社會調查與統計學

下　冊

陳毅夫著

商務印書館發行

社會調查與統計學

下冊

陳毅夫著

商務印書館發行

第二十一章　圖示記數(Graphical Tabulation)

一　概論

一個果數表，是常常用作達到某種目的所採的工具。牠是常爲一種圖示的預備步驟，如對果數多角形圖然。作圖者有時預備一果數多角形圖，直接在圖上將原有材料標記出來，能節省許多的時間。於是果數表也完全可以不用了。在圖示 14 中，我們將例表 5 及圖示 13 中之材料直接採取過來，但不用那相應的果數表，此卽圖示記數。故圖示記數，卽將記數之法，在多角形圖中記之而不記於果數表內，此卽圖示記數之意義。

二　圖示記數之作法

讀原有材料之數目，一次讀一個，並且將每一數作一點。置於適合的 x 價值上。表中第一數爲62，卽在X軸上62的第一線置一點。但絕勿置任何點於X軸上，因其價值常爲零(0)。第二數爲 123 在X量上的 123 第一線上，立卽置一點。其次數目中又有 62 發現。當其讀過之後，卽置於X量上 62 的第二線。當表中所有的數目，都讀完之後，所有之點，皆記下來，如圖示14然。現在在一瞬間，我們卽可看出有五個數目是 82 的成績，四個 102 的成績，沒有 97，一個 96。餘類推。作圖者直接將每級距中之果數總數，在其頂點之中點上，作一小圈(•)。在事實上，其實不必將各點作得太大，如圖示 14 然。

例表 5　美國斯瓦斯摩大學第一年級新生智慧測驗成績表

62	129	95	123	81	93
105	95	96	80	123	60
72	86		108	120	57
113	65	108	109	84	121
60	84	128	100	72	119
103	77	91	51	100	63
107	76		82	110	63
104	107	63	117	116	86
115	62	122	92	69	116
82	95	72	121	52	80
100	85	94	84	123	42
90	91	81	116	73	79
100	79	101	98	110	95
67	77	91	95	79	92
73	83	74	125	101	82
71	75	125	56	86	98
106	72	117	89	99	86
87	90	80	131	102	117
98	74	101	82	110	137
99	65	113	85	82	90
102	57	139	74	149	114
74	102	69	134	78	106
75	106	85	103	78	106
102	94	108	90		

圖示 13　美國斯瓦斯摩大學第一年級新生智慧測驗成績表

（根據例表 5 之材料）

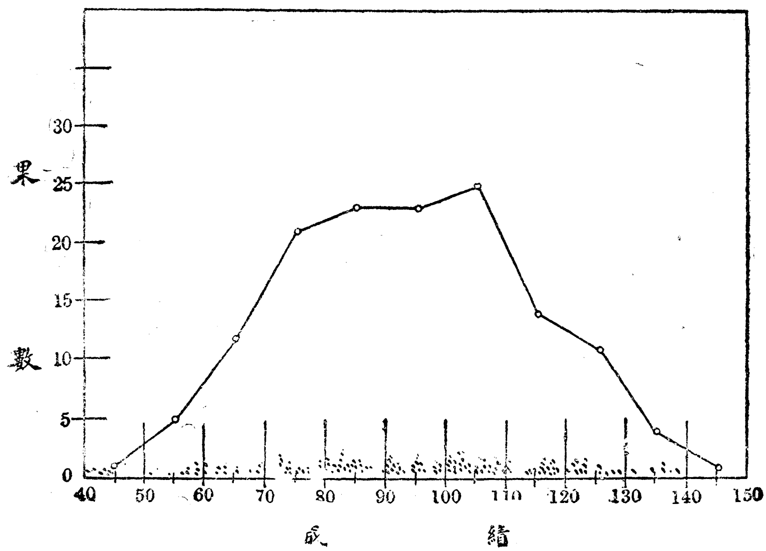
成績級距	果數
40－49	1
50－59	5
60－69	12
70－79	21
80－89	23
90－99	23
100－109	25
110－119	14
120－129	11
130－139	4
140－149	1
總數	140

實際上,在方格統計實習紙上,除非黑線方格者,用鉛筆記其小點,已夠明顯了。

所有之記數點已作定之後,作圖者須點數之,並將其數目與原有材料之數目對照,是否相符,第二步,卽選定適當之級距。圖示 14 已選定每十進位爲級距。多角形之果數量不必依照記數點而決定,但於決定級距之後,再將其間之小點,計算於該級距之內。在圖示 14 中,我們計算有 25 點在級距 100－109 之上。這級果數是在該級距 100－109 之頂點中點與 Y 軸上之 25 相應之處,作一小圈(∘)。其他各小圈,亦照樣製定,然後用直線連結之以完成果數多角形圖。

圖示 14　圖示記數圖

(根據圖示 13 材料)

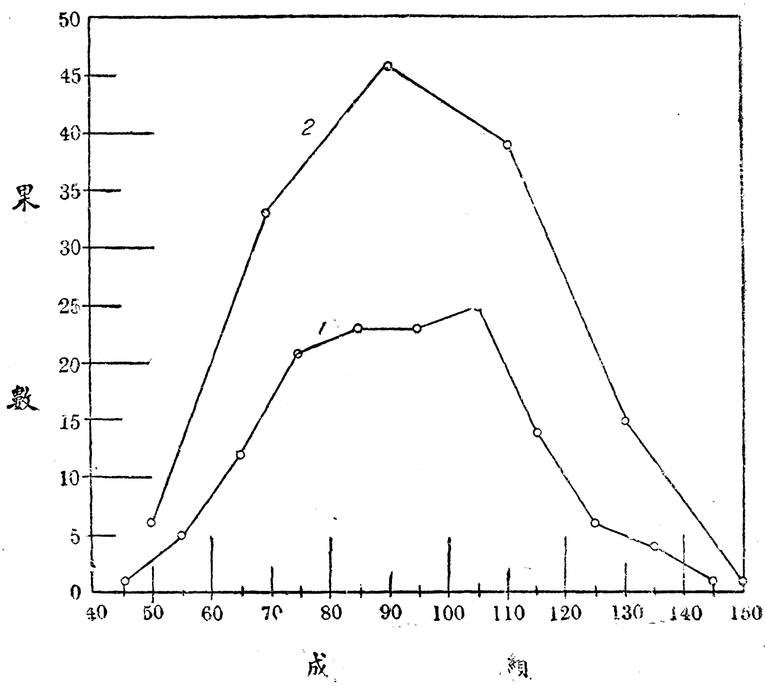


示圖 15

十進位級距與二十進位級距之果數多角形光滑性比較圖

（根據圖示 14 之材料）

1. 十進位級距　　2. 二十進位級距



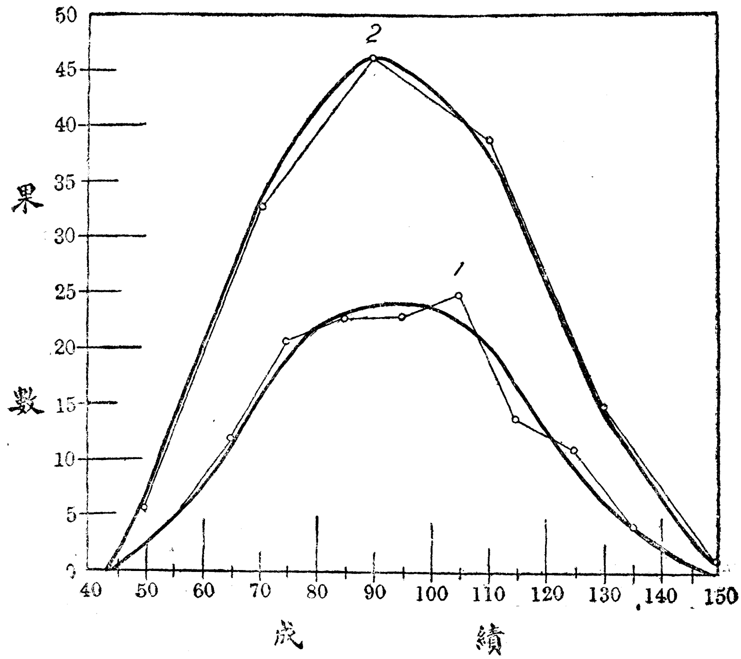
此種圖示方法之顯著利益，即作圖者已預先有把握而採用適當之級距，以另製多角形圖。這個工作，可不必再依照原有材料分類，以完成之。在作點時，作圖者必須留意其點在表上之所在地，如果有中途妨害的時候。

示圖 16

十進位級距與二十進位級距之果數弧線光滑性比較圖

（根據圖示 15 之材料）

1. 十進位級距　2. 二十進位級距



三　結論

1. 圖示記數之意義——圖示記數即將原有材料之果數記於圖示之中，而不另製果數表，以便作取定級距之根據。

2. 圖示記數之作法：

(一)取定 X 軸及其所需要之等分，記以數字。

(二)取定 Y 軸及其所需要之等分，記以數字。

(三)將各數目之價值，按照 X 軸上之等分，各依次置於適當之處。方格統計實習紙上，有依次之定線，按各線所代表之數目作點，更爲方便。

(四)各點記完畢之後，再取定級距。此與普通統計圖先取定級距者，略有不同。

(五)計算各級距間之點之總數。此總數卽該級距之級果數。

(六)將各級果數在 Y 軸上尋出相應之點，並於點上作一小圈(∘)標誌之。

(七)用直線順次連結各小圈(∘)卽成。

3. 圖示記數之效用：

(一)原有材料之果數，在圖示之下，便於隨時檢閱。

(二)便於爲適合需要而取定相當級距。

(三)最合於多角形及修飾多角形等圖示之用，因可按其級果數之大小，而決定弧線光滑之程度。

四 問題

1. 圖示記數與普通統計圖不同之點何在？

2. 圖示記數優點何在？

3. 圖示記數之缺點何在？

4. 下列材料係某校統計班72個學生，某次之考試成績。

(一)試將這些成績在方格統計實習紙上記數，再以每十進位爲

級距作成一多角形圖。

(二)再根據圖示記數作一每五進位爲級距之果數表。

例表 6. 某校統計學班七十二個學生某次之考試成績

65	81	57	65	70	73	71	86
80	51	62	53	70	62	78	71
74	88	64	68	50	90	82	68
70	77	88	90	98	80	88	76
90	80	83	80	81	94	74	85
75	88	88	93	85	88	80	94
83	80	80	75	75	60	88	76
88	65	86	45	78	82	90	55
55	47	60	86	66	90	94	60

(三)再以每十進位,及每二十進位,作一比較之弧線圖，並說明其誰爲更光滑,及其所以更光滑之理。

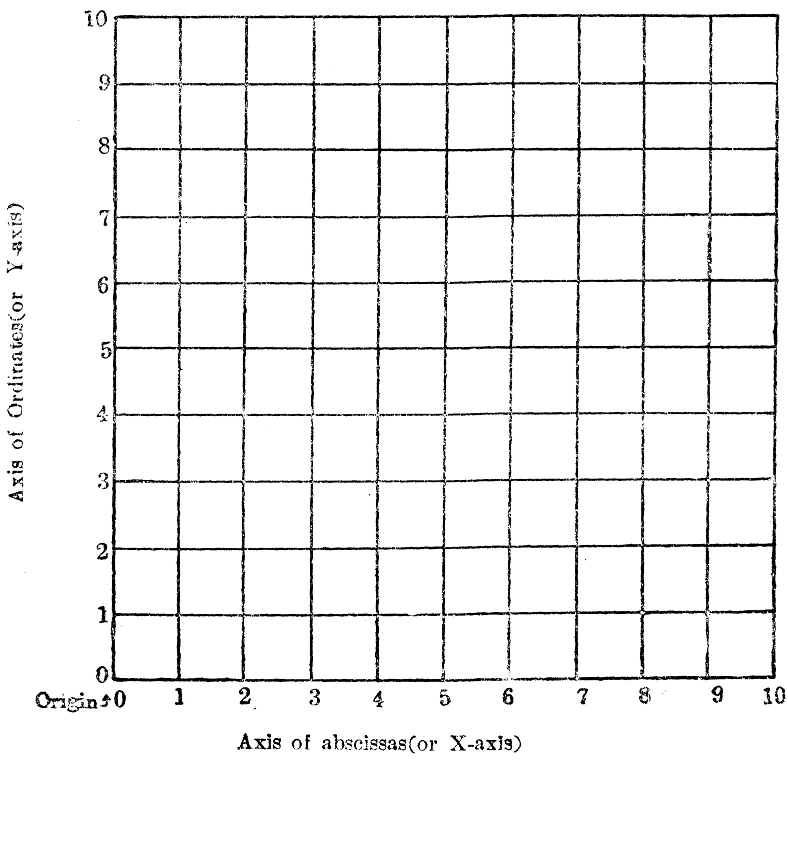
第二十二章　直線關係 (Linear Relation)

一　概論

本章我們所討論者爲兩個變化量之圖示法。而這兩個變化量之相互等比量之關係敍述且留於後面第二十三，二十四兩章言之。

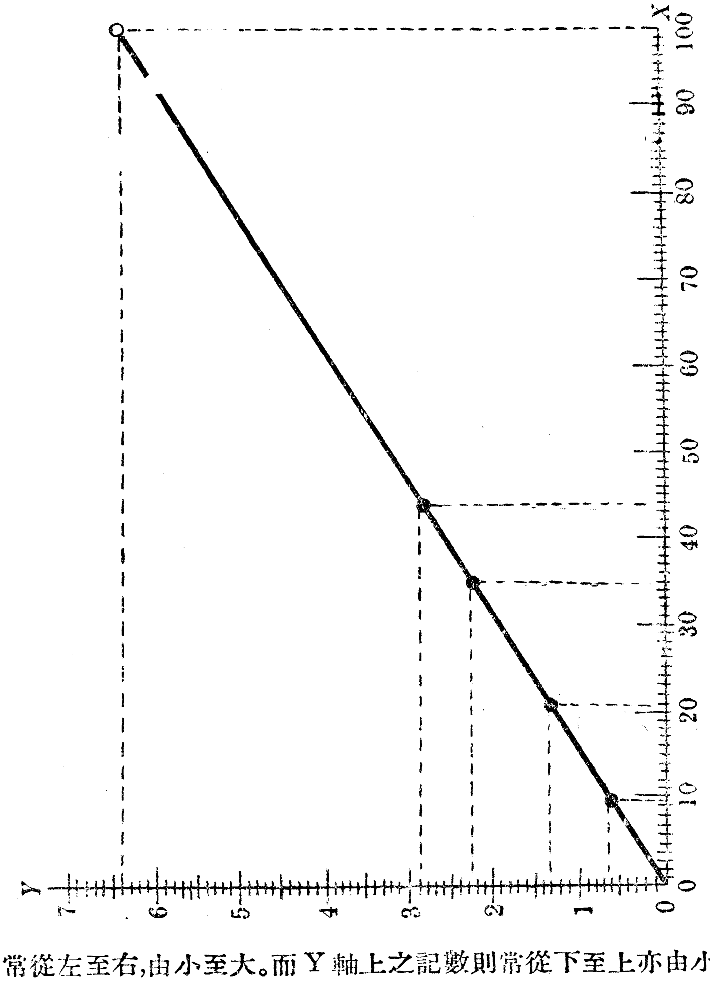
二　直線關係之作法

示　圖　17　　橫　線　直　線　圖



圖示 18 乃普通預備排列兩個變化量之圖表。底邊橫線稱爲 X 軸，此軸已曾用於果數表之工資分級及柱形圖上。而 X 軸左端之垂直線，則稱爲 Y 軸，此軸亦曾用於柱形圖上以表示級果數。X 軸上之量，其記數次

圖示 18　乘除圖示法



序，常從左至右，由小至大。而 Y 軸上之記數則常從下至上亦由小至大如圖示 18 及前面之柱形等圖示然。故 X 軸與 Y 軸二者皆起於下面之

左角上，此角點通常稱爲原點(Origin)，而對 X，Y 兩軸所表示之價值皆爲零(0)。

圖示上不用 X，Y 兩軸以分配數量乃最笨之辦法，學者又須注意將兩軸上之單位說明，以便閱者一目了然。如寒暑表上之度；時間上之秒，分，小時；重量上之斤，兩，等等，皆須一一註明，閱者一望圖示，卽可了然，不必再按覆原有材料之根據。

當兩個變化量相包含的時候，往往其間的一個是預先知到的，而其他一個則爲推算出來的。預先知到的一個變化量，謂之爲獨立的變化量。另外由推算而得的一個變化量。謂之爲附屬的變化量。照習慣獨立的變化量常記於 X 軸上，而附屬的變化量則常記於 Y 軸上。任何時候，這兩個區別的變化量都能夠求得的。

假使我們有一長串之數，而各數則以一常數(或定數)如 15.5(或其他任何數)分之。所謂常數者卽一固定之數，用以計算一長串之數是了。如果此串數目非常之長，我們就可避去計算之麻煩，而以圖示求其結果。讓我們取五個數目之分除，並列於一表。在此表中，我們叫x數爲已知數，而在第二行則列除得之商數 (Quotient)，如$\frac{x}{15.5}$ 結果爲y。將此公式類推，則

x 爲 10　　　y 爲$\frac{10}{15.5}=0.65$

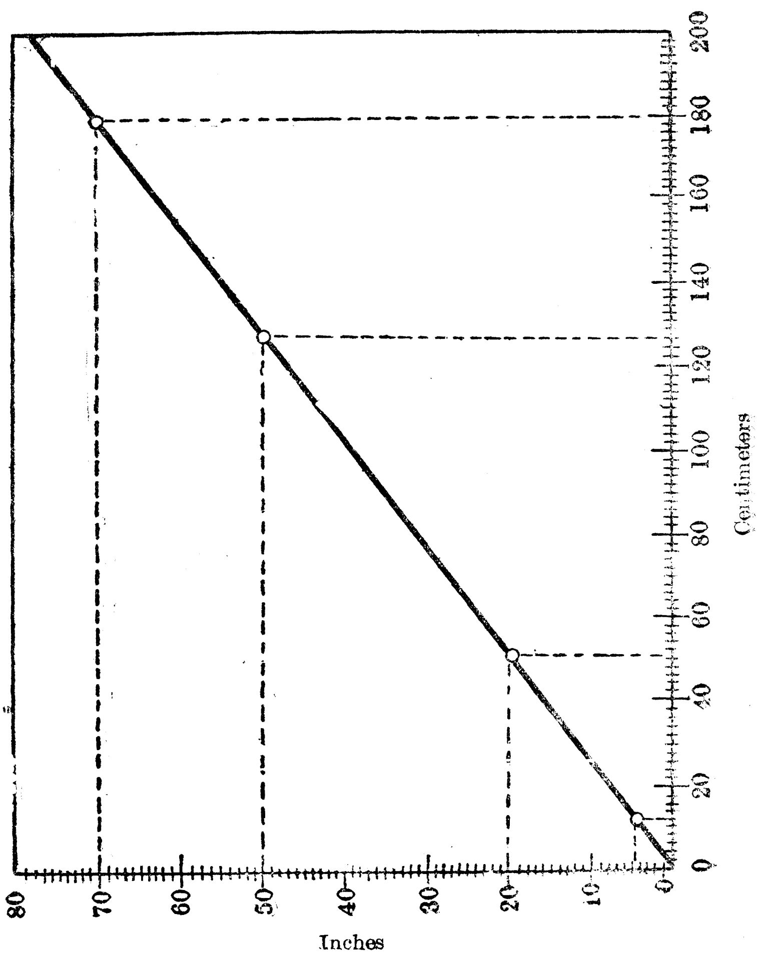
$x = 21$　　　$y = \frac{21}{15.5}=1.35$

$x = 35$　　　$y = \frac{35}{15.5}=2.26$

$$x = 44 \qquad y = \frac{44}{15.5} = 2.84$$

$$x = 99 \qquad y = \frac{99}{15.5} = 6.39$$

上列各數最高點如在x軸上者爲99,此點適與y軸上6.39相應。其

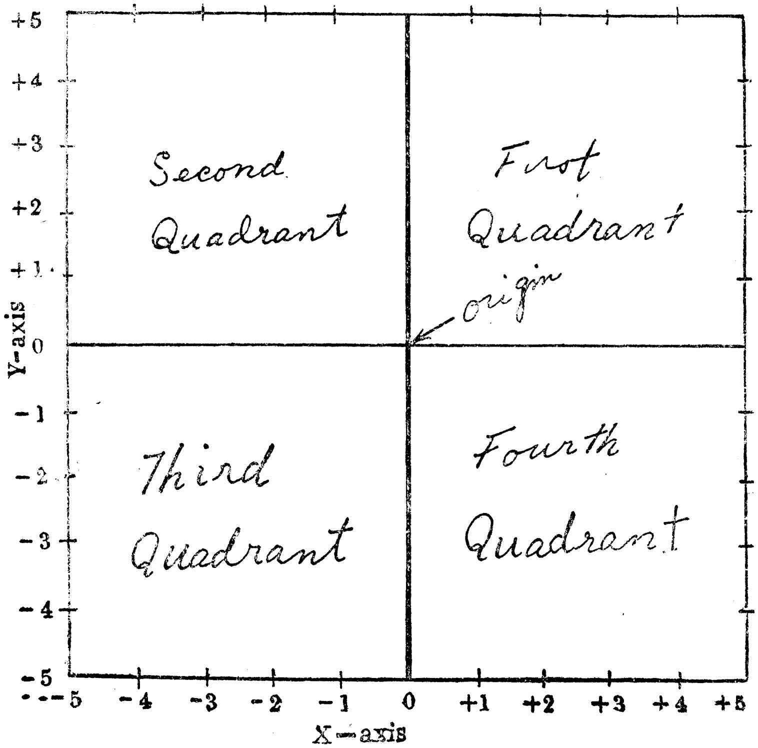


圖示19 直線計算的轉換單位圖

他 x 軸上之 44 則與 y 軸上之 2.84 相應。x 軸上之 35 則與 y 軸上之 2.26 相應。x 軸上之 21 則與 y 軸上之 1.35 相應，x 軸上之 10 則與 y 軸上之 0.65 相應。此等相應之點，又稱為 x 的價值與 y 的價值相應之點，或簡稱 x 與 y 相應點。將此等相應之點各畫一小圈(∘)。此地之重要事實即各小圈(∘)皆在一直線上。我們將此等小圈(∘)連結即成一直線如圖示 19 然。

現在我們即可由檢查尋出其他數目之商數，省去我們許多除法上的勞力。例如$\frac{50}{15.5}=3.23$我們在 X 軸上尋得 50 一直推上去。推到與 Y

圖示 20　四分圓圖



軸上 y 的價值相交之處，y 的價值卽 3.23。這個數也就是我們的答數。讀此乘除圖示法時，用力少而收效大。用同一的方法類推，我們卽可答復由常數 15.5 所除 20，25，30，35 等等之商數。那麼，當15.5除零$\left(\frac{0}{15.5}\right)$，照此表所答的答數是甚麼呢？也就可以找得出來了。

讓我們來表示英寸(Inches)與生的米突(Centimeters)之關係。我們知到一英寸等於 2.54 生的米突。其公式爲：

$$1\text{in.}=2.54\text{cm.}$$

我們任便擇幾個比較的實例如下表：

y(in.)	x(cm.)
1	2.54
8	20.32
20	50.80
70	177.80
90	228.60

將 y 之價值與 x 之價值相應之點尋出，記以小圈（∘）。此等小圈（∘）皆在一直線上，如圖示 19 然，用此圖在一瞬間，卽可答覆 5 英寸爲若干生的米突，11 英寸爲若干生的米突，19 英寸爲若干生的米突，99 英寸爲若干生的米突等。在這圖上我們就可以答覆 39.5 英寸等於 100 生的米突。最重要的一點，學者須知到的，就是穿過方格圖畫線的時候，目的不單在紙上畫線而已。例如圖示 18 與圖示 19 所告訴我們之事實，其效用較之研究若干章數學之課本爲更宏大與完備。故初學統計者，最重要之點，在能了解圖表上之意義。任何一個統計圖表所呈現之意義，較之以文字形容效用必大得多。故初學統計者，宜常常檢閱統計圖表上

之工作以養成對數量關係有思想的習慣。關於此點，並非指心中計算數目，或省視數字等類而言，卻在指各線與其距離之如何表現那些數目而言。數目須當作距離或面積的次第增大。尤其初學統計的人所宜注意者，卽試將各圖式如柱形圖，多角形果數圖等等，加以思索。其他各圖式均須視作活的表現，以確切的應用於相合之事物上，而非專注意於統計上的數學計算。不論其圖式之如何機械，亦不得不然。

當討論及兩軸上或任何一軸上之負數的時候，圖示之縱橫距離延長之，如圖示 20 然。如果我們將圖示 18 與圖示 20 相比較，則可知圖示 18 乃圖示 20 之上右角，此角卽表示 x 與 y 之正數，並叫做第一四分圓圖。其他各四分圓圖加上來備作兩軸或任何一軸上之負數。如圖示 20 然。

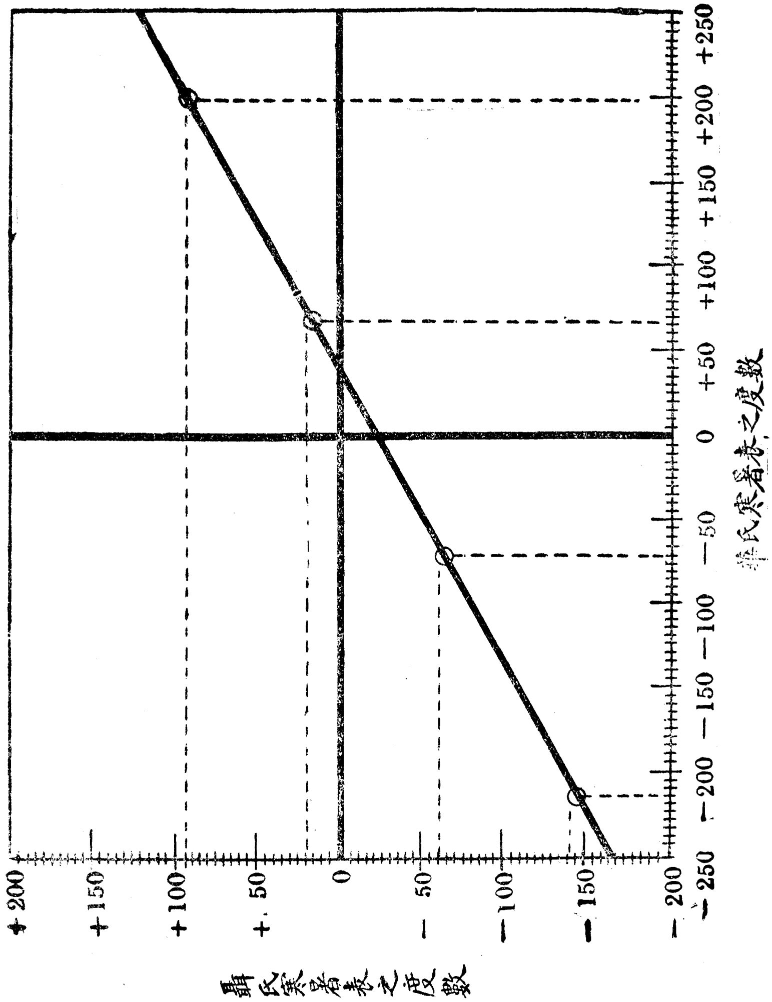
圖示 20，X 軸上之量，係由左引至右，起於 X 軸上最低之負數。Y 軸則由下至上，起於最低之負數，如圖示 20 所表現者然。此種圖之起點乃起於全圖之中心。而此起點又爲兩軸之零(0)的交叉，

我們現在將要用此四個四分圓圖來表示華氏 (Fahrenheit) 與攝氏(Celsius)寒暑表兩種氣候量之關係。當我們知到一種寒暑表之度數時，一瞬間卽可知到其他一個寒暑表之度數。第一步，我們由觀查而得到幾對零亂的數目，有如下表：

x(Fahrenheit)	68	−220	−26	199
y(Celsius)	20	−140	−60	93

此等觀點，列於一圖，如圖示 21。將此四對觀點，列於圖中 x 與 y

各相應之點,各畫一小圈(∘)。並將此等小圈(∘)用直線連結之.現在我們即能不用計算而僅將此圖的直線一看，即可知華氏寒暑表所在之度數與攝氏寒暑表同時所在之度數。例如華氏寒暑表在90度時，攝氏寒暑表則在30度。華氏寒暑表為124度時，聶氏寒暑表則為50度。餘類推



圖示 21　正負數相包含之關係圖

所有上列關係點，皆穿過方格紙表，而以直線表示之。此等關係即謂之爲直線關係。直線關係之直線或穿過原點，或不穿過原點沒有一定。如兩個變化量，x 與 y 可同時爲零(0)，則此直線穿過原點。如此線不穿過原點，則我們可以斷言兩個變化量有一個是零(0)時，其他一個則不是零(0)。

此外尙有兩個有用的曲線連結。在 X 軸上之某一點，有一直線或曲線經過時，謂之 x 截點 (x－intercept)。圖示 21 中之 x 截點爲 32，此即當 y 爲零(0)時之 x 價值。在圖示 20 當中，x 截點(32°)之解釋即表示攝氏寒暑表爲零 (0) 時之華氏寒暑表之量。同一的方法，當我們知到 x 爲零(0)時，即可命名 y 的截點(y－intercept)。在圖示 21 當中，x 爲零(0)時，y 大約爲－18 度，此即華氏寒暑表爲零 (0) 時之攝氏寒暑表之度數。

三 結論

1. 直線關係之意義——在兩個變化量中，已知其一個之價值，而推知其他一個的價值，以直線求之，並以直線表示之，於此，即可發現這兩變化量趨勢上之關係，故謂之爲直線關係，其實又可稱爲乘除關係。

2. 兩個變化量之區別——已知之變化量稱爲獨立的變化量，以 x 表示之。由推求而得之變化量，稱爲附屬的變化量，以 y 表示之。

3. 直線關係圖或乘除關係圖之作法:

(一)預備一方格統計實習紙。(必須精確的方格統計實習紙始適用)。

(二)在實習紙上取定 X 軸,及其等距(意義與級距同),與等分。

(三)在 X 軸之左端取定 Y 軸,及其等距與等分,如柱形圖然。X 軸與 Y 軸相交之點,稱爲原點(Origin)。其價值爲零(0)。

(四)確定常數之價值,(或有固定之價值,或任意定一價值)。

(五)尋出 x 之價值,(或有已定之價值,或任意定一價值)。

(六)尋出 y 之價值。y 爲常數除 x 之商,其公式爲 $y=\frac{x}{\text{Constant}}$,故 Y 軸常代表商數。

(七)在 X 軸上尋出 x 之價值,向上引伸。

(八)在 Y 軸上尋出 y 之價值,向右引伸。

(九) x 與 y 所引伸之線,用虛線表示之。兩虛線必有一相交之點。此點卽 x 與 y 之價值的相應之點,用小圈(∘)表示之,如圖示 21 等然。

(十) X 軸上之虛線須與 Y 軸平行。Y 軸上之虛線須與 X 軸平行。如在精確的方格統計實習紙上,則易獲得 x 與 y 的價值相應的交點。如無精確的統計實習紙,則可在 X 軸及 Y 軸上刻成若干精確之等分,按其所代表之價值,照與 X 軸及 Y 軸成平行的虛線求之亦可,如圖示 19 及 21 然。

(十一)將各小圈(∘)連結,卽成一直線。而各小圈(∘)必在直線之上。此直線卽乘除的直線。

(十二) x 與 y 之價值,能同爲零(0)時,則直線可穿過原點,否則不能穿過原點。

4. 直線關係之效用:

(一)免除算數之勞力。

(二)可得精確之結果。

(三)便於表示兩個變化量之關係，如

a. 表示攝氏寒暑表與華氏寒暑表之關係，如圖示 21 然。

b. 表示英寸與生的米突之關係，如圖示 19 然。

c. 可表示其他任何兩個變化量之關係。

四　問題

1. 上列之點應屬於誰個四分圓?

點	X	Y
1.	+3.2	+6.9
2.	+5.3	−7.8
3.	−4.2	−1.7
4.	+0.3	+2.1
5.	−5.8	+1.0
6.	−3.4	0

2. 下列各對數目，內中有數項差錯者，試作一直線關係圖，以發現其錯誤之性質。

X	Y
7.2	0.6
4.4	10.0
9.5	2.9
2.6	12.5
8.7	4.0
1.6	14.0
7.5	5.7
7.3	11.0
6.2	7.5
1.5	1.5
5.0	9.2
5.0	15.5

3. 照圖示 21 答覆下列各問題:

(一)華氏寒暑表爲 -68 度時,攝氏寒暑表讀幾度?

(二)水沸時,華氏寒暑表讀 212 度。同熱度時,攝氏寒暑表讀若干度?

(三)攝氏寒暑表讀零(0)時,華氏寒暑表讀若干度?

(四)華氏寒暑表讀零(0)時,攝氏寒暑表讀若干度?

(五)在何種熱度時,兩表之度數相等。

4. 作一圖表示一圓的直徑,與圓周之關係。圓周之長爲直徑之 3.14 倍。當直徑爲 5 英寸時,圓周之數爲若干?用一直線表示這兩個變化量之關係。試說明在何種情形之下,此直線可穿過原點,而不用圖示表述之。直徑爲$\frac{1}{4}$英寸時,圓周爲若干英寸?

5. 作一圖,表示工資與工作時間之關係。每點鐘之工資爲八角,而工資則以兩元爲限。取每十五分鐘爲級距之時間量,一直推到四個鐘頭,看這兩個變化量(時間與工資)之關係如何?

第二十三章　通過原點之直線等分
(The Equation of a Straight Line Through the Origin)

一　概論

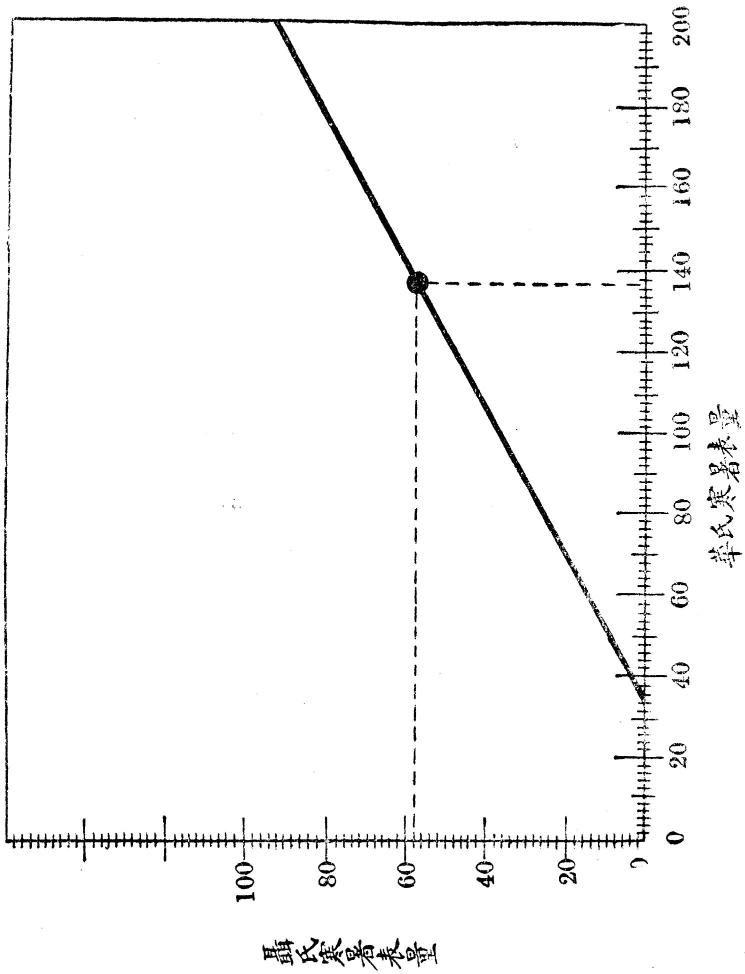
每種科學的研究，皆不外兩種或兩種以上之變化量之關係之發現或研究。關係之在數量的關係相包含時，可用種種不同之方法敘述之。

二　方法

1. 兩種變化量之關係可活動的敘述。當我們研究華氏(Fahrenheit)與攝氏(Celsius)寒暑表的關係之時，我們可活動描寫其關係如下：攝氏寒暑表爲零(0)時，即水在結冰之時。其爲100度時，即水沸之時。華氏寒暑表當水結冰時，則爲32度。當水沸時，則爲212度。華氏寒暑表與攝氏寒暑表的度數之間，即有一常數率，(Constant ratio)。如果我們將攝氏寒暑表之58度移於華氏寒暑表之量上的時候，我們用關係的活動敘述甚感不便。

2. 我們可用一圖示來表述此種關係，如圖示22然。在此種圖示之中，活動的敘述可置兩點表示之。將此兩點用一直線連結之。現在我們要將攝氏寒暑表之58度移至華氏寒暑表之量上時，我們即可於圖中尋之。華氏寒暑表結連攝氏寒暑表之58度處，即137度，如圖示22所示。

在如此的情形下，這兩種變化量的關係之描寫，乃一最有效力之方法。



圖示22　直線等分圖

3. 另一方法，表示兩個變化量之關係者，即用代數方程式。這兩個寒暑表的關係之方程式如下：

$$C. = 0.55F. - 17.7$$

在此方程式之中,C. 代表攝氏寒暑表，F. 是華氏寒暑表之反應點。方程式之推論便可討論了。如果我們讀攝氏寒暑表為 58 度，而欲移至華氏寒暑表之量上時，我們簡單的將 58 代替 C. 於上列方程式之中，而解決 F. 為：

$$C. = 0.55F. - 17.7$$

$$58 + 17.7 = 0.55F.$$

$$\frac{58 + 17.7}{0.55} = F.$$

$$F. = 137$$

於此，我們卽見這方程式與等分圖示，兩者用不同之方法，而得同一之結果。等分圖示法對結果求之較易，而方程式則較為正確。

我們試將直線等分法首先考慮，其經過原點者常為下列方式：

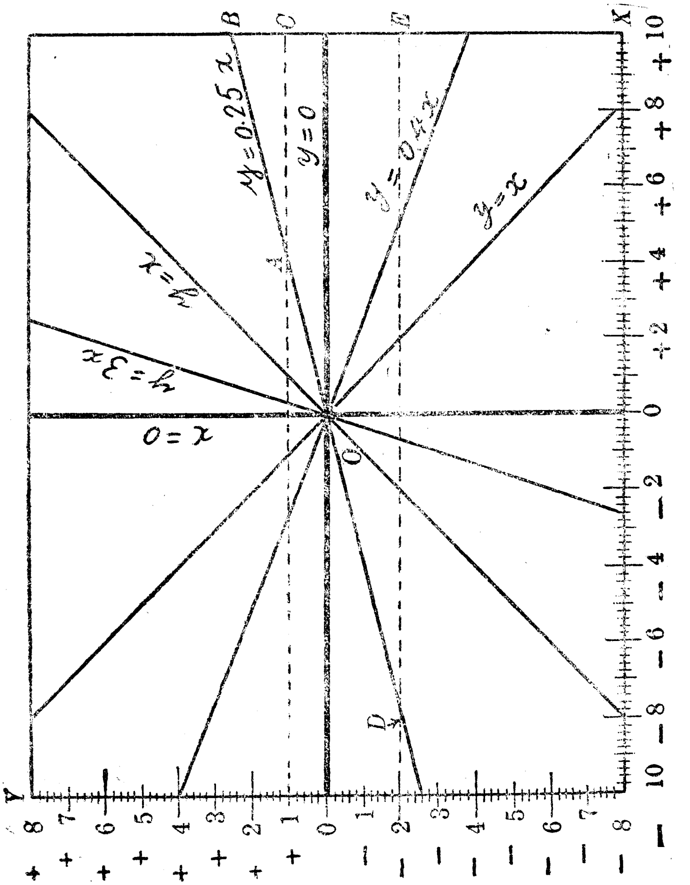
$$y = ax$$

在此方式之中，a 稱為乘的常數(Multiplying Constant)。在圖示 23 中，我們有此種等分七個。須注意的，例如等分之直線為 $y=x$，此種等分簡單的說，x 常等於 y。並且在如此情形之下，任何一點在等分圖之線上者，皆可證實。例如 $x=+5$，於是 $y=+5$。此點 $(x=+5, y=+5)$，是在一線上。同一情形，此線引長至其他四分圓圖時，亦同一正確。

將同一方法，加以考慮，某線之等分如 $y=0.25x$。當 $x=6$，於是 $y=0.25\times 6=1.5$。按照等分，且此點 $x=6, y=1.5$，是在同一之線上。在同一的方法中，學者為滿足其自身需要起見，卽可照此相應之等分類推。圖示 23 中之每一線，皆含同樣之意義。將 x 與 y 代以任何之數，卽可推知其他一個的變化量。這兩種價值，如此對列，每一答案皆可在線

上尋出之。如果圖示較大的話，即可在線之延長中求之。

在圖示 23 中，線落置之處，由乘的常數決斷之。因此種乘的常數，即惟一使等分彼此之所以不同。這乘的常數即普通所稱的線之斜邊。(Slope) 這是一個應用的名詞。因這個乘的常數之價值是大一些的話，



圖示 23　直線等分通過原點圖

則線較為壁立一些。將此三線用斜邊 3，1，0.25 比較之，即易見斜邊 3 之線較斜邊 0.25 之線為壁立得多了。斜邊之同一觀查，在圖示 23 中之二線經過原點伸張至第二與第四之四分圓圖者，亦可尋見之。在這原點上的兩線上，這兩個變化量 x 與 y 是互相對立的。

在 X 軸上之等分是 $y=0$，因在那一線上 y 常常是零(0)。同樣的，Y 軸上之等分 $x=0$。因在那一線上，所有 x 之價值，皆為零(0)。

一線之適用於等分者，稱為該等分之軌跡 (Locus)。每一對 x 與 y 之價值，由等分而滿意求出者，又可以一點表示之。此一點必在等分軌跡上之某處。當等分之兩個份子由 x 與 y 之價值代入而相等的時候，則一對 x 與 y 之價值可滿意的求得。

我們已見由預定之等分而計算一線，我們亦能由預定之線而計算等分。如果此線經過原點零(0)，我們即能由斷定線之斜面而斷定相應之等分。其求得之步驟如下：如一任何直角三角形，如 ABC，及一預定之斜邊(直角三角形最長的一邊)。於是此三角形之一腳 AC 將與 X 軸平行。此三角形可於此線上之任何處取定及取定任何方便的面積。計算 BC 及 AC 線之斜邊為 $\frac{BC}{AC}$ 之比率。照 x 量與 y 量上所算 BC 之長為 1.5 及 AC 之長為 6，故比率為 $\frac{1.5}{6}=0.25$。此即此線之斜度。為增加正確性計，以決斷斜度，最好使三角形愈大愈好。我們能將此三角形之面積增加至 DBE，以供我們之計算。此斜度遂成 $\frac{BE}{DE}=\frac{4.5}{1.8}$ 或 0.25，亦與前同。

現在我們已見：(1)，圖中之一線可以等分呈現之。(2)，從 $y=ax$ 方式而來之一等分可常以一斜邊或傾斜度極大邊通過原點之直線呈現

之,此斜度卽以乘的常數 a 決斷之。(3),y=ax 方式的等分,能寫在圖中的任何一線。當此線通過原點的時候,圖示與方程式兩個不同的方法,卻討論同一的問題及成同一之結果。

三　結論

1. 等分之意義——卽兩個變化量中之某一個爲其他一個之若干倍。如 x=y 之若干倍,或 y=x 之若干倍。

2. 等分之作法:

(一)將一方格統計實習紙,取定四個四分圓。

(二)取定橫軸爲 X 軸,用粗線或雙線表示之。

(三)取定縱軸爲 Y 軸,用粗線或雙線表示之。

(四)X 軸與 Y 軸成直角相交,其相交點爲原點 (Origin)。價值爲零(0)。

(五)原點之右邊 X 軸與原點之上面 Y 軸皆爲正。

(六)原點之左邊 X 軸與原點之下面 Y 軸皆爲負。

(七)取得相應之點,卽 X 軸與 Y 軸的價值相交之點。

(八)尋出 x 之價值。

(九)計算 y 之價值。

(十)尋出 x 與 y 之價值之相應之點,並將此點以小圈(∘)記之。

(十一)將此等小圈(0)連結,卽成直線等分。

3. 等分方式方面之要點:

(一)活動敍述——如 C.(攝氏寒暑表)在零(0)度時,F.(華氏寒

暑表)在 32 度。C. 在 100 度時，F. 在 212 度。長此敍述，則感不便。

(二)等分圖示——如取兩點(C.=0,F.=32),(C.=100,F.=212)，將其相應之點用直線連結，則可於直線上推知其他 C. 與 F. 相應的價值。

(三)方程式——如(C.=0,F.=32),(C.=1,F.=1·8C.+32)，將此方程式之 F. 與 C. 換位，則 −1·8C.=−F.+32，同用 −1·8 除之，則 C.=0.55F.−17·7。

(四)通過原點之等分直線——其方式為 $y=ax$。

(五)有補助常數時之等分直線——其方式為 $y=ax+b$。

(六)多項方程式——如 $4y=2x+3+5$，可先將方程式化為最簡。第一步，將各數用四除之，則為 $y=0.5x+0{\cdot}75+1{\cdot}25$，再將 0.75 與 1·25 合併，則 $y=0{\cdot}5x+2$。

4. 軌跡(Locus)——適用於等分之線為該等分之軌跡。

5. 可由預定之線計算等分，亦可由預定之等分以計算線。

(一)計算等分之方式，卽根據等分線之方式，$y=ax$。在此方式中，常數 a 的價值是預知的。由此預知之等分線，卽可推算等分 a 與 y 之價值。

(二)計算等分線之目的，在求常數 a 的價值。其方式為 $a=\frac{y}{x}$。因常數 a 的價值之大小，卽可決定等分線之所在地。此方式卽斜度$=\frac{\text{高}}{\text{底邊}}$。

(三)遇有補助常數時，如 $ax+b$。欲求常數數率則 $a=\frac{y-b}{x}$。

四　問題

I. 試用四個四分圓圖將下列諸線列入：

(一) $y=+1\cdot5x$。

(二) $x=-2y$。

(三) $x=\frac{y}{3}$。

(四) $y=-1\cdot5x$。

(五)將含有下列二點之線作成一圖，並決定其等分 $(x=+2,y=+6)$；$(x=0,y=0)$。

將上列五個等分用任何數目代替一個變化量以解決其他一個變化量，並製一圖示列之，且指示其每條線之各點所落置於適用的軌跡上。

2. 將圖示 21 與圖示 22 研究，說明其用不同之方法而表現同一之關係。

第二十四章　直線通常等分

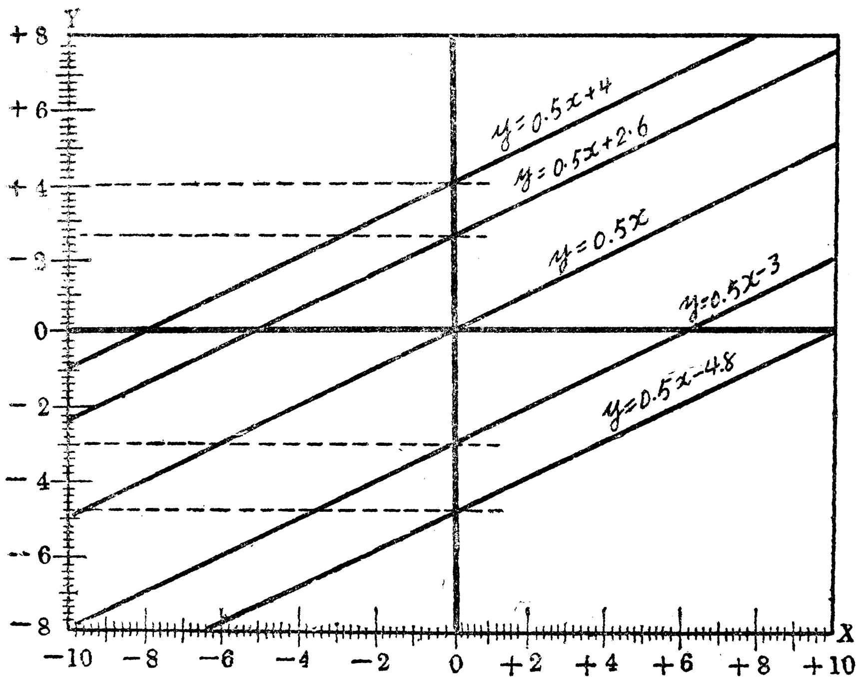
(The General Equation of a Straight Line)

一　概論

現在我們將要討論等分之通常方式，以敍述一圖之任何一線。通常方式爲。

$$y=ax+b$$

圖　示　24　　等分平行線圖



在此方式之中，a 與 b 皆爲常數。同時，x 與 y 則爲兩個變化量。我們在前面已知到 a 是稱爲乘的常數，且是決斷線之斜度的。而常數 b 則稱爲補助的常數 (Additive constant)，此則爲決定該線截斷 Y 軸處。在圖示 24 中我們有五條直線及其應用的等分。注意此等線皆爲平行，那又是能看出的，在製定諸線之前，事實上，乘的常數或斜度 a 通同是一樣的，卽 +.5。又須注意者，補助常數 b 則各個不同。在事實上，各線上之補助常數是等於 Y 之截點(Y－intercept)。此線與此等分 $y=0.5x+4$ 有其補助常數+4，且此種程度有表示該線之 Y 截點是符合的，試以圖示 24 中其他諸線驗之。

查驗圖示，我們可以發現當補助常數爲正(Positive)時，線之通過 Y 軸乃在原點之上。當此常數爲負 (Negative)時，線之通過 Y 軸，在原點之下。當此線通過原點時，補助常數爲零(0)。且此等分於是卽取一簡單之方式 $y=ax$ 如前章所言。如圖示 24 中之情形所表述等分爲 $y=0{\cdot}5x+0$，或簡寫作 $y=0{\cdot}5x$。

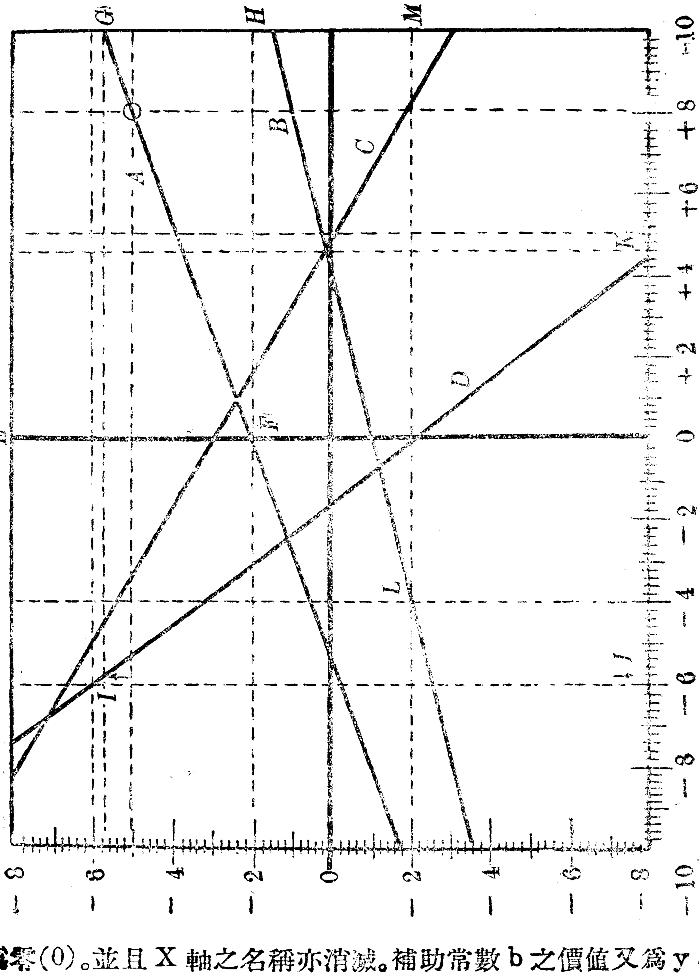
二　方法

在圖示 25 中，我們任意畫了幾條不規則的直線。我們現在卽可檢驗圖形而斷定等分。試將第一線 A 加以考慮。直線等分之通常方式爲 $y=ax+b$。我們必須確定等分中兩個常數之各個價值，以表示能用等分補助常數。簡言之，卽 Y 之截點，我們在圖上找着，此點在 F 點。該點在 y 量上之 +2，故常數 b 是 +2。這斜度 a 之決定，已在前章中言之，卽是$\frac{GH}{FH}$之比率。如在 X 軸與 Y 軸上所表示者爲$\frac{3{\cdot}7}{10}$或 0.37，故常數

a 爲 0.37。現在我們能將A線之等分寫作:

$$y = 0\cdot37x + 2$$

這是須好好記憶着的，即當此線斜度傾向至左面下者，其斜度爲正，並當其傾向至右面下者其斜度爲負。當此線爲邊緣線時，如M線



圖示25 可用檢查而得出之直線等分圖

斜度則爲零(0)。並且X軸之名稱亦消滅。補助常數b之價值又爲y截

點。照圖上此點卽讀作 -2。故 M 線之等分爲 $y=-2$，這就是說 M線中之 y 的價值常爲 -2。這是檢驗圖示已預知其正確的。

關於A線之等分，我們可注意此線上之數點，卽易類推之。如小圈(∘)所表示之點。牠的等數爲 $x=+8, y=+5$，對A線將等分之價值代替爲。

$$y=0{\cdot}37x+2$$

$$5=0{\cdot}37\times8+2$$

$$5=2{\cdot}96+2$$

此等分之兩個份子是幾乎相等，能從圖上決定的。如果我們在圖上之任何點，非在A線之上者，取同一辦法，我們可以發現等分之兩個份子是不相等的。

E 線之等分是寫作 $x=-4$，這是另一說法，卽 E 線上所有諸點的 x 之價價爲 -4。E 線之檢閱，圖示 24 卽指示此點之正確性。

D線之等分，我們亦可以同一方法決定之，牠的 Y 之截點爲 -2，故常數 $b=-2$。D線之斜度之求得，亦如前，用此線的任何直角三角形之兩脚之比率，如 IJK。此處之比率爲 $\frac{IJ}{JK}$，卽是 $\frac{14}{-10{\cdot}5}$，或 $-1{\cdot}33$。故此斜度爲 $-1{\cdot}33$。且D線之等分爲。

$$y=-1{\cdot}33x-2。$$

此種等分，能夠類推如前。假定任何價值爲 x，如 -3，在等分之中，代入此價值，並且解決 y，我們尋出 y 之相應價值爲 $+2$。在圖上將此點 $(x=-3, y=+2)$ 取定，且注意其直落於D線之上，用這兩個等分量在一圖上取定一點，照例先寫 x 之價值，次寫 y 之價值。

照此同一方法類推 E 線之等分，則為 $y=-0.6x+3$。留心記憶着，一個等分中常數符號，是其中的一個主要部份。學者須養成審視直線之一等分之習慣，以注意各等分之兩件事實，即其斜度與其 y 之截點。有時值得注意的即 y 之截點對 x 之截點之比率，是等於斜度。

一預定直線上一等分之寫法，我們已討論過了。又學者能計劃一直線於圖示之上，用 $y=ax+b$ 之方式以呈現任何等分。照例作法，即簡單地假定任何一個變化量之二，三價值，並用等分尋出其他一個變化量之相應價值。在圖示上取定諸相應之點，並將諸點用直線連結之。其實在一直線上，僅兩點是需要取定的。為免除數學上之錯誤及保證其正確計，至少須取定三點。

有時候我們遇着一個等分，在第一瞬的觀查當中，似乎不能成為一直線上之等分。但其結果。終能作成，我們略舉幾個來討論。

$$y=2x+3+2$$

這個等分已能在直線上之等分中見之。如果我們將兩個補助的常數連為一個，故此等分即變作 $y=2x+5$。另一例為 $4y=8x+6$，這是一條直線之等分，並能用已描寫過的方法來計算，如果我們將牠寫作 $y=2x+1.5$ 的方式。這等分 $3x=8-4y+2x$，又是一直線之等分。無論如何，我們必須把牠表示在這樣的方法，即 y 中之節目是等分中之一份子。其他補助的節目與 x 中之節目是其他的一個份子。當其如此敍述時，即是說 y 中的節目是很明白地寫出來了，其完成之步驟如下：

$$3x=8-4y+2x$$

$$x=8-4y$$

$$4y = -x + 8$$

$$y = -0{\cdot}25x + 2$$

在最後之方式，這等分是與任何直線之等分之普通方式相似。在此方式之中，其斜度爲 $-0{\cdot}25$ 而 Y 之截點爲 $+2$。

三　結論

1. 一圖表中之每一直線，能用等分之普通方式，$y=ax+b$ 表述之。

2. 此線之斜度是以乘的常數 a 表示之。當此線傾斜於左方之下時，其斜度爲正。當此線傾斜於右方之下時，其斜度爲負。所有邊緣線皆爲零(0)。這是能用 y 之截點對 x 之截點，或圖表上之任何其他相似三角形之脚的比率之圖示以決定之。計算只常涉於 x 與 y 之量，而不涉於方格紙上之規律，如學者所常用時然。

3, 補助常數(b)表示 y 之截記。如此線通過 Y 軸而在原點之上時爲正。如此線通過 Y 軸而在原點之下時爲負。

4. 如果兩個直線等分，有同一之乘的常數，其軌跡必成平行。如果他們有同一之補助常數，他們倆者在同一之點上通過 Y 軸。

四　問題

1. 用四分圓圖的方格統計實習紙，將下列等分列入圖中：

a. $y=0{\cdot}6x+3{\cdot}4$

b. $y=4{\cdot}2x+5$

c. $2{\cdot}5=-4.7-3y$

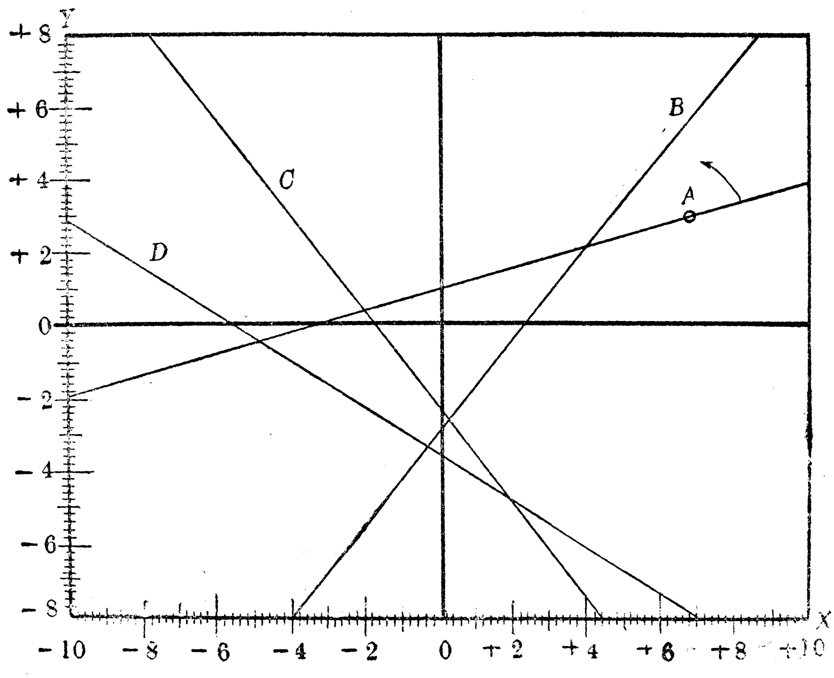
d. $14-9+2x-1\cdot8y=0$

e. $(y-1\cdot6)+(x+0\cdot7)=4$

2. 將圖示26中之等分，在作圖示之前，用通常等分方式 $y=ax+b$ 算出。在圖示諸線之後，假定各線軌跡上之任何點，並指示其相應等分是與該點之價值，完全符合。

將等分線1與3作爲同時有之等分，以決定x與y之價值，且其價

圖示 26



值與等分相同，再表示此種解決是呈現在圖示上的兩線之截點上。

3. 照上圖之線，移於方格統計實習紙上，至任何方便數量，以決定

各線上之等分。

(一)如果A線繞着小圈(∘)向指標方向方面移動,乘的常數將如何?

(二)在如何情形之下,具有統一乘的常數,將在X軸上,造成45度之角度?

3. 用直線等分答覆下列問題,但勿製成圖形。

(一)下列等分線何者呈現平行線?

(二)何線在Y軸上達於最高點?

(三)何線在X軸上趨於最左端?將y之價值作爲零(0),用心算以解決x截點而決定之。

(四)何線通過原點?

(五)何線傾斜於右方之下?

(六)如果製成圖示後,何線之斜度最高?

a. $y=4x+3$

b. $y=4x+9$

c. $y=2x+0$

d. $y=-4x-3$

e. $y=-2x+0$

第二十五章　曲線關係

(Non-Linear Relations)

一　概論

現在我們將要討論一種圖示之構造與解釋，其中由觀查而得到之數點是落置於一曲線之上，而非落置於一直線之上，如此的關係謂之爲曲線關係。實際上，照例是將圖示之線認作弧線。雖有時此線是直線，亦應認作弧線。甚至有時一圖中之直線，皆照例稱爲弧線(Curve)，這弧線(Curve)一個名詞，於是可用作統計圖中表示價值之任何一線。

二　方法

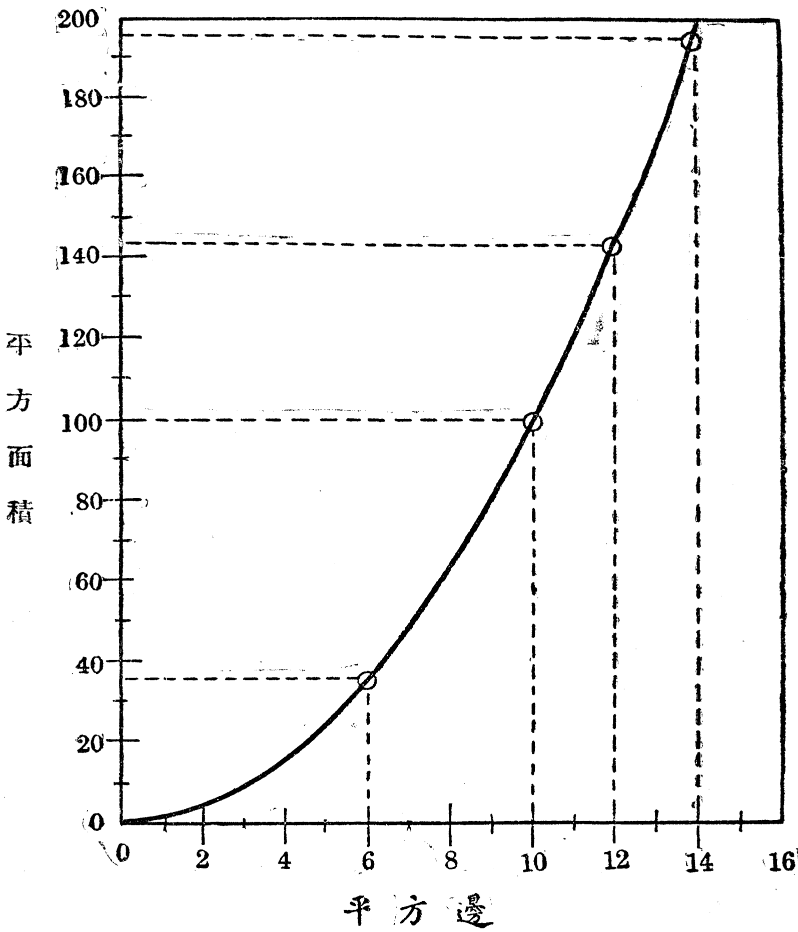
讓我們來把平方(Square)之一邊與其面積(Area)之關係，作一圖示。第一步，我們記定幾個實例觀查之點如下：

x（平方邊）	y（平面方積）
6	36
10	100
12	144
14	196

我們把這四點如小圈(∘)所表示者，畫一線，如圖示 27 然。這條曲線，必經過原點，因零(0)之平方仍爲零(0)。這一點在畫曲線上，可給我們一個增補之點。這是很顯然的，圖示上記的點數愈多，則曲線愈正確。圖示 27 中之各點，並不落置於一直線之上，但在曲線之上。我們穿過各

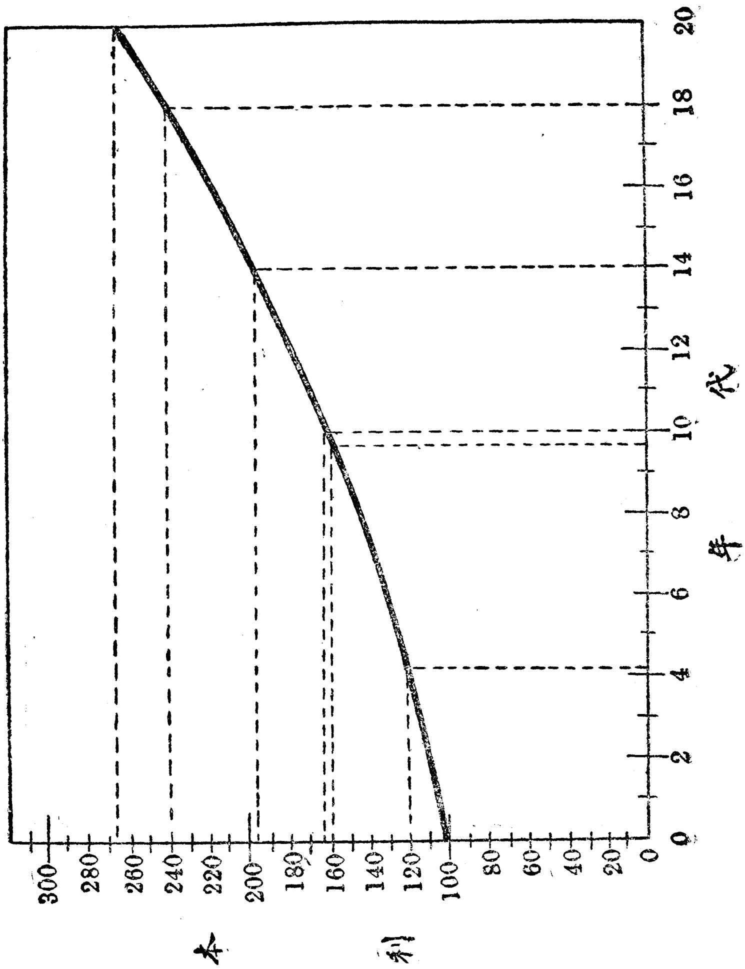
點作一光滑(smooth)之曲線，並且我們得一圖示以表述一個數目及其乘方之關係。例如我們欲在圖上決定 6·8 之乘方，我們就可在 X 軸上

圖示 27　平方面積圖



找得 6·8 直接向上推去（與 Y 軸成平行）推到曲線與 Y 軸上 46 相交之處(與 X 軸平行)，即得。因爲 46 與 6·8 之乘方面積極相近。任何人

又能從此種圖示中尋出一個數目之平方根。例如尋找78之平方根，我們在Y軸上尋定78,而向曲線推去;其截點在8•8上,此數卽78的平方根最接近之數。圖示上所有之答數，自然沒有算術上的答數一般精確。但其主要之利益,則在能表示我們所研究的變化量之作用的關係性質。在最多數的科學工作上,此種圖示,較之算術重要得多。



圖示28 複利曲線圖

在圖示28中，我們又可得另一曲線關係之解釋圖。牠是表述複利的金錢之生長。這X軸是年的時間。這Y軸是本利之總價值。這弧線或曲線，是作來表示一百元每年五分利5%的複利的增加。這圖上所示，例如十年之後，這$100已增加至$160還多一點。學者又可決定將近若干年後，這資本必吸引到息而達於一可觀之數目。如此，卽可見大約十四年零一月有餘，資本卽可加一倍。

這些事實在利息表上可得較正確之結果。但這圖示所表示者，較之利息表爲令人注目得多。這圖示不僅表示總數之增加而已，且又表示其增加率之增加。前四年所得之利大約爲$20。但從十六年至二十年所得之利則超過$40。這弧線不特向上升，且隨着時間而愈升愈峭。此卽其作用之性質。而此等事實在數字表中便看不出來。

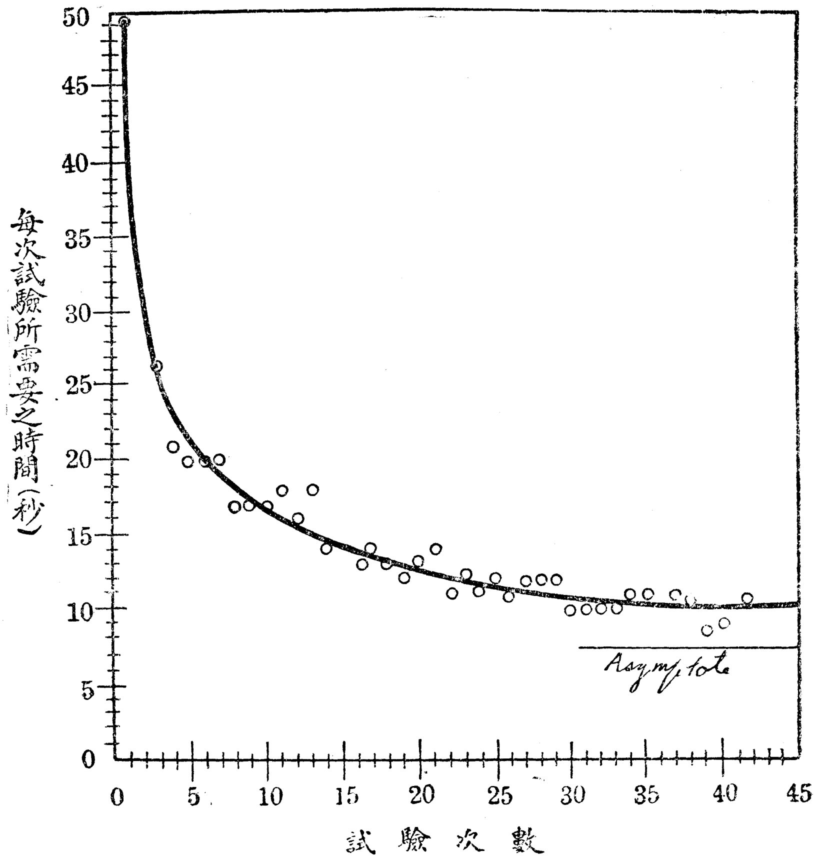
圖示29應留心的研究。因其包含兩個根本要點。牠是表示一個人在吸引鏡實驗(Mirror-drawing experiment)中之進行。這種鏡是常在心理學實驗室中所應用的。這種實驗，用一謄寫筆，對一目的物之踪跡上，記述六角星的大綱，在鏡中由星之倒像所引出者。這兩圖示是在實驗中重複四十二次之圖形，如圖示29然。這第一試驗較之在後試驗，費時較多，實際上，在研究此種試驗之目的物之增加，是以每一試驗所耗之時間來計算。實驗愈久，則每實驗之時間愈短。

在圖示29中，X軸表示試驗次數，Y軸表示每一試驗所佔時間之秒數。每一試驗用一小圈(○)表示之，例如第一試驗消耗時間49秒，如圖所示。第五試驗消耗20秒。第三十試驗僅消耗10秒。

當所有這些記錄，都用小圈(○)製成圖示之後，我們可用兩法中之

任何一法來完成此圖。(1)我們可將所有之點用短線連結之，如我們已製之多角形圖然。有時候是這樣辦法的。(2)我們可作一光滑之弧線來表示「研究鏡之吸引力之目的物之通常進程」。

圖示29 心理實驗曲線圖



這圖上一點或小圈(∘)之所在，是半由於以目的物求得之要點程序來決定，半由於許多小原動力來決定，如分佈，效果之總計，疲憊之狀態

等等。我們之覺得有趣味者，是一弧線來表示兩個變化量之關係，即實驗之由試驗次數來計算者，要點由追記綱要而以需要之時間來計算。如果我們畫一弧線，有許多點在線之上者大約與在線之下者相等，我們即可用實習來決定其進程之表現。如此的光滑弧線將相對的自由，而不爲許多特殊日期之小小阻礙所限制。圖示 29 光滑的弧線是由檢查的結果所製。

在統計學的研究上，自然科學的材料與社會科學的材料之間，有一根本不同之點。其異點之所在，即社會科學之材料的計算不如自然科學之材料計算之精確。社會科學上材料之計算不能相對的如此自由，以避免機會上的阻礙，如自然科學之觀查然。爲這個原因，我們不得不被迫於去發現社會科學的材料的軌跡與關係。雖是社會科學的材料上，我們沒有可以統治的，而有許多社會機會的阻礙，我們也顧不得了。這就是我們爲甚麼要製定光滑的弧線之設立趨勢，而略去其他不相干者。實際上，所有相互關係的統計學皆基於顯明的事實之承認。即在社會科學上我們是討論可以發現的趨勢，不管其阻礙與不相干之原動力爲如何。

現在已有一弧線來表示兩個變化量之普通關係。讓我們由檢查圖示而解釋這個關係。這是立刻可見的，即弧線在圖之左端較高於在弧線之右端。這就是說在試驗鏡之吸引力時，最初之試驗較之在後的試驗，每試驗所需要之時間是多些。並且這也是很合理的，因爲在試驗中，試驗者可漸次減少在鏡中追隨星的綱要所需要的時間。另一事實，其在圖中是很明白的，而在原始材料的表中，卻難見及的，即前十次的試驗之時間的減少大於最後十次的試驗之時間之減少。尤其顯著者，在前十次

的試驗中，題目之減少時間由 49 秒減至 17 秒。時間之總減少為 32 秒。由第三十至第四十之十次試驗，題目之減少時間僅一秒。這是一個「回轉減少定律」(Law of Diminishing Returns)的例。繼續任何改良事件之實習，最初幾點鐘之實習，較之最後幾點鐘的實習，其改良之程度必較高。這種關係，在圖示中可一望而知的，但在數目表中則不可預見的。

一個研究的弧線，如在圖示 29 中者，表示其題目未曾由四十二次的試驗得到最完備的結果。且其機會使試驗者不能作成如此完備，以表示補助工作之不能使其改良，這是事實，可證明的。甚至在四十二次試驗之後，弧線仍然下落。如果要確定題目由鏡之吸引力能快至如何程度？假使鏡之等量是完全可管束的，試驗者便需追隨綱要，直接看去，而不受鏡之阻礙，這個大約需要七秒鐘。所以這是合理的，假定如果試驗者在鏡之吸引力上作無限制之繼續實習，他是很可能去追隨這綱要，大約有鏡無鏡，在七秒鐘之內，其速度相同。七秒鐘上之黑線，可視作所研究弧線能達到的限制。或許這限制是不會達到的。如此的一直線，表示一弧線所達到的限制。但除非 x 與 y 變化量是無窮大的時候，這限制是不會達到的。這樣的直線。叫做漸近線(Asymptote)。

三 結論

1 曲線關係之意義——曲線關係即表示兩個變化量的各個價值相應之點，而不落置於一直線之上，但落置於一曲線或通稱弧線(Curve)之上。此種弧線，即可表示兩個變化量之關係，亦可由此一個變化量之

價值推知其他一個變化量之價值，故謂之爲曲線關係。

2. 弧線之意義——凡一統計圖中之價值，用線表示者，不論此線或直或曲，概稱爲弧線。

3. 曲線關係之作法：

(一)取定 X 軸及其價值所需要之等分。

(二)取定 Y 軸及其價值所需要之等分。

(三)在 X 軸上尋定 x 之價值。

(四)在 Y 軸上尋定 y 之價值。

(五)求得 x 與 y 之價值之相應之點，並於此點上作一小圈 (∘) 表示之。

(六)用最光滑之弧線連結各小圈(∘)卽成。

4. 曲線關係之效用：

(一)可表示兩個變化量之關係及其趨勢。

(二)取相應之點愈多，則正確性愈大。

(三)其正確性不如算術的精密，但切於實用，如：

a. 可表示乘方面積及乘方根。

b. 可表示複利本利之趨勢。

c. 可表示人口增加之趨勢

5. 曲線關係之方式：

(一)　$y=ax^{b}$

(二)　$y=a^{x}$

6. 複利本利計算法其方式爲 $y=c\cdot(1+r)^{x}$。

（人口增加及其累進稅計算可做此）

（一）複利之本利和 ＝ 本金 × $(1+\text{利率})^{\text{期數}}$

（二）複利息＝本金 × $[(1+\text{利率})^{\text{期數}}-1]$。

（三）本金＝$\dfrac{\text{複利息}}{(1+\text{利率})^{\text{期數}}-1}$。

或本金＝$\dfrac{\text{本利和}}{(1+\text{利率})^{\text{期數}}}$。

7. 將複利之本利和移至曲線圖上（如有複利表可不用此法）：

（一）援用 $y=c\,(1+r)^x$ 之方式。

a. y 代表本利和。

b. c 代表資本數。

c. r 代表利率。（假使年利率爲 5% 或 0.05）。

d. x 代表期數（年）。

（二）確定資本總數（假設爲 $100）。

（三）尋定複利之本利和率（1+0.05=1.05）。

（四）在對數表尋定 1.05 之對數爲 0.02119。

（五）算術之乘方爲對數之倍數。今 $(1+r)^x$ 之 1.05 的對數爲 0.02119。

解決 $(1+r)^x$

(1)已知 1.05 之對數爲 1.02119 而 x 爲年代。

(2)設定 x 之價值：

(a)　設 x 爲 1　則 $(1+r)^1$ 爲 0.02119×1=0.02119。

(b)　設 x 爲 2　則 $(1+r)^2$ 爲 0.02119×2=0.04238。

(c)　設 x 爲 5　則$(1+r)^5$爲 $0.02119\times5=0.10595$。

(d)　設 x 爲 10　則$(1+r)^{10}$爲 $0.02119\times10=0.21190$。

(e)　設 x 爲 15　則$(1+r)^{15}$爲 $0.02119\times15=0.31785$。

(f)　設 x 爲 20　則$(1+r)^{20}$爲 $0.02119\times20=0.42380$。

(3)餘類推。於對數表上再將相反應之實數尋出。(每一相反應之實數與對數在同一項中,可在對數表中查之,對數表及用法詳後對數表中)。

(a)　對數 0.02119 之實數爲 1.05

(b)　對數 0.04238 之實數爲 1.102

(c)　對數 0.10595 之實數爲 1.276

(d)　對數 0.21190 之實數爲 1.629

(e)　對數 0.31785 之實數爲 2.079

(f)　對數 0.42380 之實數爲 2.653

(六)代入 $y=c(1+r)^x$之中

$$c=\$100$$

則(a)　第一年 $x=1$　$y=\$100\times1.05=\$105$

(b)　第二年 $x=2$　$y=\$100\times1.1=\$110$

(c)　第五年 $x=5$　$y=\$100\times1.276=\$127.6$

(d)　第十年 $x=10$　$y=\$100\times1.629=\$162.9$

(e)　第十五年 $x=15$　$y=\$100\times2.079=\$207.9$

(f)　第二十年 $x=20$　$y=\$100\times2.653=\$265.3$

將上列 x 與 y 的價值之相應之點尋出,作小圈(∘)連結之,即成複利

弧線圖。

8. 自然科學材料之數量與關係，較之社會科學材料之數量與關係，精確得多。因自然科學的材料之機會阻礙，較少於社會科學的材料之機會阻礙。

9. 在無限大之數量時，弧線必達於一限制，雖事實上未必有限制可以達到。

10. 表示達於一限制之線，稱為漸近線，(Asymptote)。

四 問題

1. 試將下列方程式各作一曲線圖：

(一) $y=ax^b$

(1) $a=1$　　$b=1$

(2) $a=2$　　$b=1.5$

(3) $a=2.5$　　$b=2$

(4) $a=0.5$　　$b=2$

(5) $a=-1$　　$b=-2$

(6) $a=-2$　　$b=-1$

(二) $y=a^x$　　$a=2$

2. 試將下列材料作一最光滑之曲線圖：

美國陸軍Alpha隊與Beta隊之智慧測驗成績：

Alpha	Beta
2	11
4	17
7	24
11	30
16	37
21	42
27	47
33	53
40	58
47	63
56	67
63	71
71	75
78	78
85	81
93	84
102	88
114	91
125	95
137	99
147	104
161	108

附註　(一)某數之乘方為$\frac{1}{n}$＝某數之n乘方根。

例如 $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$　　(1)設 $n=2$

$x=1$ 則 $x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$

$x=2$　　$x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.4$

$$x=5 \qquad x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2.23$$

$$x=10 \qquad x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3.16$$

餘類推。

(2) 設 $n=3 \qquad x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{3}}$

$$x=1 \text{ 則 } x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1}$$

$$x=2 \qquad x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

$$x=5 \qquad x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$$

$$x=10 \qquad x^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}$$

餘類推。(3 以上之方根,須翻閱對數表。算術之實數為 n 乘方時,其對數為 n 倍。算術之實數為 n 方根時,其對數以 n 除之。算術之實數為 n 項數相乘時,其對數為 n 項數相加。算術之實數為 n 項數除之時,卽以其對數減去 n 項數之對數。而算術之加減以其性質甚簡單。則可不用對數)。

n＝任何數。皆可照上例推之。

(二)某數之乘方為$(-n)$時＝某數之 n 乘方除 1

例如 $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$

(1) 設 $n=2 \qquad -n=-2$

$$x=1$$

則 $x^{-n}=1^{-2}=\frac{1}{1^2}=1$

$x=2$

則 $x^{-n}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$x=10$

$x^{-n}=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$

餘類推。

(3) 設　$n=3$　　　$-n=-3$

$x=1$

則 $x^{-n}=x^{-3}=\frac{1}{1^3}=1$

$x=2$

則 $x^{-n}=x^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

$x=5$

則 $x^{-n}=5^{-n}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$

$x=10$

則 $x^{-n}=x^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$

餘類推。(x 爲任何數,及 n 爲任何數,皆可照此類推)。

(三)某數之乘方爲$\left(-\frac{1}{n}\right)$=某數之 n 乘方除 1。

例如　$x^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

(1) 設　$n=2$　　則 $x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{2}}$

$x=1$

$$x^{-\frac{1}{n}}= x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

$x=2$

$$x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.4}=0\ 7$$

$x=3$

$$x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{1.73}=3.58$$

$x=5$

$$x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2.23}=0.45$$

$x=10$

$$x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{2}}=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{3.16}=0.3$$

餘類推。

(2) 設 $n=3$ $x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(3) 設 $n=4$ $x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

(4) 設 $n=10$ $x^{-\frac{1}{n}}=x^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{x}}$

餘類推(方根及乘方在 2 以上時,均須利用對數表)

(四)1 以上任何數之乘方爲零(0)時 =1

例如 $1^0=1$

$2^0=1$

$10^0=1$

$1001^0=1$

餘類推。

第二十六章　平均數(Average)

一　概論

羣體材料之分配，最重要者，有兩種。卽一爲集中趨勢，二爲變化。所謂集中趨勢者，卽各羣體材料之價值所薈萃之處。此種薈萃的價值，乃稱爲標準的分配(Norm)，或稱爲特徵的價值(Typical Value)，或稱爲集中趨勢(Central Tendency)。這些不過是各統計學家所用的科學名詞不同。而其意義則一。這集中趨勢中包含三種分配：一是平均數(Average)，牠是該羣體材料中的代表分配。二是中數(Median)，牠是羣體材料中一半的案件數之分配。三是最高數(Mode)，牠是羣體材料中某價值有最多案件之數。集中趨勢的分配的價值之高低，就可顯示該羣體材料整個價值之高低。至於欲問何以須求集中趨勢之分配，則學者須勿忘卻統計學處處注重羣體材料之分配，而非注重任何個體之分配。而羣體材料之分配，則必有一中心標準價值，此卽集中趨勢所從事之工作了。專知集中趨勢，尙不能完畢分配之使命，則變化之分配乃因之而起了。所謂變化者，卽各個體之價值對羣體之價值之中心標準上之平均數相差之數。相差之數愈大，卽謂之變化愈大。反之，變化愈小，卽相差之數愈小，而各個體之價值便相差不遠。有此兩種分配——集中趨勢與變化——之後，我們對於該羣體材料之整個分配，卽可得到一種很好的槪念。下面將各種分配一一分別敍述。本章則專論算術平均數。其餘則

依次逐章討論於後。

二 算術平均數(Arithmetic Mean)

如果我們有了幾個工廠的工資以後，而欲知何廠的工資爲高，則莫如計算各廠工資之通常平均數爲如何。平均工資較高的一廠，普通卽謂工資較高的一廠。這平均數是由將各廠所有每月或每星期的工資各自相加起來的總數，以各該廠之工人總數除之，而得其商，卽平均數。

1. 簡單而又方便之方式則爲

$$\text{平均工資}=\frac{\text{工資總數}}{\text{工人總數}},\text{卽}M=\frac{\Sigma X}{n}\text{。}$$

（此法可用計算機計算，故又稱爲計算機計算算術平均數之法）。

在這方式之中，M是這工資的平均數。ΣX 是這所有工資的總數。n 是工人人數。這通常平均數。在統計學中，是通稱爲算術平均數，以別於他種的平均數，因爲尙有其他數種平均數在。

如果我們試想一想，我們爲甚麽要計算一個平均數？我們的答覆便是因爲要想找出一個數目來代表一長串數目，一個工人的工資，來代表這一廠的工資。事實上，常發現這個平均數與其所代表之各個體數目中之任何數，皆不相同。例如我們有一四數之小組成績爲 2,4,6,8. 而我們所得之平均數則爲 5。這個數目就是我們所用的個體數目來代表所有四個成績的數目，雖這平均數 5 並不是這四個原有成績當中的一個數目。

當一個體數目用來代表羣體數目時，該個體數目卽稱爲該羣體數

目之集中趨勢。這集中趨勢的名稱，就可顧名思義。這集中趨勢是一個體數目或一計算量上之點，牠是羣體數目中最有代表性之數目。這個數是常在一羣體數目中最大差間的中央部份。算術平均數或通常平均數是用於集中趨勢的最普通的計算。我們現在擬以四法計算之。這四法只有細密的手續之不同，因這四法在實習方面都得同一之結果。其選擇僅視其利便，而以(一)可用「計算機」(Calculating Machines)者，(二)長法者，(三)等差量者，(四)短法者等之方式如何而定。算術平均數是最通用的平均數，此外還有「倒數平均數」(Harmonic Average)，幾何平均數（Geometric Average），及權重的平均數（Weighted Average）等等。此等平均數有時亦有用途。幾何平均數將於下章討論之。

計算機計算算術平均數之法（或稱不用記數之算術平均數計算法——此法與1法同）：

例表1爲一美國某造鞋廠每星期各工人之工資表（參閱本書245—246頁）。該廠之平均工資，最簡單的求法，即可在計算機上，一齊將所有工資加起來。所得之總數爲3712.9元，再以工人之總數126除之，所得之商30即平均工資。統計學的學生，宜學避免算術的苦工，尤其是心算的苦工，而利用計算機之計算法。這樣，即可把心機用在處理問題方面去。此等事件，則又非機器所能爲力

簡單之方式則爲 $M=\frac{\Sigma X}{n}$。

在此方式之中，M是平均數，X是這羣體數目中之任何一個體之價

値，ΣX 是所有X個體價値之總數，而 n 則爲案件總數。Σ 這個符號，在此章以後的統計工作上，將常見的，須對牠有明白的了解。牠不是一個可分開的量，牠應讀作「的總數」(The sum of)，卽應隨於甚麼的總數。故 ΣX 卽謂所有X數的總數。上面的公式，故可解釋作『這平均數是等於所有X數的總數，而以其案件之總數分之之結果』。

2. 從果數表計算平均數之法：此法又稱爲長法 (Long method) 當這工資已列入果數表的方式之內，如例表7然。則用此果數表以計算算術平均數，實較爲便利得多。作圖者旣可省去檢視每一個原有數目之時間。其手續乃預備一貫有項項之材料紙，如例表7然。第一行列級距，第二行列中點，第三行列級果數，第四行列第二行(中點)與第三行(級果數)相乘之和。算術平均數於是遂由下列關係決定：

$$M = \frac{\Sigma mf}{n}$$

在此方式之中，M 是算術平均數，Σmf 是第四行各乘數之和相加的總數，而 n 則爲工人之總數。要完全明白的，就是 Σmf 是與 ΣX 完全相同。有時這個方式在研究者心目中會發生混含。m 這個符號，就是表示所有各個體在一級距內之總數的平均數。卽級距之中點。故 Σmf 卽所有諸級距的中點乘各該級距之案件數之和相加之總數。亦卽與 ΣX 的意義相同。這 Σmf 符號之所以代 ΣX 在材料紙上之應用，其最簡明之意義，卽在使某行之數是被乘，故頂上 m 亦卽用以表示某行僅含有 m 量。

例表7　長法(Long method)計算算術平均數之法:

級距 工資 (元) 1	中點 m 2	級果數 f 3	級果數乘中點之和 mf 4
0- 4.9	2.5	1	2.5
5- 9.9	7.5	0	0
10-14.9	12.5	1	12.5
15-19.9	17.5	16	280.0
20-24.9	22.5	11	247.5
25-29.9	27.5	32	880.0
30-34.9	32.5	21	682.5
35-39.9	37.5	34	1275.0
40-44.9	42.5	9	382.5
45-49.9	47.5	1	47.5
		n=126	3810.0=Σmf

$$M=\frac{\Sigma mf}{n}=\frac{3810}{126}=30.2\text{元}$$

3. 用等分量 (Fquivalent scale) 計算算術平均數之法(或又稱爲假定算術平均數或等差量求算術平均數之法)

例表7第四行的和數,不免太大,尤其在沒有計算機的幫助,而需用人工算的時候,會感覺麻煩。如果能用較小的數目來計算,以得同一之結果,這是一件有利益的事。統計工作上常有這樣的事,就是統計工作者能採用一個等分量,用較原有之材料爲更小之數,在此等分量上,製一計算之法,並對結果施用改正(Correction),而將等分量轉移到原有材料上去。如此的辦法,有時可節省許多勞力。現在我們將要用等分量(例表8)來計算一與前面同樣羣體數目之算術平均數,以減小計算中的數目之量。其法如下:

例表 8

用假定算術平均數求算術平均數之法

（或稱用等分量或等差量求算術平均數之法）

級距 工資（元） 1	中點 m 2	級果數 f 3	差 d 4	級果數與差相乘之和 fd 5
0－4.9	2.5	1	0	0
5－9.9	7.5	0	1	0
10－14.9	12.5	1	2	2
15－19.9	17.5	16	3	48
20－24.9	22.5	11	4	44
25－29.9	27.5	32	5	160
30－34.9	32 5	21	6	126
35－39.9	37.5	34	7	238
40－44.9	42.5	9	8	72
45－49.9	47.5	1	9	9
		n＝126		$\Sigma fd=699$

$$M=m_a+c \qquad c=I\times m_e$$

$$m_e=\frac{\Sigma fd}{n}=\frac{699}{126}=5.55$$ ………… 等差之平均數

M代表算術平均數。

m_a 代表假定平均數，可取任何一中點爲假定平均數。在此次例解中者爲 2.5。

c 代表改正數。

I 代表級距單位。在此次例解中者爲 5。

$c=5\times5.55=27.75$。

$M=2.5+27.75=30.25$ 元

先求到改正數，即由假定的平均數到眞的平均數之差。在此次例解中者，由假定的平均數到眞的平均數尙少 5.55 之 5 倍，即少 27.75。將此數加於假定的平均數 2.5，得 30.25，即眞正的平均數。

由等分量轉移到X量上的移轉，在此二量中含有不同之點二。檢閱例表 8 中之第三第四行即可顯示等分量之級步 (Steps) 較之中點之級步小得多了。且等分量之起點起於零(0)，而同時級距之起點則起於 45。故上列關係彼此已相交換了。等分量之利益僅在於計算中含有大數時。而不需計算機計算之。

4. 用臆斷原點 (Arbitrary origin) 計算算術平均數之法，此法又稱爲短法(Short method)：

用臆斷原點計算算術平均數，是求算術平均數最常用之方法。且此方法對於將來要討論的相互關係之工作的算術平均數，亦相銜接。在用等分量時，我們已減小計算的數目之數量。這個數量在計算量的中部最大差之某處，仍然更可減小，將等分量之零(0)置於 X 量上之某點。該點作爲等分量之零(0)時，即稱爲假定原點(Assumed origin)。此點可任意置於 X 量上之某處，其結果之正確性，皆無差異。但仍最宜置於 X 量上最大差之中部，因爲如此，即可減小計算的數量至最低限度。

例表9 計算算術平均數之短法(Short method)

(或稱用假定原點計算算術平均數之法):

級距 工資(元) 1	中點 m 2	級果數 f 3	各中點與假定原點處之中點之差步 d 4	負差乘級果數之和 −fd 5	正差乘級果數之和 +fd 6
0− 4.9	2.5	1	−6	− 6	
5− 9.9	7.5	0	−5	0	
10−14.9	12.5	1	−4	− 4	
15−19.9	17.5	16	−3	−48	
20−24.9	22.5	11	−2	−22	
25−29.9	27.5	32	−1	−32	
30−34.9	32.5	21	0	−112	
35−39.9	37.5	34	+1		+34
40−44.9	42.5	9	+2		+18
45−49.9	47.5	1	+3		+ 3
	n=126				+55

$$M=G.A.+c$$

$$c=\frac{I\ \Sigma fd}{n}=\frac{5\times(-57)}{126}=-2.3$$

$$\Sigma fd=(+\Sigma fd)+(-\Sigma fd)=55-112=-57$$

$\therefore\quad M=32.5-2.3=\$30.2$

M代表算術平均數。

G. A. 代表假定的平均數，即與假定原點零(0)同項之級距中點。在此次例解中者爲 32.5。

c 代表改正數。(因假定之平均數並非眞正的平均數)。如果假定的平均數小於眞正之平均數，則由假定之平均數到眞正之平均數須加

上若干數，（即假定的平均數上須加若干）始能等於眞正的平均數。在如此之情形時，改正數必爲正，以便補上眞正的平均數。如果假定之平均數較大於眞正的平均數，則由假定的平均數到眞正的平均數已多出若干，故須由假定之平均數中將多出之數減去，始能等於眞正的平均數。在如此之情形時，改正數必爲負。因假定之平均數可取任何一中點之數，故對眞正之平均數或大或小不一定。此種或大或小之數，即假定的平均數對眞正的平均數之差。其價値爲何，須照上列例表 9 計算後而知。其結果即稱爲改正數）。

m 代表各級距之中點。

f 代表級果數。

d 代表各中點對假定的平均數處之中點之差。（例如 27.5 對假定平均數 32.5 少 5，即差一級，故爲－1；22.5 對假定平均數 32.5少 10，即差 2 級，故爲－2。餘類推。同一理由，37.5 對假定平均數 32.5 多 5，即多一級，故爲＋1；42.5 對假定平均數 32.5 多 10，即多二級，故爲＋2。餘類推）。

－fd 代表負差。（即各級距中點對假定平均數所少之級數乘各該相應級果數之和。何以須以相差之級數乘各該相應級果數以求其和？因所謂級果數者，即每級距間共有之案件數。故須以該級距間之級果數與該項相差之級數相乘，始能代表該級距間之全體數目）。

＋fd 代表正差，（即各級距中點對假定平均數所多之級數乘各該相應級果數之和。何以須相乘，理由與上同）。

n 代表案件總數。其在此次例解中爲 126。

Σfd 代表正負差乘各該相應的級果數之和的差，即上表 f 項乘 d 項之總差數。

I 代表級距單位數。其在此次例解中者爲 5。（何以改正數須以級距單位數乘總差數？因在差項，即上表 d 項，每一級之差數爲 5。因爲計算方便計，各差曾以 5 除之。如照原數，則假定原點零(0)之下，第一級爲－5，第二級爲－10，第三級爲－15，餘類推。同一理由，在假定原點零(0)之上，第一級爲＋5，第二級爲＋10，第三級爲＋15。餘類推。如照此等差數計算，則結果與事實相符，故無需乘 5，或級距之單位數。但在實習上，爲利便計，各級之差數，曾一齊以級距之單位數（在此次例解中者爲 5）5 除之，使其縮小，故乃有零之下爲 －1，－2，－3 等，及零之上爲 ＋1，＋2，＋3，等等。最後爲欲回復原狀，故再以級距單位數 5（在其他之例中如級距單位爲 10，或 100 等等，便用各該單位），乘之。先有 5 除之，後復以 5 乘之，其實乃不變，而於計算時則方便多多了）。

在例表 9 中，我們有用假定原點計算算術平均數法的細密步驟，這材料是與本章前二表的材料相同，而其計算方法，則將述之於次·

例表 9 中之第一行包含 X 量，而用級距陳列之。以便記數。第二行，包含中點，第三行列舉級果數。而等分量則起於置有假定原點零(0)之處。此原點是在 X 量上之某級距，而介於最大差之中部者。最宜擇定級距以作假定原點，即便於在果數行，可以知到大約有多少案件是在假定原點之上，而又有同數案件在假定原點之下。這個估量，僅需一大約之數，而不必注重於結果如算術的二等分之確數。等分量之級步。以數目 ＋1，＋2，－3，等等依次相繼表示之。這是按照 X 量上之級距，較假定原

點挨次更高之數，以數目＋1，＋2，＋3，等等依次相繼表示之。在相反的方向諸級距在等分量上，自假定原點用數目 －1，－2，－3，等等依次相繼表示之。在例表 9 中，我們置假定原點於 32.5 上，此點爲級距 35－39.9 之中點。這 35－39.9 的級距，在對假定原點之數目次序上，是次高的一個，故於等分量上，置以＋1。這 25－29.9 的級距是對假定原點的數目次序上次低的一個，故以(－1)表示之。

在實際計算例題的時候，最好便按照前面 7，8，9，三個例表的綱要去工作，不必爲教材所限制。這些綱要自身解釋甚明白，無須教材即可作爲計算算術平均數之指導。

當一算術平均數已被算出之後，最好在X量上，可一望而知該算術平均數，在計算上，很是合理。

三　倒數平均數(The Harmonic Average)

1. 倒數平均數之意義——倒數平均數，就是將案件之價值顚倒計算，而求其算術的平均數之謂，故又可稱爲倒數的算術平均數。

2. 倒數平均數之效用——倒數平均數爲不常用之平均數，僅於時間之平均計算時採用之，故其所代表之價值亦多爲時間方面。照常例算術平均數是求實數或結果之平均，而倒數平均數則在求工作效率之平均。

3. 倒數平均數之求法：

例表 10 五個做饅頭工人的成績表

每分鐘之成績	每分鐘做成饅頭之倒數	作成每個饅頭所需之秒數
甲、10(個) 乙、12 丙、13 丁、14 戊、15 5)64(12.8	0.10000 0.08333 0.07692 0.07143 0.06667 5)0.39834(0.079668	6 5 4.6 4.3 4 5)23.9(4.78
$\frac{60}{12.8}=4.7$，每個饅頭平均所需秒數，卽算術的平均數之速率。	$\frac{1}{0.08}=12.5$此卽每分鐘做成饅頭的倒數平均速率。$\frac{60}{12.5}=4.8$卽每個饅頭所需的倒數平均速率之秒數。	4.78爲每個饅頭所需之秒數。

從上表可見工作成績愈小，或效率愈遲者，倒數愈大。工作成績愈大或效率愈速者，倒數愈小。與普通平均數或算術平均數相較成績愈大者，結果平均數亦愈大，適相反。此卽倒數平均數命名之所由來了。

倒數平均數計算之方式爲

$$H=\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\frac{1}{X_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{X_n}}{n}$$

H代表倒數平均數。

n 代表級數，或案件數。（在此次例解中者每一級爲一案件）。

X代表果數，或饅頭之個，而 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5，等等卽代表甲乙丙丁戊各人所做饅頭之個數。

代入上表之數則

$$H=\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}{5}$$

$$=\frac{0.39834}{5}$$

0.079668 此即倒數平均速率之每個饅頭所需之分數。再以此數乘 60 秒，則得

60 秒 × 0.08 = 4.8 秒即每個饅頭之倒數平均數的速率。

或以此數 0.079668 除一分鐘，得每分鐘平均每人能做饅頭之速率，為 $\frac{1}{0.08}=12.5$。再以此數除 60 秒，即得 $\frac{60\text{秒}}{12.5}=4.8$ 秒，即每個饅頭的倒數平均數之速率。

四 權重的算術平均數

(The Weighted Arithmetic Average)

1. 權重的算術平均數之意義——此種平均數又可簡稱為權重平均數。即將各案件，以其價值相同者，各列為一組，或一等級，並記其該組之案件數。以各組之價值乘各該組所包含之案件數。再將此種相乘之和相加之總數，以所有案件之總數除之，所得之商，即權重平均數。

2. 權重平均數之求法：

例表 11　某校統計學班 95 個學生，某次考試成績之等級分配表：

等級分數 X			每級學生人數 F		各等級之總分數 X_nf_n
X_1	A+	95	f_1	2	190
X_2	A	90	f_2	3	270
X_3	A−	87	f_3	3	261
X_4	B+	85	f_4	5	425
X_5	B	80	f_5	15	1200
X_6	B−	77	f_6	16	1232
X_7	C+	75	f_7	7	525
X_8	C	70	f_8	9	630
X_9	C−	67	f_9	7	469
X_{10}	D+	65	f_{10}	6	390
X_{11}	D	60	f_{11}	5	300
X_{12}	D−	57	f_{12}	8	456
X_{13}	E+	55	f_{13}	3	165
X_{14}	E	50	f_{14}	2	100
X_{15}	E−	47	f_{15}	1	47
X_{16}	F+	45	f_{16}	3	135

$\Sigma X=1105$　　$\Sigma f=95$　　$\Sigma X_nf_n=6795$

$$W.A.=\frac{\Sigma X_nf_n}{\Sigma f_n}=\frac{6795}{95}=71.5$$ 此即權重平均數

上列權重的平均數可解析作：

$$W.A.=\frac{X_1f_1+X_2f_2+\cdots\cdots X_nf_n(\text{在此例中即}X_{16}f_{16})}{f_1+f_2+\cdots\cdots f_n(\text{在此例中。即}f_{16})}$$

3. 權重平均數之效用 —— 此種平均數與算術平均數同爲平均數。其所不同者，在計算之方法不同而已。算術平均數之求法已詳於前章。玆不贅述。其間有兩大要點須注意者，即算術平均數，或以個體案件之總數除該個體案件所有之價值之相加總數，或將個體案件分成若干相等之級距，再以案件之總數除各該級距之中點（即各級距間的平均代

表價値）乘各該級距之級果數之和之總數，如前章所述。而權重平均數則不分相等之級距，但爲錯雜之等級。由此非個體平均，又非分成相等級距或級步所求之平均數，而由另一上列方法所求得之平均數，卽權重的平均數，其效用約如此，非若算術平均數之通用。簡言之，算術平均數中有級距或級步，或爲個體案件之總數除其所有之價値之總數。而權重平均數則爲無級距，無級步，但有等級或組數，又非個體性質，這就是這兩種平均數不同之所在。

權重的平均數，又名平均數之平均數。卽將各組或各等級之數，先行平均，再將各組或等級之平均數相加，以求總平均。例如欲知無錫教育學院，民國二十四年份之學生學業成績。第一步，則求得各班本年份之平均成績。再將各班平均成績相加，以班數除之，卽得權重的平均數。其他如各工場之工資平均，各城市之物價（同一之物）平均，一定期內各城市之生活費平均標準，等等，皆可以此法計算。其簡單方式爲：

$$M=\frac{\Sigma XW}{\Sigma W}$$

例表12　權重平均數之簡明表

物價（任何相同之物）單位分（每磅之價） X 1	重　量 售出之磅數 W 2	售　價 XW 3
12	100,000	$12.000
14	60,000	8.000
18	50,000	9.000
20	20,000	4.000
	230,000	$33.000

設 M＝權重的算術平均數。

X＝各組之平均物價。

W＝各組物售出之重量。

XW＝各組物售出之總價。

ΣX＝售出物之總重量。

ΣXW＝售出物之物價總和。

$$\text{則}M=\frac{\Sigma XW}{\Sigma W}=\frac{\$33000}{230000}=14.5\text{分}\cdots\cdots\text{每磅之價。}$$

故權重的平均數，又稱權重的算術平均數。其性質與算術平均數極相似，惟算術平均數所討論者為一組羣體材料之平均數，而權重的算術平均數所討論者，則為若干組羣體材料之平均數而已。

五 結論

1. 平均數之重大意義——統計學建築於羣體材料之上，故其所注重者處處為全體材料的價值之普遍的整個分配，而不注重於任何個體問題之特殊分配。特殊個體問題之注重。乃社會調查工作之事，或自然科學界試驗之事。而將羣體材料之價值加以普遍的整個分配，則平均數之意義就重大了。故平均數之作用，卽在使羣體材料中某個體價值太高者使其抑低，過低者抬高，均使其平衡，以為一般之代表性。使觀查者一望而知此全體之普通價值。猶如一學校之普通成績，一工廠之普通工資，一城市或社會之普通生活程度，一民族健康上之普通高度，普通重量等等，皆極為有價值之研究事件，而非平均數則莫能辨。故平均數所表現

之價值，即在羣體材料集中趨勢之上，使閱者對羣體材料一望即能抓住其重心。

2. 平均數之種類及效用：

(一)算術平均數。

1. 算術平均數的意義——算術平均數是通常應用的平均數，故又稱為通常平均數，其意義在將一羣體數目大小參差不齊者，而使其平等。因平均數有數種，故稱此種平均數為算術平均數，以便有別於他種平均數。

2. 算術平均數之效用。

(一)表示羣體材料之集中性。

(二)代表該羣體材料之價值。

3. 算術平均數之求法。

(一)最簡便之方式為

$$M = \frac{\Sigma X}{n}$$

(1) M代表算術平均數。

(2) ΣX 代表價值總數。

(3) n 代表案件總數。

上法可用計算機(Calculating Machines)計算之。

(1)將成績總分數一齊相加。

(2)將案件件數一齊相加。

(3) $\frac{\text{成績總分數}}{\text{案件總數}}$ ＝平均成績。

凡數學上一切實習工作皆可用計算機計算之，結果迅速而正確。

(二)從果數表計算算術平均數之方式（此法又稱長法）：

$$M=\frac{\Sigma mf}{n}。$$

(1) M代表算術平均數。

(2)Σmf 代表各級果數乘其中點之和的總數。因 f 代表級果數 m 代表各級距中點，故 Σmf 即代表各級果數乘其中點之和的總數。

(3)n 代表案件總數。

(三)用等分量計算算術平均數之方式：

$$m_e=\frac{\Sigma fd}{n}$$

$$c=I\times m_e$$

$$M=c+m_a$$

(1) m_e 代表等分量中之算術平均數。

(2) f 代表級果數。

(3) d 代表等差。

(4) fd 代表級果數乘等差之和。

(5) Σfd 代表各級果數乘各該級之等差的和相加之總數。

(6) n 代表案件總數。

(7) c 代表改正數。

(8) m_a 代表假定的平均數。當等分為零(0)時與 X 量上同項的

中點。

(9) I 代表各級距單位數。

(四)用假定原點 (Arbitrary origin) 計算算術平均數之方式。

$$M = m_a + c$$

$$c = \frac{I\Sigma fd}{n}$$

$$\Sigma fd = (+\Sigma fd) + (-\Sigma fd)$$

各符號之意義與上項相同。

4. 計算算術平均數應注意之點:

(一)以何種方式爲宜,卽取何種方式。

(二)級距需要否?如需要。卽取定。

(三)級距之單位如何?須佈置清楚。

(四)級果數需要時,須排列清楚。

(五)案件總數須列出。

(六)如有相加的總數,須列出。

(七)中點須列出。

(八)假定的原點須指定。

(九)等分須列出。

(十)相乘之項須辨清。

(十一)相乘的和,及其總和,須列出。

(十二)改正數須尋出。

(十三)各種代表性之符號,須辨識清楚。

(十四)假定的算術平均數須指定。

(十五)眞的算術平均數之所在地須顯著。

(二)幾何平均數——此法又稱對數的算術平均數，因其求法全賴對數表。對數之算術平均結果卽爲實數的幾何平均數。此法用途亦多。如人口增加，複利增加，及其他混合增加之數量，皆可以此法求之，將另設一章討論之。

(三)倒數平均數——此法與算術平均數之求法相反。其所根據之價值適相顚倒。(參閱例表 10)而其用途則在工作效率之平均計算方面。

(四)權重平均數——此法與算術平均數幾乎相同。惟計算時，只分組或等級，而不分級距或級步，或個體之總數除其所有之價値之總數。其用途亦幾與算術平均數相同，惟不若算術平均數之方便普遍而已。故實際上，算術平均數用途最多，幾何平均數次之，而倒數平均數及權重平均數用途較少。

六 問題

1. 試將例表 2 之材料求出男女年齡分類之各個算術平均數。

(一)以$M=\frac{\Sigma X}{n}$之方式求之

(二)以$M=\frac{\Sigma mf}{n}$之方式求之

(三)以$M=m_a+c$之方式求之

2. 試將下列材料求出倒數平均數：

例表 13　某機關二十個書記，每小時能寫之小楷字

(1)	500	(8)	900	(15)	400
(2)	540	(9)	720	(16)	550
(3)	580	(10)	420	(17)	460
(4)	450	(11)	850	(18)	850
(5)	600	(12)	620	(19)	1200
(6)	700	(13)	880	(20)	740
(7)	1000	(14)	950		

3. 試將例表 6 之材料，某校統計學班七十二個學生，某次之考試成績，求出權重的算術平均數。

4. 於同一材料中求出算術平均數。

5. 將兩種結果相比較，並說出其所以異同之理。

第二十七章　幾何平均數(Geometric Mean)

一　概論

幾何平均數亦爲平均數之一種。其用途雖不如算術平均數之大，然於計算人口，計算複利，（已略述於前章曲線關係複利之計算法內），等，則其用途亦多。若干案件數目之幾何平均數，即其價值之和的案件總數之方根（The geometric mean of N items is the Nth root of the product of the values）。（卡朵克：統計學原理及方法第125頁）例如，如果我們將這兩個案件160及250相乘，照上法我們即得

$$G.M.=\sqrt{160\times 250}=200$$

。這些價值的算術平均數，則爲

$$M=\frac{160+250}{2}=\frac{410}{2}=205。$$

與算術平均數相似。即幾何平均數之結果由該羣體材料中所有諸案件的量之大小而決定，且並不與其間的任何一案件相同。無論如何，牠受極端量之影響不如算術平均數之多。牠亦絕不能大於算術平均數而常稍小於算術平均數。

二　幾何平均數之計算法

幾何平均數，有時稱爲對數平均數。因牠的計算全賴對數表而求

牠是由實數回應到所求之羣體材料中的各個體價值的對數上之算術平均數。其方式爲。

$$\text{幾何平均數之對數} = \frac{\text{對數總和}}{\text{案件總數}}$$

$$\text{Log. of geometric mean} = \frac{\Sigma \log. X}{n}$$

這個方式，就是描寫當所有價值中之任何數是結連在幾何平均數中的時候所採取之手續。在前段僅兩個價值是被平均了。在此問題之中，兩個價值是相乘了，而其平方根亦已取去。但欲平均案件較多之數目時，卽須除去所有價值之和的案件數目之方根。對數表之採用，能使手續甚簡便。所有各案件之相乘的和的對數，是將各案件之對數相加。而案件數的方根之對數，則以案件之總數除這相加後的對數之總數。這結果卽我們所求幾何平均數的對數。再在對數表上尋回到相反應的實數，卽得我們所求之幾何平均數。

三　用幾何平均數來計算人口增加率之法

美國人口統計是由美國聯邦政府統計部每十年整理一次。在 1920 年之一月一日整理者，有某城市之人口，在 1910 年僅有人口 100,000。在 1920 年則人口已增至 150,000 。在十年之內該城市人口之增加竟達百分之五十。

我們現在打算要根據該城市原有之人口及增加之人口而找出牠常年的增加率，以計算該城市之人口增加趨勢。例如衞生當局欲知 1911 年之人口，在沒有計算的時候，而欲計算那一年的生死率。或企業家欲

在1920年之外推算人口之增加，以計算1924年人口之可能的增加。如果每年人口之增加率已知到之後，則根據原有人口可採用複利計算之原理。從1910年，以100,000人口，一年一年底推算下去。同樣的方法，亦可自1920由150,000人口計算未來每年人口的增加率。

十年內人口增加百分之五十，每年平均的人口增加率是甚麼？是否可以十去除五十，而得每年人口平均之增加率爲百分之五？統計學之學者以百分之五的增加率起算100,000人口，按照複利之計算法，十年後，將有人口162,891，而結果並非150,000。

欲決定十年內之人口常年增加率，幾何步驟的原理便適用了。其步驟可彙之如次：

求人口增加率之法

以 P_o = 1910年之人口 = 100,000

以 P_1 = 1920年之人口 = 150,000

以 r = 人口之增加率

於是 1911年之人口 $= P_o + P_o r = P_o(1+r)$

1912年之人口 $= P_o(1+r)(1+r) = P_o(1+r)^2$

照此類推下去，直至十年完結爲止，則得

1920年之人口 $= P_o(1+r)^{10} = P_1 = 150,000$ (1)

用對數表計算增加率，我們有

$\text{Log}.P_o + 10\ \text{Log}.(1+r) = \text{Log}.P_1$，這是與上面(1)項相等。

現再轉換之，並以10除之。

$$\text{Log.}(1+r)=\frac{\text{Log.}P_1-\text{Log.}P_0}{10}$$

以已知之價值代入 P_1 及 P_0。

$$\text{Log.}(1+r)=\frac{\text{Log.}150,000-\text{Log.}100,000}{10}$$

$$=\frac{5.17609-5.00000}{10}$$

$$=0.017609$$

故 $(1+r)=1.04138$ $\therefore$ $r=1.04138-1=0.04138$

則 $r=0.04138$ 卽 4.138%

附註 $(1+r)$ 之對數爲 0.017609，須在對數表中尋回實數。而實數則爲 1.04138，此數卽對數 0.017609 相反應之實數。再由 1.04138 減去 1，卽得 0.04138，故 $r=0.04138$，卽該十年內某城市人口之增加率爲 4.138%。

將此 100,000 人口之每年增加率 4.138% 用複利式計算，每年增加下去，十年卽得 150000，卽 1920 年之實有人口。現在我們有此增加率，卽可推算 1920 年以後之人口增加趨勢，假設這增加率是一律的話。這是惟一計算人口增加之法，而又爲最有用途之法。

四 結論

1. 幾何平均數之意義——幾何平均數卽對數平均數。因其作法全賴對數表而其方式則爲對數的算術平均數。或幾何平均數卽若干項數目相乘之和，再開去其項數之方根。

2. 幾何平均數之求法：

(一)將各案件之價值換作對數。

(二)將各案件之對數相加，即等於各案件之價值之互乘。

(三)以案件之總數爲各案件互乘之和之總數的方根。

(四)以案件之總數，除對數相加後之總數，即等於開去各案件之價值之相乘的總和之方根。此即對數的算術平均數亦即幾何平均數之對數。

(五)將幾何平均數的對數尋回至相反應之實數，再減去1，即得增加率。此增加率即每年的幾何平均數。

3. 幾何平均數之效用——凡人口增減，經商贏虧，糧稅增減等等混合羣體材料之複式趨勢，其效率，其期間，其實數，皆利賴幾何平均數以求之，弧線以表示之。

4. 求幾何平均數之方式；

(一)尋定實數（如本利和，或本金，或人口原有實數，或人口每年已增加或減少之現有數）。

(二)尋定效率（如人口之增加率，複利之利率等等）。

(三)尋定期數（年，或季，或月）。

(四)採用下列方式：

(1) $y=c(1+r)^x$ 之方式，以求本利和。

設 y 爲本利和（或每年人口之總數等等）。

c 爲本金（或開始計算年之人口原有數）。

r 爲利率（或人口增加率）。

x 爲期數(年,或季,或月)。

$$(2)c=\frac{y}{(1+r)^{x}}$$

$$(3)r=\frac{Log.y-Log.c}{x}-1$$

(五)尋出需要之對數如:

a. 在(1)式中尋出(1+r)之對數,以 x 之價值乘之,再尋回實數,以 c 之價值乘之,即得 y 之價值。

b. 在(2)式中,尋出(1+r)之對數,以 x 之價值乘之,再除 y 之價值,即得 c 之價值。

c. 在(3)式中,尋出 y 之價值之對數與 c 之價值之對數。及此兩種對數相差之對數,以 x 之價值除之,再減去 1,即得 r 之價值。

(六)尋出需要的相應之點,如 x 與 y 之相應之點,標以小圈(∘),並依次連結各小圈(∘),即成弧線關係圖,如前第二十四章所言。

五 問題

1. 試將例表 14 之材料,1651 年後中國之人口統計表,尋出每年常年的人口增加率。

(一)以 1651－1660,1661－1670,等等每十年爲一期。

(二)以 1651－1700,1701－1750,等等每五十年爲一期。

(三)以 1651－1750,1751－1850,等每一百年爲一期。

(四)以甲乙兩期爲一期,即 1651－1740,1741－1910 各爲一期。

(五)以1916—1935爲一期。

2. 如以上列五期分開計算中國之人口增加率，每年之增加率是否相同?應如何始能求到平均每年的人口增加率?

例表14 1651年後中國之人口統計表:

甲、 第一時期(1651—1740)

年		官廳查得人口數目	校正人口數目	附註
1651	順治元年	10,683,324	53,166,600	假定官廳之數僅就每戶納稅之家長計算，茲改按每戶平均五人計算，求得實在人口如校正人口數目。
1652		14,485,858	72,491,200	
1653		13,916,598	69,587,990	
1654		14,057,205	70,286,025	
1655		14,083,900	70,189,500	
1656		15,412,776	77,063,880	
1657		18,611,996	93,059,980	
1658		18,682,881	93,164,405	
1659		19,008,913	95,044,565	
1660		19,087,572	95,437,860	
1661		19,037,652	95,188,260	
1662	康熙元年	19,203,233	96,016,165	
1663		19,281,378	96,421,890	
1664		19,301,624	96,508,120	
1665		19,312,118	96,560,590	
1666		19,353,134	96,765,670	
1667		19,364,881	96,824,405	
1668		19,366,227	96,831,135	
1669		無統計	無統計	
1670		19,396,453	96,982,265	
1671		19,607,587	98,037,935	
1672		19,431,567	97,157,835	
1673		19,393,587	96,967,935	
1674		19,246,472	96,232,360	
1675		16,075,552	80,377,760	
1676		16,037,268	80,186,340	

年	官廳查得人口數目	校正人口數目	附 註
1677	16,216,357	80,081,785	
1678	16,845,733	84,228,665	
1679	16,914,256	84,571,280	
1680	17,094,637	85,473,185	
1681	17,235,268	86,176,840	
1682	19,432,753	97,163,765	
1683	19,521,361	97,606,805	
1684	20,340,655	101,703,275	
1685	20,341,738	101,708,690	
1686	無統計	無統計	
1687	20,349,341	101,746,705	
1688	無統計	無統計	
1689	20,363,568	101,817,840	
1690	無統計	無統計	
1691	無統計	無統計	
1692	20,365,873	101,828,914	
1693	無統計	無統計	
1694	20,370,654	101,853,270	
1695	無統計	無統計	
1696	20,410,862	102,051,910	
1697	22,410,682	112,953,410	
1698	20,210,693	101,053,456	
1699	20,410,869	102,054,345	
1700	20,410,963	102,054,815	
1701	20,411,103	102,055,515	
1702	20,411,380	102,056,900	
1703	20,411,480	102,057,400	
1704	無統計	無統計	
1705	20,412,500	102,062,500	
1706	無統計	無統計	
1707	無統計	無統計	
1708	21,621,324	108,106,620	
1709	無統計	無統計	
1710	23,311,236	116,556,180	
1711	24,621,324	123,106,620	

年		官廳查得人口數目	校正人口數目	附註
1712		無統計	無統計	
1713		23,647,679	118,238,395	
1714		24,741,546	123,707,730	
1715		24,796,087	123,980,435	
1716		無統計	無統計	
1717		24,932,448	123,662,240	
1718		24,971,449	124,857,245	
1719		25,050,966	125,151,830	
1720		26,029,949	130,149,745	
1721		26,818,209	133,081,045	
1722		25,763,502	128,817,510	
1723	雍正元年	25,734,854	128,674,270	
1724		25,111,953	125,559,765	
1725		無統計	無統計	
1726		26,390,899	131,954,495	
1727		26,508,987	132,544,935	
1728		26,521,690	132,608,450	
1729		26,659,259	133,296,295	
1730		26,332,457	131,662,285	
1731		26,302,933	131,514,665	
1732		26,364,855	131,824,275	
1733		26,348,775	131,743,875	
1734		27,355,462	136,777,310	
1735		無統計	無統計	
1736		無統計	無統計	
1737		無統計	無統計	
1738		無統計	無統計	
1739		無統計	無統計	
1740		無統計	無統計	

例表 14　1651 年後中國之人口統計表

乙、 第二時期(1741－1910)

年	官廳查得人口數目	校正人口數目	附註
1741	143,411,559	143,411,559	(1)定假 1741－1795 年之時期內每年人口增加未超過千分之
1742	159,811,557	144,845,675	
1743	164,454,416	146,294 132	
1744	166,868,604	147,557,730	
1745	169,929,127	149,234,644	
1746	171,896,773	150,526,990	
1747	無統計	無統計	
1748	177,495,030	152.234,200	
1749	179,538,540	153,756,903	
1750	181,811,359	155,294,169	
1751	無統計	無統計	
1752	183,678,259	158,400,052	
1753	184,504,493	159,984,053	
1754	185,612,881	161,583,894	
1755	186,615,614	163,199,733	
1756	無統計	無統計	
1757	191,672 808	166,480,047	
1758	194,791,859	168,144,847	
1759	196,837,977	169,826,295	
1760	198,214,555	171,524 558	
1761	200,472,461	173,239,804	
1762	204,209,828	174,972,202	
1763	205,591,017	176 721,924	
1764	無統計	無統計	
1765	218,095,796	180,274,034	
1766	209,839,546	182,076,774	
1767	無統計	無統計	
1768	212,023,042	185,736,516	
1769	213,613,163	187,593,881	
1770	214,600,354	189,469,820	
1771	216,467,258	191,364,518	

年		官廳查得人口數目	校正人口數目	附註
1772		218,743,351	193,278,163	
1773		221,027,224	195,210,945	
1774		264,561,355	197,163,054	
1775		無統計	無統計	
1776		208,238,181	201,106,032	
1777		無統計	無統計	
1778		242,965,618	205,168,650	
1779		275.042,916	207,220,352	
1780		無統計	209.292,556	
1781		279,816,070	211,385,482	
1782		281,822,675	213,499,337	
1783		284,033,785	215,634,330	
1784		286,331,307	217,790,673	
1785		288,863,874	219,968,580	
1786		291,102,486	221,682,660	
1787		292,409,018	224,385,093	
1788		294,852,089	226,628,944	
1789		無統計	無統計	
1790		301,487,115	231,184,185	
1791		303,354,110	233,496,027	
1792		307,467,279	235,830,987	
1793		310,497,210	238,189,297	
1794		313,281,795	240,571,190	
1795		296,968,968	242,976,902	
1796	嘉慶元年	275,662,044	245,406,671	(2)假定1796－1856年之時期內每年人口增加率如官廳所示爲千分之六·三
1797		271,333,544		
1798		290,982,980		
1799		293,283,179		
1800		295,237,311	251,650,000	
1801		297,501,548		
1802		299,749,770		
1803		202,250,673		
1804		304,461,284		
1805		332,181,403		
1806		335,329,469		

年		官廳查得人口數目	校正人口數目	附註
1807		338,062,439		
1808		350,291,724		
1809		352,900,024		
1810		345,717,214	267,960,000	
1811		358,610,039		
1812		333,700,560		
1813		336,451,672		
1814		316,574,892		
1815		無統計		
1816		328,814,957		
1817		331,330,433		
1818		348,820,037		
1819		301,260,545		
1820		無統計	295,330,000	
1821	道光元年	355,540,248		
1822		372,457,539		
1823		370,153,122		
1824		374,601,132		
1825		279,885,340		
1826		無統計		
1827		383,696,095		
1828		386,531,513		
1829		390,500,650		
1830		394,784,681	303,820,000	
1831		無統計		
1832		397,132,659		
1833		398,942,036		
1834		無統計		
1835		401,767,053		
1836		404,901,448		
1837		405,923,174		
1838		409,038,799		
1839		410,850,139		
1840		412,844,628	323,490,000	
1841		413,457,311		

年		官廳查得人口數目	校正人口數目	附註
1842		414,686,994		
1843		417,239,097		
1844		419,441,336		
1845		421,342,730		
1846		421,121,229		
1847		424,938,900		
1848		426,737,016		
1849		424,493,899		
1850		無統計	344,840,000	
1851	咸豐元年	432,164,047		(3)假定1851—1890年人口無增加
1852		334,403,035		(蘇湘鄂三省不在內)
1853		297,626,556		(蘇鄂湘三省不在內)
1854		298,152,503		(蘇皖湘鄂閩粵贛七省不在內)
1855		293,740,282		(蘇皖鄂黔四省不在內)
1856		294,117,661		(蘇皖鄂黔四省不在內)
1857		242,702,140		(蘇皖贛閩鄂湘豫粵桂滇黔十一省不在內)
1858		293,887 502		(冀蘇皖閩鄂湘粵桂滇黔十省不在內)
1859		291,148,943		(不完全)
1860		260,924,675		(不完全)
1861		266,889,845		(不完全)
1862	同治元年	255,417,324		(蘇閩滇桂浙晉六省不在內)
1863		233,958,435		(蘇遼閩滇桂黔浙晉甘九省不在內)
1864		237,507,727		(蘇閩滇皖桂黔浙晉甘九省不在內)
1865		237,458,005		(冀皖蘇浙閩桂滇黔甘新疆十省不在內)
1866		無統計		
1867		256,636,585		(蘇皖閩桂晉甘滇七省不在內)

年	官廳查得人口數目	校正人口數目	附 註
1868	238,180,135		(蘇皖閩鄂湘晉川桂滇黔十省不在內
1869	239,011,321		(蘇皖閩滇桂五省不在內)
1870	268,040,023		(遼蘇皖閩滇桂晉甘八省不在內)
1871	272,354,831		(蘇皖閩桂滇晉甘七省不在內)
1872	274,636,014		(蘇皖滇桂晉甘六省不在內)
1873	277,133,224		(蘇皖滇桂晉甘六省不在內)
1880	378,800,000		
1890	430,470,000	344,480,000	(4)假定 1890－1910 年之每年人口增加率與 1796－1850 年相同
1900	439,950,000	366,810,000	
1910	399,540,000	390,590,000	
1916	409,500,000		

（以上材料根據立法院，統計月報，民國十九年九月第二卷第九期，31 頁至 42 頁）。

1935　462,152,874（根據民國二十四年申報年鑑，人口 98 頁）。

第二十八章　中數 (Median

一　概論

中數亦為集中趨勢之一種計算量。牠是當一串數目，依次漸大，排列時，正中間的一個數目之價值。中數工資，即在X量上的一點，其被選擇之點即表示若干工資在中數之上，同時又有同等工資在牠之下。而其實際情形，並不與平均數相同。在某些情形之下，中數較之平均數為更好之集中趨勢之計算量。

二　計算方法

例如將下串數目加以考慮：

7　　14　　11　　2　　17　　1　　22　　13　　9

依漸次大之次序排列之：

1　　2　　7　　9　　11　　13　　14　　17　　22

這中數則為 11，因牠是當這串數目依漸次大之秩序排列時的中間一個案件之數目。在此串數目之中，有四個案件較高於中數，同時又有四個案件較低於中數，而這平均數則為 10·7

這上例乃案件之奇數(或單數)。當一串數其案件之數目為偶數或雙數時，這中數乃介於兩個中間數目之中的一個數。這樣就可以使中數的定義圓滿了。

試將下串數目加以考慮;

11　29　8　4　10　3　17　37　22　7

將其依漸次大之秩序排列之,我們得

3　4　7　8　10　11　17　22　29　37

這兩個中間數目是 10 與11。而中數則介於這兩個數目之間即 10.5 。此串數之平均數則為 14.8。

當這材料列在一個數表的方式之中時,最好即照例表 15 ,以計算中數。此表之材料與前面例表 1 或圖示 1 之材料相同。

例表 I5　用果數表計算中數之方式:

X 量 級距 工資(元) 1	級果數 f 2	累積果數 (accumulated frequencies) 3	
0		0	
	1		
5		1	
	0		
10		1	假定的中數所在地 $\frac{n}{2}=\frac{126}{2}=63$
	1		
15		2	
	16		
20		18	
	11		
25		29	
	32		
30		61	a= 2(中數在累積果數之上之差)
假定中數	21	——63——	
			b=19(中數在累積果數之下之差)
35		82	a+b=21,即 21 中有一部分 (2)
	34		是少於中數的差。另一部分 (19)
40		116	是多於中數之差故其差率為 $\frac{1}{21}$
	9		
45		135	
	1		
50		126	
	n=126		

$$\therefore \text{Median}=30+\frac{1}{21}\times 2\times 5=30+0.5=30.5$$

$$或\ \text{Median}=35-\frac{1}{21}\times19\times5=35-4.5=30.5$$

因30－35這個級距,是眞正的中數所在之級距。而本級距之低限,則對眞正的中數價值尙不足。其不足之數卽該級距累積果數61對眞正的中數63所差之數2。以差率$\frac{1}{21}$乘差數得實差。而每一差所代表者不是該級距中之某一個單位,卻是全部單位5,故又須以5乘之。結果得由假定中數對眞正中數所少之差數爲$\frac{1}{21}\times2\times5=0.5$。以之加於該級距之低限得$30+0.5=30.5$,卽爲眞正的中數所在地之價值。同一理由,該級距之高限35的價值較之眞正的中數價值是多了一些,這是可在上表例表15中查出來的。究竟多了若干,則以該級距的級果數之差率$\frac{1}{21}$乘累積果數較中數63多餘之數19再乘級距單位數5,遂得$35-\frac{1}{21}\times19\times5=30.5$

計算中數的方法之步驟如下:

1. 前兩行與前面之果數表相同。

2. 第三項,包括累積的果數。試舉任何級距如15－20,此項之累積果數,卽包括本級距之級果數及所有較低之級果數之總數。卽$1+0+1+16=18$。

3, 確定案件之數。此題中案件之數爲126。決定案件數之二等分,$\frac{n}{2}$。在此題之解釋爲63。

4. 尋出包含中數之級距,牠是某級距包含有累積果數之二等分,

$\frac{n}{2}$之數者。在此題解釋之中，牠是這30－35的級距之間。

5. 將此級距之級果數分成二部，a 與 b 。如此，則次低級距之累積果數加 a ，將爲案件之二等分，$\frac{n}{2}$在此題解釋之中，牠是 $61+2=63$ 故 $a=2$。且因 $a+b=21$ 故 b 必爲 19，如上所示。

6. X 量每級距之單位作爲 I 。於是中數及 X 量之價值在包含有中數之級距的次底邊加 I $\frac{a}{f}$之總數。而在I$\frac{a}{f}$方式中之 f 乃該級距之級果數。這計算法是極簡短的，或許檢閱例表 15 之底邊之計算，較之上列文字解釋更易了解。

在圖示 30 之中，我們對中數之計算有更進步之解釋。這中數是在級距 30－35 中之某處。在本級距之中有 21 個案件。我們假定這個案件在本級距之內，是有一律的分配，中數是 X 量上之某點。該點落置之處，卽有若干案件在其上，同時又有相等之案件在其下。在 X 量上的底邊開始，我們除去案件 63 不算。於是再注意其我們所欲求之點，該點卽中點。當我們算到 18 個案件時，我們是在 X 量上 20 之上。當我們算到 29 個案件時，我們是在 X 量上 25 之上，當我們進行到 X 量上 34 的時候，我們就要經過 82 個案件。其時，我們只需要經過 63，故中數是在級距 30－ 35 之某處。

當我們已計算所需要的各個案件之時我們已在級距 30－35 的 21 個案件，超過了 2 個。我們假定本級距內之各個案件是一律的分配的，故我們超過這一點的一個距離是等於次級距的$\frac{2}{21}$。而每級距之量的

單位爲 5，故我們對 30 加上$\frac{2\times 5}{21}$以置定 X 量上之中點。同一理由，我們可由量之頂端開始挨次向下計算，以代替從下向上計算。兩種手續均可得同一之中數，如圖示 30 所表述之兩個例的計算。

試一注意此間有趣之事，卽如我們在一柱形圖之中，經過中數點畫一垂直線，於是我們卽得圖之兩個相等案件之部份。

三 結論

1. 中數之意義——中數乃是將羣體材料列成依次漸大秩序之後，將案件總數二等分之的正中間的價值之數。卽案件總數二等分之分點所在地之價值。牠與算術平均數不同。因算術平均數爲各個案件之相等價值。前者是求總案件二等分後的分點之價值所在。而後者則在求各案件總數二等平分後的價值之所在。

2. 中數之效用——中數乃集中趨勢的計算量之一種。牠是表示集中趨勢之中心是落在某案件之某一點上。換言之，牠是表示中央案件的價值。

3. 中數之求法：

(一)根據一果數表。

(二)由最低級距之級果數，依次加入漸高之級距內之級果數。挨次累積相加，加完爲止，以求得最後之累積果數。此數須與案件總數相符。

(三)二分案件總數以求其商。

(四)取定一假設之中數。牠是在二分案件總數之商的所在級距之內。假定的中數,標以中數之符號,如(中數——→)。

(五)將假定中數所在地之累積果數,減二分之案件總數。其差如小於二分之案件總數,則名之爲a,卽累積果數不足於中數之案件數。其差如大於二分之案件總數,則名之爲b,卽累積果數高出於中點之案件數。a爲較高之符號,卽二分之案件總數較高於某部累積果數之謂。b爲較低之符號,卽二分之案件總數較低於某部累積果數之謂。

(六)a+b=中數所在級距之級果數。

(七)採用下列方式:

(1)中數 Median= 中數所在級距之次低邊加

$$\frac{a\times\text{級距單位數}}{\text{中點所在級距之級果數}}$$

或中數(Median)=中數所在級距之次高邊減

$$\frac{b\times\text{級距之單位數}}{\text{中點所在級距之級果數}}$$

四　問題

1. 試將例表2之材料求出男子年齡分配之中數,並用最大差之次高端及次低端兩法求之。以對照中數計算之正確性。

2. 中數與平均數相同者何在?相異者又何在?

第二十九章　最高數(Mode)

一　概論

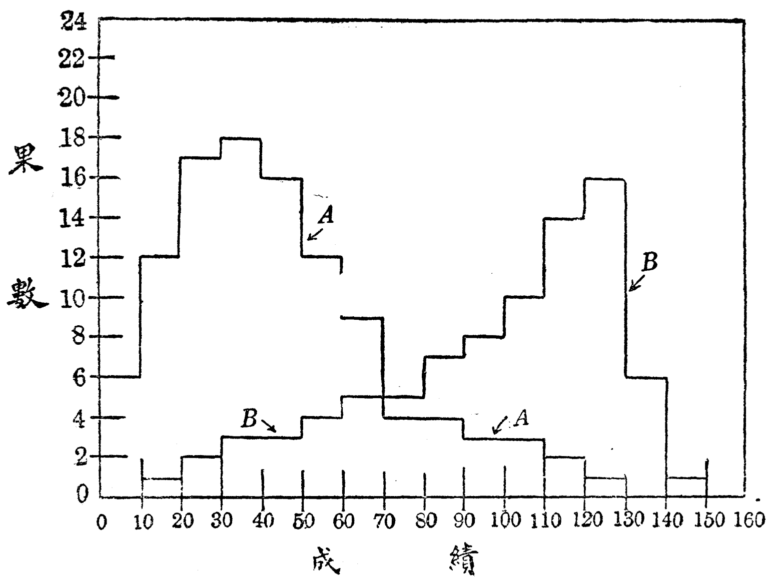
最高數爲第三種集中趨勢之計算量。簡言之，牠是 X 量上有最多案件的一個價值，亦即果數弧線之最高者。當這材料已列成級距的方式之後，以每一級距分列一級果數，我們假定這最高數是有最高級果數的級距之中點。這種假定，是大約正確，且可供應用目的上多種情形之用。這最高數，故無需乎計算，除非作圖者欲爲修飾果數弧線而取定之。無論如何，這也不是常有之事。

須要好好記憶着的，即每一集中趨勢之計算量都在 X 量上的某一點。有時會發生這樣的事，即兩個或兩個以上之原動力來影響果數弧線之形式，以形成弧線上兩個或兩個以上之高峯。當一果數弧線有兩個高峯時，且當這兩個高峯皆作爲是被原動力所影響，而非機會所影響，則此弧線叫做雙標準弧線。要決定何種弧線是顯然的雙標準，他們是在級果數內，簡單的受了機會波動之影響。這也是統計判斷上一件常有之事。

當一果數弧線是不均合之時，如圖示 30 然，這弧線叫做傾斜的 (Skewed) 弧線。當這最高數任何一面之諸級距的級果數是平衡合宜時，這弧線叫做均合的 (Symmetrical) 弧線。這弧線不必爲通常的 (Normal)，而可爲均合的。檢閱圖示 31 中之兩條弧線，即發現在弧線 A 中，右邊較左邊有較長之傾斜度。在弧線 B 中，我們有相反之狀況。要分

別他們的話，那麼我們就叫這兩種斜度爲正的與負的。在弧線A中，這長的斜勢是在最高數之右，而傾向於X軸之上端，故牠是稱爲正的傾斜。弧線B，由同一之理由，則被稱爲負的傾斜。

圖示 30　果數弧線傾斜圖



這集中趨勢的三個方式可落置於X量上同一之點，如果這分配是均合的。如果這果數弧線是傾斜之時，這三種集中趨勢之三點，則將落於X量上不同之點。於此我們即可見用幾個不同的集中趨勢之理由。他們之重要性，即顯示在有傾斜面積之時。

最高數或稱爲超越的、常有的、儀型的、及普通的集中價值。

二　計算方法

最高數之求法，本可於原有材料中，檢出其最多案件之相同價值者卽是。但爲修飾其分配起見，則可採取由級果數之移動平均數，而得出修飾的分配，以求最高數之所在。這果數多角形圖可採取兩個或較多之級果數，加以平均。繼續行之，至終爲止。這樣求得之平均數，卽稱爲移動的平均數，有如例表 16。

在例表 16 中，每次是以兩個級果數平均之。例如$\frac{6+7}{2}=6.5$。這個平均果數是列在第三行，與 95 磅相對立。這兩個級距之級限中的果數，是已被平均了。當第一級果數去掉之後，另一級果數又加上，如$\frac{7+10}{2}=8.5$，這又進於第三行與 100 磅相對立。採用同樣方法，將所有級果數算完爲止。這小數級果數亦保留之，因我們僅欲將不規則之分配加以修飾，而不變更其總果數。85－90磅，須加一級距，在分配之低端上無案件，欲得第一之平均果數，則爲$\frac{0+6}{2}=3$。同一理由，210－215 級距之上端，亦加一級距，以得最後之平均果數，如$\frac{0+1}{2}=0.5$。如此則在第三行之果數總數爲 1000。這種移動平均數之方法，使最高之級果數與 130 磅對立，其上下亦有適宜的均合分配，此法爲適合弧線修飾最有科學價值之方法。

例表 16　用移動平均數置於最高數間之表

重量 (磅) 1	f 2	每二級距之移動平均數 3
		3.0
90—95	6	
		6.5
95—100	7	
		8.5
100—105	10	
		14.0
105—110	18	
		41.5
110—115	65	
		73.0
115—120	81	
		96.0
120—125	111	
		122.5
125—130	134	
		129.0
130—135	125	
		121.0
135—140	117	
		101.0
140—145	85	
		80.0
145—150	76	
		64.5
150—155	54	
		44.5
155—160	35	
		30.0
160—165	25	
		23.0
165—170	21	
		17.0
170—175	13	
		9.0
175—180	5	
		5.0
180—185	5	
		4.5
185—190	4	
		3.4
190—195	2	
		1.5
195—200	1	
		0.5
200—205	0	
		0.5
205—210	1	
		0.5
總數	1000	1000

Mean＝134.4 磅

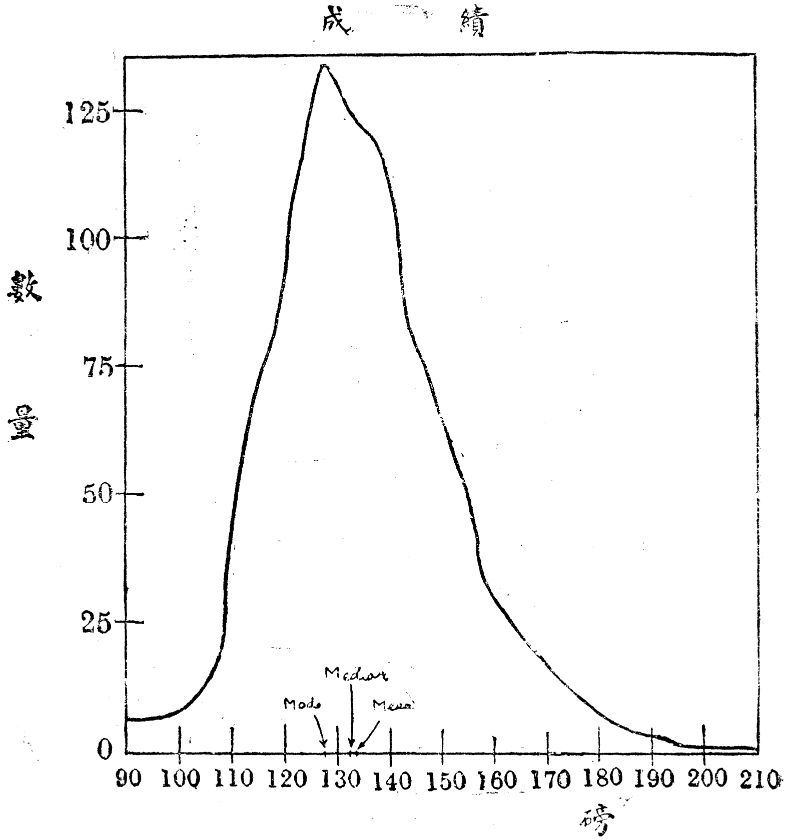
Median＝132.7 磅

1. 金氏 (King) 公式

$$\text{Mode}=L+\frac{f_2}{f_2+f_1}c$$

在此方式之中，L是最高數所在級距之低邊。f_2 是最高數所在級距之上一級距(即較最高數所在級距為高之級距)之級距數。f_1 是下一級距內之級果數。c 是級距之單位數。最高數所在地之級距，稱為標準級距(Modal class)。有時，在標準級距之上或下，各多取二、三或更多之級果數，以作 f_2 及 f_1 之數。將此公式。應用於例表16之中，其重量

圖示31　集中趨勢之弧線圖（根據例表16之材料）



之分配，爲每級距五磅進位。將標準級距 125－130 上之兩個級果數合併，及其下之兩個級果數合併，相加，有如下式；

$$\text{Mode}=125\text{磅}+\frac{(125+117)}{(125+117)+(111+81)}\times 5\text{磅}$$

$$=125\text{磅}+2.8\text{磅}=127.8\text{磅}$$

2. 皮耳生氏 (Pearson) 之公式：

$$\text{Mode}=\text{Mean}-3(\text{Mean}-\text{Median})$$

$$=134.4\text{磅}-3(134.4-132.7)\text{磅}$$

$$=134.4-5.1=129.3\text{磅}$$

三 結論

1. 最高數之意義——一羣材料之中，必有一價值佔最重要之數，即案件最多之數所在地之價值，此數即稱爲最高數。

2. 最高數之求法：

(一)可採用金氏最高數＝標準級距之低限加

$$\frac{\text{標準級距之上一級果數(即較標準級距爲高的級距之一級果數)}}{\text{標準級距之上一級果數加下一級果數}}$$

乘級距單位數。即 $\text{Mode}=L+\frac{f_2+f_1}{f_2}$ 此方式所求之結果，較爲正確。而 f_2 可合併標準級距上之多項級果數爲之，而 f_1，亦可照 f_2 在標準級距下採與 f_2 同項數之級果數合併之，然後照上方式求之，其結果相同。

(二)採用皮耳生(Pearson)氏之公式：

Mode＝Mean－3 (Mean-Median)。此公式須在最高數有較大之價值時，始能顯示其意義。如級果數十分平勻，則不易顯示其意義。

(三)用觀查取定多角形圖最高峯所在地之價值爲最高數。

3. 最高數之效用——最高數爲集中趨勢最顯著之集中地。假使此數在一羣體材料中有特殊多之案件，則可用觀查而不用計算，已知所有集中趨勢之價值；均萃聚於此，故稱爲超越的、常用的、儀型的及普通的集中趨勢。

4. 爲甚麼原因要求集中趨勢？—— 統計學所注重者處處爲羣體材料之全部分配，而非任何特殊個體之分配。欲知這一羣體材料中各個體間之相互關係及其分配是否均合，則第一步卽以集中趨勢表示之。如果各個體的價値分配是很平勻的話，或相等的話，則三種集中趨勢如平均數，中數與最高數，皆將落於一點。例如有 50 個學生，各生之成績皆爲 100 分，則平均數、中數及最高數皆爲 100 分。於此，我們可見三種集中趨勢最凝聚或接近的時候，則各個體間之分配是很均勻。如果各個體之價值參差不齊，大小十分懸殊，而三種集中趨勢之落置點乃分離而不能聚萃於一點。故一見三種集中趨勢彼此間之距離甚大時，卽可知各個體間之關係十分參差，而其價值有突大突小之事實存在。

5. 三種集中趨勢——平均數，中數，最高數之比較：

(一)這算術平均數，是通常之平均數。牠是一串成績之總分數，以該串成績之件數除之，而得之商。如果一柱形圖畫於一紙片之上，用刀邊將其綱領對折成平衡，由底邊至綱領上截斷之，則刀邊適在算術平均數之上。

(二)這中數則爲當一串成績由最低者依次漸大而至最高之成績列爲次序後之正中間的一個成績。這中數成績，乃如此之成績，其上所有之成績件數與其下所有之成績件數完全相等。有時初學者認爲中點乃最大差之中心點。但這是有時如此，而不能以此爲中數之定義。

(三)這最高數是計算價值量之上最高果數弧線。牠是 X 量上之價值。在此價值之上，這果數弧線有其最高之縱線。當這材料列入柱形圖之中時，這最高數是假定在有最高級果數的級距之中點上。

照常例，平均數較高於中數，而中數則又較高於最高數，因果數受機會波動或原動力影響而加以平衡分配後所使然。有時自然有例外，如果數分配甚均合則最高數可顯示最高之價值。

四 問題

1. 試將例表 2 之材料求出男子年齡分配最高數：

(一)用金氏(King)之公式 $\text{Mode}=L+\dfrac{f_2}{f_2+f_1}c$ 之公式。

(二)用皮耳生氏(Pearson)之公式。

$$\text{Mode}=\text{Mean}-3\,(\text{Mean}-\text{Median})。$$

4. 試說平均數、中數及最高數之異同。

3. 試將下列例表 17 之材料求出：

(一)算術平均數。

(二)中數。

(三)最高數。

例表 17 假定之果數表

級距	級果數
1— 10	5
11— 20	10
21— 30	15
31— 40	20
41— 50	25
51— 60	30
61— 70	35
71— 80	30
81— 90	25
91—100	20
101—110	15
111—120	10
121—130	5

4. 將上列例表 17 之材料求出算術平均數、中數及最高數後，再與例表 16 之三種集中趨勢相比較，並說明其所以異同之理。

第三十章　變化 (Variability)

一　概論

現在我們將要討論統計學上另一根本問題。在前三章，我們已見到集中趨勢是 X 量上之一點，盡量表現其全部分配。集中趨勢有幾種不同之計算法。最普通者，卽我們已討論過的平均數、中數及最高數三種。如果我們欲描寫一簡略之分配，我們卽特別注重集中趨勢。例如我們討論一羣人之薪水，我們可從他們的薪水之集中趨勢得到些概念。如果他們的薪水每年之平均數是 $3000,那麽我們就知到他們每年的薪水有些是在 $3000 之上，有些是在 $3000 之下。所有這一羣之薪水的平均數則爲 $3000。但爲欲使這分配的簡單意義更完全，則計算散佈於平均數之上及其下之數究如何，乃爲必要。爲了這個目的，我們就要敍述些變化之計算了。事實上，變化之計算，卽表述集中趨勢之兩邊的一羣數目之散佈有若干遠。如果我們已知一羣數目之計算之集中趨勢及集中趨勢上下的數量散佈之程度，我們在這兩件事實中卽可得一數量之分配及其大小之正確概念。現在我們且來討論一羣數目的變化所有之幾種方法。在本章中及下二章中我們將逐一討論這四個方法。

1. 最大差 (Range)。

2. 平均差 (Mean deviation)。

3. 四分差 (Quartile deviation)。

4. 標準差 (Standard deviation)。

二　最大差之意義及求法

最大差——關係集中趨勢與變化，讓我們用兩短串數目來比較。

a.	5	10	15	20	25	30	35	40	45
b.	21	22	23	24	25	26	27	28	29

各串數目之平均數皆爲25，故在集中趨勢方面這兩串數目皆相等。第一串數目之散佈，則較第二串數目之散佈爲遠，這是表現於事實上者，即第一串數目之最大差爲 $45-5=40$。同時第二串數目之最大差則僅爲 $29-21=8$。最大差爲變化之一種計算。如果我們欲將這兩串數目描寫而不必仔細計算，我們即可供獻下列意義。

	集中趨數	變化
a 串數	Mean = 25	Range = 40
b 串數	Mean = 25	Range = 8

對於這兩件事實，在一瞬間，各串數皆可表現一極顯明之意義。我們以這兩串數之中心趨勢變化，即能見如30之數皆在各串數的平均數之上，但那數離a串數的平均數則相對的近，而於b串數的平均數則相對的遠。

用最大差來計算變化，其中有一嚴重的實際限制。故變化之計算，乃不得不採用他種計算法。最大差乃一不固定之計算，因牠僅依靠兩個極端的案件，即最高數與最低數。如果a串數及b串數表述心理測驗之成績，全組之最大差，將僅依靠兩個極端的案件。最大差並不受兩個極

端間之計算的變化之影響，如在下列解釋中即可看出。

c. 5 22 23 24 25 26 27 28 45

C串數與a串數有同一之最大差。但其數目除兩個孤立的極端案件以外，較之b串數不能有更散佈之情勢。

三 平均差之意義及求法

平均差——讓我們考慮另一串數目如下 x＝一串數目

4 7 9 10 11 11 12 13 13 14 15 17 20

d＝平均差

8 5 3 2 1 1 0 1 1 2 3 5 8

$\Sigma x=156$ Mean of $x=12$

$\Sigma d=40$ Mean of $d=3.08$

我們將上串數目由4至20列成秩序，則第一線上最大差爲16，而平均數爲12。在第二線上，我們將各數對本串數之平均數的差列出，符號暫且不管。如此，則15對平均數12之差爲3，20之差爲8，9之差爲3，12之差爲0，x的總數（即數量總數）爲156。於此我們得求出平均數如$\frac{\Sigma x}{n}=\frac{156}{13}=12$。d的總數（即差的總數）爲40。d即各數從平均數所得來之差。於此我們又可得求出平均差如$\frac{\Sigma x}{n}=\frac{40}{13}=3.08$。這平均差即所有差之平均數，且不管其符號爲如何。如果一串數之平均差是很大，較之一串數之平均差是很小，其所表示該串數對平均數之散漫性亦較大。平均差可從任何集中趨勢，如平均數，如中數等求得之。故學者須

常分辨一個所求之平均差究竟從何種集中趨勢之計算而來。在上列之解釋中，我們所求得之平均差，係從一串數之平均數而來。當一平均差係從列於級距中的一串數目所求得，我們可將其計算列入例表 18 然。

例表 18 平均差之計算表

級距 工資（元） 1	中點 m 2	級果數 f 3	級果數乘中點之積 mf 4	由中點至平均數之差 d 5	各差乘各該級距內級果數之積 fd 6
0－4.9	2.5	1	2.5	27.7	27.7
5－9.9	7.5	0	0	22.7	.0
10－14.9	12.5	1	12.5	17.7	17.7
15－19.9	17.5	16	280.0	12.7	203.2
20－24.9	22.5	11	247.5	7.7	84.7
25－29.9	27.5	32	880.0	2.7	86.4
30－34.9	32.5	21	682.5	2.3	48.3
35－39.9	37.5	34	1275.0	7.3	248.2
40－44.9	42.5	9	382.5	12.3	110.1
45－49.9	47.5	1	47.5	17.3	17.3
		$n=126$	$\Sigma mf=3810$		$\Sigma fd=843.6$

$$M=\frac{\Sigma mf}{n}=\frac{3810}{126}=30.2\text{元}$$

$$\text{Mean deviation}=\frac{\Sigma fd}{n}=\frac{843.6}{126}=6.7$$

這種計算最便利之方法莫如在計算機上計算之。如學者欲計算一案件甚多之平均差，而不用計算機，則節省勞力之法可列成一等分量如前第二十五章例表 8 之計算平均數然。

我們在前面已見到一個集中趨勢之計算是在 X 量上之一點。現在我們應該見到的就是變化之計算是由 X 量上單位中計算出來之距離。

四 結論

1. 變化之意義——一串數目之全部簡單的分配有二種，卽一爲集中趨勢，使所有數量之價值皆圍繞一中心而表現出其代表性之價值有如地球之向心力。而第二種則爲變化，牠是由數量價值之中心(平均數)所分化出來的差量，卽每一個體數目與全部代表性之平均數目相差之量有如地球之離心力。

2. 變化之種類：

(一)最大差。

(二)平均差。

(三)四分差(其意義與求法詳下第三十一章)。

(四)標準差(其意義與求法詳下第三十一章)。

3. 最大差之意義及求法——最大差卽一串數目中最大之數減去最小之數之差。

4 最大差之效用——最大差不能表示全部數目之整個變化，但可表示兩個極端數目(最大差與最小數)散漫的限制。

5. 平均差之意義——平均差卽每個個體數目對該串羣體數目之平均數所有之差。並將各差量相加，以案件之數目除之，所得之平均數，卽稱之爲平均差。

6. 平均差之求法；

(一)製定級距與其中點及前三行之級果數如以前所討論之平均數問題然。

(二)將級果數行之數相加，以決定案件之數 n。

(三)在次行記出級果數與該級距之中點相乘得出 Mf 之數。

(四)將 Mf 行之數相加，以決定級果數乘該級中點之總數 Σmf。

(五)從下列關係求出平均數：

$$\text{Mean} = \frac{\Sigma mf}{n}$$

(六)於次行列出中點對平均數之差 d。

(七)列出 fd 之積。

(八)將 fd 行之數相加以決定 Σfd。

(九)從下列關係計算平均差

$$\text{Mean deviation} = \frac{\Sigma fd}{n}。$$

7. 平均數之效用——可表示全部數量散漫性之普通趨勢，而最大差則表示全部數量兩端之極端趨勢。一個計算量之集中趨勢已明白，極端散漫趨勢亦明白，普通散漫趨勢亦已明白，則該計算量之全部分配，我們就可以得到一個很好的概念了。

五 問題

1. 將例表 2 之材料求出。

(一)男子年齡分配最大差。

(二)男子年齡分配之平均差。

2. 將例表 2 之材料求出。

(一)女子年齡分配之最大差。

(二)女子年齡分配之平均差。

3. 將男女年齡分配之最大差相比較。

4. 將男女年齡分配之平均差相比較。

第三十一章　四分差 (Quartile Deviation)

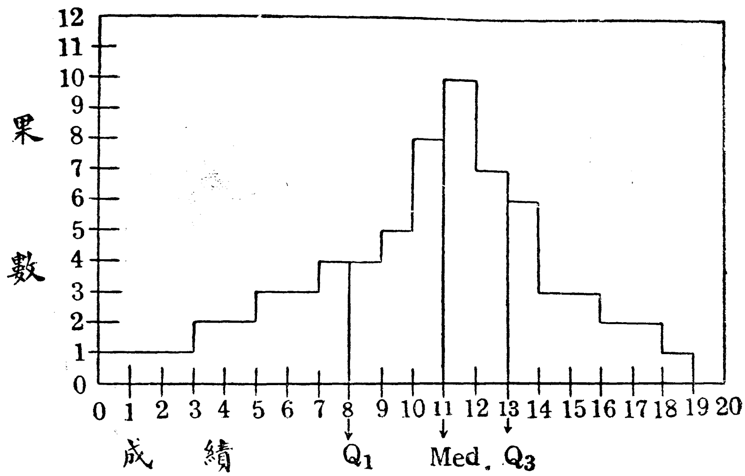
一　概論

在變化之計算中，我們業已討論了最大差與平均差。現在我們將要敍述變化之另一計算，而且牠也是最適用的一個，即四分差，或半個內部四分最大差，(Semi－Interquartile Range)。當我們檢驗一個果數分配，而欲知其對於集中趨勢之散漫程度，最迅速之方法，則爲確定最大差。如果最大差很大，則數量之散漫於集中趨勢之兩邊者必相當的大。因此，就可以說變化是很大。前面已說過用最大差以計算變化，未能視爲滿足。因牠完全僅是由兩個極端案件所決定，即最高數，與最低數。這兩個極端案件，或其中之一個，受任何波動之影響時，則全部分配的變化之計算亦將受其波動之影響。

在圖示 32 中，我們有 68 案件之一柱形圖，其中數在 11 點上因 34 案件，面積之一半是在其上，而另一半之面積則在其下。這圖示 32 中之最大差，則爲 19。替代那個方法作爲變化之計算，我們將要決定這最大差，牠是表示這組數目中間一半的散漫，即 34 案件中間的散漫。爲了這個目的，我們計算面積的四分之一，17 案件。從中點以上落置「上四等分位」(Upper quartile)，牠是照常用 Q_3 爲記號。圖示 32 中之上四等分位是在 X 量上之 13 點上。同樣的我們計算面積的四分之一，17 案件，從中數之下以置定下四等分位，(Lower quartile) 於 8 之上。

牠是照常寫作 Q_1。這中點則有時而非常時作爲第二四等分位，並以 Q_2 標記之。

圖示 32　四分差點圖



我們現在已將上柱形圖，分爲四個相等部份，即0－8，8－11，11－13，13－19。這四個部份之各部，皆包含 17 案件，這數量的中間一半是介於八點上之下四等分 Q_1 及 13 點上的上四等分 Q_3 之間。介於 Q_1 及 Q_3 之間的五個 X 量的單位之距離，稱爲四分最大差。牠是變化之計算而最常用者，最易決定，又最固定，不似總最大差之不固定，與不可恃。四分最大差由所有之計算量取定之，故不易受一二數之小波動所影響。

從中數至最低數之最大差爲 11－0＝11。從中數到最高數之最大差爲 19－11＝8。故這圖形是下傾，或負式的。這又可用事實表述，即下下四分最大差（Median-Q_1）是大于上四分最大差（Q_3-Median）。四等

分落置點之研究，不特表示變化或數量之散漫，且又可以表示相對的傾斜程度及其方向。

代替四分最大差用作變化之計算，最普通的，即以四分差特別用作變化之計算。牠是簡單的四分最大差之一半。圖示 32 中之四分差爲 2.5。這四分差有時稱爲「半個內部四分最大差」。

如果這分配是均勻的，非傾斜的，這上下四分最大差皆相等，Q_1 及 Q_3 於是對中數有同等之距離。在如此情形時，中數是在總最大差之中心。在如此分配中，上四分最大差，下四分最大差，及四分差，皆完全相等。

現在我們將要來計算這四分常數，以作另一果數分配。這圖示 32，是特意作來避免十進位，以免對四等分位解釋之含混。在實習方面，這四等分位很少落於整數之上，如圖示 32 然。四分點之計算法與前面之中點計算相似。在事實上，中數能夠作爲三個四分點，將全部分配成四個相等部份中之一點。

二 算計四等分位之方法

預備一材料紙如圖示 33。在第一行中記這級距，第二行中記這級果數。第三行記累積果數，第四行記各等分位與累積果數相遇逢時之差。將級果數相加以得案件之總數 n。在此圖解釋中，牠是 126。用四除之得 31.5 案件，即各個四等分中之案件數。

置定包括三個四分點之括弧，這是從每一端計算一個四等分爲 31.5；2×31.5=63，這個案件之數爲中數。又 3×31.5=94.5，爲其他之四等分中之案件數。

當這包括三個四分點之括弧已置定時．在這些等級距之內將級果數分之。使這分配成爲四個相等部份，如例表 20 然。

於是，將四分點落置於級距之中，如例表 20 中之計算所示。此等計算，根據於假定，設諸案件在一級距之中者是一致通過該級距而分配之。如此，則上四分點必與級距 30－35 之上端 35 接近，因其級果數 34 是分裂出來，故僅 21·5 案件還屬於頂頭四分部之 40 處。同時所餘之 12·5 案件則屬於次低之四分部 35 處。故我們從該級距頂點置定一級距之距離之上四分點 $\frac{21.5}{34}$ 我們遂得。

例表 19　四等分位計算表

級距（工資元）X 1	級果數 f 2	累積果數 (accumulated frequencies) 3		
0		0		$\frac{n}{4}=\frac{126}{4}=31.5$
	1			
5		1		
	0			
10		1		
	1			
15		2		31.5……第一四等分
	16			
20		18		
	11			
25		29	2.5	
	32		29.5	
30		61	2.0	
			19.0	31.5……第二四等分
	21			
35		82		
			12.5	
	34		21.5	31.5……第三四等分
40		116		
	9		10.0	
45		125		31.5……第四四等分
	1			
50		126		

$$下四等分位\ Q_1=25+\frac{2.5\times5}{32}=25.4$$

$$或\ Q_1=30-\frac{29.5\times5}{32}=25.4$$

$$中數\ Q_2=30+\frac{2\times5}{21}=30.48$$

$$或\ Q_2=35-\frac{19\times5}{21}=30.48$$

$$上四等分位\ Q_3=35+\frac{12.5\times5}{34}=36.8$$

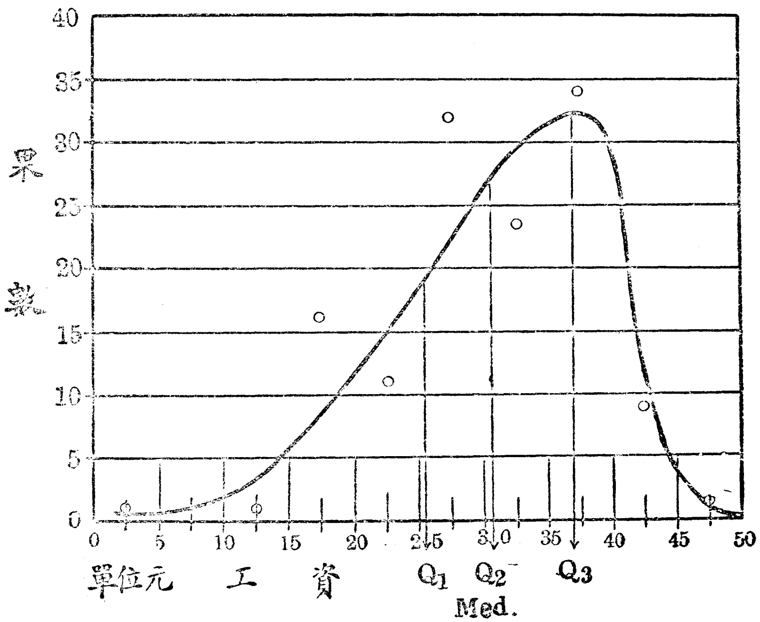
$$或\ Q_3=40-\frac{21.5\times5}{34}=36.8$$

從上表例表 20 可知第一四等分位 31.5，是在累積果數 29 之上，61 之下。卽 Q_1（下四等分位）在級距 25－30 之間。卽該級距級果數 32 中數一部份是少於第一四等分位 31.5 之數，其所少者爲 31.5－29 ＝ 2.5。又一部分則係多於第一四等分位 31.5 之數，所多之數卽由 32 中減去所應補足 29 至 31.5 之數 2.5，卽 32－2.5＝29.5，或 61－31.5＝29.5，其理由相同。因 61 這個累積果數係 29＋32 ＝ 61 而來。故 32 爲 61 與 29 相差之數。卽 32 是介於 29 與 61 之間的差。其差率爲 $\frac{1}{32}=$ 0.03125。現在 32 中之應補足第一四等分 31.5 者爲 2.5。以 2.5× 0.03125（級距 25－30 間之差率）＝0.078125。此卽累積果數 29 至 31.5 這第一四等分位所差之數。但這級距單位爲 5，故又以 0.078125×5 ＝0.4。因 0.078125 這些案件是表示級距 25－30 間某一個單位價值之數，實則應表示 25－30 間五個單位全部價值之數，故以 5 乘之，而

得 0.4。然後再以本級距之低限 25 加這所少之差數 0.4 遂得 25+0.4 =25.4 。其所以須用低級限 25 相加者，因低級限所在之地卽爲對眞正的第一四等分所在之地（卽 31.5 所在之地）相差之距離。今 25+0.4=25.4，此卽眞正的第一四等分位 31.5 所在之地。同一理由，本級果數之差率 0.03125×29.5×5=4.6，卽該級距之高限 30 對第一四等分位 31.5 所在地多餘之數，故以 30−4.6=25.4，乃第一四等分 31.5 所在之地位之價值，餘類推。

圖示33係一略加修飾之果數弧線四分差點圖。所謂略加修飾者，卽非用精確之計算以先求出各級果數之平衡點，然後再將此等平衡點連

圖示 33　果數弧線四分差點圖（根據圖示 1 之材料）



結而成爲一精確之果數弧線。略加修飾之意，卽用觀查估料各級果數之平衡點，而隨手穿過這些估料之平衡作一弧線，此弧線乃穿過各級果數〔小圈(0)〕之間。照例表 20 之計算，下四等分位 $Q_1=25.4$，卽在 X 軸上25.4 處置定 Q_1，並於此點作一垂直線向上截至弧線。中數或 $Q_2=30.5$，亦在 X 軸上 30.5 處，置定 Q_2，並於此點引一垂直線向上截至弧線上。上四等分位$Q_3=36.8$，亦在 X 軸上 36.8 處置定 Q_3，並於此點引一垂直線向上截至弧線上，然後觀查 X 量上$O-Q_1$，Q_1-Q_2，Q_2-Q_3，Q_3-50 各部份之間皆各表示 31 5 案件，卽成四個相等部份。再觀查各部份之距離及其趨勢，遂可知各部份各個體相差之程度。趨勢向左角或零(0)端或低端傾斜而延長者爲負。向右角或高端傾斜而延長者爲正。檢閱圖示 33 ，$O-Q_1$之間距離最長，故其個體案件在價值上之分配最散漫。而又向低端傾斜，故表示其爲負性，卽在平均數之下。上表(例表 20)第一行爲級距(工資)。第二行爲級果數。第三行爲累積果數，卽由最低之級果數挨次與較高之級果數一一相加，最後結果須與案件總數相符合。第四行爲各四等分與累積果數之差。例如 61 這個累積果數，較之一個四等分多出 29.5，(卽 $61-31.5=29.5$) 而較之兩個四等分則又少 2，(卽 $31.5\times2-61=2$)。而 82 這個累積果數，較之二個四等分多出 19,(卽 $82-〔31.5\times2〕=19$)，而較之三個四等分則又少 12.5，(卽 $31.5\times3-82=12.5$)。又 116 這個累積果數較之三個四等分多出 21.5，(卽 $116-〔31.5\times3〕=21.5$)，而較之四個四等分則又少 10，(卽 $31.5\times4-116=10$)。

現在我們將第一四等分或下四等分所在的級距之高邊，減去本級

距的累積果數所多出之數，卽得眞正的下四等分所在之地位之數。同一理由，中數所在之級距的高邊，減去本級距的累積果數的多餘之數，卽得眞正的中數所在地位之數。最後上四等分之求法亦同，亦卽將上四等分所在級距之高邊減去本級距的累積果數的多餘之數，乃得眞正的上四等分所在地位之數。至於爲何要用各本級果數去除這多餘的差數，然後又用級距之單位乘之？例如下四等分位爲

$Q_1 = 30 - \dfrac{29.5 \times 5}{32} = 25.4$。這除數 32 是下四等分位所在地之級距 25－30 之級果數。這 32 是代表 32 個案件。而我們所求之上四等分位是在某一個案件之上，故所求者爲某一個案件，而非 32 個案件。以 32 除這多餘之累積果數 29.5 卽係求每個案件所多餘之數。但這個多餘之數。是在每五爲單位之級距內的一個數。而非單獨的一個數，故又須以 5 乘之，始能代表本級距全部之數。因各級果數乃代表各級距全部之數，而非各該級距數中某一個體之數。如此所求得之差，乃由各假定之四等分位到眞的四等分位之差。以高邊減去此差，卽得眞正的四等分位之數。中數與上四等分位之求法，理由均相同。

$$上四等分位 = 40 - \frac{21.5 \times 5}{34} = 36.8。$$

其他四等分點可用同一理由置定。

業已置定三個四等分點後，我們直接從各點之定義決定四分常數如下列之計算然：

$$四分最大差 = Q_3 - Q_1 = 36.8 - 25.4 = 11.4。$$

$$四分差=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{36.8-25.4}{2}=\frac{11.4}{2}=5.7。$$

$$上四分最大差\ Q_3-Q_2=36.8-30.48=6.32。$$

$$下四分最大差\ Q_2-Q_1=30.5-25.4=5.1。$$

我們可將四等分位之價值總結於下:

1. 三個四等分點將這分配分成四個相等部份。每一部份各有相等之案件數,即總分配的四分之一。這柱形圖之四個面積,由三個四等分點分成者皆相等,如圖示33。

2. 這分配之所有數量寫在分開的紙片上而置於一帽中,將任何數從帽中取出,這數必落於上下四等分之間。這是很合理由的,因紙片上所載之數目,供我們拾取之機會完全相等,即一半數是在上下四等分點之間,而另一半則在四等分點之上或下。

3. 任何四分常數可顯示數量之散漫程度或集中趨勢之集中等合宜之觀念。

三 結論

1. 四等分位之意義——四等分位屬於變化計算之一種,即將全部案件分爲四個相等部份,$\frac{n}{4}$,而求其各等分點之落置地位之數之謂。

2. 四等分位種類:

(一)上四等分位——即四等分各級距較中數級距爲高的一部。

(二)中數——即四等分的中點。

(三)下四等分位——即四等分各級距較中數級距爲低的一部。

3. 四等分位之求法：

(一)根據一果數表，而求其累積果數。

(二)將全部案件分成四等分，即$\frac{n}{4}$，並以括弧括其各部，再求各個四等分與累積果數相遇時之差。

(三)級距秩序，可由上至下，即由大至小，以便計算上四等分位、中數及下四等分位等等。

(四)各四等分位之符號：

a. 上四等分位以 Q_3 記之。

b. 中數以Q_2記之。

c. 下四等分位以 Q_1 記之。

(五)求各四等分位之公式：

$$(1)\ Q_3=\text{本級距之高邊減}\frac{(3\times\frac{n}{4}\text{減本級距以上之所有累積果數高出之數})\text{乘級距單位數}}{\text{本級距之級果數}}$$

$$\text{或}\ Q_3=\text{本級距之低邊加}\frac{(3\times\frac{n}{4}\text{減本級距以上之所有累積果數不足之數})\text{乘級距單位數}}{\text{本級距之級果數}}$$

$$(2)\ Q_2=\text{本級距之高邊減}\frac{(2\times\frac{n}{4}\text{減本級距以上之所有累積果數多出之數})\text{乘級距單位數}}{\text{本級距之級果數}}$$

$$\text{或}\ Q_2=\text{本級距之低邊加}\frac{(2\times\frac{n}{4}\text{減本級距以上之所有累積果數不足之數})\text{乘級距單位數}}{\text{本級距之級果數}}$$

$$(3)\ Q_1=\text{本級距之高邊減}\frac{(\frac{n}{4}\text{減本級距以上之所有累積果數多出之數})\text{乘級距單位數}}{\text{本級距之級果數}}$$

$$\text{或}\ Q_1=\text{本級距之低邊加}\frac{(\frac{n}{4}\text{減本級距以上之所有累積果數不足之數})\text{乘級距單位數}}{\text{本級距之級果數}}$$

（附註所謂本級距即 Q_3, Q_2, Q_1 各個所在之各該級距，如 Q_3 所在之級距爲 Q_3 之本級距等等）。

4. 四等分位之效用：

a. 可求四分常數，即下列四種結果：

（一）可求四分最大差，其結果爲 Q_3-Q_1

（二）可求四分差，其結果爲 $\frac{Q_3-Q_1}{2}$

（三）可求上四分最大差，其結果爲 Q_3-Q_2

（四）可求下四分最大差，其結果爲 Q_2-Q_1

b. 可表示分配趨勢之圓滿性：

（一）散漫之趨勢。

（二）集中之趨勢。

c. 四分差之八倍等於全部價值高低限之間之數。

四 問題

下列例表 19，是表示兩羣人在同一智慧測驗的果數分配。這兩羣人以 A 及 B 分記之。

1. 計算各人之中數，上四分最大差，下四分最大差，及四分差，並將此兩羣人在四分常數之基礎上作一比較。

2. 在同圖中，用多角形圖，作兩個分配，並於圖中敍明四分常數。

例表 20 A, B 兩羣人同一智慧測驗之成績表

級距	A 羣果數	B 羣果數
20— 29	0	0
30— 39	2	0
40— 49	4	2
50— 59	4	4
60— 69	6	8
70— 79	10	12
80— 89	16	16
90— 99	14	8
100—109	10	6
110—119	8	4
120—129	2	4
130—139	3	4
140—149	0	4
150—159	0	2
160—169	0	2
170—179	0	2
180—189	0	0

第三十二章　標準差(Standard Deviation)

一　概論

現在我們將要討論最常用之變化計算，卽標準差是了。我們在前面已見到這平均差是所有各個案件之價值對平均數之差量的平均數，而不必注意其標記。這標準差，亦有同一之漸次大次序。牠與平均差之不同者，簡言之，卽所有差量在總計之前皆自乘，而其總數則又以案件之數除之，如平均差然。得到商之後，再開去方根，卽得標準差，最後必要步驟宜注意的一點，卽對於原有各差量列成漸次大秩序，可減少其變化之計算。

標準差常以 σ (Sigma) 符號表示之，其所呈現之最簡單方式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

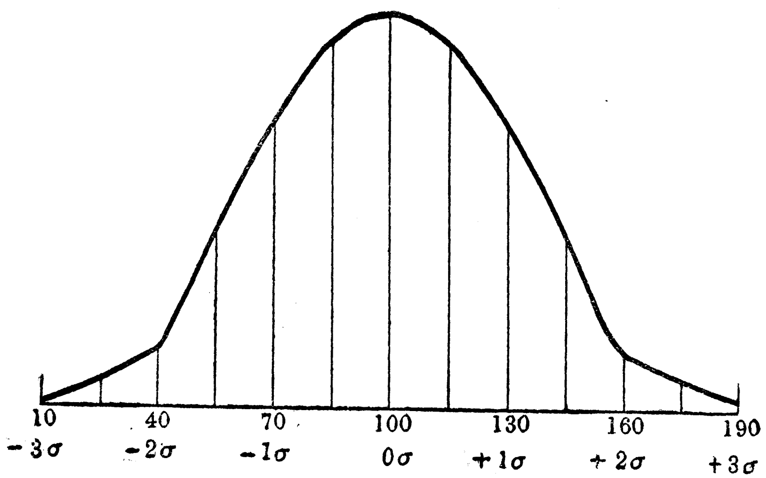
在此方式之中，d 代表差量，(卽各個體案件之價值與該串數的平均數之差。而 Σd^2 則代表所有差量之自乘後相加之總數。標準差之便利，在其較之其他變化之計算能以有較好之代數公式處理之。在圖示 34 中，我們有一果數弧線，及其平均數在 100 上，與一 30 之標準差。這就是說大約有三分之二的案件落在 70 與 130 之間。這標準差，便是所有變化之計算所必有之距離。

在圖示 34 中，我們已製定原有 X 量及其相應的標準差。70 這個

數目能標作 -1σ。130 能夠標作 $+1\sigma$。115 是 $+0\cdot5\sigma$,40 是 -2σ。餘類推。

前已言之，我們對果數分配兩件有興趣之根本事件，即集中趨勢，牠是 X 量上之一點；及變化，牠是 X 量上之一距離。集中趨勢表示數

圖示34　在底邊上表示標準差作爲一計算單位之果數弧線圖



目在 X 量上之普通落置點，即牠所表示者爲若干數目之最大差量圍繞於其上或下，如每月之工資平均爲 \$100 或 \$200，則可知該羣工人之工資每月不外在 \$100 或 \$200 上下。這變化則表示該羣工人之工資，對於這集中趨勢之平均數，散漫究有若干遠，即相差究有若干遠。如果考慮一單數，如圖示 34 中所分配之 160。我們即須對於分配上之集中趨勢及變化二者特別區示，以便對這 160 的數目與其同人工資的關係，得一

很好觀念。兩件事連結起來貫注到這個 160 單數之上，以 $+2\sigma$ 標記之。事實上，這符號是正的，因牠所代表之數在平均數之上。而且在事實上，當牠是表示 2σ 時，牠是遠在於分配的平均數之上。所有均勻分配之總最大差，共呈現爲六個標準差，三正而三負。理論方面，平均數分配之上下，可無窮境，但在均勻面積上，百分之九十九的案件，皆在 $+3\sigma$ 與 -3σ 之限制之間。

當兩條果數弧線，用標準差以比較其變化之時，一個較大之標準差較之較小的標準差之變化爲大。標準差之價値，將在普通之果數弧線上，作更詳細之討論。

標準差在統計工作上之用途極大，而其計算之方法則有數種.

二　計算標準差之方法

1. 最簡單之方法。

2. 長法。

3 用級距及一假定原點，——或稱短法。

4. 用原有材料之各個體價值。

計算方法之選定可由學者個人之便利而取決。如用便利之計算機或將所得材料另行佈置。

1. 最簡單之方法

預備一材料紙，第一行爲案件之次序，以＃表示之。第二行爲各案件之價値，以 X 表示之。第三行爲各案件的價値與平均數之差，以 d 表示之。第四行爲各差之自乘數以 d^2 表示之。案件總數，$n=29$。價値

總數，$\Sigma X=166$。先求出平均數 $M=\frac{\Sigma X}{n}=\frac{166}{n}=\frac{166}{29}=5.72$。再將各案件之價值與平均數相減，而得其差。如第一項之數 5 與平均數5.72相減，而得 0.7。餘類推，各差之自乘得 d^2。如第一項之差 0.7 之自乘得 0.49。餘類推。將此行所有各差之自乘數相加，$\Sigma d^2=147.81$。而標準差則等於案件數除各差自乘之積的總數，並開去其方根，即

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}=\sqrt{\frac{147.81}{29}}=2.26。$$

如案件非個體，而為中點時，續例表 21 之方法即適用了。續例表 21 之方法與例表 21 之方法相同。不過一則為個體案件，一則為中點所代表之案件，故其案件之總數不同。因個體案件每次只有一案件，而中點案件則每中點包括若干案件，故個體案件可以次序例其案件總數，而中點案件則不能，必須依據原有之案件。茲特舉其方法如下：（見例表 21）

2. 長法

在續例表例 21 中，是不用任何簡縮法，以解釋標準差之計算方法。在第一行中，以數目次序列所有之觀查或工資之中點。（如係各個體案件，則列其數目次序，而不必列為中點之次序）。在第二行中，將級果數列入，求案件總數，在此次例解中者為 126。第三行列各中點與平均數之差 第四行列各差自乘之數。第五行列各差自乘數乘各該項級果數之積。此行總數，在此次例解中者，$\Sigma fx^2=7129.54$。這個總數，再以案件總數 126 除之，所得之商，再去其自乘之方根，遂得 7.5。此數即所求之標準差，此種方法，在個體價值甚大時，即成笨重之方法，非有計算機幫

助，則不免煩難。

例表21 不用級距計算標準差之表法（如係個體案件則用此法）

# 1	X 2	d 3	d^2 4
1	5	0.7	0.49
2	7	1.3	1.69
3	3	2.7	7.29
4	6	0.3	0.09
5	7	1.3	1.69
6	4	1.7	2.89
7	1	4.7	22.09
8	5	0.7	0.49
9	6	0.3	0.09
10	4	1.7	2.89
11	5	0.7	0.49
12	7	1.3	1.69
13	2	3.7	13.69
14	6	0.3	0.09
15	6	0.3	0.09
16	3	2.7	7.29
17	10	4.3	18.49
18	5	0.7	0.49
19	4	1.7	1.69
20	5	0.7	0.49
21	7	1.3	1.69
22	12	6.3	39.69
23	8	2.3	5.29
24	4	1.7	2.89
25	7	1.3	1.69
26	6	0.3	0.09
27	5	0.7	0.49
28	8	2.3	5.29
29	8	2.3	5.29

$$\text{Mean, } M=\frac{\Sigma X}{n}=\frac{166}{29}=5.72$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{147.81}{29}}=2.26$$

$\Sigma X=166$

續例表 21　不用級距計算標準差之法——此法又名長法

(根據例表 7 之材料 M=30.2元)

中點 m 1	級果數 f 2	各中點與平均數之差 x 3	各差之自乘數 x^2 4	各差自乘數乘級果數之積 fx^2 5
2.5	1	—27.7	767.29	767.29
7.5	0	—22.7	515.29	0
12.5	1	—17.7	313.29	313.29
17.5	16	—12.7	161.29	2580.64
22.5	11	—7.7	59.29	652.19
27.5	32	—2.7	7.29	233.28
32.5	21	2.3	5.29	111.09
37.5	34	7.3	53.29	1811.86
42.5	9	12.3	151.29	1361.61
47.5	1	17.3	299.29	299.29

$n=126$　　　　$\Sigma fx^2=7129.54$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n}}=\sqrt{\frac{7129.54}{126}}=7.5$$

3. 以級距及假定原點計算標準差之法：

在例表 22 之中，另一計算標準差之法，是解釋了。牠較之其他方法，或許算是最常用之方法。在第一行中，將各級距之中點列入，在第二行中，將相應之級果數列入。級果數行之總數爲案件之總數 n，其在此次例解中者爲 126。

第二步，在分配量上之中部最大差之某處，假設一假定之原點。被取爲假定原點之該級距作爲零(0)。牠是可由檢閱而揣度的，與平均數所在最相近之處。假定原點可落置於計算量上之任何處，甚至最大差之

外，無論如何，亦不會影響到計算上的算術之正確性。但包括在計算中之數目，宜使其在平均數上或最接近平均數處，以置定原點。如此，則於算術工作上，方便得多。在例表 22 中之解釋，我們已定中點 32.5 行之數爲零(0)。故例表 22 卽是用假定平均數或假定原點計算標準差之法(與續例表 21 之材料相同)。

假定平均數 ＝32.5

例 表 22 計算標準差之短法表

中點 m 1	級果數 f 2	各中點與假定平均數之差 d 3	負差乘級果數之積 −fd −4	正差乘級果數之積 +fd 5	各差之自乘數 fd² 6
2.5	1	−6	−6		36
7.5	0	−5	−0		0
12.5	1	−4	−4		16
17.5	16	−3	−48		144
22.5	11	−2	−22		44
27.5	32	−1	−32		32
32.5	21	0	−116	34	34
37.5	34	+1		18	36
42.5	9	+2		5	3
47.5	1	+3		+55	357

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}-c^2}\times I\text{(級距單位)}$$

$$c=\frac{\Sigma fd}{n}=\frac{-61}{126}=-0.5$$

$$c^2=0.25$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}-c^2}\times I$$

$$=\sqrt{\frac{357}{126}-0.25}\times 5=\sqrt{2.5}\times 5=1.5\times 5=7.5$$

這假定平均數在第三行 d 行中以零 (0) 標記之。d 行之其他地方，則從零(0)級距之上下相反兩方向標記以 1,2,3,4 等等數字。故這差量遂由中點項中之數量而計算之，而非用原有計算量之單位。中點之高於零(0)項者，記以正差之符號，中點之低於零(0)項者，標以負差之符號，如例表 22 之第三行 d 行然。

在第四第五行的 fd 行，包括 f 行與 d 行相乘之積。在 fd 行負數的總數，寫作 $-\Sigma fd$，其在此次例解中者爲 -116。在 fd 行，正的總數，寫作 $+\Sigma fd$ 其在此次例解中者爲 55。這正負兩個數間之差爲 Σfd，其在此次例解中者爲 -61。

在 fd^2 行，我們有 d 乘 fd 之和，這一行之總數爲 Σfd^2，其在此次例解中者爲 357。

在有假定原點計算之計算時，改正數 C 是必需的。牠是 $\frac{\Sigma fd}{n}$，如例表 22 所示。

在此次例解中，標準差是乘級距之單位數。但我們須注意者，此次例解之各級距，包含計算量之單位爲 5，故標準差是 1.5×5，(級距單位)即得 7.5 之計算單位。

4. 以原有數目之數量計算標準差之法：

在例表 23 中，我們有一用原有數目之數量計算標準差之方法。如此，則可避免用力於差量及假定原點之改正數，這個方法，最初看來，似乎簡單，但僅當所討論之數量很小時，始能相當的節省勞力。甚至在那

樣情形之下,學者必須留心對有意義之數字的正確數目,求出計算,以保障在這個方式之徹底的兩個相對大的數目之間,得到相對小的差點之合理的正確。

在第一行中,記述觀查或成績之數目次序。在此次例解中有 29 案件。在第二行中,將成績列入,其總數為 166。在第三行中,將數量自乘之數列入,其總數為 1098。其餘計算,可在例表 21 中見之。

普通說來,計算標準差之第三法(短法)所費之勞力為最少。

例 表 23 以原有數目計算標準差之表

#	X	X^2
1	5	25
2	7	49
3	3	9
4	6	36
5	7	49
6	4	16
7	1	1
8	5	25
9	6	36
10	4	16
11	5	25
12	7	49
13	2	4
14	6	36
15	6	36
16	3	9
17	10	100
18	5	25
19	4	16
20	5	25
21	7	49
22	12	144
23	8	64
24	4	16
25	7	49
26	6	36
27	5	25
28	8	64
29	8	64

$$\Sigma X = 166$$

$$n = 29$$

$$M = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{166}{29} = 5.72$$

$$M^2 = 32.7$$

$$\Sigma X^2 = 1098$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n} - M^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1098}{29} - 32.7}$$

$$= \sqrt{5.14}$$

$$= 2.26$$

$\Sigma X^2 = 1098$

計算標準差採用第三法的方式，與採用第一，二法之方式，得同一之結果。其相等可表述於下：

一串數目任何特別數 X，與平均數 M，之差 d，為：

$$d = X - M$$

自乘，我們得：

$$d^2 = X^2 - 2MX + M^2$$

故其總數：

$$\Sigma d^2 = \Sigma X^2 - 2M\Sigma X + nM^2$$

以 n 除之：

$$\frac{\Sigma d^2}{n} = \frac{\Sigma X^2}{n} - 2M\frac{\Sigma X}{n} + M^2$$

$$= \frac{\Sigma X^2}{n} - 2M^2 + M^2$$

$$= \frac{\Sigma X^2}{n} - M^2$$

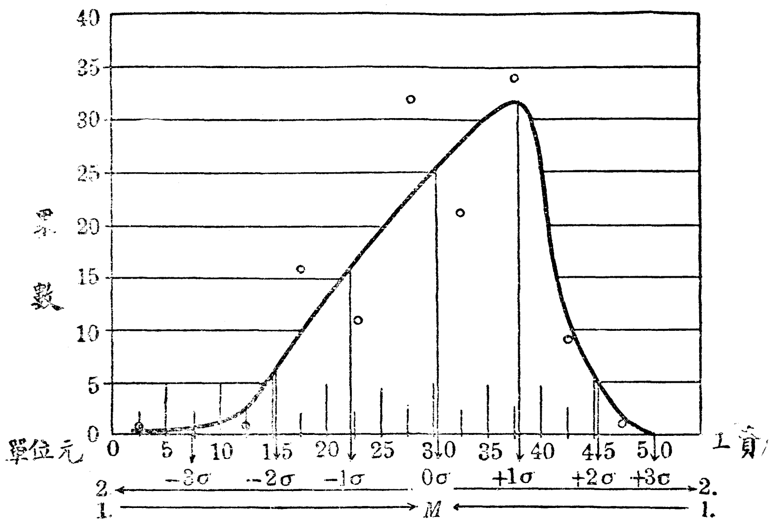
$$\text{故 } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - M^2}$$

下圖（圖示 35）為一果數弧線之標準差圖示法。先尋出平均數，其在此次例解中者為 30.2。在 X 量上 30.2 處置定此平均數。再查，標準差 $=7.5$。以 $30.2+7.5=37.7$ 為 $+1\sigma$ 所在地。即在 X 量上 37.7 處置

定 $+1\sigma$。再加 7.5，即 $37.7+7.5=45.2$，或 $30.2+7.5\times2=30.2+15=45.2$，爲 $+2\sigma$ 所在地，即於 X 量上 45.2 處置定 $+2\sigma$。再加 7.5 即 $45.2+7.5=52.7$ 或 $30.2+7.5\times3=30.2+22.5=52.7$，爲 $+3\sigma$ 所在之地，即於 X 量上 52.7 處置定 $+3\sigma$。在負的方向亦同此理由。即用平均數 $30.2-7.5=22.7$，爲 -1σ 所在之地，即在 X 量上 22.7 處置定 -1σ。再減去 7.5，即 $22.7-7.5=15.2$，或 $30.2-7.5\times2=30.2-15=15.2$，爲 -2σ 所在之地，即在X量上 15.2 處置定 -2σ。再減去 7.5，即 $15.2-7.5=7.7$ 或 $30.2-7.5\times3=30.2-22.5=7.7$，爲 -3σ 所在之地，並於 X 量上 7.7 處置定 -3σ。然後檢閱圖示，-1σ 至 $+1\sigma$ 之間的案件數爲案件總數之三分之二，其餘 -1σ 至 0 及 $+1\sigma$ 至最高級限之案件數爲案件總數之三分之一。在各個體案件之價值分配極均勻時，這三負而三正的六個標準差應在 X 量上最低級限與最高級限之間。又計算者對平均數及標準差本身計算時之小數取舍，各有不同，因之各人所得之標準差結果亦不免小異。但主要點則在表示 X 量爲三正而三負的六個標準差。各差間之距離相等。而各差間所包括之案件數則各有不同。大約百分之九十九的案件是在三正而三負的六個標準差之間。而三分之二的案件則在 $+1\sigma$——-1σ 之間。其餘三分之一的案件則散佈在 $+1\sigma$ 及 -1σ 之外。又觀其散佈線之長短亦可表示各個體案件分配之參差。最參差者，散佈線最長。較整齊者散佈線較短，這是在圖示 35 中可由檢閱而知的。

圖示 35　果數弧線準準差圖示法

（根據圖示 1 之材料）



1. 代表集中趨勢
2. 代表變化趨勢

三　結論

1 標準差之意義——標準差是最常用的變化之計算。牠是將一分配量分成六等分，而各標準差則居其一。在平均數以上者爲三個正的標準差，在平均數之下者爲三個負的標準差。大約一分配量上的百分之九十九的案件不能逃出這三正三負的標準差之限制之外。而三分之二的案件則又在中央標準差 -1σ 及 $+1\sigma$ 之間。故牠在變化之計算上有最普遍性，而其方法又爲極容易極正確之代數公式，故稱爲標準差。

2．標準差之計算法：

(一)根據一果數表或原有材料表，將其列成數目之秩序。

(二)採取下列方式。

(1)最簡單而不用級距者爲$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$

(2)長法$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n}}$

(3)短法或有級距及假定原點者$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}-c^2}\times I$

(三)用原有數目之價值爲 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}-M^2}$

上列方式中符號之意義：

(一) σ 代表標準差。

(二) n 代表案件數。

(三) d 代表差量(各數目價値與平均數之差)。

(四) Σd^2 代表各差量自乘後相加之總數。

(五) c 代表改正數。而 c^2 則代表改正數自乘之數。

(六) I 代表級距單位數。

(七) Σfx^2 代表各差自乘後，再乘各項級果數，相加之總數。

(八) Σx^2 代表各數量自乘後相加之總數。

(九) M^2 代表平均數自乘之數。

3. 標準差之效用：

(一)爲計算變化最普通最容易最正式最完備之方法。

(二)可表示集中趨勢之平均數所在地。

(三)可表示集中趨勢及變化之相互關係。此二者爲分配之根本條件。

(四)所有各案件之價值的分配，有百分之九十九，是在六個標準差(三正而三負)之中。而三分之二的案件數則又在 -1σ 及 $+1\sigma$ 之間。

(五)標準差是將所有散漫性之分配歸納成六部(三負而三正)，故爲最細密最均勻的散漫性之分配。

四 問題

1. 試將例表 17 之材料求出：

(一)最大差。

(二)四分差。

(三)平均差。

(四)標準差。

a. 以長法求之。

b. 以短法求之。

2. 試將例表 17 之材料所求得之各差，與例表 1 之材料所求得之各差相比較，有何異同？並說明其所以異同之理。

第三十三章　百分等次(Percentile Ranks)

一　概論

將一羣體材料中之個體數目與其他各數目之地位關係，加以說明，這是有些時候很有價值之事。其方法則以等次排列之。如此，則當一團體有 30 人時，某人之佔最高地位者，則列爲 30，而最低地位者則列爲 1。

如果有人告訴我們，某人之等次爲 21。除非我們知到該團體之個體數目時，我們就不知到某人等次 21 爲如何？是高？是平均數？或是低？如果某人在一 25 人之團體中，其等次 21，則相對的高。如果他在 700 人之團體中，其等次 21，則甚低。當表示一個人之絕對等次時，學者必須呈述該團體之個體數目，而某人之所比較者爲誰？一團體中，個體數目之絕對地位，卽是當該團體之所有數目已經從最小而至最大之次序列妥後所在的等次的數目次序。某人有最高數目之次序，卽列爲最高之等次。在這種意義之中，這絕對等次的表示，與普通習慣所稱最好者爲第一之意義不同。統計術語上的(1)卽是最低等次之意義。不論該工資之意義爲如何。爲欲避免以等次呈述案件數目之必要而包含於某人之相對地位之表現時，學者須將絕對等次呈述於百分等次之名目中。在如此之情形時，如果某團體有 100人，則可呈述該團體某人應有之等次，如果某團體僅有 50人，這中間一人的絕對等次爲 25。但其百分等次則

爲 50 卽$\frac{25}{50}=\frac{50}{100}$。百分等次之計算則以其所表示在某羣之百分數而列於區示的百分之下者。某人有 80 之百分等次。超過某羣之$\frac{80}{100}$，而低於某羣之$\frac{20}{100}$。這中數常爲這$\frac{50}{100}$的數。

這上四等分位常爲$\frac{75}{100}$的案件所在地之價值，下四等分位常爲$\frac{25}{100}$之案件所在地之價值。

當幾個個體案件有同一之價值時，關於他們之等次則可作如此之假定。試以下列工資考慮十個個體。

個　　體	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
每星期工資（元）	20	25	25	30	42	50	58	58	70	80

此等工資是列成由最低者至最高者之次序。現在如果我們要將各個體及其工資列成絕對等次之敍述，我們遂有下列之形式。

個　　體	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
工 資（元	20	25	25	30	42	50	58	58	70	80
絕對等次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

但 B 與 C 有同樣工資，且在結果上他們應有同一之等次，以便敍述他們在該團體中之平允的相對地位，而便與該團體中之各數目相比較。這種辦法，惟有求到兩個相同數目之中數等次，以作同一之等次。這絕對等次之修正敍述遂如下：

個體	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
工資（元）	20	25	25	30	42	50	58	58	70	80
絕對等次	1	2.5,	2.5	4	5	6	7.5,	7.5	9	10

在如此情形中，B 與 C 有同樣工資 25，便列爲同一之絕對等次卽 2.5。且 G，H，二個亦有同樣工資 58，亦列作同一之絕對等次，卽 7.5。等次之總數爲 10，因該團體中有十個個體。無個體列成 2 與 3 及 7 與 8 之等次。這是跳過了，以便使相等工資之組成平衡。

關於百分等次亦可作同樣之假定。假設一百人從最小者至最大者列成秩序，且其中有 25 個最高之個體有同一之工資。當這 25 人中之兩個有同樣最高之工資，而將其一列爲$\frac{76}{100}$，另一個列爲$\frac{100}{100}$，則爲最不公平之事。在如此情形時，所有這 25 人皆應列爲同一之等次，卽 87.5。這是該團體有最高同樣工資之 25 人的中數等次。在分配之中部最大差，及在低端等之相等工資的各小組，亦可作同一之假定。結果上，這便可能以標定百分等次。在這樣的辦法中，卽無個體可得 100 的百分，雖其中有幾個個體或許能夠得到這樣的最高工資。

二　百分等次之計算法

在例表 24 中，我們有一美國某造鞋工廠每星期之工資表的百分等次之計算法。

在例表 24 中。第一行列級距之低邊，第二行列級距之高邊。第一行級距之低邊等於較低一級距之高邊。第二行級距之高邊，等於第一行較

高一級距之低邊。例如 5 爲 0－5 級距之高邊，同時又爲 5－10 級距之低邊。餘類推。第三行列中點，其價值爲$\frac{\text{級距高邊加級距低邊}}{2}$。第四行列級果數，其總數卽案件總數 n。在此次例解中者爲 126。第五行列百分率之低限，卽較低的一級果數所佔之百分數。例如 0－5 這個級距間之級果數爲 1，其較低的級果數爲零(0)故無百分率。而本級果數 1，則列爲本級距 0－5 之高限。其次將最低級距之級果數逐次相加，本級距之累積果數的百分數，則列爲本級距之百分位高限。而較低一級距百分位之高限則又爲本級距百分位之低限。本級距百分位之高限則又列爲較高一級距之百分位的低限。如此，級果數挨次累積相加，而百分率遂亦隨同累積相加。至最後，則等於 1。百分位之中點亦卽$\frac{\text{低限百分位數加高限百分位數}}{2}$，則列於第七行之中，與各該項之百分位低限及高限相對照。第八行列各級果數所佔之百分數。卽各級果數的百分數爲各該級果數乘$\frac{1}{n}$。或簡單的辦法，卽以案件總數除各該級果數，卽得各該級果數之百分數。故$\left(\text{f 的百分數}=\frac{1}{n}f=\frac{f}{n}\right)$。或 X 的百分數$=\frac{1}{n}X=\frac{X}{n}$。因$\frac{1}{n}$爲百分率。如欲知 X 爲百分之幾，卽 X 的價值可當 n 分之幾的價值，故以$\frac{1}{n}$乘之，卽$\frac{X}{n}$。

三　百分等次表列法

各累積果數的百分數，均求出後，列於例表 24 之第七行。再製成 X

軸及 Y 軸，取定適合之級距及相應的價值之等分。將每一累積果數之百分數。列於各該級距內之中點上，其高度則與 Y 軸相應之量相等。例如 0－5 這級距之百分中點爲 0.00395，即於這級距 0－5 之中點上與 Y 軸 0.395% 相應處記一點。20－25 這級距之累積百分數中點爲 18.25%，即在這級距 20－25 之中點上與 Y 軸 18.25 相應處記一點。每一累積果數之百分數皆照此辦法，直至完畢爲止。最後之累積果數，則爲 100%。然後將各點連結成爲一光滑之弧線，即百分累積弧線。各累積百分數在弧線上者加以短縱線之截記以標記其所在地而便觀查其價值之相互關係。某段弧線較壁立者，其個體價值較大。某段弧線較平坦者，其個體價值較小。

例表 24 中，每一級距皆表現一百分最大差。在第五行中我們有各級距之百分最大差之低限，而在第六行中我們有其高限。每一預定級距之百分最大差之高限等於次高的一級距的百分最大差之低限。這是在記數的計算表中可由檢查而見及的。最後所得之百分等次是對各級距之所有個體的各該級距之百分最大差之中點，這是列在第七行的。

於百分率已決定之後，可將此數記於計算機上。在此次之例解中，第一須將百分率以 1 乘之(以反應第一級果數 1)。而計算機上於是便呈報 0.00790 這是 0－5 級距的高限百分等次。最低級距之低限百分等次自然是零(0)。而最高級距之高限百分等次，則須爲 1。其次將累積果數乘百分率，如(1＋1)×0.0079，即在機器上報告其結果爲 0.0158。此無他，但累積的果數乘百分率而已。0－5 級距之高限 0.0079，與 5－10 級距之低限是相等的。將其累積果數記下。因 5－10 級距之級果數爲零

(0)，故其累積果數仍爲 1，以作次一級距百分之高限。餘類推。

例表 24　百分等次及百分數計算表：（根據例表 1 之材料）

工資(元) 從 1	到 2	中點 3	級果數 4	百分位 低限 5	高限 6	中點 7	各級果數所佔百分數 8
0	4.9	2.5	1	………	0.0079	0.00395	0.79
5	9.9	7.5	0	0.0079	0.0079	0.00790	0
10	14.9	12.5	1	0.0079	0.0158	0.01185	0.79
15	19.9	17.5	16	0.0158	0.1422	0.07900	12 64
20	24.9	22.5	11	0.1422	0.2228	0.18250	8.69
25	29.9	27.5	32	0.2228	0.4819	0.35235	25.28
30	34.9	32.5	21	0.4819	0.6478	0.56885	16.59
35	39.9	37.5	34	0.6478	0.9162	0.78200	26.80
40	44.9	42.5	9	0.9162	0.9875	0.95185	7.11
45	49.9	47.5	1	0.9875	1.0000	0.99375	0.79

n＝126　　　　　　100.00

$$\text{百分率}\quad \text{Rate}=\frac{1}{n}=\frac{1}{126}=0.007935$$

$$\text{百分數}\quad f\%=\frac{1}{n}\times f\times 100=\frac{f}{n}\times 100$$

當這全行中已計算完畢，則將加到案件總數 n 以之乘百分率遂得 0.0079×126＝1，以作最高級距之最高限。百分等次計算最便利之方法，莫如用計算機，以報告其數目。

百分等次之計算，將百分率累積的相加如表現於級果數行者。其總數之求得。在已定級距之級果數未相加以前，該級距之百分低限可立卽求得。這總數由級果數已相加並乘以百分率後該級距之高限百分等次遂可求得。

用加法計算機相幫助百分等次之計算，如此次例解中之各數，只需一二分鐘卽行。任何書記皆可訓練以當任此種工作。且此處所描寫之方法爲一正確性之自動對照，因最後之總數必需爲一整數的 1。

百分弧線爲一表示已定的變化量之間的關係之弧線。如各工資及其百分等次，用百分弧線閱者可一望而知百分等次，是與預定之工資相應的。這等次自然是對於一組數，以求其分配，而用弧線表示之。這百分弧線，事實上，是累積的弧線。在其間，這果數次序，是以案件之各數表示之。在圖示 36 中，我們對於果數表有一百分弧線。而在例表 24 中，則有百分之計算。這底邊線表示每星期之工資。而縱線則表示百分等次。考慮這表，例如我們尋得 35—40 之級距有 0.78 的一個百分等次，這個數與在 35－40 級距間之中點間 78 之弧線是相符的。

注意這級距，35－40 有一從 0.6478 至 0.9162 的相應之百分最大差。這個最大差，在圖上是以短縱線表示之。從 0.6478 之水平線上至 0.9162 之水平線上，故於圖上。我們卽可直接報告各級距之百分最大差，注意這縱線，並不畫於級距之任何一端，但直接在中點之上。由畫此等短縱線以造成弧線，是根據於例表 24 之五行及六行之材料。故在實習方面，作圖者可免除中百分之計算，因中百分是可由檢閱之充分正確以達所有目的。如學者習慣此種工作後，於例表 24 中之第三，六，及七行之工作，皆可免除，而於圖中以決定其事實。

四 百分弧線之內容

1. 百分弧線對底邊線或零(0)及對於 100 的百分等次，皆爲漸近

線的。在理論方面，百分弧線絕不能達到零(0)或100。故在理論方面，任何個體欲有零(0)的百分等次或 100 的百分等次，皆不可能的。事實上，這或許不是一般如此。

2. 中數成績，可於百分弧線上直接讀出。因這個成績是反應到百分之五十。在此次例解中，我們尋得百分之五十是在 30.5 的一個工資上。牠就是這一組數之中數。這樣，就可以節省計算這平衡中數之相當勞力。

3. 上四等分可以同樣之方法決定之。因這上四等分點即百分之七十五。在此次例解中，百分之七十五則反應到 36.8 的一個工資上。下四等分點反應到百分之二十五。牠在此次例解中是 25.4。當這百分弧線已製定之後，故無需乎計算四等分點，因他們可直接在圖上讀出。從此等事實，學者自然又可以從圖上決定四分最大差，或四分差，如果需要的話。

4. 最高數已命名爲果數弧線底邊線上之一點直接的弧線上之最高縱線。故最高數乃集中分配上最常遇之工資。這個數大約或最相近的能在百分弧線上，由選擇底邊線上之一點直接在百分線上最壁立之一部決定之。因百分弧線，在實際上，是累積的果數弧線，應明白者，即百分弧線上最壁立之部是直接超過這所遇的最高果數。故圖示的決定，只能說是大約(或最相近的)，而於實習之目的上，則可充分的正確，且節省計算上之相當勞力。最簡單的辦法，欲知各級果數之大小，即查短縱線之長短。長者表示最大之級果數，亦即最高數之所在，短者則表示較小之級果數。

5. 當兩種分配相比較之時，簡單的，將這兩種分配作成百分弧線檢查之，卽可得到相當的意義。例如分配之最大差，可由檢查兩條百分弧線之最大差而比較之。兩種分配之變化，可由檢查兩條百分弧線之相對的斜度而比較之。百分弧線之通常斜度較壁立者，其相應分配之變化則較小，兩個中點亦可於圖示中比較之。

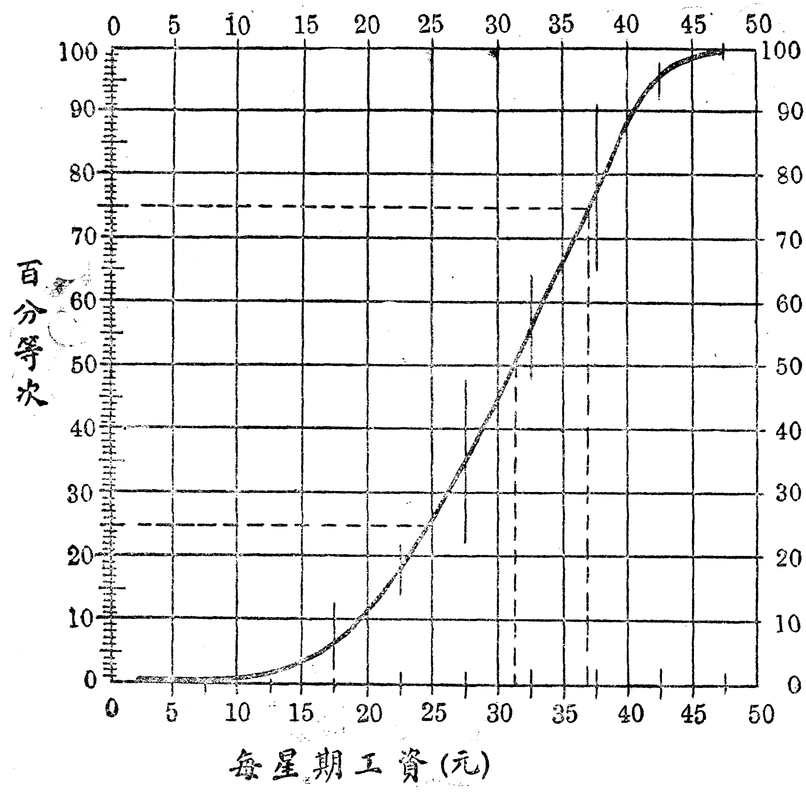
當欲作一百分弧線時，無需材料表中之行數一概計算。材料表(如例表 24) 之預備，乃爲完成計算之工作，並以表示所有包括於計算中之步驟。

在實習方面，僅須將 1,2,4，及 5 行中之數字加以計算。但當此等計算製成簡略之形式時，則須絕對的留心這事實，卽百分之列於第五行者，而非百分之屬於相近之級距者。百分之列於第五行者，乃表示各級距之百分最大差的低限百分。如欲置定任何級距之高限百分。則須考慮百分之列於第五行之次高級距。這樣，乃便於實習。因這些數字，立卽轉移到圖上。以便於解釋。

在實習中，可以看出當案件之數甚小時，這弧線將不光滑，如果牠是嚴格的穿過短縱線之中點而畫成。爲了此種理由，學者有時卽可推想弧線之修飾，須盡量的求其通過繼續的短縱線之最相近的中點。這樣，便能造成一修飾的百分弧線。將一百分多角形圖修飾成一光滑之百分弧線，與將一果數多角形圖修飾成一光滑之果數弧線。其理由相同。無論如何，當一百分弧線已被修飾之後，而將此短縱線已加進之後，始能使讀者明白。因此等短縱線係表示實際之觀查。讀者如注意這弧線從這些短縱線的中點之差量，能於一瞬中，確定這弧線已被修飾之程度。又宜

注意觀查者，即百分多角形圖較之相應的果數多角形圖，已能預見其繼續性。甚至當果數多角形圖是十分不規則的時候，用同一之計算量及同一之作法，而表現於百分多角形圖或弧線者，將相對的繼續或光滑。

圖示36　百分位弧線圖（根據例表24之第七行材料）



五　百分數之呈現法

百分數之呈現法，最通用者有兩種：一為表列法，二為圖示法。表列法

卽將各案件之名稱或數目次序列於第一行。第二行列各案件之價值或數量,與各該相應之案件同項,得其總價值 n。百分率爲$\frac{1}{n}$。某部分價值爲總價值百分之幾時,卽該部分價值乘$\frac{1}{n}$或直接以 n 除該項價值,卽得其百分數。例如例表 25 中之總數量爲 64,232,其百分率則爲$\frac{1}{64,232}$。民衆學校之數爲 28,383,其在總數中所佔之百分數則爲$\frac{1}{64,232}\times 28383=\frac{28383}{64232}=0.4419=44.19\%$或$0.0000155\times 28383=0.4419=44.19\%$。其餘各項皆照此計算,而將其百分數列於第三行。既得百分數之後,可用柱形圖及多角形圖等等來表示。但最通行者,則以圓周表示之。因百分數之總數不出 100 以外。任何大之數量皆可縮小在百分數之100以內。而圓周圖示法,則將一圓周分成一百等分。某項數量佔百分之幾,卽佔若干等分。例如例表 25 中之民衆學校,實數爲 28383,數量相當的大。但在同年社會教育機關總數中所佔之地位則爲 44.19%,或竟寫作 44%,此數則相對的小。而與其他之社會教育機關相比較時,則 44%,幾乎佔半數,可表示其地位之重要。既得出 44.19% 以後,則在圓周內取定44.19%的面積,而列入之。其餘各項數皆照此先求出百分數,再列入圓周內同量百分數的地位。列畢之後,各項百分數皆可得一最好之比較,而代表其數量之大小,地位之重輕。故圓周百分圖,爲一最好之百分比較圖,檢視圖示 37 卽知。在應用時,圓周內各種百分數所代表之性質宜各塗以不同之顏色,則其區別更顯著,比較性更易引人注目。

例表 25　民國十八年度全國社會教育機關統計表

(錄自教育部社會教育司編:民國十八年度全國社會教育概況第二十表)

1 機關名稱	2 公私立合計數	3 在總數中所佔百分數
民衆學校	28,383	44.19
各項職業補習學校	5,361	8.35
民衆教育館	386	0.60
圖書館	1,131	1.76
通俗講演所	2,705	4.21
公共體育場	1,139	1.77
民衆閱報處	9,518	14.82
民衆識字處	2,811	4.38
民衆問字處	7,601	11.38
公共娛樂場	958	1.49
民衆茶園	2,419	2.77
其他社會教育機關	1,820	3.83
總計	64,232	100.00

上表為百分數之表列法。普通應用極多。而圖示法之最流行者,則有如下圖之圓形百分比較圖。

其作法如下:

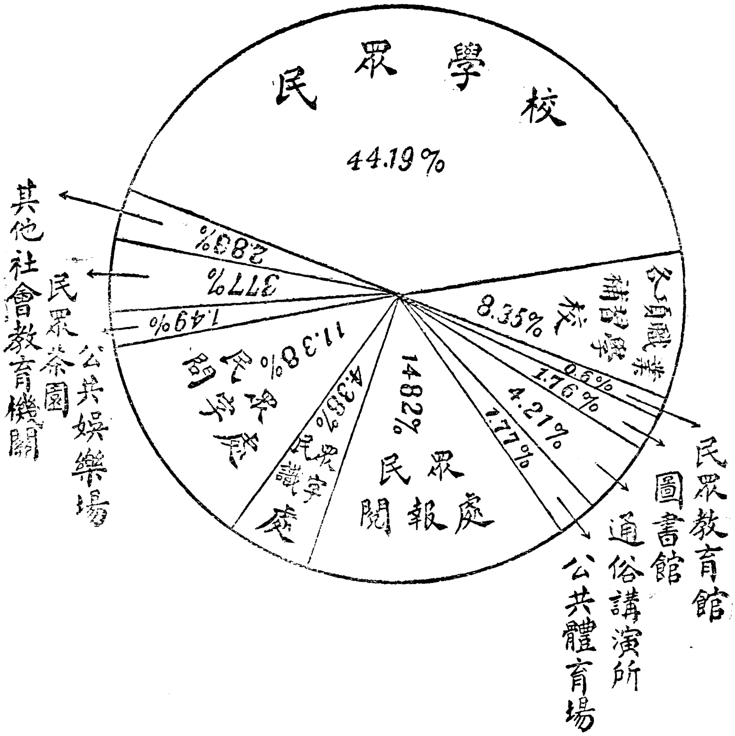
(一)求出各百分數,如例表25。

(二)畫一圓周,並將此圓周分成一百等分。

(三)將各百分數列入圓周內之相同等分。例如 44.19% 的百分數,則在圓周內取定一個 44.19% 的面積列入之。其餘各百分數皆照此辦法。所有全部之百分數適為 1, 卽百分之百。列入圓周內,適將所有面積塡滿。而圓周內之各項百分數,最好各塡以不同之顏色以表示其區別之顯然,而便觀查。

圖示37 民國十八年度全國各項社會教育機關數量

百分比較圖（根據例表25之材料）



六 結論

1. 百分等次之意義——百分等次就是表現一個個體數目在該團體中所在之地位之謂。

2. 絕對等次——即個體數目在該團體中之數目已由小至大列成秩序後所佔次序上之固定地位之謂，

3．統計學上之等次——與普通第一爲最好之等次不同。統計上之等次最小者爲 1，牠在最先。而最後者則最大。

4．百分率——與百分等次不同。百分等次係指次序上之地位所在地，而百分率則係指價值之所屬，其價值爲$\frac{1}{n}$乘相應之數。

5．百分等次之形式：

(一)凡同價值之數量，其等次亦相同。卽將此等同價值的數量之絕對等次數目次序分爲相等之二部取其中數爲其同之等次。

(二)在理論上，無零(0)的百分，亦無 100 的百分。任何百分等次須在1－99之間，雖有時事實上不免有零(0)及 100 的等次。

6．百分之效用：

(一)可表示個體對團體之所在地位及其價值。

(二)可表示中數，牠是百分之五十的數。

(三)可表示上四等分位。牠是百分之七十五的數。

(四)可表示下四等分位，牠是百分之二十五的數。

(五)可表示四分最大差，牠是上四等分減下四等分之差

(六)可表示四分差，牠是$\frac{Q3-Q1}{2}$之結果。

(七)可表示最高數，牠是百分弧線最壁立之一部的某點，卽短縱線最長者與弧線相交之點。

(八)兩種百分弧線可表示兩個分配之最大差，百分弧線，通常之斜度。較壁立者其相應的分配之變化較小。

(九)可表兩個分配之中數，視各中數之所在地，卽能知其分配

量之大小。

7. 百分等次之計算法:

(一)取定級距(其高限與低限)及其中點。

(二)列定級果數。

(三)取定各級距之高低限的百分數。

a. 先取定低限之百分數,其百分率爲第一級距之級果數乘$\frac{1}{n}$。

b. 將最低級果數與較高級距之級果數挨次相加,以累積果數乘$\frac{1}{n}$。

c. 較低級距之高限等於較高級距之低限。

d. 最後最高級距之高限之百分率爲 1。

8. 百分弧線之作法:

(一)取定 X 軸爲計算量,並將級距及其中點列於其上。

(二)取定 Y 軸爲百分數之記數。

(三)將累積的百分數,在相應級距之中點與 Y 軸上相應之點晝一短縱線與 Y 軸平行。各短縱線須起於各該級距中點上之百分位低限數,而止於其高限數。

(四)連結各短縱線之中點(卽 X 與 Y 的價値之相應之點,晝一弧線卽成)。

9. 百分弧線之效用:

(一)可顯示弧線上之光滑性或繼續性。

(二)可任意取一點以決定百分等次。

(三)可由檢查圖示而推知分配的種種相互關係。

10. 百分數呈現法之效用：

(一)便於各案件之價值之比較而明白其地位。

(二)能將最大數量縮小，便於表明趨勢。

七　問題

1. 試將例表 2 之材料製成兩條百分位弧線：

(一)男子年齡分配之百分位弧線。

(二)女子年齡分配之百分位弧線

2. 這兩條弧線有何不同之處？

(一)何條弧線較為壁立，其重大意義何在？

(二)何條弧線較為光滑，其重大意義又何在？

3. 報告這兩條弧線所包含之下列意義之數量：

(一)上四等分位。

(二)中數。

(三)下四等分位。

(四)四分最大差。

(五)四分差。

(六)上四分最大差。

(七)下四分最大差。

第三十四章　指數(Index Numbers)

一　概論

指數是統計的方法，列於一極大的統計組數或變化量的聚合，以計算相關的變遷或差別。其最通常之應用，雖表現在過去的物價與工資方面，但其用途絕不僅限於此等範圍。最流行之用途，則為工資、生產品及其他許多經濟方面之指數。有時，地理上之區別，亦用指數表述之，而取一特殊地域為基本(Base)，以作比較。其實指數之用途極多，發展亦甚速，凡可以列為數量的秩序之事物或現象，皆能用指數表述之。故學者宜知指數之造法及其意義。

二　指數之造法

在例表 26 中是我國民國元年以來的各種家用物價表，而民國元年之物價為基本，100%，與民國二十四年之各相同物價相比較。這百分之變遷，是以第二行這相應的基本年價值除第三行民國二十四年各物價再乘 100 之計算而來。這結果即命名為民國元年基本年各貨物上的民國二十四年之相關數(Relative)。所有此等相關之數，皆列於第四行。相加起來，以相關項數 9 除之，其目的即在求民國二十四年各物價之水平線與民國元年者相比較。這相關數之平均數 1398 則與 100 相比較而表示這物價在平均數上，較之民國元年的水平線已增加 1398－100＝

1298。這是民國元年以後物價上升之迅速趨勢。

這工資節目亦以同樣之方式討論之，所謂平民工資，即農村中以勞力換得來之薪金。民國元年以來，此等工資，當然逐年有增加，但工資之增加不如食物價格增加之速。這兩個例表，例表 26 及 27，雖是假定的估計，但與事實相差亦不甚遠。民國元年以來至現在，食物價格之增加已爲 1298，而工資之增加則僅爲 349，這是可由檢查例表 26 及 27 而得的。照如此情形看來，則社會之生活恐慌，乃不可避免的。故欲安定社會，惟有開發實業，安插失業的人，增加工資，而後有濟於事。

例表 26　估計中國家庭日常必需品價值之變遷

食物種類 1	民國元年零售平均價 2	民國二十四年零售平均價（相關年之各物價） 3	民國二十四年相關價（民國元年價＝100） 4
油（斤）	0.5(角)	2（角）	400
鹽（斤）	0.2	1.5	750
柴（斤）	0.01	0.1	1000
米（升）	0.5	1	200
醬（斤）	0.01	0.8	800
醋（斤）	0.02	1.5	7500
茶（斤）	0.2	2.5	1250
糖（斤）	0.5	1	200
衣料（尺）	0.25	1.2	480
指　數	100		1398

9) 12580 (1398

上表爲一假定之表，用來作求指數之例子。欲得正確之材料，則非經過嚴密之搜集不可。如中國家庭所用之流水簿爲最好之原始材料。如將民國元年以來，直至現在，每年各項購買物價值如何，將各項購買物

之價值加以平均，求得每年之平均價值，再求各項購買物同年之總平均價值，如此乃能由最正確之原始材料求到最正確之指數。前已言之，凡有可用數量或價值來表示之事物或現象，皆可製成指數。故可供製指數之材料實無窮，不能盡舉。學者有了何種材料，便求何種材料之指數便是。本章所側重者全爲方法方面之問題，而材料之搜集與其正確性則未顧全及之。

例表 27　估計平民工資之變遷表

工作種類 每人每年 1	民國元年年薪平均數(元) 2	民國二十四年年薪平均數 3	民國二十四年相關工資 民國元年工資=100 4
傭農	5	10	200
木匠	6	20	333
石匠	6.5	20	308
泥水匠	5	25	500
雜工	4	20	500
小學教員	15	150	1000
中醫	40	100	250
雜業	10	50	500
	91.5	395	8) 3591 (449
指數	100		449

上表之第一行列材料種類，第二行列基本年，卽以某年爲基本，以便於與其他各年相比較，而尋出其相關數。第三行列相關年或比較年之物價，第四行列基本價與相關價之比較。基本價 (The base) 卽基本年之價。相關價 (The relative) 卽相關年之價。第四行相關價之由來，乃係基本年之價除相關年之價之商，乘 100。例如例表 26 基本年之油價爲 0.5 角，相關年之油價爲 2 角，$2 \div 0.5 = 4$，$4 \times 100 = 400$，故基本年

之油價爲100時，相關年之油價爲400。餘類推。例表26之食物共爲9種，而相關數之總數則爲12580，以9除之，卽$\frac{12580}{9}=1398$卽得簡單的算術平均指數。故算術平均指數之簡單公式爲基本數100比相關數之平均數。而相關數之平均數$=\frac{\text{總相關數}}{n}$

三 爲甚麼要求指數

爲甚麼要求指數這一個理由，其科學上之應用名詞與辯論理由，難以悉舉。茲特略舉需要求指數之理由如下：

(1)一指數爲一總論之呈述，用平均數之原理以解釋其構造，牠是特別用於長時期多種大數量之聚集的解釋與呈述。

(2)一指數之構造解釋，關於相關數之平均數的一定限制，便引起平均數之適當選擇之應用的問題。

(3)前章權重平均數中之事實的平均數之計算，與指數之實際問題大有關連。

(4)一指數之構造，對於幾何平均數有一應用之機會。

(5)對於物價之一指數的原有材料之搜集、批發或零賣，其構造的方法，及指數上不同的積數之解釋與比較，在統計研究所有實施之論理的步驟，貢獻一應用的機會。

(6)社會科學的研究者，須能了解指數之主要點乃在能讀關於指數方面之文字。經濟學與商業方面之學生尤須了解指數之構造及應用。

四　製造物價指數之步驟

指數之用途雖廣，但尤以對物價之指示與比較的用途爲最多，以便供給商人，對貨物買賣之觀查而預定其買賣之計劃。製定物價之步驟可舉如下：

(1)規定指數之目的。

(2)決定貨物之種類及其數量，及其零售之價與批發之價爲如何。

(3)收集實際價格之材料及其權重上所需要之事實。

(4)決定連結各種貨物成一簡單指數之方法。如果各種貨物之價格已被平均之後，決定所用者爲何種平均數。

(5)決定基本時期(年或月，可取任何年或任何月爲基本時期)，以便與其他之相關時期相比較，並根據此基本時期而計算前後之變遷。

(6)決定各種貨物皆視爲相等的重要，而其權重則視爲相對的重要。

實際價格之聚集的比較

例表 28　美國食物實際價格之聚集的比較表

貨品種類 1	1913年 平均價 2	1917年 7月 3	1918年 7月 4	1919年 7月 5	1920年 7月 6
小麥(半斛)	$ .874	$2.582	$2.170	$2.680	$2.831
麵粉(大桶)	4.584	12.750	10.702	12.155	13.669
白糖(磅)	.043	.075	.074	.088	.191
豬(百磅)	8.365	15.460	17.720	22.225	14.856
雞蛋(打)	.226	.318	.374	.406	.423
所有貨品	14.092	31.185	31.040	37.554	31.970

從例表 28 可將各年度之食物先作各個別之比較。如 1913 年之麵粉每大桶值 $4.584，而 1920 年每大桶則值 $13.669。七年之間，價值幾增三倍。從 2,3,4,5,6，各行可知各年度各物價之變遷，而得一比較。最後所有貨物項中則得一各年度食物混合價值之比較。藉此，可推知生活程度之標準，下表則爲一相關價值之比較表。

例表 29　相關價值之比較表

基本時期 1913 年平均價值 =100

貨品種類 1	1913年 平均價 2	1917年 7月 3	1918年 7月 4	1919年 7月 5	1920年 7月 6
小麥	100	295.4	248.3	306.6	323.9
麵粉	100	278.1	233.5	265.2	298.2
白糖	100	174.4	172.1	204.7	444.2
豬	100	184.8	211.8	265.7	177.6
雞蛋	100	140.7	165.5	179.6	187.2
相關價值平均數	100	214.7	206.2	244.4	286.2

上列相關價值平均數一項之數卽是各年度之指數。

例表 29，取定 1913 年爲基本年。其他各年卽爲相關年。先以 1913 年之各項物價除其他各年之各項物價，得 1913 年各項物價爲 1，與其他各年各項物價之比例。同以 100 乘之，遂得 1913 年之平均蛋價（因各年各項物價均係平均價）爲 100，1917 年 7 月之平均蛋價爲 140.7，1918 年 7 月之平均蛋價爲 165.5，1919 年 7 月之平均蛋價爲 179.6，1920 年 7 月之平均蛋價爲 187.2，餘類推。

1913 年各項物價皆爲 100，則其所有物價之平均價亦爲 100。而 19

17 年 7 月所有物價之平均價則爲 214.7，其法係將所有 1917 年 7 月之各項物價相加，卽 295.4+278.1+174.4+184.8+140.7=10734。再以食物之種類 5 除之，遂得 214.7，卽 10734÷5=214.7。其他各年之平均數，照此計算，遂得 1918 年 7 月之各項物價平均數爲 206.2，1919 年 7 月之各項物價平均數爲 244.4，1920 年 7 月各項物價之平均數爲 286.2。

現在再換取其他一年爲基本年，而該年度之物價卽作爲基本物價。(任何年皆可取爲基本年，而該年度之物價卽作爲基本物價)。依據上表之材料，而取 1918 年 7 月各物價 206.2 爲基本物價，於是遂得相關年物價之比較如下：

變換基本年之比較：

a. 簡單方式

	1913	1917	1918	1919	1920
206.2)	100	214.7	206.2	244.4	286.2
	48.5	104.1	100	118.5	138.8

1918年既被取爲基本年，該年度之物價又被取爲基本物價，故該年度之物價爲 100。當該年度之物價爲基本物價時，卽以該年度之物價 206.2，除其他各年度之物價。故當該年度之物價爲 100時，1913 年之物價則爲48.5，卽$\frac{100}{206.2}=48.5$；1917 年之物價爲 104.1；1919 年之物價爲 118.5；1920 年之物價爲 138.8；皆能與1918年之物價 100 相比較，亦卽皆成爲 1918 年之基本物價的相關物價，也就是皆成爲以 1918 年之物價爲基本物價的各年度之物價之指數了。

上列變換基本年以求物價相比較的簡單方式，卽專是根據各年度物價之平均數爲準，以求指數之結果，與原有物價根據於新基本年之相關物價的眞實價值所求得之指數的結果略有差異。玆特列舉於下：

b. 詳密方式：

例表 30　根據新基本年計算相關物價之比較表

1918 年 7 月之物價 ＝100

貨品 1	1913年 7月 平均價 2	1917年 7月 平均價 3	1918年 7月 平均價 4	1919年 7月 平均價 5	1920年 7月 平均價 6
小麥	40.3	119.0	100	123.5	130.5
麵粉	42.8	119.1	100	113.6	127.7
白糖	58.1	101.4	100	118.9	258.1
豬	47.2	87.2	100	125.4	83.8
雞蛋	60.4	85.0	100	108.6	113.1
相關物價之平均數	49.8	102.3	100	118.0	142.6

例表 30 之材料與例表 29 之材料相同。所不同者，僅將例表 29 之基本年 1913 換爲例表 30 之基本年 1918 年而已。旣以 1918 年爲基本年，故 1918 年之各項物價，卽作爲基本物價，而其他各年之各項物價則作爲相關物價，其求指數之法，亦卽以 1918 年之各項物價除其他各年之各項同物之相關物價。例如以例表 28 的 1918 年之小麥價 \$2.170 除 1913 年之小麥價 \$0.874 得 0.403，卽 1918 年之小麥價爲 1 時，1913 年之小麥價爲 .403；同以 100 乘之，故 1918 年之小麥價爲 100 時，1913 年之小麥價爲 40.3。餘類推。然後將各年度之各項物價相加，以物之項數除之，卽得各物價之總平均數。例如 1913年之各項物價(40.3+42.3

＋58.1＋47.2＋60.4)÷5＝49.8，餘類推。將此種詳密的1913年之各項物價總平均49.8與上列(a)簡單方式相比較，其差爲49.8－48.5＝1.3。在理論方面，a,b，兩種方式應得同一之結果，其所以不同者，因小數方面之取舍不同，故形成此等差別了。

五 用幾何平均數求指數之法

用幾何平均數求指數之法，第一步，卽根據一各年度原有物價表。第二步。將各年度之物價一律由實數變成對數。第三步，將各年度各項物價之對數相加。第四步，以物品項數除各該項物價的對數相加之總數，得對數的算術平均數。最後，第五步，將此對數的算術平均數尋回實數，遂得各年度之物價總平均數，有如下表。

例表31　用幾何平均數求指數之表

(根據例表29之材料——採用對數法)

貨　品 1	1913年 平均價 2	1917年 7月 平均價 3	1918年 7月 平均價 4	1919年 7月 平均價 5	1920年 7月 平均價 6
小　麥	2.00000	2.47041	2.39498	2.48657	2.50141
麵　粉	2.00000	2.44420	2.36829	2.42357	2.47451
白　糖	2.00000	2.24155	2.23578	2.31112	2.64758
豬	2.00000	2.26670	2.32593	2.42439	2.24944
雞　蛋	2.00000	2.14829	2.21880	2.25431	2.27231
平均對數	2.00000	2.31423	2.30876	2.37999	2.43085
指　數	100	206.2	203.6	239.9	269.7

由幾何平均數求得之指數，較之由算術平均數求得之指數爲小，這

是幾何平均數之特質。因在幾何平均數中，各極端變化皆調勻了。全部數目受極端變化數目之影響，較小於算術平均數。故幾何平均數之結果，常較小於算術平均數之結果，尤以1920年者爲顯著。查1920年之算術平均指數對1913年之指數比較爲286.2比100，而1920年之幾何平均指數對1913年之指數比較則爲269.7比100。286.2－269.7＝16.5，相差甚大。其所以如此，卽由於1920年之各項物價較之其他各年爲最參差。此種參差，在算術平均數中之影響甚大，而在幾何平均數中則甚小。

例表31之對數係根據例表29之實數。在對數表中所尋來者，例如實數100之對數爲2，因實數1之對數爲零(0)，而實數100係三位整數，其對數之第一字應爲2。這個2僅是表示實數之整數的位數而已。此表中之對數，第一字皆爲2，卽表示各實數之整數皆爲三位。例如例表29，1917年之小麥價爲295.4，卽於對數表中尋得實數295.4之對數爲47041；因實數295.4係三位整數，故其對數第一字爲2，卽實數295.4之對數爲2.47041，餘類推。然後將各年度之物價的對數相加，以物之項數除之，卽得對數的算術平均數。再將此對數的算術平均數尋回實數，卽得各該年度之物價的幾何平均數。取定某年爲基本年，其他各年則爲相關年。基本年之物價爲基本物價＝100，其他相關年之物價則爲相關物價。例如1917年各項物價之對數平均數爲(2.47041＋2.44420＋2.24155＋2.26670＋2.14829)÷5＝2.30876，將對數30876尋回實數得2147；因對數之第一字爲2，係表實示數爲三位整數，故實數爲214.7，餘類推。

將例表31，用幾何平均數求指數之表，轉換基本年之簡單方式如下：

	1913	1917	1918	1919	1920
203.6)	100	206.2	203.6	239.9	267.7
	49.1	101.3	100	117.8	132.5

此種簡單方式的幾何平均數，求指數，轉換新基本年之方法，可與例表30之結果完全相同，如果我們取例表30之材料用幾何平均數之對數來計算的話。因幾何平均數乃將各個體之價值相乘，再以各個體之總件數爲其相乘之總價值之方根而開去之，其間對各個體價值之極端變化有絕大之調勻性，故其結果最正確。惟計算上費時間較多，而又不爲一般用指數者所慣用。玆將例表30之材料改作對數計算有如下表：

例表32　用幾何平均數求指數之表

（根據例表30之相關數——採用對數法）

貨品 1	1913年 平均數 2	1917年 7月 平均數 3	1918年 7月 平均數 4	1919年 7月 平均數 5	1920年 7月 平均數 6
小麥	1.60531	2.07555	2.00000	2.09167	2.11561
麵粉	1.63144	2.07591	2.00000	2.05538	2.10619
白糖	1.76418	2.00604	2.00000	2.07518	2.41179
豬	1.67394	1.94052	2.00000	2.09830	1.92324
鷄蛋	1.78104	1.92942	2.00000	2.03583	2.05346
平均對數	1.69188	2.00549	2.00000	2.07127	2.12206
指數	49.1	101.3	100	117.8	132.5

例表32之計算法，與例表31相同，卽先將各項物價之實數變成對數，而得其各項物價之平均結果，其原有材料則與例表30相同，且同以1918年之物價爲基本物價；而例表29與30兩個算術平均數之簡單法

與詳密法之結果，則不同。但例表 31 與 32 兩個幾何平均數之簡單法與詳密法則相同。故用幾何平均數求指數之法較為正確。

六 連環指數(Chain index)之求法

指數之種類可分為二種，一為由固定基本時期之指數，如本章前面所討論者是。二為連環相關指數是。連環指數之所有連環相關數皆與固定之基本相關連，形成一繼續不斷之相關數。

其計算法如下：

例表 33 相關於一固定基本之連環指數之連環的相關數表

年 1	美國本色范尼亞省之生油每桶價 2	固定基本上之相關數 191.3=100 3	連環相關數每年繼續 =100 4	連環相關數連環於固定基本之上 1913=100 5
1913	$2.463	100	——	100
1914	1.889	76.7	76.7	76.7=(100×76.7%)
1915	1.563	63.4	82.7	63.4=(76.7×82.7%)
1916	2.507	101.7	160.4	101.7=(63.4×160%)
1917	3.253	132.1	129.8	132.1=(101.7×129.8%)

例表 33 之第一行列時期(年)，第二行列各年度之每桶生油價，第三行列固定基本之相關數，即取定1913年為基本年，設該年度之每桶生油價為 100，則 1914 年每桶之生油價為 76.7，即以 1913 年之生油價 $2.463 除 1914 年之生油價 $1.889，得 0.767，即 1913 年之生油價為 1 時，1914 年之生油價為0.767。同以 100 乘之，即 1913 年之生油價為100 時，1914 年之生油價為 76.7，餘類推。第四行列連環相關數，即由 1913 年至 1917 年挨次作為基本年。而相關數亦取逐年之挨次步驟。而其計

算之材料則根據本表之第三行之材料。例如第三行1913年之材料爲100，1914年之材料爲76.70第一步以100除76.7＝0.767再以100乘之仍爲76.7，即1913年之生油價爲1時，1914年之生油價爲0.767，1913年之生油價爲100時，1914年之生油價76.7。第二步，以1914年爲基本年，1914年之生油價爲基本油價，而以1915年爲相關年，1915年之生油價爲相關生油價，故$\frac{63.5}{76.7}\times100=82.7$。同一理由，1915年之生油價除1916年之生油價乘100，如$\frac{101.8}{63.5}\times100=160.4$。$\frac{132.1}{101.8}\times100=129.8$，造成其次之連環指數。故連環指數即取逐年爲基本年，以推次年之連環相關數。兩者相比較即成連環指數。連環指數之效用，即在表示物價逐年之變遷，而本表之第四行乃列各連環指數造成之由來的反證。

例表34　在不同基本上指數計算之比較表

（相關數的簡單平均數之法）

A.　美國1911——17年卅中生油每桶平均價表

油田	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917
本色范尼亞省	$1.301	$1.598	$2.463	$1.889	$1.563	$2.507	$3.253
中大陸	.479	.692	.951	.803	.587	1.189	1.730
加里福尼亞	.477	.454	.467	.482	.422	.590	.918

B.　連結三油田之指數表，1913＝100

	1913	1914	1915	1916	1917
本色范尼亞省	100	76.7	63.5	101.8	132.1
中大陸	100	84.4	61.7	125.0	181.9
加里福尼亞省	100	103.2	90.4	126.3	196.6
指數	100	88.1	71.9	117.7	170.2

C. 三油田之指數 1911—1913 平均價値 =100

	1911—1913 平均價	1914	1915	1916	1917
本色范尼亞省	100	105.7	87.5	140.3	182.0
中大陸	100	113.6	83.0	168.2	244.7
加里福尼亞省	100	103.4	90.6	126.6	197.0
指數	100	107.6	87.0	145.0	207.9

例表 34 之A表係各油田之生油原有價値。B表則取 1913 年之生油價爲基本油價，以 1913 年各油田之價除各年度同油田之價，遂得其他各相關年之相關價。最後將每年度各油田之相關價相加，再以油田之數 3 除之卽得各年度之指數。而C表之作法，第一步，卽將各油田 1911—1913年之油價相加，再以 3 除之，得其平均數$\frac{1.301+1.598+2.463}{3}=1.787$。以此平均數除 1914 年同油田之生油價，遂得$\frac{1.889}{1.787}\times100=105.7$，餘類推。計算方法完全與前面例表 28 及 29 相同。

七 求指數用相關數的權重平均數之法與聚合的價値之法之比較

例表 35 求指數用相關數的權重平均數之法與聚合的價値之法之比較表

A. 以1913年爲基本(100)的1920年之美國豬肉出產量之指數表

(眞實價值之權重的聚合法)

出產品 1	每磅平均價 1913 2	消費量(磅數) 3	1913年之聚集價 (Aggregate values) (2)×(3) 4	1920年6月價 5	1920年聚合價 (3)×(5) 6
豬排	$.210	114	$23.940	$.437	$49.818
燻豬肉	.270	55	14.850	.547	30.085
火腿	.269	55	14.795	.597	32.835
豬油	.158	84	13.272	.290	24.360
聚集價			66.857		137.098
指數			100		205

B. 以1913年爲基本(100)的1920年之美國豬肉出產量之指數表

(相關數的權重平均數之法)

出產品 1	每磅平均價 1913年 2	基本價 1913年 3	1920年6月價 4	1920年6月相關價 5	1920年 權重相關數以A表第四行基本年之數量爲重量 6
豬排	$.210	100	$.437	208×	$23.940=4979.520
燻豬肉	.270	100	.547	203×	14.850=3014.550
火腿	.269	100	.597	222×	14.795=3284.490
豬油	.158	100	.290	184×	13.272=2442.048
					66.857)13720.608
指數		100			205

例表35之A表第四行，1913年之聚合價卽該年各項豬肉消費量所值之價，而將其相加，遂得總聚合價66.857。設此1913年之豬肉總聚合價66.857爲100，則1920年各項豬肉聚合價相加之總聚合價爲

137.098，與 1913 年之基本價 100 相比較時，即得 205，

$$\text{即}\ \frac{137.098}{66.857}\times 100=205。$$

在例表 35 之 B 表中，第三行取定 1913 年各項豬肉之價為基本價 100 時，則得第五行 1920 年各項豬肉之相關價。例如 1913 年每磅豬排之價為 \$.210，而 1920 年每磅豬排之價為 \$.437，以 \$.210 除 \$.437 得 \$2.08，即 1913 年每磅豬排價為 1 時，1920 年每磅豬排價則為 2.08。同以 100 乘之，故 1913 年每磅豬排價為 100時，1920 年每磅豬排價為 208。餘類推。求得 1913 年與 1920 年各項豬肉價值之比例後，再以 1920 年之相關價乘 1913 年各項豬肉之聚合價，遂得 1920 年之相關價與 1913 年之聚合價之和。此和相加之總數為 13720.608，再以 1913 年各項豬肉之聚合總價 66.857 除之，得 205，與 A 表之結果相同。簡單的辦法，即以 66.857 除 137.098，再以 100 乘之，其結果得 205。

即 $\frac{137.098}{66.857}\times 100=205$，結果完全相同。B 表之所以用 1920 年之相關價乘 1913 年之聚合價，得其總數之後，再以 1913 年之聚合總價除之之理，即在證明該兩項數相乘之後，可以減少變化之影響。又凡一數先用某數乘之，而得相乘後之總和數，再以某數除其總和數，結果仍不變。

非雪教授(Professor Fisher) 對於求一定期物價之指數有一理想之公式如下：

$$\text{定期物價指數}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}}$$

在此方式之中，p_1＝一定期貨物的價值。

q_1＝定期貨物的數量。

p_0＝基本年貨物的價值。

q_0＝基本年貨物的數量。

此法乃用於貨物有定量的聚合價值之比較，在根號下之第一項中，這重量爲定期的常數量；在第二項中，這重量則爲基本年之常數量。用聚集價值來計算這兩個比率，第一用定期之量爲重量，第二用基本期之量爲重量。用幾何平均數法，先將其相乘，再開去其方根，而得一幾何平均數。非雪教授是有名的指數學家。其造此種指數之公式，乃用幾何平均數求指數，以免受變化之影響。

非雪教授之定期指數公式，如果運用於例表35A表之材料。卽得下列計算表。

例表 36　非雪教授之理想指數公式之分解表

貨品 1	基本年(1913)之物價(P_0)每磅之價 2	基本年(1913)之貨物數量(q_0)(磅)亦可作爲定期(1920年)之數量(q_1) 3	基本年(1913年)所有各項貨物之價值(p_0q_0)(2)×(3)聚合價 4	定期1920年)之物價(p_1) 5	定期(1920年)所有各項貨物之價值(p_1q_1)(3)×(5)聚合價 6	基本年之物價乘定期貨物之數量(p_0q_1)(2)×(3) 7	定期之物價乘基本年貨物之數量(p_1q_0)(3)×(5) 8
豬排	$.210	114	$23.940	$.437	$49.818	$23.940	$49.818
豬燻肉	.270	55	14.850	.547	30.082	14.850	30.085
火腿	.269	55	14.795	.597	32.835	14.795	32.835
豬油	.158	84	13.272	.290	24.360	13.272	24.360
		$\Sigma p_0q_0=66.857$		$\Sigma p_1q_1=137.098$		$\Sigma p_0q_1=$ 66.857	$\Sigma p_1q_0=$ 137.098

$$定期物價指數=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}}=\sqrt{\frac{137.098}{66.857}\times\frac{137.098}{66.857}}$$

$$=\sqrt{2.05\times2.05}=\sqrt{4.2025}=2.05$$

$2.05\times100=205$ 卽當基本年(1913)之指數爲100時，定期(1920年)之指數爲205，與例表35之結果完全符合。

八 指數之圖示法

指數之效用顯示於多種物價或多種工資之平均數，表現於多年不同時期之比較中。按其結果，即可依照前面多角形圖之方法製成圖示。茲查得美國1813年至1921年之每星期普通工資及食物價格如下：

(A) 工資指數表如下

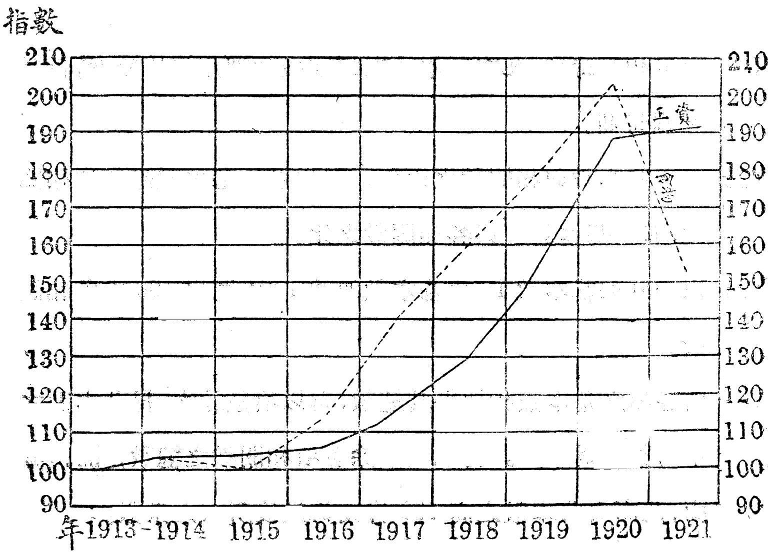
年	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
每星期平均工資(元)	100	103	104	105.5	116	130	148	189	193

(B) 同時期普通食物指數如下

年	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
食物	100	103	100	114	140	160	180	204	152

將A,B 二表之材料作成指數比較圖則有如下圖：

圖示38 美國1913——1921年之工資指數與食物指數比較圖



九　結論

1. 指數之意義——指數即根據一基本數 (The base)而與其他相關數 (The relatives) 相比較以便觀查物象之變遷之謂，這基本數常定為 100，以便與其他相關數相比較。而這基本數又常為某基本年若干種物價的平均之結果，以與相關數的平均之結果相比較。如此，則能將若干時期之若干物價得一最簡單之指數比較以查物價之變遷了。

2.指數之效用——凡有數量之事物在若干期間有若干種類而欲得一平均之簡單比較，皆有賴於指數之表述。但用途最大者，則在物價與工資及家庭費用方面之變遷事項等等。

3. 指數之求法：

(一)先取定一基本期(某年或某月可任意取之。)，本期所有各項之數量為基本數量，以 100 表示之。

(二)取定相關時期。凡在基本時期之前後時期用作比較者，皆為相關時期。

(三)取定基本數與相關數之比率，即以各項基本數除各項相關數，即成基本數 1 與各相關數之比。

(四)以 100 乘基本數 1，故基本數即為 100；同以 100 乘各相關數。

(五)將各項之基本數相加得其總數，再以項數除之，得基本數之平均數仍為 100。再以項數除各項相關數之總數，而得其商，此商與基本數之商 100 皆成為最後所求之指數。

4. 指數之種類：

(一)以目的而分：

a 物價指數。

b 工資總數。

c 家庭費用指數。

d 各國人口指數。

e 醫院疾病指數。

f 法庭犯罪案件指數。

g 各國財政歲入歲出指數。

h 其他——凡欲將若干時期，若干種數量，加以平均，使其縮小，而取定某時期之數量爲標準，以與其他相關時期之相關數量相比較，皆可製一指數表，或圖，表示之。故指數之第一步工作，卽在決定目的，欲造何種指數，並如何收集眞實材料。

(二)以計算法而分：

a 算術平均指數——用算術平均數以求指數，其法如例表29及30。

b 幾何平均指數——卽以幾何平均數求指數之法，詳例表31及32。

c 連環指數——卽以取定時期內之各分期挨次爲基本期，而推算次期之相關數。各分期互相連環爲基本期，而各分期之各項數量亦互相連環爲基本量，如此求得之指數卽爲連

環指數，其法詳例表33。

d 非雪教授之理想指數公式——

某定期之物價指數$=\sqrt{\dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}}$，其法詳例表 36。

十 問題

1. 試將下列材料求出指數表

例表 37 我國民元以來之糧食價格估計表(每斗之價)

時期＼糧食	米	小麥	黃豆	玉蜀黍	高粱
民國元年	0.5	0.3	0.1	0.14	0.15
民國 5 年	0.7	0.35	0.21	0.18	0.17
民國 10 年	0.85	0.4	0.25	0.24	0.18
民國 15 年	1.00	0.6	0.40	0.34	0.25
民國 20 年	1.11	0.8	0.6	0.5	0.4
民國 24 年	1.30	0.9	0.7	0.6	0.6

2. 試將下列指數作成指數曲線圖

例表 38 假設民元以來糧食(每斗元)與工資(每月元)之指數比較表

年代	民國元年	民國五年	民國十年	民國十五年	民國二十年	民國二十四年
糧食價	100	150	210	350	400	420
工資	100	110	140	160	260	480

第三十五章　機會與可能性

(Chance and Probability)

一　概論

機會與可能性是統計學上所常遇着的問題，尤其是在統計學的理論方面，機會與可能性的問題特別多。宇宙之現象變化無窮，數量亦無窮；人類社會之各種現象變化亦無窮，數量亦無窮。我們在科學上所取得的材料來供我們研究之用者，是極小極小的一部份。要想把這極小極小的部份的材料的研究之結果來作爲一種眞理，則這眞理之是否成其爲眞理，乃大有疑問。所以最好，便這樣的說，我們之所認爲的眞理只可以說是可能的眞理，而非絕對的眞理。因爲我們所取之材料，或任何科學家所取的材料，都是很有限的材料。這個限制之發生，就是由於機會之限制。換言之，就是我們沒有如此分充的機會能夠把我們所需要的所有之材料一齊收集起來。所以材料之收集，或現象之研究，首先就受了機會的限制。機會雖有限制，但總算還有一些機會。這一些機會就是可能性的基礎。機會好，或機會多，則可能性大。機會少，或機會不好，則可能性小。例如250個學生，共同選舉一個學生自治會的會長，則每人當選之機會只有$\frac{1}{250}$這可以說機會是很少，而可能性也很小，就是每人當選爲該會會長之可能性，只有$\frac{1}{250}$。但是某班只有8個學生，而欲每班挑

選 8 個籃球球員，則機會可謂百分之百的充足，卽$\frac{8}{8}=1$，卽是該班每人皆有當選爲籃球球員之可能性，這是顯而易見的。故機會與可能性互爲消長的。現在我們要具體些說，甚麼叫做機會？這個問題，雖然不易答復，但我們可以這樣的說，機會就是暫時可以供我們利用的材料的取定的某一部份與全部份相比的比率。我們取定了某種材料來解決了我們的問題，就可以說我們已利用了某種機會。我們利用了某種機會之程度爲如何，就是某種問題之可能性爲如何。簡言之，利用機會程度愈高，可能性愈大。反之，愈小。所以可能性是機會中產生出來的。大約愈簡單的事件，機會愈多，可能性愈大。愈複雜的事件，機會愈少，可能性亦愈小。

在任何情形之下，一種修飾的光滑弧線，並不是眞實的材料之呈現，乃是一種推論的方式——一種整理的定律——卽已取定的材料的類別的代表性，根據於一種假定，卽假定全部數量都包括在若干案件之內；在這全部數量中取定若干案件爲例子，故其級距則可無限制的縮小，科學需要一種推論爲工具，故需要各種理想的幾何方式之弧線以解釋任何特殊問題有限制之數量中的觀查之結果。

二　變化之原因

自然科學的實驗者，在實驗室中知到沒有一個絕對實在的計算這樣一回事。他稱一種目的物近於一千分之一格蘭木（gram），這不過是一個相近數。他必須確定他的正確性之準標，而照其準標以求計算量。一直徑與一圓周之關係是列作圓周常數，$\pi=3.1416$；但這小數的價値卻無絕對性可言。因計算者可取兩位小數或許多的小數。

還有一層，如有同一較大之數量，一個人反覆計算之，所得結果，往往每次不同。例如一極精明之測驗家，用一極精密之測量器，測量一塊土地之三個角。當其將三個角測量之結果相加，與該土地原有之三個角而積絕不會完全相同。如果他再留心的測驗幾次，而每一次皆將各不相同。因每次之結果皆不同，則原有之數量亦非絕對的正確，最可靠之價值，惟有將觀查之結果在平均數中求之。雖其眞實價值無從得知，如上所言。

差數(Error)在觀查中，卽一計算量中之眞實價值與一觀查的結果之間的差別。如上所言，眞實價值乃無從知到，但最可靠之價值乃在平均數中求之，而差數遂因總平均數發生於臨時的分別觀查之中的各個小平均數。而各差數亦逐相互成平衡。例如照本書例表1之材料求得最可靠之全部平均數爲30.2(參閱本書第二十六章334-337頁)。但如果我們將例表1之材料任意取幾行(假設取橫行之第一、二兩行各數相加而平均之，則得平均數

$$=\frac{35.35+23.35+40.95+19.30+35.10+24.65+34.68+18.60}{8}$$

$=\dfrac{231.98}{8}=28.9975$。則此種任意選擇的觀查結果之平均數與全部最可靠的平均數30.2相比較，則差30.2－29＝1.2. 這1.2卽叫做部份選樣的平均數與全部最可靠的平均數之差數(Error)。照同樣的辦法將例表1全部材料每橫二行之數加以平均，與全部平均數相比較，皆有差別，皆謂之爲差數。

三 差數 (Error)

差數之由來就是機會 (Chance) 的問題了。這樣的個體數目愈多以求平均數，則差數之差的機會愈少。反之，則差的機會愈大。例如我們任意選一個數，如例表 1 之第一數 35.35 與全部平均數 30.2 相比較，則差數爲 35.35－30.2＝5.15 。較之首二排各個數之平均數對全部的平均數之差 1.2 大得多了 。如果我們將這全部案件 126 個案件中取 100 案件加以平均，則此平均數對眞正的平均數之差當更小得多了。如將全部 126 個案件完全平均之，則與原有之眞正平均數就可以相同了。(參閱本書第十七章, 239－240 頁)。我們在此地首先要知到這差數(Error)之由來，而後乃可以討論機會與可能性及後面第三十六章之可能弧線及第三十七章之可能差。

從上面我們可以知到差數是由某羣材料中任意選樣所得的平均數與全部總平均數之比較的差而來。故差數這個名詞的意義，並不是錯誤，因錯誤是能力不足，或不留心所造成。而差數乃因計算量的材料所擇取的標準不同以造成。

差數之發生受多種之原動力所造成。有些原動力是研究者所能控制的，有些原動力則無法可以控制的。

四 差數之種類

(1)經常的，永久的，偏見的或累積的差數。

(2)意外的，變化的，或賠補的差數。

第一種差數起於繼續觀查之同一態度。例如測量器之符號有錯誤，則每一觀查皆發生同類之差數。許多觀查點皆不可一一拋棄，但聚合其總差數。一個頂高的人與一個頂矮的人在同一地方，同時望見一固定地點上所懸掛之寒暑表，而其所見到之溫度度數則可各自不同。研究者個人之成見可以影響他所觀查之現象僅能供其個人之用途。個人的成見是不知不覺的，而其所造成之差數則爲經常的與累積的。此種差數絕不可忽略。因一人所得之差便不能不使他人受影響。有時若干人觀查同一現象而得若干不同之差。因觀查之人格等分在臨時的態度上可各有不同，如審美然。

第二種差數，類別亦甚多。這些差數是由於多種不同的變化及臨時的原動力的獨立的或依照機會的情形而造成。所以這些差數傾向於眞實計算量之上或下，而發生的次數是大約相等。且可用平均數消滅之，卽這些差數傾向於平衡以互相賠補。在同一時候，觀查可受視力不足，精神疲憊，外面環境變化等等影響。

五 高氏與拉拍勒氏之工作 (The Work of Gauss and LaPlace)

在物理學的獨立工作上，高氏與拉拍勒氏發現他們屢次試驗自然現象之計算，其分配均爲平勻的方式。而他們且可用算術等分描述之。高氏對同一之現象曾作反覆之觀查，如一天體之直徑，以便用平均數而增加觀查上之正確性。他注意到這些計算之分配對於平均數或最可靠之價値是在一均勻的或鐘形的方式。

其分配之特點如下：

(1)從平均數上發生之小差較多,大差較少。

(2)正差與負差之次數大約相同。

(3)極端大的差未曾發現。

皮耳生教授(Professor Pearson)在他的「科學之文法」(The Grammar of Science)中,描寫原因乃經驗的途徑上之一階段,而可能性的觀念則給與我們一種信念之表述,即某種一定的事態已發生於過去我們的經驗之中者,將繼續發生於將來。此種信念,為尚未觀查得到的將來的事態之預料的基礎。在最多數的情形之中,我們的智識不是等待着一定的事態之來臨,而是描寫於可能性之名詞。此種可能性可以達到於一定的事態。

六　可能性的數學特質

可能性的定義即一個事件為一羣事件當中之一部,而此一部與全部相比較時之比率,一個事件之發生對全部事件可以發生之途徑上的比率。途徑上每一事件發生之遇逢是假設作相等的相類的機會。所以這是一種純粹的數字比率,而並不依據於一計算之單位。例如一個事件可以發生於a的途徑而消滅於b的途徑,則發生之可能性為$\frac{a}{a+b}$,而消滅之可能性則為$\frac{b}{a+b}$最簡單的實驗,即投一銅元。如果投一銅元,只有兩個途徑可以歸宿,一為陽面(有字的一面),二為陰面(無字而有花紋的一面)。故這銅元的陽面有一半之機會,陰面亦有一半之機會。兩者總合則為1。單位即是數學事件之象徵。

如果一個事件可以發生於許多的獨立途徑中,其發生的可能性是

等於其分開的可能性之總數。須明瞭者即僅可能事件中之一個能夠發生。完全總合後之橋戲牌，(Bridge cards)（橋戲牌爲美國最流行的葉子戲，即以我們普通所稱的卜克牌散發與四人玩之，而鬬其心機，以取分數。其玩法非數言所能盡，我們此地所宜留意者，即每人得13張牌。全付牌共52張，分四種、即黑桃子、紅心、紅方塊、黑櫻花等是。每一種牌分成2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A，各一張。四種各13張。故總計52張）。從牌盒中取出一張得到黑櫻花之可能性是$\frac{13}{52}$得到黑櫻花或紅心之可能性爲$\frac{13}{52}+\frac{13}{52}=\frac{26}{52}$，得到黑櫻花或紅心或黑桃子或紅方塊之可能性是1。因對這四種牌每一種之機會皆爲$\frac{1}{4}$而四種牌之共有機會則爲$\frac{1}{4}\times 4=1$。換言之，隨意從這牌盒中取一張牌出來，總不出這四種牌之外，故其機會爲百分之百的充足。任意取一張牌而欲得A，其可能性爲$\frac{4}{52}$。A或K爲$\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=\frac{8}{52}$。餘類推。

七 複雜事件

許多工廠的工作結果，我們用數量計算之，並記錄之。經驗告訴我們，社會上有些現象，當其已被計算及已被組織之後，獨立事件之結合由機會結合所表現者，極近於鐘形之分配。

一種特殊複雜事件之發生的可能性，依照機會，是等於分開的獨立事件之發生之可能性的相乘之和。繼續抽橋戲牌的解釋爲證。如果取兩盒分開的牌而從各盒中抽取一張欲得2K，則其可能性爲

$\frac{4}{52}\times\frac{4}{52}=\frac{1}{169}$。

用結婚統計的範圍來解釋。假設100個可能新郎當中有88人是童

男，(從來未曾結婚者)，故童男的新郎可能性爲$\frac{88}{100}$。如果100個可能的新婦有92人爲楚女（從來未曾結婚者），楚女爲新婦之可能性則爲$\frac{92}{100}$故100對婚姻中楚女與童男結婚之可能性爲$\frac{88}{100}\times\frac{92}{100}=\frac{8096}{10000}$ $=80.96\%$。此種惟一管束結婚之機會，假設其有極多的獨立影響起作用之時，卽發生如上之結果，而童男與楚女之間則無其他特殊意外之事。在機會的假定上計算，這是很易於把理論的數字80.96%與童男及楚女之實際婚配相比較。每100對婚姻之實際百分數，較之由機會所預料的或許多些。這必由其他的特殊意外之事影響了這事件。

八 更複雜的問題

對於複雜事件有多種原動力獨立的控制他們的時候，我們很願意來決定這些複雜事件發生之可能結果。

在投一銅元的時候，我們已看見陽面之發現與消滅的可能性是各有一半。讓我們多取些銅元。並且假定所有這些銅元，在同一的時候投擲，以求一特別的數目，而便斷定這陽面不同的數目的最大的可能性。無陽面，一陽面，二陽面之可能性爲如何？而所投之特別數目盡爲陽面時的可能性又如何？

(A)當每次投擲兩個銅元，投擲多次，在理論方面，陽面之發現應爲：

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0H & & 1H & & 2H \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{1}{4} & + & \frac{2}{4} & + & \frac{1}{4} = 1。\end{array}$$

長此投擲，這兩個銅元四次中有一次全無陽面，四次中有二次有一陽面，而四次中又有一次有兩陽面。上例公式之 0H 表示無陽面是 $\frac{1}{4}$ 的可能性，1H 即一陽面是有 $\frac{2}{4}$ 的可能性，即一半的可能性，2H 即兩陽面在同時發生亦只 $\frac{1}{4}$ 的可能性。

(B)每次投擲三個銅元，投擲多次，在理論方面，陽面之發現應為：

$$\begin{array}{ccccc} & 0H & 1H & 2H & 3H \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3 = & \frac{1}{8} + & \frac{3}{8} + & \frac{3}{8} + & \frac{1}{8} = 1。\end{array}$$

三個銅元同投時，八次中有一次可以完全無陽面，八次中有三次可有一陽面，八次中有三次可有二陽面，八次中僅有一次可盡是陽面。

(C)當四個銅元同時投擲，投若干次之後，陽面之發生應為：

$$\begin{array}{cccccc} & 0H & 1H & 2H & 3H & 4H \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4 = & \frac{1}{16} + & \frac{4}{16} + & \frac{6}{16} + & \frac{4}{16} + & \frac{1}{16} = 1。\end{array}$$

(D)五個銅元同時投擲，投若干次之後，陽面之發生應為：

$$\begin{array}{ccccccc} & 0H & 1H & 2H & 3H & 4H & 5H \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5 = & \frac{1}{32} + & \frac{5}{32} + & \frac{10}{32} + & \frac{10}{32} + & \frac{5}{32} + & \frac{1}{32} = 1。\end{array}$$

(E)六個銅元同時投擲，投若干次之後，陽面之發生應為：

$$\begin{array}{cccccccc} & 0H & 1H & 2H & 3H & 4H & 5H & 6H \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^6 = & \frac{1}{64} + & \frac{6}{64} + & \frac{15}{64} + & \frac{20}{64} + & \frac{15}{64} + & \frac{6}{64} + & \frac{1}{64} = 1。\end{array}$$

(F)七個銅元同時投擲，投若干次之後，陽面之發生應為：

$$\begin{array}{ccccc} & 0H & 1H & 2H & 3H \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^7 = & \frac{1}{128} + & \frac{7}{128} + & \frac{21}{128} + & \frac{35}{128} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 4H & 5H & 6H & 7H \end{array}$$

$$+\frac{35}{128}+\frac{21}{128}+\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=1。$$

這所有的例子之中，從左至右，分子的數皆爲陽面應該發生之數。這些數也可以說是可能性，也可以說是機會，卽投銅元者所希望可以發生之陽面次數。這是已經明白的，卽每一實驗必須投擲次數甚多，以便呈示此種均衡之最近數。

例表39呈示這些銅元投擲之結果。學者宜自行作銅元實際試驗，以對照此種理論的結果。最好有十八每人每次用銅元七個投擲。各投一百二十八次，各自將各次陽面之數記下，並將其結果相加而平均之，則此平均數與(F)項理論的結果，將最接近。較之一人所投之結果正確得多。故我們所希望之常數卽一平均之結果。

我們常常根據一最有可能性的趨勢以取一有限制之選樣作一理論。這就是說，一種推論是根據於一種假定而作。而這選樣則爲代表。而且這選樣所包括未經實驗研究的案件是無窮境的。

例表 39

獨立現象之發生表(銅元投擲次數)

銅元數	投擲次數中陽面發生之數								最少須投擲之次數
	0	1	2	3	4	5	6	7	
2	1	2	1						4
3	1	3	3	1					8
4	1	4	6	4	1				16
5	1	5	10	10	5	1			32
6	1	6	15	20	15	6	1		64
7	1	7	21	35	35	21	7	1	128

九 結論

1. 機會的意義——機會就是可以供我們利用的材料的取定的某一部份與全部份相比的比率，而可以供我們之應用的。社會上之材料無窮，故機會也是無窮；但我們的應付手腕有限，故我們自己取定材料的機會也很有限；故機會不僅是屬於客觀上的事象，也同時屬於主觀上的應付。故我對機會所下的定義乃如此。

2. 可能性的意義——可能性是與機會互爲消長的。卽所取的某個體在羣體材料中所佔的機會之比例。卽個體與羣體總數之比率。x 的可能性 $=\frac{x}{n}$。n 愈大，則 x 愈小。n 愈小，則 x 愈大。n=x，則 x 之可能性爲百分之百，也就是機會爲百分之百。此卽事件愈複雜，機會愈小；事件愈簡單，機會愈大之意。

3. 機會之效用——凡科學上所討論之問題，皆爲機會所支配。例如我研究的科學與他人所研究的科學各自不同，也就可以說我與他人研究的機會各自不同。又如同爲統計學者，我所取之材料與其他統計學者所取之材料，各有不同，這也是機會的不同，又同一材料而各所用的例子皆不同，也是機會的不同。故其結果各不同。

4. 可能性的效用——可能性是科學上假定的眞理，是根據於機會所造成的趨勢，是一切未來科學的基礎。故一切科學上之新眞理，都只能說是可能的眞理，而不可以說是絕對的眞理。

十 問題

1. 科學之開端根據甚麼?

2. 何以同爲某科之科學家而其研究之結果各有不同?

3. 世間有無絕對的眞理?試解釋之。

4. 統計學上有無絕對的確數,試解釋之?

5. 統計學爲最精確的數量的研究,其所研究的結果是否可以代表所研究的問題的同性質的一切的數量。

6. 一付仆在桌上的混亂的麻雀牌:

(一)隨意取一張而欲得「紅中」其機會爲如何?

(二)隨意取二張,欲二張皆爲「紅中」,其機會又如何?

(三)隨意取三張,而欲三張皆爲「紅中」其機會又如何?

(四)隨意取四張,而欲四張皆爲「紅中」,其機會又如何?

(五)隨意取五張,而欲得四張「紅中」一張「發財」其機會爲如何?

餘類推。

7. 何謂可能性?

8. 可能性與機會之關係爲如何?

9. 上列問題6中之各機會,須如何試驗,乃能證明理論上之公式。

10. 實驗之結果與理論的結果是否可以完全相同?

11. 科學家所能爲力的以何種標準爲止?

第三十六章　可能弧線 (The Probability Curve)

一　概論

將上章（第三十五章）例表 39 投銅元求陽面之獨立現象發生的結果之數目，可以在 X 軸上記其陽面之數目，Y 軸上記其發生之次數，而作一可能的多角形圖。為了實驗的目的以求對照眞實的分配，一繼續的或光滑的弧線則宜求出。這光滑的弧線或許可以造成為一合於任何問題的實際材料的（參閱圖示 27.28）。這種弧線有許多不同的名稱，或稱之曰可能弧線，或稱之曰高氏弧線，(Gaussian curve) 或稱之曰差數通常弧線 (Narmal curve of errors)，或稱之曰鐘形弧線(Bellshaped curve)，而其意義則一。

二　一弧線之數學描寫

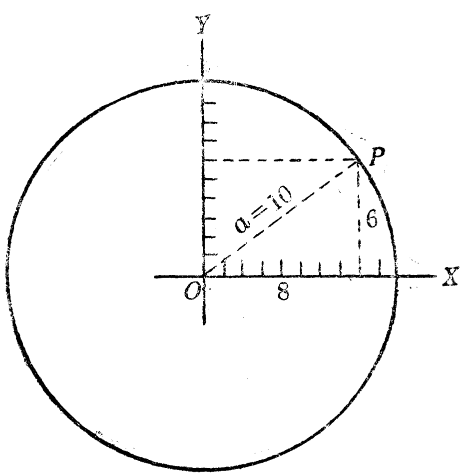
所謂任何弧線之數學描寫，簡單之意義，即給牠以一符號上的名詞，如同人們取一圖畫之名稱然，即將弧線定以一等分之方式的名稱。這種描寫，必須把各種弧線之性質分淸，而且牠必須能夠使我們從已知之價值及其關係而造成一實際之弧線。此種理論及事實在本書第二十二章至第二十五章各直線關係及曲線關係等問題，方式，及圖示中，已討論過了。現在我們將要來討論一圓形之描寫。

三　圓形之描寫

學者已知到如何用圓規，及根據一已知之半徑如何用圓規以畫一圓周。這半徑乃一特別圓形的圓周上所有各點之常數。我們將如何用符號來描寫一圓形，使其有別於橢圓或其他弧線之種類呢？

圓形之通常等分，最特殊的公式爲 $x^2+y^2=a^2$；在此方式之中，a 是代表半徑，x 是代表從圓之中心上的零點的 X 軸上之任何一距離，y 是從零點的 Y 軸上之任何一距離，如圖示 39 然。圖示 39 乃價值的關係呈現於 $x^2+y^2=a^2$ 之等分者。當這半徑 x＝10 故 $a^2+y^2=100$。

圖示 39　　圓周等分圖



$x^2+y^2=100$，是否正確，則有一可靠之試驗，即從圓心零(0)到圓周上取一點 P，而以半徑 10 證明之。例如 x 在 X 軸是個 8 單位的價值，而 $(8)^2+y^2=100$，則 $y^2=(10)^2-(8)^2=36$，故 $y=6$；x 與 y 的這

些價値，能使我們置定 P 點及其他類似之點。如果 P 點果在圓周上，則這等分 $x^2+y^2=a^2$，必爲正確無疑了。卽 $(8)^2+(6)^2=(10)^2$，或 $64+36=100$；這種等分可在圓周上任何一點求之，皆同一正確，不管該點之地位在圓周上之何處取定。但在圓周以內，或以外，則不正確。用這半徑 10 爲常數，在圓周上下任何點之數皆可以此等分置定之。

四　均勻的鐘形弧線

用符號及有區別之等分以描寫弧線之簡單方式，這早巳成爲我們的研究的對象。而呈現於此等描寫中的相互關係及數學名稱，皆極明顯並無神秘之事。學者在尙未完畢這些計算之步驟時，可不必爲推算上所煩惱。

鐘形弧線之等分方式爲

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\varepsilon^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

此種等分之實際計算因太麻煩可不必一一求之。但須留意此等分各符號之意義。e 及 π 這兩個字是較之 a，b 兩字更通用之常數符號。這常數 e 是賴皮連氏之對數基本 (The base of the Napierian logarism) 的一個純淨數目 2.71828，而 π 則爲圓的圓周與直徑之比率的常數，而 N 則爲案件總數，σ 則爲標準差，x 則爲由平均數中所產生的各差量，與以前所用的 x 之意義則不同。此地之 x 是表示邊際線(卽 x 量)上之任何距離，由以零 (0) 爲平均數之分配的標準差爲單位之計算而來，而 y 乃是建立於 x_1 x_2，x_3 x_4，x_n，從零 (0) 起之上的任何縱線。

這種弧線之等分又可寫作另一方式

$$y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

在這個方式之中，$y_0=\dfrac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$，而 y_0 又是建立於平均數或 x 爲零標準差 (0σ) 處的最高縱線之分配造成鐘形果數弧線上之最高點。任何分配的 y_0 之價值是從下列等分方式而來。

$$y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{2.5066\sigma}$$

在這方式之中，N 與 σ 之意義早已講過的了。在弧線等分之中，當 x 爲零(0)時，牠卽在最高縱線之地位上。於是 $y=y_0$ 卽爲最高縱線。這弧線對於零 (0) 的平均數分配是很均勻的。因這等分 $y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ 包含所有縱線之價值與這最高縱線 y_0，皆是相關連的，而且視作爲常數價值，如譯表 4 所表示的構造，以定繼續的縱線之價值，而與最高縱線爲單位時成相稱之勢。在譯表 4 中所有各縱線之價值是相反應於 x 的價值表述在標準差之總數及其小數$\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$，由平均數零 (0) 的邊際量(卽 x 量)上而分置者。此種等分所描寫之弧線與前面$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^n$的意義與結果皆相同的，而 n 又是代表無窮境的數。邊際線之構造則由標準差 σ 爲碼尺(卽橫距)，而以原點零 (0) 爲平均數。標準差之總量可爲整數，如 1σ，2σ，3σ，或爲小數如 0.2σ，0.4σ，0.8σ，等等。已由標準差構造一計算量後，從譯表 4 中所得到之最高縱線，卽作爲零的標準差(0σ)，而其他縱線則由零之其他距離決定之。零以上及零以下之距離相反應

於縱線者則相同。將各縱線之頂點連結之，遂成爲一鐘形弧線。這邊際量上之小數愈小，而所畫的縱線之數愈多，且愈密，而由此等縱線之頂點連結爲光滑弧線之光滑程度亦愈大。

因由譯表 4 中所定之縱線，在邊際量上反應到標準差之小數使相稱於這最高縱線的單位是可能的。用任何數乘這最高縱線並以同一之數乘這與最高縱線相稱的兩邊之各縱線，這種步驟僅僅是要將頂點量放大而作圖，且對這最高縱之分配的方式毫無變更。

五　鐘形弧線之實用法

鐘形弧線以理論的及理想的分配供給一實際分配之比較的基礎。鐘形弧線呈現一種普通之經驗及分配之定律，而實際材料之結果亦極與之相近，這是在前面已經說過的了。我們的觀查，常爲樣本所限制。從此等樣本，我們希望可得一通常之敍述與推論。這理想的分配，乃在假定之上呈現一種地位，卽樣本已變作無限大了。簡言之，卽可在假定之上製造一種實際材料之弧線，以期與鐘形弧線之辦法相符合。（除非受意外的樣本情形所影響）。一種假定，在試驗中，卽可得一滿意的實際分配與理想分配的比較。

又必須記憶着的，卽分配可受統治的與相互關係的原動力之影響而傾斜。而在如此之情形中，從均勻上所發生之分離或波動，並非受選樣手續之限制。鐘形弧線則非此種適合之方式以推論分配，必有其他之整理的定律可求，以描寫經驗上之事實。鐘形弧線以外之弧線，則有其本身之適合的數學描寫。

六 在實際材料上所製定之理想弧線

為了比較的目的，鐘形弧線可以製來以適應實際果數的分配。這計算對實際的與理想的分配彼此間之重要性與普通性皆相同，即平均數，標準差，與最高縱線，等等問題是了。

實際分配之果數多角形，是依照通常方法而製定之。在理想弧線製於實際分配上之時，這假定即造成那最高縱線或弧線之最高峯，是落置在平均數之上。這最高縱線，在表中列為一單位時，可以漸次上升而達於需要之程度。且其對實際分配之價值可從 N 及 σ 的智識中計算之。改換此等價值，而將實際材料計算在等分之中者，則為 $y_0=\frac{N}{2.5066\sigma}$。當這最高弧線或果數已知到之後，其他果數，可很容易的從譯表 4 之小數應用，反應到邊際量上之標準差的附屬部份中求之。這種步驟所求得之各縱線或果數，即合於製造理想的弧線。將邊際量用標準差之小數分開置定，以製造理想的弧線之理由，在舉例的說明中將更清楚。

適應於鐘形弧線之一例

這例解的材料，是日本後備兵與美國後備兵的高度，以每一英寸為分類之級距。例表 40 及 41 表示實際的與理想的兩種果數分配。

計算之需要，以製造一理想弧線，在各實際分配之上者為 N (案件總數)，Mean (平均數)，及 σ (標準差)。這是在一般的短法中計算實際分配已用過的了。對於各個理想的分配而欲得最高縱線或果數，僅須將下列公式代以實際價值即得。

$$y_0=\frac{N}{2.5066\sigma}$$

(須注意者此處之 σ，必須呈述於級距之中而與普通之實例的價值單位不同，以便求得對 y_0 每級距的觀查點之數，而便與實際果數表相比較——參閱 G. U. Yule: An Introduction to the Theory of Statistics, 6*th* ed.,1922,P.308)

(1) 日軍 $y_0=\dfrac{10,000}{2.5066\times 2.25}=1773$ 最高縱線

(2) 美軍 $y_0=\dfrac{10,000}{2.5066\times 2.20}=1813$ 最高縱線

例表 40　日軍與美軍之高度實際分配表

級限 英寸 1	中點 m 2	日軍 (果數) f 3	美軍 (果數) f 4	兩種分配中之包捲果數 5
55.5 至 56.5 以下	56	47		
56.5 至 57.5 以下	57	125		
57.5 至 58.5 以下	58	316		
58.5 至 59.5 以下	59	640		
59.5 至 60.5 以下	60	1065		
60.5 至 61.5 以下	61	1486		
61.5 至 62.5 以下	62	1730	38	38
62.5 至 63.5 以下	63	1698	192	192
63.5 至 64.5 以下	64	1328	538	538
64.5 至 65.5 以下	65	839	1055	839
65.5 至 66.5 以下	66	442	1557	442
66.5 至 67.5 以下	67	208	1822	208
67.5 至 68.5 以下	68	64	1695	64
68.5 至 69.5 以下	69	12	1294	12
69.5 至 70.5 以下	70		868	
70.5 至 71.5 以下	71		510	
71.5 至 72.5 以下	72		263	
72.5 至 73.5 以下	73		114	
73.5 至 74.5 以下	74		42	
74.5 至 75.5 以下	75		12	
		10000	10000	

日兵 N＝10000　　　　　　　美兵 N＝10000

　　M＝62.24 英寸　　　　　　　M＝67.51 英寸

　　σ ＝ 2.25 英寸　　　　　　　σ ＝ 2.20 英寸

例表 41　日兵與美兵之高度——理想弧線的果數或縱線

從平均數兩方面之正負距離的 $\frac{x}{\sigma}$ Mean＝0 1	日兵計算後的果數或縱線 y_0＝1773 2	美兵計算後的果數或縱線 y_0＝1813 3
.0σ＝Mean	1775×1.000＝1773	1813×1.000＝1813
.2σ　(+or−)	1773×　.980＝1738	1813×　.980＝1777
.4σ　(+or−)	1773×　.923＝1636	1813×　.923＝1673
.6σ　(+or−)	1773×　.835＝1480	1813×　.835＝1514
.8σ　(+or−)	1773×　.726＝1287	1813×　.726＝1316
1.0σ　(+or−)	1773×　.607＝1076	1813×　.607＝1100
1.2σ　(+or−)	1773×　.487＝　863	1813×　.487＝　883
1.4σ　(+or−)	1773×　.375＝　665	1813×　.375＝　680
1.6σ　(+or−)	1773×　.278＝　493	1813×　.278＝　504
1.8σ　(+or−)	1773×　.198＝　351	1813×　.198＝　359
2.0σ　(+or−)	1773×　.135＝　239	1813×　.135＝　245
2.2σ　(+or−)	1773×　.089＝　158	1813×　.089＝　161
2.4σ　(+or−)	1773×　.056＝　99	1813×　.056＝　102
2.6σ　(+or−)	1773×　.034＝　60	1813×　.034＝　62
2.8σ　(+or−)	1773×　.020＝　35	1813×　.020＝　36
3.0σ　(+or−)	1773×　.011＝　20	1813×　.011＝　20

七　圖示 40 理想的鐘形弧線之造法

1. 根據例表 40 第三行之材料，先作成日兵之虛線多角形圖。例如在例表 40 中，日兵之中點 56 上之級果數爲 47，卽在 X 軸上 56 點處向上尋去，尋到 Y 軸 47 相應之處而定一點。其餘照此類推，用虛線造

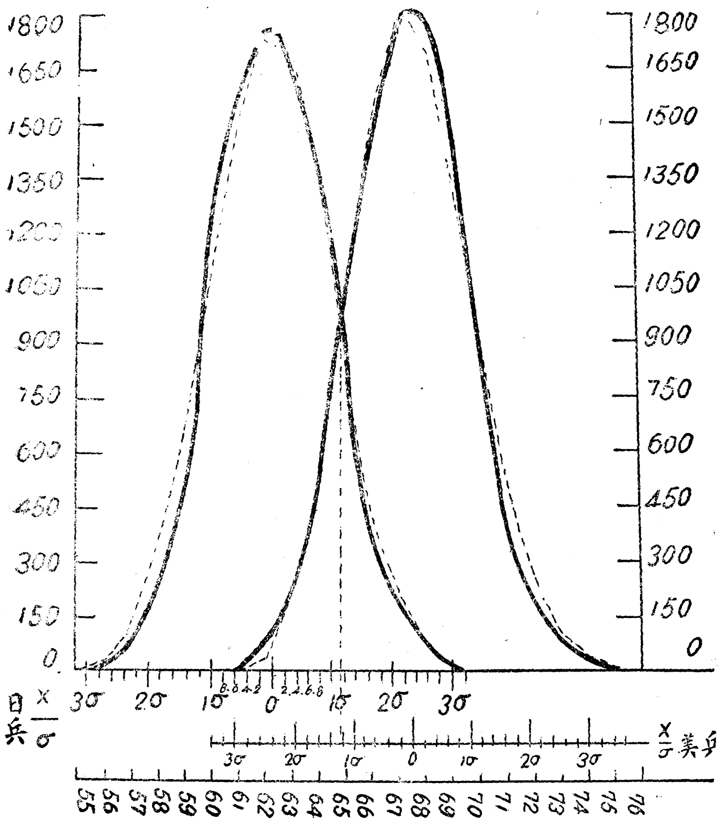
成一多角形圖，一如本書第十九章圖示 8 之多角形圖作法，完全相同。此虛線係代表日兵實際材料之不規則的多角形弧線。

2. 有了日兵的多角形之後，再按照標準差之計算以求理想的弧線，卽實線的光滑弧線。圖示 40 係以每 0.2σ 爲 X 軸上之距離，卽於 X 軸上之平均數(0σ)處，向左右推算。$+0.2\sigma$ 處，卽以標準差乘 0.2 加於平均數之上。例如例表 40 之日兵高度平均數爲 6.25 英寸，日兵高度之標準差爲 2.25 英寸。取每 0.2σ 爲距離，則 $0.2\times2.25=0.45$；將 0.45 加於日兵平均高度之上，則得 $62.24+0.45=62.69$；其餘依次高 0.2σ 卽依次加 0.45，乃得例表 42 正方之各項結果。再由日兵平均高度減去 0.2σ，卽減去 0.45，乃得 $62.24-0.45=61.79$；其餘依次每低 0.2σ 卽依次減去 0.45，乃得例表 42 負方各項結果。

3. 再尋各小數標準差所在地與 Y 軸相應之數，如 $0\sigma=1773$，0.2σ(正或負)$=1738$，餘類推，卽在 X 軸上 0σ 處向上尋去，尋到 Y 軸 1773 處，置一點，此點卽最高縱線之頂點。然後依次尋每一正負 0.2σ 之所在地與 Y 軸相應之價值，如 $+0.2\sigma$ 在 X 軸上 62.69 處，而 Y 軸相應之價值則爲 1738；-0.2σ 在 X 軸上 61.79 處，而與 Y 軸相應之價值亦爲 1738；卽由 X 軸上 62.69 處向上尋去尋到 Y 軸上 1738 處置一點，並於 X 軸上 61.79 處向上尋去尋到 1738 處亦置一點，此二點卽爲次高縱線之頂點，互相對立於平均數上 0σ 處最高縱線建立地之兩面。餘類推以求得各正負小數之標準差之價值與 Y 軸上相應之點，卽各縱線之頂點，連結各頂點，卽成一光滑之理想的鐘形弧線而與實際材料之虛線多角形弧線相比較，幾乎完全符合。美兵弧線之作法與此法完全相同。

圖示 40

日兵與美兵的高度之實際弧線與理想弧線之比較圖



例表 42

圖示 40 的日兵高度分配各小數標準差在 X 量上之地位表

日兵　Mean＝62.24 英寸

σ ＝2.25 英

2.25×0.2＝0.45

標準差	正方	負方
.2σ	62.24+0.45=62.69	62.24−0.45=61.79
.4σ	62.69+0.45=63.14	61.79−0.45=61.34
.6σ	63.14+0.45=63.59	61.34−0.45=60.89
.8σ	63.59+0.45=64.04	60.89−0.45=60.44
1.0σ	64.04+0.45=64.49	60.44−0.45=59.99
1.2σ	64.49+0.45=64.94	59.99−0.45=59.54
1.4σ	64.94+0.45=65.39	59.54−0.45=59.09
1.6σ	65.39+0.45=65.84	59.09−0.45=58.54
1.8σ	65.84+0.45=66.29	58.54−0.45=58.09
2.0σ	66.29+0.45=66.74	58.09−0.45=57.64
2.2σ	66.74+0.45=66.19	57.64−0.45=57.19
2.4σ	67.19+0.45=67.64	57.19−0.45=56.74
2.6σ	67.64+0.45=68.09	56.74−0.45=56.29
2.8σ	68.09+0.45=68.54	56.29−0.45=55.84
3.0σ	68.54+0.45=68.99	55.84−0.45=55.39

例表 43

圖示 40 的美兵高度分配各小數標準差在 X 量上之地位表

美兵　Mean＝67.51 英寸

σ ＝2.20 英寸

2.2×0.2＝0.44

標準差	正方	負方
.2σ	67.51+0.44=67.95	67.51−0.44=67.07
.4σ	67.95+0.44=68.39	67.07−0.44=66.63
.6σ	68.39+0.44=68.83	66.63−0.44=66.19
.8σ	68.83+0.44=69.17	66.19−0.44=65.75
1.0σ	69.17+0.44=69.61	65.75−0.44=65.31
1.2σ	69.61+0.44=70.05	65.31−0.44=64.87
1.4σ	70.05+0.44=70.49	64.87−0.44=64.43
1.6σ	70.49+0.44=70.93	64.43−0.44=63.99
1.8σ	70.93+0.44=71.37	63.99−0.44=63.55
2.0σ	71.37+0.44=71.81	63.55−0.44=63.11
2.2σ	71.81+0.44=72.25	63.11−0.44=62.67
2.4σ	72.25+0.44=72.69	62.67−0.44=62.23
2.6σ	72.69+0.44=73.13	62.23−0.44=61.79
2.8σ	73.13+0.44=73.57	61.79−0.44=61.35
3.0σ	73.57+0.44=74.01	61.35−0.44=60.91
3.2σ	74.01+0.44=74.45	60.91−0.44=60.47
3.4σ	74.45+0.44=74.89	60.47−0.44=60.03
.6σ	674.89+0.44=75.33	
.8σ	875.33+0.44=75.77	

第一須要決定 X 在邊際量上，由 σ 所得之價值。在 σ 之上，繼續的縱線或果數，即可製造，以得理想的弧線。我們將用 0.2σ 將邊際量分段，始於分配的平均數(0σ)，而於平均數之上下製定相等之點。

現在對於各分配皆有了這最高縱線 y_0，並已以 σ 為準，從平均數製定邊際線之繼續的距離，這便易於計算其他之縱線與果數。因這些縱線及果數之求得，即以譯表 4 中之各小數乘這最高縱線之常數價值所得之各點所製定。而譯表 4 中之小數，則與從平均數為零(0)的各距離相反應，果數則列在例表 41 之中。

在例表 40 中之實際分配，第三、四行之材料，是依照普通方法作成圖示 40. 英寸的高度列於邊際量之上，而縱線頂端之量則為級果數。連結各縱線頂點之虛線，完成這多角形圖。

在同圖之上，畫一實線弧線，以作為理想的分配與實際材料之分配的比較。理想的分配之標準，則依據例表 41 之第二、三行材料而來。為造此等果數，而在邊際量上之各點，是依照從平均數 62.24 英寸(日兵)作為零(0)，最高縱線之建立處的計算單位之正負距離而作，如列於例表 41 之 1 行者。這級距為 0.2σ 這 σ 之價值為 2.25 英寸。故為造實際分配所已用之量中某點為平均數上下間之第一縱線，即由 0.2×2.25 英寸之距離的計算而決定該縱線之建立。0.2×2.25 英寸 $=0.45$ 英寸，從 62.24 之正負兩方面皆同取 0.45 英寸之距離。第二縱線之地位是 0.4×2.25 英寸得 0.9 英寸，在 62.25 英寸之正負兩方面皆相同。照此類推，一直計算到 3σ 的量上，或 3×2.25 英寸，$=6.75$ 英寸。在 62.25 英寸之正負兩方面皆相同。這地位在繼續的縱線之平均數之上下已取

定之後，我們卽製定這最高果數 1773 在 62.25 英寸之上，而其他的理想的果數則在 1773 之上下。照求實際分配之同一頂點量之方法行之。各縱線之頂端，用光滑之實線連結之，卽作成一均合的鐘形弧線。如以之小數爲級距，縱線之數則將增加，而連結各縱線之頂點之光滑弧線更易作成。

這弧線與這多角形相比較，表現非常密切的適合。在這日兵的高度之情形中，這實際的與理論的果數之間的差別，可認爲不是眞正的差別，但因爲選樣的意外情形所影響。換言之，高度果數很有可能性以符合由鐘形可能弧線所呈現的分配定律。其他材料之分配則不如此之圓滿。

美兵之實際的與理想的果數，是從例表 40 第四行及例表 41 第三行之材料以作成圖示 40，方法與解釋於同圖日兵之分配者完全相同。這理想弧線的級距是 0.2σ，這美軍分配的 σ 之價值是 2.20 英寸，而這最高縱線則爲 1813，建立於這平均數，67.51 英寸之上。

將日兵與美兵的多角形及弧線相比較，則發現美兵之實際分配與鐘形方式則不如日兵符合。但又不似表現於高度分配不同的定律的差別之大。實際分配之更進一步的均合性之試驗，各個分配之中數，及最高數，皆須計算，以與平均數相比較，他們大約皆爲相等之價值。

八 結論

1. 可能弧線之意義——可能弧線，卽根據機會的可能結果，以製成一種弧線。大約凡一切數量之分配，如工資，如成績（學業分數，或智慧測驗結果），或一切自然科學的實驗之結果，皆爲一自然之弧線。再根據

此等實際材料之分配，用$\frac{X}{\sigma}$為計算之標準，即可得一理想之弧線。此理想的弧線與實際的弧線可以幾乎符合。故所謂可能弧線者，即依據實際材料之弧線(尤其是體高的測驗)，用標準差的$\frac{X}{\sigma}$計算而可能求出一光滑的鐘形弧線是了。

2. 可能弧線之造法；

(一)根據一實際材料，先造成一多角形，用虛線畫之。

(二)將 X 量用標準差$\frac{X}{\sigma}$之方式求出各小數 σ 之價值。各之價值，可於本書之譯表 4 中察之。

(三)尋出各小數 σ 在X 量上之地位及其 Y 軸上數量相應之點，而為各縱線之頂點。

(四)最高縱線之頂點，在平均數 0σ 之上的一條縱線之頂點上。

(五)正負 σ 之價值皆相等。即在平均數 0σ 處兩方面之 σ 價值須完全相同。如有 0.2σ 在平均數之上者，亦須有同樣之 0.2σ 在平均數之下。在平均數之上的 σ 為正，在平均數之下的 σ 為負。餘類推，一直推到 3σ 為止。

(六)得到各小數之 σ 價值與其相應於 Y 軸上的數量處，即置一點。將此諸線連結，即成一光滑的理想鐘形弧線。

(七)各 σ 分類愈小，則線愈多，而縱線之頂點當然亦同時增多，故理想的鐘形弧線之光滑性亦愈大。

3. 可能弧線之效用。

(一)可與實際弧線相比較。

(二)可以顯示機會構造弧線的定律。即大凡一切現象的數量之

分配皆必成爲一種弧線;而任意取一部份材料加以整理,列成由小至大之秩序後,結果皆可以弧線表示之。將實際弧線用$\frac{X}{\sigma}$之方式求其價值,則可得一光滑之鐘形弧線。

(三)可啓示一切科學上之可能趨勢皆爲弧線式。

九 問題

1. 何謂可能弧線?
2. 可能弧線之造法如何?試列舉其綱要。
3. 可能弧線之效用如何?
4. 在如何計算情形中,可能弧線之光滑性最大?
5. 可能弧線最適用於何種材料?
6. 試將圖示 15 之兩條弧線(本書第 292 頁)作成理想的可能弧線。

第三十七章　可能差(Probable Error)

一　差的分配之描寫

在第三十章，變化的題目上，我們已將變化下了一定義，卽是說「事實上，變化之計算，卽表述集中趨勢，尤其是算術平均數，之兩邊的一羣數目之散佈，有若干遠」。(參閱本書第389頁)而在第三十、三十一、三十二、各章中，對各種變化之計算及圖示，亦已討論及之。在此地，可將變化之計算，再下一定義:「變化之計算，卽X量上之一距離，在各距離之中，有若干相稱的果數，落置於其間」。在標準差一章中，已講過在平均數上之正1σ與其下之負1σ之間是包括所有案件的三分之二的案件。而6σ至少應包括全部案件百分之九十九的案件。而四分差之價値大約爲標準差之價値的三分之二。試將本書第三十，三十一、三十二各章，一對照，便明白的了。這些敍述，是根據於均勻的鐘形弧線之特質而呈述。在本章中，用此種鐘形弧線或許能把變化之意義表現得更明白。

二　可能弧線下面積之區分

因在理想的弧線之最高縱線，是假定爲一統一的分配。故這弧線下之面積亦可假定爲一統一的分配。在最高縱線與其他由平均數的距離用σ所建立之任何一縱線之間的面積之相稱量皆能用微積分的方法計算之，這是譯表5中所已完成的工作。譯表5中之數字，乃申述介於最

高縱線及由平均數上用 σ 所建立之任何距離之間的面積之總相稱量。在鐘形弧線中的平均數上下間之面積與縱線相反應者完全相等。

現在且來解釋譯表 5 之應用法。圖示 40 的日兵之理想弧線之面積，可以區示在這條弧線之下是包 10000 案件。介於最高縱線及建立於平均數以上之 0.2σ 或 0.45 英寸之縱線處，譯表 5 即呈現 0793 的數字。這就是說 $\frac{793}{10,000}$ 的總面積，是在這弧線之下，或 7.93% 的總案件是限制在這最高縱線及 0.2σ 或 0.45 英寸之間。平均數以上之 0.4σ 或 0.9 英寸處譯表 5 呈現 1554，即謂有 $\frac{1554}{10,000}$ 或 15.54% 的案件，是佔據圖中的這些面積。這面積從平均數伸張到 1σ 的縱線處或平均數以上 2.25 英寸處，譯表 5 即呈報 3413； $\frac{3413}{10,000}$ 或 34.13% 的案件是落置在平均數與 1σ 之間。

案件之同一相稱量是落置在平均數上下相似的面積之間。故 $2\times 34.13\% = 68.26\%$ 的案件是落置在平均數之上下的 $+1\sigma$ 及 -1σ 之間。前面第三十二章中所言三分之二的案件是在平均數上下 $+1\sigma$ 及 -1σ 之間的理論，即根據於此。同一理由，3σ 處，譯表 5 即呈報 4986.5，這就是說 49.865% 的案件是落置在平均數及由平均數伸張到 3σ 之間的面積，故 $2\times 49.865\% = 99.73\%$ 的案件，落置在 6σ 之間。

介於四分差間的價值的百分之二十五的案件所佔之面積，與標準差的價值之間的關係爲如何？換言之，何種標準差之小數。由最高縱線計算之者，將包括這弧線 $\frac{2500}{10,000}$ 或 25% 的面積？要答復這一個問題，須從譯表 5 尋得 2500，或與此數極相近之數，於是注意 σ 之小數，包括

這 2500 者，隨着譯表 5 中較 2500 爲恰小之一行尋去。尋得與 2500 恰稍小之數爲 2257 ,此數與第一行之 0.6σ 相反應。現在由 2257 之橫行，同行推去，推至與 2500 最相近之數爲 2486 ，這個數目所在之同縱行第一字爲 0.07σ 。2486 這個數目較之 2500 爲稍小，但其次之一數目 2518 在 0.08σ 之同縱行又稍大，故 2500 這個數目應屬於 0.07σ 及 0.08σ 之間。2486 與 2518 之差爲 32 ，這 32 卽表示由 0.07σ 變到 0.08σ 之差，卽 0.01σ 之變化。2486 與 2500 之差爲 14 ，這個差爲 0.01σ 的 $\frac{14}{32}$，卽 $\frac{14}{32}\times 0.01\sigma, =0.0044\sigma$,以加於 0.07σ 之上卽得 0.0744σ ，這個小數再連結於 0.6σ 之上，卽得 0.6744σ ，此數卽反應着 2500 。這個小數在有十進位計算時的更正確之價值，常定爲 0.6745σ

在這平均數及其上之 0.6745σ 處之間的面積常爲這弧線下之總面積的百分之二十五的面積，且恰等於四分差所佔之面積。由平均數上下的正負 0.6745σ 之間的案件，恰爲 50% 的案件。且這機會亦十分平等。如果我們任意取定百分之五十的案件的價值，置於這個最大差範圍之內或外，這可能性爲半對半。如同投一銅元之發生陽面陰面然。從這上面的解釋，可使四分差 $=\frac{2}{3}\sigma$ 的價值之理由更清楚了。

因譯表 5 是根據相稱的量所造成，故適用於任何一鐘形弧線。用這譯表 5 以直接決定任何此等弧線下，在平均數上的縱線及其他任何縱線間所包括的價值之相稱量，都是可能的。又在平均數上同一方向之任何兩縱線間；用簡單的減法，以求計算上之相稱量，也是可能的。假如在平均數與 0.4σ 之間是落置 15.54% 的案件，在平均數與 0.2σ 之間是落置 7.93% 的案件，故在 0.2σ 與 0.4σ 兩縱線之間的案件，這相稱量

爲 15.54－7.93＝7.61%；如果我們要想知到平均數之另一方的兩縱線間之價值，即增加一些同樣之手續便是。

三 用均勻的鐘形弧線計算差量之法

這可能弧線是用來描寫統計計算上之可能的正確，如平均數，變化之計算，及將於下章討論之相互關係等之計算。這是一個選樣的數學基礎問題，即關於這樣本的正確與臨時情形之變化問題。在選樣之手續上，欲求避免常差，則盡量取全部之案件價值以得其平均數，而不可隨意選一部份以求其平均數，因後者與前者之比較爲形成差量惟一之由來。

例如一平均數由一觀查的一部之數目計算而來，其結果將與一平均數由所有全部之計算而來者不相等。假設所取之案件，用來作爲代表；另一相同之案件亦取來作爲一樣本，兩者將產生不同之平均數。其他統計上之計算，如標準差之計算，亦同此理由。換言之，所有統計上之計算量其自身皆爲一變化量。

科學上正確性的興趣不能描寫一分配量之正確性較之事實所能給與之正確爲更正確。故主要點，即在知到如何從限定之選樣所得來之計算量之分配。如果在同樣材料中繼續任意取定若干樣本，則可得若干不相同之平均數，而這些不相同之平均數，則可落置於由全部案件所得之眞正平均數之上或下。故這些計算之分配，即將隨着前二章中所討論的可能定律——這鐘形弧線而被支配。這鐘形弧線有時稱爲差量的通常弧線（Normal curve of error）。這差量的總數即稱之爲可能差。

欲從選樣中得到統計計算上之絕對眞實價值是不可能的。當我們

從代表性的樣本已計算這些計算量之時，我們必須將我們的範圍內遇着這些代表性之價值，因外面不可控制之情形發生時所受之影響，加以說明。同一之研究者，或其他之研究員，對同一之人口之相同的選樣，加以試驗，其所得之計算結果將各不同。此種不同之結果究竟是由所研究的現象之實際的不同，抑係受臨時變化之影響而不同，研究者須加以說明。

四　一千個新生的高度之測驗

這高度是寫在一鐵邊硬圓厚紙片上，這些厚紙片完全是混和過的了。而每 100 的選樣，是任意取定的。這平均高度，即隨意取 100 厚紙片上所載之高度相加，再以 100 除之而得每 100 案件之平均數。每次取出 100 計算其平均數之後，再與未取者混和一塊。再完全混和之後，又取出 100 片厚紙片，將其所載之高度相加，而平均之。每次如此，由 1000 厚紙片取出100，用同一之方法平均之，將每次平均之結果皆錄下，一直試驗 100 次，遂得 100 選樣的平均數如下表：

例表 44　　100 選樣的平均數之表——平均高度之記數表

平均高度（英寸）					平均高度（英寸）				
66.92	67.30	67.43	67.55	67.70	67.18	67.37	67.52	67.63	67.78
67.03	67.30	67.45	67.56	67.70	67.21	67.37	67.52	67.64	67.79
67.07	67.30	67.45	67.56	67.70	67.22	67.37	67.53	67.66	67.80
67.07	67.30	67.45	67.56	67.70	67.22	67.37	67.53	67.67	67.83
67.08	67.32	67.46	67.57	67.72	67.23	67.37	67.53	67.67	67.88
67.08	67.32	67.46	67.58	67.72	67.25	67.37	76·53	67.67	67.92
67.10	67.34	67.48	67.59	67.74	67.26	67.39	67.54	67.68	67.96
67.13	67.35	67.50	67.62	67.75	67.27	67.40	67.54	67.69	68.02
67.15	67.35	67.50	67.63	67.77	67.29	67.42	67.55	67.70	68.16
67.18	67.36	67.50	67.63	67.77	67.29	67.43	67.55	67.70	68.23

我們對於例表 44 的 100 個平均數中之每一個選樣皆用同一之方法計算之。這些平均數之平均數及平均數之標準差,皆從例表 44 之零亂材料中計算之。例表 44 與例表 45 之檢查,則見各繼續的選樣以與全部平均數相比較,相差甚微。這些小組平均數之變化,對於平均數之平均數 67.50 英寸,恰成一合宜的均勻之分配。各級果數中不規則之情形,可用同樣之方法,多選樣若干之結果以修飾之。

在平均數中之各差的分配與鐘形弧線之符合程度爲如何?任意選樣之方法加重意外事態及選樣中不可控制之原動力,以引起變化。在理想的可能弧線中,我們已說過有 68.26% 的案件是在平均數上下的正負 σ 之間。讓我們來試驗這 100 個任意選擇的平均數,用 σ 來分配之結果。這 $\sigma=0.24$ 英寸,故在這最大差 67.50 正負 0.24 英寸(67.26-67.74 英寸)應該落置在這些選樣的平均數的 68.26% 之面積上。將這些平均數作成圖示,則有 71% 是落置在這個最大差之間。須注意者,即這些選樣的平均數中,有一個恰恰是 67.26,而又一個則在 67.74 之上。

在描寫的均勻的鐘形弧線之時,我們已講過從平均數計算正負 0.6745σ 應包括 50% 的案件。從任意選樣所得之任何一平均數落置在這個最大差(正負 0.6745σ)之內或外是半對半的機會。故 0.6745σ 即可以計算平均數之可能差。讓我們用這標準來試驗上面我們所有的 100 平均數。

$$0.6745\sigma = 0.6745 \times 0.24 \text{ 英寸} = 0.16 \text{ 英寸}, \text{P. E.}$$

如果這 100 個選樣的平均數與分配上的鐘形弧線完全符合,我們即可尋出 50% 的案件是包括在這 67.50 英寸至正負 0.16 英寸之最大差之間,或 67.34-67.66 英寸之間。將這些實際的平均數製在圖示之

內，則有 47% 的案件是介於這個最大差 67.34-67.66 之間。

在例表 44 及 45 之中，我們僅知到由高度的選樣所得的平均數之平均數上，所發生之差數是很均勻的分配，而把平均數之平均數作為一集中之中心點或最高數。而我們所求得的平均數之平均數(67.50英寸)與這一千案件的真正平均數(67.57 英寸)極為接近。如果我們將這高度繼續實驗下去，以求更多之選樣的平均數，再加以平均，則此平均數之平均數與這 1000 案件之平均數之間的差別愈變愈小。

例表 45　100 個選樣的平均數的果數分配表

級距 (0.1英寸)	平均數之分配 1=1平均數	果數
66.90－66.99	I	1
67.00－67.09	卌	5
67.10－67.19	卌	5
67.20－67.29	卌IIII	9
67.30－67.39	卌卌卌II	17
67.40－67.49	卌卌	10
67.50－67.59	卌卌卌卌	20
67.60－67.69	卌卌I	11
67.70－67.79	卌卌IIII	14
67.80－67.89	III	3
67.90－67.99	II	2
68.00－68.09	I	1
68.10－68.19	I	1
68.20－68.29	I	1
		100

100 個任意選樣的平均數之平均數 M＝67.24 英寸

100 個任意選樣的平均數之標準差 $\sigma=0.24$ 英寸

100 個任意選樣的平均數之可能差 P.E.＝$0.6745\sigma=0.16$ 英寸

如果有 10,000 個這種高度的平均數之選樣,則其間之 6826 個此種結果的平均數是可能的落置在這全部的平均數之上下的正負 σ 之間。故這些平均數間之任何一個,由任意選樣而得者,其落置在這同一的變化之最大差間（$+\sigma$ 至 $-\sigma$）的機會與落置在這個最大差以外之機會,將爲 6826 對 3174，卽大約爲 2 對 1，(卽 $10,000-6826=3174$，而 $\frac{6826}{3174}=2$)。

同一理由，我們又可以希望多數選樣的平均數之 25.46% 的平均數,是可落置在全部案件的平均數之上下的正負 2σ 之間,卽 10000 個平均數之中有 9546 個平均數是可以落置在這變化的最大差（$+2\sigma$ 至 -2σ）之間,結果則任何一個選樣的平均數落置在變化的最大差($+2\sigma$ 至 -2σ)之內及其外的機會爲 9546 對 454，或大約爲 22 對 1，($10,000-9546=454$,而 $9546\div454=22$)。更進一步,正負 3σ(3×0.24英寸$=0.72$英寸)，卽在平均數上下之正負的 3σ 之間將包括選樣的平均數之 99.73% 的平均數，而任何一個選樣的平均數，其落置於全部平均數上下之正負 3σ 之間的機會與其落置在這正負 3σ 以外的機會相比較則爲 9973 比 27，或 369 比 1，($10,000-9973=23$，而 $9973\div23=369$)。

照此類推，則各種案件價值落置在可能差之間或其外的機會可如下：

E（可能差）	機會相等
2E	機會爲 4.6 對 1
3E	機會爲 22 對 1
4E	機會爲 142 對 1

5E	機會爲 1310 對 1
6E	機會爲 19,200 對 1
7E	機會爲 420,000 對 1
8E	機會爲17,000,000 對 1
9E	機會爲 1,000,000,000 對 1

上面我們已討論了極多案件的平均高度之選樣的變化之差，皆發生於選樣時之意外情態，而將所有選樣分配起來，以求得全部案件之平均數，此平均數卽作爲鐘形弧線上之最高數。爲了這個目的，則這所有可能變化的總數應以 σ 計算，而可能差 P. E. 則等於 0.6745σ。

五　可能差之圖示法

根據 $P.E.=0.6745\sigma$ 之公式，卽可計算例表 45 中，100 個選樣的平均數的果數分配了。

這例表 45 之果數分配的 M＝67.50 英寸。

$$\sigma=0.24\text{ 英寸}$$

$$P.E.=0.6745\sigma\text{ 。}$$

則 $+\sigma=67.5+0.24=67.74$。　$-\sigma=64.5-0.24=67.26$。

$+2\sigma=67.5+0.48=67.98$。　$-2\sigma=67.5-0.48=67.02$。

$+3\sigma=67.5+0.72=68.22$。　$-3\sigma=67.5-0.72=66.78$。

$+\ P.E.=67.5+0.6745\times0.24=67.5+0.16188=67.66188$。

$+2P.E.=67.5+0.6745\times2\times0.24=67.5+0.32376=67.82376$。

$+3P.E.=67.5+0.6745\times3\times0.24=67.5+0.48564=67.98564$。

$+4P.E.=67.5+0.6745\times4\times0.24=67.5+0.64752=68.14752$。

$-P.E.=67.5-0.6745\times0.24=67.5-0.16188=67.33812$。

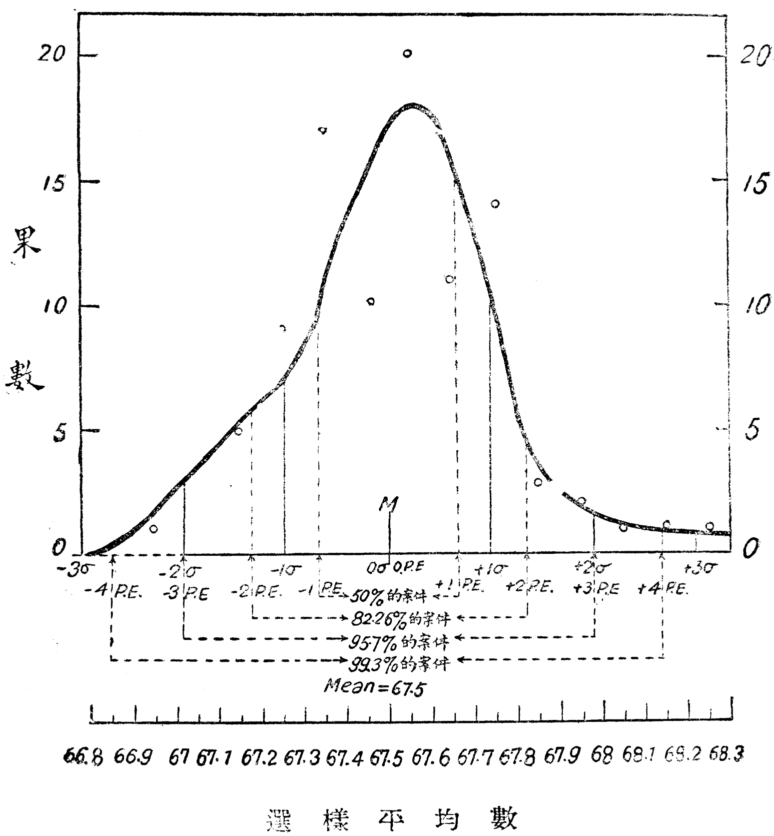
$-2P.E.=67.5-0.6745\times0.24\times2=67.5-0.32376=67.17624$。

$-3P.E.=67.5-0.6745\times0.24\times3=67.5-0.48564=67.01436$。

$-4P.E.=67.5-0.6745\times0.24\times4=67.5-0.64752=66.85248$。

餘類推。

圖示41 從選樣的平均數之平均數上所產生之可能差的分配圖



有了上面各 σ 之價値及各 P. E. 之價値，卽在 X 軸上尋得各價値之所在地而落置之。如 $+\sigma=67.74$，卽在 X 軸上 67.74 處，置定 $+\sigma$。又 $-\sigma=67.26$，卽在 X 軸上 67.26處，置定 $-\sigma$。而平均數 67.5 處爲 0σ，亦爲 0P. E.。在這 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 之二點各向上引一垂直線達於弧線，則這 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 之間大約包括三分之二的總案件。在此次例解中，卽大約包括 $\frac{2}{3}$ 的選樣平均數。以 $\frac{2}{3}\times100=\frac{200}{3}=66.7$ 卽這 100 個選樣的平均數有 66.7 個是在這 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 之間，卽每一平均數有 66.7% 的機會在這 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 之間，而只有 33.3% 的機會在這 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 之外。66.7:33.3＝2:1，故這 100 個案件中之任何一案件，其在 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 之內與其外之機會的比例爲 2:1，餘類推。

旣知 +P. E.＝67 66188，卽於X 軸上 67.66188 處置定 +P. E，而 −P.E＝67.33812，亦卽於 X 軸上 67.33812 處置定 −P. E.，而由這 +P.E. 及 −P.E. 兩點各引一垂直線以達於弧線上，則這兩線之間的面積恰爲 50% 的案件。故這 100 個選樣的平均數中之任何一個其落置在 +P. E. 及 −P. E. 之間及其外的機會完全相等，而 +2P. E.＝67.82376，−2P. E.＝67.17624，而從這 +2P. E 及 −2P. E. 兩點上各引一垂直線達於弧線，則這兩線之間所包括的面積爲全部案件之 82.26 %；（$100-82.26=17.74$ 而 $\frac{82.26}{17.74}=4.5$，）卽這 100 個選樣的平均數，其中之任何一個，其落置在 +2P. E. 及 −2P. E. 之間與其外之機會，爲 4.5:1；+3P. E.＝67.98564，而 −3P. E.＝67.01436，卽在 X 軸上尋出 67.98564 及 67.01436 處，各引一垂直線達於弧線上，則這 +3P.E. 及 −3P. E 之間的面積 ＝ $+2\sigma$ 及 -2σ 之間之面積，包括全部案件的

的 95.7% 的案件。(因P. E.$=\frac{2}{3}\sigma$ 即 P. E.$=0.6745\sigma$，故正負 3P. E $=$正負 2σ。而 $100-95.7=4.3$，又$\frac{95.7}{4.3}=22$)，故這 100 個選樣的平均數中之任何一個，其落置在 +3P. E. 及 −3P. E. 之間與其外之機會的比較，爲 22:1；+4P.E.=68.14752，而 −4P. E. =66.85248，在這兩點上各引一垂直線達於這弧線，則這兩線之間的面積包括全部案件之 99.3% 的案件；($100-99.3=0.7$，而 $\frac{99.3}{0.7}=142$)故這 100 個選樣的平均數中之任何一個，其落置在這正負 4P. E. 之間及其外的機會爲 142 對 1，餘類推。(所有各 P. E. 之價值可根據 P. E.$=0.6745\sigma$ 之方式求之，而各 σ 之價值則可根據譯表 5 得之)。

六 結論

1. 可能差的意義——可能差係一羣材料中部份的選樣的平均數對全部案件的總平均數之差，而其價值則由標準差計算之。即 P. E.$=0.6745\sigma$，故可能差亦即集中趨勢上的平均數之上下兩端的變化之散漫性的計算，而以 P. E.$=0.6745\sigma$ 爲標準。

2. 可能差之計算法。

(一)將一羣體材料之通常平均數求得，及求得由此通常平均數所產生之標準差。

(二)將這羣體材料之價值作選樣的平均數，以求各選樣的平均數之總平均數。(例如本書 239−240 頁之 126個案件，將其每一案件之價值皆寫在一有鐵邊之厚圓紙片上，加以混和，每次取若干片(或 10 片，或 20 片。每次所取之片數愈多

則其結果愈正確)。假定每次取 20 片則將此 20 片上所載之價值相加,以 20 除之,而得其平均數。將此等平均數記下。試驗若干次之後,〔最少 13 次,即 $\frac{1}{10}$ 的總案件數爲試驗次數,最多 126 次。試驗次數愈多。結果愈正確〕。將各次之結果相加,再行平均。則此種選樣的平均數之平均數,與全部案件之通常的平均數相比較,相差甚微。此差即謂之爲可能差。如選樣的次數與案件總數相等之時,則選樣的平均數之平均數與原有總案件之通常的平均數可以相等。

(三)由選樣的平均數之平均數以求出其標準差,(與普通標準差之求法相同)。

(四)由標準差求出可能差 P. E. $=0.6745\sigma$。

(五)在普通一般的平均數上下皆有可能差。換言之,任何平均數之上或下皆有可能差。故可能差在此種意義時,即爲平均數上下的一變化量計算之散漫性,其價值爲 P. E. $=0.6745\sigma$。而其效用則在表示案件落置於各 P.E. 之內或其外的機會,將於下列 4 項可能差之效用中解釋之。

3. 可能差之圖示法:

(一)尋定平均數,(平均數所在地,M＝OP. E.)。

(二)＋1P. E. 之所在地之價值,爲 M＋1P. E. 之價值。

(三)－1P. E. 之所在地之價值,即 M－1P. E. 之價值。

(四)＋2P. E. 之所在地之價值,即 M＋2P. E. 之價值。

(五)－2P. E. 之所在地之價值,即 M－2P. E. 之價值。

(六)＋3P. E. 之所在地之價值，即 M＋3P. E. 之價值。

(七)－3P. E. 之所在地之價值，即 M－3P. E. 之價值。

(八)＋4P. E. 之所在地之價值，即 M＋4P. E. 之價值。

(九)－4P. E. 之所在地之價值，即 M－4P. E. 之價值。

(十)將上列各 P. E，之結果求得後，即在 X 軸上尋得其相同之價值，而置定各 P. E.，加以標記。並由各P. E. 點引一垂直線達於弧線，即得其案件之分配的差量如下：

餘類推。標準差之圖示法，原則亦與此法相同。

4. 可能差之效用。

(一)可能差完全由機會的選樣所造成，故其效用在表示每一案件落置在各 P. E. 之內或其外的機會。其分配有如下：

(1)＋1P. E. 及 －1P. E. 之間，包括 50% 的案件。故各案件落置在＋1P. E. 及－1P. E. 之間或其外的機會，完全相等。

(2)＋2P.E. 及 －2.P. E. 之間包括全部案件的 82.26%，故各案件落置在＋2P. E. 及－2P. E.之間的機會爲 82.26%，而落置在＋2P.E.及－2P.E. 以外之機會則爲 100－82.26＝17.7；而 82.26:17.7＝4.5:1.

(3)＋3P. E. 及 －3P. E. 之間包括全部案件的 95.7%，故各案件落置在 ＋3P. E. 及－ 3P. E. 之間的機會爲 95.7%，而落置在＋3P. E. 及－3. P. E. 以外之機會則爲100－95.7＝4.3; 以 95.7:4.3＝22:1

(4) +4P. E. 及 −4P. E. 之間包括全部案件的 99.3%，故各案件落置在 +4P. E. 及 −4P E. 之間的機會爲 99.3%，而落置在 +4P.E. 及 − 4P. E.以外之機會則爲 100 − 99.3 = 0.7%；以 99 3:0.7 = 142:1。

(二)可表示弧線之趨勢是否均勻:

(1)在十分均勻的鐘形弧線之下，這正負各 P. E. 之價值是極相稱的。一條十分均勻的鐘形弧線之下，這正負 4P.E. 都必在全部分配量上最大差之間，而正負 3σ 亦必在這最大差之間。

(2)在分配的果數弧線不十分均勻而有傾斜之時，則這第四的 P. E.(正或負)，或第三的 σ (正或負)，有一端有超出這全部最大差之可能，而另一端則又不能達到應盡分配的標準。但，無論如何，這正負 4P. E. 或正負 3σ 至少必包括全部案件的 99%，是毫無疑義的。

(3)在弧線之兩端，在理論方面，可延長到無窮境。故 P. E. 及 σ 亦可延長到無窮境。故有 1P. E., 2P . E. ,3P. E., 4P. E., 5P. E. , 6P. E., 7P. E. , 8P. E , 9 P. E. , 等等或 1σ , 2σ, 3σ , 4σ , 5σ 等等 (正負兩方同然)之可能。但漸近線，則截止於正負 3σ 及正負 4P. E. , 因正負 3σ 及正負 4P. E 各已至少包括 99% 的總案件。普通的果數分配，這便極盡其能事了。

(4) P. E. 可與 σ 比較，其關係爲 P. E. = 0.6745σ。根據此種

關係，即可推知P. E. 及 σ 之間的一切變化，而 0.6745則成爲 P.E. 與 σ 之間的常數，故 σ : P. E. = 1:0.6745。

(5)P. E. 與 σ 相比較之時，亦可證明實際材料之弧線與理想的弧線相比較，如圖示 40 然。

七　問題

1. 可能差從何處產生而來？
2. 試將可能差下一定義。
3. 可能差的平均數與通常的平均數(a)在理論方面有何異同？(b)在實際方面有何異同：(c)在何種情形時相差最大？(d)在何種情形時相差最小？(e)在何種情形時可以無差別？
4. 可能差之效用何在？試列舉之，並計算其結果以說明之。
5. 可能差與標準差之關係如何？試舉例說明。
6. 可能差之計算法如何？試例舉其要領。
7. 可能差之圖示法如何？試列舉其要領。
8. 試將例表 1 之材料，作成一可能差之圖示，並解釋圖示上之各種意義。

第三十八章　相互關係 (Correlation)

一　概論

統計的分析與解釋，常常需要兩種或多種事實的羣體材料之間的結合的研究。以前各章解釋了材料之分類呈述，直線曲線的關係，及分配上之集中趨勢與變化，百分，指數，機會與可能性等等問題，但這些問題，都是屬於單系的羣體材料。現在我們所要討論者，則為兩系的羣體材料之間的相關問題。在定律上，所有一切現象絕非絕對的獨立，亦非絕對的附屬，而他們實際上只是相互的結合於某種變化的程度上。這問題，在斷定各案件的結合之程度。藉此以表示其相互關係之意義。是否可能造成一種推論的定律，以描寫這相互關係，並以應付新事件之測驗呢？如此的過去之經驗有何等之正確性能使我們預料將來的新經驗呢？

一過去時代之工銀與物價零售之變遷為如何？工人之實際工資，即以此種關係為轉移。人口之生產率與死亡率之變遷是否與經濟狀況之等差相聯係？如果是的，其相關之密切性為如何？嬰孩之死亡是否受家庭之收入，氣候的自然環境。及地位之低劣所影響？商業之繁榮與不景氣之各時期所發生的不同的數量材料為如何？一系材料之變遷是否可以由有規則之預示而影映其他一羣材料之變化？要答覆這一類的問題，則非研究事實上的各種不同的羣體材料間之關係不可。

二　因果關係之性質

科學方法中的一種根本條件是了解並描寫事件之繼續性。皮耳生教授尋得因素的主要觀念爲知覺之途徑，現象的繼續性或一定之結合已一再發生。我們相信同一之結合或繼續將發現於將來。我們把此種信念表現於可能性的觀念中。這種信念，認定將來將與過去之經驗相似，卽造成一預料之基礎。人的能力足以使他措置他的感覺印象於合宜的固定秩序之中，卽能造成一理智的生活。

三　相互關係之果數記數法

例表 46　美國 170 城市結婚人年齡之分配表(1)

（根據 1933 年，美國芝加哥大學統計實室驗材料）

城　　市　　名	所有 25 歲以上結婚人之百分數	男女比率（女子＝100 時之男子數）
1. Akron, Ohio.	70.1	152.7
2. Alameda, California.	71.3	94.0
3. Albany, New York.	61.3	92.6
4. Allentown, Pa.	74.8	98.0
5. Altoona, Pa.	72.6	99.3
6. Amsterdam, N. Y.	71.2	95.4
7. Anderson, Ind.	74.4	105.9
8. Auburn, N. Y.	68.0	101.8
9. Bangor, Me.	64.1	86.9
10. Battle Creek, Mich.	73.3	100.2
11. Bay City Mich.	73.9	101.8
12. Bellingham, Wash.	71.7	116.4
13. Berkley. Calif.	67.9	83.9
14. Bethlehem, Pa.	76.1	114.2
15. Binghamton, N. Y.	67.2	95.6
16. Boston. Mass.	61.6	97.0
17. Bridgeport, Conn.	72.4	114.0
18. Brooton, Mass.	69.6	98.6

例表 46 美國 170 城市結婚人年齡之分配表(2)

(根據 1933 年,美國芝加哥大學統計實驗室材料)

城 市 名	所有 25 歲以上結婚人之百分數	男女比率(女子=100 時之男子數)
19. Bronx Boro, N. Y.	74.5	102.1
20. Brookline, Mass.	55.0	60.5
21. Brooklyn, Boro N. Y.	71.1	102.5
22. Buffalo, N. Y.	70.0	103.4
23. Cambridge, Mass.	63.1	88.2
24. Canton, Ohio.	72.4	128.2
25. Chelsia, Mass.	71.9	115.6
26. Chicopee, Mass.	75.5	111.2
27. Cincinnati, Ohio.	64.3	92.6
28. Cleveland, Ohio.	73.2	116.5
29. Columbus, Ohio.	68.4	101.2
30. Covington, Ky.	66.5	89.7
31. Cumberland, Md.	67.5	107.4
32. Dayton, Ohio.	71.8	103.9
33. Detroit, Mich.	71.3	132.2
34. Duluth, Minn.	68.0	127.0
35. East Chicago, Ind.	75.5	188.1
36. East Cleveland, Ohio.	74.9	86.9
37. Easton. Pa.	70.4	94.4
38. Elmira, N. Y.	68.9	97.2
39. Erie, Pa.	72.0	106.4
40. Evansville, Ind.	68.9	95.4
41. Everett, Mass.	73.3	96.1
42. Everett, Wash.	72.0	122.0
43. Fall River, Mass.	68.8	90.9
44. Fitchburg, Mass.	70.7	98.2
45. Flint, Mich.	73.2	147.4
46, Fort Wayne, Ind.	70.8	97.9
47. Fresno, Cal.	70.5	121.0
48. Gary. Ind.	73.9	167.0
49. Grand Rapids, Mioh.	73.6	98.0
50. Green Bay	71.1	96.8

例表 56　美國 170 城市結婚人年齡之分配表(3)

（根據 1933 年，美國芝加哥大學統計實驗室材料）

城　市　名	所有 25 歲以上結婚人之百分數	男女比率（女子＝100 時之男子數）
51. Hagerstown, Md.	71.8	96.9
52. Hamilton, Ohio.	70.4	106.8
53. Hammond, Ind.	77.1	132.0
54. Hamtramck, Mich.	79.7	181.2
55. Harrisburg, Pa.	71.3	95.4
56. Hartford, Conn.	68.5	104.3
57, Haverhill, Mass.	67.8	95.3
58. Hazleton, Pa.	71·9	100.4
59. Highland Park, Hich.	72.0	131.7
60. Holyoke, Mass.	66.1	90.9
61. Indianapolis, Ind.	71.1	100.0
62. Jackson, Mich.	71.7	111.8
63, Jamestown, N. Y.	72.9	97.5
64. Johnstown, Pa.	73.0	118.3
65. Kalamazoo, Mich.	71.3	99.3
66. Kansas City, Kans.	74.7	112.2
67. Kenosha, Wis.	71.4	144.3
68. Kingston, N. Y.	64.9	86.6
69. Kokomo, Ind.	76.3	112.7
70. La Crosse, Wis.	68.4	92.3
71. Lakewood, Ohio.	77.9	92.9
72. Lancaster, Pa.	67.2	85.6
73. Lansing, Mich.	75.7	113.9
74. Lawrence, Mass.	69.2	102.5
75, Lewiston, Me.	64.6	93.2
76. Lima, Ohio.	74.9	101.8
77. Lincoln, Nebr.	72.9	92.9
78. Long Beach, Cal.	71.4	86.0
79. Lorain, Ohio.	76.6	143.2
80. Los Angeles, Cal.	65.5	98.9
81. Lowell, Mass.	65.0	93.3
82. Lynn, Mass.	67.2	97.1

例表 46　美國170城市結婚人年齡之分配表(4)

(根據 1933 年,美國芝加哥大學統計實驗室材料)

城　市　名	所有 25 歲以上結婚人之百分數	男女比率(女子=100 時之男子數)
83. Mc Keesport, Pa.	75.8	120.0
84. Madison, Wis.	69.3	90.7
85. Malden. Mass.	68.9	87.3
86. Manchester. N. H.	67.6	91.5
87. Manhattan Boro, N. Y.	63.8	102.2
88. Mansfield, Ohio.	71.7	102.2
89. Marion, Ohio.	75.8	102.6
90. Medford, Mass.	72.9	87.2
91. Milwaukee, Wis.	71.0	104.0
92. Minneapolis, Minn.	68.1	104.3
93. Mount Vernon, N. Y.	70.0	87.5
94. Muncie, Ind.	75.9	107.7
95. Muskegon, Mich.	72.9	115.3
96. Nashua, N. H.	68.5	103.0
97. New Bedford, Mass.	70.8	98.0
98. New Britain, Conn.	73.4	118.3
99. New Castle, Pa.	74.6	111.6
100. New Haven, Conn.	69.5	98.9
101. New London, Conn.	69.8	97,5
102. New Rochelle, N. Y.	69.6	93.1
103. Newark, Ohio.	71.5	99,1
104. Newburgh, N. Y.	66.6	94.5
105. Newton, Mass.	64.1	75.0
106. Niagara Falls, N. Y.	73.0	128.6
107. Norristown, Pa.	63.1	90.5
108. Norwalk, Conn.	70.1	93,5
109. Oakland, Cal.	67.1	113.3
110. Ogden, Utah.	78.1	104.5
111. Omaha, Nebr.	68.3	114.3
112. Oshkosh, Wis.	70.9	91.8
113. Pasadena, Cal.	62.8	70.5
114. Philadelphia, Pa.	68.0	100.3

例表 64　美國 170 城市結婚人年齡之分配表(5)

(根據 1933 年,美國芝加哥大學統計實驗室材料)

城　市　名	所有 25 歲以上結婚人之百分數	男女比率(女子=100 時之男子數)
115. Pittsburgh, Pa.	68.3	105.3
116. Pittsfield, Mass.	69.1	95.2
117. Pontiac, Mich.	70.9	133.5
118. Port Huron, Mich.	75.5	102.4
119. Portland, Me.	67.2	90.7
120. Portland, Ore.	68.5	112.1
121. Portsmoutn, Ohio.	72.0	101.8
122. Poughkeepsie, N. Y.	67.1	88.9
123. Queens Boro, N. Y.	75.2	99.8
124. Quincy Mass.	72.2	103.2
125. Racine, Wis.	70.7	125.8
126. Reading, Pa.	71.3	97.0
127. Revere, Mass.	76.2	99.7
128. Richmond, Ind.	70.1	101.9
129. Richmond, Boro, N. Y.	67.1	116.4
130. Rochester, N. Y.	69.1	97.1
131. Rome, N. Y.	66.6	117.0
132. Sacramento, Cal.	66.2	119.7
133. St. Paul, Minn.	67.8	103.7
134. Saginaw. Nich.	74.3	101.9
135. Salem, Mass.	64.6	93.1
136. Salt Lake City, Utah.	73.0	101.8
137, San Diego, Cal.	64.9	97.9
138. San Francisco, Cal.	58.3	123.8
139, San Jose, Cal.	65.6	97.2
140. Schenectady, N. Y.	73.9	106.2
141. Scranton, Pa.	71.1	98.4
142. Seattle, Wash.	66.3	124.9
143. Sheboygau, Wis.	74.4	107.1
144. Somerville, Mass.	69.3	88.6
145. South Bend, Ind.	75.2	109.6
146. Spokane, Wash.	70.7	106.1

例表 46 美國170城市結婚人年齡之分配表(6)

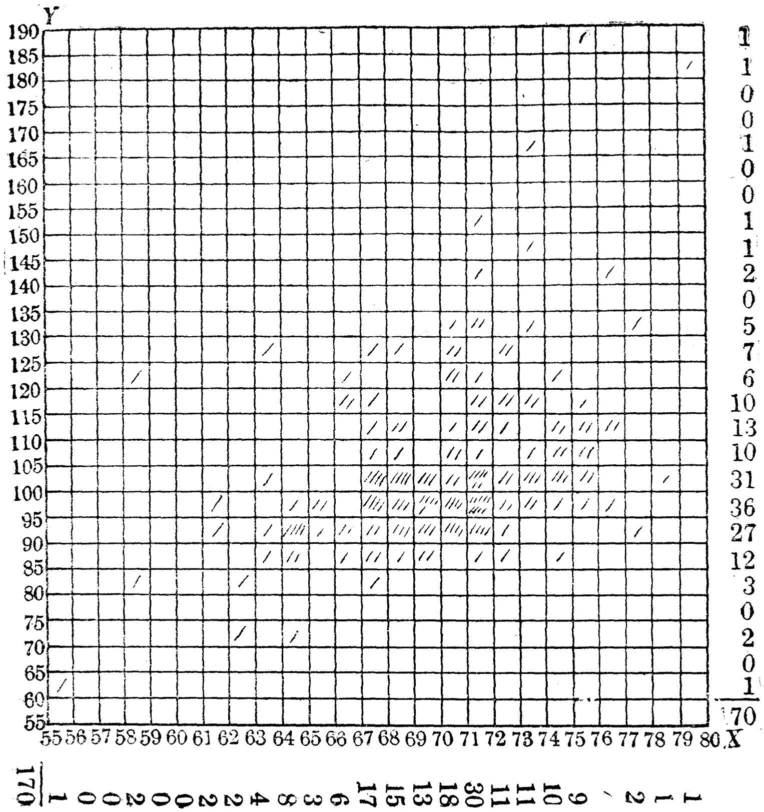
（根據 1933 年,美國芝加哥大學統計實驗室材料）

城 市 名	所有 25 歲以上結婚人之百分數	男女比率（女子=100 時之男子數）
147. Springfield, Mass.	68.9	96.7
148. Stoubenville, Ohio.	70.2	120.1
149. Stockton, Cal.	64.0	127.9
150. Superior, Wis.	70.2	129.9
151. Syracuse, N. Y.	69.8	102.1
152. Tacoma, Wash.	68.3	126.6
153. Taunton, Mass.	65.3	94.2
154. Terre Haute, Ind.	71.9	101.6
155. Toledo, Ohio.	71.8	111.1
156. Topeka, Kans.	71.7	92.1
157. TTroy, N. Y.	58.6	80.5
158. Utica, N. Y.	67.8	95.6
159. Waltham, Mass.	62.7	83.9
160. Warren, Ohio.	74.1	122.1
161. Waterbury, Conn.	70.4	114.2
162. Watertown.	70.4	93.3
163. Wiohita, Kans.	73.9	101.4
164. Wilkes Barre, Pa.	70.1	99.1
165. Williamsport, Pa.	68.6	91.2
166. Worcester. Mass.	67.8	101.2
167. Yonkers, N. Y.	71.6	94.5
168. York, Pa.	71.5	93.0
169. Youngstown, Ohio.	73.7	130.1
170. Zanesville, Ohio.	70.0	92.5

相互關係，旣爲討論兩系羣體材料之間各個體的結合問題。故其記數與我們前面第十七章果數表的果數記數，與第二十一章之圖示記數，各有不同。因前二者皆爲單系羣體材料之各個體的單獨記數。而相互關係之記數，則爲兩系羣體材料中各相應的個體的相互的記數。玆特列舉相互關係之果數記數法如下：

例表 47　相互關係果數記數表

（根據例表 46 之材料）



1. 根據一相互關係之羣體材料表。此表必同時呈現兩種相關之材料，如例表 46，一部份爲美國 170 城市結婚人年齡之分配表在 25 歲以上者的百分數，（此系材料列在 X 軸上）。另一部份爲男女在 25 歲以上結婚者之指數的比較，（設女子爲 100 時之男子數），（此系材料列於 Y 軸之上）。

2. 製定 X 軸及 Y 軸上所需要之級距，將各級距相互畫成所需要的若干小方格，每小方格皆表示爲 X 與 Y 相反應的方格。

3. 尋出 X 與 Y 相應的價値。如例表 46 的第一城 X 爲 70.1，Y 爲 152.7，卽在 X 軸上 70.1 處向上尋去，尋到與 Y 軸 152.7 處的相應之小方格內，畫一(1)。其次第二城 X 爲 71.3，Y 爲 94，亦卽在 X 軸上 71.3 處向上尋去，尋至 Y 軸 94 處的相應之小方格內畫一(1)。餘類推。一直將所有之 X 與 Y 的相應之價値盡畫(1)於相應的小方格之內爲止。

4. 將各行之(1)點數之，而列其總數於各該級距之下，以爲各該級距之級果數，

(一)將各縱行之(1)點數之，記其總數於各該縱行之下，以爲各該縱行之級距內的級果數。

(二)將各橫行之(1)點數之，而列其總數於各該橫行之右端，以爲各該橫行的級距之級果數。

(三)將各橫行之右端的級果數相加，以得其總數，卽案件之總數。

(四)將各縱行之下端的級果數相加，以得其總數，亦爲案件之總數。

(五)各橫行右端與各縱行下端的級果數相加之總數須完全相等，因其皆爲案件之總數。

四 相互關係之求法

$$r=\frac{\frac{\Sigma d_x d_y}{n}-c_x c_y}{\sigma_x \sigma_y}$$

例表 48 相互關係中用短法求 X 軸上各價值的平均數

M_x, 改正數 c_x, 及標準差 σ_x 之表（根據例表 47 各縱行之級果數）

級距	級果數	差步 d	負差 −fd	正差 +fd	各差自乘後再乘級果數 fd^2
55.1—56	1	—15	15		225
56.1—57	0	—14	0		0
57.1—58	0	—13	0		0
58.1—59	2	—12	24		288
59.1—60	0	—11	0		0
60.1—61	0	—10	0		0
61.1—62	2	— 9	18		162
62.1—63	2	— 8	16		128
63.1—64	4	— 7	28		196
64.1—65	8	— 6	48		288
65.1—66	3	— 5	15		75
66.1—67	6	— 4	24		96
67.1—68	17	— 3	51		153
68.1—69	15	— 2	30		60
69.1—70	13	— 1	13		13
70.1—71	18	0	$-\Sigma fd=282$		0
71.1—72	30	+ 1		30	30
72.1—73	11	+ 2		22	44
73.1—74	11	+ 3		33	99
74.1—75	10	+ 4		40	160
75.1—76	9	+ 5		45	225
76.1—77	4	+ 6		24	144
77.1—78	2	+ 7		14	98
78.1—79	1	+ 8		8	64
79.1—80	1	+ 9		9	81

$n=170$　　　$+\Sigma fd=225$　$\Sigma fd^2=2629$

$M_x=G.A.+c_x$

$G.A.=70.5$(70.1—71 之中點)

$$c_x=\frac{I\cdot\Sigma fd_x}{n}=\frac{225+(-282)}{170}=\frac{-57}{170}=-0.34$$

$\therefore \quad M_x = 70.5 - 0.34 = 70.16$

$$c_x = -0.34$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - (c_x)^2} = \sqrt{\frac{2629}{170} - (-0.34)^2}$$

$$= \sqrt{15.5 - 0.1156} = \sqrt{15.38} = 3.922$$

例表 49　相互關係中用短法求Y軸上的各價值之平均數(M_y)，改正數(c_y)，及標準差(σ_y)之表。(根據例表 47 各橫行之級果數)

級距 I 1	級果數 f 2	差步 d 3	負差 −fd 4	正差 +fd 5	各差自乘後再乘級數 fd^2 6
55.1−60	0	−9	0		0
60.1−65	1	−8	8		64
65.1−70	0	−7	0		0
70.1−75	2	−6	12		72
75.1−80	0	−5	0		0
80.1−85	3	−4	12		48
85.1−90	12	−3	36		108
90.1−95	27	−2	54		108
95.1−100	36	−1	36		36
100.1−105	31	0	158		
105.1−110	10	+1		10	10
110.1−115	13	+2		26	52
115.1−120	10	+3		30	90
120.1−125	6	+4		24	96
125.1−130	7	+5		35	175
130.1−135	5	+6		30	180
135.1−140	0	+7		0	0
140.1−145	2	+8		16	128
145.1−150	1	+9		9	81
150.1−155	1	+10		10	100
155.1−160	0	+11		0	0
160.1−165	0	+12		0	0
165.1−170	1	+13		13	169
170.1−175	0	+14		0	0
175.1−180	0	+15		0	0
180.1−185	1	+16		16	256
185.1−190	1	+17		17	289
				236	2062

$-\Sigma fd=158$

$+\Sigma fd=236$

$\Sigma fd^2=2062$

$\Sigma fd=+\Sigma fd+(-\Sigma fd)=236-158=78$

$$c_y=\frac{I\cdot\Sigma fd}{n}=\frac{5\times78}{170}=\frac{390}{170}=2.3$$

G.A.$=102.5$(級距 100 至 105 之中點)

$$M_y=G.A.+c_y=102.5+2.3=104.8$$

$(c_y)^2=2.3\times2.3=5.29$

$\Sigma fd_y^2=2062$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma fd_y^2}{n}-c_y^2}\times I$$

$$=\sqrt{\frac{2026}{170}-5.29}\times5$$

$$=\sqrt{12.2-5.29}\times5$$

$$=\sqrt{6.91}\times5$$

$$=2.63\times5=13.15$$

例表 50　各縱行之平均數表(根據例表 47 之各縱行之材料)

$$M=\frac{\Sigma mf}{n}$$ (參閱本書 342 頁)

1. 級距 55－56 的級果數之平均數 $=62.5$
2. 級距 56－57 的級果數之平均數 $=0$
3. 級距 57－58 的級果數之平均數 $=0$
4. 級距 58－59 的級果數之平均數 $=(122.5+82.5)\div2=102.5$

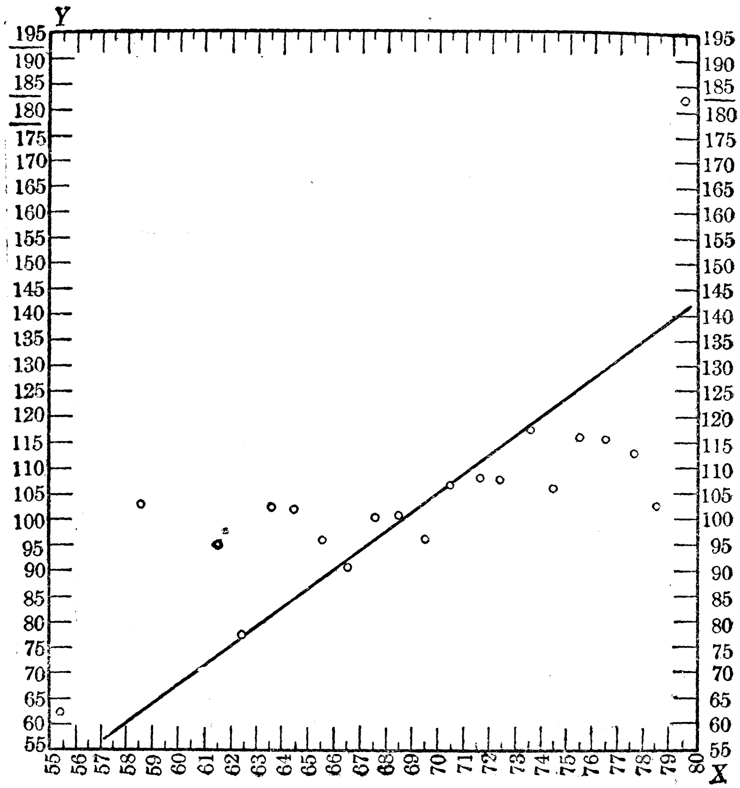
5. 級距 59—60 的級果數之平均數 =0
6. 級距 60—61 的級果數之平均數 =0
7. 級距 61—62 的級果數之平均數 =(92.5+97.5)÷2=95
8. 級距 62—63 的級果數之平均數 =(72.5+82.5)÷2=77.5
9. 級距 63—64 的級果數之平均數 =87.5+92.5+102.5+127.5÷4=102.5
10. 級距 64—65 的級果數之平均數 =(72.5+〔87.5×2〕+〔92.5×4〕+97.5)÷8=101.85
11. 級距 65—66 的級果數之平均數 =(92.5+97.5×2)÷3=95.83
12. 級距 66—67 的級果數之平均數 =(87.5+92.5×2)÷3=90.83
13. 級距 67—68 的級果數之平均數 =(82.5+〔87.5×2〕+〔92.5×2〕+〔97.5×4〕+〔102.5×4〕+107.5+112.5+117.5+127.5)÷17=100.44
14. 級距 68—69 的級果數之平均數 =(87.5+〔92.5×3〕+〔97.5×3〕+〔102.5×4〕+107.5+〔112.5×2〕+127.5)÷15=101.6
15. 級距 69—70 的級果數之平均數 =(〔87.5×2〕+〔92.5×3〕+〔97.5×5〕+〔102.5×3〕)÷13=96
16. 級距 70—71 的級果數之平均數 =(〔92.5×4〕+〔97.5×4〕+〔102.5×2〕+〔107.5×2〕+112.5+〔122.5×2〕+〔127.5×2〕+132.5)÷18=107
17. 級距 71—72 的級果數之平均數 =(87.5+〔92.5×4〕+〔97.5×9〕+〔102.5×6〕+107.5+〔112.5×2〕+〔117.5×2〕+122.5+〔132.5×2〕+142.5+152.5)÷30=103.3
18. 級距 72—73 的級果數之平均數 =(87.5+92.5+〔97.5×2〕+〔102.5×2〕+112.5+〔117.5×2〕+〔127.5×2〕)÷11=107.5
19. 級距 73—74 的級果數之平均數 =(〔97.5×2〕+〔102.5×3〕+107.5+〔117.5×2〕+132.5+147.5+167.5)÷11=117.5
20. 級距 74—75 的級果數之平均數 =(87.5+97.5+〔102.5×3〕+〔107.5×2〕+〔112.5×2〕+122.5)÷10=105.5
21. 級距 75—76 的級果數之平均數 =(97.5+〔102.5×2〕+〔107.5×2〕+〔112.5×2〕+117.5+187.5)÷9=116.4
22. 級距 76—77 的級果數之平均數 =(97.5+〔112.5×2〕+142.5)÷4=116.25
23. 級距 77—78 的級果數之平均數 =(92.5+132.5)÷2=112.5
24. 級距 78—79 的級果數之平均數 =102.5
25. 級距 79—80 的級果數之平均數 =182.5

根據上列各平均數(即 X 軸上各級果數的平均價值)即可作成下

列圖示42之相互關係圖。

圖示42 相互關係圖

（根據例表50之各平均數而作）



圖示42卽根據例表50之各中點用觀查，穿過各小圈（○）之中央隨意畫一直線以作。在直線以上之平均數與在直線以下之平均數大約相等，卽可顯示這兩系羣體材料在直線上下之散漫性，而觀查其相互關係之變化。這一條直線卽等分之意義。與前面第二十二，二十三，二十四各章

之直線等分意義頗相同。不過前三章所討論之直線等分或直線關係。皆有一定之常數及一定之 x 與 y 的價値，而直線等分遂得一極有規律的 x 與 y 之價値的比例，故這等分線乃能穿過各相應之點。但本章所討論之相互關係的直線等分，係由許多參差錯雜之相互關係的個體價値，以求得其各個的平均數，而各平均數之 x 與 y 的價値亦只能各自成爲比例，不能與其他之平均數有共通之比率，故這相互關係的直線等分只能在觀查上從各平均數之中央畫一直線，卽可作爲各平均數的大約常數，而不能穿過各小圈 (○) 或 x 與 y 相應的各平均數。假定分配量有規律的話。如兒童在一定年齡每增加一英寸之高，卽增加若干磅之重，(假設爲 5 磅)，如以高度爲 y，重量爲 x，則 $y=5x$。此種方式與前面第二十三章通過原點之直線等分 $y=ax$ 之意義完全相同。如果根據此種比例而作成之相互關係圖，與第二十二章之直線關係毫無差別。不過第二十二，二十三，二十四各章皆爲理想的理論推演，而社會現象之實際材料的相互關係則絕無如此的單純與整齊。如兒童每長一英寸高，卽增重量五磅，這也僅僅是假定如此，或大約可能如此，或至少有若干兒童是如此。我們不能斷定每個兒童都是長一英寸高，卽增加重量五磅。有些兒童或許增高一英寸，只增重量二，三磅，或六、七磅，在五磅之上或下。甚或在三磅之上或下。故我們只好根據實際之材料而作一最相近之等分線，以定其相互關係之比率了。

圖示 42 之各小圈 (○) 皆爲一平均數。如 X 軸上距級 55－56 之間的平均數爲 62.5，卽在 55－56 這級距的中點上 55.5 處上尋去，尋到 Y 軸62.5 處畫一小圈(○)，餘類推。將各小圈(○)畫完，再從各小圈(○)

間之中央畫一直線，卽成相互關係之直線。如在此直線上任意取一點，尋出其 x 與 y 的各相應之價值，遂可得$\frac{x}{y}=a$；而這 a 卽相互關係之比，率。如果用下列例表51所求得之相互關係率 r，與前面觀查而隨意畫出之相互關係的等分相比較極爲接近。

根據例表 48，　$\sigma_x=3.9$

$c_x=-0.34$

根據例表 49，　$\sigma_y=13.15$

$c_y=2.3$

而兩表　$n=170$

又根據例表 51，$\Sigma d_x d_y=604+579-(81+176)=926$

再　$c_x\times c_y=0.34\times 2.3\ =0.782$

$\sigma_x\sigma_y=3.9\times 13.15=51.285$

$$\therefore\quad r=\frac{\frac{926}{170}-0.78}{51}=0.1$$

五　結論

1. 相互關係之意義——相互關係，乃係兩系有相互關係之材料的價值之結合，而欲明其相互之比率，以期發現相互問題間之定律。如兩系材料（假定其爲 x 與 y ）有固定之比率，則相互關係之意義與本書第二十二,二十三，二十四，二十五各章之直線關係，曲線關係，完全相同。惟社會材料之相互關係，多係不規則的，極參差錯雜的。故於混合情形中，尋出一最可靠之相互比率或定律，以窺其相互之軌跡。

2. 相互關係之求法：

(一)根據一兩系相關之羣體材料，如例表 46 之材料然。

(二)製定 X 軸及 Y 軸與其所需要之級距。

(三)將這兩系羣體材料各相應之價值作成果數記數表，以每 x 與 y 的相應價值記一數，如例表 47 然。

(四)求出 X 軸上各價值之平均數 (M_x)，改正數 (c_x)，與標準差 (σ_x)。

(五)求出 Y 軸上各價值之平均數 (M_y)，改正數 (c_y)，及標準差 (σ_y)。

(六)將 $\sigma_x \times \sigma_y = \sigma_x\sigma_y$。

(七)將 $c_x \times c_y = c_x c_y$。

(八)求得 $\Sigma d_x d_y$ 之價值，此價值經由下列(九)項步驟所求得。

(九)相互關係計算表之作法：

(1)求得 Y 軸上之平均數 M_x，及 Y 軸上之平均數 M_y。

(2)作成相互關係果數記數表，並立定 X 軸及 Y 軸與其級距。

(3)以 M_x 及 M_y 所在級距爲相互關係之零點(0)。

(4)Y 軸零點以上爲正，零點以下爲負，各記以 1,2,3,4,5,6, 等等差步上所需要之數字。

(5) X 軸零點以右爲正，以左爲負，亦各記以 1,2,3,4,5, 等等差步上所需要之數字。

(6)取定 X 軸與 Y 軸各相應的方格，卽 x 乘 y 的方位。例如 X 軸上爲 +5,Y 軸上爲 +6，則 $(+5)\times(+6)=+30$；又

X 軸上為-3,Y 軸上為-2,則$(-3)\times(-2)=+6$;又 X 軸上為$+4$,Y 軸上為-5,則$(+4)\times(-5)=-20$;又 X 軸上為-6.Y 軸上為$+7$,則$(-6)\times(+7)=-42$,餘類推。

(7)每一方格之內,如有價值表現者,常包括三種數字,每方格頂端左角之數字為方位數,中間右邊之數字為級果數,下邊之數字為方位數乘級果數之和。例如從 X 軸上 $+3$ 尋到 Y 軸上 $+3$ 相應之方格,頂邊左角之字為 9,卽 3×3 之結果,中間右邊 2 字表示級果數,係根據例表 47 X 軸上級距 73－74 與Y軸上之級距 115－120 相應之級果數為 2,(試查例表 47 卽知);而方位數乘級果數之和則為 $9\times2=18$,故下邊卽為 18,餘類推。

(8)將各方位數乘級果數以求其和完畢之後,將各四分圓內各行之數相加。例如第一四分圓內之橫行第 17 行之數為 85,卽將其列於該行之右端:第 6 行之數為 $12+18+42=72$,亦將其列於該行之右端。將所有各行之總數盡行列出,再行相加,在正四分圓中之總數為 $+\Sigma d_xd_y$,在負四分圓中之總數為 $-\Sigma d_xd_y$,而 $\Sigma d_xd_y=+\Sigma d_xd_y+(-\Sigma d_xd_y)$。這 Σd_xd_y 卽由 X 與 Y 軸上之平均數所發生之總差價值。因 X 與 Y 軸上之各小方格皆為相應之方位,是以 d_xd_y 不能分開,亦卽 x 與 y 混和之差。只以各四分圓為界限,由縱行計算或由橫行計算皆可。

有了 $\Sigma d_x d_y$，又有 $c_x c_y$，$\sigma_x \sigma_y$，及 n，故相互關係率 r 卽可求得如下：

$$r=\frac{\frac{\Sigma d_x d_y}{n}-c_x c_y}{\sigma_x \sigma_y}$$

3. 相互關係之效用：

(一)發現事物之相互作用。因宇宙及人類社會無絕對獨立之現象，亦無絕對附屬的事實，只是其相互間之相關程度各有不同而已。相互關係之相關率卽爲發現此等相關程度之有效計算。

(二)相互關係爲統計學上各基本原理及方法之綜合研究。所有材料分類，果數記數，直線關係，或曲線關係，平均數，改正數，標準差，及差步，正負四分圓，等等無不一一包含。

六 問題

1. 何謂相互關係？
2. 相互關係在何種問題之研究上最爲重要？試舉例說明之。
3. 相互關係在統計的地位上如何？
4. 試將例表 2 之材料求出相互關係率。

補　　錄

一　統計學上幾種重要的公式

統計學之範圍極廣，公式亦極多，自不能一一列舉無餘。本書對於統計學上各基本的原理，方法，公式，圖示，及表格等等，無不一一收羅之。惟尚有數種附屬的公式，雖屬重要，而少應用者，茲特補錄於後。

1. 幾何平均數之公式——幾何平均數在本書第二十七章中雖已討論過，並已計算過，惟其計算的公式，尚未完備，故特補錄於次：

$G.M. = n\sqrt{X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_n}$

在上列公式中：

G.M. 代表幾何平均數。

N. 代表案件數。

X. 代表各案件之價值，故 X_1, X_2, 至 X_n，卽由一個案件之價值至 n 個案件之值值。

將各案件之價值一一相乘，再開去案件數之方根卽得幾何平均數。

1. 中數之公式——中數雖已在本書第二十八章中討論過，並已計算過了，但尚無一定之公式，作者特自造一公式如下：

$$\text{Median} = l + \frac{a \times I}{f_o} \text{或}$$

$$\text{Median} = h - \frac{b \times I}{f_o}$$

在上列公式之中：

Median 卽中數。

l 代表中數所在級距之低限。

h 代表中數所在級距之高限。

a 代表中數案件$\frac{n}{2}$高出於累積果數（案件）之數，或累積果數到中數案件不足之數。

b 代表中數案件之$\frac{n}{2}$低於累積果數之數，或累積案件數超出中數案件之數。

f_0 代表中數所在級距之級果數。

I 代表級距單位數。

3. 相關變化之計算公式：

$$(一)\qquad V=\frac{\sigma\times 100}{\text{Mean}}$$

$$(二)\quad V_{A.D.}=\frac{A.D\times 100}{\text{Median, Mean, Mode}}$$

$$(三)\quad V_q=\frac{\frac{Q_3-Q_1}{2}\times 100}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}=\frac{(Q_3-Q_1)\times 100}{Q_3+Q_1}$$

在上列公式(一)之中：

V 代表變化之相關效率，卽根據於標準差的相關變化之計算量。

代表標準差。

Mean 代表平均數。

在公式(二)之中:

$V_{A.D.}$ 代表根據於平均差上的相關變化之計算。

A.D. 代表平均差。

Median 卽中數。

Mean 卽平均數。

Mode 卽最高數。

在這個方式之中,卽謂平均差可任意從平均數,或中數,或最高數而產生。從何種集中趨勢產生,卽以何種集中趨勢爲分母。

在公式(三)之中。

V_q 代表根據於四分差上的相關變化之計算量。

Q 代表四分差。

Q_3 代表上四等分位所在地之價值。

Q_1 代表下四等分位所在地之價值。

4. 傾斜度之公式。

(一)　$\text{Skewness}=\dfrac{M-\text{Mode}}{\sigma}$ 或

(二)　$\text{Skewness}=\dfrac{3(M-\text{Median})}{\sigma}$ 或

(三)　$$\text{Skewness}=\frac{(Q_3-\text{Median})-(\text{Median}-Q_1)}{\dfrac{Q_3-Q_1}{2}}$$

$$=\frac{Q_1+Q_3-2\text{Median}}{\dfrac{Q_3-Q_1}{2}}$$

在上列三項公式中：

Skewness 卽傾斜度。

M.卽平均數。

Mode 卽最高數。

σ 卽標準差。

Median 卽中數。

Q_3 卽上四等分位所在地之價值。

Q_1 卽下四等分位所在地之價值。

5. 差量分配之公式：

(一) $\sigma_m=\frac{\sigma(\text{選樣})}{\sqrt{N}}$…………—選樣的平均數之標準差。

(二) $\sigma(\text{標準差})=\frac{\sigma(\text{選樣})}{\sqrt{2N}}$…………—選樣之標準差的標準差。

(三) $P.E._M=0.6745\frac{\sigma(\text{選樣})}{\sqrt{N}}$……—選樣的平均數之可能差。

(四) $P.E._{(\text{標準差})}=0.6745\frac{\sigma(\text{選樣})}{\sqrt{2N}}$………—選樣的標準差之可能差。

(五) $P.E(m_1-m_2)=0.6745\sqrt{(\sigma_{m1})^2+(\sigma_{m2})^2}$……兩平均數之差的可能差。

在上列方式之中：

卽標準差。

M 卽平均數。

N 卽案件數。

P.E. 卽可能差。

σ_m 卽由平均數上所產生之標準差。

P.E.$_m$ 卽由平均數上所產生之可能差。

6. 等分公式：

(一) $m_1=\frac{y}{x}=\left(r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)$……X 軸上之 Y 直線之斜度。

(二) $m_2=\frac{x}{y}=\left(r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)$……Y 軸上之 X 直線之斜度。

(三) $y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$……X 軸上的 Y 直線之等分。在這等分之中，x 與 y 皆是各從其平均數上所發生之變化，(x 從 X 軸上之平均數，y 從 Y 軸上之平均數，各所發生之差數)。

(四) $x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$……Y 軸上的 X 直線之等分。

(五) $Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$……對於 X 軸上的 Y 直線之等分。在這方式之中，X 與 Y 爲兩系相關材料之特別價值。

(六) $X-\overline{X}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$……對於Y軸上的X直線之等分。

(七) $r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$……皮耳生的相互關係率之公式。

(八) $r=\dfrac{\frac{\Sigma d_xd_y}{N}-c_xc_y}{\sigma_x\sigma_y}$……相互關係率之短法公式。

（九）$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$……相互關係率之標準差。

（十）$P.E._r=0.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$……相互關係率之可能差。

（十一）$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$……X 軸上的 Y 之相互關係直線上之散漫計算量——計算量中之標準差的計算。

（十二）$S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$……對於 Y 軸上的 X 直線之散漫之計算量。

在上列公式之中：

m_1 即 X 軸上的 Y 之平均關係直線的斜度。

x 即由 X 軸上的平均數所產生之差。

y 即由 Y 軸上的平均數所產生之差。

r 即相互關係率。

σ_y 即 Y 軸上之標準差。

σ_x 即 X 軸上之標準差。

m_2 即 Y 軸上的 X 之平均關係直綫之斜度。

X 即 X 軸上全部價值的每一單位之價值。

$\overline{X}$ 即 X 軸上全部價值之平均數。

Y 即 Y 軸上全部價值的每一單位之價值。

$\overline{Y}$ 即 Y 軸上全部價值之平均數。

Σxy 即 x 的價值乘 y 的價值之總數。

N 即案件數。

$\sigma_x\sigma_y$ 即 X 串數的標準差乘 Y 串數的標準差之積。

c_x 即 X 串數的改正數。。

c_y 即 Y 串數的改正數。

c_xc_y 即 X 串數的改正數乘 Y 串數的改正數之積。

S_y 即 X 軸上的 Y 之平均關係線上所計算之標準差，或散漫之計算。

S_x 即 Y 軸上的 X 之平均關係線上所計算之標準差。

Σd_xd_y 即用短法由 X 軸上假定的平均數所產生之差與由 Y軸上假定的平均數所產生之差相乘之積的總數。

二　對數表之應用法

在計算人口之增加或減少，(參閱本書第二十四章)，複利之趨勢，(參閱本書之第二十七章)，及其他有較大之方根數或乘方數，皆不能不有賴於對數表，以期節省勞力與時間，而求迅速與正確之結果。

1. 由實數尋對數或由對數尋實數之法:

第一須知實數(在對數表中爲 n 項)與對數(在對數表中爲 log.項)是互相反應的。例如實數 2 之對數爲 30103 而對數 0·30103 之實數則爲 2。餘類推。而 2 則列在 n 項之下，30103 則列在 log. 項之下。又例如實數 101 之對數爲 00432，而對數 00432 之實數則爲 101。故 101 列在 n 項之下，而 00432 則列於與 101 相反應之對數項下。餘類推。又 n 之下一行之數則表示整數，如 100 即表示 100。而 n 之右一行之數如 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 等等則係附於 n 之下一行各數之尾的數。例如從 100 向同行之右方推去推至 0 處則爲 100·0 或 1000。其對數爲

00000；推至1處爲100·1或1001，其對數爲00043；推至9處爲100.或1009其對數爲00389。這些實數與對數都是互相反應着的。又例如實數132之對數爲12057，由132右向推至與頂項9字相應處則爲132·9或1329，其對數則爲12352餘類推。

2. 對數之定位法：

對數定位後，始能決定實數之大小。在對數有整數1者，表示10至90之兩位實數的整數。100至999的三位整數實數，則以對數之整數2表示之。其餘對數之整數每大一數，則實數之整數多一位，故對數的第一數字卽表示實數之位數，牠是根據乘方的方數而來。其分解須以10爲標準而得下式：

$$10^0=1$$

$$10^1=10$$

$$10^2=100$$

$$10^3=1000$$

$$10^4=10000$$

$$10^5=100000$$

$$10^6=1000000$$

餘類推。每多一方數，卽多一位整數。故乘方之方數卽對數之第一數字。卽1的對數第一字爲0；10的對數第一字爲1；100的對數第一字爲2；1000的對數第一字爲3；10000的對數第一字爲4；100000的對數第一字爲5，餘類推。於此可見，實數有一位整數者，如1－9，對數之第一數字爲0；實數有兩位整數者如10－99，對數之第一數字爲1；實數

有三位整數者如 100－999，對數之第一數字爲 2；實數每多一位整數，對數之第一數字卽大一數。對數之第一字只在定位，而與實數無關，故查對數，只查最後五位數。

又

$$10^{-1}=\frac{1}{10^1}=0.1$$

$$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$$

$$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0.001$$

$$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}=0.0001$$

$$10^{-5}=\frac{1}{10^5}=\frac{1}{100000}=0.00001$$

餘類推。故實數在 0 以下一位者如 0.1－·9，其對數之第一數字爲 －1；實數在 0 以下二位者，如 0.01－0.09，其對數之第一數字爲 －2；實數在 0 以下三位者，如 0.001－0.009，其對數之第一數字爲－3，餘類推。

3. 實數之方數等於其對數之倍數例如

a. 5 之乘方數如下：

(一)　$5^2=25$

(二)　$5^3=125$

(三)　$5^4=625$

(四)　$5^5=3125$

(五)　$5^6=15625$

b. 上列五項 5 之乘方數之結果，等於下列 5 之對數的倍數之結果。

5 之對數或 $\log 5 = 0.69897$

(一) $5^2 = 0.69897 \times 2 = 1.39794$

(二) $5^3 = 0.69897 \times 3 = 2.09691$

(三) $5^4 = 0.69897 \times 4 = 2.79588$

(四) $5^5 = 0.69897 \times 5 = 3.49485$

(五) $5^6 = 0.69897 \times 6 = 4.19382$

餘類推。

對數以 5 位爲標準。對數之第一數字係決定實數之整數位次。而對數之最後 5 位數，乃係實數之反應數。如尋對數 0.69897 則只按照對數 69897 去尋實數，則得相應之實數 5。而 0 係表明實數只有一位整數，故相應之實數實爲 5，非 0·5，亦非 50 等等；尋對數 1·39794 之實數亦只按照最後之 5 位對數 39794 去尋相應之實數，而本對數之第一數字 1 則係決定實數之位次，餘類推。

照上列對數，可先將(一)項 39794 尋回實數，得 2500；因其第一數字爲 1，係代表兩位整數，故其對數 $1.39794 = 25 = 5^2$。

再將對數 2·09691 尋回實數，得 125。即對數 09691 之實數爲 125，因本對數之第一數字爲 2，實數應爲三位整數，故對數 2.09691 之實數 $= 125 = 5^3$。

再將對數 3.49485 尋回實數，得 3125，即對數 49485 之實數爲3125。因本對數之第一數字爲 3，故實數應爲四位整數，即對數 3,49485 之實數

$=3125=5^5$。

再將對數 4·19382 尋回實數得 15625，即對數 19382 之實數爲 15625；因本對數之第一數字爲 4,故實數應爲五位整數,即對數 4·19382 之實數 $=15625=5^6$。

c. 現將上列 a.b 兩部份 5 之乘方數與 5 的對數之倍數對照，卽可證明某數之若干乘方數，等於某數的對數之若干倍，卽 $x^n=\log x\times n$。

5 之對數 $=0.69897$

下列各數，誰爲對數，誰爲實數，以括弧內之字義解釋之。以表區別。

(一)　$5^2=\log.5\times2=$(對數)$0.69897\times2=$
(對數) 1.39794 = 實數 25。

(二)　$5^3=\log.5\times3=$(對數)$0.69897\times3=$
(對數)2.09691 = (實數)125。

(三)　$5^4=\log.5\times4=$(對數)$0.69897\times4=$
(對數)2.79588 = (實數)625。

(四)　$5^5=\log.5\times5=$(對數)$0.69897\times5=$
(對數)3.49485 = (實數)3125。

(五)　$5^6=\log.5\times6=$(對數)$0.69897\times6=$
(對數)4.19382 = (實數)15625。

照上列五項對照起來，某數之若干乘方數等於某數的對數之若干倍，卽 $x^n=\log x\times n$ 完全符合。

4. 實數之方根數等於對數之除數例如

(一) $\sqrt[6]{15625}$ =log.15625÷6=(對數)4.19382÷6

=(對數)0.69897=(實數)5

(二) $\sqrt[5]{3125}$ =log.3125÷5=(對數)3.49485÷5

=(對數)0.69897=(實數)5

(三) $\sqrt[4]{625}$ =log.625÷4=(對數)2.79588÷4

=(對數)0.69897=(實數)5

(四) $\sqrt[3]{125}$ =log.125÷3=(對數)2.09691÷3

=(對數)0.69897=(實數)5

(五) $\sqrt{25}$ =log.25÷2=(對數)1.39794÷2

=(對數)0.69897=(實數)5

其他任何數的方根數，皆等於以其方根數除其對數，即 $\sqrt[n]{x}$

$$=\frac{\log.x}{n}$$

5. 某些數之互乘之積等於某些數之對數相加之總對數。即 $a\times b\times c\times d\times e=x$

$$=\log.a+\log.b+\log.c+\log.d+\log.e=\log.x$$

例如 100×200×300×400×500=1200000000000

=log.100+log.200+log.300+log.400+log.500

=(對數)2.00000+2.30103+2.47712

+2.60206+2.69897=(對數)12.07918

=(實數)1200000000000

6. 某數被某些數除之等於某數之對數減去某些數之對數

卽 x ÷ b ÷ c ÷ d ÷ e = log. x − (log. a + log. b + log. c + log. d + loge.

例如 1200000000000 ÷ 500 ÷ 400 ÷ 300 ÷ 200 ÷ 100 = 0

= log. 1200000000000 − (log. 500 + log. 400 + log. 300 + log. 200 + log. 100) = (對數) 12.07918 − 12.07918 = 0

算術之加減法甚簡單，可不用對數。

三　1－1000 的平方平方根及倒數表之應用法

1. 平方之檢閱法。

(一) n 項之下列實數。

(二) n^2 項之下列平方數。

(三) 某數之平方卽由某數向右行推，推至 n^2 之下相應處卽得。例如 $2^2=4$，由 2 向右行推，推至 n^2 之下相應處，表上卽報告 4 之數。$(49)^2=2401$，亦由 n 項下 49 向右行推，推至 n 之下相應處，表上卽報告 2401。餘類推。

2. 平方根之檢閱法

某數之平方根卽某數的$\frac{1}{2}$乘方。

(一) n 項仍列實數。

(二) $n^{\frac{1}{2}}$ 項列平方根之數。

(三) 某數之平方根卽由 n 項下某數向右行推，推至 $n^{\frac{1}{2}}$ 項下相應處卽得，例如 $11^{\frac{1}{2}}=\sqrt{11}=3.3166248$，由 n 項下之 11，向

右行推，推至 $n^{\frac{1}{2}}$ 項下相應處，表上即報告 3.3166248 又 $49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7.0000000=7$，由 n 項下之 49，向右行推，推至 $n^{\frac{1}{2}}$ 項下相應處，表上即報告 7。

餘類推。

3. 倒數之檢閱法

某數之倒數，即某數除 1 之結果。n 的倒數，即 $\frac{1}{n}$。

(一) n 項下仍列實數。

(二) $\frac{1}{n}$ 項下列倒數。

(三) 某數之倒數即由 n 項下某數向右行推，推至 $\frac{1}{n}$ 項下相應處，即得。例如 1 之倒數爲 $\frac{1}{1}=1$，由 n 項下之 1 向右推，推至 $\frac{1}{n}$ 項下相應處，表上即報告 1。又如 49 的倒數爲 $\frac{1}{49}=0.020408161$，由 n 項下之 49 向右行推，推至 $\frac{1}{n}$ 項下相應處，表上即報告 0.020408161，餘類推。

n 的 1 方 $=n$，n 的二方 $=n^2$，n 的三方 $=n^3$，n 的四方 $=n^4$，n 的五方 $=n^5$，n 的六方 $=n^6$。

四 由 1－50 之 1 方至 6 方之應用法

1. n 的一方之檢閱法——即 n 項下之數。

2. n 的二方之檢閱法——由 n 項下之某數，向右行推，推至 n^2 項

下相應處卽得。例如 $7^2=49$。由 n 項之 7,向右行推,推至 n^2 下相應處表上卽報告49；$(50)^2=2500$。由 n 項下之 50,向右推，推至 n^2 項下相應處,表上卽報告 2500。餘推類。

3. n 的三方之檢閱法——由 n 項下之某數向右行推,°推至 n 項下相應處卽得。例如 $3^3=27$。由 n 項下之 3 起,向右行推,推至 n 之下相應處,表上卽報告 27。又在 n 項下選擇其他任何一數，如 $(49)^3$ 卽由 n 項下 49 處起,向右行推,推至 n^3 項下相應處,表上卽報告 117649,卽 $(49)=117649$。餘類推。

4. n 的四方之檢閱法——由 n 項下之某數向右行推，推至 n 項下相應處卽得。例如欲知 $(44)^4$ 之數,卽由 n 項下之 44 向右行推,推至 n^4 項下相應處,卽得 3748096,卽 $(44)^4=3748096$。同樣,檢閱 $(33)^4=1185921$,餘類推。

5. n 的五方之檢閱法——由 n 項下之某數向右行推,推至 n^5 項下相應處卽得。例如 $(40)^5$,卽由 n 項下之 (40) 向右行推,推右 n^5 項下相應處卽得 102400000,卽 $(40)^5=102400000$；同樣，$(50)^5=312500000$,餘類推。

6. n 的六方之檢閱法——由 n 項下之某數向右行推,推至 n^6 項下相應處卽得。例如 $(22)^6$，卽由 n 項下之 22 向右行推,推至 n 項下相應處,卽得 113379904,卽 $(22)^6=113379904$；同樣,檢閱 $(50)^6=15625000000$,餘類推。

本表僅限於由1－50的一乘方至六乘方數。如有更大之實數及更大之乘方數時,可採用前面(一)段,對數表之應用法，(3)節，實數之方變

等於其對數之倍數之方法。先將該實數之對數查出，再以其乘方之數字乘其對數，即得。例如 $x^{99}=\log.x\times 99$，再將此對數之結果，尋回實數，即得。

譯表 1 對數表

（譯自米兒氏及達聞頗爾特合著：袖珍統計學之問題與表格 155—196 頁）

F. C. Mills and D. H. Davenport: A Manual of Problems and Tables in Statistics

TABLE A

Common Logarithms of the Natural Numbers From I To 11,000

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	Infinity.	**10**	1.00 000	**20**	1.30 103	**30**	1.47 712	**40**	**1.60** 206
1	0.00 000	11	1.04 139	21	1.32 222	31	1.49 136	41	1.61 278
2	0.30 103	12	1.07 918	22	1.34 242	32	1.50 515	42	1.62 325
3	0.47 712	13	1.11 394	23	1.36 173	33	1.51 851	43	1.63 347
4	0.60 206	14	1.14 613	24	1.38 021	34	1.53 148	44	1.64 345
5	0.69 897	15	1.17 609	25	1.39 794	35	1.54 407	45	1.65 321
6	0.77 815	16	1.20 412	26	1.41 497	36	1.55 630	46	1.66 276
7	0.84 510	17	1.23 045	27	1.43 136	37	1.56 820	47	1.67 210
8	0.90 309	18	1.25 527	28	1.44 716	38	1.57 978	48	1.68 124
9	0.95 424	19	1.27 875	29	1.46 240	39	1.59 106	49	1.69 020
10	1.00 000	**20**	1.30 103	**30**	1.47 712	**40**	1.60 206	**50**	1.69 897

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
50	1.69 897	**70**	1.84 510	**90**	1.95 424	**110**	2.04 139	**130**	2.11 394
51	1.70 757	71	1.85 126	91	1.95 904	111	2.04 532	131	2.11 727
52	1.71 600	72	1.85 733	92	1.96 379	112	2.04 922	132	2.12 057
53	1.72 428	73	1.86 332	93	1.96 848	113	2.05 308	133	2.12 385
54	1.73 239	74	1.86 923	94	1.97 313	114	2.05 690	134	2.12 710
55	1.74 036	75	1.87 506	95	1.97 772	115	2.06 070	135	2.13 033
56	1.74 819	76	1.88 081	96	1.98 227	116	2.06 446	136	2.13 354
57	1.75 587	77	1.88 649	97	1.98 677	117	2.06 819	137	2.13 672
58	1.76 343	78	1.89 209	98	1.99 123	118	2.07 188	138	2.13 988
59	1.77 085	79	1.89 763	99	1.99 564	119	2.07 555	139	2.14 301
60	1.77 815	**80**	1.90 309	**100**	2.00 000	**120**	2.07 918	**140**	2.14 613
61	1.78 533	81	1.90 849	101	2.00 432	121	2.08 279	141	2.14 922
62	1.79 239	82	1.91 381	102	2.00 860	122	2.08 636	142	2.15 229
63	1.79 934	83	1.91 908	103	2.01 284	123	2.08 991	143	2.15 534
64	1.80 618	84	1.92 428	104	2.01 703	124	2.09 342	144	2.15 836
65	1.81 291	85	1.92 942	105	2.02 119	125	2.09 691	145	2.16 137
66	1.81 954	86	1.93 450	106	2.02 531	126	2.10 037	146	2.16 435
67	1.82 607	87	1.93 952	107	2.02 938	127	2.10 380	147	2.16 732
68	1.83 251	88	1.94 448	108	2.03 342	128	2.10 721	148	2.17 026
69	1.83 885	89	1.94 939	109	2.03 743	129	2.11 059	149	2.17 319
70	1.84 510	**90**	1.95 424	**110**	2.04 139	**130**	2.11 394	**150**	2.17 609

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
01		432	475	518	561	604	647	689	732	77$\bar{5}$	817
02		860	903	945	988	*030	*072	*11$\bar{5}$	*157	*199	*242
03	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
04		703	745	787	828	870	912	953	99$\bar{5}$	*036	*078
05	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
06		531	572	612	653	694	73$\bar{5}$	776	816	857	898
07		938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
08	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
09		743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04	139	179	218	258	297	336	376	41$\bar{5}$	454	493
11		532	571	610	6$\bar{5}$0	689	727	766	805	844	883
12		922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
13	05	308	346	38$\bar{5}$	423	461	$\bar{5}$00	538	576	614	652
14		690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
15	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
16		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
17		819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*11$\bar{5}$	*151
18	07	188	22$\bar{5}$	262	298	335	372	408	445	482	518
19		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120		918	954	990	*027	*063	*099	*13$\bar{5}$	*171	*207	*243
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	44	43	42
1	4.4	4.3	4.2
2	8.8	8.6	8.4
3	13.2	12.8	12.6
4	17.6	17.2	16.8
5	22.0	21.5	21.0
6	26.4	25.8	25.2
7	30.8	30.1	29.4
8	35.2	34.4	33.6
9	39.6	38.7	37.8

	41	40	39
1	4.1	4.0	3.9
2	8.2	8.0	7.8
3	12.3	12.0	11.7
4	16.4	16.0	15.6
5	20.5	20.0	19.5
6	24.6	24.0	23.4
7	28.7	28.0	27.3
8	32.8	32.0	31.2
9	36.9	36.0	35.1

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
120		918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
21	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
22		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
23		991	*026	*061	*096	*132	*197	*202	*237	*272	*307
24	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
25		691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
26	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
27		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
28		721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
29	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
31		727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
32	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
33		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
34		710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
35	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
36		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
37		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
38		988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
39	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	38	37	36
1	3.8	3.7	3.6
2	7.6	7.4	7.2
3	11.4	11.1	10.8
4	15.2	14.8	14.4
5	19.0	18.5	18.0
6	22.8	22.2	21.6
7	26.6	25.9	25.2
8	30.4	29.6	28.8
9	34.2	33.3	32.4

	35	34	33
1	3.5	3.4	3.3
2	7.0	6.8	6.6
3	10.5	10.2	9.9
4	14.0	13.6	13.2
5	17.5	17.0	16.5
6	21.0	20.4	19.8
7	24.5	23.8	23.1
8	28.0	27.2	26.4
9	31.5	30.6	29.7

Prop. Pts.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
140	14 613	644	67$\bar{5}$	706	737	768	799	829	860	891
41	922	953	983	*014	*04$\bar{5}$	*076	*106	*137	*168	*198
42	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
43	534	564	594	62$\bar{5}$	65$\bar{5}$	685	715	746	776	806
44	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
45	16 137	167	197	227	356	286	316	346	376	406
46	435	465	49$\bar{5}$	524	554	584	613	643	673	702
47	732	761	791	820	8$\bar{5}$0	879	909	938	967	997
48	17 026	056	08$\bar{5}$	114	143	173	202	231	260	289
49	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
51	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
52	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
53	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
54	752	780	808	837	86$\bar{5}$	893	921	949	977	*005
55	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	28$\bar{5}$
56	312	340	368	396	424	451	479	507	53$\bar{5}$	562
57	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
58	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	112
59	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	38$\bar{5}$
160	412	439	466	493	520	548	57$\bar{5}$	602	629	656
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	32	31	30
1	3.2	3.1	3.0
2	6.4	6.2	6.0
3	9.6	9.3	9.0
4	12.8	12.4	12.0
5	16.0	15.5	15.0
6	19.2	18.6	18.0
7	22.4	21.7	21.0
8	25.6	24.8	24.0
9	28.8	27.9	27.0

	29	28
1	2.9	2.8
2	5.8	5.6
3	8.7	8.4
4	11.6	11.2
5	14.5	14.0
6	17.4	16.8
7	20.3	19.6
8	23.2	22.4
9	26.1	25.2

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
160		412	439	466	493	520	548	57̄5	602	629	656
61		683	710	737	763	790	817	844	871	898	92̄5
62		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
63	21	219	235	272	299	325	352	378	40̄5	431	458
64		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
65		748	77̄5	801	827	854	880	906	932	958	98̄5
66	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
67		272	298	324	310	376	401	427	453	479	505
68		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
69		789	814	840	866	861	917	943	968	694	*019
170	23	04̄5	070	096	121	147	172	198	223	249	274
71		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
72		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
73		80̄5	830	85̄5	880	90̄5	930	95̄5	980	*00̄5	*030
74	24	05̄5	080	10̄5	130	15̄5	180	204	229	254	279
75		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
76		551	576	601	625	6̄50	674	699	724	748	773
77		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
78	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
79		285	310	334	358	382	406	431	45̄5	479	503
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	27	26
1	2.7	2.6
2	5.4	5.2
3	8.1	7.8
4	10.8	10.4
5	13.5	13.0
6	16.2	15.6
7	18.9	18.2
8	21.6	20.8
9	14.3	23.4

	25
1	2.5
2	5.0
3	7.5
4	10.0
5	12.5
6	15.0
7	17.5
8	20.0
9	22.5

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
81		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
82	26	007	031	$05\bar{5}$	079	102	126	150	174	198	221
83		245	269	293	316	340	364	387	411	$43\bar{5}$	458
84		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
85		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
86		951	$97\bar{5}$	998	*021	*$04\bar{5}$	*068	*091	*114	*138	*161
87	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
88		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
89		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
91	28	103	126	149	171	194	217	240	262	$28\bar{5}$	307
92		330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
93		556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
94		780	803	$82\bar{5}$	847	870	892	914	937	959	981
95	29	003	026	048	070	092	$11\bar{5}$	137	159	181	203
96		226	248	270	292	314	336	358	380	403	$42\bar{5}$
97		447	469	491	513	$53\bar{5}$	557	579	601	623	$64\bar{5}$
98		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
99		885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30	103	125	146	168	190	211	233	$25\bar{5}$	276	298
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	24	23
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30	103	12$\bar{5}$	146	168	190	211	233	255	276	298
01		320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
02		535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
03		7$\bar{5}$0	771	792	814	835	856	878	899	920	942
04		963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
05	31	175	197	218	239	260	281	302	323	34$\bar{5}$	366
06		387	408	429	4$\bar{5}$0	471	492	513	534	555	576
07		597	618	639	660	681	702	723	744	76$\bar{5}$	785
08		806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
09	32	01$\bar{5}$	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210		222	243	263	284	30$\bar{5}$	325	346	366	387	408
11		428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
12		634	654	67$\bar{5}$	69$\bar{5}$	715	736	756	777	797	818
13		838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
14	33	041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
15		244	264	284	301	32$\bar{5}$	34$\bar{5}$	36$\bar{5}$	385	405	425
16		445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
17		646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
18		846	866	885	905	925	945	965	98$\bar{5}$	*00$\bar{5}$	*02$\bar{5}$
19	34	044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
220		242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

	20
1	2.0
2	4.0
3	6.0
4	8.0
5	10.0
6	12.0
7	14.0
8	16.0
9	18.0

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.
220	34	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420	**19**
21		439	459	479	498	518	537	557	577	596	616	1 | 1.9
22		635	65$\bar{5}$	674	694	713	733	753	772	792	811	2 | 3.8
23		830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005	3 | 5.7
24	35	02$\bar{5}$	014	064	083	102	122	141	160	180	199	4 | 7.6
25		218	238	257	276	295	31$\bar{5}$	334	353	372	392	5 | 9.5
26		411	430	449	468	488	507	526	545	564	583	6 | 11.4
27		603	622	641	660	679	698	717	736	755	774	7 | 13.3
28		793	813	832	851	870	889	908	927	946	96$\bar{5}$	8 | 15.2
29		984	*003	021	*040	*059	*078	097	*116	*135	*154	9 | 17.1
230	36	173	192	211	229	248	267	286	30$\bar{5}$	324	342	**18**
31		361	380	399	418	436	455	474	493	511	530	1 | 1.8
32		549	568	586	60$\bar{5}$	624	642	661	680	698	717	2 | 3.6
33		736	754	773	791	810	829	847	866	884	903	3 | 5.4
34		922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088	4 | 7.2
35	37	107	125	144	162	181	199	218	236	254	273	5 | 9.0
36		291	310	328	346	36$\bar{5}$	383	401	420	438	457	6 | 10.8
37		47$\bar{5}$	493	511	530	548	566	58$\bar{5}$	603	621	639	7 | 12.6
38		658	676	694	712	731	749	767	785	803	822	8 | 14.4
39		840	858	876	894	912	931	949	967	98$\bar{5}$	*003	9 | 16.2
240	38	021	039	057	075	093	112	130	148	166	184	
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
240	38	021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
41		202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
42		382	399	417	435	453	471	489	507	725	543
43		561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
44		739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
45		917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076
46	39	094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
47		270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
48		445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
49		620	637	655	672	690	707	724	742	759	777
250		794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
51		967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
52	40	140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
53		312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
54		483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
55		654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
46		824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
57		993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
58	41	162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
59		330	347	363	380	397	414	430	447	464	4 1
260		497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	17
1	1.7
2	3.4
3	5.1
4	6.8
5	8.5
6	10.2
7	11.9
8	13.6
9	15.3

	18
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2
5	9.0
6	10.8
7	12.6
8	14.4
9	16.2

Prop Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	
260	41	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647		**17**
61		664	681	697	714	731	747	764	780	797	814	1	1.8
62		830	847	863	880	896	913	929	946	963	979	2	3.6
63		996	*012	*029	*045	*062	*078	*095̄	*111	*127	*144	3	5.4
64	42	160	177	193	210	226	243	259	275	292	308	4	7.2
65		325̄	341	357	374	390	406	423	439	455	472	5	9.0
66		488	504	521	537	553	570	586	602	619	635̄	6	10.8
67		651	667	584	700	716	732	749	765̄	781	797	7	12.6
68		813	830	846	862	878	894	911	927	943	959	8	14.4
69		975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120	9	16.2
270	43	136	152	169	185̄	201	217	233	249	265	281		
71		297	313	329	345̄	361	377	393	409	425	441		**16**
72		457	473	489	305̄	521	537	553	569	584	600	1	1.6
73		616	632	648	664	680	696	712	727	743	759	2	3.2
74		775	791	807	823	838	854	870	886	902	917	3	4.8
75		933	949	965̄	981	996	*012	*028	*044	*059	*075	4	6.4
76	44	091	107	122	138	154	170	185	201	217	232	5	8.0
77		248	264	279	295̄	311	326	342	358	373	389	6	9.6
78		404	420	436	451	467	483	498	514	529	545̄	7	11.2
79		560	576	592	607	623	638	654	669	685̄	700	8	12.8
280		716	731	747	762	778	793	809	824	840	855	9	14.4
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
280	44	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
81		871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
82	45	02$\bar{5}$	040	056	071	086	102	117	133	148	163
83		179	194	209	22$\bar{5}$	240	255	271	286	301	317
84		332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
85		484	$\bar{5}$00	51$\bar{5}$	530	545	561	576	591	606	621
86		637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
87		788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
88		939	954	969	984	000	*01$\bar{5}$	*030	*04$\bar{5}$	*060	*07$\bar{5}$
89	46	090	10$\bar{5}$	120	13$\bar{5}$	1$\bar{5}$0	16$\bar{5}$	180	19$\bar{5}$	210	22$\bar{5}$
290		240	25$\bar{5}$	270	285	300	31$\bar{5}$	330	34$\bar{5}$	359	374
91		389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
92		538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
93		687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
94		83$\bar{5}$	8$\bar{5}$0	864	879	894	909	923	938	953	967
95		982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
96	47	129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
97		276	290	30$\bar{5}$	319	334	349	363	378	392	407
98		422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
99		567	582	596	611	625	640	654	669	683	698
300		712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.0

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	19.8
8	11.2
9	12.6

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47	712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
01		857	871	885	900	974	929	943	958	972	986
02	48	001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
03		144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
04		287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
05		430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
06		572	586	601	$61\bar{5}$	629	643	657	671	686	700
07		714	728	742	756	770	$78\bar{5}$	799	813	827	841
08		855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
09		996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49	136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
11		276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
12		415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
13		554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
14		693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
15		831	$84\bar{5}$	859	872	886	900	914	927	941	$95\bar{5}$
16		969	982	996	*010	*024	*037	*051	$*06\bar{5}$	*079	*092
17	50	106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
18		243	256	270	284	297	311	$32\bar{5}$	338	352	365
19		379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320		$51\bar{5}$	529	542	556	569	583	596	610	623	637
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
320	50	51$\bar{5}$	529	542	556	569	583	596	610	623	637
21		651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
22		786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
23		920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
24	51	05$\bar{5}$	068	081	09$\bar{5}$	108	121	13$\bar{5}$	148	162	17$\bar{5}$
25		188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
26		322	335	348	362	375	388	402	41$\bar{5}$	428	441
27		45$\bar{5}$	468	481	49$\bar{5}$	508	521	534	548	561	574
28		587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
29		720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330		851	86$\bar{5}$	878	891	904	917	930	943	957	970
31		983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
32	52	114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
33		244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
34		37$\bar{5}$	388	401	414	427	440	453	466	479	492
35		504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
36		634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
37		763	776	789	802	81$\bar{5}$	827	840	853	866	879
38		892	90$\bar{5}$	917	930	943	956	969	982	994	*007
39	53	020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
340		148	161	173	186	199	212	224	237	2$\bar{5}$0	263
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	13
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

Prop. Pts

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
340	53	148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
41		275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
42		403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
43		529	542	55$\bar{5}$	567	580	593	605	618	631	643
44		656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
45		782	794	807	820	832	84$\bar{5}$	857	870	882	895
46		908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
47	54	033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
48		158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
49		283	29$\bar{5}$	307	320	332	34$\bar{5}$	357	370	382	394
350		407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
51		531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
52		654	667	679	691	704	716	728	741	753	*765
53		777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
54		900	913	92$\bar{5}$	937	949	962	974	986	998	*011
55	55	023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
56		14$\bar{5}$	157	169	182	194	206	218	230	242	25$\bar{5}$
57		267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
58		388	400	413	42$\bar{5}$	437	449	461	473	485	497
59		509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360		630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	12	13
1	1.2	1.3
2	2.4	2.6
3	3.6	3.9
4	4.8	5.2
5	6.0	6.5
6	7.2	7.8
7	8.4	9.1
8	9.6	10.4
9	10.8	11.7

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	
360	55	630	642	654	666	678	691	703	715	727	739		
61		751	763	77$\bar{5}$	787	799	811	823	88$\bar{5}$	847	859		
62		871	883	89$\bar{5}$	907	919	931	943	95$\bar{5}$	967	979		
63		991	*003	*01$\bar{5}$	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098		
64	56	110	122	134	146	158	170	182	194	205	217		
65		229	241	253	26$\bar{5}$	277	289	301	312	324	336		
66		348	360	372	384	396	407	419	431	443	45$\bar{5}$		**12**
67		467	478	490	502	514	526	538	549	561	573	1	1.2
68		58$\bar{5}$	597	608	620	632	644	656	667	679	691	2	2.4
69		703	714	726	738	750	761	773	78$\bar{5}$	797	808	3	3.6
370		820	832	844	855	867	879	891	902	914	926	4	4.8
71		937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043	5	6.0
72	57	054	066	078	089	101	113	124	136	148	159	6	7.2
73		171	183	194	206	217	229	241	252	264	276	7	8.4
74		287	299	310	322	334	345	327	368	380	392	8	9.6
75		403	41$\bar{5}$	426	438	449	461	473	484	496	507	9	10.8
76		519	530	542	553	56$\bar{5}$	576	588	600	611	623		
77		634	646	657	669	680	692	703	71$\bar{5}$	726	737		
78		749	761	772	784	795	807	818	830	841	852		
79		864	875	887	898	910	921	933	944	955	967		
380		978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081		
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.
380	57	978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081	**11**
81	58	092	104	115	127	138	149	161	172	184	195	1 | 1.1
82		206	218	229	240	252	263	274	286	297	309	2 | 2.2
83		320	331	343	354	365	377	388	399	410	422	3 | 3.3
84		433	444	456	467	478	490	501	512	524	53$\bar{5}$	4 | 4.4
85		546	557	569	580	591	602	614	62$\bar{5}$	636	647	5 | 5.5
86		659	670	681	692	704	71$\bar{5}$	726	737	749	760	6 | 6.6
87		771	782	794	80$\bar{5}$	816	827	838	850	861	872	7 | 7.7
88		883	894	906	917	928	939	950	961	973	984	8 | 8.8
89		99$\bar{5}$	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095	9 | 9.9
390	59	106	118	129	140	151	162	173	184	195	207	
91		218	229	240	251	262	273	284	295	306	318	**10**
92		329	340	351	362	373	384	395	406	417	428	1 | 1.0
93		439	450	461	472	483	494	506	517	528	539	2 | 2.0
94		5$\bar{5}$0	561	572	583	594	60$\bar{5}$	616	627	638	649	3 | 3.0
95		660	671	682	693	704	71$\bar{5}$	726	737	748	759	4 | 4.0
96		770	780	791	802	813	824	835	846	857	868	5 | 5.0
97		879	890	901	912	923	934	94$\bar{5}$	956	966	977	6 | 6.0
98		988	999	*010	*021	*023	*043	*054	*06$\bar{5}$	*076	*086	7 | 7.0
99	60	097	108	119	130	141	152	163	173	184	195	8 | 8.0
400		206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	9 | 9.0
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
01		314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
02		423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
03		531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
04		638	649	660	670	681	692	703	713	724	73$\bar{5}$
05		746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
06		853	863	874	88$\bar{5}$	895	906	917	927	938	949
07		959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*04$\bar{5}$	*055
08	61	066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
09		172	183	194	204	21$\bar{5}$	225	236	247	257	268
410		278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
11		384	39$\bar{5}$	405	416	426	437	448	458	469	479
12		490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
13		595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
14		700	711	721	731	742	752	763	773	784	294
15		80$\bar{5}$	815	826	836	847	857	868	878	888	899
16		909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003
17	62	014	024	034	04$\bar{5}$	055	066	076	086	097	107
18		118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
19		221	232	242	252	263	273	284	294	304	31$\bar{5}$
420		325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	62	325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
21		428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
22		531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
23		634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
24		737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
25		839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
26		941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
27	63	043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
28		144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
29		246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430		347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
31		448	458	468	678	488	498	508	518	528	538
32		548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
33		649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
34		749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
35		849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
36		949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
37	64	048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
38		147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
39		246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440		345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
440	64	345	355	365	37$\bar{5}$	38$\bar{5}$	39$\bar{5}$	404	414	424	434
41		444	454	464	473	482	493	503	513	523	532
42		542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
43		640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
44		738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
45		836	846	856	865	875	885	89$\bar{5}$	904	914	924
46		933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
47	65	031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
48		128	137	147	157	167	176	186	196	205	21$\bar{5}$
49		22$\bar{5}$	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450		321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
51		418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
52		514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
53		610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
54		706	715	725	734	744	753	763	772	282	792
55		801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
56		896	906	916	925	93$\bar{5}$	944	954	963	973	982
57		992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
58	66	087	096	106	11$\bar{5}$	124	134	143	153	162	172
59		181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
460		276	285	29$\bar{5}$	304	314	323	332	342	351	361
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
460	66	276	285	$29\bar{5}$	304	314	323	332	342	351	361
61		370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
62		464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
63		558	567	577	586	596	$60\bar{5}$	614	624	633	642
64		652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
65		745	$75\bar{5}$	764	773	783	792	801	811	820	829
66		839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
67		932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
68	67	025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
69		117	127	136	145	154	164	$17\bar{3}$	182	191	201
470		210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
71		302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
72		394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
73		486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
74		578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
75		669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
76		761	770	779	788	797	806	815	$82\bar{5}$	834	843
77		852	861	870	879	888	897	906	916	$92\bar{5}$	934
78		943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
79	68	034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480		124	133	142	151	169	169	178	187	196	205
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
480	68	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
81		21$\bar{5}$	224	233	242	251	260	269	278	287	296
82		30$\bar{5}$	314	323	332	341	3$\bar{5}$0	359	368	377	386
83		39$\bar{5}$	404	413	422	431	440	449	458	467	476
84		48$\bar{5}$	494	502	511	520	529	538	547	556	56$\bar{5}$
85		574	583	592	601	610	619	628	637	646	65$\bar{5}$
86		664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
87		753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
88		842	851	860	869	878	886	895	904	913	932
89		931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69	020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
91		108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
92		197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
93		28$\bar{5}$	294	302	311	320	329	338	346	355	364
94		373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
95		461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
96		548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
97		636	644	653	662	671	679	688	607	705	714
98		723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
99		810	819	827	836	84$\bar{5}$	854	862	871	880	888
500		897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69	897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
01		984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
02	70	070	079	088	096	10$\bar{5}$	114	122	131	140	148
03		157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
04		243	252	260	269	278	286	29$\bar{5}$	303	312	321
05		329	338	346	35$\bar{5}$	364	372	381	389	398	406
06		415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
07		501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
08		586	59$\bar{5}$	603	612	621	629	638	646	65$\bar{5}$	663
09		672	684	689	697	706	714	723	731	740	749
510		757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
11		842	851	859	868	876	88$\bar{5}$	893	902	810	919
12		927	935	944	952	961	969	978	986	99$\bar{5}$	*003
13	71	012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
14		096	10$\bar{5}$	113	122	130	139	147	155	164	172
15		181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
16		26$\bar{5}$	273	282	290	299	307	315	324	332	341
17		349	357	366	374	383	391	399	408	416	42$\bar{5}$
18		433	441	4$\bar{5}$0	458	466	47$\bar{5}$	483	492	$\bar{5}$00	508
19		517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520		600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
520	71	600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
21		684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
22		767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
23		850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
24		933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
25	72	016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
26		099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
27		181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
28		263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
29		346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530		428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
31		509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
32		591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
33		673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
34		754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
35		835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
36		916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
37		997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
38	73	078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
39		159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540		239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
540	**75**	239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
41		320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
42		400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
43		480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
44		560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
45		640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
46		719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
47		799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
48		878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
49		957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74	036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
51		115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
52		194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
53		273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
54		351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
55		429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
56		507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
57		586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
58		663	671	679	687	695	702	710	718	726	733
59		741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
560		819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
560	74	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
61		896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
62		974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043
63	75	051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
64		128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
65		205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
66		282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
67		358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
68		435	442	450	458	465	473	481	488	496	504
69		511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
570		587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
71		664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
72		740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
73		815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
74		891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
75		967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
76	76	042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
77		118	120	133	140	148	155	163	170	178	185
78		193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
79		268	275	283	290	298	305	313	320	328	335
580		343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
N.		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Prop. Pts.

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

Prop Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
580	76	343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
81		418	425	433	440	448	45$\bar{5}$	462	470	477	485
82		492	$\bar{5}$00	507	51$\bar{5}$	522	530	537	54$\bar{5}$	552	559
83		567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
84		641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
85		716	723	730	738	745	753	760	768	77$\bar{5}$	782
86		790	797	80$\bar{5}$	812	819	827	834	842	849	856
87		864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
88		938	945	953	960	967	97$\bar{5}$	982	989	997	*004
89	77	012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
590		085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
91		159	166	173	181	188	195	203	210	217	22$\bar{5}$
92		232	240	247	254	262	269	276	283	291	298
93		305	313	320	327	33$\bar{5}$	342	349	357	364	371
94		379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
95		452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
96		52$\bar{5}$	532	539	546	554	561	568	576	583	590
97		597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
98		670	677	68$\bar{5}$	692	699	706	714	721	728	735
99		743	7$\bar{5}$0	757	764	772	779	786	793	801	808
600		815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
01		887	89$\bar{5}$	902	909	916	924	931	938	945	952
02		960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*02$\bar{5}$
03	78	032	039	046	053	061	068	07$\bar{5}$	082	089	097
04		104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
05		176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
06		247	254	262	269	276	283	290	297	30$\bar{5}$	312
07		319	326	333	340	347	35$\bar{5}$	362	369	376	383
08		390	398	40$\bar{5}$	412	419	426	433	440	447	45$\bar{5}$
09		462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610		533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
11		604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
12		675	682	689	696	704	711	718	72$\bar{5}$	732	739
13		746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
14		817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
15		888	89$\bar{5}$	902	909	916	923	930	937	944	951
16		958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
17	79	029	036	043	050	057	064	071	078	08$\bar{5}$	092
•18		099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
19		169	176	183	190	197	204	211	218	225	232
620		239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
620	79	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
21		309	316	323	330	387	344	351	358	365	372
22		379	386	393	400	407	414	421	428	43$\bar{5}$	442
23		449	456	463	470	477	484	491	498	50$\bar{5}$	511
24		518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
25		588	59$\bar{5}$	602	609	616	623	630	637	644	650
26		657	664	671	678	685	692	699	706	713	720
27		727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
28		796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
29		865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630		934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
31	80	003	010	017	024	030	037	044	051	058	06$\bar{5}$
32		072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
33		140	147	154	161	168	17$\bar{5}$	182	188	195	202
34		209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
35		277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
36		346	353	359	366	373	380	382	393	400	407
37		414	421	428	434	441	448	45$\bar{5}$	462	468	475
38		482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
39		550	557	564	570	577	584	591	598	604	611
640		618	62$\bar{5}$	632	638	645	652	659	665	672	679
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
640	80	618	$62\bar{5}$	632	638	645	652	659	665	672	679
41		686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
42		754	760	767	774	781	787	*794	801	808	814
43		821	828	$83\bar{5}$	841	848	$85\bar{5}$	862	868	875	882
44		889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
45		956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
46	81	023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
47		090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
48		158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
49		224	231	238	$24\bar{5}$	251	258	$26\bar{5}$	271	278	$28\bar{5}$
650		291	298	$30\bar{5}$	311	318	$32\bar{5}$	331	338	$34\bar{5}$	351
51		358	$36\bar{5}$	371	378	385	391	398	$40\bar{5}$	411	418
52		425	431	438	$44\bar{5}$	451	458	$46\bar{5}$	471	478	$48\bar{5}$
53		491	498	$50\bar{5}$	511	518	$52\bar{5}$	531	538	544	551
54		558	564	571	578	584	561	598	604	611	617
55		624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
56		690	697	704	710	717	723	730	737	743	$7\bar{5}0$
57		757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
58		823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
59		889	895	902	908	$91\bar{5}$	921	928	$93\bar{5}$	841	948
660		954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
660	81	954	961	968	674	981	987	994	*000	*007	*014
61	82	020	027	033	040	064	053	060	066	073	079
62		086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
63		151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
64		217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
65		282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
66		347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
67		413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
68		478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
69		543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670		607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
71		672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
72		737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
73		802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
74		866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
75		930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
76		995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
77	83	059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
78		123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
79		187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680		251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
680	83	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
81		315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
82		378	385̄	391	398	404	410	417	423	429	436
83		442	448	455̄	461	467	474	480	487	493	499
84		506	512	518	525̄	531	537	544	550	556	563
85		569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
86		632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
87		696	702	708	715̄	721	727	734	740	746	753
88		759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
89		822	828	835̄	841	847	853	860	866	872	879
690		885̄	891	897	904	910	916	923	929	935	942
91		948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
92	84	011	017	023	029	036	042	048	055̄	061	067
93		073	080	086	092	098	105̄	111	117	123	130
94		136	142	148	155̄	161	167	173	180	186	194
95		198	205̄	211	217	223	230	236	242	248	255̄
96		261	267	273	280	286	292	298	305̄	311	317
97		323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
98		386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
99		448	454	460	466	473	479	485̄	491	497	504
700		510	516	522	528	535̄	541	547	553	559	566
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84	510	516	522	528	$53\bar{5}$	541	547	553	559	566
01		572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
02		634	640	646	652	658	$66\bar{5}$	671	677	683	689
03		696	702	708	714	720	726	733	739	$74\bar{5}$	751
04		757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
05		819	825	831	387	844	$8\bar{5}0$	856	862	868	874
06		880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
07		942	948	954	960	967	973	979	$98\bar{5}$	991	997
08	85	003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
09		$06\bar{5}$	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710		126	132	138	144	150	156	163	169	$17\bar{5}$	181
11		187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
12		248	254	260	266	272	278	$28\bar{5}$	291	297	303
13		309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
14		370	376	382	388	394	400	406	412	418	$42\bar{5}$
15		431	437	443	449	$45\bar{5}$	461	467	473	479	485
16		491	497	503	509	519	522	528	534	540	546
17		552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
18		612	618	$62\bar{5}$	631	637	643	649	$65\bar{5}$	661	667
19		673	679	$68\bar{5}$	691	697	703	709	715	721	727
720		733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
720	85	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
21		794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
22		854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
23		914	920	926	932	938	944	$9\bar{5}0$	956	962	968
24		974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028
25	86	034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
26		094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
27		153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
28		213	219	225	231	237	243	249	$25\bar{5}$	261	267
29		273	279	$28\bar{5}$	291	297	303	308	314	320	326
730		332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
31		392	390	404	410	415	421	427	433	439	445
32		451	457	463	469	$47\bar{5}$	481	487	493	499	504
33		510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
34		570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
35		629	$63\bar{5}$	641	646	652	658	664	670	676	682
36		688	694	700	705	711	717	723	729	$73\bar{5}$	741
37		747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
38		806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
39		864	870	876	882	888	894	900	906	911	917
740		923	929	$93\bar{5}$	941	947	953	958	964	970	976
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
740	86	923	929	935	941	947	953	958	964	970	976
41		982	988	994	999	005	*011	*017	*023	*029	*03$\bar{5}$
42	87	040	046	052	058	064	070	075	081	087	093
43		099	10$\bar{5}$	111	116	122	128	134	140	146	151
44		157	163	169	17$\bar{5}$	181	186	192	198	204	210
45		216	221	227	233	239	24$\bar{5}$	251	256	262	368
46		274	280	286	291	297	303	309	31$\bar{5}$	320	326
47		332	338	344	349	355	361	367	373	379	384
48		390	396	402	408	413	419	42$\bar{5}$	431	437	442
49		448	454	460	466	471	477	483	489	40$\bar{5}$	500
750		506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
51		564	570	576	581	587	593	599	604	610	616
52		622	628	633	639	64$\bar{5}$	651	656	662	668	674
53		679	685	691	697	703	708	714	720	726	731
54		737	743	749	754	760	766	772	777	783	789
55		79$\bar{5}$	800	806	812	818	823	829	83$\bar{5}$	841	846
56		852	858	864	869	875	881	887	892	898	904
57		910	915	921	927	933	938	944	9$\bar{5}$0	955	961
58		967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018
59	88	024	030	036	041	047	053	058	064	070	076
760		081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Paop. Pts.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Prop. Pts.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
760	88 081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
61	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190
62	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247
63	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304
64	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360
65	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417
66	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474
67	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530
68	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587
69	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700
71	705	711	717	722	728	734	739	745	705	756
72	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812
73	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868
74	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925
75	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981
76	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037
77	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092
78	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148
79	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Porp. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
780	89	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260
81		265	271	276	282	287	293	298	304	310	315
82		321	326	332	337	343	348	354	360	365	371
83		376	382	387	393	398	404	409	41̄5	421	426
84		432	437	443	448	454	459	46̄5	470	476	481
85		487	492	493	504	509	51̄5	520	526	531	537
86		542	548	553	559	564	570	575	581	586	592
87		597	603	609	614	620	625	631	636	642	647
88		653	658	664	669	67̄5	680	686	691	697	702
89		708	713	719	724	730	735	741	746	752	757
790		763	768	774	779	78̄5	790	796	801	807	812
91		818	823	829	834	840	845	851	856	862	867
92		873	878	883	889	894	900	905	911	916	922
93		927	933	938	944	949	95̄5	960	966	971	977
94		982	988	993	998	*004	*009	*01̄5	*020	*026	*031
95	90	037	042	048	053	059	064	069	07̄5	080	086
96		091	097	102	108	113	119	124	129	13̄5	140
97		146	151	157	162	168	173	179	184	189	19̄5
98		200	206	211	217	222	227	233	238	244	249
99		25̄5	260	266	271	276	282	287	293	298	304
800		309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	90	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
01		363	369	374	380	$38\bar{5}$	390	396	401	407	412
02		417	423	428	434	439	$44\bar{5}$	$4\bar{5}0$	455	461	466
03		472	477	482	488	493	499	504	509	$51\bar{5}$	520
04		526	531	536	542	547	553	558	563	569	574
05		580	$58\bar{5}$	590	596	601	607	612	617	623	628
06		634	639	644	$6\bar{5}0$	655	660	666	671	677	682
07		687	693	698	703	709	714	720	725	730	736
08		741	747	752	757	763	768	773	779	784	789
09		$79\bar{5}$	800	806	811	816	822	827	832	838	843
810		849	854	859	$86\bar{5}$	870	875	881	886	891	897
11		902	907	913	918	924	929	934	940	945	950
12		956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004
13	91	009	014	020	025	030	036	041	046	052	057
14		062	068	073	078	084	089	094	100	105	110
15		116	121	126	132	137	142	148	153	158	164
16		169	174	180	$18\bar{5}$	190	196	201	206	212	217
17		222	228	233	238	243	249	254	259	$26\bar{5}$	270
18		275	281	286	291	297	302	307	312	318	323
19		328	334	339	344	$3\bar{5}0$	$35\bar{5}$	360	365	371	376
820		381	387	392	397	403	408	413	418	424	429
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
820	91	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429
21		434	440	$44\bar{5}$	450	455	461	466	471	477	482
22		487	492	498	503	508	514	519	524	529	$53\bar{5}$
23		540	545	551	556	561	566	572	577	582	587
24		593	598	603	609	614	619	624	630	$63\bar{5}$	640
25		645	651	656	661	666	672	677	682	687	693
26		698	703	709	714	719	724	730	$73\bar{5}$	740	745
27		751	756	761	766	772	777	782	787	793	798
28		803	808	814	819	824	829	834	840	$84\bar{5}$	850
29		855	861	866	871	876	882	887	892	897	903
830		908	913	918	924	929	934	939	944	$9\bar{5}0$	$95\bar{5}$
31		960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007
32	92	012	018	023	028	033	038	044	049	054	059
33		$06\bar{5}$	070	$07\bar{5}$	080	085	091	096	101	106	111
34		117	122	127	132	137	143	148	153	158	163
35		169	174	179	184	189	$19\bar{5}$	200	205	210	215
36		221	226	231	236	241	247	252	257	262	267
37		273	278	283	288	293	298	304	309	314	319
38		324	330	$33\bar{5}$	340	345	350	355	361	366	371
39		376	381	387	392	397	402	407	412	418	423
840		428	433	438	443	449	454	459	464	469	474
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
840	92	428	433	438	443	449	454	459	464	469	474
41		480	48$\bar{5}$	490	495	500	505	511	516	521	526
42		531	536	542	547	552	557	562	567	572	578
43		583	588	593	598	603	609	614	619	624	629
44		634	639	64$\bar{5}$	6$\bar{5}$0	65$\bar{5}$	660	665	670	675	681
45		686	691	696	701	706	711	716	722	727	732
46		737	742	747	752	758	763	768	773	778	783
47		788	793	799	804	809	814	819	824	829	834
48		840	84$\bar{5}$	8$\bar{5}$0	85$\bar{5}$	860	865	870	875	881	886
49		891	896	901	906	911	916	921	927	932	937
850		942	947	952	957	962	967	973	978	983	988
51		993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039
52	93	044	049	054	059	064	069	07$\bar{5}$	080	08$\bar{5}$	090
53		09$\bar{5}$	100	105	110	115	120	125	131	136	141
54		146	151	156	161	166	171	176	181	186	192
55		197	202	207	212	217	222	227	232	237	242
56		247	252	258	263	268	273	278	283	288	293
57		298	303	308	313	318	323	328	334	339	344
58		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
59		399	404	409	414	420	42$\bar{5}$	430	43$\bar{5}$	440	44$\bar{5}$
860		4$\bar{5}$0	45$\bar{5}$	460	46$\bar{5}$	470	475	480	485	490	495
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	
860	93	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495		
61		500	505	510	515	520	526	531	536	541	546		
62		551	556	561	566	571	576	581	586	591	596		
63		601	606	611	616	621	626	631	636	641	646		
64		651	656	661	666	671	676	682	687	692	697		
65		702	707	712	717	722	727	732	737	742	747		
66		752	757	762	767	772	777	782	787	792	797		**5**
67		802	807	817	812	822	827	832	837	842	847	1	0.5
68		852	857	362	867	872	877	882	887	892	897	2	1.0
69		902	907	912	917	922	927	932	937	942	947	3	1.5
870		952	957	962	967	972	977	982	987	992	997	4	2.0
71	94	002	007	012	017	022	027	032	037	042	047	5	2.5
72		052	057	062	067	072	077	082	086	091	096	6	3.0
73		101	106	111	116	121	126	131	136	141	146	7	3.5
74		151	156	161	166	171	176	181	186	191	196	8	4.0
75		201	206	211	216	221	226	231	236	240	245	9	4.5
76		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295		
77		300	305	310	315	320	325	330	335	340	345		
78		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394		
79		399	404	409	414	419	424	420	433	438	443		
880		448	453	458	463	468	473	478	483	488	493		
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
880	94	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
81		498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
82		547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
83		596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
84		645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
85		694	699	704	709	714	719	734	729	734	738
86		743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
87		792	797	802	807	812	817	823	827	832	836
88		841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
89		890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890		939	944	949	954	959	963	968	974	978	983
91		988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
92	95	036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
93		085	090	095	100	105	109	114	119	125	129
94		134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
95		182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
96		231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
97		279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
98		328	332	337	342	347	353	357	361	366	371
99		376	381	386	390	395	400	405	410	415	419
900		424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95	424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
01		472	477	482	487	492	497	501	506	511	516
02		521	525	530	535	540	54$\bar{5}$	550	554	559	564
03		569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
04		617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
05		66$\bar{5}$	670	674	679	684	689	694	698	703	708
06		713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
07		761	766	770	775	780	78$\bar{5}$	789	794	799	804
08		809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
09		856	861	866	871	875	880	885	890	89$\bar{5}$	899
910		904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
11		952	957	961	966	971	976	980	985	990	99$\bar{5}$
12		999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042
13	96	047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
14		09$\bar{5}$	099	104	109	114	118	123	128	133	137
15		142	147	152	156	161	166	171	175	180	18$\bar{5}$
16		190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
17		237	242	246	251	256	261	265	270	27$\bar{5}$	280
18		284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
19		332	336	341	346	350	355	360	36$\bar{5}$	369	374
920		379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3 5
8	4.0
9	4.5

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
920	96	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
21		426	431	435	440	44$\bar{5}$	4$\bar{5}$0	454	459	464	468
22		473	478	483	487	492	497	501	506	511	515
23		520	52$\bar{5}$	530	534	539	544	548	553	558	562
24		567	572	577	581	586	591	595	600	60$\bar{5}$	609
25		614	619	624	628	633	638	642	647	652	656
26		661	666	670	675	680	68$\bar{5}$	689	694	699	703
27		708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
28		75$\bar{5}$	759	764	769	774	778	783	788	792	797
29		802	806	811	816	820	82$\bar{5}$	830	834	839	844
930		848	853	858	862	867	272	876	881	886	890
31		89$\bar{5}$	900	904	909	914	918	923	928	932	937
32		942	946	951	956	960	96$\bar{5}$	970	974	979	984
33		988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
34	97	03$\bar{5}$	039	044	049	053	058	063	067	072	077
35		081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
36		128	132	137	142	146	151	155	160	16$\bar{5}$	169
37		174	179	183	188	192	197	202	206	211	216
38		220	22$\bar{5}$	230	234	239	243	248	253	257	262
39		267	271	276	280	285	290	294	299	304	308
940		313	317	322	327	331	336	340	345	3$\bar{5}$0	354
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.
940	**97**	313	317	322	327	331	336	340	345	350	354	
41		359	364	368	373	377	382	387	391	396	400	
42		405	410	414	419	424	428	433	437	442	447	
43		451	456	460	365	470	474	479	483	488	493	
44		497	502	506	511	516	520	525	529	534	539	
45		543	348	552	557	562	566	571	575	580	585	
46		589	594	598	603	607	612	617	621	626	630	
47		635	640	644	649	653	658	663	667	672	676	
48		681	685	690	695	699	704	708	713	717	722	
49		727	731	736	740	745	749	754	759	763	768	
950		772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	
51		818	823	827	832	836	841	845	850	855	859	
52		864	868	873	877	882	886	891	896	900	905	
53		909	914	918	923	928	932	937	941	946	950	
54		955	959	964	968	973	978	982	987	991	996	
55	98	000	005	009	014	019	023	028	032	037	041	
56		046	050	055	059	064	068	073	078	082	087	
57		091	096	100	105	109	114	118	123	127	132	
58		137	141	146	150	155	159	164	168	173	177	
59		182	186	191	195	200	204	209	214	218	223	
960		227	232	236	241	245	250	254	259	263	268	
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
960	98	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268
61		272	277	281	286	290	295	299	304	308	313
62		318	322	327	331	336	340	345	349	354	358
63		363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
64		408	412	417	421	426	430	435	439	444	448
65		453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
66		498	502	507	511	516	520	525	529	534	538
67		543	547	552	556	561	565	570	474	579	583
68		588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
69		632	637	641	646	650	655	659	664	668	673
970		677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
71		722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
72		767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
73		811	816	820	825	829	834	838	843	847	851
74		856	860	865	869	874	878	883	887	892	896
75		900	905	909	914	918	923	927	932	936	941
76		945	949	954	958	963	967	972	976	981	985
77		989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029
78	99	034	038	043	047	052	056	061	065	069	074
79		078	083	087	092	096	100	105	109	114	118
980		123	127	131	136	140	145	149	154	158	162
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
980	99	123	127	131	136	140	14$\bar{5}$	149	154	158	162
81		167	171	176	180	18$\bar{5}$	189	193	198	202	207
82		211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
83		255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
84		300	304	308	313	317	322	326	330	33$\bar{5}$	339
85		344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
86		388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
87		432	436	441	44$\bar{5}$	449	454	458	463	467	471
88		476	480	484	489	493	493	502	506	511	515
89		520	524	528	533	537	542	546	550	55$\bar{5}$	559
990		564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
91		607	612	616	621	62$\bar{5}$	629	634	638	642	647
92		651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
93		69$\bar{5}$	699	704	708	712	717	721	726	730	734
94		739	743	747	752	*756	*760	*76$\bar{5}$	*769	*774	*778
95		782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
96		826	830	83$\bar{5}$	839	843	848	852	856	861	865
97		870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
98		913	917	922	926	930	93$\bar{5}$	939	944	948	952
99		957	961	965	970	974	978	983	987	991	996
1000	00	000	004	009	013	017	022	026	030	03$\bar{5}$	039
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	
1000	000	000	043	087	130	174	217	260	304	347	391		**44**
1001		434	477	521	564	608	651	694	738	781	824	1	4.4
1002		868	911	954	998	*041	*084	*128	*171	*214	*258	2	8.8
1003	001	301	344	388	431	474	517	561	604	647	690	3	13.2
1004		734	777	820	863	907	950	993	*036	*080	*123	4	17.6
1005	002	166	209	252	296	339	382	425	468	512	555	5	22.0
1006		598	641	684	727	771	814	857	900	943	986	6	26.4
1007	003	029	073	116	159	202	245	288	331	374	417	7	30.8
1008		461	504	547	590	633	676	719	762	805	848	8	35.2
1009		891	934	977	*020	*063	*106	*149	*192	*235	*278	9	39.6
1010	004	321	364	407	450	493	536	579	622	665	708		
1011		751	794	837	880	923	966	*009	*052	*095	*138		**43**
1012	005	180	223	266	309	352	395	438	481	524	567	1	4.3
1013		609	652	695	738	781	824	867	909	952	995	2	8.6
1014	006	038	081	124	166	209	252	295	338	380	423	3	12.9
1015		466	509	552	594	637	480	723	765	808	851	4	17.2
1016		894	986	979	*022	*065	*107	*150	*193	*236	*278	5	21.5
1017	007	321	364	406	449	492	534	577	620	662	705	6	25.8
1018		748	790	833	876	918	961	*004	*046	*089	*123	7	30.1
1019	008	174	217	259	302	345	387	430	472	515	558	8	34.4
1020		600	643	685	728	770	813	856	898	941	983	9	38.7
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.	

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.
1020	008	600	643	685	728	770	813	856	898	941	983	
1021	009	026	068	111	153	196	238	281	323	366	408	
1022		451	493	536	578	621	663	706	748	791	833	
1023		876	918	961	*003	*045	*088	*130	*173	*215	*258	
1024	010	300	342	385	427	470	512	554	597	639	681	
1025		724	766	809	851	893	936	978	*020	*063	*105	
1026	011	147	190	232	274	317	359	401	444	486	528	**42**
1027		570	613	655	697	740	782	824	866	909	951	1 | 4.2
1028		993	*035	*078	*120	*162	*204	*247	*289	*331	373	2 | 8.4
1029	012	415	458	500	542	584	626	669	711	753	795	3 | 12.6
1030		837	879	922	964	*006	*048	*090	*132	*174	*217	4 | 16.8
1031	013	259	301	343	385	427	469	511	553	596	638	5 | 21.0
1032		680	722	764	806	848	890	932	974	016	*058	6 | 25.2
1033	014	100	142	184	226	268	310	352	395	437	479	7 | 29.4
1034		521	563	605	647	689	730	772	814	856	898	8 | 33.6
1035		940	982	*024	*066	*108	*150	*192	*234	*276	*318	9 | 37.8
1036	015	360	402	444	485	527	569	611	653	695	737	
1037		779	821	863	904	946	983	*030	*072	*114	*156	
1038	016	197	239	281	323	365	407	448	490	532	574	
1039		616	657	699	741	783	824	866	908	950	992	
1040	017	033	075	117	159	200	242	284	326	367	409	
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1040	017	033	075	117	159	200	242	284	326	367	409
1041		451	492	534	576	618	659	701	743	784	826
1042		868	909	951	993	*034	*076	*118	*159	*201	*243
1043	018	284	326	368	409	451	492	534	576	617	659
1044		700	472	784	825	867	908	950	992	*033	*075
1045	019	116	158	199	241	282	324	366	407	449	490
1046		532	573	615	656	698	739	781	822	864	905
1047		947	988	*030	*071	*113	*154	*195	*237	*278	*320
1048	020	361	403	444	486	527	568	610	651	693	734
1049		775	817	858	900	941	982	*024	*065	*107	*148
1050	021	189	231	272	313	355	396	437	479	520	561
1051		603	644	685	727	768	809	851	892	933	974
1052	022	016	057	098	140	181	222	263	305	346	387
1053		428	470	511	552	593	635	676	717	758	799
1054		841	882	923	964	*005	*047	*088	*129	*170	*211
1055	023	252	294	335	376	417	458	499	541	582	623
1056		664	705	746	787	828	870	911	952	993	*034
1057	024	075	116	157	198	239	280	321	363	404	445
1058		486	527	568	609	650	691	732	773	814	855
1059		896	937	978	*019	*060	*101	*142	*183	*224	*265
1060	025	306	347	388	429	470	511	552	593	634	674
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

	42
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1060	025	306	347	388	429	470	511	552	593	634	674
1061		715	756	797	838	879	*920	*961	*002	*043	*084
1062	026	125	165	206	247	288	329	370	411	452	492
1063		533	574	615	656	697	737	778	819	860	901
1064		942	982	*023	*064	*105	*146	*186	*227	*268	*309
1065	027	350	390	431	472	513	553	594	635	676	716
1066		757	798	839	879	920	961	*002	*042	*083	*124
1067	028	164	205	246	287	327	368	409	449	490	531
1068		571	612	653	693	734	775	815	856	896	937
1069		978	*018	*059	*100	*140	*181	*221	*262	*303	*343
1070	029	384	424	465	506	546	587	627	668	708	749
1071		789	830	871	911	952	992	*033	*073	*114	*154
1072	030	195	235	276	316	357	397	438	478	519	559
1073		600	640	681	721	762	802	843	883	923	964
1074	031	004	045	085	126	166	206	247	287	328	368
1075		403	449	489	530	570	610	651	691	732	772
1076		812	853	893	933	974	*014	*054	*095	*135	*175
1077	032	216	256	296	337	377	417	458	498	538	578
1078		619	659	699	740	780	820	860	901	941	981
1079	033	021	062	102	142	182	223	263	303	343	384
1080		424	464	504	544	585	625	665	705	745	785
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Pts.

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

Prop. Pts.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.
1080	033	424	464	504	544	585	625	665	705	745	785	**40**
1081		826	866	906	946	986	*027	*067	*107	*145	*187	1 4.0
1082	034	227	267	308	348	388	428	468	508	548	588	2 8.0
1083		628	669	709	749	789	829	869	909	949	989	3 12.0
1084	035	029	069	109	149	190	230	270	310	350	390	4 16.0
1085		430	470	510	550	590	630	670	710	750	790	5 20.0
1086		830	870	910	950	990	*030	*070	*110	*150	*190	6 24.0
1087	036	230	269	309	349	389	429	469	509	549	589	7 28.0
1088		629	669	709	749	789	828	868	908	948	988	8 32.0
1089	037	028	068	108	148	187	267	267	307	347	387	9 36.0
1090		426	466	506	546	586	626	665	705	745	785	**39**
1091		825	865	904	944	984	*024	*064	*103	*143	*183	1 3.9
1092	038	223	262	302	342	382	421	461	501	541	580	2 7.8
1093		620	660	700	739	779	819	859	898	938	978	3 11.7
1094	039	017	057	097	136	176	216	255	295	335	374	4 15.6
1095		414	454	493	533	573	612	652	692	731	771	5 19.5
1096		811	850	890	929	969	*009	*048	*088	*127	*167	6 23.4
1097	040	207	246	286	325	365	405	444	484	523	563	7 27.3
1098		602	642	681	721	761	800	840	879	919	958	8 31.2
1099		998	*037	*077	*116	*156	*195	*235	*274	*314	*353	9 35.1
1100	041	393	432	472	511	551	590	630	669	708	748	
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prop. Pts.

譯表 2　平方，平方根，及倒數表（譯自同書176—195頁）

TABLE B

Squares, Square. Roots and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1000

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
1	1	1.000 0000	1.000 000 000
2	4	1.414 2136	0.500 000 000
3	9	1.732 0508	.333 333 333
4	16	2.000 0000	.250 000 000
5	25	2.236 0680	.200 000 000
6	36	2.449 4897	.166 666 667
7	49	2.645 7513	.142 857 143
8	64	2.828 4271	.125 000 000
9	81	3.000 0000	.111 111 111
10	1 00	3.162 2777	.100 000 000
11	1 21	3.316 6248	.090 909 091
12	1 44	3.464 1016	.083 333 333
13	1 69	3.605 5513	.076 923 077
14	1 96	3.741 6574	.071 428 571
15	2 25	3.872 9833	.066 666 667
16	2 56	4.000 0000	.062 500 000
17	2 89	4.123 1056	.058 823 529
18	3 24	4.242 6407	.055 555 556
19	3 61	4.358 8989	.052 631 579
20	4 00	4.472 1360	.050 000 000
21	4 41	4.582 5757	.047 619 048
22	4 84	4.690 4158	.045 454 545
23	5 29	4.795 8315	.043 478 261
24	5 76	4.898 9795	.041 666 667
25	6 25	5.000 0000	.040 000 000
26	6 76	5.099 0195	.038 461 538
27	7 29	5.196 1524	.037 037 037
28	7 84	5.291 5026	.035 714 286
29	8 41	5.385 1648	.034 482 759
30	9 00	5.777 2256	.033 333 333

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
31	9 61	5.567 7644	.032 258 065
32	10 24	5.656 8542	.031 250 000
33	10 89	5.744 5626	.030 303 030
34	11 56	5.830 9519	.029 411 765
35	12 25	5.916 0798	.028 571 429
36	12 96	6.000 0000	.027 777 778
37	13 69	6.082 7625	.027 027 027
38	14 44	6.164 4140	.026 315 789
39	15 21	6.244 9980	.025 641 026
40	16 00	6.324 5553	.025 000 000
41	16 81	6.403 1242	.024 390 244
42	17 64	6.480 7407	.023 809 524
43	18 49	6.557 4385	.023 255 814
44	19 36	6.633 2496	.022 727 273
45	20 25	6.708 2039	.022 222 222
46	21 16	6.782 3300	021 739 130
47	22 09	6.855 6546	.021 276 596
48	23 04	6.928 2032	.020 833 333
49	24 01	7.000 0000	.020 408 163
50	25 00	7.071 0678	.020 000 000
51	26 01	7.141 4284	.019 607 843
52	27 04	7.211 1026	.019 230 769
53	28 09	7.280 1099	.018 867 925
54	29 16	7.348 4692	.018 518 519
55	30 25	7.416 1985	.018 181 818
56	31 36	7.483 3148	.017 857 143
57	32 49	7.549 8344	.017 543 860
58	33 64	7.615 7731	.017 241 379
59	34 81	7.681 1457	.016 949 153
60	36 00	7.745 9667	.016 666 667
61	37 21	7.810 2497	.016 393 443
[illegible]	38 44	7.874 0079	.016 129 032
[illegible]	39 69	7.937 2539	.015 873 016
64	40 96	8.000 0000	.015 625 000
65	42 25	8.062 2577	.015 384 615

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
66	43 56	8.124 0384	.015 151 515
67	44 89	8.185 3528	.014 925 373
68	46 24	8.246 2113	.014 705 882
69	47 61	8.306 6239	.014 492 754
70	49 00	8.366 6003	.014 285 714
71	50 41	8.426 1498	.014 084 507
72	51 84	8.485 2814	.013 888 889
73	53 29	8.544 0037	.013 698 630
74	54 76	8.602 3253	.013 513 514
75	56 25	8.660 2540	.013 333 333
76	57 76	8.717 7979	.013 157 895
77	59 29	8.774 9644	.012 987 013
78	60 84	8.831 7609	.012 820 513
79	62 41	8.888 1944	.012 658 228
80	64 00	8.944 2719	.012 500 000
81	65 61	9.000 0000	.012 345 679
82	67 24	9.055 3851	.012 195 122
83	68 89	9.110 4336	.012 048 193
84	70 56	9.165 1514	.011 904 762
85	72 25	9.219 5445	.011 764 706
86	73 96	9.273 6185	.011 627 907
87	75 69	9.327 3791	.011 494 253
88	77 44	9.380 8315	.011 363 636
89	79 21	9.433 9811	.011 235 955
90	81 00	9.486 8330	.011 111 111
91	82 81	9.539 3920	.010 989 011
92	84 64	9.591 6630	.010 869 565
93	86 49	9.643 6508	.010 752 688
94	88 36	9.695 3597	.010 638 298
95	90 25	9.746 7943	.010 526 316
96	92 16	9.797 9590	.010 416 667
97	94 09	9.848 8578	.010 309 278
98	96 04	9.899 4949	.010 204 082
99	98 01	9.949 8744	.010 101 010
100	1 00 00	10.000 0000	.010 000 000

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
101	1 02 01	10.049 8756	.009 900 990
102	1 04 04	10.099 5049	.009 803 922
103	1 06 09	10.148 8916	.009 708 738
104	1 08 16	10.198 0390	.009 615 385
105	1 10 25	10.246 9508	.009 523 810
106	1 12 36	10.295 6301	.009 433 962
107	1 14 49	10.344 0804	.009 345 794
108	1 16 64	10.392 3048	.009 259 259
109	1 18 81	10.440 3065	.009 174 312
110	1 21 00	10.488 0885	.009 090 909
111	1 23 21	10.535 6538	.009 009 009
112	1 25 44	10,583 0052	.008 928 571
113	1 27 69	10.630 1458	.008 849 558
114	1 29 96	10.677 0783	.008 771 930
115	1 32 25	10.723 8053	.008 695 652
116	1 34 56	10.770 3296	.008 620 690
117	1 36 89	10.816 6538	.008 547 009
118	1 39 24	10.862 7805	.008 474 576
119	1 41 61	10.908 7121	.008 403 361
120	1 44 00	10.954 4512	.008 333 333
121	1 46 41	11.000 0000	.008 264 463
122	1 48 84	11.045 3610	.008 196 721
123	1 51 29	11.090 5365	.008 130 081
124	1 53 76	11.135 5287	.008 064 516
125	1 56 25	11.180 3399	.008 000 000
126	1 58 76	11.224 9722	.007 936 508
127	1 61 29	11.269 4277	.007 874 016
128	1 63 84	11.313 7085	.007 812 500
129	1 66 41	11.357 8167	.007 751 938
130	1 69 00	11.401 7543	.007 692 308
131	1 71 61	11.445 5231	.007 633 588
132	1 74 24	11.489 1253	.007 575 758
133	1 76 89	11.532 5626	.007 518 797
134	1 79 56	11.575 8369	.007 462 687
135	1 82 25	11.618 9500	.007 407 407

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
136	1 84 96	11.661 9038	.007 352 941
137	1 87 69	11.704 6999	.007 299 270
138	1 90 44	11.747 3401	.007 246 377
139	1 93 21	11.789 8261	.007 194 245
140	1 96 00	11.832 1596	.007 142 857
141	1 98 81	11.874 3422	.007 092 199
142	2 01 64	11.916 3753	.007 042 254
143	2 04 49	11.958 2607	.006 993 007
144	2 07 36	12.000 0000	.006 944 444
145	2 10 25	12.041 5946	.006 896 552
146	2 13 16	12.083 0460	.006 849 315
147	2 16 09	12.124 3557	.006 802 721
148	2 19 04	12.165 5251	.006 756 757
149	2 22 01	12.206 5556	.006 711 409
150	2 25 00	12.247 4487	.006 666 667
151	2 28 01	12.288 2057	.006 622 517
152	2 31 04	12.328 8280	.006 578 947
153	2 34 09	12.369 3169	.006 535 948
154	2 37 16	12.409 6736	.006 493 506
155	2 40 25	12.449 8996	.006 451 613
156	2 43 36	12.489 9960	.006 410 256
157	2 46 49	12.529 9641	.006 369 427
158	2 49 64	12.569 8051	.006 329 114
159	2 52 81	12.609 5202	.006 289 308
160	2 56 00	12.649 1106	.006 250 000
161	2 59 21	12.688 5775	.006 211 180
162	2 62 44	12.727 9221	.006 172 840
163	2 65 69	12.767 1453	.006 134 969
164	2 68 96	12.806 2485	.006 097 561
165	2 72 25	12.845 2326	.006 060 606
166	2 75 56	12.884 0987	.006 024 096
167	2 78 89	12.922 8480	.005 988 024
168	2 82 24	12.961 4814	.005 952 381
169	2 85 61	13.000 0000	.005 917 160
170	2 89 00	13.038 4048	.005 882 353

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
171	2 92 41	13.076 6968	.005 847 953
172	2 95 84	13.114 8770	.005 813 953
173	2 99 29	13.152 9464	.005 780 347
174	3 02 76	13.190 9060	.005 747 126
175	3 06 25	13.228 7566	.005 714 286
176	3 09 76	13.266 4992	.005 681 818
177	3 13 29	13.304 1347	.005 649 718
178	3 16 84	13.341 6641	.005 617 978
179	3 20 41	13.379 0882	.005 586 592
180	3 24 00	13.416 4079	.005 555 556
181	3 27 61	13.453 6240	.005 524 862
182	3 31 24	13.490 7376	.005 494 505
183	3 34 89	13.527 7493	.005 464 481
184	3 38 56	13.564 6600	.005 434 783
185	3 42 25	13.601 4705	.005 405 405
186	3 45 96	13.638 1817	.005 376 344
187	3 49 69	13.674 7943	.005 347 594
188	3 53 44	13.711 3092	.005 319 149
189	3 57 21	13.747 7271	.005 291 005
190	3 61 00	13.784 0488	.005 263 158
191	3 64 81	13.820 2750	.005 235 602
192	3 68 64	13.856 4065	.005 208 333
193	3 72 49	13.892 4440	.005 181 347
194	3 76 36	13.928 2883	.005 154 639
195	3 80 25	13.964 2400	.005 128 205
196	3 84 16	14.000 0000	.005 102 041
197	3 88 09	14.035 6688	.005 076 142
198	3 92 04	14.071 2473	.005 050 505
199	3 96 01	14.106 7360	.005 025 126
200	4 00 00	14.142 1356	.005 000 000
201	4 04 01	14.177 4469	.004 975 124
202	4 08 04	14.212 6704	.004 950 495
203	4 12 09	14.247 8068	.004 926 108
204	4 16 16	14.282 8569	.004 901 961
205	4 20 25	14.317 8211	.004 878 449

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
206	4 24 36	14.352 7001	.004 854 369
207	4 28 49	14.387 4946	.004 830 918
208	4 32 64	14.422 2051	.004 807 692
209	4 36 81	14.456 8323	.004 784 689
210	4 41 00	14.491 3767	.004 761 905
211	4 45 21	14.525 8390	.004 739 336
212	4 49 44	14.560 2198	.004 716 981
213	4 53 69	14.594 5195	.004 694 836
214	4 57 96	14.628 7388	.004 672 897
215	4 62 25	14.662 8783	.004 651 163
216	4 66 56	14.696 9385	.004 629 630
217	4 70 89	14.730 9199	.004 608 295
218	4 75 24	14.764 8231	.004 587 156
219	4 79 61	14.798 6486	.004 566 210
220	4 84 00	14.832 3970	.004 545 455
221	4 88 41	14.866 0687	.004 524 887
222	4 92 84	14.899 6644	.004 504 505
223	4 97 29	14.933 1845	.004 484 305
224	5 01 76	14.966 6295	.004 464 286
225	5 06 25	15.000 0000	.004 444 444
226	5 10 76	15.033 2964	.004 424 779
227	5 15 29	15.066 5192	.004 405 286
228	5 19 84	15.099 6689	.004 385 965
229	5 24 41	15.132 7460	.004 366 812
230	5 29 00	15.165 7509	.004 347 826
231	5 33 61	15.198 6842	.004 329 004
232	5 38 24	15.231 5462	.004 310 345
233	5 42 89	15.264 3375	.004 291 845
234	5 47 56	15.297 0585	.004 273 504
235	5 52 25	15.329 7097	.004 255 319
236	5 56 96	15.362 2915	.004 237 288
237	5 61 69	15.394 8043	.004 219 409
238	5 66 44	15.427 2486	.004 201 681
239	5 71 21	15.459 6248	.004 184 100
240	5 76 00	15.491 9334	.004 166 667

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
241	5 80 81	15.524 1747	.004 149 378
242	5 85 64	15.556 3492	.004 132 231
243	5 90 49	15.588 4573	.004 115 226
244	5 95 36	15.620 4994	.004 098 361
245	6 00 25	15.652 4758	.004 081 633
246	6 05 16	15.684 3871	.004 065 041
247	6 10 09	15.716 2336	.004 048 583
248	6 15 04	15.748 0157	.004 032 258
249	6 20 01	15.779 7338	.004 016 064
250	6 25 00	15.811 3883	.004 000 000
251	6 30 01	15.842 9795	.003 984 064
252	6 35 04	15.874 5079	.003 968 254
253	6 40 09	15.905 9737	.003 952 569
254	6 45 16	15.937 3775	.003 937 008
255	6 50 25	15.968 7194	.003 921 569
256	6 55 36	16.000 0000	.003 906 250
257	6 60 49	16.031 2195	.003 891 051
258	6 65 64	16.062 3784	.003 875 969
259	6 70 81	16.093 4769	.003 861 004
260	6 76 00	16.124 5155	.003 846 154
261	6 81 21	16.155 4944	.003 831 418
262	6 86 44	16.186 4141	.003 816 794
263	6 91 69	16.217 2747	.003 802 281
264	6 96 96	16.248 0768	.003 787 879
265	7 02 25	16.278 8206	.003 773 585
266	7 07 56	16.309 5064	.003 759 398
267	7 12 89	16.340 1346	.003 745 318
268	7 18 24	16.370 7055	.003 731 343
269	7 23 61	16.401 2195	.003 717 472
270	7 29 00	16.431 6767	.003 703 704
271	7 34 41	16.462 0776	.003 690 037
272	7 39 84	16.492 4225	.003 676 471
273	7 45 29	16.522 7116	.003 663 004
274	7 50 76	16.552 9454	.003 649 635
275	7 56 25	16.583 1240	.003 636 364

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
276	7 61 76	16.613 2477	.003 623 188
277	7 67 29	16.643 3170	.003 610 108
278	7 72 84	16.673 3320	.003 597 122
279	7 78 41	16.703 2931	.003 584 229
280	7 84 00	16.733 2005	.003 571 429
281	7 89 61	16.763 0546	.003 558 719
282	7 95 24	16.792 8556	.003 546 099
283	8 00 89	16.822 6038	.003 533 569
284	8 06 56	16.852 2995	.003 521 127
285	8 12 25	16.881 9430	.003 508 772
286	8 17 96	16.911 5345	.003 496 503
287	8 23 69	16.941 0743	.003 484 321
288	8 29 44	16.970 5627	.003 472 222
289	8 35 21	17.000 0000	.003 460 208
290	8 41 00	17.029 3864	.003 448 276
291	8 46 81	17.058 7221	.003 436 426
292	8 52 64	17.088 0075	.003 424 658
293	8 58 49	17.117 2428	.003 412 969
294	8 64 36	17.146 4282	.003 401 361
295	8 70 25	17.175 5640	.003 389 831
296	8 76 16	17.204 6505	.003 378 378
297	8 82 09	17.233 6879	.003 367 003
298	8 88 04	17.262 6765	.003 355 705
299	8 94 01	17.291 6165	.003 344 482
300	9 00 00	17.320 5081	.003 333 333
301	9 06 01	17.349 3516	.003 322 259
302	9 12 04	17.378 1472	.003 311 258
303	9 18 09	17.406 8952	.003 300 334
304	9 24 16	17.435 5958	.003 289 474
305	9 30 25	17.464 2492	.003 278 689
306	9 36 36	17.492 8557	.003 267 974
307	9 42 49	17.521 4155	.003 257 329
308	9 48 64	17.549 9288	.003 246 753
309	9 54 81	17.578 3958	.003 236 246
310	9 61 00	17.606 8169	.003 225 806

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
311	9 67 21	17.635 1921	.003 215 434
312	9 73 44	17.663 5217	.003 205 128
313	9 79 69	17.691 8060	.003 194 888
314	9 85 96	17.720 0451	.003 184 713
315	9 92 25	17.748 2393	.003 174 603
316	9 98 56	17.776 3888	.003 164 557
317	10 04 89	17.804 4938	.003 154 574
318	10 11 24	17.832 5545	.003 144 654
319	10 17 61	17.860 5711	.003 134 796
320	10 24 00	17.888 5438	.003 125 000
321	10 30 41	17.916 4729	.003 115 265
322	10 36 84	17.944 3584	.003 105 590
323	10 43 29	17.972 2008	.003 095 975
324	10 49 76	18.000 0000	.003 086 420
325	10 56 25	18.027 7564	.003 076 923
326	10 62 76	18.055 4701	.003 067 485
327	10 69 29	18.083 1413	.003 058 104
328	10 75 84	18.110 7703	.003 048 780
329	10 82 41	18.138 3571	.003 039 514
330	10 89 00	18.165 9021	.003 030 303
331	10 95 61	18.193 4054	.003 021 148
332	11 02 24	18.220 8672	.003 012 048
333	11 08 89	18.248 2876	.003 003 003
334	11 15 56	18.275 6669	.002 994 012
335	11 22 25	18.303 0052	.002 985 075
336	11 28 96	18.330 3082	.002 976 190
337	11 35 69	18.357 5598	.002 967 359
338	11 42 44	18.384 7763	.002 958 580
239	11 49 21	18.411 9526	.002 949 853
340	11 56 00	18.439 0889	.002 941 176
341	11 62 81	18.466 1853	.002 932 551
342	11 69 64	18.493 2420	.002 923 977
343	11 76 49	18.520 2592	.002 915 452
344	11 83 36	18.547 2370	.002 906 977
345	11 90 25	18.574 1756	.002 898 551

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
346	11 97 16	18.601 0752	.002 890 173
347	12 04 09	18.627 9360	.002 881 844
348	12 11 04	18.654 7581	.002 873 563
349	12 18 01	18.681 5417	.002 865 330
350	12 25 00	18.708 2869	.002 857 143
351	12 32 01	18.734 9940	.002 849 003
352	12 39 04	18.761 6630	.002 840 909
353	12 46 09	18.788 2942	.002 832 861
354	12 53 16	18.814 8877	.002 824 859
355	12 60 25	18.841 4437	.002 816 901
356	12 67 36	18.867 9623	.002 808 989
357	12 74 49	18.894 4436	.002 801 120
358	12 81 64	18.920 8879	.002 793 296
359	12 88 81	18.947 2953	.002 785 515
360	12 96 00	18.973 6660	.002 777 778
361	13 03 21	19.000 0000	.002 770 083
362	13 10 44	19.026 2976	.002 762 431
363	13 17 69	19.052 5589	.002 754 821
364	13 24 96	19.078 7840	.002 747 253
365	13 32 25	19.104 9732	.002 739 726
366	13 39 56	19.131 1265	.002 732 240
367	13 46 89	19.157 2441	.002 724 796
368	13 54 24	19.183 3261	.002 717 391
369	13 61 61	19.209 3727	.002 710 027
370	13 69 00	19.235 3841	.002 702 703
371	13 76 41	19.261 3603	.002 695 418
372	13 83 84	19.287 3015	.002 688 172
373	13 91 29	19.313 2079	.002 680 965
374	13 98 76	19.339 0796	.002 673 797
375	14 06 25	19.364 9167	.002 666 667
376	14 13 76	19.390 7194	.002 659 574
377	14 21 29	19.416 4878	.002 652 520
378	14 28 84	19.442 2221	.002 645 503
379	14 36 41	19.467 9223	.002 638 522
380	14 44 00	19.493 5887	.002 631 579

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
381	14 51 61	19.519 2213	.002 624 672
382	14 59 24	19.544 8203	.002 617 801
383	14 66 89	19.570 3858	.002 610 966
384	14 74 56	19.595 9179	.002 604 167
385	14 82 25	19.621 4169	.002 597 403
386	14 89 96	19.646 8827	.002 590 674
387	14 97 69	19.672 3156	.002 583 979
388	15 05 44	19.697 7156	.002 577 320
389	15 13 21	19.723 0829	.002 570 694
390	15 21 00	19.748 4177	.002 564 103
391	15 28 81	19.773 7199	.002 557 545
392	15 36 64	19.798 9899	.002 551 020
393	15 44 49	19.824 2276	.002 544 529
394	15 52 36	19.849 4332	.002 538 071
395	15 60 25	19.874 6069	.002 531 646
396	15 68 16	19.899 7487	.002 525 253
397	15 76 09	19.924 8588	.002 518 892
398	15 84 04	19.949 9373	.002 512 563
399	15 92 01	19.974 9844	.002 506 266
400	16 00 00	20.000 0000	.002 500 000
401	16 08 01	20.024 9844	.002 493 766
402	16 16 04	20.049 9377	.002 487 562
403	16 24 09	20.074 8599	.002 481 390
404	16 32 16	20.099 7512	.002 475 248
405	16 40 25	20.124 6118	.002 469 136
406	16 48 36	20.149 4417	.002 463 054
407	16 56 49	20.174 2410	.002 457 002
408	16 64 64	20.199 0099	.002 450 980
409	16 72 81	20.223 7484	.002 444 988
410	16 81 00	20.248 4567	.002 439 024
411	16 89 21	20.273 1349	.002 433 090
412	16 97 44	20.297 7831	.002 427 184
413	17 05 69	20.322 4014	.002 421 308
414	17 13 96	20.346 9899	.002 415 459
415	17 22 25	20.371 5488	.002 409 639

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
416	17 30 56	20.396 0781	.002 403 846
417	17 38 89	20.420 5779	.002 398 082
418	17 47 24	20.445 0483	.002 392 344
419	17 55 61	20.469 4895	.002 386 635
420	17 64 00	20.493 9015	.002 380 952
421	17 72 41	20.518 2845	.002 375 297
422	17 80 84	20.542 6386	.002 369 668
423	17 89 29	20.566 9638	.002 364 066
424	17 97 76	20.591 2603	.002 358 491
425	18 06 25	20.615 5281	.002 352 941
426	18 14 76	20.639 7674	.002 347 418
427	18 23 29	20.663 9783	.002 341 920
428	18 31 84	20.688 1609	.002 336 449
429	18 40 41	20.712 3152	.002 331 002
430	18 49 00	20.736 4414	.002 325 581
431	18 57 61	20.760 5395	.002 320 186
432	18 66 24	20.784 6097	.002 314 815
433	18 74 89	20.808 6520	.002 309 469
434	18 83 56	20.832 6667	.002 304 147
435	18 92 25	20.856 6536	.002 298 851
436	19 00 96	20.880 6130	.002 293 578
437	19 09 69	20.904 5450	.002 288 330
438	19 18 44	20.928 4495	.002 283 105
439	19 27 21	20.952 3268	.002 277 904
440	19 36 00	20.976 1770	.002 272 727
441	19 44 81	21.000 0000	.002 267 574
442	19 53 64	21.023 7960	.002 262 443
443	19 62 49	21.047 5652	.002 257 336
444	19 71 36	21.071 3075	.002 252 252
445	19 80 25	21.095 0231	.002 247 191
446	19 89 16	21.118 7121	.002 242 152
447	19 98 09	21.142 3745	.002 237 136
448	20 07 04	21.166 0105	.002 232 143
449	20 16 01	21.189 6201	.002 227 171
450	20 25 00	21.213 2034	.002 222 222

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
451	20 34 01	21.236 7606	.002 217 295
452	20 43 04	21.260 2916	.002 212 389
453	20 52 09	21.283 7967	.002 207 506
454	20 61 16	21.307 2758	.002 202 643
455	20 70 25	21.330 7290	.002 197 802
456	20 79 36	21.354 1565	.002 192 982
457	20 88 49	21.377 5583	.002 188 184
458	20 97 64	21.400 9346	.002 183 406
459	21 06 81	21.424 2853	.002 178 649
460	21 16 00	21.447 6106	.002 173 913
461	21 25 21	21.470 9106	.002 169 197
462	21 34 44	21.494 1853	.002 164 502
463	21 43 69	21.517 4348	.002 159 827
464	21 52 96	21.540 6592	.002 155 172
465	21 62 25	21.563 8587	.002 150 538
466	21 71 56	21.587 0331	.002 145 923
467	21 80 89	21.610 1828	.002 141 328
468	21 90 24	21.633 3077	.002 136 752
469	21 99 61	21.656 4078	.002 132 196
470	22 09 00	21.679 4834	.002 127 660
471	22 18 41	21.702 5344	.002 123 142
472	22 27 84	21.725 5610	.002 118 644
473	22 37 29	21.748 5632	.002 114 165
474	22 46 76	21.771 5411	002 109 705
475	22 56 25	21.794 4947	.002 105 263
476	22 65 76	21.817 4242	.002 100 840
477	22 75 29	21.840 3297	.002 096 436
478	22 84 84	21.863 2111	.002 092 050
479	22 94 41	21.886 0686	.002 087 683
480	23 04 00	21.908 9023	.002 083 333
481	23 13 61	21.931 7122	.002 079 002
482	23 23 24	21.954 4984	.002 074 689
483	23 32 89	21.977 2610	.002 070 393
484	23 42 56	22.000 0000	.002 066 116
585	23 52 25	22.022 7155	.002 061 856

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
486	23 61 96	22.045 4077	.002 057 613
487	23 71 69	22.068 0765	.002 053 388
488	23 81 44	22.090 7220	.002 049 180
489	23 91 21	22.113 3444	.002 044 990
490	24 01 00	22.135 9436	.002 040 816
491	24 10 81	22.158 5198	.002 036 660
492	24 20 64	22.181 0730	.002 032 520
493	24 30 49	22.203 6033	.002 028 398
494	24 40 36	22.226 1108	.002 024 291
495	24 50 25	22.248 5955	.002 020 202
496	24 60 16	22.271 0575	.002 016 129
497	24 70 09	22.293 4968	.002 012 072
498	24 80 04	22.315 9136	.002 008 032
499	24 90 01	22.338 3079	.002 004 008
500	25 00 00	22.360 6798	.002 000 000
501	25 10 01	22.383 0293	.001 996 008
502	25 20 04	22.405 3565	.001 992 032
503	25 30 09	22.427 6615	.001 988 072
504	25 40 16	22.449 9443	.001 984 127
505	25 50 25	22.472 2051	.001 980 198
506	25 60 36	22.494 4438	.001 976 285
507	25 70 49	22.516 6605	.001 972 387
508	25 80 64	22.538 8553	.001 968 504
509	25 90 81	22.561 0283	.001 964 637
510	26 01 00	22.583 1796	.001 960 784
511	26 11 21	22.605 3091	.001 956 947
512	26 21 44	22.627 4170	.001 953 125
513	26 31 69	22.649 5033	.001 949 318
514	26 41 96	22.671 5681	.001 945 525
515	26 52 25	22.693 6114	.001 941 748
516	26 62 56	22.715 6334	.001 937 984
517	26 72 89	22.737 6340	.001 934 236
518	26 83 24	22.759 6134	.001 930 502
519	26 93 61	22.781 5715	.001 926 782
520	27 04 00	22.803 5085	.001 923 077

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
521	27 14 41	22.825 4244	.001 919 386
522	27 24 84	22.847 3193	.001 915 709
523	27 35 29	22.869 1933	.001 912 046
524	27 45 76	22.891 0463	.001 908 397
525	27 56 25	22.912 8785	.001 904 762
526	27 66 76	22.934 6899	.001 901 141
527	27 77 29	22.956 4806	.001 897 533
528	27 87 84	22.978 2506	.001 893 939
529	27 98 41	23.000 0000	.001 890 359
530	28 09 00	23.021 7289	.001 886 792
531	28 19 61	23.043 4372	.001 883 239
532	28 30 24	23.065 1252	.001 879 699
533	28 40 89	23.086 7928	.001 876 173
534	28 51 56	23.108 4400	.001 872 659
535	28 62 25	23.130 0670	.001 869 159
536	28 72 96	23.151 6738	.001 865 672
537	28 83 69	23.173 2605	.001 862 197
538	28 94 44	23.194 8270	.001 858 736
539	29 05 21	23.216 3735	.001 855 288
540	29 16 00	23.237 9001	.001 851 852
541	29 26 81	23.259 4067	.001 848 429
542	29 37 64	23.280 8935	.001 845 018
543	29 48 49	23.302 3604	.001 841 621
544	29 59 36	23.323 8076	.001 838 235
545	29 70 25	23.345 2351	.001 834 862
546	29 81 16	23.366 6429	.001 831 502
547	29 92 09	23.388 0311	.001 828 154
548	30 03 04	23.409 3998	.001 824 818
549	30 14 01	23.430 7490	.001 821 494
550	30 25 00	23.452 0788	.001 818 182
551	30 36 01	23.473 3892	.001 814 882
552	30 47 04	23.494 6802	.001 811 594
553	30 58 09	23.515 9520	.001 808 318
554	30 69 16	23.537 2046	.001 805 054
555	30 80 25	23.558 4380	.001 801 802

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
556	30 91 36	23.579 6522	.001 798 561
557	31 02 49	23.600 8474	.001 795 332
558	31 13 64	23.622 0236	.001 792 115
559	31 24 81	23.643 1808	.001 788 909
560	31 36 00	23.664 3191	.001 785 714
561	31 47 21	23.685 4386	.001 782 531
562	31 58 44	23.706 5392	.001 779 359
563	31 69 69	23.727 6210	.001 776 199
564	31 80 96	23.748 6842	.001 773 050
565	31 92 25	23.769 7286	.001 769 912
566	32 03 56	23.790 7545	.001 766 784
567	32 14 89	23.811 7618	.001 763 668
568	32 26 24	23.832 7506	.001 760 563
569	32 37 61	23.853 7209	.001 757 469
570	32 49 00	23.874 6728	.001 754 386
571	32 60 41	23.895 6063	.001 751 313
572	32 71 84	23.916 0304	.001 748 252
573	32 83 29	23.937 4184	.001 745 201
574	32 94 76	23.958 2971	.001 742 160
575	33 06 25	23.979 1576	.001 739 130
576	33 17 76	24.000 0000	.001 736 111
577	33 29 29	24.020 8243	.001 733 102
578	33 40 84	24.041 6306	.001 730 104
579	33 52 41	24.062 4188	.001 727 116
580	33 64 00	24.083 1891	.001 724 138
581	33 75 61	24.103 9416	.001 721 170
582	33 87 24	24.124 6762	.001 718 213
583	33 98 89	24.145 3929	.001 715 266
584	34 10 56	24.166 0919	.001 712 329
585	34 22 25	24.186 7732	.001 709 402
586	34 33 96	24.207 4369	.001 706 485
587	34 45 69	24.228 0829	.001 703 578
588	34 57 44	24.248 7113	.001 700 680
589	34 69 21	24.269 3222	.001 697 793
590	34 81 00	24.289 9156	.001 694 915

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
591	34 92 81	24.310 4916	.001 692 047
592	35 04 64	24.331 0501	.001 689 189
593	35 16 49	24.351 5913	.001 686 341
594	35 28 36	24.372 1152	.001 683 502
595	35 40 25	24.392 6218	.001 680 672
596	35 52 16	24.413 1112	.001 677 852
597	35 64 09	24.433 5834	.001 675 042
598	35 76 04	24.454 0385	.001 672 241
599	35 88 01	24.474 4765	.001 669 449
600	36 00 00	24.494 8974	.001 666 667
601	36 12 01	24.515 3013	.001 663 894
602	36 24 04	24.535 6883	.001 661 130
603	36 36 09	24.556 0583	.001 658 375
604	36 48 16	24.576 4115	.001 655 629
605	36 60 25	24.596 7478	.001 652 893
606	36 72 36	24.617 0673	.001 650 165
607	36 84 49	24.637 3700	.001 647 446
608	36 96 64	24.657 6560	.001 644 737
609	37 08 81	24.677 9254	.001 642 036
610	37 21 00	24.698 1781	.001 639 344
611	37 33 21	24.718 4142	.001 636 661
612	37 45 44	24.738 6338	.001 633 987
613	37 57 69	24.758 8368	.001 631 321
614	37 69 96	24.779 0234	.001 628 664
615	37 82 25	24.799 1935	.001 626 016
616	37 94 56	24.819 3473	.001 623 377
617	38 06 89	24.839 4847	.001 620 746
618	38 19 24	24.859 6058	.001 618 123
619	38 31 61	24.879 7106	.001 615 509
620	38 44 00	24.899 7992	.001 612 903
621	38 56 41	24.919 8716	.001 610 306
622	38 68 84	24.939 9278	.001 607 717
623	38 81 29	24.959 9679	.001 605 136
624	38 93 76	24.979 9920	.001 602 564
625	39 06 25	25.000 0000	.001 600 000

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
626	39 18 76	25.019 9920	.001 597 444
627	39 31 29	25.039 9681	.001 594 896
628	39 43 84	25.059 9282	.001 592 357
629	39 56 41	25.079 8724	.001 589 825
630	39 69 00	25.099 8008	.001 587 302
631	39 81 61	25.119 7134	.001 584 786
632	39 94 24	25.139 6102	.001 582 278
633	40 06 89	25.159 4913	.002 579 779
634	40 19 56	25.179 3566	.001 577 287
635	40 32 25	25.199 2063	.001 574 803
636	40 44 96	25.219 0404	.001 572 327
637	40 57 69	25.238 8589	.001 569 859
638	40 70 44	25.258 6619	.001 567 398
639	40 83 21	25.278 4493	.001 564 945
640	40 96 00	25.298 2213	.001 562 500
641	41 08 81	25.317 9778	.001 560 062
642	41 21 64	25.337 7189	.001 557 632
643	41 34 49	25.357 4447	.001 555 210
644	41 47 36	25.377 1551	.001 552 795
645	41 60 25	25.396 8502	.001 550 388
646	41 73 16	25.416 5301	.001 547 988
647	41 86 09	25.436 1947	.001 545 595
648	41 99 04	25.455 8441	.001 543 210
649	42 12 01	25.475 4784	.001 540 832
650	42 25 00	25.495 0976	.001 538 462
651	42 38 01	25.514 7016	.001 536 098
652	42 51 04	25.534 2907	.001 533 742
653	42 64 09	25.553 8647	.001 531 394
654	42 77 16	25.573 4237	.001 529 052
655	42 90 25	25.592 9678	.001 526 718
656	43 03 36	25.612 4969	.001 524 390
657	43 16 49	25.632 0112	.001 522 070
658	43 29 64	25.651 5107	.001 519 757
659	43 42 81	25.670 9953	.001 517 451
660	43 56 00	25.690 4652	.001 515 152

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
661	43 69 21	25.709 9203	.001 512 859
662	43 82 44	25.729 3607	.001 510 574
663	43 95 69	25.748 7864	.001 508 296
664	44 08 96	25.768 1975	.001 504 024
665	44 22 25	25.787 5939	.001 503 759
666	44 35 56	25.806 9758	.001 501 502
667	44 48 89	25.826 3431	.001 499 250
668	44 62 24	25.845 6960	.001 497 006
669	44 75 61	25.865 0343	.001 494 768
670	44 89 00	25.884 3582	.001 492 537
671	45 02 41	25.903 6677	.001 490 313
672	45 15 84	25.922 9628	.001 488 095
673	45 29 29	25.942 2435	.001 485 884
674	45 42 76	25.961 5100	.001 483 680
675	45 56 25	25.980 7621	.001 481 481
676	45 69 76	26.000 0000	.001 479 290
677	45 83 29	26.019 2237	.001 477 105
678	45 96 84	26.038 4331	.001 474 926
679	46 10 41	26.057 6284	.001 472 754
680	46 24 00	26.076 8096	.001 470 588
681	46 37 61	26.095 9767	.001 468 429
682	46 51 24	26.115 1297	.001 467 276
683	46 64 89	26.134 2687	.001 464 129
684	46 78 56	26.153 3937	.001 461 988
685	46 92 25	26.172 5047	.001 459 854
686	47 05 96	26.191 6017	.001 457 726
687	47 19 69	26.210 6848	.001 455 604
688	47 33 44	26.229 7541	.001 453 488
689	47 47 21	26.248 8095	.001 451 379
690	47 61 00	26.267 8511	.001 449 275
691	47 74 81	26.286 8789	.001 447 178
692	47 88 64	26.305 8929	.001 445 087
693	48 02 49	26.324 8932	.001 443 001
694	48 16 36	26.342 8797	.001 440 922
695	48 30 25	26.362 8527	.001 438 849

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
696	48 44 16	26.381 8119	.001 436 782
697	48 58 09	26.400 7576	.001 434 720
698	48 72 04	26.419 6896	.001 432 665
699	48 86 01	26.438 6081	.001 430 615
700	49 00 00	26.457 5131	.001 428 571
701	49 14 01	26.476 4046	.001 426 534
702	49 28 04	26.495 2826	.001 424 501
703	49 42 09	26.514 1472	.001 422 475
704	49 56 16	26.532 9983	.001 420 455
705	49 70 25	26.551 8361	.001 418 440
706	49 84 36	26.570 6605	.001 416 431
707	49 98 49	26.589 4716	.001 414 427
708	50 12 64	26.608 2694	.001 412 429
709	50 26 81	26.627 0539	.001 410 437
710	50 41 00	26.645 8252	.001 408 451
711	50 55 21	26.664 5833	.001 406 470
712	50 69 44	26.683 3281	.001 404 494
713	50 83 69	26.702 0598	.001 402 525
714	50 97 96	26.720 7784	.001 400 560
715	51 12 25	26.739 4839	.001 398 601
716	51 26 56	26.758 1763	.001 396 648
717	51 40 89	26.776 8557	.001 394 700
718	15 55 24	26.795 5220	.001 392 758
719	51 69 61	26.814 1754	.001 390 821
720	51 84 00	26.832 8157	.001 388 889
721	51 98 41	26.851 4432	.001 386 963
722	52 12 84	26.870 0577	.001 385 042
723	52 27 29	26.888 6593	.001 383 126
724	52 41 76	26.907 2481	.001 381 215
725	52 56 25	26.925 8240	.001 379 310
726	52 70 76	26.944 3872	.001 377 410
727	52 85 29	26.962 9375	.001 375 516
728	52 99 84	26.981 4751	.001 373 626
729	53 14 41	27.000 0000	.001 371 742
730	53 29 00	27.018 5122	.001 369 863

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
731	53 43 61	27.037 0117	.001 367 989
732	53 58 24	27.055 4985	.001 366 120
733	53 72 89	27.073 9727	.001 364 256
734	53 87 56	27.092 4344	.001 362 398
735	54 02 25	27.110 8834	.001 360 544
736	54 16 96	27.129 3199	.001 358 696
737	54 31 69	27.147 7439	.001 356 852
738	54 46 44	27.166 1554	.001 355 014
739	54 61 21	27.184 5544	.001 353 180
740	54 76 00	27.202 9410	.001 351 351
741	54 90 81	27.221 3152	.001 349 528
742	55 05 64	27.239 6769	.001 347 709
743	55 20 49	27.258 0263	.001 345 895
744	55 35 36	27.276 3634	.001 344 086
745	55 50 25	27.294 6881	.001 342 282
746	55 65 16	27.313 0006	.001 340 483
747	55 80 09	27.331 3007	.001 338 688
748	55 95 04	27.349 5887	.001 336 898
749	56 10 01	27.367 8644	.001 335 113
750	56 25 00	27.386 1279	.001 333 333
751	56 40 01	27.404 3792	.001 331 558
752	56 55 04	27.422 6184	.001 329 787
753	56 70 09	27.440 8455	.001 328 021
754	56 85 16	27.459 0604	.001 326 260
755	57 00 25	27.477 2633	.001 324 503
756	57 15 36	27.495 4542	.001 322 751
757	57 30 49	27.513 6330	.001 321 004
758	57 45 64	27.531 7998	.001 319 261
759	57 60 81	27.549 9546	.001 317 523
760	57 76 00	27.568 0975	.001 315 789
761	57 91 21	27.586 2284	.001 314 060
762	58 06 44	27.604 3475	.001 312 336
763	58 21 69	27.622 4546	.001 310 616
764	58 36 96	27.640 5499	.001 308 901
765	58 52 25	27.658 6334	.001 307 190

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
766	58 67 56	27.676 7050	.001 305 483
767	58 82 89	27.694 7648	.001 303 781
768	58 98 24	27.712 8129	.001 302 083
769	59 13 61	27.730 8492	.001 300 390
770	59 29 00	27.748 8739	.001 298 701
771	59 44 41	27.766 8868	.001 297 017
772	59 59 84	27.784 8880	.001 295 337
773	59 75 29	27.802 8775	.001 293 661
774	59 90 76	27.820 8555	.001 291 990
775	60 06 25	27.838 8218	.001 290 323
776	60 21 76	27.856 7766	.001 288 660
777	60 37 29	27.874 7197	.001 287 001
778	60 52 84	27.892 6514	.001 285 347
779	60 68 41	27.910 5715	.001 283 697
780	60 84 00	27.928 4801	.001 282 051
781	60 99 61	27.946 3772	.001 280 410
782	61 15 24	27.964 2629	.001 278 772
783	61 30 89	27.982 1372	.001 277 139
784	61 46 56	28.000 0000	.001 275 510
785	61 62 25	28.017 8515	.001 273 885
786	61 77 96	28.035 6915	.001 272 265
787	61 93 69	28.053 5203	.001 270 648
788	62 09 44	28.071 3377	.001 269 036
789	62 25 21	28.089 1438	.001 267 427
790	62 41 00	28.106 9386	.001 265 823
791	62 56 81	28.124 7222	.001 264 223
792	62 72 64	28.142 4946	.001 262 626
793	62 88 49	28.160 2557	.001 261 034
794	63 04 36	28.178 0056	.001 259 446
795	63 20 25	28.195 7444	.001 257 862
796	63 36 16	28.213 4720	.001 256 281
797	63 52 09	28.231 1884	.001 254 705
798	63 68 04	28.248 8938	.001 253 133
799	63 84 01	28.266 5881	.001 251 564
800	64 00 00	28.284 2712	.001 250 000

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
801	64 16 01	28.301 9434	.001 248 439
802	64 32 04	28.319 6045	.001 246 883
803	64 48 09	28.337 2546	.001 245 330
804	64 64 16	28.354 8938	.001 243 781
805	64 80 25	28.374 5219	.001 242 236
806	64 96 36	28.390 1391	.001 240 695
807	65 12 49	28.407 7454	.001 239 157
808	65 28 64	28.425 3408	.001 237 624
809	65 44 81	28.442 9253	.001 236 094
810	65 61 00	28.460 4989	.001 234 568
811	65 77 21	28.478 0617	.001 233 046
812	65 93 44	28.495 6137	.001 231 527
813	66 09 69	28.513 1549	.001 230 012
814	66 25 96	28.530 6852	.001 228 501
815	66 42 25	28.548 2048	.001 226 994
816	66 58 56	23.565 7137	.001 225 490
817	66 74 89	28.583 2119	.001 223 990
818	66 91 24	28.600 6993	.001 222 494
819	67 07 61	28.618 1760	.001 221 001
820	67 24 00	28.635 6421	.001 219 512
821	67 40 41	28.653 0976	.001 218 027
822	67 56 84	28.670 5424	.001 216 545
823	67 73 29	28.687 9766	.001 215 067
824	67 89 76	28.705 4002	.001 213 592
825	68 06 25	28.722 8132	.001 212 121
826	68 22 76	28.740 2157	.001 210 654
827	68 39 29	28.757 6077	.001 209 190
828	68 55 84	28.774 9891	.001 207 729
829	68 72 41	28.792 3601	.001 206 273
830	68 89 00	23.809 7206	.001 204 819
831	69 05 61	28.827 0706	.001 203 369
832	69 22 24	28.844 4102	.001 201 923
833	69 38 89	28.861 7394	.001 200 480
834	69 55 56	28.879 0582	.001 199 041
835	69 72 25	28.896 3666	.001 197 605

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
836	69 88 96	28.913 6646	.001 196 172
837	70 05 69	28.930 9523	.001 194 743
838	70 22 44	28.948 2297	.001 193 317
839	70 39 21	28.965 4967	.001 191 895
840	70 56 00	28.982 7535	.001 190 476
841	70 72 81	29.000 0000	.001 189 061
842	70 89 64	29.017 2363	.001 187 648
843	71 06 49	29.034 4623	.001 186 245
844	71 23 36	29.051 6781	.001 184 834
845	71 40 25	29.064 8837	.001 183 432
846	71 57 16	29.086 0791	.001 182 033
847	71 74 09	29.103 2644	.001 180 638
848	71 91 04	29.120 4396	.001 179 245
849	72 08 01	29.137 6046	.001 177 856
850	72 25 00	29.154 7595	.001 176 471
851	72 42 01	29.171 9043	.001 175 088
852	72 59 04	29.189 0390	.001 173 709
853	72 76 09	29.206 1637	.001 172 333
854	72 93 16	29.223 2784	.001 170 960
855	73 10 25	29.240 3830	.001 169 591
856	73 27 36	29.257 4777	.001 168 224
857	73 44 49	29.274 5623	.001 166 861
858	73 61 64	29.291 6370	.001 165 501
859	73 78 81	29.308 7018	.001 164 144
860	73 96 00	29.325 7566	.001 162 791
861	74 13 21	29.342 8015	.001 161 440
862	74 30 44	29.359 8365	.001 160 093
863	74 47 69	29.376 8616	.001 158 749
864	74 64 96	29.393 8769	.001 157 407
865	74 82 25	29.410 8823	.001 156 069
866	74 99 56	29.427 8779	.001 154 734
867	75 16 89	29.444 8637	.001 153 403
868	75 34 24	29.461 8397	.001 152 074
869	75 51 61	29.478 8059	.001 150 748
870	75 69 00	29.495 7624	.001 149 425

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
871	75 86 41	29.512 7091	.001 148 106
872	76 03 84	29.529 6461	.001 146 789
873	76 21 29	29,546 5734	.001 145 475
874	76 38 76	29.563 4910	.001 144 165
875	76 56 25	29.580 3989	.001 142 857
876	76 73 76	29.597 2972	.001 141 553
877	76 91 29	29.614 1858	.001 140 251
878	77 08 84	29.631 0648	.001 138 952
879	77 26 41	29.647 9342	.001 137 656
880	77 44 00	29.664 7939	.001 136 364
881	77 61 61	29.681 6442	.001 135 074
882	77 79 24	29.698 4848	.001 133 787
883	77 96 89	29.715 3159	.001 132 503
884	78 14 56	29.732 1375	.001 131 222
885	78 32 25	29.748 9496	.001 129 944
886	78 49 96	29.765 7521	.001 128 668
887	78 67 69	29.782 5452	.001 127 396
888	78 85 44	29.799 3289	.001 126 126
889	79 03 21	29.816 1030	.001 124 859
890	79 21 00	29.832 8678	.001 123 596
891	79 38 81	29.849 6231	.001 122 334
892	79 56 64	29.866 3690	.001 121 076
893	79 74 49	29.883 1056	.001 119 821
894	79 92 36	29.899 8328	.001 118 568
895	80 10 25	29.916 5506	.001 117 318
996	80 28 16	29.932 2591	.001 116 071
897	80 46 09	29.949 9583	.001 114 827
898	80 64 04	29.966 6481	.001 113 586
899	80 82 01	29.983 3287	.001 112 347
900	81 00 00	30.000 0000	.001 111 111
901	81 18 01	30.016 6620	.001 109 878
902	81 36 04	30.033 3148	.001 108 647
903	81 54 09	30.049 9584	.001 107 420
904	81 72 16	30.066 5928	.001 106 195
905	81 90 25	30.083 2179	.001 104 972

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
906	82 08 36	30.099 8339	.001 103 753
907	82 26 49	30.116 4407	.001 102 536
908	82 44 64	30.133 0383	.001 101 322
909	82 62 81	30.149 6269	.001 100 110
910	82 81 00	30.166 2063	.001 098 901
911	82 99 21	30.182 7765	.001 097 695
912	83 17 44	30.199 3377	.001 096 491
913	83 35 69	30:215 8899	.001 095 290
914	83 53 96	30.232 4329	.001 094 092
915	83 72 25	30.248 9669	.001 092 896
916	83 90 56	30.265 4919	.001 091 703
917	84 08 89	30.282 0079	.001 090 513
918	84 27 24	30.298 5148	.001 089 325
919	84 45 61	30.315 0128	.001 088 139
920	84 64 00	30.331 5018	.001 086 957
921	84 82 41	30.347 9818	.001 085 776
922	85 00 84	30.364 4529	.001 084 599
923	85 19 29	30.380 9151	.001 083 424
924	85 37 76	30.397 3683	.001 082 251
925	85 56 25	30.413 8127	.001 081 081
926	85 74 76	30.430 2481	.001 079 914
927	85 93 29	30.446 6747	.001 078 749
928	86 11 84	30.463 0924	.001 077 586
929	86 30 41	30.479 5013	.001 076 426
930	86 49 00	30.495 9014	.001 075 269
931	86 67 61	30.512 2926	.001 074 114
932	86 86 24	30.528 6750	.001 072 961
933	87 04 89	30.545 0487	.001 071 811
934	87 23 56	30.561 4136	.001 070 664
935	87 42 25	30.577 7697	.001 069 519
936	87 60 96	30.594 1171	.001 068 376
937	87 79 69	30.610 4557	.001 067 236
938	87 98 44	30.626 7857	.001 066 098
939	88 17 21	30.643 1069	.001 064 963
940	88 36 00	30.659 4194	.001 063 830

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
941	88 54 81	30.675 7233	.001 062 699
942	88 73 64	30.692 0185	.001 061 571
943	88 92 49	30.708 3051	.001 060 445
944	89 11 36	30.724 5830	.001 059 322
945	89 30 25	30.740 8523	.001 058 201
946	89 49 16	30.757 1130	.001 057 082
947	89 68 09	30.773 3651	.001 055 966
948	89 87 04	30.789 6086	.001 054 852
949	90 06 01	30.805 8436	.001 053 741
950	90 25 00	30.822 0700	.001 052 632
951	90 44 01	30.838 2879	.001 051 525
952	90 63 04	30.854 4972	.001 050 420
953	90 82 09	30.870 6981	.001 049 318
954	91 01 16	30.886 8904	.001 048 218
955	91 20 25	30.903 0743	.001 047 120
956	91 39 36	30.919 2497	.001 046 025
957	91 58 49	30.935 4166	.001 044 932
958	91 77 64	30.951 5751	.001 043 841
959	91 96 81	30.967 7251	.001 042 753
960	92 16 00	30.983 8668	.001 041 667
961	92 35 21	31.000 0000	.001 040 583
962	92 54 44	31.016 1248	.001 039 501
963	92 73 69	31.032 2413	.001 038 422
964	92 92 96	31.048 3494	.001 037 344
965	93 12 25	31.064 4491	.001 036 269
966	93 31 56	31.080 5405	.001 035 197
967	93 50 89	31.096 6236	.001 034 126
968	93 70 24	31.112 6948	.001 033 058
969	93 89 61	31.128 7648	.001 031 992
970	94 09 00	31.144 8230	.001 030 928
971	94 28 41	31.160 8729	.001 029 866
972	94 47 84	31.176 9145	.001 028 807
673	94 67 29	31.192 9479	.001 027 749
974	94 86 76	31.208 9731	.001 026 694
975	95 06 25	31.224 9900	.001 025 641

n	n^2	$n^{1/2}$	1/n
976	95 25 76	31.240 9987	.001 024 590
977	95 45 29	31.256 9992	.001 023 541
978	95 64 84	31.272 9915	.001 022 495
979	95 84 41	31.288 9757	.001 021 450
980	96 04 00	31.304 9517	.001 020 408
981	96 23 61	31.320 9195	.001 019 368
982	96 43 24	31.336 8792	.001 018 330
983	96 62 89	31.352 8308	.001 017 294
984	96 82 56	31.368 7743	.001 016 260
985	97 02 25	31.384 7097	.001 015 228
986	97 21 96	31.400 6369	.001 014 199
987	97 41 69	31.416 5561	.001 013 171
988	97 61 44	31.432 4673	.001 012 146
989	97 81 21	31.448 3704	.001 011 122
990	98 01 00	31.464 2654	.001 010 101
991	98 20 81	31.480 1525	.001 009 082
992	98 40 64	31.496 0315	.001 008 065
993	98 60 49	31.511 9025	.001 007 049
994	98 80 36	31.527 7655	.001 006 036
995	99 00 25	31.543 6206	.001 005 025
996	99 20 16	31.559 4677	.001 004 016
997	99 40 09	31.575 3068	.001 003 009
998	99 60 04	31.591 1380	.001 002 004
999	99 80 01	31.606 9613	.001 001 001
1000	100 00 00	31.622 7766	.001 000 000

譯表3　由1乘方至6乘方之表(譯自同書196頁)

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	2
3	9	27	81	243	729	3
4	16	64	256	1 024	4 096	4
5	25	125	625	3 125	15 625	5
6	36	216	1 296	7 776	46 656	6
7	49	343	2 401	16 807	117 649	7
8	64	512	4 096	32 768	262 144	8
9	81	729	6 561	59 049	531 441	9
10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10
11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	11
12	144	1 728	20 736	248 832	2 985 984	12
13	164	2 197	28 561	371 293	4 826 809	13
14	196	2 744	38 416	537 824	7 529 536	14
15	225	3 375	50 625	759 375	11 390 625	15
16	256	4 096	65 536	1 048 576	16 777 216	16
17	289	4 913	83 521	1 419 857	24 137 569	17
18	324	5 832	104 976	1 889 568	34 012 224	18
19	361	6 859	130 321	2 476 099	47 045 881	19
20	400	8 000	160 000	3 200 000	64 000 000	20
21	441	9 261	194 481	4 084 101	85 766 121	21
22	484	10 648	234 256	5 153 632	113 379 904	22
23	529	12 167	279 841	6 436 343	148 035 889	23
24	576	13 824	331 776	7 962 624	191 102 976	24
25	625	15 625	390 625	9 765 625	244 140 625	25
26	676	17 576	456 976	11 881 376	308 915 776	26
27	729	19 683	531 441	14 348 907	387 420 489	27
28	784	21 952	614 656	17 210 368	481 890 304	28
29	841	24 389	707 281	20 511 149	594 823 321	29
30	900	27 000	810 000	24 300 000	729 000 000	30
31	961	29 791	923 521	28 629 151	887 503 681	31
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432	1 073 741 824	32
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393	1 291 467 969	33
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424	1 544 804 416	34
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875	1 838 265 625	35
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176	2 176 782 336	36
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957	2 565 726 409	37
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168	3 010 936 384	38
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199	3 518 743 761	39
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000	4 096 000 000	40
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201	4 750 104 241	41
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232	5 489 031 744	42
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443	6 321 363 049	43
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224	7 256 313 856	44
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125	8 303 765 625	45
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976	9 474 296 896	46
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007	10 779 215 329	47
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968	12 230 590 464	48
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249	13 841 287 201	49
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000	15 625 000 000	50

譯 表 4 理想弧線下之縱線頂點表(由平均數上之最高縱線 yo 所產生之兩面小數部份) 每一縱線皆由平均數上所產生之一距離而建立。而建立於平均數上之縱線的高度可以下列方式計算之:

$$yo=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{2.5060\,\sigma}$$

其他任何一縱線之高度,可由本表所指定之距離求之,即各縱線平均數的 x。在 x 上之距離爲 σ 之小數部份,如此則從平均數上之任何一距離上的一縱線之高度,如 $.7\sigma$ 將爲 .78270yo; 從平均數上 2.15σ 處之一縱線之高度則將爲 0.09914yo,餘類推。

(譯表 4,5 皆譯自(Rugg: Statistical, Methods Applied to Education)

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23576	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01136
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

譯 表 5　　通常可能弧線下10000總面積之小數部份表(反應於底邊線上之各距離介於平均數及所發生的繼續的分離點。所有各距離皆以標準差 σ 之單位計算之)。本表之用法如下:如介於平均數縱線及由平均數縱線以外之任何一縱線之距離爲 $.8\sigma$,即 $\frac{x}{\sigma}=.8$, 包括全面積之28.81%。

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3016	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4585	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4758	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989	4990
3.1	4990.3	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									

參考書

(甲)主要者

1. 關於科學方法之部份者

Ayres, C. E., "Science, the False Messiah", The Bobbs-Merrill Co., Indianapolis, U. S. A.

Barry, Frederick, "The Scientific Habit of Thought", Columbia University Press, New York, 1927, U. S. A.

Bentley, A. F., "Relativily in Man and Society, "G. P. Putnam's Sons, New York, 1926, U. S. A.

Broad, C. D., "Scientific Thought," Harcourt, Brace & Co., New York, U. S. A.

Cohen, Morris R., "The Social Sciences and Natural Sciences", Houghton Mifflin Co., New York, 1927, U. S. A.

D'Abro, A., "The Evolution of Scientific Thought, "Boni and Liveright, 1927, U. S. A.

Giddings, E. H., "The Scientific Study of Human Society." University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1924.

Hobson, E. W., "The Domain of Natural Science," The Macmillan Co., New York, 1923. U. S. A.

Mayer, Joseph., "The Seven Seals of Science," Tne Century Co., New York, 1927, U. S. A.

Marvin,, F. S., "Science and Civilization," Oxford University Press, London, England, 1926.

Pearson, Karl., "The Grammar of Science," Adam and Charles Black, 3*rd* ed., London, 1911.

Poincare, Henri, "The Foundations of Science," The Science Press, New York and Morrison, New York, 1913, U. S. A.

Ritchie, A. D., "Scientific Method," Harcourt, Brace & Co., New York, 1923, U. S. A.

Sorokin, P., "Contemporary Social" Theories, "Harper & Brothers, New York, 1928, U. S. A.

Robinson, D. S., "The Principles of Reasoning: An Introduction to Scientific Method," D. Applenton & Co., New York, 1924, U. S. A.

Sarton, George, "Introduction to the History of Science," William and Wilkins, Baltimore, 1927.

Veblen, Thorstein, "The place of Science in Modern Civilization," B. W. Huebsch, New York, 1919 U. S. A.

Ward, Henshaw, "Exploring the Universe," The Bobbs-Merrill Co., Indianapolis, 1927, U. S. A.

Weld, H. P., "Psychology as a Science," Henry Holt, New York, 1928, U. S. A.

Whitehead, A. N., "Science in the Modern World," The Macmillan Co., New York, 1925, U. S. A.

Wolf, A., "Essentials of Scientific Method," The Macmillan Co., New York, 1925, U. S. A.

Columbia Associates in Philosophy, "An Introduction to Reflective Thinking," Houghton Mifflin Co., New York, 1923, U. S. A.

Dewey, John, "Experience and Nature," Open Court Publishing, Co., Chicago, 1926. U. S. A.

Rice, Stuart A., "Quantitative Methods in Politics," Alfred Knopf, New York. 1928. U. S. A.

Westaway, F. W., "Scientific Method," Blackie and Son, Ltd., London, 1912.

Bowley, A. L., "The Measurement of Social Phenomena," P. S. King and Son, Ltd., London, 1915.

Mills, F. C., "On Measurement in Economics," edited by R. G. Tugwell, Alfred A. Knopf, New York, 1924. U. S. A.

Ogden, C. K., and Richards, I. A., "The Meaning of Meaning," *2nd* ed., Rev., Harcourt, Brace & Co., New York, 1927, U. S. A.

Ellwood, C. A., "Scientific Methods of Studying Human Society," Social Forces, Vol. 2, 1924.

Teggart, F. J., "Theory of History," Yale University Press, New Haven, 1925, U. S. A.

Thomas, W. I., "The Polish Peasant in Europe and America," Alfred A. Knopf, New York, 1927, U. S. A.

K. D. Har, "Social Laws," The University of North Carolina Press, 1930, U. S. A.

2. 關於社會調查部份者

Bogardus, E. S., "The New Social Research," Jessie Ray Miller, Los Angeles, 1926, U. S. A.

Brunner, Edmund De S., "Surveying Your Community," Geo. H., Doran Co., New York, 1925, U. S. A.

Buell, B., "Interviews, Interviewers, and Interviewing." The Family, Vol. 6, 1925, pp.86-90, U. S. A.

Burgess, E. W., "The Social Survey; A Field for Constructive Service by Departments of Sociology," American Journal of Sociology, Vol. 21, 1915, pp. 492-500. U. S. A.

Chapin, F, S., "Field Work, and Social Research," The Century Co., New York, 1920, U. S. A.

Clark, Jean Perry, "The Interview and the Unimportant," Journal of Applied Sociology, Vol. 10, 1926, pp. 366-70, U. S. A.

Elemer, "Techniqne of Social Surveys." U. S. A.

George, A. Lundberg, "Social Research," 1929. Longmans, Green and Co., New York, U. S. A.

Palmer, "Field Studies in Sociology,' U. S. A.

Webb, Betrice, "Methods of Social Study," U. S. A.

Colcord, Joanna C., "Techniques, of Interviews," Publications of the American Sociological Society, Vol. 23, 1929, U. S. A.

Daniels, John, "The Social Survey: Its Reasons, Methods, and Results," Proceedings, National Conference of Charities, and Corrections, 1910. U. S. A.

Elmer, M. C., "Present Status of the Social Survey,"
Journal of Applied Sociology, Vol. 7, 1923, pp. 167-174, U. S. A.

———— "Technique of Social Surveys," 3rd ed. Jessie Ray Miller, Los Angeles, 1927, U. S. A.

Jillin, J. L., "The Social Survey and Its Further Development" Publications of the American Statistical Association. Vol. 14. (N. S.) 1914-15 pp. 604-10.

Potter, Zena L., "The Social Survey: A Bibliography," The Russell Sage Foundation, New York, 1915, U. S. A.

Richmond, Mary E., "Social Diaggnosis," Russell Sage Foundation, New York, 1915, U. S. A.

Sheffield, Ada E., "The Social Case History," Russell Sage Foundation, New York, 1920, U. S. A.

Taylor, C. C., "The Social Survey: Its History and Methods," Missouri University Bulletin Social Science Series, No. 3. Columbia, 1919, U. S. A.

Price, Fannie Imogene, "Standardization of the Case Record," (Ph. D. Thesis) Brown University, Providence, 1928, U. S. A.

Queen Stuart A., "Social Work in the Light of History," J. B. Lippincott Co., Philadelphia. 1922. U. S. A.

Richmond, Mary, "What is Social Case Work?" Russell Sage Foundation, New York, 1922, U. S. A.

Chapin, F. S., "Cultural Change, "The Century Co., New York, 1928, U. S. A.

American Child Association, "A Health Survey of 86 Cities." Research Division, New York 1925, U. S. A,

merican Public Health Association, "Appraisal Form for City Health Work," *3rd.*, ed., New York, 1929, U. S A

Holley, C. E., "Relationship Between Persistence in School and Home Conditions," Society for the Study of Education, Year-book XV, 1916 Chicago.

3. 關於統計學部份者

Minneapolis Churches and Their Comity Problems, Iustitute of Social and Religious Research, 230 Park Avenue, New York, U. S. A.

A Graphic Summary of American Agriculture Based largely on the Census, compiled by O. E. Baker, United States Department of Agriculture, Miscellaneous Publication on 105, Washington D. C., 1931, U. S. A.

National Recovery Measures in the United States, by the World Peace Foundation, 40 Mount Vernon Street, Boston, Mass U. S. A.

L. L. Thurstone and E. J. Chave, "The Measurement of Attitude," The University of Chicago Press, Chicago, Ill., U. S. A.

Bailey. W. B., "Statistics," McClurg, Chicago, U. S. A.

Bowley, A. L., "Elements of Statistics," P. S. King and Son, London, 1920.

———— "The Measurement of Social Phenomena," P. S. King and Son, London, 1915.

———— "An Elementary Manual of Statistics," Macdonald and Evans, London, 1910.

Brinton W. C., "Graphic Methods," Engineering Magazine Co., New York, 1914.

Brunt, David, "The Combination of Observations," Cambridge, University Press, 1917, Putnam, New York, U. S. A.

Carver, H. C., "Frequency Curves," H. L. Rietz Editer, U.S. A.

Coolidge, J. L., "An Introduction to Mathematical Probability," Oxford University Press, London, 1925.

Durand, E, Dana, "Tabulation by Mechanical Means," Washington, 1913, U. S. A.

Davies, G. R., "Introduction to Economic Statistics," The Century Co., New York, 1922, U. S. A.

Elderton, W. P., "Primer of Statistics," Adam and Charles Black, London, 1910.

———— "Frequency Curves and Correlation," C. and E. Layton London, 1906.

Falk, I. S, "The Principles of Vital Statistics," W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1923, U. S. A.

Fisher, Irving, "The Ratio Chart," Quarterly Publication of the American Statistical Association, June, 1917. U. S. A.

———— "The Making of Index Numbers," Houghton Mifflin, Boston, 1922, U. S. A.

———— "The Best Form of Index Number," Quarterly Publication of the American Statistical Association, March, 1921, U. S. A.

Giddings, F. H. "The Service of Statistics to Sociology," Quarterly Publication of the American Statistical Association," March, 1914, U. S. A.

Giffen, Robert, "Statistics," Macmillan, London, 1913.

Griffin F. L., "An Introduction to Mathematical Analysis," Houghton Mifflin, Boston, 1921, U. S. A.

Haskell, A. C., "How to Make and Use Graphic Charts," Codex Book Co., New York, 1919, U. S. A.

———— "Graphic Charts in Business," Codex Book Co., New York, 1922, U. S. A.

Hexter, M. B., "Social Consequences of Business Cycles," Houghton Mifflin, Boston, 1925, U. S. A.

Huntington, E. V., "Curve Fitting by the Method of Least Squares and the Method of Moments," H. L. Rietz Editor, U. S. A.

Jerome, Harry, "Statistical Method," Harper and Brothers, New York, 1924, U. S. A.

Jones, Adam Leroy, "Logic Inductive and Deductive," Henry Holt, New York, 1909, U. S. A.

Karsten, Karl G., "Charts and Graphs" Prentice Hall, New York, 1923, U. S. A.

Kelley, Truman L., "Statistical Method" Macmillan, New York, 1912, U. S. A.

Keynes, J. M., "A Treatise on Probability, "Macmillan, London, 1921.

King, W. I., "Elements of Statistical Method" Macmillan, New York, 1912, U. S. A.

Koren John (Editor), "The History of Statistics," Macmillan, New York, I918, U. S. A.

Lipka, Joseph, "Graphical and Mechanical Computation,' John Wiley and Sons, New York, 1918, U. S. A.

Manual of the International List of Causes of Death, Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1924, U. S. A.

Marshall, W. C., "Graphical Methods," McGraw-Hill Book Co., New York, 1921, U. S. A.

Mayo-Smith, Richmond, "Statistics and Sociology" Macmillan, New York, 1899, U. S. A.

———— "Statistics and Economics," Macmillan, New York, 1899, U. S. A.

Meizen, August, "History, Theory, and Technique of Statistics," 1891, U. S. A.

Merriman, M., "A Textbook on the Method of Least Squares," John Wiley and Sons, New York, 1910, U. S. A.

Merz, J. T., "On the Statistical View of Nature," Blackwood and Sons, London, 1912, U. S. A.

Mills, Frederick C., "Statistical Methods as Applied to Economics and Business," Henry Holt, New York 1924, U. S. A.

———— "On Measurement in Economics," Alfred A. Knopf, New York, 1924, U. S. A.

———— "The Measurement of Correlation and the Problem of Estimation," Journal of the American, Statistical Association, September, 1924, U. S. A.

Newcomb, H. T. "The Development of Mechanical Methods of Statistical Tabulation," Washington 1913, U. S. A.

Newsholme, Sir Arthur, "The Elements of Vital Statistics," D. Appleton, New York, 1924, U. S. A.

Pearson Karl, "On the General Theory of Skew Correlation and Non-linear Regression," Cambridge University Press, 1914, England.

Riegel Robert, "Elements of Business Statistics," D. Appleton, New York, 1924, U. S. A.

Rietz, H. L., "Handbook of Mathematical Statistics," Houghton Mifflin, Boston, 1924, U. S. A.

Rugg, H. O., Statistical Methods Applied to Education, "Houghton Mifflin, Boston, 1917, U. S. A.

Secrist, Horace, "An Introduction to Statistical Methods," Macmillan, New York, 1917, U. S. A.

———— "Readings and Problems in Statistical Methods," Macmillan, New York, 1920, U. S. A.

Thorndike, E. L., "An Introduction to the Theory of Mental and Social Measurements," Teachers College, Columbia University, 1913, U. S. A.

———— "Individuality," Houghton Mifflin, Boston, 1911, U. S. A.

Walsh, C. M., "The Measurement of General Exchange Value," Macmillan, New York 1901, U. S. A.

———— "The Problem of Estimation," P. S. King, London, 1921, England,

West, Carl J., "Introduction to Mathematical Statistics" R.

G. Adams, Columbus, 1918, U. S. A.

West, L. D., "Theory of Errors and Least Squares," Macmillan, New York, 1916, U. S. A.

Whipple, G. C., "Vital Statistics," John Wiley and Sons, New York, 1923, U. S. A.

Whitaker, E. T., "The Calculus of Observations," Blakie and Son, London, 1924.

Young. A. A., "Index Numbers," in the Handbook of Mathematical Statistics, H. L., Rietz Editor, U. S. A.

Yule, G. U., "An Introduction to the Theory of Statistics," Griffin and Co., London, 1922.

Zizek, Franz, "Statistical Average," Henry Holt, New York, 1913, U. S A.

Robert Emmet Chaddock, "Principles and Methods of Statistics,' Houghton Mifflin Co., New York, 1925, U. S. A.

L. L. Thurstone, "The Fundamentals of Statistics," Macmillan Co., 1925, U. S. A.

F. C. Mills and D. H. Davenport, "Problems and Tables in Statistics," Henry Holt and Co., 1929, New York, U. S. A.

(乙)附屬者

1．關於社會調查部份者

雷澄林：社會調查概要

李景漢：定縣社會概況調查

王寅生：中國北部的兵差與農民

孫文郁：河北鹽山縣150農家之經濟及社會調查

徐　澄：蕪湖102農家之社會的及經濟的調查

柯柏年：怎樣研究新興社會科學

言心哲：社會調查大綱

馮　銳：鄉村社會調查大綱

樊　弘：社會調查方法

2．關於統計學部份者

中國國民黨各級黨部統計刊物

國民政府以下各政府機關統計刊物

上海市統計（上海地方協會）

翁擢秀：各國統計一覽

衞聚賢：歷史統計學

丁同力：生活費指數之編製法

失業統計法

莫若強：工業勞資糾紛統計編輯法

郘爽秋：教育圖示法

朱佐廷：統計圖表編製

褚一飛：統計學上之相關度及相變度之原理

甯恩承：統計方法

毛起鷯：社會統計大綱

：社會統計

王仲武：統計公式及例解

：統計學原理及應用

許炳漢：統計法概論

全國寶：統計新論

劉迺敬：實用統計學

蔡毓聰：統計學 A.B.C.

艾　偉：高級統計學

徐雪平：統計學

趙文銳譯：統計學原理

唐啓賢：統計學

朱君毅譯：教育統計學大綱

申報年鑑(1935)

上海年鑑(1935年)

各種日報之社會新聞及有關於統計之新聞

（上列各書可從上海福州路 271-3 號上海作者書社採買）

3．關於哲學部份者

張東蓀：科學與哲學

：道德哲學

：近世西洋哲學史綱要

鄒　謙：哲學概論

范壽康：哲學通論

施友忠：哲學問題淺說

瞿菊農：現代哲學思潮綱要

馬君武：赫克爾一元哲學

繆鳳林：西洋古代中世哲學史大綱

：近代西洋哲學史大綱

謝無量：中國哲學史

蔣維喬：中國哲學史綱要

：中國近三百年哲學史

舒新城：人生哲學

姚舜欽：八大派人生哲學

余家菊：人生之意義與價值

王寵惠：英文名學

劉伯明：思維術

王治心：中國宗教思想史大綱

余家菊：道德學

元尚仁：德育原理

王克仁：德育問題

吳俊升：實踐道德述要

陳筑山：哲學之故鄉

劉衡如：亞里斯多德

　　　：霍布士

商承祖：康德傳

方東英：實驗主義

楊大膺：孔子哲學研究

陳柱尊：公羊家哲學

胡哲敷：老莊哲學

　　　：陸王哲學辨微

謝無量：王充哲學

（以上各書上海中華書局出版）

胡適之：中國哲學史大綱

羅家倫：科學與玄學

（以上二書上海商務印書館出版）

年一月初版
年八月本館第一版
聯

社會調查與統計學二冊

⊕(33805)

每部定價國幣拾陸元
印刷地點外另加運費

著作者　陳毅夫

發行人　朱經農
上海河南中路

印刷所　商務印書館印刷廠

發行所　各地　商務印書館

(本書校對者　陳忠杰　施伯朱)

封底