsystem aller ganzzahligen Formen R^{ter} Ordnung, z. B. das System der Potenzprodukte der Variablen, so kann man die Form

$$F = v_1 F_1 + \cdots + v_{n+h} F_{n+h}$$

den h Bedingungen unterwerfen, M anzugehören, und so h lineare homogene ganzzahlige Gleichungen für die $v_1, \cdots, v_{n+h}$ herstellen. Seien dieselben etwa

$$l_1 = 0, \cdots, l_h = 0.$$

Haben die Determinanten der von $l_1, \cdots, l_h$ gebildeten Matrix einen gemeinsamen Teiler, und ist p ein Primzahlteiler desselben, so kann man in der Algebra modulo p nichtverschwindende Zahlen $w_1, \cdots, w_h$ bestimmen, derart, daß identisch $w_1 l_1 + \cdots + w_h l_h \equiv 0 \text{ mod. } p$. Ist in dieser Beziehung w_1 eine von 0 verschiedene Zahl, so kann man das System

$$l_1, l_2, \cdots, l_h$$

ersetzen durch das andere

$$\frac{1}{p}(w_1 l_1 + \cdots + w_h l_h), \quad l_2, \cdots, l_h,$$

das auch ganzzahlig und dem ersteren äquivalent ist. Haben die Determinanten der von diesen Linearformen gebildeten Matrix noch einen gemeinsamen Teiler, so ist er jedenfalls kleiner als der des ersten Systems. So kann man fortfahren, bis schließlich ein System ganzzahliger Formen der v_i

$$L_{n+1}, \cdots, L_{h+h}$$

erhalten wird, die gleich 0 gesetzt, dieselben Bedingungen aussagen wie die Gleichungen $l_1 = 0, \cdots, l_h = 0$ und deren Matrix keinen gemeinsamen Teiler mehr enthält. Nun wählen wir irgend ein System ganzzahliger Linearformen der $v_i : L_1, \cdots, L_n$, so daß die Determinante der L_i gleich 1 ist. Dies ist nach den Elementen der Zahlentheorie möglich. Alsdann bestimmen sich die $f_1, \cdots, f_{n+h}$ aus der Identität

$$v_1 F_1 + \cdots + v_{n+h} F_{n+h} = L_1 f_1 + \cdots + L_{n+h} f_{n+h}$$

ebenfalls als Fundamentalsystem der Formen R^{ter} Ordnung, da ja die Transformationsdeterminante der $f_1, \cdots, f_{n+k}$ in bezug auf die $F_1, \cdots, F_{n+k}$ gleich 1 sein muß. Die Gestalt der letzteren Beziehung erweist die Behauptung.

32. Satz XVII. „Ist M ein ganzzahliger Modul der Stufe $m-1$ und f eine beliebig vorgegebene Form, so gibt es eine ganzzahlige Form F der Koeffizienten von f, deren Ordnung gleich der Hilbertschen Funktion von M ist und die nur verschwindet, wenn f nicht relativ prim zu M. Ist f relativ prim zu M, so ist (M, f) ein Divisor, und es gilt

$$D(M, f)(R) = F$$

für genügend große Werte von R."

Es sei h die Hilbertsche Funktion von M, k die Ordnung von F und R so groß gewählt, daß der Wert von $HM(R-k) = h$ ist. Stellen wir uns dann ein Fundamentalsystem der Ordnungen R und $R-k$ von M in der Weise her, wie es Satz XVI vorschreibt.

Die Funktionen $F_{n+1}, \cdots, F_{n+k}$ seien für die Ordnung R $a_1, \cdots, a_k$, für die Ordnung $R-k$ $b_1, \cdots, b_k$.

Die Formen R^{ter} Ordnung von (M, F) erscheinen in der Gestalt $u_1 f_1 + \cdots + u_n f_n + pf$, wo p eine ganzzahlige Form der Ordnung $R-k$. pf ist modulo M einer linearen Form der $a_1, \cdots, a_k$ kongruent

$$p \cdot f \equiv A_1 a_1 + \cdots + A_k a_k \text{ mod. } M,$$

wo die $A_1, \cdots, A_k$ von den Koeffizienten von p und f linear abhängen. p ist einer linearen Form der $b_1, \cdots, b_k$ kongruent

$$p \equiv B_1 b_1 + \cdots + B_k b_k \text{ mod. } M.$$

Die A_i sind also gewisse angebbare ganzzahlige lineare Formen der B_i. Nach den Sätzen von Frobenius-Smith enthält das vollständige Restsystem der Linearformen A_i, wenn die B_i irgendwelche ganzzahlige Werte annehmen, eine Anzahl Glieder, die durch den Wert der Determinante der A_i angegeben wird. Dieselbe ist eine ganzzahlige Form der Koeffizienten von f der Ordnung h und nur dann gleich 0, wenn die $A_1, \cdots, A_k$ linear-dependent sind, (M, f) also kein Divisor ist. Damit ist die Behauptung vollständig erwiesen.

Die Form F der Koeffizienten von f hat folgende Eigenschaften. Es ist identisch

$$F \cdot \Phi = p_1 u_1 + \cdots + p_k u_k + pf.$$

Hier bedeutet $u_1, \cdots, u_k$ eine Basis von M; $p, p_1, \cdots, p_k$ ganzzahlige Formen der $x_1, \cdots, x_m$ wie der Unbestimmten von f, Φ eine beliebig gegebene ganzzahlige Form, deren Ordnung genügend groß ist. Es ist dies eine unmittelbare Folge der Darstellbarkeit von F als Determinante. Die Form F ist primitiv. Wäre dies nicht der Fall, so würde F in der

Algebra modulo einer Primzahl p verschwinden, die $A_1, \cdots, A_k$ würden in dieser Algebra linear-dependent sein und die Formen von (M, f) hätten, was auch f sei, in der Algebra modulo p einen Punkt gemein. Die Formen von M hätten also in der Algebra modulo p Gebilde gemein, deren Stufe höchstens $m - 2$ wäre, wären also teilbar durch Divisoren der Stufe $m - 2$, was gegen die Voraussetzung verstößt, daß M ein ganzzahliger Modul der Stufe $m - 1$ sein soll.

Es ist ferner

$$F(f) \cdot F(g) = F(f \cdot g),$$

d. h. das einem Produkte zweier Formen entsprechende F ist das Produkt der den beiden Formen beziehungsweise entsprechenden F. Setzen wir nämlich etwa

$$p \equiv z_1 \cdot d_1 + \cdots + z_k \cdot d_k \text{ mod. } M,$$

wo $d_1, \cdots, d_k$ die $f_1, \cdots, f_k$ der Ordnung von p, ferner in analoger Weise

$$p \cdot g \equiv A_1 a_1 + \cdots + A_k \cdot a_k \text{ mod. } M$$
$$p \cdot f \equiv B_1 b_1 + \cdots + B_k \cdot b_k \text{ mod. } M$$
$$p \cdot f \cdot g \equiv C_1 c_1 + \cdots + C_k \cdot c_k \text{ mod. } M,$$

so sind die $A_1, \cdots, A_k$ gewisse lineare Formen der Unbestimmten von g und der z_i, die $B_1, \cdots, B_k$ solche der Unbestimmten von f und der z_i, die $C_1, \cdots, C_k$ solche der Unbestimmten von f, g und der z_i. Nun ist die Determinante der letzteren in bezug auf die z_i teilbar durch die Determinante der $A_1, \cdots, A_k$ wie $B_1, \cdots, B_k$ in bezug auf die z_i, weil die $C_1, \cdots, C_k$ auch als ganze lineare Formen der $A_1, \cdots, A_k$ wie $B_1, \cdots, B_k$ darstellbar sind. Die Behauptung ist damit evident.

33. Eine andere Folge des Satzes XVI ist der folgende

Satz XVIII. „Ist M ein ganzzahliger Modul, n eine ganze Zahl, so ist

$$D(M, n)(R) = n^{HM(R)}.\text{“}$$

Denn stellt man die Formen R^{ter} Ordnung in der Weise dar, wie es Satz XVI als möglich erweist, so zeigt sich, daß eine beliebige ganzzahlige Form mod. (M, n) einer Form der Gestalt

$$u_1 f_1 + \cdots + u_k f_k$$

kongruent ist, wo die u_i unabhängig voneinander die Werte $1, \cdots, n$ durchlaufen und $k = HM(R)$ ist. Diese Formen sind aber inkongruent mod. (M, n), die Behauptung also klar.

Es ist durch Satz XVIII die Möglichkeit gegeben, Sätze über Dedekindsche Funktionen sogleich in solche über Hilbertsche Funktionen ganzzahliger Moduln umzuwandeln.

34. Die Systeme von Formen

$$u_1, \cdots, u_h,$$

welche durch Primideale h^{ter} Stufe, aber nicht durch solche niederer Stufe teilbar sind, bilden Ideale, welche durch ebenso merkwürdige Eigenschaften ausgezeichnet sind wie die Moduln solcher Systeme. Es gilt

Satz XIX. „Ist das Ideal

$$(u_1, \cdots, u_h)$$

nicht durch Primideale niederer als h^{ter} Stufe teilbar, und ist $h < m$, so ist identisch

$$(u_1, \cdots, u_h) = [Q_1, \cdots, Q_2, d_1, \cdots, d_j],$$

wo die Q_i und d_i primäre ganzzahlige Moduln und Divisoren h^{ter} Stufe sind.

„Ist $h = m$, so ist

$$(u_1, \cdots, u_h) = [d_1, \cdots, d_j, r],$$

wo $d_1, \cdots, d_j$ primäre Divisoren sind und r den Inbegriff der ganzzahligen Formen bedeutet, die apolar zu $\Omega(u_1, \cdots, u_m)$ oder von höherer Ordnung als Ω sind. Die Dedekindsche Funktion eines solchen Ideals $(u_1, \cdots, u_m)$ ist dem absoluten Werte der Resultante von $u_1, \cdots, u_m$ gleich und zwar für jeden Wert von R, der größer ist als $a_1 + \cdots + a_m - m$, wenn a_i die Ordnung von u_i bezeichnet."

Zunächst leiten wir einen Hilfssatz ab. Das Ideal $(u_1, \cdots, u_h)$ hat unendlich viele Basen, wenn $h > 1$. Zum Beispiel hat (u_1, u_2) die Basis $u_1, u_2 + pu$, wenn die Ordnung von u_2 größer als diejenige von u_1 oder ihr mindestens gleich ist und p irgend eine Form ist, deren Ordnung die Differenz der Ordnungen von u_1 und u_2. Wir werden nun zeigen, daß $(u_1, \cdots, u_h)$ eine Basis hat

$$v_1, v_2, \cdots, v_{h-1}, v_h$$

derart, daß

$$v_1, \cdots, v_{h-1}$$

die Basis eines ganzzahligen Moduls bilden.

Beweisen wir dies zunächst für $h = 2$. Ist eine der beiden Formen u_1, u_2 *primitiv*, so *ist die* Richtigkeit der Behauptung klar, denn man *brauchte nur* diese primitive Form $= v_1$ zu setzen, um die Forderung zu erfüllen. Sind beide imprimitiv und hat u_2 keine kleinere Ordnung als u_1, so muß unter den Voraussetzungen des Satzes XIX eine der Formen

$$u_2 + pu_1$$

primitiv sein. u_2 und u_1 können nämlich nicht beide durch dieselbe Primzahl teilbar sein, da sonst ihr Ideal die Stufe 1 hätte. Die gemeinsamen Teiler der Koeffizienten von u_2 und u_1 sind daher relativ prim zueinander.

Die Koeffizienten von $u_2 + pu_1$ sind somit lineare nicht homogene ganzzahlige Formen der Koeffizienten von p, und diese haben als Formen nicht einen gemeinsamen Teiler. Sie sind nicht für irgend ein Wertsystem der Koeffizienten von p Null. Man kann daher den letzteren solche Werte erteilen, daß die betreffenden Linearformen keinen gemeinsamen Teiler haben. Nachdem dies geschehen, ist $u_2 + pu_1$ eine primitive Form, die Basis

$$v_1 = u_2 + pu_1, \quad v_2 = u_1$$

erfüllt daher die Forderung des Hilfssatzes. Derselbe ist also bewiesen, wenn $h = 2$.

Beweisen wir den Hilfssatz durch Induktion. Sei die Richtigkeit des Satzes angenommen für den Wert $h - 1$. Ist u_h eine Form, deren Ordnung nicht größer ist als die einer der anderen u_i, so bestimmen wir Formen

$$v_1, \cdots, v_{h-2}, w,$$

deren Ideal dem von $u_1, \cdots, u_{h-1}$ äquivalent ist, und so, daß $v_1, \cdots, v_{h-2}$ einen ganzzahligen Modul bilden. Alsdann suchen wir p so zu bestimmen, daß $v_1, \cdots, v_{h-2}, w + pu_h$ einen ganzzahligen Modul bilden. Dies ist unter den Voraussetzungen des Satzes XIX immer möglich. $w + pu_h$ wird nicht eines der irreduziblen den $v_1, \cdots, v_{h-2}$ gemeinsamen Gebilde $C_1, \cdots, C_j$ enthalten. Bilden wir die Reihenfolge der Gleichungen, welche die Koeffizienten einer unbestimmten Form f derselben Ordnung wie w erfüllen müssen, damit sie eines der C_i enthalten, und ersetzen die Koeffizienten von f durch diejenigen von $w + pu_h$, so sind dieselben also durch kein Wertsystem der unbestimmten Koeffizienten von p identisch zu befriedigen, auch können sie keinen von den Unbestimmten unabhängigen gemeinsamen Teiler haben, da sonst modulo desselben das Ideal $u_1, \cdots, u_h$ die Stufe $h - 2$ hätte. Mithin kann man diesen Unbestimmten Werte erteilen, daß $w + pu_h$ modulo keiner Primzahl eines der $C_1, \cdots, C_h$ enthält. Dieses $w + pu_h$ setzen wir $= v_{h-1}$, $u_h = v_h$. Das Ideal $v_1, \cdots, v_{h-1}$ muß dann ein ganzzahliger Modul sein, da der Schnitt von $v_1, \cdots, v_{h-1}$ modulo jeder Primzahl relativ prim zu v_{h-1}. Der Hilfssatz ist somit erwiesen.

Sei zunächst $h = m$.

Wir ersetzen $u_1, \cdots, u_m$ durch ein ihm im Sinne des Hilfssatzes äquivalentes System $v_1, \cdots, v_m$, wobei $v_m = u_m$ die Form kleinster Ordnung des Systems. Da $v_1, \cdots, v_{m-1}$ ein ganzzahliger Modul, $v_1, \cdots, v_m$ ein Divisor, so ist die Dedekindsche Funktion des Ideals $(u_1, \cdots, u_m)$ gleich einer bestimmten primitiven Form F der Koeffizienten von u_m. Dabei ist die Ordnung von F gleich der Hilbertschen Funktion von $(v_1, \cdots, v_{m-1})$. Nun kann man aber nachweisen, daß die Dedekindsche Funktion eines Divisors von m Formen irgendwelcher Art

$$w_1, \cdots, w_m$$

für genügend große Werte von R immer durch die Resultante dieser Formen teilbar sein muß. Sind nämlich $w_1, \cdots, w_m$ Formen mit lauter unbestimmten Koeffizienten y_i, sind $a_1, \cdots, a_m$ die Ordnungen von $w_1, \cdots, w_m$, ist

$$R > a_1 + \cdots + a_m - m$$

und ist eine unbestimmte Form R^{ter} Ordnung f in der Gestalt

$$f = p_1 w_1 + \cdots + p_m w_m$$

angesetzt, wo die Koeffizienten der p_i Unbestimmte z_i, so können die z_i obiger Beziehung gemäß bei beliebig gegebenem f immer bestimmt werden, wenn $\operatorname{Res}(w_1, \cdots, w_m) \neq 0$, sonst aber nicht.

Daraus folgt dann, daß bei unbestimmten y_i die Determinanten $\varphi(R)^{\text{ter}}$ Ordnung des aus den Koeffizienten von $p_1 w_1 + \cdots + p_m w_m$, die ja Linearformen der z_i sind, gebildeten Systems teilbar sein müssen durch

$$\operatorname{Res}(w_1, \cdots, w_m).$$

Diese Determinanten haben daher für unbestimmte y_i, also erst recht für bestimmt gegebene Werte der y_i zum mindesten den gemeinsamen Teiler

$$\operatorname{Res}(w_1, \cdots, w_m).$$

$D(w_1, \cdots, w_m)(R)$ muß daher immer durch $\operatorname{Res}(w_1, \cdots, w_m)$ teilbar sein, wenn

$$R > a_1 + \cdots + a_m - m.$$

Bedeuten nun $a_1, \cdots, a_m$ die Ordnungen der $u_1, \cdots, u_m$ beziehungsweise $v_1, \cdots, v_m$, so folgt, daß für genügend große Werte von R die obengenannte Form F der Koeffizienten von u_m teilbar sein muß durch $\operatorname{Res}(v_1, \cdots, v_{m-1}, u_m)$. Aber die letztere ist von derselben Ordnung, nämlich $a_1 \cdots a_{m-1}$, wie F. Auch war F primitiv; also ist

$$F = \pm \operatorname{Res}(v_1, \cdots, v_{m-1}, u_m).$$

Man kann auch den Wert von R, von dem ab diese Gleichung gilt, ganz genau bestimmen. In der Ableitung von Satz XVII war der Wert von R so groß gewählt, daß der Wert von $HM(R-k) = h$ ist. Hierfür genügt es, im vorliegenden Falle nach Satz II $R > a_1 + \cdots + a_m - m$ zu wählen, denn dann ist die Gleichung

$$H(v_1, \cdots, v_{m-1})(R - a_m) = H(v_1, \cdots, v_{m-1})(R)$$

immer befriedigt. Die obige Gleichung gilt somit für alle Werte

$$R > a_1 + \cdots + a_m - m.$$

Dies beweist den letzten Teil des Satzes XIX.

35. Stellen wir nun $(u_1, \cdots, u_m)$ in der Weise des Satzes XIII dar

$$(u_1, \cdots, u_m) = [d_1, \cdots, d_j, r].$$

Wir werden dann zeigen, daß jede Form F R^{ter} Ordnung, wo

$$R > a_1 + \cdots + a_m - m,$$

welche zu $d_1, \cdots, d_j$ gehört, zum Ideal $(u_1, \cdots, u_m)$ gehören muß. Dies ist richtig, wenn $m = 2$ und eine der beiden Formen eine primitive Linearform ist. Denn dann ist (u_1, u_2) identisch mit $(R \cdot x^n, l)$, wo l die primitive Linearform, R die Resultante von u_1 mit l, x eine Variable, deren Determinante mit l die Einheit ergibt. Die primären Divisoren dieser Ideale sind daher von der Gestalt

$$p^h, l,$$

wo p die verschiedenen Primzahlen, welche in R aufgehen, durchläuft und p^h die höchste in R aufgehende Potenz von p ist. Also muß eine Form f, die all diesen primären Divisoren angehört und von der Ordnung n' ist, die Gestalt

$$R \cdot g + l \cdot g'$$

haben, wo g mod. l ein Multiplum von x^n ist. Wir erweisen die Behauptung allgemein durch Induktion, indem wir annehmen, daß die Behauptung zutreffe im Bereiche von $m-1$ Variablen, wenn eine der Formen u_i primitiv und linear ist, und daraus herleiten, daß sie dann gilt im Bereiche von $m-1$ Variablen überhaupt und im Bereiche von m Variablen, wenn eine der Formen primitiv und linear ist. Seien $w_1, \cdots, w_{m-2}, w_{m-1}$ $m-1$ Formen im Bereiche von $m-1$ Variablen, $w_1, \cdots, w_{m-2}$ bereits so ausgewählt, daß $(w_1, \cdots, w_{m-2})$ ein ganzzahliger Modul. Es sei l eine primitive und lineare Form, die zu $w_1, \cdots, w_{m-1}$ relativ prim ist. f sei eine Form der Ordnung R

$$R > a_1 + \cdots + a_{m-1} - m + 1,$$

wo a_i die Ordnung von w_i bezeichnet, und gehöre zu den primären Divisoren von $(w_1, \cdots, w_m)$.

Es wird nun nach Satz XIII eine Zahl R geben, so groß, daß f dann eo ipso zum Ideal $(w_1, \cdots, w_{m-1})$ gehört. Um nachzuweisen, daß diese Zahl $= a_1 + \cdots + a_m - m + 2$ ist, nehmen wir zunächst an, sie sei größer als diese Zahl und machen klar, daß sie dann noch kleiner gemacht werden kann. Ist also die Ordnung von f um die Einheit kleiner als diese Zahl, so folgt

$$\cdot\, l \cdot f \equiv 0 \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-1}),$$

d. h. es wird ganzzahlige Formen $p_1, \cdots, p_{m-1}$ geben, so daß

$$l \cdot f = p_1 w_1 + \cdots + p_{m-1} w_{m-1} \cdot$$

Da l relativ prim zu $w_1, \cdots, w_{m-2}, w_{m-1}$, so wird p_{m-1} zu den primären

Divisoren von l, w, $\cdots$, w_{m-2} gehören, also nach Voraussetzung, da auch die Ordnung von p_{m-1} die Bedingung des Satzes XIX erfüllt, zum Ideal $w_1, \cdots, w_{m-2}, l$ gehören. Eine ganzzahlige Form q wird daher existieren, so daß

$$p_{m-1} \equiv ql \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2});$$

es wird also sein

$$lf - lq \cdot w_{m-1} \equiv 0 \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2})$$

und nach Satz I

$$f - q w_{m-1} \equiv 0 \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2}).$$

Nun sind aber f, q, w_{m-1} ganzzahlige Formen. Die linke Seite gehört also zum Ideal $w_1, \cdots, w_{m-2}$, welches ja ein ganzzahliger Modul ist, und demnach f zum Ideal

$$w_1, \cdots, w_{m-1}.$$

Die betreffende Ordnung kann also reduziert werden, solange

$$R > a_1 + \cdots + a_{m-1} - m + 2.$$

Satz XIX ist demnach richtig unter der Annahme des Induktionsschlusses im Bereiche von $m - 1$ Variablen.

36. Seien nun $w_1, \cdots, w_{m-1}$ m Formen, von denen die letzte primitiv und linear, im Bereiche von m Variablen. Wir wählen ein System von $m - 1$ ganzzahligen Linearformen, deren Determinante mit l die Einheit ergibt, und entwickeln $w_1, \cdots, w_{m-1}$ und f nach ihnen. So kommt

$$w_1 = w_1' + l \cdot w_1''$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$w_{m-1} \equiv w_{m-1}' + l w_{m-1}''$$

$$f \equiv f' + lf'',$$

wobei die einfach gestrichelten Formen von l unabhängig sind. Da f zu den primären Divisoren von $w_1, \cdots, w_{m-1}, l$ gehört, so wird f mit irgend einer von l unabhängigen Form genügend hoher Ordnung multipliziert zum Ideal $(w_1, \cdots, w_{m-1}, l)$ gehören, f' wird also mit einer solchen Form multipliziert $(w_1', \cdots, w_{m-1}')$ zugehören, f' wird somit zu den primären Divisoren von $(w_1', \cdots, w_{m-1}')$ gehören. Ist nun noch die Ordnung von f nach der Bedingung von Satz XIX größer als

$$a_1 + \cdots + a_{m-1} + 1 - m,$$

so wird f' nach dem bereits Bewiesenen zum Ideal $(w_1', \cdots, w_{m-1}')$ gehören. Dies schließt aber offenbar ein, daß f zum Ideal $(w_1, \cdots, w_{m-1}, l)$ gehöre. Es ist damit durch Induktion klar gestellt, daß jede Form, deren Ordnung größer als $a_1 + \cdots + a_m - m$ und die zu den primären Divisoren von $(u_1, \cdots, u_m)$ gehört, zum Ideal $(u_1, \cdots, u_m)$ gehören muß.

Es sei f eine ganzzahlige Form, deren Ordnung $< a_1 + \cdots + a_m - m$, die apolar zu $\Omega(u_1, \cdots, u_m)$ ist und die zu den primären Divisoren d_i gehört. Wir wollen dann nachweisen, daß f zum Ideal $(u_1, \cdots, u_m)$ gehören muß. Dieser Satz ist offenbar richtig, wenn $m = 2$ und eine der Formen u_i eine primitive Linearform ist, denn dann ist eine zu $\Omega(u_1, u_2)$ apolare Form ein Multiplum dieser Linearform. Erweisen wir demnach die Behauptung durch Induktion, indem wir zeigen, daß der Satz richtig sein muß, wenn er richtig ist für $m-1$ Formen, von denen eine primitiv und linear ist, im Raume von $m-1$ Variablen.

Aus der letzteren Voraussetzung folgt zunächst, daß der Satz richtig ist für $m-1$ beliebige Formen von $m-1$ Variablen. Seien $w_1, \cdots, w_{m-1}$ die Formen, bereits so gewählt, daß $w_1, \cdots, w_{m-2}$ einen ganzzahligen Modul bilden. Sei l eine primitive zu $(w_1, \cdots, w_{m-1})$ relativ prime Linearform.

Ist f eine zu Ω konjugierte Form der Ordnung von Ω und gehört es zu den primären Teilen von $(w_1, \cdots, w_{m-1})$, so wird $l \cdot f$ zum Ideal $(w_1, \cdots, w_{m-1})$ gehören, d. h. es wird eine Identität existieren

$$l \cdot f = p_1 w_1 + \cdots + p_{m-1} w_{m-1},$$

wo die p_i ganzzahlige Formen. Auch wird, da f apolar zu $(w_1, \cdots, w_{m-1})$, eine nicht notwendig ganzzahlige Identität existieren

$$f = q_1 w_1 + \cdots + q_{m-1} w_{m-1},$$

also wird sein

$$(p_{m-1} - l q_{m-1}) w_{m-1} \equiv 0 \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2})$$

und nach Satz I

$$p_{m-1} \equiv l q_{m-1} \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2});$$

p_{m-1} wird daher apolar sein zu

$$\Omega(w_1, \cdots, w_{m-2}, l).$$

Auch wird p_{m-1} zu den primären Divisoren von $(w_1, \cdots, w_{m-2}, l)$ gehören, da

$$p_{m-1} w_{m-1} \equiv 0 \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2}, l)$$

und w_{m-1} relativ prim zu $w_1, \cdots, w_{m-2}, l$. Mithin wird nach Voraussetzung p_{m-1} zum Ideal $(w_1, \cdots, w_{m-2}, l)$ gehören. Sei

$$p_{m-1} = q l + q_1 w_1 + \cdots + q_{m-2} w_{m-2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Identität

$$l \cdot f = p_1 w_1 + \cdots + p_{m-1} w_{m-1},$$

so folgt eine Identität der Gestalt

$$l(f - q w_{m-1}) = s_1 w_1 + \cdots + s_{m-2} w_{m-2}.$$

Nach Satz I ist

$$f - q w_{m-1} \equiv 0 \text{ mod. } (w_1, \cdots, w_{m-2}).$$

Doch $(w_1, \cdots, w_{m-1})$ war ein ganzzahliger Modul und f, q, w sind ganzzahlige Formen. Somit ist dann $f \equiv 0 \mod. (w_1, \cdots, w_{m-1})$. Dies erweist die Richtigkeit der Behauptung für Formen f derselben Ordnung wie Ω und genau so kann man Schritt für Schritt die Richtigkeit der Behauptung erweisen für um die Einheit abnehmende Ordnungen. Der Satz ist also unter der Voraussetzung des Induktionsschlusses richtig für $m-1$ beliebige Formen im Bereiche von $m-1$ Variablen. Hieraus folgt nun wieder, daß der Satz richtig ist für $m-1$ Formen und eine primitive Linearform l im Bereiche von m Variablen. Seien die $m-1$ Formen $w_1, \cdots, w_{m-1}$. Entwickeln wir dieselben nach einem System von m linearen ganzzahligen Formen der Variablen, deren Determinante 1 ist und von denen l eine ist. Setzen wir

$$w_1 = w_1' + l w_1'',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{m-1} = w_{m-1}' + l w_{m-1}'',$$
$$f = f' + l f'',$$

wo die $w_1', \cdots, w_{m-1}', f'$ von l unabhängig sind, so ist f' apolar zu

$$\Omega(w_1', \cdots, w_{m-1}'),$$

da aus der Apolarität von f zu $\Omega(w_1, \cdots, w_{m-1}, l)$ die Existenz der Kongruenzen $f \equiv 0 \mod. (w_1, \cdots, w_{m-1}, l)$ und $f' \equiv 0 \mod. (w_1', \cdots, w_{m-1}')$ folgt.

Da f zu den primären Divisoren des Moduls $(w_1, \cdots, w_{m-1}, l)$ gehört, so auch zu denen von $(w_1', \cdots, w_{m-1}', l)$.

Ein Multiplum genügend hoher Ordnung von f muß also zum Ideal $(w_1', \cdots, w_{m-1}', l)$ gehören, f' muß daher zu den primären Divisoren von $(w_1', \cdots, w_{m-1}')$ gehören. Mithin sind die notwendigen Voraussetzungen dafür erfüllt, daß f' zum Ideal $(w_1', \cdots, w_{m-1}')$ gehöre, und dies schließt offenbar ein, daß f zum Ideal $(w_1, \cdots, w_{m-1}, l)$ gehöre.

Der Beweis durch Induktion von Satz XIX für den Fall $h = m$ ist damit vollendet. Für $h < m$ folgt Satz XIX aber leicht aus obigem. Seien die primären Ideale h^{ter} Stufe von $u_1, \cdots, u_h$ mit $I_1, \cdots, I_j$ bezeichnet und sei

$$f \equiv 0 \mod. [I_1, \cdots, I_j].$$

Seien $u_{h+1}, \cdots, u_m$ Formen mit unbestimmten Koeffizienten und von sehr hohen Ordnungen. f gehört alsdann zu den primären Divisoren von $u_1, \cdots, u_m$, da die primären Ideale, welche $(u_1, \cdots, u_h)$ außer den $I_1, \cdots, I_j$ noch haben mag, die also von höherer Stufe als h sind, durch fortgesetzten Schnitt mit relativ primen Formen u_{h+1}, u_{h+2} etc. schließlich zur Gesamtheit aller Formen werden müssen. Auch ist f apolar zu $\Omega(u_1, \cdots, u_m)$, da f, wenn nicht zum Ideal, doch nach Satz XI zum Modul $(u_1, \cdots, u_h)$ gehört. Somit gehört f nach dem, was bereits bewiesen, zum

Ideal $(u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_m)$, was wegen der Höhe der Ordnungen von $u_{k+1}, \cdots, u_m$ darauf hinauskommt, daß f zum Ideal $(u_1, \cdots, u_k)$ gehört.

Satz XIX ist damit in allen seinen Teilen bewiesen.

37. Zum Schluß erweitern wir die Definition der Dedekindschen Funktion auf beliebige Ideale. Ist J irgend ein Ideal, so bedeute

$$DJ(R)$$

die Anzahl der Formen R^{ter} Ordnung, welche sämtlich dem J entsprechenden Modul angehören und für ganzzahlige Formen dieses Moduls ein vollständiges Restsystem in bezug auf J bilden. Ist

$$f_1, \cdots, f_n$$

ein Fundamentalsystem aller ganzzahligen Formen R^{ter} Ordnung des J entsprechenden Moduls und setzt man

$$u_1 f_1 + \cdots + u_n f_n = p_1 v_1 + \cdots + p_k v_k,$$

wo $v_1, \cdots, v_k$ eine Basis von J, $p_1, \cdots, p_k$ Formen mit unbestimmten Koeffizienten z_i, die $u_1, \cdots, u_n$ Unbestimmte sind, so sind die letzteren lineare Formen der z_i und jedem Wertsystem der u_i entsprechen Wertsysteme der z_i. Aus diesem Grunde verschwinden die Determinanten der Ordnung n der Linearformen u_i nicht sämtlich. Ihr größter gemeinschaftlicher Teiler ist nach den Sätzen von Frobenius-Smith gleich der Dedekindschen Funktion von J für die Ordnung R. Nur eine endliche Zahl der $e_1, \cdots, e_n$ des Systems der u_i können von 1 verschieden sein, und ihre Indizes sind für genügend große Werte der Ordnung R Polynome von R. Denn J ist nach Satz XIII gleich (M, d, r), wo M ein ganzzahliger Modul, d ein Divisor, r was man ein „endliches" Ideal nennen könnte und es zeigt sich auf die folgende Weise, daß

$$D(M, d) \cdot DJ = Dd$$

für alle Werte R ist. Es sei $A_1, \cdots, A_a$ ein vollständiges Restsystem R^{ter} Ordnung von (M, d). Ist dann B ein Glied des vollständigen Restsystems von d, das nicht in obigem enthalten, so ist

$$B \equiv A_i \bmod. (M, d)$$

für einen Index i. Mithin ist folgende Zerspaltung möglich

$$B - A_i = B' + B'',$$

wo $B' \equiv 0 \bmod. M$, $B'' \equiv 0 \bmod. d$. $B - B'' = A_i + B'$ ist also eine Form, die im vollständigen Restsystem von d B ersetzen könnte. Führen wir die Substitution aus. Es ist dann $A_i + B'$ für jeden Wert des Index i ein Glied des vollständigen Restsystems modulo d, da die Kongruenz $A_i + B' \equiv A_j \bmod. d$ zu $A_i \equiv A_j \bmod. (M, d)$ führen würde. Man kann danach zeigen, daß das vollständige Restsystem von d sich in die Gestalt bringen lassen muß

$$\begin{array}{c} A_1 + B_1, \cdots, A_1 + B_b \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_a + B_1, \cdots, A_a + B_b, \end{array}$$

wo

$$A_i \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

Für einen bestimmten Index h wird nun $A_h + B_1, \cdots, A_h + B_b$ ein vollständiges Restsystem von J in bezug auf die Formen R^{ter} Ordnung von M sein. Offenbar ist nicht für verschiedene Indizes i, j

$$B_i \equiv B_j \text{ mod. } d,$$

da

$$A_1 + B_i \quad \text{nicht} \quad \equiv A_1 + B_j \text{ mod. } d.$$

Ist F irgend eine Form R^{ter} Ordnung von M, so wird es Indizes h, k geben, so daß

$$F \equiv A_h + B_k \text{ mod. } d.$$

Der Index h wird immer derselbe sein, denn aus obigem folgt

$$A_h \equiv 0 \text{ mod. } (M, d).$$

$A_h + B_1, \cdots, A_h + B_b$ ist also in der Tat ein vollständiges Restsystem der Formen von M in bezug auf J. Ihre Anzahl ist b. Es war aber

$$D(M, d) = a, \quad Dd = a \cdot b.$$

Die Behauptung ist damit klar gestellt.

Die kleinste Zahl, mit der multipliziert Formen von M dem Ideal J angehören, ist für genügend große Werte von R jedenfalls nicht größer als die kleinste d zugehörige Zahl. Hieraus und aus Schlüssen, die den schon früher angestellten parallel laufen, ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz XX. „Die Gesamtheit der Formen R^{ter} Ordnung eines Ideals J ist darstellbar in der Gestalt

$$A(u_1 f_1 + \cdots + u_a f_a) + B(u_{a+1} f_{a+1} + \cdots + u_b f_b) + \cdots \\ + N(u_{k+1} f_{k+1} + \cdots + u_n f_n).$$

Hierbei bedeuten $f_1, \cdots, f_n$ Formen, die Teil eines ganzzahligen Fundamentalsystems aller Formen R^{ter} Ordnung bilden können. Die $u_1, \cdots, u_n$ sind beliebige ganze Zahlen, $A, B, \cdots, N$ sind ein System sich mit R nicht ändernder ganzer Zahlen, von denen jede durch die vorhergehende teilbar ist, und $a, b, \cdots, n$ sind Funktionen von R, welche für genügend große Werte von R gleich Polynomen von R sind."

Kapitel III.

Erweiterung auf Potenzreihen.

38. Die Grundlagen der bisherigen Untersuchung seien nun erweitert auf den Bereich der analytischen Funktionen. Auch dann bleiben viele der bisherigen Ergebnisse bestehen und andere fügen sich an, welche für die Erkenntnis gewisser Beziehungen sowohl in der Funktionentheorie wie in der Algebra von Bedeutung sind.

Der Bereich der Funktionen sei der der Potenzreihen von $m-1$ Veränderlichen

$$x_1, x_2, \cdots, x_{m-1},$$

welche um den gegebenen Punkt

$$P \equiv x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1} = 0$$

herum einen endlichen, wenn auch beliebig kleinen Konvergenzbereich haben, so daß sich also positive von Null verschiedene Größen

$$e_1, e_2, \cdots, e_{m-1}$$

angeben lassen, derart, daß die Werte

$$|x_1| < e_1, \ |x_2| < e_2, \cdots, |x_{m-1}| < e_{m-1}$$

dem Konvergenzbereich der hier betrachteten Potenzreihen angehören.

Sind $f_1, f_2, \cdots, f_k$ derartige Potenzreihen, welche sämtlich in P verschwinden, so heiße die Gesamtheit aller Potenzreihen

$$A_1 f_1 + \cdots + A_k f_k,$$

wo die $A_1, \cdots, A_k$ ganz beliebige Potenzreihen der $x_1, \cdots, x_{m-1}$ sind, ein um P analytischer Modul, oder kurz ein P-Modul. Ist E irgend eine in P nicht verschwindende Potenzreihe

$$E = 1 + ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_1x_2 + \cdots \text{ in inf.},$$

so ist

$$\frac{1}{E} = 1 - (ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_1x_2 + \cdots) \\ + (ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_1x_2 + \cdots)^2 - \cdots$$

ebenfalls in derselben Weise entwickelbar. In bezug auf P-Moduln verhalten sich daher Faktoren der Gattung E wie Einheiten. Ist M ein P-Modul und ist

$$F \,.\, E \equiv 0 \bmod. M,$$

so ist auch

$$F \equiv 0 \bmod. M.$$

Es sei nun angesetzt

$$f_1 = \sum_{0\ \cdots\ 0}^{\infty\ \cdots\ \infty} {}_{n_1, \cdots, n_{m-1}} f^{(1)}_{n_1,\dots,n_{m-1}}\, x_1^{n_1} \cdots x_{m-1}^{n_{m-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_h = \sum_{0\ \cdots\ 0}^{\infty\ \cdots\ \infty} {}_{n_1, \cdots, n_{m-1}} f^{(h)}_{n_1,\dots,n_{m-1}}\, x_1^{n_1} \cdots x_{m-1}^{n_{m-1}}.$$

Hier bedeuten also die $f^{(i)}_{n_1,\dots,n_{m-1}}$ für jedes System der Indizes gegebene Größen, nur eingeschränkt durch Konvergenzbedingungen in einem endlichen, doch beliebig kleinen Bereich. Unter derselben Einschränkung sei angesetzt

$$A_i = \sum_{0\ \cdots\ 0}^{\infty\ \cdots\ \infty} {}_{n_1, \cdots, n_{m-1}} a^{(i)}_{n_1,\dots,n_{m-1}}\, x_1^{n_1} \cdots x_{m-1}^{n_{m-1}},$$

wo die $a^{(i)}_{n_1,\dots,n_{m-1}}$ konstante, jedoch unbestimmte Größen bedeuten. Wir setzen nun an

$$F = \sum_{0\ \cdots\ 0}^{\infty\ \cdots\ \infty} {}_{n_1, \cdots, n_{m-1}} y_{n_1,\dots,n_{m-1}}\, x_1^{n_1} \cdots x_{m-1}^{n_{m-1}},$$

indem wir mit $y_{n_1,\dots,n_{m-1}}$ ein System Variabler bezeichnen, und suchen die Beziehungen, welche zwischen diesen Variablen obwalten müssen, damit eine Beziehung der Art

$$F = A_1 \cdot f_1 + \cdots + A_h \cdot f_h$$

möglich sei. Durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzprodukte $x_1^{n_1} \cdots x_{m-1}^{n_{m-1}}$ ergibt sich aus obiger Gleichung eine beliebig weit fortsetzbare Reihe linearer Identitäten

$$y_{0,\dots,0} = 0$$

$$y_{1,0,\dots,0} = a^{(1)}_{0,\dots,0} f^{(1)}_{1,0,\dots,0} + \cdots + a^{(h)}_{0,\dots,0} f^{(h)}_{1,0,\dots,0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n_1,\dots,n_{m-1}} = \sum a^{(i)}_{g,\dots,k} f^{(i)}_{g',\dots,k'},$$

wo die Summation auszudehnen ist über alle Gruppen positiver ganzer Zahlen, die 0 mit eingeschlossen, von $g, \cdots, k, g', \cdots, k'$, für welche

$$g + g' = n_1, \cdots, k + k' = n_{m-1},$$

und über alle Indizes i von 1 bis h.

Wir nennen

$$n_1 + \cdots + n_{m-1} = r$$

die „Ordnung" einer Variablen $y_{n_1,\dots,n_{m-1}}$, eliminieren die Unbestimmten a aus obigen Gleichungen, indem wir sukzessive erst alle Gleichungen obiger Art der Ordnung $r = 0$, dann $r = 1$, dann $r = 2, \cdots$ betrachten, und erhalten auf diese Weise ein System linearer Beziehungen für die Variablen y

$$y_{0,0,\ldots,0} = 0$$
$$k \cdot y_{1,0,\ldots,0} + l \cdot y_{0,1,\ldots,0} + \cdots + n \cdot y_{0,0,\ldots,1} = 0$$
$$\text{etc. etc.},$$

welche die „Noetherschen Bedingungen" des P-Moduls $(f_1, \cdots, f_k)$ genannt werden sollen. Je nach der Maximalordnung der y, welche auf der linken Seite einer Noetherschen Bedingung stehen, werden wir letztere nach Ordnungen einteilen, so daß wir von der Gruppe der Noetherschen Bedingungen des P-Moduls der Ordnung $0, 1, 2, \cdots, r \cdots$ sprechen können. Die linke Seite einer Noetherschen Bedingung der Ordnung r des Moduls werden wir eine Noethersche Form der Ordnung r des P-Moduls nennen, und da es im allgemeinen verschiedene Noethersche Formen der Ordnung r desselben Moduls gibt, so werden wir von der (linearen) Schar solcher Noetherschen Formen als von der Gesamtheit der überhaupt möglichen Noetherschen Formen der Ordnung r des gegebenen P-Moduls sprechen.

39. Wenn eine Funktion F dem P-Modul M angehört, so ist dasselbe der Fall mit $t \cdot F$, wo t eine Potenzreihe um P mit beliebigen Koeffizienten bedeutet. Diese einfache Bemerkung klärt uns über das wesentlichste Merkmal der Struktur des unendlichen Systems der Noetherschen Bedingungen desselben P-Moduls auf. Denn da die Multiplikation von F mit t in ihrer Wirkung auf die Koeffizienten y einer linearen Transformation derselben gleichkommt, so ergeben sich durch Einsetzen dieser transformierten Werte für die ursprünglichen y wichtige Beziehungen zwischen den Scharen Noetherscher Formen.

Es sei N_r die Gesamtschar Noetherscher Formen r^{ter} Ordnung von M. Ersetzen wir

$$y_{n_1, \ldots, n_{m-1}} \quad \text{durch} \quad \sum t_{g, \ldots, k} \cdot y_{g', \ldots, k'},$$

die Summation ausgedehnt über alle Indexsysteme $g, \cdots, k, g', \cdots, k'$, für welche

$$g + g' = n_1, \cdots, k + k' = n_{m-1},$$

so wird durch diese Transformation F übergeführt in $t \cdot F$ und N_r übergeführt in einen Ausdruck derselben Ordnung r, welcher, nach den $t_{g, \ldots, k}$ entwickelt, geschrieben werden kann

$$N_r \cdot t_{0,\ldots,0} + A_1 \cdot t_{1,0,\ldots,0} + B_1 \cdot t_{0,1,\ldots,0} + \cdots + A_2 \cdot t_{1,1,0,\ldots,0} + \cdots.$$

Dabei bedeuten die $A_1, B_1, \cdots, A_2, \cdots$ lineare Formen der y allein, A_1 der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, A_2 der $(r-2)^{\text{ten}}$ Ordnung etc. Wenn nun $N_r = 0$

eine notwendige Bedingung ist für alle Formen F, die M angehören, so folgt, da ja die t sämtlich Unbestimmte sind, daß auch

$$A_1 = 0, B_1 = 0, \cdots, A_2 = 0, \cdots$$

Bedingungen sind, die eine Form des Moduls M notwendig erfüllen muß.

Jede Schar S von Noetherschen Bedingungen r^{ter} Ordnung zieht daher Scharen von Noetherschen Bedingungen kleinerer Ordnung als r notwendig nach sich. Die letzteren sind durch den eben beschriebenen Prozeß aus S zu gewinnen und heißen die „Dependenzen von S".

Es besteht nun der

Satz XXI: „Jedes System von Noetherschen Bedingungen, welches derart ist, daß mit jeder Noetherschen Bedingung auch alle ihre Dependenzen im System enthalten sind, bestimmt einen analytischen P-Modul."

Dabei verstehen wir unter einem analytischen P-Modul eine Menge von Potenzreihen um P, derart beschaffen, daß mit zwei Individuen p und q derselben auch $ap + bq$ in der Menge enthalten sei, wo a und b beliebige Potenzreihen um P.

Der Beweis des obigen Satzes ist sehr einfach. Seien die Scharen Noetherscher Bedingungen aller Ordnungen

$$N_0 = 0, N_1 = 0, N_2 = 0, \cdots, N_r = 0, \cdots$$

und sei die Gesamtheit der Potenzreihen betrachtet, die denselben genügen. Ist p ein Individuum dieser Menge, ist a irgend eine Potenzreihe, so werden durch Bildung von ap die Koeffizienten von p einer Transformation unterworfen, die N_r überführt in eine Summe von Noetherschen Bedingungen, die sämtlich in dem System $N_0, N_1, \cdots, N_r$ enthalten sind. Folglich ist mit p auch ap in der oben bestimmten Menge von Funktionen enthalten. Auch sind sämtliche den Koeffizienten der Potenzreihen auferlegte Bedingungen lineare. Somit ist, wenn p und q Individuen der Menge, dasselbe der Fall mit $ap + bq$.

Umgekehrt geht auch aus obiger Analyse hervor, daß das System der Noetherschen Bedingungen, welche einem gegebenen P-Modul M angehören, die im obigen Satze angegebene Eigenschaft haben muß.

40. Es gilt nun für P-Moduln das dem Theorem I (Kap. II, Nr. 16) für Moduln entsprechende Theorem:

Satz XXII: „Sind

$$f_1, f_2, \cdots, f_n \cdots$$

eine unendliche Reihe von Potenzreihen um P, so läßt sich immer eine Zahl k bestimmen, derart, daß für jeden Index $i > k$ Potenzreihen um P

$$p_1, p_2, \cdots, p_k$$

existieren, die eine Beziehung

$$f_i = p_1 \cdot f_1 + \cdots + p_k \cdot f_k$$

befriedigen."

Das Prinzip des Beweises dieses Satzes beruht auf einem anderen wichtigen Satze:

Satz XXIII: „Ist

$$f = \sum_{0 \cdots 0}^{\infty \cdots \infty} {}_{n_1, \cdots, n_{m-1}} c_{n_1, \cdots, n_{m-1}} x_1^{n_1} \cdots x_{m-1}^{n_{m-1}}$$

irgend eine gegebene Potenzreihe, so läßt sich immer eine in

$$x_1 = 0, \cdots, x_{m-1} = 0$$

nicht verschwindende Potenzreihe G angeben, derart, daß $G \cdot f$ eine Potenzreihe, in der die Potenzen einer der Variablen nicht über einen angebbaren Grad steigen."

Dieser Satz ist von Weierstraß gegeben und bewiesen worden (Math. Werke, Bd. II, Nr. 10). Der Beweis könnte auch durch Koeffizientenvergleichung und, bezüglich der Konvergenz von G, nach dem Cauchyschen Verfahren für die Integrale analytischer Differentialgleichungen geführt werden.

Aus Satz XXIII ist der Beweis des Satzes XXII unschwer zu erbringen. Dieser Satz ist offenbar richtig für Potenzreihen nur einer Variablen, aus dem schon von Hilbert angeführten Grunde. Führen wir nun den zu erbringenden Nachweis durch Induktion, genau wie Hilbert, so können wir durch die Darstellung jeder der Funktionen $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ in der durch den Satz XXIII als möglich erwiesenen Gestalt

$$f_n = F_n \cdot (x^g + x^{g-1} A_n + x^{g-2} B_n + \cdots)$$

(wo F_n eine in P nicht verschwindende Potenzreihe, x eine Variable, $A_n, B_n, \cdots$ Potenzeihen der übrigen $m-2$ Variablen), auch den übrigen Schlüssen von Hilbert genau folgen.

41. Auch der Irreduzibilitätsbegriff hat eine Bedeutung in der Algebra der Potenzreihen um P, vorausgesetzt nur, daß in P nicht verschwindende Potenzreihen als Einheiten betrachtet werden.

Danach heißt eine Potenzreihe f um P irreduzibel, wenn es nicht möglich ist, zwei in P verschwindende Potenzreihen A, B zu finden, so daß identisch $F = A \cdot B$. Es besteht der

Satz XXIV: „Jede Potenzreihe um P läßt sich nur auf *eine* Weise in der Gestalt

$$f = A^a \cdot B^b \cdots C^c$$

darstellen, wo $A, B, \cdots, C$ irreduzible Potenzreihen um P sind."

Dabei ist also eine Potenzreihe um P jeder anderen, die sich von ihr nur um einen in P nicht verschwindenden Potenzreihenfaktor unterscheidet, äquivalent gesetzt. Für Funktionen *einer* Variablen ist die Behauptung augenscheinlich, da die Variable selbst die einzige irreduzible Form, und jede Potenzreihe einer Potenz derselben äquivalent ist. Man beweist Satz XXIV durch Induktion, indem man nach Satz XXIII jede Potenzreihe einer anderen der Gestalt

$$x^g + x^{g-1} f_1 + x^{g-2} f_2 + \cdots + f_g$$

äquivalent setzen kann, unter $f_1, \cdots, f_g$ Potenzreihen der $m-2$ anderen Variablen verstanden, und dann den Schlüssen der Algebra folgt, die den Irreduzibilitätssatz für Formen erweisen, und die im letzten Grunde auf dem ja auch hier anwendbaren Euklidischen Verfahren zur Feststellung des größten gemeinsamen Teilers zweier Formen beruhen.

Ist f irgend eine irreduzible Potenzreihe, so definiert $f = 0$ eine P enthaltende Oberfläche, und zwar als die ganze Mannigfaltigkeit von Wertsystemen $x_1, \cdots, x_{m-1}$, die $f = 0$ machen und deren absolute Werte kleiner sind als eine angebbare vom Konvergenzbezirk der Reihe f abhängige Größe. Diese Oberfläche bei P wird ebenso wie f selbst irreduzibel genannt werden.

Zwei irreduzible Oberflächen bei P „schneiden" sich in einem bei P analytischen Gebilde zweiter Stufe, auf welches der Irreduzibilitätsbegriff ebenso anwendbar ist, wie auf die entsprechenden algebraischen Gebilde.

Wir ersetzen die Variablen $x_1, \cdots, x_{m-1}$ durch eine lineare homogene Transformation mit unbestimmten Koeffizienten, entwickeln die beiden irreduziblen Potenzreihen nach Potenzen einer der Variablen gemäß Satz XXIII, das Zeichen $=$ im Sinne der Äquivalenz deutend,

$$f_1 = x^g + x^{g-1} A_1 + \cdots,$$
$$f_2 = x^h + x^{h-1} A_2 + \cdots,$$

bilden die Resultante von f_1, f_2 nach x

$$\text{Res.}\,(f_1, f_2) = F,$$

wo F also eine Potenzreihe der übrigen $m-2$ Variablen, und bestimmen die irreduziblen Teiler von F. Jedem dieser verschiedenen irreduziblen Teiler entspricht, genau wie in den Betrachtungen des Satzes IV, ein Gebilde zweiter Stufe und der Mannigfaltigkeit $m-2$. Überhaupt lassen sich alle Definitionen und Schlüsse des Satzes IV hier wiederholen. Es zeigt sich, daß jede analytische Konfiguration bei P, definiert durch ein System von Potenzreihen bei P, auflösbar ist in eine Gruppe irreduzibler analytischer Gebilde bei P und zwar nur auf *eine* Weise.

42. Satz XXV. „Ist die Anzahl der Noetherschen Bedingungen eines Moduls in einem Punkte P endlich, so ist die Mannigfaltigkeit der den Formen des P-Moduls gemeinsamen Gebilde $= 1$."

Wir erweisen diesen Satz, indem wir annehmen, daß die Formen eines P-Moduls Gebilde höherer Mannigfaltigkeit als 1 gemeinsam besitzen, und dann dartun, daß der P-Modul infolgedessen beliebig viele Noethersche Bedingungen erfüllt. Sei ein Gebilde G bei P allen Formen eines P-Moduls M gemeinsam. Es wird möglich sein, die Punkte von G in der Nachbarschaft von P durch mindestens einen Parameter k analytisch darzustellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1,1} k + a_{1,2} k^2 + \cdots \\ x_2 &= a_{2,1} k + a_{2,2} k^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1} &= a_{m-1,1} k + a_{m-1,2} k^2 + \cdots \end{aligned}$$

Da jede Form F von M G enthält, so ist für obige Werte von $x_1, \cdots, x_{m-1}$ identisch

$$F(x_1, \cdots, x_{m-1}) = 0$$

oder nach dem Taylorschen Satz

$$\frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_2} x_2 + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_1}(a_{1,1} k + a_{1,2} k^2 + \cdots) + \frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_2}(a_{2,1} k + \cdots) + \cdots = 0.$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck nach Potenzen von k in der Gestalt

$$Ak + Bk^2 + \cdots,$$

so folgt aus obiger Beziehung

$$A = 0, \; B = 0, \; \cdots$$

Die $A, B, \cdots$ sind Ausdrücke der Form

$$l \frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_1} + h \cdot \frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_2} + \cdots,$$

wo $l, h, \cdots$ Konstanten, und die $\frac{\partial F(0,\cdots,0)}{\partial x_1}$ etc. sind nichts anderes als was früher mit $y_{n_1,\cdots,n_{m-1}}$ bezeichnet war. Mithin erhält man in der Tat aus der Tatsache heraus, daß eine beliebige Form F von M ein Gebilde höherer Mannigfaltigkeit als 1 bei P enthält, unendlich viele Noethersche Bedingungen für die Formen von M und Satz XXV muß daher richtig sein.

43. Es sind nun alle Folgerungen des Satzes VII möglich, und es zeigt sich, daß, wenn in genauester Analogie zu den Entwicklungen des Kap. II die Begriffe des Prim-P-Moduls und primären P-Moduls eingeführt werden, jeder P-Modul M entwickelbar ist in der Gestalt

$$M = [D_1, D_2, \cdots, D_j, r],$$

wo $D_1, \cdots, D_j$ primäre P-Moduln und r ein P-Modul, dessen Formen kein Gebilde außer P gemein haben.

Satz XXVI. „Die Mannigfaltigkeit der Schar von Noetherschen Bedingungen r^{ter} Ordnung eines P-Moduls M nennen wir die Noether-Hilbertsche Funktion von M. Ist M ein P-Modul der Mannigfaltigkeit h, so ist für genügend große Werte von r die Noether-Hilbertsche Funktion von M darstellbar als ein Polynom $(h-2)^{\text{ten}}$ Grades von r."

Jedem P-Modul M entspricht im Bereiche des Raumes $x_1, \cdots, x_{m-1}$ ein Modul M' durch folgende Festsetzung. M' enthalte alle Formen in $x_1, \cdots, x_{m-1}$, welche den Term niedrigster Ordnung der Entwicklung eines Individuums von M bilden können. Daß die Gesamtheit solcher Formen einen Modul M' bildet, ergibt sich leicht. Denn genügen p wie q der Definition der Formen von M', so existieren Individuen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von M, derart daß

$$\mathfrak{p} = p + p' + p'' + \cdots,$$
$$\mathfrak{q} = q + q' + q'' + \cdots,$$

wo $p', p'', \cdots$ von höherer Ordnung als p, $q', q'', \cdots$ von höherer Ordnung als q. Da nun, wenn a und b homogene Formen in $x_1, \cdots, x_{m-1}$, $ap + bq$ der Anfangsterm von $a\mathfrak{p} + b\mathfrak{q}$, so gehört auch $ap + bq$ zur Menge M'.

Die Formen von M' der Ordnung r lassen sich nun erhalten, indem in einer allgemeinen Potenzreihe F alle Koeffizienten y der Ordnung $< r$ gleich Null gesetzt werden und im übrigen die y den Noetherschen Bedingungen von M unterworfen werden. Daher ist die Anzahl der Bedingungen, denen die Formen r^{ter} Ordnung von M' genügen müssen, gleich der Anzahl der linear-independenten Noetherschen Bedingungen von M der Ordnung r d. h.

$$(N, H)\, M(r) = HM'(r):$$

die Noether-Hilbertsche Funktion von M ist gleich der Hilbertschen Funktion von M'.

Wir müssen nun nachweisen, daß, wenn u eine relativ prime Form zu M', und wenn der dem Modul (M, u) in obiger Weise entsprechende Modul mit $(M, u)'$ bezeichnet wird, für genügend große Werte von r

$$H(M, u)'(r) = H(M', u)(r).$$

Dies zeigt sich wie folgt. Alle Individuen von (M, u) haben die Gestalt

$$F + G \cdot u,$$

wo $F \equiv 0 \bmod. M$ und G eine beliebige Potenzreihe von P. Entwickeln wir diese Potenzreihe nach Termen aufsteigender Ordnung, so kommt

$$F + G \cdot u = p + p' + p'' + \cdots + g_0 \cdot u + g_1 \cdot u + g_2 \cdot u + \ldots,$$

wo $p + p' + p'' + \cdots$ die Terme aufsteigender Ordnung der Entwicklung von F, mit unbestimmten Koeffizienten versehen.

Ist p der Ordnung r, u der Ordnung a, so sei g_i eine Form mit unbestimmten Koeffizienten der Ordnung $r - a + i$. Offenbar gehört jedes $p + g_0 \cdot u$ dem Modul $(M, u)'$ an, außerdem aber noch der Term niedrigster Ordnung der Entwicklung von $F + G \cdot u$, wenn $p + g_0 \cdot u$ identisch verschwindet.

Nun ist $p \equiv 0 \bmod. M'$. Auch war u relativ prim zu M'. Aus $p + g_0 \cdot u \equiv 0 \bmod. M'$, für irgendwelche bestimmte Werte oder Koeffizienten von p und g_0, folgt daher $g_0 \cdot u \equiv 0 \bmod. M'$ und $g_0 \cdot v \equiv 0 \bmod. M'$, wo v eine Form mit unbestimmten Koeffizienten und von genügend hoher Ordnung. Es besteht daher eine M angehörige Reihe, deren erster Term $g_0 \cdot v$ ist, etwa

$$f = g_0 \cdot v + h_1 + h_2 + \cdots$$

Sind daher p und g_0 so bestimmt, daß

$$p + g_0 \cdot u = 0,$$

so ist in der Entwicklung von

$$vF + fu = v(p + g_0 \cdot u) + (vp' + h_1 \cdot u) + (vp'' + h_2 \cdot u) + \cdots$$

$vp' + h_1 \cdot u$ das erste Glied der Entwicklung, d. h.

$$\begin{aligned} vp' + h_1 \cdot u &\equiv 0 \bmod. M', \\ vp' \quad &\equiv 0 \bmod. (M', u). \end{aligned}$$

Andrerseits ist unter denselben Umständen in der Entwicklung von

$$F + g \cdot u = (p + g_0 \cdot u) + (p' + g_1 \cdot u) + \cdots$$

$p' + g_1 \cdot u$ der erste Term, also

$$p' + g_1 \cdot u \equiv 0 \bmod. (M, u)',$$

und alle Terme von $(M, u)'$, die sich nicht sogleich in der Gestalt $p + g_0 \cdot u$, wo $p \equiv 0 \bmod. M'$, ergeben, lassen sich so darstellen, wenn nicht p' und g_1 solche Koeffizienten haben, daß

$$p' + g_1 \cdot u = 0.$$

Diese Möglichkeit vorderhand beiseite lassend, ersehen wir aus

$$p' + g_1 \cdot u \equiv 0 \bmod. (M, u)' \quad \text{und} \quad v(p' + g_1 \cdot u) \equiv 0 \bmod. (M', u),$$

daß jede Form, welche $(M, u)'$ angehört, mit einer unbestimmten Form genügend hoher Ordnung multipliziert (M', u) angehört. Dieser Schluß ist nur für solche Formen nicht gerechtfertigt, die erste Terme einer Entwicklung von $F + G \cdot u$ sind, in denen identisch $p + g_0 \cdot u = 0$, $p' + g_1 \cdot u = 0$. Alsdann aber ist

$$\begin{aligned} g_0 \cdot v &\equiv 0 \bmod. M', \\ g_1 \cdot v &\equiv 0 \bmod. M'. \end{aligned}$$

Es existiert daher ein Individuum von M mit der Entwicklung

$$g_1 \cdot v + l_1 + l_2 + \cdots,$$

und ein anderes mit der Entwicklung

$$vp + vp' + vp'' + \cdots + u(g_0 \cdot v + h_1 + h_2 + \cdots) + u(g_1 \cdot v + l_1 + \cdots)$$

d. h. da

$$p + g_0 \cdot u = 0, \quad p' + g_1 \cdot u = 0,$$

mit

$$h_1 \cdot u + (vp'' + ul_1) + \cdots;$$

hieraus

$$h_1 \cdot u \equiv 0 \text{ mod. } M'$$

und, da u relativ prim zu M',

$$h_1 \cdot v \equiv 0 \text{ mod. } M'.$$

Ein Glied von M hat somit die Entwicklung

$$h_1 \cdot v + k_1 + k_2 + \cdots$$

und eines

$$v[h_1 \cdot u + (vp'' + ul_1) + \cdots] - u(h_1 \cdot v + k_1 + \cdots)$$

d. h.

$$(v^2 p'' + au) + \cdots$$

Dies zeigt, daß $v^2 p'' + au \equiv 0$ mod. M' und $v^2 p'' \equiv 0$ mod. (M', u).

Andrerseits ist $p'' + g_2 \cdot u$ der allgemeine Ausdruck derjenigen Individuen von $(M, u)'$, welche erste Terme einer Entwicklung von $F + G \cdot u$ sind, für die identisch $p + g_0 \cdot u = 0$, $p' + g_1 \cdot u = 0$. Für diese zeigt sich also, daß sie, mit dem Quadrat einer unbestimmten Form genügend hoher Ordnung multipliziert, notwendig (M', u) angehören. So können wir beliebig weit fortschreiten, indem wir noch $p'' + g_2 \cdot u = 0$ setzen und in analoger Weise wie bisher verfahren.

Nach einer endlichen Anzahl von Operationen müssen wir aber mit obigem Prozeß jedes Glied von $(M, u)'$ jeder gegebenen Ordnung R finden, da ja die Ordnungen der Anfangsterme bei obigem Prozeß immerfort wachsen.

Vergegenwärtigen wir uns nun die Darstellung von $(M, u)'$ wie (M', u) nach Satz VII, so folgt aus der Unbestimmtheit der Koeffizienten von v in Verbindung mit obigem Ergebnis, daß $(M, u)'$ und (M', u) in ihren primären Teilern übereinstimmen müssen, also die Gültigkeit der aufgestellten Behauptung. Die übrigen Schlüsse sind einfacher Natur. Es habe zunächst M die Mannigfaltigkeit 2. Ist dann u eine Linearform mit unbestimmten Koeffizienten, welche also das den Formen von M gemeinsame Gebilde nicht enthält, so ist nach Satz XXV $H(M, u)'(r)$ für genügend große Werte von r gleich 0. Andrerseits ist für genügend große Werte von r

$$H(M, u)'(r) = H(M', u)(r) = \Delta_1 HM'(r),$$

mithin

$$\Delta_1 HM'(r) = 0,$$

$HM'(r)$ eine Konstante.

Der Wert dieser Konstanten kann nicht 0 sein, da

$$(N, H)\,M(r) = H M'(r)$$

und da M Noethersche Bedingungen beliebig hoher Ordnung, wie wir bereits gesehen haben, wirklich besitzt. Hat M die Mannigfaltigkeit 3, so, unter denselben Umständen wie oben, (M, u) diejenige 2. Mithin folgt genau wie oben

$$\Delta_1 H M'(r) = a,$$

wo a eine nicht verschwindende Konstante, und

$$H M'(r) = ar + b,$$

wo b eine neue Konstante. Der Beweis des Satzes durch Induktion ist damit klargelegt.

44. Damit sind alle Vorbedingungen erfüllt, um die Schlüsse des Satzes X auch in der Theorie der P-Moduln wiederholen zu können.

Es sei nun M ein beliebiger Modul, P irgend ein seinen Formen gemeinsamer Punkt. Alsdann wollen wir mit M_P die Gesamtheit der *Formen* bezeichnen, die dem Modul M als P-Modul betrachtet zugehören, und ihn mit dem Namen „Noetherscher Modul von M bei P" belegen. Für solche Moduln gilt der fundamentale

Satz XXVII. „Ist $f \equiv 0$ mod. M_P, so gibt es immer eine Form Φ, welche P nicht enthält, und derart, daß

$$f \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M."$$

Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz: „Ist Q ein primärer Modul, und ist P irgend ein Punkt des zu einem Primmodul P gehörigen Gebildes, so ist $Q_P = Q$." Besteht das Gebilde von Q nur aus dem Punkte $P(x_1 = 0, \cdots, x_{m-1} = 0)$, so sind die definierenden Bedingungen der Potenzreihen von Q_P mit einer endlichen Anzahl Noetherscher Bedingungen erschöpft. Ist $u_1, \cdots, u_k$ eine Basis von Q, so ist Q_P definiert als die Gesamtheit der Formen, die in der Gestalt $A_1 \cdot u_1 + \cdots + A_k \cdot u_k$ darstellbar sind, $A_1, \cdots, A_k$ als Potenzreihen um P verstanden.

Ist nun $f = A_1 u_1 + \cdots + A_k u_k$ eine Form von Q_P und brechen wir die $A_1, \cdots, A_k$ bei den Termen ab, die P als R-fachen Punkt enthalten, so läßt sich f darstellen in der Gestalt

$$f = (a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) + u,$$

wo u P als mindestens $(R+1)$-fachen Punkt enthält. Nach Satz X läßt sich R bestimmen, groß genug, daß $u \equiv 0$ mod. Q. Also ist $f \equiv 0$ mod. Q und in der Tat

$$Q_P = Q,$$

wenn die Mannigfaltigkeit von Q gleich 1 ist.

Wir führen nun den Nachweis des aufgestellten Satzes durch Induktion, indem wir annehmen, daß er bereits bewiesen sei für Moduln der Mannigfaltigkeit $h-1$ und ihn auf Moduln der Mannigfaltigkeit h erweitern.

Ist der Hilfssatz für Moduln der Mannigfaltigkeit $h-1$ richtig, so auch Satz XXVII unter derselben Einschränkung. Denn sei nach Satz VII

$$M = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_j, R]$$

und ist P in den zu $Q_a, Q_b, \cdots, Q_c$ gehörigen Gebilden enthalten, so enthalten die Noetherschen Bedingungen von M_P sicherlich diejenigen von $Q_{a,P}, Q_{b,P}, \cdots, Q_{c,P}$, also auch die von $[Q_{a,P}, \cdots, Q_{c,P}]$. Andrerseits, wenn f eine Form von $[Q_{a,P}, \cdots, Q_{c,P}]$, so ist, da $Q_a, \cdots, Q_c$ höchstens die Mannigfaltigkeit $h-1$ haben, nach Voraussetzung $Q_{a,P} = Q_a, \cdots, Q_{c,P} = Q_c$, und wenn Φ irgend eine Form des Moduls $[Q_1, Q_2, \cdots, Q_j, R]$, wo in der Klammer nur die $Q_a, Q_b, \cdots, Q_c$ fehlen, ist daher

$$f \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } M,$$

mithin

$$f \equiv 0 \text{ mod. } M_P,$$

da Φ P nicht zu enthalten braucht.

Modul $[Q_a, \cdots, Q_c]$ enthält also auch M_P. M_P ist somit identisch mit $[Q_a, \cdots, Q_c]$ und der aufgestellte Satz ist daher richtig unter der gemachten Annahme.

Sei nun Q ein primärer Modul der Mannigfaltigkeit h, u eine beliebige P enthaltende Form. Ist f eine Form von Q_P, so ist sie es auch a fortiori von $(Q, u)_P$. (Q, u) ist aber ein Modul der Mannigfaltigkeit $h-1$, nach der gemachten Annahme existiert daher eine P nicht enthaltende Form Φ, so daß

$$f \cdot \Phi \equiv 0 \text{ mod. } (Q, u),$$

d. h.

$$\Phi \cdot f \equiv p \cdot u \text{ mod. } Q.$$

Es sei nun $f_1, \cdots, f_k$ eine Basis von Q_P; $\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ seien wie oben Φ bestimmt. Es sei ferner $X = \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_k$ gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} X \cdot f_1 &\equiv p_1 \cdot u \text{ mod. } Q, \\ X \cdot f_2 &\equiv p_2 \cdot u \text{ mod. } Q, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X \cdot f_k &\equiv p_k \cdot u \text{ mod. } Q. \end{aligned}$$

Nun gehören alle Formen von Q sicherlich zu Q_P. Somit ist

$$p_i \cdot u \equiv 0 \text{ mod. } Q_P.$$

Die Punkte des zu Q gehörigen Gebildes lassen sich nun mit Hilfe von $h-1$ Parametern analytisch darstellen. Sei s ein solcher Parameter und für eine analytische Menge von Punkten P auf dem Gebilde von Q eine konvergente Potenzreihenentwicklung angesetzt

$$x_1 = s_1 = a_{1,1}s + a_{1,2}s^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{m-1} = s_{m-1} = a_{m-1,1}s + a_{m-1,2}s^2 + \cdots$$

Alsdann ist es möglich, die Noetherschen Bedingungen von M in einem Punkte $(s_1, \cdots, s_{m-1})$ bei unbestimmt bleibendem s zu berechnen. Man braucht ja nur, wenn $u_1, \cdots, u_k$ eine Basis von Q, $u_1, \cdots, u_k$ nach Potenzen von

$$x_1 - s_1 x_m,\ x_2 - s_2 x_m, \cdots, x_{m-1} - s_{m-1}x_m$$

zu entwickeln, dann, wie früher beschrieben, die $y_{n_1, \cdots, n_{m-1}}$ als lineare Formen von Unbestimmten zu entwickeln, und schließlich diese Unbestimmten nach der Reihe zu eliminieren. Durch einen rational ausführbaren Prozeß kann man also *alle* Noetherschen Bedingungen bis zu denen r^{ter} Ordnung finden, welchen die Formen von $Q_{(s_1, \cdots, s_{m-1})}$ genügen, wie groß auch r sei. Ist nun

$$\sum k \cdot \frac{\partial^j F(s_1, \cdots, s_{m-1})}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \cdots} + \cdots = 0$$

eine solche Noethersche Relation, die von jeder Form F von Q identisch befriedigt wird, so kann man sie im Bereiche ihrer Gültigkeit nach der Unbestimmten s beliebig oft differentiieren und erhält immer wieder von allen Formen von Q befriedigte Relationen, die Noethersche Bedingungen von $Q_{(s_1, \cdots, s_{m-1})}$ sein müssen. Dem vollständigen Systeme der Noetherschen Bedingungen von Q in $(s_1, \cdots, s_{m-1})$ gehören daher neben irgend einer $N(s) = 0$ auch alle $\frac{\partial^j N}{(\partial s)^j} = 0$ an. Genügt daher für ein bestimmtes $s = s_0$ f den Noetherschen Bedingungen $Q_{(s_1, \cdots, s_{m-1})}$, so wird für ein unbestimmtes s in genügender Nähe von s_0,

$$s = s_0 + s',$$

da nach Taylor $N(s) = N(s_0) + \frac{dN(s_0)}{ds} \cdot s' + \cdots$, f *auch* die dazu gehörigen Noetherschen Bedingungen erfüllen.

Daraus folgt dann, daß es Punkte Q' in der Nachbarschaft von P gibt, so daß

$$Q_P = Q_{Q'}.$$

Es war aber

$$p_i \cdot u \equiv 0 \text{ mod. } Q_P,$$

somit ist auch

$$p_i \cdot u \equiv 0 \text{ mod. } Q_{Q'}.$$

u war eine beliebige Form, welche P enthält. Nach Bestimmung eines Q', welches die oben geforderte Eigenschaft besitzt, bestimmen wir u so, daß es zwar P, aber nicht Q' enthält. Es folgt dann

$$p_i \equiv 0 \text{ mod. } Q_{Q'},$$

daher auch

$$p_i \equiv 0 \text{ mod. } Q_P.$$

Somit existieren Formen $a_{i,j}$, so daß

$$p_i = a_{i,1} f_1 + a_{i,2} f_2 + \cdots + a_{i,k} f_k.$$

Es ist also

$$X \cdot f_1 \equiv (a_{1,1} f_1 + a_{1,2} f_2 + \cdots) u \text{ mod. } Q,$$
$$X \cdot f_2 \equiv (a_{2,1} f_1 + a_{2,2} f_2 + \cdots) u \text{ mod. } Q,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X \cdot f_k \equiv (a_{k,1} f_1 + \cdots) u \text{ mod. } Q,$$

und daher, wenn

$$D = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} u, & -a_{1,2} u, & \cdots \\ -a_{2,1} u, & X - a_{2,2} u, & \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , & \cdots \end{vmatrix},$$

$$D \cdot f_1 \equiv 0 \text{ mod. } Q,$$
$$D \cdot f_2 \equiv 0 \text{ mod. } Q,$$
$$\cdots\cdots$$
$$D \cdot f_k \equiv 0 \text{ mod. } Q.$$

Die Determinante D enthält P nicht, denn in P hat sie, da u in P gleich 0 ist, den Wert $(X)^k_P$ und X verschwindet nicht in P. D ist also relativ prim zu dem Gebilde von Q. Es folgt, da ja Q primär, $f_i \equiv 0 \text{ mod. } Q$, d. h. jede Form von Q_P ist in Q enthalten. Auch das Umgekehrte ist der Fall. Folglich ist in der Tat $Q_P = Q$. Der aufgestellte Satz XXVII ist also ebenfalls erwiesen.

Es geht aus dem eben bewiesenen Satze hervor, daß die Bedingungen der Zugehörigkeit einer Form zu einem gegebenen Modul in die verschiedenste Gestalt gebracht werden können. Beispielsweise könnte man auf viele Arten eine endliche Zahl von Punkten $P_1, \cdots, P_j$ bestimmen, von der Eigenschaft, daß jede Form genügend hoher Ordnung, welche den Noetherschen Bedingungen von $M_{P_1}, \cdots, M_{P_j}$ genügt, notwendig in M enthalten sein muß.

45. Man kann von vorstehenden Sätzen eine sehr wichtige Anwendung auf die Theorie der Berührungen machen.

Um zunächst an einem besonderen Beispiele die der Anwendung zugrunde liegende Idee deutlich zu machen, betrachten wir ein System von $m - 1$ Formen

$$u_1, u_2, \cdots, u_{m-1},$$

deren Resultante mit einer unbestimmten Form nicht identisch verschwindet. Die Ordnungen der $u_1, \cdots, u_{m-1}$ seien $a_1, \cdots, a_{m-1}$.

Sind dann

$$P_1, P_2, \cdots, P_s$$

die verschiedenen Punkte des Schnitts von $u_1 = 0, \cdots, u_{m-1} = 0$, so läßt sich nach Satz XI setzen

$$(u_1, \cdots, u_{m-1}) = [Q_1, \cdots, Q_s],$$

wo nach Satz XXVII Q_i der zu P_i gehörige Noethersche Modul von

$$u_1, \cdots, u_{m-1}.$$

Nach Satz II ist die Anzahl der Bedingungen, die eine Form genügend hoher Ordnung befriedigen muß, um $(u_1, \cdots, u_{m-1})$ anzugehören,

$$= a_1 \cdots a_{m-1}.$$

Es ist leicht darzutun, daß die in den verschiedenen Q_i zum Ausdruck gebrachten Noetherschen Bedingungen für Formen genügend hoher Ordnung unabhängig voneinander sind. Somit ist als Gesamtzahl der zu den Q_i gehörigen Noetherschen Bedingungen $= a_1 \cdots a_{m-1}$. Nennen wir die Anzahl der Noetherschen Bedingungen von Q_i n_i, so ist also

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = a_1 a_2 \cdots a_{m-1}.$$

Da nun die Zahl der $(m-1)$ Formen der Ordnungen $a_1, \cdots, a_{m-1}$ gemeinsamen Punkte im allgemeinen $a_1 \cdots a_{m-1}$ beträgt, so liegt es nahe, zu vermuten, daß, wenn die Zahl derselben, wie bei den Formen

$$u_1, \cdots, u_{m-1},$$

sich auf s reduziert, je n_i der Schnittpunkte im Punkte P_i koinzidieren.

Diese Vermutung bestätigt sich in der Tat, wie wir sehen werden.

Wir müssen zunächst präzisieren, was unter Koinzidenz zu verstehen ist.

Die Idee der Berührung entstand wohl zuerst am Kreise. Man hatte bewiesen, daß im allgemeinen eine Gerade zwei Punkte oder keinen Punkt mit ihm gemein habe, und fand dann als eine Art Übergang die Tangente. Ähnlich entstand die Idee der Koinzidenz an der quadratischen Gleichung. Zuerst war die Erkenntnis ihrer zwei Wurzeln, dann die *einer* Wurzel als Ausnahmefall, der durch Koinzidenz der beiden erklärt wurde. Bei jeder Anwendung des Begriffes der Koinzidenz oder Berührung muß man den historischen Werdeprozeß des Begriffes nachahmen, zunächst eine endliche Anzahl von Individuen als Funktion gewisser Unbestimmten definieren und dann nach den besonderen Werten der Unbestimmten fragen, für die durch stetigen Übergang mehrere der erwähnten Individuen ineinander fallen. Ohne Zuziehung von Unbestimmten haben die Begriffe Koinzidenz und Berührung keinen Sinn, und die durch dieselbe Konfiguration erzeugte Berührung oder Koinzidenz hat verschiedene Bedeutung, wenn verschiedene Gruppen von Unbestimmten den „allgemeinen" Fall ausdrückten.

In dem jetzt von uns zu untersuchenden Beispiel ist der „allgemeine" Fall der von $m-1$ Formen $f_1, \cdots, f_{m-1}$ der Ordnungen $a_1, \cdots, a_{m-1}$ mit lauter unbestimmten Koeffizienten. Ist

$$l = y_1 x_1 + \cdots + y_m x_m,$$

wo die $y_1, \cdots, y_m$ Unbestimmte, so ist die Resultante von $f_1, f_2, \cdots, f_{m-1}, l$ eine in lauter Linearfaktoren zerlegbare Form der y_i der Ordnung $r = a_1 \cdots a_{m-1}$:

$$\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_{m-1}, l) = L_1 L_2 \cdots L_r.$$

Diese Linearformen L_i seien die zu betrachtenden Individuen. Ist in dem besonderen Fall

$$f_1 = u_1, \cdots, f_{m-1} = u_{m-1}$$

die Resultante

$$= l_1^{c_1} l_2^{c_2} \cdots l_s^{c_s},$$

so können wir sagen, daß c_1 Koinzidenzen der L in l_1 stattfinden, c_2 in l_2 etc.; denn es ist klar, daß, wenn e eine beliebig kleine Größe und

$$f_1 = u_1 + e u_1', \cdots, f_{m-1} = u_{m-1} + e u_{m-1}',$$

wo die u_i' Formen mit unbestimmten Koeffizienten, die Linearfaktoren der Resultante von $(f_1, \cdots, f_{m-1}, l)$ für $\lim e = 0$ in die Linearformen $l_1, \cdots, l_s$ stetig übergehen.

Jedem der $l_1, l_2, \cdots, l_s$ entspricht einer der Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_s$. Sei die Zuordnung der Linearformen l_i und Punkte P_i durch die Gleichheit des Index ausgedrückt. Unsere Behauptung ist dann äquivalent den Gleichungen

$$c_1 = n_1, \; c_2 = n_2, \cdots, c_s = n_s.$$

Die Ordnung der Resultante in den y_i ist

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_s = n_1 + n_2 + \cdots + n_s.$$

Wir werden nun nachweisen, daß niemals sein kann $c_i < n_i$, welches auch der Index i sei. Die Behauptung wird damit evident sein.

Die Resultante R der

$$f_i = u_i + e \cdot u_i' \text{ und } l$$

ist ein Polynom der y_i, der Unbestimmten von u_i' und von e. Sind $L_1, \cdots, L_r$ die $a_1 \cdots a_{m-1}$ Linearformen, in welche R zerfällt, und ist p irgend ein Punkt des y-Raumes, so sind die $\frac{L_i}{(L_{i,p})}$ nach den Ausführungen des Kap. I Wurzeln einer Gleichung:

$$(p^r \times R)\, x^r - C_1 (p^{r-1} \times R)\, x^{r-1} + C_2 (p^{r-2} \times R)\, x^{r-2} - \cdots = 0,$$

wo die $C_1, \cdots, C_r$ numerische Konstante. x als Funktion von e betrachtet ist daher algebraisch und hat bei $e=0$ eine Verzweigung. Umgeben wir in einer komplexen e-Ebene den Nullpunkt mit einer beliebig kleinen Kontur und lassen diese sich zusammenziehen, so werden die entsprechenden x-Werte nach den Theorien von Puiseux sich in Gruppen von je $c_1, c_2, \cdots, c_s$ teilen, die für $\lim e = 0$ sich sämtlich beziehungsweise den Grenzwerten

$$\frac{l_1}{(l_{1,p})}, \frac{l_2}{(l_{2,p})}, \cdots, \frac{l_s}{(l_{s,p})}$$

nähern. Und zwar findet diese Annäherung in der Weise statt, daß eine rationale Potenz von e

$$y = e^{\frac{1}{\alpha}}$$

existiert, mit Hilfe deren die $a_1 \cdots a_{m-1}$ Zweige von x sich als konvergente Potenzreihen schreiben lassen

$$\frac{L_i}{(L_{i,p})} = \mathfrak{P}_i(y).$$

Betrachten wir nun folgende Menge von Formen

$$\begin{aligned} F = F_0 + e \cdot F_1 &= p_1(u_1 + e \cdot u_1') + p_2 \cdot (u_2 + e \cdot u_2') \\ &+ \cdots + p_{m-1}(u_{m-1} + e \cdot u'_{m-1}), \end{aligned}$$

wo $p_1, p_2, \cdots, p_{m-1}$ Formen mit unbestimmten Koeffizienten. Eliminiert man diese Unbestimmten, indem man in obiger Beziehung die Koeffizienten von F als Veränderliche faßt, so kommt man auf ein System von Beziehungen, welche ausdrücken, daß F jeden der den L_i entsprechenden Punkte enthalte. Sieht man die $y_1, \cdots, y_m$ als zu den $x_1, \cdots, x_m$ kontragrediente Variable an, so ist jede dieser Beziehungen zu schreiben

$$(F \times L_i^r) = 0,$$

wo r die Ordnung von F.

Es gibt nun einen Satz, der hier von Diensten ist und der auch in anderen Disziplinen der Mathematik, z. B. der Theorie der Integrale linearer Differentialgleichungen, mit Erfolg verwendbar ist. Derselbe lautet:

Satz XXVIII: „Es seien $A_1, \cdots, A_n$ eine Reihe von Funktionen einer Anzahl Variabler und mögen die $A_1, \cdots, A_n$ auch von einem Parameter y analytisch-regulär abhängen. Es seien ferner für unbestimmte Werte von y die $A_1, \cdots, A_n$ durch eine Reihe linear-independenter Beziehungen verknüpft, deren Anzahl k ist:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \begin{aligned} a_{1,1}A_1 + \cdots + a_{1,n}A_n &= 0, \\ a_{2,1}A_1 + \cdots + a_{2,n}A_n &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ a_{k,1}A_1 + \cdots + a_{k,n}A_n &= 0, \end{aligned}$$

die $a_{i,j}$ als analytisch reguläre Funktionen von y, in bezug auf die Variablen aber als Konstante verstanden. Alsdann läßt sich immer durch rein rationale Operationen den Relationen (R) eine Gestalt geben, daß für irgend einen *bestimmten* Wert von y aus ihnen k linear-unabhängige Relationen folgen."

Zur Erläuterung sei hinzugefügt, daß der erwähnte bestimmte Wert von y dem Konvergenzbereich der A_i wie $a_{i,k}$ angehören muß.

Sei der Einfachheit halber der in Frage kommende Wert von y die Null. Von den Relationen (R) können und wollen wir voraussetzen, daß sie „reduziert" sind, d. h. daß keiner der Ausdrücke $A_1, \cdots, A_n$ durch eine Potenz von y teilbar sei, noch daß die $a_{i,1}, \cdots, a_{i,n}$ für irgend einen Index i eine Potenz von y als gemeinsamen Teiler enthalten. Wenn für $y = 0$ die Relationen (R) linear-unabhängig bleiben, so ist es nicht erst nötig, dieselben zu verändern, um das gewünschte Resultat zu erzielen. Ist dies jedoch nicht der Fall, so muß jedenfalls jede k-gliedrige Determinante der Matrix

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k,n} \end{vmatrix}$$

für $y = 0$ verschwinden. In diesem Falle gibt es eine Zahl l, so daß alle Determinanten von Δ durch y^l, doch nicht durch y^{l+1} teilbar sind, da ja die $a_{i,k}$ nach Voraussetzung in konvergente Potenzreihen von y entwickelbar sind. Auch gibt es von Null verschiedene Zahlen $z_1, \cdots, z_k$, so daß gleichzeitig

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{1,1} z_1 + a_{2,1} z_2 + \cdots + a_{k,1} z_k = 0, \\ b_2 &= a_{1,2} z_1 + a_{2,2} z_2 + \cdots + a_{k,2} z_k = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_n &= a_{1,n} z_1 + a_{2,n} z_2 + \cdots + a_{k,n} z_k = 0, \end{aligned}$$

wenn $y = 0$. Mithin ist für die erwähnten Zahlen z_i jede der obigen Funktionen von y durch eine Potenz von y, sagen wir mindestens $y^{l'}$, teilbar. Es habe eine der von 0 verschiedenen Zahlen z den Index k. Ersetzt man dann (R) durch das ihm äquivalente System, welches aus (R) entsteht, indem für die Reihe $a_{k,1} A_1 + \cdots + a_{k,n} A_n = 0$ die andere $b_1 A_1 + \cdots + b_n A_n = 0$ tritt, so ist nun das System nicht mehr „reduziert". Es sei $b_i = y^{l'} c_i$ und sei das System von Relationen (R) jetzt geschrieben

$$(\mathrm{R}') \qquad \begin{aligned} a_{1,1} A_1 + \cdots + a_{1,n} A_n &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{k-1,1} A_n + \cdots + a_{k-1,n} A_n &= 0, \\ c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n &= 0. \end{aligned}$$

(R') ist dann (R) für jeden Wert von y äquivalent, und jede der Determinanten der zu (R') gehörigen Matrix ist durch eine um l' kleinere Potenz von y als die entsprechende Determinante der zu (R) gehörigen Matrix teilbar. Ist nun (R') nach Einsetzung von $y = 0$ noch immer kein linear-unabhängiges System, so wiederhole man den eben beschriebenen Prozeß. Da l eine positive ganze Zahl, so muß nach einer endlichen Zahl von Ausführungen des erwähnten Prozesses schließlich ein (R) für alle Werte von y äquivalentes System von Relationen erhalten werden, welches auch für $y = 0$ noch k linear-unabhängige Beziehungen zwischen den $A_1, \cdots, A_n$ liefert, und die Behauptung ist damit verifiziert.

Dabei ist noch ersichtlich, daß bei Ausführung des Prozesses nur eine endliche Zahl der Koeffizienten der Reihenentwicklung der $a_{i,j}$ in Betracht kommen.

Betrachten wir nun das System der Relationen

(R) $$(F \times L_i^r) = 0,$$

welche F befriedigt. Für $\lim e = 0$ fallen die L_i in verschiedenen Punkten zusammen, und das System (R) hört auf, so viel verschiedene Aussagen zu enthalten als für unbestimmte e. Wenden wir aber den Prozeß an, welcher eben geschildert war, so erhalten wir in jedem Punkte P_i genau c_i linearunabhängige Relationen der Gestalt

$$(F \times A_i) = 0,$$
$$(F \times B_i) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

welche auch noch linearunabhängig bleiben, wenn $y = 0$ gesetzt wird. Zudem ist klar, daß bei Ausübung des Prozesses nur eine endliche Anzahl der Glieder der Entwicklung von $(F \times L_i^r)$ nach Potenzen von y in Betracht kommen. Die Entwicklung von $(F \times L_i^r)$ geschieht nach dem Theorem von Taylor, die Koeffizienten dieser Entwicklung sind also Differentialausdrücke von F in einem der Punkte P_i, und jeder der

$$(F \times A_i) = 0, \ (F \times B_i) = 0, \ \cdots$$

ist demnach in $y = 0$ nur ein anderer Ausdruck für eine Noethersche Bedingung bei P_i. Der Ausdruck F genügt somit in jedem der Punkte P_i, wenn $e = 0$ ist, zum mindesten den c_i Bedingungen, die durch den Grenzübergang

$$\lim y = 0$$

aus $(F \times A_i) = 0$, $(F \times B_i) = 0$, $\cdots$ entstehen. Daher ist $n_i \geqq c_i$.

Nach den übrigen Voraussetzungen war aber

$$\sum n_i = \sum c_i,$$

mithin ist notwendigerweise $n_i = c_i$. Q. e. d.

46. Genau derselbe Gedankengang führt auch dann noch zum Ziel, wenn die Voraussetzungen des allgemeinen Falles andere sind.

Sei eine Anzahl von Primmoduln

$$P_1, \cdots, P_j$$

so gegeben, daß die Summe ihrer Stufen $m-1$ betrage. Seien die zugehörigen irreduziblen Gebilde $C_1, \cdots, C_j$, seien dieselben von Unbestimmten abhängig, und mögen die $C_1, \cdots, C_j$ eine Anzahl N von Punkten gemein haben, die von den Unbestimmten unabhängig sei. Es sei schließlich die Hilbertsche Funktion von $(P_1, \cdots, P_j) = N$. Alsdann wird die Zahl der Berührungen von $C_1, \cdots, C_j$ für spezielle Werte der Unbestimmten in irgend einem Punkte P durch die Zahl der Noetherschen Bedingungen des entsprechenden Moduls $(P_1, \cdots, P_j)$ in P gemessen.

Ist überhaupt M ein Modul, der selbst von Unbestimmten abhängt, dessen Hilbertsche Funktion aber von diesen Unbestimmten unabhängig ist; besteht ferner das Gebilde von M aus lauter Punkten $P_1, P_2, \cdots, P_j$ und hat M_{P_i} die Hilbertsche Funktion n_i, so wird durch Verschmelzung von zweien oder mehreren der P_i die Summe $\sum n_i$ erstreckt über die koinzidierenden Punkte nicht geändert. Eine Anwendung dieser Sätze liegt in der Berechnung der Zahl der Koinzidenzen in einem Punkte A von $m-1$ Formen $u_1, \cdots, u_{m-1}$, welche A resp. zu einem $a_1, \cdots, a_{m-1}$-fachen Punkt besitzen. Wir nehmen als Entwicklung bei A an

$$u_i = \sum u_{i,j},$$

wo $u_{i,j}$ A als j-fachen Punkt enthält. Ferner setzen wir voraus, daß die Resultante der Anfangsterme

$$u_{1,a_1}, \cdots, u_{m-1,a_{m-1}},$$

die ja Formen in nur $m-1$ Variablen sind, nicht verschwindet. Alsdann ist die Zahl der Noetherschen Bedingungen, also die der Koinzidenzen, von $(u_1, \cdots, u_{m-1})_A$ gleich

$$a_1 a_2 \cdots a_{m-1}.$$

Betrachtet man nämlich

$$(u_1, \cdots, u_{m-1})_A$$

als P-Modul bei A und untersucht den entsprechenden (früher M' genannten) Modul, so findet man bei Anwendung der früher benutzten Schlußreihe, daß hier nicht bloß die Beziehung $H(u_1, \cdots, u_{m-1})_A = HM'$ für große Werte der Ordnung sich ergibt, sondern wegen Satz I für *alle* Werte der Ordnung. Danach ist die Zahl aller Noetherschen Bedingungen von $(u_1, \cdots, u_{m-1})_A$ gleich

(R) $$\sum H(u_{1,a_1}, \cdots, u_{m-1,a_{m-1}}) R,$$

die Summe ausgedehnt über *alle* Ordnungen R von $R=1$ an. Es ist nicht schwer, diese Summe nach Satz II zu berechnen, doch genügt ja schon der Hinweis, daß nach Satz II die Anzahl der Noetherschen Bedingungen von $u_{1,a_1}, \cdots, u_{m-1,a_{m-1}}$, als Formen von m Variablen aufgefaßt, $= a_1 \cdots a_{m-1}$ sein muß, während diese Formen doch keinen anderen Punkt als A gemeinsam haben.

Für Werte von

$$R > a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} - m + 1$$

ist $H(u_{1,a_1}, \cdots, u_{m-1,a_{m-1}})$ im Bereiche von $m-1$ Variablen gleich Null, nach Satz II. Somit sind die Noetherschen Bedingungen von

$$(u_1, \cdots, u_{m-1})_A$$

von höchstens der Ordnung $a_1 + \cdots + a_{m-1} - m + 1$.

All dies gilt auch, wenn $u_1, \cdots, u_{m-1}$ analytische Funktionen bei A sind.

Kapitel IV.

Erweiterung auf Formen von mehreren Reihen von Variablen.

47. Der Raum $x_1, \cdots, x_m$ war bisher der einzige, in dem alle Operationen gedeutet waren. Es ist aber naturgemäß bei Aufgaben mancherlei Art, mehrere Räume einzuführen. Wollten wir z. B. eine Theorie der Konkomitanten eines Systems von Formen bestimmter Ordnungen

$$f_1, f_2, \cdots, f_k$$

schreiben, so müßten wir die Koeffizienten der Formen $f_1, \cdots, f_k$ als Unbestimmte auffassen, und jene Konkomitanten als Formen dieser Unbestimmten deuten. Der Komplex der Koeffizienten jeder einzelnen der Formen würde dann ein schon in sich abgerundetes Etwas, ein Raum, sein. Schon aus diesem Grunde ist es in der Algebra unerläßlich, den Betrachtungen eine Gruppe von Räumen

$$\begin{array}{c} x_{1,1}, \cdots, x_{1,m_1}, \\ x_{2,1}, \cdots, x_{2,m_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{k,1}, \cdots, x_{k,m_k} \end{array}$$

zugrunde zu legen.

Die Anzahl dieser Räume braucht keine endliche zu sein, wenn Grenzübergänge aus unseren algebraischen Untersuchungen nicht ausgeschlossen sind. Wir werden uns jedoch auf eine endliche, wenn auch unbestimmte Anzahl von Räumen beschränken.

Der Raum $x_{i,1}, \cdots, x_{i,m_i}$ heiße S_i, die Gruppe der Räume $S_1, \cdots, S_k$ sei kurz S, und die Summe

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_k - 1) = m - 1$$

heiße die Dimension von S. Die Algebra der Formen in S heiße die „Algebra in S".

Eine Form in S, welche in bezug auf die Variablen jeder der S_i homogen von der Ordnung n_i ist, heißt eine Form der Ordnungen

$$n_1, n_2, \cdots, n_k.$$

Enthält eine Form die Variablen eines Raumes gar nicht, so ist natürlich die Ordnungszahl der Form in bezug auf den betreffenden Raum $= 0$.

Die Anzahl der Koeffizienten einer Form der Ordnungen $n_1, \cdots, n_k$ wird mit

$$\varphi(n_1, \cdots, n_k)$$

bezeichnet. Dieselbe ist

$$\varphi(n_1, \cdots, n_k) = \varphi_1(n_1) \cdot \varphi_2(n_2) \cdots \varphi_k(n_k),$$

wenn φ_i die φ-Funktion des Raumes S_i bedeutet. Dies Theorem ist durch eine sehr einfache Abzählung erweisbar.

Ein System von Punkten $P_1, \cdots, P_k$ in $S_1, \cdots, S_k$ resp. sei ein Element von S. m Formen in S mit unbestimmten Koeffizienten haben kein Element gemein, wie sich nach der im Kap. I angewandten Überlegung sogleich ergibt. $m - 1$ Formen in S mit unbestimmten Koeffizienten dagegen haben „im allgemeinen", welcher Ausdruck später präzisiert werden wird, eine endliche Anzahl von Elementen gemein, und daher gibt es, wenn m Formen in S mit unbestimmten Koeffizienten vorliegen, im allgemeinen eine Form dieser Unbestimmten, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines den Formen gemeinsamen Elementes ist. Daß, wenn diese Form existiert, dieselbe irreduzibel ist, zeigt sich nach den Überlegungen des Kap. I. Auch ist ersichtlich, nach derselben Schlußreihe, daß, wenn $l_1, l_2, \cdots, l_k$ Linearformen in $S_1, \cdots, S_k$, $f_1, \cdots, f_m$ die m Formen in S, R die eben charakterisierte Form der Unbestimmten, Zahlen $M_1, \cdots, M_k$ existieren, so daß

$$R \cdot l_1^{M_1} \cdots l_k^{M_k} = p_1 f_1 + \cdots + p_m f_m,$$

wo $p_1, \cdots, p_m$ ganzzahlige Formen in S und der Unbestimmten von

$$f_1, \cdots, f_m.$$

Die soeben charakterisierte Form R sei „Resultante in S" von $f_1, \cdots, f_m$ genannt. Sie existiert nur dann nicht, wenn, entgegen den Voraussetzungen der im Kap. I gemachten Schlüsse, $m - 1$ der Formen f_i kein gemeinsames Element haben, was nur zutreffen kann, wenn weniger als $m_i - 1$ der Formen f_j eine von 0 verschiedene Ordnung n_i in S_i haben.

Haben genau $m_i - 1$ der Formen f_j eine von 0 verschiedene Ordnung n_i in S_i, so treten diese Formen sowohl wie S_i aus der Betrachtung, und die „Resultante in S“ von $f_1, \cdots, f_m$ reduziert sich auf die „Resultante in S'“ von denjenigen Formen $f_1, \cdots, f_m$, die von den Variablen S_i unabhängig sind, wobei S' die Gruppe $S_1, \cdots, S_k$ mit Ausschluß von S_i bezeichnet. Wird die Resultante in S von $f_1, \cdots, f_m$ mit $R(f_1, \cdots, f_m)$ bezeichnet, so ist identisch

$$R(f_1, f_2, \cdots, f_{m-1}, g \cdot h) = R(f_1, \cdots, f_{m-1}, g) \cdot R(f_1, \cdots, f_{m-1}, h),$$

wie sich nach den Schlüssen des Kap. I ergibt.

Die Schlüsse des Satzes IV ergeben in S die Existenz „irreduzibler Bildungen“ und die eindeutige Zerlegung von „Konfigurationen“ in selben. Dabei ist nur, wegen des Vorhandenseins des Ausnahmefalles, festzuhalten, daß Formen, die keine Resultante besitzen, niemals gemeinsame Elemente haben können.

Ein „irreduzibles Gebilde“ in S wollen wir eine irreduzible „Korrespondenz“ oder „Verwandtschaft“ nennen. Denn das entspricht genau dem gewöhnlichen Sprachgebrauch der Mathematiker. Die Stufe der Korrespondenz oder Verwandtschaft ist dann ein der Stufe eines irreduziblen Gebildes, wie es ursprünglich verstanden war, analoger Begriff. Ebenso werden wir von der Mannigfaltigkeit oder Dimension einer Verwandtschaft sprechen, als der Mannigfaltigkeit resp. Dimension des Systems von Elementen, welche den Bedingungen der Verwandtschaft entsprechen. Beispielsweise, wenn die Punkte zweier Kurven A, B, die resp. in den Räumen A', B' gelegen sind, durch die Verwandtschaft V einander eindeutig zugeordnet sind, wird V die Mannigfaltigkeit 2, die Dimension 1 haben. Ist dagegen jeder Punkt von A jedem Punkt von B zugeordnet, so haben wir es mit einer Korrespondenz der beiden Räume A', B' der Dimension 2 zu tun. Oder haben wir es mit einer Verwandtschaft V zu tun, welche in drei Räumen A', B', C', Punkten eines Gebildes A der Mannigfaltigkeit 4 je ein bestimmtes Punktepaar zweier Gebilde B, C zugeordnet, so hat V die Mannigfaltigkeit 4 und Dimension 3 etc. etc.

48. Es ist klar, daß die Gesamtheit der in S existierenden Formen, welche in den Elementen einer irreduziblen Verwandtschaft V verschwinden, einen Primmodul bilden, wie überhaupt die Definitionen und Sätze des Kap. II ohne weiteres auch für die Algebra in S existenzfähig bleiben. Nur die Begriffe und Sätze des Kap. I und III bedürfen für die hier zugrunde liegende Algebra in manchen Punkten einiger Modifikationen und Erläuterungen.

Der Satz I (Kap. I) z. B. hört auf, in der früher angegebenen Gestalt richtig zu sein. Es ist nötig, eine beschränkende Bedingung hinzuzufügen. Er lautet für die Algebra in S: „Sind $u_1, \cdots, u_h$ $(h \leqq m)$ Formen in S, deren Resultante mit $m-h$ beliebig zu wählenden Formen nicht identisch verschwindet, besteht eine identische Beziehung

$$p_1 u_1 + \cdots + p_h u_h = 0$$

und sind die Ordnungen von jedem der p_i mindestens gleich den entsprechenden Ordnungen irgend eines der u_j (mit Ausschluß von u_i), so gibt es Formen $q_{i,j}$, für welche identisch

$$q_{i,j} + q_{j,i} = 0, \quad p_i = \sum q_{i,j} u_i, \quad q_{i,i} = 0.\text{“}$$

Eine die Ordnungen der p_i beschränkende Bedingung irgend einer Art ist notwendig, denn, wie schon das Beispiel der Resultante zeigt, Beziehungen der diskutierten Gestalt bestehen wirklich, ohne daß die Formen $q_{i,j}$ existieren. Daß die angegebene Bedingung genügend ist, ergibt sich leicht bei Betrachtung des Induktionsbeweises von Satz I. Die betreffende Bedingung ist sowohl notwendig wie hinreichend, wenn der Raum S_i aus einer einzigen Variablen besteht, auf diesen Fall führt aber der Induktionsbeweis den Satz zurück. Nur *ein* Schluß der ganzen Schlußreihe des Beweises wird infolge der zugefügten Bedingung ungültig. Nachdem nämlich für $h = m$ erwiesen war, daß, wenn

$$p_1 u_1 + \cdots + p_h u_h = 0$$

und die Resultante von $u_1, \cdots, u_h$ mit $m-h$ beliebigen Formen nicht verschwindet, Formen $q_2, \cdots, q_h$ existieren, für die

$$p_1 = q_2 u_2 + \cdots + q_h u_h,$$

erschlossen wir die Gültigkeit des obigen für $h < m$ einfach durch Adjunktion von Formen $u_{h+1}, \cdots, u_m$, deren Ordnung größer war als die jedes der p_i. Dies Verfahren versagt hier infolge der Beschränkung für die Ordnungen der p_i. Die so entstandene Lücke im Beweis füllen wir in folgender Weise aus.

Das befolgte Beweisverfahren macht zunächst klar, daß, wenn der behauptete Satz richtig ist für einen Raum S der Mannigfaltigkeit $m-1$, aus einer Beziehung der Gestalt

$$p_1 u_1 + \cdots + p_{h-1} u_{h-1} + p_h \cdot l = 0,$$

wo l linear ist, und die übrigen Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, immer folgt $p_h = q_1 u_1 + \cdots + q_{h-1} u_{h-1}$. Dies gilt für jeden Wert von h. Ist nun $h < m$, also $h-1 < m-1$, so kann man 2 Linearformen bestimmen, deren Resultante mit $u_1, \cdots, u_{h-1}$ und $m-h-1$ beliebig zu wählenden Formen nicht verschwindet. Diese beiden seien der Einfachheit halber mit x_1 und x_2 identisch. Alsdann definiere ich eine Größe y durch die Beziehung $x_2 = y \cdot x_1$ und betrachte die Identität

$$p_1 u_1 + \cdots + p_h \cdot u_h = 0$$

als eine solche für einen Raum der Mannigfaltigkeit $m-1$, indem in ihr überall $x_2 = y \cdot x_1$ gesetzt und y als Parameter angesehen wird. Es folgt, nach Voraussetzung, wenn $(U_i)_{x_2 = y x_1}$ noch mit U_i bezeichnet wird, $p_h = r_1 U_1 + \cdots + r_{h-1} U_{h-1}$, wo die $r_1, \cdots, r_{h-1}$ von y rational abhängen, also $p_h \cdot Y = s_1 U_1 + \cdots + s_{h-1} U_{h-1}$, wo $s_1, \cdots, s_{h-1}$ Formen der Variablen und Polynome von y, Y nur von y abhängig ist. Ersetze ich in dieser Beziehung wieder y durch $\frac{x_2}{x_1}$ und mache die resultierende Identität homogen, so zeigt sich

$$p_h \cdot Z = t_1 u_1 + \cdots + t_{h-1} u_{h-1},$$

wo Z eine Form von x_1 und x_2 ist und die t_i Formen in S sind. Z ist als binäre Form darstellbar als Produkt von Linearformen der Gestalt $ax_1 + bx_2$, wo a, b Konstante. Somit ergibt sich, da nach Voraussetzung die Resultante irgend einer dieser Linearformen, von $u_1, \cdots, u_{h-1}$ und $m-h$ beliebig zu wählenden Formen nicht identisch verschwindet, durch sukzessive Anwendung des früher hier für die Beziehung

$$p_1 u_1 + \cdots + p_h \cdot l = 0$$

erhaltenen Resultates,

$$p_h = q_1 u_1 + \cdots + q_{h-1} u_{h-1}.$$

Damit ist Satz I auch für die Algebra in S vollständig erwiesen.

49. Führen wir nun in Analogie zum ersten Kapitel ein Operationssymbol

$$\Delta_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$$

ein, es durch die Beziehung

$$\Delta_{n_1, \cdots, n_k} f(r_1, \cdots, r_k) = f(r_1, \cdots, r_k) - f(r_1 - n_1, \cdots, r_k - n_k)$$

definierend, so können wir auch in S den Sätzen II und III des ersten Kapitels genau analoge Sätze aufstellen. Sind

$$(n_{1,1}, \cdots, n_{1,k}), \cdots, (n_{h,1}, \cdots, n_{h,k})$$

die Ordnungen von $u_1, \cdots, u_h$, so ist

$$H(u_1, \cdots, u_h)(R_1, \cdots, R_k) = \Delta_{n_{1,1}, \cdots, n_{1,k}} \cdots \Delta_{n_{h,1}, \cdots, n_{h,k}} (r_1, \cdots, r_k),$$

wenn

$$R_i > n_{i,1} + n_{i,2} + \cdots + n_{i,h} - m_i;$$

dagegen um 1 mehr oder minder, wenn alle

$$R_i = n_{i,1} + n_{i,2} + \cdots + n_{i,h} - m_i.$$

Was geschieht, wenn einzelne der R_i größer, andere kleiner sind als die angegebenen Werte, bleibt danach noch unentschieden. Diese Frage scheint überhaupt eine schwierige und kaum mit den bisher verwandten Mitteln lösbar zu sein. Da sie zudem zu all den Anwendungen, welche in den Schlußbemerkungen besprochen sind, in nur ganz loser Beziehung steht, so ist ein Eingehen auf diese Frage an dieser Stelle noch nicht nötig.

Die Existenz der Form Ω bleibt nach obigem ungeschmälert erhalten; auch der Satz, daß nur die Formen f apolar zu $\Omega(u_1, \cdots, u_m)$ dem Modul $(u_1, \cdots, u_m)$ angehören, unter f Formen verstanden, deren Ordnungen kleiner oder höchstens gleich denen von Ω sind.

Die Betrachtungen des Satzes IV und des Kap. II bleiben in Kraft. Doch bedarf Satz XI der Einschränkung, daß, wenn $C_1, \cdots, C_a$ die irreduziblen Gebilde, in die $u_1, \cdots, u_h$ zerfällt, und $M = (u_1, \cdots, u_h)$, dann $M = [M_{C_1}, \cdots, M_{C_a}, r]$, wo der Modul r alle die Formen enthält, deren Ordnungen in jedem der S_i diejenigen jedes der u_i mindestens erreichen. Es ist dies eine offenbare Folge der in der Algebra in S beim Analogon zu Satz I zu machenden Einschränkung.

Die Definition der Hilbertschen Funktion des Moduls M als einer von den k Ordnungen der Funktion abhängigen Zahl bleibt ungeändert. Nur lautet Satz IX in der Algebra in S: „Die Hilbertsche Funktion eines Moduls M

$$HM(r_1, \cdots, r_k)$$

ist für genügend große Werte von $r_1, r_2, \cdots, r_k$ ein Polynom von $r_1, \cdots, r_k$, dessen Ordnung um 1 kleiner ist als die Mannigfaltigkeit von M, und in irgend einer ausgewählten Gruppe der $r_1, \cdots, r_k$, etwa $r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_h}$, nur zu der Ordnung ansteigt, welche der Mannigfaltigkeit von Elementen entspricht, die der Modul M in den korrespondierenden Räumen $S_{i_1}, \cdots, S_{i_h}$ besitzt."

Der Beweis dieses Satzes geht im übrigen nach demselben Prinzip vor sich wie derjenige des Satzes IX.

Wir kommen nun zur Frage, was in der Algebra in S unter den Noetherschen Bedingungen eines Moduls zu verstehen sei und inwieweit in ihr die Betrachtungen des Kap. III gültig bleiben.

Statt des Punktes P des Kap. III werden wir Element, statt der Ordnung r Ordnungen $r_1, \cdots, r_k$ sagen müssen, doch bleiben alle Erwägungen bestehen, bis zur Einführung des dem analytischen P-Modul M entsprechenden Modul M'. Nur dann wird die Form p dem Modul M' angehören dürfen, wenn ein Individuum von M eine Entwicklung hat

$$f = p + p' + p'' + \cdots,$$

welche p enthält, und zwar so, daß die Ordnungen der übrigen Terme zum mindesten in einem der Räume S_i größer sind als die Ordnungen von p, in keinem der Räume S_i aber kleiner. Offenbar folgt dann für die Noether-Hilbertsche Funktion von M

$$(N, H)\, M(r_1, r_2, \cdots, r_k) = HM'(r_1, r_2, \cdots, r_k),$$

genau so wie in Kap. III.

Alle übrigen Folgerungen bleiben unverändert. Analoge Bemerkungen muß man über die Ideale in S machen.

50. Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man unschwer die aufgestellten Sätze nach verschiedener Richtung hin erweitern könnte. Einige Erweiterungen der Theorie der Elementarteiler sind bekannt. Genau dieselben Erweiterungen sind möglich bei der Definition und den Sätzen über die Ideale. Die Ausführungen des Kap. III sind übertragbar auf Formen, deren Koeffizienten ganze Zahlen sein oder einem bestimmten Körper angehören sollen. Denn Satz XXIII, und damit auch alle anderen Sätze bleiben auch bei dieser Einschränkung erhalten. Man kann Kap. III erweitern, indem man den Punkt P ersetzt durch ein Primideal J m^{ter} Stufe und, nach dem Vorbilde der Methoden von Hensel, Entwicklungen nicht bloß nach Variablen, sondern auch nach Potenzen der in J enthaltenen Primzahl p betrachtet. Man kann auch die Schlüsse ausdehnen auf die Menge der analytischen Funktionen, welche in einem gegebenen Bereich B keine Singularitäten haben. Neue Schwierigkeiten sind bei diesen Erweiterungen kaum zu überwinden.

Schlußbemerkungen über einige Anwendungen der aufgestellten Sätze.

51. Es war ursprünglich meine Absicht, den Ausführungen der vorgehenden Kapitel einige Anwendungen beizufügen, doch ist der Stoff schon zu stark angewachsen. Zudem kann es nicht die Aufgabe desjenigen, der neue Resultate bieten will, sein, sie sofort im ganzen Umfange ihrer Bedeutung anzuwenden. Daher entschloß ich mich, wiewohl schwer, auf das Kapitel der Anwendungen zu verzichten. Doch glaube ich, die hauptsächlichsten der Zielpunkte, die mir außer dem rein theoretischen der Erweiterung des Noetherschen Theorems noch vorschwebten, kurz andeuten zu sollen, sei es auch nur, um die Arbeit verständlicher zu machen.

Zu alleroberst würde da ein Satz stehen, der einen Fundamentalsatz der Lehre von den Verwandtschaften mit umfaßt. Drückt man die Hilbertsche Funktion eines Moduls M mit Hilfe von Differenzensymbolen, welche in bezug auf die φ-Funktion gemeint sind, gemäß der Gleichung $HM(r_1, \cdots, r_k) = H' \varphi(r_1, \cdots, r_k)$ aus, so ist das Differenzensymbol H' eindeutig bestimmt. Der Operator H′ sei der „Hilbertsche Operator des Moduls M“ genannt. Nennt man nun zwei primäre Moduln A und B der Stufen a und b relativ prim, wenn (A, B) die Stufe $a + b$ hat, und irgend zwei Moduln relativ prim, wenn alle ihre primären Teiler relativ prim zueinander sind, so gilt der Satz, daß der Hilbertsche Operator des größten Teilers zweier relativ primer Moduln das Produkt der Hilbertschen Operatoren der beiden Moduln ist. Ein Weg zum Beweis des Satzes ist der folgende. Zunächst zeige man, daß, wenn A, B zwei relativ prime Moduln sind, und $a_1, \cdots, a_h$ eine Basis von A, $b_1, \cdots, b_k$ eine solche von B ist, dann für genügend hohe Ordnungen $(a_1 \cdot b_1, \cdots, a_h \cdot b_k)$ eine solche von $[A, B]$ ist. Danach erweitere man diesen Satz auf das System der Syzygien eines der Moduln z. B. A, und zeige, daß unter der Voraussetzung, daß A und B relativ prim sind, die Kongruenz

$$X_1 a_1 + \cdots + X_h a_h \equiv 0 \bmod. B$$

und die aus ihr folgenden syzygetischen Kongruenzen modulo B die Kette der Syzygien von A erzeugt, wenn man sich auf genügend hohe Ordnungen beschränkt. Alsdann berechne man die Konstantenzahl von Formen gegebener Ordnungen von (A, B) auf dem Wege, wie Hilbert im Beweise seines Theorems IV die Konstantenzahl der Formen gegebener Ordnungen von A berechnet.

Eine spezielle Anwendung des obigen Satzes ist folgende. Sind $A, B, \cdots, L$ eine Reihe von irreduziblen Korrespondenzen, $A, \cdots, L$ die entsprechenden Primmoduln, und ist die Summe der Stufen $a + b + \cdots + l$ von $A, \cdots, L$ gleich $m - 1$, so haben $A, B, \cdots, L$ immer dann, und nur dann, eine endliche Zahl gemeinsamer Elemente, wenn $A, B, \cdots, L$ relativ prim zueinander sind, und die Zahl dieser gemeinsamen Elemente ist

$$\alpha \beta \cdots \lambda \; \varphi(R_1, \cdots, R_k),$$

wo $\alpha, \cdots, \lambda$ die Hilbertschen Operatoren von $A, \cdots, L$ sind.

Man kann aus den Anwendungen dieser Formel ersehen, daß die Symbole des Bedingungskalkuls von Schubert als Hilbertsche Operatoren interpretiert werden können und in dieser Auffassung alles Hypothetische verlieren.

52. Eine andere Anwendung unserer Ergebnisse betrifft diejenigen Probleme, welche zuerst von den englischen Mathematikern Cayley, Salmon u. a. behandelt und von letzterem unter dem Titel „Order of restricted systems of equations“ bekannt gemacht wurden.*) Das Problem, wie es von den genannten Mathematikern gestellt wurde, ist folgendes. Eine Zahl von $m - 1$ Formen haben eine Reihe von Gebilden, Kurven, Oberflächen etc. gemein. Wieviel Punkte haben sie noch gemein, welche nicht auf jenen Kurven, Oberflächen etc. liegen? Diese Frage suchte Salmon zu beantworten, und fand die im wesentlichen richtige Lösung, obwohl ihm nur ganz unzulängliche Hilfsmittel zu Gebote standen. Für uns ist der Satz VII mit den verwandten Sätzen ein Stützpunkt, der

*) Lessons on Modern Higher Algebra.

uns erlaubt, nicht bloß das Problem richtig zu stellen, sondern auch einen Weg zur Lösung einzuschlagen.

Wir werden die gegebenen Kurven, Oberflächen etc. und die Art ihrer gegenseitigen Lage, wie auch die Art, in der die gegebenen Formen dieselben enthalten sollen, dadurch ausdrücken können, daß wir sagen, die gegebenen $m-1$ Formen $f_1, \cdots, f_{m-1}$ gehören einem bestimmten Modul M an. Das Salmonsche Problem richtet sich dann auf die Hilbertsche Funktion desjenigen Teilers von

$$(f_1, \cdots, f_{m-1}),$$

der sich nicht auf die Gebilde von M bezieht. Durch die Diskussion der Gleichung

$$X_1 f_1 + \cdots + X_h f_h = 0$$

für unbestimmte Formen f_i des Moduls M, wobei

$$h \leqq m,$$

zeigt sich dann, daß die den $f_1, \cdots, f_{h-1}$ gemeinsamen Gebilde, die nicht auf denen von M liegen, Hilbertsche Operatoren besitzen, die von den Ordnungen der f_i rational und ganz abhängen, aber sonst von den unbestimmten Koeffizienten der f_i unabhängig sind. Auf dieser Grundlage ergibt sich z. B. das folgende Resultat: Es sei C eine irreduzible Verwandtschaft, $A_1, \cdots, A_n$ seien n irreduzible Verwandtschaften der Stufen $a_1, \cdots, a_n$ und mögen die $A_1, \cdots, A_n$ sämtlich C enthalten. Ferner sei $a_1 + \cdots + a_n = m-1$. Fragt man dann nach der Anzahl der Elemente, welche $A_1, \cdots, A_n$ gemeinsam sind, ohne in C enthalten zu sein, so wird diese Anzahl wie folgt erhalten. Jeder irreduziblen Verwandtschaft V der Stufe s kann man zwei Polynome einer Variablen x zuordnen, etwa das erste Salmonsche Polynom, bez. das zweite Salmonsche Polynom von V genannt. Das erste ist $= x^{m-1} +$ einem Polynom vom Grade $m-1-s$, das zweite vom Grade s. Die Koeffizienten dieser Polynome sind aber nicht Zahlen, sondern Operatoren des Differenzenkalküls nach Art der oben definierten Hilbertschen Operatoren. Beispielsweise ist das zweite Salmonsche Polynom einer Form der Ordnungen $n_1, \cdots, n_k$ einfach $x + \Delta_{n_1, \ldots, n_k}$. Die obige Anzahl ist dann erhältlich, indem man das erste Salmonsche Polynom von C multipliziert mit den zweiten Salmonschen Polynomen der $A_1, \cdots, A_n$ und mit dem Koeffizient x^{m-1} auf $\varphi(r_1, \cdots, r_k)$ operiert.

53. Eine dritte wichtige Anwendung der aufgestellten Sätze ruht in ihrer Fähigkeit, den bekannten Plückerschen Formeln der Ebene analoge Formeln leicht auffinden, richtig aussprechen und streng begründen zu lassen. So sind z. B. die Plückerschen Formeln selbst mit Hilfe des Symbols des Kap. III viel strenger und dabei einfacher aufzustellen, als

dies sonst geschieht, oder überhaupt ohne Hilfe jener Symbole geschehen könnte. Nach den Ausführungen des Kap. III über die Multiplizität von Lösungen ist die Formel für die Klasse einer reduziblen oder irreduziblen ebenen Kurve $f=0$ genau

$$k = n(n-1) - \sum H\left(f, a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{A_i},$$

wobei die Summation rechts über alle singulären Punkte A_i von f auszudehnen ist, n die Ordnung von f, a_1, a_2, a_3 unbestimmte Parameter bedeuten. Die sogenannte erste Plückersche Formel $k = n(n-1) - 2d - 3r$ ergibt sich aus obiger dann durch die Annahme, daß $f=0$ als Singularitäten nur Doppelpunkte und Spitzen zulasse, wobei für einen Doppelpunkt

$$H\left(f, a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\right)_A = 2,$$

für eine allgemeine Spitze

$$H\left(f, a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\right)_A = 3$$

sich leicht herleitet. Ähnlich lautet die zweite Plückersche Formel für die Zahl der Wendetangenten w richtig

$$w = 3n(n-2) - \sum H(f, D)_{A_i},$$

wo D die Hessesche Form von f bedeutet und die Summation wieder über alle singulären Punkte A_i von f auszudehnen ist. Die spezielle Form derselben $w = 3n(n-2) - 6d - 8r$ ergibt sich leicht ebenso wie die spezielle Form der ersten Plückerschen Formel, z. B. durch Diskussion eines Systems Noetherscher Bedingungen.

Genau so wie die obigen Formeln lassen sich Analoga entwickeln für die verschiedensten Berührungsprobleme in der Algebra eines Raumes oder einer Gruppe von Räumen. Beispielsweise ist die Zahl der durch eine gegebene Gerade gehenden Ebenen, die eine gegebene Oberfläche $f=0$ berühren

$$n(n-1)^2 - \sum H\left(f, a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots, b_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\right)_{A_i},$$

wo n die Ordnung der Oberfläche, A_i die singulären Punkte derselben, a_i, b_i unbestimmte Konstante sind. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß die Singularitäten nur in endlicher Zahl vorkommen. Eine Spezialisation zeigt, daß einem r-fachen Punkte A im allgemeinen die Zahl

$$H\left(f, a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots, b_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\right)_A = r(r-1)^2$$

entspricht. Ist $r=2$ und zerfällt der Tangentenkegel bei A, so ist im allgemeinen $H(f, \cdots)_A = 3$; ist der Tangentenkegel das Quadrat einer

Ebene, so ist $H(f, \cdots)_A = 4$ etc. etc. Enthält $f = 0$ Kurven von Singularitäten, so treten die Begriffe und Sätze des Salmonschen Problems in Kraft. Allemal bieten die Methoden der vorliegenden Arbeit die Mittel zur allgemeinen Lösung der betreffenden Probleme — seien dieselben auf Formen, oder auf Gebilde höherer Stufe, oder auf die Singularitäten (z. B. sogenannte Fundamentalpunkte etc.) von Verwandtschaften beliebiger Stufen bezüglich. —

Als das aus der vorliegenden Arbeit emporwachsende Hauptproblem möchte ich die Bestimmung der geometrischen Bedeutung aller Koeffizienten der Hilbertschen Funktion eines Moduls, insbesondere eines Primmoduls, bezeichnen. Man weiß z. B., daß, wenn für große R die Hilbertsche Funktion einer irreduziblen Raumkurve $aR - b$ ist, und die Raumkurve keine Doppelpunkte hat, dann $b + 1$ das Geschlecht der Kurve angibt. Die analoge Frage könnte man aufwerfen für die Koeffizienten der Noether-Hilbertschen Funktion eines analytischen Moduls, wie für die Indizes der „Elementarteiler" eines Ideals.

Charlottenburg, März 1904.

Inhaltsverzeichnis.

Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene.

Von

FELIX BERNSTEIN in Halle a./S.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Daß der Kreis unter allen ebenen Kurven von gegebenem Umfang den größten Inhalt habe, ist eine Behauptung, welche für unsere Vorstellung eine Art unmittelbarer Gewißheit besitzt. Es ist nicht ohne Interesse den hierfür maßgebenden Gründen nachzugehen. Einen Hauptanteil an der Ausbildung der Vorstellung hat jedenfalls die Erfahrung, daß beim Anfüllen einer biegsamen aber nicht beliebig dehnbaren Hülle von zylindrisch allseitig geschlossener Form mit einem festen Material, Wasser, Sand, Schrotkörner etc., sich dieselbe mehr und mehr abrundet und daß sie schließlich unter Spannung der Wandung einen kreisförmigen Querschnitt bekommt.

Das *intuitiv-mechanische Gefühl*, das die Vorstellung begleitet, stammt jedenfalls aus dieser Quelle. Man hat unmittelbar das Gefühl, daß der Inhalt einen allseitig gleichmäßigen Druck auf die Wandung ausübt und sie dadurch in die Kreisform zwingt. Vielleicht muß man aber auch noch ein *visuelles Moment* berücksichtigen. Wir machen öfter die Erfahrung, daß wir eine kreisförmige Fläche schneller mit den Blicken beherrschen, als eine nichtkreisförmige Fläche von sonst gleichem Inhalt. Der wandernde Blick hat im Durchschnitt geringere Entfernungen zu überwinden, um die Dimensionen der Fläche zu erfassen. Dementsprechend erscheint uns auch die Kontur geringer. Das Gesichtsfeld selbst hat ja aus solchen Gründen eine nahezu kreisförmige Gestalt. So wirken vielleicht zwei Momente verschiedener Natur zusammen, um der Vorstellung die zwingende Gewalt zu verleihen, die ihr eigentümlich ist.

Die einleuchtende Einfachheit des Satzes, sowie die verhältnismäßige Schwierigkeit einer strengen Begründung hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker schon frühzeitig auf sich gezogen. Indem ich die ersten unvollkommenen Versuche übergehe, erwähne ich besonders J. Steiner, Über Maximum und Minimum bei den Figuren etc. Werke Bd. II, 16. 17. — H. A. Schwarz, Math. Abhandlungen Bd. I, S. 327ff. — Minkowski, Math. Ann. Bd. 57. — Hurwitz, Annales de l'École normale supérieure t. 19, 1902. —

Es muß auffallen, daß die bisherigen Beweise mit der ursprünglichen Quelle, aus der wir die Gewißheit seiner Richtigkeit schöpfen, in keiner Beziehung stehen. Es schien mir daher lohnend einen Versuch zu machen, auf der anschaulichen Grundlage einen strengen Beweis zu führen. Hierbei diente die folgende Vorstellung als Ausgangspunkt der Betrachtung. Es möge sich auf einer Kugeloberfläche, etwa der überall als glatt gedachten Erdoberfläche, eine Flüssigkeitsschicht, die von einem elastischen Bande umschlungen und zusammengehalten ist, von einem Punkte, etwa dem Nordpol aus, sich ausbreiten. Dabei wird die Kontur unter der Wirkung der mechanischen Kräfte stets ein Kreis bleiben. Im Verlauf der Ausdehnung wird das Wasser einmal die ganze nördliche Halbkugel bedecken und ihre Kontur wird der Äquator sein. Durch dieselben Kräfte also, welche vorher die Begrenzung kreisförmig gestalten, wird sie einmal ein größter Kreis und also die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte. Hier ist also ein offenbarer Zusammenhang des vorliegenden Problems mit dem einfacheren der kürzesten Verbindung zweier Punkte. Der gesuchte Beweis besteht lediglich in einer genaueren Ausarbeitung des analogen Verhältnisses bei der Ausdehnung nicht kreisförmiger Schichten. (Teil I.) Allerdings ist damit zunächst nur der Satz für die Kurven auf der Kugeloberfläche bewiesen.

Um daraus für die ebenen Kurven das gleiche folgern zu können, muß ein Grenzübergang gemacht werden. Es muß hierzu nachgewiesen werden, daß wir von dem Prinzip der Stetigkeit Gebrauch machen dürfen. Es wird dementsprechend gezeigt, daß eine kleine Abänderung der Bedingungen unserer Erscheinung nur eine kleine Abänderung dieser selbst zur Folge hat, und damit die Berechtigung des Grenzübergangs gesichert. Der Nachweis geschieht in Form einer Ungleichung für die sphärischen Kurven, welche sich auf die ebenen Kurven überträgt (Teil II).

Teil I.

Das sphärische Problem.

§ 1.

Einfach geschlossene Kurven. Konvexe Kurven. Parallelkurven.

Das Ziel der Betrachtung in dem ersten Teil ist der Beweis des folgenden

Satz 1. *Unter allen einfach geschlossenen konvexen Kurven auf der Kugeloberfläche von gegebenem Inhalt hat der Kreis den kürzesten Umfang.*

Wir werden den Beweis zunächst nur für solche *konvexe* Kurven führen, welche überall *eine bestimmte geodätische Krümmung* $\frac{1}{\varrho_g} = \frac{d\tau}{ds}$ besitzen und die darin liegende Einschränkung im zweiten Teile aufheben. Wir stellen, der größeren Klarheit halber, die Definitionen der verwendeten Begriffe hier noch einmal zusammen.

1. *Definition der einfach geschlossenen sphärischen Kurve C.* Es seien $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ eindeutige und stetige Funktionen der reellen Variabeln t von der Periode T, so daß allgemein $x(t) = x(t+T)$, $y(t) = y(t+T)$, $z(t) = z(t+T)$ ist; wenn dann $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ für alle Werte von t ist, so durchläuft der Punkt (x, y, z) für variable t eine geschlossene sphärische Kurve C, welche *einfach geschlossen* heißt, sobald zwei verschiedenen Werten von t im Intervall $0 \cdots T$ zwei verschiedene Punkte (x, y, z) entsprechen.

2. *Inhalt der sphärischen Kurve.* Nach C. Jordan teilt die Kurve C die Kugeloberfläche in zwei getrennte Teile N und S*). Jeder derselben

*) C. Jordan, Cours d'analyse 2. éd. Bd. 1, p. 90. Die Betrachtung ist dort nur für ebene Kurven geführt, läßt sich aber ohne weiteres auf sphärische übertragen.

kann als Inneres resp. Äußeres der Kurve C angesehen werden und besitzt zugleich einen bestimmten Inhalt, der entsprechend als Inhalt J der Kurve C bezeichnet werde. (Im allgemeinen werden wir den kleineren als Inneres, den größeren als Äußeres auffassen.) Der *Umfang* der Kurve wird in der üblichen Weise definiert und mit L bezeichnet.

3. *Konvexe Kurven.* Eine Kurve C heißt *konvex*, wenn sie von einer sphärischen Geraden (größtem Kreise) in nicht mehr als zwei Punkten α und β so geschnitten wird, daß die Strecke $\alpha\beta$ ganz im Innern von C liegt.

Wir nehmen an, die konvexe Kurve C habe an jeder Stelle eine bestimmte Tangente t und geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}$, wo $d\tau$ das Element des Kontingenzwinkels bedeutet. Die Tangente t im Punkte α hat mit der Kurve C keinen zweiten Punkt β gemein, da sonst eine der die Tangente approximierenden Sehnen drei Punkte α', α'' und β' mit der Kurve C gemein haben würde.

Es liegt also die Kurve C ganz innerhalb einer der beiden Halbkugeln, welche die Tangente t begrenzt.

4. *Parallelkurven.* Die in der Einleitung besprochene Ausdehnung eines sphärischen Flächenstückes führt die Kontur desselben in eine parallele Kontur über. Wir betrachten demgemäß, und zwar der Vereinfachung halber für $r = 1$, die äußeren Parallelkurven C_ε einer konvexen Kurve C mit angegebenen Eigenschaften, die den allseitigen Abstand ε $\left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ besitzen. Es besteht der

Satz 2a. *Die äußere Parallelkurve C_ε im Abstande ε $\left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ zur Kurve C ist eine einfach geschlossene Kurve (die jedoch im allgemeinen nicht konvex ist).*

Beweis. Es sei σ ein Punkt auf der äußeren Normalen n im Punkte α der Kurve, so daß $\sigma\alpha = \varepsilon$ $\left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ sei. *Es ist dann die Entfernung $\sigma\beta$ des Punktes σ von einem beliebigen andern Punkte β der Kurve C größer als ε.*

Denn der um σ mit dem Radius ε geschlagene Kreis berührt in α den größten Kreis t, der in α tangiert, und wird durch diesen von der Kurve C getrennt. Also schneidet $\sigma\beta$ den größten Kreis t und zugleich den Kreis mit dem Radius ε, so daß $\sigma\beta > \varepsilon$ ist. Hieraus geht hervor, daß die äußere Parallelkurve C_ε sich nicht selbst in einem Punkte σ schneiden kann. Denn ein solcher Punkt σ würde von zwei Punkten α und β der Kurve C gleichen Abstand ε haben, was unmöglich ist.

Wir beweisen ferner den

Satz 2b. Das Linienelement ds bewahrt bei der Dilatation der Kurve C sein Vorzeichen, so lange $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ist und es ist unter der gleichen Bedingung an jeder Stelle

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = \frac{ds_\varepsilon}{\varrho} \quad \text{und} \quad L_\varepsilon = \int ds_\varepsilon.$$

Beweis. Wenden wir dieselbe Betrachtung wie beim Beweis von Satz 2a auf zwei unendlich benachbarte Normalen an, so erkennen wir, daß sich dieselben für den angegebenen Bereich der Größe ε außerhalb der Kurve nicht schneiden. Es wird daher ds_ε im gleichen Sinne durchlaufen wie ds und es wird $L_\varepsilon = \int ds_\varepsilon$ die Länge im gewöhnlichen Sinne bedeuten. Bezeichnet ferner P die auf der inneren Normalen gemessene Entfernung des Mittelpunkts des oskulierenden Kreises von dem Punkte α, so ist offenbar $P + \varepsilon$ der Radius des oskulierenden Kreises an dem entsprechenden Punkte von C_ε. Die Linienelemente ds und ds_ε verhalten sich, wie die Peripherien der oskulierenden Kreise, also wie $2\pi \sin P$ zu $2\pi \sin (P+\varepsilon)$. Es ist also

$$ds_\varepsilon = ds \frac{\sin (P+\varepsilon)}{\sin P},$$

woraus an der Stelle $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = ds \cdot \operatorname{ctg} P = \frac{ds}{\varrho}$$

infolge der bekannten Beziehung $\operatorname{ctg} P = \frac{1}{\varrho}$ folgt.

Die gleiche Betrachtung gilt an jeder Stelle ε im betrachteten Bereich, woraus also für $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ allgemein

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = \frac{ds_\varepsilon}{\varrho_\varepsilon}$$

folgt.

§ 2.

Das Zustandsdiagramm.

Um uns über den Sinn unserer Behauptung volle Klarheit zu verschaffen, tragen wir in einer XY-Ebene $2\pi - \frac{J}{r^2}$ als X-Koordinate, $\frac{L}{r}$ als Y-Koordinate auf, wobei wir $\frac{L}{r}$ und $\frac{J}{r^2}$ statt L und J einführen, um die Betrachtung auf die Einheitskugel zu verlegen.

Lassen wir nun eine beliebige einfach geschlossene Kurve C auf der Kugeloberfläche alle möglichen Formen annehmen, so entspricht einem jeden ihrer *„Zustände"* ein bestimmtes Wertepaar $2\pi - \frac{J}{r^2}, \frac{L}{r}$, welches in der XY-Ebene durch einen Punkt P repräsentiert wird.

Die XY-Ebene heiße dementsprechend die *„Zustandsebene“* der Kurve C. Die Gesamtheit aller Punkte, welche auf diese Weise in der XY-Ebene erreicht werden können, bezeichnen wir als das *„reelle Gebiet G“*, welches also in bestimmtem Sinne zu den Kurven C gehört. Alle diejenigen Punkte der Zustandsebene, welchen keine wirklichen Kurven entsprechen, heißen das *imaginäre oder unmögliche Gebiet U.*

Aus dieser Auffassung, welche sich bei allen Aufgaben der Variationsrechnung, wo Nebenbedingungen gestellt sind, in gleicher Weise entwickeln läßt, ergeben sich ohne weiteres diejenigen Fragen, deren Lösung als die natürliche Aufgabe dieses Teils der Variationsrechnung erscheint.

Das Gebiet G ist als *Punktmenge* definiert. Es ist die Natur dieser Punktmenge zu studieren. Man muß z. B. zeigen, ob sie *abgeschlossen*, ob sie *in sich dicht*, *zusammenhängend* etc. ist.

In den meisten Fällen wird man, wie im vorliegenden, zeigen, daß das Gebiet G ein Kontinuum bildet, d. h. daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt und mit jedem andern stetig verbunden werden kann.

Als *zentrale Frage* muß aber die folgende angesehen werden:

Welches ist die Natur der Begrenzung der Punktmenge G?

d. h.

1) *Gehört die Begrenzung von G zu G selbst oder zu U?*
2) *Welches sind diejenigen Gebilde, deren Zustand die Punkte der Begrenzung darstellen?*

Die Begrenzung ist dabei als die Menge der Punkte gedacht, welche zugleich Grenzpunkte der Punkte von G und der Punkte von U sind. Wir wollen die Punkte der Begrenzung als *kritische Punkte* bezeichnen.

Die Aufgabe, bei gegebenem X das kleinste zugehörige Y zu bestimmen, ist offenbar ein spezieller Fall der allgemeinen Fragestellung. Es wird dabei das Gebilde der kritischen Punkte durch eine Schar von Parallelen zur Y-Achse geschnitten und es werden die Schnittpunkte oder ein Teil derselben aufgesucht. Wenn die kritische Kurve aber aus mehreren Zweigen besteht oder stückweise der Y-Achse parallel ist, so erweist sich diese spezielle Fragestellung als unzweckmäßig und muß durch die allgemeine ersetzt werden.

Wenn die kritische Kurve eine *monotone* Funktion von X ist, so ist auch X eine eindeutige Funktion von Y, und die Aufgabe das größte X, das zu einem gegebenen Y gehört, zu suchen, hat dieselbe Lösung. A. Mayer hat in einer wichtigen Arbeit*) die analytischen Bedingungen für eine solche Umkehrbarkeit der Fragestellung aufgestellt.

*) A. Mayer, Math. Ann. Bd. 26, p. 74.

Bei Aufgaben, in denen drei Größen X, Y, Z oder mehr vorkommen, ist es meist noch wesentlicher, die spezielle Fragestellung durch die allgemeine zu ersetzen, da das kritische Gebilde in den vielen Fällen aus ganz verschiedenartigen Flächen zusammengesetzt ist.

Wir wollen nun die Verhältnisse bei unserm speziellen Problem ins Auge fassen. Wenn die sphärischen Kreise in der Tat die behauptete Minimaleigenschaft haben, so ist das kritische Gebilde hier ein Dreieck, welches von zwei Parallelen zur Y-Achse im Abstande $+2\pi$ und -2π, sowie von dem oberhalb der X-Achse gelegenen Halbkreise K begrenzt wird, der 0 zum Zentrum und 2π zum Radius hat. (Fig. 1.)

Der Halbkreis K repräsentiert die auf der Kugeloberfläche liegenden Kreise. In der Tat sind Inhalt und Umfang des sphärischen Kreises vom Radius ϱ, durch die bekannte Formel

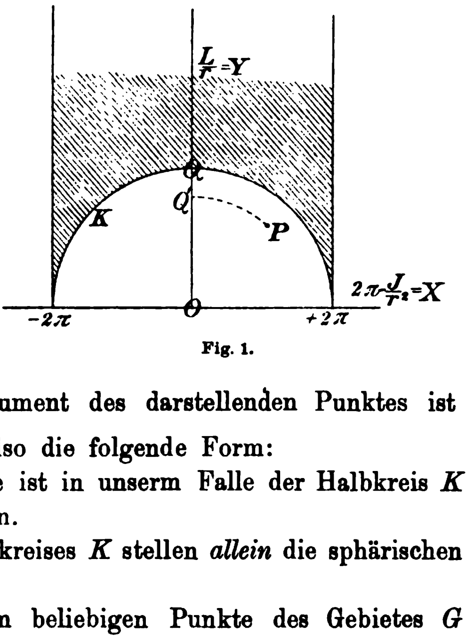


Fig. 1.

$$(1)\qquad Y = \frac{L}{r} = 2\pi \sin\frac{\varrho}{r},$$

$$X = 2\pi - \frac{J}{r^2} = 2\pi \cos\frac{\varrho}{r}$$

gegeben, so daß also $\frac{\varrho}{r}$ das Argument des darstellenden Punktes ist Unsere Behauptung gewinnt hier also die folgende Form:

1) Das kritische Gebilde ist in unserm Falle der Halbkreis K und zwei Halbgeraden.
2) Die Punkte des Halbkreises K stellen *allein* die sphärischen Kreise dar.

Die Beziehung zwischen einem beliebigen Punkte des Gebietes G und den entsprechenden sphärischen Kurven ist keine eindeutige. Eine umkehrbar eindeutige Beziehung tritt nur für die Punkte des Halbkreises K ein. Allgemeine Bedingungen für diese Verhältnisse sind nicht bekannt.

Da es evident ist, daß die beiden Halbgeraden zur Begrenzung von G gehören, so handelt es sich allein um die Untersuchung des Kreises K. Wir können daher unsern zu beweisenden Satz auch folgendermaßen formulieren. Da

$$(2)\qquad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 = (2\pi)^2$$

die Gleichung des Kreises K ist, so ist das Äußere durch die Ungleichung

$$(3)\qquad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 > (2\pi)^2$$

charakterisiert. Wir müssen daher für alle sphärischen Kurven, die nicht Kreise sind, die Ungleichung (3) behaupten, während für die sphärischen Kreise und nur für diese die Gleichung

$$\left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 = (2\pi)^2$$

gelten soll.

§ 3.

Die Transformation auf das absolute Problem.

Wir nehmen also im folgenden an, daß die *konvexe Kurve C an jeder Stelle eine bestimmte Tangente t und eine geodätische Krümmung* $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ *besitze.* Wenn wir jetzt entsprechend der in der Einleitung entwickelten Vorstellung die Kurve C durch einen auf das Innere ausgeübten Druck gleichmäßig ausdehnen, so wird sie in eine äußere Parallelkurve C_ε vom allseitigen Abstande $\varepsilon \cdot r$ übergehen. Wir wollen die Wirkung dieser Transformation, die wir mit T_ε bezeichnen wollen, in dem Zustandsdiagramm studieren.

Ist die Kurve C zunächst ein Kreis, so geht sie wieder in einen Kreis über. Der darstellende Punkt P wandert also auf dem Halbkreise K und zwar durchläuft er alle Punkte desselben. Wenn die Kurve C ein größter Kreis geworden ist, so befindet sich der darstellende Punkt P auf der Y-Achse in Q.

Wie aber gestaltet sich das Bild in der Zustandsebene für eine der Kurven C, welche kein Kreis ist? Die überraschend einfache Antwort liefert der

Satz 3. *Wird die Transformation T_ε auf alle konvexen Kurven C, welche den angegebenen Bedingungen genügen, gleichzeitig ausgeübt, so erfährt die Zustandsebene der darstellenden Punkte P eine Drehung um den Nullpunkt und zwar eine Drehung im positiven Sinne um den Winkel ε.*

Es sollen also die folgenden Formeln gelten:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} 2\pi - \frac{J_\varepsilon}{r^2} &= \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)\cos\varepsilon - \frac{L}{r}\sin\varepsilon, \\ \frac{L_\varepsilon}{r} &= \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)\sin\varepsilon + \frac{L}{r}\cos\varepsilon, \qquad \left(0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

wo J_ε und L_ε Inhalt und Umfang der Parallelkurve C_ε bedeuten.

Beweis. Es werde zunächst $r = 1$ gesetzt. Bekanntlich ist $\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = L_\varepsilon$ und also

$$(4)\qquad \frac{\partial\, (2\pi - J_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -L_\varepsilon.$$

Für die Dilatation des Linienelements benutzen wir die Formel von § 1 Satz 2b

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = \frac{ds_\varepsilon}{\varrho_\varepsilon} = d\tau_\varepsilon \qquad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right).$$

Infolgedessen ist, in Hinblick auf Satz 2a,

(5) $$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L_\varepsilon = 2\pi - J_\varepsilon, \qquad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right),$$

wo $L_\varepsilon = \int ds_\varepsilon$ die Länge von C_ε, J_ε den Inhalt von C_ε nach der Formel $2\pi - J_\varepsilon = \int d\tau_\varepsilon$ bedeutet. Aus (4) und (5) folgt mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(2\pi - J_\varepsilon + iL_\varepsilon) = i(2\pi - J_\varepsilon + iL_\varepsilon)$$

durch Integration von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \varepsilon$

(6) $$2\pi - J_\varepsilon + iL_\varepsilon = e^{i\varepsilon}(2\pi - J + iL) \qquad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Formel (6) stimmt aber völlig mit (I) überein, wenn wir, noch mit Rücksicht auf ein beliebiges r, J_ε durch $\frac{J_\varepsilon}{r^2}$ und L_ε durch $\frac{L_\varepsilon}{r}$ für jedes ε ersetzen.

Zusatz. *Es ist also insbesondere*

(7) $$\left(2\pi - \frac{J_\varepsilon}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L_\varepsilon}{r}\right)^2$$

eine ***Invariante*** *unserer Transformation* T_ε.

Die Transformation T_ε ist übrigens in der Ausdrucksweise der Lieschen Theorie eine *Berührungstransformation**).

Neuerdings hat Engel in einer Note: Zur Flächentheorie**) diese Transformation auf einer beliebigen Fläche untersucht.

Der eben bewiesene Satz 3 gestattet den folgenden Schluß. Gesetzt der Halbkreis K wäre nicht die kritische Linie, d. h. es gäbe *innerhalb* desselben einen Punkt P, welcher eine konvexe Kurve C mit den vorausgesetzten Eigenschaften darstellt, so würden wir auf diese Kurve die Transformation T_ε so anwenden, daß der darstellende Punkt P auf die Y-Achse rückt. Hierzu ist übrigens erforderlich, daß der Winkel $\sphericalangle POQ = E$ zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ liegt, eine Bedingung, die infolge der Gleichungen $\operatorname{tg} E = \frac{2\pi - J}{L}$, $J > 0$, $L > 0$, sicher erfüllt ist. Indem wir also $\varepsilon = E$ setzen, wird $2\pi - J_\varepsilon = 0$ und

(8) $$L_\varepsilon^2 = (2\pi - J)^2 + L^2.$$

*) Siehe Lie-Scheffers, Geometrie d. Berührungstransformationen. Lpzg. 1896.

**) Berichte d. Kgl. Sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig 1901.

Der Punkt P würde also in einen Punkt der Y-Achse Q' rücken, so daß $OP = OQ' < 2\pi$ sein würde. Wenn wir aber beweisen, daß die Strecke $OQ = 2\pi$ keinen darstellenden Punkt Q' in ihrem Innern enthält, so folgt also, daß auch der Kreis K keinen darstellenden Punkt in seinem Innern enthält.

Der Punkt Q stellt die größten Kreise der Kugeloberfläche dar. Die Behauptung, daß die Strecke OQ in ihrem Innern keinen darstellenden Punkt enthält, heißt daher nichts anderes als:

Unter allen Kurven der angegebenen Eigenschaft, welche die Kugeloberfläche hälften, hat der größte Kreis den kleinsten Umfang.

Auf dieses Problem, welches mit dem Problem der *geodätischen* Linie, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, identisch ist, haben wir also das *isoperimetrische* Problem zurückgeführt.

§ 4.

Das absolute Problem.

Es bleibt also noch übrig zu beweisen, daß der folgende Satz gilt:

Satz 4. *Unter allen einfach geschlossenen Kurven D, welche die Kugeloberfläche hälften, hat der größte Kreis den kleinsten Umfang.*

Hierbei ist es nicht einmal nötig, über die zum Vergleich herangezogenen Kurven die einschränkenden Voraussetzungen zu machen, welche sich bei der Aufstellung der Transformationsformeln als nötig erwiesen.

Man erkennt zunächst, daß die Kurve D wenigstens *ein Paar Gegenpunkte R und R' der Sphäre* enthält. In der Tat teilt auch die Kurve D', welche die sämtlichen Gegenpunkte der Punkte von D enthält, die Kugeloberfläche in zwei gleiche Teile. Würden sich nun D und D' nicht schneiden, so würden die beiden einfach geschlossenen Kurven die Kugeloberfläche in drei getrennte Teile T_1, T_{12}, T_2, zwei äußere T_1 und T_2, und einen mittleren T_{12}, der von D und D' gleichzeitig begrenzt wird, zerfällen. Es würde dann T_{12} einen von Null verschiedenen Inhalt haben, und da andrerseits T_1 und T_2 jeder den Inhalt 2π haben würden, so würde die Summe $T_1 + T_{12} + T_2$ größer als 4π, d. h. größer als die Kugeloberfläche ausfallen, was einen Widerspruch ergibt. Es ist also T_{12} nicht vorhanden und die beiden Kurven D und D' schneiden sich in wenigstens einem Punkte R. Dann aber ist R', der Gegenpunkt von R, gleichfalls Schnittpunkt von D und D', und R und R' bilden ein Paar von Gegenpunkten auf der Kurve C.

Durch R und R' wird D in zwei Teile D_1 und D_2 zerlegt, welche die Längen L_1 und L_2 haben mögen. Ist D_1 oder D_2 kein größter Halbkreis, so ist L_1 oder L_2 größer als π und daher $L > 2\pi$. Sind aber D_1

und D_2 größte Halbkreise, so bilden sie, da D die Kugeloberfläche hälften soll, einen größten Kreis. Es ist also $L = 2\pi$ dann und nur dann, wenn die Kurve D ein größter Kreis ist.

Hält man also jetzt den eben bewiesenen Satz 4 zusammen mit den Ausführungen am Schluß des vorigen Paragraphen, so erkennt man, daß jetzt der folgende Satz bewiesen ist:

Satz 5. *Unter allen sphärischen Kurven, welche konvex sind und denen an jeder Stelle eine bestimmte Tangente und geodätische Krümmung zukommt, hat der sphärische Kreis bei gegebenem Inhalt den kleinsten Umfang.*

Ziehen wir jetzt die Formel (8) heran und bedenken wir, daß L_0 die Länge der Kurve D bedeutet, so folgt, wenn wir noch berücksichtigen, daß die Relationen für eine Kugel vom Radius r gelten, sobald L durch $\frac{L}{r}$, J durch $\frac{J}{r^2}$ ersetzt wird, aus der Ungleichung $L_0 \geqq 2\pi$ die Beziehung

$$(9) \qquad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 \geqq (2\pi)^2,$$

in welcher das Gleichheitszeichen nur für den Fall des Kreises gilt. In dieser Formel ist der Inhalt des Satzes 5 ausgedrückt.

Teil II.

Die approximativen Sätze und der Grenzübergang zur Ebene.

§ 5.

Das Verhalten der Minimaleigenschaft beim Grenzübergang. Definition der natürlichen Breite.

Aus der bewiesenen Minimaleigenschaft der sphärischen Kreise folgt leicht, daß die ebenen Kreise gleichfalls bei gegebenem Inhalt Kurven kleinsten Umfangs sind, und zwar im Vergleich mit allen ebenen konvexen Kurven, welche Tangente und Krümmung an jeder Stelle besitzen. Was jedoch schwieriger zu zeigen ist, ist die Behauptung, daß die Kreise die *einzigen* ebenen Kurven dieser Minimaleigenschaft sind. Hierzu war es nötig, für die sphärischen Kurven einen tieferen Satz abzuleiten. Es ist das Charakteristische des hier behandelten Variationsproblems, daß sich neben den *exakten* Minimumsatz ein *approximativer* Minimumsatz stellen läßt. Eine Kurve, welche annähernd Inhalt und Umfang eines Kreises hat, ist annähernd ein Kreis. Indem nun solche approximativen Sätze der Reihe nach für die geodätische Linie und die zwischen dieser und dem Kreise stehenden Kurven bewiesen werden, wird die fundamentale

Formel (28) hergeleitet, welche nicht nur den Grenzübergang zur Ebene in leichter Form gestattet, sondern auch zugleich die Mittel an die Hand gibt, den Geltungsbereich des zu beweisenden Satzes so weit als möglich auszudehnen.

Wir beweisen zunächst den

Satz 1. *Hat eine ebene konvexe Kurve C, welche an jeder Stelle eine bestimmte Tangente und Krümmung besitzt, den Inhalt $J = \pi R^2$, so ist der Umfang L größer oder gleich $2\pi R$.*

Beweis. An einen beliebigen Punkt der Ebene, welche die Kurve C enthält, legen wir die unendliche Schar der auf einer Seite berührenden Kugeln mit den beliebig wachsenden Radien r und projizieren die Kurve C von den Mittelpunkten der Kugeln auf die Oberflächen derselben. Die so entstandenen sphärischen Kurven C_r besitzen als Tangenten und oskulierende Kreise die Projektionen der zur Kurve C gehörigen Tangenten und oskulierenden Kreise auf die Kugeloberflächen. Sie haben daher insbesondere keine Doppeltangenten und sind konvex.

Aus der Formel (9) des § 4, welche wir jetzt anwenden, folgt, indem wir den Inhalt und Umfang von C_r mit J_r und L_r bezeichnen

$$L_r^2 - 4\pi J_r + \frac{J_r^2}{r^2} \geqq 0. \tag{10}$$

Läßt man jetzt r unendlich werden, so folgt aus

$$J = \lim_{r=\infty} J_r, \quad L = \lim_{r=\infty} L_r, \tag{11}$$

$$L^2 - 4\pi J \geqq 0. \tag{12}$$

Ist also $J = \pi R^2$, so ist

$$L \geqq 2\pi R, \tag{13}$$

was zu beweisen war.

Das Gleichheitszeichen gilt für den Fall des Kreises; es muß nun noch gezeigt werden, daß es nur für den Kreis gilt, und daß also jede ebene Kurve, welche Inhalt und Umfang des Kreises hat, auch selbst ein Kreis ist.

Wir beginnen die Reihe der darauf abzielenden Sätze mit der Erklärung der Variation des Kreises.

Erklärung 1. Unter allen Kreisen, welche eine ebene einfach geschlossene Kurve C *einschließen*, gibt es einen oder mehrere, deren Radien die *untere Grenze* ϱ_1 der für die Radien derselben möglichen Werte wirklich annehmen. (Es folgt dies aus dem Umstande, daß die Kurve C eine ganz im Endlichen gelegene abgeschlossene Punktmenge darstellt und gilt für solche ganz allgemein.) Wir bezeichnen *einen* derselben mit K_1. Desgleichen gibt es unter allen Kreisen, welche im *Innern* der Kurve C liegen, einen oder mehrere, deren Radien die *obere Grenze* ϱ_2 der für die Radien derselben möglichen Werte wirklich annehmen. Wir bezeichnen einen derselben mit K_2. Die Kreise K_1 und K_2 sollen innere und äußere *Spannkreise* heißen. Denkt man sich die Punkte der Kurve C als fest, so kann man die Spannkreise sich durch zwei Kreisfedern realisiert denken, von denen die innere durch das Bestreben sich auszudehnen, die äußere durch das Bestreben sich zusammenzuziehen gegen die Kurve C gepreßt wird.

Erklärung 2. Die Differenz $d = \varrho_1 - \varrho_2$ der Radien ϱ_1 und ϱ_2 des äußeren und inneren Spannkreises heiße die *natürliche Breite der Kurve* C. Die Entfernung f der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreise K_1 und K_2 heiße die *Exzentrizität der Kurve* C. *Es ist offenbar der Kreis die einzige Kurve von der natürlichen Breite* $d = 0$ *und für jede andere Kurve ist* d *größer als Null.* Analoge Definitionen lassen sich auch für die sphärischen Kurven treffen. Es gilt für die definierten Begriffe der

Satz 2. *Die Größen* d *und* f *bleiben bei der Transformation* T_ε *invariant.*

Beweis. Die Gesamtheit der von der Kurve C eingeschlossenen und die Gesamtheit der die Kurve C einschließenden Kreise wird wieder in die Gesamtheit der von der Kurve C_ε eingeschlossenen resp. sie einschließenden Kreise übergeführt.

Die Mittelpunkte bleiben dabei ungeändert und die Radien werden alle um die Größe ε vermehrt, infolgedessen sind jetzt $\varrho_1 + \varepsilon$ und $\varrho_2 + \varepsilon$ die obere und untere Grenze der Radien. Es ist also sowohl die Exzentrizität, wie die Dicke der Kurve dieselbe.

§ 6.

Über die angenähert kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Sphäre.

Die bekannten Minimaleigenschaften der sphärischen Geraden, welche die Grundlagen der Schlüsse bilden, sollen hier unter Verwendung der definierten Invarianten abgeleitet werden.

Satz 3. *Es sei* ABC *ein sphärisches Dreieck* (Fig. 2), *dessen Seiten kleiner als* $\pi\cdot r$ *seien. Die Seiten* BC, AC *und* AB *seien mit* $a\cdot r$, $b\cdot r$ *und* $c\cdot r$, *die sphärische Höhe* AD, *welche gleich oder kleiner als* $\frac{\pi}{2} r$ *sei, mit* $h\cdot r$ *bezeichnet. Es gilt die Beziehung*

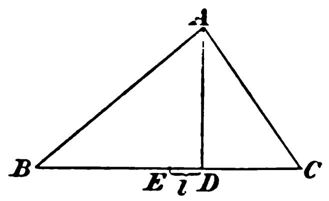


Fig. 2.

$$b + c - a \geqq 2\cdot\cos^2\frac{a}{2}\,(1-\cos h). \tag{14}$$

Beweis. Es werde $BD = a_1\cdot r = \left(\frac{a}{2}+l\right)\cdot r$ und $CD = a_2\cdot r = \left(\frac{a}{2}-l\right)\cdot r$ gesetzt. Es sei zunächst $l \leq \frac{a}{2}\cdot$ Aus

$$1 \geqq \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und

$$\frac{\alpha-\beta}{2} \geqq \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \geqq 0$$

unter der Annahme $\pi \geqq \frac{\alpha-\beta}{2} \geqq 0$ folgt

$$\alpha-\beta \geqq 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\beta - \cos\alpha.$$

Setzen wir jetzt einmal $\alpha = b$, $\beta = a_2$, und ein ander Mal $\alpha = c$, $\beta = a_1$, so folgt, da die Bedingung $\pi \geqq \frac{\alpha-\beta}{2} \geqq 0$ beide Male erfüllt ist, unter Berücksichtigung von

$$\cos c = \cos a_1 \cdot \cos h,$$
$$\cos b = \cos a_2 \quad \cos h,$$
$$b - a_2 \geqq \cos a_2 - \cos b = \cos a_2(1-\cos h)$$

und

$$c - a_1 \geqq \cos a_1 - \cos c = \cos a_1(1-\cos h);$$

durch Addition dieser letzten Ungleichungen ergibt sich infolge von $\cos a_1 + \cos a_2 = 2\cos\frac{a}{2}\cos l$

$$b + c - a \geqq 2\cos\frac{a}{2}\cos l\,(1-\cos h).$$

Da zunächst $l \leqq \frac{a}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$ sein soll, so wird $\cos l \geqq \cos\frac{a}{2}$ und also

$$b + c - a \geqq 2\cos^2\frac{a}{2}(1-\cos h).$$

Ist andrerseits $l > \frac{a}{2}$, so ist $a_1 > a$ und $\cos c = \cos a_1 \cos h < \cos a \cos h$. Es folgt also aus

$$c - a > \cos a - \cos c$$
$$c - a > \cos a\,(1-\cos h);$$

ferner ist

$$b > h > 1 - \cos h.$$

Also wird schließlich

$$b + c - a > (1+\cos a)(1-\cos h),$$

d. h. wieder

$$b + c - a > 2\cos^2\frac{a}{2}(1-\cos h), \text{ q. e. d.}$$

Anmerkung. Will man den Satz benutzen, daß das gleichschenklige sphärische Dreieck bei gegebener Höhe das Minimum des Umfangs darstellt, so schließt man leicht, daß stets

$$b + c - a \geqq 2\cos\frac{a}{2}(1-\cos h)$$

ist. Wir machen jedoch von dieser schärferen Ungleichung keinen Gebrauch.

Die Ungleichung (14) enthält nicht nur den Beweis des Satzes, daß die sphärische Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, sondern auch die genauere

Folgerung 1. *Weicht die Länge L einer sphärischen Kurve, welche B und C verbindet, nur wenig von $a \cdot r$ ab, so läßt sich ein von Parallelen zu BC gebildeter Streifen von der Breite $2h \cdot r$ abgrenzen, in dessen Innern die Kurve liegt, d. h. sie weicht selbst nur wenig von einer sphärischen Geraden ab.*

Denn es sei A derjenige Punkt der Kurve, welcher die absolut größte Entfernung $h \cdot r$ von BC hat. Die Kurve liegt dann offenbar ganz innerhalb eines Parallelstreifens, dessen Grenzen zu beiden Seiten von BC um das Stück $h \cdot r$ entfernt ist. Durch Vergleich der Länge L mit der Seitensumme $AB + AC$ ergibt sich

$$(15)\qquad \frac{L}{r} - a \geqq b + c - a \geqq 2 \cos^2 \frac{a}{2}(1 - \cos h) = 4 \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{h}{2}.$$

Sobald also $\frac{L}{r} - a$ klein ist, sinkt auch h unter eine entsprechende Grenze.

§ 7.

Über die angenähert kürzeste einfach geschlossene Linie, welche zwei Gegenpunkte der Sphäre enthält.

Wir beweisen jetzt der Reihe nach die folgenden Sätze:

Satz 4. *Es sei C_1 eine sphärische Kurve von der Länge L_1, welche zwei Pole der Kugel P und P' verbindet. Ferner sei A einer der Punkte, in denen C_1 den Äquator passiert. Es sei $e \cdot r$ die größte seitliche Abweichung der Kurve C_1 von dem Meridian PAP' aus gerechnet, so ist*

$$(16)\qquad \frac{L_1}{r} - \pi \geqq 1 - \cos e;$$

oder: weicht die Länge einer Kurve, welche zwei Pole der Kugel verbindet, nur wenig von $\pi \cdot r$ ab, so ist die Kurve annähernd ein größter Halbkreis. (Fig. 3.)

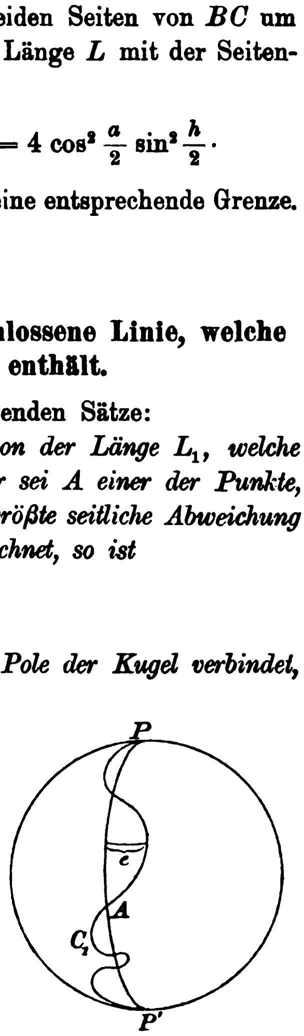


Fig. 3.

Beweis. Es seien $e_1 \cdot r$ und $e_2 \cdot r$ zu beiden Seiten des Äquators die größten Breitenabweichungen der Kurve C_1 vom Meridian PAP'. Es ist dann gemäß der bewiesenen Ungleichung

$$\frac{L_1}{r} - \pi \geqq 2 \cos^2 \frac{\pi}{4}\left(1 - \cos e_1\right) + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4}\left(1 - \cos e_2\right),$$

d. h.

$$\frac{L_1}{r} - \pi \geqq 1 - \cos e,$$

wo e den größeren der beiden Werte e_1 und e_2 bedeutet.

Ebenso beweist man den

Satz 5. *Es sei $\bar{C}$ eine sphärische Kurve der Länge $\bar{L}$, welche einfach geschlossen ist und die Pole P und P' enthält. Die Kurve zerfällt in zwei Teile $C_1 = PAP'$ und $C_2 = PBP'$, von denen jeder wenigstens in einem Punkte A resp. B den Äquator passiert. Für C_1 und C_2 seien, wie vorher die größten Breitenabweichungen bestimmt. Ist e das absolute Maximum derselben, so ist*

$$\frac{\bar{L}}{r} - 2\pi \geqq 1 - \cos e; \tag{17}$$

oder: Besitzt eine geschlossene Kurve auf der Kugeloberfläche, welche zwei Gegenpunkte enthält, annähernd die Länge 2π, so ist sie annähernd ein sphärisches Zweieck.

Wir haben die Kurven C_1 und C_2 in zwei Streifen von der Breite $2e$ eingeschlossen und es bilden diese ein *Kreuzband* K, das für die folgenden Betrachtungen die Kurve C ersetzen soll. Um diese Beziehung noch enger zu gestalten, fassen wir das *Zweieck* Z ins Auge, welches von den Halbmeridianen PAP' und PBP' gebildet wird. Wir schreiben aber jetzt vor, daß die Punkte A und B, was stets möglich ist, so gewählt seien, daß weder die geschlossene Kurve $PAP'C_1$ noch auch $PBP'C_2$ die außerhalb der Streifen gelegenen Kalottenpaare trennt. *Das Zweieck Z teilt dann außerhalb des Kreuzbandes K die Kugeloberfläche genau so, wie $\bar{C}$.* Wenn K nicht die ganze Kugel bedeckt, seien $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$ (Fig. 4) die übrigen Teile der Oberfläche. Es liege dann etwa V_1 von V_2, V_3, V_4 durch Z getrennt. Wir bezeichnen den konkaven Winkel von Z, innerhalb dessen V_1 liegt, mit $(1 - 2\lambda)\pi$. Wenn die Bedingung des Satzes 5 erfüllt ist und wenn außerdem λ eine kleine Größe ist, so ist die Kurve $\bar{C}$ offenbar angenähert ein größter Kreis.

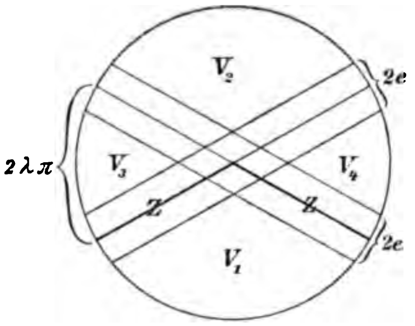


Fig. 4.

Wir bringen dies zum Ausdruck, indem wir die natürliche Breite von $\bar{C}$ einführen und in Beziehung zu λ und e bringen. Wird nämlich die natürliche Breite $D \cdot r$ des Kreuzbandes K so gemessen, daß die Spannkreise in V_1 und V_2 angenommen werden, so ist offenbar

$$D = 2\lambda\pi + 2e;$$

dasselbe gelte, wenn $V_1 = V_2 = 0$ ist. In jedem Falle ist aber

$$D \geqq d,$$

wo $d \cdot r$ die natürliche Breite von $\bar{C}$ bedeutet. Also ist

$$2\lambda\pi + 2e \geqq d; \tag{18}$$

in Worten: *Weicht eine einfach geschlossene sphärische Kurve $\bar{C}$, welche zwei Gegenpunkte enthält, nur wenig von einem Zweieck Z ab, dessen Winkel $(1 - 2\lambda)\pi$ nahezu gleich 2π ist, so ist die Breite der Kurve $\bar{C}$ gering.*

§ 8.

Über die angenähert kürzeste einfach geschlossene Linie, welche die Kugeloberfläche hälftet.

Es sei jetzt $\bar{C}$ eine Kurve, welche die Kugeloberfläche hälftet. Wir wissen, daß dieselbe zwei Gegenpole P und P' enthalten muß. Falls die Kurve ein sphärisches Zweieck ist, muß sie notwendig ein größter Kreis sein. Ist also unter Anwendung der bisherigen Bezeichnungen $e = 0$, so ist auch $\lambda = 0$.

Genauer gilt der folgende

Satz 6. *Es ist*

$$2(1 - \cos e) \geqq \lambda, \tag{19}$$

oder

$$\frac{\bar{L}}{r} - 2\pi \geqq \frac{\lambda}{2}. \tag{20}$$

Beweis. Nach der Konstruktion des vorigen Paragraphen teilt das Zweieck Z (Fig. 4) außerhalb des Kreuzbandes K die Kugeloberfläche genau so, wie $\bar{C}$. Sind T_1 und T_2 die beiden Teile, in die $\bar{C}$ die Kugeloberfläche teilt, und gehört V_1 zu T_1, so gehören also V_2, V_3, V_4 zu T_2. Es ist T_1 gänzlich enthalten in V_1 und K und wir haben also, da $T_1 = 2\pi r^2$ ist,

$$V_1 + K \geqq 2\pi r^2. \tag{21}$$

Andrerseits liegt aber V_1 ganz im konkaven Teil des Zweiecks Z, welcher letztere den Inhalt $(1 - 2\lambda)2\pi r^2$ besitzt. Es ist also

$$(1 - 2\lambda)2\pi r^2 \geqq V_1. \tag{22}$$

Ferner ist der Inhalt des Kreuzbandes

$$K \leqq 2 \cdot 4\pi r^2(1 - \cos e). \tag{23}$$

Also ist

$$1 - 2\lambda + 4(1 - \cos e) \geqq 1, \tag{24}$$

d. h.

$$2(1 - \cos e) \geqq \lambda \text{ q. e. d.}$$

Wir fassen die bisherigen Resultate zusammen, indem wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 7. *Besitzt eine Kurve $\bar{C}$, welche die Kugeloberfläche hälftet, annähernd den Umfang $2\pi r$ eines größten Kreises, so ist sie selbst annähernd ein größter Kreis.*

Beweis. Aus (18) und (19) folgt durch Elimination von λ

$$4\pi(1-\cos e)+2e \geqq d.$$

Nun ist allgemein, für $e \geqq 0$; $e \geqq 1-\cos e$; infolgedessen ist

$$2(1+2\pi)e \geqq d. \tag{25}$$

Andrerseits ist allgemein, wenn $\alpha \geqq \beta \geqq 0$ ist, auch $1-\cos\alpha \geqq 1-\cos\beta$. Infolgedessen ist

$$1-\cos e \geqq 1-\cos\frac{d}{2(1+2\pi)}.$$

Der Vergleich mit (17) lehrt dann, daß

$$\frac{\bar{L}_1}{r}-2\pi \geqq 1-\cos\frac{d}{2(1+2\pi)} = 2\sin^2\frac{d}{4(1+2\pi)} \tag{26}$$

ist. Aus der Formel (26) folgt unmittelbar, daß d eine kleine Größe ist, sobald $\frac{\bar{L}}{r}-2\pi$ klein ist.

§ 9.

Über die einfach geschlossene sphärische oder ebene Kurve, welche angenähert den Inhalt und den Umfang eines Kreises besitzt, und die Minimaleigenschaft des sphärischen oder ebenen Kreises.

Wir beweisen jetzt den

Satz 8. *Wenn eine konvexe einfach geschlossene sphärische oder ebene Kurve C, welche an jeder Stelle eine bestimmte geodätische Krümmung besitzt, annähernd den Umfang und den Inhalt eines sphärischen resp. ebenen Kreises hat, so ist sie selbst annähernd ein Kreis.*

Beweis. Wir transformieren die Kurve C durch die Transformation T_s in die Kurve $\bar{C} = C_s$, welche die Kugeloberfläche hälftet. Es ist dann nach Formel (8) (I, § 3):

$$\left(\frac{L_s}{r}\right)^2 = \left(2\pi-\frac{J}{r^2}\right)^2+\left(\frac{L}{r}\right)^2.$$

In Verbindung mit (26) folgt hieraus

$$\left(2\pi-\frac{J}{r^2}\right)^2+\left(\frac{L}{r}\right)^2 \geqq \left(2\pi+2\sin^2\frac{d}{4(1+2\pi)}\right)^2, \tag{27}$$

oder

$$\left(2\pi-\frac{J}{r^2}\right)^2+\left(\frac{L}{r}\right)^2-(2\pi)^2 \geqq 8\pi\sin^2\frac{d}{4(1+2\pi)}. \tag{28}$$

Wenn nun die Kurve C annähernd den Umfang und Inhalt eines sphärischen Kreises hat, so ist die linke Seite von (28) klein und also ist auch d eine kleine Größe.

Wir können diesen Schluß leicht auf *ebene* Kurven übertragen.

Es sei C eine ebene Kurve, die konvex ist und eine bestimmte Krümmung an jeder Stelle besitzt. An einen Punkt 0 der Ebene derselben legen wir eine tangierende Kugel mit dem beliebigen Radius r und projizieren die Kurve C vom Mittelpunkt M_r der Kugel auf die Kugeloberfläche, wodurch sie in die Kurve C_r übergehe. Da C keine Doppeltangente hat, so besitzt auch die Kurve C_r keine sphärische Doppeltangente, d. h. C_r ist konvex. Ebenso besitzt C_r auch überall eine bestimmte Krümmung. Es gilt also für C_r die Ungleichung (28) in der Form

(29) $$\frac{L_r^2 - 4\pi J_r}{r^2} + \frac{J_r^2}{r^4} \geqq 8\pi \sin^2 \frac{d_r}{4(1+2\pi)},$$

wenn J_r und L_r Inhalt und Umfang der sphärischen Kurve C_r darstellen. Nun ist offenbar

(30) $$\lim_{r=\infty} J_r = J, \qquad \lim_{r=\infty} L_r = L,$$

und da die einbeschriebenen Kreise bei der Projektion in einbeschriebene, die umbeschriebenen in umbeschriebene übergehen

(31) $$\lim_{r=\infty} d_r \cdot r = d.$$

Also ist, wenn die beiden Seiten von (29) mit r^2 multipliziert werden und zur Grenze $r = \infty$ übergegangen wird,

(32) $$L^2 - 4\pi J \geqq \frac{\pi d^2}{2\cdot(1+2\pi)^2}.$$

Die Formeln (28) und (32), deren Geltungsbereich wir sogleich auf beliebige Kurven übertragen werden, stellen das Ergebnis der bisherigen Entwicklung dar.

Wenn wir die Herleitung derselben noch einmal überblicken, so sehen wir, daß dieselben nur durch Transformation aus der fundamentalen Ungleichung hergeleitet sind, welche besagt, daß im sphärischen Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte. Was den Zahlfaktor auf der rechten Seite von (28) und (32) angeht, so ist derselbe keineswegs das erreichbare Maximum. Es ist an sich interessant, aber für die jetzige Betrachtung überflüssig, die Ungleichung noch weiter zu verschärfen.

Erweiterung des Geltungsbereiches des Satzes 8.

1. Wenn C eine *beliebige konvexe* Kurve ist, so gibt es stets eine unendliche Schar konvexer Kurven C_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$, welche überall

geodätische Krümmung besitzen, mit den Längen L_ν und den Inhalten J_ν, welche die Kurve C beliebig approximieren, so daß $J = \lim\limits_{\nu=\infty} J_\nu$ und $L = \lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu$ ist. Insbesondere wird ein im Innern von C gelegener Kreis für hinreichend großes ν im Innern sämtlicher C_ν liegen und ebenso wird es sich mit den im Äußern gelegenen Kreisen verhalten. Hieraus geht hervor, daß auch $d = \lim\limits_{\nu=\infty} d_\nu$ ist, wo d_ν durch die natürliche Breite von C_ν gegeben ist.

Die Ungleichung (28) für C_ν wird daher für $\nu = \infty$

$$(33)\qquad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geqq 8\pi \sin^2 \frac{d}{4(1+2\pi)}.$$

2. Es sei ferner C_1 eine *beliebige ebene* einfach geschlossene Kurve, welche einen Inhalt J_1 und einen Umfang L_1 besitzt. Es läßt sich dann, wie bekannt, C_1 zu einer konvexen Kurve C abrunden, welche größeren Inhalt J und kleineren Umfang L besitzt. Bei entsprechender Bezeichnung ist dann

$$(34)\qquad L_1^2 - 4\pi J_1 \geqq L^2 - 4\pi J \geqq \frac{\pi d^2}{2(1+2\pi)^2},$$

wo das erste Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn C_1 bereits konvex ist. Durch die letzten Relationen ist nun der von uns behauptete Satz für alle *ebenen* Kurven bewiesen, für welche er überhaupt ausgesprochen werden kann.

3. Für beliebige sphärische Kurven läßt sich die analoge Betrachtung durchführen, *wenn dieselben ganz in einer Halbkugel enthalten sind.* Es gilt dann

$$(35)\ \left(2\pi - \frac{J_1}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L_1}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geqq \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geqq 8\pi \sin^2 \frac{d}{4(1+2\pi)},$$

wo das erste Gleichheitszeichen wieder nur gilt, wenn C_1 bereits konvex ist, woraus dann in gleicher Weise der behauptete Satz hervorgeht.

A new system of simple groups.

By

Leonard Eugene Dickson of Chicago.

Introduction.

One of the five isolated simple continuous groups not occurring in Lie's four systems is the group of 14 parameters studied by Killing, Cartan, and Engel. This group is a special case of a linear group on 7 variables with coefficients in an arbitrary field or domain of rationality. The structure of the latter has been determined*) by the writer for fields not having modulus 2. The problem for modulus 2, which requires a different analysis, is solved in the present paper. For $q > 1$, we obtain a simple group of order $2^{6q}(2^{6q}-1)(2^{2q}-1)$. For $q = 1$, the group has a simple subgroup of index 2 and order 6048. The latter is shown to be holoedrically isomorphic with the simple group**) of all ternary hyperorthogonal substitutions of determinant unity in the Galois Field of order 3^2. The generational relations of the isomorphic abstract group are determined and a transitive representation on 36 letters exhibited.

For $q = 1$, the group of order 12096 is shown to be simply isomorphic with a subgroup of index 120 of the senary Abelian group modulus 2, of order $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. The latter is known***) to be simply isomorphic with the group of the equation for the 28 bitangents to a quartic curve without double points. It therefore has resolvents of degrees $63 = 2^6 - 1$ and 120, the latter not hitherto noticed.

Definition of the group G_q.

Consider the linear homogeneous transformations S on 7 variables with coefficients in the Galois Field of order 2^q which leave invariant

$$\xi_0^2 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3. \tag{1}$$

---

*) *Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 2, 1901, pp. 363—394.

**) *Annalen*, Bd. 52, pp. 561—581.

***) Jordan, Traité, pp. 229—242; a simpler proof by the writer, *Transactions*, vol. 3, pp. 377—382.

We study the group G_q of those of the transformations S which, when operating cogrediently upon the two sets of variables

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \xi_3,\ \eta_3;\qquad \bar\xi_0,\ \bar\xi_1,\ \bar\eta_1,\ \bar\xi_2,\ \bar\eta_2,\ \bar\xi_3,\ \bar\eta_3,$$

leave invariant the system of 6 equations

$$(2)\qquad X_l + Y_{mn} = 0,\qquad Y_l + X_{mn} = 0,$$

where l, m, n form any cyclic permutation of 1, 2, 3, and

$$X_i = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_i \\ \bar\xi_0 & \bar\xi_i \end{vmatrix},\quad Y_i = \begin{vmatrix} \xi_0 & \eta_i \\ \bar\xi_0 & \bar\eta_i \end{vmatrix},\quad X_{ij} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \bar\xi_i & \bar\xi_j \end{vmatrix},\quad Y_{ij} = \begin{vmatrix} \eta_i & \eta_j \\ \bar\eta_i & \bar\eta_j \end{vmatrix},\quad Z_{ij} = \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_j \\ \bar\xi_i & \bar\eta_j \end{vmatrix}.$$

A very simple discussion*) shows that, for modulus 2, a transformation S which leaves (1) absolutely invariant must have the form

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_i' = \sum_{j=1}^{3} (\alpha_{ij}\xi_j + \gamma_{ij}\eta_j), \qquad \eta_i' = \sum_{j=1}^{3} (\beta_{ij}\xi_j + \delta_{ij}\eta_j) \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \xi_0' = \xi_0 + \sum_{j=1}^{3} (\alpha_{0j}\xi_j + \gamma_{0j}\eta_j), \end{cases}$$

where

$$(4)\quad \alpha_{0j}^2 = \alpha_{1j}\beta_{1j} + \alpha_{2j}\beta_{2j} + \alpha_{3j}\beta_{3j},\qquad \gamma_{0j}^2 = \gamma_{1j}\delta_{1j} + \gamma_{2j}\delta_{2j} + \gamma_{3j}\delta_{3j},$$

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{3} (\alpha_{ij}\beta_{ik} + \alpha_{ik}\beta_{ij}) = 0,\qquad \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{ij}\delta_{ik} + \gamma_{ik}\delta_{ij}) = 0$$

$$(j, k = 1,2,3;\ j \neq k).$$

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{3} (\alpha_{ij}\delta_{ik} + \beta_{ij}\gamma_{ik}) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{3} (\alpha_{ij}\delta_{ij} + \beta_{ij}\gamma_{ij}) = 1$$

For modulus 2, (5) and (6) are precicely the conditions that the partial transformation (3) on ξ_i, η_i $(i = 1, 2, 3)$ shall leave absolutely invariant**) $Z_{11} + Z_{22} + Z_{33}$, so that it belongs to the senary special Abelian group. *Hence G_q is simply isomorphic with a subgroup of the senary special Abelian group in the $GF[2^q]$.*

The conditions obtained in *Transactions*, p. 385, for the invariance of equations (2) now simplify considerably, since we have $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\alpha_{00} = 1$. We obtain

$$(7)\qquad \alpha_{li} = \begin{vmatrix} \gamma_{0j} & \gamma_{0k} \\ \gamma_{lj} & \gamma_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{vmatrix},\qquad \gamma_{li} = \begin{vmatrix} \alpha_{0j} & \alpha_{0k} \\ \alpha_{lj} & \alpha_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{mj} & \beta_{mk} \\ \beta_{nj} & \beta_{nk} \end{vmatrix},$$

$$(8)\qquad \beta_{li} = \begin{vmatrix} \gamma_{0j} & \gamma_{0k} \\ \delta_{lj} & \delta_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{mj} & \gamma_{mk} \\ \gamma_{nj} & \gamma_{nk} \end{vmatrix},\qquad \delta_{li} = \begin{vmatrix} \alpha_{0j} & \alpha_{0k} \\ \beta_{lj} & \beta_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{mj} & \alpha_{mk} \\ \alpha_{nj} & \alpha_{nk} \end{vmatrix},$$

*) Dickson, *Linear Groups* (Leipzig, 1901), p. 200; *American Journal*, vol. 21, p. 244.

**) The equation $Z_{11} + Z_{22} + Z_{33} = 0$ is a consequence of (2), *Transactions*, p. 384.

$$(9)\qquad C_{11} = C_{22} = C_{33},\ C_{rs} = 0;\ d_{11} = d_{22} = d_{33},\ d_{rs} = 0$$
$$(r, s = 1, 2, 3;\ r \neq s),$$

where l, m, n and i, j, k from any cyclic permutation of 1, 2, 3, and

$$C_{rs} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{0r} & \gamma_{0s} \\ \alpha_{lr} & \gamma_{ls} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{mr} & \delta_{ms} \\ \beta_{nr} & \delta_{ns} \end{vmatrix},\quad d_{rs} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{0r} & \gamma_{0s} \\ \beta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{mr} & \gamma_{ms} \\ \alpha_{nr} & \gamma_{ns} \end{vmatrix}.$$

We may readily express all the coefficients in terms of the 18 γ_{ij}, δ_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$, using $(7)_1$, $(8)_1$, and (4). The expressions for the α_{0j}^2 are initially very long, but simplify*) greatly. Thus

$$(10)\quad \alpha_{02}^2 = \begin{vmatrix} \delta_{23} & \delta_{21} \\ \delta_{33} & \delta_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{23} & \gamma_{21} \\ \gamma_{33} & \gamma_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{33} & \delta_{31} \\ \delta_{13} & \delta_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{33} & \gamma_{31} \\ \gamma_{13} & \gamma_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{13} & \delta_{11} \\ \delta_{23} & \delta_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{13} & \gamma_{11} \\ \gamma_{23} & \gamma_{21} \end{vmatrix},$$

the expressions for α_{03}^2, α_{01}^2 following by cyclic permutation. To avoid loss of symmetry, we will, however, retain all the α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij}.

Generators and order of G_q.

Theorem: *The group G_q is generated by*

$$M = (\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)(\xi_3\eta_3),$$
$$T_{i,\tau}T_{j,\tau^{-1}} : \xi_i' = \tau\xi_i,\ \eta_i' = \tau^{-1}\eta_i,\ \xi_j' = \tau^{-1}\xi_j,\ \eta_j' = \tau\eta_i,$$
$$Q_{i,j,\lambda} : \xi_i' = \xi_i + \lambda\xi_j,\ \eta_j' = \eta_j - \lambda\eta_i,$$
$$X_{i,\lambda} : \xi_0' = \xi_0 - \lambda\eta_i,\ \xi_i' = \xi_i - \lambda^2\eta_i,\ \eta_j' = \eta_j + \lambda\xi_k,\ \eta_k' = \eta_k - \lambda\xi_j,$$

for i, j, k any permutation of 1, 2, 3.

These transformations are seen to leave invariant (1) and the system (2), modulo 2. From them we obtain

$$(11)\qquad Q_{j,i,1}\,Q_{i,j,1}\,Q_{j,i,1} \equiv P_{ij} = (\xi_i\xi_j)(\eta_i\eta_j),$$
$$(12)\quad MX_{i,\lambda}M \equiv Y_{i,\lambda} : \xi_0' = \xi_0 - \lambda\xi_i,\ \eta_i' = \eta_i - \lambda^2\xi_i,\ \xi_j' = \xi_j + \lambda\eta_k,\ \xi_k' = \xi_k - \lambda\eta_j.$$

Let S be any given transformation (3) of G_q. We show that there exists a transformation K derived from the preceding, such that KS is the identity. We may assume that $\alpha_{11} \neq 0$. For, if $\alpha_{1i} \neq 0$, $P_{i1}S$ has $\alpha_{11} \neq 0$; if $\gamma_{1i} \neq 0$, MS has $\alpha_{1i} \neq 0$. Then $S_1 = Q_{1,3,\alpha_{13}}Y_{2,\gamma_{13}}T_{1,\alpha_{11}^{-1}}T_{2,\alpha_{11}}S$ replaces ξ_1 by a function of the form $\xi_1 + \gamma_{11}\eta_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \gamma_{12}\eta_2$. Then $S_2 = Q_{1,2,\alpha_{12}}S_1$ replaces ξ_1 by a function of the form $\xi_1 + \gamma_{11}\eta_1 + \gamma_{12}\eta_2$. If $\gamma_{11} \neq 0$, $X_{1,\gamma_{11}^{1/2}}Q_{2,1,x}S_2$, where $\gamma_{12} - x\gamma_{11} = 0$, leaves ξ_1 unaltered. If $\gamma_{11} = 0$, $Y_{3,\gamma_{12}}S_2$ leaves ξ_1 unaltered.

---

*) To α_{02}^2, given by $(4)_1$, we apply $(7)_1$ and $(8)_1$. Expanding, we obtain 48 terms, including the 12 terms of (10). The coefficients of γ_{01} and γ_{03} are $\equiv 0$ (mod. 2), while that of $\gamma_{01}\gamma_{03}$ is zero by $(5)_2$ for $j = 1$, $k = 3$. The remaining terms are

$$\gamma_{01}^2(\gamma_{12}\delta_{12} + \gamma_{22}\delta_{22} + \gamma_{32}\delta_{32}) + \gamma_{03}^2(\gamma_{11}\delta_{11} + \gamma_{21}\delta_{21} + \gamma_{31}\delta_{31}) = \gamma_{01}^2\gamma_{03}^2 + \gamma_{03}^2\gamma_{01}^2 \equiv 0.$$

Consider therefore a transformation S' which leaves ξ_1 unaltered. Then $\delta_{11}=1$ by $(6)_2$. Applying to S' in succession the left-hand multipliers $Q_{3,1,\delta_{12}}$, $X_{2,\beta_{12}}$, $Q_{2,1,\delta_{12}}$, we obtain a transformation S'' which replaces ξ_1 by ξ_1, and η_1 by $\beta_{11}\xi_1+\eta_1+\beta_{12}\xi_2$. Then

$$\Sigma \equiv X_{3,\beta_{12}} Q_{3,1,\beta_{11}^{1/2}\beta_{12}} Y_{1,\beta_{11}^{1/2}} S''$$

leaves ξ_1 and η_1 unaltered.

Giving Σ the notation (3) and applying (5) and (6), we have

$$\alpha_{11}=\delta_{11}=1,\ \ \beta_{11}=y_{11}=0,\ \ \alpha_{1j}=\alpha_{j1}=y_{1j}=y_{j1}=\beta_{1j}=\beta_{j1}=\delta_{1j}=\delta_{j1}=0$$
$$(j=2,3).$$

Then $\alpha_{01}=y_{01}=0$ by (4). By (9), for $(l,r,s)=(2,2,1)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$, $(3,3,1)$, we get $\beta_{32}=0$, $\beta_{33}=0$, $\beta_{22}=0$, $\beta_{23}=0$, respectively. Then $\alpha_{02}=\alpha_{03}=0$ by $(4)_1$. Hence $y_{li}=0$ $(l,i=1,2,3)$ by $(7)_2$. Then $y_{02}=y_{03}=0$ by $(4)_2$. By $(8)_2$ we get

$$\delta_{32}=\alpha_{23},\ \delta_{23}=\alpha_{32},\ \delta_{33}=\alpha_{22},\ \delta_{22}=\alpha_{33}.$$

Finally, by $(7)_1$ for $l=i=1$, we get

$$\delta_{22}\delta_{33}-\delta_{23}\delta_{32}=1. \tag{13}$$

Hence Σ is the following transformation of determinant unity:

$$\begin{aligned}\eta_2'&=\delta_{22}\eta_2+\delta_{23}\eta_3,\ \ \eta_3'=\delta_{32}\eta_2+\delta_{33}\eta_3,\\ \xi_2'&=\delta_{33}\xi_2+\delta_{32}\xi_3,\ \ \xi_3'=\delta_{23}\xi_2+\delta_{22}\xi_3.\end{aligned} \tag{14}$$

If $\delta_{22}=\delta_{33}=0$, $\Sigma=T_{2,\delta_{32}^{-1}}T_{3,\delta_{32}}P_{23}$. If δ_{22} and δ_{33} are not both zero, we may take $\delta_{33}\neq 0$, transforming by P_{23} if necessary. Then

$$\Sigma=Q_{2,3,\delta_{32}\delta_{33}^{-1}}Q_{3,2,\delta_{23}\delta_{33}}T_{2,\delta_{33}}T_{3,\delta_{33}^{-1}}.$$

Corollary. *The order of G_q is $2^{6q}(2^{6q}-1)(2^{2q}-1)$.*

Simplicity of the group G_q, for $q>1$.

Suppose that G_q has a self-conjugate subgroup J which contains a transformation S, not the identity, of the form (3).

Lemma I: *If $q>1$, the group J contains a transformation which multiplies ξ by a constant and differs from the identity.*

a) Let first $y_{11}\neq 0$. From what precedes, G_q contains a transformation R which leaves ξ_1 fixed and replaces η_1 by

$$\beta_{11}\xi_1+\eta_1+\beta_{12}\xi_2+\delta_{12}\eta_2+\beta_{13}\xi_3+\delta_{13}\eta_3 \qquad (\beta_{1i},\ \delta_{1i}\ \text{arbitrary}).$$

By suitable choice of the β_{1i}, δ_{1i}, the product $P=T_{1,y_{11}^{-1}}T_{2,y_{11}}R$ will replace ξ_1 by $y_{11}^{-1}\xi_1$, and η_1 by the same function as that by which S replaces ξ_1. Hence J contains $S_1=P^{-1}SP$, which replaces ξ_1 by $y_{11}^{-1}\eta_1$. The demonstration is completed as in *Transactions*, p. 389.

b) For $y_{11}=0$, but α_{12} and α_{13} not both zero, we readily make $\alpha_{12}=1$. The transform of S by $Y_{1,y_{13}}Q_{2,3,\alpha_{13}}$ replaces ξ_1 by $\alpha_{11}\xi_1+\xi_2+y_{12}\eta_2$. We make $\alpha_{11}=0$ by transforming by $Q_{2,1,\alpha_{11}}$. Transforming by $X_{2,y_{12}^{1/2}}$, we obtain in J a transformation S_1 which replaces ξ_1 by ξ_2. Then J contains

$$S_1^{-1}\cdot T_{2,\lambda}T_{3,\lambda^{-1}}S_1T_{2,\lambda^{-1}}T_{3,\lambda} \qquad (\lambda \neq 0, 1),$$

which replaces ξ_1 by $\lambda\xi_1$.

c) For $y_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=0$, either S replaces ξ_1 by $\alpha_{11}\xi_1$ or is conjugate with S' which replaces ξ_1 by $\alpha_{11}\xi_1+\eta_2+y_{13}\eta_3$. Then $Q_{3,2,y_{13}}X_{3,\alpha_{11}}$ transforms S' into S_2 which replaces ξ_1 by η_2. Hence J contains

$$S_2^{-1}Q_{3,1,1}^{-1}S_2Q_{3,1,1}$$

which leaves ξ_1 unaltered and is not the identity.

Lemma II: *If $q>1$, the group J contains a transformation which leaves ξ_1 and η_1 unaltered and differs from the identity.*

By Lemma I, J contains a transformation $S\neq 1$ which replaces ξ_1 by $\alpha\xi_1$, and η_1 by $f=\Sigma(\beta_{1j}\xi_j+\delta_{1j}\eta_j)$, where $\delta_{11}=\alpha^{-1}$ by $(6)_2$. We may assume that f has one of the three forms

$$\beta_{11}\xi_1+\alpha^{-1}\eta_1,\quad \beta_{11}\xi_1+\alpha^{-1}\eta_1+\eta_2,\quad \beta_{11}\xi_1+\alpha^{-1}\eta_1+\xi_2+\delta_{12}\eta_2.$$

For if β_{12} and β_{13} are not both zero, we may take $\beta_{12}\neq 0$, transforming by P_{23} if necessary. To make $\beta_{12}=1$, we transform by $T_{2,\lambda}T_{3,\lambda^{-1}}$. Then transforming by $Q_{2,3,\beta_{13}}Y_{1,\delta_{13}}$, we obtain

$$\xi_1'=\alpha\xi_1,\ \eta_1'=\beta_{11}'\xi_1+\alpha^{-1}\eta_1+\xi_2+\delta_{12}'\eta_2.$$

Next, if $\beta_{12}=\beta_{13}=0$, while δ_{12} and δ_{13} are not both zero, we may set $\delta_{12}=1$, $\delta_{13}=0$.

a) Let first $f=\beta_{11}\xi_1+\alpha^{-1}\eta_1$. If $\alpha\neq 1$, the transform S' of S by

$$Y_{1,\lambda},\ \beta_{11}+\lambda^2(\alpha-\alpha^{-1})=0,$$

replaces ξ_1 by $\alpha\xi_1$, η_1 by $\alpha^{-1}\eta_1$. Hence $S'=T_{1,\alpha}T_{2,\alpha^{-1}}S_1$, where S_1 leaves ξ_1 and η_1 unaltered, and hence is of the form (14). If S' is not commutative with E, where E is one of the two transformations P_{23}, $Q_{2,3,1}$, J contains $S'^{-1}E^{-1}S'E$, which leaves ξ_1 and η_1 fixed, without reducing to the identity. If S' is commutative with both P_{23} and $Q_{2,3,1}$, then $\delta_{33}=\alpha\delta_{22}$, $\delta_{23}=\alpha\delta_{32}=0$. Then $\alpha\delta_{22}^2=1$ by (13). Hence $S'=T_{1,\delta^{-2}}T_{2,\delta}T_{3,\delta}$, $\delta\neq 1$. If $\delta^3\neq 1$, $S'^{-1}P_{12}^{-1}S'P_{12}$ leaves ξ_3 and η_3 unaltered and replaces ξ_1 by $\delta^3\xi_1+\xi_1$. If $\delta^3=1$, $S'^{-1}Y_{1,\lambda}^{-1}S'Y_{1,\lambda}=Y_{1,\tau}$, where $\tau\equiv\lambda(1+\delta^2)$ may be made unity. Hence J contains every $Y_{i,1}$ and every $X_{i,1}$ and therefore $(X_{3,1}Y_{2,1})^2=Q_{3,2,1}$, which leaves ξ_1 and η_1 unaltered. If $\alpha=1$, the lemma is proved if $\beta_{11}=0$. For $\alpha=1$, $\beta_{11}\neq 0$, we transform by $T_{1,\tau}T_{2,\tau^{-1}}$ and make $\beta_{11}=1$. Then $S=Y_{1,1}S_2$, where S_2 is of the form (14). Now Y_{11} is commutative with P_{23} and $Q_{2,3,1}$.

If S_2 is not commutative with both, the lemma follows. In the contrary case, $\delta_{32} = \delta_{23} = 0$, $\delta_{22} = \delta_{33}$, whence $\delta_{22}\delta_{33} = 1$ by (13). Then

$$S = Y_{1,1}T_{2,\delta^{-1}}T_{3,\delta}.$$

Its transform by $T_{1,\mu^{-1}}T_{2,\mu}$ is $S'' = Y_{1,\mu}T_{2,\delta^{-1}}T_{3,\delta}$. Hence J contains $S''S^{-1} = Y_{1,\mu+1}$. It is transformed into $Y_{1,\tau(\mu+1)}$ by $T_{1,\tau^{-1}}T_{2,\tau}$. Hence J contains $Y_{1,1}$, so that the lemma follows as above.

b) Let next $f = \beta_{11}\xi_1 + \alpha^{-1}\eta_1 + \eta_2$. If $\alpha \neq 1$, we make $\beta_{11} = 0$ as in a). Then $S = T_{1,\alpha}T_{3,\alpha^{-1}}Q_{2,1,1}K$, where K is of the form (14). Then $S^{-1}Q_{2,3,1}^{-1}SQ_{2,3,1}$ leaves ξ_1 and η_1 unaltered. If it is the identity, $\delta_{23} = 0$, $\delta_{22} = \alpha\delta_{33}$. Let $\delta_{33} = \delta$. Then $\alpha = \delta^{-2}$ by (13). Hence

$$S = T_{1,\delta^{-2}}T_{3,\delta^2}Q_{2,1,1}T_{2,\delta}T_{3,\delta^{-1}} = T_{1\delta^{-2}}T_{2,\delta}T_{3,\delta}Q_{2,1,\delta}.$$

Then J contains $S^{-1}(T_{1,\tau^{-1}}T_{3,\tau})^{-1}ST_{1,\tau^{-1}}T_{3,\tau} = Q_{2,1,\delta(\tau+1)}$. Its transform by P_{13} leaves ξ_1 and η_1 unaltered. If $\alpha = 1$, we transform by $T_{1,\mu}T_{3,\mu^{-1}}$ and make $\beta_{11} = 1$ or 0. Then $S = Y_{1,\beta}Q_{2,1,1}K$, K of the form (14) and $\beta = 0$ or 1. Then $S^{-1}Q_{2,3,1}^{-1}SQ_{2,3,1}$ leaves ξ_1 and η_1 unaltered. If it is the identity, $\delta_{23} = 0$, $\delta_{33} = \delta_{22}$ in K, whence $\delta_{22} = 1$ by (13). Then $K = Q_{2,3,\delta}$, $\delta \equiv \delta_{32}$. Then $P_{23}M$ transforms S into $X_{1,\beta}Q_{1,3,1}Q_{2,3,\delta}$. Hence J contains $X_{1,\beta}Q_{1,3,1}Q_{2,1,1}Y_{1,\beta}$. According as $\beta = 0$ or 1, its square or cube is $Q_{2,3,1}$.

c) The third case may be treated by the same method.

For $q > 1$ the group J therefore contains a transformation K which alters neither ξ_1 nor η_1 and differs from the identity. Hence K is of the form (14). But the transformations (14) evidently form a group holoedrically isomorphic with the simple binary group in the $GF[2^q]$, $q > 1$. Hence J contains every transformation (14) and therefore every $Q_{i,j,\tau}$, $P_{i,j}$, $T_{i,\tau}T_{j,\tau^{-1}}$, and

$$X_{i,\lambda}^{-1}(T_{i,\tau}T_{j,\tau^{-1}})^{-1}X_{i,\lambda}(T_{i,\tau}T_{j,\tau^{-1}}) \equiv X_{i,\sigma}, \qquad \sigma = \lambda(\tau - 1).$$

Since $q > 1$, we may take $\tau \neq 0, 1$ and choose λ to make σ assume any value in the field. Hence $J \equiv G_q$, which is therefore simple.

Factors of composition of G_1.

For $q = 1$, an analysis analogous to the preceding leads to the result that a self conjugate subgroup J of G_1 must contain the $P_{i,j}$, $Q_{i,j,1}$ and the products two at a time of the transformations $X_{i,1}$, $Y_{i,1}$, M, each of period 2; also that the order of J is either equal to or one-half of the order 12096 of G_1. Such a troublesome alternative has presented itself elsewhere in the theory of linear groups.*) The question is here decided by means of a rectangular table of the transformations of J.

*) Compare the discriminanting invariant, *Linear Groups*, § 205, p. 206.

Independent of what precedes, we make a direct study of the group generated by P_{12} and MX_{11}. It contains

$$P_{23} = (MX_{11})^3, \quad P_{13} = P_{23}P_{12}P_{23}, \quad P_{1i}MX_{11}P_{1i} = MX_{i1} = Y_{i1}M,$$
$$X_{j1}X_{i1} = (MX_{j1})^{-1}(MX_{i1}), \quad Y_{j1}X_{j1}, \quad Q_{3,2,1} = (X_{31}Y_{21})^2.$$

Hence it is identical with the group J just mentioned. Since the group Γ of order 168 of all ternary linear transformations modulo 2 is generated by binary transformations, and since J contains every P_{ij} and $Q_{i,j,1}$, it follows that J contains a senary group simply isomorphic with Γ, the correspondence of operators being obtained by taking the ternary partial transformation on ξ_1, ξ_2, ξ_3.

In view of a later application, we study the abstract groups H and G simply isomorphic with J and Γ, respectively. By *Linear Groups*, p. 303, G is generated by two operators S and T such that

$$(15) \qquad T^2 = 1, \quad S^7 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = 1,$$

while the linear group Γ is obtained by setting

$$(16) \qquad T = Q_{3,2,1}, \quad S = P_{12}Q_{3,2,1}P_{23}Q_{1,2,1}.$$

The abstract group H is generated by P_{12} and X subject to the generational relations (19), (20), (21), in which occur our old symbols with a new meaning defined as follows:

$$(17) \qquad \begin{gathered} P_{23} = X^3, \quad P_{13} = P_{23}P_{12}P_{23}, \quad Q_{2,1,1} = (XP_{12})^4, \\ Q_{i,j,1} = P_{1j}P_{2i}Q_{2,1,1}P_{2i}P_{1j}. \end{gathered}$$

Eliminating T and S from (15) and (16) we obtain four relations (15′). From these must follow every true relation holding for the linear transformations P_{ij}, $Q_{i,j,1}$, in particular (11) and

$$(18) \begin{cases} P_{ij}^2 = 1, \quad Q_{i,j,1}^2 = 1, \quad Q_{i,j,1}Q_{i,k,1} = Q_{i,k,1}Q_{i,j,1}, \quad Q_{j,i,1}Q_{k,i,1} = Q_{k,i,1}Q_{j,i,1}, \\ Q_{i,j,1}Q_{k,i,1}Q_{i,j,1} = Q_{k,j,1}Q_{k,i,1} \quad (i, j, k \text{ a permutation of } 1, 2, 3). \end{cases}$$

Between the linear transformations P_{ij}, $Q_{i,j,1}$ and $X = X_{11}$ hold the relations (17) and the following:

$$(19) \qquad (XP_{12}X^{-1}P_{12})^2 = Q_{3,2,1}Q_{3,1,1}, \quad XQ_{2,3,1} = Q_{3,2,2}X,$$
$$(20) \qquad XQ_{3,1,1}P_{12}XP_{12}XP_{13}X^{-1} = P_{13}Q_{2,1,1}Q_{3,1,1}$$
$$(21) \qquad X^{-1}P_{13}X^{-1}P_{12}X^{-1}Q_{1,3,1}X = P_{23}P_{13}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}.$$

From (17) and $(19)_2$ follow readily

$$(22) \qquad \begin{gathered} XQ_{1,2,1} = Q_{2,1,1}X, \; XQ_{1,3,1} = Q_{3,1,1}X, \; XQ_{3,2,1,} = Q_{2,3,1}X, \\ Q_{1,2,1} = (P_{12}X)^4. \end{gathered}$$

We proceed to show that the order ω of H is 6048. We exhibit 36×168 operators (not initially known to be distinct) in a rectangular table $R_1, \cdots, R_{36}$ with the operators of G_{168} in the first row. By showing that these rows are merely permuted upon applying P_{12} and X as right-hand multipliers, and hence by applying an arbitrary operator of H as multiplier, it follows, since R_1 contains the identity, that every operator of H lies in the table, whence $\omega \gtrless 6048$. From the isomorphism of H with J, it follows that $\omega \gtreqqless 6048$.

We proceed to the computations. The rectangular table is

$$
\begin{gathered}
R_1 = G,\ R_2 = GX,\ R_3 = GXP_{12},\ R_4 = GXP_{13},\ R_5 = GXQ_{2,1,1}, \\
R_6 = GXQ_{3,1,1},\ R_7 = GX^{-1},\ R_8 = GX^{-1}P_{12},\ R_9 = GX^{-1}P_{13}, \\
R_{10} = GX^{-1}Q_{1,2,1},\ R_{11} = GX^{-1}Q_{1,3,1},\ R_{12} = GXQ_{3,1,1}P_{12}, \\
R_{13} = GX^{-1}Q_{1,3,1}P_{12},\ R_{14} = GXP_{12}X,\ R_{15} = GXP_{13}X^{-1}, \\
R_{16} = GXP_{13}X,\ R_{17} = GXP_{12}X^{-1},\ R_{18} = GX^{-1}P_{12}X, \\
R_{19} = GX^{-1}P_{13}X,\ R_{20} = GX^{-1}P_{13}X^{-1},\ R_{21} = GX^{-1}P_{12}X^{-1}, \\
R_{22} = GXP_{13}X^{-1}P_{12},\ R_{23} = GX^{-1}Q_{1,2,1}X,\ R_{24} = GX^{-1}Q_{1,3,1}X, \\
R_{25} = GX^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}X,\ R_{26} = GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{13}X^{-1}, \\
R_{27} = GXP_{13}X^{-1}P_{12}X,\ R_{28} = GX^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}XP_{12}, \\
R_{29} = GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{13}XP_{13},\ R_{30} = GX^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}XP_{12}X, \\
R_{31} = GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{13}XP_{13}X,\ R_{32} = GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{13}XP_{13}X^{-1}, \\
R_{33} = GX^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}XP_{12}X^{-1},\ R_{34} = GX^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}XP_{12}XP_{12}, \\
R_{35} = GX^{-1}Q_{1,2,1}Q_{1,3,1},\ R_{36} = GXQ_{3,1,1}Q_{2,1,1}.
\end{gathered}
$$

Applied as a right-hand multiplier, P_{12} gives rise to the permutation

$$
\begin{gathered}
(R_2R_3)(R_6R_{12})(R_7R_8)(R_{11}R_{13})(R_{14}R_{21})(R_{15}R_{22})(R_{16}R_{23}) \\
(R_{19}R_{26})(R_{20}R_{24})(R_{25}R_{28})(R_{30}R_{34})(R_{27}R_{32}),
\end{gathered}
$$

R_1, R_4, R_5, R_9, R_{10}, R_{17}, R_{18}, R_{29}, R_{31}, R_{33}, R_{25}, R_{36} *being unaltered.*

The cases not following by inspection are treated thus:

$$
\begin{aligned}
&R_4P_{12} \equiv GXP_{13}P_{12} = GXP_{23}P_{13} = GP_{23}XP_{13} = GXP_{13} \equiv R_4. \\
&R_5P_{12} \equiv GXQ_{2,1,1}P_{12} = GXQ_{1,2,1}Q_{2,1,1} = GQ_{2,1,1}XQ_{2,1,1} \equiv R_5. \\
&R_{10}P_{12} \equiv GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{12} = GX^{-1}Q_{2,1,1}Q_{1,2,1} = GQ_{1,2,1}X^{-1}Q_{1,2,1} \equiv R_{10}. \\
&R_{14}P_{12} \equiv GXP_{12}XP_{12} = GQ_{2,1,1}(XP_{12})^{-2} = GX^{-1}P_{12}X^{-1} \equiv R_{21}. \\
&R_{16}P_{12} \equiv GXP_{13}XP_{12} = GP_{13}Q_{2,1,1}X^{-1}P_{12}Q_{3,1,1}Q_{2,1,1}X, \text{ by } P_{23}(20)P_{23}. \\
&\qquad = GX^{-1}Q_{3,2,1}P_{12}Q_{2,1,1}X = GQ_{2,3,1}X^{-1}Q_{2,1,1}Q_{1,2,1}X \\
&\qquad = GQ_{2,3,1}Q_{1,2,1}X^{-1}Q_{1,2,1}X \equiv R_{23}, \text{ by } (22)_1. \\
&R_{17}P_{12} \equiv GXP_{12}X^{-1}P_{12} = GQ_{3,2,1}Q_{3,1,1}P_{12}XP_{12}X^{-1} \equiv R_{17}, \text{ by } (19)_1. \\
&R_{18}P_{12} \equiv GX^{-1}P_{12}XP_{12} = GP_{12}X^{-1}Q_{3,2,1}Q_{3,1,1}P_{12}X, \text{ by } (19)_1, \\
&\qquad = GP_{12}Q_{2,3,1}X^{-1}Q_{3,1,1}P_{12}X = GQ_{1,3,1}X^{-1}P_{12}X \equiv R_{18}.
\end{aligned}
$$

The condition for $R_{19}P_{12} = R_{26}$ is that G shall contain

$$X^{-1}P_{13}X\cdot P_{12}\cdot XP_{13}Q_{1,2,1}X = P_{23}X^{-1}P_{13}P_{12}XP_{12}XP_{13}Q_{1,2,1}X$$
$$= P_{23}X^{-1}P_{13}\cdot Q_{1,2,1}X^{-1}P_{12}X^{-1}P_{12}\cdot P_{13}Q_{1,2,1}X, \text{ by } (22)_4.$$
$$= P_{23}Q_{2,3,1}\cdot X^{-1}P_{13}X^{-1}P_{12}X^{-1}\cdot P_{13}P_{23}Q_{1,2,1}X$$
$$= P_{23}Q_{2,3,1}\cdot P_{23}P_{13}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}X^{-1}Q_{1,3,1}\cdot P_{13}Q_{1,3,1}XP_{23}, \text{ by } (21),$$
$$= Q_{3,2,1}P_{13}Q_{3,1,1,}Q_{1,2,1}X^{-1}Q_{3,1,1}XP_{23}, \text{ by } (11),$$
$$= Q_{3,2,1}P_{13}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}Q_{1,3,1}P_{23}, \text{ by } (22)_2,$$
$$= Q_{3,2,1}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}P_{23}.$$

om (21), $R_{30}P_{12} = R_{24}$. Next, $R_{27}P_{12} = R_{32}$ if G contains

$$XP_{13}X^{-1}P_{12}X\cdot P_{12}\cdot XP_{13}X^{-1}P_{13}Q_{1,2,1}X$$
$$= XP_{13}X^{-1}\cdot X^{-1}P_{12}X^{-1}P_{12}Q_{1,2,1}\cdot P_{13}X^{-1}Q_{3,2,1}P_{13}X, \text{ by } (22)_4,$$
$$= XP_{13}P_{23}XP_{12}X^{-1}Q_{2,1,1}P_{12}P_{13}Q_{2,3,1}X^{-1}P_{13}X$$
$$= XP_{13}XP_{13}\cdot X^{-1}Q_{3,1,1}P_{12}Q_{2,3,1}X^{-1}P_{13}X$$
$$= Q_{3,1,1}P_{13}X^{-1}P_{13}X^{-1}\cdot X^{-1}Q_{3,1,1}Q_{1,3,1}P_{12}X^{-1}P_{13}X$$
$$= Q_{3,1,1}P_{13}X^{-1}P_{13}XP_{23}\cdot Q_{1,3,1}P_{13}P_{12}X^{-1}P_{13}X$$
$$= Q_{3,1,1}P_{13}X^{-1}\cdot P_{13}XQ_{1,2,1}\cdot P_{13}X^{-1}P_{13}X$$
$$= Q_{3,1,1}P_{13}X^{-1}\cdot Q_{2,3,1}P_{13}X\cdot P_{13}X^{-1}P_{13}X$$
$$= Q_{3,1,1}P_{13}Q_{3,2,1}\cdot X^{-1}P_{13}XP_{13}X^{-1}P_{13}\cdot X$$
$$= Q_{3,1,1}P_{13}Q_{3,2,1}\cdot P_{13}X^{-1}Q_{2,3,1}Q_{2,1,1}\cdot X, \text{ by } P_{23}(19)P_{23}.$$
$$= Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}Q_{3,2,1}Q_{1,2,1}, \text{ by } (22)_3 \text{ and } (22)_1.$$
$${}_{19}P_{12} = GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{13}XP_{23}P_{13} = GX^{-1}Q_{1,2,1}P_{12}P_{13}XP_{13}$$
$$= R_{10}P_{12}P_{13}XP_{13} = R_{10}P_{13}XP_{13} \equiv R_{29}.$$

e condition for $R_{31}P_{12} = R_{31}$ is that G shall contain

$$X^{-1}Q_{1,2,1}P_{13}XP_{13}X\cdot P_{12}\cdot X^{-1}P_{13}X^{-1}P_{13}Q_{1,2,1}X$$
$$= X^{-1}Q_{1,2,1}\cdot Q_{2,1,1}X^{-1}P_{12}Q_{3,1,1}Q_{2,1,1}\cdot P_{13}X^{-1}P_{13}Q_{1,2,1}X, \text{ by } P_{23}(20)P_{23},$$
$$= X^{-1}Q_{2,1,1}P_{12}X^{-1}P_{23}P_{12}Q_{1,3,1}Q_{2,3,1}X^{-1}Q_{3,2,1}P_{13}X$$
$$= Q_{1,2,1}X^{-1}P_{12}X^{-1}P_{23}P_{12}Q_{1,3,1}X^{-1}P_{13}X$$
$$= Q_{1,2,1}P_{23}\cdot X^{-1}P_{13}X^{-1}P_{12}X^{-1}\cdot Q_{3,1,1}P_{13}X$$
$$= Q_{1,2,1}P_{23}\cdot P_{23}P_{13}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}X^{-1}Q_{1,3,1}\cdot Q_{3,1,1}P_{13}X, \text{ by } (21),$$
$$= Q_{1,2,1}P_{13}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}X^{-1}Q_{3,1,1} = Q_{1,2,1}Q_{3,1,1}Q_{1,2,1}, \text{ by } (22)_2.$$

he condition for $R_{33}P_{12} = R_{33}$ is that G shall contain

$$X^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}XP_{12}X^{-1}\cdot P_{12}\cdot XP_{12}X^{-1}P_{12}Q_{1,3,1}X$$
$$= X^{-1}Q_{1,3,1}P_{12}Q_{3,2,1}\cdot Q_{3,1,1}Q_{1,3,1}X, \text{ by } (19),$$
$$= X^{-1}Q_{1,3,1}Q_{3,1,1}P_{13}\cdot P_{13}Q_{3,1,1}X = X^{-1}Q_{3,1,1}P_{13}\cdot P_{12}P_{13}XQ_{1,3,1}$$
$$= Q_{1,3,1}X^{-1}P_{23}XQ_{1,3,1} = Q_{1,3,1}P_{23}Q_{1,3,1}.$$

The condition for $R_{35} P_{12} = R_{35}$ is that G shall contain

$$X^{-1} Q_{1,3,1} Q_{1,2,1} \cdot P_{12} \cdot Q_{1,2,1} Q_{1,3,1} X = X^{-1} Q_{1,3,1} Q_{2,1,1} Q_{1,3,1} X$$
$$= X^{-1} Q_{2,3,1} Q_{2,1,1} X = Q_{3,2,1} Q_{1,2,1}, \text{ by } (18)_4,\ (22)_2,\ (22)_1.$$

The condition for $R_{36} P_{12} = R_{36}$ is that G shall contain

$$X Q_{3,1,1} Q_{2,1,1} P_{12} Q_{2,1,1} Q_{3,1,1} X^{-1} = X Q_{3,1,1} Q_{1,2,1} Q_{3,1,1} X^{-1}$$
$$= X Q_{1,2,1} Q_{3,2,1} X^{-1} = Q_{2,1,1} Q_{2,3,1}.$$

Theorem: *Applied as a right-hand multiplier, X gives rise to the permutation*

$$(R_1 R_2 R_7)(R_{12} R_{22} R_{27})(R_{13} R_{25} R_{26})(R_{34} R_{36} R_{35})(R_3 R_{14} R_{15} R_4 R_{16} R_{17})$$
$$(R_5 R_{10} R_{23} R_6 R_{11} R_{24})(R_9 R_{19} R_{21} R_8 R_{18} R_{20})(R_{28} R_{30} R_{32} R_{29} R_{31} R_{33}).$$

That $R_{12} X = R_{22}$ follows from (20), $R_{36} X = R_{35}$ from $(22)_1$ and $(22)_2$.

$$R_{34} X = G X^{-1} Q_{1,3,1} (P_{12} X)^3 = G X^{-1} Q_{1,3,1} X^{-1} P_{12} Q_{1,2,1}$$
$$= G X^{-1} X^{-1} Q_{3,1,1}, P_{12} Q_{1,2,1} = G X Q_{3,1,1} Q_{2,1,1} P_{12} \equiv R_{36} P_{12} = R_{36}.$$
$$R_{14} X = G X P_{12} X^2 = G X P_{12} P_{23} X^{-1} = G P_{23} X P_{13} X^{-1} = R_{15}.$$
$$R_5 X \equiv G X Q_{2,1,1} X = G X^2 Q_{1,2,1} = G P_{23} X^{-1} Q_{1,2,1} = R_{10}.$$
$$R_{23} X \equiv G X^{-1} Q_{1,2,1} X^2 = G X^{-1} Q_{1,3,1} X^{-1} = G X^{-1} X^{-1} Q_{3,1,1}$$
$$= G P_{23} X Q_{3,1,1} = R_6.$$

The remaining cases follow by inspection. We may now state the

Theorem: *The group G_1 of order* 12096 *contains a subgroup J of index* 2, *generated by P_{12} and MX_{11}, simply isomorphic with the abstract group H generated by P_{12} and X subject to* (19), (20), (21), *with the amplification* (17), *together with* (15′), *namely* (15) *for the values* (16). *Moreover, J may be represented as a transitive substitution-group on* 36 *letters.*

The simplicity of J may be established by a direct but long analysis, as stated above. However, an indirect proof follows from the isomorphism next established.

Holoedric isomorphism of H and the simple ternary hyperorthogonal group O in the $GF[3^2]$.

Knowing that the two groups are simple, of the same order 6048, representable as transitive substitution-groups on 28 letters*), and that the periods of the operators of each are 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, those of

*) For O this is shown in *Annalen,* Bd. 55, p. 532. For H it follows since G_1 is simply isomorphic with a subgroup of the senary Abelian group A (as shown above), which is simply isomorphic with the group of the equation for the 28 bitangents to a quartic.

period 7 falling into 2 sets each of $2^5 \cdot 3^3$ conjugates*) the presumption was in favor of their isomorphism.

We proceed to determine a set of substitutions of O which satisfy all the generational relations for the group H.

Since all the substitutions of period 6 in O are conjugate (*Annalen*, Bd. 55, p. 572), we assume that

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i-1 & -i+1 \\ 0 & -i-1 & i-1 \end{pmatrix} \equiv [1, -i-1, -i+1], \\
P_{23} &= X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

where $i^2 \equiv -1 \pmod{3}$. Since $Q_{3,2,1} = P_{23}^{-1} Q_{2,3,1} P_{23}$, we set

$$
Q_{2,3,1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}, \quad Q_{3,2,1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ -\beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}.
$$

Then $(19)_2$: $X Q_{2,3,1} = Q_{3,2,1} X$ holds if and only if

$$
\beta_{13} = (i+1)\beta_{12}, \; \beta_{31} = (1-i)\beta_{21}, \; \beta_{32} = -i\beta_{23}, \; \beta_{33} = \beta_{22} + (i-1)\beta_{23}.
$$

Now a hyperorthogonal substitution (β_{ij}) is of period 2 if and only if

$$
\beta_{ij}^3 = \beta_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3).
$$

From $\beta_{32} = \beta_{23}^3$, $\beta_{32} = -i\beta_{23}$, follows $\beta_{23} = 0$ or $\pm(1+i)$. Hence

$$
Q_{2,3,1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & (1+i)\beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ (1-i)\beta_{21} & 0 & \beta_{22} \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & (1+i)\beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \pm(1+i) \\ (1-i)\beta_{21} & \pm(1-i) & \beta_{22} \pm 1 \end{pmatrix}.
$$

In the first case a hyperorthogonal condition gives $\beta_{21} = 0$, whence $\beta_{12} = 0$. Also $\beta_{22}^4 = 1$, $\beta_{22} = \beta_{22}^3$, whence $\beta_{22}^2 = 1$. The determinant being 1, $\beta_{11} = 1$. Then $Q_{2,3,1}$ of period 2 must coincide with P_{23}. Hence the first case is excluded. For the second, the hyperorthogonal conditions reduce to

$$
\beta_{11}^2 = 1, \; \beta_{11}\beta_{21} + \beta_{21}\beta_{22} \mp \beta_{21} = 0, \; \beta_{21}^4 \mp \beta_{22} + 1 = 0, \; \beta_{21}^4 + \beta_{22}^2 = -1,
$$
$$
\beta_{21}^4 - \beta_{22}^2 \pm \beta_{22} = -1, \; \beta_{21}^3 = \beta_{12}, \; \beta_{22}^3 = \beta_{22}.
$$

Hence $\beta_{22}^2 = \mp \beta_{22}$. For $\beta_{22} = 0$, the determinant equals ± 1; for $\beta_{22} = \mp 1$, the determinant equals ∓ 1. Hence the substitution $Q_{2,3,1}$ is

*) Shown for O in *Annalen*, Bd. 55, p. 572; and for H by means of theorems on A recently presented to the *American Journal*.

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & (i+1)\beta_{12} \\ \beta_{12}^3 & 0 & i+1 \\ (1-i)\beta_{12}^3 & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_{12}^4 = -1;$$

$$\text{or} \begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & (1+i)\beta_{12} \\ \beta_{12}^3 & 1 & -1-i \\ (1-i)\beta_{12}^3 & i-1 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta_{12}^4 = 1.$$

Now the hyperorthogonal substitution $\xi_2' = \xi_3$, $\xi_3' = -\xi_2$ transforms the second into W, where $\overline{W}$ (obtained from W by replacing i by $-i$) is of the first form, and transforms X into $\overline{X}$. Hence we may assume that $Q_{2,3,1}$ is of the second form, say $S_{\beta_{12}}$. Now the hyperorthogonal substitution

$$\xi_1' = \mu^{-2}\xi_1, \quad \xi_2' = \mu\xi_2, \quad \xi_3' = \mu\xi_3, \quad \mu^4 = 1$$

is commutative with X and transforms S_β into $S_{\mu\beta}$. Hence we may take $\beta = 1$. Hence we have

$$(24) \quad Q_{2,3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+i \\ 1 & 1 & -1-i \\ 1-i & i-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{3,2,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-i \\ -1 & 1 & -1-i \\ i-1 & i-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The conditions that $Q_{1,3,1} \equiv (\delta_{ij})$ shall be commutative with $Q_{2,3,1}$ reduce to

$$(25) \begin{cases} \delta_{21} = \delta_{12} + (1-i)\delta_{13} - (1+i)\delta_{31}, & \delta_{32} = \delta_{31} + i\delta_{13} - i\delta_{23}, \\ \delta_{22} = \delta_{11} + (i-1)\delta_{23} - (1+i)\delta_{31}, & \delta_{33} = \delta_{11} - \delta_{12} + (1-i)\delta_{13} + (1-i)\delta_{32}. \end{cases}$$

Since $Q_{1,3,1}^2 = 1$, $\delta_{ji} = \bar{\delta}_{ij}$. Expressing the δ_{ij} in the form $a + bi$, we get*)

$$Q_{1,3,1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} + iD_{12} & d_{13} + iD_{13} \\ d_{12} - iD_{12} & d_{22} & d_{23} + iD_{23} \\ d_{13} - iD_{13} & d_{23} - iD_{23} & d_{33} \end{pmatrix}.$$

The conditions (25) reduce to

$$D_{12} = d_{13} - D_{13}, \qquad d_{33} = d_{11} - d_{12} + d_{13} + d_{23} + D_{13} + D_{23},$$
$$d_{23} = d_{13} - D_{13} + D_{23}, \quad d_{22} = d_{11} - d_{13} - d_{23} - D_{13} - D_{23}.$$

Then

$$(26) \ Q_{1,3,1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} + i(d_{13} - D_{13}) & d_{13} + iD_{13} \\ d_{12} - i(d_{13} - D_{13}) & d_{11} + d_{13} + D_{23} & d_{13} - D_{13} + D_{23} - iD_{23} \\ d_{13} - iD_{13} & d_{13} - D_{13} + D_{23} - iD_{23} & d_{11} - d_{12} - d_{13} - D_{23} \end{pmatrix}.$$

The six hyperorthogonal conditions are

$$(27) \qquad d_{11}^2 + d_{12}^2 + (d_{13} - D_{13})^2 + d_{13}^2 + D_{13}^2 = 1,$$

$$(28) \quad d_{12}^2 + (d_{13} - D_{13})^2 + (d_{11} + d_{13} + D_{23})^2 + (d_{13} - D_{13} + D_{23})^2 + D_{23}^2 = 1,$$

*) Concerning determinants of such matrices, see *Amer. Math. Monthly,* Dec. 1908.

(29) $d_{13}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2 + (d_{13} - D_{13} + D_{23})^2 + (d_{11} - d_{12} - d_{13} - D_{23})^2 = 1,$
together with three conditions involving i which give

$$(30)\qquad (d_{13} - D_{13})(d_{13} + D_{13} - d_{11}) = 0,$$

$$(31)\qquad d_{13}^2 + d_{13}D_{23} - d_{13}D_{13} + D_{13}D_{23} - d_{11}d_{12} + d_{12}d_{13} + d_{12}D_{23} = 0,$$

$$(32)\qquad -d_{13}^2 + d_{13}D_{23} + D_{13}D_{23} + d_{12}D_{23} - d_{12}D_{13} - d_{11}d_{13} = 0,$$

$$(33)\qquad d_{13}^2 + D_{13}^2 + d_{12}D_{23} - d_{11}D_{13} + d_{13}D_{23} + D_{13}D_{23} - d_{12}D_{13} = 0,$$

$$(34)\qquad d_{11}(D_{13} - D_{23} - d_{13}) + d_{12}D_{13} - d_{12}D_{23} + d_{13}D_{13} - D_{13}^2 = 0,$$

$$(35)\qquad -d_{13}^2 + d_{13}D_{13} + d_{12}D_{13} - d_{11}D_{23} - d_{12}D_{23} = 0.$$

For $d_{13} = D_{13}$, (31), (32) or (33), (34) or (35) give respectively

$$(36)\qquad d_{12}D_{23} - d_{13}D_{23} - d_{11}d_{12} + d_{12}d_{13} = 0,$$

$$(37)\qquad d_{13}^2 + d_{13}D_{23} - d_{12}D_{23} + d_{12}d_{13} + d_{11}d_{13} = 0,\quad d_{12}d_{13} - d_{11}D_{23} - d_{12}D_{33} = 0.$$

Combining the third with the preceding two we get

$$(d_{11} + d_{13})(d_{12} + D_{23}) = 0,\quad (d_{11} + d_{13})(d_{13} + D_{23}) = 0.$$

If $d_{11} + d_{13} \neq 0$, then $d_{12} = d_{13} = -D_{23}$, and $(37)_2$ gives $D_{23}(d_{11} + D_{33}) = 0$. If also $D_{23} = 0$, (26), of determinant 1, reduces to the identity since $d_{11}^2 = 1$ by (27). But if $D_{23} \neq 0$, (26) reduces to $(24)_1$, when each element is multiplied by d_{11}. Then $d_{11}^2 = 1$ by (27), $d_{11}^3 = 1$ in view of the determinant. Hence (26) reduces to $Q_{2,3,1}$, so that also this case is excluded. Hence $d_{11} + d_{13} = 0$. Then $d_{12}^2 = 1$ by (27). Set $d_{12} = \pm 1$. Then $(37)_2$ gives

$$(d_{11} \pm 1)(D_{23} \pm 1) \equiv 1,\quad d_{11} \pm 1 \equiv D_{23} \pm 1 \pmod{3}.$$

Hence $d_{11} = D_{23}$, $d_{11} = 0$ or ± 1. In either case, the determinant of (26) equals ± 1, so that the upper signs hold. Hence

$$(38)\qquad Q_{1,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-i \\ 1 & 1 & 1+i \\ i-1 & 1-i & 0 \end{pmatrix},$$

the second being $Q_{2,3,1}V$ where V denotes the first.

For $d_{13} \neq D_{13}$, (30) gives $d_{11} = d_{13} + D_{13}$. Hence

$$D_{13} = d_{13} \pm 1,\quad d_{11} = -d_{13} \pm 1.$$

Then (27) or (28) gives $d_{12}^2 = 1$, while (29), (31)—(35) each reduces to

$$d_{12}D_{23} - d_{13}D_{23} - d_{12}d_{13} \mp d_{13} \pm D_{23} \mp \bar{a}_{12} = 0.$$

Set $D_{23} = -d_{13} + t$. Completing the square in d_{13}, we get

$$\{d_{13} - (d_{12} \pm 1 - t)\}^2 \equiv t^2 - 1 \pmod{3}.$$

Hence $t \neq 0$, $t^2 \equiv 1$, $d_{13} = d_{12} \pm 1 - t$.

Defining $Q_{1,3,1}$ by $(38)_1$, we get

$$Q_{1,2,1} = P_{23}^{-1} Q_{1,3,1} P_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_{3,1,1} = X Q_{1,3,1} X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i-1 & 1-i \\ i-1 & 1 & -i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{13} = Q_{1,3,1} Q_{3,1,1} Q_{1,3,1} = \begin{pmatrix} 1 & i-1 & i \\ -i-1 & 0 & i-1 \\ -i & -i-1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{12} = P_{23}^{-1} P_{13} P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -i \\ 1+i & 0 & i-1 \\ i & -i-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then S and T defined by (16) are seen to satisfy (15) since

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+i \\ -1-i & -1-i & 0 \\ i & -i & 1-i \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & i \\ -1+i & 1 & i \\ 0 & 1-i & -1-i \end{pmatrix},$$

$$S^4 = \begin{pmatrix} -1-i & 0 & i-1 \\ -1 & 1-i & -i \\ -i & -1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad S^6 = \begin{pmatrix} 1 & -1+i & -i \\ -1 & -1+i & i \\ 1-i & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

$$TS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^4 T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1+i \\ -1-i & 1+i & 0 \\ -i & -i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Further, $(17)_3$ or its equivalent $Q_{1,2,1} = (P_{12} X)^4$ is seen to hold. Likewise, $(19)_1$, (20) and (21). The isomorphism is therefore proved.

Chicago, November 1903.

Über den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Von

G. Kowalewski in Bonn.

Weierstraß hat den sogenannten zweiten Mittelwertsatz durch partielle Integration bewiesen, wobei er die darin auftretende monotone Funktion als differenzierbar voraussetzt. Dadurch verliert der Satz erheblich an Allgemeinheit, und man führt deshalb den Beweis gewöhnlich auf einem andern Wege, mit Hilfe einer von Abel herrührenden Umformung gewisser Summenausdrücke.*)

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man durch eine Verallgemeinerung der Formel für die partielle Integration den Weierstraßschen Beweis von der erwähnten Einschränkung befreien kann, so daß er den andern Beweisen durchaus ebenbürtig wird.

Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf den Fall endlicher Funktionen in einem endlichen Intervalle.

§ 1.

Rekapitulation einiger Definitionen und Sätze.

In dem Intervall (a, b) sei $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x. Man zerlege (a, b) durch Einschaltung von

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{p-1}$$

zwischen $x_0 = a$ und $x_p = b$ in die Teilintervalle

$$(3) \qquad (x_0, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{p-1}, x_p)$$

und bilde den Ausdruck

$$S = \sum_1^p (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

*) Einen vollkommen strengen Beweis dieser Art gab O. Hölder (Gött. gel. Anz. 1894, S. 519 ff.) und neuerdings (unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen) A. Pringsheim (Münch. Ber. 1900, S. 209—233), in dessen Arbeit man eine historische Übersicht über die verschiedenen Beweise unseres Satzes findet (S. 227—233).

wobei ξ_i dem Intervall (x_{i-1}, x_i) entnommen ist*). $S_1, S_2, S_3, \cdots$ sei eine Folge solcher Ausdrücke S, und $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \cdots$ seien die ihnen zugrunde liegenden Zerlegungen von (a, b); ferner bedeute δ_n die Maximallänge der Teilintervalle in $\mathfrak{Z}_n$.

Nach Riemann**) nennen wir $f(x)$ in (a, b) *integrierbar*, wenn jede Folge $S_1, S_2, S_3, \cdots$, welche die Eigenschaft $\lim \delta_n = 0$ hat, konvergent ist. Alle diese Folgen streben alsdann einem gemeinsamen Grenzwert zu, der mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet wird.

Folgende Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Integrierbarkeit in dem soeben definierten Sinne:

1. Die Funktion muß in (a, b) endlich sein, d. h. es muß zwei Zahlen A und B geben derart, daß in dem ganzen Intervall $A < f(x) < B$ ist.

2. Ist eine beliebige positive Größe ε vorgelegt, so muß sich die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ immer so wählen lassen, daß

$$D = \sum_1^p (x_i - x_{i-1})\,\sigma_i < \varepsilon$$

wird, wenn σ_i die Schwankung von $f(x)$ in (x_{i-1}, x_i) bedeutet.***)

Diese Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn $f(x)$ in (a, b) stetig ist. Sie sind ferner erfüllt, wenn $f(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation ist, d. h. wenn es eine Zahl†) α gibt derart, daß

$$\sum_1^p |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqq \alpha$$

ist, wie man auch die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ wählen mag.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ in (a, b) integrierbar, so gilt dasselbe von gewissen Funktionen von $f(x)$ und $g(x)$, z. B. von $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$.††)

Eine Funktion $f(x)$, die in (a, b) integrierbar ist, ist es auch in jedem Teilintervall von (a, b), und $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, $F(a) = 0$, ist in (a, b) stetig und von beschränkter Variation.

---

*) Wenn wir von Intervallen reden, sind die Grenzen stets eingeschlossen.

**) Ges. math. Werke, 2. Aufl. (1892), S. 239 ff.

***) Es gilt dann überhaupt folgendes: Ist $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots$ eine Folge von Zerlegungen und sind $D_1, D_2, \cdots$ die zugehörigen D, so ist $\lim D_n = 0$, sobald $\lim \delta_n = 0$ ist.

†) Die kleinste derartige Zahl könnte man die *Variationsschranke* von $f(x)$ in (a, b) nennen.

††) Einen allgemeinen Satz hierüber hat P. du Bois-Reymond aufgestellt. (Math. Ann. Bd. 20, S. 122 ff.)

§ 2.

Verallgemeinerung des Integralbegriffs.

Es seien in (a, b) zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegeben. Man mache die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und bilde den Ausdruck

$$S = \sum_1^p \{\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})\}\varphi(\xi_i),$$

wo ξ_i dem Intervall (x_{i-1}, x_i) entnommen ist. $S_1, S_2, S_3, \cdots$ sei eine Folge solcher Ausdrücke; $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \cdots$ seien die zugehörigen Zerlegungen von (a, b), und δ_n bedeute wieder die Maximallänge der Teilintervalle bei der Zerlegung $\mathfrak{Z}_n$.

Sind alle Folgen $S_1, S_2, S_3, \cdots$, welche die Eigenschaft $\lim \delta_n = 0$ haben, konvergent, so wollen wir den gemeinsamen Grenzwert, dem sie zustreben, mit $\int_a^b \varphi\, d\psi$ bezeichnen.*)

Wir begnügen uns mit der Angabe zweier Fälle, in denen das hier definierte Integral existiert.

Satz 1. $\int_a^b \varphi\, d\psi$ existiert, wenn $\varphi(x)$ in (a, b) stetig und $\psi(x)$ von beschränkter Variation ist.

Satz 2. Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ in (a, b) integrierbar und ist

$$\psi(x) = \int_a^x f(x)\, dx,$$

so existiert $\int_a^b \varphi\, d\psi$ und ist gleich $\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx$.

Der Beweis des *ersten Satzes* beruht auf folgender Bemerkung. Ist ξ irgend ein Wert aus (a, b), so hat man

$$\{\psi(b) - \psi(a)\}\varphi(\xi) - S = \sum_1^p \{\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})\}\{\varphi(\xi) - \varphi(\xi_i)\},$$

mithin, wenn σ die Schwankung von $\varphi(x)$ in (a, b) bedeutet,

$$(1) \qquad |\{\psi(b) - \psi(a)\}\varphi(\xi) - S| \leqq \sigma \sum_1^p |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})|.$$

Es seien nun $\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}''$ zwei Zerlegungen von (a, b), und durch Superposition

*) Dieses Integral läßt sich als ein Kurvenintegral ansehen, erstreckt längs eines Bogens der Kurve $y = \psi(x)$.

beider entstehe $\mathfrak{Z}'''$; ferner seien S', S'', S''' Ausdrücke S, denen die Zerlegungen $\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}'', \mathfrak{Z}'''$ zugrunde liegen. Dann läßt sich auf jedes Teilintervall von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ die Ungleichung (1) anwenden. Ist die Schwankung von $\varphi(x)$ in den genannten Teilintervallen kleiner als ε, so findet man, wenn mit β die Variationsschranke*) von $\psi(x)$ in (a, b) bezeichnet wird,

$$|S' - S'''| \leqq \varepsilon\beta, \qquad |S'' - S'''| \leqq \varepsilon\beta,$$

mithin

$$|S' - S''| \leqq 2\varepsilon\beta.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Beweis des Satzes 1.

Wir wollen noch den Spezialfall betrachten, wo $\varphi(x)$ stetig und $\psi(x)$ in (a, b) *monoton* ist. Alsdann haben in S die Differenzen $\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})$, soweit sie nicht Null sind, alle dasselbe Zeichen, so daß S, folglich auch das Integral, zwischen $\{\psi(b) - \psi(a)\}m$ und $\{\psi(b) - \psi(a)\}M$ liegt (m und M das Minimum bezw. Maximum von $\varphi(x)$ in (a, b)). Wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ gibt es in (a, b) eine Zahl ξ derart, daß

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi\, d\psi = \{\psi(b) - \psi(a)\}\varphi(\xi).$$

Um den *Satz 2* zu beweisen, mache man die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und nenne σ_i die Schwankung von $f(x)$ in (x_{i-1}, x_i). Dann ist

$$|\psi(x_i) - \psi(x_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})f(\xi_i)| \leqq (x_i - x_{i-1})\sigma_i,$$

folglich

$$(3) \qquad \left|S - \sum_1^p (x_i - x_{i-1})\varphi(\xi_i)f(\xi_i)\right| \leqq \mathsf{M}\sum_1^p (x_i - x_{i-1})\sigma_i,$$

wobei M die obere Grenze von $|\varphi(x)|$ in (a, b) darstellt. Betrachtet man nun eine Folge $S_1, S_2, \cdots$ mit der Eigenschaft $\lim \delta_n = 0$ und wendet auf S_n die Ungleichung (3) an, so konvergiert die rechte Seite, $\mathsf{M}D_n$, nach Null**). Daraus ergibt sich aber, wenn man die Integrierbarkeit von $\varphi(x)f(x)$ bedenkt, $\lim S_n = \int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx$.

§ 3.

Die partielle Integration.

Sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ so beschaffen, daß die beiden Integrale

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi\, d\psi, \quad \int_a^b \psi\, d\varphi$$

*) Vgl. die vierte Anmerkung auf Seite 152.

**) Vgl. die dritte Anmerkung auf Seite 152.

existieren, so gilt die Formel

$$(\mathrm{I}) \qquad (\varphi\psi)_a^b = \int_a^b \varphi\, d\psi + \int_a^b \psi\, d\varphi.$$

In der Tat hat man, wenn auf (a, b) die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ angewandt wird,

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)_a^b &= \sum_1^p \{\varphi(x_i)\psi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\psi(x_{i-1})\}\\ &= \sum_1^p \{\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})\}\varphi(x_i)\\ &+ \sum_1^p \{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\}\psi(x_{i-1}).\end{aligned}$$

Durchläuft man irgend eine Folge von Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots$ mit der Eigenschaft $\lim \delta_n = 0$, so konvergieren die beiden letzten Summenausdrücke nach den Integralen (4), und man erhält die Gleichung (I).

§ 4.

Der zweite Mittelwertsatz.

Nach den Sätzen 1 und 2 existieren die Integrale (4) sicher, wenn wir folgende Voraussetzungen machen:

$f(x)$ ist in (a, b) integrierbar und $\psi(x)$ von beschränkter Variation, ferner

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Die Formel (I) wird jetzt

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_a^b \psi f\, dx = \psi(b)\int_a^b f\, dx - \int_a^b \Big(\int_a^x f\, dx\Big)\, d\psi.$$

In (II) steckt als Spezialfall der zweite Mittelwertsatz. Man braucht nur anzunehmen, $\psi(x)$ sei in (a, b) *monoton*, und zu beachten, daß (nach Formel (2) in § 2)

$$\int_a^b \Big(\int_a^x f\, dx\Big)\, d\psi = \{\psi(b) - \psi(a)\}\int_a^\xi f\, dx$$

ist $(a \leqq \xi \leqq b)$. Dann verwandelt sich (II) in

$$(\mathrm{II}') \qquad \int_a^b \psi f\, dx = \psi(a)\int_a^\xi f\, dx + \psi(b)\int_\xi^b f\, dx.$$

Ändert man die Funktionswerte $\psi(a)$ und $\psi(b)$ ab, jedoch derart, daß $\psi(x)$ monoton bleibt, so gilt die Formel (II') nach wie vor. Es wird höchstens ξ durch eine andere Zahl aus (a, b) zu ersetzen sein. Die linke Seite von (II') behält ihren Wert. Wenn also A und B so beschaffen sind, daß $\psi(x)$ bei Ersetzung von $\psi(a)$ und $\psi(b)$ durch A bezw. B monoton bleibt, so hat man*)

$$\int_a^b \psi f\,dx = A\int_a^\xi f\,dx + B\int_\xi^b f\,dx. \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

Greifswald, den 4. August 1904.

*) Diese Fassung des zweiten Mittelwertsatzes rührt von Pringsheim her. Vgl. seine oben zitierte Arbeit.

Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Von

Josef Kürschák in Budapest.

1. Soll y eine solche Funktion von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sein, daß die erste Variation von

$$\int\limits_{(n)} f(x_1, x_2, \cdots, x_n; y; y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, y_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}, \cdots)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

verschwindet, wo

$$y_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} = \frac{d^\nu y}{dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}},$$

so muß y die folgende Differentialgleichung erfüllen

$$F = F(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}} \frac{\partial f}{\partial y_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}} = 0.$$

Von der linken Seite F dieser Gleichung hat für $n = 1$ bereits Jacobi*) und dann allgemein Herr A. Hirsch**) die merkwürdige Eigenschaft bewiesen, daß der homogene lineare Differentialausdruck

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} u + \sum \frac{\partial F}{\partial y_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}} u_{i_1 i_2 \cdots i_\nu},$$

wo u eine unbestimmte Funktion bedeutet, *sich selbst adjungiert* ist.

Für $n = 1$ hat Herr Hirsch sogar gezeigt, daß diese Eigenschaft für $V(f)$ charakteristisch ist. Auch für $n > 1$ bezeichnete er es als wahrscheinlich, daß der Rückschluß von der genannten Eigenschaft des Ausdruckes δF auf die Struktur der Funktion F stets gestattet ist, begnügte sich aber mit der Untersuchung der partiellen Differentialausdrücke

*) C. G. J. Jacobi, *Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen.* Journal für Mathematik, Bd. 17, 1837, S. 68—82; wieder abgedruckt Ges. Werke, Bd. 4, S. 39—55 und Ostwalds Klassiker Nr. 47, S. 87—98.

**) A. Hirsch, *Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Math. Annalen Bd. 49. 1897, S. 49—72.

zweiter Ordnung mit höchstens drei unabhängigen Veränderlichen. Er hat so für $n \leqq 3$ den folgenden Satz gewonnen:

Wenn

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ y;\ y_1, y_2, \cdots, y_n;\ y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{nn})$$

so beschaffen ist, daß

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} u_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{ik}} u_{ik}$$

sich selbst adjungiert ist, so läßt sich stets durch Quadraturen ein solcher Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n;\ y;\ y_1, y_2, \cdots, y_n;\ y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{nn})$$

ermitteln, vermöge dessen F in der Gestalt

$$F = V(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{d^2}{dx_i\, dx_k} \frac{\partial f}{\partial y_{ik}}$$

darstellbar ist.

Seither hat Herr W. Hertz*) versucht den Satz auch für einige größere Werte von n zu beweisen. Durch seine — leider nicht ganz einwandfreien — Untersuchungen angeregt, habe ich für eine beliebige Anzahl der unabhängigen Veränderlichen den hier folgenden Beweis gefunden.

2. Ist f ein Differentialausdruck zweiter Ordnung, so ist im allgemeinen $V(f)$ von der vierten Ordnung. Wir werden also f in einer besonderen Klasse zu suchen haben. Die Bedingungen, unter welchen $V(f)$ von den dritten und vierten Ableitungen frei wird, hat Herr W. Hertz in seiner Inaugural-Dissertation durch die folgenden Überlegungen abgeleitet:

Nach dem bereits erwähnten Satze von Jacobi und Hirsch muß $\delta V(f)$ sich selbst adjungiert sein. Dann ist aber zufolge einer Bemerkung des Herrn Frobenius**) $V(f)$ von gerader Ordnung. Demnach brauchen wir nur zu untersuchen, wann in $V(f)$ die vierten Ableitungen fehlen. Diese finden wir in $V(f)$ stets nur in linearer Weise und auch so nur im Summanden

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dx_i\, dx_k} \frac{\partial f}{\partial y_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dx_i\, dx_k} \frac{\partial f}{\partial y_{ik}} (1 + \delta_{ik}),$$

---

*) W. Hertz, *Über partielle Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen.* Inaugural-Dissertation, der Universität zu Kiel vorgelegt. Göttingen 1903.

**) G. Frobenius, *Über adjungierte lineare Differentialausdrücke.* Journal für Mathematik, Bd. 85 (1878), S. 206.

wo δ_{ik} Null oder Eins bedeutet, je nachdem i und k verschiedene oder aber gleiche Zahlen sind. Setzen wir hier die Koeffizienten der $y_{ik\mu\nu}$ gleich Null, so erhalten wir die partiellen Differentialgleichungen

$$(S_n)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu})+\\ &+\frac{\partial^2 f}{\partial y_{i\mu}\partial y_{\nu k}}(1+\delta_{i\mu})(1+\delta_{\nu k})+\\ &+\frac{\partial^2 f}{\partial y_{i\nu}\partial y_{k\mu}}(1+\delta_{i\nu})(1+\delta_{k\mu})=0\end{aligned}\qquad (i\leqq k\leqq \mu\leqq \nu=1,2,\cdots,n)$$

als *notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $V(f)$ nur von der zweiten Ordnung ist.*

Ist nun f eine Lösung des Systems (S_n), so können wir in $V(f)$ statt der dritten und vierten Ableitungen von y die Null einsetzen. Es wird dann

$$(1)\qquad V(f)=\frac{\partial f}{\partial y}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx_i}\frac{\partial f}{\partial y_{ik}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d}{dx_k}\frac{\partial f}{\partial y_{ik}}\right)\right)(1+\delta_{ik}),$$

wo

$$\left(\frac{d}{dx_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial}{\partial y}+y_{1i}\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+y_{ni}\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Wenn hier f die Ableitung y_{nn} nicht enthält, so werden für $i\leqq k<n$ auch

$$\left(\frac{d}{dx_i}\frac{\partial f}{\partial y_i}\right),\quad \left(\frac{d}{dx_k}\frac{\partial f}{\partial y_{ik}}\right),\quad \left(\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d}{dx_k}\frac{\partial f}{\partial y_{ik}}\right)\right)$$

von y_{nn} frei sein. Diese Größe wird also nur im Summanden

$$-\left(\frac{d}{dx_n}\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d}{dx_n}\frac{\partial f}{\partial y_{in}}\right)\right)$$

vorkommen. Folglich ist dann

$$\frac{\partial}{\partial y_{nn}}V(f)=-\frac{\partial}{\partial y_{nn}}\left(\frac{d}{dx_n}\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{d}{dx_i}\frac{\partial}{\partial y_{nn}}\left(\frac{d}{dx_n}\frac{\partial f}{\partial y_{in}}\right)\right),$$

oder einfacher

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial y_{nn}}V(f)=-\frac{\partial^2 f}{\partial y_n^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{d}{dx_i}\frac{\partial^2 f}{\partial y_n\partial y_{in}}\right).$$

In dem besonderen Falle, wenn f frei ist von y_{nn} und außerdem $\frac{\partial f}{\partial y_n}$ keine der Größen

$$y_n,\ y_{1n},\ y_{2n},\ \cdots,\ y_{n-1\,n}$$

enthält, wird y_{nn} auch in $V(f)$ nicht vorkommen.

3. Wir gehen nun über zur Diskussion der Gleichung

$$\delta F = \text{adj.}\ \delta F.$$

Der Koeffizient von u_i ist in δF

$$= \frac{\partial F}{\partial y_i},$$

in

$$\text{adj.}\ \delta F = \frac{\partial F}{\partial y} u - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i} u\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{d^2}{dx_i\, dx_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{ik}} u\right)$$

aber ist er

$$= -\frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \frac{\partial F}{\partial y_{ik}} (1 + \delta_{ik}).$$

Es kann also δF nur dann sich selbst adjungiert sein, wenn

$$(3) \qquad 2\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \frac{\partial F}{\partial y_{ik}} (1 + \delta_{ik}) = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

Entwickeln wir hier nach den dritten Ableitungen von y und setzen dann jeden Koeffizienten für sich gleich Null, so ersehen wir, daß F einem Systeme von der Gestalt (S_n) und außerdem dem folgenden genügen muß:

$$(S_n') \qquad 2\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dx_k} \frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\right) (1 + \delta_{ik}) = 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n).$$

In dem besonderen Falle, wenn F die Ableitung y_{nn} nicht enthält, gewinnen wir aus (S_n) für jeden Wert von i und k

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{in}^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y_{in}\, \partial y_{kn}} = 0.$$

Diese Gleichungen besagen, daß F linear ist in

$$y_{1n}, y_{2n}, \cdots, y_{n-1\,n}.$$

Differentiieren wir noch die Gleichung

$$(4) \qquad 2\frac{\partial F}{\partial y_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{d}{dx_k} \frac{\partial F}{\partial y_{kn}}\right) = 0$$

nach y_{in}, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_n\, \partial y_{in}} = 0.$$

Demnach ist der Koeffizient $\frac{\partial F}{\partial y_{in}}$, mit dem y_{in} in F multipliziert ist, frei von y_n. Dann ist aber

$$\left(\frac{d}{dx_k}\,\frac{\partial F}{\partial y_{kn}}\right)$$

ebenfalls frei von

$$y_n,\; y_{1n},\; y_{2n},\; \cdots,\; y_{nn},$$

dasselbe gilt also zufolge der Gleichung (4) auch von $\frac{\partial F}{\partial y_n}$.

Diese Überlegungen können statt n für jedes μ wiederholt werden und führen zu dem folgenden Satze:

Wenn F die Größe $y_{\mu\mu}$ nicht enthält, so ist F linear in

$$y_\mu,\; y_{1\mu},\; y_{2\mu},\; \cdots,\; y_{n\mu}.$$

4. Um den Ausdruck F auf die Gestalt $V(f)$ zu bringen, werden wir ihn — nach dem Vorgange des Herrn Hirsch — durch Subtraktion geeigneter $V(\varphi)$ allmählich zerstören. Gelingt es uns durch Subtraktion von

$$V(\varphi_1),\; V(\varphi_2),\cdots$$

F gleich Null zu machen, so ist

$$F = V(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots).$$

Als φ benutzen wir solche Differentialausdrücke zweiter Ordnung, die Lösungen des Systems (S_n) sind. Es ist dann $V(\varphi)$ von der zweiten Ordnung, außerdem befriedigt $F - V(\varphi)$ wieder die Systeme (S_n) und (S_n').

Vor allem befreien wir F von y_{nn} in der folgenden Weise. Zufolge (S_n) ist für jeden Wert k

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}\,\partial y_{kn}} = 0,$$

d. h. $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$ enthält keine der Größen

$$y_{1n},\; y_{2n},\; \cdots,\; y_{nn}.$$

Wählen wir für φ eine solche Lösung von (S_n), die gleichfalls keine dieser Größen enthält, so ist zufolge der Gleichung (2)

$$\frac{\partial}{\partial y_{nn}}\,V(\varphi) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_n^2}.$$

Die Forderung, daß

$$F - V(\varphi)$$

von y_{nn} frei sei, wird also durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_n^2} = -\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$$

ausgedrückt, die wir mit

$$\varphi = -\int_{a_n}^{y_n}\left(\int_{a_n}^{y_n}\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}\,dy_n\right)dy_n$$

befriedigen.

Ebenso können wir F von $y_{\mu\mu}$ befreien, indem wir

$$\varphi = -\int_{a_\mu}^{y_\mu}\left(\int_{a_\mu}^{y_\mu}\frac{\partial F}{\partial y_{\mu\mu}}\,dy_\mu\right)dy_\mu$$

wählen. War dabei F frei von $y_{\nu\nu}$, so ist $\frac{\partial F}{\partial y_\nu}$ und folglich auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} = -\int_{a_\mu}^{y_\mu}\left(\int_{a_\mu}^{y_\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y_\nu \partial y_{\mu\mu}}\,dy_\mu\right)dy_\mu$$

frei von $y_\nu, y_{1\nu}, y_{2\nu}, \cdots, y_{n\nu}$. Es wird also in $V(\varphi)$ und $F - V(\varphi)$ die Größe $y_{\nu\nu}$ nicht wieder auftreten.

Wir können demnach F allmählich von allen Größen $y_{11}, y_{22}, \cdots, y_{nn}$ befreien.

5. Nachdem wir aus F die Größen $y_{11}, y_{22}, \cdots, y_{nn}$ entfernt haben, muß F für jeden Wert von μ linear sein in

$$y_\mu, y_{1\mu}, y_{2\mu}, \cdots, y_{n\mu}.$$

F ist also eine solche rationale ganze Funktion der Ableitungen von y, daß in keinem Gliede

$$A y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_\varrho} y_{\mu_1\nu_1} y_{\mu_2\nu_2} \cdots y_{\mu_\sigma\nu_\sigma}$$

zwei der Zahlen

$$k_1, k_2, \cdots, k_\varrho, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \cdots, \mu_\sigma, \nu_\sigma$$

einander gleich sind.

Wir werden diejenigen Glieder von F, welche in den y_{ik} von der höchsten Dimension sind, allein betrachten. Sogar von diesen wollen wir vorerst nur diejenigen zerstören, die in den y_i von der höchsten Dimension sind. Ihre Summe sei

$$G = F_{\varrho\sigma},$$

wo ϱ und σ die Dimensionen in den y_i bezw. y_{ik} bedeuten.

G befriedigt natürlich das System (S_n), also ist

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu\nu}} + \frac{\partial^2 G}{\partial y_{i\mu}\partial y_{k\nu}} + \frac{\partial^2 G}{\partial y_{i\nu}\partial y_{k\mu}} = 0.$$

Außerdem folgt aus (S_n') die Gleichung

$$\text{(6)} \qquad 2\frac{\partial G}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^{n} D_k \frac{\partial G}{\partial y_{ik}} = 0,$$

wo

$$D_k = y_{1k}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{nk}\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Eine Differentiation nach $y_{\mu\nu}$ ergibt noch

$$(7)\qquad 2\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_{\mu\nu}} - \frac{\partial^2 G}{\partial y_\mu \partial y_{i\nu}} - \frac{\partial^2 G}{\partial y_\nu \partial y_{i\mu}} - \sum_{k=1}^{n} D_k \frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} = 0.$$

Setzen wir nun

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu+1}^{n} y_\mu y_\nu \frac{\partial G}{\partial y_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_\nu \frac{\partial G}{\partial y_{\mu\nu}},$$

so ist bei jedem Werte von i

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_\nu \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_{\mu\nu}} + \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}}$$

frei von $y_i, y_{1i}, y_{2i}, \cdots, y_{ni}$. Folglich kann dann $V(\varphi)$ keine der Größen $y_{11}, y_{22}, \cdots, y_{nn}$ enthalten. Außerdem ist unmittelbar ersichtlich, daß $V(\varphi)$ nur solche Glieder enthält, die in den y_{ik} höchstens von der Dimension σ sind. Die Summe der Glieder von der Dimension σ ist:

$$(8)\qquad V_\sigma = -\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_i D_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_{ik}}.$$

Wenn wir

$$D_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_{ik}} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{2} y_\mu y_\nu D_k \frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} + y_\mu y_{k\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} \right)$$

nach k summieren, so ist zufolge der Gleichung (7)

$$\sum_{k=1}^{n} D_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_{ik}} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_\nu \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_{\mu\nu}} - \frac{\partial^2 G}{\partial y_\nu \partial y_{i\mu}} \right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_{k\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}}.$$

Nun aber haben wir die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_\nu \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_{\mu\nu}} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - 2\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}}.$$

Zufolge der Homogenität von G ist

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_\nu \frac{\partial^2 G}{\partial y_\nu \partial y_{i\mu}} = \varrho \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_{k\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_{k\nu} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} + \frac{\partial^2 G}{\partial y_{i\nu} \partial y_{k\mu}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\mu y_{k\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial y_{i\mu} \partial y_{k\nu}} = -(\sigma - 1) \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}}.$$

Wir können demnach auch schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} D_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_{ik}} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - (\varrho+\sigma+1)\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}},$$

woraus dann

$$V_\sigma = -\frac{1}{2}(\varrho+\sigma+1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} D_i\left(y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(\varrho+\sigma+1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(y_{i\mu}\frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}} + y_\mu D_i \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}}\right)$$

folgt. Hier ist

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} y_{i\mu}\frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}} = 2\sigma G$$

und zufolge der Gleichung (6)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu D_i \frac{\partial G}{\partial y_{i\mu}} = 2\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{\partial G}{\partial y_\mu} = 2\varrho G,$$

also schließlich

$$V_\sigma = -(\varrho+\sigma)(\varrho+\sigma+1)G.$$

Wenn wir von F

$$\frac{-1}{(\varrho+\sigma)(\varrho+\sigma+1)}V(\varphi)$$

subtrahieren, so befreien wir dadurch F von $F_{\varrho\sigma}$. In ähnlicher Weise können wir auch $F_{\varrho-1\,\sigma}, F_{\varrho-2\,\sigma}, \cdots, F_{0\sigma}$ zerstören, dann alle Glieder, die in den y_{ik} von der Dimension $(\sigma-1)$ sind, usw. Endlich wird F keine Ableitungen zweiter Ordnung, also auch keine Ableitungen von der ersten Ordnung enthalten. Wenn wir dann noch von

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$$

die Funktion $V(\varphi)$ subtrahieren, wo

$$\varphi = \int_a^y F\,dy,$$

so ist damit F gänzlich zerstört.

6. Mit Hilfe der Integration des Systems (S_n)*), können wir das gefundene Resultat auch so aussprechen:

Wenn der Differentialausdruck zweiter Ordnung F die Eigenschaft hat, daß sein δF sich selbst adjungiert ist, so ist F eine solche lineare Funktion der Determinante

*) J. Kürschák, *Über symmetrische Matrices.* Mathematische Annalen Bd. 58, 1904, S. 380—384.

$$D = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

und ihrer Subdeterminanten, deren Koeffizienten Differentialausdrücke erster Ordnung sind. Außerdem kann F auf die Form $V(f)$ gebracht werden, wo f wieder eine solche lineare Funktion der Determinante D und ihrer Subdeterminanten ist, deren Koeffizienten Differentialausdrücke erster Ordnung sind.

Budapest, den 15. März 1904.

Berichtigung

zu dem Aufsatze von E. Meyer im 59. Bande dieser Annalen.

Seite 404, Z. 13 und 16 v. u. ist zu lesen „∞^1-fach“ statt „∞^4-fach“.

Über den Inhalt sphärischer Dreiecke.

Von

M. Dehn in Münster i./W.

Nimmt man in der (Euklidischen) Ebene neben den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung auch noch die Kongruenzaxiome als gültig an, so kann man die projektive Geometrie vollständig entwickeln. Dagegen ist es noch eine offene Frage, ob das Analoge auch für die Kugeloberfläche statt hat, ob also, wenn die „graphischen" Axiome und die Kongruenzaxiome für die Kugelpunkte, größten Kreise und Dreiecke vorausgesetzt werden, die projektive Geometrie und damit überhaupt die vollständige Kugelgeometrie (trigonometrische Formeln) entwickelt werden kann, ohne von irgend einem *Stetigkeitspostulat* Gebrauch zu machen. Im folgenden möchte ich nun nachweisen, daß jedenfalls die Inhaltslehre, die in der Euklidischen Ebene doch in der Regel erst nach jener Begründung ihre Erledigung findet, auf der Kugel ohne Stetigkeit vollständig begründet werden kann. Speziell werden wir auf diese Weise auch ableiten, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck stets größer als $2R$ ist.

1. Der sphärische Exzeß als Zerlegungsinvariante.

In diesem Abschnitt sind die Betrachtungen wesentlich solche, die der Analysis situs angehören, und zwar sind sie dem Studium der Zerlegung eines Dreiecks in Dreiecke gewidmet.

Ein sphärisches Dreieck sei irgendwie in D Dreiecke zerlegt. Die Winkel dieser Teildreiecke ergänzen sich an Punkten, die wir *Sternpunkte* nennen können und deren Anzahl S sein mag, zu $4R$, an Punkten in der Anzahl H, die wir *Halbsternpunkte* nennen, zu $2R$ und an den drei Ecken des großen Dreiecks zu den Winkeln desselben. Ist dann die Winkelsumme der einzelnen Teildreiecke gleich $w_1, w_2, \cdots, w_D$, die Winkelsumme des großen Dreiecks w, so wird

$$\sum_1^D w_i = w + (2S+H)2R$$

sein. Bezeichne ferner ε den sphärischen Exzeß, d. i. die um $2R$ verminderte Winkelsumme des großen Dreiecks, $\varepsilon_1 \cdots, \varepsilon_D$ die sphärischen Exzesse der Teildreiecke, so ist

$$\sum_1^D w_i - D \cdot 2R = \sum_1^D \varepsilon_i, \quad w - 2R = \varepsilon,$$

also

$$\sum_1^D \varepsilon_i = \varepsilon + (2S + H + 1 - D)2R. \tag{1}$$

Unsere Aufgabe ist, zu zeigen, daß die Summe der sphärischen Exzesse der Teildreiecke gleich dem sphärischen Exzeß des großen Dreiecks ist. Zu dem Zwecke müssen wir jetzt nur nachweisen, daß die Zahl $2S + H + 1 - D$ stets gleich Null ist.

Der systematische Weg zu diesem Nachweis erfordert die Einführung eines Umlaufssinns für sphärische Dreiecke. Da eine solche Darstellung aber etwas ausführlichere, wenn auch keineswegs schwierige Erörterungen erfordert, wollen wir uns zu unserem Zwecke des *Eulerschen Polyedersatzes* bedienen, angewandt auf die Zerlegung eines Polygons in Polygone, bei der nur Sternpunkte auftreten. Sein Beweis kann in der Tat ohne erhebliche Schwierigkeiten erbracht werden, wie ja von vorne herein evident ist.*) Die Seiten der Teildreiecke und des großen Dreiecks ordnen sich zu einer Reihe doppelt von ihnen überdeckter Strecken zusammen, deren Endpunkte Sternpunkte sind. Die Anzahl dieser Strecken — Kantenzüge habe ich sie in einer früheren Arbeit genannt — sei K. Dann ist nach dem Eulerschen Satz:

$$S + 3 + D + 1 = K + 2. \tag{2}$$

In der Tat: Sehen wir von Halbsternpunkten ab, so ist $S + 3$ die Anzahl der „Ecken", $D + 1$ die Anzahl der „Flächen", K die Anzahl der „Kanten". Durch die Halbsternpunkte werden wir gezwungen, die Teildreiecke mit Teilpunkten zu versehen. Dadurch wird die Anzahl der „Kanten" um die Anzahl H der Halbsternpunkte vermehrt, da sich die Anzahl der „Ecken" aber um dieselbe Zahl vermehrt, so bleibt die obige Gleichung bestehen. Endlich: Alle Seiten sind in den Kantenzügen untergebracht. Liegen auf einer solchen Kantenzugstrecke h_i Halbsternpunkte, so liegen auf ihr $2 + h_i$ Strecken. Es ist demgemäß im Ganzen:

$$3D + 3 = 2K + H. \tag{3}$$

---

*) Der Beweis wird vielleicht am praktischsten geführt mit der Methode der successiven Entfernung von Polygonen, die man auf Grund des Satzes regeln wird: Man kann stets ein solches Teilpolygon finden, daß durch dessen Hinwegnahme das Polygongefüge nicht zerstückelt wird und eine einfache geschlossene Randkurve behält.

Aus (3) und (2) folgt durch Elimination von K, was wir herleiten wollten, nämlich:

$$2S + H + 1 = D.$$

Setzen wir analog für ein n-Eck den sphärischen Exzeß als die um $2(n-2)R$ verminderte Winkelsumme fest, so wird der Koeffizient von $2R$ in Gleichung (1) $2S + H + n - 2 - D$, die linken Seiten von (2) und (3) werden um $n - 3$ vermehrt, und es ergibt sich wieder, daß jener Koeffizient gleich Null ist. Wir haben also mit einleuchtender Verallgemeinerung

Satz 1. *Zerlegt man ein Polygon irgendwie in Polygone, so ist der sphärische Exzeß des großen Polygons gleich der Summe der sphärischen Exzesse der Teilpolygone.*

Daraus folgt, falls man zwei Polygone als endlichgleich bezeichnet, wenn sie, eventuell nach Hinzufügen kongruenter Polygone, in resp. kongruente Polygone zerlegt werden können:

Satz 2. *Sind zwei Polygone endlichgleich, so müssen ihre sphärischen Exzesse einander gleich sein.*

2. Hilfssätze.

Dieser Abschnitt stützt sich wesentlich auf die Kongruenzsätze. — Folgende Sätze sind auf Grund der üblichen graphischen Axiome und der Kongruenzaxiome für die Kugeloberfläche leicht nachzuweisen: Zwei größte Kreise (Gerade wollen wir sie künftig hier nennen) schneiden sich in zwei diametralen Punkten, die jede Gerade in zwei gleiche Strecken teilen. Die Senkrechten auf einer Geraden gehen alle durch zwei Punkte, ihre Pole. Alle Gerade durch zwei diametrale Punkte stehen auf einer Geraden senkrecht, der Polaren dieser Punkte. Der Abstand eines Poles von der Polaren, auf irgend einer Senkrechten zu dieser gemessen, ist gleich dem vierten Teil (Quadranten) der ganzen Geradenlänge. — Jedes (geschlossene) Polygon teilt die Kugeloberfläche in zwei Teile. Jedes Polygon kann (mit Hilfe von größten Kreisen) so in Dreiecke zerlegt werden, daß deren Seiten alle kleiner sind als zwei Quadranten. Ein solches Dreieck hat folgende Eigenschaften: der eine von den beiden Teilen, in die die Kugel durch das Dreieck geteilt wird, liegt stets ganz innerhalb einer der beiden Halbkugeln, die zu irgend einer der Seiten gehören; wir wollen diesen ausgezeichneten Teil das Innere des Dreiecks nennen. Ein solches Dreieck ist ferner eine konvexe Figur, d. i. die Verlängerung einer Seite schneidet nicht eine der anderen Seiten, sondern deren Verlängerungen. Die Dreieckswinkel sind kleiner als $2R$. Wegen dieser die Beweisführung vereinfachenden Eigenschaften wollen wir nur noch solche Dreiecke betrachten, und es soll in Zukunft also, wenn es auch nicht ausdrücklich hinzugefügt wird, unter der Bezeichnung „Dreieck", ein solches Dreieck verstanden werden, dessen Seiten kleiner sind als zwei Quadranten.

Hilfssatz 1. In einem rechtwinkligen Dreieck liegt einer Kathete, die kleiner ist als ein Quadrant, ein Winkel, der kleiner ist als ein R, gegenüber.

Denn sei ABC bei A rechtwinklig und AB kleiner als ein Quadrant. Trage ich an AC in C nach der Seite B einen rechten Winkel an, so kann der freie Schenkel desselben nicht zwischen AC und BC liegen, denn sonst müßte er eine Dreiecksseite schneiden. Schneidet er aber AB in D so wäre AD gleich einem Quadranten, schneidet er BC oder AC in E, so wäre EC gleich zwei Quadranten, was beides den Voraussetzungen widerspricht. Da $\sphericalangle ACB$ schließlich auch nicht gleich einem R sein kann, weil sonst AB gleich einem Quadranten wäre, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Hilfssatz 2. In jedem Dreieck gibt es mindestens *eine* im Inneren verlaufende Höhe.

Ist eine der Ecken speziell der Pol der gegenüberliegenden Seite, so ist, weil jede Gerade durch den Pol auf der Polaren senkrecht steht, unserer Behauptung ohne weiteres Genüge getan. Wir schließen diesen Fall für das Folgende aus. Verbinden wir nun etwa A mit demjenigen Pol P von BC, der mit A auf derselben zu BC gehörigen Halbkugel liegt und verlängern PA nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit der Geraden durch B und C in D_1 und D_2: alsdann sei etwa AD_1 kleiner als ein Quadrant. Angenommen nun, D_1 und D_2 lägen beide außerhalb von BC, dann liegen B und C zusammen auf einer der beiden durch D_1 und D_2 bestimmten Halbgeraden. Es ist also auf dieser Halbgeraden gewiß sowohl D_1B wie D_1C kleiner als zwei Quadranten. Liegt nun (auf dieser Halbgeraden) etwa B zwischen D_1 und C, so folgt aus dem eben bewiesenen Hilfssatz, daß $\sphericalangle ABC$ stumpf, $\sphericalangle ACB$ spitz ist. Wenn es also von keiner Dreiecksecke aus eine im Dreiecksinneren verlaufende Höhe gäbe, so müßte jeder Ecke ein stumpfer und ein spitzer Winkel gegenüber liegen, was unmöglich ist.

Ferner: Sei die Strecke AB kleiner als zwei Quadranten, l eine Gerade durch die Mitte L derselben, g die Gerade senkrecht zu AB in A; dann schneiden die Verbindungslinien von A und B mit dem mit B in derselben zu g gehörigen Halbkugel liegenden Pol von l, diese Gerade l in Punkten D und F, die eben dieser Halbkugel angehören. Beweis (Fig. 1 (s. S. 170)): Wir teilen die Halbkugel über g durch AB und die Senkrechte zu AB durch O (Pol von g) in vier Teile, die Kugelachtel

$(XOA,\ AOY,\ YOZ,\ ZOX)$.

Dann liegt der Pol P einer Geraden l durch L, der sich in unserer Halbkugel befindet, in einem der Kugelachtel YOZ oder ZOX. (Denn die Mitte μ des auf der Halbkugel liegenden Teiles von l liegt in einem der Quadranten XOA und AOY.) P möge etwa in ZOX liegen, dann schneidet PA die Gerade l in einem Punkte D des Quadranten XOA, die Mitte von l liegt aber im Quadranten AOY; folglich kann man, ohne aus der Halbkugel herauszukommen, DL über L hinaus um sich selbst bis E verlängern. Dann ist $\sphericalangle BEL$ gleich R, wegen der Kongruenz der Dreiecke LBE und LAD, und es geht BE über B hinaus verlängert durch P.

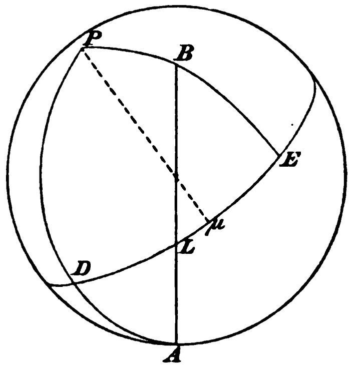


Fig. 1.

Weiter: Sei l eine Gerade durch einen Punkt N der Strecke BC ($<$ zwei Quadranten), g eine Gerade durch C, P ein Punkt, der mit B in derselben zu g gehörigen Halbkugel liegt. Schneiden dann PB und PC l in Punkten E und F dieser Halbkugel, so liegt N zwischen E und F. — Die Behauptung wird dadurch erwiesen, daß im entgegengesetzten Falle PB und PC einen weiteren Punkt auf der Halbkugel gemeinsam haben müßten, was unmöglich ist.

Hilfssatz 3. Sei das Dreieck ABC bei A rechtwinklig, L die Mitte von AB, N die Mitte von CB, dann schneidet die Gerade LN, über N hinaus verlängert, die Gerade AC in einem Punkte K so, daß die Strecke ACK gleich einem Quadranten vermehrt um $\frac{1}{2}AC$ ist.

Zum Beweise (s. Fig. 2) verbinde man A, B und C mit demjenigen Pol von LN, der mit B in derselben zu AC gehörigen Halbkugel liegt. Dann sind die Verbindungslinien Lote auf LN, deren Fußpunkte D, E und F nach dem vorher bewiesenen in derselben Halbkugel liegen und zwar derart, daß L zwischen D und E, N zwischen E und F gelegen ist. Dann ergibt sich aus der Kongruenz der Dreiecke ADL und BEL, sowie BEN und CFN, daß $AD = BE = CF$ ist. Verbinde ich dann die Mitten G und H von AC und DF, so ergibt sich leicht aus der Kongruenz der Dreiecke ADH und CFH, HAG und CAG, DFC und FDA, AFC und CDA, DAG und FCG,

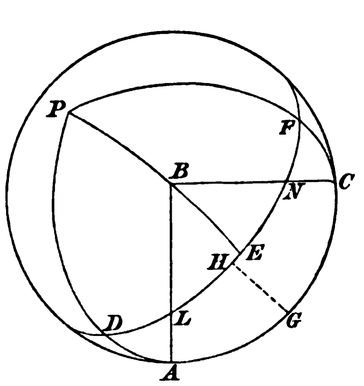


Fig. 2.

DGH und FGH, daß GH sowohl auf AC wie auf LN senkrecht steht, woraus unmittelbar folgt, daß GK gleich einem Quadranten und, wie behauptet, ACK gleich einem Quadranten vermehrt um $\frac{1}{2}AC$ ist. Übrigens folgt jetzt nach dem früher bewiesenen, daß das Lot AD außerhalb fallen muß, was aber für unsern Beweisgang irrelevant ist.

Hilfssatz 4: Seien ABC und $A'B'C'$ zwei bei A resp. bei A' rechtwinklige Dreiecke. Sei ferner $AB = A'B'$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$. Es wird behauptet: Entweder sind die Dreiecke kongruent, oder die Hypotenusen BC und $B'C'$, sowie die Katheten AC und $A'C'$ ergeben zusammen zwei Quadranten.

Zum Beweise (Fig. 3) tragen wir auf CA nach der Seite A hin $C'A'$ bis A'' ab, errichten in A'' nach der Seite B ein Lot auf CA bis B'' so daß $A''B'' = A'B'$ ist, dann sind die Dreiecke $CA''B''$ und $C'A'B'$ kongruent, folglich $BA = B''A''$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B''CA$ und B'' liegt auf CB. Verbindet man die Mitten M und N von AA'' und BB'', so ist MN gleichzeitig auf CM und CN senkrecht, also ist $CM = CN$ gleich einem Quadranten, womit unser Satz bewiesen ist.

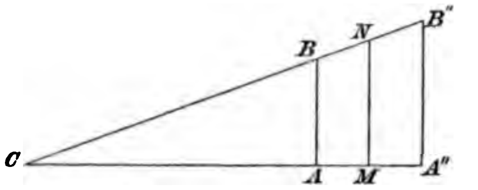


Fig. 3.

3. Der Satz von der Winkelsumme. Endlichgleichheit von Polygonen mit gleichem sphärischem Exzeß.

a) *Jedes rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten kleiner sind als ein Quadrant, ist einem doppelt-rechtwinkligen Dreieck endlich gleich*, hat also nach Satz 1 denselben *(positiven)* sphärischen Exzeß wie dieses.

Beweis: (s. Fig. 4) Sei ABC bei A rechtwinklig und AB sowie AC kleiner als ein Quadrant. Dann verlängere ich AC über C hinaus bis M und weiter bis O so, daß AO gleich einem Quadranten und $MC = MO$ ist. Dann verbinde man M mit der Mitte N von BC und verlängere bis zum Schnitt L mit AB, verlängere ferner BL über L hinaus um sich selbst

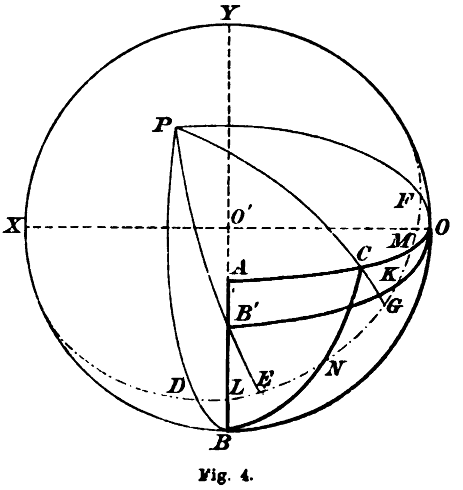


Fig. 4.

bis B'. Dann wird, weil ACM kleiner als ein Quadrant vermehrt um $\frac{1}{2}AC$ ist, nach Hilfssatz 3 B' zwischen B und A liegen. Ich verbinde B' mit O, so daß $B'O$ gleich einem Quadranten ist und $\sphericalangle OB'A$ gleich R. Dann, wird behauptet, ist $B'AO$ *endlichgleich dem gegebenen Dreieck* BAC.

Zum Beweise verbinde man B, B', O und C mit dem Pol P von LNM, der mit A in derselben zu BO gehörigen Halbkugel liegt. Die Verbindungslinien schneiden die Gerade LNM in D, E, F, G, die sämtlich Punkte derselben Halbkugel sind, was sich so ergibt: Man bemerke, daß OB gleich einem Quadranten, $\sphericalangle BOA$ gleich R ist. Der Pol P liegt in dem Kugelachtel $O'XY$ (O': Pol von OB), das durch die Verlängerung von OO' und BO' entsteht. (Denn die Gerade ML muß $O'O$ und $O'B$ schneiden.) Daraus folgt, daß PO die Gerade ML in einem Punkte F des Kugelachtels $YO'O$ schneidet. Ferner folgt aus den Hilfsbetrachtungen des vorigen Paragraphen, daß PB und PB' die Gerade LM in Punkten D und E respektive des Kugelachtels $XO'B$ und $BO'O$ schneiden. L liegt zwischen E und D und $LE = LD$. Es liegt aber auch E zwischen L und M. Denn sonst müßte PB' AO schneiden, was unmöglich ist, da PB' die Verlängerung von AO, nämlich AX, schneidet. Ebenso schneidet die Verbindungslinie CP die Gerade LM in einem Punkte G zwischen E und M, weil sie sonst die Strecke AB' schneiden müßte, was unmöglich ist, da sie dann auch die Verlängerung AX von AC schneiden würde. Es liegt also auch M zwischen G und F.

Dann folgt durch Dreieckskongruenz sofort $B'E = DB = CG = OF$. Dann sind auch die Dreiecke KOF und $KB'E$ kongruent. Denn anderntalls müßte nach Hilfssatz 4 $B'K + KO =$ zwei Quadranten sein. (K, der Schnittpunkt von $B'O$ und LNM, liegt zwischen E und F, wie leicht zu ersehen), was nicht der Fall ist. Wir haben jetzt folgende Relationen (bei denen das Zeichen „$\sim$" bedeutet: „kann zerlegt werden in"):

$$OAB' + OMF + NDB \sim KOF + AB'KM + NLB + DLB,$$

$$CAB + CMG + NGC \sim KB'E + AB'KM + NLB + ELB'.$$

Dabei sind die untereinander stehenden Dreiecke mit Ausnahme von OAB' und CAB' respektive kongruent. Also folgt: OAB' und CAB sind endlich gleich, wie im Anfang behauptet wurde. Jedes rechtwinklige Dreieck also, dessen Katheten kleiner als ein Quadrant sind, ist mit einem doppeltrechtwinkligen Dreieck endlichgleich, hat also dieselbe Winkelsumme wie dieses, und demgemäß eine Winkelsumme größer als $2R$. Aber daß *auch jedes andere Dreieck einen positiven sphärischen Exzeß* hat, kann nun leicht eingesehen werden:

b) Sei etwa (s. Fig. 5) AB größer als ein Quadrant, AC aber kleiner. Sei $AE = AF$ gleich einem Quadranten (E ein Punkt von AB, F ein Punkt der Verlängerung von AC über C hinaus). Verbindet man C mit E, so ist $\sphericalangle ACE = R$, also ACB ein stumpfer Winkel. Also hat das Dreieck einen positiven sphärischen Exzeß. Wir können ebenfalls ein doppeltrechtwinkliges mit ACB endlichgleiches Dreieck finden. Sei das doppeltrechtwinklige Dreieck FEH endlichgleich mit dem rechtwinkligen Dreieck EGB (dessen beide Katheten kleiner als ein Quadrant sind). Dem Dreieck CGF ist ebenfalls ein doppeltrechtwinkliges Dreieck endlichgleich, dessen Winkel an der Spitze kleiner als R ist (denn die Winkelsumme im Dreieck CGF ist $< 3R$, weil die Winkel bei C und G nach Hilfssatz 1 spitz sind). Wir können dieses Dreieck deswegen und weil $\sphericalangle AFH$ größer als R ist, von dem Dreieck AFH so abziehen, daß wieder ein doppeltrechtwinkliges Dreieck übrig bleibt, das nun mit dem Dreieck ACB endlichgleich ist. — Ist auch AC größer als ein Quadrant (s. Fig. 6), dann mögen sich AC und AB zum zweiten Male in A' schneiden; wir verwandeln CBA' in ein doppeltrechtwinkliges Dreieck und erhalten durch Anlegen an die Seite $A'CA$ ein doppeltrechtwinkliges Dreieck AFD, das dem vorgegebenen Dreieck endlichgleich ist.

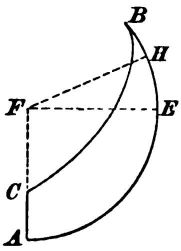


Fig. 5.

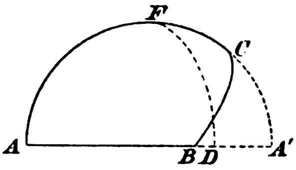


Fig. 6.

Wir haben so den

Satz 3. *Jedes rechtwinklige Dreieck ist einem doppeltrechtwinkligen Dreieck endlichgleich.*

Aus Hilfssatz 2 folgt, daß jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Es ergibt sich also, wenn wir noch Satz 1 zu Hilfe nehmen:

Satz 4. *Jedes Dreieck hat einen positiven sphärischen Exzeß.*

Jedes Dreieck ist ferner mit der Gesamtheit von zwei doppeltrechtwinkligen Dreiecken endlichgleich. Addiert man zur Hälfte jedes solchen Dreiecks die Hälfte des anderen, so folgt:

Satz 5. *Jedes Dreieck ist endlichgleich mit der Gesamtheit von zwei gleichen doppeltrechtwinkligen Dreiecken.*

Ist der sphärische Exzeß des Dreiecks gleich ε, so wird der sphärische Exzeß jedes der doppeltrechtwinkligen Dreiecke gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ und auch der Winkel an ihrer Spitze gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ sein.

Haben wir also zwei Dreiecke mit demselben sphärischen Exzeß, so sind sie mit demselben Paare von doppeltrechtwinkligen Dreiecken endlichgleich und, wie sich daraus ergibt, miteinander endlichgleich. (Denn zwei einem dritten Polygone endlichgleiche Polygone sind miteinander endlichgleich, wie sich in der üblichen, einfachen Weise zeigen läßt.) Wir haben also

Satz 6. *Zwei Dreiecke mit gleichem sphärischem Exzeß sind endlichgleich.*

Zu einem n-Eck läßt sich immer ein solches doppeltrechtwinkliges Dreieck finden, daß 2^{n-2} solcher Dreiecke gerade mit dem n-Eck endlichgleich sind. Wir haben deswegen ebenso wie vorher schließend den

Hauptsatz: *Zwei Polygone mit gleichem sphärischem Exzeß sind endlichgleich.*

Dieses Resultat zusammen mit Satz 2 und Satz 4 erledigt die Lehre vom Inhalte sphärischer Polygone: Satz 2, angewandt auf doppeltrechtwinklige Dreiecke, garantiert bereits die Existenz nicht endlichgleicher Polygone, aus Satz 4 geht hervor, daß der Grundsatz: „Das Ganze kann nicht einem seiner Teile gleich sein" für die Endlichgleichheit gilt. Satz 2 lehrt uns eine „Zerlegungsinvariante" kennen, Satz 6 zeigt, daß es nur *eine* solche Invariante gibt. — Gewöhnlich begnügt man sich mit dem sehr einfach ohne Stetigkeitsaxiom zu beweisenden Satz: $2\triangle ABC +$ Halbkugel $= (A) + (B) + (C)$, wo (A), (B), (C) Kugelzweiecke mit den Winkeln A, B, C bedeuten. Mit Hinzunahme des wohl nicht ohne Schwierigkeiten zu beweisenden „Grundsatzes": „Wenn die Ganzen (endlich-) gleich sind, so sind es auch die Hälften", folgt hieraus Satz 6 und die Möglichkeit, zwei sphärische Dreiecke mit gleichem Exzeß nach Hinzufügung von je einer Viertelkugel in respektive kongruente Teile zu zerlegen. Aber auch, wenn man Satz 2 zu Hilfe nimmt, kann man noch immer nicht den Satz 4 über die Winkelsumme und den daraus folgenden Grundsatz beweisen.

In der Lobatschefskischen Ebene kann man ganz analoge Betrachtungen anstellen, indem man jedes Dreieck in ein Dreieck mit zwei verschwindenden Winkeln verwandelt. Jedoch hat hier die Beweisführung die Voraussetzung, daß es überhaupt Geraden gibt, die einen verschwindenden Winkel miteinander bilden.

Guccia-Medaille.

Der *Circolo Matematico di Palermo* wird bei dem *IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß*, der im Jahre 1908 in Rom stattfinden soll, einen internationalen Preis für Geometrie erteilen. Dieser Preis, der nach seinem Stifter „Guccia-Medaille" heißt, wird aus einer kleinen tragbaren Goldmedaille und einer Summe von 3000 Francs bestehen.

Die Theorie der algebraischen Raumkurven ist bekanntlich seit den Arbeiten, die durch den Steinerschen Preis von 1882 hervorgerufen wurden, vernachlässigt worden. Die großen Fortschritte der Geometrie, welche durch die synthetischen, algebraischen oder funktionentheoretischen Methoden erreicht wurden, haben diese Theorie nicht berührt, so daß weder die fundamentalen Betrachtungen, die in den zitierten Arbeiten begonnen wurden, noch andere Fragen, die man stellen könnte, Gegenstand späterer Arbeiten gewesen sind. Geht man ferner vom dreidimensionalen Raume zu höheren Räumen über, so begegnet man für die algebraischen Kurven (insbesondere was ihre Klassifikation, das Studium der kanonischen Kurven gegebenen Geschlechts usw. angeht) einer Menge von wichtigen Problemen, mit denen sich bis jetzt noch Niemand beschäftigt hat. Auch kennt man über die algebraischen Raumkurven nur wenige Theoreme, die die Realitätsverhältnisse oder einen gegebenen Rationalitätsbereich betreffen.

Betrachtungen dieser Art haben den *Circolo Matematico di Palermo* bewogen, in Übereinstimmung mit den Absichten des Stifters, die „Guccia-Medaille"

> *einer Abhandlung zu erteilen, welche die Theorie der algebraischen Raumkurven wesentlich fördert.*

Hierbei sollen jedoch in keiner Weise die Probleme und Methoden der Untersuchung im voraus beschränkt werden.

Wenn keine der zur Bewerbung eingesandten auf die genannte Theorie bezüglichen Arbeiten des Preises würdig befunden wird, so kann er

> *einer Abhandlung zugesprochen werden, die einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der algebraischen*

Flächen oder anderer algebraischer Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

Die eingereichten Abhandlungen dürfen noch nicht veröffentlicht sein. In einer der vier Sprachen: italienisch, französisch, deutsch oder englisch abgefaßt und, abgesehen von den Formeln, mit der Schreibmaschine geschrieben, sind sie dem Präsidenten des *Circolo Matematico di Palermo vor dem 1ten Juli 1907* in drei Exemplaren einzureichen. Sie müssen mit einem Motto versehen und von einem verschlossenen Umschlag begleitet sein, der außen das Motto und innen Namen und Wohnort des Verfassers zeigt. Die gekrönte Abhandlung wird in den „Rendiconti" oder einer anderen Publikation des *Circolo Matematico di Palermo* abgedruckt. Der Verfasser erhält 200 Separatabzüge kostenfrei.

Wenn überhaupt keine der eingereichten Abhandlungen des Preises würdig befunden wird, so kann dieser einer schon veröffentlichten Arbeit zugesprochen werden, die sich auf die oben genannten Theorien bezieht, falls sie zwischen dem Zeitpunkt der Publikation dieses Programms und dem 1ten Juli 1907 erschienen ist.

Den Preis erteilt der *Circolo Matematico di Palermo* gemäß der Entscheidung einer internationalen Kommission von drei Mitgliedern, die aus den Herren

Max Noether, Professor an der Universität Erlangen,
Henri Poincaré, Professor an der Universität Paris,
Corrado Segre, Professor an der Universität Turin

besteht.

In einer der Sitzungen des *IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, der 1908 in Rom tagt, wird der Bericht der Kommission verlesen, der Preis erteilt und der Name des gekrönten Gelehrten bekannt gegeben werden.

Palermo, den 1. November 1904.

Der Präsident des *Circolo Matematico di Palermo*

M. L. Albeggiani.

Prospekt. **12. Abdruck.**

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I:	ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II:	ANALYSIS, IN 2 TEILEN	H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III:	GEOMETRIE, IN 3 TEILEN	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV:	MECHANIK, IN 2 TEILEN	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
— V:	PHYSIK, IN 2 TEILEN	A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1:	GEODÄSIE UND GEOPHYSIK	PH. FURTWÄNGLER IN POTSDAM UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2:	ASTRONOMIE	K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII:	HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND.	REDAKTION NOCH NICHT BESTIMMT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

☞ Jeder Band ist einzeln käuflich, nicht aber einzelne Teile und Hefte. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II_1, Heft 1—5; Bd. II_2, Heft 1; Bd. III_2, Heft 1—2; Bd. III_3, Heft 1—3; Bd. IV_1, Heft 1—3; Bd. IV_2, Heft 1—2; Bd. V_1, Heft 1; Bd. V_2, Heft 1.

☞ Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

☞ Auf Beschluß der Akademie-Kommission werden von jetzt ab die Hefte steif broschiert und beschnitten ausgegeben.

Bei Gelegenheit der Vollendung des ersten Bandes der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, welcher im August dieses Jahres der internationalen Mathematiker-Versammlung in Heidelberg vorgelegt werden konnte, sei es gestattet, auf den Plan und die bisherige Durchführung dieses großen Unternehmens wiederholt die Aufmerksamkeit zu lenken.

Ursprünglich gedacht als ein kurzes Lexikon der mathematischen Kunstwörter, an deren Erklärung sich die Darlegung der historischen Entwickelung der einzelnen Begriffe anschließen sollte, trat das Werk schon bei seinem ersten genaueren Entwurfe über diesen Rahmen hinaus: Es soll in systematischer Anordnung der einzelnen Gebiete eine Gesamtdarstellung des gegenwärtigen Standes der mathematischen Wissenschaften nach Inhalt und Methode darbieten und dabei sich nicht bloß auf die Gebiete der sogenannten reinen Mathematik beschränken, sondern auch ihre mannigfachen Anwendungen auf Mechanik, Physik, Astronomie, Geodäsie wie in der Technik in einer dem Gelehrten wie dem Praktiker zugänglichen Form mit einbegreifen.

Ein solches Unternehmen konnte nur durch das Zusammenwirken vieler Arbeitskräfte zustande kommen und es ist in der Tat eine gemeinsame Arbeit der deutschen Mathematiker geworden, zu der darüber hinaus auch Forscher des Auslandes, wo Eigenart und Richtung es forderte, herangezogen wurden. Das Kartell der deutschen Akademien — die gelehrten Gesellschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien — haben das Unternehmen in ihren Schutz genommen und durch intellektuelle wie finanzielle Beihilfe gefördert und in seinem Bestande gesichert. Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **G. v. Escherich**-Wien, **O. Hölder**-Leipzig, **F. Klein**-Göttingen, ferner **L. Boltzmann**-Wien, **H. v. Seeliger**-München, **H. Weber**-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-Zürich, **Ph. Furtwängler**-Potsdam, **F. Klein**-Göttingen, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **C. H. Müller**-Göttingen, **K. Schwarzschild**-Göttingen, **A. Sommerfeld**-Aachen und **E. Wiechert**-Göttingen

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

M. Abraham-Göttingen
W. Ahrens-Magdeburg
E. Anding-München
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Berlin
R. Berzolari-Pavia
M. Bôcher-Cambridge, Mass.
G. Bohlmann-Berlin
L. Boltzmann-Wien
L. v. Bortkewitsch-St. Petersburg
E. W. Brown-Haverford
G. Brunel †
G. H. Bryan-Bangor, Wales
H. Burkhardt-Zürich
L. Caspari-Paris
G. Castelnuovo-Rom
C. V. L. Charlier-Lund
F. Cohn-Königsberg i. Pr.
G. Cohn-Wien
C. Cranz-Berlin
E. Czuber-Wien
G. H. Darwin-Cambridge
Th. Descoudres-Leipzig
H. Diesselhorst-Berlin
F. Dingeldey-Darmstadt
R. Emden-München
F. Enriques-Bologna
G. Faber-Traunstein
G. Fano Turin
S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
Ph. Forschheimer-Graz
R. Fricke-Braunschweig
Ph. Furtwängler-Potsdam
F. K. Ginzel-Berlin
M. Grübler-Dresden
C. Guichard-Clermont-Ferrand
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Bryn Mawr Coll., Pa.
P. Heegard-Kopenhagen
L. Henneberg-Darmstadt
K. Hensel-Marburg a. L.
J. v. Hepperger-Wien
H. Hergesell-Straßburg
H. Herglotz-Göttingen
K. Heun-Karlsruhe
D. Hilbert-Göttingen
F. W. Hinrichsen-Aachen
E. W. Hobson-Cambridge
J. H. van't Hoff-Berlin
O. Hölder-Leipzig
S. Hough-Kapstadt
G. Jung-Mailand
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
A. Kneser-Berlin
H. Kobold-Kiel
D. J. Korteweg-Amsterdam
A. Krazer-Karlsruhe
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
G. Landsberg-Heidelberg
Th. Liebisch-Göttingen
H. Liebmann-Leipzig
R. v. Lilienthal-Münster

H. A. Lorentz-Leiden	**S. Pincherle**-Bologna	**E. Study**-Bonn
A. E. H. Love-Oxford	**P. Pizzetti**-Pisa	**K. Sundmann**-Helsingfors
L. Mamlock-Dresden	**F. Pockels**-Heidelberg	**O. Tedone**-Genua
H. M. Macdonald-Cambridge	**L. Prandtl**-Göttingen	**E. Timerding**-Elsfleth i. O.
H. v. Mangoldt-Danzig	**A. Pringsheim**-München	**W. Trabert**-Wien
L. Maurer-Tübingen	**R. Reiff**-Stuttgart	**K. Th. Vahlen**-Königsberg
R. Mehmke-Stuttgart	**C. Reinhertz**-Hannover	**E. Vessiot**-Lyon
W. Fr. Meyer-Königsberg i. Pr.	**F. Ristenpart**-Berlin	**A. Voss**-München
W. Meyerhoffer-Berlin	**K. Rohn**-Leipzig	**G. T. Walker**-Simla (Indien)
G. Mie-Greifswald	**K. Runge**-Göttingen	**E. Wälsch**-Brünn
H. Minkowski-Göttingen	**G. Scheffers**-Darmstadt	**A. Wangerin**-Halle
F. R. Moulton-Chicago	**A. Schmidt**-Potsdam	**E. v. Weber**-München
O. Mügge-Königsberg i. Pr.	**A. Schoenflies**-Königsberg i. Pr.	**H. Weber**-Straßburg i. E.
E. Müller-Wien	**M. Schröter**-München	**J. Wellstein**-Straßburg
E. Netto-Gießen	**H. Schubert**-Hamburg	**E. T. Whittaker**-Cambridge
J. Neuberg-Lüttich	**L. Schulhof**-Paris	**E. Wiechert**-Göttingen
G. v. Niessl-Brünn	**K. Schwarzschild**-Göttingen	**W. Wien**-Würzburg
S. Oppenheim-Prag	**C. Segre**-Turin	**A. Wiman**-Lund
E. v. Oppolzer-Innsbruck	**D. Seliwanoff**-St. Petersburg	**W. Wirtinger**-Wien
W. F. Osgood-Cambridge, [Mass.	**M. Simon**-Straßburg i. E.	**C. W. Wirtz**-Straßburg
P. Painlevé-Paris	**J. Sommer**-Danzig	**H. v. Zeipel**-Pulkowa
E. Papperitz-Freiberg i. S.	**A. Sommerfeld**-Aachen	**J. Zenneck**-Straßburg i E.
V. Pareto-Lausanne	**P. Stäckel**-Kiel	**E. Zermelo**-Göttingen
J. M. Pernter-Wien	**O. Staude**-Rostock	**H. G. Zeuthen**-Kopenhagen
J. Petersen-Kopenhagen	**H. Steinitz**-Charlottenburg	**K. Zindler**-Innsbruck.

Die nachfolgende Inhaltsangabe gewährt einen Gesamtüberblick über den Umfang und die Gruppierung des Stoffes in den einzelnen Bänden; sie zeigt auch, wie weit in nunmehr zehnjähriger Arbeit das Werk in allen seinen Teilen vorangeschritten ist.

Der abgeschlossen vorliegende erste Band umfaßt Arithmetik und Algebra und gibt damit das Fundament auch für die beiden folgenden, der Analysis und der Geometrie gewidmeten Bände, deren Darlegungen er nach mannigfachster Richtung vorbereitet. In der Tat: Die moderne Analysis hat ihre Grundlage in der arithmetischen Theorie der Irrationalzahlen und des Grenzbegriffes reeller wie komplexer Zahlenfolgen. Die Lehre von den algebraischen Funktionen und den algebraischen Raumgebilden knüpft an Invarianten- und Gruppentheorie an. Geometrische und funktionentheoretische Probleme bilden die interessantesten Anwendungen der Zahlentheorie. Auch Wahrscheinlichkeitsrechnung und Differenzenrechnung finden in Problemen und Methoden der Analysis Anwendung und Weiterbau. Umgekehrt entwickeln sich die Methoden des numerischen Rechnens unter Verwendung der mannigfachsten analytischen wie geometrischen Vorstellungen und Lehrsätze.

So zeigt schon dieser erste, den Grundlagen der Zahlenlehre und damit dem abstraktesten Gebiete der mathematischen Forschung gewidmete Band, wie es heute keinen Zweig des mathematischen Wissens gibt, der in seinem Ausbau nicht in lebensvolle Verbindung zu allen übrigen getreten wäre. In der Ausarbeitung der folgenden Bände der reinen und angewandten Mathematik wird dieses Verhältnis noch mannigfach und immer aufs neue zutage treten und von der gegenseitigen Förderung, welche die einzelnen Gebiete erfahren haben, zeugen. Ist doch gerade auf die Darlegung dieses inneren Zusammenhanges der einzelnen Gebiete untereinander ein wesentliches Gewicht bei der Gestaltung der Encyklopädie gelegt worden. Denn, wenn neben der schöpferischen Arbeit des gelehrten Forschers, auf welcher der Fortschritt des Ganzen sich aufbaut, eine zusammenfassende und encyklopädische wie die vorliegende notwendig und bedeutungsvoll erscheint, so ist es gerade dadurch, daß sie den Überblick über das bisher Geschaffene erleichtert, den mannigfach gestalteten Stoff sichtet und in gegenseitige Beziehung bringt und so die Punkte und Richtungen erkennen läßt, an denen neue fruchtbringende Gedankenarbeit einzusetzen hat.

Eine französische Ausgabe der Encyklopädie, gemeinsam von der Firma Gauthier-Villars in Paris und mir unternommen, ist im Erscheinen begriffen. Herr **J. Molk**, Professor an der Faculté des Sciences in Nancy hat die Leitung dieser Ausgabe zunächst für die der reinen Mathematik gewidmeten Bände übernommen, während er für die Herausgabe der Bände der angewandten Mathematik mit den Herren

P. Appell-Paris, vom Institut de France (Mechanik), **A. Potier-Paris**, vom Institut de France (Physik), **Ch. Lallemand**-Paris, vom Bureau des Longitudes (Geodäsie und Geophysik) und **H. Andoyer**-Paris (Astronomie)

in Verbindung trat. — Es ist nicht bloß eine Übersetzung, sondern eine Bearbeitung beabsichtigt, bei welcher die ersten französischen Gelehrten ihre Beteiligung zugesagt haben, und zwar die Herren

H. Andoyer-Paris
D. André-Paris
P. Appell (de l'Inst.)-Paris
R. Baire-Montpellier
E. Borel-Paris
C. Bourlet-Paris
P. Boutroux-Paris
R. Bricard-Paris
E. Cahen-Paris
E. Cartan-Nancy
E. Carvallo-Paris
E. Delassus-Besançon
J. Drach-Poitiers
H. Fehr-Genève
G. Floquet-Nancy
E. Goursat-Paris
C. Guichard-Clermont-Ferrand
J. Hadamard-Paris
C. Jaccottet-Lausanne
G. Kœnigs-Paris
C. A. Laisant-Paris
H. Le Besgue-Rennes
J. Le Roux-Rennes
R. Le Vavasseur-Lyon
E. Maillet-Bourg la Reine
J. Molk-Nancy
M. d'Ocagne-Paris
F. Oltramare-Paris
H. Padé-Bordeaux
P. Painlevé (de l'Inst.)-Paris
V. Pareto-Lausanne
E. Picard (de l'Institut)-Paris
H. Poincaré (de l'Inst.)-Paris
A. Poterin du Motel-Paris
J. Tannery-Paris
P. Tannery-Paris
A. Tresse-Paris
E. Vessiot-Lyon
H. Vogt-Nancy.

Unter voller Erhaltung der Eigenart des deutschen Originals soll dabei in dieser Ausgabe dem Gebrauche des französischen Leserkreises Rechnung getragen und sollen andererseits unter gemeinsamer Mitarbeit der Autoren wie der Bearbeiter die einzelnen Artikel noch mannigfache Ergänzungen, besonders auch bezüglich der Literaturzitate erfahren. — So wird das deutsche Werk in seiner französischen Ausgabe, von der bisher das erste Heft von Band I Teil 1 erschienen ist und über die ich einen besonderen Prospekt ausgegeben habe, noch weiteren Kreisen erschlossen und in ihnen gewürdigt werden.

Leipzig, November 1904.
Poststraße 3.

B. G. Teubner, Verlagsbuchhandlung.

Inhaltsübersicht.

Band I: Arithmetik und Algebra, in 2 Teilen.
Red. von W. Fr. Meyer in Königsberg.

I. Teil.

3e. **Gleichungssysteme: E. Netto** in Gießen und **K. Th. Vahlen** in Königsberg. (Siehe: I. B. 1b und I. B. 3b.)
3f. **Endliche Gruppen linearer Substitutionen: A. Wiman** in Lund.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band I, Teil 2.

C. Zahlentheorie.

1. **Niedere Zahlentheorie: P. Bachmann** in Weimar.
2. **Arithmetische Theorie der Formen: K. Th. Vahlen** in Königsberg.
3. **Analytische Zahlentheorie: P. Bachmann** in Weimar.
4a. **Theorie der algebraischen Zahlenkörper: D. Hilbert** in Göttingen.
4b. **Theorie des Kreiskörpers: D. Hilbert** in Göttingen.
5. **Arithmetische Theorie algebraischer Größen: G. Landsberg** in Heidelberg. (Siehe: I. B. 1 c.)
6. **Komplexe Multiplikation: H. Weber** in Straßburg i. E.

D. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung.

1. **Wahrscheinlichkeitsrechnung: E. Czuber** in Wien.
2. **Ausgleichungsrechnung: J. Bauschinger** in Berlin.
3. **Interpolation: J. Bauschinger** in Berlin.
4a. **Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik: L. v. Bortkewitsch** in St. Petersburg.
4b. **Lebensversicherungs-Mathematik: G. Bohlmann** in Berlin.

E. Differenzenrechnung.

Differenzenrechnung: D. Seliwanoff in St. Petersburg.

F. Numerisches Rechnen.

Numerisches Rechnen: R. Mehmke in Stuttgart.

G. Ergänzungen zum I. Bande.

1. **Mathematische Spiele: W. Ahrens** in Magdeburg.
2. **Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie: V. Pareto** in Lausanne.
3. **Unendliche Prozesse mit komplexen Termen. A. Pringsheim** in München.

Register zu Band I.

Band I, in 2 Teilen, ist vollständig in 8 Heften erschienen:

Heft 1 (A 1—3). [112 S.] 1898. n. ℳ 3.40.
— 2 (A 4—6). [112 S.] 1899. n. ℳ 3.40.
— 3 (B 1a—2). [128 S.] 1899. n. ℳ 3.80.
— 4 (B 2—3c, d). [160 S.] 1899. n. ℳ 4.80.
Heft 5 (B 3e, d—C 6). [208 S.] 1900. n. ℳ 6.40.
— 6 (D 1—F). [271 S.] 1901. n. ℳ 7.20.
— 7 (F—G 1. 2). [127 S.] 1902. n. ℳ 3.60.
— 8 (Einleitung.) [77 S.] 1904. n. ℳ 3.60.

Teil I. [XXXVIII u. 554 S.] 1898—1904. geh. n. ℳ 19.—, in Original-Halbfranz geb. n. ℳ 22.—
Teil II. [X u. S. 555—1197] 1900—1904. geh. n. ℳ 17.—, in Original-Halbfranz geb. n. ℳ 20.—

Band II: Analysis, in 2 Teilen. Red. von H. Burkhardt in Zürich.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

Vorwort zu Band II von H. Burkhardt in Zürich.
Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 1.

A. Analysis reeller Größen.

*1. **Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre: A. Pringsheim** in München.
*2. **Differential- u. Integralrechn.: A. Voss** in München.
*3. **Bestimmte Integrale: G. Brunel** †.
*4. **Gewöhnliche Differentialgleichungen:**
 *4a. **Existenz der Lösungen: P. Painlevé** in Paris.
 *4b. **Integrationsmethoden: E. Vessiot** in Lyon.
*5. **Partielle Differentialgleichungen: E. v. Weber** in München.
*6. **Kontinuierliche Transformationsgruppen: L. Maurer** in Tübingen und **H. Burkhardt** in Zürich.
*7. **Randwertaufgaben:**
 *7a. **Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: M. Bôcher** in Cambridge, Mass.
 *7b. **Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung): H. Burkhardt** in Zürich und **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
 *7c. **Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen: A. Sommerfeld** in Aachen.
*8. **Variationsrechnung: A. Kneser** in Berlin.
 *8a. **Weiterentwickelung der Variationsrechnung in den letzten Jahren: E. Zermelo** in Göttingen und **H. Hahn** in Wien.
*9. **Trigonometrische Interpolation: H. Burkhardt** in Zürich.
*10. **Kugelfunktionen: A. Wangerin** in Halle.
11a. **Unendliche trigonometrische Reihen: H. Burkhardt** in Zürich.
11b. **Allgemeine Reihenentwickelungen: H. Burkhardt** in Zürich.
12. **Funktional-Gleichungen und -Operationen: S. Pincherle** in Bologna.

Ergänzung zum I. Teil des II. Bandes.

13 **Algebraische Analysis: A. Pringsheim** in München und **G. Faber** in Traunstein.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 2

B. Analysis komplexer Größen.

*1 **Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen: W. F. Osgood** in Cambridge, Mass.
*2. **Algebraische Funktionen und ihre Integrale: W. Wirtinger** in Innsbruck.
3. **Elliptische Funktionen: J. Harkness** in Bryn Mawr Coll., Pa.
4. **Automorphe Funktionen: R. Fricke** i. Braunschweig.
5. **Abel'sche Funktionen: J. Wellstein** in Straßburg.
6. **Thetafunktionen: A. Krazer** in Karlsruhe und **W. Wirtinger** in Wien.
7. **Lineare Differentialgleichungen: H. Burkhardt** in Zürich.
8. **Nichtlineare Differentialgleichungen: P. Painlevé** in Paris.

Ergänzung zum II. Teil des II. Bandes.

9. **Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen: K. Hensel** in Marburg a/L.

Register zu Band II.

Bisher erschien:

Teil I Heft 1 (A 1—3). [160 S.] 1899. n. ℳ 4.80.
— I — 2/3 (A 3—5). [239 S.] 1900. n. ℳ 7.50.
Teil I Heft 4 (A 4—7 c). [160 S.] 1900. n. ℳ 4.80.
— I — 5 (A 8—10). [199 S.] 1904. n. ℳ 6.—
Teil II Heft 1 (B 1. 2). [160 S.] 1901. n. ℳ 5.20.

Band III: Geometrie, in 3 Teilen. Red. von W. Fr. Meyer in Königsberg.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

A. Rein geometrische Theorien.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

†1. **Prinzipien der Geometrie: F. Enriques** in Bologna.
†2. **Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“: H. v. Mangoldt** in Danzig.
3. **Elementargeometrie: M. Simon** in Straßburg i. E.
4a **Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie: G. Fano** in Turin.
4b. **Die Gruppentheorie als geometrisches Klassifikationsprinzip: G. Fano** in Turin.
5. **Die verschiedenen Koordinatensysteme: E. Müller** in Wien.
6. **Systeme geometr. Analyse: H. Burkhardt** in Zürich
7. **Analysis situs: P. Heegaard** in Kopenhagen

8. **Raumeinteilungen und Polyeder: E. Steinitz** in Charlottenburg.
9. **Projektive Geometrie: A. Schoenflies** in Königsberg.
10. **Geometrie d. Kreise u. Kugeln: H. Burkhardt** in Zürich.
11. **Darstellende Geometrie: E. Papperitz** in Freiberg i. S. (Mit Anhang üb. graphische Darstellungen u. Modelle.)
12. Elementargeometrie vom neueren Standpunkte aus: **J. Sommer** in Danzig.
13. Elementare nicht-euklidische Geometrie: **M. Simon** in Straßburg i. E.
14. Dreiecksgeometrie: **J. Neuberg** i. Lüttich.

II. Teil.

C. Algebraische Geometrie.

*1. Kegelschnitte: **F. Dingeldey** in Darmstadt.
*2. Flächen II. Ordnung: **O. Staude** in Rostock.
3. Abzählende Methoden: **H. G. Zeuthen** in Kopenhagen.
4. Allgemeine Theorie d. höheren ebenen algebraischen Kurven: **L. Berzolari** in Pavia.
5. Spezielle ebene algebr. Kurven: **G. Kohn** in Wien.
6. Allgem. Theorie d. höheren algebraischen Flächen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Bologna.
7. Spezielle algebraische Flächen: **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
8. Algebraische Raumkurven u. abwickelbare Flächen: **K. Rohn** in Leipzig.
9 Mehrdimensionale Räume: **C. Segre** in Turin.
10. Liniengeometrie und Geometrie höherer Raumelemente: **E. Wälsch** in Brünn.
11. Algebraische Transformationen u. Korrespondenzen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Bologna.

III. Teil.

D. Differentialgeometrie.

*1, 2. Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Kurven u. Flächen: **H. v. Mangoldt** in Danzig.
*3. Kurven auf den Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster.
*4. Besondere transcendente Kurven: **G. Scheffers** in Darmstadt.
*5. Besondere transcendente Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster.
*6a. Abwickelung und Abbildung zweier Flächen auf einander: **A. Voss** in München.
6b. Andere Differentialgleichungen der Geometrie: **C. Guichard** in Clermont-Ferrand.
7. Berührungstransform.: **G. Scheffers** in Darmstadt.
8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen: **H. Liebmann** in Leipzig.
9. Differentielle Liniengeometrie u. Geometrie höherer Raumelemente: **E. Wälsch** in Brünn.
10. Differentialgeometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten: **P. Stäckel** in Kiel.
11. Approximative Integration der Differentialgleichungen: **K. Heun** in Karlsruhe.

E. Ergänzung zum III. Bande.

12. Zusammenfassende Entwicklungen über den Kugelkreis: **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
13. Das Nullsystem in seiner geometrischen Bedeutung: **K. Zindler** in Innsbruck.

☛ Bisher erschien:

Teil II Heft 1 (C 1.) [160 S.] 1903. n. ℳ 4.80.
— II — 2 (C 2.) [96 S.] 1904. n. ℳ 2.80.
Teil III Heft 1 (D 1—3). [183 S.] 1902. n. ℳ 5 40.
— III — 2,3 D 4—6 a). [254 S.] 1903. n. ℳ 6.80

Band IV: Mechanik, in 2 Teilen.
Red. von F. Klein und C. H. Müller in Göttingen.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

Vorwort zu Band IV von **F. Klein** in Göttingen.
Inhaltsverzeichnis von Band IV, Teil 1.

A. Grundlegung der Mechanik.

*1. Die Prinzipien der rationellen Mechanik: **A. Voß** in München.

B. Mechanik der Punkte und starren Systeme.

I. Behandlung elementarer Fragen in geometrischer Form.

*2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers: **E. Timerding** in Elsfleth i. O.
*3. Kinematik: **A. Schoenflies** in Königsberg, mit einem Zusatze von **M. Grübler** in Dresden.
*4. Die Geometrie der Massen: **G. Jung** in Mailand.
*5. Graphische Statik: **L. Henneberg** in Darmstadt.
6. Die elementare Kinetik: **J. Petersen** in Kopenhagen und **P. Stäckel** in Kiel.

II. Anwendungen, mit Berücksichtigung der störenden Einflüsse.

†7. Die Mechanik der einfachsten physikal. Apparate u. Versuchsanordnungen: **Ph. Furtwängler** i. Potsdam
†8. Physiologische Mechanik: **O. Fischer** in Leipzig.
†9. Spiel und Sport: **G. T. Walker** in Simla (Indien).
10. Dynamische Probleme der Maschinentechnik: **K. Heun** in Karlsruhe

III. Behandlung beliebiger Systeme von endlichem Freiheitsgrad in analytischer Allgemeinheit.

11. Entwickelung allgem. Methoden: **P. Stäckel** i Kiel.
12. Spezialdiskussion dynamischer Probleme: **P. Stäckel** in Kiel.
13. Rotation starrer Körper und Verwandtes: **P. Stäckel** in Kiel.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band IV, Teil 2.

C. Mechanik der deformierbaren Körper.

I. Analytisch-geometrische Hilfsmittel.

*14. Geometrische Grundbegriffe: **M. Abraham** in Göttingen.

II. Hydrodynamik.

*15. Physikalische Grundlegung: **A. E. H. Love** in Oxford.
*16. Theoretische Ausführungen: **A. E. H. Love** in Oxford.
*17. Aerodynamik: **S. Finsterwalder** in München.
*18. Ballistik: **C. Cranz** in Berlin.
19. Hydraulik, erster Teil: Das Strömen von Wasser in Röhren und Kanälen: **Ph. Forchheimer** in Graz.
20 Hydraulik, zweiter Teil: Motoren und Pumpen: **M. Grübler** in Dresden.
21. Schiffsbewegung: **A. Kriloff** in St. Petersburg.

III. Elastizität und Festigkeitslehre.

22 Theoretische Behandlung der statischen Probleme: **O. Tedone** in Genua.
23. Schwingungen, insbesondere Akustik: **H. Lamb** in Manchester.
24. Die Statik der technischen Konstruktionen: **L. Prandtl** in Göttingen u N. N.
25. Theorie der auf elastischer Wirkung beruhenden Meßapparate: **Ph. Furtwängler** in Potsdam.
26. Physikalische Grundlagen der Elastizitäts- und Festigkeitslehre: **A. Sommerfeld** in Aachen.

D. Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme.

27. Das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: **L. Boltzmann** in Wien.

☛ Bisher erschien:

Teil I Heft 1 (1). [121 S.] 1901. n. ℳ 3.40.
— I — 2 (2). [156 S.] 1902. n. ℳ 4.60.
Teil I Heft 3 (3). [156 S.] 1903. n. ℳ 4.60.
— II — 1 (14—16). [147 S.] 1901. n. ℳ 3.80.
Teil II Heft 2 (17. 18). [129 S.] 1903. n. ℳ 3 80.

Band V: Physik, in 2 Teilen. Red. von A. Sommerfeld in Aachen.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

Vorwort zu Band V von A. Sommerfeld in Aachen
Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil I.

A. Einleitung.

*1. **Maß und Messen: C. Runge** in Göttingen.
*2. **Theorie der Gravitation: J. Zenneck in Straßburg** i. E.

B. Thermodynamik.

*3. **Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik: G. H. Bryan in Bangor, Wales.**
†4. **Dissipation der Energie, insbesondere Wärmeleitung: E. W. Hobson** in Cambridge **und H. Dießelhorst in Berlin.**
†5. **Technische Wärmetheorie: M. Schröter in München.**

C. Molekularphysik.

†6. **Chemische Atomistik: F. W. Hinrichsen in Aachen und L. Mamlock in Dresden.**
7. **Kristallographie.**
   7a) **Kristall-Berechnung u.-Zeichnung: Th. Liebisch in Göttingen.**
   7b) **Symmetrie- und Strukturtheorien: A. Schoenflies und O. Mügge in Königsberg i. Pr.**
8. **Kinetische Theorie d. Materie: L. Boltzmann in Wien.**
9. **Kapillarität u. Kohäsion: H. Minkowski in** Göttingen
10. **Nähere, insbesondere graphische Theorie der Zustandsgleichung für spezielle Stoffe: H. Kamerlingh-Onnes in** Leiden.
11. **Physikalische und Elektrochemie: J. H. van't Hoff in Berlin.**

II. Teil.

D. Elektrizität und Optik.

Physikalische Grundlegung der Elektrizitätslehre.

*12. **Standpunkt d. Fernwirkung,** die Elementargesetze: **R. Reiff in Stuttgart und A. Sommerfeld in Aachen.**
*13. **Standpunkt d. Fernwirkung: Maxwells Theorie: H. A. Lorentz in Leiden.**
*14. **Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie: H. A. Lorentz in Leiden.**

Physikalische Grundlegung der Optik.

15. **Ältere Theorie: A. Wangerin in Halle a. S.**
16. **Elektromagnetische** Lichttheorie: **W. Wien in Würzburg.**
17. **Hineinspielen der Molekularphysik und der Elektronentheorie in die Optik: W. Wien in Würzburg.**

Mathematische Spezialausführungen zur Elektrizitätslehre.

18. **Elektrostatik und** Magnetostatik: **H. M. Macdonald in Cambridge.**
19. **Beziehungen zwischen Elektrizität und elastischer Deformation: F. Pockels in Heidelberg.**
20. **Stationäre und langsam veränderliche Felder: Th. Des Coudres in Leipzig.**
21. **Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme und Magnetismus: H. Diesselhorst in Berlin.**
†22. **Rasch veränderliche Felder: M. Abraham in Göttingen.**
23. **Elektrotechnik: N. N.**

Mathematische Spezialausführungen zur Optik.

24. **Strahlenoptik und optische Instrumente: S. Finsterwalder in München.**
25. Wellenoptik (Interferenz und Beugung): **N. N.**
26. **Kristalloptik: F. Pockels** in Heidelberg.

E. Schlußwort.

27. Allgemeine physikalische Anschauungen und Methoden: **A. Sommerfeld in Aachen und G. Mie in Greifswald.**

☛ Bisher erschien:

Teil I Heft 1 (1—3). [160 S.] 1903. n. *M.* 4.80. | Teil II Heft 1 (12—14). [280 S.] 1904. n. *M.* 8.—

Band VI, I. Teil: Geodäsie und Geophysik. Red. von Ph. Furtwängler in Potsdam und E. Wiechert in Göttingen.

† unter der Presse.

Vorwort zu Band VI, Teil 1 von E. Wiechert in Göttingen.
Inhaltsverzeichnis von Band VI, Teil 1.

A. Geodäsie.

†1. **Niedere Geodäsie: C. Reinhertz** in Hannover.
2. **Besondere** Ausführungen zur Photogrammetrie: **S. Finsterwalder** in München.
3. **Höhere Geodäsie: P. Pizetti in** Pisa.
4. **Kartographie: N. N.**
5. **Nautik: N. N.**

B. Geophysik.

6. **Massenverteilung und Bewegung des Erdkörpers: H. Hergesell in** Straßburg.
7. Dynamische Geologie: **E. Wiechert in Göttingen.**
8. **Theorie der Hydrosphäre: G. H. Darwin in Cambridge und S. Hough** in Capstadt.
9. **Die Optik der** Atmosphäre: **J. M. Pernter in Wien.**
10. **Dynamische Meteorologie: W. Trabert in Wien.**
11. Erdmagnetismus und verwandte Erscheinungen: **A. Schmidt** in Potsdam.

Band VI, 2. Teil: Astronomie. Red. von K. Schwarzschild in Göttingen.

† unter der Presse.

Vorwort zu Band VI, Teil 2 von **K. Schwarzschild** in **Göttingen.**
Inhaltsverzeichnis von Band VI, Teil 2.

A. Sphärische Astronomie.

I. Theorie der Koordinaten.

†1. **Festlegung** der Koordinatensysteme, absolute und relative Koordinaten: **E. Anding** in München
†2. **Reduktion** der beobachteten Örter der Sterne Korrektionen für Refraktion, Präzession, Nutation, Aberration, Parallaxe, Polhöhenschwankungen): **F. Cohn in Königsberg** i/Pr.
3. **Besondere** Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion): **E. v. Oppolzer in Innsbruck.**

II. Theorie der Instrumente.

4a. **Die astronomischen** Winkelmeßinstrumente. **F. Ristenpart** in Berlin.
4b. Behandlung der systematischen u. zufälligen **Fehler: F. Ristenpart** in Berlin.
5. **Uhren und** Chronometer: **L. Caspari in Paris**

III. Spezielle Ausführungen u. Anwendungen.

6. Geographische Ortsbestimmung: **C. W. Wirtz** in Straßburg i. E.
7. Sonnen- und Mondfinsternisse. **Finsternisse der** Jupitertrabanten. Schatten des **Saturnringes: F. K. Ginzel** in Berlin.
8. Chronologie: **F. K. Ginzel in Berlin.**

B. Mechanik des Himmels.

I. Bahnbestimmung.

9. **Bahnbestimmung** der Planeten und **Kometen: G. Herglotz** in Göttingen.
10 Meteore: Ihre Bahnen und ihre Beziehungen zu den Kometen: **G. v. Niessl** in Brünn.
11. Doppelsterne und Trabanten. Visuelle und **spektrographische** Doppelsterne: **J. v. Hepperger in Wien.**

II. Störungen der Umlaufsbewegungen.

IIa. Analytische Entwickelung d. Störungen

12 Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen: **E. T. Whittaker** in Cambridge.

13. **Entwickelung der Störungsfunktion: H. v. Zeipel in Pulkowa.**
14. **Große Planeten: C. V. L. Charlier in Lund.**
15. **Kleine Planeten: K. Sundmann in Helsingfors.**
15a. Gyldénsche Theorie: **K. Sundmann in Helsingfors.**
16. Kometen: **L. Schulhof in Paris.**
17. Erdmond: **E. Brown in Haverford.**
18. Die übrigen Satelliten: **N. N.**
19. Die Bestimmung astronomischer Konstanten: **J. Bauschinger** in Berlin.

II b. Numerische Berechnung aller Störungen.

20. Spezielle Störungen der Planeten und Kometen. Numerische Behandlung besonderer Fälle des Dreikörperproblems. Mehrfache Fixsternsysteme: **C. Burrau** in Kopenhagen.

III. Gestalt und Rotation der Himmelskörper.

21. Figur der Planeten, des Mondes, des Saturnringes, der Kometen: **S. Oppenheim** in Prag.
22. Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation für starre Erde. Libration des Mondes: **K. Schwarzschild** in Göttingen.

IV. Allgemeine Fragen.

23. Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes: **S. Oppenheim in Prag.**

C. Stellarastronomie.

24. Scheinbare Verteilung der Sterne; Sternkataloge; Sternkarten: **H. Kobold** in Kiel.
25. Parallaxen und räumliche Verteilung der Sterne; Doppelsterne, vielfache Sterne, Sternhaufen, Nebel: **H. Kobold** in Kiel.
26. Eigenbewegung der Sterne und der Sonne: **E. Anding** in München.

D. Astrophysik.

27. Photometrie und ihre Anwendungen: **E. Anding** in München.
28. Thermodynamik der Himmelskörper (Sonnentheorie, neue Sterne): **R. Emden** in München.
29. Kosmogonie. (Kant, Laplace, G. Darwin). Widerstehendes Mittel. Spekulative Ausblicke: **F. R. Moulton** in Chicago.

Band VII (Schlußband): Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd. [Redaktion noch nicht bestimmt.]

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung **Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** nimmt die Redaktion des **Archivs der Mathematik und Physik** (herausg. von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, M. Bôcher, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, Th. Vahlen, K. v. Wesendonck, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.

BESTELL-ZETTEL.

Bei der Buchhandlung von . . . .

in . . . . bestelle ich hiermit . . . . . . Exemplar der

ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

(Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3.)

In 7 Bänden. Jeder Band ist einzeln käuflich.

Lex.-8. Alljährlich etwa 4 Hefte zu je 10 Druckbogen. Preis des Heftes: 4—5 ℳ n.

Band I II III IV V VI 1 VI 2 VII

Ferner je nach Vollständigwerden eines Bandes die entsprechende Einbanddecke.

Ort, Datum, Wohnung: Unterschrift:

. . . .

Das nicht Gewünschte bitte gefl. durchzustreichen

*) Man beachte diese Berichtigungen beim Vergleich des Textes mit den Anmerkungen.

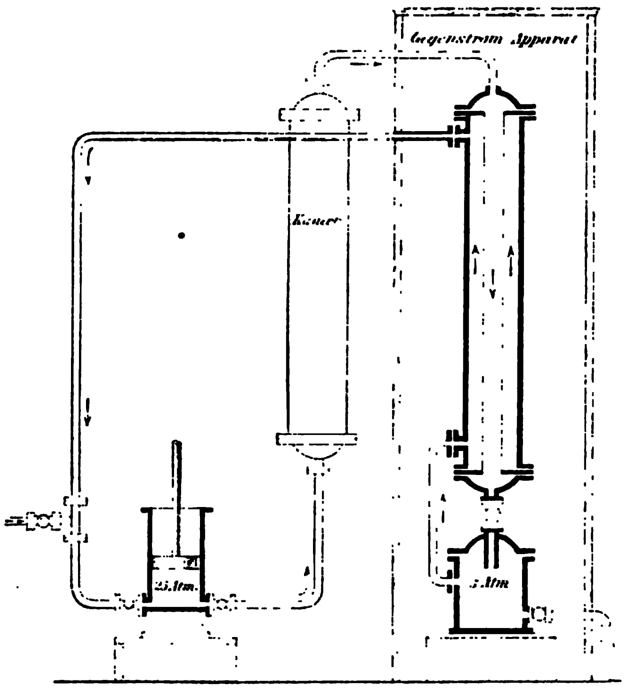


Fig. 113

Das vorliegende Buch ist unmittelbar aus dem praktischen Unterricht in den oberen Klassen der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule zu Berlin hervorgegangen und den Bedürfnissen dieses Unterrichts angepaßt, wie sie sich nach der zugemessenen Stundenzahl und der durch die Lehrpläne vorgeschriebenen Pensenverteilung ergeben. Dieser Unterricht wurde seit einer Reihe von Jahren so gehandhabt, daß nach der ausführlichen Besprechung und der experimentellen Begründung eines neuen Gesetzes die erhaltenen Resultate in präziser aber möglichst gedrängter Form den Schülern diktiert oder bei leichteren Stoffen von den Schülern nach kurzen Notizen selbständig ausgearbeitet wurden. Die Schüler erhielten so Hefte, die, meist mit großer Sorgfalt geführt, ihnen eine bequeme Wiederholung und eine sichere Aneignung des Stoffes ermöglichten. Die Wiederholungen, bei denen von den Schülern freier Vortrag gefordert wurde, fanden in jeder Stunde und in größerem Maßstabe nach Abschluß eines jeden Kapitels statt. Die erwähnten Ausarbeitungen bildeten die Grundlage für das vorliegende Buch.

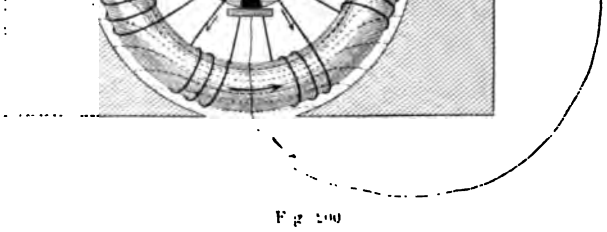


Fig. 200

Bei der Auswahl des Stoffes aus der großen Menge der in den meisten Lehrbüchern behandelten physikalischen Erscheinungen und Gesetze war außer der Wichtigkeit des Gegenstandes das in der Mathematik längst anerkannte Prinzip maßgebend, die Schüler zur Selbsttätigkeit zu erziehen. Diese besteht hier in der Lösung mathematisch-physikalischer Aufgaben und in Laboratoriumsübungen. Alle diejenigen Gebiete, welche — nach den bisherigen Erfahrungen des Verfassers — von den Schülern nur rezeptiv verarbeitet werden, welche also weder anregende Aufgaben bieten noch durch Laboratoriumsübungen den Schülern näher gebracht werden können, sind demnach ausgeschlossen worden. Hierher gehören unter anderem auch die Meteorologie und die Elektrostatik. Das letztere, in jüngster Zeit besonders eifrig kultivierte Gebiet würde in den oberen Klassen der Realanstalten eine genaue Besprechung der elektrostatischen Einheiten, die Messung derselben und ihre Vergleichung mit dem elektromagnetischen Maßsystem erfordern. Das Ziel aber, der Mehrzahl der Schüler eine klare Auffassung und Übersicht dieser komplizierten Verhältnisse zu verschaffen, scheint dem Verfasser nur mit einem unverhältnismäßig großen Aufwand an Zeit und Mühe erreichbar zu sein, zumal bei den jetzigen Lehrplänen die Elektrizitätslehre in Obersekunda behandelt werden soll. Sollten in Zukunft, wie es den Wünschen vieler Physiklehrer entspricht, die Lehrpläne dahin abgeändert werden, daß der Obersekunda die Lehre von der Wärme und die geometrische Optik, der Unterprima die Mechanik und der Oberprima die theoretische Optik und die Lehre von der Elektrizität zugewiesen werden, dann allerdings würde die Elektrizitätslehre eine gründlichere Behandlung erfahren können.

Während der Lehrgang in der Mathematik einen lückenlosen, streng logischen Aufbau erfordert, muß der Versuch, dieses Prinzip auch im physikalischen Unterricht durchzuführen, wenn nicht an inneren Gründen so doch, nach den Erfahrungen des Verfassers, daran scheitern, daß den Schülern die Freude am Physikunterricht stark beeinträchtigt wird. Aus diesem Grunde verschmäht es der Verfasser nicht, um schwierige Verhältnisse übersichtlich darzustellen, den streng logischen Aufbau preiszugeben. Es werden Instrumente praktisch benutzt (Voltmeter, Nikolsches Prisma), bevor ihre Wirkungsweise den Schülern genau verständlich gemacht werden kann. Es werden die elektrischen Maßeinheiten vom Beginne der Elektrizitätslehre an dem Namen nach eingeführt, im dritten Kapitel wird ihre rein technische Messung besprochen und erst als Abschluß der Elektrizitätslehre ihre Herleitung aus dem absoluten Maßsystem gegeben. (Eine Änderung des Lehrplans in dem oben ausgesprochenen Sinne würde gestatten, die Elektrizitätslehre von Anfang an wissenschaftlicher zu begründen.) Während es bei den elektrischen Einheiten in der Schule mehr auf praktische Anschauung als auf streng wissenschaftliche Begründung ankommt, ist das Umgekehrte in der Mechanik der Fall. Diese soll von dem absoluten Maßsystem gleichsam durchtränkt werden; bei jedem Schritt vorwärts soll man sich über die Dimensionen Rechenschaft ablegen (Helmholtz). Um dieser Forderung zu genügen stellt der Verfasser das [C.G.S]-System als geschlossenes Kapitel an den Anfang der Mechanik und übt dasselbe durch Beispiele so lange, bis seine selbständige Handhabung den Schülern keine Schwierigkeit mehr bereitet. Die knappe Fassung der Sätze ist, wie gesagt, das Resultat einer ausführlichen Besprechung. Ob sich diese mehr in historischer, mathematischer, philosophischer oder technischer Richtung bewegt, kann der Geschmacksrichtung des Lehrers überlassen werden. Zum Selbststudium der Physik ist das Buch nicht geeignet, aber ebensowenig soll es beim Gebrauch in der Schule die Tätigkeit des Lehrers ersetzen. Sein Erfolg beim Unterricht wird in erster Linie von der Persönlichkeit des Lehrers abhängen.

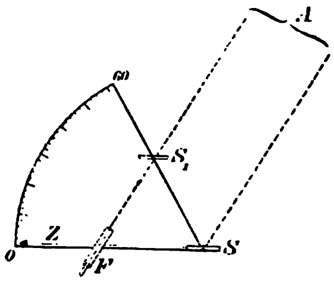


Fig. 273a.

Während der Hauptteil den eisernen Bestand des Wissenswerten enthält, kleidet der Verfasser alles Wissenswerte zweiten Ranges in die Form von fakultativen Aufgaben und Übungen. Aufgaben, welche durch Einsetzen gegebener Zahlenwerte in bekannte Formeln zu lösen sind, oder welche nur in ihrer mathematischen Entwicklung Schwierigkeiten bieten, sind im allgemeinen vermieden. Der Verfasser war bestrebt nur solche Aufgaben aufzunehmen, deren Lösung eine gewisse Selbständigkeit im physikalischen Denken erfordert, und welche in ihren Resultaten auch den Zahlenwerten nach ein physikalisches Interesse bieten. Da die meisten physikalischen Größen nur auf wenige Dezimalstellen bekannt sind, können fast alle Aufgaben mit Hilfe der kleinen dem Buche beigegebenen vierstelligen Logarithmentafel gelöst werden. Die Aufgaben sind inhaltlich alle verschieden; es wird somit dem Lehrer keine Schwierigkeiten bieten, aus denselben eine große Anzahl anderer ähnlicher Aufgaben zu kombinieren.

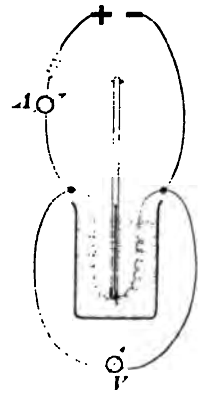


Fig 151

Die Laboratoriumsübungen sind sämtlich von den Schülern der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule mit den Apparaten der Schulsammlung unter Aufsicht des Verfassers ausgeführt worden. Sie sind zwar den einzelnen Paragraphen angegliedert; da sie jedoch dem Wesen der Sache nach oft verschiedene Gebiete berühren, so brauchen sie nicht etwa stets in der gegebenen Reihenfolge bearbeitet zu werden. Die passende Auswahl und die Abänderung der Übungen nach Maßgabe der vorhandenen Apparate muß dem Lehrer überlassen bleiben.

Bestimmung der spezifischen Wärme.

Mischungsmethode

a) Mischungsmethode. Ein dünnwandiges Kalorimetergefäß mit empfindlichem Thermometer habe das Gewicht r kg und die spezifische Wärme s. In demselben befinden sich q kg Wasser von t^0. Der zu untersuchende Körper vom Gewicht p kg und der spezifischen Wärme x werde auf die Temperatur $t_1{}^0 (> t^0)$ erwärmt und in das Kalorimeter eingesenkt. Die mit Hilfe eines Rührers schnell erreichte Endtemperatur sei τ^0. Dann hat der zu untersuchende Körper abgegeben $px(t_1 - \tau)$ Kal., das Wasser hat aufgenommen $q(\tau - t)$ Kal., das Kalorimeter hat aufgenommen $rs(\tau - t)$ Kal. Wir machen die Annahme, daß Leitung und Strahlung des Kalorimetergefäßes zur Umgebung hin vermieden werden; dann gilt die Gleichung:

$$px(t_1 - \tau) = (q + rs)(\tau - t).$$

Das Kalorimeter nimmt bei diesem Versuche ebensoviel Wärme auf, wie rs kg Wasser aufnehmen würden; rs heißt deshalb der **kalorimetrische Wasserwert** des Gefäßes. Derselbe kann berechnet oder durch Vorversuche mit Körpern von bekannter spezifischer Wärme ermittelt werden.

Aufg.

Aufg. 1. Gießt man 0,2 kg Wasser von 50° zu 0,3 kg Wasser von 20°, welche sich in einem Kalorimeter befinden, so ist die Endtemperatur 30° Berechne den Wasserwert des Kalorimeters.

Aufg. 2. In diesem Kalorimeter befinden sich 300 g Wasser von 24°. Bringt man 360 g Eisen von 90° hinein, so erhält man die Endtemperatur 30°. Wie groß ist die spezifische Wärme des Eisens?

Aufg. 3. Man erhitze 43,6 g Eisen bis zu beginnender Rotglut und bringe sie dann in das Kalorimeter, welches 300 g Wasser von 24° enthält. Welches war die Temperatur des Eisens, wenn die Endtemperatur 30° beträgt?

Aufg. 4. In 40 ccm Wasser von 100° wird ein Thermometer von der Temperatur 20° gebracht, welches 0,84 ccm Glas und 0,45 ccm Quecksilber enthält. Welche Temperatur zeigt das Thermometer an?

Wasserwert

Übg. 1. Gebraucht wird: Kalorimeter. Thermometer für fünftel Grade. Kaltes Wasser. Mensur. Siedendes Wasser. Einige Stücke Kupfer und Blei an dünnen Drähten aufgehängt. Wage.

Gieße aus der Mensur q kg Wasser in das Kalorimeter. Miß die Temperatur: t^0. Wäge ein Kupferstück: p kg. (Sp. Wärme $s = 0{,}093$). Senke dasselbe in siedendes Wasser ($t_1 = 100^0$). Hebe es nach einiger Zeit heraus, tupfe es schnell ab und senke es in das Kalorimeter. Rühre und lies die Endtemperatur τ^0 ab. Berechne den Wasserwert des Kalorimeters x. Führe diese Messungen für die gleiche Wassermenge aber verschieden große Kupfer- und Bleistücke aus und nimm den Mittelwert der gefundenen Werte x. Beispiel:

$q = 0{,}45$ kg. $t = 16{,}8^0$. Kupfer $s = 0{,}093$. $p = 0{,}1072$ kg.
$t_1 = 100^0$. $\tau = 18{,}2^0$. $x = 0{,}132$ kg

$q = 0{,}45$ kg. $t = 15{,}6^0$. Blei $s = 0{,}032$. $p = 0{,}3154$ kg.
$t_1 = 100^0$. $\tau = 17^0$. $x = 0{,}148$ kg

Mittel 0,140 kg

Probeseite.

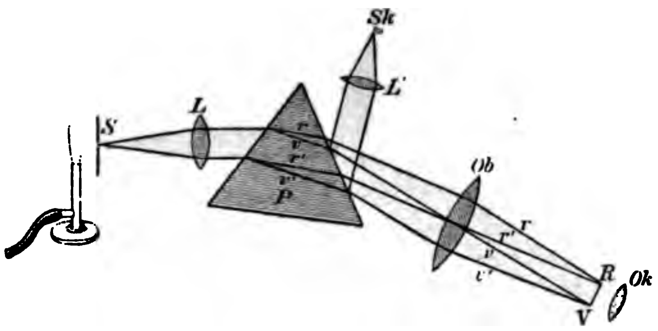


Fig. 314.

Inhaltsverzeichnis.

C. Elektrizität.

D. Akustik.

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS.

IN 4 HEFTEN: HEFT III.

DIE STÖRENDEN EINFLÜSSE. ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE ANWENDUNGEN.

Nach längerer Pause, welche durch meinen Übergang in ein neues Lehramt bedingt wurde, folgt auf das zweite Heft der Theorie des Kreisels (erschienen 1898) nunmehr ein drittes Heft. Dasselbe bildet nicht, wie es beabsichtigt war, den Schluß des Werkes; es zeigte sich nämlich, daß sich der Stoff außerordentlich dehnte, sobald das allgemeine mathematische Schema der Theorie, gemäß dem ursprünglichen Plane des Werkes, auf die besonderen Bedingungen des Versuches oder auf die mannigfachen Fragestellungen der verschiedenen an der Kreiseltheorie interessierten Spezialwissenschaften angewandt wurde. Deshalb sind in diesem Hefte von den Anwendungen der Kreiseltheorie nur diejenigen auf Astronomie und Geophysik zur Darstellung gekommen; die technischen und physikalischen Anwendungen verbleiben für ein viertes (letztes) Heft.

Während sich der Beginn der vorliegenden Lieferung inhaltlich an die vorangehenden Kapitel anlehnt und in einem Nachtrag zu Kap. VI den auf der Horizontalebene spielenden Kreisel behandelt (durch Näherungsrechnungen mit strenger Fehlerabschätzung), geht der Inhalt des Kapitels VII wesentlich über den Kreis derjenigen Probleme hinaus, welche in der analytischen Mechanik idealer Mechanismen behandelt zu werden pflegen. Hier werden die allgemeinen Erfahrungen über die Wirkung der Reibungseinflüsse dargestellt und im Anschlusse daran die Reibung im Stützpunkte des Kreisels und deren Wirkung, das Auf-richten der Kreiselaxe, ausführlich diskutiert. Da einerseits die erfahrungsmäßigen Grundlagen für den Ansatz der Reibungsprobleme nicht sehr sicher sind, da andrerseits die mathematischen Schwierigkeiten bei der strengen Durchführung des Ansatzes sehr groß sein würden, so wird die Behandlung zum Teil auf graphischem Wege, mit Zuhilfenahme von Vernachlässigungen und Näherungsmethoden durchgeführt, wie solche bereits an früheren Stellen der Kreiseltheorie wiederholt empfohlen wurden. Die Schärfe dieser Methoden reicht völlig aus, sofern man als eigentliches Ziel im Auge behält: von den in der Wirklichkeit zu beobachtenden Erscheinungen ein klares qualitatives und ein innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtungen genaues quantitatives Bild zu entwerfen. Neben der Reibung im Stützpunkte werden als weitere, die ideale Kreiselbewegung entstellende Ursachen der Luftwiderstand, die Elastizität des Kreiselmaterials und der Unterlage berücksichtigt. Hierbei waren zum Teil bereits die Rücksichten auf spätere Anwendungen maßgebend, zum Teil sollten diese Untersuchungen als ein Beispiel zur Mechanik der wirklichen Erscheinungen oder, wie es hier gelegentlich ausgedrückt wird, zur irdischen Mechanik dienen (im Gegensatz zur himmlischen Mechanik, in welcher die hier behandelten Einflüsse meist nicht in Betracht kommen, oder zur reinen analytischen Mechanik, in welcher solche Einflüsse zu Gunsten der Eleganz der mathematischen Entwickelung gewöhnlich vernachlässigt werden). In einem Nachtrag zu diesem Kapitel wird sodann, unter Hinzuziehung von Beobachtungsmaterial, die Behandlung des auf der Ebene spielenden Kreisels mit Rücksicht auf die Reibung ergänzt.

Kapitel VIII behandelt in einem ersten Abschnitt die astronomischen Anwendungen der Kreiseltheorie, in einem zweiten die geophysikalischen.

In den klassischen Problemen der Präcession und der durch die Mondbewegung erzwungenen Nutation konnten füglich neue Ergebnisse nicht beigebracht werden. Der Gegenstand ist von altersher so erschöpfend behandelt worden, daß die vorliegende Darstellung lediglich darauf hinzuzielen hatte, die für den Nichtfachmann nicht immer durchsichtige Darstellungsweise der Astronomen durch ein anschaulicheres Verfahren zu ersetzen. Das Mittel hierzu bot eine Methode von Gauß zur Störungsrechnung, welche hier nach verschiedenen Richtungen ausgebaut wird.

Im Gegensatz hierzu sind die in dem geophysikalischen Abschnitt untersuchten Probleme zum Teil jüngsten Datums. Es handelt sich hier namentlich um die freien Nutationen der Erdaxe, deren Periode von Chandler festgestellt wurde, und weiter um die Erscheinung der Polschwankungen überhaupt. Sowohl in der Darstellung des objektiven Sachverhaltes wie in der Erklärung desselben dürfte die hier gebotene Behandlung entschiedene Fortschritte aufweisen. Wegen der grundlegenden Wichtigkeit der Frage wurden bei der Erklärung der vierzehnmonatlichen Chandlerschen Periode auch die erforderlichen Hilfssätze aus der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie aufgenommen und auf vereinfachtem Wege bewiesen. Ferner wurde zur Erklärung der jährlichen Periode der Polschwankungen die Theorie der meteorologischen Massentransporte entwickelt, wobei sich abermals die in den früheren Heften betonte Impulstheorie und die freiere, begriffliche Auffassung der dynamischen Differentialgleichungen als besonders fruchtbar erwies. Den Schluß des geophysikalischen Abschnittes bildet die Besprechung der berühmten Foucaultschen Kreiselversuche zum Nachweis der Erdrotation. Hier kam es einerseits darauf an, unnötige mathematische Schwierigkeiten auszuschalten, welche in den älteren Darstellungen der Foucaultschen Versuche einen breiten Raum einnehmen, andererseits die störenden Einflüsse hervorzukehren und ihrer Größenordnung nach abzuschätzen.

Auf Wunsch meines hochverehrten Lehrers F. Klein habe ich schließlich darauf hinzuweisen, daß ich bei der Abfassung dieses Heftes noch in weit höherem Grade wie bei den vorangehenden Heften über den Inhalt der ursprünglichen, von Herrn Klein gehaltenen Universitätsvorlesung hinausgegangen bin. Die in Kapitel VII gegebenen Ausführungen zur Mechanik der störenden Einflüsse waren in jener Vorlesung nur in allgemeinen Umrissen postuliert worden; die hierzu erforderlichen Integrations- und Näherungsmethoden (auch in dem Nachtrag zu Kap. VI) sowie alle Einzelresultate rühren von mir allein her. Was die astronomischen Anwendungen betrifft, so erkannte Herr Klein die Vorzüge des Gaußischen Verfahrens, nach welchem er in jener Vorlesung insbesondere das Präcessionsproblem behandelte; die Anwendung desselben Verfahrens auf das Problem der Nutationen sowie alles Zahlenmäßige habe ich dagegen von mir aus hinzugefügt. Von dem Problem der Polschwankungen war in jener Vorlesung überhaupt nicht die Rede, sodaß die hier gebotenen etwaigen Fortschritte (Kap. VIII § 6—8) als mein Eigentum zu betrachten sind. Für die Auffassung der Foucaultschen Versuche waren die Grundlinien bereits von Herrn Klein vorgezeichnet.

Im übrigen betone ich gern, daß mir das fortgesetzte Interesse, welches Herr Klein an der Weiterführung des Werkes genommen hat, sowie die mancherlei Anregungen, die er mir bei Vorbesprechungen und bei der Korrektur zukommen ließ, meine eigene Arbeit wesentlich erleichtert haben. Ferner habe ich den Herren Schwarzschild und Wiechert zu danken für viele wertvolle Nachweise und Berichtigungen zu den astronomischen und geophysikalischen Gegenständen.

Möge das vorliegende Heft nicht nur dem Mathematiker und Physiker von Nutzen sein, der die Mechanik um ihrer selbst willen treibt und an der Hand des hier so eingehend ausgeführten Beispiels zu einem tieferen und lebendigeren Verständnis der Wissenschaft vordringen will, sondern möge dieses sowie das folgende Heft auch von den Vertretern der Astronomie, der Geophysik und der Technik gern zu Rate gezogen werden, so oft dieselben auf ihrem besonderen Gebiete mit der Theorie der Kreiselwirkungen in Berührung kommen!

Aachen, im Juli 1903. **A. Sommerfeld.**

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 2.40.

——— Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 3.20.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. ℳ 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. ℳ 7.60; 3. Lfg. [S. 401—768.] 1903. n. ℳ 12.40; 4. Lfg. [S. 769—1072.] 1904. n. ℳ 10.—

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, Lehrbuch der algebraischen Analysis. Deutsche Ausgabe von Dr. G. Kowalewski, Prof. an der Univ. Greifswald. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 15.—

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 8.—. In Leinw. geb. ℳ 9.—

Fiedler, W., die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Aufl. In 3 Teilen. I. Teil: Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektiven Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [XXIV u. 431 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 10.—, geb. n. ℳ 11.—

Fisher, Dr. phil. **Irving,** Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 1.80.

Fort, O. und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. bes. v. R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckt. Holzschn. [XVII u. 268 S.] 1904. gr. 8. geh. n. ℳ 4.—, geb. n. ℳ 4.80.

Föppl, Dr. **Aug.,** Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, früher Oberlehrer an der Städt. Gewerbeschule zu Leipzig, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 418 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geb. n. ℳ 12.—

Fuhrmann, Dr. **A.,** Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In zwei Teilen. Erster Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. [XII u. 206 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 3.60.

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. kart.

Band I: Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdr. [478 S.] 1870. n. ℳ 20.—
— II: Höhere Arithmetik. 2. Abdr. [528 S.] 1876. n. ℳ 20.— Nachtrag zum ersten Abdr. des 2. Bandes. [20 S.] 1876. n. ℳ 1.—
— III: Analysis. 2. Abdr. [499 S.] 1876. n. ℳ 20.—
— IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 2. Abdr. [492 S.] 1880. n. ℳ 20.—
— V: Mathematische Physik. 2. Abdr. [642 S.] 1877. n. ℳ 25.—
— VI: Astronomische Abhandlungen und Aufsätze. 2. Abdr. [664 S.] 1874. n. ℳ 25.—
— VIII: Nachträge zur Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie; insbesondere Grundlagen der Geometrie. [III u. 458 S.] 1900. n. ℳ 24.—
— IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. [IV u. 528 S.] 1903. n. ℳ 28.—

Band VII wird außer dem neuen Abdruck der *Theoria motus* eine vollständige Darstellung von Gauß' ausgedehnten Arbeiten über astronomische Störungsrechnung bringen. Band X biographische Angaben und interessante Stücke des Briefwechsels bieten.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an **Dr. Otto Blumenthal**, Marburg a./L., Schwanallee 7.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, Adolph Mayer, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

60. Band. 2. Heft.

Mit 2 Figuren im Text.

Ausgegeben am 11. März.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Zum Kontinuum-Problem.*)

Von

J. König in Budapest.

1. Es sei $M_1, M_2, M_3, \cdots$ eine abzählbar unendliche Folge beliebiger Mengen, deren Mächtigkeiten wir mit $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \cdots$ bezeichnen.

Mit Hilfe dieser Mengenfolge definieren wir zwei neue Mengen.

Die *Summe* der abzählbar unendlichen Mengenfolge, in symbolischer Bezeichnung

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots,$$

bedeute jene Menge, die durch Zusammenfassung aller Elemente von $M_1, M_2, M_3, \cdots$ entsteht, wobei die verschiedenen Mengen angehörigen Elemente immer als voneinander verschieden anzusehen sind. Die Mächtigkeit von S bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$.

Das *Produkt* der abzählbar unendlichen Mengenfolge, in symbolischer Bezeichnung

$$P = M_1 M_2 M_3 \cdots,$$

bedeute jene Menge, deren Elemente alle Komplexe

$$\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

sind, wo α_i ein beliebiges Element der Menge M_i sein kann; es enthält demnach jedes μ ein und nur ein Element jeder beliebigen Menge der Folge. Es wird bequem sein, α_i als i^{ten} Index des Elementes μ zu bezeichnen. Die Mächtigkeit von P sei $\mathfrak{p}$.

Sind insbesondere alle M_i identisch $= M$, so wird statt P in der gebräuchlichen Bezeichnung $M^{\aleph_0}$ geschrieben.

---

*) Abgedruckt aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904.

Für die hier benutzten Begriffe und Sätze sind die Arbeiten Georg Cantors, des Schöpfers der Mengenlehre, einzusehen. Insbesondere: „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I und II" (Math. Annalen, Bd. 46 und 49).

Vgl. ferner A. Schoenflies: „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" (Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. VIII. 2).

Wir beweisen, daß, wenn die Mengen $M_1, \cdots$ transfinit sind), immer die Beziehung*

(1) $$\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{s}^{\aleph_0}$$

besteht.

Eine Teilmenge von P, die $\sim S$ ist, kann in der Tat leicht angegeben werden. Man wähle zu diesem Zweck aus jedem M_i ein bestimmtes Element β_i, und ändere in

$$\mu = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots)$$

immer nur einen Index, z. B. den k^{ten}, für welchen jedes Element von M_k zu setzen ist, mit Ausschluß von β_k. Die durch Mutation des k^{ten} Index entstandene Menge der μ ist augenscheinlich der Menge M_k, mit Ausschluß des Elementes β_k, äquivalent, also, da M_k transfinit ist, auch $\sim M_k$. Die Gesamtheit der so definierten μ ist eine Teilmenge von P und $\sim S$.

Noch leichter ist der zweite Teil der in (1) enthaltenen Behauptung zu erhärten. Wenn man in $S^{\aleph_0}$ als k^{ten} Index nicht alle Elemente von S, sondern nur diejenigen zuläßt, die Elemente von M_k sind, so erhält man unmittelbar eine Teilmenge von $S^{\aleph_0}$, die $\sim P$ ist.

Aus (1) folgt noch, indem man zur $\aleph_0^{\text{ten}}$ Potenz erhebt:

$$\mathfrak{s}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{p}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{s}^{\aleph_0},$$

und hieraus infolge des Äquivalenzsatzes:

(2) $$\mathfrak{p}^{\aleph_0} = \mathfrak{s}^{\aleph_0}.$$

2. Es soll nun weiter vorausgesetzt werden, daß *die Mächtigkeiten der Mengen M_i durchweg wachsen*, d. h., daß immer

$$\mathfrak{m}_i < \mathfrak{m}_{i+1}$$

ist. *Wir beweisen, daß in diesem Falle niemals $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}$, also wegen* (1) *immer*

(3) $$\mathfrak{p} > \mathfrak{s}$$

ist.

Anders ausgedrückt: Die Äquivalenz $P \sim S$ ist unter den jetzt festgestellten Bedingungen unmöglich. In der Tat führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

Soll nämlich zwischen P und S eine ausnahmslos ein-eindeutige Beziehung bestehen, so müssen auch die in S enthaltenen Elemente von M_k entsprechende Elemente von P bestimmen. Die in diesen Elementen zur Verwendung gelangenden $k+1^{\text{ten}}$ Indizes bilden also eine Menge,

*) Der Satz ist allgemeiner. Es besteht (1) dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p}$ transfinit ist. Wir beschränken uns der Kürze wegen auf den oben angegebenen Fall.

deren Mächtigkeit höchstens $\mathfrak{m}_k$ *ist*. Die $k+1^{\text{ten}}$ Indizes der Elemente von P sind aber aus der Menge M_{k+1} zu wählen, deren Mächtigkeit $\mathfrak{m}_{k+1} > \mathfrak{m}_k$ ist. Es gibt demnach eine Teilmenge M'_{k+1} von M_{k+1}, die bei der Bildung jener Elemente von P, die Elementen von M_k entsprechen, gar nicht zur Verwendung gelangt.

Bildet man also solche Elemente von P, in denen vom zweiten Index ab Elemente von $M_2', M_3', \cdots$ benützt werden, so kann ein solches bei der angenommenen Äquivalenzbeziehung keinem, in irgend einem M_i enthaltenen Elemente entsprechen. D. h. die angenommene Äquivalenzbeziehung ist als unmöglich erwiesen.

3. Ist A_μ irgend eine wohlgeordnete Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$, so gibt es nach den bekannten Grundsätzen der Cantorschen Theorie eine abzählbar unendliche Folge wohlgeordneter Mengen,

$$A_{\mu+1},\ A_{\mu+2},\ A_{\mu+3},\ \cdots$$

so daß, wenn wir die ihnen entsprechenden Mächtigkeiten mit

$$\aleph_{\mu+1},\ \aleph_{\mu+2},\ \aleph_{\mu+3},\ \cdots$$

bezeichnen,

$$\aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} < \aleph_{\mu+2} < \cdots$$

ist.

Wir bilden nun die Mengen S und P in bezug auf diese Folge wohlgeordneter Mengen. S ist jetzt eine abzählbar unendliche Folge wohlgeordneter Mengen, also selbst eine wohlgeordnete Menge, deren Mächtigkeit entsprechend mit $\mathfrak{s} = \aleph_{\mu+\omega}$ bezeichnet wird.

Dann ist wegen $\mathfrak{p} > \mathfrak{s}$ auch

$$\mathfrak{p}^{\aleph_0} = \mathfrak{s}^{\aleph_0} > \mathfrak{s}.$$

Da aber für das Kontinuum

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

kann das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge vom Charakter $\aleph_{\mu+\omega}$ *äquivalent sein.*

Man verallgemeinert den Satz leicht dahin, daß das Kontinuum keiner solchen wohlgeordneten Menge äquivalent sein kann, für die eine unmittelbar vorhergehende wohlgeordnete Menge nicht existiert. Der einfachste Fall ergibt die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums.

4. Herr Bernstein*) hat den allgemeinen Satz

$$\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x 2^{\aleph_0}$$

aufgestellt, aus dem, wenn man voraussetzt, daß das Kontinuum irgend

*) Felix Bernstein, Untersuchungen aus der Mengenlehre. Inaug.-Dissertation. Göttingen 1901, pag. 49.

einer wohlgeordneten Menge A_μ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$ äquivalent ist, und $\aleph_x + \aleph_{\mu+\omega}$ gesetzt wird,

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+\omega}\aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$$

folgen würde. Die Annahme, daß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, wäre also gewiß falsch, wenn der Bernsteinsche Satz allgemein richtig wäre. Leider hat jedoch dessen Beweis eine wesentliche Lücke, da für $\aleph_\omega$ und jede der oben betrachteten „singulären" wohlgeordneten Mengen die Annahme, daß jede abzählbare Teilmenge in einem *Abschnitte* der ganzen Menge liegt, nicht mehr statthaft ist.

Ich erwähne dies vor allem, um den Schluß, den ich in meinem Kongreßvortrage unter Annahme der Richtigkeit des Bernsteinschen Satzes aus diesem zog, ausdrücklich zurückzunehmen.

Doch glaube ich, daß die Sache noch außer der historischen Treue ein gewisses Interesse bietet.

Wäre nämlich umgekehrt das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent und größer als jede wohlgeordnete Menge, so würde aus

$$2^{\aleph_0} > \aleph_x$$

immer auch

(B.) $$\aleph_x^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_x 2^{\aleph_0},$$

der Bernsteinsche Satz folgen.

Dieser formuliert also geradezu das Kontinuumproblem in neuer und nicht uninteressanter Weise.

Ist (B.) allgemein richtig, so kann das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent sein. Kann man aber (B.) auch nur für ein $\aleph$ als falsch erweisen, so muß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent sein.

Insbesondere wird das Kontinuum in der abzählbaren Folge

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$$

enthalten sein oder nicht, je nachdem $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ größer oder gleich $2^{\aleph_0}$ ist.

Über wohlgeordnete Mengen.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Herr Zermelo hat kürzlich einen Beweis des Satzes veröffentlicht,*) daß „*jede Menge wohlgeordnet werden kann*". Er sagt zum Schluß, daß der Beweis nur auf solchen Voraussetzungen ruht, die auch sonst in der Mengenlehre allgemein üblich waren. Demgegenüber ist zu bemerken, daß eine wesentliche Grundlage des Beweises in einer *bestimmten Annahme über wohlgeordnete Mengen* besteht, die diesen Charakter nicht besitzt, die Herr Zermelo allerdings nicht ausdrücklich hervorhebt. Andererseits ist es gerade diese Annahme, die zu den bekannten Widersprüchen in der Theorie der wohlgeordneten Mengen führt; sie kann daher nicht als Quelle mathematischer Beweise betrachtet werden. Von den andern Grundlagen des Beweises soll hier nicht die Rede sein.

1. In der Theorie der wohlgeordneten Mengen kann man einen *allgemeinen* und einen *speziellen* Teil unterscheiden. Die Sätze der allgemeinen Theorie beruhen *ausschließlich* auf der bekannten *Definition* der wohlgeordneten Mengen, und ihren unmittelbaren Folgerungen, insbesondere auf dem Satz, daß es in einer wohlgeordneten Menge keine unendliche Reihe von Elementen geben kann, die einander vorangehen. Dies ist ihr einziger Beweisgrund. Sie setzt die Existenz wohlgeordneter Mengen selbstverständlich voraus, und ist im übrigen davon unabhängig, ob die wohlgeordnete Menge aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Elementen besteht, und welche Mächtigkeit sie auch besitzen möge. Will man auf dieser allgemeinen Grundlage den fraglichen Satz beweisen, so hat man zu zeigen, daß eine unendliche Reihe von Mengen M_i, deren Mächtigkeiten abnehmen, nicht existieren kann; jede Reihe von Mächtigkeiten

$$\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}_2 > \mathfrak{m}_3 > \cdots$$

müßte nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen. Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung des Satzes.

*) Diese Annalen, Bd. 59, S. 514.

Diesem Weg folgt der Zermelosche Beweis nicht; er operiert mit Hilfsmitteln, die den *speziellen* Teil der Theorie der wohlgeordneten Mengen, nämlich ihre Erzeugung betreffen.

2. Auf welche Weise und bis zu welcher Mächtigkeit man wohlgeordnete Mengen bilden kann, diese *spezielle* Frage bleibt im Rahmen der allgemeinen Theorie unbeantwortet. Die bloße Definition der wohlgeordneten Mengen sagt hierüber nichts aus. Alle allgemeinen Sätze bleiben in Kraft, wenn man sich ausschließlich auf endliche Mengen beschränkt. Für die Beantwortung der obigen Frage bedarf man daher *notwendig* der Erzeugungsprinzipien. Hierin besteht der grundsätzliche Gegensatz zwischen einer wohlgeordneten und einer nicht geordneten Menge.

Erzeugungsprinzipien kann man zunächst nur *axiomatisch postulieren*, und hat dann ihre Berechtigung nachzuweisen. Auch die Einführung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse, und des Fortgangprinzips von $\{\nu\}$ auf ω war ursprünglich nur mittels eines solchen Axioms möglich. Der Nachweis seiner Zulässigkeit ist durch die von Herrn G. Cantor gegebene ausführliche Theorie dieser Zahlen und ihre ausnahmslose Gesetzmäßigkeit als geführt zu betrachten. Nachdem so diese Zahlen zum mathematischen Gemeingut geworden sind, haben wir uns allmählich daran gewöhnt, von den mannigfachen höheren Zahlklassen in derselben selbstverständlichen Weise zu sprechen, wie von denen der ersten und zweiten Zahlklasse. Man darf aber nicht vergessen, daß es für die Einführung einer *jeden* von ihnen immer wieder einer Neuschöpfung resp. eines neuen Axioms und des Nachweises seiner Berechtigung bedarf. Daß wir hierin sichere Resultate noch nicht erreicht haben, bedarf kaum der Erwähnung.

3. Der Zermelosche Beweis des fraglichen Satzes kommt ebenfalls auf die Herstellung einer wohlgeordneten Menge hinaus. Zunächst wird, nach einem bestimmten Verfahren, eine gewisse wohlgeordnete Menge L_γ gebildet, und dann von ihr gezeigt, daß sie alle Elemente der gegebenen Menge M enthält. Die bereits oben erwähnte Grundlage *dieses* Beweises ist wiederum ein Postulat, das die Erzeugung wohlgeordneter Mengen betrifft. Es besagt nämlich, daß, wenn L *irgend eine* wohlgeordnete Menge ist, auch (L, m) eine solche ist. Es läßt sich am einfachsten in die Worte fassen, daß *es zu jeder wohlgeordneten Menge eine größere geben soll.* Diese Annahme, und insbesondere der Gebrauch, den Herr Zermelo von ihr macht, schließt sozusagen die sämtlichen möglichen Erzeugungsprinzipien in sich ein. Sie enthält aber noch mehr, und gerade deshalb ist sie unzulässig.

Übrigens besitzen die Beweise, die man sonst auf diesem Gebiet geführt hat, die also die Herstellung wohlgeordneter Mengen betreffen, meistens den *umgekehrten* Charakter. Der wichtigste Beweisgrund ist in solchen Fällen die Überlegung, daß eine gewisse wohlgeordnete Menge *nicht* von $\{\nu\}$ auf ω oder von $\{\alpha\}$ auf Ω fortsetzbar ist, und daß sie deshalb nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Gliedern abbricht. Nirgends aber bedarf man sonst einer Annahme, wie sie der Zermelosche Beweis benutzt.

4. Der Begriff der *Gesamtheit* aller überhaupt möglichen Erzeugungsprinzipien wohlgeordneter Mengen ist meines Erachtens ein wohldefinierter mengentheoretischer Begriff, ebenso der Begriff der mit ihnen herstellbaren wohlgeordneten Mengen. Eine ganz andere Frage ist es, wie weit und bis zu welcher Mächtigkeit solche Erzeugungsprinzipien widerspruchslos definierbar sind. Ich erwähnte bereits, daß jedes neue Erzeugungsprinzip eine Neuschöpfung mathematischer Objekte bedeutet und daher der Prüfung seiner Berechtigung bedarf. Angesichts der merkwürdigen Gesetze, denen die Zahlen der zweiten Zahlklasse, besonders die ε-Zahlen, unterliegen, wird man die Beantwortung der Frage, wie weit wohlgeordnete Mengen und ihre Gesetze widerspruchslos definierbar sind, nicht als selbstverständlich betrachten. Ob und an welcher Stelle jemals die Notwendigkeit eintreten mag, die Erzeugungsmethoden abzubrechen, muß offen bleiben. Wie dem aber auch sei, so stellt die Gesamtheit der so definierbaren Erzeugungsmethoden in demselben Sinn einen wohldefinierten mengentheoretischen Begriff dar, wie die Gesamtheit der ganzen Zahlen.

Noch ein zweiter Punkt bedarf der Erörterung. Es bleibt nämlich noch die Frage bestehen, ob wir bei der *Herstellung* einer *speziellen, irgendwie bestimmten* wohlgeordneten Menge jemals über Mengen gewisser Mächtigkeit hinauskommen. Bisher ist es nur gelungen, solche Mengen für die erste und zweite Mächtigkeit herzustellen.*) Ist es selbstverständlich, daß wir auch hierin immer weiter kommen? Wenn es bisher nicht gelungen ist, spezielle wohlgeordnete Mengen höherer Mächtigkeit zu bilden, so kann hier ebensowohl eine *Lücke der Erkenntnis*, wie eine *logische Unmöglichkeit* vorliegen. Was Herr Zermelo am Schluß seiner Note als „logisches Prinzip" bezeichnet, würde allerdings darauf hinauskommen, den zweiten Fall auszuschließen. Ich halte es jedoch für geboten, auch mit ihm zu rechnen. Sachlich wird dadurch an den folgenden Schlüssen nichts geändert; es folgt nur, daß der oben definierte Begriff der Gesamtheit der erzeugbaren wohlgeordneten Mengen möglicherweise noch eine Einschränkung erfahren kann. Jedenfalls gelangen wir so zu einer ebenfalls *wohldefinierten Gesamtheit* wohlgeordneter Mengen, die

*) Eine Teilmenge des Kontinuums von der Mächtigkeit $\aleph_1$ hat Herr Hardy angegeben, Quart. Journ. of Math. 1903, S. 87.

mit der ersten übereinstimmen, aber auch von ihr verschieden sein kann. Die dadurch bestimmte wohlgeordnete Menge sei Z. Ihrer Definition nach gibt sie uns die Grenze an, über die wir bei der wirklichen Herstellung einer wohlgeordneten Menge niemals hinauskommen; über jeden Abschnitt von Z können wir dagegen hinauskommen. Ihre Mächtigkeit muß naturgemäß ganz offen bleiben.

5. Nehmen wir zunächst einmal an, daß Z die zweite Zahlklasse ist, d. h. also, daß alle wohlgeordneten Mengen, die wir auf Grund irgend welcher Vorschriften bilden können, niemals über die zweite Zahlklasse hinausführen, oder daß gar nur ihr und ihren Gesetzen der Charakter der Widerspruchslosigkeit zukommt. Wir werden dann über jede einzelne Ordnungszahl der zweiten Zahlklasse hinauskommen können, werden sie aber niemals ganz erschöpfen. Bei diesem Sachverhalt würde es daher einen Widerspruch bedeuten, wollte man annehmen, bei der Herstellung einer gewissen wohlgeordneten Menge käme man doch über sie hinaus. Mit andern Worten, in diesem Fall stellt die Menge (Z, m) einen *in sich widerspruchsvollen* Begriff dar, wie dies von dem Begriff einer krummen geraden Linie gilt.

Nicht anders steht es, wenn man die Herstellung wohlgeordneter Mengen bis zu höheren Mächtigkeiten als möglich zu betrachten hat. Ist z. B. noch jedes $\aleph_\nu$ für endliches ν als zulässig zu betrachten, so würde damit offenbar auch noch $\aleph_\omega$ eine wohldefinierte Menge sein und die Menge Z darstellen. Ist dann L irgend eine wohlgeordnete Menge, so würde die Menge (L, m), falls L mit $\aleph_\omega$ identisch ist, ebenfalls einen widerspruchsvollen Begriff darstellen. Alles dies bleibt in Kraft, wie weit sich auch die Herstellung wohlgeordneter Mengen als möglich erweisen sollte; die Schlüsse sind von der Mächtigkeit der Menge Z ganz unabhängig. Formal kommt übrigens der Widerspruch dadurch zum Ausdruck, daß man einerseits voraussetzt, *jede* erzeugbare wohlgeordnete Menge sei mit Z oder einem Abschnitt von Z ähnlich, und daß andererseits (Z, m) eine Menge bilden würde, für die dies nicht der Fall ist.

6. Auf vorstehender Grundlage kann man die Prüfung des fraglichen Satzes nur in der Weise vornehmen, daß man die gegebene Menge M mit irgend einer als herstellbar vorausgesetzten wohlgeordneten Menge vergleicht, wie z. B. das Kontinuum mit der Menge $\aleph_1$. Dies könnte, im Anschluß an die Zermelosche Schlußweise, folgendermaßen geschehen. Man bilde aus den Elementen von M in der dort angegebenen Weise eine wohlgeordnete Menge L; ihre Elemente bezeichne ich durch

$$m_1, m_2, m_3, \cdots, m_\omega, \cdots, m_\alpha, \cdots.$$

Ferner sei

$$W = 1, 2, 3, \cdots, \omega, \cdots, \alpha, \cdots, \beta, \cdots$$

die bezügliche Vergleichsmenge. Es entspricht dann sicher jedem Element m_α von L ein Element α von W, wohingegen das Umgekehrte der Untersuchung bedarf. Um sie durchzuführen, betrachte ich das Verhältnis der Mengen M, W und L zueinander. Hier sind — aus logischen Gründen — an sich folgende vier Fälle möglich:

1) Nicht jedem α entspricht ein m_α, und jedes Element von M ist ein m_α.

2) Nicht jedem α entspricht ein m_α, und nicht jedes Element von M ist ein m_α.

3) Jedem α entspricht ein m_α, und jedes Element von M ist ein m_α.

4) Jedem α entspricht ein m_α, und nicht jedes Element von M ist ein m_α.

Es fragt sich nun zunächst, ob einer dieser formal möglichen Fälle auf Grund der *Definitionen* der Mengen W, L, M auf einen Widerspruch führt. Für den zweiten Fall trifft es in der Tat immer zu. Alsdann existiert nämlich — gemäß der Theorie der wohlgeordneten Mengen — notwendig eine erste Zahl β, der kein Element von M entspricht. Dann enthält die Menge $M - L$ noch Elemente von M; man kann daher eines von ihnen auswählen und es der Zahl β als Element m_β zuweisen. Die Menge (L, m_β) ist in diesem Fall ein *widerspruchsfreier* Begriff, und die Zermelosche Schlußweise bleibt anwendbar.

Dies gilt für den vierten Fall in der gleichen Weise, vorausgesetzt, daß die Menge W nicht mit der oben definierten Menge Z identisch ist. Wenn aber W mit Z identisch ist, so muß man auch den vierten Fall als zulässig betrachten. Alsdann versagt nämlich die Zermelosche Schlußweise. Denn wenn L mit Z ähnlich ist, so ist, wie ich oben ausführte, die Menge (L, m) ein *widerspruchsvoller* Begriff, und einem Beweis, der mit ihm operiert, kommt eine Beweiskraft nicht zu.

7. In einem Falle würden die vorstehenden Ausführungen allerdings versagen, nämlich dann, wenn man von vornherein *annimmt*, die Herstellung wohlgeordneter Mengen lasse sich so ausführen, daß man zu wohlgeordneten Mengen *jeder beliebigen Mächtigkeit* gelangt. Nur bei dieser Annahme würde auch im Fall 4) die Menge (L, m) *stets* ein widerspruchsfreier Begriff sein, und die Zermelosche Schlußweise in Kraft bleiben. In diesem Falle würde aber der fragliche Satz durch ein Postulat als richtig angenommen werden, und bedürfte überhaupt keines Beweises.

8. Das Resultat des Vorstehenden kann ich nur dahin aussprechen, daß die Geltung des fraglichen Satzes zweifelhaft bleibt, wenigstens wenn man seinen Inhalt so versteht, wie es im vorstehenden geschehen ist. Nach wie vor muß die Frage, ob alle definierbaren Erzeugungsmethoden

ausreichen, um Mengen jeder Mächtigkeit zu erschöpfen, als eine offene bezeichnet werden. Will man den Satz aber unabhängig von allen Annahmen über Erzeugungsprinzipien prüfen, so wird dies kaum anders geschehen können, als auf die in § 1 genannte Weise.*)

Meines Erachtens sollte man mit Annahmen, die zu widerspruchsvollen Begriffen oder Resultaten führen, auch in der Mengentheorie ebenso verfahren, wie man es sonst zu tun pflegt. Andererseits dürfte jedes neue Resultat, das sich über die Alefs erzielen läßt, uns dem Ziele näher bringen, zu entscheiden, wie weit hier die Harmonie der Resultate und Definitionen reicht.**)

---

*) Am Schlusse seiner Note spricht sich Herr Zermelo dahin aus, daß gemäß seinem Beweis „jede Menge, für welche die Gesamtheit der Teilmengen usw. einen Sinn hat, als eine wohlgeordnete betrachtet werden dürfe". Naturgemäß fragt man sofort wieder, für welche Mengen denn die Gesamtheit der Teilmengen usw. einen Sinn haben soll, und da für eine Menge in dieser Hinsicht kaum etwas anderes in Betracht kommen kann als ihre Mächtigkeit, so bleibt auch hier offen, ob das benutzte Verfahren auf Mengen jeder Mächtigkeit anwendbar ist — ganz in Übereinstimmung mit dem, was oben und in § 4 ausgeführt wurde.

**) Man vgl. z. B. die kürzlich erschienene Note des Herrn Hausdorff, in der gezeigt wird, daß man den Beweis der von Herrn Bernstein in seiner Dissertation gegebenen Formel *nicht* von ν auf ω und darüber hinaus ausdehnen kann. (Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. Bd. 13, S. 569.)

Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen.

Von

Felix Bernstein in Halle a./S.

Die transfiniten Ordnungszahlen sind nach G. Cantor als die Ordnungstypen der *wohlgeordneten* Mengen definiert. Sie bilden eine aufsteigende Reihe

$$(1)\quad \begin{gathered} 1, 2, \cdots \nu, \cdots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \cdots \omega + \nu, \cdots \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \cdot \cdot \omega \nu, \\ \cdot \cdot \omega^2, \cdots \omega^\nu, \cdots \omega^\omega, \cdots \omega^{\omega^\omega}, \cdots \alpha, \cdots \Omega, \Omega + 1, \cdots \gamma, \cdots. \end{gathered}$$

Jede Ordnungszahl dieser Reihe ist zugleich der Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge der vorangehenden Zahlen.

Diese Reihe (1) ist offenbar selbst wohlgeordnet und wird als wohlgeordnete Menge mit W bezeichnet.

Diese Menge W soll nach der Ansicht der Herren Burali-Forti (Una questione sui numeri transfiniti. Rend. del circolo mat. di Palermo XI, 1897) und Ph. Jourdain: On the Transfinite Cardinal Numbers of well-ordered Aggregates (Philos. Magaz. Vol. VII, 6. ser., 1904 p. 61—75) zu einem Widerspruch führen. Dieser Widerspruch wurde bereits 1895 von G. Cantor gefunden und 1896 an D. Hilbert, 1899 an R. Dedekind brieflich mitgeteilt. (cf. Jourdain l. c. p. 70, Anm.) Jourdain und G. Cantor gründen auf diesen Widerspruch den Beweis, daß *jede Menge wohlgeordnet werden könne.* Seitdem ist dieser Widerspruch auf mehreren Naturforscherversammlungen ohne endgültiges Ergebnis vielfach diskutiert worden.

Burali-Forti stellt denselben in der folgenden Form dar. Da die Reihe (1) wohlgeordnet ist, so gehört zu ihr ein bestimmter Ordnungstypus, welcher die Ordnungszahl β definiert. Diese Zahl β muß die *größte* Ordnungszahl sein. Es gibt jedoch keine größte Ordnungszahl, denn der Typus der wohlgeordneten Menge $(1, \cdots, \beta)$ ist $\beta + 1$ und es ist

$$\beta + 1 > \beta.$$

Um diesen Widerspruch aufzulösen, haben die verschiedenen Autoren zu verschiedenen Mitteln gegriffen. Burali-Forti schließt, daß G. Cantors Theorem, daß für zwei Ordnungszahlen α_1 und α_2 stets entweder $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\alpha_1 > \alpha_2$ sei, nicht allgemein gelte. Ph. Jourdain beweist (l. c. p. 65—66), daß W eine wohlgeordnete Menge ist, meint aber, sie besitze keinen Ordnungstypus (und keine Kardinalzahl).

Er bezeichnet sie als *inkonsistent* und definiert als inkonsistente Menge eine solche, welche nicht ohne Widerspruch als ein Ding gedacht werden kann. Genau so ist G. Cantor vorher in den zitierten Briefen verfahren. Es ziehen beide Autoren den Schluß, daß es unmöglich sei, daß eine wohldefinierte Menge, z. B. das Kontinuum, die Menge W als Teilmenge enthalte.

Wenn man diesen letzteren Schluß als berechtigt ansieht, so kann man folgern, daß das Kontinuum ein bestimmtes Aleph ist.

Indessen läßt sich der Widerspruch auf eine viel einfachere Weise beheben und dies soll im folgenden geschehen.

Wir wollen zunächst die Menge W unabhängig von der Erzeugung der Reihe (1) definieren. Die einzelnen Ordnungszahlen der Reihe (1) sind durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

1) sie sind die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen;

2) ist α eine von ihnen, so gibt es stets eine nächst größere $\alpha + 1$. Sie sind also zugleich Ordnungstypen der *Abschnitte* wohlgeordneter Mengen.

Die Eigenschaft 2) umfaßt die Eigenschaft 1) und wir können dementsprechend die Menge W folgendermaßen definieren:

Die Menge W ist die Menge aller Ordnungstypen der Abschnitte wohlgeordneter Mengen.

Die Menge W ist nun selbst eine wohlgeordnete Menge, wenn man die Elemente derselben nach der Größe geordnet denkt. Der Ordnungstypus von W genügt der Bedingung 1), aber nicht der Bedingung 2). Es gilt nämlich der Satz:

Die Menge W selbst ist nicht Abschnitt einer wohlgeordneten Menge.

In der Tat, wäre die Menge W Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F, so würde der Ordnungstypus β von W der Bedingung 2) genügen. Es würde also β ein Element von W selbst sein. Der durch β in W bestimmte Abschnitt W' von W würde den Ordnungstypus β besitzen, also wäre W' ähnlich W. Nun ist aber der Abschnitt einer wohlgeordneten Menge niemals der ganzen Menge ähnlich, also kann W nicht Abschnitt von F sein.

Aus dem bewiesenen Satze müssen wir folgern:

Es gibt kein Element e, welches auf alle Elemente von W zugleich folgt.

In der Tat würde aus der Annahme eines solchen Elementes folgen, daß die Menge W ein Abschnitt der Menge (W, e) ist, was unmöglich ist.

Das scheinbar Paradoxe dieses Resultats liegt darin, daß man zunächst glaubt, man könne willkürlich vorschreiben, daß ein Element e auf alle Elemente von W folgt. Es läßt sich zwar festsetzen, daß e auf ein beliebiges Element f von W folgen soll; ebenso läßt sich weiter festsetzen, daß e auf ein zweites Element von W folgen soll. Das gleiche läßt sich festsetzen für die Elemente eines Abschnitts von W. Dagegen läßt es sich nicht für *alle* Elemente von W zugleich vorschreiben. Eine jede Beziehung, welche für *alle* Elemente einer Menge gelten soll, muß mit der *Definition* dieser Menge in Einklang stehen, falls sie widerspruchslos sein soll.

In der obigen Darstellung von Burali-Forti ist es also die Menge $(1, \cdots, \beta)$, deren Definition einen innern Widerspruch enthält. Dagegen ist nicht zuzugeben, daß die Menge W irgendwie widerspruchsvoll definiert sei.

In diesem Punkte scheint mir daher die Argumentation von Ph. Jourdain nicht einwandfrei zu sein.

Wenn man auf einen Widerspruch stößt, ist es nötig, auf die letzte Annahme zurückzugehen. Diese letzte Annahme ist aber die Existenz der Menge $(1, \cdots, \beta)$, die wir formal mit (W, β) bezeichnen wollen. Das Zusammenbestehen der Elemente von W und β in einer wohlgeordneten Menge (W, β) wird durch den Widerspruch in der Definition von (W, β) ausgeschlossen. Man kann sich von diesem Widerspruch auch direkt überzeugen.

Jeder Typus einer wohlgeordneten Menge, welche ein Abschnitt einer wohlgeordneten Menge sein kann, ist in W enthalten. Eine wohlgeordnete Menge, welche nicht Abschnitt einer wohlgeordneten Menge sein kann, ist ähnlich W und besitzt den Typus β. Denn sie stimmt mit W in den Typen sämtlicher Abschnitte überein. Also ist jede wohlgeordnete Menge entweder von einem in W enthaltenen Typus oder vom Typus β.

Die Menge (W, β) ist daher zu definieren als die Menge der Typen aller wohlgeordneten Mengen, die nach der Größe geordnet zu denken sind. Hier ist nun der Widerspruch unmittelbar. Denn ist γ der Typus der Menge (W, β), so muß γ in (W, β) vorkommen. Der zu γ gehörige Abschnitt ist also vom Typus γ und somit ähnlich der ganzen Menge, was einen Widerspruch darstellt.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß der Widerspruch nur daraus entsteht, daß β als auf alle Elemente von W folgend angenommen wird. Wenn nur die Vereinigungsmenge $(W; e)$ gebildet wird, ohne daß zwischen e und den Elementen von W eine Ordnungsbeziehung festgesetzt wird, so führt das zu keinem Widerspruch. Wir ziehen hieraus den wichtigen Schluß:

Die Menge W kann Teilmenge einer Menge $M = (W, Z)$ sein, doch kann keine Ordnungsbeziehung zwischen den Elementen von Z und denen von W stattfinden, derart, daß ein Element von Z auf alle Elemente von W folgt.

Um die gemachten Ausführungen ganz scharf zu fassen, ist es nötig, sich darüber zu einigen, was man unter der *Existenz* eines mathematisch definierten Gebildes, insbesondere einer Menge, zu verstehen hat. Es scheint auszureichen, daß man verlangt, es solle ein in sich widerspruchsfreier Bereich von Operationen möglich sein, welche für das betreffende Gebilde bestimmt sind. Die Gesamtheit der möglichen Operationen definiert ihrerseits das mathematische Objekt vollkommen eindeutig.

Wenn wir eine Menge, wie die Menge W, genetisch, wie dies hier geschehen, definieren, so ist dieselbe als mathematisches Objekt völlig bestimmt, sobald ein in sich geschlossener Kreis von widerspruchsfreien Operationen angegeben werden kann, welche mit dieser Menge vorgenommen werden können.

Hieraus geht hervor, daß die Frage der Existenz oder Nichtexistenz der Menge W ersetzt werden muß durch die Frage nach den Operationen, welche mit der Menge W vorgenommen werden können.

Wir wollen daher im folgenden die positiven Eigenschaften der Menge W entwickeln, welche analog den Eigenschaften der übrigen wohlgeordneten Menge sind. Diese Eigenschaften sind, wie ich noch bemerken möchte, logisch äquivalent den Eigenschaften, welche jeder Ordnungszahl zukommen, und sie definieren die Gesetze der Menge W genau ebenso, wie die Eigenschaften, die jeder ganzen Zahl zukommen, die Gesetze der abzählbar unendlichen Menge definieren.

Da es auf jede Ordnungszahl eine folgende gibt, so besitzt die Menge W eine Abbildung φ in sich, bei der jede Ordnungszahl einer folgenden entspricht. Es existieren ferner die Abbildungen $\varphi^2, \varphi^3, \cdots$.

Die Abbildung φ ist ein Typus der *ähnlichen* Abbildung und wir können auch hier die *Gruppe* der ähnlichen Abbildungen betrachten.

Der Gruppe der ähnlichen Abbildung entspricht der Begriff des Ordnungstypus β der Menge W. Es ist, wie die Betrachtung der Abbildung φ lehrt,

$$1 + \beta = \beta,$$

wogegen ein Typus $\beta + 1$ nicht definiert ist.

Der Gruppe der umkehrbar eindeutigen Abbildungen entspricht der Begriff der Kardinalzahl $\overline{\overline{W}}$, welche bei allen diesen Abbildungen invariant bleibt. Hier können wir als Kardinalzahl der Vereinigungsmenge $(W; e)$ schreiben $\overline{\overline{W}} + 1$ oder $1 + \overline{\overline{W}}$. Es ist ferner

$$\overline{\overline{W}} + \overline{\overline{W}} = \overline{\overline{W}};$$

denn sind L und M zwei Mengen vom Typus W, so können wir in der Vereinigungsmenge (L, M) eine Ordnung festsetzen, so daß wieder eine Menge vom Typus W entsteht. Sind nämlich l und m zwei Elemente von L und M, welche den Ordnungszahlen λ und μ entsprechen, so soll l früher als m heißen, wenn $\lambda \leqq \mu$ ist, und l später als m, wenn $\lambda > \mu$ ist. Auf diese Weise ist die Vereinigungsmenge wieder wohl geordnet und offenbar vom Typus W.

Man beweist ferner den Satz:

Es ist

$$\overline{\overline{W}}^2 = \overline{\overline{W}}.$$

In der Tat, sind λ, μ; λ_1, μ_1 irgend welche Ordnungszahlen, so treffen wir für die Paare (λ, μ) und (λ_1, μ_1) folgende Ordnungsbeziehung, es soll

$$(\lambda, \mu) < (\lambda_1, \mu_1)$$

sein, wenn

$$\lambda + \mu < \lambda_1 + \mu_1$$

ist, und es soll

$$(\lambda, \mu) > (\lambda_1, \mu_1)$$

sein, wenn

$$\lambda + \mu > \lambda_1 + \mu_1$$

ist.

Dagegen soll für $\lambda + \mu = \lambda_1 + \mu_1$ die Festsetzung

$$(\lambda, \mu) < (\lambda_1, \mu_1)$$

gelten, sobald

$$\lambda < \lambda_1$$

ist, und

$$(\lambda, \mu) > (\lambda_1, \mu_1),$$

wenn

$$\lambda > \lambda_1$$

ist.

Hierdurch ist die Menge der Paare (λ, μ) wohlgeordnet und es ist diese Menge wieder vom Typus W, womit die Behauptung bewiesen ist. Es ist insbesondere für jeden Abschnitt leicht möglich, die Paare (λ, μ) den Ordnungszahlen eines Abschnitts der Menge W mittels eines einfachen Gesetzes zuzuordnen.

Aus diesen Untersuchungen, die sich leicht noch vermehren ließen, erkennt man, wie gewisse Eigenschaften, die gleichmäßig allen Ordnungszahlen zukommen, als Eigenschaften der Menge W dargestellt werden können.

Wir wenden uns nun zu prinzipiellen Fragen. Wir können die Mächtigkeit $\overline{\overline{W}}$ der Menge W als größer bezeichnen, als die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ irgend eines Abschnittes von W. Es ist nämlich $\overline{\overline{W}}$ nicht gleich $\aleph_\alpha$, denn es gibt stets einen Abschnitt von W von der Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$. Da nun $\aleph_{\alpha+1}$ nicht größer als $\overline{\overline{W}}$ ist, so ist $\overline{\overline{W}} \neq \aleph_\alpha$ für jedes α. Andrerseits, falls $m > \aleph_\alpha$ für jedes α ist, so beweist man mittels eines Verfahrens, das im folgenden noch besprochen wird, daß $m \geqq \overline{\overline{W}}$ ist. Gibt es nun Mengen, welche von höherer Mächtigkeit sind als W?

In der Tat eine solche ist *die Menge Z der Teilmengen von W.*

Es kann nämlich der bekannte Beweis, daß die Menge der Teilmengen von höherer Mächtigkeit ist als die ursprüngliche Menge, unverändert auch im vorliegenden Falle benutzt werden. Es sei übrigens bemerkt, daß die Menge der Teilmengen von W in analoger Weise, wie die Menge $2^{\aleph}$, wo $\aleph$ ein beliebiges Aleph bedeutet, als *einfach geordnete Menge* aufgefaßt werden kann. Es gilt von zwei solchen Teilmengen diejenige als die niederere, in der die erste abweichend lautende Ordnungszahl kleiner ist als die entsprechende Ordnungszahl in der anderen.

Die Menge Z der Teilmengen von W bildet das einfachste Beispiel von Mengen, welche sich nicht wohlordnen lassen. Denn es ist ja Z weder W noch einem Abschnitt von W äquivalent.

Wir fragen nun, ob eine der bekannten Mengen, etwa das Kontinuum, einer der hier behandelten Mengen äquivalent ist. Obgleich es noch immer als das *wahrscheinlichste* gelten muß, daß $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = \aleph_1$ ist, so ist es doch bisher nicht einmal gelungen, zu beweisen, daß $2^{\aleph_0} > 2^{\aleph_1}$ ist. Es ist daher nicht einmal ausgeschlossen, daß überhaupt allgemein

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph}$$

ist, wo $\aleph$ ein beliebiges Aleph bedeutet. In diesem Fall würde $2^{\aleph_0}$ alle Aleph als Teilmengen enthalten, und man könnte dann auf Grund des über $\overline{\overline{W}}$ Gesagten schließen, daß $\mathfrak{c} \geqq \overline{\overline{W}}$ ist. Vielleicht ist sogar $\mathfrak{c} = \overline{\overline{Z}}$, und in diesem Falle würde das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent sein, eine Möglichkeit, auf die bereits Schönflies hingewiesen hat.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Beweise, daß eine jede Menge, z. B. das Kontinuum, wohlgeordnet werden könne. Der schon erwähnte sehr eingehende Beweis des Herrn Jourdain besteht aus zwei Teilen. Erstens wird gezeigt, daß eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, welche größer ist als $\aleph_\alpha$, notwendig größer oder gleich ist $\aleph_{\alpha+1}$. Dies ist von Hardy (A Theorem concerning the Infinite Cardinal Numbers, Quart. Journ. of Math. 1903, pp. 87—94) ausführlich gezeigt. Ferner wird erschlossen, daß eine Kardinalzahl, welche größer ist als alle Aleph, notwendig größer oder gleich $\overline{\overline{W}}$ ist. Hieraus folgt dann, daß jede Teilmenge $\mathfrak{m}$ von W entweder ähnlich W oder ähnlich einem Abschnitte von W ist. Es ist also eine *beliebige* Kardinalzahl entweder gleich $\aleph_\alpha$ oder größer oder gleich $\overline{\overline{W}}$. Der zweite Teil des Beweises beruht auf der Annahme der

Inkonsistenz von W, wodurch die letztere Möglichkeit für konsistente Mengen z. B. das Kontinuum ausgeschlossen wird. Dieser Teil des Beweises erscheint mir nicht einwandfrei.

Neuerdings hat E. Zermelo in einer Note: Beweis, daß jede Menge in wohlgeordnete Form gebracht werden kann (Aus einem an D. Hilbert gerichteten Briefe) (Math. Ann. Bd. 59), an deren Inhalt zugleich Erhard Schmidt beteiligt ist, in sehr durchsichtiger und schöner Form wesentlich den ersten Teil des Beweises dargetan.

Dabei macht der Verfasser Gebrauch von der Annahme, daß es in der Menge der Teilmengen einer beliebigen Menge M stets eine Zuordnung zwischen einer Teilmenge S und einem ihrer Elemente s gebe.

Diese Hypothese ist entbehrlich, wenn man den Begriff der *vielwertigen Äquivalenz*, wie er in der Note: Bemerkung zur Mengenlehre (Gött. Nachr. Math.-Phys. Klasse. 1904. Heft 6) von mir aufgestellt worden ist, benutzt. Es ergibt sich dann der Satz, daß jede Menge entweder vielwertig äquivalent ist einem Abschnitt von W, oder aber daß sie Teilmengen enthält, welche vielwertig äquivalent beliebigen Abschnitten der Menge W sind. Die Multiplizität der Abbildung ist immer eine bestimmt angebbare.

Dagegen ist erstens die Möglichkeit, daß bei einer bestimmten Menge, z. B. dem Kontinuum, die Menge L_γ der γ-Elemente ähnlich W sein könne, nicht widerlegt (l. c. 7)). Der Schluß in 7 V), es sei $M = L_\gamma$, ferner ist nur zulässig, wenn $L_\gamma \neq W$ ist, da die *geordnete* Menge (L_γ, m_1') nur für $L_\gamma \neq W$ existiert. Die Möglichkeit der Wohlordnung des Kontinuum scheint mir daher nicht bewiesen.

Es ist vielleicht nützlich, das Ergebnis der Betrachtung der Menge W unter Einführung einer anschaulichen Bezeichnung noch einmal zu präzisieren. Wir wollen jede wohlgeordnete Menge, welche Abschnitt einer wohlgeordneten Menge sein kann, als *fortsetzbare* wohlgeordnete Menge bezeichnen. Wir können dann sagen:

Die Typen aller fortsetzbaren wohlgeordneten Mengen bilden die einzige nicht fortsetzbare wohlgeordnete Menge W.

Die nicht fortsetzbare wohlgeordnete Menge W kann als Teilmenge einer andern Menge auftreten, sobald eine Fortsetzung der Menge W in den Rest der Menge ausgeschlossen wird.

Die Menge der Teilmengen von W bildet das einfachste Beispiel einer Menge, welche nicht wohlgeordnet werden kann.

Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles.

Par

Émile Borel à Paris.

Sur la demande qu'a bien voulu m'adresser la Rédaction de ce Journal, je vais résumer brièvement quelques réflexions qui m'ont été suggérées par l'intéressante Note de M. Zermelo*).

L'un des problèmes les plus importants qu'on puisse se poser relativement à un ensemble quelconque M est le suivant:

A. — *Mettre M sous la forme d'un ensemble bien ordonné.*

Le résultat remarquable obtenu par M. Zermelo peut s'énoncer ainsi: pour savoir résoudre le problème A, il suffit de savoir résoudre le problème B qui suit:

B. — *Étant donné un sous-ensemble quelconque M' de M, choisir dans M' d'une manière déterminée (mais d'ailleurs arbitraire) un élément m', auquel on donnera le nom d'élément distingué de M'; ce choix devra être fait pour tous les sous-ensembles M' de M.*

Il est évident que toute solution du problème A fournit une solution particulière du problème B; mais la réciproque n'était pas évidente et c'est à M. Zermelo que nous devons de savoir que: *les problèmes A et B sont équivalents.*

Mais ce résultat, quel que soit son intérêt, ne saurait être considéré comme fournissant une solution générale du problème A. En effet, pour que le problème B puisse être regardé comme résolu relativement à un ensemble donné M, il faudrait donner un moyen au moins théorique de déterminer l'élément distingué m' d'un sous-ensemble quelconque M'; et ce problème paraît des plus ardus, si l'on suppose, pour fixer les idées, que M coïncide avec le continu.

On ne peut, en effet, regarder comme valable le raisonnement suivant, auquel fait allusion M. Zermelo: «il est possible, dans un ensemble particulier M', de choisir *ad libitum* l'élément distingué m'; ce choix pouvant

*) Math. Annalen t. 59 (1904), 514–516.

être fait pour chacun des ensembles M', peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles».

Un tel raisonnement ne me paraît pas mieux fondé que le suivant: «Pour bien ordonner un ensemble M, il suffit d'y choisir arbitrairement un élément auquel on attribuera le rang 1, puis un autre auquel on attribuera le rang 2, et ainsi de suite *transfiniment*, c'est à dire jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les éléments de M par la suite des nombres transfinis». Or, aucun mathématicien ne regardera comme valable ce dernier raisonnement. Il me semble que les objections que l'on peut y opposer valent contre tout raisonnement où l'on suppose un *choix arbitraire* fait une infinité non dénombrable de fois; de tels raisonnements sont en dehors du domaine des mathématiques.*)

Paris, le 1. décembre 1904.

*) On me permettra de citer quelques lignes d'une lettre de M. Baire (de Montpellier), qui me paraissent résumer avec beaucoup de netteté une opinion que je crois très juste et qui est sans doute très répandue: «Personnellement, je doute qu'une commune mesure puisse jamais se trouver entre le continu, ou ce qui, dans l'espèce, revient au même, l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs, et les ensembles bien ordonnés; il y a là, pour moi, deux choses, dont chacune n'est définie que virtuellement, et il y a des chances pour que ces deux virtualités soient irréductibles».

Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen.

Von

Georg Faber in Würzburg.

Die Methoden, die bisher zur Abzählung der rationalen Zahlen angegeben wurden, verfolgen, soweit mir bekannt, lediglich den Zweck, die *Möglichkeit* der Abzählung darzutun, versagen jedoch samt und sonders infolge der Notwendigkeit nicht zu bewältigender Rechnungen, sobald es sich um die Aufgabe handelt, diejenige ganze Zahl *wirklich anzugeben*, die einem Bruche mit einigermaßen großem Zähler oder Nenner zugeordnet ist oder sobald umgekehrt der einer vorgelegten größeren ganzen Zahl zugeordnete Bruch gesucht ist. Im folgenden will ich für die rationalen Zahlen zwischen Null und 1 eine Abzählungsmethode (als Typus unendlich vieler) angeben, welche die genannten Aufgaben mit geringerem Aufwand von Rechnung auszuführen erlaubt; die so erhaltene gegenseitige Zuordnung der ganzen und der rationalen Zahlen zeigt dann auch die merkwürdige Eigenschaft, daß sie durch *Formeln* zur arithmetischen Evidenz gebracht werden kann. Es wird sich nämlich eine mehrfach unendliche trigonometrische Reihe $y = F(x)$ ergeben, die für jedes *irrationale* x *divergiert* und für irgend ein *rationales* x nach einem *ganzzahligen* Grenzwerte y *konvergiert*; umgekehrt wird sich durch Auflösung dieser Formel eine andre ähnlich gebaute $x = \Phi(y)$ ergeben, die für irgend ein *ganzzahliges* y nach einem positiven *rationalen* Grenzwerte $x (< 1)$ konvergiert.

Die echten Brüche mit *endlicher* Dezimalbruchentwickelung lassen sich am einfachsten in der Weise abzählen, daß dem Bruche

$$r = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \qquad (0 \leqq a_i \leqq 9;\ a_n > 0),$$

der als Dezimalbruch geschrieben $0, a_1 a_2 \cdots a_n$ lautet, die ganze Zahl $a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10 + a_1$ oder in dezimaler Schreibart $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ zugeordnet wird, und umgekehrt.

Zu einer analogen Abzählung *sämtlicher* echten Brüche gelangt man unter Zugrundelegung einer die systematischen Brüche verallgemeinernden Reihendarstellung, in welcher die rationalen Zahlen durch endliche Entwickelungen charakterisiert sind; derartige Darstellungen sind zuerst von Herrn G. Cantor betrachtet worden.*)

Man denke sich die Strecke $\overline{01}$ in e_1 gleiche Teile je von der Größe $\frac{1}{e_1}$ geteilt; jede Zahl x, die, wo nicht anders bemerkt, positiv und < 1 gedacht werde, liegt dann in einem der so entstehenden Intervalle, es ist also

$$x = \frac{a_1}{e_1} + \frac{x_1}{e_1}, \tag{1}$$

wo $0 \leqq a_1 < e_1$ und $x_1 < 1$ ist. Ebenso kann x_1 in der Form

$$x_1 = \frac{a_2}{e_2} + \frac{x_2}{e_2} \qquad (0 \leqq a_2 < e_2;\ x_2 < 1) \tag{2}$$

dargestellt werden, wo e_2 wieder eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die von e_1 verschieden sein darf. Setzt man diesen Wert von x_1 in (1) ein, so findet man

$$x = \frac{a_1}{e_1} + \frac{a_2}{e_1 \cdot e_2} + \frac{x_2}{e_1 \cdot e_2} \tag{3}$$

und so fortschließend die Reihe

$$x = \sum_1^n \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} + \frac{x_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n}, \tag{4}$$

und schließlich, da

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} \leqq \lim_{n=\infty} \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} = 0$$

ist:

$$x = \sum_1^\infty \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \qquad (0 \leqq a_i < e_i). \tag{5}$$

Ergibt sich für x die *endliche* Entwickelung

$$x = \sum_1^n \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}, \tag{6}$$

*) Z. f. Math. 14 (1869) p. 124. Die Begründung des Herrn Cantor, der übrigens nur *unendliche* den unendlichen Dezimalbrüchen mit der Periode 9 entsprechende Entwickelungen betrachtet, ist eine andre als die hier gegebene; insbesondre gibt Herr Cantor für die Koeffizienten a_ν (in (5)) nur Ungleichungen, welche die *rekurrente* Berechnung der a_ν ermöglichen, während im Text *independente* Formeln (vgl. (22) u. (26)) aufgestellt werden.

so läßt sich an deren Stelle auch die unendliche

$$(7)\qquad x = \sum_{1}^{n-1} {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} + \frac{a_n - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} + \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{e_i - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}$$

schreiben vermöge der Identität

$$(8)\qquad \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} = \frac{e_{n+1} - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+1}} + \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+1}} = \frac{e_{n+1} - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+1}} + \frac{e_{n+2} - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+2}} + \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+2}}$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{e_i - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}.$$

Abgesehen von der soeben erwähnten Möglichkeit einer doppelten Entwickelung läßt sich jede Zahl x zwischen Null und 1 nur auf *eine* Weise durch eine Reihe der Form (5) darstellen; angenommen nämlich es bestehen gleichzeitig die Beziehungen

$$(5)\qquad x = \sum_{1}^{\infty} {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \qquad (0 \leqq a_i < e_i)$$

und

$$(9)\qquad x = \sum_{0}^{\infty} {}_i \frac{a_i'}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \qquad (0 \leqq a_i' < e_i)$$

und es sei $a_i = a_i'$ für $i < n$, dagegen $a_n > a_n'$, dann folgt durch Subtraktion der Gleichungen (9) und (5):

$$(10)\qquad 0 = \sum_{n}^{\infty} {}_i \frac{a_i' - a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}$$

und

$$(11)\qquad \frac{a_n - a_n'}{e_1 \cdots e_n} \leqq \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{|a_i' - a_i|}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i},$$

umsomehr

$$(12)\qquad \frac{1}{e_1 \cdots e_n} \leqq \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{e_i - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}$$

(weil sowohl a_i als $a_i' < e_i$ ist).

In (12) kann das Gleichheitszeichen *nur dann* zu stande kommen, *wenn*

(13) $a_n - a_n' = 1$; $a_i' = e_i - 1$; $a_i = 0$ ist für $i > n$.

Da andrerseits, wie die Identität (8) lehrt, in (12) *stets* das Gleichheitszeichen gilt, so bestehen notwendig die Gleichungen (13) und man befindet sich in dem oben erwähnten durch die Gleichungen (6) und (7) charakterisierten Ausnahmefall.

Im folgenden soll, sobald für x eine *endliche* Entwickelung möglich ist, die ebenfalls mögliche *unendliche* Entwickelung und somit jede Zweiwertigkeit der Koeffizienten a_i *ausgeschlossen* werden.

Durch besondre Wahl der e_i läßt sich leicht erreichen, daß *jede* rationale Zahl eine endliche Entwickelung zuläßt; die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist, daß, wenn q irgend eine ganze Zahl ist, das Produkt $e_1 e_2 \cdots e_n$ von einem bestimmten Index n ab durch q teilbar wird.

Die Bedingung ist *notwendig;* denn damit der als irreduzibel vorausgesetzte Bruch $\frac{p}{q}$ die endliche Entwickelung

$$\frac{p}{q} = \sum_1^m \frac{a_i}{e_1 e_2 \cdots e_i} = \frac{a_1 \cdot e_2 e_3 \cdots e_m + a_2 e_3 \cdots e_m + \cdots + a_{m-1} e_m + a_m}{e_1 e_2 \cdots e_m}$$

zuläßt, muß q ein Teiler von $e_1 e_2 \cdots e_m$ sein.

Die Bedingung ist aber auch *hinreichend,* denn ist

$$e_1 e_2 \cdots e_n = q \cdot r,$$

so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{l}{e_1 e_2 \cdots e_n} \qquad (\text{wo } l = p \cdot r);$$

nun sei

$$l = l_1 e_n + a_n \qquad (0 \leqq a_n \leqq e_n - 1),$$

dann ist

$$\frac{p}{q} = \frac{l_1}{e_1 e_2 \cdot e \cdot e_{n-1}} + \frac{a_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n};$$

ferner sei

$$l_1 = l_2 e_{n-1} + a_{n-1}, \qquad (0 \leqq a_{n-1} \leqq e_{n-1} - 1),$$

also

$$\frac{p}{q} = \frac{l_2}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n-2}} + \frac{a_{n-1}}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n-1}} + \frac{a_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n};$$

durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man, vom letzten angefangen, sämtliche Koeffizienten a_i.

Am einfachsten ist es $e_i = i + 1$ zu setzen; man hat demnach für jede rationale Zahl x zwischen 0 und 1 eine einzige Darstellung der Form*):

$$(14) \qquad x = \sum_2^{n_x} \frac{a_{\nu-1}}{\nu!} \qquad (0 \leqq a_\nu < \nu).$$

Andrerseits läßt sich jede ganze Zahl y auf *eine* Weise in der Form:

$$(15) \qquad y = b_1 + b_2 \cdot e_1 + b_3 \cdot e_1 \cdot e_2 + \cdots + b_m \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_{m-1} \qquad (0 \leqq b_i < e_i)$$

*) Auch von Cyparissos Stéphanos angegeben: Bull. de la Soc. Math. de France 8 (1879) p. 81.

darstellen. Ist nämlich y eine beliebige gegebene ganze Zahl, so findet man die Koeffizienten $b_1, b_2, \cdots$ successive durch die Bedingungen:

$$
(16) \qquad
\begin{array}{ll}
y \;\; = b_1 + e_1 y_1 & (0 \leqq b_1 < e_1), \\
y_1 \;\; = b_2 + e_2 y_2 & (0 \leqq b_2 < e_2), \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
y_{i-1} = b_i + e_i y_i & (0 \leqq b_i < e_i). \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot &
\end{array}
$$

Wegen der Endlichkeit von y muß y_i, sobald i eine gewisse Zahl m erreicht, verschwinden; durch Einsetzen der Werte von $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ in die erste der Gleichungen (16) ergibt sich dann eine Reihe der Form (15) für y; eine zweite derartige Darstellung ist aber nicht möglich, da man umgekehrt, von der Summe auf der rechten Seite in (15) ausgehend, das Bestehen der die b_i eindeutig bestimmenden Gleichungen (16) als notwendig erkennt.

Speziell werde wieder $e_i = i + 1$ gesetzt.

Die Abzählung der rationalen Zahlen wird nun in der Weise vorgenommen, daß die rationale Zahl

$$(17) \qquad x = \frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!}$$

und die ganze Zahl

$$(18) \qquad y = b_1 + b_2 \cdot 2! + b_3 \cdot 3! + \cdots + b_m \cdot m!$$

einander zugeordnet werden, wenn

$$(19) \qquad m = n \quad \text{und} \quad a_1 = b_1,\; a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$$

ist.

Die Zuordnung ist nach dem zuvor Bewiesenen eine umkehrbar eindeutige.

Beispiele: Nach einer durch zweckmäßige Anordnung abzukürzenden Rechnung von einigen Minuten findet man als Nummer der rationalen Zahl

$$x = \frac{999}{1000} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \frac{5}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{7}{8!} + \frac{6}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{2}{11!} + \frac{2}{12!} + \frac{5}{13!} + \frac{2}{14!} + \frac{12}{15!}$$

die ganze Zahl

$$y = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! + 1 \cdot 6! + 7 \cdot 7! + 6 \cdot 8! + 1 \cdot 9! + 2 \cdot 10! + 2 \cdot 11! + 5 \cdot 12! + 2 \cdot 13! + 12 \cdot 14! = 1\,061\,076\,276\,719;$$

desgleichen ergibt sich die der ganzen Zahl

$$y = 999000 = 3 \cdot 5! + 1 \cdot 6! + 6 \cdot 7! + 6 \cdot 8! + 2 \cdot 9!$$

zugeordnete rationale

$$x = \frac{3}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{6}{8!} + \frac{6}{9!} + \frac{2}{10!} = \frac{8221}{1\,814\,400}.$$

Es handelt sich zum Schlusse noch darum, explizite Ausdrücke für die a_ν als Funktionen von x und für die b_ν als Funktionen von y aufzustellen.

Aus (17) folgt:

(20) $\mu!\cdot x = a_1\cdot 3\cdot 4 \cdots \mu + a_2\cdot 4\cdot 5 \cdots \mu + \cdots + a_{\mu-2}\cdot \mu + a_{\mu-1} + R_\mu;$

hier ist

$$R_\mu = \frac{a_\mu}{\mu+1} + \frac{a_{\mu+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \cdots + \frac{a_n}{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(n+1)}$$
$$< \mu! \sum_{\mu+1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu!} = 1 \quad (\text{s. } (8)),$$

so daß also, wenn $[v]$ die größte in v enthaltene ganze Zahl bedeutet,

(21) $[\mu!\,x] = a_1\cdot 3\cdot 4 \cdots \mu + a_2\cdot 4\cdot 5 \cdots \mu + \cdots + a_{\mu-2}\cdot \mu + a_{\mu-1}$

wird; hieraus ergibt sich sofort:

(22) $$a_\mu(x) = [(\mu+1)!\,x] - (\mu+1)\,[\mu!\,x],$$

wo nun auf der linken Seite die Abhängigkeit des Koeffizienten a_μ von der darzustellenden Zahl x auch äußerlich angedeutet ist.

Gleichung (22) gilt ihrer Ableitung nach ebenso gut für irrationale als für rationale x; da die letzteren dadurch ausgezeichnet sind, daß die a_μ von einem gewissen Index ab beständig gleich Null werden, so ergibt sich hier nebenbei das übrigens auch ohne weiteres einleuchtende, durch einfache Formulierung mehr als durch große Anwendbarkeit ausgezeichnete *Irrationalitätskriterium:*

(23) $$\overline{\lim_{\mu=\infty}}\,[\mu!\,x] - \mu[(\mu-1)!\,x] \begin{cases} = 0 \text{ für rationale } x, \\ > 0 \text{ für irrationale } x. \end{cases}$$

Um eine der Formel (22) entsprechende für $b_\mu(y)$ zu finden, gehe man aus von der Formel

(24) $$\frac{y}{\mu!} = \frac{b_1}{2\cdot 3 \cdots \mu!} + \frac{b_2}{3\cdot 4 \cdots \mu} + \cdots + \frac{b_{\mu-1}}{b_\mu} + b_\mu + b_{\mu+1}\cdot(\mu+1) + \cdots$$
$$+ b_m\cdot(\mu+1)(\mu+2)\cdots m;$$

hier ist die Summe der $(\mu-1)$ Brüche auf der rechten Seite höchstens gleich

$$\frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots (\mu-1)(\mu-1)!}{\mu!} = 1 - \frac{1}{\mu!} < 1,$$

so daß

(25) $$\left[\frac{y}{\mu!}\right] = b_\mu + b_{\mu+1}(\mu+1) + \cdots + b_m(\mu+1)(\mu+2)\cdots m$$

ist, und daraus folgt unmittelbar:

(26) $$b_\mu = \left[\frac{y}{\mu!}\right] - (\mu+1)\left[\frac{y}{(\mu+1)!}\right].$$

Für die hier mehrfach angewandte Funktion $[v]$ hat man folgende Formel:*)

(27) $$[v] = v + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\pi v}{k} - \frac{8}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\pi v}{2k-1}\right\}^2,$$

mit deren Benutzung man findet

(28) $$a_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k(\nu+1)!\,\pi x}{k} - \frac{8}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)(\nu+1)!\,\pi x}{2k-1}\right\}^2$$
$$-\frac{\nu+1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\nu!\,\pi x}{k} + \frac{8(\nu+1)}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\nu!\,\pi x}{2k-1}\right\}^2,$$

(29) $$b_\nu(y) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\pi\frac{y}{\nu!}}{k} - \frac{8}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\pi\frac{y}{\nu!}}{2k-1}\right\}^2$$
$$-\frac{\nu+1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\pi\frac{y}{(\nu+1)!}}{k} + \frac{8(\nu+1)}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\pi\frac{y}{(\nu+1)!}}{2k-1}\right\}^2.$$

Diese Ausdrücke für $a_\nu(x)$ und $b_\nu(y)$ denke man sich in die folgenden Reihen eingesetzt:

(30) $$y = F(x) = \sum_1^\infty{}_\nu\, a_\nu(x)\cdot \nu!,$$

(31) $$x = \Phi(y) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{b_\nu(y)}{(\nu+1)!}.$$

Für *rationales* x ist die Reihe auf der rechten Seite von (30) eine *endliche* (da ja dann die a_ν schließlich verschwinden); ihr Wert ist die dem x durch die angegebene Abzählung zugeordnete natürliche Zahl y; für *irrationales* x *divergiert* die Reihe (30), da schon ihre einzelnen Glieder ins unendliche wachsen.

*) S. Pringsheim, Math. Ann. 26 (1886) p. 195.

In gleicher Weise bricht die Reihe auf der rechten Seite von (31) für *ganzzahliges* y ab und konvergiert so nach derjenigen rationalen Zahl x, deren Nummer y ist. Definiert man $b_\nu(y)$ für *nicht ganzzahlige* y durch (26) oder durch die damit identische Reihe (29), so ersieht man leicht, daß $b_\nu(y) = b_\nu([y])$ wird; es erscheint also durch (31) die rationale Zahl $x = \Phi(y)$ nicht nur einer bestimmten ganzen Zahl y, sondern dem ganzen Intervalle von y bis $y + 1$ zugeordnet.

Traunstein, im April 1904.

The Finite, Discontinuous Primitive Groups of Collineations in Four Variables.

By

H. F. Blichfeldt of Stanford University, California.

A complete enumeration of the collineation-groups in four variables has not yet been published, although a number of important groups have been discovered and constructed by Jordan, Klein, Maschke and others*), and a general theorem concerning such groups has been given by Jordan**).

In two papers published in the "Transactions of the American Mathematical Society"***), the writer has, after Maschke, divided these groups into two categories, *transitive* and *intransitive*, and the former again into primitive and imprimitive groups (definitions follow below). These papers contain some theorems concerning the primitive groups in n variables, by means of which a number may always be determined which is divisible by the orders of the different possible primitive groups of linear homogeneous substitutions of determinant 1 in n variables. The complete enumeration of the primitive groups of collineations in four variables may be based on these theorems and ordinary group-theory. This has been done by the author, who submits his results in the following paper.

---

*) For a bibliography and brief résumé of the work done in this field consult Wiman: „Endliche Gruppen linearer Substitutionen", Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. I, pp. 522—554.

**) Journal für Mathematik, 84 (1878), p. 89. The Theorem is as follows: every linear homogeneous group (G) in n variables has an abelian self-conjugate subgroup (F) of order f, and the order of G is λf, where λ is inferior to a fixed number which depends only upon n.

***) "On the Order of Linear Homogeneous Groups", First and Second Paper, Transactions of the American Math. Society, 4 (1903), pp. 387—397, and 5 (1904), pp. 310—325. These papers shall be referred to hereafter by "L-GI" and "L-GII", respectively.

Considering the four variables x, y, z, u as homogeneous coordinates of space of three dimensions, the nature of the classification referred to may be seen as follows:*)

> An *intransitive group* leaves invariant, either each of two axial pencils of planes (as $x+\lambda y=0$, $z+\mu u=0$), or one plane ($x=0$) and a pencil of planes not including this ($y+\lambda z+\mu u=0$).**)
>
> A *transitive group* has no such invariant configuration.

The transitive groups are separated into

> *imprimitive groups*, the substitutions of which leave invariant a system of two axial pencils of planes ($x+\lambda y=0$, $z+\mu u=0$), i. e. leave invariant each pencil or interchange them; — or leave invariant a system of four planes ($x=0$, $y=0$, $z=0$, $u=0$);
>
> *primitive groups*, having no such invariant configuration.

We shall, furthermore, distinguish between four classes of primitive groups in four variables: those which have invariant intransitive sub-groups; those which have invariant imprimitive sub-groups; primitive groups which are simple; and, finally, primitive groups having invariant primitive sub-groups.

It is well known that a collineation-group G in n variables of order g may or may not be represented as a linear homogeneous group in n variables of order g. There exists, however, in all cases, a linear homogeneous group G' of order ng, isomorphic with G, containing the group F of similarity-substitutions

$$x_i' = \varphi x_i; \qquad \varphi^n = 1; \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

The quotient-group G/F, of order g, is then simply isomorphic with the collineation-group considered. In the following analysis, the groups dealt with are always taken as linear homogeneous groups of subsitutions of determinant 1, unless a factor of proportionality (ϱ) is used. The orders given are, however, the orders of collineation-groups, unless otherwise stated.

In all questions dealing with substitution-groups, the writer has received valuable assistance from Dr. W. A. Manning of Stanford University.

---

*) For the definitions of the remaining terms and phrases used the reader is referred to "L-GI" and "L-GII".

**) Maschke, Math. Ann. 52 (1899), p. 363, and Loewy, Transactions of the American Math. Soc., 4 (1903), p. 44, have proved that if a group of finite order leaves invariant a plane ($x=0$), then it must also leave invariant the pencil

$$y+\lambda z+\mu u=0.$$

I. The Primitive Groups having Invariant Intransitive Sub-groups.

1. In "L-GII", §§ 2—4, a general theory is developed for such groups. An isomorphism is established between two primitive groups, G' and G'', of two variables each. The matrices of the substitutions of the required group G are then constructed ("produced") in a certain manner from the matrices of the corresponding substitutions of G' and G''. Let S' and S'' be two such corresponding substitutions, whose matrices are respectively

$$S': \left|\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}\right., \qquad S'': \left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right.,$$

then is the matrix of the produced substitution S of G of the form

$$(1) \qquad S: \left|\begin{matrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{matrix}\right..$$

Assuming the variables to be x, y, z, u, the group G will, plainly, have the invariant $xu - yz = 0$.

2. Now, Goursat has enumerated all the groups in 4 variables which leave this surface invariant*). In his notation, a substitution of G is indicated by means of two variables, ξ and η, viz:

$$(2) \qquad [\eta, \xi; f(\eta), \varphi(\xi)],$$

meaning

$$\eta' = f(\eta) = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \xi' = \varphi(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d},$$

which represent substitutions of linear fractional groups in one variable. When written in linear homogeneous form in two variables, these become our groups G' and G'', and the coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d$ are precisely the elements $\alpha, \beta, \cdots$ in our matrix (1).

The orders of G' and G'', as is well known, are limited to the numbers 12, 24 and 60. The invariant intransitive sub-group (H) of G can be assumed to be formed of the substitutions produced from the identical substitution of G'' and the substitutions of G' corresponding to this. The order of H is therefore one of the numbers 4, 12, 24 or 60. It follows that the order of G is one of the numbers

$$4 \cdot 12,\ 12 \cdot 12,\ 4 \cdot 24,\ 12 \cdot 24,\ 24 \cdot 24,\ 12 \cdot 60,\ 24 \cdot 60,\ 60 \cdot 60.$$

*) «Sur les substitutions orthogonales etc.» Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, (3) T. 6 (1889), pp. 9—102.

3. Selecting, from the list of Goursat (I—XXXII), all the groups satisfying the conditions given, we have nine types, namely XX, XXII—XXV inc., XXVII—XXX inc. Of these, the groups XXII and XXVII are imprimitive, leaving invariant the function $(x^2-u^2)(y^2-z^2)$, which, by a change of variables, takes the form $xyzu$. The remaining seven types are primitive. Using his notation, these groups are as follows (1°—7°):

1°, 2°, 3°, 4°, 5° and 6°. Groups of orders 144, 288, 720, 1440, 576 and 3600 respectively, represented by the symbol (2), when $[\eta, f(\eta)]$ designates any substitution of the group A, $[\xi, \varphi(\xi)]$ any one of the group B; A and B being any two (alike or different) of the tetrahetral, octahedral and icosahedral groups.

7°. Group of order 288:

$$[\eta, \xi;\ f(\eta), \varphi(\xi)][\eta, \xi;\ if(\eta), i\varphi(\xi)], \qquad i^2=-1$$

$[z, f(z)]$ and $[z, \varphi(z)]$ designating any two substitutions of the tetrahedral group.

4. It can readily be verified that these groups have only one invariant surface of the second degree, $xu-yz=0$. The groups containing any of the given types self-conjugately must therefore also possess this invariant surface, and are, accordingly, given by Goursat in the work referred to. Five new types must be added to our list, namely those numbered XLIII, XLV, XLVI, XLVIII and L by Goursat. They are as follows:

8°, 9°, 10° and 11°. Groups of orders 288, 576, 1152 and 7200 respectively, generated by the substitution

$$[\eta, \xi;\ \xi, \eta]$$

and each of the groups 1°, 7°, 5° and 6° in turn.

12°. Group of order 576, generated by the subtitution

$$[\eta, \xi;\ \xi, i\eta], \qquad i^2=-1,$$

and the group 7°.

On account of the single invariant surface of the second degree, $xu-yz=0$, no groups, not included in this list, can contain any of the types 1°—12° self-conjugately. In our notation, the substitution $[\eta, \xi;\ \xi, \eta]$ is

$$\rho x'=x, \quad \rho y'=z, \quad \rho z'=y, \quad \rho u'=u,$$

ρ being a factor of proportionality. The substitution $[\eta, \xi;\ \xi, i\eta]$ is

$$\rho x'=x, \quad \rho y'=z, \quad \rho z'=-iy, \quad \rho u'=-iu; \qquad i^2=-1.$$

II. The Primitive Groups having Invariant Imprimitive Sub-groups.

5. Such a sub-group (H) has either two systems of imprimitivity, say (x, y) and (z, u), or it leaves invariant an equation of the form

$xyzu = 0$. In the first case, the group H' generated by the second powers of the substitutions of H will be intransitive, and is obviously invariant within the required primitive group (G). Consequently, H' must consist of the identical substitution alone, unless G is one of the groups 1^0—12^0.

In the second case, the letters x, y, z, u are permuted according to a permutation-group K, which must be transitive (in the sense of transitivity of permutation-groups) when H is transitive. Its order is therefore 4, 8, 12 or 24. The last two cases may be replaced by the first if for H we take the group generated by the third powers of the substitutions of H', a group generated by the second powers of the substitutions of the original group H. If K is of order 8, then it contains the cycle $(xyzu)$, and the group H' generated by the second powers of the substitutions of H is intransitive and does not reduce to the identical substitution alone. This is also true if K, of order 4, contains the same cycle. Hence, we may assume that K is the group 1, $(xy)(zu)$, $(xz)(yu)$, $(xu)(yz)$. But then H will have two systems of imprimitivity, (x, y) and (z, u).

From the remark made above concerning such a group, its order must be a power of 2. Such a group can be written in *monomial**) form (Theorem 9, "L-G II"), and may readily be constructed. It is found that H is of order 16 and is generated by A, B, C and D:

(3)

	A	B	C	D
$\varrho x' =$	x	x	y	z
$\varrho y' =$	y	$-y$	x	u
$\varrho z' =$	$-z$	$-z$	u	x
$\varrho u' =$	$-u$	u	z	y .

6. This is the group given by Maschke in Mathematische Annalen 30 (1887), p. 498. To find the groups leaving H invariant we may proceed according to the method of Maschke.

Let x, y, z, u be homogeneous coordinates of space of three dimensions. With any two points, (x_1, y_1, z_1, u_1) and (x_2, y_2, z_2, u_2), will be associated a set of 6 expressions of the form (line-coordinates)

$$x_1y_2 - x_2y_1,\ x_1z_2 - x_2z_1,\ x_1u_2 - x_2u_1,\ y_1z_2 - y_2z_1, \cdots,$$

called

$$p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, \cdots,$$

*) See Maschke, American Journal of Mathematics XVII (1895), p. 168. — The author has, in "L-G II", § 5, called such groups *semi-canonical*.

respectively, in Maschke's paper. These expressions combine into 6 linear functions of themselves, which are relative invariants of H, namely

$$(4)\qquad \begin{cases} p_{12}+p_{34}=w_1, & p_{13}+p_{42}=w_3, \quad p_{14}+p_{23}=w_5,\\ p_{12}-p_{34}=w_2, & p_{13}-p_{42}=w_4, \quad p_{14}-p_{23}=w_6,\end{cases}$$

there being no other invariants of H, linear in $p_{12}, p_{13}, \cdots$. Moreover, H contains *all* the substitutions which leave invariant, to constant multipliers, the functions (4), as may be proved readily. It follows that the group of order $16 \cdot 720$, (see Maschke's memoir, l. c.) generated by H and the $6!$ permutations of the expressions (4) must be itself one and contain as sub-groups all the primitive groups, if any, containing H self-conjugately. The order of such a sub-group (G) will be $g = 16k$, where k is the order of a group K of permutations of 6 letters or fewer. Moreover, any two such sub-groups whose corresponding groups K_1 und K_2 are conjugate under the symmetric group in 6 letters, can be transformed one into the other. If K contains an invariant sub-group K', then will G contain an invariant sub-group G', corresponding to K'.

7. Now, any group G of order $5n$ will be primitive. For, it must contain a substitution of order 5, which substitution may be transformed into the type T given below (5), and we may readily prove that a group generated by H and T is primitive. There are in all nine substitution-groups in not more than 6 letters $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$ of orders $5n$, namely groups of orders 5, 10, 20, 60, 60*), 120, 120, 360 and 720 respectively, generated by $T' = (w_2 w_3 w_4 w_5 w_6)$, T' and $R_1' = (w_3 w_6)(w_4 w_5)$; T' and $R_2' = (w_3 w_4 w_6 w_5)$; T' and $U' = (w_3 w_4 w_5)$; T' and $W' = (w_1 w_2 w_3)(w_4 w_5 w_6)$; T' and $M' = (w_5 w_6)$; T' and $N' = (w_1 w_2)(w_3 w_4)(w_5 w_6)$; T' and $S' = (w_1 w_2 w_3)$; T', S' and N', respectively. The corresponding linear substitutions are as follows:

$$(5)\qquad \begin{aligned}
R_1 &: \ \varrho x' = -iy, \quad \varrho y' = -ix, \quad \varrho z' = z, \quad \varrho u' = u, \qquad i^2 = -1;\\
R_2 &: \ \varrho x' = x + iy, \quad \varrho y' = ix + y, \quad \varrho z' = iz + u, \quad \varrho u' = -z - iu;\\
S &: \ \varrho x' = x - u, \quad \varrho y' = y - z, \quad \varrho z' = i(y+z), \quad \varrho u' = i(x+u), \quad i^2 = -1;\\
T &: \begin{cases} \varrho x' = -x + y + iz - iu, \quad \varrho y' = x + y + iz + iu,\\ \varrho z' = -x + y - iz + iu, \quad \varrho u' = x + y - iz - iu;\end{cases}\\
U &: \ \varrho x' = x - y, \quad \varrho y' = i(x+y), \quad \varrho z' = z - u, \quad \varrho u' = i(z+u);\\
W &: \begin{cases} \varrho x' = i(x+y-z-u), \quad \varrho y' = x - y + z - u,\\ \varrho z' = i(x-y-z+u), \quad \varrho u' = -x - y - z - u;\end{cases}\\
M &: \ \varrho x' = iz, \quad \varrho y' = u, \quad \varrho z' = -x, \quad \varrho u' = -iy;\\
N &: \ \varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = z, \quad \varrho u' = -u.
\end{aligned}$$

*) Burnside, Theory of Groups, p. 206.

Considering a group G to which belongs a substitution-group K of order $2^a 3^b$, we may first suppose, either that K is simple, or that it contains a self-conjugate subgroup K' to which corresponds a non-primitive self-conjugate subgroup G' of G. If K is simple, its order is 2 or 3. In the first case G must be of order 2^5 and is then imprimitive. In the second case, G must be generated by H and U or by H and W. In neither case can it be primitive.

Let us next assume that G has an invariant subgroup G' of order $16 \cdot 2^a$, $a \geqq 1$. Such a group can be written in monomial form, and it is found that the group G'', generated by the second powers of its substitutions, is intransitive and does not reduce to the identical substitution alone. Since this group G'' is contained self-conjugately in G, the latter must be found among the groups 1°—7°.

Finally, let G have an imprimitive invariant subgroup G' of order $16 \cdot 2^a \cdot 3^b$. If this group G' contains the substitution W, then it will leave invariant just one function of the form $x_1 y_1 z_1 u_1$ (namely $(x^2-z^2)(y^2-u^2)$) and G could not be primitive, as it would leave invariant the same function. If G' contained U, it could not leave invariant a function of the form $x_1 y_1 z_1 u_1$, but would possess two systems of imprimitivity. The group G'', generated by the second powers of the substitutions of G', would be intransitive, and G would be found among the groups 1°—7°.

8. The primitive groups other than the groups 1°—12° containing imprimitive self-conjugate sub-groups have now been determined and are as follows:

13°.	Group of order	16·5 ,	generated by	H of (3)	and T	of (5),
14°.	" " "	16·10 ,	"	" " "	T " R_1	" ,
15°.	" " "	16·20 ,	"	" " "	" " R_2	" ,
16°.	" " "	16·60 ,	"	" " "	" " U	" ,
17°.	" " "	" ,	"	" " "	" " W	" ,
18°.	" " "	16·120,	"	" " "	" " M	" ,
19°.	" " "	" ,	"	" " "	" " N	" ,
20°.	" " "	16·360,	"	" " "	" " S	" ,
21°.	" " "	16·720,	"	" " "	T, S " N	" .

The groups 16° and 17° are not transformable one into the other, as 16° leaves invariant one of the functions w(i. e. w_1), and 17° does not. For the same reason 18° and 19° are distinct types.

9. We may briefly settle the question concerning the determination of the groups containing any of these self-conjugately. The functions $w_1, w_2, \cdots, w_6$ satisfy the definition of being *a set of six functions of the*

coordinates of two points, x_1, y_1, z_1, u_1; x_2, y_2, z_2, u_2, *linear in both, vanishing when the points coincide, and being left invariant, or mutually interchanged (to some constant factors), by the substitutions of the group* G, this being any one of the groups 13°—21°. Now, we may ask if there are other sets of six functions satisfying these conditions? The answer is no, as the reader may verify. It follows that if a group G contains self-conjugately any of the groups 13°—21°, then G will permute among themselves the functions $w_1, w_2, \cdots, w_6$. Accordingly, as it contains H, it must be one of the groups 13°—21° already determined.

III. The Primitive Groups which are Simple.

10. *Notation and Theorems.* The notation and theorems given in "L-G I" and "L-G II" will generally be used here without further comment. For the sake of brevity and clearness, a symbolic notation will be employed, and two of the theorems referred to will be restated. We shall assume that the substitutions considered are of determinant 1.

If the multipliers of a substitution S are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, we shall say that S is of type $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. The group K generated by S is said to be of type $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

The scheme

$$G = \begin{array}{r|c|c|c|c} & x & y & z & u \\ \hline S: & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ T: & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

implies that $S, T, \cdots$ are substitutions of, or generate, an abelian group G, written in canonical form. More particularly, we have

$$S:\ x' = \alpha_1 x,\ y' = \beta_1 y,\ z' = \gamma_1 z,\ u' = \delta_1 u; \quad \text{etc.}$$

The scheme

$$\begin{array}{r cc|c|c} & x & y & z & u \\ \hline S: & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ T: & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

implies that $S, T, \cdots$ are substitutions of an intransitive group, the systems of intransitivity being (x, y), z and u. In general, the vertical bars will separate the systems of intransitivity.

The symbol G_n means "group(s) of order n", and G_n' "the number of sub-groups of order n". Similarly, S_n means "substitution(s) of order n", and S_n' "the number of substitutions of order n".

11. Theorem 10*). If a group G has a substitution S of variety m and of order $p^{a+c} \geqq mp^c$, then will G contain a self-conjugate sub-group H containing S^{p^a}. Any substitution T of H will possess the property $(V)_p \equiv (VT)_p \pmod{p}$, V being any substitution of G. In particular, $4 \equiv (T)_p \pmod{p}$.

The letter H will throughout be reserved for a sub-group of this character. As we are now considering simple groups only, it is clear that if we have a substitution of the kind stated, then must $G = H$.

According to this theorem we find that we can have no linear substitutions of orders 32, 27 or p^2, $p \geqq 5$, unless we get H. Excluding the group H, the only types of S_8, S_{16} and S_9 (linear substitutions) are found to be

$$(6)\quad \begin{array}{ll} S_8 : (\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha),\ (\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha); & \alpha^2 = i,\ i^2 = -1. \\ S_{16} : (\beta, \beta, -\beta, i\beta); & \beta^2 = \alpha. \\ S_9 : \begin{cases} (\omega^2, \varphi, \varphi\omega, \varphi\omega^2),\ (\varphi, \varphi^2, 1, \omega^2), \\ (\varphi, \varphi^2\omega^2, \omega, \omega^2),\ (\varphi, \varphi\omega, \varphi^2\omega, \varphi^2\omega^2), \end{cases} & \varphi^3 = \omega,\ \omega^3 = 1;\ \omega \neq 1. \end{array}$$

12. The types of abelian groups of orders 2^a and 3^a are limited by Theorem 10 and an obvious extension to this theorem. Thus, if G contains the sub-group generated by

(7)

	x	y	z	u
T:	1	1	-1	-1
S:	i	$-i$	1	1
R:	i	1	$-i$	1
U:	i	1	1	$-i$,

then G will contain a group H· To show this, form the determinant corresponding to the determinant (6) of "L-G II", with (V), (VT), (VS), (VR) and (VU) for the elements of the first column, V being any substitution of G. After reduction we find the equation

$$(V) - (VT) + 2i[(VT) + (VS)] - (1+i)[(VR) + (VU)] = 0,$$

from which follows

$$(V)_2 - (VT)_2 \equiv 0 \pmod{2},$$

the equation characteristic for the substitutions (T) of the group H.

*) "L-G II", § 6.

13. Assuming that G does not contain H, the abelian sub-groups of G (considered as a linear homogeneous group) of orders 2^a may now be constructed without much difficulty. We may suppose that such a group G', when written in linear homogeneous form, will always contain the group G_4 of similarity-substitutions. Then we find that the order of the quotient group $\frac{G'}{G_4}$ is not greater than 8. Referring now to Theorem 10 we see that *the highest power of* 2 *which divides the order of a collineation-group is* 2^6, *unless the group contains* H.

Under the same restriction, we may construct all types of sub-groups of order 3^a. We shall give them here for future reference.

(α) Groups of order 3:

$$(1, \omega, \omega, \omega),\ (1, 1, \omega, \omega^2),\ (\omega, \omega, \omega^2, \omega^2); \qquad \omega^3 = 1.$$

(β) Groups of order 9:

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \omega & \omega & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & \omega & \omega & \omega \\ \omega & 1 & \omega & \omega \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \end{array},$$

and the four types given under S_9 in (6).

(γ) Groups of order 27:

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \omega & \omega & \omega \\ \varphi & \varphi^2 & 1 & \omega^2 \end{array}, \quad \varphi^3 = \omega; \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & \omega & \omega & \omega \\ \omega & 1 & \omega & \omega \\ \omega & \omega & 1 & \omega \end{array};$$

and two groups generated by

$$U\colon\ x' = x,\ y' = z,\ z' = u,\ u' = y$$

and A and B respectively, where

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} x & y & z & u \\ \hline 1 & \omega & \omega & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c|c|c|c} x & y & z & u \\ \hline \omega^2 & \varphi & \varphi\omega & \varphi\omega^2 \end{array}.$$

(δ) Group of order 81 generated by U and

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & y & z & u \\ \hline 1 & \omega & \omega & \omega \\ \omega & 1 & \omega & \omega \\ \omega & \omega & 1 & \omega \end{array}.$$

The following statement may now be made: *If G does not contain H, the highest power of 3 that may divide the order of G is 3^4.*

14. Theorem 11.*) Let G contain two permutable substitutions, S and T, of different prime orders $p \neq 2$ and q, generating the group

$$\begin{array}{l|c|c|c} S:\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ T:\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4, \end{array} \qquad \alpha_i^p = 1,\ \beta_i^q = 1.$$

Now, if $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4$ and $q > 4$, then will G contain the group H. This would also be the case if $\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $q \geqq 3$; or if $\beta_1 = \beta_2$, $\beta_3 = \beta_4$, $\beta_1 \neq \beta_3$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, $q \geqq 2$; etc. — An evident extension to this theorem is obtained by considering a possible abelian group of order pq^a, as in the case

$$\begin{array}{l|c|c|c} S:\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ \quad\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \quad\ 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\ \quad\ 1 & \omega & 1 & \omega^2, \end{array} \qquad \omega^3 = 1,\ \alpha^5 = 1.$$

Proceeding as in the case of the group (7), we find that

$$(V)_5 \equiv (VS)_5 \pmod{5},$$

V being any substitution of G.

15. The simple groups whose orders are < 2001 have all been determined**), as have all the primitive substitution-groups in less than 17 letters***). Our aim shall therefore be to prove, first of all, the

Theorem. *With the possible exceptions of groups of orders $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ and $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, every simple, primitive collineation-group in four variables, whose order is greater than 2000, can be represented as a substitution-group in less than 17 letters.*

A. *The group $G = H$.*

16. On account of the property of the substitutions of H

$$(T)_p \equiv 4 \pmod{p}$$

*) "L-GII", § 9.

**) Hölder, Math. Ann., 40 (1892), p. 55. — Cole, American Journal of Math., 14 (1892), p. 378, and 15 (1893), p. 303. — Burnside, Proc. London Math. Soc., 26 (1895) p. 333. — Ling and Miller, American Journal of Math., 22 (1900), p. 13.

***) Jordan, Comptes Rendus, 75 (1872), p. 1754. — Miller, Quarterly Journal of Mathematics, 29 (1897), p. 225; Proc. London Math. Soc., 28 (1897), p. 533; American Journal of Math., 20 (1898), p. 229.

and the consequences found in "L-G II", § 8, it follows that $p = 2$ and that every substitution of G whose order is prime to 2 is of type $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$. By the methods of §§ 4—5 of "L-G I" it follows that the order g of G contains no prime factor > 7. By Theorems 10—13, "L-G II", we find that g is not divisible by 5^2, $5 \cdot 7$ or 7^2. It is not divisible by 9, as no G_9 has all its substitutions of type $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$ (art. 11). Hence, g is one of the numbers

$$2^a \cdot 3,\ 2^a \cdot 5,\ 2^a \cdot 7,\ 2^a \cdot 15,\ 2^a \cdot 21.$$

The number of sub-groups of order 2^a in any of the first four cases is < 17. In the last case, $G_7' = 2^b$. Hence, a given G_7 must be transformed into itself by a certain S_3. We can have no S_{21} (Theorem 11). The possibility left is that a given S_7 is changed into its second power by a S_3. The given S_7 must then be of type $(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4)$, $\varepsilon^7 = 1$, contrary to what is stated above concerning such a substitution. — Every group G containing H can therefore be represented as a substitution-group in less than 17 letters.

B. *The group G does not contain H.*

17. Before proceeding to determine the orders of the groups required, we will note certain facts concerning the primitive linear homogeneous groups in 2 and 3 variables that are useful, namely*)

all such groups in 2 variables contain the similarity-substitution $(-1, -1)$;

the ternary G_{60}, G_{168} and G_{360} contain the abelian G_4

$$\begin{array}{r|r|r} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1; \end{array}$$

the ternary G_{360} and all the remaining primitive groups in three variables must contain the similarity-substitution (ω, ω, ω) when written in linear homogeneous form.

Bearing in mind that the binary G_{60}, the ternary G_{60}, G_{168} and G_{360} are simple, and can therefore be generated by their substitutions of a given order p, we can now limit the number of cases in which two given abelian sub-groups of G may have a substitution in common, using to ad-

---

*) We shall assume that the primitive groups in 3 variables have all been determined. See the papers by Jordan, Journal für Math., 84 (1878), p. 89; Valentiner, Kjöbenhavnske Skr. (6) Vol. 5 (1889), p. 64; Wiman, Math. Annalen 47 (1896), p. 532; and the author, "L-G II", §§ 13—17.

vantage the principle explained in art. 14. Thus, if two abelian sub-groups, K_1 and K_2, whose orders do not contain the factors 2 or 3, have a substitution S in common, then either

the group generated by K_1 and K_2 must be abelian, or

the substitution S must be of type $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$. In this case the group generated may be intransitive:

$$\begin{array}{cc|cc} x & y & z & u \\ \hline \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array},$$

primitive in (x, y) and (z, u). The two latter groups are then simply isomorphic and of order 60.

Suppose, for example, it possible that K_1 and K_2, both of order 25, have in common a substitution of type $(1, \alpha, \alpha, \alpha^3)$, $\alpha^5 = 1$. Then, unless the group generated by K_1 and K_2:

$$\begin{array}{c|c|cc} x & y & z & u \\ \hline 1 & \alpha^3 & \alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

is abelian, the binary G_{60} will be generated in (z, u). Then we get the sub-group

$$\begin{array}{c|c|cc} \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \hline \end{array}, \qquad \omega^3 = 1,$$

from which it follows that G contains H.

18. Besides the ordinary theorems from the theory of substitution-groups and abstract groups, such as Sylow's Theorem (employed in art. 16), we will make use of the following Theorems of Frobenius:

I. A substitution-group of degree n and of class $n-1$ is composite.*)

II. The number of substitutions of a group G which satisfy the equation $S^n = 1$ is either 1 or kn.**)

A consequence of II may be noted here. Let G be of order $gp^a q^b$, where p and q are different primes, and let there be no substitutions in G of order pq. Then the number of substitutions in G of order $p^\alpha (\alpha \leqq a)$ is a multiple of q^b.

We shall refer to these theorems by F I and F II.

19. Let us now consider a simple group G not containing H. By Theorems VI, "L-G I"; 10, "L-G II" and corollaries, and art. 13, its order g must be a factor of

$$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \; 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3.$$

*) Berl. Sitzungsb. (1902), p. 455.

**) Berl. Sitzungsb. (1895), p. 988.

If g is divisible by 3^3, then will G contain no S_p, p being a prime > 5, and no S_5 which is not of type $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, $\alpha^5 = 1$.

Assume the contrary. Since every G_{27} contains a S_3 of type $(1, \omega, \omega, \omega)$ (see art. 13) we have, by Theorem 13, "L-G II", a S_{3p} or a S_{15} in the cases supposed. Consider the case $p = 7$. A given S_{21} can be written as the product of two substitutions, S_3 and S_7. If S_3 is not already of type $(1, \omega, \omega, \omega)$, it is permutable with a substitution T_3 of this type. The substitutions T_3, S_3 and S_7 generate an intransitive group, containing S_3 self-conjugately. It will be found, by the method given in art. 17, that the S_7 considered must be permutable with the given T_3.

Such a substitution is always contained self-conjugately in the entire G_{27}. This group and the given S_7 must therefore generate an intransitive group. Taking the third type given under (γ) in art. 13 for the G_{27} considered, the group generated is of type

$$\begin{array}{r|c|ccc}
 & x & y & z & u \\
\hline
T_3: & 1 & \omega & \omega & \omega \\
 & \omega & 1 & \omega & \omega \\
 & \omega & \omega & 1 & \omega \\
S_7: & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 ,
\end{array} \qquad \alpha_i^7 = 1.$$

The group generated in (y, z, u) could not be primitive (art. 17). If it were imprimitive, we would obtain an abelian G_{63}, generated by T_3, S_7 and a substitution of order 3 different from T_3. But such a group would prove the existence of the sub-group H (art. 14). For, we would have a substitution of type $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^4)$, $\alpha^7 = 1$; or of type

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x & y & z & u \\
\hline
\alpha^4 & \alpha & \alpha & \alpha ,
\end{array}$$

permutable with the substitution T_3. If the group generated in (y, z, u) were intransitive, G would still contain H.

In this manner all cases may be dealt with. There results that *g must be a factor of one of the numbers*

$$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3, \quad 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5.$$

If g is a factor of the latter, a possible S_5 of G must be of type $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, $\alpha^5 = 1$.

20. *We shall now replace these two numbers by the five*

$$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2, \quad 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11, \quad 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13, \quad 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5.$$

A group G whose order is $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$ has an abelian sub-group of order $7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$, — in fact it has one of order $5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$ if G contains a S_5 not of type $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, $\alpha^5 = 1$, which will always be the case when $c > 1$ (Theorem 13, cor., with a slight extension, „L-G II"). Observing that no S_{11} or S_{13} can be of variety 2, and therefore not of type $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$, by §§ 4—5 of "L-G I", we find that, if the orders of two such sub-groups are each > 35, then these sub-groups can have no substitution in common unless they generate an abelian group (art. 17). Now, let the greatest such sub-group in G be of order m, and it follows by F II that $G'_m = 1 + km$. This number should be a factor of g.

Now, all such factors may readily be found. Assuming $m > 35$, there is only one case, namely $1 + 11 \cdot 13 = 16 \cdot 9$. With the condition, just stated, that no S_{11} or S_{13} can be of variety 2, we find that a sub-group of G of order $11 \cdot 13$ must be of one of the following types:

$$S: \begin{array}{|c|c|c|c|} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \quad S: \begin{array}{|c|c|c|c|} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \qquad S^{11} = 1, \quad T^{13} = 1;$$
$$T: \begin{array}{|c|c|c|c|} \beta_1 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_3 \end{array}, \quad T: \begin{array}{|c|c|c|c|} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_3 \end{array}, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3, \quad \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3.$$

Now let us form the determinant corresponding to (3) of "L-G I", with (V), (VS), (VS^2), (VT) and (VT^r) for the elements of the first column, V being any substitution of G. There results

$$(VT^r)_{13} \equiv (V)_{13} + r[(VT)_{13} - (V)_{13}] \pmod{13},$$

a congruence that is either impossible or leads to the group H.

21. *The numbers* $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ *and* $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ *may be dismissed.* — This is done by proving in order:

A. G must contain a substitution the sum of whose multipliers is a quantity depending on ω, where $\omega^3 = 1$ (i. e. the sum is of the form $a\omega + b$, $a \neq 0$);

B. when such a substitution is present, G must contain a S_{33} or S_{39}, and then G is not divisible by 9;

C. there is no simple group fulfilling these conditions. —

A. Let there be no substitution S such that $S = a\omega + b$, $a \neq 0$. Writing down all the possible weights of the substitutions of G, replacing their multipliers by ± 1 or 0, according to the rule given in the Lemma (§ 3) of "L-G I" (taking $p = 11$ or 13), we find that they take the values $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$, only*). Then, according to the theory of §§ 4—5, ibid., in order that G may be primitive, it is necessary that functions exist of the form $ax^3 + bx^2 + cx + d$, a, b, c not all $\equiv 0 \pmod{p}$, every one of whose remainders (mod. p) are included in the series $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$. This is found to be impossible for $p = 13$. In the case $p = 11$ one such function exists when S_{11} is of variety 4, namely $x^3 - 5x$, whose

*) We must, of course, exclude all weights whose presence would show the existence of H, as for example $(\omega + \omega^2 - 1 - 1)$.

remainders are 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1, 2, -2, 4, -4. These numbers, arranged in proper order, should correspond to the series of weights

$$(V),\ (VS),\ (VS^2), \cdots, (VS^{10}), \qquad S^{11} = 1,$$

V being any given substitution of G for which we do not have $V_{11} \equiv (VS^i)_{11}$ (mod. 11) for every value of i (this could not be the case for every substitution V of G, or this group would contain H).

Now, these weights are connected by the relation

$$(8) \qquad (V) + \alpha^{-1}(VS) + \alpha^{-2}(VS^2) + \cdots + \alpha^{-10}(VS^{10}) = 0, \quad \alpha^{11} = 1$$

(§ 11, "L-G II"). The substitution S being of variety 4, there can be no substitution of order $11k$. Bearing this in mind, it is not very difficult to prove that (8) is an impossibility.

B. Let T be a substitution, the weight of which is $a\omega + b$, $a \neq 0$, and S a substitution of order 11 or 13. If there are no substitutions of order 33 or 39, we get (§ 11, "L-G II")

$$(T) = (ST)$$

for *every* substitution S of order 11 or 13, and *every* substitution T whose weight is $a\omega + b$. Proceeding as in the proof of Theorem 10, "L-G II", we find that all the substitutions of G having the property enjoyed by S form a group, contained self-conjugately in G. This group is not $= G$, as it does not contain T^{-1}.

Now, if G contains a S_{33} or S_{39}, then g is not divisible by 9. Otherwise we would find, by the method explained in art. 17, an abelian G_{99} or G_{117}, from which could be shown, in any case, the presence of H.

C. No two sub-groups of order 33 or 39 can have a substitution in common. Hence, $G'_{33} = 1 + 33k$, which does not divide g; and $G'_{39} = 1 + 39k = 40$. If G contains a S_{26}, then it will contain the group generated by S_{13}, S_3 and T:

$$\begin{array}{r|cc|c|c}
 & x & y & z & u \\
\hline
S_{13}: & \beta_1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\
S_3: & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\
T: & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\
\end{array}, \qquad \beta_i^{13} = 1,\ \omega_i^3 = 1,\ \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2.$$

The group in (x, y) must be imprimitive, or G contains H. There will be at least three substitutions of order 2 permutable with the given S_{13}, and $S'_{26} \geqq 3S'_{13}$. The group G contains no S_{5k}. Then, by means of Sylow's and Frobenius' Theorems we prove that there is only one group possible, which is of order $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, and only one distribution possible of its substitutions, namely

$$S_3' + S_{13}' + S_{30}' = 40 \cdot 38, \quad S_5' = 16 \cdot 39, \quad \sum_i S_{2^i}' 25 \cdot 39, \quad S_{26}' = S_6' = S_{5k}' = 0.$$

Then, by applying the process of A over again to this group, we find that it cannot exist as a simple group.

22. *The order of G is not divisible by 5^2, unless G can be represented as a substitution-group in 12 or fewer letters**). — Let $g = m \cdot 5^2$, m being a factor of $2^6 \cdot 3^2$. If no two G_{25} have a substitution in common, then $G_{25}' = 1 + 25k = 2^6 \cdot 3^2$. The group can in such a case be represented as a substitution-group in $n = 2^6 \cdot 3^2$ letters and of class $n-1$ and is therefore not simple (F I). Hence, G must contain two sub-groups of order 25 having in common a S_5. By art. 17, the two G_{25} considered generate a group of order $5 \cdot 60$:

$$\begin{array}{r|cc|cc} & x & y & z & u \\ \hline S: & \alpha & \alpha & \alpha^4 & \alpha^4 \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \\ \hline \end{array}, \qquad \alpha^5 = \alpha_i^5 = (\alpha_i')^5 = 1;$$

the groups in (x, y) and (z, u) each being the binary G_{60} and simply-isomorphic. We may suppose that

(A) $\qquad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha^4, \quad \alpha_3 = \alpha, \quad \alpha_4 = \alpha^4;$

or

(B) $\qquad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha^4, \quad \alpha_3 = \alpha^2, \quad \alpha_4 = \alpha^3.$

A. Any G_{25} of G contains just two distinct sub-groups of type $(\alpha, \alpha, \alpha^4, \alpha^4)$. One of these will always be common to 6 groups of order 25. If only one, the sub-groups of G of order 25 fall into sets of 6, each set containing 124 substitutions of order 5. Hence, by F II, $\frac{124}{6} G_{25}' = S_5' = 25k - 1$, or $G_{25}' = 6(1 + 25l) = 6$. — If each G_{25} contains two sub-groups of order 5 each common to 6 groups of order 25, then we find

$$\left(\frac{16 \cdot 6}{2} + \frac{4 + 24}{7}\right) \frac{2}{6} G_{25}' = S_5' = 25k - 1,$$

or $G_{25}' = 3(12 + 25l) = 3 \cdot 12$. In this case G contains 12 sub-groups of order $5 \cdot 60$. Consequently, G can, in any case, be represented as a substitution-group in not more than 12 letters.

B. Here we can have only one G_5 of type $(\alpha, \alpha, \alpha^4, \alpha^4)$. We find $G_{25}' = 6(1 + 25l) = 6$. —

*) In the following we shall, generally speaking, dismiss all cases where $g < 2000$ or where G can be represented as a substitution-group in not more than 16 letters.

To resume, the numbers that g must divide are reduced to

$$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5,$$

with the restriction in the last case that a possible S_5 must be of type $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, $\alpha^5 = 1$.

23. *The group G does not contain substitutions of orders* 35, 21 *or* 15. —

Suppose it contains a G_{35}. No two such can have a substitution of order 5 in common unless they are identical. If they have no S_7 in common, then $G'_{35} = 1 + 35k$. If they have a S_7 in common, this is of type $(\beta, \beta, \beta^6, \beta^6)$, $\beta^7 = 1$, and the two groups considered generate a $G_{7 \cdot 60}$. Each G_7 will then be permutable with 6 sub-groups of G of order 5. Hence, $6G_7' = G_5'$, and $G_5' = 6(1+35k)$. There being no such factor of g we must have $G'_{35} = 1 + 35k = 36$, and $g = 2^a \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$. We may assume that $a > 2$, as otherwise $g < 2000$. Then will G contain a S_2 leaving invariant a G_{35}. Writing G as a substitution-group in 36 letters, a G_{35} will consist of a single cycle of degree 35, and powers of this cycle. It follows that we can have no $S_{2 \cdot 35}$. Again, the given S_2, if it transforms a S_{35} into its inverse, must be of degree 34 and is then an odd substitution, in which case G is not simple. —

Let G contain a S_{21}. If g is divisible by 9 we would obtain, by the method of art. 17, an abelian G_{63}. No two such groups could have a substitution in common. Hence, $G'_{63} = 1 + 63k = 64$. Now, a S_5 could not leave invariant this G_{63} unless it is permutable with it, in which case we would obtain a S_{35}. It follows that $g = 64 \cdot 9 \cdot 7$, and G is not simple (F I). Therefore $g = m \cdot 3 \cdot 7$, where m is a factor of $2^6 \cdot 5$. Now, a given S_3 can be permutable with the substitutions of only one G_7. It could not transform a S_7 into its 2nd power, as this S_7 (and therefore every S_7) would in that case be of type $(1, \beta, \beta^2, \beta^4)$, $\beta^7 = 1$, and then we could not have a S_{21} as assumed. It follows that $G_7' = 1 + 21k = 64$. As before, g is not divisible by 5. Hence, $g = 64 \cdot 3 \cdot 7 < 2000$. —

Let G contain a S_{15}. Then any given S_5 of G cannot be of type $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, $\alpha^5 = 1$, unless G contains H. It follows that, if g is divisible by 7, G would contain a S_{35} (Theorem 13, "L-G II"), a case dismissed above. Therefore, g is a factor of $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$. We may suppose $g = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$, as all other factors are < 2000. Then we find that G contains an abelian G_{45} or a sub-group of order $3 \cdot 60$ generated by

$$\begin{array}{cc|cc} \omega & \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}, \qquad \omega_i^3 = 1, \ \alpha_i^5 = 1.$$

If it contains an abelian G_{45}, we find $G_5' = 16$. Again, the index of a G_{180} is 16. Hence, G may be represented as a substitution-group in not more than 16 letters. —

24. *The order of G is not a factor of* $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$. — We need only consider the case $g = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$. Here $G_5' = 36$ or $= 9 \cdot 64$. G is composite in the latter case (F I). In the former, G contains a G_{16} leaving invariant a given G_5. No such group of order 16 can be constructed unless G contains H.

25. *The orders* $g = 64 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ *and* $g = 32 \cdot 9 \cdot 7$ *do not correspond to simple groups.* — Observing that G_7' must be even in these cases, we notice that a G_8 could not leave one G_7 invariant unless it leaves another G_7 invariant. The G_8 considered would then contain a S_2 permutable with all the substitutions of the two groups of order 7, which would, therefore, generate an intransitive group. But this would always lead to H. It follows that $G_7' = 64 \cdot 15$ in the first case, and $= 32 \cdot 9$ in the second. Both cases are excluded by F I.

26. *The order of G is not* $64 \cdot 5 \cdot 7$. — No number of the form $2^a \cdot 5$ can be written $1 + 7k$.

27. *The order of G is not* $32 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. — We may suppose $G_7' = 8 \cdot 15$, $S_7' = 16 \cdot 45$. By F II, G contains a S_{14}. Evidently, $S_{14}' \geq S_7'$. Moreover, $S_5' = 64 \cdot 21$; and $G_3' = 70$, $8 \cdot 35$ or $32 \cdot 35$. The last hypothesis is excluded by F I, and the first because no G_{16} can be constructed leaving a G_3 invariant unless G contains H. Thus, $S_3' = 16 \cdot 35$. Then is $S_7' + S_{14}' + S_5' + S_3' + \sum_i S_{2i}' > g$, an absurdity.

28. *The order of G is not* $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$. — In order not to get a S_{21} (Theorem 13 "L-G II"), a G_9 must here be of type

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \end{array}.$$

If two different G_9 have a S_3 in common, they generate an intransitive group of order $3 \cdot 12$ or $3 \cdot 24$:

$$\begin{array}{cc|cc} x & y & z & u \\ \hline \omega & \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & \omega & \omega^2 \end{array},$$

the groups in (x, y) and (z, u) both being the binary G_{12} or G_{24} (primitive). We may, in any case, count the number of groups of order 9 and substitutions of order 3 contained in G, as was done in art. 22 in the case of groups of order 25. We find the cases

(A) $G_9' = 1 + 9k$, $S_3' = 8G_9'$.

(B) $G_9' = 4(1+9k)$, $S_3' = \frac{13}{2} G_9'$. There is a conjugate set of $1+9k$ groups of type $(\omega, \omega, \omega^2, \omega^2)$, each common to 4 groups of order 9.

(C) $G_9' = -2 + 18k$, $S_3' = 5G_9'$. There are $-1 + 9k$ groups of type $(\omega, \omega, \omega^2, \omega^2)$, each common to 4 sub-groups of order 9, falling in 1 or 2 conjugate sets.

A. Here $G_9' = 28$, and G contains a G_{16} leaving invariant a given G_9. This would, in all cases, prove the existence of H.

B. $G_9 = 16 \cdot 7$. Each of the 28 groups of type $(\omega, \omega, \omega^2, \omega^2)$ should be left invariant by a G_{16} — leading to the group H.

C. $G_9' = 64 \cdot 7$, $S_3' = 64 \cdot 7 \cdot 5$. There are $64 \cdot 7$ substitutions of type $(\omega, \omega, \omega^2, \omega^2)$, each contained self-conjugately in a G_{36} or G_{72}. We obtain at least $64 \cdot 7 \cdot 3$ different substitutions of order 6. Moreover, $G_7' = 36$ or $= 32 \cdot 9$. If the latter, then $S_7' = 32 \cdot 9 \cdot 6$, and the number of substitutions already enumerated is greater than g. Hence, $G_7' = 36$. Then G must contain a G_{16} leaving invariant a given G_7 — resulting in the group H.

29. *The order of G is not* $2^a \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $a > 3$. — As no number $2^a \cdot 9 \cdot 5$ can be written $1 + 7k$, G must contain a S_3 which transforms a G_7 into itself, without being permutable with it (art. 23). Any S_7 must therefore be of type $(1, \beta, \beta^2, \beta^4)$, $\beta^7 = 1$. Then we can have no S_{7k} (Theorem 11, "L-G II"). Again, a S_5 must be of type $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, $\alpha^5 = 1$, and we can have no S_{5k}. Let $a < 6$. Then $G_5' = 2 \cdot 9 \cdot 7$ (F I). Hence, (F II), $a \leqq 3$, contrary to the condition given.

Let $a = 6$. The enumerations given under (A), (B) and (C), art. 28, of the sub-groups of order 9 apply here.

A. $G_9' = 8 \cdot 35$, so that G contains a G_8 leaving invariant a given G_9. As we can have no abelian G_{18} (or G would contain H), we find that either this G_8 will contain a substitution of type $(\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha)$, $\alpha^4 = -1$, or G will contain a substitution of type $(1, -1, \omega, -\omega^2)$, $\omega^3 = 1$. Now, proceeding as in art. 21 (B), taking for S a substitution of order 7, we find that G is not simple.

B. Here $S_3' = 8 \cdot 35 \cdot 26$. By F II, $S_5' = 32 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 4$, and $S_7' = 64 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$. But then $S_3' + S_5' + S_7' > g$.

C. $G_9' = 70$. Such a group is then left invariant by a G_{32}. This would prove the existence of H.

30. *The order of G is not a factor of* $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$. — Let $g = m \cdot 3^3$, where m is a factor of $2^6 \cdot 5$. Examining all the groups of order 27

(art. 13) we find that if two such groups (of the same type) have a substitution in common, then they will also have in common a substitution of type $(1, \omega, \omega, \omega)$, which is permutable with all the substitutions of each G_{27}. Now we may readily prove that G would, in any case, contain H. It follows that $G'_{27} = 1 + 27k$. But g is not divisible by such a number.

It has already been proved that g is not a factor of $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$ (art. 24).

31. *The order of G is not a factor of* $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5$. — We may suppose $g = 2^a \cdot 3^4 \cdot m$, m being 1 or 5. Consider the type of group of order 81 (art. 13). It possesses just one relative invariant (x) of the first degree. The corresponding invariant (x_1) of another G_{81} of G will be transformed by its substitutions into $9k$ expressions, except when $x_1 = y$, z or u. It follows that if two G_{81}, having the same linear invariant x, are identical, then $G'_{81} = 1 + 3l + 9k$, where $l = 0$ or $= 1$. Thus, under the condition stated, $G'_{81} = 4$, 10 or 40. — Let $G'_{81} = 40$. G contains a $G_{2^{a-3}}$ leaving invariant a given G_{81}. This would in any case lead to H if $a > 4$. When $g = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$, $G_5' = 3^4$ or $2^4 \cdot 3^4$. The first case is excluded on account of the existence of H; the latter by F I, as is also the case where $g = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Here we have $G'_{81} = 40$. No S_3 can leave a G_{81} invariant unless it is contained in this G_{81}.

We must now examine the case when two groups of order 81, having the same linear invariant x, are not identical. They will generate an intransitive group*), the systems consisting of one and three variables, say x, and (y, z, u). If the group in (y, z, u) is imprimitive, the two G_{81} are identical. If the group is primitive, it must be the ternary G_{216}, being of order $27n$. In this case, G will contain a sub-group of order $3 \cdot 216$, of index $2^{a-3} \cdot 5$.

We may therefore assume $a = 5$, and suppose $G'_{3 \cdot 216} = 20$. Each of these groups has one linear invariant. No two of these invariants are alike, or the corresponding groups would generate an intransitive group of index $\leqq 10$. Thus we have just 20 linear expressions that are transformed one into the other by the substitutions of G. A given G_{81} leaves just one of them invariant. But this is impossible, as $20 - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

32. *The order of G is not a factor of* $2^6 \cdot 3^4$. — Burnside has proved that no groups of order $p^a q^b$ can be simple, p and q being prime numbers (Proc. London Math. Soc., 1904, p. 388).

33. *The Theorem stated in art. 15 has now been proved.* Leaving out of consideration for the present possible simple groups of orders

---

*) See the footnote **), page 205.

$2^6 \cdot 3^4$ 5 and $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ which cannot be represented as substitution-groups in not more than 16 letters, we find, by consulting the memoirs quoted in art. 15 (footnote) that the only simple groups which need be considered are the alternating groups in 5, 6, 7 and 8 letters, and the simple G_{168} and G_{504} (cf. articles 16, 19, 20 and 21). The simple G_{504} may be dismissed, as it contains a cyclical G_9*). Taking the types of such groups (art. 11), we could prove, by the method of art. 21 (B), that the given G_{504} should contain a S_{21}, which it does not (it is representable as a substitution-group in 9 letters). — There is one primitive G_{168}**) and only one (art. 34). — There is no $G_{\frac{1}{2}\cdot 81}$***). — The remaining groups are given by Maschke in Math. Ann. 51 (1899), pp. 278—292. Selecting those that are primitive we have the following types:

22⁰. Group of order 60 generated by

$$E_1 : \varrho x' = x,\ \varrho y' = y,\ \varrho z' = \omega z,\ \varrho u' = \omega^2 u, \qquad \omega^3 = 1;$$
$$E_2 : \varrho x' = 3x,\ \varrho y' = -y + 2z + 2u,\ \varrho z' = 2y - z + 2u,\ \varrho u' = 2y + 2z - u;$$
$$E_3 : \varrho x' = -x + \sqrt{15}\, y,\ \varrho y' = \sqrt{15}\, x + y,\ \varrho z' = 4u,\ \varrho u' = 4z.$$

23⁰. Group of order 60 generated by

E_1 of 22⁰,

$$E_2 : \varrho x' = x + \sqrt{2}\, u,\ \varrho y' = -y + \sqrt{2}\, z,\ \varrho z' = \sqrt{2}\, y + z,\ \varrho u' = \sqrt{2}\, x - u;$$
$$E_3 : \varrho x' = \sqrt{3}\, x + y,\ \varrho y' = x - \sqrt{3}\, y,\ \varrho z' = 2u,\ \varrho u' = 2z.$$

24⁰. Group of order 360 generated by

$$E_1,\ E_2,\ E_3 \text{ of } 23^0,$$

and

$$E_4 : \varrho x' = y,\ \varrho y' = x,\ \varrho z' = -u,\ \varrho u' = -z.$$

25⁰. Group of order 2520 generated by

$$S:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = \gamma y,\ \varrho z' = \gamma^4 z,\ \varrho u' = \gamma^2 u;$$
$$W: \begin{cases} \varrho x' = p^2 x + y + z + u,\ \varrho y' = x - py - qz - pu, \\ \varrho z' = x - py - pz - qu,\ \varrho u' = x - qy - pz - pu; \end{cases}$$

where

$$p = \gamma + \gamma^2 + \gamma^4,\ q = \gamma^6 + \gamma^5 + \gamma^3,\ \gamma^7 = 1.$$

---

*) Burnside, Theory of Groups, p. 374.

**) Klein, Math. Ann. 28 (1887) p. 519 gives the generating substitutions of the simple $G_{\frac{1}{2}\cdot 7!}$ containing this G_{168} as a sub-group. — See Maschke, International Math. Congress in Chicago 1893 (papers published by Macmillan and Co., 1896), p. 175.

***) Wiman, Math. Ann. 52 (1899), p. 243. — Maschke, Math. Ann. 51 (1899), p. 292.

To this list we must add the following groups:

26°. Group of order 168 generated by*)

$$S:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = \gamma y,\ \varrho z' = \gamma^4 z,\ \varrho u' = \gamma^2 u, \qquad \gamma^7 = 1;$$

$$T:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = z,\ \varrho z' = u,\ \varrho u' = y;$$

$$Q:\begin{cases}\varrho x' = x + y + z + u,\ \varrho y' = 2x + (\gamma^2+\gamma^5)y + (\gamma^3+\gamma^4)z + (\gamma+\gamma^6)u;\\ \varrho z' = 2x + (\gamma^3+\gamma^4)y + (\gamma+\gamma^6)z + (\gamma^2+\gamma^5)u,\\ \varrho u' = 2x + (\gamma+\gamma^6)y + (\gamma^2+\gamma^5)z + (\gamma^3+\gamma^4)u.\end{cases}$$

27°. Group of order $2^6 . 3^4 \cdot 5$ generated by**)

$$A:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = z,\ \varrho z' = u,\ \varrho u' = y;$$

$$C:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = y,\ \varrho z' = \omega z,\ \varrho u' = \omega^2 u;$$

$$D:\ \varrho x' = \omega x,\ \varrho y' = y,\ \varrho z' = \omega z,\ \varrho u' = \omega u;$$

$$E:\ \varrho x' = \sqrt{-3}x,\ \varrho y' = y + z + u,\ \varrho z' = y + \omega z + \omega^2 u,\ \varrho u' = y + \omega^2 z + \omega u;$$

$$F:\ \varrho x' = -z,\ \varrho y' = y,\ \varrho z' = -x,\ \varrho u' = -u.$$

34. All the possible types of collineation-groups in 4 variables isomorphic with the alternating groups in 5, 6 and 7 letters are included in the list 22°—25° (Cf. Maschke, l. c.). It remains for us *to prove that there is only one type of a collineation-group isomorphic with the simple* G_{168}, *one type of order* $\frac{1}{2}\cdot 7!$ *and one of order* $2^6\cdot 3^4\cdot 5$, thus completing the Theorem of article 15.

Consider the simple G_{168}. It has a sub-group of order 21, which must be generated by

$$S:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = \gamma y,\ \varrho z' = \gamma^4 z,\ \varrho u' = \gamma^2 u, \qquad \gamma^7 = 1;$$
$$T:\ \varrho x' = x,\ \varrho y' = z,\ \varrho z' = u,\ \varrho u' = y.$$

Choosing for new variables z_1, z_2, z_3, z_4, where

$$(9)\quad z_1 = x,\ z_2 = y + z + u,\ z_3 = y + \omega z + \omega^2 u,\ z_4 = y + \omega^2 z + \omega u,$$

we obtain the substitutions S and T in the forms

$$(10)\ S:\begin{cases}\varrho z_1' = z_1,\ 3\varrho z_2' = pz_2 + rz_3 + qz_4,\ 3\varrho z_3' = qz_2 + pz_3 + rz_4,\\ 3\varrho z_4' = rz_2 + qz_3 + pz_4,\end{cases}$$

*) This is the form in which it is given by Maschke, Intern. Math. Congress. in Chicago, 1893, l. c.

**) Witting, Inaugural-Dissertation, Göttingen (1887), p. 27, gives a set of generating substitutions for this group from which the set given here is constructed by Maschke, Math. Ann. 33 (1889), p. 320. The substitution B is omitted, as $B = E^2$ for the collineation-group.

where

$$p = \gamma + \gamma^4 + \gamma^2,\ q = \gamma + \gamma^4\omega + \gamma^2\omega^2,\ r = \gamma + \gamma^4\omega^2 + \gamma^2\omega;$$

$$T:\ \varrho z_1' = z_1,\ \varrho z_2' = z_2,\ \varrho z_3' = \omega^2 z_3,\ \varrho z_4' = \omega z_4.$$

The group (G) sought has also a substitution Q_1 of order 2, transforming T into T^2. This substitution must be of the form

$$Q_1:\ \varrho z_1' = a z_1 + b z_2,\ \varrho z_2' = c z_1 + d z_2,\ \varrho z_3' = e z_4,\ \varrho z_4' = f z_3.$$

Now, G contains just 8 sub-groups of order 21. With each is associated a relative linear invariant (z_1 in (10)). No two different G_{21} can have the same linear invariant, or these sub-groups would generate an intransitive G_{168}. Hence, the G_{168} considered must transform z_1 into just eight different linear expressions. Noticing that $b \neq 0$, or G would be intransitive, these 8 expressions may be written

$$z_1,\quad Q_1(z_1);$$

$$(A):\quad SQ_1(z_1),\quad TSQ_1(z_1),\quad T^2SQ_1(z_1);$$

$$(B):\quad S^3Q_1(z_1),\quad TS^3Q_1(z_1),\quad T^2S^3Q_1(z_1).$$

Writing down these expressions we find readily that Q_1 must transform any member of (B) into a member of (A), and vice-versa. This condition, and $Q_1^2 = 1$, serve to determine Q_1 uniquely. We find

$$a = -d = 1,\quad bc = 6,\quad e = qq_1,\quad f = rr_1,$$

where

$$q_1 = \gamma^3 + \omega\gamma^5 + \omega^2\gamma^6,\quad r_1 = \gamma^3 + \omega^2\gamma^5 + \omega\gamma^6.$$

Transforming back to the original variables (x, y, z, u) we recognize the group 26°.

35. *There is only one type of a collineation-group isomorphic with a simple group of order* $\frac{1}{2}\cdot 7!$. — We may assume that the group (G) contains no S_{35} or S_{21} (cf. art. 23). We then find $G_7' = 1 + 7k = 5\cdot 3\cdot 2^\alpha$, and a given S_7 must be transformed into the 4th power of itself by a certain S_3. We have therefore a G_{21} of type (10).

The sub-group of G of order 9, to which T belongs, is of type

$$T:\ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \end{array}.$$

This G_9 contains a $S_3 = W_1$ of type $(\omega, \omega^2, 1, 1)$, permutable with T of (10), and is therefore of the form

$$W_1:\ \varrho z_1' = a z_1 + b z_2,\ \varrho z_2' = c z_1 + d z_2,\ \varrho z_3' = z_3,\ \varrho z_4' = z_4,$$

where

$$ad - bc = 1,\quad a + d = \omega + \omega^2 = -1.$$

Let us now construct the substitutions SW_1, SW_1T, SW_1^2, and SW_1^2T. Their weights are, respectively,

$$a+\frac{1}{3}p(d+2),\quad a+\frac{1}{3}p(d-1),\quad d+\frac{1}{3}p(a+2)\ \text{ and }\ d+\frac{1}{3}p(a-1),$$

where

$$p=\gamma+\gamma^4+\gamma^2.$$

Hence,

$$p=(SW_1)-(SW_1T)=(SW_1^2)-(SW_1^2T),$$
$$p-1=(SW_1)+(SW_1^2).$$

Clearly, at least one of the substitutions SW_1 and SW_1T must be of order 7. We find the following possibilities:

	I	II	III	IV
$(SW_1)=$	$p+1$	$-(p_1+1)$	-1	0
$(SW_1T)=$	1	0	$-(p+1)$	p_1+1,

$p_1=\gamma^3+\gamma^5+\gamma^6$;

with a similar table for (SW_1^2) and (SW_1^2T). The condition

$$p-1=(SW_1)+(SW_1^2)$$

will exclude the cases I and IV. The two remaining cases are found to be interchanged by replacing W_1 by W_1^2. Hence, considering II only, we have $a=\frac{1}{7}(3p-2)$, $d=\frac{1}{7}(-3p-5)$, $bc=-\frac{3}{7}$. Then, transforming back to the variables x, y, z, u, we obtain the group given in 25°.

36. *There is only one type of a collineation-group isomorphic with a simple group of order* $2^6\cdot 3^4\ 5$. — Proceeding as in article 31 we find that a group (G) of the order given contains either 64 sub-groups of order 81, or it must contain the Hessian G_{216} as a collineation-group in 3 variables. The first hypothesis may be excluded. For, a G_{81} (see (δ) of art. 13) cannot be left invariant by a S_5 unless G contains H. Let us consider the second. The sub-group (K) of G, of order 216 when regarded as a collineation-group in 3 variables (y, z, u), must be of order $3\cdot 216$ when considered as a collineation-group in 4 variables (x, y, z, u), as it must contain the G_{81} of type (δ) of article 13. Knowing its character, we may readily construct it, and find it to be generated by (δ) of article 13 and the following substitution*)

$$E:\ \varrho x'=(\omega-\omega^2)x,\quad \varrho y'=y+z+u,\quad \varrho z'=y+\omega z+\omega^2u,$$
$$\varrho u'=y+\omega^2z+\omega u.$$

*) Cf. Maschke, Math. Ann. 33, p. 324.

Let D be the substitution, contained in (δ),

$$D\colon \varrho x' = \omega x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = \omega z, \quad \varrho u' = \omega u.$$

The substitutions E and DED^{-1} generate a group of order 8. Changing the variables so that E is written in canonical form, this G_8 is of type

$$E\colon \varrho x_1' = i x_1, \quad \varrho y_1' = -i y_1, \quad \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho u_1' = u_1;$$

$$DED^{-1}\colon \varrho x_1' = \alpha y_1, \quad \varrho y_1' = \beta x_1, \quad \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho u_1' = u_1.$$

The order of G being divisible by 32, the G_8 considered is contained self-conjugately in a G_{16}, and this again in a G_{32}. By considering the different possibilities, paying attention to Theorem 10 and articles 11—12, we find that, in all cases, the G_{32} will contain a substitution (M_1) of type

$$M_1\colon \varrho x_1' = x_1, \quad \varrho y_1' = y_1, \quad \varrho z_1' = i z_1, \quad \varrho u_1' = -i u_1.$$

This, written in the letters x, y, z, u, becomes

$$M_1\colon \begin{cases} \varrho x' = (q-p)x + c(z-u), & \varrho y' = (q+p)y, \\ \varrho z' = bx + pz + qu, & \varrho u' = -bx + qz + pu; \qquad bc = -p^2 - q^2. \end{cases}$$

Now, with each $G_{3\cdot 216}$ is associated a single relative invariant (x) of the first degree. The number of such invariants must be of the form $1 + 3k$ and is a factor of 40, the index of $G_{3\cdot 216}$. The number is plainly 40. Taking, therefore, the letter x and different expressions into which it is changed by M_1 and the substitutions of K, imposing the condition that there should be no more than 40 such expressions, it is found without much trouble that $q = -\omega^2 p$ (or $= -\omega p$), giving the substitution

$$M_1\colon \quad \begin{cases} \varrho x' = \omega x + \omega(z-u), & \varrho y' = (1-\omega^2)y, \\ \varrho z' = \omega x + z - \omega^2 u, & \varrho u' = -\omega x - \omega^2 z + u. \end{cases}$$

This is the substitution M in Witting's list of generating substitutions of the known simple G_{25920}, from which Maschke obtains the group 27° (see Math. Ann. 33, l. c.). Hence, M_1 is contained in the group 27°. Moreover, K is the group generated by A, C, D and E of 27°, and $F = E^3 M_1 A E M_1$. The group generated by K and M_1 is therefore identical with the group 27°. —

IV. The Primitive Groups having Invariant Primitive Sub-groups.

37. Some of these have already been determined under I. and II. To complete the list we must find the groups containing self-conjugately any of the types 22°—27°, and the groups containing these again self-conjugately, etc.

No substitution which is not a similarity-substitution can be permutable with every substitution of a primitive group. As a consequence, the only new groups to be added to our list, arising from the groups 22°, 23°, 25° (isomorphic with the alternating groups in 5 and 7 letters), are groups isomorphic with the symmetric groups in 5 and 7 letters*). All the types of such groups are given by Maschke in Math. Ann. 51 (1899), as is also a group isomorphic with the symmetric group in 6 letters (one type). They are as follows:

28°. Group of order 120 generated by 22° and the substitution

$$F\colon \varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = u, \quad \varrho u' = z.$$

29°. Group of order 120 generated by 23° and the substitution

$$F\colon \varrho x' = y, \quad \varrho y' = -x, \quad \varrho z' = u, \quad \varrho u' = -z.$$

30°. Group of order 720 generated by 24° and the substitution

$$F\colon \varrho x' = y, \quad \varrho y' = -x, \quad \varrho z' = u, \quad \varrho u' = -z.$$

38. We shall now prove, in the first place, that 30° is the only type of a group larger than the G_{360} of 24° and containing this self-conjugately; in the second place, no group larger than the G_{720} of 30° can contain this self-conjugately.

A simple group of order 360 contains two conjugate sets of simple groups of order 60, each set containing 6 such groups. The group 23° is a type of a G_{60} of one set contained in the group of order 360 given in 24°, the group (95) given by Maschke in the memoir referred to in art. 37 is a type of a G_{60} of the other set. These two types are not transformable one into the other (see Maschke, l. c. p. 285). Hence, the substitutions of a group (G) containing 24° self-conjugately must leave invariant each of the sets considered. It follows that the order of G must be $2^{3+a}\cdot 3^2 \cdot 5$, and that G contains a $G_{2^{2+a}}$ which leaves invariant a G_{60} contained in G. This G_{60} may be assumed to be that given in 23°. From what has been stated in art. 37 it follows that $a = 1$ at most, that the given $G_{2^{2+a}}$ and the group 23° generate the group 29°, which is contained in the group 30°.

The symmetric group in 6 letters contains only one sub-group of order 360. A group containing the group 30° self-conjugately must therefore contain the group 24° self-conjugately, i. e. it must coincide with the group 30°.

39. Finally, we shall prove that a group containing either 26° or 27° self-conjugately must coincide with that group.

*) Burnside, Theory of Groups, p. 246.

Consider a group G within which $K = G_{168}$ of 26^0 is invariant. As K contains 8 sub-groups of order 21, G, if larger than K, must contain a substitution (R), not present in K, which transforms a G_{21} of K into itself. By examining all possible cases, we find that R may be assumed to be of the form

$$\varrho x' = ax, \quad \varrho y' = by, \quad \varrho z' = cz, \quad \varrho u' = du,$$

the given G_{21} being generated by S and T of 26^0. Now, with K is associated a set of 8 linear expressions (and only one set), as was seen in art. 34. In order that this set may be left invariant by R we find that $R = S^k$. Hence, G coincides with K.

In the group 27^0 of order 25920, we have $G'_{216 \cdot 3} = 40$, and a single invariant set of 40 linear expressions (art. 36). A group G, containing 27^0 self-conjugately must contain a substitution leaving invariant a given sub-group of order $3 \cdot 216$ and also the set of 40 linear expressions. We readily find that G coincides with G_{25920}. —

40. *Results for the collineation-groups in 4 variables.* — A complete list of the primitive collineation-groups in 4 variables has now been obtained. Using the classification given in the introduction for such groups, we tabulate them as follows:

I. Groups having intransitive self-conjugate sub-groups, 7 types: 1^0—7^0, articles 1—3.

II. Groups having imprimitive self-conjugate sub-groups, 9 types: 13^0—21^0, articles 7—8.

III. Groups which are simple, 6 types: 22^0—27^0, article 33.

IV. Groups having primitive self-conjugate sub-groups, 8 types, distributed as follows:

5 types containing self-conjugately groups under I, namely 8^0—12^0, article 4;

3 types containing self-conjugately groups under IV, namely 28^0—30^0, article 37.

No two of these 30 types are transformable one into the other, and any given finite, primitive collineation-group in four variables is transformable into one of these types.

Über Behandlung zyklischer Systeme mit Variationsprinzipien, mit Anwendungen auf die Mechanik starrer Körper.

Von

G. Kolossoff in Jurjew (Dorpat).

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie v. J. 1888 hat Herr H. Minkowski eine interessante Abhandlung über die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit publiziert. Von den sechs Kirchhoffschen Differentialgleichungen des Problems der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit nimmt er die drei ersten:

$$(1)\qquad \frac{dU}{dt} = rV - qW, \quad \frac{dV}{dt} = pW - rU, \quad \frac{dW}{dt} = qU - pV,$$

wo p, q, r die augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um die Achsen eines mit dem Körper starr verbundenen Koordinatensystems und U, V, W die in der Richtung derselben Achsen genommenen Komponenten der Resultante des augenblicklichen Impulses sind, während (P, Q, R) das Drehmoment des Impulses um die im Körper festen Achsen bezeichnen soll. Die Differentialgleichungen der Bewegung haben alsdann das Integral

$$(2)\qquad UP + VQ + WR = \text{const.} = JJ_1.$$

Mit seiner Hilfe drückt Minkowski p, q, r als Funktionen von U, V, W und $\frac{dU}{dt}, \frac{dV}{dt}, \frac{dW}{dt}$ aus.

Dann führt er die drei gefundenen Werte für p, q, r in die drei letzten Differentialgleichungen der Bewegung ein, nimmt statt u, v, w zwei Argumente e_1, e_2 derart, daß das Integral der Differentialgleichungen der Bewegung

$$(3)\qquad U^2 + V^2 + W^2 = \text{const.} = J^2$$

identisch erfüllt wird, und kommt zu zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für e_1 und e_2, die folgende Auslegung gestatten: „*Man fixiere einen beliebigen Punkt und eine beliebige Richtung im Körper. In einem*

Zeitelement dt sei $d\sigma$ der Weg des Punktes längs der unveränderlichen Achse des Impulses, $d\sigma_2$ der Weg der Richtung um diese Achse $\cdots$. *Die Größen e_1 und e_2 sind innerhalb einer beliebigen Zeitperiode solche Funktionen* $\cdots$, *daß*

$$\delta\Phi = 0\,,$$

wo

$$\Phi = \int T\,dt - J\,d\sigma - J_1\,d\sigma_1$$

ist" (T ist die lebendige Kraft des Systems).

Dieses Verschwinden der ersten Variation entspricht einer neuen und sehr anschaulichen Minimaleigenschaft des Problems der Rotation für den Fall, daß keine Kräfte wirken. Diese Eigenschaft, welche Minkowski, wie er angibt, durch eine umständliche Rechnung gefunden hat, ist jedoch nichts anderes, als der Larmorsche Satz (London Math. Soc. 1884), und die Funktion $T - J\frac{d\sigma}{dt} - J_1\frac{d\sigma_1}{dt}$ die „*modifizierte Lagrangesche Funktion*"*) des Problems der Rotation. In der Tat, die sechs Differentialgleichungen der Bewegung entsprechen dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = 0,$$

wo U das Potential der äußeren Kräfte ist und, da hier keine Kräfte wirken, gleich 0 wird. Wir nehmen jetzt als im Raume festes Koordinatensystem ein rechtwinkliges System 0Ξ, $0H$, $0Z$, von welchem $0Z$ (für unseren Fall, daß keine Kräfte wirken) mit der im Raume stets unveränderlichen Richtung der Achse des Impulses zusammenfällt, führen in die Differentialgleichungen die drei Eulerschen Winkel $\psi = \sigma_1$, ϑ, φ ein, welche durch das im Körper feste Achsensystem mit den Achsen 0Ξ, $0H$, $0Z$ gebildet werden, und bezeichnen die Koordinaten des Anfangspunktes des im Körper festen Achsensystems x, y, z durch ξ_0, η_0, $\zeta_0 = \sigma$. Die Differentialgleichungen der Bewegung ergeben dann die Integrale

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'} = \frac{\partial T}{\partial\sigma_1'} = \text{const.} = J_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\zeta_0'} = \frac{\partial T}{\partial\sigma'} = \text{const.} = J,$$

welche mit den Integralen (2) und (3) übereinstimmen.

Modifizieren wir nun die Lagrangesche Funktion des Problems (T) mit Hilfe dieser Integrale, so erhalten wir

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(T - J_1\frac{d\sigma_1}{dt} - J\frac{d\sigma}{dt}\right)dt = 0,$$

was dem Minkowskischen Satz entspricht.

*) E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper II, § 450, pg.

Wir haben also hier nach dem Verfahren von Larmor eine Minimaleigenschaft abgeleitet, welche mit der von Herrn Minkowski gefundenen identisch ist.

Herr Minkowski bemerkt in seiner Arbeit, daß sich für den Fall des Problems der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt ein ähnlicher Satz beweisen läßt. Mit Hilfe der Theorie der Modifikation werden wir in der Tat einen ähnlichen Satz nicht nur für den Fall der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt beweisen, sondern für jeden Fall der *Rotation um einen festen Punkt, in welchem in einer Ebene der Flächensatz besteht.* Nehmen wir nämlich die Z-Achse senkrecht zu dieser Ebene; dann muß das Moment aller Kräfte um diese Achse verschwinden und das Flächenintegral nimmt die Form an:

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial \psi'} = \text{const} = l.$$

Modifizieren wir die Lagrangesche Funktion mit Hilfe dieses Integrals, so erhalten wir:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(T + U - l\,\frac{d\psi}{dt}\right) dt = 0. \tag{4}$$

Die Methode von Herrn Minkowski hat jedoch den Vorzug, das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt auf ein Problem der Punktmechanik zu reduzieren. Zum Zweck der gleichen Reduktion nehmen wir statt der Eulerschen Winkel ψ, φ, ϑ drei neue Variable

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{A}} \cos(Zx) = -\frac{1}{\sqrt{A}} \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{B}} \cos(Zy) = \frac{1}{\sqrt{B}} \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{C}} \cos(Zz) = \frac{1}{\sqrt{C}} \cos\vartheta \end{aligned}$$

welche der Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \tag{5}$$

identisch genügen. Als Achsensystem, welches im Körper fest ist, wählen wir die Hauptachsen im festen Punkt und A, B, C seien die Trägheitsmomente. Dann erhält die lebendige Kraft des Körpers die Form

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2}\,\frac{l^2 + ABC\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}.$$

Indem wir nun in das modifizierte Hamiltonsche Prinzip (4) die Größen

$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ statt ψ, ϑ, φ einführen, erhalten wir einen Ausdruck, welcher für den Fall $l = 0$ folgende sehr einfache Form annimmt:

$$(6)\qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{ABC\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2} + U \right\} dt = 0.$$

Diese Form ist dem Hamiltonschen Prinzip für die Bewegung eines materiellen Punktes ganz analog. Wenn wir die Lösung des Variationsproblems (6) auf Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen und statt der rechtwinkligen die elliptischen Koordinaten λ_1 und λ_2 an der Oberfläche des Ellipsoids (5) heranziehen, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$(7)\qquad 2\lambda_1\lambda_2 \left\{ \frac{\varphi(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{\varphi(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_2}\right)^2 \right\} = U + h,$$

wo

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{1}{A} + \lambda\right)\left(\frac{1}{B} + \lambda\right)\left(\frac{1}{C} + \lambda\right)$$

ist.

Das vollständige Integral dieser Gleichung kann, falls

$$(8)\qquad U = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \{\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2)\}$$

ist, in der Form

$$V = \int \frac{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{-\Phi(\lambda_1) - \frac{h}{\lambda_1} + C}}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} d\lambda_1 + \int \frac{\sqrt{\lambda_2}\sqrt{-\Phi(\lambda_2) - \frac{h}{\lambda_2} + C}}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(\lambda_2)}} d\lambda_2$$

hingeschrieben werden.

Die Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung nehmen dann die Form an

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\int \frac{\lambda_1\, d\lambda_1}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}\sqrt{C\lambda_1 - h - \lambda_1\Phi(\lambda_1)}} + \int \frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}\sqrt{C\lambda_2 - h - \lambda_2\Phi(\lambda_2)}} = \text{const.},\\ &\int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}\sqrt{C\lambda_1 - h - \lambda_1\Phi(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}\sqrt{C\lambda_2 - h - \lambda_2\Phi(\lambda_2)}} = 2\sqrt{2}\,(t - t_0).\end{aligned}\right.$$

Auf diese Weise erhalten wir, bei $\Phi(\lambda) = \text{const.} \times \lambda$, die Lösung des Problems der Rotation, wenn

$$\begin{aligned} U &= \text{const.} \times (A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)\\ &= \text{const.} \times (A\cos^2(Zx) + B\cos^2(Zy) + C\cos^2(Zz))\end{aligned}$$

ist. Es ist dieses das Problem von de Brun*), welches, wie Herr Stekloff nachgewiesen hat**), mit dem Problem von A. Clebsch***) über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit identisch ist. Die hier durch die Formeln (9) gegebene Lösung ($l = 0$) stimmt mit der von Herrn H. Weber†) gegebenen überein.

Bei $\Phi(\lambda) = \text{const.} \times \lambda^2$ erhalten wir eine Lösung für den Fall

$$U = \text{const.}\,(A\cos^2(Zx) + B\cos^2(Zy) + C\cos^2(Zz))$$
$$\cdot\left(\frac{1}{A}\sin^2(Zx) + \frac{1}{B}\sin^2(Zy) + \frac{1}{C}\sin^2(Zz)\right)$$

und bei $\Phi(\lambda) = \frac{\text{const.}}{\lambda^2}$ für den Fall

$$U = \text{const.}\,\frac{\frac{1}{A}\sin^2(Zx) + \frac{1}{B}\sin^2(Zy) + \frac{1}{C}\sin^2(Zz)}{A\cos^2(Zx) + B\cos^2(Zy) + C\cos^2(Zz)}.$$

usw.

Es läßt sich nun folgende Bemerkung über die Modifikation der Lagrangeschen Funktion machen, wenn es sich um ein mechanisches Problem handelt, das die Integrale

$$(10)\qquad \frac{\partial(T+U)}{\partial\psi'} = \text{const.} = l_1, \qquad \frac{\partial(T+U)}{\partial\varphi'} = \text{const.} = l_2 \text{††)}$$

zuläßt und der Fall $l_1 = l_2 = 0$ zu untersuchen ist, bei dem die Integrale (10) die Form

$$(11)\qquad \frac{\partial(T+U)}{\partial\psi'} = 0, \qquad \frac{\partial(T+U)}{\partial\varphi'} = 0$$

annehmen. Werden in dem unter dem Integralzeichen des Hamiltonschen Prinzips stehenden Ausdruck $T + U$ die Variablen ψ', φ' mittels der Integrale eliminiert und die so gebildete Funktion durch $[T+U]$ bezeichnet, so ist

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}[T+U]\,dt = 0,$$

da in der modifizierten Funktion die Glieder

$$-l_1\frac{d\psi}{dt} - l_2\frac{d\varphi}{dt}$$

verschwinden.

---

*) Appell, Traité de Mécanique rationnelle II art. 500, pg. 449. — Kobb, Bulletin des sciences mathématiques t. XXIII.

**) Remarque sur un problème de Clebsch ... Journal de Mathématiques 1903.

***) Math. Annalen III.

†) Math. Annalen XIV.

††) Hier sind nur zwei Variablen angeführt; doch ist die Theorie natürlich auch bei einer beliebigen Anzahl derselben richtig.

Diese Regel *bleibt auch richtig für den Fall*, daß *partikuläre Lösungen* der Differentialgleichungen der Bewegung von der Form (11) bestehen, vorausgesetzt, daß diese nicht Spezialfälle von *Integralen der Form* (10) *sind*. Auf diesem Wege läßt sich das Hauptresultat des *Hess'schen Falles* der Bewegung eines starren Körpers unter dem Einfluß gegebener Kräfte und Reaktionen der Zwangsverbindungen*) beweisen. Diese Kräfte und Reaktionen sind hier der Bedingung unterworfen, daß die Momente derselben um die Senkrechte P zu den Kreisschnitten des reziproken Trägheitsellipsoids (im Schwerpunkt) verschwinden. Dann ergeben die Differentialgleichungen die Lösung

$$(12) \qquad A\alpha p + C\gamma r = 0$$

(α, β, γ sind die Richtungskosinus der oben erwähnten Senkrechten P in bezug auf die Hauptachsen im Schwerpunkt; p, q, r sind die augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um dieselben Achsen; A, B, C sind die Hauptträgheitsmomente im Schwerpunkt und es ist $A > B > C$). Drehen wir nun die Hauptachsen um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments und bringen die neue z-Achse mit der Senkrechten P zum Zusammenfallen, dann kann die Lösung (12), da ihre linke Seite die Winkelbewegungsgröße des Körpers um die Senkrechte P oder um die neue Achse Z darstellt, in die Form gebracht werden

$$(13) \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \varphi'} = 0$$

wo T die lebendige Kraft des Körpers und φ einer der Eulerschen Winkel ψ, ϑ, φ ist, welche die neuen Achsen mit den festen Achsen $O\Xi$, OH, OZ bilden. Wir können nun φ' mittels des Integrals (13) oder (12) in dem unter dem Integralzeichen des Hamiltonschen Prinzips stehenden Ausdruck $T + U$ eliminieren. Dann nimmt dieser Ausdruck die Form

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} B(p^2 + q^2) + U$$

an, wo M die Masse des Körpers und v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts bezeichnen. Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip können wir in der Form

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{B}{2}(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Mv^2 + U\right] dt = 0$$

schreiben und folgenden Satz aufstellen:

---

*) Der Hess'sche Fall der Bewegung eines schweren starren Körpers (F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels p. 374 ff., Kap. V, § 9) und dessen Verallgemeinerungen (G. Kolossoff, Gött. Nachr. 1898; G. Kolossoff, On a case of motion of a rigid body, Messenger of Mathem. 1901).

Wenn es sich um die Untersuchung der Bewegung von P handelt, so können wir die ganze Masse des Körpers in P konzentriert denken, wobei wir sie so zu verteilen haben, daß ihr Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt = B ist.

Nachdem hier die Modifikationen des Hamiltonschen Prinzips besprochen sind, erscheint es zweckmäßig, auch die *Anwendung einiger anderer Methoden* zum Übergang von einem kanonischen System von Differentialgleichungen zu einem anderen zwecks Lösung von Problemen aus der Mechanik starrer Körper zu geben.

Die lebendige Kraft eines um einen festen Punkt rotierenden Körpers ist unter der Annahme, daß die im Körper festen Achsen mit den Hauptachsen zusammenfallen:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = (A \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + B \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + C\cos^2\varphi)\psi'^2$$
$$+ (A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\vartheta'^2 + C\varphi'^2 + 2\psi'\vartheta'(B-A)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+ 2C\psi'\varphi'\cos\vartheta.$$

Das Moment der äußeren Kräfte um die im Raume feste Achse $0Z$ setzen wir $= 0$; dann ergeben die Differentialgleichungen der Rotation das Flächenintegral

$$(14) \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \psi'(A\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + B\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi)$$
$$+ \vartheta'(B-A)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + C\varphi'\cos\vartheta = \text{const.} = l.$$

Setzen wir

$$p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = Cr,$$
$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = -Ap\sin\vartheta\cos\varphi + Bq\sin\vartheta\sin\varphi + Cr\cos\vartheta,$$
$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi,$$

so folgt leicht

$$(15) \qquad \begin{cases} Ap = p_\vartheta \sin\varphi - \dfrac{\cos\varphi(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}, \\ Bq = \dfrac{(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)\sin\varphi}{\sin\vartheta} + p_\vartheta\cos\varphi, \\ Cr = p_\varphi. \end{cases}$$

Die Jacobi-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung ist, wenn die Kräfte eine Kräftefunktion U besitzen,

$$(16)\quad \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cos\varphi + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\vartheta\right)\sin\varphi}{\sin\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\sin\varphi - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\vartheta\right)\cos\varphi}{\sin\vartheta}\right)^2\right\} = U + h.$$

Gehen wir nun zu den neuen Variablen u, v über, indem wir annehmen, daß

$$A^2p^2 + B^2q^2 = F(u, v),$$
$$Cr = \Phi(u, v),$$

wo F und Φ beliebige Funktionen sind. Dann erhalten wir mit Hilfe der Ausdrücke (15) und des Flächenintegrals (14):

$$p_\varphi = \Phi(u, v),$$
$$p_\vartheta = \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}.$$

Mittels der Funktion

$$\chi(u, v, \varphi, \vartheta) = \Phi(u, v)\varphi + \int^{\vartheta} \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta$$

führen wir an Stelle der Variablen φ, ϑ, p_φ, p_ϑ die Variablen u, v, p_u, p_v nach den Jacobischen Formeln ein:

$$(17)\quad \begin{cases} p_\varphi = \dfrac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \Phi(u, v), \\[2ex] p_\vartheta = \dfrac{\partial \chi}{\partial \vartheta} = \sqrt{F(u, v) - \dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}, \\[2ex] p_u = -\dfrac{\partial \chi}{\partial u} = -\varphi\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int^{\vartheta} \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial u} + 2\dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{\sqrt{F(u, v) - \dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}}\, d\vartheta, \\[2ex] p_v = -\dfrac{\partial \chi}{\partial v} = -\varphi\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int^{\vartheta} \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial v} + 2\dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{\sqrt{F(u, v) - \dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}}\, d\vartheta. \end{cases}$$

Diese Integrale können durch Logarithmen dargestellt werden.

Auf diesem Wege können wir den *Goriatschoffschen*) Fall der Rotation eines starren Körpers* um einen Punkt behandeln und die Tschaplyginschen**) Formeln der Reduktion des Problems auf ultra-

*) D. N. Goriatschoff, Mosk. Math. Gesellschaft 1900.

**) S. A. Tschaplygin, Arbeiten der phys. Sektion der Moskauer Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde 1901. Diese Formeln sind von S. Tschaplygin mit Hilfe eines vierten Integrals

$$r(p^2 + q^2) + ap\cos\vartheta = \text{const.}$$

erhalten worden.

elliptische Funktionen erhalten. Wir haben hier $A = B = 4C$ (wir können $A = B = 1$, $C = 4$ setzen), $l = 0$, $U = a\cos(Zx)$ (der Schwerpunkt liegt in der Ebene der gleichen Hauptträgheitsmomente). Die Differentialgleichung (16) nimmt hier die Form

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \cot^2\vartheta\right\}\right] = -a\sin\vartheta\cos\varphi + h$$

an.

Setzen wir in den Transformationsformeln (17)

$$\Phi(u, v) = i(u+v),$$
$$F(u, v) = 4uv,$$

so erhalten wir:

$$p_\varphi = i(u+v),$$

$$p_\vartheta = \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta},$$

$$p_u = -\varphi i - \int \frac{2v + (u+v)\cot^2\vartheta}{\sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}}\, d\vartheta$$
$$= -i\varphi + \lg\left\{a\cos\vartheta\left[(v+u)\cot\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right] + 2ua\sin\vartheta\right\},$$

$$p_v = -i\varphi - \int \frac{2u + (u+v)\cot^2\vartheta}{\sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}}\, d\vartheta$$
$$= -i\varphi + \lg\left\{a\cos\vartheta\left[(v+u)\cot\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right] + 2va\sin\vartheta\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$(18)\quad \begin{cases} e^{p_u + i\varphi} = a\cos\vartheta\left\{(v+u)\operatorname{cotg}\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right\} + 2ua\sin\vartheta, \\ e^{p_v + i\varphi} = a\cos\vartheta\left\{(v+u)\operatorname{cotg}\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right\} + 2va\sin\vartheta, \end{cases}$$

$$\frac{e^{p_u} - e^{p_v}}{2a(v-u)} = -\sin\vartheta\, e^{-\varphi i} = -\sin\vartheta\cos\varphi + i\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$\frac{\left(ve^{p_u} - ue^{p_v}\right)e^{i\varphi}}{a(v-u)\left\{(v+u)\cot\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right\}} = \cos\vartheta.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (18) erhalten wir

$$e^{2i\varphi + p_u + p_v} = a^2\left((v+u)\cot\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right)^2$$

oder

$$\frac{e^{i\varphi}}{a\left((v+u)\cot\vartheta + \sqrt{4uv + (u+v)^2\cot^2\vartheta}\right)} = e^{-\frac{p_u + p_v}{2}}.$$

Man erhält so

$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = \frac{e^{p_u} - e^{p_v}}{(u-v)^2}\left(u^2 e^{-p_u} - v^2 e^{-p_v}\right)$$

$$-\sin\vartheta\cos\varphi - i\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta\, e^{-\varphi i}} = -2a\,\frac{u^2 e^{-p_u} - v^2 e^{-p_v}}{u - v}.$$

Daraus folgt

$$\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{a}{2}\left\{\frac{1}{2a}\,\frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{u-v} + 2a\,\frac{u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}}{u-v}\right\}.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft, ausgedrückt durch die neuen Variabelen, nimmt die Form an:

$$-\frac{1}{2}(u^2+uv+v^2)+\frac{1}{4}\,\frac{e^{p_u}-e^{p_v}+4a^2(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})}{u-v} = h$$

oder

$$-(u^3-v^3)+\frac{1}{2}(e^{p_u}-e^{p_v}+4a^2(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})) = 2h(u-v).$$

Die partielle Differentialgleichung lautet nach Einführung der neuen Variabelen

$$(19)\qquad \left(-u^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial u}}+2a^2u^2e^{-\frac{\partial V}{\partial u}}-2hu\right) - \left(-v^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial v}}+2a^2v^2e^{-\frac{\partial V}{\partial v}}-2hv\right) = 0.$$

Zur Integration dieser Gleichung können wir annehmen, daß

$$-u^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial u}}+2a^2u^2e^{-\frac{\partial V}{\partial u}}-2hu = \Gamma,$$

$$-v^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial v}}+2a^2v^2e^{-\frac{\partial V}{\partial v}}-2hv = \Gamma$$

ist, wo Γ eine willkürliche Konstante darstellt.

Daraus

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \lg\left(u^3+2hu+\Gamma+\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \lg\left(v^3+2hv+\Gamma+\sqrt{(v^3+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2}\right).$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (19) lautet:

$$V = \int\lg\left(u^3+2hu+\Gamma+\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2}\right)du + \int\lg\left(v^3+2hv+\Gamma+\sqrt{(v^3+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2}\right)dv.$$

Die Integrale des Problems der Rotation nehmen dann folgende Form an:

$$\frac{\partial V}{\partial\Gamma} = \int\frac{du}{\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2}} + \int\frac{dv}{\sqrt{(v^3+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2}} = \text{const.},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \int\frac{2u\,du}{\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2}} + \int\frac{2v\,dv}{\sqrt{(v^3+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2}} = t-t_0.$$

Dieses System stimmt mit dem ultraelliptischen System von S. Tschaplygin überein.

Über das in der kinematischen Geometrie auftretende Nullsystem.

Von

Eugen Meyer in Charlottenburg.

Wird ein räumliches System durch eine Bewegungstransformation, die nicht eine Translation oder eine Rotation um eine Achse ist, in sich übergeführt, so ist, wenn dadurch der Punkt A nach A' kommt, der Mittelpunkt der Verschiebungssehne AA' der durch ihn gehenden Normalebene von AA' nach Chasles bekanntlich in einem linearen Nullsystem zugeordnet. Vom Standpunkt der Kinematik läßt dieser Satz nichts zu wünschen übrig, von demjenigen der projektiven Geometrie aber betrachtet, ist die Frage nach seiner Tragweite offen geblieben.

Da jede der genannten Transformationen sich durch eine Schraubenbewegung um eine bestimmte Grade, die Hauptachse des Nullsystems, bewirken läßt, so gehört sie zu denjenigen besonderen Kollineationen, für die zwei reelle Eckpunkte des Haupttetraeders zusammenfallen. Es läßt sich daher jener kinematische Satz in folgender von metrischen Begriffen freien Fassung aussprechen:

Es sei K eine eigentliche Kollineation, die die unendlich ferne Ebene ε_∞ und in ihr den imaginären Kugelkreis in sich überführt und außerdem einen einzigen reellen Punkt dieser Ebene, aber keinen im Endlichen gelegenen Punkt ungeändert läßt. Sie führe den beliebigen Punkt A in A' über, AA' schneide ε_∞ in A_∞; A_1 werde von A_∞ durch A und A' harmonisch getrennt und a sei die Polare von A_∞ in bezug auf jenen Kugelkreis. *Dann sind A_1 und die Ebene $(A_1 a)$ in einem linearen Nullsystem einander zugeordnet.*

Nun läßt dieser Satz offenbar eine Verallgemeinerung insofern zu, als für ε_∞ eine beliebige im Endlichen gelegene Ebene ε und an Stelle des imaginären Kugelkreises ein beliebiger in ε liegender, nicht zerfallender Kegelschnitt $\mathfrak{k}^{(2)}$ eingeführt werden kann. Aber neben dieser einen Beschränkung, die sich auf „das Absolute" bezieht, enthält der Satz noch folgende anderen:

1) die Punktgruppe $(AA'A_1A_\infty)$ soll zu jeder aus einem beliebigen anderen Punkt P sich ergebenden nicht nur projektiv, sondern diese Gruppen sollen harmonisch sein,

2) die Kollineation K gehört zu denjenigen, für die von den vier sich selbst entsprechenden Punkten zwei zusammenfallen,

3) von den drei sich selbst entsprechenden Punkten der Kollineation K in der Ebene ε_∞ liegen zwei auf $\mathfrak{k}^{(2)}$ und ihre Verbindungslinien mit dem dritten sind Tangenten von $\mathfrak{k}^{(2)}$; in diesen dritten Punkt sind zwei Ecken des Haupttetraeders von K zusammengefallen,*)

4) die Kollineation K gehört zu denjenigen, die den Kegelschnitt $\mathfrak{k}^{(2)}$ in sich überführen, für welchen A_∞ und A konjugiert sind.

Für die eigentlichen Kollineationen, die hier allein in Betracht kommen, ist die Bedingung 3) in 4) enthalten.

Zweck der nachfolgenden Überlegungen ist der Nachweis, daß von diesen Beschränkungen für das Auftreten eines linearen Nullsystems die zweite und dritte tatsächlich notwendig sind, die vierte jedoch nicht erfüllt zu sein braucht; daß ferner das Doppelverhältnis $(AA'A_1A_\infty)$ einen durch K und $\mathfrak{k}^{(2)}$ eindeutig bestimmten Wert haben muß, der gleich (-1) ist, wenn der Bedingung 4) genügt wird.

Wir nehmen das Ergebnis unserer Überlegungen voraus:

Es sei eine Kollineation K *gegeben, die vier, aber nicht mehr als vier verschiedene, nicht in derselben Ebene liegende Punkte, von denen zwei imaginär sein können, also auch eine reelle Ebene ε in sich überführt, ferner in dieser ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{k}^{(2)}$ und außerdem eine konstante Zahl $k \gtrless 1$. Man stellt eine Nullkorrelation in folgender Weise her. Zwei in* K *entsprechende Punkte A und A' werden verbunden, zu ihrem Schnittpunkt mit der Ebene ε, $A_{1\varepsilon}$, die Polare in bezug auf $\mathfrak{k}^{(2)}$, a, konstruiert, A_1 auf AA' so bestimmt, daß $(A_{1\varepsilon}A_1AA') = k$ ist, und dann dem als Element eines Raumsystems Σ betrachteten Punkt A_1 die Ebene (A_1a) als Element des Raumsystems Σ_1 zugeordnet. Die so erhaltene Nullkorrelation N ist ein-eindeutig und quadratisch; einem Punkte, einer Punktreihe 1. O., einem Punktfelde von Σ entspricht im allgemeinen eine Ebene, ein Ebenenbüschel 2. O., ein Ebenenbündel 2. O. in Σ_1; einer Ebene, einem Ebenenbüschel 1. O. (einer Geraden), einem Ebenenbündel 1. O. (einem Punkte) von Σ_1 entspricht im allgemeinen ein Punkt, eine Punktreihe 2. O., eine Fläche 2. O. in Σ. Dafür, daß die Korrelation linear wird, ist notwendig und hinreichend, daß in der Ebene ε des Haupttetraeders von* K *zwei seiner Ecken in einen Punkt T zusammenfallen, daß $\mathfrak{k}^{(2)}$ die Verbindungslinien von T mit den beiden andern in ε sich selbst entsprechenden Punkten T_1 und T_2*

*) Vgl. Klein, Nicht-Euklidische Geometrie II, Göttingen 1893, S. 200 f.

in T_1 *und* T_2 *berührt, und schließlich, daß k einen einzigen durch* K *und* $\mathfrak{k}^{(2)}$ *bestimmten Wert erhält. Dieser wird gleich* -1, *wenn die Kollineation* K $\mathfrak{k}^{(2)}$ *in sich überführt.*

Das *allgemeine* räumliche Nullsystem 2. Grades ist zuerst von Herrn A. Ameseder*) behandelt worden. Das hier vorkommende scheint mir ein neues Beispiel für die allgemeinen Erörterungen jener Arbeit zu bieten. Im folgenden habe ich die Eigenschaften dieses Nullsystems, ohne auf jenen Aufsatz mich zu stützen, aus seiner Entstehungsweise zu entwickeln gesucht. In bezug auf die genauere Betrachtung der Singularitäten des Systems (vgl. unten Nr. 3) darf ich aber wohl auf Herrn Ameseders allgemeine Untersuchungen verweisen.

Im folgenden wird in Nr. 1 gezeigt, daß die Nullkorrelation N eineindeutig ist, in Nr. 2 ihr quadratischer Charakter aufgezeigt und schließlich in Nr. 3 der singuläre Kegelschnitt des Nullsystems nachgewiesen, und untersucht, wann das Nullsystem linear wird.

1.

Es sei zunächst K eine Kollineation, die nicht alle Punkte einer geraden Punktreihe, aber mindestens eine reelle Ebene ε in sich überführt; dann liegt in dieser mindestens ein sich selbst entsprechender reeller Punkt T und eine sich selbst entsprechende reelle Gerade t; außerdem ist noch ein reeller sich selbst entsprechender Punkt E vorhanden. Wir nehmen an, daß T nicht mit t und E nicht mit ε inzident ist. Ein Element, das einem andern, A, in K entspricht, soll stets durch denselben Buchstaben, unter Beifügung eines Strichs bezeichnet werden (A'). Dann beweisen wir zunächst:

Für jeden beliebigen Punkt A_1 *gibt es immer ein und im allgemeinen ein einziges reelles Paar von Punkten* AA' *von der Beschaffenheit, daß* A_1 *auf* AA' *liegt, und daß, wenn* AA' *eine Ebene* ε, *die von* K *in sich übergeführt wird, in* $A_{1\varepsilon}$ *trifft, die Punktgruppe* $A_{1\varepsilon}A_1AA'$ *ein vorgeschriebenes Doppelverhältnis* $k \gtrless 1$ *hat (zu einem beliebig gegebenen Punktquadrupel einer Geraden projektiv ist).*

In der Tat, die durch A_1 gehenden Strahlen des von K erzeugten tetraedralen Komplexes bilden einen Kegel 2. Grades $\mathfrak{K}^{(2)}$. Er wird durch K in einen andern Kegel $\mathfrak{K}^{(2)\prime}$ transformiert, dessen Spitze A_1' auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen muß, da A_1A_1' ein Komplexstrahl ist. Die beiden Kegel schneiden sich außer in A_1A_1' noch in einer durch A_1 und A_1' gehenden kubischen Raumkurve $\mathfrak{k}^{(3)\prime}$, die als Ordnungskurve des Komplexes sämtliche Hauptpunkte enthält.**) Sie werde durch die zu K inverse Kollineation K^{-1}

*) Journal f. Mathem. Bd. 97, S. 62 ff.

**) Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. III, S. 8. S. 3.

in $\mathfrak{k}^{(3)}$ übergeführt. Da $\mathfrak{k}^{(3)\prime}$ auf $\mathfrak{K}^{(2)\prime}$ liegt, so liegt $\mathfrak{k}^{(3)}$ auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ und zwar gehören je zwei entsprechende Punkte der beiden Raumkurven demselben Strahl des Kegels $\mathfrak{K}^{(2)}$ an. $\mathfrak{k}^{(3)}$ geht durch A_1 und durch die Hauptpunkte des Komplexes. Nun werde $\mathfrak{k}^{(3)}$ in $\overline{\mathfrak{k}}^{(3)}$ transformiert durch eine perspektive Kollineation (Homologie), für die A_1 Zentrum und ε Ebene der Homologie sind, und für die das konstante Doppelverhältnis $(P_\varepsilon A_1 PP') = k$ ist, wenn PP' beliebige entsprechende Punkte dieser Kollineation und P_ε der Schnittpunkt von PP' mit ε ist. $\overline{\mathfrak{k}}^{(3)}$ liegt auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ und geht durch A_1 und durch die drei in ε liegenden Hauptpunkte des Komplexes, hat also mit $\mathfrak{k}^{(3)\prime}$ außer diesen 4 Punkten im allgemeinen und höchstens noch einen fünften Punkt A' gemeinsam.*) Dieser Punkt A' muß reell sein, da die 4 Punkte, die $\overline{\mathfrak{k}}^{(3)}$ und $\mathfrak{k}^{(3)\prime}$ außer A_1 gemeinsam haben, nur paarweise imaginär sein können, von den drei in ε liegenden Hauptpunkten aber entweder keiner oder zwei imaginär sind. Er kann auch nicht mit einem der vier andern zusammenfallen, da sonst sich $\overline{\mathfrak{k}}^{(3)}$ und $\mathfrak{k}^{(3)\prime}$ und mithin auch $\mathfrak{k}^{(3)}$ und $\mathfrak{k}^{(3)\prime}$ in einem dieser Punkte berühren müßten, und dies ist unmöglich, weil sonst eine Kante des Haupttetraeders Tangente einer Ordnungskurve des Komplexes sein müßte.

Damit ist bewiesen, daß es ein und nur ein Punktepaar von der verlangten Eigenschaft gibt.

Es sei nun in der Ebene ε ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{k}^{(2)}$ gegeben, und a sei die Polare von $A_{1\varepsilon}$; dann soll dem Punkte A_1 des räumlichen Systems Σ die Ebene $(A_1 a)$ des Systems Σ_1 zugeordnet werden. Aus dem bewiesenen Satze ergibt sich, daß diese Verwandtschaft — wir bezeichnen sie mit N — eindeutig ist. Nur dem Punkte E ist jede Ebene des Bündels E, und allen Punkten der Ebene ε ist die Ebene ε zugeordnet.

Die vorstehende Ableitung verliert aber ihre Gültigkeit, *wenn der Punkt A_1 auf einer Fläche β des Haupttetraeders liegt.*

Wir nehmen zunächst an, *A_1 läge nicht auf einer Kante des Tetraeders.* Dann zerfällt der Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei Strahlenbüschel, von denen das eine in β, das andere in einer Ebene η liegt, die durch die Gegenecke B von β geht. Zwei Punkte AA', die für A_1 den im Satze gestellten Anforderungen genügen, müssen nun auf einem Komplexstrahl liegen.

Auf einem Strahl des *letztgenannten* Büschels aber werden solche Punktepaare AA' im allgemeinen nicht vorkommen. Bringt man nämlich die Ebene η mit η' zum Schnitt und sucht zur Schnittgeraden $g' \equiv (\eta\eta')$ die ihr durch K^{-1} zugeordnete g auf, so schneiden g und g' jeden der von A_1 ausgehenden in η liegenden Komplexstrahlen in zwei in K zugeordneten Punkten A und A'. Es sind offenbar die einzigen derartigen Punkte-

*) Reye, Geom. der Lage 3. Aufl. II, 198.

paare auf den Komplexstrahlen. g und g' müssen sich in B schneiden. Bezeichnet man nun die Schnittlinie $(\eta\varepsilon)$ mit $g_{1\varepsilon}$ und A_1B mit g_1, so wird im allgemeinen das Doppelverhältnis $(g_{1\varepsilon}g_1gg')$ nicht gleich k sein und daher auch für kein Punktepaar AA' $(A_{1\varepsilon}A_1AA') = k$ sein können.

In dem *andern*, in β liegenden Büschel wird es dagegen stets ein und nur ein solches Punktepaar geben. Denn das Strahlenbüschel mit dem Scheitel A_1 erzeugt mit dem ihm durch K zugeordneten Büschel einen Kegelschnitt $\mathfrak{k}^{(2)'}$, der durch K^{-1} in einen andern $\mathfrak{k}^{(2)}$ projektiv übergeführt wird. Sie gehen beide durch A_1 und schneiden die Gerade $(\beta\varepsilon)$ in denselben (reellen oder konjugiert-imaginären) Punkten. $\mathfrak{k}^{(2)}$ werde, wie vorher die Raumkurve $\mathfrak{k}^{(3)}$, in $\overline{\mathfrak{k}^{(2)}}$ transformiert durch eine perspektive Kollineation, für die A_1 Zentrum und $(\beta\varepsilon)$ Achse der Kollineation ist, und für die das konstante Doppelverhältnis $(P_\varepsilon A_1PP') = k$ ist, wenn PP' wieder beliebige entsprechende Punkte dieser Kollineation sind und P_ε der Schnittpunkt von PP' mit $(\beta\varepsilon)$ ist. Nun hat $\overline{\mathfrak{k}^{(2)}}$ mit $\mathfrak{k}^{(2)'}$ den Punkt A_1 und ihre beiden Schnittpunkte mit $(\beta\varepsilon)$ gemeinsam, also gehört noch ein vierter Punkt A beiden an, der reell sein muß, weil imaginäre Schnittpunkte nur paarweise auftreten können. Es gibt also in der Tat ein und nur ein Punktepaar AA' von der verlangten Eigenschaft.

Betrachten wir nunmehr den vorher ausgeschlossenen Fall. *Ist zunächst A_1 ein Punkt einer Kante des Haupttetraeders*, in welcher sich die Flächen γ und δ schneiden mögen, jedoch nicht eine Tetraederecke, so liegt A_1' gleichfalls auf dieser Kante, und die beiden durch K einander zugeordneten, in derselben Fläche, etwa γ, liegenden Strahlenbüschel A_1 und A_1' erzeugen eine Gerade g', die von der ihr in K^{-1} entsprechenden g in der δ gegenüberliegenden Tetraederecke D geschnitten wird. Dann aber ist das Doppelverhältnis der 4 Geraden $(DA_{1\varepsilon}, DA_1, g, g')$, (wo $A_{1\varepsilon}$ wieder den Schnittpunkt von AA' mit ε bedeutet) wieder im allgemeinen von k verschieden, also wird im allgemeinen auf einem der von A_1 ausgehenden in γ liegenden Komplexstrahlen ein Punktepaar AA' mit der verlangten Eigenschaft nicht vorhanden sein. Das gleiche gilt für das in δ liegende Strahlenbüschel. Dagegen wird auf A_1A_1' stets ein einziges solches Paar auffindbar sein. Denn, sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ die beiden durch K einander zugeordneten projektiven Punktreihen auf der Tetraederkante als Träger, so führen wir wieder eine Projektivität ein, für die A_1 und $A_{1\varepsilon}$ Doppelpunkte sind, und für die das Doppelverhältnis $(A_{1\varepsilon}A_1PP') = k$ ist, wenn P und P' beliebige entsprechende Punkte dieser Projektivität bedeuten. Führt die letztere $\mathfrak{P}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ über, so haben die beiden projektiven Reihen $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}'$ in $A_{1\varepsilon}$ ein reelles Doppelelement, also im allgemeinen noch ein zweites reelles Doppelelement A', das zusammen mit A wieder ein Punktepaar bildet, für das $(A_{1\varepsilon}A_1AA') = k$ ist.

Ist schließlich A_1 eine Tetraederecke, so fallen A und A' mit ihr zusammen.

Damit ist der am Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz für alle Fälle bewiesen.

Fragen wir weiter, *wieviel Punkte von Σ durch die Verwandtschaft N jeder Ebene von Σ_1 zugeordnet werden.* Sei α eine Ebene von Σ_1, a ihre Schnittlinie mit ε, $A_{1\alpha}$ der Pol von a in bezug auf $\mathfrak{k}^{(2)}$. Der Ebene α können jedenfalls nur solche Punkte entsprechen, die auf einem Strahle des von $A_{1\alpha}$ ausgehenden, nicht in ε liegenden Komplexstrahlenbüschels 1. O. liegen. Bringt man nun wieder die Ebene ϑ des Büschels mit ϑ' zum Schnitt und sucht zur Schnittgeraden $g' \equiv (\vartheta\vartheta')$ die ihr durch K^{-1} zugeordnete g auf, verbindet den Punkt $E \equiv (gg')$ mit $A_{1\alpha}$ und bestimmt eine durch E gehende in ϑ liegende Gerade g_1 so, daß das Doppelverhältnis $(EA_{1\alpha}g_1gg') = k$ ist, so ist offenbar der Punkt $(g_1\alpha)$ der einzige, der durch N der Ebene α zugeordnet ist.

Die Verwandtschaft ist also ein-eindeutig.

Es gibt freilich noch in der Ebene ε eine singuläre Punktreihe 2. O. und im Bündel E ein singuläres Ebenenbüschel 2. O. von der Eigenschaft, daß jedem Punkte der ersteren die Ebenen je eines Büschels 1. O. und allen Ebenen des letzteren die Punkte je einer geraden Punktreihe zugeordnet werden müssen. In bezug auf diese sei auf die Untersuchungen von Herrn Ameseder verwiesen.

2.

Wir zeigen nunmehr, daß im allgemeinen *jeder Geraden in Σ durch N ein Ebenenbüschel 2. O. in Σ_1 zugewiesen wird.* Es sei l eine beliebige Gerade, jedoch *kein Komplexstrahl* des durch K erzeugten tetraedralen Komplexes. Dann bestimmt die Punktreihe auf l mit der auf l' eine Regelschar. Trifft l die Ebene ε in C, so liegt C' gleichfalls in ε und CC' ist ein Strahl der Regelschar. Also muß ε auch eine Leitlinie der Schar enthalten, sie sei $l_{1\varepsilon}$. Ferner sei l_1 diejenige Leitlinie, die so liegt, daß jeder Strahl der Regelschar von den Leitlinien $l_{1\varepsilon}, l_1, l, l'$ in Punkten geschnitten wird, deren Doppelverhältnis k ist. Die Polaren der Punktreihe $l_{1\varepsilon}$ in bezug auf $\mathfrak{k}^{(2)}$ bilden ein zu ihr und damit auch zur Punktreihe l_1 projektives Strahlenbüschel. Verbindet man nun jeden Strahl dieses Büschels mit dem ihm entsprechenden Punkt von l_1, so erhält man im allgemeinen ein Ebenenbüschel 2. O.

Ist aber l ein Komplexstrahl, der nicht durch eine Ecke des Haupttetraeders geht oder in ε liegt, so bestimmt die Punktreihe von l mit der von l' ein Strahlenbüschel 2. O., und da der von diesem umhüllte Kegelschnitt als Komplexkurve sämtliche Hauptebenen berührt, so muß auch die Schnittlinie $l_{1\varepsilon}$ der Ebene (ll') und ε zu dem Strahlenbüschel gehören. Ist nun wieder l_1 derjenige Strahl des Büschels, der so liegt, daß jeder andere Büschelstrahl von $l_{1\varepsilon}, l_1, l, l'$ in Punkten geschnitten wird, deren Doppelverhältnis k ist, so ist auch jetzt wieder vermittels des Strahlenbüschels die Punktreihe $l_{1\varepsilon}$ auf l_1 projektiv bezogen, und man erkennt, daß die Verwandtschaft N auch in diesem Falle den Punkten von l_1 ein Ebenenbüschel 2. O. zuordnet.

Geht l durch einen der in ε liegenden Hauptpunkte, etwa T, so erhalten wir statt des soeben erwähnten Strahlenbüschels 2. O. ein solches 1. O. Ist $l_{1\varepsilon}$ der Schnitt von (ll') mit ε, und ist l_1 durch jenen Hauptpunkt T in der Ebene (ll') so gezogen, daß $(l_{1\varepsilon} l_1 l l') = k$ ist, so erkennt man, daß auch der Geraden l_1 im allgemeinen ein Ebenenbüschel 2. O. entspricht.

Geht endlich l durch E, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte von l und l' in einem Punkte $A_{1\varepsilon}$ von ε, und wenn man l_1 wieder so bestimmt, daß $(E\mathfrak{A}_{1\varepsilon}, l_1 l l') = k$ ist, so erkennt man, daß der Punktreihe l_1 ein Ebenenbüschel 1. O. durch die Verwandtschaft N zugeordnet ist, dessen Träger die Polare von $A_{1\varepsilon}$ ist.*)

Jedem ebenen Felde von Σ entspricht in N ein Ebenenbündel 2. O. von Σ_1.

Ist nämlich η ein ebenes Feld, das durch keinen Hauptpunkt geht, so bestimmt es mit η' ein kubisches Ebenenbüschel, dessen Ebenen entsprechende Geraden von η und η' verbinden. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Felder bilden eine Kongruenz 1. Klasse und 3. Ordnung, die Achsenkongruenz des Ebenenbüschels**), und dieses selbst ist ein Ordnungsebenenbüschel des durch K bestimmten Komplexes.***) Zu diesem Büschel gehört auch ε als Hauptebene des Komplexes. Für jeden Punkt A von η bestimmen wir nun, wenn AA' die Ebene ε in $A_{1\varepsilon}$ trifft, denjenigen Punkt A_1, für welchen $(A_{1\varepsilon} A_1 A A') = k$ ist. Die Punkte A_1 liegen sämtlich in derselben Ebene η_1, da die Achsen von den Ebenen des Büschels in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Es ist somit das Feld η_1 kollinear auf ε bezogen, wenn man jedem Punkte A_1 den Punkt $A_{1\varepsilon}$ entsprechen läßt, und es ist reziprok auf ε bezogen, wenn man jedem Punkte A_1 die Gerade a, die Polare von $A_{1\varepsilon}$ in bezug auf $\mathfrak{k}^{(2)}$, zuordnet. Die Ebenen $(A_1 a)$ bilden somit als Erzeugnisse zweier reziproken Felder ein Ebenenbündel 2. O.

---

*) Vgl. hierzu Ameseder a. a. O. Nr. 22.

**) Reye, G. d. L. II, 202.

***) Reye, a. a. O. III, S. 2.

Enthält die Ebene η einen der Hauptpunkte, so zerfällt das kubische Ebenenbüschel, den sie mit η' bestimmt, in ein Ebenenbüschel 2. O. mit jenem Hauptpunkt als Scheitel und ein Ebenenbüschel 1. O. Die Achsenkongruenz wird von erster Klasse und zweiter Ordnung.*) Wenn aber η eine Tetraederkante enthält, so zerfällt das kubische Ebenenbüschel in drei Ebenenbüschel von 1. O. und die Achsenkongruenz wird linear.**) Da auch in diesen beiden Fällen die Achsen der Kongruenz von den Ebenen der Büschel in projektiven Punktreihen geschnitten werden, so bleiben die obigen Schlüsse auch hier in Kraft, und auch diesen Ebenen entspricht in N ein Ebenenbündel 2. O.

Ausgeschlossen sind allein, wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, die Hauptebenen der Kollineation.

Einer Geraden von Σ_1 als Träger eines Ebenenbüschels 1. O. ist durch N eine Punktreihe 2. O. zugeordnet. Das Ebenenbüschel schneidet nämlich ε in einem Strahlenbüschel 1. O., welchem in dem polaren Felde ε mit der Ordnungskurve $\mathfrak{k}^{(2)}$ eine Punktreihe h entspricht. *Wir schließen zunächst den Fall aus, daß h einen sich selbst entsprechenden Punkt von ε enthält.*

T war der sich selbst entsprechende reelle Punkt der Ebene ε für K, t die sich selbst entsprechende reelle Gerade derselben Ebene. Dann gibt es zwei projektive Strahlenbüschel, von denen das eine den Scheitel T hat und in der Ebene ε liegt, das andere den Scheitel E hat und in der Ebene (Et) liegt, von der Beschaffenheit, daß alle Geraden, die zwei homologe Strahlen der beiden Büschel treffen, den tetraedralen Komplex bilden.***) Beziehen wir nun die Punkte $A_{1,}$ der Reihe h perspektiv auf die Strahlen des Büschels T, so vermittelt die Projektivität zwischen den Büscheln E und T auch eine Projektivität zwischen der Punktreihe h und dem Büschel E. Die letzteren beiden Elementargebilde aber erzeugen ein Ebenenbüschel 2. O., dessen Ebenen diejenigen von den Punkten von h ausgehenden Komplexstrahlenbüschel enthalten, die nicht in ε liegen. Zu diesem Ebenenbüschel gehören auch die Ebene $(Eh) \equiv \xi$ und die drei in E sich schneidenden Hauptebenen des Komplexes. Bezeichnet man nun den Punkt (hh') mit $P'_{1,}$ und die zu $P'_{1,}$ und $P_{1,}$ gehörigen Ebenen des Büschels mit ζ' und ζ, so läßt sich das Ebenenbüschel 2. O. auch als Erzeugnis der beiden in ζ' bezw. ζ liegenden konzentrischen, vermöge K projektiven Strahlenbüschel g' und g mit dem Scheitel E auffassen. Denn das auf die letztere Weise entstandene Ebenenbüschel hat mit dem erstgenannten die durch E gehenden Hauptebenen und außer-

---

*) Reye, G. d. L. II, 191.
**) Reye, a. a. O. II, 180.
***) Reye, a. a. O. III, S. 7.

dem ξ und ξ' gemeinsam. Alle mit h inzidenten Strahlen des Komplexes treffen also je ein Paar entsprechender Strahlen der Büschel g und g'.

Nun werden aber je zwei Ebenen des Büschels 2. O. von allen andern in projektiven Strahlenbüscheln geschnitten. Bestimmen wir nun die Ebene ζ_1 so, daß das Doppelverhältnis des Strahlenquadrupels, das eine beliebige andere Ebene des Büschels bezw. aus $\xi \zeta_1 \xi \zeta'$ ausschneidet, gleich k ist, so schneidet das Ebenenbüschel aus ζ_1 ein Strahlenbüschel 1. O. $E(g_1)$ aus, das zu ihm perspektiv, also zur Punktreihe h und mithin zu dem ursprünglich in Σ_1 gegebenen Ebenenbüschel 1. O. projektiv ist. Der einer Ebene des Büschels von Σ_1 durch N in Σ zugeordnete Punkt ist ihr Schnittpunkt mit dem entsprechenden Strahle des letztgenannten Büschels 1. O. und diese Schnittpunkte bilden also eine Punktreihe 2. O.

Für den Fall, *daß h durch eine in ε liegende Ecke des Haupttetraeders, etwa T, geht*, werden diese Schlüsse hinfällig.

Nehmen wir zunächst an, *h falle nicht mit einer Kante des Tetraeders zusammen.* Ist dann $\bar{h}$ derjenige Strahl des Büschels E, der in der oben erwähnten Projektivität zwischen den Büscheln E und T dem Strahle h entspricht, so enthält das Ebenenbüschel 1. O. mit der Achse $\bar{h}$ alle Ebenen derjenigen von den Punkten von h ausgehenden Komplexstrahlenbüschel, die nicht in ε liegen. Die beiden projektiven Ebenenbüschel $\bar{h}$ und $\bar{h}'$ erzeugen, da sie die Ebene (Et) entsprechend gemein haben, ein Strahlenbüschel 1. O. von Strahlen g' mit dem Scheitel E. Dieses Strahlenbüschel enthält den Strahl ET als Schnittlinie der Ebene $(T\bar{h})$ und der ihr entsprechenden. Das diesem Strahlenbüschel in K^{-1} entsprechende Büschel von Strahlen g hat daher mit ihm den Strahl ET entsprechend gemein, und dieser ist daher die Schnittlinie der Ebenen ι und ι' der beiden Büschel g und g'. Legen wir nun durch ET die Ebene ι_1 so, daß

$$(Eh, \iota_1 \iota \iota') = k$$

ist, so schneidet das Ebenenbüschel $\bar{h}$ aus ι_1 ein Strahlenbüschel 1. O. $E(g_1)$ aus, das mit dem zu ihm projektiven in Σ_1 gegebenen Ebenenbüschel 1. O. wieder eine Punktreihe 2. O. erzeugt. Diese Punktreihe aber besteht aus den Nullpunkten der Ebenen jenes in Σ_1 gegebenen Büschels.

Fällt aber h mit einer Tetraederkante, etwa t, zusammen, so schließen wir folgendermaßen. P und P' seien zwei verschiedene, in K entsprechende Punkte von t, so erzeugen die in (Et) liegenden, vermöge K projektiven Strahlenbüschel P und P' eine Punktreihe 1. O. g', die E enthält. Nun ist, wenn man dem Punkte P die Gerade g' zuordnet, die Punktreihe $t(P)$ zu dem Strahlenbüschel $E(g')$ projektiv. Denn sind Q und Q' zwei beliebige verschiedene nicht auf einer Tetraederkante liegende, in K entsprechende Punkte der Ebene (Et), so erzeugen die beiden in (Et) liegenden projektiven Strahlenbüschel Q und Q' eine Punktreihe 2. O., die Q, Q' und E enthält. Ein Punkt dieser Reihe ist der Schnitt R' von QP und $Q'P'$, und ER' ist der Träger der zu P gehörigen Punktreihe g'. Nun ist das Strahlenbüschel $g' \equiv E(R')$ zu jener Punktreihe 2. O. perspektiv, diese aber auch zum Strahlenbüschel $Q(R')$, und dieses Büschel zur Punktreihe P, also ist das Büschel g' zur Punktreihe P projektiv. Bestimmt man nun wieder in (Et) eine durch E gehende Gerade g_1 so, daß $(EP, g_1 g g') = k$ ist, so bilden die g_1, wie wir sofort zeigen werden, ein zur Punktreihe P projektives Strahlenbüschel, und dieses erzeugt wieder mit dem in Σ_1 gegebenen Ebenenbüschel 1. O. die Punktreihe 2. O. der Nullpunkte dieser Ebenen.

Daß aber das Strahlenbüschel $E(g_1)$ zur Punktreihe $t(P)$ projektiv ist, zeigen wir folgendermaßen. Die Strahlenbüschel g und g' erzeugen auf t zwei zu $t(P)$ projektive Punktreihen $t(\mathfrak{P})$ und $t(\mathfrak{P}')$. Diese Projektivitäten haben dieselben Doppelpunkte, oder, was dasselbe ist,*) die zwischen $t(P)$ und $t(\mathfrak{P})$ einerseits und zwischen $t(P)$ und $t(\mathfrak{P}')$ andererseits bestehende Projektivität hat dieselbe „Doppelinvolution“, oder auch, was gleichfalls auf dasselbe hinauskommt, sie sind vertauschbar.*) Wären nun diese beiden Projektivitäten invers, so könnten wir uns auf einen zuerst von Herrn Pasch**) gefundenen und bewiesenen Satz berufen; daß dieser Satz aber auch für zwei *beliebige* vertauschbare Projektivitäten gilt, geht unmittelbar aus der Ableitung hervor, die Herrn Segre***) für den Satz von Herrn Pasch gegeben hat. Dieser allgemeinere Satz läßt sich wie folgt aussprechen:

Wird einem veränderlichen Punkte X einer Geraden durch eine Projektivität ein Punkt Y und diesem durch eine mit der ersteren vertauschbare Projektivität ein anderer Punkt Z zugeordnet, und ein weiterer Punkt R so bestimmt, daß das Quadrupel $(XYZR)$ einem festen Gebilde projektiv ist, so besteht auch zwischen der Reihe R und der Reihe Y eine mit jeder der gegebenen vertauschbare Projektivität.

Einem Ebenenbündel von Σ_1 schließlich entspricht in Σ eine Fläche 2. O. Denn das Ebenenbündel schneidet aus ε ein Strahlenfeld aus, dem durch die polare Korrelation ein Punktfeld in ε zugeordnet ist. Zu jedem Punkte des letzteren aber gehört eine Ebene $\mathfrak{D}$, welche die nicht in ε liegenden durch den Punkt gehenden Komplexstrahlen enthält, in ihr (vgl.

*) Vgl. Segre, Journal f. Math. Bd. 100, S. 321 f.

**) Journal f. Math. Bd. 91, S. 349, auch: Vorlesungen übere neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 134.

***) a. a. O. § 7 S. 323, vgl. auch H. Wiener, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden, Darmstadt 1885.

S. 247) ein Geradenpaar gg' und eine Gerade g_1 des Bündels E; einer Punktreihe des Feldes ist, wie bewiesen, ein Strahlenbüschel 1. O. von Geraden g_1 zugeordnet. Also steht das Strahlenbündel E in kollinearer Verwandtschaft zu dem Punktfeld ε und somit in linear-reziproker Verwandtschaft zu dem in Σ_1 gegebenen Ebenenbündel. Die beiden Bündel aber erzeugen die besagte Fläche 2. O.

3.

Den durch E gehenden Geraden von Σ entsprechen, wie wir sahen (vgl. S. 248), in Σ_1 *Ebenenbüschel 1. O.* Fragen wir nun, ob dasselbe noch *für andere Geraden* der Fall ist.

Zu zwei entsprechenden Punkten C und C' von ε gehört (vgl. Nr. 2 Absatz 1) ein bestimmter Punkt $C_{1\varepsilon}$ (der Schnittpunkt von CC' mit $l_{1\varepsilon}$), der als Schnittpunkt von CC' mit ε anzusprechen ist, d. h. bei reellem Haupttetraeder der Punkt, der zusammen mit den Punkten X, Y, Z, in denen CC' die Seiten T_1T_2, T_2T, TT_1 des in ε liegenden Hauptdreiecks TT_1T_2 schneidet, das für den Reyeschen Komplex charakteristische Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon}XYZ) = \lambda$ bestimmt. Ist nun C_1 der Schnitt von l_1 und CC', also $(C_{1\varepsilon}C_1CC') = k$, so gehört zu jedem Punkte $C_{1\varepsilon}$ offenbar eine einzige Gerade, für die das genannte Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon}XYZ)$ gleich λ ist, auf ihr liegt ein einziges Punktepaar CC' und also auch *nur ein Punkt* C_1, für den $(C_{1\varepsilon}C_1CC') = k$ ist.

Umgekehrt läßt sich zeigen, *daß jedem Punkte C_1 ein einziger Punkt $C_{1\varepsilon}$ zugehört.* Das Strahlenbüschel C_1 in ε erzeugt nämlich mit dem Büschel C_1' einen Kegelschnitt $\mathfrak{m}^{(2)'}$, der durch K^{-1} in $\mathfrak{m}^{(2)}$ transformiert wird. Beide Kegelschnitte gehen durch T, T_1, T_2 und durch C_1. Das Büschel C_1 schneidet $t \equiv T_1T_2$ in einer zu ihm perspektiven Punktreihe $t(P)$, die projektiv ist zu dem Strahlenbüschel $T(s)$, wenn man jedem Punkte P den Strahl s zuordnet, für welchen $(TP, TT_2, TT_1, s) = \lambda$ ist. Diese beiden Strahlenbüschel C_1 und T schneiden sich wieder in einem Kegelschnitt $\mathfrak{n}^{(2)}$, der gleichfalls durch T, T_1, T_2, C_1 geht. Jeder durch C_1 gehende Strahl schneidet $\mathfrak{m}^{(2)}, \mathfrak{m}^{(2)'}, \mathfrak{n}^{(2)}$ bezw. in den Punkten $C, C', C_{1\varepsilon}$. Unter diesen Strahlen gibt es aber nur einen, für den $(C_{1\varepsilon}C_1CC') = k$ ist. Denn alle durch C_1 gehenden Geraden $C_1(u)$ werden von den Kegelschnitten des durch C_1, T, T_1, T_2 bestimmten Büschels in projektiven Punktreihen geschnitten.*) Nehmen wir eine bestimmte Gerade u_1 heraus, so werden auf ihr den Schnittpunkten aller andern Geraden mit $\mathfrak{m}^{(2)}, \mathfrak{m}^{(2)'}, \mathfrak{n}^{(2)}$ immer dieselben drei Punkte $C, C', C_{1\varepsilon}$, dem Punkte C_1 der übrigen Geraden aber nacheinander alle anderen Punkte von u_1 entsprechen. Das Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon}C_1CC')$,

*) Steiner-Schröter-Sturm, Theorie der Kegelschnitte 3. Aufl., S. 228.

das die drei Punkte, in denen $\mathfrak{m}^{(2)}$, $\mathfrak{m}^{(2)'}$ und $\mathfrak{n}^{(2)}$ die Strahlen des Büschels $C_1(u)$ schneidet, zusammen mit C_1 bilden, durchläuft also alle Werte, aber jeden nur einmal.

Ferner muß wegen der Konstanz der beiden Doppelverhältnisse $(C_{1\epsilon} XYZ)$ und $(C_{1\epsilon} C_1 CC')$ einer geraden Punktreihe $g(C)$ auch je eine gerade Punktreihe $g_{1\epsilon}(C_{1\epsilon})$ und $g_1(C_1)$ entsprechen; denn $g(C)$ und $g'(C')$ erzeugen ein Strahlenbüschel 2. O., dem auch die Seiten des Hauptdreiecks in ε angehören.

Das aus den Punkten C_1 gebildete Feld steht also in Kollineation zu dem aus den Punkten $C_{1\epsilon}$ gebildeten Punktfeld und also in Korrelation zu dem aus den Polaren von $C_{1\epsilon}$ gebildeten Strahlenfeld. Da nun (vgl. Nr. 2, Abs. 1) das Ebenenbüschel 2. O. von Σ_1 zu einem solchen von 1. O. wird, wenn die Polare von $C_{1\epsilon}$ l_1 schneidet, so ist ersichtlich, *daß der Geraden l_1 ein Ebenenbüschel 1. O. entspricht, wenn C_1, also auch l_1, mit der Punktkernkurve dieser Korrelation inzident ist.*

Herr Ameseder hat gezeigt,*) daß dieser Kegelschnitt mit dem oben (S. 247) genannten identisch ist. Er nennt solche Geraden l_1 „Ordnungslinien" des Nullsystems.

Unmöglich aber ist es, daß jeder Geraden der Ebene ε in N ein Ebenenbüschel 1. O. entspricht, falls nicht von den vier Ecken des Haupttetraeders von K zwei zusammenfallen.

Es müßte nämlich sonst, wenn man auf irgend einer in ε liegenden Geraden die beiden in K entsprechenden Punkte CC', außerdem $C_{1\epsilon}$ so bestimmt, daß $(C_{1\epsilon} XYZ) = \lambda$ ist, der auf dieser Geraden liegenden in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$ konjugierte Punkt von $C_{1\epsilon}$, er sei $\bar{C}_{1\epsilon}$, mit C_1 zusammenfallen, d. h. $(C_{1\epsilon}\bar{C}_{1\epsilon} CC')$ konstant und gleich k sein. Das ist aber schon für die Geraden nicht möglich, die durch einen und denselben nicht mit T_1 und T_2 zusammenfallenden Punkt X von t gehen. Denn für die Geraden dieses Strahlenbüschels X liegt sowohl die Reihe der Punkte C als auch die der Punkte C' und $C_{1\epsilon}$ auf je einer durch T gehenden Geraden, die wir bezw. c, c', $c_{1\epsilon}$ nennen, und wenn nun das Doppelverhältnis $(C_{1\epsilon}\bar{C}_{1\epsilon} CC')$ konstant sein soll, so müssen auch die Punkte $\bar{C}_{1\epsilon}$ eine durch T gehende gerade Punktreihe $\bar{c}_{1\epsilon}$ bilden. Die letztere muß auch durch den auf t liegenden Pol des Trägers der Punktreihe $\bar{C}_{1\epsilon}$ hindurchgehen, denn dieser Pol ist der Punkt $\bar{C}_{1\epsilon}$ der Geraden t. Daraus aber würde folgen, daß alle Punkte von $c_{1\epsilon}$ in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$ dieselbe Polare, nämlich $\bar{c}_{1\epsilon}$, hätten, und das ist unmöglich, so lange $\mathfrak{f}^{(2)}$ nicht zerfällt.

Nur wenn $C_{1\epsilon}$ stets auf einer der Seiten des Dreiecks TT_1T_2 bleibt, also stets mit einem der Punkte X, Y, Z zusammenfällt, könnte die Kon-

*) a. a. O. § 36.

stanz von $(C_1, \bar{C}_1, CC')$ noch möglich sein. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn $\lambda = 1$ ist, d. h. wenn K zu denjenigen Kollineationen gehört, für die zwei Tetraederecken, also auch zwei Tetraederflächen zusammenfallen. Die Regelschar nämlich, von der oben (Nr. 2, Abs. 1) die Rede war, liegt auf einer Fläche 2. O., die die Flächen des Haupttetraeders von K berührt.*) Die durch jede Kante des Tetraeders an die Regelfläche gelegten Tangentialebenen sind also die beiden in der betr. Kante, etwa t, sich schneidenden Tetraederflächen. Fallen sie beide in eine einzige, ε, zusammen, so geht durch sie nur eine Tangentialebene, die Kante t muß also eine Tangente der Regelfläche sein, der Berührungspunkt dieser Tangentialebene, d. i., wie die frühere Untersuchung zeigt, C_1, muß also dann stets auf t liegen.

Nur der Fall, daß $\mathfrak{k}^{(2)}$ in dieser Ebene ε liegt, kann noch in Betracht kommen. Dann aber bilden die Punkte CC' für das Büschel von Geraden mit dem Scheitel C_1 wieder zwei durch T gehende gerade Punktreihen cc', und die Konstanz von $(C_1, \bar{C}_1, CC')$ fordert wieder, daß auch die Punkte $\bar{C}_1$ eine gerade durch T gehende Reihe $\bar{c}_1$ bilden. Nun ist $\bar{c}_1$ die Polare von C_1 und da dies für alle Punkte C_1 von t gilt, *so muß t die Polare von T in bezug auf $\mathfrak{k}^{(2)}$ sein.* Schneiden nun die Strahlen $c, c', \bar{c}_1$ die Gerade t bezw. in den Punkten $C^t, C'^t, \bar{C}_1^t$, so sind, wie wir früher (S. 251) bewiesen haben, die vier Punktreihen $C^t, C'^t, \bar{C}_1^t$ und C_1 unter sich projektiv und haben dieselben Doppelpunkte T_1 und T_2. Daraus aber folgt, daß TT_1 und TT_2 die Polaren von T_1 bezw. T_2 sein müssen, d. h. daß $\mathfrak{k}^{(2)}$ *durch T_1 und T_2 geht.*

Dann aber hat das Doppelverhältnis $(C_1, \bar{C}_1, CC')$ tatsächlich für alle Punkte C denselben konstanten Wert. K führt nämlich $\mathfrak{k}^{(2)}$ in einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{k}^{(2)\prime}$ über, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden bilden ein Strahlenbüschel, das von 2. O., nicht von 1. O. ist,**) weil K nicht perspektiv sein soll, und das den Kegelschnitt $\mathfrak{l}^{(2)}$ umhüllen möge. $\mathfrak{k}^{(2)}, \mathfrak{k}^{(2)\prime}$ und $\mathfrak{l}^{(2)}$ berühren sich doppelt in T_1 und T_2. Zwei beliebige Tangenten von $\mathfrak{l}^{(2)}$ schneiden aber $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{k}^{(2)\prime}$ in projektiven Punktquadrupeln, und in den dadurch auf den Tangenten bestimmten Projektivitäten entsprechen sich auch deren Schnittpunkte mit der gemeinsamen Berührungssehne.***) Sind die Schnittpunkte der einen Tangente mit $\mathfrak{k}^{(2)}$ die Punkte C und G und mit $\mathfrak{k}^{(2)\prime}$ die Punkte C' und H, diejenigen der andern mit $\mathfrak{k}^{(2)}$ die Punkte C^1 und G^1 und mit $\mathfrak{k}^{(2)\prime}$ die Punkte C_1' und H^1, ihre Schnittpunkte mit t bezw. C_1 und C_1^1, so ist also:

$$CGC'HC_1 \barwedge C^1G^1C^{1\prime}H^1C_1^1.$$

*) Reye, G. d. L. III, S. 5. Sturm, Liniengeometrie I, S. 335.

**) Reye, G. d. L. I, S. 137.

***) Vgl. Steiner-Schröter-Sturm, Kegelschnitte 3. Aufl. S. 337.

Aber es ist:

$$(CGC_{1s}\bar{C}_{1s}) = (C^1 G^1 C^1_{1s}\bar{C}^1_{1s}) = -1,$$

wenn $\bar{C}^1_{1s}$ der Schnittpunkt der zweiten Tangente mit der Polaren von C^1_{1s} in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$ ist, also auch:

$$(C_{1s}\bar{C}_{1s}CC') = (C^1_{1s}\bar{C}^1_{1s}C^1 C^{1\prime}).$$

Damit ist aber der Beweis vollkommen erbracht, da die Konstanz des Doppelverhältnisses für jedes Büschel von Geraden mit demselben Scheitel C_{1s} nach dem früher Gesagten ohne weiteres ersichtlich ist.

Ist der Wert dieses Doppelverhältnisses gleich -1, so führt K $\mathfrak{f}^{(2)}$ in sich über, und umgekehrt.

Charlottenburg, Mai 1904.

Über elliptisch-konvexe Ovale.*)

Von

PAUL BÖHMER in Berlin.

Abschnitt I.

Formulierung des Theorems.

1. Es sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer analytischen Kurve (M), die ein konvexes Oval bildet, und es sei ferner φ der Winkel der äußeren Normale gegen die X-Achse. Es werde weiter mit ϱ der durchweg positiv gerechnete Krümmungsradius von (M) im Punkte x, y bezeichnet; alsdann bestehen für die Punkte von (M) die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi} = -\varrho \sin \varphi, \\ \dfrac{dy}{d\varphi} = \varrho \cos \varphi. \end{cases}$$

2. Spezialisieren wir die Lage des Koordinatensystems dahin, daß die X-Achse (M) im Punkte $x = 0$ berührt und daher $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ist, so hat der im Koordinatenursprunge (M) fünfpunktig berührende Kegelschnitt (den wir hier kurz den „oskulierenden" Kegelschnitt nennen wollen) eine Gleichung von der Form

$$(2)\qquad y = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).$$

Setzt man $\frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho_1$ und $\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = \varrho_2$, so lassen sich die Größen A, B und C durch die Werte ausdrücken, die ϱ, ϱ_1 und ϱ_2 im Oskulationspunkte besitzen; denn differentiiert man (2) viermal nach φ und setzt dann in den vier so entstehenden Gleichungen für x, y und φ bezüglich $0, 0$ und $-\frac{\pi}{2}$

*) Vergl. die Göttinger Inaugural-Dissertation des Verfassers: Über geometrische Approximationen. Berlin 1904 (Gustav Schade).

ein, so verschwindet die erste der vier Gleichungen identisch und aus den drei übrig bleibenden erhält man

$$(2') \qquad A = \frac{1}{\varrho}; \quad B = -\frac{\varrho_1}{3\varrho^2}; \quad C = \frac{9\varrho^2 + 5\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2}{9\varrho^3}.$$

3. Erteilt man C statt des vorstehenden Wertes eine stetige Folge von reellen Werten, so liefert die Gleichung (2) eine einfache Schar von Kegelschnitten, die mit (M) die Tangente und die Größen ϱ und ϱ_1 gemein haben, und daher (M) im Nullpunkte vierpunktig berühren; unter ihnen gibt es eine einzige Parabel, die durch das Verschwinden der Determinante $AC - B^2$ bestimmt ist, während $AC - B^2 > 0$ den Ellipsen, $AC - B^2 < 0$ den Hyperbeln der Schar zukommt. Bildet man den Ausdruck $AC - B^2$ für (M), so erhält man

$$(3) \qquad \frac{1}{9\varrho^4}(9\varrho^2 + 4\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2) = \frac{P}{9\varrho^4},$$

und *es ist der positive oder negative Wert von P das Kriterium dafür, ob der oskulierende Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.*

4. Wir nennen nun eine Kurve (M) in einem Punkte M *elliptisch* oder *hyperbolisch gekrümmt*, jenachdem für den betreffenden Punkt die Ungleichung

$$P > 0 \quad \text{oder} \quad P < 0$$

gilt, und bezeichnen M als eine *elliptische oder eine hyperbolische Stelle* der Kurve.

Wir nennen ferner ein konvexes Oval, das in jedem seiner Punkte elliptisch gekrümmt ist, ein *elliptisch-konvexes Oval.* Dann besteht das Theorem:

Fünf beliebige Punkte eines elliptisch-konvexen Ovals liegen stets auf einer Ellipse.

Abschnitt II.

Das Krümmungsbild.

5. Das Mittel zum Beweise des vorstehenden Theorems liefert uns eine Betrachtung, die wir der persönlichen Mitteilung des Herrn Minkowski verdanken. Es sei wieder $f(x, y) = 0$ die Gleichung eines konvexen Ovals (M), φ der Winkel der äußeren Normale gegen die X-Achse und

$$(4) \qquad q = x \cos\varphi + y \sin\varphi$$

die Gleichung der Tangente an (M) im Punkte (xy), mithin q der Abstand dieser Tangente vom Nullpunkte; dann ist q eine Funktion von φ und es gilt für den Berührungspunkt die Gleichung

$$\frac{dq}{d\varphi} = -x \sin\varphi + y \cos\varphi + \frac{dx}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi$$

oder gemäß (1)

$$\frac{dq}{d\varphi} = -x \sin\varphi + y \cos\varphi.$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} = -x \cos\varphi - y \sin\varphi - \frac{dx}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\cos\varphi$$

oder gemäß (1)

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} = -x \cos\varphi - y \sin\varphi + \varrho.$$

Berücksichtigt man (4), so erhält man

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = \varrho \tag{5}$$

6. Ist nun C_1 ein beliebiger Punkt der Ebene — wir wollen ihn als „Aufpunkt" bezeichnen —, so trage man von C_1 aus in der Richtung φ die Größe $\varrho^{-\frac{1}{3}}$ ab und errichte im Endpunkte ein Lot; dann umhüllt die Gesamtheit aller solcher Lote eine Kurve (M_0), die wir das *Krümmungsbild von* (M) nennen wollen, und von der wir behaupten, daß sie *ein konvexes, den Aufpunkt umschließendes Oval bildet, wenn* (M) *ein elliptisch-konvexes Oval ist.*

Da nämlich für (M_0)

$$q = \varrho^{-\frac{1}{3}}$$

ist, ergibt sich aus (5) für den Krümmungsradius ϱ_0 von (M_0) die Gleichung

$$\varrho_0 = \varrho^{-\frac{1}{3}} + \frac{d^2\varrho^{-\frac{1}{3}}}{d\varphi^2} = \frac{9\varrho^2 + 4\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2}{9\varrho^{\frac{7}{3}}} = \frac{P}{9\varrho^{\frac{7}{3}}}.$$

Da nun ferner, wenn (M) ein elliptisch-konvexes Oval ist, P durchweg positiv ist, gilt dies auch für ϱ_0, d. h. (M_0) bildet ein konvexes Oval, das den Aufpunkt umschließt.

7. *Das Krümmungsbild einer Parabel ist ein Punkt.*

Die Parabel habe die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

dann ist

$$y' = \frac{x}{p},$$

oder auch, in Übereinstimmung mit den oben getroffenen Bestimmungen,

$$x = -p \operatorname{ctg}\varphi$$

und somit

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{p}{\sin^3\varphi}.$$

Berücksichtigt man noch Gleichung (1), so folgt

$$\varrho = -\frac{p}{\sin^3\varphi}.$$

Es wird also

$$q = -\sin\varphi \cdot p^{-\frac{1}{3}},$$

d. h. aber: *alle Tangenten des Krümmungsbildes gehen durch einen festen Punkt P_0, der in der Achsenrichtung vom Aufpunkte in der Entfernung* $-p^{-\frac{1}{3}}$ *liegt*, unter p den Parameter der Parabel verstanden.

8. Hatten wir das *Krümmungsbild* (M_0) als Tangentengebilde eingeführt, so liefert der eben bewiesene Satz das Mittel, (M_0) als Punktgebilde zu definieren, nämlich als den *Ort der Krümmungsbilder der Schmiegungsparabeln von* (M).

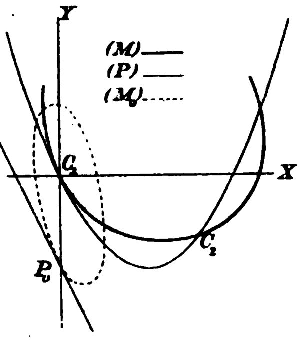


Fig. 1.

Das elliptisch-konvexe Oval (M) werde von der Schmiegungsparabel (P) im Koordinatenursprunge C_1 oskuliert, und es sei das Koordinatensystem so festgelegt, daß die Y-Achse mit der Parabelachse parallel ist. Es sei ferner C_1 als Aufpunkt für die Krümmungsbilder (M_0) von (M) und P_0 von (P) gewählt. Während nun in C_1 die Größen ϱ und ϱ_1 für (M) und (P) gleich sind, und somit der Parallelstrahl durch P_0 zur Tangente an (M) und (P) in C_1 (M_0) berührt, ist, wie sich aus Gleichung (3) ergibt, ϱ_2 von (P) größer als ϱ_2 von (M), und es ist daher in der Umgebung von C_1 der Krümmungsradius von (P) größer als der (durch gleiches φ) entsprechende von (M); dann muß aber jeder Strahl durch P_0 die Kurve (M_0) schneiden, da ja für die Punkte der Umgebung von C_1 die Ungleichung

$$\varrho_P^{-\frac{1}{3}} < \varrho_M^{-\frac{1}{3}}$$

besteht. *Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn P_0 auf (M_0) liegt.*

Abschnitt III.

Sätze über die Berührungen zwischen einem elliptisch-konvexen Ovale und einer Parabel.

9. Wir treffen zunächst folgende Bestimmung über die Lage des Koordinatensystems: die Y-Achse möge stets parallel zur Achse der Parabel (P) angenommen werden und der Nullpunkt des Koordinatensystems sowie der Aufpunkt der Krümmungsbilder (M_0) und P_0 in denjenigen Punkt verlegt werden, der als C_1 eingeführt wird.

Satz I. *Eine Parabel* (P), *die* (M) *in zwei getrennten Punkten* C_1 *und* C_2 *zweipunktig berührt, kann mit* (M) *keinen weiteren Punkt gemein haben.*

Den Beweis führen wir in drei Schritten.

a) (P) *kann* (M) *nicht zweimal von innen berühren.* Denn nehmen wir das Gegenteil an, so wird sowohl in C_1 wie in C_2 $\varrho_P < \varrho_M$ sein und es müssen die beiden den Punkten C_1 und C_2 entsprechenden Strahlen durch P_0 ganz außerhalb von (M_0) liegen, da ja $\varrho_P^{-\frac{1}{3}} > \varrho_M^{-\frac{1}{3}}$ ist. Hieraus folgt aber, daß auch für alle Punkte gleichen Winkels zwischen C_1 und C_2 $\varrho_P < \varrho_M$ sein muß. Nun drückt sich aber die Abszisse eines beliebigen Punktes der beiden Kurven (M) und (P) durch die bezüglichen Gleichungen aus:

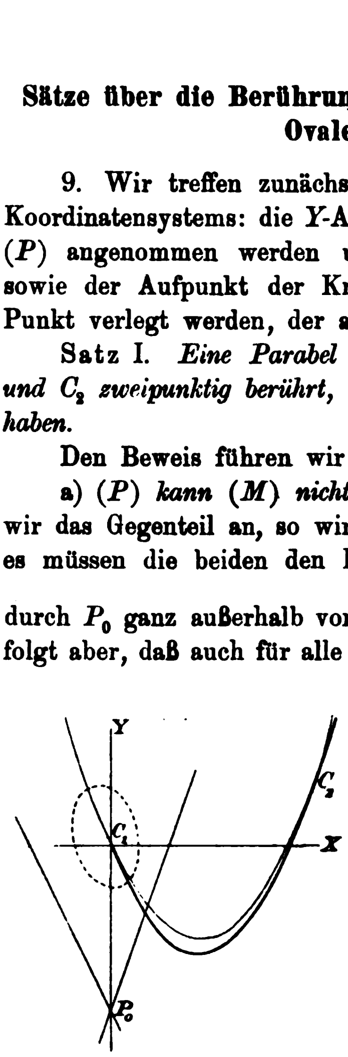


Fig. 2.

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
x_M &= -\int_{\varphi_1}^{\varphi_M} \varrho_M \sin\varphi \, d\varphi;\\
x_P &= -\int_{\varphi_1}^{\varphi_P} \varrho_P \sin\varphi \, d\varphi.
\end{aligned}
$$

Da wegen der Wahl des Koordinatensystems $\sin\varphi$ für die Parabel *stets* negativ ist, können beide Integrale, wenn man φ_2 als obere Grenze einführt, unmöglich gleich sein; vielmehr muß stets $x_M > x_P$ sein. — Im Falle, daß die Berührung in C_1 oder in C_1 und C_2 dreipunktig ist, gehen die Strahlen durch P_0 in Tangenten an (M_0) über; dann gilt zwar die Ungleichung zwischen den Krümmungsradien für C_1 (bezw. C_1 und C_2) nicht, wohl aber für alle Zwischenwerte und somit wird auch hier der zweite Integralwert kleiner ausfallen als der erste.

b) (P) *kann nicht* (M) *einmal von außen und einmal von innen berühren.*

Nehmen wir wieder das Gegenteil als vorliegend an, so haben wir, wenn (P) in C_1 das Oval von innen, in C_2 von außen berührt, noch mindestens *einen* dritten Inzidenzpunkt C_3. Legen wir durch C_1 eine Parabel (P'), die dieselbe Achsenrichtung wie (P) und einen kleineren Parameter hat, daher also (P) und folglich auch (M) von innen berührt, so löst sich, wenn wir dem Parameter von (P') eine stetige Folge abnehmender Werte erteilen, C_2 in zwei Schnittpunkte auf, von denen der eine C_2' auf C_3 zuwandert, und es wandert gleichzeitig C_3 gegen C_2' hin; es existiert daher auch eine Parabel, die (M) zweimal von innen berührt, womit der Satz auf den voraufgehenden zurückgeführt ist.

c) (P) *kann* (M) *nicht zweimal von außen berühren und außerdem noch treffen.*

Wenden wir dasselbe Verfahren wie soeben an, so verursacht das Auftreten des inneren Berührungspunktes von (P) und (M) einen Widerspruch mit a) oder b). Damit ist aber Satz I erwiesen.

10. Satz II. (P) *kann nicht* (M) *oskulieren und außerdem noch schneiden oder berühren.*

Wie wir oben (vergl. Nr. 8 und Fig. 1) sahen, liegt P_0 auf (M_0), und es ist für alle von φ_1 verschiedenen Werte von $\varphi: \varrho_P > \varrho_M$. Angenommen nun, (P) schnitte oder berührte noch einmal (M) und zwar im Punkte C_2, dann wäre $\varphi_2(P) \geqq \varphi_2(M)$. Nun gelten für die Abszissen der Punkte von (P) und (M) wieder die Gleichungen (6); führen wir als obere Grenzen die Winkel des Schnittpunktes C_2 ein, zerlegen das erste Integral in zwei positive Bestandteile:

$$x_P = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2(M)} \varrho_P \sin\varphi\, d\varphi - \int_{\varphi_2(M)}^{\varphi_2(P)} \varrho_P \sin\varphi\, d\varphi; \qquad x_M = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2(M)} \varrho_M \sin\varphi\, d\varphi$$

und berücksichtigen ferner, daß hierin für jedes beliebige φ mit Ausnahme von φ_1 die Ungleichung $\varrho_P > \varrho_M$ besteht, so erkennen wir, daß schon der erste Bestandteil von x_P größer als x_M ist.

11. Satz III. *Eine Parabel* (P), *die* (M) *in* C_1 *dreipunktig berührt, kann mit* (M) *nicht mehr als einen weiteren Schnittpunkt gemein haben.*

Angenommen, (P) träte, in positivem Sinne durchlaufen, bei C_1 aus (M) heraus und hätte auf dem austretenden Aste einen Schnittpunkt C_2 mit (M), wo sie wieder in (M) eintritt, dann muß der Parallelstrahl durch P_0 zur Tangente an (M) in C_1 die Kurve (M_0) berühren und zwar so, daß alle Strahlen durch P_0 mit größerem φ (M_0) schneiden. Daraus folgt aber in analoger Weise wie bei Satz II die Integralungleichung und die Unmöglichkeit eines Schnittpunktes C_2.

Daß ferner (P) auf dem eintretenden Aste nicht mehr als einen Schnittpunkt mit (M) haben kann, läßt sich aus der Betrachtung einer

Schar von Parabeln ableiten, die so, wie es in Nr. 9, c) angegeben ist, durch C_1 gelegt werden. Die Annahme von (mindestens) drei weiteren Schnittpunkten ergäbe dann die Existenz einer Parabel, die (M) zweimal berührt und außerdem schneidet, was gegen Satz I verstößt.

Abschnitt IV.

Beweis des Theorems.

12. Wir führen den Beweis des in Nr. 4 angekündigten Theorems mit Hilfe folgender Überlegung: Angenommen, man könnte fünf Punkte von (M) so auswählen, daß sie auf einer Hyperbel liegen, so lassen sich auch stets fünf Punkte bestimmen, die auf einer Parabel liegen, da man ja bei hinreichend nahem Zusammenrücken irgend welcher fünf Punkte von (M) zu Ellipsen gelangt. *Das Theorem wird also bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben*, daß fünf Punkte von (M) nie auf einer Parabel liegen können, oder *daß eine Parabel mit einem elliptisch-konvexen Oval nicht mehr als vier Punkte gemein haben kann.*

13. Aus den drei Sätzen des vorigen Abschnitts ergibt sich, daß mehr als vier Inzidenzpunkte von (M) und (P) nur dann auftreten können, entweder wenn (P) einmal (M) 2-punktig berührt (in C_1) und noch vier (oder mehr) getrennte Schnittpunkte mit (M) hat, oder wenn (P) das Oval (M) in sechs (oder mehr) getrennten Punkten schneidet. Für beide Fälle läßt sich durch Betrachtung der Parabelschar analog Nr. 9, c) der Unmöglichkeitsbeweis führen; denn im ersten Falle muß es unter den Parabeln der durch C_1 gelegten Schar eine geben, die bei gleicher Gesamtzahl von Inzidenzen (M) berührt, was dem Satze I widerspricht; und im zweiten Falle wird es, wenn man einen ganz beliebigen Punkt von (P) zum gemeinsamen Punkte der Schar wählt, stets eine Parabel geben, die bei gleicher Gesamtzahl von Inzidenzen (M) berührt, was dem eben Bewiesenen widerspricht.

Damit ist aber die Unmöglichkeit von sechs Inzidenzpunkten zwischen (P) und (M) und folglich auch das angekündigte Theorem bewiesen.

Berlin, im Juni 1904.

Zur Theorie der n^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern.

Von

W. LIETZMANN in Landsberg a. W.

§ 1.

Einleitung.

Es sei n eine positive ganze rationale Zahl und zwar ergebe ihre Zerlegung in Primfaktoren

$$n = 2^{h_0} \cdot l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e}.$$

Ich betrachte einen beliebigen Oberkörper k des Körpers der n^{ten} Einheitswurzel, den ich im folgenden auch als Grundkörper bezeichne. Im Fall $h_0 = 1$ enthalte k den Körper $k(\sqrt{-1})$. μ sei eine ganze Zahl in k und zwar soll, falls sie genau a^{te} Potenz einer Zahl in k ist, a relativ prim zu n sein. Dann wird durch Adjunktion von $\sqrt[n]{\mu}$ zu den Zahlen des Grundkörpers ein relativ-zyklischer Körper $K(\sqrt[n]{\mu})$ vom Relativgrade n bestimmt. Es sei ξ_0 eine primitive $2^{h_0\,\text{te}}$, ξ_1 eine primitive $l_1^{h_1\,\text{te}}, \cdots, \xi_e$, eine primitive $l_e^{h_e\,\text{te}}$ Einheitswurzel; dann ist jede n^{te} Einheitswurzel ξ in der Form

$$\xi = \xi_0^{k_0} \cdot \xi_1^{k_1} \cdots \xi_e^{k_e}$$

darstellbar, wo $k_0, k_1, \cdots, k_e$ ganze rationale Zahlen sind. Sei ξ speziell eine primitive n^{te} Einheitswurzel, also etwa

$$k_0 = 1,\ k_1 = 1, \cdots, k_e = 1,$$

dann führt die Substitution

$$S = (\sqrt[n]{\mu} : \xi\sqrt[n]{\mu})$$

und ihre $n-2$ weiteren Potenzen eine Zahl des Körpers k in die $n-1$ relativkonjugierten Zahlen, den Körper k in seine $n-1$ relativkonjugierten über. k ist mit seinen $n-1$ relativkonjugierten Körpern identisch.

Ich kann mir andererseits den Körper $K(\sqrt[n]{\mu})$ auch entstanden denken als Verschmelzung der Körper $K\left(\sqrt[2^{h_0}]{\mu}\right)$, $K\left(\sqrt[l_1^{h_1}]{\mu}\right), \cdots, K\left(\sqrt[l_e^{h_e}]{\mu}\right)$ und danach jede Substitution der Relativgruppe von $K(\sqrt[n]{\mu})$ in geeigneter Weise aufbauen aus Substitutionen der Relativgruppe 2^{h_0}ter, $l_1^{h_1}$ter, $\cdots$, $l_e^{h_e}$ter relativ-zyklischer Körper.

Ich betrachte in dem Grundkörper k den Zahlring (Integritätsbereich) der ganzen Zahlen und *nenne eine Menge von Zahlen dieses Zahlringes einen Zahlstrahl, wenn diese Menge invariant gegenüber der Multiplikation ist.* Der Zahlring selbst ist demnach der umfangreichste Zahlstrahl. Wir geben zur Verdeutlichung des Zahlstrahlbegriffes, dessen wir uns im folgenden als eines Hilfsbegriffes bedienen wollen, ein Beispiel aus dem Zahlring der ganzen rationalen Zahlen. In diesem Zahlring bildet die Menge aller Zahlen a, welche $\equiv 1(4)$ sind, einen Zahlstrahl, denn das Produkt je zweier solcher Strahlen a ist wieder eine Zahl, die $\equiv 1(4)$ ist. Ebenso bilden alle Zahlen a, welche $\equiv 1(4)$ sind, gemeinsam mit allen Zahlen b, welche $\equiv 3(4)$ sind, einen Zahlstrahl. Dieser zweite Zahlstrahl umfaßt außer andern Zahlen alle Zahlen des erstbesprochenen Zahlstrahles.*)

§ 2.

Die Potenzreste.

Definition 1. Ist $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal und μ eine beliebige ganze Zahl in k, dann heiße μ in k *ein* n^{ter} *Potenzrest nach* $\mathfrak{w}$, wenn μ nach jeder ganzen rationalen positiven Potenz von $\mathfrak{w}$ als Modul der n^{ten} Potenz einer (in der Regel von der Wahl des Exponenten von $\mathfrak{w}$ abhängigen) ganzen Zahl in k kongruent ist. Soll μ ein n^{ter} Potenzrest nach $\mathfrak{w}$ sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß μ ein 2^{h_0}ter, ein $l_1^{h_1}$ter, $\cdots$, ein $l_e^{h_e}$ter Potenzrest nach $\mathfrak{w}$ sei.

Der Inbegriff aller n^{ten} Potenzreste nach einem Primideal $\mathfrak{w}$ bildet einen Zahlstrahl. Ebenso bildet die Menge der 2^{h_0}ten Potenzreste nach $\mathfrak{w}$ einen Zahlstrahl, gleichfalls die Menge der $l_1^{h_1}$ten, $\cdots$, der $l_e^{h_e}$ten Potenzreste nach $\mathfrak{w}$. Der von den n^{ten} Potenzresten nach $\mathfrak{w}$ gebildete Zahlstrahl besteht aus allen und nur aus solchen Zahlen, welche den Zahlstrahlen der 2^{h_0}ten, der $l_1^{h_1}$ten, $\cdots$, der $l_e^{h_e}$ten Potenzreste nach $\mathfrak{w}$ gemeinsam sind. Wir nennen deshalb den Zahlstrahl der n^{ten} Potenzreste *Hauptstrahl*, jene andern den 2^{h_0}ten, den $l_1^{h_1}$ten, $\cdots$, den $l_e^{h_e}$ten *Nebenstrahl*. Wir werden sagen, eine

*) Vergl. R. Fueter, Der Klassenkörper der quadratischen Körper und die komplexe Multiplikation. Inaug.-Diss. Göttingen 1903, pag. 5, 6.

Zahl gehört *nur* dem $l_i^{h_i\text{ten}}$ Nebenstrahl an, wenn sie nicht gleichzeitig dem Hauptstrahl angehört.

Wir betrachten weiter noch genauer die einzelnen Nebenstrahlen, etwa den $l_i^{h_i\text{ten}}$. Die Menge aller l_i^{ten} Potenzreste nach $\mathfrak{w}$ bildet einen Zahlstrahl, ebenso die Menge aller $l_i^{2\text{ten}}$ u. s. f., die Menge aller $l_i^{h_i-1\text{ten}}$ Potenzreste nach $\mathfrak{w}$.

Von ihnen liegt jeder Zahlstrahl ganz und gar in dem vorangehenden Zahlstrahl, es ist gleichsam immer der eine in den andern geschachtelt. Wir bezeichnen den von der Menge der $l_i^{h_i-b_i\text{ten}}$ Potenzreste nach $\mathfrak{w}$, wo $0 \leqq b_i < h_i$ ist, gebildeten Zahlstrahl als $l_i^{h_i-b_i\text{ten}}$ Nebenstrahl. Gehört μ dem $l_i^{h_i-b_i+1\text{ten}}$ Nebenstrahl nicht mehr an, so sagen wir, μ gehört *nur* dem $l_i^{h_i-b_i\text{ten}}$ Nebenstrahl an. μ heißt dann *nur* $l_i^{h_i-b_i\text{ter}}$ Potenzrest nach $\mathfrak{w}$. Gehört μ nur dem $l_n^{h_n-b_n\text{ten}}$, dem $l_m^{h_m-b_m\text{ten}}, \cdots$ Nebenstrahl an, dann heißt μ nur $l_n^{h_n-b_n} \cdot l_m^{h_m-b_m\text{ter}} \ldots$ Potenzrest nach $\mathfrak{w}$.

Ist μ weder 2^{ter}, noch $l_1^{\text{ter}}, \cdots$, noch l_e^{ter} Potenzrest nach $\mathfrak{w}$, dann heißt μ ein *Potenznichtrest* nach $\mathfrak{w}$.

Satz 1. Es sei ξ_i eine primitive $l_i^{h_i\text{te}}$ Einheitswurzel und das Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k prim zu $1 - \xi_i$; μ sei eine ganze, genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl des Körpers k. Dann ist *notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß μ ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Potenzrest nach $\mathfrak{p}$ wird,* die Existenz einer ganzen Zahl α in k, welche der Kongruenz

$$\mu \equiv \alpha^{l_i^{h_i}} \quad (\mathfrak{p}^{a+1}) \tag{1}$$

genügt.

Beweis: Der vorliegende Satz wird für $h_i = 1$ in der Theorie der Primzahlpotenzreste bewiesen. Wir nehmen an, wir hätten ihn für den Exponenten $h_i - 1$ von l_i schon bewiesen. Dann ist es also bei beliebig vorgegebenem ganzen rationalen positiven Exponenten $n > a + 1$ möglich, eine ganze Zahl γ in k so zu finden, daß

$$\mu \equiv \gamma^{l_i^{h_i-1}} \quad (\mathfrak{p}^n) \tag{2}$$

wird. Aus (1) und (2) folgt

$$\gamma \equiv \alpha^{l_i} \quad \left(\mathfrak{p}^{\frac{a}{l_i^{h_i-1}}+1}\right),$$

worin, wie leicht ersichtlich, $\frac{a}{l_i^{h_i-1}}$ eine ganze Zahl ist. Aus der Theorie der l_i^{ten} Potenzreste folgt dann weiter die Existenz einer ganzen Zahl β in k, welche die Kongruenz

$$\gamma \equiv \beta^{l_i} \quad (\mathfrak{p}^n) \tag{3}$$

befriedigt; aus (2) und (3) folgt schließlich

$$\mu \equiv \beta^{l_i^{h_i}} \quad (\mathfrak{p}^n).$$

Damit ist unser Satz, der entsprechend natürlich auch für $l_i^{h_i - b_i}$te Potenzreste nach $\mathfrak{p}$ gilt, ganz allgemein bewiesen (vergl. Def. 1).

Satz 2. Es sei ξ_i eine primitive $l_i^{h_i}$te Einheitswurzel, das Primideal $\mathfrak{l}_1$ des Körpers k gehe genau zur l_1^{ten} Potenz in $1 - \xi_i$ auf, μ sei schließlich eine ganze, zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl des Körpers k. Dann ist *notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß μ ein $l_i^{h_i}$ter Potenzrest nach $\mathfrak{l}_1$ wird*, die Existenz einer ganzen Zahl α in k, welche der Kongruenz

$$\mu \equiv \alpha^{l_i^{h_i}} \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 \cdot l_i^{h_i - 1}(l_i + (h_i - 1)(l_i - 1)) + 1}\right) \tag{1}$$

genügt.

Beweis: Der Satz wird für $h_i = 1$ in der Theorie der Primzahlpotenzreste bewiesen. Ich nehme an, er sei auch schon für $l_i^{h_i - 1}$te Potenzreste bewiesen. Ist dann n eine beliebige ganze rationale Zahl

$$> l_1 \cdot l_i^{h_i - 1}(l_i + (h_i - 1) \cdot (l_i - 1)) + 1,$$

dann existiert demnach eine ganze Zahl γ in k so, daß

$$\mu \equiv \gamma^{l_i^{h_i - 1}} \quad (\mathfrak{l}_1^n) \tag{2}$$

ist. Mithin wird zunächst

$$\gamma^{l_i^{h_i - 1}} \equiv \alpha^{l_i^{h_i}} \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 \cdot l_i^{h_i - 1}(l_i + (h_i - 1) \cdot (l_i - 1)) + 1}\right).$$

Ist ζ_i eine primitive l_i^{te} Einheitswurzel, dann geht $\mathfrak{l}_1$ in $1 - \zeta_i$ zur $l_1 \cdot l_i^{h_i - 1}$ten Potenz auf; danach wird bei geeigneter Wahl von α

$$\gamma^{l_i^{h_i - 2}} \equiv \alpha^{l_i^{h_i - 1}} \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 \cdot l_i^{h_i - 1}(l_i + (h_i - 2)(l_i - 1)) + 1}\right).$$

Wiederhole ich das noch $h_i - 2$ mal, dann komme ich auf

$$\gamma \equiv \alpha^{l_i} \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 \cdot l_i^{h_i} + 1}\right).$$

Nach der Theorie der Primzahlpotenzreste ist jetzt eine ganze Zahl β in k angebbar so, daß

$$\gamma \equiv \beta^{l_i} \quad (\mathfrak{l}_1^n)$$

wird. Damit wird dann auch in Verbindung mit (2)

$$\mu \equiv \beta^{l_i^{h_i}} \quad (\mathfrak{l}_1^n),$$

das war zu beweisen.

Ist μ teilbar genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}_1$, dann muß zunächst, damit μ ein $l_i^{h_i}$ter Potenzrest nach $\mathfrak{l}_1$ wird, $a \equiv 0 \ (l_i^{h_i})$ sein; dann kann ich aber den Fall leicht auf den eben behandelten zurückführen.

Die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß eine ganze Zahl μ des Körpers k ein n^{ter} Potenzrest nach irgend einem Primideal $\mathfrak{w}$ ist, erledigt sich gemäß unserer Bemerkung (vergl. Def. 1), daß dann und nur dann μ dem Hauptstrahl der n^{ten} Potenzreste nach $\mathfrak{w}$ angehört, wenn μ gleichzeitig dem 2^{h_0}ten, dem $l_1^{h_1}$ten, $\cdots$, dem $l_e^{h_e}$ten Nebenstrahl angehört.

§ 3.

Das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$.

Definition 2. Es seien $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_e$ bezüglich $2^{h_0\text{te}}, l_1^{h_1\text{te}}, \cdots, l_e^{h_e\text{te}}$ primitive Einheitswurzeln; $\mathfrak{p}$ sei ein zu $1-\xi_0$, zu $1-\xi_1, \cdots$, zu $1-\xi_e$ primes Primideal und μ eine genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl in k, dann *definieren wir das Symbol* $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$ *durch die Kongruenz*

$$(1) \qquad \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{n}} \quad (\mathfrak{p}),$$

wo $n(\mathfrak{p})$ die Norm von $\mathfrak{p}$ genommen in k bedeutet.

Es ist $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{n}$ eine ganze positive rationale Zahl, weil k den Körper der n^{ten} Einheitswurzel enthält. Nach dem Fermatschen Satze ist das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$ einer n^{ten} Einheitswurzel gleich, oder aber gleich 0. Das letztere ist der Fall, wenn $a \neq 0$ ist. Gleichwohl wollen wir, wenn $a \equiv 0(n)$ ist, eine andere Definition des Symbols an die Stelle von (1) treten lassen: Es sei π eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare, ν eine zu $\mathfrak{p}$ prime, durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbare ganze Zahl in k, dann ist die ganze Zahl

$$(2\text{a}) \qquad \mu^* = \frac{\mu \cdot \nu^a}{\pi^a}$$

prim zu $\mathfrak{p}$. Wir definieren nun

$$(2\text{b}) \qquad \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv \mu^{*\frac{n(\mathfrak{p})-1}{n}} \quad (\mathfrak{p}).$$

Nach dieser Definition (2) ist also $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} \neq 0$ auch, wenn $a \equiv 0(n)$ ist.

Wir stellen der Definition des Symbols $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$ die folgenden Definitionen an die Seite:

$$_{2^{h_0}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2^{h_0}}} \quad (\mathfrak{p})$$

$$_{l_1^{h_1}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l_1^{h_1}}} \quad (\mathfrak{p})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$_{l_e^{h_e}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l_e^{h_e}}} \quad (\mathfrak{p})$$

und bemerken, daß im Falle $a \equiv 0$ etwa nach dem Modul $l_\nu^{h_\nu}$ eine der

Definition (2a), (2b) entsprechende Änderung in der Definition auch dieser Symbole einzutreten hat.

Eine jede n^{te} Einheitswurzel ξ war von der Form

$$\xi = \xi_0^{k_0} \cdot \xi_1^{k_1} \cdots \xi_e^{k_e},$$

wo ξ_0 eine $2^{h_0\text{te}}$, ξ_1 eine $l_1^{h_1\text{te}}, \cdots, \xi_e$ eine $l_e^{h_e\text{te}}$ primitive Einheitswurzel ist und $k_0, k_1, \cdots, k_e$ ganze positive rationale Exponenten sind.

Daraus leiten wir die folgende *Beziehung zwischen den neu definierten Symbolen und unserm oben definierten Symbol* ab:

$$\text{(3a)} \qquad \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = {}_{2^{h_0}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_0} \cdot {}_{l_1^{h_1}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_1} \cdots {}_{l_e^{h_e}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_e}$$

wo

$$\text{(3b)} \qquad \begin{aligned} a_0 \cdot l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e} &\equiv 1 (2^{h_0}), \\ a_1 \cdot 2^{h_0} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e} &\equiv 1 (l_1^{h_1}), \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_e \cdot 2^{h_0} \cdot l_1^{h_1} \cdots l_{e-1}^{h_{e-1}} &\equiv 1 (l_e^{h_e}) \end{aligned}$$

ist. Ist nämlich etwa

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = \xi_0' \cdot \xi_1' \cdot \xi_2' \cdots \xi_e'$$

worin $\xi_0', \xi_1', \cdots, \xi_e'$ bezüglich $2^{h_0\text{te}}, l_1^{h_1\text{te}}, \cdots, l_e^{h_e\text{te}}$ Einheitswurzeln sind, dann erhebe ich diese Gleichung zunächst in die $l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e\text{te}}$ Potenz und erhalte

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}^{l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e}} = {}_{2^{h_0}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \xi_0'^{\, l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e}}.$$

Mithin wird

$${}_{2^{h_0}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_0} = \xi_0'^{\, a_0 l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e}} = \xi_0'.$$

Analog kann ich mit jedem andern der $e + 1$ Faktoren verfahren; daraus erhellt dann die Richtigkeit der Beziehung (3a), (3b).

Die Zahlen μ, welche das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$ zu $+1$ machen, bilden einen Zahlstrahl, den wir *Hauptstrahl* nennen wollen. Ist nämlich $\mu = \alpha \cdot \beta$, so ist nach der Definition des Symbols

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Die Zahlen μ, welche das Symbol ${}_{2^{h_0}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ zu $+1$ machen, bilden ebenfalls einen Zahlstrahl, ebenso diejenigen, welche ${}_{l^{h_1}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ zu $+1$ machen u. s. f.

Wir nennen diese Zahlstrahlen $2^{h_0\text{te}}$, $l_1^{h_1\text{te}}$ u. s. f. *Nebenstrahlen.* Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß μ dem Hauptstrahl angehört, ist es, daß μ dem $2^{h_0\text{ten}}$, dem $l_1^{h_1\text{ten}}, \cdots$, dem $l_e^{h_e\text{ten}}$ Nebenstrahl gleichzeitig angehört.

Definieren wir schließlich noch die Symbole

$$ {}_{2^{b_0}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2^{b_0}}} \quad (\mathfrak{p}) $$

$$ (0 < b_0 < h_0). $$

$$ {}_{l_i^{b_i}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l_i^{b_i}}} \quad (\mathfrak{p}) $$

$$ (0 < b_i < h_i;\ i = 1, 2, \cdots, e) $$

dann können wir an die Werte ${}_{2^{b_0}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$, ${}_{l_1^{b_1}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right), \cdots,$ ${}_{l_e^{b_e}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ noch die Einführung $2^{b_0\text{ter}}$, $l_1^{b_1\text{ter}}, \cdots, l_e^{b_e\text{ter}}$ Nebenstrahlen anschließen.

Der so gewonnene Hauptstrahl stimmt in seinem Aufbau aus Nebenstrahlen ganz und gar mit demjenigen überein, der sich an den Begriff des n^{ten} Potenzrestes nach $\mathfrak{p}$ anschloß. In der Tat sind beide identisch. Es gilt der

Satz 3. *Es sei μ eine ganze Zahl des Körpers k und $\mathfrak{p}$ ein Primideal dieses Körpers, welches zu $1 - \xi_0$, $1 - \xi_1, \cdots, 1 - \xi_e$ prim ist. Gehört dann μ dem von den n^{ten} Potenzresten nach $\mathfrak{p}$ gebildeten Hauptstrahl an, so gehört μ auch dem aus $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = +1$ entspringenden Hauptstrahl an und umgekehrt. Gehört μ irgend welchen Nebenstrahlen des von den n^{ten} Potenzresten nach $\mathfrak{p}$ gebildeten Hauptstrahles an, dann gehört μ auch den entsprechenden Nebenstrahlen des andern Hauptstrahles an und umgekehrt.*

Der Beweis dieses Satzes wird zunächst die Identität der l_i^{ten}, dann der $l_i^{2\text{ten}}$ u. s. f. bis zu den $l_i^{h_i\text{ten}}$ Nebenstrahlen in den beiden Fällen nachweisen und wird von da zum Beweis der Identität auch des Hauptstrahles übergehen.

Wir nennen auf Grund dieses Satzes das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$ *das n^{te} Potenzrestsymbol.*

Satz 4. Es sei ξ_i eine primitive $l_i^{h_i\text{te}}$ Einheitswurzel, $\mathfrak{p}$ ein zu $1 - \xi_i$ primes Primideal in k, μ eine ganze Zahl in k, die nicht l_i^{te} Potenz einer Zahl in k ist, dann ist die Relativdiskriminante des Körpers $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k dann und nur dann prim zu $\mathfrak{p}$, wenn ${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu irgend einem Primideal des Körpers k ist, gleichgültig ob dieses prim zu $1-\xi_i$ oder ein Teiler von $1-\xi_i$ ist, ist die, daß die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ bezüglich k, diejenige von $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ bezüglich $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ u. s. f. bis zur Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich $K\left(\sqrt[l_i^{h_i-1}]{\mu}\right)$ prim zu jenem Primideal ist. Auf Grund eines Satzes, der für beliebige Relativkörper gilt (vgl. Hilbert, Algebraische Zahlkörper, Satz 41, pag. 209), leitet man leicht die Relation

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_{k,\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}} = \mathfrak{D}_{k,\sqrt[l_i]{\mu}} \cdot \mathfrak{D}_{\sqrt[l_i]{\mu},\sqrt[l_i^2]{\mu}} \cdots \mathfrak{D}_{\sqrt[l_i^{h_i-1}]{\mu},\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}$$

her, wo $\mathfrak{D}$ mit doppeltem Index die Relativdifferente der durch die Indizes angezeigten Körper bedeutet. Nun ist die Relativdiskriminante die Relativnorm der Relativdifferente (vgl. Hilbert, Algebr. Zahlkörper, Satz 38, pag. 205). Beachtet man das, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wir kehren zu unserm speziellen Fall zurück, wo $\mathfrak{p}$ prim zu $1-\xi_i$ ist. Soll die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu $\mathfrak{p}$ sein, so muß $\mathfrak{p}$ in μ genau zu einer Potenz a aufgehen, welche $\equiv 0\ (l_i)$ ist. Das wird in der Theorie der Primzahlpotenzreste bewiesen. Soll weiter die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ bezüglich $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ prim zu $\mathfrak{p}$ sein, so muß $\mathfrak{p}$, gleichgültig ob es in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ in l_i (verschiedene) Primfaktoren zerfallen ist oder nicht, in $\sqrt[l_i]{\mu}$ zu einer Potenz a' aufgehen, welche $\equiv 0\ (l_i)$ ist, d. h. es muß $a \equiv 0\ (l_i^2)$ sein. So fortfahrend, erhält man schließlich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu $\mathfrak{p}$ ist, die Forderung

$$a \equiv 0\ (l_i^{h_i}).$$

Damit stimmt die Forderung $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} \neq 0$, wie Def. 2 lehrt, überein.

Satz 5. Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}}$ gleich einer primitiven $l_i^{h_i-b_i}$ten Einheitswurzel, dann zerfällt das zu $1-\xi_i$ prime Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{b_i}$ verschiedene Primideale. Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = 0$, dann sei $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i-b_i}}$ eine primitive $l_i^{h_i-b_i-c_i}$te Einheitswurzel, während das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i-b_i+1}}$ schon $= 0$

wird. Dann zerfällt $\mathfrak{p}$ im Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{b_i+e_i}$ zu je $l_i^{b_i}$ gleiche Primideale.

Beweis. Ich bezeichne der Kürze halber durch Restsymbole ohne Index links unten die l_i^{ten} Restsymbole und gebe durch Index rechts unten an, in welchem Körper sie zu nehmen sind. Ich betrachte zunächst das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k$ und habe drei Fälle zu unterscheiden:

1) $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k = 0$. Dann ist die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ bezüglich k und damit auch diejenige von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k teilbar durch $\mathfrak{p}$. Es ist also auch ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 0$. $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ in l_i gleiche Primideale. Sei $\bar{\mathfrak{p}}$ eines derselben, so ist, weil μ durch eine, der Null nach l_i inkongruente Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, auch $\sqrt[l_i]{\mu}$ durch eine der Null nach l_i inkongruente Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar. Es ist also auch $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}} = 0$ und deshalb zerfällt $\bar{\mathfrak{p}}$ weiter in $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ in l_i gleiche Primideale. Diese Schlußfolge läßt sich so von Körper zu Körper fortsetzen und man erhält: $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{h_i}$ gleiche Primideale.

2) Es sei $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k = \zeta$, wo ζ eine primitive l_i^{te} Einheitswurzel ist. Dann ist in ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \xi_i$ die Einheitswurzel ξ_i eine primitive $l_i^{h_i\text{te}}$. $\mathfrak{p}$ zerfällt wegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k = \zeta$ zunächst in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ nicht. Weiter ist dann auch $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}} = \zeta$ (vergl. für l_i eine ungerade Primzahl Furtwängler, Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste. Abh. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen (1902) Hilfssatz 39, pag. 44) u. s. f. bis zu $\left(\frac{\sqrt[l_i^{h_i-1}]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{\sqrt[l_i^{h_i-1}]{\mu}} = \zeta$. $\mathfrak{p}$ ist also im Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ ein Primideal. Diese Schlußfolge gilt nicht, wenn $\mathfrak{p}$ in μ zu einer Potenz aufgeht, welche $\not\equiv 0\ (l_i^{h_i})$ ist. Dann sei zwar

$$\left(\frac{\sqrt[l_i^{h_i-b_i}]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{\sqrt[l_i^{h_i-b_i}]{\mu}} = \zeta, \quad \text{doch} \quad \left(\frac{\sqrt[l_i^{h_i-b_i+1}]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{\sqrt[l_i^{h_i-b_i+1}]{\mu}} = 0.$$

In diesem Falle ist also ${}_{l_i^{h_i-b_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ eine primitive $l_i^{h_i-b_i\text{te}}$ Einheitswurzel, dagegen ist schon ${}_{l_i^{h_i-b_i+1}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ und damit auch ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 0$. $\mathfrak{p}$ zerfällt dann in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{b_i}$ gleiche Primideale.

3) $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k = +1$. $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ in l_i verschiedene Primideale, es sei etwa

$$\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \bar{s}\,\bar{\mathfrak{p}} \cdots \bar{s}^{l_i-1}\bar{\mathfrak{p}}.$$

Dann ist ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ sicherlich eine $l_i^{h_i-1}$te Einheitswurzel, und ich habe bezüglich der weiteren Zerlegung von $\bar{\mathfrak{p}}$ mich zunächst an die Untersuchung von $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}$ zu halten. Ist

1) $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}} = 0$, so findet man wie oben leicht, daß $\bar{\mathfrak{p}}$ in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{h_i-1}$ gleiche Primideale zerfällt. ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ ist $= 0$. Ist

2) $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}} = \zeta$, wo ζ wieder eine primitive $l_i$te Einheitswurzel ist, dann zerfällt $\bar{\mathfrak{p}}$ in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ nicht weiter und es wird ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ eine primitive $l_i^{h_i-1}$te Einheitswurzel, sofern nicht ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 0$ wird, ein Fall, der sich wie im Fall 2 oben erledigen läßt. So bleibt nur die letzte Möglichkeit

3) $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}} = +1$. $\bar{\mathfrak{p}}$ zerfällt dann in $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ in l_i verschiedene Primideale, deren eines $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ sei, und es ist weiter das Symbol $\left(\frac{\sqrt[l_i^2]{\mu}}{\bar{\bar{\mathfrak{p}}}}\right)_{\sqrt[l_i^2]{\mu}}$ zu untersuchen. So dringt man Schritt für Schritt bis zum Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in allen Fällen durch und findet auf diesem Wege, wie leicht zu übersehen, die Bestätigung der Aussage unseres Satzes.

Mit diesem Satz ist das Zerlegungsgesetz der zu $1 - \xi_i$ primen Primideale des Körpers k im relativ-zyklischen Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ vollständig erledigt.

Auf Satz 5 fußend beweist man das folgende Zerlegungsgesetz für Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[n]{\mu})$:

Satz 6. Es sei μ eine ganze Zahl in k, von der wir voraussetzen, daß, im Falle sie die $b$te Potenz einer Zahl in k ist, b relativ prim zu n ist.

Es seien weiter $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_e$ primitive bezw. $2^{h_0 \text{te}}, l_1^{h_1 \text{te}}, \cdots, l_e^{h_e \text{te}}$ Einheitswurzeln, und schließlich sei das Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k prim zu den Zahlen $1 - \xi_0, 1 - \xi_1, \cdots, 1 - \xi_e$. *Ist dann* $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$ *genau eine primitive* $2^{h_0 - b_0} \cdot l_1^{h_1 - b_1} \cdots l_e^{h_e - b_e \text{te}}$ *Einheitswurzel, dann zerfällt* $\mathfrak{p}$ *im Körper* $K(\sqrt[n]{\mu})$ *in* $2^{b_0} \cdot l_1^{b_1} \cdots l_e^{b_e}$ *verschiedene Primfaktoren. Ist* $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$, *dann — und auch nur dann — ist die Relativdiskriminante von* $K(\sqrt[n]{\mu})$ *bezüglich* k *teilbar durch* $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ zerfällt in eine Anzahl gleicher Ideale des Körpers $K(\sqrt[n]{\mu})$, welche ein Teiler von n ist. Jedes dieser Ideale kann dann noch weiter in Primideale zerfallen (wie des genaueren aus dem 2. Teil von Satz 5 zu folgern ist).

§ 4.

Das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\}$.

Definition 3. Es sei μ eine ganze Zahl, ξ_i eine primitive $l_i^{h_i \text{te}}$ Einheitswurzel des Körpers k, $\mathfrak{l}_1$ ein in $1 - \xi_i$ genau zur l_1^{ten}, in μ genau zur a^{ten} Potenz aufgehendes Primideal. Wir geben dann dem Symbol ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$ den Wert $+1$, wenn μ nach der

$$(1) \qquad l_1 \cdot l_i^{h_i - 1}(l_i + (h_i - 1)(l_i - 1)) + a + 1^{\text{ten}}$$

Potenz von $\mathfrak{l}_1$ als Modul der $l_i^{h_i \text{ten}}$ Potenz einer ganzen Zahl in k kongruent wird. Ist ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \neq 1$, jedoch μ nach der um 1 verringerten Potenz (1) von $\mathfrak{l}_1$ als Modul der $l_i^{h_i \text{ten}}$ Potenz einer ganzen Zahl in k kongruent, also nach dem angeführten Modul (1) nur der $l_i^{h_i - 1 \text{ten}}$ Potenz einer ganzen Zahl in k kongruent; dann geben wir ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$ den Wert ζ_i, wo ζ_i eine primitive l_i^{te} Einheitswurzel ist. (Der Einfachheit halber ist eine nähere Bestimmung, welche der $l_i - 1$ möglichen primitiven Einheitswurzeln im einzelnen Fall zu wählen ist, offen gelassen.) Ist ${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$ weder 1 noch ζ_i, dann setzen wir das Symbol $= 0$.

Definition 4. Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primideal des Körpers k, das in einer oder in mehreren der Zahlen $1 - \xi_0, 1 - \xi_1, \cdots, 1 - \xi_e$ aufgeht. Dann definieren wir das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\}$ durch die Gleichung

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\} = {}_{2^{h_0}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)^{a_0} \cdot {}_{l_1^{h_1}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)^{a_1} \cdots {}_{l_e^{h_e}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)^{a_e},$$

worin die Exponenten $a_0, a_1, \cdots, a_e$ so gewählt sind, daß sie den Kongruenzen

$$\begin{aligned} a_0 \cdot l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e} &\equiv 1(2^{h_0}), \\ a_1 \cdot 2^{h_0} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e} &\equiv 1(l_1^{h_1}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_e \cdot 2^{h_0} \cdot l_1^{h_1} \cdots l_{e-1}^{h_{e-1}} &\equiv 1(l_e^{h_e}) \end{aligned}$$

genügen.

Definition 5. Ergibt die Zerlegung des Ideals $\mathfrak{a}$ des Körpers k in Primfaktoren das Resultat

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^p \cdot \mathfrak{q}^q \cdots \mathfrak{w}^w,$$

dann definieren wir das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right\}$ durch die Gleichung

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right\} = \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}^p \cdot \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right\}^q \cdots \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}^w.$$

Auf Grund dieser Definition ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Ideale in k sind,

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}\right\} = \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right\} \cdot \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{b}}\right\}.$$

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{l}$ ein in irgend welchen der Zahlen $1-\xi_0, 1-\xi_1, \cdots, 1-\xi_e$ aufgehendes Primideal und μ eine ganze Zahl in k. Gehört dann μ dem von den n^{ten} Potenzresten nach $\mathfrak{l}$ gebildeten Hauptstrahl an, so gehört μ auch dem aus $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\} = +1$ entspringenden Hauptstrahl an und umgekehrt. Gehört μ irgend welchen der $l_i^{h_i\,\text{ten}}$ oder $l_i^{h_i-1\,\text{ten}}$ Nebenstrahlen an, dann gehört μ auch den entsprechenden Nebenstrahlen des anderen Hauptstrahles an und umgekehrt.*

Der Beweis des Satzes geht von der aus Definition 3 und Satz 2 sich ergebenden Identität der Nebenstrahlen aus und zeigt dann die Identität auch der Hauptstrahlen auf Grund von Definition 4 und der Bemerkung, daß μ dann und nur dann dem Hauptstrahl angehört, wenn μ gleichzeitig dem $2^{h_0\,\text{ten}}$, dem $l_1^{h_1\,\text{ten}}, \cdots$, dem $l_e^{h_e\,\text{ten}}$ Nebenstrahl angehört.

Wir nennen auf Grund dieses Satzes, wie früher $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$, auch $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\}$ das n^{te} Potenzrestsymbol.

Satz 8. Es sei ξ_i eine primitive $l_i^{h_i\,\text{te}}$ Einheitswurzel, $\mathfrak{l}_1$ ein in $1-\xi_i$ genau zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k und μ eine ganze Zahl desselben Körpers, die nicht l_i^{te} Potenz einer Zahl in k ist. Dann ist die Relativdiskriminante des Körpers $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}_1$, wenn $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_{l_i^{h_i}} \neq 0$ ist.

Beweis. Es gehe das Primideal $\mathfrak{l}_1$ in μ genau zur a^{ten} Potenz auf, dann ist zunächst notwendig dafür, daß die Relativdiskriminante des Körpers $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu $\mathfrak{l}_1$ ist, daß $a \equiv 0\ (l_i^{h_i})$ ist. Dieselbe Forderung stellt auch ${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \neq 0$. Dann können wir aber den Fall leicht auf den einfacheren reduzieren, daß μ prim zu $\mathfrak{l}_1$ ist. Wir setzen also in der Folge $a = 0$ voraus.

Auf Grund eines schon im Beginn des Beweises zu Satz 4 abgeleiteten Hilfssatzes ist notwendig dafür, daß die Relativdiskriminante des Körpers $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu $\mathfrak{l}_1$ ist, zunächst, daß eine ganze, der Kongruenz

$$(1) \qquad \mu \equiv \alpha^{l_i} \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 \cdot l_i^{h_i}}\right)$$

genügende Zahl α in k existiert. Weiter muß dann, gleichgültig ob $\mathfrak{l}_1$ in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ in l_i verschiedene Primideale zerfallen ist oder unzerlegt bleibt — ein dritter Fall ist wegen (1) ausgeschlossen — eine ganze Zahl $\bar{\alpha}$ in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ existieren so, daß

$$\sqrt[l_i]{\mu} \equiv \bar{\alpha}^{l_i} \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 \cdot l_i^{h_i}}\right)$$

ist, damit auch die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ bezüglich $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ sei. Daraus folgt

$$\mu \equiv \bar{\alpha}^{l_i^2} \left(\mathfrak{l}_1^{l_i l_i^{h_i - 1}(l_i + (l_i - 1))}\right)$$

und darin kann man wegen (1) $\bar{\alpha}$ als ganze Zahl in k wählen. So fortfahrend erhält man unter Benutzung der Definition 3 als Resultat: Notwendige Bedingung dafür, daß die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu $\mathfrak{l}_1$ ist, ist ${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \neq 0$. Ist andererseits ${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \neq 0$, und also eine ganze Zahl α in k so angebbar, daß

$$\mu \equiv \alpha^{l_i^{h_i}} \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 l_i^{h_i - 1}(l_i + (h_i - 1)(l_i - 1))}\right)$$

ist, dann sind nacheinander die einzelnen Relativdiskriminanten von $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ bezüglich k, von $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ bezüglich $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ u. s. f. prim zu $\mathfrak{l}_1$ und daraus folgt, wieder aus der im Beweis von Satz 4 abgeleiteten Beziehung, daß auch die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k prim zu $\mathfrak{l}_1$ ist. Unsere Bedingung ${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\mu}{l_1}\right) \neq 0$ ist also auch hinreichend.

Folgerung: Ist μ eine zu $1-\xi_i$ prime ganze Zahl im Körper k und nicht l_i^{te} Potenz einer Zahl dieses Körpers, dann ist die Relativdiskriminante des Körpers $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k dann und nur dann prim zu $1-\xi_i$, wenn μ der $l_i^{h_i \text{ten}}$ Potenz einer ganzen Zahl in k nach dem Modul

$$(1-\xi_i)^{l_i^{h_i}+(l_i-1)(h_i-1)\cdot l_i^{h_i-1}}$$

kongruent ist. (Ist z. B. $l_i = 2$, so lautet dieser Modul $4\cdot 2^{h_i-1}$.)

Satz 9. Es sei μ eine ganze Zahl des Körpers k, die nicht l_i^{te} Potenz einer Zahl dieses Körpers ist, und $\mathfrak{l}_1$ ein in $1-\xi_i$ genau zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal desselben Körpers. Ist dann das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_{l_i^{h_i}}$ eine $l_i^{h_i-b_i\text{te}}$ primitive Einheitswurzel, wo nach der Definition 3 die Zahl b_i nur der Werte h_i und h_i-1 fähig ist, dann zerfällt $\mathfrak{l}_1$ im Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{b_i}$ verschiedene Primideale. Ist dagegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_{l_i^{h_i}} = 0$, dann ist jedenfalls $\mathfrak{l}_1$ die l_i^{te} Potenz eines Ideals in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$. (Ob und wie dieses Ideal noch weiter in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ zerfällt, ist aus dem nachfolgenden Beweise abzulesen.)

Beweis: Wir bezeichnen durch Restsymbol ohne Index links unten allgemein die l_i^{ten} Restsymbole und deuten durch einen Index rechts unten an, in welchem Körper das Symbol zu nehmen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir $\mathfrak{l}_1$ prim zu μ an. Andernfalls sind die Abänderungen leicht zu treffen. Wir betrachten zunächst das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_k$. Es sei:

1) $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_k = 0$. Das ist der Fall, wenn

$$\mu \equiv \alpha^{l_i} \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 l_i^{h_i}}\right)$$

durch keine ganze Zahl α in k zu befriedigen ist. $\mathfrak{l}_1$ zerfällt dann in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ in l_i gleiche Primideale, die Relativdiskriminante von $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ bezüglich k und deshalb auch diejenige von $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezüglich k ist teilbar durch $\mathfrak{l}_1$, also ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_{l_i^{h_i}} = 0$. Ist etwa $\mathfrak{l}_1 = \bar{\mathfrak{l}}_1^{l_i}$ im Körper $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$, so wäre, falls $h_i > 1$ ist, weiter das Symbol $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{l}}_1}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}$ zu betrachten. Auch das ist $= 0$, denn sonst kämen wir auf einen Widerspruch mit $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_k = 0$, wie eine, der im Satz 8 angestellten ähnliche Überlegung lehrt. Es zerfällt also $\bar{\mathfrak{l}}_1$ in $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ wieder in l_i gleiche Primideale und das geht so fort: $\mathfrak{l}_1$ zerfällt in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{h_i}$ gleiche Primideale. Es sei

2) $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_k = \zeta_i$, wo ζ_i eine primitive l_i^{te} Einheitswurzel ist. $\mathfrak{l}_1$ zerfällt dann in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ nicht. Ist $h_i > 1$, dann haben wir weiter $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\mathfrak{l}_1}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}$ ins Auge zu fassen. Dieses Symbol ist notwendig Null, denn sonst kämen wir in Widerspruch mit $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_k = \zeta_i$. $\mathfrak{l}_1$ zerfällt also in $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ in l_i gleiche, in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{h_i-1}$ gleiche Primideale. Es bleibt nur der Fall

3) $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_k = +1$ noch zu besprechen. $\mathfrak{l}_1$ zerfällt in $K\left(\sqrt[l_i]{\mu}\right)$ in l_i verschiedene Primideale. Ist $\bar{\mathfrak{l}}_1$ eines derselben, so bieten sich genau wie eben für das Symbol $\left(\frac{\sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{l}}_1}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}$, drei Möglichkeiten: Ist das Symbol 0, dann zerfällt $\bar{\mathfrak{l}}_1$ im Körper $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ in l_i gleiche Primideale und, wie man genau wie im Fall 1) zeigen kann, in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ in $l_i^{h_i-1}$ gleiche Primideale. Es ist in diesem Fall $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_{l_i^{h_i}} = 0$. Ist jenes Symbol einer primitiven l_i^{ten} Einheitswurzel gleich, dann bleibt $\bar{\mathfrak{l}}_1$ in $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$ unzerlegt. Falls jetzt $h_i > 2$ ist, wird weiter $\left(\frac{\sqrt[l_i^2]{\mu}}{\bar{\mathfrak{l}}_1}\right)_{\sqrt[l_i^2]{\mu}}$ und alle folgenden Symbole $= 0$. Daraus ergibt sich auch in diesem Fall, der wieder auf $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_{l_i^{h_i}} = 0$ führt, die weitere Zerlegung. Ist schließlich das fragliche Symbol $= +1$, dann zerfällt $\bar{\mathfrak{l}}_1$ in l_i verschiedene Primideale des Körpers $K\left(\sqrt[l_i^2]{\mu}\right)$, und es stehen für das folgende wieder drei Wege offen, u. s. f. Wir kommen auf diesem Wege schließlich auf das im Satz ausgesprochene Zerlegungsgesetz.

Auf den Sätzen dieses und des vorangegangenen Paragraphen fußend beweist man den

Satz 10. *Es sei μ eine ganze Zahl in k, von der wir voraussetzen, daß, im Falle sie genau die b^{te} Potenz einer Zahl in k ist, b relativ prim zu n ist; $\mathfrak{w}$ sei ein beliebiges Primideal in k. Ist dann $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ genau eine primitive $2^{h_0-b_0}\cdot l_1^{h_1-b_1}\cdots l_e^{h_e-b_e\,\text{te}}$ Einheitswurzel, dann zerfällt $\mathfrak{w}$ im Körper $K(\sqrt[n]{\mu})$ in $2^{b_0}\cdot l_1^{b_1}\cdots l_e^{b_e}$ verschiedene Primideale.*

Ist $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = 0$, *dann und auch nur dann ist die Relativdiskriminante von* $K(\sqrt[n]{\mu})$ *bezüglich* k *teilbar durch* $\mathfrak{w}$, und $\mathfrak{w}$ zerfällt in eine Anzahl gleicher Ideale des Körpers $K(\sqrt[n]{\mu})$, welche ein Teiler von n ist.

§ 5.

Primideale des Grundkörpers mit vorgeschriebenen n^{ten} Potenzrestsymbolen.

Satz 11. Ist μ eine ganze Zahl in k, die nicht 2^{te}, für den Fall, daß $h_0 \neq 0$ ist, $l_1^{\text{te}}, \cdots, l_e^{\text{te}}$ Potenz einer Zahl in k ist, dann hat der Grenzwert

$$\lim_{s=1} \prod_{(m)} \prod_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{1 - \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}^m n(\mathfrak{w})^{-s}}$$

einen endlichen Wert, wenn in dem Ausdruck das erste Produkt über alle zu n relativ prime rationale ganze Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \cdots, n-1$, das zweite Produkt über sämtliche Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt wird.

Beweis. Wir nehmen an, der Satz sei für alle Teiler der Zahl n schon bewiesen. — Wir betrachten das unendliche Produkt

$$\zeta_{\sqrt[n]{\mu}}(s) = \prod_{(\mathfrak{W})} \frac{1}{1 - n_{\sqrt[n]{\mu}}(\mathfrak{W})^{-s}},$$

das über alle Primideale $\mathfrak{W}$ des Körpers $K(\sqrt[n]{\mu})$ erstreckt wird, und in dem $n_{\sqrt[n]{\mu}}$ die Norm genommen im Körper $K(\sqrt[n]{\mu})$ andeutet. Wir sondern, um den Beweis zu vereinfachen, zunächst denjenigen Teil des Produktes aus, dessen Faktoren aus Teilern der Relativdiskriminante entspringen. Das Produkt dieser Faktoren wird eine für $s = 1$ endliche Größe etwa A sein. Wir erhalten also, wenn wir die Funktion $A(s)$ einführen,

$$\zeta_{\sqrt[n]{\mu}}(s) = A(s) \cdot \zeta'_{\sqrt[n]{\mu}}(s)$$

wo

$$\zeta'_{\sqrt[n]{\mu}}(s) = \prod_{(\mathfrak{W})}{}' \frac{1}{1 - n_{\sqrt[n]{\mu}}(\mathfrak{W})^{-s}}$$

ist, diesmal das Produkt nur über die zur Relativdiskriminante primen Primideale des Körpers $K(\sqrt[n]{\mu})$ erstreckt. Dies Produkt ordnen wir jetzt nach den Primidealen $\mathfrak{w}$ des Grundkörpers k in folgender Weise an: Es sei $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ genau eine $2^{h_0-b_0} \cdot l_1^{h_1-b_1} \cdots l_e^{h_e-b_e}$ te primitive Einheitswurzel. Dann zerfällt nach unsern Sätzen $\mathfrak{w}$ in $K(\sqrt[n]{\mu})$ in $2^{b_0} \cdot l_1^{b_1} \cdots l_e^{b_e}$ verschiedene

Primideale. Dem Ideal $\mathfrak{w}$ entspricht also in dem obigen Produkt das folgende Faktorenaggregat:

$$\frac{1}{\left(1 - n(\mathfrak{w})^{-s \cdot \mathfrak{z}^{h_0 - b_0} \cdot \mathfrak{p}_1^{h_1 - b_1} \cdots \mathfrak{p}_e^{h_e - b_e}}\right)^{\mathfrak{z}^{b_0} \cdot \mathfrak{p}_1^{b_1} \cdots \mathfrak{p}_e^{b_e}}}. \tag{1}$$

Setze ich

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w})^{-s}},$$

das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt, so sei $a(s)$ der Faktor, der aus den in der Relativdiskriminante aufgehenden Primidealen entspringt. Ich habe dann analog dem obigen

$$\zeta_k(s) = a(s) \cdot \zeta_k'(s),$$

wo

$$\zeta_k'(s) = \prod_{(\mathfrak{w})}' \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w})^{-s}}$$

ist, diesmal das Produkt nur über die zur Relativdiskriminante primen Primideale des Körpers k erstreckt. Nun wird vermöge (1):

$$\zeta'_{\sqrt[n]{\mu}}(s) = \zeta_k'(s) \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \prod_{(\mathfrak{w})}' \frac{1}{1 - \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}^m n(\mathfrak{w})^{-s}}. \tag{2}$$

Da der Grenzwert des Quotienten

$$\lim_{s=1} \frac{\zeta_{\sqrt[n]{\mu}}(s)}{\zeta_k(s)}$$

endlich ist (vgl. Hilbert, Algebr. Zahlkörp. § 25, pag. 230), ist auch der Grenzwert

$$\lim_{s=1} \frac{\zeta'_{\sqrt[n]{\mu}}(s)}{\zeta_k'(s)}$$

und deshalb wegen (2) auch schließlich das Doppelprodukt in der Grenze $s = 1$ endlich. Wir hatten angenommen, der Satz sei für alle Teiler von n schon bewiesen. Beachtet man alle aus dieser Annahme entspringenden Gleichungen und zieht nachträglich die von Teilern der Relativdiskriminante herrührenden Faktoren in das Produkt wieder hinein, dann folgt daraus die Aussage des vorliegenden Satzes.

Satz 12. *Es seien $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$ dergestalt voneinander unabhängige ganze Zahlen des Körpers k, daß kein Produkt*

$$\mu_1^{m_1} \cdot \mu_2^{m_2} \cdots \mu_s^{m_s}$$

die n^{te} Potenz einer Zahl in k wird, wenn $m_1, m_2, \cdots, m_s$ irgend welche Werte $0, 1, 2, \cdots, n-1$, ausgenommen

$$m_1 = 0,\ m_2 = 0, \cdots, m_s = 0$$

bedeuten. Dann existieren im Körper k stets unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ und eine zu n relativ prime ganze rationale Zahl $m < n$ derart, daß

$$\left\{\frac{\mu_1}{\mathfrak{p}}\right\}^m = c_1,\ \left\{\frac{\mu_2}{\mathfrak{p}}\right\}^m = c_2, \cdots, \left\{\frac{\mu_s}{\mathfrak{p}}\right\}^m = c_s$$

ist, wo $c_1, c_2, \cdots, c_s$ beliebig vorgeschriebene n^{te} Einheitswurzeln sind.

Der Beweis ist unter Benutzung von Satz 11 ganz analog wie im Falle von Primzahlpotenzresten zu führen. Wir fügen noch an:

Folgerung: Zu den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$ des Satzes mögen noch andere ganze Zahlen $\mu_1', \mu_2', \cdots, \mu_{s'}'$ des Körpers k treten, welche in der im Satz angegebenen Weise unabhängig voneinander und von den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$ sind; dann existieren in k stets unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, die außer jenen n^{ten} Potenzrestsymbolen noch den folgenden Potenzrestsymbolen genügen:

$$\left\{\frac{\mu_1'}{\mathfrak{p}}\right\}_{n_1}^m = \left\{\frac{\mu_1'^{\frac{n}{n_1}}}{\mathfrak{p}}\right\}^m = c_1', \cdots, \left\{\frac{\mu_{s'}'}{\mathfrak{p}}\right\}_{n_{s'}}^m = \left\{\frac{\mu_{s'}'^{\frac{n}{n_{s'}}}}{\mathfrak{p}}\right\}^m = c_{s'}'.$$

Darin sind $n_1, \cdots, n_{s'}$ Teiler von n; $c_1', \cdots, c_{s'}'$ sind bezüglich $n_1^{\text{te}}, \cdots, n_{s'}^{\text{te}}$ vorschreibbare Einheitswurzeln, und $\left\{\frac{\mu_1'}{\mathfrak{p}}\right\}_{n_1}, \cdots, \left\{\frac{\mu_{s'}'}{\mathfrak{p}}\right\}_{n_{s'}}$ bedeuten bezüglich $n_1^{\text{te}}, \cdots, n_{s'}^{\text{te}}$ Potenzrestsymbole.

§ 6.

Anwendungen.

Es sei ein Grundkörper k vorgelegt, in dem das Reziprozitätsgesetz der $2^{h_0\text{ten}}$, der $l_1^{h_1\text{ten}}, \cdots$, der $l_e^{h_e\text{ten}}$ Potenzreste bewiesen ist. Diese Voraussetzung trifft bei dem jetzigen Stande der Frage im Falle $h_0 = 0, 1, 2$; $h_1 = 1, \cdots, h_e = 1$ zu, wenn über k gewisse einschränkende Voraussetzungen gemacht werden, deren wichtigste, und auch in diesen Anwendungen verwertete, die ist, daß die Anzahl h der Idealklassen in k relativ prim zu n ist.

Wir werden eine ganze, zu $1-\xi_0, 1-\xi_1, \cdots, 1-\xi_e$ prime Zahl μ des Körpers k *primär bezüglich* $K(\sqrt[n]{\mu})$ nennen, wenn die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[n]{\mu})$ bezüglich k prim zu $1-\xi_0, 1-\xi_1, \cdots, 1-\xi_e$ ist, wenn also

$$\mu \equiv \alpha_i^{l_i^{h_i}} \left((1-\xi_i)^{l_i^{h_i-1}(l_i+(l_i-1)(h_i-1))}\right)$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots, e;\ l_0 = 2)$$

ist, α_i als ganze Zahl in k vorausgesetzt.

Wir werden eine ganze, zu $1-\xi_0, 1-\xi_1, \cdots, 1-\xi_e$ prime Zahl μ des Körpers k *hyperprimär* bezüglich $K(\sqrt[n]{\mu})$ nennen, wenn

$$\mu \equiv \alpha_i^{l_i^{h_i}} \left((1-\xi_i)^{l_i^{h_i-1}(l_i+(l_i-1)(h_i-1))} \cdot \mathfrak{l}_{i_1} \cdots \mathfrak{l}_{i_z}\right)$$
$$(i=0, 1, 2, \cdots, e;\ l_0=2)$$

ist. Darin ist α_i eine ganze Zahl in k, $\mathfrak{l}_{i_1}, \cdots, \mathfrak{l}_{i_z}$ sind die in $1-\xi_i$ aufgehenden Primideale.

Ist für $l_i^{h_i\text{te}}$ Potenzreste das Reziprozitätsgesetz bewiesen, so gelten folgende Sätze — primär und hyperprimär auf den Körper $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ bezogen —:

I. Ist μ eine primäre, ν eine beliebige ganze, zu $1-\xi_i$ prime Zahl in k, dann ist

$${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\nu}{\mu}\right).$$

II. Sind μ', μ'', ν', ν'' solche ganze Zahlen in k, daß $\nu'\nu''$ und $\mu'\mu''$ primäre Zahlen sind, dann ist

$${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right) \cdot {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)^{-1} = {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu''}{\nu''}\right) \cdot {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\nu''}{\mu''}\right)^{-1}.$$

III. Ist in

$$\mathfrak{m}^{h \cdot h'} = \mu$$

$\mathfrak{m}$ ein Ideal, μ eine Primärzahl des Körpers k und h' so gewählt, daß $h \cdot h' \equiv 1(n)$ ist, dann und nur dann genügt $\mathfrak{m}$ den Restsymbolen

$${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{m}}\right) = +1, \quad {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}}\right) = \zeta.$$

Darin durchläuft ε alle Einheiten des Körpers k, λ die $h \cdot h'^{\text{ten}}$ Potenzen aller Primfaktoren von $1-\xi_i$, und ζ ist eine l_i^{te} Einheitswurzel.

IV. Ist μ eine Hyperprimärzahl, dann und nur dann ist unter Benutzung der Bezeichnungen in III:

$${}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{m}}\right) = +1, \quad {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}}\right) = +1.$$

Wir sahen in Definition 2, wenn wir gleich die Definition 5 beachten, daß, wenn $\mathfrak{a}$ ein Ideal in k ist,

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right\} = {}_{2^{h_0}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)^{a_0} \cdot {}_{l_1^{h_1}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)^{a_1} \cdots {}_{l_e^{h_e}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)^{a_e}$$

ist, wo

$$a_0 \cdot l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e} \equiv 1(2^{h_0}),$$
$$a_1 \cdot 2^{h_0} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e} \equiv 1(l_1^{h_1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_e \cdot 2^{h_0} \cdot l_1^{h_1} \cdots l_{e-1}^{h_{e-1}} \equiv 1(l_e^{h_e})$$

zu wählen ist.

Wenden wir auf die einzelnen Faktoren von $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right\}$ die Sätze I bis IV an, so erhalten wir vier Sätze, welche den Kern des Reziprozitätsgesetzes der n^{ten} Potenzreste bilden. Wir beziehen die Bezeichnungen primär und hyperprimär im folgenden auf den Körper $K(\sqrt[n]{\mu})$.

I. Ist μ eine Primärzahl, ν eine ganze, zu $1-\xi_0, 1-\xi_1, \cdots, 1-\xi_e$ prime Zahl in k, dann ist

$$\left\{\frac{\mu}{\nu}\right\} = \left\{\frac{\nu}{\mu}\right\}.$$

II. Sind μ', μ'', ν', ν'' solche ganze Zahlen in k, daß $\mu' \cdot \mu''$ und $\nu' \cdot \nu''$ Primärzahlen in k sind, dann ist

$$\left\{\frac{\mu'}{\nu'}\right\} \cdot \left\{\frac{\nu'}{\mu'}\right\}^{-1} = \left\{\frac{\mu''}{\nu''}\right\} \cdot \left\{\frac{\nu''}{\mu''}\right\}^{-1}.$$

III. Es sei in

$$\mathfrak{m}^{h \cdot h'} = (\mu)$$

$\mathfrak{m}$ ein Ideal, μ eine Primärzahl des Körpers, und h' so gewählt, daß $h \cdot h' \equiv 1(n)$ ist; dann und nur dann ist

$$\left\{\frac{\varepsilon}{\mathfrak{m}}\right\} = +1; \quad {}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{m}}\right) = \zeta_i$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots, e;\ l_0 = 2)$$

wo ζ_i eine l_i^{te} Einheitswurzel ist, ε die Einheiten, λ_i die $h \cdot h'^{\text{ten}}$ Potenzen der Primteiler von $1-\xi_i$ durchläuft.

IV. Ist bei Benutzung der Bezeichnungen in III in

$$\mathfrak{m}^{h \cdot h'} = (\mu)$$

die Zahl μ hyperprimär, dann und nur dann ist

$$\left\{\frac{\varepsilon}{\mathfrak{m}}\right\} = +1, \quad {}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{m}}\right) = +1$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots, e;\ l_0 = 2).$$

§ 7.

Zusammenfassung.

Die vorliegenden Paragraphen behandeln ein erstes Kapitel der Theorie n^{ter} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. Bislang ist die Theorie der Primzahlpotenzreste*) und die der biquadratischen Reste**) unter gewissen Voraussetzungen über den Grundkörper bis zum Beweis der Reziprozitätsgesetze gefördert. Die nächstdem zu behandelnden Potenzreste sind die $l^{k\,ten}$, wo l eine Primzahl. Im vorhergehenden ist

1. gezeigt, daß mit der Theorie der $l^{k\,ten}$ Potenzreste auch die allgemeinere der n^{ten} Potenzreste erledigt ist, wo n eine beliebige ganze positive rationale Zahl ist. So zeigt speziell § 6, daß mit den Reziprozitätsgesetzen $l^{k\,ter}$ Potenzreste auch diejenigen n^{ter} Potenzreste gegeben sind;

2. werden die Grundlagen einer Theorie $l^{k\,ter}$ Potenzreste gegeben; mit ihnen wegen 1 zugleich auch die einer Theorie n^{ter} Potenzreste:

Es wird zunächst der Begriff des Potenzrestes — etwas von dem sonst üblichen abweichend — definiert (Definition 1) und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Zahl nach einem Primideal Potenzrest ist, angegeben. (Satz 1 und 2.) Jetzt wird auf Grund des verallgemeinerten Fermatschen Lehrsatzes das Potenzrestsymbol für solche Primideale definiert, welche prim zu l sind. (Definition 2.) Es wird dann

1. das enge Verhältnis zwischen Potenzrest und Potenzrestsymbol unter Benutzung des in der Einleitung kurz definierten Begriffes Zahlstrahl konstatiert (Satz 3.);

2. die Zerlegung eines Primideals in einem relativ-zyklischen Oberkörper mit dem Potenzrestsymbol in Zusammenhang gebracht derart, daß die Zerlegung mit der Kenntnis des Wertes des zugehörigen Potenzrestsymboles gegeben ist. (Satz 5.)

---

*) Quadratische Reste behandelt:

D. Hilbert, Über die Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. Bd. 51, 1899.

l^{te} Potenzreste, wo l eine ungerade Primzahl ist, behandelt:

D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1894/95. 5. Teil.

Ph. Furtwängler, Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste. Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1902; und

Reziprozitätsgesetze zwischen l^{ten} Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern. Math. Ann. Bd. 58, 1904.

**) W. Lietzmann, Über das biquadratische Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern. Inaug.-Diss. Göttingen 1904.

Die nächste Aufgabe ist es nun, auch für diejenigen Primideale des Grundkörpers, welche Teiler von l sind, und welche sich deshalb jener Definition für zu l relativprime Ideale nicht fügen, ein geeignet definiertes Potenzrestsymbol einzuführen. Geeignet wird das Symbol sein, wenn auch jetzt die Parallelität zwischen Symbolwert und Potenzrest und ebenso zwischen Symbolwert und Zerlegung des Primideals gewahrt bleibt. Das erfüllen die Definitionen 3 und 4, wie die darauf folgenden Sätze zeigen; sie entsprechen ganz und gar jenen Sätzen, welche wir für zu l relativ prime Primideale abgeleitet haben. (Satz 7 und 9.) Die Definition 3, welche mit Satz 2 in organischem Zusammenhang steht, läßt gleichzeitig erkennen, wie man für den Fall $l^{h\text{ter}}$ Potenzreste die Begriffe primäre und hyperprimäre Zahl, primäres und hyperprimäres Ideal zu fassen haben wird. Eine Andeutung dessen ist in § 6 gemacht.

Aus den Rahmen des Behandelten fällt der Inhalt von § 5 etwas heraus. In diesem Paragraphen wird der Beweis eines Satzes über Potenzreste gegeben, der seine Hauptanwendbarkeit erst nach Einführung des Geschlechtsbegriffes gewinnen wird, eines Begriffes, dessen man zur Erledigung der Reziprozitätsgesetze $l^{h\text{ter}}$ Potenzreste benötigt.

Landsberg a. W., im Juli 1904.

Über eine Kroneckersche Beziehung zwischen Geometrie und Zahlentheorie.

Von

E. Busche in Bergedorf.

In seinen Vorlesungen über Zahlentheorie*) hat Kronecker die Gitterpunkte einer Ebene, d. h. die Punkte, deren rechtwinklige Koordinaten beide ganze rationale Zahlen sind, in der Weise mit je einer positiven ganzen Zahl bezeichnet, daß er an den Punkt mit den Koordinaten x, y den größten gemeinsamen Teiler (x, y) seiner beiden Koordinaten setzt. Für ein Stück der Ebene in der Nähe des mit Null bezeichneten Nullpunktes erhält man so die folgende Figur:

2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3.

Kronecker macht von dieser Zuordnung, die er auf den ersten Quadranten beschränkt, hauptsächlich Gebrauch, um Mittelwerte einwandfrei herzuleiten, ohne die Eigenschaften dieser verallgemeinerten geometrischen Veranschaulichung der natürlichen Zahlenreihe ausführlich zu

*) herausgegeben von Hensel (Leipzig 1901), Bd. 1, S. 242.

untersuchen. Zu dieser Untersuchung will ich im folgenden den Anfang machen.

Rationale Zahlen sollen mit kleinen lateinischen, rationale ganze Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

§ 1.

Eine Hilfsbetrachtung über Gitterpunkte.

Die folgenden Bemerkungen über Gitterpunkte, bei denen die Kroneckersche Bezeichnung noch nicht gebraucht wird, mögen vorangeschickt werden.

Ein endlicher Bereich $\mathfrak{B}$, der als einfach zusammenhängend und nirgends konkav vorausgesetzt wird, enthalte in seinem Innern eine Anzahl von Gitterpunkten. Es soll die Frage beantwortet werden, wieviele Geraden mit vorgeschriebener Richtung sich durch diese Gitterpunkte ziehen lassen. Ist der Richtungskoeffizient der Geraden irrational, so ist die gesuchte Anzahl einfach gleich der Anzahl der Gitterpunkte im Innern von $\mathfrak{B}$, da auf einer solchen Geraden nur ein Gitterpunkt liegen kann. Ist der Richtungskoeffizient rational und z. B. gleich dem positiven Bruch $\nu:\mu$, wo μ und ν teilerfremde Zahlen sind — ist die eine Null, so ist die andere gleich 1 zu nehmen — so liegen auf einer Geraden, die durch einen Gitterpunkt geht, im allgemeinen noch andere Gitterpunkte des Bereiches, die im Abstande $\sqrt{\mu^2+\nu^2}$ aufeinander folgen. Nun verschiebe man den Bereich $\mathfrak{B}$ so, daß jeder seiner Punkte um die Strecke $\sqrt{\mu^2+\nu^2}$ in der betrachteten Richtung fortrückt. Der verschobene Bereich möge $\mathfrak{B}'$ heißen. Dann ist die Anzahl γ' der Gitterpunkte in dem Teil $\mathfrak{b}'$ von $\mathfrak{B}$, der von $\mathfrak{B}'$ nicht überdeckt wird, gleich der gesuchten Anzahl von geraden Linien, denn durch jeden dieser Punkte geht eine Linie der vorgeschriebenen Richtung, auf der in $\mathfrak{b}'$ liegenden Strecke dieser Geraden liegt genau ein Gitterpunkt, und eine Gerade, die durch einen in dem Teil von $\mathfrak{B}$ liegenden Gitterpunkt geht, der zugleich zu $\mathfrak{B}'$ gehört — wenn ein solcher Teil vorhanden ist — geht auch durch $\mathfrak{b}'$ und trägt auf ihrer in $\mathfrak{b}'$ liegenden Strecke einen Gitterpunkt, ist also in der Anzahl γ' mitgezählt worden. Verschiebt man $\mathfrak{B}'$ weiter in genau derselben Weise nach $\mathfrak{B}''$, so gibt die Anzahl γ'' der Gitterpunkte in dem Bereich $\mathfrak{b}''$, der zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, aber nicht zu $\mathfrak{B}''$ gehört — wenn ein solcher Bereich $\mathfrak{b}''$ existiert — die Anzahl der Geraden von der vorgeschriebenen Richtung an, die durch mindestens zwei Gitterpunkte in $\mathfrak{B}$ gehen, usw.

Wenn man die Anzahl der Gitterpunkte eines Bereiches durch eine um den Bereich gesetzte eckige Klammer bezeichnet, so ist also $\gamma' = [\mathfrak{b}']$

die Anzahl der Geraden von der vorgeschriebenen Richtung, die mindestens einen Gitterpunkt in $\mathfrak{B}$ tragen, $\gamma'' = [\mathfrak{b}'']$ die Anzahl der Geraden, die mindestens zwei Gitterpunkte in $\mathfrak{B}$ verbinden, usw. Die Anzahl der Geraden, die nur durch einen Gitterpunkt in $\mathfrak{B}$ gehen, ist also $[\mathfrak{b}'] - [\mathfrak{b}'']$, die Anzahl der Geraden, die genau durch zwei Gitterpunkte in $\mathfrak{B}$ gehen, ist $[\mathfrak{b}''] - [\mathfrak{b}''']$, usw.

Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ so beschaffen, daß er in seinem Innern ein rechteckiges System von Gitterpunkten enthält, das parallel zur x-Achse in jeder Reihe α, parallel zur y-Achse in jeder Reihe β Punkte aufweist, so lassen sich die Zahlen $[\mathfrak{b}']$ usw. leicht angeben. Es ist $[\mathfrak{B}] = \alpha\beta$, und der Teil des Bereiches $\mathfrak{B}'$, der zugleich zu $\mathfrak{B}$ gehört, enthält wieder ein Rechteck mit $(\alpha-\mu)(\beta-\nu)$ Gitterpunkten. Dabei ist eine Differenz $\alpha - \mu$, $\beta - \nu$ und allgemein $\alpha - \varkappa\mu$, $\beta - \varkappa\nu$ gleich Null zu setzen, wenn sie nicht positiv ist. Also ist jetzt

$$[\mathfrak{b}'] = \alpha\beta - (\alpha-\mu)(\beta-\nu) \tag{1}$$

die Anzahl aller Geraden der durch μ und ν bestimmten Richtung, die durch mindestens einen Gitterpunkt des Bereiches $\mathfrak{B}$ gehen. Ferner ist

$$[\mathfrak{b}''] = (\alpha-\mu)(\beta-\nu) - (\alpha-2\mu)(\beta-2\nu) \tag{2}$$

die Anzahl aller Geraden der betrachteten Richtung, die durch mindestens zwei Gitterpunkte von $\mathfrak{B}$ gehen, usw. Endlich geben die Ausdrücke

$$\alpha\beta - 2(\alpha-\mu)(\beta-\nu) + (\alpha-2\mu)(\beta-2\nu), \tag{3'}$$

$$(\alpha-\mu)(\beta-\nu) - 2(\alpha-2\mu)(\beta-2\nu) + (\alpha-3\mu)(\beta-3\nu), \tag{3''}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha-(\varkappa-1)\mu)(\beta-(\varkappa-1)\nu) - 2(\alpha-\varkappa\mu)(\beta-\varkappa\nu) + (\alpha-(\varkappa+1)\mu)(\beta-(\varkappa+1)\nu) \tag{3$^{(\varkappa)}$}$$

der Reihe nach die Anzahl der Geraden mit dem Richtungskoeffizienten $\nu : \mu$ an, die genau durch 1, durch 2 usw., durch $\varkappa$ Gitterpunkte des in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Gitterpunktrechtecks gehen. Es ist nicht möglich, diese Ausdrücke weiter auszurechnen, weil die Differenzen mit den Minuenden α und β in der angegebenen Weise symbolisch sind. Setzt man z. B. $\mu = 0$, $\nu = 1$, so erhält man für $\beta \gtreqless 1$ aus (1) und für $\beta \gtreqless 2$ auch aus (2) usw. jedesmal α als die Anzahl der zur y-Achse parallelen Geraden, die durch Gitterpunkte gehend den rechteckigen Bereich durchziehen. Dagegen liefert von den Ausdrücken $(3^{(\varkappa)})$ nur der auf $\varkappa = \beta$ bezügliche denselben Wert α, alle übrigen geben Null.

Wenn man die Anzahl aller verschiedenen Geraden bestimmen will, die aus einem Gitterpunktrechteck dadurch abgeleitet werden können, daß man auf alle möglichen Arten zwei zu dem Rechteck gehörige Gitterpunkte miteinander verbindet, so kann man sich auf die Geraden, deren Richtungskoeffizienten 0, ∞ und > 0 sind, beschränken, da die, deren

Richtungskoeffizient eine endliche negative Zahl ist, in derselben Anzahl vorhanden sind, wie die mit positivem endlichen Richtungskoeffizienten.

Die positiven Richtungskoeffizienten (einschließlich 0 und ∞), die für das Gitterpunktrechteck mit je α und β Gitterpunkten in einer Reihe in Betracht kommen, bilden eine Fareysche Reihe $F_{\alpha-1,\beta-1}$, die in bekannter Weise durch fortgesetzte Mediation aus den beiden Brüchen $0:1$ und $1:0$ abgeleitet werden kann, indem man nur die Brüche, deren Nenner $\gtreqless \alpha-1$, deren Zähler $\gtreqless \beta-1$ sind, in die Reihe aufnimmt. Unter Mediation verstehe ich mit Lucas die Herleitung des Bruches $(\gamma+\delta):(\lambda+\varrho)$ aus den beiden Brüchen $\gamma:\lambda$ und $\delta:\varrho$. Gewöhnlich pflegt man nur Fareysche Reihen zu betrachten, deren erster Index gleich dem zweiten ist. Die fundamentalen Eigenschaften dieser besonderen Fareyschen Reihen*) übertragen sich aber ohne weiteres auf die hier zu verwendenden etwas allgemeineren Reihen. Die Fareysche Reihe $F_{4,3}$ ist z. B.

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}.$$

Nach diesem Hinweise folgt nun aus (2) sofort, daß die Anzahl aller verschiedenen Geraden mit nicht negativer Richtung, die sich als Verbindungslinien von je zwei Gitterpunkten des Gitterpunktrechteckes mit α und β Punkten in einer Reihe ziehen lassen, gleich

$$\sum_{F_{\alpha-1,\beta-1}} \{(\alpha-\mu)(\beta-\nu) - (\alpha-2\mu)(\beta-2\nu)\}$$

ist, wo $\nu:\mu$ die Fareysche Reihe $F_{\alpha-1,\beta-1}$ durchläuft.

§ 2.

Die Kroneckersche Ebene.

Es ist zweckmäßig, nicht nur die Punkte mit ganzen Koordinaten, sondern allgemeiner die mit rationalen Koordinaten — die rationalen Punkte der Ebene — in der Kroneckerschen Weise mit einer Zahl zu bezeichnen. Dazu ist es notwendig, den Begriff des Teilers einer Zahl mit Herrn Hensel**) dahin zu erweitern, daß man von einer rationalen Zahl b sagt, sie sei ein Teiler der rationalen Zahl a, wenn $a:b$ eine ganze Zahl ist. Diese Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Primzahlpotenzen, aus denen a und b sich zusammensetzen, in a mit

*) Vergl. Bachmann, Niedere Zahlentheorie (Leipzig 1902), Bd. I, S. 121 ff.

**) S. die Anmerkung zu § 1 der sechsten Vorlesung von Kroneckers Zahlentheorie, Bd. 1, S. 502.

einem unter Berücksichtigung des Vorzeichens nicht kleineren Exponenten vorkommen als in b. So ist z. B. $35:12$ teilbar durch $7:180$. Jede rationale Zahl hat dann so viele Teiler wie es ganze Zahlen gibt. Der größte gemeinsame Teiler zweier rationalen Zahlen, deren Primzahlzerlegung bekannt ist, bestimmt sich wörtlich nach derselben Vorschrift, die für ganze Zahlen gilt; er ist aber auch gleich dem Quotienten aus dem größten gemeinsamen (ganzzahligen) Teiler der beiden Zähler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der beiden Nenner, vorausgesetzt, daß die beiden Zahlen reduzierte Brüche sind.

Eine Ebene, deren rationale Punkte $x\ y$ alle mit (x, y) bezeichnet sind, will ich eine Kroneckersche Ebene nennen. Unter einem Punkt einer solchen Ebene ist immer ein rationaler Punkt, unter einer Geraden eine rationale Gerade zu verstehen, d. h. eine Gerade mit rationalem Richtungskoeffizienten, die durch einen rationalen Punkt geht, deren Plückersche Koordinaten also rationale Zahlen sind.

Unter einem Gitterpunkt ohne weiteren Zusatz soll nach wie vor ein Punkt verstanden werden, dessen beide Koordinaten ganzzahlig sind. Es wird aber häufig in das ursprüngliche Gitter ein anderes, dessen Quadratseiten gleich dem λ^{ten} Teil der ursprünglichen Längeneinheit sind, eingeschaltet werden. Die Kreuzungspunkte dieses Gitters mögen die zur Zahl λ gehörigen Gitterpunkte genannt werden. Die Verbindungslinien der Gitterpunkte sollen Gitterstrahlen heißen.

Bei der Beschreibung der Kroneckerschen Ebene kann man sich auf den Quadranten beschränken, für den $x > 0$, $y \gtreqless 0$ ist, da die übrigen Quadranten aus diesem durch eine Drehung oder auch durch Spiegelung an den Achsen, bezw. am Nullpunkt hervorgehen. Die Zahl, die nach der verallgemeinerten Kroneckerschen Vorschrift jeder Punkt der Ebene trägt, werde als die *Nummer* des Punktes bezeichnet. Nur die Gitterpunkte, und diese alle, haben eine ganzzahlige Nummer. Die zu λ gehörigen Gitterpunkte sind die Punkte, deren Nummer einen ganzzahligen Zähler hat, wenn sie auf den Nenner λ gebracht wird.

Zuerst mögen die Punkte mit der Nummer 1 aufgesucht werden; es sind das die Gitterpunkte, deren Koordinaten relativ prim zueinander sind. Auf der positiven x-Achse gehört nur der Punkt $1|0$ zu ihnen. Auf der Geraden $y = 1$ sind alle Gitterpunkte mit 1 bezeichnet, auf der Geraden $y = 2$ alle Gitterpunkte mit ungerader Abszisse, auf der Geraden $y = 3$ alle Gitterpunkte, deren Abszisse nicht durch 3 teilbar ist, usw. Auf der Geraden $y = x$ haben von den ersten x Gitterpunkten diejenigen $\varphi(x)$ die Nummer 1, deren Abszisse relativ prim zu x ist, und diese Punktgruppe wiederholt sich nach je x Gitterpunkten.

Unterwirft man jetzt die Ebene einer *Ähnlichkeitstransformation*.

$$x' = tx,$$
$$y' = ty,$$

so ist $(x', y') = (tx, ty) = t(x, y)$. Daraus folgt, daß das System aller Punkte mit der Nummer t ein ähnliches Bild des Systems aller mit 1 bezeichneten Punkte ist. Aus jedem mit 1 bezeichneten Punkt leitet man dadurch einen Punkt mit der Nummer t ab, daß man den ersten Punkt mit dem Nullpunkt verbindet und seinen Abstand vom Nullpunkt t mal vergrößert. Für $t = \infty$ erhält man unendlich ferne Punkte, die alle als auf einer geraden Linie befindlich angesehen werden mögen. Auf einem Halbstrahl durch den Nullpunkt liegen die Nummern der Punkte geradeso der Größe nach geordnet wie bei der gewöhnlichen geometrischen Veranschaulichung der positiven Zahlen durch die Punkte einer Geraden.

§ 3.

Eine Anzahlbestimmung.

Ein Problem, das Kronecker aufstellt und in einem besonderen Falle löst, besteht darin, für einen beliebigen endlichen Bereich $\mathfrak{B}'$ die Anzahl der Punkte in seinem Innern anzugeben, die mit der Nummer t bezeichnet sind. Da das System t dem System 1 ähnlich ist, kann diese Aufgabe darauf zurückgeführt werden, in dem Bereich $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' : t$, der aus $\mathfrak{B}'$ durch die Ähnlichkeitstransformation $\begin{pmatrix} 1:t & 0 \\ 0 & 1:t \end{pmatrix}$ hervorgeht, die Punkte aufzusuchen, die mit 1 bezeichnet sind. Um diese Anzahl, die ich im Anschluß an Kronecker $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B})$ nennen will, zu bestimmen, ziehe man von der Anzahl $[\mathfrak{B}]$ aller Gitterpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ die ab, deren Nummer durch zwei teilbar ist. Die Anzahl dieser Punkte ist $[\mathfrak{B} : 2]$. Ferner ziehe man alle die $[\mathfrak{B} : 3]$ Punkte ab, deren Nummer durch drei teilbar ist, addiere aber wieder die Anzahl $[\mathfrak{B} : 6]$ der Punkte, deren Nummern durch zwei und drei zugleich teilbar sind usw. Man verfahre also genau so wie bei der bekannten Bestimmung der Eulerschen φ-Funktion, die ja auch ein besonderer Fall der hier betrachteten Funktion ist. Es ist also

$$(1)\quad \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}) = [\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B} : 2] - [\mathfrak{B} : 3] + [\mathfrak{B} : 2 \cdot 3] - [\mathfrak{B} : 5] + [\mathfrak{B} : 2 \cdot 5] + [\mathfrak{B} : 3 \cdot 5] - [\mathfrak{B} : 2 \cdot 3 \cdot 5] \cdots,$$

wo die Reihe rechts auf alle Primzahlen ausgedehnt werden kann, aber nur bis auf die größte ausgedehnt zu werden braucht, die noch in einer der in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Nummern aufgeht.

Man kann die Formel (1) kürzer schreiben, wenn man sich des bekannten Symbols $\mu(x)$ bedient*). *Dann ist*

*) Vgl. Bachmann: Analytische Zahlentheorie. S. 309 (Leipzig 1894). Kronecker setzt ε_x statt $\mu(x)$.

(1^a) $$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}) = \sum_{x=1}^{\infty} \mu(x)[\mathfrak{B} : x],$$

und die Anzahl der mit t bezeichneten Punkte in $\mathfrak{B}$ *ist*

(1^b) $$\mathfrak{A}_t(\mathfrak{B}) = \sum_{x=1}^{\infty} \mu(x)[\mathfrak{B} : xt].$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Kroneckerschen Formel (2^a) S. 307 a. a. O, die sich auf einen rechteckigen Bereich bezieht, dessen Seiten den Achsen parallel sind und dessen eine Ecke in den Nullpunkt fällt. (Darauf führt Kronecker den Fall zurück, wo das Rechteck keine Ecke im Nullpunkt hat.) Bei dieser Annahme über $\mathfrak{B}$ kann man, wie a. a. O., die Berechnung der Klammergrößen mittels der Funktion $[x]$ ausführen. Im allgemeinen Falle kann das ebenfalls geschehen, wenn die Begrenzung des Bereiches in geeigneter Weise gegeben ist.

Für die Eulersche φ-Funktion gilt bekanntlich die Gleichung

(2) $$\sum_{\delta/\tau} \varphi(\delta) = \tau,$$

wo δ die Teiler von τ durchläuft (daß hier nur die ganzzahligen Teiler gemeint sind, geht aus der Bezeichnung mit einem griechischen Buchstaben hervor). *Ein analoger Satz gilt für die Funktion* $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B})$, *nämlich*

(3^a) $$\sum_{\delta} \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B} : \delta) = [\mathfrak{B}],$$

wo δ *die Teiler aller der ganzzahligen Nummern durchläuft, die in dem Bereich* $\mathfrak{B}$ *vertreten sind*, und zwar so, daß jeder dieser Teiler nur einmal in Betracht gezogen wird. Man kann statt dessen auch

(3^b) $$\sum_{x=1}^{\infty} \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B} : x) = [\mathfrak{B}]$$

schreiben, da ein Bereich $\mathfrak{B} : x$, wenn x nicht wenigstens in einer der ganzzahligen Nummern von $\mathfrak{B}$ aufgeht, überhaupt keinen Gitterpunkt enthält.

Der Beweis von (3^a) ist sehr einfach. Für $\delta = 1$ werden links die Gitterpunkte in $\mathfrak{B}$ gezählt, die die Nummer 1 haben. Sind allgemein ω_δ Gitterpunkte in $\mathfrak{B}$ mit Vielfachen von δ bezeichnet, so enthält der Bereich $\mathfrak{B} : \delta$ genau ω_δ Gitterpunkte, von denen $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B} : \delta)$ die Nummer 1 haben. Ebenso viele Gitterpunkte tragen in $\mathfrak{B}$ die Zahl δ selbst. Man sieht, daß auf der linken Seite von (3^a) gerade alle in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Gitterpunkte gezählt werden, jeder einmal, wie es die rechte Seite verlangt.

Um eine Anwendung von der Formel (1^a) zu machen, werde angenommen, daß der Bereich nur einen einzigen Gitterpunkt enthalte, der die Nummer $\tau > 1$ habe. Dann ist $[\mathfrak{B} : x]$ jedesmal dann gleich 1, wenn x ein Teiler von τ ist, sonst aber gleich Null. Daraus folgt, da jetzt $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}) = 0$ ist, die bekannte Fundamentaleigenschaft der Funktion $\mu(x)$, wonach

$$\sum_\delta \mu(\delta) = 0$$

ist, wenn δ alle ganzzahligen Teiler einer von 1 verschiedenen ganzen Zahl durchläuft.

Ferner werde vorausgesetzt, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ aus $\alpha \cdot \beta$ kleinen Bereichen bestehe, von denen jeder nur einen der $\alpha \cdot \beta$ Gitterpunkte

$$\xi_\mu \,|\, \eta_\nu \quad (\mu = 1, 2 \cdots \alpha;\ \nu = 1, 2 \cdots \beta)$$

enthält. Bezeichnet man dann mit

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\varrho;\ \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\sigma)$$

die Zahl, die angibt, wie oft eine der Zahlen γ zu einer der Zahlen χ relativ prim ist, so folgt aus (3^a)

$$\sum_\delta \varphi\left(\frac{\xi_1}{\delta}, \frac{\xi_2}{\delta}, \cdots, \frac{\xi_\alpha}{\delta};\ \frac{\eta_1}{\delta}, \frac{\eta_2}{\delta}, \cdots, \frac{\eta_\beta}{\delta}\right) = \alpha\beta,$$

wo δ alle Zahlen durchläuft, die in irgend einer Zahl ξ_μ und zugleich in irgend einer Zahl η_ν aufgehen. Dabei werden alle diejenigen Argumente, die nicht ganzzahlig ausfallen, einfach weggelassen. Setzt man $\beta = 1$, $\eta_1 = \tau$, $\alpha = \tau$, $\xi_\mu = \mu$, so geht die Formel in (2) über, da

$$\varphi(1, 2, \cdots, \tau;\ \tau) = \varphi(\tau)$$

ist.

§ 4.

Verallgemeinerungen der Eulerschen φ-Funktion.

Die bisherigen Betrachtungen über die Kroneckersche Ebene lassen sich in so selbstverständlicher Weise auf mehr als zwei Dimensionen verallgemeinern, daß ich hier ohne weiteres von dieser Übertragung Gebrauch machen kann, um noch einige Formeln anzugeben, von denen ich eine, die übrigens schon bekannt ist, später benutzen werde. Unter

$$\varphi_\sigma(\tau) = \varphi(1, 2, \cdots, \tau;\ 1, 2, \cdots, \tau; \cdots;\ \tau),$$

wo der Komplex der Zahlen $1, 2, \cdots, \tau$ sich rechts σ mal wiederholt, werde die Anzahl derjenigen Kombinationen mit Wiederholung und mit Unterscheidung der Reihenfolge (der sogenannten Variationen) von je σ der Zahlen $1, 2, \cdots, \tau$ verstanden, die mit τ den größten gemeinsamen Teiler 1 haben, d. h. also die Anzahl der mit der Nummer 1 bezeichneten Gitterpunkte des $\sigma+1$-dimensionalen Kroneckerschen Raumes unter denjenigen τ^σ Gitterpunkten, deren σ erste Koordinaten irgend einen der Werte $1, 2, \cdots, \tau$ haben, deren letzte Koordinate den Wert τ besitzt. Dann ist nach der auf $\sigma+1$ Dimensionen übertragenen Formel (1^a) des vorigen Paragraphen

$$(1) \qquad \varphi_\sigma(\tau) = \tau^\sigma \cdot \left(1-\frac{1}{\pi_1^\sigma}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\pi_2^\sigma}\right)\cdots,$$

wo $\pi_1, \pi_2, \cdots$ die verschiedenen Primzahlen sind, die in τ aufgehen. Nach (3^a) von § 3 ist auch

$$\sum_{\delta \cdot \tau} \varphi_\sigma(\delta) = \tau^\sigma.$$

Diese Formeln sind bekannt. Dagegen sind, soviel ich weiß, die entsprechenden Gleichungen für die Kombinationen ohne Wiederholung und ohne Unterscheidung der Reihenfolge noch nicht aufgestellt worden. Da jetzt die Anzahl aller in Betracht kommenden Gitterpunkte gleich

$$\binom{\tau}{\sigma} = \frac{\tau\cdot(\tau-1)\cdots(\tau-\sigma+1)}{1\cdot 2\cdots\sigma}$$

ist, so ist, wenn unter

$$\bar{\varphi}_\sigma(\tau) = \bar{\varphi}(1, 2, \cdots, \tau;\ 1, 2, \cdots, \tau; \cdots; \tau)$$

die gesuchte Anzahl, d. h. die Anzahl der mit 1 bezeichneten unter diesen $\binom{\tau}{\sigma}$ Gitterpunkten verstanden wird, nach § 3, Gl. (1^a)

$$\bar{\varphi}_\sigma(\tau) = \binom{\tau}{\sigma} - \binom{\tau:\pi_1}{\sigma} - \binom{\tau:\pi_2}{\sigma} + \binom{\tau:\pi_1\pi_2}{\sigma}\cdots,$$

also, wenn

$$\binom{\lambda}{\sigma} = \frac{1}{\sigma!}\left(\lambda^\sigma - \gamma_{\sigma 1}\lambda^{\sigma-1} + \gamma_{\sigma 2}\lambda^{\sigma-2} - \cdots \pm (\sigma-1)!\,\lambda\right)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_\sigma(\tau) &= \frac{1}{\sigma!}\left(\tau^\sigma - \left(\frac{\tau}{\pi_1}\right)^\sigma - \left(\frac{\tau}{\pi_2}\right)^\sigma + \left(\frac{\tau}{\pi_1\pi_2}\right)^\sigma\cdots\right)\\ &\quad - \frac{1}{\sigma!}\gamma_{\sigma 1}\left(\tau^{\sigma-1} - \left(\frac{\tau}{\pi_1}\right)^{\sigma-1} - \left(\frac{\tau}{\pi_2}\right)^{\sigma-1} + \left(\frac{\tau}{\pi_1\pi_2}\right)^{\sigma-1}\cdots\right)\cdots\\ &= \frac{1}{\sigma!}\left(\varphi_\sigma(\tau) - \gamma_{\sigma 1}\varphi_{\sigma-1}(\tau) + \gamma_{\sigma 2}\varphi_{\sigma-2}(\tau) - \cdots \pm (\sigma-1)!\,\varphi(\tau)\right).\end{aligned}$$

Unter Benutzung einer symbolischen Schreibweise kann man also

$$\bar{\varphi}_\sigma(\tau) = \frac{\varphi(\tau)\cdot(\varphi(\tau)-1)\cdot(\varphi(\tau)-2)\cdots(\varphi(\tau)-\sigma+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\sigma}$$

setzen. Dabei wird nach Ausführung der Multiplikation $(\varphi(\tau))^\varrho$ durch $\varphi_\varrho(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$ durch $\varphi(\tau)$ ersetzt. So ist z. B. die Anzahl aller verschiedenen

Paare von zwei verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, 6$, die mit 6 den größten gemeinsamen Teiler 1 haben, gleich

$$\bar{\varphi}_2(6) = \frac{1}{2}\left(\varphi_2(6) - \varphi(6)\right) = \frac{1}{2}\cdot 36\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 12 - 1 = 11.$$

Diese Zahlenpaare sind 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 2, 3; 2, 5; 3, 4; 3, 5; 4, 5; 5, 6. Ihre Anzahl ist 11.

Auch für die Funktion $\bar{\varphi}_\sigma(\tau)$ gilt der durch die Gleichung

$$\sum_{\delta/\tau} \bar{\varphi}_\sigma(\delta) = \binom{\tau}{\sigma}$$

ausgedrückte Satz, wie sich auch aus (3^a) von § 3 sofort ergibt.

Es ist klar, daß die Sätze dieses Paragraphen wesentlich darauf beruhen, daß der eine unter den Komplexen von Zahlen, die als Argumente der φ-Funktion auftreten, nur aus einer Zahl besteht.

§ 5.

Ein Satz über die Kroneckersche Funktion $\mathfrak{A}_1(0, (\alpha-1, \beta-1))$.

Mit $\mathfrak{A}_1(0, (\alpha-1, \beta-1))$ werde nach Kronecker die Anzahl der Gitterpunkte mit der Nummer 1 bezeichnet, die in dem Rechteck mit den Ecken $0|0$, $\alpha-1|0$, $\alpha-1|\beta-1$, $0|\beta-1$ liegen. Dabei soll der Rand des Bereiches mit zu seinem Innern gehören, so daß in dem Rechteck $\alpha\beta$ Gitterpunkte liegen. Abweichend von Kronecker zähle ich also auch die Punkte $1|0$ und $0|1$ mit bei der Bestimmung der Anzahl $\mathfrak{A}_1(0, (\alpha-1, \beta-1))$. Diese Anzahl kann auch angesehen werden als die Anzahl der Glieder der Fareyschen Reihe $F_{\alpha-1,\beta-1}$. Sie ist endlich auch gleich der Anzahl von verschiedenen Geraden, die man von dem Nullpunkt aus nach allen übrigen Gitterpunkten des Rechtecks ziehen kann.

Die Anzahl der Geraden, die den Gitterpunkt $\alpha-1-\xi|\beta-1-\eta$, wo $0 \lesseqgtr \xi \lesseqgtr \alpha-1$, $0 \lesseqgtr \eta \lesseqgtr \beta-1$ ist, mit den Gitterpunkten des Rechtecks verbinden, deren Koordinaten nicht kleiner als $\alpha-1-\xi$ bezw. $\beta-1-\eta$ sind, ist gleich $\mathfrak{A}_1(0, (\xi, \eta))$; $\mathfrak{A}_1(0, (0, 0))$ wird gleich Null gesetzt. Die Doppelsumme

$$\sum_{\xi=0}^{\alpha-1}\sum_{\eta=0}^{\beta-1}\mathfrak{A}_1(0, (\xi, \eta))$$

gibt demnach die Anzahl aller Verbindungsgeraden mit positivem Richtungskoeffizienten (inkl. 0 und ∞) von Gitterpunkten des Rechtecks an, wenn jede Gerade $x-1$ mal gezählt wird, falls auf ihr x Gitterpunkte liegen. Andererseits ist diese Anzahl nach den Ausdrücken (3) von § 1 gleich

$$\begin{aligned}\sum_{F_{\alpha-1,\beta-1}} \Big\{ & 1\cdot\big((\alpha-\mu)(\beta-\nu)-2(\alpha-2\mu)(\beta-2\nu)+(\alpha-3\mu)(\beta-3\nu)\big) \\ & +2\cdot\big((\alpha-2\mu)(\beta-2\nu)-2(\alpha-3\mu)(\beta-3\nu)+(\alpha-4\mu)(\beta-4\nu)\big) \\ & + \cdots \\ & +(x-1)\cdot\big((\alpha-(x-1)\mu)(\beta-(x-1)\nu)-2(\alpha-x\mu)(\beta-x\nu) \\ & \qquad\qquad +(\alpha-(x+1)\mu)(\beta-(x+1)\nu)\big) \\ & + \cdots \\ = & \sum_{F_{\alpha-1,\beta-1}} (\alpha-\mu)(\beta-\nu),\end{aligned}$$

da die erste Summe so weit fortzusetzen ist, bis die symbolischen Differenzen alle gleich Null geworden sind.

Für die Kroneckersche Funktion besteht also die Gleichung

$$\sum_{\xi=0}^{\alpha-1}\sum_{\eta=0}^{\beta-1} \mathfrak{A}_1(0,(\xi,\eta)) = \sum_{F_{\alpha-1,\beta-1}} (\alpha-\mu)(\beta-\nu),$$

wo μ *die Nenner,* ν *die zugehörigen Zähler der Fareyschen Reihe* $F_{\alpha-1,\beta-1}$ *durchläuft.*

Hier möge noch die folgende Bemerkung Platz finden. Die sämtlichen Gitterpunkte mit der Nummer 1 in dem betrachteten Rechteck, deren Anzahl $\mathfrak{A}_1(0,(\alpha-1,\beta-1))$ ist, liegen auf dem Umfang einer viertelsternförmigen Figur, die man erhält, wenn man den Nullpunkt mit 1 0, darauf diesen Punkt mit dem Punkt verbindet, der dem zweiten Gliede der Fareyschen Reihe $F_{\alpha-1,\beta-1}$ entspricht, darauf diesen Punkt mit dem, der zu dem dritten Fareyschen Bruch gehört, usw. bis man über 0 1 zum Nullpunkt zurückkommt. Verbindet man alle diese mit 1 bezeichneten Gitterpunkte mit dem Nullpunkt, so zerlegt man dadurch die viertelsternförmige Figur in $\mathfrak{A}_1(0,(\alpha-1,\beta-1))-1$ Dreiecke, die alle den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ haben, weil für zwei aufeinander folgende Brüche $\gamma:\lambda$, $\delta:\varrho$ der Fareyschen Reihe die Beziehung $\delta\lambda-\gamma\varrho=1$ gilt. Der Flächeninhalt der geradlinig begrenzten Figur, auf deren Umfang die mit 1 bezeichneten Gitterpunkte des Rechtecks mit den Ecken 0 0, $\alpha-1$ 0, $\alpha-1\,|\,\beta-1$, 0 $\beta-1$ liegen, ist also gleich $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1(0,(\alpha-1,\beta-1))-\frac{1}{2}\cdot$

§ 6.

Eine Anzahlbestimmung mittels einer Verallgemeinerung des Symbols $\mu(\varkappa)$.

Zieht man in einem rechteckigen System von Gitterpunkten die sämtlichen Verbindungsgeraden der Gitterpunkte, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die Anzahl der Geraden mit positivem Richtungskoeffizienten, die durch einen der Gitterpunkte hindurchgehen, durch die Funktion $\mathfrak{A}_1(0, (\xi, \eta))$ ausdrücken, die man nach dem Vorgange von Kronecker mit Hilfe des Symbols $\mu(\varkappa)$ und der Funktion $[x]$ weiter ausrechnen kann. Es soll jetzt die Aufgabe gelöst werden, die Anzahl der Geraden eines solchen Systems von Gitterstrahlen zu bestimmen, die durch einen Punkt im Innern des Rechtecks mit nicht ganzzahligen rationalen Koordinaten gehen, wobei man sich wieder auf die Geraden mit positivem Richtungskoeffizienten beschränken kann.

Der Punkt P möge die auf ihren Generalnenner gebrachten Koordinaten $\varrho : \lambda$, $\sigma : \lambda$ haben, wo $(\varrho, \sigma, \lambda) = 1$ ist und $0 < \varrho \gtreqless \lambda$, $0 < \sigma \gtreqless \lambda$ vorausgesetzt werden möge. Dann werde das rechteckige System von Gitterpunkten

$$\begin{array}{l} 1|\beta,\ 2|\beta, \cdots, \alpha|\beta, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1|2,\ 2|2, \cdots, \alpha|2, \\ 1|1,\ 2|1, \cdots, \alpha|1 \end{array}$$

betrachtet und gefragt, wieviele verschiedene gerade Linien sich von P aus nach den Punkten dieses Systems ziehen lassen.

Vergrößert man die Figur durch eine Ähnlichkeitstransformation, die den Nullpunkt und die Achsen unverändert läßt, λ mal, so geht P in den Gitterpunkt $\varrho\,|\,\sigma$, die Gitterpunkte des Systems in solche Gitterpunkte über, deren Koordinaten beide durch λ teilbar sind. Da die zu untersuchende Figur von der Bezeichnung der Punkte unabhängig ist, so werde nun noch der Nullpunkt in den Punkt $\varrho\,|\,\sigma$ verlegt. Setzt man dann $\lambda - \varrho = \varrho'$, $\lambda - \sigma = \sigma'$, so hat jetzt P die Koordinaten $0|0$, und die Punkte des rechteckigen Systems, das mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werde, sind

$$\begin{array}{llll} \varrho'|\sigma' + (\beta-1)\lambda, & \varrho' + \lambda|\sigma' + (\beta-1)\lambda, & \cdots, & \varrho' + (\alpha-1)\lambda|\sigma' + (\beta-1)\lambda, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho'|\sigma' + \lambda, & \varrho' + \lambda|\sigma' + \lambda, & \cdots, & \varrho' + (\alpha-1)\lambda|\sigma' + \lambda, \\ \varrho'|\sigma', & \varrho' + \lambda|\sigma', & \cdots, & \varrho' + (\alpha-1)\lambda|\sigma'. \end{array}$$

Die Nummern dieser Punkte sind alle zu λ relativ prim. Der im vorigen Paragraphen behandelte Fall geht hieraus hervor, wenn $\varrho = \lambda$,

$\sigma = \lambda$, $\lambda = 1$ gesetzt wird. Während dann also, um alle zu bestimmenden Geraden zu finden, der Nullpunkt mit den mit 1 bezeichneten Gitterpunkten des Systems verbunden werden mußte, weil eine Verbindungslinie mit einem mit einer größeren Nummer bezeichneten Gitterpunkte schon durch einen Punkt mit der Nummer 1 hindurchgeht, sind jetzt die Verbindungslinien des Nullpunktes mit allen den Punkten des Systems $\mathfrak{N}$ aufzusuchen, deren Nummer $\tau < \lambda$ ist. Denn auf einer solchen Linie liegen allerdings schon vor dem mit τ bezeichneten Punkte $\tau - 1$ andere Gitterpunkte mit den Nummern $1, 2, \cdots, \tau - 1$, von diesen gehört aber keiner zu den Punkten des Systems $\mathfrak{N}$. Die Nummern zweier auf derselben Geraden des Nullpunktes aufeinander folgenden Punkte von $\mathfrak{N}$ unterscheiden sich nämlich um λ voneinander, weil ihre Koordinatendifferenzen den größten gemeinschaftlichen Teiler λ haben, so daß zwischen zwei solchen Punkten λ Gitterpunkte liegen. Man muß also, um alle gesuchten Geraden zu erhalten, von den Verbindungslinien der Systempunkte mit dem Nullpunkt die ausschließen, die nach einem Punkt mit einer Nummer $> \lambda$ (eine Nummer $= \lambda$ kommt nicht vor) hinführen, weil auf diesen Geraden näher nach dem Nullpunkt zu schon ein Systempunkt mit einer Nummer $< \lambda$ liegt. So wird man dazu veranlaßt, unter den Punkten des Systems $\mathfrak{N}$ die aufzusuchen, deren Nummer $< \lambda$ ist. Man muß hier gewissermaßen zwei Zahlen als relativ prim ansehen, wenn nur ihr größter gemeinsamer Teiler $< \lambda$ ist, und die Aufgabe lösen, unter den Zahlen

$$\xi = \varrho' + \mu\lambda \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, \alpha - 1)$$

die zu bestimmen, die in dieser erweiterten Bedeutung des Wortes relativ prim zu den Zahlen

$$\eta = \sigma' + \nu\lambda \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, \beta - 1)$$

sind. Diese Anzahl ergibt sich, wenn man von der Gesamtzahl $\alpha\beta$ der Punkte des Systems die abzieht, deren Abszisse ξ und Ordinate η durch $\lambda + 1$ teilbar sind, ferner die, deren ξ und η beide durch $\lambda + 2$ teilbar sind, usw., dann aber die Anzahl der Punkte wieder addiert, deren ξ und η zugleich durch $\lambda + 1$ und $\lambda + 2$ teilbar sind usw. Die Zahlen $\lambda + 1, \lambda + 2, \cdots$, die sogleich noch genauer angegeben werden sollen, treten hierbei also in derselben Weise auf, wie bei der analogen Bestimmung der Funktion $\mathfrak{A}_1(0, (\alpha - 1, \beta - 1))$ die Primzahlen $2, 3, 5, \cdots$; sie mögen deshalb *„Pseudoprimzahlen über λ“* genannt werden.

Zu diesen Pseudoprimzahlen über λ gehören die Zahlen $\lambda + 1, \lambda + 2, \cdots, 2\lambda - 1, 2\lambda, 2\lambda + 1$, ferner $2\lambda + 3, 2\lambda + 5, \cdots$, indem immer die Zahlen weggelassen werden, die durch eine der schon aufgezählten kleineren Pseudoprimzahlen teilbar sind. Zu den Pseudoprimzahlen über λ gehören demnach alle eigentlichen Primzahlen $> \lambda$ und eine Reihe von Nicht-primzahlen, von denen die größte das Quadrat der größten eigentlichen Primzahl $\gtreqless \lambda$ ist. Dabei ist zu bemerken, daß bei der besonderen Aufgabe, die hier zu dem Begriff der Pseudoprimzahlen geführt hat, unter den dabei zu verwendenden Pseudoprimzahlen keine vorkommt, die mit λ einen gemeinsamen ganzzahligen Teiler hat, so daß man diese auch von vornherein ausschließen könnte. Es ist aber einfacher, bei der Definition dieser Zahlen darauf kein Gewicht zu legen. Die Pseudoprimzahlen über 6 z. B. sind

$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 29, 31, \cdots,$$

wo nun nur noch alle übrigen eigentlichen Primzahlen folgen.

Es seien nun $\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_{\mu'}'$ die Pseudoprimzahlen über λ, die zugleich in mindestens einer Zahl ξ und einer Zahl η aufgehen, d. h. die in mindestens einer Nummer des Systems $\mathfrak{N}$ als Faktor vorkommen. Ferner seien $\lambda_1'', \lambda_2'', \cdots, \lambda_{\mu''}''$ die in Nummern von $\mathfrak{N}$ aufgehenden kleinsten gemeinsamen Vielfachen von je zwei der Zahlen λ', ferner $\lambda_1''', \lambda_2''', \cdots, \lambda_{\mu'''}'''$ die in Nummern von $\mathfrak{N}$ aufgehenden kleinsten gemeinsamen Vielfachen von je drei der Zahlen λ' usw., wobei zu beachten ist, daß die Zahlen λ'', λ''' usw. unter sich nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen, und auch dieselbe Zahl z. B. unter den λ'' und den λ''' vorkommen kann. Bezeichnet man dann mit $[\![\mathfrak{N}:\tau]\!]$ die Anzahl der Nummern des Systems $\mathfrak{N}$, die durch τ teilbar sind, so ist die gesuchte Zahl von Geraden

$$(1) \qquad \Gamma = \alpha\beta - \sum_{\iota=1}^{\mu'} [\![\mathfrak{N}:\lambda_\iota']\!] + \sum_{\iota=1}^{\mu''} [\![\mathfrak{N}:\lambda_\iota'']\!] - \sum_{\iota=1}^{\mu'''} [\![\mathfrak{N}:\lambda_\iota''']\!] \cdots.$$

Um diesen Ausdruck weiter auszurechnen, werde jetzt eine Verallgemeinerung des Zeichens $\mu(x)$ eingeführt. Zuerst werde noch ohne Rücksicht auf die gerade vorliegende Aufgabe folgendermaßen definiert:

$$(2^{a}) \qquad \mu_\lambda(1) = 1,$$

$$(2^{b}) \qquad \mu_\lambda(x) = -1, \text{ wenn } x \text{ gleich einer Pseudoprimzahl über } \lambda \text{ ist.}$$

Ist x eine beliebige positive ganze Zahl, so sei diese $\omega^{(\gamma)}$ mal als kleinstes gemeinsames Vielfaches von γ Pseudoprimzahlen über λ darstellbar. Dann setze man

$$(2^{c}) \qquad \mu_\lambda(x) = \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} \omega^{(\gamma)}.$$

Wenn x überhaupt nicht als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Pseudoprimzahlen über λ darstellbar ist, z. B. wenn $1 < x \gtreqless \lambda$ ist, so werde

$$(2^{d}) \qquad \mu_\lambda(x) = 0$$

gesetzt. Es möge ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Zahl $\mu_\lambda(x)$

sich nicht immer gleich ± 1 oder 0 ergibt, sondern auch andere positive oder negative ganzzahlige Werte haben kann.

Für die vorliegende Aufgabe ist es notwendig, die Definition von $\mu_\lambda(\varkappa)$ dahin abzuändern, daß das abgeänderte Zeichen $\bar{\mu}_\lambda(\varkappa)$ auch dann gleich Null gesetzt wird, wenn $\varkappa$ nicht relativ prim zu λ ist.

Die Anzahl der Zahlen ξ, die durch eine Zahl $\varkappa$ teilbar sind, ergibt sich aus der Kongruenz

$$\varrho' + \mu\lambda \equiv 0 \pmod{\varkappa}$$

oder

$$\lambda - \varrho + \mu\lambda \equiv 0 \pmod{\varkappa}$$

oder

(3) $$(\mu + 1)\lambda \equiv \varrho \pmod{\varkappa}.$$

Setzt man die kleinste positive Lösung der Kongruenz $v\lambda \equiv \varrho$ (mod. $\varkappa$) gleich $v_\varkappa$, so daß $0 < v_\varkappa \leqq \varkappa$ ist, so ist der kleinste Wert von μ, für den (3) erfüllt ist, gleich $v_\varkappa - 1$, und da μ die Werte $0, 1, 2, \cdots, \alpha - 1$ durchläuft, so gibt es

$$\left[\frac{\alpha - 1 - v_\varkappa + 1}{\varkappa}\right] + 1 = \left[\frac{\alpha + \varkappa - v_\varkappa}{\varkappa}\right]$$

Zahlen ξ, die durch $\varkappa$ teilbar sind. Nennt man ferner $\omega_\varkappa \leqq \varkappa$ die kleinste positive Lösung der Kongruenz $\omega\lambda \equiv \sigma \pmod{\varkappa}$, so ergibt sich ebenso

$$\left[\frac{\beta + \varkappa - \omega_\varkappa}{\varkappa}\right]$$

als die Anzahl der Zahlen η, die durch $\varkappa$ teilbar sind.

Wenn λ mit $\varkappa$ einen gemeinsamen ganzzahligen Teiler hat, der in ϱ aufgeht, so geht dieser Teiler nicht in σ auf, da $(\varrho, \sigma, \lambda) = 1$ ist. Wenn also $\varkappa$ nicht relativ prim zu λ ist, so gibt es mindestens eine der Zahlen $v_\varkappa$ und $\omega_\varkappa$ nicht. Wegen der Bedeutung des Zeichens $\bar{\mu}_\lambda(\varkappa)$, das dann gleich Null ist, kann aber auch für ein solches $\varkappa$ in der folgenden Formel (4) $v_\varkappa$ und $\omega_\varkappa$ auftreten, da die entsprechenden Glieder wegen des Faktors $\bar{\mu}_\lambda(\varkappa)$ verschwinden. Man setze etwa $v_\varkappa = \omega_\varkappa = 0$, wenn $(\varkappa, \lambda) > 1$ ist.

Da nun die Anzahl der Punkte des Systems $\mathfrak{R}$, deren Nummer durch die zu λ teilerfremde Zahl $\varkappa$ teilbar ist, also

$$[\mathfrak{R} : \varkappa] = \left[\frac{\alpha + \varkappa - v_\varkappa}{\varkappa}\right]\left[\frac{\beta + \varkappa - \omega_\varkappa}{\varkappa}\right]$$

gefunden ist, so erhält man nach (1), indem man mit Hilfe von $\bar{\mu}_\lambda(\varkappa)$ die Glieder zusammenfaßt, die dort dieselbe Zahl $\lambda^{(\nu)}$ in verschiedenen Summen haben,

(4) $$\Gamma = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \bar{\mu}_\lambda(\varkappa)\left[\frac{\alpha + \varkappa - v_\varkappa}{\varkappa}\right]\left[\frac{\beta + \varkappa - \omega_\varkappa}{\varkappa}\right]$$

als die Anzahl der Geraden, die den Punkt $\varrho:\lambda\,|\,\sigma:\lambda$ *mit den Gitterpunkten verbinden, deren Abszissen* $1, 2, \cdots, \alpha$, *deren Ordinaten* $1, 2, \cdots, \beta$ *sind. Dabei ist* $0 < \varrho \gtreqless \lambda$, $0 < \sigma \gtreqless \lambda$, ϱ *und* σ *nicht beide* $= \lambda$; $v_\varkappa$ *und* $\omega_\varkappa$ *sind die kleinsten positiven Lösungen der Kongruenzen* $v\lambda \equiv \varrho$, $\omega\lambda \equiv \sigma \pmod{\varkappa}$.

Die Summe besteht nur aus einer endlichen Zahl von nicht verschwindenden Gliedern, wenn α und β endlich sind, da dann, wenn $\varkappa$ eine gewisse Grenze überschreitet, mindestens eine der Zahlen $v_\varkappa$ und $\omega_\varkappa$ immer größer als α bezw. β ausfällt. Nur für $\lambda = 1$, wo dann $\bar{\mu}_\lambda(\varkappa) = \mu(\varkappa)$ ist, sind unendlich viele Glieder von Null verschieden, weil dann immer $v_\varkappa = \omega_\varkappa = 1$ ist. In diesem Falle wird die Formel unbrauchbar, weil die Reihe nicht konvergiert. Den besonderen Fall $\lambda = 1$ muß man deshalb in etwas abweichender Weise behandeln, wie das bei Kronecker a. a. O. geschehen ist.

Setzt man in (4) $\sigma = \lambda$, so wird $\omega_\varkappa = 1$ für jedes zu λ teilerfremde $\varkappa$, und wenn man $\beta = 1$ annimmt, so wird der zweite Faktor rechts beständig gleich 1, so daß man, da die linke Seite gleich 1 ist, weil nur der Punkt $\varrho'\,|\,0$ eine Nummer $< \lambda$ hat, die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \bar{\mu}_\lambda(\varkappa) \left[\frac{\alpha + \varkappa - v_\varkappa}{\varkappa}\right] = 1$$

erhält, eine Verallgemeinerung einer Formel von Lipschitz über die Funktion $\mu(\varkappa)$.

§ 7.

Über die Funktion $\bar{\mu}_\lambda(\varkappa)$.

Die Aufgabe, die im vorigen Paragraphen gelöst worden ist, war so eingekleidet, daß sie auch abgesehen von der Bezeichnung der Punkte des Systems $\mathfrak{R}$ mit Nummern eine geometrische Bedeutung hatte. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Koordinaten des Punktes von $\mathfrak{R}$, der dem Nullpunkt am nächsten war, kleiner als λ waren. Die Aufgabe wurde auf die Bestimmung der Anzahl solcher Punkte von $\mathfrak{R}$ zurückgeführt, deren Nummer $< \lambda$ war. Diese Bestimmung ist aber von der Voraussetzung über die Lage des Systems $\mathfrak{R}$ zum Nullpunkt unabhängig; es fällt bei anderer Lage nur die Deutung der gefundenen Zahl als eine Anzahl von Geraden weg. Sieht man also hiervon ab, so kann die vorige Überlegung z. B. auf einen solchen Teil von $\mathfrak{R}$ angewandt werden, der nur aus einem Punkt mit der Nummer τ besteht. Versteht man unter ε die Zahl 0 oder 1, je nachdem $\tau > \lambda$ oder $< \lambda$ ist, so erhält man aus (4) von § 6

$$\sum_{\delta/\tau} \bar{\mu}_\lambda(\delta) = \varepsilon, \tag{1}$$

wo δ alle ganzzahligen Teiler von τ durchläuft, da nur für eine Zahl x, die ein Teiler von τ ist, die Anzahl, mit der $\bar{\mu}_\lambda(x)$ zu multiplizieren ist, von Null verschieden und zwar gleich 1 ist. Diese Anzahl, d. h. das Produkt der beiden Klammergrößen, war ja gleich der Anzahl der Nummern von $\mathfrak{N}$, die durch x teilbar sind. *Die Fundamentaleigenschaft der Funktion $\mu(x)$ überträgt sich also auf die verallgemeinerte Funktion.* Dasselbe gilt übrigens, da bei dieser Betrachtung der Umstand, daß die Nummern von $\mathfrak{N}$ alle relativ prim zu λ sind, nicht in Frage kommt, von der Funktion $\mu_\lambda(x)$.

Man kann offenbar genau nach dem Muster der Funktionen $\mu_\lambda(x)$ und $\bar{\mu}_\lambda(x)$ eine allgemeinere Funktion derselben Art definieren, indem man nach Annahme beliebiger ganzer positiver Zahlen festsetzt, daß zwei ganze Zahlen auch dann noch als relativ prim gelten sollen, wenn eine der angenommenen Zahlen ihr größter gemeinsamer Teiler ist, und aus den übrigen ganzen positiven Zahlen die „Pseudoprimzahlen" durch die Bedingung aussondert, daß keine von ihnen durch eine andere teilbar ist. Auch von dieser allgemeinen Funktion gilt die Gleichung (1), wo $\varepsilon = 1$ ist, wenn die Zahl τ, deren ganzzahlige Teiler δ durchläuft, durch keine Pseudoprimzahl teilbar ist, während anderenfalls $\varepsilon = 0$ ist. Einer solchen Funktion könnte man sich z. B. bei einer Formel bedienen, die Herr Zsigmondy in einer Arbeit: „Zur Verallgemeinerung der Funktion $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie"*) angegeben hat, aber da von den dort verwendeten Pseudoprimzahlen n_i vorausgesetzt wird, daß je zwei von ihnen relativ prim zueinander sind, so würde die Definition dieser Funktion von der des Zeichens $\mu(x)$ nur durch den Umstand abweichen, daß die Zahlen n_i keine eigentlichen Primzahlen sind, insbesondere würde diese Funktion auch nur die Werte ± 1 und 0 annehmen.

§ 8.

Reduktion der Gitterpunkt-Nummern in bezug auf einen ganzzahligen Modul.

Wenn man die Nummern der Gitterpunkte der Kroneckerschen Ebene nach einer positiven ganzen Zahl α als Modul auf ihren kleinsten nicht negativen Rest reduziert, so erhält man eine Ebene, deren Gitterpunkte alle mit Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots, \alpha - 1$ bezeichnet sind. Die Zahl 0 kommt an den Punkten vor, deren Koordinaten beide durch α teilbar sind, also an den Ecken eines Netzes von Quadraten mit der Seitenlänge α, sonst nirgends. Die Punkte, die auf der unteren und auf

*) Journal f. Math. Bd. 111, S. 344.

der linken Seite eines solchen Quadrats liegen, sollen mit zu dem Innern des Quadrates gerechnet werden, von den Ecken nur der Schnittpunkt dieser beiden Seiten, der „Anfangspunkt" des Quadrates, so daß zu dem Quadrat α^2 Zahlen gehören. Ein solches Quadrat möge ein „Restquadrat (mod α)" heißen.

Die Gitterpunkte, deren Nummer mit α den größten gemeinsamen Teiler δ hat, befinden sich an bestimmten Stellen in dem Quadrat, ihre Anzahl ist $\varphi_2(\alpha:\delta)$ (Vergl. die Gleichung (1) von § 4). Sie sind mit gewissen $\varphi(\alpha:\delta)$ Zahlen bezeichnet, die aber in einem Restquadrat nicht alle verschieden sind (es ist für $\varkappa > 1$ immer $\varphi(\varkappa) < \varphi_2(\varkappa)$) und in demselben Restquadrat auch nicht alle vorzukommen brauchen. Daraus folgt, daß *die Anzahl der verschiedenen Restquadrate* (mod α) *höchstens gleich*

$$\chi(\alpha) = \prod_{\delta} \varphi(\delta)^{\varphi_2(\delta)}$$

sein kann, wo δ die ganzzahligen Teiler von α durchläuft.

Es erfordert selbst für $\alpha = 3$, wo $\chi(\alpha) = 256$ ist, eine ziemlich langwierige Rechnung, um ein vorgegebenes Restquadrat nachzuweisen. So habe ich z. B. die Koordinaten $\xi \,|\, \eta$ des Anfangspunktes eines Restquadrats (mod 3), dessen von Null verschiedene Zahlen alle gleich 2 sind, durch Auflösen der Kongruenzen

$$\xi \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3\cdot 5), \quad \xi + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 11\cdot 17\cdot 23), \quad \xi + 2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 8\cdot 29),$$
$$\eta \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3\cdot 11), \quad \eta + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 5\cdot 17\cdot 29), \quad \eta + 2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 8\cdot 23)$$

gefunden. Die kleinsten positiven Lösungen dieser Kongruenzen sind

$$\xi = 11918070, \quad \eta = 7865814.$$

Dieses Quadrat hat in der nichtreduzierten Ebene die Gestalt:

$$\begin{matrix} 2 & 23 & 8 \\ 5 & 17 & 29 \\ 6 & 11 & 2, \end{matrix}$$

da außer den beabsichtigten gemeinsamen Teilern keine anderen vorkommen.

Um zu beweisen, daß ein beliebig vorgeschriebenes Restquadrat in bezug auf einen Primzahlmodul π existiert, kann man folgendermaßen verfahren. Die Primzahlen, die kleiner als π sind, seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_\iota, \cdots, \varrho_\nu$. Die Anfangskoordinaten $\xi \,|\, \eta$ des Restquadrates mögen nun so bestimmt werden, daß beide durch eine so hohe Potenz von ϱ_ι teilbar sind, daß für die Zahlen $\xi + \lambda$ und $\eta + \mu$ ($\lambda, \mu = 0, 1, 2, \cdots, \pi - 1$) feststeht, durch welche Potenz von ϱ_ι jede von ihnen teilbar ist. Ist etwa ξ durch $\varrho_\iota^{\varkappa_\iota}$ teilbar, so sind $\xi + \varrho_\iota$, $\xi + 2\varrho_\iota$ etc. nur durch ϱ_ι, $\xi + \varrho_\iota^2$, $\xi + 2\varrho_\iota^2$ etc. nur durch ϱ_ι^2 usw., $\xi + \varrho_\iota^{\varkappa_\iota}$ durch $\varrho_\iota^{\varkappa_\iota}$, vielleicht aber auch durch $\varrho_\iota^{\varkappa_\iota+1}$ teilbar. Es muß also $\varkappa_\iota$ so groß gewählt werden, daß $\pi < \varrho_\iota^{\varkappa_\iota}$, also $\varkappa_\iota > \frac{\log \pi}{\log \varrho_\iota}$ ist. Man setze deshalb $\varkappa_\iota = \left[\frac{\log \pi}{\log \varrho_\iota}\right] + 1$ und verlange von ξ und η, daß sie durch $\prod_{\iota=1}^{\nu} \varrho_\iota^{\varkappa_\iota}$ teilbar seien. Ferner sollen beide durch π teilbar sein.

Nun möge die Nummer des Punktes $\xi + \lambda \,|\, \eta + \mu$ als Rest $(\operatorname{mod} \pi)$ die Zahl $\tau_{\lambda,\mu}$ haben. Die Zahl $\xi + \lambda$ sei durch das Produkt $\varrho^{(\lambda)}$, $\eta + \mu$ durch das Produkt $\varrho^{(\mu)}$ von Potenzen der Primzahlen ϱ_ι teilbar, wo $\varrho^{(\lambda)}$ und $\varrho^{(\mu)}$ in ganz bestimmter Weise aus diesen Primzahlpotenzen zusammengesetzt sind; z. B. ist $\varrho^{(0)} = \prod_{\iota=1}^{\nu} \varrho_\iota^{\varkappa_\iota}$, $\varrho^{(1)} = 1$. Dann bestimme man eine Primzahl $\sigma_{\lambda,\mu} \gtreqless \pi$ so, daß

$$(\varrho^{(\lambda)}, \varrho^{(\mu)}) \cdot \sigma_{\lambda,\mu} \equiv \tau_{\lambda,\mu} \ (\text{mod. } \pi)$$

ist, was nach dem Dirichletschen Satz von der arithmetischen Progression (der hier übrigens nur der Kürze wegen vorausgesetzt wird) immer geschehen kann, und lasse ξ und η die Kongruenzen

$$\xi + \lambda \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \varrho^{(\lambda)} \sigma_{\lambda,0} \sigma_{\lambda,1} \cdots \sigma_{\lambda,\pi-1}), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots, \pi - 1)$$

$$\eta + \mu \equiv \varrho^{(\mu)} \sigma_{0,\mu} \sigma_{1,\mu} \cdots \sigma_{\pi-1,\mu} \ (\operatorname{mod} \varrho^{(\mu)} \sigma_{0,\mu}^2 \sigma_{1,\mu}^2 \cdots \sigma_{\pi-1,\mu}^2) \ (\mu = 0, 1, 2, \cdots, \pi - 1)$$

erfüllen. Wenn $\sigma_{\lambda,\mu} \equiv 1 \ (\operatorname{mod} \pi)$ ist, kann man $\sigma_{\lambda,\mu} = 1$ setzen, wenn mehrere $\sigma_{\lambda,\mu}$ denselben von 1 verschiedenen Rest haben, so wähle man diese alle verschieden voneinander, $\sigma_{0,0}$ ist gleich π zu setzen. Das zweite System von Kongruenzen ist deshalb abweichend von dem ersten angenommen, damit $(\xi + \lambda, \eta + \mu)$ sicher nur durch die erste Potenz von $\sigma_{\lambda,\mu}$ teilbar ist.

Es ist leicht ersichtlich, daß beide Systeme lösbar sind. Die Lösungen seien

$$\xi = \xi_0 + \gamma' \sigma', \quad \eta = \eta_0 + \gamma'' \sigma'',$$

wo σ' und σ'' die resultierenden Moduln der beiden Systeme sind, die also nur aus den Primzahlen ϱ_ι und $\sigma_{\lambda\mu}$ zusammengesetzt sind, während γ' und γ'' willkürliche ganze Zahlen bedeuten. Nun kann es für $\gamma' = 0$, $\gamma'' = 0$ vorkommen, daß eine Zahl $\xi_0 + \lambda$ und eine Zahl $\eta_0 + \mu$ nicht bloß den beabsichtigten gemeinsamen Teiler $(\varrho^{(\lambda)}, \varrho^{(\mu)}) \cdot \sigma_{\lambda,\mu}$ haben, sondern noch einen anderen, der bewirken könnte, daß die Nummer von $\xi + \lambda \,|\, \eta + \mu$ nicht den Rest $\tau_{\lambda,\mu}$ $(\operatorname{mod} \pi)$ hätte. Ein solcher Teiler kann aber weder durch eine Primzahl ϱ_ι, noch durch eine Primzahl $\sigma_{\lambda,\mu}$ teilbar sein. Bezeichnet man also das Produkt aller in den π Zahlen $\xi_0 + \lambda$ außer den

Primzahlen ϱ_t und $\sigma_{\lambda,\mu}$ noch auftretenden verschiedenen Primzahlen mit ω, so kann man γ'' noch so bestimmen, daß

$$\eta = \eta_0 + \gamma''\sigma'' \equiv 1 \pmod{\omega}$$

ist, so daß, da jede in ω enthaltene Primzahl $> \pi$ ist, keine der Zahlen $\eta + \mu$ durch eine dieser Primzahlen teilbar sein kann. Dann ist man sicher, daß $(\xi_0 + \lambda, \eta + \mu) = (\varrho^{(\lambda)}, \varrho^{(\mu)}) \cdot \sigma_{\lambda,\mu} \equiv \tau_{\lambda,\mu} \pmod{\pi}$ ist. Aus dem Beweise ergibt sich auch, daß es unendlich viele Restquadrate der vorgeschriebenen Art gibt.

Ich habe den Beweis für die Existenz unendlich vieler Restquadrate von jeder möglichen Beschaffenheit nur für einen Primzahlmodul geführt, weil das genügt, um den folgenden Lehrsatz daraus zu entnehmen:

In der Kroneckerschen Ebene gibt es unendlich viele beliebig große einfach zusammenhängende Gebiete, in denen die Nummer 1 *und,* wie daraus durch eine Ähnlichkeitstransformation folgt, *auch unendlich viele derartige Gebiete, in denen irgend eine gegebene Nummer t nicht vorkommt.*

§ 9.

Lineare Transformation der Kroneckerschen Ebene.

Die bis jetzt behandelten Untersuchungen über die Kroneckersche Ebene beruhten unmittelbar auf ihrer Definition und auf dem Satz, daß das System der mit der Nummer t bezeichneten Punkte dem System der mit 1 bezeichneten Punkte ähnlich ist. Sätze von ganz anderer Art als die bisherigen findet man dadurch, daß man die *Gruppe der linearen homogenen ganzzahligen Substitutionen mit der Determinante* ± 1 anwendet. Eine solche Substitution

$$x' = \alpha x + \beta y,$$
$$y' = \gamma x + \delta y$$

oder $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ soll kurz „eine Substitution" genannt werden und zwar erster Art, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, zweiter Art, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ ist. Die entsprechenden Transformationen der Ebene mögen dementsprechend Bewegungen erster oder zweiter Art heißen.

Der Nullpunkt und die unendlich ferne Gerade bleiben bei jeder Bewegung ungeändert, die übrigen Punkte und Geraden gehen im allgemeinen in andere Punkte und Geraden über. Nur bei den Substitutionen erster Art, bei denen $\alpha + \delta = 2$ ist, geht jeder Punkt der Geraden $(\alpha - 1)x + \beta y = 0$ durch den Nullpunkt in sich selbst über, und die Punkte der dieser Geraden parallelen Geraden bleiben auf ihren Geraden. Bei den Substitutionen erster Art, für die $\alpha + \delta = -2$ ist, geht jeder Punkt der Geraden $(\alpha+1)x+\beta y=0$ in sein Spiegelbild in bezug auf den Nullpunkt oder in den „entgegengesetzten Punkt“, jede mit dieser Geraden parallele Gerade in ihr Spiegelbild in bezug auf den Nullpunkt oder in die „entgegengesetzte Gerade“ über. Von den Substitutionen erster Art sind nur die identische Substitution und die Substitution $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ involutorisch, d. h. wenn durch sie $x|y$ in $x'|y'$ übergeht, geht zugleich $x'|y'$ in $x|y$ über.

Unter den Substitutionen zweiter Art sind die ausgezeichnet, bei denen $\alpha+\delta=0$ ist; bei ihnen gehen wieder die Punkte der Geraden $(\alpha-1)x+\beta y=0$ in sich selbst über, aber eine zu ihr parallele Gerade in die entgegengesetzte. Jede derartige Transformation ist involutorisch, die Verbindungslinien entsprechender Punkte haben den konstanten Richtungskoeffizienten $-(\alpha+1):\beta$, die Mitte der Verbindungsstrecke liegt auf der festbleibenden Geraden.

Da das Doppelverhältnis von vier Punkten und die unendlich ferne Gerade unverändert bleiben, so bleibt auch die Reihenfolge dreier in gerader Linie liegender Punkte bei jeder Bewegung ungeändert. Aber während bei einer Bewegung erster Art der vom Nullpunkt aus beurteilte Richtungssinn der Verbindungsstrecke zweier Punkte ungeändert bleibt, kehrt er sich bei einer Bewegung zweiter Art um, d. h. wenn man eine endliche Strecke von dem als Anfangspunkt betrachteten Punkt bis zum Endpunkt durchläuft und dabei den Nullpunkt etwa zur linken Hand hat, so ist das Gleiche oder das Gegenteil der Fall bei der durch eine Bewegung abgeleiten Strecke, je nachdem die Bewegung erster oder zweiter Art ist. Das Entsprechende gilt von dem Sinn der Drehung, durch die eine erste Gerade in eine zweite, ohne dabei den Nullpunkt zu treffen, übergeführt wird.

Unendlich benachbarte Punkte gehen bei jeder Bewegung wieder in unendlich benachbarte Punkte über.

§ 10.

Maßbestimmung für die Punktgebilde der Kroneckerschen Ebene.

Es ist bekannt, daß der größte gemeinsame ganzzahlige Teiler der Koordinaten eines Gitterpunktes unverändert bleibt, wenn man ihn durch eine Substitution in einen anderen Punkt transformiert, und das bleibt auch, wie man sofort sieht, gültig, wenn der Begriff des Teilers und des größten gemeinsamen Teilers in der in § 2 angegebenen Weise verallgemeinert wird. Also gilt der Satz:

Die Nummer eines Punktes ist eine Invariante bei jeder Bewegung der Kroneckerschen Ebene.

Ein Zusatz besteht darin, daß bei einer Bewegung das zu einer Zahl λ gehörige Gitter wieder in das zu λ gehörige Gitter übergeht.

Als geometrische Bedeutung einer Nummer $a = \alpha : \lambda$ kann die Tatsache betrachtet werden, daß auf der Verbindungslinie des Nullpunktes mit dem mit a bezeichneten Punkte α Gitterpunkte des zu λ gehörigen Gitters liegen, wenn der Punkt selbst mitgezählt wird, aber nicht der Nullpunkt.

Zwei Punkte, deren Nummern $a = \alpha : \lambda$, $b = \beta : \lambda$ auf einen gemeinsamen Nenner gebracht seien, der aber nicht ihr Generalnenner zu sein braucht, haben eine Invariante in der durch λ dividierten Anzahl der Gitterpunkte des zu λ gehörigen Gitters, die auf ihrer Verbindungslinie zwischen ihnen liegen, d. h. so, daß sie durch die beiden Punkte von dem unendlich fernen Punkt der Verbindungslinie getrennt werden. Dabei wird der eine von beiden Punkten mitgezählt. Diese Invariante möge als die *Entfernung 1. Ranges* der beiden Punkte bezeichnet werden. Sie ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Koordinatendifferenzen der beiden Punkte.

Drei Punkte mit den Nummern $a = \alpha : \lambda$, $b = \beta : \lambda$, $c = \gamma : \lambda$, wo λ wieder nicht gerade der Generalnenner zu sein braucht, haben eine Invariante in der durch λ^2 dividierten Anzahl der Gitterpunkte des zu λ gehörigen Gitters, die innerhalb des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks liegen, vermehrt um die halbe Anzahl der auf dem Umfang des Dreieckes außer den Eckpunkten etwa noch liegenden derartigen Punkte und um $\frac{1}{2}$, da auch einer der Eckpunkte noch zum Umfang gerechnet wird. Diese Invariante möge der *Punktinhalt**) des durch die drei Punkte bestimmten Dreiecks genannt werden. Der Punktinhalt kann aus den Koordinaten der drei Punkte ebenso berechnet werden, wie der positiv genommene Flächeninhalt des Dreiecks, dem er gleich ist.

Zwei Punkte $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$ haben außer der Entfernung 1. Ranges noch eine fundamentale Invariante, die als ihre *Entfernung 2. Ranges* bezeichnet werden soll. Sie ist gleich dem doppelten Punktinhalt des Dreiecks, dessen Ecken der Nullpunkt und die beiden Punkte sind, also gleich $| x_1 y_2 - y_1 x_2 |$. Daß auch diese Invariante eine Entfernung genannt wird, werde durch folgende Überlegungen gerechtfertigt. Die Entfernung 1. Ranges ist zwar bei den Bewegungen der Ebene invariant, und sie hat auch die Eigenschaft der Addierbarkeit, d. h. die Entfernung 1. Ranges der Punkte P und Q vermehrt um die Entfernung 1. Ranges der Punkte Q und R ist gleich der Entfernung 1. Ranges der Punkte P und R, wenn P, Q, R

*) Vergl. meine Arbeit: „Über den Dreiecksinhalt und sein duales Analogon", Journal f. Math. Bd. 114, S. 1.

in dieser Reihenfolge auf derselben Geraden liegen, aber sie hat nicht die Eigenschaft der Stetigkeit, d. h. zwei Punktpaare P, Q und P', Q', von denen P und P', Q und Q' unendlich nahe aneinander liegen, haben Entfernungen 1. Ranges, die sich um beliebig viel voneinander unterscheiden können. Alle drei Eigenschaften hat aber die Entfernung 2. Ranges. Allerdings wird die Entfernung 2. Ranges Null, wenn die beiden Punkte mit dem Nullpunkt in gerader Linie liegen, aber das kann bei der ausgezeichneten Stellung des Nullpunktes in der Kroneckerschen Ebene ebensowenig Anstoß erregen wie der Umstand, daß der Euklidische Winkel zweier Geraden, die sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden, gleich Null ist. Auch die Analogie mit der Maßbestimmung auf der Geraden führt auf den Begriff der Entfernung 2. Ranges. Auf der Geraden gibt es zu den bisher definierten vier Invarianten zwei Analoga (die Substitutionen reduzieren sich in diesem Falle auf $x' = \pm x$), nämlich die Nummer (absoluter Betrag der Abszisse) eines Punktes und die Entfernung (1. Ranges) zweier Punkte. Diese können als Analoga zu der Nummer eines Punktes und der Entfernung zweier Punkte der Ebene, aber auch als Analoga zu der Entfernung zweier Punkte und dem Punktinhalt des von drei Punkten gebildeten Dreiecks angesehen werden. Bei der zweiten Auffassung ist nun zu beachten, daß die Nummer eines Punktes der Geraden zugleich die Entfernung (1. Ranges) des Punktes vom Nullpunkt ist; ebenso ist die Entfernung 2. Ranges zweier Punkte der Ebene zugleich der doppelte Punktinhalt des durch die beiden Punkte und den Nullpunkt bestimmten Dreiecks.

Die Definitionen der vier Invarianten behalten auch dann ihre Bedeutung, wenn man statt des rechtwinkligen Koordinatensystems ein projektiv verallgemeinertes Koordinatengitter zugrunde legt, das von zwei Strahlenbüscheln mit im Endlichen liegenden Mittelpunkten gebildet wird, deren Strahlen in bekannter Weise ohne Zuhilfenahme einer Längeneinheit den rationalen Zahlen zugeordnet sind, und deren mit ∞ bezeichneter Strahl die Verbindungslinie der Mittelpunkte ist. An die Stelle des Nullpunktes tritt dann der Schnittpunkt der beiden mit Null bezeichneten Strahlen, an die Stelle der unendlich fernen Geraden tritt die Verbindungslinie der Mittelpunkte. Im Interesse der Anschaulichkeit und der bequemen Herstellung etwa zu zeichnender Figuren behalte ich jedoch die ursprüngliche Form der Kroneckerschen Ebene bei.

Ich will noch bemerken, daß ich, weil die Invariante eines Punktes, nämlich seine Nummer, unbedingt positiv genommen werden muß, auch die Invarianten von zwei und drei Punkten als absolute Zahlen definiert habe; man könnte diesen Ausdrücken aber auch ein Vorzeichen beilegen, das dann bei den Substitutionen 2. Art in das entgegengesetzte verwandelt würde.

§ 11.

Die Geraden der Kroneckerschen Ebene.

Kronecker hat schon darauf hingewiesen, daß die Gitterpunkte, die auf einem einer Koordinatenachse parallelen Gitterstrahl liegen, als Nummern die ganzzahligen Teiler der Koordinate tragen, durch die der Strahl bestimmt ist. Dasselbe gilt bei der Henselschen Erweiterung des Teilerbegriffes nicht nur für die Gitterpunkte, sondern für alle rationalen Punkte der Geraden und auch dann, wenn die Gerade durch keinen Gitterpunkt geht, denn es ist z. B. die Nummer des Punktes $a|y$ einer durch den Punkt $a|0$ der positiven x-Achse gehenden Geraden gleich (a, y), also ein Teiler von a. Die auf einer solchen Geraden liegenden Nummern wiederholen sich periodisch, und zwar haben zwei Punkte mit derselben Entfernung 1. Ranges a (das ist in diesem Falle zugleich die Euklidische Entfernung) dieselbe Nummer, denn es ist $(a, y + \varkappa a) = (a, y)$. Der Teiler a wiederholt sich immer erst nach einer ganzen Periode, ein Teiler $d < a$ im allgemeinen schon früher. Die Nummern, die von einer Nummer a an gerechnet in Entfernungen 1. Ranges d aufeinander folgen, sind alle durch d teilbar.

Die größte Nummer, die auf einer beliebigen Geraden vorkommt, möge als der *Index* der Geraden bezeichnet werden; die Gerade $x = a$ hat also den Index a.

Die Geraden des Punktes $a|0$, die parallel zu den Geraden $x = \mu y$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ sind, zu denen also auch $x = a$ gehört, tragen die Punkte, deren Koordinaten $a + \mu y | y$ sind. Diese Punkte haben die Nummern (a, y), also dieselben Nummern und in derselben Reihenfolge wie die Punkte von $x = a$, so daß die zu einem bestimmten Wert von y gehörige Nummer von μ unabhängig ist. Diese Geraden mögen die Geraden *erster Ordnung* des Punktes $a|0$ oder in bezug auf $a|0$ heißen; sie haben alle den Index a. Wenn $a = \alpha$ ganzzahlig ist, so sind diese Geraden diejenigen, die durch α und die sämtlichen Gitterpunkte der Geraden $y = 1$ gehen. Allgemein werden die Geraden des Punktes $a|0$ mit dem Richtungskoeffizienten $\nu : \mu$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \nu = 0, 1, 2, \cdots; \mu$ zu ν relativ prim) die Geraden ν^{ter} Ordnung des Punktes $a|0$ genannt. Auf einer solchen Geraden liegt als Schnittpunkt mit der durch $0|y$ gehenden Parallelen zur x-Achse der Punkt $a + \frac{\mu}{\nu} y | y$. Setzt man $y = t\nu$ und $x = \varkappa d$, $y = \lambda d$, wo $(\varkappa, \lambda) = 1$, also d die Nummer des Punktes $x|y$ sein soll, und eliminiert t aus den Gleichungen

$$\varkappa d = a + t\mu,$$
$$\lambda d = t\nu,$$

so erhält man

$$d(\varkappa\nu - \lambda\mu) = a\nu.$$

Hieraus folgt, daß auf jeder Geraden, die durch $a|0$ geht und in bezug auf diesen Punkt von der ν^{ten} Ordnung ist, nur solche Nummern vorkommen, die Teiler von $a\nu$ sind. Die größte Nummer auf einer solchen Geraden, also der Index der Geraden, ist $a\nu$. Die Punkte, die mit dieser Nummer bezeichnet sind, ergeben sich, nachdem $\varkappa$ und λ aus

$$\varkappa\nu - \lambda\mu = 1$$

bestimmt sind, als die Punkte $\varkappa a\nu | \lambda a\nu$.

Ist δ' die ganze Zahl $a\nu : d$, so erhält man als die Punkte, die die Nummer d haben, wenn man von den Lösungen der Gleichung

$$\varkappa\nu - \lambda\mu = \delta'$$

die, für die $(\varkappa, \lambda) = 1$ ist, auswählt, die Punkte $\varkappa d | \lambda d$.

Für ein festes ν gibt es $\varphi(\nu)$ Werte von μ, die zu einem gegebenen d verschiedene Systeme von Werten λ geben. Diese Werte von μ nehme man positiv und kleiner als ν an. Die zugehörigen Geraden liegen dann zwischen zwei aufeinander folgenden Strahlen 1. Ordnung des Punktes $a|0$, und dieses System von $\varphi(\nu)$ Geraden wiederholt sich in derselben Reihenfolge zwischen je zwei aufeinander folgenden Strahlen 1. Ordnung dieses Punktes, so daß je zwei Geraden mit demselben ν und in bezug auf ν kongruenten Werten von μ gleiche Nummern tragen, die auch von dem Punkte $a|0$ an in derselben Reihenfolge aufeinander folgen.

Der reziproke Wert des Index einer Geraden möge ihre *Nummer* heißen. Diese Benennung ist deshalb geeignet, weil die Nummer einer Geraden das duale Analogon zu der Nummer eines Punktes ist. Denn die Punkte, in denen die durch den Punkt $a|0$ gehende Gerade mit dem Richtungskoeffizienten $\nu : \mu$ die Koordinatenachsen schneidet, sind $a|0$ und $0|-\frac{a\nu}{\mu}$. Der größte gemeinsame (positive) Teiler der Plückerschen Koordinaten $X|Y$ der Geraden ist also

$$(X, Y) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{\mu}{a\nu}\right) = \frac{1}{a\nu},$$

also gleich dem reziproken Wert des Index. Der reziproke Wert der Nummer eines Punktes möge dementsprechend auch der *Index* des Punktes genannt werden.

Der Index einer Geraden bleibt bei den Bewegungen der Kroneckerschen Ebene invariant. Auch die Ordnung einer Geraden in bezug auf einen auf ihr liegenden Punkt, die gleich dem Index der Geraden dividiert durch die Nummer des Punktes ist, ist eine invariante ganze Zahl. In bezug auf alle Punkte, deren Nummer gleich dem Index der Geraden ist, auf der die Punkte liegen, ist die Gerade von der ersten Ordnung. Von einem solchen Punkte an tragen alle Geraden mit demselben Index ihre Nummern in derselben Reihenfolge.

Alle Gitterstrahlen, und nur diese, haben einen ganzzahligen Index; die Geraden des Nullpunktes haben den Index Null, die Nummer ∞.

Die Ordnung eines Gitterstrahles in bezug auf einen auf ihm liegenden Gitterpunkt hat eine besonders anschauliche Bedeutung. Sie gibt die Anzahl der zur Verbindungslinie des Gitterpunktes mit dem Nullpunkt parallelen Gitterstrahlen an, die die Gerade zwischen zwei auf ihr liegenden aufeinander folgenden Gitterpunkten (deren Entfernung 1. Ranges gleich 1 ist) schneiden.

§ 12.

Maßbestimmungen für die Strahlengebilde.

Nachdem die der Nummer eines Punktes entsprechende Invariante einer einzelnen Geraden eingeführt ist, sind nun auch die fundamentalen Invarianten von zwei und drei Geraden leicht vermittels dualer Übertragung aufzustellen.

Unter dem *Winkel 1. Ranges* zweier Geraden p und q mit den Nummern $a = \frac{\alpha}{\lambda}$, $b = \frac{\beta}{\lambda}$ werde die durch λ dividierte Anzahl von Geraden verstanden, die durch den Schnittpunkt von p und q — den Scheitelpunkt des Winkels — gehen und zwischen den Schenkeln p und q liegen, und deren Nummern, wenn sie auf den gemeinsamen Nenner λ gebracht werden, ganzzahlige Zähler haben. Dabei liegt eine Gerade zwischen den Schenkeln des Winkels, wenn sie durch den Scheitelpunkt geht und durch die Schenkel von der Verbindungslinie des Scheitelpunktes mit dem Nullpunkt getrennt wird. Von den Schenkeln des Winkels wird einer mitgezählt. Der Winkel 1. Ranges ist dem größten gemeinsamen Teiler der Koordinatendifferenzen der beiden Schenkel gleich. Zwei Gerade bilden immer einen endlichen Winkel 1. Ranges miteinander, wenn nicht mindestens ein Schenkel durch den Nullpunkt geht; ist das der Fall, so ist der Winkel unendlich groß. Nur wenn die Schenkel zusammenfallen, ist der Winkel 1. Ranges gleich Null.

Um den *Strahleninhalt* eines Dreiseits, der dem Punktinhalt eines Dreiecks dual entspricht, zu definieren, sind vorher die Begriffe des *Umfanges* eines Dreiseits und des *„innerhalb“* eines Dreiseits liegenden Strahles zu erörtern. Dabei wird vorausgesetzt, daß keine Seite des Dreiseits durch den Nullpunkt geht. Der Umfang eines Dreiseits wird von allen Strahlen gebildet, die durch die Schnittpunkte der Seiten gehen und zwischen den Seiten liegen. Liegt der Nullpunkt im Innern des durch die Schnittpunkte der Seiten bestimmten Dreiecks, so wird der Umfang des Dreiseits nur von solchen Strahlen gebildet, die nicht durch Punkte innerhalb des Dreiecks gehen. Wenn der Nullpunkt außerhalb des Dreiecks liegt, so gehen durch zwei Ecken zum Umfang gehörige Strahlen, die alle durch Punkte innerhalb des Dreiecks gehen, durch die dritte Ecke geht kein solcher Strahl. Ein Strahl liegt innerhalb des Dreiseits, wenn jeder seiner Punkte zwei Strahlen mit dem Umfang gemeinsam hat. So liegt z. B. die unendlich ferne Gerade nur dann innerhalb eines Dreiseits, wenn der Nullpunkt innerhalb des durch das Dreiseit bestimmten Dreiecks liegt.

Der *Strahleninhalt* eines Dreiseits, dessen Seiten die Nummern $a = \frac{\alpha}{\lambda}$, $b = \frac{\beta}{\lambda}$, $c = \frac{\gamma}{\lambda}$ haben, wird definiert als die durch λ^2 dividierte Anzahl der innerhalb des Dreiseits liegenden Geraden, deren auf den Nenner λ gebrachten Nummern einen ganzzahligen Zähler haben, vermehrt um die halbe Anzahl der außer den Seiten des Dreiseits noch zum Umfang gehörigen derartigen Geraden und um $\frac{1}{2}$. Der Strahleninhalt wird aus den Koordinaten der drei Seiten ebenso berechnet wie der Punktinhalt eines Dreiecks aus den Koordinaten der Eckpunkte.

Unter dem *Winkel 2. Ranges* zweier Geraden $X_1 \, Y_1$ und $X_2 | Y_2$, von denen keine durch den Nullpunkt geht, verstehe ich den doppelten Strahleninhalt des von den beiden Geraden und der unendlich fernen Geraden gebildeten Dreiseits, er ist also gleich $| X_1 Y_2 - Y_1 X_2 |$. Der Winkel 2. Ranges wird unendlich groß, wenn mindestens ein Schenkel durch den Nullpunkt geht, er wird Null, wenn die Schenkel parallel sind.

Transformiert man durch die Substitution

$$X = \alpha x + \beta y,$$
$$Y = \gamma x + \delta y$$

die Punkte der Ebene in die Geraden, so gehen die Invarianten von 1, 2, 3 Punkten in die entsprechenden Invarianten von 1, 2, 3 Geraden über und bleiben dabei ihrem Zahlenwert nach ungeändert. Aus dieser Transformation folgt übrigens auch am einfachsten die Existenz der innerhalb eines Dreiseits liegenden Strahlen.

Unter diesen Transformationen möge die durch die Substitution 1. Art

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

herbeigeführte besonders hervorgehoben werden, weil bei ihr die ausgezeichneten Elemente der Ebene möglichst einfach einander zugeordnet sind, nämlich so, daß jede Gerade des Nullpunktes dem auf ihr liegenden unendlich fernen Punkt entspricht. Auch kann man bei dieser Substitution das einem gegebenen Element entsprechende auf sehr einfache Weise finden. Ein Punkt P mit der Nummer a geht nämlich in die Gerade mit derselben Nummer über, die parallel zur Verbindungslinie des Nullpunktes mit P ist und links von ihr liegt, wenn man sie vom Nullpunkt aus durchläuft. Die Geraden eines Punktes gehen bei dieser Zuordnung, die nicht involutorisch ist, nicht in die Punkte der dem Punkte zugeordneten Geraden über, sondern in die Punkte der entgegengesetzten Geraden. Rückt der Punkt auf seiner Verbindungslinie mit dem Nullpunkt ins Unendliche, so daß seine Nummer zuletzt unendlich groß wird, so geht endlich die Gerade in diese Verbindungslinie über, indem sie, sich selbst parallel bleibend, sich dem Nullpunkt nähert.

Eine beliebige Figur möge mit F oder mit f bezeichnet werden, je nachdem man sie als Punkt- oder als Liniengebilde ansieht. Transformiert man dann F durch die Substitution J in f', so ist also $f' = F \cdot J$ und f' ist eine Linienfigur, die als Punktgebilde mit F' zu bezeichnen ist. Transformiert man F' durch J in f'', so ist $f'' = F \cdot J^2 = F''$ und F'' ist, da $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist, das Spiegelbild von F in bezug auf den Nullpunkt. Transformiert man weiter F'' durch J in f''', so ist $f''' = F \cdot J^3 = F \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = F'''$ und endlich geht F''' durch J wieder in $f = F$ über, da J^4 gleich der identischen Substitution ist.

Wenn man nur die Gitterpunkte und die Gitterstrahlen, d. h. die Punkte mit ganzzahliger Nummer und die Geraden mit ganzzahligem Index in Betracht ziehen will, so kann man durch eine analoge Zuordnung jedem Gitterpunkt einen Gitterstrahl zuweisen, indem man einem Gitterpunkt den Gitterstrahl entsprechen läßt, dessen Index gleich der Nummer des Gitterpunktes ist, und der parallel zur Verbindungslinie des Nullpunktes mit dem Gitterpunkt und links von ihr liegt. Diese Zuordnung ist aber geometrisch bei weitem nicht so einfach, wie die eben betrachtete.

§ 13.

Die Fundamentaleigenschaft der Kroneckerschen Ebene.

Die in den vier letzten Paragraphen erledigten Vorbereitungen erlauben es, nun die Fundamentaleigenschaft der Kroneckerschen Ebene in folgendem Satz auszusprechen:

In der Kroneckerschen Ebene ist jedes Element (Punkt oder Gerade) mit jedem anderen gleichartigen, das dieselbe Nummer hat, gleichberechtigt, wenn man als Maßbestimmungen die Entfernungen und Winkel 1. und 2. Ranges und den Punkt- und Strahleninhalt benutzt.

Hierdurch wird deutlich zum Ausdruck gebracht, wie sich die Kroneckersche Ebene von einer Cartesischen Ebene mit Euklidischer

Maßbestimmungen unterscheidet; im letzteren Falle ist jedes eigentliche Element mit jedem anderen gleichartigen eigentlichen Element gleichberechtigt.

Um den Satz durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, betrachte man ein beliebiges Dreieck. Durch die ∞^3 Bewegungen kann dieses Dreieck in ∞^3 andere Dreiecke übergeführt werden. Entsprechende Ecken und Seiten dieser Dreiecke haben dieselbe Nummer, die Entfernungen 1. und 2. Ranges, durch welche entsprechende Seiten der Dreiecke gemessen werden, sind gleich, dasselbe gilt von den Winkeln. Ferner haben alle diese Dreiecke nicht nur denselben Punktinhalt, sondern die Punkte, die im Innern der Dreiecke liegen, haben auch in allen dieselben Nummern, und jeder Punktreihe im Innern eines Dreiecks entspricht in jedem anderen Dreieck eine Punktreihe, deren Punkte in derselben Reihenfolge mit denselben Nummern bezeichnet sind. Dasselbe gilt von dem Strahleninhalte der als Dreiseite betrachteten Figuren und von den Nummern der innerhalb der Dreiseite liegenden Strahlen.

Aus dem Satz am Schlusse von § 8, der nun auch auf Gerade angewendet werden kann, wenn man den Begriff des „Gebietes" dualistisch umformt, folgt noch die bemerkenswerte Eigentümlicheit der Kroneckerschen Ebene, daß es unendlich viele beliebig „große" im Endlichen liegende „einfach zusammenhängende" Gebiete in ihr gibt, in die ein gegebenes Element durch keine Bewegung hineingelangen kann.

§ 14.

Einige Folgerungen und Zusätze.

Obgleich durch den Satz des vorigen Paragraphen ein gewisser Abschluß für diese nur die Gesamtgruppe der Bewegungen in Betracht ziehenden Anfangsgründe der Theorie der Kroneckerschen Ebene herbeigeführt ist, möge es doch erlaubt sein, noch einige weitere Einzelheiten anzugeben, z. B. einige Beziehungen der verschiedenen Invarianten zueinander. Die Beweise sind so einfach, daß sie wegbleiben können, zumal da sie nur für spezielle Lagen der Elemente zu führen wären, so daß z. B. einer der betrachteten Punkte immer auf der positiven x-Achse angenommen werden kann.

Eine beliebige Gerade g des Nullpunktes hat den Index Null; die Geraden, die zu ihr parallel sind und sich mehr und mehr von ihr entfernen, haben Indizes, die von Null an alle positiven rationalen Zahlen der Größe nach durchlaufen. Unter ihnen sind die beiden Geraden mit dem Index 1 hervorzuheben, welche die — alle mit 1 bezeichneten — Gitterpunkte tragen, die g am nächsten liegen. Auf allen diesen Parallelen hat die Entfernung 1. Ranges dasselbe Verhältnis zu der Euklidischen Entfernung, nämlich $1 : \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, wenn $\nu : \mu$ der Richtungskoeffizient von g ist.

Die Entfernung 2. Ranges ist gleich dem Index der Geraden, die durch die beiden Punkte bestimmt wird, multipliziert mit der Entfernung 1. Ranges. Das Verhältnis, nach dem eine Strecke durch einen Punkt geteilt wird, ist deshalb unabhängig davon, ob man die Entfernung 1. oder 2. Ranges oder die Euklidische Entfernung zugrunde legt.

Die Entfernung 2. Ranges zweier Punkte P und Q mit den Nummern a und b ist gleich $ab \cdot \varrho(a; b)$. Die ganzzahlige Invariante $\varrho(a; b)$ gibt die Anzahl der zur Verbindungslinie des Punktes P mit dem Nullpunkt parallelen Geraden an, deren Index durch b teilbar ist, und die die Verbindungsstrecke der beiden Punkte schneiden. Dabei ist $\varrho(a; b) = \varrho(b; a)$.

Der Index der Verbindungslinie zweier Punkte ist ein gemeinsames Vielfaches der Nummern der beiden Punkte; die Nummer der Verbindungslinie ist ein gemeinsamer Teiler der Indizes der beiden Punkte.

Was bisher von den Entfernungen und Punkten ausgesagt ist, gilt natürlich dual entsprechend von den Winkeln und Geraden.

Der doppelte Punktinhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt der Entfernungen 2. Ranges eines Eckpunktes von den beiden anderen, multipliziert mit dem Winkel 2. Ranges, dessen Scheitelpunkt der erstgenannte Eckpunkt ist. Hieraus folgt, daß von den drei Entfernungen 2. Ranges der Eckpunkte eines Dreiecks sich je zwei wie die gegenüberliegenden Winkel 2. Ranges verhalten.

Der doppelte Punktinhalt eines Dreiecks, in dessen Innern der Nullpunkt liegt, ist gleich der Summe der drei Entfernungen 2. Ranges der Eckpunkte. Dieser Satz modifiziert sich in leicht ersichtlicher Weise, wenn der Nullpunkt außerhalb des Dreiecks liegt. Da das Analoge auch vom Strahleninhalt gilt, so ist das Verhältnis zwischen der Entfernung 2. Ranges zweier Eckpunkte und dem gegenüberliegenden Winkel 2. Ranges gleich dem Verhältnis zwischen dem Punkt- und dem Strahleninhalt der aus drei Punkten und ihren Verbindungslinien bestehenden Figur.

Über den Winkel 2. Ranges möge noch bemerkt werden, daß er gleich ist dem Quotienten aus der Entfernung 1. Ranges der beiden Schnittpunkte seiner Schenkel mit einer der beiden entgegengesetzten Geraden vom Index 1, die zur Verbindungslinie seines Scheitelpunktes mit dem Nullpunkt parallel sind, und außerdem dem Quadrat der Nummer seines Scheitelpunktes. Aus dieser Bestimmung des Winkels 2. Ranges, die für die Berechnung eines gezeichnet vorliegenden Winkels oft besonders bequem ist, folgt auch unmittelbar die Addierbarkeit zweier solcher Winkel mit gemeinsamem Scheitelpunkt und einem gemeinsamen Schenkel.

Der Ort für die Punkte, die von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung 2. Ranges haben, besteht aus zwei entgegengesetzten Parallelen zu der Verbindungslinie des Punktes mit dem Nullpunkt. Bei den Bewegungen, die diesen Punkt unverändert lassen, gehen diese beiden Parallelen in sich über, und zwar jede in sich selbst, wenn die Bewegung von der ersten Art ($\alpha + \delta = 2$), die eine in die andere, wenn die Bewegung von der zweiten Art ($\alpha + \delta = 0$) ist. Ein solches Parallelenpaar ist also das Analogon eines Kreises in einer Cartesischen Ebene mit Euklidischer Maßbestimmung. Durch zwei beliebige Punkte ist ein derartiges Parallelenpaar bestimmt: es sind nämlich die durch die Punkte gehenden Parallelen zu der Verbindungslinie des in der Mitte zwischen den beiden Punkten liegenden Punktes mit dem Nullpunkt. Hat diese Verbindungslinie den Richtungskoeffizienten $\nu : \mu$, so sind z. B. die sämtlichen Bewegungen 1. Art, bei denen die beiden Punkte sich so bewegen, daß sie dieselbe Entfernung 2. Ranges von ihrem fest bleibenden Mittelpunkt behalten, die durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 - \varkappa\mu\nu & \varkappa\mu^2 \\ -\varkappa\nu^2 & 1 + \varkappa\mu\nu \end{pmatrix}$$

bestimmten, wo der Parameter $\varkappa$ eine beliebige ganze Zahl ist. Diese Substitutionen bilden, wie auch aus ihrer geometrischen Bedeutung folgt, eine Gruppe. Setzt man zwei von ihnen mit den Parametern $\varkappa$ und $\varkappa'$ zusammen, so hat die resultierende Substitution den Parameter $\varkappa + \varkappa'$. Dual entsprechend ist der Ort für alle Geraden, die mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel 2. Ranges bilden, ein Paar von entgegengesetzten Punkten.

Die Entfernung 2. Ranges eines Punktes von jedem Punkt der ihm durch die in § 13 erwähnte Substitution J zugeordneten Geraden ist gleich 1, und jeder Winkel 2. Ranges, den eine Gerade des Punktes mit der dem Punkt zugeordneten Geraden bildet, ist gleich 1.

Der Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung 1. Ranges haben, ist eine sternförmige Linie mit unendlich vielen Spitzen, wie eine solche sich z. B. aus der am Schlusse von § 5 betrachteten Figur ergibt, wenn α und β unendlich groß angenommen werden. Die „Linie" besteht natürlich nur aus diskreten Punkten, da die Verbindungsstrecken dieser Punkte nicht mit zu dem Ort gehören. Bei allen Bewegungen, die den gegebenen Punkt fest lassen, geht dieser Komplex von Punkten in sich selbst über.

§ 15.

Über die Funktion (x, y).

Zum Schluß will ich darauf hinweisen, daß sich aus den bisherigen Untersuchungen über die Kroneckersche Ebene für die Funktion (x, y) von zwei rationalen Veränderlichen die folgenden Eigenschaften ergeben haben. Die Funktion ist eine zur Gruppe der linearen homogenen ganzzahligen Substitutionen mit der Determinante ± 1 gehörige automorphe Funktion. Sie ist für einen im Endlichen liegenden rationalen Punkt $x|y$ in der durch diesen Punkt und den Nullpunkt bestimmten Richtung stetig und differentiierbar, in jeder anderen Richtung unstetig. In der ausgezeichneten Richtung hat sie nur ein Minimum, nämlich den Wert Null im Nullpunkt, in jeder anderen Richtung oszilliert sie in jedem noch so kleinen Intervall unendlich oft. Ihre Werte wiederholen sich nach gewissen für die verschiedenen Richtungen verschiedenen Intervallen periodisch, und zwar nimmt sie auf einer Geraden mit dem Index a alle Teiler der Zahl a unendlich oft als Werte an. Jeder unendlich ferne Punkt ist ein wesentlich singulärer Punkt, in dem die Funktion, je nachdem man sich dem Punkt auf einer Geraden des Nullpunktes oder auf einer dazu parallelen Geraden mit dem Index a nähert, den Wert ∞ oder einen unbestimmt bleibenden Teiler von a als Wert annimmt. Bei genauerer funktionentheoretischer Untersuchung würde es sich wohl empfehlen, die unendlich ferne Gerade durch einen unendlich fernen Punkt zu ersetzen, der dann der einzige wesentlich singuläre Punkt wäre.

Die Funktion (x, y) ist ursprünglich nur für die rationalen Punkte definiert. Wegen ihrer Stetigkeit in den rationalen Richtungen des Nullpunktes kann man den Bereich, in dem sie bestimmt ist, aber auch auf die irrationalen Punkte $x|y$ ausdehnen, für die $y : x$ einen rationalen Wert hat.

Über den größten gemeinsamen Teiler zweier Formen.

Von

JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

Wann ist der größte gemeinschaftliche Teiler zweier dem vollständigen holoiden Bereiche $[A]$ entstammenden Formen

$$F = F(x_1, x_2, \cdots, x_m), \qquad G = G(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

wieder eine wirkliche Form? Diese elementare aber fundamentale Frage finden wir bei Julius König (*Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen*, Leipzig 1903, Kap. III, § 16) in der folgenden Weise beantwortet:

Die dem vollständigen orthoiden Bereiche $[A]$ *entstammenden Formen* F *und* G *haben — vorausgesetzt, daß sie in bezug auf irgend eine Unbestimmte* x_i *regulär sind — dann und nur dann eine wirkliche Form zum gemeinsamen Teiler, wenn ihre Resultante in bezug auf* x_i *verschwindet.*

Für nicht reguläre Formen ist kein neues Kriterium nötig, denn sie lassen sich mittels linearer Transformation in reguläre überführen. Dennoch scheint mir der folgende, auch für nicht reguläre Formen richtige Satz bemerkenswert zu sein:

Die dem vollständigen orthoiden Bereiche $[A]$ *entstammenden Formen* F *und* G *haben dann und nur dann eine wirkliche Form zum gemeinsamen Teiler, wenn die in bezug auf* λ *gebildete Resultante der Formen*

$$F_\lambda = F(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2, \cdots, x_m + \lambda y_m),$$
$$G_\lambda = G(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2, \cdots, x_m + \lambda y_m)$$

verschwindet. Hier bedeuten $y_1, y_2, \cdots, y_m, \lambda$ neue Unbestimmte.

Daß diese Bedingung eine notwendige ist, folgt einfach aus dem folgenden Umstande: wenn F und G durch die wirkliche Form

$$D(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

teilbar sind, so ist

$$D_\lambda = D(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2, \cdots, x_m + \lambda y_m)$$

ein solcher gemeinsamer Teiler von F_λ und G_λ, der λ wirklich enthält.

Das Verschwinden von

$$R = \text{Res.}\begin{pmatrix} F_\lambda, & G_\lambda \\ \lambda, & 1 \end{pmatrix}$$

ist aber auch eine hinreichende Bedingung. Wenn nämlich diese Resultante verschwindet, so muß — indem wir für

$$x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, x_m, \lambda, y_m$$

der Reihe nach

$$z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, 0, z_m, 1$$

einsetzen — auch die in bezug auf z_m gebildete Resultante von

$$\bar{F} = F(z_1 + z_m y_1,\ z_2 + z_m y_2, \cdots, z_{m-1} + z_m y_{m-1},\ z_m),$$
$$\bar{G} = G(z_1 + z_m y_1,\ z_2 + z_m y_2, \cdots, z_{m-1} + z_m y_{m-1},\ z_m)$$

verschwinden. Nun sind aber $\bar{F}$ und $\bar{G}$ solche dem Bereiche

$$[\bar{A}] = \big[[A],\ y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}\big]$$

entstammende Formen von $z_1, z_2, \cdots, z_m$, welche in bezug auf z_m regulär sind. Es werden also nach dem zu Anfange zitierten Satze die Formen $\bar{F}$ und $\bar{G}$ einen solchen gemeinsamen Teiler

$$\Delta(z_1, z_2, \cdots, z_m;\ y_1, y_2, \cdots, y_{m-1})$$

haben, der wenigstens eine der Größen z enthält.

$\bar{F}$ und $\bar{G}$ entstehen aus F und G mittels der Transformation

$$x_1 = z_1 + z_m y_1,\ x_2 = z_2 + z_m y_2, \cdots, x_{m-1} = z_{m-1} + z_m y_{m-1},\ x_m = z_m,$$

mit der Determinante 1 und mit Koeffizienten, die dem Bereiche $[\bar{A}]$ entstammen. Die Umkehrung dieser Transformation führt $\bar{F}$ und $\bar{G}$ wieder in F und G über, die Form Δ aber in den größten gemeinsamen Teiler D von F und G, wo nun D wirklich wenigstens eine der Größen x enthalten wird. Dabei haben wir F und G als dem Bereiche $[\bar{A}]$ entstammend betrachtet. Der größte gemeinsame Teiler dieser Formen ist aber derselbe, ob wir $[A]$ oder $[\bar{A}]$ zugrunde legen.

Budapest, den 4. Juni 1904.

Notiz zu meiner Arbeit über Hamiltonsche Gruppen.*)

Von

ERNST WENDT in Bremen.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist, auf einige Abhandlungen der Herren Miller und d'Alessandro hinzuweisen, die mir bei Abfassung meiner Arbeit nicht bekannt waren und die ich daher nicht habe zitieren können.

Zunächst hat Herr Miller bald nach dem Erscheinen der grundlegenden Abhandlung des Herrn Dedekind**) über Hamiltonsche Gruppen auf die Wichtigkeit derjenigen besonderen Hamiltonschen Gruppen aufmerksam gemacht, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist***). Im Jahre 1898 hat er dann eine neue vollständige Herleitung†) der Dedekindschen Resultate gegeben und einige weitere Folgerungen daraus gezogen. Der einzige Fortschritt in meiner Arbeit, die durchaus keine neuen Ergebnisse bietet, ja sogar einige von Herrn Miller angeführten Sätze nicht enthält, scheint mir in der kürzeren, einheitlichen Darstellung und in der Vermeidung von ineinander geschachtelten Induktionsschlüssen zu liegen, deren sich Herr Miller bedient.

Die zweite Abhandlung des Herrn Miller war auch Herrn d'Alessandro entgangen, der im Jahre 1899 eine Arbeit††) über Hamiltonsche Gruppen veröffentlichte. In derselben hat er, um seine eigenen Worte zu gebrauchen, „den von Herrn Dedekind behandelten Gegenstand mit kleinen

*) Math. Ann. Bd. 59, S. 187.

**) Math. Ann. Bd. 48, S. 548.

***) Miller: Les groupes hamiltoniens. C. R., vol. 126, pag. 1406.

†) Miller: On the Hamilton groups. Bull. of the Am. Math. Soc., vol. 4, pag. 510.

††) D'Alessandro: Sui gruppi Hamiltoniani. Giorn. di Matematica, vol. 37, pag. 138.

Modifikationen auseinandergesetzt" und die bis dahin unbekannte Tatsache bewiesen, daß eine Hamiltonsche Gruppe der anharmonischen Gruppe von vier Elementen isomorph ist.

Zum Schluß will ich noch eine Abhandlung erwähnen, in welcher sich Herr Miller mit den Isomorphismen einer Hamiltonschen Gruppe in sich beschäftigt*).

Bremen, den 23. Dez. 1904.

*) Miller: The isomorphisms of a Hamiltonian group with itself. Bull. of the Am. Math. Soc., vol. 5, p. 292.

naturwissenschaftlichen Unterrichts erfreulicherweise zuwendet, auch einem weiteren Kreise willkommen sein. Inzwischen hat einer der Herausgeber bei der allgemeinen Diskussion, welche die in Breslau abgehaltene Naturforscherversammlung über den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Schulen letzthin veranstaltete, als Referent über den mathematischen und physikalischen Unterricht fungiert und der vorliegende Sammelband mag ebenso als eine weitere Ausführung verschiedener dort nur gestreifter Fragen gelten, wie der andere Band, der unter dem Titel: „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen" bereits vor vier Jahren im gleichen Verlage erschienen ist. Die einzelnen Teile des neuen Bandes sind ursprünglich getrennt in drei Heften ausgegeben worden und auch als solche sowie in 2 Teilen (lt. Inhaltsverzeichnis) zu beziehen, weil sich die verschiedenen Aufsätze in der Tat zum Teil an verschiedenartige Leserkreise wenden (erstes Heft: Klein, Götting; zweites Heft: Behrendsen, Bose, Riecke, Stark, Schwarzschild; drittes Heft: Schilling).

Die Thesis, welche der Verfasser im mathematischen Teile verteidigt, geht dahin, daß im Hinblick auf die allgemeinen Kulturbedürfnisse der heutigen Zeit der Funktionsbegriff in geometrischer Fassung in sehr viel höherem Maße in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts der höheren Schulen gerückt werden soll, als früher üblich war, womit von selbst eine geeignete Einführung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung in den Schulunterricht gegeben sein wird.

Der zweite Teil enthält die bei jedem Kurse gehaltenen Vorträge aus den Gebieten der Physik und Astronomie insoweit, als ihr Inhalt in näherer Beziehung zu dem physikalischen und astronomischen Unterrichte an höheren Schulen steht.

Im dritten Teil hat der Verfasser es unternommen, in leicht verständlicher Weise das ganze große Gebiet der Anwendungen der darstellenden Geometrie zur Besprechung zu bringen.

Besonders eingehend ist die Photogrammetrie behandelt, namentlich weil eine einfache Einführung in dieses Gebiet überhaupt bisher nicht existiert.

Die den Schillingschen Entwicklungen beigegebenen zahlreichen Figuren bedingten aus technischen Gründen eine etwas andere Art der Drucklegung, als bei den vorangegangenen Aufsätzen eingehalten war.

Inhaltsverzeichnis.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Fiedler, W., die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Aufl. In 3 Teilen. I. Teil: Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektiven Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [XXIV u. 431 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 10.—, geb. n. ℳ 11.—

Fisher, Dr. phil. Irving, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 1.80.

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, früher Oberlehrer an der Städt. Gewerbeschule zu Leipzig, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 3. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1905. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geb. n. ℳ 12.—

Fort, O. und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. bes. v. R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckt. Holzschn. [XVII u. 268 S.] 1904. gr. 8. geh. n. ℳ 4.—, geb. n. ℳ 4.80.

Fuhrmann, Dr. A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In zwei Teilen. Erster Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. [XII u. 206 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 3.60.

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 2.80.

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel.

II. Band. I. Teil. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren im Text. [X u. 452 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 16.—

II. — II. — Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. [266 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 14.—

Hilbert, Dr. David, o. Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 175 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 5.20, geb. ℳ 5.60.

Klein, F., und E. Riecke, neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 3.60, Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.60, geb. ℳ 5.— Beide Teile in einen Band geb. n. ℳ 8.60.

Koenigsberger, Leo, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Koenigsberger, Leo, Carl Gustav Jacob Jacobi. Rede zu der von dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9. August 1904. Mit einem Bildnis C. G. J. Jacobis. [II u. 40 S.] 4. 1904. geh. n. ℳ 1.20.

Krazer, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. [XXIV u. 509 S.] In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil: Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurt Hensel. Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 20.—, geb. n. ℳ 21.—

Lobatschefskij, N. G., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 39 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. (A. u. d. Titel: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XIX. Heft.) [XI u. 188 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 8.—

Müller, Conrad H., Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik). [92 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 2.—

Musil, Dr. Alfred, Professor an der k. k. Deutschen Technischen Hochschule in Brünn, Bau der Dampfturbinen. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. [VI u. 233 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. Eugen, o. ö. Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. Niels, Privatdozent an der Universität Kopenhagen, Inspektor des Mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

Perry, Professor **John,** Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association" in Leeds. Übersetzt von Professor August Walzel in Brünn. Mit 58 Abbildungen im Text und einem Titelbild. [VIII u. 125 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 3.80.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. geb. n. ℳ 4.80.

Reichel, Dr. Otto, Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 2.40.

Reusch, J., Oberlehrer, Planimetrische Konstruktionen in geometrischer Ausführung. Mit 104 Figuren im Text. [XIII u. 84 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 1.—

Schilling, Friedrich, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.60, geb. ℳ 5.—

Schlömilch, Dr. Oskar, und **Dr. E. Naetsch,** Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch. Mit 85 Figuren im Text. [VIII u. 372 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 8.—

Schreber, Dr. K., die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.80.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. $1^1/_2$, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an **Dr. Otto Blumenthal**, Göttingen, Friedländerweg 43.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

60. Band. 3. Heft.

Ausgegeben am 9. Mai 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Kürzeste Wege im komplexen Gebiet.

Von

E. Study in Bonn.

1.
Einleitung.

Die Methode der analytischen Fortsetzung hat in ihrer Anwendung auf den Maßbegriff zu einer ungemein fruchtbaren Erweiterung der reellen Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Geometrie, nämlich zur Ausdehnung von vielen ihrer Begriffe auf das komplexe Gebiet geführt. Namentlich wird die Lösung wichtiger Integrationsprobleme erleichtert bei Gebrauch von komplexen Veränderlichen und imaginären Transformationen. Indessen sind fast ausschließlich solche Sätze der Verallgemeinerung durch analytische Fortsetzung zugänglich, die in (analytischen) *Gleichungen* ihren Ausdruck finden: Das ganze große und wichtige Gebiet jener Erscheinungen, die durch *Ungleichungen* ausgedrückt werden, also der Kreis der Probleme über Maxima und Minima bei reellen Figuren, der Bereich der Variationsrechnung, bleibt von dem Erweiterungsprozeß unberührt. Soviel wir wissen, hat schon der für diese ganze Gattung von Problemen grundlegende Satz von der Geraden als kürzestem Weg bis jetzt keine Ausdehnung auf das komplexe Gebiet gefunden. —

Wir wollen nun nachweisen, daß bei Gebrauch einer von der analytischen Fortsetzung verschiedenen Methode auch für diese Art von Aufgaben eine sachgemäße Erweiterung gefunden werden kann. Wegen der sich darbietenden großen Fülle neuer und schwieriger Probleme werden wir uns freilich dabei auf die Vorführung von einigen wenigen grundlegenden Tatsachen und möglicherweise ziemlich willkürlich gewählten Beispielen beschränken müssen.

Die anzuwendende Methode beruht auf der Theorie der sogenannten Hermiteschen Formen, nämlich bilinearer Formen $\Sigma a_{ik} x_i \bar{x}_k$ mit konjugiert-komplexen Veränderlichen und konjugiert-komplexen Koeffizienten $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$, hauptsächlich solcher Formen von nicht-verschwindender Diskriminante. Diese Formen und die zugehörigen imaginär-geometrischen Figuren haben bekanntlich Eigenschaften, die in vieler Hinsicht analog sind zu den Eigenschaften quadratischer Formen und der zu diesen gehörigen Polarsysteme. Wir werden zeigen, daß die Analogie sich auch auf die sogenannte projektive Maßbestimmung erstreckt, die man nach Cayley aus einer (durch gewisse Ungleichungen beschränkten) quadratischen Form ableiten kann: Wie insbesondere aus einer reellen quadratischen Form der Begriff der reellen „Entfernung" zweier reeller Punkte abgeleitet wird, so werden wir aus einer Hermiteschen Form einen Begriff der ebenfalls noch *reellen* „Entfernung" zweier Punkte mit *komplexen* Koordinaten ableiten. Dabei wird der zweite Begriff den älteren Begriff der Cayleyschen Entfernung in dem Falle umfassen, wo die benutzte Hermitesche Form lauter reelle Koeffizienten hat (was sich immer durch lineare Transformationen erreichen läßt).

Der zu erklärende Grundbegriff der Entfernung zweier Punkte wird also auch im komplexen Gebiete mit den Prädikaten „größer" und „kleiner" verbunden werden können. Damit ist dann, im Prinzip, eine Erweiterung der reellen Maßgeometrie (also auch der Begriffe Oberfläche und Volumen) gegeben, und es wird sich zeigen, daß diese Erweiterung den Forderungen genügt, von denen wir ausgegangen sind.

Wir werden ferner finden, daß die zu begründende Maßgeometrie sich noch auf eine ganz andere Art an vorhandene Untersuchungen anschließt, und als deren natürliche Fortsetzung betrachtet werden kann. Sie umfaßt nämlich, bei unbestimmter Dimensionenzahl, die Theorie der Mannigfaltigkeiten von konstantem Krümmungsmaß, und sie wird außerdem auch umgekehrt von dieser umfaßt. Wir werden nachweisen, daß in Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Räumen von passender Dimensionenzahl sich (rationale) Mannigfaltigkeiten angeben lassen, deren Bogenelement vollkommen übereinstimmt mit dem aus einer Hermiteschen Form abzuleitenden Bogenelement. Aus den hiermit zusammenhängenden Tatsachen ergibt sich, unter anderem, die bemerkenswerte Folgerung, daß zu jeder beliebigen endlichen Gruppe von diskreten Kollineationen eine holoedrisch-isomorphe und in *jeder* Hinsicht äquivalente Gruppe von reellen Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Bewegungen hergestellt werden kann.

In der Darstellung werden wir uns kurz fassen. Um den Umfang unserer Untersuchung nicht gar zu sehr anschwellen zu lassen, werden wir eine Reihe von Beweisen nur skizzieren oder ganz unterdrücken. Aber die grundlegenden Tatsachen wenigstens, namentlich den Satz über die kürzesten Wege, und ebenso die zuletzt angedeuteten Sätze werden wir eingehend begründen. Wir setzen voraus, daß dem Leser C. Segres Untersuchungen über die Geometrie der Hermiteschen Formen bekannt sind, und ebenso die von Loewy über die automorphen linearen Transformationen einer Hermiteschen Form.*) Da von dem zuletzt genannten scharfsinnigen Analytiker die geometrischen Begriffsbildungen, auf die es hier ankommt, nicht betrachtet worden sind, so fügen wir einige Bemerkungen hinzu, auf die wir uns weiterhin stützen werden.

Deuten wir die Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$ als *homogene* Punktkoordinaten in einem sogenannten Raum von $n-1$ Dimensionen, so gehört zu allen Hermiteschen Formen von nicht verschwindender Diskriminante, die sich nur um einen (reellen) Faktor unterscheiden, ein und dasselbe Polarsystem (*antipolarità* nach Segre), in Punktkoordinaten dargestellt durch eine Gleichung der Form

$$\Sigma a_{ki} \bar{x}_i y_k = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma a_{ik} x_i \bar{y}_k = 0$$
$$\{a_{ki} = \bar{a}_{ik}, \quad |a_{ik}| \neq 0\},$$

und in Koordinaten von linearen R_{n-2} (Gebieten $n-1^{\text{ter}}$ Stufe) durch eine entsprechende Gleichung. Es gilt nun folgender Satz:

*Die Kollineationen und Antikollineationen, Korrelationen und Antikorrelationen, die ein Hermitesches Polarsystem im Gebiet n^{ter} Stufe $(n > 2)$ in Ruhe lassen, bilden eine sogenannte gemischte Gruppe mit $n^2 - 1$ wesentlichen reellen Parametern. Diese besteht, bei ungeradem n immer und bei geradem n dann, wenn die zugehörigen Hermiteschen Formen nicht als Summen von gleichvielen, $\frac{n}{2}$, positiven und negativen Produkten der Form $x_i \bar{x}_i$ dargestellt werden können, aus vier getrennten kontinuierlichen Scharen von Transformationen, im ausgeschlossenen Falle aber aus viermal zwei Scharen.***)

*Die von Kollineationen gebildete kontinuierliche Untergruppe G_{n^2-1} dieser Gruppe ist transitiv****), *und überdies primitiv*†) *und einfach. Sind die*

*) C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche. Torino, 1890. (Die Bedeutung der Ausdrücke Antikollineation und Antikorrelation ist dort nachzulesen.) Vgl. auch: Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. Circ. Mat. di Palermo, 1891. Rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. Math. Ann. Bd. 40 (1892). A. Loewy, Über bilineare Formen mit konjugiert-imaginären Variablen. Nova Acta Leopold. Bd. 71, Nr. 8. 1898.

**) Im Falle $n = 2$ hat man natürlich nur zwei oder zweimal zwei Scharen (von Projektivitäten und Antiprojektivitäten).

***) Im üblichen Sinne des Wortes. Bei definiten Hermiteschen Formen kann jeder Punkt ohne Ausnahme mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden. Andernfalls wird das komplexe Gebiet durch die Nullstellen der Hermiteschen Form in zwei Teilgebiete zerlegt. Irgend ein Punkt im Innern eines dieser Gebiete kann in jeden anderen Punkt *desselben* Gebietes übergeführt werden. Ebenso jeder Punkt auf der Grenze in jeden anderen. Im erwähnten Sonderfalle können auch die beiden Gebiete vertauscht werden; daher rührt dann die Verdoppelung der Scharenzahl.

†) Primitiv im $(2n-2)$-dimensionalen gewöhnlichen komplexen Gebiet. Diese

zum Polarsystem gehörigen Hermiteschen Formen definit, so bildet jede der vier Scharen von Transformationen ein abgeschlossenes Kontinuum.

Das Behauptete läßt sich größtenteils ohne Mühe aus der erwähnten Untersuchung des Herrn Loewy entnehmen.*) Andere Hilfsmittel verlangt nur der Beweis des wichtigen Satzes von der Einfachheit der Gruppe G_{n^2-1}. Wir erbringen diesen Beweis in § 12.

Die folgende Untersuchung bezieht sich unmittelbar nur auf solche Hermitesche Formen, die (durch lineare Transformationen) in eine der Gestalten

$$x_1\bar{x}_1 \pm x_2\bar{x}_2 \pm \cdots \pm x_n\bar{x}_n \qquad (n > 2)$$

übergeführt werden können, wobei durchweg die oberen oder durchweg die unteren Vorzeichen zu wählen sind. Den Kollineationen (G_{n^2-1}) und Antikollineationen (H_{n^2-1}), die das zugehörige Polarsystem in Ruhe lassen, wird eine ähnliche Rolle zufallen, wie den Bewegungen und Umlegungen in der sphärischen oder pseudosphärischen Geometrie; wir werden sie daher ebenfalls als Bewegungen und Umlegungen, und zwar, zur Vermeidung von Mißverständnissen, als *Hermitesche Bewegungen und Umlegungen* bezeichnen.

Wir werden annehmen, daß die erwähnten kanonischen Ausdrücke der zu betrachtenden Hermiteschen Formen bereits hergestellt seien, weil das vielleicht von dem einen oder anderen Leser als eine Erleichterung empfunden werden mag. Wir bemerken aber, daß die auszuführenden Schlüsse und Rechnungen eine Spezialisierung des Koordinatensystems

---

Gruppen würden bei der üblichen Klassifikationsmethode nicht unter den „primitiven" Gruppen einer gewöhnlich als $(2n-2)$-dimensional bezeichneten, in Wirklichkeit aber $2(2n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit erscheinen, sondern unter deren „reell-primitiven" Gruppen.

*) Es handelt sich, bei Gebrauch der Bezeichnungsweise von Frobenius (und Loewy), der Reihe nach um die Lösung der vier Gleichungen

$$\bar{A}'SA = \varrho S, \quad \bar{B}'SB = \varrho S', \quad \bar{C}'SC = \varrho (S')^{-1}, \quad \bar{D}'SD = \varrho S^{-1},$$

wo ϱ eine unbestimmte von Null verschiedene reelle Zahl bedeutet. Diese Zahl ϱ muß dann immer positiv sein, es sei denn, daß der im Texte genannte Ausnahmefall vorliegt. Zwischen den Lösungen der ersten und vierten Gleichung, und denen der zweiten und dritten besteht der Zusammenhang

$$D = AS^{-1}, \quad C = BS'^{-1} = B\bar{S}^{-1}.$$

Alle ∞^{n^2+1} Lösungen der ersten Gleichung hat Loewy im Falle $\varrho > 0$ in der Form

$$A = \sqrt{\varrho}\cdot e^{i\varphi}\cdot (S + iT)^{-1}(S - iT) \qquad \{\,|S + iT| \neq 0\}$$

dargestellt, wo T eine zweite Hermitesche Form bedeutet. Die hiernach noch übrigen Gleichungen sind in allgemeinster Weise gelöst, sobald man eine spezielle Lösung z. B. der zweiten Gleichung kennt, die unschwer herzustellen ist. Ähnliches gilt in dem Sonderfall, wo $\varrho < 0$ sein kann.

nicht erfordern. Wir werden ferner etwas ausführlicher nur den Fall $n = 3$, d. h., die sogenannte ebene Geometrie im (vierdimensionalen) komplexen Gebiet behandeln. Die zu erörternden Hermiteschen Formen werden dann also diese sein:

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3, \quad x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3.$$

2.

Hyperbolische Hermitesche Maßbestimmung auf den einzelnen geraden Linien.

Um es nun möglichst anschaulich zu machen, wie man aus einer Hermiteschen Form eine Maßbestimmung analog der Cayleyschen ableiten kann, wollen wir an geläufige Vorstellungen anknüpfen, indem wir zugleich den Weg beschreiben, auf dem die weiterhin zu entwickelnden Formeln sich dargeboten haben.

Wir betrachten zunächst den zweiten Fall, also eine ternäre indefinite Hermitesche Form, von nicht verschwindender Diskriminante. Das System der Nullstellen dieser Form, also die Gesamtheit aller der Gleichung

$$(x\bar{x}) = x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3 = 0$$

genügenden Punkte des ternären komplexen Gebiets, bildet eine stetig zusammenhängende dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die wir einen (realen) *Hermiteschen Punktkomplex* nennen. Mit diesem Komplex ist nun ein zweiter, der zu ihm reziproke *Hermitesche Linienkomplex*

$$(u\bar{u}) = u_1\bar{u}_1 - u_2\bar{u}_2 - u_3\bar{u}_3 = 0$$

verbunden.*) Beide bestimmen einander vollkommen in der Weise, daß der Linienkomplex alle Geraden umfaßt, die einen einzigen Punkt des Punktkomplexes enthalten, und der Punktkomplex alle Punkte, die auf einer einzigen Geraden des Linienkomplexes liegen. Von den Punkten nun, für die die erste Hermitesche Form einen positiven Wert annimmt, sagen wir, daß sie *im Inneren* des Punktkomplexes liegen. Sie haben die charakteristische Eigenschaft, daß jede Gerade durch einen solchen Punkt ∞^1 Punkte des Punktkomplexes enthält. Diese ∞^1 Punkte bilden eine nach v. Staudt sogenannte *Kette*. Im binären Gebiete der Geraden sind sie wieder die Nullstellen einer indefiniten Hermiteschen Form; bei Abbildung dieses Gebietes auf die Riemannsche Zahlenkugel erscheint ihre

*) Beide Figuren werden von C. Segre, der sie wohl zuerst näher betrachtet hat, unter dem Namen *iperconica* zusammengefaßt. Dieses Wort läßt sich ohne Geschmacklosigkeit nicht ins Deutsche übertragen. — Indem wir der Einheitlichkeit zuliebe unsere Bezeichnungen alle an den Namen von Hermite knüpfen, wünschen wir dem verdienten italienischen Geometer natürlich nicht zu nahe zu treten.

Gesamtheit, wie überhaupt jede Kette, als *Kreis*. Jeder reelle Kreis auf der Bildkugel zerlegt nun aber diese in zwei „Halbkugeln", und auf irgend einer von diesen definiert er bekanntlich, als sogenanntes absolutes Gebilde, eindeutig eine Nicht-Euklidische reelle Maßbestimmung vom Krümmungsmaße -1. Dabei fungieren als (zugängliche) „gerade Linien" Stücke der Bilder von gewissen ∞^2 Ketten, nämlich die Kreisbogen oder „Halbkreise" auf der Halbkugel, die den absoluten Kreis unter rechtem Winkel treffen. Wir bemerken, daß diese Halbkreise erschöpfend auch dadurch charakterisiert sind, daß ihre Punkte in der zum absoluten Kreis gehörigen konformen Spiegelung oder Inversion mit Punkten der ergänzenden Halbkreise gepaart sind. Jetzt führen wir unsere Abbildung rückwärts aus, und nehmen dabei die eine der beiden gefundenen Maßbestimmungen mit. Dann ergibt sich das, was wir eine *hyperbolische Hermitesche Maßbestimmung* nennen wollen. Irgend zwei Punkte x, y im Inneren des Hermiteschen Komplexes erhalten eine, abgesehen vom Vorzeichen, völlig bestimmte und zwar *reelle Entfernung* (x, y). Durch je zwei solche Punkte kann ferner, auf der sie verbindenden Geraden, eine einzige „*Normalkette*" gelegt werden. Diese Normalketten sind dadurch charakterisiert, daß ihre Punkte paarweise in bezug auf den Hermiteschen Punktkomplex oder in dessen „Polarsystem" *konjugiert* sind, d. h. zu je zweien $\mathfrak{x}$, η der Gleichung

$$(\mathfrak{x}\bar{\eta}) = \mathfrak{x}_1\bar{\eta}_1 - \mathfrak{x}_2\bar{\eta}_2 - \mathfrak{x}_3\bar{\eta}_3 = 0$$

genügen. Für die Entfernungen von je drei Punkten x, y, z, die im Inneren des Komplexes und überdies auf derselben Normalkette liegen, besteht bei sachgemäßer Wahl der Vorzeichen die Gleichung

$$(y, z) + (z, x) + (x, y) = 0;$$

vor allem aber besteht für je drei Punkte, die auf derselben Geraden im Inneren, aber nicht auf derselben Normalkette liegen, die Ungleichung

$$(x, y) + (x, z) > (y, z),$$

wofern in diesem Falle bei allen drei Entfernungen der positive Wert gewählt wird. Zu den Normalketten, die offenbar in ∞^6 Exemplaren vorhanden sind, gehören bei der hier gemachten Annahme insbesondere die ∞^2 reellen Ketten (deren jede den reellen Zug einer reellen Geraden bildet). Andrerseits enthält der Hermitesche Komplex ∞^1 reelle Punkte, die den reellen Zug einer irreduzibelen Kurve 2. Ordnung bilden. Für die im Inneren dieser Kurve gelegenen reellen Punktepaare ergibt sich daher eine speziellere Maßbestimmung, von der man leicht einsieht, daß sie mit einer Cayleyschen zusammenfällt.

Indem wir weitere Folgerungen, und insbesondere eine analoge auf gerade Linien bezügliche Maßbestimmung vorläufig übergehen, fügen wir nur noch einige Bemerkungen gruppentheoretischen Inhalts hinzu. Unter den ∞^{16} Kollineationen und den ∞^{16} Antikollineationen, die durch Zusammensetzung der Kollineationen mit der involutorischen Antikollineation $x_i' = \bar{x}_i$, $u_i' = \bar{u}_i$ entstehen, lassen nach dem in § 1 allgemein Bemerkten je ∞^8 die beiden reziproken Hermiteschen Komplexe in Ruhe. Sie bilden die Gruppe (G_8, H_8) der *Bewegungen* und *Umlegungen* im betrachteten vierdimensionalen „Hermiteschen Raume" (worunter wir natürlich das Innere des Punktkomplexes verstehen). Für die zugehörigen Äquivalenzbegriffe brauchen wir die Worte *(Hermitesche) Kongruenz* und *Symmetrie*. Zu der Gruppe (G_8, H_8) gehört als (charakteristische) transzendente Invariante der eingeführte Entfernungsbegriff. Die beiden reziproken Hermiteschen Komplexe werden auch als *absolute Komplexe* bezeichnet; ihr Polarsystem heißt *das absolute (Hermitesche) Polarsystem.*

Hält man eine Gerade fest, so reduzieren sich für deren Punkte die Scharen G_8, H_8 von Transformationen der Reihe nach auf zwei Scharen γ_3, η_3, zwischen denen im Gebiete der Bildkugel ein *analytischer* aber *imaginärer* Zusammenhang stattfindet. Sie bilden zusammen die reellen Transformationen der dreigliedrigen kontinuierlichen Gruppe g_3 der reellen und komplexen Bewegungen in der hyperbolischen Geometrie und sind in dieser als eigentliche (γ_3) und uneigentliche (η_3) Bewegungen zu unterscheiden.

Hält man andrerseits den Inbegriff aller reellen Punkte fest, so reduziert sich schon G_8 allein auf eine gemischte Gruppe g_3' (γ_3, η_3) reeller Transformationen des reellen Gebietes, die ebenfalls komplex-kontinuierlich, und zu der Gruppe g_3 (γ_3, η_3) holoedrisch-isomorph ist; und auf *dieselben* $2 \cdot \infty^3$ Transformationen des reellen Gebietes reduziert sich dann auch die Transformationen-Schar H_8. Auch diese Gruppe g_3' besteht aus den als eigentlich (γ_3') und uneigentlich (η_3') zu unterscheidenden reellen Bewegungen einer zweidimensionalen hyperbolischen Mannigfaltigkeit.

Die gewöhnliche hyperbolische Maßbestimmung und die zugehörige reelle ebene Geometrie ist also in der ternären Hermiteschen hyperbolischen Maßbestimmung und entsprechenden Geometrie auf zwei wesentlich verschiedene Arten eingeschlossen.

Übrigens kann man, durch Einführung hyperkomplexer Größen, diesen Satz auch auf das komplexe hyperbolische Gebiet ausdehnen.

Die Bewegungsgruppen g_3, g_3' sind analytisch-kontinuierlich und einfach, und ihre reellen Untergruppen γ_3, γ_3' sind reell-kontinuierlich und reell-einfach. Aber auch die Gruppe G_8 der Hermiteschen Bewegungen selbst ist kontinuierlich und einfach*), sowohl im gewöhnlichen komplexen

*) Eine zu ihr isomorphe Gruppe reeller Berührungstransformationen hat Fr. Engel angegeben: Leipz. Ber. 1892, S. 292 ff.

als auch noch im hyperkomplexen Gebiete (vgl. § 1). Die zuletzt erwähnte eigentlich von 16 Parametern abhängige Gruppe ist holoedrisch-isomorph zur Gruppe aller reellen und komplexen Kollineationen eines ternären Gebietes. (S. § 12.) Da die Gruppe G_8 — schon in der Zahl ihrer Parameter — durchaus verschieden ist von der (zehngliedrigen) Gruppe der Bewegungen in einer reellen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes, so ergibt sich, daß gegenüber dieser Art von Geometrie etwas wirklich Neues vorliegt. Die Hermitesche Maßbestimmung im binären Gebiet irgend einer Geraden aber hat in der Tat das konstante Krümmungsmaß -1: Es ist dieselbe, die in einem besonderen Falle schon von Beltrami angegeben worden ist.*)

3.

Kürzeste Wege bei hyperbolischer Hermitescher Maßbestimmung.

Analytische Ausdrücke für die Entfernung (x, y) zweier Punkte x, y im Inneren des absoluten Komplexes, oder also, im hyperbolischen Hermiteschen Raume, sind die folgenden:

$$(x, y) = 2 \operatorname{arccos} h \frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}} = \lg D_x^y =$$

$$= \lg \frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)} + \sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y) - (x\bar{x})(y\bar{y})}}{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)} - \sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y) - (x\bar{x})(y\bar{y})}},$$

vorausgesetzt, daß man, wie zuvor, *der Maßbestimmung auf der geraden Linie das Krümmungsmaß* -1 *beilegt.*

Hier bedeutet D_x^y eines der beiden zueinander reziproken reellen Doppelverhältnisse, die die Punkte x, y im binären Gebiet der sie verbindenden (so lange sie verschieden sind, eindeutig bestimmten) Normalkette mit den beiden demselben Gebiet angehörigen Punkten des Hermiteschen Komplexes bilden. Alle vorkommenden Wurzelgrößen sind reell, und für die Funktionen arccos und lg ist deren reeller Wert zu setzen. Hierdurch ist die Entfernung (x, y) bis auf das Vorzeichen bestimmt, und dieses kann ebenfalls positiv gewählt werden, wie wir es nunmehr voraussetzen wollen. Wir dürfen und wollen überdies in der nachfolgen-

*) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche, VI (1868). Opere, t. I. Nr. XXIV. Spezielle Fälle der weiterhin (in § 4) zu entwickelnden Formeln sind auch die bei Darboux, Théorie des surfaces, I. p. 32, angegebenen Ausdrücke. Hermitesche Formen hat mit der gewöhnlichen Nicht-Euklidischen Maßbestimmung ($n = 2$) bereits Herr L. Schlesinger in Verbindung gebracht (z. B. in der Festschrift J. Bolyai in memoriam, De applicationibus geometriae absolutae analyticis), ohne indessen die weiterhin anzugebenden Ausdrücke für die Entfernung (x, y) explizite aufzustellen.

den Betrachtung annehmen, daß alle vorkommenden Wurzelgrößen selbst positiv sind. — Zunächst ergibt sich:

Die Entfernung zweier Punkte x, y im Inneren des absoluten Punktkomplexes verschwindet dann und nur dann, wenn diese Punkte zusammenfallen. Sie wird unendlich, sobald mindestens der eine Punkt auf den absoluten Komplex rückt.

Schränkt man die Veränderlichkeit der Punkte x, y auf die im Inneren des absoluten Komplexes gelegenen Punkte irgend einer geeigneten Geraden ein, so erhält man, wie schon bemerkt, eine Maßbestimmung von der konstanten Krümmung -1. Betrachtet man andrerseits nur reelle Punkte, und zwar solche, die im Inneren des Kegelschnittes $x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$ liegen, so erhält man eine (Cayleysche) Maßbestimmung von der konstanten Krümmung $-\frac{1}{4}\cdot$ In beiden Fällen gilt daher für Wege, die in einer der genannten Mannigfaltigkeiten von ∞^2 Punkten verlaufen, der Satz:

Der kürzeste Weg zwischen zwei verschiedenen Punkten im Inneren des absoluten Komplexes liegt auf ihrer geraden Verbindungslinie und ist das zwischen beiden Punkten enthaltene endliche Stück der sie verbindenden Normalkette. Die Länge dieses Weges aber ist die (als absolute Größe betrachtete) Entfernung beider Punkte.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der nur dem logischen Werte Werte nach spezielleren Aussage:

In jedem Dreieck ist die Summe der (absoluten) Längen von irgend zwei Seiten größer als die Länge der dritten Seite, oder mindestens dieser gleich. Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn die Ecken des Dreiecks in (mindestens) einer Normalkette liegen, und überdies die letzte Seite die gemeinsame Ecke der beiden ersten enthält.

Dabei bedeutet das Wort „Dreieck“ die Figur von irgend drei nicht notwendig von einander verschiedenen Punkten, im Inneren des absoluten Punktgebildes. Diese drei Punkte heißen „Ecken“ des Dreiecks. „Seite“ des Dreiecks heißt das irgend zwei Ecken verbindende Normalkettenstück, das keinen unendlich fernen Punkt enthält, oder, wenn beide Ecken im selben Punkt zusammenfallen, dieser Punkt selbst. „Länge“ einer Seite wird die Entfernung ihrer Ecken genannt; sie wird in *diesem* Satze als eine absolute Größe, also nicht als negativer Werte fähig betrachtet.

Wir wollen nun nachweisen, daß der zweite der angeführten Sätze *allgemein* richtig ist, d. h., *bei unbeschränkter Veränderlichkeit der drei Punkte x, y, z im Inneren des absoluten Punktkomplexes*, und daß folglich der erste Satz auch gilt *bei unbeschränkter Veränderlichkeit des Weges zwischen zwei Punkten.*

Wir dürfen dabei annehmen, daß

$$(y, z) \geqq (z, x) \geqq (x, y)$$

sei, und haben dann nur noch zu zeigen, daß

$$(y, z) - (x, y) \leqq (x, z),$$

oder daß

$$\cos h\, \frac{1}{2}(y, z) \cos h\, \frac{1}{2}(x, y) - \sin h\, \frac{1}{2}(y, z) \sin h\, \frac{1}{2}(x, y) \leqq \cos h\, \frac{1}{2}(x, z),$$

oder endlich, daß

$$\sqrt{(y\bar{z})(\bar{y}z)} \cdot \sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)} - (y\bar{y}) \cdot \sqrt{(x\bar{z})(\bar{x}z)} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(y\bar{z})(\bar{y}z) - (y\bar{y})(z\bar{z})} \cdot \sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y) - (x\bar{x})(y\bar{y})}.$$

Da nach Voraussetzung die linke Seite dieser Ungleichung oder Gleichung nicht negativ sein kann, so ist mit ihr wiederum äquivalent die folgende in bezug auf x, y, z symmetrische Ungleichung oder Gleichung, die aus jener durch Quadrieren erhalten wird:

$$2\sqrt{(y\bar{z})(z\bar{x})(x\bar{y}) \cdot (\bar{y}z)(\bar{z}x)(\bar{x}y)} \geqq$$
$$\geqq -(x\bar{x})(y\bar{y})(z\bar{z}) + (x\bar{x}) \cdot (y\bar{z})(\bar{y}z) + (y\bar{y}) \cdot (z\bar{x})(\bar{z}x) + (z\bar{z}) \cdot (x\bar{y})(\bar{x}y).$$

Wenn nun, wie üblich, (xyz) die aus den Koordinaten der drei Punkte gebildete Determinante bezeichnet, so ist

$$(xyz)(\overline{xyz}) = |(x\bar{x})(y\bar{y})(z\bar{z})|,$$

also

$$(y\bar{z})(z\bar{x})(x\bar{y}) + (\bar{y}z)(\bar{z}x)(\bar{x}y) \geqq$$
$$\geqq -(x\bar{x})(y\bar{y})(z\bar{z}) + (x\bar{x}) \cdot (y\bar{z})(\bar{y}z) + (y\bar{y}) \cdot (z\bar{x})(\bar{z}x) + (z\bar{z}) \cdot (x\bar{y})(\bar{x}y).$$

Andrerseits ist

$$2\sqrt{(y\bar{z})(z\bar{x})(x\bar{y}) \cdot (\bar{y}z)(\bar{z}x)(\bar{x}y)} \geqq (y\bar{z})(z\bar{x})(x\bar{y}) + (\bar{y}z)(\bar{z}x)(\bar{x}y).$$

Die Addition beider Ungleichungen gibt das verlangte Resultat.

Soll das Gleichheitszeichen bestehen, so müssen die letzten Ungleichungen beide als Gleichungen erfüllt sein. Hieraus folgt zunächst

$$(xyz) = 0,$$

d. h. die drei Punkte liegen in gerader Linie, ferner

$$(y\bar{z})(z\bar{x})(x\bar{y}) = (\bar{y}z)(\bar{z}x)(\bar{x}y).$$

Diese weitere Bedingung sagt nun aus, daß die drei Punkte überdies einer Normalkette angehören. Denkt man sich nämlich die Koordinaten zweier verschiedener Punkte y, z in bestimmter Weise gewählt, und versteht man unter σ, τ Parameter mit *reellem* Verhältnis, so wird, wie bereits Herr Segre bemerkt hat, der Punkt $\sigma y + \tau z$ irgend eine der ∞^1 die Punkte

y, z verbindenden Ketten durchlaufen. Als Bedingung dafür, daß diese Kette eine Normalkette ist, findet man ohne weiteres

$$(y\bar{z}) = (\bar{y}z).$$

Wählt man die Koordinaten von y, z von vornherein dieser Bedingung gemäß, was ohne weiteres geschehen kann, so erhält man statt obiger Gleichung die einfachere

$$(z\bar{x})(x\bar{y}) - (\bar{z}x)(\bar{x}y) = 0,$$

die, für sich allein betrachtet, als Ort des Punktes x einen speziellen Hermiteschen Komplex liefert. Dieser aber durchdringt die Gerade $\widehat{yz}$ in einer Kette, und zwar gerade in der Kette $\sigma y + \tau z$. In dieser Normalkette also liegt der Punkt x, und außerdem hat man, nach der nunmehrigen Annahme, die Gleichung

$$(y, z) = (y, x) + (x, z).$$

Diese aber kann nur dann richtig sein, wenn der Punkt x auf der Seite yz des betrachteten Dreiecks selbst (also nicht in deren Verlängerung) liegt. Die Behauptung ist also erwiesen, soweit das ternäre Gebiet in Frage kommt. Daß bei unbestimmter Stufenzahl dieselben Sätze gelten, folgt nunmehr unmittelbar daraus, daß man drei verschiedene Punkte eines Gebietes n^{ter} Stufe immer durch (mindestens) eine Ebene verbinden kann.

Wir verfolgen den Gegenstand nicht weiter, sondern wenden uns nunmehr zu einer anderen Art der Maßbestimmung, die der gewöhnlichen sogenannten elliptischen Maßbestimmung analog ist und etwas eingehender behandelt werden soll.

4.

Die elliptische Hermitesche Maßbestimmung.

Wir gehen jetzt von einer durchweg-positiven Hermiteschen Form aus, die wir uns in die angeführte kanonische Gestalt gesetzt denken, und für die wir wiederum das (bisher in einem anderen Sinne verwendete) Zeichen $(x\bar{x})$ gebrauchen:

$$(x\bar{x}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3.$$

Die vorgeführten Betrachtungen lassen sich auf diesen Fall ohne Mühe übertragen. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber insofern, als nunmehr die vorgelegte Form und ihre reziproke

$$(u\bar{u}) = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3$$

keine Nullstellen im komplexen Gebiet haben: Erst wenn man dieses als eine reelle vierdimensionale Mannigfaltigkeit auffaßt, und diese von neuem durch Einführung komplexer Koordinaten erweitert, erst durch Einführung hyperkomplexer Größen also, kann der auch in diesem Falle in gewisser Weise „vorhandene“ absolute Komplex (nunmehr eine imaginäre sechsdimensionale Mannigfaltigkeit) zur Erscheinung gebracht werden. Das *Polarsystem* dieses hyperimaginären oder „idealen“ Komplexes aber, die umkehrbare Zuordnung eines Punktes x zu einer Geraden u vermöge der Gleichungen

$$(\bar{u}\bar{y}) = (x\bar{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 = 0,$$

$$(\bar{v}\bar{x}) = (u\bar{v}) = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 = 0,$$

kürzer

$$x = \bar{u}, \qquad u = \bar{x},$$

ist auch in diesem Falle eine Figur des gewöhnlichen komplexen Gebiets.

Betrachten wir nunmehr das komplexe Gebiet einer beliebigen Geraden, so erkennen wir, daß deren Punkte ausnahmslos durch die Bedingung des Konjugiertseins $(x\bar{y}) = 0$ oder $(\bar{x}y) = 0$ mit anderen Punkten derselben Geraden gepaart sind. Bei der Abbildung auf die Riemannsche Zahlenkugel erscheint diese Paarung wiederum als reelle Inversion, und zwar als Inversion ohne reelle Doppelelemente. Man kann also die Abbildung so einrichten, daß gepaarte Punkte einander auf der Kugel diametral gegenüberliegen. Dann liefert die gewöhnliche Maßbestimmung auf der Kugel vom Krümmungsmaß $+1$ ohne weiteres eine entsprechende Maßbestimmung zur Hermiteschen Form, die wir als *elliptische Hermitesche Maßbestimmung* bezeichnen. Die „Entfernung“ zweier Punkte, die nunmehr keinerlei Beschränkung unterliegen, wird also wiederum eine reelle Funktion. Diese aber ist nunmehr reell-periodisch, und zwar ist ihre Periode 2π. Irgend zwei Punkte fallen dann und *nur* dann zusammen, wenn ihre Entfernung $\equiv 0 \bmod. 2\pi$ ist. Auf den wie zuvor zu erklärenden Normalketten sind die Entfernungen addierbar; man hat bei geeigneter Wahl der Vorzeichen für je drei Punkte einer solchen Kette die Kongruenz

$$(y, z) + (z, x) + (x, y) \equiv 0 \qquad \text{mod. } 2\pi.$$

Jede Normalkette läuft in sich zurück, unendlich ferne Punkte gibt es auf ihr erst im hyperkomplexen Gebiet, wenn man den Entfernungsbegriff, nunmehr durch den Prozeß der analytischen Fortsetzung, auch auf dieses ausdehnen will. Man erhält ferner neben dem Begriff der Entfernung zweier Punkte einen ganz in gleicher Weise zu erklärenden Begriff des Winkels zweier Geraden, während im zuvor betrachteten Falle bei der hier nötigen Rücksicht auf die Realität aller zu bestimmenden Größen und auf das Innere des absoluten Punktkomplexes die entsprechenden Begriffsbildungen (deren zweite wir der Kürze halber nicht betrachtet haben) nur unvollkommen korrelativ sind.

Die analytischen Ausdrücke, z. B. für die *Entfernung zweier Punkte*

x, y werden ähnlich den zuvor aufgestellten; für Kosinus und Sinus der halben Entfernung ergeben sich die Formeln:

$$\cos\frac{1}{2}(x,y)=\frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}},\quad \sin\frac{1}{2}(x,y)=\frac{\sqrt{(x\bar{x})(y\bar{y})-(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}}.$$

Zur richtigen Auffassung dieser Definitionsgleichungen ist zu beachten, daß sie eigentlich etwas mehr liefern, als man nötig hat und in der Regel auch brauchen kann. Während nämlich die Entfernung (x, y) nur mod. 2π bestimmt sein soll, liefern diese Gleichungen, nach Entscheidung über die Vorzeichen aller Wurzelgrößen, die Entfernung bis auf Vielfache von 4π genau. Man muß daher eigentlich auf den rechten Seiten jener Gleichungen noch einen Faktor hinzufügen, dessen Wert insofern unbestimmt bleibt, als er nach Belieben gleich $+1$ oder -1 gesetzt werden darf. Wir haben diesen Umstand in den Formeln nicht zur Erscheinung gebracht, was wegen der Unbestimmtheit der Wurzelgrößen als statthaft gelten kann. Jedenfalls empfehlen sich diese Formeln durch ihren einfacheren Bau gegenüber den daraus hervorgehenden Ausdrücken für $\cos(x, y)$ und $\sin(x, y)$.

Wir formulieren nun sogleich den Fundamentalsatz, dessen Beweis dem in § 2 geführten Beweis analog ist:

Nimmt man in einer elliptischen Hermiteschen Maßbestimmung für die Entfernung zweier Punkte den absolut kleinsten positiven Wert an, so ist in jedem Dreieck (d. h. bei je drei paarweise durch Normalketten verbundenen Punkten) die Summe der Längen irgend zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite, oder mindestens dieser gleich.

Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn die drei Punkte in (mindestens) einer Normalkette liegen, und wenn überdies die letzte Seite entweder die größte mögliche Länge π hat, oder die gemeinsame Ecke der beiden ersten Seiten enthält.

Hieraus folgt unmittelbar:

Die geodätischen Bänder) in der betrachteten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit liegen auf Geraden und sind die ∞^6 Normalketten. Insbesondere ist, bei der hier gemachten Annahme, jede reelle Kette (d. h. der reelle Zug jeder beliebigen reellen Geraden) ein geodätisches Band.*

Ferner ergibt sich:

Durch irgend zwei verschiedene nicht-konjugierte Punkte geht ein ein-

---

*) Die im vierdimensionalen Gebiete reellen und analytischen Mannigfaltigkeiten von ∞^1 Punkten nennen wir (reale) *Bänder* (*fili*, nach Segre). Der Ausdruck Linie wird besser vermieden, weil z. B. eine gerade „Linie" eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist; ebenso ist „Kurve" nicht empfehlenswert.

ziges geodätisches Band (eine Normalkette), und auf diesem liegt der kürzeste Weg zwischen den beiden Punkten, dessen Länge der absolut kleinste Betrag ihrer Entfernung und immer kleiner als π ist. Durch je zwei konjugierte Punkte dagegen gehen ∞^1 Normalketten, und jeder direkte (d. h. in keinem seiner Teile doppelt überdeckte) Weg zwischen beiden Punkten, der auf einer dieser Ketten liegt, ist ein kürzester Weg, von der Länge π.

Eine Art von Umkehrung des letzten Satzes ist der folgende:

Zwei von demselben Punkte x ausgehende geodätische Bänder treffen sich in keinem weiteren Punkte, wenn sie auf verschiedenen Geraden liegen. Dagegen treffen sich alle solchen geodätischen Bänder, die derselben Geraden angehören, in einem zweiten Punkte, dem konjugierten des ersten, nach Durchlaufung je eines Weges von der Länge π. Der Ort aller dieser auf die ∞^2 Geraden durch x verteilten Punkte y ist eine Gerade, die absolute Polare des Punktes x:

$$(\bar{x}y) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \bar{x}_3 y_3 = 0.$$

Weiter ist deutlich:

Auf jeder Geraden gibt es ∞^2 Normalketten, und je zwei von diesen schneiden einander in zwei Punkten, die zu einander konjugiert sind. Für die ∞^2 Punkte der Geraden reduziert sich die elliptische Hermitesche Maßbestimmung auf eine sphärische vom Krümmungsmaße Eins.

Im ganzen enthält jede Gerade ∞^3 Ketten, und die Geraden sind die einzigen *Kongruenzen* (zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten) von Punkten der Art. Es gibt aber auch Kongruenzen von Punkten, die gerade ∞^2 Ketten enthalten, die „*nicht-synektischen*) Kettenkongruenzen*".

*) Eine Kongruenz von Punkten p nennen wir *synektisch*, wenn die fünf Verhältnisse der reellen und imaginären Bestandteile der Koordinaten eines Kongruenzpunktes als reelle analytische Funktionen von zwei (wesentlichen) Parametern s, t dargestellt werden können, der Art, daß die Differentialgleichung

$$\left(p \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0$$

besteht. Man kann dann immer die Parameter und Koordinaten so wählen, daß die komplexen Koordinaten p_i selbst analytische Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen $s + it$ werden. Eine synektische Kongruenz ist also dasselbe, wie eine gewöhnlich so genannte als Ort von ∞^1 Punkten des komplexen Gebietes betrachtete *analytische Kurve.* Sie hat die charakteristische Eigenschaft, an jeder Stelle allgemeiner Lage $\{(pp'p'') \neq 0\}$ eine von der Fortschreitungsrichtung unabhängige *Tangente* zuzulassen. Ist sie nicht eine gerade Linie, so erfüllen diese Tangenten eine zweite, zur ersten *reziproke* Kongruenz, $(pp'x) = (ax) = 0$,

$$\{(aa'u) = (pp'p'')(up)\},$$

die ebenfalls synektisch ist.

Eine Kongruenz von Punkten heißt *Kettenkongruenz*, wenn ihre ∞^2 Punkte (oder vielmehr deren Koordinaten) mit Hilfe (der Koordinaten) von dreien p_1, p_2, p_3 unter

Alle diese Kongruenzen, zu denen offenbar die Kongruenz aller reellen Punkte gehört, sind zueinander projektiv; sie sind daher in ∞^8 Exemplaren vorhanden. Durch je vier Punkte, deren keine drei in gerader Linie liegen, geht *eine* (leicht zu bestimmende) Kongruenz der Art. Verbindet man je zwei Punkte einer solchen Kongruenz durch eine Gerade, so erhält man nicht ∞^4, sondern nur ∞^2 gerade Linien, die eine neue, zu der ersten *reziproke* „nicht-synektische Kettenkongruenz" bilden. Diese Eigenschaft, mit Linienkongruenzen gepaart zu sein, charakterisiert die von Punkten gebildeten nicht-synektischen Kettenkongruenzen vollkommen.

Nunmehr können wir dem letzten Satz einen zweiten ähnlichen Inhalts an die Seite stellen:

Außer den ∞^4 Geraden gibt es noch ∞^5 Kongruenzen von Punkten, die ∞^2 Normalketten (geodätische Bänder) enthalten. Es sind das alle die nicht-synektischen Kettenkongruenzen, deren sämtliche Ketten Normalketten sind, darunter, bei der hier gemachten Annahme, die Kongruenz aller reellen Punkte.

Je zwei Ketten in einer solchen „normalen Kettenkongruenz" schneiden einander in einem Punkte; die Kongruenz ist Trägerin eines reellen ternären Gebietes. Für die ∞^2 Punkte einer jeden normalen Kettenkongruenz reduziert sich die elliptische Hermitesche Maßbestimmung auf eine ebenfalls elliptische Maßbestimmung vom Krümmungsmaß $\frac{1}{4}$.

Es ist leicht, alle diese von ∞^2 geodätischen Bändern beschriebenen Kongruenzen zu charakterisieren und erschöpfend zu bestimmen. Jede nicht-synektische Kettenkongruenz, die ein absolutes Poldreieck p, q, r {charakterisiert durch die Bedingungen $(pqr) \neq 0$, $(q\bar{r}) = 0$, $(r\bar{p}) = 0$, $(p\bar{q}) = 0$} enthält, enthält deren ∞^3, und ist eine normale Kettenkongruenz. Durch je drei Punkte p, q, r, die den Bedingungen $(pqr) \neq 0$, $(q\bar{r}) \neq 0$, $(r\bar{p}) \neq 0$, $(p\bar{q}) \neq 0$, $(q\bar{r})(r\bar{p})(p\bar{q}) = (\bar{q}r)(\bar{r}p)(\bar{p}q)$ genügen, geht *eine* normale Kettenkongruenz, usw.*)

Eine wichtige Ergänzung zu dem Gesagten bildet der Satz:

Die genannten beiden Scharen von ∞^4 und ∞^5 Kongruenzen konstanter Krümmung sind identisch mit den Kongruenzen (von Punkten), deren geodätische Bänder zugleich geodätische Bänder des vierfach-ausgedehnten Punktkontinuums selbst sind.

---

ihnen in der Form $\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$ dargestellt werden können, wo $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ reelle Verhältnisgrößen sind. Es gibt nur zwei projektiv-verschiedene Klassen von Kettenkongruenzen, nämlich die im Texte genannten und die synektischen. Diese letzten bestehen aus den ∞^2 Punkten je einer geraden Linie.

*) Auf die letzte Gleichung wird man auch geführt, wenn man verlangt, daß die Verbindungslinien der Ecken p, q, r irgend eines Dreiecks mit den entsprechenden Ecken des polar zugeordneten Dreiecks durch denselben Punkt gehen.

Komplexe (d. h. dreifach-ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten) von der gleichen Eigenschaft gibt es im ternären Gebiete nicht.

Ein solcher Punktkomplex müßte nämlich zunächst von ∞^4 Ketten beschrieben werden können. Dieser Forderung genügen nun nur die Komplexe, die von ∞^1 geraden Linien beschrieben werden, und außerdem die Hermiteschen Komplexe, und zwar die von verschwindender Diskriminante (*Kettenkomplexe*, bestehend aus allen Punkten auf den ∞^1 Geraden einer Linienkette) auf zwei Arten. Keiner aber unter ihnen erfüllt die weitere Forderung, daß darin enthaltene ∞^4 Ketten Normalketten sind. Beachtenswert scheint uns auch die folgende Bemerkung zu sein:

Es ist unmöglich, durch doppelte Überdeckung des vierfach ausgedehnten Punktkontinuums von der elliptischen Hermiteschen Maßbestimmung zu einer anderen überzugehen, die sich zu ihr ähnlich verhielte, wie die sphärische Maßbestimmung zur gewöhnlichen elliptischen (der elementaren Maßbestimmung im Linienbündel).

Man kann zwar in der Tat jedes der gefundenen ∞^5 Exemplare elliptischer Maßbestimmung zu einer sphärischen erweitern, indem man deren geodätische Bänder erst nach zweimaligem Umlauf in sich zurückkehren läßt. Sollte jedoch dieser Prozeß für den Gesamtraum gelten, so müßte er auch auf die ∞^4 Geraden sich erstrecken, deren jede schon von vornherein den Zusammenhang der Kugel hat. Das aber ist aus naheliegenden Gründen unmöglich.*)

Hervorgehoben werden muß wohl noch, daß die erklärte Entfernung zweier Punkte (x, y) die Gruppe (G_8, H_8) der *Bewegungen* und *Umlegungen* (vgl. § 1) im elliptischen Hermiteschen Raume vollkommen charakterisiert. Die Entfernung ist außerdem die *einzige* unabhängige Invariante zweier Punkte gegenüber dieser Gruppe. D. h., jede beliebige absolute Invariante zweier Punkte ist eine Funktion ihrer Entfernung. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Transformierbarkeit eines Punktepaares x, y in ein anderes x', y' kann in der Form

$$(x', y') \equiv \pm (x, y) \quad \text{mod. } 2\pi$$

geschrieben werden.**)

Alle Punkte y, die von einem gegebenen Punkte x eine konstante Entfernung r haben, bilden, wenn $r \not\equiv 0, \pi$ mod. 2π eine dreidimensionale „*sphärische*“ *Mannigfaltigkeit*, und, wenn $r \equiv \pi$ mod. 2π eine (doppelt zählende) Gerade, die absolute Polare des Punktes x. Die ∞^3 oder ∞^2

---

*) Dagegen kann man eine weitere Art der Geometrie dadurch gewinnen, daß man jeden Punkt p mit seiner absoluten Polare $(\bar{p}x) = 0$ oder $u = \bar{p}$ zu einem einzigen Begriff zusammenfaßt.

**) Analoges gilt im hyperbolischen und parabolischen Falle (§ 3 und § 14)

Punkte beider Figuren werden, wenn man den „Mittelpunkt“ x der konstruierten ∞^1 konzentrischen sphärischen Mannigfaltigkeiten festhält, transitiv untereinander vertauscht durch die viergliedrige Gruppe, auf die sich dann G_8, H_8 reduziert. Die Punkte der absoluten Polare von x selbst, die Punkte irgend einer festgehaltenen Geraden also, werden aber dabei nur dreigliedrig unter einander vertauscht.

Die dreigliedrige gemischte Gruppe, zu der wir hier gekommen sind, ist analog zu der in § 2 (S. 327) besprochenen Gruppe g_3. Wir betrachten sie noch in Kürze, wie auch die zu g_3' analoge Gruppe (siehe ebenda), da der vorliegende elliptische Fall sich von dem zuvor erörterten hyperbolischen in bezug auf das Verhalten dieser wichtigen Gruppen des binären Gebietes wesentlich unterscheidet.

Hält man eine Gerade fest, so reduzieren sich für deren Punkte die Transformationen beider Scharen G_8, H_8 zwar auch hier der Reihe nach auf zwei Scharen g_3, h_3 von Transformationen, die zusammen eine Gruppe bilden. Auf der Bildkugel erscheinen diese Transformationen, bei passender Wahl der Abbildung, als die Bewegungen und Umlegungen im elementaren Sinne. Die Gruppe g_3 ist kontinuierlich, zwischen g_3 und h_3 besteht aber *nicht* wie zuvor (S. 327) bei γ_3 und η_3 ein (komplex-)analytischer Zusammenhang.

Hält man ferner das reelle Gebiet (oder irgend eine normale Kettenkongruenz) fest, so reduzieren sich in diesem Gebiete beide Scharen G_8, H_8 auf eine und dieselbe reelle Gruppe g_3' elliptischer Bewegungen, die *nicht* wie die früher betrachtete Gruppe g_3' im reellen Gebiete gemischt, sondern auch in diesem kontinuierlich ist.

Es hat also die in § 2 betrachtete Transformationenschar η_3 in der Schar h_3 nur ein ziemlich entferntes Analogon, die Schar η_3' aber gar keines.

5.

Volumelemente und Gesamtvolumen des elliptischen Hermiteschen Raumes.

Für die Differentialgeometrie irgend einer m-dimensionalen zu einer bestimmten quadratischen Form des Bogenelementes gehörigen Mannigfaltigkeit ist von grundlegender Bedeutung die Bildung einer Reihe von Differentialausdrücken $d\omega_1, \cdots, d\omega_m$, die wir als ein- bis m-dimensionale *Volumelemente* oder *Elementarvolumina* bezeichnen können. Das erste von diesen $d\omega_1$ ist eben das Bogenelement ds selbst, und dieses bestimmt durch seinen Ausdruck nach einfachen Regeln die ganze Reihe. In unserem Falle ist $m = 4$ und

$$ds^2 = 4\,\frac{(x\bar{x})(dx\,d\bar{x}) - (x\,d\bar{x})(\bar{x}\,dx)}{(x\bar{x})^2}.$$

Sind nun $x,\ x+dx,\ x+\delta x$ irgend drei verschiedene sogenannte benachbarte Punkte, so ist der *„Winkel“* zwischen den durch die Symbole d und δ unterschiedenen Fortschreitungsrichtungen durch den Kosinussatz der Elementargeometrie mit Hilfe der gegenseitigen Abstände der drei Punkte und eines Grenzübergangs erklärt. Man findet auf diese Weise

$$ds\cdot\delta s\cdot\cos(ds,\ \delta s) =$$
$$= \frac{2}{(x\bar{x})^2}\cdot\left\{\begin{vmatrix}(x\bar{x}) & (x\delta\bar{x})\\ (dx\bar{x}) & (dx\,\delta\bar{x})\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(\bar{x}x) & (\bar{x}\delta x)\\ (d\bar{x}x) & (d\bar{x}\,\delta x)\end{vmatrix}\right\},$$
$$\{ds\cdot\delta s\cdot\sin(ds,\delta s)\}^2 = 16\,\frac{(x\,dx\,\delta x)(\bar{x}\,d\bar{x}\,\delta\bar{x})}{(x\bar{x})^3} -$$
$$- \frac{4}{(x\bar{x})^4}\cdot\left\{\begin{vmatrix}(x\bar{x}) & (x\delta\bar{x})\\ (dx\bar{x}) & (dx\,\delta\bar{x})\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}(\bar{x}x) & (\bar{x}\delta x)\\ (d\bar{x}x) & (d\bar{x}\,\delta x)\end{vmatrix}\right\}^2,$$

wo das Limes-Zeichen, wie in solchen Fällen üblich, unterdrückt ist. Der zweite Ausdruck, der als Summe von zwei niemals negativen Größen erscheint, ist unmittelbar das Elementarvolumen $d\omega_2$, aufs Quadrat erhoben. Der erste aber liefert mit Hilfe elementarer Determinantensätze die sämtlichen Ausdrücke $d\omega_k{}^2$.

Wir unterscheiden jetzt die bei Bildung von $d\omega_k{}^2$ zu benutzenden k verschiedenen Zuwüchse der Koordinaten von x durch dem Zeichen d angehängte Indizes. Wir setzen dann

$$e_{ij} = \begin{vmatrix}(x\bar{x}) & (x d_j\bar{x})\\ (d_i x\bar{x}) & (d_i x d_j\bar{x})\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(\bar{x}x) & (\bar{x} d_j x)\\ (d_i\bar{x}x) & (d_i\bar{x} d_j x)\end{vmatrix}$$

und erhalten unmittelbar

$$d\omega_k^2 = \frac{2^k}{(x\bar{x})^{2k}}\cdot|e_{11}\,e_{22}\cdots e_{kk}| \qquad (k=1,2,3,4),$$

während für $k>4$ die entsprechend gebildeten Ausdrücke, wenn man von Größen höherer als der $2k^{\text{ten}}$ Ordnung absieht, sämtlich verschwinden.

Die Determinante rechts im Ausdruck von $d\omega_k^2$ ist in den Fällen $k=3,4$ durch $(x\bar{x})$, $(x\bar{x})^2$ teilbar, und die Abscheidung dieser Faktoren führt zu einem zweiten, übrigens auch in den Fällen $k=1,2$ geltenden Ausdruck für $d\omega_k^2$, nämlich

$$d\omega_k^2 = \frac{2^k}{(x\bar{x})^{k+2}}\cdot\begin{vmatrix}0\bar{0} & * & 0\bar{1} & \cdots & 0\bar{k}\\ * & \bar{0}0 & \bar{0}1 & \cdots & \bar{0}k\\ 1\bar{0} & \bar{1}0 & 1\bar{1}+\bar{1}1 & \cdots & 1\bar{k}+\bar{1}k\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ k\bar{0} & \bar{k}0 & k\bar{1}+\bar{k}1 & \cdots & k\bar{k}+\bar{k}k\end{vmatrix}.$$

Hier sind zwei mit Nullen auszufüllende Stellen der Determinante mit Sternen $*\,*$ besetzt; ferner bezeichnen die Ziffern die verschiedenartigen Inkremente, so daß

$$0\bar{0} = (x\bar{x}), \quad \bar{0}i = (\bar{x}d_i x), \quad i\bar{j} = (d_i x\, d_j \bar{x}).$$

Wir wollen nun das k-fache Integral

$$\int d\omega_k$$

in einigen besonders wichtigen Fällen bilden. Dabei werden wir alle Elementarvolumina $d\omega_k$ als positive Größen betrachten.

Zunächst findet man den *Umfang* oder die *Gesamtlänge S irgend einer Kette*, die in der Form $\sigma y + \tau z$ ($\sigma : \tau$ reell) dargestellt ist*),

$$S = \int ds = \int d\omega_1, \qquad \frac{S^2}{4\pi^2} = \frac{(y\bar{y})(z\bar{z}) - (y\bar{z})(\bar{y}z)}{\{(y\bar{y})(zz) - (y\bar{z})(\bar{y}z)\} - \frac{1}{4}\{(y\bar{z}) - (\bar{y}z)\}^2}.$$

Wir werden von diesem Ausdruck, der im Fall der Normalkette $\{(y\bar{z}) = (\bar{y}z)\}$ $S = 2\pi$ liefert, später eine Anwendung zu machen haben.

Sodann kennen wir bereits $\int d\omega_2$, erstreckt über alle (zweidimensionalen) Volumelemente einer Kettenkongruenz, in zwei Fällen, nämlich dann, wenn diese entweder synektisch (eine Gerade) oder normal ist: Man hat entsprechend

$$\int d\omega_2 = 4\pi, \qquad \int d\omega_2 = 8\pi.\text{**)}$$

Wir betrachten jetzt eine dreidimensionale *sphärische Mannigfaltigkeit* (§ 4), also den Ort aller Punkte, die von irgend einem Punkt x den konstanten Abstand r ($0 < r < \pi$) haben. Man erkennt ohne weiteres,

---

*) Ist die Kette als Ort der Geraden, die sie treffen (Kettenkomplex), durch eine gleich Null gesetzte Hermitesche Form dargestellt, symbolisch $(u\alpha)(\bar{u}\bar{\alpha}) = 0$ $\left\{\text{wo } J = \frac{1}{6}(\alpha\alpha'\alpha'')(\bar{\alpha}\bar{\alpha}'\bar{\alpha}'') = 0 \text{ und } (\alpha\bar{\alpha}')(\bar{\alpha}\alpha') - (\alpha\bar{\alpha})^2 > 0 \text{ sein muß}\right\}$, so ergibt sich

$$\frac{S^2}{4\pi^2} = \frac{(\alpha\bar{\alpha}')(\bar{\alpha}\alpha') - (\alpha\bar{\alpha})^2}{(\alpha\alpha')(\bar{\alpha}\alpha') - \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha})^2}.$$

**) Bei einer beliebigen Kettenkongruenz wird

$$\int d\omega_2 = 8\pi \int_0^1 \frac{x(1 - k^2x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\, dx,$$

wo k^2 eine später zu erklärende Invariante der Kongruenz bedeutet, die zwischen den Grenzen 1 und 0 liegt. Diese Grenzfälle, dieselben, in denen das auszuwertende Integral nicht elliptisch ist, entsprechen den im Texte bezeichneten Kongruenzen.

daß diese Figur ein spezieller Hermitescher Komplex von nicht verschwindender Diskriminante ist, und also das vierdimensionale Punktkontinuum in ein inneres und ein äußeres Gebiet zerlegt. Wir verlangen, $\int d\omega_3$ und $\int d\omega_4$ zu berechnen, das erste Integral erstreckt über alle dreidimensionalen Volumenelemente auf dem Komplex selbst, das zweite über alle vierdimensionalen in seinem Inneren. Das gelingt ohne Schwierigkeit*), und es findet sich:

$$\int d\omega_3 = 16\pi^2 \cdot \sin^3\frac{r}{2}\cdot\cos\frac{r}{2},$$

$$\int d\omega_4 = 8\pi^2\cdot\sin^4\frac{r}{2}.$$

Im Grenzfall $r = \pi$, wo sich die sphärische Mannigfaltigkeit auf eine synektische Kongruenz zusammenzieht, nämlich auf eine Gerade, die absolute Polare ihres Mittelpunktes, liefert die letzte Formel *das Volumen des ganzen komplexen Gebietes:*

$$\int d\omega_4 = 8\pi^2.$$

Beiläufig bemerkt hat man im Gebiete n^{ter} (statt dritter) Stufe für das $(2n-2)$-dimensionale Volumen des Inneren einer sphärischen Mannigfaltigkeit den Ausdruck

$$\int d\omega_{2n-2} = \frac{1}{(n-1)!}\left\{4\pi\sin^2\frac{r}{2}\right\}^{n-1},$$

woraus wieder für $r = \pi$ das Gesamtvolumen des $(2n-2)$-dimensionalen elliptischen Hermiteschen Raumes hervorgeht**), während eine Differentiation nach r das zur sphärischen Mannigfaltigkeit gehörige Integral $\int d\omega_{2n-3}$ ergibt.

6.

Der Winkel zweier Gerader im elliptischen Hermiteschen Raume.

Im vorigen Paragraphen haben wir den Begriff des *Winkels* zweier Fortschreitungsrichtungen dx, δx entwickelt, also, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, den Begriff des „Winkels" zweier geodätischer Bänder mit (mindestens) einem gemeinsamen Punkt. Andrerseits hatten wir gesehen, daß (im ternären Gebiete) auch zu irgend zwei Geraden

*) Mit Hilfe der in § 14 dargelegten Abbildungsmethode.

**) Das in ähnlicher Weise zu berechnende Volumen des hyperbolischen Hermiteschen Raumes ist natürlich unendlich.

(also zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten) ein Begriff des *„Winkels“* gehört, der durch die Gleichungen

$$\cos\frac{1}{2}(u,v)=\frac{\sqrt{(u\bar v)(\bar u v)}}{\sqrt{(u\bar u)}\sqrt{(v\bar v)}},\quad \sin\frac{1}{2}(u,v)=\frac{\sqrt{(u\bar u)(v\bar v)-(u\bar v)(\bar u v)}}{\sqrt{(u\bar u)}\sqrt{(v\bar v)}}$$

erklärt und zum Begriff der Entfernung zweier Punkte vollkommen korrelativ ist. Eine für den Ausbau unserer Geometrie wichtige Frage ist nun sicher die nach dem Zusammenhang dieser beiden Begriffsbildungen.

Sehen wir zunächst von der Hermiteschen Maßbestimmung ganz ab, und bemerken wir, daß die ∞^3 Fortschreitungsrichtungen um einen Punkt x herum, wenn man je zwei gegenüberliegende (dx, $-dx$) zusammenfaßt, eindeutig-umkehrbar den ∞^3 Punkten eines reellen projektiven Punktkontinuums R_3 zugeordnet werden können. Je ∞^1 Richtungen (oder eigentlich Doppelrichtungen), die in derselben Geraden des komplexen Gebietes verlaufen, werden dabei ∞^1 Punkte zugeordnet, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Alle diese ∞^2 reellen Geraden (oder vielmehr reellen Ketten) des Bildraumes R_3 bilden eine Kongruenz 1. O. 1. Kl., ohne reelle Brennlinien. Jede solche Kongruenz gestattet aber eine siebengliedrige Gruppe reeller kollinearer Transformationen, die zwei nicht nur reell-, sondern auch analytisch-getrennte Scharen (g_7, h_7) umfaßt. Durch diese Gruppe nun, deren Struktur hier nicht weiter erörtert werden soll, werden die genannten ∞^3 Fortschreitungsrichtungen vertauscht, wenn man den Punkt x festhält und das komplexe Gebiet den dann noch möglichen ∞^{12} Kollineationen und Antikollineationen unterwirft.*)

Wie die sogenannte allgemeine projektive Gruppe, so ist auch noch unsere Gruppe Hermitescher Bewegungen (und Umlegungen) transitiv (§ 1). Ein beliebiger Punkt x bleibt bei einer Untergruppe (g_4, h_4) von (G_8, H_8) in Ruhe. Diese Untergruppe läßt nun aber im Bildraume nicht nur die genannte Kongruenz 1. O. 1. Kl., sondern überdies ein reelles Polarsystem in Ruhe, zu dem eine elliptische oder, nach doppelter Überdeckung des Bildraumes, sphärische Maßbestimmung vom Krümmungsmaß Eins gehört.

---

*) Bei der üblichen Darstellung, die die ∞^1 Fortschreitungsrichtungen in derselben Geraden nicht unterscheidet, würde nur eine sechsgliedrige zu g_7 meromorphe Gruppe zum Vorschein kommen. Die im Texte besprochenen Tatsachen sind aber auch sonst nicht ohne Bedeutung. Es gründet sich darauf z. B. eine Einteilung aller Punktkomplexe in drei große Familien, die wir bei anderer Gelegenheit auseinanderzusetzen gedenken.

Alle realen (im vierdimensionalen Gebiet reellen) analytischen Transformationen, die im Infinitesimalen projektiv oder antiprojektiv sind, bilden die vom Verfasser so genannte unendliche Gruppe der *synektischen* und *antisynektischen* Transformationen. Die synektischen Transformationen sind identisch mit den analytischen Transformationen von zwei *komplexen* Veränderlichen.

Dieses alles läßt sich ohne Mühe beweisen, und man kommt dann sofort zu dem folgenden Satz:

Der nur bis aufs Vorzeichen und mod. π (mod. 2π) bestimmte Winkel zweier Fortschreitungsrichtungen durch den Punkt x des ternären komplexen Gebietes ist identisch mit der in gleicher Weise unbestimmten Entfernung ihrer Bildpunkte im elliptischen (sphärischen) Raume R_3.

Und nun ergibt sich sogleich auch die Antwort auf die vorhin aufgeworfene Frage. Die erwähnte Kongruenz 1. O. 1. Kl. ist nämlich eine vom Verfasser so genannte parataktische Kongruenz, d. h., je zwei ihrer Geraden sind parataktische Gerade (Cliffordsche Parallele nach anderen Autoren), sie lassen ∞^1 gemeinsame Normalen zu, und bestimmen auf diesen Stücke von gleicher Länge. Vergleichen wir, von der elliptischen Maßbestimmung im Bildraume ausgehend, diese Länge ϑ mit dem Winkel Θ der beiden Geraden im komplexen Gebiet, über dessen Vorzeichen wir passend verfügen, so ergibt sich, als Antwort auf die gestellte Frage, die Formel

$$\Theta \equiv 2\vartheta \mod. \pi.$$

Den Hauptinhalt des Gesagten können wir etwa so ausdrücken:

Wenn zwei Gerade u, v des ternären Gebietes konjugiert sind, also den Winkel $\Theta \equiv \pi$ mod. 2π einschließen, so sind alle Fortschreitungsrichtungen dx von ihrem Schnittpunkt aus, die in der einen (u) verlaufen, senkrecht zu denen δx in der anderen (v) $\left(\vartheta \equiv \frac{\pi}{2} \text{ mod. } \pi\right)$.

In allen anderen Fällen gibt es zu jeder Richtung dx eine bestimmte δx, für die der Winkel $\vartheta = (dx, \delta x)$ einen absolut kleinsten Betrag erreicht. Dieser Betrag ist unabhängig von der Lage von dx auf der ersten Geraden u.

Der absolut kleinste Betrag des Winkels $\Theta = (u, v)$ beider Geraden ist das Doppelte des so bestimmten Winkels ϑ.

Wie in der gewöhnlichen Nicht-Euklidischen Geometrie, so kann man also hier, und ebenso natürlich auch im hyperbolischen Falle, den Begriff des Winkels zweier Geraden auf den korrelativen Begriff zurückführen. Zu beachten aber ist, daß für die Geraden ein dem üblichen entsprechender Orientierungsprozeß hier nicht eingeführt werden kann, da der Zusammenhang des Kontinuums aller ∞^2 Geraden durch denselben Punkt schon von vornherein der Zusammenhang einer Kugelfläche ist. Dagegen ist die Orientierung der ∞^3 einzelnen Fortschreitungsrichtungen, d. h. die Unterscheidung von je zwei entgegengesetzten, natürlich auch hier sachgemäß.

Ähnliches gilt, wenn $n > 3$.

7.

Die geodätischen Mannigfaltigkeiten und das Riemannsche Krümmungsmaß.

Wir betrachten jetzt ein ebenes Büschel von Fortschreitungsrichtungen, d. h. eine solche Mannigfaltigkeit, die im Bildraume R_3 des § 6 als reelle Gerade (Kette) erscheint. Setzen wir alle diese ∞^1 Richtungen geodätisch fort, so entsteht eine *geodätische Kongruenz*, deren Krümmungsmaß K_0 im Punkte x, dem Scheitel des Büschels, wir nunmehr bestimmen wollen.

Man sieht unmittelbar, daß die erklärte Kongruenz immer eine Kettenkongruenz ist. Ist sie nicht synektisch, so kann sie demnach durch eine Kollineation mit der Kongruenz der reellen Punkte zur Deckung gebracht werden, und man kann es überdies so einrichten, daß nachher die zur Maßbestimmung gehörige überall-positive Hermitesche Form in der Gestalt

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \xi_3\bar{\xi}_3 + k\cdot i\cdot(\xi_2\bar{\xi}_3 - \xi_3\bar{\xi}_2) \qquad \{k^2 < 1\}$$

erscheint. Ist dann $k = 0$, so hat man eine normale Kettenkongruenz vor sich; anderenfalls gibt es in der Kongruenz ein einziges Büschel von Ketten — das Büschel des Punktes $(1, 0, 0)$ — die geodätische Bänder sind: die Kongruenz kann dann nur auf *eine* Weise als geodätische Kongruenz aufgefaßt werden. Man erkennt nun leicht, daß die Kongruenz um den ausgezeichneten Punkt (ihr „Zentrum“ nach F. Schur) gedreht werden kann. Dieser hat also den Charakter eines Nabelpunktes, und er soll deshalb auch *Nabelpunkt* der Kongruenz genannt werden. Durch Einführung Gaußscher geodätischer Koordinaten ergibt sich sodann die für gewisse Rotationsflächen z. B. des gewöhnlichen (Euklidischen) Raumes charakteristische Form des Bogenelementes*)

$$ds^2 = du^2 + 4\sin^2\frac{u}{2}\left\{1 - k^2\sin^2\frac{u}{2}\right\}dv^2,$$

und für die Krümmung im Nabelpunkt der Wert

$$K_0 = \frac{1}{4}(1 + 3k^2).$$

Unsere Kongruenz enthält ferner, wenn $k \neq 0$, eine ausgezeichnete nicht-geodätische Kette, die nämlich, in der sie von der absoluten Polare

*) Übrigens kann man die Kongruenz nicht etwa auf eine *geschlossene* Rotationsfläche abbilden. Die (nur ideal-geschlossene) Bildfläche hat vielmehr eine glockenförmige Gestalt, mit einer Randkurve vom Radius $2\sqrt{1-k^2}$, deren diametral gegenüberliegende Punkte als äquivalent gelten müssen.

$\{\xi_1 = 0\}$ ihres Nabelpunktes durchdrungen wird. Für den Umfang oder die Länge S dieser Kette findet sich der Wert

$$S = 2\pi\sqrt{1-k^2}.$$

Diese Kette und ihre Länge kann man nun auch bestimmen, wenn irgend ein Büschel von Fortschreitungsrichtungen, etwa durch zwei unter ihnen, dx und δx, gegeben ist. (Vgl. S. 338.) So kommt man schließlich zu der folgenden Gleichung, die in *allen* Fällen die Lösung der gestellten Aufgabe enthält:

$$K_0 = \frac{A+B}{4A+B},$$

wo

$$A = (x\bar{x})\cdot(x\,dx\,\delta x)\,(\bar{x}\,d\bar{x}\,\delta\bar{x}),$$

$$B = -\left\{\begin{vmatrix}(x\bar{x}) & (x\delta\bar{x})\\ (dx\bar{x}) & (dx\,\delta\bar{x})\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}(\bar{x}x) & (\bar{x}\,\delta x)\\ (d\bar{x}x) & (d\bar{x}\,\delta x)\end{vmatrix}\right\}^2$$

niemals negative Größen sind.

Nebenbei aber haben sich die folgenden geometrischen Sätze ergeben:

Jede geodätische Kongruenz ist eine Kettenkongruenz und umgekehrt.

Unter ihnen haben konstantes Krümmungsmaß $\{1$ *und* $\frac{1}{4}$, *entsprechend den Fällen* $A = 0$ *und* $B = 0\}$ *nur die synektischen und die normalen Kettenkongruenzen. Jede von diesen ist auf* ∞^2 *Arten geodätische Kongruenz, jeder ihrer Punkte ist Nabelpunkt.*

Jede andere Kettenkongruenz ist nur auf eine Art geodätisch, sie hat also einen bestimmten Nabelpunkt. Bringt man dessen absolute Polare mit der Kongruenz zum Schnitt, so entsteht eine Kette, deren Länge S das Krümmungsmaß K_0 *der Kongruenz im Nabelpunkte bestimmt:*

$$K_0 = 1 - \frac{3}{4}\frac{S^2}{4\pi^2}.$$

Dieses Krümmungsmaß variiert also zwischen den Werten 1 *und* $\frac{1}{4}$, *die die geodätischen Kongruenzen konstanter Krümmung charakterisieren.*

Man ergänzt leicht:

Zwei geodätische Kongruenzen mit derselben Krümmung K_0 *im Nabelpunkt sind, wenn* $K_0 \neq 1, \frac{1}{4}$, *zu einander entweder kongruent oder symmetrisch, und zwar auf* ∞^1 *Arten. In den Grenzfällen* $K_0 = 1$ *und* $K_0 = \frac{1}{4}$ *sind sie beides zugleich, und zwar auf* ∞^4 *und* ∞^3 *Arten.*

Ferner sieht man, daß die geodätischen Kongruenzen mit gemeinsamem Nabelpunkt involutorisch gepaart sind: Jede Fortschreitungsrichtung in der einen, vom Nabelpunkt aus, steht senkrecht auf jeder Fortschreitungsrichtung in der anderen. In anderer Weise sind die geodätischen Kongruenzen überhaupt involutorisch gepaart, so nämlich, daß die absolute Polare zur Reziproken der einen die andere ist. Hierbei sind natürlich die von der Krümmung Eins, also die Geraden, auszunehmen, die singuläre Stellen dieser Transformation bilden. Die normalen Kettenkongruenzen sind mit sich selbst gepaart. Bei beiden Arten der Paarung haben gepaarte Kongruenzen (mindestens) einen Nabelpunkt gemein, und in diesem haben sie dasselbe Krümmungsmaß.

Ein bemerkenswertes Ergebnis findet sich auch, wenn man ein Bündel von ∞^2 Fortschreitungsrichtungen (dessen Bild im Raume R_3 irgend eine Ebene ist) geodätisch fortsetzt. Dann entsteht ein *geodätischer Komplex.* Von diesen Komplexen gilt der Satz:

Jeder geodätische Komplex ist ein spezieller Kettenkomplex. Irgend einer von ihnen ist Ort aller Punkte, die auf einer (beliebigen) Normalkette von Geraden liegen, und jeder dieser ∞^6 *besonderen Kettenkomplexe ist auf* ∞^1 *Arten geodätischer Komplex.*

Bringt man nämlich den Komplex zum Schnitt mit der absoluten Polare seines singulären Punktes (des Schnittpunktes der ∞^1 *erzeugenden Geraden), so erhält man eine Normalkette, die umgekehrt den Komplex bestimmt. Für jeden Punkt dieser geodätischen Kette ist der Komplex geodätischer Komplex.*

Es versteht sich, daß jeder dieser ∞^6 Komplexe auf ∞^2 Arten kongruent und symmetrisch zu ihm selbst und zu jedem anderen ist.

Da wir die Kettenkomplexe bisher nur beiläufig betrachtet haben, so sei noch kurz erwähnt, daß ein solcher Komplex, deren es ∞^7 gibt, eine Gruppe (g_9, h_9) von Kollineationen und Antikollineationen zuläßt, die bei passender (nur im allgemeinen eindeutiger) Abbildung des Komplexes auf das reelle Punktkontinuum R_3 als reelle projektive Gruppe erscheint. Die eine Schar von ∞^4 Ketten im Komplex wird dann durch gerade Linien wiedergegeben, die andere kann gleichzeitig den Kreisen in parallelen Ebenen zugeordnet werden (mit Einschluß von deren irreduzibelen Grenzlagen in der unendlich fernen Ebene). Den ∞^1 synektischen Kongruenzen (Geraden) im Komplexe entsprechen eben diese Ebenen (mit Einschluß der unendlich fernen), während die übrigen Ebenen des Raumes ∞^3 nichtsynektischen Kettenkongruenzen zugeordnet sind, die alle den singulären Punkt des Komplexes enthalten. In unserem Falle werden die geodätischen Ketten im Komplex als Sekanten einer im Endlichen, etwa senkrecht zu jenen Ebenen gelegenen Geraden abgebildet. Sie sind also auf ∞^1 geodätische Kongruenzen von der Krümmung $\frac{1}{4}$ verteilt.

8.

Kettentripel und Figuren abhängiger Punkte.

Für ein später zu besprechendes Problem aus der allgemeinen Theorie der projektiven Gruppen sind gewisse geometrische Örter von Bedeutung, deren einige wenigstens wir kurz besprechen wollen. Ein Teil des Vorzutragenden aber ist invariant gegenüber der Gruppe der Kollineationen und Antikollineationen überhaupt; solche Eigenschaften sollen daher zuerst betrachtet werden.

Die Diskriminante einer ternären Hermiteschen, wie wir annehmen wollen, in Linienkoordinaten bilinearen Form ist vom dritten Grade in deren Koeffizienten. Man hat daher eine Gleichung dritten Grades zu erörtern, wenn man die in einem Büschel $\sigma\Phi + \tau\Psi$ Hermitescher Formen enthaltenen von verschwindender Diskriminante untersuchen will. Ohne hierauf einzugehen, wollen wir sogleich annehmen, daß die Formen Φ und Ψ selbst Wurzeln jener Gleichung entsprechen und überdies, gleich Null gesetzt, (reale) Kettenkomplexe liefern*); ferner, daß sie eine sogleich genau zu bezeichnende spezielle gegenseitige Lage *nicht* haben. Dann gehört zur dritten Wurzel, wie sich findet, wiederum ein (realer) Kettenkomplex. Anders ausgedrückt, zwei Punktketten in allgemeiner Lage (und ebenso natürlich auch zwei Linienketten) bestimmen eindeutig eine dritte. Die präzise Fassung dieser Aussage führt zu folgendem Satz:

*Es mögen zwei übrigens beliebige Ketten in verschiedenen Geraden derart liegen, daß keine den Schnittpunkt dieser Geraden enthält.***) *Dann bestimmen diese Ketten eindeutig eine weitere Kette in einer dritten Geraden, und alle drei Ketten zusammen bilden ein Kettentripel, in dem jede Kette von den beiden übrigen auf dieselbe Art abhängt.*

Jede Gerade, die von zweien der drei Ketten je einen Punkt enthält, trifft auch die dritte Kette, und alle diese ∞^2 Geraden bilden die Basis eines Büschels Hermitescher Linienkomplexe. Umgekehrt wird jedes derartige Büschel, das drei und nur drei getrennte Kettenkomplexe enthält, auf diese Weise gefunden.

Die dritte Gerade (und damit auch die dritte Kette) wird konstruiert als Verbindungslinie der Spiegelbilder des Schnittpunktes der beiden ersten Geraden in bezug auf die zugehörigen Ketten.

Die Konstantenzahl dieser Figur ist 14, dieselbe, wie die eines Büschels Hermitescher Komplexe überhaupt. Bedeuten $\sigma_i : \tau_i$ Parameter

*) Die Bedingung hierfür haben wir in der Anmerkung auf Seite 339 angegeben.

**) Es ist hier überall nur von der ebenen Geometrie die Rede.

für die binären Gebiete der drei Geraden, so kann man es so einrichten, daß die Bedingung für geradlinige Lage dreier ihrer Punkte die Form annimmt

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\tau_2\tau_3 - \sigma_2\tau_3\tau_1 - \sigma_3\tau_1\tau_2 = 0,$$

und daß gleichzeitig den drei Ketten die *reellen* Parameterwerte entsprechen.

Erwähnung verdient vielleicht noch der Umstand, daß unter den nicht beschriebenen Grenzlagen der Figur „Kettentripel" die Figur von irgend drei Ketten auftritt, die in derselben Kettenkongruenz liegen und denselben Punkt enthalten. — Ein zweiter Satz verwandten Inhalts ist der folgende:

*Es mögen fünf übrigens beliebige Punkte so liegen, daß keine drei von ihnen durch eine Gerade und alle fünf nicht durch eine Kettenkongruenz verbunden werden können.**)

Dann gehen durch die fünf Punkte vier linear-unabhängige Hermitesche Komplexe, und alle diese enthalten noch einen sechsten Punkt, der folgendermaßen gefunden wird:

Man bestimme die Kettenkongruenz durch irgend vier der fünf Punkte, und deren Reziproke. Die eindeutig bestimmte Gerade u_5 dieser letzten Kongruenz, die den fünften Punkt enthält, geht dann immer auch noch durch den sechsten, der mithin als Schnittpunkt von fünf Geraden $u_1, \cdots, u_5$ bestimmt ist.

Befindet sich unter den genannten ∞^3 Komplexen kein Kettenkomplex, der seinen singulären Punkt in einem der fünf gegebenen hat, so ist der sechste Punkt von diesen allen verschieden, und beliebige fünf der sechs Punkte bestimmen den letzten auf dieselbe Weise.

Die Figur der sechs Punkte hat also dann die Eigenschaft, daß die Verbindungslinie von je zweien unter ihnen bestimmt ist und die (nach Voraussetzung ebenfalls bestimmte) Kettenkongruenz durch die vier übrigen Punkte in einer Kette durchdringt.

Tritt eine der beiden ausgeschlossenen besonderen Lagen ein, so wird der sechste Punkt ersichtlich unbestimmt. Enthält die Gerade u_5 einen einzelnen der Punkte $1, 2, 3, 4$, etwa den Punkt 1, so ist dieser Punkt singulärer Punkt eines Kettenkomplexes durch die übrigen vier Punkte 2, 3, 4, 5 und der sechste Punkt fällt mit ihm zusammen.

Im Falle von sechs durchaus verschiedenen Punkten kann man diesen, nachdem man sie in eine geeignete Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6 gebracht hat, immer semipositive Hermitesche Formen $(ui)\,(\overline{ui})$ derart zuordnen, daß die Identität

*) Darin liegt schon, daß höchstens vier von den fünf Punkten reell sein

$$(u1)(\overline{u1}) + (u3)(\overline{u3}) + (u5)(\overline{u5}) =$$
$$= (u2)(\overline{u2}) + (u4)(\overline{u4}) + (u6)(\overline{u6})$$

stattfindet, und daß überdies die zehnmal zwei Determinanten (135) und (246), (235) und (146), (125) und (346), usw., konjugiert-imaginäre Werte annehmen. Die Koeffizienten in den linearen Relationen

$$(135)(u2) = (235)(u1) + (125)(u3) + (132)(u5),$$
$$(135)(u4) = (435)(u1) + (145)(u3) + (134)(u5),$$
$$(135)(u6) = (635)(u1) + (165)(u3) + (136)(u5)$$

genügen dann den Gleichungen, die die automorphen linearen Transformationen einer auf ein Poldreieck bezogenen wesentlich-positiven Hermiteschen Form charakterisieren. (s. § 1.)

In diesen analytischen Tatsachen liegen die folgenden geometrischen Sätze:

Die beschriebene Figur von sechs verschiedenen Punkten hat die (für sie charakteristische) Eigenschaft, daß aus je zweien unter ihnen die übrigen vier durch zwei verschiedene antiprojektive (konjugiert-komplexe und zwar nicht-reelle) Würfe projiziert werden.

*Es seien also fünf Punkte derart gegeben, daß keine vier unter ihnen aus dem letzten durch einen reellen Wurf projiziert werden. Dann gehört zu jedem der fünf Punkte eine irreduzibele Kurve 2. Ordnung, Ort aller Punkte, aus denen die vier übrigen Punkte der Figur durch den konjugiert-imaginären Wurf projiziert werden. Diese fünf Kegelschnitte haben einen gemeinsamen Schnittpunkt, der von den fünf gegebenen Punkten verschieden ist. Die ganze so konstruierte Figur von sechs Punkten ist symmetrisch, d. h., je fünf unter ihnen bestimmen den sechsten auf dieselbe Art.**)

Dieselbe Figur von sechs verschiedenen Punkten kann auf zehn Arten aufgefaßt werden als Inbegriff zweier Poldreiecke eines Hermiteschen Polarsystems (von nicht verschwindender Diskriminante).

Umgekehrt bilden die Ecken zweier Poldreiecke eines solchen Polarsystems die besprochene Figur, wenn sie weder auf derselben normalen

*) Merkwürdigerweise scheint dieser einfache Satz der Aufmerksamkeit der Geometer bisher entgangen zu sein. Nahe genug daran ist man schon gewesen: Siehe A. Voss, Math. Ann. Bd. 15 (1879), S. 355 (berteffend eine Behauptung von Clebsch). — Der ganze im gegenwärtigen Paragraphen behandelte Stoff hat einen leicht hindurchzusehenden Zusammenhang mit Untersuchungen des Herrn Rosanes über abhängige Punktepaare (Journal f. Math. Bd. 88, 1880, S. 241 u. ff.). Vergleiche auch verwandte Untersuchungen des Herrn R. Sturm (Math. Ann. Bd. 1 und Bd. 22). Leider liegen die meisten Resultate in dieser Theorie bis jetzt nicht in einwandsfreier Fassung vor. Bei genügender Ausgestaltung würde jedoch die Theorie des Herrn Rosanes die im Texte entwickelte als besonderen Fall einschließen.

*Kettenkongruenz**) *liegen, noch eine Seite des einen eine Ecke des anderen enthält.*

Zu einem der zehn Polarsysteme gehören immer definite Hermitesche Formen, die zu den übrigen gehörigen sind indefinit.

Die Figur weist mehrfache Analogien zur Figur des Pascalschen Sechsecks auf**), die übrigens zwei Parameter mehr enthält.

Die erörterte Figur ist eine besonders bemerkenswerte unter einer umfassenderen Kategorie von Figuren der ebenen projektiven Geometrie, die wir nunmehr betrachten wollen.

Wir sagen, r von einander verschiedene Punkte seien (in bezug auf Hermitesche Punktkomplexe) *abhängig im Grade* s, oder sie haben „die Abhängigkeit s", wenn die Zahl aller hindurchgehenden linear-unabhängigen Hermiteschen Komplexe sich um s Einheiten größer erweist, als die mechanische Abzählung anzeigt, also den (natürlich niemals negativen) Wert hat:

$$9 - r + s.$$

Die Beschreibung aller dieser Figuren läuft im wesentlichen hinaus auf die Aufzählung der verschiedenartigen Durchschnittsgebilde von ternären Hermiteschen Komplexen, oder der Figuren, die die Basis einer linearen Mannigfaltigkeit von solchen Komplexen bilden. Sie läßt sich in gewissem Sinne *erschöpfend* bewerkstelligen. Es werden nämlich im genannten Falle s linear-unabhängige Gleichungen der Form

$$c_{i1}(ux_1)(\overline{ux}_1) + \cdots + c_{ir}(ux_r)(\overline{ux}_r) = 0$$

---

*) Eine (nicht-synektische) Kettenkongruenz von Punkten heißt nach unserer früheren Erklärung (S. 335) *normal* in bezug auf ein Hermitesches Polarsystem, wenn sie von diesem ein Poldreieck und folglich deren ∞^3 enthält.

Eine andere Erklärung ist folgende. Jede der ∞^8 nicht-synektischen Kettenkongruenzen von Punkten ist Ort der Doppelpunkte einer durch sie vollkommen bestimmten involutorischen Antikollineation. Ist nun diese, d. h. eine ganz beliebige involutorische Antikollineation (Antinvolution) vertauschbar mit der ebenfalls involutorischen Antikorrelation eines Hermiteschen Polarsystems (einer Antipolarität nach Segres Ausdruck), so ist die zugehörige Kongruenz in bezug auf dieses Polarsystem normal, und umgekehrt. Das gleiche gilt natürlich dann auch von der reziproken von geraden Linien gebildeten Kettenkongruenz, die Ort aller Doppelgeraden derselben Antikollineation ist.

**) Vgl. Leipz. Ber. 1895, S. 531 u. ff. Man sieht leicht, wie beide Reihen von Betrachtungen, unter Bewahrung ihrer Analogie, auf eine unbestimmte Dimensionenzahl ausgedehnt werden können. Im gewöhnlichen Raume z. B. stellt sich neben die bekannte von $2 \cdot 21$ Konstanten abhängige (Hessesche) Figur von acht Punkten eine analoge (imaginäre) mit 39 Konstanten. Verbindet man in dieser zweimal zwei der acht Punkte mit den vier übrigen durch Ebenen, so entstehen in beiden Ebenenbüscheln stets zwei konjugiert-imaginäre Würfe.

bestehen müssen, mit reellen Koeffizienten c_{ik}. Läßt man nun alle Gleichungssysteme der Art weg, die additiv aus solchen zusammengesetzt werden können, die eine geringere Zahl von Punkten enthalten, so bleiben nur wenige übrig, die im folgenden aufgezählt und kurz charakterisiert werden sollen. Die Abhängigkeit s ist in allen diesen Fällen gleich *Eins*. Das Symbol ∞^m bezeichnet jedesmal die Konstantenzahl (m) der Figur.

[0] $\cdots$ [4]. Irgend $10-k$ abhängige Punkte ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), deren je $9-k$ unabhängig sind. $\infty^{5(8-k)}$.

Die $10-k$ Punkte liegen auf k linear-unabhängigen Hermiteschen Komplexen, und je $9-k$ unter ihnen sind in ihrer Veränderlichkeit nur durch *Ungleichungen* beschränkt.

Die dem Falle $k=4$ entsprechende Figur ist die Figur der zuvor genauer betrachteten sechs Punkte.

[3b.] Irgend *sieben* Punkte einer (nicht-synektischen) Kettenkongruenz, von denen je sechs unabhängig sind. (Vgl. Nr. [4b.].) ∞^{22}.

Jeder Hermitesche Komplex durch sechs der sieben Punkte ist ein Kettenkomplex, und enthält die Kongruenz. Alle diese Komplexe bilden ein Bündel, wie auch im Falle [3], wo an Stelle der Kongruenz jedoch ein irreduzibeles oder zerfallendes Band die Basis des zugehörigen Bündels ist.

[4b.] Irgend *sechs* Punkte eines Kettenkegelschnittes, von denen je fünf unabhängig sind. (Vgl. Nr. [5.].) „*Kettenkegelschnitt*" nennen wir jedes irreduzibele oder zerfallende Band in einer Kettenkongruenz, das bei Überführung dieser Kongruenz in die Kongruenz der reellen Punkte übergeht in den reellen Zug einer reellen Kurve 2. Ordnung. ∞^{19}.

Wie im Falle [4] isolierter Punkte gibt es vier linear-unabhängige Hermitesche Komplexe durch fünf der sechs Punkte, diese alle aber enthalten den Kettenkegelschnitt.

[5.] Irgend *fünf* Punkte einer Geraden, von denen je vier unabhängig sind. (Vgl. Nr. [6.].) ∞^{14}.

Vier der fünf Punkte, und mit ihnen die Gerade, liegen auf fünf linear-unabhängigen Hermiteschen Komplexen, die sämtlich Kettenkomplexe sind.

[6.] Irgend *vier* Punkte einer Kette. ∞^{11}. Durch je drei der vier Punkte und folglich durch die Kette gehen sechs linear-unabhängige Hermitesche Komplexe.

(Man vergleiche hiermit die analogen Entwicklungen in des Verfassers *Geometrie der Dynamen*, S. 326 u. ff., insbesondere S. 351.)

9.

Das Auftreten von abhängigen Punktfiguren und Kettentripeln in der Hermiteschen Maßgeometrie.

Die Bedeutung, die den im vorigen Paragraphen beschriebenen Figuren in unserer Maßgeometrie zukommt, wird in dem hier allein behandelten elliptischen Fall aus dem folgenden nahe liegenden Satz ersichtlich:

Sind $x, y_1, \cdots, y_k$ irgend welche Punkte der Ebene, und besteht eine Gleichung der Form

$$c_0 + c_1 \cdot \cos(x, y_1) + \cdots + c_k \cdot \cos(x, y_k) = 0$$

für i unabhängige Punkte $x = x_1, x_2, \cdots, x_i$, die durch einen weiteren x_0 zu einer Figur abhängiger Punkte ergänzt werden können, so besteht dieselbe Gleichung auch noch für diesen Punkt x_0.

Eine Reihe nicht unwichtiger geometrisch erklärter Örter sind durch eine oder mehrere Gleichungen der genannten Form darstellbar. Namentlich kann die Gleichung jedes beliebigen Hermiteschen Komplexes mit Hilfe höchstens dreier Punkte y_i in diese Form gesetzt werden. *Hierhin gehört u. a. der Ort aller Punkte, die von zwei, drei, $\cdots$ verschiedenen Punkten gleichweit entfernt sind.* Der erste dieser Örter ist ein leicht zu deutender geodätischer Kettenkomplex (S. 345), der zweite eine der zu Büscheln Hermitescher Komplexe gehörigen Basiskongruenzen, die, im Falle die drei gegebenen Punkte in gerader Linie liegen, in zwei Gerade zerfällt. Insbesondere gehört zu den erwähnten Örtern natürlich *jede sphärische Mannigfaltigkeit* (S. 336). Es folgt also u. a., daß jede von diesen, die *fünf* gegebene Punkte enthält, noch mindestens einen weiteren enthalten wird.

Wir wollen nun noch einige besondere Fälle der zu Eingang des § 8 besprochenen Figur betrachten.

Zunächst bemerken wir, daß irgend eine Kette von Punkten geodätisch oder also eine Normalkette ist, wenn der Kettenkomplex der sie treffenden Geraden konjugiert ist zu dem (in unserem Falle idealen) absoluten Komplex, d. h., bei der hier zugrunde gelegten kanonischen Form, wenn die Koeffizienten α_{ik} in der Gleichung des Kettenkomplexes der linearen Bedingung $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$ genügen. Hieraus folgt unmittelbar, daß zugleich mit zwei Ketten eines Tripels immer auch die dritte geodätisch sein muß.

Haben also zwei geodätische Bänder im vierdimensionalen elliptischen Hermiteschen Raum allgemeine Lage, d. h. liegen sie auf verschiedenen Geraden so, daß keines deren Schnittpunkt enthält, so bestimmen sie eindeutig ein drittes geodätisches Band.

Ferner beachten wir, daß jede Kette auf zwei Arten als ein spezieller geodätischer Kreis (orthogonale Trajektorie eines Büschels geodätischer Bänder) aufgefaßt werden kann; wir kommen dann leicht zu dem Satz:

Bilden die Geraden der Ketten eines Tripels ein Poldreiseit des absoluten Polarsystems, so sind die drei Ketten solche geodätische Kreise, die ihre Mittelpunktpaare in je zwei Ecken des Dreiseits haben.

Das auf irgend einer von den ∞^2 gemeinsamen Sekanten der drei Ketten durch diese bestimmte Dreieck hat in diesem Falle eine unveränderliche Gestalt.

Treten die Voraussetzungen der beiden letzten Sätze zugleich ein, so ergibt sich eine besonders merkwürdige Figur:

Beschreibt man um je zwei Ecken eines Poldreiecks des absoluten Polarsystems auf dessen Seiten geodätische Kreise vom Radius $\frac{\pi}{2}$, so entstehen drei Ketten, die ein Tripel bilden, und zugleich geodätisch sind.

Die ∞^2 Sekanten der drei Ketten bilden dann den Ort aller Geraden, die mit den Seiten des Poldreiecks (absolut-)gleiche Winkel bilden, oder von dessen Ecken gleiche Abstände haben.

Die drei Schnittpunkte einer solchen Sekante mit den drei Ketten aber liegen wieder in einer geodätischen Kette und teilen deren Umfang (2π) in drei gleiche Stücke.

Diese ∞^2 geodätischen Ketten treffen ferner die drei Ketten des Tripels unter rechten Winkeln.

Eine Erläuterung bedarf hier wohl noch der Begriff des Abstandes (u, x) eines Punktes x von einer Geraden u. Wir verstehen darunter natürlich das Supplement zur Entfernung des Punktes x vom absoluten Pol von u, so daß

$$\sin \frac{1}{2}(u, x) = \frac{\sqrt{(u x)(\overline{u x})}}{\sqrt{(u \overline{u})}\sqrt{(x \overline{x})}}.$$

Liegt x weder auf der Geraden u selbst, noch in deren absolutem Pol $z = \overline{u}$, so ist der Abstand (u, x) — als absolute Größe betrachtet — das *Minimum* aller Entfernungen zwischen x und einem veränderlichen Punkt y von u, und zugleich *stationärer Wert* dieser Entfernung (x, y): Fällt y in den der Voraussetzung nach bestimmten Schnittpunkt von u und $\widehat{xz}$, so ändert sich die Entfernung (x, y) um eine Größe höherer Ordnung, wenn die Koordinaten von y sich um Größen erster Ordnung ändern. Die bezeichnete Lage von y kann natürlich „Fußpunkt" des von x auf u gefällten „Lotes" genannt werden. (Das Maximum von abs. (x, y) ist π, also unabhängig von der Lage des Punktes x, und *nicht* stationärer Wert.)

10.

Elliptische Hermitesche Räume, die in gewöhnlichen elliptischen enthalten sind.

Bis zu diesem Punkte haben wir uns ausschließlich der elementaren Methoden bedient, die sich zunächst darzubieten scheinen. Da nun aber bei Zerspaltung der homogenen Koordinaten in ihre reellen und imaginären Bestandteile der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes sich als eine definite quadratische Differentialform erweist, so drängt sich die Frage auf, ob man nicht in irgend einer höheren Mannigfaltigkeit konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes eine Punktmannigfaltigkeit M_4 derart bestimmen kann, daß die gewöhnliche Euklidische oder Nicht-Euklidische Geometrie auf ihr mit der Hermiteschen Geometrie im ternären komplexen Gebiet zusammenfällt. Dies läßt sich nun wirklich in der wohl denkbar vollkommensten Weise erreichen, und zwar auf unendlich viele wesentlich-verschiedene Arten. Die einfachste dieser Abbildungsmethoden wollen wir nunmehr auseinandersetzen.

Wir bemerken zunächst, daß je zwei Hermitesche Formen mit kontragredienten Veränderlichen

$$(u\alpha)(\overline{u\alpha}) = \sum \alpha_{ik} u_i \bar{u}_k \qquad \{\alpha_{ik} = \bar{\alpha}_{ki}\},$$

$$(ax)(\overline{ax}) = \sum a_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad \{a_{ik} = \bar{a}_{ki}\}$$

gegenüber beliebigen Kollineationen und Antikollineationen (wie auch Korrelationen und Antikorrelationen) eine bilineare Invariante

$$(a\alpha)(\overline{a\alpha}) = \sum \alpha_{ik} a_{ik}$$

haben, deren Verschwinden das „Konjugiertsein" beider Formen, oder eigentlich der zugehörigen Komplexe oder Polarsysteme ausdrückt. Wir bringen ferner in Erinnerung die bis jetzt von uns nur im besonderen Falle benutzte Paarung dieser Formen oder wieder eigentlich ihrer Polarsysteme: Geht man etwa von der Form $(ax)(\bar{a}\bar{x})$ aus, und nimmt man an, daß deren Diskriminante

$$J = \frac{1}{6}(a a' a'')(\bar{a}\bar{a}'\bar{a}'') = |a_{ik}|$$

nicht verschwindet, so geht aus der Kovariante

$$\frac{1}{2}(a a' u)(\bar{a}\bar{a}'\bar{u}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \{\bar{a}_{ik} = a_{ki}\}$$

abgesehen vom reellen Faktor J die ursprüngliche Form wieder durch den gleichen Prozeß hervor, durch den die Kovariante selbst entstanden war. —

Wir deuten jetzt, mit C. Segre (vgl. Seite 323), irgend welche neun linear-unabhängige und (in ihren Werten, nicht Koeffizienten) *reelle* lineare Verbindungen der Größen α_{ik} als *homogene Punktkoordinaten in einem Gebiete neunter Stufe oder einem „Raum" R_8 von acht Dimensionen.* Dadurch geht aus der Gruppe der ∞^{16} Kollineationen und Antikollineationen des ternären Gebietes eine holoedrisch isomorphe Gruppe von *reellen* Kollineationen in R_8 hervor, und es ist klar, daß invariant gegenüber Transformationen beider Gruppen mit der bezeichneten Abbildung eine andere verbunden ist, die man erhält, wenn man geeignete Verbindungen der Größen a_{ik} als homogene Koordinaten eines linearen R_7 in R_8 deutet. Die zweite Abbildung wird nämlich aus der ersten durch die Forderung abgeleitet, daß der vereinigten Lage eines Punktes X und eines R_7, U, in R_8 das Konjugiertsein der zugeordneten Hermiteschen Polarsysteme entsprechen soll. Diese Bedingung wird z. B., und zwar in der für das folgende zweckmäßigsten Weise, erfüllt durch die folgenden Koordinatenwerte:

$$X_{11} = \alpha_{11}, \quad \sqrt{2}\, X_{23} = \alpha_{23} + \bar{\alpha}_{23}, \quad \sqrt{2}\cdot i \cdot X_{32} = \alpha_{23} - \bar{\alpha}_{23},$$
$$U_{11} = a_{11}, \quad \sqrt{2}\, U_{23} = \bar{a}_{23} + a_{23}, \quad \sqrt{2}\cdot i \cdot U_{32} = \bar{a}_{23} - a_{23},$$

usw.; denn daraus folgt sofort:

$$(UX) = \sum U_{ik} X_{ik} = \sum a_{ik} \alpha_{ik} = (a\alpha)(\bar{a}\bar{\alpha}).$$

Vermöge dieser Gleichungen also entspricht in R_8 jedem Hermiteschen Polarsystem von nicht-verschwindender Diskriminante sowohl ein Punkt als auch ein linearer R_7, und beide sind invariant-gepaart gegenüber der bezeichneten Gruppe von $2 \cdot \infty^{16}$ reellen Kollineationen.

Zu den Formen der ersten und zweiten Art, deren Diskriminante verschwindet, deren (in den Koeffizienten) quadratische Kovariante aber nicht identisch verschwindet, und auch nicht semidefinit ist, gehören die (realen) Punkt- und Linienketten: Die realen Punktketten z. B. werden eindeutig umkehrbar zugeordnet den ∞^7 Punkten eines unschwer näher zu beschreibenden Gebietes auf der reellen kubischen Mannigfaltigkeit

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} X_{11} & X_{12} + i X_{21} & X_{31} - i X_{13} \\ X_{12} - i X_{21} & \sqrt{2} X_{22} & X_{23} + i X_{32} \\ X_{31} + i X_{13} & X_{23} - i X_{32} & \sqrt{2} X_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Mannigfaltigkeit M_7^3 nun enthält eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sechster Ordnung M_4^6, die ganz aus Doppelpunkten von M_7^3 besteht und gefunden wird, wenn man die Hermitesche Form $(u\alpha)(u\bar{\alpha})$ noch weiter ausarten läßt $\left\{\frac{1}{2}(\alpha\alpha' x)(\bar{\alpha}\bar{\alpha}'\bar{x}) = 0\right\}$, deren Punkte X also den ∞^4 Punkten x des ternären Gebietes eindeutig-umkehrbar zugeordnet sind vermöge der Gleichungen

$$X_{11} = x_1\bar{x}_1, \quad \sqrt{2}\, X_{23} = x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3, \quad \sqrt{2}\cdot i\cdot X_{32} = x_2\bar{x}_3 - \bar{x}_2 x_3,$$

usw., oder der Gleichungen

$$\begin{aligned} & x_1 : x_2 : x_3 = \\ = & \sqrt{2} X_{11} : X_{12} - i X_{21} : X_{31} + i X_{13} = \\ = & X_{12} + i X_{21} : \sqrt{2} X_{22} : X_{23} - i X_{32} = \\ = & X_{31} - i X_{13} : X_{23} + i X_{32} : \sqrt{2} X_{33}.\text{*)} \end{aligned}$$

Das hiermit erklärte vollkommen singularitätenfreie Gebilde M_4^6 bestimmt natürlich auch umgekehrt die Mannigfaltigkeit M_7^3 und deren Gruppe von $2\cdot\infty^{16}$ Kollineationen. M_7^3 ist Ort aller Punkte, die auf reellen Sehnen (oder Tangenten) von M_4^6 liegen, und zwar erfüllen die Tangenten, nach Ausschluß ihrer Berührungspunkte, das oben bezeichnete Gebiet auf M_7^3.

Als Bilder der ∞^2 Punkte irgend einer Geraden erscheinen jetzt die reellen Punkte irgend einer von ∞^4 auf M_4^6 verlaufenden Flächen 2. Ordnung vom Zusammenhang der Kugel, und in allen Punkten dieser Fläche wird M_7^3 von dem linearen R_7 berührt, der der Geraden in der korrelativen Abbildung entspricht. M_7^3 enthält daher ∞^4 lineare R_3 (und keine weiteren.) Als Bilder der ∞^2 Punkte einer nicht-synektischen Kettenkongruenz erscheinen ferner die Punkte einer von ∞^2 Kegelschnitten beschriebenen sogenannten rationalen Normalfläche 4. Ordnung, die in einem linearen R_5 verläuft. Jeder der ∞^2 Kegelschnitte enthält die Bilder der Punkte einer Kette, und liegt daher auf einer bestimmten jener Flächen 2. Ordnung. Ort der Pole der Ebenen der ∞^2 Kegelschnitte in bezug auf die zugehörigen Flächen aber ist eine Ebene, deren Punkte hiermit den ∞^2 Punktketten in der Kettenkongruenz zugeordnet sind. Die reelle M_7^3 enthält also außer den $\infty^4\cdot\infty^3$ Ebenen auf den ∞^4 linearen R_3 noch andere Ebenen, in achtfach unendlicher Zahl; und sie

---

*) Die entsprechenden Gleichungen für die korrelative Mannigfaltigkeit M_4^6 gehen hieraus hervor durch Vertauschung der Zeichen x, X, i mit u, U, $-i$. Die Irrationalität $\sqrt{2}$ ist eingeführt, um diese Einfachheit des Zusammenhangs zwischen beiden Gleichungssystemen zu erreichen.

enthält im ganzen ∞^{10} gerade Linien, von denen ∞^8 Sehnen (mit reellen oder konjugiert-imaginären Schnittpunkten) und ∞^7 Tangenten von M_4^6 sind. —

Die M_4^6 erweist sich nunmehr als partieller Durchschnitt von neun linear-unabhängigen quadratischen Mannigfaltigkeiten, nämlich den ersten Polaren aller Punkte von R_8 in bezug auf M_7^3, und es zeigt sich, daß M_4^6 auf diese Weise erschöpfend definiert ist. Jedem nicht auf M_7^3 gelegenen Punkte, zum Beispiel dem Bilde unseres absoluten Polarsystems $(u\bar{v}) = 0$, also dem Punkte O, dessen Gleichung

$$U_{11} + U_{22} + U_{33} = 0$$

ist, wird auf solche Art eine völlig bestimmte quadratische Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Determinante zugeordnet, in unserem Beispiel diese:

$$(FX)^2 = \left\{\begin{array}{l} X_{23}^2 + X_{32}^2 - 2X_{22}X_{33} \\ + X_{31}^2 + X_{13}^2 - 2X_{33}X_{11} \\ + X_{12}^2 + X_{21}^2 - 2X_{11}X_{22} \end{array}\right\} = 0.$$

Andrerseits entspricht nach obigem demselben Punkt auch ein bestimmter R_7, nämlich die zweite Polare des Punktes O in bezug auf M_7^3, im Beispiel also die lineare Mannigfaltigkeit

$$(\Phi X) = X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0.$$

Jetzt folgt, daß bei der ganzen projektiven Gruppe $(\mathfrak{G}_8, \mathfrak{H}_8)$, *die M_4^6 und außerdem den Punkt O in Ruhe läßt, jede einzelne Mannigfaltigkeit des Büschels*

$$(AX)^2 = (FX)^2 + \lambda(\Phi X)^2 = 0$$

in Ruhe bleibt. Eine solche Mannigfaltigkeit ist aber absolutes Gebilde einer projektiven Maßbestimmung, und zwar einer elliptischen (und sphärischen), solange $(AX)^2 = 0$ keine reellen Punkte hat, solange mithin, als $\lambda > \frac{2}{3}$ ist.

Es ergibt sich also, daß die zur Gruppe (G_8, H_8) der elliptischen Hermiteschen Bewegungen und Umlegungen holoedrisch isomorphe reelle projektive Gruppe $(\mathfrak{G}_8, \mathfrak{H}_8)$ auf ∞^1 Arten als Untergruppe eine Gruppe elliptischer Bewegungen im Raume R_8 aufgefaßt werden kann.

Sind nun X, Y irgend zwei Punkte auf M_4^6, die den Punkten x, y des ternären Gebietes entsprechen, so findet sich für die zugehörige Polare $(AX)(AY)$ von $(AX)^2$ der Wert

$$(AX)(AY) = (FX)(FY) + \lambda(\Phi X).\Phi(Y) =$$
$$= (x\bar{y})(\bar{x}y) + (\lambda - 1)\cdot(x\bar{x})\cdot(y\bar{y}),$$

und es ergibt sich also, wenn allgemein $\sqrt{(AZ)^2} = \sqrt{\lambda} \cdot (z\bar{z})$ erklärt wird, die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{(AX)(AY)}{\sqrt{(AX)^2}\sqrt{(AY)^2}}\right\} = \frac{1}{2\lambda}\left\{1 - \frac{(x\bar{y})(\bar{x}y)}{(x\bar{x})\cdot(y\bar{y})}\right\}.$$

Setzen wir daher jetzt das Krümmungsmaß $\mathfrak{K}$ des elliptischen Raumes R_8 gleich $\frac{1}{2\lambda}\left(\lambda > \frac{2}{3}\right)$, so erhalten wir, nach willkürlicher Entscheidung über das Vorzeichen einer Quadratwurzel, die Gleichung

$$\boxed{\sin\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{(X,Y)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\sin\frac{(x,y)}{2},}$$

die zeigt, daß die Cayleysche Entfernung (X, Y) der Punkte X, Y *lediglich* von der Hermiteschen Entfernung (x, y) der Punkte x, y abhängt. Dabei ist der Faktor des Sinus rechts < 1, und es ist daher am einfachsten, die Entfernung (X, Y) nicht als eine periodische Funktion zu betrachten, sondern auf Werte einzuschränken, die absolut nicht größer als der Hauptwert von $2\sqrt{2\lambda}$ arc sin $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ sind. Nunmehr ergibt sich Gleichheit entsprechender Bogenelemente dS und ds auf M_4^6 und im ternären Gebiet:

$$dS = \sqrt{2\lambda}\cdot\frac{\sqrt{(AX)^2\cdot(AdX)^2 - \{(AX)(AdX)\}^2}}{(AX)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{(x\bar{x})\cdot(dx\,d\bar{x}) - (x\,d\bar{x})(\bar{x}\,dx)}}{(x\bar{x})} = ds.$$

Es hat sich also gezeigt, daß die elliptische Hermitesche Maßbestimmung — die nicht zu denen von konstantem Riemannschem Krümmungsmaß gehört — als Ausschnitt aus einer gewöhnlichen elliptischen Maßbestimmung im projektiven Punktkontinuum R_8 von acht Dimensionen angesehen werden kann.

Das Krümmungsmaß $\mathfrak{K} = \frac{1}{2\lambda}$ des elliptischen Raumes kann ***innerhalb*** *der Schranken 0 und $\frac{3}{4}$ beliebig gewählt werden. Dann ist, abgesehen von Bewegungen und Umlegungen eindeutig, eine vierdimensionale singularitätenfreie rationale und reelle Mannigfaltigkeit M_4^6 in R_8 bestimmt, auf die der elliptische Hermitesche Raum unter Gleichheit entsprechender Bogenelemente vollkommen-eindeutig-umkehrbar abgebildet werden kann.*

Den ∞^{16} Kollineationen und Antikollineationen im ternären Gebiet entsprechen dann alle Kollineationen in R_8, die M_4^6 in Ruhe lassen, und insbesondere entsprechen den ∞^8 Bewegungen und Umlegungen im Hermiteschen Raume zwei Scharen von Bewegungen im elliptischen Raume R_8, die M_4^6 in Ruhe lassen.

Die analytische Darstellung der genannten Kollineationsgruppen in R_8 ergibt sich natürlich ohne weiteres aus der bekannten Darstellung der entsprechenden Gruppen des ternären Gebietes. (§ 1.)

Zu beachten ist noch, daß M_4^6 auf einer siebendimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit $(FX)^2 = 0$ liegt, deren Radius

$$(O,\, X) = \sqrt{2\lambda} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{2}{3\lambda}}$$

ist, und *deren Krümmungsmaß also den von* $\mathfrak{K}$ *unabhängigen Wert* $\frac{3}{4}$ *hat.* (Vgl. § 11.)

Alle sphärischen Mannigfaltigkeiten des Büschels, zu dem diese eine gehört, und mit ihnen ∞^1 zu M_4^6 projektive und perspektiv liegende Mannigfaltigkeiten, bleiben bei den genannten Bewegungen der Gruppe $(\mathfrak{G}_8, \mathfrak{H}_8)$ ebenfalls in Ruhe.

Es versteht sich, daß nunmehr alle Sätze über die elliptische Hermitesche Maßgeometrie als Sätze über die Maßgeometrie auf der krummen Mannigfaltigkeit M_4^6 *ausgedrückt werden können. Es folgt z. B., daß sämtliche (reellen) geodätischen Linien auf* M_4^6 *Kreise vom Umfange* 2π *sind.* Als Bilder der ∞^4 geraden Linien im ternären Gebiet erscheinen nämlich ∞^4 (Riemannsche) Kugelflächen, deren jede das Krümmungsmaß Eins und daher den Radius

$$\sqrt{2\lambda} \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

hat. Die $\infty^4 \cdot \infty^3$ Kreise auf diesen Kugeln sind die Bilder der Ketten; die $\infty^4 \cdot \infty^2$ größten Kreise darunter sind die Bilder der Normalketten; sie sind nicht nur geodätische Linien auf den zugehörigen Kugeln, sondern auch auf M_4^6 selbst. — Das Volumen von M_4^6 hat den Wert $8\pi^2$, das Riemannsche Krümmungsmaß (die Krümmung einer geodätischen Fläche in ihrem Nabelpunkt oder in einem ihrer Nabelpunkte) variiert zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{4}$, usw. usw. (Vgl. § 5 und § 7.)

Übrigens lassen sich auch umgekehrt alle Begriffe und Formeln der elliptischen Geometrie in R_8 (nicht etwa nur die auf M_4^6 bezüglichen) in das ternäre Gebiet übertragen, worauf wir indessen nicht weiter eingehen wollen.

11.

Grenzfälle. Elliptische Hermitesche Räume, die in gewöhnlichen Euklidischen oder hyperbolischen enthalten sind.

Ein besonderes Interesse haben gewisse bisher ausgeschlossene Grenzfälle der betrachteten Abbildung.

Lassen wir zunächst den Parameter λ über alle Grenzen wachsen, so geht die elliptische Maßbestimmung im Raume R_8 in eine gewöhnliche Euklidische über, deren Längeneinheit durch die für je zwei Punkte X, Y von M_4^6 geltende Gleichung

$$(X, Y) = 2 \sin \frac{1}{2} (x, y)$$

vollkommen bestimmt ist. Als Ausdruck für die Euklidische Entfernung zweier im Endlichen gelegener, aber übrigens ganz beliebiger Punkte X, Y ergibt sich die Formel:

$$(X, Y) = \frac{\sqrt{2\{(FX)(\Phi Y) - (FY)(\Phi X)\}^2}}{(\Phi X)\cdot(\Phi Y)}.$$

Es kommt daher als Ergänzung zu dem Satze des vorigen Paragraphen der folgende weitere:

Der elliptische Hermitesche Raum läßt sich mit Gleichheit entsprechender Bogenelemente auch auf eine reelle Mannigfaltigkeit M_4^6 abbilden, die in einem Euklidischen Raum von acht Dimensionen, und zwar auf einer in diesem gelegenen siebendimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit vom Radius

$$(O, X) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

verläuft.

Die ∞^4 Geraden werden dann abgebildet auf Kugeln vom Radius Eins, und die größten Kreise auf diesen Kugeln, die Bilder der ∞^6 Normalketten, sind zugleich die geodätischen Linien auf M_4^6.

Die Hermiteschen Bewegungen und Umlegungen werden übertragen als Euklidische Bewegungen und Umlegungen, die M_4^6, und außerdem den Mittelpunkt O der genannten sphärischen Mannigfaltigkeit (und natürlich diese selbst) in Ruhe lassen. Den Kollineationen und Antikollineationen im ternären Gebiet überhaupt aber entsprechen die $2\cdot\infty^{16}$ reellen automorphen Kollineationen von M_4^6.

Ein zweiter interessanter Grenzwert entspricht dem Parameter $\lambda = \frac{2}{3}$. Jetzt wird die quadratische Form $(AX)^2$ semidefinit, nämlich als Summe von acht (statt neun) positiven Quadraten darstellbar. Man wird in diesem Grenzfall, in dem es im Raume R_8 unendlich viele gleichlange Wege zwischen zwei Punkten gibt, die Mannigfaltigkeit M_4^6 aus dem reellen singulären Punkt O der Mannigfaltigkeit $(AX)^2 = 0$ auf die lineare Mannigfaltigkeit $(\Phi X) = 0$ projizieren, und so die Dimensionenzahl des zur Abbildung benutzten linearen Raumes noch um eine [illegible] drücken. Analytisch geschieht das am Einfachsten so, daß [illegible] der neun homogenen Koordinaten X_{ik} zunächst deren zehn einführt, die durch eine Gleichung

$$\Xi_{11} + \Xi_{22} + \Xi_{33} = 0$$

verbunden sind, nämlich $\Xi_{ik} = X_{ik}$ $\{i \neq k\}$, und außerdem etwa die Größen

$$\Xi_{00} = X_{11} + X_{22} + X_{33},$$

$$\Xi_{11} = \frac{1}{3}\{X_{22} - X_{33}\}, \quad \Xi_{22} = \frac{1}{3}\{X_{33} - X_{11}\}, \quad \Xi_{33} = \frac{1}{3}\{X_{11} - X_{22}\}.$$

Läßt man dann Ξ_{00} weg, so hat man M_4^6 in eine Mannigfaltigkeit M_4^6 projiziert, die in einem projektiven Punktkontinuum R_7 liegt. Die zugehörige (nicht mehr auto-korrelative) Kollineationsgruppe (Γ_8, H_8) läßt M_4^6, außerdem aber das zu der positiven quadratischen Form

$$(AX)^2 + \frac{2}{3}(\Phi X)^2 = \sum \Xi_{ik}^2 = (\Omega\,\Xi)^2$$

gehörige Polarsystem in Ruhe. Setzt man das Krümmungsmaß der zugehörigen elliptischen Maßbestimmung $= \frac{3}{4}$, so werden wieder entsprechende Bogenelemente $d\Sigma$ (auf M_4^6) und ds (im ternären Gebiet) einander gleich,

$$d\Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(\Omega\Xi)^2 \cdot (\Omega d\Xi)^2 - \{(\Omega\Xi)(\Omega d\Xi)\}^2}}{(\Omega\Xi)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{(x\bar{x}) \cdot (dx\,d\bar{x}) - (x\,d\bar{x})(\bar{x}\,dx)}}{(x\bar{x})} = ds,$$

und außerdem wird die Entfernung (Ξ, H) zweier Punkte Ξ, H auf M_4^6 eine einfache Funktion ihrer geodätischen Entfernung oder also des Abstandes ihrer Bildpunkte x, y:

$$\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(\Xi, \mathsf{H})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{(x, y)}{2}.$$

Man ergänzt das Gesagte leicht zu dem folgenden Satz:

Das komplexe ternäre Gebiet läßt sich auf eine (von reellen kollinearen Umformungen abgesehen) e i n z i g e Weise auf eine reelle (übrigens auch im Imaginären) singularitätenfreie Punktmannigfaltigkeit M_4^6 *des siebenfach ausgedehnten projektiven Punktkontinuums so abbilden, daß* M_4^6 *eine reelle Kollineationsgruppe* (Γ_8, H_8) *gestattet (und bestimmt), die auf die Gruppe* (G_8, H_8) *eines vorgelegten elliptischen Hermiteschen Polarsystems holoedrisch isomorph bezogen ist.*

Die Gruppe (Γ_8, H_8) *kann auf eine einzige Weise aufgefaßt werden als eine Gruppe elliptischer Bewegungen und Umlegungen.*

Legt man dem Krümmungsmaß der zugehörigen elliptischen Maßbestimmung den Wert $\frac{3}{4}$ *bei, so werden entsprechende Bogenelemente auf* M_4^6 *und im ternären Gebiet einander gleich.*

Die geraden Linien im ternären Gebiet werden dann abgebildet als Kugeln vom Radius $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$, die Ketten als die Kreise auf diesen Kugeln, die Normalketten, die in die geodätischen Linien auf M_4^6 übergehen, wiederum als die größten Kreise. Durch doppelte Überdeckung des elliptischen Raumes kommt man zu der im vorletzten Satze (S. 359) beiläufig auftretenden sphärischen Maßbestimmung. —

Wählen wir nunmehr $\lambda < \frac{2}{3}$, so wird die quadratische Form $(AX)^2$ eigentlich-indefinit, indem eines der neun Quadrate ein negatives Vorzeichen annimmt. Solange nun λ nicht negativ wird, liegt die Bildmannigfaltigkeit M_4^6 der Punkte des ternären Gebietes *außerhalb* der Mannigfaltigkeit $(AX)^2 = 0$. Das Polarsystem $(AX)(AY) = 0$ definiert dann nach wie vor auf jeder Geraden, die $(AX)^2 = 0$ nicht trifft, eine elliptische Maßbestimmung. Wenden wir dieselben Formeln an, wie zuvor, so verhält sich bei Werten von λ, die zwischen den Schranken $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ liegen, diese Maßbestimmung für die Paare von Punkten X, Y auf M_4^6 immer noch ganz so wie eine gewöhnliche elliptische: Die geradlinige Verbindungslinie zweier reeller Punkte X, Y auf M_4^6 trifft das absolute Gebilde $(AX)^2 = 0$ niemals, und die wie zuvor erklärte Entfernung der beiden Punkte X, Y wird immer reell. Ein besonderes Interesse hat wieder der Grenzfall $\lambda = \frac{1}{2}\cdot$ Es ist dann, wie zuvor, $dS = ds$, und wenn man die Entfernungen auf M_4^6 geodätisch mißt, andrerseits aber auch die geradlinig im Raume R_8 selbst gemessenen Entfernungen (X, Y) mit X, Y nur kontinuierlich variieren läßt, so erhält man die einfache Formel

$$\sin\frac{1}{2}(X, Y) = \sin\frac{1}{2}(x, y),$$

die auch noch in dem Grenzfalle $(x, y) = \pi$ aufrecht erhalten werden kann, in dem der Ausdruck (X, Y) nicht mehr unmittelbar definiert ist.

In dem vorliegenden, dem Krümmungsmaße $\mathfrak{K} = 1$ der projektiven (quasi-elliptischen) Maßbestimmung in R_8 entsprechenden Grenzfall wird also der zwischen zwei Punkten X, Y auf M_4^6 geodätisch gemessene Bogen gleich der sachgemäß bestimmten geradlinig gemessenen Entfernung derselben Punkte.

Die geraden Verbindungslinien der Punktepaare X, Y von M_4^6 treffen das absolute Gebilde im allgemeinen nicht (nicht reell); nur dann, wenn die Punkte X, Y Bilder absolut-konjugierter Punkte x, y des ternären Gebietes sind, und sie also die geodätische Entfernung π haben, berühren diese Sehnen von M_4^6 das absolute Gebilde.

Wird λ ferner innerhalb der Schranken 0 und $\frac{1}{2}$ angenommen, so bleibt die Formel

$$\sin\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{(X, Y)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\sin\frac{(x, y)}{2}$$

nur noch für solche Punktepaare x, y ohne weiteres brauchbar, die der Bedingung $\sin\frac{1}{2}(x, y) < \sqrt{2\lambda}$ genügen; die Gleichung $\sin\frac{1}{2}(x, y) = \sqrt{2\lambda}$ bestimmt die Punktepaare von M_4^6, deren Sehnen das absolute Gebilde berühren, während für $\sin\frac{1}{2}(x, y) > \sqrt{2\lambda}$ statt der Berührung ein Schneiden eintritt. Man sieht leicht, wie man durch Einführung der zu $(AX)^2 = 0$ gehörigen hyperbolischen Maßbestimmung auch für dieses Gebiet Formeln erhält, die dasselbe leisten, wie die zuvor abgeleiteten.

Für $\lambda = 0$ wird die projektive Maßbestimmung für Punkte auf M_4^6 überhaupt illusorisch, da dann M_4^6 ganz auf der Mannigfaltigkeit $(AX)^2 = 0$ liegt.

Wird endlich $\lambda < 0$, so tritt M_4^6 in das *Innere* der Mannigfaltigkeit $(AX)^2 = 0$ über. Man wird also jetzt eine hyperbolische Maßbestimmung vom Krümmungsmaße $\mathfrak{K} = \frac{1}{2\lambda}$ anzuwenden haben. An Stelle der bisher benutzten Formel tritt die andere

$$\sin h\frac{1}{\sqrt{-2\lambda}}\frac{(X, Y)}{2} = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}}\sin\frac{(x, y)}{2}.$$

Die elliptische Hermitesche Maßgeometrie läßt sich also auch auffassen als Ausschnitt aus der gewöhnlichen hyperbolischen Maßgeometrie im Raume R_8. Das zu dieser gehörige (negative) Krümmungsmaß $\mathfrak{K}$ kann — abweichend vom elliptischen Fall — beliebig angenommen werden.

In jedem vollständigen Raume R_8 von konstantem Krümmungsmaß $\mathfrak{K} < \frac{3}{4}$ haben wir also eine reelle Mannigfaltigkeit M_4^6 nachgewiesen, auf der alle geodätischen Linien geschlossen und zwar Kreise vom Umfange 2π sind. Diese ∞^6 Kurven sind verteilt auf ∞^4 Kugeln vom Flächeninhalt $4\pi^2$. Die Mannigfaltigkeit M_4^6 läßt sich auf das ternäre komplexe Gebiet so abbilden, daß diese Kugeln in die geraden Linien übergehen. Die Maßgeometrie auf M_4^6 geht damit über in die elliptische Hermitesche Maßgeometrie, die durch diesen Zusammenhang, wie uns scheint, nicht unerheblich am Interesse gewinnt.

Eine ähnliche Untersuchung, doch mit minder einfach auszudrückendem Ergebnis, läßt sich offenbar auch durchführen im Falle der hyperbolischen Hermiteschen Maßbestimmung.

Erwähnt sei noch, daß man natürlich die abgeleiteten Resultate auch anders ausdrücken kann. Im elliptischen Raume R_8 vom Krümmungsmaße *Eins* z. B. lassen sich ∞^1 Klassen von Mannigfaltigkeiten M_4^6 angeben, auf denen die geodätischen Linien kongruente Kreise sind. Der Umfang $\mathfrak{U}$ eines solchen Kreises kann innerhalb der Schranken 0 und $\pi\sqrt{3}$ beliebig angenommen werden. Je zwei solche M_4^6 lassen sich *konform* so aufeinander abbilden, daß der Quotient entsprechender Linienelemente eine bestimmte Konstante ist, usw. Dem Grenzfall $\mathfrak{U} = \pi\sqrt{3}$ entsprechen Ausartungen der M_4^6, nämlich M_4^6, die in ebenen R_7 verlaufen, etc.

12.

Einige gruppentheoretische Folgerungen.

Es ist klar, daß die Betrachtungen der §§ 10 und 11 auf eine unbestimmte Dimensionenzahl ausgedehnt werden können. Wir überlassen die Ausführung dem Leser, und heben nur die Erweiterung *eines* der abgeleiteten Sätze hervor:

Zur Gruppe G_{n^2-1}, H_{n^2-1} der elliptischen Hermiteschen Bewegungen und Umlegungen in einem Gebiete n^{ter} Stufe gehört, wenn $n > 2$, eine von kollinearen Umformungen abgesehen völlig bestimmte, zu ihr holoedrisch isomorphe Gruppe reeller Kollineationen Γ_{n^2-1}, H_{n^2-1} eines Gebietes der Stufe n^2-1 (der Dimension n^2-2).

Diese Gruppe läßt in Ruhe eine reelle (auch im Imaginären) singularitätenfreie rationale Mannigfaltigkeit von der Dimension $2n-2$ und der Ordnung $\binom{2n-2}{n-2}$, deren reelle Punkte vollkommen stetig und eindeutig-umkehrbar zugeordnet sind den Punkten des komplexen Gebietes, und die Gruppe ist durch diese Mannigfaltigkeit M_{2n-2} vollkommen bestimmt.

Die genannte Gruppe besteht, wenn n eine ungerade Zahl ist, aus Bewegungen und Umlegungen, und wenn n gerade ist, aus Bewegungen eines zugehörigen ebenfalls vollkommen bestimmten elliptischen Raumes. Setzt man dessen Krümmungsmaß $= \frac{n}{2(n-1)}$, so werden entsprechende Bogenelemente im Gebiete n^{ter} Stufe und auf M_{2n-2} einander gleich.

Im einfachsten Falle $n = 2$ ist die analog konstruierte Bildmannigfaltigkeit eine doppelt überdeckte Ebene, mit Verzweigungskegelschnitt in deren komplexem Gebiet, also in diesem nicht singularitätenfrei. Die zugehörige Gruppe Γ_3, H_3 enthält eine einzelne ausgezeichnete Transformation, die übereinander liegende Punkte beider Blätter vertauscht (entsprechend der Diametral-Spiegelung auf der Riemannschen Bildkugel). Erst wenn man diese Transformation von der Identität nicht unterscheidet, erhält man eine Kollineationsgruppe im üblichen Sinne des Wortes; diese Gruppe Γ_8' ist aber natürlich nur meromorph zur Gruppe G_8, H_8.

Aus dem angeführten Satze lassen sich nun einige wichtige Folgerungen ziehen. Zunächst benutzen wir ihn zum Nachweis der in § 1 behaupteten *Einfachheit der Gruppe* G_{n^2-1}.

Hätte diese Gruppe eine invariante Untergruppe, so würde dasselbe gelten von der Gruppe Γ_{n^2-1}, die die größte kontinuierliche Gruppe reeller automorpher Kollineationen der reellen Mannigfaltigkeit M_{2n-2} ist. Wir setzen nun diese Mannigfaltigkeit, samt ihrer Gruppe Γ_{n^2-1}, analytisch ins komplexe Gebiet n^2-1^{ter} Stufe fort, wodurch sich Dimensionen- und Parameterzahlen aufs doppelte erhöhen. Die gefundene analytische Gruppe $\Gamma_{2(n^2-1)}$ reeller und imaginärer Kollineationen müßte dann ebenfalls eine invariante Untergruppe haben.

Wir betrachten nun zwei Reihen von komplexen Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$; $y_1, \cdots, y_n$, die wir uns unabhängigen linearen Transformationen unterworfen denken, und deuten die Produkte $x_i y_k$ als homogene Punktkoordinaten in bezug auf ein reelles Koordinatenpolytop eines Gebietes der Stufe n^2. Dann entsteht eine neue Mannigfaltigkeit M'_{2n-2}, von der Ordnung $\binom{2n-2}{n-1}$, die im reellen Gebiete die Dimension $2n-2$, im komplexen die doppelte Dimensionenzahl hat. Aus dieser Mannigfaltigkeit entsteht dann durch einen Projektionsprozeß, ähnlich dem in § 11 beschriebenen, eine weitere M'_{2n-2} eines Gebietes der Stufe n^2-1, mit einer Gruppe $\Gamma'_{2(n^2-1)}$, $H'_{2(n^2-1)}$ reeller und imaginärer Kollineationen, wobei $\Gamma'_{2(n^2-1)}$ holoedrisch isomorph ist zur Gruppe aller reellen und imaginären Kollineationen der Gebiete (x), (y), die irgend eine bilineare Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0$ von nicht verschwindender Diskriminante $|a_{ik}|$ in Ruhe lassen. Diese letzte Gruppe aber, und folglich auch $\Gamma'_{2(n^2-1)}$ ist holoedrisch isomorph zu einer Gruppe, deren Einfachheit bekannt ist, nämlich zur Gruppe aller reellen und imaginären Kollineationen z. B. des Gebietes (x). Nun sind offenbar gegenüber der Gruppe aller reellen und imaginären Kollineationen des Gebietes der Stufe n^2-1 die beiden konstruierten Mannigfaltigkeiten M_{2n-2} und M'_{2n-2} {der Dimension $2(2n-2\}$ äquivalent, die eine kann in die andere durch imaginäre Kollineationen übergeführt werden. Dasselbe gilt dann von den zugehörigen Gruppen $\Gamma_{2(n^2-1)}$ und $\Gamma'_{2(n^2-1)}$, und deshalb kann, nach obigem, auch G_{n^2-1} keine invariante Untergruppe haben.*)

*) Natürlich wird sich auch die Schlußweise, die zur Einsicht in die Einfachheit der sogenannten allgemeinen projektiven Gruppe führt, auf unseren Fall übertragen lassen. Im vorliegenden Zusammenhang ist aber die Reduktion des einen Problems auf das andere jedenfalls kürzer.

Das angewendete Verfahren erstreckt sich offenbar auch auf die übrigen in § 1 bezeichneten Fälle: Die Kollineationsgruppen, die zu den $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ verschiedenen Arten Hermitescher Polarsysteme eines Gebietes n^{ter} Stufe gehören, liefern alle, ins hyperkomplexe Gebiet erweitert, Gruppen, die untereinander und mit der Gruppe aller reellen und imaginären Kollineationen eines Gebietes n^{ter} Stufe gleich zusammengesetzt sind.*)

Eine weitere wichtige Anwendung des obigen Satzes ist diese:

Zu jeder beliebigen Gruppe, die aus einer endlichen Zahl von Kollineationen eines komplexen Gebietes n^{ter} Stufe besteht, läßt sich eine holoedrisch isomorphe Gruppe herstellen, die aus reellen Bewegungen eines elliptischen (oder sphärischen) Raumes der Dimension n^2-2 besteht.

Dies ergibt sich ohne weiteres aus einer Bemerkung der Herren Loewy und Moore, wonach jede solche Gruppe (mindestens) ein Polarsystem in Ruhe läßt, das zu definiten Hermiteschen Formen gehört.**) Ein entsprechender Satz besteht natürlich auch in bezug auf Gruppen von Kollineationen und Antikollineationen. Die Bewegungsgruppe, von der der Satz spricht, ist vor anderen, die schon in Mannigfaltigkeiten niederer Dimension existieren können, ausgezeichnet durch die mit ihr stets verbundene Abbildung des komplexen Gebietes auf eine reelle Punktmannigfaltigkeit.

Eine fernere wichtige Folgerung aus der Theorie der Hermiteschen Maßbestimmung, die passend hier angeschlossen werden kann, bezieht sich auf Fundamentalbereiche von endlichen oder unendlichen sogenannten eigentlich-diskontinuierlichen projektiven Gruppen, nämlich solchen Gruppen von diskreten Kollineationen (und Antikollineationen), bei denen die Häufungsstellen äquivalenter Punkte nicht überall-dicht liegen. Die

*) Von diesen $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ reell-verschiedenen Arten der Zusammensetzung reeller Gruppen, die im imaginären Gebiete gleichzusammengesetzt sind mit der sogenannten allgemeinen projektiven Gruppe, existieren die zu definiten Hermiteschen Formen gehörigen, wenn $n \neq 4$, jedenfalls nicht in Mannigfaltigkeiten von geringerer als der $2(n-1)^{\text{ten}}$ Dimension. Die übrigen sind, nach Ausschluß der Gruppe der reellen Kollineationen, als Gruppen von reellen Punkttransformationen in Räumen $(2n-3)^{\text{ter}}$ Dimension, und, wie sich leicht zeigen läßt, als Gruppen von reellen Berührungstransformationen in Räumen $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension darstellbar. Sie müssen im wesentlichen (d. h. abgesehen von Umformungen vermöge reeller B. T.) identisch sein mit denen, deren infinitesimale Transformationen Fr. Engel angegeben hat. (Leipz. Ber. 1892, S. 292.) Es muß also gelingen, auch die endlichen Transformationen dieser Gruppen explizite aufzustellen und zugehörige Element-Kontinua sachgemäß zu erklären.

**) A. Loewy, Compt. Rend., t. 123 (1896), p. 276. E. H. Moore, Math. Ann. Bd. 50 (1898), S. 213.

Herren F. Klein und R. Fricke haben in ihrem Werke über automorphe Funktionen im Falle $n = 2$ eine Methode angegeben, die auf der Benutzung der Cayleyschen Maßbestimmung beruht, und für zwei Klassen von Gruppen der genannten Art Fundamentalbereiche präzise zu definieren erlaubt: Für die endlichen Gruppen und für die unendlichen Gruppen mit sogenanntem Hauptkreis. Unsere Darlegungen zeigen nun zunächst, daß das bezeichnete Verfahren durch ein einfacheres ersetzt werden kann*), da die im komplexen Gebiet selbst auszuführende Hermitesche Maßbestimmung bereits das nämliche leistet. *Die so abgeänderte Schlußweise aber erstreckt sich auf eine unbestimmte Dimensionenzahl:* Es sei zunächst bei einer endlichen Gruppe von N Kollineationen des Gebietes n^{ter} Stufe ein Punkt x_0 derart ausgewählt, daß er bei den Transformationen der Gruppe *N verschiedene* Lagen annimmt. Irgend ein Punkt x liegt dann im Inneren des zu x_0 gehörigen Fundamentalbereiches, wenn der absolut kleinste Betrag seiner Hermiteschen Entfernung von x_0 kleiner ist als der kleinste Betrag seiner Entfernung von einem mit x_0 äquivalenten Punkte. Die Hermitesche Entfernung ist natürlich zu bilden in bezug auf irgend eines der zu definiten Formen gehörigen Polarsysteme, die bei der vorgelegten Gruppe in Ruhe bleiben.

Als Scheidewände zwischen den einzelnen Fundamentalbereichen und Örter äquivalenter Stellen des einzelnen Bereichs treten dabei solche Mannigfaltigkeiten auf, wie wir sie im Falle $n = 3$ in § 7 kurz betrachtet haben.

Mit Hilfe der Theorie der Hermiteschen Maßbestimmung lassen sich also bei allen endlichen Gruppen von Kollineationen (oder von Kollineationen und Antikollineationen) Fundamentalbereiche präzise definieren.

Die erklärten Bereiche überdecken das $(2n-2)$-dimensionale komplexe Gebiet lückenlos, und jeder einzelne hat also das Volumen $\frac{(4\pi)^{n-1}}{N\cdot(n-1)!}$, wo N die Anzahl der Transformationen der vorgelegten Gruppe bedeutet. (§ 5, S. 340.)

Betrachten wir ferner ein Hermitesches Polarsystem im Gebiete n^{ter} Stufe, dessen zugehörige Formen als Summen von n Produkten $x_i\bar{x}_i$ darstellbar sind, deren $n-1$ gleiches Zeichen haben, so gehört dazu eine Zerlegung des komplexen Gebietes in einen „inneren" und einen „äußeren" Teil. Es ist klar, daß man bei einer eigentlich-diskontinuierlichen Gruppe von Kollineationen (und Antikollineationen), die eine solche Figur in Ruhe läßt, das innere Gebiet ebenfalls mit kongruenten (kongruenten oder symmetrischen) Bereichen lückenlos so überdecken kann, daß jeder Punkt

*) Dies geht übrigens schon aus Beltramis Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea hervor.

im Inneren eines Bereiches eine Gesamtheit verschiedener äquivalenter Punkte repräsentiert, während die Punkte an der Grenze zu Paaren usw. zusammengefaßt sein können, und Häufungsstellen der Bereiche nur an der Grenze des zugehörigen hyperbolischen Hermiteschen Raumes auftreten. Auch in gewissen anderen Fällen lassen sich noch ähnliche Schlüsse ziehen, worauf wir indessen nicht weiter eingehen.

Unter Umständen kann ein solcher Bereich, bei Nicht-Unterscheidung äquivalenter Stellen am Rande, als ideal-geschlossen betrachtet werden. Er liefert dann eine weitere Art von — wie wir etwa sagen mögen, Quasi-Hermiteschem — Raume, der „im kleinen" dieselben Eigenschaften hat, wie der von uns betrachtete, aber eine andere Art des Zusammenhangs aufweist, und nicht als Ganzes auf ∞^{n^2-1} Arten bewegt werden kann.

13.

Konforme und geodätische Abbildungen in Hermiteschen Räumen.

Es versteht sich, daß die fernere Entwicklung der Geometrie in einem Hermiteschen Raume, die Behandlung der vielfach schwierigen Aufgaben, die den Problemen der gewöhnlichen Kurven- und Flächentheorie analog sind, die Entwicklung eines umfangreichen Formelapparates erfordern wird. Zu den Fragen, die sich ohne solche Hilfsmittel entscheiden lassen, gehören die, von denen hier die Rede sein soll, nämlich die Probleme der geodätischen und konformen Abbildung. Darunter verstehen wir die Aufgabe, erstens alle im $(2n-2)$-dimensionalen elliptischen oder hyperbolischen Hermiteschen Raume analytischen Punkttransformationen anzugeben, die, im Bereiche ihres regulären Verhaltens, geodätischen Bändern (Linien) ebensolche zuordnen, oder — zweitens — die Winkel der Fortschreitungsrichtungen um einen Punkt herum nicht ändern. Für Mannigfaltigkeiten konstanten Krümmungsmaßes gestellt, führen diese Forderungen zu den hinlänglich bekannten Gruppen; in unserem Falle dagegen ergeben sich neue Transformationen nicht.

Jede geodätische und jede konforme Abbildung im $(2n-2)$-dimensionalen elliptischen oder hyperbolischen Hermiteschen Raume wird, sobald $n > 2$, durch eine Bewegung oder Umlegung vermittelt.

Der erste Teil dieses Satzes ist nahezu evident. Im Falle $n = 3$ z. B., auf dessen Betrachtung wir uns beschränken wollen, folgt, daß bei geodätischer Abbildung die ∞^4 und ∞^5 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten („Kongruenzen" im ternären Gebiete, „Flächen" auf M_4^6) die je ∞^2 geodätische Bänder (oder, im Bilde M_4^6, geodätische Linien) enthalten, untereinander vertauscht werden müssen. D. h., es werden die Teile gerader Linien des ternären Gebietes, die in die betrachteten Raumstücke eindringen, wieder als Teile gerader Linien abgebildet. Daraus schließt man leicht, daß die Abbildung durch eine projektive oder antiprojektive Transformation, und folglich durch eine Bewegung oder Umlegung bewirkt wird, die dann natürlich nicht nur auf begrenzte Gebiete, sondern auf den ganzen Hermiteschen Raum anwendbar ist, und sich überall regulär verhält.

Nicht ebenso kurz ist der Beweis unserer zweiten auf konforme Abbildung bezüglichen Behauptung. Um das Wesen der anzustellenden Überlegung möglichst deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir deshalb zunächst eine etwas einfachere Aufgabe lösen.

Wir betrachten wieder ein ternäres Gebiet, und in diesem einen beliebigen (realen) Hermiteschen Punktkomplex von nicht verschwindender Diskriminante, z. B. den Komplex

$$(x\bar{x}) = x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3 = 0.$$

Als zugehörige Normalketten bezeichnen wir dann allgemein solche Ketten, deren Punkte im Polarsystem dieses „absoluten“ Komplexes paarweise konjugiert sind, und die also, soweit sie im Inneren des Komplexes verlaufen, dort geodätische Bänder sind (§ 3). Unter diesen ∞^6 Normalketten befinden sich nun ∞^5 solche, die den vorgelegten Komplex berühren: die nämlich, die auf je einer Geraden u des zugehörigen Linienkomplexes

$$(u\bar{u}) = u_1\bar{u}_1 - u_2\bar{u}_2 - u_3\bar{u}_3 = 0$$

liegen und den auf dieser Geraden selbst und auf dem Punktkomplex liegenden Pol der Geraden u enthalten. Solcher tangierender Normalketten, deren zugehörige Punktinvolutionen ausgeartet sind, gehen durch jeden Punkt x *außerhalb* des vorgelegten Komplexes ∞^2, und diese gehören zu gewissen ∞^2 unter den ∞^3 von x ausgehenden Fortschreitungsrichtungen. Diese „tangierenden“ Fortschreitungsrichtungen, und ihre Bilder auf M_4^6, werden charakterisiert durch das Bestehen einer Mongeschen Gleichung

$$(x d\bar{x})(\bar{x} dx) - (x\bar{x})(dx\, d\bar{x}) = 0.$$

Wir behaupten nun zunächst, daß jede (reale) analytische Transformation projektiv oder antiprojektiv sein muß, die an Stellen regulären Verhaltens Punkten x außerhalb des vorgelegten Komplexes ebensolche x' zuordnet, und überdies den tangierenden Fortschreitungsrichtungen andere der Art; daß diese Transformation folglich zusammenfällt mit einer Transformation der zu dem Hermiteschen Komplex gehörigen Gruppe G_8, H_8.

Die genannte Transformation wird den ∞^3 Fortschreitungsrichtungen durch x die durch x' vermöge einer zweiten Transformation zuordnen, die sich in den beiden nach § 6 einzuführenden Bildräumen R_3, R_3' als reelle kollineare Transformation darstellt. Dabei werden den ∞^2 Punkten einer reell-geradlinigen Fläche 2. Ordnung von nicht verschwindender Diskriminante in R_3' die Punkte einer entsprechenden Fläche zugeordnet: Beide Flächen sind bestimmt durch die betrachtete Mongesche Gleichung, die einmal mit den Veränderlichen x, dx, das andere Mal mit den Veränderlichen x', dx' zu bilden ist. Auf jeder von beiden Flächen können nun die beiden Scharen von geraden Erzeugenden als erste und zweite unterschieden werden: Erzeugende erster Art werden wir eine solche nennen, deren ∞^1 Punkte die Bilder sind von solchen ∞^1 tangierenden Fortschreitungsrichtungen, die in einer und derselben Geraden u des Hermiteschen Linienkomplexes verlaufen. Die zu suchende Transformation wird also den Erzeugenden erster und zweiter Art in R_3 entweder gleichartige oder ungleichartige Erzeugende in R_3' zuordnen. Wir machen zunächst die erste dieser beiden Annahmen, wodurch wir, möglicherweise, zu einer — notwendig invarianten — Untergruppe der zu suchenden Gruppe von Transformationen geführt werden, vielleicht aber auch sogleich zu dieser Gruppe selbst.

Die zunächst zu bestimmenden Transformationen haben also die Eigenschaft, je ∞^1 Fortschreitungsrichtungen durch x, die in einer der ∞^1 x enthaltenden Geraden des Hermiteschen Linienkomplexes liegen, wieder solche ∞^1 Fortschreitungsrichtungen durch x' zuzuordnen. Daraus aber folgt sofort, daß die ∞^3 Geraden des Hermiteschen Linienkomplexes selbst untereinander vertauscht werden müssen:

Die zunächst zu suchende Gruppe kann als eine Gruppe in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der tangierenden Geraden u angesehen werden, die den sämtlichen tangierenden Geraden u durch einen Punkt x wiederum tangierende Gerade u' durch x' zuordnet. Die Geraden u aber bilden eine Linienkette, ihre Berührungspunkte oder absoluten Pole also eine Punktkette auf dem absoluten Punktkomplex, und Punktketten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ die auf diese Art einander entsprechen, sind wegen der projektiven Zuordnung der Bildräume R_3, R_3' überdies projektiv aufeinander bezogen. Es bleibt also nur noch einzusehen, daß eine Transformation der Punkte des Hermiteschen Komplexes, die, im Bereiche ihres regulären Verhaltens, jeder auf diesem Komplex gelegenen Kette $\mathfrak{C}$ eine andere $\mathfrak{C}'$ projektiv zuordnet, entweder durch eine Kollineation oder durch eine Antikollineation bewirkt wird.

Ohne weiteres ergibt sich nunmehr, daß die fragliche Transformation sich für alle Punkte des absoluten Komplexes regulär verhalten muß, daß sie überall wohldefiniert, eindeutig und stetig ist. Betrachten wir ferner zwei verschiedene der genannten Ketten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, die projektiv aufeinander bezogen sein und einen Punkt z entsprechend gemein haben sollen. Dann werden die Verbindungslinien verschiedener entsprechender Punkte auf $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ und ihre z entsprechende Grenzlage alle durch denselben Punkt y gehen, und zwar werden sie eine Linienkette bilden. Dasselbe gilt dann notwendig für die transformierten Figuren $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$, z', y'. Kann man also zeigen, daß in einem gewissen vierdimensionalen Gebiete $[y]$ *alle* Linienketten irgend eines Punktes y mit Hilfe von Punktketten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ auf dem Hermiteschen Komplex erzeugt werden können, so ist damit auch gezeigt, daß allen Ketten $\mathfrak{C}$ auf dem absoluten Komplex, die ihre Geraden durch y schicken, Ketten $\mathfrak{C}'$ zugeordnet werden, die ihre Geraden durch y' schicken; es folgt dann, daß die Transformation mit den Ketten $\mathfrak{C}$ oder ihren geradlinigen Trägern als Raumelementen, zugleich als eine Transformation der Punkte y in $[y]$ aufgefaßt werden kann; mit anderen Worten, es folgt, daß die zu suchende Transformation projektiv oder antiprojektiv sein muß. Ein Gebiet $[y]$ der verlangten Eigenschaft läßt sich aber wirklich angeben: Das Innere des absoluten Komplexes. Jede Kette nämlich von Geraden durch einen Punkt y, der der Bedingung $(y\bar{y}) > 0$ genügt, kann auf ∞^2 Arten durch Ketten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ erzeugt werden, die projektiv aufeinander bezogen sind, und einen Punkt entsprechend gemein haben.*)

Die zweite der oben unterschiedenen Denkmöglichkeiten brauchen wir nun gar nicht mehr zu erörtern.**) Jede Transformation der gesuchten Art würde nämlich die Gruppen G_8, H_8 und G_8 in Ruhe lassen, und deren viergliedrige Untergruppen, die durch Punkte x oder y bestimmt sind, untereinander vertauschen. Daraus aber, daß diese Untergruppen auch durch grade Linien — die absoluten Polaren von x oder y — bestimmt werden können, folgt, daß die fragliche Transformation selbst projektiv oder antiprojektiv ist, und also der Gruppe G_8, H_8 angehört. Unsere Behauptung ist also nunmehr vollständig erwiesen.

Nun endlich ergibt sich ohne Schwierigkeit auch der behauptete Satz über konforme Abbildung, zunächst für das ternäre Gebiet, dann aber, auf ähnliche Weise, auch bei unbestimmter Stufenzahl. In der Tat steht

*) Die Punkte auf den Geraden irgend einer der ∞^2 Linienketten, die ihre Geraden durch y schicken, bilden einen Kettenkomplex mit y als singulärem Punkt. Bildet man diesen Komplex in der auf S. 345 geschilderten Weise auf einen Punktraum ab, so erscheint das Durchschnittsgebilde des Kettenkomplexes mit dem Komplex $(x\bar{x}) = 0$ als reell-geradlinige Rotationsfläche 2. Ordnung. Je zwei verschiedenartige gerade Erzeugende dieser Fläche sind die Bilder zweier erzeugender Ketten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$.

**) Es läßt sich übrigens einsehen, daß es keine Kongruenzen gibt, auf denen alle Fortschreitungsrichtungen irgend eines Punktes allgemeiner Lage Erzeugenden *zweiter* Art im Bildraume R_3 entsprechen. Daraus folgt die Behauptung im Texte ebenfalls.

auf der linken Seite unserer Mongeschen Gleichung eben der Ausdruck, der bei elliptischer oder hyperbolischer Hermitescher Maßbestimmung im Zähler der Formel für das Quadrat des Linienelementes auftritt.

Die Forderung, daß eine im Bildraume M_4^6 reelle analytische Transformation eine Gleichung der Form

$$dS'^2 = \varrho(x, \bar{x}) \cdot dS^2$$

nach sich zieht, deckt sich aber mit der anderen, daß im komplexen Gebiete des Bildraumes, oder also, vom gewöhnlichen komplexen Gebiete aus gesehen, im hyperkomplexen Gebiete, die Gleichung $dS^2 = 0$ die andere $dS'^2 = 0$ nach sich zieht. Offenbar lassen sich die angewendeten Schlüsse, mit geringfügigen Änderungen, auf diesen verwickelteren Fall übertragen.

Übrigens folgt aus unserem Beweisgang noch der weitere Satz:

Der elliptische und der hyperbolische $(2n-2)$*-dimensionale Hermitesche Raum können, auch im kleinen, weder geodätisch noch konform auf einander oder auf eine Mannigfaltigkeit konstanten Krümmungsmaßes abgebildet werden, sobald* $n > 2$ *ist.*

Nicht erledigt mit diesen Sätzen sind natürlich die Fragen nach entsprechenden Abbildungen von Mannigfaltigkeiten niederer Dimension, die in Hermiteschen Räumen enthalten sind. Wir fügen nur noch eine kurze Bemerkung über konforme Abbildung zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten (analytischer Kongruenzen oder Flächen) hinzu, wobei wir der Kürze halber wieder nur das ternäre Gebiet berücksichtigen. Diese Theorie unterscheidet sich nicht wesentlich von der Theorie der konformen Abbildung von Flächen in Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung. Es ist aber bemerkenswert, daß es eine Familie von Kongruenzen (Flächen) gibt, bei denen das Abbildungsproblem, und also die Auffindung aller isothermen Kurvenscharen keine Integration erfordert. Es sind das die (S. 334, Anm.) bereits besprochenen *synektischen Kongruenzen*, die „Kurven" der gewöhnlichen analytischen Geometrie. Diese sind, wie bemerkt, geometrisch dadurch gekennzeichnet, daß sie an jeder Stelle allgemeiner Lage eine bestimmte Tangente zulassen, analytisch durch das identische Bestehen der Gleichung

$$\left(x \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial x}{\partial \tau}\right) = 0,$$

wo σ und τ wesentliche reelle Parameter sind. Man denke sich nun diese Parameter (und die von ihnen abhängigen Funktionen x_i) ins komplexe Gebiet fortgesetzt, und irgendwie als analytische Funktionen eines dritten Parameters $t = \sigma' + i\tau'$ dargestellt — so natürlich, daß die Funktionswerte σ, τ in den Existenzbereich der Funktionen $x_i(\sigma, \tau)$

fallen. *Man erhält, wie leicht zu zeigen, auch dann noch nur Punkte derselben Kongruenz,* und die Bänder $\sigma' = \text{const.}$, $\tau' = \text{const.}$ bilden ein isothermes System. Die Lösung der Aufgabe, zwei solche Kongruenzen konform aufeinander abzubilden, ist hiernach evident.

14.

Die parabolische Hermitesche Maßbestimmung. — Nachtrag.

Von der elliptischen oder hyperbolischen Hermiteschen Maßbestimmung aus kommt man durch einen leichten Grenzübergang zu einer weiteren, die wir als *parabolische Hermitesche Maßbestimmung* bezeichnen und mit deren Hilfe wir die reelle Euklidische Geometrie auf ähnliche Art erweitern können, wie wir zuvor die Nicht-Euklidische Geometrie erweitert haben

Im Falle der ebenen, also vierdimensionalen Geometrie, auf deren Betrachtung wir uns auch hier beschränken wollen, wird das absolute Gebilde, als Ort von hyperimaginären Punkten, eine ideale Kette auf der uneigentlichen Geraden, und dieser Figur und dem zugehörigen realen (im vierdimensionalen Gebiete reellen) Polarsystem auf der uneigentlichen Geraden kommt hier eine ähnliche Bedeutung zu, wie in der reellen Euklidischen Geometrie dem Paar der sogenannten unendlich fernen Kreispunkte und dem zugehörigen absoluten Polarsystem, d. h. der Involution aufeinander senkrechter Richtungen.

Bezeichnen wir die unendlich ferne oder uneigentliche Gerade mit $x_1 = 0$, so können wir, soweit es sich um die Darstellung eigentlicher Punkte $x = (x_1, x_2, x_3)$ handelt, $x_1 = 1$ setzen. Der Ausdruck für die „*Entfernung*" (parabolische Hermitesche Entfernung) zweier eigentlicher Punkte x, y kann dann, unter Gebrauch solcher nicht-homogener Koordinaten, auf die einfache Form

$$(x, y) = \sqrt{(y_2 - x_2)(\bar{y}_2 - \bar{x}_2) + (y_3 - x_3)(\bar{y}_3 - \bar{x}_3)}$$

gebracht werden, die im Falle reeller Punkte deren Euklidische Entfernung liefert. Nennen wir dann *Normalkette* irgend eine auf einer eigentlichen Geraden gelegene Kette, die den uneigentlichen Punkt dieser Geraden enthält, so können je zwei eigentliche Punkte x, y durch eine einzige Normalkette

$$\left(1, \frac{\sigma x_2 + \tau y_2}{\sigma + \tau}, \frac{\sigma x_3 + \tau y_3}{\sigma + \tau}\right) \qquad \{\sigma : \tau \text{ reell}\}$$

verbunden werden, und diese ist ein geodätisches Band. Genauer:

Der kürzeste Weg zwischen zwei verschiedenen eigentlichen Punkten liegt auf der sie verbindenden Geraden und insbesondere auf der sie ver-

bindenden Normalkette, und die Länge dieses Weges ist gleich dem absoluten Betrag der Entfernung der beiden Punkte.

Zu dem Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte gehört ein zweiter für den *Winkel zweier Geraden* u, v. Setzen wir zur Abkürzung

$$(u|\bar{v}) = u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3,$$

so kommen wir durch Übertragung der in § 6 angestellten Betrachtung auf den vorliegenden Grenzfall zu der Formel

$$(u, v) \equiv 2 \arc\cos \frac{\sqrt{(u|\bar{v})\,(\bar{u}|v)}}{\sqrt{(u|\bar{u})\,(v|\bar{v})}} \quad \text{mod. } 2\pi.$$

Für die ∞^2 Geraden durch denselben eigentlichen Punkt ergibt sich hieraus eine *sphärische* Maßbestimmung vom Krümmungsmaß *Eins*. Der Winkel zwischen zwei Geraden ist (bis auf Vielfache von 2π) doppelt so groß wie der Winkel zwischen zusammengehörigen Fortschreitungsrichtungen $(dx, \delta x)$, die auf diesen Geraden liegen (§ 6, S. 342). *Im reellen Gebiete fällt der zweite Begriff (nicht etwa der erste) zusammen mit dem in der Elementargeometrie „Winkel" genannten Begriff.* Zwei konjugierte, d. h. der Gleichung $(u|\bar{v}) = 0$ genügende reelle Gerade z. B. schließen einen Winkel $\equiv \pi$ mod. 2π ein. In ihnen verlaufende reelle Fortschreitungsrichtungen stehen aufeinander senkrecht, d. h., sie schließen einen Winkel $\equiv \pm\frac{\pi}{2}$ mod. 2π ein.*)

Die Entfernung zweier Punkte ist charakteristische und zwar einzige unabhängige Invariante einer transitiven Untergruppe (G_8, H_8) der Gruppe aller Kollineationen und Korrelationen. Wir werden diese Gruppe, die

*) Die willkürliche Konstante, die man in den Entfernungsbegriff unbeschadet seiner wesentlichen Eigenschaften aufnehmen kann, hatten wir im elliptischen Falle zugunsten der Einfachheit durch die Forderung bestimmt, daß die gerade Linie, als Ort ihrer ∞^1 Punkte, das Krümmungsmaß *Eins* erhalten soll, und ebenso der Punkt als Ort seiner ∞^1 Geraden. Im hyperbolischen Falle hat man entsprechend die Krümmungmaße -1 und $+1$, im parabolischen die Krümmungsmaße Null und Eins. Man kann aber natürlich, wenn man will, die Begriffe auch anders fassen. Im parabolischen Falle z. B. kann man einen engeren Anschluß an die Ausdrucksweise der Elementargeometrie erreichen, wenn man „Winkel" zweier Geraden die mod. π oder mod. 2π (bei „orientierten" Geraden) bestimmte Größe

$$\arc\cos \frac{\sqrt{(u|\bar{v})\,(\bar{u}|v)}}{\sqrt{(u|\bar{u})\,(v|\bar{v})}}$$

nennt. Das Krümmungsmaß eines als Ort seiner Geraden betrachteten Punktes wird dann $\frac{1}{4}$. Die Darstellung im Texte zeigt besser den Zusammenhang des vorliegenden Grenzfalls mit dem autokorrelativen elliptischen Fall.

ein Grenzfall ist der beiden zuvor erörterten und ebenfalls mit (G_8, H_8) bezeichneten Gruppen, *die Gruppe der parabolischen Hermiteschen Bewegungen und Umlegungen* nennen.

Abweichend von den früher besprochenen Gruppen G_8 ist natürlich die vorliegende Bewegungsgruppe nicht einfach: Sie enthält die viergliedrige Gruppe aller reellen und komplexen Schiebungen als invariante Untergruppe, und diese ist selbst enthalten in einer fünfgliedrigen invarianten Untergruppe, die durch Zusammensetzung der Schiebungen mit den ∞^1 Transformationen der Gruppe

$$x_2' = e^{i\varphi} x_2, \qquad x_3' = e^{i\varphi} x_3$$

entsteht. Unterscheidet man die Transformationen der fünfgliedrigen Gruppe nicht von der Identität, so entsteht, als sogenannte Faktorgruppe von G_8, eine dreigliedrige einfache Gruppe von der bekannten Zusammensetzung, die angibt, wie die uneigentlichen Punkte durch die Transformationen von G_8 untereinander vertauscht werden. (Vergl. § 4, S. 337.)

Um unsere Maßbestimmung und die zugehörige Gruppe (G_8, H_8) zu bekannten Tatsachen in Beziehung zu bringen, setzen wir

$$x_1 = \xi_1 = 1, \quad x_2 = \xi_2 + i\xi_4, \quad x_3 = \xi_3 + i\xi_5,$$

und deuten die Größen $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ als rechtwinklige Koordinaten in einem Raume von vier Dimensionen R_4. Dadurch wird die Gesamtheit der *eigentlichen* Punkte im komplexen Gebiet eindeutig-umkehrbar und stetig abgebildet auf die Gesamtheit der *eigentlichen reellen* Punkte in R_4, und der Ausdruck für die parabolische Hermitesche Entfernung zweier Punkte x, y wird übergeführt in den Ausdruck für die Euklidische Entfernung ihrer beiden Bildpunkte ξ, η:

$$(\xi, \eta) = \sqrt{(\eta_2 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \xi_3)^2 + (\eta_4 - \xi_4)^2 + (\eta_5 - \xi_5)^2}.$$

Die parabolische Hermitesche Maßbestimmung gehört also zu denen vom konstanten Krümmungsmaß Null.

Sie verhält sich daher in sehr wesentlichen Punkten abweichend von den zuvor erörterten Arten der Maßbestimmung: Erstens gestattet der letzte Ausdruck nicht nur die $2 \cdot \infty^8$ Transformationen, die wir parabolische Hermitesche Bewegungen und Umlegungen genannt hatten, sondern die ganze Gruppe (G_{10}, H_{10}) der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen in R_4 (von denen die nicht in G_8, H_8 enthaltenen im ternären Gebiete weder synektisch noch antisynektisch sind). Zweitens gibt es jetzt bekanntlich eine umfassendere Gruppe (G_{15}, H_{15}) *konformer* Abbildungen, darunter die $2 \cdot \infty^{11}$ *Ähnlichkeitstransformationen* in R_4, und drittens gibt es eine umfassendere Gruppe *geodätischer* Abbildungen, die ebenfalls die Ähnlichkeitstransformationen umfassende reell-kontinuierliche Gruppe G_{24} aller reellen Kollineationen in R_4.

Es ist nicht schwer, sich von den vorliegenden Verhältnissen genauere Rechenschaft abzulegen; wir wollen aber nur noch kurz ausführen, wodurch, im Bildraume R_4, die Transformationen von G_8, H_8 von den übrigen Transformationen der Gruppe G_{10}, H_{10} sich unterscheiden.

Hierzu kommen wir ohne weiteres, wenn wir bemerken, daß die singulären Stellen der benutzten Abbildung beiderseits die uneigentlichen Punkte sind. Die ∞^2 uneigentlichen Punkte im ternären Gebiet werden bei dem Abbildungsprozeß zu je einer geraden Punktreihe auseinandergezogen, die im uneigentlichen R_3 des R_4 verläuft, und diese ∞^2 reellen uneigentlichen Geraden bilden eine in bezug auf das absolute Gebilde in R_3 parataktische Kongruenz 1. O. 1. Kl. ohne reelle Brennlinien: Es entsteht eben die Figur, die wir bereits in § 6 aus ähnlichem Anlaß beschrieben haben.

Bilder der eigentlichen Geraden des ternären Gebietes werden nunmehr die ∞^4 reellen eigentlichen Ebenen in R_4, die den uneigentlichen R_3 in je einer Geraden der ausgezeichneten Linienkongruenz schneiden. Wir wollen sie *synektische Ebenen* nennen. Bilder der ∞^6 *Normalketten* oder geodätischen Bänder im ternären Gebiet werden die ∞^6 eigentlichen reellen *Geraden* in R_4. Sie werden in den ∞^6 eigentlichen Ebenen des R_4 zu ∞^2 zusammengefaßt: *Im vorliegenden Falle ist also nicht jede der ∞^8 Kettenkongruenzen zugleich geodätische Kongruenz, sondern es haben nur ∞^6 unter ihnen diese Eigenschaft, jede solche aber auf ∞^2 Arten.* Es sind das, abgesehen von den schon betrachteten synektischen Kettenkongruenzen, den eigentlichen Geraden des ternären Gebietes, die ∞^6 Kettenkongruenzen, deren Reziproke die uneigentliche Gerade enthalten — darunter die Kongruenz der reellen Punkte. Die ∞^7 übrigen auf eigentlichen Geraden gelegenen Ketten werden abgebildet als die $\infty^4 \cdot \infty^3$ irreduzibelen reellen *Kreise*, die in den ∞^4 synektischen Ebenen liegen, die ∞^8 nicht-normalen Kettenkongruenzen als gewisse Normalregelflächen 3. Ordnung, usw.

Die Gruppe (G_8, H_8) der parabolischen Hermiteschen Bewegungen und Umlegungen ist nunmehr als Untergruppe der Gruppe G_{10} der reellen Euklidischen Bewegungen in R_4 dadurch gekennzeichnet, daß sie die ∞^4 auf ∞^2 Parallelenbündel verteilten synektischen Ebenen nur untereinander vertauscht.

Natürlich kann man auch die Gruppe (G_{16}, H_{16}) aller Kollineationen und Antikollineationen im gewöhnlichen R_4 darstellen. Man erhält dann offenbar eine weder projektive noch konforme Gruppe. Um ein Punktkontinuum zu haben, in dem alle Transformationen der im gewöhnlichen (Euklidischen) R_4 interpretierten Gruppe (G_{16}, H_{16}) überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind, muß man je ∞^1 uneigentliche Punkte, die auf einer der bezeichneten Kongruenzlinien liegen, als äquivalent betrachten. Die „uneigentlichen Punkte" bilden dann — abweichend von den Punktkontinuis der projektiven und konformen Geometrie — eine *zweifach* ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die als *„uneigentliche synektische Ebene"* wird bezeichnet werden dürfen. Das so erklärte neue Punktkontinuum R_4' ist dann ebenso vollkommen eindeutig und stetig auf das ternäre Punktkontinuum abgebildet, wie die Mannigfaltigkeit M_4^6, die wir in § 10 zur Abbildung benutzt hatten. Gleichzeitig sind die ∞^4 synektischen Ebenen — mit Einschluß der uneigentlichen — auf das Kontinuum der ∞^4 Geraden im ternären Gebiet in bestimmter Weise abgebildet. Vereinigte Lage von Punkt und synektischer Ebene wird nicht gestört durch die Gruppe (G_{16}, H_{16}), und diese umfaßt alle Punkttransformationen der Art. Zu diesen kommen dann noch $2 \cdot \infty^{16}$ (Berührungs-) Transformationen, die die Punkte mit den synektischen Ebenen vertauschen, nämlich die Korrelationen und Antikorrelationen des ternären Gebietes.

Man wird bemerken, daß im Raume R_4' der Begriff der synektischen Ebene gegenüber dem gewöhnlichen Begriff der (projektiven) Ebene verschoben ist: Die *synektische* Ebene hat wie die Gerade des ternären Gebietes, deren Bild sie ist, den Zusammenhang einer Kugelfläche.

Die reell-primitive Gruppe G_{16} wird, wie wir schon in § 1 bemerkt haben, nach Fortsetzung ins komplexe Gebiet (zweifach) imprimitiv, und sie kann auch auf Grund dieser Tatsache konstruiert werden. Man nehme im projektiven Punktkontinuum des R_4 eine imaginäre Gerade an, die keinen reellen Punkt enthält. Von der konjugiert-imaginären Geraden gilt dann dasselbe, und beide sind in einem reellen R_3 eingeschlossen, und sie bestimmen in diesem eine Kongruenz 1. O. 1. Kl. ohne reelle Brennlinien. Diese Figur können wir mit der soeben besprochenen identifizieren. Jede der beiden konjugiert-imaginären Geraden ist nun Trägerin eines Bündels imaginärer paralleler Ebenen, und zwei konjugiert-imaginäre von diesen ∞^4 Ebenen schneiden sich entweder in einem außerhalb R_3, also im Endlichen, gelegenen reellen Punkt, oder in einer reellen Geraden der mehrfach erwähnten Kongruenz. *Man erhält nun die Gruppe G_{16}, indem man das eine Ebenenbündel einer beliebigen Kollineation mit komplexen Koeffizienten, und das andere der konjugiert-komplexen Transformation unterwirft.* Die Gruppe ist überall wohldefiniert, eindeutig und stetig, sobald man — wie oben — die Punkte auf einer Geraden der Kongruenz 1. O. 1. Kl. nicht unterscheidet, oder also, sobald man das Kontinuum der ∞^4 eigentlichen reellen Punkte durch ∞^2 „uneigentliche Punkte" abschließt, deren jeder ∞^1 Punkten auf einer gewissen Geraden von R_3 äquivalent ist. Der Punktraum R_4 ändert damit seinen Zusammenhang — er geht in den Punktraum R_4' über, der eindeutig-umkehrbar und überall-stetig dem ternären komplexen Gebiet entspricht.

Irgend eine Untergruppe G_8, H_8 z. B. hyperbolischer Hermitescher Bewegungen und Umlegungen in R_4' zu deuten, bietet ebenfalls keine Schwierigkeit. Man kann die Abbildung so einrichten, daß eine vorgelegte dieser Untergruppen durch Festhalten einer gewöhnlichen (Euklidischen) sphärischen Mannigfaltigkeit bestimmt wird. Irgend ein geodätisches Band oder irgend eine Normalkette erscheint dann als Kreis, der in einer eigentlichen synektischen Ebene liegt und die Schnittkurve dieser Ebene mit der sphärischen Mannigfaltigkeit unter rechtem Winkel trifft (rechtwinklig trifft im Sinne der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie). In ähnlicher Weise lassen sich die Gruppen (G_8, H_8) elliptischer Bewegungen und Umlegungen deuten. Man kann hier leicht übersehen, wie sich der parabolische Fall, in dem die Gruppen (G_8, H_8) in projektive und zugleich konforme Gruppen übergehen, als Grenzlage zwischen die beiden anderen einschiebt.

Die vorliegende Arbeit bildet einen Auszug aus Untersuchungen, die den Hauptgegenstand einer im Sommer 1904 zu *Bonn* gehaltenen Vorlesung gebildet haben.

Der Gedanke, aus Hermiteschen Formen eine Art projektiver Maßbestimmung abzuleiten, ist, wie dem Verfasser neuerlich bekannt wurde, bereits von Herrn G. Fubini ausgesprochen worden, in einer Arbeit, die der Verfasser vor Absendung seiner eigenen an die Redaktion der Mathematischen Annalen noch hat einsehen können. (Sulle metriche definite da una forma Hermitiana, Istituto Veneto, LXIII, 2, 1904). Ihm gebührt also, in bezug auf diesen Gedanken und einige weitere Einzelheiten, die Priorität. Wir können indessen mit dem Inhalte seiner Veröffentlichung uns nicht ganz einverstanden erklären. Auch Herr Fubini betrachtet die von uns Normalketten genannten Bänder, und auch er bezeichnet sie als geodätisch. Während er aber einen umständlichen Beweis dafür bringt, daß diese Figuren geodätische Bänder sind auf den Geraden, auf denen sie liegen, läßt er die Eigenschaft im Dunkeln, auf die es vor allem ankommt, und die wirklich des Beweises bedarf. Der Satz von der Geraden als kürzestem Weg wird, trotz des Namens *geodetica*, *nicht* auf das komplexe Gebiet ausgedehnt. (Der Verfasser hat diese Erweiterung im Juli 1903 vollzogen und damals verschiedenen Mathematikern — Engel, Kowalewski, Coolidge — mitgeteilt.) Besser vermieden wird hier auch der Gebrauch des Wortes systatisch, das schon eine bestimmte hier nicht zutreffende Bedeutung hat. Endlich erscheint uns bei Fubini das begriffliche (und analytische) Rüstzeug nicht genügend entwickelt, da es gewisse Elemente unberücksichtigt läßt, die nicht ausgeschlossen werden dürfen.

Bonn, 2. August 1904.

Inhalt.

Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten.

Von

Georg Faber in Würzburg.

Die folgenden Ausführungen liefern eine Ergänzung des ersten Mittag-Lefflerschen Theorems*), auf die, wiewohl sie sehr naheliegend ist, bisher niemand aufmerksam gemacht zu haben scheint; es handelt sich der Hauptsache nach um den Beweis der Existenz und um die Konstruktion analytischer Funktionen, die an den Punkten $x_1, x_2, \cdots$ einer beliebigen isolierten, d. h. keine ihrer Häufungsstellen enthaltenden Menge ein bestimmt vorgeschriebenes singuläres Verhalten zeigen. Unter den Singularitäten werden nicht nur Pole und wesentlich singuläre Stellen, sondern auch beliebige *Verzweigungen* zugelassen.

Im ersten Paragraphen betrachte ich den einfachsten Fall, in dem die x_i nur *eine* Häufungsstelle besitzen; ich gebe daselbst zugleich mit den angekündigten Verallgemeinerungen einen neuen Beweis des ersten Mittag-Lefflerschen Theorems, der sich von dem einfachen Beweise Weierstraß' einigermaßen und noch mehr von dem ursprünglichen Mittag-Lefflers unterscheidet; nachträglich bemerkte ich, daß die erweiternden Betrachtungen auch im allerengsten Anschluß an den Weierstraßschen Beweis durchgeführt werden können, und bediene mich daher im zweiten Paragraphen, wo die Menge der x_i nur als isoliert vorausgesetzt wird, dieser bekannten Schlußweise.

Während es also in diesen Paragraphen darauf ankommt, Funktionen mit beliebig vielen gegebenen Singularitäten zu konstruieren, wird im dritten und vierten Paragraphen das umgekehrte Problem in Angriff genommen und vollständig erledigt; nämlich, von einer vorgelegten Funktion

*) Da Herr Mittag-Leffler seinen Namen mit *zwei* fundamentalen Sätzen der Funktionentheorie verknüpft hat, ist es wohl angemessen, seinen die Herstellung eindeutiger Funktionen mit vorgeschriebenen singulären Stellen betreffenden Satz als *erstes Mittag-Lefflersches Theorem* zu bezeichnen, hingegen der von ihm bewiesenen Darstellung einer jeden monogenen Funktion durch eine Reihe von Polynomen den Namen des *zweiten Mittag-Lefflerschen Theorems* beizulegen.

$F(x)$ mit den isolierten Singularitäten $x_1, x_2, \cdots$ eine derselben z. B. x_1 loszulösen, d. h. eine Funktion $G(x)$ zu konstruieren, von der Art, daß die Differenz $F(x) - G(x)$ sich an der Stelle x_1 regulär verhält, während sie sonst überall das gleiche Verhalten wie $F(x)$ zeigt.

Im fünften Paragraphen endlich werden für *mehrere Veränderliche* Sätze aufgestellt, die den in den beiden ersten Paragraphen für eine Veränderliche gefundenen analog sind.

§ 1.
Darstellung einer Funktion, deren Singularitäten sich gegen Unendlich häufen.

Es sei eine abzählbare Menge komplexer Zahlen $x_1, x_2, \cdots$ gegeben und zwar sei

(1) $$|x_{i+1}| \geqq |x_i|,$$

(2) $$\lim_{i=\infty} x_i = \infty;$$

ferner sei eine unendliche Folge analytischer Funktionen $G_1(x), G_2(x), \cdots$ vorgelegt und es habe $G_i(x)$ im Endlichen die einzige singuläre Stelle x_i; wenn also $G_i(x)$ eindeutig ist, so ist es eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion von $\frac{1}{x - x_i}$; ist aber $G_i(x)$ mehrdeutig und daher x_i ein Verzweigungspunkt, so muß als weiterer Verzweigungspunkt die Stelle ∞ zugelassen werden; die beiden singulären Stellen x_i und ∞ denke man sich dann durch eine beliebige Linie L_i verbunden; solange x L_i nicht überschreitet, hat man es mit jenem eindeutigen Zweige der mehrdeutigen Funktion $G_i(x)$ zu tun, der im folgenden ausschließlich betrachtet wird. Die Linien L_i seien so gezogen, daß sie einander im Endlichen nicht schneiden.

Es soll nun eine Funktion $F(x)$ mit folgenden Eigenschaften gebildet werden:

$F(x)$ verhält sich im Endlichen überall mit Ausnahme der Stellen $x_1, x_2, \cdots$ regulär und bleibt eindeutig, solange x keine der Linien L_i überschreitet; die Differenz $F(x) - G_i(x)$ ist auch an der Stelle x_i regulär und läßt sich daher in einer gewissen Umgebung dieser Stelle nach steigenden Potenzen von $x - x_i$ entwickeln. $F(x) - G_i(x)$ bleibt demnach auch eindeutig, wenn x die Linie L_i überschreitet.

Es werde einstweilen angenommen, daß die Nullstelle sich nicht unter den x_i befindet; dann läßt die Funktion $G_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ für $|x| < |x_i|$ die Entwickelung zu:

(3) $$G_i(x) = \mathfrak{p}_i(x) = \sum_0^\infty a_\nu^{(i)} x^\nu.$$

Für die Koeffizienten $a_\nu^{(i)}$ liefert der **Cauchy**sche Satz von der Größe des Konvergenzradius die Beziehung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(i)}|} = \frac{1}{|x_i|}. \tag{4}$$

Bedeutet daher $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ eine monoton der Null zustrebende Folge positiver Zahlen, so läßt sich eine Reihe wachsender ganzer Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ bestimmen von der Art, daß

$$\begin{array}{ll}
\sqrt[\nu]{|a_\nu^{(1)}|} < \frac{1+\varepsilon_1}{|x_1|} & \text{für } \nu \geqq n_1, \\
\left.\begin{array}{l} \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(1)}|} < \frac{1+\varepsilon_2}{|x_1|} \\ \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(2)}|} < \frac{1+\varepsilon_2}{|x_2|} \end{array}\right\} & \text{für } \nu \geqq n_2, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
\left.\begin{array}{l} \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(1)}|} < \frac{1+\varepsilon_i}{|x_1|} \\ \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(2)}|} < \frac{1+\varepsilon_i}{|x_2|} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(i)}|} < \frac{1+\varepsilon_i}{|x_i|} \end{array}\right\} & \text{für } \nu \geqq n_i.
\end{array} \tag{5}$$

Eine andere Folge wachsender ganzer Zahlen ist $l_1, l_2, \cdots$; die l_ν hängen mit den n_ν durch folgende Gleichungen zusammen:

$$\begin{array}{lll}
l_\nu = 0, & \text{solange} & \nu < n_1, \\
l_\nu = 1, & \text{„} & n_1 \leqq \nu < n_2, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
l_\nu = i, & \text{„} & n_i \leqq \nu < n_{i+1}.
\end{array} \tag{6}$$

so daß die Beziehungen

$$i \leqq l_\nu \quad \text{und} \quad \nu \geqq n_i \tag{6'}$$

gleichwertig sind.

Da die Ungleichungen (5) um so mehr bestehen bleiben, wenn man die n_i vergrößert, so darf $n_\nu \geqq \nu$ vorausgesetzt werden, worauf aus (6) folgt: $l_\nu \leqq \nu$, sowie — und hierauf kommt es bei dem folgenden Beweise allein an —:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{l_\nu} = 1. \tag{7}$$

Ferner werden folgende Zahlen $b_\nu^{(1)}$ gebildet

$$\begin{array}{l}
b_\nu^{(1)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu < n_1, \\
b_\nu^{(1)} = a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + \cdots + a_\nu^{(l_\nu)} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n_1,
\end{array} \tag{8}$$

und unter $b_\nu^{(k)}$ das verstanden, was aus $b_\nu^{(1)}$ entsteht, wenn

$$a_\nu^{(1)} = a_\nu^{(2)} = \cdots = a_\nu^{(k-1)} = 0$$

gesetzt wird.

Ich betrachte nun die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_k(x) = \sum_{n_k}^{\infty}{}^{\nu} |b_\nu^{(k)}| \, x^\nu. \tag{9}$$

Der wahre Konvergenzradius von $\mathfrak{P}_k(x)$ ist gleich $|x_k|$. Für das folgende genügt es zu zeigen, daß er *nicht kleiner* ist, d. h. daß

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|b_\nu^{(k)}|} \leqq \frac{1}{|x_k|}$$

ist; es ist aber für $\nu \geqq n_k$:

$$b_\nu^{(k)} = a_\nu^{(k)} + a_\nu^{(k+1)} + \cdots + a_\nu^{(l_\nu)},$$

also

$$\begin{aligned} |b_\nu^{(k)}| &< |a_\nu^{(k)}| + |a_\nu^{(k+1)}| + \cdots + |a_\nu^{(l_\nu)}| \\ &< (1+\varepsilon_{l_\nu})^{l_\nu} \left(\frac{1}{|x_k|^\nu} + \frac{1}{|x_{k+1}|^\nu} + \cdots + \frac{1}{|x_{l_\nu}|^\nu} \right) \quad \text{(nach (5) u. (6'))} \\ &\leqq \frac{(1+\varepsilon_{l_\nu})^{l_\nu} \cdot l_\nu}{|x_k|^\nu}, \end{aligned}$$

woraus mit Benutzung von (7) folgt, wie behauptet:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|b_\nu^k|} \leqq \frac{1}{|x_k|}. \tag{10}$$

Diese Beziehung bleibt samt ihrer Herleitung in Geltung, wenn man sämtliche a_ν durch ihre absoluten Beträge ersetzt.

Schreibt man daher $\mathfrak{P}_k(x)$ als iterierte Reihe:

$$\mathfrak{P}_k(x) = \sum_{n_k}^{\infty}{}^{\nu} \left(\sum_{k}^{l_\nu}{}^{\mu} a_\nu^{(\mu)} x^\nu \right), \qquad |x| < |x_k|, \tag{11}$$

so darf in derselben nach dem Cauchyschen Doppelreihensatze die Summationsfolge vertauscht werden; dadurch erhält man, wenn man noch beachtet, daß der Term $a_\nu^{(\mu)}$ in (11) nur vorkommt, wenn $\mu \leqq l_\nu$ und mithin (nach (6')) $\nu \geqq n_\mu$ ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_k(x) &= \sum_{k}^{\infty}{}^{\mu} \left(\sum_{n_\mu}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu^{(\mu)} x^\nu \right) \\ &= \left(\mathfrak{p}_k(x) - \sum_{0}^{n_k - 1}{}^{\nu} a_\nu^{(k)} x^\nu \right) + \left(\mathfrak{p}_{k+1}(x) - \sum_{0}^{n_{k+1}-1}{}^{\nu} a_\nu^{(k+1)} x^\nu \right) + \cdots, \end{aligned} \tag{12}$$

speziell

(13)
$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_1^\infty{}^\mu \left(\mathfrak{p}_\mu(x) - \sum_0^{n_\mu - 1}{}^\nu a_\nu^{(\mu)} x^\nu \right).$$

Es wird nun behauptet: *Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x)$ ist das Element einer analytischen Funktion $F(x)$, die sich im Endlichen überall regulär verhält mit Ausnahme der Punkte x_i; in der Umgebung des Punktes x_i ist dagegen die Differenz $F(x) - G_i(x)$ regulären Verhaltens.*

Ist X ein von den x_i verschiedener Punkt und $|X| < |x_k|$, so zerlege man für den Beweis die um den Nullpunkt gültige Entwickelung $F(x) = \mathfrak{P}_1(x)$ in die Summe:

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_1^{k-1}{}^\mu \left(\mathfrak{p}_\mu(x) - \sum_0^{n_\mu - 1}{}^\nu a_\nu^{(\mu)} x^\nu \right) + \mathfrak{P}_k(x).$$

Von diesen k Summanden ist der letzte eine für $x = X$ konvergente Potenzreihe, während die analytische Fortsetzung der übrigen $k-1$ Summanden sich in X regulär verhält; denn $\mathfrak{p}_\mu(x) - \sum\limits_0^{n_\mu - 1}{}^\nu a_\nu^{(\mu)} x^\nu$ ist ein Element der analytischen Funktion $G_\mu(x) - \sum\limits_0^{n_\mu - 1}{}^\nu a_\nu^{(\mu)} x^\nu$, welche im Endlichen nur die singuläre Stelle x_μ hat. Subtrahiert man aber von $F(x)$ die Funktion $G_i(x)$, mithin von der Entwickelung um den Nullpunkt die Reihe $\mathfrak{p}_i(x)$, so entfällt, wie behauptet, auch die singuläre Stelle x_i. Eine von $F(x)$ verschiedene Funktion mit dem gleichen Verhalten könnte sich von $F(x)$ nur um eine im endlichen überall reguläre Funktion, d. h. um eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion unterscheiden.

Ist x_i kein Verzweigungspunkt, so ist es möglich, $G_i(x)$, also auch $\mathfrak{p}_i(x)$, durch die beständig konvergente, eventuell auch abbrechende Potenzreihe

(14)
$$G_i(x) = \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^{(i)} \left(\frac{1}{x - x_i} \right)^\nu$$

darzustellen. Man hat daher, falls keiner der Punkte x_i ein Verzweigungspunkt ist, die folgende in der ganzen Ebene gültige Entwickelung

(15)
$$F(x) = \sum_1^\infty{}^\mu \left(\sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu^{(\mu)}}{(x - x_\mu)^\nu} - \sum_0^{n_\mu - 1}{}^\nu a_\nu^{(\mu)} x^\nu \right),$$

die völlig mit derjenigen des Herrn Mittag-Leffler übereinstimmt.

Die Reihe auf der rechten Seite von (15) konvergiert gleichmäßig für alle von den x_i verschiedenen x, deren absoluter Betrag kleiner als die beliebige Zahl r ist; ist nämlich $|x_k| > r$, so ist der Rest dieser Reihe vom k^{ten} Gliede ab die für $|x| \leqq r$ gleichmäßig konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}_k(x)$.

Ist x_i ein Verzweigungspunkt, so ist eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung von $G_i(x)$ nicht möglich; dagegen läßt sich nach dem *zweiten* *Mittag-Lefflerschen* *Theorem* $G_i(x)$ immer durch eine nach Polynomen fortschreitende und in der ganzen Ebene mit Ausschluß der Linie L_i konvergente Reihe darstellen.

Soll auch $x = 0$ ein singulärer Punkt von $F(x)$ werden, so hat man zu den bisher gefundenen Ausdrücken eine Funktion $G_0(x)$ zu addieren, die man, jenachdem $G_0(x)$ verzweigt oder unverzweigt ist, als beständig konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ oder als eine überall außer auf einer Kurve L_0 konvergente polynomische Reihe annehmen wird.

Wenn anstatt des Punktes ∞ ein endlicher Punkt a Häufungsstelle der x_i wird, so hat man die bisher benutzten Potenzreihen $\mathfrak{p}_i(x)$ und $\mathfrak{P}_k(x)$ nur durch solche zu ersetzen, welche nach Potenzen von $\frac{1}{x-a}$ fortschreiten.

§ 2.

Funktionen, deren Singularitäten eine allgemeine isolierte Menge bilden.

Das im ersten Paragraphen abgeleitete Theorem läßt genau wie das Mittag-Lefflersche eine viel allgemeinere Fassung zu.

Es bedeute jetzt $x_1, x_2, \cdots$ eine beliebige isolierte Punktmenge; jedem Punkte x_i läßt sich dann ein Punkt a_i zurechnen von folgenden Eigenschaften:

(1) a_i ist Häufungsstelle der $x_1, x_2, x_3, \cdots$,

(2) $\lim\limits_{i=\infty} |a_i - x_i| = 0$.

(Ist einer der Punkte $a_i = \infty$, so ist hier $|a_i - x_i|$ durch $\left|\frac{1}{x_i}\right|$ zu ersetzen; auf die weiter dadurch bedingten selbstverständlichen Modifikationen sowie auf die aus der Annahme $x_i = 0$ sich ergebenden wird im folgenden nicht weiter eingegangen.)

Ferner sei $G_i(x)$ eine analytische Funktion, die entweder die eine singuläre Stelle x_i oder die beiden Verzweigungspunkte x_i und a_i besitzt; in letzterem Falle seien x_i und a_i durch die Kurve L_i verbunden, die von keiner anderen L_k außer etwa in a_i getroffen wird.

Der Wert von $G_i(x)$ ist überall, die Linie L_i ausgenommen, als definiert zu betrachten; für alle von x_i und a_i verschiedenen Punkte von L_i kann unter $G_i(x)$ ein willkürlicher der beiden in Betracht kommenden Werte verstanden werden.

Außerhalb der durch die Ungleichung $|x - a_i| < |x_i - a_i|$ definierten Umgebung des Punktes a_i verhält sich $G_i(x)$ regulär und es gilt also die Entwickelung:

(3) $$G_i(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(i)} \left(\frac{1}{x - a_i}\right)^\nu.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe für

(4) $$|x - a_i| \geqq \varrho\, |x_i - a_i|,$$

wo ϱ irgend eine positive Konstante > 1 ist, läßt sich eine ganze Zahl n_i so bestimmen, daß

(5) $$\left|\sum_{n_i}^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(i)} \left(\frac{1}{x - a_i}\right)^\nu\right| < \varepsilon_i$$

ist für alle der Ungleichung (4) genügenden x; die ε_i denke man sich so vorgeschrieben, daß $\sum_1^\infty{}_i\, \varepsilon_i$ konvergiert.

Dann konvergiert auch die Reihe

(6) $$F(x) = \sum_1^\infty{}_i \left(G_i(x) - \sum_0^{n_i - 1}{}_\nu\, a_\nu^{(i)} \left(\frac{1}{x - a_i}\right)^\nu\right)$$

für irgend einen von den x_i und deren Häufungsstellen verschiedenen Wert $x = z$ und läßt sich in einer gewissen Umgebung dieser Stelle nach steigenden Potenzen von $x - z$ entwickeln.

Da nämlich nach der über z gemachten Voraussetzung die Differenz $|z - a_i|$ für jedes a_i größer bleibt als eine gewisse positive Zahl σ, also $|z + h - a_i| > \frac{\sigma}{2}$, wenn nur $|h| \leqq \frac{\sigma}{2}$ gewählt ist, und da andrerseits $\lim\limits_{i=\infty} |a_i - x_i| = 0$, so muß schließlich für $i > n$ und für alle h mit einem absoluten Betrage $\leqq \frac{\sigma}{2}$

(7) $$|z + h - a_i| > \varrho\, |x_i - a_i|$$

sein.

Zerspaltet man daher die Reihe (6) für $F(x)$ in die zwei Summen:

$$(8)\quad \begin{aligned} F(x) = \sum_{1}^{n} {}^{i} \left(G_i(x) - \sum_{0}^{n_i - 1} {}^{\nu} a_\nu^{(i)} \left(\frac{1}{x - a_i} \right)^\nu \right) \\ + \sum_{n+1}^{\infty} {}^{i} \left(G_i(x) - \sum_{0}^{n_i - 1} {}^{\nu} a_\nu^{(i)} \left(\frac{1}{x - a_i} \right)^\nu \right), \end{aligned}$$

so bleibt die zweite Summe für alle $x = z + h$, wo $h \leqq \frac{\sigma}{2}$ ist, kleiner als $\sum_{n+1}^{\infty} {}^{i} \varepsilon_i$, konvergiert demnach gleichmäßig für alle diese Werte von x und stimmt so in der Umgebung des Punktes $x = z$ mit dem Elemente einer regulären analytischen Funktion überein; der erste Summand aber ist eine endliche Summe analytischer Funktionen, von denen jede einzelne nach Voraussetzung im Punkte z regulären Verhaltens ist.

Genau so zeigt man, daß $F(x)$ nach Subtraktion von $G_i(x)$ auch im Punkte x_i regulär ist.

In verschiedenen Konvergenzgebieten kann $F(x)$ bekanntlich verschiedene Funktionen darstellen.

Die beiden über $G_i(x)$ gemachten Voraussetzungen lassen sich noch bedeutend erweitern; es kam beim Beweise nur darauf an, daß $G_i(x)$ außerhalb des Kreises $|x - a_i| = |x_i - a_i|$ regulär ist; die Annahme, daß $G_i(x)$ in diesem Kreise höchstens noch die singuläre Stelle $x = a_i$ besitzt, war für den Beweis ganz unerheblich; $G_i(x)$ darf vielmehr innerhalb dieses Kreises und auf demselben noch beliebige singuläre Stellen haben, die nur sämtlich weder der aus den Singularitäten der übrigen G_k bestehenden Menge noch der Ableitung dieser Menge angehören dürfen, wenn $F(x) - G_i(x)$ dort regulären Verhaltens sein soll. Insbesondere ist es erlaubt anzunehmen, daß der zweite Verzweigungspunkt von $G_i(x)$ statt des Punktes a_i ein beliebiger von den übrigen x_k verschiedener Punkt x_i' sei.

§ 3.

Umkehrung des Darstellungsproblems.

Nachdem in den beiden vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, wie sich eine Funktion mit vorgeschriebenen Singularitäten bilden läßt, ist es angebracht nachzuforschen, ob eine beliebig vorgelegte Funktion $\Phi(x)$ mit den isolierten singulären Stellen $x_1, x_2, \cdots$ in die angegebene Form, die den Anteil der einzelnen Singularitäten deutlich hervortreten läßt, gebracht werden kann. Ein Pol oder eine wesentlich singuläre

Stelle x_i bereiten hier nicht die geringste Schwierigkeit, da dieselben zu einer beständig konvergenten (im Falle des Pols abbrechenden) Potenzreihe von $\frac{1}{x - x_i}$ Anlaß geben. Handelt es sich aber um einen Verzweigungspunkt x_i, so kann das in Frage stehende Problem, wenn man sich auf den einfachsten, aber alle wesentlichen Merkmale des allgemeinen zeigenden Fall beschränkt, folgendermaßen formuliert werden:

$\Phi(x)$ sei eine analytische Funktion mit den singulären Stellen $x_1, x_2, \cdots$, deren einzige Häufungsstelle a ist. x_i sei ein Verzweigungspunkt und von ihm sei unter Vermeidung der übrigen Punkte x_k die Linie L_i bis zum Punkte a gezogen; ist $\bar{x}$ ein Punkt dieses Schnittes und sind $\Phi(\bar{x}_l)$ und $\Phi(\bar{x}_r)$ die beiden im allgemeinen verschiedenen Werte, die $\Phi(x)$ am linken und rechten Ufer*) desselben annimmt, *so ist zu zeigen, daß es eine analytische Funktion $G_i(x)$ gibt, die nur die zwei singulären Stellen x_i und a besitzt und an denselben so verzweigt ist, daß für alle Punkte $\bar{x}$ von L_i die Gleichung*

$$(1) \qquad G_i(\bar{x}_l) - G_i(\bar{x}_r) = \Phi(\bar{x}_l) - \Phi(\bar{x}_r)$$

*besteht.***)

Die Funktion $\Phi(x) - G_i(x)$ ist dann in der Umgebung des Punktes x_i eindeutig und durch weitere Subtraktion einer ganzen Funktion $g_i\left(\frac{1}{x - x_i}\right)$ von $\frac{1}{x - x_i}$ wird die Singularität im Punkte x_i ganz aufgehoben.

Kennt man die Funktionen $G_i(x)$ und $g_i\left(\frac{1}{x - x_i}\right)$ für $i = 1, 2, \cdots$, so steht der im ersten Paragraphen angegebenen Darstellung von $\Phi(x)$ nichts mehr entgegen.

Ehe ich (in § 4) den Existenzbeweis für $G_i(x)$ allgemein führe, mache ich, um die Rechnungen zu vereinfachen, in diesen Paragraphen die *einschränkende Voraussetzung, daß das Integral* $\int\limits_{L_i} (\Phi(\bar{x}_l) - \Phi(\bar{x}_r))\, d\bar{x}$ *absolut konvergiert.* Diese Voraussetzung bezieht sich nur auf die Umgebungen der Stellen x_i und a, da ja $\Phi(x)$ auf L_i weiter keine Singularitäten aufweist; auch die übrigen im folgenden vorkommenden Integrale, in deren Integrand

---

*) Das linke Ufer ist dasjenige, das man beim Fortschreiten von x_i bis a zur linken behält.

**) Existiert *eine* solche Funktion $G_i(x)$, so gibt es unendlich viele, da die verlangten Eigenschaften erhalten bleiben, wenn zu $G_i(x)$ eine beliebige eindeutige nur in x_i und a singuläre Funktion addiert wird. — Unter x_i und a stelle man sich zunächst im Endlichen gelegene Punkte vor

$\Phi(\bar{x}_l) - \Phi(\bar{x}_r)$ als Faktor auftritt, konvergieren dann absolut für jedes nicht auf L_i gelegene x; insbesondere

$$(2) \qquad J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_i} \frac{\Phi(\bar{x}_l) - \Phi(\bar{x}_r)}{\bar{x} - x}\, d\bar{x}.^{*)}$$

Im folgenden soll der Kürze halber $\Phi(\bar{x}_l) - \Phi(\bar{x}_r) = f(\bar{x})$ gesetzt werden.

Ich behaupte nun: *Das Integral $J(x)$ ist eine in der ganzen längs L_i aufgeschnittenen Ebene reguläre analytische Funktion von x, die an dem Schnitte L_i die vorgeschriebene Unstetigkeit $f(\bar{x})$ aufweist.* Daß $J(x)$ eine analytische Funktion ist, folgt daraus, daß $J(x)$ in dem betrachteten Kontinuum überall einen bestimmten Differentialquotienten besitzt; es ist nämlich

$$(3) \qquad \frac{J(x+h) - J(x)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_i} \frac{f(\bar{x})\, d\bar{x}}{(\bar{x}-x)(\bar{x}-x-h)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_i} \frac{f(\bar{x})\, d\bar{x}}{(\bar{x}-x)^2} + \frac{h}{2\pi i}\int_{L_i} \frac{f(\bar{x})\, d\bar{x}}{(\bar{x}-x)^2(\bar{x}-x-h)}.$$

$x + h$ sei in einer solchen Umgebung von x gewählt, in welcher kein Punkt von L_i liegt, dann bleibt das zweite auf der rechten Seite von (3) auftretende Integral $\int_{L_i} \frac{f(\bar{x})\, d\bar{x}}{(\bar{x}-x)^2(\bar{x}-x-h)}$ unter einer endlichen Grenze, der zweite Summand verschwindet daher mit dem Faktor h, während der erste den Differentialquotienten von $F(x)$ darstellt.

Etwas umständlicher ist der Beweis für die Behauptung, daß

$$J(\bar{x}_l) - J(\bar{x}_r) = f(\bar{x})$$

ist; es wird dabei vorausgesetzt, daß L_i eine überall stetige Tangente besitzt. Dann läßt sich, wenn $\bar{z}$ einen beliebigen von x_i und a verschiedenen Punkt auf L_i bedeutet und derselbe als Mittelpunkt eines Polarkoordinatensystems gewählt wird, diese Kurve in der Umgebung von $\bar{z}$ durch die Gleichung: $\varphi = \varphi(r)$ darstellen; für $r = 0$ wird $\varphi = \varphi_0$ der Winkel, den die Tangente im Punkte $\bar{z}$ mit der positiven reellen Achse bildet; variiert r zwischen $-\varrho$ und $+\varrho$, so bleibt φ in den Grenzen $\varphi_0 \pm \varepsilon'$ und $|\varphi'(r)|$ unter einer endlichen Schranke.

Auf der Normalen von L_i im Punkte $\bar{z}$ nehme man zur linken und rechten der Tangente die Punkte $z_1 = \bar{z} + \varepsilon(-\sin\varphi_0 + i\cos\varphi_0)$ und

---

*) Ähnliche Integrale wie (2) haben in anderem Zusammenhang schon Stieltjes und Borel betrachtet; s. Borel, Leçons sur les séries diverg. (Paris 1901); Chap. II; wegen der im Texte benutzten Beweismethode vergl. insbesondere p. 69.

$z_2 = \bar{z} - \varepsilon(-\sin\varphi_0 + i\cos\varphi_0)$ an und bilde die Differenz $J(z_1) - J(z_2)$; diese muß sich für verschwindendes ε auf $f(\bar{z})$ reduzieren. Man findet

$$(4) \qquad J(z_1) - J(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_i} \frac{f(\bar{x})\,(z_1 - z_2)}{(\bar{x} - z_1)\,(\bar{x} - z_2)}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{-\varepsilon}{\pi i}\int_{L_i} \frac{f(\bar{x})\,(\sin\varphi_0 - i\cos\varphi_0)\,d\bar{x}}{(\bar{x} - \bar{z})^2 - \varepsilon^2(\sin\varphi_0 - i\cos\varphi_0)^2}.$$

Wird bei der Integration die vorhin erwähnte durch die Ungleichung $-\varrho \leqq r \leqq +\varrho$ erwähnte Umgebung der Stelle $\bar{x} = \bar{z}$ übersprungen, so bleibt das restierende Integral $\int \frac{f(\bar{x})\,(\sin\varphi_0 - i\cos\varphi_0)\,d\bar{x}}{(\bar{x} - \bar{z})^2 - \varepsilon^2(\sin\varphi_0 - i\cos\varphi_0)^2}$ unter einer endlichen von ε unabhängigen Grenze und kann daher, da es in (4) den Faktor ε hat, für den zu bildenden $\lim\limits_{\varepsilon=0}(J(z_1) - J(z_2))$ keinen Beitrag liefern; ausschlaggebend ist allein die Umgebung des Punktes $\bar{x} = \bar{z}$; deshalb ergibt sich, wenn man noch $d\bar{x}$ durch $dr(\cos\varphi + i\sin\varphi + r\varphi'(r)(-\sin\varphi + i\cos\varphi))$, ferner $\bar{x} - \bar{z}$ durch $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ersetzt und überall φ und $\bar{x}$ als Funktionen von r ausgedrückt denkt:

$$(5) \qquad \lim_{\varepsilon=0}(J(z_1) - J(z_2))$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\varrho}^{+\varrho} \frac{(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)[\cos\varphi + i\sin\varphi + r\varphi'(r)(-\sin\varphi + i\cos\varphi)]f(\bar{x})\,dr}{r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + \varepsilon^2(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)^2}.$$

Durch die Substitution $r = \varepsilon t$ (ε konstant) geht das Differential dr in $\varepsilon\,dt$ über, die Grenzen werden $-\frac{\varrho}{\varepsilon}$ und $+\frac{\varrho}{\varepsilon}$ und der Nenner des Integranden läßt sich abgesehen von dem Faktor ε^2 in der Form schreiben:

$$(6) \qquad (\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)^2(1 + t^2) + t^2[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)^2].$$

Der Ausdruck, der hier in der eckigen Klammer steht, bleibt, da sich φ nur in den Grenzen $\varphi_0 \pm \varepsilon'$ bewegt, stets in der Nähe von Null, wenn nur ϱ klein genug gewählt ist; der Wert dieser Klammern möge mit $\varepsilon_1(t)$ bezeichnet werden. $((\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0))$ bleibt aus dem gleichen Grunde, endlich $r \cdot \varphi'(r) \cdot (-\sin\varphi + i\cos\varphi)$ wegen des Faktors r — $|r| < \varrho$ — dem absoluten Betrage nach in beliebig kleinen Grenzen*); dies möge durch die Bezeichnung

$$(7) \qquad \varepsilon_2(t) = \cos\varphi + i\sin\varphi - (\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) + r\varphi'(r)(-\sin\varphi + i\cos\varphi)$$

angedeutet werden, wie überhaupt mit $\varepsilon_i(t)$ eine Funktion bezeichnet

*) Der zweite Faktor $\varphi'(r)$ bleibt endlich, der dritte $(-\sin\varphi + i\cos\varphi)$ ist vom absoluten Betrage 1.

werden möge, die für alle t des Integrationsgebietes durch Wahl von ϱ unabhängig von ε beliebig klein gemacht werden kann.

Mit Benutzung dieser Vereinfachungen ergibt sich:

$$(8)\qquad \lim_{\varepsilon=0}(J(z_1)-J(z_2))$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)\,(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0+\varepsilon_2(t))\,f(\bar{x})\,dt}{(1+t^2)(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)^2+t^2\varepsilon_1(t)}$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{f(\bar{x})\,dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)\,\varepsilon_2(t)\,(1+t^2)-t^2\varepsilon_1(t)}{[(1+t^2)\,(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)^2+t^2\varepsilon_1(t)](1+t^2)}f(\bar{x})\,dt\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\qquad(I_1\quad+\qquad I_2).$$

s zweite Integral I_2 ist von der Form:

$$\frac{1}{\pi(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon_2(t)+\varepsilon_3(t)\,t^2}{(1+t^2)(1+t^2+t^2\varepsilon_4(t))}f(\bar{x})\,dt$$

oder auch

$$\frac{1}{\pi(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon_5(t)\,f(\bar{x})}{1+t^2}f(\bar{x})\,dt,$$

da ja $\frac{\varepsilon_2(t)+\varepsilon_3(t)\,t^2}{1+t^2+t^2\varepsilon_4(t)}$ für alle reellen t eine Funktion $\varepsilon_5(t)$ ist. Bedeutet η den Maximalwert von $|\varepsilon_5(t)|$, $|G|$ den von $f(\bar{x})$ im Integrationsintervalle, so ist

$$|I_2|<\frac{\eta G}{\pi}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{dt}{1+t^2}<\frac{\eta G}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\eta G$$

d. h. beliebig klein; I_1 aber läßt sich zerlegen in:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{f(\bar{x})\,dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}}\frac{(f(\bar{x})-f(\bar{x}))}{1+t^2}dt;$$

das zweite dieser Integrale ist wegen der Stetigkeit der im Punkte $\bar{z}$ regulären analytischen Funktion $f(\bar{x})$ von der Form $\int\limits_{-\frac{\varrho}{\varepsilon}}^{+\frac{\varrho}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon_6(t)\,dt}{1+t^2}$ und läßt sich durch Wahl von ϱ beliebig verkleinern, während das erste für verschwindende ε übergeht in $\frac{f(\bar{z})}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = f(\bar{z})$; Man erkennt so, daß sich $\lim\limits_{\varepsilon=0}(J(z_1)-J(z_2))$ von $f(\bar{z})$, so wenig als man nur will unterscheidet, d. h., wie behauptet:

$$\lim_{\varepsilon=0}(J(z_1)-J(z_2)) = f(\bar{z}). \tag{9}$$

§ 4.

Verallgemeinerung.

Die Voraussetzung, daß $f(x)$ auf L_i absolut integrabel sei, möge nunmehr durch die allgemeinere ersetzt werden, *daß $f(x)$ in allen innern (d. h. von x_i und a verschiedenen) Punkten von L_i endlich und stetig sei, während das Unendlichwerden von $f(x)$, sobald x längs L_i sich einem der Grenzpunkte x_i und a nähert, gar keinen Beschränkungen unterliegt;* diese Voraussetzungen sind die allgemeinsten, welche durch den Zusammenhang mit den Darstellungssätzen der Paragraphen 1 und 2 nahegelegt werden.

Auf L_i markiere man einen beliebigen inneren Punkt z_0, ferner auf dem zwischen z_0 und x_i gelegenen Kurventeil die Punkte $z_1, z_2, \cdots$ und zwar so, das z_ν immer zwischen $z_{\nu-1}$ und $z_{\nu+1}$ liegt und $\lim\limits_{\nu=\infty} z_\nu = x_i$ ist; in gleicher Weise werden auf dem andern Kurventeil zwischen $z_0' = z_0$ und a beliebige Punkte $z_1', z_2', \cdots$ gewählt, deren Häufungsstelle a ist; das Kurvenstück zwischen z_ν und $z_{\nu+1}$ werde mit J_ν, das zwischen z_ν' und $z'_{\nu+1}$ mit J'_ν bezeichnet. Die Intervalle J_n und J'_n sollen, wenn n genügend groß gewählt ist, in vorgeschriebene Umgebungen der Punkte x_i und a zu liegen kommen. Außer dieser den Verlauf von L_i betreffenden Forderung wird angenommen, daß L_i eine endliche Bogenlänge und eine überall stetige Tangente besitzt.

Die Entwicklung der in § 3, (2) unter dem Integralzeichen auftretenden Funktion $\frac{1}{z-x}$ nach fallenden Potenzen von $x-b$ lautet mit dem Restglied:

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x-b} - \frac{z-b}{(x-b)^2} - \cdots - \frac{(z-b)^{n-1}}{(x-b)^n} + \frac{(z-b)^n}{(x-b)^n(z-x)}. \tag{1}$$

Die ganze Zahl n_ν wird nun so bestimmt, daß das Restglied $\dfrac{(z-b)^n}{(x-b)^n\,(z-x)}$ für $n \geqq n_\nu$ und für alle x und z, die der Ungleichung

$$\left|\frac{z-b}{x-b}\right| < \varrho < 1 \tag{2}$$

genügen, dem absoluten Betrage nach kleiner als $\dfrac{1}{M_\nu}$ wird, wo M_ν größer gewählt ist als das Maximum von $|f(x)|$ in den Intervallen J_ν und J_ν'.

Unter z verstehe man insbesondere einen auf L_i gelegenen Punkt, unter b die Stelle x_i oder a, je nachdem z in einem Intervalle J_ν oder J_ν' liegt. Wird z auf die Punkte von L_i, x auf die übrige Ebene beschränkt, so bedeute $r(z, x)$ die folgende an den Punkten z_ν und z_ν' unstetig werdende Funktion von z und x:

$$r(z, x) = \frac{(z-b)^{n_\nu}}{(x-b)^{n_\nu}\,(z-x)}, \tag{3}$$

wo der Wert von n_ν mit J_ν in der zuvor bestimmten Weise variiert.

Ich betrachte nun das Integral

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_i} f(z)\, r(z, x)\, dz \tag{4}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_0^\infty{}_\nu \int\limits_{z_\nu L_i}^{z_{\nu+1}} f(z)\frac{(z-x_i)^{n_\nu}\,dz}{(x-x_i)^{n_\nu}\,(z-x)} + \sum_0^\infty{}_\nu \int\limits_{z_\nu' L_i}^{z_{\nu+1}'} f(z)\frac{(z-a)^{n_\nu}\,dz}{(x-a)^{n_\nu}\,(z-x)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_0^\infty{}_\nu k_\nu(x) + \sum_0^\infty{}_\nu \bar{k}_\nu(x)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

wo zur Abkürzung

$$\int\limits_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\, r(z, x)\, dz = k_\nu(x) \quad \text{und} \quad \int\limits_{z_\nu'}^{z_{\nu+1}'} f(z)\, r(z, x)\, dz = \bar{k}_\nu(x)$$

gesetzt ist.

Schließt man L_i durch eine geschlossene Kurve C ganz ein und beschränkt x auf das Gebiet S außerhalb C, z auf das Intervall J_ν, so ist $f(z)\cdot\dfrac{(z-x_i)^{n_\nu}}{(x-x_i)^{n_\nu}\,(z-x)}$ eine stetige Funktion der beiden Variabelen z und x, und das gleiche gilt von dem nach x genommenen Differentialquotienten dieser Funktion; $k_\nu(x)$ — und ebenso $\bar{k}_\nu(x)$ — besitzt daher für alle x in S einen bestimmten durch Differentiation unter dem Integralzeichen zu erhaltenden Differentialquotienten, ist daher für alle in S, d. h. nicht auf L_i gelegenen Werte von x eine stetige analytische Funktion. Daß das gleiche von $K(x)$ gilt, folgt aus der für alle x von S gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (13); ist nämlich d die untere Grenze von $|x-z|$ für alle x in S und alle z auf L_i, so ist insbesondere

$$(6) \qquad \begin{aligned} |x-x_i| &> d, \\ |x-a| &> d; \end{aligned}$$

ferner haben nach den gemachten Voraussetzungen die sämtlichen Punkte der Intervalle J_n $(n \geqq n')$ einen Abstand von x_i, der kleiner als ϱd ist; desgleichen ist $|z-a| < \varrho d$, wenn z in J'_n $(n \geqq n')$ liegt.

Es ist daher gleichmäßig für alle x in S:

$$(7) \qquad \left|\sum_{n'}^{\infty}{}_{\nu}(k_\nu(x)+\bar{k}_\nu(x))\right| < \sum_{n'}^{\infty}{}_{\nu}\left(\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} \frac{|f(z)|\,|dz|}{M_\nu} + \int_{z'_\nu}^{z'_{\nu+1}} \frac{|f(z)|\,|dz|}{M_\nu}\right)$$

$$< \sum_{n'}^{\infty}{}_{\nu}\left(\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} |dz| + \int_{z'_\nu}^{z'_{\nu+1}} |dz|\right);$$

diese Reihe hat zum Grenzwert die Summe der Kurvenlängen der zwischen $z_{n'}$ und x_i und zwischen $z'_{n'}$ und a gelegenen Stücke von L_i; wegen der vorausgesetzten Rektifizierbarkeit von L_i und der Beziehungen:

$$\lim_{\nu=\infty} z_\nu = x_i; \quad \lim_{\nu=\infty} z_\nu' = a$$

können diese Längen durch Vergrößerung von n' beliebig klein gemacht werden.

Darnach ist $K(x)$ für alle nicht auf L_i gelegenen x eine reguläre analytische Funktion; an L_i aber erleidet $K(x)$, wie nunmehr gezeigt werden soll, eine Unstetigkeit im Betrage von $f(x)$. Es sei nämlich, wie in § 3, $\bar{z}$ ein beliebiger innerer Punkt von L_i, in welchem die Tangente an L_i mit der positiven reellen Achse den Winkel φ_0 bildet, ferner sei wieder $z_1 = \bar{z} + \varepsilon(-\sin\varphi_0 + i\cos\varphi_0)$, $z_2 = \bar{z} - \varepsilon(-\sin\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$; dann ist zu zeigen, daß

$$(8) \qquad \lim_{\varepsilon=0}(K(z_1) - K(z_2)) = f(\bar{z})$$

ist. Es werde beispielsweise angenommen, daß $\bar{z}$ zwischen z_k und z_{k+2} liegt, so daß die Annahme $\bar{z} = z_{k+1}$ nicht ausgeschlossen erscheint; dagegen soll $\bar{z}$ weder mit z_k noch mit z_{k+2} zusammenfallen. Zerspaltet man nun $K(x)$ in die Summe:

$$(9) \qquad K(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_k}^{z_{k+2}} f(z)\,r(z,x)\,dz + K_1(x),$$

wo

$$K_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_0^k{}_\nu \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\, r(z,x)\, dz + \sum_{k+2}^\infty{}_\nu \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\, r(z,x)\, dz + \sum_0^\infty{}_\nu \int_{z'_\nu}^{z'_{\nu+1}} f(z)\, r(z,x)\, dz\right),$$

so ist $K_1(x)$ nicht nur wie $K(x)$ in S, sondern auch, wie man auf die gleiche Weise erkennt, in der Umgebung des Punktes $x = \bar{z}$ regulär und eindeutig, also

(10) $$\lim_{\varepsilon=0} (K_1(z_1) - K_1(z_2)) = 0.$$

Dagegen ist nach der Bedeutung von $r(z, x)$ (vgl. (1) und (3)):

(11) $$\int_{z_k}^{z_{k+2}} f(z)\, r(z,x)\, dz = \int_{z_k}^{z_{k+2}} \frac{f(z)\, dz}{z - x} + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sum_1^{n_k}{}_\nu \frac{(z - x_i)^{\nu-1}}{(x - x_i)^\nu} f(z)\, dz$$

$$+ \int_{z_{k+1}}^{z_{k+2}} \sum_1^{n_{k+1}}{}_\nu \frac{(z - x_i)^{\nu-1}}{(x - x_i)^\nu} f(z)\, dz.$$

Die letzten beiden Integrale geben zusammen eine eindeutige, nur in x_i unendlich werdende rationale Funktion $r(x)$, daher ist

(12) $$\lim_{\varepsilon=0} (r(z_1) - r(z_2)) = 0$$

und auf Grund von (10) und (12):

(13) $$\lim_{\varepsilon=0} (K(z_1) - K(z_2)) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\pi i} \int_{z_k}^{z_{k+2}} f(z) \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right) dz$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\pi i} \int_{z_k}^{z_{k+2}} \frac{f(z)(z_1 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)}\, dz;$$

der letztere Grenzwert aber ist, wie schon früher (p. 389 ff.) bewiesen wurde, gleich $f(\bar{z})$.

Bei dem soeben durchgeführten Beweise waren x_i und a endliche Punkte; wird einer derselben z. B. a unendlich, so hat man die Endpunkte z_ν' der Intervalle J_ν' so zu wählen, daß $\lim\limits_{\nu=\infty} z_\nu' = \infty$ wird; $r(z, x)$ wird dann gleich $\frac{x^{n_\nu}}{z^{n_\nu}(z-x)} \equiv \frac{1}{z-x} - \sum\limits_0^{n_\nu}{}_\nu \frac{x^{\nu-1}}{z^\nu}$ gesetzt, und n_ν so bestimmt, daß $|r(z, x) f(z)| < \left|\frac{1}{z^2}\right|$ ist für alle z in J_ν' und alle $|x| < \varrho |z|$; dann konvergiert $\int\limits_{x_i}^{\infty} f(z)\, r(z, x)\, dz$ absolut und in der Beweisführung tritt im übrigen keine Änderung ein.

$f(x)$ war ursprünglich als Differenz $\Phi(x_l) - \Phi(x_r)$ in die Rechnung eingeführt, wo die beiden Zweige $\Phi(x_l)$ und $\Phi(x_r)$ über L_i fortsetzbar waren; unter diesen Umständen sind auch die gebildeten Funktionen $J(x)$ und $K(x)$ nach beiden Seiten hin über L_i fortsetzbar; um z. B. $K(x_l + h)$ zu erhalten, wo x_l am linken Ufer, aber $x_l + h$ schon rechts von L_i liegt, hat man nur die Summe $K(x_r + h) + f(x + h)$ zu bilden, deren erster Summand direkt durch das Integral (4) geliefert wird, während der zweite durch analytische Fortsetzung von $f(x)$ gefunden wird. Zu dem gleichen Resultate gelangt man auch mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, indem man die Kurve L_i durch eine in der Umgebung des Punktes x ganz rechts von L_i verlaufende, sonst mit L_i zusammenfallende Kurve L_i' ersetzt und statt $K(x)$ das Integral $\bar{K}(x) = \int\limits_{L_i'} f(z)\, r(z, x)\, dz$ in die Rechnung einführt; dasselbe stimmt außerhalb des durch die Kurven L_i und L_i' begrenzten Bereiches überall mit $K(x)$ überein, liefert aber innerhalb dieses Flächenstücks die analytische Fortsetzung $K(x_l + h)$, vorausgesetzt nur, daß die Kurve L_i' nahe genug bei L_i verläuft.

Bei Ableitung der Formel (8) jedoch wurde nirgends von der Regularität von $f(\bar{x})$ Gebrauch gemacht, sondern zuletzt nur $f(x)$ als in allen innern Punkten von L_i endlich und stetig vorausgesetzt; auch diese Forderungen ließen sich auf ein geringeres Maß reduzieren. Jedenfalls aber *muß* $f(x)$ immer analytisch sein auf L_i, *wenn* $K(x)$ (oder $J(x)$) nach *beiden* Seiten hin über L_i fortsetzbar sein soll; denn mit $K(x_l)$ und $K(x_r)$ ist auch die Differenz $f(x) = K(x_l) - K(x_r)$ regulären Verhaltens auf L_i.

Wird daher in den Integralen für $K(x)$ eine *nicht analytische* Funktion $f(x)$ eingesetzt, so kann $K(x)$ nirgends nach *beiden* Seiten hin über L_i fortsetzbar sein; wohl aber ist der Fall denkbar, daß $K(x)$ von der einen Seite her über L_i fortsetzbar ist, während von der andern Seite her L_i als natürliche Grenze auftritt, oder auch, daß $K(x)$ an gewissen Kurvenstücken von links nach rechts, an andern von rechts nach links fortsetzbar ist.*)

*) Diese Möglichkeit wird von Herrn Borel nicht besonders erwähnt, wenn er im Falle eines nicht analytischen $f(x)$ die Nichtexistenz einer Fortsetzung für evident erklärt; a. a. O. p. 66 und p. 70.

§ 5.

Funktionen zweier Veränderlicher.

Handelt es sich um Funktionen *mehrerer* Veränderlicher, so können bekanntlich *isolierte* Singularitäten überhaupt nicht auftreten (welchen weiteren Beschränkungen noch die Lage der Singularitäten unterliegt, scheint nicht näher untersucht zu sein*)). Man wird also im Falle zweier Veränderlicher, auf den man sich, ohne wesentliches zu vernachlässigen, beschränken darf, nicht das Verhalten an einer isolierten Menge von Stellen (x_k, y_k) vorschreiben können, ohne dadurch von selber das Verhalten an einer *kontinuierlichen* Menge zu beeinflussen. Solange man über die allgemeinste mögliche Gestalt eines solchen Singularitätenkontinuums keine bestimmte Vorstellung hat, wird man sich mit der Betrachtung einzelner leicht zugänglicher Fälle begnügen müssen. Z. B. die Funktion $G_i(x, y) = \sum_0^\infty{}_{\nu\mu} \frac{c_{\nu\mu}^{(i)}}{(x-x_i)^\nu (y-y_i)^\mu}$, wo $\lim\limits_{\nu+\mu=\infty} \sqrt[\nu+\mu]{|c_{\nu\mu}^{(i)}|} = 0$, hat die singuläre Stelle (x_i, y_i) welche die unendlich vielen singulären Stellen (x_i, y) und (x, y_i) im Gefolge hat, wo unter x und y jede beliebige Zahl (einschließlich ∞) verstanden werden darf; alle diese Stellen sind wesentlich singuläre; es gibt aber auch Funktionen zweier Variabler mit genau den gleichen singulären Stellen im Endlichen, die dann aber sämtlich Verzweigungsstellen sind.

Es sei nun $G_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ eine unendliche Folge von Funktionen zweier Veränderlicher und es habe $G_i(x, y)$ im endlichen die singulären Stellen (x_i, y) und (x, y_i), wo x und y noch alle (endlichen) Werte annehmen, es sei ferner $\lim\limits_{i=\infty} x_i = \lim\limits_{i=\infty} y_i = \infty$ und $x_k \neq x_i$, $y_k \neq y_i$ für verschiedene k und i.

Dann läßt sich eine Funktion $F(x, y)$ konstruieren, die an allen von (x_i, y) und (x, y_i) verschiedenen endlichen Stellen sich regulär verhält, während an den Stellen (x_i, y) und (x, y_i) die Differenz $F(x, y) - G_i(x, y)$ regulären Verhaltens ist. Bedeutet nämlich R_i die kleinere der Zahlen $|x_i|$ und $|y_i|$, so ist die Reihe

$$G_i(x) = \sum_0^\infty{}_{\nu\mu} a_{\nu\mu}^{(i)} x^\nu y^\mu \quad \text{für} \quad |x| \leqq \varrho R_i, \ |y| \leqq \varrho R_i$$

(wo $\varrho < 1$, sonst beliebig ist) gleichmäßig konvergent; es lassen sich also zwei Zahlen n_i und m_i so bestimmen, daß

*) Vgl. hingegen die inzwischen erschienene Münchner Dissertation des Herrn F. Hartogs: Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen.

$$(1)\qquad \left|\sum_{n_i\, m_i}^{\infty}{}^{\nu\mu}\, a_{\nu\mu}\, x^\nu y^\mu\right| < \varepsilon_i \quad \text{ist für} \quad \left.\begin{matrix}|x|\\|y|\end{matrix}\right\} \leqq \varrho R_i,$$

wo ε_i das i^{te} Glied der konvergenten Reihe $\sum\limits_1^{\infty}{}^{\nu}\varepsilon_\nu$ bedeutet. Ich setze nun

$$(2)\qquad F(x, y) = \sum_1^{\infty}{}^{i}\left(G_i(x, y) - \sum_0^{n_i-1,\, m_i-1}{}^{\nu\mu}\, a_{\nu\mu}^{(i)}\, x^\nu y^\mu\right).$$

Es sei (X, Y) irgend eine von den (x_i, y) und (x, y_i) verschiedene Stelle und $\left.\begin{matrix}|X|\\|Y|\end{matrix}\right\} < \varrho R_k$. Ordnet man die Reihe $\sum\limits_k^{\infty}{}^{i}\left(G_i(x, y) - \sum\limits_0^{n_i-1,\, m_i-1}{}^{\nu\mu}\, a_{\nu\mu}^{(i)}\, x^\nu x^\mu\right)$ nach Potenzen von x und y, so ist diese $\mathfrak{P}_k(x, y)$ auf Grund von (1) nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatze für $x = X$, $y = Y$ konvergent; die übrigen in (2) als Summanden auftretenden $k - 1$ Funktionen $G_i(x, y) - \sum\limits_0^{n_i-1,\, m_i-1}{}^{\nu\mu}\, a_{\nu\mu}^{(i)}\, x^\nu y^\mu$ verhalten sich nach Voraussetzung im Punkte (X, Y) regulär; das gleiche gilt daher auch von $F(x, y)$; genau so läßt sich zeigen, daß $F(x, y) - G_i(x, y)$ auch an den Stellen (x_i, y) und (x, y_i) regulären Verhaltens ist.

Die Voraussetzung $\lim\limits_{i=\infty} x_i = \lim\limits_{i=\infty} y_i = \infty$ läßt sich genau wie bei einer Variabeln dahin erweitern, daß die (x_i, y_i) irgend eine isolierte Menge bilden. Desgleichen lassen sich die über $G_i(x, y)$ gemachten Voraussetzungen durch weitere ersetzen, die den bei einer Veränderlichen p. 386 ausgesprochenen nachgebildet sind.

Traunstein, im Juni 1904.

Eine historische Bemerkung zur Funktionentheorie.

Von

J. Lüroth in Freiburg i. Br.

Im Winter 1865 auf 1866 gab mir Kronecker das folgende Beispiel einer Funktion, die im Inneren eines Kreises gleich 1, im Äußeren gleich -1 ist.

Man entwickle $-\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x}$ in eine Reihe der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c(\lambda)}{x^{\lambda}-x^{-\lambda}}$$

und differentiiere nach x. Man findet so, daß die Funktion

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda\, c(\lambda)\, \frac{x^{\lambda}+x^{-\lambda}}{(x^{\lambda}-x^{-\lambda})^2} \tag{1}$$

im Inneren eines mit dem Radius Eins um den Nullpunkt beschriebenen Kreises den Wert 1, im Äußeren den Wert -1 habe, während sie für $x=+i$ und $x=-i$ den Wert Null annehme, und in unendlich vielen Punkten des Kreises unendlich werde.

Für die Koeffizienten $c(\lambda)$ gab Kronecker das Gesetz an: alle $c(\lambda)$ mit geradem λ sind Null. Ist λ ungerade, so sei es in seine Primfaktoren zerlegt $= a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots$. Dann ist

$$\lambda c(\lambda) = (1-a)(1-b)(1-c)\cdots.$$

Da erst später, 1876, von Schröder*) (dem ich Kroneckers Funktion gezeigt hatte) und, 1880, von Weierstraß**) Funktionen angegeben wurden, die die gleiche Eigenschaft haben, schien es mir historisch interessant das Obige zu veröffentlichen, das mir durch alte Papiere vor kurzem wieder ins Gedächtnis gekommen war.

---

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 22, Seite 183.

**) Weierstraß Werke Bd. 2, S. 201.

Ich hatte mir, schon vor langer Zeit, einen Beweis für die Bestimmung der $c(\lambda)$ gemacht, der auf einer symbolischen Rechnung beruhte, doch auch in anderer Form gegeben werden kann. Wie mir aber kürzlich Prof. Stickelberger mitteilte, ist die Bestimmung der Koeffizienten in dem allgemeinen Theorem von Dedekind enthalten, das lautet: Ist $F(m) = \Sigma f(q)$, wo die Summe sich auf alle Divisoren der ganzen Zahl m erstreckt, so ist

$$f(m) = F(m) - \sum F\left(\frac{m}{a}\right) + \sum F\left(\frac{m}{ab}\right) - \sum F\left(\frac{m}{abc}\right) + \cdots,$$

wo die Summenzeichen auf der rechten Seite sich der Reihe nach auf alle Kombinationen zu $1, 2, 3, \cdots$ aus den Primzahlen $a, b, c, \cdots$ beziehen, wo $a, b, c, \cdots$ die sämtlichen voneinander verschiedenen Primzahlen bezeichnen, die in m aufgehen*).

Durch Entwicklung der Funktionen

$$-\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c(\lambda)}{x^{\lambda} - x^{-\lambda}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von x entsteht die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{x^{2\lambda-1}}{2\lambda-1} = \sum_{q=1}^{\infty} c(q) \sum_{p=0}^{\infty} x^{q(2p+1)}. \tag{2}$$

Setzt man $2p+1 = \mu$, so kann man rechts schreiben

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\mu} \sum c(q),$$

wo sich $\Sigma c(q)$ über alle positiven ganzen Zahlen q erstreckt, für die $\frac{\mu}{q}$ eine ungerade Zahl ist. Ist also μ gerade, so ist $\Sigma c(q) = 0$; ist μ ungerade $= 2\lambda - 1$, so ist $\sum c(q) = \frac{1}{2\lambda - 1}\cdot$ Der angeführte Dedekindsche Satz zeigt also, daß alle $c(q)$ mit geradem q Null sind. Indem man $F(m) = \frac{1}{m}$ nimmt, folgt für $m = 2\lambda - 1$

$$c(2\lambda - 1) = \frac{1}{2\lambda-1} - \sum \frac{a}{2\lambda-1} + \sum \frac{ab}{2\lambda-1} - \cdots = \frac{(1-a)(1-b)(1-c)\cdots}{2\lambda-1},$$

wo $a, b, c, \cdots$ die verschiedenen in $2\lambda - 1$ aufgehenden Primzahlen sind. Damit ist die Angabe Kroneckers bewiesen.

Ist ε ein echter Bruch und $|x| < \varepsilon$, so ist $|x^{2\lambda} - 1| > 1 - \varepsilon^{2\lambda} > 1 - \varepsilon$, also, da $|c(\lambda)| < 1$,

$$\left| \frac{c(\lambda)}{x^{\lambda} - x^{-\lambda}} \right| < \frac{\varepsilon^{\lambda}}{1-\varepsilon}\cdot$$

*) Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 54, Seite 21, oder Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie § 138.

Die rechte Seite der Gleichung

$$(3) \qquad -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c(\lambda)}{x^{\lambda} - x^{-\lambda}}$$

ist also für $|x| < \varepsilon$ unbedingt und gleichmäßig konvergent und stellt eine analytische Funktion von x vor.*) Für die Entwicklung der linken Seite gilt das gleiche, und demnach ist Gleichung (3) für $|x| < 1$ richtig. Differentiiert man nach x, so folgt für $|x| < 1$

$$(4) \qquad 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda\, c(\lambda)\, \frac{x^{\lambda} + x^{-\lambda}}{(x^{\lambda} - x^{-\lambda})^2}.$$

Ersetzt man x durch $\frac{1}{x}$, so ergibt sich die für $|x| > 1$ gültige Gleichung

$$-1 = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda\, c(\lambda)\, \frac{x^{\lambda} + x^{-\lambda}}{(x^{\lambda} - x^{-\lambda})^2}.$$

Die rechte Seite der Gleichung (4) ist also in der Tat eine analytische Funktion von x, die für $|x| < 1$ den Wert 1, für $|x| > 1$ den Wert -1 hat.

Die Funktion wird unendlich für jedes x, für das $x^{2\lambda} = 1$; also für $x = e^{\frac{i\pi n}{\lambda}}$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Diese Unendlichkeitspunkte liegen auf dem um den Nullpunkt beschriebenen Einheitskreis überall-dicht. Setzt man für die Punkte dieses Kreises $x = e^{i\varphi}$, so wird die Funktion

$$i \sin\varphi \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1)\, c(2\lambda+1)\, \frac{\cos(2\lambda+1)\varphi}{\sin^2(2\lambda+1)\varphi}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ verschwindet also die Summe, indem alle Summanden Null werden.

Für jedes Azimut φ, das zu π in einem irrationalen Verhältnis steht, ist aber die obige Reihe divergent. Denn wenn man $\frac{\varphi}{\pi}$ in einen Kettenbruch entwickelt, dessen Zähler alle 1 und dessen Nenner natürliche Zahlen sind, so ist in diesem Falle der Kettenbruch unendlich. Ist $\frac{P_n}{Q_n}$ der n^{te} Näherungsbruch, so ist Q_n mit Q_{n+1} teilerfremd, und mit wachsendem n wächst Q_n über alle Grenzen. Man kann also zu einer beliebig großen Zahl $2g+1$ stets einen Näherungsbruch $\frac{P_n}{Q_n}$ finden, dessen Nenner ungerade und $> 2g+1$ ist. Dann ist, wie bekannt,

*) Weierstraß Werke Bd. 2, Seite 208.

$$\left|\frac{\varphi}{\pi}-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_n^2}$$

oder

$$\varphi=\pi\frac{P_n}{Q_n}+\frac{\vartheta\pi}{Q_n^2},$$

unter ϑ einen echten Bruch verstanden. Dasjenige Glied unserer Reihe, das dem Wert $2\lambda+1=Q_n$ entspricht, enthält also

$$\cos Q_n\varphi=\pm\cos\frac{\vartheta\pi}{Q_n},$$

$$\sin Q_n\varphi=\pm\sin\frac{\vartheta\pi}{Q_n},$$

$$\left|\frac{\cos Q_n\varphi}{\sin^2 Q_n\varphi}\right|=\frac{\cos\frac{\vartheta\pi}{Q_n}}{\sin^2\frac{\vartheta\pi}{Q_n}}.$$

Da man annehmen kann, es sei $Q_n>4$, so ist

$$\cos\frac{\vartheta\pi}{Q_n}>\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sin\frac{\vartheta\pi}{Q_n}<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

also

$$\left|\frac{\cos Q_n\varphi}{\sin^2 Q_n\varphi}\right|>\sqrt{2}.$$

Aber $|\lambda c(\lambda)|=|(a-1)(b-1)(c-1)\cdots|$ ist sicher >2. Folglich gibt es jenseits des g^{ten} Gliedes unserer Reihe stets noch Glieder, die absolut genommen $>2\sqrt{2}$ sind, und folglich muß die Reihe divergent sein. Der vorhin genannte Einheitskreis bildet also für die Funktion eine natürliche Grenze.

Freiburg i. Br., Sommer 1904.

Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Die folgenden Blätter enthalten einige Ergänzungen zu den Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, die ich im 58. Bande dieser Annalen veröffentlicht habe. Ich zitiere diese Abhandlung mit U. und behalte die dort benutzten Bezeichnungen bei.

§ 1.

Hilfssätze über trigonometrische Funktionen.

Aus der elementaren Formel

$$\sum_{\nu}^{1,n} \cos \nu x = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

folgt durch Integration

$$S_n = \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \frac{x}{2}$$

$$= \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx + \int_0^x F(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx - \frac{x}{2},$$

wobei die Größe

$$F(x) = \frac{x - 2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}},$$

auch wenn man $x = 0$ setzt, endlich ist und, solange x nicht den Wert 2π erreicht, endlich bleibt; die Ableitung $F'(x)$ hat dieselben Eigenschaften. Man findet daher, indem man partiell integriert,

$$\int_0^x F(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = -\left.\frac{F(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}\right|_0^x + \int_0^x \frac{F'(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}\,dx;$$

diese Größe nähert ich offenbar der Grenze Null an, wenn n über alle Grenzen wächst. Da ferner

$$\int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\,du$$

gesetzt werden kann, und das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$

einen endlichen Wert hat, so bleiben in dem für S_n aufgestellten Ausdruck alle Glieder dem absoluten Werte nach unter festen, endlichen, von n unabhängigen Grenzen, solange x auf ein Intervall beschränkt bleibt, das zwischen -2π und $+2\pi$ liegt, ohne diese Größen selbst zu erreichen; dasselbe gilt daher von der Größe S_n unter der Voraussetzung

$$2\pi - c \geqq x \geqq -2\pi + c_1,$$

wenn wir von jetzt an durch $c, c_1, \cdots$ positive Konstante bezeichnen, die beliebig klein gewählt werden können.

Da nun aber die Werte von S_n auf den Strecken von $2\pi - c$ bis 2π und von $-2\pi + c_1$ bis -2π entgegengesetzt denen sind, die auf den Strecken von 0 bis c und von 0 bis $-c_1$ angenommen werden, so liegt S_n, wenn x ein festes, beliebig begrenztes reelles Intervall durchläuft, zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen.

Dies Resultat überträgt sich sofort auf die Reihe

$$T_n = \sum_\nu^{1,n} \frac{(-1)^\nu \sin \nu x}{\nu},$$

die aus $-S_n$ hervorgeht, indem man x durch $\pi - x$ ersetzt, und ebenso auf den Ausdruck

$$\frac{1}{2}(S_n - T_n) = \sum_\nu^{0,n} \frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1};$$

endlich von diesem, indem man $\frac{x}{2}$ für x setzt, auf die Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n} \frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x}{\nu+\frac{1}{2}}.$$

Eine zweite Eigenschaft der betrachteten Reihen ergibt sich, wenn man voraussetzt

$$c_1 \leqq x \leqq 2\pi - c.$$

Dann konvergiert nämlich der in der Summe S_n vorkommende Ausdruck

$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\, du$$

gleichmäßig gegen seine Grenze $\frac{\pi}{2}$, der er für alle bezeichneten Werte von x so nahe liegt wie man will, sobald n hinreichend groß geworden ist. Ähnliches gilt von dem Integral

$$\int_0^x F(x) \sin nx\, dx,$$

das sich, wie die oben durchgeführte partielle Integration zeigt, der Grenze Null gleichmäßig bezüglich der Variablen x annähert, wenn diese eine Strecke durchläuft, auf der $F(x)$ zwischen festen, endlichen Grenzen bleibt. Hiermit ist gezeigt, daß auch die Summe S_n auf der Strecke von $x = c_1$ bis $x = 2\pi - c$, wenn $n = \infty$ wird, gleichmäßig gegen ihre Grenze konvergiert; diese hat den Wert

$$S_\infty = \frac{\pi - x}{2}.$$

Da ferner die für x geforderte Ungleichung ergibt

$$\pi - c_1 \geqq \pi - x \geqq -\pi + c,$$

so hat die Reihe T_n die soeben für S_n abgeleitete Eigenschaft bei der Annahme

$$\pi - c_1 \geqq x \geqq -\pi + c,$$

und die oben angegebene Beziehung zwischen S_n und T_n führt zu dem Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_n = T_\infty = -\frac{x}{2}.$$

Die beiden Reihen

$$S_\infty = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \qquad T_\infty = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-1)^\nu \sin \nu x}{\nu}$$

konvergieren also auf der Strecke

$$c \leqq x \leqq \pi - c_1$$

gleichmäßig, ebenso die Differenz $S_\infty - T_\infty$. Ersetzt man in dieser x durch $\frac{x}{2}$, so sieht man, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x}{\nu + \frac{1}{2}}$$

auf der Strecke

$$2c \leqq x \leqq 2\pi - 2c_1$$

gleichmäßig konvergiert. Da nun die Größen c und c_1 ihrer Definition nach in gewissen Grenzen unbestimmt sind, kann man auch sagen, daß beide Summen

$$S_n = \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \qquad \sum_{\nu}^{0,n} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x}{\nu + \frac{1}{2}}$$

auf der Strecke

$$c \leqq x \leqq 2\pi - c_1$$

bei unbegrenzt wachsenden Werten von n gleichmäßig gegen endliche Grenzen konvergieren.

§ 2.

Das Analogon des Dirichletschen Integrals und der allgemeine Integralsatz von du Bois-Reymond.

Wenn die Funktion $\varphi(z)$ auf der Strecke J stetig und von beschränkter Schwankung ist, und die Beziehung

$$0 < \xi < \eta \leqq Z$$

gilt, so besteht (U. §§ 14, 16) die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(\xi) M_\nu \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\, \varphi(\xi),$$

wobei

$$M_\nu = \frac{1}{\int_0^Z U_\nu^2(\alpha)\, d\alpha}$$

gesetzt ist; wenn ferner h endlich ist, so hat man die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(0) M_\nu \int_0^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha = \varphi(0).$$

Von diesen Formeln gebrauchen wir nur den speziellen Fall

$$\varphi(z) \equiv 1,$$

in dem sich übrigens der Beweis nicht wesentlich einfacher gestalten dürfte als bei der allgemeineren Voraussetzung. Wir erhalten so bei Benutzung der Bezeichnung

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_{\nu}^{1,n} M_\nu\, U_\nu(\xi)\, U_\nu(\alpha)$$

die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_\xi^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \frac{1}{2};$$

ferner wenn h endlich und $\xi = 0$ ist,

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 1.$$

Eine weitere Eigenschaft des Ausdrucks $\Phi(\alpha, n)$ liefert uns der Umstand, daß (U. §§ 13, 15) die Größe

$$U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_\xi^\eta U_\nu(\alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

in eine der folgenden vier Formen gesetzt werden kann:

$$\cos\frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \cos\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\sin\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \sin\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\cos\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \cos\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\sin\frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \sin\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2};$$

dabei liegt die Größe Ψ zwischen endlichen von ξ, η und ν unabhängigen Grenzen, und die erste Form gilt, wenn h und H beide endlich sind, die zweite, wenn h allein endlich ist, die dritte, wenn H unendlich und h endlich ist, die vierte, wenn h und H unendlich sind. Die neben dem Integral erscheinenden Glieder haben zwar zunächst die Gestalt $\Psi : \varrho^2$, wobei ϱ die für die einzelnen Normalfunktionen U_ν charakteristischen Werte des in der Differentialgleichung dieser Funktionen auftretenden

Parameters durchläuft; man kann aber ν statt ϱ schreiben, da das Verhältnis $\varrho : \nu$ in allen Fällen gegen eine endliche Grenze konvergiert (U. § 11).

Setzt man speziell

$$\varphi(\alpha) \equiv 1,$$

so zeigen die angeführten Ausdrücke, daß das Integral

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \sum_{\nu}^{1,n} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_{\xi}^{\eta} U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

in zwei Teile zerlegt werden kann, von denen der eine die Form

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

hat, der andere aber eine der folgenden Summen ist:

$$\sum_{\nu}^{1,n} \cos\frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \cos\frac{\nu\alpha\pi}{Z}\, d\alpha$$

$$= \frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu}\left[\sin\frac{\nu\pi}{Z}(\eta+\xi) - \sin\frac{2\nu\pi\xi}{Z} + \sin\frac{\nu\pi(\eta-\xi)}{Z}\right],$$

$$\sum_{\nu}^{1,n} \sin\frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \sin\frac{\nu\alpha\pi}{Z}\, d\alpha$$

$$= -\frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu}\left[\sin\frac{\nu\pi(\eta+\xi)}{\nu} - \sin\frac{2\nu\pi\xi}{Z} - \sin\frac{\nu\pi(\eta-\xi)}{Z}\right],$$

$$\sum_{\nu}^{1,n} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha$$

$$= \frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta+\xi)}{Z} - \sin 2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} + \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta-\xi)}{Z}\right],$$

$$\sum_{\nu}^{1,n} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha$$

$$= -\frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta+\xi)}{Z} - \sin 2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} - \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta-\xi)}{Z}\right].$$

Diese Größen liegen erstens nach § 1 zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen, wenn η und ξ beliebige Intervalle, etwa beide die Strecke von 0 bis Z durchlaufen. Ist ferner ξ ein beliebiger fester Wert, für den die Beziehung

$$0 \leqq \xi < Z$$

gilt, und η innerhalb des Intervalls J mit Einschluß seiner oberen Grenze so veränderlich, daß $\eta - \xi$ oberhalb einer beliebig kleinen positiven Konstanten c bleibt, so liegen die Größen

$$\frac{\pi(\eta+\xi)}{Z}, \quad \frac{\pi(\eta-\xi)}{Z}$$

zwischen festen Grenzen von der Form c_1 und $2\pi - c_2$. Dasselbe gilt von diesen Größen sowie von $\frac{2\pi\xi}{Z}$, wenn ξ auf irgend einem Teil der Strecke J, der von den Enden um endliche Stücke entfernt bleibt, veränderlich ist und für $\eta - \xi$ die bisherige Voraussetzung beibehalten wird. Nach § 1 konvergieren daher die obigen, bis zu $n = \infty$ ausgedehnten Reihen bezüglich der Größe η, wenn ξ fest ist, und bezüglich beider Größen ξ und η, wenn beide in der angegebenen Weise variieren, gleichmäßig gegen endliche Grenzwerte.

Diese Eigenschaften übertragen sich nun sofort auf das Integral

$$\int_\xi^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

da in ihm außer einer der betrachteten trigonometrischen Reihen nur noch eine Summe

$$\sum_\nu^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

vorkommt, in der die Größen Ψ zwischen endlichen von ν, ξ und η unabhängigen Grenzen liegen, die also, wenn $n = \infty$ wird, bezüglich beider Größen ξ und η gleichmäßig konvergiert. Der Grenzwert, dem das Integral zustrebt, ist nach den oben angeführten Formeln $+\frac{1}{2}$, wenn ξ oberhalb einer positiven Grenze verbleibt, dagegen $+1$, wenn h endlich und $\xi = 0$ ist.

Die hiermit bewiesenen Eigenschaften des Ausdruckes $\Phi(\alpha, n)$ *gestatten nun nach der Darstellung von C. Jordan* (Cours d'analyse II, Nr. 224), *den allgemeinen Integralsatz von du Bois-Reymond anzuwenden**), und zu folgern, daß, wenn $\varphi(\alpha)$ im Intervall J eine Funktion von beschränkter Schwankung und ξ positiv ist, die Gleichung

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\,\Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \frac{1}{2}\,\varphi(\xi + 0)$$

---

*) s. a. Dini, Serie di Fourier (Pisa, 1880).

gilt. Diese Formel wird nämlich a. a. O. unter folgender Voraussetzung abgeleitet: das Integral

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

bleibe bei beliebigen Werten von n zwischen endlichen Grenzen und konvergiere gleichmäßig gegen einen festen Grenzwert, wenn η eine Strecke durchläuft, deren obere Grenze beliebig oberhalb der Größe ξ fixiert ist, während die untere Grenze dem Werte ξ von oben her beliebig nahe kommen darf; das ist aber ein Teil oben bewiesenen Eigenschaften von $\Phi(\alpha, n)$.

Die erhaltene Gleichung (1) kann offenbar in der Form

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} U_{\nu}(\xi)\, M_{\nu} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_{\nu}(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\, \varphi(\xi + 0)$$

geschrieben werden, und verallgemeinert den Satz, der in der Theorie der Fourierschen Reihen mittels des du Bois-Reymondschen Satzes abgeleitet wird, indem man

$$\Phi(\alpha, n) = \frac{\sin n\alpha}{\alpha}$$

setzt; das Integral in der Formel (1) ist das Analogon des Dirichletschen Integrals.

Wenn h endlich ist, so kann man auch $\xi = 0$ setzen und hat dann die schon einmal angeführte Gleichung

$$\lim_{n = \infty} \int_{0}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 1,$$

so daß jetzt die modifizierte Formel

$$\lim_{n = \infty} \int_{0}^{\eta} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \varphi(+0) \tag{2}$$

resultiert.

Endlich kann man η auch vom Werte ξ aus, wenn dieser positiv ist, nach unten gehen lassen und erhält dann

$$\lim_{n = \infty} \int_{\eta}^{\xi} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \frac{1}{2}\, \varphi(\xi - 0); \tag{3}$$

wenn H endlich ist, kann man auch $\xi = Z$ setzen und findet

$$\lim_{n = \infty} \int_{\eta}^{Z} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \varphi(Z - 0). \tag{4}$$

Man erhält diese Resultate aus den früheren direkt dadurch, daß man überall für z und α als neue Variable $Z - z$ und $Z - \alpha$ einführt.

Jetzt ist es leicht, zu den gewöhnlichen Darstellungsformeln überzugehen; da nämlich η in der Formel (1) auch den Wert Z, in der Formel (3) auch den Wert Null annehmen darf, *so folgt für einen zwischen* 0 *und* Z *liegenden Wert* ξ *die Gleichung*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu U_\nu(\xi) \int_0^Z U_\nu(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}[\varphi(\xi+0)+\varphi(\xi-0)]$$

unter der einzigen Voraussetzung, $\varphi(\alpha)$ *habe auf der Strecke* J *beschränkte Schwankung. Speziell ergeben die Beziehungen* (2) *und* (4), *wenn* h *endlich ist,*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu U_\nu(0) \int_0^Z U_\nu(\alpha)\varphi(\alpha) = \varphi(+0),$$

und wenn H *endlich ist,*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu U_\nu(Z) \int_0^Z U_\nu(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha = \varphi(Z-0).$$

Ein wesentlicher Vorzug dieser Resultate gegenüber den früher erhaltenen besteht darin, daß $\varphi(z)$ eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung sein darf, während früher vorausgesetzt werden mußte, daß die Anzahl der Unstetigkeiten endlich sei.

Das dem Dirichletschen analoge Integral hat hier, wie man sieht, eine andere Stellung als bei den trigonometrischen Reihen, insofern bei diesen der Grenzwert des Dirichletschen Integrals direkt gefunden und zur Summierung der Reihe benutzt wird, während bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie der Sturm-Liouvilleschen Entwicklungen erst die Formel

$$\frac{1}{2}\varphi(\xi) = \sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(\xi) M_\nu \int_0^\xi U_\nu(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

mindestens für den Fall, daß $\varphi(\alpha)$ eine Konstante ist, abgeleitet sein muß, ehe man den Grenzwert des in Rede stehenden Integrals finden kann, der dann zu dem jetzt erhaltenen allgemeineren Resultat führt.

§ 3.

Die gleichmäßige Konvergenz der nach Normalfunktionen fortschreitenden Reihe.

Auch für die gleichmäßige Konvergenz der erhaltenen Darstellung einer willkürlichen Funktion kann jetzt leicht ein Kriterium abgeleitet werden, indem man davon ausgeht, daß auch bei variablen Werten von ξ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

unter den in § 2 für ξ und η aufgestellten Ungleichheitsbedingungen gleichmäßig bezüglich beider Größen angestrebt wird. Versteht man nämlich zunächst unter $\varphi(\alpha)$ eine auf der Strecke von ξ bis η monotone stetige Funktion, und setzt

$$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(\xi),$$

so gilt die Gleichung

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \varphi(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha + \int_{\xi}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha.$$

Ist ferner $\xi + \lambda$ irgend ein willkürlich gewählter Wert zwischen ξ und η, und sind μ, μ_1 unbekannte Mittelwerte der Strecken von ξ bis $\xi + \lambda$ und von $\xi + \lambda$ bis η, so ergibt sich nach dem zweiten Mittelwertsatze, da $\psi(\xi)$ verschwindet,

$$\int_{\xi+\lambda}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \psi(\xi+\lambda) \int_{\xi+\lambda}^{\mu_1} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha + \psi(\eta) \int_{\mu_1}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

$$\int_{\xi}^{\xi+\lambda} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \psi(\xi+\lambda) \int_{\mu}^{\xi+\lambda} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

und hieraus folgt

$$\int_{\xi}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \psi(\xi+\lambda) \left[\int_{\xi}^{\mu_1} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha - \int_{\xi}^{\mu} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha \right]$$

$$+ \psi(\eta) \left[\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha - \int_{\xi}^{\mu_1} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha \right].$$

Läßt man nun ξ den im § 2 gestellten Forderungen gemäß in einem Intervall von η_0 bis η_1 variieren, dessen Grenzen im Innern von J liegen, fixiert für η den Wert $\eta_1 + c_1$, der auch $= Z$ werden darf, und nimmt an, $\varphi(\alpha)$ sei von η_0 bis $\eta_1 + c_1$ stetig und monoton, so kann man λ derart wählen, daß $|\psi(\xi + \lambda)|$ stets unter der vorgeschriebenen positiven Größe ε

liegt. Jetzt bleibt die Differenz $\mu_1 - \xi$ über der Grenze λ; die mit $\psi(\eta)$ in der letzten Gleichung multiplizierten Integrale konvergieren also zufolge der erwähnten Eigenschaft des Integrals

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

gleichmäßig gegen die Grenze $\frac{1}{2}$, ihre Differenz also gleichmäßig gegen die Grenze Null. Da ferner die Faktoren von $\psi(\xi + \lambda)$ zwischen endlichen, von ξ und η unabhängigen Grenzen liegen, so folgt, daß die Größe

$$\int_{\xi}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

bei allen betrachteten Werten von ξ und η unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt, sobald für n ein hinreichend großer Wert genommen wird. Der obige Ausdruck für

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

auf dessen rechter Seite auch der Faktor von $\varphi(\xi)$ gleichmäßig gegen seine Grenze $\frac{1}{2}$ konvergiert, bewegt sich also in derselben Weise gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$, und damit ist gezeigt, daß unter den jetzt geltenden Voraussetzungen die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

gleichmäßig bezüglich der Größe ξ gegen die Grenze $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$ konvergiert. Dies Resultat, das zunächst für monotone Funktionen $\varphi(\alpha)$ gilt, überträgt sich offenbar sofort auf den Fall einer beliebigen von η_0 bis $\eta_1 + c_1$ stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, die ja stets als Differenz zweier stetiger und monotoner Funktionen dargestellt werden kann.

Wendet man die durchgeführte Entwicklung auf den Fall an, daß $\eta < \xi$, indem man wie in § 2 die Größen $Z - z$ und $Z - \alpha$ für z und α einführt und $\eta = \eta_0 - c_0$ setzt; bedenkt man ferner, daß η die Grenze Z erreichen darf, wenn $\eta > \xi$, und die Grenze 0, wenn $\xi > \eta$, so sieht man, daß *die Reihe*

$$R = \sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_{\eta_0 - c_0}^{\eta_1 + c_1} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

gleichmäßig gegen den Wert $\varphi(\xi)$ *konvergiert, wenn*

$$0 \leqq \eta_0 - c_0 < \eta_0 < \eta_1 < \xi_1 + c_1 \leqq Z, \qquad \eta_0 \leqq \xi \leqq \eta_1$$

ist, und $\varphi(z)$ *von* $\eta_0 - c_0$ *bis* $\eta_1 + c_1$ *eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung ist;* dabei können die positiven Konstanten c_0 und c_1 wie immer beliebig klein sein.

Die Reihe R wird nun in die Sturm-Liouvillesche Reihe $\sum A_\nu U_\nu$ übergeführt, indem man die Reihen

$$P = \sum U_\nu(\xi) M_\nu \int_0^{\eta_0 - c_0} \varphi(\alpha) U_\nu(\alpha)\, d\alpha\,, \quad Q = \sum U_\nu(\xi) M_\nu \int_{\eta_1 + c_1}^{Z} \varphi(\alpha) U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

hinzuaddiert; wenn es also gelingt, diese als gleichmäßig konvergent auf der Strecke von $\xi = \eta_0$ bis $\xi = \eta_1$ nachzuweisen, so ist dasselbe Resultat für die Sturm-Liouvillesche Reihe gesichert. Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß nach § 2 die Summe der ersten n Glieder der Reihe P in der Form

$$\sum_\nu^{1,n} \cos \frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_0^{\eta_0 - c_0} \varphi(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \sum_\nu^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

geschrieben werden kann oder in einer der Formen, die aus dieser hervorgehen, indem man cos durch sin und ν durch $\nu + \frac{1}{2}$ ersetzt, während die Größen Ψ stets zwischen endlichen, von ν und ξ unabhängigen Grenzen liegen. Man findet daher, indem man die elementaren Formeln

$$\sum_\nu^{1,n} \cos \nu x = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\,,$$

$$\sum_\nu^{0,n} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x = \frac{\sin (n+1) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

anwendet, die bezeichnete n-gliedrige Summe bis auf Glieder, die bei unbegrenzt wachsenden Werten von n eine gleichmäßig konvergente Summe geben, linear ausgedrückt durch das Integral

$$\int_0^{\eta_0 - c_0} \varphi(\alpha) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi(\alpha + \xi)}{Z}}{2 \sin \frac{\pi(\alpha + \xi)}{2Z}}\, d\alpha$$

und die Integrale, die aus diesem hervorgehen, indem man $n + \frac{1}{2}$ durch $n + 1$ und $\alpha + \xi$ durch $\alpha - \xi$ ersetzt. In den vier so erhaltenen Ausdrücken bleiben die Nenner $\sin\frac{\pi(\alpha+\xi)}{2Z}$ und $\sin\frac{\pi(\alpha-\xi)}{2Z}$, wenn ξ die Strecke von η_0 bis η_1 und α das Integrationsintervall durchläuft, dem absoluten Betrage nach oberhalb einer festen positiven Grenze; man kann daher die erhaltenen Integrale in Aggregate von Gliedern der Form

$$p_n\int_0^{\eta_0-c_0}\Theta_1(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha,\qquad q_n\int_0^{\eta_0-c_0}\Theta_2(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha$$

verwandeln, in denen p_n, q_n, $\Theta_1(\alpha)$, $\Theta_2(\alpha)$ zwischen endlichen, von n und ξ unabhängigen Grenzen liegen, die Funktionen $\Theta(\alpha)$ von n unabhängig und ebenso wie $\varphi(\alpha)$ von beschränkter Schwankung sind. Diese Ausdrücke konvergieren aber (U. § 4) bei wachsenden Werten von n gleichmäßig bezüglich der Variablen ξ gegen die Grenze Null, da sie in eine solche Form $\Psi : n$ gebracht werden können, daß Ψ zwischen endlichen, von n und ξ unabhängigen Grenzen liegt.

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe P nachgewiesen unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\alpha)$ in dem Intervall J von beschränkter Schwankung sei, während Unstetigkeiten auf der Strecke von 0 bis η_0-c_0 keineswegs ausgeschlossen sind. Da nun entsprechendes von der neben P eingeführten Reihe Q gilt, so folgt, *daß auch die Reihe*

$$P+Q+R=\sum_\nu^{1,\infty}A_\nu U_\nu=\sum_\nu^{1,\infty}U_\nu(\xi)M_\nu\int_0^Z U_\nu(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

d. h. die gewöhnliche Sturm-Liouvillesche Reihe, bezüglich aller Werte von ξ, *die die Ungleichung*

$$0<\eta_0\leqq\xi\leqq\eta_1<Z$$

erfüllen, gleichmäßig gegen den Wert $\varphi(\xi)$ *konvergiert, sobald die Funktion* $\varphi(z)$ *auf der ganzen Strecke* J *von beschränkter Schwankung, außerdem aber auf der Strecke von* η_0-c_0 *bis* η_1+c_1 *stetig ist, wobei* c_0 *und* c_1 *beliebig kleine positive Werte sind.*

Speziell sei $\varphi(z)$ auf der ganzen Strecke J stetig und von beschränkter Schwankung; dann konvergiert die Reihe

$$F(z)=\sum_\nu^{1,\infty}A_\nu U_\nu$$

gleichmäßig auf jeder Strecke von c_1 bis $Z-c_2$. Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wann das Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz bis in die Enden der Strecke J hinein ausgedehnt werden kann. Dies ist, wie man leicht sieht, z. B. bezüglich der Stelle $z = 0$ erlaubt, wenn $F(z)$ auch an dieser Stelle noch stetig ist. Setzt man nämlich

$$S_n(z) = \sum_{\nu}^{1,n} A_\nu U_\nu, \qquad F(z) = S_n(z) + R_n(z),$$

und ist ε eine beliebig klein gegebene positive Konstante, so kann man, da die Reihe $F(0)$ konvergiert, die Zahl n so wählen, daß

$$|R_n(0)| < \varepsilon;$$

sodann kann man c_1 so bestimmen, daß auf der Strecke

$$0 \leqq z \leqq c_1$$

die Ungleichungen

$$|F(z) - F(0)| < \varepsilon, \qquad |S_n(z) - S(0)| < \varepsilon$$

gelten; hieraus folgt

$$|R_n(z) - R_n(0)| < 2\varepsilon,$$

also

$$|R_n(z)| < 3\varepsilon,$$

womit die gleichmäßige Konvergenz für die Strecke von 0 bis c_1 mit Einschluß der Grenzen erwiesen ist. Eine ähnliche Betrachtung gilt offenbar für die bis zur Stelle $z = Z$ hinaufreichenden Strecken; die Reihe konvergiert also gleichmäßig auf Strecken, zu denen einer der Endpunkte des Intervalls J hinzugerechnet wird, wenn $F(z)$ in diesem Endpunkte stetig bleibt.

Wenn h endlich ist, wissen wir, daß die Gleichung

$$\varphi(z) = F(z)$$

auch an der Stelle $z = 0$ gilt; hier darf also stets das Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz den Punkt $z = 0$ mit umfassen. Dasselbe gilt aber auch im Falle $h = \infty$, wenn $\varphi(0) = 0$, da dann immer

$$U_\nu(0) = 0, \quad F(0) = 0.$$

Analog konvergiert die Reihe gleichmäßig bis in die Stelle $z = Z$ hinein, wenn entweder H endlich ist oder $\varphi(Z) = 0$.

§ 4.

Der Fall, daß die Konstanten h und H nicht beide endlich sind.

Wenn $h = \infty$ ist, haben alle Normalfunktionen die feste Nullstelle $x = 0$ oder $z = 0$; ebenso verschwinden sie alle an der Stelle $x = X$ oder $z = Z$, wenn $H = \infty$. Die Entwicklung einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung nach Normalfunktionen kann in diesen Fällen ebenso leicht wie bei endlichen Werten von h und H abgeleitet werden

(U. §§ 13, 15), wenn die darzustellende Funktion an jeder allen Normalfunktionen gemeinsamen Nullstelle $x = 0$ oder $x = X$ ebenfalls verschwindet. Andernfalls mußten in der bisherigen Darstellung jene tiefer liegenden Betrachtungen (U. § 14) herangezogen werden, die bei endlichen Werten von h und H erst zur Darstellung unstetiger Funktionen gebraucht werden. So wenig nun die letzteren Entwicklungen für den vollständigen Ausbau der ganzen Theorie entbehrt werden können, erscheint es doch sehr erwünscht, die Darstellung willkürlicher Funktionen, die an den Enden des Intervalls J nicht zu verschwinden brauchen, unter engeren, für die meisten Anwendungen ausreichenden Voraussetzungen mit geringeren Mitteln zu erledigen, etwa so wie es bei endlichen Werten von h und H schon geschehen ist (U. § 12). Dazu führt die folgende von den Hilfssätzen des § 1 ausgehende Untersuchung.

Es sei zunächst $h = H = \infty$, und werde wie gewöhnlich die Reihe

$$\sum A_\nu U_\nu$$

gebildet, in der

$$M_\nu A_\nu = \int_0^Z \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha, \qquad M_\nu = \frac{1}{\int_0^Z U_\nu^2(\alpha)\, d\alpha}$$

gesetzt wird. Dann gilt (U. § 16) die Gleichung

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{Z} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} \int_0^Z \varphi(\alpha) \sin \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

und Ψ liegt zwischen endlichen, von z und ν unabhängigen Grenzen, so daß die Reihe

$$\sum_\nu \frac{\Psi}{\nu^2}$$

im ganzen Intervall J gleichmäßig konvergiert. Den ersten Teil des Ausdrucks $A_\nu U_\nu$ formen wir durch partielle Integration um, indem wir annehmen, die Funktion $\varphi(z)$ habe eine abteilungsweise stetige erste Ableitung von beschränkter Schwankung; dann ergibt sich

$$A_\nu U_\nu = -\frac{2}{\pi\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} [(-1)^\nu \varphi(Z) - \varphi(0)] + \frac{2}{\pi\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} \int_0^Z \varphi'(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite kann aber (U. § 4) in der Form $\frac{\Psi}{\nu}$ geschrieben werden; faßt man demgemäß das mit dem Integralzeichen behaftete Glied mit dem letzten zusammen, so erhält man die Gleichung

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{\pi\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} [\varphi(0) - (-1)^\nu \varphi(Z)] + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

in der Ψ nicht denselben Wert, wohl aber dieselben Eigenschaften hat wie bisher. Die Reihe $\Sigma A_\nu U_\nu$ konvergiert daher auf jeder Strecke des Intervalls gleichmäßig, wo dies von den Summen

$$\sum_\nu \frac{1}{\nu} \sin \frac{\nu \pi z}{Z}, \quad \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin \frac{\nu \pi z}{Z}$$

gilt, also nach § 1 auf jeder Strecke, die durch eine Bedingung

$$c < \frac{\pi z}{Z} < \pi - c_0$$

oder auch, was dasselbe besagt, durch eine Bedingung

$$c_1 < z < Z - c_2$$

definiert wird, wobei c_1, c_2 beliebig kleine Größen zwischen 0 und Z sind.

Eine weitere Eigenschaft dieser Reihen ist nach § 1 folgende. Wenn man bei einem beliebigen, etwa dem n^{ten} Gliede abbricht, und das Argument $\frac{\pi z}{Z}$ läuft von 0 bis c oder von $\pi - c_0$ bis π, die Größe z also von 0 bis c_1 oder von $Z - c_2$ bis Z, so bleiben die Werte der Reihen zwischen endlichen, von n unabhängigen Grenzen. Da nun auch Summen wie

$$\sum_\nu^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

diese Eigenschaft besitzen, so sieht man, daß die Summen

$$\sum_\nu^{1,n} A_\nu U_\nu,$$

wenn man eine der Beziehungen

$$0 \leqq z \leqq c_1, \qquad Z - c_2 \leqq z \leqq Z$$

festsetzt, ebenfalls zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen bleiben, während sie im allgemeinen offenbar nicht gleichmäßig konvergieren, wenn n ins Unendliche wächst.

Aus den erhaltenen Resultaten läßt sich die bemerkenswerte Folgerung ziehen, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu U_m$$

auf der ganzen Strecke J mit Einschluß ihrer Grenzen gleichmäßig konvergiert. Da nämlich U_m in den Stellen $z = 0$ und $z = Z$ verschwindet und zwischen beiden überall stetig ist, kann man die Größen c_1 und c_2 so wählen, daß auf den Strecken

$$0 \leqq z \leqq c_1, \qquad Z - c_2 \leqq z \leqq Z$$

der Wert $|U_m|$ unter einer beliebig klein gegebenen positiven Größe ε liegt. Dann kann man nach den obigen Entwicklungen eine Ungleichung

$$\left| U_m \sum_\nu^{1,n} A_\nu U_\nu \right| < g\varepsilon$$

aufstellen, in der g eine von n unabhängige positive Konstante ist; aus ihr folgt

$$\left| U_m \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu \right| \leqq g\varepsilon,$$

und hieraus wiederum

$$\left| U_m \sum_\nu^{n+1,\infty} A_\nu U_\nu \right| \leqq 2g\varepsilon$$

bei beliebigen Werten von n. Jetzt kann n so bestimmt werden, daß auch auf der Strecke

$$c_1 \leqq z \leqq Z - c_2,$$

längs deren die Reihe $\sum_\nu A_\nu U_\nu$ gleichmäßig konvergiert, die Ungleichung

$$\left| U_m \sum_\nu^{n+1,\infty} A_\nu U_\nu \right| \leqq 2g\varepsilon$$

gilt, die so für die ganze Strecke J bei geeigneter Wahl von n gesichert ist und, da ε beliebig klein genommen werden kann, besagt, daß die Reihe

$$\sum_\nu U_m U_\nu A_\nu$$

in der Tat auf der Strecke J gleichmäßig konvergiert, also gliedweise integriert werden darf.

Setzt man daher

$$F(z) = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu,$$

und benutzt die fundamentale Beziehung

$$\int_0^Z U_m(\alpha)\, U_n(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

so erhält man die Gleichungen

$$\int_0^Z F(\alpha)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = A_m \int_0^Z U_m^2(\alpha)\, d\alpha = U_m A_m$$

oder

$$\int_0^Z \big(F(\alpha) - \varphi(\alpha)\big)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Nun ist die Funktion $F(z)$ auf der Strecke von c_1 bis $Z - c_2$ stetig; ihr Verhalten in der Nähe der Stellen $z = 0$ und $z = Z$ ergibt sich aber aus der oben abgeleiteten Formel

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} [\varphi(0) - (-1)^\nu \varphi(Z)] + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

in der die Größen Ψ stetige Funktionen von z sind, so daß die Reihe

$$D = \sum_\nu \frac{\Psi}{\nu^2},$$

auf der Strecke J bezüglich der Größe z gleichmäßig konvergiert, an den Stellen $z = 0$ und $z = Z$ also gegen bestimmte endliche Grenzen konvergiert, die wir γ und Γ nennen wollen; dabei gilt offenbar die Gleichung

$$D = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu - \sum_\nu^{1,\infty} \frac{2}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} [\varphi(0) - (-1)^\nu \varphi(Z)]$$

$$= F(z) - \frac{2\varphi(0)}{\pi} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{1}{\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} + \frac{2\varphi(Z)}{\pi} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z}.$$

Hier können die in § 1 angegebenen Werte von S_∞ und T_∞ angewandt werden und ergeben die Formeln

$$\lim_{z=+0} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{1}{\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{z=Z-0} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{1}{\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} = 0,$$

$$\lim_{z=+0} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} = 0, \quad \lim_{z=Z-0} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} = -\frac{\pi}{2};$$

also folgt aus der abgeleiteten Eigenschaft der Differenz D

$$F(+0) = \lim_{z=+0} F(z) = \varphi(0) + \gamma,$$

$$F(Z-0) = \lim_{z=Z-0} F(z) = \varphi(Z) + \Gamma,$$

womit, da offenbar $F(0)$ und $F(Z)$ verschwinden, die Unstetigkeit der Größe $F(z)$ evident wird. Wenn wir neben ihr eine Größe $\bar{F}(z)$ einführen, die mit ihr an allen von $z = 0$ und $z = Z$ verschiedenen Stellen übereinstimmt, an den Grenzen aber durch die Gleichungen

$$\bar{F}(0) = \varphi(0) + \gamma, \quad \bar{F}(Z) = \varphi(Z) + \Gamma$$

definiert ist, so ist $\bar{F}(z)$ im ganzen Intervall J stetig, und die oben erhaltene Gleichung

$$\int_0^Z \big(F(\alpha)-\varphi(\alpha)\big)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = 0$$

ergibt

$$\int_0^Z \big(\bar{F}(\alpha)-\varphi(\alpha)\big)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = 0$$

da der Wert des ersteren Integrals dadurch, daß man den Integranden an zwei Stellen um endliche Beträge ändert, nicht beeinflußt wird.

Aus der letzten Gleichung aber kann, da $\bar{F}(\alpha)-\varphi(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist, geschlossen werden (U. § 11)

$$\bar{F}(z) = \varphi(z),$$

und hieraus folgt beiläufig, daß die Größen γ und Γ verschwinden. *Die Gleichung*

$$\varphi(z) = \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu U_\nu = F(z)$$

besteht also auf der Strecke J mit Ausnahme der Endpunkte, in denen $F(z)$ verschwindet, $\varphi(z)$ aber im allgemeinen von Null verschieden ist. Diese Gleichung gibt die Entwicklung einer willkürlichen, nur gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfenen Funktion nach den Normalfunktionen, die dem Falle $h = H = \infty$ entsprechen.

Endlich übersieht man leicht, daß die ganze bisherige Argumentation mit einer gewissen Vereinfachung gültig bleibt für den Fall, daß H endlich und $h = \infty$ ist; auf diesen läßt sich der umgekehrte Fall, daß H allein unendlich wird, dadurch zurückführen, daß man $Z - z$ als unabhängige Variable einführt. Im ersten dieser Fälle kann man (U. § 16) die folgende Gleichung ansetzen:

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{Z} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z} \int_0^Z \varphi(\alpha) \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z} + \frac{\Psi}{\nu^2}\cdot$$

Hieraus folgt durch partielle Integration

$$A_\nu U_\nu = \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z}\left[\varphi(0) + \int_0^Z \varphi'(\alpha)\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha\right] + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

oder, indem man den Wert der Größe Ψ ändert, ihren definitionsmäßigen Charakter aber bestehen läßt,

$$A_\nu U_\nu = \frac{2\varphi(0)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{\nu^2}\cdot$$

Summiert man über ν, und benutzt die in § 1 abgeleiteten Eigenschaften der Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n} \frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x}{\nu+\frac{1}{2}},$$

so findet man, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu U_\nu$$

auf jeder Strecke

$$c_1 \leqq z \leqq Z$$

gleichmäßig konvergiert, und daß die Summen

$$\sum_{\nu}^{1,n} A_\nu U_\nu,$$

wenn z das Intervall von 0 bis c_1 durchläuft, zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen bleiben. Daraus schließt man, da auch jetzt die Normalfunktionen an der Stelle $z = 0$ verschwinden, wie oben, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} A\, U_\nu U_m$$

auf der ganzen Strecke J mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig konvergiert, und hieraus ergibt sich in noch etwas einfacherer Weise als oben das entsprechende Resultat, daß die Gleichung

$$\varphi(z) = \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu U_\nu$$

auf der Strecke J gilt mit Ausschluß der Stelle $z = 0$.

§ 5.

Angenäherte Darstellung beliebiger stetiger Funktionen durch endliche Summen von Normalfunktionen.

Es sei $\varphi(z)$ eine Funktion, von der nichts weiter vorausgesetzt wird, als daß sie im Intervall J stetig ist. Deutet man z als Abszisse, y als Ordinate in einem ebenen Koordinatensystem, so kann man die Kurve

$$y = \varphi(z)$$

durch ein Polygon approximieren, das mit der Abszissenachse jeden der Punkte $z = 0$ und $z = Z$ gemein habe, der eine feste Nullstelle der Normalfunktionen ist. Analytisch ausgedrückt: sei $\varphi_0(x)$ eine Funktion, die als Kurve $y = \varphi_0(z)$ ein Polygon liefert, die also auf der Strecke J stetig und von beschränkter Schwankung ist; wenn $h = \infty$, sei

$$\varphi_0(0) = 0;$$

wenn $H = \infty$, sei

$$\varphi_0(Z) = 0.$$

Dann kann $\varphi_0(z)$ offenbar so gewählt werden, daß, wenn ε und ε_1 beliebig kleine positive, h und H endliche Größen sind, die Ungleichung

$$|\varphi_0(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$$

auf der Strecke J gilt, während, wenn eine der Größen h, H unendlich wird, diese Ungleichung auf der Strecke J gilt nach Abzug einer bei $z = 0$ oder $Z = 0$ beginnenden Strecke, die beliebig klein, etwa kleiner als ε_1 genommen werden kann.

Nun kann $\varphi_0(z)$ nach den früher bewiesenen Sätzen in eine auf der ganzen Strecke J gleichmäßig konvergente Reihe

$$\varphi_0(z) = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu^0 U_\nu$$

entwickelt werden, wobei

$$A_\nu^0 = M_\nu \int_0^Z \varphi_0(\alpha) U_\nu(\alpha)\, d\alpha.$$

Man kann daher n so wählen, daß auf dieser ganzen Strecke die Ungleichung

$$\left|\varphi_0(z) - \sum_\nu^{1,n} A_\nu^0 U_\nu\right| < \varepsilon$$

gilt. Hieraus folgt auf Grund der obigen Beziehung zwischen $\varphi(z)$ und $\varphi_0(z)$ sofort die Ungleichung

$$\left|\varphi(z) - \sum_\nu^{1,n} A_\nu^0 U_\nu\right| < 2\varepsilon$$

für die Strecke J, von der aber, wenn h und H nicht beide endlich sind, an den Enden Strecken, die kleiner als ε_1 sind, ausgeschlossen bleiben. Man übersieht leicht, daß im Falle $h = \infty$ das erhaltene Resultat bis in die Stelle $z = 0$ hinein gültig bleibt, wenn $\varphi(0)$ verschwindet, da in diesem Falle $\varphi_0(z)$ d. h. das der Kurve $y = \varphi(z)$ sich anschmiegende Polygon so gewählt werden kann, daß die Ungleichung

$$|\varphi(z) - \varphi_0(z)| < \varepsilon$$

bis in die Stelle $z = 0$ hinein gilt, und entsprechendes gilt, wenn

$$H = \infty, \qquad \varphi(Z) = 0.$$

Man kann daher eine beliebige auf der Strecke J stetige Funktion $\varphi(z)$ *mit vorgeschriebenem Grade der Annäherung durch eine endliche Summe*

$$\sum_{\nu}^{1,n} A_\nu^0 U_\nu$$

darstellen, und zwar gilt diese Darstellung in allen Fällen für die Strecke J nach Abzug je eines beliebig kleinen, in den Stellen $z = 0$ *und* $z = Z$ *beginnenden Teilintervalls. Sind speziell h und H endlich, so brauchen keine Teilintervalle von J ausgenommen zu werden, ebensowenig, wenn* $\varphi(0)$ *im Falle* $h = \infty$ *und* $\varphi(Z)$ *im Falle* $H = \infty$ *verschwindet.*

Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann.

Von

O. Kellogg in Princeton, New-Jersey.

In einer früheren Abhandlung habe ich einige Integralgleichungen der zweiten Art*)

$$f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s,t)\, dt$$

behandelt, wo in dem Kerne*) $K(s, t)$ gewisse Unstetigkeiten erster Ordnung auftreten. Insbesondere ist die Gleichung behandelt worden, die von der Doppelbelegung einer mit Ecken behafteten Kurve herrührt. Hier hat der Kern, $K(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-y(t)}$, den wir in diesem besonderen Falle mit $\Theta(s,t)$ bezeichnen wollen, eine Unstetigkeit folgender Art: messen wir die Bogenlänge der Kurve von einer Ecke aus, so ist in der Nähe dieser Ecke

für $s \cdot t > 0$, $\Theta(s,t)$ eine stetige Funktion,

für $s \cdot t < 0$, $\Theta(s,t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{|s|}{s^2 - 2st\cos\alpha\pi + t^2}$ + einer stetigen Funktion,

wo $\alpha\pi$ der Winkel ist, um welchen die Kurventangente springt. Die Verallgemeinerung auf die Lösung einer Gleichung, deren Kern sich von $\Theta(s, t)$ durch eine endliche, stückweise stetige *additive* Funktion unterscheidet, bietet keine Schwierigkeiten**), doch ist es für die Anwendungen wichtig, wie Herr Hilbert***) hervorgehoben hat, auch noch die Lösung zu

*) Die hierin benutzten Bezeichnungen sind die von Herrn Hilbert in seiner Abhandlung „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen"; Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1904, Heft 1.

**) Math. Ann. Bd. 58, S. 45.

***) Seminar, W. S. 1901—02.

haben, wo $K(s, t) = \alpha(s, t)\,\Theta(s, t) + \beta(s, t)$, worin $\alpha(s, t)$ und $\beta(s, t)$ endliche, stückweise stetige Funktionen sind. Die Lösung in einem solchen Falle wollen wir zunächst angeben.

§ 1.

Die η-Belegung.

Wir legen zugrunde die Kurve C, aus der die Funktion $\Theta(s, t)$ entstanden ist, deren Bogenlänge mit r, s oder t bezeichnet werden wird, deren Gesamtlänge gleich 1 sein möge, und die aus analytischen Stücken bestehen soll. Wir definieren nun eine Funktion $\eta(s, t)$ durch folgende Bestimmungen: für s und t zwischen 0 und 1 sei

$$\text{für } s < t, \quad \eta(s, t) = t - s,$$
$$\text{für } s > t, \quad \eta(s, t) = t - s + 1,$$

für andere Werte sei η dadurch definiert, daß sie die Periode 1 habe. Mittels η definieren wir dann eine Funktion der ebenen Koordinaten x, y und eines Parameters t, nämlich das Potential der Doppelbelegung der Kurve C:

$$(1) \qquad \eta(x, y; t) = \int_0^1 \varrho(r, t) \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y(r)}{x - x(r)}\, dr,$$

wo $\varrho(r, t)$ dadurch definiert ist, daß $\eta(x, y; t)$ die Randwerte $\eta(s, t)$ annimmt, wenn (x, y) sich von einem inneren Punkte einem Randpunkte $x(s)$, $y(s)$ nähert. Die Funktion $\eta(x, y; t)$ sei mit $\eta_i(x, y; t)$ oder $\eta_a(x, y; t)$ bezeichnet, je nachdem (x, y) innerhalb oder außerhalb der Kurve C liegt, und die Randwerte seien $\eta_i(s, t)$ und $\eta_a(s, t)$. Wir haben dann nach der Potentialtheorie die Beziehungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \eta_a(\infty, \infty, t) = 0, \\ \eta_i(s, t) = \eta(s, t), \\ \eta_i(s, t) - \eta_a(s, t) = 2\pi\varrho(s, t), \\ \eta_i(s, t) + \eta_a(s, t) = 2\displaystyle\int_0^1 \varrho(r, t) \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(r)}{x(s) - x(r)}\, dr, \\ \dfrac{\partial \eta_i(s, t)}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \eta_a(s, t)}{\partial \nu}, \end{cases}$$

wo ν die Richtung der Normale der Kurve C angibt; $\varrho(s, t)$ unterscheidet sich von $\frac{\eta(s, t)}{\pi}$ nur durch eine stetige stückweise analytische Funktion, wie man sieht, wenn man $\varrho(s, t)$ mittels der Hilbertschen Formeln*) darstellt.

*) Math. Ann. Bd. 58, S. 449.

Die Funktion $\eta(x, y; t)$ betrachten wir nun als eine Art Anziehungsgesetz und bilden das Potential

$$(3)\qquad u(x, y) = \int_0^1 \varphi(r) \frac{\partial}{\partial r} \eta(x, y; r)\, dr.$$

Die Kurve C bildet das einzige Unstetigkeitsgebiet der Funktion $u(x, y)$, und wir untersuchen ihr Verhalten in deren Nähe. $\varphi(s)$ ist stückweise stetig und differenzierbar, falls dies von den als vorgeschrieben zu denkenden Randwerten von $u(x, y)$ gilt*), und dies wollen wir voraussetzen. Wir können also teilweise integrieren, und bekommen

$$u(x, y) = \underset{\epsilon=0}{L} \sum_k \varphi(r)\eta(x, y; r) \Big|_{r=r_k+\epsilon}^{r=r_k-\epsilon} - \int_0^1 \varphi'(r)\eta(x, y; r)\, dr,$$

wo r_k die isolierten Werte sind, für welche $\varphi(r)$ Sprünge erleidet. Nun gehen wir zum Rande über, zunächst von einem inneren Punkte, und wenden wieder die teilweise Integration an, indem wir bemerken, daß wegen

$$\underset{\epsilon=0}{L}\; \eta_i(s, r) \Big|_{r=s+\epsilon}^{r=s-\epsilon} = 1$$

eine neue Unstetigkeit zu berücksichtigen ist. Wir bekommen

$$(4_1)\qquad u_i(s) = -\varphi(s) + \int_0^1 \varphi(r) H_i(s, r)\, dr,$$

wo $H_i(s, r) = \dfrac{\partial \eta_i(s, r)}{\partial r} = 1$. Auf ganz ähnliche Weise bekommen wir

$$(4_2)\qquad u_a(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(r) H_a(s, r)\, dr,$$

wo $H_a(s, r) = \dfrac{\partial \eta_a(s, r)}{\partial r}$ dieselben Stetigkeitseigenschaften wie $H_i(s, t)$ hat. Dies sieht man, wenn man bemerkt, daß $\eta_a(s, t)$ bis auf eine stetige Funktion gleich $-\eta_i(s, t)$ ist (siehe (2_4)).

Schließlich hat man

$$(5)\qquad \frac{\partial u_a}{\partial \nu} = \frac{\partial u_i}{\partial \nu}.$$

*) Siehe die Formel (4_1), welche man unter Voraussetzung der Stetigkeit und stückweisen Differentiierbarkeit von $\varphi(s)$ erhält, und welche zeigt, daß in dieser Hinsicht $\varphi(s)$ die Eigenschaften von $u_i(s)$ hat. Die einzige Lösung von (4_1) aber ist auch die einzige Lösung von (3), womit die Behauptung bewiesen wird.

§ 2.

Lösung der vorgelegten Integralgleichung.

Wir betrachten nun eine gemischte Belegung:

$$u(x,y) = \int_0^1 \varphi(t)\left\{a(t)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-y(t)}{x-x(t)} + b(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\eta(x,y;t)\right\}dt.$$

Dies führt zu den Randgleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} u_i(s) = \left[a(s)-b(s)\right]\varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\left\{a(t)\,\Theta(s,t) + b(t)\,H_i(s,t)\right\}dt, \\ u_a(s) = -\left[a(s)-b(s)\right]\varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\left\{a(t)\,\Theta(s,t) + b(t)\,H_a(s,t)\right\}dt, \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen kann geschrieben werden

$$(7)\quad \frac{u_i(s)}{a(s)-b(s)} = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\left\{\frac{a(t)}{a(s)-b(s)}\,\Theta(s,t) + \frac{b(t)}{a(s)-b(s)}\,H_i(s,t)\right\}dt$$

oder

$$f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\left\{\alpha(s,t)\Theta(s,t) + \beta(s,t)\right\}dt$$

und ist also eine Gleichung der vorgelegten Form, nur ist $\beta(s,t)$ nicht willkürlich, sondern es hängt von $\Theta(s,t)$ und $\alpha(s,t)$ ab. Diese Einschränkung wird später beseitigt werden. Es handelt sich also zunächst darum, die Gleichung (7) zu lösen. Dies tun wir folgendermaßen. Wenn $u_i(s)$ und $u_a(s)$ Randwerte von Potentialen sind, für die $\frac{\partial u_i(s)}{\partial \nu} = \frac{\partial u_a(s)}{\partial \nu}$, dann können wir mittels der Hilbertschen Formeln*) aus $u_i(s)$ das $u_a(s)$ herstellen, welches (6_2) genügt. Nun haben wir durch Abziehen von (6_2) von (6_1) die Gleichung

$$(8)\quad \frac{u_i(s)-u_a(s)}{2[a(s)-b(s)]} = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\left\{\frac{b(t)}{a(s)-b(s)}\left[H_i(s,t) - H_a(s,t)\right]\right\}dt,$$

welche durch die Fredholmsche Methode**) lösbar ist. Man kann es weiter so einrichten, daß die ganze transcendente Nennerfunktion, die in dieser Methode auftritt, deren Nichtverschwinden die Eindeutigkeit der

*) A. a. O.

**) Siehe Fredholm „Sur une classe d'équations fonctionelles". Acta Mathematica Bd. 27 (1903); Hilbert, a. a. O.

Lösung zur Folge hat, sicher von Null verschieden ist, indem man $\frac{b(t)}{a(s)-b(s)}$ in der unmittelbaren Nachbarschaft der Ecken ganz beliebig — nur endlich und stückweise stetig und differentiierbar — wählt, sonst aber gleich Null. Dann wird diese Nennerfunktion beliebig genau gleich ihrem ersten Glied, nämlich $+1$. Daß die Lösung von (8) auch (7) genügt, verifiziert man folgendermaßen. Man nehme an, daß das (8) genügende $\varphi(s)$ in (6_1) eingesetzt nicht $u_i(s)$, sondern etwa $\bar{u}_i(s)$ ergäbe, und in (6_2) etwa $\bar{u}_a(s)$. Indem wir dann subtrahieren und mit (8) vergleichen, sehen wir, daß $\bar{u}_i(s) - \bar{u}_a(s) = u_i(s) - u_a(s)$, oder $\bar{u}_i(s) - u_i(s) = \bar{u}_a(s) - a(s)$. Es ist also $\bar{u}(x, y) - u(x, y)$ ein überall reguläres im Unendlichen verschwindendes Potential, verschwindet also identisch. Folglich ist

$$\bar{u}_i(s) = u_i(s),$$

und (7) ist in der Tat befriedigt.

Wollen wir jetzt zu weiteren Gleichungen gehen, worin die Kerne sich von dem der Gleichung (7) um irgend eine stückweise stetige Funktion unterscheiden, so brauchen wir die Lösung der Gleichung

$$L(s, t) = \Phi(s, t) + \int_0^1 \Phi(r, t)\, L(s, r)\, dr,$$

wo wir zur Abkürzung $L(s, t) = \frac{a(t)}{a(s)-b(s)}\, \Theta(s, t) + \frac{b(t)}{a(s)-b(s)}\, H_i(s, t)$ gesetzt haben. Aus der Eindeutigkeit der Lösung von (6_1) kann man schließen, daß $\Phi(s, t)$ auch der Gleichung genügt

$$L(s, t) = \Phi(s, t) + \int_0^1 \Phi(s, r)\, L(r, t)\, dr,$$

und wenn wir in der gegebenen Gleichung t für s setzen, mit $L(s, t)$ multiplizieren und von 0 bis 1 in bezug auf t integrieren, und schließlich von der gegebenen Gleichung abziehen, so bekommen wir eine der Fredholmschen Methode zugängliche Gleichung.*) Man kann auch verifizieren, daß ihre Lösung auch der ursprünglichen Gleichung genügt.

§ 3.

Anwendung auf ein Problem von Riemann.

Es sollen n komplexe Funktionen von $z = x + iy$ durch folgende Bedingungen bestimmt werden:

1. Sie verhalten sich regulär in der ganzen z-Ebene außer an m willkürlich vorgeschriebenen singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_m$.

*) Man vergleiche Math. Ann. Bd. 58, S. 454—456.

2. Wenn z einen Umlauf um einen dieser Punkte macht, so erleidet das Funktionensystem eine lineare homogene Substitution, deren konstante Koeffizienten willkürlich vorgeschrieben sind.

3. An den singulären Punkten werden die Funktionen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich.

Dieses Problem ist von Riemann behandelt in dem Fragment: „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten", wo er zeigt, daß die gesuchten Funktionen einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Koeffizienten genügen müssen. Ferner zeigt er, daß jedes solche Funktionensystem sich mittels eines gegebenen Systems homogen linear mit rationalen Koeffizienten ausdrücken läßt, und gibt an, wie diese Bestimmung eindeutig zu machen ist. Der Existenzbeweis dagegen ist ihm nicht gelungen. Schlesinger*) hat den Existenzbeweis erbracht und die Herstellungsweise angegeben für den Fall, daß sämtliche Wurzeln der den Substitionen zugehörigen Fundamentalgleichungen den absoluten Betrag 1 haben. Es war der Vorschlag von Hilbert**), dieses Problem als eine Randwertaufgabe aufzufassen.

Für unsere Betrachtungen wird es bequemer sein, die unbestimmten Integrale der Funktionen zu betrachten, wobei an Stelle der homogenen linearen Substitutionen A_i die nichthomogenen linearen Substitutionen A_i' treten, die man durch Hinzufügung einer willkürlichen additiven Konstante zu jeder Reihe der Substitutionskoeffizienten erhält. Wenn wir weiter fordern, daß *die integrierten Funktionen höchstens logarithmisch unendlich werden*, so läßt sich beweisen, daß *die Funktionen existieren, und daß sie im allgemeinen*, d. h. außer für spezielle Wahl der Koeffizienten der Substitutionen A_i, *eindeutig bestimmt sind.* Im folgenden soll der Gang eines solchen mit Hilfe der Integralgleichungen geführten Beweises charakterisiert werden.

Wir denken uns eine stetige Linie L mit stetig sich ändernder Tangente und Krümmung von a_1 durch sämtliche übrigen singulären Punkte bis a_m gezogen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $a_1 = 1$ und $a_m = -1$ annehmen. Wenn nun z die Linie L überschreitet, so erleiden die n Funktionen eine Substitution A_i' der gegebenen Gruppe, was wir ausdrücken können

$$\bar{f}_i(z(s)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(z(s)) + a_i', \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

---

*) Comptes Rendus, T. CXXVI, S. 723; Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II, 2, S. 382.

**) Vorlesung über Potentialtheorie, W. S. 1901—02.

wenn wir die Linie L als einen Schnitt denken und mit $\bar{f}_i(z(s))$ bezw. $f_i(z(s))$ die Werte bezeichnen, die $f_i(z)$ annimmt, während z von einer, bezw. der anderen Seite an einen Punkt $z(s)$ von L heranrückt. Dabei sind die a_{ij} und a_i' nicht durchweg konstant, sondern sie stellen verschiedene Konstante für die verschiedenen, durch die singulären Punkte gesonderten Abteilungen von L dar. Wendet man demnächst die Substitution

$$z \parallel z - \sqrt{z^2 - 1}$$

an, so wird die ganze von L berandete Ebene auf das Innere einer geschlossenen Kurve C abgebildet, und wir haben also die Aufgabe, n Funktionen zu finden, welche innerhalb dieser geschlossenen Kurve regulär sind und auf dem Rande die Beziehungen (9) befriedigen. Ist $\frac{l}{2}$ die Länge von L, und sondern wir die Gleichungen (9) in ihre reellen und imaginären Teile, indem wir

$$\begin{aligned} f_i(z) &= u_i(x, y) + iv_i(x, y), \quad a_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}, \\ a_i' &= \alpha_i + i\beta_i \end{aligned}$$

setzen, so können wir sie schreiben

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} u_i(l - s) = \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_{ij}(s) u_j(s) - \beta_{ij}(s) v_j(s)\right] + \alpha_i(s), \\ v_i(l - s) = \sum_{j=2}^{n} \left[\alpha_{ij}(s) v_j(s) + \beta_{ij}(s) u_j(s)\right] + \beta_i(s). \end{cases}$$

Die Potentialfunktionen $u_i(x, y)$ suchen wir nun darzustellen als logarithmisches Potential einer Doppelbelegung der Kurve C, denn dies liefert das allgemeinste Potential im Inneren der Kurve C, welches dort keine Singularitäten hat; also*)

$$u_i(x, y) = \int_0^l g_i(t) \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{\varrho(x, y; t)} \, dt;$$

wo

$$\varrho(x, y; t) = \sqrt{[x - x(t)]^2 + [y - y(t)]^2},$$

d. h.

$$\text{(11}_1\text{)} \qquad u_i(x, y) = \int_0^l g_i(t) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y(t)}{x - x(t)} \, dt;$$

---

*) Von jetzt an beziehen sich r, s, t auf die Bogenlänge der zweifach durchlaufenen Kurve L, während die Funktionen dieser Veränderlichen sich auf die transformierte Ebene beziehen.

und folglich für das konjugierte Potential

$$(11_2)\qquad v_i(x,y)=\int_0^l g_i(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{1}{\varrho(x,y;t)}\,dt.$$

Der Kürze wegen wollen wir $n=2$ setzen; die Methode läßt ohne Schwierigkeiten eine unmittelbare Ausdehnung zu. Ferner seien folgende Abkürzungen eingeführt. Sei $\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{1}{\varrho(x(s),y(s);t)}$ mit $C(s,t)$ bezeichnet. $C(s,t)$ ist dann bis auf eine endliche, stetige und differentiierbare Funktion gleich $\frac{1}{l}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(s-t)$. Sei $A(s,t)$ eine Abkürzung für irgend eine der Fredholmschen Auflösungsmethode zugängliche Funktion;

$$\int_0^l g_i(t)A(s,t)\,dt \quad\text{und}\quad \int_0^l g_i(t)C(s,t)\,dt$$

mögen mit Ag und Cg abgekürzt sein. Schließlich soll ein Stern andeuten, daß für das Argument, l minus diesem Argument gesetzt worden ist, wie z. B.

$$*C(s,t)=C(l-s,t),\quad C^*(s,t)=C(s,l-t).$$

Dann nehmen die Gleichungen (10), wenn man die bekannten Grenzformen der Gleichungen (11) gebraucht, die Form an:

$$(12)\quad\begin{cases}\alpha_{11}g_1+\alpha_{12}g_2-g_1^*-\beta_{11}Cg_1-\beta_{12}Cg_2 & +A(g_1+g_2)+\alpha_1=0,\\ \alpha_{21}g_1+\alpha_{22}g_2-g_2^*-\beta_{21}Cg_1-\beta_{22}Cg_2 & +A(g_1+g_2)+\alpha_2=0,\\ \beta_{11}g_1+\beta_{12}g_2 \qquad +\alpha_{11}Cg_1+\alpha_{12}Cg_2-{}^*Cg_1 & +A(g_1+g_2)+\alpha_3=0,\\ \beta_{21}g_1+\beta_{22}g_2 \qquad +\alpha_{21}Cg_1+\alpha_{22}Cg_2 \quad -{}^*Cg_2 & +A(g_1+g_2)+\alpha_4=0.\end{cases}$$

Die Koeffizienten α und β dieser Gleichungen sind zunächst nur für $s<\frac{l}{2}$ definiert. Aber durch Auflösung der Gleichungen (10) für die $u_i(s)$ und $v_i(s)$ können wir die Definition so erweitern, daß die Gleichungen (12) für alle s gelten. Diese werden nun nach Cg_1, Cg_2, ${}^*Cg_1$, ${}^*Cg_2$ aufgelöst, was nur unmöglich ist, wenn $\begin{vmatrix}\beta_{11}\beta_{12}\\ \beta_{21}\beta_{22}\end{vmatrix}=0$. Daß diese Determinante nicht verschwindet, können wir erzielen, wenn wir, falls es nötig ist, ein anderes, mit dem gesuchten linear verbundenes Fundamentalsystem zugrunde legen. Das Resultat der Auflösung der Gleichungen (12) sei geschrieben

$$(13)\quad\begin{cases}Cg_1=\gamma_{11}g_1+\gamma_{12}g_2+\delta_{11}g_1^*+\delta_{12}g_2^*+A(g_1+g_2)+\eta_1=0,\\ Cg_2=\gamma_{21}g_1+\gamma_{22}g_2+\delta_{21}g_1^*+\delta_{22}g_2^*+A(g_1+g_2)+\eta_2=0,\\ {}^*Cg_1=\varepsilon_{11}g_1+\varepsilon_{12}g_2+\zeta_{11}g_1^*+\zeta_{12}g_2^*+A(g_1+g_2)+\eta_3=0,\\ {}^*Cg_2=\varepsilon_{21}g_1+\varepsilon_{22}g_2+\zeta_{21}g_1^*+\zeta_{22}g_2^*+A(g_1+g_2)+\eta_4=0.\end{cases}$$

Wir konstruieren dann die Hilbertschen Reziprozitätsformeln*) für das Innere von C, indem wir bemerken, daß $C(s, t)$ bis auf eine additive A-Funktion der Kern dieses Gleichungspaares ist. Wenn wir also in (13) r für s setzen, mit $C(s, r)$ multiplizieren und von 0 bis l in bezug auf r integrieren, so haben wir, da bis auf additive A-Funktionen**)

$$CCg = -g, \quad Cg^* = -{}^*Cg, \quad C({}^*Cg) = g^*:$$

$$(14)\quad \begin{cases} -g_1 = \gamma_{11} Cg_1 + \gamma_{12} Cg_2 - \delta_{11}({}^*Cg_1) - \delta_{12}({}^*Cg_2) + A(g_1 + g_2) + \vartheta_1 = 0, \\ -g_2 = \gamma_{21} Cg_1 + \gamma_{22} Cg_2 - \delta_{21}({}^*Cg_1) - \delta_{22}({}^*Cg_2) + A(g_1 + g_2) + \vartheta_2 = 0, \\ g_1^* = \varepsilon_{11} Cg_1 + \varepsilon_{12} Cg_2 - \zeta_{11}({}^*Cg_1) - \zeta_{12}({}^*Cg_2) + A(g_1 + g_2) + \vartheta_3 = 0, \\ g_2^* = \varepsilon_{21} Cg_1 + \varepsilon_{22} Cg_2 - \zeta_{21}({}^*Cg_1) - \zeta_{22}({}^*Cg_2) + A(g_1 + g_2) + \vartheta_4 = 0, \end{cases}$$

wobei wir die Identität benutzt haben

$$(15)\quad \begin{cases} \int\limits_0^l \gamma(r) g(r) C(s, r)\, dr = \gamma(s) \int\limits_0^l g(r) C(s, r)\, dr \\ \qquad - \int\limits_0^l g(r) \left[\gamma(s) - \gamma(r)\right] C(s, r)\, dr \end{cases}$$

und hierin ist $[\gamma(s) - \gamma(r)] C(s, r) = \frac{\gamma(s) - \gamma(r)}{\pi(s - r)} +$ einer in der Nähe von $s = r$ endlichen, stückweise stetigen und differentiierbaren Funktion, und ist also durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen der Fredholmschen Methode zugänglich gemacht worden.***) Nun können wir ganz wie wir aus (13) die Gleichungen (12) herleiteten, aus (14) ein neues System herleiten:

$$(16)\quad \begin{cases} \beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2 + \alpha_{11} Cg_1 + \alpha_{12} Cg_2 + {}^*Cg_1 + A(g_1 + g_2) + \varkappa_1 = 0, \\ \beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2 + \alpha_{21} Cg_1 + \alpha_{22} Cg_2 + {}^*Cg_2 + A(g_1 + g_2) + \varkappa_2 = 0, \\ -\alpha_{11} g_1 - \alpha_{12} g_2 - g_1^* + \beta_{11} Cg_1 + \beta_{12} Cg_2 + A(g_1 + g_2) + \varkappa_3 = 0, \\ -\alpha_{21} g_1 + \alpha_{22} g_2 - g_2^* + \beta_{21} Cg_1 + \beta_{22} Cg_2 + A(g_1 + g_2) + \varkappa_4 = 0. \end{cases}$$

---

*) Siehe Math. Ann. Bd. 58, S. 442 und 449.

**) Man bemerke, daß $C(s, t)$ eine ungerade Funktion von $s - t$ ist.

***) Ist $s = 0$, ein Sprungpunkt für die stückweise konstante Funktion γ, so haben wir für $s \cdot r > 0$: $\frac{\gamma(s) - \gamma(r)}{\pi(s - r)} = 0$. Dagegen für $s \cdot r < 0$ ist

$$\frac{\gamma(s) - \gamma(r)}{\pi(s - r)} = \frac{\text{const.}}{s - r},$$

und durch Einführung neuer Veränderlicher, $s = \sigma^2$ für positives s, $s = -\sigma^2$ für negatives s und ähnlich für r, wird $\frac{\text{const.}}{s - r} dr$ in $\frac{2\,\text{const.}\,|\varrho|}{\sigma^2 + \varrho^2} d\varrho$ übergehen, und wenn man die Gleichung mit $\left|\frac{\sigma}{\varrho}\right|$ multipliziert, so ist die Unstetigkeit auf die behandelte reduziert.

Die Gleichungen (12) und (16) können wir nun so nach g_1, g_2, g_1^*, g_2^* auflösen, daß $Cg_1, Cg_2, {}^*Cg_1, {}^*Cg_2$ hinausfallen, denn die Determinante der Koeffizienten dieser Glieder reduziert sich auf 2^nmal die Summe der Quadrate der Determinante der reellen und der Determinante der imaginären Teile der Substitutionskoeffizienten, was nach der schon gemachten Voraussetzung nicht verschwindet. Wir haben also

$$
(17)\qquad \begin{cases}
f_1(s) = \phantom{{}^*}g_1(s) + \int\limits_0^l \{g_1(t)A_{11}(s,t) + g_2(t)A_{12}(s,t) \\
\qquad\qquad + g_1^*A_{13}(s,t) + g_2^*A_{14}(s,t)\}\,dt, \\
f_2(s) = \phantom{{}^*}g_2(s) + \int\limits_0^l \{g_1(t)A_{21}(s,t) + g_2(t)A_{22}(s,t) \\
\qquad\qquad + g_1^*A_{23}(s,t) + g_2^*A_{24}(s,t)\}\,dt, \\
f_3(s) = {}^*g_1(s) + \int\limits_0^l \{g_1(t)A_{31}(s,t) + g_2(t)A_{32}(s,t) \\
\qquad\qquad + g_1^*A_{33}(s,t) + g_2^*A_{34}(s,t)\}\,dt, \\
f_4(s) = {}^*g_2(s) + \int\limits_0^l \{g_1(t)A_{41}(s,t) + g_2(t)A_{42}(s,t) \\
\qquad\qquad + g_1^*A_{43}(s,t) + g_2^*A_{44}(s,t)\}\,dt.
\end{cases}
$$

Dieses System kann nun nach den g_1, g_2, g_1^*, g_2^* aufgelöst werden. Wegen der erweiterten Definition von (12) werden die Werte von g_1^* und g_2^* mit g_1 und g_2 übereinstimmen. Die Lösung von (17) hängt von einer ganzen transzendenten Funktion $\delta(\lambda)$ von einem Parameter λ ab, in deren Koeffizienten die Substitutionskoeffizienten a_{ij} auftreten. Das Verschwinden dieser Funktion für $\lambda = 1$ bedingt also eine Beziehung zwischen den Koeffizienten. Ist $\delta(\lambda)$ für $\lambda = 1$ von Null verschieden, so existiert eine und nur eine Lösung von (17). Ist dagegen für $\lambda = 1$ $\delta(\lambda) = 0$, so existieren Lösungen von (17) nur, falls die $f_1(s), f_2(s), f_3(s), f_4(s)$ gewisse Integralbedingungen befriedigen, und dann existiert eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. In beiden Fällen existiert also eine Lösung des homogenen Problems; im zweiten Falle ist das integrierte System eindeutig bestimmt.

Sur la déformation des surfaces.

Par

Serge Bernstein à Heidelberg.

Quand j'ai demandé à M. Hilbert quelle raison générale l'a conduit à la proposition que j'ai démontrée plus tard, que les solutions des problèmes réguliers du calcul des variations sont analytiques, l'illustre géomètre m'a répondu qu'il croyait que *tous les problèmes naturels doivent être susceptibles de solutions analytiques.* J'avoue que je n'ai pas compris tout d'abord la portée philosophique de cette pensée qui me parut trop générale et vague. Mais aujourd'hui, je crois pouvoir la préciser sans en modifier le sens. On peut, en effet, énoncer le principe mathématique suivant dont la démonstration générale est difficile, mais qui, jusqu'à présent, n'a jamais été mis en défaut:

Si une fonction $f(x_1 x_2 \cdots x_n)$ *vérifiant une équation analytique aux dérivées partielles et definie dans un domaine quelconque* $S(x_1 x_2 \cdots x_n)$ *ne peut être prolongée au-delà de ce domaine que d'une seule façon (en supposant ce prolongement possible), ce prolongement est analytique.*

Dès lors on peut considérer l'assertion générale de M. Hilbert comme l'expression mathématique de l'hypothèse déterministe. Ne voulant pas sortir du domaine mathématique, je me bornerai ici à vérifier notre principe sur le problème de la déformation des surfaces.

On peut reconnaître par des considérations géométriques que les surfaces convexes jouissent de la propriété particulière que si une partie en est déformée (avec conservation des longueurs), la forme de la surface toute entière est bien déterminée. D'après le principe énoncé nous devons donc vérifier l'exactitude du théorème suivant prévu par M. Hilbert:

Une surface applicable sur une surface analytique à courbure positive est nécessairement analytique.

En effet, supposons l'élément linéaire de la surface donnée Σ mis sous la forme:

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Puisque la surface Σ est à courbure positive, on a:

$$C\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} < 0. \tag{1}$$

Pour avoir toutes les surfaces applicables sur la surface Σ, il faut déterminer toutes les fonctions x, y, z de u, v qui satisfont à l'équation:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

On démontre*) que chacune des fonctions x, y, z vérifie l'équation:

$$\begin{aligned}F = C(rt - s^2) + r\left(C^2\frac{\partial C}{\partial u}p - \frac{\partial C}{\partial v}q\right) + 2qs\frac{\partial C}{\partial u} \\ - C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}p^2 - q^2\left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right] + C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

où p, q, r, s, t désignent comme toujours les dérivées partielles de la fonction inconnue.

Formons le discriminant:

$$\begin{aligned}\delta = F_r' F_t' - \tfrac{1}{4}(F_s')^2 = C^2(rt - s^2) + C^2 pr\frac{\partial C}{\partial u} - Cqr\frac{\partial C}{\partial v} + \\ + 2Cqs\frac{\partial C}{\partial u} - q^2\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 = \\ = C\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\left[C^2 p^2 + q^2 - C^2\right].\end{aligned} \tag{3}$$

On voit que si $\delta > 0$, la fonction inconnue (pourvu qu'elle admette des dérivées des trois premiers ordres) est analytique. Or

$$\lambda = C^2 - q^2 - C^2 p^2$$

est le discriminant de la forme quadratique positive définie

$$du^2 + C^2 dv^2 - (pdu + qdv)^2.$$

Donc $\lambda > 0$, et, d'après (1) et (3), on a $\delta > 0$. *Par conséquent x, y, z sont des fonctions analytiques de u, v. La surface cherchée est analytique.*

Au contraire, il est aisé de se rendre compte que *la déformation d'une surface analytique à courbure négative ou nulle ne donne pas nécessairement une surface analytique.* Pour le voir, il suffit de constater que la déformation d'une partie suffisamment petite d'une telle surface ne détermine pas la déformation totale; or une fonction analytique est entièrement déterminée, lorsqu'elle est donnée dans une région aussi petite qu'on veut.**)

*) Darboux, Théorie des surfaces t. III. ch. IV.

**) On trouvera dans ma Thèse (Ch. V) (Math. Ann. t. 59) une démonstration analytique rigoureuse du moins pour la déformation de la pseudosphère. Pour avoir une démonstration tout à fait générale, il suffit de démontrer le théorème suivant: *Il peut exister plusieurs solutions admettant, le long d'une caractéristique, le même développement asymptotique.*

Pour ce qui concerne les surfaces à courbure nulle ou *développables, chaque élément fini détermine une bande entière de la surface* puisqu'elle contient un système de lignes droites. D'une façon générale, d'ailleurs, *toutes les surfaces qui dépendent d'une équation de type parabolique admettent un système de lignes analytiques.* Ce théorème (conforme à notre principe fondamental) est démontré rigoureusement dans les deux cas suivants*):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x y z \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a(xy)\frac{\partial z}{\partial y} + b(xy)\frac{\partial z}{\partial x} + c(xy)z + d(xy).$$

Heidelberg, le 15 janvier 1905.

*) Voir ma Thèse (Ch. V) et une Note dans les „Comptes Rendus de l'Ac. des Sc." (16 Janvier 1905).

On Quaternion Number-Systems.

By

H. E. Hawkes of New Haven, Conn.

Introduction.

This paper continues and concludes the solution of the general enumeration problem of hypercomplex number-systems which are associative and have a modulus. The enumeration of non-quaternion systems is given in Mathematische Annalen vol. 58. The problem consists in finding all non-equivalent, non-reciprocal, irreducible number-systems with moduli, where the terms used are defined as follows.

Def. 1. Two systems having the units

$$e_1, e_2, \cdots, e_n \quad \text{and} \quad e_1', e_2', \cdots, e_n'$$

respectively are *equivalent* if linear relations exist of the type

$$e_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} e_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

where the determinant

$$|a_{ki}| \neq 0 \qquad (k, i = 1, 2, \cdots, n).$$

The a's are assumed to be ordinary complex numbers.

Def. 2. A system is *reducible* if its units may be divided into two or more subsystems such that the product of two units in the same subsystem is in that subsystem, while the product of units in different subsystems vanishes.

Def. 3. Two systems are *reciprocal* to each other when the multiplication table of one can be obtained from that of a system which is equivalent to the other by an interchange of rows and columns.

Def. 4. The *modulus* of a system is a number μ such that for an arbitrary number x of the system,

$$\mu x = x \mu = x.$$

The division of number-systems into quaternion and non-quaternion classes is due to Scheffers*) who defines a quaternion system as one in which three numbers independent of the modulus and of each other exist which satisfy the following equations:

$$
\begin{aligned}
&e_1 e_2 - e_2 e_1 = 2 e_3, \\
(1) \qquad &e_2 e_3 - e_3 e_2 = 2 e_1, \\
&e_3 e_1 - e_1 e_3 = 2 e_2.
\end{aligned}
$$

The simplest quaternion system is Hamilton's quaternions which is symbolized by (H). The necessary and sufficient condition that a given system is quaternion, is that (H) occurs in it as a subsystem, that is, that four independent numbers of the system may be so chosen that their multiplication table is identical with that of (H). That this condition is sufficient is evident, since the three units of (H) that are distinct from the modulus fulfil equations (1) when the multiplication table for (H) is taken in the form

	1	2	3	4
1	-4	-3	2	1
2	3	-4	-1	2
3	-2	1	-4	3
4	1	2	3	4

where k is written for e_k. That this condition is necessary was proved by Scheffers for $n \leqq 8$, and appears for general n from a memoir by Molien.**)

§ 1.

Normal Forms.

In order to enumerate the various systems of distinct types it is necessary to find a normal form into which any quaternion system may be thrown and from an inspection of which its characteristic properties appear. Normal forms for any system, whether quaternion or not, have been given by Molien***) and the writer†) and will be symbolized by (M) and (P) respectively. A normal form for the multiplication table of non-quaternion

*) Mathematische Annalen, Vol. 39.

**) Mathematische Annalen, Vol. 41.

***) loc. cit.

†) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3.

systems has been given by Scheffers*), which will be symbolized by (S). The features of these normal forms will now be given, followed by proofs that these three forms are compatible, that is, the multiplication table of a given system may be thrown into all three forms simultaneously, thus affording a form which comprises the advantages of all. This generalized normal form is called (N).

1. Normal Form (M).

Def. 5. A *primitive* system is one in m^2 units,

$$e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1m}, e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2m}, \cdots, e_{mm}$$

such that the units obey the multiplicative law

$$e_{jh} e_{lk} = 0 \quad \text{when} \quad h \neq l,$$
$$e_{jh} e_{lk} = e_{jk} \quad \text{when} \quad h = l.$$

For $m = 1$ we have the system

$$e_1^2 = e_1.$$

For $m = 2$ we have the system which is equivalent to (H),

1	2	0	0
0	0	1	2
3	4	0	0
0	0	3	4

where

$$e_{11} = e_1, \ e_{12} = e_2, \ e_{21} = e_3, \ e_{22} = e_4.$$

When $m = 3$ we have the multiplication tables of nonians. Molien**) shows that if a system S contains several primitive subsystems

$$P_1, P_2, \cdots, P_\lambda,$$

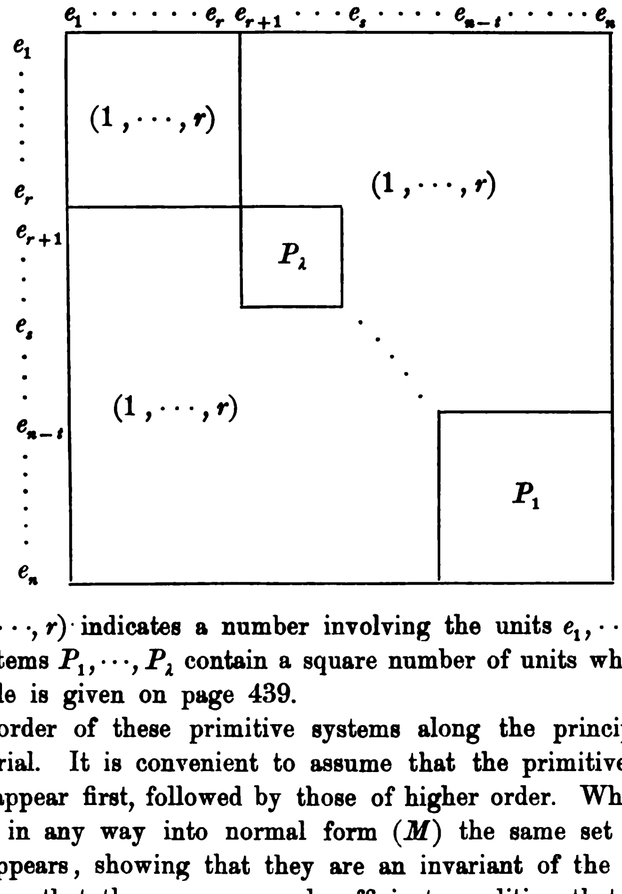
the units of S may be so chosen that all these subsystems appear in the multiplication table, showing that the units which comprise

$$P_1, P_2, \cdots, P_\lambda$$

are independent of each other. The product of units one or more of which is not a unit of a primitive system can contain no unit of a primitive system.

*) loc cit.
**) loc. cit.

These theorems we may display in a table as follows.



where $(1, \cdots, r)$ indicates a number involving the units $e_1, \cdots, e_r$ and all the subsystems $P_1, \cdots, P_\lambda$ contain a square number of units whose multiplication table is given on page 439.

The order of these primitive systems along the principal diagonal is immaterial. It is convenient to assume that the primitive systems in one unit appear first, followed by those of higher order. When a system is thrown in any way into normal form (M) the same set of primitive systems appears, showing that they are an invariant of the system. We can now see that the necessary and sufficient condition that a system is a quaternion system is that at least one of its primitive systems is of order $\geqq 2$. The necessity of the condition follows since any four units $e_{\lambda\lambda}, e_{\lambda\tau}, e_{\tau\lambda}, e_{\tau\tau}$ of a primitive system have (H) for a multiplication table.

2. Normal form (P).

Def. 6. A number α is called *idempotent* if $\alpha^2 = \alpha$.

Def. 7. A number α is called *nilpotent* if $\alpha^2 = 0$.

If a system contains an idempotent number, this number may be taken as the unit e_n and the other units of the system so chosen as to fall into the following groups: —

Group I contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_n e_k = e_k.$$

Group II contains only units e_k such that

$$e_k e_n = 0;\ e_n e_k = e_k.$$

Group III contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_k;\ e_n e_k = 0.$$

Group IV contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_n e_k = 0.\text{*)}$$

When the transformation bringing the system into this form has been performed, the system is called regular with respect to e_n. The four groups are symbolized respectively by (dd), (dn), (nd), (nn). Evidently e_n itself is in group I. The following multiplication table shows the group to which the non-vanishing product of units of any two groups must belong.

	(dd)	(dn)	(nd)	(nn)
(dd)	(dd)	(dn)	0	0
(dn)	0	0	(dd)	(dn)
(nd)	(nd)	(nn)	0	0
(nn)	0	0	(nd)	(nn)

If an idempotent number independent of e_n remains in any group it may be taken as a unit, say e_{n-1}, and the system made regular with respect to it without disturbing the regularity with respect to e_n. This process may be continued until no two idempotent numbers occur in the same group with respect to any unit. A system in which every unit is in one of the four groups with respect to each and every idempotent unit is called *regular*, or in normal form (P). The modulus of a system in form (P) is the sum of its idempotent units.

Theorem I. *Normal forms* (M) *and* (P) *are compatible.*

Assume that the system S is in form (M). We must show that without destroying form (M) the system may be thrown simultaneously into form (P). The idempotent units in the primitive systems of (M) are all in group IV with respect to each other, and no idempotent unit independent of these units exists else it would appear as a primitive system of order 1. The nilpotent units of the primitive subsystems are already in either group II, III or IV with respect to each idempotent unit. It only remains to regularize the units $e_1, \cdots, e_r$ which are not in

*) For proofs of this and the following theorems see my paper in Transactions, loc. cit.

any primitive subsystem. That this can be accomplished without affecting the form (M), but by linear transformations involving only the units $e_1, \cdots, e_r$ appears from the method of regularizing a system.*)

3. Normal Form (S).

For a non-quaternion system which, as we have seen, is a system containing no primitive subsystem of order greater than 1, Scheffers has given a normal form, and the explicit enumeration of distinct systems for $n \leqq 5$ has been given by him. The enumeration of systems in one idempotent unit has been carried out for the general case by Starkweather.**) Explicit enumeration for the case where the system contains more than one idempotent unit will be found for $n = 6$ in vol. 58 of these Annalen, page 370, and for $n = 7$ in the American Journal of Mathematics vol. 26.

Theorem II. *Normal form (M) and normal form (S) are compatible.*

If in any quaternion system the nilpotent units of the primitive sub-systems are deleted we have an associative non-quaternion system which may by a transformation T which involves only the remaining nilpotent units, be thrown into normal form (S), all the distinct types of which for a given order are known. Since such a transformation does not involve the idempotent units it might properly have been applied to the undeleted system thus throwing the non primitive portion of the system together with the corresponding idempotent units into form (S). Since a non quaternion system in form (S) is also in form (P) this transformation does not affect the regularity.

We can now restate the results as follows: —

If a system is in form (M) it may be transformed so as to fall simultaneously in form (P). The units exclusive of the nilpotent units in the primitive subsystems form a non-quaternion system and may be assumed in form (S). A system in this form is said to be in form (N).

§ 3.

Principles of Classification.

1. Equivalence.

Theorem III. *If two systems in form (N) have different numbers of idempotent units they are inequivalent.*

This is evident from the invariance of the primitive sub-systems.

The significance of this theorem is that when we are seeking all types of inequivalent systems of order n, we may make our enumeration

*) Transactions, loc. cit. page 314.

**) American Journal of Mathematics, Vols. 21, 23.

for different numbers of idempotent units separately without possibility of repetition.

Lemma. *If the systems S and S' are in form (N) and are equivalent, and if e' is an idempotent unit in S' then the equation of transformation*

$$e' = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \tag{1}$$

reduces to

$$e' = e$$

where e is an idempotent unit of S.

Symbolize by s any nilpotent units of S not contained in a primitive sub-system, and by p nilpotent units that are contained in some primitive sub-system. The number $e' = s + p$ is then not idempotent. For products of the form s^2, sp, ps involve only units s by the table on page 440, while an idempotent number of the primitive subsystems consisting of nilpotent units does not exist. Thus the transformation equation (1) must contain at least one idempotent unit of S in its right hand member. Since the primitive sub-systems are an invariant of the system there are the same number of idempotent units in S as in S'. If then two or more idempotent units of S occur in the right hand member of (1), one of them must appear in the equation of transformation of a second idempotent unit of S', say e''. But since $e'^2 = e'$, $e''^2 = e''$ and $e'e'' = 0$ the right hand members of the equations in question cannot contain the same idempotent unit of S. Thus each idempotent equation contains one and only one idempotent unit of S. It remains to prove that (1) can contain no nilpotent unit in its right hand member. The equation (1) is then in form

$$e' = s + p + e_i$$

where e_i is an idempotent unit of S. Let now p_{ji}, p_{ik}, p_{lm}, represent those units in p which are in groups III, II and IV respectively with respect to e_i. Thus

$$e' = s + p_{lm} + p_{ji} + p_{ik} + e_i \qquad (l, m, j, k \neq i).$$

Squaring we get

$$p_{lm} = p_{lm}^2 + p_{lm}p_{ji} + p_{lm}p_{ik} + p_{ik}p_{lm} + p_{ik}p_{ji} + p_{ji}p_{lm} + p_{ji}p_{ik}.$$

But by the table on page 441 this reduces to

$$p_{lm} = p_{lm}^2 + p_{ji}p_{ik}.$$

One observes that p_{lm}^2 is idempotent, which is however impossible since it is expressed in terms of nilpotent units. Thus (1) is reduced to the form

$$e' = s + p_{ji} + p_{ik} + e_i. \qquad (j, k \neq i) \tag{2}$$

Let now e_k be the idempotent unit of S with respect to which some units of p_{ik} are in group III, and let

$$(3) \qquad e'' = s + p'_{ik} + p'_{km} + e_k \qquad (l, m \neq k)$$

be the equation of transformation containing e_k. Since $e'e'' = 0$ we have

$$p_{ji}p'_{ik} + p_{ik}p'_{km} + e_i p'_{ik} + p_{ik} e_k = 0$$

Since $k \neq m$, $p_{ik}p'_{km} = 0$; since $j \neq i$, $p_{ji}p'_{ik} = 0$ i. e. $i \neq l$; since $i \neq l$, $e_i p'_{ik} = 0$. Thus $p_{ik} e_k = 0$ which is contrary to the hypothesis. Consequently $p_{ik} = 0$. We can show similarly that $p_{ji} = 0$, and our equation (1) is reduced to the form

$$e' = s + e.$$

Since all units s are in normal form (S), there can be no s units in the right hand member of (1)*), and our equation (1) is reduced to the form

$$e' = e.$$

Theorem IV. *If S and S' are equivalent there is a one to one correspondance between the idempotent units of the two systems such that the number of units in the groups I, II, III, IV, with respect to corresponding units is the same.*

The preceding lemma shows the existence of the one to one correspondence between the idempotent units of S and S'. That the theorem is true so far as the units of the primitive subsystems are concerned follows from the invariance of these subsystems in equivalent systems. The remaining units are in normal form (S) and the complete validity of the present theorem is established by the corresponding theorem on non-quaternion systems.**) This theorem puts us in a position to write down all possible combinations of groups with respect to idempotent units into which the remaining non-idempotent units may fall, and assures us that no two systems in different combinations can be equivalent.

2. Reducibility.

Evidently any system all of whose units fall in primitive subsystems is reducible. This is a special case of the theorem proved in general in my paper in the Annalen***), that the necessary and sufficient condition that a system is reducible is that its modulus falls into parts, each of which is the modulus of a certain subsystem. Thus if we start with an idempotent unit and find it connected with every other idem-

*) Scheffers, loc. cit., page 329.

**) Math. Annalen, vol. 58, page 365.

***) loc. cit. page 366.

potent unit by a chain of non-vanishing multiplicative relations with other units, then the whole modulus lies wholly in one subsystem and the system is irreducible. If on the other hand not all idempotent units are thus connected the modulus falls apart and the system is reducible.

3. Reciprocity.

Reciprocal systems evidently have the same number of idempotent units. Let S and S^{-1} be systems with their units so chosen that the table for S passes into that of S^{-1} by an interchange of rows and columns. We may assume that both systems are in normal form (N).

As we pass in this way from S to S^{-1} we note that the same units constitute the various groups I and IV in each system. The units of II with respect to a given unit pass into units of III with respect to the same unit and conversely, thus leaving the primitive subsystems unchanged. If then, from the totality of combinations of units into groups, we erase every combination which differs from another merely by an interchange of the number of units in the group II and III with respect to the various idempotent units, we shall erase all combinations which lead to systems reciprocal to those that remain, and only such.

4. Removal of Parameters.

The only parameters in normal form that remain to be removed are those found in the products of the non idempotent units in the primitive subsystems and those not in the subsystems. Application of the table on page 441 serves to remove most of them, while the remaining ones may be fixed by direct application of the associative law or by the principle of deletion.*)

§ 4.

Illustration; $n = 7$.

In the following tables of combinations of units into groups the primitive subsystem (H) contains the units e_4, e_5, e_6, e_7 of which e_4 and e_7 are idempotent, while e_5 and e_6 are in groups II and III respectively with respect to e_4, and in groups III and II respectively with regard to e_7. In the following tables the indices of the idempotent units are in the upper line of the table, while the indices of the non-idempotent numbers are in the left hand column. The group of e_i with respect to e_k is found at the intersection of the i^{th} row and k^{th} column.

*) Math. Annalen, vol. 58, page 367 ff.

	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7
1	I	IV	I	IV	I	IV	I	IV	II	III	II	III
2	I	IV	I	IV	II	III	II	III	II	III	III	II
3	I	IV	II	III	II	III	III	II	II	III	III	II
4	II	III	II	III	II	III	II	III	II	III	II	III
5	III	II	III	II	III	II	III	II	III	II	III	II

It appears that none of the six distinct tables of combination given yield associative systems. By the table on page 441 we see that for the first four combinations given

$$e_4 = \overleftarrow{\underrightarrow{e_1 e_5 e_6}} = e_1$$

where the arrow indicates the order of multiplication. That is

$$e_4 = e_1 e_5 \cdot e_6 \quad \text{while} \quad e_1 \cdot e_5 e_6 = e_1.$$

For the last two systems

$$e_5 = \overleftarrow{\underrightarrow{e_1 e_6 e_5}} = e_1.$$

Thus where (H) is the only primitive subsystem we get no quaternion system for $n = 7$.

Suppose now we have in addition to the primitive subsystem (H) a primitive subsystem of order one; that is an idempotent unit e_3. We have then the following tables of combination.

	3	4	7	3	4	7	3	4	7	3	4	7	3	4	7
1	I	IV	IV	IV	I	IV	IV	IV	I	II	III	IV	II	III	IV
2	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	IV	III
5	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III
6	IV	III	II	IV	III	II	IV	III	II	IV	III	II	IV	III	II

3	4	7	3	4	7	3	4	7	3	4	7
II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV
III	II	IV	III	IV	II	IV	II	III	IV	III	II
IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III
IV	III	II	IV	III	II	IV	III	II	IV	III	II

Of these nine combinations the first four are seen to be non-associative by the product $e_2 e_5 e_6$, while the last four are also non-associative by the product $e_1 e_5 e_6$. The remaining combination affords the system

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	2	0	0
2	0	0	0	0	0	1	2
3	1	2	3	0	0	0	0
4	0	0	0	4	5	0	0
5	0	0	0	0	0	4	5
6	0	0	0	6	7	0	0
7	0	0	0	0	0	6	7

which is the only quaternion system in seven units, as additional idempotent units would yield reducible systems.

Yale University, May 21, 1904.

Über eine Anwendung der Idealtheorie auf die Frage nach der Irreduzibilität algebraischer Gleichungen.

Von

Oskar Perron in München.

Zur Entscheidung darüber, ob eine algebraische Gleichung mit numerisch gegebenen rationalen Koeffizienten im Bereich der rationalen Zahlen reduzibel oder irreduzibel ist, hat Kronecker eine allgemeine Methode angegeben, die allerdings in den meisten Fällen wegen der langen Rechnungen praktisch undurchführbar sein wird. Man kennt aber auch eine Reihe von Sätzen, nach welchen aus gewissen Eigenschaften der Koeffizienten, selbst ohne daß diese *numerisch* gegeben sind, auf die Irreduzibilität einer algebraischen Gleichung geschlossen werden kann. Das erste derartige Kriterium ist das bekannte von Eisenstein*) entdeckte, dem später Königsberger**) und Netto***) noch weitere ähnliche zur Seite stellten. Das zunächst sich darbietende und auch von allen Autoren befolgte Verfahren, um derartige Sätze zu beweisen, besteht darin, daß man eine probeweise Zerfällung der als irreduzibel vermuteten Gleichung vornimmt, und daraus einen Widerspruch mit den vorausgesetzten Eigenschaften der Koeffizienten konstruiert.

Mittels einer neuen hiervon gänzlich verschiedenen Methode will ich im folgenden weitere Sätze über die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen aufstellen. Dabei werden nämlich gewisse rationale Primzahlen in einem der durch die gegebene Gleichung definierten algebraischen Körper in ihre idealen Faktoren zerlegt, und aus dieser Zerlegung lassen sich dann Schlüsse ziehen auf den Grad des betreffenden Körpers†). Auf diesem

*) Über die Irreduzibilität der Gleichung, von welcher die Teilung der ganzen Lemniskate abhängt. Journal f. Math. Bd. 39, Heft II.

**) Über den Eisensteinschen Satz etc. Journal f. Math. Bd. 115, und: Über die Entwicklungsform algebraischer Funktionen etc. Journal f. Math. Bd. 121.

***) Über die Irreduzibilität ganzzahliger ganzer Funktionen. Math. Ann. Bd. 48, auch „Vorles. über Algebra", Bd. I, 5. Vorles.

†) Das Verfahren ist in gewissem Sinne parallel (erfordert jedoch im allgemeinen weniger Aufwand an Rechnung) dem von Königsberger a. a. O. für algebraische

Weg hat schon Dedekind*) die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, wo p eine Primzahl bedeutet, nachgewiesen, indem er zeigte, daß p im Körper der p^{ten} Einheitswurzeln die $(p-1)^{\text{te}}$ Potenz eines Primideals wird. Der Grad des Körpers ist daher mindestens $p-1$, also obige Gleichung gewiß irreduzibel. Die allgemeinere Verwendbarkeit der angedeuteten, fast ohne alle Rechnung auskommenden Methode scheint jedoch noch nicht erkannt zu sein. Aus der Idealtheorie werden dabei blos die Elemente vorausgesetzt; die hauptsächlich gebrauchten Sätze sind die beiden folgenden, deren Richtigkeit man ohne Schwierigkeit einsieht:

Hilfssatz I. Eine rationale Primzahl kann in einem algebraischen Körper n^{ten} Grades in höchstens n Faktoren zerfallen.

Hilfssatz II. Eine rationale Primzahl kann in einem algebraischen Körper nur dann die n^{te} Potenz eines Ideals sein, wenn der Grad des Körpers durch n teilbar ist.

§ 1.

Ich beginne damit, zunächst das von Eisenstein gefundene Irreduzibilitätskriterium nach meinen Prinzipien neu zu beweisen; dasselbe lautet:

Die algebraische Gleichung

$$x^n + pa_1x^{n-1} + pa_2x^{n-2} + \cdots + pa_n = 0, \tag{1}$$

*wo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten, deren letzte durch die Primzahl p nicht teilbar ist, ist stets irreduzibel.***)

Beweis: Eine beliebige Wurzel γ der Gleichung (1) ist eine ganze algebraische Zahl, deren n^{te} Potenz wegen

$$\gamma^n = -p(a_1\gamma^{n-1} + a_2\gamma^{n-2} + \cdots + a_n)$$

durch p teilbar ist. Die Zahlen γ und p haben also in dem aus γ entspringenden Körper $k(\gamma)$ den idealen Faktor (γ, p) gemein, der von 1 verschieden ist.

Man hat des weiteren die Beziehung

$$\frac{\gamma^n}{p} = -\gamma(a_1\gamma^{n-2} + a_2\gamma^{n-3} + \cdots + a_{n-1}) - a_n;$$

Hier ist das erste Glied auf der rechten Seite durch γ, also auch durch

Funktionen eingeschlagenen Weg, wobei die Irreduzibilität aus dem Zusammenhang der Riemannschen Fläche erschlossen wird. Für algebraische *Zahlen* jedoch bedient sich auch Königsberger ausschließlich der Methode der probeweisen Zerfällung.

*) Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Auflage § 185.

**) Es ist offenbar, daß der Satz auch dann gilt, wenn der Koeffizient von x^n nicht 1, sondern eine beliebige zu p prime ganze Zahl a_0 ist. Denn wenn man $a_0x = y$ setzt, so erfüllen die Koeffizienten der Gleichung für y die Bedingungen des Satzes.

(γ, p) teilbar, das letzte Glied aber nach Voraussetzung prim zu p, also auch prim zu (γ, p). Daraus folgt, daß auch $\frac{\gamma^n}{p}$ prim ist zu (γ, p), da aber der Zähler γ^n offenbar durch $(\gamma, p)^n$ teilbar ist, so muß auch der Nenner p durch $(\gamma, p)^n$ teilbar sein. Andrerseits ist $(\gamma, p)^n = (\gamma^n, p^n)$ gewiß teilbar durch p, und folglich $p = (\gamma, p)^n$. Daraus schließt man nach Hilfssatz I oder II sofort, daß der Körper $k(\gamma)$ mindesten vom n^{ten} Grad ist; da aber γ auch wirklich einer Gleichung n^{ten} Grades genügt, so ist $k(\gamma)$ genau vom n^{ten} Grad, und folglich Gleichung (1) irreduzibel. Zugleich ergibt sich, daß (γ, p) in $k(\gamma)$ ein Primideal darstellt, was jedoch für die gegenwärtige Betrachtung unwesentlich ist.

Der gegebene Beweisgang schließt sich möglichst nahe an den von Dedekind a. a. O. für die Kreisteilungsgleichungen gegebenen an.*) Eine leichte Modifikation dieses Gedankengangs stellt sich in folgender Überlegung dar, die ich deshalb noch anfügen will, weil durch fast wörtlich entsprechende Schlüsse die Beweise der in den folgenden Paragraphen zu gebenden Erweiterungen des Eisensteinschen Satzes ihre präziseste Form erhalten.

Da p und γ nicht relativ prim sind, so sei $\mathfrak{p}$ ein sowohl in p als in γ aufgehendes Primideal des Körpers $k(\gamma)$, und es sei p genau durch $\mathfrak{p}^a$, γ genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar. Dann ist

$$\begin{aligned} &\gamma^n \text{ genau durch } \mathfrak{p}^{bn}, \\ &pa_i\gamma^{n-1} \text{ mindestens durch } \mathfrak{p}^{a+b(n-i)}, \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n-1) \\ &pa_n \text{ genau durch } \mathfrak{p}^a \end{aligned}$$

teilbar. In dem Ausdruck

$$\gamma^n + pa_1\gamma^{n-1} + \cdots + pa_n$$

ist also das zweite, dritte, $\cdots$, vorletzte Glied durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar als das letzte. Da der Ausdruck aber verschwindet, also durch jede beliebige Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so müssen das erste und letzte Glied dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ enthalten, d. h. es ist $a = bn$. Daher ist p teilbar durch $\mathfrak{p}^{bn}$, und daraus folgt wieder nach Hilfssatz I, und mit Rücksicht darauf, daß γ einer Gleichung n^{ten} Grades genügt, die Tatsache, daß $k(\gamma)$ vom n^{ten} Grad ist, w. z. b. w. Zugleich ergibt sich $b = 1$.

§ 2.

Durch $[\alpha]$ soll in der Folge stets, wie üblich, die in der reellen Zahl α enthaltene größte ganze Zahl bezeichnet werden.

Es läßt sich nun ganz entsprechend wie vorhin auch die folgende

*) Dort ist (γ, p) ein Hauptideal, wodurch der Beweis noch einfacher wird.

von Königsberger*) ohne vollständig durchgeführten Beweis angegebene Erweiterung des Eisensteinschen Satzes ableiten:

Theorem I. *Die algebraische Gleichung*

$$x^n + p^{\left[\frac{e}{n}\right]+1} a_1 x^{n-1} + p^{\left[\frac{2e}{n}\right]+1} a_2 x^{n-2} + \cdots + p^{\left[\frac{(n-1)e}{n}\right]+1} a_{n-1} x + p^e a_n = 0, \tag{2}$$

wo $a_1, \cdots, a_n$ *beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten, deren letzte zur Primzahl* p *prim ist, ferner* e *irgend eine zu* n *prime Zahl, ist irreduzibel.*

Beweis: Ist γ eine Wurzel der Gleichung (2), so ist wieder ersichtlich, daß γ^n durch p teilbar ist, also γ und p einen von 1 verschiedenen idealen Faktor gemein haben. Es sei daher $\mathfrak{p}$ ein sowohl in p als in γ aufgehendes Primideal des Körpers $k(\gamma)$, und zwar sei p genau durch $\mathfrak{p}^a$, γ genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar. Dann ist

$$\gamma^n \text{ genau durch } \mathfrak{p}^{bn},$$
$$p^{\left[\frac{ie}{n}\right]+1} a_i \gamma^{n-i} \text{ mindestens durch } \mathfrak{p}^{a\left(\left[\frac{ie}{n}\right]+1\right)+b(n-i)}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$
$$p^e a_n \text{ genau durch } \mathfrak{p}^{ae}$$

teilbar. Hieraus läßt sich leicht schließen, daß $bn = ae$ ist.

In der Tat, wäre nämlich $bn > ae$, so würde hieraus folgen

$$a\left(\left[\frac{ie}{n}\right]+1\right) + b(n-i) > a\frac{ie}{n} + \frac{ae}{n}(n-i) = ae.$$

In dem Ausdruck

$$\gamma^n + p^{\left[\frac{e}{n}\right]+1} a_1 \gamma^{n-1} + p^{\left[\frac{2e}{n}\right]+1} a_2 \gamma^{n-2} + \cdots + p^e a_n \tag{3}$$

wäre daher das letzte Glied genau durch $\mathfrak{p}^{ae}$ teilbar, alle andern aber durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$, was nicht möglich ist, da der Ausdruck verschwindet.

Wäre dagegen umgekehrt $ae > bn$, so folgte weiter

$$a\left(\left[\frac{ie}{n}\right]+1\right) + b(n-i) > a\frac{ie}{n} + b(n-i) > bn\frac{i}{n} + b(n-i) = bn.$$

In dem Ausdruck (3) wäre also jetzt das erste Glied nur durch $\mathfrak{p}^{bn}$ teilbar, und alle andern durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$, was wieder nicht möglich ist.

Man hat daher in der Tat $bn = ae$, und da n und e als teilerfremd vorausgesetzt sind, so folgt hieraus $a = rn$, $b = re$, wo r eine natürliche Zahl ist. Somit ist p teilbar durch $\mathfrak{p}^{rn}$, und also nach Hilfssatz I der Grad des Körpers $k(\gamma)$ mindestens gleich rn. Da aber γ einer Gleichung n^{ten} Grades genügt, so folgt wieder, daß $r = 1$, und der Grad von $k(\gamma)$ gleich n sein muß. Hierdurch ist die Irreduzibilität erwiesen.

---

*) Vergl. die erste der eingangs erwähnten Abhandlungen.

Für $e=1$ erhält man wieder den Eisensteinschen Satz. Die Schlüsse dieses Paragraphen lassen sich nicht mehr anwenden auf die Gleichung

$$(4)\qquad x^n + p^{e_1} a_1 x^{n-1} + \cdots + p^{e_{n-1}} a_{n-1} x + p^e a_n = 0,$$

wo die e_i kleinere Werte haben als die oben angegebenen. Das ganze Verfahren beruht vielmehr darauf, daß für $x=\gamma$ die mittleren Glieder der linken Seite von (4) durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar werden als die beiden äußeren. Sucht man nun die e_i so zu bestimmen, daß dies sicher eintritt, so findet man gerade $e_i = \left[\frac{ie}{n}\right]+1$. Ist $e_i < \left[\frac{ie}{n}\right]+1$, so kann die Gleichung in der Tat reduzibel sein.

Es mag noch bemerkt werden, daß nicht mehr wie in § 1 (γ, p) selbst ein Primideal ist in $k(\gamma)$, sondern es ist, wie man leicht sieht, $(\gamma, p) = \mathfrak{p}^e$ oder $\mathfrak{p}^n$, je nachdem $e < n$ oder $e > n$ ist.

§ 3.

Königsberger hat in seiner zuerst genannten Arbeit einen noch allgemeineren Satz aufgestellt, als den eben bewiesenen. Ich will jedoch gleich ein noch viel weiter gehendes Theorem angeben, das diesen, sowie die in § 1 und § 2 bewiesenen Sätze als Spezialfälle umfaßt:

Theorem II. *Die algebraische Gleichung*

$$(5)\quad x^n + p_1^{\left[\frac{e_1}{n}\right]+1} p_2^{\left[\frac{e_2}{n}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{e_k}{n}\right]+1} a_1 x^{n-1} + p_1^{\left[\frac{2e_1}{n}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{2e_k}{n}\right]+1} a_2 x^{n-2} + \cdots$$
$$+ p_1^{\left[\frac{(n-1)e_1}{n}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{(n-1)e_k}{n}\right]+1} a_{n-1} x + p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k} a_n = 0,$$

wo $a_1, \cdots, a_n$ beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten, deren letzte zu den Primzahlen $p_1, p_2, \cdots, p_k$ prim ist, wo ferner die $k+1$ Zahlen $n, e_1, e_2, \cdots, e_k$ keinen gemeinsamen Teiler haben, ist irreduzibel.

Beweis: Ist wieder γ eine Wurzel der Gleichung (5), so ist γ^n durch p_1 teilbar; daher ist auch γ durch jedes in p_1 enthaltene Primideal des Körpers $k(\gamma)$ teilbar. Sei $\mathfrak{p}_1$ ein solches Primideal, und es sei p_1 genau durch $\mathfrak{p}_1^{a_1}$, γ genau durch $\mathfrak{p}_1^{b_1}$ teilbar; dann folgt durch wörtlich dieselbe Überlegung wie im vorigen Paragraphen, daß $b_1 n = a_1 e_1$ ist. Ist daher d_1 der größte Teiler von n und e_1, so muß $a_1 = r_1 \frac{n}{d_1}$, $b_1 = r_1 \frac{e_1}{d_1}$ sein, wo r_1 eine natürliche Zahl ist. Es ist daher p_1 genau durch $\mathfrak{p}_1^{r_1 \frac{n}{d_1}}$ teilbar. Da nun diese Überlegung für jedes in p_1 enthaltene Primideal gilt, so hat offenbar p_1 in $k(\gamma)$ eine Zerlegung der folgenden Art:

$$p_1 = (\mathfrak{p}_1^{r_1} \mathfrak{p}_1'^{r_1'} \mathfrak{p}_1''^{r_1''} \cdots)^{\frac{n}{d_1}} = \mathfrak{a}^{\frac{n}{d_1}},$$

so daß nach Hilfssatz II der Grad des Körpers $k(\gamma)$ gewiß durch $\frac{n}{d_1}$ teilbar ist. Dieselbe Betrachtung, die hier für die Primzahl p_1 durchgeführt ist, gilt aber auch für $p_2, p_3, \cdots, p_k$. Bezeichnet also allgemein d_i den größten Teiler von n und e_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$, so ist der Grad des Körpers $k(\gamma)$ teilbar durch die Zahlen $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \cdots, \frac{n}{d_k}$. Nach der Voraussetzung haben aber $d_1, d_2, \cdots, d_k$ keinen gemeinsamen Teiler, und demnach ist der Grad des Körpers auch durch n teilbar; er ist also genau gleich n, und somit die Irreduzibilität der Gleichung (5) bewiesen.

Der zu Beginn dieses Paragraphen erwähnte Satz von Königsberger geht aus dem allgemeinen Theorem hervor, wenn man $k = 2$, und $n = e_1 e_2$ setzt; die Zahlen e_1 und e_2 müssen dann nach den obigen Bedingungen relativ prim sein.

§ 4.

Ich gehe jetzt zu einer neuen Klasse von Sätzen über, und beweise zunächst das

Theorem III. *Die algebraische Gleichung*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + p a_2 x^{n-2} + \cdots + p a_n = 0, \tag{6}$$

wo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *ganze rationale Zahlen bedeuten, deren erste und letzte durch die Primzahl* p *nicht teilbar sind, und wo kein Teiler von* a_n *(*± 1 *eingeschlossen) nach dem Modul* p *kongruent* a_1 *ausfällt, ist irreduzibel.*

Eine leichte Erweiterung, die der in § 2 gegebenen Erweiterung des Eisensteinschen Satzes parallel läuft, führt zu dem folgenden

Theorem IV. *Die algebraische Gleichung*

$$\begin{aligned} x^n + a_1 x^{n-1} + p^{\left[\frac{e}{n-1}\right]+1} a_2 x^{n-2} + p^{\left[\frac{2e}{n-1}\right]+1} a_3 x^{n-3} + \cdots \\ + p^{\left[\frac{(n-2)e}{n-1}\right]+1} a_{n-1} x + p^e a_n = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

wo e *prim zu* $n-1$ *ist, und die* $a_1, \cdots, a_n$ *genau die Bedingungen des vorigen Theorems erfüllen, ist irreduzibel.*

Für $e = 1$ geht Theorem IV in das Theorem III über.

Zum Beweis will ich $n > 2$ voraussetzen, da für quadratische Gleichungen die Sätze ja ziemlich evident sind. Da das Produkt aller Wurzeln von (7) gleich $\pm p^e a_n$ ist, so muß mindestens eine Wurzel mit p einen Faktor gemein haben. γ sei eine solche Wurzel, und $\mathfrak{p}$ ein sowohl in p als in γ enthaltenes Primideal des Körpers $k(\gamma)$; p sei genau durch $\mathfrak{p}^a$, γ genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar. Es wird dann die Zahl $\gamma + a_1$, da a_1 prim zu p ist, gewiß nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, und folglich ist

$$\gamma^{n-1}(\gamma+a_1) \text{ genau durch } \mathfrak{p}^{b(n-1)},$$

$$p^{\left[\frac{(i-1)e}{n-1}\right]+1} a_i \gamma^{n-i} \text{ mindestens durch } \mathfrak{p}^{a\left(\left[\frac{(i-1)e}{n-1}\right]+1\right)+b(n-i)}, \quad (i=2,3,\cdots,n-1)$$

$$p^e a_n \text{ genau durch } \mathfrak{p}^{ae}$$

teilbar. Durch genau dieselben Schlüsse wie in § 2 ergibt sich hieraus, daß $b(n-1)=ae$ ist, und weil e und $n-1$ als relativ prim vorausgesetzt sind, so hat man notwendig $a=r(n-1)$, $b=re$, wo r eine natürliche Zahl ist. Die Primzahl p ist daher durch $\mathfrak{p}^{r(n-1)}$ teilbar, und da der Grad von $k(\gamma)$ wegen Gleichung (7) höchstens n ist, so muß $r(n-1)\leqq n$ sein. Wegen $n>2$ ergibt sich hieraus $r=1$, und somit ist p genau durch $\mathfrak{p}^{n-1}$ teilbar, γ genau durch $\mathfrak{p}^e$.

Enthält nun p noch einen weiteren Primfaktor $\mathfrak{q}$ in $k(\gamma)$, so ist notwendig $p=\mathfrak{p}^{n-1}\mathfrak{q}$, folglich nach Hilfssatz I der Grad von $k(\gamma)$ gleich n und Gleichung (7) irreduzibel. Es werde daher jetzt angenommen, p enthalte keinen von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primfaktor, so daß also $p=\mathfrak{p}^{n-1}$ ist. Nach Hilfssatz II ist dann der Grad von $k(\gamma)$ ein Multiplum von $n-1$, und da er höchstens gleich n sein kann und $n>2$ angenommen ist, so muß er genau gleich $n-1$ sein.

Die Gleichung (7) enthält somit einen irreduzibeln Faktor $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, folglich auch einen linearen Faktor, und sie hat somit eine rationale Wurzel β. β ist notwendig prim zu p, denn sonst könnte man genau wie oben folgern, daß der Grad von $k(\beta)$ entweder n oder $n-1$ ist, also β nicht rational. Da aber nach der Form der Gleichung (7) gewiß $\beta^{n-1}(\beta+a_1)$ durch p teilbar ist, so muß schon $\beta+a_1$ durch p teilbar sein, so daß $\beta=-(a_1+kp)$ wird, wo k eine ganze rationale Zahl bedeutet. Setzt man aber diese Wurzel in Gleichung (7) ein, so erhält man

$$0=kp(a_1+kp)^{n-1}+p^{\left[\frac{e}{n-1}\right]+1}a_2(a_1+kp)^{n-2}-p^{\left[\frac{2e}{n-1}\right]+1}a_3(a_1+kp)^{n-3}+\cdots\pm p^e a_n;$$

folglich muß a_n durch a_1+kp teilbar sein. Es ist also

$$a_n=c(a_1+kp)$$

oder

$$\frac{a_n}{c}\equiv a_1(p).$$

Diese Kongruenz widerspricht aber der Voraussetzung über die Koeffizienten a_1 und a_n; die Annahme $p=\mathfrak{p}^{n-1}$ ist also unstatthaft, und es bleibt nur die Möglichkeit $p=\mathfrak{p}^{n-1}\mathfrak{q}$, womit die Irreduzibilität von (7) nachgewiesen ist.

§ 5.

Aus dem Beweisgang des vorigen Paragraphen erkennt man unmittelbar auch die Richtigkeit des folgenden etwas allgemeineren

Theorem V. *Die algebraische Gleichung*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + p^{\left[\frac{e}{n-1}\right]+1} a_2 x^{n-2} + \cdots + p^{\left[\frac{(n-2)e}{n-1}\right]+1} a_{n-1} x + p^e a_n = 0, \tag{8}$$

wo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *ganze rationale Zahlen bedeuten, deren erste und letzte prim zur Primzahl* p *sind, und wo* e *und* $n-1$ *relativ prim sind, ist entweder irreduzibel, oder sie zerfällt in einen irreduzibeln Faktor* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades und einen linearen Faktor. Die aus dem linearen Faktor entspringende rationale Wurzel ist dabei notwendig* $\equiv -a_1 \left(\bmod p^{\left[\frac{e}{n-1}\right]+1}\right)$ *).

Königsberger hat in der zweiten der genannten Arbeiten die Irreduzibilität der Gleichung

$$x^5 + qa_1x^4 + pqa_2x^3 + p^2q^2a_3x^2 + p^3q^3a_4x + p^3q^3a_5 = 0 \tag{9}$$

nachgewiesen, wo p, q verschiedene Primzahlen sind, a_1 nicht durch p, a_2 nicht durch q, a_5 weder durch p noch durch q teilbar ist.

Dies folgt nun leicht auch aus unserm gegenwärtigen Theorem; denn die Koeffizienten erfüllen die Bedingungen desselben, und für die Irreduzibilität ist daher nur erforderlich nachzuweisen, daß Gleichung (9) keine rationale Wurzel der Form $x = -(qa_1 + kp)$ hat.

Setzt man aber diesen Wert in (9) ein, so ergibt sich nach Division durch p

$$0 = k(qa_1+kp)^4 + qa_2(qa_1+kp)^3 - pq^2a_3(qa_1+kp)^2 + p^2q^3(qa_1+kp) - p^2q^3a_5.$$

Daher muß k durch q teilbar sein; alsdann ist aber das letzte Glied nur durch die dritte, alle andern durch eine höhere Potenz von q teilbar, was nicht möglich ist. Gleichung (9) ist daher irreduzibel.

Theorem VI. *Das Polynom*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_ix^{n-i} + pa_{i+1}x^{n-i-1} + \cdots + pa_n,$$

oder allgemeiner

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_ix^{n-i} + p^{\left[\frac{e}{n-i}\right]+1} a_{i+1}x^{n-i-1} + \cdots + p^{\left[\frac{(n-i-1)e}{n-i}\right]+1} a_{n-1}x + p^e a_n, \tag{10}$$

wo a_i *und* a_n *durch die Primzahl* p *nicht teilbar sind, und wo* e *zu* $n-i$ *relativ prim ist, enthält mindestens* e i n e n *irreduzibeln Faktor, dessen Grad*

---

*) Der angegebene Beweis gilt bloß für $n > 2$, für $n = 2$ ist ohne Schwierigkeit einzusehen, wie sich der Satz modifiziert.

$\geqq n-i$ *ist. Eine in* (10) *eventuell noch enthaltene Wurzel* β, *die diesem Faktor nicht angehört, erfüllt notwendig die Kongruenz*

$$\beta^i + a_1\beta^{i-1} + \cdots + a_i \equiv 0 \ (p),$$

und wenn man von dem bedeutungslosen Fall $i = n-1$ *absieht, dieselbe Kongruenz auch nach dem Modul* $p^{\left[\frac{e}{n-i}\right]+1}$.

Beweis. Da das Produkt aller Wurzeln des Polynoms (10) den Wert $\pm p^e a_n$ hat, so gibt es gewiß eine Wurzel γ, die zu p nicht prim ist. Sei also $\mathfrak{p}$ ein sowohl in p als in γ enthaltenes Primideal des Körpers $k(\gamma)$, und sei p genau durch $\mathfrak{p}^a$, γ genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar. Da nach Voraussetzung a_i und a_n zu p prim, ferner auch e und $n-i$ relative Primzahlen sind, so führt die Wiederholung der früheren Schlüsse dazu, daß $a = r(n-i)$, $b = re$ ist, wo r eine natürliche Zahl bedeutet. Es ist also p genau durch $\mathfrak{p}^{r(n-i)}$ teilbar, und folglich der Grad von $k(\gamma)$ mindestens $n-i$, womit der erste Teil unserer Behauptung bewiesen ist. Des weiteren ist γ genau durch $\mathfrak{p}^{re}$ teilbar, und wenn $\mathfrak{p}$ etwa ein Primideal f^{ten} Grades ist, so ist die Norm von γ durch p^{fre} teilbar. Da aber das Produkt aller Wurzeln von (10) nur durch die e^{te} Potenz von p teilbar ist, so stellt sich $f = 1$, $r = 1$ heraus, so daß p genau durch $\mathfrak{p}^{n-i}$, γ genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar und außerdem $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades ist. Zugleich folgt, daß eine Wurzel β von (10), die nicht demselben irreduzibeln Faktor angehört wie γ, notwendig zu p prim ist. Da aber aus der Form des Polynoms (10) hervorgeht, daß $\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \cdots + a_i\beta^{n-i}$ durch $p^{\left[\frac{e}{n-i}\right]+1}$ teilbar ist, so gilt dasselbe schon von $\beta^i + a_1\beta^{i-1} + \cdots + a_i$ und damit ist auch die zweite Aussage unseres Theorems bewiesen.

Theorem VII. *Wenn die algebraische Gleichung*

$$(11)\quad x^n + a_1 x^{n-1} + p_1^{\left[\frac{e_1}{n-1}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{e_k}{n-1}\right]+1} a_2 x^{n-2} + p_1^{\left[\frac{2e_1}{n-1}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{2e_k}{n-1}\right]+1} a_3 x^{n-1} + \cdots$$
$$+ p_1^{\left[\frac{(n-2)e_1}{n-1}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{(n-2)e_k}{n-1}\right]+1} a_{n-1} x \pm p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} = 0$$

keine der beiden Zahlen ± 1 *als Wurzel hat, so ist sie irreduzibel. Dabei ist* a_1 *prim zu den Primzahlen* $p_1, p_2, \cdots, p_k$, *die Exponenten* $e_1, e_2, \cdots, e_k$ *alle prim zu* $n-1$, *und* $n > 2$ *vorausgesetzt.*

Besonders bemerkenswert ist der Fall, daß alle e_i einander gleich sind.

Zum Beweis bemerke man, daß Gleichung (11) sicher eine Wurzel γ hat, die zu p_1 nicht prim ist, und nach den früheren Erörterungen dieses Paragraphen entspringt hieraus ein Körper $k(\gamma)$ vom n^{ten} oder $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad. Ist $k(\gamma)$ nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so hat Gleichung (11) noch eine rationale Wurzel β. Diese müßte aber notwendig ± 1 sein; denn wäre β

etwa durch p_ϱ teilbar, so könnte man wieder schließen, daß der Körper $k(\beta)$ vom Grad n oder $n-1$ sein muß, während doch β rational ist. Da jedoch Gleichung (11) keine der Zahlen ± 1 als Wurzel haben soll, so ist die Annahme, daß $k(\gamma)$ nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad sei, hinfällig; es ist $k(\gamma)$ vom n^{ten} Grad, und daher die Gleichung irreduzibel, wie behauptet war.

Die Irreduzibilität steht insbesondere dann fest, wenn

$$a_1 \not\equiv \pm 1 \quad \left(p_1^{\left[\frac{e_1}{n-1}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{e_k}{n-1}\right]+1}\right),$$

was man entweder unter Zuziehung des Theorems V erkennt, oder auch direkt, wenn man $x = \pm 1$ in Gleichung (11) einsetzt

§ 6.

Theorem VIII. *Das Polynom*

$$(12)\quad x^n + pa_1x^{n-1} + \cdots + pa_{n-k-1}x^{k+1} + p^2a_{n-k}x^k + \cdots + p^2a_{n-1}x + p^2a_n,$$

wo a_n *prim zur Primzahl* p *und* $n > 2k$ *ist, besitzt keinen rationalen Teiler von geringerem als dem* $(k+1)^{\text{ten}}$ *Grad.* (Netto a. a. O.)*)

Beweis. Eine beliebige Wurzel γ von (12) hat eine durch p teilbare n^{te} Potenz, also kann sie zu p nicht relativ prim sein. Sei daher $\mathfrak{p}$ ein sowohl in p als in γ aufgehendes Primideal des Körpers $k(\gamma)$, und p genau durch $\mathfrak{p}^a$, γ genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar. Ferner mag p^{e_i-1} die höchste in a_i aufgehende Potenz von p bedeuten $(i=1,2,\cdots,n-k-1)$. Dann ist

$$\begin{array}{lll} \gamma^n & \text{genau durch } \mathfrak{p}^{bn}, & \\ pa_i\gamma^{n-i} & \text{genau durch } \mathfrak{p}^{ae_i+b(n-i)}, & (i=1,2,\cdots,n-k-1), \\ p^2a_j\gamma^{n-j} & \text{mindestens durch } \mathfrak{p}^{2a+b(n-j)}, & (j=n-k,\ n-k+1,\cdots,n-1), \\ p^2a_n & \text{genau durch } \mathfrak{p}^{2a} & \end{array}$$

teilbar. Die beiden hier auftretenden kleinsten Exponenten müssen offenbar wieder einander gleich sein; von den $n-k+1$ Zahlen

$$2a,\quad bn,\quad ae_i + b(n-i) \qquad (i=1,2,\cdots,n-k-1)$$

müssen also zwei einander gleich und dabei nicht größer als jede andre sein.

Ist nun $2a = bn$, so folgt $a = \frac{bn}{2} > bk$; ist aber $2a = ae_i + b(n-i)$, so folgt $e_i = 1$, also $a = b(n-i) \geq b(k+1)$; ist ferner $bn = ae_i + b(n-i)$ der kleinste auftretende Exponent, so kann $2a$ nicht kleiner sein, also ist wieder $2a \geq bn$; $a > bk$. Die letzte Möglichkeit, daß

$$ae_i + b(n-i) = ae_h + b(n-h) \quad (i,h = 1,\cdots,n-k-1)$$

*) Über die interessanten weiteren Folgerungen aus diesem Satz vergl. man die Nettosche Arbeit.

der kleinste Exponent ist, liefert endlich $2a \geqq ae_i + b(n-i)$, woraus wieder $a \geqq b(k+1)$ folgt. Man findet daher in jedem Fall $a \geqq k+1$, und da p durch $\mathfrak{p}^a$ teilbar ist, so muß der Grad von $k(\gamma)$ mindestens $k+1$ sein, w. z. b. w.

Die aufgeführten Sätze sind lediglich Beispiele zur Illustration meiner Methode; sie mögen genügen, um die Fruchtbarkeit derselben darzutun, und zu zeigen, wie überraschend einfach die Beweise selbst komplizierter Irreduzibilitätskriterien sich bei ihrer Anwendung gestalten. Indeß wäre es nicht schwer, die Zahl dieser Sätze beliebig zu vermehren; insbesondere lassen sich z. B. alle von Netto a. a. O. bewiesenen Theoreme in derselben Weise neu begründen.

Ich habe mich der Einfachheit halber im vorstehenden ausschließlich auf die Irreduzibilität in bezug auf den natürlichen Rationalitätsbereich beschränkt. Doch will ich hervorheben, daß nach demselben Prinzip mit ebensolcher Leichtigkeit sich ganz analoge Sätze beweisen lassen über die Irreduzibilität in bezug auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich. Der Eisensteinsche Satz lautet dann z. B.:

Die algebraische Gleichung

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0,$$

deren Koeffizienten einem gewissen algebraischen Körper K angehören und sämtlich durch ein bestimmtes Primideal $\mathfrak{p}$ dieses Körpers teilbar sind, und zwar α_n nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$, ist im Bereich K irreduzibel.

Eisenstein selbst hat seinen Satz bereits für den Körper $k(\sqrt{-1})$ bewiesen.

München, den 5. Juli 1904.

Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Von

Georg Hamel in Karlsruhe.

Herr Zermelo hat in diesen Annalen, Bd. 59 (1904) den Satz b wiesen, daß jede Menge, also auch das Kontinuum, einer wohlgeordnete Menge äquivalent ist. Indem ich mich auf diesen Satz stütze, möchte ic hier die folgenden Sätze beweisen:

1) *Es existiert eine Basis aller Zahlen*, d. h. es gibt eine Menge vo Zahlen $a, b, c, \cdots$ derart, daß sich jede Zahl x in einer und auch nu einer Weise in der Form

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots \tag{1}$$

darstellen läßt, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ rational sind, aber in jede einzelnen Falle nur eine endliche Anzahl von ihnen von Null verschieden is

2) *Es existieren unstetige Lösungen der Funktionalgleichung*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

und wir können sie alle angeben.

Diese Funktionalgleichung spielt in der mathematischen Literat eine nicht unbedeutende Rolle. Schon Cauchy hatte erkannt, daß ih *einzige stetige Lösung*

$$f(x) = A\cdot x$$

ist, wo A einen Zahlenfaktor bedeutet. Herr Darboux hat dann die Funktionalgleichung bei seinem Beweise des Fundamentalsatzes der pr jektiven Geometrie*) benutzt, und schon vorher bei seinen Untersuchunge über die Zusammensetzung der Kräfte.**) Hier hängt von der Frage, o eine *unstetige* Lösung der Funktionalgleichung existiert, die Beantwortun

---

*) Darboux: „Sur le théorème fondamental de la géométrie projective Math. Ann. 17 (1880), p. 58.

**) Darboux: „Sur la composition des forces en statique". Bulletin des Scienc Mathématiques, 9 (1875).

der weiteren Frage ab, ob ein Stetigkeitsaxiom zur Begründung der Addition der Vektoren nötig ist, oder nicht.*) Infolge des zweiten Satzes besteht also jetzt der dritte:

3) *Zur Begründung der Addition der Vektoren braucht man das Stetigkeitsaxiom oder einen gleichwertigen Grundsatz.*

Endlich werde ich noch die wohl geringste Forderung an die Funktion $f(x)$ angeben, welche dem Axiom der Stetigkeit gleichkommt.

* * *

Wir denken uns das Kontinuum in einer bestimmten Weise wohlgeordnet, was nach dem Satze des Herrn Zermelo möglich ist. Sei bei dieser Anordnung a die erste Zahl, so nehmen wir a zu der zu bildenden Basis und streichen nun alle Zahlen fort, welche rationale Vielfache von a sind. Der übrige Teil des Kontinuums hat als Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wieder ein erstes Element, sagen wir b; dieses b machen wir zur zweiten Basiszahl und streichen nun alle Zahlen der Form

$$\alpha a + \beta b$$

fort, wo α und $\beta (\neq 0)$ rational sind. Auf diese Weise denken wir uns das Verfahren fortgesetzt.

In Übereinstimmung hiermit können wir jetzt von jeder Zahl x angeben, ob sie zur Basis gehört oder nicht, indem wir folgende *Festsetzung* treffen:

Sei X der zu x in der ursprünglichen Menge gehörende Abschnitt, so läßt sich entweder x durch eine *endliche* Anzahl von Elementen, welche zu X gehören, in der Form (1) darstellen oder nicht. Im letzten Falle gehöre x zur Basis, im ersten nicht.

Nach dieser Festsetzung besteht jedenfalls keine Relation der Form

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ zwischen einer endlichen Anzahl von Basiselementen $a, b, c, \cdots$. Denn wäre dem so, so wäre eines der Elemente $a, b, c, \cdots$, etwa c, das letzte in der ursprünglichen Anordnung; es ließe sich also durch eine endliche Anzahl vorhergehender Elemente in der Form (1) ausdrücken, was der obigen Festsetzung widerspricht.

Daraus aber ergibt sich sofort, daß Zahlen, die sich in der Form (1) darstellen lassen, sich auch nur in einer Weise so darstellen lassen.

---

*) Außer der zuletzt genannten Arbeit siehe noch R. Schimmack: „Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition", Göttinger Nachrichten 1903; G. Hamel: „Über die Zusammensetzung von Vektoren", Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 49 (1903).

Sei nun x kein Basiselement, so läßt es sich stets in die Form (1) bringen, wo die $a, b, c, \cdots$ Basiselemente sind.

Gäbe es nämlich Zahlen, die weder Basiselemente noch in der Form (1) darstellbar wären, so existierte unter diesen, als einer Teilmenge der wohlgeordneten Menge, eine erste, sagen wir x. Nach der obigen Festsetzung läßt sich x durch eine endliche Anzahl von vorhergehenden Elementen in der Form (1) darstellen. Diese vorhergehenden Elemente sind aber entweder Basiselemente, oder sie lassen sich selbst in der Form (1) durch Basiselemente darstellen; und da es sich nur um eine endliche Anzahl handelt, so gilt das gleiche für unser x. Damit ist der Satz in vollem Umfange erwiesen.

* * *

Sei nun $a, b, c, \cdots$ eine Basis aller Zahlen und

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots, \tag{1}$$

so definieren wir $f(x)$ durch

$$f(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c) + \cdots, \tag{2}$$

wobei wir uns die Definition von $f(a), f(b), f(c), \cdots$ noch vorbehalten. Jedenfalls ist nach (2) $f(x)$ eine bestimmte, endliche Größe, solange die $f(a), f(b), f(c), \cdots$ es sind. Denn die Anzahl der Glieder in (2) ist ja endlich.

Sei nun

$$y = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \cdots$$

eine zweite Zahl, durch die Elemente der Basis ausgedrückt, so daß

$$x + y = (\alpha + \alpha') a + (\beta + \beta') b + (\gamma + \gamma') c + \cdots$$

die Darstellung von $x + y$ ist, so folgt aus der Definition (2)

$$f(x+y) = (\alpha + \alpha') f(a) + (\beta + \beta') f(b) + (\gamma + \gamma') f(c) + \cdots = f(x) + f(y),$$

so daß die Cauchy-Darbouxsche Funktionalgleichung durch die Definition (2) *erfüllt ist, wie wir auch die Funktion f für die Basiselemente $a, b, c, \cdots$ wählen mögen.*

Geben wir also $f(a), f(b), f(c), \cdots$ irgend welche bestimmten Werte, unter denen auch 0 und ∞ sein können, so erhalten wir stets eine unstetige Lösung der Funktionalgleichung, wenn nur die Verhältnisse von

$$f(a),\ f(b),\ f(c), \cdots \text{ zu } a, b, c, \cdots$$

nicht alle derselben Zahl A gleich sind.

Der zweite Satz ist damit ebenfalls bewiesen.

Jede dieser unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung ist total unstetig; in jeder beliebigen Nähe eines jeden Punktes der (x, f)-Ebene liegen Punkte der „Kurve" $f = f(x)$*). Denn man kann durch geeignete Wahl der rationalen Zahlen α, β mit den Größen

$$\alpha a + \beta b,$$
$$\alpha f(a) + \beta f(b)$$

je einem beliebig gegebenen Werte beliebig nahe kommen, wenn a, b, $f(a)$, $f(b)$ als endliche, bestimmte Werte gegeben sind, nur so, daß eine Proportion $f(a) : a = f(b) : b$ *nicht* besteht. Und für zwei der Basiszahlen ist das ja bei unseren unstetigen Lösungen sicher der Fall.

Da sich leicht zeigen läßt, daß der Ansatz 2) notwendig ist, und daß daher *unsere Lösungen der Funktionalgleichung auch die einzigen sind,* so gelten die soeben angegebenen Eigenschaften für alle unstetigen Lösungen.

*Weiß man daher, daß in einem ganz beliebigen Bereiche der Variabeln x eine Lösung $f(x)$ der in Rede stehenden Funktionalgleichung irgend einem Werte B nicht beliebig nahe kommt, so darf man schließen, daß $f(x)$ stetig ist und die Form $A \cdot x$ hat.**)

Für $B = \infty$ hat diesen Satz bereits Herr Darboux in der genannten Annalenarbeit ausgesprochen.

Karlsruhe, 30. November 1904.

---

*) Nur in einem Falle gelten diese Behauptungen nicht, wenn nämlich $f(x)$ für einen Teil der Argumentwerte unendlich, für den anderen gleich $A \cdot x$ wird. Dieser Fall aber ist eigentlich trivial; beim Problem der Vektoraddition kann man ihn dadurch ausschließen, daß man als erstes Axiom festsetzt, die Summe zweier endlichen Vektoren sei ein bestimmter, endlicher Vektor.

Berichtigung

zu dem Aufsatze von Julius König auf pag. 177—180 dieses Bandes.

Auf pag. 179 sind Zeile 7 v. u. bis 4 v. u. „Man verallgemeinert · · · des Kontinuums" zu streichen.

Zum Kontinuumproblem.

Von

Felix Bernstein in Halle a./S.

In einem Aufsatz betitelt „Zum Kontinuumproblem“ (Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904, abgedruckt Math. Ann. Bd. 60, Heft 2, p. 177—180) bringt Herr König im Anschluß an seinen Heidelberger Vortrag einen von mir gelegentlich ausgesprochenen Satz in Beziehung zu dem Kontinuumproblem, was mich veranlaßt, an gleicher Stelle meinerseits den Sachverhalt darzulegen. Herr König schreibt:

„Herr Bernstein hat den allgemeinen Satz

$$\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x \cdot 2^{\aleph_0}$$

aufgestellt, aus dem, wenn man voraussetzt, daß das Kontinuum irgend einer wohlgeordneten Menge A_μ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$ äquivalent ist, und $\aleph_x = \aleph_{\mu+\omega}$ gesetzt wird,

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+\omega} \cdot \aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$$

folgen würde. Die Annahme, daß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, wäre also gewiß falsch, wenn der Bernsteinsche Satz allgemein richtig wäre. Leider hat jedoch dessen Beweis eine wesentliche Lücke, da für $\aleph_\omega$ und jede der oben betrachteten singulären wohlgeordneten Mengen die Annahme, daß jede abzählbare Teilmenge in einem Abschnitt der ganzen Menge liegt, nicht mehr statthaft ist.

Ich erwähne dies vor allem, um den Schluß, den ich in meinem Kongreßvortrage unter Annahme der Richtigkeit des Bernsteinschen Satzes aus diesem zog, ausdrücklich zurückzunehmen.

Doch glaube ich, daß die Sache noch außer der historischen Treue ein größeres Interesse bietet . . .“

Hierzu ist folgendes hinzuzufügen:

1. In dem letzten Paragraphen meiner Dissertation, welcher das *Ultrakontinuum* zum Gegenstand hat, habe ich in meiner Hilfsbetrachtung die Gleichung

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\nu}$$

aufgestellt. Ich bemerke dazu ausdrücklich:

„Wir werden hier nur von dem speziellen Falle des Satzes $\aleph_\nu = \aleph_0$, $\aleph_\mu = \aleph_1$ Gebrauch machen.“

Nun gilt der Satz, sowie der von mir gegebene Beweis überdies für alle endlichen μ und ν, so daß die Resultate der Dissertation, welche sich auf diesen Satz stützen, durchaus gültig bleiben.

2. Völlig allgemeingültig ist der erste Teil des Beweises, in dem $\nu \geqq \mu$ vorausgesetzt ist, so daß der Satz besteht:

Es ist

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \quad (\aleph_\nu \geqq \aleph_\mu > 1).$$

Dies hat unabhängig von mir später Herr Ph. Jourdain (On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates, Philos. Mag., Vol. VII, Sixth Ser., p. 61 und 294) wiedergefunden. Er gibt sogar noch eine erweiterte Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichung. — Die Schlußweise, welche ich für den Fall $\mu > \nu$ angewandt habe, versagt aber, wenn die Zahl ν keinen Vorgänger besitzt.*)

3. Um daher das Gesagte, soweit es meine Sache betrifft, zusammenzufassen:

Es ist in einer Hilfsbetrachtung ein an sich richtiger Satz, der richtig bewiesen und richtig angewendet ist, von mir versehentlich in einem zu weiten Umfang ausgesprochen worden, ohne daß irgend eine weitere Anwendung von ihm gemacht worden wäre, oder daß irgend ein weiterer Irrtum daraus entstanden wäre.

4. Herr König hat nun den in Rede stehenden Satz zur Grundlage von weittragenden Schlüssen gemacht, die eine prinzipielle Bedeutung beanspruchen. Darin liegt der wesentliche Unterschied seiner Verwendung des Satzes von der meinen. Es ist übrigens wenig wahrscheinlich, daß das Kontinuumproblem mit den bisher entwickelten Begriffen und Methoden gelöst werden kann.

*) Auf freundliches Anraten des Herausgebers dieser Zeitschrift, Herrn Prof. Hilbert, wollte ich ursprünglich das Versehen nur in dem demnächst in diesen Annalen erscheinenden Wiederabdruck der Dissertation berichtigen. Herrn Königs Publikation aber hat mich veranlaßt, mich ausdrücklich zu der Sache zu erklären.

Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unsers Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können. Gauß.

Vorwort.

Seitdem die Untersuchungen über den Parallelensatz zu der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Lobatschefsky und Johann Bolyai geführt haben, hat sich die Aufmerksamkeit der Geometer immer mehr den Grundlagen der Geometrie zugewandt. Wie beim Parallelensatz wurde nunmehr auch bei andern Grundsätzen die Frage nach ihrer Notwendigkeit oder Entbehrlichkeit, nach ihrer Abhängigkeit oder Unabhängigkeit voneinander aufgeworfen. So ging aus Riemanns Habilitationsschrift „über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", hervor, daß man auf den früher stillschweigend angenommenen Satz von der nicht-endlichen Länge der Geraden verzichten kann, wodurch man zu einer zweiten Nicht-Euklidischen Geometrie geführt wird. Derselben Kategorie von Resultaten ist von Staudts Begründung der projektiven Geometrie zuzurechnen, insofern aus ihr folgt, daß die projektiven Eigenschaften der geometrischen Figuren von Kongruenzsätzen unabhängig sind. In neuerer Zeit sind insbesondere durch die Arbeiten Hilberts viele die Grundlagen betreffende Fragen beantwortet und neue Fragen aufgeworfen worden. Unter anderem ergibt sich aus den Hilbertschen Untersuchungen „Über die Grundlagen der Geometrie", daß zum Beweise des projektiven Fundamentalsatzes nicht die volle Dedekindsche Stetigkeit, sondern nur die in ihr enthaltene Archimedische Meßbarkeit vorausgesetzt zu werden braucht. Daß auch die Annahme der Meßbarkeit noch mehr enthält, als für diesen Zweck notwendig ist, und daher durch einen weniger fordernden Grundsatz ersetzt werden darf, ist ein Hauptresultat des dritten Teiles des vorliegenden Buches.

Dieses Buch beabsichtigt die Geometrie in der Weise aufzubauen, daß bei jedem der nach und nach eingeführten Grundsätze die Unabhängigkeit von den vorhergehenden nachgewiesen wird, und falls zwei gleichberechtigte Annahmen auftreten, beide verfolgt werden. Auf diese Weise ergibt sich von selbst die Gabelung der Geometrie in die Euklidische und Nicht-Euklidische, nachdem zuvor im zweiten und dritten Teile die hiervon unberührte projektive Geometrie begründet ist und die erforderlichen arithmetischen Hilfsmittel im ersten Teile behandelt worden sind. Hier werden die arithmetischen Grundsätze nach und nach eingeführt, in ihrer Abhängigkeit und Unabhängigkeit voneinander untersucht und verschiedene für die Geometrie wichtige Zahlensysteme betrachtet. Diese Zahlensysteme dienen später zur Konstruktion arithmetischer Geometrien, an denen die Unabhängigkeit bestimmter Sätze von andern dargetan wird; eine Methode, die nach dem Vorgange von Peano Hilbert mit großem Erfolge verwendet hat. Besondere Aufmerksamkeit wird ferner den Anordnungssätzen zugewendet, und neben der sonst nur behandelten linearen Anordnung werden auch die entsprechenden Sätze für planare und überplanare Anordnung aufgestellt. Auf Grund der Anordnung werden die Begriffe der Dichte, der Meßbarkeit und der Stetigkeit eingeführt, und zwar einer Stetigkeit, die erst mit der Meßbarkeit zusammen die Dedekindsche Stetigkeit repräsentiert, aber in vielen Fällen diese zu ersetzen geeignet ist.

Der zweite und dritte Teil sind der projektiven Geometrie gewidmet, und zwar der zweite Teil den nur auf das Verbinden und Schneiden bezüglichen sogenannten Schließungssätzen. Es stellt sich heraus, daß diese Sätze nicht aus den Verknüpfungssätzen allein gefolgert werden können, falls man nicht den projektiven Fundamentalsatz oder den Pascalschen Satz als Grundsatz hinzunimmt. Infolgedessen werden im dritten Teile die reinen Anordnungssätze und die Existentialsätze der Anordnung (Sätze der Meßbarkeit, Stetigkeit usw.) eingeführt, worauf sich die vollständige Begründung der projektiven Geometrie auf verschiedenen Wegen als möglich erweist.

Der vierte Teil behandelt die „affine" Geometrie, die sich von der projektiven durch Einführung der „uneigentlichen" Punkte unterscheidet, d. h. der Schnittpunkte je zweier sich nicht im Endlichen schneidenden Geraden einer Ebene. Hier steht neben der Euklidischen Annahme je eines uneigentlichen Punktes auf jeder Geraden als gleichberechtigt diejenige von Bolyai und Lobatschefsky, daß auf jeder Geraden deren mehrere liegen. Demgemäß zerfällt die affine Geometrie in eine Euklidische und eine Nicht-Euklidische. Während nun die Nicht-Euklidische affine Geometrie unter Annahme der Stetigkeit und der Existenz von Affinitäten vollständig, auch in ihrem metrischen Teile begründet werden kann, ist dies für die Euklidische Geometrie nicht der Fall. Es wird daher von neuem, im fünften Teile, an die projektive Geometrie angeknüpft, indem keinerlei Voraussetzungen über uneigentliche Elemente gemacht, dagegen metrische oder Kongruenz-Axiome eingeführt werden. Nunmehr ergibt sich die Dreiteilung der Geometrie in die Euklidische und die beiden Nicht-Euklidischen; und zwar nach dem Verhalten der Winkelsumme im Dreieck zu zwei Rechten oder, was unter Voraussetzung der Meßbarkeit auf das Gleiche hinauskommt, nach der Anzahl der uneigentlichen Punkte auf einer Geraden. Die metrische Geometrie spaltet sich daher in die projektivisch-metrische Geometrie, in welcher uneigentliche Elemente nicht vorhanden sind, und in die beiden affin-metrischen Geometrien.

Das Ziel des Buches: vollständige und widerspruchlose Systeme von Grundsätzen für jede der drei möglichen Geometrien aufzustellen, wird durch den Nachweis erreicht, daß auf Grund der aufgestellten Sätze Koordinaten eingeführt werden können.

Als Anhang wird noch die Theorie der Flächeninhalte von Polygonen und der Rauminhalte von Polyedern ohne Voraussetzung der Stetigkeit oder der Meßbarkeit behandelt.

Greifswald.

Vahlen.

Inhalt.

III. Projektive Geometrie. Zweite Hälfte.

Die Anordnungssätze.

1) Die reinen Anordnungssätze.

2) Die Existentialsätze der Anordnung.

IV. Affine Geometrie.

Seite

Euklidische affine Geometrie.

Nicht-Euklidische affine Geometrie.

V. Metrische Geometrie.

BESPRECHUNGEN.

Selten dürfte man ein Werk in die Hand bekommen, das so wie das vorliegende die schwierigsten Fragen der Philosophie in einer für alle Gebildeten faßlichen Form vorträgt, ohne sie zu verflachen. Es gewährt einen hohen Genuß, diese Vorträge in ihrer fesselnden Form und schönen, durchsichtigen Sprache zu lesen, und nicht leicht wird man das Buch aus der Hand legen ohne den Wunsch, es wieder und wieder zu lesen. So erscheint es nicht nur für seinen eigentlichen Zweck einer Einführung in die Philosophie in hohem Maße geeignet, sondern bietet auch dem, der mit ihr schon auf die eine oder andere Weise fertig geworden, viele reiche Anregung und Förderung.

(Zeitschr. f. lateinlose höhere Schulen. Heft 10. XIV. Jahrg.)

Das hochinteressante und überaus lehrreiche Buch des in wissenschaftlichen Kreisen rühmlichst bekannten Autors des „philosophischen Kritizismus und seine Bedeutung für die positive Wissenschaft" möchten wir den Lesern unserer Wochenschrift zu besonderer Beachtung empfehlen.

(Die Nation. Nr. 40.)

Von den üblichen Einleitungen in die Philosophie unterscheidet sich Riehls Buch nicht bloß durch die Form der freien Rede, sondern auch durch seine ganze methodische Auffassung und Anlage, die wir nur als eine höchst glückliche bezeichnen können. Wir wüßten kaum ein anderes Buch, das so geeignet ist, philosophieren zu lehren.

(Monatschrift für höhere Schulen. III. Jahrg.)

. . . In einer solchen Zeitstimmung ist A. Riehls Einführung in die Philosophie der Gegenwart ein höchst erfreulicher und zuverlässiger Führer, zumal hier ein Gelehrter zu uns spricht, der nicht nur einer der klarsten und selbständigsten Denker unter den deutschen Philosophen der Gegenwart ist, sondern auch über eine gründliche naturwissenschaftliche Bildung verfügt.

(Politisch-anthropologische Revue. III. 3. 1904.)

Das Buch kommt in der Tat einem Bedürfnis der Gegenwart entgegen. Allen suchenden und fragenden Geistern kann dies Buch sehr empfohlen werden; sie werden Befriedigung und Antwort auf manche Frage finden.

(Der Deutsche Schulmann. Nr. 12. 1903.)

Wir müssen es uns versagen, hier das Buch gründlich zu kennzeichnen, und deuten nur an, daß es eine Fülle von außerordentlicher Anregung, Belehrung und Erhebung in sich schließt, sowohl für den modernen als auch den konservativen Leser. Es ist die Arbeit eines abgeklärten weitschauenden Geistes.

(Heimgarten. 1. Heft. XXVIII. Jahrg.)

Einleitung in die Philosophie.

Von Dr. Hans Cornelius.

[XIV u. 357 S.] gr. 8. 1902. geh. ℳ 4.80, geb. ℳ 5.60.

Das Buch will in das Verständnis der philosophischen Probleme einführen und die wichtigsten Versuche, die zu ihrer Lösung unternommen sind, darstellen. Es zeigt den Ursprung der philosophischen Fragestellung überhaupt und untersucht die Bedingungen, von denen die verschiedenen Antworten abhängen. Die naturalistischen Begriffe des vorwissenschaftlichen Denkens, die darauf beruhenden dogmatischen Systeme der metaphysischen Philosophie und die psychologisch begründeten Erklärungen der erkenntnis-theoretischen Philosophie werden als Stufen einer fortschreitenden Entwicklung dargestellt. Die Lösungen, welche diese letztere für die wissenschaftlichen Probleme ermöglicht, werden dabei eingehend besprochen, auf der anderen Seite auch die Grenzen, die sich aus ihr für den Fortschritt der wissenschaftlichen Erkenntnis ergeben, erörtert. Neben den theoretischen Fragen, auf denen in diesem Zusammenhang naturgemäß das Hauptgewicht ruht, sind auch die praktischen Probleme nicht unberücksichtigt geblieben. Im ganzen hofft der Verfasser mit seinem Werke den Weg zu zeigen, auf dem eine widerspruchslose Welt- und Lebensanschauung erreichbar ist.

Einleitung in die Psychologie der Gegenwart.

Von Guido Villa,

Privatdozent der Philosophie an der Universität Rom.

Nach einer Neubearbeitung der ursprünglichen Ausgabe aus dem Italienischen.

Übersetzt von Chr. D. Pflaum.

[XII u. 484 S.] gr. 8. 1902. geb. ℳ 10.—.

Das Buch wird im ganzen seiner Aufgabe, eine historisch-kritische Einleitung in die Psychologie der Gegenwart zu geben, gerecht.

In der Behandlung der Streitfragen versteht es der Verfasser, die verschiedenen Richtungen in sachlicher Beurteilung zu würdigen. In einem Buche, das in die Gegenwart einführt, muß es besonders schwer halten, immer objektiv zu bleiben. Der leidenschaftslose, sachliche Standpunkt, den Villa einnimmt, ist erfreulich. Der Stil und die Übersetzung des Buches sind derart, daß sich das Werk leicht und angenehm liest. (Lit. Zentralblatt. Nr. 17. 53. Jahrg.)

Paul Hensel:

Hauptprobleme der Ethik.

Sieben Vorträge.

[IV u. 106 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 1.60, geb. ℳ 2.20.

Ein ausgezeichnetes Buch, das für das gebildete Haus, für öffentliche Büchereien, wie auch für solche der Oberklassen höherer Lehranstalten nicht warm genug empfohlen werden kann. Die ganze Frage der Ethik ist auf der Grundlage der neuesten Forschung von einem selbst tiefdenkenden Gelehrten erschöpfend und dabei in einer so klaren und verständlichen Sprache behandelt, daß in der Tat jeder Gebildete den Ausführungen folgen kann. (Zeitschr. f. lateinl. höh. Schulen. XV. Jahrg. 2. Heft.)

INHALTSÜBERSICHT.

Schilling, Friedrich, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.60, geb. ℳ 5.—

Schlömilch, Dr. Oskar, und Dr. E. Naetsch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch. Mit 85 Figuren im Text. [VIII u. 372 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 8.—

Schüssler, Dr. Rudolf, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 7.—

Seliwanoff, Demetrius, Priv. Dozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. 3 Bände. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Aufl. besorgt von G. Scheffers. Mit 65 Figuren im Text. [ca. 600 S.] 1905. geh. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.— [Erscheint im Herbst 1905.]

II. Band: Integralrechnung. Zweite, durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 38 Figuren im Text. [XII u. 480 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—

Starke, Dr. H., Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 6.—

Stephan, P., Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 7.—

Stolz, Dr. Otto, und Dr. J. Anton Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 6.—

Vahlen, Karl Theodor, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 12.—

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die Elektrizitätslehre. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 12.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 8.— [Bd. II u. III. Unter d. Presse.]

Webster, Arthur Gordon, A. B. (Harv.) Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, Clark University, Worcester, Mass., the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on Mathematical Physics. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in ähnlicher präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. $1\frac{1}{2}$, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an **Dr. Otto Blumenthal**, Göttingen, Friedländerweg 33.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

60. Band. 4. Heft.

Mit 27 Figuren im Text

Ausgegeben am 7. Juli 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

On a Proof that every Aggregate can be well-ordered.

By

Philip E. B. Jourdain of Broadwindsor, England.

The proof of Zermelo, published in these Annalen*), that every aggregate can be well-ordered leads me to give some account of publications of my own**), which the author does not seem to have seen, and which are occupied with the same subject. It seems to me that the method I have followed, although, in some respects, analogous to that of Zermelo, gives a more complete result.

1.

To the series of well-ordered aggregates belong an ascending series of finite and transfinite ordinal numbers

$$(1) \qquad 1, 2, \cdots, \nu, \cdots, \omega, \omega + 1, \cdots, \gamma, \cdots,$$

and the cardinal numbers of the various well-ordered segments (Abschnitte) of this series (1) (or, of course, of any similar aggregate) are what Cantor has called the 'Alephs'. Since, now, for every Aleph***)

$$\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma,$$

we can prove that the Alephs can be arranged in an unbroken and *ascending* series

$$(2) \qquad \aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_\nu, \cdots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \cdots, \aleph_\gamma, \cdots,$$

which is ordinally similar to the series (1).

*) „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", Math. Ann. Bd. 59 (1904), pp. 514—516 [dated Sept. 24th, 1904].

**) 'On the transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates', Phil. Mag., Jan. 1904, pp. 61—75 [dated Dec. 2nd, 1903]; 'On the Transfinite Cardinal Numbers of Number-Classes in General', ibid., March 1904, pp. 294—303 [dated Dec. 23nd, 1903]; 'On Transfinite Cardinal Numbers of the Exponential Form', ibid., Jan. 1905, pp. 42—56 [dated Sept. 6th, 1904].

***) See Phil. Mag., Jan. 1904, pp. 74—75, and March 1904, pp. 295—300. Cf. the second note on p. 50 of the Phil. Mag. for Jan. 1905.

Now, it can be proved without difficulty that the series (1) and (2) are well-ordered*), and that if they had a type, which must be an ordinal number, β, this is greater than any of the ordinal numbers of (1)**). Since, then, all ordinal numbers are contained in (1), we can conclude that

$$\beta > \beta,$$

a manifest contradiction, or that β is *not* the maximum ordinal number, since the type of the series $(1 \cdots \beta)$ is $\beta + 1$ and

$$\beta + 1 > \beta.\text{***})$$

The number β does not, then, exist in the mathematical sense of the word; and, quite similarly, we may prove that the cardinal number (which would be $\aleph_\beta$) of the series (1) or (2) does not exist.

But†) there remains an important point to consider. Every ordinal number of (1) is, namely, subject to Cantor's 'third principle of generation', while β does not, at first sight, appear to be so subject. If this appearance were well founded, we could no longer assert that (1) contained *all* the ordinal numbers, and the conception of β would be free from contradiction (that is to say, β would exist), for β would then be the first ordinal number which is greater than all the ordinal numbers which are subject to the third principle, that is to say, all ordinal numbers defined or indicated by Cantor.

However, I proved that, if β exists, it is subject to the third principle, owing to the exceptional circumstance that

$$\omega_\beta = \beta,$$

whereas, if γ is any ordinal number less than β,

$$\omega_\gamma > \gamma.\text{††})$$

Consequently, all ordinal numbers and Alephs are Cantor's numbers, and the series (1) (which I call W) and (2) have no type and no cardinal number. It can now be easily proved that every cardinal number which exists (that is to say, is a non-contradictory class, if a number is a class†††))

*) See Phil. Mag., Jan. 1904, pp. 65—66.

**) Ibid., p. 64.

***) The *latter* contradiction is the one given by me (ibid., pp. 64, 66); the *former* was used by Cantor in a letter of Nov. 4th, 1903 (cf. ibid., p. 70, note).

†) The following considerations appeared first in the Phil. Mag. for Jan. 1905 (see pp. 51—53).

††) In this notation, ω_γ is the first ordinal number of the $(\gamma + 1)$th number class (see Phil. Mag., March 1904, p. 295, note).

†††) As is maintained by Russell (see his 'Principles of Mathematics', vol. 1, Cambridge 1903, pp. 111—116, 130—132, 242).

is an Aleph, and consequently*), if $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ be any cardinal numbers $\mathfrak{a}$ be transfinite, and

$$\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a},$$

then

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a},$$

and

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}.$$

The latter equality follows from the theorem

$$\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma.$$

2.

Although we are thus forced to deny the existence of a cardinal number of any aggregate, some part of which is equivalent to an aggregate like W, we cannot, it seems, deny the existence of W itself. For not only is W a perfectly definite series, in the sense that every object of thought either is or is not a member of W, and, in the former case, its position in W is uniquely determined**), but also, if we denied the existence of W, we should logically be forced to deny the existence of, say, the class of all propositions, a conception which is necessary to formal reasoning (to the necessary hypothesis 'p is a proposition', or $p \varepsilon P$, in Peano's symbolic logic.)***).

Also, we may define†) aggregates (W, m_1), where the element m_1 follows all the elements of W, and so on; we must, in fact, say that W is similar to a *segment alone* of a (well-ordered) series $\mathfrak{W}$††) such that every well-ordered series is similar either to it or to a segment of it. The conception of $\mathfrak{W}$ excludes the contradiction that suggests itself if we define an element subsequent to every element of $\mathfrak{W}$, for if we could so act, our $\mathfrak{W}$ could not be the $\mathfrak{W}$ first defined; in words, $\mathfrak{W}$ is an *absolutely* infinite series.†††)

*) See Phil. Mag., Jan. 1904, pp. 72—74, and March 1904, p. 301.

**) Cf. Cantor, Math. Ann. Bd. 20 (1882), p. 115. If the cardinal number of a class u is, as Russell maintains (op. cit., p. 115), the class of all these classes which are equivalent to u, the number in question appears to be well-defined as soon as u is. It seems that aggregates like W *exist as many*, but not *as one* (cf Russell, op. cit., pp. 104—105); so that if, and only if, u is a class as one, the cardinal number of u exists, and the latter class can only be said to exist as many. This view seems to agree with that (held by Cantor) in Phil. Mag., Jan. 1904, p. 67.

***) Cf. Russell, op. cit., p. 105.

†) A contradiction only arises if we assume that such an aggregate has a type (or cardinal number).

††) There are evidently *many* series ordinally similar to $\mathfrak{W}$.

†††) Cf. Phil. Mag., Jan. 1905, p. 54. I also called W absolutely infinite, for reasons which were there given, but emphasized that it cannot be used instead of $\mathfrak{W}$, as I had previously thought (Phil. Mag., Jan. 1904, p. 67).

3.

Now, it is quite evident that the elements of *any* aggregate (M) can be arranged in a series similar to $\mathfrak{W}$ or to a segment of $\mathfrak{W}$. For if we conceive any elements to be removed successively from M, beginning with the series

$$(3) \qquad m_1, m_2, \cdots, m_\nu, \cdots, m_\omega, m_{\omega+1}, \cdots, m_\gamma, \cdots,$$

we ultimately exhaust the given aggregate M; for if we did not so exhaust it, there would be at least one element (m') remaining when we had taken from M an aggregate which when rearranged, was similar to $\mathfrak{W}$; and, accordingly, we could form a well-ordered aggregate of which $\mathfrak{W}$ was a segment.

4.

This last argument, now, seems to me to be the essential part of Zermelo's proof*); for the 'γ-covering' used as a basis for the well-ordering of the elements of M is not necessary, and, I think, obscures the point at issue. A 'γ-covering' is, namely, any covering (Belegung) of those parts of M which have at least one element with the elements of M, such that the correspondent (m') of the part M' is an element of M'. Starting with a γ-covering, we form 'γ-aggregates' such as (3) by stipulating that, if a is any element of this γ-aggregate, which is to be well-ordered, and A is the segment defined by

$$x \prec a,$$

a is to be the correspondent of the part

$$M' = M - A.$$

But, inversely, the series (3) is easily seen to define a γ-covering, provided that the series (3) ultimately exhausts the elements of M, as we have seen that it must do.

It is not, then, necessary to use the artifice of a γ-covering. We can more simply imagine the series (3) built up**) without this, and the essential part of the proof is the same in both cases.

5.

Further, Zermelo only proved that, since every aggregate can be well-ordered, *if* the aggregate has a cardinal number, it is an Aleph.

---

*) Cf. Zermelo, loc. cit., pp. 515—516, paragraph V.

**) Our very limited resources for *actually* building up such series (or the accompanying coverings) are examined in the Phil. Mag. for January 1905, pp. 42, 43 - 46.

I obtained the rather more complete result that, in order that an aggregate should have a cardinal number, it is necessary and sufficient that it should be capable of rearrangement in an aggregate similar to a segment of W, itself similar to a segment of $\mathfrak{W}$; and if it is so capable, the cardinal number is an Aleph.

6.

Neither theorem allows us to assert that the number-continuum has a cardinal number which is not self-contradictory, or, in other words, that

$$2^{\aleph_0}$$

is an Aleph*), or that exponentiation with a transfinite cardinal number is a possible operation; however probable such considerations may make this to be. But, in the greater part of mathematics, we only require statements about *any* term or *every* term of a continuum, but not the collective notion of *all* terms.**) Only in what I have called the „Cardinal Theory of Functions"***) are such notions required, although, even here, the consideration of the inequalities between cardinal numbers of the exponential form may be replaced by a longer consideration of the relations between aggregates (which may be absolutely infinite) of functions.

The Manor House, Broadwindsor, Dorset, England, January 30th, 1905.

Note. — Another attempt to solve the contradiction of p. 466 (Burali-Forti's contradiction) has been published lately by Felix Bernstein†). He maintains that W *has* a type (β), but this type is not the type of a segment of a well-ordered aggregate, while every member of W is the type of a segment. If this were so, β would not be a member of W, and so the contradiction would be avoided. The point of Bernstein's contention is, then, that W is not similar to a segment of any well-ordered aggregate, or, in other words, W is similar to $\mathfrak{W}$.

Bernstein's proof††) that W is not similar to a segment of any well-ordered aggregate simply assumes that W is similar to $\mathfrak{W}$ (this is due

---

*) The apparently opposite statement in the Phil. Mag., Jan. 1904, p. 67, is due to the fact that I there explicitly *assumed* that the continuum is a 'consistent' aggregate.

**) Cf. Russell, op. cit., p. 105.

***) „On the General Theory of Functions", Journ. für Math., Bd. 128 (1905), pp. 169—210 (see esp. p. 171); Phil. Mag., Jan. 1905, pp. 45—46.

†) „Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen", these Annalen Bd. 60 (1905), pp. 187—193.

††) Loc. cit., p. 188.

to the fact that he has no doubt that *every* simply ordered aggregate has a type); but, if W has a type, it is immediately possible to construct an aggregate of which W is a segment. For if the type of W, β, exists, β must be greater than all the members of W (though not, in Bernstein's contention, the *greatest of them*, which would at once give rise to Burali-Forti's contradiction), hence a well-ordered aggregate $(W, \dot{\beta})$, of which W is a segment, has, so to speak, constructed itself. To maintain, as Bernstein does, both that W has a type and that W is not a segment is contradictory.

So I am still compelled to believe that W has no type (or cardinal number), but I also believe that W is similar to a segment (of $\mathfrak{W}$, for example), since I cannot find any contradiction in supposing terms to follow W (which thus differs from $\mathfrak{W}$).

April 20th, 1905.

Zur Theorie des Fermatschen Quotienten

$$\frac{a^{p-1}-1}{p} = q(a).$$

Von

M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Ist p eine ungerade Primzahl, a eine beliebige durch p nicht aufgehende ganze Zahl, so ist der Quotient

$$q(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p} \tag{1}$$

eine ganze Zahl, welche einige verhältnismäßig einfache Kongruenz-Eigenschaften besitzt, die hier entwickelt werden sollen. Die Art der Resultate ist aus den numerierten Formeln (Gleichungen oder Kongruenzen) leicht zu übersehen.

Zunächst setzen wir die Definitionsgleichung (1) in die Gestalt

$$a^{p-1} = 1 + pq(a), \tag{1°}$$

und bilden das Produkt der Resultate, welche den Werten $a = 1, 2, \cdots, p-1$ entsprechen. Wird der Kürze wegen

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) = (p-1)! \tag{2}$$

gesetzt, so entsteht die Gleichung

$$P^{p-1} = \prod_{a=1}^{p-1} (1 + pq(a)),$$

aus welcher sich durch Ausführung der Multiplikation rechterhand die Kongruenz

$$P^{p-1} \equiv 1 + p\sum_{a=1}^{p-1} q(a) \pmod{p^2} \tag{α}$$

erschließen läßt.

Um die linke Seite zu vereinfachen, bemerken wir, daß nach dem Wilsonschen Satze der Quotient

$$(3) \qquad \frac{P+1}{p} = N$$

eine ganze Zahl ist; die Gleichung

$$P = -1 + pN$$

ergibt aber, wenn man auf beiden Seiten auf die $(p-1)^{\text{te}}$ Potenz erhebt, nach dem binomischen Lehrsatz offenbar

$$P^{p-1} \equiv 1 - p(p-1)N \pmod{p^2},$$

oder einfacher,

$$P^{p-1} \equiv 1 + pN \pmod{p^2}.$$

Diese Kongruenz hat mit (α) den gleichen Modul und die gleiche linke Seite; dies liefert unser erstes Resultat

$$(4) \qquad \sum_{a=1}^{p-1} q(a) \equiv N \pmod{p},$$

eine Kongruenz, welche die Summe der Fermatschen mit dem Wilsonschen Quotienten in Verbindung setzt.

Zu weiteren Betrachtungen bedürfen wir der bekannten Sätze

$$(5) \qquad q(ab) \equiv q(a) + q(b) \pmod{p},$$

$$(6) \qquad q(c+pz) \equiv q(c) - \frac{z}{c} \pmod{p},$$

welche man mit betreffenden Literaturangaben in Herrn P. Bachmanns Niederer Zahlentheorie findet.

In der letzten Kongruenz (6) tritt auf der rechten Seite ein Bruch $\frac{z}{c}$ auf, unter dem man in der Regel das Produkt von z mit dem sogenannten socius c^{-1} von c (mod. p) versteht. Ich finde übrigens vorteilhafter, den Kongruenzbegriff auf Brüche auszudehnen und mit letzteren systematisch im Sinne der Kongruenz zu rechnen, was übrigens in der Zahlentheorie längst geschieht.

Ich setze nun in (5) an Stelle von b der Reihe nach die Zahlen $\nu = 1, 2, 3, \cdots, p-1$ und addiere die Ergebnisse. So entsteht zunächst

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} q(\nu a) \equiv (p-1)\, q(a) + \sum_{\nu=1}^{p-1} q(\nu) \pmod{p}$$

oder

$$(\beta) \qquad \sum_{\nu=1}^{p-1} q(\nu a) \equiv -q(a) + \sum_{\nu=1}^{p-1} q(\nu) \pmod{p}.$$

In dieser Kongruenz wollen wir die linke Seite umformen, wodurch sich eine Darstellung von $q(a)$ modulo p ergeben wird.

Jeder Zahl ν der Reihe 1 bis $p-1$ entspricht eine Zahl c derselben Reihe, für welche
$$\nu a \equiv c \pmod{p}$$
oder also
$$\nu a = c + pz, \qquad (0<c<p)$$
wobei unter z eine ganze Zahl verstanden wird. Schreibt man diese Gleichung in der Gestalt
$$\frac{\nu a}{p} = \frac{c}{p} + z,$$
so läßt sich $\frac{c}{p}$ als der kleinste positive Rest und z als das größte Ganze der Größe $\frac{\nu a}{p}$, d. h.
$$z = \left[\frac{\nu a}{p}\right], \qquad c = \nu a - pz,$$
charakterisieren.

Nun wird aber nach (6) für den Modul p
$$q(\nu a) \equiv q(c+pz) \equiv q(c) - \frac{z}{c}$$
oder
$$q(\nu a) \equiv q(c) - \frac{z}{\nu a - pz} \equiv q(c) - \frac{z}{\nu a},$$
d. h. also
$$q(\nu a) \equiv q(c) - \frac{1}{\nu a}\left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod{p}, \tag{7}$$
wenn $0 < c < p$ und
$$\nu a \equiv c \pmod{p}.$$
Wenn bei festem a die Zahl ν die sämtlichen Werte aus der Reihe von 1 bis $p-1$ durchläuft, so nimmt c die gleichen Werte in verschiedener Reihenfolge an, d. h. es ist
$$\sum q(c) = \sum_{1}^{p-1} q(\nu),$$
und wir erhalten demnach aus (7) durch Addition
$$\sum_{\nu=1}^{p-1} q(\nu a) \equiv \sum_{1}^{p-1} q(\nu) - \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu a}\left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod{p}.$$
Wird dies mit (β) verglichen, so fällt in dem Resultat die Summe
$$\sum q(\nu)$$
heraus und *wir erhalten die Kongruenz*
$$q(a) \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu a}\left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod{p}, \tag{8}$$

welche für sämtliche durch p nicht aufgehende ganze Zahlen a besteht. Man kann sie auch so schreiben:

$$(8^*)\qquad \frac{a^p - a}{p} \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod{p}.$$

Bedient man sich der hier beizubehaltenden Bezeichnung

$$\frac{p-1}{2} = m,$$

so werden für $a = 2$ auf der rechten Seite von (8*) erst die Glieder

$$\nu = m+1,\ m+2, \cdots, 2m$$

von Null verschieden sein und zwar ist

$$(9)\qquad \frac{2^p - 2}{p} \equiv \sum_{\nu=m+1}^{2m} \frac{1}{\nu} \equiv - \sum_{1}^{m} \frac{1}{\nu} \pmod{p}.$$

Die zweite Form ist nämlich eine unmittelbare Folge der ersten und des naheliegenden Umstandes, daß

$$\sum_{1}^{2m} \frac{1}{\nu} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Das von Sylvester und Stern auf anderem Wege gewonnene Resultat (9) kann bekanntlich vermöge der Identität

$$\sum_{\nu=1}^{2m} c_\nu - 2\sum_{1}^{m} c_{2\nu} = \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^{\nu-1} c_\nu$$

auf die Gestalt

$$(9')\qquad \frac{2^p - 2}{p} \equiv \sum_{1}^{p-1} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \pmod{p}$$

gebracht werden.

Eine neue Darstellung des in Rede stehenden Restes fließt aus der Annahme $a = 4$; alsdann spalten sich die Indizes ν in drei Sektionen

$$\left(\frac{p}{4} \cdots \frac{p}{2}\right),\ \left(\frac{p}{2} \cdots \frac{3p}{4}\right),\ \left(\frac{3}{4}p \cdots p\right),$$

welchen beziehungsweise die Werte 1, 2, 3 des größten Ganzen $\left[\frac{4\nu}{p}\right]$ entsprechen.

In den Termen der zweiten und dritten Sektion führe ich nun die Substitution $\nu = p - \mu$ aus und beachte, daß alsdann

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{p-\mu} \equiv -\frac{1}{\mu}$$

ist; es kommt

$$4q(4) \equiv \sum_{\frac{1}{4}p<\nu<\frac{1}{2}p} \frac{1}{\nu} \quad - 2 \sum_{\frac{1}{4}p<\mu<\frac{1}{2}p} \frac{1}{\mu} \quad - 3 \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}p\right]} \frac{1}{\varrho};$$

die linke Seite ist

$$8q(2) - 4\,\frac{2^p-2}{p},$$

während sich auf der rechten die zwei ersten Aggregate zusammenziehen, so daß man die Kongruenz erhält:

$$4\,\frac{2^p-2}{p} \equiv -\sum \frac{1}{\mu} - 3 \sum \frac{1}{\varrho} \quad (\mathrm{mod.}\, p)$$
$$\left(\tfrac{1}{4}p<\mu<\tfrac{1}{2}p,\ 0<\varrho<\tfrac{p}{4}\right).$$

Die Zahlen ϱ ergänzen die Zahlengruppe μ zur Gesamtheit der Zahlen ν des Intervalls $\left(0 \cdots \frac{1}{2}p\right)$, und demnach entsteht, wenn man das eine Aggregat

$$\sum \frac{1}{\varrho}$$

mit dem Aggregat

$$\sum \frac{1}{\mu}$$

vereinigt, die Kongruenz

$$4\,\frac{2^p-2}{p} \equiv -\sum_{1}^{m} \frac{1}{\nu} - 2 \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}p\right]} \frac{1}{\varrho};$$

zieht man von hier das Resultat (9) ab, so kommt

$$3\,\frac{2^p-2}{p} \equiv -2 \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}p\right]} \frac{1}{\varrho}$$

oder, unter der Annahme $p > 3$,

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -\frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{4}p\right]} \frac{1}{\nu} \quad (\mathrm{mod.}\, p). \tag{10}$$

Indem wir nochmals auf (9)

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{\nu} \equiv -\frac{2^p-2}{p}$$

zurückgreifen, spalten wir die Zahlen ν in gerade 2μ und ungerade λ, und erhalten

$$\sum_1^m \frac{1}{\nu} - \sum_{\lambda \leq m} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_1^{\left[\frac{p}{4}\right]} \frac{1}{\mu},$$

also mit Rücksicht auf (10)

$$(11) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -2 \sum \frac{1}{\lambda} \quad (\text{mod.}\, p), \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \cdots;\ \lambda \leqq m).$$

Ähnlich findet man

$$(12) \qquad \sum \frac{1}{\lambda'} \equiv \frac{2^{p-1}-1}{p} \quad (\text{mod.}\, p), \qquad (\lambda' = 1, 3, 5, \cdots, p-2).$$

Die Wahl $a = 8$ würde ferner ergeben

$$(13) \qquad 4\,\frac{2^p-2}{p} \equiv -\sum \frac{1}{a} - \sum \frac{1}{b} \quad (\text{mod.}\, p) \qquad \left(0 < a < \frac{p}{8},\ \ 0 < b < \frac{3p}{8}\right).$$

Ich notiere schließlich die ähnlich zu gewinnenden Resultate

$$(14) \qquad \frac{3^p-3}{p} \equiv -2 \sum_1^{\left[\frac{1}{3}p\right]} \frac{1}{\nu} \quad (\text{mod.}\, p),$$

$$(15) \qquad \frac{5^p-5}{p} \equiv -2 \sum \frac{1}{a} - 2 \sum \frac{1}{b} \quad (\text{mod.}\, p) \qquad \left(0 < a < \frac{p}{5},\ \ 0 < b < \frac{2p}{5}\right).$$

Wir kehren nun zu (8) zurück, indem wir nach a von 1 bis $p-1$ summieren; in der so entstandenen Kongruenz

$$\sum_1^{p-1} q(a) \equiv \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\mu\nu} \left[\frac{\mu\nu}{p}\right] \quad (\text{mod.}\, p)$$

drückt sich die linke Seite vermöge (4), durch den Wilsonschen Quotienten N aus, während die rechte Seite, sich leicht in eine einfache Summe verwandelt.

Bedeutet nämlich $\psi(n)$ die Anzahl der Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$\mu\nu = n; \quad (0 < \mu < p,\ 0 < \nu < p),$$

so wird unser Resultat lauten

$$N \equiv \sum_{n=1}^{(p-1)^2} \frac{\psi(n)}{n} \left[\frac{n}{p}\right] \pmod{p}. \tag{16}$$

Die Zahl $\psi(n)$ kann aber einfacher gedeutet werden, wenn man die Bedingungen in die Form

$$n = \mu\nu, \quad 0 < \mu < p, \quad n < p\mu$$

setzt. Denn demnach ist für μ irgend ein Teiler von n zu setzen, der den Ungleichungen

$$\frac{n}{p} < \mu < p$$

genügt, und ν ist als Komplementärteiler unzweideutig bestimmt. Es ist also $\psi(n)$ die Anzahl der Teiler von n, welche innerhalb der Grenzen $\frac{n}{p}$ und p enthalten sind.

Ein viel einfacheres Resultat ergibt sich aus (8), wenn man auf beiden Seiten mit a multipliziert und dann über $a = 1, 2, \cdots, p-1$ summiert; es ergibt sich so

$$\sum_{a=1}^{p-1} a\,q(a) \equiv \frac{1}{2} \pmod{p}. \tag{17}$$

Dabei wird kein anderes neues Hilfsmittel gebraucht als die Gleichung

$$\sum_{a=1}^{p-1} \left[\frac{\nu a}{p}\right] = \sum_{a=1}^{p-1} \frac{a\nu}{p} - \sum_{b=1}^{p-1} \frac{b}{p} = \frac{(\nu-1)(p-1)}{2},$$

die unmittelbar ersichtlich ist.

Die Kongruenz (7) ist übrigens, wie manche andere Sätze, aus dem Spezialsatz

$$q(p-a) \equiv q(a) + \frac{1}{a} \pmod{p}, \tag{6^1}$$

der sich aus (6) vermöge der Identität

$$q(-a) = q(a)$$

ergibt, leicht zu gewinnen.

Wir wollen ferner die Summe

$$S = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu)$$

betrachten, in welcher der Ausdruck

$$\left(\frac{\nu}{p}\right)$$

in üblicher Weise das aus der Theorie der quadratischen Reste bekannte Legendresche Zeichen ist. Wir machen erstens die Annahme, daß die Primzahl p die Form $4x+3$ hat; alsdann gilt

$$\left(\frac{p-\nu}{p}\right) = -\left(\frac{\nu}{p}\right),$$

und daher verwandelt sich S, wenn man darin $\nu = p-\mu$ setzt, in

$$S = -\sum_{\mu=1}^{p-1}\left(\frac{\mu}{p}\right) q(p-\mu),$$

und dies ist nach (6¹)

$$S \equiv -\sum_{\mu=1}^{p-1}\left(\frac{\mu}{p}\right) q(\mu) - \sum_{\mu=1}^{p-1}\left(\frac{\mu}{p}\right)\frac{1}{\mu} \pmod{p},$$

woraus unmittelbar

$$2S \equiv -\sum_{\mu=1}^{p-1}\left(\frac{\mu}{p}\right)\frac{1}{\mu} \pmod{p}$$

folgt. Die Eulersche Kongruenz

$$\left(\frac{\mu}{p}\right) \equiv \mu^m \pmod{p}; \quad m = \frac{p-1}{2},$$

gestattet unsere letzte Kongruenz wie folgt zu schreiben:

$$2S \equiv -\sum_{\mu=1}^{p-1}\mu^{m-1} \pmod{p}.$$

Nun ist nach der bekannten Formel der Differenzenrechnung

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}\Delta^\nu u_0,$$

also für

$$u_\nu = \nu^{m-1}, \quad n = p$$

$$\sum_1^{p-1}\mu^{m-1} = \sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p}{\nu+1}\Delta^\nu 0^{m-1} = \sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p}{\nu+1}\Delta^\nu 0^{m-1},$$

weil die m^{te} und die höheren Differenzen der $(m-1)^{\text{ten}}$ Potenzen natürlicher Zahlen sämtlich verschwinden. Hier ist nun jeder vorkommende Binomialkoeffizient

$$\binom{p}{\nu+1}$$

durch p teilbar, also

$$\sum\mu^{m-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Demnach ist

$$S \equiv 0 \pmod{p},$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{18}$$

falls die Primzahl p die Gestalt $4x+3$ hat.

Für Primzahlen der Gestalt $4x+1$ versagt die obige Betrachtung, und wir müssen uns nach anderen Hilfsmitteln umsehen, um den Rest der Summe S zu ermitteln.

Wegen der Eulerschen Kongruenz

$$\nu^m \equiv \left(\frac{\nu}{p}\right) \pmod{p}$$

ist die durch die Gleichung

$$\nu^m = \left(\frac{\nu}{p}\right) [1 + pq'(\nu)] \tag{19}$$

definierte Zahl $q'(\nu)$ eine ganze Zahl; dieselbe steht mit der Zahl $q(\nu)$ im engen Zusammenhange, und zwar ist, wie sich durch Quadrieren von (19) ergibt

$$1 + 2pq'(\nu) + p^2 q'(\nu)^2 = 1 + pq(\nu),$$

also

$$q(\nu) = 2q'(\nu) + pq'(\nu)^2, \tag{20}$$

woraus

$$q(\nu) \equiv 2q'(\nu) \pmod{p}. \tag{20^0}$$

Ich setze nun für p eine Primzahl $4n+1$, so daß $m = 2n$ gerade ist, und bilde die Summe der Zahlen (19) für $\nu = 1, 2, \cdots, p-1$. Mit Rücksicht auf die Relation

$$\sum_1^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) = 0$$

ergibt sich in der Weise die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \nu^m = p \sum_1^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q'(\nu).$$

Hier läßt sich die linke Seite mit Hilfe der bekannten Formel

$$S_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} x^{2n} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \binom{2n}{2\nu-1} x^{2n-2\nu+1}$$

ausdrücken, und zwar ist

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \nu^m = S_{2n}(p), \quad 2n = m.$$

Wir erhalten daher

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \binom{2n}{2\nu-1} p^{2n-2\nu} + \frac{p^m}{m+1} - \frac{1}{2} p^{m-1} = \sum_{1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q'(\nu).$$

Links enthält keine der auftretenden Bernoullischen Zahlen B_ν den Faktor p im Nenner, und daher läßt sich hieraus die Kongruenz

$$(-1)^{n+1} B_n \equiv \sum_{1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q'(\nu) \pmod{p}$$

erschließen; *dieselbe geht aber nach* (20^0) *über in*

$$(21) \qquad S = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \equiv (-1)^{n-1} 2 B_n \pmod{p},$$

wobei die Primzahl $p = 4n + 1$ *ist.*

Wir wollen ferner die Summe

$$(22) \qquad H = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \nu q(\nu)$$

nach dem Modul p abschätzen.

Ist zunächst p der Gestalt $4x + 1$, so wird

$$\left(\frac{p-a}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right),$$

und wenn wir mit a Zahlen $\leq m$ bezeichnen, so zerfallen die $p - 1$ Zahlen ν in die Zahlen a und $p - a$, so daß

$$H = \sum \left(\frac{a}{p}\right) a q(a) + \sum \left(\frac{p-a}{p}\right) (p-a)\, q(p-a)$$

also

$$H \equiv \sum \left(\frac{a}{p}\right) a\,[q(a) - q(p-a)] \pmod{p}$$

ist. Die Klammer ist aber nach (6^1) der Zahl

$$-\frac{1}{a}$$

kongruent, und *wir erhalten*

$$H \equiv -\sum_{a=1}^{m} \left(\frac{a}{p}\right) = 0,$$

also

(22¹) $$\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{\nu}{p}\right)\nu q(\nu)\equiv 0 \pmod{p},$$

wenn $p = 4x + 1$.

Wenn dagegen $p = 4x + 3$ ist, so ergibt die Spaltung der Zahlen ν in a und $p - a$ zunächst

$$H=\sum\left(\frac{a}{p}\right)aq(a)+\sum\left(\frac{p-a}{p}\right)(p-a)q(p-a)$$

und also

(γ) $$H\equiv 2\sum\left(\frac{a}{p}\right)aq(a)+\sum\left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Ferner lassen sich die Zahlen ν in gerade $2a$ und ungerade $p - 2a$ spalten; die Summe H nimmt dadurch die Gestalt an

$$H=\sum\left(\frac{2a}{p}\right)2aq(2a)+\sum\left(\frac{p-2a}{p}\right)(p-2a)q(p-2a),$$

also

$$H\equiv 4\sum\left(\frac{2a}{p}\right)aq(2a)+\sum\left(\frac{2a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Wegen

$$q(2a)\equiv q(a)+q(2)$$

läßt sich dies schreiben

$$H\equiv 4\left(\frac{2}{p}\right)\sum\left(\frac{a}{p}\right)aq(a)+\left(\frac{2}{p}\right)\sum\left(\frac{a}{p}\right)+4\left(\frac{2}{p}\right)q(2)\sum\left(\frac{a}{p}\right)a.$$

Die Summe

$$\sum\left(\frac{a}{p}\right)a$$

hat eine aus der Theorie der quadratischen Formen bekannte Bedeutung; für uns kommt sie jedoch in Wegfall, weil sie durch p teilbar ist, und wir haben daher

(δ) $$H\equiv 4\left(\frac{2}{p}\right)\sum\left(\frac{a}{p}\right)aq(a)+\left(\frac{2}{p}\right)\sum\left(\frac{a}{p}\right).$$

Multiplizieren wir nun (γ) mit 2, (δ) mit $\left(\frac{2}{p}\right)$ und ziehen ab, so entsteht

$$\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right)H\equiv\sum\left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Nun ist aber nach bekannten Sätzen von Dirichlet

$$\sum_{a=1}^{m}\left(\frac{a}{p}\right)=\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right)Cl(-p),$$

wenn mit $Cl(-\Delta)$ die Anzahl primitiver positiver Klassen quadratischer

Formen $ax^2+bxy+cy^2$ der negativen Diskriminante $b^2-4ac=-\Delta$ bezeichnet wird, und *also lautet unser Resultat*

$$H \equiv Cl(-p) \pmod{p},$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \nu q(\nu) \equiv Cl(-p) \pmod{p}, \tag{22²}$$

wenn die Primzahl p die Form $4x+3$ *hat.*

Wir gehen nun auf die oben betrachtete Summe

$$A = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \tag{23}$$

zurück. Die Kongruenz (7) oder

$$q(\nu b) \equiv q(\varrho) - \frac{1}{\nu b}\left[\frac{\nu b}{p}\right], \tag{7'}$$

wenn $0<\varrho<p$, $\nu b \equiv \varrho \pmod{p}$, verbunden mit dem Umstande, daß

$$\left(\frac{\nu b}{p}\right) = \left(\frac{\varrho}{p}\right),$$

liefert nach dem Satze $q(\nu b) \equiv q(\nu) + q(b)$ offenbar

$$\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) + \left(\frac{b}{p}\right) q(b) \left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv \left(\frac{\varrho}{p}\right) q(\varrho) - \left(\frac{\nu b}{p}\right) \frac{1}{\nu b}\left[\frac{\nu b}{p}\right] \pmod{p}.$$

Summiert man hier über die Werte $\nu = 1, 2, \cdots, p-1$, so nimmt ϱ die gleichen Werte an, und es kommt

$$\left(\frac{b}{p}\right) A \equiv A - \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{b\nu}{p}\right)\left[\frac{b\nu}{p}\right]\frac{1}{b\nu} \pmod{p}$$

oder nach Kürzen durch $\left(\frac{b}{p}\right)$

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right)\left[\frac{b\nu}{p}\right]\frac{1}{\nu} \equiv -\left(1-\left(\frac{b}{p}\right)\right) bA \pmod{p}. \tag{23*}$$

Wenn also b quadratischer Rest von p ist, so ist die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right)\left[\frac{b\nu}{p}\right]\frac{1}{\nu}$$

durch p teilbar; sie ist es auch dann, wenn p die Gestalt $4n+3$ hat; ist dagegen p der Gestalt $4n+1$ und ist b ein Nichtrest von p, so ist unsere Summe nach dem Modul p der Zahl

$$(-1)^n 4 B_n b$$

kongruent, wobei B_n wie oben in (21) die n^{te} Bernoullische Zahl bedeutet.

Die Kongruenz (7′) ergibt, wenn man sie mit

$$b^2\nu^2 \equiv \varrho^2$$

multipliziert, die folgende

$$b^2 q(b)\cdot\nu^2 + b^2\cdot\nu^2 q(\nu) \equiv \varrho^2 q(\varrho) - b\nu\left[\frac{b\nu}{p}\right].$$

Wenn man hier über $\nu = 1, 2, \cdots, p-1$ summiert und beachtet, daß

$$\sum \nu^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

so kommt

$$(\varepsilon)\qquad (b^2-1)\sum_{\nu=1}^{p-1}\nu^2 q(\nu) \equiv -b\sum_{\nu=1}^{p-1}\nu\left[\frac{b\nu}{p}\right] \pmod{p}.$$

Setzt man hier $b = 2$, so entsteht

$$3\sum \nu^2 q(\nu) \equiv -2\sum_{\nu=m+1}^{p-1}\nu = -2\left(\sum_1^{p-1}\nu - \sum_1^{m}\nu\right),$$

also

$$3\sum \nu^2 q(\nu) \equiv m(m+1) = \frac{p^2-1}{4} \equiv -\frac{1}{4};$$

dies gibt einerseits das Resultat

$$(24)\qquad \sum_{\nu=1}^{p-1}\nu^2 q(\nu) \equiv -\frac{1}{12} \pmod{p},$$

andererseits, wenn man dies in (ε) einsetzt, die interessante Kongruenz

$$(25)\qquad \sum_{\nu=1}^{p-1}\nu\left[\frac{b\nu}{p}\right] \equiv \frac{b^2-1}{12b} \pmod{p}.$$

Dieselbe liefert eine Darstellung der Zahl $\frac{1}{a}$ (mod p), in welcher die Zahl a nur „ganzen" Operationen unterworfen wird, nämlich

$$(25^*)\qquad \frac{1}{a} \equiv a - 12\sum_{\nu=1}^{p-1}\nu\left[\frac{a\nu}{p}\right] \pmod{p}.$$

Dadurch wird auch für die unbestimmte Gleichung

$$ax - py = 1$$

eine Lösung

$$x = a - 12\sum_{\nu=1}^{p-1}\nu\left[\frac{a\nu}{p}\right]$$

gefunden, jedoch nur für den Fall, daß p eine Primzahl ist.

Diese Anwendung der Theorie Fermatscher Quotienten macht das Bedürfnis dringend, den Begriff der Zahlen $q(a)$ auf *zusammengesetzte Moduln* zu erweitern. Es sei also m ein ungerader Modul, $\varphi(m)$ die Anzahl der Zahlen, die kleiner als m und ohne gemeinsamen Teiler mit m sind; ist a zu m relativ prim, so besteht die Kongruenz

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (\text{mod. } m)$$

und demnach ist die durch die Gleichung

$$a^{\varphi(m)} = 1 + m q(a) \tag{26}$$

bestimmte Zahl $q(a)$ ganz.

Man findet leicht die Gesetze

$$\begin{cases} q(ab) \equiv q(a) + q(b) \quad (\text{mod. } m), \\ q(c+mz) \equiv q(c) + \frac{\varphi(m) z}{c} \quad (\text{mod. } m); \end{cases} \tag{27}$$

aus der zweiten läßt sich für $ab \equiv c$ (mod. m), und $0 < c < m$ die weitere Kongruenz

$$q(ab) \equiv q(c) + \frac{\varphi(m)}{ab}\left[\frac{ab}{m}\right] \quad (\text{mod. } m) \tag{28}$$

ableiten. Multiplizieren wir beiderseits mit $a^2b^2 \equiv c^2$, und schreiben $q(a) + q(b)$ an Stelle von $q(ab)$, so kommt

$$a^2q(a) \cdot b^2 + a^2b^2q(b) \equiv c^2q(c) + \varphi(m)\, ab\left[\frac{ab}{m}\right].$$

Hier lassen wir b die sämtlichen $\varphi(m)$ zum Modul relativ primen Zahlen durchlaufen und addieren die Resultate; da alsdann c dieselben Zahlen wie b durchläuft, so entsteht

$$a^2q(a)s_2 + (a^2-1)\sum_b b^2q(b) \equiv \varphi(m)\, a \sum_b b\left[\frac{ab}{m}\right] \quad (\text{mod. } m), \tag{η}$$

wobei s_2 die Summe der Quadrate der zum Modul relativ primen Zahlen bedeutet.

Setzt man hier zunächst $a = 2$, so kommt

$$4q(2)s_2 + 3\sum b^2q(b) \equiv 2\varphi(m)\sum b' \quad (\text{mod. } m), \tag{ζ}$$

wobei in der letzten Summation die Bedingung

$$b' > \frac{m}{2}$$

zu erfüllen ist.

Nun ist aber

$$\sum b' \equiv -\sum \beta \quad (\text{mod. } m),$$

wenn β die relativen Primzahlen von m, welche zwischen 0 und $\frac{m}{2}$ liegen durchläuft.

Bedeutet

$$f(n) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \nu,$$

so ist

$$\sum \beta = \sum \mu(d)\, d f\left(\frac{m}{d}\right),$$

wobei d die sämtlichen Teiler von m durchläuft und $\mu(d)$ die übliche Bezeichnung für die Moebiusschen Zahlen ist. Da m, also auch $\frac{m}{d} = d'$, ungerade ist, so hat man

$$f(d') = \sum_{1}^{\frac{d'-1}{2}} \nu = \frac{d'^2-1}{8},$$

also

(29) $$\sum \beta = \frac{1}{8} \sum \mu(d)(md'-d).$$

Hieraus folgt

$$\sum \beta \equiv -\frac{1}{8} \sum d\mu(d),$$

also, wenn die Bezeichnung eingeführt wird

(30) $$P(m) = (1-p)(1-p')(1-p'')\cdots,$$

wobei $p, p', p'', \cdots$ die verschiedenen Primfaktoren des Moduls m bedeuten,

(31) $$\sum \beta \equiv -\frac{1}{8} P(m) \pmod{m}.$$

Ferner ist die Zahl s_2 zu ermitteln. Setzt man der Kürze wegen

$$F(n) = \sum_{1}^{n-1} \nu^2,$$

so wird

$$s_2 = \sum_{d} \mu(d)\, d^2 F\left(\frac{m}{d}\right),$$

wobei wieder d die sämtlichen Teiler von m anzunehmen hat.

Nun ist bekanntlich

$$F(n) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

und daher

$$s_2 = \frac{m^2}{3} \sum \mu(d)\, d' - \frac{m^2}{2} \sum \mu(d) + \frac{m}{6} \sum d\mu(d),$$

oder da $\sum \mu(d) = 0$,

(32) $$s_2 = \frac{m^2}{3}\varphi(m) + \frac{m}{6} P(m).$$

Ist nun m durch 3 nicht teilbar, so folgt aus (32)

$$s_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

und das Resultat (ζ) lautet

$$\sum b^2 q(b) \equiv \frac{1}{12}\,\varphi(m)\,P(m) \pmod{m}, \tag{33}$$

wobei links die Summation sich über alle die $\varphi(m)$ zu m teilerfremden Zahlen b zwischen Null und m erstreckt.

Setzt man dies in (η) ein, so kommt zunächst

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\frac{\varphi(m)\,P(m)}{12} \equiv \varphi(m)\sum_b b\left[\frac{ab}{m}\right].$$

Diese Kongruenz führt zu einem einfachen Resultate, wenn die Zahl $\varphi(m)$ zu m prim ist; dies findet statt, wenn m das Produkt von lauter verschiedenen Primzahlen ist, falls überdies das Produkt $P(m)$ durch keine derselben aufgeht. Alsdann wird man durch $\varphi(m)\ P(m)$ dividieren dürfen, und *es kommt*

$$\frac{1}{a} \equiv a - \frac{12}{P(m)}\sum_b b\left[\frac{ab}{m}\right] \pmod{m}, \tag{34}$$

wobei sich die Bedingung am bequemsten durch

$$(m,\ \varphi(m)) \sim 1 \tag{35}$$

ausdrückt, und die Summation sich über die $\varphi(m)$ relativen Primzahlen b von m des Intervalls $(0 \cdots m)$ erstreckt.

Ist dagegen m durch 3 teilbar, und sollen die Zahlen m und $\varphi(m)$ relativ prim sein, so wird keine der Differenzen $p-1$ durch 3 aufgehen, also werden die sämtlichen Primfaktoren von m außer 3 die Form $3x+2$ haben. Alsdann ist

$$s_2 \equiv \frac{m}{6}\,P(m),$$

und es folgt aus (ζ)

$$3\sum b^2 q(b) \equiv P(m)\left[\frac{1}{4}\,\varphi(m) - \frac{2}{3}\,mq(2)\right] \pmod{m}.$$

Die Kongruenz (η) kann alsdann unter die Form gebracht werden

$$\frac{a^2-1}{3}\,P(m)\left[\frac{1}{4}\,\varphi(m) - \frac{2}{3}\,mq(2)\right] + a^2 q(a)\cdot\frac{m}{6}\,P(m) \equiv \varphi(m)a\sum b\left[\frac{ab}{m}\right]$$
$$\pmod{m}.$$

Multipliziert man mit 3, so fällt das zweite Glied links heraus, und das Glied

$$(a^2-1)\ P(m)\,\frac{2}{3}\,mq(2)$$

wird durch m teilbar sein, da $a^2 - 1$ durch 3 aufgeht. Demnach entsteht

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) \frac{P(m)\,\varphi(m)}{4} \equiv \varphi(m) \cdot 3 \sum b \left[\frac{ab}{m}\right],$$

und hieraus wieder die Kongruenz (34).

Dieselbe ist daher bloß an die Bedingung

$$(m, \varphi(m)) \sim 1$$

gebunden.

Die Moduln m, welche die Bedingung (35) erfüllen, haben überhaupt die Eigenschaft, daß man auf sie die Theorie der Quotienten $q(a)$ ausdehnen kann. Namentlich erhält man analog wie im Falle des Primzahlmoduls

$$(36) \qquad q(a) \equiv \sum_{\nu} \frac{1}{a\nu} \left[\frac{a\nu}{m}\right] \quad (\text{mod. } m),$$

wobei ν die zu m relativen Primzahlen des Intervalls $(0 \cdots m)$ durchläuft. Speziell folgt hieraus eine Verallgemeinerung der Sylvesterschen Kongruenz (9)

$$2\,\frac{2^{\varphi(m)} - 1}{m} \equiv \sum{}^{*} \frac{1}{\nu} \equiv - \sum{}^{*} \frac{1}{\mu} \quad (\text{mod. } m)$$

$$\left(\frac{m}{2} < \nu < m;\quad 0 < \mu < \frac{m}{2}\right),$$

wobei selbstverständlich ν und μ relativ prim zum Modul sein müssen.

Wir kehren zum einfacheren Falle des Primzahlmoduls p wieder zurück und betrachten die quadratischen Reste r des Moduls p. Werden dieselben in den Grenzen $0 \cdots p$ angenommen, so sind sie durch die Kongruenzen

$$\nu^2 \equiv r \quad (\text{mod. } p)$$

vollständig charakterisiert, und zwar wird jede der $\frac{p-1}{2}$ Zahlen r zweimal erzeugt, wenn ν die sämtlichen Werte 1 bis $p - 1$ annimmt. Die Kongruenz (7) ergibt

$$q(\nu^2) \equiv q(r) - \left[\frac{\nu^2}{p}\right] \frac{1}{\nu^2};$$

summiert man über die sämtlichen ν von 1 bis $p - 1$, und beachtet, daß

$$q(\nu^2) \equiv 2q(\nu),$$

so entsteht

$$2 \sum_{\nu=1}^{p-1} q(\nu) \equiv 2 \sum_{r} q(r) - \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^2} \left[\frac{\nu^2}{p}\right] \quad (\text{mod. } p).$$

Nun ist

$$\sum q(\nu) \equiv N,$$

ferner identisch

$$2\sum_r q(r) = \sum\left(1+\left(\frac{\nu}{p}\right)\right) q(\nu),$$

also mit Benützung der Notation (23)

$$2\sum_r q(r) \equiv N + A,$$

und unser Resultat läßt sich schreiben

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\nu^2}{p}\right] \equiv A - N \pmod{p}. \tag{37}$$

Ist speziell $p = 4n+3$, so ist nach (18)

$$A \equiv 0$$

und die Kongruenz gibt eine *bemerkenswerte Darstellung des Restes des Wilsonschen Quotienten N.*

Ich werde bei einer anderen Gelegenheit zeigen, daß sich für jede ungerade Primzahl p der Wilsonsche Quotient N nach dem Modul p durch eine Bernoullische Zahl ausdrücken läßt, nämlich bei der früheren Bezeichnung $p = 2m+1$

$$N \equiv -1 + \frac{1}{p} - (-1)^m B_m \pmod{p}.$$

Im Falle $p = 4n+1$ haben wir oben (21) gefunden, daß

$$A \equiv (-1)^{n-1} 2 B_n \pmod{p},$$

und da hier

$$N \equiv -1 + \frac{1}{p} - B_{2n},$$

so lautet (37) für $p = 4n+1$ wie folgt:

$$\sum_1^{p-1} \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\nu^2}{p}\right] \equiv 1 - (-1)^n 2 B_n + B_{2n} - \frac{1}{p} \pmod{p}. \tag{37^1}$$

Die bisher angewandte Schlußweise ließe noch weitere Anwendungen zu; wir wollen jedoch den Gegenstand verlassen, und schließen mit einigen ähnlichen Formeln, in welchen sich nun die Summationen entweder über die quadratischen Reste oder über die Nichtreste des Moduls erstrecken.

Wir bezeichnen mit a oder $a', a'', \cdots$ quadratische Reste, mit b, resp. $b', b'', \cdots$ Nichtreste von p und setzen

$$\sum_a q(a) = A, \quad \sum_b q(b) = B.$$

Nach (7) ist

$$aa' = a' + pz, \quad z = \left[\frac{aa'}{p}\right],$$

$$q(aa') \equiv q(a'') - \frac{1}{aa'}\left[\frac{aa'}{p}\right] \equiv q(a) + q(a').$$

Summiert man über die a', so durchläuft a'' die gleichen Werte und es kommt

$$mq(a) \equiv -\sum_{a'} \frac{1}{aa'}\left[\frac{aa'}{p}\right]$$

oder

(38)
$$q(a) \equiv 2\sum_{a'} \frac{1}{aa'}\left[\frac{aa'}{p}\right],$$

wobei die Summation sich über die sämtlichen quadratischen Reste a' des Moduls p erstreckt, letztere natürlich in den Grenzen 0 und p vorausgesetzt.

Ferner ist bei der angenommenen Bezeichnung

$$ab \equiv b' \pmod{p},$$

also

$$ab = b' + pz$$

und

(a)
$$q(ab) \equiv q(b') - \frac{1}{ab}\left[\frac{ab}{p}\right] \equiv q(a) + q(b).$$

Wird hier über die sämtlichen m Werte b summiert, so entsteht

$$mq(a) \equiv -\sum_{b} \frac{1}{ab}\left[\frac{ab}{p}\right],$$

oder

(38¹)
$$q(a) \equiv 2\sum_{b} \frac{1}{ab}\left[\frac{ab}{p}\right] \pmod{p}.$$

Diese beiden Sätze (38) und (38¹) sind übrigens eine direkte Folge der Sätze (8) und (23*).

Wird dagegen in (a) über die m Werte a summiert, so entsteht

$$mq(b) + A \equiv B - \sum_{a} \frac{1}{ab}\left[\frac{ab}{p}\right]$$

oder

(39)
$$q(b) \equiv 2A - 2B + 2\sum_{a} \frac{1}{ab}\left[\frac{ab}{p}\right] \pmod{p}.$$

Ferner ist

$$bb' = a + pz$$

und demnach

$$q(b) + q(b') \equiv q(a) - \frac{1}{bb'}\left[\frac{bb'}{p}\right];$$

wird hier über die b' summiert, so entsteht

$$mq(b) + B \equiv A - \sum_{b'} \frac{1}{bb'} \left[\frac{bb'}{p}\right]$$

oder

$$q(b) \equiv -2A + 2B + 2\sum_{b'} \frac{1}{bb'} \left[\frac{bb'}{p}\right] \pmod{p}. \tag{39'}$$

Vergleicht man dies mit (39), so entsteht

$$\sum_{a} \frac{1}{ab} \left[\frac{ab}{p}\right] - \sum_{b'} \frac{1}{bb'} \left[\frac{bb'}{p}\right] \equiv 2(A-B) \pmod{p},$$

ein Resultat, das in (23*) enthalten ist; denn hier bedeutet b einen Nichtrest, also

$$\left(\frac{b}{p}\right) = -1,$$

und der Buchstabe A in (23*) ist

$$\sum_{1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu),$$

fällt also mit unserem jetzigen $A - B$ zusammen.

Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen.

Von

G. Scheffers in Darmstadt.

In zwei früheren Arbeiten*) habe ich mich mit den *isogonalen Trajektorien* einer einfach unendlichen Kurvenschar in der Ebene beschäftigt, also mit Kurven, die schon häufig der Gegenstand von Untersuchungen verschiedener Autoren gewesen sind. Dabei stieß ich auf einen merkwürdigen Satz, der zeigte, daß jeder Schar von ∞^2 isogonalen Trajektorien in ganz bestimmter Weise eine zweite solche Schar zugeordnet ist, woraus viele bemerkenswerte Konstruktionen für die Krümmungskreise besonderer Kurven folgten. Kürzlich nun bemerkte ich, daß sich eine ganze Reihe von anderen Betrachtungen anstellen lassen, die in gewisser Weise den früheren dualistisch gegenüberstehen. Sie führten mich zu analogen Sätzen über Kurven, die ich *Äquitangentialkurven* nenne, obwohl diese Bezeichnung sonst in der Literatur in anderer, einfacherer Bedeutung vorkommt. Unter einer Äquitangentialkurve einer gegebenen einfach unendlichen Kurvenschar in der Ebene soll eine Kurve verstanden werden, bei der die unendlich vielen Tangenten, die sie mit den gegebenen Kurven gemein hat, sämtlich dieselbe Länge — gemessen zwischen den beiden Berührungspunkten — haben. Meines Wissens hat man solche Kurven bisher nicht untersucht. In überraschender Weise ergaben sich mehrere schöne Sätze über solche Kurven. Die gemeinsame Quelle dieser Sätze und der analogen Sätze über isogonale Trajektorien ist die *Anwendung von gewissen geometrisch einfach definierbaren Berührungstransformationen in der Ebene.***)

*) „Über gewisse zweifach unendliche Kurvenscharen in der Ebene", Leipziger Berichte 1898, S. 261—294, „Ein Beitrag zur Geometrie der Berührungstransformationen in der Ebene", ebenda 1904, S. 105—116. Über die Hauptergebnisse der gegenwärtigen Arbeit habe ich auf dem dritten Internationalen Mathematiker-Kongreß einen kurzen Bericht erstattet.

**) Dabei wird nur der Begriff einer Berührungstransformation in der Ebene benutzt, also nur das, was man in dem Werke von Lie, „Geometrie der Berührungstransformationen, 1. Band", Leipzig 1896, Kap. 1 und 2, nachlesen mag.

Bei der weiteren Verfolgung der hervortretenden Analogien gelangte ich zu einer beachtenswerten unendlichen Gruppe von Berührungstransformationen, die *ein Seitenstück zur unendlichen Gruppe der konformen Transformationen in der Ebene* ist. Während man nämlich diese Gruppe als den Inbegriff aller derjenigen Berührungstransformationen definieren kann, die jeden Punkt in einen Punkt verwandeln und dabei die Winkel invariant lassen, ist die neue Gruppe, die ich die *äquilonge Gruppe* nenne, der Inbegriff aller derjenigen Berührungstransformationen, die jede Gerade in eine Gerade verwandeln und dabei die Strecken invariant lassen. Sie enthält — wie die konforme Gruppe — im besonderen alle Bewegungen der Ebene.

Die am meisten überraschende Analogie aber ergab sich aus der Überlegung, daß die konforme Gruppe in bekannter Weise aufs engste mit den *gewöhnlichen komplexen Zahlen* $x + iy$ zusammenhängt, wenn man die Punkte (x, y) der Ebene als Träger der komplexen Zahlen auffaßt. Es gibt ja bekanntlich außer dem System der gewöhnlichen komplexen Zahlen nur noch *einen* Typus von Zahlensystemen in zwei Einheiten, bei dem die gewöhnlichen Gesetze der Multiplikation erfüllt sind. Dies System ist aus den Einheiten 1 und j gebildet, wo $j^2 = 0$ ist. Nun ergab sich, *daß die äquilonge Gruppe aufs engste mit diesem zweiten Zahlensystem zusammenhängt.* Nur sind hier nicht die Punkte, sondern die Geraden der Ebene die Träger der komplexen Zahlen $u + jv$. Dabei sind u, v besondere Linienkoordinaten in der Ebene, nämlich diejenigen Bestimmungsstücke der Geraden, die in ihrer Hesseschen Normalform auftreten. Das Endergebnis der Untersuchungen war also eine Deutung des zweiten Zahlensystems in zwei Einheiten, die ungezwungen aus einer Analogie mit den gewöhnlich komplexen Zahlen folgte und die eine schöne *Darstellung der äquilongen Gruppe durch die analytischen Funktionen dieses zweiten Zahlensystems* lieferte.

Die ausführliche Ableitung dieser Ergebnisse ist der Zweck des folgenden Aufsatzes.

Während ich zu den Sätzen über isogonale Trajektorien zuerst auf rein analytischem Wege gelangt war, wobei der innere Grund für das Bestehen der Sätze verhüllt war, ging ich später von synthetischen Überlegungen aus, die volle Klarheit in den Zusammenhang brachten. Ich habe sie auch im folgenden synthetisch wiedergegeben; alsdann habe ich ihren analytischen Nachweis nachgeholt und in der Folge analytisch weiter operiert. Natürlich lassen sich auch die synthetischen Betrachtungen leicht analytisch wiedergeben; es schien mir jedoch angebracht, den Weg, auf dem ich zu jenen Analogien geführt wurde, durch keinerlei analytische Einkleidung undeutlich zu machen. Auch habe ich mich auf nur wenige

Beispiele beschränkt. Zahlreiche Beispiele zu den Sätzen über die isogonalen Trajektorien findet man in meiner ersten Arbeit hierüber. Weitere Beispiele zu den interessanten Äquitangentialkurven hoffe ich später geben zu können.

§ 1.

Isogonalkurven und Äquitangentialkurven.

Wird die Ebene Punkt für Punkt auf sich selbst abgebildet und sind die Funktionen, die diese Abbildung vermitteln, stetig und differenzierbar, so gilt bekanntlich der Satz, daß die Beziehung zwischen jedem unendlich kleinen Bereiche von allgemeiner Lage und dem Bildbereiche projektiv ist. Wir wollen dies so ausdrücken:

Jede Punkttransformation der Ebene kann als eine Berührungstransformation aufgefaßt werden, und als solche führt sie die Linienelemente eines Punktes von allgemeiner Lage in die Linienelemente des Bildpunktes derart über, daß das Strahlenbüschel der ersteren zu dem der letzteren projektiv ist.

Liegt nun eine *Berührungstransformation* vor, *die jeden Punkt in eine Gerade überführt*, wie es z. B. die Transformationen durch reziproke Polaren tun, so läßt sich leicht ein entsprechender Satz aufstellen. Denn wenn man nach einer derartigen Berührungstransformation insbesondere eine Transformation durch reziproke Polaren ausübt, so ist die Aufeinanderfolge beider augenscheinlich eine Punkttransformation. Da nun die Transformation durch reziproke Polaren zu sich selbst invers (involutorisch) ist, so ist mithin jede Berührungstransformation, die alle Punkte in Geraden verwandelt, ersetzbar durch die Aufeinanderfolge einer Punkttransformation und einer Transformation durch reziproke Polaren. Bei jener Punkttransformation gilt der oben erwähnte Satz. Die Transformation durch reziproke Polaren ferner verwandelt die Linienelemente eines Punktes derart in die einer Geraden, daß das Strahlenbüschel der ersteren Elemente zur Punktreihe der letzteren Elemente projektiv ist. Demnach folgt:

Satz 1. *Bei einer solchen Berührungstransformation der Ebene, die jeden Punkt in eine Gerade verwandelt, gehen die Linienelemente eines Punktes von allgemeiner Lage in die Elemente der diesem Punkte zugeordneten Geraden in der Weise über, daß das Strahlenbüschel der ersteren Elemente zur Punktreihe der letzteren Elemente projektiv ist.*

Stillschweigend ist hierbei wie in allem folgenden vorauszusetzen, daß die Berührungstransformation analytisch durch solche Funktionen darstellbar sei, die stetig und differenzierbar sind.

Insbesondere beschränken wir uns von jetzt an auf *solche Berührungs-*

transformationen der Ebene, bei denen jeder Punkt in eine Gerade übergeht, die den betreffenden Punkt enthält.

Eine solche Berührungstransformation wird dadurch definiert, daß man eine stetige Schar von ∞^2 Linienelementen auswählt, jedoch so, daß zu jedem Punkte der Ebene und ebenso zu jeder Geraden der Ebene eines dieser Elemente gehört. Alsdann nämlich ordnen wir jedem Punkte der Ebene die Gerade desjenigen jener ∞^2 Elemente zu, das diesem Punkte angehört. Jene Schar von ∞^2 Elementen besteht aus allen Linienelementen einer stetigen Schar von ∞^1 Kurven Γ_0. Wir wählen also irgendwie eine stetige Schar von solchen ∞^1 Kurven Γ_0 aus, die die ganze Ebene erfüllen (siehe Fig. 1), und betrachten alsdann diejenige Berührungstransformation, die jeden Punkt P_0 von allgemeiner Lage in diejenige Gerade p_0 verwandelt, die in P_0 Tangente der durch P_0 gehenden Kurve Γ_0 ist. Sind $P_0, Q_0, \cdots$ eine Reihe von Punkten der Ebene, so sollen die Geraden, in die sie bei der betrachteten Berührungstransformation übergehen, mit $p_0, q_0, \cdots$ bezeichnet werden. Die Berührungstransformation führt alle Punkte einer Kurve Γ_0 in die Tangenten derselben Kurve über; jede der ∞^1 Kurven Γ_0 bleibt also für sich invariant, ja noch mehr: jedes Linienelement jeder dieser Kurven bleibt für sich in Ruhe.

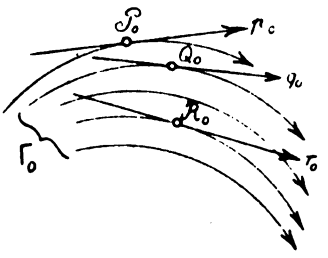


Fig. 1.

Satz 2. *Führt eine Berührungstransformation der Ebene jeden Punkt in eine durch ihn gehende Gerade über, so läßt sie jedes derjenigen ∞^2 Linienelemente, die durch diese ∞^2 Paare von Punkten und Geraden bestimmt werden, in Ruhe.*

Mit Rücksicht auf Satz 1 folgt weiter:

Satz 3. *Bei einer solchen Berührungstransformation der Ebene, die jeden Punkt P_0 in eine durch ihn gehende Gerade p_0 verwandelt, werden die Linienelemente eines jeden Punktes P_0 derart in die Linienelemente der durch ihn gehenden Geraden p_0 übergeführt, daß das Strahlenbüschel der ersteren Elemente zur Punktreihe der letzteren projektiv ist, wobei insbesondere die Gerade p_0 — als Strahl des Büschels — dem betrachteten Punkte P_0 — als Punkt der Punktreihe — entspricht.*

Unsere Berührungstransformation ist, wie wir sahen, durch Angabe einer Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 völlig definiert. Geben wir einer dieser Kurven Γ_0 einen bestimmten Fortschreitungssinn, so haben alle Kurven Γ_0 einen bestimmten Fortschreitungssinn, wenn sie eine stetige Schar bilden. Damit ist alsdann auch auf jeder Tangente p_0 ein positiver Sinn festgelegt. Außerdem setzen wir für alle Punkte P_0 einen bestimmten positiven Sinn der Drehung um diese Punkte fest. Alsdann ist jedes der ∞^2 Linienelemente, die den ∞^1 Kurven Γ_0 angehören, sowohl mit einem positiven Sinne der Drehung um seinen Punkt als auch mit einem positiven Sinn des Fortschreitens längs seiner Geraden behaftet.

Die Berührungstransformation, die jeden Punkt P_0 in die durch ihn gehende zugeordnete Gerade p_0 überführt, wollen wir mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnen. Die zu ihr inverse Berührungstransformation, bei der also jede Gerade p_0 in den auf ihr liegenden zugeordneten Punkt P_0 übergeht, wollen wir statt mit $\mathfrak{A}_0^{-1}$ mit $\mathfrak{B}_0$ bezeichnen, weil wir an $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ zwei getrennte, aber parallel laufende Reihen von Betrachtungen anknüpfen.

Jede Gerade p_0 der Ebene drehen wir in dem festgesetzten Sinne um ihren Punkt P_0 um ein und denselben Winkel α, so daß sie in eine

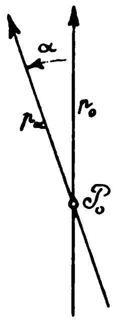


Fig. 2a.

neue Gerade p_α durch P_0 übergeht. (Siehe Fig. 2a.)

Jeden Punkt P_0 der Ebene verschieben wir in dem festgesetzten Sinne auf seiner Geraden p_0 um ein und dieselbe Strecke a, so daß er in

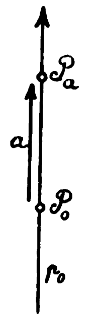


Fig. 2b.

einen neuen Punkt P_a auf p_0 übergeht. (Siehe Fig. 2b.)

Alsdann betrachten wir diejenige Berührungstransformation, die

jeden Punkt P_0 in die zugeordnete Gerade p_α verwandelt. Sie sei mit $\mathfrak{A}_\alpha$ bezeichnet. Wie früher $\mathfrak{A}_0$ durch die ∞^2 Linienelemente (P_0, p_0) definiert war, so ist jetzt $\mathfrak{A}_\alpha$ durch diejenigen ∞^2 Linienelemente (P_0, p_α) definiert, die durch Drehung jener Elemente um ihre Punkte hervorgegangen sind. Die neuen ∞^2 Elemente (P_0, p_α) sind die einer neuen Schar von ∞^1 Kurven A_α. *Jede Kurve* A_α *schneidet jede Kurve* Γ_0

jede Gerade p_0 in den zugeordneten Punkt P_a verwandelt. Sie sei mit $\mathfrak{B}_a$ bezeichnet. Wie früher $\mathfrak{B}_0$ durch die ∞^2 Linienelemente (p_0, P_0) definiert war, so ist jetzt $\mathfrak{B}_a$ durch diejenigen ∞^2 Linienelemente (p_0, P_a) definiert, die durch Verschieben jener Elemente auf ihren Geraden hervorgegangen sind. Die neuen ∞^2 Elemente (p_0, P_a) sind die einer neuen Schar von ∞^1 Kurven B_a. *Jede Kurve* B_a *hat mit jeder Kurve* Γ_0

unter demselben Winkel α. (Siehe Fig. 3a.)

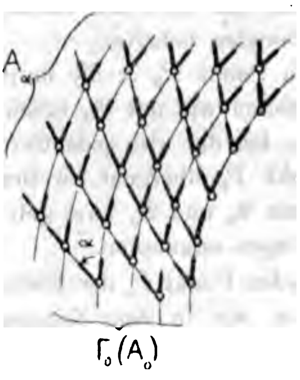


Fig. 3a.

eine Tangente von derselben Länge a gemein. (Siehe Fig. 3b.)

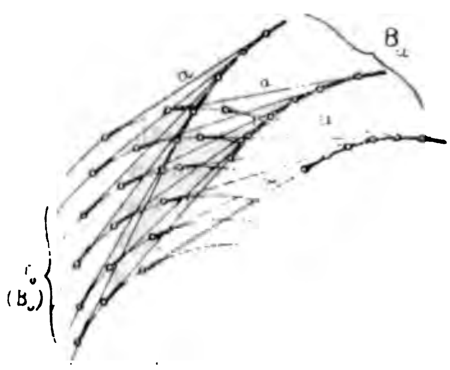


Fig. 3b.

Unter A_0 und B_0 werden wir hiernach die Kurven mit den Elementen (p_0, P_0), d. h. die ursprünglichen ∞^1 Kurven Γ_0, zu verstehen haben. Man nennt bekanntlich solche Kurven, die eine Schar von ∞^1 Kurven unter konstantem Winkel durchsetzen, *isogonale Trajektorien* oder kurz *Isogonalkurven.* Die Kurven A_α sind also solche Kurven hinsichtlich der gegebenen Schar Γ_0. Weniger hat man sich aber mit solchen Kurven beschäftigt, die mit einer Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 Tangenten von konstanter Länge a gemein haben. Wir wollen solche Kurven *Äquitangentialkurven**) der Kurven Γ_0 nennen. Also:

Die ∞^1 Kurven A_α sind Isogonalkurven der ∞^1 Kurven Γ_0 (oder A_0) mit dem Winkel α.

Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ ist genau so wie $\mathfrak{A}_0$ charakterisiert, indem sie wieder jeden Punkt in eine Gerade verwandelt, die durch

Die ∞^1 Kurven B_a sind Äquitangentialkurven der ∞^1 Kurven Γ_0 (oder B_0) mit derselben Strecke a.

Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ ist genau so wie $\mathfrak{B}_0$ charakterisiert, indem sie wieder jede Gerade in einen Punkt verwandelt, der auf

*) Der Name „*Äquitangentialkurve*" kommt allerdings schon in anderer Bedeutung vor. Wie dem Werke von Loria: „Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven", Leipzig 1902, S. 567, zu entnehmen ist, nennt Brocard so in seinen „Notes de bibliographie des courbes géométriques, partie complémentaire", Bar-le-Duc 1899, S. 58, diejenigen Kurven, die man erhält, wenn man auf allen Tangenten *einer* Kurve eine Strecke von konstanter Länge abträgt und den Ort der Endpunkte dieser Strecken ins Auge faßt. Es war mir jedoch nicht möglich, einen geeigneteren Namen für die oben betrachteten Kurven zu finden. Aber um so nachdrücklicher muß darauf hingewiesen werden, *daß die Brocardschen Äquitangentialkurven ganz andere Kurven sind.* Auf diese Brocardschen Kurven komme ich in § 3 zurück, wo ich vorschlage, sie „*Tangentialen*" zu nennen.

ihn geht. Hiervon werden wir nachher Gebrauch machen.

Üben wir jetzt $\mathfrak{A}_\alpha$ auf ein Linienelement (P_0, p_0) aus. Um zu erkennen, wie das transformierte Element liegt, bezeichnen wir mit Q_0 einen zu P_0 unendlich benachbarten Punkt auf p_0, so daß q_0 die zu Q_0 zugeordnete und durch Q_0 gehende Gerade ist. (Siehe Fig. 4a.)

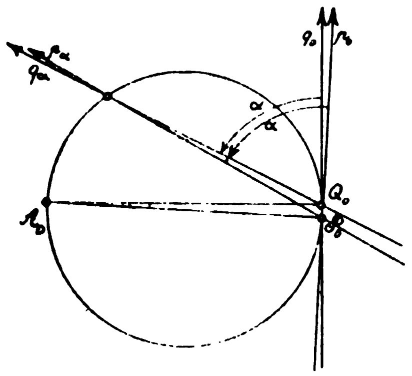


Fig. 4a

q_0 ist zu p_0 unendlich benachbart. Indem wir p_0 und q_0 um ihre Punkte P_0 und Q_0 um den Winkel α drehen, bringen wir sie in die Lagen p_α und q_α. Vermöge $\mathfrak{A}_\alpha$ gehen P_0 und Q_0 in p_α und q_α über. Das Linienelement (P_0, p_0) geht daher bei $\mathfrak{A}_\alpha$ in dasjenige Element über, das den Schnittpunkt von p_α und q_α zum Punkt und p_α zur Geraden hat. Aber der Schnittpunkt von p_α und q_α liegt auf dem *Kreise*, der p_0 in P_0 berührt und bei dem der Gegenpunkt von P_0 der Schnittpunkt der Lote ist, die man in P_0 und Q_0 auf p_0 und q_0 errichten kann.

Durch P_0 geht eine Kurve A_0

ihr liegt. Hiervon werden wir nachher Gebrauch machen.

Üben wir jetzt $\mathfrak{B}_a$ auf ein Linienelement (p_0, P_0) aus. Um zu erkennen, wie das transformierte Element liegt, bezeichnen wir mit q_0 eine zu p_0 unendlich benachbarte Gerade durch P_0, so daß Q_0 der zu q_0 zugeordnete und auf q_0 gelegene Punkt ist. (Siehe Fig. 4b.)

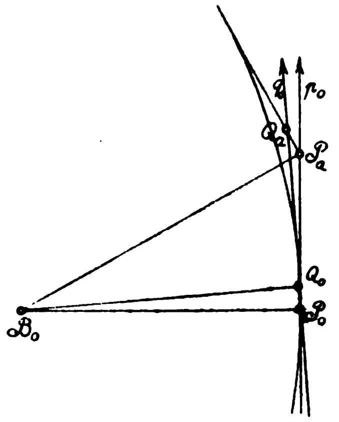


Fig. 4b.

Q_0 ist zu P_0 unendlich benachbart. Indem wir P_0 und Q_0 längs ihrer Geraden p_0 und q_0 um die Strecke a verschieben, bringen wir sie in die Lage P_a und Q_a. Vermöge $\mathfrak{B}_a$ gehen p_0 und q_0 in P_a und Q_a über. Das Linienelement (p_0, P_0) geht daher bei $\mathfrak{B}_a$ in dasjenige Element über, das die Gerade von P_a nach Q_a zur Geraden und P_a zum Punkt hat. Aber die Gerade von P_a nach Q_a berührt die *Parabel*, die P_0 zum Scheitel, p_0 zur Scheiteltangente und den Schnittpunkt der Lote, die man in P_0 und Q_0 auf p_0 und q_0 errichten kann, zum Brennpunkt hat.

Die Gerade p_0 berührt eine

(oder Γ_0). Auf ihr liegt Q_0 unendlich nahe bei P_0. Dabei sind p_0 und q_0 die Tangenten von P_0 und Q_0. Demnach ist jener Gegenpunkt auf dem Kreise der zu dem Elemente (P_0, p_0) der Kurve A_0 gehörige *Krümmungsmittelpunkt* A_0.

Kurve B_0 (oder Γ_0). Die Gerade q_0 ist eine zu p_0 unendlich benachbarte Tangente. P_0 und Q_0 sind die Berührungspunkte. Demnach ist der Brennpunkt der Parabel der zu dem Elemente (p_0, P_0) der Kurve B_0 gehörige *Krümmungsmittelpunkt* B_0.

Da die Kurven A_0 und B_0 miteinander identisch sind, so fällt auch A_0 mit B_0 zusammen. Des Späteren wegen benutzen wir trotzdem verschiedene Bezeichnungen. Wir haben gefunden:

Satz 4a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ führt das Element (P_0, p_0) über in dasjenige Element, dessen Gerade p_0 ist und dessen Punkt auf dem Kreise liegt, der zum Durchmesser die Strecke $P_0 A_0$ hat. A_0 bedeutet dabei den zum Element (P_0, p_0) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve A_0, die dies Element enthält.*

Da die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ durch dasselbe Verfahren hervorgeht, wie die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_{\alpha+\beta}$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\beta$, so können wir den Satz 4a sofort so verallgemeinern:

Satz 5a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_{\alpha+\beta}$ führt das Element (P_0, p_β) über in dasjenige Element, dessen Gerade $p_{\alpha+\beta}$ ist und dessen Punkt auf dem Kreise liegt, der $P_0 A_\beta$ zum Durchmesser hat. A_β bedeutet dabei den zum Element (P_0, p_β) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve A_β, die dies Element enthält.* (Siehe Fig. 5a.)

Wählen wir insbesondere $\alpha = -\beta$ und geben wir β alle Werte, so sehen wir, daß die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ *alle* Elemente (P_0, p_β)

Satz 4b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ führt das Element (p_0, P_0) über in dasjenige Element, dessen Punkt P_0 ist und dessen Gerade die Parabel berührt, die p_0 zur Scheiteltangente und B_0 zum Brennpunkt hat. B_0 bedeutet dabei den zum Element (p_0, P_0) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve B_0, die dies Element enthält.*

Da die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{B}_0$ durch dasselbe Verfahren hervorgeht, wie die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_{a+b}$ aus der Berührungstransformation $\mathfrak{B}_b$, so können wir den Satz 4b sofort so verallgemeinern:

Satz 5b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_{a+b}$ führt das Element (p_0, P_b) über in dasjenige Element, dessen Punkt P_{a+b} ist und dessen Gerade die Parabel berührt, die p_0 zur Scheiteltangente und B_b zum Brennpunkt hat. B_b bedeutet dabei den zum Element (p_0, P_b) gehörigen Krümmungsmittelpunkt derjenigen Kurve B_b, die dies Element enthält.* (S. Fig. 5b.)

Wählen wir insbesondere $a = -b$ und geben wir b alle Werte, so sehen wir, daß die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_0$ *alle* Elemente (p_0, P_b)

des Punktes P_0 in solche Elemente der Geraden p_0 verwandelt, deren Punkte von den Kreisen mit dem

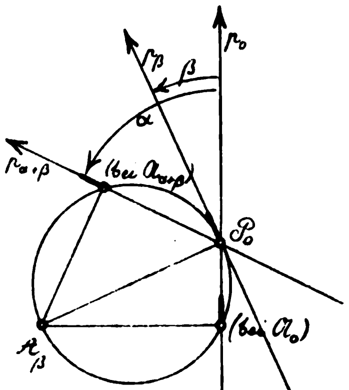


Fig. 5a.

variierenden Durchmesser $P_0 A_\beta$ ausgeschnitten werden. (Siehe ebenfalls Fig. 5a.)

Dabei ist zu beachten, daß A_β als Krümmungsmittelpunkt des Punktes P_0 der Kurve A_β auf dem Lote zu p_β durch P_0 liegt. Lassen wir β variieren, so beschreibt p_β ein Strahlenbüschel um P_0, also $P_0 A_\beta$ ein dazu projektives Büschel um P_0. Nach Satz 3 ist die Punktreihe der transformierten Elemente, die auf p_0 liegen, projektiv zu jenem ersten Büschel. Da jeder Punkt A_β von p_0 aus senkrecht über dem betreffenden Punkte der Punktreihe liegt, als Gegenpunkt von P_0 auf dem Kreise, so folgt, daß die Lote von den Punkten A_β auf p_0 ebenfalls ein projektives Büschel von Parallelstrahlen bilden. Alle ∞^1 Punkte A_β also, die zu P_0 gehören, liegen im Durchschnitt zweier pro-

der Geraden p_0 in solche Elemente des Punktes P_0 verwandelt, deren Geraden die Parabeln berühren, die p_0

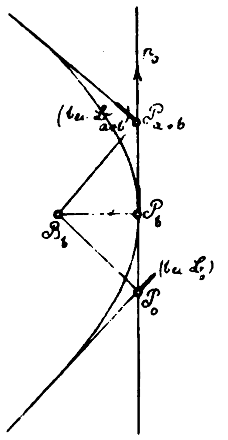


Fig. 5b.

zur Scheiteltangente haben und deren variierende Brennpunkte die Punkte B_b sind. (Siehe ebenfalls Fig. 5b.)

Dabei ist zu beachten, daß B_b als Krümmungsmittelpunkt der Tangente p_0 der Kurve B_b auf dem Lote zu p_0 durch P_b liegt. Lassen wir b variieren, so beschreibt P_b eine Punktreihe auf p_0, also $P_0 B_b$ ein dazu projektives Parallelenbüschel. Nach Satz 3 ist jene Punktreihe projektiv zu dem Büschel der Geraden der transformierten Elemente, d. h. zu dem Büschel der Tangenten von P_0 an die Parabeln. Da jede Tangente senkrecht ist zum Strahl $P_0 B_b$ nach dem variierenden Brennpunkte B_b, so folgt, daß die Strahlen $P_0 B_b$ ebenfalls ein projektives Büschel mit dem Mittelpunkt P_0 bilden. Alle ∞^1 Punkte B_b also, die zu p_0 gehören, liegen im Durchschnitt zweier projektiver

jektiver Büschel. Nach Satz 3 entspricht dabei ferner das Lot zu p_0 durch P_0 sich selbst. Alle ∞^1 Punkte A_β liegen mithin auf einer *Geraden*.

Satz 6a. *Alle durch einen Punkt P_0 gehenden Isogonalkurven A_β einer Schar von ∞^1 Kurven A_0 haben in P_0 solche Krümmungskreise, deren Mittelpunkte A_β auf einer Geraden liegen.**)

Büschel. Nach Satz 3 entspricht dabei ferner das Lot zu p_0 durch P_0 sich selbst. Alle ∞^1 Punkte B_b liegen mithin auf einer *Geraden*.

Satz 6b. *Alle eine Gerade p_0 berührenden Äquitangentialkurven B_b einer Schar von ∞^1 Kurven B_0 haben für die Berührungspunkte von p_0 solche Krümmungskreise, deren Mittelpunkte B_b auf einer Geraden liegen.*

Die beiden in diesen Sätzen erwähnten Geraden haben den Punkt A_0, der ja mit B_0 als Krümmungsmittelpunkt von Γ_0 (oder A_0 oder B_0) identisch ist, gemein. Aber noch mehr: Die Transformationen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ sind ja zueinander invers. Die oben in den Sätzen 5a und 5b angegebenen Konstruktionen müssen demnach zu derselben Beziehung zwischen den Elementen von P_0 und denen von p_0 führen. Daraus folgt, daß jeder Punkt A_β mit einem Punkte B_b zusammenfällt, und umgekehrt.

Also:

Satz 7. *Ist eine Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 in der Ebene gegeben und ist (P_0, p_0) irgend ein Linienelement einer dieser Kurven, so gibt es ∞^1 solche Isogonalkurven der Kurven Γ_0, die durch P_0 gehen, und ∞^1 solche Äquitangentialkurven der Kurven Γ_0, die p_0 berühren. Die Krümmungskreise der ersteren ∞^1 Kurven für P_0 haben ihre Mittelpunkte auf einer Geraden. Auf derselben Geraden liegen die Krümmungsmittelpunkte der letzteren ∞^1 Kurven für ihre Berührungspunkte mit p_0.*

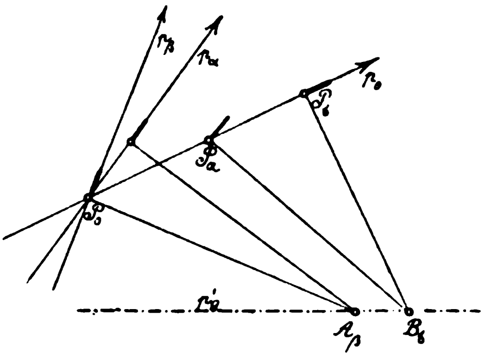


Fig. 6.

Wir können also kurz von der *Geraden der zu einem Punkte P_0 bez. einer Geraden p_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkte sprechen.* Diese Gerade sei mit p_0' bezeichnet. Einem anderen Elemente (Q_0, q_0) gehört natürlich im allgemeinen eine andere Gerade q_0' zu. Zum Überfluß sei noch daran erinnert, daß die Elemente, von denen hier die Rede ist, *nicht alle* Linienelemente der Ebene sind, sondern nur die ursprünglich

*) Dieser erste Satz findet sich schon bei E. Cesàro, „Lezioni di geometria intrinseca", Neapel 1896, siehe die deutsche Ausgabe: „Vorlesungen über natürliche Geometrie", besorgt von G. Kowalewski, Leipzig 1901, S. 148.

ausgewählten ∞^2 Linienelemente, die durch die ∞^1 Kurven Γ_0 (oder A_0 oder B_0) gegeben waren.

Wenn wir schließlich in Satz 5a und 5b den Winkel $\alpha + \beta$ und die Strecke $a + b$ mit α bez. a bezeichnen, so können wir jene Sätze so formulieren (vgl. Fig. 6):

Satz 8a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$, die jeden Punkt P_0 in eine Gerade p_α durch ihn überführt, die aus p_0 durch Drehung um P_0 um den Winkel α hervorgegangen ist, führt das Element (P_0, p_β) über in dasjenige Element, dessen Gerade p_α ist und dessen Punkt sich ergibt, wenn man in P_0 das Lot auf p_β errichtet, es in A_β mit der (p_0, P_0) zugeordneten Geraden p_0' zum Schnitte bringt und schließlich von A_β das Lot auf p_α fällt. Der Fußpunkt dieses Lotes ist der Punkt des transformierten Elementes.*

Satz 8b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$, die jede Gerade p_0 in einen Punkt P_a auf ihr überführt, der aus P_0 durch Verschiebung um die Strecke a längs p_0 hervorgegangen ist, führt das Element (p_0, P_b) über in dasjenige Element, dessen Punkt P_a ist und dessen Gerade sich ergibt, wenn man in P_b das Lot auf p_0 errichtet, es in B_b mit der (p_0, P_0) zugeordneten Geraden p_0' zum Schnitte bringt und B_b mit P_a verbindet. Das Lot zu $B_b P_a$ durch P_a ist die Gerade des transformierten Elementes.*

§ 2.

Neue charakteristische Eigenschaften der Isogonalkurven und Äquitangentialkurven.

Um die Scharen von Isogonalkurven und von Äquitangentialkurven zu definieren, gingen wir von einer Schar von ∞^1 Kurven Γ_0 aus. Die Isogonalkurven A_α waren diejenigen ∞^1 Kurven, die alle Kurven Γ_0 unter dem Winkel α durchsetzen; die Äquitangentialkurven B_a waren diejenigen ∞^1 Kurven, die mit allen Kurven Γ_0 gemeinsame Tangenten von der Länge a, gerechnet von Berührungspunkt zu Berührungspunkt, haben. Es ergeben sich, wenn α variiert, insgesamt ∞^2 Isogonalkurven, und ebenso, wenn a variiert, insgesamt ∞^2 Äquitangentialkurven. Jene Schar von ∞^2 Isogonalkurven besteht also aus ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven A_α, wobei jede Schar von ∞^1 Kurven durch einen bestimmten Wert des Winkels α charakterisiert ist. Nun leuchtet ein, daß wir zu genau derselben Schar von ∞^2 Isogonalkurven gelangt wären, wenn wir, statt von den ∞^1 Kurven Γ_0, von ∞^1 Kurven A_α, die zu einem bestimmten Werte von α gehören, unseren Ausgang genommen hätten. Die Kurven Γ_0 sind ja auch nichts anderes als die Kurven A_0. Die Definition der Isogonalkurven, bei der man von ∞^1 Kurven ausgeht, läßt also noch zu wünschen übrig, weil bei ihr eine bestimmte in der Schar dieser Kurven enthaltene Schar von ∞^1 Kurven ausgezeichnet wird, die vor den anderen ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven A_α im Grunde nichts voraus hat. Eine ganz analoge Überlegung zeigt, daß die Definition der Äquitangentialkurven an demselben Mangel leidet. Die folgenden Überlegungen führen nun zu einer neuen Charakterisierung beider Arten von Kurvenscharen, die diesen Mangel nicht hat.

Wir wissen, daß wir die Isogonalkurven auch dadurch erhalten können, daß wir statt von der Schar der ∞^1 Kurven Γ_0 von irgend einer Schar von ∞^1 Kurven A_α, die also die Γ_0 unter dem Winkel α durchsetzen, ausgehen können. Es seien also A_β und A_γ zwei Kurven, von denen jede die ∞^1 Kurven A_α unter einem bestimmten Winkel durchsetzt. (Siehe Fig. 7a.) Auch mögen A_β und A_γ

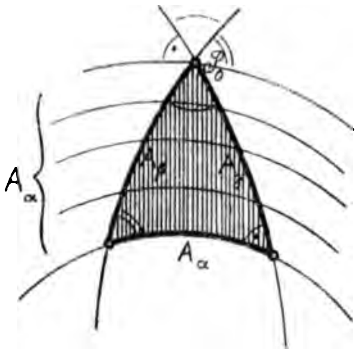


Fig. 7a.

von einem Punkte P_0 ausgehen. Alsdann bestimmen A_β und A_γ mit einer nicht durch P_0 gehenden Kurve A_α ein *Dreieck*, das drei *Punkte*, nämlich die Schnittpunkte von je zweien der drei Kurven, zu Ecken hat, während die Verbindungsstücke krummlinig sind. Da nun A_β und A_γ alle Kurven A_α unter je einem konstanten Winkel schneiden, so

Wir wissen, daß wir die Äquitangentialkurven auch dadurch erhalten können, daß wir statt von der Schar der ∞^1 Kurven Γ_0 von irgend einer Schar von ∞^1 Kurven B_a, die also mit den Γ_0 die konstante gemeinsame Tangentenlänge a haben, ausgehen können. Es seien also B_b und B_c zwei Kurven, von denen jede mit allen ∞^1 Kurven B_a eine konstante Tangentenlänge gemein hat. (Siehe Fig. 7b.) Auch

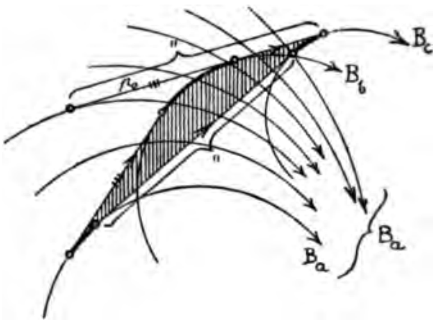


Fig. 7b.

mögen B_a und B_b die Gerade p_0 berühren. Alsdann bestimmen B_b und B_c mit einer p_0 nicht berührenden Kurve B_a ein *Dreiseit*, das drei geradlinige Strecken zu *Seiten* hat, nämlich die gemeinsamen Tangenten von je zweien der drei Kurven, während die Verbindungsstücke krummlinig sind. Da nun B_b und B_c mit allen Kurven B_a Tangenten von je-treten die drei Winkel des Dreiecks sämtlich auch in P_0 auf, und man erkennt, daß *die Summe der Winkel des Dreiecks gleich π ist.*

weils konstanter Länge gemein haben, so treten die drei geradlinigen Seiten des Dreiseits sämtlich bei p_0 auf, und man erkennt, daß *die Summe der Seiten des Dreiseits gleich Null* ist, vorausgesetzt, daß man das Dreiseit in einem Sinne umläuft und dabei Seiten in diesem Sinne addiert, in entgegengesetztem Sinne subtrahiert.

Satz 9a. *Die Winkelsumme in einem von drei Isogonalkurven gebildeten Dreieck ist gleich π.*

Satz 9b. *Die Seitensumme eines von drei Äquitangentialkurven gebildeten Dreiseits ist gleich Null.*

Eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven hat also nach Satz 9a eine Eigenschaft, die insbesondere der Schar aller ∞^2 Geraden der Ebene zukommt. In der Tat bilden aber auch alle Geraden der Ebene eine Schar von Isogonalkurven, wie man sofort sieht, wenn man von einer Schar von ∞^1 parallelen Geraden ausgeht und ihre Isogonalkurven sucht. Da eine Transformation durch reziproke Radien die Geraden in alle Kreise durch einen Punkt verwandelt und außerdem gleiche Winkel in gleiche Winkel überführt, so sieht man, *daß auch alle Kreise durch einen festen Punkt eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven bilden.* Andererseits können wir ein Analogon hierzu für die Äquitangentialkurven konstruieren. Denn *alle ∞^2 Kreise, die eine feste Gerade berühren, bilden eine Schar von Äquitangentialkurven.* In der Tat, wenn man von diesen Kreisen zunächst diejenigen ∞^1 konstruiert, die sämtlich die feste Gerade an derselben Stelle berühren, so erkennt man sofort, daß ein anderer Kreis, der die feste Gerade berührt, mit allen diesen ∞^1 Kreisen gleichlange Tangenten gemein hat, da die Tangentenstücke gerade so lang sind, wie die auf der festen Geraden gemessenen Tangentenstücke. Man verifiziert nun für alle ∞^2 die Gerade berührenden Kreise sofort den Satz 9b, sobald man nur der Geraden einen bestimmten Fortschreitungssinn gibt und den Fortschreitungssinn auf den Kreisen, die die Gerade berühren, so wählt, daß er an den Berührungsstellen mit dem der Geraden übereinstimmt. Dabei ist es gleichgültig, auf welcher Seite der Geraden die Kreise liegen.

Es ist sehr bemerkenswert, daß man die in den Sätzen 9a und 9b ausgesprochenen Eigenschaften umgekehrt zur Definition der Scharen von Isogonalkurven bez. Äquitangentialkurven benutzen kann.

Liegt nämlich eine Schar von ∞^2 Kurven vor, die so beschaffen ist, daß jedes von drei Kurven der Schar gebildete Dreieck die Winkel-

Liegt nämlich eine Schar von ∞^2 Kurven vor, die so beschaffen ist, daß jedes von drei Kurven der Schar gebildete Dreiseit bei gesumme π hat, so wähle man irgend eine Kurve A_0 der Schar aus und greife alsdann diejenigen ∞^1 Kurven der Schar heraus, die A_0 unter einem und demselben irgendwie bestimmten Winkel α schneiden. Sie seien mit A_α bezeichnet. Ist ferner A_β irgend eine andere Kurve der Schar, die mit der Kurve A_0 den Winkel β bildet, so muß nach Voraussetzung in jedem der Dreiecke, die von A_0, von einer Kurve A_α und von A_β gebildet werden, die Winkelsumme gleich π sein. Daraus folgt aber sofort, daß A_β alle Kurven A_α unter demselben Winkel durchsetzt, d. h. *alle* Kurven der Schar von ∞^2 Kurven schneiden die ∞^1 Kurven A_α unter konstanten Winkeln.

Satz 10a. *Hat eine Schar von ∞^2 Kurven in der Ebene die Eigenschaft, daß in jedem von drei Kurven der Schar gebildeten Dreiecke die Winkelsumme gleich π ist, so ist die Schar eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven.*

höriger Beachtung des Fortschreitungssinnes der Kurven die Seitensumme Null hat, so wähle man irgend eine Kurve B_0 der Schar aus und greife alsdann diejenigen ∞^1 Kurven der Schar heraus, die mit B_0 gemeinsame Tangenten von derselben bestimmten Länge a haben. Sie seien mit B_a bezeichnet. Ist ferner B_b irgend eine andere Kurve der Schar, die mit der Kurve B_0 eine Tangente von der Länge b gemein hat, so muß nach Voraussetzung in jedem der Dreiseite, die von B_0, von einer Kurve B_a und von B_b gebildet werden, die Summe der geradlinigen Seiten gleich Null sein. Daraus folgt sofort, daß B_b mit allen Kurven B_a gemeinsame Tangenten von derselben Länge hat, d. h. *alle* Kurven der Schar von ∞^2 Kurven verlaufen so, daß jede von ihnen mit allen ∞^1 Kurven B_a Tangenten von gleicher Länge hat.

Satz 10b. *Hat eine Schar von ∞^2 Kurven in der Ebene die Eigenschaft, daß in jedem von drei Kurven der Schar gebildeten Dreiseit die Summe der drei geradlinigen Seiten gleich Null ist, vorausgesetzt, daß man die Kurven mit Fortschreitungssinnen belegt hat und diese für die gemeinsamen Tangenten berücksichtigt, so ist die Schar eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven.*

Hiermit haben wir Eigenschaften von Isogonalkurvenscharen und von Äquitangentialkurvenscharen gefunden, die man zur Definition dieser Scharen benutzen kann. Geht man von diesen Definitionen aus, so ist keine in der Gesamtschar enthaltene Schar von ∞^1 Kurven ohne Grund ausgezeichnet, wie es bei den ursprünglichen Definitionen der Fall war.

§ 3.

Evolutoiden und Tangentialen, sowie Beispiele von Isogonal- und Äquitangentialkurven.

Man hat den Begriff der Evolute, als Eingehüllter der Normalen einer Kurve, dadurch verallgemeinert, daß man die Normalen durch diejenigen Geraden ersetzt hat, die die gegebene Kurve unter irgend einem konstanten Winkel schneiden. Diese Kurven, die man *Evolutoiden* genannt hat*), treten bei der Fortsetzung der Betrachtung unserer Berührungstransformationen auf, und wir werden einem allerdings schon bekannten Satze über solche Kurven begegnen. Diesen Kurven steht nun eine zweite Art von Kurven gegenüber: Tragen wir nämlich auf allen Tangenten einer gegebenen Kurve eine konstante Strecke vom jeweiligen Berührungspunkte auf, so ist der Ort der Endpunkte eine neue Kurve, die wir eine *Tangentiale***) der gegebenen Kurve nennen wollen.

Jede Kurve Γ_0 hat ∞^1 Evolutoiden und ∞^1 Tangentialen. (Siehe Fig. 8.) Hat die Kurve Γ_0 einen bestimmten Fortschreitungssinn und haben wir in der Ebene einen bestimmten Drehsinn festgesetzt, so gehört zu jedem Winkel α eine bestimmte Evolutoide von Γ_0 und zu jeder Strecke a eine bestimmte Tangentiale von Γ_0. Die Evolutoide nämlich, die wir die *Evolutoide* (α) von Γ_0 nennen, ist die Eingehüllte derjenigen Geraden, die aus den Tangenten von Γ_0 hervorgehen, wenn man sie um ihre Berührungspunkte um den Winkel α im festgesetzten Sinne dreht. Insbesondere ist die Evolutoide $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Evolute von Γ_0. Die Tangentiale ferner, die wir die *Tangentiale* (a) von Γ_0 nennen, ist der

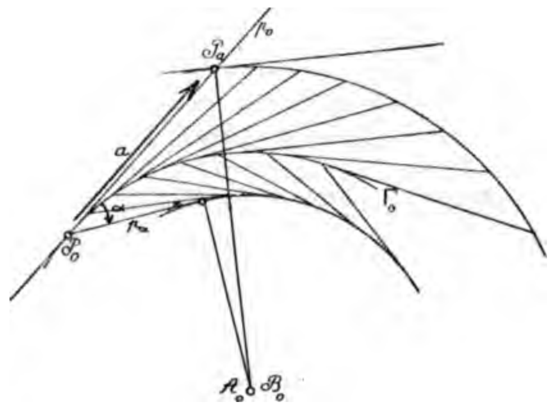


Fig. 8.

*) Vgl. Loria a. a. O., S. 626 u. f., wonach Réaumur und Lancret für den Ursprung des Begriffs der Evolutoiden in Betracht kommen.

**) Dies sind die von Brocard als Äquitangentialkurven bezeichneten Kurven, vgl. die Anm. zu S. 496. Sie wurden u. a. von Aoust in seiner „Analyse infinitésimale des courbes planes", Paris 1873, S. 107 u. f. genauer untersucht.

Ort derjenigen Punkte, die sich ergeben, wenn wir jeden Punkt von Γ_0 auf seiner Tangente in dem festgesetzten Sinne um die Strecke a verschieben.

Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ führt jeden Punkt P_0 in die zugeordnete gedrehte Gerade p_α über. Also:

Satz 11a. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ führt die ∞^1 Kurven Γ_0 in ihre Evolutoiden (α) über.*

Nach Satz 8a, worin wir $\beta = 0$ setzen und worin A_β den zu P_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von A_β bedeutete, geht das Element (P_0, p_0) vermöge $\mathfrak{A}_\alpha$ in dasjenige Element über, dessen Gerade p_α ist und dessen Punkt der Fußpunkt des Lotes ist, das man von A_0 auf p_α fällen kann. A_0 ist dabei der zu dem Element (P_0, p_0) gehörige Krümmungsmittelpunkt von Γ_0.

Satz 12a. *Der Punkt, in dem die unter dem Winkel α zur Tangente einer Kurve Γ_0 geneigte Gerade p_α die Evolutoide (α) von Γ_0 berührt, ist der Fußpunkt des Lotes vom Krümmungsmittelpunkt A_0 des Punktes P_0 von Γ_0 auf die Gerade p_α.* (Siehe Fig. 8.)

Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ führt jede Gerade p_0 in den zugeordneten verschobenen Punkt P_a über. Also:

Satz 11b. *Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ führt die ∞^1 Kurven Γ_0 in ihre Tangentialen (a) über.*

Nach Satz 8b, worin wir $b = 0$ setzen und worin B_b den zu p_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von B_b bedeutete, geht das Element (p_0, P_0) vermöge $\mathfrak{B}_a$ in dasjenige Element über, dessen Punkt P_a ist und dessen Gerade in P_a auf der Verbindungslinie von P_a mit B_0 senkrecht steht. B_0 ist dabei der zu dem Element (p_0, P_0) gehörige Krümmungsmittelpunkt von Γ_0.

Satz 12b. *Die Tangente, die die Tangentiale (a) einer Kurve Γ_0 in demjenigen Punkte P_a hat, der aus einem Punkte P_0 von Γ_0 durch Verschieben um die Strecke a längs der Tangente von P_0 hervorgeht, ist senkrecht zur Verbindenden von P_a mit dem Krümmungsmittelpunkt B_0 von Γ_0 in P_0.* (Siehe Fig. 8.)

Wir können diese Sätze auch so aussprechen:

Satz 13a. *Die einem Punkte P_0 einer Kurve Γ_0 entsprechenden ∞^1 Punkte aller ∞^1 Evolutoiden von Γ_0 liegen auf demjenigen Kreis, der den Krümmungsradius des Punktes P_0 von Γ_0 zum Durchmesser hat.*

Satz 13b. *Die einer Tangente p_0 einer Kurve Γ_0 entsprechenden ∞^1 Tangenten aller ∞^1 Tangentialen von Γ_0 berühren diejenige Parabel, die p_0 zur Scheiteltangente und den zu p_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von Γ_0 zum Brennpunkt hat.*

Diese Sätze sind längst bekannt.*)

*) Der erste Satz rührt von Réaumur her, vgl. Loria a. a. O., S. 628. Der zweite Satz findet sich bei Loria S. 567.

Wir fügen zwei Sätze an, deren Richtigkeit sofort einleuchtet:

Satz 14a. *Jede Kurve kann aufgefaßt werden als Isogonalkurve der Tangenten einer ihrer Evolutoiden.*

Satz 14b. *Jede Kurve kann aufgefaßt werden als Äquitangentialkurve der Punkte einer ihrer Tangentialen.*

Hier ist höchstens beim zweiten Satze daran zu erinnern, daß Punkte als Elementvereine Spezialfälle von Kurven sind. Liegen ∞^1 Punkte, also die einer Kurve, vor, so sind ihre Äquitangentialkurven diejenigen Kurven, deren Tangenten, gemessen von den Berührungspunkten bis zum *Schnitt* mit jener Kurve, konstante Längen haben.

Diese Sätze führen uns dazu, uns überhaupt etwas eingehender mit den Isogonalkurven von ∞^1 Geraden und mit den Äquitangentialkurven von ∞^1 Punkten zu beschäftigen. Wir wollen also die Fälle betrachten, wo die ∞^1 gegebenen Kurven Γ_0 lauter Geraden*) oder lauter Punkte sind. Hier liegt insofern eine Ausnahme vor, als wir früher (S. 494) vorausgesetzt haben, daß jeder Punkt der Ebene einer Kurve Γ_0 angehöre und jede Gerade der Ebene eine Kurve Γ_0 berühre. Wenn die Kurven Γ_0 ∞^1 Gerade sind, so haben sie aber doch augenscheinlich Isogonalkurven, während der Begriff der Äquitangentialkurven hier versagt, und wenn die Kurven Γ_0 ∞^1 Punkte sind, so haben sie, wie wir vorhin bemerkten, Äquitangentialkurven, während hier der Begriff der Isogonalkurven versagt.

In der Tat läßt sich in jedem dieser beiden Ausnahmefälle doch eine unserer beiden Betrachtungsreihen, im ersten Falle die an die $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_\alpha, \cdots$ anknüpfende, im zweiten Falle die an die $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_\alpha, \cdots$ anknüpfende aufrecht erhalten.

Denn wenn alle Kurven Γ_0 ∞^1 Geraden, also die Tangenten einer Kurve Δ sind, wo sich Δ auch auf einen Punkt reduzieren kann, so ist jedem Punkte P_0 die von ihm ausgehende Tangente p_0 an Δ zugeordnet. Den ∞^2 Punkten P_0 entsprechen also nur ∞^1 Geraden p_0, d. h. die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ ist ausgeartet. Aber nicht so die übrigen Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$. Denn wenn wir jede von einem beliebigen

Denn wenn alle Kurven Γ_0 ∞^1 Punkte, also die Punkte einer Kurve Δ sind, wo sich Δ auch auf eine Gerade reduzieren kann, so ist jeder Geraden p_0 ihr Schnittpunkt P_0 mit Δ zugeordnet. Den ∞^2 Geraden p_0 entsprechen also nur ∞^1 Punkte P_0, d. h. die Berührungstransformation $\mathfrak{B}_0$ ist ausgeartet. Aber nicht so die übrigen Berührungstransformationen $\mathfrak{B}_\alpha$. Denn wenn wir jeden Schnittpunkt einer beliebigen Geraden p_0

*) Die Isogonalkurven von ∞^1 Geraden hat u. a. O. Böklen („Über die Linien, welche die Tangenten einer Kurve unter konstantem Winkel schneiden") in Grunerts Archiv (1), 43. Teil, 1865, S. 14—16, untersucht.

Punkte P_0 nach Δ gehende Tangente um denselben Winkel α drehen, so gehen doch wieder ∞^2 Geraden p_α hervor, es sei denn, daß alle jene ∞^1 Geraden p_0 einander parallel sind, in welchem Falle nur die *triviale Schar von Isogonalkurven, die aus allen Geraden der Ebene besteht*, hervorgeht. Wenn wir — abgesehen von dieser letzten Ausnahme — statt von $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}_\alpha$ ausgehen, so können wir unsere früheren Betrachtungen, die zu Satz 7 führten, aufrecht erhalten, soweit sie sich auf Isogonalkurven beziehen.

Es folgt also (siehe Fig. 9a): Legt man durch einen Punkt P_0 alle

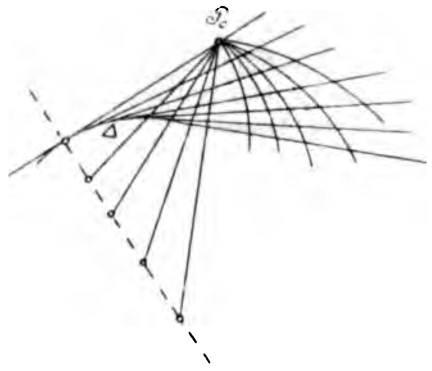


Fig. 9a.

Kurven, die die Tangenten einer gegebenen Kurve Δ unter konstanten Winkeln schneiden, so haben diese Kurven in P_0 solche Krümmungskreise, deren Mitten auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist, wie man leicht sieht, diejenige Normale von Δ, die zu dem Berührungspunkt der von P_0 an Δ gehenden Tangente gehört*).

mit Δ auf der Geraden um dieselbe Strecke a verschieben, so gehen doch wieder ∞^2 Punkte P_a hervor, es sei denn, daß alle Punkte der Kurve Δ unendlich fern liegen, in welchem Falle nur die *triviale Schar von Äquitangentialkurven, die aus allen Punkten der Ebene besteht*, hervorgeht. Wenn wir — abgesehen von dieser letzten Ausnahme — statt von $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}_a$ ausgehen, so können wir unsere früheren Betrachtungen, die zu Satz 7 führten, aufrecht erhalten, soweit sie sich auf Äquitangentialkurven beziehen.

Es folgt also (siehe Fig. 9b): Zieht man alle diejenigen Kurven, die eine Gerade p_0 berühren und deren

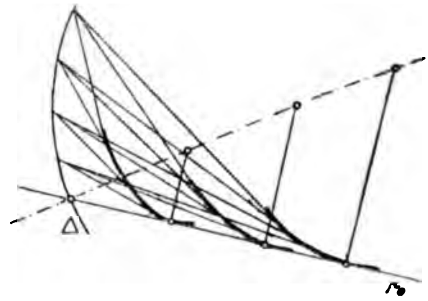


Fig. 9b.

Tangenten, gemessen bis zu ihren Schnittpunkten mit einer gegebenen Kurve Δ, konstante Längen haben, so haben diese Kurven in ihren Berührungspunkten mit p_0 solche Krümmungskreise, deren Mitten auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist, wie man leicht erkennt, diejenige Normale von Δ, die zu dem Schnittpunkt von Δ mit p_0 gehört.

*) Dieser Satz findet sich bei Böklen a. a. O. 1865.

Die in dem rechts stehenden Satze erwähnten Kurven, nämlich die Äquitangentialkurven, die sich ergeben, wenn sich die ∞^1 Kurven Γ_0 auf die Punkte einer Kurve Δ reduzieren, kann man die *Traktricen der Basis* Δ nennen*). Beschreibt nämlich ein Punkt die Kurve Δ und schleppt er einen beliebig angenommenen Punkt mittels eines Fadens von konstanter Länge, so beschreibt der geschleppte Punkt eine dieser ∞^2 Äquitangentialkurven. Man kann diese ∞^2 Kurven auch als die *Gesamtheit derjenigen Kurven, die die gegebene Kurve* Δ *als Tangentiale haben*, bezeichnen. Ebenso kann die Schar aller ∞^2 Isogonalkurven der Tangenten von Δ aufgefaßt werden als die *Gesamtheit derjenigen Kurven, die die gegebene Kurve* Δ *als Evolutoide haben.* Es ist von Interesse zu bemerken, daß die rechts untersuchten Äquitangentialkurven zwar nicht in ihrer Gesamtheit, aber in Scharen von je ∞^1 Individuen auch als Isogonalkurven aufgefaßt werden können. Schlägt man nämlich um alle Punkte von Δ Kreise von gleichen Radien, so gehören zu diesen ∞^1 Kreisen ∞^2 Isogonalkurven. Darunter sind ∞^1 Orthogonalkurven enthalten. Die Tangenten dieser ∞^1 *orthogonalen Trajektorien der Kreise* sind, gemessen bis zu ihren Schnittpunkten mit Δ, gleich dem Kreisradius, also gehören sie in der Tat zu jenen Äquitangentialkurven. So ist z. B. jede *gewöhnliche Traktrix* einerseits Äquitangentialkurve aller Punkte ihrer geradlinigen Basis und andererseits Isogonalkurve, insbesondere Orthogonalkurve, von ∞^1 kongruenten Kreisen, deren Mitten die Punkte der Geraden sind.

Dies führt uns dazu, die Kurven zu betrachten, die sich ergeben, *wenn wir als Kurven* Γ_0 ∞^1 *kongruente Kreise annehmen.* Die Mitten dieser Kreise mögen eine Kurve Δ bilden. Der Kreisradius sei gleich r.

Es sei P_0 ein beliebiger Punkt (siehe Fig. 10a). Alsdann ist die zugehörige Gerade p_0 die Tangente des durch P_0 gehenden Kreises Γ_0. Die Isogonalkurve A_α, die durch P_0 geht, hat dort die aus p_0 durch Drehung um α hervorgehende Gerade p_α zur Tangente. Das Lot von der Kreismitte M auf p_α hat die Länge $r \cos \alpha$. Schlagen wir mit

Es sei p_0 eine beliebige Gerade (siehe Fig. 10b). Alsdann ist der zugehörige Punkt P_0 der Punkt, in dem p_0 von einem der ∞^1 Kreise Γ_0 berührt wird. Die Äquitangentialkurve B_a, die p_0 berührt, hat ihren Berührungspunkt an der Stelle P_a, die durch Verschiebung von P_0 längs p_0 um die Strecke a hervorgeht. P_a hat von der Kreismitte M

*) Nach **Loria**, a. a. O., S. 366 u. f., haben sich A. **Poulain** („Les aires des tractrices et le stang-planimètre", Journal de Math. spéc. (4) 4, 1895), **Brocard** („Notes de bibliographie des courbes géométriques, partie complémentaire", Bar-le Duc 1899, S. 58) und **Bourlet** („Nouveau traité des bicycles et des bicyclettes", 2. Aufl., Paris 1898) mit diesen Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Traktrix beschäftigt.

diesem Radius um die Mitte M des Kreises den konzentrischen Kreis, so erkennen wir, daß die von P_0 ausgehende Tangente p_α von A_α,

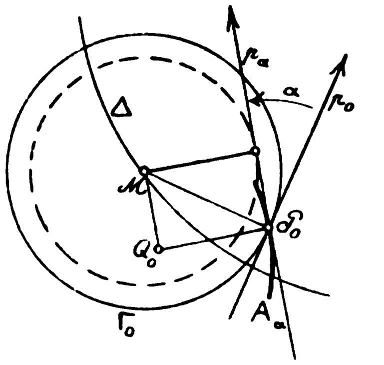


Fig. 10a.

gemessen bis zu diesem neuen Kreise, die Länge $r \sin\alpha$ hat. Also folgt: Die zu einem bestimmten Winkel α gehörenden Isogonalkurven A_α der ∞^1 kongruenten Kreise vom Radius r sind zugleich ∞^1 Äquitangentialkurven $B_{r\sin\alpha}$ der ∞^1 Kreise vom Radius $r\cos\alpha$.

den Abstand $\sqrt{a^2+r^2}$. Schlagen wir um die Kreismitte M den durch P_a gehenden Kreis mit diesem Radius, so sehen wir, daß p_0 diesen neuen

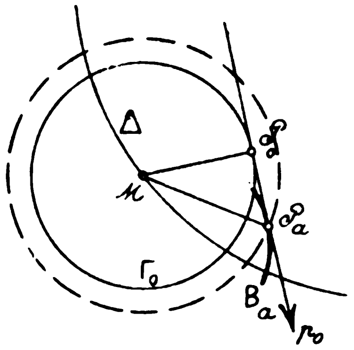


Fig. 10b.

Kreis unter dem Winkel arc tg $\frac{a}{r}$ schneidet. Also folgt: Die zu einer bestimmten Strecke a gehörenden Äquitangentialkurven B_a der ∞^1 kongruenten Kreise vom Radius r sind zugleich ∞^1 Isogonalkurven $A_{\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{r}}$ der ∞^1 Kreise vom Radius $\sqrt{a^2+r^2}$.

Beide Betrachtungsreihen führen also im Grunde genommen zu denselben Kurvenarten. Wir setzen daher nur noch die erste Betrachtungsreihe fort: Die Normale der Isogonalkurven A_α in P_0 ist die Senkrechte zu p_α. Das Lot von M auf diese Normale hat die Länge $r\sin\alpha$ und schneidet auf der Normalen die Strecke $P_0Q_0 = r\cos\alpha$ ab. Der Ort von Q_0 ist also erstens eine *Parallelkurve* von A_α im Abstande $r\cos\alpha$. Zweitens hat die Parallelkurve die zu p_α parallele Tangente $MQ_0 = r\sin\alpha$, die auch längs A_α ungeändert bleibt, d. h. *die Parallelkurven zu den betrachteten* ∞^1 *Isogonalkurven* A_α *jener* ∞^1 *kongruenten Kreise, deren Mitten auf der Kurve* Δ *liegen, und zwar die Parallelkurven im Abstande* $r\cos\alpha$, *sind Äquitangentialkurven der Punkte der Kurve* Δ *mit der konstanten Tangentenlänge* $r\sin\alpha$. *Also sind die* ∞^1 *Kurven* A_α *Parallelkurven von* ∞^1 *Traktrixkurven mit der Basis* Δ. Alle ∞^2 Isogonalkurven aller jener kongruenten Kreise, deren Mitten auf Δ liegen, sind somit gewisse unter den Parallelkurven aller ∞^2 Traktricen mit der Basis Δ.

Natürlich gelten für die betrachteten Kurven die Sätze 6a *und* 6b, *die zur Konstruktion ihrer Krümmungskreise dienen.* Um nicht zu weit zu gehen, verzichten wir auf die Darstellung der Anwendung dieser Sätze auf die jetzt vorliegenden Kurven.

Gehen wir jetzt zu dem Fall über, daß *die gegebene Schar von* ∞^1 *Kurven* Γ_0 *aus allen Kreisen mit dem Mittelpunkt* O *besteht.*

In diesem Fall sind die Isogonalkurven solche Kurven, die auch alle Radien, d. h. alle von O ausgehenden Geraden unter konstanten Winkeln schneiden. Wir kommen also zu einem Spezialfall einer früheren Betrachtung. Die Isogonalkurven sind hier *alle* ∞^2 *logarithmischen Spiralen mit demselben asymptotischen Punkte* O.

Die Äquitangentialkurven B_α haben augenscheinlich Normalen, die den Kreis um O mit dem Radius a berühren. Also kommen wir hier zu *allen* ∞^2 *Kreisevolventen, die zu allen konzentrischen Kreisen um* O *gehören.*

Die Sätze 6a und 6b sind in diesen Fällen leicht zu verifizieren.

Nehmen wir schließlich an, *daß die* ∞^1 *gegebenen Kurven* Γ_0 *einander sämtlich kongruent seien und durch Drehung um einen festen Punkt* O *ineinander übergehen.*

Zu den Isogonalkurven gehören hier alle Kreise mit der Mitte O. Da die Kurven Γ_0 selbst zu den Isogonalkurven gehören, so folgt aus Satz 6a: Um den Krümmungskreis eines Punktes P_0 einer Isogonalkurve zu finden, verbinden wir O mit dem Krümmungsmittelpunkt A_0 der durch P_0 gehenden Kurve Γ_0. Auf dieser Verbindenden liegt der gesuchte Punkt, natürlich auf der Normalen der Isogonalkurve.

Zu den Äquitangentialkurven gehören hier alle Kreise mit der Mitte O. Da die Kurven Γ_0 selbst zu den Äquitangentialkurven gehören, so folgt aus Satz 6b: Um den Krümmungskreis eines Punktes einer Äquitangentialkurve zu finden, verbinden wir O mit dem Krümmungsmittelpunkte B_0 derjenigen Kurve Γ_0, die dieselbe Tangente p_0 wie die Äquitangentialkurve berührt. Auf dieser Verbindenden liegt der gesuchte Punkt, natürlich auf der Normalen der Äquitangentialkurve.

Die Betrachtung rechts wollen wir noch ein wenig weiter führen in dem speziellen Fall, daß eine der Kurven Γ_0 die Eigenschaft hat, daß ihre Tangente p_0 mit dem Strahl von O nach dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt einen konstanten Winkel bildet. Dann hat nämlich jede der ∞^1 Kurven Γ_0 dieselbe Eigenschaft, da sie durch Rotation um O aus der einen hervorgehen, und unsere Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes zeigt, daß dasselbe auch für alle Äquitangentialkurven gilt. Also: alle diejenigen ∞^2 Kurven, deren Tangenten mit den Strahlen von einem festen Punkte O nach den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten einen und denselben Winkel bilden, machen eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven aus. Die Evolventen solcher Kurven aber bilden mit ihren Radienvektoren konstante Winkel, sind also logarithmische Spiralen um O von derselben Steigung. Daher folgt: *Alle ∞^2 Evolventen aller ∞^1 logarithmischen Spiralen mit demselben asymptotischen Punkt und derselben Steigung bilden eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven.* Übrigens gehören zu diesen Kurven die konzentrischen Kreise um O, wie wir vorhin sahen. Man hat also die Kreise um O auch als Evolventen der logarithmischen Spiralen aufzufassen. Diese Auffassung läßt sich auch analytisch rechtfertigen, worauf wir hier nicht eingehen.

Wir erwähnen noch, daß sich die Zahl der Beispiele leicht vermehren ließe, und daß wir es zuweilen unterlassen haben, *alle* Folgerungen aus den allgemeinen Sätzen der vorhergehenden Paragraphen für die behandelten Beispiele zu ziehen, um nicht zu ausführlich zu werden. Unsere allgemeinen Sätze sind eine Fundgrube für einzelne Sätze über spezielle Kurven, so auch die im nächsten Paragraphen zu gebenden Sätze.

§ 4.

Eine Zuordnuug zwischen zwei Scharen von Isogonal- bez. Äquitangentialkurven.

In § 1 gingen wir von der Annahme aus, es sei uns eine stetige Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) in der Ebene gegeben. Diese Schar gehörte ∞^1 Kurven Γ_0 an, und wir betrachteten die ∞^2 Isogonalkurven dieser Schar und zugleich ihre ∞^2 Äquitangentialkurven. Es ergab sich dabei, daß diejenigen ∞^1 Isogonalkurven, die einen Punkt P_0 gemein haben, für diesen Punkt solche Krümmungsmittelpunkte haben, die auf einer Geraden liegen (Cesàroscher Satz), und daß diejenigen ∞^1 Äquitangentialkurven, die eine Gerade p_0 berühren, für ihre Berührungspunkte solche Krümmungsmittelpunkte haben, die ebenfalls auf einer Geraden liegen. Dabei sind beide Orte von Mittelpunkten miteinander identisch, wenn P_0 und p_0 zusammen eines der Linienelemente der vorgelegten Schar bilden.

Wir können also sagen, daß jedem der vorgelegten ∞^2 Linienelemente (P_0, p_0) eine gewisse Gerade — die wir p_0' nannten — zugeordnet ist. Wie diese Gerade zu konstruieren ist, ist zwar aus den Betrachtungen des § 1 zu entnehmen, möge aber zur besseren Verdeutlichung des folgenden nochmals etwa aus dem Satze 8a des § 1 abgeleitet werden:

Um die dem Elemente (P_0, p_0) zugeordnete Gerade p_0' punktweise zu konstruieren, wählen wir irgend ein diesem Elemente unendlich benachbartes Element (Q_0, q_0) der gegebenen Schar aus (siehe Fig. 11). Die von P_0 ausgehende Gerade $P_0 Q_0$ ist eine der mit p_β bezeichneten Geraden des Punktes P_0. Bei der Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ geht P_0 in p_0 und Q_0 in q_0 über, d. h. das durch P_0 und Q_0 bestimmte Element (P_0, p_β) in das Element, dessen Punkt der Schnittpunkt von p_0 und q_0 und dessen Gerade p_0 ist. Nach Satz 8a liegt daher der damals mit A_β bezeichnete Punkt einerseits auf dem Lote, das in P_0 auf $P_0 Q_0$ senkrecht steht, andererseits auf dem Lote, das im Schnittpunkt von p_0 und q_0 auf p_0 senkrecht steht. A_β aber ist ein Punkt der fraglichen Geraden p_0'. Wir formulieren daher der bequemeren Verweisung halber noch den

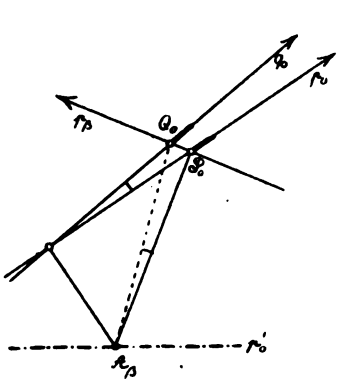


Fig. 11.

Satz 15. *Ist eine Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) in der Ebene gegeben, so erhält man Punkte derjenigen Geraden p_0', die nach* § 1 *einem Elemente (P_0, p_0) der Schar zugeordnet ist, auf folgende Weise: Man wählt ein dem Elemente (P_0, p_0) unendlich benachbartes Element (Q_0, q_0) der Schar und konstruiert einerseits das Lot zu $P_0 Q_0$ durch P_0 und andererseits das Lot zu p_0 im Schnittpunkt von p_0 und q_0. Beide Lote treffen sich in einem Punkte A von p_0'.*

Hieraus folgt übrigens, *daß $\sphericalangle\, P_0 A Q_0$ gleich dem unendlich kleinen Winkel ist, den p_0 und q_0 miteinander bilden.*

Diese im Grunde genommen schon in § 1 enthaltenen Ergebnisse werden wir bald weiter verwenden. —

Aus der gegebenen Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) leiten wir jetzt durch eine einfache Konstruktion eine neue Schar von ∞^2 Linienelementen ab. *Wir spiegeln nämlich jedes Element (P_0, p_0) an der zugeordneten Geraden p_0'.* Dadurch geht jedes Element (P_0, p_0) in ein neues über, das zum Unterschied mit $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ bezeichnet sei (siehe Fig. 12).

Dies Verfahren ist wohlbemerkt keine Spiegelung der ganzen Ebene an ein und derselben Geraden, vielmehr ist die *Spiegelgerade p_0'* von Element zu Element eine andere.

Wir gelangen auf diesem Wege zu einer neuen Schar von ∞^2 Linienelementen $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ der Ebene und wollen die innigen Beziehungen, die zwischen dieser und der ursprünglichen Schar bestehen, genauer untersuchen.

Zunächst können wir für die neue Schar von ∞^2 Elementen $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ genau dieselben Betrachtungen anstellen wie für die alte Schar, können wie in § 1 die Elemente der neuen Schar dadurch verwandeln, daß wir die Gerade eines jeden Elementes um denselben Winkel um den Punkt des Elementes drehen, oder auch dadurch, daß wir den Punkt eines jeden Elementes um dieselbe Strecke längs der Geraden des Elementes verschieben. Wenn man nun den Fortschreitungssinn auf den Geraden $\bar{p}_0$ so festsetzt, wie er aus dem den Geraden p_0 durch die angewandten Spiegelungen hervorgeht, und wenn man außerdem den Drehsinn für die neue Schar entgegengesetzt wählt wie bei der alten Schar, so erhellt sofort: Die Gerade $\bar{p}_\alpha$ und die Punkte $\bar{P}_\alpha$, die sich bei der neuen Schar durch dieselben Prozesse ergeben wie die Geraden p_α und die Punkte P_α bei der alten Schar, gehen einfach dadurch hervor, daß wir alle Geraden p_α und alle Punkte P_α, die aus einem Elemente (P_0, p_0) durch Drehen und Verschieben hervorgehen, an der zugehörigen Spiegelgeraden p_0' ebenfalls spiegeln.

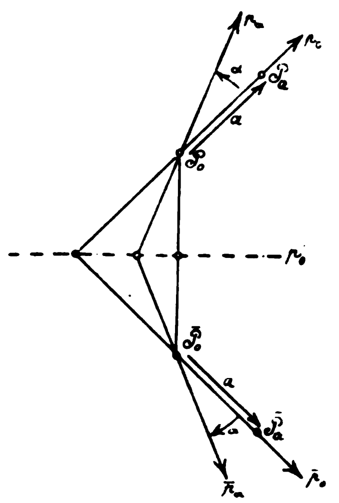


Fig. 12.

Ebenso wie bei der vorgelegten Schar von Elementen jedem Elemente (P_0, p_0) eine gewisse Gerade p_0' zugeordnet ist, wird auch bei der neuen Schar von Elementen jedem Elemente $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ eine gewisse Gerade $\bar{p}_0'$ zugeordnet sein. *Es liegt nun sehr nahe zu vermuten, daß $\bar{p}_0'$ mit p_0' zusammenfällt, vorausgesetzt, daß das Element $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ gerade aus dem Elemente (P_0, p_0) durch Spiegelung hervorgegangen ist.* Doch muß dies erst bewiesen werden.*)

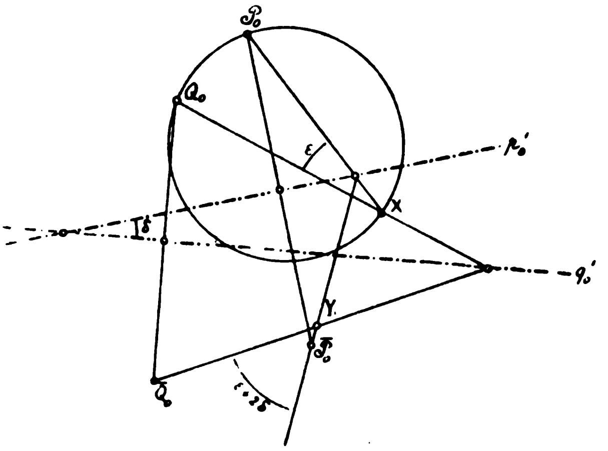


Fig. 13.

Dabei gebrauchen wir einige einfache Sätze über Spiegelungen. Sind p_0' und q_0' zwei Spiegelachsen (siehe Fig. 13) und wird ein Punkt P_0 an p_0'

*) Was in der Arbeit des Verf. in den Leipziger Berichten 1904, S. 113, übersehen wurde.

in $\overline{P}_0$ und ein zweiter Punkt Q_0 an q_0' in $\overline{Q}_0$ gespiegelt, so werde ein Kreis durch $\overline{P}_0$ und $\overline{Q}_0$ betrachtet. Zu jedem Punkte X des Kreises gehört ein Winkel $P_0 X Q_0$, der als Peripheriewinkel eine konstante Größe ε hat. Bei der Spiegelung der Sehne XP_0 an p_0' und der Sehne XQ_0 an q_0' gehen zwei Geraden durch $\overline{P}_0$ und $\overline{Q}_0$ hervor. Wir behaupten, daß der Ort ihrer Schnittpunkte Y wieder ein Kreis ist. In der Tat, ist δ der Winkel der Spiegelgeraden, so bilden die aus XP_0 durch Spiegelung an p_0' und die aus XQ_0 durch Spiegelung an q_0' hervorgehenden Geraden in ihrem Schnittpunkt den ebenfalls konstanten Winkel $\varepsilon + 2\delta$. Also ist der Ort von Y ein Kreis durch $\overline{P}_0$ und $\overline{Q}_0$. Wenn der erste Kreis insbesondere durch den Fußpunkt F des Lotes von P_0 auf p_0' geht (siehe Fig. 14), so geht der neue Kreis durch den Schnittpunkt von $P_0\overline{P}_0$ mit derjenigen Geraden, die $\overline{Q}_0$ mit dem Spiegelpunkt G von F hinsichtlich q_0' verbindet. Ist der Winkel von p_0' und q_0' unendlich klein, so weicht G um unendlich wenig von *höherer* Ordnung von der Geraden $P_0\overline{P}_0$ ab, d. h. dann geht der neue Kreis auch durch F selbst.

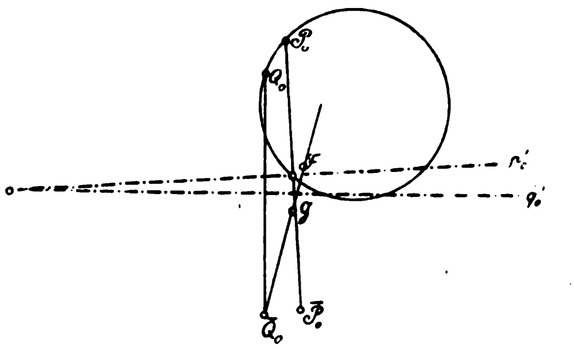


Fig. 14.

Dies werden wir sogleich anwenden.

Um die oben aufgestellte Behauptung zu beweisen, betrachten wir (siehe Fig. 15) außer dem Elemente (P_0, p_0) der ursprünglichen Schar ein dazu unendlich benachbartes Element (Q_0, q_0) derselben Schar. Es seien p_0' und q_0' die zugeordneten Geraden (Spiegelachsen). Nach Satz 15 trifft das Lot zu

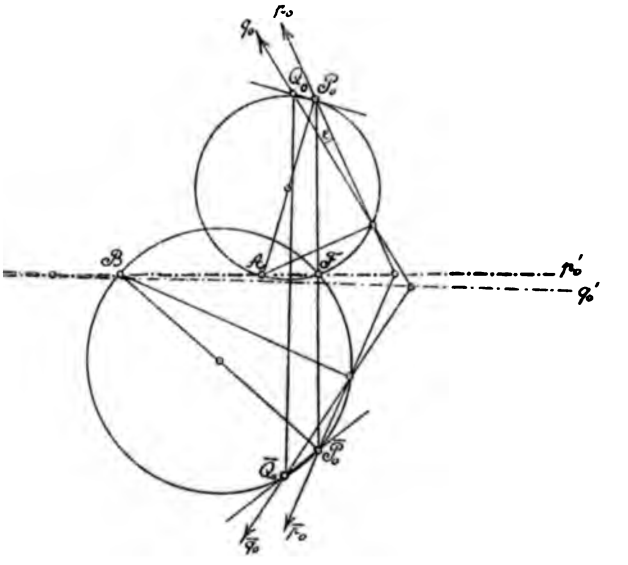


Fig. 15.

durch P_0 die Gerade p_0' in demselben Punkte A wie das Lot zu p_0 durch den Schnittpunkt von p_0 und q_0. Außerdem ist der Winkel $P_0 A Q_0$ nach der zu Satz 15 hinzugefügten Bemerkung gleich dem unendlich kleinen Winkel ε von p_0 und q_0. Daher liegen P_0, Q_0, A und der Schnittpunkt von p_0 und q_0 auf einem Kreise durch den Fußpunkt F des Lotes von P_0 auf p_0'. Wir spiegeln nun das Element (P_0, p_0) an p_0' in ein Element $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ der neuen Schar und ebenso das Element (Q_0, q_0) an q_0' in ein Element $(\bar{Q}_0, \bar{q}_0)$ der neuen Schar. Aus dem soeben entwickelten Satze folgt nun unmittelbar, daß $\bar{P}_0$, $\bar{Q}_0$ und der Schnittpunkt von $\bar{p}_0$ und $\bar{q}_0$ auf einen Kreise durch F liegen. Da $\bar{P}_0\bar{Q}_0$ Tangente des Kreises ist, so ist das Lot zu $\bar{P}_0\bar{Q}_0$ durch $\bar{P}_0$ Kreisdurchmesser. Insbesondere ist, da p_0' auf $\bar{P}_0 F$ senkrecht ist, der zweite Endpunkt dieses Durchmessers der Schnittpunkt B mit p_0'. Also ist auch die Gerade, die B mit dem Schnittpunkt von $\bar{p}_0$ und $\bar{q}_0$ verbindet, senkrecht zu $\bar{p}_0$.

Mithin folgt: Errichten wir auf $\bar{P}_0\bar{Q}_0$ in $\bar{P}_0$ und auf $\bar{p}_0$ im Schnittpunkt mit $\bar{q}_0$ das Lot, so treffen sich beide Lote in einem Punkte B von p_0'. Nach Satz 15 aber — angewandt auf die neue Schar von Elementen — müssen sich beide Lote in einem Punkte der zu $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ zugeordneten Geraden $\bar{p}_0'$ treffen.

Dieselbe Betrachtung können wir nun anstellen, wenn wir statt (Q_0, q_0) irgend ein anderes, zum Elemente (P_0, p_0) unendlich benachbartes Element der alten Schar auswählen. Daraus folgt: Die Gerade $\bar{p}_0'$ hat mit der Geraden p_0' alle Punkte B gemein, und daher sind beide Geraden dieselben.

Satz 16. *Liegt eine Schar von ∞^2 Linienelementen (P_0, p_0) in der Ebene vor, so ist jedem Elemente (P_0, p_0) der Schar nach § 1 eine Gerade p_0' zugeordnet. Spiegelt man jedes Element an der zugehörigen Geraden p_0', so geht eine neue Schar von ∞^2 Elementen $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ hervor. Auch hier ist jedem Elemente $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ eine Gerade zugeordnet. Sie ist identisch mit der Geraden p_0', die demjenigen Elemente (P_0, p_0) zugeordnet ist, aus dem das Element $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ durch Spiegelung hervorgegangen ist.*

Die Beziehung zwischen den beiden Scharen (P_0, p_0) und $(\bar{P}_0, \bar{p}_0)$ von Linienelementen ist also durchaus wechselseitig: Wären wir von der zweiten Schar statt von der ersten ausgegangen, so hätte uns dasselbe Verfahren der Spiegelung zur ersten Schar geführt.

Indem wir nun den Satz 7 des § 1 bei der neuen Schar von ∞^2 Elementen anwenden, die ja eine neue Schar von ∞^1 Kurven $\bar{\Gamma}_0$ definieren, gelangen wir zu den merkwürdigen Sätzen:

Satz 17a. *Zu jeder Schar von ∞^2 Isogonalkurven in der Ebene*

Satz 17b. *Zu jeder Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven in der Ebene* *gibt es eine ganz bestimmte zweite Schar von* ∞^2 *Isogonalkurven, derart daß zwischen beiden Scharen folgende Beziehung besteht:*

Alle diejenigen ∞^1 *Kurven der ersten Schar, die einen Punkt* P_0 *gemein haben, haben in* P_0 *solche Krümmungskreise, die noch einen zweiten Punkt* $\overline{P}_0$ *gemein haben. Diese Kreise sind zugleich die Krümmungskreise aller durch* $\overline{P}_0$ *gehenden* ∞^1 *Kurven der zweiten Schar hinsichtlich dieses Punktes* $\overline{P}_0$.

gibt es eine ganz bestimmte zweite Schar von ∞^2 *Äquitangentialkurven, derart daß zwischen beiden Scharen folgende Beziehung besteht:*

Alle diejenigen ∞^1 *Kurven der ersten Schar, die eine Tangente* p_0 *gemein haben, haben in den Berührungspunkten von* p_0 *solche Krümmungskreise, die noch eine zweite Gerade* $\overline{p}_0$ *berühren. Diese Kreise sind zugleich die Krümmungskreise aller* $\overline{p}_0$ *berührenden* ∞^1 *Kurven der zweiten Schar hinsichtlich ihrer Berührungspunkte mit* $\overline{p}_0$.

Zur Veranschaulichung nennen wir ein Beispiel*) zum Satze 17a: Alle ∞^2 Parabeln mit demselben Brennpunkt O bilden eine Schar von Isogonalkurven. Hier besteht die zugeordnete Schar aus allen ∞^2 Kardioiden mit der Spitze O. Ist P_0 irgend ein Punkt der Ebene, so ist der zugehörige Pnnkt $\overline{P}_0$ zu erhalten, indem man $P_0 O$ über O hinaus verlängert und von O aus auf der Verlängerung dreimal die Strecke $P_0 O$ abträgt. Die Spiegelachse p_0' nämlich liegt hier senkrecht zu $P_0 O$ auf der andern Seite von O in gleichem Abstande wie P_0. Also folgt hier: Legt man durch einen Punkt P_0 alle Parabeln mit dem Brennpunkt O, so haben sie in P_0 solche Krümmungskreise, die noch durch $\overline{P}_0$ gehen und dort zugleich Krümmungskreise aller derjenigen Kardioiden mit der Spitze O sind, die durch $\overline{P}_0$ gehen.

Als Beispiel zu Satz 17b benutzen wir die in § 3, S. 511, gefundenen ∞^2 Kreisevolventen, die zu allen Kreisen um einen Punkt O als Mitte gehören. Wenn wir alle ∞^1 Kreisevolventen betrachten, die dieselbe Gerade p_0 berühren, so erkennen wir, daß die Krümmungskreise für ihre Berührungspunkte mit p_0 auf der Parallelen p_0' zu p_0 durch O liegen. Hier also geht $\overline{p}_0$ aus p_0 durch Spiegelung an dieser Geraden p_0' hervor, woraus folgt, daß in diesem besonderen Falle die zweite Schar von Äquitangentialkurven mit der ersten identisch ist.

Es kann, wie hier, so auch bei Isogonalkurven vorkommen, daß die zugeordnete zweite Schar mit der ersten identisch ist.

Zur richtigen Auffassung der Sätze 17a und 17b wird es nützlich

*) Bezüglich der Herleitung dieses Beispiels vgl. die früher genannte Arbeit des Verf. von 1898, S. 294. Dort findet man noch viele andere Beispiele zu Satz 17a. Dagegen ist Satz 17b erst jetzt neu hinzugekommen.

sein, hervorzuheben, *daß die zugeordnete zweite Schar von Kurven im allgemeinen durchaus nicht etwa durch eine Punkttransformation aus der alten Schar hervorgeht.*

§ 5.

Analytische Ableitung der Sätze über Isogonalkurven und Äquitangentialkurven.

Weiterer Folgerungen halber, die wir zu ziehen gedenken, erweist es sich als erwünscht, die bisherigen Ergebnisse, soweit nötig, auch analytisch abzuleiten. Das dabei zu benutzende Koordinatensystem ist mit Sorgfalt auszuwählen. Haben wir es doch mit zwei Reihen von Betrachtungen zu tun: bei denen der ersten Reihe drehten wir Geraden (p_0) um Punkte (P_0) um konstante Winkel, bei denen der zweiten Reihe verschoben wir Punkte (P_0) auf Geraden (p_0) um konstante Strecken. Im ersten Fall verwenden wir daher Punktkoordinaten, im zweiten Linienkoordinaten.

In gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y pflegt man ein Linienelement durch die Koordinaten x, y seines Punktes und durch die Angabe der Richtung seiner Geraden festzulegen. Drückt man diese Richtung durch $y' = \frac{dy}{dx}$, das Verhältnis der Zunahmen der Punktkoordinaten längs der Geraden, aus, so bleibt noch der Fortschreitungssinn der Geraden des Elementes in Zweifel.*) Wir benutzen daher als dritte Koordinate des Linienelementes besser den Winkel w selbst, den die mit Fortschreitungssinn belegte Gerade des Elementes mit der positiven x-Achse bildet, so daß $y' = \operatorname{tg} w$ ist.

Was nun die Linienkoordinaten anlangt, von denen wir bei der zweiten Betrachtungsreihe ausgehen, so erkennt man leicht, daß es sich empfiehlt, *als Linienkoordinaten diejenigen Bestimmungsstücke anzuwenden, die in der Hesseschen Normalform der Gleichung einer Geraden auftreten.* Jedoch haben wir, weil wir den Geraden Fortschreitungssinne beilegen, über die Vorzeichen folgendes festzusetzen: Wir fällen vom Anfangspunkt O das Lot auf die Gerade und legen dem Lote den positiven Sinn bei in der Richtung von O nach dem Fußpunkte, wenn O linker Hand von der Geraden liegt, vorausgesetzt daß man längs der Geraden im Sinne ihrer Fortschreitung hinblickt (siehe Fig. 16). Liegt O rechter Hand von der Geraden, so betrachten wir das Lot als negativ. Den Winkel, den das Lot mit der x-Achse bildet, messen wir nun, indem wir

*) Auf die Notwendigkeit, die Linienelemente unzweideutig in bezug auf den Fortschreitungssinn ihrer Geraden zu orientieren, hat Study in den Göttingischen gelehrten Anzeigen 1897, S. 441, mit besonderem Nachdruck hingewiesen.

die positive x-Achse sich nach der positiven y-Achse hin so weit drehen lassen, bis sie auch dem Sinne nach mit jenem Lote zusammenfällt. Den so gemessenen Winkel nennen wir u, das in obiger Weise mit Vorzeichen versehene Lot v. Der Winkel u kommt natürlich nur in den Funktionen $\sin u$ und $\cos u$ vor, wir können ihn also ohne wesentliche Änderung der Formeln auch negativ annehmen, indem wir in entgegengesetztem Sinne drehen, da

$$\sin u = \sin(u - 2\pi) \text{ und } \cos u = \cos(u - 2\pi)$$

ist.

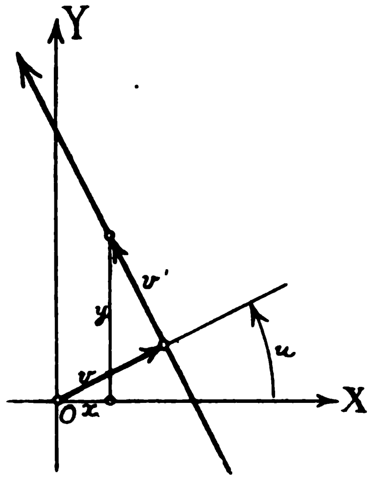


Fig. 16.

Diese Bestimmungsstücke u, v der Geraden können wir vielleicht zweckmäßig ihre *Normalkoordinaten* nennen. Ein Punkt (x, y) liegt auf der Geraden (u, v), wenn

$$x \cos u + y \sin u - v = 0$$

ist. Dies ist also die Bedingung der vereinigten Lage. Sind (u, v) und $(u + du,\ v + dv)$ unendlich benachbarte Geraden, so erfüllt ihr Schnittpunkt (x, y) außer dieser Gleichung noch die Gleichung:

$$-x \sin u + y \cos u - \frac{dv}{du} = 0,$$

so daß

$$x = v \cos u - \frac{dv}{du} \sin u,$$

$$y = v \sin u + \frac{dv}{du} \cos u$$

ist. Man erkennt sofort, daß

$$v' = \frac{dv}{du} = -x \sin u + y \cos u$$

die Länge der Strecke ist, die man auf der Geraden (u, v) vom Fußpunkte des Lotes v aus beschreiben muß, um zum Punkte (x, y) zu gelangen, und zwar ist v' positiv oder negativ, je nachdem man dabei in Übereinstimmung mit dem Fortschreitungssinn der Geraden ist oder nicht. *Die drei Größen* u, v, $v' = \frac{dv}{du}$ *sind also geometrisch leicht definierbare Koordinaten der Linienelemente.*

Wenn wir ein Linienelement der Ebene einerseits durch die früheren Koordinaten x, y und w, andererseits durch die soeben eingeführten

Koordinaten bestimmen, so bestehen zwischen den beiden Wertetripeln die Beziehungen:

$$(1)\quad \begin{cases} x = v\cos u - \dfrac{dv}{du}\sin u, \\ y = v\sin u + \dfrac{dv}{du}\cos u, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{dy}{dx} = w = u + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

oder, nach u, v, $\frac{dv}{du}$ aufgelöst:

$$(2)\quad \begin{cases} u = w - \dfrac{\pi}{2}, \\ v = x\cos u + y\sin u = x\sin w - y\cos w, \\ v' = \dfrac{dv}{du} = -x\sin u + y\cos u = x\cos w + y\sin w. \end{cases}$$

In § 1 gingen wir von einer stetigen Schar von ∞^2 Linienelementen aus, deren Punkte bez. Geraden die ganze Ebene erfüllen sollten. Diese Schar wird im xy-System definiert durch eine Gleichung:

$$(3a)\qquad w = \lambda(x, y),$$

die für jeden Punkt (x, y) den Winkel der positiven Richtung der Geraden des Elementes angibt, dagegen im uv-System durch eine Gleichung:

$$(3b)\qquad v' = \mu(u, v),$$

die auf jeder Geraden (u, v) den Punkt des betreffenden Elementes festlegt.

Soll (3a) dieselbe Schar von ∞^2 Elementen definieren wie (3b), so muß (3a) mittels der Substitutionen (1) in (3b) oder auch (3b) mittels der Substitutionen (2) in (3a) übergehen. (3a) muß sich also decken mit der Gleichung:

$$x\cos w + y\sin w = \mu\left(w - \frac{\pi}{2},\ x\sin w - y\cos w\right),$$

d. h. es soll für alle Werte von x, y sein:

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda \equiv \mu\left(\lambda - \frac{\pi}{2},\ x\sin\lambda - y\cos\lambda\right).$$

Hieraus folgen durch Differentiation nach x bez. y zwei nachher zu benutzende Relationen, in denen wir $\lambda - \frac{\pi}{2}$ und $x\sin\lambda - y\cos\lambda$ zur Abkürzung wieder — nach (2) — mit u und v bezeichnen, nämlich:

$$(4)\quad \begin{cases} (-x\sin\lambda + y\cos\lambda)\,\lambda_x + \cos\lambda = \mu_u\cdot\lambda_x + \mu_v\cdot(x\cos\lambda + y\sin\lambda)\cdot\lambda_x \\ \qquad\qquad + \mu_v\sin\lambda, \\ (-x\sin\lambda + y\cos\lambda)\,\lambda_y + \sin\lambda = \mu_u\cdot\lambda_y + \mu_v\cdot(x\cos\lambda + y\sin\lambda)\cdot\lambda_y \\ \qquad\qquad - \mu_v\cos\lambda. \end{cases}$$

Die gegebenen ∞^2 Elemente (x, y, w) definieren ∞^1 Kurven Γ_0, deren Differentialgleichung in Punktkoordinaten x, y lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \lambda(x, y).$$

Wir drehen jedes Element um seinen Punkt um den Winkel α. Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\lambda + \alpha)$$

die Differentialgleichung der Isogonalkurven A_α der gegebenen Schar Γ_0 (oder A_0). Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung *aller* ∞^2 Isogonalkurven zu erhalten, differenzieren wir nochmals:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}}{\cos^2(\lambda + \alpha)}$$

und eliminieren α aus beiden Gleichungen. Es ergibt sich also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}\right)\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises derjenigen Isogonalkurve, die im Punkte (x, y) die Richtung $\frac{dy}{dx}$ hat, hat die Koordinaten

$$\mathfrak{x} = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx},$$

$$\mathfrak{y} = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so daß sich ergibt:

Die gegebenen ∞^2 Elemente (u, v, v') definieren ∞^1 Kurven Γ_0, deren Differentialgleichung in Normal-Linienkoordinaten u, v lautet:

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v).$$

Wir verschieben jedes Element längs seiner Geraden um die Strecke a. Dann ist

$$\frac{du}{dv} = \mu(u, v) + a$$

die Differentialgleichung der Äquitangentialkurven B_a der gegebenen Schar Γ_0 (oder B_0). Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung *aller* ∞^2 Äquitangentialkurven zu erhalten, brauchen wir diese Gleichung nur noch einmal zu differenzieren, da alsdann die Konstante a herausfällt. Es ergibt sich also:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \mu_u + \mu_v \frac{dv}{du}.$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises derjenigen Äquitangentialkurve, die die Gerade (u, v) in dem durch $\frac{dv}{du}$ bestimmten Punkte berührt, d. h. nach (1) in dem Punkte

$$x = v \cos u - \frac{dv}{du} \sin u,$$

$$y = v \sin u + \frac{dv}{du} \cos u,$$

liegt in dem Schnittpunkt der Normalen

$$\mathfrak{x} \sin u - \mathfrak{y} \cos u + \frac{dv}{du} = 0,$$

mit der unendlich benachbarten

$$\mathfrak{x} \cos u + \mathfrak{y} \sin u + \frac{d^2v}{du^2} = 0,$$

so daß sich wegen des obigen Wertes von $\frac{d^2v}{du^2}$ ergibt:

$$\mathfrak{x} - x = -\frac{1}{\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\mathfrak{y} - y = \frac{1}{\lambda_x + \lambda_y \frac{dy}{dx}}.$$

Durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ kommt:

$$(5a) \quad \lambda_y(\mathfrak{x} - x) - \lambda_x(\mathfrak{y} - y) + 1 = 0.$$

$$\mathfrak{x} = -\sin u \cdot \frac{dv}{du} - \left(\mu_u + \mu_v \frac{dv}{du}\right) \cos u,$$

$$\mathfrak{y} = \cos u \cdot \frac{dv}{du} - \left(\mu_u + \mu_v \frac{dv}{du}\right) \sin u.$$

Durch Elimination von $\frac{dv}{du}$ kommt:

$$(5b) \quad (\mu_v \sin u - \cos u)\mathfrak{x} - (\mu_v \cos u + \sin u)\mathfrak{y} = \mu_u.$$

Die beiden Gleichungen (5a) und (5b) sind linear in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, stellen also je eine Gerade dar. Die beiden Gleichungen würden dieselbe Gerade darstellen, wenn

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_y x - \lambda_x y - 1} = \frac{\mu_v \sin u - \cos u}{\mu_u},$$

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y x - \lambda_x y - 1} = \frac{\mu_v \cos u + \sin u}{\mu_v}$$

wäre. Diese Gleichungen aber sind in der Tat richtig infolge von (4), wenn wir bedenken, daß nach der ersten Gleichung (2) $\sin u = -\cos w$, $\cos u = \sin w$ ist, d. h. $\sin u = -\cos \lambda$, $\cos u = \sin \lambda$, da $w = \lambda(x, y)$ angenommen worden ist.

Da also die beiden Gleichungen (5a) und (5b) dieselbe Gerade darsellen, so folgt, daß erstens alle durch einen bestimmten Punkt P_0 gehenden Isogonalkurven in P_0 solche Krümmungskreise haben, deren Mitten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine Gerade erfüllen, daß zweitens alle eine bestimmte Gerade p_0 berührenden Äquitangentialkurven in ihren Berührungspunkten solche Krümmungskreise haben, deren Mitten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ebenfalls eine Gerade erfüllen, und daß drittens beide Geraden zusammenfallen, sobald p_0 die Tangente derjenigen Kurve Γ_0 in P_0 ist, die durch P_0 hindurchgeht.

Hiermit ist der Satz 7 des § 1, S. 500, von neuem bewiesen.

Da die beiden Gleichungen (5a) und (5b) übereinstimmen, brauchen wir jetzt nur noch eine von beiden, etwa (5a), zu berücksichtigen. In § 4 spiegelten wir jeden Punkt (x, y) oder P_0 an der zugehörigen Geraden p_0'. Diese Gerade ist aber die Gerade (5a). Bei der Spiegelung geht der Punkt P_0 in einen neuen Punkt $\bar{P}_0$ oder $(\bar{x}, \bar{y})$ über. Es kommt offenbar:

$$(6) \qquad \bar{x} = x - \frac{2\lambda_y}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}, \quad \bar{y} = y + \frac{2\lambda_x}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}.$$

Wir zeigten nun in § 4, daß die Beziehung zwischen den ursprünglichen Punkten P_0 und den transformierten Punkten $\bar{P}_0$ eine durchaus wechselseitige ist. Analytisch kommt dies darauf hinaus, daß die zur Punkttransformation (6) inverse Transformation wieder dieselbe charakteristische Form (6) hat, indem nur statt λ eine neue Funktion $\bar{\lambda}$ von $\bar{x}$ und $\bar{y}$

auftritt. D. h., um jene Umkehrbarkeit analytisch zu beweisen, müssen wir zeigen, daß die Auflösung von (6) nach x, y Gleichungen gibt von der Form:

$$(7) \qquad x = \bar{x} - \frac{2\bar{\lambda}_{\bar{y}}}{\bar{\lambda}_{\bar{x}}^2 + \bar{\lambda}_{\bar{y}}^2}, \quad y = \bar{y} + \frac{2\bar{\lambda}_{\bar{x}}}{\bar{\lambda}_{\bar{x}}^2 + \bar{\lambda}_{\bar{y}}^2}.$$

Um dies zu tun*), empfiehlt es sich, die Gleichungen (6) bequemer zu schreiben: Wir setzen:

$$(8) \qquad \lambda_x = \varrho \cos \omega, \qquad \lambda_y = \varrho \sin \omega,$$

indem wir unter ϱ, ω irgend zwei Funktionen von x, y von der Art verstehen, daß es wirklich nach (8) eine zugehörige Funktion λ gibt, d. h. daß

$$(9) \qquad d\lambda = \varrho \cos \omega\, dx + \varrho \sin \omega\, dy$$

wirklich ein *vollständiges Differential* ist. Setzen wir dies voraus, so läßt sich (6) so schreiben:

$$(6') \qquad \bar{x} = x - 2\frac{\sin \omega}{\varrho}, \quad \bar{y} = y + 2\frac{\cos \omega}{\varrho}.$$

Lösen wir diese Gleichungen nach x, y auf, so gehen zunächst Gleichungen von der allgemeinen Form hervor:

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Wir können sie so schreiben:

$$x = \bar{x} - 2 \cdot \frac{\bar{x} - \varphi}{2}, \quad y = \bar{y} + 2 \cdot \frac{\psi - \bar{y}}{2}.$$

Statt φ, ψ führen wir zwei Funktionen $\bar{\varrho}$ und $\bar{\omega}$ von $\bar{x}$, $\bar{y}$ ein, indem wir setzen:

$$\frac{\bar{x} - \varphi}{2} = \frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\varrho}}, \quad \frac{\psi - \bar{y}}{2} = \frac{\cos \bar{\omega}}{\bar{\varrho}},$$

was wir tun dürfen. Alsdann erkennen wir, daß sich die zu (6′) inverse Transformation so schreiben läßt:

$$(7') \qquad x = \bar{x} - 2\frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\varrho}}, \quad y = \bar{y} + 2\frac{\cos \omega}{\bar{\varrho}}.$$

Aber damit ist noch nicht bewiesen, daß sie dieselbe charakteristische Form (6′) hat, denn in (6′) haben ϱ und ω noch die besondere Eigenschaft, daß (9) ein vollständiges Differential ist. Wir müssen also noch beweisen, daß auch:

$$(10) \qquad d\bar{\lambda} = \bar{\varrho} \cos \bar{\omega}\, d\bar{x} + \bar{\varrho} \sin \bar{\omega}\, d\bar{y}$$

ein vollständiges Differential ist. Dies geschieht so: Aus (6′) und (7′) folgt:

$$\frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\varrho}} = -\frac{\sin \omega}{\varrho}, \quad \frac{\cos \bar{\omega}}{\bar{\varrho}} = -\frac{\cos \omega}{\varrho},$$

*) Einen anderen, weniger eleganten Beweis hierfür findet man in der angegebenen ersten Arbeit des Verf. 1898, S. 279—282.

woraus wir schließen: $\bar{\varrho} = -\varrho$, $\bar{\omega} = \omega + 2n\pi$, wo n eine ganze Zahl is
Also hat (10) die Form:

$$d\bar{\lambda} = -(\varrho \cos \omega\, d\bar{x} + \varrho \sin \omega\, d\bar{y}).$$

Da $d\lambda$ ein vollständiges Differential nach Voraussetzung ist, so ist auc $d\bar{\lambda}$ eines, sobald

$$-\frac{1}{2}(d\lambda + d\bar{\lambda}) = \varrho \cos \omega \cdot d\,\frac{\bar{x}-x}{2} + \varrho \sin \omega \cdot d\,\frac{\bar{y}-y}{2}$$

ein vollständiges Differential ist. Es ist aber nach (6'):

$$d\,\frac{\bar{x}-x}{2} = -d\,\frac{\sin \omega}{\varrho}, \quad d\,\frac{\bar{y}-y}{2} = d\,\frac{\cos \omega}{\varrho}.$$

Also muß noch bewiesen werden, daß:

$$\frac{1}{2}(d\lambda + d\bar{\lambda}) = \varrho \cos \omega\, d\,\frac{\sin \omega}{\varrho} - \varrho \sin \omega\, d\,\frac{\cos \omega}{\varrho}$$

ein vollständiges Differential ist. Aber dieser Ausdruck ist:

$$\frac{1}{2}(d\lambda + d\bar{\lambda}) = d\omega$$

und daher tatsächlich ein vollständiges Differential. Hiermit ist der g wünschte Beweis erbracht. Zugleich hat sich ergeben, daß:

$$d\bar{\lambda} = 2d\omega - d\lambda,$$

also:

$$\bar{\lambda} = 2\omega - \lambda + \text{konst.}$$

sein muß. Dabei ist nach (8):

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_y}{\lambda_x},$$

somit:

$$\bar{\lambda} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_y}{\lambda_x} - \lambda + \text{konst.}$$

Da in (7) nur die Differentialquotienten von $\bar{\lambda}$ auftreten, so ist di additive Konstante belanglos. Wir haben also erkannt:

Satz 18. *Diejenige Transformation, die zu der Transformation*

$$\bar{x} = x - \frac{2\lambda_y}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}, \quad \bar{y} = y + \frac{2\lambda_x}{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

invers ist, hat dieselbe charakteristische Form:

$$x = \bar{x} - \frac{2\bar{\lambda}_{\bar{y}}}{\bar{\lambda}_{\bar{x}}^2 + \bar{\lambda}_{\bar{y}}^2}, \quad y = \bar{y} + \frac{2\bar{\lambda}_{\bar{x}}}{\bar{\lambda}_{\bar{x}}^2 + \bar{\lambda}_{\bar{y}}^2}.$$

Dabei ist:

$$\bar{\lambda} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_y}{\lambda_x} - \lambda$$

infolge der vorgelegten Transformation.

Dieser analytische Satz zieht nun nach den vorhergehenden Erörterungen sofort die Sätze 17a und 17b des § 4, S. 516, nach sich, die damit auf neuem Wege bewiesen sind.

§ 6.

Ein Seitenstück zur konformen Gruppe in der Ebene: Die äquilonge Gruppe.

Die unendliche Gruppe aller konformen Punkttransformationen steht in einem sehr engen Zusammenhang mit den Scharen von ∞^2 Isogonalkurven. Da sie nämlich die Winkel invariant läßt, so führt sie jede Schar von ∞^2 Isogonalkurven wieder in eine Schar von ∞^2 Isogonalkurven über.

Die charakteristischen Eigenschaften einer konformen Transformation der Ebene sind erstens, daß sie jeden Punkt in einen Punkt, und zweitens, daß sie jeden Winkel in einen gleichgroßen Winkel überführt.

Infolge des Parallelismus zwischen unseren beiden Betrachtungsreihen liegt demnach eine andere Frage nahe, nämlich die Frage nach denjenigen *Berührungstransformationen der Ebene, die erstens jede Gerade in eine Gerade und zweitens jede Strecke in eine gleichlange Strecke überführen* (siehe Fig. 17). Man kann diese Transformationen vielleicht als *äquilonge Transformationen* bezeichnen. Zu ihnen gehören von den Punkttransformationen der Ebene offenbar nur die Bewegungen der Ebene. Dazu tritt jedoch eine unendliche Schar von äquilongen Berührungstransformationen, unter denen z. B. die *Dilatationen**) enthalten sind. Es ist von vornherein klar, daß alle äquilongen Transformationen eine *Gruppe* bilden und daß jede Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven vermöge einer äquilongen Transformation wieder in eine Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven übergeht. Die Gruppe aller äquilongen Transformationen der Ebene, die *äquilonge Gruppe,* bildet also bei unseren Betrachtungen das vollkommene Gegenstück der konformen Gruppe, und

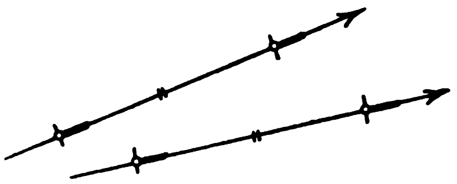


Fig. 17.

*) Vgl. bez. der Dilatationen das auf S. 491 genannte Werk von Lie, S.

wir werden später sehen, daß diese Analogie noch in einer höchst interessanten Hinsicht zum Ausdruck kommt. Vorerst jedoch wollen wir alle äquilongen Transformationen bestimmen.

Dabei benutzen wir die im vorigen Paragraphen (S. 519) eingeführten Normalkoordinaten u, v der Geraden, so daß u, v, v' die Koordinaten der Linienelemente sind. Eine Berührungstransformation der Ebene, die jede Gerade in eine Gerade überführt, geht aus einer Transformation in u, v:

$$\bar{u} = \varphi(u, v), \quad \bar{v} = \psi(u, v) \tag{1}$$

durch *Erweiterung*, d. h. durch Hinzunahme der Transformation des Differentialquotienten v':

$$\bar{v}' = \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'} \tag{2}$$

hervor. Soll sie nun *äquilong* sein, so heißt dies, daß zwei beliebige Linienelemente einer und derselben Geraden (u, v) so in zwei Linienelemente der neuen Geraden $(\bar{u}, \bar{v})$ übergehen sollen, daß die Strecke a zwischen den Punkten der beiden ursprünglichen Elemente gleich der Strecke zwischen den Punkten der beiden neuen Elemente ist. Da v', wie wir auf S. 519 sahen, die Strecke auf der Geraden (u, v) des Elementes (u, v, v') vom Fußpunkt des Lotes v bis zum Punkte des Elementes bedeutet, so haben die beiden ursprünglichen Elemente die Koordinaten u, v, v' bez. $u, v, v' + a$. Also fordern wir nur dies: Wenn v' in (2) durch $v' + a$ ersetzt wird, so soll $\bar{v}'$ in $\bar{v}' + a$ übergehen, und zwar für jeden Wert von u, v, v' und a. Es soll also sein:

$$\frac{\psi_u + \psi_v (v' + a)}{\varphi_u + \varphi_v (v' + a)} - \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'} = a,$$

was aber dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$\varphi_v = 0, \quad \psi_v = \varphi_u \tag{3}$$

ist, wenn wir beachten, daß natürlich $\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v \equiv\mathrel{\mkern-14mu}| \; 0$ sein muß. φ ist also eine Funktion von u allein, so daß φ_u mit φ' bezeichnet werden kann, während

$$\psi = \varphi' v + \chi$$

ist, wo χ auch nur von u abhängt. Also folgt:

Satz 19: *Die äquilongen Transformationen haben in Normal-Linienkoordinaten die Form:*

$$\bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \varphi' v + \chi(u),$$
$$\bar{v}' = \frac{\chi'}{\varphi'} + \frac{\varphi''}{\varphi'} v + v',$$

wo φ und χ nur von u abhängen.

Wie man sieht, enthalten diese Gleichungen noch zwei beliebig annehmbare Funktionen φ und χ von u allein. Alle äquilongen Transformationen bilden eben eine unendliche Gruppe, die *unendliche äquilonge Gruppe.*

Man kann diese Gruppe benutzen, um aus einer bekannten Schar von Äquitangentialkurven neue Scharen abzuleiten, ebenso wie man aus einer bekannten Schar von Isogonalkurven neue mittels der konformen Gruppe erhält.

§ 7.

Die konforme und die äquilonge Gruppe der Ebene dargestellt mittels der beiden Zahlensysteme in zwei Einheiten.

Es ist bekannt, daß sich die konforme Gruppe durch eine einzige Gleichung darstellen läßt, sobald man die Punkte (x, y) der Ebene als Träger der gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$ benutzt. Denn alsdann ist:

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy)$$

die Gleichung der Gruppe, nämlich der Ausdruck einer konformen Abbildung der Ebene.

Die Funktion $f(x + iy)$ ist dabei eine analytische Funktion, d. h. der Differentialquotient

$$\frac{df(x+iy)}{d(x+iy)}$$

ist von der Richtung, nach der man vom Punkte (x, y) um unendlich wenig weiter geht, unabhängig.

Diese Erwägung führt uns nun abermals zu einer merkwürdigen Analogie. Zu ihrer Erläuterung holen wir, um nicht zu viel voraussetzen zu müssen, etwas weiter aus:

Man kann statt der aus 1 und i gebildeten komplexen Zahlen $x + iy$ Zahlen $x + jy$ einführen, die aus 1 und einer andern Einheit j zusammengesetzt sind. Wie i *nur* durch die Eigenschaft $i^2 = -1$ definiert ist, so können wir von diesem allgemeinen Standpunkt aus j definieren durch die Eigenschaft:

$$j^2 = \alpha + \beta j,$$

wo α und β zwei bestimmt gewählte Zahlen bedeuten, die den gewöhnlichen Rechenregeln folgen.

Alsdann sind die Produkte zweier beliebiger Zahlen $x + jy$ und $x' + jy'$ des Systems definiert durch die Formel, die aus dem Gesetze der Distribution, nämlich aus:

$$(x + jy)(x' + jy') = xx' + (xy' + yx')j + yy'j^2,$$

folgt, d. h. durch das Gesetz:

$$(x + jy)(x' + jy') = xx' + \alpha yy' + j(xy' + yx' + \beta yy').$$

Auch gilt das Gesetz der Assoziation $(ab)c = a(bc)$. Nur *ein* Gesetz der gewöhnlichen Multiplikation braucht nicht erfüllt zu sein, nämlich das, wonach ein Produkt nur dann gleich Null ist, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist. Lassen wir dies Gesetz fallen, so ist der Begriff des Zahlensystems in zwei Einheiten $1, j$ allgemeiner als der des gewöhnlichen komplexen Systems*).

Es läßt sich bekanntlich — und zwar auf recht einfachem Wege — zeigen, daß man jedes solche System dadurch, daß man als zweite Einheit des Systems statt j eine *passende* Zahl $a + bj$ benutzt, wo $b \neq 0$ ist, auf eine von *zwei typischen Formen* bringen kann**). Die erste Form ist nichts anderes als das gewöhnliche komplexe System, worin wir also die zweite Einheit mit i bezeichnen werden, so daß $i^2 = -1$ ist. Die zweite Form dagegen ist das System, bei dem $j^2 = 0$ ist.

Dieses zweite System hat die Produktregel:

$$(x + jy)(x' + jy') = xx' + j(xy' + yx').$$

Sind nun $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei Funktionen von x, y innerhalb des Gebietes der reellen oder auch der gewöhnlichen komplexen Zahlen, d. h. innerhalb des Gebietes, in dem die gewöhnlichen Rechenregeln gelten, so können wir den Ausdruck:

$$\varphi(x, y) + j\psi(x, y)$$

betrachten. Er ändert sich, wenn sich x oder y ändert, ist also eine Funktion von x und y. Allgemein ist sein totales Differential:

$$(\varphi_x + j\psi_x)\,dx + (\varphi_y + j\psi_y)\,dy.$$

Man kann nun diesen Ausdruck $\varphi + j\psi$ in Analogie mit der Ausgangsbetrachtung der Funktionentheorie als eine „analytische" Funktion***) im Zahlensystem $1, j$ bezeichnen, wenn der „Differentialquotient"

$$\frac{(\varphi_x + j\psi_x)dx + (\varphi_y + j\psi_y)dy}{dx + jdy},$$

den man aus jenem Differential und dem Differential $dx + jdy$ der

*) Vgl. z. B. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften I A 4, S. 159 u. f.

**) Vgl. ebenda S. 166. Wir sprechen hier von den verschiedenen „Typen", nicht von den verschiedenen „Gestalten" der Systeme, d. h. wir lassen zu, daß die Koeffizienten a, b irgend welche den gewöhnlichen Rechenregeln folgende Zahlen, also gewöhnliche komplexe Zahlen bedeuten. Infolgedessen gelten unsere späteren Betrachtungen auch für imaginäre Gebilde in der Ebene.

***) Der Verf. hat allgemein, für Zahlensysteme in n Einheiten, die Frage nach dem Vorhandensein von „analytischen" Funktionen untersucht und erledigt. Siehe: „Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Funktionen", Leipziger Berichte 1893, S. 828—848, und 1894, S. 120—134. Im vorliegenden Falle liegen die Verhältnisse sehr einfach.

Zahl $x + jy$ des Systems $1, j$ bilden kann, unabhängig von dem Werte von $dy : dx$ ist, also die Form hat: $\Phi(x, y) + j\Psi(x, y)$. Es ist zu fordern:

$$(\varphi_x + j\psi_x)\,dx + (\varphi_y + j\psi_y)\,dy = (\Phi + j\Psi)(dx + j dy)$$

oder also, wenn wir rechts mit Rücksicht auf $j^2 = 0$ ausmultiplizieren:

$$(\varphi_x + j\psi_x)\,dx + (\varphi_y + j\psi_y)\,dy = \Phi\,dx + j(\Phi\,dy + \Psi\,dx).$$

Es soll also Funktionen Φ und Ψ geben, so daß einzeln:

$$\varphi_x + j\psi_x = \Phi + j\Psi, \quad \varphi_y + j\psi_y = j\Phi$$

ist. Diese Formeln zerfallen wieder in je zwei:

$$\varphi_x = \Phi, \quad \psi_x = \Psi, \quad \varphi_y = 0, \quad \psi_y = \Phi.$$

Es gibt also solche Funktionen Φ und Ψ, sobald:

$$(1) \qquad \varphi_y = 0, \quad \psi_y = \varphi_x$$

ist. Ist dies der Fall, so heiße

$$\varphi(x, y) + j\psi(x, y)$$

eine analytische Funktion $f(x + jy)$ in dem Gebiete der Einheiten 1 und j, wo $j^2 = 0$ ist. Man kann alsdann die grundlegenden Begriffe der gewöhnlichen Funktionentheorie auf diese Funktionen $f(x + jy)$ übertragen, was wir aber hier nicht weiter ausführen wollen.

Die Gleichungen (1) aber sind uns schon unter (3) im vorigen Paragraphen auf S. 526 begegnet. Nur werden dort x und y durch u und v bezeichnet. Der Satz 19 lehrt uns also, daß

$$\bar{u} + j\bar{v} = \varphi(u) + j[\varphi' v + \chi(u)]$$

eine allgemeine analytische Funktion im Gebiete der Zahlen $u + jv$ des aus 1 und j gebildeten Systems ist. Also haben wir zwei einander analoge Sätze:

Satz 20a. *Die konforme Gruppe läßt sich mit Benutzung der Einheiten 1 und i, wo $i^2 = -1$ ist, durch eine einzige Gleichung:* $$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy)$$ *darstellen. Dabei ist $f(x + iy)$ eine beliebige analytische Funktion im System $(1, i)$.*	Satz 20b. *Die äquilonge Gruppe läßt sich mit Benutzung der Einheiten 1 und j, wo $j^2 = 0$ ist, durch eine einzige Gleichung:* $$\bar{u} + j\bar{v} = f(u + jv)$$ *darstellen. Dabei ist $f(u + jv)$ eine beliebige analytische Funktion im System $(1, j)$.*

Hierdurch werden wir schließlich zu den Analogien geführt, die in der folgenden Gegenüberstellung ihren Ausdruck findet:

Satz 21. *Es gibt in zwei Einheiten gerade zwei Typen von Zahlensystemen $(1, i)$ und $(1, j)$, wobei $i^2 = -1$ und $j^2 = 0$ ist.*

Sind die ***Punkte*** *der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten* x, y *die Träger der komplexen Zahlen* $x + iy$ *des Systems* $(1, i)$, *so wird die unendliche konforme Gruppe der Ebene, d. h. die Gruppe aller derjenigen Berührungstransformationen, die jeden Punkt in einen Punkt und jeden Winkel in einen gleich großen Winkel überführen, dargestellt durch die Gleichung:*

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy).$$

Hierin bedeutet $f(x + iy)$ *eine beliebige analytische Funktion, d. h. eine Funktion der komplexen Zahl* $x + iy$, *deren Differentialquotient*

$$\frac{df(x+iy)}{d(x+iy)}$$

von $dy : dx$ *unabhängig ist. Die Transformationen der Gruppe führen jede Schar von* ∞^2 *Isogonalkurven wieder in eine Schar von* ∞^2 *Isogonalkurven über, indem sie die Punkte der Kurven der ersten Schar in die Punkte der Kurven der neuen Schar verwandeln.*

Sind die ***Geraden*** *der Ebenen mit den Normalkoordinaten* u, v *die Träger der komplexen Zahlen* $u + jv$ *des Systems* $(1, j)$, *so wird die unendliche äquilonge Gruppe der Ebene, d. h. die Gruppe aller derjenigen Berührungstransformationen, die jede Gerade in eine Gerade und jede Strecke in eine gleich lange Strecke überführen, dargestellt durch die Gleichung:*

$$\bar{u} + j\bar{v} = f(u + jv).$$

Hierin bedeutet $f(u + jv)$ *eine beliebige analytische Funktion, d. h. eine Funktion der komplexen Zahl* $u + jv$, *deren Differentialquotient*

$$\frac{df(u+jv)}{d(u+jv)}$$

von $dv : du$ *unabhängig ist. Die Transformationen der Gruppe führen jede Schar von* ∞^2 *Äquitangentialkurven wieder in eine Schar von* ∞^2 *Äquitangentialkurven über, indem sie die Tangenten der Kurven der ersten Schar in die Tangenten der Kurven der neuen Schar verwandeln.*

Dadurch, daß wir zu dem ja längst bekannten links stehenden Satze den rechts stehenden gefunden haben, sind wir dazu gelangt, *eine in der Natur der Sache begründete Deutung des zweiten Zahlensystems zu finden, das in zwei Einheiten existiert.* Man sieht, daß es hier naturgemäß ist, die Koeffizienten u, v der Zahl $u + jv$ nicht als Punkt-, sondern als Linienkoordinaten zu deuten und zwar v als das Lot von einem Anfangspunkt auf die Gerade, u als den Winkel des Lotes mit einer Anfangsrichtung.

September 1904.

Inhaltsverzeichnis.

Beitrag zur Theorie der ersten Randwertaufgabe bei der allgemeinen linearen partiellen elliptischen Differentialgleichun 2. Ordnung.

Von

KARL GOLDZIHER in Budapest.

Als *Dirichletsches Prinzip* bezeichnet man gewöhnlich jenen Gedanke gang, der die eindeutige Existenz der Lösung $u(x, y)$ der sogenannte Laplaceschen Differentialgleichung:

$$\text{(I)} \qquad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bei vorgeschriebenen Stetigkeits- und Randbedingungen auf Grund eine *Variationsproblems* postuliert. Dirichlet hat diesen Gedanken für (I nur hinsichtlich der Eindeutigkeit streng durchgeführt und erst nach de neuesten Rekonstruktion des Existenzbeweises durch D. Hilbert*) kan man der Hoffnung Ausdruck geben, daß diese besonders für physikalisch Differentialgleichungen fruchtbare Methode die nötige Allgemeinheit er halten wird.

An dieser Stelle greifen wir zunächst auf den Dirichletschen Ein deutigkeitsbeweis**) zurück, um zu zeigen, wie derselbe für die ganz Klasse der ebenen linearen elliptischen Differentialgleichungen 2. O. — i die (I) als wichtigster Spezialfall gehört — methodisch zu verallgemeiner ist. Die bisherigen hierauf bezüglichen Untersuchungen von Picard*** und (auf seine Anregung) von Paraf†) und Le Roy††) gehen auch vo einem Variationsproblem aus, weichen aber in der Folge durch interessant Kunstgriffe ab, so daß dieselben nicht als direkte Verallgemeinerunge

---

*) „Über das Dirichletsche Prinzip", Göttinger Festschrift 1901.

**) S. Weierstraß, Ges. Werke, II. Bd.: „Über das sogen. Dir. Prinzip".

***) S. z. B. Traité d'Analyse II, pg. 23—27.

†) „Sur le problème de Dirichlet", Ann. de Toulouse (1892), Chap. II.

††) „Sur l'intégration des équat. de la chaleur", Ann. de l'École Normale (189 Chap. I.

der Dirichletschen Idee zu bezeichnen sind. Die Grundlage für unsern Beweis bieten die neuen Untersuchungen von Hilbert über die zweite Variation von Integralen, die er im 23. Punkt seines Pariser Vortrages: „Mathematische Probleme"*) publizierte.

Als Anwendung der zu gebenden Ausführungen skizzieren wir zum Schlusse die Lösung der ersten Randwertaufgabe für die wichtige Klasse der sog. *sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichungen* 2. O.

§ 1.

Vorbemerkung.

Wir schicken einen für unser Problem grundlegenden variationstheoretischen Satz voraus, dessen Formulierung wir einer Anregung von Prof. Hilbert**) verdanken.

Der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus, die in ihrer Normalform:

$$L(u) \equiv \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0 \tag{II}$$

die Laplacesche Gleichung enthält, entspricht bekanntlich***) ein allgemeines *Greensches Theorem*, das im Gebiete (Ω) mit dem Rande S folgendermaßen lautet:

$$\int\limits_{(\Omega)}\{vL(u) - uM(v)\}\,d\omega = \int\limits_{S}\left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} - [a\cos(n,x) + b\cos(n,y)]uv\right\}ds,$$

wobei v eine mindestens zweimal differentiierbare Funktion von x, y und

$$M(v) \equiv \Delta v - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv + d$$

der zu $L(u)$ adjungierte Ausdruck ist.

Die Klasse der *sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichungen* ist nun durch die Gleichung:

$$L(u) \equiv M(v) \tag{1}$$

charakterisiert, woraus weiterhin folgt, daß in diesem Falle (II) in die folgende Form übergeht:

$$L(u) \equiv \Delta u + cu + d = 0. \tag{III}$$

---

*) S. Arch. für Math. u. Phys. III, 1, pg. 232—237.

**) Göttinger Vorlesung von S. S. 1901.

***) Betreffs der angeführten allgemeinen Resultate s. den Encyklopädieartikel von Sommerfeld: „Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen", Math. Enc. II A 7c.

Die wichtigsten physikalischen Differentialgleichungen gehören dieser Klasse an; wir erwähnen außer (I) noch die bekannten Differentialgleichungen:

$$\Delta u \pm k^2 u = 0.$$

Wir finden nun die methodische Bedeutung der Theorie dieser Klasse in der Tatsache, daß die für (I) geltenden Variationsüberlegungen für diese Klasse am direktesten zu verallgemeinern sind. Dies wird durch folgende Bemerkung begründet:

Der Übergang zur variationstheoretischen Betrachtung von (I) wird durch das sog. Dirichletsche Integral:

$$(2) \qquad J(u) \equiv \int\limits_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\omega$$

gebildet, dessen Lagrangesche Gleichung (I) ist. Ist nun der Integrand eine allgemeine quadratische Form in $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, also:

$$(2') \qquad J(u) \equiv \int\limits_{(\Omega)} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\omega,$$

wobei:

$$F \equiv a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\left(d\,\frac{\partial u}{\partial x} + e\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+ f\,\frac{\partial u}{\partial x} + g\,\frac{\partial u}{\partial y} + hu + k^{*}),$$

so gilt der leicht zu verifizierende Satz:

Die Klasse der zur Variation des verallgemeinerten Dirichletschen Integrals (2') gehörenden Lagrangeschen Gleichungen ist mit der Klasse der sich selbst adjungierten Differentialgleichungen (III) identisch.

§ 2.

Eindeutigkeit der Lösung der homogenen elliptischen Differentialgleichung.

Der Dirichletsche Eindeutigkeitsbeweis für die Gleichung (I) beruht auf der Untersuchung der zum Integral (2) gehörenden zweiten Variation:

$$\delta^2 J(u) = \int\limits_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} d\omega,$$

wobei v die variierende Hilfsfunktion ist.

---

*) Hierbei ist speziell für den elliptischen Fall:

$$ac - b^2 > 0.$$

Die direkte Verallgemeinerung dieser Methode wäre also zurückzuführen auf die Untersuchung der zweiten Variation des zu (II) als Lagrangescher Gleichung gehörenden allgemeinen Integrales. Das Problem kann aber sofort auf ein bedeutend einfacheres reduziert werden, indem gezeigt werden kann, *daß es genügt, die zweite Variation des zur sich selbst adjungierten Gleichung zugeordneten Integrals* (2′) *zu untersuchen.*

Der Beweis hiervon geht von einem von Picard*) herrührenden Kunstgriff aus; wir beschränken uns dabei auf die homogene Gleichung:

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Angenommen nämlich, daß die erste Randwertaufgabe von (II′) zwei Lösungen u_1, u_2 zuläßt, so setzen wir

$$v = u_1 - u_2$$

und wissen über v folgendes:

$$\text{(a)} \qquad \Delta v + a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + cv = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad v_S = 0.$$

Wenn wir nun das Produkt der linken Seite von (a) mit v in (Ω) partiell integrieren und hierbei auf (b) Rücksicht nehmen, so folgt:

$$\text{(3)} \qquad \int\limits_{(\Omega)}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c\right]v^2\right\}d\omega = 0.$$

In der Tat hat aber die zweite Variation von (2′):

$$\delta^2 J(u) = \int\limits_{(\Omega)}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\left[a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + cv\right]\right\}d\omega$$

die Gestalt (3), wenn wir noch die Glieder in $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ mit Rücksicht auf (b) partiell integriert denken (v war dabei ursprünglich eine beliebige Funktion, der wir jetzt die Bedingung (b) auferlegen).

Ist in der Gleichung (3)

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c \geqq 0,$$

so ist der Eindeutigkeitsbeweis erledigt, da dann aus (3) in Verbindung mit (b)

$$v \equiv 0$$

folgt (z. B. bei (I), wo $a, b, c = 0$).

*) S. Picard: Théorie des équat. aux dériv. partielles etc., Journal des Math. (1890), Chap. I.

Für die allgemeine Gleichung ist also für den Fall, daß

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c < 0$$

die Bedingung festzustellen, wann in solchem Falle der Integrand von (3) eine positive quadratische Form ist.*) Bei der Ermittelung dieser Bedingung kommt nun eben die obige Reduktion zu Bedeutung, da gezeigt ist, daß wir nur die zweite Variation eines verallgemeinerten Dirichletschen Integrals näher zu untersuchen haben. Wir weichen an diesem Punkte von Picard und seinen Schülern ab und wollen ohne Umgehung der weiteren variationsrechnerischen Methode den angetretenen Weg festhalten, indem wir (3) als zweite Variation eines solchen Dirichletschen Integrals auffassen. Zur Ableitung der erwähnten Bedingung werden uns die neuen variationstheoretischen Untersuchungen von Hilbert verhelfen.

Der Einfachheit halber beschäftigen wir uns vorerst mit dem Integral:

$$(3') \qquad \delta^2 \bar{J} = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \lambda v^2 \right\} dx,$$

wobei λ eine stets positive Funktion von x, y bedeutet. Aus der Theorie solcher Integrale ist bekannt, daß (3′) die zweite Variation des relativen Problems:

$$(4) \qquad \bar{\bar{J}} = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \text{Minimum},$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_0^1 u^2\, dx = 1$$

ist und daß dabei der Lagrangesche (von u unabhängige) Faktor:

$$\lambda = \left[\delta \bar{\bar{J}}\right]_{u = \sqrt{2}\sin \pi x} = \pi^2\text{**)}$$

ist.

(3) unterscheidet sich formell nur durch positive Summanden von (3′), so daß es genügt, die gesuchte Bedingung für (3′) zu statuieren. Weiterhin ist das zu beweisende Resultat, daß

$$(5) \qquad \delta^2 \bar{\bar{J}} \geq 0,$$

*) Als interessantes Beispiel führen wir die Differenz zwischen den Gleichungen

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{und} \quad \Delta u - k^2 u = 0$$

an, welche ja in die Theorie dieser Gleichungen tief eingreift.

**)
$$u = \sqrt{2}\sin \pi x$$
ist eine partikuläre Lösung des Problems (4).

variationstheoretisch durch folgende Gleichung zu ersetzen:

$$(6) \qquad \vartheta = \int_0^1 \{ F(u_x) - F(\bar{u}_x) \} \, dx \geqq 0,$$

wobei

$$F(u_x) = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \pi^2 u^2,$$

$$F(\bar{u}_x) = \left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 - \pi^2 \bar{u}^2$$

und $\bar{u}(x, y)$ die allgemeine Lösung der Lagrangeschen Gleichung zu (4):

$$(7) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \pi^2 u = 0$$

ist, also so geschrieben werden kann:

$$\bar{u}(x, y) = c \sin(\pi x + \gamma).$$

Den Beweis für (6) führen wir mit dem neuen *Hilbertschen Unabhängigkeitstheorem*, nach welchem das Integral:

$$(8) \qquad J^* = \int_0^1 \{ F(p) + (u_x - p) F_p(p) \} \, dx$$

vom Integrationswege unabhängig ist, wenn wir

$$p = \bar{u}_x = c \pi \bar{u} \operatorname{cotg}(\pi x + \gamma)$$

wählen. In der Tat ist in unserem Falle:

$$J^* = \int_0^1 \{ p^2 - \pi^2 u^2 + (u_x - p) 2p \} \, dx = \int_0^1 \{ A u_x - B \} \, dx$$

die Unabhängigkeitsbedingung erfüllt, da

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} = 2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial p}{\partial u} + \pi^2 u \right) = 0$$

auf Grund von (7) für die Minimallösung $\bar{u}$ erfüllt ist. Nun folgt aber aus diesem Theorem, daß:

$$J^* = \int_0^1 \{ F(p) + (u_x - p) F_p(p) \} \, dx = \int_0^1 F(\bar{u}_x) \, dx,$$

und somit, daß:

$$\vartheta = \int_0^1 \{ F(u_x) - F(\bar{u}_x) \} \, dx$$

$$= \int_0^1 \{ F(u_x) - F(p) - (u_x - p) F_p(p) \} \, dx = \int_0^1 E(u_x, p) \, dx,$$

wobei E die Weierstraßsche Funktion ist, welche für unsern Fall in der Tat:

$$E(u_x, p) = u_x^2 - \pi^2 u^2 + \pi^2 u^2 - p^2 - 2p(u_x - p) = (u_x - p)^2,$$

also *stets positiv* ist.

Gehört also u der Schar der Minimallösungen $(\bar{u})$ an, so ist:

$$\vartheta = 0$$

sonst aber immer:

$$\vartheta > 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Durch Veränderung der obern Integrationsgrenze — die untere kann man ohne Einschränkung beibehalten — wird:

$$\delta^2 \bar{J} = \int_0^{\varepsilon} \left\{ \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \right\} dx \geqq 0,$$

wobei ε eine noch zu bestimmende Größe ist. Schließlich ergibt sich dann also für unser ursprüngliches Problem der folgende Satz:

Das Integral

$$\int_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - Cv^2 \right\} d\omega$$

ist stets positiv, falls:

$$C \leqq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2},$$

d. h. wenn die eine der oberen Grenzen des Flächenintegrales:

(9) $$\varepsilon \leqq \frac{\pi}{\sqrt{C}} = \frac{\pi}{\sqrt{\left|\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c\right|}}$$

ist.

Im Falle, daß

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c < 0$$

ist, muß also zur Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Gleichung*) eine Bedingung erfüllt sein, und zwar, *es muß das Gebiet wenigstens nach einer Dimension hin gemäß* (9) *genügend klein sein.*

In der Bedingung (9) finden wir das Picardsche Resultat in seiner *allgemeinen Form* wieder. Die Ableitung erfolgte hier durch eine direkte variationstheoretische Überlegung. (9) zeigt ferner, daß die Einschränkung wesentlich vom Auftreten der Koeffizienten a, b, c bedingt wird, was ja auch mit der unbeschränkten Eindeutigkeit der Lösung von (I) in Einklang ist.

---

*) Ähnliche Betrachtungen über das Eindeutigkeitsproblem der *inhomogenen* Gleichung findet man im letzten Teil der Dissertation von Lütkemeyer, Über den analyt. Charakter der Lösungen von part. Diffgl. (Göttingen, 1903).

§ 3.

Existenz der Lösung der ersten Randwertaufgabe bei der sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichung.

Hilbert bemerkt in der Einleitung seiner Festschrift, daß seine neue Rekonstruktion des Dirichletschen Prinzipes weitgehender Verallgemeinerungen fähig ist für die Lösung von Randwertaufgaben solcher Differentialgleichungen, die aus Variationsproblemen entspringen. Die Verfolgung dieser Direktive ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil man in der Physik meistens solche Differentialgleichungen behandelt.

In dieser Richtung scheint nun nach der dem speziellen Dirichletschen Integral zugeordneten Laplaceschen Gleichung die zum allgemeinen Dirichletschen Integral gehörende sich selbst adjungierte elliptische Gleichung zunächst zu liegen. Die Verallgemeinerung der Hilbertschen Rekonstruktion für diese Klasse präzisiert auch näher den Platz der Laplaceschen Gleichung in derselben; sie ist weiterhin von Bedeutung, weil sie für verschiedene wichtige Existenzuntersuchungen von Lösungen der Gleichung:

$$\Delta u \pm k^2 u = 0$$

die analytische strenge Grundlage ergibt.*)

Im folgenden wollen wir nur auf die zwei wesentlichsten Punkte dieser Verallgemeinerung hinweisen: auf den neuen Ausgangspunkt und auf die nötige Modifizierung der Ungleichungen im § 2 der Hilbertschen Festschrift; letztere enthält eben den wesentlichsten Teil der Ausdehnung.

Das Integral, welches für die Klasse den Ausgangpunkt zu bilden hat, ist auf Grund der Vorbemerkung das folgende:

$$J(u) = \int\limits_{(\Omega)} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\omega,$$

worin F eine quadratische Form mit positiver Diskriminante ist. Es ist bekannt**), daß man immer eine Transformation angeben kann, die dieses Integral in die folgende Form überführt:

$$(1) \qquad J(u) = \int\limits_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + C(x, y) u^2 \right\} d\omega.$$

Es ist vorteilhaft mit diesem Integral zu operieren.

*) Z. B. für das Diffraktionsproblem, über dessen Formulierung s. Sommerfeld, Diffraktionsprobleme in exakter Behandlung (J. D. M. V., IV, 1899); weiterhin in etwas anderer Fassung für das Webersche Verfahren in Math. Ann. Bd. 1.

**) S. Picard, Traité d'Analyse II, pg. 27—28.

Das Hilbertsche Verfahren geht nun aus von einer Reihe von Funktionen:

(2) $$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

deren jede die für u vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt, und approximiert mit dieser Reihe die der Differentialgleichung genügende Funktion*). Eine solche Reihe ist immer konstruierbar, die u_n können z. B. Potentialfunktionen sein, für die die Möglichkeit einer solchen Auswahl schon bekannt ist.

Die Reihe (2) sei so gewählt, daß zu jedem ihrer Glieder ein endliches Integral (1) gehöre und daß die Reihenfolge der so entstandenen Integrale der Bedingung genüge:

$$J_1 < J_2 < J_3 < \cdots < J_n < \cdots,$$

aber jedenfalls:

$$J_n < D.$$

Nach dieser Wahl folgt dann, daß

$$\lim_{n=\infty} J_n = d$$

existiert. Nach dem Dirichletschen Prinzip würde man nun hieraus folgern, daß auch

$$\lim_{n=\infty} u_n$$

existiert, und es wäre dann leicht zu zeigen, daß eben dieser Grenzwert die gesuchte Lösung ist. Wie aber aus dem berühmten Weierstraßschen Beispiel bekannt ist, fehlt dieser Schlußweise die funktionentheoretische Strenge; sie ist vielmehr durch die Rekonstruktion von Hilbert in folgender Weise zu ersetzen. Der Existenzbeweis des obigen Grenzwertes wird durch die Einführung neuer Funktionen v_n geführt, die so definiert sind:

(3) $$v_n = \int_0^x \int_0^y u_n \, dx \, dy.$$

Die eigentlich allein wesentliche Bemerkung ist an jene Ungleichungen anzuknüpfen, auf Grund deren Hilbert im § 6 seiner Festschrift die Existenz des

(I) $$\lim_{n=\infty} v_n = v$$

durch den Bendixsonschen Konvergenzsatz erweist. Die weitere Ausdehnung der Hilbertschen Methode, die sich auf den Existenzbeweis von

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \int_0^x \int_0^y v_n \, dx \, dy$$

*) Der Ausgangspunkt ist also kein Schwarz-Neumannscher, sondern dem der Poincaréschen «méthode de balayage» analog.

bezieht, der nach dem § 7 der Festschrift zur gesuchten Lösung führt, enthält nur *formale* Veränderungen, deren Detaillierung wir an dieser Stelle unberücksichtigt lassen.

Die nähere Ergründung von (I) beruht auf Ungleichungen, die obere Grenzen für die Integrale (3) und deren partielle Differentialquotienten feststellen, u. zw. in der abzählbaren Menge von Rechtecken, deren Seiten mit den Koordinatenachsen parallel sind und deren Eckpunkte als die Punkte mit rationalen Koordinaten des Gebietes so gewählt sind:

$$(a,\ b);\quad (a+l,\ b);\quad (a+l,\ b+l');\quad (a,\ b+l').$$

Wir wollen diese Ungleichungen in ihrer einfachsten Form etwas näher betrachten. Aus der stets positiven quadratischen Form:

$$\int_a^{a+l}\left\{\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|+\lambda\right\}^2 dx=\int_a^{a+l}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx+2\lambda\int_a^{a+l}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| dx+l\lambda^2$$

folgt, daß:

$$(\alpha)\qquad \int_a^{a+l}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx \geqq \frac{1}{l}\left\{\int_a^{a+l}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| dx\right\}^2$$

$$\geqq \frac{1}{l}\left\{\int_a^{a+l}\frac{\partial u_n}{\partial x}\, dx\right\}^2=\frac{1}{l}\,[u_n(a+l,\ y)-u_n(a,\ y)]^2,$$

Ebenso folgt auf Grund von (α):

$$(\beta)\qquad \int_b^{b+l'}\{u_n(a+l,\ y)-u_n(a,\ y)\}^2 dy \geqq \frac{1}{l'}\left[\int_b^{b+l'}u_n(a+l,\ y)\,dy-\int_b^{b+l'}u_n(a,\ y)\,dy\right]^2$$

also aus (α) und (β) gleichzeitig:

$$(\gamma)\qquad \int_a^{a+l}\int_b^{b+l'}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx\,dy \geqq \frac{1}{l\cdot l'}\left[\int_b^{b+l'}u_n(a+l,\ y)\,dy-\int_b^{b+l'}u_n(a,\ y)\,dy\right]^2.$$

Falls wir nun die v_n durch die einen endlichen Grenzwert besitzende Reihe der J_n approximieren wollen, müssen wir vorab die linke Seite von (γ) auf die Form von (1) bringen. Bei dieser Operation ergibt sich nun auf Grund unserer Variationsbetrachtungen folgendes Resultat:

Die Gültigkeit der für den Hilbertschen Beweis der Existenz des

$$\lim_{n=\infty} v_n$$

grundlegenden Ungleichung:

$$\left|\int_b^{b+l'}u_n(a+l,\ y)\,dy-\int_b^{b+l'}u_n(a,\ y)\,dy\right| \leqq \sqrt{ll'J}$$

und der hieraus abzuleitenden Ungleichungen) kann aus* (γ) *in voller Allgemeinheit nur im Falle, daß*

$$C(x, y) \geqq 0$$

oder aber nur in genügend kleinen Gebieten gefolgert werden, für die nämlich der Beweis, daß

$$J > 0$$

auf Grund des Resultats von § 2 zu erbringen ist.

Dies Resultat, welches den ganzen weiteren Gang des Beweises in voller Allgemeinheit wesentlich auf die mit dem Namen „Nullgebiet" zu bezeichnenden genügend kleinen Gebiete beschränkt, steht in inniger Beziehung zu andern, auf ganz verschiedene Weise erbrachten bekannten Resultaten über spezielle Gleichungen der betrachteten Klasse.

Budapest, August 1904.

*) Der Vollständigkeit halber führen wir noch die zwei wichtigsten Ungleichungen an, die aus (γ) durch weitere partielle Integration entspringen:

$$\left| l \int_b^{b+l'} u_n(a, y)\, dy - \int_a^{a+l} \int_b^{b+l'} u_n(x, y)\, dx\, dy \right| \leqq l \sqrt{l l' J},$$

$$\left| l \int_b^{b+l'} u_n(a, y)\, dy - l' \int_a^{a+l} u_n(x, b)\, dx \right| \leqq (l - l') \sqrt{l l' J}$$

(und weitere durch Vertauschung der Variabelen).

Über isoliertwertige Funktionen.

Von

L. SCHLESINGER in Klausenburg.

In seiner im Jahre 1876 zuerst veröffentlichten Abhandlung*) hat Weierstraß den Satz bewiesen, daß eine eindeutige oder endlichvieldeutige Funktion der n komplexen Variabeln $u_1, \cdots, u_n$ ein System unendlich kleiner Perioden nur in dem Falle besitzen kann, wo sie sich als Funktion von weniger als n Argumenten, die ganze lineare Funktionen der $u_1, \cdots, u_n$ sind, darstellen läßt. Beim Wiederabdrucke dieser Abhandlung**) knüpfte Weierstraß in einer Anmerkung***) an diesen Satz die Bemerkung, daß es noch nicht ermittelt worden ist, unter welchen Bedingungen derselbe Satz für eine Funktion $f(u_1, \cdots, u_n)$ auch in dem Falle gültig bleibt, wo sie so beschaffen ist, daß zu jedem Wertesystem der Veränderlichen $u_1, \cdots, u_n$ unendlich viele Werte von $f(u_1, \cdots, u_n)$ gehören.

Wir versuchen im folgenden die mit dieser Bemerkung von Weierstraß aufgeworfene Frage für den Fall einer monogenen Funktion *einer* komplexen Variabeln zu beantworten.

In diesem Falle lautet der von Weierstraß bewiesene Satz so, daß eine eindeutige oder m-deutige Funktion $f(u)$ von u, die eine unendlich kleine Periode besitzt, sich auf eine Konstante reduziert, also als Funktion unmöglich ist. In der letzteren Form ist dieser Satz in der Abhandlung Jacobis†) enthalten. Jacobi zeigt daselbst, daß aus dem Vorhandensein einer unendlich kleinen Periode für die Funktion $x = f(u)$ folgt, daß die Werte der unabhängigen Variabeln u, für welche die Funktion einen und denselben Wert anzunehmen vermag, in der ganzen

*) Weierstraß, Werke Bd. II (1895), p. 55ff.

**) Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, Nr. 6.

***) Siehe Werke II, p. 70.

†) Journal f. d. r. u. a. Mathematik Bd. 13 (1834); Werke Bd. II, p. 23ff.

u-Ebene *überalldicht* liegen müssen, und er nennt*) eine Funktion, für welche das letztere *nicht* der Fall ist, eine *analytische*. Die von Weierstraß aufgeworfene Frage kann also auch so gestellt werden: *Unter welchen Bedingungen ist eine unendlichvieldeutige Funktion eine analytische im Sinne Jacobis?* Wir wollen diese Frage noch allgemeiner fassen, indem wir den Begriff der analytischen Funktion dahin modifizieren, daß eine Funktion $f(u)$ eine analytische im Sinne Jacobis genannt werden soll, wenn die u-Werte, für welche $f(u)$ einen und denselben Wert anzunehmen vermag, weder in der ganzen u-Ebene noch in einem zweifach ausgedehnten Teile derselben überalldicht liegen. Es möge jedoch gleich bemerkt werden, daß wir nicht beabsichtigen, den von Lagrange und Weierstraß schon in anderem Sinne verwendeten Terminus „analytische Funktion“ in dem bezeichneten Jacobischen Sinne dauernd anzuwenden, daß wir vielmehr zeigen wollen, wie eine analytische Funktion in diesem Jacobischen Sinne einer anders zu definierenden Funktionsklasse subsumiert werden kann, so daß der Name analytische Funktion für die von Lagrange und Weierstraß ihm beigelegte Bedeutung vorbehalten bleibt.

1. Bedeutet $u = f(x)$ eine monogene Funktion der komplexen Variabeln x, so bezeichnen wir die Gesamtheit der Werte, welche diese Funktion für einen nicht singulären Wert der Variabeln x anzunehmen vermag, als ihren *Wertevorrat* (für den Wert x). Nach einem von Herrn G. Cantor herrührenden Satze, für welchen die Herren Poincaré**) und Volterra***) Beweise geliefert haben, bildet der Wertevorrat einer Funktion $f(x)$ stets eine *abzählbare Menge*. Diese kann entweder in der ganzen u-Ebene bez. in einem zweifach ausgedehnten Teile derselben *überalldicht* sein (und dies ist, sozusagen, der allgemeine Fall) oder sie kann eine *isolierte Menge* bilden. Wenn das letztere für alle Punkte eines zweifach ausgedehnten Teiles des Existenzbereiches der Funktion eintritt, so gilt dasselbe auch für jeden Punkt des Existenzbereiches, da ja der Existenzbereich einer monogenen Funktion stets ein zusammenhängendes Gebiet bildet†). Wir nennen††) eine Funktion von dieser Beschaffenheit eine *isoliertwertige*. Eindeutige und endlichvieldeutige Funktionen sind unter den isoliertwertigen einbegriffen.

---

*) a. a. O. p. 43, 45. Vergl. meinen demnächst in der „Bibliotheca Mathematica“ erscheinenden historischen Aufsatz „Über den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi“.

**) Rendiconti del Circolo mat. di Palermo t. 2 (1888), p. 197.

***) Rendiconti dell' Accademia dei Lincei 4° serie, vol. 4, 2° semestre, 1888, p. 358, Teorema III, Corollario.

†) Wir verstehen unter dem Existenzbereiche einer Funktion $f(x)$ die Gesamtheit der Punkte der x-Ebene, in deren Umgebung sich die Funktion wie eine algebraische Funktion verhält.

††) Handbuch d. Theorie d. lin. Differentialgleichungen Bd. II, 1 (1896), p. 278.

2. Bedeutet $E(u)$ eine monogene eindeutige Funktion von u, so bilden — wie bekannt — die Lösungen der Gleichung

$$E(u) = 0$$

stets eine isolierte Menge. Sei nun $E(u, x)$ eine monogene eindeutige Funktion der beiden Variabeln x, u; wird dann die *eindeutige Gleichung*

$$E(u, x) = 0$$

durch ein in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphes Funktionselement $u = \varphi(x)$ befriedigt und bezeichnen wir durch $f(x)$ die aus diesem Funktionselemente entspringende monogene Funktion von x, so bilden, nach dem erwähnten Satze, diejenigen Werte von $f(x)$, die zu einem x-Werte der Umgebung von x_0 gehören, und welche innerhalb des Existenzbereiches von $E(u, x)$ als Funktion von u gelegen sind, eine isolierte Menge. Es kann sich aber ereignen, daß $f(x)$ für Werte von x in der Umgebung von $x = x_0$ auch solche Werte annimmt, die dem Existenzbereiche von $E(u, x)$ nicht angehören*).

Wir sagen, daß eine Funktion $u = f(x)$ *eindeutigen Gleichungen genügt*, wenn eine endliche Anzahl oder eine abzählbare Menge eindeutiger Gleichungen existiert:

$$E_k(u, x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

von der Beschaffenheit, daß jeder Zweig von $f(x)$ in einer gewissen Umgebung jeder regulären Stelle x eine dieser Gleichungen befriedigt. Es gilt dann offenbar das

Theorem I. *Eine Funktion $u = f(x)$, die eindeutigen Gleichungen genügt, ist stets isoliertwertig.*

3. *Es sei $u = f(x)$ eine isoliertwertige Funktion*, und mögen

$$u_0, u_1, u_2, \cdots$$

die Werte von $f(x)$ sein, die zu einem Punkte x des Existenzbereiches E von $f(x)$ gehören. Wir denken uns den Bereich E durch Querschnitte so umgestaltet, daß innerhalb des so entstehenden Bereiches $\bar{E}$ $f(x)$ eindeutig sei. Die Gesamtheit der Werte, die der innerhalb $\bar{E}$ eindeutig determinierte Zweig u_k von $f(x)$ für alle Punkte von $\bar{E}$ annimmt, erfüllt einen Bereich T_k der u-Ebene, den man sich, wenn er sich selbst überdecken sollte, als mehrblättrige Fläche zu denken hat. Da die verschiedenen Bereiche T_k einander gegenseitig eindeutig entsprechen, so ist, wenn wir u_k als Funktion von u_0 auffassen, diese Funktion $u_k = \varphi_k(u_0)$ eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche T_0, und umgekehrt $u_0 = \psi_k(u_k)$ eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche T_k. Die Gesamtheit

*) Vergl. das im Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 110 (1892), p. 136 angegebene Beispiel.

dieser Funktionen $\varphi_k(u_0)$ bildet dann eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die, da $f(x)$ als isoliertwertige Funktion vorausgesetzt wurde, in dem ganzen von den Bereichen T_k bedeckten Teile U der u-Ebene *im allgemeinen* eigentlich diskontinuierlich ist; d. h. die Gesamtheit der Stellen, wo jene Gruppe uneigentlich diskontinuierlich ist (die sogenannten *wesentlich singulären Stellen der Gruppe**)), kann nur Linien — im allgemeinsten Sinne des Wortes — erfüllen, durch welche die verschiedenen Diskontinuitätsbereiche $L_1, L_2, \cdots$ dieser Gruppe voneinander getrennt werden**). Die Gruppe $\mathfrak{G}$ kann übrigens noch Diskontinuitätsbereiche besitzen, die außerhalb des von den Bereichen T_k bedeckten Teiles U der u-Ebene liegen.

Nun kann man nach einem Satze von Herrn Poincaré***) stets eindeutige Funktionen herstellen, die bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ ungeändert bleiben, und zwar ergibt sich für jeden der Diskontinuitätsbereiche $L_1, L_2, \cdots$ von $\mathfrak{G}$ im allgemeinen eine andere monogene Funktion, die diese Eigenschaft besitzt. Die von Herrn Poincaré a. a. O. aufgestellten Θ-Reihen konvergieren nämlich für alle Punkte, wo die Gruppe $\mathfrak{G}$ eigentlich diskontinuierlich ist, stellen aber in verschiedenen Diskontinuitätsbereichen verschiedene monogene Funktionen dar. — Seien $F_1(u), F_2(u), \cdots$ diejenigen dieser eindeutigen Funktionen, die in den den Bereich U ausfüllenden Diskontinuitätsbereichen $L_1, L_2, \cdots$ von $\mathfrak{G}$ existieren. Setzt man in $F_k(u)$ für u einen Zweig von $f(x)$, dessen Wertevorrat (ganz oder teilweise) dem Existenzbereiche von $F_k(u)$ angehört, ein, so ist

$$F_k(f(x)) = \Phi_k(x)$$

eine eindeutige Funktion von x, und die Gesamtheit der Bereiche, wo die Ausdrücke $\Phi_k(x)$ existieren†), erfüllt offenbar den Existenzbereich der Funktion $f(x)$. — Die Gesamtheit der eindeutigen Gleichungen

$$F_k(u) - \Phi_k(x) = 0$$

hat dann die Eigenschaft, daß einerseits jeder Zweig der Funktion $u = f(x)$

*) Vergl. Poincaré, Acta Mathem. Bd. I (1882), p. 198.

**) Es sei gestattet, hier ein Versehen zu berichtigen, welches sich in meiner Arbeit, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 110, S. 134, Zeile 2 v. u. — S. 135, Zeile 3 findet, und auf welches die Herren Verfasser der „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen von Fricke und Klein“ Bd. I (1897), S. 168, hingewiesen haben. Es sind a. a. O. S. 134, Zeile 2 v. u. die Worte „stets endliche Anzahl“ durch „endliche Anzahl oder abzählbare Menge“ zu ersetzen und demgemäß in der letzten Zeile und im folgenden an Stelle von „$L_1, L_2, \cdots, L_q$“ einfach „$L_1, L_2, \cdots$“ zu setzen. Die Ausführungen meiner Arbeit werden dadurch nicht beeinträchtigt.

***) Comptes Rendus t. 92 (1881), p. 1335.

†) Ein solcher Ausdruck $\Phi_k(x)$ kann (vergl. die im Journal f. d. r. u. a. Mathem. Bd. 110 angegebenen Beispiele) in verschiedenen Bereichen der x-Ebene verschiedene monogene Funktionen darstellen.

in der Umgebung jeder regulären Stelle x und andererseits jeder Zweig der inversen Funktion $x = g(u)$ in der Umgebung jeder regulären Stelle u einer oder mehreren dieser Gleichungen genügt. Wir erhalten hiernach die Sätze:

Theorem II. *Jede isoliertwertige Funktion genügt eindeutigen Gleichungen,**)

und mit Rücksicht auf das Theorem I,

Theorem III. *Die inverse Funktion einer isoliertwertigen Funktion ist selbst isoliertwertig.*

Aus dem letzteren Theoreme folgt, daß sich der Begriff der isoliertwertigen Funktion mit dem Begriffe der analytischen Funktion im Sinne Jacobis (in der von uns angegebenen modifizierten Fassung) deckt.

Somit können wir in Beantwortung der von Weierstraß aufgeworfenen Frage sagen:

Der von Weierstraß für eindeutige oder endlichvieldeutige Funktionen bewiesene Satz gilt für alle Funktionen, die eindeutigen Gleichungen genügen, und nur für solche.

Klausenburg, 6. Januar 1905.

---

*) Vergl. hierzu den von Herrn Poincaré, Comptes Rendus t. 96 (1883), p. 240 und Acta Mathematica Bd. 2 (1883), p. 113 ausgesprochenen Satz.

Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.

Von

Karl Kommerell in Heilbronn.

Ist $s + it$ eine Funktion der komplexen Variabeln $x + iy$, so kann man den in einem Punkt $x + iy$ der XY-Ebene vorhandenen Funktionswert durch einen Punkt im vierdimensionalen Raum mit den Koordinaten x, y, s, t zur Darstellung bringen. Dadurch wird im R_4 über der XY-Ebene eine zweidimensionale Fläche ausgebreitet, welche das Bild der in den verschiedenen Punkten der XY-Ebene existierenden Funktionswerte ist. Wir haben diese Fläche *eine Riemannsche Fläche* oder kurz *eine R-Fläche* *) genannt, weil sie funktionentheoretisch dasselbe leistet, wie die Riemannsche Fläche im gewöhnlichen Sinne.

Die vorliegende Arbeit, welche die Untersuchung der R-Flächen zum Gegenstande hat, gliedert sich nun in zwei Kapitel. Das erste Kapitel behandelt die Krümmungsverhältnisse allgemeiner zweidimensionaler Flächen des R_4; man vergleiche hierzu meine Dissertation **), in der die Flächen des R_4 ausführlich behandelt sind. Im zweiten Kapitel werden speziell die R-Flächen untersucht: dieselben sind geometrisch und funktionentheoretisch interessant. Der in der Normalebene jedes Flächenpunkts liegende Kegelschnitt, der die Krümmungsverhältnisse vollständig charakterisiert, ist für alle Flächenpunkte ein Kreis mit dem Flächenpunkt als Mittelpunkt. Darum sind die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte in einem Punkt der Fläche einander gleich. Weiter zeigt sich, daß die R-Flächen

---

*) Herr Blumenthal macht mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß Herr St. Kwietniewski in seiner Diss. „Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven, Zürich 1902" dieselben Flächen betrachtet. Da indessen Herr Kwietniewski einen von dem meinigen wesentlich verschiedenen Standpunkt einnimmt, und unsere Arbeiten nur wenige Berührungspunkte zeigen, so nehme ich keinen Anstand, meine Arbeit ungeändert zu veröffentlichen. In einigen Fußnoten werde ich auf die Dissertation von Herrn Kwietniewski verweisen.

**) Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen, Tübingen 1897. (Im folgenden kurz mit Diss. zitiert.)

Minimalflächen des R_4 sind; man erhält so eine geometrische Deutung für das Dirichletsche Prinzip und den Greenschen Satz. Durch Projektion einer R-Fläche in eine Schar dreidimensionaler Räume erhält man eine Schar gewöhnlicher Flächen, die wir assoziierte Projektionsflächen genannt haben, weil sie in naher Beziehung zu einer Schar assoziierter Minimalflächen stehen. Diese Projektionsflächen sind alle aufeinander flächentreu bezogen, haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß und besitzen quadrierbare Asymptotenlinien. Zu diesen Flächen gehören die von Dini und v. Lilienthal untersuchten Flächen; einzelne derselben hat Dyck modellieren lassen (vgl. die Fußnoten zu § 9 und § 13). Alle aufeinander abwickelbaren R-Flächen sind kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen R_3.

Die Projektionen der R-Fläche auf die XY-Ebene und die ZT-Ebene sind konforme Bilder der Fläche selbst und die R-Fläche vermittelt so in einfacher Weise die konforme Abbildung der XY-Ebene auf die ZT-Ebene. Die Tangential- und Normalebenen der R-Flächen sind eigentümlich im R_4 orientierte Ebenen und bilden einen Komplex. Die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes ist eine Folge dieser Orientierung der Tangentialebenen der R-Flächen.

Am Schlusse der Arbeit haben wir noch das Produkt zweier komplexer Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum gedeutet und dieses Rechteck den Produktvektor genannt: man erhält so eine einfache geometrische Interpretation des Integrals $\int F(x+iy)\,(dx+i\,dy)$, die eine Verallgemeinerung der bekannten Deutung eines Integrals durch eine Fläche im reellen Gebiet ist.

I. Kapitel.

Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen.

§ 1.

Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung.

Eine Fläche F_2 im ebenen Raum von vier Dimensionen (kurz R_4) wird dargestellt durch Gleichungen von der Form

(1) $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad t = t(u, v),$$

so daß also die Koordinaten $(xyzt)$ eines Flächenpunkts Funktionen zweier variabler Parameter u, v sind. Von diesen Funktionen setzen wir stets voraus, daß sie voneinander unabhängig und samt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind. Drei der Gleichungen (1) allein stellen eine zweidimensionale Fläche im gewöhnlichen Raume dar, nämlich die Projektion der F_2 auf jenen Raum. Wir nennen diese Fläche kurz die *Projektionsfläche* jenes Raums.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = x_{12} \text{ etc.}$$

und

$$E = \Sigma x_1^2, \quad F = \Sigma x_1 x_2, \quad G = \Sigma x_2^2,$$

wo in den in Beziehung auf $xyzt$ symmetrischen Summen nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben ist, so erhält man für das *Linienelement ds der Fläche* den Ausdruck

$$(2) \qquad ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Zu den Größen E, F, G, welche wir *die Fundamentalgrößen erster Ordnung* nennen, treten im folgenden noch zwölf weitere D_μ, D'_μ, D''_μ $(\mu = x, y, z, t)$, welche auch die zweiten Ableitungen von x, y, z, t enthalten, und die wir *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung* nennen. D_μ bedeute die Unterdeterminante von λ_μ in folgender Determinante

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & \lambda_t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \end{vmatrix}.$$

Aus D_μ erhält man der Reihe nach D'_μ, D''_μ, wenn man in D_μ in der letzten Horizontalreihe die Indizes 11 bezgl. durch 12 und 22 ersetzt.

Wir definieren endlich noch drei Größen e, f, g, welche sowohl die ersten als auch die zweiten Ableitungen von x, y, z, t im zweiten Grad enthalten, durch folgende Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \end{vmatrix} = e; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = 2f; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = g.$$

§ 2.

Tangentialebene, Normalebene, zweite Annäherungsfläche.

Die Gleichung

$$(1) \qquad A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) + D(T-t) = 0,$$

wo A, B, C, D Konstante, X, Y, Z, T laufende Koordinaten sind, stellt einen durch den Flächenpunkt (x, y, z, t) hindurchgehenden dreidimensionalen ebenen Raum R_3 dar. Geht dieser R_3 auch noch durch die Punkte $x + x_1 du$, $y + y_1 du$ etc. und $x + x_2 dv$ etc., so muß

$$(2) \qquad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0,$$
$$(3) \qquad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Dt_2 = 0$$

sein. Die Gleichungen (1)—(3) stellen eine ∞^1-fache Schar von R_3 dar, welche alle durch die Ebene

$$(4) \quad X - x = \lambda x_1 + \mu x_2; \quad Y - y = \lambda y_1 + \mu y_2; \quad Z - z = \lambda z_1 + \mu z_2; \quad T - t = \lambda t_1 + \mu t_2$$

hindurchgehen, wobei λ, μ variable Parameter sind. Diese Ebene nennen wir *Tangentialebene* oder *erste Annäherungsfläche* und jene Schar von R_3, welche durch sie hindurchgehen, *Tangentialräume.*

Die Ebene senkrecht zur Tangentialebene heißt *Normalebene.* Die Gleichungen der *Normalebene* lauten

$$(5) \quad \begin{aligned} M &\equiv (X-x)x_1 + (Y-y)y_1 + (Z-z)z_1 + (T-t)t_1 = 0, \\ N &\equiv (X-x)x_2 + (Y-y)y_2 + (Z-z)z_2 + (T-t)t_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Schar von R_3

$$M + \lambda N = 0,$$

wo λ willkürlich ist, geht durch die Normalebene: wir nennen diese R_3 *Normalräume.*

Wir wählen nun speziell als Parameter u, v der Fläche die Koordinaten x, y, dann lauten die Flächengleichungen

$$x = x, \quad y = y, \quad 2z = f(x, y), \quad 2t = \varphi(x, y).$$

Weiter setzen wir voraus, daß der Nullpunkt ein *regulärer* Flächenpunkt ist, so daß sich f und φ nach steigenden Potenzen von x, y entwickeln lassen: wir erhalten dann

$$\begin{aligned} 2z &= mx + ny + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \cdots, \\ 2t &= \mu x + \nu y + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Endlich denken wir uns die Fläche so zum Koordinatensystem orientiert, daß die Ebene $z = t = 0$ Tangentialebene der Fläche im Nullpunkt ist. Man erhält dann nach (4) als Flächengleichungen

$$\begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + \cdots, \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Sieht man nun x, y als unendlich kleine Größen an, so kann für den Nullpunkt in allen Fällen, wo nur unendlich kleine Glieder bis zur zweiten Ordnung (Krümmungen) berücksichtigt werden müssen, die Fläche durch die einfachere mit den Gleichungen

$$(6) \quad \begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2, \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \end{aligned}$$

ersetzt werden. Wir nennen daher die Fläche (6) *die zweite Annäherungsfläche.* Für die Annäherungsfläche ist die Ebene $z = 0$, $t = 0$ die Tangentialebene, die Ebene $x = 0$, $y = 0$ die Normalebene.

§ 3.

Krümmung der Normalschnitte. Hauptschnitte.

Wir schneiden nun die zweite Annäherungsfläche mit einem beliebigen durch den Nullpunkt gehenden R_3 und untersuchen die Krümmung der aus der Fläche ausgeschnittenen Raumkurve C im Nullpunkt. Bildet dieser R_3 mit dem durch die Kurventangente im Nullpunkte bestimmten Normalraum den Winkel ψ und ist weiter ϱ_ψ der Krümmungshalbmesser der Kurve C, ϱ der Krümmungshalbmesser der Kurve, die jener Normalraum aus der Fläche ausschneidet, so gilt auch hier, wie wir nicht ausführlich beweisen*), das *Meusniersche Theorem*

(1) $$\varrho_\psi = \varrho \cos \psi .$$

Da so der Krümmungsradius jedes „schiefen" Schnitts sich in einfacher Weise durch den Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnitts ausdrückt, so betrachten wir des weiteren nur noch die Krümmung der Normalschnitte.

Wir schneiden also die Annäherungsfläche mit dem Normalraum

(2) $$y - \lambda x = 0 \quad \text{oder} \quad y - x \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (\text{d. h. } \lambda = \operatorname{tg} \varphi).$$

Dabei bedeutet φ den Neigungswinkel der Tangente der ausgeschnittenen Raumkurve mit der X-Achse. Eine leichte Rechnung ergibt für den Krümmungsradius ϱ

(3) $$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2 .$$

Die Gleichung (3) läßt sich noch in der bemerkenswerten Form

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_s^2} + \frac{1}{\varrho_t^2}$$

schreiben, wobei ϱ_s der Krümmungshalbmesser der Kurve ist, die durch $y - \lambda x = 0$ aus der Projektionsfläche des Raumes $t = 0$ ausgeschnitten wird, und ϱ_t die analoge Bedeutung hat. Die Gleichung (3) zeigt, daß im allgemeinen ϱ nie Null und nie unendlich wird, daß also der Krümmungsradius für alle Schnitte dasselbe Zeichen hat. In diesem Sinne haben wir also auch keine den Haupttangenten gewöhnlicher Flächen entsprechende Richtungen. Wenn aber die Ausdrücke

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 \quad \text{und} \quad \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$$

für einen Wert von λ gleichzeitig verschwinden oder, was dasselbe ist, wenn die Resultante dieser beiden Formen

$$4(ac - b^2)(\alpha\gamma - \beta^2) - (\alpha c + a\gamma - 2b\beta)^2 = 0$$

*) Vgl. Diss. § 4.

ist, so wird ein Krümmungshalbmesser unendlich groß. Wir haben dann einen Flächenpunkt mit besonderen Eigenschaften, den wir einen Punkt mit *parabolischer Krümmung* nennen, oder kurz einen *parabolischen Punkt.*

Um nun die *Maximal-* bezw. *Minimal-Werte für den Krümmungshalbmesser* zu erhalten, bilden wir mit Hilfe von (3) $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)=0$. Unter Weglassung von Faktoren, die von Null verschieden sind, erhält man so die Gleichung

(4) $[a+2b\lambda+c\lambda^2][b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]+[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2][\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]=0.$

Diese Gleichung lehrt, daß hier im R_4 eine Fläche *vier Hauptkrümmungshalbmesser* besitzt, während Flächen im R_3 deren nur zwei besitzen. Bedenkt man aber, daß bei diesen zwei Krümmungshalbmesser unendlich groß sind, und rechnet man diese den Hauptkrümmungshalbmessern zu, so hat man im ganzen gleichfalls vier Krümmungshalbmesser. In der Tat, wendet man (4) auf eine Fläche im R_3 $t=0$ an und setzt demnach $\alpha=\beta=\gamma=0$, so erhält man zur Bestimmung der Hauptschnitte die Gleichung

$$(a+2b\lambda+c\lambda^2)\,(b\lambda^2+(a-c)\lambda-b)=0.$$

Der erste Faktor, mit Null verglichen, gibt aber die beiden Werte von λ für die Asymptotenrichtungen, der zweite Faktor die beiden Werte von λ, die den Krümmungslinien entsprechen. Verschwinden für einen Wert von λ die beiden Formen $a+2b\lambda+c\lambda^2$ und $\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2$ gleichzeitig (parabolischer Punkt) so wird durch diesen Wert (4) befriedigt; in einem *parabolischen Punkt gibt es daher nur drei endliche Hauptkrümmungshalbmesser.* In diesem Fall werden durch den entsprechenden Normalraum $y-\lambda x=0$ aus den Projektionsflächen in die Räume $z=0$ und $t=0$ gleichzeitig Asymptotenrichtungen ausgeschnitten. Ebenso sieht man, daß, wenn ein Normalraum aus einer der Projektionsflächen eine Asymptotenrichtung, aus der andern die Richtung einer Krümmungslinie oder aus beiden Richtungen von Krümmungslinien ausschneidet, dieser Raum ein *Hauptschnittraum* ist d. h. eine Hauptkrümmungsrichtung aus der Fläche im R_4 ausschneidet. Die weitere Diskussion schließen wir unten (§ 7) an die sogenannte Charakteristik an.

§ 4.

Schnitt konsekutiver Normalebenen. Charakteristik.

Nach § 2, (5) lauten die Gleichungen der Normalebene im Punkte (x, y, z, t)

(1) $$\Sigma(X-x)x_1=0,\qquad \Sigma(X-x)x_2=0,$$

wo in den Summen nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben ist.

Schneidet man diese Normalebene mit der des benachbarten Punktes $x + dx,\ y + dy$ etc., so erhält man weiter

$$\Sigma(X-x)dx_1 = Edu + Fdv, \quad \Sigma(X-x)dx_2 = Fdu + Gdv. \tag{2}$$

Löst man (1) und (2) nach $X - x,\ Y - y$ etc. auf, so folgt nach den Bezeichnungen von § 1 leicht

$$\begin{aligned} X - x &= \frac{(ED'_x - FD_x)du^2 + (ED''_x - GD_x)du\,dv + (FD''_x - GD'_x)dv^2}{edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv^2}, \\ Y - y &= \frac{(ED'_y - FD_y)du^2 + (ED''_y - GD_y)du\,dv + (FD''_y - GD'_y)dv^2}{edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv^2}, \\ Z - z &= \cdots\cdots\cdots\cdot, \\ T - t &= \cdots\cdots\cdots\cdot. \end{aligned} \tag{3}$$

Jeder Fortschreitungsrichtung $\frac{du}{dv}$ auf der Fläche entspricht nach (3) ein bestimmter Punkt (X, Y, Z, T) in der Normalebene des Flächenpunkts (x, y, z, t). Durchläuft $\frac{du}{dv}$ alle Werte d. h. schneidet man die Normalebenen aller Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve auf der Fläche, die den Flächenpunkt (x, y, z, t) umgibt, mit der Normalebene dieses Punktes, so wird in *der Normalebene* ein *Kegelschnitt* erzeugt, den wir die *„Charakteristik"* nennen. In § 7 wird sich nämlich zeigen, daß dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhältnisse im Flächenpunkte vollständig charakterisiert, ähnlich wie die Indikatrix gewöhnlicher Flächen. Die Gleichungen dieser Charakteristik sind durch (3) gegeben, in denen $\frac{du}{dv}$ als variabler Parameter anzusehen ist. Die Asymptotenrichtungen der Charakteristik erhält man durch Nullsetzen des Nenners in (3)

$$edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv^2 = 0. \tag{4}$$

Den Asymptotenrichtungen der Charakteristik entsprechen zwei Richtungen auf der Fläche selbst, die wir die *Asymptotenrichtungen der Fläche* nennen, diese sind durch (4) bestimmt. Je nachdem $eg - f^2 \gtreqless 0$, ist die *Charakteristik* eine *Ellipse* bezw. *Parabel* oder *Hyperbel*. Wir werden weiter unten (§ 5) danach eine Einteilung der Flächenpunkte in drei Gattungen vornehmen. Wir wenden die Gleichungen (3) noch an auf die Gleichungen der zweiten Annäherungsfläche (§ 2, (6)): dieselben lauten

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad 2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2. \tag{5}$$

Wir haben hier x, y als die veränderlichen Parameter u, v zu betrachten und erhalten so für die *Charakteristik im Nullpunkt* die Gleichungen:

$$(6)\qquad X=0;\ Y=0;\ Z=\frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)};\qquad T=-\frac{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)}.$$

Dabei ist $\frac{dy}{dx}=\lambda$ gesetzt. Jedem Wert von λ oder jedem Element, das der Normalraum $y-\lambda x=0$ aus der Fläche schneidet, entspricht demnach ein Punkt M der Charakteristik (6), die in der Normalebene $X=0$, $Y=0$ des Nullpunkts liegt.

Wir untersuchen nun die Lage des Punktes M zur Schmiegungsebene der Raumkurve, die der Raum $y-\lambda x=0$ aus der Fläche schneidet. Man erhält als Gleichungen dieser Schmiegungsebene

$$(7)\qquad \frac{Z}{T}=\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2};\qquad Y-\lambda X=0.$$

Ist weiter O der Ursprung, so erhält man als Gleichungen für OM nach (6)

$$(8)\qquad \frac{Z}{T}=-\frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b};\quad X=0;\quad Y=0.$$

Bezeichnet man weiter mit v den Winkel, den OM mit der Schmiegungsebene (7) bildet, so erhält man leicht

$$\sin v=\frac{[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2][\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]+[a+2b\lambda+c\lambda^2][b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]}{\sqrt{\{[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2]^2+[a+2b\lambda+c\lambda^2]^2\}\{[\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]^2+[b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]^2\}}}.$$

Für $v=0$ erhält man gerade die linke Seite der Gleichung § 3, (4), es folgt daher: *Der Schnittpunkt* (M) *konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnitts genommen und nur in dieser, liegt in der Schmiegungsebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts.*

Durch diesen Satz sind die Hauptkrümmungsrichtungen genau so charakterisiert, wie durch den analogen Satz die Hauptkrümmungsrichtungen der Flächen im R_3.

Wir setzen nun zweitens in (9) $v=\frac{\pi}{2}$: Man erhält dann

$$\begin{vmatrix} a+2b\lambda+c\lambda^2 & \alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2 \\ b\lambda^2+(a-c)\lambda-b & \beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta \end{vmatrix}=0.$$

Benützt man die Identität

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda \\ a+b\lambda & b+c\lambda \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} a+2b\lambda+c\lambda^2 & \alpha+\beta\lambda+\gamma\lambda^2 \\ b\lambda^2+(a-c)\lambda-b & \beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta \end{vmatrix}$$

und läßt den von Null verschiedenen Faktor $1+\lambda^2$ weg, so folgt

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda \\ a+b\lambda & b+c\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Die linke Seite von (11) ist aber der Nenner der Charakteristik (6). Fü
die *Asymptotenrichtungen steht also OM senkrecht zur Schmiegungsebene*
dies erinnert an den Satz der Fläche im R_3, nach dem für die Asymptoten
kurven die Flächennormale senkrecht zur Schmiegungsebene steht.

§ 5.

Involution auf der Fläche. Einteilung der Flächenpunkte.

Die weiteren Erörterungen schließen sich wieder an die Gleichung

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2, \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \end{aligned}$$

der zweiten Annäherungsfläche an. Da im folgenden wiederholt die I
varianten der beiden quadratischen Formen

$$(2)\qquad f_1 \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2; \quad f_2 \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

auftreten, so setzen wir zur Abkürzung

$$(3)\qquad \begin{aligned} &D_{11} \equiv ac - b^2 \text{ Diskriminante von } f_1, \\ &D_{22} \equiv \alpha\gamma - \beta^2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad f_2, \\ &D_{12} \equiv a\gamma + \alpha c - 2b\beta \text{ Simultaninvariante von } f_1 \text{ und } f_2, \\ &\vartheta_{12} \equiv \begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ \alpha x + \beta y & \beta x + \gamma y \end{vmatrix} \text{ Funktionaldeterminante von } f_1 \text{ und } f_2, \\ &R \equiv D_{12}^2 - 4D_{11}D_{22} \text{ Resultante von } f_1 \text{ und } f_2. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene in einem Punkt einer Fläche des R_3 schneidet au
dieser eine Kurve aus, die im Berührungspunkt einen Doppelpunkt besitz
Ähnliches ist für Flächen im R_4 der Fall, indem jeder Tangentialraum

$$(4)\qquad z - kt = 0 \quad \text{oder} \quad z - t \operatorname{tg} \varphi = 0 \qquad (k = \operatorname{tg} \varphi)$$

eine Raumkurve aus der Fläche schneidet, die im Berührungspunkt eine
singulären Punkt besitzt. Das Tangentenpaar in diesem Punkt ist durch di
Gleichung

$$(5)\qquad f_1 - kf_2 \equiv (a - k\alpha)x^2 + 2(b - k\beta)xy + (c - k\gamma)y^2 = 0$$

bestimmt. Das Tangentenpaar (5) liegt in der Tangentenebene d. h. i
der XY-Ebene. Drei verschiedene Tangentialräume, entsprechend de
Parametern k_1, k_2, k_3, schneiden sechs Linienelemente aus der Fläche, di
durch die Gleichungen bestimmt sind, die man durch sukzessive Sub
stitution von k_1, k_2, k_3 für k aus (5) erhält. Da die Resultante dieser dre
Gleichungen verschwindet, so liegen die sechs Elemente in Involution.*
Es folgt: *Die einfach unendliche Schar (4) von Tangentialräumen paar
die von dem Nullpunkt ausgehenden Flächenelemente involutorisch.*

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 58.

Setzt man in (5) die Diskriminante gleich Null, also

$$(6)\qquad D_{22}k^2 - D_{12}k + D_{11} = 0,$$

so erhält man zwei Werte k_1, k_2 von k, welche die *Doppelstrahlen* der Involution bestimmen. Es ist dann

$$(7)\qquad k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}} = \operatorname{tg}\varphi_1.$$

Die Gleichung für die Doppelstrahlen selbst erhalten wir, indem wir bilden

$$(f_1 - k_1 f_2)(f_1 - k_2 f_2) = f_1^2 - (k_1 + k_2) f_1 f_2 + k_1 k_2 f_2^2 = 0,$$

oder

$$D_{22} f_1^2 - D_{12} f_1 f_2 + D_{11} f_2^2 = 0.$$

Die linke Seite ist aber identisch mit $-\vartheta_{12}^2$.*) Die *Doppelstrahlen* sind also durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ \alpha x + \beta y & \beta x + \gamma y \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Beachtet man § 4, (6), so folgt: *Die Doppelstrahlen der Involution sind die in § 4 definierten Asymptotenrichtungen. Die Involutionspaare werden daher von den Asymptotenrichtungen harmonisch getrennt.* Diese Doppelstrahlen können als Analoge der Doppelstrahlen der Involution in der Indikatrix gewöhnlicher Flächen gelten und die Benennung „Asymptotenrichtungen" scheint daher von neuem gerechtfertigt. Die zwei Tangentialräume, welche diese ausschneiden ($z - k_1 t = 0$, $z - k_2 t = 0$), sollen „*Asymptotenräume*" heißen.

Aus (7) ergibt sich nun, daß, je nachdem $R > 0$, $R = 0$, $R < 0$ ist, die Asymptotenrichtungen reell verschieden, reell zusammenfallend, imaginär sind. Entsprechend ist dann die Charakteristik § 4, (6) eine *Hyperbel*, eine *Parabel* oder eine *Ellipse*. Im ersten Falle ($R > 0$) nennen wir daher den Flächenpunkt einen *hyperbolischen*, im zweiten ($R = 0$) in Übereinstimmung mit § 3 einen *parabolischen*, im dritten Falle ($R < 0$) einen *elliptischen Punkt*. Im parabolischen Punkte ist ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß (s. § 3). Da weiter nach § 4, (4) in einem *allgemeinen Flächenpunkt* (x, y, z, t) die Asymptotenrichtungen durch die Gleichung

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = 0$$

bestimmt sind, *so ist der Flächenpunkt ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer, je nachdem $f^2 - eg$ größer, gleich oder kleiner als Null ist.*

Wir bilden nunmehr *Paare von Tangentialräumen, welche aus der Fläche vier harmonische Strahlen ausschneiden.* Damit die vier Linienelemente, welche durch die beiden Gleichungen

$$f_1 - kf_2 = 0, \quad f_1 - k_1 f_2 = 0$$

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 57.

bestimmt sind, sich harmonisch trennen, muß die Simultaninvariante der linken Seiten verschwinden. Man erhält

$$2kk_1 D_{22} - (k+k_1)D_{12} + 2D_{11} = 0. \tag{8}$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, daß die *Paare von Tangentialräumen, welche vier harmonische Flächenelemente ausschneiden, eine Involution bilden.* Für $k = k_1$ erhält man aus (8) die *Doppelräume* dieser Involution, nämlich

$$k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}}.$$

Nach (7) sind die *Doppelräume* die Asymptotenräume. Das Rechtwinkelpaar von Tangentialräumen in der Involution, „die Rechtwinkelräume", erhält man, indem man in (8) $k = -\frac{1}{k_1} = \operatorname{tg}\varphi$ setzt. Man erhält so

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}. \tag{9}$$

Durch (9) sind *zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, die aus der Fläche vier harmonische Linienelemente ausschneiden und die Winkel der Asymptotenräume halbieren.* Wir nennen diese Räume mit späterer Begründung *„Hauptkrümmungsräume"*. Man zeigt leicht, daß im parabolischen Punkt die beiden Asymptotenräume mit einem der beiden Hauptkrümmungsräume zusammenfallen.

§ 6.

Die Krümmung der Projektionen in die Tangentialräume. Biegungsinvariante.

Wir gehen wieder aus von den Gleichungen § 2, (6) der zweiten Annäherungsfläche:

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Wir drehen nun die Koordinatenräume $z = 0$ und $t = 0$ um die Tangentialebene (XY-Ebene) um den Winkel φ, setzen demnach

$$z = t_1 \sin\varphi + z_1 \cos\varphi, \qquad t = t_1 \cos\varphi - z_1 \sin\varphi$$

und erhalten als Gleichungen der Annäherungsfläche in Beziehung auf das neue Koordinatensystem

$$\begin{aligned} 2z_1 &= (a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)x^2 + 2(b\cos\varphi - \beta\sin\varphi)xy \\ &\qquad + (c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi)y^2, \\ 2t_1 &= (a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)x^2 + 2(b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)xy \\ &\qquad + (c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gleichungen der Projektionsfläche in den Tangentialraum $z_1 = 0$ lauten

$$(2)\quad \begin{aligned} 2t_1 &= (a \sin\varphi + \alpha \cos\varphi)x^2 + 2(b \sin\varphi + \beta \cos\varphi)\,xy \\ &\quad + (c \sin\varphi + \gamma \cos\varphi)\,y^2, \\ z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungshalbmesser dieser Projektionsfläche, so ist nach bekannten Formeln

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} &= (a \sin\varphi + \alpha\cos\varphi)(c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi) - (b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2 \quad \text{oder} \\ \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} &= D_{11}\sin^2\varphi + D_{12}\sin\varphi\cos\varphi + D_{22}\cos^2\varphi. \end{aligned}$$

Variiert φ, so erhält man aus (2) die den verschiedenen Tangentialräumen entsprechenden Projektionsflächen. Das Krümmungsmaß (3) dieser Flächen variiert dann offenbar wie die reziproken Krümmungsradien folgender im R_3 $t = 0$ gelegenen Fläche

$$(4)\quad 2z = D_{22}x^2 + D_{12}xy + D_{11}y^2.$$

Alle Sätze also, welche für die Krümmungsradien der Normalschnitte gewöhnlicher Flächen gelten, finden für das Krümmungsmaß der Projektionsflächen die entsprechende Deutung. Insbesondere erhält man zwei extreme Werte für das Krümmungsmaß, entsprechend den Hauptkrümmungsradien der Flächen im R_3, weiter Krümmungsmaße mit dem Wert Null, und endlich einen dem Eulerschen analogen Satz.

Die Tangentialräume, deren Projektionsflächen einen extremen Wert des Krümmungsmaßes besitzen, erhält man aus (3), indem man $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right) = 0$ setzt. Es folgt so

$$(5)\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Durch (5) sind also *zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, in welche projiziert die Fläche Flächen mit maximalem bzw. minimalem Wert des Hauptkrümmungsmaßes gibt. Diese Räume sind aber nach* § 5, (9) *identisch mit den dort definierten Hauptkrümmungsräumen.**) Ihre Benennung scheint so gerechtfertigt.

Die Projektionsflächen mit dem Krümmungsmaß Null erhält man, indem man in (3) $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = 0$ setzt. Es folgt

$$(6)\quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Durch (6) sind zwei Tangentialräume, „*Nullräume*", definiert, welche, wie

*) Vgl. Killing, Nicht-Euklidische Raumformen p. 248.

man leicht zeigt, auf den Asymptotenräumen des § 5 senkrecht stehen. Da in § 5 sich gezeigt hat, daß die Winkel der Asymptotenräume durch die Hauptkrümmungsräume halbiert werden, so werden auch die Winkel der Nullräume durch die Hauptkrümmungsräume halbiert. Setzt man endlich in (3) $\varphi + \frac{\pi}{2}$ statt φ, so erhält man das Krümmungsmaß $\frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'}$ der Projektionsfläche in den Raum $t_1 = 0$. Es folgt so

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} + \frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'} = D_{11} + D_{22}. \tag{7}$$

Die Summe der Krümmungsmaße zweier Projektionsflächen in Beziehung auf zwei beliebige zueinander senkrechte Tangentialräume ist also konstant.

Man kann zeigen*), daß diese Summe für einen allgemeinen Flächenpunkt aus dem Ausdruck für das Linienelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2 \tag{8}$$

durch dieselbe Formel erhalten wird, durch die man das Gaußsche Krümmungsmaß einer Fläche im R_3 mit dem Linienelement (8) berechnet. Diese Summe ist daher eine Biegungsinvariante, die man passend ebenfalls das *Krümmungsmaß der Fläche* nennt.

§ 7.

Die Charakteristik.

Wir untersuchen nun den in der Normalebene (ZT-Ebene) eines Flächenpunkts gelegenen Kegelschnitt, den wir in § 4 Charakteristik nannten. Es wird sich zeigen, daß dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhältnisse im Flächenpunkt klar übersehen läßt: außerdem werden wir mit seiner Hilfe im Stande sein, Genaueres über die Hauptkrümmungsradien auszusagen. Wir knüpfen zu diesem Zwecke an die Gleichungen § 4, (6)

$$(1) \qquad \begin{aligned} X = 0;\ Y = 0;\ Z &= \frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)};\\ T &= -\frac{b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)} \end{aligned}$$

unsere Erörterungen an. Jeder Fortschreitungsrichtung $\lambda = \frac{y}{x}$ der Fläche entspricht darnach ein Punkt (X, Y, Z, T) der Normalebene. Von der Einteilung der Flächenpunkte nach der Natur des Kegelschnitts war schon in § 4 die Rede. Wir bestimmen hier nun zunächst die *Lage der*

*) Vgl. Hovestadt, Programm des Münsterschen Realgymnasiums 1880.

Asymptoten von (1). Man erhält die Gleichungen der Asymptotenrichtungen, indem man aus den beiden Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{Z}{T} = -\frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda \\ a+b\lambda & b+c\lambda \end{vmatrix} = 0$$

λ eliminiert. Quadriert man die Determinante und beachtet die Identität § 4, (10), so erhält man die beiden Gleichungen

$$D_{22}(a+2b\lambda+c\lambda^2)^2 - D_{12}(a+2b\lambda+c\lambda^2)(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2) + D_{11}(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)^2 = 0,$$

$$(a+2b\lambda+c\lambda^2)(\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta) - (\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)(b\lambda^2+(a-c)\lambda-b) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der ersten Gleichung (2) läßt sich aber λ bequem eliminieren; man erhält so für die *Asymptotenrichtungen der Charakteristik*

$$(3)\qquad D_{11}Z^2 + D_{12}ZT + D_{22}T^2 = 0$$

oder

$$(4)\qquad \frac{Z}{T} = -\frac{D_{12}\pm\sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Diese Gleichung stellt aber, wie man aus § 6, (6) erkennt, die Nullräume dar. Es folgt: *Schneidet man die beiden Tangentialräume (Nullräume), auf welche die Fläche projiziert Flächen mit dem Krümmungsmaß Null gibt, mit der Normalebene, so erhält man in dieser zwei Gerade, welche die Asymptotenrichtungen der Charakteristik sind.*

Bestimmt man zu dem Geradenpaar (3) das Paar von Winkelhalbierenden, so erhält man die *Gleichung für die Achsenrichtungen* des Kegelschnitts. Eine kleine Rechnung gibt

$$(5)\qquad D_{12}Z^2 + 2(D_{22}-D_{11})ZT - D_{12}T^2 = 0.$$

Setzt man hier $\frac{Z}{T} = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält man für *die Achsenrichtungen*

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22}-D_{11}}.$$

Nach § 6, (5) folgt: *Durch die Hauptkrümmungsräume werden aus der Normalebene die Achsenrichtungen der Charakteristik ausgeschnitten.*

Aus (1) folgt, daß die Größe $\frac{Z}{T}$ sich durch Vertauschen von λ mit $-\frac{1}{\lambda}$ nicht ändert. Zieht man demnach durch den Flächenpunkt zwei aufeinander senkrechte Linienelemente und schneidet die Normalebenen in den Endpunkten mit der im Anfangspunkt, so liegen die beiden resultierenden Schnittpunkte mit dem Flächenpunkt in gerader Linie. Der *Flächenpunkt ist nun nicht etwa Mittelpunkt des Kegelschnitts*, da die Größe

$Z^2 + T^2$ durch Vertauschen von λ mit $-\frac{1}{\lambda}$ ihren Wert ändert, sondern ein nicht näher charakterisierter Punkt, jedoch *im Innern des Kegelschnitts;* denn jede Gerade durch den Flächenpunkt $Z + \sigma T = 0$, wo σ eine beliebige Konstante bedeutet, schneidet den Kegelschnitt in zwei *reellen* Punkten, da das Absolutglied der Gleichung dieser Geraden, in λ geschrieben, -1 ist.

Man schneide nunmehr die Normalebene mit dem Tangentialraum $Z = 0$. Dieser wird aus der Normalebene eine Gerade (die T-Achse) ausschneiden, auf der vom Kegelschnitt zwei Strecken T_1 und T_2 begrenzt werden, entsprechend den beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0.$$

Beachtet man die Identität § 4, (10), so erhält man jene beiden Strecken durch folgende Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{1}{T} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2}; \quad \beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0.$$

Diese beiden Gleichungen gestatten nun eine interessante Deutung: Projiziert man die Fläche in den Raum $Z = 0$, so erhält man eine Projektionsfläche mit den Gleichungen

$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad z = 0.$$

Die Normale dieser Fläche ist die T-Achse. Die Hauptkrümmungshalbmesser (R) der Projektionsfläche erhält man wie bekannt durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

wobei λ der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0$$

zu genügen hat. Es ist demnach

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{T}.$$

Da nun offenbar $Z = 0$ ein ganz beliebiger Tangentialraum ist, so folgt:

Satz I. *Schneidet man die Charakteristik mit dem beliebigen Tangentialraum $Z = 0$, so erhält man zwei Abschnitte T_1 und T_2. Die Gerade, auf der T_1 und T_2 liegen, stellt die Normale, ihre Endpunkte stellen die Hauptkrümmungsmittelpunkte, die Abschnitte T_1 und T_2 die Hauptkrümmungshalbmesser der in den Raum $Z = 0$ projizierten Fläche dar.*

Nach diesem Satze kann daher die Charakteristik auch auf folgende Art erzeugt werden: Man projiziert die Fläche in die einfach unendliche Schar von Tangentialräumen und erhält so eine einfach unendliche Schar gewöhnlicher Flächen. Ihre Normalen (im Nullpunkt) durchlaufen die

Normalebene und die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte die Charakteristik. — An diesen Satz schließen sich noch einige Bemerkungen an. Das Produkt $\frac{1}{T_1 T_2}$ ist das Krümmungsmaß der in den Raum $Z = 0$ projizierten Fläche. Ist $Z = 0$ ein Nullraum, so schneidet dieser nach dem Obigen aus der Normalebene eine Asymptotenrichtung aus. Ein Abschnitt T wird demnach unendlich groß und das Krümmungsmaß der in einen Nullraum projizierten Fläche ist Null — und dies war ja die definierende Eigenschaft der Nullräume (vgl. § 6). Ist $Z = 0$ ein Hauptkrümmungsraum, so wird durch diesen, wie oben gezeigt wurde, eine Achsenrichtung aus der Ebene der Charakteristik ausgeschnitten. Es muß also für einen Kegelschnitt der Satz gelten, daß das Produkt $\frac{1}{T_1 T_2}$ ein Maximum bzw. Minimum ist, wenn die Gerade, auf der die Abschnitte liegen, achsenparallel ist. Zieht man ferner in der Ebene der Charakteristik durch den Flächenpunkt zwei zueinander senkrechte Gerade, etwa $Z = 0$ und $T = 0$, so erhält man vier Abschnitte $Z_1 Z_2$, $T_1 T_2$, für die nach dem obigen Satz und § 6, (7)

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2} = D_{11} + D_{22}$$

ist. Diese Gleichung enthält wiederum einen leicht zu formulierenden Satz für Kegelschnitte. Die Größe $\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2}$, welche gleich dem Krümmungsmaß der Fläche ist, zeigt einige Verwandtschaft mit der Potenz eines Punkts in Beziehung auf einen Kreis. Überhaupt jeder Satz über Sehnen eines Kegelschnitts durch einen inneren Punkt findet eine entsprechende Deutung für die Krümmungsverhältnisse der Fläche. Einige Beispiele mögen genügen. Ist etwa der Kegelschnitt ein Kreis, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmaß (*Kreispunkt*). Ist der Flächenpunkt Mittelpunkt des Kegelschnitts, so haben in diesem Punkt alle Projektionsflächen den Charakter von Minimalflächen etc.

Wir beweisen noch einen Satz, der uns näheren Aufschluß über die Hauptkrümmungsradien geben wird. Derselbe lautet

Satz II. *Der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte ist die Fußpunktkurve der Charakteristik in Beziehung auf den Flächenpunkt.*

Zum Beweis dieses Satzes stellen wir zunächst für einen Punkt (Z_1, T_1) des Kegelschnitts, dem der Parameterwert λ in (1) entsprechen möge, die Gleichung der Tangente auf. Bedeutet (Z, T) einen Punkt dieser Tangente, so lautet, wie man leicht nachrechnet, ihre Gleichung

$$(8) \qquad \frac{T - T_1}{Z - Z_1} = -\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}.$$

Die Normale vom Flächenpunkt auf diese Tangente hat demnach die Gleichung

$$\frac{T}{Z} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{a + 2b\lambda + c\lambda^2}. \tag{9}$$

Wir zeigen zunächst, daß auf dieser Geraden der Krümmungsmittelpunkt des dem Werte λ entsprechenden Normalschnitts liegt. Die Gleichung der Schmiegungsebene dieses Normalschnitts ist nach § 4, (7)

$$\frac{T}{Z} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{a + 2b\lambda + c\lambda^2}; \quad Y - \lambda X = 0. \tag{10}$$

Die Schnittgerade dieser Schmiegungsebene mit der Normalebene $X = 0$, $Y = 0$ des Flächenpunkts muß jenen Krümmungsmittelpunkt enthalten. Setzt man aber in (10) $X = 0$, $Y = 0$, so erhält man gerade (9), womit dieser erste Teil des Beweises erledigt ist. Zeigen wir endlich, daß der Abstand ϱ des Flächenpunkts von der Tangente (8) gerade gleich dem Krümmungsradius des dem Werte λ entsprechenden Normalschnitts ist, so ist der Satz II bewiesen. Aus (8) erhält man aber für ϱ einen Ausdruck, der mit Hilfe der Identität § 4, (10) sich auf folgende Form

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2$$

bringen läßt. Aus § 3, (3) folgt nun, daß ϱ in der Tat gleich dem Krümmungsradius des dem Werte λ entsprechenden Normalschnitts ist, womit der Satz II bewiesen ist.

Wir bemerken noch: Geht die Normale vom Flächenpunkt auf die Kegelschnitttangente durch den Berührungspunkt hindurch oder, mit anderen Worten, steht diese Normale auf dem Kegelschnitt senkrecht, so muß nach (9) und (1)

$$[a + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b] + [\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] = 0$$

sein. Dies ist aber nach § 3, (4) die Gleichung für die 4 Hauptkrümmungsrichtungen.

Etwas ausführlicher können wir also sagen: Legt man durch die Normalebene des Flächenpunkts O und ein Linienelement λ der Fläche durch O den Normalraum, so schneidet dieser aus der Fläche eine gewisse Kurve Γ aus. Dem Element λ entspricht andererseits ein bestimmter Punkt P der Charakteristik. Der Krümmungsmittelpunkt der Kurve Γ ist der Fußpunkt des Lotes g, das man von O auf die in P konstruierte Charakteristikentangente fällen kann. Die Schmiegungsebene von Γ in O ist die Ebene durch das Element λ und das Lot g. *Die Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Fußpunkte der Lote aus O auf die Charakteristik.* Der Ort der Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Normalschnitte ist die

Fußpunktkurve der Charakteristik für den Flächenpunkt O. *Die Fußpunktkurve berührt den Kegelschnitt in den Hauptkrümmungsmittelpunkten.*

Man erkennt also von neuem die Richtigkeit der am Schluß von § 4 aufgeführten Sätze. Man sieht weiter, daß die Hauptkrümmungshalbmesser wirkliche Maxima und Minima darstellen und daß mindestens zwei derselben reell sind, da sich von einem inneren Punkt eines Kegelschnitts mindestens zwei reelle Normalen auf denselben fällen lassen. Ist der Kegelschnitt eine Parabel (parabolischer Punkt), so ist eine Normale unendlich groß, d. h. im parabolischen Punkt ist ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß, wie wir dies ja oben schon gesehen haben. Werden in einem Punkt zwei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so läßt sich zeigen, daß der Flächenpunkt auf einer der Achsen (im parabolischen Punkt auf *der* Achse) liegt und daß die den beiden anderen Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden Hauptschnitte aufeinander senkrecht stehen. *Werden in einem Punkt drei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so kann dies offenbar nur dann der Fall sein, wenn die Charakteristik ein Kreis und der Flächenpunkt sein Mittelpunkt ist.* Dann sind aber überhaupt alle Krümmungshalbmesser gleich und alle Projektionsflächen haben gleiche aber entgegengesetzte Hauptkrümmungshalbmesser. *Die im nächsten Kapitel definierten Flächen besitzen nur solche Flächenpunkte.* Ist der Kegelschnitt ein Kreis, der Flächenpunkt aber nicht sein Mittelpunkt, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmaß. In diesem Falle gibt es nur zwei Lote auf den Kreis, also nur zwei reelle Hauptkrümmungshalbmesser.

§ 8.

Die Linien auf der Fläche. Formel für die Hauptkrümmungshalbmesser.

Die bisher betrachteten ausgezeichneten Richtungen in einem Flächenpunkt führen zu bestimmten Linien auf der Fläche.

Verfolgt man zuerst die vier Hauptkrümmungsrichtungen von Punkt zu Punkt, so erhält man ein vierfach unendliches System von Flächenkurven, die wir „*Krümmungslinien*“ nennen. Zur Aufstellung ihrer Differentialgleichung benützen wir den Satz des § 4, wonach der Schnittpunkt konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnitts genommen, in der Schmiegungsebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts liegt.

Seien $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$, $t = t(u)$ die Gleichungen einer Raumkurve, wo u der Parameter ist, so haben wir als Gleichungen der Schmiegungsebene in einem Punkte (u)

$$X - x = \lambda \frac{dx}{du} + \mu \frac{d^2x}{du^2}, \quad Y - y = \lambda \frac{dy}{du} + \mu \frac{d^2y}{du^2} \text{ etc.}$$

wobei X, Y, Z, T laufende Koordinaten, λ, μ variable Parameter sind. Um nun die Gleichungen der Schmiegungsebene einer durch den Punkt (u, v) der Fläche gehenden Flächenkurve zu erhalten, haben wir v als Funktion von u anzusehen. Wir erhalten dann als Gleichungen der Schmiegungsebene

$$(1) \qquad X - x = \lambda x_1 + \mu \left(\frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du}\frac{dv}{du}\right) + x_2\left(\lambda \frac{dv}{du} + \mu \frac{d^2v}{du^2}\right),$$

wo wir nur die auf x bezügliche Gleichung angeschrieben haben. Da die Gleichungen (1) die Gleichung

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} X - x & x_1 & x_2 & dx_1\,du + dx_2\,dv \\ Y - y & y_1 & y_2 & dy_1\,du + dy_2\,dv \\ Z - z & z_1 & z_2 & dz_1\,du + dz_2\,dv \\ T - t & t_1 & t_2 & dt_1\,du + dt_2\,dv \end{vmatrix} = 0$$

nach sich ziehen, so erhält der durch (2) dargestellte R_3 die Schmiegungsebene (1). Da außerdem die Koordinaten X, Y, Z, T eines Punkts der Tangentialebene nach § 2, (4) die Gleichung (2) identisch befriedigen, so ist jener R_3 ein Tangentialraum des Punkts (u, v). Wir können also als Gleichungen der Schmiegungsebene des Normalschnitts die Gleichung (2) und die Gleichung des der Richtung $\frac{dv}{du}$ entsprechenden Normalraums ansehen. Diesen zwei Gleichungen hat also nach dem oben angeführten Satz der Schnittpunkt (X, Y, Z, T) konsekutiver Normalebenen, in der Richtung des Elements $\left(\frac{dv}{du}\right)$ genommen, zu genügen. Die Koordinaten X, Y, Z, T, die wir aus den Gleichungen § 4, (3) zu entnehmen haben, genügen aber, weil der Punkt (X, Y, Z, T) in der Normalebene des Punkts (u, v) liegt, der Gleichung jenes Normalraums von selbst: diese Koordinaten haben also nur noch der Gleichung (2) zu genügen. Statt (2) können wir aber mit Einführung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung des § 1 schreiben

$$(3) \qquad \Sigma(X - x)\,(D_x\,du^2 + 2D_x'\,du\,dv + D_x''\,dv^2) = 0,$$

wobei man hier wie auch in den folgenden Summen die übrigen Glieder durch zyklische Vertauschung von x, y, z, t aus dem Leitglied erhält. Aus dieser Gleichung und aus den Gleichungen § 4, (3) erhalten wir nunmehr als *Differentialgleichung der Krümmungslinien*

$$(4) \qquad \Sigma(D_x\,du^2 + 2D_x'\,du\,dv + D_x''\,dv^2) \times$$
$$\times \{(ED_x' - FD_x)du^2 + (ED_x'' - GD_x)\,du\,dv + (FD_x'' - GD_x')\,dv^2\} = 0.$$

Aus der Gleichung (1) können wir auch eine *Formel für die Hauptkrümmungshalbmesser* des Flächenpunkts (u, v) ableiten. Quadriert man nämlich (2) durch Kombination von Kolonnen mit Kolonnen und benützt die Gleichungen (1) und (2) des § 4, welche ausdrücken, daß (X, Y, Z, T) der Schnittpunkt der beiden konsekutiven Normalebenen ist, so erhält man

$$5)\quad \begin{vmatrix} \Sigma(X-x)^2 & 0 & 0 & ds^2 \\ 0 & E & F & du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 \\ 0 & F & G & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 \\ ds^2 & du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Sigma(X-x)^2$ ist gleich dem Quadrat des Krümmungsradius ϱ, der der Richtung (du, dv) entspricht, und die Differentiale du, dv müssen der Gleichung (4) genügen.

Nun ist aber

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ dx_1 du + dx_2 dv & dy_1 du + dy_2 dv & dz_1 du + dz_2 dv & dt_1 du + dt_2 dv \end{matrix}\right\|^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 \\ F & G & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 \\ du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ dy_1 du + dy_2 dv & dz_1 du + dz_2 dv & dt_1 du + dt_2 dv \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \Sigma(D_x du^2 + 2 D_x' du dv + D_x'' dv^2)^2.$$

Benützt man diese Gleichungen, so erhält man aus (5)

$$(6)\qquad \varrho^2 = \frac{(E du^2 + 2 F du dv + G dv^2)^2 (EG - F^2)}{\Sigma(D_x du^2 + 2 D_x' du dv + D_x'' dv^2)^2}.$$

Diese Gleichung gibt uns entsprechend den vier Wurzelwerten $\frac{dv}{du}$ der Gleichung (4) *die vier Hauptkrümmungsradien in einem Flächenpunkt* (u, v).

Es mag bemerkt werden, daß für *eine Fläche im dreidimensionalen Raum* $t = 0$ alle Fundamentalgrößen zweiter Ordnung außer D_t, D_t', D_t'' gleich Null, diese letzteren aber mit den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Flächentheorie identisch sind. Die Gleichungen (4) und (6) gehen dann in die wohlbekannten Formeln der Flächentheorie für die Krümmungslinien (und Asymptotenkurven) und die Hauptkrümmungshalbmesser über.

Geht man ferner den Asymptotenrichtungen auf der Fläche nach, so erhält man eine doppelt unendliche Schar von Kurven, die wir *„Asymptotenlinien“* nennen: ihre Differentialgleichung ist nach § 4, (4)

$$(7) \qquad e du^2 + 2 f du dv + g dv^2 = 0.$$

Ist für einen Punkt (u, v)

$$(8) \qquad eg - f^2 = 0,$$

so fallen die Asymptotenrichtungen zusammen, die Charakteristik ist eine Parabel, und ein Hauptkrümmungshalbmesser ist unendlich (parabolischer Punkt). Die Gleichung (8) definiert daher eine Linie auf der Fläche, welche sämtliche parabolische Punkte verbindet, man wird diese passend die *parabolische Linie* nennen. Wie für die Flächen im R_3 ist die parabolische Linie im allgemeinen der Ort der Spitzen, in singulären Fällen ganz oder teilweise die Einhüllende der Asymptotenlinien.

Endlich kann man ebenso wie für die Flächen des R_3 kürzeste Linien — geodätische Linien — auf den Flächen im R_4 definieren (vgl. Diss. § 10). Da wir von den entsprechenden Formeln keinen Gebrauch machen, so unterlassen wir es, sie hier aufzustellen. Nur mag noch bemerkt werden, daß auch für die geodätischen Linien auf Flächen im R_4 die Schmiegungsebene der Linie stets senkrecht auf der Tangentialebene der Fläche steht.

II. Kapitel.

R-Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.

§ 9.

Definition der R-Flächen.

Es sei durch die Gleichung

$$(1) \qquad z + it = F(x + iy)$$

$z + it$ in einem bestimmten Bereich der XY-Ebene als analytische Funktion der komplexen Variabeln $x + iy$ definiert. Wir denken uns nun im R_4 ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z, T und stellen in diesem die komplexe Variable $x + iy$ in der üblichen Weise durch einen bestimmten Punkt P_2 der XY-Ebene dar. Sei $z + it$ einer der Werte der Funktion F im Punkte P_2, so gehe man in der Z-Richtung um z vorwärts bis zum Punkt P_1, hierauf von P_1 in der T-Richtung um t bis zum Punkt P. Der Punkt P hat dann die Koordinaten x, y, z, t und ist der Repräsentant des Funktionswerts $z + it$. Hat die Funktion in P_2 noch andere Werte, so wiederhole man für jeden dieser die angegebene Konstruktion: man erhält so die Punkte $P', P'', \cdots$ etc. Für alle diese

Punkte $P^{(i)}$ ist P_2 die Projektion auf die XY-Ebene. Durchläuft nun P_2 den Definitionsbereich der Funktion F in der XY-Ebene, so wird der Punkt P eine Fläche im vierdimensionalen Raum beschreiben; dieselbe wird, falls mehrere Punkte P vorhanden waren, aus mehreren Blättern bestehen. Sind die einzelnen Werte von F in jedem Punkt $x + iy$ des Definitionsbereichs durch analytische Fortsetzung alle ineinander überführbar, so werden die einzelnen Blätter der Fläche nicht getrennt voneinander verlaufen, sondern eine einzige zusammenhängende Fläche bilden. Diese Fläche stellt uns offenbar den gesamten Wertevorrat der Funktion F dar: Wir nennen sie eine *Riemannsche Fläche* im R_4 oder kurz eine *R-Fläche*, weil die Projektion dieser Fläche auf die XY-Ebene gerade die Riemannsche Fläche der Funktion F im gewöhnlichen Sinne gibt. Jedem Blatt der letzteren entspricht ein bestimmtes Blatt der R-Fläche oder genauer: die beiden Flächen sind eineindeutig aufeinander bezogen. Es wird sich in § 10 zeigen, daß diese Abbildung eine konforme ist. Die Bezeichnung „R-Fläche" scheint gerechtfertigt, weil die Fläche für die Funktionentheorie genau dasselbe leistet, wie die gewöhnliche Riemannsche Fläche. Nimmt man z. B. einen Punkt P der R-Fläche in der Nähe eines Verzweigungspunkts von der Ordnung n, so wird, wenn die Projektion P_2 von P auf die XY-Ebene in dieser den Verzweigungspunkt umläuft, P in ein zweites, drittes etc. Blatt der R-Fläche gelangen. Hat der Punkt P_2 nach n Umläufen seine Ausgangsstelle wieder erreicht, so ist auch der Punkt P auf seinen ursprünglichen Platz gerückt: Die n Blätter der R-Fläche hängen in dem Verzweigungspunkt in einem Zyklus zusammen.

Durch diese geometrische Deutung von (1) hat man noch den Vorteil, daß dieselbe R-Fläche auch den gesamten Wertevorrat der Umkehrfunktion von (1) darstellt; denn stellt man den Funktionswert $z + it$ durch den Punkt Q_2 mit den Koordinaten (z, t) in der ZT-Ebene dar und geht man von Q_2 in der X-Richtung um x vorwärts bis Q_1 und dann von Q_1 in der Y-Richtung um y, so hat man wieder den Punkt P mit den Koordinaten x, y, z, t erreicht. Der Punkt Q_2 wird die Projektion von mehreren Flächenpunkten auf die ZT-Ebene sein können. Sucht man alle diese auf, so erhält man eine gewisse Anzahl Werte $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ etc., welche offenbar die Werte der Umkehrfunktion von (1) für den Wert $z + it$ repräsentieren. Projiziert man also die R-Fläche von (1) auf die ZT-Ebene, so wird dadurch über der ZT-Ebene die Riemannsche Fläche (im gewöhnlichen Sinne) der Umkehrfunktion von (1) ausgebreitet. Da demnach die R-Fläche in Beziehung auf die XY-Ebene und ZT-Ebene dieselbe Rolle spielt, so müssen die Flächensätze, die sich auf die eine Ebene beziehen, in analoger Weise für die andere gelten.

Die Projektion der R-Fläche in den Raum $t = 0$ ist die Fläc

Punkte P_1, wir nennen sie kurz die t-Projektionsfläche: diese stellt die *reellen* Werte von F dar. Analog nennen wir die Projektion der R-Fläche in den Raum $z = 0$ die z-Projektionsfläche: sie ist das Bild für die *imaginären* Werte von F. Dreht man nun nach der Methode der darstellenden Geometrie den Raum $z = 0$ und mit ihm die z-Projektionsfläche um die XY-Ebene, bis die T-Achse mit der Z-Achse zusammenfällt, so hat man zwei gewöhnliche im Raum (XYZ) gelegene Flächen, welche die reellen bezw. imaginären Werte von $F(x+iy)$ repräsentieren: dieselben stellen zwei konjugierte logarithmische Potentiale dar. Dini*) hat diese untersucht, Dyck**) hat einige von ihnen modellieren lassen. Wir kommen in § 12 auf sie ausführlich zu sprechen.

Schneidet man die Fläche mit dem Raum $y = 0$, so erhält man eine in dem Raum XZT gelegene Kurve, welche das Bild der Funktion F für *reelle* Werte der Variabeln $x + iy$ darstellt. Die Teile der Kurve, welche in der XZ-Ebene $(y = 0,\ t = 0)$ liegen, stellen dann die reellen Züge der Kurve $\zeta = F(\xi)$ dar, wenn $\zeta = z + it$, $\xi = x + iy$ gesetzt wird. Ebenso sind die Teile der Kurve, die in der XT-Ebene $(y = 0,\ z = 0)$ liegen, Repräsentanten der imaginären Kurvenzüge von $\zeta = F(\xi)$ für reelle Werte von ξ. So erhält man z. B. für die Gleichung $\zeta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$ als reellen Kurvenzug $(\xi < a)$ einen Kreis in der XZ-Ebene und als imaginären $(\xi > a)$ eine gleichseitige Hyperbel in der XT-Ebene: ihre unendlich fernen Punkte stellen die zwei unendlich fernen Kreispunkte dar. Ebenso gibt die Gleichung $\zeta = b\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} - 1}$ für $\xi > a$ in der XZ-Ebene eine Hyperbel, für $\xi < a$ die zu dieser konjugierte Hyperbel in der XT-Ebene. Diese letztere ist die in der analytischen Geometrie hie und da benutzte „Stellvertreterhyperbel"***).

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene $z = 0$, $t = 0$ gibt in der XY-Ebene eine gewisse Anzahl Punkte; diese repräsentieren die Werte von $x + iy$, für die $F = 0$ ist, und zwar alle, die reellen und die komplexen. Hat man zwei Gleichungen von der Form (1), so hat man zwei R-Flächen; die Schnittpunkte dieser stellen die gemeinsamen Werte der beiden Gleichungen dar. Diese Anschauungen dürften namentlich für die algebraischen R-Flächen von Nutzen sein: statt von Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven zu reden, müßte man von den Schnittpunkten der zugehörigen R-Flächen sprechen. Sind m und n die Ordnungen der beiden Kurven, so existieren immer mn *reelle* derartige Schnittpunkte. Als geometrisches

*) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

**) Modelle zur Funktionentheorie, Verlag von M. Schilling Ser. XIV.

***) Vgl. etwa Salmon-Fiedler, analyt. Geom. der Kegelschnitte, 5. Aufl. I, p. 319.

Bild der algebraischen Gleichung $f(\xi, \zeta) = 0$ benützt man bald die Riemannsche Verzweigungsfläche, bald nach dem Vorgang von Clebsch*) eine ebene algebraische Kurve, deren Ebene jedoch, wenn man ζ und ξ auch komplexe Werte beilegt, keine reelle Existenz hat. An die Stelle dieser Kurve tritt nun die *reelle* R-Fläche und man kann sagen: Die Kurve in der Theorie der algebraischen Kurven (als R-Fläche dargestellt) und die zugehörige Riemannsche Verzweigungsfläche in der Funktionentheorie sind identische Gebilde.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir über zu der Aufstellung der Gleichungen der R-Flächen. Dieselben lauten

$$(2) \qquad x = x; \quad y = y; \quad z = u(x, y); \quad t = v(x, y),$$

wobei die Funktionen u und v den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und den hieraus folgenden

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen. In der Tat stellen die Gleichungen (2) eine Fläche im R_4 dar, wobei x, y die Parameter sind, und wegen (3) ist

$$(5) \qquad z + it = u + iv = F(x + iy).$$

Die Gleichungen (2) und (3) geben somit die allgemeinste R-Fläche.**)

§ 10.

Das Linienelement und die Tangentialebene.

Für die Fundamentalgrößen erster Ordnung des § 1 erhält man nach § 9, (2) und (3)

$$(1) \qquad F = 0, \quad E = G = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

und für das Linienelement der Fläche

$$(2) \qquad ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2),$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$(3) \qquad \lambda = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Aus der Gleichung (2) ergibt sich sofort der wichtige Satz: *Die Projektionen der R-Fläche auf die XY-Ebene und* (weil die ZT-Ebene dieselbe Rolle wie die XY-Ebene spielt) *auf die ZT-Ebene sind konforme Bilder der R-Fläche.* Die beiden Ebenen sind daher auch konform aufeinander

*) Clebsch, Journ. für Math., Bd. 63 (1863), S. 189 ff.

**) Vgl. auch Kwietniewski, a. a. O. § 5.

bezogen, wie dies ja bekannt ist. Entsprechende Punkte der beiden Ebenen sind die beiden Projektionen eines Punkts der R-Fläche. Aus (2) folgt weiter, daß die Kurven $x + iy = \text{const.}$ und $x - iy = \text{const.}$ die *Minimallinien* der R-Fläche sind. Für manche Fragen ist es nun geschickt, statt der reellen Parameter x, y die komplexen Parameter der Minimallinien zu benützen; wir setzen daher

$$(4) \qquad x + iy = \sigma; \quad x - iy = \sigma_1.$$

Ist weiter Φ die zu F konjugierte Funktion, so erhalten wir als Flächengleichungen

$$(5) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \; y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \; z = \frac{1}{2}(F(\sigma) + \Phi(\sigma_1)); \; t = -\frac{i}{2}(F(\sigma) - \Phi(\sigma_1)),$$

und für das Linienelement der Fläche

$$(6) \qquad ds^2 = \{1 + F'(\sigma)\Phi'(\sigma_1)\} d\sigma\, d\sigma_1.$$

Setzt man

$$(7) \qquad \xi = \sigma; \quad \eta = -i\sigma; \quad \zeta = F(\sigma); \quad \vartheta = -iF(\sigma);$$

$$(8) \qquad \xi_1 = \sigma_1; \quad \eta_1 = i\sigma_1; \quad \zeta_1 = F(\sigma_1); \quad \vartheta_1 = i\Phi(\sigma_1),$$

so stellen die Gleichungen (7) und ebenso (8), da

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\vartheta^2 = d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2 + d\vartheta_1^2 = 0$$

ist, *Minimallinien* im R_4 dar. Aus (5) folgt nun

$$(9) \qquad x = \frac{\xi + \xi_1}{2}; \quad y = \frac{\eta + \eta_1}{2}; \quad z = \frac{\zeta + \zeta_1}{2}; \quad t = \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}.$$

Die R-Fläche ist daher der Ort der Mitten aller Sehnen, welche einen beliebigen Punkt der Minimalkurve (7) mit einem beliebigen Punkt der Minimalkurve (8) verbindet. Diese Erzeugungsweise der R-Flächen erinnert an die der Minimalflächen des R_3. Es wird sich in § 13 zeigen, daß die R-Flächen ebenfalls Minimalflächen sind.

Aus § 2, (4) erhält man als *Gleichungen der Tangentialebene* im Punkt (x, y, z, t)

$$(10) \qquad \begin{aligned} Z - z &= (X-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial u}{\partial y}, \\ T - t &= -(X-x)\frac{\partial u}{\partial y} + (Y-y)\frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

An Stelle dieser zwei Gleichungen kann man auch die einzige

$$(11) \qquad \frac{(z+it) - (Z+iT)}{(x+iy) - (X+iY)} = F'(x+iy)$$

setzen, wobei F' die Ableitung von F bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt, daß die Aussage: „F hat eine Ableitung im Punkt $x+iy$" identisch ist mit der Aussage: „Die R-Fläche besitzt im entsprechenden Punkte eine Tangentialebene". Ist für einen Wert $x+iy$ die Ableitung $F'(x+iy) = 0$, so ist die Tangentialebene parallel mit der XY-Ebene oder steht senkrecht auf der ZT-Ebene. Die Umkehrfunktion von F hat dann bekanntlich im Punkt $z+it$ einen Verzweigungspunkt. Analog wird F selbst im Punkt $x+iy$ einen Verzweigungspunkt haben, wenn die Tangentialebene im entsprechenden Punkt der R-Fläche senkrecht zur XY-Ebene steht. Die Fläche wird in diesen Punkten im allgemeinen keine Singularität besitzen: man vergleiche hierzu den Fall einer ebenen Kurve an den Stellen, wo die Tangente parallel einer der Achsen läuft.

Als *Gleichungen der Normalebene* erhält man nach § 2

$$(12)\qquad \begin{aligned} X-x &= -(Z-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(T-t)\frac{\partial u}{\partial y},\\ Y-y &= -(Z-z)\frac{\partial u}{\partial y}-(T-t)\frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebenen und Normalebenen der R-Flächen sind nun eigentümlich im R_4 orientierte Ebenen, indem der Satz gilt: *Die Projektionen einer Tangentialebene oder Normalebene in die XY- und ZT-Ebene sind ähnliche Bilder jener Ebenen.* Zum Beweise verschiebe man die Ebenen parallel mit sich in den Nullpunkt und erhält dann für beide Ebenen Gleichungen von der Form

$$(13)\qquad Z=aX+bY;\quad T=-bX+aY$$

wo a und b zwei beliebige Konstante sind. Diese Gleichungen stellen aber eine spezielle R-Fläche mit der Gleichung $Z+iT=(a-ib)(X+iY)$ dar mit Linienelement $ds^2=(1+a^2+b^2)\,(dx^2+dy^2)$. Da das Vergrößerungsverhältnis der konformen Abbildung auf die XY-Ebene konstant ist, so ist der Beweis des Satzes erbracht. Steht jedoch die Ebene (13) senkrecht auf der XY-Ebene, so projiziert sie sich auf diese in einen einzigen Punkt und der Satz gilt für diese Ebene nicht. Analog, wenn die Ebene senkrecht zur ZT-Ebene steht. Die Tangentialebenen und Normalebenen der R-Flächen bilden einen Komplex, den wir mit späterer Begründung (s. § 15) den *Komplex der Nullebenen**) nennen. Die Gleichungen des Komplexes lauten

$$(14)\qquad Z=aX+bY+c;\quad T=-bX+aY+d$$

wo a, b, c, d vier beliebige reelle Konstante bedeuten. Zu dem Komplex gehören auch die XY-Ebene und die ZT-Ebene, sowie die zu diesen parallelen Ebenen.

*) Veronese (Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen, übersetzt von Schepp, Leipzig 1894) nennt die Ebenen dieses Komplexes „*gleichwinklige Ebenen*", weil jede Gerade in einer von zwei Ebenen des Systems mit ihrer senkrechten Projektion auf die andere Ebene einen und denselben Winkel bildet. Vgl. auch Kwietniewski, a. a. O. § 3. Es erscheint Herrn Kwietniewski entgangen zu sein, daß auch die Normalebenen der R-Flächen dem Komplex angehören.

§ 11.

Deformation der R-Flächen.

Wir nennen zwei Flächen des R_4 aufeinander abwickelbar, wenn sie punktweise aufeinander bezogen sind und in entsprechenden Punkten dasselbe Linienelement haben. Es entsteht nun die Frage: *Gibt es zu einer gegebenen R-Fläche andere R-Flächen, die auf dieselbe abwickelbar sind?*

Zur Beantwortung dieser Frage seien

$$(1) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \; y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \; z = \frac{1}{2}(F(\sigma) + \Phi(\sigma_1)); \; t = -\frac{i}{2}(F(\sigma) - \Phi(\sigma_1))$$

die Gleichungen der gegebenen Fläche, bezogen auf ihre Minimallinien, und

$$(2) \qquad ds^2 = \{1 + F'(\sigma)\,\Phi'(\sigma_1)\}\,d\sigma\,d\sigma_1$$

ihr Linienelement, vgl. § 10, (5) und (6). Seien weiter ξ, η, ζ, ϑ die Koordinaten eines Punktes einer anderen Fläche in Beziehung auf dasselbe Koordinatensystem, ω und ω_1 die Parameter ihrer Minimallinien, f_1 und φ_1 konjugierte Funktionen, so sind die Gleichungen dieser Fläche

$$(3) \quad \xi = \frac{\omega + \omega_1}{2}; \; \eta = -\frac{i(\omega - \omega_1)}{2}; \; \zeta = \frac{1}{2}(f_1(\omega) + \varphi_1(\omega_1)); \; \vartheta = \frac{i}{2}(f_1(\omega) - \varphi_1(\omega_1)),$$

und ihr Linienelement dS ist bestimmt durch

$$(4) \qquad dS^2 = \{1 + f_1{}'(\omega)\,\varphi_1{}'(\omega_1)\}\,d\omega\,d\omega_1.$$

Sind nun die beiden Flächen aufeinander abwickelbar, so müssen sich ω und ω_1 als Funktionen von σ und σ_1 so bestimmen lassen, daß

$$(5) \qquad ds^2 = dS^2$$

ist. Sind aber die Flächen aufeinander abwickelbar, so sind sie insbesondere auch konform aufeinander abgebildet und darum ist nach dem Satz in § 10 die Projektion der einen Fläche auf die XY-Ebene ein konformes Bild der Projektion der andern Fläche auf die XY-Ebene. Die Parameter der Minimallinien der Flächen sind nun aber auch Parameter der Minimallinien der XY-Ebene und es muß daher ω eine Funktion von σ, und ω_1 die konjugierte Funktion von σ_1; oder ω Funktion von σ_1, und ω_1 die konjugierte Funktion von σ sein. Die letzte Alternative findet statt, wenn die durch die Projektion beider Flächen auf die XY-Ebene vermittelte konforme Abbildung der XY-Ebene auf sich selbst eine Abbildung mit Umlegung der Winkel ist: dann trage man aber die η-Koordinate der zweiten Fläche auf die Seite der negativen y ab, man erhält dann das Spiegelbild der zweiten Fläche in Beziehung auf den Raum $y = 0$. Dieses Spiegelbild müßte offenbar auch auf die erste Fläche abwickelbar sein und die konforme Abbildung der XY-Ebene auf sich selbst wäre jetzt eine Abbildung *ohne* Umlegung der Winkel. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, dürfen wir also

$$(6) \qquad \omega = \psi(\sigma); \quad \omega_1 = \chi(\sigma_1)$$

setzen, wo ψ und χ konjugierte Funktionen sind. Nach der Bestimmung aller auf die erste abwickelbaren Flächen dürfen wir diese letzteren dann natürlich noch einer Spiegelung an dem Raum $y = 0$ unterwerfen.

Aus (2), (4) und (5) folgt nun

$$(7) \qquad 1 + F'(\sigma)\,\Phi'(\sigma_1) = \{1 + f_1'(\omega)\,\varphi_1'(\omega_1)\}\frac{d\omega}{d\sigma}\frac{d\omega_1}{d\sigma_1}.$$

Denkt man sich nun in $f_1(\omega)$ und $\varphi_1(\omega_1)$ mit Hilfe von (6) die Parameter σ und σ_1 eingeführt, so geht $f_1(\omega)$ über in eine Funktion von σ, $\varphi_1(\omega_1)$ in eine Funktion von σ_1, die wir bezüglich mit $f(\sigma)$ und $\varphi(\sigma_1)$ bezeichnen, wobei f und φ konjugierte Funktionen sind: es ist also

$$(8) \qquad f_1(\omega) = f(\sigma); \quad \varphi_1(\omega_1) = \varphi(\sigma_1).$$

Hieraus folgt

$$(9) \qquad f_1'(\omega)\frac{d\omega}{d\sigma} = f'(\sigma); \quad \varphi_1'(\omega_1)\frac{d\omega_1}{d\sigma_1} = \varphi'(\sigma_1).$$

Man erhält nun aus (6), (7) und (9) die Funktionalgleichung

$$(10) \qquad 1 + F'(\sigma)\,\Phi'(\sigma_1) = \psi'(\sigma)\,\chi'(\sigma_1) + f'(\sigma)\,\varphi'(\sigma_1),$$

welche zur Bestimmung der Funktionen f, φ, ψ, χ dient. Statt (10) schreiben wir

$$(11) \qquad \frac{1}{\varphi'(\sigma_1)} + \frac{F'(\sigma)\,\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} - \frac{\psi'(\sigma)\,\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = f'(\sigma)$$

wobei $\varphi'(\sigma_1)$ als von Null verschieden vorausgesetzt ist. Ist aber $\varphi'(\sigma_1) = 0$, so folgt aus (9), da ω_1 von σ_1 abhängig sein muß und daher nicht konstant sein kann, daß $\varphi_1'(\omega_1) = 0$ ist; dann wäre nach (3) die zweite Fläche eine Ebene. In diesem Fall zeigt man aber leicht, daß dann auch die erste Fläche eine Ebene sein müßte. Schließen wir also diesen trivialen Fall aus, setzen also voraus, daß $F''(\sigma)$ nicht identisch Null ist, so gilt (11) allgemein. Wir differenzieren (11) nach σ und erhalten, wenn wir zur Abkürzung

$$(12) \qquad \frac{\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \Theta(\sigma_1); \quad \frac{\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \mathrm{H}(\sigma_1)$$

setzen,

$$(13) \qquad F''(\sigma)\,\Theta(\sigma_1) - \psi''(\sigma)\,\mathrm{H}(\sigma_1) = f''(\sigma).$$

Diese Gleichung differenziert man nach σ_1 und erhält

$$(14) \qquad F''(\sigma)\,\Theta'(\sigma_1) - \psi''(\sigma)\,\mathrm{H}'(\sigma_1) = 0.$$

$F''(\sigma)$ haben wir eben als von Null verschieden vorausgesetzt und $\mathrm{H}'(\sigma_1)$ muß auch von Null verschieden sein; denn wäre $\mathrm{H}'(\sigma_1) = 0$, so würde aus (14) sich ergeben $\Theta'(\sigma_1) = 0$ und aus (12), wenn m und n Konstant bedeuten, $\Phi'(\sigma_1) = m\,\varphi'(\sigma_1)$, $\chi'(\sigma_1) = n\,\varphi'(\sigma_1)$. Vertauscht man hier i m $-i$, so folgt $F'(\sigma) = m_0 f'(\sigma)$, $\psi'(\sigma) = n_0 f'(\sigma)$, wenn m_0, n_0 die zu m, konjugierten Konstanten bedeuten. Eliminiert man aus diesen vier Gle chungen und (10) alle Funktionen außer $f'(\sigma)$ und $\varphi'(\sigma_1)$, so folgt

$$f'(\sigma)\,\varphi'(\sigma_1) = \frac{1}{n n_0 - m m_0 + 1}$$

Aus dieser Gleichung schließt man, daß $\varphi'(\sigma_1)$ konstant ist, und jetzt au der Gleichung $\Phi'(\sigma_1) = m\,\varphi'(\sigma_1)$, daß $\Phi'(\sigma_1)$ ebenfalls eine Konstante is In diesem Fall stellen aber die Gleichungen (1) eine Ebene dar, was obe ausgeschlossen wurde. $\mathsf{H}'(\sigma_1)$ ist demnach von Null verschieden, und au (14) folgt nun

$$(15) \qquad \frac{\Theta'(\sigma_1)}{\mathsf{H}'(\sigma_1)} = \frac{\psi''(\sigma)}{F''(\sigma)}.$$

Die linke Seite hängt aber bloß von σ_1, die rechte nur von σ ab: jed der beiden Seiten ist daher gleich einer Konstanten α. Aus (15) erhä man jetzt, wenn β, γ zwei weitere Konstanten bedeuten

$$\Theta(\sigma_1) = \alpha\,\mathsf{H}(\sigma_1) + \beta, \quad \psi'(\sigma) = \alpha F'(\sigma) + \gamma$$

oder nach (12)

$$(16) \qquad \frac{\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \frac{\alpha\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} + \beta; \quad \psi'(\sigma) = \alpha F'(\sigma) + \gamma.$$

Hieraus und aus (11) folgt

$$(17) \qquad \frac{1 - \gamma\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = f'(\sigma) - \beta F'(\sigma).$$

Hier muß nun jede der Seiten wieder einer Konstanten δ gleich sein ur wir erhalten somit

$$(18) \qquad 1 - \gamma\chi'(\sigma_1) = \delta\varphi'(\sigma_1),$$

$$(19) \qquad f'(\sigma) - \beta F'(\sigma) = \delta.$$

Bedeuten a, b, c drei weitere Konstante, so folgt aus (19) und (16)

$$(20) \qquad f(\sigma) = \beta F(\sigma) + \delta\sigma + a,$$

$$(21) \qquad \psi(\sigma) = \alpha F(\sigma) + \gamma\sigma + b,$$

$$(22) \qquad \Phi(\sigma_1) = \alpha\chi(\sigma_1) + \beta\varphi(\sigma_1) + c.$$

Die Gleichungen (18), (20), (21), (22) enthalten die Lösung. Die i diesen auftretenden Konstanten sind jedoch nicht völlig willkürlich, sondei es bestehen vier Relationen zwischen ihnen, welche ausdrücken, da $F(\sigma)$, $\Phi(\sigma_1)$; $f(\sigma)$, $\varphi(\sigma_1)$; $\psi(\sigma)$, $\chi(\sigma_1)$; σ, σ_1 vier Paare konjugiert imaginär Größen sind. Bezeichnet man die zu einer der Konstanten konjugiert durch den Index Null und vertauscht in (22) i mit $-i$, so folgt:

$$F(\sigma) = \alpha_0\psi(\sigma) + \beta_0 f(\sigma) + c_0.$$

Trägt man den Wert von $\psi(\sigma)$ aus (21) in die vorstehende Gleichung ein, so kommt

$$F(\sigma) = \alpha\alpha_0 F(\sigma) + \gamma\alpha_0\sigma + \beta_0 f(\sigma) + b\alpha_0 + c_0.$$

Hier ist β_0 sicher von Null verschieden, sonst wäre $F(\sigma)$ eine in σ lineare Funktion und (1) eine Ebene; es ist also nach $f(\sigma)$ aufgelöst

$$(23) \qquad f(\sigma) = \left(\frac{1-\alpha\alpha_0}{\beta_0}\right) F(\sigma) - \frac{\gamma\alpha_0}{\beta_0}\,\sigma - \left(\frac{b\alpha_0 + c_0}{\beta_0}\right).$$

Die Gleichungen (20) und (23) müssen identisch übereinstimmen, denn sonst wäre $F(\sigma)$ wieder eine lineare Funktion von σ, bezw. wäre, falls die Koeffizienten $F(\sigma)$ in (20) und (23) gleich wären, σ konstant. Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich also

$$(24) \qquad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1; \quad \delta\beta_0 + \gamma\alpha_0 = 0; \quad a\beta_0 + b\alpha_0 + c_0 = 0.$$

Die vierte Relation erhält man aus (18). Man vertausche dort i mit $-i$ und erhält $\delta_0 f'(\sigma) + \gamma_0\psi'(\sigma) = 1$. Entnimmt man aus (20) und (21) die Werte $f'(\sigma)$ und $\psi'(\sigma)$ und setzt sie in die letzte Gleichung ein, so folgt

$$(\delta_0\beta + \gamma_0\alpha) F'(\sigma) + \delta\delta_0 + \gamma\gamma_0 = 1.$$

Aus der zweiten Gleichung (24) folgt aber durch Vertauschung von i mit $-i$: $\delta_0\beta + \gamma_0\alpha = 0$ und somit aus der letzten Gleichung

$$(25) \qquad \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0 = 1.$$

Nun ist nach (8) und (3) $f(\sigma) = f_1(\omega) = \zeta + i\vartheta$, weiter nach (1) $\sigma = x + iy$, $F(\sigma) = z + it$ und nach (6) und (3) $\psi(\sigma) = \omega = \xi + i\eta$. Aus (20) und (21) folgt also

$$(26) \qquad \xi + i\eta = \alpha(z+it) + \gamma(x+iy) + b,$$

$$(27) \qquad \zeta + i\vartheta = \beta(z+it) + \delta(x+iy) + a.$$

Durch diese Gleichungen wird jedem Punkt (x, y, z, t) der gegebenen Fläche ein Punkt $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta)$ der auf sie abwickelbaren Fläche zugewiesen. Die Gleichungen (26) und (27) zusammen mit den Relationen (24) und (25) enthalten demnach die vollständige Lösung der Aufgabe. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir nun $a = b = 0$ und daher (24) auch $c = 0$ setzen; es entspricht dies einer passenden Parallelverschiebung der zweiten Fläche. Durch passende Orientierung der $\xi\eta$-Achsen in der $\xi\eta$-Ebene und der $\zeta\vartheta$-Achsen in der $\zeta\vartheta$-Ebene kann man weiter bewirken, daß die Konstanten γ und δ reell sind. Das $\xi\eta\zeta\vartheta$-Koordinatensystem denken wir uns dann mitsamt der zweiten Fläche gedreht, bis es wieder mit dem $xyzt$-Koordinatensystem zusammenfällt. Setzt man nun

$$(28) \quad \gamma = \cos\gamma_1; \quad \delta = \sin\gamma_1; \quad \alpha = \cos\delta_1 e^{-i\alpha_1}; \quad \beta = \sin\delta_1 e^{i\beta_1}; \quad a = b = c = 0,$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ nunmehr *reelle* Konstanten bedeuten, so sind durch diesen

Ansatz die erste und dritte Gleichung (24) und die Gleichung (25) befriedigt. Die zweite Gleichung (24) gibt endlich

$$\operatorname{tg}\gamma_1 \operatorname{tg}\delta_1 + e^{i(\alpha_1+\beta_1)} = 0.$$

Hieraus folgt

entweder $\alpha_1 + \beta_1 = \pi$ und dann $\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1$ bezw. $\delta_1 = \frac{3\pi}{2} - \gamma_1$

oder $\alpha_1 + \beta_1 = 2\pi$ und dann $\delta_1 = \gamma_1 - \frac{\pi}{2}$ bezw. $\delta_1 = \gamma_1 - \frac{3\pi}{2}$.

Aus (28) und diesen Gleichungen folgt, daß

(29) $\gamma = \cos\gamma_1;\ \delta = \sin\gamma_1;\ \alpha = \sin\gamma_1 e^{-i\alpha_1};\ \beta = -\cos\gamma_1 e^{-i\alpha_1};\ a = b = c = 0$

ist. Eigentlich erhält man noch eine zweite Reihe von Gleichungen für die Bestimmung der Konstanten, diese geht aber aus (29) dadurch hervor, daß man für α_1 den Wert $\alpha_1 - \pi$ setzt. Die Werte der Konstanten setze man aus (29) in (26) und (27) ein und erhält dann durch Trennung des Reellen und Imaginären die *Schlußformeln*

$$(30)\quad \begin{aligned}
\xi &= x\cos\gamma_1 && + z\sin\gamma_1\cos\alpha_1 + t\sin\gamma_1\sin\alpha_1,\\
\eta &= && y\cos\gamma_1 - z\sin\gamma_1\sin\alpha_1 + t\sin\gamma_1\cos\alpha_1,\\
\zeta &= x\sin\gamma_1 && - z\cos\gamma_1\cos\alpha_1 - t\cos\gamma_1\sin\alpha_1,\\
\vartheta &= && y\sin\gamma_1 + z\cos\gamma_1\sin\alpha_1 - t\cos\gamma_1\cos\alpha_1,
\end{aligned}$$

in denen α_1 und γ_1 zwei beliebige reelle Konstanten bedeuten. Aus (30) folgt nun

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

und hieraus ergibt sich, daß die Gleichungen (30) eine *orthogonale Substitution* darstellen. Alle Flächen, deren Gleichungen (30) durch Variierung der Konstanten α_1, γ_1 hervorgehen, sind daher unter sich kongruent: da für $\alpha_1 = \pi$, $\gamma_1 = 0$ aus (30) $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, $\vartheta = t$ folgt, so sind alle diese Flächen mit der gegebenen kongruent. Nach dem, was oben im Anschluß an Gleichung (5) und (6) gesagt wurde, gilt also der Satz: *Alle aufeinander abwickelbaren R-Flächen sind entweder kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen dreidimensionalen Raum.*

In bekannter Weise können wir nun die Gleichungen (30) aber auch auffassen als Gleichungen der gegebenen Fläche, nur bezogen auf ein gedrehtes Koordinatensystem ξ, η, ζ, ϑ. Dieses Koordinatensystem ist aber nun *nicht* in beliebiger Weise zur Fläche orientiert, sondern die Ebene $\xi = 0$, $\eta = 0$, welche in Beziehung auf das $xyzt$-Koordinatensystem die Gleichungen

$$(31)\quad \begin{aligned}
z &= -x\operatorname{ctg}\gamma_1\cos\alpha_1 + y\operatorname{ctg}\gamma_1\sin\alpha_1,\\
t &= -x\operatorname{ctg}\gamma_1\sin\alpha_1 - y\operatorname{ctg}\gamma_1\cos\alpha_1
\end{aligned}$$

hat, und ebenso die Ebene $\zeta = 0$, $\vartheta = 0$, welche in Beziehung auf das $xyzt$-System

$$
(32) \qquad \begin{aligned} z &= x \operatorname{tg} \gamma_1 \cos \alpha_1 - y \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ t &= x \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha_1 + y \operatorname{tg} \gamma_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}
$$

zu Gleichungen hat, gehören zu dem am Schluß von § 10 definierten Komplex der Nullebenen des vierdimensionalen Raums. Die Gleichungen (31) oder (32) enthalten aber offenbar alle Ebenen des Komplexes — nur sind diese parallel mit sich so verschoben, daß sie alle durch den Ursprung gehen. Da nun die Gleichungen (30) eine R-Fläche auch in Beziehung auf die $\xi\eta$- und $\zeta\vartheta$-Ebene darstellen, so folgt nach § 10 der interessante

Satz. *Projiziert man eine R-Fläche auf alle Ebenen des Nullkomplexes, so erhält man lauter konforme Bilder der R-Fläche.**)

Da die Tangential- und Normalebenen der R-Fläche selbst zu dem Komplexe gehören, so gilt der

Zusatz. *Die Projektionen einer R-Fläche auf ihre sämtlichen Tangential- und Normalebenen sind konforme Bilder der R-Fläche.*

Bemerkung. Durch die Gleichungen (30) ist $\zeta + i\vartheta$ als Funktion von $\xi + i\eta$ definiert; der funktionale Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen wird ein ganz anderer sein als zwischen $z + it$ und $x + iy$: daraus folgt, daß eine und dieselbe R-Fläche sehr verschiedene funktionale Zusammenhänge geometrisch darstellen kann.

§ 12.

Die Krümmung der R-Flächen.

Als Flächengleichung benutzen wir die Gleichung § 9, (2) und berechnen zunächst die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sowie die Größen e, f, g (s. § 1). Achtet man auf die Gleichungen § 9, (3), (4), so erhält man für die *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung:*

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned}
D_x &= -D''_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & D_y &= -D''_y = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
D_z &= -D''_z = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; & D_t &= -D''_t = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \\
D'_x &= -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; & D'_y &= -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; \\
D'_z &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & D'_t &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned} \right.
$$

$$
(2) \qquad f = 0; \quad e = g = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2.
$$

*) Vgl. Kwietniewski, a. a. O. § 3, VI.

Nach den Gleichungen § 4, (3) und § 10, (1), (3) ergeben sich als *Gleichungen der Charakteristik* in einem beliebigen Flächenpunkt (x, y):

$$(3)\quad \begin{aligned} X-x&=\frac{\lambda D'_x(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_x\,dx\,dy}{e(dx^2+dy^2)}; & Y-y&=\frac{\lambda D'_y(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_y\,dx\,dy}{e(dx^2+dy^2)};\\ Z-z&=\frac{\lambda D'_z(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_z\,dx\,dy}{e(dx^2+dy^2)}; & T-t&=\frac{\lambda D'_t(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_t\,dx\,dy}{e(dx^2+dy^2)}, \end{aligned}$$

wo λ die § 10, (3) angegebene Bedeutung hat.

Jeder Fortschreitungsrichtung (dx, dy) auf der Fläche im Punkt (x, y, z, t) ist nach (3) ein Punkt (X, Y, Z, T) des Kegelschnitts zugewiesen. Benutzt man nun die aus (1) und (2) sich ergebenden Identitäten

$$(4)\quad \Sigma(D_x)^2=\Sigma(D'_x)^2=\Sigma(D''_x)^2=e\lambda,\quad \Sigma D_xD'_x=0,\quad \Sigma D''_xD'_x=0,$$
$$\Sigma D_xD''_x=-e\lambda,$$

so folgt aus (3)

$$(5)\quad (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2+(T-t)^2=\frac{\lambda^3}{e}$$

und hieraus der

Satz: *Die Charakteristik ist für jeden Flächenpunkt einer R-Fläche ein Kreis und der Flächenpunkt sein Mittelpunkt* oder: *eine R-Fläche besitzt lauter Kreispunkte.**)

Bezeichnet man den Radius dieses Kreises im Punkt (x, y, z, t) mit r, so folgt aus (5)

$$r=\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus dem in § 7 Gesagten geht nun hervor:

Die Krümmungsradien sämtlicher Normalschnitte in einem Flächenpunkt sind gleich r. Die Hauptkrümmungsrichtungen sind unbestimmt. In der Tat verschwindet die linke Seite der Differentialgleichung der Krümmungslinien (§ 8, (4)) identisch. Alle Projektionsflächen in die Schar der Tangentialräume im Flächenpunkt (x, y) haben in dem betreffenden Punkt den Charakter von Minimalflächen und dasselbe Krümmungsmaß. Die Asymptotenlinien § 8, (7) sind die Minimallinien der R-Fläche, also imaginär. Die Involution § 5 ist eine Rechtwinkel-Involution: Ein Tangentialraum schneidet also aus der Fläche zwei zueinander senkrechte Linienelemente aus und zwei zueinander senkrechte Tangentialräume schneiden vier Linienelemente aus, welche untereinander Winkel von je $\frac{\pi}{4}$ bilden etc.

Das Krümmungsmaß k der Fläche erhält man entweder nach der

*) Vgl. Kwietniewski, a. a. O. § 3, VII.

Bemerkung am Schluß von § 6 aus $ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$ mit Hilfe der Gaußschen Formel oder einfacher nach § 7. Es folgt

$$k = -\frac{2}{r^2} = -\frac{2e}{\lambda^3}. \tag{7}$$

Die Gleichung (6) für den Radius r der Charakteristik läßt sich noch auf eine bemerkenswerte Form bringen. Bedeutet wieder Φ die konjugierte Funktion von F in § 9, (5), so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = F'(x+iy), \quad \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x-iy),$$

$$\text{also} \quad \lambda = 1 + F'(x+iy)\,\Phi'(x-iy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(x+iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; \quad \Phi''(x-iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},$$

$$\text{also} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = e = F''(x+iy)\,\Phi''(x-iy).$$

Aus (6) folgt nun

$$\frac{1}{r} = \frac{[F''(x+iy)\,\Phi''(x-iy)]^{\frac{1}{2}}}{[1 + F'(x+iy)\,\Phi'(x-iy)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Ist F eine *reelle* Funktion (also $F = \Phi$) der *reellen* Variabeln x allein ($y = 0$), so erhält man aus (8)

$$\frac{1}{r} = \frac{F''(x)}{\{1 + (F'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

Die Gleichung (9) gibt aber die Größe der Krümmung $\frac{1}{r}$ der Kurve $z = F(x)$ im Punkte (x) an. Läßt man für x und z in $z = F(x)$ auch komplexe Werte zu, so tritt an die Stelle der Kurve die R-Fläche und zur Berechnung „der Krümmung $\frac{1}{r}$" hat man die Formel (8), welche somit eine Verallgemeinerung von (9) darstellt. Sucht man die Werte von $x + iy$, welche der Gleichung $F''(x+iy) = 0$ genügen, so erhält man auf der R-Fläche die den Wendepunkten ebener Kurven entsprechenden Punkte. In diesen ist die Krümmung sämtlicher Normalschnitte gleich Null. Da nun die R-Fläche die zugehörige ebene Kurve enthält, so hat man eine *reelle* Darstellung sämtlicher Wendepunkte einer ebenen Kurve erreicht. Die bekannten Sätze über die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung z. B. finden so im R_4 eine reelle Interpretation, nämlich: die neun Wendepunkte einer R-Fläche dritter Ordnung liegen zu je dreien auf einer Nullebene.

Bezieht man zwei ebene Kurven durch parallele Tangenten punktweise aufeinander, so verhalten sich zwei entsprechende Linienelemente umgekehrt wie die entsprechenden Krümmungen. Analog zeigt man ohne Schwierigkeit: Bezieht man zwei R-Flächen durch parallele Tangentialebenen punktweise aufeinander, so verhalten sich zwei entsprechende Linienelemente umgekehrt wie die entsprechenden Krümmungen. Damit zeigt sich von neuem die große Analogie der Krümmung ebener Kurven mit der Krümmung der R-Flächen. Zum Schlusse führen wir noch zwei Sätze an, deren Beweis wir übergehen:

Eine R-Fläche, die überall die konstante Krümmung Null besitzt, ist eine Ebene; und: *es gibt keine R-Fläche, welche in allen Punkten eine konstante von Null verschiedene Krümmung besitzt.*

§ 13.

Die assoziierten Projektionsflächen.

Wir betrachten nunmehr die beiden Flächen, die durch Projektion der R-Fläche in die dreidimensionalen Räume $z=0$ bezw. $t=0$ entstehen, und die wir in § 9 *z-Projektionsfläche* bezw. *t-Projektionsfläche* genannt haben: dieselben stellen zwei konjugierte logarithmische Potentiale dar. Es ist nützlich, überhaupt allgemein die Projektion der R-Fläche in einen beliebigen durch die XY-Ebene gehenden dreidimensionalen Raum zu untersuchen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$z' = z\cos\alpha + t\sin\alpha,$$
$$t' = z\sin\alpha - t\cos\alpha,$$

mit anderen Worten, wir drehen das Koordinatensystem um die XY-Ebene um den Winkel α. Jetzt hat die Projektion der R-Fläche in den Raum $t'=0$ zu Gleichungen

$$z' = u\cos\alpha + v\sin\alpha;\quad t' = 0. \tag{1}$$

Die Gleichungen (1) stellen also eine gewöhnliche Fläche dar, die aus der R-Fläche durch Projektion in den Raum $z\sin\alpha - t\cos\alpha = 0$ entsteht. Läßt man in (1) α variieren, so erhält man eine ganze Schar von Flächen, nämlich die Projektionsflächen in die Räume $z\sin\alpha - t\cos\alpha = 0$. Wir nennen diese Flächen *assoziierte Projektionsflächen.* Zwei Flächen der Schar, die den Parameterwerten α und $\alpha+\frac{\pi}{2}$ entsprechen und darum Projektionsflächen in zwei zueinander senkrechte Räume darstellen, nennen wir *adjungierte* Projektionsflächen. Die t-Projektionsfläche und die z-Projektionsfläche $\left(\alpha=0;\ \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$ sind adjungierte Flächen. Diese letzteren hat Dini*) untersucht; die Sätze I und II im folgenden stellen Erweiterungen der von Dini für zwei adjungierte Projektionsflächen gefundenen Sätze dar.**)

*) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

**) Vgl. auch. R. v. Lilienthal, J. f. Math. 98 (1885), p. 131.

Für das Linienelement ds der Fläche (1) erhält man mit Rücksicht auf § 9, (3)

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx\,dy + G dy^2, \tag{2}$$

wobei

$$E = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha\right)^2;$$

$$F = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha\right);$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha\right)^2$$

ist. Für das Flächenelement $dJ = \sqrt{EG - F^2}\,dx\,dy$ erhält man hieraus

$$dJ = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{3}$$

Da dJ von α unabhängig ist, so folgt der

Satz I. *Die assoziierten Projektionsflächen* (1) *sind flächentreu aufeinander abgebildet.*

Für das Krümmungsmaß k in einem Punkt (x, y) der Fläche (1) erhält man

$$k = -\frac{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\lambda^2}, \tag{4}$$

wo

$$\lambda = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

gesetzt ist. Aus (4) ergibt sich, daß die Projektionsflächen überall negativ gekrümmt sind, und weiter

Satz II. *Die assoziierten Projektionsflächen haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß.*

Sind weiter a, b, c die Richtungskosinus der Normalen in einem Punkt (x, y) von (1), so ist

$$a\sqrt{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha; \quad b\sqrt{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha; \quad c\sqrt{\lambda} = -1. \tag{5}$$

Da hier c von α unabhängig ist, so folgt, daß die Tangentialebenen der assoziierten Projektionsflächen in entsprechenden Punkten gegen die XY-Ebene dieselbe Neigung besitzen, was sich auch leicht aus Satz I geometrisch ergibt. Sind a_1, b_1, c_1 die Richtungskosinus der Normalen einer anderen Fläche der Schar (1) mit dem Parameterwert α_1, so ergibt sich aus (5)

$$\frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \cos(\alpha - \alpha_1) \tag{6}$$

und hieraus

Satz III. *Die Tangentialebene in einem Punkt* (x, y) *der Projektionsfläche* (α) *ist gegen die Tangentialebene der Fläche* (α_1) *im entsprechenden Punkt um die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte um den Winkel* $\alpha - \alpha_1$ *gedreht.*

Hieraus oder auch aus Satz I, II und mit Hilfe des Gaußschen Satzes folgt:

Satz IV. *Die sphärischen Bilder der assoziierten Projektionsflächen sind kongruent.*

Durch Drehung um die z'-Achse kommen sie zur Deckung miteinander.

Die assoziierten Projektionsflächen bilden ein hübsches Beispiel dafür, daß Flächen, die in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß besitzen und überdies noch flächentreu aufeinander bezogen sind, doch nicht aufeinander abwickelbar sein müssen. Die Flächen der Schar (1) gehen zwar durch stetige Gestaltsänderung ineinander über: diese Gestaltsänderung ist aber keine solche ohne Dehnung, da das Linienelement (2) von α nicht unabhängig ist.

Wir betrachten weiter auf zwei assoziierten Flächen mit den Gleichungen

$$(7) \qquad z' = u \cos\alpha + v \sin\alpha, \qquad z_1' = u \cos\alpha_1 + v \sin\alpha_1$$

die Kurven $z' =$ konst. bezw. $z_1' =$ konst. Man zeigt leicht, daß die Projektionen dieser Kurvensysteme auf die XY-Ebene sich allenthalben unter dem Winkel $\alpha - \alpha_1$ schneiden. Hieraus folgt für zwei *adjungierte* Flächen der auch sonst bekannte

Satz V. *Die Projektionen der Niveaulinien einer von zwei adjungierten Projektionsflächen auf die XY-Ebene sind die Projektionen der Falllinien der anderen und umgekehrt.* *)

Ebenso ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß die Winkel der Parameterkurven in entsprechenden Punkten zweier adjungierter R-Flächen supplementär sind.

Wir wenden uns zu den *Asymptotenlinien* der assoziierten Projektionsflächen: *die Gleichungen dieser erhält man durch Quadratur,* wie wir jetzt zeigen wollen.

Zu diesem Zweck nehmen wir als Parameterkurven der Fläche (1) die Kurven, die auf die XY-Ebene projiziert die Minimallinien dieser Ebene geben. Beachtet man, daß $u \cos\alpha + v \sin\alpha$ der reelle Teil der Funktion $e^{-i\alpha} F(x+iy)$ ist, wenn $u + iv = F(x+iy)$ ist, so erhält man nach § 10, (5) als Gleichungen der assoziierten Projektionsflächen:

$$(8) \qquad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z' = \frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha} F(\sigma) + e^{i\alpha} \Phi(\sigma_1)\right).$$

*) Vgl. die pag. 570 angeführten Modelle.

Dabei ist Φ die zu F konjugierte Funktion, σ und σ_1 sind die Parameter. Für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung D, D', D'' erhält man*)

$$D = \frac{i e^{-i\alpha} F''(\sigma)}{4\delta}; \quad D' = 0; \quad D'' = \frac{i e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1)}{4\delta},$$

wo zur Abkürzung

$$\delta^2 = -\frac{1}{4}\{1 + F'(\sigma)\,\Phi'(\sigma_1)\}$$

gesetzt ist. Die *Differentialgleichung der Asymptotenlinien* lautet nun

$$e^{-i\alpha} F''(\sigma)\,d\sigma^2 + e^{i\alpha}\Phi''(\sigma_1)\,d\sigma_1^{\,2} = 0. \tag{9}$$

Hier sind aber die Variabeln getrennt und man erhält daher die Gleichungen der Asymptotenlinien selbst durch Quadratur.

Die Differentialgleichung (9) ist aber auch zugleich die Differentialgleichung der Asymptotenlinien einer Schar *assoziierter Minimalflächen***) mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int(1-\sigma^2)\,e^{-i\alpha}F''(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2}\int(1-\sigma_1^{\,2})\,e^{i\alpha}\Phi''(\sigma_1)\,d\sigma_1, \\ y &= \frac{i}{2}\int(1+\sigma^2)\,e^{-i\alpha}F''(\sigma)\,d\sigma - \frac{i}{2}\int(1+\sigma_1^{\,2})\,e^{i\alpha}\Phi''(\sigma_1)\,d\sigma_1, \\ z &= \int\sigma e^{-i\alpha}F''(\sigma)\,d\sigma + \int\sigma_1 e^{i\alpha}\Phi''(\sigma_1)\,d\sigma_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Durch die Gleichungen (8) und (10) ist nun die Minimalfläche (10) auf die Projektionsfläche (8) abgebildet (aber nicht konform) und zwar so, daß die Asymptotenlinien sich entsprechen. Zu dem Minimalflächenpunkt (σ, σ_1) erhält man die Projektion auf die XY-Ebene des entsprechenden Punkts der Projektionsfläche dadurch, daß man das sphärische Bild des Minimalflächenpunkts stereographisch auf die XY-Ebene projiziert. Daraus folgt aber nach den bekannten Sätzen über die Minimalflächen, daß die beiden Flächen so abgebildet sind, daß die Projektion der Projektionsfläche (8) auf die XY-Ebene ein konformes Bild der Minimalfläche ist. Da nun die Asymptotenlinien sich entsprechen und diese die Minimalfläche bekanntlich in unendlich kleine Quadrate teilen, so folgt der

Satz VI. *Die Projektionen der Asymptotenlinien jeder assoziierten Projektionsfläche auf die XY-Ebene bilden ein isometrisches Kurvensystem.*

Aus dem bekannten Satz endlich bezüglich der konformen Abbildung zweier adjungierter Minimalflächen, wonach den Krümmungslinien der einen Minimalfläche die Asymptotenlinien der adjungierten entsprechen

*) Vgl. z. B. Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der [illegible] theorie § 2.

**) Vgl. ebenda § 12, (12) und (9).

und umgekehrt, schließt man, daß *die Projektionen der Asymptotenlinien von zwei adjungierten Projektionsflächen auf die XY-Ebene vier Systeme von Kurven geben, die sich überall unter einem Winkel gleich* $\frac{\pi}{4}$ *schneiden.*

§ 14.

Die R-Flächen sind Minimalflächen des R_4.

Auf der durch die Gleichung

$$s + it = F(x + iy) \tag{1}$$

dargestellten R-Fläche denken wir uns ein zusammenhängendes, durch eine oder mehrere Grenzkurven Γ begrenztes Flächenstück. Die Projektion des Flächenstücks auf die XY-Ebene gibt einen Bereich $\mathfrak{B}_1$ mit den Grenzkurven Γ_1 und ebenso erhält man durch Projektion auf die ZT-Ebene in dieser einen Bereich $\mathfrak{B}_2$ mit den Grenzkurven Γ_2. Die Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ bilden wegen der konformen Abbildung des auf der R-Fläche liegenden Flächenstücks auf die XY- und ZT-Ebene (vgl. § 10) ebenfalls zusammenhängende Flächenstücke, die jedoch ihre Ebenen mehrfach überdecken können. Durch die in $\mathfrak{B}_1$ (samt Grenzkurven) reguläre Funktion (1) — dies setzen wir von F voraus — ist dann $\mathfrak{B}_1$ konform auf $\mathfrak{B}_2$ abgebildet. Durch die Grenzkurven Γ legen wir nun eine andere Fläche A, von der wir voraussetzen, daß das innerhalb Γ liegende Flächenstück frei von Singularitäten sei, und daß die Projektionen dieses Flächenstücks auf die XY- und ZT-Ebene gerade die Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ geben: mit anderen Worten, daß durch dieses Flächenstück die Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ eineindeutig — aber jetzt nicht konform — aufeinander abgebildet werden. Die Gleichungen dieser Fläche A seien

$$x = x, \quad y = y, \quad z = U(x, y), \quad t = V(x, y). \tag{2}$$

Nach dem oben Gesagten müssen wir also von den sonst willkürlichen Funktionen U, V voraussetzen, daß sie samt ihren ersten partiellen Ableitungen in Bereich $\mathfrak{B}_1$ eindeutige und stetige Funktionen von x, y sind, daß in $\mathfrak{B}_1$ ihre Funktionaldeterminante stets von Null verschieden ist und daß die längs der Grenzkurven Γ_1 von $\mathfrak{B}_1$ aufgepflanzten Werte die Kurven Γ des R_4 geben. Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir nun den

Satz. *Der auf der R-Fläche von den Kurven Γ begrenzte Flächeninhalt ist kleiner als der entsprechende auf der Fläche A. In diesem Sinne sind die R-Flächen Minimalflächen des R_4.*

Beweis. Für das Flächenelement dJ von (2) hat man

$$dJ = \delta\, dx\, dy, \tag{3}$$

wo

$$\delta = +\sqrt{EG - F^2}; \tag{4}$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2; \quad F = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}; \tag{5}$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

ist. Ist dJ_1 die Projektion von dJ auf die XY-Ebene, dJ_2 die Projektion von dJ auf die ZT-Ebene, so hat man, wie man leicht nachrechnet,

$$dJ_1 = dx\,dy; \quad dJ_2 = +\sqrt{eg - f^2}\,dx\,dy, \tag{6}$$

wo

$$e = E - 1; \quad f = F; \quad g = G - 1 \tag{7}$$

gesetzt ist; die Inhalte dJ, dJ_1, dJ_2 fassen wir dabei als positive Größen auf, da es hier nur auf die Größe und nicht auf den Umlaufssinn derselben ankommt. Wir zeigen nun, daß, wenn nicht gleichzeitig

$$e = g, \quad f = 0 \tag{8}$$

ist, stets $dJ > dJ_1 + dJ_2$ ist. Aus (3), (4) und (7) folgt nämlich

$$dJ = \sqrt{1 + e + g + eg - f^2}\,dx\,dy. \tag{9}$$

Weiter ist $\frac{e+g}{2} \geqq \sqrt{eg}$, wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $e = g$ ist; um so mehr ist also $e + g > 2\sqrt{eg - f^2}$. An die Stelle des Zeichens $>$ tritt hier nur das Zeichen $=$, wenn die beiden Gleichungen (8) gleichzeitig bestehen. Aus (9) ergibt sich nun, falls die Gleichungen (8) nicht gleichzeitig erfüllt sind,

$$dJ > \sqrt{1 + 2\sqrt{eg - f^2} + eg - f^2}\,dx\,dy$$

oder

$$dJ > \left(1 + \sqrt{eg - f^2}\right)dx\,dy$$

oder

$$dJ > dJ_1 + dJ_2. \tag{10}$$

Sind aber die Gleichungen (8) beide erfüllt, so ist

$$dJ = dJ_1 + dJ_2. \tag{11}$$

Die Gleichungen (8) und (5) geben aber dann

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \tag{12}$$

und U ist der reelle, V der imaginäre Teil einer Funktion von $x + iy$ oder umgekehrt, d. h. die Fläche A ist dann eine R-Fläche. Ist also A nicht auch eine R-Fläche — und dies kann, wie sogleich gezeigt wird, nur dann der Fall sein, falls A mit der gegebenen R-Fläche zusammenfällt — so gilt für die R-Fläche (11), für die Fläche A (10). Bezeichnet man nun mit J_R den Inhalt des in die Kurven Γ eingespannten Flächenstücks der R-Fläche, mit J_A den entsprechenden Inhalt der Fläch[illegible] und mit J_1 und J_2 die Inhalte von $\mathfrak{B}_1$ bezw. $\mathfrak{B}_2$ (d. h. *aller* Blätter [illegible] und $\mathfrak{B}_2$), so erhält man aus (10) und (11) entsprechend den bezüglich der Fläche A gemachten Voraussetzungen

$$(13) \qquad J_R = J_1 + J_2,$$

$$(14) \qquad J_A > J_1 + J_2.$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, zu zeigen, daß es außer der gegebenen R-Fläche durch Γ keine zweite den für die Fläche A gemachten Voraussetzungen genügende R-Fläche gibt; denn wäre

$$z + it = f(x + iy)$$

die Gleichung einer solchen, so müßte f und darum auch die Funktion

$$(15) \qquad Z + iT = F(x + iy) - f(x + iy)$$

eine in $\mathfrak{B}_1$ (samt Rand) reguläre Funktion von $x + iy$ sein. Bei der durch (15) vermittelten konformen Abbildung von $\mathfrak{B}_1$ auf die ZT-Ebene würde aber allen Punkten der Kurven Γ_1 der Punkt $Z = 0$, $T = 0$ entsprechen, was der Regularität widerspricht. Ist also A eine von der gegebenen R-Fläche verschiedene Fläche, so ist sicher die Gleichung (14) erfüllt und damit der Beweis des Satzes erledigt.

Genau so wie zuletzt zeigt man, daß zwei R-Flächen innerhalb eines Gebietes, in dem sie Bilder regulärer Funktionen sind, nicht einmal die Punkte eines noch so kleinen endlichen Kurvenstücks miteinander gemein haben können, ohne zusammenzufallen. Zwei R-Flächen schneiden sich eben in diskreten Punkten und nicht in Linien. Da somit eine R-Fläche durch ein noch so kleines endliches Kurvenstück eindeutig bestimmt ist, so darf man deshalb zur Bestimmung einer *Minimalfläche* (R-Fläche) im vierdimensionalen Raum nicht eine beliebige Raumkurve Γ, durch die die Fläche gehen soll, vorgeben. Aus der Funktionentheorie ist ja auch bekannt, daß die Angabe der reellen Werte z längs Γ_1 die imaginären Werte t längs Γ_1 bis auf eine additive Konstante bestimmt. Mit anderen Worten: man darf zur Bestimmung der Minimalfläche nur die Projektion γ der Randkurve Γ in den dreidimensionalen Raum $t = 0$ vorgeben. Die Aufgabe, aus γ die Minimalfläche zu bestimmen, ist identisch mit der bekannten Randwertaufgabe der Funktionentheorie.

Wir schließen mit zwei Bemerkungen. Aus (3) folgt nämlich, daß das Integral

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}_1} \delta \, dx \, dy$$

erstreckt über $\mathfrak{B}_1$ für die R-Fläche einen Minimalwert besitzt. Aus (12) folgt aber, daß der Minimalwert J_R selbst gegeben ist durch

$$(16) \qquad J_R = \iint\limits_{\mathfrak{B}_1} \left(1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right) dx \, dy,$$

wo jetzt $U + iV = F(x + iy)$ ist Das rechtsstehende Integral stimmt aber bis auf die additive Konstante $\iint\limits_{\mathfrak{B}_1} dx\,dy$ mit dem Integral überein, dessen Minimum-Eigenschaft bei dem sogenannten *Dirichletschen Prinzip* betrachtet wird.

Aus (13), (16) und (6) folgt endlich

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}_1}\left(1+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right)dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{B}_1}dx\,dy+\iint\limits_{\mathfrak{B}_2}dU\,dV$$

und hieraus der bekannte *Satz von Green*

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}_1}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=\int U\,dV, \tag{17}$$

wo das rechtsstehende Integral um den Rand von $\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{B}_2$ so zu führen ist, daß sein Wert positiv wird. Die Gleichung (13) enthält also eine interessante geometrische Interpretation für den Greenschen Satz.

Anmerkung. Bedeutet $\partial''(\varphi)$ den Differentialparameter zweiter Ordnung*) für das Linienelement der Minimalfläche (R-Fläche), so ergibt sich leicht

$$\partial''(x)=\partial''(y)=\partial''(z)=\partial''(t)=0 \quad \text{und} \quad \partial''(Ax+By+Cz+Dt)=0,$$

wo A, B, C, D Konstanten sind. Die letzte Gleichung sagt aber aus**), daß jede Schar von Parallelräumen aus der Minimalfläche ein Isothermensystem ausschneidet. Man vergleiche hierzu den analogen für die Minimalflächen des R_3 gültigen Satz. Von der Erzeugung der Minimalflächen des R_4 durch Minimalkurven war in § 10 die Rede.

§ 15.

Darstellung des Produkts zweier komplexen Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum.

Im reellen Zahlengebiet kann das Produkt zweier Größen durch ein Rechteck dargestellt werden. Durch geeignete Festsetzungen kann man nun auch für zwei komplexe Größen $x+iy$ und $z+it$ ein Rechteck angeben, welches das Produkt derselben geometrisch interpretiert. Dies ist für manche Zwecke von Vorteil.

Ist O der Ursprung des Koordinatensystems, so stellen wir, wie üblich, die Größe $x+iy$ durch den Vektor OP_1 der XY-Ebene und die Größe $z+it$ durch den Vektor OP_2 der ZT-Ebene dar. Diese beiden Vektoren

*) vgl. etwa Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie § 17, (7).

**) ibid. § 17, IV.

bestimmen ein Rechteck OP_1PP_2, wobei P die Koordinaten x, y, z, t hat; dieses Rechteck soll uns der Repräsentant von $(x+iy)\cdot(z+it)$ sein. Bezeichnet man dieses Rechteck mit J, so setze man symbolisch

$$(1) \qquad J = (x+iy)(z+it).$$

Für das folgende ist es nun geschickter, dem Punkt P nicht die Koordinaten x, y, z, t zuzuschreiben, sondern die Koordinaten x, iy, z, it. Nach dieser Festsetzung projiziere man das Rechteck J der Reihe nach auf die XZ-, YZ-, XT-, YT-Ebene und erhält so vier Rechtecke, die wir mit $J_{xz}, J_{yz}, J_{xt}, J_{yt}$ bezeichnen. Das Rechteck J_{xt} z. B. hat die Seiten x und it und hat einen Inhalt $= xt$; wir sagen aber jetzt, der Inhalt sei ixt, und machen dies ebenso für die anderen Rechtecke. Man erhält so

$$(2) \qquad J_{xz} = xz, \quad J_{yz} = iyz, \quad J_{xt} = ixt, \quad J_{yt} = -yt;$$

aus (2) folgt aber jetzt $J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt} = (x+iy)(z+it)$ und darum aus (1)

$$(3) \qquad J = J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt}.$$

Wir nennen nun das Rechteck J den *Produktvektor* der beiden Vektoren OP_1 und OP_2 oder der beiden komplexen Größen $x+iy$ und $z+it$ und den Punkt O seine *Ecke*. Die vier Größen J_{xz} etc. nennen wir die *Komponenten* des Produktvektors. Nach (3) ist also *der Produktvektor gleich der Summe seiner vier Komponenten*. Zwei Produktvektoren heißen gleich, wenn jeder dieselbe Komponentensumme hat. Zwei Produktvektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert. Man kann nun mit einem Produktvektor mancherlei Lagenverschiebungen und Änderungen vornehmen, ohne daß er seinen Wert ändert. Für uns kommen hauptsächlich drei solche Veränderungen in Betracht.

I. Nach (1) ist $J = a(x+iy)\cdot\frac{z+it}{a}$, wo a eine reelle Konstante bedeuten möge. Daraus folgt, daß man die Seiten OP_1 und OP_2 des Produktvektors verändern darf, wenn nur dabei der Inhalt des Rechtecks J derselbe bleibt.

II. Da weiter $J = e^{i\alpha}(x+iy)\cdot(z+it)e^{-i\alpha}$ ist, wo α wieder reell sein möge, so folgt, daß man die eine Seite OP_1 von J in der XY-Ebene im Sinne der wachsenden Winkel um den Winkel α drehen darf, wenn man nur ebenso OP_2 in der ZT-Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel um den Winkel α dreht. Dabei ist in der XY- und ZT-Ebene derjenige Drehsinn der positive, in dem gedreht die positiven reellen Achsen nach einer Drehung von $\frac{\pi}{2}$ mit den positiven imaginären Achsen zusammenfallen. Durch die genannte Operation kann man jeden Produktvektor aus dem R_4 in den dreidimensionalen Raum XYZ hereindrehen: man braucht dazu nur OP_2 um den Winkel P_2OZ in der ZT-Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel und OP_1 in der XY-Ebene um denselben Winkel im Sinne der wachsenden Winkel zu drehen.

III. Endlich kann man den Produktvektor offenbar parallel mit sich verschieben. Um dabei die Komponenten des verschobenen Produktvektors mit dem richtigen Zeichen zu erhalten, ist zu beachten, daß die Rechtecksseiten des Produktvektors gerichtete Größen sind und darum auch die Projektionen derselben.

Durch diese Festsetzungen ist es nun möglich, irgend welchen algebraischen Ausdruck komplexer Größen durch geometrische Konstruktionen darzustellen.

Beispiel. Es sei $z + it = (x + iy)^n$ und es soll zu dem Wert $x + iy$ der Funktionswert gesucht werden. Der Vektor OP_1 (s. Fig. 1) in der XY-Ebene sei $= x + iy$, ebenso $OP_1' = x + iy$ in der ZT-Ebene. Der Radiusvektor von OP_1 und OP_1' sei r, die Amplitude φ. Der Produktvektor aus OP_1 und OP_1' ist dann gleich $(x + iy)^2$. Wir drehen nun OP_1 um den Winkel φ nach OQ_1 (Q_1 liegt auf der X-Achse) in negativem Sinne und dafür OP_1' um φ in positivem Sinne nach OQ_2. OQ_1 und OQ_2 geben jetzt

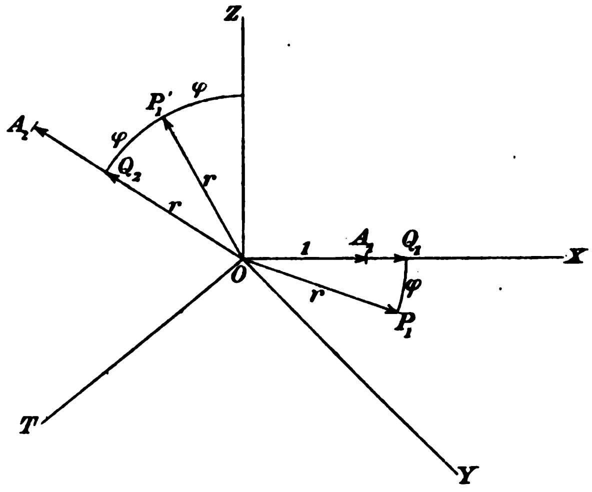


Fig. 1.

ebenfalls einen Produktvektor gleich $(x + iy)^2$. Sei $OA_1 = 1$, dann verkleinere man OQ_1 im Verhältnis $\frac{1}{r}$, worauf Q_1 nach A_1 gelangt; OQ_2 dagegen vergrößere man im Verhältnis $\frac{r}{1}$, worauf Q_2 nach A_2 gelangt. Der durch OA_1 und OA_2 bestimmte Produktvektor ist ebenfalls $= (x + iy)^2$. Da nun aber $OA_1 = 1$, so ist $OA_2 = (x + iy)^2$, OA_2 und OP_1 bilden nun einen Produktvektor $= (x + iy)^3$. Man verfahre nun gerade so wie vorher, drehe OP_1 zurück nach OQ_1 und verkürze wieder OQ_1 im Verhältnis $\frac{1}{r}$. Dafür hat man OA_2 wiederum um den Winkel φ in positivem Sinn zu drehen und die Länge OA_2 mit r zu multiplizieren. Daraus folgt, daß der Vektor $z + it$, der die Größe $(x + iy)^n$ darstellt die n-fache Amplitude von $x+iy$ besitzt und einen Radiusvektor gleich der n^{ten} Potenz des Radiusvektors von $x+iy$. Läuft nun der Vektor OP_1 einmal in der XY-Ebene herum, so macht der Vektor $OP_n = z + it$ n Umläufe in der ZT-Ebene. Mit andern Worten: die durch die Gleichung $z + it = (x+iy)^n$ dargestellte R-Fläche gibt, auf die XY-Ebene projiziert, eine Riemannsche Fläche mit einem Blatt, auf die ZT-Ebene projiziert, eine solche mit n Blättern. Zieht man durch die jeweilige Lage von P_1 den Vektor P_1P parallel und gleich OP_n, so wird der Punkt P eine auf der R-Fläche liegende Kurve beschreiben, die, auf die XY-Ebene projiziert, den einfachen Kreis mit dem Radius OP_1 gibt, auf die ZT-Ebene projiziert, den Kreis mit dem Radius OP_n aber n mal gerechnet. Man erhält so eine Anschauung für das Verhalten der R-Fläche im Nullpunkt, wo $x+iy$, als Funktion von $z+it$ betrachtet, einen Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt.

§ 16.

Geometrische Deutung von $\int F(x+iy)\,(dx+idy)$.

Wir betrachten die durch die Gleichung

$$(1) \qquad z + it = F(x+iy)$$

dargestellte R-Fläche. In einem Bereich der XY-Ebene, in dem F regulär sich verhält, ziehen wir eine Kurve A_1B_1 (s. Fig. 2) und pflanzen nun in allen Punkten dieser Kurve die aus (1) sich ergebenden Werte $z + it$ auf: dadurch erhalten wir auf der R-Fläche die Kurve AB. Sei P_1 ein Punkt von A_1B_1 mit den Koordinaten x, iy, P der entsprechende Punkt auf AB, so stellt uns der Vektor P_1P den in P_1 vorhandenen Funktionswert $z+it$ von (1) dar. Lassen wir P_1 von A_1 nach B_1 wandern, so überführt der Vektor P_1P dabei eine gewisse

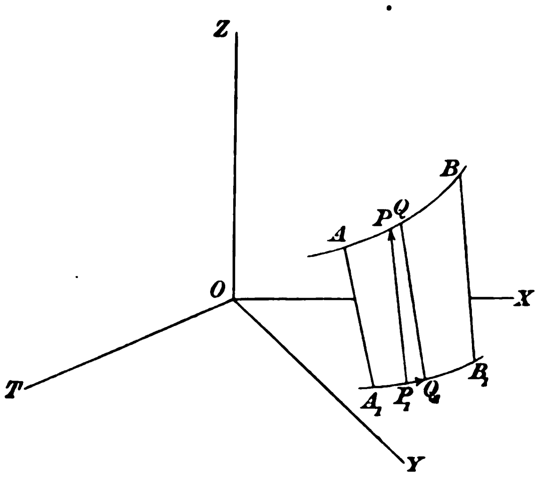


Fig. 2.

Fläche, die wir die *Vektorfläche* nennen. Sei Q_1 ein P_1 sehr benachbarter Punkt der Kurve A_1B_1, Q sein entsprechender auf AB, und setze man $P_1Q_1 = dx + idy$, so bestimmen die beiden Vektoren P_1P und P_1Q_1 einen

Produktvektor mit der Ecke P_1. Wir nennen ihn dJ. Die vier Komponenten von dJ werden bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung mit den vier Projektionen des Stücks $P_1 Q_1 Q P$ auf die Ebenen der Komponenten von dJ übereinstimmen. Bildet man nun

$$\int_{A_1}^{B_1} F(x+iy)\,(dx+idy), \tag{2}$$

so stellt dieses bestimmte Integral die Summe der vier Projektionen der Vektorfläche AA_1B_1BA auf die genannten Ebenen in dem in § 15 namhaft gemachten Sinne dar. Nennt man diese vier Projektionen ebenfalls die *Komponenten* der Vektorfläche, so kann man

$$\int_{A_1}^{B_1} F(x+iy)\,(dx+idy) = J \tag{3}$$

setzen, wofern man unter J die Summe der vier Komponenten der Vektorfläche AA_1B_1BA versteht. Man sieht, daß (3) auf eine reelle Funktion $F(x)$ der reellen Variabeln x angewendet die gewöhnliche Deutung des $\int_{A_1}^{B_1} F(x)\,dx$ gibt, wenn die X-Achse zur Integrationskurve A_1B_1 genommen wird.

Beispiel:

$$z + it = \frac{1}{x+iy}. \tag{4}$$

Es möge das Integral

$$\int \frac{dx+idy}{x+iy} \tag{5}$$

längs eines um den Ursprung als Mittelpunkt und mit dem Radius 1 in der XY-Ebene beschriebenen Kreises k im Sinne der wachsenden Winkel geführt werden.

Der Kreis schneide die X-Achse im Punkt A_1 (s. Fig. 3); trägt man auf der Z-Achse $OA_2 = 1$ ab, so stellt OA_2 den Funktionswert im Punkt A_1 dar. Die Vektoren OA_1 und OA_2 sind die Seiten eines Produktvektors, der $= 1$ ist. Wir drehen nun OA_1 in der XY-Ebene im Sinne der wachsenden Winkel um den Winkel φ nach OP_1, OA_2 in der ZT-Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel ebenfalls um den Winkel φ nach OP_2, dann hat der durch OP_1 und OP_2 bestimmte Produktvektor nach § 15 ebenfalls den Wert 1. OP_2 stellt also (wie übrigens auch aus der durch (4) vermittelten konformen Abbildung der XY-Ebene auf die ZT-Ebene folgt) den in P_1 vorhandenen Funktionswert dar. Es ist demnach, wenn P_1 die Koordinaten x, iy hat, $OP_2 = \frac{1}{x+iy}$. P_1Q_1 sei $= dx + idy$. Wir verlegen nun den Vektor $P_1 Q_1$ parallel mit sich so nach O, daß P_1 auf O fällt und nennen den nach O verschobenen Vektor OQ'. Aus OQ' und OP_2 bilden wir einen Produktvektor: dieser ist dann $= \frac{dx + i\,dy}{x + iy}$. OP_2 drehe man in der ZT-Ebene um den Winkel φ im Sinne der wachsenden

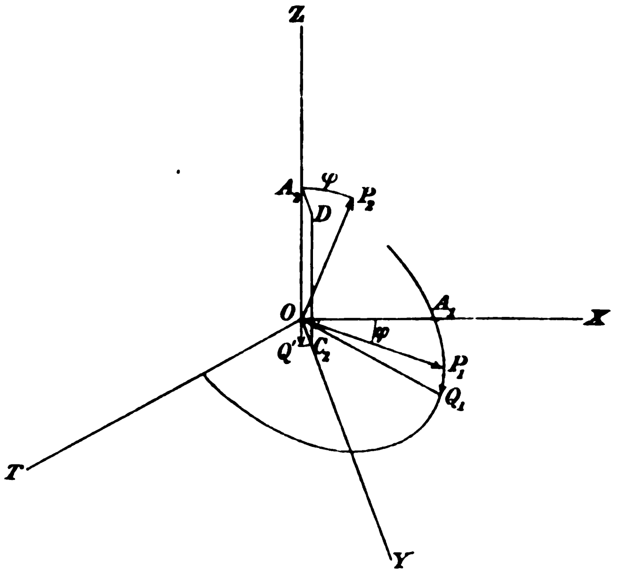


Fig. 3.

Winkel bis OA_2, dann muß man OQ' in der XY-Ebene um den Winkel φ im Sinne der abnehmenden Winkel drehen bis OC_2. Es ist nun aber klar, daß C_2 auf der Y-Achse liegen muß. Der Produktvektor aus OA_2 und OC_2 ist somit $= \frac{dx + i\,dy}{x + iy}$. Der Produktvektor ist aber jetzt mit seiner zur YZ-Ebene gehörigen Komponente identisch, da alle anderen Null sind. Bezeichnet man die Länge von $P_1 Q_1$ mit ds, so ist OC_2 der Länge nach ebenfalls $= ds$; C_2 hat daher auf der Y-Achse die Koordinate $i \cdot ds$ und der Produktvektor aus OA_2 und OC_2 hat den Wert $i\,ds$. Teilt man nun den Kreis in lauter gleiche kleine Teile ds, so hat $\frac{dx + i\,dy}{x + iy}$ überall den Wert $i\,ds$. Es folgt somit das bekannte Resultat

$$\int_K \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = 2 i \pi .$$

Ebenso zeigt man leicht, daß

$$\int_K (x + iy)^n \, (dx + i\,dy) = 0$$

ist, wo n eine ganze positive oder negative, von -1 verschiedene Zahl ist

Als **zweites Beispiel** nehmen wir die Funktion

$$z + it = (a + ib)(x + iy) + c + id, \tag{6}$$

welche eine spezielle R-Fläche nämlich eine Nullebene N darstellt, und führen das Integral

$$J = \int (z + it)\,(dx + idy) \tag{7}$$

um ein in der XY-Ebene liegendes Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und zwar so, daß das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ zur Linken liegt. Den Ecken $A_1 A_2 A_3$ entsprechen auf N drei Punkte $B_1 B_2 B_3$. Der Vektor $A_1 B_1$ wird nun, wenn A_1 das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ durchläuft, eine gewisse Vektorfläche durchfahren; J ist dann gleich der Summe der vier Komponenten dieser Vektorfläche. Bezeichnet man diese Komponenten mit $J_{xz}, J_{yz}, J_{xt}, J_{yt}$, so ist

$$J = J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt}. \tag{8}$$

Es ist nun, wenn B_k die Koordinaten x_k, y_k, z_k, t_k hat, wie man leicht zeigt

$$J_{xz} + J_{yt} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{i^2}{2}\begin{vmatrix} y_1 & t_1 & 1 \\ y_2 & t_2 & 1 \\ y_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$J_{yz} + J_{xt} = -\frac{i}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{i}{2}\begin{vmatrix} x_1 & t_1 & 1 \\ x_2 & t_2 & 1 \\ x_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Da nun aber nach (6)

$$z_k = ax_k - by_k + c; \quad t_k = bx_k + ay_k + d \tag{11}$$

ist, so sieht man, daß die rechten Seiten von (9) und (10) identisch verschwinden. Daraus folgt

$$\int_{A_1 A_2 A_3} (z + it)\,(dx + idy) = 0. \tag{12}$$

Gleichung (12) stellt einen speziellen Fall des Cauchyschen Integralsatzes dar. Das Bestehen der Gleichung (12) ist auch der Anlaß gewesen, warum wir eine Ebene mit der Gleichung (6) eine *Nullebene* nannten. Ebenso wollen wir jedes in einer Nullebene liegende Dreieck ein *Nulldreieck* nennen. Weil nun die Tangentialebenen jeder R-Fläche Nullebenen sind (vgl. § 10), so kann man von hier aus einen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für eine beliebige R-Fläche gewinnen. Wir skizzieren kurz den Gang desselben.

Es sei in der XY-Ebene ein zusammenhängender Bereich $\mathfrak{B}$ mit den Grenzkurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ gegeben und die Funktion

$$z + it = F(x + iy) \tag{13}$$

sei in $\mathfrak{B}$ (einschließlich der Grenzkurven) eindeutig erklärt, sie

𝔅 nirgends unendlich und besitze an jeder Stelle von 𝔅 eine endliche Ableitung. Mit anderen Worten: wir setzen voraus, daß die durch (13) dargestellte R-Fläche in allen Punkten von 𝔅 eine Tangentialebene besitze (vgl. § 10). Wir teilen nun den Bereich 𝔅 in lauter unendlich kleine Dreiecke; diesen unendlich kleinen Dreiecken der XY-Ebene werden auf der R-Fläche wegen der Existenz der Ableitung von F ebenfalls unendlich kleine Dreiecke entsprechen. Jedes von diesen ist ein Nulldreieck, weil es in einer Tangentialebene der R-Fläche liegt. Nun führen wir das Integral

$$(14) \qquad \int (s+it)\,(dx+idy)$$

um jedes der Dreiecke von 𝔅 so herum, daß das Dreieck zur Linken liegt. Die Summe dieser Integrale ist Null, weil jedes einzelne Integral Null ist (genauer: unendlich klein von der dritten Ordnung, wenn die Seite eines Dreiecks des Bereichs 𝔅 unendlich klein von der ersten Ordnung ist). Da nun jede Dreiecksseite, die der Begrenzung nicht angehört, zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, so heben sich die entsprechenden Beträge der Integralsumme für diese Dreiecksseiten auf. Die Integralsumme stellt also den Wert dar, den man erhält, wenn man das Integral (14) um die Grenzkurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ so führt, daß 𝔅 stets zur Linken liegt. Da aber die Integralsumme Null ist, so gilt das gleiche für das längs der Grenzkurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ geführte Integral. Damit ist aber der Integralsatz bewiesen.

Man sieht, daß die Gültigkeit des Satzes durch die Orientierung der Tangentialebenen der R-Fläche bedingt ist und daß zum Beweise nur die Existenz, nicht aber auch die Stetigkeit der Ableitung von $F(x+iy)$ vorauszusetzen ist, wie dies auch Goursat*) neuerdings gezeigt hat.

*) Vgl. Encyklopädie der math. Wiss. II B 1, (*Osgood*), Fußnote 16.

Generalization of the Hamiltonian Groups*).

By

G. A. Miller of Stanford University, California.

If 2^m is the highest power of 2 which divides the order of any group G, the number of the subgroups whose order is half of the order of G is $2^r - 1$, $r \lesseqgtr m$. In every Hamiltonian group $r = m - 1$. The main object of the present paper is to study all the groups in which $r = m - 1$. It will be found that the Hamiltonian groups constitute a very special category of these groups, and that several larger categories are almost equally elementary and fundamental in the general theory of groups. As the groups of order p^m, p being any prime, which contain just $1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-2}$ subgroups of order p^{m-1} are fundamentally related to the groups in question (especially when $p = 2$), we shall first determine all of these groups.

§ 1.

The groups of order 2^m which contain just $2^{m-1} - 1$ subgroups of order 2^{m-1}.

The operators which are common to all the subgroups of order 2^{m-1} in any group of order 2^m constitute an invariant subgroup with respect to which the quotient group is abelian and of type $(1, 1, 1, \cdots)$**). The number of the subgroups of order 2^{m-1} is equal to the number of the operators of order two in this quotient group. Hence all the groups

---

*) The following references relate to Hamiltonian groups: Dedekind, Mathematische Annalen, vol. 48 (1897), p. 548; Miller, Comptes Rendus, vol. 126 (1898), p. 1406; Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 4 (1898), p. 510; Ibid. vol. 5 (1899), p. 292; d'Alessandro, Giornale di matematiche, vol. 37 (1899), p. 138; Wendt, Mathematische Annalen, vol. 59 (1904), p. 189. Cf. Burkhardt, Math. Enc. I A 6, vol. 1, p. 223; Weber, Algebra, vol. 2, 1899, p. 129.

**) Bauer, Nouvelles Annales de Mathématiques, vol. 19 (1900), p.

included in the heading of this section must be such that all the subgroups of order 2^{m-1} have just 2 common operators. Since these common operators include the square of every operator in the entire group, *there is just one abelian group of order 2^m, $m > 1$, in which the number of the subgroups of order 2^{m-1} is $2^{m-1}-1$*; viz. the group of type $(2, 1, 1, \cdots)$. In what follows G will represent a non-abelian group satisfying the conditions specified in the heading of the section. The commutator of order 2 will be represented by c.

Since the square of every operator of G is either c or the identity, G must be composed of operators of orders 2 and 4 in addition to the identity. Every cyclic subgroup of order 4 must be invariant since it includes c. There are always some non-invariant operators of order 4 in G; for, if every operator of order 4 were invariant, the product of any two operators of order 2 would be of order 2*); that is, all the operators of order 2 would be commutative. Hence G would be abelian, which is contrary to the hypothesis.

Let s_1, s_2, s_3 represent any three non-commutative operators of G such that $s_1 s_2 = s_3$. It was observed above that at least one of these operators is of order 4. If two of them are of order 4 the third must be of the same order, since each is transformed into itself multiplied by c by each of the other two. This follows also directly from the law of multiplication in the quaternion group. Hence we have the following rules in regard to the order of the products of two operators in G: *The product of two non-commutative operators of the same order is of order 4, the product of two commutative operators of different orders is of order 4***), *the product of two non-commutative operators of different orders is of order 2, the product of two commutative operators of the same order is of order 2 or the identity.*

When G contains an invariant operator of order 4 the number of its operators of order 4 is half of its order. That is, the number of its operators of order 4 is one more than the number of its operators of order 2 whenever G contains an invariant operator of order 4. This follows directly from the fact that the product of this invariant operator into any operator of order 2 or the identy is of order 4, while the remaining products are of order 2 or the identity. Since every non-invariant operator of G belongs to a subgroup H of order 2^{m-1}, it follows that at least one-fourth of the operators of G must be of order 4. This is the actual number of such operators in the *octir* group; i. e. in

*) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 7 (1901), p. 424.

**) The identity is not included among these commutative operators.

the group which corresponds to the movements transforming a square into itself, the dihedral rotation group of order 8.

The converse of the theorem proved in the last paragraph is also true; viz., G must contain an invariant operator of order 4 whenever it contains just 2^{m-1} operators of this order. The proof of this is, however, somewhat more difficult. It may be effected as follows: Suppose that G contains just 2^{m-1} operators of order 4 without containing any invariant operator of this order. The operators of G which are commutative with one of its operators s of order 4 constitute a subgroup H of order 2^{m-1} which contains just 2^{m-2} operators of order 4 according to the preceding paragraph. Hence the remaining operators of G $(G-H)$ must contain 2^{m-2} operators of each of the orders 2 and 4.

Let t be any operator of order 2 contained in $G-H$, and let H' represent the subgroup which is composed of the 2^{m-2} operators of H which are commutative with t. It will now be proved that H' contains just 2^{m-3} operators of order 4. The product of t and any operator of order 4 in H' is of order 4. This is also the order of the product of t into any operator of order 2 contained in $H-H'$. That is, the 2^{m-2} operators of order 4 in $G-H$ are obtained by multiplying t into the operators of order 4 contained in H' and into the operators of order 2 contained in $H-H'$. As H contains just 2^{m-2} operators of order 4, H' must contain 2^{m-3} operators of this order, a larger number would lead to more than 2^{m-2} operators of order 4 in $G-H$, and a smaller number would lead to less than 2^{m-2} such operators in $G-H$.

If H' contains no invariant operator of order 4 it satisfies the same conditions as were supposed to be satisfied by G. As it is of lower order than G, this case may be dismissed since it may be supposed that G is the group of lowest order which satisfies the given conditions. If H' contains any invariant operator of order 4 this must be commutative with s, which is not in H', and hence it must be invariant under H. As it would also be commutative with t, it would be commutative with every operator of G, which is contrary to the hypothesis. That is, G cannot contain just 2^{m-1} operators of order 4 unless it also contains an invariant operator of this order. In other words, *the necessary and sufficient condition that G contains just 2^{m-1} operators of order 4 is that one of its operators of this order is invariant.*

Each non-invariant operator t of G is transformed into itself by a subgroup (H) of order 2^{m-1} and may be said to belong to H. Conversely, we shall say that H belongs to t. We proceed to prove that the number of operators which belong to H is equal to the number of invariant operators of G. These invariant operators constitute a subgroup which will be denoted by J. It is clear that all the products obtained by multiplying t into the operators of J belong to H, and that each of these products is transformed into itself multiplied by c by every operator in $G - H$. If there were any other operator in G belonging to H, it would also be transformed into itself multiplied by c by every operator in $G - H$. The products obtained by multiplying t into all the operators which belong to H must therefore be transformed into themselves multiplied by $c^2 = 1$ by every operator in $G - H$. That is, all these products are invariant under G. In other words, the nomber of the operators which belong to H is equal to the order of J.

From the preceding paragraph it follows that the number of the different subgroups which belong to the different operators of G is equal to the number of operators of order 2 in $\frac{G}{J}$. As this is equal to the number of maximal subgroups in $\frac{G}{J}$, it follows that *every possible subgroup of G which includes J and is of order 2^{m-1}, belongs to some operators of G.* By means of this fact it is easy to prove that the number of invariants in $\frac{G}{J}$ must be even*). As this is clearly true when the order of G is 8 it is only necessary to prove that it is true for G whenever it is true for any subgroup H of order 2^{m-1} contained in G. Either just half of the invariant operators of H, or all of these operators are also invariant under G. In the former case the order of $\frac{G}{J}$ is four times the order of the group of cogredient isomorphisms of H, since none of the operators in $G - H$ can be commutative with every operator of G. In the latter case $G - H$ contains operators which are commutative with every operator of G**) and hence G has the same group of cogredient isomorphisms as H has. That is, *the group of cogredient isomorphisms of G is either the same as that of H or it is the direct product of the latter and the four-group.* Hence G contains no abelian subgroup of order 2^{m-1} whenever the order of $\frac{G}{J}$ exceeds 4. When this order is 4 there are just three abelian subgroups of order 2^{m-1}.

By selecting an arbitrary operator from each of the divisions of G which correspond to a set of independent generators of $\frac{G}{J}$, we obtain the generators of an invariant subgroup of G whose order is twice the order

*) Fite, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 3 (1902), p. 342.

**) Each operator of $G - H$ must transform H according to one of the operators in its group of cogredient isomorphisms since every subgroup of order 2^{m-2} which includes the invariant operators belongs to some operators of H.

of $\frac{G}{J}\cdot$ G includes the direct product of this subgroup and any subgroup of J which does not include c. When J contains no operator of order 4, the latter subgroup may be so selected that its order is half the order of J. In this case G is the direct product of these two subgroups. Hence the type of the first subgroup is independent of the manner in which its generators were selected whenever J includes no operators of order 4. It will soon be seen that this is not the case when J contains operators of order 4. *When J includes no operator of order 4, G is the direct product of an abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$ and a non-abelian group which contains only two invariant operators and has the same group of cogredient isomorphisms as G has*).*

When J includes operators of order 4, we may extend the group obtained at the beginning of the preceding paragraph by adding to its generators an arbitrary operator of order 4 from J. In this way there results a group whose order is four times the order of $\frac{G}{J}$, and G is the direct product of this group and any subgroup of type $(1, 1, 1, \cdots)$ selected from J in such a manner that it includes one-fourth of the operators of J without including c. To find all the G's whose group of cogredient isomorphisms is of order 2^{2m_1} it is therefore only necessary to find all the G's of order 2^{2m_1+1} which contain only 2 invariant operators, together with all those of order 2^{2m_1+2} which contain two invariant operators of order 4. For every higher order there is one and only one G whose group of cogredient isomorphisms is of order 2^{m_1} and which depends upon one of these G's of minimum order having such a group of cogredient isomorphisms.

We shall now prove that there is only one G of order 2^{2m_1+2} having invariant operators of order 4 and a group of cogredient isomorphisms of order 2^{2m_1}. This will prove that there is only one group of order $2^{2m_1+\lambda}$, $\lambda > 2$, which satisfies these conditions. We shall prove the given theorem by observing that if there were two such groups (G_1, G_2) they could be made simply isomorphic. Each of these two groups would contain a subgroup of order 2^{2m_1+1} whose group of cogredient isomorphisms would be of order 2^{2m_1-2}. We may assume that only one type of such subgroups can be constructed, since its group of cogredient isomorphisms is of a lower order than that of the groups in question. Since $G-H$ contains an operator of order 2 which is commutative with all the operators of any given subgroup of order 2^{m_1}, which is contained in H and includes

*) The latter group may coincide with G. That is, the theorem has no value when G contains only two invariant operators.

only four of the invariant operators of H, the two groups G_1, G_2 could clearly be placed in a simple isomorphism. That is, there is only one such group. In other words, all such groups are simply isomorphic.

When the order of G is 2^{2m_1+1} it must again contain an H which includes invariant operators of order 4 and has a group of cogredient isomorphisms of order 2^{2m_1-2}. Just as before, $G-H$ contains operators which are commutative with all the operators of any subgroup of order 2^{m_1-1} contained in H and including only 2 of its invariant operators. In this case these operators may, however, be all of order 2 or all of order 4. Hence there are two possible groups, the one containing $2^{m_1}(2^{m_1}+1)$ operators of order 4 while the other contains only $2^{m_1}(2^{m_1}-1)$ operators of this order as may be readily proved by induction. Hence *there are two and only two G's of order $2^{2m_1+\lambda}$, $\lambda > 1$, which contain no invariant operator of order 4 and have a group of cogredient isomorphisms of order 2^{2m_1}.*

The former of these two systems of groups of order $2^{2m_1+\lambda}$ (that is, the one which is based upon the group of order 2^{2m_1+1} which contains just $2^{m_1}(2^{m_1}+1)$ operators of order 4) is composed of the Hamiltonian groups*) of order 2^{α}, when m_1 has the special value unity while λ has any value greater than 0. As every possible Hamiltonian group is the direct product of a Hamiltonian group of order 2^{α} and an abelian group of odd order, and every such direct product is a Hamiltonian group**), the preceding developments generalize the fundamental theorems relating to Hamiltonian groups.

§ 2.

The groups of order p^m which contain just $1+p+p^2+\cdots+p^{m-2}$ subgroups of order p^{m-1}, p being any odd prime.

Just as in the preceding section, these groups may be defined as all the groups of order p^m which are such that their total number of subgroups of order p^{m-1} has just p common operators. When such a group is abelian it is again of type $(2, 1, 1, 1, \cdots)$. In the following developments it will be assumed that G is non-abelian and satisfies the conditions specified in the heading of this section. The main difference in the developments of this section and those of the preceding section is due to the fact that, when p is odd, these groups are always *conformal****)

*) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 3 (1897), p. 218.

**) Ibid. vol 4 (1898), p. 514.

***) Two groups are said to be conformal when they contain the same number of operators of each order (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 2

with abelian groups, while this is not the case when $p = 2$. Moreover, an abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$ may be conformal with a non-abelian group when $p > 2$, but this cannot happen when $p = 2$.

If G involves an operator of order p^2 it must be conformal with the abelian group of type $(2, 1, 1, 1, \cdots)$, and hence it must contain a subgroup of order p^{m-1} which includes no operator of order p^2. The subgroup of G which is composed of its invariant operators will again be denoted by J, and the subgroup which is composed of all the operators of G which are commutative with any non-invariant operator will be denoted by H. Just as in the preceding section it may be proved that the number of the different operators of G which belong to H is $p-1$ times the order of J, and hence that every subgroup of G which includes J and is of order p^{m-1} belongs to some non-invariant operators of G. In particular, *every G contains a subgroup of order p^{m-2} which has at least p^2 invariant operators.*

When J involves no invariant operator of order p^2, G is the direct product of an abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$, which is found in J but does not involve the commutator subgroup of G, and the group generated by selecting an arbitrary operator from each division of G which corresponds to an operator in any set of independent generators of $\frac{G}{J}$. The latter group contains the same group of cogredient isomorphisms as G does and includes only p invariant operators. When G contains only p invariant operators, these two groups are identical. In the case when J contains operators of order p^2, any one of these operators may be added to the given generators. The order of the group obtained in this way is equal to that of $\frac{G}{J}$ multiplied by p^2, and G is the direct product of this group and an abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$. That $\frac{G}{J}$ involves an even number of invariants follows in the same way as in the preceding section.

In the preceding section it seemed best to emphasize the group which contains just two invariant operators of order 4, and to employ this in the construction of all the other groups, after proving that there is only one such group of order 2^{2m_1+2}, $m_1 > 0$. In the present section it seems easiest to start with the group of order p^{2m_1+1} which contains just p invariant operators and involves no operator of order p^2. It was proved that G contains either such a group, or an abelian group of

(1896), p. 140). That all these G's are conformal with abelian groups is due to the fact that an operator cannot have more than p conjugates. (Cf. ibid. vol. 7 (1901), p. 351.)

order p^{m-1} and of type $(1, 1, 1, \cdots)$. We shall first prove that there is only one such group for every value of $m_1 > 0$.

If there were two such G's, each of them would contain an H of order p^{m-1} which would contain p^2 invariant operators. As the group of cogredient isomorphisms of these H's would be of a lower order than that of G we may assume that these H's are simply isomorphic. The operators of these G's would have to transform some of the invariant operators of each of these H's into themselves multiplied by a commutator of order p. It follows directly that the conditions*) for simple isomorphism are satisfied and hence there is only one such G of order p^{2m_1+1}. By adding to such an H an operator of order p^2 which transforms H in the same manner as one of the operators in $G - H$ does, and has for its square one of the commutators of G, there results another group of order p^{2m_1+1}, which has the same group of cogredient isomorphisms as G has. That is, *there are just two groups of order p^{2m_1+1}, $m_1 > 0$, which contain only p invariant operators.* One of these is conformal with the abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$, while the other is conformal with the abelian group of type $(2, 1, 1, \cdots)$.

There is one group of order p^{2m_1+2}, $m_1 > 0$, whose p^2 invariant operators are generated by a single operator. In this case, the subgroup of order p^{m-1} which does not include any operator of order p^2 has the same group of cogredient isomorphisms as G has. Since two such H's could be made simply isomorphic if there were two such G's, and since there would be invariant operators of order p^2 in the G's but not in the H's, it follows directly that the G's could be made simply isomorphic. Hence, *all G's whose group of cogredient isomorphisms is of order p^{2m_1}, are the direct products obtained by multiplying an abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$ into three groups, — two of these are of order p^{2m_1+1} and the third is of order p^{2m_1+2}.* Moreover, all such direct products satisfy the conditions specified in the heading of this section. This result may also be expressed as follows: *There are just three G's of order $p^{2m_1+\lambda}$, $\lambda > 1$, which have a group of cogredient isomorphisms of order p^{2m_1}; when $\lambda = 1$, there are only two such G's.*

§ 3.
Conclusion.

By forming the direct product of one of the groups determined in the preceding sections and of some group whose order is not divisible

*) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 3 (1897), p. 218.

by the particular prime p, there results a group involving a *Sylow subgroup**) of order p^m and containing just $1+p+p^2+\cdots+p^{m-2}$ invariant subgroups of index p. It was observed above that the Hamiltonian groups result by choosing both of these factors in a very special manner. The second factor in the given direct product may be chosen in a more general way, as follows: Take any group for this factor which is such that its Sylow subgroup of order p^a is also one of its quotient groups, and that this quotient group is abelian and of type $(1, 1, 1, \cdots)$. In all the groups obtained in this manner, the Sylow subgroups are the groups determined in the preceding sections.

Another interesting category of groups involving $1+p+\cdots+p^{m-2}$ invariant subgroups of index p is obtained by forming the direct products of an abelian group of type $(1, 1, 1, \cdots)$ and any group containing a Sylow subgroup of order p but no invariant subgroup of index p. These groups can occur only when $p>2$**), and their Sylow subgroups of order p^m are abelian and of type $(1, 1, 1, \cdots)$. It should be observed that the Sylow subgroups of order p^m must belong either to one of the systems determined in the preceding sections or to the abelian groups of type $(1, 1, 1, \cdots)$, whenever the group contains just $1+p+p^2+\cdots+p^{m-2}$ invariant subgroup of index p. When $p=2$, this Sylow subgroup must belong to the systems determined in § 1 since there is a characteristic subgroup of odd order in every group which contains a Sylow subgroup of order 2***). In other words, *if any group contains just $2^{m-1}-1$ subgroups of half its order, its Sylow subgroup of order 2^m must contain the same number of subgroups of order 2^{m-1}*†).

The groups of § 1 could also have been defined as the groups of order 2^m which contain operators of order 4 but none of order 8, and whose operators of order 4 have a common square. This is at once evident from the fact that all these groups contain a characteristic subgroup of order 2 with respect to which the quotient-group is abelian

*) If the order of a group is divisible by p^m but not by p^{m+1}, its subgroups of order p^m are called Sylow subgroups.

**) cf. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 5 (1899), p. 229.

***) The necessary and sufficient condition that any group G contains just $1+p+p^2+\cdots+p^{m-2}$ invariant subgroups of index p is that the common operators of all the invariant subgroups of index p give rise to a quotient group of order p^{m-1}. Hence G must also contain invariant subgroups of index $p^2, p^3, \cdots, p^{m-1}$.

†) While a group of any order cannot have more invariant subgroups of index p^γ than one of its Sylow subgroups has, it may have a smaller number of such subgroups.

and of type $(1, 1, 1, \cdots)$. Hence all of the theorems of § 1 apply to the groups defined by these conditions. It is somewhat remarkable that the number of these groups of order $p^{2m_1+\lambda}$ which have a group of cogredient isomorphisms of order p^{2m_1} is independent of the value of p even if the types of the groups of order 2^m are quite different from those of order p^m, $p > 2$.

Stanford University, Cal., October 1904.

Bemerkung und Fehlerverzeichnis zu meiner Arbeit „Zur Theorie der Moduln und Ideale“.

(S. 20—116 dieses Bandes)

Von

E. Lasker in New-York.

Der Satz (S. 51), daß die Formen eines Primmoduls P ein irreduzibles Gebilde C gemein haben, und jede Form, die C enthält, P angehört, kann so aus dem Satze von Hilbert, welcher auf S. 46 angegeben ist, gefolgert werden: Seien die den Formen von P gemeinsamen Gebilde mit $C_1, \cdots, C_j$ bezeichnet und seien $F_1, \cdots, F_j$ Formen, die beziehungsweise $C_1, \cdots, C_j$ enthalten, so folgt nach Bestimmung der Zahl k des Satzes von Hilbert

$$F_1^k \cdots F_j^k \equiv 0 \bmod P,$$

also entweder $F_1 \equiv 0 \bmod P$, oder $F_2 \equiv 0 \bmod P, \cdots$ (nach der definierenden Eigenschaft der Primmoduln) und somit die aufgestellte Behauptung. Es ist aber nicht unwesentlich, zu bemerken, daß die Behauptung auch ohne die Zuhilfenahme des zitierten Satzes von Hilbert sich erweisen läßt, so daß sich vielmehr umgekehrt der Satz von Hilbert aus Satz X, S. 56 folgern läßt. Das Beweisverfahren ist wie folgt. Zunächst sei angenommen, daß die Formen von P nur Punkte gemein haben. Ist u eine Linearform, die nicht P angehört, so ist u relativ prim zu P; nach Satz VIII, dessen Beweis keinerlei Voraussetzungen nötig macht, ist dann also $H(P, u) = \Delta_1 H(P)$. Enthält u keinen der den Formen von P gemeinsamen Punkte, so ist $H(P, u) = 0$ nach Satz VI. Also ist $\Delta_1 H(P) = 0$, $H(P)$ eine von 0 verschiedene Konstante. Gäbe es eine Form u, welche nicht in P enthalten ist, die aber dennoch einen der den Formen von P gemeinsamen Punkte enthielte, so könnte $H(P, u)$ nicht 0 sein. Demnach kann es keine solche Form u geben. Die Behauptung ist somit klar für Primmoduln der Mannigfaltigkeit 1. Danach ist Satz VII für Moduln der Mannigfaltigkeit 1 gültig. Ist P jetzt von der Mannigfaltigkeit 2 und enthält u keines der den Formen von P

gemeinsamen Gebilde der Mannigfaltigkeit 2, so ist wieder nach Satz V. $H(P, u) = \Delta_1 H(P)$, also $H(P)$ eine lineare Funktion von R. Gäbe eine Form u, die nicht in P enthalten, also relativ prim zu P wä obwohl sie eines der den Formen von P gemeinsamen Gebilde der Manni faltigkeit 2 enthält, so müßte $H(P, u)$ von R unabhängig sein. D Formen von (P, u) haben aber ein irreduzibles Gebilde C der Mannigfalti keit 2 gemein, und die Gesamtheit der Formen, welche C enthalten, bild einen Primmodul Π, zu dem alle Formen von (P, u) gehören. Auch die Hilbertsche Funktion von Π als eines Primmoduls der Mannigfalti keit 2 nach obigem linear. Also kann nicht $H(P, u)$ konstant sein, u die aufgestellte Behauptung folgt daher, wie man leicht sieht, für Pri moduln der Mannigfaltigkeit 2. Genau so kann man weiter schließ und die Behauptung durch Induktion erweisen.

Alle diese Schlüsse sind ohne weiteres übertragbar auf Ideale (Kap. I auf die Algebra in S (Kap. IV) und auf die P-Moduln des Kap. I eine Erweiterung des Satzes von Hilbert ist demnach unnötig.

Fehlerverzeichnis.

Seite 23, Zeile 5 v. u. lies $r_1^\mu, r_2^\mu, \cdots, r_\alpha^\mu$.

ibid. „ 3 v. u. „ $\Sigma(r_{i_1} \times P_1 \cdots r_{i_\alpha} \times P_\alpha)^\mu$.

Seite 74, Zeile 16: statt „$F_{n+1}, \cdots, F_{n+h}$“ lies „$f_{n+1}, \cdots, f_{n+h}$“.

ibid. „ 18: „ „(M, F)“ lies „(M, f)“.

Seite 95, „ 23: „ „einem“ „ „seinem“.

„ 104, „ 7 v. u. bis 4 v. u. an Stelle des Satzes „so ⋯ Ordnung“ ist lesen: „so findet man bei Anwendung der früher benutzten Schlußreihe und Satz I,

$$M' = (u_{1, a_1}, \cdots, u_{m-1, a_{m-1}}).“$$

Zusammenfassendes Inhaltsverzeichnis der Bände 51—60.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

naturwissenschaftlichen Unterrichts erfreulicherweise zuwend auch einem weiteren Kreise willkommen sein. Inzwischen h einer der Herausgeber bei der allgemeinen Diskussion, welc die in Breslau abgehaltene Naturforscherversammlung über d mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an d höheren Schulen letzthin veranstaltete, als Referent über d mathematischen und physikalischen Unterricht fungiert und d vorliegende Sammelband mag ebenso als eine weitere Au führung verschiedener dort nur gestreifter Fragen gelten, w der andere Band, der unter dem Titel: „Über angewand Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterric an den höheren Schulen" bereits vor vier Jahren im gleich Verlage erschienen ist. Die einzelnen Teile des neuen Band sind ursprünglich getrennt in drei Heften ausgegeben word und auch als solche sowie in 2 Teilen (lt. Inhaltsverzeichnis) beziehen, weil sich die verschiedenen Aufsätze in der Tat zu Teil an verschiedenartige Leserkreise wenden (erstes Heft: Klei Götting; zweites Heft: Behrendsen, Bose, Riecke, Stark, Schwar schild; drittes Heft: Schilling).

Die Thesis, welche der Verfasser im mathematischen Tei verteidigt, geht dahin, daß im Hinblick auf die allgemein Kulturbedürfnisse der heutigen Zeit der Funktionsbegriff i geometrischer Fassung in sehr viel höherem Maße in d Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts der höheren Schul gerückt werden soll, als früher üblich war, womit von selb eine geeignete Einführung der Grundbegriffe der Differentia und Integralrechnung in den Schulunterricht gegeben sein wir

Der zweite Teil enthält die bei jedem Kurse gehalten Vorträge aus den Gebieten der Physik und Astronomie insowe als ihr Inhalt in näherer Beziehung zu dem physikalischen u astronomischen Unterrichte an höheren Schulen steht.

Im dritten Teil hat der Verfasser es unternommen, in leic verständlicher Weise das ganze große Gebiet der Anwendung der darstellenden Geometrie zur Besprechung zu bringen.

Besonders eingehend ist die Photogrammetrie behande namentlich weil eine einfache Einführung in dieses Gebi überhaupt bisher nicht existiert.

Die den Schillingschen Entwicklungen beigegebenen za reichen Figuren bedingten aus technischen Gründen eine etw andere Art der Drucklegung, als bei den vorangegangen Aufsätzen eingehalten war.

Inhaltsverzeichnis.

Dritte Vorlesung:

die Bedeutung der darstellenden Geometrie für die Anwendungen üb
haupt, diesem ganzen Entwicklungsgange gemäß, in umfassender W
zur Anschauung zu bringen, hat der Verfasser in den vorliegenden V
trägen, die er zu Ostern 1904 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Ol
lehrer in Göttingen gehalten hat, es unternommen, in leicht verständlic

Figur 100a. Göttingen. Erste Aufnahme: vom Rohns.

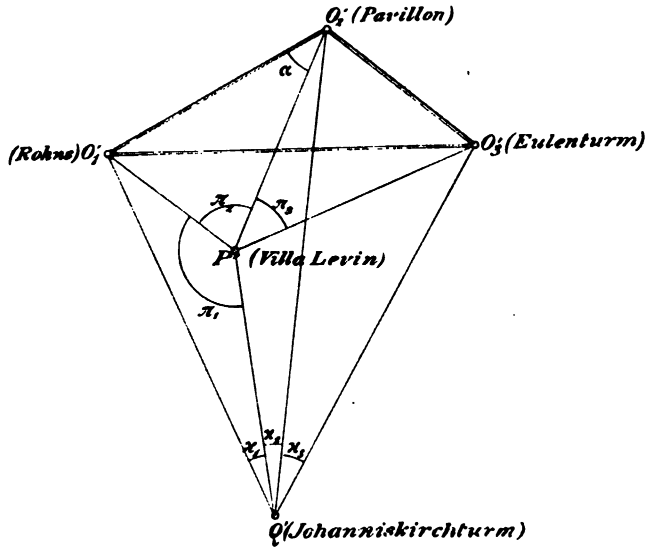
Figur 100b. Göttingen. Zweite Aufnahme: vom Pavillon.

Figur 100c. Göttingen. Dritte Aufnahme: vom Eulenturm.

Weise das ganze große Gebiet der Anwendungen der darstellend
Geometrie zur Besprechung zu bringen.

Überall sind die allgemeinen Entwicklungen durch spezielle Beispi
und zahlreiche Figuren erläutert, und, um weiter gehende Studien anknüp
zu können, ist stets in umfassender und genauer Weise auf weitere Litera
verwiesen. Ganz besonders wird der Gegenstand des letzten Kapit
behandelt, was etwa die Hälfte des ganzen Werkes einnimmt, besond

weil eine einfache Einführung in dieses Gebiet überhaupt bisher nicht existiert. Nach einer geometrischen Entwicklung der Theorie der Photogrammetrie wird diese auf eine Reihe größerer Beispiele angewandt, von denen wir hier nur die Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses aus Gemälden alter Meister hervorheben wollen. Sodann wird das weitausgedehnte Anwendungsgebiet der Photogrammetrie behandelt, die in Deutschland besonders durch die Herren Prof. S. Finsterwalder (Ballon- und Gletscheraufnahmen), Geheimrat C. Koppe (Wolkenaufnahmen, Jungfraubahn), Geheimer Baurat A. Meydenbauer (vaterländische Baudenkmäler) gefördert wurde. In freundlicher Weise von diesen und anderen Herren zur Verfügung gestellte Originalaufnahmen finden in dem Buche ihre Reproduktion, so daß es möglich wurde, in dieses Anwendungsgebiet wirklich einen durch lebendige Anschauung erreichten klaren Ausblick zu gewähren. Das Buch dürfte nicht nur den Gymnasiallehrern, sondern allen Freunden der Geometrie, insbesondere auch den Studierenden an den Universitäten und Technischen Hochschulen sehr willkommen sein.



Figur 111.

Inhalt.

I. Stereometrie, projektive und analytische [Geometrie;
II. Reine Kinematik;
III. Mechanik, speziell reine graphische Statik;
IV. Mathematische Physik;
V. Analysis und Algebra;
VI. Geodäsie;
VII. Astronomie und mathematische Geo- [graphie;
VIII. Kristallographie;
IX. Architektur;
X. Maschinenlehre;
XI. Ingenieurwissenschaften;
XII. Physiologie und Psychologie;
XIII. Kunst;
XIV. Photogrammetrie.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf **besonderen Blättern**, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst **präziser Zeichnung** dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der **Adresse** gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an **Dr. Otto Blumenthal**, Göttingen, Friedländerweg 33.
