Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Es seien $[a,b[$ und $[c,d[$ zwei halboffene Intervalle (mit $a \leq b$ und $c \leq d$). Beschreibe den Durchschnitt $[a,b[\cap[c,d[$ als eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass es zu einer disjunkten Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen $[a_i,b_i[$ eine eindeutige Darstellung gibt, wenn man zusätzlich fordert, dass die Anzahl der beteiligten Intervalle unter allen möglichen Darstellungen minimal ist.

Aufgabe 6.3. Es sei $\mathcal{M}$ das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, reellen Intervallen besteht. Zeige, dass $\mathcal{M}$ kein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 6.4. Es sei $\mathcal{M}$ das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, abgeschlossenen, einseitig halboffenen, leeren, beschränkten oder unbeschränkten reellen Intervallen besteht. Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 6.5.*

Man gebe ein Beispiel für eine beschränkte Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, die man als eine abzählbare disjunkte Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben kann, aber nicht als eine endliche Vereinigung.

Aufgabe 6.6. Zeige, dass unter einer polynomialen Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $\neq 1$ das Urbild eines rechtsseitig halboffenen Intervalls nicht rechtsseitig halboffen sein muss.

Aufgabe 6.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare beschränkte Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(T) < \infty$ ist.

Aufgabe 6.8. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Zeige, dass

$$\lambda(T) = \inf\left(\left\{\sum_{i \in I}(b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i[,\ I \text{ abzählbar}\right\}\right)$$

mit

$$\inf\left(\left\{\sum_{i \in I}(b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i],\ I \text{ abzählbar}\right\}\right)$$

und mit

$$\inf\left(\left\{\sum_{i \in I}(b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[,\ I \text{ abzählbar}\right\}\right)$$

übereinstimmt.

Aufgabe 6.9. Es seien endlich viele linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben und es sei

$$P = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das dadurch erzeugte Parallelotop. Zeige, dass P beschränkt ist.

Aufgabe 6.10. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine nichtleere offene Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(U) > 0$ ist. Zeige ebenso, dass dies für abgeschlossene Mengen nicht gelten muss.

Aufgabe 6.11. Man gebe ein Beispiel für ein σ-endliches Maß μ auf $\mathbb{R}$ an, das auf allen Intervallen mit positiver Länge den Wert ∞ besitzt.

Aufgabe 6.12. Es seien V und W reelle Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild eines Parallelotops wieder ein Parallelotop ist.

Aufgabe 6.13. Zeige, dass das Zählmaß auf dem $\mathbb{R}^n$ translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel nicht beschränkt ist.

Aufgabe 6.14. Zeige, dass das Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel beschränkt ist.

Aufgabe 6.15.*

Die Grundfläche eines Kochtopfes sei eine Kreisscheibe mit Radius 13 cm, der Topf sei 10 cm hoch und auf die Höhe von 7,7 cm mit Wasser gefüllt. Eine Kartoffel wird in den Topf geworfen und taucht voll unter, wobei das Wasser auf eine Höhe von 8,8 cm ansteigt.

a) Berechne das Volumen der Kartoffel (rechne mit $\pi = 3{,}14$; Einheit nicht vergessen)!

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

c) Handelt es sich um eine große oder um eine kleine Kartoffel?

Aufgabe 6.16.*

Eine Bratpfanne hat einen Durchmesser von 30 cm und wird mit Öl und mit 25 kreisrunden Bratkartoffeln überschneidungsfrei bedeckt, die alle einen Durchmesser von 4 cm und eine Höhe von 0,5 cm haben. Das Öl bildet unterhalb der Bratkartoffeln einen dünnen Ölfilm von 0,1 mm Höhe und erreicht in den Zwischenräumen eine Höhe von 1 mm.

a) Wie viel Öl befindet sich in der Pfanne (rechne mit $\pi = 3{,}14$; Einheit nicht vergessen)?

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

Aufgabe 6.17.*

Eine Klorolle hat einen äußeren Durchmesser von 12 cm und einen inneren Durchmesser von 4 cm. Das ausgewickelte Klopapier ergibt eine Länge von 20 Metern. Wie dick ist das Klopapier?

Aufgabe 6.18.*

Aus einem Blatt Papier mit den Seitenlängen 30 und 20 cm sollen kreisförmige Konfettiplättchen mit einem Durchmesser von 0,5 cm herausgestanzt werden.

a) Zeige, dass man höchstens 3057 Konfettiplättchen aus einem Blatt erhalten kann.

b) Zeige, dass man mindestens 2607 Konfettiplättchen aus einem Blatt erhalten kann.

c) Der geniale Narr Karl-Heinz kommt auf die Idee, das Blatt insgesamt neunmal zu falten, wobei jeweils die längere Seite halbiert wird. Anschließend wird das entstandene Bündel gestanzt. Wie viele Plättchen kann man mit dieser Methode erhalten?

Aufgabe 6.19. Es seien $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$ reelle Intervalle und es seien μ_I bzw. μ_J die zugehörigen Maße auf $\mathbb{R}$, die jeweils auf den Intervallen gleichverteilt sind. Bestimme $\mu_I * \mu_J$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.20. (4 Punkte)

Zeige, dass sich eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ genau dann als eine endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben lässt, wenn dies mit endlich vielen disjunkten rechtsseitig halboffenen Intervallen möglich ist.

Aufgabe 6.21. (6 (3+3) Punkte)

Es sei $\mathcal{V}$ der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von (rechtsseitig) halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Beweise folgende Aussagen.

(1) Die zu V über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle

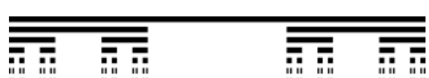
$$V = [a_1, b_1[\uplus \ldots \uplus [a_n, b_n[$$

definierte Zahl

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

(2) Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.



Die Cantor-Menge ist das Endprodukt des in dieser Skizze angedeuteten Ausdünnungsprozesses.

Aufgabe 6.22. (5 (1+2+2) Punkte)

Die *Cantor-Menge* ist definiert durch

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} z_i 3^{-i} \mid z_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+ \right\}.$$

a) Zeige, dass C überabzählbar ist.

b) Zeige, dass C eine Borel-Menge ist.

c) Zeige $\lambda^1(C) = 0$.

Aufgabe 6.23. (6 Punkte)

Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass das von diesen Vektoren erzeugte Parallelotop einen achsenparallelen Würfel (mit positiver Länge) enthält.

Aufgabe 6.24. (12 Punkte)

Es sei μ ein Maß auf dem $\mathbb{R}^n$, das für alle offenen Bällen $U(P, r)$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß übereinstimmt. Zeige $\mu = \lambda^n$.

(Für den zweidimensionalen Fall gibt es 10 Punkte.)

Aufgabe 6.25. (5 Punkte)

Man gebe eine Beispiel für eine offene Menge $U \subseteq [0, 1]$, deren Abschluss das Einheitsintervall ist, deren Borel-Lebesgue-Maß aber kleiner als 1 ist.

Abbildungsverzeichnis