三集三

代數術卷二十五

英國華里司輯

英國傅蘭雅口譯
金匱華蘅芳筆述

論八線數理

第二百六十一款

前于開方各式中曾論有用虛式之根號$\sqrt{丅一}$者此式在弦八線數理中實有大用處

設甲為任何大小之弧以天代其弧之餘弦以地代其弧之正弦如

餘弦甲＝天

正弦甲＝地

則依(戊)幅之式變得兩式如左

餘弦(卯丄一)甲＝天餘弦卯甲丅地正弦卯甲 (一)

正弦(卯丄一)甲＝地餘弦卯甲丄天正弦卯甲 (二)

令亥為一箇泛數(現在未定將來可定之數也)則其(二)式可變之為

亥正弦(卯丄一)甲＝亥地餘弦卯甲丄亥天正弦卯甲 (三)

以(一)式與(三)式兩者相加相減則得

餘弦(卯丄一)甲丄亥正弦(卯丄一)甲＝(天丄亥地)餘弦卯甲丄(天丅$\frac{一}{亥}$地)亥正弦卯甲

餘弦(卯丄一)甲丅亥正弦(卯丄一)甲＝(天丅亥地)餘弦卯甲丅(天丄$\frac{一}{亥}$地)亥正弦卯甲

設令

亥^{二}＝丅一

則

亥＝$\sqrt{丅一}$

即

$\frac{一}{亥}$＝丅亥

故變前式為

餘弦(卯丄一)甲丄亥正弦(卯丄一)甲＝(天丄亥地)(餘弦卯甲丄亥正弦卯甲) (甲)

餘弦(卯丄一)甲丅亥正弦(卯丄一)甲＝(天丅亥地)(餘弦卯甲丅亥正弦卯甲) (乙)

如令

卯＝〇

卯＝一

卯＝二

卯＝三

……

則從(甲)式得

餘弦甲丄亥正弦甲＝天丄亥地

餘弦二甲丄亥正弦二甲＝(天丄亥地)^{二}

餘弦三甲丄亥正弦三甲＝(天丄亥地)^{三}

總言之如寅為任何整數則

餘弦寅甲丄亥正弦寅甲＝(天丄亥地)^{寅} (四)

又從(乙)式得

餘弦甲丅亥正弦甲＝天丅亥地

餘弦二甲丅亥正弦二甲＝(天丅亥地)^{二}

餘弦三甲丅亥正弦三甲＝(天丅亥地)^{三}

總言之

則得

$$\text{餘弦}\,寅甲 - 亥\,\text{正弦}\,寅甲 = (天 - 亥\,地)^{寅}$$

㊄再將㊃㊄兩式以天地亥所代之原數還之得乙二幅之式如下

乙二

$$\text{餘弦}\,卯甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲 = (\text{餘弦}\,甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲)^{卯}$$

$$\text{餘弦}\,卯甲 - \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲 = (\text{餘弦}\,甲 - \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲)^{卯}$$

攷得此兩式之法固以卯為正整數然卯若為分數或為負數其理亦未嘗不合

惟因

$$\text{餘弦}\,甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲 \left\{ \begin{array}{l} = (\text{餘弦}\,卯甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲)^{\frac{一}{卯}} \\ = (\text{餘弦}\,寅甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,寅甲)^{\frac{一}{寅}} \end{array} \right.$$

所以將其式乘至寅方即得

$$\text{餘弦}\,寅甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,寅甲 = (\text{餘弦}\,卯甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲)^{\frac{寅}{卯}}$$

再令

$$卯甲 = 甲'$$

$$寅甲 = \frac{寅}{卯}甲'$$

則得

$$\text{餘弦}\,\frac{寅}{卯}甲' + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,\frac{寅}{卯}甲' = (\text{餘弦}\,甲' + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲')^{\frac{寅}{卯}}$$

又以同法證之可得

$$\text{餘弦}\,\frac{寅}{卯}甲' - \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,\frac{寅}{卯}甲' = (\text{餘弦}\,甲' - \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲')^{\frac{寅}{卯}}$$

由此可見乙二幅之式其卯無論為正數為負數無不合理

又試將

$$\frac{一}{\text{餘弦}\,卯甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲} = (\text{餘弦}\,甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲)^{-卯}$$

以

$$\text{餘弦}\,卯甲 - \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲$$

通其左邊之母子則得

$$(\text{餘弦}\,卯甲 + \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,卯甲)(\text{餘弦}\,卯甲 - \sqrt{-1}\,\text{正弦}\,甲) = \text{餘弦}^{二}\,卯甲 + \text{正弦}^{二}\,卯甲 = 一$$

又因

$$\text{餘弦}\,卯甲 = \text{餘弦}\,(-卯甲)$$

而

$$\text{丅正弦卯甲}=\text{正弦}(\text{丅卯甲})$$

故得

$$\text{餘弦}(\text{丅卯甲})\,\text{丄}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦}(\text{丅卯甲})=(\text{餘弦甲}\,\text{丄}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦甲})^{\text{丅卯}}$$

又以同法證之可得

$$\text{餘弦}(\text{丅卯甲})\,\text{丅}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦}(\text{丅卯甲})=(\text{餘弦甲}\,\text{丅}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦甲})^{\text{丅卯}}$$

所以知㉄幅之式其卯無論爲正數爲負數爲整數爲分數其式無不合理又可用同法證其卯如爲虛數奇零不盡之數也亦合于理因虛數可以畧近之數明之故也

第二百六十二款

前款㉄幅之式爲算學士棣美弗于一千七百三十年間攷平圜及雙曲線之算式時所得惟代數幾何之書中謂是尤拉所設之法

試將㉄幅兩式之和與較變之則可得㊁幅之兩式惟㊁幅之兩式實與第十一卷中所言迦但所設解三次式之根其法相同

㊁

$$\text{餘弦卯甲}=\frac{(\text{餘弦甲}\,\text{丄}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦甲})^{\text{卯}}\,\text{丄}\,(\text{餘弦甲}\,\text{丅}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦甲})^{\text{卯}}}{\text{二}}$$

$$\text{正弦卯甲}=\frac{(\text{餘弦甲}\,\text{丄}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦甲})^{\text{卯}}\,\text{丅}\,(\text{餘弦甲}\,\text{丅}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦甲})^{\text{卯}}}{\text{二}\sqrt{\text{丅一}}}$$

此兩式雖未能徑爲算學中之用然依代數幾何之法求之卽可得幾何中最奥妙之理其理極深

第二百六十三款

用㊁幅之式能將任何弧之正餘弦徑求其任幾倍弧之正餘弦

如于㊁幅中令

$$\text{天}=\text{餘弦甲}$$
$$\text{地}=\text{正弦甲}$$

卽得

$$\text{餘弦卯甲}=\frac{(\text{天}\,\text{丄}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{地})^{\text{卯}}\,\text{丄}\,(\text{天}\,\text{丅}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{地})^{\text{卯}}}{\text{二}}$$

$$\text{正弦卯甲}=\frac{(\text{天}\,\text{丄}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{地})^{\text{卯}}\,\text{丅}\,(\text{天}\,\text{丅}\sqrt{\text{丅一}}\,\text{地})^{\text{卯}}}{\text{二}\sqrt{\text{丅一}}}$$

惟依二項例之

法則

$(天+\sqrt{-1}\,地)^{卯}=天^{卯}+卯天^{卯-1}地\sqrt{-1}-\frac{卯(卯-1)}{一\cdot二}天^{卯-2}地^{二}-\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{一\cdot二\cdot三}天^{卯-3}地^{三}\sqrt{-1}+\cdots$

$(天-\sqrt{-1}\,地)^{卯}=天^{卯}-卯天^{卯-1}地\sqrt{-1}-\frac{卯(卯-1)}{一\cdot二}天^{卯-2}地^{二}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{一\cdot二\cdot三}天^{卯-3}地^{三}\sqrt{-1}+\cdots$

如將兩式相加減而以$\sqrt{-1}$約其減得之式則得(十二)幅之式如左

(十一)

$餘弦卯甲=天^{卯}-\frac{卯(卯-1)}{一\cdot二}天^{卯-2}地^{二}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)(卯-3)}{一\cdot二\cdot三\cdot四}天^{卯-4}地^{四}-\cdots$

$正弦卯甲=卯天^{卯-1}地-\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{一\cdot二\cdot三}天^{卯-3}地^{三}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)(卯-3)(卯-4)}{一\cdot二\cdot三\cdot四\cdot五}天^{卯-5}地^{五}-\cdots$

此式中其卯若為正整數則其級數可有盡界(言非無窮之級也)此為一千七百〇一年間卜奴里所設之式惟其本書中未有證法

所可異者卜奴里推得此兩式而未知有棣美弗之兩式迨二十年之後棣美弗始用卜奴里之式推得之

如將

$正弦甲=正切甲\,餘弦甲$

$正弦卯甲=正切卯甲\,餘弦卯甲$

又以代法變之乃以所得之第一式約其第二式而化之即可得二百五十七款中所記之切線之式

第二百六十四款

又可用同法證任幾倍弧之正餘弦自(未)幅起至(二未)止惟此法因欲俟論微分積分術中解之所以不贅今本款不過論其各式之用法為求任弧正餘弦各方之總級數其級數之各項以弧之各倍正餘弦之數明之

令

$巳=餘弦甲+\sqrt{-1}\,正弦甲$

$午=餘弦甲-\sqrt{-1}\,正弦甲$

故

$巳午=餘弦^{二}甲+正弦^{二}甲=一$

$午=\frac{一}{巳}$

則棣美弗之式可以(卄一)幅之式明

之如左

（氐二）

$$二餘弦卯甲 = 巳^{卯} \perp 午^{卯} = 巳^{卯} \perp 巳^{\top卯}$$

$$二\sqrt{\top一}\,正弦卯甲 = 巳^{卯} \top 午^{卯} = 巳^{卯} \top 巳^{\top卯}$$

又因 $二餘弦甲 = 巳 \perp 午$ 如將 丙 丙 丙 等字代其二項式級數中之第二三四等項內之倍數則可變其級數之式如左

$$(二餘弦甲)^{甲} = 巳^{甲} \perp 丙巳^{甲\top一}午 \perp 丙巳^{甲\top二}午^{二} \perp 丙巳^{甲\top三}午^{三} \perp \cdots\cdots$$

又因

$$二餘弦甲 = 午 \perp 巳$$

復得

$$(二餘弦甲)^{甲} = 午^{甲} \perp 丙午^{甲\top一}巳 \perp 丙午^{甲\top二}巳^{二} \perp 丙午^{甲\top三}巳^{三} \perp \cdots\cdots$$

將此兩式相加而令 $巳午 = 一$ 則得

$$二(二餘弦甲)^{甲} = 巳^{甲} \perp 午^{甲} \perp 丙(巳^{甲\top二} \perp 午^{甲\top二}) \perp 丙(巳^{甲\top四} \perp 午^{甲\top四}) \perp 丙(巳^{甲\top六} \perp 午^{甲\top六}) \perp \cdots\cdots$$

惟因

$$巳^{甲} \perp 午^{甲} = 二餘弦卯甲$$

$$巳^{甲\top二} \perp 午^{甲\top二} = 二餘弦(卯\top二)甲$$

$$巳^{甲\top四} \perp 午^{甲\top四} = 二餘弦(卯\top四)甲$$

$$巳^{甲\top六} \perp 午^{甲\top六} = 二餘弦(卯\top六)甲$$

$$\cdots\cdots$$

故代之而以二約之得

$$(二餘弦甲)^{甲} = 餘弦卯甲 \perp 丙餘弦(卯\top二)甲 \perp 丙餘弦(卯\top四)甲 \perp 丙餘弦(卯\top六)甲 \perp \cdots\cdots$$

若再將其級數之各項引長則知負弧之餘弦與同倍數之正弧之餘弦同

即如

$$餘弦(丙\top卯)甲 = 餘弦(卯\top丙)甲$$

因其各等于

$$餘弦寅甲\,餘弦卯甲 \perp 正弦寅甲\,正弦卯甲$$

故也惟因 $(巳 \perp 午)^{甲}$ 之式若詳爲級數其等距首末之每兩項倍數必同所以知 $(二餘弦甲)^{甲}$ 之級數亦

必如是

惟因等距首末之正負兩弧之餘弦相同所以可取出其負弧餘弦之各項而以正弧餘弦之各項代之則可省其式為

$\frac{一}{丄}\left[甲\frac{(卯丁)}{}丙餘弦 + 甲\frac{(卯丁二)}{}丙餘弦 + \cdots 甲卯餘弦\right] = \frac{甲^{卯}}{二}餘弦(三)$

如卯為偶數則級數中必有一獨項為等距首末之項所以不可倍之惟卯若為奇數則負弧餘弦之數必等于正弧餘弦之數

又如攷此式之時忽思得 $一 = 甲\frac{(卯)}{}\frac{卯}{}餘弦$ 則(人)幅各公式之理易見

第二百六十五款

又如(甲二)幅之式亦可以同法證之即 $\frac{甲}{辛} = 巳 = 甲卯弦正 - \sqrt{二}$ 是也

惟再有一更便之法可令 $\frac{甲}{二周}$ 代其甲又知 $甲弦正 = \frac{(甲)}{(三周)}餘弦$ 即可得

$\frac{一}{丄}\left[\frac{甲}{(三周)} + \frac{(卯)}{} 丙餘弦 + \frac{甲}{(三周)}\frac{(卯二)}{} 丙餘弦 + \cdots \frac{甲}{(三周)} 卯餘弦\right] - 二\frac{甲^{卯}}{} 正弦(三)$

此式之各項因有 $甲寅弦正\frac{二}{周} 寅弦正\frac{二}{周} 甲寅弦餘 - 寅弦餘\left[\frac{甲}{三周}\right]$ 寅弦餘 之形故寅為奇數則其式必為 $\frac{上}{下}甲寅弦正$ 若寅為偶數其式必為 $\frac{上}{下}甲寅弦餘$

第二百六十六款

欲用棣美弗所設之式以攷各理必先定數箇常用之例以知弧背與八線之界限

幾何中有公論云凡弧背必小于切線此理已在二百二十四款解之又云凡弧背必大于正弦所以如令 $\frac{甲}{卯}$ 為任何弧則 $\frac{甲}{卯} < 甲切\frac{}{卯}$(一)而 $\frac{甲}{卯} > 甲弦正\frac{}{卯}$(二)以卯乘其(一)式以 $\frac{甲}{卯}割正$ 乘其

㈡式又見正割$\frac{卯}{甲}$正弦$\frac{卯}{甲}$＝正切$\frac{卯}{甲}$卽得卯正切$\frac{卯}{甲}$〉甲而卯正切$\frac{卯}{甲}$〈甲正割$\frac{卯}{甲}$再設卯恆加增則其$\frac{卯}{甲}$必漸變小可小至任何能名之弧則其正割$\frac{卯}{甲}$必甚與一卽半徑也相近而其與半徑相較之數可小至莫可名言所以卯若恆增大則卯正切$\frac{卯}{甲}$恆近于甲故其限爲甲

又以同法因卯正弦$\frac{卯}{甲}$〈甲卯正弦$\frac{卯}{甲}$〉甲餘弦$\frac{卯}{甲}$設卯恆加增則餘弦$\frac{卯}{甲}$恆近于半徑而等于一卽其限也所以卯正弦$\frac{卯}{甲}$以甲弧爲限如思其甲弧恆變小則$\frac{正弦甲}{甲}$其限爲一又$\frac{正切甲}{甲}$其限亦爲一

第二百六十七款

從前款之理又易見餘弦$^{卯}\frac{卯}{甲}$之限亦等于一惟下式中因欲令卯變大至無窮則必先查得餘弦$^{卯}\frac{卯}{甲}$之限

有一箇已知之式餘弦$\frac{卯}{甲}$＝$\sqrt{一丅正弦^{二}\frac{卯}{甲}}$如令斗＝卯正弦$\frac{卯}{甲}$則斗〈甲而餘弦$^{卯}\frac{卯}{甲}$＝$\left(一丅\frac{卯^{二}}{斗^{二}}\right)^{\frac{二}{卯}}$惟依二項之例此式之右邊等于$一丅\frac{二卯}{斗^{二}}\left[一\left(一丅\frac{卯}{二}\right)\frac{二\cdot四卯}{斗^{二}}\left[一\left(一丅\frac{卯}{四}\right)\left(一\frac{卯}{二}\right)\cdots\right]\right]\cdots$因依所定之限卯可以大至無窮而斗不大于甲則其級數之內除首項之外其餘之各項必等于〇所以知其卯若大至無窮之時則其餘弦$^{卯}\frac{卯}{甲}$之眞同數爲一

第二百六十八款

以上兩款所論弧背弦切各線之限其公例已明則可再論棣美弗之式

用二百六十一款所有棣美弗所設之㈡幅之兩式則可得兩式如左

$$\text{餘弦甲}+\sqrt{-1}\,\text{正弦甲}=\left(\text{餘弦}\frac{甲}{卯}+\sqrt{-1}\,\text{正弦}\frac{甲}{卯}\right)^{卯}$$

$$\text{餘弦甲}-\sqrt{-1}\,\text{正弦甲}=\left(\text{餘弦}\frac{甲}{卯}-\sqrt{-1}\,\text{正弦}\frac{甲}{卯}\right)^{卯}$$

命酉代$\frac{甲}{卯}$弧之正切，又知$\text{正弦}\frac{甲}{卯}=\text{餘弦}\frac{甲}{卯}\,\text{正切}\frac{甲}{卯}$則得

$$\text{餘弦甲}+\sqrt{-1}\,\text{正弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\left(1+\sqrt{-1}\,酉\right)^{卯}$$

$$\text{餘弦甲}-\sqrt{-1}\,\text{正弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\left(1-\sqrt{-1}\,酉\right)^{卯}$$

惟依二項之例則其$\left(1+\sqrt{-1}\,酉\right)^{卯}$可詳之爲級數如後

$$\left(1+\sqrt{-1}\,酉\right)^{卯}=\left\{\begin{array}{l}1-\frac{卯(卯-1)}{1\cdot2}酉^{2}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)(卯-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}酉^{4}-\cdots\\ +\sqrt{-1}\left[卯酉-\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{1\cdot2\cdot3}酉^{3}+\cdots\right]\end{array}\right.$$

此級數共分爲兩分，其一分之各項無虛根之式，其又一分之各項有虛根式爲公乘數，設以叱代其無虛根之一分，而以吽代其又一分中虛根所乘之諸級，則得

$$\left(1+\sqrt{-1}\,酉\right)^{卯}=叱+\sqrt{-1}\,吽$$

又以同法得

$$\left(1-\sqrt{-1}\,酉\right)^{卯}=叱-\sqrt{-1}\,吽$$

再可由此兩式及前式而得

$$\text{餘弦甲}+\sqrt{-1}\,\text{正弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\left(叱+\sqrt{-1}\,吽\right)$$

$$\text{餘弦甲}-\sqrt{-1}\,\text{正弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\left(叱-\sqrt{-1}\,吽\right)$$

以此兩式相加減得

$$\text{餘弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\,叱$$

$$\text{正弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\,吽$$

再以叱與吽所代之原數還之，則得

$$\text{餘弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\left\{1-\frac{卯(卯-1)}{1\cdot2}酉^{2}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)(卯-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}酉^{4}-\cdots\right\}$$

$$\text{正弦甲}=\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}\left\{卯酉-\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{1\cdot2\cdot3}酉^{3}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)(卯-3)(卯-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}酉^{5}-\cdots\right\}$$

此兩式其卯之同數無論

如何必合于理如令卯大至無窮則依以上所證之例得

$$\text{餘弦}^{卯}\frac{甲}{卯}=一$$

$$卯\,\text{正弦}\frac{甲}{卯}=甲$$

$$\frac{一}{卯}=○$$

$$\frac{二}{卯}=○$$

$$\cdots\cdots$$

所以可用代法而得(巳二)幅之式如左

(巳二)

$$\text{餘弦}甲=一-\frac{甲^{二}}{一\cdot二}+\frac{甲^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}-\cdots\cdots$$

$$\text{正弦}甲=甲-\frac{甲^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\frac{甲^{五}}{一\cdot二\cdot三\cdot四\cdot五}-\cdots\cdots$$

此二式爲奈端初查得弧與弦相求之法亦甚巧妙

第二百六十九款

前已于一百七十七款中言如令戊代訥白爾對數之根 二·七一八二八一八 則

$$戊^{天}=一+\frac{天}{一}+\frac{天^{二}}{一\cdot二}+\frac{天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\frac{天^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}+\cdots\cdots$$

惟因甲可爲任何大小之弧故可于上式中令 $天=甲\sqrt{-1}$ 則依常法代之而又分其有虛根式乘數之各項另爲一行則得

$$戊^{甲\sqrt{-1}}=\left\{\begin{array}{l}一-\frac{甲^{二}}{一\cdot二}+\frac{甲^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}-\cdots\cdots\\ +\sqrt{-1}\left(甲-\frac{甲^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\frac{甲^{五}}{一\cdot二\cdot三\cdot四\cdot五}-\cdots\cdots\right)\end{array}\right.$$

再以同法令 $天=-甲\sqrt{-1}$ 得

$$戊^{-甲\sqrt{-1}}=\left\{\begin{array}{l}一-\frac{甲^{二}}{一\cdot二}+\frac{甲^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}-\cdots\cdots\\ -\sqrt{-1}\left(甲-\frac{甲^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\frac{甲^{五}}{一\cdot二\cdot三\cdot四\cdot五}-\cdots\cdots\right)\end{array}\right.$$

惟于(巳二)幅之式又可得

$$\text{餘弦}甲=一-\frac{甲^{二}}{一\cdot二}+\frac{甲^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}-\cdots\cdots$$

$$\text{正弦}甲=甲-\frac{甲^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\frac{甲^{五}}{一\cdot二\cdot三\cdot四\cdot五}-\cdots\cdots$$

所以得(庚二)幅之式如左

(庚二)

$$戊^{甲\sqrt{-1}}=\text{餘弦}甲+\sqrt{-1}\,\text{正弦}甲$$

$$戊^{-甲\sqrt{-1}}=\text{餘弦}甲-\sqrt{-1}\,\text{正弦}甲$$

所以

$$\text{餘弦}甲=\frac{戊^{甲\sqrt{-1}}+戊^{-甲\sqrt{-1}}}{二}$$

$$\text{正弦}甲=\frac{戊^{甲\sqrt{-1}}-戊^{-甲\sqrt{-1}}}{二\sqrt{-1}}$$

此兩式當時拉果闌請以爲最巧之法惟觀其求此兩式之時所用之正弦餘弦之級數卽爲一千七百年間奈端所設之級數如奈端當時能多用一番心則奈端已可知之不必待五十年後尤拉攷出矣

第二百七十款

由（庚二）幅之式得

$$\frac{\text{餘弦甲}+\sqrt{-\text{一}}\,\text{正弦甲}}{\text{餘弦甲}-\sqrt{-\text{一}}\,\text{正弦甲}}=\frac{\text{戊}^{\text{甲}\sqrt{-\text{一}}}}{\text{戊}^{-\text{甲}\sqrt{-\text{一}}}}=\text{戊}^{\text{二甲}\sqrt{-\text{一}}}$$

令 $\text{正切甲}\,\text{餘弦甲}$ 代其 正弦甲 又去其公乘數 餘弦甲 則得

$$\frac{\text{一}+\sqrt{-\text{一}}\,\text{正切甲}}{\text{一}-\sqrt{-\text{一}}\,\text{正切甲}}=\text{戊}^{\text{二甲}\sqrt{-\text{一}}}$$

惟因 戊 為訥白爾對數之根則依十八卷所論對數之理

$$\text{二甲}\sqrt{-\text{一}}=\text{訥}\,\frac{\text{一}+\sqrt{-\text{一}}\,\text{正切甲}}{\text{一}-\sqrt{-\text{一}}\,\text{正切甲}}$$

又依一百六十七款如 亥 為任何數則

$$\text{對}\,\frac{\text{一}+\text{亥}}{\text{一}-\text{亥}}=\text{二}\left(\text{亥}+\frac{\text{亥}^{\text{三}}}{\text{三}}+\frac{\text{亥}^{\text{五}}}{\text{五}}+\frac{\text{亥}^{\text{七}}}{\text{七}}+\cdots\right)$$

故令 $\sqrt{-\text{一}}\,\text{正切甲}$ 代其 亥 則所得之式仍等于 $\text{二甲}\sqrt{-\text{一}}$ 再將其兩邊各以 $\sqrt{-\text{一}}$ 約之則得（辛二）幅之式如左

（辛二）

$$\text{甲}=\text{正切甲}-\frac{\text{正切}^{\text{三}}\text{甲}}{\text{三}}+\frac{\text{正切}^{\text{五}}\text{甲}}{\text{五}}-\frac{\text{正切}^{\text{七}}\text{甲}}{\text{七}}+\cdots$$

此為古累固里所設之式

古累固里攷得此式以與英國算學士高廉士（此一千六百七十一年之事）又于一千六百七十五年與來本之言之來本之以其法徧示歐羅巴洲之各友言是自己所創獲一千六百七十六年來本之又以此法送至英國英國各算學家知其卽是古累固里之舊法故羣起而笑之然來本之猶立辯其定自己出所以拉果闌諸所著之算學書中尚以此法為來本之所得惟卜奴里書中則云此法亦是來本之自己求得惟不知古累固里已有此法故被物議耳算學中往往有兩法暗合者此類是也

第二百七十一款

如令 甲 為四十五度之弧則依古累固里之級數得八

分全周之一為 $一\top\frac{三}{一}\bot\frac{五}{一}\top\frac{七}{一}\bot\frac{九}{一}\top\frac{十一}{一}\cdots$ 惟此級數之歛太遲，故無大用處。

所以奈端又另設一箇級數為 $一\bot\frac{三}{一}\top\frac{五}{一}\top\frac{七}{一}\bot\frac{九}{一}\bot\frac{十一}{一}\top\frac{十三}{一}\top\frac{十五}{一}\cdots$ 此級數以平圓之全徑為一，其各項之和為九十度之弧背。

奈端所設之級數雖比古累固里之級數歛得較速，然奈端言用以求象限之弧，必引長至五十萬萬項方能得二十位密率，其工夫極大，若一人為之，須千年方畢，所以未為善法。

第二百七十二款

古累固里之級數簡約而不能用，茲因平圓周徑之比為幾何中最要之事，故欲求得一箇相近之式以易解其比例。

設卯天地三者各為整數，又令 $\frac{天}{一}$ 與 $\frac{地}{一}$ 為任兩弧之正切，其和弧正切為 $\frac{卯}{一}$，以此各數代入(巳四)幅之式中，則得

$$\frac{卯}{一}=\frac{一\top\frac{天地}{一}}{\frac{天}{一}\bot\frac{地}{一}}=\frac{天地\top一}{天\bot地}$$

所以得

$$地=\frac{天\top卯}{卯天\bot一}=\frac{卯\bot天}{卯天\top一}$$

惟因地為整數，則卯丄一必能有一數可約之。設巳為卯丄一之任約數，午為其約得之數，則

$$巳午=卯\bot一$$

$$天\top卯=巳$$

$$天=卯\bot巳$$

所以

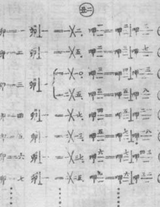
$$地=卯\bot\frac{天\top卯}{卯\top一}=卯\bot午$$

由此得一例如下：

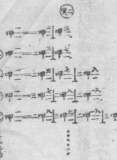
例曰：設卯為任何整數，則卯丄一能化為兩箇乘數巳與午，其一箇乘數為一，則其切線等于 $\frac{卯}{一}$ 之弧，其弧必等于有切線 $\frac{卯\bot巳}{一}$ 與 $\frac{卯\bot午}{一}$ 之兩弧之和。

試令 $甲\frac{卯}{一}$ 為有切線為 $\frac{卯}{一}$ 之弧，令 $甲\frac{卯\bot巳}{一}$ 與 $甲\frac{卯\bot午}{一}$ 為所有切線為 $\frac{卯\bot巳}{一}$ 與 $\frac{卯\bot午}{一}$ 之兩弧，則依上例可變為(子二)之式。

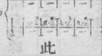
(子二) $$甲\frac{卯}{一}=甲\frac{卯\bot巳}{一}\bot甲\frac{卯\bot午}{一}$$

如令卯有各同數，則得(丑二)幅之式如左

此級數其卯之同數可任增至若干。如以此各式用常法消之，可更得（寅二）幅之各式如左。

（一）（九）（十）（十二）（十三）



此為由上某式而得

從（寅二）各式可求平圓之周，其最易者為末兩式。其（一）式為最簡之法，惟不甚密耳。此幅之式為尤拉所設，其半周四分之一為有切線$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$之兩弧之和。如令$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$各代級數中甲弧之正切，則得兩箇級數，以四乘其兩級數之和，則平圓之半周為

此式之總數，即半徑為一之半周，亦即為徑一之全周，其數為三·一四一五九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三三八三二七九五〇二八八，即周率也。此三十六位周率之數，在入算之時總不必用如此多位數，所以記之者，因未有此捷法之時，曾有算學士固靈者，用平圓內容外切之多等邊形（即割圓法），費了極大工夫，算得此三十六位之數。其臨死之時，囑其家以此數刻于墓碑，蓋其平生得意之作，恐其磨滅，故欲傳之永久，亦猶亞幾默德之墓刻一球形與圓柱形也。惟固靈之後，又有法蘭西人提拉尼者，用更簡便之法推得一百二十八位周率之數，後有尤拉攷之，言提拉尼之法只須八十小時工夫已可算畢。又有人云英國哇克斯福德大書院有一書，中已記一百五十位周率。

第二百七十三款

因平圓周徑之比例為算學中常用之率則有一稍簡之解法為甚便所以此款另設一箇解法與二項之例無相關亦與虛式之理無相關

設甲為平圓之任何弧則依二百五十七款之理而得

$$正切二甲=\frac{二正切甲}{一-正切^{二}甲}$$

所以

$$\frac{一}{正切二甲}=\frac{一}{二正切甲}-\frac{一}{二}正切甲$$

由此得數式如後

$$\frac{一}{正切甲}=\frac{一}{二正切\frac{甲}{二}}-\frac{一}{二}正切\frac{甲}{二}$$

$$\frac{一}{二正切\frac{甲}{二}}=\frac{一}{四正切\frac{甲}{四}}-\frac{一}{四}正切\frac{甲}{四}$$

$$\frac{一}{四正切\frac{甲}{四}}=\frac{一}{八正切\frac{甲}{八}}-\frac{一}{八}正切\frac{甲}{八}$$

以此三式相加而去其左右相同之各項則變得之式為

$$\frac{一}{正切甲}=\frac{一}{八正切\frac{甲}{八}}-\frac{一}{二}正切\frac{甲}{二}-\frac{一}{四}正切\frac{甲}{四}-\frac{一}{八}正切\frac{甲}{八}$$

所以用移項之法得

$$\frac{一}{八正切\frac{甲}{八}}-\frac{一}{正切甲}=\frac{一}{二}正切\frac{甲}{二}+\frac{一}{四}正切\frac{甲}{四}+\frac{一}{八}正切\frac{甲}{八}$$

總之如卯為二之任整方數其式為

$$\frac{一}{卯正切\frac{甲}{卯}}-\frac{一}{正切甲}=\frac{一}{二}正切\frac{甲}{二}+\frac{一}{四}正切\frac{甲}{四}+\frac{一}{八}正切\frac{甲}{八}+\cdots+\frac{一}{卯}正切\frac{甲}{卯}$$

如其卯大至無窮則其級數亦為無窮項之式又因二百六十六款曾證

$$卯正切\frac{甲}{卯}=甲$$

故得(一)之式如下

$$(一)\quad \frac{一}{甲}-\frac{一}{正切甲}=\frac{一}{二}正切\frac{甲}{二}+\frac{一}{四}正切\frac{甲}{四}+\frac{一}{八}正切\frac{甲}{八}+\cdots$$

此式最簡妙為一千八百十二年華里斯之書所載其書初出時咸以為新法因此時英國之人尚未知尤拉已有此法也此級數之斂較速因半弧之切線小于全弧切線之半則每項必

比前一項之四分之一更小惟級數愈長則其兩箇比連之項愈近于四與一之比故其任一項之數必比以後諸項之和畧大三倍所以如得某項爲前項四分之一則其本項之三分之一畧可爲後諸項之和

從二百四十九款之式

正切二甲 ＝ 餘割甲 ⊥ 餘切甲

得

正切二甲 ＝ ⊤一⊤餘切二甲 ⊥ 餘切甲

＝ 餘切甲（⊤一⊤正切二甲 ⊥ 一）

惟依二項之例則

甲 ＝ 正切甲 ⊥ 三正切三甲 ⊤ 五正切五甲 ⊥ 七正切七甲 ……

㈠ 而

正切二甲 ＝ 二正切甲 ⊥ 二正切三甲 ⊤ 二正切五甲 ……

㈡ 依㈠式可推級數之各項其第七方或第五方可以不用而其餘各項可用㈡式求之更便

令甲爲一象限之弧等于 $\frac{周}{四}$ 則 $\frac{正切甲}{一}$ ＝ 一 故弧背之長可用下法推之

正切 $\frac{二}{一}$ 甲 ＝ 一·○○○○○○○○○○○

正切 $\frac{四}{一}$ 甲 ＝ ·四一四二一三五六二三七

正切 $\frac{八}{一}$ 甲 ＝ ·一九八九一二三六七三八

正切 $\frac{一六}{一}$ 甲 ＝ ·○九八四九一四○三三六

正切 $\frac{三二}{一}$ 甲 ＝ ·○四九一二六八四九七七

正切 $\frac{六四}{一}$ 甲 ＝ ·○二四五四八六二二一一

正切 $\frac{一二八}{一}$ 甲 ＝ ·○一二二七二四六二三八

正切 $\frac{二五六}{一}$ 甲 ＝ ·○○六一三六○○○一六

正切 $\frac{五一二}{一}$ 甲 ＝ ·○○三○六七九七一二○

故

$\frac{二}{一}$ 正切 $\frac{二}{一}$ 甲 ＝ ·五○○○○○○○○○○

$\frac{四}{一}$ 正切 $\frac{四}{一}$ 甲 ＝ ·一○三五五三三九○五九

$\frac{八}{一}$ 正切 $\frac{八}{一}$ 甲 ＝ ·○二四八六四○四五九二

$\frac{一六}{一}$ 正切 $\frac{一六}{一}$ 甲 ＝ ·○○六一五五七一二七一

$\frac{三二}{一}$ 正切 $\frac{三二}{一}$ 甲 ＝ ·○○一五三五二一四○六

$\frac{六四}{一}$ 正切 $\frac{六四}{一}$ 甲 ＝ ·○○○三八三五七二二二

$\frac{一二八}{一}$ 正切 $\frac{一二八}{一}$ 甲 ＝ ·○○○○九五八七八六一

$\frac{二五六}{一}$ 正切 $\frac{二五六}{一}$ 甲 ＝ ·○○○○二三九六八七五

酉 ＝ $\frac{五一二}{一}$ 正切 $\frac{五一二}{一}$ 甲 ＝ ·○○○○○五九九二一三

$\frac{三}{二}$ 酉 ＝ ·○○○○○一九九七三七

$\frac{周}{四}$ ＝ ·六三六六一九七七二三六

所以得

周 ＝ 三·一四一五九二六五三五

第二百七十四款

由第十卷之說可見任何次方程式之解法全在乎能否化爲數箇相乘之數其乘數無論爲何次之式俱可惟亦有一種方程式能以正餘弦之理解之

因 $\text{餘弦}(\text{寅}+一)\text{天}=\text{二餘弦天餘弦寅天}-\text{餘弦}(\text{寅}-一)\text{天}$ 故令 $\text{二餘弦天}=\text{亥}+\frac{一}{\text{亥}}$ 則得

$$\text{二餘弦二天}=\text{四餘弦天餘弦天}-二=\text{亥}^{二}+\frac{一}{\text{亥}^{二}}$$

$$\text{二餘弦三天}=\text{四餘弦天餘弦二天}-\text{二餘弦天}=\text{亥}^{三}+\frac{一}{\text{亥}^{三}}$$

$$\text{二餘弦四天}=\text{四餘弦天餘弦三天}-\text{二餘弦二天}=\text{亥}^{四}+\frac{一}{\text{亥}^{四}}$$

……

總之 $\text{二餘弦寅天}=\text{亥}^{\text{寅}}+\frac{一}{\text{亥}^{\text{寅}}}$ 所以得 $\text{亥}^{\text{二寅}}-\text{二亥}^{\text{寅}}\text{餘弦寅天}+一=〇$ 又從方程式 $\text{亥}+\frac{一}{\text{亥}}=\text{二餘弦天}$ 得 $\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦天}+一=〇$ 惟因有兩箇方程式

$$\text{亥}^{\text{二寅}}-\text{二亥}^{\text{寅}}\text{餘弦寅天}+一=〇$$

$$\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦天}+一=〇$$

必同以一數解之則至少必有一箇公根如令其原式之根為甲與 $\frac{一}{\text{甲}}$ 則此兩箇根式必為兩式之公根因變其形為

$$\text{亥}^{\text{寅}}+\frac{一}{\text{亥}^{\text{寅}}}-\text{二餘弦寅天}=〇$$

$$\text{亥}+\frac{一}{\text{亥}}-\text{二餘弦天}=〇$$

則無論以甲代亥以 $\frac{一}{\text{甲}}$ 代亥所得之數必同故也

惟因二次方程之式 $\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦天}+一=〇$ 不過能有兩箇根所以其二根亦必為 $\text{亥}^{\text{二寅}}-\text{二亥}^{\text{寅}}\text{餘弦寅天}+一=〇$ 之根所以其 $\text{亥}^{\text{二寅}}-\text{二亥}^{\text{寅}}\text{餘弦寅天}+一$ 之三項必能以 $\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦天}+一$ 度之

或令 $\text{寅天}=\text{井}$ 而 $\text{天}=\frac{\text{井}}{\text{寅}}$ 則 $\text{亥}^{\text{二寅}}-\text{二亥}^{\text{寅}}\text{餘弦井}+一$ 必可以 $\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦}\frac{\text{井}}{\text{寅}}+一$ 度之

惟依二百三十二款令周率代半周則 $\text{餘弦井}=\text{餘弦}(\text{二寅周}+\text{井})$ 所以可將弧之各式內（即指二百三十二款之式）任以 $\frac{\text{井}}{\text{寅}}$ 代其一弧則其級數之式為

$$\frac{\text{二周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}$$

$$\frac{\text{四周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}$$

$$\frac{\text{六周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}$$

……

至 $\frac{二(\text{寅}-一)\text{周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}$ 為止

因以上各弧之寅倍其餘弦為相同之數所以知凡有三項之式如 $\text{亥}^{\text{二寅}}-\text{二亥}^{\text{寅}}\text{餘弦井}+一$ 者必能與

$$\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦}\frac{\text{井}}{\text{寅}}+一$$

$$\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦}\left(\frac{\text{二周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}\right)+一$$

$$\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦}\left(\frac{\text{四周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}\right)+一$$

……

至 $\text{亥}^{二}-\text{二亥餘弦}\left(\frac{二(\text{寅}-一)\text{周}}{\text{寅}}+\frac{\text{井}}{\text{寅}}\right)+一$ 各級有公約數 此級數再不必引長因其下必有一級

中有 $餘弦\left(\frac{寅}{二寅}周⊥\frac{寅}{井}\right)$ 之形而其式與 $餘弦\left(二周⊥\frac{寅}{井}\right)=餘弦\frac{寅}{井}$ 相等即為第一級以下挨次循環之式

因其不相同之約數只有寅箇而其三項式為二寅方之式則依方程式之理其三項式必即為諸約數之連乘數此為算學士第摩愛所設之法

第二百七十五款

設于前款之式中令 $井=〇$ 則 $餘弦井=一$ 而其三項之式 $亥^{二寅}丅二亥^{寅}餘弦井⊥一$ 可變為

$$亥^{二寅}丅二亥^{寅}⊥一=(亥^{寅}丅一)^{二}$$

其乘數為

$$亥^{二}丅二亥⊥一=(亥丅一)^{二}$$

$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{二周}⊥一$$

$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{四周}⊥一$$

$$\cdots\cdots$$

$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{二(寅丅一)}周⊥一$$

又如令 $井=周$ 則 $餘弦井=丅一$ 而其三項式 $亥^{二寅}丅二亥^{寅}餘弦井⊥一$ 等于 $亥^{二寅}⊥二亥^{寅}⊥一=(亥^{寅}⊥一)^{二}$ 所以此式之各乘數為

$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{周}⊥一$$

$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{三周}⊥一$$

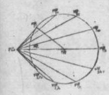
$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{五周}⊥一$$

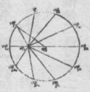
$$\cdots\cdots$$

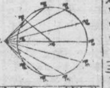
$$亥^{二}丅二亥餘弦\frac{寅}{(二寅丅一)周}⊥一$$

第二百七十六款

以上兩式為奈端之友苛地斯所設乃平圓中最奇之理也其理有二解可用兩圖明之法分任何平圓之周為二寅等分如分為十分謂始以十等分言之則其分點為呷、呷、呷……至呷又令呷呷為過呷點之半徑線則自第一圖徑線上之任點吧或自第二圖引長其徑之線上任點吧作吧呷吧呷吧呷吧呷吧呷各線又作吧呷吧呷吧呷吧呷吧呷各線再令吧點距心之數呺吧以亥代之而半徑呺呷之數以未代之則 $亥=呺吧$ $未=呺呷$ 即得兩例如下







一例　凡從吧至咟咟咟等奇數分點之各連線其連乘之積必等于 亥丨末

二例　凡從吧至咟咟咟等偶數分點之各線若吧點在圜內圖如一則其連乘積必等于 寅丨亥末 ○若吧點在圜外圖如二則其連乘積必等于 寅丨末

如作咘吧線又令一末則因分全周爲二寅分故其弧之各倍爲 咟吧 一寅/周　咟吧 二寅/周　咟吧 三寅/周 ……

惟依幾何之例 咟吧二＝亥二丅二亥餘弦寅/周丄一　咟吧二＝吧咟丅二吧咟餘弦寅/周

又依同法可見 咟吧二＝亥二丅二亥餘弦寅/二周丄一　咟吧二＝亥二丅二亥餘弦寅/三周丄一

總之凡自吧點作線至任何點爲吧咟咟咟等線其理無不一律可通

惟因 吧咟二＝亥丄一 則從以上之論其各方連乘之積 吧咟二×吧咟二×吧咟二……×吧咟二 必等于三項之各式

亥二丅二亥餘弦寅/周丄一

亥二丅二亥餘弦寅/二周丄一

亥二丅二亥餘弦寅/三周丄一

……至

亥二丅二亥餘弦周/(二寅丅一)寅丄一

相乘之積

又可見 吧咟×吧咟×吧咟……×吧咟 之積等于以下各式連乘之積（亥寅丅一）即（一丅亥寅）

亥二丅二亥餘弦寅/二周丄一

亥二丅二亥餘弦寅/四周丄一

……

至

亥二丅二亥餘弦周/二(寅丅一)寅丄一

因已證其第一箇級數等于（亥寅丅一）第二箇級數等于

所以兩邊開平方得

此爲兩例之證

此種幾何之理法甚奧妙乃于苛地斯死後檢其遺稿而得之惟其原稿中但有其例而未有證法迨此法傳出當時卽有人爲之證之

上款所有此理之公式爲棣美弗所作當時算學家最貴重之近時因代數之式比幾何之圖更便故棄此不用矣

第二百七十七款

如已知

則易見二百七十五款所有之積可以下式明之

觀此知其第二式與末式同其第三式與末上一式同其第四式與末上三式同則知凡等距首末之式無不一一相同如是推之寅若爲偶數卽其兩箇相等之乘數其一必在第乘數之此邊一在其彼邊其乘數爲卽得惟寅若爲奇數則有兩箇比連之相等乘數而其第一乘數爲所以如將之平方根乘其相同之乘數內之一箇其寅若爲偶數則必等于各數相乘之積 其寅若爲奇數則其之各乘數必爲

第二百七十八款

玆將二百七十五款之式並其所有之各乘數審之

惟其……所以其乘數為

……

可見其第一式與末式同其第二式以下與末式以上各兩兩相同若寅為偶則其比連之兩箇乘數同為……惟寅若為奇則兩兩相等之各乘數中有一單乘數……所以如將……與……各開平方又去其各雙相等乘數中之一則寅若為偶其……必等于以下各式連乘之積

……

惟寅若為奇則其乘數為

……

以上所論為化開……與……二式之法此法于代數幾何及微分術最深之理中有大用處

第二百七十九款

茲款欲論三種方程式用八線之法

一為解二次方程式……其巳午為已知之整數

此式中有兩箇根一為正一為負其兩根之和為巳而其相乘之積為丁午茲依九十三款之法如令……為正根其亥為所求之角則……為其負根

惟因 $\sqrt{\text{午}}\,\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}\times\left(-\sqrt{\text{午}}\,\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{亥}\right)=-\text{午}$ 故欲求亥之同數可令 $\sqrt{\text{午}}\left(\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{亥}-\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}\right)=\text{巳}$ 惟依巳幅之三四

兩式可得 $\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{亥}-\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}=\text{二餘切亥}=\frac{\text{二}}{\text{正切亥}}$ 所以 $\text{正切亥}=\frac{\text{二}\sqrt{\text{午}}}{\text{巳}}$ 由此得下法

凡解二次方程式如 $\text{天}^{2}+\text{巳天}=\text{午}$ 者必求一箇亥角令 $\text{正切亥}=\frac{\text{二}\sqrt{\text{午}}}{\text{巳}}\times\text{半徑}$ 則原

式之兩根為 $\text{天}=+\sqrt{\text{午}}\,\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}$ 及 $\text{天}=-\frac{\sqrt{\text{午}}}{\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}}$

二為解二次方程式 $\text{天}^{2}-\text{巳天}=\text{午}$ 二如前法求得亥角則其式之

兩根為 $\text{天}=+\frac{\sqrt{\text{午}}}{\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}}$ 及 $\text{天}=-\sqrt{\text{午}}\,\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}$

三為解二次方程式 $\text{天}^{2}-\text{巳天}=-\text{午}$ 三此式中有兩箇正根其和為

巳而其相乘積為午若依九十三款之法則其兩根

可明之為 $\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}\sqrt{\text{午}}$ 與 $\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{亥}\sqrt{\text{午}}$ 則 $\sqrt{\text{午}}\left(\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{亥}+\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}\right)=\text{巳}$ 惟依巳幅三四兩式 $\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{亥}+\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}=\text{二餘割亥}=\frac{\text{二}}{\text{正弦亥}}$ 所以

$\text{正弦亥}=\frac{\text{二}\sqrt{\text{午}}}{\text{巳}}$ 故解 $\text{天}^{2}-\text{巳天}=-\text{午}$ 之式必求一箇亥角能令 $\text{正弦亥}=\frac{\text{二}\sqrt{\text{午}}}{\text{巳}}\times\text{半徑}$ 則其兩

根之式為 $\text{天}=+\sqrt{\text{午}}\,\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}$ 及 $\text{天}=+\frac{\sqrt{\text{午}}}{\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{亥}}$

第二百八十款

茲款所論之式為眞代數題之解法其法或云是算學士薄生所設

題曰求以下四箇方程式內戌天地人之各同數

戊天地人 ＝ 甲　(呷)
戊人丅天地 ＝ 乙　(吇)
戊地丅天人 ＝ 丙　(⿰口丙)
戊天丅地人 ＝ 丁　(叮)

其解法曰令巳午未爲三箇角能得

戊人 ＝ $\sqrt{甲}$正切巳　(一)
戊地 ＝ $\sqrt{甲}$正切午　(二)
戊天 ＝ $\sqrt{甲}$正切未　(三)

則由呷式得

天地 ＝ $\sqrt{甲}$餘切巳　(四)
天人 ＝ $\sqrt{甲}$餘切午　(五)
地人 ＝ $\sqrt{甲}$餘切未　(六)

所以可用代法代入吇⿰口丙叮各式而得

$\sqrt{甲}$(正切巳丅餘切巳) ＝ 乙
$\sqrt{甲}$(正切午丅餘切午) ＝ 丙
$\sqrt{甲}$(正切未丅餘切未) ＝ 丁

則依二百四十九款以呷爲任何弧得

呷丅餘切呷 ＝ 二餘切二呷 ＝ 丄 $\frac{正弦二呷}{二}$

則可由前式得

$\frac{正弦二巳}{二\sqrt{甲}}$ ＝ 乙
$\frac{正弦二午}{二\sqrt{甲}}$ ＝ 丙
$\frac{正弦二未}{二\sqrt{甲}}$ ＝ 丁

由此又可得

正弦二巳 ＝ $\frac{乙}{二\sqrt{甲}}$　(七)
正弦二午 ＝ $\frac{丙}{二\sqrt{甲}}$　(八)
正弦二未 ＝ $\frac{丁}{二\sqrt{甲}}$　(九)

有此三式則能求巳午未之三箇角。如將(一)(二)(三)式相乘得

戊^{三}天地人 ＝ ($\sqrt{甲}$)^{三}正切巳正切午正切未　(十)

將此式從呷式得

戊 ＝ $\sqrt{甲}$正切巳正切午正切未　(十一)

由此及(三)(二)(一)式得

天 ＝ $\sqrt{甲}\frac{正切巳正切午}{正切未}$ ＝ $\sqrt{甲}$餘切巳餘切午正切未
地 ＝ $\sqrt{甲}\frac{正切巳正切未}{正切午}$ ＝ $\sqrt{甲}$餘切巳正切午餘切未
人 ＝ $\sqrt{甲}\frac{正切午正切未}{正切巳}$ ＝ $\sqrt{甲}$正切巳餘切午餘切未

所以欲求戊天地人之各同數必先從

正弦二巳 ＝ $\frac{乙}{二\sqrt{甲}}$
正弦二午 ＝ $\frac{丙}{二\sqrt{甲}}$
正弦二未 ＝ $\frac{丁}{二\sqrt{甲}}$

而得巳午未三箇

角乃得

戊＝二/四甲√正切巳正切午正切未

天＝二/四甲√餘切巳餘切午正切未

地＝二/四甲√餘切巳正切午餘切未

人＝二/四甲√二切巳餘切午餘切未

第二百八十一款

茲款所論之法爲求平圓中容十七等邊形其法本爲算學士哥斯所設今從勒讓德之書中節錄其簡要之理如左

其法令平分平圓之周率爲十七分其每分之弧以幷代之爲 二/十七周＝幷 則先求得

二＝一/一＋餘幷/一＋餘弦二幷/一＋餘弦三幷/一＋…＋餘弦五幷/一＋餘弦七幷/一＋餘弦九幷/一＋…

若以吧代諸項之和又將其各項俱以 二餘弦幷 乘之又依二百四十三款之式

二餘弦甲餘弦乙＝餘弦(甲＋乙)＋餘弦(甲－乙)

卽得

二巳餘弦幷＝一＋二餘弦二幷＋二餘弦四幷＋二餘弦六幷＋一＋二餘弦八幷＋二餘弦一幷＋二餘弦一二幷＋一＋二餘弦一四幷＋餘弦一六幷

惟因 十七幷＝周 所以

餘弦一二幷＝餘弦(周－五幷)＝餘弦五幷

餘弦一四幷＝餘弦(周－三幷)＝餘弦三幷

……

至 餘弦一六幷＝餘弦幷 所以

二吧餘弦幷＝一＋二餘弦幷＋二餘弦二幷＋二餘弦三幷＋…

故又得

二吧餘弦幷＝一＋餘弦幷＋…＝吧

其 二吧(一＋餘弦幷)＝一＋餘弦幷 所以 吧＝二

再將等于吧之各項分爲兩分則得

天＝餘弦幷＋餘弦五幷＋餘弦七幷＋餘弦三幷＋…

地＝餘弦二幷＋餘弦九幷＋餘弦八幷＋…

所以得 天＋地＝二 再將天之同數四項與地之同數四

項相乘而將其餘弦之級數變爲簡弧之餘弦而如法化之卽得

天地＝＝二（餘弦二并丄餘弦四并丄餘弦六并丄一丄餘弦六并）

天地＝丅二（餘弦一五并丄餘弦一三并丄餘弦一并丄一丄餘弦并）

卽

天地＝丅一

由以上各式得

天＝$\frac{四}{一}$丄$\frac{四}{一}\sqrt{一七}$

地＝$\frac{四}{一}$丅$\frac{四}{一}\sqrt{一七}$

又另將天地各分爲兩項得

天＝申丄酉

地＝戌丄亥

申＝餘弦三并丄餘弦五并

酉＝餘弦七并丄餘弦一一并

戌＝餘弦并丄餘弦一三并

亥＝餘弦九并丄餘弦一五并

又以同法得

申酉＝丅$\frac{四}{一}$

戌亥＝丅$\frac{四}{一}$

所以可用兩箇新二次方程式求其申酉戌亥之各同數

又因已知

餘弦并丄餘弦一三并＝戌

又

餘弦并餘弦一三并＝$\frac{二}{一}$（餘弦一二并丄餘弦一四并）＝$\frac{二}{一}$（餘弦三并丄餘弦五并）＝$\frac{二}{申}$

則可用第四箇二次方程式得餘弦并之同數由此得十七等邊形之一邊其式爲

二正弦并＝$\sqrt{二丅餘弦并}$

作以上各方程式之法專靠一箇甚巧妙之理其理實本于未定之相等式而來如欲知其詳須觀哥斯所著之書方明

代數術卷二十五終

興化劉彝程校算

三角測量說

金匱華蘅芳學

彼此兩處相距若非甚遠而中間無所阻隔者則可從此處直至彼處而步步量其尺寸本無待於測亦無藉乎算也若兩處之相去稍遠而其間有所間隔不能從此處直行至彼則量度之法窮矣所以算學家特創一種算法名曰測量

測量二字之意言測與量並用也亦言以測算代其量度之事也

學者須知量與測皆不能無差須處處防其有差則其差可以稍小

即以量度而論或用步弓或用丈桿或用鐵鏈或用帶尺此數種器具或以金類爲之或以竹木爲之或以絲麻爲之均能受天時之燥溼寒暑而變其長短之數器先不能自準用以量物安得無差

又因造此量度之器不能極長必處處接續用之其相接之處恆苦於不能使此端與彼端不相離亦不相過又苦於所量之路微有灣曲不能恰在直線上故其量得之數最易有差

量得之數雖不能無差然有一法可使其差稍小蓋所謂差者非失之多即失之少也若量之多次而取其折中之數則其差必比一次量之者稍小何也一次失之多未必次次均失之多一次失之少未必次次均失之少也以多濟少以少濟多則其差可小矣

至於測之易差略有數端一因測器不精二因目力有限三因測法未善

測器之病因造器之時不能悉合幾何之理如弧線不合平圜度分不能均勻置軸不在圜心軸線與圜面不成正角窺管之軸不能與圜徑在一箇垂面此種造器不精之各病其差雖僅在毫釐然能使所測之角度忽失之大忽失之小

所以凡用測器不可認定一面如用此面測過一次必用彼面再測一次而將兩次所得之數相加折半以消其差測之次數愈多愈佳天文家有環測之法亦此故也

何以言目力之有限也測器之上有用窺管者有用照星者有用躧縫者有用十字交線者以目窺之恆苦於近目之物太大遠處之物太小不能對定一點則分秒不準

測法不善則由於算學之數有時易差凡極大極小之角其正弦增減之數非太速即太遲用以入算其差必多所

以凡角之近於初度或近於九十度及一百八十度者測量之人每不取焉

要而言之測算所得之數比量度所得之數祇能得其約略而已如謂不失尺寸吾不敢信也

或有問者曰量度之數雖不能無差然舍量度之外更無他法可以取信是量度固不可廢也至於測算之數更不如量度之準則其法更不足恃矣何必嘵嘵然講論測量之法乎

余答之曰測算誠不如量度之準然至不能量度則舍測算之外更有何法乎蓋測算之法乃是不得已而用之非欲誇炫算術也

所以相距之遠近苟可量度而得者與其用測不如用量所求之數苟可推算而得者不必於算法之外更求簡易之法

如謂別有妙器無論任何遠皆可一測而得其相距之數可以無須推算則西人何必數十百年究心於代微積之理遣弦切割之表以供邊角相求之用哉蓋論造法之理不得不力求其深而論用法之事不妨但言其淺今且為學者言測量之法

測量之術無他謬巧也三角而已三角之法並無多種也平三角弧三角而已

弧三角惟天文之事用之若測量地面之物平三角已足用矣

茲有最要之例數條學者須熟記之然後可習平三角之法不明此例必動手便錯也

凡平三角形為三條直線相遇而成所以有三箇邊亦有三箇角

凡平三角形之三箇角合之必為一百八十度所以已知其任兩角則其又一角亦已知因可將兩角之和減一百八十度而得也

凡角大於九十度者曰鈍角小於九十度者曰銳角等於九十度者曰直角亦曰正角亦曰方角

凡平三角形其三箇角皆小於九十度者謂之銳角形有一角大於九十度者謂之鈍角形有一角等於九十度者謂之直角形

凡平三角形任兩邊之和必大於又一邊否則不能成平三角形

凡平三角形大邊必對大角小邊必對小角等邊必對等角所以三角相等者其三邊亦相等兩角相等者其所對之兩邊亦相等

凡平三角形已知其三邊則可求其三角已知其三角則不能求其三邊因其形可任何大小也

凡平三角形每角之正弦必與其所對之邊有比例

凡鈍角之正弦等於外角之正弦以鈍角減一百八十度卽爲外角

凡直角之正弦卽是半徑

凡平三角形其大邊之平方等於又兩邊平方之和者必爲直角形大於又兩邊平方之和者必爲鈍角形小者爲銳角形

凡平三角形之某邊某角均可以字識之惟所用之字亦有一定之例其三箇角恆用呷吃呐三字其三箇邊恆用甲乙丙三字又恆以對呷角之邊爲甲對吃角之邊爲乙對呐角之邊爲丙如是則某邊所對之角某角所對之邊可不致混淆也

惟因所識之字有一定之例則題中祇須言某邊某角已知某邊某角未知卽可據之以作圖又可用此數字作代數式以明其算法

若作識之字不合此例則對邊對角之理不明而題之文理不能簡圖之眉目不能淸亦不易以代數之式明其算法矣

平三角形之三邊三角共爲六事此六事中必有三事爲已知其已知之三事內至少必有一爲邊而後可求其未知之三事所以其法只有五種

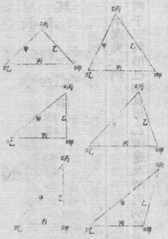
一爲對邊求對角　二爲對角求對邊

三爲兩邊夾一角　四爲兩角夾一邊

五爲三邊求各角

對邊求對角

任何平三角形已知其甲乙兩邊又知其呷角求他三事



其

$$\text{正弦吃}=\frac{\text{甲}}{\text{乙}}\text{正弦呷}$$

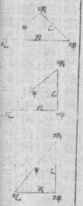
$$\text{㖪}=\text{一八〇}\,丅\,(\text{呷}\,丄\,\text{吃})$$

$$\text{丙}=\text{甲}\,\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦㖪}}$$

此種之題若遇所知之角為鋭而對角之邊小於角旁之邊者則有兩箇平三角形俱合於題其兩形之㖪角彼此互視為外角

對角求對邊

任何平三角形已知其呷角甲邊又知其吃角求他三事



其

$$\text{㖪}=\text{一八〇}\,丅\,(\text{呷}\,丄\,\text{吃})$$

$$\text{正弦呷}:\text{甲}::\text{正弦吃}:\text{乙}$$

$$\text{正弦呷}:\text{甲}::\text{正弦㖪}:\text{丙}$$

即

$$\text{乙}=\text{甲}\,\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦吃}}$$

$$\text{丙}=\text{甲}\,\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦}\,[\text{一八〇}\,丅\,(\text{呷}\,丄\,\text{吃})]}$$

兩邊夾一角

任何平三角形已知其甲乙兩邊及所夾㖪角求他三事

其

$$\tfrac{一}{二}(\text{呷}\,丄\,\text{吃})=\text{九〇}\,丅\,\tfrac{一}{二}\text{㖪}$$

$$\text{正切}\,\tfrac{一}{二}(\text{呷}\,丅\,\text{吃})=\frac{\text{甲}\,丄\,\text{乙}}{\text{甲}\,丅\,\text{乙}}\,\text{餘切}\,\tfrac{一}{二}\text{㖪}$$

$$\text{呷}=\tfrac{一}{二}(\text{呷}\,丄\,\text{吃})\,丄\,\tfrac{一}{二}(\text{呷}\,丅\,\text{吃})$$

$$\text{吃}=\tfrac{一}{二}(\text{呷}\,丄\,\text{吃})\,丅\,\tfrac{一}{二}(\text{呷}\,丅\,\text{吃})$$

$$\text{丙}=\text{乙}\,\frac{\text{正弦吃}}{\text{正弦㖪}}$$

此種之題如欲徑求丙邊可從

$$丙=\sqrt{甲^{二}\perp乙^{二}\top二甲乙餘弦呐}$$

式得之

兩角夾一邊

任何平三角形已知其呷吃二角及丙邊求他三事

其

$$呐=一八〇\top(呷\perp吃)$$

$$正弦呐:丙::正弦呷:甲$$

$$正弦呐:丙::正弦吃:乙$$

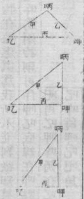
即

$$甲=丙\frac{正弦[一八〇\top(呷\perp吃)]}{正弦呷}$$

$$乙=丙\frac{正弦[一八〇\top(呷\perp吃)]}{正弦吃}$$

三邊求角

任何平三角形已知其甲乙丙三邊求其呷吃呐三角



其

$$餘弦呷=\frac{二乙丙}{乙^{二}\perp丙^{二}\top甲^{二}}$$

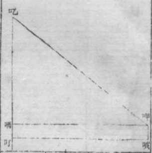
$$餘弦吃=\frac{二甲丙}{甲^{二}\perp丙^{二}\top乙^{二}}$$

$$餘弦呐=\frac{二甲乙}{甲^{二}\perp乙^{二}\top丙^{二}}$$

學者用以上各式無論何種平三角形皆可通惟勿忘鈍角之正弦等於外角之正弦直角之正弦即是半徑平三角形邊角相求之法雖有以上五種而測量所常用者只有兩種而已即兩角夾一邊兩邊夾一角是也測量之法移步換形固不能執一以論也然約而計之不外乎以下五種

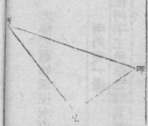
一為有物在高處人能行至其下欲知物之高

如圖吃為所測之物吃叮為欲知之高則可於地面平



量一底線如哦叮其哦叮之長須與吃叮之高不甚懸殊乃置測器於哦以測其呷吃視線與呷哂平線所成之呷角如此則呷吃哂三角形已知呷哂邊又知呷角又知哂為直角故可用兩角夾一邊之法求得吃哂邊與測器之高呷哦相加即得吃叮為所求之高

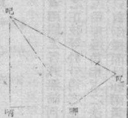
一為有物在我所不能到之處但能自遠處望之欲知望處距物之遠



如圖哂點為物我不能行至其處則可從呷作呷吃底線乃在呷吃二處測得呷吃二角則呷吃哂三角形已知其呷吃二角及呷吃邊故可用兩角夾一邊之法推得呷哂之距吃哂之距

三為有物在高處我不能至其下欲知其物之高

如圖吧哂為高處之物吧哂為其物之高從人立之點呷



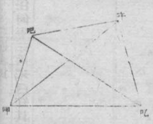
向便處作一底線呷吃從呷吃二處測得吧呷吃角吧呷哂角吧吃呷角

如此則呷吃吧三角形已知呷吃邊吧呷吃角吧吃呷角用兩角夾一邊之術可得吧呷

其呷吧哂三角形已知哂為直角吧呷哂為測得之角吧呷為求得之邊則可用對角對邊之術求得吧哂

四為有兩物在遠處俱為我所不能到欲知其兩物之距

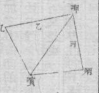
如圖吧咋為兩物則可作呷吃底線在呷點測其吃呷



吧角吃呷咋角在吃點測其呷吃咋角呷吃吧角

如此則呷吃吧三角形呷咋吧三角形皆有兩角夾一邊為已知之數所以可推得呷吧邊呷咋邊與所夾之咋呷吧角則可用兩邊夾一角法求得其相距之數吧咋

五爲有呷吃呐三物在一個平面內其呷吃之距呷呐之距皆爲已知之數又有已知之呷嗊吃角呷嗊呐角吃呷呐角欲求嗊點之所在



此題如用畫法求之則可於呷吃線上作平圓之弧等於呷嗊吃角之倍度於呷呐線上作平圓之弧等於呷嗊呐角之倍度則所作兩弧必交於呷嗊二點即得嗊點之所在

如用算法推之則可先求呷吃嗊角與呷呐嗊角令 $呷吃=乙$　$呷呐=丙$　$吃呷呐=呷$　$呷嗊吃=吃$　$呷嗊呐=呐$　$呷吃嗊=天$　$呷呐嗊=地$ 則呷吃嗊呐四邊形內有天地和角之式 $天丄地=三六〇丅(呷丄吃丄呐)$ 又從呷吃嗊三角形呷呐嗊三角形得

$$\left.\begin{array}{l} 呷嗊=\frac{正弦吃}{乙正弦天} \\ 呷嗊=\frac{正弦呐}{丙正弦地} \end{array}\right\}（一）$$

所以 $\frac{正弦吃}{乙正弦天}=\frac{正弦呐}{丙正弦地}$ 則 $\frac{正弦地}{正弦天}=\frac{乙正弦呐}{丙正弦吃}$ 又可用副角之法令 $正切牛=\frac{丙正弦吃}{乙正弦呐}$ 則 $\frac{正弦地}{正弦天}=\frac{正切牛}{一}$ 而 $\frac{正弦天丅正弦地}{正弦天丄正弦地}=\frac{一丅正切牛}{一丄正切牛}$ 即 $\frac{正切二(天丅地)}{正切二(天丄地)}=正切(四五〇丅牛)$ 所以 $天丅地$ 已知則天地二角亦可得矣　又因 $吃呷嗊=一八〇丅(吃丄天)$ 則呷嗊之同數可從（一）式之任一式得之

右平三角測量法余於光緒丁亥年在天津武備學堂時所輯也學堂爲演習西洋陸師而設其中肄業之徒皆自淮軍各營選來武夫略知文字於古今算學之書未能卒讀難與言幾何代數之精而測量之事又爲行軍所必需斯時敎習算法者爲盧君木齋姚君石泉孫君筱垞恒苦無善本之書朝夕授徒使之但知其法而不必明其理余故從西法撮取各術冠以淺近易明之語又列代數算式以便倉卒翻閱至於立術之理未暇及也學者苟能習此亦足以致用矣何忍付之敗簏耶

光緒壬辰九月若汀自識

拋物線說

重物之性動之則常動靜之則常靜

物為能力所動則常有動勢經久不息非以他力止之不能靜也　不動之物常有靜性非以他力動之不肯動也　所以重學家謂之一動永動一靜永靜

拋物之力只有一霎時

物受拋力而靜體變為動體則以永動之性直向所拋之方向前去人不能再加力於物之上所以拋物之力謂之暫加力

地心常有攝力無時不令物下墜

此力宛如以繩繫物時時挽使向下其力為常加非如拋物之力僅用於一霎時也此力謂之常加力

物受暫加之力直向前行其行率必為平速

如一秒中行一百尺則二秒中共行二百尺三秒中共行三百尺是也

物受常加之力直向下墜其行率必為加速恆與時之平方有比例

如一秒中墜下十六尺則二秒中共墜下六十四尺三秒中共墜下一百四十四尺是也

此二力若非同時並加於物則其物必行直線

如在高處將物放手任其自落則物未受拋力但受攝力其落下之路必為直線

惟物之受拋力者無不兼受攝力

能使物但受攝力不受拋力不能使物但受拋力不受攝力所以凡受拋力之物無有不受攝力者也

其所受之二力方向若相同或相反則其物亦行直線

如拋力與攝力皆向下則二力相併能使物下墜更速

若拋力向上則與向下之攝力相敵初時拋力大於攝力物能自下而上後來攝力勝於拋力則物必自上向下而落於原處是物之上下亦均在一條直線也

其所受之二力方向若不相同亦非相反則物行之路不能為直線而成曲線

如拋力斜向若干高度則其物既不能不依拋力斜向高遠又不能不兼受攝力時時墜下不知不覺不由自主而行成一種曲線矣

其所以能行成此種曲線之故因攝力能減物之高不能減物之遠

物受斜拋之力若干秒中應行至若干遠若干高攝力能減其高數故必於應高之數中減去應墜之數方為

物之質點其應遠之數則不能因攝力而變也

此種曲線名曰拋物線

欲知拋物線之形可將一直竿任分其一段為若干等分每分之處各繫以線而使下垂其下垂之線長短次第悉依平方之比例

如第一分之線長一分

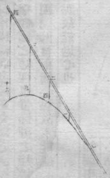
第二分之線長四分

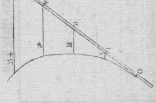
第三分之線長九分

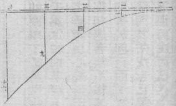
第四分之線長一寸六分

第五分之線長二寸五分

則將此竿任斜若干度置之其竿之斜度即拋力之角度竿之各分即物應行之平速各分之垂線即物應墜之數各線之下端即物所行過之各點若將此各點聯之即為拋物線





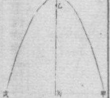


拋物線之長無盡界

拋出之物往而不返則其所成之軌迹非如平圓橢圓之周而復始也所以其長無窮

拋物線有頂有心從頂點作過心之直線謂之直徑

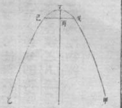
此線平分拋物線之面為左右二分猶橢圓之長徑也



如圖甲丁戊拋物線其心點在乙頂點在丁從丁過乙作丁丙直線即直徑也此線分拋物線之面為甲丁丙與戊丁丙左右兩等分

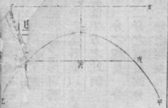
過心點作橫線與直徑正交謂之通徑

此猶橢圓之短徑也惟橢圓之短徑不能過心此則過心因橢圓有兩箇心點故不能過心拋物線只有一箇心點故能過心也



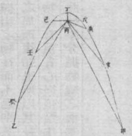
如圖甲丁乙拋物線丙爲心點丁爲頂點與丁丙正交作戊己過心線至拋物線之界戊點己點而止則戊己橫線卽爲甲丁乙拋物線之通徑

引長直徑過頂點出於拋物線之外其長如心頂相距之數於此線之端作橫線與通徑平行謂之準線



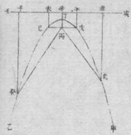
如圖甲丁乙爲拋物線丙爲心點丁爲頂點丁丙爲心頂相距戊己爲通徑今引長丙丁線出拋物線之外令辛丁之長等於丁丙又於辛點作庚壬橫線與戊己通徑平行則庚壬爲準線

從心點至拋物線之任何處作直線謂之帶徑



如圖甲辛庚戊丁己壬癸乙爲拋物線丙爲心點從心點任作直線至拋物線上任何處如丙甲丙辛丙庚丙壬丙癸皆爲帶徑其半通徑丙戊丙己及心頂之距丙丁亦可謂之帶徑

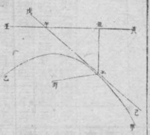
準線上任於何處作垂線至拋物線之界而止則此線之長必與所過之帶徑相等



如圖甲丁乙爲拋物線庚壬爲準線則準線上所作之垂線與心點所出之帶徑相遇者無不相等故丑卯等於卯丙而子癸等於癸丙其午戊未己等於半通徑丙戊丙己其辛丁等於丁丙

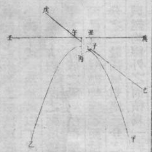
準線上所作之垂線與所遇之帶徑成交角將此角平分爲二則其分角之線卽爲切線

此卽抛力之角度線也



如圖甲乙爲抛物線庚壬爲準線丙爲心點丙子爲帶徑丑子爲準線上所作之垂線子爲切點戊己爲丑子丙角之分角線則子戊與子己皆爲抛力之方向

由是知抛力之角度其高低於地平線之數同則必同一切線其物行之路必同在一抛物線惟左右分馳各行其線一段耳



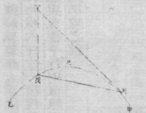
如圖子戊方向高於地平爲戊午壬角子己方向低於地平爲子午庚角此二角之大小同所以抛力之方向爲子戊則物行子乙線若方向爲子巳則物行子甲線

切線上均分若干分從各分點作線與直徑平行至遇抛物線之界而止則此各線之長爲平方之比例

此卽前所言竿上繫線下垂之意也

如圖辛甲辛爲抛物線甲爲切點甲乙爲切線丙戊庚爲均分之各點其丙丁戊己庚辛爲與長徑平行之線各線之長合於物受攝力下墜之數

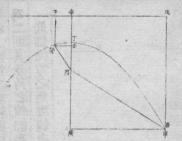
從切線上作線與長徑平行至抛物線之界又從此點作截線至切點則成一箇平三角形而函一段抛物線在內其抛物線內之面積與抛物線外之面積爲一與二之比



如圖甲己乙爲抛物線丙爲切點丙丁爲切線丁戊爲切線上所作與直徑平行之線遇抛物線於戊從戊點至丙作戊丙線則截丙己戊一段抛物線在丙丁戊三角形內其丙己戊面積爲一則丙丁戊己面積爲二

解曰平三角形之面積爲底與高相乘以二除之之數今丙丁戊三角形可以丁戊爲底是以平方數爲底也高乘平方以二除之塹堵積也其丙丁戊己面爲無數平方數合成之陽馬積也塹堵內減去陽馬其所餘之丙己戊一叚拋物線之面積䟽牖積也陽馬居塹堵三分之二䟽牖居塹堵三分之一所以拋物線內之面積與拋物線外之面積爲一與二之比

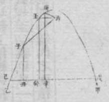
從帶徑至拋物線界之點作橫線至直徑則與帶徑及直徑之一叚合成一句股形此句股形若在心點之上恆以倍心頂距爲句弦和若在心點之下恆以倍心頂距爲句弦較



如圖甲丁乙爲拋物線丙爲心點戊己爲準線戊丑及子癸皆爲與直徑平行之線丑庚與壬癸皆爲所作之橫線丙癸丙丑皆爲帶徑其丙癸壬句股形在心點之上以辛丙爲句弦和其丙丑庚句股形在心點之下以辛丙爲句弦較

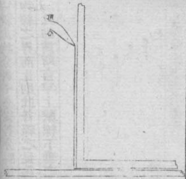
陳靜菴算學大成內取句股弦整數法卽是此理

拋物線內任作一橫線與直徑正交又從此線上任作直線與直徑平行則直線與所遇之帶徑其和恆等於橫線距準線之數



如圖甲乙爲拋物線戊己爲任作之橫線庚辛壬癸子丑皆爲任作之直線庚丙壬丙子丙皆爲帶徑則丙庚庚辛之和等於丙壬壬癸之和亦等於丙子子丑之和其和數爲戊己橫線距準線之數

由此理可得一畫拋物線之法

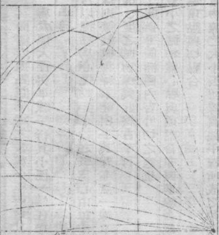


以線一條一端定於矩尺外旁之曲處一端定於心點以鉛筆在線內指定頂點移矩引急其線又移橫尺就其矩尺之下旁置定然後將矩尺依橫尺向右漸移鉛

筆依定矩尺隨線而移則可畫成頂甲半面拋物線其頂乙半面須將矩尺翻轉向左作之

拋力之角度不同則所成之拋物線大小不同所以同一拋點可成無數拋物線其大小均為同式之形

無數拋物線雖大小各異而心頂之距恆為通徑四分之一所以俱為同式之形



今從十度拋角起至八十度止每閒十度作一拋物線以明之又作一四十五度拋角之線以明平地最遠之界則以後所論之各事卽可於此圖中觀之

無數拋物線皆以拋點為切點而非同一切線

惟因切線各不相同所以雖同一切點能成無數拋物線若切點同切線亦同則只有一條拋物線矣

無數拋物線必同一準線

心頂之距有大小則頂距準線有遠近所以無數拋物線能同一準線

無數拋物線之心必在一箇平圜之周所以心距拋點之數恆相等

其平圜以拋點為心拋點距準線之數為半徑

無數拋物線之頂必在一箇橢圜之周

其橢圓以拋點距準線之數爲小徑兩倍其小徑之數爲大徑大徑與準線平行其小徑一端在拋點一端在準線

若以拋點爲心拋點距準線之數爲心頂距作一大拋物線則無數拋物線不能出乎其外亦無一線不與之相切

惟○度之拋物線與此終古平行

此猶平圓橢圓內容外切之意也

最小之拋物線心點與頂點合亦與準線合最大之拋物線頂點與切點合

拋物線之大小因切線與地平線所成之角而異此角今以拋角名之

拋角愈大則拋物線愈小拋角愈小則拋物線愈大所以○度之拋角拋物線最大九十度拋角拋物線最小小極則上下均在一處而成直線矣

若以平地而論則四十五度之拋角物之落處最遠名此拋落之距爲平地最遠界

四十五度爲平地最遠之拋角

地面山坡有向上斜向下斜者則其最遠之界及拋角均與平地不同俓以坡之斜度加減斜上用減斜下用加九十度而半之度以此數轉減九十度爲斜面最遠之拋角

如斜上十度則以五十度爲最遠之拋角斜下十度則以四十度爲最遠之拋角

凡拋角大小於最遠之拋角其度同則物之落處亦同即以平地而論其最遠之拋角爲四十五度若拋角爲五十度或四十度物之落處必同惟必比最遠之界較近耳

按上論拋物線之理以下言拋物線之用

測一秒中物之墜數

以物不用拋力從高處放手任其自落測得歷若干秒落至地面乃以高之尺寸爲實秒數之平方爲法除之即得一秒中地心攝力使物下墜之數

測一秒中物之平速

以物向空中若干度拋出及物落至地面量得其距拋處若干遠　乃以半徑爲一率拋角正切爲二率拋落距爲三率求得四率以一秒中墜數除之開平方得秒數　又以半徑爲一率拋角正割爲二率拋落距爲三率求得四率以秒數除之即得物受拋力一秒中行平速之數

求墜率及平速率簡法

一率半徑　二率拋角正切　三率平地拋落距

四率墜率

一率半徑　二率拋角正割　三率平地拋落距

四率速率

此法所求墜率速率不拘定一秒故其數與前不同然

用以入算則無異以其比例同也

拋物線之用處不外乎二大類一曰設角求距一曰設距

求角

設角求距術

高拋求平距

一率半徑　二率拋角正弦　三率平速率

求得四率以墜率除之寄左

一率半徑　二率拋角餘弦　三率平速率

求得四率以寄左數乘之得平地拋落距

高拋求高斜距

一率拋角正割　二率拋斜兩正切較　三率平速

求得四率以墜率除之寄左

一率拋角正割　二率斜度正割　三率平速率

求得四率以寄左數乘之卽得斜上之拋落距

高拋求低斜距

一率拋角正割　二率拋斜兩正切和　三率平速

求得四率以墜率除之寄左

一率拋角正割　二率斜度正割　三率平速率

求得四率以寄左數乘之卽得斜下之拋落距

平拋求低斜距

一率半徑　二率斜度正切　三率平速率

求得四率以墜率除之寄左

一率半徑　二率斜度正割　三率平速率

求得四率以寄左數乘之卽得斜下之拋落距

低拋求低斜距

一率拋角正割　二率拋斜兩正切較　三率平速

求得四率以墜率除之寄左

一率拋角正割　二率斜度正割　三率平速率

求得四率以寄左數乘之卽得斜下之拋落距

求最大拋落距

地面有斜度者以斜度加減（上斜用加　下斜用減）九十度半之

爲最大之拋角　無斜度者以九十度半之爲最大

之拋角各如其本術入之卽得最大之拋落距

設距求角術

平距求拋角

一率倍拋點距心數（卽平地最大之拋落距）　二率平距數

三率半徑　求得四率檢餘弦表得度以加減九十度而半之轉減九十度得大小兩拋角

低斜距求拋角

一率半徑　二率斜度正弦　三率斜距

求得四率爲加數

以斜距爲平三角形之底拋點距心數爲小要以加數與拋點距心數相加爲大要用三邊求角法求得對大邊之角爲用角

置斜度與九十度之和以用角加減之半之與九十度相減得大小兩拋角　若所得之角爲九十度減餘則爲低拋角　相減適盡者其拋角爲〇度

高斜距求拋角

一率半徑　二率斜度正弦　三率斜距

求得四率爲減數

以斜距爲平三角形之底拋點距心數爲大要以減數減之爲小要用三邊求角法求得對小要之角爲用角

置斜度與九十度之較以用角加減之半之以減九十度得大小兩拋角

右拋物線說一帙憶余二十餘歲時閱代微積拾級粗知拋物線之梗概而重學中圓錐曲線說尚未詳由也李君秋紉以所著火器眞訣見示余覺未能滿意因以積思所得者筆之於書徐君雪村爲余作圖遂成此帙置之祕篋未以示人迄今四十年矣偶然檢及披閱一過未忍棄去故錄而存之光緒十八年十月既望華若汀自識

金匱華蘅芳學

垜積演較

以積較術演諸乘垜積必用積較還原表故取其表化之使可各適其用

兩層積較求法實之表

1		
0	1	

其公分母為一

三層積較求平方之表

2		
0	2	
0	1	1

其公分母為二

四層積較求立方之表

6			
0	6		
0	3	3	
0	2	3	1

公分母6

五層積較求三乘方之表

24				
0	24			
0	12	12		
0	8	12	4	
0	6	11	6	1

公分母24

六層積較求四乘方之表

120					
0	120				
0	60	60			
0	40	60	20		
0	30	55	30	5	
0	24	50	35	10	1

公分母120

七層積較求五乘方之表

720						
0	720					
0	360	360				
0	240	360	120			
0	180	330	180	30		
0	144	300	210	60	6	
0	120	274	225	85	15	1

公分母720

茭艸形段題

今有茭艸六百八十束欲令落一形堆之問底子幾何

答曰一十五束

落一形之垛　第一層爲一　第二層爲三　第三層爲六　第四層爲十　每下一層之數卽以上層之數加層數卽得

所以可設底爲○則積亦爲○　底一則積一　底二則積四　底三則積十　底四則積二十　以此各積用積較術求其累次之較並補足其缺處則可得其○底之積較

○○○|
||||
|||||||||
○T|||
○○||||
以○底積較橫列之如○○○|與求立方之

T

表　○T　○||||　○|||||　直行相乘得○|||||以公分母六通

其東數消之得○|||||用立方得十五束合問

如將開方式○|||||改爲代數式令其底爲卯則

得 $\frac{卯^{三}\perp三卯^{二}\perp二卯}{六}=積$ 以泛倍數之法化其分子爲乘數得 $\frac{卯(卯\perp一)(卯\perp二)}{六}=積$ 卽

知本垛以底求積之術爲底與底加一相乘又以底加二乘之六除之得積

今有茭艸一千八百二十束欲令撒星形堆之問底子幾何

答曰一十三束

撒星形之垛乃合諸落一形其底子遞少一數也其各層之數爲

一
一　三
一　三　六
一　三　六　十
……卽一　四　十　二十　三十五

所以可設　底○則積○　底一則積一　底二則積五　底三則積十五　底四則積三十五　底五則積七十

以此各積用積較術求其累次之較並補足其缺處則可得○底之積較

○ ○ ○ ○ 丨　○　二||||

丨 丨 丨 丨 丨　○　○ 二||||

|||| |||| ||| || 丨　以 ○ 乘表 ○ 一|| 一||　依橫行併

一|||| 一○ 丅 ||| 丨　○　○ Ⅲ 一Ⅲ ||||

三|||| 二○ 一○ |||| 丨　○

丄二 ○ 三|||| 一|||| |||| 丨　丨　○ 丅 一丅 丅 一

之得○丅丅丅一以分母二十四通束數Ⅲ二○消之得

丄三丅三Ⅲ 丅一丅一三乘方開之得一十三束合問

如將三乘方式改之爲代數之式令其底爲卯則得

$$積=\frac{卯^4+六卯^3+十一卯^2+六卯}{二四}$$

以泛倍數化其分子爲乘數得

$$積=\frac{卯(卯+一)(卯+二)(卯+三)}{二四}$$

卽得本垜以底求積之術爲底與底加一相乘又以底加二乘之又以底加三乘之二十四除之得積

今有茭艸三千三百六十七束欲合嵐峯形垜之問底子幾何

答曰一十三束

嵐峯形之垜乃將落一形之每層自上而下以一二三四……乘之也其各層之數爲一　六　十八　四十……設底○則積○　底一則積一　底二則積七　底三則積二十五　底四則積六十五　底五則積一百四十　以此各積用積較術求之

○ ○ ○ 卄 |||　○

丨 丨 丨 丨 |||　○

Ⅲ 丅 |||| |||| |||　以 ○ 乘表得 ○ 丅 卄 卄

二|||| 一Ⅲ 一|| Ⅲ |||　卄　○ 一Ⅲ 三|||| 一Ⅲ |||　依橫行

三|| 二○ || ○ ||

丄○ 三|||| 二|||| 一|||| |||　|||

併之得○||Ⅲ一○|||以分母二十四通束數消之得

|||○ Ⅲ|| Ⅲ 一○ |||開三乘方得十二束合問

如改爲代數式

$$積=\frac{三卯^4+十卯^3+九卯^2+二卯}{二四}$$

化其分子爲乘數得

$$積=\frac{卯(卯+一)(卯+二)(三卯+一)}{二四}$$

卽得本垜以底求積之術爲底與底加一相乘又以底加二乘之三底加一乘之二十四除之得積

今有茭艸八千五百六十八束欲令撒星更落一形垜

之問底子幾何

答曰一十四束

設底○積○ 底一積一 底二積六 底三積二十一 底四積五十六以積較之術求之

從表求得 以

分母一百二十通束數消之得 開四

乘方得十四束合問

如改爲代數式

化得

卽爲以底求積之式

今有茭艸五萬三百八十八束欲令嵐峯更落一形堆

之問底子幾何

答曰一十六束

設本垜之各積從○起用積較術求之

從表求得 以

分母一百二十通束數消之得 開四

乘方得一十六束合問

如改爲代數式

化得

卽爲以底求積之式

今有茭艸一垜直錢二十五貫五百七十八文只云最

上一束直錢九文次下層層每束累貴三文

問底子幾何

答曰二十八束

荄艸之垜最上爲一束以下每層累多一束所以設底○則直○　底一則直九　底二直三十三　底三直七十八　底四直一百五十　用積較術求之

0	9	33	78	150
0	9	24	45	72
3	9	15	21	27
6	6	6	6	6

從表求得 0　21　27　6 以分母六通共直消之得 −153468　21　27　6 開立方得二十八束合問

如將立方式改爲代數式 $積=\frac{二一卯+二七卯^{二}+六卯^{三}}{六}$ 化之得 $積=\frac{卯(六卯+二一)(卯+一)}{六}$ 卽爲本垜以底求共直之式

今有荄艸一垜直錢四十二貫八百四十六文只云最下每束直錢六文次上層層每束累貫五文問底子幾何

答曰三十六束

設底○則直○　底一直六　底二直二十三　底三直五十六　底四直一百十　用積較術求之

0	6	23	56	110
0	6	17	33	54
1	6	11	16	21
5	5	5	5	5

從表求得 0　13　18　5 以分母六通其共直之數消之得 −257076　13　18　5 開立方得三十六合問

如將立方式改爲代數式 $積=\frac{一三卯+一八卯^{二}+五卯^{三}}{六}$ 以泛倍數之法化其分子爲乘數得 $積=\frac{卯(五卯+一三)(卯+一)}{六}$ 卽爲本垜以底求共直之式

如像招數題

今有官司差夫一千八百六十四人築堤只云初日差六十四人次日轉多七人每人日支米三升 共支米四百三碩九斗二升問築堤幾日

答曰一十六日

設○日差○人 初日差六十四人 次日差七十一人則共差一百三十五人 三日差七十八人則共差二百十三人 如是以至末日則共差一千八百六十四人 所以可將逐日共差夫數用積較之術求之

○ 𝍫𝍦 𝍦

𝍣𝍣𝍦 𝍣𝍣𝍦 𝍦

𝍦𝍤 𝍩𝍡 𝍦

𝍡𝍣 𝍩𝍦 𝍦 從前表求得○𝍫𝍦以分母二通其共差夫數消之得𝍡𝍦𝍪𝍤𝍫𝍦開平方得十六日合問

以支米之數言之 初日支去一碩九斗二升 第二日已支去五碩九斗七升 第三日已支去十二碩三斗六升 第四日已支去二十一碩三斗 如是以至末日則共支去四百三碩九斗二升 所以可用積較術求之

可用積較術求之

○ ○𝍫𝍡 𝍪𝍠

𝍫𝍣 𝍫𝍣 𝍫𝍤 𝍪𝍠

𝍤𝍣 𝍣𝍤 𝍠𝍡 𝍪𝍠 從表求得○𝍤𝍫𝍤𝍣𝍫𝍦𝍪𝍠以分母六通其

𝍠𝍦 𝍩𝍤 𝍫𝍤 𝍪𝍠

𝍤𝍠 𝍦𝍤 𝍫𝍤 𝍪𝍠

共米數消之得𝍡𝍫𝍤𝍤𝍫𝍤𝍣𝍫𝍦𝍪𝍠以三約之得𝍤𝍯𝍫𝍣𝍫𝍦開立方得十六日合問

如將平方式𝍦𝍫𝍦以○𝍠乘之得○𝍦𝍫𝍦以減立方式𝍤𝍯𝍫𝍦得𝍤𝍯𝍫𝍡以十乘平方式減之則得𝍡𝍭𝍦𝍠七乘之以平方式減之得○○𝍫○○各降二位得𝍪𝍨以四約之得𝍪𝍦上實下法得十六日合問

今有官司依平方招兵初段方面四尺次日方面轉多二尺每人日給銀一兩二錢已招兵四千九百五十六人支銀二萬六千四十兩問招兵幾日

答曰一十四日

題意謂每人占地一尺則初日招十六人　次日招三十六人　第三日招六十四人　第四日招一百人　故其共招之數○日○人　初日十六人　次日五十二人　三日一百十六人　四日二百十六人　如是以至末日得四千九百五十六人故可將逐日共招人數用積較術求之

〇	𝍩𝍥	𝍭𝍡	𝍩𝍩𝍥	𝍡𝍩𝍥
𝍣	𝍩𝍥	𝍫𝍥	𝍮𝍣	𝍠〇〇
𝍣	𝍩𝍡	𝍪〇	𝍪𝍧	𝍫𝍥
𝍧	𝍧	𝍧	𝍧	𝍧

從表求得○𝍭𝍡𝍫𝍥𝍧以分母六通其共兵之數消之得𝍡𝍱𝍦𝍫𝍥𝍭𝍡𝍫𝍥𝍧以四約之得𝍯𝍣𝍫𝍣𝍩𝍢𝍨𝍡開立方得十四日合問

以支銀之數言之十六人日支銀十九兩二錢　五十二人日支銀六十二兩四錢　一百十六人日支銀一百三十九兩二錢　二百十六人日支銀二百五十九兩二錢　三百六十八人日支銀四百三十二兩　所以○日支○銀　一日支十九兩二錢　二日已支八十一兩六錢　三日已支二百二十兩八錢　四日已支四百八十兩　五日已支九百十二兩　如是以至末日共支銀二萬六千四十兩　故可將逐日已支銀數用積較術求之

〇	𝍫𝍢𝍡	𝍮𝍫𝍡	𝍩𝍮〇𝍧	𝍮𝍬𝍨	𝍫𝍬𝍡
〇	𝍫𝍢𝍡	𝍪𝍫𝍢	𝍩𝍧𝍨	𝍪𝍬𝍣	𝍫𝍬〇
𝍫𝍧	𝍫𝍢𝍡	𝍫𝍩𝍡	𝍨𝍮𝍧	𝍨𝍮𝍥	𝍩〇𝍨
𝍫𝍧	𝍫𝍧	𝍬𝍣〇	𝍣𝍯𝍨	𝍣𝍯𝍨	𝍨𝍯𝍨
𝍬𝍥	𝍬𝍥	𝍬𝍥	𝍬𝍥	𝍬𝍥	𝍬𝍥

從表求得○𝍩𝍢𝍫𝍩𝍥𝍪𝍧𝍬𝍥以公分母二十四約之則得○𝍮𝍨𝍬𝍣𝍫𝍢𝍫𝍨以共支銀數消之則得𝍪𝍥〇𝍨〇𝍧𝍮𝍨𝍬𝍣𝍫𝍢𝍫𝍨以四約之得𝍥𝍫𝍣〇𝍩𝍥𝍪𝍨𝍦𝍠開三乘方得十四日合問

如將立方式𝍮𝍣𝍫𝍧𝍩𝍢𝍨𝍡㊀三乘方式𝍥𝍫𝍣〇𝍩𝍥𝍪𝍨𝍦𝍠㊁倍㊁式為𝍩𝍢〇𝍡〇𝍫𝍣𝍫𝍥𝍩𝍥𝍡以○𝍠乘㊀式以減之則得𝍩𝍨〇𝍡〇𝍮𝍨𝍫𝍧𝍦𝍡㊂以三乘㊀式減之得𝍩〇𝍮𝍨𝍬𝍫𝍮𝍣𝍦𝍠𝍠㊃二乘

之以㊀式減之得
𝍪〇𝍫𝍡𝍮𝍬
𝍣𝍫𝍨𝍫𝍠
𝍢以三約之得
𝍥𝍫𝍢𝍫𝍬
𝍫𝍨𝍫𝍦
𝍠㊄以

〇𝍡乘之得〇
𝍩𝍢𝍫𝍨〇𝍬
𝍫𝍨𝍫𝍢
𝍡以減㊀式得
𝍮𝍢𝍫𝍬
𝍩𝍢𝍫𝍨𝍪𝍠
𝍫𝍨𝍫𝍬以三約

之得
𝍪𝍢𝍮𝍬
𝍣𝍫𝍢〇𝍦
𝍫𝍡𝍫𝍬㊅以
𝍫𝍡𝍫𝍬乘㊄式得
𝍡𝍪𝍦𝍫𝍣〇𝍨𝍫〇
𝍩𝍥𝍫〇〇𝍢𝍮𝍬
𝍫𝍡𝍫𝍬以㊅式減之

得
𝍡𝍫𝍡𝍫𝍦
𝍡𝍫𝍣𝍮𝍬以十六約之得
𝍩𝍨𝍫𝍢𝍦
𝍠〇𝍠𝍩𝍥𝍬上實下法亦得十四日

今有官司依圓箭束招兵初束外周十二隻次束外周轉多六隻每人日給米四升已招四千九百五八支米九百三十一碩二斗問招來幾日

答曰一十五日

第一日招十九人　第二日招三十七人　第三日招六十一八　第四日招九十一人　則〇日有〇八　一日有十九人　二日有五十六人　三日有一百一十七人　四日有二百八人　如是以至末日則共有四千九百五人故可用積較術求之

〇𝍦𝍥𝍥〇𝍦

𝍩𝍨𝍩𝍨𝍩𝍡𝍥

𝍫𝍦𝍫𝍨𝍩𝍨𝍥從表求得〇𝍢𝍣併得〇𝍩𝍡𝍥𝍩

𝍠𝍦𝍮𝍡𝍪𝍣𝍥〇𝍡𝍢𝍠

𝍨𝍦𝍫𝍠𝍫〇𝍥

以人數消之得𝍫𝍨〇𝍣𝍩𝍡𝍥𝍠開立方得十五日合問

以共支米數言之　則〇日支〇米　一日支去七斗六升　二日共支去三碩　三日共支去七碩六斗八升　四日共支去十六碩　五日共支去二十九碩四斗如是以至末日共支去九百三十一碩二斗故可用積較之術求之

〇〇𝍪𝍦𝍪𝍣𝍪𝍣

𝍮𝍥𝍮𝍥𝍮𝍥𝍫𝍨𝍪𝍣〇𝍩𝍣𝍩𝍣

𝍡𝍣𝍡𝍣𝍡𝍦𝍮𝍡𝍪𝍣

𝍨𝍣𝍣𝍣𝍡𝍣𝍫𝍥𝍪𝍣從表求得〇𝍦𝍩𝍡𝍢依直行併

𝍩𝍥〇〇𝍨𝍡𝍣𝍣𝍡〇𝍪𝍣〇𝍥𝍩𝍥𝍠

𝍯〇𝍯〇𝍣𝍣𝍠𝍣𝍪𝍣

之得[illegible]以共支米數消之得[illegible]

開三乘方得十五日合問

今有官司依平方招兵初段方面五尺次段方面轉多一尺每人日給米三升次日轉多三升已招兵二千四百四十八支米四千四百七十七碩三斗二升問招來幾日

答曰一十五日

題意謂初日招二十五人　次日招三十六人　三日招四十九人　四日招六十四人　五日招八十一人　如是以至末日則總計所招之兵爲二千四百四十八

則可設〇日〇人　一日二十五人　二日共六十一人　三日共一百十八人　四日共一百七十四人

所以可用積較術求之

[illegible]

從表求得[illegible]　併得[illegible]以分母六通其共人數消之得[illegible]開立方得十五日合問

以所支米數言之則〇日支〇米　一日支七斗五升　二日共支四碩四斗一升　三日共支一十四碩三斗一升　四日共支三十五碩一斗九升　五日共支七十三碩四斗四升　六日共支一百三十七碩三斗四升　如是以至末日則共支四千四百七十七碩三斗二升故可用積較之術求之

[illegible]

從表求得[illegible]以分母二通其米消之得[illegible]以三約之得

[illegible] 開四乘方得十五日合問

如將兩草中之立方式與四乘方式輾轉相減亦可

得法實之式下題亦然

今有官司依立方招兵初招方面三尺次招轉多一尺每人日支錢二百五十文已招二萬三千四百人支錢二萬三千四百六十二貫問招來幾日

答曰一十五日

招兵依立方之數　一日有二十七人　二日共有九十一人　三日共有二百十六人　四日共有四百三十二人　五日共有七百七十五人　如是以至末日共有二萬三千四百人故可用積較術求之

[illegible] 從表求得 [illegible] 均寄二十

四為分母母子皆以六約之得 [illegible] 以分母四通其共人數消之得 [illegible] 開三乘方得十五日合問

以所支錢數言之則○日支○錢　一日支去六千七百五十文　二日共支去二十九千五百文　三日共支去八十三千五百文　四日共支去一百九十一千五百文　五日共支去三百八十五千二百五十文　如是以至末日則共支去二萬三千四百六十二貫故可用積較之術求之

[illegible] 從表求得 [illegible] 以分母十二通其共支錢數消之各層均以五十約之得 [illegible] 開四乘方得十五日合問

今有三角垜果子一所直錢一貫三百二十文只云從上一箇直錢二文次下層層每箇累貴一文問底子每面幾何

荅曰九箇

設底〇則積〇直錢〇　底一則積一直錢二　底二則積四直錢十一　底三則積十直錢三十五　底四則積二十直錢八十五　底五則積三十五直錢一百七十五　則可將各直錢數用積較之術求其〇底之積較

[illegible]

從表求得 [illegible] 併之為一

行得 [illegible] 以公分母二十四通其共直之數

消之得 [illegible] 三乘方開之得本垜底子之數

九箇合問

如改為代數式

積＝[illegible]

化得

積＝[illegible]

即為以底求直之式

今有四角垜果子一所直錢一貫三百六十五文只云底子每箇直錢一文次上層層每箇累貴二文問底子每面幾何

荅曰九箇

設底〇則積〇直錢〇　底一則積一直錢一　底二則積五直錢七　底三則積十四直錢二十六　底四則積三十直錢七十　底五則積五十五直錢一百五十五　可將各直錢數用積較之術求其〇底之積較

[illegible]

從表求得 [illegible] 以分母二

十四通共直之數消之又以四約之得 [illegible]

開三乘方得底子九箇合問

如將三乘方式改為代數式 [illegible] 化得 [illegible] 即為以

底求共直之式

今有四角落一形果子積五百四十箇問底子幾何

答曰八箇

設底○則積○　底一則積一　底二則積六　底三則積二十　底四則積五十　底五則積一百五

將此各積用積較術求之

[illegible]

從表求得 [illegible] 兩行併之

得 [illegible] 以二約之得 [illegible] 亦以二約

分母二十四為十二以通共積消之得 [illegible]

開三乘方得八箇合問

如將三乘方改為代數式 [illegible] 化之得 [illegible] 即為本

垜以底求積之式

今有三角嵐峯形果子積六百三十箇問底子幾何

答曰六箇

設底○則積○　底一則積一　底二則積九　底三則積三十九　底四則積一百十九　底五則積二百九十四　底六則積六百三十　如是則已知底為六矣再以積較證之

[illegible]

從表求得〇丅三𝍨三〇二𝍨𝍢以分母𝍡〇通其共積消之

得𝍫丅〇〇 丅 三𝍨 三〇𝍨 二𝍢 𝍢開四乘方得六箇合問

如將四乘方改為代數式

積＝$\frac{\text{卯}^5\text{丄五卯}^4\text{丄五卯}^3\text{丄五卯}^2\text{丄二卯}\text{丄六}}{\text{一二〇}}$ 化之得

積＝$\frac{(\text{卯丄三})(\text{卯丄二})(\text{卯丄一})(\text{四卯丄一})\text{卯}}{\text{一二〇}}$ 即為本

垜以底求積之式

今有四角嵐峯形果子積四百四十八箇問底子幾何

荅曰五箇

設底〇則積〇　底一則積一　底二則積十一

底三則積五十三　底四則積一百七十三　底五

則積四百四十八　如是則已知其底為五箇矣惟

論算學之理貴求通法不能以臆計所得者為憑也

故若為不知也者仍以積較之術求之

〇　〇　〇　‖　𝍫　𝍣

一　一　一　一　𝍬　𝍣

一　一　一　一　𝍣

一　〇　𝍣　𝍣　𝍣　𝍣

一　𝍣　𝍣　𝍣　𝍣

𝍣　𝍡　𝍣　𝍣　𝍣

𝍣　𝍡　𝍣　𝍣

𝍣　𝍡　𝍣　𝍣

從表求得〇　〇　〇　〇

并之得〇‖三𝍣〇𝍣

分母𝍡〇通其共積之數消之得𝍣‖〇三𝍣開四

乘方得五箇合問

如將四乘方改為代數式

積＝$\frac{\text{卯}^5\text{丄五卯}^4\text{丄五卯}^3\text{丄五卯}^2\text{丄二卯}}{\text{一二〇}}$ 化之得

積＝$\frac{(\text{卯丄四})(\text{卯丄三})(\text{卯丄二})(\text{卯丄一})\text{卯}}{\text{一二〇}}$ 即為本

垜以底求積之式

今有三角攢星更楷一形果子積九百二十四箇問底

子幾何

荅曰七箇

設底○則積○　底一則積一　底二則積七　底三則積二十八　底四則積八十四　底五則積二百十　底六則積四百六十二　以積較術求之

○○○○○○〡

〡〡〡〡〡〡〡

〦〦〤〣〢〡

〧〡〢〡〤〡〡〇〡〢

從表得○〡〢〇……〡

以分母〡〢〇通其共積消之得……〡開五乘方得七箇合問

如改爲代數式 七二〇 化之得 七二〇 爲以底求積之式

今有圓錐垜果子積九百三十二箇問高幾層

答曰一十五層

設層數爲○則積亦爲○　層數爲一則積爲一　層數爲二則積爲四　層數爲三則積爲十一　層數爲五則積爲二十三　層數爲五則積爲四十二　以此各積用積較術求之不能減得末較惟將各積皆以八通之凡遇層數爲奇者以一減其乘得之數則得

八×○＝○
（八×一）－一＝七
八×四＝三二
（八×十一）－一＝八七
八×二三＝一八四
（八×四二）－一＝三三五

以此諸數用積較術求之

○〡下〡〡

從表求得○〡〦　○〡〧　併得○〡〡〡

以六約之得○〡〡〡〡以八通其共積消之則可得……開立方得十五而餘實爲一因所求之層數爲奇故也若層數爲偶者必能開盡

今有三角臺垜果子積五百四箇只云上下面底子和

得二十一箇問上下面各幾何

答曰上面七箇　下面一十四箇

設上面為一則下面二〇而積[illegible]　上面二則下面[illegible]而積[illegible]　上面三則下面[illegible]而積[illegible]　上面四則下面[illegible]而積[illegible]　以此各積用積較術求之

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

從表求得[illegible]以分母六通其共積消之得[illegible]以二約之得[illegible]開立方得七為上面以減二十一得十四為下面合問

今有四角臺垛果子積一千一百一十一箇只云上面不及下面五箇卻多層數五箇問上下面及高各幾何

答曰上面一十一箇　下面一十六箇

高六層

題言上面不及下面五箇則其高必為六層可知題言卻多層數五箇則上面必為十一可知而下面必為十六亦可知是所問三數皆可無待於算也

若節去題中卻多層數五箇一句則可設上面為〇則下面為五而積為[illegible]　上面為一下面為六而積為[illegible]　上面為二下面為七而積為[illegible]　上面為三下面為八而積為[illegible]　以此諸數用積較術求之

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

從表求得[illegible]以積消之得[illegible]以六約之得[illegible]開平方得十一為上面以五加之得十六為下面以一加五得六為高之層數合問

今有芻童垛果子積八十二箇只云併下長上濶平方開之加入下濶共得八箇下濶不及下長二箇上濶如上長二分之一高與上長同問上下長濶及高各幾何

答曰下濶五箇　下長七箇　高四層

上濶二箇　上長四箇

題言下濶不及下長二箇則可見上濶亦必不及上長二箇　題又言上濶如上長二分之一則可見上濶必為二箇上長必為四箇　題又言高與上長同則其高必為四層　高既為四層則下濶必多於上

濶三箇下長亦必多於上長三箇所以知下濶必爲五下長必爲七　如是則題中所問五箇數均可視題之下半節而知之無煩推算也

試將題之上半節以所知之各數核之　下長上濶之和其數爲九開平方得三以下濶五加之共得八箇　垜之第一層爲八　第二層爲十五　第三層爲二十四　第四層爲三十五　以此四數相加得積八十二箇合問

今有芻甍垜果子積一百箇只云併下長下濶及高爲共減二餘以平方開之與上長等下長多於上長中半上長不及下濶一箇問上下長濶及高各幾何

答曰上長四箇　下長八箇　下濶五箇

高五箇

凡芻甍垜其上濶必爲一而其高必等於下濶所以據題之下半節言下長多於上長中半上長不及下濶一箇　設上長爲二則下長爲四高爲三下濶亦爲三而積爲二十　設上長爲三則下長爲六高爲四下濶亦爲四而積爲五十　設上長爲四則下長爲八高爲五下濶亦爲五而積爲一百　試列各積用積較之術求其開方式以證之

〇　〇　〇　𝍤

𝍤　𝍤　𝍤　𝍤

〇𝍡　〇𝍠𝍣　〇𝍠　𝍣　從表求得〇𝍠〇𝍣𝍣以分母六通其

〇𝍢　〇𝍢　𝍣　𝍣

〇𝍪　〇𝍢　〇𝍡　𝍣

共積消之得〇𝍠〇𝍣𝍣以五約之得〇𝍡𝍢𝍠開立方得四爲上長合問

以積較術推此題題中所言併下長下濶及高爲共餘以平方開之與上長等云云皆可不用而天元則不能也

今有圓錐垜果子一所令甲乙丙分之甲分五百八箇乙分四百一箇丙分二百一十五箇從上給丙次中給乙次下與甲問各分層數幾何

答曰甲三層　乙四層　丙九層

前於圓錐果垜草中已用積較術求得〇𝍡𝍢𝍡式茲可用之　將丙積以八通之得𝍡〇與前式相消即得𝍡𝍡𝍢𝍡開立方得九而餘實爲一因奇層故也即知丙分得九層　將乙丙共積以八通之得𝍣𝍣𝍣與式相消得𝍣𝍡𝍢𝍡開立方得十三餘實爲一亦因奇層之故以

九減之得四爲乙分層數　將甲乙丙共積以八通之得〣〦〢與式相消得〣〦〤〢〣〢開立方得十六適盡

因層數爲偶之故　內減乙丙層數得三爲甲分層數合問

今有四角垜果子一所令甲乙丙分之甲分五百九十箇乙分四百四十六箇丙分二百四箇從下給甲次中與乙次上與丙問各分層數幾何

答曰甲三層　乙四層　丙八層

設層數爲〇則積亦爲〇　層數爲一則積亦爲一

層數爲二則積爲五　層數爲三則積爲十四

層數爲四則積爲三十　以此諸積用積較術求之

〇〇卜〢
丨丨丨〢
〤〤〢〢　從表求得　〇卌卌
〤〦〤〢　　〇〣丅〢　併得〇丨〣〢
〣〇丅〦〢

以六通丙積消之得〣〤丨〣〢開立方得八爲丙分層數

以六通乙丙共積消前式〇丨〣〢得〤丨〣〢開立方得十二以八減之得四爲乙分層數

以六通甲乙丙共積消前式得〣〤丨〣〢開立方得

十五減去乙丙層數得三爲甲分層數

今有三角四角垜果子各一所共積一百一十一箇只云四角底面不及三角底面一箇問二底面各幾何

答曰三角底面六箇　四角底面五箇

設三角底面爲一則四角底面爲〇而共積爲一

三角底面爲二則四角底面爲一而共積爲五　三

角底面爲三則四角底面爲二而共積爲十五　三

角底面爲四則四角底面爲三而共積爲三十四

以此諸積用積較術求之

〇丨卌〣
丨丨〇〣
〤〤〣〣　從表求得〇卌卌　　〇丅
〤〇丅〣　　〇丅〦〣　併得〇〣〇〣
〣〦〦〣

以六通共積一百一十一得〦〣消之得〦〣〇〣以三約之得〣〤丨〇丨開立方得六爲三角底面以一減之得五爲四角底面合問

今有三角四角垜果子各一所四角積內減去三角積餘二十箇只云三角四角底面和得一十五

箇問二底面各幾何

答曰四角底面七箇　三角底面八箇

設三角底面爲〇則四角底面爲十五而兩積之較爲一千二百四十　三角底面爲一則四角底面爲十四而兩積之較爲一千十四　三角底面爲二則四角底面爲十三而兩積之較爲八百十五　三角底面爲三則四角底面爲十二而兩積之較爲六百四十　三角底面爲四則四角底面爲十一而兩積之較爲四百八十六

以此諸數用積較術求之

[illegible]　從表求得 [illegible]　併得 [illegible]

以六通餘積二十得[illegible]揹之得[illegible]以三約之得[illegible]十開立方得八爲三角底面以減十五得七爲四角底面合問

今有三角垛果子三所四角垛果子六所共積一千二百七十二箇只云四角底面乘三角底面得四十八箇問二底面各幾何

答曰四角底面四箇　三角底面十二箇

四十八之乘數不外乎一×四八　二×二四　三×一六　四×一二　六×八各數其一二三四雖挨次而下然前不能有〇後不能有五與七故不能以積較之術求之

今有三角垛果子二所四角垛果子三所共積六百五十二箇只云三角底面除四角底面得二箇問二底面各幾何

答曰三角底面四箇　四角底面八箇

設三角底面爲〇則四角底面亦爲〇因二乘〇得〇故也而共積亦爲〇　三角底面爲一則四角底面爲二而共積爲十七　三角底面爲二則四角底面爲四而共積爲九十八　三角底面爲三則四角底面爲六而共積爲二百九十三　以此諸數用積較術求之

[illegible]　從表求得 [illegible]　併得 [illegible]

以六通共積得𝍫𝍧與之相消得𝍫𝍧一〇𝍪𝍢〇以二約之
得𝍧𝍣𝍤一𝍪𝍤開立方得四為三角底面以三乘之得
八為四角底面合問

余前著積較術三卷以明正負諸乘方邊積相求之法
而於諸乘之垛積僅舉端倪未曾詳演也今春多暇爰
取四元玉鑑中有關於垛積之題以積較之術求其開
方式覺向之視為至難者今乃至易矣己丑四月既望
若汀自識

盈朒廣義　　　金匱華蘅芳學

積較之術其意與盈朒相似惟盈朒祇能馭法實之題積較則能馭諸乘方故比盈朒之所賅者廣也

今有共買物人出八盈三人出七不足四問人數幾何

答曰七人

從題之上半節人出八盈三　設人數爲〇則以八乘之仍爲〇故物價爲負三　人數爲一則物價爲五人數爲二則物價爲十三

卌 Ⅲ

|||| Ⅲ 從積較還原表得卌Ⅲ爲⊖式

╪|| Ⅲ

從題之下半節人出七不足四　設人數爲〇則物價爲四　人數爲一則物價爲十一　人數爲二則物價爲十八

|||| Ⅱ

一| Ⅱ 從積較還原表得||||Ⅱ以消⊖式得丌|上實

-Ⅲ Ⅱ

下法得七爲人數

今有共買金人出四百盈三千四百人出三百盈一百問人數幾何

答曰三十三人

從題之上半節人出四百盈三千四百　設人數爲〇則錢數爲負三千四百　人數爲一則錢數爲負三千人數爲二則錢數爲負二千六百

≡々 ||||〇

〢〇々 ||||〇 從積較還原表得≡々||||〇寄左

〢丁々 ||||〇

從題之下半節人出三百盈一百　設人數爲〇則錢數爲負一百　人數爲一則錢數爲二百　人數爲二則錢數爲五百

|〇々 ≡〇

||〇 ≡〇 從表求得|〇々≡〇與左相消得≡々|〇上實下法得三十三爲人數

|〇 |〇

今有共買羊人出五不足四十五人出七不足三問人數幾何

答曰二十一人

從題之上半節人出五不足四十五　設人數爲〇則

羊價爲四十五　人數爲一則羊價爲五十　人數爲
二則羊價爲五十五
𝍭𝍤　𝍤
𝍭〇　𝍤　從表求得𝍬𝍤　𝍤寄左
𝍬𝍤　𝍤
從題之下半節　設人數爲〇則羊價爲三　人數爲
一則羊價爲十　人數爲二則羊價爲十七
𝍢　𝍦
𝍩〇　𝍦　從表求得𝍢　𝍦以消左式得𝍬𝍡　𝍡上實下法得
𝍩𝍦　𝍦
二十一爲人數
今有共買犬人出五不足九十人出五十適足問人數幾
何
答曰二人
從題之上半節　設人爲〇則錢爲九十　人爲一則
錢爲九十五　人爲二則錢爲一百
𝍱〇　𝍤
𝍱𝍤　𝍤　從表求得𝍱〇　𝍤寄左
𝍠〇〇　𝍤
從題之下半節　設人爲〇則錢爲〇　人爲一則錢
爲五十　人爲二則錢爲一百
〇　𝍭〇
𝍭〇　𝍭〇　從表求得〇　𝍭〇與寄左之式相消得𝍱〇　𝍬𝍤上實
𝍠〇〇　𝍭〇
下法得二爲人數
今有米在十斗桶中不知其數滿中添粟而舂之得米七
斗問故米幾何
答曰二斗五升
九章中此題設爲盈朒之數假令故米二斗不足二升
令之三斗有餘二升
今可不必依假令之數而從原題另設各數　設故米
爲〇則添粟十斗舂得米六斗　故米爲一斗則添粟
九斗舂得米六斗四升　故米爲二斗則添粟八斗舂
得米六斗八升
𝍮〇　𝍣
𝍮𝍣　𝍣　從表求得𝍮〇　𝍣以七斗消之得𝍩〇　𝍣上實下法
𝍮𝍧　𝍣
得二斗五升爲故米之數
今有漆三得油四油四和漆五今有漆三斗欲令分以易
油還自和餘漆問出漆得油和漆各幾何

答曰出漆一斗一升四分升之一 得油一斗五升

和漆一斗八升四分升之三

九章中此題以盈朒馭之術曰假令出漆九升不足六升令之出漆一斗二升有餘二升

此題若以常法馭之固甚易耳只須以漆三與漆五相加得八升爲法有漆三斗爲實除得三升七合五勺以三乘之得出漆之數以四乘之得易油之數以五乘之得和漆之數

若用積較術求之 可設出漆〇升得油〇升和漆〇升則共漆〇升 出漆三升得油四升和漆五升則共漆八升 出漆六升得油八升和漆一斗則共漆一斗六升

〇〣

〣〣從表求得〇〣以三通有漆三斗得九斗消之

丅〣

則得〣〇〣約爲〣〣〣上實下法得一斗一升又四分升之一爲出漆之數其所以必用三通之者因從〇升至三升至六升皆有三爲乘數也

今有醨酒一斗直錢五十行酒一斗直錢一十今將錢三十得酒二斗問醨行酒各幾何

九章原術曰假令醨酒五升行酒一斗五升有餘一十令之醨酒二升行酒一斗八升不足二

今從本題另設各數求之 設醨酒爲〇則行酒二斗直錢二十 醨酒爲一升直錢五則行酒一斗九升直錢十九共錢爲二十四 醨酒爲二升直錢十則行酒一斗八升直錢十八共錢爲二十八

二〇〣

〢〣〣從表求得二〇〣以錢三十消之得一〇〣上實下法得二升半爲醨酒之數以減二斗得一斗七升半爲行酒之數

〢〣

今有良馬與駑馬自州至省省去州四百八十里良馬初日行一百里日增二里駑馬初日行九十里日減一里良馬先至省復還迎駑馬問幾何日相逢

答曰五日

設良駑兩馬〇日行〇里 初日良馬行一百里駑馬行九十里 次日良馬行一百二里駑馬行八十九里 第三日良馬行一百四里駑馬行八十八里

則良駑共行之數 〇日〇里 一日一百九十里 二日三百八十一里 三日五百七十三里

〇[illegible]　〇　[illegible]

[illegible]　以[illegible]乘表〇[illegible]得〇[illegible]併得〇[illegible]其

公分母爲二以二乘省去州里數得[illegible]倍之得[illegible]與前式相消得[illegible]開平方得五爲日數

九章中盈朒之題所設假令之術非但良駑相逢日數不合又有莞蒲共生兩鼠對穿二題亦非原術所能通近見同文館課藝中有蔡君穀若所推瓜豆同生一題用對數立算錄之如左

瓜豆同日發芽生蔓瓜蔓初日長一尺六寸以後每日所長遞減半豆蔓初日長一寸以後每日所長遞加半問二蔓第幾日相等

答曰五日

解曰此卽連比例率數瓜蔓初日所長爲末率豆蔓初日所長爲首率得若干率數卽二蔓相等日數以代數明之

首率　第率　末率

一　二　四　八　一六　三二

乙　乙末　乙末²　乙末³　乙末⁴　乙末⁵

甲

於此可見末之指數必比層數減一命層數爲天則末率恆爲 $甲＝乙末^{天一}$ 卽 $末＝\sqrt[天一]{\frac{乙}{甲}}$ 準代數之理上式可變爲 $天一＝\frac{對末}{對甲丅對乙}$ 其對乙爲首率一之對數等於〇故以二之對數·三〇一除瓜蔓初日所長一尺六寸之對數·二〇四得四加一得五爲相等日數

前人算學書中未有將句股之題馭以盈朒者非但因不能開方卽法實之題亦非尋常之假令所能通也茲取數題以積較之術演之以推廣盈朒之意

今有句一十二股弦和七十二問股幾何

答曰股三十五　弦三十七

設股爲〇則倍股亦爲〇而股弦較爲七十二和較相乘得五千一百八十四　股爲一則股弦較爲七十和較相乘得五千四十　股爲二則股弦較爲六十八和較相乘得四千八百九十六

[illegible]　以[illegible]與表[illegible]〇[illegible]乘得[illegible]〇[illegible]併得[illegible]寄左

乃以句一十二自乘得一百四十四與左相消得[illegible]約為[illegible]上實下法得三十五為股以減股弦和得三十七為弦

今有句一十二股弦和七十二問弦幾何

答曰弦三十七

設弦為〇則股為七十二股弦較為負七十二和較相乘得負五千一百八十四　弦為一則股為七十一股弦較為負七十和較相乘得負五千四十　弦為二則股為七十股弦較為負六十八和較相乘得負四千八百九十六

[illegible]以[illegible]與表[illegible]乘得[illegible]併得[illegible]寄左

乃以句自乘得一百四十四消左得[illegible]上實下法得三十七為弦

今有句三十三股弦較一十一問股弦各幾何

答曰股四十四　弦五十五

設股為〇則弦為十一股弦兩冪較為一百二十一　股為一則弦為十二股弦兩冪較為一百四十三　股為二則弦為十三股弦兩冪較為一百六十五

[illegible]以[illegible]與表[illegible]乘得[illegible]併得[illegible]寄左

乃以句自乘得一千八十九消左得[illegible]以二約之得[illegible]上實下法得四十四為股以股弦較加之得五十五為弦

若欲先得弦者可設弦為〇以股弦較減之得負十一為股則股弦兩冪之較為負一百二十一　弦為一則股為負十股弦兩冪之較為負九十九　弦為二則股為負九股弦兩冪之較為負七十七

[illegible]從表求得[illegible]寄左　以句平方一千八十九消之得[illegible]上實下法得五十五為弦

今有股四十五句弦和七十五問句弦各幾何

答曰句二十四　弦五十一

設句為〇則句弦較亦為七十五和較相乘之數為五千六百二十五　句為一則句弦較為七十三和較相乘之數為五千四百七十五　句為二則句弦較為七十一和較相乘之數為五千三百二十五

從表求得寄左　以股平方二千二十五

消左得上實下法得二十四爲句以減句弦和得
五十一爲弦

如欲先求得弦可設弦爲○則句爲七十五句弦較爲
負七十五和較相乘得負五千六百二十五　弦爲一
則句爲七十四句弦較爲負七十三和較相乘得負五
千四百七十五　弦爲二則句爲七十三句弦較爲負
七十一和較相乘得五千三百二十五

從表求得寄左　以股自乘得二千二十
五消之得以十約之得上實下法得五十一
爲弦

今有弦七十五句股和九十三問句股各幾何

答曰句二十一　股七十二

設句爲○則股爲九十三句股二冪和爲八千六百四
十九　句爲一則股爲九十二句股二冪和爲八千四
百六十五　句爲二則股爲九十一句股二冪和爲八
千二百八十五　句爲三則股爲九十句股二冪和爲
八千一百九

以與表○ 相乘得○ 依橫行併
之得以公分母二約之得寄左　乃以
弦七十五自乘得五千六百二十五與寄左之式相消
得以二約之得開平方得二十一爲句
七十二爲股

今有弦九十一句股較四十九問句股各幾何

答曰句三十五　股八十四

設句爲○則股爲四十九句股二冪和爲二千四百一
句爲一則股爲五十句股二冪和爲二千五百一
句爲二則股爲五十一句股二冪和爲二千六百五
句爲三則股爲五十二句股二冪和爲二千七百十三

以與表○ 相乘得○ 併爲一行

得[illegible]以二約之得[illegible]寄左　以弦九十一自乘得弦平方八千二百八十一消左得[illegible]半之得[illegible]開平方得三十五為句加句股較四十九得八十四為股

此題若欲先得股則可依下法求之

設股為○則句為負四十九句股二羃之和為二千四百一　股為一則句為負四十八句股二羃之和為二千三百五　股為二則句為負四十七句股二羃之和為二千二百十三　股為三則句為負四十六句股二羃之和為二千一百二十五

[illegible]

[illegible]以[illegible]與表[illegible]相乘得[illegible]併之以公分母二約之得[illegible]寄左　以弦平方八千二百八十一消左得[illegible]半之得[illegible]開平方得八十四為股

今有句股和四百五十一句弦和五百三十九問句股弦各幾何

答曰句二百二十　股二百三十一　弦三百十九

設句為○則股為四百五十一弦為五百三十九句平方為○股平方為二十萬三千四百一弦平方為二十九萬五百二十一句股兩平方之和與弦平方差八萬七千一百二十　句為一則股為四百五十弦為五百三十八句平方為一股平方為二十萬二千五百弦平方為二十八萬九千四百四十四句股兩平方之和與弦平方差八萬六千九百四十三　句為二則股為四百四十九弦為五百三十七句平方為四股平方為二十萬一千六百一弦平方為二十八萬八千三百六十九句股兩平方之和與弦平方差八萬六千七百六十四　句為三則股為四百四十八弦為五百三十六句平方為九股平方為二十萬七百四弦平方為二十八萬七千二百九十六句股兩平方之和與弦平方差八萬六千五百八十三

[illegible]

[illegible]從表求得[illegible]以二約之得[illegible]寄左

以〇與左相消得[illegible]開平方得二百二十爲句以
減和得股弦

今有句股和四十七句弦較二十五問句股弦各幾何
　答曰句十二　股三十五　弦三十七
設句爲〇則股爲四十七弦爲二十五句平方爲〇股
平方爲二千二百九弦平方爲六百二十五句股兩平
方之和與弦平方差負一千五百八十四　設句爲一
則股爲四十六弦爲二十六句平方爲一股平方爲二
千一百十六弦平方爲六百七十六句股兩平方之和
與弦平方差負一千四百四十一　設句爲二則股爲
四十五弦爲二十七句平方爲四股平方爲二千二十
五弦平方爲七百二十九句股兩平方之和與弦平方
差負一千三百　句爲三則股爲四十四弦爲二十八
句平方爲九股平方爲一千九百三十六弦平方爲七
百八十四句股兩平方之和與弦平方差負一千一百
六十一

[illegible]
以[illegible]與表〇〢相乘得〇[illegible]併之爲一
[illegible]

行得[illegible]以二約之得[illegible]開平方得句十二以
加句弦較得弦以減句股和得股

如欲先得其股可依下法求之
設股爲〇則句爲四十七弦爲七十二句平方爲二千
二百九股平方爲〇弦平方爲五千一百八十四句股
兩平方之和與弦平方差二千九百七十五　股爲一
則句爲四十六弦爲七十一句平方爲二千一百十六
股平方爲一弦平方爲五千四十一句股兩平方之和
與弦平方差二千九百二十四　股爲二則句爲四十
五弦爲七十句平方爲二千二十五股平方爲四弦平
方爲四千九百句股兩平方之和與弦平方差二千八
百七十一　股爲三則句爲四十四弦爲六十九句平
方爲一千九百三十六股平方爲九弦平方爲四千七
百六十一句股兩平方之和與弦平方差二千八百十
六

[illegible]
以[illegible]與表〇〢相乘得〇[illegible]併爲一行
[illegible]

得[illegible]以二約之得[illegible]以○消之得[illegible]開平方得三十五爲股

如用天元求之立天元○〡爲股以減句股和得[illegible]爲句加句弦較得[illegible]爲弦以股○〡自乘得○○〡爲股平方以句[illegible]自乘得[illegible]〡爲句平方以弦式[illegible]自乘得[illegible]〡爲弦平方寄左　乃以句平方與股平方相加得[illegible]與左相消得[illegible]開平方得三十五爲股

觀以上各題算草可見積較之術其意實無異於盈朒惟布算之法不同故其所馭之題能比盈朒更廣又可見積較之馭題其蹊徑實與天元相同天元則以一箇所求之數如題之曲折求其如積之兩式彼此相消積較之術則屢設各數如題之曲折以課之其如積相消之理實與天元無異也惟因屢設各數故其草必比天元多數倍迥不及天元之簡然其所用者皆爲實數能使人易明初學易於入手余謂盈朒之後天元之前古人必更有一術與余之積較術相似以開天元之路及至繁者漸簡紛者漸約而天元之術生焉不然茫無頭緒之中何能忽然創出天元一術能使用之者不疑習之者不倦傳之千百年而不廢哉

數學中最覺費手者分數也積較之術均用加減凡遇分數之題須處處通分殊覺不便天元則不除此而乘彼故於分數之題亦能馭之然尚不及代數之便也天元寄母須處處說明一有遺漏便致謬誤代數則書其分母於本數之上不致遺忘且其分母有時可以消去似比天元之必用通分者便也

誠如前論則天元不如代數積較不如天元然亦有天元代數所難而積較獨易者如垛積之題是也每種垛積各有本術不得其術雖天元代數亦無所施惟積較則用實數入算有階級可循即可由小知大不必先知其如何加減如何乘除而後能算也所最奇者非但能求其積並可由此以得其加減乘除之法此亦借徑於代數故能如此但用積較亦不能也

積較答難

客有三揖而進者曰吾觀子之積較術凡求多乘之積開正負諸方均以加減得之誠簡易極矣然充其術之量祇能馭正負多乘方而於連比例則不能馭也豈非憾事乎余曰積較之不能馭連比例誠如君言然君亦何取乎連比例而必欲以積較馭之乎客曰吾嘗讀項戴兩家之書而知屢乘屢除之術莫不由連比例而生積較之術若能馭此則逐秒逐分逐度之弦矢切割均可按次加減而得無須屢乘屢除之繁豈不甚便無如其不能也此吾所以深惜其美中尙有不足也余曰君言積較之不能馭亦嘗以數核之乎抑亦但憑空論乎客曰吾何嘗不以數核哉吾嘗列若干連比例率數屢求其較不能至盡是以知其不能也余曰子眞爲項戴之書所囿而不知通變者也凡無窮之級數以連比例解之固屬可通然以爲眞是連比例則未必也以余視之亦是諸乘方之和較耳豈有積較之術而不能馭此者乎客曰願聞其畧余曰級數之項雖無窮而截其任若干項則與有窮之級數何異乎卽與多次之式又何異乎夫多次之式卽正負諸乘方也正負諸乘方積較所能馭也何昧昧若是乎客曰謹受教余曰此中並無深意也試畧舉一式以明之

如

$$\text{正弦}=\text{弧}\top\frac{\text{弧}^{三}}{二\cdot三}\bot\frac{\text{弧}^{五}}{二\cdot三\cdot四\cdot五}\top\frac{\text{弧}^{七}}{二\cdot三\cdot四\cdot五\cdot六\cdot七}\bot\frac{\text{弧}^{九}}{二\cdot三\cdot四\cdot五\cdot六\cdot七\cdot八\cdot九}\top\cdots$$

爲弧背求正弦之級數若截去其第五項以下

則

$$\text{正弦}=\text{弧}\top\frac{\text{弧}^{三}}{二\cdot三}\bot\frac{\text{弧}^{五}}{二\cdot三\cdot四\cdot五}\top\frac{\text{弧}^{七}}{二\cdot三\cdot四\cdot五\cdot六\cdot七}\bot\frac{\text{弧}^{九}}{二\cdot三\cdot四\cdot五\cdot六\cdot七\cdot八\cdot九}$$

若弧背甚小只須三項已足用矣

須齊同通分得

$$\text{正弦}=\frac{三六二八八〇\text{弧}\top六〇四八〇\text{弧}^{三}\bot三〇二四\text{弧}^{五}\top七二\text{弧}^{七}\bot\text{弧}^{九}}{三六二八八〇}$$

移項而

化去其分母得

$$〇=-三六二八八〇\text{正弦}+三六二八八〇\text{弧}-六〇四八〇\text{弧}^{三}+三〇二四\text{弧}^{五}-七二\text{弧}^{七}+\text{弧}^{九}$$

即爲九次之式如將此式改爲正負諸乘方式則得三六二八八〇(正弦)三六二八八〇〇六〇四八〇〇三〇二四〇七二〇一爲八乘方式所以可將其方廉隅之數〇三六二八八〇〇六〇四八〇〇三〇二四〇七二〇一以弧背爲所商之數如開方之常法求得其實以三六二八八〇除之卽得所求之正弦

若有正弦之數欲求弧背則可將三六二八八〇乘其正弦之數而與〇三六二八八〇〇六〇四八〇〇三〇二四〇七二〇一式相消開八乘方得弧背

如將正弦求弧背之式

$$\text{弧}=\text{弦}+\frac{一\,\text{弦}^{三}}{二\cdot三}+\frac{一\cdot三^{二}\,\text{弦}^{五}}{二\cdot三\cdot四\cdot五}+\frac{一\cdot三^{二}\cdot五^{二}\,\text{弦}^{七}}{二\cdot三\cdot四\cdot五\cdot六\cdot七}+\frac{一\cdot三^{二}\cdot五^{二}\cdot七^{二}\,\text{弦}^{九}}{二\cdot三\cdot四\cdot五\cdot六\cdot七\cdot八\cdot九}$$

齊同通分得

$$\text{弧}=\frac{三六二八八〇\text{弦}+六〇四八〇(一)\text{弦}^{三}+三〇二四(一\cdot三^{二})\text{弦}^{五}+七二(一\cdot三^{二}\cdot五^{二})\text{弦}^{七}+(一\cdot三^{二}\cdot五^{二}\cdot七^{二})\text{弦}^{九}}{三六二八八〇}$$

化去括弧子母各以九約之移項而化去分母則得

$$〇=-(\text{弧})四〇三二〇+四〇三二〇\text{弦}+六七二〇\text{弦}^{三}+三〇二四\text{弦}^{五}+一八〇〇\text{弦}^{七}+一二二五\text{弦}^{九}$$

卽爲

九次之式如改爲 ||||〇||||=〇 ||||〇||||=〇 〇 ⊥||=〇 〇 ≡〇=|||| 〇 -|||〇〇 〇 ⊤=|||| 即爲八乘

方式

所以可從〇 ||||〇||||=〇 〇 ⊥||=〇 〇 |||〇=|||| 〇 -|||〇〇 〇 ⊤=|||| 式以正弦爲所商

之數求得其實以||||〇||||=〇除之卽得所求之弧背

亦可從〇 ||||〇||||=〇 〇 ⊥||=〇 〇 ≡〇=|||| 〇 -|||〇〇 〇 ⊤=|||| 式以||||⊤||=〇乘其弧背與

之相消闕八乘方卽得所求之正弦

正弦之式如此則餘弦可知正切餘切正割餘割亦可知

一切級數大抵可作如是觀也

客曰無窮之級數截去其尾皆可爲正負諸乘方旣闕命

矣更有無厭之求能爲我演積較數十行以畢其說乎余

曰君之必欲以數演之必是懷疑未釋耳余實憚煩祇能

爲君演正弦之六七位小數以明其例

試取級數之兩項命 正弦＝弧⊤$\frac{弧^{三}}{三}$ 則 正弦＝$\frac{六弧⊤弧^{三}}{六}$ 而 六正弦＝六弧⊤弧^{三} 所以 〇＝⊤六正弦⊥六弧⊤弧^{三} 爲立方

式$_{下正弦}$ ⊤〇⊦其方廉隅之式爲〇⊤〇⊦

命半徑爲一以一百八十度除周率又以六十除之得

一分之弧背

惟因 弧＝〇〇〇二九〇八八二 弧^{三}＝〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇二四六 所以方廉隅之式變爲

〇〇〇〇〇〇〇〇〇

·〇〇-|||≡||||≡|||

〇〇〇〇〇〇〇〇〇

·〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇=|||⊥ 於積較

表中取〇|以方乘之取〇|下⊤以隅乘之齊其層

而併之得〇

·〇〇-|||≡||||≡|||

〇〇〇〇〇〇〇〇〇-|||⊤

·〇〇〇〇〇〇〇〇〇-|||⊤ 各層以六約之卽得〇行積較

弧背爲〇分正弦爲〇

·〇〇〇||≡〇≡||||≡||| 一較

·〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇=|||⊥ 二較

·〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇=|||⊥ 三較

第〇行積較

弧背爲一分正弦爲

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍡

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍡

〇

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第一行積較

弧背爲二分正弦爲

●〇〇〇𝍤𝍰𝍠𝍯𝍦𝍮𝍣

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍡

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第二行積較

弧背爲三分正弦爲

●〇〇〇𝍧𝍯𝍡𝍮𝍥𝍬𝍥

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍡

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍬𝍨𝍪

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第三行積較

弧背爲四分正弦爲

●〇〇𝍩𝍠𝍮𝍢𝍭𝍤𝍪𝍧

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍡

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍯𝍢𝍰

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第四行積較

弧背爲五分正弦爲

●〇〇𝍩𝍣𝍭𝍣𝍬𝍣𝍩〇

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍡

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍱𝍧𝍬

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第五行積較

弧背爲六分正弦爲

●〇〇𝍩𝍦𝍬𝍤𝍫𝍡𝍰𝍠

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍠

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍠𝍪𝍢〇

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第六行積較

弧背爲七分正弦爲

●〇〇𝍪〇𝍫𝍥𝍪𝍠𝍮𝍠

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰〇

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍠𝍬𝍦𝍯

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第七行積較

弧背爲八分正弦爲

●〇〇𝍪𝍢𝍪𝍦𝍩〇𝍱〇

●〇〇〇𝍡𝍱〇𝍰𝍧𝍰𝍧

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍠𝍯𝍡𝍫

●〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣𝍮

第八行積較

弧背爲九分正弦爲
•〇〇𝍪𝍥𝍩𝍦𝍰𝍨𝍪𝍧
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍯𝍧
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍠𝍰𝍥[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第九行積較

弧背爲十分正弦爲
•〇〇𝍪𝍧〇𝍧𝍰𝍧〇𝍣
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍯𝍥
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍡𝍪[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十行積較

弧背爲一十一分正弦爲
•〇〇𝍫𝍠𝍰𝍧𝍯𝍥𝍯𝍧
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍯𝍣
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍡𝍥𝍫[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十一行積較

弧背爲一十二分正弦爲
•〇〇𝍫𝍣𝍰〇𝍮𝍤𝍬〇
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍯𝍡
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍡𝍯〇[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十二行積較

弧背爲一十三分正弦爲
•〇〇𝍫𝍧𝍯𝍠𝍬𝍤𝍪〇
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍯〇
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍡𝍰𝍤[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十三行積較

弧背爲一十四分正弦爲
•〇〇𝍬〇𝍯𝍡𝍬𝍡𝍯𝍦
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍮𝍦
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍢𝍩𝍧[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十四行積較

弧背爲一十五分正弦爲
•〇〇𝍬𝍢𝍮𝍢𝍫𝍠𝍬𝍠
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍮𝍤
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍢𝍪𝍤[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十五行積較

弧背爲一十六分正弦爲
•〇〇𝍬𝍥𝍬𝍤𝍪〇𝍩𝍡
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍯𝍧𝍮𝍠
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍢𝍮[illegible]
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍣[illegible]
第十六行積較

弧背為一七分正弦為
.0049450970
.0002808949
.000000000434[illegible]
.000000000024[illegible]
第十七行積較

弧背為一八分正弦為
.0052359624
.0002808989
.000000000319[illegible]
.000000000024[illegible]
第十八行積較

弧背為一九分正弦為
.0055269484
.0002808940
.0000000000532[illegible]
.000000000024[illegible]
第十九行積較

弧背為二〇分正弦為
.0058177420
.0002808936
.000000000567[illegible]
.000000000024[illegible]
第二十行積較

弧背為二一分正弦為
.0061086162
.0002808932
.0000000000582[illegible]
.000000000024[illegible]
第二十一行積較

弧背為二二分正弦為
.0063995098
.0002808937
.0000000000[illegible]
.000000000024[illegible]
第二十二行積較

弧背為二三分正弦為
.00[illegible]
.00028089[illegible]
.0000000000[illegible]
.000000000024[illegible]
第二十三行積較

弧背為二四分正弦為
.00[illegible]
.00028089[illegible]
.0000000000[illegible]
.000000000024[illegible]
第二十四行積較

弧背為二五分正弦為
●○○〧〢〧〢一〤〧○
●○○○〢〨○〧〨二〢
●○○○○○○○○○○〤〧○〨
●○○○○○○○○○○二〤⊥
第二十五行積較

弧背為二六分正弦為
●○○〧〤⊥〣○〢〧〦
●○○○〢〨○〧〨一〦
●○○○○○○○○○〦一〥〤
●○○○○○○○○○○二〤⊥
第二十六行積較

弧背為二七分正弦為
●○○〧〨三〣〨〢○〦
●○○○〢〨○〧〨一○
●○○○○○○○○○〦三〨⊥
●○○○○○○○○○○二〥⊥
第二十七行積較

弧背為二八分正弦為
●○○〧〡三〥〧○一○
●○○○〢〨○〧〨○〣
●○○○○○○○○○〦⊥〣〧
●○○○○○○○○○○二〥⊥
第二十八行積較

弧背為二九分正弦為
●○○〧〨〥⊥〨○〨
●○○○〢〨○〧〢〨
●○○○○○○○○〦三〨
●○○○○○○○○○○二〤⊥
第二十九行積較

弧背為三○分正弦為
●○○〧〨二〦〥〨
●○○○〢〨○〧〨〢
●○○○○○○○○〨一〥
●○○○○○○○○○○二〥⊥
第三十行積較

弧背為三一分正弦為
●○○〧一〨〢〧
●○○○〢〨○〧〨〢
●○○○○○○○○〦三〨
●○○○○○○○○○○二〥⊥
第三十一行積較

弧背為三二分正弦為
●○○〨〢○〨〡○
●○○○〢〨○〧〦〨
●○○○○○○○○〨〦⊥
●○○○○○○○○○○二〥⊥
第三十二行積較

弧背爲三三分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十三行積較

弧背爲三四分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十四行積較

弧背爲三五分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十五行積較

弧背爲三六分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十六行積較

弧背爲三七分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十七行積較

弧背爲三八分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十八行積較

弧背爲三九分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第三十九行積較

弧背爲四〇分正弦爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第四十行積較

弧背為四一分正弦為
•〇𝍠𝍩𝍧𝍪𝍥𝍩𝍧〇𝍦
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍦〇𝍨
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍧𝍯𝍨𝍮
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十一行積較

弧背為四二分正弦為
•〇𝍠𝍪𝍡𝍩𝍦〇𝍣〇𝍠
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍰𝍣
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩〇〇𝍧𝍮
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十二行積較

弧背為四三分正弦為
•〇𝍠𝍪𝍨〇𝍦𝍰𝍠𝍰𝍨
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍰𝍨
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩〇𝍫𝍢𝍯
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十三行積較

弧背為四四分正弦為
•〇𝍠𝍪𝍦𝍰𝍧𝍯𝍧𝍫𝍧
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍯𝍨
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩〇𝍫𝍦𝍯
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十四行積較

弧背為四五分正弦為
•〇𝍠𝍫〇𝍰𝍧𝍮𝍨𝍪𝍡
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍮𝍨
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩〇𝍰𝍡𝍯
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十五行積較

弧背為四六分正弦為
•〇𝍠𝍫𝍨𝍰〇𝍫𝍠𝍯𝍥
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍫𝍨
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩𝍠〇𝍦𝍮
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十六行積較

弧背為四七分正弦為
•〇𝍠𝍫𝍥𝍯𝍠𝍫𝍦𝍩𝍦
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍫𝍡
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩𝍠𝍫𝍮
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十七行積較

弧背為四八分正弦為
•〇𝍠𝍫𝍦𝍮𝍡𝍪𝍣𝍫𝍦
•〇〇〇𝍡𝍰〇𝍰𝍥𝍫𝍠
•〇〇〇〇〇〇〇〇𝍩𝍠𝍫𝍥𝍯
•〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇𝍪𝍨𝍮
第四十八行積較

弧背為四九分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第四十九行積較

弧背為五〇分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十行積較

弧背為五一分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十一行積較

弧背為五二分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十二行積較

弧背為五三分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十三行積較

弧背為五四分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十四行積較

弧背為五五分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十五行積較

弧背為五六分正弦為
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十六行積較

弧背爲五七分正弦爲
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十七行積較

弧背爲五八分正弦爲
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十八行積較

弧背爲五九分正弦爲
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第五十九行積較

弧背爲六○分正弦爲
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
第六十行積較

客曰積較之術竟有如是神妙乎吾知之矣子無庸再演矣吾向者惑於連比例之說以無窮級數爲迴異於諸乘方故質於子及子以截尾之法變之爲諸乘方而吾心之疑滋甚何也凡天元所得之相消式其當開平方者不能截去其隅而爲法實也其當開立方者亦不能截去其隅而爲平方也今於無窮級數乃可任截其幾項爲各次之式吾恐所得之諸乘方以積較求之或未能與數密合也故必欲請子演之及演之數十行而其數悉合吾乃恍然悟矣天元所得之諸乘方其各方俱爲倍數而其元每大於一大於一之元愈乘愈大故不能舍其大而用其小級數所函之諸乘方其各方俱爲分數而其元每小於一小於一之元愈乘愈小故所得之小數遞降其位截而去之不過尾位之數少差耳庸何傷是蓋於無法之中取其略近之數耳然亦確有至理非子爲吾演之則終身不明此理矣余曰非君之多疑而善問余亦安知君之不明此理也方且謂人皆明之不必舉以告人也則此理之得顯於世君之功也夫客揖而退余乃援筆而記之

金匱華蘅芳學

諸乘方變式

凡正負諸乘方式自下而上其各層有幾次異名則有幾箇正元有幾次同名則有幾箇負元

凡正負諸乘方式方廉有空位者其所空之位爲奇而上下同名者正負皆不可商異名者有一正元一負元所空之位爲偶而上下異名者有一正元同名者有一負元

凡正負諸乘方式若各層變易其正負其元不變若間一層易其正負則正元變爲負元負元變爲正元

凡正負諸乘方式任以某數徧乘之其元不變任以某數徧約之其元亦不變

凡正負諸乘方式任以某數一乘其隅上一層再乘其隅上第二層每上一層多乘一次則其乘得之式其元亦爲某數所乘

凡正負諸乘方式任以某數一乘其實下一層再乘其實下第二層每下一層多乘一次則其乘得之式其元必爲某數所約

以上各條皆李氏開方說中舊例也久爲疇人所知故不再列算式

凡正負諸乘方式以兩本式任參差幾層相加其元不變

如立方式[illegible]其元爲三爲七爲九

參差一層相加得三乘方式[illegible]

參差兩層相加得四乘方式[illegible]

參差三層相加得五乘方式[illegible]

參差四層相加得六乘方式[illegible]

參差五層相加得七乘方式[illegible]

如是任差參若干層相加其所得之式元數仍爲三爲七爲九

此猶以丨丨或丨〇丨等等乘之也故原有之元數不變惟多幾箇負元一耳

凡正負諸乘方式以兩本式任參差幾層相減其元不變

如立方式[illegible]其元爲三爲七爲九

參差各層相減則得以下各式其元數仍爲三七九

三乘方式[illegible]

四乘方式[illegible]

五乘方式[illegible]

六乘方式[illegible]

七乘方式[illegible]

此猶以十丨及十〇丨等式乘之也故原有之元不

變惟多幾箇正一負一之元

凡正負諸乘方式若兩式中有相同之元者將兩式任如何參差相加減其相同之元不變

如平方式-‖卄丨其元爲三爲四立方式卌丨-卌丨其元爲三爲七爲九

將兩式列如卌丨-卌丨　-‖卄丨相減得卌亖卄其相同之元三仍可將此式開得

將兩式列如卌丨-卌丨　-‖卄丨相加得卌〇卌-卌丨其相同之元三仍可將此式開得

將兩式列如卌丨-卌丨　-‖卄丨相加得卌丨卄丅丨相減得卌丨卌丅則此兩式中皆有相同之元三

如平方式二丨-〇丨其元爲三爲七立方式卌丨-卌丨其元爲三爲七爲九

將兩式列如卌丨-卌丨　二丨-〇丨相加得卌ⅡⅡ二卌‖或相減得卌亖〇卌其相同之元爲三爲七仍在此兩式之內不變去也

凡正負諸乘方式於實上任加幾層空位則初商之後變爲多乘方式而其元不變

如平方式Ⅱ‖丨卄丨其元爲十一爲十二

於實上加一空層而以十爲初商如常法變之則爲立方式二〇二卌丅丨其次商仍爲一爲二

於實上加兩空層以十爲初商如常法變訖則爲三乘方式Ⅱ〇丨Ⅲ丅丨其次商仍爲一爲二

如立方式丅丨卄丨其元爲二爲三爲負一

此式若先商一而變之則得Ⅲ卄丅丨可續商正一正二負二

若於原式之上加兩空層亦先商一而變之則爲四乘方式Ⅲ‖卄丨亦可續商正一正二負二

凡正負諸乘方式任如何剔分爲兩式各自乘（再乘三乘亦同）相消其元不變

如平方式-‖卄丨其元爲三爲四

剔爲甲式-‖　乙式〇卄丨　甲式自乘得卌

乙式自乘得〇〇亖卄丨

相消得亖〇亖卄丨

剔爲甲式-‖卄　乙式〇〇丨

甲式自乘得卌卌亖　乙式自乘得〇〇〇〇丨

相消得𝍣𝍭𝍣○𝍩

剔爲甲式𝍥○𝍠　乙式○𝍰

甲式自乘得𝍣○𝍣○𝍠　乙式自乘得○○𝍣

相消得𝍣○𝍯○𝍠

剔爲甲式𝍡𝍯𝍠　乙式𝍠○𝍯

甲式自乘得𝍢𝍯𝍦𝍮𝍠　乙式自乘得𝍠○○𝍪𝍡𝍥

相消得𝍪𝍥𝍢𝍥𝍩

剔爲甲式𝍥𝍯𝍠　乙式○𝍯

甲式自乘得𝍣𝍫𝍢○𝍱𝍠　乙式自乘得○○𝍨

相消得𝍣𝍫𝍢𝍱𝍠

剔爲甲式𝍥𝍠　乙式○𝍱𝍠

甲式自乘𝍣𝍢𝍠　乙式自乘得○○𝍮𝍥𝍠

相消得𝍣𝍢𝍮𝍥𝍩

以上消得之各式其元仍爲三爲四

凡正負諸乘方式間層剔分之爲兩式各自乘相消爲變爲間層有空位之式而其元不變

如平方式𝍥𝍱𝍠其元爲二爲三

剔爲甲式𝍥○𝍠　乙式○𝍱

甲式自乘得𝍫𝍥○𝍥𝍠○𝍠　乙式自乘得○○𝍣

相消得𝍫𝍥○𝍯○𝍠

如立方式𝍣𝍥𝍯𝍠其元爲三爲七爲九

剔爲甲式𝍣○𝍯　乙式○𝍥○𝍠

甲式自乘得𝍣○𝍯○𝍣

乙式自乘得○○𝍣○𝍣○𝍠

相消得𝍣○𝍣○𝍣○𝍩

則其消得之式間層有空位而其元不變

凡正負諸乘方式若每兩層之間加一空層則其元變爲元之平方根（若加兩空層則其元變爲元之立方根餘類推）

如平方式𝍪𝍥𝍯𝍠其元爲四爲九

若加空層則變爲三乘方式𝍪𝍥○𝍯○𝍠其元爲二爲三

如平方式𝍣𝍥𝍯𝍠其元爲八爲二十七

加兩空層變爲五乘方之式𝍣○○𝍣○○𝍠則其元爲二爲三

凡正負諸乘方式有空層相間者若去其空層則其元變爲本元之自乘數

此卽前條之反也故不另立算式

所以凡正負諸乘方式若間層剔分爲兩式各自乘相消去其間層之空位則其式仍爲本乘方而其元變爲本元之平方

如立方式[illegible]一[illegible]一其元爲三爲七爲九

剔爲甲式[illegible]〇[illegible]　乙式〇[illegible]〇一　各自乘相消

得[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇卜去其空層得[illegible]卜則仍爲

立方式而其元爲九爲四十九爲八十一

凡正負諸乘方式若顚倒之以實爲隅以隅爲實則其元

母變爲子子變爲母

如立方式[illegible]其元數爲三分之二

若顚倒其式作[illegible]則元數爲二分之三

如三乘方式[illegible]其元數爲二分之一

若顚倒其式作[illegible]則元數爲二

凡正負諸乘方式若以兩本式一正一倒任如何參差相

減其元均變爲一

如立方式[illegible]一[illegible]一其元爲三爲七爲九

若以兩本式列如　一[illegible]　[illegible]一　相減得[illegible]〇[illegible]〇

列如　一[illegible]　[illegible]一　相減得十[illegible]〇[illegible]〇一

列如　一[illegible]　[illegible]一相減得一[illegible]卜

其元均變爲一

凡正負諸乘方式若以兩本式一正一倒任如何參差相

加而成偶層之式則其元均變爲負一

如立方式[illegible]一[illegible]一其元爲三爲七爲九

若以兩本式列如　一[illegible]　[illegible]一　相加得[illegible]

列如　一[illegible]　[illegible]一　相加得一[illegible]一

列如　一[illegible]　[illegible]一加得一[illegible]一

其元均爲負一

凡正負諸乘方式若以兩本式一正一倒任如何參差相

加而成奇層之式去其中間一層之數變爲偶層則其元

必變爲負一　或將中間一層之數分作兩層則成偶層

之式而其元亦爲負一

如立方式[illegible]一[illegible]一其元爲三爲七爲九

若以兩本式列如　一[illegible]　[illegible]一　相加得一[illegible]一

中間去其一層則其式爲一[illegible]一

列如　一[illegible]　[illegible]一　相加得一[illegible]一

中間去其一層則其式為丨卌丅丅卌丨

則其元均為負一

如將丨卌卌丨改為丨卌丅丅卌丨

如將丨卌丅卌丅卌丨改為丨卌丅卌卌丅卌丨

則其元亦均為負一

凡正負諸乘方式必為同元法實之式參差一層參差幾層均可相加相減而成

如將卄丨與卌‖列如 卌‖ 卄丨 相加得卌〇丨

相減得Ⅲ卌丨

如將卄丨與丅Ⅲ列如 丅Ⅲ 卄丨 相加得丅丨丨

相減得丅Ⅲ丅

則皆為平方式而其元仍為二

如將卄丨與卌‖與丅Ⅲ列如 卌‖ 丅Ⅲ 卄丨

相加得卌卌丨丨

列如 丅Ⅲ 卌‖ 卄丨 相加得丅十〇丨 列如 卌‖ 卄丨 丅Ⅲ

相加得卌〇卌Ⅲ

列如 丅Ⅲ 卄丨 卌‖ 相加得丅丨卄‖

列如 卄丨 丅Ⅲ 卌‖ 相加得卄卌十‖

則成立方式而其元仍為二反、其正負相加即為減

故不另列算式多乘方依此類推

凡正負諸乘方式其隅為一者則隅上一層必為各元相加之數而反其正負再上一層則為各元兩兩相乘之和再上一層則為各元三三相乘之和而反其正負再上一層則為各元四四相乘之和多層者依此類推每間一層反其正負

如立方式丨丅丨卌丨其元為三為七為九

其隅上之一層卌為三與七與九相加之負數

再上一層丅丨為三與七相乘三與九相乘七與九相乘三數之和也

最上一層卌諸元連乘之負也

如立方式Ⅲ〇卄丨其元為二正三負四正

其隅上之一層卄為‖與Ⅲ相加得丅又加卄得Ⅲ

而反其號為卄也

其再上一層〇為‖與Ⅲ相乘得Ⅲ ‖與卄相乘得丅 卄與Ⅲ相乘得卄 三數之和也

最上一層為𝍡與𝍣與𝍢連乘得𝍪𝍣而反負為正也

凡正負諸乘方式其隅為一者則以隅之上一層數自乘兩倍其再上一層之數以減之則為各元平方之和

如平方式𝍥𝍤𝍠其元為二為三

以𝍤自乘得𝍪𝍤以𝍥倍之得𝍩𝍡以減𝍪𝍤得𝍩𝍢即二之平方四與三之平方九相加之數也

如平方式𝍥𝍠𝍠其元為正二負三

以𝍠自乘得𝍠以𝍥倍之得𝍩𝍡以減𝍠得𝍩𝍢即二之平方四與負三之平方九相加之數也

如立方式𝍠𝍰𝍨𝍠𝍩𝍠𝍩𝍨𝍠其元為三為七為九

以𝍩𝍨自乘得𝍢𝍮𝍠以二乘𝍠𝍩𝍠得𝍡𝍪𝍡減之得𝍠𝍫𝍨即三之平方九與七之平方四十九及九之平方八十一相加之數也

如立方式𝍠𝍰𝍨𝍤𝍯𝍤𝍠其元為三為負七為九

以𝍤自乘得𝍪𝍤以二乘𝍤𝍯得𝍠𝍩𝍣減之得𝍠𝍫𝍨即三之平方九與九之平方八十一負七之平方四十九相加之數也

凡正負諸乘方式其隅為一者以層數減一之數約其隅上一層之數反其正負以之為商數如常法開之則其變訖之式隅上之一層為空位而其元亦少去所商之數

如平方式𝍧𝍥𝍠其元為二為四

式之層數為三以一減之得二以約隅上之數𝍥得𝍢反其正負得𝍢以三為商數如常法開之則其變訖之式為𝍠○𝍠此式之元為一為負一

如平方式𝍧𝍡𝍠其元為二與負四

則以二約其𝍡得𝍠反之為𝍠故以負一為商數如常法開之其變訖之式為𝍨○𝍠其元為三與負三

如立方式𝍥𝍩𝍠𝍥𝍠其元為一為二為三

式之層數為四以一減之得三以三約隅上一層之六得𝍡反之為正二以二為商數如常法開方其實適盡則已開得一元其餘式變訖得𝍠○𝍠其元為正一與負一

如立方式𝍪𝍣𝍩𝍢𝍠其元為二為四為負三

以三約隅上之𝍢得𝍠反之為正一故以一為商數如常法開之其變訖之式為𝍩𝍡𝍩𝍢○𝍠其元為一為三為負四

如三乘方式𝍩𝍡𝍩𝍥𝍠𝍣𝍠其元為一為二為三為負二

其層數為五以一減之得四以四約隅上之𝍣得𝍠反之為𝍠故以一為商數如常法開之其變訖之式𝍥𝍦○𝍠其元為一為二為負三

長與廣相乘爲平方又以高乘之爲立方此理之易明者也斜解立方爲兩塹堵斜解塹堵爲一陽馬一鼈臑鼈臑之積居陽馬二分之一居塹堵三分之一居立方六分之一陽馬之積居塹堵三分之二居立方三分之一塹堵之積居立方二分之一此數之易明者也臺積之術上長倍之加下長以上廣乘之下長倍之加上長以下廣乘之併之以高乘之六而一則數與理俱不易明余謂此亦不外乎通分納子之法耳直剖臺積爲一立方四塹堵四陽馬此形迹之顯然者也其四塹堵可合爲兩塹堵其四陽馬可合爲一陽馬此數理之可知者也立方之術其分母爲一塹堵之術其分母爲二陽馬之術其分母爲三欲合三術爲一術則非通分不可試以代數之式明之

其立方之式爲 $上廣上長高$ 兩塹堵之式爲

$$\frac{(下長丅上長)上廣高}{二}$$

$$\frac{(下廣丅上廣)上長高}{二}$$

即

$$\frac{[(下長丅上長)上廣丄(下廣丅上廣)上長]高}{二}$$

陽馬之式爲

$$\frac{(下長丅上長)(下廣丅上廣)高}{三}$$

若將立方塹堵陽馬合爲一式則臺之全積其式爲

$$上廣上長高丄\frac{[(下長丅上長)上廣丄(下廣丅上廣)上長]高}{二}丄\frac{(下長丅上長)(下廣丅上廣)高}{三}$$

化之爲公分母其式爲

$$\frac{六上廣上長高丄三[(下長丅上長)上廣丄(下廣丅上廣)上長]高丄二(下長丅上長)(下廣丅上廣)高}{六}$$

即

$$\frac{高}{六}[六上廣上長丄三下長上廣丅三上長上廣丄三下廣上長丅三上廣上長丄二下長下廣丅二下長上廣丅二上長下廣丄二上長上廣]$$

即

$$\frac{高}{六}(下長上廣丄上長下廣丄二下長下廣丄二上長上廣)$$

即

$$\frac{高}{六}[(二上長丄下長)上廣丄(二下長丄上長)下廣]$$

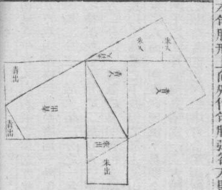
即臺積之術也

青朱出入圖說

句羃股羃合成弦羃九章舊圖已佚休寧戴氏補之鍾祥李氏亦補之宣城梅氏句股闡微又有數圖可云備矣余以爲句股形上可任向內外作句股弦之方而直積所容之顚倒二句股形弦羃內所函之四句股形皆可任於何線向內向外作句股弦之方如是錯綜變化而去其重複之式又去其移補數次者共可成二十餘圖皆能以青朱出入記其移補之迹則凡可以明句股二羃之和等於弦羃者其圖固甚多也列之如左

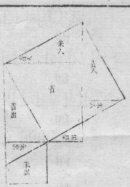
如於本句股形上向外作句股弦各方則得第一圖

第一圖



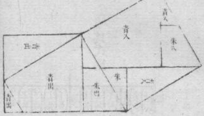
股方若向內作之則得第二圖

第二圖



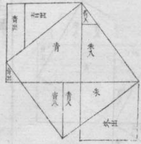
句方若向內作之則得第三圖

第三圖



弦方若向內作之則得第四圖此圖與梅氏句股闡微同

第四圖

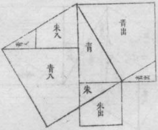


句弦二方向內作之則得第五圖此與李氏九章細草圖說同

第五圖

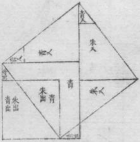
股弦二方向內作之則得第六圖

第六圖



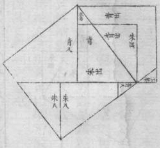
句股二方向內作之則得第七圖

第七圖



句股弦三方皆向內作之則得第八圖

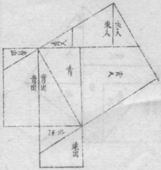
第八圖



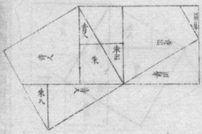
若於顛倒二句股形上任向何處作句股弦各方則得以下三圖

第九圖

第十圖

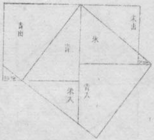


第十一圖

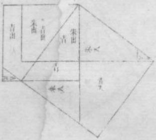


於弦冪內所函四句股形上任作句股二方則得以下各圖

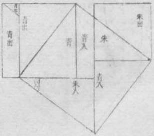
第十二圖



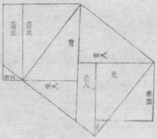
第十三圖



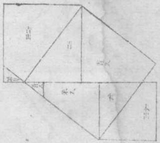
第十四圖



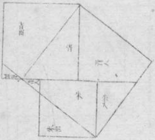
第十五圖



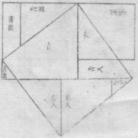
第十六圖



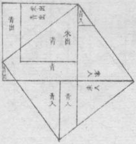
第十七圖



第十八圖

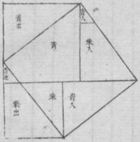


第十九圖



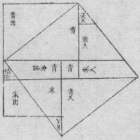
此圖與梅氏句股闡微同

第二十圖



第二十一圖

第二十二圖



以上二十二圖之中惟第七圖第八圖第十三圖第十九圖第二十二圖其青朱兩方均有相掩之處須作兩層觀之方能明其出入之迹所以未删去者無此不足以窮其變也此二十二圖中梅李二家之圖悉在焉意其作圖之時當亦如余之盡窮其變特擇其一二存之耳惟不知劉注所云出入相補各從其類者其圖亦在此中否或僅如戴氏之圖但能以整數明之亦未可知也