Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 5

Die Tangentialabbildung

Zu einer holomorphen Abbildung

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

mit $G \subseteq \mathbb{C}^m$ offen ist zu einem Punkt $P \in G$ das totale Differential

$$(D\varphi)_P\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

die lineare Approximation der Abbildung in dem Punkt. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit kann man ebenfalls eine holomorphe Abbildung durch eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen approximieren.

Lemma 5.1. *Es seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine holomorphe Abbildung. Es sei $P \in M$ und $Q = \varphi(P)$ und es seien

$$\gamma_1, \gamma_2\colon B \longrightarrow M$$

zwei holomorphe Kurven mit einem offenen Ball $0 \in B$ und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$. Es seien γ_1 und γ_2 im Punkt P tangential äquivalent. Dann sind auch die Verknüpfungen $\varphi \circ \gamma_1$ und $\varphi \circ \gamma_2$ tangential äquivalent in Q.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.1. □

Aufgrund dieses Lemmas ist der folgende Begriff wohldefiniert.

Definition 5.2. Es seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten und es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine holomorphe Abbildung. Es sei $P \in M$ und $Q = \varphi(P)$. Dann nennt man die Abbildung

$$T_PM \longrightarrow T_{\varphi(P)}N,\ [\gamma] \longmapsto [\varphi \circ \gamma],$$

die zugehörige *Tangentialabbildung im Punkt P*. Sie wird mit $T_P(\varphi)$ bezeichnet.

Lemma 5.3. *Es seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine holomorphe Abbildung. Es sei $P \in M$, $Q = \varphi(P)$ und es sei

$$T_P(\varphi)\colon T_PM \longrightarrow T_QN$$

die zugehörige Tangentialabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn $M \subseteq \mathbb{C}^m$ und $N \subseteq \mathbb{C}^n$ offene Teilmengen sind und die Tangentialräume mit den umgebenden komplexen Räumen identifiziert werden, so ist die Tangentialabbildung gleich dem totalen Differential $(D\varphi)_P$.*

(2) *Wenn*
$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$
mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{C}^m$ und
$$\beta\colon U' \longrightarrow W$$
mit $Q \in U'$ und $W \subseteq \mathbb{C}^n$ Karten sind, so ist das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} T_pM & \stackrel{T_P\varphi}{\longrightarrow} & T_QN \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^m & \stackrel{\left(D\left(\beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}\right)\right)_{\alpha(P)}}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^n \end{array}$$
kommutativ, wobei die vertikalen Abbildungen durch die Isomorphismen $[\gamma] \mapsto (\alpha \circ \gamma)'(0)$ bzw. $[\delta] \mapsto (\beta \circ \delta)'(0)$ gegeben sind.

(3) *$T_P(\varphi)$ ist $\mathbb{C}$-linear.*

(4) *Wenn L eine weitere komplexe Mannigfaltigkeit, $R \in L$ und*
$$\psi\colon L \longrightarrow M$$
eine weitere holomorphe Abbildung mit $\psi(R) = P$ ist, so gilt
$$T_R(\varphi \circ \psi) = T_P(\varphi) \circ T_R(\psi).$$

(5) *Wenn φ eine biholomorphe Abbildung ist, dann ist $T_P(\varphi)$ ein Isomorphismus.*

(6) *Für eine holomorphe Kurve*
$$\gamma\colon B \longrightarrow M$$
mit einem offenen Ball $B \subseteq \mathbb{C}$, $0 \in B$ und $\gamma(0) = P$ gilt im Tangentialraum T_PM die Gleichheit
$$[\gamma] = (T_0(\gamma))(1).$$

Beweis. (1). Jeder Tangentialvektor wird repräsentiert durch einen affinlinearen Weg $z \mapsto \gamma(z) = P + zv$ mit einem Vektor $v \in \mathbb{C}^m$, so dass wir zwischen diesen Vektoren und den durch sie definierten Tangentialvektoren hin- und herwechseln können. Für den zusammengesetzten Weg $\varphi \circ \gamma$ gilt nach der Kettenregel
$$(T_P\varphi)([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma] = (\varphi \circ \gamma)'(0) = (D\varphi)_P\left((D\gamma)_0(1)\right) = (D\varphi)_P(v).$$
(2). Die Kettenregel angewendet auf (wobei man eventuell B und V durch kleinere offene Mengen ersetzen muss)
$$B \stackrel{\alpha\circ\gamma}{\longrightarrow} V \stackrel{\beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}}{\longrightarrow} W$$
liefert
$$\left(D\left(\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}\right)\right)_{\alpha(P)}((\alpha \circ \gamma)'(0)) = (\beta \circ (\varphi \circ \gamma))'(0),$$

was gerade die Kommutativität des Diagramms ist. (3). Die Aussage folgt aus (2) und der Linearität des totalen Differentials. (4). Durch Übergang zu Karten folgt dies aus (2) und der Kettenregel. (5) folgt aus (4) angewendet auf die Umkehrabbildung φ^{-1}. (6). Das Element $1 \in \mathbb{C}$ ist als Tangentenvektor an einem Punkt $a \in B$ als der Weg $s \mapsto a + s$ zu interpretieren. Bei $a = 0$ ist dies der identische Weg. Daher ist

$$(T_0(\gamma))(1) = (T_0(\gamma))(\mathrm{Id}) = [\gamma \circ \mathrm{Id}] = [\gamma].$$

□

Die Tangentialabbildungen in den einzelnen Punkten kann man zu einer gesamtabbildung zwischen den Tangentialbündeln zusammenfassen.

Definition 5.4. Es seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine holomorphe Abbildung. Es seien TM und TN die zugehörigen Tangentialbündel. Dann versteht man unter der *Tangentialabbildung*

$$T(\varphi)\colon TM \longrightarrow TN$$

die disjunkte Vereinigung der Tangentialabbildungen in den einzelnen Punkten, also

$$T(\varphi) = \biguplus_{P \in M} T_P(\varphi).$$

Diese Abbildung zwischen den Tangentialbündel ist selbst eine holomorphe Abbildung. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \stackrel{T(\varphi)}{\longrightarrow} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

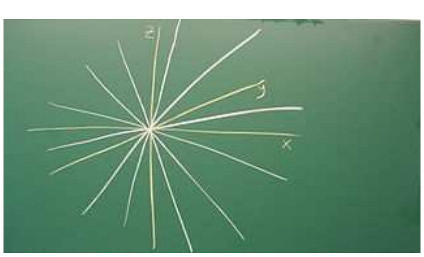
von holomorphen Abbildungen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten vor.

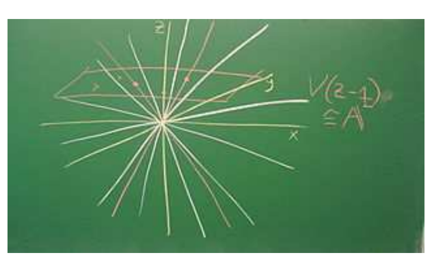
Der projektive Raum

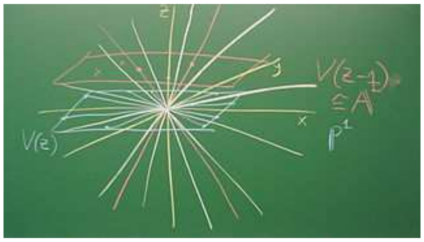
Jede riemannsche Fläche besitzt lokal die gleichen Eigenschaften, da sie über die Karten lokal biholomorph zu einer offenen Kreisscheibe von $\mathbb{C}$ ist. Daher stehen die globalen Eigenschaften einer riemannschen Fläche im Mittelpunkt. Da wir riemannsche Flächen häufig als zusammenhängend voraussetzen (bei einer nicht zusammenhängenden riemannschen Fläche kann man die einzelnen Zusammenhangskomponenten hintereinander untersuchen), ist die Kompaktheit die wichtigste globale Eigenschaft. Kompakte riemannsche Flächen nennt man auch „geschlossen“, die nicht kompakten dann auch offen, und in der Tat sind diese insofern offen, dass man sie unter gewissen Bedingungen zu einer kompakten riemannschen Fläche auffüllen kann und diese dann nicht mehr weiter sinnvoll aufgefüllt werden können und daher abgeschlossen sind. Offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind nicht kompakt. Als einzige kompakte riemannsche Fläche kennen wir bisher die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (die riemannsche Zahlenkugel) aus Beispiel 2.6. Wir besprechen die Konstuktion von komplex-projektiven Räumen $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, die kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten in jeder Dimension n liefern. Mit einer geeigneten Version des Satzes über implizite Abbildungen erhält man dann als abgeschlossene Teilmengen der projektiven Räume eine Vielzahl an kompakten riemannschen Flächen. Die Konstruktion der projektiven Räume kann man zunächst für jeden Körper durchführen, später konzentrieren wir uns auf die Grundkörper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Im Kontext der projektiven Geometrie bezeichnet man zur Abgrenzung den „üblichen“ Raum K^n auch als den affinen Raum über K und schreibt dafür auch $\mathbb{A}^n_K$.

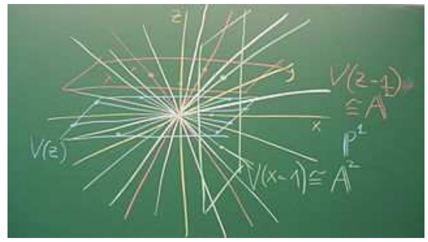
Die Geraden durch einen Punkt

Definition 5.5. Es sei K ein Körper. Der *projektive n-dimensionale Raum* $\mathbb{P}^n_K$ besteht aus allen Geraden des $\mathbb{A}^{n+1}_K$ durch den Nullpunkt, wobei diese Geraden als Punkte aufgefasst werden. Ein solcher Punkt wird repräsentiert durch *homogene Koordinaten* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, wobei nicht alle $a_i = 0$ sein dürfen, und wobei zwei solche Koordinatentupel genau dann den gleichen Punkt repräsentieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in K^\times$ ineinander übergehen.









Satz 5.6. *Es sei K ein Körper und sei $\mathbb{P}^n_K$ ein projektiver Raum. Es sei $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ fixiert. Dann gibt es eine natürliche Abbildung*

$$\varphi_i \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\ (u_1, \ldots, u_n) \longmapsto (u_1, \ldots, u_i, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

Diese Abbildung ist injektiv und induziert eine Bijektion zu denjenigen Punkten des projektiven Raumes, bei denen die i-te homogene Koordinate nicht 0 ist. Die Umkehrabbildung wird durch

$$\mathbb{P}^n_K \supset D_+(X_i) := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{A}^n_K \longmapsto$$
$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right),$$

gegeben. Der projektive Raum wird überdeckt von diesen $n+1$ affinen Räumen. Das Komplement eines solchen affinen Raumes $\mathbb{A}^n_K \cong D_+(X_i) \subset \mathbb{P}^n_K$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler projektiver Raum.

Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich wohldefiniert, da die 1 sicher stellt, dass mindestens eine homogene Koordinate nicht 0 ist. Die Abbildung ist injektiv, da aus einer Gleichung der Form (für homogene Koordinaten)

$$(u_1, \ldots, u_i, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n) = \lambda (v_1, \ldots, v_i, 1, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

sofort $\lambda = 1$ wegen der 1 folgt. Die Umkehrabbildung ist auf der angegebenen Teilmenge wohldefiniert, und ist invers zu der Abbildung. Die Überdeckungseigenschaft ist klar, da für jeden Punkt des projektiven Raumes mindestens eine homogene Koordinate nicht 0 ist. Das Komplement zu $D_+(X_i)$ ist

$$V_+(X_i) = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mid x_j \in K,\ x_j \neq 0 \text{ für ein } j\}$$

mit keinerlei weiteren Einschränkung an die übrigen n Variablen und mit der Identifizierung von zwei solchen Tupeln, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar ineinander übergehen. □

Die offenen Mengen $D_+(X_i)$ werden wir gleich als Kartengebiete und die Umkehrabbildungen φ^{-1} als Kartenabbildungen auffassen, um auf den projektiven Räumen eine Mannigfaltigkeitssstruktur zu erhalten.

Definition 5.7. Die Abbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\ (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n) \longmapsto (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)\,,$$

die einem Punkt $\neq 0$ die durch diesen Punkt und den Nullpunkt bestimmte Gerade zuordnet, heißt *Kegelabbildung*.

Wir beschränken uns nun auf den Fall $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Mit der Kegelabbildung definieren wir zunächst eine Topologie auf den projektiven Räumen.

Definition 5.8. Der reell-projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ und der komplex-projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ wird mit der Quotiententopologie zur Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

versehen.

Lemma 5.9. *Für den reell-projektiven und den komplex-projektiven Raum sind die Teilmengen $D_+(X_i)$ offen in der natürlichen Topologie und homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$. Insbesondere sind die reell- und komplex-projektiven Räume topologische Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Das Urbild von $D_+(X_i)$ unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ist $D(X_i)$, also das Komplement eines n-dimensionalen Untervektorraumes und damit offen in der natürlichen Topologie. Wir betrachten die stetigen Abbildungen

$$\mathbb{K}^n \cong V(X_i - 1) \subset D(X_i) \longrightarrow D_+(X_i)\,.$$

Die Gesamtabbildung ist eine Bijektion und $D_+(X_i)$ trägt die Quotiententopologie unter der zweiten Abbildung. Wir müssen zeigen, dass die Bijektion eine Homöomorphie ist. Dazu genügt es, die Offenheit der Abbildung zu zeigen. Sei also $U \subseteq V(X_i - 1) \cong \mathbb{K}^n$ offen und U' das zugehörige Bild in $D_+(X_i)$. Die Offenheit von U' ist nach Definition der Quotiententopologie äquivalent dazu, dass das Urbild $U'' \subseteq D(X_i)$ von U' offen ist. Diese Menge U'' besteht aus allen Punkten in $D(X_i)$, die auf einer Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt aus U liegen. Sei Q ein solcher Punkt, und $Q = \lambda P$ mit $P \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$. Sei B eine offene Ballumgebung um P in $V(X_i - 1)$. Dann ist auch der dadurch definierte Kegel in $D(X_i)$ offen und liegt ganz in U''. □

Lemma 5.10. *Man kann den reell-projektiven Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ durch die n-dimensionale Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ modulo der Äquivalenzrelation repräsentieren, die antipodale Punkte miteinander identifiziert.*

Den komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ kann man durch die $(2n+1)$-dimensionale Sphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ modulo der Äquivalenzrelation repräsentieren, die zwei Punkte $z, w \in S^{2n+1}$ miteinander identifiziert, wenn man $z = \lambda w$ mit einem $\lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ schreiben kann.

Beweis. Wir behandeln die beiden Fälle parallel. Jeder Punkt der Sphäre S definiert eine (reelle oder komplexe) Gerade durch den Nullpunkt im umliegenden Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ oder $\mathbb{C}^{n+1}$ und damit einen Punkt im projektiven Raum. Zwei Punkte $z, w \in S$ definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $z = \lambda w$ gibt. Wegen der Multiplikativität der Norm ist dann auch $\|z\| = |\lambda| \cdot \|w\|$, woraus sich wegen $z, w \in S$ sofort $|\lambda| = 1$ ergibt. Dies bedeutet im reellen Fall $\lambda = \pm 1$ und im komplexen Fall, dass $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ist, also zum Einheitskreis gehört. □

Lemma 5.11. *Die reell-projektiven und die komplex-projektiven Räume sind kompakt und hausdorffsch in der natürlichen Topologie.*

Beweis. Es gibt eine surjektive stetige Abbildung von einer Sphäre auf einen jeden projektiven Raum. Die Sphäre ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines reellen endlichdimensionalen Vektorraumes und daher nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung nach Satz Anhang 2.9 wieder kompakt ist, folgt, dass die projektiven Räume kompakt sind.

Für die Hausdorff-Eigenschaft seien $P, Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ zwei verschiedene Punkte. Man kann annehmen, dass sie beide auf einem der affinen überdeckenden Räume $D_+(X_i)$ liegen. Damit gibt es nach Lemma 5.9 trennende Umgebungen. □

Lemma 5.12. *Die reell-projektiven Räume sind reell C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeiten und die komplex-projektiven Räume sind komplexe Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Topologische Mannigfaltigkeiten liegen aufgrund von Lemma 5.9 vor. Wir betrachten zwei Kartengebiete $D_+(X_i)$ und $D_+(X_j)$ mit $i < j$. Nach Satz 5.6 wird der Kartenwechsel durch

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i \colon \mathbb{K}^n \supseteq \{(u_1, \ldots, u_n) \mid u_j \neq 0\} \longrightarrow \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

mit der Gesamtzuordnung

$$(u_1, \ldots, u_n) \longmapsto (u_1, \ldots, u_i, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n) \longmapsto \left(\frac{u_1}{u_j}, \ldots, \frac{u_i}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \ldots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{j+1}}{u_j}, \ldots, \frac{u_n}{u_j} \right)$$

gegeben. Als rationale Abbildungen sind diese Kartenwechsel unendlich oft differenzierbar bzw. holomorph. □

Glatte ebene Kurven und riemannsche Flächen

Definition 5.13. Es sei K ein Körper. Zu einem homogenen Polynom $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ bezeichnet man die Menge

$$V_+(F) = \{P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n_K \mid F(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

als die *projektive Nullstellenmenge* zu F.

Aufgrund der Homogenität ist diese Nullstellenmenge wohldefiniert, siehe Aufgabe 5.11.

Wenn man $V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_K$ bestimmen möchte, so kann man die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{P}^n_K = D_+(X_0) \uplus V_+(X_0)$$

(ebenso für jede andere Variable) ausnutzen. Zur Bestimmung von $V_+(F) \cap D_+(X_0)$ setzt man in F die Variable X_0 gleich 1 (das nennt man *Dehomogenisierung*) und muss die Lösungen im affinen Raum $\mathbb{A}^n_K \cong D_+(X_0)$ von $F\frac{1}{X_0} = 0$ finden. Dabei wird das Polynom inhomogen, gleichzeitig eliminiert man eine Variable. Die Dimension bleibt gleich, die Situation wird aber affin. Zur Bestimmung von $V_+(F) \cap V_+(X_0)$ setzt man in F die Variable X_0 gleich 0 und muss die Lösungen im projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}_K \cong V_+(X_0)$ von $F\frac{0}{X_0} = 0$ finden. Hier eliminert man eine Variable, das Polynom bleibt homogen, man bleibt projektiv, die Dimension reduziert sich um 1.

Wir beschränken uns nun auf die Situation $V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, man spricht von komplex-projektiven ebenen Kurven (wobei Kurven hier komplex-eindimensional bedeutet, reell gesehen handelt es sich um Flächen).

Satz 5.14. *Es sei $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Für jeden Punkt $P \in V_+(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sei zumindest eine partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial X}(P), \frac{\partial F}{\partial Y}(P), \frac{\partial F}{\partial Z}(P)$ ungleich 0. Dann ist $V_+(F)$ eine kompakte riemannsche Fläche.*

Beweis. Wir betrachten die Situation auf dem affinen Stück

$$\mathbb{C}^2 \cong D_+(X) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

Dabei ist $V_+(F) \cap D_+(X) = V(\tilde{F})$, wobei $\tilde{F}$ hier die Dehomogenisierung von F bezüglich der Variablen X bezeichnet, also in F einfach $X = 1$ gesetzt wird und die verbleibenden Variablen Y und Z sich auf $\mathbb{C}^2$ beziehen. Bei diesem Prozess ist (siehe Aufgabe 5.13)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Y}$$

und

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Z}.$$

Wegen Aufgabe 5.12 ist in jedem Punkt der Kurve zumindest eine dieser partiellen Ableitungen $\neq 0$. Somit sind auf $V_+(F) \cap D_+(X) = V(\tilde{F}) \subseteq \mathbb{C}^2$ und ebenso auf den beiden anderen affinen Ausschnitten die Bedingungen aus Satz 2.7 erfüllt und die $V(\tilde{F})$ sind jeweils eine riemannsche Fläche. Auf $D_+(X) \cap D_+(Y)$ passen die komplexen Strukturen zusammen, da der Satz über implizite Abbildungen eine eindeutige komplexe Struktur festlegt.

Die Kompaktheit ergibt sich aus Lemma 5.11. □

Wir geben dazu zwei konkrete Korollare.

Korollar 5.15. *Zu* $d \in \mathbb{N}_+$ *ist die ebene projektive Kurve* $C = V_+(X^d + Y^d + Z^d) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *eine kompakte riemannsche Fläche.*

Beweis. Wir verwenden Satz 5.14. Die partiellen Ableitungen sind

$$dX^{d-1}, dY^{d-1}, dZ^{d-1} .$$

Diese Ableitungen sind nur bei $x = y = z = 0$ simultan gleich 0, doch diese Koordinaten repräsentieren keinen Puntk der projektiven Ebene und keinen Punkt der Kurve. □

Solche Kurven nennt man Fermat-Kurven.

Korollar 5.16. *Es sei* $G \in \mathbb{C}[X, Z]$ *ein homogenes Polynom vom Grad* $d+1$*, das in (homogen) verschiedene homogene Linearfaktoren der Form* $\alpha_i X + \beta_i Z$ *mit* $\alpha_i \neq 0$ *zerfalle. Dann ist die durch die Gleichung* $Y^d Z = G(X, Z)$ *gegebene projektive Kurve im* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *eine kompakte riemannsche Fläche.*

Beweis. Wir verwenden Satz 5.14. Auf der offenen Menge $D_+(Z)$ erhält man die Gleichung $Y^d - G(X) = 0$, wobei G als Polynom in der einen Variablen X keine mehrfache Nullstelle besitzt. Die partiellen Ableitungen sind dY^{d-1} und G'. Wenn diese beiden in einem Punkt (x, y) der Kurve verschwinden, so ist $y = 0$ und damit $G(x) = 0 = G'(x)$, was wegen der Nullstellenbedingung nicht sein kann. Auf dem Komplement $V_+(Z)$ wird die Gleichung zu

$$0 = G(X, 0) = \alpha X^{d+1}$$

mit einem Vorfaktor $\alpha \neq 0$, woraus $X = 0$ folgt. Es gibt also nur noch den weiteren Punkt P mit den Koordinaten $(0, 1, 0)$. Eine affine Umgebung dieses Punktes ist $D_+(Y)$, die dehomogenisierte Version der Gleichung auf diesem Teilstück ist $Z = G(X, Z)$. Die partielle Ableitung nach Z ist $1 + \sum \gamma_{ij} X^i Z^j$ mit $i + j = d$. Im Nullpunkt, der dem Punkt P entspricht, ist dies gleich 1, daher verschwinden dort ebenfalls nicht alle partiellen Ableitungen. □

Abbildungsverzeichnis