贈與佛蘭生兄弟者.[6]至1619年訥子伯羅重印父書,幷附說明,其計算方法,始爲世所通曉.此外又有1616,1889 (Edinburgh); 1620 (Leyden); 1616,1618 (London) 之各種版本.

訥白爾表於1895年以拉丁文覆印於巴黎,於1889年由馬克多那爾(W. R. Macdonald)以英文覆印於愛丁堡.訥白爾著書輸入法國,實始於翁里奧(Henrion).渠於1620年覆印訥書於里昂(Lyon).至自然對數表則由英人溫蓋(Wingate)輸入法國.近三百年各國印行對數表之數,且在五百以上.[7]其小數位較少者,當推1770年伽地納(Gardiner)在亞威農(Avignon)所印之小數七位之對數表.但卷帙頗大,不便取攜.至1785年卡勒(Callet)製成小本,由當時名手第多(Ambroise Didot)印行,其子Firmin Didot發明鉛版,改良印刷,衆始稱便焉.

茲列1614年之訥白爾對數表樣張如下:

---

(6) 見 M. Terquem: "Notice sur la découverte des logarithmes", p. 40.

(7) 參觀法文數學叢書(Gauthier-Villars, 1909). 及 Knott, C. G., The Napier Tercentenary Memorial Volume, Messrs. Longmans, Green, & Co., London, 1915.

Gr. 0 0			+	−		
	sinus	logarithmi	differentiae	logarithmi	sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55

表內首頁下右邊書"89"以誌八十九度.其在"sinus"行內樣張內曾舉正弦0度0分至5分,或正弦89度55分至60分之值.在"logarithmi"行內誌上述正弦之對數,在"differentiae"行內,爲此行內之對數較.因 $\sin x=\cos(90°-x)$, 則此表實際已具餘弦及其對數之值.如 $\log\cos 0°\,5'=11$, 則 $\log\cos 89°\,55'=65331315$. 且因 $\log\tan x=-\log\cot x=\log\sin x-\log\cos x$. 則"differentiae"行內如爲+即係正切之對數,如爲−即係餘切之對數.

4. 巴理知傳略

訥白爾對數不久卽馳譽英國及歐洲大陸．恩利格.巴理知(Henry Briggs,1556－1630)[8]者先爲倫敦格勒善學校(Gresham College)教授,次爲牛津大學教授,素仰訥氏對數之發明,不久巴理知卽離倫敦而參見所崇拜之訥白爾.二人心儀已久,時巴以事遲,訥方對其友語巴未必卽臨,巴適叩閽請謁.相見之頃,彼此注視移時,無復一言.最後巴理知致其欽仰之詞.[9]又告訥白爾擬以零爲全正弦之對數,而以10^7爲$5°\,44'\,22''$正弦之對數.訥白爾亦以此修正爲然,幷如巴氏意以0爲1之對數,10^7爲全正弦之對數,又以指標爲正.自此巴氏乃着意以10爲底成新表.1617年訥白爾逝世,卒藉巴氏之力,竟其未完之業.巴理知以1624年成巴理知對數表(arithmetica logarithmica),眞數由一至二萬,又由九萬至十萬,對數之小數算

(8) The Dict. of National Biography 謂生於1561年. Fink 數學史謂1560年2月生於Yorkshire之Halifax附近之 Warley Wood. Smith 數學史謂據教區紀錄,應作1560/61.

(9) 見 Mark Napier's Memoir of John Napier, 1834, p. 409.

至十四位.(10) 1628年荷蘭國高達(Gouda)地方之佛拉哥(Adriaen Vlacq. 約生於1600年, 卒于1655年後)覆刻巴理知對數表, 計由一至十萬, 就中二萬至九萬之對數, 爲佛拉哥所補.

5. 自然對數

訥氏對數與以 $e=2.718\cdots\cdots$ 爲底之自然對數(natural logarithms)絕不相同. 普通代數教科書謂; 自然對數爲訥氏所發明. 實屬大誤, 讀者幸注意之.(11) 在1618年來特(Edward Wright)譯本之訥白爾對數表不記名之附卷中始首言自然對數. 附卷中又言補插法(interpolation)疑爲奧德(William Oughtred, 1574–1660)手筆. 所述補插法以七十二個正弦之對數, 求其餘之對數. 又在表中以 $\log 10=2.302584$, 但在近世則書 $\log_e 10=2,302584$.

自然對數之制, 以新對數表(new logarithms)所

(10) W. W. R. Ball: A Short Account of the History of Mathematics, 1901, pp. 202—203.

(11) 十九世紀末葉德人首正其誤, 見 Dr. S. Günther: Vermischte Untersuchungen, Chap. V.

述爲始. 是書於 1619 年由倫敦數學教授斯坡得爾 (John Speidell) 印於倫敦. 然實際斯坡得爾對數尙非自然對數. 如訥白爾謂 sin 30′=87265, 而半徑 $=10^7$, 故實際 sin 30′=0.0087265, 而此數之自然對數爲 5,25861 加 10 得 5.25861. 斯坡得爾則稱 log sin 30′=525861. 以公式表之, 應作

$$\text{sp. }\log x = 10^5\left(10 + \log_e \frac{x}{10^5}\right).^{(12)}$$

1622 年之新對數表爲由一至千之自然對數表, 但表不記小數點. 其前在 1618 年又有一小表僅有七十二對數. 斯坡得爾爲最初公表自然對數表之人. 其更精善者; 要數烏弗蘭 (Wolfram) 之自然對數表. 其數由一至萬, 而小數算至四十位, 於 1778 年公世, 渠係荷蘭礮隊副隊長, 計算此表, 費時六年云. 最完善之自然對數表當推德人達士 (Zacharias Dase) 於 1850 年在維也納所印者. 至 1819 年有名黑 (Ree) 者, 所編百科全書於"雙曲線對數"條亦有一表云.

---

(12) 其詳參觀 Quarterly Journal of Pure and Appl. Math. Vol. 46, 1915, pp. 174–178. 第九版大英百科全書"Tables"條. Report of the British Association for the Advancement of Science for 1873. "Table" 條, pp. 1–175

至於多位小數之對數,則烏弗蘭之外,沙晉(Sharp)算至61位,亞當斯(Adams)算至260位.然此二人所算者,僅2, 3, 5, 7, 10各數之自然對數,及對數根而已.[13]

6. 柏格對數及其他

此外尚有一軼事,卽與訥白爾同時有瑞士人柏格(Justus Byrgius, Jobst Bürgi, 1552-1632)於訥白爾對數表出版後六年,亦出版一粗糙之對數表.柏格少年時爲鐘錶匠,其後至加塞爾(Kassel)天文臺,又在布拉格(Prague)與刻卜勒(Kepler, 1571-1630)共事,其言對數似早於訥白爾,惟其公世爲期稍遲.[14]

對數之計算,在訥白爾,巴理知,刻卜勒,佛拉哥幷因等比級數,等差級數對列之義求之.但在對數表大致編輯完成之後,芬遏特(Gregory St. Vincent, 1584-1667),牛頓(Newton, 1642-1727),麥撈式(Nicolaus Mercator, 1620?-1687)諸人,又發現對數可以無限級數表之.麥撈式實發明log$(1+x)$之級數.芬遏特於1647

(13) 六十位之對數根,見華,傅譯代數術第十八卷.

(14) 參觀 Gerhardt: Gesch. d. Math. in Deutschland, 1877, p. 75, 119.

年算割圜術時稱雙曲線與漸近線中間之積,即爲雙曲線對數積.麥撈式於1668年稱對數級數之值,可由雙曲線間各積之總和而得.[15]

二 對數之東來上

7. 對數輸入中國之經過

對數首先由西士穆尼閣輸入中國,稍次則有數理精蘊之作,惟穆尼閣謂解此別有專書,而數理精蘊亦不言其理.直至同光間李善蘭華衡芳始由西士譯出代數學,代數術諸書,由是近世對於對數之說明,始爲世所通曉.前乎此則戴煦(1805–1860),李善蘭(1809–1882),鄒伯奇(1819–1869),顧觀光(1799–1862),徐有壬(1800–1860)并有詳細之論述,在代數學代數術譯書之前,事尤可珍.其中文論列對數之書可得下列各種:

(1) 比例對數表十二卷,穆尼閣著,薛鳳祚纂(1653).

(2) 比例數解四卷,清梅文鼎撰.

(15) 其詳參觀第九版大英百科全書"logarithms"條.

(3) 數理精蘊(1723).面體比例便覽,清年希堯撰(1735).

(4) 算法大成上篇,清陳杰撰(1844).

(5) 對數簡法二卷(1845),續對數簡法一卷(1846),假數測圓二卷(1852),清戴煦撰.

(6) 方圓闡幽.弧矢啟祕,對數探源,清李善蘭撰(1846?).

(7) 圓錐曲線三卷,李善蘭譯,級數回求,李善蘭撰.

(8) 數學啟蒙二卷,英國偉烈亞力(A. Wylie)撰(1853).

(9) 乘方捷術三卷,清鄒伯奇撰.

(10) 算賸續編清顧觀光撰(1854).

(11) 造各表簡法,清徐有壬撰.

(12) 代數學十三卷,英國棣麼甘(Aug. De Morgan)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆受(1859).

(13) 萬象一原夏鸞翔撰(1862).

(14) 代數術二十五卷,英國華里司輯,傅蘭雅(J. Fryer)口譯,金匱華蘅芳筆述(1873).

(15) 對數詳解五卷,清丁取忠,曾紀鴻同撰(1874).

(16) 微積溯源八卷,英國華里司輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1874).

(17) 對數表四卷,四册,清賈步緯校,江南製造局印.

(18) 對數表一册,附八線對數表,八線表.英國路密司(Loomis)撰,赫士譯,高密朱葆琛筆述.

(19) 對數述四卷,清陳其晉撰(1877).

(20) 三角數理十二卷,英國海麻士輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1877).

(21) 對數表引說一卷,用對數表訣一卷,造對數表法一卷,清朱湘澄,未刊.

(22) 代數術補式二十二卷,解崇輝撰(1899).

(23) 算式解法十四卷,美國好敦司開奈利同撰,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1899).

(24) 有不為齊算學二種四卷,傅九淵撰.

(25) 對數旁通一卷,蔣士棟撰(1897?).

(26) 對數較表一卷,廖家授(1860–1890)撰.

(27) 對數捷法一卷,陸采撰,見杭州藝文志.

(28) 對數淺釋一卷,江衡撰,溉齊算草之一.

(29) 對數四問劉彝程撰,經世文續編本.

8. 比例對數表,比例數解

(1) 比例對數表. 薛鳳祚比例對數表 (1653) 序稱"……穆(尼閣)先生出,而改為對數,今有對數表,以省乘除,而況開方立方三四方等法,皆比原法工力,十省六七,且無舛錯之患,此實為穆先生改曆立法第一功.予執筆以受,時以重譯,於戊辰 (1628) 曆元後二十五稔,(1653),歲在壽屋,曆春既夏而秋,方盛暑則烈陽熏灼,揮汗浹背,勞誠勞矣,功於何有!"

穆尼閣解釋對數之大意,謂:"愚今授以新法,變乘除為加減,……,解此別有專書,今特略明其理,如下二表,二同餘算,不論從一,二,三,四起,或從五,七,九,十一起,但同餘之內,中三相連度數,可取第四."

比例算	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同餘算 (a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同餘算 (b)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

如"同餘算 (a)"內之 6, 7, 8, 9 有 $9=(7+8)-6$ 之關係,

又"同餘算 (b)"內之 5, 7, 9, 11 有 $11=(7+9)-5$ 之

關係.

而對"同餘算"內之"比例算"四率成比例，有 32:64=128:256 又有 1:2=4:8 之關係. 故按上表"比例算"內 $4:32=128:x$ 或 $x=\dfrac{32\times 128}{4}$，此式本應乘除，今僅用加減，因對 32 爲 6，對 128 爲 8，對 4 爲 3，則對 x 爲 $(6+8)-3=11$，檢表知 11 之對爲 1024，卽 $x=1024$ 也. 比例數表十二卷，題南海穆尼閣著，北海薛鳳祚纂. 表中原數，比例數幷列比例數有小數六位. 書稱"原數當用十萬，其表久成，遞西來不戒，失之於途，今止一萬，……原數一萬之外，取比例法."

如求 $\log 160232=?$

$\log 1602 = 3.204662,$

$\log 160200 = 5.204662,$

$\log 1603 = 3.204933$

$\log 1603-\log 1602=0{,}000271$

$\dfrac{32}{100}\times 0.000271=0{,}000086$

$\log 160200=5.204662$

$\therefore\ \log 160232=5.204748$

(2) 比例數解. 清梅文鼎 (1633–1721) 勿菴曆算書目 (1702 自序)[16] 稱"一比例數解四卷.

比例數表者，西算之別傳也. 其法自一至萬，幷設有他數相當，謂之對數. 假令有所求數[或乘或除]，[17]

(16) 見知不足齋叢書本，第三九……四一頁.

(17) 本篇凡引用本文作"……"，引用本文中小註作[……].

但於本表間兩對數相加減,卽得相求.[乘者兩對數相加得總,除者兩對數相減卽較.總較各以入表,取其所對本數,卽各所求之乘得數,除得數.]……

前此無知者,本朝順治間西士穆尼閣以授薛(鳳祚)儀甫始有譯本.……又有四線比例數亦穆所授也.八線割圓,西曆舊法,今只用正弦,餘弦,正切,餘切,故曰四線……

穆先生曰;表有十萬,西來不戒於途,僅存一萬,萬以上,以法通之.[……嘗見薛刻別本,數有二萬].

儀甫又有四線新比例,用四線同,惟度析百分,[從古率也]穆有天步眞原,薛有天學會通,幷依此立算,不知此,則二書不可得以讀,故稍爲詮次,爲初編之第四書.”

9. 數理精蘊,算法大成

(3) 數理精蘊. 淸康熙癸巳(1713)始編律呂算法等書.[18]康熙甲午(1714)始擬以律呂曆法算法三書共爲一部,名曰律曆淵源.[19]康熙壬寅(1722)六月數

(18) 見東華續錄“乾隆”一四.

(19) 見東華錄“康熙”九四.

理精蘊,曆象攷成皆當成.[20] 雍正癸卯(1723)冬十月律曆淵源一百卷刻成,分三部,一曰曆象攷成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊,雍正帝製序.[21] 數理精蘊下編卷三十八,末部八,有"對數比例,"其目爲:對數比例,明對數之原之一……三,明對數之綱之一……二,明對數之目,用中比例求假數法之一……二,又用遞次自乘求假數法之一……二,又用遞次開方求假數法之一……七,又用前所得九十九數,求他假數法之一……三.求八線對數,對數用法.

其"對數比例"稱:"對數比例,乃西士若往,訥白爾(John Napier)所作,以借數與眞數對列成表,故名對數表.又有恩利格,巴理知斯(Henry Briggs)者,復加增修,行之數十年,始至中國.其法以加代乘;以減代除;以加倍代自乘,故折半卽開平方;以三因代再乘,故三歸卽開立方.推之至於諸乘方,莫不皆以假數相求,而得眞數.蓋爲乘除之數甚繁,而以假數代之甚易也.其立數之原,起於連比例,蓋比例四率;二率與三率相乘,一率除之,得四率.以遞加遞減之四

(20) 見東華續錄"乾隆"一四.

(21) 見東華錄"雍正"三.

數;第二數第三數相加,減第一數,則得第四數.作者有見於此,故設假數以加減代乘除之用,此表之所以立也".其言比例四率,幷遞加遞減之四數,與穆尼閣解析對數之大意相同.

其"明對數之原"與"明對數之綱"則設下列各表,如(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7)以見"假數可隨意而定."因便利起見,用(5),(6),(7)之假數.因"乘除之數始於一,故一不用乘,亦不用除;而加減之數始於0,故0無可加,亦無可減也"."故1之假數,必定爲0",如$\log 1=0$是也."而一與十,十與百,百與千,……皆爲加十倍之相連比例率.然其數皆爲一,但遞進一位",如(5).且如是則"眞數不同,而位數同者,其假數雖不同,而首位必同".如(6),首位幷爲0,又"眞數相同,而遞進幾位者,其假數首位必遞加幾數,而次位以後却相同".如(7)是也.

其"明對數之目"有(1)"用中比例求假數法",則因"凡連比例率,以首率末率兩眞數相乘開方,即得中率之眞數;以首率末率兩假數相加折半,即得

眞數	假數
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8

(1)

眞數	假數
1	4
3	5
9	6

(3)

眞數	假數
1	8
3	5
9	2

(4)

眞數	假數
2	3
4	5
8	7
16	9

(2)

眞數	假數
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8

(5)

眞數	假數
2	0.3010299957
3	0.4771212547
4	0.6020599913
5	0.6989700043
6	0.7781512504

(6)

眞數	假數
11	1.0413926852
110	2.0413926852
1100	3.0413926852
11000	4.0413926852
110000	5.0413926852

(7)

中率之假數",如

眞數　$1:x=x:10$, 則 $x=\sqrt{1\times 10}=3.1622777$

假數　$0-y=y-1$, 又 $y=\frac{0+1}{2}=0.500$

故 $\log 3.1622777=0.500$ 是爲第一次.

如求 log 9 則如表所列,第五次以前,幷以逐次所得之中率爲首率,以舊末率 10 爲末率,其五次以後,則因欲與所求 9 迫近之故,以逐次所得之中率爲首率,或爲末率;而以舊末率或首率與之相配.俾至二十六次,可得 $\log 9 = 0.95425125$ 焉.然而實際上 $\log 9 = 0.95424250944$. 蓋表中 9,"七空位之後,尙有奇零,故所得之假數,猶爲稍大".

	眞	假
第	10000000	00000000000
一	31622777	05000000000
次	100000000	10000000000
第	31622777	05000000000
二	56234132	07500000000
次	100000000	10000000000
第	56324132	07500000000
三	74989421	08750000000
次	100000000	10000000000
第	74989421	08750000000
四	86596432	09375000000
次	100000000	10000000000
第	86596432	09375000000
五	93057204	09687500000
次	100000000	10000000000
第	86596432	09375000000
六	89768713	09531250000
次	93057204	09687500000

第七次	89768713 91398170 93057204	09531250000 09609375000 09687500000
第八次	89768713 90179777 91398170	09531250000 09570312500 09609375000
第九次	89768713 90173333 90179777	09531250000 09550781250 09570312500
第十次	89768713 89970796 90173333	09531250000 09541015625 09550781250
第十一次	89970796 90072008 90173333	09541015625 09545898437 09550781250
第十二次	89970796 90021388 90072008	09541015625 09543457031 09545898437

第十三次	89970796 89996088 90021388	09541015625 09542236328 09543457031
第十四次	89996088 90008737 90021388	09542236328 09542846679 09543457031
第十五次	89996088 90002412 90008737	09542236328 09542541503 09542846679
第十六次	89996088 89999250 90002412	09542236328 09542388915 09542541503
第十七次	89999250 90000821 90002412	09542388915 09542465209 09542541503
第十八次	89999250 90000041 90000821	09542388915 09542427062 09542465209

第十九次	89999250	09542338915
	89999650	09542407989
	90000041	09542427062
第二十次	89999650	09542407989
	89999854	09542417526
	90000041	09542427062
第二十一次	89999845	09542417526
	89999943	09542422294
	90000041	09542427062
第二十二次	89999943	09542422294
	89999992	09542424678
	90000041	09542427062
第二十三次	89999992	09542424678
	90000016	09542425870
	90000041	09542427062
第二十四次	89999992	09542424678
	90000004	09542425274
	90000016	09542425870

第二十五次	89999992 89999998 90000004	09542424678 09542424976 09542425274
第二十六次	89999998 90000000 90000004	09542424976 09542425125 09542425274
log 9=09542425125		

又 (2) "用遞次自乘求假數法";

首引 $\log 2^1=\log\ \ 2=0.3010299957$

$\log 2^2=\log\ \ 4=0.6020599913=2\times 0.3010299957$

$\log 2^4=\log 16=1.2041199826=4\times 0.3010299957$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\log 2^n=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n\times 0.3010299957=N$

以證 $\log a^n=n\log a=N$, $\log a=\frac{N}{n}$. 就中 a 爲所求眞數, n 爲率(卽指數), N 爲假數.如欲求 log 2, 先記 2 之假數首位 0, $2^2=4$ 之假數首位 0, $2^4=16$ 之假數首位 1, $2^8=216$ 之假數首位 2, $2^{16}=65536$ 之假數首位 4, 逐次如是知 2^{16384} 之假數首位爲 4932. 則如前定義得 log 2=

$\frac{4932}{16384}=0.3010$，再進求 $2^{137446953472}$ 之假數首位為 41375-

653307，則 $\log 2=\frac{41375653307}{137446953472}=0.3010299959.$

率	眞	假
1	2	0
2	4	0
4	16	1
8	256	2
16	65536	4
32	4294967296	9
......	....	......
16384	....	4932
137446953472	....	41375653307

又 (3) "用遞次開方求假數法";

(a) 前證 $\log a^n=n\log a=N$，則 $\log a=\frac{N}{n}$.

亦可證 $\log a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log a=N_1$，則 $\log a=n\,N_1$，

如下表:

率	眞	假
1	256	24082399653
2	16	12041199826
4	4	6020599913

故　　$\log 256 = 2.4082399653$

則　　$\log 16 = \log 256^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{2} \times 2.4082399653$

$$= 1.2041199826$$

又　　$\log 4 = \log 256^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \times 2.4082399653$

$$= 0.6020599913.$$

換言之，　卽 $\log 256 = 2 \times 1.2041199826$ 或 4×0.6020599913

$$= 2.4082399653.$$

(*b*)"凡遞次開方，率皆用二倍"，如自乘一次爲2，自乘二次爲4，自乘三次爲8，每增乘一次則多一倍，如下表："凡有眞數求假數，皆以所求之數爲一率，眞數開方幾次，則假數必折半幾次"，在前"用中比例求假數法"，已見其例.

眞數　$1 : x = x : 10$，　則　$x = \sqrt{1 \times 10} = 3.1622777$

假數　$0 - y = y - 1$　　　$y = \frac{0+1}{2} = 0.50$

$$\therefore \quad \log 3.1622777 = 0.50$$

"今雖無第一率之假數,而苟得其折半第幾次之假數,則加倍幾次,必得第一率之假數.故以加倍第幾次之率數,與折半第幾次之假數相乘,卽得第一率之假數也."

累次乘數	率數	累次乘數	率數
1	2	26	67108864
2	4	27	134217726
3	8	28	268435456
4	16	29	536870912
5	32	30	1073741824
6	64	31	2147483648
7	128	32	4294967296
8	256	33	8589934592
9	512	34	17179869184
10	1024	35	34359738368
11	2048	36	68719476736
12	4096	37	137438953472

13	8192	38	274877906944
14	16384	39	549755813888
15	32768	40	1099511627776
16	65536	41	2199023255552
17	131072	42	4398046511104
18	262144	43	8796093022208
19	524288	44	17592186044416
20	1043576	45	35184372088832
21	2097152	46	70368744177664
22	4194304	47	140737488355328
23	8388608	48	281474976710656
24	16777216	49	562949953421312
25	33554432	50	1125899906842624

(c) "凡眞數不可與假數爲比例者,因眞數開方,假數折半,其相比之分數不同,若開方至於數十次,則開方之數,卽與折半之數相同",如前"用中比例求假數法",幷參下表知10在第二十一次以下,開方之數,已與折半之數相同.

或 $10^{1/2^{(n+1)}}=\sqrt{1+E_n}=1+\frac{1}{2}E_n$ 時，則 $\log 10^{1/2^{(n+1)}}$

$$=\log(1+E_n)^{1/2}=\log\left(1+\frac{1}{2}E_n\right)={}^{1}\Big/{}_{2}(n+1).$$

又因 $10^{1/2^{(n+1)}}=1+E_{n+1}$，則 $\frac{1}{2}E_n:{}^{1}\Big/{}_{2}(n+1)$

$$=E_{n+1}:{}^{1}\Big/{}_{2}(n+1)=1:\mu.$$

如 $10^{1/2^{54}}=\sqrt{1+0.\overset{15}{\underset{0}{}}25563829864006470}$

$$=1+0.\overset{15}{\underset{0}{}}12781914932003235^{(22)}$$

$$\frac{1}{2^{54}}=0.\overset{16}{\underset{0}{}}55511151231257827 0.$$

則 $\frac{12781914932003235}{55511151231257827 0}=\frac{10000000000000000}{\mu=43429448190325180 4}$

卽 $\log 10^{1/2^{54}}=\log\left(1+0.\overset{15}{\underset{0}{}}1\right)=0.\overset{16}{\underset{0}{}}\mu$

$$=0.\overset{16}{\underset{0}{}}43429448190325180 4$$

而 $\mu=43429448190325180 4$ 是爲對數根(或模數).[23]

---

(22) 茲爲便利起見，應用新符號，如 $0.\overset{15}{\underset{0}{}}$ 謂小數點下有十五空位，他倣此，如 $0.\overset{4}{\underset{0}{}}58=0{,}000058$ 是也.

(23) 李善蘭譯代微積拾級稱爲"中國對數表根".

故"凡求假數者,皆以眞數開方至幾十次,首位第一,又得空十五位,則以其後之零數,與此所得之假數爲比例,卽得其開方第幾十次之假數.按前率數乘之,卽得第一率之假數也."

眞數遞次開方表	
	10
1	3.16227766016837933199889354
2	1.77827941003892280119730413
3	1.333521432163324025665389308
4	1.154781984689458179661918213
5	1.0746078283213174972138176538
6	1.0366329284376979972906273131
7	1.0181517217181818414737238144
8	1.0090350448414474377590051301
9	1.0045073642344625156646706112
10	1.0022511482929129154656117367
11	1.00112494139987987588539551805
12	1.00056231260220863661849591839

13	1.0002811167877801323992 4964325
14	1.0001405485169472581627 6732715
15	1.0000702712894114355388 1170845
16	1.0000351352774618566085 8130777
17	1.0000175674844226738338 4678274
18	1.0000087837036346121465 7407431
19	1.0000043918421731672362 8188083
20	1.0000021959186755542033 1707719
21	1.0000010979587350204097 5472940
22	1.0000005489792168211146 2660 2504
23	1.0000002744895707382950 9125 4499
24	1.0000001372447759510832 8269 5723
25	1.0000000686223856210257 3718 7482
26	1.0000000343111922218829 1275 0208
27	1.0000000171555959637847 1993 8791
28	1.0000000085777979451030 5117 5888
29	1.0000000042888889633541 9842 9013
30	1.0000000021444494793777 6742 9704

31	1.000000001072224739114050769268
32	1.000000000536112369413317148314
33	1.000000000268056184670731515087
34	1.000000000134028092326383992777
35	1.000000000067014046160946555196
36	1.000000000033507023079911917300
37	1.000000000016753511539815618576
38	1.000000000008376755769872724269
39	1.000000000004188377884927590879
40	1.000000000002094188942461602625
41	1.000000000001047094471230253110
42	1.000000000000523547235614989504
43	1.000000000000261773617807460489
44	1.000000000000130886808903721678
45	1.0000000000000654434044518586975
46	1.00000000000003272170222592881337
47	1.00000000000001636085111296427283
48	1.00000000000000818042555648210295

49	1.00000000000000409021277824104311
50	1.00000000000000204510638912051946
51	1.00000000000000102255319456025921
52	1.00000000000000051127659728012947
53	1.00000000000000025563829864006470
54	1.00000000000000012781914932003235

眞數遞次開方表	
	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125
6	0.015625
7	0.0078125
8	0.00390625
9	0.001953125

10	0.0009765625
11	0.00048828125
12	0.000244140625
13	0.0001220703125
14	0.00006103515625
15	0.000030517578125
16	0.0000152587890625
17	0.00000762939453125
18	0.000003814697265625
19	0.0000019073486328125
20	0.00000095367431640625
21	0.000000476837158203125
22	0.0000002384185791015625
23	0.00000011920928955078125
24	0 000000059604644775390625
25	0.0000000298023223876953125
26	0.00000001490116119384765625
27	0.000000007450580596923828125

28	0.0000000037252902984619140625
29	0.00000000186264514923095703125
30	0.000000000931322574615478515625
31	0.0000000004656612873077392578125
32	0.00000000023283064365386962890625
33	0.000000000116415321826934814453125
34	0.0000000000582076609134674072265625
35	0.0000000000291038304567337036132812
36	0.0000000000145519152283668518066406
37	0.0000000000072759576141834259033203
38	0.0000000000036379788070917129516601
39	0.0000000000018189894035458564758300
40	0.0000000000009094947017729282379150
41	0.0000000000004547473508864641189575
42	0.0000000000002273736754432320594787
43	0.0000000000001136868377216160297393
44	0.0000000000000568434188608080148696
45	0.0000000000000284217094304040074348

46	0.0000000000000142108547152020037174
47	0.00000000000000710542735760100185 87
48	0.00000000000000355271367880050092 93
49	0.00000000000000177635683940025046 46
50	0.00000000000000088817841970012523 23
51	0.00000000000000044408920985006261 61
52	0.00000000000000022204460492503130 80
53	0.00000000000000011102230246251565 40
54	0.00000000000000005551115123125782 70

(*d*) 如求 log 2, 先令 $2^{10}=1024$. 又令 10^8 除之得 1.024.

此時首位已為1,乃如前例開方四十七次,即得1下有十五空位之數.

$$1.024^{1/2^{47}}=1.\substack{15\\0}\,16851605705394977$$

如前比例,反求之, $1:\mu=16851605705394977:x$.

$$\therefore \qquad x=731855936906239268,$$

或 $$\log(1.024)^{1/2^{47}}=0.\substack{16\\0}\,731855936906239268.$$

如前率數表,

$$\log (1.024)^{1/2^{47}} = \log 1.024^{1/2^{47}}$$

$$= \log 1.024^{\frac{1}{140737488355328}}$$

$$\therefore \quad \log 1.024 = 140737488355328 \times 0.\overset{16}{0}731855936906239268$$

$$= 0.0102999566398119526 5^{(24)}$$

而 $$\log 1024 = 3.0102999566398119526 5 = \log 2^{10}$$

$$\therefore \quad \log 2 = \frac{1}{10} \times \log 1024$$

$$= 0.30102999566398119526 5.$$

(*e*) "凡求假數,眞數開方之次數愈多,則所得之假數愈密.然用假數不過至十二位,……故眞數開方至二十七次,卽可以立率."

因 $$\log 10^{1/2^{34}} = 0.\overset{9}{0}134028092326383992777.$$

---

(24) 其證詳李譯代數學卷十二,卽

$$\log_e a = \frac{a^x - 1}{x}, \quad 或 \quad \log_e z = \left(z^{\frac{1}{2^{47}}} - 1\right) \times 2^{47}$$

$$\sqrt[2^{34}]{10}=0.\overset{10}{0}582076609134674072265\ 65.$$

而 $$\frac{134028092326383992777}{582076609134674072265}=\frac{1000000000000000000000}{\beta=434294481874147997206955}.$$

又 $$\log (1.024)^{1/2^{27}}=0.\overset{9}{0}167018930501419482\,62$$

$$1:\beta=167018\cdots\cdots8262:x,$$

$$x=767406570913770890701439$$

$$\log (1.024)^{1/2^{27}}=0.\overset{10}{0}767406570913770890701439$$

$$\therefore\qquad \log 2=0.3010299956640$$

"此法較之前法,開方省二十次,而所得之數同,故求假數者,用此法亦便也."

(*f*) "凡開方之數,與折半之數雖不同,然而不同之較,遞次漸少.故又有相較之法.至開方第十次以後,則以較數相減,即得開方之數."

如求 log 6, 如前 (*d*) 例, 先令 $6^9=10077696$, 又令 10^7 除之得 1.0077696, 此時首位已爲 1.逐次開方十一次, 其每次之商以 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_{11}$ 表之, 其值如下:

		1.0077696
$a_1=1+E_1$	1	1.003877283336962456663846551
$a_2=1+E_2$	2	1.001936766136946616758702229
$a_3=1+E_3$	3	1.000967914639099017288907720
$a_4=1+E_4$	4	1.000483840268846629854925 35
$a_5=1+E_5$	5	1.000241890878824685638087 27
$a_6=1+E_6$	6	1.000120938126397134594391 94
$a_7=1+E_7$	7	1.000060467235055309680160 05
$a_8=1+E_8$	8	1.000030233160505657759647 94
$a_9=1+E_9$	9	1.000015116465999056729504 88
$a_{10}=1+E_{10}$	10	1.000007558204436301214290 76
$a_{11}=1+E_{11}$	11	1.000003779095077370805241 25

其"第五次開方",1下空位E_5,"與第四次開方所得(E_4)折半之數漸近",故令

$$第5次之較=\frac{E_4}{2}-E_5=d_5$$

$$\left\{\begin{array}{l}第6次之一較=\frac{E_5}{2}-E_6=d_{6,1}\\ 第6次之二較=\frac{d_5}{4}-d_{6,1}=d_{6,2}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{第7次之一較}=\dfrac{E_6}{2}-E_7=d_{7,1}\\[2ex]\text{第7次之二較}=\dfrac{d_{6,1}}{4}-d_{7,1}=d_{7,2}\\[2ex]\text{第7次之三較}=\dfrac{d_{6,2}}{8}-d_{7,2}=d_{7,3}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{第8次之一較}=\dfrac{E_7}{2}-E_8=d_{8,1}\\[2ex]\text{第8次之二較}=\dfrac{d_{7,1}}{4}-d_{8,1}=d_{8,2}\\[2ex]\text{第8次之三較}=\dfrac{d_{7,2}}{8}-d_{8,2}=d_{8,3}\\[2ex]\text{第8次之四較}=\dfrac{d_{7,3}}{16}-d_{8,3}=d_{8,4}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{第9次之一較}=\dfrac{E_8}{2}-E_9=d_{9,1}\\[2ex]\text{第9次之二較}=\dfrac{d_{8,1}}{4}-d_{9,1}=d_{9,2}\\[2ex]\text{第9次之三較}=\dfrac{d_{8,2}}{8}-d_{9,2}=d_{9,3}\\[2ex]\text{第9次之四較}=\dfrac{d_{8,3}}{16}-d_{9,3}=d_{9,4}\\[2ex]\text{第9次之五較}=\dfrac{d_{8,4}}{32}-d_{9,4}=d_{9,5}\text{(25)}\end{array}\right.$$

此時 $d_{9,5}=0$, 故 $\dfrac{d_{8,4}}{32}=d_{9,4}$, "故自第十次以後, 則不

(25) 說明見傅九淵有不爲齋算學卷三"對數表開方用較省算法解".

用開方,"令第10次之四較 $=\frac{d_{9,4}}{32}=d_{10,4}$,

由此逆推之,得;

$$\begin{cases}\text{第10次之四較}=\frac{d_{9,4}}{32}={}_{10,4}\\ \text{第10次之三較}=\frac{d_{9,3}}{16}-d_{10,4}=d_{10,3}\\ \text{第10次之二較}=\frac{d_{9,2}}{8}-d_{10,3}=d_{10,2}\\ \text{第10次之一較}=\frac{d_{9,1}}{4}-d_{10,2}=d_{10,1}.\end{cases}$$

同理

$$\begin{cases}\text{第11次之四較}=\frac{d_{10,4}}{32}=d_{11,4}\\ \text{第11次之三較}=\frac{d_{10,3}}{16}-d_{11,4}=d_{11,3}\\ \text{第11次之二較}=\frac{d_{10,2}}{8}-d_{11,3}=d_{11,2}\\ \text{第11次之一較}=\frac{d_{10,1}}{4}-d_{11,2}=d_{11,1}.\end{cases}$$

而 $E_{11}=\frac{E_{10}}{2}-d_{11,1}$, 又 $a_{11}=1+E_{11}$

逐次如是,得 $a_{23}=1.\overset{9}{\underset{0}{}}922628891043076667$

$$=1.0077696^{1/2^{23}}$$

如前(c)例, $1:\beta=922628\cdots\cdots7667:x$

$$x=400692636197652$$

$$\log(1.0077696)^{1/2^{23}}=0.\overset{10}{\underset{0}{}}400692636197652$$

$$\log 10077696=7+2^{23}\times 0.\overset{10}{\underset{0}{}}400692636197652=\log 6^9.$$

$$\therefore\quad \log 6=0.77815125038$$

(*g*) 凡求假數,先求得 1−9, 11−19, 101−109, 1001−1009, 10001−10009, ……, 1000000001−1000000009 九十九數之假數,而他數皆由此生.然此九十九數內,有以兩數相乘除而得者,則以兩假數相加減.數理精蘊表卷三……六,有對數闡微,卽示某數之相乘因子.就中無他數爲因子者,謂之數根.如 1−9 中之 2, 3, 7 可按前"用遞次開方求假數法"求之.至 1000001 以後,則又可用前遞次開方表內相近之數,比例而得之.

如求 $\log 1.000001$

因 $10^{1/2^{21}}=1+0.\overset{5}{\underset{0}{}}1097958735,\ \dfrac{1}{2^{21}}=0.\overset{6}{\underset{0}{}}4768371582\cdots\cdots$

$\therefore\quad 109758735:476837158=1:x,\quad x=4342943\cdots\cdots$

則 $\log 1.000001=0.\overset{6}{\underset{0}{}}4342943$

$$\log 1.000002=2x=0.\overset{6}{\underset{0}{}}86859$$

$$\log 1.000003=3x=0\ \overset{5}{\underset{0}{}}130286.$$

次如前說,因

$$10^{1/2^{19}}=1+0.\overset{5}{0}4391842173,\ \frac{1}{2^{19}}=0.\overset{5}{0}1907348632$$

$$\therefore\ 4391842173:1907348632=1:x,\quad x=17371740,$$

則
$$\log 1.000004=0.\overset{5}{0}17371740,$$

$$\log 1.000005=\frac{5}{4}x=0.\overset{5}{0}217147,$$

$$\log 1.000006=\frac{6}{4}x=0.\overset{5}{0}260576.$$

同理 $\log 1.000007$ 如前求得 x, 則 $\log 1000008=\frac{8}{7}x$, $\log 1000009=\frac{9}{7}x$, 至於 1.0000001 以後之假數, 并不用比例, 因 $\left(1+0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{6}{0}4342943$

又由 (c) 知 $\log\left(1-0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{16}{0}4342944$

則其間可用歸納法得

$$\log\left(1+0.\overset{6}{0}1\right)=0.\overset{7}{0}434294$$

$$\log\left(1+0.\overset{7}{0}1\right)=0.\overset{8}{0}434294$$

....

其九十九數之眞數假數如下表:

眞數	假數	眞數	假數
1	0	1001	000043407748
2	030102999566	1002	000086772153
3	047712125472	1003	000000093302
4	070259599133	1004	000173371281
5	069877000434	1005	000216606716
6	077815125038	1006	000259798072
7	084509804001	1007	000302947055
8	090208998699	1008	000346053211
9	095424250944	1009	000389116624
11	004135268516	10001	000004342728
12	007918124605	10002	000008685021
13	011394335231	10003	000013026881
14	014612805568	10004	000017568306
15	017609125506	10005	000021709297
16	020411998266	10006	000026049855
17	023044892138	10007	000030389978
18	025527250510	10008	000034729669

19	027875360095	10009	000039068925
101	000432137308	100001	000000434292
102	000860017176	100002	000000868580
103	001283722471	100003	000001302864
104	001703333930	100004	000001737143
105	002118929907	100005	000002171418
106	002530586526	100006	000002605689
107	002938377769	100007	000003039955
108	003342375549	100008	000003474217
109	003742649764	100009	000003908474

眞數	假數	眞數	假數
1000001	000000043429	100000006	000000002606
1000002	000000086859	100000007	000000003040
1000003	000000130288	100000008	000000003474
1000004	000000173717	100000009	000000003909
1000005	000000217147	1000000001	000000000043
1000006	000000260576	1000000002	000000000087

1000007	000000304005	1000000003	000000000130
1000008	000000347434	1000000004	000000000174
1000009	000000390863	1000000005	000000000217
10000001	000000004343	1000000006	000000000261
10000002	000000008686	1000000007	000000000304
10000003	000000013029	1000000008	000000000347
10000004	000000017372	1000000009	000000000391
10000005	000000021715	10000000001	000000000004
10000006	000000026058	10000000002	000000000009
10000007	000000030401	10000000003	000000000013
10000008	000000034744	10000000004	000000000017
10000009	000000039086	10000000005	000000000022
100000001	000000000434	10000000006	000000000026
100000002	000000000869	10000000007	000000000030
100000003	000000001203	10000000008	000000000035
100000004	000000001737	10000000009	000000000039
100000005	000000002171		

又(4)"用九十九求他假數法",

如下各例之數,爲 a, b, c 各數所組成,則其假數可以加減乘得之,如:

$$\log N=\log 10^n\times a=10^n\log a$$

$$\log N=\log a\times b=\log a+\log b$$

$$\log N=\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

又 $\log N=\log a\,b\,c=\log a+\log b+\log c$, 而 $a>b>c$.

$\log 20703=\log 20000\times 1.005\times 1.03=\log 20000+\log 1.005$
$+\log 1.03=4.31603328213$

反求之,則 $4.31603328213-\log 20000-$

$$\log 1.005-\log 1.03=0$$

$\therefore$ $4.31603328213=\log 20703.$

此義更擴張之,以求任意數,如求 log 23, "則以所知前位之整數累除之.除得累乘之眞數,則以其假數累加之,卽得所求之假數." 玆舉例以見之.

求 log 5689:

$\frac{\text{原實 } 5689}{\text{一法 } 5600}=1.01$ (一商) 餘 23	令 N 爲原實,
$5689-33=5656$ (二法)	則 $\frac{N}{r}=q_1+\frac{d_1}{r}$.
$=5600\times 1.01$	$N-d_1=rq_1$

$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{二法}\ 5656}=1.005$ (二商) 餘 4.72 $5689-4.72=5684.28$ (三法) $=5656\times 1.005$	$\frac{N}{N-d_1}=q_2-\frac{d_2}{N-d_1}$ $N-d_2=(N-d_1)q_2$ $=rq_1q_2$
$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{三法}\ 5684.28}=1.0008$ (三商) 餘 0.172576 $5689-0.172576=5688.827424$ (四法) $=5684.28\times 1.0008$	$\frac{N}{N-d_2}=q_3-\frac{d_3}{N-d_2}$ $N-d_3=(N-d_2)\times q_3$ $=rq_1q_2q_3$
$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{四法}\ 5688.827424}=1.00003$ (四商) 餘 0.00191117728 $5689-0.00191117728$ $=5688.998089$ (五法)	$\frac{N}{N-d_3}=q_4-\frac{d_4}{N-d_3}$ $N-d_4=(N-d_3)\times q_4$ $=rq_1q_2q_3q_4.$
逐次如是,至餘數幾等於零,即 八法 $=5688.999995$ 八商 $=1.0000000008$ 八餘 $=0000000000$	…………………………… $\frac{N}{N-d_7}=q_8-\frac{d_8}{N-d_7}$ $N-d_8=(N-d_7)\times q_8$ $=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8$

log 5689	因 $d_8=0$
$=\log 5600\times1.01\times1.005\times1.0008$	$\therefore\ N=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8.$
$\times1.00003\times1.0000003$	$\log N=\log r+\log q_1$
$\times1.0000003\times1.000000003$	$+\log q_2$
$\times1.0000000003$	$+\cdots\cdots$
$=3.75503593371$	$+\log q_8.$

最後言"求八線對數"及"對數用法"焉. 其對數表具小數十位.

清, 年希堯面體比例便覽(雍正十三年, 1735自序)稱: "夫假數者乃數學家之超法也, 其詳見數理精蘊中. 但其數加之則代乘, 減之則代除, 兩分之則開平方, 三分之則開立方, 四分之則開三乘方, 等而推之, 皆可爲也, 不亦超法乎?"

(4) 陳杰算法大成上編(道光二十四年, 1844金望欣序, 光緒戊戌(1898)浙江官書局重刊)卷四, 言: "對數", 蓋稗販數理精蘊之說也.

10. 對數簡法,續對數簡法,假數測圓

(5) 粤雅堂叢書刻本戴煦(1805–1860)求表捷術咸豐壬子(1852)自序稱"自道光乙巳(1845)至今歲,凡八易寒暑,演錄始竣."其中對數簡法二卷,前有道光乙巳(1845)項名達序,及戴煦自識.續對數簡法一卷,前有道光丁未(1847)項名達序,及丙午(1846)戴煦自識.假數測圓二卷,前有咸豐壬子(1852)戴煦自序,及咸豐丙辰(1856)夏鸞翔序.以上三書幷論及對數.

對數簡法(1845)卷上"開方七術","求開方表",蓋因舊法開方,事涉繁重,因以二項式求之.

如 $N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}\mp\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\pm\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots_{\circ}$$

$$N^m=(P+Q)^m$$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{P+1}$$

$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\cdots\cdots_{\circ}$$

$$N^m=(P+Q)^m$$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{2}$$

$$-\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{N}+\cdots\cdots.$$

又 $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots.$$

其所設開方表卽由此而得.開方表中右行爲眞數,左行爲假數之分子,而 2099152 爲公分母,如

$$\log 3.1622\cdots\cdots1684=\frac{1048576}{2099152},$$

$$\log 1.0001\cdots\cdots5169=\frac{128}{2099152},$$ 是也.

率	次	眞　數
2099152		10.
1048576	1	3.1622776601684
524288	2	1.7782794100389
262144	3	1.3335214321633
131072	4	1.1547819846895
65536	5	1.0746078283213

32768	6	1.0366329284377
16384	7	1.0181517217182
8192	8	1.0090350448414
4096	9	1.0045073642545
2048	10	1.0022511482929
1024	11	1.0011249413999
512	12	1.0005623126022
256	13	1.0002811167878
128	14	1.0001405485169
64	15	1.0000702717894
32	16	1.0000351352775
16	17	1.0000175674844
8	18	1.0000087837036
4	19	1.0000043618422
2	20	1.0000021959187
1	21	1.0000010979587

又 (1)"有開方表徑求諸對數"

$$\log 2 = \log 1.7782\cdots\cdots389 \times \frac{2}{1.7782\cdots389}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.1246826503807$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times\frac{1.1246826503807}{1.0746\cdots\cdots213}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0465982293630$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0366\cdots\cdots377\times\frac{1.0465982293630}{1.0366\cdots\cdots377}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0366\cdots\cdots377\times1.0096131433335$$

$$=\log 1.778\cdots89\times1.074\cdots13\times1.036\cdots377\times1.0090\cdots414\times\frac{1.0096131433335}{1.0090\cdots\cdots414}$$

逐次如是,得;

$$\log 2=\log 1.778\cdots89\times1.074\cdots13\times1.036\cdots77\times1.0090\cdots414\times1.0005623126022\times1.0000087837036\times1.0000010979589\times\frac{1.0000018198300}{1.0000010979587}(=1.000000721870)$$

$$=\frac{1}{2097152}\left[524288+65536+32768+8192+512+8+1+\frac{721870}{10979587}(=0.6574660)\right]$$

$=0.801029995663$. 其末位因在1以下,故以比例得之.

又 (2) "不用開方表求諸對數"

數理精蘊用九十九求他假數,戴氏則主張用 1−9, 至 10000001−10000009 之七十二數,已經足用.其求七十二數,亦不用數理精蘊之"用中比例,用遞次自乘,用遞次開方"各法,惟用假設對數之法,其假設對數卽自然對數也.

先假設 (a) $\log_e 1.\overset{6}{0}1=1.\overset{6}{0}1$

則 $\log_e 1.\overset{6}{0}2=\log_e\left(1.\overset{6}{0}1\times\dfrac{1.\overset{6}{0}2}{1.\overset{6}{0}1}\right)$

$$=\log_e\left(1.\overset{6}{0}1\times 1.\overset{7}{0}9999999\right)$$

$$=1.\overset{6}{0}1999999999.$$

又 $\log_e 1.\overset{6}{0}3=\log_e\left(1.\overset{6}{0}1999999999\times\dfrac{1.\overset{6}{0}3}{1.\overset{6}{0}1999999999}\right)$

$$=\log_e\left(1.\overset{6}{0}1999999999\times 1.\overset{7}{0}9999997\right)$$

$$=2.\overset{6}{0}29999997.$$

逐次如是,至於 $\log_e 1.\overset{6}{0}9$

(b) 次求 $\log_e 1.\overset{5}{0}1$ 則如上例得

$\log_e 1.\overset{5}{0}1 = 1.\overset{6}{0}99999955$, 其 $\log_e 1.\overset{5}{0}2$ 以下,則用二次除法,如:

$$\log_e 1.\overset{5}{0}2 = \log_e\left[1.\overset{5}{0}1 \times \frac{1.\overset{5}{0}2}{1.\overset{5}{0}1}\left(=1.\overset{6}{0}99999900\right)\right]$$

$$=\log_e\left[1.\overset{5}{0}1 \times 1.\overset{6}{0}9 \times \frac{1.\overset{6}{0}99999900}{1.\overset{6}{0}9}\left(=1.\overset{7}{0}9999891\right)\right] = 1.\overset{5}{0}199999810.$$

逐次如是,至於 $\log 1.\overset{5}{0}9$ 均用二次除法,其 $1.\overset{4}{0}2$ 以下,用三除法, $1.\overset{3}{0}2$ 以下,用四除法, $1.\overset{2}{0}1$ 以下,用五除法, $1.\overset{1}{0}2$ 至 $1.\overset{1}{0}9$ 以及 1.1,用六除法,1.2 至 1.9 用七除法.

因得　假設對數 $\log_e 2 = 0.69314721517968$

假設對數 $\log_e 10 = 2.30258520799943$

以 $\log_e 10$ 為除法,除逐數之假設對數,即得其定率對數.

如　$\log 2 = \frac{1}{\log_e 10} \times \log_e 2 = 0.301029995664$ 是也.

又(3)"有七十二對數,求諸對數"

如 $\log 5689=\log(10^3\times 5.689)=\log\left[10^3\times 5\times\frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$

$$=\log\left[10^3\times 5\times\frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times\frac{1.1378}{1.1}(=1.0343636363636)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times\frac{1.0343636363636}{1.03}\right.$$

$$\left.(=1.0042365401589)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times 1004\times\frac{1.0042365401589}{1.004}\right.$$

$$\left.(=1.0002355977678)\right]$$

……………………………

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times 1.004\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}2\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{0}3\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{0}5\right.$$

$$\left.\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5\times\frac{1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5904790}{1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5}\left(=1.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}904790\right)\right]$$

其末項 $\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}904790$ 由 $\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}1=0.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}43429$ 比例而得 $0.\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}39294$.

故 $$\log 5689=\log 10^{3}+\log 1.1+\cdots\cdots+\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5$$

$$+0.\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}39294$$

$$=3.755035933768.$$

戴氏并因此義,以求 $\log(n+1)$, 其 $\log n$ 爲已知,如已知 $\log 36$ 求 $\log 37$, 因 $\log\dfrac{n+1}{n}=\log\dfrac{37}{36}=\log 37-\log 36.$

故 $$\log 37=\log 36+\log\Big(1.02\times 1.007\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}6\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{0}2$$

$$\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}9\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}132839\Big)$$

$$=\log 36+\log 1.02+\log 1.007+\cdots\cdots$$

$$+\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}9\ +0.\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{0}5769$$

$$=1.568201724068.$$

續對數簡法 (1846) 卷首列"以本數爲積,求折小各率四術"及"以本數爲根,求倍大各率四術".

其"求對數根",因對數根卽 $\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{0}1$. 數理精蘊舊法由五十四次開方比例而得.

茲因 $$10^{\frac{1}{32}}=1.074607828321317497=1+m \text{ 稱爲用數,}$$

$$\frac{1+m}{m}=14.403419218868653\,9=n \text{ 稱爲除法,}$$

$$\mu=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=1\div 2.302585092994045\underline{7}7$$

$$=0.4342944819032518\underline{1}1$$

蓋戴煦本項名達"以本數爲積,求折小各率,第一術",

$$N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2n+1}{3n}$$

$$\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots.$$

而 A 爲第一數, B 爲第二數, C 爲第三數,以下同此, n 爲率分. 戴氏謂 n 爲極大時,則 $n+1$ 與 n 約略相等, $2n+1$ 與 $2n$; 與 $3n+1$ 與 $3n$ 亦約略相等,故上式可化爲:

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}$$

$$+\frac{3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots$$

如上例, $(1+m)^{\frac{1}{32}}=1+\frac{1}{32n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\right)$

惟此處, $n=\frac{1+m}{m}.$

又 $\log 10^{\frac{1}{32\times32}}=\frac{1}{32\times32}\log 10=\frac{1}{32\times32}.$

故求對數根μ時,如數理精蘊(3)(c)得

$$\mu=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.434294481903251811\text{ 也.}$$

其"論用數"謂欲求某數(如N者)之對數,當先已知對數之若干數乘之,或除之,或屢乘之,或開之,再以10^r除之,令成用數$1+y$之形,而y爲小數.

即 $$\frac{nN}{10^r}=1+y,\quad\text{或}\quad N=10^r(1+y)\times\frac{1}{n},$$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)-\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N}{n(10^r)}=1+y,\quad\text{或}\quad N=10^r(1+y)\times n,$$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)+\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N^n}{10^r}=1+y,\quad\text{或}\quad N=\left[10^r(1+y)\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\log_{10}N=\frac{1}{n}\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\};$$

又 $$\frac{N^{\frac{1}{n}}}{10^r}=1+y,\quad\text{或}\quad N=\left[10^r(1+y)\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\log_{10}N=n\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\}.$$

故求$\log_{10}N$,先求其用數$1+y$之對數,

因$\log_{10}(1+y)=\mu\log_e(1+y)$　　(y=小數)

$$=\mu\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\}$$

此與顧觀光第四術,及代數學(1859)卷十三第(1)式,微積溯源(1874)第四十二款所載相同.

就中括弧所記,蓋用其"以本數爲積,求折小各率,第二術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

如前例 n 爲極大時,則 $n-1$ 與 n, $2n-1$ 與 $2n$, …… 等幷約略相等,故可化爲

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

又 $P=1$

故 $(1+y)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$

如上例去其首位1,與 μ 爲比例卽得.

或因 $\log(1+y)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log(1+y)$

故求對數根 μ 時,如數理精蘊(3)(c)得:

$$\mu=1\div\frac{n}{\log(1+y)}\cdot\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{\log(1+y)}{\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)}$$

$$\therefore\qquad \log(1+y)=\mu\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$

戴氏謂"所求之用數,均位少而無畸零,(如7用數1+0.008之0.008),不惟乘法止一二位,抑且用第二術,則除法卽單一($P=1$),可以省除,故雖降法稍難,而終以第二術爲便也."

其"附對數還原"內"論借用本數",以

$$\log 1.000001=0.\overset{6}{\underset{0}{}}4342942647562$$

爲借用本數之對數.

其"論借用率數",假如

$$\log N=1.3617278360175928784$$

求借用率數.

則 $\log N=\log 10+\log 2+\log 1.1+\log 1.04+\log 1.005$

$$+\log 1.0002+\log 1.00004+\log 1.000003$$

$$+0.\overset{6}{\underset{0}{}}2296151084564(-z),$$

其最後之$0.\overset{6}{\underset{0}{}}2296151084564$未見於次$1-9, 1.1-1.9,\cdots\cdots$

$1.000001-1.000009$表內,命之爲z,

則 $$t=\frac{z}{\log_{10}1.000001}$$ 稱爲借用率數.

上式,按定義 $z=t.\log_{10}1.000001=\log_{10}\overline{1.000001}^{\,t}$

而 $$\log N=\log 10+\log 2+\cdots\cdots+\log 1.000003$$

$$+\log_{10}\overline{1.000001}^{\,t}.$$

今按"以本數爲根,求倍大各率,第二術",

$$N^m=(P+Q)^m=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots$$

因 $P=1,\ Q=0.000001>1,$

故 $$(1.00001)^t=1+(0.000001)t-\frac{1}{2}(0.000001)^2t(1-t)-$$

$$-\frac{1}{3}(0.000001)^3t(1-t)(2-t)-\cdots\cdots$$

$$=1.\overset{6}{\underset{0}{}}5287084656192.$$

故 $$N=10\times2\times1.1\times1.04\times1.005\times1.0002\times1.00004$$

$$\times1.000003\times1.\overset{6}{\underset{0}{}}5287084656192.$$

$$=23.$$

眞數	假數　小餘
2	0.30102999566398119$\underline{49}$
3	0.47712125471966243$\underline{71}$
4	0.60205999132796238$\underline{98}$
5	0.69897000433601880$\underline{51}$
6	0.77815125038364363$\underline{20}$
7	0.84509804001425688$\underline{22}$
8	0.90308998699194358$\underline{47}$
9	0.95424250943932487$\underline{42}$
1.1	0.04139268515822504$\underline{17}$
1.2	0.07918124604762482$\underline{69}$
1.3	0.11394335230683676$\underline{96}$
1.4	0.14612803567824802$\underline{71}$
1.5	0.17609125905568124$\underline{22}$
1.6	0.20411998265592477$\underline{96}$
1.7	0.23044892137827392$\underline{78}$
1.8	0.25527250510330606$\underline{91}$

1.9	0.2787536009528289619
1.01	0.00432137378264425665
1.02	0.00860017176191175598
1.03	0.01283722470517222046
1.04	0.01703333929878035543
1.05	0.02118929906993807744
1.06	0.02530586526668412664
1.07	0.02938377768510964402
1.08	0.03342375548694970112
1.09	0.03742649794062363338
1.001	0.00043407747931864407
1.002	0.00086772153122691225
1.003	0.00130093302041811186
1.004	0.00173371280900052297
1.005	0.00216606175650767762
1.006	0.00259798071990861222
1.007	0.00302947055361800770
1.008	0.00346053210950648860

1,009	0.0038911662369105216
1.0001	0.0000434272768626696
1.0002	0.0000868502116489572
1.0003	0.0001302688052270609
1.0004	0.0001736830584649187
1.0005	0.0002170929722302082
1.0006	0.0002604985473903469
1.0007	0.0003038997848124919
1.0008	0.0003472966853635408
0.0009	0.0003906892499101310
1.00001	0.0000043429231043084
1.00002	0.0000086858027806263
1.00003	0.0000120286390284893
1.00004	0.0000173714318498092
1.00005	0.0000217141812451551
1.00006	0.0000260568872153969
1.00007	0.0000303995497613986
1.00008	0.0000347421688840333

1.00009	0.0000390847445841675
1.000001	0.0000004342942647562
1.000002	0.0000008685880952187
1.000003	0.0000013028814913885
1.000004	0.0000017371744532664
1.000005	0.0000021714669808533
1.000006	0.0000026057590741501
1.000007	0.0000030400507331577
1.000008	0.0000034743419568767
1.000009	0.0000039086327483083

假數測圓卷之上有"求負算對數"二術,蓋求不滿單一之眞數.

如 (1), $\log_{10} 0.98 = \log_{10}(1-0.02) = \mu \log_e (1-0.02)$

$$= \mu\left\{-0.02 - \frac{(0.02)^2}{2} - \frac{(0.02)^3}{3} - \frac{(0.02)^4}{4} - \cdots\cdots\right\}$$

$$= -0.00877392431.$$

而　　$\log 98 = 2 + \log 0.98 = 1.99122607569.$

就中括弧內所記,蓋用續對數簡法內"以本數爲積,求折小各率,第三術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$-\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3n-1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots.$$

又 $P=1,\quad Q=0.02$

如前例去其首位1,與μ為比例卽得.

上式與代數學卷十三,第(2)式相同.

又如(2), $\log_{10}0.98=\log_{10}(1-0.02)=\mu\log_e(1-0.02)$

$$=\mu\left\{-\frac{0.02}{0.98}+\frac{1}{2}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$=0.00877392431.$$

就中括弧內所記,蓋用續對數簡法內"以本數為積,求折小各率,第四術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

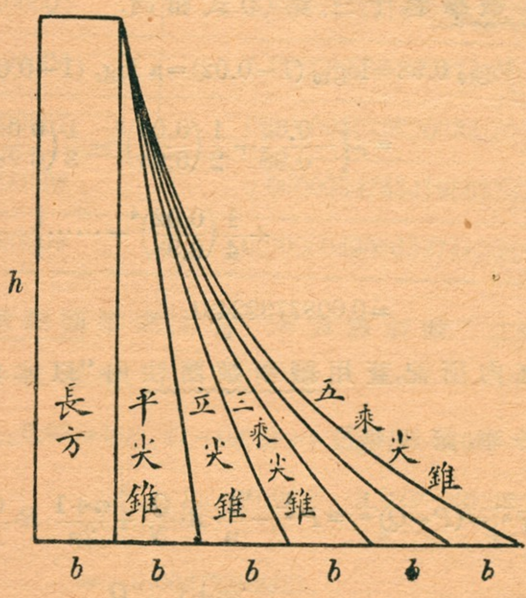
$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots$$

又 $P=1,\quad Q=0.02.$

如前例去其首位1與μ為比例卽得,

11. 方圓闡幽, 弧矢啟祕, 對數探源

李善蘭著方圓闡幽, 弧矢啟祕, 對數探源三書, 不題著作時代. 道光丙午(1846)顧觀光序四元解, 對數探源, 其於四元解序稱李君又有弧矢啟祕. 觀此則諸書約成於道光丙午(1846).



方圓闡幽第七條, 第八條謂平尖錐第一層一, 第二層二, 第三層三; 立尖錐第一層一, 第二層四, 第三層九, 由平方疊之; 三乘尖錐第一層一, 第二層八,

第三層二十七,由立方疊之;四乘尖錐第一層一,第二層十六,第三層八十一,由三乘方疊之,……,而以高乘底爲實,本乘方數加一爲法除之,得尖錐積.

原書不言其故,玆補證之:

如　長方,　$S_h^0=hb$,

　平尖錐,　$S_h^1=\frac{1}{2}hb$,觀圖自明.

又　立尖錐,　$S_h^2=\frac{1}{3}hb$,

因

$$S_h^2=\frac{1}{2}\left\{\left[b\left(1-\frac{h}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2\right]\right.$$

$$+\left[b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{h-2}{h}\right)^2\right]$$

$$+\cdots\cdots+\left[b\left(1-\frac{2}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2\right]$$

$$\left.+\left[b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{0}{h}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{b}{h^2}\left(0^2+1^2+1^2+2^2+\cdots\cdots+\overline{h-2}^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overline{h-1}^2+\overline{h-1}^2+h^2\right)\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^2}\left\{2[1^2+2^2+\cdots\cdots+h^2]-h^2\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^2}\left(\frac{2h^3+h}{3}\right)$$

$$=\frac{hb}{3}+\frac{b}{6h}$$ 若 h 爲極大, b 爲極小, 則

此式第二項可去之.

得　$S^2_{h=\infty}=\frac{1}{3}hb.$

又　三乘尖錐, $S^3_h=\frac{1}{4}hb.$

同理　$$S^3_h=\frac{b}{2h^2}\left\{2[1^3+2^3+\cdots\cdots+h^3]-h^3\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^3}\left(\frac{2h^4+2h^2}{4}\right)$$

$$=\frac{hb}{4}+\frac{b}{4h}.$$　得　$S^3_{h=\infty}=\frac{1}{4}hb.$

又　四乘尖錐, $S^4_h=\frac{1}{5}hb.$

同理　$$S^4_h=\frac{b}{2h^4}\left\{2[1^4+2^4+\cdots\cdots+h^4]-h^4\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^4}\left(\frac{2h^5}{5}+\frac{2h^3}{3}-\frac{h}{15}\right)=\frac{hb}{5}+\frac{b}{3h}-\frac{b}{30h^3}.$$

若 h 爲極大, b 爲極小, 則此式第二項以下可去之, 得

$$S^4_{h=\infty}=\frac{1}{5}hb.$$

又 五乘尖錐, $S\frac{5}{h}=\frac{1}{6}hb$.

同理 $$S\frac{5}{h}=\frac{b}{2h^5}\left\{2[1^5+2^5+\cdots\cdots+h^5]-h^5\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^5}\left\{\frac{2h^6}{6}+\frac{5h^4}{6}-\frac{h^2}{6}\right\}=\frac{hb}{6}+\frac{5b}{12h}-\frac{b}{12h^3}.$$

得 $$S^5_{h=\infty}=\frac{hb}{6}.$$

按歸納法, $S^m_{h=\infty}=\frac{hb}{m+1}$.

原書因無證法,故頗爲人所懷疑;吳起潛稱:"李壬叔……浸淫於尖錐,其所著方圓闡幽,弧矢啟祕,對數探源,……所據之理論,頗有闕而未完者."(26)

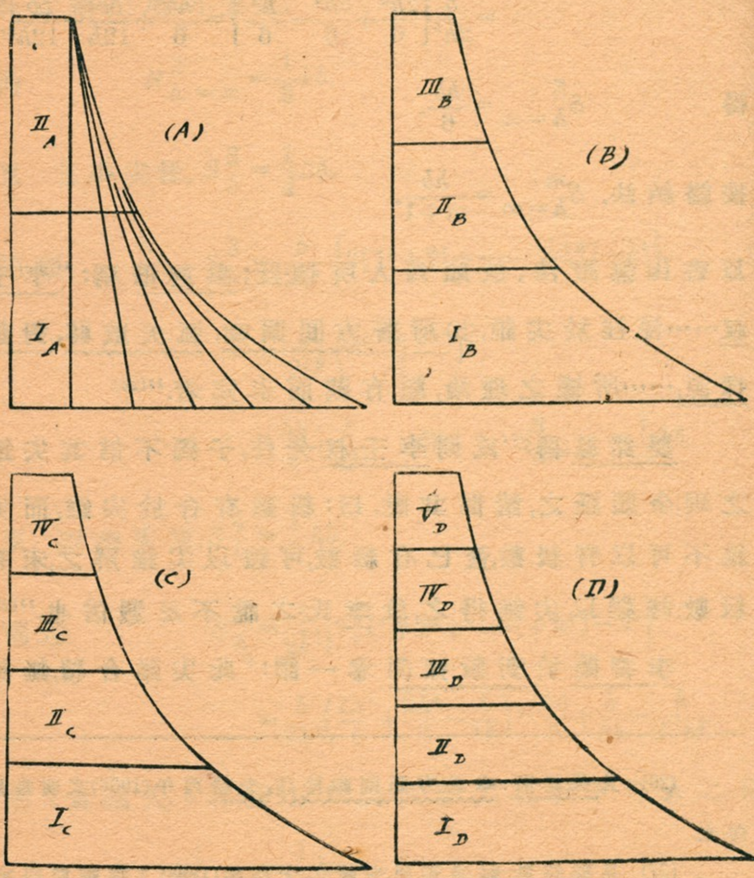
龔銘鳳稱:"或問李壬叔先生,子獨不信其尖錐之理,余頗疑之,請聞其說.曰:級數有合於尖錐,而尖錐不可以釋級數,蓋已有級數,可強以尖錐解之,未有級數,終難以尖錐得之,故李氏之說不足憑信也."(27)

李善蘭於對數探源卷一謂:"此尖錐合積,無論

(26) 見吳起潛:李氏方圓闡幽拾遺,光緒丙午(1906)文明書局印本.

(27) 見龔銘鳳:雜學答問,光緒二十四年(1898)上海書局印本.

截為幾段,自最下第二段以上,其積皆同."如截圖 A 為二段, B 為三段, C 為四段, D 為五段,則 $II_A=II_B=II_C=II_D$; $III_B=III_C=III_D$, $IV_C=IV_D$ 是也.



蓋如 (D), 則 $S^{\frac{4}{5}}=S^{\frac{m-1}{m}}=II_D+III_D+IV_D+V_D.$

$$=hb\left\{1.\frac{m-1}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\} \quad (1)$$

又如 (C), 則 $S^{\frac{3}{5}}=S^{\frac{m-2}{m}}=II_C+III_C+IV_C.$

$$=hb\left\{1.\frac{m-2}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-2}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-2}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\} \quad (2)$$

如 $hb=1$, 則 (1) 式爲 $\log_e\frac{m}{1}=\log_e m-\log_e 1,$

(2) 式爲 $\log_e\frac{m}{2}=\log_e m-\log_e 2.$

兩式相減得 $\log_e 2-\log_e 2-\log_e 1=II_D$, 而 $\log_e 1=0$. 故 $II_D=\log_e 2$.

就中 m 爲任何數, $II=\log_e 2$ 并爲眞, 卽 $II_A=II_B=II_C=II_D$ 也, 餘倣此.

對數探源卷二"詳法", 先求二十尖錐汎積, 令 $hb=1$, 其 $\frac{1}{2}hb$, $\frac{1}{3}hb$ 等, 列於汎積表.

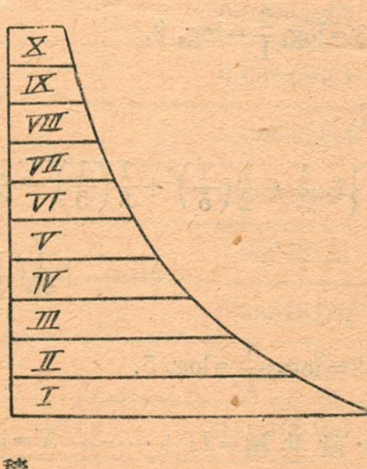
	二十尖錐汎積表
hb	100000000 長　方
1/ 2 hb	050000000 平　方
1/ 3 hb	033333333 立　方
1/ 4 hb	025000000 三　乘
1/ 5 hb	020000000 四　乘
1/ 6 hb	016666666 五　乘
1/ 7 hb	014285714 六　乘
1/ 8 hb	012500000 七　乘
1/ 9 hb	011111111 八　乘
1/10 hb	010000000 九　乘
1/11 hb	009090909 十　乘
1/12 hb	008333333 十一乘
1/13 hb	007692307 十二乘
1/14 hb	007142857 十三乘
1/15 hb	006666666 十四乘
1/16 hb	006250000 十五乘
1/17 hb	005682353 十六乘

1/18 hb	005555555 十七乘
1/19 hb	005263157 十八乘
1/20 hb	005000000 十九乘

乃分此汎積爲十段,如 I 至 X. 求其 II 至 X 之積.因如前 $II_A = II_D$ 之例,

故 $\qquad II = III + IV = VI + VII + VIII + IX + X.$

故 $\qquad II + III + \cdots\cdots + X = 3\,II + V.$



次求第二段積,

$$= hb(=1) \times \left\{ \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{1}{20} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{19} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \right) \right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left. \frac{1}{2} + \frac{1}{17} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{13} \right)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\Big)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{2}+1\Big)\frac{1}{2}\Big\}.$$

$$=hb(=1)\times\left\{1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 +\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

$$=0.69314713=\log_e\frac{2}{1}=\log_e 2.$$

又求第五段積,

$$=hb\ (=1)\times\left\{1.\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 +\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\right\}$$

$$=0.22314353=\log_e\frac{5}{1}=\log_e 5.$$

第二段至第十段共積$=II+\cdots\cdots+X=\log_e 5+3\log_e 2$

$$=\log_e 10=2.30258492.$$

$$\mu=1\div 2.3025492=0.43429451.$$

由是得定積表.

	二十尖錐定積表
μ	0.43429451 長方
$1/2\,\mu$	0.21714725 平方
$1/3\,\mu$	0.14476483 立方
$1/4\,\mu$	0.10857362 三乘
$1/5\,\mu$	0.08685890 四乘
$1/6\,\mu$	0.07238241 五乘
$1/7\,\mu$	0.06204207 六乘
$1/8\,\mu$	0.05428681 七乘
$1/9\,\mu$	0.04825494 八乘
$1/10\,\mu$	0.04342945 九乘
$1/11\,\mu$	0.03948131 十乘
$1/12\,\mu$	0.03619120 十一乘
$1/13\,\mu$	0.03340727 十二乘
$1/14\,\mu$	0.03102103 十三乘
$1/15\,\mu$	0.02895296 十四乘
$1/16\,\mu$	0.02714340 十五乘
$1/17\,\mu$	0.02554673 十六乘

$1/18\ \mu$	0.02412747 十七乘
$1/19\ \mu$	0.02285760 十八乘
$1/20\ \mu$	0.02171472 十九乘

"既得二十尖錐定積,便可依此造表.一之對數,即尖錐合積中之最下一段,其數無盡,不可求,故命爲0也."

求二之對數,

$$\log_{10}2=\mu\left\{1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

$$=0.30103000.$$

其求 $\log_{10}3$, 因 $3^{14}=4782969$, $\frac{1}{14}\mu=0.03102103$;

而 $\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)<0.00000001$. 故十四乘尖錐,$\left(\text{即}\ \frac{1}{15}\mu\right)$以下,俱去不用.蓋此處僅用小數八位,今 $\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)$ 已小於 $0.\overset{7}{\underset{0}{}}1$,故於所求,已不生影響,其次項可以俱去不用.

$$\log_{10}3=\log_{10}2+\mu\left\{1.\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\right\}=0.47712126.$$

同理求 $\log_{10}7$, 因 $7^8=5764801$, $\frac{1}{8}\mu=0.05428681$,

而 $\frac{1}{8}\mu\left(\frac{1}{78}\right)<0.00000001$, 故八乘錐, $\left(\text{卽 } \frac{1}{9}\mu\right)$ 以下,俱去不用.

$$\log_{10}7=\log_{10}6+\mu\left\{1.\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{7}\right)^8\right\}=0.8450980.$$

李善蘭蓋以 $\log_e\frac{m}{n}=\log_e m-\log_e n$

$$=\left\{\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\}$$

與鄒伯奇乘方捷術同,而爲顧觀光第五術也.

正 數	對 數
1	0.00000000
2	0.30103000
3	0.47712126
4	0.60206000
5	0.69897000

6	0.77815126
7	0.84509805
8	0.90309000
9	0.95424252
10	1.00000000

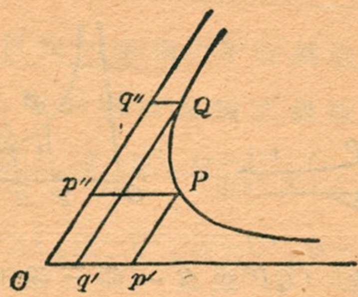
李善蘭對數學說,亦可以微積分解析之,見周明羣,李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究.(清華學報第三卷第二期,1926,十二月.)

12. 圜錐曲線,級數回求

(7) 圜錐曲線三卷,英國艾約瑟口譯,海寧李善蘭筆述.

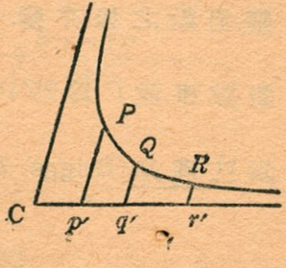
譯書年代未詳,書中註稱"詳代微積拾級",——此割線,代微積拾級(1859刻)名次切線——則書當刻於1859之後.

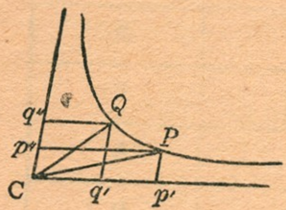
其卷二"第十二款(雙)曲線上任取一點(P或Q),作二線(Pp', Pp''或Qq',Qq'')至二漸近線亦與漸近線平行,成四邊形(PC或QC)其積恆等."

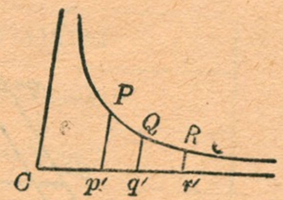


"一系. $Qq' \times Qq'' = Pp' \times Pp''$ 故 $Cq'' : Cp'' = Cp' : Cq'$. Cq'' 愈大, 則 Cq' 愈小. 然 Cq' 雖極小, 終不能至於無. 而漸近線與曲線, 雖漸長漸近, 亦終不能相遇, 中間總隔一 Cq' 也. 故漸近線一若爲曲線無盡界外之切線. 然漸近線長至無窮, Cq' 小至無窮, 亦終不能與曲線相切也."

"二系. 於漸近線上截取諸分, (如 Cp', Cq', Cr') 令成漸大連比例, 又自諸截點與餘一漸近線平行作諸線, 至曲線界 (如 Pp', Qq', Rr'), 必成漸小連比例, 因諸線與諸截分, 兩兩相乘, 俱等積故也."







"第十三款. CQP 二直一曲三邊形, $q''QPp''$ 三直一曲四邊形, $q'QPp'$ 三直一曲四邊形, 俱等積."

"一系. Cp', Cq', Cr' 諸連比例數, 設命 $Cp'=1$, Cq', Cr' 任爲若干, $Pp'Qq'$, $Pp'Rr'$ 二段積必與 Cq', Cr' 之對數相符. 蓋 Cp', Cq', Cr' 旣成連比例, 則所截各段面積, 必成遞加比例. 若 C 爲直角, Cp', Pp' 俱爲 1, Cq' 爲 10, Cr' 爲 100, 則 $Pp'Qq'$ 面積必爲 2.30258509, $Pp'Rr'$ 面積必爲 4.60517018, 此卽訥白爾表 10 與 100 之對數也."

"二系. 設於 Cr', PR 二線之間, 另作一雙曲線, 則所得對數根又變, 蓋一曲線一根數也."

"三系. C 角變, 對數之根亦變. C 爲直角, 正弦爲 1, 則爲訥白爾之對數根. 設 C 爲 $25°44'27''\frac{15'''}{60}$ 之角, 正弦爲 0.43429448, 則爲巴理知(Briggs)表之率, 卽今所用對數表之根也."

李善蘭級數回求稱:"今有眞數求對數[訥白爾對數]之級數,問對數求眞數之級數若何?",

因 $$\log_e x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots,$$

或 $$y=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots. \qquad (A)$$

(A) 自乘之得

$$\begin{aligned} y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}&+\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots\\ \frac{(x-1)^3}{2x^3}&+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots\\ &\ \ \frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots\\ &\qquad\qquad\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{2(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots \qquad (B)$$

$(A)\times(B)$ 得

$$y^3=\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{3(x-1)^4}{2x^4}+\cdots\cdots. \qquad (C)$$

$(A)\times(C)$ 得

$$y^4=\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots. \qquad (D)$$

乃取 (B) 式, 2 約之得

$$\frac{y^2}{2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots. \tag{1}$$

(1)+(A), 得

$$y+\frac{y^2}{2}=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^3}+\frac{17(x-1)^3}{24x^4}+\cdots. \tag{2}$$

又取 (C) 式 6 約之得

$$\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)^3}{6x^3}+\frac{3(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots. \tag*{(2)$_a$}$$

$(2)_a$+(2), 得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}$$

$$+\frac{23(x-1)^4}{24x^4}+\cdots. \tag{3}$$

又取 (D)24 約之得

$$\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots. \tag*{(3)$_a$}$$

$(3)_a$+(3), 得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}$$

$$+\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots. \tag{4}$$

$$=(x-1)$$

李善蘭曰: "攷 (4) 式左邊三級之分母爲 2, 3 相乘, 四級之母數爲 2, 3, 4 連乘, 然則五級必爲 2, 3, 4, 5

連乘,六級必爲 2, 3, 4, 5, 6 連乘,其理已顯,無庸再求.右邊各母之係數消盡,其總數必與 $x-1$ 等.乃左右各加一,即得對數,求眞數之級數,…….”

$$x=1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

13. 數學啓蒙

(8) 數學啓蒙二卷,英國偉烈亞力撰,咸豐癸丑,1853 自序.其卷二“對數”條,註稱:“對數乃大英訥白爾 (Napier) 創作,明萬曆時,播揚於世,凡西土之曆數家,莫不心悅誠服,是則是效焉.同時巴理知 (Briggs) 者,精純數理,亦英人也.特來訥白爾處參互考訂.以舊表浩繁,擬另立新表,歸於便宜敏捷.未幾訥白爾卒,惟巴理知自行改易.其眞數由一萬至二萬,又由九萬至十萬,對數以十四位止.崇禎十年 (1624) 付之剞劂,後四載 (1628),又有荷蘭佛拉哥 (Vlacq) 出,將巴理知未及之二萬後以至九萬,均逐數補齊.凡一至十萬一千,毫無缺陷.因對數十四位尙繁,是以删去四位存十位,即在荷蘭復行刊刻,現中華通行之本,乃佛拉哥手訂之書也.”

其"造對數法之一"條,與數理精蘊,"用中比例求假數法"相同.又"造對數法之二"置定數 $(2\mu)=0.868588964$.又設眞數3,求假數問得幾何.

因 $\log 2=0.301029995$, 又

$$\log\frac{N}{2}=0.868588964\left\{\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{(2N-1)^3}+\frac{1}{(2N-1)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

如 $N=3$,

$$\therefore\quad \log\frac{3}{2}=0.176091260$$

$$\log 2=0.301029995$$

$\therefore\quad \log 3=0.477121255$. 此卽三角數理(1877)卷六第三十四款之法.

14. 乘方捷術

(9) 鄒伯奇(1819–1869)乘方捷術共三卷,其卷二稱:"對數者,設假數與眞數相對立爲表,以備加減代乘除之用,故名對數表.創自西人訥白爾,其初爲表也,以眞數開九乘方極多次所得方根零數,卽爲對數,故名自然對數.今西書稱爲訥表對數.[卽戴氏

所謂假設對數]. 後有佛拉哥(Vlacq)以訥表對數十之對數是2.302585不便進位,乃改十之對數爲一,百之對數爲二,……是爲十進對數,始刻於荷蘭,乃流入中國,即今數理精蘊之十萬對數表是也.[即戴氏所稱定率對數]." 按此節所記,雖於對數發明之歷史,未深通曉,其言佛拉哥蓋出於偉烈亞力之數學啓蒙.乘方捷術不題著作年月.憑此記事,可知其在咸豐癸丑(1853)後矣.

乘方捷術卷一,舉四例并以開方勾股解之,如:

(1) (2), $$N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$$

$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$\mp\frac{m-2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots.$$

(3) (4), $$N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$$

$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$\pm\frac{m+2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots.$$

例(1), $$(c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}+\cdots\cdots.$$

$$(2),\quad (b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}-\cdots\cdots.$$

$$(3),\quad (c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}$$

$$+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}+\cdots\cdots.$$

$$(4),\quad (b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}-\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}$$

$$+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}-\cdots\cdots.$$

又"以二爲實,開無量數乘方之根",

從第一術,$m=1$,n 爲極大時,則 $n+1$,與 n,約略相等,$2n+1$ 與 $2n$,$3n+1$ 與 $3n$ 等,亦約略相等,故

$$2^{\frac{1}{n}}=(1+1)^{\frac{1}{n}}=1+1.\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots\cdots.$$

如 $n=2$,則 $\log_e 2=0.69314718055994638$. 是也.

卷二記"有大小兩眞數,求對數較法",先具三術,如:

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=2\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^7+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

其求對數較第四術註稱:"此又於前三術,連求三數之較",

設 $\frac{m+n}{2}=t$, 而 $m>t>n$

則 $\log_e\frac{t}{n}=\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3\right.$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\right\},$$

$$\log_e\frac{m}{t}=\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3\right.$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\Big\},$$

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^5+\cdots\cdots\right\},$$

$$\log_e\frac{t^2}{mn}=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^6+\cdots\cdots\right\}.$$

又如"有對數較,求大小兩眞數之比例",

$$\frac{m}{n}=1+\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{m}=1-\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots.$$

其所求自然對數,常對數,具列如下:

自然對數表	
眞數	假數
1	0.00000000000
2	0.69314718056
3	1.09861228866
4	1.38629436112
5	1.60943791242
6	1.79175946922

常對數表	
眞數	假數
1	0.000000000
2	0.301029996
3	0.477121255
4	0.602059991
5	0.698970004
6	0.778151250

7	1.94591014904	7	0.845098040
8	2.07944154168	8	0.903089987
9	2.19722457732	9	0.954242509
10	2.30258509299	10	1.000000000

15. 算牘續編,造各表簡法

10. 顧觀光 (1799–1862) 算牘續編有 (1) 用屢乘屢除求對數法 (1854), (2) 對數還原 (1854), (3) 對數衍 (1854).

先求定率對數;

(a) $$2\mu=1\div 2\left\{\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^7+\cdots\cdots\right\}$$

$=0.86858896380$ 爲定率對數, 而 $\mu=$ 對數根

(b) $$2\mu=1^2\div 10\left\{\left(1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\frac{1}{7\times 9^3}+\frac{1}{9\times 9^4}+\frac{1}{11\times 9^5}+\frac{1}{13\times 9^6}+\frac{1}{15\times 9^7}+\frac{1}{17\times 9^8}+\frac{1}{19\times 9^9}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\times 9^3}+\frac{1}{5\times 9^5}+\frac{1}{7\times 9^9}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

$=0.868588996380.$

既得定率對數,即可求二至九之八對數.

因 $\dfrac{1}{\log_e 10}=0.43429448$, $\therefore$ $\log_{10}n=\dfrac{1}{\log_e 10}\times\log_e n$

$$=0.43429448\times\log_e n.$$

已知 $\log 10=1$,

又 $$\mu\log_e 10=\mu\log_e 9+2\mu\left\{\frac{1}{2\times9+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\times9+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2\times9+1}\right)^5+\cdots\right\}.$$

則 $\log 10=\log 9+0.04575749056$, $\therefore$ $\log 9=0.95424250944.$

同理可求八至二之各數對數.既得二至九之八對數,則餘皆可推.

(顧觀光第一術)與夏鸞翔萬象一原(1862)第一術,及代數術(1873)第一七一款所述相同.

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

或 $$\log(n+x)=\log n+2\mu\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r.$$

例，$$\log 23=\log(20+3)$$

$$=\log 20+2\mu\left\{\frac{3}{43}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{43}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{43}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.36172783601.$$

（顧觀光第二術）與徐有壬造各表簡法(1859?)及代微積拾級(1859)相同．顧氏自言本數學啓蒙(1853)之術而小變之．

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

或 $$\log\frac{m}{n}=2\mu\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right\}=P.$$

例，$$\log 23=\log 30-2\mu\left\{\frac{7}{53}+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{53}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{7}{53}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.36172783601.$$

（顧觀光第三術）似本之戴煦續對數簡法(1846)，"以本數爲積，求折小各率，第一術．"亦可由鄒伯奇，乘方捷術(1)式化得．

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left\{\frac{x}{n+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n+x}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n+x}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r$$

例，$$\log 23=\log 20+\mu\left\{\frac{3}{23}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{23}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{23}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{23}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.361727\cdots\cdots.$$

(顧觀光第四術)似本之戴煦續對數簡法(1846),"以本數爲積,求折小各率,第二術."亦可由鄒伯奇乘方捷術(2)式化得,又與微積溯源第四十二款相同.

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r$$

(顧觀光第五術)與李善蘭對數探源及鄒伯奇乘方捷術(1)式相同.

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left\{\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)+\cdots\cdots\right\}=p.$$

(顧觀光第六術)與鄒伯奇乘方捷術(2)式相同.

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left\{\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)-\cdots\cdots\right\}=p.$$

其"對數還原",因令1=正數,$10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$,

$$\log_{10} 1.258925411=\frac{1}{10}, \text{ 又 } 10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$$

$$=1+t,$$

$\frac{t}{1+t}=2.05671776$ 爲正數根,設 $\log s=1\ 36172783602$

求其正數.

(第一術) 如前第一術,$r=0.060697840\frac{36}{}$,又 $s=n+x$

$$s=n\left\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)r+\frac{1}{\underline{|2}}.\left(\frac{t}{t+1}\right)^2.r.\,(r+1)\right.$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3.r.\,(r+1)\,(r+2)$$

$$\left.+\frac{1}{\underline{|4}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4.r.\,(r+1)(r+2)(r+3)+\cdots\right\}$$

(第二術)

$$s=n\left\{1+t\,r\mp\frac{1}{\underline{|2}}.t^2\cdot r(1-r)+\frac{1}{\underline{|3}}.\,t^3\cdot r\,(1-r)(2-r)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\underline{|4}}\,t^4\cdot r\,(1-r)\,(2-r)\,(3-r)+\cdots\cdots\right\}$$

(第三術) 又令 $s=m-n$,如前第二術,$p=0.115393418\frac{70}{}$

$$s=m\div\left\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)p+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 p.\,(p+1)\right.$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3.p.(p+1)(p+2)$$

$$+\frac{1}{\underline{|4}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4.p.(p+1)(p+2)(p+3)+\cdots\cdots\Big\}$$

(第四術)

$$s=m\div\Big\{1+10\,t.\,p-\frac{1}{\underline{|2}}.p^2.\,10\,t\,(1-10\,t)$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}p^3.\,10\,t\,(1-10\,t)\,(2-10\,t)$$

$$+\frac{1}{\underline{|4}}.\,p^4.\,10\,t\,(1-10\,t)\,(2-10\,t)\,(3-10\,t)+\cdots\Big\}$$

又“對數術”則示各對數互求之例.

(1) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$, 求 $\log 19=\log n=?$

如前第二術,得 $\log n=1.278753601$.

(2) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$, 求 $\log 23=\log m=?$

如前第二術,得 $\log m=1.361727836$.

(3) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$, 求 $\log n=1.27875601=?$

$\log m-\log n=d$,

$$n=m\div\Big\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2d(d+1)$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3d(a+1)(d+2)+\cdots\cdots\Big\}$$

或 $n=m\times\frac{1}{\gamma}$.

(4) 有 $\log 19 = \log n = 1.278753601$;

求 $\log m = 1.361727836 = ?$

如前 $n = m \times \frac{1}{\gamma}$, 故 $m = n\gamma$.

(5) 有 $\log m = 1.568201724$, $\log n = 1.361727836$,

又 $m + n = w$, 求 n.?

由前兩式, 得 $n = \frac{w}{1+\gamma}$.

$$\text{故}\quad n = m \div \left\{1 + \left[1 + \left(\frac{t}{t+1}\right)d + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 d(d+1)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3 d(d+1)(d+2) + \cdots\cdots\right]\right\}$$

(6) 有 $\log m = 1.568201724$, $\log n = 1.361727836$,

又 $m - n = V$ 求 n?

由 (3), (4) 兩式, 得 $n = \frac{V}{\gamma - 1}$.

(7) 有 $\log 37 = \log m = p$, $\log 23 = \log n = Q$,

$$T = P + Q = 2.92992956, \text{ 求 } P?$$

如前第一術,

$$\log \frac{100}{37} = \log 100 - \log 37 = 2\mu\left\{\frac{100-37}{100+37} + \frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$

$\therefore \quad \log 37 = 2 - 0.43179828. \qquad \log 23 = T - \log 37.$

(8) 有 P, Q, 及 $U=P-Q$, 求 P?

如前第一術,

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left\{\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$\therefore\quad \log 37=2-0.43179828.\quad \log 23=\log 37-U.$

(11) 造各表簡法

徐有壬(1800—1860)造各表簡法,又名垜積招差.其"第五術造對數全表"稱:"先求對數根,設長三闊一之長方積,取十分之一爲第一小長方,[長折半,闊十分之二],其長闊和一除之爲第一數.十分小長方之一爲第二小長方,[長又折半,闊又十分之二],其長闊和二除之,爲第二數,……順是以下,皆如是遞求,至若干位,乃相併爲除法,以除單一得對數根."

$$\mu=1\div\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2^2}+\frac{2^2}{10^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2^3}+\frac{2^3}{10^3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{2^4}+\frac{2^4}{10^4}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1\div\left\{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right)+\frac{2}{10}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^2\right.\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^{8}+\cdots\cdots\Big\}$$

$$=1\div 2.302585092994045 77=0.434294481903258\underline{11}$$

求全表術則因下列公式:

$$\log\frac{m}{n}=2\mu\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{5}+\cdots\cdots\right\}$$

求 $\log n$, 或 $\log m$ 焉.

按偉烈亞力於咸豐己未(1859)代微積拾級序稱:"觀當代天算家,如董方立氏,項梅侶氏,徐君青氏,戴鄂士氏,顧尙之氏,暨李君秋紉所著各書,其理有甚近於微分者……,"此大約指各人用級數記圓周率數及對數而發,徐卒於庚申(1860),則造各表簡法當成於己未前矣.

16. 代數學,萬象一原

(12) 代數學十三卷,題英國棣麼甘撰,英國偉烈亞力口譯.海寧李善蘭筆受.前有偉烈咸豐己未(1859)自序.卷第十二"論指數對數之級數"謂:

$a^{x}=y$, 則 $\log_{a} y=x$, 而 a 爲底, x 爲 a^{x} 之對數

又謂(1)無論何底,1之對數恆爲0,如 $a^{0}=1$, 則 $\log_{a}1=0$.

(2)凡底之對數爲1, $a^{1}=a$, 則 $\log_{a}a=1$

(3) 凡 y 與 $\frac{1}{y}$ 之對數,號異而數同.

如 $y=a^x$, 則 $\log_a y=x$

又 $\frac{1}{y}=a^{-x}$, 則 $\log_a \frac{1}{y}=-x$.

故 $\log_a \frac{1}{y}=-\log_a y$.

次論'對數之級數理'',因從卷十一,依合名法 (binomial theorem).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}$$

設 $x=1$, 則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

惟 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$

則 $\left(1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\right)^{x}$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

若n爲極大,則上式變爲

$$\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

即 $$\left(2.71828182\cdots\cdots\right)^x=e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

若以e爲底,則對數x之眞數爲$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

此謂之自然之對數,亦命爲雙曲線之對數.

上式旣合於理,則 $e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{k^3x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

令 $e^k=a$, 則 $k=\log_e a$.

即 $$a^x=1+x\log_e a+\frac{(x.\log_e a)^2}{\underline{|2}}+\frac{(x.\log_e a)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

若x爲極小,則 $\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$.

但從卷十一知

$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha+\frac{x-1}{\underline{|2}}\cdot\alpha^2+\frac{(x-1)(x-2)}{\underline{|3}}\cdot\alpha^3+\cdots\cdots.$$

若x爲極小,則

$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\cdots\cdots.$$

令 $\alpha=a-1$,

則 $$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots,$$

從此知,

$$\log_e a=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots.$$

由此得,

$$\log_e(1+m)=\left\{m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right\} \tag{1}$$

$$\log_e(1-m)=\left\{-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right\} \tag{2}$$

$$\log_e\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=2\left\{m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\cdots\cdots\right\} \tag{3}$$

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right\} \tag{4}$$

按前二式與續對數簡法同,第(1)式又與顧觀光第四術同,四式又見對數詳解(1824)第四條(1),(2),(3),及第五條(1). 依此造對數表小數八位.

再從卷十一知

$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha+\frac{x-1}{\underline{|2}}.\alpha^2+\frac{(x-1)(x-2)}{\underline{|3}}.\alpha^3+\cdots\cdots$$

又 $$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots$$

又令 $a^m=a$, 則

$$\frac{a^{mx}-1}{x}=m.\frac{a^{mx}-1}{mn}.$$

設 m 爲定數,n 爲極小,則 mx 更當極小.故若 x 爲極小,而 x 之函數之極限爲 N, 則 mx 函數之極限亦必爲 N. 其不同者, 可取 x 之小, 令 x 之函數, 任近於所設之限 N, 命其較爲 k, 而取 m 分 x 同數之一, 則可令 mx 之函數同近於 N. 所以

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^{mx}-1}{mx},\text{ 卽 } f(a)=\frac{1}{m}f(a^m).$$

卽 $$(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots\cdots=\frac{1}{m}\left\{(a^m-1)-\frac{1}{2}(a^m-1)^2+\cdots\right\}$$

卽 $$\log_e a=\frac{1}{m}\log_e a^m.$$

觀此更明 $\frac{a^x-1}{x}$ 之限, 等於 $\log_e a=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots$

卽 $\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$, 古人用此理,遞開 a 之方數, 以造對數表.如 $a=1.204, x=\frac{1}{2}^{47}$, $\log_e 1.024=(1.024^{\frac{1}{2}^{47}}-1)\times 2^{47}$ 是也.[28]

卷十三論以10爲底之對數, 謂

$$\log_{10}x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}=\frac{\log_e x}{2.30258509}=0.4342944819\times\log_e x.$$

此對數表名爲常對數, 亦名爲表對數, 亦名爲十進對數,亦名爲巴理知對數. 以 0.43429…… 爲其根率. 凡

(28) 見前數理精蘊 (3) (d).

$\dfrac{1}{\log_e a}$ 卽 $\log_a e$ 名爲 a 底對數之根率.

同卷論對數較之原則, 從前 (4) 式

$$\log_{10}(x+1)=\log_{10}x+2\mu\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x+1)^3}+\cdots\cdots\right\}$$

如 x 愈大, 則 $\log_{10}(x+1)$, $\log_{10}x$ 之較愈小.

又檢表知 $\log_{10}(51520+1)=\log_{10}51520+0.0000084.$

$$\log_{10}(51520+2)=\log_{10}51520+0.0000084\times 2.$$

卽 $h<10$, 則

$$\log_{10}(51520+h)=\log_{10}51520$$
$$+0.0000084\times h\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

從前 (1) 式,

$$\log_{10}\left(1+\frac{h}{x}\right)=\mu\left\{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

若 $\dfrac{h}{x}$ 甚小, 則 $\log(x+h)=\log x+\mu\dfrac{h}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$

(b) 式與 (a) 式比較, $0.0000084=\mu\cdot\dfrac{1}{x}=0.4342945\times\dfrac{1}{51520}$ 是也.

(13) 萬象一原

同治元年壬戌 (1862) 錢塘夏鸞翔演萬象一原. 其第一卷末有"求眞數之訥氏對數"註謂[本徐氏(有壬)中國對數術變通之]. 今按其公式術語且有誤記. 所

載二式:

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\log_e(n-x)=\log_e n+2\left\{-\frac{x}{2n+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(2n+x)^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{(2n+x)^5}-\cdots\cdots\right\}$$

與顧觀光有正數求對數第一術(1854)相同.

又有"求眞數之訥氏負對數",其術語亦有誤記.按戴煦假數測圓卷上有"求負對數二術",蓋求不滿單一之眞數,如 $\log 0.98$ 者;夏之所取,蓋亦其義.今取小於眞數 $(n+x)$ 之借眞數爲 t,大於眞數 $(n+x)$ 之借眞數常爲1.故應書爲:

$$\log_e(n+x)=\log(1-t)=\log_e 1+2\left\{-\frac{t}{2-t}-\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2-t}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{2-t}\right)^5-\cdots\cdots\right\}$$

17. 代數術,對數詳解

(14) 代數術二十五卷,英國華里司輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第十八卷第一六八款至一

七八款論對數. 前有同治十二年(1873)華蘅芳序. 書刻於同治十三年(1874).[29]

(15) 對數詳解五卷, 長沙丁取忠, 湘鄉曾紀鴻同撰, 同治甲戌(1874)丁取忠序. 是書卽代數術第十八卷之詳解.

卷二, 第三條, 謂: $c^x=y$, 已知 c, y 求 x. $x=\log_c y$.

設
$$c=1+a \cdots\cdots (1)$$
$$y=1+b \cdots\cdots (2)$$

則 $c^x=y$ 之式變爲 $(1+a)^x=(1+b) \cdots\cdots (3)$

兩邊各乘至 n 方 $(1+a)^{nx}=(1+b)^n \cdots\cdots (4)$

以二項式展開之

$$1+\frac{nx}{1}\cdot a+\frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}\cdot a^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}\cdot a^3 +\frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\lfloor 4}a^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot b+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}b^3 +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}\cdot b^4+\cdots\cdots \quad (5)$$

兩邊減 1 又除 n, 得

(29) 見江南製造局記, 卷二, 第十九頁.

$$x\cdot a+\frac{x(nx-1)}{\underline{|2}}\cdot a^2+\frac{x(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\cdot a^3$$

$$+\frac{x(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\underline{|4}}\cdot a^4+\cdots\cdots$$

$$=b+\frac{(n-1)}{\underline{|2}}\cdot b^2+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot b^3+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cdot b^4$$

$$+\cdots\cdots \tag{6}$$

化之得:

$$x\cdot a+\left(Pn-\frac{x}{2}\right)a^2+\left(P'n+Q\,n^2+\frac{x}{3}\right)a^3$$

$$+\left(P''n+Q'n^2+Rn^3-\frac{x}{4}\right)a^4+\cdots\cdots$$

$$=b+\left(pn-\frac{1}{2}\right)b^2+\left(p'n+qn^2+\frac{1}{3}\right)b^3$$

$$+\left(p''n+q'n^2+rn^3-\frac{1}{4}\right)b^4+\cdots\cdots \tag{7}$$

變之得:

$$\left\{x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}a^3-\frac{x}{4}a^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\left\{Pna^2+\left(P'n+Qn^2\right)a^3+\left(P''n+Q'n^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+Rn^3\right)a^4+\cdots\cdots\right\}=\left\{b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\}+\left\{pnb^2+\left(p'n+qn^2\right)b^3+\left(p''n+q'n^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+rn^3\right)b^4+\cdots\cdots\right\}. \tag{8}$$

前(3)式以乘n方者，爲借用以展開級數，今既展開矣，

試命$n=0$，則

$$x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}\cdot a^3-\frac{x}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots=b-\frac{1}{2}b^2$$

$$+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots. \tag{9}$$

變之得

$$x\left(a-\frac{1}{2}\cdot a^2+\frac{1}{3}\cdot a^3+\frac{1}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots\right)=b-\frac{1}{2}b^2$$

$$+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots. \tag{10}$$

兩邊各以 $\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)$ 除之，得

$$x=\log_e y=\left(b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots\right)$$

$$\times\frac{1}{\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)}.$$

因$c=1+a$，故$a=c-1$，(10)式左邊變爲

$$x\left\{(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right\}$$

前言c爲對數之底，總不變，故

$$\left\{(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right\}$$

亦不變,是爲常數,以 A 代之,故 (10) 式左邊變爲 Ax.

惟因 $y=1+b$, 故 $b=y-1$, 所以 (10) 式右邊變爲

$$(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots$$

故 $$Ax=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots. \tag{12}$$

或 $$x=\frac{1}{A}\left\{(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots\right\} \tag{13}$$

$$=\log_e y.$$

用 (13) 式亦可求眞數之對數,惟其眞數 y 必大於 1, 而小於 2 方可求. 若 $y<2$, 則級數之收斂甚遲,玆另變其式,令斂得較速.

第四條. (13) 式變之得

$$\log(1+m)=\frac{1}{A}\left\{m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4+\cdots\cdots\right\}. \tag{1}$$

若令 $-m=m$, (1) 式變爲

$$\log(1-m)=\frac{1}{A}\left\{-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4-\cdots\cdots\right\}. \tag{2}$$

惟 $$\log(1+m)-\log(1-m)=\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)$$

(1)−(2), 又簡之得

$$\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=\frac{2}{A}\left(m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\frac{m^7}{7}+\cdots\cdots\right). \qquad (3)$$

令 $\frac{1+m}{1-m}=y,$ 則 $m=\frac{y-1}{y+1},$

故 $$\log y=\frac{1}{A}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^7+\cdots\cdots\right\}. \qquad (4)$$

此式無論 y 之同數如何,必爲歛級數,凡對數皆可求,故此爲公式.

第五條. 若已知 $\log n$, 求 $\log(n+x)$

因 $\log(n+x)-\log n=\log\frac{n+x}{n}.$

以 $\frac{n+x}{n}=y$ 代入上條 (4) 式,則 $\frac{y-1}{y+1}=\frac{x}{2n+x}.$

故 $$\log\frac{n+x}{n}=\log(n+x)-\log n=\frac{1}{A}\left\{\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

卽 $$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left\{\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\} \qquad (1)$$

合前第三條 (13) 式,第四條 (4) 式,第五條 (1) 式觀之,其

右邊皆有 $\frac{1}{A}$. 是知 $\frac{1}{A}$ 爲對數底 c 之所生. 底不變,

$\frac{1}{A}$ 亦不變, 是爲常數, 稱爲對數之根.

卷三, 第六條, 謂 $A=1$, 即 $\frac{1}{A}=1$, 則此對數爲訥對.

卷四, 第九條, 謂 $c^x=y$, 已知 c, x 求 y.

令 $$c=1+a \tag{1}$$

則 $$y=(1+a)^x \tag{2}$$

$$=\left[(1+a)^n\right]^{\frac{x}{n}} \tag{3}$$

因 $$(1+a)^n=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot a^2+\frac{n(n-1)(n+2)}{\underline{|3}}\cdot a^3+\cdots\cdots \tag{4}$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n^2-n}{\underline{|2}}\cdot a^2+\frac{n^3-3n^2+2n}{\underline{|3}}\cdot a^3+\cdots\cdots. \tag{5}$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\left[\frac{n^2}{\underline{|2}}\cdot a^2-\frac{n}{\underline{|2}}\cdot a^2\right]+\left[\frac{n^3}{\underline{|3}}\cdot a^3-\frac{3n^2}{\underline{|3}}\cdot a^3+\frac{2n}{\underline{|3}}\cdot a^3\right]+\cdots\cdots. \tag{6}$$

$$=1+\frac{a}{1}\cdot n+\left[\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n^2-\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n\right]+\left[\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot n^3-\frac{a^3}{1\cdot 2}\cdot n^2+\frac{a^3}{1\cdot 3}n\right]+\cdots\cdots. \tag{7}$$

$$=1+a\cdot n+\left(\frac{a^2}{2}\right)n^2-\left(\frac{a^2}{2}\right)n+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right)n^3+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2}\right)n^2$$

$$+\left(\frac{a^3}{1\cdot 3}\right)n+\cdots\cdots. \quad (8)$$

$$=1+\left(a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots\right)n+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{2}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right)n^2+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots\cdots\right)n^3+\cdots. \quad (9)$$

$$=1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots. \quad (10)$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots. \quad (11)$$

故 $$y=(1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^{\frac{x}{n}} \quad (12)$$

$$=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)}{1\cdot 2}(An$$

$$+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)\left(\frac{x}{n}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)$$

$$+\cdots\cdots. \quad (13)$$

卽 $$y=1+\frac{x}{n}\left(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots\right)+\frac{x(x-n)}{1\cdot 2\cdot n^2}(An$$

$$+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^2$$

$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^3$$

$$+\cdots\cdots \quad (14)$$

$$=1+\frac{x}{1}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)+\frac{x(x-n)}{1\cdot2}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^2+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot2\cdot3}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^3+\cdots\cdots \tag{15}$$

令 $n=0,$

則 $$y=c^x=1+\frac{x}{1}A+\frac{x^2}{1\cdot2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}A^3+\cdots\cdots \tag{16}$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}\cdots\cdots \tag{17}$$

$$=(c-1)-\frac{(c-1)^2}{2}+\frac{(c-1)^3}{3}-\frac{(c-1)^4}{4}+\cdots\cdots$$

既已明 A 之同數為底之訥對. 又知 x 為對數, [即底 c 之指數], 若干. 用 (16) 式右邊級數求之, 可識 y [即眞數] 之同數. 如 $c^x=y$ 中 $x=1$

則 $$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot2}+\frac{A^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots \tag{18}$$

如令 $x=\frac{1}{A}$, 則 $c^x=y$ 為 $y=c^{\frac{1}{A}}$, 而 (16) 式變為

$$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$$

$$=2.718281828459045235360288\cdots\cdots \tag{19}$$

$$=e$$

即 $c^{\frac{1}{A}}=e$, 或 $c=e^{A}$

惟因 A 爲 c 之訥對, 故知 e 爲訥對數之底. 與常對數以 10 爲底不同也.

卷四第十條, $x=\log_c y$, 則 $c^x=y$, 變爲 $c^{\log y}=y$.

或 $$c^{n\log y}=y^n. \tag{1}$$

今有 $c^{\frac{1}{A}}=e$ 之式, 則 $\log c^{\frac{1}{A}}=\log e$ (2)

從 (1) 式, $$(c)^{\frac{1}{A}\log c}=c^{\frac{1}{A}}. \tag{3}$$

$$\frac{1}{A}\log c=\log c^{\frac{1}{A}}. \tag{4}$$

又從 (2) 式, $$\frac{1}{A}\log c=\log e \tag{5}$$

兩邊乘 A, 得 $$\log c=A\log e \tag{6}$$

兩邊除 $\log e$, $$A=\frac{\log c}{\log e} \tag{7}$$

代入第九條之 (16) 式, 則

$$c^x=y=1+\frac{x}{1}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^3+\cdots\cdots \tag{8}$$

設 $c=e$, 則

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots \tag{9}$$

如已知 $\log_{10} y=x$ 之數, 求 y.

於 (8), 因 $\log c=\log 10=1$

又 $$\log c=\frac{1}{A}=0.43429\cdots\cdots11289.$$ 代入得之.

由是得下開常對數表各數.

常對數表	
眞數	對數
1	0.0000000000000000000000
2	0.3010299956639811952112
3	0.4771212547196524417769
4	0.6020599913279623904224
5	0.6989700043360188047887
6	0.7781512503836336369881
7	0.8450980400142468351802
8	0.9542425094393048835538
10	1.0000000000000000000000

18. 微積溯源, 對數表, 對數述

(16) 微積溯源八卷, 英國華里司輯, 英國傅蘭雅

口譯,金匱華蘅芳筆述.同治十三年(1874)刻.[30] 其第三十五款至第四十二款證得

$$y=c^x=1+\frac{x}{1}\cdot A+\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot A^3+\cdots\cdots$$

又 $$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot 2}+\frac{A^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

及 $$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots=2.71828\cdots\cdots=e$$

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

幷 $$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

(17) 對數表四卷四册,賈步緯校,江南製造局印.

(18) 對數表一册,附八線對數表,八線表.美國路密司撰,赫士譯,高密,朱葆琛筆述.

(19) 對數述四卷,陳其晉撰(1877),其卷一卷二引徐有壬,李善蘭,顧觀光,及西人代數學,代微積拾級論對數之說

19. 三角數理,對數表引說,用對數表訣,造對數法

(30) 見江南製造局記.

(20) 三角數理十二卷,英國海麻士輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第六卷專論對數.(31) 光緒三年(1877)刻.(32) 書中第二十五款至三十四款"論指數及指數之對數".

第二十五款. 因 $x=0$, 則 $a^x=1$,

又因 $$a=1+(a-1)$$

$$\therefore \quad a^x=[1+(a-1)]^x$$

$$=1+x(a-1)+x(x-1)\frac{(a-1)^2}{1\cdot 2}+x(x-1)(x-2)\frac{(a-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

$$=1+\left\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots\right\}x+\cdots\cdots$$

令 $a^x=1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots$

而 $p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\cdots\cdots$ 爲 x 之倍數, p_2, p_3, …… 爲 x 他方之倍數, x 無論爲何值均合.

又因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, 於上級數中, 一令 $x=y$, 一令 $x=x+y$,

(31) 見繙譯館編江南製造局譯書提要卷二,第三三,三四頁.

(32) 見江南製造局記卷二,第二十九頁.

則得 $a^y=1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots$

又 $a^{x+y}=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots$

因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$,

則 $(1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots)(1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots)$

$$=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots$$

展開之,消去 y,得

$$p_1+p_1{}^2x+p_1p_2x^2+p_1p_3x^3+\cdots\cdots$$

$$=p_1+2p_2x+3p_3x^2+4p_4x^3+\cdots\cdots$$

故 $2p_2=p_1{}^2,\ 3p_3=p_1p_2,\ 4p_4=p_1p_3,\cdots\cdots$

$\therefore$ $p_2=\dfrac{p_1{}^2}{1\cdot2},\ p_3=\dfrac{p_1{}^3}{1\cdot2\cdot3},\ p_4=\dfrac{p_1{}^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\ \cdots\cdots$

代入得,$a^x=1+p_1x+\dfrac{p_1{}^2}{1\cdot2}x^2+\dfrac{p_1{}^3}{1\cdot2\cdot3}x^3+\dfrac{p_1{}^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\cdots$

而 $p_1=(a-1)-\dfrac{1}{2}(a-1)^2+\dfrac{1}{3}(a-1)^3-\dfrac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots$

第二十六款. 於上式,令 $p_1x=1$,即 $x=\dfrac{1}{p_1}$,

則 $a^{\frac{1}{p_1}}=2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$

令 $a^{\frac{1}{p_1}}=e$,則 $a=e^{p_1}$,而 $\log_e a=p_1$.

$\therefore$ $a^x=1+x(\log_e a)+\dfrac{x^2}{1\cdot2}(\log_e a)^2+\dfrac{x^3}{1\cdot2\cdot3}(\log_e a)^3+\cdots\cdots$

上式令 $a=e$, 因 $\log_e a=\log_e e=1$,

$$\therefore \qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots. \tag{1}$$

又 $\log_e a=p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3=\cdots\cdots.$ (2)

以 n 代 a, 則

$$\log_e n=(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots,$$

又從第六款知有 e 底之對數表, 欲變之爲 a 底之對數表, 只須以常乘數 $\frac{1}{\log_e a}$ 乘之卽得, 故

$$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\log_e n.$$

則 $\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\left\{(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots\right\}$

上式如 $n>2$, 則爲發級數, 惟有數種巧法, 能變其形, 使爲歛級數.

第二十七款. 證 $e=2+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$ 爲無盡之數.

因 $\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=1<1,$

則 $3>e>2.$

設 e 等於可通約之數 $\frac{m}{n}$, 則

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor n}+\frac{1}{\lfloor n+1}+\cdots\cdots$$

兩邊以 $\lfloor n$ 乘之,則 $m\lfloor n-1=N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$+\cdots\cdots$$

而 N 爲整數,惟 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$+\cdots\cdots<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}$$

$$+\cdots\cdots<\frac{1}{n}.$$

則可知若將小於 $\frac{1}{n}$ 之分數與 N 相加,而云其和必可爲整數,則於理不合也.所以知 e 必爲無盡之數.

$$e=2+0.5+0.199999+0.041666+0.008333+0.001388+\cdots\cdots$$
$$=2.7182818.$$

第二十八款.“求對數級數 $\log_a(1+x)$ 之值”.

$\log_a x$ 不能化爲有 $A+Bx+Cx^2+\cdots\cdots$ 之形.因令 $x=0$,則 $\log_e x$ 變爲無窮故也.惟 $\log_a(1+x)$ 則能變得此形之級數,因 $x=0$ 時,其式亦能爲0,所以其式中不能有不與 x 相關之項,又不能有 x 之負方之項,則得(1)式如下:

$$\log_a(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\cdots$$

若令　　　　$x=x+y$, 則得

$\log_a(1+x+y)=A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\cdots\cdots$, 此爲 $\log_a(1+x+y)$ 之第一式, 惟因

$$1+x+y=(1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right),$$

故　$$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\log_a\left(1+\frac{y}{1+x}\right).$$

若於 (1) 式, 令　　$x=\dfrac{y}{1+x}$, 則得

$$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\frac{Ay}{1+x}+\frac{By^2}{(1+x)^2}+\frac{Cy^2}{(1+x)^3}+\cdots,$$

此爲 $\log_a(1+x+y)$ 之第二式. 因兩式中 y 之係數必相等,

卽　$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots\cdots=\frac{A}{1+x}.$$

兩邊各乘 $(1+x)$, 又化之得

$$(A+2B)x+(2B+3C)x^2+(3C+4D)x^3+\cdots\cdots=0.$$

因 x 爲未定之數, 故可令 $A+2B=0, 2B+3C=0, 3C+4D=0,\cdots\cdots$

則　$$B=-\frac{1}{2}A,\ C=\frac{1}{3}A,\ D=-\frac{1}{4}A,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \log_a(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)$$

如令　　　$1+x=a$, 則

$$\log_a a=1=A\left\{(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=A\log_e a.$$

$$\therefore\qquad \log_a(1+x)=\frac{1}{\log_e a}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right).$$

第二十九款."又法證上款之結果".

因 $\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=A\left(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^3}{4}+\cdots\cdots\right)$, 如 $x=0$,

則 $A=\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

若令 $x=\dfrac{1}{n}$, 則 $\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=n\log_a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$$=\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

惟因 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot\dfrac{1}{n^2}+\cdots\cdots$

$$=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3n}\right)+\cdots$$

若令 $n=\infty$, 則 $x=0$, 而式之右邊爲 e 之同數.

$2+\dfrac{1}{\lfloor 2}+\dfrac{1}{\lfloor 3}+\dfrac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$,由第六款知 $A=\log_a e=\dfrac{1}{\log_e a}$.

$$\therefore\qquad \log_a(1+x)=\frac{1}{\log_e a}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)$$

又若令 $a=e$; 卽得 $\log_e a=\log_e e=1$

則 $$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

第三十款."對數較之原則".

如 $$\log_{10}(n+d)-\log_{10}n=\log_{10}\left(1+\frac{d}{n}\right)=\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}+\frac{d^2}{3n^2}-\cdots\cdots\right)=\mu\frac{d}{n}.$$

此因 n 爲大數, d 爲小數,則括弧內之乘數,可棄之不用.若 $d=1$,

則 $$\log_{10}(1+n)-\log_{10}n=\mu\frac{1}{n}.$$

惟因 $\log_{10}(1+n)-\log_{10}n$ 爲表中相連兩對數之較,如令此表中之較數爲 S,

則 $$\log_{10}(1+n)-\log_{10}n=dS.$$

卽 $\log_{10}(n+d)=\log_{10}n+dS$.依此式可從本數之上下兩數,而得本數之對數.反之, $\log_{10}(n+x)-\log_{10}n$ 爲已知之數,而等於 S',則 $d=\frac{S'}{S}$,將此分數加於 n,卽成 n 與 $n+1$ 間兩對數之中相配之眞數內分數.

第三十一款."求前所差之限".

因 $\log(n+d)-\log n$ 在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}\right)$ 與 $\mu\frac{d}{n}$ 之間,則所差者必在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ 與 $\mu\frac{d}{n}$ 之內,所以此二式,卽可爲其差

之限.又易知其略近之同數dS必在極大極小之限內.若令$dS=\log(n+d)-\log n$,則所有之差,必小於$\frac{\mu d}{2n^2}$,若$n>100000$,而$d<1$,則其分數必小於$\frac{0.43}{200000000}$,即小於第八位小數之$\frac{1}{4}$,可見其差必不能入所求對數之七位小數以內.

又令$d=\frac{S'}{S}$,則所差爲$\frac{dS-S'}{S}$,則依前理,其所差必小於$\frac{\mu d}{2n^2S}$,惟因$S>\frac{\mu}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$,換言之$d-\frac{S'}{S}<\frac{d}{2n-1}$,$d-\frac{S'}{S}<\frac{1}{2000}$,惟此因$n>10000$方能得此,若$\frac{S'}{S}$爲$d$之同數,其差與所求得之首四位小數可不相關.

第三十二款."對數之計算".

$$\log_e(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

以 $-x$代x得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

而 $$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right\}$$

又令 $$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{m}{n},\text{則 } x=\frac{m}{2m+n}.$$

惟因 $\log_e\left(1+\frac{m}{n}\right)=\log_e\left(\frac{m+n}{n}\right)=\log_e(m+n)-\log_e n.$

$$\therefore\quad \log_e(n+m)=\log_e n+2\left\{\frac{m}{2n+m}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

如令 $m=1$, 則

$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\}\qquad(1)$$

第三十三款. 設 $\frac{m}{n}=\frac{1+x}{1-x}$, $\therefore\ x=\frac{m-n}{m+n}$. 則

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$
$$\cdots\cdots(2)$$

如 $m=x^2$, $n=x^2-1$, 則 $\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{2x^2-1}$,

而 $\log_e\left(\frac{m}{n}\right)=2\log_e x-\log_e(x-1)-\log_e(x+1)$,

$$\therefore\quad \log_e(x-1)=2\log_e x-\log_e(x-1)-2\left\{\frac{1}{2x^2-1}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3-\cdots\cdots\right\}\qquad(3)$$

用此式若已有相連之兩數 $x-1$, 與 x 之訥對, 則可求

相連第三數 $x+1$ 之訥對.

(21) 對數表引說一卷,用對數表訣一卷,造對數表法一卷,朱湘澄撰,未刊.[33]

20. 代數學補式,算式解法,有不爲齋算學,對數旁通,對數較表,對數捷法,對數淺釋,對數四問.

(22) 代數術補式二十二卷,解崇輝撰(1899),蓋爲解析代數術而作.

(23) 算式解法十四卷,美國好敦司開奈利同撰,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第八卷論對數.[34] 光緒二十五年(1899)刻.[35]

(24) 傅九淵有不爲齋算學卷三"對數表開方較省算法解"稱:"作對數法遞次開方,以求假數,用前後各次所得數相較[見數理精蘊]最爲簡妙".

"蓋各次開方首位之數幷爲1,首位以下空位漸多,則後次開方數(E_{n+1}),與前次開方數(E_n),略近

(33) 見劉鐸古今算學書錄"象數第三"第十五頁,光緒戊戌(1898)印本.

(34) 見江南製造局譯書提要卷二,第三十六至三十七頁.

(35) 見江南製造局記卷二,第十九頁.

$\frac{1}{2}$,於是以前次開方數二歸之$\left(\frac{1}{2}E_n\right)$,與後次開方數$(E_{n+1})$相課,則後一次開方數內,必少本次開方所減之隅冪半段."

求第一較: 因$\left(1+0.\overset{n}{0}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+0.\overset{m}{0}\beta\right)$

或 $$1+0.\overset{n}{0}\alpha=1+2\times 0.\overset{m}{0}\beta+\overline{0.\overset{m}{0}\beta}^{2}$$

即 $$\frac{0.\overset{n}{0}\alpha}{2}=0.\overset{m}{0}\beta+\frac{\overline{0.\overset{m}{0}\beta}^{2}}{2}$$

或 $$\frac{0.\overset{n}{0}\alpha}{2}-0.\overset{m}{0}\beta=\frac{\overline{0.\overset{m}{0}\beta}^{2}}{2}$$

即 $$\frac{E_{n-1}}{2}-E_n=a_{n\cdot 1} \qquad (1)$$

而 E_{n-1} 爲前次開方數,開方數俱不用首位.

E_n 爲本次開方數,

$d_{n\cdot 1}$ 爲本次第一較.

求第二較:

又因 $$\frac{E_{n-1}}{2}=E_n+d_{n\cdot 1} \qquad (1)$$

自乘之得 $$\frac{\overline{E_{n-1}}^{2}}{4}=\overline{E_n}^{2}+2\,E_n\cdot d_{n\cdot 1}+\overline{d_{n\cdot 1}}^{2},$$

即 $$\frac{1}{4}\cdot\overline{\frac{E_{n-1}}{2}}^2-\overline{\frac{E_n}{2}}^2=E_n\cdot d_{n\cdot 1}+\overline{\frac{d_{n\cdot 1}}{2}}^2,$$

或 $$\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1}-d_{n\cdot 1}=d_{n\cdot 2}. \tag{2}$$

而 $d_{(n-1)\cdot 1}$ 爲前次第一較

$d_{n\cdot 1}$ 爲本次第一較

$d_{n\cdot 2}$ 爲本次第二較.

求第三較:

又因 $$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2} \tag{1}$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1} \tag{2}$$

則從(1)及(2)相乘得

$$\frac{1}{8}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}-E_n\cdot d_{n\cdot 1}=E_nd_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 1}}^2+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}. \tag{A}$$

又從(2)自乘得

$$\frac{\frac{1}{8}\overline{d_{(n-1)\cdot 1}}^2}{2}-\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2=\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2+2d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 2}}^2 \tag{B}$$

$(A)+(B)$ 得

$$\frac{d_{(n-1)\cdot 2}}{8}-d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 2}+1\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2+3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 2}}^2=d_{n\cdot 3} \tag{3}$$

而 $d_{(n-1)\cdot 2}$ 爲前次第二較

$d_{n\cdot 2}$ 爲本次第二較

$d_{n\cdot 3}$ 爲本次第三較.

求第四較:

因 $$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2} \tag{1}$$

$$d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 3}=\frac{1}{8}d_{(n-1)\cdot 2} \tag{3}$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1} \tag{2}$$

則從(1), (3)相乘得

$$\frac{1}{16}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 2}-E_n\cdot d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 3}+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}. \tag{C}$$

又從(2)自乘, 又各乘1.5得

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{2}\overline{d_{(n-1)\cdot 1}}^2-\frac{3}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\frac{3}{2}\overline{d_{n\cdot 2}}^2 \tag{D}$$

又從(2), (3)相乘, 又各乘6得

$$\frac{3}{16}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}d_{(n-1)\cdot 2}-3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+6d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}+6\overline{d_{n\cdot 2}}^2$$
$$+6d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3} \tag{E}$$

又從(3)自乘, 又各乘4得

$$\frac{1}{16}\overline{d_{(n-1)\cdot 2}}^2-\overline{d_{n\cdot 2}}^2=\overline{3d_{n\cdot 2}}^2+8d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}+\overline{4d_{n\cdot 3}}^2 \tag{F}$$

(C)+(D)+(E)+(F)得

$$\frac{1}{16}\left\{E_{n-1}d_{(n-1)\cdot2}+\frac{3}{2}\overline{d_{(n-1)\cdot1}}^2+3d_{(n-1)\cdot1}d_{(n-1)\cdot2}+\overline{d_{(n-1)\cdot2}}^2\right\}$$

$$-\left\{E_nd_{n\cdot2}+1\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot1}}^2+3d_{n\cdot1}d_{n\cdot2}+\overline{d_{n\cdot2}}^2\right\}=E_nd_{n\cdot3}$$

$$+7d_{n\cdot1}d_{n\cdot2}+7d_{n\cdot1}d_{n\cdot3}+10\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot2}}^2+14d_{n\cdot2}d_{n\cdot3}$$

$$+4\overline{d_{n\cdot3}}^2 .$$

即
$$\frac{1}{16}d_{(n-1)\cdot3}-d_{n\cdot3}=d_{n\cdot4} \tag{4}$$

而 $d_{(n-1)\cdot3}$ 爲前次第三較

$d_{n\cdot3}$ 爲本次第三較

$d_{n\cdot4}$ 爲本次第四較.

(25) 對數旁通一卷爲思褏室算學新編四種之一,無錫蔣士棟撰,前有華世芳光緒丁酉(1897)序文一篇.書中稱: $10^{\frac{1}{2}(n+1)}=1+E_{n+1}$, $E_{n+1}:\frac{1}{2^{(n+1)}}=1:\mu$. 就中10爲常對數之底.數理精蘊(3)"用遞次開方求假數法"(c)即用此法對數根μ.如已知μ亦可反求得E_{n+1}及10矣.

(26—29) 廖家授(1860—1890)撰對數較表一卷存於家.陸采撰對數捷法一卷,見杭州藝文志.江衡撰對數淺釋一卷爲漑齋算草之一.劉彝程撰對數四

問，見經世文續編.

(三) 對數之東來下[36]

21. 對數輸入日本之經過

日本林鶴一以爲對數由中國數理精蘊輸入日本約在享保六年 (1721), 因此時德川吉宗亦重曆算者也. 惟上文攷出數理精蘊實成於雍正癸卯 (1723), 則輸入日本當稍後於享保六年矣. 其後又由荷蘭直接輸入. 今其國中所藏論著對數之書計有:

(1) 數理精蘊(印本, 鈔本).

(2) 不朽算法(鈔本), 安島直圓著, 日下誠編.

(3) 眞假數表(鈔本), 安島直圓著.

(4) 眞假數表術解(鈔本).

(5) 對數表起源(鈔本)與(3)內容略同, 又與(6)全異.

(6) 對數表起源(鈔本), 會田安明著.

(7) 對數表(鈔本), 堀田泉尹著 (1814).

---

(36) 參看林鶴一: 和算ン於ケル對數, 東北數學雜誌第二十一卷, 第一, 二號, 日本, 仙臺, 1922. 第 148—190 頁.

(8) 作對數表法(鈔本),篠原善富著(1823).

(9) 加減代乘除表(印本),阪部廣胖著,馬場正督訂(1824).

(10) 對數表製法(鈔本),石黑信由著(1829).

(11) 算法對數表(印本),小出修喜編,福田理軒校(1844).

(12) 對數表精解(鈔本,印本),因田恭著,竹村好博編(1854).

(13) [算法捷徑]乘除對數表(印本),惠川景之著(1857).

(14) 對數表(鈔本),著作人及時代未詳.

(15) [新編]加減表,一名對數表(鈔本),阿部有清著(1860).

(16) 對數表(印本),關口開著,時代未詳.

(17) 數率六線率表(印本).

(18) 乘除對數表(鈔本),又[大測]加減代乘除表,大測表卷之三,或稱大村一秀著.

22. 不朽算法,眞假數表及對數表起源

(1) 關流正統第四傳安島直圓(1739－1798,或

1733－1800)之第五傳日下誠(1764－1839)於其師安島去世之翌年(1799),編集其師遺著,成不朽算法上下卷,上卷論圓理,下卷論對數之起源,角術等,并及留島義太(?－1757)之平方零約術.上卷第十二問載與對數相關之題.因此問爲三角形自頂作n斜線,則內容n等圓之全徑爲

$$d=h\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{D}{h}}\right),$$ 而h=自頂至底線之垂線,D=內容圓全徑.

其卷下稱:

或曰,第十二問,三斜,內容等圓術,界斜數十,則開方乘數,亦數十乘方,得商數不容易,可謂無用之術乎.答曰,予有新案,如下文.

術曰:眞數一者配數空,眞數[一十者,十分者]各配數一.眞數[一百者,一釐者]各配數二.眞數[一千者,一毛者]各配數三.如此眞數上下每進退一位,配數增一.依比例得所求配數.其術曰:置[一十],九乘方開之,得商爲配數[一分]之眞數[名法],置[一十]以法除之,爲配數[九分]之眞數.以法除之,爲配數[八分]之眞數.以法除之,爲配數[七分]之眞數.次第如此以法累除之,而求到配數[二分]之眞數而止.

置配數[一分]之眞數,九乘方開之,爲配數[一厘]之眞數[名法],置配數[一分]之眞數.以法除之,爲配數[九釐]之眞數.以法除之,爲配數[八釐]之眞數.以法除之,爲配數[七釐]之眞數.如前法以法累除之.求到配數[二釐]之眞數而止.

置配數[一釐]之眞數,九乘方開之,爲配數[一毛]之眞數.依前術求到,超於配數[九毛]之眞數.至[二毛]之眞數而止.[餘倣此].

所稱配數即對數也,如

眞數		配數
1		0
10	0.1	1
100	0.01	2
1000	0.001	3
......	......	......

是也,而配數之正負,不復計及.

其求配數之法,如

$\sqrt[10]{10}$ $=\log^{-1} 0.1$ (以配數一分之眞數爲法),

$\dfrac{10}{\sqrt[10]{10}}$ $=\log^{-1} 0.9$ (配數九分之眞數),

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10}}}=\log^{-1}0.8$$ (配數八分之眞數).

....

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10}}}}}}}}}$$ (配數二分之眞數).

次

$$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}=\log^{-1}0.01$$ (以配數一釐之眞數爲法)

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.09$$ (配數九釐之眞數)

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\cdot\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.08$$ (配數八釐之眞數).

....

由此得

眞數	配數
7.9423823472428	0.9
6.3095734448019	0.8

5.0118723362727	0.7
3.9810717055350	0.6
3.1622776601684	0.5
....	......
1.2589254117942	0.1
1.2302687708124	0.09
....	......
1.0002072541335	0.00009
....	....
1.0000000000046	0.000000000000002
1.0000000000023	0.000000000000001

如求 log 2. 因原表眞數之值至複雜，而其配數之值反簡單，然亦可求整數之配數. 其義一如戴煦對數簡法(1)"有開方表徑求諸對數"之法，例如

$$\log 2=\log 1.9952623149698\times\frac{2}{1.995\cdots698}$$

$$=\log 1.9952623149698\times 1.002374467254529$$

$$=\log 1.9952\cdots9698\times\log 1.0023052380779$$

$$\times\frac{1.002374467254529}{1.0023052380779}$$

$$=\log 1.9952\cdots9698\times\log 1.0023\cdots0779$$

$$\times 1.00006906595294.$$

$$=0.3+0.001+0.0001+\cdots\cdots$$

$$=0.3010295663.$$

至有配數求眞數,如已知配數2.56求眞數.已因知配數2之眞數$=100=a$,配數0.5之眞數$=3.1622776601684=b$,配數0.06之眞數$=1.1481536214969=c$,則所求之眞數爲$a.b.c.$

眞假數表亦爲安島所編,未詳年代.對數表起源有與安島眞假數表內容相同者.

23. 對數表起源.作對數表法.加減代乘除表.

(1) 會田安明(1747－1817)之對數表起源,與安島直圓之對數表起源書名相同,而內容全異.書中言眞數2之假數1,眞數4之假數2,眞數8之假數3,

幷謂

眞數相乘者假數相加而相對. $\log ab=\log a+\log b.$

眞數相除者假數相減而相對. $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$.

眞數開平方者假數二除而相對. $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a$.

眞數開立方者假數三除而相對. $\log\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}\log a$.

眞數開三乘方者假數四除而相對. $\log\sqrt[4]{a}=\frac{1}{4}\log a$.

又立小表如

眞　數	2	4	8	16	32	64	128	……
假　數	1	2	3	4	5	6	7	……

蓋會田先求2爲底之對數,其術一如數理精蘊內"用中比例求假數法". 如求 $\log 3$, 先由 $\log 2=1$, $\log 4=2$ 起數.

$\sqrt{2\times 4}=2.82842+$[第一眞數, 少率 (1)].[37]

則 $\log 2.82842+=\frac{1}{2}(\log 2+\log 4)=1.5$ [第一假數].

次因 $\sqrt{\text{第一眞數}\times 4}=3.36358+$[第二眞數, 多率 (1)].

則 $\log 3.36358+=\frac{1}{2}(\log 4+\log 1.5)=1.75$ [第二假數].

(37) 關於多少率之說, 詳見東北數學雜誌第六卷內林鶴一"零約術卜我國於ケル連分數論發達"論文.

復次 $\sqrt{少率(1)\times多率(1)}=3.084421+$[第三眞數, 多率(2)].

則 $\log 3.084421+=\frac{1}{2}$(第一假數+第二假數)$=1.625$ [第三假數].

復次 $\sqrt{少率(1)\times多率(2)}=2.9536+$[第四眞數, 少率(2)].

則 $\log 2.9536+=\frac{1}{2}$(第一假數+第三假數)$=1.5625$ [第四假數].

逐次如是, 至第十次得:

第十眞數 $=2.9999967198$ (少率)

第十假數 $=1.5849609375$

故 $\log_2 3=1.584961$

同理 $\log_2 5=2.321920,\quad \log_2 7=2.80735,$

$\log_2 11=3.459426,\quad \log_2 10=3.32192.$

如欲得10爲底之對數, 可以下式得之.

$$\log_{10} 2=\frac{1}{\log_2 10}\cdot\log_2 2=0.30103.$$

(2) 作對數表法爲篠原善富, 文政六年(1823)所著. 篠原善續中算, 文化十三年(1816)著三角法舉要. 文政二年(1819)著周髀算經圖字解. 其作對數表法

蓋完全髀販數理精蘊之說,一如陳杰之算法大成之例.

(3) 加減代乘除表爲阪部廣胖(–1824)所著.附於文化七年(1810)所著算法點竄指南錄第十二卷內.爲一至三百之對數小表.佐久間光豹復爲補成三百至千二百之對數小表.

24. 對數表製法.對數表精解

(1) 對數表製法爲石黑信由(1760–1836),文政十二年(1829)所著.其法先求眞數之四位假數,次及六位,復次爲八位,逐次偪近,得其眞值.

(甲) 先求四位之表.

眞數	7	10	100	……
假數	0000	1000	2000	……

又

眞數	2	4	8	5	………
假數	0300	0600	0900	0700	………

上表蓋設眞數2之假數爲0300.

故眞數4之假數爲0600,亦爲眞數2之假數2倍;

又眞數8之假數爲0900,亦爲眞數2之假數.及4之假

數之和;又眞數5之假數爲0700,亦爲眞數2之假數及10之假數之較.

次以3爲2與4中間之數,乃以2之假數,與4之假數相加折半爲3之假數即0450.由是9之汎假數爲0900,但上表明言8之假數亦爲0900,由是9之假數當以8之假數,與10之假數相加折半得爲0950,今倍之得1900爲81之假數.又以8之假數,與10之假數相和得80之假數,亦爲1900.但在理此兩數不應相同,由是加不定加數 (irregular additor) 於9之汎假數,是爲0.952.[38] 旣得9之假數,可推得3與6之假數,如:

眞　數	9	3	6	………
假　數	0952	0476	0776	………

復次求7之假數,由6之假數與8之假數相加折半得爲0838.今倍之得1676爲49之汎假數,又以6之假數,與8之假數相加得48之假數,亦爲1676.但在理兩數不應相同,是知兩者均不合,因另以5之假數與10之假數相加得1700,又以48之假數與50之假數相加折半得1688爲49之汎假數.另加不定加數0002是爲49

(38) 石黑信由以何理由得不定加數,至今尚無確解.

之假數，如：

眞　　數	49	7	
假　　數	1690	0845	

同理得下列之表，就中差爲連續二假數之差，不定加數（卽前後平均而外之不定加數）爲連續三假數內，前後兩假數相加折半，與中央假數之差．表中除有附尾之5外，其不定加數皆漸次細小．如設2之假數爲0301則不定加數之漸次細小，更爲有序．

眞　　數	假　　數	差	不定加數
1	0000	0300	0000
2	0300	176	62
3	0476	124	26
4	0600	100	12
5	0700	76	12
6	0776	69	$03^{\underline{5}}$
7	0845	55	07
8	0900	52	$1^{\underline{5}}$
9	0952	48	2

10	1000	39	4$\frac{5}{}$
11	1039	37	1
12	1076	35	1
13	1111	34	0$\frac{5}{}$
14	1145	31	1$\frac{5}{}$
15	1176	24	3$\frac{5}{}$
16	1200	27	1$\frac{5}{}$負
17	1227	25	1
18	1252	25	0
19	1277	23	1
20	1300	21	1

次求六位之表,以下二小表爲基礎,卽:

眞數	1	10	100	1000	
假數	000000	100000	200000	300000	

眞數	2	4	8	5	
假數	030103	060206	090309	069897	

最後求八位之表,以下二小表爲基礎,即:

眞數	0	10	100	1000	
假數	00000000	10000000	20000000	30000000	

眞數	2	4	8	5	
假數	03010300	06020600	09030900	06989700	

(2) 對數表精解爲關流正統第六傳內田恭 (1805—1882) 所著,其弟子竹村好博,安政元年 (1854) 所增修,書中以數理精蘊累乘比例,義頗繁雜,因如不朽算法先設,

眞數	假數
1	0
10	1
100	2
1000	3
……	……

次以

眞數	假數
$\sqrt[10]{10}$	0.1
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^2$	0.2
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^3$	0.3
....	......
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^{10}$	1.0
$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}$	0.01
$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)^2$	0.02
....	......
$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}$	0.001
$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}\right)^2$	0.002
....	......

其進行之方法,又與不朽算法稍異.

25. 算法對數表.乘除對數表.對數表

(1) 算法對數表爲小出修喜(1797–1865)所編,福

田理軒校. 小出爲德島藩士, 是書於弘化元年(1844)刊行. 對數初入日本, 羣相珍祕, 自此書出, 對數法始廣傳焉. 其書疑爲荷蘭人所輸入, 因卷中信田貞秀誌語曾題荷蘭之對數表譯名焉.

(2) 乘除對數表爲安政四年(1857)惠川景之所著, 乃鈔錄西曆1831年毗辣兒(J. C. Pilaar)航海書中之一萬以下四位對數表; 并列差數表. 毗辣兒爲荷蘭人.

(3) 對數表由關口開(1842–1884)署簽, 作書年代未詳, 大約採自英, 美書. 具小數六位. 明治初期, 日人多用六, 七位對數表, 此書疑出於此時矣.

十五年, 十一月, 二十日, 於靈寶

中算輸入日本之經過

日本遠藤利貞補修日本數學史,分該國數學史爲五紀:第一紀起神代迄宣化(536 A. D.),號爲日本上古之數學;第二紀起欽明(554)迄元和(1615–1623),號爲支那數學採用之時代;第三紀起元和迄延寶年間(1673–1680),號爲日本數學之再興時代;第四紀起延寶迄明和(1781–1788),號爲日本數學之新發時代;第五紀起明和迄明治十年(1877),號爲日本數學之高進時代;實則各紀中均有中算輸入之形迹,不獨一二紀如是,即三四五紀亦然.(註1)

日本神代之事,其詳不得而知.其在吾國,則記

(註1) 遠藤利貞遺著增修日本數學史,大正七年日本巖波書店出版,以後簡稱增修遠史.

數之法,說文所記,十十爲百,十百爲千,十千爲萬,一十百千萬,謂之五數.日本上古記數,萬以下亦取此記法.萬以上,則以萬萬進.三上義夫疑其傳自吾國.按西曆紀元前三十三年任那始入朝於日,任那在今朝鮮慶尙道之西南,此爲日韓交通之始.厥後神功皇后(201-270 A. D.)用兵新羅,而間接得與吾國交通.華民亦多移居於日.舉凡簿籍計算,與建築,工藝,佛法,均於此時間接輸入.(註2)

第二紀爲吾國數學輸入最顯著之時代.欽明十五年(554 A. D.),百濟易博士王道良,曆博士王保孫始以中國曆法輸入日本.於是改良度量衡制,置漏刻器,立天文臺,行元嘉曆及儀鳳曆,一惟中土之法是遵.大寶二年(702),立學校,授算術,所採算經十書,爲周髀,孫子,六章,三開,重差,五曹,海島,九司,九章,綴術,幷置曆士,算生,等名稱.先是,推古十五年(607),日皇遣小野妹子入使於隋.日後中日僧侶,商舶,多所往來;直至元代弘安之役(1281),中日交通,始

(註2)增修遠史三至五葉.徐宗稺周葆鑾共譯日本和田垣謙三世界商業史一八七至一九五葉.

形阻隔.而中算在日本之影響,已可得以言.徵諸日本最古算書口遊之所記載,更屬可信.(註3)

口遊一書,附有天祿元年(970)冬十二月二十七日源爲憲序文,蓋爲教授當時參議藤原爲光七歲長子松雄而作.所記九九,始九九迄一一,與孫子算經之次序相同.今據舊寫本(1263)移錄九九之序如次:

九九八十一 八九七十二 七九六十三
六九五十四 五九四十五 四九三十六
三九二十七 二九十八 一九九

八八六十四 七八五十六 六八四十八
五八四十 四八三十三(按三當爲二之誤)
三八二十四 二八十六 一八八

七七四十九 六七四十二 五七三十五
四七二十八 三七二十一 二七十四
一七七

六六三十六 五六三十 四六二十四
三六十八 二六十二 一六六

(註3) 增修遠史六至十一葉.徐周譯世界商業史.

五五二十五　四五二十　三五十五

二五十　一五五

四四十六　三四十二　二四八

一四四

三三九　二三六　一三三

二二四　一二二

一一一

孫子算經,末有孕婦難月一問,題曰:

今有孕婦,行年二十九,難九月,未知所生.

答曰:生男.

術曰:置四十九,加難月.所除以天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七,八風除八,九州除九.其不盡者,奇則爲男,耦則爲女.

口遊人事篇,亦有類似之問題,如:

今有姙婦可生子,知男女法.

術曰:置婦女年數,(自生年至姙年)加十二神爲實.可際(按際當爲除之誤)天一,地二,人三,四時,五行,六神,七皇,(按皇當爲星之誤)八風,九宮.殘一三五七(爲陽男也)二四六八(爲陰女也)一死(此字疑有誤)以九除也.

此外則有「有病者不知死生」及「今有人死生知術」二項:

置九九八十一,加十二神得九十三,更加病者年數,所得以三除之.若有不盡者,男死女不死.若無不盡者,女死男生云.置八十一,加十二神,又加十二月,又將病者年若干,幷以三除.若有算殘者不死,不遺死.

此二項不見於孫子算經.惟孫子之孕婦難月題適在篇末,或其所附記年久缺佚,而留入日本者,幸得保存,未可知也.復有竹束問題,爲等差級數求總和,亦與孫子算經之「今有方物一束」約略相同.(註4)

第三紀中算之輸入,尤爲重要.明萬曆二十年(1592)日本豐臣秀吉遣舟師數百艘渡海,陷朝鮮之釜山,朝鮮告急.其翌年明師敗,尋議和.厥後互有勝敗.至二十六年七月(1598),豐臣秀吉死,朝鮮之事乃

(註4) 三上義夫九九ニ就キテ,東洋學報第十一卷第一號一〇二至一一八葉,日本.

三上義夫第三回總會ニ陳列セル和算書解題,日本中等教育學會雜誌第四卷第一號第三葉,日本.

平.而程大位之算法統宗(1593),亦於斯役輸入日本焉.豐臣秀吉之臣毛利重能爲首傳算法統宗者.或謂毛利曾入學於明.延寶四年(1676)覆刻本算法統宗跋語,有:「算法統宗有渡唐而以來,世久褒用」之語,或以爲毛利來華之證.豐臣既歿,毛利隱於日之京都,開館授徒,從者數百人.所著有算書(1622),歸除濫觴二卷,及割算一書,蓋皆述中國珠算之法也.毛利復以其筆錄之算法書十八卷,與其徒吉田光由(1598—1672).寬永四年(1627),吉田著塵刧記.其後今村知商復著豎亥錄(1639),因歸算歌(1640).延寶三年(1675)湯淺得之尙翻刻算法統宗,幷加註釋,稱爲算法統宗訓點.元祿七年(1694)鈴木重次著算法重寶記,其納音之法,與因乘之圖,亦出於算法統宗.卽因乘之題問與圖,亦與算法統宗卷十二寫算之因乘圖相類.今譯於下:

問綿布二十三端,每端五兩六分五釐之銀.

答曰,百二十九兩九分五釐.

其解法列圖如上:

方陣之事,日人習者至夥.其基本定理,多導源於算法統宗.其同時輸入日本者,為中國算盤.文祿年間(1592—1596),前田利家在名護屋陣中所用之算盤,尙流傳至今.盤長四寸二分五釐,寬二寸三分,高四分.黑檀木製,凡九檔,梁上二珠,梁下五珠,盤珠略作稜形.其後大津製造算盤,為用更廣.(註5)

元朱世傑所著算學啓蒙,亦於明末由朝鮮間接輸入日本.是書流傳於朝鮮者,有洪武年刻本.至

(註5) 增修遠史四三至六六葉,一三二葉,一七六至一七七葉.

三上義夫文化史上ヨリ見タル日本ノ數學,哲學雜誌第三十七卷四百二十一號十一葉至十二葉,又四百二十二號二十九至三十葉,日本.

林鶴一,和算ニ於ケル通俗書塵刼記及ヒ改算記,東北數學雜誌第十六卷二十六至三十七葉,大正八年(1919)日本仙臺.

三上義夫和算之方陣問題,日本帝國學士院,大正六年(1917)日本東京出版.

三上義夫第三回總會ニ陳列ヤル和算書解題八至九葉.

清順治十七年(1660),朝鮮金始振重刊行世.其在日本,則萬治元年(1658)已有吉田光由門人久田玄哲詳註算學啓蒙,號爲算學啓蒙訓點.村松茂清以算學啓蒙法式雖有之,與和俗不洽,因於寬文三年(1663)著算俎.寬文十二年(1672),星野實宣以俗語解說,號算學啓蒙註解.元祿元年(1688)建部賢弘(1664-1739)著算學啓蒙諺解.(註6)

宋楊輝算法流傳於朝鮮者,有明洪武戊午(1378)古杭勤德書堂刊本.明宣德八年(1432)朝鮮觀察使者辛引孫奉內旨,囑慶州府尹金乙辛,判官李好信命工鋟梓,閱月而訖.顧其書流傳不廣,故金始振亦僅得其鈔本.而刻本尙有流入日本者,日本算聖關孝和(1642-1708)於寬文辛丑(1670),曾寫錄一部.若數學九章,四元玉鑑,測圓海鏡,亦有傳入日本之形迹.狩野亨吉謂相傳關孝和於奈良某寺,得讀中國算學書凡三年,似亦心得測圓海鏡之誼.因其級數

(註6) 增修遼史七八,八六,一〇四,一六八葉.

三上義夫第三回總會ニ陳列ヤル和算書解題九至十 葉.

算學啓蒙金始振序.

開展法,與李冶求高次方程式方根之法相似也.(註7)

第四五紀日算精進,遠越前人.而受賜於天元學說之輸入,則無可疑.關孝和之剩一術,與宋秦九韶之大衍求一術,全相一致.即其招差法,亦根於元郭守敬之相減相乘及三差之法.又所著大成算經,曾錄程大位之寫算乘法.其方陣之術,則師法楊輝,以關氏曾手錄是書也.關孝和之剪管術,於研幾算法自序,謂出於唐穆宗之宣明曆.厥後宅間能清一流,在十七世紀中葉,亦以招差法解析圓理,說詳宅間流圓理卷二.(註8)

明末清初西法輸入中國.第一期之代表著作,為崇禎曆書,曆象考成,數理精蘊.第二期之代表著作為梅氏曆算全書.至乾嘉時代,西法中止輸入,學

(註7) 本朝數學通俗講演集第六葉,明治四十一年(1908)日本東京.

算學啓蒙金始振序.

關孝和鈔本宋楊輝算法.

(註8) 增修遠史一四〇至一四一葉及二一二葉.

Y. Mikami: The Circle-measurement of the Takuma School, Tôkyô Sûgaku—Buturigakkwai kiki. 2 series, Vol. VII., No. 3, pp. 46—56, 1913.

者蒐輯古籍，乃有算經十書之刻.是時程大位寫算式之籌算,風靡中原.梅氏之籌算七卷(1678),戴震之策算一卷(1744),蓋其例也.此項算法,流入日本,亦得相當之影響.明和元年(1764),山縣昌貞著牙籌譜,其自序謂:「牙籌舊明人之所製,便捷頗勝用算盤者.」其籌爲直者,共有九枚,另作零籌,都爲十籌,別置同樣者數枚,以便應用.明和四年(1767)千野乾弘著籌算指南,其籌爲橫者.是直襲梅氏之制,且其形式亦復相同.清戴震於乾隆三十八年(1773)至四十二年(1777)間,纂校周髀算經,九章算術,孫子算經,五曹算經,海島算經,五經算術,夏侯陽算術,先後以聚珍版刊行.其後曲阜孔繼涵乃幷戴氏所校輯古算經,張丘建算經,及其所著策算,勾股割圜記作算經十書刊刻行世.寬政四年(1792)村井中漸翻刻吾術,夏侯國所傳入之五種算經:即孫子算經,五曹算經,海島算經,五經算陽算經.村井爲日本算學界老宿,早年曾著逢原新率勾股法(1760),開商點兵算法(1765)等書.今僅刻此五種,或彼僅見聚珍版刊本各算經,而周髀九章當時尙有傳本.蓋天明五年(1785)川邊信一尙著周髀算經圖解,文政二年(1819)篠原善富亦

作周髀算經國字解也.(註9)

牙籌以外,弧三角,橢圓,對數亦輸入日本.惟此時日本尚一方受荷蘭學術之影響.是時安島直圓(1739-1799)著弧三角術解,蓋卽註解梅文鼎曆算全書中環中黍尺之加減捷法.佐藤一淸橢圓說詳之第一節,題爲「三國同題同術起原」.其第三解法,謂出自橢圓起源,說詳曆算全書卷中.至對數之初入日本也,習者相祕,不以授人.安島直圓卒後之翌年(1799),其門人日下誠(1764-1839)編集其遺稿.成不朽算法二卷,下卷言普通對數之起源.會田安明則別作對數,號會田對數.弘化元年(1844)小出修喜刊一至萬之普通對數表.昔日祕不授人之學術,今始克公諸世.其後十年,竹村好博與其門人內田五觀

(註9) 增修遼史三三八,三三九,三五〇,三五一,四〇二,四三二,五三九葉.

東戴原民國十三年北京晨報社出版.

拙著中國數學源流考略,北京大學月刊第一卷第五號六八至六九葉七一至七二葉,民國八年

共作對數表正解，其用益顯.(註10)

日本於垜積，圓理，研討極精，其基本觀念，亦多導源吾國.日人以關孝和流派之垜術，詳列下表，今可與宋元諸子，及清陳世仁垜積之說參較，以觀其源流.

圭垜或圭減垜	1.	2.	3.	4.	5.	………
三角衰垜或三角減衰垜	1.	3.	6.	10.	15.	………
再乘衰垜或再乘減衰垜	1.	4.	10.	20.	35.	………
三乘衰垜或三乘減衰垜	1.	5.	15.	35.	70.	………
”	”	”	”	”	”	”
奇零圭垜	1. 3.	5.	7.	9.	11.	……
奇零三角圭垜	1. 4.	9.	16.	25.	36.	……
奇零再乘圭垜	1. 5.	14.	30.	55.	91.	……
奇零三乘圭垜	1. 6.	20.	50.	105.	196.	……
”	”	”	”	”	”	”

(註10) 增修遼史四五四至四五九葉，五二一至五二五葉，五六三至五六五葉，六一七至六一八葉，六三八至六四三葉.

林鶴一安島萬藏及ビ松永貞之允，東北數學雜誌第十一卷一七至三四葉，大正六年(1917)，日本仙臺.

林鶴一佐藤一清ノ橢圓說詳，東北數學雜誌第十二卷一九〇至一九二葉，大正七年(1918)日本仙臺.

偶零圭垜	2.	4.	6.	8.………
偶零三角圭垜	2.	6.	12.	20.………
偶零再乘圭垜	2.	8.	20.	40.………
偶零三乘圭垜	2.	10.	30.	70.………
”	”	”	”	”
方垜	1^2.	2^2.	3^2.	4^2.…………
立垜	1^3.	2^3.	3^3.	4^3.…………
”	”	”	”	”

清初杜氏九術傳入中國,曾否流布日本,今無可考.而當日彼國於圓率之理,關孝和多所說述.關氏卒後建部賢弘校其遺編圓理弧背術得與杜氏相類之式

$$\frac{1}{4}(a)^2=ds\left\{1+\frac{2^2}{3.4}\left(\frac{s}{d}\right)+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}\left(\frac{s}{d}\right)^3\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\}$$

而 a 爲弧背,d 爲全徑,s 爲矢.元文四年(1739)松永良弼著方圓算經,記錄關於圓率之級數八式,其一與

前同,又三式屬於杜氏九術.(註11)

同光時代,西法復又傳入中國,而間接輸於日本.李善蘭偉烈亞力所譯代微積拾級(1857),在日本曾有附註之翻刻本.前之偉烈亞力數學啓蒙(1853),亦於日本發見翻刻本,題爲官版數學啓蒙.中算輸入日本,直至明治維新,和算衰廢以後,方告中止.觀於上文所記,則千餘年來中算對於日本之所造就,可無遺憾矣.(註12)

(註11) 增修遼史二七七葉.

三上義夫和算史概觀,日本東京物理學校雜誌別刷第十至十一葉,明治四十三年(1910).

拙著中國數學源流考略,北京大學月刊第一卷第五號六九至七一葉,民國八年.

Kitizi Yanagihara: On the Dajutu or the Arithmetic Series of Higher Orders as Studied by Wasanists.—The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 14, pp. 305.

(註12) 三上義夫和算史概觀,日本東京物理學校雜誌別刷十九葉,明治四十三年.

三上義夫文化史上ヨソ見タル日本ノ數學,哲學雜誌第三十七卷四百二十三號四十三葉.

梅文鼎年譜

序：梅文鼎與牛頓，關孝和並時，其整理西算，佳惠後學，厥功甚偉；且行年三十，方學歷算，而終身用力從事，至老不倦，尤屬可欽。其事蹟散見各書，爰爲比次，集成年譜，俾便參考。其並世國中算學家著述大略，與歷算事實，附記另行，并冠單圖爲誌。

向曾徵訪梅氏宗譜，而所得未如所期。文鼎事蹟，因多存疑之處，願海內明達，進而教之。

年譜

明崇禎六年癸酉(1633)一歲。

是年夏歷二月初七日亥時，梅文鼎[1]生於安徽宣

---

(1)"梅定九，名文鼎，號勿菴，宣城人，有歷算全書"，見陸燿切問齋文鈔，第二四卷，第四頁，乾隆四〇年(1775)自序刻本。或參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七二頁，上海商務印書館出版，民國八年(1919)一一月。

城(2).

五續疑年錄(3)稱"梅定九,文鼎正錄(4)明崇禎六年癸酉生,康熙六十年辛丑卒.名人年譜同.補錄(5)萬歷元年癸酉生,順治十八年辛丑卒.案清國史館本傳,儒林傳藁,文獻徵存錄并云康熙六十年卒,補錄誤".

○前五年(1628)王錫闡(6)生,年六歲(7).

(2) 民國七年(1918)由宣城教育會劉至純君寄來甯國縣梅柏溪君所藏梅氏宗譜文鼎公本傳,穀成公事略,及縣志中梅文鼎傳.本條卽據梅氏宗譜.

(3) 閔爾昌五續疑年錄,附錄一,第四頁,北京家刻本,民國七年(1918).

(4) 正錄卽錢大昕疑年錄,叄看第四卷,第二一頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(5) 補錄,卽錢椒補疑年錄,叄看第四卷,第一頁,道光一八年(1838)刻.

(6) "王寅旭,名錫闡,號曉菴,吳江人,有困亨齋集",見陸耀切問齋文鈔,第六卷,第一〇頁.

(7) 三續疑年錄,據王濟撰墓誌,見陸心源三續疑年錄,第八卷,補遺,第四册,第二三頁,光緒五年(1879)自序刻本.

○前三年(1630)鄧玉函[8] (Terenz, Jean) 卒, 年未詳.

○前二年(1631)李之藻[9]卒, 年未詳.

○是年徐光啟[10]卒, 年七十二.

崇禎七年甲戌(1634)二歲.

○是年明室以李天經[11]繼徐光啟督修歷法.

---

(8) "鄧玉函者, 德國之干司但司人也. 天啓元年(1621)來華崇禎二年七月(1629)徐光啓薦鄧玉函同修歷法. 次年(1630)四月卒", 語見格致彙編第五年冬季册, 西歷1890年冬出版利瑪竇湯若望二君傳略內. 明史, 第三二六卷, 稱"玉函熱而瑪尼國人".

(9) "李之藻字振之, 號涼庵, 仁和人. ……天學初函之藻所彙刻也. 崇禎四年卒於官". 見阮元疇人傳, 第三二卷, 第一……五頁, 觀我生室彙稿本.

(10) "徐光啓字子先, 上海人, ……從西洋人利瑪竇學天文歷算火器", 見明史, 第二五一卷, 第四頁, 上海中華書局印本, 民國一二年(1923). 又"徐元扈(七二), 光啓, 生嘉靖四一年(1562)壬戌, 卒崇禎六年(1633)癸酉", 見錢大昕疑年錄, 第三卷, 第一九頁, 鈔本, 莫友芝舊藏.

(11) "李天經字長德, 趙州人", 見阮元疇人傳, 第三三卷, 第一……一二頁, 觀我生室彙稿本.

其年，成歷書六十一卷，前後共成書一百三十七卷(內有一架，一摺并稱卷)．明史藝文志作一百二十六卷，是爲崇禎歷書[12]．

崇禎九年丙子(1636)四歲．

○"羅雅谷[13] (Rho, Giacomo) 爲意國米蘭人．崇禎九年(1636)三月卒，歷法全歸(湯)若望[14]推步[15]．

崇禎十四年辛巳(1641)九歲．

(12) 語見李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第六九頁．

(13) "羅雅谷字閒韶，天啓末年入中國"，阮元疇人傳，第四四卷引新法算書．

(14) "湯若望者，日耳曼之哥倫人也．精歷法，通格致．明崇禎二年(1629)入中國，習華文．時禮部奏請開局修改歷法，徵若望供事，數年．勤勞局事．著交食諸書數種．經徐光啓李天經前後進呈"．見格致彙編第五年冬季册，西歷1890年冬出版，利瑪竇湯若望二君傳略內．

(15) 語見利瑪竇湯若望二君傳略，格致彙編(1890)．

按 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I, p. 436 (1923) 謂羅雅谷1593年生於米蘭，1638年西四月卒於北京．

"文鼎九歲熟五經,通史事,有神童之目[16]."

"父士昌,號繖䑕,改革後,棄諸生服……文鼎兒時侍父及塾師羅王賓,仰觀星氣,輒了然於次舍運旋大意[17]."

崇禎十五年壬午(1642)十歲.

○是年日本關孝和[18](1642—1708)生.

英國牛頓[19](Newton, Sir Isaac)(1642—1727)生.

清順治二年乙酉(1645)十三歲.

---

(16) 語見梅氏宗譜.

(17) 語見梅文鼎傳上,杭世駿道古堂文集,第三〇卷,第七册,第一頁,光緒一四年(1888)汪氏振綺堂補刻本.

(18) "關孝和號自由,稱新助.爲人穎敏,尤好數術.精天文律曆,時稱爲算聖.撰著數十種.門人數百人".見關孝和之墓碑條,遠藤利貞日本數學史,第四三七頁,日本東京岩波書店出版,大正七年(1918)九月.

(19) "牛頓生於Lincolnshire,受教育於Trinity大學.發見微分學,二項式定理等算學要理.Universal Arithmetic一書由代數學方程式之理論,及雜問而成".見數學小史,外篇之部,趙繚數學辭典,第七九四……七九六頁,上海羣益書社出版,民國一二年(1923).

○"順治二年六月若望上言,於明崇禎年間曾用西洋新法,製測日月星晷定時攷驗諸器,近遭賊燬,臣擬另製進呈,今先將本年八月朔食,照新法推步,……往往不謬.得旨,欽天監印信著湯若望掌管,所屬官員嗣後一切占候選擇,悉聽舉行.累加太僕太常寺卿,勅賜通徵教師,入覲禮儀,全行蠲免[20]".

順治四年丁亥(1647)十五歲.

"文鼎是年補博士弟子員[21]."

順治五年戊子(1648)十六歲.

○是年陳厚耀[22](1648–1722)生,厚耀著有續增新法比例四十卷[23].

---

(20) 語見利瑪竇湯若望二君傳略,格致彙編(1890).

(21) 語見梅氏宗譜.

(22) 陳厚耀字泗源,號曙峯,泰州人也.康熙丙戌(1706)李光地薦厚耀通歷法.厚耀曾受教於文鼎,康熙壬寅(1722)卒,年七五.語見阮元疇人傳,第四一卷,第一……五頁,觀我生室彙稿本.

(23) 豐順丁氏日昌持靜齋藏舊鈔本.見劉鐸古今算學書錄,象數第三,第一四頁,光緒二四年(1898)上海算學書局石印本.

順治六年己丑(1649)十七歲.

○是年艾儒略[24] (Aleni, Jules) 卒.

順治七年庚寅(1650)十八歲.

○是年陳訏[25] (1650–1732) 生, 著有句股述二卷(1683), 句股引蒙五卷(1722)[26].

順治十一年甲午(1654)二十二歲.

是年龍華民[27] (Longobardi Nicolao) 卒.

---

(24) 艾儒略一作艾如略, 見明史第三二六卷. 意人, 萬歷壬寅(1602)來華, 語見利類思不得已辯, 第四六頁, 1847年重刻本.

(25) 陳訏字言揚, 海甯人, 傳黃宗羲籌算句股之學. 句股術及句股引蒙諸書, 俱鐫版藏於家. 生於順治庚寅(1650)五月一九日, 歿於康熙壬子(1722)七月二四日. 語見海甯陳氏宗譜, 民國一四年(1925)由海甯圖書館朱倚君向陳逵齋君徵得.

(26) 李儼所藏嘉慶二年守仁堂重刊本句股引蒙, 無卷數. 四庫本作五卷, 見壬子文瀾閣所存書目, 第三卷, 第二二頁, 通行本.

(27) 龍華民, 意大里亞國人, 語見明史, 第三二六卷. 萬歷二五年(1597)來華, 順治一〇年(1655)卒.

龍華民以1565年生於西西利 Sicily 之 Calatagirone, 1655年西曆一二月一一日卒於北京. 見 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 436, (1923).

順治十四年丁酉(1657)二十五歲.

○是年已革回回曆官吳明烜,疏言若望所推天象之謬.并上是年回回曆,推算天象之書.請立回回科,以存絕學.後經實測,明烜所指皆妄.禮部議其罪,援赦獲免(28).

順治十六年己亥(1659)二十七歲.

遂安毛際可(1633-1708)(29)梅先生傳,稱"文鼎年二十七,師事前代逸民竹冠道士倪觀湖,受麻孟璿所藏臺官交食法,卽爲訂補註釋,成歷學駢枝

---

(28) 參看續文獻通考,第二五六卷,第三……六頁,浙江書局,光緒一三年(1887).

(29) "毛會侯名際可,號鶴舫,遂安人.順治戊戌進士,知樂城凌儀二縣,有安序堂集".見陸耀切問齋文鈔,第七卷,第一九頁,乾隆四年(1775)自序刻本."毛會侯(七六)際可,生崇禎六年癸酉(1633),卒康熙四七年戊子",見陸心源三續疑年錄第八卷,第一九頁.

按倪觀湖卽倪正."倪正清宣城人,字方公……尤精天文曆算,梅文鼎嘗從受交食法".見中國人名大辭典補遺第一二頁.上海商務印書館,民國一四年(1925)五版.

四卷,竹冠歎服,以爲智過於師云[30]".

○是年楊光先(1597–?)[31]作"闢邪論上",反對天主教.是年五月又作"摘謬十論",并見不得已上卷[32].

順治十七年庚子(1660)二十八歲.

○順治十七年十二月初三日楊光先呈書禮部正國禮,未准[33].

順治十八年辛丑(1661)二十九歲.

文鼎稱"是年始從同里倪竹冠先生,受交食通軌,

---

(30) 傳附勿菴歷算書目後,第一……二頁.勿菴歷算書目題宣城梅文鼎定九撰,孫瑴成,玉汝,校正.康熙四一年(1702)梅文鼎自序乾隆年歙縣飽廷博(1728–1814)刻入知不足齋叢書第一九集.

(31) 楊光先字長公,歙縣人,康熙三年(1664)上請誅邪教狀,時年六八歲,著不得巳上下卷,見不得巳,李儼藏傳鈔本.

(32) 楊光先不得巳,上卷,第一七……二九頁,又第五八……六五頁.李儼藏傳鈔本.末有錢大昕,黃丕烈,錢琦題跋.

(33) 見不得巳上卷.

歸與文鼐[34], 文鼏[35] 兩弟習之, 稍稍發明其立法之故, 幷爲訂其訛誤, 補其遺缺,得書二卷,[36] 以質倪師, 頗爲之首肯, 自此遂益有學歷之志".[37]

○是年方中通[38] 作數度衍凡例[39].

---

(34) "梅文鼐字和仲,與兄文鼎共成步五星式六卷,早卒"見杭世駿道古堂文集, 第三一卷, 第九頁.

(35) "梅文鼏字爾素輯經星中西同異考一卷,授時步交食式一卷", 見杭世駿道古堂文集, 第三一卷, 第九頁.

(36) 魏刻歷算全書作四卷,毛際可梅先生傳亦作四卷. 道古堂文集第三〇卷則作二卷. 勿菴歷算書目並作二卷. 夾註中又題"少參三韓金鐵山先生刻於保定". 故疇人傳第三七卷因謂"歷學駢枝二卷, 後增爲四卷". 梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏列"三韓貴州巡撫,金公鐵山世揚校刊歷學駢枝,筆算於保定". 今浙江圖書館藏有康熙丙戌 (1706) 年金世揚上參刊本筆算五卷.

(37) 見知不足齋叢書本勿菴歷算書目, 第一頁.

(38) "方中通字位伯, 一作位白,桐城人. 著有數度衍二十六卷", 見與梅定九書. 數度衍光緒庚寅 (1890) 太原王氏重校刊於成都.

(39) 數度衍凡例作於順治辛丑 (1661), 藏篋中者, 近三十年, 康熙丁卯 (1687) 歲, 其壻胡正宗爲刻於粵之恩州. 是書題二六卷, 兩江總督採進本作二四卷,附錄一卷. 蓋以卷首三卷併爲一卷. 道古堂文集作二五卷. 文鼎稱"數度衍於九章之外蒐羅甚富". 見勿菴歷算書目, 第四五頁.

康熙元年壬寅(1662)三十歲.

是年成歷學駢枝四卷,自序於陵陽之東樓[40].

按康熙元年(1662)歷學駢枝,序稱壬寅(1662)之夏,獲從竹冠倪先生,受臺官通軌,大統歷算交食法[41].康熙三十三年中西經星同異攷則稱年近三十[42].而勿庵歷算書目則稱順治辛丑(1661),鼎始從同里倪竹冠先生受交食通軌[43].遂安毛際可梅先生傳,則稱年二十七(1659)師事前代逸民竹冠道士,倪觀湖[44].道古堂文集[45]及阮元疇人傳[46]因之.毛氏作傳,不逮梅氏自記之確,而勿菴歷算書目追記往事,當亦不及元年歷學駢枝序之近.

(40) 陵陽山在安徽宣城縣城內.

(41) 歷學駢枝自序,第一頁,宣城梅定九先生著.歷算全書柏鄉魏念庭輯刊,雍正元年(1723).

(42) 見中西經星同異考.

(43) 勿菴歷算書目,第一頁.

(44) 勿菴歷算書目,梅先生傳,第一……二頁.

(45) 道古堂文集,第三〇卷,第一頁.

(46) 阮元疇人傳,第三七卷,第一頁.

前揣著中國數學源流考略,因亦採壬寅三十歲師事倪觀湖之說[47].

梅文鼎中西經星同異考序稱"蓋自束髮受經於先君子,塾師羅王賓先生,往往於課餘晚步時,指示以三垣列舍之狀.余小子自是知星之可識,而天爲動物;尋以從事制義,未遑精究,心竊好之.不幸先君子見背,營求葬地,不暇以他爲.無何余小子忽忽年近三十,……"[48]是文鼎父士昌蓋卒於文鼎三十歲前也.

康熙三年甲辰(1664)三十二歲.

甲辰方田通法序稱"客歲之冬,從竹冠先生飲令弟樂翁所.得觀先生捷田歌訣,離奇出沒.……今年春,里中有事履畝,或見問桐陵[49]法,遂出斯編

(47) 李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第七二頁.

(48) 見中西經星同異考.

(49) 日本關孝和遺著括要算法(1709)卷首,求周徑率;謂桐陵法周率六三,徑率二〇,周數三一五整.疑與此所題同屬一人,而爲明季隱者也.

相質,命曰方田通法云[50]".

○是年薛鳳祚[51]自序天學會通中"舊中法選要[52]".

○是年七月楊光先上請誅邪教狀於禮部,八月初六會審湯若望等一日,初七日放楊光先寧家[53]. 利類思[54] (Buglio, Louis) 不得已辯(1665)自序,稱"甲辰冬,楊光先著不得已等書,余時方羈絏待罪[55]".

康熙四年乙巳(1665)三十三歲.

---

(50) 方田通法序附筆算,第五卷梅氏叢書輯要,第五卷,第四頁.

(51) "薛儀甫名鳳祚,益都人,有歷學會通,河防輯要",見陸燿切問齋文鈔,第二四卷,第一五頁.

(52) 見陸燿切問齋文鈔,第二四卷,第一五……一六頁.

(53) 見不得已,上卷,第一……四頁.

(54) "利類思意大利人,崇禎一〇年(1637)來華,康熙二二年(1684)卒於北京". 見張蔭麟明清之際西學輸入中國考略附錄,清華學報第一卷,第一期,第六八……六九頁間,民國一三年(1924)六月北京清華學校出版.

(55) 不得已辯,序,第一頁,1847年重刻本.

○是年四月楊光先授爲欽天監右監，辭職，不准．五月到監供事，同月再辭．六月三辭，同月又辭．始終不准．七月又將張其淳降級爲左監，楊光先補爲監正．李光顯爲右監．錢琦跋不得已，稱光先“不久卽以置閏錯誤，坐論大辟，蒙恩旨赦歸，中途爲西洋人毒死，而後西法復行，卒不可拔(56)”．先是因楊光先之反對，致殺欽天監五官，流徙劉賈二人家屬，湯若望僅獲赦免(57)．

○是年利類思自序不得已辯．此書題西士利類思著，仝會安文思(58) (Magalhaes, Gabriel de) 南

(56) 見不得已下卷，第三八……六三頁，及跋第二頁．

(57) 參看王先謙東華錄，康熙朝，第五卷，第五……六頁．北京欽文書局重印本，光緒一三年 (1887)；王之春國朝柔遠記第五卷，第五……六頁，廣雅書局刻本，光緒六年 (1880)；清文獻通考第二五六卷，第六頁．

(58) “安文思葡萄牙人，崇禎一三年 (1640) 入中國，康熙一六年 (1677) 卒於北京”．見張蔭麟明清之際西學輸入中國考略，附錄，清華學報，第一卷，第一期，第六八……六九頁間．

懷仁[59] (Verbiest, Ferdinand) 訂.

康熙五年丙午(1666)三十四歲.

○湯若望(Schall von Bell, Johann Adam)卒.[60]

康熙八年己酉(1669)三十七歲.

文鼎稱"憶歲己酉桐城方位伯言籌算之善,然未見其書. 無何,家澹如兄至自都門,有所攜算籌一握,而缺算例. 余爲補之. 澹如大喜,因問余曰:能易之以直寫,不更便乎?子彥姪亦以爲然,遂如言作之,凡三易稿而後成[61]".

○康熙八年康熙帝命大臣傳集西洋人,與監官

---

(59) 南懷仁號敦伯,比利時 Courtrai 附近之 Pitthem 人. 1623 年西曆十月九日生,1688 年一月二十八卒於北京,1659 年入中國. 見 Bosmans, H., "Ferdinand Verbiest", Revue des quest. scientifiques, pp. 195, 375 (Brussels, 1912), 及 "La problème des relations des relations de verbiest avec la Court de Russie", Annales de la Société d'Émulation pour l'étude de l'hist.……de la Flandre, p. 193 (Bruges, 1913).

(60) 湯若望,日耳曼之哥倫 (Cologne) 人. 生於 1591 年,至 1666 年西曆八月十五卒於北京. 以 1622 年入中國. 見 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 436 (1923).

(61) 見勿菴歷算書目第三八頁.

質辯．南懷仁因言吳明烜所造康熙八年歷之誤．帝命大學士圖海等同赴觀象臺測驗．明烜所造果誤．圖海等請將康熙九年歷書交南懷仁推算．欽天監正馬祐等又力辯前此楊光先所指摘西法之不當．帝乃詔後用西洋新法[62]．

〇是年南懷仁改造觀象臺儀器,成新儀六式[63]．

康熙十一年壬子(1672)四十歲．

妻口氏卒[64]．

方程論六卷成於是年之冬[65]．

按中西經星同異攷序稱"年近三十,始從倪觀湖

(62) 參看清文獻通考,第二五六卷,第六……九頁．

(63) 參看清通志,第二三卷,第一頁及第一二頁,浙江書局本,光緒一三年(1887)．

(64) 歷算全書方程論第一卷發凡,第四……五頁,稱"歲壬子拙荊見背"．毛際可稱其"中年喪妻,更不復娶"．見勿菴歷算書目傳,第二頁．

(65) 歷算全書方程論,第一卷文鼎自序,第一頁,稱"論成於壬子之冬"．

先生受臺官通軌算交食法.……如是者數年. 而和仲(文鼐)已前卒久矣''[66]. 是文鼐蓋卒於文鼎四十歲前一兩年也.

○是年楊煒南造眞歷書一卷,實測不驗. 交刑部懲治[67].

康熙十二年癸丑(1673)四十一歲.

"康熙癸丑,宣城施副使閏章[68],總裁郡邑之志,以分野一門相屬. 郡邑志中所刻,皆其稿也[69]." 是年成"寧國府志分野稿一卷(已刻志中). 康熙癸丑奉同侍講施愚山先生纂修郡乘,諸友人咸以此項見屬,因具錄歷代宿度分宮之同異及各種分野之法,皆以諸書爲徵". 是年又成"宣城縣志分野稿一卷(已刻志中). 大體同府志[70]''.

---

(66) 見中西經星同異考.

(67) 東華錄,康熙朝,第一二卷,第七頁.

(68) "施尙白,名閏章,號愚山,宣城人,順治己丑(1649)進士,康熙己未(1679)博學鴻詞,授林院侍講,有學餘集". 見陸耀切問齋文鈔,第二三卷,第一六頁.

(69) 見道古堂文集,第三〇卷,第八頁.

(70) 見勿菴歷算書目,第五……六頁.

康熙十三年甲寅(1674)四十二歲.

方程論六卷,是年之夏乃寫定成帙[71].

○南懷仁靈臺儀象志成於此年[72].

康熙十四年乙卯(1675)四十三歲.

文鼎嘗從金陵顧昭借鈔穆尼閣[73]天步眞原,及薛鳳祚天學會通,迄未獲交薛氏. 乙卯(1675)晤馬德稱(儒驥)諸君,始知其刻書南都,則薛氏歸已久[74].

(71) 見歷算全書方程論,第一卷,自序.

(72) 參看張蔭麟明清之際西學輸入中國考略,清華學報,第一卷,第一期,第四八頁. 文鼎稱"儀象志成於康熙甲寅,非蒙求本法",見勿菴歷算書目第一八頁.

(73) Le Rév Père Vanhée-Bibliotheca Mathematica Sinensis Pé-Fou, T'oung Pao, 1914稱"穆尼閣爲波蘭教士". 又"穆尼閣久居白門,方中通薛鳳祚嘗從之學算,薛從穆傳對數術",語見數度衍凡例,第二頁,及道古堂文集,第三一卷,第九……一〇頁. 并參勿菴歷算書目,第四〇頁.

(74) 參看勿菴歷算書目,第三三……三四頁.

是年文鼎"始購得(新法)歷書於吳門姚氏,偶缺是(比例規)[75]解".

康熙十五年丙辰(1676)四十四歲.

○是年陳訏姪陳世仁(1676－1722)[76]生.世仁著有少廣補遺一卷[77].

○李子金[78]是年成算法通義五卷(1676).其後續成幾何易簡集(1679),天弧象限表(1683)[79].

---

(75) 歷算全書度算釋例第一卷原序,第三頁,并參看勿菴歷算書目,第三八……三九頁.

(76) "陳世仁字元之,號換吾,康熙戊子(1708)舉人,生康熙丙辰(1676)正月二十三日,卒壬寅(1722)二月十一日,享年四十有七".語見海寧陳氏宗譜,民國一四年(1925),由海寧圖書館朱倚君向陳逵齋君徵得.

(77) 參看李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第七三……七四頁.

(78) "李子金原名之鉉,以字行,鹿邑人,柘邑增廣生.性高尚,隱居讀書,博學,贍文詞.尤精算數………有隱山鄙事十二種".見蔣炳歸德府志,第二五卷,第一四……一五頁,乾隆甲戌(1754)官修刻本.

(79) 參看李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第七三頁.

康熙十六年丁巳(1677)四十五歲.

按丁卯(1687)方中通與梅定九書,稱"目不睹足下者十年於茲.……初遇晤金陵者四[80]".是文鼎於此年在南京.

康熙十七年戊午(1678)四十六歲.

是年愚山侍講欲偕之入都,不果[81].

文鼎"初購歷書佚此卷(即比例規解).戊午,黃俞邰[82]太史,爲借到皖江劉潛柱先生本,乃鈔得之.頗多譌誤,殊不易讀.蓋攜之行笈半年,而通其指趣[83]".

"戊午秋,介亡友黃俞邰太史虞稷借到皖江劉潛柱先生本(比例規解)抄補之.蓋逾時而後能通其條貫,以是正其訛闕[84]."

(80) 見數度衍卷首,與梅定九書,第一頁.

(81) 勿菴歷算書目第六頁.

(82) "黃俞邰(六三),虞稷,崇禎二年己巳(1629)生,康熙三十年辛未(1691)卒",見續疑年錄,第四卷,第一一頁.

(83) 歷算全書度算釋例第一卷原序,第四頁.

(84) 勿菴歷算書目第三八……三九頁.

"古算書載程大位算法統宗者,惟劉徽九章尙有宋版.鼎嘗於黃俞部處見其方田一章.算書中此爲最古[85]".是年九月自序所著籌算二卷[86].

康熙十八年己未(1679)四十七歲.

文鼎稱"己未愚山奉命纂修明史,寄書相訊,欲余爲歷志屬稿.而余方應臬臺金長眞先生之召,授經官署,因作此(卽歷志贅言一卷)寄之[87]".

"己未與山陰友人何奕美言測算之理,爲作渾蓋地盤.而苦乏銅工,爰作此(璇璣)尺以代天盤[88]……".

---

(85) 勿菴歷算書目第四四頁.黃俞部所藏宋元豐七年(1084)本九章後歸毛扆(1640–?).見康熙甲子(1684)毛扆算經跋,附緝古算經後.知不足齋叢書第八集.戴敦元九章算術細草圖說序,以爲定九未見九章,蓋屬失考.

幷參看黃虞稷,周在浚徵刻唐宋祕本書目第一七頁,長沙葉氏刻本.

(86) 歷算全書,籌算第一卷自序,第一頁.

(87) 勿菴歷算書目,第六頁.

(88) 勿菴歷算書目,第三〇頁,"璇璣尺解一卷"條.

"己未始爲山陰友人何奕美作尺,亦稍以己意增損推廣之,而未暇爲立假如[89]".

康熙十九年庚申(1680)四十八歲.

文鼎稱"表景生於日軌之高下,而日軌又因於里差.獨四省者陝西河南北直江南也.……或當初只此四處耶.然其中亦有傳訛之處.庚申歲,余養痾白下,西域友人馬德稱儒驥以此致詢.遂爲訂定,并附用法,以補其缺[90]".

文鼎稱"歲庚申晤桐城方素伯中履[91]見鼎所作尺,驚問曰,君何從得此.蓋家兄久欲爲此而未能.履遊豫章拾得遺本,寄之,乃明厥製耳[92]".

梅文鼎薛鳳祚本不相聞知[93],是年因汪發若先

(89) 歷算全書,度算釋例,第一卷原序,第三……四頁.

(90) 勿菴歷算書目,第一二……一三頁,"四省表景立成一卷"條.

(91) "方中履字素伯,中通三弟,曾序數度衍",見數度衍卷首,家序,第一……三頁.

(92) 勿菴歷算書目,第三八……三九頁.

(93) 勿菴歷算書目,第三四頁.

生燦作宰緇川託致一書,而薛(鳳祚)先生方病革,遂未奉其回示[94]".

康熙二十年辛酉(1681)四十九歲.

是年夏歷四月初二日亥時,長孫穀成生[95].

○是年江永[96](1681-1762)[97]生.

○杜知耕[98]是年著數學鑰六卷(1681),又作幾何論約七卷(1700). 文鼎著方程論,曾與知耕

(94) 仝上.

(95) 語見梅氏宗譜.

(96) "江永字愼修,婺源人,因梅文鼎歷算全書爲之發明訂正,作數學八卷續一卷等書",見中西算學叢書初編第一四,……一九册,上海鴻寶石印本光緒二二年(1896).

(97) "江愼修(八二)永,康熙二十年辛酉(1681)生,乾隆二十七年壬午(1762)卒". 見錢大昕疑年錄第四卷,第二二頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(98) "杜知耕字端甫,康熙丁卯(1687)舉人……好讀書,尤精數學. 著有數學鑰六卷. 李子金序而傳之". 見何焆柘城縣志第一〇卷,第一〇……一一頁,乾隆三八年(1773)官修刻本. 文鼎稱"杜端甫數學鑰圖註九章,頗中肯綮". 見勿菴歷算書目第四五頁.

及孔興泰[99],袁士龍[100]共相質正,乃重加繕錄,以爲定本[101].

康熙二十一年壬戌(1682)五十歲.

勿菴籌算七卷,宣城梅定九先生著. 康熙□□□年蔡璣先刻於金陵. 後江常鎮道魏公荔彤重刻於曆算全書內[102]. 文鼎稱"友人蔡璣先見而悅之,爲雕版於金陵[103]".

---

(99) "孔興泰字林宗,睢州人. 著大測精義,求半弧正弦法與梅氏正弦簡法補說,不謀而合". 見杭世駿道古堂文集第三一卷,第三一頁. 並參看勿菴曆算書目第四七……四八頁.

(100) "袁士龍字惠子,錢塘人,受星學於黃弘憲. 西域天文有三十雜星之占,未譯中土星名. 士龍有考,與梅氏不謀而合". 見杭世駿道古堂文集第三一卷,第三一頁. 並參看勿菴曆算書目第一二及二二頁.

(101) 見曆算全書方程論第一卷發凡,第四頁.

(102) 見梅瑴成增刪算法統宗卷首,古今算學書目,第一一頁,江蘇書局校刻,光緒戊戌(1898).

(103) 見勿菴曆算書目第三八頁.

"金陵文學蔡君璣先瑃,於康熙二十□年,首刻籌算於金陵[104]".

"蔡璿字璣先,江寧人. 從文鼎學算爲刻中西算學通[105]". 按施彥恪徵刻歷算全書啓,亦稱,"惟昔璣先蔡子,首鋟籌算於白門[106]". 觀此則梅氏算籍之見於雕版者,籌算爲最先. 時在康熙二十年以後也.

是年長夏述輕重比例三線法[107].

○是年王錫闡卒,年五十五[108].

---

(104) 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(105) 見杭世駿道古堂文集,第三一卷,張一四頁. 按中西算學通乃以勿菴籌算七卷爲第一書,勿菴筆算五卷爲第二書,勿菴度數二卷爲第三書,比例數解四卷爲第四書,三角法舉要五卷爲第五書,方程論六卷爲第六書,幾何摘要三卷爲第七書,句股測量二卷爲第八書,九數存古十卷爲第九書. 參看勿菴歷算書目,第三七……四四頁. 蔡璿所刻,祇中西算學通之第一種也.

(106) 見勿菴歷算書目啓第三頁.

(107) 見歷算全書度算釋例,第二卷,第五〇頁.

(108) "王曉菴(五五)錫闡,生崇禎元年戊辰,卒康熙二十一年壬戌",見陸心源三續疑年錄,第八卷,第二四頁,引王濟撰墓志.

康熙二十三年甲子(1684)五十二歲.

文鼎稱"康熙甲子制府于(成龍)[109]公,檄修通志,鼎以事辭,未往. 皖江太史陳默公先生焯專函致書,以江南分野稿見商,介家叔瞿山清督促至再. 余方病瘧小愈,力疾爲之潤色,頗費經營. 無何,默翁亦辭志局矣. 聊存茲稿[110]". (卽江南通志分野擬稿一卷).

道古堂文集,梅文鼎傳於康熙癸丑(1673)句下稱,"明年制府于成龍檄修通志,亦以分野相屬,力疾成稿,而志局易人,存於家[111]",蓋誤記也.

---

(109) "于北溟名成龍,永寧人,官兩江總督,謚清端,有政書". 見陸燿切問齋文鈔第一一卷,第五頁. "于北溟(六八)成龍,萬歷四十五年丁巳(1618)生,康熙二十三年甲子(1684)卒",見錢椒補疑年錄,第四卷,第八頁. 陸心源案經義齋集有墓誌.

(110) 見勿菴歷算書目,第七頁.

按梅清,1620年生,1697年卒,見三續疑年錄卷之八,第一七頁.

(111) 見道古堂文集,第三〇卷,第八頁.

按"康熙二十年于成龍由直隸巡撫,遷爲江南江西總督",見東華錄康熙二八,第八頁. 則檄修通志,不在癸丑之明年,明甚.

是年自序弧三角舉要於柏梘山中[112].

康熙二十五年丙寅(1686)五十四歲.

潘耒[113]序方程論稱"吾邑有隱君子曰:王寅旭先生,深明歷理,兼通中西之學.余少嘗問歷焉.……今寅旭亡久矣.余徧行天下,求彷彿其人者,而不可得.歲丙寅過宣城,始得梅子[114]".

文鼎稱"吳江王寅旭先生錫闡,深明算術,著撰極富.初太史潘稼堂先生爲鼎稱述之……鼎嘗評近代歷學以吳江爲最.識解在青州以上.惜乎不能蚤知其人與之極論此事.稼堂屢相期訂,欲盡致王書,屬余爲之圖註,以發其義類,而皆成虛約,生平之一憾事也[115]".

---

(112) 見歷算全書,弧三角舉要,舊序,第一……二頁.

(113) "潘耒字次耕,吳江人,王錫闡與其兄檉善.館於其家,講論常窮日夜,勸其學歷……",見道古堂文集第三一卷,第一三頁."潘次耕,名耒,號稼堂,吳江人,康熙己未(1679)博學鴻詞.以布衣入翰林,官檢討,有遂初堂文集".見切問齋文鈔,第一五卷,第一六頁.

(114) 見梅氏叢書輯要第一一卷,方程論敍,第一頁.

(115) 見勿菴歷算書目,第三四……三五頁.

○是年莊亨陽(1686—1746)生[116]. 著有莊氏算學八卷[117].

○是年陳訏子陳世佶(1686—1749)[118]生. 著有弧矢割圓一卷,開方捷法一卷[119]. 句股演法一卷,少廣補遺發明一卷[120]. 又校閱其父所著句股引蒙五卷.

熙康二十六年丁卯(1687)五十五歲.

文鼎於方程著論校刻緣起稱"歲丁卯薄遊錢塘,

---

(116) "莊復齋(六一),亨陽,生康熙二十五年丙寅(1686),卒乾隆十一年丙寅(1746)",見陸心源三續疑年錄,第九卷,第七頁引望溪集.

(117) 李儼所藏光緒己丑(1889)刊秋水堂算法(卽莊氏算學),無卷數. 內分八種,第一種爲梅勿菴開方法. 四庫著錄爲八卷.

(118) "陳佶,字士常,號純齋,陳訏第六子,康熙癸巳(1713)舉人,生康熙丙寅(1786)二月六日,卒乾隆己巳(1749)二月二十五日,享年六十有四",見海寧陳氏宗譜.

(119) 錢寶琮藏開方捷法一卷,弧矢割圓一卷,陳世佶輯,玄孫塈校刊一册.

(120) 語見裘冲曼所編天文算學書目彙編(未刊).

同里阮於岳鴻臚付貲授梓，屬以理裝北上，未遂殺青[121]”.

又於勿菴歷算書目稱“初稼堂賞余此書(即方程論)，阮副憲于岳為付刻貲，而余未及為. 嘉魚明府李安卿鼎徵[122]乃刻於泉州[123]”.

是年方中通有與梅定九書[124].

康熙二十七年戊辰(1688)五十六歲.

毛際可稱“曩者歲在戊辰，余與梅定九先生晤於西湖. 遂傾蓋定交，日載酒賦詩. 余為題其飲酒讀書圖而別[125]”.

梅文鼎亦稱“是年自武林歸[126]”.

---

(121) 見歷算全書方程論第一卷發凡，第四頁.

(122) “李鼎徵，字安卿，文貞公(李光地)次弟，舉人，嘉魚令. 為梅氏刻方程論於泉州. 幾何補編成，手為謄寫”. 見道古堂文集，第三一卷，第一三頁.

(123) 見勿菴歷算書目，第四三頁.

(124) 見方中通數度衍卷首與友書，第一……四頁，太原王氏重校，刊於成都，光緒庚寅(1890).

(125) 見勿菴歷算書目傳，第一頁.

(126) 見中西經星同異考.

○是年南懷仁(Verbiest, Ferdinand)卒[127].

康熙二十八年己巳(1689)五十七歲.

是年入都,獲交李光地(1642—1718)[128].

在京續遇無錫顧景范(祖禹),北直劉紀莊(獻廷),嘉禾徐敬可(善),朱竹垞(彝尊),淮河閻百詩(若璩),寧波萬季野(斯同)[129].

是年"始從嘉禾徐敬可善鈔得王錫闡圜解一卷,爲之訂其缺誤.又續讀其測食諸稿,歷法書二卷,幷其所定大統法及三辰儀晷,加以附論,成王寅旭書補註[130]".

(127) 見註59.

(128) 見勿菴歷算書目,第一四頁."李晉卿名光地,號厚菴,安溪人.康熙庚戌(1670)進士.官大學士.謚文貞.有榕邨集".見陸燿切問齋文鈔第一卷,第一三頁."李晉卿(七七),光地.明崇禎一五年壬午(1642)生,(清)康熙五十七年戊戌(1718)卒".見吳修續疑年錄第四卷,第四三頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(129) 參看歷算全書方程論,第一卷發凡,第四頁.

(130) 參看勿菴歷算書目,第三四……三五頁.

在都門成明史歷志擬稿三卷(131)，手自步算，凡篝燈不寢者二月．黃宗羲(1610－1695)(132)子百家(133)於此時從問歷法(134)．

方苞作文鼎墓表，稱"劉輝祖嘗與同舍館，告苞曰，吾每寐，覺漏鼓四五下，梅君猶篝燈夜誦，昧爽則已興矣(135)"．

是年與廣昌揭暄通訊，摘錄其所寄寫天新語草稿，成寫天新語鈔存一卷(136)．

康熙二十九年庚午(1690)五十八歲．

---

(131) 按大統歷志四庫本作八卷，附錄一卷　刊入明史作四卷．而勿菴歷算書目作明史歷志擬稿三卷．

(132) "黃太冲(八六)宗羲，明萬歷三八年庚戌(1610)生，(清)康熙三四年乙亥(1695)卒"．見錢大昕疑年錄，第四卷，第二〇頁，鈔本，莫友芝舊藏．

(133) "黃百家，字主一，餘姚人．著句股矩測解原上下卷"．參看勾股矩測解原．

(134) 參看勿菴歷算書目，第七……八頁．

(135) 道古堂文集，第三一卷，八頁引．

(136) 參看勿菴歷算書目，第三六頁．

是年潘耒序文鼎所著方程論[137].

文鼎稱"庚午蜡月既望,晤遠西安先生,談及算數,云量田可以不用履畝[138]".

康熙三十年辛未(1691)五十九歲.

是年夏,移榻於中街李光地寓邸,始着手作歷學疑問. 如是數月,得稿三十餘篇,授徒直沽,又陸續成其半[139].

是年與滄州老儒同客天津[140].

康熙三十一年壬申(1692)六十歲.

文鼎稱"劉文學介錫,滄洲老儒也. 頗留心象數. 辛未,壬申與余同客天津. 承有所問,並據歷法正理告之". 成答劉文學問天象一卷[141].

壬申春月,文鼎偶見館童屈篾爲燈,詫其爲有法

(137) 見梅氏叢書輯要,第一一卷,第一頁.

(138) 見歷算叢書,句股闡微,第四卷,第二一頁.

(139) 見勿菴歷算書目,第一四……一五頁.

(140) 見勿菴歷算書目,第一三頁.

(141) 見勿菴歷算書目,第一三頁.

之形．因以測量全義[142]，幾何原本[143]量體諸率，攷其根源，成幾何補編四卷[144]．

文鼎稱"歲壬申，余在都門，有三韓林□□寄訊楊時可及丁令調，屬問四乘方，十乘方法，因稍為推演，至十二乘方，亦有條而不紊"．成少廣拾遺一卷[145]．

文鼎又稱"嘗見九章比類[146]，歷宗算會[147]，算法

(142) 測量全義十卷，明徐光啓，與羅雅谷，湯若望共編．明崇禎四年(1631)八月第二次進呈，為崇禎歷書之一．

(143) 幾何原本六卷，明徐光啓與利瑪竇共譯，萬歷三十五年(1607)春譯成，並在京出版．

(144) 參看勿菴歷算書目，第四六頁，及歷算全書幾何補編，自序第一頁．

(145) 見勿菴歷算書目，第四五頁．

(146) 文鼎稱"錢塘吳信民九章比類，西域伍爾章遵韶有其書，余從借讀焉"．見勿菴歷算書目，第四四頁．

"九章比類算法，景泰庚午(1450)錢塘吳信民作，共八本"．見算法統宗卷一三．

(147) 文鼎稱"山陰周述學著歷宗算會，於開方，弧矢，頗詳"．見勿菴歷算書目，第四四頁．李儼藏鈔本歷宗算會一五卷八册，前有嘉靖戊午(1558)周文燭撰序．

統宗(148)俱載有開方作法之圖,而僅及五乘,…….同文算指(149)稍變其圖,具七乘方算法…… 西鏡錄演其圖爲十乘方(150),…… 康熙壬申余在都門,有友人傳遠問,屬詢四乘方十乘方法……(151)". 是年秋在北京,晤袁士龍(152).

康熙三十二年癸酉(1693)六十一歲.

是年二月自序所撰筆算五卷(153).

---

(148) 算法統宗十三卷,明新安程大位撰. 萬歷癸巳(1593)浙江吳繼綬爲之序.

(149) 同文算指前編二卷,通編八卷,別編一卷,題利瑪竇授,李之藻演. 刻於天學初函. 前編有萬歷癸丑(1613)李之藻序,及萬歷甲寅(1614)徐光啓序.

(150) 文鼎稱"西鏡錄不知誰作,然其書當在天學初函之後知者……寫本殊多魯魚,因稍爲之訂". 見勿菴歷算書目第四六及四七頁.

(151) 見歷算全書,少廣補遺,第一卷,小引第一頁.

(152) 見梅氏叢書輯要,第六〇卷,雜著西國三十雜星考. 或歷算全書,揆日候星紀要,第一卷,第四〇頁.

(153) "見歷算全書,筆算序凡,自序第一……二頁.

是年四月李光地序所著歷學疑問(154).

子以燕中癸酉科舉人(155).

是年南旋,計去京師凡五載(156).

康熙三十三年甲戌(1694)六十二歲.

是年中秋,序其弟文鼐所著中西經星同異攷,其後此書收入四庫(157). 文鼐又撰南極諸星攷一卷,刻入檀几叢書(158). 又刊刻利瑪竇(Ricci, Matteo)(159)所譯經天該及附圖(160).

---

(154) 見歷算全書,歷學疑問序第一……三頁.

(155) 見梅氏宗譜,及梅瑴成增刪算法統宗,凡例,第一頁,江蘇書局校刻,光緒戊戌(1898).

(156) 見勿菴歷算書目,第一五頁.

(157) "中西經星同異考一卷,一册",見壬子文瀾閣所存書目第三卷,第二〇頁. 指海本,同.

(158) 檀几叢書,武林王丹麓編刻.

(159) "萬歷九年(1581)利瑪竇(1529—1610)始汎海九萬里,抵廣州之香山澳……至二八年(1601)入京師中官馬堂以其方物進獻,自稱大西洋人",見明史第三二六卷,第五頁. 上海中華書局印,民國一二年(1923). 並參看李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第六八頁.

(160) 劉鐸古今算學書錄天文第七,第三頁載"經天該附圖,明利瑪竇譯,康熙年梅文鼐刊本". 按文鼐乃文鼐之誤.

康熙三十四年乙亥(1695)六十三歲.

是年文鼎由郡廩生應歲貢[161].

○是年黃宗羲卒,年八十六[162].

康熙三十五年己卯(1699)六十七歲.

是年文鼎在閩遇林同人(侗)(1627–1714)[163],借鈔其寫本古歷列星距度因成古歷列星距度考一卷[164].

是年自閩北歸,遊西湖[165].

穀成亦稱其祖"南至閩,北抵上谷,金臺,中歷齊楚,吳,越[166]".

是年同里施彥恪謀徵刻歷算全書啓時,文鼎已

(161) 見梅氏宗譜.

(162) 見註132.

(163) "林同人(八八),侗生天啓七年乙卯(1627),卒康熙五三年甲午(1714)". 見陸心源三續疑年錄,第八卷,第一八頁,引福建通志,參年譜.

(164) 參看勿菴歷算書目,第三六……三七頁.

(165) 見勿菴歷算書目傳,第一頁.

(166) 見梅穀成增删算法統宗凡例,第五頁.

著歷學書五十八種,算法書二十二種共成八十種[167].

施彥恪又謂"疑問三卷見燕山節度之新刊,方程一編得泉郡孝廉而廣布[168]",是李光地刻其歷學疑問於大名,李安卿刻其方程論於泉州,均前此數年事.

康熙三十九年庚辰(1700)六十八歲.

是年中秋,偶罹寒疾,諸務屏絕,成環中黍尺五卷,重九前七日自序其書[169].

文鼎稱"十餘年前曾作弧三角,所成句股書一册,稿存兒輩行笈中,覓之不可得也. 庚辰年,乃復作此[170]"(即正弧句股).

○杜德美(Jartoux, Pierre, 1670-1720)[171]來中國

(167) 見勿菴歷算書目,啓,第三頁.

(168) 見勿菴歷算書目,啓,第三頁.

(169) 見梅氏叢書輯要第三四卷,環中黍尺,小引,第一頁.

(170) 見歷算全書,弧三角舉要,第二卷,第五頁.

(171) 參看李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第七〇……七一頁. 並參看梅氏叢書輯要,第六一卷,附錄一,赤水遺珍,求周徑密率捷法(譯西士杜德美法).

介紹求周徑密率捷法.

康熙四十年辛巳(1701)六十九歲.

梅瑴成稱"籌算七卷,筆算五卷,平三角法五卷,弧三角法五卷,塹堵測量二卷,環中黍尺五卷,方程論六卷,以上六種,俱宣城梅先生著.安溪李文貞公倂歷學疑問(三卷),歷學駢枝(四卷),交食蒙求(三卷),俱刻於上谷[172]".

瑴成又稱"安溪相國李文貞公厚菴督學畿輔,校刊歷學疑問進呈御覽,有恭紀刻於本卷.又巡撫直隸,校刊三角法舉要,環中黍尺,塹堵測量等書九種於上谷[173]".

文鼎於弧三角舉要有康熙辛巳七夕前二日識語一則,是上谷九種之刻,至早在辛巳年[174].

康熙四十一年壬午(1702)七十歲.

---

(172) 見梅瑴成增刪算法統宗卷首,書目,第一一頁.

(173) 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(174) 見歷算全書,弧三角舉要第二卷,第五頁.今北京大學藏書室藏有勿菴歷算全書九種,九册,未知是否李光地刻本.

古越圖書館藏有李光地,上谷刻本;梅文鼎撰,弧三角舉要五卷.

是年十月李光地以撫臣扈蹕德州,進所刻歷學疑問三卷,文鼎以是知名(175).

是年自序所著勿菴歷算書目於坐吉山中.計歷學書六十二種,算學書二十六種,共八十八種(176).

康熙四十二年癸未(1703)七十一歲.

文鼎稱"歲癸未,匡山隱者毛心易乾乾,惠訪山居,偶論周徑之理.因復推論及方圓相容相變諸率,益覺精明……(177)".

文鼎又稱"癸未歲匡山隱者毛心易乾乾,偕其壻中州謝野臣(廷逸),惠訪山居,共論周徑之理,因復反復推論方圓相容相變諸率(178)".

文鼎又稱"康熙癸未,季弟爾素有比例規用法假如之作"."方爾素撰此書時,安溪相國以冢宰

---

(175) 見勿菴歷算書目,第一五頁.及歷算全書,恭紀歷學疑問,第一頁.

(176) 參看勿菴歷算書目,知不足齋叢書本,自序第一頁.

(177) 見勿菴歷算書目,第五一頁,疑壬午以後所記.

(178) 見梅氏叢書輯要,第二四卷,方圓冪積說,第一頁.

開府上谷，公子世得，鍾倫[179]銳意歷算之學，余兄弟及兒以燕下楊芝軒[180]”.

文鼎稱“授時歷於日躔盈縮，月離遲疾，並云以算術垛積招差立算，而今所傳九章諸書，無此術也.……”余因李世得[181]之疑.而試爲思之.其中原委，亦自歷然.爰命孫瑴成衍爲垛積之圖，得書(平立定三差詳說)一卷[182].

康熙四十四年乙酉(1705)七十三歲.

是年閏夏康熙南巡，召見文鼎於德水舟次者三.進三角法舉要五卷[183].

康熙四十五年丙戌(1706)七十四歲.

---

(179)“李鍾倫字世德，文貞公(長)子，康熙癸酉(1693)舉人，……甲數乙數用法甚奇，本以赤道求黃道.鍾倫準其法以黃求赤，作爲圖論，又製器以象之”.見道古堂文集，第三一卷，第一三頁.

(180)見歷算全書，度算釋例，第一卷，原序，第三……四頁.

(181)歷算全書平立定三差詳說，第一卷，序，第一頁，李世得作李世德，梅氏叢書輯要卷首仝.

(182)見勿菴歷算書目，第二五……二六頁.

(183)參看梅氏宗譜及勿菴歷算書目，第四一頁.

文鼎稱"方爾素撰此(比例規用法假如)書時,安溪相國以冢宰開府上谷,……,無何爾素挈兒燕南歸,相國入參密勿.而世得亡兒相繼亡去,余亦大病瀕死,……[184]".

○是年李鍾倫卒,年四十四[185].

康熙四十六年丁亥(1707)七十五歲.

文鼎稱"爾素有比例規用法之作,又五年丁亥(1717)重加校錄,示余屬爲序[186]".

康熙四十九年庚寅(1710)七十八歲.

文鼎稱"庚寅在吳門,又得錫山友人楊崑生(定三)方圓訂註圖說,益覺精明[187]".

---

(184) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序第四頁.

(185) "李世得(四四)鍾倫,生康熙二年癸卯(1661),卒康熙四十五年丙戌(1706)". 見陸心源三續疑年錄,第九卷,第四頁,引榕村集. "以燕年五十二,先文鼎卒",見宣城縣志. 錢寶琮君因文鼎有"世得亡兒相繼化去"之語,假定以燕之卒亦在丙戌年(1706),則以燕當生於順治一二年乙未(1655),文鼎二三歲.

浙江圖書館藏有康熙四五年梅文鼎筆算五卷刻本,一册.

(186) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序第三頁.

(187) 見梅氏叢書輯要,第二四卷,方圓冪積說第一頁.

文鼎又稱"庚寅之冬,偶有吳門之遊,(楊)學三(作枚)[188]同吾友秦子二南,挐舟過訪於陳泗源學署,出示此(楊學山歷算書)書.余亦以幾何補編相質[189]".

楊學山以遡源星海四册,王寅旭歷書圖註二册,三角法會編二册,借文鼎[190].

康熙五十一年壬辰(1712)八十歲.

是年臘月序錫山友人楊學山歷算書於坐吉山中[191].孫瑴成供奉內廷,欽賜監生[192].

康熙五十二年癸巳(1713)八十一歲.

---

(188) 楊作枚字學山,定三之孫,著有解割圓之根一卷,刻入歷算全書爲魏荔彤訂補梅勿菴歷算全書.

(189) 見歷算全書,錫山友人楊學山歷算書序第一……二頁.

(190) 見上書.

(191) 見歷算全書第一册,卷首,題三角法會編梅序第一……二頁.

(192) 見梅氏宗譜.

孫瑴成賜舉人，彙編製律歷淵源[193].

瑴成亦稱"余於康熙五十二年間充蒙養齋彙編官[194].

康熙五十三年甲午(1714)八十二歲.

○是年王元啟(1714—1786)生[195].著有句股衍，角度衍，九章雜論[196].

康熙五十四年乙未(1715)八十三歲.

是年三月十九，文鼎寄書與楊學山[197].

孫瑴成賜進士，給假省親，賜第於(北京)宣武門外

(193) 見梅氏宗譜. 按律歷淵源一百卷，計歷象考成上編一六卷，下編一〇卷，表一六卷. 律呂正義上編二卷，下編二卷，續編一卷. 數理精蘊上編五卷，下編四〇卷，表八卷.

(194) 見梅氏叢書輯要，第六二卷，操縵卮言.

(195) "王惺齋(七三)元啓，生康熙五十三年甲午(1714)，卒乾隆五十一年丙午(1786)". 見陸心源三續疑年錄，第九卷，第一一頁，引復初齋集.

(196) 見阮元疇人傳，第四一卷，第二〇……二四頁，觀我生室彙稿本.

(197) 見歷算全書，歷學問答，第一卷，第三四……三五頁.

之日南坊[198].

康熙五十六年丁酉(1717)八十五歲.

是年仲冬文鼎自序所著度算釋例二卷,蓋因年希堯[199]談及尺算,乃以舊稿,并其弟文鼐所作算例,重加參校,比校整齊而授梓人[200].

廣寧年希堯爲序度算釋例於金陵藩署[201].

康熙五十七年戊戌(1718)八十六歲.

魏荔彤稱"歲在戊戌偶攝法司,因與諸同人設館白下,延致(文鼎)先生,訂正所著.輸資刊行.先生旣以寧澹爲志,不樂與俗吏久處.而世會變遷,雲散蓬飛,竟未卒事.閱二載,僻居海中,官齋閴寂,復馳函敬求存稿十餘種.……不意哲人遂萎矣[202]".

---

(198) 見梅氏宗譜.

(199) "廣寧廣東巡撫,年公允公(希堯)校刋方程,度算於江寧藩署".見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(200) 見歷算全書度算釋例,第一卷,自序,第一頁.

(201) 見歷算全書度算釋例,第一卷,年序,第一頁.

(202) 見歷算全書卷首,魏序,第一……二頁.

○是年年希堯自序測算刀圭三卷(203).

○是年陳萬策成進士(204). 萬策曾與徐用錫(205), 魏廷珂(206), 王蘭生(207), 王之銳(208), 同校文鼎歷算書(209).

康熙五十九年庚子(1720)八十八歲.

○是年杜德美卒, 年五十一(210).

(203) 見李儼所藏測算刀圭三卷鈔本.

(204) "陳對初名萬策, 又字謙季, 晉江人, 康熙戊戌進士, 官詹事府詹事. 有近道齋集", 見切問齋文鈔, 第二四卷, 第一〇頁.

(205) "徐用錫字公壇, 宿遷人, 官翰林院待讀", 參看梅氏叢書輯要, 卷首, 校閱助刻姓氏.

"徐用錫字壇長, 順治十三年(1656)生". 見續疑年錄卷四.

(206) "魏廷珍字君璧, 景州人, 官大司空", 參看上書.

(207) "王蘭生字振聲, 交河人, 官少宗伯", 參看上書.

(208) "王之銳字仲退, 河間人, 官國子監", 參看上書.

(209) 參看勿菴歷算書目, 第五〇頁, 梅氏叢書輯要卷首, 校閱助刻姓氏, 道古堂文集第三一卷, 第八頁.

(210) 參看李儼中國數學源流考略, 北京大學月刊, 第一卷, 第五號, 第七〇頁.

康熙六十年辛丑(1721)八十九歲.

是年文鼎歿(211).

"穀成內廷供奉,越數年,給假歸省,值公病,得侍疾數月而卒. 特命江寧織造曹公治喪事,營葬地(212)."

按文鼎卒時,孫穀成玕成尙健在. 穀成卒於乾隆二十八年癸未(1763)十月十六日,時年八十三(213). 玕成卒年未詳,宗譜稱年七十四卒(214). 穀成長子鈖,四子鈁,各年二十六,先穀成卒(215).

(211) 見梅氏宗譜.

(212) 見上書.

(213) 見上書.

(214) 見上書. 按魏荔彤雍正癸卯(1023)兼濟堂刻歷算全書序,尙稱玉汝昆季,乾隆辛巳(1721)穀成所輯梅氏叢書輯要,除第一……五卷,第五五……五六卷,及第六〇……六二卷外,均與玕成同校輯. 又庚辰(1760)所作增删算法統宗,亦有玕成校字. 是玕成於乾隆辛巳(1721)尙健存也.

(215) 見增删算法統宗,凡例,第五頁.

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉為其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈　垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國二十年六月初版
民國廿二年二月印行 國難後第一版

（二五二六）

學藝彙刊 中算史論叢（一）一冊
每冊定價大洋壹元肆角
外埠酌加運費匯費

本書減去售價一角

著作者 中華學藝社 李儼
發行人 王雲五 上海河南路
印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠