大學叢書

數理經濟學大綱

[illegible] 著
[illegible] 譯

商務印書館發行

大 學 叢 書

數理經濟學大綱

大學叢書委員會

委員

大學叢書

數理經濟學大綱

麥　塔著
胡　澤譯

商務印書館發行

目　　錄

譯者例言

近代的社會科學都有日趨於數學化之趨勢，卽以經濟學而言，如馬克思則運用許多公式和數學來解釋他的理論，凡社會主義的經濟學者大都不能離開此種窠臼，如澤豐滋馬謝爾等，則利用微積學與曲線來闡明效用和其他重要經濟原則，凡資本主義的經濟學者亦羣奉爲研究鎖鑰。所以任何一種學問，若是在研究兩種或多種現象時，數學的運用是不可少的，亦惟有藉助於數學纔能有精確具體的說明。

麥塔此書初版於一九三二年，它於經濟理論上沒有新的發現，但是其優點有二：（一）能以比較簡單的數學來證明繁頤的理論，於數學有深造者，固可深者見深，卽於普通讀者，亦可略觀大意而無扞格之弊；（二）能將諸重要原則以明白曉暢的文字精確的適當的表顯出來，並於勞力，組織，交易數章，且有獨到之見，可糾正一般經濟學者的謬見。此書可謂一種凝固精簡之作；氏撰此書在供給大學學生參考，余覺我國學子及普通讀者對於此書尤可獲統計，圖解，經濟原則及數學運用三者之助益，故特譯出以介紹於國人。

二十三年四月胡澤誌於南京

原　　敍

本書之作，主要在供大學學生之需要；但畢業以後的學生亦可於此書中找着有用的材料。於數理經濟學素有興趣的人們將見出消費，勞力，資本，組織與交易各章是特別有用，而數學不深造者亦可於所有各章得着同樣有用的資料。前面九章是特別作來以供大學學生關於統計所有圖解方法的必需材料與知識。勞力章的有些部分是著者於前年在「亞拉哈巴得大學經濟學會」(The Allahabad University Economics Society) 誦讀的論文。至關於論必需品，娛樂品與奢侈品的各頁則包含著者於一九二九年四月投於印度經濟月刊(Indian Journal of Economics) 的一篇此種題目的論文所有之要點。

我不敢說我在經濟學上已發明了什麼新的學說；可是我卻企圖以與其他學者所採的微有不同的方式來研討經濟學的多數原則，設若我這樣做是業已成功，則我敢相信我已將許多經濟原則用更明晰的與有時或許更科學的話來闡發了。我的創造，若是許可我用這字，是在給舊事以新解。我作此書不是將各方的各種材料逗湊而成；我對於大多數的問題都是離開各書而獨立研究的，而對於一

切問題則更不願倚賴先生與學生，此種方法，我相信，已給了我此書一些創造性。至於特別可認爲有獨創的地方則是論勞力，資本，組織與交易各章。

一種這樣性質的著述當然免不了有許多罅漏；我希望同情的讀者指摘出來，俾我此書克臻於完善，則是我的厚幸。

我雖是獨立的工作，卻不能不對湯樸孫教授(C. D. Thompson M. A.)致我的謝忱，因爲我當學生的時候，他在講堂上的講授，與我作大學研究生的時候，他的經常幫助與指導，最初鼓舞我對數學的興趣。我又感謝我的兄弟麥塔(R. K. Mehta)，他替我將抄稿用打字機打出，幫助我將書中許多地方改爲更明晰而曉暢，並修正有些數學部分。末了我要感謝我的內子，她幫助我畫一些圖解，與我的父母，他們在工作上不斷的鼓勵使我完成的迅速，出乎我意料之外。

一九三〇年麥塔序於亞拉哈巴得

數理經濟學大綱

第一章　導言

經濟學之數理性質

經濟的原則與定律常可用曲線來解明，許多經濟的理論亦可用數學的術語來探討。幾何程式與乎代數曲線已用以解晰一些極關重要的經濟法則，而微積學之見採於經濟學，已是一百多年的事了。時至今日，經濟學似乎有日驅於數學化的趨勢。誠然，經濟學之進步愈大，及其諸原則愈臻於確切，則此學之愈含有數學性質，乃自然之理。若是經濟「資料」(data)長久衹是一些關於各種趨勢之空泛的與非科學的描述時，則此學固將永遠限於言語的敍述，而不能予以數理的分析。但若諸法則日趨確切，其說明亦漸符於科學方式時，則用數字的例證與幾何的程式去講明牠們，圖解牠們，初非難事。

有些經濟學者認經濟學爲純粹屬於數學性質之學。具此見解的[illegible]是[illegible]滋(Jevons)，此外尙有許多作者給此學以顯著的數學色彩，在他方面，又有一些經濟學者則痛斥經濟學之採用數

學。他們認定經濟的「假說」(premises)不能以數字來說明，所以在經濟的硏討裏面不能得出數量的結論的。我們在經濟學中的「假說」不能界以數字的說明，此理誠然。譬如我們對某一商品的效用較大於任何另一商品的效用時，決不能說出它大的確切數目爲何。然而此種事實卻不妨阻我們對我們的諸原則施以數量的分析。若是一種商品的效用大於另一商品的效用，我們祇須將兩種商品的效用予以數量的表明，而使前商品大於後商品，則我們的論旨便一變而爲簡單明瞭了。數目字在某意義上雖是臆造的，但可幫助吾人揭露關於商品效用的一些基本法則。惟是效用等差若表以不確切的數量，則往往引致淆亂，欲救此弊，吾人可改用幾何的標號或符記。例如，第一商品的效用不十分等於 10，第二商品的效用亦非確切爲 7 時，我們可改稱前效用爲 A，後效用爲 B。此層我們不須多所申論；我們可以歸結的說，我們基要的假設雖不能確切予以數字的說明，可是此事實決不能妨害吾人利用數學以爲理解經濟諸法則之助。

在一百年以前，最初廣大利用數學於經濟學的，厥爲辜爾羅(Cournot)。嗣後採用數學方法的經濟學者頗不乏人，其中以瓦拉斯(Walras)，澤豐滋(Jevons)與威克斯梯得(Wicksteed)爲最熱誠。馬謝爾(Marshall)是一位徹頭徹尾的數學派，雖是他說明他所有原則仍以十分的文學體例出之，而對經濟事實更深的解明，則利用數學符號，曲線與方程。

經濟學是否可用數學，若必詳爲辯正，殊覺辭費。因爲正當解

釋起來，各種科學都是可用數學的。凡一種學術，若所論兩種現象之間有任何數字或數量的關係存在時，則此學術卽可說在某限度內是數理的科學。運用數學於一切社會科學之中，都可得到一些補益，而經濟學乃此諸社會科學中最能容受數學研究之學。因爲經濟學比屬於社會方面的其他科學都要更爲確切，其性質亦更爲數量的，故數學的度計應用於經濟學比用於其他社會科學更爲適宜而有用，這是毫無疑義的事。經濟學爲甚麼比較的確切，比較的數量化，因而比較的數學化，其理由乃因此學是研究人與財富關係之學。在經濟學中我們研究人及從財富媒介所見出人的活動。因此，我們得着了一切人的動機與行爲的表現所經由物質底與可度量底媒介。要確定一個人在消費一種商品時所得着的心理滿足爲幾何，或比較此滿足與他從另一商品所得的滿足是怎樣，這或許是不可能。可是貨幣乃表示心理滿足之一種實質尺度，我們若藉貨幣來估計比較滿足的大小，這是可能的。此種尺度，有時因變動的勢力滲入，或缺乏正確性，甚至有時引入歧途，不過以之用作普通的準則，它確是測量吾人所有動機及慾望的有用表尺。

用數理研究經濟學之優點

將經濟學施以數理的研討，不僅是可能，且可因利用符號與圖解，而獲得許多直接的便利。一種原則若僅以文字說明時，它是缺乏確切性的，而且我們最容易忘記或忽略此文字敍述中所含的諸條件。若是一種原則用數理的程序來解晰時，我們若不注意到所有

潛伏的一切假設，則勢將無法進行。茲試舉例明之，當我們考察獨占業者對於一商品究應規定什麼價格時，我們很容易不注意市場需要的性質，與生產的條件，所影響於價格的情形。但若吾人欲用曲線與符號以解明獨占價格，則將立即見出，價格係倚靠供需的曲線所構成的形態，或供需的比較伸縮性。應用數理之利尚不止此。一旦基礎原則若被這樣的解述，而包裹於幾何與代數的外衣中時，則凡代數幾何與微積學之一切格式與原理都可適用於所求得的數字關係上，而極重要的眞理或即藉以發見。若僅恃文字的解說，則此種過程是不可能的。

因爲數學的敍述是必須確切的，因爲一個方程必須有完全相等的兩方，並因爲一條幾何的曲線必須是連續的，又必須從一點起而向某一方向進行，所以利用此方法，我們在推理的進程中大致比較確切，對於一切條件所有的變態能有較深的探討，因是可以減少純粹抽象推理所常忽視的缺限。

運用數學術語，特別是方程與曲線，其一最大長處是在能將各經濟現象所有之確切關係顯明的表出。例如，我們試問：一商品之價格與此商品的需要有何關係？在根據演繹推理以作言語的論斷時，我們會說價格增高則需要降低，而即中止於此，非加數學的研究，吾人的探討將不會有進一步的路線。價格增高百分之十是否能使需要降減百分之十呢？這個便是數理的思維方式了，祇有依賴此種方式，我們纔能實在認出價格與需要之眞正關係。需要之伸縮性，是許多經濟問題中之一重要概念，而自其性質看，乃不過是數

學推理之結果，並祇有利用曲線與符號之助纔能將其眞正要義與性質展顯於吾人，這是無疑的。

我們於此可以見出，曲線可指示吾人有研究與理解經濟現象的連續性之必要。表示需要的曲線可立刻使吾人知道需要隨價格而連續變動這事實。(附註) 曲線告訴吾人需要的伸縮不是一種孤立不變的數量，而是時時刻刻變化的；卽是在不同的價格便有不同的曲線。效用隨消費之增加而繼續遞減，這事實若無曲線來解明，吾人亦將無法認識。假若第一單位給了十單位的效用，第二單位給了六單位的效用，則第一半單位或許已給了六單位的效用，與第二半單位已給了四單位的效用，這也是實在的。事實上，從起頭到末尾效用之降低是繼續而漸次的，我們只有想像一種漸次下降的曲線纔能認識它的眞正情態。

其次運用數學方法有簡捷單純的好處，這也是不可忽視的。一種理論，要用複雜冗長的言語纔能解晰的，往往可簡要的用數學的術語來表明。一個方程式能在一很短的地位表明兩種或多種現象的關係；一條曲線只須一瞥眼便可解明或種經濟概念潛伏的諸主要屬性，至於圖解則一面可表示諸種現象的相對大小輕重，而同時又可排去其較不重要與無關係的屬性。

在用歸納方法以探討經濟的事實時，我們亦需要數學，其適用範圍將使認經濟學無假數學之助而可充分研究的人們詫駭不已。

（附註）這連續性卻不是在數字上確切不移的。大凡參加市場的人數愈多，則需要曲線的延展將亦愈大；購買者的嗜好與購買力之差別愈大，則曲線的延展將亦愈臻確切。

經濟學的諸方法，雖含演繹的程度甚深，卻亦有歸納之點在。我們對於有關人類的事實用歸納的探討以搜集材料，藉以驗證我們的各重要定律的實效。但是僅祇事實與數字的搜集，其本身是無用的。這些東西須使之發而為言，而我們的統計法則能在一堆毫無意義的數字中揭出隱伏着的眞理。我們利用物理學的知識來驅策自然的潛力以供吾人之用；同樣的，我們亦可藉數學的助力以發見表面若無關連的諸現象之關係，並因而得着更進研究之前提。在經濟學的某些支系中，我們的方法主要是歸納的，變動的條件是很多的，公律之應用大受阻礙，其效果因時與地之變動狀況而有實質的改變的——在這等經濟探討的領域內，我們從歷史方法獲了極大的助力。如研究進口稅之結果，高工資之影響，低率運費對實業的影響，直接與間接稅之效果，與商業循環之因與果，這些都是離不開歸納法因而離不開數學法之經濟研究。

經濟學成為數理科學之史的發展

差不多在經濟學之每一支系中，數學方法都曾被一兩位學者應用過。若將這些學者表錄出來，將佔許多篇幅。在十八世紀之初，色斐(Ceva)即已採用數理法於經濟問題，並在此一世紀之中有許多其他學者亦已採用此法。在色斐的著作初次出版之後約百餘年，廣大運用數學於經濟問題之解決上的，則應推享爾羅(Cournot)。自此以後，雖是許多學者亦曾應用數學研究於經濟學，且將享氏的方法推演更進，而享氏仍不失為大有興趣的一位學者，其書亦仍有

不少的熱心讀者。次於辜氏的，要推澤豐滋(Jevons)是一個特出的人物。澤氏的著作，如政治經濟學之理論(The Theory of Political Economy)，通貨與財政之研究 (Investigations into Currency and Finance)，以及他的論文，『政治經濟學的數學理論之進展，附數理原則之解明』(The Progress of the Mathematical Theory of Political Economy, with Explanation of the Principles of the Theory)，都是有價值的數理作物。但是澤豐滋有許多同時的學者，步他以及他的前輩之後塵，在他們的經濟著述中廣大的運用數學。其中可舉數者，如瓦拉斯(Walras)，馬克勞德(MacLeod) 皮爾孫(Pierson)，威克斯梯得(Wicksteed)，尼哥爾孫 (Nicholson) 金肯 (Jenkin)，潘達龍尼 (Pantaleoni)，瓦喀爾(Walker)，厄基渥爾斯(Edgeworth)，馬謝爾(Marshall)，及其他等等。但是本書的目的不是要替數理的經濟學者作一種書史。自馬謝爾以後，許多經濟學者近年來在他們的著作中都已帶有數理的色調了。(附註)

數學原理應用於經濟學的方式殊繁多而變化。算術的格式，代數的方程，微分的推算，與乎幾何的曲線與線形，通可運用以解晰經濟的原理，與幫助經濟的推理。數字已用以表明效用概念；代數方程已是幫助了解貨幣學說的工具；微分推算與方程已是用以確定需要的伸縮，獨占收入等等的助物，而幾何曲線則用以表明任何兩種現象的關係。雖然，在解決大多數的經濟問題時，這所有數學

(附註)其中最著者如斐協爾(Irving Fisher)，皮古 (Pigou) 莫爾 (H. L. Moore) 飽勒 (Bowley 柏爾(Pearl) 與里得(Reed)。

方法都是要採用的。

數學應用於經濟學之實效與用益，自然是無疑問的了；可是有些時候，若應用高深數學以作經濟的研討與論證，則除少數有數學知識的人們能理解以外，大多數人將有扞格不入之病。雖然，我們卻不可因此忘掉應用簡單數學原則所能達到重要的與有用的目的。在本章的前部分我們已見出數學研究法的一些優點，這些優點已使我們覺得數學在我們的研討上是如何的重要與必需了。在未討論重要的曲線以前，我們且先研究經濟學者，統計學者與其他作者所常用的幾種圖解。

第二章　圖解法(Diagrams)

圖解於經濟學理論之研討上雖不重要，但亦常可給經濟學者以一些便利。對於統計家，與對於研究民族的經濟狀況或不同時間，國度或階級的比較經濟之經濟學者，圖解有極大的價值。圖解可用以表明某一種實業男女人數的比例，人口按年齡之分佈，各國人民的比較所得，各種土壤的面積，等等。

圖解法之益點

以圖解表明比較的各數量，其長處在於給諸數量以一圖畫式的展露，而使學子容易了解並把握此諸數量所欲提示的各事實。例如，一種實業中男職工對女職工的比例，若僅以數字表明之，初不若代替以圖解，如用面積比例的四方形，之容易使人明瞭。若是考察多種實業所有男女職工的比例時，則許多複雜的數目字將使讀者的頭悶眼花，但若一易以圖解，便至少可立時變爲清晰與明白。

爲精確起見，數目字是要緊的，通常的辦法是將數目字寫在圖解之內，或更好一點，寫在旁邊。我們不需要比較的時候，自然用不着圖解。我們之所以須借助於圖解方法者，乃因要作比較的原故。若是只有一單獨的數目時，以圖解如方形或圓形來表明之，則殊無

意義。縱然有許多的數字，若牠們不能容受比較時，亦不能以圖解表明之。例如，我們有三種數字於此，一種是一九二一年孟加拉(Bengal)的人口，第二種是印度(India)每人所有之財富，第三種是孟買(Bombay)在七月內的平均雨量，牠們從任何方面看來都是互不相關的，在牠們之間是不能作出任何比較的，所以我們不能用圖解來表明這些數字。

由此看來，圖解之主要與差不多唯一目的乃在製出互有關係或有共同名稱的諸數量間之比較（附註），這是顯然的。或有人辯駁的說，用算術的百分法，即將每數變爲總數百分之幾，亦可以作出比較。誠然，此種百分數可以達到同樣目的，不過其效力卻較遜於圖解。當我們見着百分的數字時，在吾人的腦筋當中，須先對這些數字的大小作一度心理的比較，然後能形成大小相比的圖影。故圖解之達到此同樣目的，則更爲直接，並因牠直接射入觀者眼簾之故，能給他以較悠久的印象。

何處始可用圖解

我們現在將考察何種數字始可用圖解表明之。凡兩種數目或多種數目雖其性質相同，而其變動係各自獨立者，其大小可用圖解表之。如各國每個國民之富，則可用圖解來表明。這些數字性質上是相同的，抑或更科學的說，牠們都有共同的特徵，即是均爲每人

（附註）換言之，凡「類」(Groups)「組」(Classes)與「數列」(Series)均可以圖解表明之。

所有財富之數。但是這些數字的變動卻沒有關連。此國每人之富增加，或許彼國每人之富反減。又如，印度各省每畝地所產麥之量亦可用圖解表明，因此等數字有一共同的特徵在，卽是指每畝地的產麥量——其他特徵則不同，如各數字係表不同之量，係屬於不同的省，因而且屬於不同的氣候。但是我們必須記着，不是凡有一共同特徵的數字都可用圖解表明的。其共同特徵須為緊要之一種，而可以範疇各數字於一共同之羣體者，始可採用。數字之大小其本身不能算為特出的或緊要的特徵。故數字之大小儘管相同，若是極不相關時，亦不能以圖解表明。

圖解之諸用法

圖解之目的在比較數種同樣款目之大小，故圖解本身之表明大小，其方式須使人一望而知，這是不用說的。圖解之表明大小，通常在於所作圖解之面積，但有時也可用線條或立體來表明。若用線條的長短以表示各數的大小時，則此法稱為「線條法」 (linear method)。若用方形或圓形來表明時，則此法稱為「面積法」(areal method)。若用球體或立體而以其容積，卽其體積，表示大小時，則此法稱為「體積法」 (Cubic method)。

線條法所能作的唯一方式，是比例於已知諸數字而作長短相對的諸線條。此諸線條之排列可為平行，亦可為垂直，故各線是相互平行的。

面積法之應用則有多種。面積之表明，或以圓形，或以正方形，

或以長方形，或以圓形之各部（稱爲扇形），或以三角形，或以其他任何多角形（卽多邊之形）。但是通常用面積來表明數字大小的形態則是圓形，扇形，長方形，或有時正方形。至其他平面形不能這樣應用之故，原因是牠們不容易畫，在圖解法中「簡單」是吾人目的之一。其次，三角形或五邊形不如圓形或長方形之普通，故其所表示的大小觀念亦不如其他平面形之明瞭。圖解之主要目的是直接向人們的眼簾來說明事實，所以須我們的眼睛習慣了形式纔可採用。

但是，從科學的立場說來，採用其他形式亦無反對的理由。體積法亦較不常用。（附註）其故可不言而喻。因爲在紙上要表明長寬高三次元的形體是頗不容易的事。自然我們有許多方法可以將體積在紙上表出，不過立體容量的確切意義不容易被眼睛立刻見出，雖是我們一望而可知其爲實體。

各法之實用

當我們要表明諸單次元的數量時，比較適當的是用線條法，卽是用線條或細條。在表明兩次元或三次元的數量時，比較適當的是用面積與體積法。如各區域的每年平均雨量，便可用直線來表明，如各省的勞動力則可用面積來表明，至於更複雜的結果，如各階級或各國的所得量，則可用立體的容積來表明。但是此種辦法亦殊欠

（附註）可是體積法亦有其優點，卽此法能使圖解更有吸力與興趣，因而可使讀者更澈透的集中注意於數量的圖解形式上。

精當，不能免掉非難，因為若採行此計畫，則勢必須將單次元的數量與兩次元或多次元的數量區別出來，始可着手。

但吾人用圖解以表明數量時，亦不可不對於所用的方法略加以考慮。在擇選方法時，有一事應注意及之。若諸數字係構成一羣體，而須以圖解表明之之時，我們照例是採取圓之扇形法，或以橫線割分的垂直長方形法。例如，已知以年齡分或以省區分的人口數量，則我們便應用圓形法，將圓分為若干扇形，或用長方形法，將橫線割分長方為若干段。若我們採行圓形法，則圓之面積應代表人口總數，扇形的面積代表各分部的數。

可是，若我們所有的數字不是這樣有關連，或不屬於一羣體時，則所用方法不為直線或長條法，必為分離的圓形或正方形或長方形法。例如，以圖解比較三個國家的人口，我們應當畫三條線，或三個圓形，或三個正方形，或三個長方形。又是，若已知幾個地方的每年平均雨量，表明牠們的最好方法是畫直線或長條，直的或橫的均可，橫的比較更好。

第三章　線條法—直線與長條

我們已經說過，若數字不屬於一羣體時，則牠們應以線條來表明。這線條可為單純的直線，抑或為長條。用長條的目的在使圖解更為顯著，並非表示面積。

線條之排列可直亦可橫，但是若所表的數量是每年的或每月的數字時，最好是用直的排列，因為在基線(base line)上我們便於將年或月註出。設若數字不是關係不同的時間，而是關係不同的國家或地域時，較好是採用另一種方式，而作橫的線條。(附註)

可用線條表明之諸數字

下面的表指出可用直線或長條表明之諸數字；此表不算是詳盡，意思僅在引申上面的說法：

各國或各省每年平均的雨量。

各城鎮的平均溫度。

各國農業礦業或工業的產量。

各國在各年代人壽的平均長度或平均壽命。

(附註)此種辦法是在規合一般以橫線尺度表明獨立變數的習慣。當線條是直的排列時，各線的頂點實際就是軌迹的各點。

各國的出口與入口貨物。

重要各國所消耗電力的數量。

各國鐵路的哩數。

各國每一國民的財富或所得。

各國百萬富翁的人數。

各國犯罪的人數。

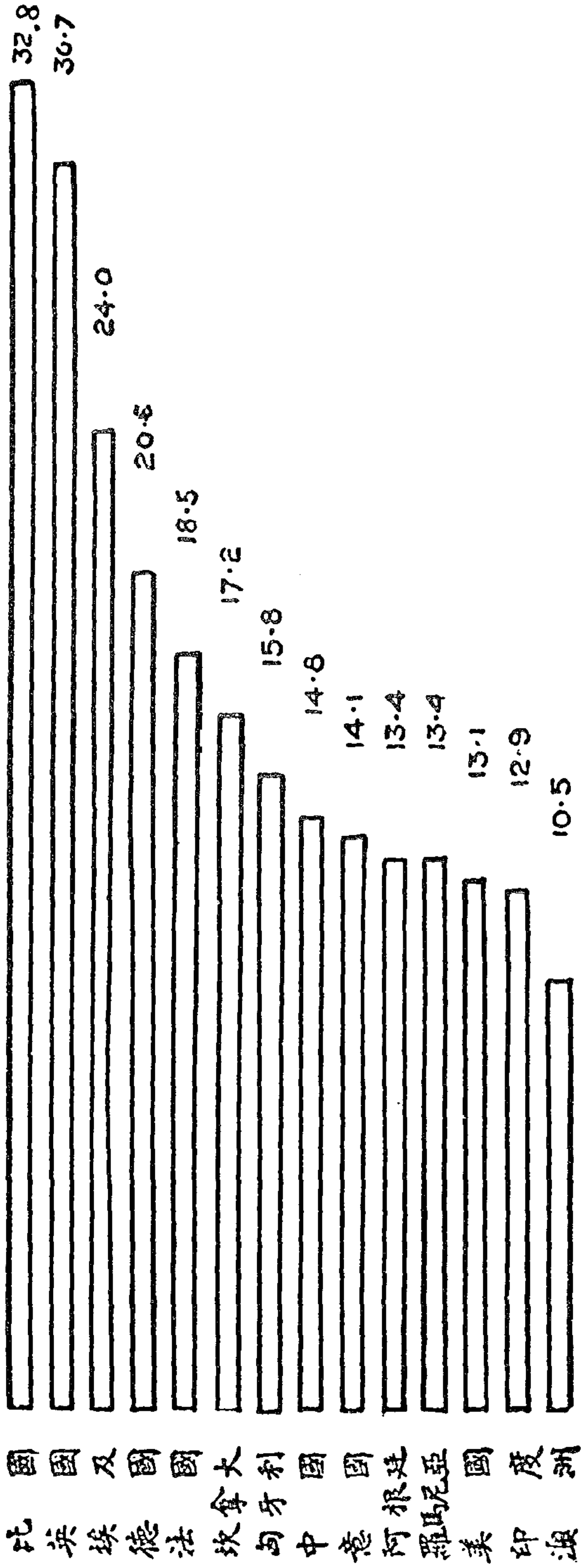
各國的國債。

在許多年中平均的雨量，各農產物每畝的產量，貴金屬平均的產額等等。

一國對外貿易逐年的數字，與類似的數字。

直線或長條之排列

長條在直排或橫排時，須使其互相連接，或中間留出相等的距離。當長條是十分窄狹時，後一排列法更爲適宜。若長條代表的是逐年數字，則最好在長條之間留出很小的距離。若長條有相當的寬度時，則排列可使其互相接觸。有時長條之寬窄乃視用作圖解的地位之大小而定。若長條係表明逐年的數字時，則長條的長短大都沒有整齊的次序。但若數字僅在表明各地或各階級時，長條排列的次第最好按照數字之大小，將最長之長條置於底上，最短者置於頂端。各長條的左端須使其在一直線內，或將各長條之中點務位置在一垂直線內，使凡較短的長條均劈中的位置於較長的長條之上。



圖解 1.1922 年諸主要國麥之產量（每英畝所產諾數）

長條之長短

先將最高的數量，即最大的數字，畫成一標準長條，然後按此尺度畫出其他長條。若數字的比例爲 10:7:5:4 時，各長條之間亦應有同樣比例。

畫圖解時，頂上須留出相當餘地，以便題名，左右兩端亦應留有餘地，以便註明數字或加以說明。

旁邊須畫出所用尺度，即是用垂線或橫線將尺度畫出，以便計算各長條的大小。在長條之旁又須記出實在的數字，普通是在右邊，並寫出說明（例如國名）於左邊。

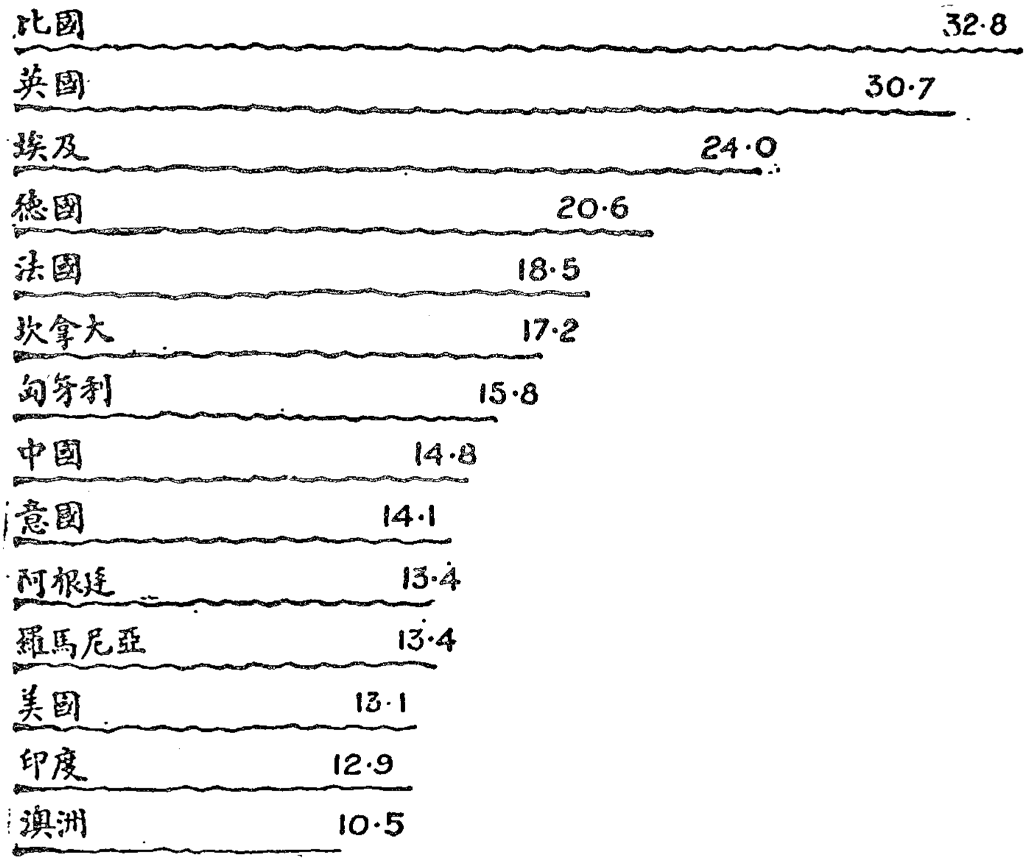
圖解 1.（數字係從 Chambers of Commerce Atlas 取來）

上圖係表明世界產麥主要諸國每英畝所產之麥量。產量係以䅽(bushel)計算。長條之長短比例於產量之大小。國別係按牠們的生產力排列，比利時的產量最高，故列於頂端，澳洲產量最低，故列於底端。橫線每吋代表 6.2 䅽，因產量的實在數字已記於每長條之右端，故未將表尺畫在紙上。各長條之間距離爲十分之一吋。圖下記有題名，若無題名，則此圖便無意義。各長條是橫的排列，可是牠們也可用直的排列。

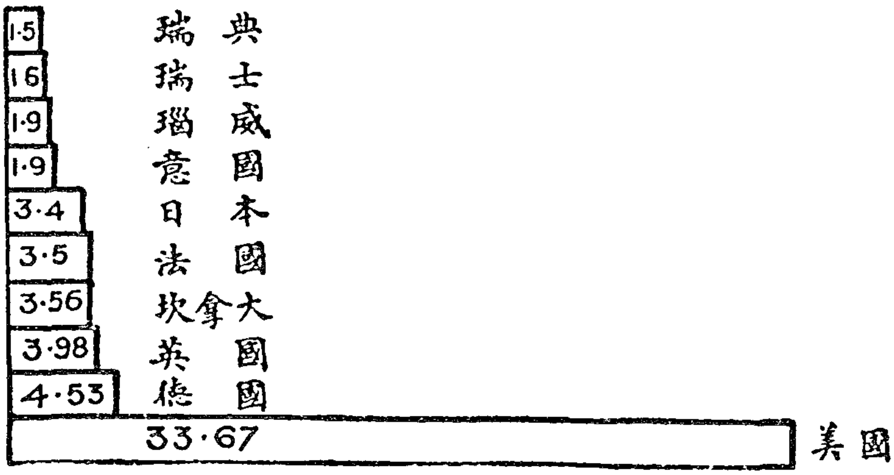
圖解 1A。

上圖解係將每英畝所產麥量之同樣數字而以直線表明之。各線是橫行排列的，意在便於讀出各數字與各國名。直線通常作波狀，如上圖所示，不過比較各數時，我們注意的只是直線兩端間所有的距離。

此法有簡單的便利，不過若要表明每數劃分爲構成之諸部分時，此法便不能適用。此時我們以用長條法爲較適宜。



圖解1A．1922 年諸主要國麥之產量（每英畝所產諳數）



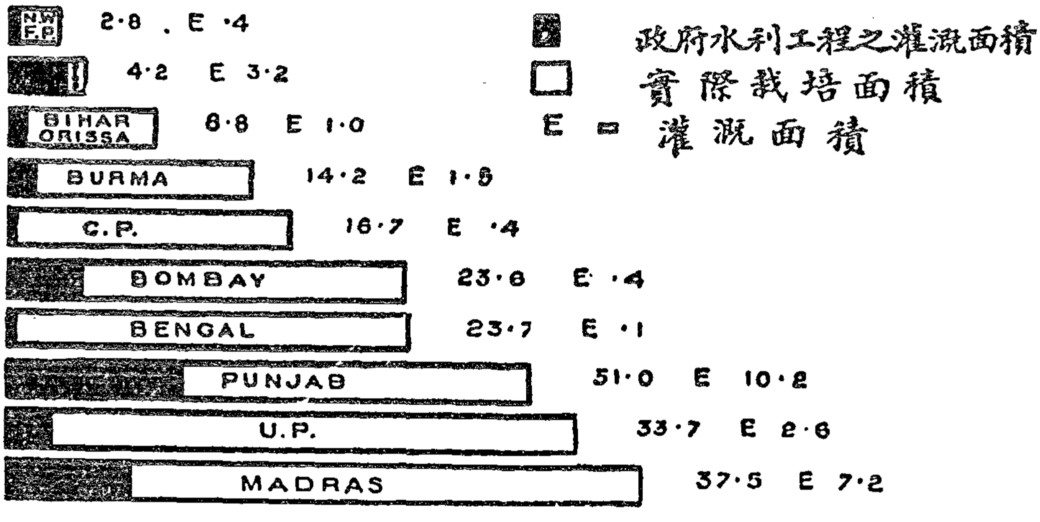
圖解 2．主要諸國之電力（以百萬馬力計算）

圖解 2.(數字從 Chambers of Commerce Atlas 取來)

上圖解表明世界主要諸國之電力。長條是橫行排列的，其間並未留距離。長條之長短比例於各國所有電力之馬力，其寬度則相等。此圖的長條比第一圖解的較寬。若所表數字較少的時候，最好用較寬的長條，庶幾圖解之全部得以十分顯著。

橫行排列的長條，其便利處在使讀者容易讀出國名。此圖的最長之條係位置於底上，各條之左端則形成一直線。有時最長之條亦可置於頂端，而將最短的置於底上。(附註)但鄙意以爲將最長之條置於底上，則比較方便。

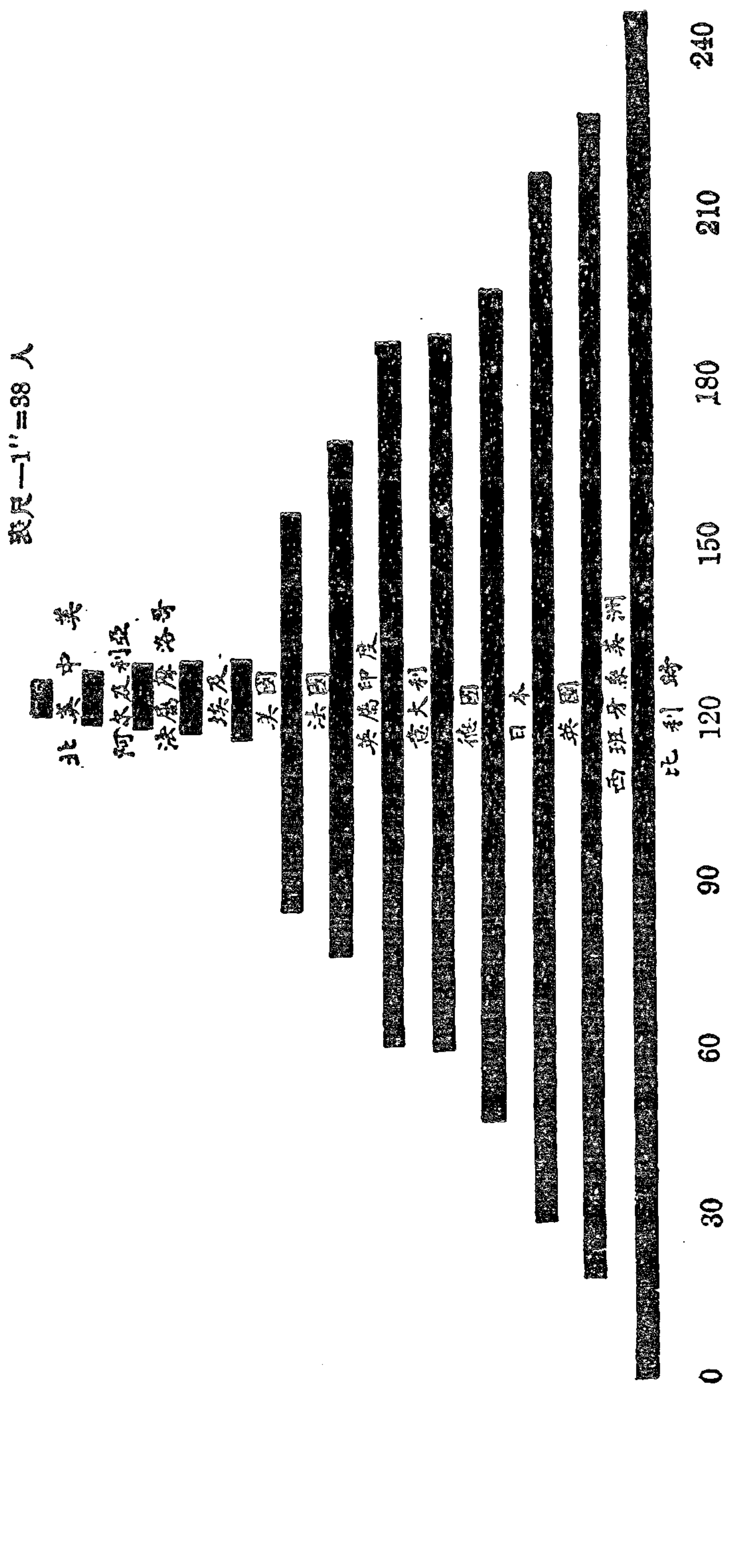
圖解 3.(參看 Wealth and Taxable Capacity of India, Shah and Khambata (1924)



圖解 3. 印度重要諸省未受灌溉耕地之面積(以百萬英畝計)

上圖解表明印度各省未受灌溉的耕地面積，以及由政府水利工程灌溉之面積。其黑色部分表示灌溉的面積，長條之長度則表明

(附註)參看 Chambers of Commerce Atlas



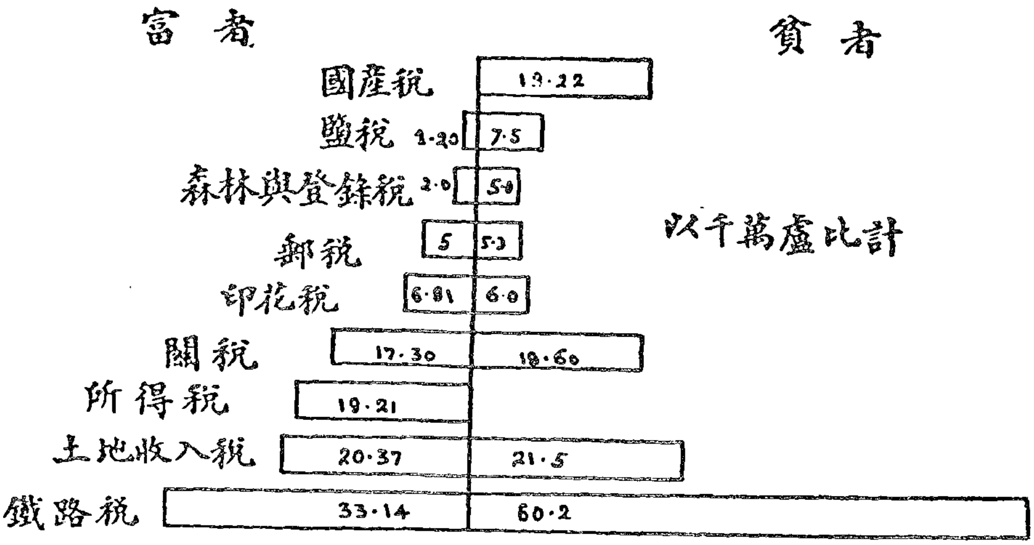
圖解 4. 每方公里的人口數

耕地之全面積。各條係橫行的排列，各省的名稱則書入各條之空白部分。此種圖解，各條間須留有距離，藉以增加圖之美觀。耕地全面積與被灌溉面積之數字書於各條之右端，說明則附於圖解之上。在作此種統計時，先畫出長條之長度等於耕地之全面積，然後將其左邊部分畫出等於灌溉面積之數。各條的排列係按照所代表耕地全面積大小之次第。此法之優點在能立刻表明耕地的比較面積，與被灌溉的比較面積，以及受灌溉與未受灌溉面積之比例。因是，我們可一望而知馬德拉(Madras)省之耕地面積爲最大，盤加(Punjab)省受政府工程灌溉之面積爲最大，新德(Sind)省受灌溉面積的百分比爲最大。

圖解 4.（參看 Wealth and Taxable Capacity of India, Shah and Khambata 1924)

上圖解表明各國的人口密度。本圖的長條是橫行排列的，中留有充分的距離以便書入各國名稱。各長條之左端不成一直線，但各長條之中點則在一直線內。此是表明人口密度的最良方法，可是亦有其重要之缺點在。此圖不易見出任何兩長條間之長度比例，因其末端不在一直線內故。在此圖解內，意大利的密度僅半於比利時的，可是不用較長的時間是不容易見出的。在此等圖解內，一半長度的長條并不在與其相比的長條之中心點終止。雖是底線上畫出尺度，但除了底線上之長條外，其餘長條通不易計算其長度。例如，代表英屬印度之長條，其起點係在 60 與 90 之間，其終點係在 150 與 180 間之某處。其原因乃以各長條之零點各不相同之故。

圖解 5.（參看 Wealth and Taxable Capacity of India, Shah and Khambata, 1924)



圖解 5. 富人與貧人間租稅之分配（印度）

上圖解表明富人與貧人所擔負之租稅。在垂直線左邊之各長條代表富人的擔負，右邊的各長條代表貧人的擔負。我們亦可用黑色的與空白的長條來表明富貧的擔負，如圖解 3 所示。但用本圖解的方法卻有一便利之點在，卽是，長條不塗黑，其中可以將數字填入。除此以外，此法幷不優於他法。長條之左右兩段加在一起，則表明每種稅之總擔負。兩種稅間欲比較其總擔負，此時亦有少許困難，因各長條之末端不在一直線內故。

同樣方法亦可用以表明各國之進出口貨物。(附註) 出口貨可列於左邊，進口貨可列於右邊。

上述諸法已可將我在前面給的表作完，可是根據這些方式，我

（附註）參看 Chambers of Commerce Atlas。

們尚可作出另外幾種圖解。例如在橫行而中有距離之長條，每條可再分爲三或更多的部分，以表明每條之特別分配。設假各長條係表明各國的人口總數時，則每條可分爲三段以表明各國男人，女人與小孩之比例。

製圖要點

從上舉五圖解看來，製圖之要點有如下述：

（1）長條之大小須與紙之面積相稱。

（2）若所有的材料或數字爲數不多時，長條須有充分的寬度。

（3）若非表明時間的分配時，長條須取橫的排列。

（4）若長條不十分寬時，各條的排列須分離。

（5）各長條之左端須在一直線內。

（6）每圖解須有一題名——簡短而精采——若必要時，并須附以說明。

（7）在各長條之末端書出數字——此法蓋優於單用公共尺度，公共尺度在線解(graph)雖是必需的，而在圖解則不必要。

圖解之製造

圖解之製繪應十分整潔。製造圖解時，大小之適當，繪畫之精潔，與塗飾之美觀，其重要比圖解之精確爲尤甚。自然，精確不應忽視，但是圖解之主旨乃在給數字以一圖畫式的展覽，藉使各要點或各事實可以一望而知，故縱然製圖時容有少許的不精確，可亦無礙

圖解作用的宏旨。

在塗飾線的圖解時，須選擇最美觀的形式。若長條甚窄，則應塗爲黑色，如圖解 4 所示，不應留爲空白。若長條甚寬，則應以較淺的顏色塗之。若長條中分爲許多段，則可以同一顏色之深淺表示之。

製繪圖解，以方格紙爲最適宜，雖不是絕對的必需。若沒有方格紙時，在畫横的長條，則先繪横的尺度於紙之底邊，在畫直的長條，則先繪直的尺度於紙之左邊，有此尺度的幫助，則繪出所需大小之長條，是比較容易些。

第四章　面積法—圓形 正方形 長方形

緒論

面積法之目的在以大小不同的圓形，正方形或長方形表明不同的數量。若已知諸數本身不屬於一個羣體時，則可各以分離的平面形表明——或用數圓形，或用數正方形，或用數長方形。最常用的是長方形，正方形或圓形則較少用。圓形通常用以表明一個羣體中各數字的比量：此時圓形則分爲若干扇形。繪直的長方形而以橫線分爲若干部分，亦可達此同樣目的。

不屬於一個羣體的數字，用長方形比用圓形或正方形表明較爲適宜，其理由亦殊簡單。形之面積須比例於所給之諸數字，若爲長方形時，則此點甚易辦到，卽是使各長方形之底邊相等，而將其高比例於各數。但若爲正方形與圓形時，則須將正方形之各邊與圓形之半徑比例於所給諸數之平方根，正方形與圓形之面積始能比例於諸數。

因是，圓形或正方形雖可偶然一用以打破工作之單調，而面積之表示，用長方形比用其他平面形卻容易得多。

又是，就目力方面看來，比較底邊相等的長方形之面積比比較圓形或正方形之面積，要容易些。相等底邊的長方形，若其面積大

一倍，其高亦必大一倍。

可用面積表明之諸數

凡可用直線與長條表明的數字亦可用正方形，圓形或長方形之面積表明之。但是，若吾人表明的數量有多種時，最好是採用線條法，因其少佔面積故。若要表明者僅少數數目時，則以用面積法為較宜，因為此時若用線條法，所繪圖解將難引人注意而減少其效力。

其次，若所有數目甚多，每一數目均可分為若干部分時，則用圓形或長方形比用長條為較宜。例如，已知四個國的人口總數，幷已知各國人口按職業的分配數目，則應用圓形或長方形法。各圓形之面積代表各國之人口總數，而各圓諸扇形之面積則代表各該國各職業的人數。

數字之排列

無論為圓形，正方形或長方形，諸形均應按大小之差以為排列。面積最大者應位置在左邊，因吾人視線之移動天然由左到右故，幷因為一般人的心理總想先見出最大的數目故。諸圖形通常是排列在一水平線上；如圓形則應將其圓心或其最低之點位置於一水平線上，通常是不能上下重疊的。若係正方形或長方形時，則底線應在一水平線上。長方形有時可將其兩邊互相接觸，特別是所表項目甚少的時候。正方形或圓形則一定的須互相離隔。

有時兩圓可互相交錯，使其間有一部分為兩圓所共有。例如，

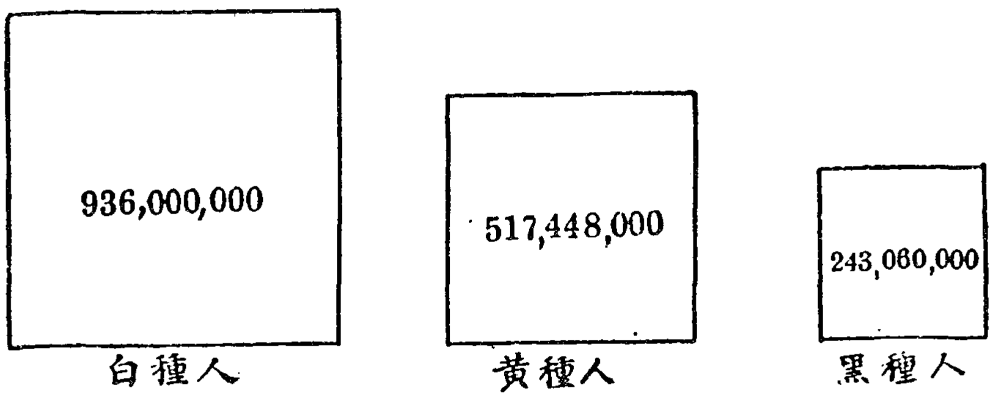
一種區域的人口按照其職業以爲分類時，其中有些人民或許身兼兩種職業。斯時此等人們便應以兩圓的共通面積表明之。但是我相信實際上此種方法是少有採用的，因不容易使兩圓交合的面積洽等於所需的面積故 —— 兩圓公有之面積須用幾何的計算始能求出。

在用正方形，長方形與圓形時，通常最好的辦法是將數字書於面積之內。尺度有時亦可註明，但這不是緊要的。雖然，我們卻無反對註明尺度的理由。若紙的面積於記載事實與圖形之後尚有餘地，最穩當的辦法仍是將尺度記出。

正方形

圖解 6.

一平方吋約＝517,450,000 人



圖解 6. 世界各色人種多寡比較

圖解 6 表示「正方形法」。此三正方形代表世界白，黃，黑三種人。方形內之數字大約指示每種人之數量。三方形之邊，如爲 1.3,1 與 0.65 吋。此三數的平方相比，適等於人口的三數字相比。

因此，各方形之面積比例於該方形內的數字。正方形邊長之最簡便算法，首先求出三已知數之比例，為 936:517.448:243.060，其次求出此三數之平方根。此例之平方根為$\sqrt{10}\times 9.67$，$\sqrt{10}\times 7.20$與$\sqrt{10}\times 4.93$。此等平方根可以任何常數乘之或除之。若以$\sqrt{10}$除之時，則三平方根變為 9.67,7.20 與 4.93。此時正方形之邊便可以9.67",7.20" 與 4.93"為度。在上面圖解內，我取 10/72 為諸形之基邊。

玆再舉一簡單的例以解釋此法。假定三國之人口數為284,089,000;212,521,000 與 100,489,000。以正方形表明之，我們首先應找出此三數間之比例：即 284,079:212,521:100,489。其次找出此三數之平方根，即 533,461 與 317。則三正方形之邊各等於 5.33",4.61" 與 3.17"。

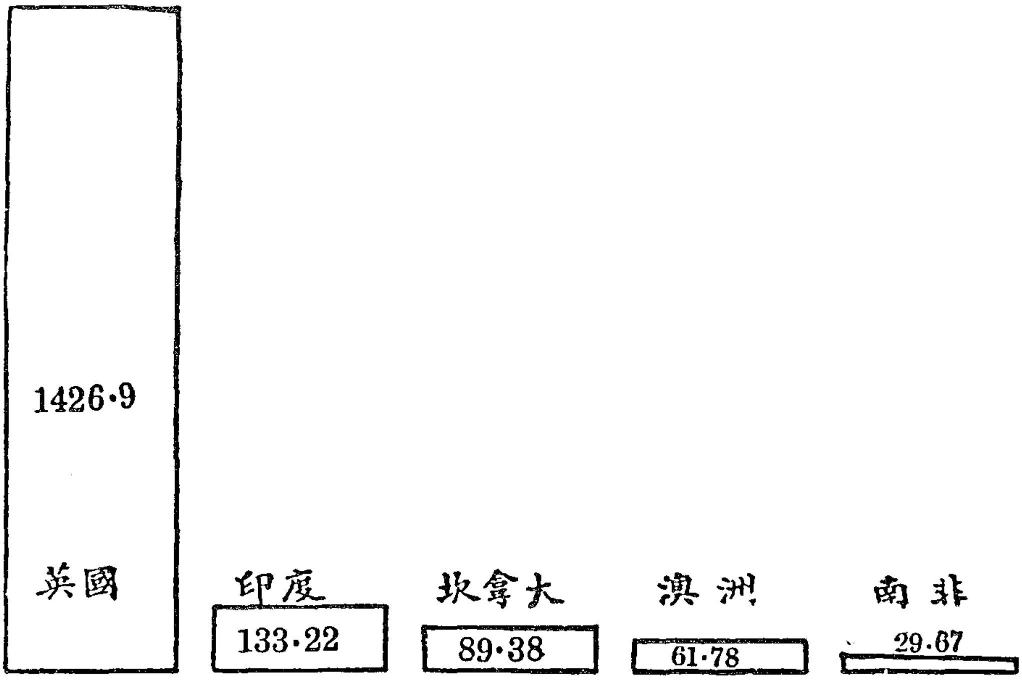
長方形

圖解 7. (Wealth and Taxable Capacity of India, Shah and Khambata, 1924)

在圖解 7 中，長方形法用以表明英帝國之收入在聯合王國(The United Kingdom)及四領地間之比例。收入數字係以百萬鎊計，已註於各長方形內。表示南非洲的長方形面積過小，故將數字書於外邊。各領地的名稱則書寫成一水平線，藉以增加圖解的美觀。

諸長方形之面積比例於收入之五數字。各底邊均為常數，其高

度則比例於諸數字，故其面積亦成比例。諸長方形之間留有相當距離；若吾人將其相互連接時，亦無不可。若將此五長方形互相重疊，則將完全成爲一種不同的圖解。假使帝國全部之收入祇限於此五數字時，這方法也可採用，而且是有意義的。但是吾人將另節討論此法。

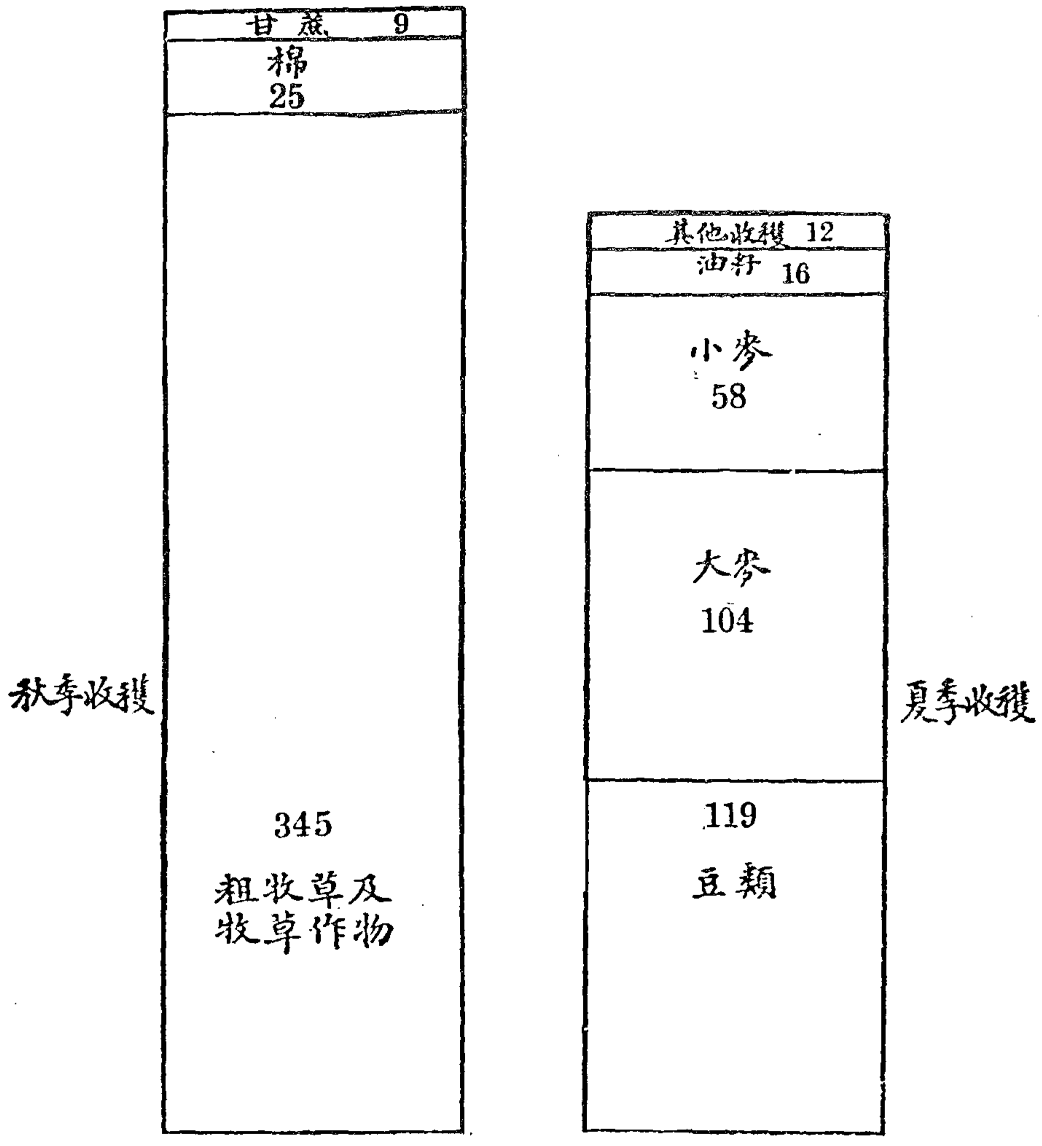


圖解 7. 英帝國之收入（以百萬鎊計）

圖解 8 (Village Uplift in India, Brayne, 1927)

圖解 8 解明上述重疊法之應用。各種收穫所佔之面積以各長方形（底邊均相等）之面積表明之。此諸長方形重疊起來即形成一大長方形。我們將「秋季收穫」(Rabi) 與「夏季收穫」(Kharif) 分爲兩組，意在以一個大長方形代表夏季收穫的地，以另一大長方形代表秋季收穫的地。收穫的種類與面積的數字則書於各長方形之中。

製此圖解時，首先繪出兩大長方形，其面積各比例於夏季收穫與秋季收穫之地積。其次將大長方形劃分爲較小的長方形以表明各收穫之面積。



圖解 8. 基岡（邦加布）縣各種收穫佔地之(Gurgaon)(Punjab)面積（以千英畝計）

假定A，B，C，D與E是五種夏季收穫，其面積爲a，b，c，d，與e，又假定P，Q，與R是三種秋季收穫，其面積爲p，q，與r，茲

試設兩大長方形之高度爲$\frac{a+b+c+d+e}{K}$與$\frac{p+q+r}{K}$，K是將高度化爲適當大小之任何數。然後在第一大長方形內畫出$\frac{a}{K}$，$\frac{b}{K}$，$\frac{c}{K}$，$\frac{d}{K}$與$\frac{e}{K}$之各高度，以表明各種收穫之面積，第二大長方形亦是同樣的作法。

在此圖解內，不僅能表明各種收穫之面積，且能表明在秋季收穫與在夏季收穫之總面積。

此法與其他方法比較，有一極大之優點在。此法甚簡單，容易了解，一望而可得比例的正確觀念，所佔面積有限，而且同時亦比較美觀，特別是著色的時候。

當着有一羣數字，而各數字又可再分爲數部分時，我們卽可採用此法。

下面是採用長方形法的一些例子，在諸例中用長方形法是比較容易而且有益。

（1）各國人口之比較，以及人口按照階級，職業，等等之分配。

（2）各國耕地之面積比較，以及按照收穫，守業或耕作制度，灌溉，肥瘠，地租，等等之分配。

（3）各國國富之比較，以及按照固定的及流動的資本，天然的與人爲的財富，等等之分配。

（4）各國所有貨幣數量的比較，以及金屬的，紙的，兌換的，與不兌換的，等等貨幣之分配。

(5)各國之收入比較，以及各來源之分配。

(6)家庭生產的與消費的費用之比較，以及各門詳細項目之分配。

(7)各國鐵路哩數之比較，以及按軌距或所有權之分配。

(8)一國人口按職業分配的比較，以及各職業中按年齡之分配，或自食其力的份子與倚賴份子之分配。

上述諸例是隨便舉的；牠們僅表明在何種重要經濟探討時，此等圖解可用而已。

圓形

凡可用長方形法的地方，圓形法亦可應用。在前一方法，各長方形之面積代表各羣數字的大小；在此法則以圓之面積代表牠們的大小。在前法長方形之各部分可代表一羣中諸數字之大小，在此法，圓之各扇形亦可以達此目的。

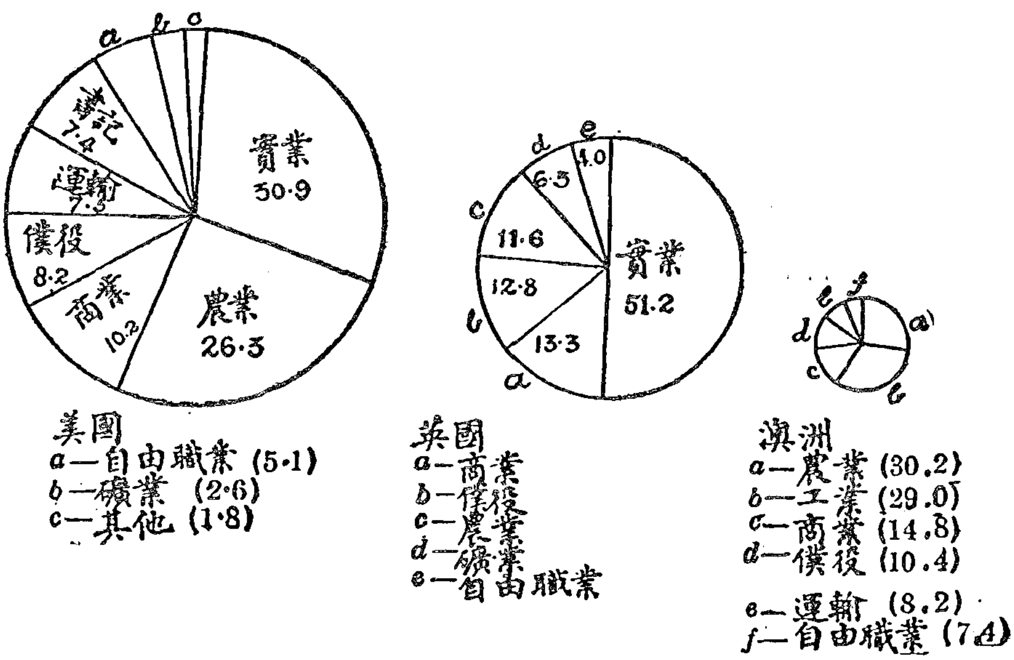
圖解 9 表明三國——美國，大不列顛與澳洲——的人口及其職業之分配。此三國人口之比較以圓形之大小表明之。各圓又分爲若干扇形，其面積代表從事各業所有人數之百分比率。

製圖　三國之人口爲 105,716，與 47,307 與 5,510(以一千計)。因此，諸圓之半徑應與此三數之平方根成比例。此三數之平方根約爲 325.20，217.50 與 74.25。於是我們可取等於 $\frac{325.20}{K}$，$\frac{217.50}{K}$，$\frac{74.25}{K}$ 吋之三半徑而作三圓。在此圖解內，K等於 435。於是人口之尺度爲 πr^2 平方吋 $=105,716,000$，或 $3.1416\times$

$\left(\frac{325.20}{435}\right)^2$平方吋＝105,716,000，或1平方吋約＝60,209,000。

人口總數：美國 105,716,000　大不列顛 47,307,000　澳洲 5,501,000

尺度一方吋＝60,209,000　　諸圖中之數字是全人口之百分率



圖解 9. 三國人口按職業之分配

在劃分各圓爲扇形，使其面積與各業人數成比例時，吾人須記着，扇形之面積隨其在圓心所成之角度而異。因此，圓心角須使其與所給之數字成比例。在我們的例中，各業的人數以對全人口數之百分數表明之。所以，欲找出相當角度時，每一百分數須乘以 3.6。（諸百分數相加共爲 100，諸角度相加亦應爲 360）。

扇形之排列　首先在圓形之上半部作一垂直的半徑；以此半徑爲出發點。其次，按數字由大而小以作諸扇形，使最大之扇形在垂直半徑之右邊，最小的在左邊。設若有一題名爲「其他」二字時，如圖解 9 之所示（見表示美國的圓形），則應置之最後。若面積許可

時，數字與說明均應書於扇形之內。若扇形過小，則可以字母 a,b,c 等等表明之，而註釋於圓形之下。

圓形法之缺點　圓形法之引人注意雖不亞於前述方法，其優點則不如前法之多。第一，計算各圓之半徑時非常困難，而且卽使十分愼密的計算，所作圖解亦難如前法之精確。第二，計算角度與繪畫角度費時甚多。末了，尺度之計算尤爲困難。此法儘有諸種困難，可是牠卻常爲人所採用，這或許是牠比長方形法較爲美觀的原故罷。

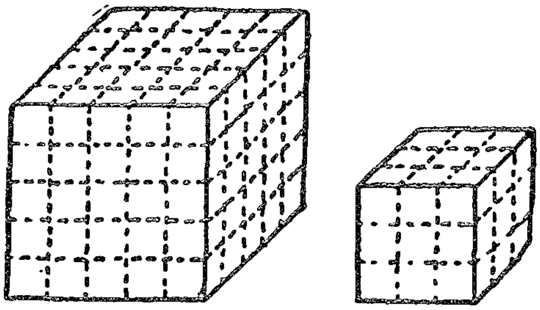
第五章　體積法

緒　論

體積法之應用不如線條法與面積法之普通。其原因已在前面說過。普通辦法是用方體或球體以其容積來表明數量。以各種方體或球體來表明數量之大小，是比較容易，欲將方體或球體劃分爲構成之諸部，則殊困難。雖然，體積法亦有一顯著之優點在。一種實體常能予人以更深的印象，及給數量更實在的觀念。在實際生活中，平面形狀是極少的；一種東西都恆有三次元的關係，故實體形狀是更爲眞實，當平面形狀或許於無數學頭腦的人了無影響時，牠亦能給出深刻的印象。自然，利用實體形狀來比較數量是不如是之易，可是，若當已知諸數之間有重大的差別，而吾人的目標亦在注重此差別時，採用立體表明法或許是更好些。

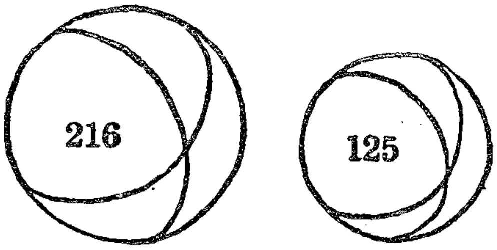
在此法中，雖是正方體與球體佔有最大部分的領域，有時亦可用長方體或許多球體構成的尖塔體。在用正方體或長方體時，若將正方體與長方體劃分爲若干等量的小方體，則可使圖解的表現力大增。在此種圖解中，大小之比較，可從計算每一大實體內所含之小方體數而得。假如有兩數於此，其比例爲 8:27，以兩正方體表明之，則在一正方體內，我們有八個小方體，在另正方體內，有二十七

個小方體。換句話說，此兩正方體之邊等於 2:3（即 8 與 27 之立方根）。兩正方體之邊須與牠們所代表的數字成比例。爲便於計算體積起見，諸立體都可分爲若干相等的小方體。

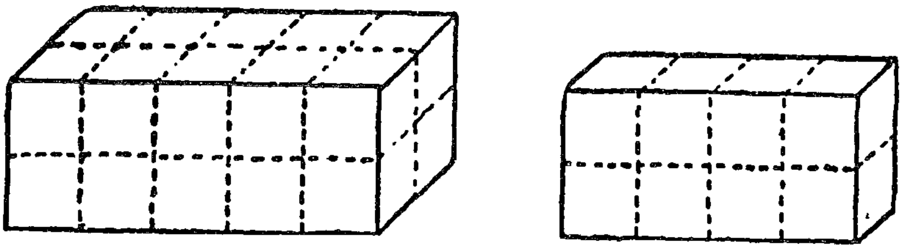


125　　27

圖解 10



圖解 11



20　　8

圖解 12

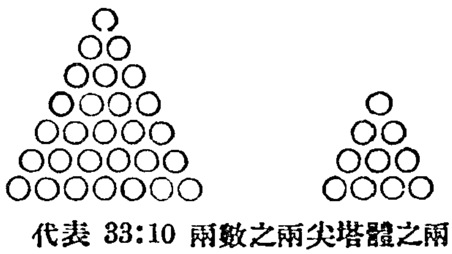
球體之劃分，其法亦類似，從球心畫若干線於球面。可是球體的製繪更爲困難，其形式亦不如是之有趣味。在用長方體與正方體時，往往再分爲若干小方體，而在球體則不再分爲若干小球體。若要再分爲小球體，則必須各大球體內所含之諸小球體容易計數，便

於比較大球體之容量，或便於表明每組內各數之比較大小，才有意義。

欲達此目的，則另有一方法出焉。卽將若干小球體疊壘爲尖塔體，亦可更有力的表示數量的比例。此種尖塔體有相等的三角底。圖解 13 表示兩尖塔體之各底係以若干小球體造成。其一塔之底係二十一個小球，其另一塔之底係十個小球。以全塔計，其一含有五十六顆小球，其二含有二十顆小球。大塔之底含 21 小球，第二排爲 15 小球，其餘諸排爲 10，6，3，1 小球。在小塔則諸排之小球將爲 10，6，3，1。若兩已知數之比例爲 56:20，卽是 28:10，則可以上述兩塔體代表之。

雖然，若非我們將某一塔體缺而不完，欲確切代表諸數的比率，是頗不容易的。此法之用甚不普通，鄙意因製圖困難之故，吾人很可盡量的避用此法。

正方體法已用於圖解 10。兩正方體容量之比爲 125:27。方體之邊長爲 1.0"與0.6"；所以容量是 1 與 0.216 之立方吋，或其比例爲 125:27。將每方體內分爲若干等量之小方體，圖解因此增加了效力，而正方體容量的計算亦變爲容易了。

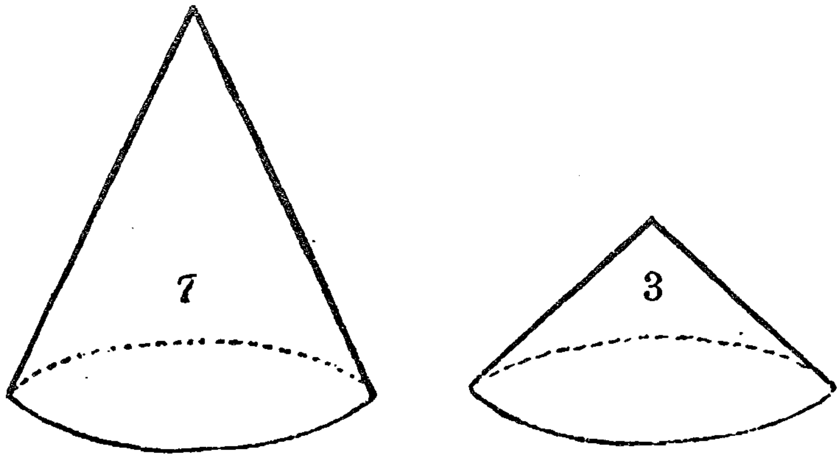


圖解 13. 代表 33:10 兩數之兩尖塔體之兩底。

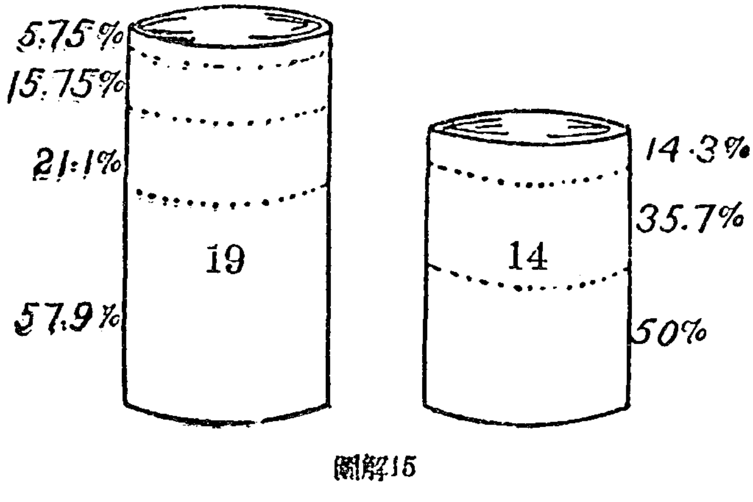
在圖解 12，我們採用長方體。每長方體再分爲若干等量之小

方體。大長方體之小方體爲二十，小者爲八。所以，此兩長方體容量之比例爲 5:20。用此法時，最好使兩長方體之底有相等面積，而變動其高。因爲若兩底相等，則體積便與該體之高度成比例，這樣可使立方量之計算比較容易。

球體法見於圖解 11。二數之比例爲 216:125。作兩球體代表此二數時，須先算出 216 與 125 之立方根。此二數之立方根爲 6 與 5 。故二球體之半徑爲 0.6" 與 0.5"。作 0.6" 與0.5" 半徑之二圓於紙上，並橫跨圓面作數曲線，藉以表示此爲實質的球體。



圖解14



圖解15

在所有實體形狀中，長方體或許是最能表示的，因爲只有長方體時，體積纔能隨一數而變動。在正方體，體積隨邊之立方以變。又是，在球體，體積隨半徑之立方以變，惟有在長方體，若底不變時，體積隨高度而變。

我們試再研究數種圖解。圖解 14 與 15 以圓錐與圓柱之體積表示數量。圓錐或圓柱圖解有特別優點，因爲牠與長方體一樣，體積隨體之高度以爲變動。（附註）圓柱之體積等於底之面積乘高，故若底之面積不變時，體積僅隨高度而變。圓錐之體積等於底之面積乘三分之一之高，故此時若底之面積不變，體積亦僅隨高度以爲變動。所以，若一圓錐或圓柱爲另一圓錐或圓柱之高度一半，其體積亦將等於另一圓錐或圓柱體積之一半。上面圖解中，兩圓錐代表之數，比例爲 7:3，兩圓柱代表之數，比例爲 19:14。

圓柱或圓錐之底有多種的作法。例如，其底，除圓形外，可爲三角，爲正方，爲五邊，爲橢圓，爲凸形，或其他種種，可是作法仍是一樣。若底不變時，體積亦隨高度而變。

圓柱又可横分爲若干部，各部之體積與其高度成比例，此爲圓柱法特別的優點。在圖解內，虛線表示兩圓柱體所代表兩數之構成諸部分。

其他圖解法

我們已討論了一些圖解方法，這些方法都是經濟家，統計家及

（附註）圓錐與圓柱之底爲一圓形。若底不變時，體積隨高度而變。

其他學者所常用的。截至現在，我們已用了幾何的圖形來表明一羣，一班與一組的數量。我們已區分此等圖形爲三類，稱爲線條形，面積形與體積形。前二種方法是很容易，而且很能踐履明白簡單的條件。體積法我們已見出，雖是比較困難，卻常更能引人入勝，並因其爲實體故，能給予所代表之事實以一更活栩與更眞實的觀念。當我們欲將各類間之鉅大差別特別表露時，體積法是最最適宜的方法，可是若需要更大的精確時，則以採用他法爲較宜。

除此等幾何圖形之外，統計家又常採用他種的圖解——卽實在物體之形。自然，這類圖解，要可用體積法時，始可適用。此法之目的在給人的目光以更大的刺激，並使圖解更有生氣與精采。

例如，表示各國對於肉的生產與消費時，我們可用各種大小的豬形。又或如表明各國的蒸汽馬力，我們可用車輪的形狀。砝碼的形狀有時用來比較世界各地產鐵或類似之物之量。

用此種圖解時，圖形少有表示體積的；卽是，我們於決定數量時，不須考察圖形之立方或體積。有時數字用表列出，而以此等圖形之面積代表之；可是更普通的，則僅以圖形之一面代表數字。換句話說，通常辦法是只將圖形之長，寬或高比例於已知數字而已。

採用此辦法之理由甚爲顯明。一隻豬形是過於複雜，不容易算出它的平面面積。又是，觀者比較此種圖形之長或高甚爲容易，欲比較其面積則幾不可能。

因是，如豬形圖則其長度應比例於產肉之數字。可是若圖解幸而更近於幾何，如車輪形時，則其面積須使其與已知數字成比例。

圖解 16 表明印度各省人口之分布。自然，爲簡單起見，有些省未列在內。可是圖解卻能明晰的解釋此法。各圓形之面積比例於各省的人口。爲使圖解更爲特異與有力起見，各圓之中加繪以人面——作人面者何？以其代表人口故。

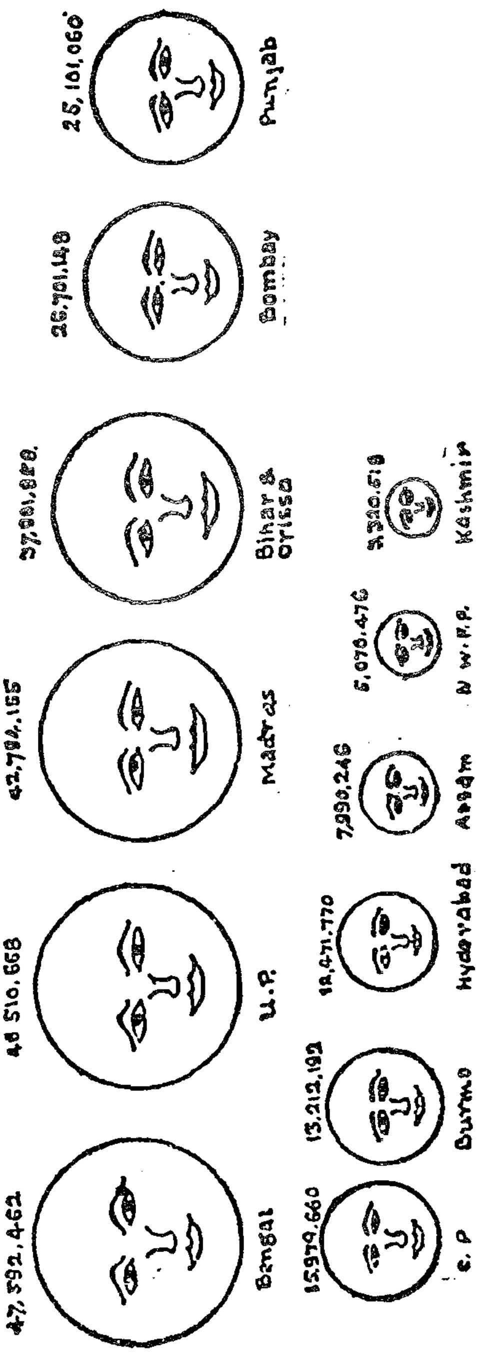
印度紡績業之進展則以圖解 17 表之。紡績工廠各年的數目，不以平常長方形表明之，而以類似工廠之形爲其代表。各形上面之煙囱在使形態更爲逼眞。各形之面積比例於其內面所書之數字。製繪此種圖解是不容易的事，因爲使此形態規合於一定面積，甚爲困難。可是若用方格紙製圖，則工作是比較容易些。

各國用於酒類之消費表示如圖解 18。此處選擇之形爲酒瓶，因其代表飲料之消費故。各瓶之面積比例於消費之數。各瓶又以虛線再分之，以表明總數中各酒之消費數。消費數亦可以瓶之容量表明之。這個或許是較好的圖解法，但是不易繪製。

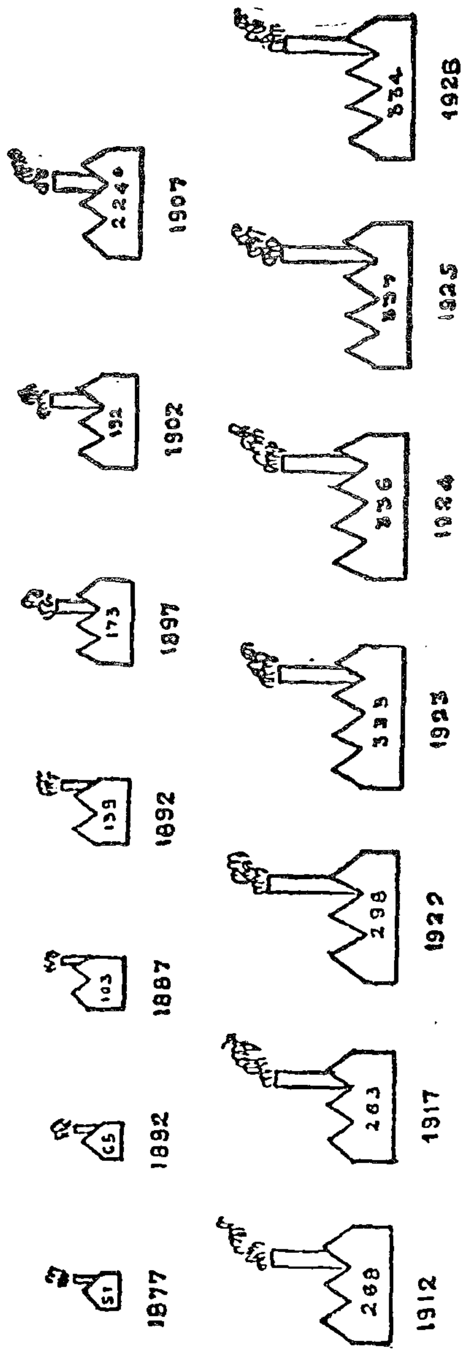
此種高度畫圖式的圖解不常常可容類別的再分。例如人口的圖解不能將圓分爲若干部分，以明職業或年齡之分配。設若將圓再分，則人面之表現必致破壞無餘。在此種圖解中，能作再小之分配，是不極常有的事。

上列三圖解意在解明實在圖形之諸原則。此類圖解之製繪尙有多種。（附註）吾人應記之要點是：若已知諸數差別不大，最好是用平常的圖解法，若是差別甚顯著時，始可採用此種圖畫式的圖解

（附註）參看 Dictionary of Statistics, Mulhall（第四版）；又 Studies in Statistics, Longstaff.

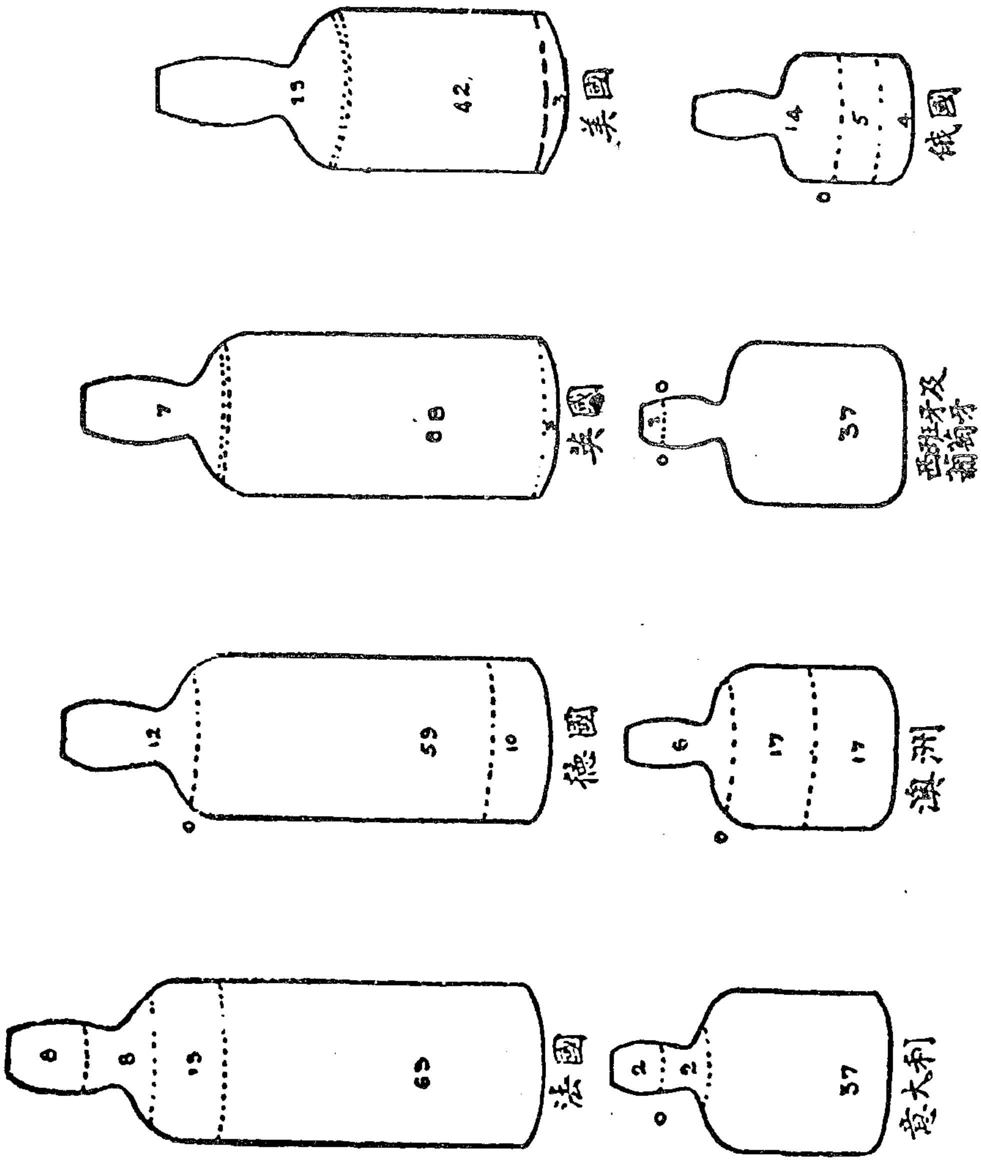


圖解 16 1922 年印度之人口



圖解 17 印度紡織工業進展之狀況（圖內數字是工廠之數）

法。吾人之所以如此，理由是在此種圖畫式的形狀中雖難得到極大的精確，但若數量之差別甚大，稍不精確亦無大害於諸數間之比例。



圖解 18. 酒類消費比較，內分強性酒，菓酒，啤酒，及他種酒（以百萬金磅計）

練習

下列諸組數字試作圖解表明之。每一組數字，應選擇最適當的圖解法。

（1）各國收穫之面積（以百萬英畝計）

	1820	1889
英聯合王國……………………………	19	23
法蘭西……………………………	48	60
德意志……………………………	37	58
俄羅斯……………………………	120	183
奧國……………………………	50	60
意大利……………………………	20	35
西班牙……………………………	25	32
荷蘭……………………………	4	5
比利時……………………………	3	5

（2）一八八八年各國農業資本之比較（以百萬磅計）

	土　地	資　本	雜　項
英聯合王國…………………	1,873	185	229
法蘭西…………………	2,688	218	323
德意志…………………	1,815	262	230
意大利…………………	1,182	83	140
西班牙…………………	984	95	120
奧國…………………	706	106	90

（3）一八八九年各種收穫之比較（以千蒲計）

	英格蘭	蘇格蘭	愛爾蘭
小麥…………………	71,000	2,200	2,700
燕麥…………………	76,200	37,200	50,600
小麥…………………	59,600	7,800	7,300
豆類…………………	14,500	500	200

(4)各國成年男子高度之比較

	玻非利亞	撒克遜	意大利	比利時	瑞典
62″以下 …	6.4	15.0	14.0	13.6	1.8
62″—64″ …	20.9	17.8	20.8	12.1	11.3
64″—66″ …	34.3	29.2	26.2	26.7	14.0
66″—68″ …	22.8	22.9	21.2	26.8	37.1
68″以上 ……	15.6	15.1	18.3	20.8	35.8
	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

(5)一八九〇年世界各地牲畜之數額(以千頭計)

	馬	驢與騾	牛	綿羊	山羊
歐洲…………	34,865	4,900	104,166	214,499	21,546
亞洲…………	4,443	1,061	70,850	71,669	24,055
非洲…………	721	1,068	8,203	60,820	9,220
美洲…………	21,920	3,286	117,249	143,581	4,851
澳洲…………	1,520	3	9,339	98,336	299

(6)各季之死亡比較(以千數計)月日不詳

	春季	夏季	秋季	冬季
奧地利亞	288	205	227	280
比利時	279	218	220	283
英格蘭	275	240	238	247
法蘭西	260	227	243	270

(7)迄至一八七四年止十年內男女之死亡數。男姓死亡數與女姓死亡數100之比。

英格蘭……………………107
瑞典……………………104
玻非利亞…………………107
奧地利亞…………………107
意大利……………………106
比利時……………………106
匈牙利……………………108
普魯士……………………107
法蘭西……………………107
荷蘭………………………104

(8)迄至一八七四年止十年內鰥婚寡死亡數之百分比

	法蘭西	普魯士	比利時	荷蘭	瑞典
獨身者………	50.5	64.1	59.4	62.8	55.2
已婚者………	20.5	23.1	25.0	23.2	26.7
寡居者………	19.0	12.8	15.6	14.0	18.1

(9)金之產額(以千磅計)

	美國	澳洲	俄羅斯	其他
1851 ………	11,600	1,400	3,600	2,200
1852 ………	12,700	12,200	3,600	2,200
1853 ………	13,700	13,000	3,400	2,200
1854 ………	12,700	9,600	3,400	2,200
1855 ………	11,600	12,000	3,500	2,200
1856 ………	11,600	13,200	3,500	2,200
1857 ………	11,500	11,600	3,900	2,300
1858 ………	10,600	12,100	3,900	2,300
1859 ………	10,500	12,200	3,600	2,300
1860 ………	9,800	11,200	3,600	2,300

(10)棉紗之進口數及印度產額（以千磅計）

	進口數	印度紗廠產額
1913—14 …………………………	44,171	682,777
1914—15 …………………………	42,864	651,885
1915—16 …………………………	40,427	722,425
1916—17 …………………………	29,530	681,107
1917—18 …………………………	19,400	660,576
1918—19 …………………………	38,095	615,041
1919—20 …………………………	15,097	635,760
1920—21 …………………………	47,333	660,003
1921—22…………………………	57,125	693,572
1922—23…………………………	59,274	705,894
1923—24…………………………	44,575	617,329
1924—25…………………………	55,907	719,390
1925—26…………………………	51,688	684,427

(11)疋頭進口總額各國所佔之百分數

	1913—14	1924—25	1925—26
英聯合王國	97.1	88.5	82.3
日本	0.3	8.5	13.9
美國	0.3	0.5	1.0
荷蘭	0.8	0.6	1.1
其他各國	1.5	1.9	1.7

(12)印度之進出口貿易（以千萬盧比計）

	1913—14	1919—20	1920—21	1921—22	1922—23	1923—24	1924—25	1925—26
進口	183	101	142	124	138	120	137	143
出口	244	198	172	182	214	240	250	246

(13)印度種茶之面積（以英畝計）

	1920	1922	1923	1924	1925
亞沙門(Assam)	420,200	412,100	411,900	413,300	416,500
印度其他地方	193,800	203,200	203,500	204,400	211,100
南印度	88,400	92,900	95,800	97,000	101,200

(14)印度煤礦工人之數，逐日在煤田作工之人數

	1924	1925
Assam	4,464	4,199
Baluchistan	1,108	951
Bengal	43,621	42,781
Bihar, Orissa	128,523	114,934
Central India	3,157	2,759
Central Prorinces	8,125	9,174
Hyderabad	13,590	12,701
Punjab	1,575	1,579
Rest	143	184

(15)印度之乘客數（以千數計）

	I	II.	Int.	III
1910	778	2,962	11,033	332,462
1913—14	812	3,461	12,371	410,960
1925—26	1,169	10,487	14,009	601,778

(16)印度鈔票之流通概數

1914	三月份························	66,12	十萬盧比
1915	三月份························	61,63	十萬盧比
1916	三月份························	67,73	十萬盧比
1917	三月份························	86,38	十萬盧比
1918	三月份························	99,79	十萬盧比
1919	三月份························	153,46	十萬盧比
1925	三月份························	179,61	十萬盧比
1926	三月份························	193,94	十萬盧比

(17) Bairampur 村之土地收入及所付捐稅

年　度	土地收入 Rs.	捐　稅 Rs. As. Ps.	總　數 Rs. As. Ps.	每畝之稅 Rs. As. Ps.
1914—15 ···	785	121 0 0	906 0 0	3 10 5
1915—16 ···	925	142 0 0	1,067 0 0	4 8 8
1916—17 ···	925	142 0 0	1,067 0 0	4 4 10
1917—18 ···	923	142 0 0	1,065 0 0	4 3 6
1918—19 ···	913	140 2 6	1,053 2	3 4 6

(18) Bairampur 村業契之狀況

年度	業　契　之　數	每契之平均面積（以畝計）
1851—52························	605	0.540
1884—85························	1,256	0.270
1890—91························	1,517	0.225
1894—95························	1,752	0.180
1898—99························	1,632	0.200
1902—03························	1,736	0.181
1906—07························	1,740	0.181
1910—11························	1,546	0.216
1914—15························	1,582	0.212
1918—19························	1,598	0.210

(19)亞洲各國之鐵路比較

	總哩數	每千人所佔之哩數
英屬印度	38,270	1.5
錫蘭	743	1.5
荷蘭東印屬	4,412	0.9
法屬安南	1,289	0.6
菲律賓群島	792	0.7
暹羅	1,486	1.5
中國	7,770	0.2
日本	10,414	1.8
馬來各國	1,072	8.1

(20)按年齡比較之瘋病人數（數字是依據一九二三年美國各醫院之統計）

年齡	人數
15　以下	634
15—24	14,110
25—44	109,757
45—59	82,240
60—74	45,429
75　以上	9,795
年齡不詳者	3,900

第六章　線解法(Graphs)

線解與圖解之比較

前面各章係討論圖畫式的圖解法，現在我們要簡單的研究他種以統計數字作圖解之法。前面所云，吾人只限於有圖畫意味的各圖解，如幾何學中平面或立體之諸形式，抑或日用物件之諸形式。可是我們現在要研討的，是怎樣於圖畫式的圖解以外，利用其他圖解之法。

我們已命本章之名爲「線解」(graphs)。線解非他，亦圖解而已；不過爲更明晰起見，我們不稱之爲圖解，而以「線解」名之。事實上，我們有兩種圖解；圖畫式與非圖畫式的。後者我們寧稱之爲線解。

我們在後面漸次可以見出，此兩方法有一些重要區別在。牠們應用所需的條件不同，牠們的製繪原則亦是兩樣。所以有些統計數字以圖畫式的圖解表示之爲最宜，又有些統計數字則以線解表示爲適當。

線解應用之場合

要給線解以一簡單而合符科學的定義，殊屬困難。因此，我們

不汲汲於給名詞的邏輯定義，而相信在我們研究的進程中，此名詞的正確意義將漸次展顯於吾人之前。雖然，在目前我們亦可暫構一種頗合實用的說法以解釋線解爲何物。我們可說線解是一種以若干點表明之線，當一數之時間或性質發生變化致此數亦變動時，若時間或性質之變化係由與一固定垂直線所成之垂直距離表示者，此數之變動亦將被與一固定水平線所成之垂直距離表明出來。我們可以見出，此說是缺乏科學的精確的，但是可用以作線解之一種初步解釋。

在研究圖畫式的圖解時，我們考察了該類圖解所適用的諸場合，並在研究該圖解之各種方式時，我們更特別考察各方式之使用。現在研究線解，我們亦應同樣的考察線解法所能適用的場合，或換言之，何種統計數字始可用線解來表明。因爲，我們說過的，不是任何一羣數字都可用以構成線解。

簡單的說，線解法應當用以表示一類的或一數列的數字，至於表明「組」(classes)的數字，則以圖解法爲較適宜。自然，類與數列亦可用圖畫解式的圖解來表明，可是線解法則不適於表明「組」的數字。其理由以後可以見出；目前我們考察一下「類」(group)「組」(classes)與「數列」(series)之區別是什麽。

類　若干人或物，若他們至少有一重要相同之點，而其特徵，屬性或附件之互相差別是可度量者，則謂爲屬於一羣之分子。故一國之人民可構爲一類，因爲他們雖同屬於一國，其年齡或所得卻是各不相同的。又是，一國鋼鐵業的工人可構爲一類，因爲他們雖是

同爲一種實業的工人，而其能力卻各不相同的。所以，設若我們有一表，例如表明一國人口按年齡之區分，我們稱此表爲「列表之類」(tabulated group)，若是需要的話，我們便能從這些數字製成線解。我們可以見出有兩類數字：一是表明年齡，一是表明各年齡之人數。此兩數目（數字）是變動的。我們可將年齡的變動表明在紙上的橫軸上，而將人數的相對變動表明在直軸上。我們在以下各頁尙要加詳的硏討這些原則。

組　若干人或物，若其屬性或附件互相差別而不可度量者，則可構成爲組。例如，我們有一表記明各種實業的人數時，則我們謂此表爲組之記載，因各份子所引爲差別之附件或特徵，卽其所隸之諸實業，不可以度量故。我們能夠描述諸不同的實業，但我們卻不能度量牠們。所以有些人屬於鋼鐵業，又有些人屬於水泥業，可是我們不能說何種實業有較大的數量。自然，我們能夠找出何種實業是較大，何者是較小，因而我們能夠得着各實業大小之比較觀念，但是卽使如此，我們仍不能予各實業以數字的度計。凡構成一「組」之諸數字不能以線解表明之。

數列　任何類之數目數量或價值，若有定期的記載時，則我們稱此類數字爲「數列」。如一定地方每日或任何定期或不定期，所記之溫度數，則是一「數列」之數。同樣的，若記載任何特定面積每年所產黃金之額，這也是一數列之數。此時基本的要點是，所記載或考察之事物，除了牠們出現的時間不同外，在各方面是大體一樣的。如此類的數字被稱爲統計的「數列」(series)，以線解表明之，

是很容易而且最方便。時間表明在線解的橫線上，變動的數字則表明在去此横線之變動垂直距離上。換句話說，數量係以垂直線表明。

類與數列可以線解表明

由此看來，所有各種表列的比量或數字中，惟有類與數列之數字始可用線解的形式以達人之眼簾。吾人祇須一察類或數列與組之主要的及根本的區別，便不難見出組所以不能用線解表明的原故。一類中之分子在性質上或特徵上之差別是可以度量的，不僅是比較的，而且可用任何一定尺度之標準單位來表明。數列之分子差別在於時間。組所有之分子，其引爲差別之屬性是不可度量的。在我們線解的横尺度或線上表明的卽是各分子差別之屬性。

若以線解表明組，勢必將其不可度量之特徵表明於横線上。例如將各區域，或各實業或各職業表明於此種尺度之上。其結果將是，從尺度之左，以至右，我們將得着一些毫無關連的數字。譬如何區域或何實業應列在第一，是很難而且不能說的。又是，在各實業之間無連續的關係，所以由此種實業到彼種實業便發生一種突然的變動。我們排列各實業的唯一辦法是按照各業所雇工人多寡抑或按照任何其他數字大小，以爲等差。卽使如此，我們亦不能得到完全的連續性；我們只能得到等級的累進的情狀表露於我們的尺度上，如斯而已。因此之故，凡屬於組之數字應以圖解式表明之。

在他方面，我們若以類或數列之數字製爲線解時，則在横尺度上有一多少連續的情形。故以日，星期，月，年或更長的時期記於尺

度之上，可給吾人以一完全的連續。例如每年之生產數則可以線解表明之，因其由此年到彼年，其間并無間斷故。

又是，在一類之中，例如按高度分配的人數亦可以線解表明之。在線解的橫尺度上我們應記出各高度，假設變動以吋計。所以此時有一天然的連續性在。第一，較低的應置於較高之前，第二，從此高到彼高有一連續的上升。

自然，此外有些數類是缺乏這種完全的連續性的。譬如茲有一類係各種房屋的數目，各房屋按所有房間之多寡以為等級，有些有四間，有些有五間，但沒有三間又四分之一的，與三間又半的，等等。此時我們有一累進的數字及部分的連續性，但不是完全數學的連續性。

於是，我們可說，我們若有一宗數字，可按其特徵分為等級，其特徵之連續變動多少有一些數學的確切性時，則可據此以製線解。

在此詳切研討之後，我們已來到一結論：（用數學的話來說）線解所適於表明之數，必是多少連續變數之函數。此種連續變數表記於線解之橫尺度上。

因為此種理由，所以線解之諸點前後互相連接成為一線，若不能連接，嚴格說線解即不能成立。并特為此種理由，我們不能將表明「組」數的圖解中如長條或長方之頂點連接起來。即使此種圖解表明的是類或數列之數字，亦不宜將其頂點連接，這不僅因為恐毀壞了圖解的美觀，且因為用此種作法的，吾人另有一種方法，即線解法。雖然，在科學的根據上，連接表明類或數列諸圖解之頂端，

似亦無嚴重反對的理由。

於是，我們見出線解有許多可能的用途——卽是許多統計表可改製為線解。我們現在將討論線解法之各優點。

採用線解法之諸理由

應用圖畫式的圖解之所有優點，亦是應用各種線解之優點。應用線解之首要理由，如各種圖解一樣，在以圖畫的形式迅急的訴於人之眼簾，藉以幫助了解一宗數字。圖畫能使我們一望而注意到所代表的現象之顯著特質。（附註）此外，線解能將人眼在一大套數字中不能察覺的諸特質表顯重要，幷常能發人之所未發。如一數列內諸數之關係，諸數之一般變動，諸數之漸升與漸降，以及關於一數列數字間之其他重要事實，均能藉線解而精詳表出，以其線之尺度表明諸已知數之大小。

鮑勒(Bowley)（註一）告訴我們說：『當我們比較多種數目或複雜的數字之羣時，往往不能握住牠們的全部意義，不管牠們是怎

（附註）馬謝爾(Alfred Marshall)在一八八五年國際統計協會(The International Statistical Congress)所讀的一篇論文中，曾這樣稱述線解法：『統計的線解法雖在表顯的精確上較遜於數字法，其優點則在能使人的目光立刻見出一長串的事實。線解法有諸種形式：但是牠的主要形式普通被稱為「曲線法」。……當我們所考察者若僅係一組事實時，則一望而知諸事實的詳細情態之便利，不是第一重要之事：此時精確性比表顯的容易與迅速尤為重要；而自精確性言，線解法卻遜於數字法。可是若我們要比較多組事實於一起時，容易與迅速是很要緊的；因為若腦筋在理解一組事實關係過長時，同時有忘掉其他全部事實之虞：線解之首要職務在於改進統計各組事實之比較。』——見皮古(A. C. Pigan)所編之 Memorials of Alfred Marshall

（註一） Elements of Statistics, A. L. Bowley

様明晰表列出來的。』與乎巴格拉弗(Palgrave)的經濟學辭典(The Dictionary of Political Economy)亦說，線解『在指揮注意力於所表現象之諸特著事實這一層，大致比將數字列爲表式的辦法，有較多的效果。』蔣斯(Jones)亦說：『線解法不僅能產出所察數字的一種有教訓的畫圖，且可有時有效的用來引導人們走出經濟的或類似的繁賾論辨。目光是一極有準備的學生，牠見着什麼，便馬上告訴到腦筋；可以說，它是理解力的一同盟者。』（註二）

設若我們有一數列數字是按期記載我們的觀察，例如許多年度中一種商品之逐年價格，據此製成的線解，將立刻使我們見出，在整個上價格是上升或下降；是否有週期的擺動，即是，價格之昇降是否有約略規則的時距；價格之昇或降是否漸次的或突變的；以及價格之昇或降是經過一長的或一短的時期。欲發見此等事實，最要者是線解之製作須愼密的畫在適當的尺度上。

又是，設若吾人有一類數字，譬如一國人口按年齡之分配，表明此事實之線解可指示吾人在各年齡範圍內人數之如何變動，何種年齡包含最大的數目，以及此種數目是漸次的或急遽的昇與降。

線解之用益尙不止此。設若在同一軸線上只能繪一種線解，則線解法之優點或許不能逾於上述諸法。「範數」(Mode)與「中位數」(Medium)以及其他此類事物之計算亦可利用線解表之，但這個不是另一種實在的優點；此不過是上述諸優點而從另一觀點的看法。可是所幸者，我們能夠在同一平面上繪出兩種或多種線

（註二）A First Course of Statistics, Jones（1921）。

解，使我們能得各線間的關係之明確觀念。用統計的話來說，我們可說，這樣製繪之線解可指示吾人兩數列已知數間之連帶關係。有些時候，兩數列依多少確定的規律作同樣的變化，即是，一數列之數昇或降時，他數列數亦顯出昇或降。又或有這種情形，此數列昇而他數列降，與乎他數列昇而此數列降。但是在數字表上，無論是怎樣精愼的排列，決不能表現兩數列的此種關係，更不能確定諸數字變動中所有之同樣等次。換言之，數字表決不能指出兩數列間連帶關係之等級。若是線解是適當製繪的，則目光便能很方便的同時見出兩線解之所有變動。例如，設若我們有主要食物價格之數字，以及結婚的數字，若製爲線解，我們便可見出此線解上昇則他線解下降，此線解下降，則他線解上昇。（附註）這個表明物價增高則結婚數減，在他方面，物價減低則結婚數增高。同樣的，死亡與生產的關係，進口與出口的關係，物價與雇傭的關係，失業與犯罪的關係，以及此等相關的現象，通可藉線解之助而容易發現出來。

可是，我們不是說關係的確切程度能以此種線解度量之。我們的目的不是在藉線解來發現關係的確切程度。在僅只需要確切的場合，線解是沒有多大價值的。線解決不能代替「表」(table or schedule)的地位；牠不過補充此等數字之不足。所以，兩種線解繪在一起，可以表明牠們所代表諸數字的關係，但若需要更大的確切程度或相關程度之數字比較時，則須再將統計的計算作出。

（附註）參看 Social Consequences of Business Cycles, by M. B. Hexter 1925，可見出許多表明社會事實間連帶關係的有趣味的線解。

我們不僅從已知的諸數列字能作出數種線解，并能將諸數字首先計算一道，然後本其結果以製線解。例如，我們可將已知諸數的平均數求出，然後本之以作線解；又或可作一線解以表示（活動的）平均數之波動。在有些時候，我們可以從兩數列「數尾」(lags)或「數首」(leads)不同諸數間所有「相互關係之係數」(Coefficients of correlation)以作線解。又是，線解之製繪，可以不根據實際數字，而根據諸數字之對數。凡此類線解都有其特別用途與其特有的優點。

第七章　類之簡單線解法

線解之作法

在前章我們已研究應用線解之有利場合。第一層，我們已見出線解之製繪可根據「類」或「數列」。現在我首先取類來作線解，然後再作數列的線解。在數列中用線解的時候最多，而線解的最大用處或許卽在數列時表見出來。

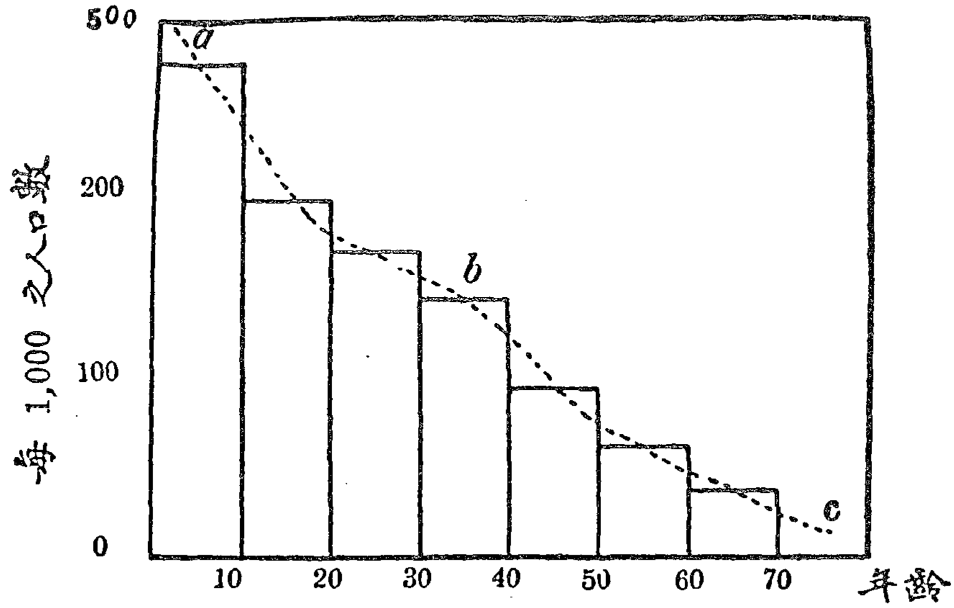
在一「類」中，我們已見出，須有兩串事實存在。例如，玆有一「類」係記一國人口按年齡分配之數，牠表明了兩種事實：第一是年齡之分配或年齡之類，如零至五齡至十齡等等，第二是各齡類之次數 (frequency)，或各齡類內所有之人數。我們畫出兩條交互垂直的「尺度」(scale) 來代表此兩串事實。在一條尺度上我們表明一串事實，在另一條尺度上表明另一串事實。因是，在橫尺度上我們記明各齡類，在直尺度上記明次數或人數。

在一張紙的平面上只能表明兩次元數，所以兩種事實的關係只能以線解表明之。當製線解時，線解上之一點可從兩種度尺測量之，卽是此點距橫的與直的尺度都有一固定的垂直距離，所以若一「類」由線解表明時，線解上之一點對橫尺度所成之距離係表明牠所代表的齡類，而該點對直尺度所成之距離則表明該齡類所

有次數或人數。

所以，我們首先應繪兩相互垂直線，如線解1所示。在橫線上畫出各相等距離，而以它們代表表1內所有之諸「齡類」(age-

印度人口按年齡之分配，1921



線解 1

印度按十齡區分之人數—1921（附註）

齡類	每 1000 人口之數
0—10	274
10—20	198
20—30	170
30—40	143
40—50	94
50—60	61
60—70	36
70 以上	24

表 1

（附註）數字係從 Brij Narain: The Population of India 取來。

group)。其次畫出直線上之各相等距離，而以它們代表表 1 內諸齡類所有之人數。記出發點或此兩線相遇之點為零，以為直橫兩尺度之發軔點。在圖內每十年用一吋之$\frac{3}{8}$有規律的間隔表明之。在直的尺度上，.7 吋代表每千人口中之一百人。在 0–10 的齡類時得 274 人，故在底線 0–10 上作一長方形，其高等於 274 在直尺表上所量之長。其他諸齡類亦照此作出各長方形。

這是很顯明的，各長方形之面積將比例於各齡類之人數。因為齡類殊大（是十年），所以連接兩類的數目之間顯出甚大的差別。因是，諸垂直距離，或諸長方形之高度降低甚遽，線解似乎沒有表現連續性。事實上從一年到次年的人數是漸次變動的，所以若齡類是十分小時，我們所有的各長方形，其高度將是很漸次的低減。

依據此線解我們又可作另一線解，以略約表明不僅每十齡之人數，而且每一齡內之人數。其法經過各長方形之頂憑手作一曲線，使曲線內各齡羣之面積仍如前。圖中之 a,b,c, 即是這曲線。此曲線將每長方形割出一小面積，但同時又加入一相等面積。我們未將曲線終止於橫直兩線者，第一因為若此線與直線相遇，則必須知其相遇之點確切為何處。因此，此線在快要接近直線之前即行停止。第二，若曲線與橫線相遇，則亦須知其相遇之點。例如，我們必須知道最高之年齡為何；若是 80 是最高年齡，又設 70 至 80 間之分配是調整的，則我們使曲線與橫線相遇於距 70 一吋之$\frac{3}{8}$地方，這是很正確的。

在此連續的曲線上，各點以其所代表長方形之面積表明各年

齡之人數，各年齡則以其沿橫線之距離表明之。

連續曲線之合理

吾人作此種曲線，其合理之處是：第一此種作法實質上并未影響各類之人數；第二，曲線指示逐齡遞減之數乃是事實之眞相。我們可以見出，曲線與各長方形頂端相遇之點大致近於中點，所以在各邊斜趨是平均的。此層不能非難，因為我們從經驗知道各齡類人數之分配大致是調整的，即是從第一歲以至最末一歲數字是連續的低減，所以在齡類之中數時我們可得着該齡類之平均人數。

此種曲線之優點

第一，此種曲線能比原來的數字給吾人以更完全的分配。在實際上，并沒有如我們從此齡到彼齡的截然區分存在；給吾人以此種截然區分的乃是分類的強斷性質。欲避免此種粗拙，則全「類」須以連續曲線代表之。

其次，數目增減之一般趨勢雖能容易的從各長方形見出，但連續曲線能予吾人以更確切的觀念。從線解 1 中 a,b,c 曲線，我們馬上見出二十至五十歲之間數字的低減率比在其他時期中較為遲緩。

吾人只須詳細觀察這曲線，許多重要的情況可以得着。若曲線是製繪不錯，即是若急遽的轉變是已避免了的，它將能糾正一些從粗疏觀察所發生的缺誤。

繪線解時之教訓

記尺度的兩直線吾人稱為「軸」(axes)。橫線稱為 x 之軸，或 x 軸，直線稱為 y 之軸，或 y 軸。在 x 軸上我們記出『許多連續小數增加之數量，如年齡，所得，高度，價格，時間，等等。』（註一）換言之，在 x 軸上我們記出羣的各分子所公有的性質。在他一軸上我們記出含有此公共性質的事物之數次或數目。在組之數字時，我們稍後可以見出，我們在 x 軸上記時間，在 y 軸上記其他數字。用數學的話來講，我們可以說獨立變數應記於 x 軸上，不獨立變數應記於 y 軸上，這是一般的通則。（註二）

尺度上之分段應十分明晰并須有規律的間隔。附近兩軸應將關於所記數字或事實之說明寫出。例如在線解 1 中，我們沿 x 軸書有「年齡」二字，沿 y 軸書有「每一〇〇〇人口之數」數字。

圖上之點與線務須明白表出，并於作完圖之後，在頂上給一簡括扼要的題名。在圖之上面或其一邊，若有認為必需的說明亦可寫出。

作圖所依的尺度，其長短須使全圖合於紙之大小；即是，圖不應過小，亦不應過大而佔紙之全幅。若是作圖的數字許可時，最好擇取一較小的紙面作之，意在使全圖可一望而明。（附註）可是重要

（註一）參看 Elements of Statistics, Bowley

（註二）若數字不十分明晰時，有時很難決二數中何者為獨立變數，例如，已知物價的數字與相應需要的數字而沒有更進的材料時，則很難決定獨立變數為何。通常辦法是將需要認為獨立變數。

（附註）鮑勒論線解之大小云：『任何圖解，小之可使納於郵票之背，大之可使遮蔽一牆。書之一頁通常可容所欲表明之任何詳細事實，至大紙張與摺疊篇幅之事應力求避免。』

之點乃依靠直的對於横的尺度所有比例爲何，若比例選擇適宜，則全圖之大小可視目光之方便而定。此兩尺度間應定的比例，并沒有確定規則可循。它乃視所表明數字之性質而定。若「y之坐標」(y-coordinates) 變動甚大，卽是「次數」(frequency)變動甚大時，縱軸應是比較小。吾人須記的要點是，兩軸度尺之選擇須使線解能表出最小的變動，可是同時也不給劇烈變動以過度的重要。簡單的說，若數字有鉅大的變動，而線解卻非常平淡，或數字無劇烈變動，而線解反崎嶇滿紙時，則此線解卽爲不適宜與錯誤。稍事練習，則選擇尺度之事亦非困難。

經驗指示吾人，最良結果之獲得，大都是所選度尺，使縱軸約當於横軸三分之二的時候。

尺度之劃分應十分明瞭。各標誌之位置應彼此有充分的距離；標誌過密足以損傷圖式的美觀，破壞尺度上更重要標誌之重要性與力量。若用方格紙時，表明尺度分段的數字應取較大的間隔。

若是尺度已是仔細的適當的劃分，則在其他地方卽無再述所選尺度之必要。雖然，許多統計家卻喜歡在線解之上方將尺度畫出。

當我們討論組之線解時，我們將評述關於製作線解的其他要點。

積數圖解(Cumulative Diagrams)

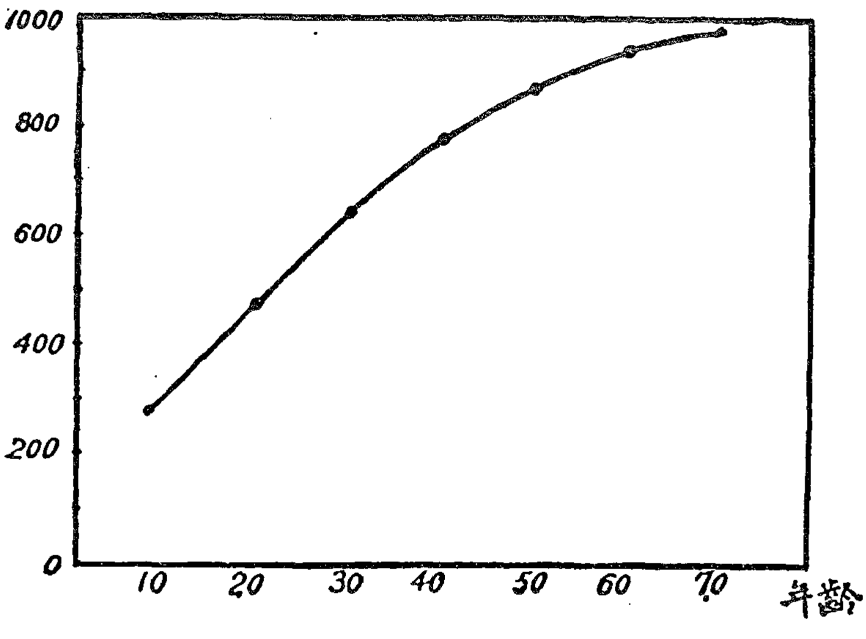
從表1所給之諸數字，我們更有一較好的線解法，卽首將表上諸數字壘積起來，然後據以製圖。在零至十齡之間有二七四人；在

十至二十齡之間有一九八人；所以在零至二十齡之間應有二七四加一九八，或四七二人。這樣各數次第加上，我們便得一組疊積的數。此種數字表明在各年齡之下而非在各齡羣之內之人數；故在二十齡之下共有四七二人。表 2 卽是此種積數。

10 年以下	274
20 年以下	472
30 年以下	642
40 年以下	785
50 年以下	879
60 年以下	940
70 年以下	976
70 年以上	1000

表 2

印度在一九二一年之人口　圖解表明橫尺度上所記諸年齡下所有人民之總數（每 1000人口）

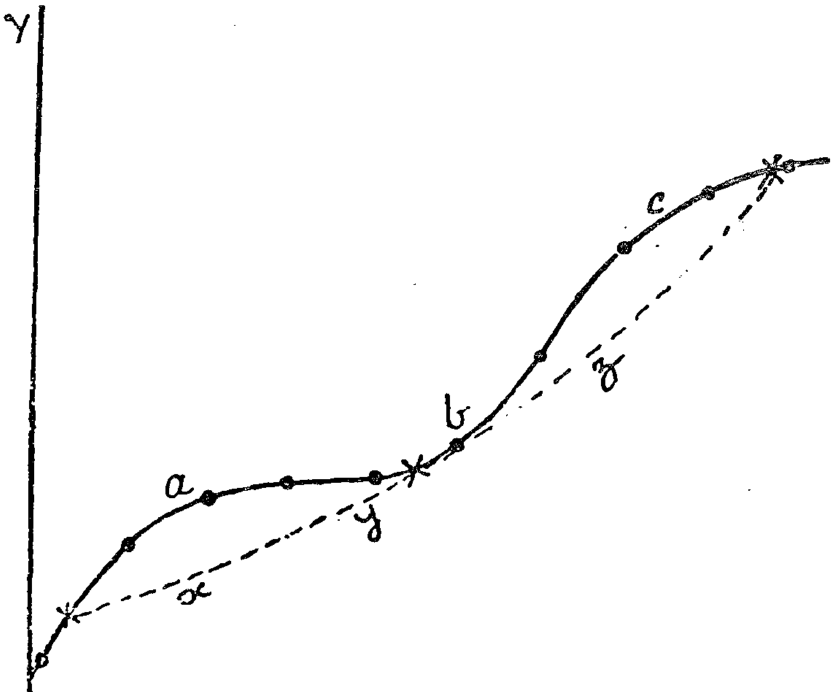


線解 2

根據此種數字以作線解，則是積數圖解，此圖解以其圖內各點表明記於 x 軸各年齡以下之全人數。此線解是天然一永遠上升之

線。

此處未作長方形，只於 x 軸上 10，20，等等數字處上升至274，472，等等之高度誌以各點。各點之間又綴以直線。誌各點時應十分留意，全圖之精確與否卽繫於此諸點之精確與否；此諸點可說是線解上之陸標。它們是很顯明的用黑點來表明。線解 2 卽據表 2 而作，其中連綴各點之線構成了一均勻的曲線。當線解含有突露的隅角時，憑手所作之曲線可經過諸點，而使隅角化於無形。在此線解內諸點也可用圓滑的曲線連綴之。



線解 3

雖然，若是各點相距太遠，卽是齡羣或類似之羣太大時，最好只用直線連綴之。因爲在此等場合，數字在性質上不容我們作圓滑

的曲線。作圓滑的或憑手的曲線，意思僅在補充線解上之居間各點。但若根據的數字根本不足時，我們決不能確定此等中間點之位置。

為解明上述的眞理起見，我們可考察一假想的事例。在線解3中作了兩曲線；一曲線是經過較密接的諸點而成一連續曲線，他曲線，是以斷續的線經過距離甚大之諸點而成。眞正的曲線是a b c線，但是若測量數過遠，卽是若各點相距太遠，則經過諸點所作圓滑曲線則變為x y z線。從此可以見出若測量點相距過遠．作圓滑曲線是很危險的。自然，若測量點沒有相當的密接時，卽綴諸點以直線，此線解亦屬錯誤。但是，以若干直線連綴諸點時，此諸線是不能決定中間諸點之位置的；牠們並不能補充所缺之諸數，這是須記着的。牠們的目的在引導目光由此點到彼點，而指示一點之升降率。(附註)

(附註)升降率之確切表明須用對數曲線。在對數曲線中，作於對數的縱尺度上的是各數之對數，而非原有的數字，或實在數字。詳細論列見於第九章。

第八章　數列之簡單線解法

在連續的諸月，諸年等等時期中表明任何一數的變動價值之數列(series)，亦可依據「類」的同樣原則，作線解表明之。在數列時，表明時期的數字，無論爲星期，爲月份或爲年度，都一定的記於x軸上，而屬於此等時期之數量或價值則應記於y軸上。這樣作圖，則數列將由左以至右，或許其間起伏甚頻，此種起伏，按照所用數字的性質，可以不關重要，亦可特別的表出。

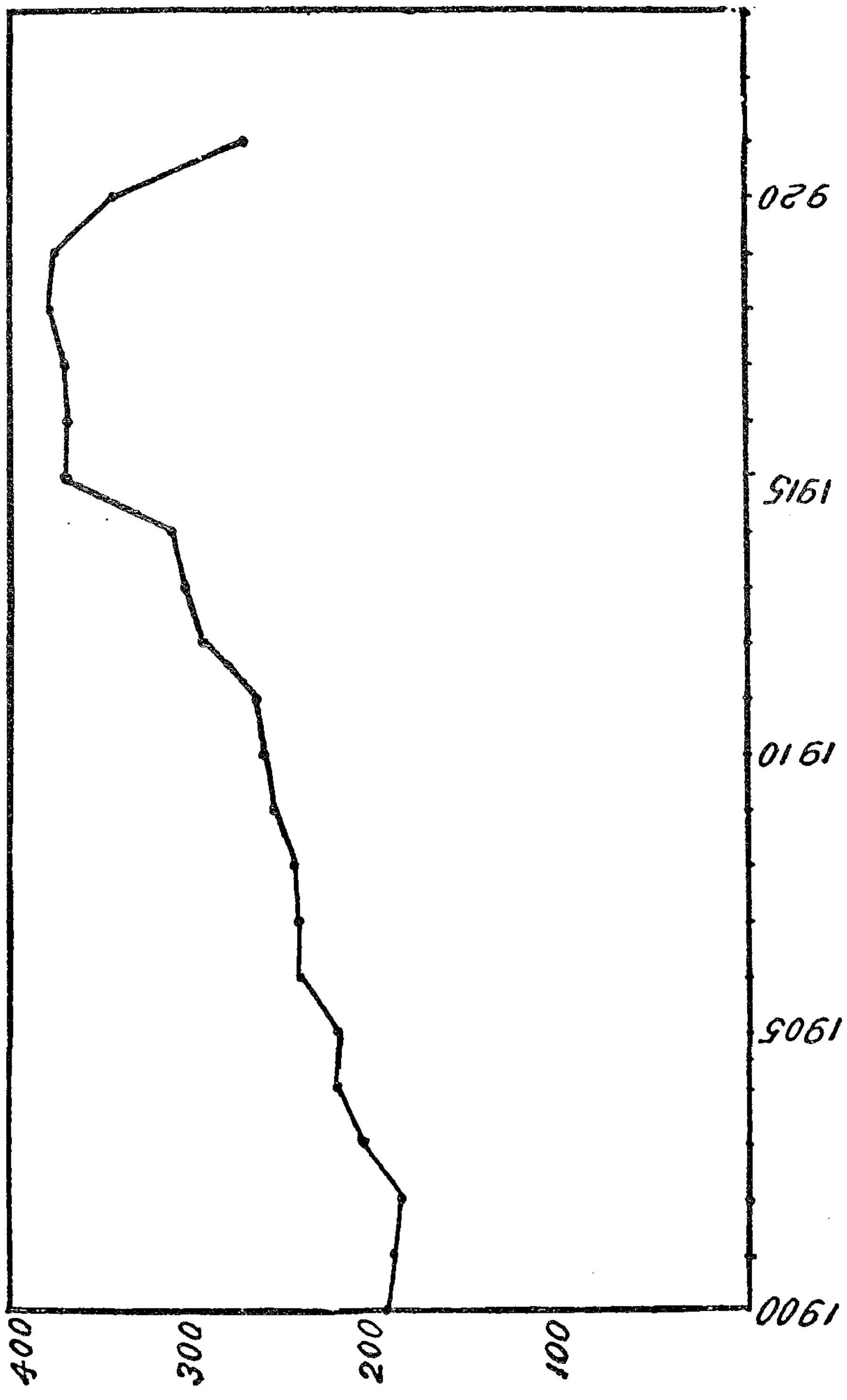
製圖的程序初無異於吾人在前章所研究的。線解上之諸點表明之數字，以其距x軸之遠近來表明諸數之大小，以其距y軸之遠近來表明諸數所屬之時期。

線解4表明印度從一九〇〇年至一九二一年，逐年之產茶額。(附註)在縱軸上一吋代表一〇〇百萬磅。年度則以每十分之三吋表明於x軸上。表明每年產額之實在各點則顯著的誌出，並十分留心的以線連綴其中心。

線解表明從一九〇〇年至一九一八年之間茶的產量有漸加的上升，但自此以後，則有急遽的下降。自然，在一九〇〇年至一九一八年之間，有些年內產額亦有微減，但是除開此種細微例外，數字

(附註)數字係從 Wealth and Taxable Capacity of India, by Shah and Khambata 所引 "Estimates of Area and Yields" 中取來。

印度每年茶之產量，1900—1921.



(以百萬磅計)

線解 4.

的一般趨勢的漸次的均勻的上升。從表3中（見下頁）的數字我們不容易見出此種特徵。一個人只能從數字表上推測產量有一般上升之趨勢，但是我們不容易發見逐年上升是否漸次的與均勻的。

線解之諸作法

我們常時必須在同一張紙上與同一橫尺度上作兩種或多種線解。故一國在若干年內諸主要農產物量可以用數線解表明之。又或，一地之生產與死亡率亦可用兩線解比較之。在此等場合，橫尺度對於各線解均是一樣，只是有時縱尺度可以改變。若數字的性質類似時（如生產與死亡率），公共尺度不特可以足用，而且爲比較計是必需的；可是若數字不屬於同一範疇時（如麵賣價格與失業

年　　度	總　額（百萬磅計）	年　　度	總　額（百萬磅計）
1900	197	1911	268
1901	191	1912	297
1902	188	1913	307
1903	209	1914	313
1904	221	1915	372
1905	221	1916	370
1906	241	1917	371
1907	244	1918	380
1908	247	1919	377
1909	256	1920	345
1910	263	1921	274

表3

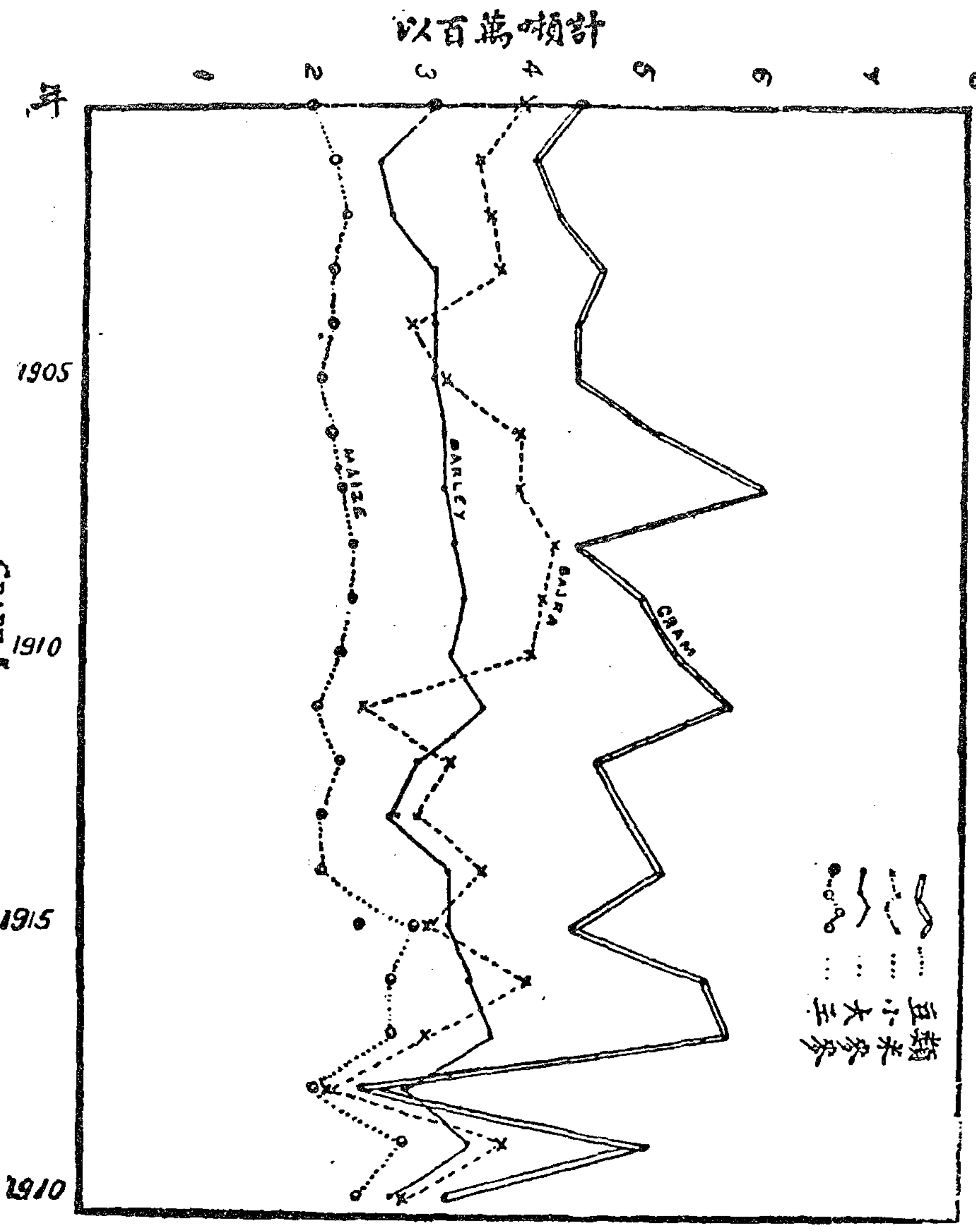
數字），則可用兩種尺度。一尺度以 y 軸表明，如平常一樣，另一尺度則作於紙之右邊，與左邊之 y 軸平行。

若採用兩種尺度時，須注意所選尺度作出之線解應能盡量的不相混淆，務使一線位置於另一線之上方。又所選尺度更必須對兩數列數字之變動給予相當的重要。設若代表一數列之尺度太大，代表另一數列之尺度太小，結果所作之圖將表出前者有過分的變動，而後者僅些微的變化。此類尺度之選擇結果使兩數列間存在的關係闇而不彰。換言之，如此選擇的尺度將不能表出兩線解間之眞正相互關係。我們若猶記得在同一橫尺度上作兩種或多種線解之目的乃在發見牠們當中所有正面或負面之相互關係，則圖解之是否有用將繫於所選各尺度之相對大小，可不言而喻了。（附註）

選擇兩尺度而使兩線解互不相混，這是通常可能的事。可是，設若屬於同一範疇的兩數列或多數列事實須在同一紙上表明時，則我們便不得不將同樣的縱橫尺度應用於所有數列。此時各線或不免相掩。為避免此種混淆而使目光能分別觀察各線之軌迹起見，我們必須將線飾為不同顏色，或用不同的點畫。線解 5 卽表明各種點畫之用處。在同一紙上以同一橫尺度記出一九〇〇年至一九二〇年間之年度，以線解表明四種小穀物之產額。產額的數字都是調整的數目，屬於同一範疇，它們均由同一縱尺度表明之。荳類與玉麥之線是十分分開，但小米與大麥之線則幾完全相掩。又是在一九一

（附註）若一線之升降與他線之升降同時，則其相互關係為正，若一線之升或降而適為他之降或升，則其相互關係為負。

八年時，各線位置甚爲密接。因此之故，諸線以不同的線形繪之。一種是斷續線，第二種是虛線，第三種是雙線，第四種是單連續線。



印度四種小穀物之産額，1900—1920.

GRAPH 5.
線解 6.

此線解又可表明各點形之用法。有些時候點不算重要，並不需

特別顯在紙上，可是通常是必需將它們明晰表出的。大黑點固甚顯明，可是有不能確切表明數量之弊。又是，欲作線精確的連於諸大點之中心亦甚困難，因其面積較寬故。要使各點顯著，同時又要保存精確，因此一般統計學者採用了兩方法。一法是以小十字表明各點。十字是甚易見出，而且其間之點卻甚微。另一法是作一小點而環以小圓藉以使其顯著（見線解５）。此外尚有一繪線之法，卽先誌以微點，而後綴以較粗之線，惟線與點不連接而留甚微之距離。在一大線解中此法甚為適宜。

我們已經說過各線可以不同之顏色作之。若各線之交錯過緊時，或許更好是用顏色線；否則，最好仍以避免顏色而用黑或藍黑墨水，以各種線形表示之為較宜。

點之突露

線解內之諸點應否突露的表出，一半繫於它們所代表數量之性質，一半繫於線解之目的。若線解之目的在表明某數之變動，例如若干年內一國之人口數，或若干年內一國之出口進口數，則各點自應顯著的作出。但若我們的目的僅在表明或種數字運動之一般趨勢或方向時，則實際已無點之需要——甚且線解上以不作點為較宜。例如，我們有一數字表係一國在一極長期內諸重要商品之價格時，從此諸數字所作之線解，我們頗能研究價格之增漲，週期的變動以及物價增高之一般趨勢。此時我們的目的不是在記錄各個確切數量，而在探討諸價格並得出我們所能得的一般結論。又是，

若我們的目的在得出結論，或依據所有論料以推測將來時，則實際的諸點已無重要效用了。

因此，我們已無將諸點特別在線解上顯出之必要。但是，各點雖不必十分突露，卻是須要明晰的作出，因爲從實際的軌迹，我們可繪出圓滑的曲線，若是願意線解來表明一般趨勢，週期的或季候的變動，等等之時，這是必須記着的。所以最好首先作出通常的線解，附以顯明的「角隅」(corners)，然後再將諸角隅以線去掉，或繪圓滑的曲線於其上。

其次，若數字非代表一數列實際數目，而僅表明比率，升降率或變動時，各點亦不必特爲突露。例如，線解之作往往不在表明已知的實在數量，而在從「平均數」(average or mean)來指示牠們的變動。此種線解可不需突出的點，因其非表明實際數字故；我們不想從此線解來知道某年的數目距均數確切的爲六，抑或爲六又四分之一單位；我們祇要知道數量對均數之變動是如何如何，已就滿足了。

在上述諸線解中，各點應盡量作於它們的確切地位，可是不需十分突露。但是有些人卻喜歡作相重之點。他們在科學上是不錯的。在本節我不過欲指出在何時點在線解上是第一重要的，與何時僅是次等的重要。

底線(The Base Line)

在線解上發軔點，卽是兩軸相遇之點，恆爲記縱尺度之零點。

若作圖之數字是十分大時，尺度則應小，藉使線之經過能合理的接近於底線。兩軸旣擇適當長度後，吾人卽註發軔點爲零，而在縱軸之頂端註以作圖之最高數字，或比此略高之數字，然後分出各度。

若數字甚大而變動不甚著時，作線解將感極大困難。因爲若發軔點爲零，則線解在底線之上將有異乎尋常之高，若將尺度縮短使之更近於底線時，則線解又將變爲過平，不能表出變動的眞正意義。

處此種情況之下，我們可用下述之任一方法以避免困難。若是不限於作圖之形式時，我們最好用圖畫法而以長方，長條或其他形狀表明這數字如前面數章之所述。若我們的目的單在表明或研究已知數列之變動，則解決困難之最上法是祇作一數字變動線解，卽是所作諸點不以表明實際數字，而以表明諸數的變動或離去均數之數。

若是上述兩法都不適用，而一定需以線解表示實際數目時，最上辦法是將線解與底線之距離割短，並設法在圖上表明其旨趣。此法雖是可用，但它將受與不在縱軸上表明零點的辦法所受的同一非難。此法優於通常方法之唯一點乃在它已指示它自己的缺點，而使吾人可提防誤解之發生。

底線應經過縱軸零點之理由是：若不如此，我們將難於得兩數之比較，或判斷由此點到彼點之升降率。欲解明此點，我們試設想兩並行垂直之線。長線之長爲短線之二倍。我們一望此兩線，立可說出它們之比例爲 1:2 或大致如此。設若我們從它們的底端各截

去當於短線一半之長度，此時我們便見出兩線之間將有更大的比差；它們的比例將是 1:3。同樣的，若表示零點之線不見於線解，我們對於諸數之差將得一過大觀念；比例雖似較小，而變動卻過度增大。故欲判斷變動之程度，我們必須將諸點對縱線之距離與其對底線之距離作實際比較，若是底線不經過縱尺度之零點，卽是若底線增高，此種比較卽屬錯誤。

若底線未在其相當位置，而觀者又被告訴以此事實時，則他爲比較諸數與研究其眞正變動起見，便不得不時時參證縱軸。所以線解而無相當的底線，已破壞了它自己的作用了。(附註)

長期與短期之變動

數列之各數，當以線解表明之時，可使吾人探討所有論料，卽是商品之價格，物品之產額，與此類之數字中，短期與長期之變動。長期變動者，卽僅在研究長時期時此種變動纔能表出它的效果，或顯露它自己。例如，商品價格是漸次的繼續上升，但在此年到彼年之短期內價格或許有時是升，有時是降；可是我們仍可說在此十年中平均價格是比前十年中的較高。

長期變動有時是規則的，有時是不規則的；但是，普泛說來，長期運動是規則的，因爲它是一種或多種遲緩而漸次的活動現象之結果。故如穀物之價格從此十年到彼十年是繼續上升的，並其上升

(附註)在對數尺度上之線解，縱軸之零點是不表出的。升或降之率度僅從諸點間之垂直距離測知之。

幾是有規律的，因爲使價格上升最有力或許最重要的原因，乃是全世界，特別是在產此穀物之國，通貨或交易媒介的數額遲緩而漸次增加之故。

短期變動者乃通常每年可以見出的變動。在十年內一種食物價格之變動係由最低以至最高，並由最高以至最低。所以價格在十年之第一年起或許上升，直至第四年而升至最高點，嗣後則逐漸低落，以至於第十年。

短期變動亦可是規則的或不規則的，卽是，牠們或許在一固定年數之後自行循環，抑或沒有此種次序的與調和的變動。若變動以一多少有規律的時距而自行循環，則此變動稱爲「週期變動」(periodic fluctuations)。例如，穀物價格，雨量，貿易活動，等等，是有週期變動的。

時令變動(seasonal fluctuations)者卽逐月一見之變動。一個地方的溫度是表現時令變動的，因其逐月改變故；可是它不能表現長期變動，因爲若吾人取任何月或季在十年中之平均數時，則它們將實際無變動可言。又是，生產，結婚，離婚，與其他社會現象是有時令變動的。(附註)

活動遲緩而繼續之「因」(cause)產生長期變動；爲時甚暫之因產生短期變動。綫解目的之一卽在分出此兩種因所生之結果，使吾人分別研究牠們，並從牠們推斷將來變動之可能性與性質。

(附註)參看 Social Consequences of Business Cycles, by M. B. Hexter 1925。

由此看來，在一數列中，可有時令的變動，週期的擺動，與乎長期的運動。時令變動可用年的平均數排除之，因為論料雖逐月變

茶之產額

年　度	總　額	三年均數	去活動均數之差數
1900 ………	197	—	—
1901 ………	191	192	−1
1902 ………	188	196	−8
1903 ………	209	206	+3
1904 ………	221	217	+4
1905 ………	221	228	+7
1906 ………	241	236	+5
1907 ………	244	244	0
1908 ………	247	250	−3
1909 ………	258	254	+4
1910 ………	263	261	+2
1911 ………	268	274	−6
1912 ………	297	288	+9
1913 ………	307	303	+4
1914 ………	313	328	−15
1915 ………	372	352	+20
1916 ………	370	368	+ 2
1917 ………	371	371	0
1918 ………	380	373	+ 7
1919 ………	377	364	+13
1920 ………	345	362	−17
1921 ………	274	—	—

表 4

遷，而年復一年其變動卻大致相同。週期變動可用長期活動均數排除之。例如，若週期為七年，則每年取七年之活動均數卽可將週期變動消除。消除普通趨勢之最易辦法是單考察離開活動均數之變動數或差異數。

時令變動及週期與長期運動之實例

我們已說過，一地方之温度，雨量，生產，死亡與結婚率，以及多種類似現象，以顯著的程度表出時令的變動。例如温度在六月許是最高，在一月許是最低。印度的雨量有數月的綿延，而過此則實際歸於停止，但在該時期內已顯出一種變動；同樣的生產，死亡與結婚在某些月份達到它們的最高點；在生產，死亡與結婚之間有一相互關係存在——當生產率高時，則死亡率低，因為使生產增加之因已減短死亡之數故。（附註）又是，某種貿易之活動期是時令的，社會現象如失業與犯罪之類，亦含有時令變動。同樣的，大多數食物之價格表明時令的變動——在收穫時價格甚低，但自後則繼續升高，直至一年之終為止。

這些現象中有些亦表出週期的變動；如生產，死亡與結婚數假定大約每十年或十二年之後一達最高點。（註一）同樣的，温度與雨量亦表現週期變動（註二）如穀物價格一樣，特別在農業國家。事實

（附註）當生產率與死亡率之相互關係在生產率上表出適當的「數首」(lead)時，我們將見着高度的正面關係。可是若無「數首」或「數尾」(lag)時，則關係卽是負面的。

（註一）我在孟買區已得出以十二年為週期之結婚率，這是很有趣味的。

上，凡此等現象都是互有關係的，彼此都可發生反應作用。例如，物價高可使生活昂貴，因此減少了結婚數；結婚數少又減低了生產率。又是，物價高減低了生活程度，引致犯罪的較大數目，降低生活力，與提高死亡率。（註三）

物價又能表出顯著的長期變動，但其他自然現象，如雨量與溫度之類，卻無此種運動。物價可十年復十年的上升，但溫度與雨量在一長期中則毫無變動可言。（附註）同樣的，生產與死亡率表出極小的長期運動。取十年的生產與死亡之均數率觀之，我們可見出在世界大多數文明國家中，其率是漸次低落的。

普通趨勢之消除法

為探討一數列之週期，換言之，或尋求循環之長度起見，我們往往必需首先設法消除數列之普通趨勢。原因是，在確定週期所需之計算中，首要之點在探求唯屬短期諸因之諸果，故普通趨勢之排除能使吾人消去長期遲緩諸因之影響。此種趨勢，只須取適當的年數作一種活動均數即不難尋出。假設週期是顯然為十年，則最好作十年期之均數。可是，除此以外，我們又往往需要作一趨勢線

（註二）莫爾先生(Mr. Moore)已發見美國雨量的兩週期為八年與三三年。

（註三）關於週期變動的較完備討論，可參看關於商業循環與貿易衰落之各書。

（附註）邦家布 (Punjab) 之物價大約為十年之週期，如邁爾斯教授 (Prof. Myles) 所指出的。我自己關於聯合諸省物價的計算發現週期為四年半，另一較長週期為六，七，與十年。我們可回憶澤豐滋教授在該國所發見的週期為十一年而稍強。關於此題的較詳研究可參看氏書 Investigation into Currency and Finance。

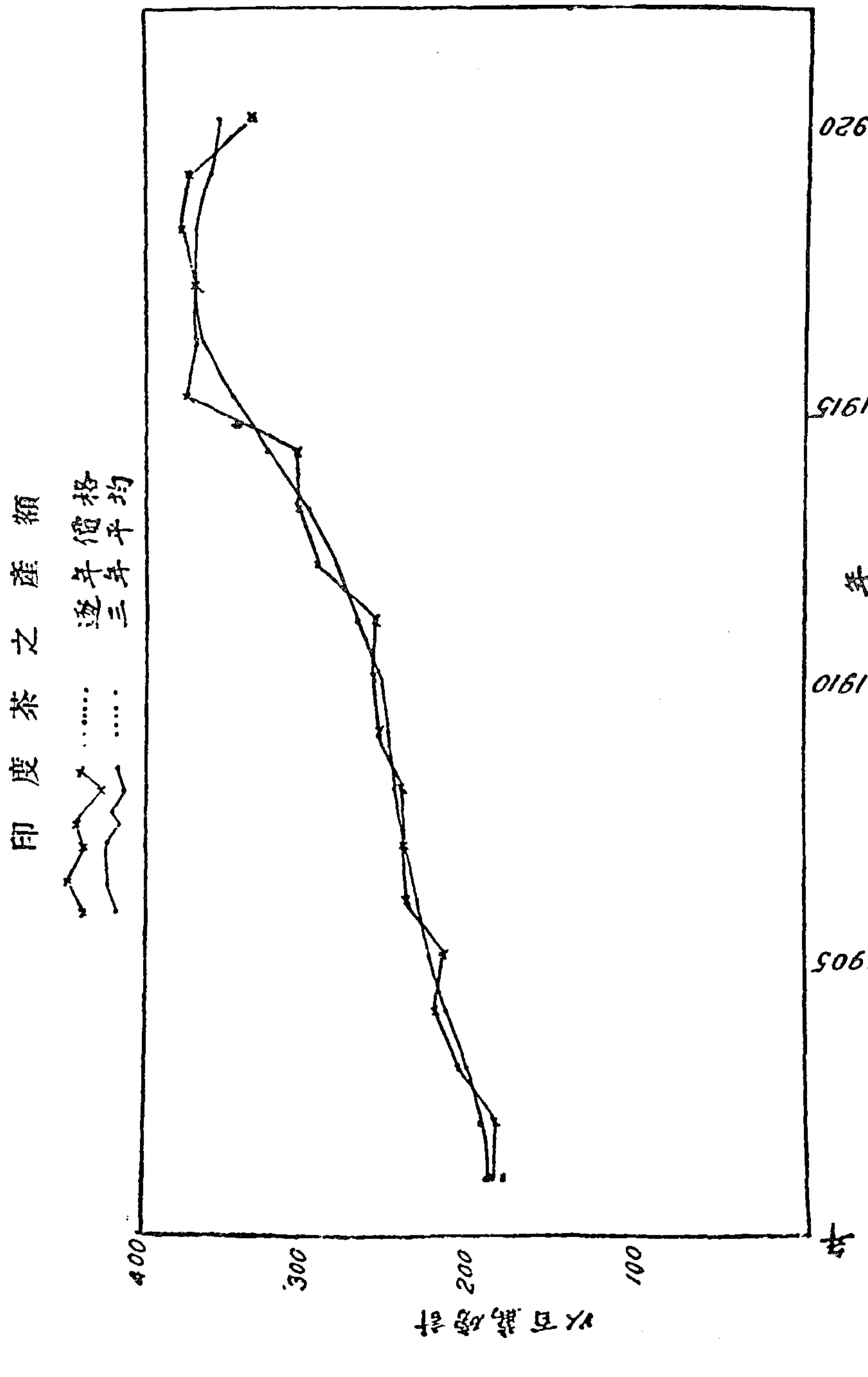
解，藉以研究長期變動或數列之恆久運動。作圖之法可有數種，第一，我們可作一圓滑自由曲線以橫過逐年數字之鋸形線。此時應留心的是作曲線須十分自然（切忌方向之突劇變動），並使其經過諸點之中心。此等趨勢可以爲直線，亦可爲第二級或更高級之其他曲線。

另一繪趨勢線之法是首先找出如上述的活動均數，然後誌諸點於同一圖紙上，而以圓滑曲線將諸點連綴起來。此圖見於線解6。在表4內記有逐年計算之三年均數。一九〇〇，一九〇一與一九〇二年之均數則書於一九〇一年之前，並同樣的每一均數均書於居中年度之前。將此諸點誌於圖上，而後作圓滑曲線經過之。此線能給吾人以一十分確切之趨勢。

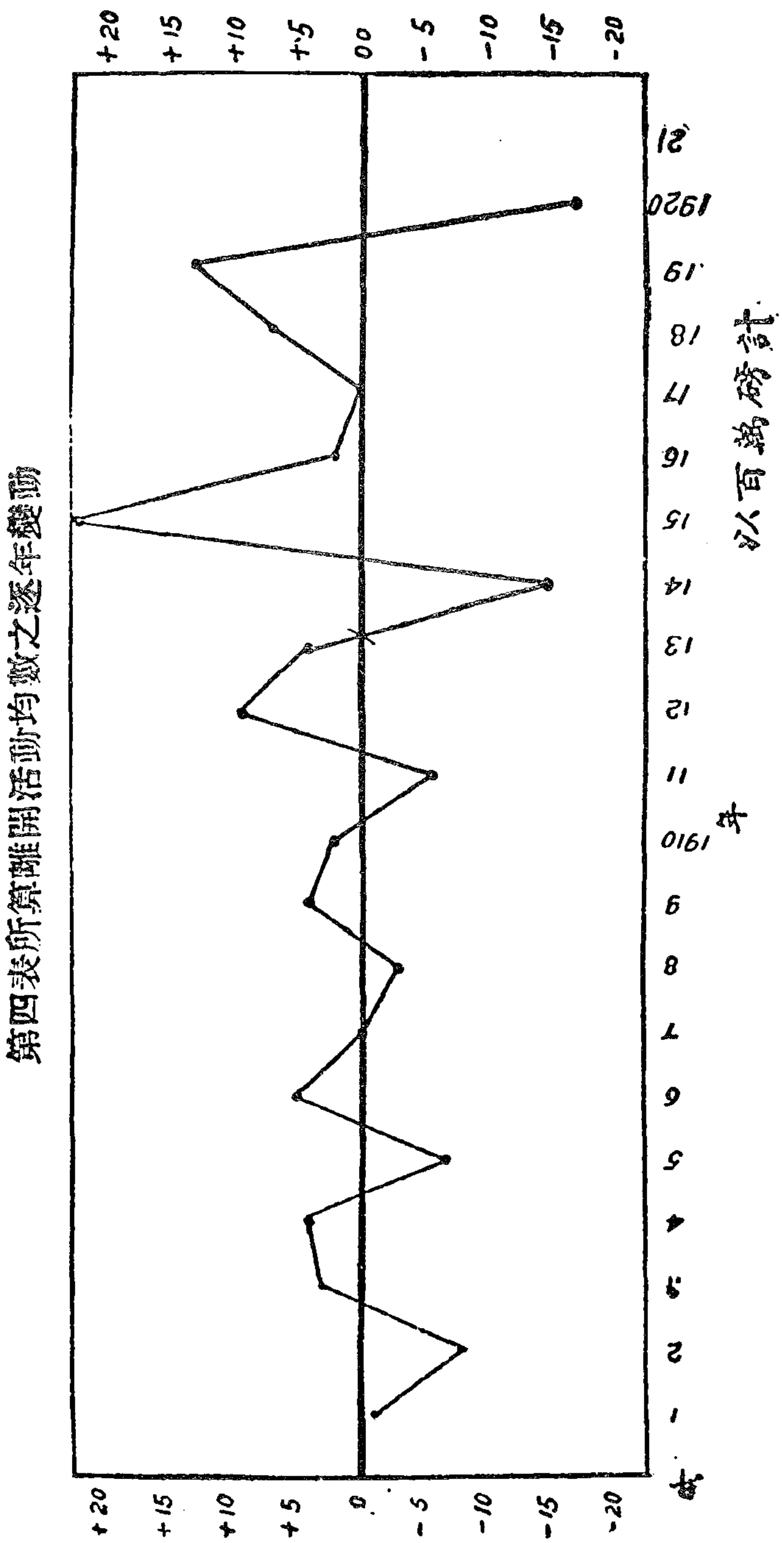
設若趨勢似乎爲直線時，或許最容易作圖之法是找出一與距「中位數」(median)，「第一四分位數」(first quartile)，及「第三四分位數」(third quartile) 有相等垂直距離之線。

上述繪趨勢圖之三法中，第一法有簡單之利。他的作法容易，他能馬上給吾人一圓滑自然曲線。若原有的線解是平凡而表明調整趨勢時，此法用來甚爲有利。可是若需要進一步之計算——即須確定離開趨勢之變動時——則需要一更確切的趨勢線。要找出每點離開趨勢之變動，吾人須知趨勢之差數，或趨勢線上相應各點之縱距。所以，爲此種目的起見，第二法最爲有用。第二法給吾人以十分確切之趨勢，並給吾人以計算差異所需之數字。

在表4之第四行，逐年離開活動均數之差數均經記出。此種差



解線 6.


第四表所算離開活動均數之逐年變動
以百萬磅計
年
+20
+15
+10
+5
0
-5
-10
-15
-20
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1910
11
12
13
14
15
16
17
18
19
1920
21

線解 7.

異數或變動數只能供給吾人對產茶數額相對變動的觀念。他們以數字表明短期所生之變動。茶之生產卻漸次的與繼續的增加，其原因並非產生短期變動之因。所以，關於茶之生產至少有兩組原因同時在活動；一組與產額每年之升降有關，另一組與產額全部增加有關。計算第一組原因的效果，則必需排去第二組之效果；其唯一良好的辦法是於找出活動均數之後，將所算出之趨勢排去。

表 4 所記之差異數或變動數已點誌於線解 7，並以若干直線連綴起來。此變動線上下於零點線，故其變動正面與負面均有。此線解之目的在表示生產中盡量所能找出單獨屬於短期或暫時原因所生之變遷。

此圖之尺度將與原圖所用之尺度不同；這尺度通常較大，以便使變動更爲顯著。零點線甚粗，縱尺度則兩邊均有，藉以助諸點之算讀。

第九章　對數曲線法(Logarithmic Curves)

對數曲線在圖解中之需要

普通線解，或作於自然尺度上之線解，表明一種數量之變遷價值。線之升降表明已知數量之增加與減少。其用在使吾人可探討一數列數字之變動而測度其普通趨勢。但是，若吾人須決定一數量的增或減之率度，而不在知其增或減之絕對數量時，則線解便不如是之有用，因爲欲求出增加率，吾人恆須比較全部數字，卽是，我們必須比較橫尺度上各點之高度。若底線或零點線在圖上時，此種比較固屬可能，可是工作仍有許多困難。

蓋線解只有彎曲的曲線而沒有垂直距離記於其上；結果人的目光天然較重視曲線之升降，而輕視曲線距底線之高度。故線在一甚高距離之升降其訴於吾人目光之力量，幾與線在一甚低距離同樣升降所具之力量，無大小之別。在大多數場合，絕對變動不如相對變動之重要；換言之，我們應須考究的是變動率而不是變動的絕對程度。所以，設若線解在一長期中有上升或下降之趨勢時，我們在沿線之進程中，必須相當的折算線之升降度。譬如在線之頂端此點到彼點有二吋之增高，其所表明之增加率將比在線的底端同樣增高所表之率爲小。若是我們能常牢記在心，我們應比較的是各點

之全高，而不僅是各點相差之高，那末或能免避一切誤解之發生。但是，歸結的說，線解總是一種圖畫，其用意在將事實直接訴於吾人之目光。

在他方面，若線解所表明者爲多數年度之一平行趨勢，卽是沒有奇特變動時，我們大致對線解上之變動不致誤解。因爲，此時曲線之高度幾沒有變化，故在絕對的與相對的或比例的變動之間沒有大的出入。所以此時若線解之底線是顯明作出的，將無誤解的機會發生。

然而在多數時候，我們的線解都是表明奇特變動的。如物價，人口，國外貿易與工業品之產量等線解則表出一急遽上升之趨勢；結婚，生產，死亡，犯罪以及此類社會現象等線解則顯出較緩的變動。所以在此等線解，我們很容易對它們所代表現象之演變構成錯誤觀念。在此等場合我們需有其他方法，藉以避免通常線解之缺憾。

解決此種困難之簡易方法，是作一線解以代表指示升降率之比例數字，不以代表實際數字。此一方法可立刻免掉通常線解所受之非難。因爲此時相等垂直距離卽表示相等的增加率，而不必計及線在底線上之高度爲何。可是此種線解祇能表明由此點到彼點之升降率度；而不能代表實際數字。因此之故，欲達此目的則另有一方法出焉。

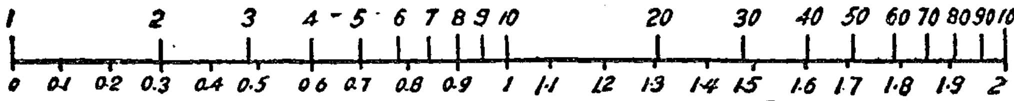
在此種情況之下，通常辦法是不據實際數字而據它們的對數以作點，抑或在對數的縱尺度上以實際數字作點。簡捷的說，此種

尺度之優點在能以尺度上所記之相等距離表明變動的相等比例或相等率，而不表明相等之絕對量。換言之，若在線之一端一吋之上升表示百分之五十的增加，則通過全線一吋之上升亦表示百分之五十的同樣增加。從此點可以見出，在對數尺度上，我們若沿線前進，絕對量係漸次由遞減之長度代表之。

對數尺度之作法

下附的圖是一由1到100之對數尺度。在線之上面是對數尺度之度數，線之下面是自然尺度之度數。在1與2間之距離比2與3間之距離大，比3與4間之距離爲尤大。又是在1與2間之距離等於2與4，4與8，10與20等等間之距離。這個是對數尺度之特別性質——相等距離代表相等比例。所以在2與3間，4與6間，8與12間，20與30間，或任何比例爲2:3之兩數間，我們均有同樣距離。

對數尺度



自然尺度

由 1—100 之對數尺度

我們又可見出10與100間之距離是與1與10間之距離相同，因爲它們的比例同爲1:10故。

我們或許要想一種尺度恆以相等距離代表相等比例，其製繪必是十分困難之事。可是事實上卻不如此困難；只要原則知道了，

其製繪之易初無易於自然尺度。吾人之須切記者是，在對數尺度上數目是按對數之距離塡出，卽是，2之數塡於由1至2對數之距，3之數塡於由1至3對數之距，以此類推。故在圖上數10是在數1之上，數100在數2之上，因10之對數爲1，與100之對數爲2故。同樣的，我們見出數2是在0.301之上，以0.301是2之對數故，數5在0.7之上，以0.699是5之對數故。簡言之，我們可說在對數尺度上之各數相當於它在自然尺度上之對數；反過來說，在自然尺度上之各數相當於在對數尺度上它的反對數。(附註) 從此事實我們可見出正在0.5之上的是對數尺度上10之平方根，正在1.5之上的是1,000之平方根。

現在我們尙須證明依此種原則所造之尺度是否能滿足等距代表等比之條件。設若我們能證明上圖中1與2間之距離等於2與4間之距離，或2與3間之距離等於4與6間之距離，則我們所作之尺度卽是眞正對數尺度。

茲試證之：2與3之距離定於 log3-log2，因在作圖時2係畫於 log2 去線端之距，3係畫於 log3 去線端之距故。同樣的，4與6之距離爲 log6-log4。但是 $\log 3-\log 2=\log\frac{3}{2}$，與 $\log 6-\log 4=\log\frac{6}{4}$，所以 $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$。若是則2與3間之距離等於4與6間之距離可無疑義了。(附註)

(附註) 此處對數的基數爲10。任何數之對數，若基數爲10時，必是10自乘迄至等於該數時所有乘方之指數。因是，$10^3=1,000$ 故 1,000 比基數10之對數爲 3，其寫法如：$\log_{10}1000=3$。相當於已知對數之數稱爲「反對數」(anti-logarithm)。故 1,000 之對數爲 3；而 3 之反對數爲 1000。

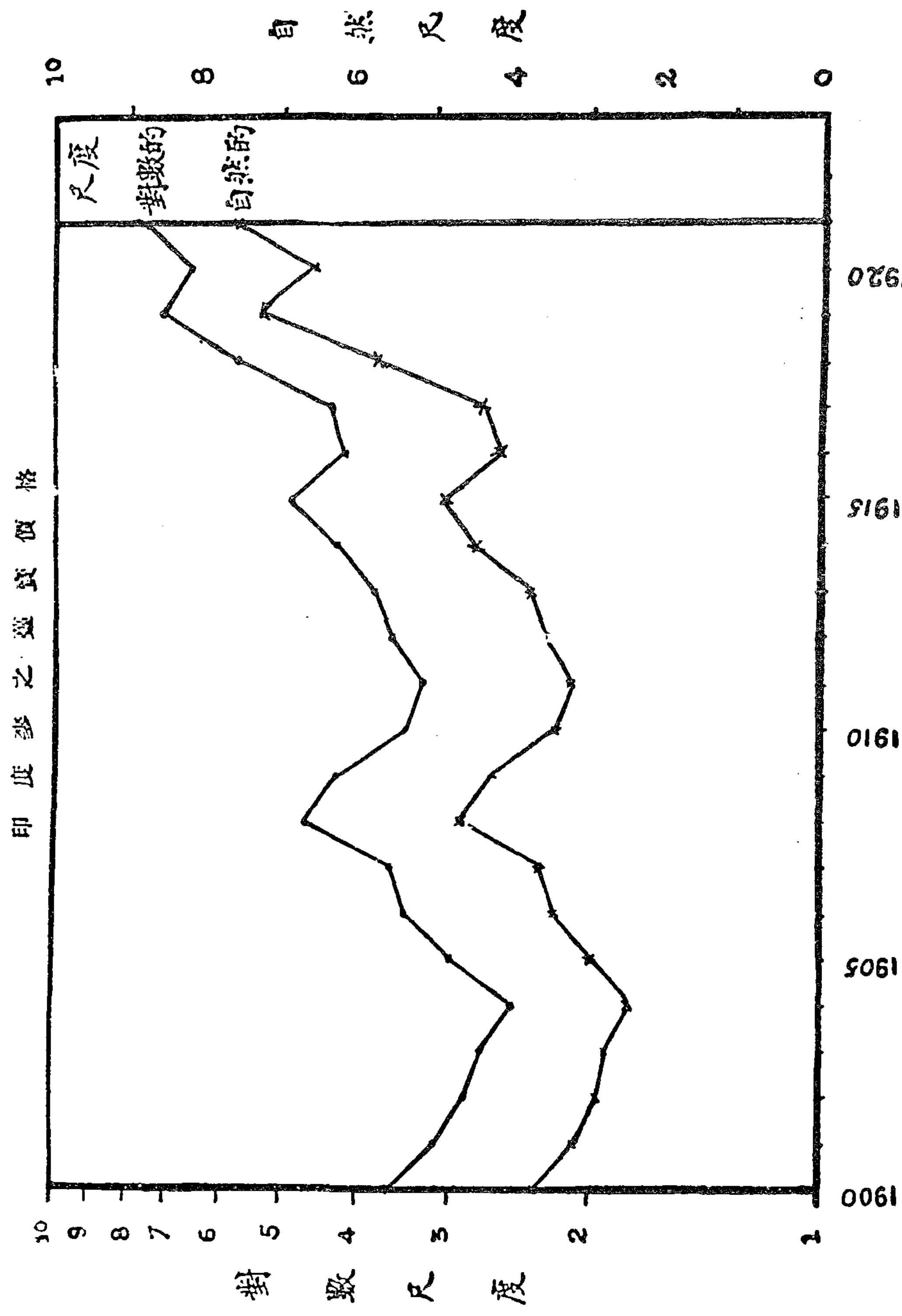
對數曲線之效用

線解8表明對數曲線之效用。在此線解中印度由一九〇〇至一九二一年之間麥之躉賣價格以兩曲線表明之，一是依據自然尺度，另一是依據對數尺度。在對數曲線所表出之變動是較小於在另一曲線所表出之變動，這是應注意的。若自然尺度之選擇而使兩線在同一點開始，則變動之相差將更爲顯著。爲使兩種線解之差異特別顯露，並表明自然尺度之線解怎樣常給目光以錯誤圖形計，我們又依據假設的但精選的諸數字而作線解9與10。諸數字係表明繼續各年中一種現象所有之次數：數字如下：

年度	次數	年度	次數
第一	20	第八	135.00
第二	40	第九	101.25
第三	30	第十	202.50
第四	60	第十一	151.87
第五	45	第十二	303.75
第六	90	第十三	227.81
第七	67.50		

從此等數字我們可以見出，在第二年次數增加百分之百，而在第三年則減百分之二五。自此之後，次數又增百分之百，並接着又減百分之二五，如前一樣。此種變動繼續前進，直至第十三年止。因升與降是通體調整的，故實際我們所需之線解，將表出升與降之調

（附註）就是對數的此種代數性質使對數尺度在圖解中用途至鉅。此處所討論的性質是：兩數之對數相差等於該兩數的商數之對數。玆設 $\log A-\log B=\log A/B$。試證之，設 $\log A=x$，$\log B=y$。於是 $10^x=A$，$10^y=B$，則 $10^{x-y}=A/B$。以對數代入，$\log A/B=x-y=\log A-\log B$。


印度證券之價格
自然尺度
對數尺度
尺度
對數的
自然的
10
8
6
4
2
0
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1900
1905
1910
1915
1920

圖解 8

整率度。線解9能滿足此條件。該線之數字是依據對數尺度。線解10表明作於自然尺度上之同樣數字，但是其線卻顯出一謬誤圖式。它增大了附近線尾之變動，以致看來似乎升與降恆有繼長增高之勢。

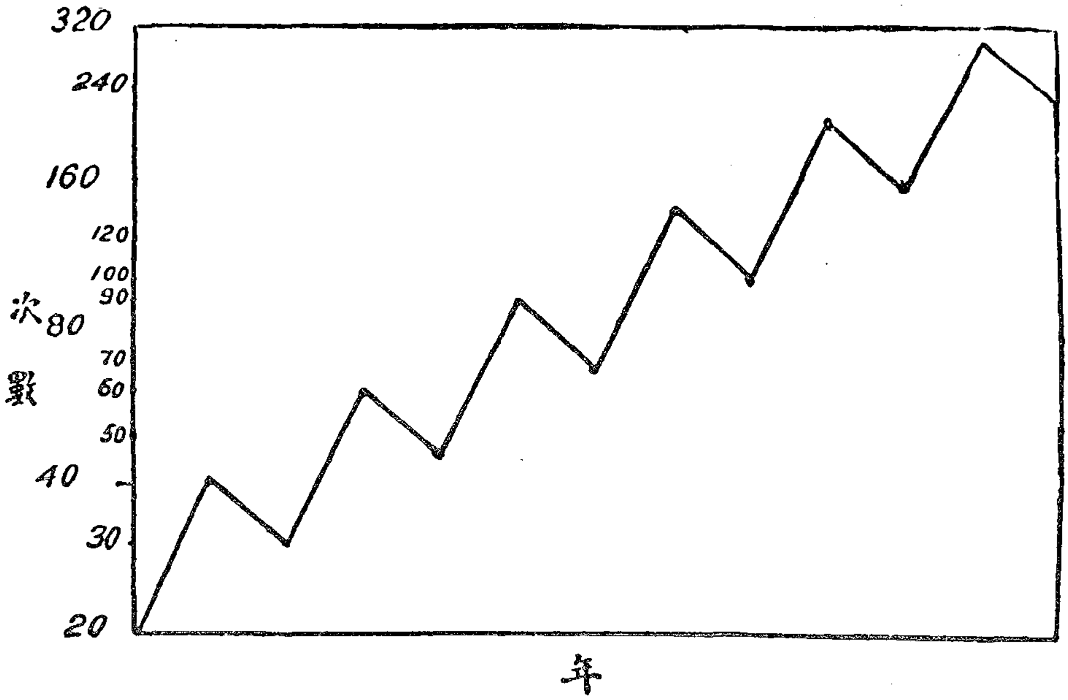
在對數尺度與自然尺度上所作線解之比較

線解9係用對數尺度，以一吋之垂直上增代表百分之百的增加，因20與40間，以及40與80間，或160與320間之距離均等於一吋故也。圖中所有上升諸線都是平行的，下降諸線也是平行的，這僅因爲增加率與減少率恆是同樣故。若是我們尙記得橫尺度若分爲等長之若干單位，垂直之升或降若恆是一律時，則升或降之斜度亦必恆爲一律，對此層將呈更容易的了解。因是，當橫尺度分爲等長之單位時（通常是這樣），我們若要比較增或減之率度，只須考察各線之斜度。所以，增或減之相等率度可由圖中各線之相等斜度表明之。

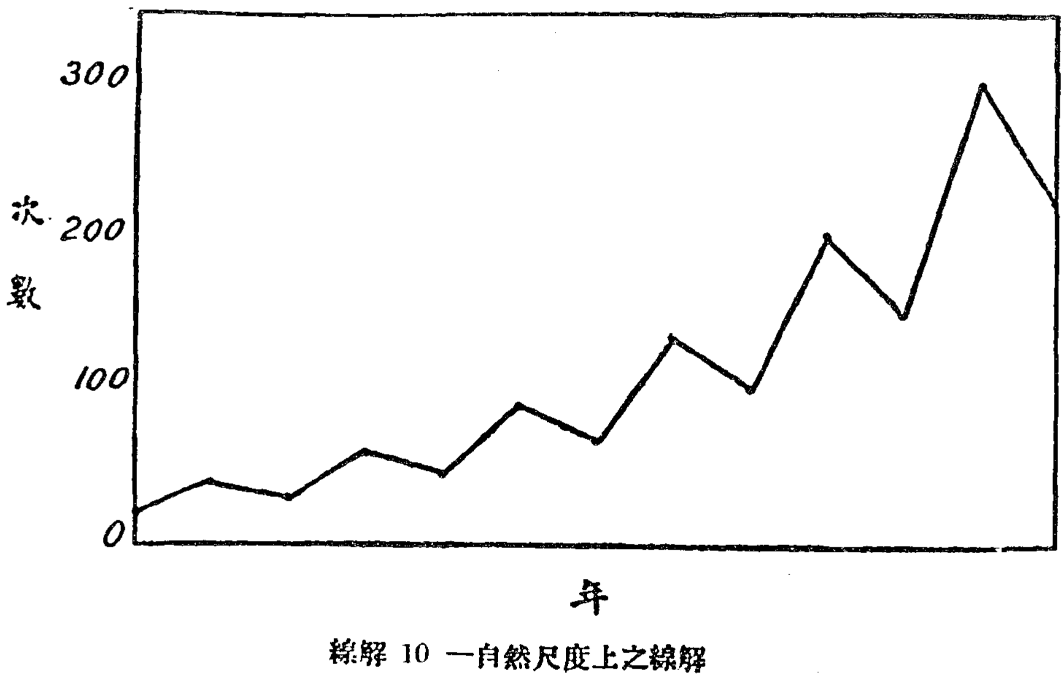
當據同一橫的或縱的尺度而作兩線解時，若採用對數尺度，則兩線的比較將更顯明。若兩線在任何時期中是相互平行，則表明兩變數（係以兩線代表）在該期中之變動有相等率度。而且，它們又表明兩變數通該期中其間恆維持同一比例。

算術級數與幾何級數

在對數尺度上之直線可表明變數之恆定率，因爲線之斜度或偏差是全體一律故。直線表明在相等時距內所考察之變數沿橫尺



線解 9 一對數尺度上之線解



線解 10 一自然尺度上之線解

度之升或降恆有一相等之垂直距離，或換言之，在相等時距內，變數以同一率度而變。所以，幾何級數之系列，當在對數尺度表出時，

其形式將爲直線，該線之偏差將隨級數之公共比率而變，而尺度則毫無變動。(附註) 可是，該數列若在自然尺度表出時，其形式將爲曲線，線之曲圓則偏趨於橫尺度。

在他方面，算術級數之數列將在自然尺度上表出一直線，而在對數尺度上則爲一曲線，其凹圓則偏趨於底線。末了，若數列之「諸項」(terms) 以累進率增加時，則此數列無論在自然的或對數的尺度均將形成一曲線，其凸圓偏趨於橫尺度。(附註)

對數尺度上無零點

在本章所論之對數尺度上，我們或許已經見出，並無零點。蓋對數尺度可由 1 或任何較高之數開始，但決不能由零。在科學上我們可這樣解釋其故：上面已說過，在對數尺度上所誌之各數，其去尺度末端之距離恆等於該數之對數。故在尺度之末端我們可誌以數 1，因 1 之對數爲零故。零決不能誌於尺度上，因零之對數不是一正數故也。因是我們的尺度可以從 1 開始，若是願意，我們也可

(附註) 若數列之升或降有一恆定因數時，該諸數則稱爲是幾何級數。故 1,2,4,8,16……與 2,1,1/2,1/4,1/8……諸數是幾何級數。公因數稱爲公比率。在前數之第一數列，公比率爲 2，在第二數列公比率爲 1/2。幾何級數的數列表明增或減之恆定率；所以任何直線在對數尺度上將代表一幾何級數之數列。

(附註) 因爲對數曲線是比例曲線，并特別因爲在對數縱尺度上之直線是表明變動的恆定率，所以藉此種尺度之助很容易求出關於複利息之數。茲舉一簡例明之，假設有一百盧比本金，複利率爲百分之五，利息每年計算一次，試求十年內應得利息之總數。解決此問題，可作一由一百盧比（或稍少）上升之對數縱尺度。在橫尺度上畫出十個等距離以代表十年。然後在一百盧比及第一年之線上作一點，次在一〇五盧比及第二年之線上作第二點。以直線連綴此二點并引伸以交於第十年之線。此相交點距橫尺度之高度卽表示應得之複利息總數。

從較高之數開始，只將尺度從其末端割去一部分。設若以零誌於一尺度之末端，而將其他在上面之任何數予以一吋之距離，則是表明一吋之上升代表從零到該數之增加，或一無限大之增加率。若然，則在第二之一吋距離時，我們為保持同樣比率計，實際將不能誌以任何有限數，只能誌以無窮大了。此點可證明對數尺度上不能有零之故。

從事實上看來，我們甚至不須以1開始對數尺度；我們可以任何方便的數目開始之，而將其較低部分割去，如上面所述，只須記着此數目不可大於要在圖上表明之最低數目。所以此層是對數尺度特有的便利。它能經濟地位；若已知諸數在它們相對差數之比較上是十分龐大時，對數尺度幾乎是不可離的。

縱軸無零點并不能使吾人對線上各點代表諸數的比例構成謬誤觀念。自然，在自然尺度上零點是必需的，因為此時諸數之大小僅能從圖中各點在零線上之高度的比例求之。而對數尺度是比例尺度，故無在其上表出零點之必要。我們在比較諸數之相對大小時，所需要的只是各點間之垂直高度。

第十章　曲線法(Curves)

圖解與曲線之比較

在前九章中，我們所攷討者爲製繪圖解之諸方法。在前五章中，我們只限於圖畫式的圖解之研究。在彼處我們已見出類，組，數列怎樣可圖解，主要是圖畫式的，代表之。在後四章中，我們研究非圖畫式的圖解，我們稱之爲線解。在彼處我們已見出在數列之圖解上，與兩數列或多數列之比較上，線解是怎樣特別有用。

可是在諸章中我們沒有直接論及經濟學理之研究，或經濟問題之解決。我們不過見出圖解怎樣可助吾人對事實與數字的了解，與乎我們藉圖解怎樣常能據所有統計以發見重要事實，而這些事實，不經此或許是永遠不能見着的。我們又已見出藉圖解之助以詳攷統計，我們怎樣能集合材料以謀經濟問題之解決，抑或給演繹製定的諸學說以證驗，因而予以確認或否定。可是，圖解法儘管有許多便利，吾人須記着，若無滿足的統計可用時，此法亦歸於無用。圖解之發生在於已有適當統計之後；它們是建設在統計所立的基礎上之建築物。因是，多少具有確切性的數字材料爲以圖解研究現象所不可少的。所以社會事實與現象之觀察必先於圖解之應用。

無數字材料之時，卽無作線解之可能；可是若已有數量的度計

或材料時，曲線卻可達有用目的。曲線非他，卽是一種不依據數字材料而作之平滑線解。曲線亦可從已知或假定的數字材料以製成，可是它的製繪通常是依據少數包含數量的，但非確切的數字材料之假設。它於表明兩現象的相關性質，甚爲有用。蓋曲線之作幷不依據實際數字；其唯一用途，乃在以其一般趨勢或形態，表明一事物之數量隨他一事物的數量之繼續變動而爲變化之方式。所以，若所考察者爲兩現象，與牠們間之數量關係亦是已知時，不管怎樣不完全，我們可馬上作出一曲線，以合用的方式表出兩現象間之關係。若我們已經研究幾種經濟曲線，則此種曲線如何可幫助經濟問題之解決或經濟學理之澈透了解，自可不言而喻了。

曲線之解明

關於下述曲線尙有數點須在此處研究的。曲線之所表明者恆爲兩經濟現象間之關係；此兩現象之表明係沿着二互相垂直之軸。在兩軸上所記之二數量中，其一係獨立變動者，應盡量記於橫軸卽是 x 軸上。若價格爲二數量之一時，它通常是被記於 y 軸上。曲線之形態通常可以滿足所表現象之所有已知各特質。但是事實上多數社會現象當中的關係是不能完全知道的，所以曲線通常只能具

（附註）關於曲線在經濟學中之用途，尼哥爾孫(Nicholson) 在他的政治經濟大綱(Elements of Political Economy)中有如下的話：『在經濟學的純粹理論中，有些根本概念之性質與關係能以曲線最明晰的表出。此種用以解釋抽象理論之曲線，其作出是依據詳愼定出的諸假設條款。這些曲線不是用以表明統計研究之結果。蓋在吾人得不着相應的統計數字時，曲線在抽象研究上爲用至鉅。簡單曲線之主要用途在以圖解形式解明一物的數量之繼續變動與另一物的數量之變動相適應。』

近於正確的形態。

一切曲線大部位置於第一象限內，即是它們恆居於 y 軸之右與 x 軸之上。可是有些時候曲線之一部亦有擴張到 x 軸下面的。若曲線落於 x 軸之下時，線上各點在軸下者，其高度爲負數，表明沿着 y 軸所度之數爲負數。

一切曲線均作於自然尺度之上，線之發軔點恆代表兩軸之零點。蓋變數係記於 x 軸上，當單位是無限小時，發軔點可用以代表第一單位。

第十一章　消費論

效用漸減原則

在消費論中我們首先用曲線表明的是效用漸減原則。我在此處不欲研究效用之定義，亦不欲論述效用漸減原則。我相信一般學生已稔知幷已牢記經濟學中之諸原則。故於本書所給之諸曲線當不難於了解。

邊際效用(marginal utility)

一種商品之邊際效用，縱不在開始消費之時，至少在少數單位已經消費之後，已減少了的（註一）；但該商品之「總效用」(total utility) 則是繼續增加，迄至是種慾望已完全滿足爲止。此兩種現象以曲線在圖 1 中表明出來。已消費單位係記於 OX 線上，諸單位之邊際效用則記於 OY 線上。我們可以見出商品第二單位之效用三倍大於第一單位之效用。（註二）效用繼續增加，直至約有 $4\frac{1}{2}$ 之單位業已消費爲止；自後則效用遞減，至已消費11單位時，效用已

（註一）爲經濟篇幅起見，經濟學的原理簡括的散述於本篇各處。但是，我對於述原理的文字則力求盡量確切，而不必無謂的冗長其詞。

（註二）在本圖中爲幫助了解起見，第一單位係記於線之發軔點。

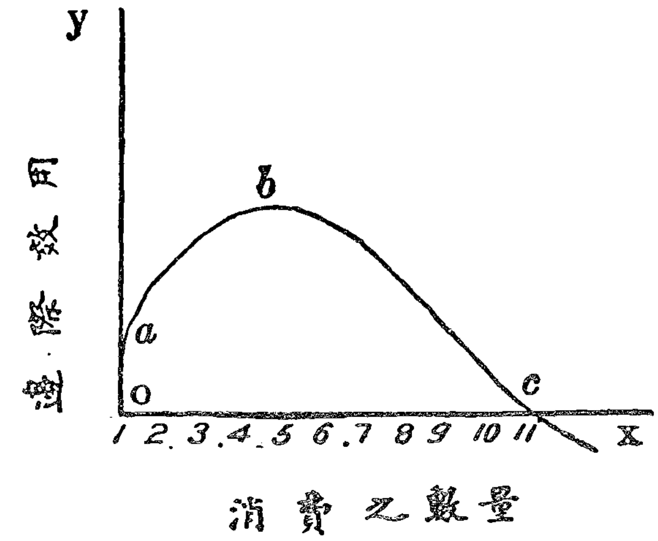


圖 1

爲零。自此之後，更進消費則給出「反效用」(disutility)，以在 x 軸下之曲線表明之。消費任何單位之效用以在 x 軸上方曲線相應各點之高度度量之。

總效用

此同一現象又可以另一曲線表之，以表明增加的總效用，而不表明減少的邊際效用。所以下面曲線可表明商品消費中所獲之總效用遲早係按遞減率以爲增加之原則。(附註)

在圖 2 中消費之諸單位記於OX軸上，如前一樣，記於OY軸上的則爲總效用而非邊際效用。曲線 a b c 上升至於 c 點，即是總效用繼續增加，直至已消費OC之單位爲止。但是我們可以見出曲線之 a b 部分對 x 軸是凸圓，其 b c 部分則是凹圓。其理由蓋因消費

(附註)總效用可使其在開始消費時即按遞減率增加，只須所選單位是相當的大。

單位在 OB 內時，其總效用是以增加率增加，正如在圖 1 中消費上升至 $4\frac{1}{2}$ 單位，其邊際效用之繼續增加一樣；自此以後，總效用雖仍增加，但係按漸減率，直至消費 OC 單位為止。在已消費 OC 單位之後，曲線便開始下降，表示總效用已停止增加，並開始減少。

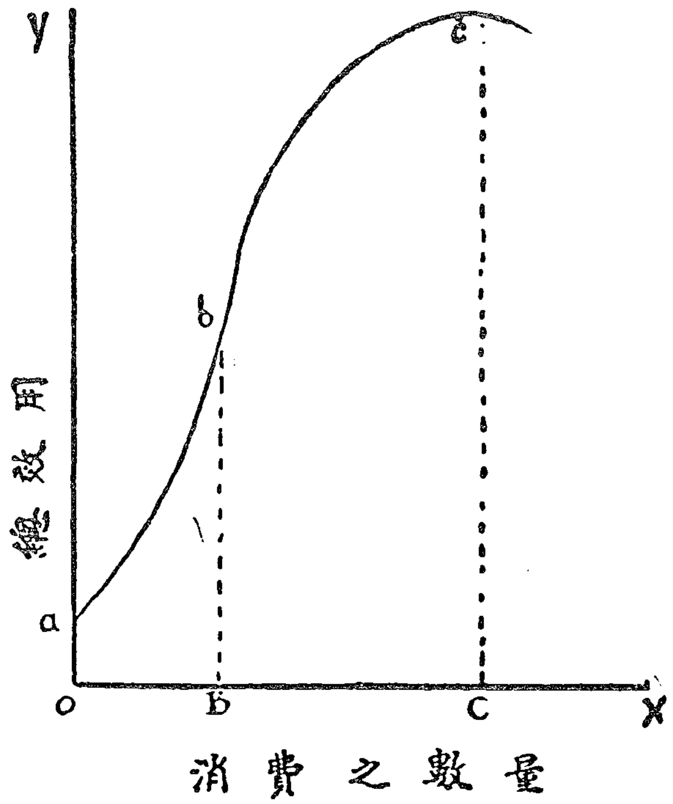


圖 2

若比較兩圖，我們可見出在圖 1 中迄至 $4\frac{1}{2}$ 單位邊際效用是繼續上增的；在圖 2 迄至 $4\frac{1}{2}$ 單位總效用是按累進率而繼續上增的。在圖 1 邊際效用是漸減的，可是乃在零度之上，或是正數，直至11單位消費為止；在圖 2 我們見出總效用是增加的，但係按漸減率，直至11單位消費為止。在已消費11單位之後，在圖 1 之邊際效用是負數，在圖 2 之總效用是漸減。

累進增加率與累退增加率

我們現在研究為什麼曲線向 x 軸之凸圓是表示漸增率，其向 x 軸之凹圓則是表明增加之漸減率。

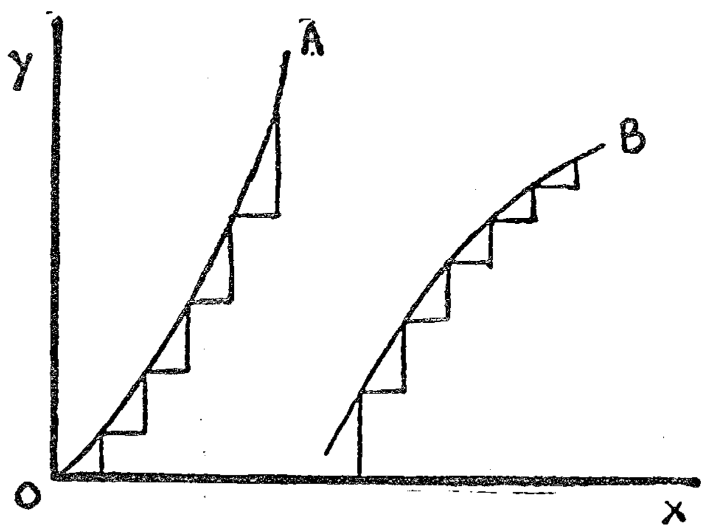


圖 3

在圖 3 中有A，B兩曲線。曲線A對x軸為凸圓，曲線B為凹圓。在曲線A我們可見出沿 x 軸以相等步度前進時，高度以漸增率增加。所以總高度按累進率而增加。同樣的，在曲線B，在沿着 OX 以相等步度前進後，高度以漸減率增加。所以此時總高度以漸減率而增加。在前一例我們得着一凸圓曲線；在後一例得着一凹圓曲線。

於是我們可說凸圓曲線表示一累進增加率，凹圓曲線表示一累退增加率。故在總效用之曲線時，其凸圓部分表示效用增加之比例較大於所消費商品數量的增加，而其凹圓部分則表示效用增加之比例較小於所消費商品數量的增加。

必需品之效用曲線與娛樂品或奢侈品之效用曲線

在繪效用曲線，特別是邊際效用曲線時，吾人圖中所有之第一部分可以略去，藉使邊際效用曲線於開始時卽漸次下降而沒有上升。這種辦法并非有任何不眞實之處；這不過表明所消費商品或認定消費的商品之單位是充分的大，故卽其第二單位的效用亦較小於第一單位的效用。

在此等場合，吾人於作曲線時須十分留心，務使線在 y 軸上從一適宜之點開始。（附註）一種生活必需品，在無適當代用品時，具有無限大的效用。故其第一份，若在合理的大小時，效用是無限的。因此，作此種商品之效用曲線時，須注意使曲線在 y 軸上從一無限量之點開始。其最容易方法是不使曲線與 y 軸相遇；使其從第二單位開始，然後將曲線向左方延展，俾幾與 y 軸成為平行。自然，在或種情形之下，必需品之效用曲線亦不見有此種性質。

普通需用品不是各個消費者萬不可離之物。但是在作兩曲線之比較時，一曲線是代表必需品，另一曲線是代表娛樂品或奢侈品，則前者之製繪必如上所述。

更有進者，必需品之效用，開始時雖是無限大，卻降低甚速，而娛樂品之效用，在最初數份雖是比較甚低，而其漸減率則甚為遲緩。茲以例明之，對於一饑餓的人，他所食的第一塊餅，效用是無窮大，可是至第十塊餅時，或竟無效用可言了。但是領結對於一年青

（附註）發軔點仍代表 OX 上之第一單位。

的執袴子，縱在第一百個時，仍有極大的效用。自然領結的樣式可有些微改變，可是在前一例，縱然各餅之味道不同，而饑餓者於已食八九枚之後卻不能再食了。

所以，在作效用曲線以表明兩類物品時，吾人須注意表出它們的適當趨向。必需品之曲線必比娛樂品之曲線要陡峻些。

若一商品之效用以累進率低減時，卽是按漸增的百分率以爲減少，其效用曲線或爲直線，或爲凹圓偏向於 x 軸之曲線。但若效用之減低率，其本身亦是遞減的，則曲線以其凸圓偏向於 x 軸。

雖然，欲決定各樣商品對於各樣人們的效用之低減率，其事甚難，所以欲確定各場合的曲線之確切形式乃不可能。普通辦法是作一凸圓向 x 軸之曲線。此種作法或許對娛樂品或奢侈品甚爲適宜，因爲它們的效用，普泛說來，是按一遲緩率度而遞減，須在已消費極大數量之後，效用零點始能達到。但是在必需品的消費，特別在食物之消費時，效用遞減則至爲迅急。（附註）其效用在最初是無限高，但達至一極小數量則很快的減少，效用零點之達到亦極迅速，以致吾人認爲效用是以累進率而漸減。設若此層是眞實，卽是效用

（附註）「消費」二字又常用以表示「所有」（possession）的意義，這也是不錯的。若用爲所有時，食物之消費曲線不一定表出迅急遞減的效用，因爲所有之物可用於直接消費，亦可持以交換他物。因是，一物之效用，在某種意義上，是取給於他物之效用，或換言之，它有「交換效用」（exchange utility）。一物一定數量之效用常含有時間要素的概念。若所有之時期甚短，則必需品必須交換然後能獲得滿意數額的效用。

「交換效用」能否視爲一物之效用，乃視吾人對效用之如何解釋而定。若效用解釋爲『一物直接或間接滿足一般慾望之能力』，交換效用亦當概括於效用之內。

之減少，并非按累增的絕對數，而實際是按一累進率，則代表此種商品之曲線將是一凹圓曲線。但是凹圓曲線有遇 y 軸於某定點之趨勢；所以，此種凹圓曲線亦不是適宜的曲線，其一部分在開始時亦必須爲凸圓曲線。

以貨幣表明之效用

我們前面是以心理滿足的單位來討論效用。效用被視爲從消費所獲之滿足，并以想像的單位而記於 y 軸上。因此我們自然的見出效用曲線在表明必需品之消費時應在一無窮大的點上與 y 軸相遇，乃是必然之理。可是效用亦常用貨幣來度量，并以貨幣度量時，必需品第一份消費之效用乃是一有限數。譬如茲有一人保有有限數額之財富或信用，他并能犧牲此全數額以求必需品第一份之消費；若是，則第一份之效用，如以貨幣表明之，乃是一有限數，縱然此數額的貨幣之效用是無限大。因此之故，當效用以貨幣度量時，效用曲線恆在一有限距離與 y 軸相遇。此相遇點或許甚高，亦或許甚低，視貨幣單位在相關人之財富比較上或甚大或甚小而定。

漸減效用之計算

設若總效用之方程式爲 $y=f(x)$，則邊際效用之代數式卽爲 $\frac{dy}{dx}$ 或 $f'(x)$，因爲微分數 $f'(x)$ 是指 x 每單位之增加，y 亦同時增加之率度。因此，爲求任何單位消費之邊際效用，我們不能不求出 $f'(x)$，而按有關單位以代入 x 之相當價值。所以，設若總效用曲線

之方程式為 $y=3+10x-x^2$，則第三單位之邊際效用為 $\frac{dy}{dx}$，若 $x=3$，即是邊際效用為 4。

x 從 $\frac{dy}{dx}=0$ 方程得來之價值可表明總效用在最高點時所有單位之數，或滿足全部慾望所有單位之數。蓋 $\frac{dy}{dx}$ 在數字上是一角度的三角正切，此角度係曲線在特定點上所有之幾何切線同橫軸所構成。在曲線最高點時，曲線開始降落，此角度即為零，因切線平行於橫軸故。角度既為零，則三角的正切將亦同為零。所以 x 從 $f'(x)=0$ 關係所獲之價值即是 y 之最高價值，或總效用之最高價值。

需要定律

需要定律告訴吾人，價格每增則需要下降，價格每減則需要上升，在其他情形不變之時。對於任何個人所作之商品效用曲線，當效用係由貨幣表明時，即成為該個人之需要曲線。蓋在此曲線中，在 x 軸上面之任何高度均表示貨幣所表之效用，或換言之，此高度表明該個人為交換此特定單位的商品所願給出之貨幣數額。個人提出漸減價格以交換商品之每一增加單位，因商品之效用係隨個人消費之每次增加而逐漸減少故。在一市場內當供給超過平常時，價格必然低減，藉使消費該商品之人們增加購買，并吸引從前未消費該商品的人們亦來購買。換言之，一商品之價格降低，則其市場需要上升，有顯明的理由二：第一，從前消費該商品的人們現在可多消費，與第二，從前未消費該商品的人們此時亦開始消費。

於是我們知道，價格上升則需要降低，價格降低則需要上升。

除了此種數量關係外，不能再有所知。價格與需要變遷當中的確切關係，吾人未由知之。隨價格降低而有之需要增加乃繫於諸個人之需要曲線——諸個人卽已爲購買者與未爲購買者。換言之，需要之變遷依靠各個人所有商品效用曲線之形式。

此種關係亦不能以統計確定之。研究某一區域多數年或月價格與需要之數字大致可給吾人對商品價格與其需要當中的關係以一粗略觀念。它只能給一粗略概算，因爲統計所關涉之時期中，經濟情形乃瞬息萬變故。吾人所需要的是當其他情形不變時需要與價格之間的關係。雖然，吾人詳研價格與需要之統計所發見之關係頗有實際的重要性，能助吾人探討至少需要的統計定律，卽使非經濟定律。

需要曲線

表明上述關係之曲線將是眞實的需要曲線。故若吾人表明價格於 y 軸上，表明需要的數量於 x 軸上，並繪一下降之曲線，如圖 4 所示，則我們便得一需要曲線。假設 P 爲曲線上之任一點，並經 P 點作垂直線與 OX 相交於M，則 O M 卽代表價格在 P M時所有需要的數量。當M點沿軸愈向 x 前移，則 P M之高度卽愈低減，此可表明價格愈降則需要數量愈增。同樣的，若M點沿軸向發軔點前移，則在 OX 上面之 P 點高度亦漸增，此可表明價格增高則需要降低。

作需要曲線時，須注意務使該線在 y 軸上從一適當之點開始。

設若曲線與y軸遇於D點，則表明當價格在OD時毫無需要可言。又是，若曲線與x軸遇於L點，則OL卽是當價格爲零時所有需要的數量，卽是當商品可以無價取得時，需要僅爲OL之數額。所以我們應當記着，L點應與發軔點有相當之距離，蓋在大多數場合，若價格降至零點時，則需要之量必甚大故也。在必需品時，價格縱降至最低點，需要亦不能大增，這是實在的；然而須注意縱爲生活之必需品，社會所有人們亦未見俱能充分享受這一層，所以我們實在亦應認定當商品可以無價取得時需要量是可鉅大增加的。

需 要 曲 線

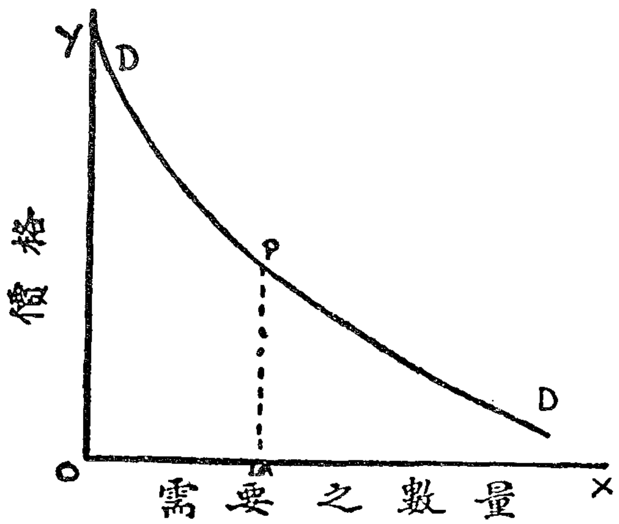


圖 4

在娛樂品或奢侈品時，普泛說來，當價格降爲零時，需要之增加比在必需品時之增加爲較鉅。吾人對於娛樂品或奢侈品的慾望之滿足，不如其他基本慾望的滿足之迅速。其理甚爲簡單。消費娛樂品或奢侈品所獲之滿足，當消費增加時，其減低甚漸，故價格些微低落，則需要大增。以更專門的話來說，娛樂品或奢侈品之需要

曲線比必需品之需要曲線有較大伸縮性。我們以後要討論必需品需要之伸縮性，可是此時只說斜度較漸之曲線通常比斜度較劇之曲線是有更大的伸縮性。

因此，我們作「娛樂品」或「必需品」之需要曲線時，應須注意使其與x軸相遇在一甚遠之距點。可是我們不應以爲價格趨於零點時此種物品之需要是無限增加的。蓋此種商品當其爲賤價之貨時已失掉他的許多吸引力。當貧人與社會尺度較低的人們開始消費此種商品時，則富者與社會地位較高的人們卽將開始避而不用。因爲此種物品，普泛說來，只有甚小的內在價值或效用。必需品則異於是。娛樂品或奢侈品的價值，甚至其效用，乃依靠他給予消費者之特異性(distinction)。因此，卽代表此種物品之曲線亦不能於價格大減時表出需要之無限增加。

需要曲線之形式

吾人前面所論，僅屬於需要之一種性質，卽是下降曲線。此線之作，緣於吾人所知需要與價格間之僅僅一種關係。我們見出，這是一種相反關係，除此以外，則吾人他無所知。下降曲線可滿足此種關係。可是當研究效用曲線時，我們已見出一曲線，無論爲上升或下降，其對x軸不爲凸圓，則必爲凹圓。我們前面所作的是凸圓需要曲線，這個是經濟原理的圖解中一般需要曲線之普泛形式。需要曲線之凸圓表明當價格以一定數量下降時，需要之增加則逐漸變大。我們不能知道需要與價格間此種關係之確切性質。可是我們

知道一些價格變動率與需要變動率之間的關係。我們將來在相當地方尚須更徹透的討論此關係，但此時我們只概括的說，在高價格時，需要之增加率是較大於價格之減少率，而在較低價格時，此差別則已消滅，並有時變成相反的關係。此種關係，如我們稍後可以見出的，凸圓的與凹圓的曲線都可同樣滿足之（設使凸圓曲線有充分斜度），其唯一區別是凹圓曲線是代表此種關係之極端情形。所以，一需要曲線，可將其凸圓或其凹圓向於 x 軸，而不致根本影響需要與價格間所存在之此種關係；我簡截的說，因爲曲線之形式祇能影響「相反相關」（inverse correlation）之程度，雖不能影響兩現象間所存關係之性質。

需要之上升與需要之擴張（註一）

區別需要之上升與需要之擴張，此乃緊要之事。從需要定律我們可直接的斷言，價格下降則需要上升。此需要之增大被稱爲需要之上升；其增大僅由於價格之下降。可是當價格不變而需要亦可增加，此需要之增大則被稱爲需要之擴張。需要之此種增加則由於一般時樣或風尚之改變，消費者的收入增加，沒有伸縮性的其他或種商品之跌價，等等原因。（註二）此時需要曲線本身亦有改變，並移

（註一）不幸的「需要之上升」(rise of demand) 一詞往往被用以指「需要之擴張」(expansion of demand)，著者在有些地方曾用此詞在前一意義上，意在力求與經濟論述中專門術語之習慣用法有所區別。

（註二）當需要的伸縮性不十分一致時，價格降低，則所用貨幣之總額減少。所以，若此類商品跌價，則可有更多貨幣以用於其他商品。

置於原有需要曲線之上，而與之多少趨於平行。需要之升降則以原有需要曲線代表之，而需要之擴張與緊縮則以升高或降低原有全需要曲線代表之。（註三）

需要之伸縮性

在前面我們已見出，一商品之需要隨其價格之變動而變動；商品需要之此種屬性，卽需要隨價格之減增以爲升降之性，在經濟學上稱爲「需要之伸縮性」(elasticity of demand)。此術語又引伸爲兩詞，卽「有伸縮的需要」與「無伸縮的需要」。當需要隨商品價格之微變而卽變動時，則稱爲有伸縮的需要，若不因價格之微變而變，則稱爲無伸縮的需要。雖然，世間上無完全無伸縮需要之商品，因此在實際討論時，我們不得不屏棄此術語，而代替以較多或較少伸縮之需要。

所以，若價格微降而需要劇增，或價格微升而需要陡減時，此需要謂爲有十分伸縮。同樣的，當比較兩種不同的需要，其一若因價格微變而變者，則謂此需要比彼需要爲有較大的伸縮。（附註）

不同曲線的伸縮性之比較

一曲線以不同諸點表明需要伸縮性之不同諸級。同樣的，兩曲線可表明需要在同一價格時所有伸縮性之不同諸級。若兩曲線在

（註三）薛知微克(Sidgwick)用「外展」(extension)與「內增」(intensification)二字，而不用「擴張」與「上升」二字。

（附註）在度量需要之伸縮性時，應考察需要之增加率。

同一價格時恆保持需要的同樣伸縮性，則此兩曲線稱爲同等伸縮曲線。同樣的，若在同一價格時，一曲線之需要伸縮性恆大於他一曲線之需要伸縮性，則此曲線稱爲比彼曲線更爲伸縮。

僅僅一望不同的曲線，不一定常能決定牠們的比較伸縮性，卽是不常能認出何線伸縮較大，與何線伸縮較小。較陡峻的曲線不一定比較平衍的曲線伸縮性小。又是比較伸縮性在曲線的各部分也是不一樣的。

在圖 5 有 A 與 B 兩曲線曲線 A 比曲線 B 之斜度較峻，可是兩線的需要伸縮性卻差不多在同一價格是通體一樣的。所以，在兩線的相應諸點伸縮性是相同的。

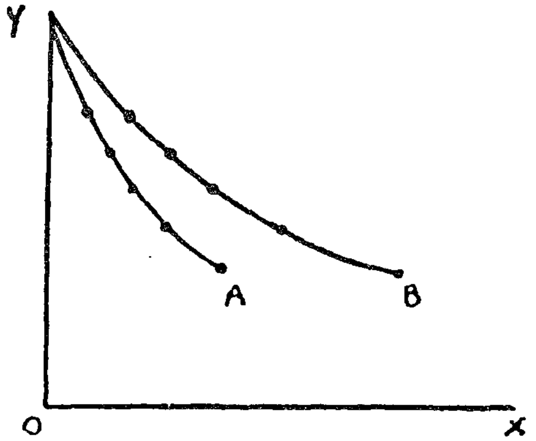


圖 5

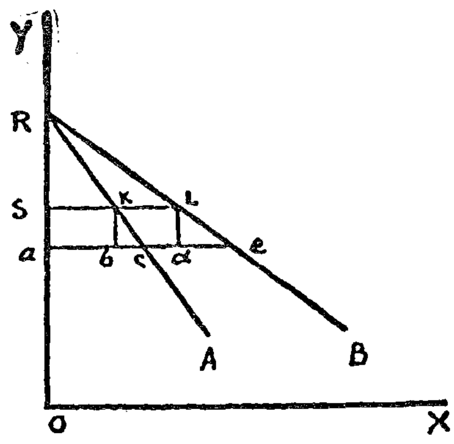


圖 5A

又是，若兩需要曲線爲直線而從同一點開始，則牠們的伸縮性在同等價格時是相同的。假定圖 5A 中 K 與 L 爲 A 與 B 兩需要曲線之兩點，與 S O 價格相應，并假定 c 與 e 是接近 K 與 L 兩點之另兩點。則在 K 點時需要之伸縮性爲 $bc/ab \div Sa/SO$，或 $RS/Sa \div Sa/SO$。同樣的，在 L 點時需要之伸縮性爲 $de/ad \div Sa/SO$ 或

RS/Sa ÷ Sa/SO。

因是，凡屬此種曲線在與 S O 價格相應之點，其需要伸縮性是一樣的。此理對於 S O 爲眞，對於其他價格亦眞。

在圖 6 中 A 與 B 兩曲線是不同等伸縮的。曲線 B 通過其全長具有比曲線 A 較大之需要伸縮性。縱然當曲線，如在圖 5 與 5 A 之 A 與 B，是相等伸縮的，但因牠們是在不同價格表明不同需要，故亦需將牠們區別出來。所以在圖 5 與 5 A 之曲線可稱爲非同等需要的曲線。從上面討論我們可見出非同等需要之曲線可有或可無同等的伸縮性。

從需要伸縮研究而來之演繹

一曲線若在所有各價格而有一致的伸縮性時，它表明消費者對所論商品將只用同一數額之貨幣，不管其價格爲何。

若兩曲線表明非同等的需要而有同等的伸縮性時，則我們可推論若兩商品之價格相等，并以同一百分率而變，則消費者用於該兩商品上貨幣總額的變動百分率亦將相同。

若兩曲線表明非同等的需要而有同等的伸縮性，并又以同一伸縮性而通過每曲線之全長時，則我們可推論不管兩商品之最初價格爲何，當兩商品價格的變動百分率相同時，消費者用於該兩商品上貨幣總額的變動百分率亦將相同。

末了，若兩曲線具有不同等的需要伸縮性，當兩商品之價格原來相等而又以同樣百分率變動時，則消費者用於該兩商品上貨幣

總額的變動百分率亦不相等。

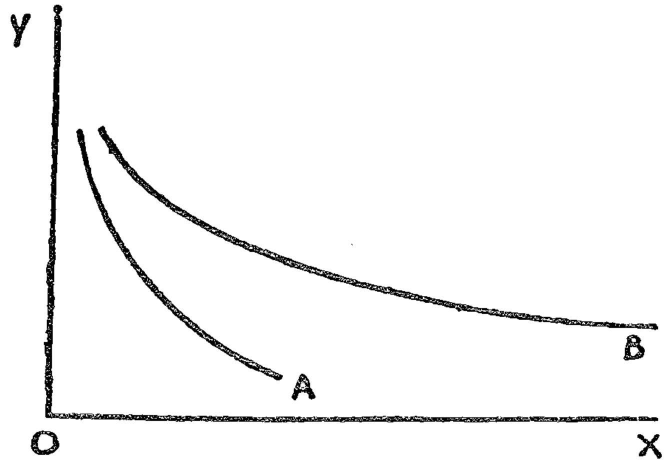


圖 6

需要伸縮性之度量

當需要之變動率等於價格之變動率時，則需要之伸縮性可謂爲一。但是，若需要數量之變動率大於或小於價格之變動率時，則需要之伸縮性可謂爲較大於一或較小於一。將需要之增加率以價

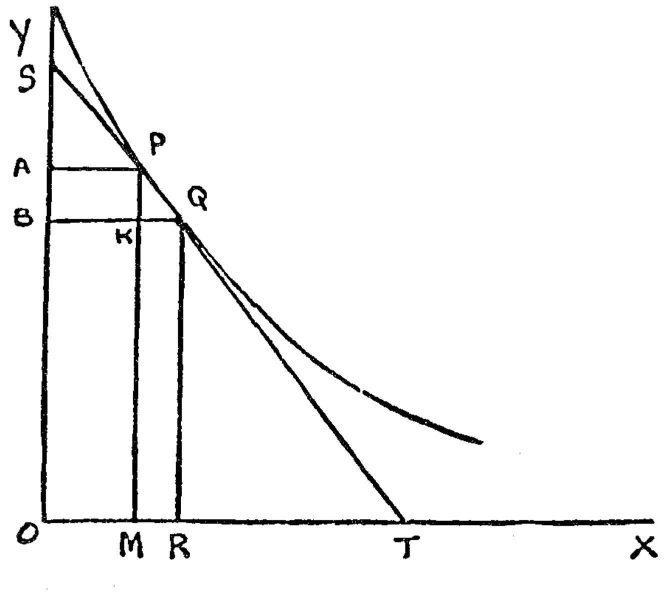


圖 7

格之減少率除之，則得需要伸縮性的確切數字度計。

在圖 7 需要在P點時之伸縮性依靠鄰近該點所有曲線之斜度。我們應將價格輕微變動，假設從OA到OB，藉以求出需要上升之程度。當價格有AB之下降時，需要即有MR之上升，這是可見出的。價格之減少率爲 AB/AO；需要之增加率爲 MR/OM。所以需要之伸縮性可以下列代數式表之。

$$MR/OM \div AB/AO,$$

或 $MR/OM \times AO/AB$,

或 $KQ/OM \times PM/PK$,

或 $KQ/PK \times PM/OM$,

或 $MT/PM \times PM/OM$,

或 MT/OM,

或 PT/PS。

爲求精確起見，我們應當考察價格之微變，以便求得在一特定點或在一特定價格時需要之伸縮性，而不是經過一排價格時需要之伸縮性。（註一）因此，在圖上，Q點應盡量與P點接近。在Q最接近P時之限度內，PQ線成爲曲線在P之切線。所以需要曲線上任

（註一）道爾頓 (Dalton) 在他的所得之不均 (The Inequality of Income) 一書中稱此種伸縮性爲「弧的伸縮性」(arc-elasticity)。據鄙人所知，氏乃批評馬謝爾度量需要伸縮性之唯一學者。他評判的精義是：馬謝爾所界說的與所計算的需要伸縮性乃是「點的伸縮性」(point-elasticity)，此種伸縮性實際效用甚小，蓋在有組織的市場中價格之變動不是無限細微，而是有定限數額的。此點道爾頓所見甚是。但我以爲他與馬謝爾在此點上之區別殊非緊要。設使馬謝爾詳論需要之伸縮性，我相信他的主張或已洽如道氏之所云。

何點之需要伸縮性可於該點作曲線之切線以得之；設若此點為P，切線遇OX於T，遇OY於S，則在P點之需要伸縮性等於PT/PS。（註二）

需要伸縮性在凸圓與凹圓曲線上之變動

設若我們在需要曲線之諸點上作數切線，則將見出各切線居於兩軸間之部分為切線經過曲線之點分為各種比例。此層可表明需要伸縮性在曲線上是逐點而變的。我們從圖8與9可見出，需要伸縮性，在凸圓與凹圓兩種曲線中，當我們從高價格到低價格時是漸次減少的。每一曲線上，在P，Q與R諸點之各伸縮性，比例各為PT/PS，QL/QK，與RN/RM。因為商品之需要伸縮性大致在高價格時較大，在低價格時較小，并因為圖中之各曲線在高價格時表出較大的伸縮性，在低價格時表出較小的伸縮性，故我們可推論，若關於需要無其他情形可知時，凸圓與凹圓曲線是同樣正確的需要曲線。

雖然，從此點我們不能便謂一切曲線都是表明漸減需要伸縮性的。自然，凹圓曲線恆含有此種性質，可是凸圓曲線則不如是。若我們首先考察一直線，則對此理將更易明瞭。

一直線表明價格是相等的絕對減少，則需要有相等的絕對增加。換言之，直線表明當價格有任何單位之降低時，則需要恆以一

（註二）關於馬歇爾度量需要伸縮性之方法可參看他的經濟原理（Principles of Economics）。

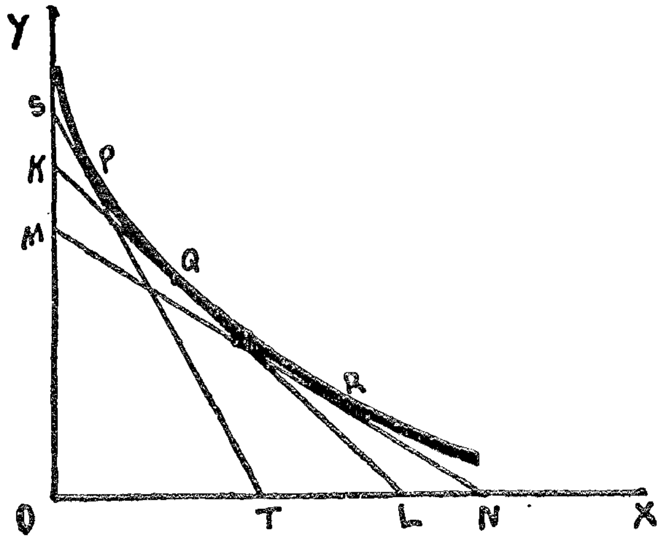


圖 8

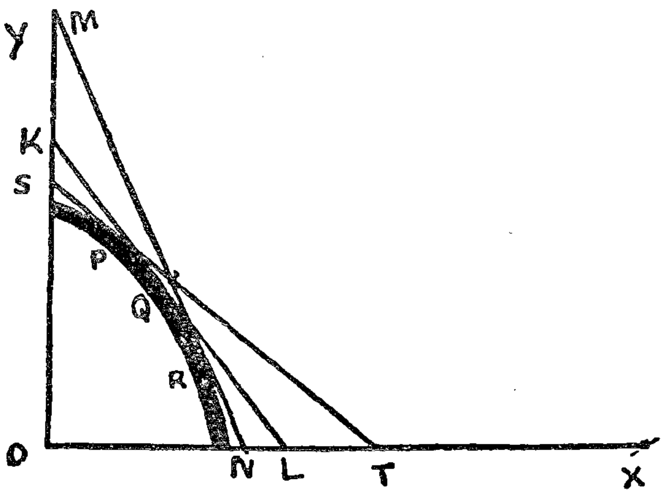


圖 9

固定量而上增。因是，當我們的需要曲線是一直線時，則此線表明若價格以漸大的率而減少，則需要以一漸小的率而增加。所以直線表明需要伸縮性在頂端比在底端爲較大。

凹圓曲線表明橫的增加不如直線所表者之鉅；因之一凹圓曲線亦在頂端恆表出較大之需要伸縮性。

凸圓曲線表明橫的增加較大於直線所表者。換言之，雖表明價

加降低之漸增率卽偕着需要之漸增的絕對增加。因之有些凸圓曲線在頂端有較大之伸縮性，又有些凸圓曲線則在底端有較大之伸縮性,這是可能的。

在圖10中 DD' 曲線表出需要伸縮性在底端比在頂端的較大。

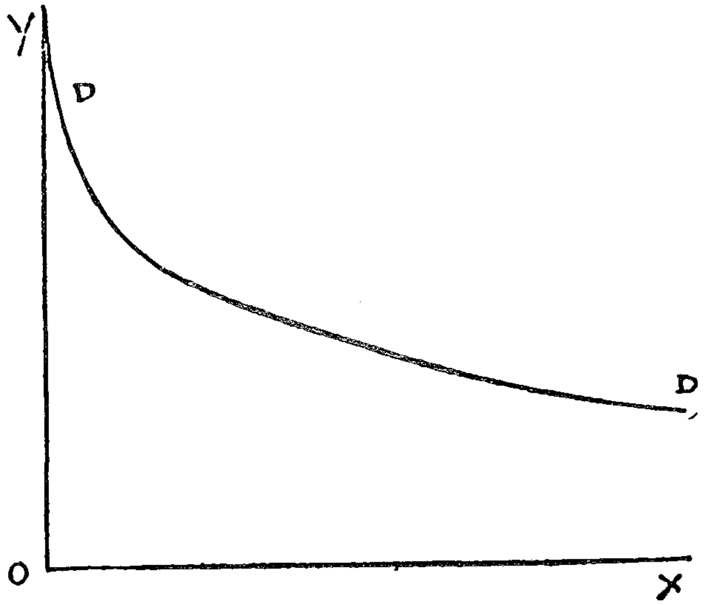


圖10

需要伸縮性之計算

當需要曲線作於對數的縱橫尺度上時，若需要伸縮性通體不變,則此線卽形成爲一直線,這是很有趣味的。蓋一直線表明在此種尺度上價格以定率降低,則需要卽以同樣率增高。同樣的,一凹圓曲線將表明在頂端之伸縮性較大，一凸圓曲線則表明在底端之伸縮性較大。

度量需要伸縮性，係以價格之減低率去除需要之增加率，可以下式表明之:若 $y=f(x)$ 是需要曲線之方程，則需要伸縮性爲

$-\frac{f(x)}{xf'(x)}$。因需要伸縮性等於$\frac{dx}{x}\div\frac{-dy}{y}=\frac{dx}{x}\times\frac{-y}{dy}$或$=-\frac{y}{x}$ $\frac{dx}{dy}$或$=-\frac{y}{x}\ \frac{1}{f'(x)}$，（將方程中 y 之值代入）則$=-\frac{f(x)}{xf'(x)}$。

若曲線之伸縮性是通體一律，則此線卽成爲一長方之雙曲線。構成需要伸縮性一律之條件是所用貨幣之總額應不變動，卽是以需要乘價格成爲常數。因此，在一曲線中，xy 應恆相同，則伸縮性在各點均爲一律之需要曲線，其方程卽爲 $xy=c$（常數）。或再申言之，因爲$-\frac{f(x)}{xf'(x)}$是需要之伸縮性，則方程$-\frac{f(x)}{xf'(x)}=1$卽是伸縮性常爲一律之曲線方程。解方程則得

$$f(x)+xf'(x)=0$$

或　$$y+xf'(x)=0$$

或　$$xy=c\ (\text{變爲乘積})$$

平衡邊際效用定律(The Law of Equimarginal Utilities)

個人之用其所得，恆力求從此以獲最高滿足。因是，若非他的所得甚微不足以應付目前急切的需要，他將儲蓄其一部而用去其餘。他用於目前的數額又再分配於諸種商品，其方式則務求每商品所用之每單位貨幣能有同等之邊際效用，或至少有近於相等的效用。他儲積他的所得之一部，因爲他恐怕將來若有意外情形將使他用錢較平常時爲多；他又或爲準備他預先見出的將來費用而儲蓄；他更或緣於家庭之情感而儲蓄——爲其妻與子謀較大的準備；抑或他甚至僅爲儲蓄之愛好而儲蓄——因累積的儲蓄常給守財奴以

一種樂趣。不管屬於何原因，我們可用科學的說法以解明儲蓄的理由，卽是個人所得儲蓄之部分，必其折算之將來效用較大於同等數額用在目前所有之（邊際）效用。簡捷的說，我們可如馬謝爾的說法，謂個人之分配他的所得於現在與將來用途，以力求從每種用途每單位貨幣能獲同等邊際效用爲鵠的。

設若有若干商品，物質的或非物質的，現在的或將來的，其關於個人之效用曲線是作出或已知時，我們卽能作出另一圖解，以表明任何數額之貨幣按平衡邊際效用定律對購買諸商品之分配。

在圖11中有四種效用曲線表明四種商品每單位貨幣之邊際效

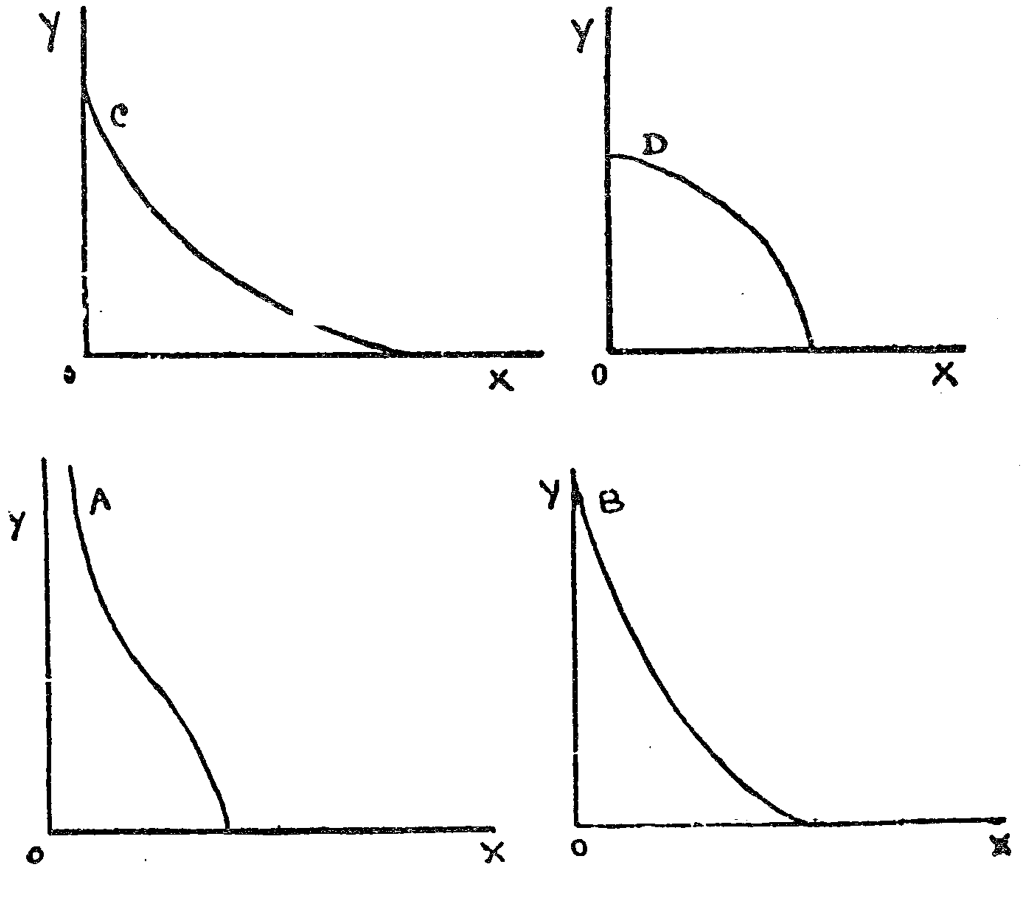


圖11

用。我們假定個人現在所能買的只有四種商品，自然此假設不能妨害我們的推理。我們又假定或所得中沒有儲蓄以備將來消費之部分，抑或第四曲線幷非表明第四商品現在的效用，而是表明貨幣折合的將來效用。我們現在可以作一圖解，將此四線合併表明出來。

A，B，C，D 四曲線是按第一單位貨幣所獲效用之大小而排列的。在 y 軸上是記的邊際效用，在 x 軸上是記的貨幣單位。在曲線 A 第一單位貨幣之效用是差不多無窮高，因爲曲線在表明第一單位之點的附近幾與 y 軸平行故；曲線 B 表明第二最高效用，可是效用在此時卽有較緩的減低率；第三曲線 C 則表明第一單位貨幣之效用愈是下降，效用則按最緩之率而漸減；第四曲線 D 表明效用有一迅速的下降，幷表明一商品之漸減邊際效用，其效用在最低價格時已十分瀕於零點。

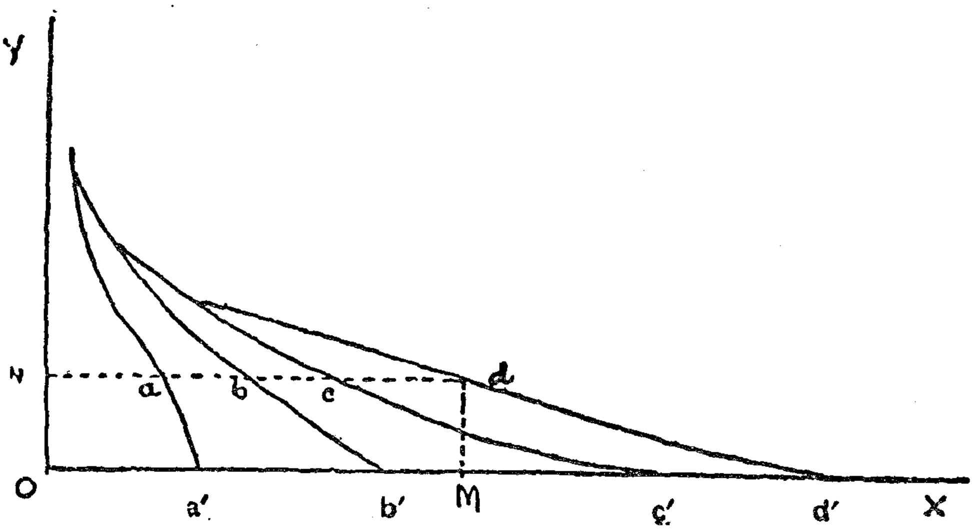


圖12

在圖12此四曲線已被合併起來。在 O X 與 OY 兩軸上表明貨

幣單位與邊際效用，我們作一曲線A如圖11之所示，而稱之爲a'。其次再作第二曲線B，仍與前同，不過其y軸不爲OY，而爲曲線a'，使圖11中OY與曲線B間在各高度之橫距離，在此等於a'與b'兩曲線間在相應高度之橫距離。同樣的方式，在圖12的c'與d'兩曲線係依據圖11的C與D兩曲線而作，每線均以前一線爲其y軸。

從上述圖解我們可能見出一定數量之貨幣怎樣用以購買四種商品，四商品之效用曲線爲A，B，C，D。例如，圖12之所示，OM額之貨幣，其用於四商品上須使其邊際效用等於Md，其Na之數將用於第一商品，ab之數將用於第二商品，bc之數將用於第三商品，與cd之數將用於第四商品。證明OM數額之爲如此用去，事甚易易。Na，ab，bc與cd四數相加卽等於OM額；又是當此等數額用於此等商品時，其各邊際效用是相等的——牠們均等於Md。其所以如此，蓋因爲製圖時已使在任何高度兩任何曲線間之橫距離代表貨幣之數額，其邊際效用則以該高度表明之。是故ab之距離代表邊際效用在第二商品時等於NO（或dM）之貨幣數額。

圖12之作法，與乎決定某數額貨幣分配於若干商品之方法，只能在貨幣單位十分小時始爲眞實，這是應當注意的。利用連續數曲線以代表數種商品之邊際效用，我們不是實際代表任何虛僞的或不可想像的經濟現象，但是我們應當記着，當一個人必須買數商品時，他或她未必常能以最小數之貨幣同時用於任一商品上。例如，我們不能以一辨士而購得短襪，或數先令而購得衣服，抑或以一金鎊而購得馬車。然而在實質上，我們的方法仍是正確的。在學理上，如

在圖12中所示之圖解，於了解平衡效用的原則應有極大價值。從上面所說之點看來，它在實際上的重要性或不甚鉅；可是，須記着，卽是效用曲線亦無實際重要可言，這是因爲心理滿足決不能容易的或精確的度量，而多種商品效用之比較亦不能有數學的精確之故。

消費者之剩餘

因吾人對所購商品之所有單位係支付同樣價格，而此諸單位之效用又各不同，於是我們得到一種滿足的剩餘，在經濟學上稱爲「消費者之剩餘」(Consumer's Surplus)。第一單位之效用通常大於價格或我們所付貨幣的效用；第二單位效用，若我們尙願買時。亦將較高於我們所付貨幣的效用，雖然邊際比前較小。卽是最末一單位，若我們願買時，所給吾人的滿足亦比用貨幣於其他地方所獲之滿足爲大。按照平衡效用原則，一商品之最後單位，以貨幣與貨幣比較，應給所有購買物以同一效用；并因貨幣的效用係由其所買商品之邊際效用決定，故可自然的推斷任一商品之最後單位所給之效用應等於價格之效用。可是因爲新的慾望不斷的興起，與新商品亦不息的生產，并因爲我們的慾望體系綠經濟情形之改變而亦時時變動，所以我們不能在任何俄頃以達到此平衡點，使在我們所買之所有各種商品中每單位貨幣得到同樣的邊際效用。抑有進者，如前面已經見出的，多數商品是不可分離的。爲了一件通常的夏服，假定我們必須付價五鎊，否則卽不能買。兩磅與十先令決不能買得半套。故結果眞正平衡點在實際事實上是不能達到的；我們

不過力求以達此點而已。因了此種種原因，所以卽是一商品之最後單位所給吾人之效用亦常比我們對該單位所付貨幣之效用爲大。可是從此點我們又可說在有些其他場合，一商品最後單位之效用卻較小於對該單位所付貨幣之效用，這是自然的推論。

雖然，從上面所述，有一事至爲顯明者，卽當吾人購一商品時，我們卻願付出比它價格較多之代價，若是需要的話。其理由是我們需要此商品比需要其他商品較爲急切；我們願意對此商品付出我們或將必需付於其他商品之數，以謀得該商品所給吾人之效用。吾人對其他商品之慾望業已多少滿足，故此等商品之邊際效用甚低，并因之而貨幣之（邊際）效用與每單位貨幣從較急切需要的商品所獲之效用相比亦較低。因此我們願意對此商品付出比其市價較高之數。我們願意付出的與實際付出之間的差數則稱爲消費者之剩餘。

於是，我們往往，或普通謂爲常常，願意對一商品之一單位或多單位付出比其市價較大之數，眞正的與惟一的理由是該商品，以貨幣與貨幣比較，所給吾人的效用，比其他業已多少滿足我們特定慾望之商品所給的爲大。

從上述我們可以見出，消費者之剩餘可以貨幣或效用表明之或度量之。惟前一度量法比後者更常採用。當以貨幣數量表明之時，消費者之剩餘是消費者實際付於商品與若在目前不能購得時他所寧願付於該商品之間的差數。若以效用表明之時，則它是消費者從一特定商品之消費所獲的效用與他或她若以同額貨幣以最有

利的方式用於其他諸商品所能獲的效用之間的差數。

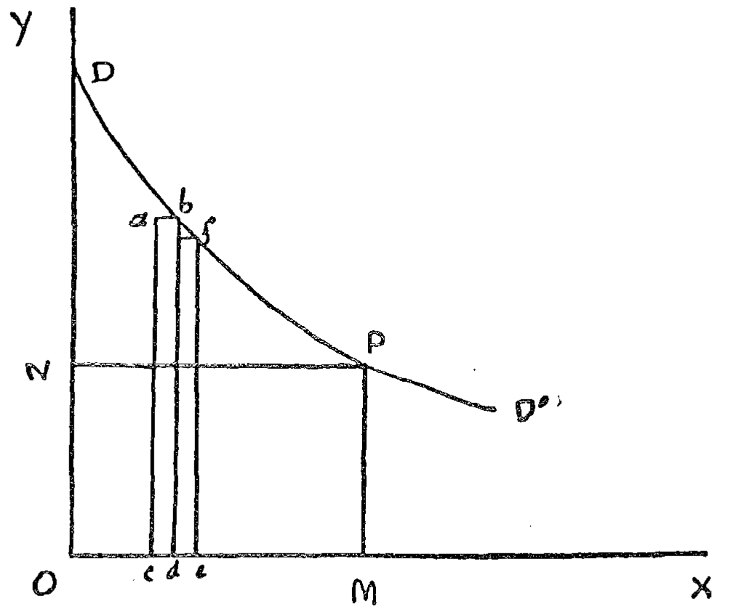


圖13

爲表明此兩種度量或計算消費者之剩餘的方法之差異起見，我們作出代表消費者之剩餘的數曲線。

以貨幣表明消費者之剩餘

在圖14表明於OY線上的爲價格，於OX線上的爲數量。D D'是個人對某商品之需要曲線，即是此線上之一點以其去OY之距離代表商品之單位數，此單位數卽個人在該點於O X上的高度所表價格時願意購買之數。當商品之價格爲P M，他將買O M單位。設若我們從P點作一P N直線以與O M平行，則得面積P N D，此卽代表價格在P M時消費者之剩餘。證明如下：

消費者爲商品之 c d 單位願意付出 b d 價格，爲第二單位

d e，他願意付出 f e 價格。以長方形表明諸價格，我們可說他為 c d 單位願意付出 c b 長方形代表之價格，為 d e 單位願意付出 f d 長方形代表之價格。所以為全體單位 O M 他願意付出之價格，必等於在 O D 與 P M 兩線間所有此種小長方形之和，即將構成 D P M O 面積，若所論單位是十分小的話。因此，D P M O 長方形代表消費者所願意對商品的 O M 單位付出的價格，而不願在此時棄此不買。

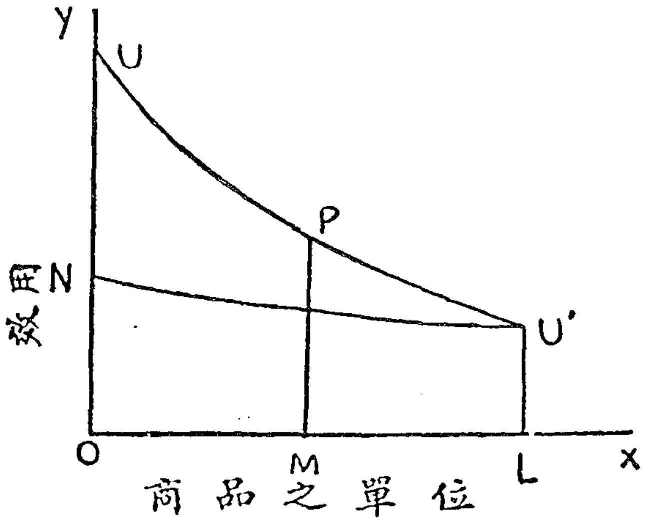


圖14

至其實際對 O M 單位所須付之代價則以 O M P N 長方形代表之，因 O M 各單位之價格均等於 P M 故。於是，他願意付出之數與他實際付出之數間之差數可以 D P N 面積代表之，此面積於是即是此例中消費者之剩餘。

以效用表明消費者之剩餘

圖14即以效用表明消費者之剩餘。此圖之 U U' 曲線是某商品

對消費者之效用曲線。在曲線上各點之高度表明該商品各單位之諸效用。例如第OM單位之效用卽爲PM。我們試假定該商品之價格可使消費者決買OL之單位。作NU' 曲線以代表他對商品各單位所付價格之效用。他對第一單位所付之價格有NO效用，第二單位之價格則效用較低，第OL單位之價値則效用爲 U'L。因爲貨幣的效用決定於他能買其他商品之邊際效用，故其效用爲漸減；貨幣沒有本身價値。若是，故他若實在去買其他東西，他將見出貨幣之各單位所給他的效用是次第的減少，因爲其他商品之邊際效用是遞減故也。這是實在的，因他並未實在去買其他商品，故貨幣的效用未曾實際低減。可是若我們欲計算消費者爲求得等於此特定商品所給之效用起見，所必須用於其他商品上之貨幣爲若干，我們必須考察貨幣之漸減效用。（附註）

簡單的說，UU' 表示消費者所買商品之漸減效用，而NU' 則表示他若以同額貨幣購買其他商品之漸次效用。消費OL單位商品所有之總效用爲UU'LO，而他計算他若以同額貨幣用於其他商品所能獲之總效用爲 NU'LO。此兩面積之差爲 UU'N，卽是以效用表明的消費者之剩餘。

消費者之剩餘的數學計算

消費者之剩餘可如次之計算：

設一商品之效用曲線爲 $y=f(x)$，x代表消費或購買的數量，

（附註）設若 OL 對於總所得比例甚微，其效用卽可視爲常數。

y 代表此數量之邊際效用，則在一時間單位內與在某價格時，若消費了 x_1 之單位，抵償價格所去之效用爲 $x_1f(x_1)$，而從消費或佔有所獲之總效用爲 $\int_0^{x_1}f(x)dx$。

所以消費者之剩餘爲 $F(x_1)-x_1f(x_1)$。(註) 若消費之額增至 x_2 時，則消費者之剩餘增加數爲

$$F(x_2)-F(x_1)-x_2f(x_2)+x_1f(x_1)$$
$$=\{f(x_1)-f(x_2)\}x_1+\{F(x_2)-F(x_1)\}-(x_2-x_1)f(x_2)$$
$$=(y_1-y_2)x_1+\{F(x_2)-F(x_1)\}-y_2(x_2-x_1)。$$

於是，當價格變動時消費者之剩餘的差數，以在原價格時之消費量乘價格之降低數，於其乘積加以從 (x_2-x_1) 之增加消費量所獲之消費者之剩餘卽得。

若剩餘是以價格表明時，此種計算消費者之剩餘的方法甚爲有用。

這是顯明的，當 x 增加，消費者之剩餘亦增加，因爲 x 增加，則 $F(x)$ 增加而 $f(x)$ 減少故。若 $x=o$，y 亦爲零時，則意思是當未有消費，從商品所獲之效用是零。

當消費數量增加時，消費者之剩餘增加率可以化開關於 x 之 $F(x)-x.f(x)$ 積分式卽得。所以增加率等於 $-xf'(x)$；$f'(x)$ 爲負數，消費者之剩餘與 x 有直接的變動。

若曲線是一直線，則 $f'(x)$ 爲常數，所以當消費數是最高時，則消費者之剩餘增加率亦是最高。

(註)大 F 之函數代表小 f 相應函數之積分。

若吾人所探討者是單一商品或一小額貨幣所付的諸商品之剩餘，則上述度計消費者之剩餘的方法是有用而正確，因此等場合能使吾人假定貨幣之一固定邊際效用故。因是，若有n數之商品，$X_1,X_2\cdots X_n$，對諸商品所用貨幣之數爲$x_1,x_2\cdots x_n$，並設$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)\cdots y=f_n(x)$　爲每單位貨幣從諸商品所獲之諸邊際效用曲線，則$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=M=$所用貨幣總數（內包括儲蓄，因爲X's中之任一x可假定爲將來所用之貨幣），而$f_1(x_1)=f_2(x_2)=\cdots=f_n(x_n)=K=$貨幣之邊際效用。

從$x_1,x_2\cdots x_r$而來之消費者之剩餘爲$\sum\limits_1 F(x)-(x_1+\cdots x_r)K$，或$\sum\limits_1 F(x)-K\sum\limits_1 x$，其中$F(x)$爲$f(x)$之積分，$\sum\limits_1 F(x)$表示此種積分在$F_1(x_1)$與$F_r(x_r)$之間的總數。

設若n與r此時爲較大，或更確切的說，設若$\sum\limits_1 x$與M相比時爲較小，則上述方法爲正確。

但若$\sum\limits_1 x$是大，此總數之邊際效用卽不能視爲常數，蓋若爲常數，則用此總數所購之商品必爲許多種，此點與$\sum\limits_1 x$是大之情形不合。

於是在此種場合，消費者之剩餘的計算如次：

從$X_1,X_2\cdots X_r$而來之消費者之剩餘，等於此諸商品之總效用，減去增益的貨幣數量$x_1+x_2+\cdots+x_r$用於其他商品上所能獲之總效用。

從$X_1,X_2\cdots X_r$而來之總效用等於$\sum\limits_1 F(x)$。

從$X_r,\cdots X_n$而來之增加效用，等於當$\sum\limits_1^n x$之數用於諸商品時之

總效用減去 $\sum_{r+1}^{n} x$ 之數用於諸商品時之總效用。

所以增加效用等於

$$F_{r+1}(x'_{r+1})+\cdots+F_n(x'_n)-\{F_{r+1}(x_r+1)+\cdots+F_n(x_n)\}。$$

x'_1, x'_2,等等是貨幣在變動後用於 X_1, X_2, 等等之各數。

此式又可爲 $\sum_{r+1}^{n} F(x')-\sum_{r+1}^{n} F(x)$

$$\therefore \quad 消費者之剩餘=\sum_{1}^{r} F(x)-\{\sum_{r+1}^{n} F(x')-\sum_{r+1}^{n} F(x)\}$$

$$=\sum_{1}^{n} F(x)-\sum_{r+1}^{n} F(x')$$

此數即等於從兩種用錢的方式所獲總效用之差數。

至 $x'_{r+1}, x'_{r+2}, \cdots x'_n$ 之量可從下述 $n-r$ 之諸方程計算以得之:

$$x'_{r+1}+x'_{r+2}+\cdots+x'_n=M。$$

$$f_{r+1}(x'_{r+1})=f_{r+2}(x'_{r+2})=\cdots=f_n(x'_n)。$$

競爭品或代用品

人類的各慾望初不限於一種商品亦可得約略相同之滿足。但是兩種商品之滿足一種慾望其方式則決不完全相同，這是應當記着的。牛奶與水都能止人之渴，茶與咖啡都同樣刺戟人的感覺。然而從牛奶所得之滿足不完全與從水所得之滿足相同，而茶所給人之快愉亦初不與咖啡確切一致。廣泛的說，牠們是滿足同樣的慾望，不過其方式微有不同。

若有兩種或多種商品滿足同一慾望時，則商品之間便有一種

競爭存在。此一種競爭爲彼一種之有力代用品。一個欲滿足其某慾望之人可以在這些商品當中任選一種或多種以達其目的。於是此種商品則可稱爲競爭品。設若這些商品能以完全相同之方式滿足某慾望，則消費者天然願意購買消費較賤的一種，即是其每單位之價格比較低下者。蓋如此作，他可以最低貨幣之支出而獲得最高之滿足。可是實際上，如我們方纔見出的，沒有兩種商品滿足同一慾望是完全相同的。若仔細考察，牠們所給的滿足將是不同的兩種，所以給出的效用亦數量各異。我在早晨可以用一杯茶或用一杯咖啡以滿足我的慾望，可是若可選擇，我寧舍咖啡而取茶。所以如此，乃因茶給我以「較大效用」故，此數字可表明我從一杯茶所得之快樂微高於我從一杯咖啡所得之快樂；換言之，我從喝一杯茶所生之快感較大於一杯咖啡所給之快感。設若每杯茶之價格是與每杯咖啡之價格相同，我將寧消費茶。此理對於一切競爭品都是眞實的。

可是在實際事實上，牠們的價格也是不相同的。因此之故，消費者在他決定在一羣競爭品中應消費何種之先，必本着他期望從一商品所獲之滿足以衡度價格。茲舉一例，茶與咖啡是兩種競爭品。我們假定有一位平均消費者愛茶逾於咖啡。但是假定茶之價格略高於咖啡。一富人在此種情形之下將通常願意用茶，因爲茶在味上之高出咖啡足以平衡其價格之差別而有餘。用科學的話來說，每單位價格或貨幣所獲茶之效用較大於每單位價格所獲咖啡之效用。可是若一貧人在完全同樣情形之下則將願意用咖啡，或用較少量之茶與較多量之咖啡，因爲茶與咖啡的效用間之差別，雖仍與

從前絕對一樣，卻在比較上不如牠們價格間之差別之鉅。其所以如此，因價格之微差於一貧人爲甚重視故；貨幣之效用對貧人比對富人爲大，這是因爲貧人不能使他的一切慾望所達滿足的程度，能與富人所已達的一樣。

我們已經見出富人將純用茶而完全不用咖啡。可是現在假設茶之價格上增，卽富人亦不能消費像從前那樣多的茶；他將以咖啡代替其全茶消費之一部。設若價格增漲甚高，有些富的消費者亦將不得不以大量的咖啡去代替茶。此種代用的程度繫於消費者之經濟情形，假定一切人們愛茶過於咖啡的程度是一樣。

現在我們利用曲線以研究此種經濟現象。我們用曲線之助所欲求解決的問題是：消費者在一已知的價格水平時所買競爭品的比例爲何，與此種水平之變動影響此比例之方式是怎樣？

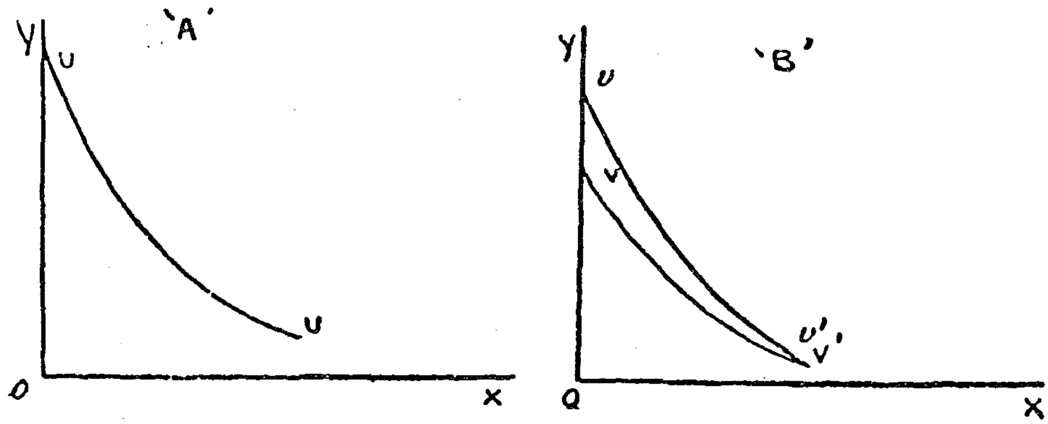


圖15

在圖15，UU'與VV'是A與B兩競爭商品的效用曲線。在每一例，沿OY線代表的是每單位商品之邊際效用，沿OX線是此商品之諸單位。效用是以滿足之多寡而非以貨幣度計。A商品是兩種當

中之較貴者。圖中ｖｖ'曲線係作於ＶＶ'曲線之上方，以其間之縱距離代表以等於Ａ與Ｂ商品間價格相差之數用於其他諸商品(或Ｂ)所獲之效用。簡言之，ｖｖ'曲線是表明以等於Ａ商品之價格之數而用於Ｂ商品與其他物品上所獲之效用。設若Ａ商品之第一單位已經買入，則所得之效用為ＯＵ，若以同額貨幣用以購一單位之Ｂ商品與一些其他商品，則所得之效用為Ｏｖ。此種情形頗與一富的消費者之處置相似，蓋貨幣的效用對於富的消費者至為低微，以致ｖＶ之大尚不足以使Ｏｖ等於ＯＵ。在此種情狀之下消費者將寧買Ａ商品而舍Ｂ商品，因Ａ商品以貨幣比例能給彼以較大滿足故。

現在從一貧的消費者以考察圖15A。此時在ＶＶ'與ｖｖ'兩曲線間所有各點之縱距離均較大於牠們在前圖時，因為貨幣之效用對於貧人為較大，他的許多慾望並未滿足到如富人所已滿足之程度。因是，此處的ｖｖ'曲線較高於ＵＵ'表示貧人普通願意買Ｂ商品而舍Ａ商品，而將其價格之差數用於Ｂ商品或用於其他一些商品，則視牠們的相對效用而定。

上所云云均直接的與幾無條件的從此等曲線之研究而來。但是一個富人（不是十分富的人）或許同時買一單位或多單位之Ａ以及一單位或多單位之Ｂ，這也是可能的事。設若他在消費或購買少數單位Ａ之後，發見若再買少數單位Ｂ，從各方考慮結果，則同額之貨幣將給他比Ａ較多的效用，他一定要再買少數單位之Ｂ。此種處置視Ａ之消費影響Ｂ之產生愉樂能力至如何程度而定，並又依靠商品之性質，已消費或購買Ａ之單位數，以及其他此類之關

係。對於此種問題決不能說一定的話。可是我們能够一般的說，最富的人大都寧買A而全舍競爭之B商品，貧人大都願意單買B商品，而居於此兩極端之其他消費者則通常買一些單位之A與一些單位之B。

現在試一研究價格之變動。設若A商品之價格增加，則貧民將仍單買B商品如前，而從前買A商品之人們現在將不得不棄掉該商品之一部分或全部消費，以購買較賤的代用品。在各場合B取代A地位之範圍將依靠消費者之經濟狀況，或換言之，依靠貨幣對於消費者之邊際效用。

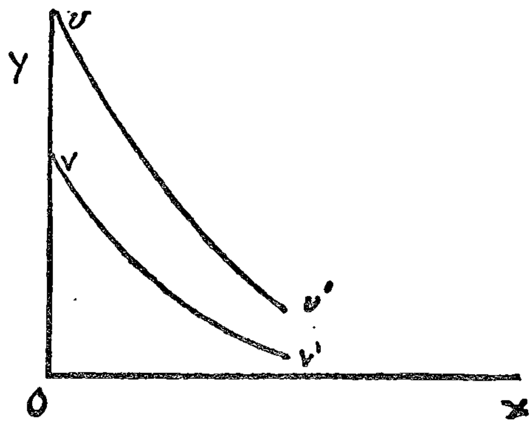


圖15A

設若，在他方面，B商品之價格增高，則從前消用此商品的人們至少一部分將以A代替B之一部。對於有些人們B將完全走出消費範圍而以A代替之。

必需品，娛樂品與奢侈品

商品通常可分爲三類，即「必需品」(necessities)，娛樂品(Comforts)，與奢侈品(luxuries)。牠們只是一程度的區別。在經濟學中此三名詞所含的意義與一般習用的不同。在通常看來，必需品是不可缺少之物，而娛樂品與奢侈品是指很少消費之物。而在經

濟學中，此種分類是更爲確定，更有嚴明的區別。有些商品爲我們萬不可缺乏之物，此種說法縱非完全不對，至少也是漫無界限的。（附註）因此，經濟學者通常將此種分類的區別置於所論商品之需要伸縮性上。其說是：商品之需要伸縮性低於1者，應視之爲必需品；需要伸縮性等於1者，應視之爲娛樂品；而需要伸縮性大於1者，則應視之爲奢侈品。此種區分法至少有一可駁之點，卽是它可認爲娛樂品之物將屬過於窄狹的範圍。或許沒有一種商品通過一切價格變動而需要伸縮性永不變的。在高價格時之需要伸縮性通常大於1，在中等價格時則近於1，在低價格時則低於1。當價格從一高水平變到一低水平時，它達到需要伸縮性等於一的祇一「點」。因爲惟有在某價格時需要之伸縮性始等於一，故可命爲娛樂品之物將限於極少數商品。又是，娛樂品之價格一有微變又將拋置此商品於所屬類別之外。至必需品與奢侈品之情形則異於是。此種非難，只須稍稍修正娛樂品之界說，而謂凡其需要伸縮性近於一之商品卽爲娛樂品，卽可免去。但是此種新解又在定義上加入了空泛成分，並使吾人卽在學理的研討中亦不能畫出一面必需品與娛樂品，以及他面娛樂品與奢侈品，之顯明分野線。

因此之故，鄙人對此種分類的界說願意以「效能」(efficiency)表明之。於是，必需品者乃以一漸增率增加消費者的效能之商品；娛樂品者乃以一漸減率增加消費者的效能之商品；末了，奢侈品者

（附註）關於此點較詳的討論，可參看鄙人在一九二九年四月的 Indian Journal of Economics 中發表「必需品，娛樂品與奢侈品」一文。

乃減少消費者的效能之商品。

此種界說有一另外的優點，卽是它們能使我們將一商品之總消費分開爲數部，以一部屬於必需品，以其他諸部分屬於娛樂品與奢侈品。此點完全與事實相符。此種分類法通常可正當的將酒類歸於奢侈品，而同時又使我們認出酒最初消費之數單位爲必需品，嗣後有些單位爲娛樂品。

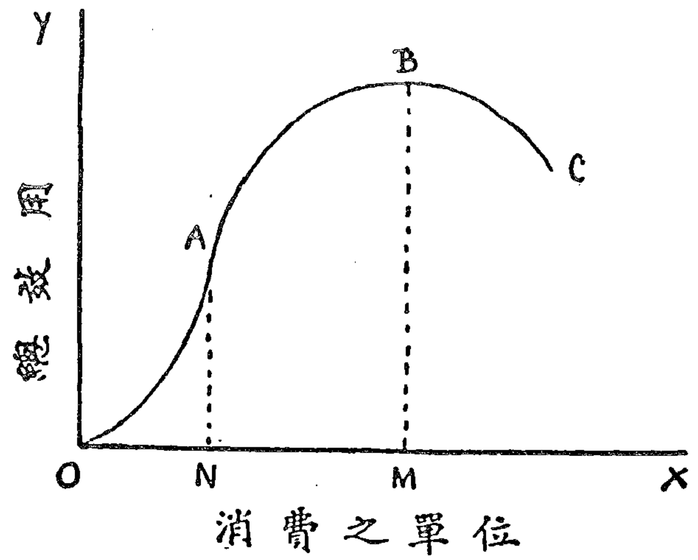


圖16

在圖16，A B C曲線是一商品之總效用曲線。第一O N諸單位以一漸增率增加效能，其次N M諸單位以一漸減率增加效能，而以後諸單位則減低總效能。曲線相當於O N單位之O A部分是凸圓；相當於N M單位之A B部分是凹圓；而曲線之B C部分則是以負數的傾向於x軸。

附論

此兩種計算消費者之剩餘的方法不常能得同樣結果，此或爲

人駁斥之點。駁斥所持之理由或可是：我們願意付一種商品之價不一定是它對於我們的效用之眞正評價。設若消費者對於經濟事項只要具有普通人所具之先見與判斷，則他所願意付給某商品之價值可度量該商品對他所給效用之大小。自然，錯誤是人之常情，一消費者有時或許謬判貨幣之邊際效用，抑或誤算某特定商品之效用，可是非難之起卻鮮以此爲理由。普通的非難或依下述之論據：有時我們不願意支付我們應當願意支付之價格，因爲我們知道若延長一些時間，我們的慾望可以較便宜的花費滿足之。爲求文字之簡明計，此種非難可辯晰之如次：『當在一個夏天我們在外散步的時候，猛然覺得口渴，並又看見一個賣涼飲料的人。這小販因見我渴的難過，遂高抬其價，而每杯涼飲料不以通常兩辨士之價格出售，竟向我索價六辨士。我實在是十分口渴，並對一杯飲料之效用亦評價甚高，但是知道若等待一刻鐘之後，我便能以通常價格從另一小販得着同樣之飲料，故我不願意付出六辨士。所以此時以貨幣表明的消費者之剩餘已歸烏有，或至少與效用所度計之剩餘大不相同。』此種辯論不無疵瑕。第一層，設若我見出在一刻鐘之後有以兩辨士得到同樣飲料之望，我將自然願意對現在給我的飲料付比兩辨士較多一點之價，而此較多之價即是我的「消費者之剩餘」。第二層，雖然此種剩餘似乎比眞正消費者之剩餘甚低，而它卻是實際上眞正的剩餘。設若在目前我願意付出的只爲三辨士，則我所享受的剩餘僅等於一辨士，雖然我是如此之渴，並從飲料得到甚大的滿足。我見出在一短時間之後有以甚低價格而獲同樣飲料之希望，

這事實已提高貨幣對於我之邊際效用，所以一辨士之剩餘實際等於甚大的效用。在前述例中，若消費者之剩餘是以效用度量，則將等於我從現在一杯飲料所獲之滿足，減去若用同樣金額於十五分鐘後一杯涼飲料之上，而非一些其他商品之上，我所獲滿足之現在價值。由此看來，在驗證上，以貨幣度量消費者之剩餘與以效用度量消費者之剩餘，其間並無眞正之區別，這是顯然的了。

關於此點或許可以指明的是：吾人一切所述消費者之剩餘的眞正含義是，在度計消費者之剩餘時，從某特定商品所得或可得之效用應持與同樣貨幣額若用於其他可爲該商品之代用品，卽能以差不多同樣方式滿足此同樣慾望，抑或能在另一時間滿足同樣慾望之商品，可獲之效用比較。

消費者之剩餘以貨幣度量之，常有發生混淆之病，此種非難，有些學者言之過甚，我們不欲在此討論。

平衡邊際效用原則之證明

從圖12可以見出，若有ＯＭ之金額用之於四種商品，則Ｎａ額將用之於第一商品，ａｂ，ｂｃ與ｃｄ諸額將各用之於第二，第三與第四商品。ＯＭ金額用於四商品之此種分配將給出最高之效用，可證明之如次。設若ＯＭ額不如此分配，則用於一種或多種商品之數必較多，用於一種或其餘商品之數必較少。例如，若吾人對於第一商品少用一單位，則效用上之損失卽等於ＮＯ，若將此單位用於任一其他商品，而所獲之效用終比ＮＯ爲低。所以，整個看來，此種分配

不免於效用之損失。設若將前種分配予以更大或更多之變動，則據同樣理由，其效用損失亦將更大。只用細微的變動，我們固可減少此損失，但決不能轉變損失爲利得。

第十二章　生產論—土地

報酬漸減律(The Law of Diminishing Returns)

土地，如其他生產要素一樣，遵循報酬漸減定律，卽是，當其他諸要素逐漸增加與它合併在生產過程時，它的報酬便逐漸減少，雖不在開始時，至少在生產已達到某階段後是這樣的。假定土地的面積是固定，我們爲增加出產起見，逐漸應用較大的其他要素於土地，我們將見出，雖然在有些場合我們對開支每單位得到一些時候的漸增報酬，但是至終我們要得着漸減報酬的。總產量固是繼續增加，但其增加不能與開支增加成正比例。此種現象解明甚易。若是有一段時間，我們除土地外增加其他要素的開支，而同時可得到每開支單位之漸增報酬時，此乃緣於土壤之肥沃或生產力尙未完全利用，所以增加其他因素以自由利用土地蘊藏的天然能力，卽可獲得漸增的報酬。我們至終所獲的漸減報酬亦可以同樣理由說明。當我們不斷的增加其他要素，我們最終總會達到一點，在此點時這些要素的數量已足够充分利用土地之潛勢力。過此點後，諸要素之更進增加將使土地之肥沃不足以使諸要素之增加額在生產之進行上獲以前之效率。故結果自然的產物之增加不能與生產要素之增加有同一比例。換言之，這全問題可作如是解明：設若土地，勞力，資

本與組織是生產之四主要要素，牠們四者必須保持某種比例始能使開支之每單位獲到最高報酬。吾人若要增加的報酬，此四要素必須都有增加，而其間的比例亦必保持如前，始可使報酬之增加與開支之增加有同一比例。若其他要素增加而土地不增，則報酬便不能以同一比例而增。同樣的，若其他諸要素俱增加，而中有任一要素不變時，亦將得同樣結果。所以，適用於土地的眞理亦適用於其他要素。

在圖16A 中，土地之產額記於O Y線上，其他要素之開支記於O X線上。此種要素之第一單位開支得報酬爲O a 。第二單位之開支則得徵大之報酬，以從O X 上第二單位處所作之粗線代表之。次第以下各單位開支之報酬均繼續上增，直至到第四單位時爲止。第四單位產生最大的報酬，以 b 線之長度表明之。自此以後，則報酬遞減，以逐漸減短之諸線表明之。設若我們將代表次第各單位開支

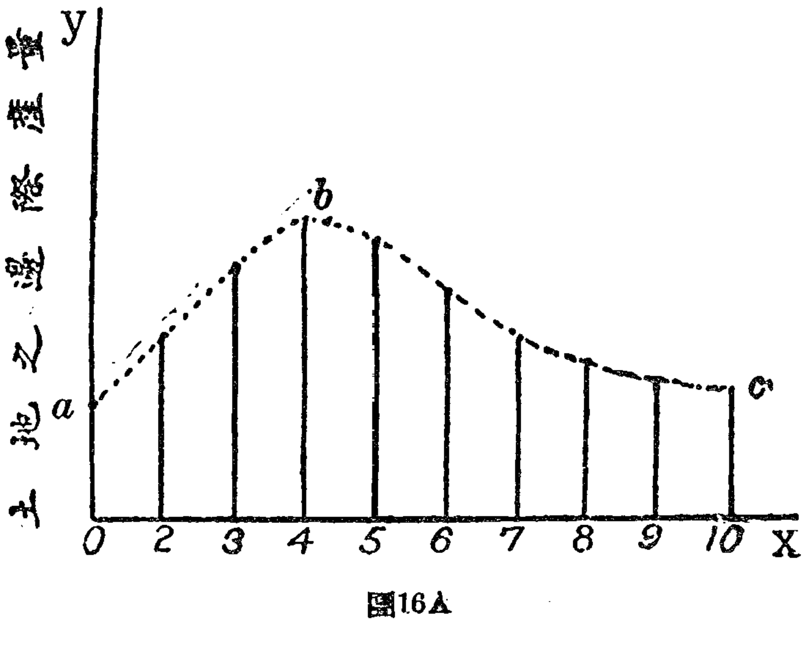


圖16A

的產量之諸線頂點，以一圓滑曲線連綴起來，如圖所示，則我們便得一代表土地所有漸增與漸減兩邊際報酬的現象之連續曲線。在此曲線上之任一點，都可以在ＯＸ上之高度代表從ＯＹ到該點的之垂直距離所代表的開支單位應有的產量。

漸減報酬曲線之形式

曲線之ａｂ與ｂｃ部分對於Ｘ軸或爲凸圓抑爲凹圓則視產量之爲增加率與減少率而定。我們以前已經見出，一凸圓之上升曲線係表明增加的累進率，一凹圓曲線則表明增加之累退率。因此，設若報酬之增加有一段期間是累進率，則曲線ａｂ之一部將以凸圓向着ｘ軸。ａｂ全曲線決不是凸圓的，除非情形是非常奇特。因爲在ｂ點時曲線便開始下降，所以正在此點之前曲線會表出一極微的增加，這是最可能的。所以，若我們以曲線向ＯＸ的凸圓來開始，則我們在達到ｂ點之前將又變此線爲一凹圓曲線。在此點之後，曲線的形式則仍繫於各種情況。

曲線是否從其向Ｘ軸之凸圓，開始將是一部分依靠土壤之性質，一部分依靠生產的組織。設若開支之單位甚小，則曲線或許凸起上升至一些距離，蓋第一土地的肥沃有逐漸較大的利用，第二組織因資本與勞力之增加有改良之可能。

土地能產生固定的邊際報酬嗎？

從圖解我們見出在ｂ點時，卽是當四單位之貨幣用於土地時，

邊際報酬是最大。恰在此點之前與後，報酬均較小。可是，我們已經見出，當此四要素都以同一比例增加，因而對它們也發生同樣比例的開支時，報酬爲常數。可是，今假定土地是固定的，而其他要素有增加，在曲線之某點，我們可見出諸要素間之比例是在當時流行的情況之下最有利的。今欲得固定的報酬，此種比例自應保持；因此自然的，若其他要素增加而土地仍爲固定時，產量將不能永定於此高水準；它將開始降低。

於是，我們可說，在土地的生產中，令其他要素次第的增加，而土地之量不變時，其邊際報酬大致在最初是上升，在嗣後則下降，可是決沒有固定的，若其他事項不變。若其他事項有變時，例如若耕種技術有所改良，則第五單位開支之報酬亦或可如目前第四單位的報酬之高。可是卽在此時亦不能正確的謂報酬爲固定。若耕種技術的改良增高了土地的產量，它不能單獨影響某一特定單位之開支；所有一切單位的開支之報酬均已增加，雖不一定以同樣的比例。此層引領我們進而研究耕種技術改良之效果。

耕種技術改進之效果

耕種技術改良影響土地產量之確切方式爲何，吾人需有詳切之研究。有時有人謂農業技術之改進可變漸減報酬爲漸增報酬。此種說法旣不正確，並亦缺乏科學的形式。較妥善的說法是耕種技術之改良可以展緩土地報酬漸減作用之開始。可是，卽是此說亦有一些疵謬之處。蓋此說之意，以爲農業上若有改良，則報酬漸減律將

停止數年的活動。抑知事實上不僅土地報酬漸減之可能性是隨時存在，而且在加重土地壓榨之時期內，縱然每種改良可增加土地之產額，但卻不能時時均能有力的影響土地之耕種，而使之產生漸增的報酬，這也是實在的。下面之圖將能更明晰的以解釋此理。

第二層，上面的說法又或許提示土地之產生漸減報酬是年復一年的，而不是開支之一份復一份的。自然，年復一年的人口對土地之壓榨增加，用於土地的經費亦逐漸增大，但是此事亦不能證明土地的報酬漸減是年復一年之說爲正當。

有一事是一般經濟學子所習知而深解的，亦是研究農業改良對土地報酬之影響上十分重要的，即每份或每單位開支當與其他單位併用時只能產生一較小的報酬這事實是。設若花費 £100 於土地上，它給吾人以某額之出產，則另一 £100，它亦祇給吾人以較小的報酬。可是這話究何所指？它是說在第二年用 £100 於同一塊土地將給出較小的報酬嗎？否；其意乃謂若第二年以 £200 用於同一土地之上，其報酬將低於用 £100 時所有報酬之二倍。因了此種原故，我們最好是作一土地總產量的曲線，而不作邊際產量之曲線。

玆假設農業技術上有改良發生，則土地之純產量將隨而增加，此乃當然之事；卽是，若用 £1,000 於一塊土地上，該土地從前所產之純報酬以貨幣計爲 £300，此同樣幣額在現在則將產比 £300 較多之產量，若其他事項不變。所採用的改良可直接或不直接影響土壤之生產力，但是它卻常能增加純產量。可是又有一種情況，在

採用改良之後，產量或反縮減的。產量或許暫減，改良或許有產生甚高產量之望，但是須經費大增之後。當一種改良需要甚昂貴的耕種方法時，情形便是這樣。我們將借曲線之助以研究此點。

一種農業的改良將恆能增加每單位經費之產量，假設從前已產生了充分的數額。但是產量之增加可有多種的理由。這些理由大致可分爲兩類。第一，產量之增加可由於土壤肥沃之增加，此乃採用改良之直接效果。例如，新的與便宜的肥料之採用，新的換耕制之發明，新的灌溉法之施用，或有效的耕耘制之實行。這些改良都直接增加土壤之生產力。自然，凡此種種不外是增加資本之應用於土地，但此種應用之直接效果是增加土地的肥沃。

第二，產量之增加可緣於一種改良，主要在減低生產費，並因而增加了土地的產量。例如，採用一種新的播種法減少了許多時間，又或爲節省時間計採用一種新的收穫或灌溉法。此類改良可減低生產費，使吾人能從同樣經費數中，以較小之一部用於勞力與通常資本上，而以比從前較大之部分用於我們所謂純全投於土地的資本形式上；即是，若用於工資之數減，則用於種籽肥料，等等之數可增。在前一例，是應用一種新的肥料於土地，與或採用一種新的耕耘方法；在後一例，所用者仍爲同樣肥料，所行者仍爲同樣耕耘法，不過有較多的肥料施於土壤，與有較多次數的耕耘。

現在我們可用兩圖解以代表此兩種改良之效果了。可是在研究圖解之先，我們可說一兩句關於此種改良的性質。我們已經提過的第一種發明，我們可謂爲增加土地的效率，第二種可謂爲增加用

於土地上的資本與勞力之效率。在事實上，此兩種現象是相關的；蓋土地效率之增加，其唯一原因是資本對土地之投殖，並在此範圍內土地效率之增加不外是資本效率之增加。雖然，在此兩種發明當中，我們亦可畫出牠們的顯明區別。一種增加資本之效率，其資本似乎是完全與純粹被包藏於土地之內，另一種增加勞力與資本之效率，雖勞力與資本在生產上與土地合作，卻是多少保存了牠們獨立性質的。我們可視後一種之發明爲影響勞力與固定資本之效率。

於是，吾人應注意者是，雖然此兩種發明之最後結果，在同能增加土地之產量這一點是一樣的，我們仍能從不同的角度以觀察此兩現象。在第一場合，發明是增加土地之肥沃，我們可以產量度計其變動；在第二場合，我們可以生產費度計其變動。例如，我們可說第一種發明是增加土地的產量（每單位經費的），而另一種發明是減低生產費（每單位產量的）。

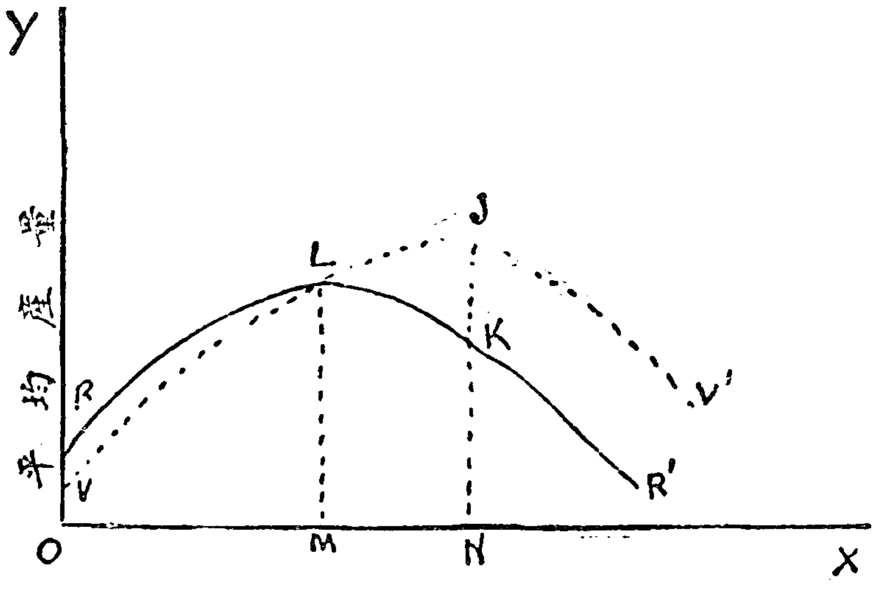


圖17—經費單位

在圖 17，R R' 是在發明以前的平均報酬曲線。在採用發明以後，此同一曲線之形態則變爲 V V'。R R' 曲線表明土地每單位之經費可產生 O R 報酬；若以 O M 單位代替一單位之經費，則平均報酬爲 L M，或其總產量等於 L M × O M。設若代替 O M 而以 O N 單位用於土地上，則平均報酬僅等於 K N，或其總產量變爲 K N × O N。

在發明增加了土地肥沃之後，產量曲線於是變爲 V V' 線之形態。這個似乎表明一種發明可逐步的增加產量，即是，無論所用經費之數額爲何，而平均產量，並因而總產量，則恆可增大一樣。但是這卻不如此。R R' 曲線表明只有當 O M 單位用於土地時，平均產量纔是最高的。在總經費尚未等於 O M 單位之前，土地或土地之肥沃有過多之象；在此期內諸凡再增土地肥沃的東西將更使諸要素當中的比例失其平衡。故須當總經費超出 O M 單位之上時，增加土地肥沃之需要纔實在感覺。因此，位於 R R' 曲線下之 V V' 曲線，當 O M 單位已達到後，便上升於 R R' 曲線之上。當經費用至 O N 單位時，此線便達到牠的最高度於 J 點。

設若需要與供給的情形是這樣：在發明之後，須付出 O N 單位之經費，則總產量將是 J N × O N。

由此我們可以推論，若在土地之產量低於 L M × O M 時，則無誘勵任何此種改良之必要。惟有當人口對土地之壓力增加，而土地之耕植亦已達到報酬漸減之點時，斯此類改良的需要纔變成急切與重要。

在一較古國家，普泛說來，土地都是精深耕種的，報酬之最高

點業已超過。在此類國家中，上述性質之發明所增加產量之程度，頗如我們所謂漸減報酬常轉變為漸增報酬。然而我業經指出過，謂發明改變漸減報酬為漸增報酬，仍屬錯誤。因為，如VV′曲線所示，此時仍為漸減報酬故。在發明之後我們也不一定便見着我們進入漸增報酬之範圍。例如，在發明之前所用之經費單位為ON；在發明之後，生產的自然較多，每單位之產量亦較大，可是我們從虛線之JV部分可以見出，報酬仍是漸減而非漸增。

於是，在發明之後，我們是否進於漸增報酬的範圍乃視發明之性質與土地已開發的程度而定。故關於發明唯一穩健而在邏輯上正確的論斷是：農業技術中之改良，其他事項不變時，恆能增加土地所有的總產量，以及土地的平均報酬。關於農業技術上之發明或改良之效果，我們不能够作出另外一種普遍適用的論斷。

我們將不在此分別討論影響一般土地與影響特種用途的土地之改良效果。我們藉圖18之助便逕行研究第二種改良之效果。

在圖18，EE′是每單位產量之（平均）生產費的曲線。當產生一單位時，生產費為OE；當生產OM單位時，每單位生產費為LM。此是最低的生產費。逾此點則生產費卽增。此處亦如前一樣，土地的數量不變，增加產量之獲得是出於土地以外之其他要素。自然，若諸要素間之比例有變時，產量亦將隨之而變，不過我們假定此種其他諸要素間最有利的比例是已經決定而且保持的。

玆假設農業中有一改良發生——一種增加資本與勞力效率之改良，如我們已說過的。當此種改良生產方法被採用時，雖是土

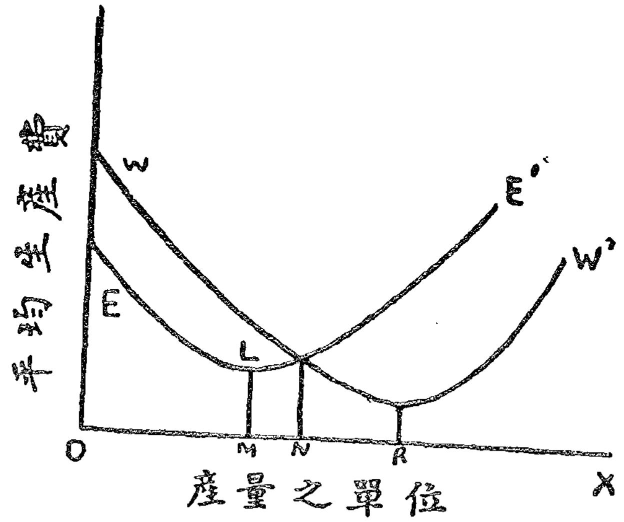


圖18

地之數量不變，而其他諸要素——勞力以及固定的與流動的資本——之經費分配則必然改變。例如，在一已知的經費額中，我們可見出在採用新方法之後，用於勞力與固定資本之部分較小，用於流動資本之部分較大，抑或用於兩種資本（事實大都是如此）上之數較大，用於勞力上之數則特別的較小。

不管新的比例固定於何所，而整個看來，開支確有縮減，用比以前較小的開支可產出同樣的產額，此乃一定之結果。可是此處我們又可見出，生產費之縮減在 WW' 新曲線之所有一切階段中或許得不着的。在新方法採用之後，或許是這樣：小規模之生產是不利益的，欲獲改良方法之利，必須進行大規模的生產。若果如此，如第二類之發明通常需用甚貴的資本形態，往往是如此，則我們將見出若只生產少數單位的產物，平均生產費是較大於前。若生產ＯＮ單位時，則平均生產費等於舊生產法的生產費，自此便逐漸減低，直至生產ＯＲ之單位爲止。

假定此兩曲線是作的正確，并假定牠們確係代表事實的眞相，下述有與趣諸點是值得注意的：設若生產之物僅爲ＯＮ單位時，或許無誘致採用新法之可能；但是若增加的產量可以出售，則生產的新方法將被採用，并將生產比ＯＮ較多之單位。可是採用新法與增加產量是否有利又繫於產物之需要伸縮性。此第二點應値注意的是，設若在實用新生產方法之前，需要較大於ＯＮ，則改良方法無論在何種情況之下都是有利，因爲此時的生產將比以前較低故。

至於報酬之性質我們可說，若在採用發明之前所生產之量係在ＯＭ，與ＯＮ之間，及採用發明，則土地便從漸減報酬的範圍而進入漸增報酬之領域（除非生產量超過ＯＲ單位）。可是若在發明之前生產已過於ＯＲ，則卽在採用發明之後，土地仍將處於漸減報酬的範圍。

雖是上所論列大致可適用於如此處所述第二類之一切發明，可是有些發明亦有不與此種情態確切相合者，這是須記着的。發明之採用或許只需要較便宜的資本形態，以致其結果無論生產何額，其平均生產費恆比以前較低。在此種場合，WW'曲線將通體位置於EE'曲線之下。

報酬漸減律適用於土地之其他形態

漁場——在容易研究其生產力之其他土地諸形態中，我們可一考察漁場與鑛場（包括採石場）。報酬漸減律之可適用於此，正與適用於農業土地無異，而研究此律在此兩種土地的作用亦殊有

趣之事。

先論漁場，我們可見出應用增加的勞力與資本於漁場將產生漸減報酬。特別在江河的漁業此點尤爲其然，蓋江河中各種魚類之供給比較海洋爲有限故也。可是卽在大海，我們亦可見着若漁業以大宗資本與勞力強烈經營時，報酬漸減的表號必定明晰的顯出。有一事是確定的，卽生產的財富之一切形式總須遲早遵守報酬漸減定律，因此律適用於所有生產要素，故亦同樣適用於海上漁場。可是爲使吾人不陷於毫不含蓄的粗率論斷起見，此處可增加一修正附句。誠然，報酬漸減之抽象可能性是無處不有。不管土地的形態爲何，亦不管生產的因素奚似，只要土地的數量是固定的，增加經費於其上或遲或早總須產生漸減報酬。此話多少是一種眞理。但是在有些場合，時間的單位是如此其大，以致報酬漸減之可能性雖然存在，而其實際作用或實現的日期卻太遼遠而不密切關係吾人。蓋吾人之工作儘管劇烈，吾人之努力卻需費一些時間，在此時間中土地或又恢復了它的能力。是故，若在有些大海魚類之供給至爲龐大時，我們爲一切實行目的起見，希望報酬漸減律在此將永不發生，也是合理的。我們想像海之某部或許被發現，其中魚之供給是如此異常之大，與增加如此之速，以致一切人類的努力都不能使其消耗至供給漸減發生之限度，這並不是可笑的。假定有此種漁場發現，我們能說報酬漸減原則便已證明不實嗎?事實將仍是這樣:「自然」補充她的魚庫較速於人們去消耗它，抑或「自然」增加魚之供給甚爲充分足以應付人們之所有增加需要。但是若人類能發明捕魚

比現在速率較迅之方法，則報酬漸減亦將或遲或早發生。

海之生產力，亦如農業地之生產力一樣，當其被人工作時，則逐漸削減。可是海漁場之再生產力，卽它恢復其庫藏的速度，卻過於農業地。此海漁場特別不同之性質。第一層，土地的耕種者充其極不過能吸取土壤較上層之肥沃，雖然上層土壤可由下層地中所儲之肥沃以補充之，而在海漁場則漁人可從較深的地方以搜取他的供給。這是實在的，特種魚類或只能在海之某種深度捕取，但事實仍是大多數的魚類可於海之較大深度獲得。

第二層，耕種者的土壤是固定的，而海則不如是，卽是，在耕種土地時，我們充其量完全利用我們所有與所種這塊地的化學原質，而在海則我們便無此種固定性，生產力恆常從其他各處以流到我們採捕的地方。魚，不像土壤中的化學成分，是能在海內游來游去的，當着海之某部的魚較不充物時，則魚便天然的從其他魚類較密的諸區域以流到此部。

因了此兩種原因，故海之恢復能力遠出乎土壤的恢復能力之上。因此，在此種情形之下，我們希望在海中發現一處，該處的恢復力之強，能使我們無論用若干資本與勞力去盡量經營，而我們常能從它得到一種相當的報酬，這也是合理的。雖然，在學理方面，假定某額之經費，譬如£10,000，已逐年用於一種漁業經營上，若再用一千倍的經費或許不能得到一千倍之報酬，這是可能的事。

雖然，有一事須在此處注意的。我在前面欲表明在海上漁場中報酬漸減律或許不致活動。所以你們不要認爲我便已主張海漁場

實際不受報酬漸減律之拘束。我的用意僅在指出海之某種特性，因了此種特性海之生產力是如此之大，以致所有人類可能的努力或許都不能完全利用今後或許在海上所發現某處的此種生產力。

代表漁場所有報酬漸減律的圖解，初無異於前面所論諸圖的形式。在此種曲線與農業土地的曲線當中的唯一區別是，因為漁場報酬之低減度率不如農業土地之迅速，故漁場曲線不如農地曲線之陡峻。

鑛場與採石場——鑛與石亦遵照報酬漸減律。可是在鑛與石致使報酬漸減的原因卻與致使農業土地報酬漸減的原因上性質微有不同。

在討論此點之前，我們可再提一提報酬漸減律不是謂應用同樣資本與勞力於一塊土地將產生年復一年遞減的報酬，它所指的是，在特定時間內及一定生產方法之下，若用於一塊土地上的資本與勞力增加，此塊土地的報酬亦將增加，不過不與資本與勞力的增加同一比例。此定律將或遲或早表現的。因此，若一種鑛場，年復一年的以固定的經費額與同樣的方式去採掘，并若它的每年產量是見着遞減，我們不能遂謂此種現象即可為報酬漸減律之證明。自然，鑛場也遵守報酬漸減律的；設若一定經費額之多次應用生出漸減報酬，則增加經費更有理由產生漸減報酬了。可是現象之觀察，即鑛場當用同樣經費於其上時逐年產出遞減的報酬，不能認為是報酬漸減律之觀察。

吾人試舉一顯明的例。設若年復一年的以同樣資本與勞力用

於一塊土地上，而使該土地給出漸增或至少固定的報酬，我們能謂那塊土地不遵照報酬漸減律嗎？不科學的說來，我們或可這樣說，并可被認爲正當，可是在經濟學上，此一種假設將是錯誤的。

再回到鑛場問題，犧牲一點科學的精確，我們可這樣說：在鑛場中（我們常將採石場包括於其中）我們從鑛場所能採掘的總產額是預先在一塊儲藏起來的，故其結果，若是願意的話，我們可用相當額的資本，勞力與經營立刻將它的全部產額採出。至農業土地則不如是。農地所能給吾人的總產量不是儲積在一塊的；我們至多只能從一塊土地產出有限的產額。這是實在的，設若用科學的原則來耕種土地，則土地的產額可以幾於不變，故一季復一季我們可繼續得到豐收，而不覺土地需要時間來恢復牠失掉的能力。可是事實仍是這樣在一極短時期中我們決不能從一塊土地產生極大的產額，又若土地在一年內搾取過度，它卻不在次年內停止生產。農業地與鑛場間之主要區別卽在於是。

於是，爲比較鑛場與農業地起見，我們試假設兩例。第一，我們假設有一定額的資本，勞力與組織年復一年的應用到土地之此兩形態，又假設生產方法沒有經受改變。農業地將給出（假若定額的資本，勞力與組織與土地相比不算太大）年復一年的幾於固定的報酬，而鑛場在某時期內亦實際年復一年的給出同樣的報酬，不過在該時期後，因鑛場之深度增加，報酬卽將開始微減。雖然，對於鑛場我們不能作一定的論斷，蓋鑛之產量，與產量之變動率將繫於各鑛產之性質，形狀與大小故也。例如，有些鑛產在最初或顯出強頑

的抵抗，但自此以後則開始產生極豐盛的報酬，幷若產量至終開始減少的時候，它亦或以極緩之率遞減。在他方面，有些鑛產在甚早的時期，或卽顯出用盡取竭的信號，其產量之下降非常迅銳。可是普泛的講，我們可說當用一合度數量的資本與勞力時，農業地給出固定報酬，至鑛場則或遲或早給出漸減的報酬。但是若逐年所用資本與勞力之數額與土地數額相比是太大時，農業地與鑛業地均將同樣給出漸減報酬。

我們現在再研究應用增加數額之資本與勞力於農業地與礦場之情形。在此場合，農業地將或遲或早產生漸減報酬——當經費增加甚速時，報酬之遞減率亦最高。至於礦場，其產額固亦漸減，但其減低的原因則與前一例中的原因相同，遞減的率度亦與以前一樣，設若組織的增加能與其他因素齊頭幷進。

我們只須微一思維前述兩例，將很容易的指出此間所論兩種土地形態之間的主要區別。

當以增加的經費額投殖於此兩種土地形態——此點是我們怎樣去判斷一種要素是否給出漸減報酬之法——農業地的報酬減低甚速，而礦場的報酬則減低甚緩。農業地恢復它已用去的生產力需要時間。因了這個原因，若大宗數額一次用於土地，則所得之報酬將比以適當的時距分次用於土地所得的報酬為小。礦場不需恢復它已失的能力。在礦場內有一固定數額的寶藏；我們可任意用若干時間將它掘出地面。正如已故馬謝爾教授所說的，設若一個人能以十日掘盡者，十人亦可以一日掘盡之。

經此種析論之後，農業地與礦業地在生產中所表的作用已甚顯明。土地似是農業生產中之一自動要素，正如其他任何工人一樣，它將種籽發育所需的各材料聚集攏來，並從水，空氣與日光吸取植物生長上需要的一切成分。在他方面，礦場是生產中之一種被動要素。從礦場掘出的產物不是它自己的創造——至少不是它最近的創造。它並不與人合作以產生所獲的產物，亦不輕易的將產物給人；且相反的礦場常給人以一種拒抗。

可是，嚴密考察起來，許多此種表面的差異將歸於消滅。礦場給吾人之物是差不多業已作好了的，而農業地則無現成之物可以給吾人；我們須征服礦場以逼令它給出它的寶藏，所以吾人亦須征服農業地，強迫它生產或集合，使一粒種籽變而爲生長自己果實的植物之諸原素。

可是區別仍然存在，卽在農業地時，時間是使它恢復它的生產力之緊要條件。表明礦場適用的報酬漸減律之圖解將亦與上面所述的圖解相似，其唯一區別是其曲線（漸減產量曲線）的斜度將是比較平緩，卽是減低率度甚低。

發明對於礦場的生產力之效果

現在吾人尙須研究的是採礦的改良增加礦場的生產力之方式爲何。此種研究將幫助吾人更進一步的認識農業地與礦場之間的區別。我們在論農業地時已見出發明影響收入有兩方式；其一，土地之效率可被直接的增加，與其二，其他諸要素之效率可被增加。

雖是一要素之增加效率亦同時是其他要素之增加效率，可是爲邏輯的推理起見各種要素效率之變遷應當區別，如我們已見出的。那末，在礦場時，生產方法之改良影響所得產額的情形爲如何呢？稍加思維卽可見出在礦場時生產中之一切改良必是屬於第二種；卽是不管發明爲何，它將是增加資本勞力或組織的效率，但決不能直接增加土地的（在此時卽是礦場）的效率。我說「直接的」，乃因爲當在礦場上工作的其他要素若增加時，礦場之效率亦將立刻間接的增加。其所以如此，我們已見出的，乃因爲與農業的土地比較起來，礦業地是被動的故。能從礦場採掘出來的產量是固定了的。設若我們願意，我們能够更快的將礦採出，可是我們決不能增加它。而能增加產量卻正是我們在農業上所能做到的。雖然，此外尙有一種方式可認爲是增加礦的數量的。設若我們採取減少廢物，因而使我們採掘更經濟的方法，我們實際也增加了礦之出產。當用較良的施肥法增加了一塊地的收獲，我們實際的工作是什麽呢？我們所做的一切都是在如何取用土地的最高勞役——使它工作更經濟，而盡量避免耗廢。這個是實在的；可是礦場與農業地當中所有之差別亦不可完全抹殺。此種差別或許不如它外表所顯的大，但卻是仍然存在，這是剛纔講明過的。

於是，生產方法之改良可直接增加資本，勞力或組織的效率，與間接增加土地的效率，以增加一定數額的經費從土地獲得的出產。爲說話的方便計，我們可謂一種發明以減低生產費來增加出產。雖是「出產增加」與「生產費減少」是同一件事，卻亦有區別

牠們的途徑在（如論農業地時所解明的）。所以前面討論的那種圖解亦可適用於礦場。

第十三章　生產論一勞力

勞働力

勞働，澤豐滋教授解釋爲腦筋或身體所經歷的一種活動，其目的一部分或全部在求得一些利益而非在直接從工作以吸取快樂。所以勞力可視爲一種心靈的或肉體的力。可是一切經濟的勞力通常均包含心靈的與筋肉的勞働，這是應當注意的。自然，一個工廠的領袖或經理，其職責在籌慮工廠的廣大計畫與發佈訓教於他的從屬，做心靈的工作到了極點，至廠內薪資低微的勞工則盡日做筋肉的工作；可是在前者筋肉的活動並非完全沒有，而在後者心力的訓練卻與筋肉的工作是同時並進。眞正區別在於此兩種能力消耗的比例各有不同。（附註）一個人當從事於比筋肉工作較高級的心靈工作時，他或許做較多的心靈工作，與較少的筋肉工作。在一個人的勞働中，我們很難說腦筋的或身體的活動是較大。惟有當比較兩個人的勞働或同一個人在不同時候的勞働時，我們纔能說心靈的活動較大於或較小於筋肉的。在活動所經過的時間內，心靈的與筋肉的活動是大致相等；有數量區別的只是活動的強度與性質。

（附註）自然，有時人亦有靜坐而思想的；企業的主人或許當他睡在牀上之時籌慮改良他營業組織的方法。在此等場合我們只見着心靈活動而無筋肉活動。可是此種場合甚少；無論如何，我們找不出一個人盡日祇做心靈工作的。

一個人的勞力比他人的勞力是較大或較小，以他的心靈的與筋肉的活動是較大或較小而決定。可是若一個人的心靈活動較大於他人之心靈活動，而其筋肉活動則較小於他人之筋肉活動時，要找出他們當中何人的總勞力是較大，這是很困難的或許是竟不可能，因爲要辦到這點，則必需知道此兩種活動的強度之關係。可是，若兩人或多人的工作在性質上是一樣時，則比較他們勞力的大小是很容易的事。

勞力又可視爲一種具有兩次元(two dimensions)的數量。一個人所給的勞力可以所含心靈的與筋肉的活動之強度或性質，與乎此種活動繼續所經的時間度量之。後者很可容易的度量，但前者則幾於不能直接度計。所以它可被間接的以在一單位時間內所完成的實際工作來度量。因此，一單位時間內所成工作之數量乘以工作所經的時間單位數，則得所作總勞働之數。

勞働可以說是隨工作之效率與時間而變。依此方法只有同一等級的勞働者纔能比較。當等級不同時，勞働量是不能直接度計的；此時它只能以勞働結果的交換價值來間接度量。

有些心靈的與筋肉的活動依靠我們所謂關係的效率；因此我們可稱作心靈與筋肉活動的能力爲勞働者的效率。

於是我們可說一國的勞働力依靠它所有勞働者的效率，勞働者工作的時間數，與勞働者之實際人數。自然，一個國家的一般勞働力是很不容易觀察；可是若比較兩個或多數國家中各種實業或各種生產過程個別的勞働力則比較容易。勞働力可說直接隨勞働

者的人數與效率以及勞働者作工作的時間而變。事實上，勞働力實際繫於勞働者的人數與效率，而勞働結果則又繫於工作的時間。

普通說來，勞働者的效率繫於腦筋與身體的效率，而腦筋與身體的效率又繫於生活的必需品，娛樂品與奢侈品，氣候，教育，與乎此類其他因素。可是論到特定生產部門的勞働者，他們的效率則又大部分依靠在生產過程中與他們合作的其他諸要素之效率。是故在任何生產部門內昂貴的或改良的機器使勞働者能以更有效的方式指揮自己的活動，因此增加了勞働者的效率。改良機器的利益最後乃為勞働者（與其他生產要素）所分享。分配之制度愈完美，此種額外生產的財富之分享亦愈正確。此理對於資本爲眞，對於其他生產要素亦眞。因此，我們可說勞働者的效率，除其他事項外，乃繫於在生產過程中與他們合作的其他諸生產要素之效率。

由此看來，勞働力可視爲勞働人數與其效率之函數，而可以 f(n,E)公式表明之，n 代表勞働人數，E 代表他們的效率。我們若能找出一個勞働者的平均效率，則 f(n,E)變爲 n × E，E 是平均效率。又是，E 又可視爲一種許多變數（例如，食物，氣候，教育，其他要素之效率，等等）之複雜函數，其中各變數並不常是獨立的。N 與 E 本身是不十分獨立的變動，勞働者的效率，除其他事項外，乃受人數多寡的影響。

人口學說

人口的原則，如馬爾薩氏(Malthus) 所闡發的，可簡單的敍述

如次：人口之增加比人口所有食物之增加有較速的趨勢，故結果人口增加最後須受相當營養的缺乏所遏制，若是沒有其他原因以阻止人口的增加超過食物。馬氏曾說在順利情形之下，人口之增加是依幾何級數，每二十五年人口增加一倍。同樣的，在順利情形之下食物之增加是依算術級數。所以自然的，人口之增加是很迅速的超過人口所有食物之增加。有一些原因可以遏制人口之增長，並保持它常在食物所給之範圍內，可是事實是這樣：若是人口之增加不爲其他原因所箝制時，人口至終將爲謀得相當營養的困難所遏止。

人口說之駁論

這個學說大體可謂正確，諸凡對於它所施的駁論並不能有效的否定馬氏學說的主要諸點。我們在此處可論一下這些駁論。馬氏所說幾何的與算術的級數常被人引以爲攻擊氏說的根據。他們指出人口之增加並不確切的依照幾何級數。可是我們應當記得馬爾薩氏祇說人口之增加率有爲幾何級數之趨勢。即使假定他說了確切的增加率爲幾何級數，這也不能實際影響他學說的精義。同樣的，馬爾薩氏又謂食物之增加大致是依算術級數。無論如何，此種論斷縱然是錯，也不能推翻他的立場。所以他的結論是仍然未受影響的。

又有些批評家則持食物可因交通方法的改良而大增之說以剖擊馬爾薩氏，但是我們可回答說，馬氏曾經指出人控制天然的力量增加有延緩此惡日降臨之可能。而且在一定面積內食物增加之可

能性終屬有限，故人口學說，縱然人類控制天然的力量有空前的增加，在精義上仍是眞實的。

.現在我們要更仔細的研究一下人口問題，並看一看人口以幾何級數增加與食物以算術級數增加之說究爲何義。

算術級數與幾何級數

在研究各民族的歷史以後，馬爾薩氏便確切的說，人口每二十五年能自增一倍，因此他又說嗣後每二十五年一地人口將變爲兩倍，四倍，八倍，十六倍，以此類推，若是此種增加不爲任何窒礙所妨阻。換句話說，他主張人口之大小，若祇受人類本身的再生產能力所影響時，將以一常數自乘的增加。自然此理甚爲顯明。蓋設x數若在一定期間內變爲2x，則在同樣情形之下在同樣期間內2x，將變爲4x，這是自然的。若此期間果爲二十五年則馬爾薩氏的論斷便爲證實。於此我們須注意的，當x變爲2x時，其致此不僅爲自乘。人口之增加按其本身的再生產力或許可至三倍或三倍以上，但因人口一部的死亡，其增加最終僅爲兩倍。至死亡的原因爲何，我們不知道，不過不是食物短少時營養實際缺乏之結果。可是用簡單而空泛的話，我們可說死亡乃是廣義競爭生存之結果。所以這是顯明的，當馬爾薩氏謂爲順利的情形時，即已假定有此類或許不能避免的不順利情形存在，足以部分限制人口之增加。

雖然，人口之幾何級數增加實際在任何國家中在一無限期間內從未臻於實現的。原因是此種順利情形在任何國家內從未繼續

經過一甚長的期間。不順利的情形，使生存競爭愈趨愈烈，至終箝制了人口的增長，致其增加率尙不逮於幾何級數。

所以，歐洲任何一國之人口從 1800 年至 1900 年的一百年期間中沒有增加到十六倍的。在此期間德意志的人口僅增加百分之一三五。奧國的人口適增加百分之百。在英格蘭與威爾士人口增加幾近於四倍，而在俄羅斯增加尙不逮三倍。雖然，在美國人口增加卻已達十六倍，可是此種增加大半緣於外國人口之內移。我們縱能證明一個國家能够供給十六倍於百年前的人口，而事實仍是此種增加率決難繼續的不受遏制——這事實稍後將更詳的解明。

美國是一晚近新成的國家，我們稍後可以見出，在新國家中人口增加最有力的限制在某期間內是不存在的。

此種實際足以箝制人口增長的諸不利情形，其最有力量者厥爲食物之缺乏與稀少。食物稀少直接或間接足以遏制人口之繁殖，所以我們可說食物是人口增加之一限制因素。

於是我們來到結論：人口之增加有依幾何級數之趨勢，或其速率爲 25 年或不及 25 年而自增一倍，但此趨勢不能進行無阻，其阻礙之最力者爲其或遲或早所感受的食物缺乏。

食物供給之算術級數

現在我們將從事探察食物的情形與人口的情形相異究有幾何。所謂食物，馬爾薩氏似乎主要指的穀物，其增加按氏的學說是依算術級數。因是，人口在每 25 年內其增加爲由 x 到 2 x，與 4 x，與

8 x，而食物增加則爲由 y 到 2 y 與 3 y 與 4 y。此增加率是馬爾薩氏所能想像的最高增加率。假定一切情形均適宜於穀物之增殖，而謂它們的增加係依算術級數，這是對的嗎？事實上，有些植物的再生產力，如穀類或蕃薯，抑或有些動物的再生產力，如家禽，青魚，綿羊，與兔之類，均遠過於人類的再生產力。所以若一切適宜於牠們增殖的條件均存在，與一切阻遏牠們增殖的情形均無有時，此種植物與動物將以非常的速率而增加，並不久世界將爲彼等繁殖的品類所充滿。除了少數種類的動物外，人乃一切有生機體中再生產能力之最低者。所以這是顯明的，當馬爾薩氏說食物之增加率時，其意是指此種食物之實際增加，而非指牠們生來的增加趨勢。關於此點，我們試一觀石溫貝恩先生(Mr. Swinburne, F. R. S.)的說法。氏於論有些動物的再生產力時曾云：『如比目魚一年所產之卵不下一千五百萬。其中有許多並未孵出，有許多則被吞噬，故能變爲小比目魚的或僅萬千；但平均計來，一母魚終身所產之無數百萬卵能生存而再變爲父母者不過一雙。此無數小魚或則萎殂，或則餓斃，或則被他種動物或同類所吞噬以救饑渴。

由此看來，我們見出在人口時馬爾薩氏所指者爲增加的趨勢，而在食物時，則所指者爲增加的實狀。雖然動物與植物的再生產力是如此之高，但是牠們的實際增加卻非常之低，甚至不讓人口在一文明國家中展發它的再生產力至最高度。牠們的增殖力爲覓求相當種類營養的困難所限制，或簡言之被生存競爭所限制，此種限制最後阻止了人類的增加。例如在植物，則地面，水分，空氣以及其他

土壤化學成分之缺乏最足以減縮其繁殖，而在動物則覓食的困難頗足以削減牠們的數量。

於是，限制人口增殖的諸條件亦同時阻止了食物之自由增加。在人口與食物，其增加趨勢都遠過於牠們的實際增加，而兩者的實際增加又若平行的前進，因牠們甚爲相互依倚故。依倚的性質在兩者是不一樣，可是一種之增加卻依靠彼種之增加。換言之，我們可說牠們是互爲函數。

那末我們可以問問：兩者之實際增加既是幾於平行，如我們已見出的，爲什麼馬爾薩氏謂人口之增加爲幾何級數，而食物之增加爲算術級數咧？蓋植物與動物在繁殖上是純被其生殖本能所領導，而人類則以其思想與意志的較高官能補充他的本能。故人類握有影響他自己增加的大權，而食物，或低級的生命形態，可說於其本身增殖無左右的權力。在生存競爭中，牠們是被動者，而人類是自動者，人控制他的食物之力較大於食物控制人之力。更有進者，馬爾薩氏主要研究的是人，並欲找出關於人的增加之諸事實，而附帶研究的乃是食物。祇有比較人口之增加趨勢與食物之實際增加，馬爾薩氏纔能指出食物最後阻礙或遏制人口增長的情形；並惟有依據此種比較他纔能揭示人口增殖若不爲預防方法限制時所有不幸與悲慘的結果。

於是我們來到一種斷論：人有每二十五年至少增加一倍之趨勢，但若他實際依此率增殖時，他將難於，稍後甚至不能，獲得自己的相當營養，因食物實際不以此同率增加故。

人對食物供給之控制

我們已見出，植物與動物的再生產力在自然狀態時雖遠過於人類的再生產力，但其生存而變爲父母之數則甚低，以致不能維持人口的無限制增加，這個是弱者被屏於生存競爭的天然淘汰之果。若聽其自然，則植物與動物之增加，其爲人所需要的種類，將不及在人類保護之下的實際增加之迅速。人類若不加以干涉，各種植物與動物之繁殖將自然淘汰其較不強頑的門類，而使生存之物比在人類參與之下所生長的更不適於人的慾望。故當人類墾闢適當的土地時，芟除其他種類的無用繁殖，以更有價值的收穫代替較無價值的收穫，培養特種動物幷從事此類的工作，他之爲此乃專在調配各品類在自然狀態中之比較數額，企圖使牠們能供給較大的人口，或使同樣人口享較大的舒適。所以我們可辯護的說，雖然人類沒有權力增加較低級生物天然秉賦的再生產力，他卻是不斷的力求改變環境，減低此一方向的有效生產率，而增高彼一方向的生產率，以使各種生物間的繁殖得有一更適於人的比例。

於是我們來到結論，人口之增加主要依靠食物之增加，但食物之增加卻不完全處於人類控制之外；而且人類更能增加食物的滿慾能力，以使他增加的人口享受舒適的生活。

人類權力之限制

設若我們能够指出人類的權力能增加食物至任何限度，則人

口學說卽不能成立。可是此事決非人類的權力所能辦到，我們馬上可以見出的。較低級生命之生長，除其他事項外，須依賴滋養，空間，日光，等等之類。此諸要素中，其最為有限者厥爲空間與滋養。試以菜蔬而論，我們可藉增加菜蔬所佔之空間或土地，亦可藉增高土地的肥沃因而增高土壤所含的滋養料，以使某類菜蔬有較大的產額。現在假設比較適宜的菜蔬所需的地積，我們增加的範圍極屬有限，則餘下可用之法僅在增加地中所儲之滋養料，或用農業家的話，在增加土壤的肥沃。增加肥沃的方法可有多種，如適當肥料之施用，灌漑之實行，改良耕器之採用，等等，均可增加土地肥沃。換言之，肥沃之增加惟有依靠應用資本與勞力於土地。

於是，若人類能充分增加用於土地的資本與勞力，他便能增加食物至任何限度的了。可是經驗證明生產食物的數額，其增加在長時間內決不能保持與勞力及資本應用於土地的增加有同一比例。因此之故，設若人口增加了百分之二十，則食物亦須增加百分之二十，而此種增加乃需要百分之二十以上的勞力與資本之增加。但是，普泛看來，當人口增加百分之二十時，勞働力與資本亦不過增加百分之二十，抑或僅爲約略較高之率度。而此種增加率決不能致使食物有百分之二十的增加。所以，概括說來，食物之增加不足以維持人口的增加；而其原因則由於報酬漸減律使然，如我們已見出的。

人口之無限增加

於是，從前述人口有依幾何級數增加的趨勢與食物實際依算術級數或甚至較低率以爲增加之兩前提，我們可演繹出何種的結論呢？有人常說，因了此兩增加率度不調之故，一地的人口縱然最初或增加甚速，但其增加至終將被食物的缺乏所阻止。人口完全受所得滋養的數量所支配，故人口之增加必須與食物之增加取同一步調，因爲食物之增加不能俯就以與人口之增加謀同一步調故。雖然，設若人口之增加是依幾何級數，食物之增加是依算術級數，則食物之短縮最初即可影響人口之增加，這是很顯明的。但是有兩種情形可使人口之增加在若干年度內不受限制。

第一情形——在生產超過消費而有剩餘之時

第一，我們考察食物超過所論人口之需要時，其狀爲何。若食物有剩餘存在，則此剩餘即將持與外國人民交換其他商品；國內的人口若增，則出口的剩餘食物即將減少，因而與人口之增加無顯著的限制。自然，若出口的剩餘減少，則與之交換的其他商品之流入亦將同時低減，否則此種商品與食物之交換率必將變動，或則——這是最多的——此兩種因素均將同時發生作用。無論如何，在此種情形之下人口的增加并不受嚴厲的制限，而可繼續按幾何級數增加以至若干年。

第二情形——在食物增加大於算術級數之時

第二，食物之增加有時亦可與人口之增加有同一率度。此種情

形更爲事實所常有，如在一新國家中土地在有些時期內能有漸增的報酬，這是我們所常知的。又或關於農業的新耕耘法或任何發明亦可使土地生產之增加能十分與增加甚速的人口之需要相應。

此兩種情形關連至密，蓋牠們的依據同爲土地在某時期內之生產率大於或至少不低於土地所供人口之增加率。可是，在此兩種情形之任一種存在時，人口之增加雖從食物方面不受任何顯著的限制，但至終食物之增加將趨於低減，而人口之限制亦將從此開始，這是很顯明的。

第一情形之圖解

我們現在將用圖解來表明此兩種情形。茲先設第一例，我們以出口的剩餘開始，將 x 軸表明年度，以 y 軸表明食物與人口的單

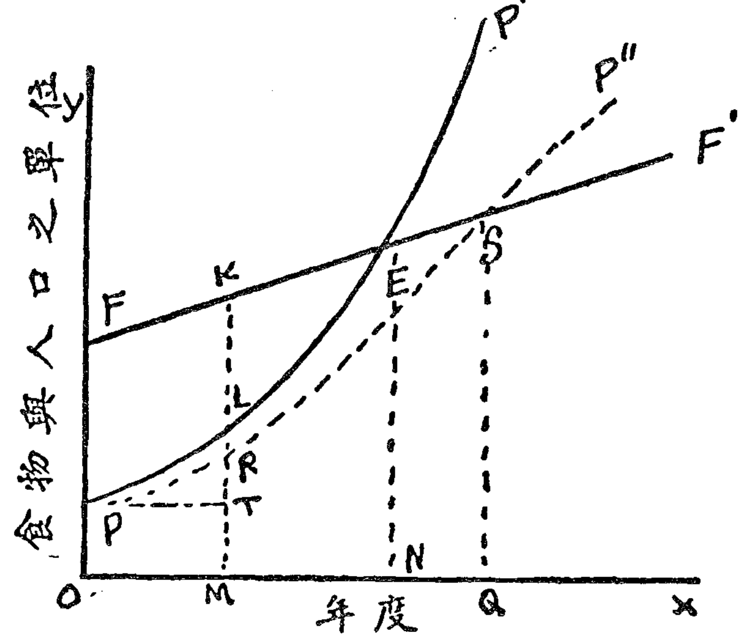


圖19

位，如圖19中所示。食物與人口的單位之選擇，係以一單位的食物在食物不缺乏時通常可供一單位的人口爲標準。我們此時所指者是一國或至少是一有定地積與其他地方相比天賦較厚的情形，這是應注意的。我們假定在農業進程的某階段時，生產了ＯＦ單位的食物，而人口則爲ＯＰ。因此，有ＰＦ單位的食物出口。假定食物依算術級數增加，故以ＦF'直線表明食物之增加；并因人口有依幾何級數增加的趨勢，故以複利曲線ＰP'表明人口之增加。此兩線相遇於E點。從圖我們可見出當人口愈增，則出口量便愈減，在ＯＮ年之末生產超過消費之剩餘已全歸消滅。但是因人口增加，國內之消費亦同時增加，而出口之數減少，故外國人願意提出的價格亦增加，卽是交換比率對國內市場爲有利的增高。因此國內市場與國外市場對此剩餘的競取發生一種惡戰。假定國外市場對進口食物之需要不變，卽是它恆欲輸入ＰＦ單位的食物。可是因國外市場的需要亦常有增加的趨勢，故對此剩餘的競取給國內市場以一甚大壓迫。我們縱假設有從其他同類市場輸入食物之可能，而我們的主要論點仍然沒有變更。這是實在的，當交換率不利於他們時，外國人民亦將力謀增加自己的食物產量，可是實業之此種分配不是常能辦到的，縱然是可能時，亦大都規模甚小，而對於此處所說的一般趨勢只能發生很小的變動。

由此看來，國內的人口縱在ＯＮ年度未經過之前亦不能無限制的增加，這是很顯明的。爲解明此理起見，我們試一考察第ＯＭ年。此年之生產爲ＭＫ，國內需要爲ＭＬ，國外需要至少爲ＫＴ。換

言之，兩市場對ＬＴ的產量發生競爭。此產量劃分於兩方的比例視牠們需要的性質而定。設若在此剩餘產量中國內市場放棄之數爲ＬＲ，國外市場放棄之數爲ＲＴ，則Ｒ爲人口實際增加軌迹線上之一點。我們據Ｒ點之位置可得一ＰＰ'曲線而與ＦＦ'相遇於Ｓ。

設若每人之消費量仍繼續如前，則ＲＭ的需要可表明人口亦爲ＲＭ。可是若人口受了遏制，人們亦減低了他們的消費量，則ＲＭ的人口便表明需要低於ＲＭ與輸出剩餘較大於ＫＲ。

假設Ｒ點之位置爲ＰＳ，與ＦＦ'曲線相遇於Ｓ點。這個表明人口直至ＯＱ的年度，其增加未受食物方面的任何嚴重限制。在ＯＱ年度之後，即無剩餘以供輸出，而增加的人口便感滿足其自己需要的困難。因此人口的增加率便漸次低減，在ＦＦ'上面的ＰＰ"曲線之高度表明此時的人口爲逐漸減少的食物所供給。經過一些時間以後，此兩曲線的距離愈增愈大，簡直失掉與ＰＰ"曲線高度的比例，此時實際的困難便已感覺，人口之增加遂受了更進一步的限制。

最後ＰＰ"曲線竟與ＦＦ'線趨於平行，抑或更切於事實的，ＦＦ'軌迹不得不變更它的偏差，而使ＳＦ'段趨於上升。在靜的狀況之下，諸曲線的軌迹將十分與圖中所示的情形相近，可是在動的狀況之下，則因耕種方法有了新發明之故，ＦＦ'的軌迹將有一上升曲線之趨勢。ＰＰ"曲線之移動點恆在於Ｓ點之附近。

此處應當注意的是：在或種情形之下，ＰＰ"曲線將不能切割ＦＦ'線，其意是國內市場的剩餘雖永遠向下低減，但常有一些剩餘

以供出口。這現象可以如是的解說:不管國內的需要是如何的大,而——如我們所假定的農業國——國外市場對彼的需要則恆屬強烈,以致其生產之一部不能不向外輸出。此觀於印度的實例卽可證明。事實是當國內市場的需要增加,國外市場的需要亦同時增加。又是,若所指的國主要是農業國時,則食物之輸出乃屬必要之事,如印度的情形,幷因交通設備之增加,出口亦將趨於增加。在此場合,PP" 曲線將有與FF'曲線相遇的趨勢,但在一有限的距離內它或不實際與FF'相遇。我們可視FF'線爲PP"曲線的「漸近線」(Asymptote)。可是,無論PP" 曲線能割FF'曲線與否,其形態將大致與圖中所示的相同——其形如字母S向紙的右頂角引伸。

在動的狀況之下,卽是,當我們考察農業技術中發明的效果時,問題便不如前述的簡單。可是,若將一國所有的變狀完全計算在內時,其人口之增加亦將見出與此圖表示的狀態相似,這是很奇怪的。

剛纔所論的情形乃是一殊不普通的實例。在食物生產超過人民需要意義上的剩餘是很少見於任何國家的。一國的食物或許與他國比較爲有剩餘,但絕對的剩餘是很少有的事。此類剩餘發生的唯一實例祇能見於人口甚少的新國家。少數的人耕種肥沃的地,在順利情形之下,是可生產超過他們需要的數量的。所以我們現在將進而考察土地生產漸增報酬的新國家較普通的或至少較易想像的設例。在此種設例,人口在有些時期內亦將自由增加,而不受食物之任何限制。

第二情形之圖解

在第二情形，人口暫時增加不受食物方面之任何限制，卽是，如我們已見出的，在一國或在一地的食物能與人口之增加有同步調的進展。食物增加的率度至少在若干年內是與人口的增加率度相同或幾於相同。可是此種情形惟有土地產生漸增報酬，卽是新開闢的土地，或時時有改良或發明以增加肥沃的土地，纔是可能。

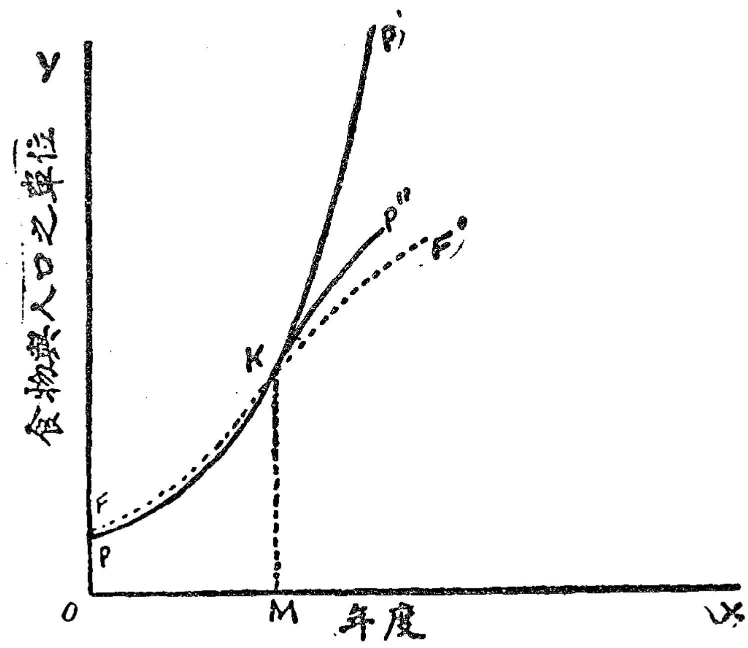


圖20

在圖20我們以OX表明年度，以OY表明人口與食物的單位。我們又如前一樣，假定所選之單位恰以一單位的人口舒適的生活於一單位食物之上。假設PP'曲線代表人口依幾何級數增加之天然趨勢。在OM年度內，因了發明或土中所儲的未用肥沃之故，食物之增加與人口之增加有同一率度。在OM年之後，食物增加則比

較遲緩。因此，在ＯＭ年後，食物卽開始給人口之增加以限制，人們於是一方面不得不短縮他們的食糧，一方面不得不限制他們的人數。在某時期內，此增加率似乎不甚顯著的低減，因爲食物的缺乏爲食物消費之減縮所冲銷故。可是，減縮消費雖是有的事，而多數人們卻寧願限制家庭的人口，不願降低他們的生活程度，這是不應忘記的。此種情形特別是於我們社會中的比較高級人們爲尤然，但其一般潮流卽在貧苦人們中亦有某限度的影響。因此，我們可說食物短少問題之解決，一面依靠人口增加率的減少，一面依靠生活程度之降低。玆設 KP'' 代表ＯＭ年後人口之實際增加。以KP''與KF'兩曲線間之垂直距離代表各年食物消費縮減之數；幷同樣的以KP'與 KP''間之垂直距離代表人口增加率之降低數。

在通常情狀之下，幷假定該國不與任何國家通商，則事物之眞態將近於圖中之所示。人口曲線之變動點將爲K，或爲與K十分接近之點。PP''曲線表明人口之實際增加，其形狀亦如一延伸之Ｓ。

此處我們已假定在ＯＭ年內食物增加與人口增加同一率度，可是在新國家內情形不常常是這樣。食物之增加甚或可比人口之增加較速。若有國外貿易時，則此食物的剩餘將被輸出，幷因剩餘逐年遞減之故，前例所有國內與國外市場之競爭亦將同樣發見於此地。但是若無國外貿易時，食物之剩餘或將加速人口之增加，抑或增高人口之一般生活程度。在前一場合，差不多同量的土地將被繼續耕耘，而在後一場合，則有些較瘠的土地將停止耕耘，有些土地將被較懈弛的耕耘。以減少食物的產額。抑或食物之生產將一部

爲原料之生產所取代。於是自由的資本與勞力將用以增加娛樂品或奢侈品或其他必需品，這樣便增高了人們的一般生活程度。

設若時時有新的發明，則食物曲線之KF'段將易其形態，結果KP'' 曲線亦將變遷，而比現在更接近於KP'曲線。換言之，當人類因不斷的發明而增高權力時，人口增加將十分近於PP'曲線所表的率度。

普通狀況

我們已研究了兩種設例；在一種設例我們假定生產有超過消費之剩餘，此剩餘被輸出了的，在另一設例我們假定食物沒有剩餘，不過是它最初增加甚速，於人口之增加無妨害。現在我們試看一看此兩種設例中究係何種能更確切的表明現代的實際狀況。

每一國家在最初都可從土地享受若干年的漸增報酬。時至今日，世界各部都是相互密切的關連，此地的食物很容易流到彼地，以平均各地的相對需要。全世界可視爲一個市場，至少對於幾種更重要的食物是一個市場。那末全世界又可視爲一大田園，在這田園裏面種植了各種穀物與菜蔬，在最初若干年內土地均爲漸增報酬，自後則變爲漸減報酬，不過各種發明時時增加了食物之供給，或提高了食物曲線到一較高的水準。

因此，圖20可用以表明世界關於食物供給的普通狀況。於是我們可說食物與人口兩者都有依幾何級數增加之趨勢，甚或食物之增加較人口之增加爲較速，而且事實上有些時候牠們確依此種率

度增加，直至動物與植物的相當營養缺乏致減低了食物之增加，因而也減少人口之增加爲止。

我們現在可再設一例，此例或許能助一重要點之解明。關於人口增加已成立的學說好在不因吾人現在所舉的例子微有不同而受影響。

雖然土地或遲或早須遵守報酬漸減律，雖然現代的差不多一切土地，除發明不計外，已產生了漸減報酬，而吾人大多數的工業卻係遵循漸增報酬的定律。在工業中經費之增加，只要是在生產各要素中適當分配了的，其出產量在一甚長的時期內普通以漸加率而增加。若觀察的時期甚長，則此論斷之眞實更爲顯著，蓋各種發明與乎生產方法之各種改進已不斷的採行於工業中故。近年以來，發明的潮流已如此迅急，以致我們可合理的相信在最近之將來，因知識的積聚增加，此潮流有趨於更速之勢。科學及其應用於各生產程序的可能性似乎沒有極限。致使採行此類變革可能的一切原因中，其最大原因厥爲工業生產之任何要素，不受農業土地所受的狹隘限制。

因此之故，一個民族或國家若將其資源主要用於工業品之生產，則似能繼續維持其人口依幾何級數而增加，因增加的人口將能生產每人較多而非較少的商品故。或許有人辯護的說，此種製造品之一部可持與外人以交換該國人民所需之食物數額。可是此種論斷是不對的。即在此種場合，食物之最後缺乏亦能予人口之增加以限制。雖是增加報酬即是增加購買力，但此理惟有交換率能維持同

一的水準時始可眞實。事實上此種交換率變遷至速；它乃依靠兩商品相互交換的數量。因此，若製造品增加，而食物之產量不以同率增加時，則製造品祇能交換較少的食物。此點若藉圖解之助將能更明瞭的見出。

在圖21與22，年度係表明於ＯＸ上，產物與人口之單位係表明於ＯＹ上。產物單位之選擇，以每單位人口適能生活於一單位產物（食物以及其他商品）爲標準。此處須有數種假設，但是牠們均與關於人口增加的一般結論無絲毫妨害。第一，我們須假定只有兩個國家，或互相貿易的祇有兩個國家；其次我們須假定此兩國的人口在最初是相等，并具有同樣的自然增加趨勢；末了我們又須假定運輸費是不關重要的。

茲以圖21代表一農業國家Ａ，以圖22代表一工業國家Ｂ。FF'代表Ａ國的食物之增加。我們已假定此爲最普通的情形，即食物在若干年內之增加較大於算術級數所有之增加，并在若干年後食物之產量即開始遞減。以MM'代表Ｂ國工業品之增加。工業品之增加率甚或可比 MM' 曲線所代表的較大，但是我們只取平均的情形。

茲再假設PP'與pp'代表Ａ與Ｂ兩國人口增加之自然趨勢；并假定此兩曲線是完全相似。於是ＦF'與ＰP'兩曲線間之垂直距離代表Ａ國能輕易輸出於Ｂ國的食物數額，并同樣的MM'與ｐp'兩曲線間之垂直距離代表Ｂ國能輕易輸出的製造品數額。但是這樣辦到的製造品輸入，只能使Ａ國人口沿着ＰＳ線增加，若是它要維

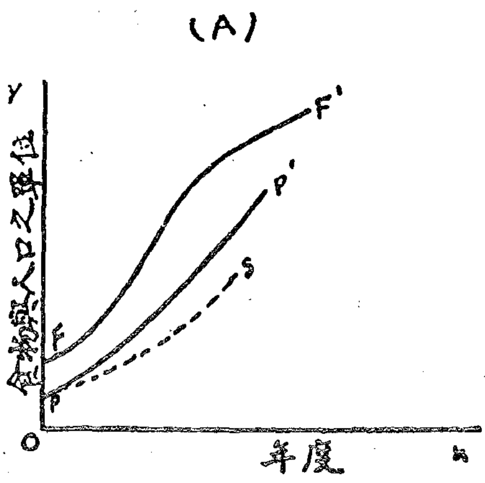


圖21

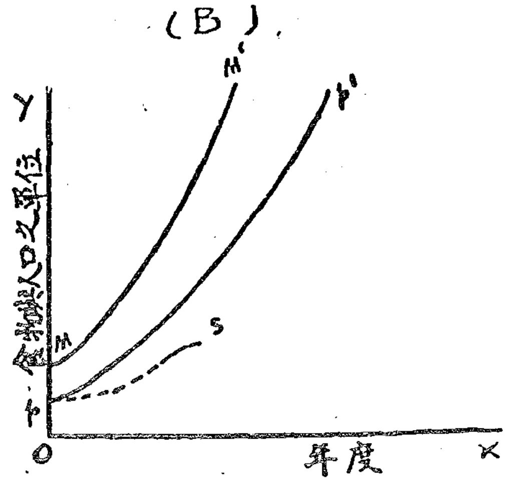


圖22

持它製造品的尺度時——此時ＰＳ之爲曲線，其線上各點之縱距等於 MM' 與ｐｐ' 兩曲線相應各點所有縱距之差。同樣的，在Ｂ國因從Ａ國輸入食物，人口亦僅能沿ｐＳ曲線增加。所以任一國欲以ＰＰ'或ｐｐ'的率度來增加人口均感覺困難，或甚至不可能；因之每一國必須降低自己產物的消費，否則降低人口之增加，藉使有較大的輸出剩餘以與較大的輸入數量交換。所以在兩國中兩較低曲線間之間隔可因此變爲較狹。ＰＰ'與ｐｐ'兩曲線係向下曳，ＰＳ與ｐｓ兩曲線則向上推，而Ｐ與ｐ點則固定不動。最後此兩曲線變爲一致，幷這樣形成的曲線可代表該兩國人口之實際增加。人口之增加降低可以幷通常將能改變生產曲線的形態，而生產曲線又可微微改易人口曲線。所以人口增加的最後曲線必需有一些改變。可是事實仍是這樣：人口實際增加的曲線在Ａ國將佔ＰＰ'與ＰＳ間之中間地位，在Ｂ國將佔ｐｐ'與ｐｓ間之中間地位。

以上我們係假定一單位的食物可交換一單位的製造品，可是

若PP'與PS，pp'與ps諸曲線有移動時，此種交換率亦將變遷。若兩國的人民固執他們生活程度的強弱不同，則結果人口之增加率亦將各異。對於比習慣較低的生活程度容易滿足的國將比較難滿足的國有較大的人口。無論如何，事實是這樣，工業國家，僅因其爲工業國家之故，不能使其人口沿pp'曲線增加。

現在我們已完結了人口問題的討論，即是從量的觀點對勞力的討論。我們已經見出人口之增加確切爲馬爾薩氏揭出的定律所支配。在結束本題時，吾人試一回溯人口之增加所依賴的二事：第一，它依賴人類蕃殖種族的生理能力，第二，它依賴適於生存的諸條件。第一種是一極有威權的力量，它給人以蕃衍族類每十年至十二年一倍的天賦能力。（附註）第二種是比較複雜，但是其中最重要的因素則爲食物之供給。只要食物之供給是適當增加的，人口亦將依一極速的率度而增，即每二十五年增加一倍，如馬爾薩氏所說的。可是，反轉來說，食物之增加亦依賴兩因素。第一是再生產的生理能力，第二是適於生存的必需條件存在。食物的再生產能力，或用馬爾薩氏的話，蕃殖的趨勢，乃大超過於人類所具的此力。可是第二因素則限制它的增殖。食物生長所需的滋養料是有限的，不管人類如何努力，他祇能以逐漸增多的能力與財富之消耗來增加他的食物。因此食物之增加是極受限制，而此情形又限制了人口之增

（附註）「在某種順利情形之下，人口可十二年半增加一倍。這或許可說此種增加率是特殊的。此率與在通常情形下的增加率比較誠是特殊的。但是從純粹的生理觀點看來，每十二年增加人口一倍的率度乃是一種十分低的估計」（Population and The Social Problem, by J. Swinburne）

加。人類科學知識之各種增益，農業技術之各種發明，人類對天然之各種征服，幫助了人修改他的環境，因而使食物逐漸容易的以獲得相當的滋養。換言之，報酬漸減律逐漸爲報酬漸增律所代替。可是報酬漸減的趨勢仍永恆在生產領域內活動；而且人類的行動與他在生產上的努力若仍限制於這個可居住的地球時，則他生活所需的食物與其他必需品之生長將不能繼續增加如我們希望的這樣迅速，這是我們在前面已見出的。

現在我們將引一段湯蒲孫(W. S. Thompson) 在他所著人口論 (Population: A Study in Malthusianism) 裏面所說的話以結束我們的論題。『另一結論似乎可使我相信的是：設若勞動力在農業與非農業間之分配仍繼續着它現有的趨勢（此趨勢見於比較進步的國家），則人口決不能繼續它現有的增加率而不逐漸更受食物實際缺乏的支配的。從事農業的人數並不能逐漸增多，現有的人口增加率亦不能繼續前進而不阻遏生活之進步程度。非農業的實業所有的漸增報酬，按其率度並不能對此增加甚速的人口供給進步生活程度的必需物質資料。所以不管進展的方向如何，在世界大部分的地方，生活的進步程度與每年增加百分之1.5至2.0的人口決不能長久並駕齊驅的。因此，我們若不降低現在的生活程度，使從事鄉間生活的人口逐漸增加，則必須降低人口的現有增加率。或許爲謀眞正的進步文明起見，兩種方法都是應採行的。』

人口的質量

前面我們研究人口問題都係從它的數量方面觀察，即是探討支配人口增加的法則爲何。此層自其本身言誠屬一重要問題，蓋生活的必需品與娛樂品之生產最終乃依靠一國的勞動力故也。可是在本書的前部分吾人曾注意到一國的勞動力不單獨依靠勞動者的數目，並也大部依靠他們的品質或效率。因此，我們若不同時考察人口問題的質的方面，則吾人對此問題的研究便不算完全。而且這個問題的相當探討可使已經研究的問題愈臻於明瞭，並幫助吾人得出一些更可信賴的結論。

勞動者的效率是生產中兩種人底要素之一重要成素，故將來生產之展望乃視工人效率增加的展望如何而定。使生產曲線繼續移動，即是產生漸增報酬，的主要原因乃是各種發明，而發明乃人類征服自然的權力增加之結果。人類征服自然的增加權力又是兩種因素之結果。第一，它是我們世代相傳的所有知識積聚的直接結果。第二，它緣於人們一般智力之增高。即此二者之第一種，即是科學發明之積聚，亦依賴人們的一般智力，因爲此種知識寶庫的運用，與乎知識積聚的流傳，最後仍繫於它所付託的人們之智力故。所以，將來生產能否依現有的增加率而繼續增加，或更確切的說，生產能否繼續產生漸增報酬，以及此類相連的問題，設若我們對於人類效率增加的趨勢無相當知識，是不能圓滿解答的。因此吾人目前的工作在於探討造成效率的生產者所需的一般智力與其他品質在一民族中發育的情形如何。換句話說，我們應當考察人口的品質是否逐年有增進的表現，或是否有任何方法可使一民族的良品

質發達，劣品質排去。

茲先論第一點，人們的一般智能是漸增抑是漸減，我們須考察兩因素；第一，適於智力發達，或使腦筋優性發展的條件是否漸增，與是否已普及於大多數的人民；第二，蕃殖較速的是較有智力與較優秀的階級，抑是較無智力與較頑鈍的階級。蓋大衆的一般效率不僅依賴普通與專門教育的設備，並且依賴接受此種教育的人們是否最適宜於此種教育。

關於教育的設備這層，現在的趨勢無疑的是逐漸增加。學校之發達，專科教育與高級教育的專門大學之增多，各國漸次厲行強迫教育的運動，與乎講學金，獎金與類似津貼之爲數日增，在在均表現出增加的趨勢。因此，假定人們的一般智力相同，我們敢說他們智力之發展在將來將比現在較爲迅速。

可是尙有一問題在：卽受教育的人們當中，生而天姿較優與生而天姿較劣的人數比例是否日趨於佳或日趨於壞。要探討此問題，我們首先假定聰明的父母所生的孩子照例比愚拙的父母所生的孩子聰明。將他們置於同樣環境之下，則生來聰明的孩子將比生來愚拙的孩子能展發較大的聰明。因是，若賦有較強的魄力，較勤的習慣，與較優的記憶與智慧之人們，其蕃殖比他們處境較惡的同胞更爲迅速，則下一時代人們的效率將更增加。可是現代的趨勢卻正在反面。蕃殖最速的乃是較貧苦的階級，犯罪人，適於最下級工作的人，與乎一般智力較劣與品質較壞的人。此種人們的有效生產率誠然是較低，可是純增加率則仍屬較高。這個是我們社會一件不好

的表徵。我們社會中低級人們與高級人們的純生殖力之差異，不僅是因爲較高階級因作較高的勞心工作用腦過甚，致使生殖力低減，且因爲此種人們爲了各種關係自行限制他們的人口於最小限度內。較高階級之實行生育節制，其故係出遠慮，野心，較高生活程度與乎愛安逸而不願擔負生育子女應負的責任所致。而且我們又可見出，生育子女所負的責任愈大，則父母的生活程度亦愈高。又是，現代婦女從事一切社會職業的範圍日漸增廣，這也是影響較高階級生產率的致命傷。此外尙有一種觀念，卽一個人所生的子女數目應以他能在同樣生活程度之上供給他們，或能預備他們享受他所享的生活程度爲限，也可使此等階級人們限制生育。有人估計，一對結婚的夫婦，若要他們所屬階級的人數不致減少，必須平均生育四個小孩。可惜的很，有些國家的統計指出較高階級的生育平均數尙未達到此程度。有孩子的人，平均計來，幷未達到每父母生育四人，祇爲生育三人。若此種現象在所有諸國繼續的前進，則在數百年內一切較高階級的人口將被消滅於地球之上。在不久的將來增加生殖力的方向或許有一種變遷，可是目前能享受公私機關所設各種教育的人數與品質較劣的人數比較，確乎有日趨減少之勢。

在此種情狀之下，我們社會的將來展望不是十分光明，因爲教育的機會雖日漸增多，而受教育的人們在此種教育的正當運用所需之智才上卻是每況愈下。

我們現在試研究支配智力遺傳的定律，或換言之，我們須探討

智力是否能直接由父母遺傳，抑或智力之分配於後代有無一定規律。又是我們須考察父母在後天所養成的特性能否遺傳於後代。

以前曾有人相信一切人們是生而相同，故他們以後在任何方面所達到的高度乃繫於他們所處的環境，或他們所受的教育。這個是一勇敢的學說，因此說對所有留心接受國家所供教育機會的人們，認爲有同等的幸運故。又是，此說告訴吾人，若教育機會與科學知識的寶庫一代復一代的增加，我們卽可無限的改進我們種族，則無異揭示吾人以光榮的將來。而末了，此說又以爲未來時代的品質幷不依靠有最大生殖力的爲何階級。可是此學說到現在已被推翻，代之而與的則爲人生而不同，恆視父母品質的遺傳而異的學說；依此說我們不能在一孩子身上找出爲他父母所無的性質。所以能幹的父母所生的孩子大半是能幹；我們所以說大半云者，乃因每一孩子從父母所得的遺傳，不一定完全與父母所有的諸特性相同。其故乃因每一品質或性質是許多成素依某種比例糅合而成之綜合體故。父母所具之各種成素可以造成無數的綜合體，故其有些後代往往缺乏最緊要的成素，無此成素，致其他良好成素亦不能有良好的表現。然而從一般看來，大多數的孩子都能具有其父母的性質的，所以我們可斷然的說，若優秀的男子與優秀的女子之結婚數大於比較低能人們的結婚數時，則種族改良的機會亦較大。

我們不需徵引門德爾(Mendel)的學說，門氏已指出特性之如何遺傳於後代，我們也不需研究高爾登(Sir Francis Galton)的理論，高氏已揭出人類材能史中遺傳的效果。我們此時應知道的是：

有才能的人通常可遺傳其性質於後代，而不能遺傳他們所無的性質於後代。自然有時後代所表現的特性十分與其父母的特性不同，這是實在的。此類例子，特別在較低級的動物，是數見不鮮，吾人稱之爲「特變」(sports)。雖然，此種情形亦有解釋之道。我們在上面已見出，父或母各有若干不同的成素或因素，從這些成素或因素又形成了若干的綜合體，故有時某種綜合體之形成，致使其後代所具的諸性質似乎與其父或母的完全不同。每一性質之遺傳是依照一定法則。有時有些單簡的特性爲後代所有的，反爲父母所無。自然在此種例子，我們不要認爲後代生來的性質，其胚種不存在於父母的身體。事實是：有些特性是顯露的，有些特性是潛伏的，即是一個人具有的成素，有些能在他自已的個性上表現出來，而另有些成素雖仍潛在於此人之身，卻不在他個性上表現出來——牠們不在他的形狀或行爲上表現出來。所以，設若有一男子與一女子各具有一種潛伏成素，互相結婚起來，則他們所生的小孩或許具有一種純粹狀態的潛伏性質，即是沒有相對的顯露成素。此時這小孩似乎具有一種爲他父母所無的性質。此種原則在單簡的生理性質或缺點上最易見出，因此種性質或缺點不是數種因素複雜糅合的結果，而是繫於某種一定的病理狀況。在智力方面，吾人的工作則愈臻困難，蓋每一種性質都是許多因素綜合之結果，故吾人不能知道後代從父母遺傳某種性質的確切方式爲何。可是我們可贊成惠特門(Whetham) 的話，而謂『我們雖然不能將才與美分析爲若干門德爾的有定因素，我們仍可認定我們若奬勵已表現此種性質的

家庭之蕃殖，而阻抑缺乏此種性質的家庭，亦能獲改良種族的平均才與美之結果。』

我們已見出能幹父母的孩子是生而能幹的，頑鈍或愚蠢父母的孩子是生而頑鈍或愚蠢的。因此，我們能夠說用教育或訓練以改變此代的人們，可使次一代的後人能生而一般具有較優智慧或較大才能嗎？換言之，我們能合理的相信教育的效果是積聚的，其意即是一代從教育得來的效率能遺傳於後一代嗎？設若此層爲眞，則我們社會的缺點與較低階級比較高階級增加較速的趨勢亦可獲部分的救濟。蓋教育佔人口增加比例的較貧與較劣及較愚人們，則他們將上升到一較高階段，因而他們的後代將比其父母從一較高基點出發。他們生而所具的諸性質，乃其父母終生從教育與訓練所獲得的性質。可是經驗與實驗的證明卻十分是另一回事。據經驗與實驗證明，在後天所得的變革不能遺傳於後代，故受教育者所獲得之一切優點絲毫不能影響他們的後嗣，後嗣生而具有的諸性質乃其父母在出生時所具的諸性質。自然，我們已見出後代之生不能完全像他的父母，可是他必須具有其父母所有潛伏的或顯露的諸成素或因素之全部或部分。總而言之，學說可如下述：學得的性質不能遺傳到後代，設若有時竟致遺傳，其效果亦極輕微，於該代智能的發展上不能發生重要影響。在他方面，生來的性質可以一代復一代的遺傳於後代。

拉馬克(Lamark)在達爾文(Darwin)之前即主張學得性質可以遺傳之說，達爾文對此說則又深信不疑。指出此種學說缺乏充

分證據的厥爲威士滿 (Weismann)。自威氏之後，有許多自然科學家與生物學家從事此問題的研究，學得的特性不能遺傳於兒女，縱使遺傳於兒女，其效果亦微弱已極，這事實已差不多透澈的成立了。於其他學者之外，我們可略提瓦拉斯 (Sir Alfred Russel Wallace)高爾登 (Sir Francis Galton)與皮爾孫(Karl Pearson)諸人之名。門德爾是第一個澈底研究植物遺傳定律的學者。高爾登則在他方面限制他主要研究於人類的遺傳。

達爾文說，在一切生物中，有兩種特徵：第一是各種生物的變化至鉅，第二是蕃殖的能力甚大。在以前各頁我們已深長研究了第二種特徵；而我們現在的工作則在研究第一種特徵。變化有兩種，卽連續的或間斷的變化。若一代的人們在某種性質上彼此的變化，係以無數小變從此一極端到彼一極端，則此性質卽爲連續變化的實例。若以軌迹表明此種特性，其次數將表出爲一種平常錯誤曲線形態之曲線。間斷變化是此變化中，沒有由此端到彼端的漸次變革可尋的變化。突變卽是此種變化的實例。

又是，變化按其爲眞實的（卽先天的）或爲偶然的又可分爲兩種。前一種變化是一代傳一代的——卽遺傳於後代的變化——而偶然的變化則非遺傳性質的結果，不能再傳於後代。簡單的說，變化可分爲先天的與後天的。先天的變化是關於各種先天成分或因素所形成的性質之變化。後天的變化是由於環境勢力，卽是氣候，教育，與其他人們或其他生物等等結合的感動力，所生的變化。

我們已見出，個人生而具有的性情，才能，體格，等等乃依賴父

母相對的特徵與性質，即是依賴雙親的胚胎細胞。此種胚胎細胞不受個人一生身體所歷的變遷之影響；牠們將永遠如從他的祖先遺傳下來的一樣。胚胎細胞可從父親遺傳於兒子，或更正確的說，從父母遺傳到後代，其狀態仍與父母所受於祖父母的狀態是一樣的。因是，一代復一代的胚胎細胞遺傳於子孫而不受後天特徵的影響。一種後天的性質不能改移一個人的先天性質。換句話說，一種方向的修改不能產生同一方向的變化。

由此看來，教育與訓練的效果在我們的名詞解釋上是不能積聚的，這是顯明的了。同樣的，凡遺傳的疾病乃依靠一些發源於先天體質的病理狀態。一個人生平因與不良環境接觸所生的疾病是沒有遺傳性的。在前一類的疾病中，我們可舉癲癡病，羊癇瘋，肺癆病，等等。感受此種疾病的父母所生的小孩即有易感此等疾病的遺傳性，或換言之，這些小孩即具有使他們的父母發生此種疾病的胚胎細胞。禁止此種人結婚，我們能够多少有效的排除此種遺傳疾病於人羣之外。

於是我們來到一種結論，一個人只能遺傳他父母從祖先所遺傳下來的諸性質，後天學得的特性是不能這樣遺傳的。從個人的觀點看來，此種學說殊爲悲觀；蓋依此說，則個人在生活的任何方面，決不能達到他所希望達到的高度，因他的才能已被限制故；藉教育和經驗他能發展他從他的父母遺傳下來的各性質，可是他無法得着出乎他的祖先胚胎組織範圍外的諸種性質。他所能活動的途轍，他所能達到的高度，他所能養成的品德，他所能做任何工作的性

質，凡此一切事件對於他差不多是固定了的；他所能努力的只在如何利用他所接近或在他範圍內的外部環境以謀他的天賦本能之最高展發。在他方面，此種學說從整個的社會觀點看來又是很有希望與樂觀的，蓋此學說告訴我們，用選擇配偶，獎勵優秀階級的生育，與阻止具有劣性人們的生育等方法，我們確有權力以改進我們種族的智力之一般水準。在此點我們試參看加爾桑德爾先生(Mr. Carr-Saunders) 關於先天與後天的性質所說的話。『先天性質與習傳的關係可以一譬喻解明之。習傳好像是人類從事建築的一座巨大建築。每一代的人們增加少數磚頭於此建築之上。任何個人對此建築所貢獻的成績完全依靠他所屬的種族與時代；而他所用磚頭的種類與乎他安置磚頭的方法亦大部是同樣的情形。他對此建築的貢獻乃受歷代闡明的建築圖案，與歷代預備的磚頭以及歷代採行的砌磚方法所支配。但在任何一代中一個人是否願意增砌磚頭，或他砌置磚頭與他的夥友相比是否有力量和聰明，則將依靠他所秉賦的先天姿質。

『因此，將改良將來人種體質的希望建立在一般變革上面的人們是立脚在強固的基礎上了。在他方面，夢想心靈性質的胚胎變化來推動社會的進化因而範成歷史的進程的人們，是完全的謬誤。

『習傳的龐大積聚淹沒了本能性質的向外表顯。可有習傳一旦平均時，則先天智能的差異便立刻適如其量的在人與人之間表現出來，并因爲習傳雖不在種族間但至少在同一種族的各階級間是大致平均的，所以智能的秉賦對於個人亦是特殊的重要。』

於是我們可以見出，從人類的質量上來觀察，將來是不十分光明的，第一因爲較劣的階級比較優的階級之蕃殖更爲迅速，第二因爲較劣階級的人們只能得着較劣秉賦的小孩，而末了又因爲教育與訓練的效果不是積聚的，所以我們不能希望一代復一代的教育與訓練可變化人們的先天性質。

所以吾人的幸運仍是：一切事項仍如前不變，商品生產之增加決不能到一不可預測的限度，抑或無論如何其繼續增加只能依我們對於將來所能預料的速率。因此我們的人口學說在研究將來人種質量問題之後仍無所變易。

第十四章　生產論—勞力的流動性

在研究人口學說時，我們已見出在新國家中，即是在以較少的人類努力能得較多的食物或生活資料的地方，人口恆有迅速增加之勢。在此種國家，人口不僅依一迅速率度增加，即是此種國家不僅容許原有的人口以迅速率度增加，并且歡迎外國的人口迅速向其境內移殖。此乃普遍的現象，因爲在勞動者當中，恆有向剩餘利益最大的地方移動的趨勢。勞力從此地移到彼地或從此種工作移到彼種工作之此種趨勢，吾人稱爲勞力的流動性。

橫線縱線與對角線的流動

大體說來，勞力的移動是在區域與區域之間，抑或在職業與職業之間。我們可稱前一種爲橫線的流動——在此種流動中，地域的變遷不含所作工作性質的根本變遷。同樣的，我們可稱第二種爲縱線的流動，此種流動則含有所做生產工作的性質變遷。勞力從此地移到彼地的運動同時附帶有職業的變動，則我們稱爲複雜的流動，或依照前面的術語，稱爲對角線的流動。此三種運動可以與軸平行或以不同的傾斜角度之幾何直線表明之。設若區域記於 x 軸上，職業記於 y 軸上，則一切 $y=k$ 的直線可代表橫線的流動，一切

$x=k$ 的直線可代表縱線的流動，而複雜的流動則以 $y=mx+c$ 的諸直線代表之，C 的有定價值可從零點上推。設若各職業按照工作的等級以爲排列，或換言之，若各級工作記於 y 軸上的次序，以軸上地位較高者代表較高級的工作，則變數m，即前一方程中 x 之係數，即變爲勞力流動中所含工作性質變動的指數。若m爲正數時，則方程表示職業變遷係從較低級到較高級；若m爲負數時，則情形正與此相反。m 的價值越大，工作等級的變遷亦愈大。C 之價值表明勞力所移至或離開的工作等級。因爲一個 $y=mx+c$ 的方程式只能代表一條直線，即是一個方向，除非該線的終點亦被知道時，它是不能代表勞力的實際流動的。設若勞力作對角線的移動，從 $x=M$ 的地點到 $x=N$ 的地點，則在 $x=M$ 與 $x=N$ 兩界限間勞力的流動可以 $y=mx+c$ 直線確切代表之。若勞動者從印度之某地移到另一地而仍作同樣工作時，此種情形可以平行於 x 軸的諸直線代表之。在農忙的時候，勞力從實業區域移到鄉村，可以對於 x 軸成反傾斜的直線，即是與 x 軸成爲鈍角的直線代表之。

勞力流動的原因

勞力從此地移到彼地，或從此業移到彼業，以謀純效用之增加，即是求效用超過反效用的剩餘之增加。考察此種剩餘時，不僅應計及直接可用貨幣度量的所有利益與不利益，并應計及一切使此地或此業比彼地或彼業更爲或更不舒適的優點與劣點。除了純利益以外，或許尚有許多其他引致勞動者流動的原因，不過這些原

因是不持久的，并對於勞力之一般流動沒有什麽重要關係。所以我們可說勞動者之移動目的在求純利益，并因流動之故，他們無形使各地區間與各職業間之眞正效率工資趨於平均。橫線的流動平均了或趨於平均了不同地區之同樣實業或同級勞動者的眞正工資。縱線流動同樣的平均了不同實業間或不同級的勞動者間之眞正效率工資。勞力流動因有平均工資的作用，故可使勞動階級的一般經濟福利趨於平均，并因此之故，亦可使與這些勞動者合作以從事生產工作的其他階級人們之幸福趨於平均。而此種經濟福利之平均又可增加全社會的一般幸福。所以，勞力效率在長時期內，除了依靠其他原因外，并依靠它所具流動性的程度。

增加或阻礙流動性發達的諸因素

沒有一個地方勞力的流動性是完全了的。縱使一切社會的，政治的或宗教的障礙通通去掉，而移動的費用——直接的貨幣費用——亦常可遏制不同地區間勞力之自由與迅速移動，結果保持了眞正效率工資間之差異。可是從廣義解释，移動費用不僅包含勞動者用於運輸上的直接貨幣開支。除開勞動者移運家屬的貨幣開支外，一個勞動家庭并應計及由此地移到彼地許多算不出的間接貨幣開支。設立新家呵，搬運舊東西呵，或以賤價出賣舊東西呵，與新地方的新店主交接呵，尋找各種東西的最廉市場呵，一切的一切通常都是增加貨幣開支。因此，直接與間接的移動費頗可阻礙，有時甚至完全禁絕勞力的橫線流動。人口愈大，交通與運輸設備愈完

美，則勞力的流動性亦愈高。(附註)

此外尙有一些移動費用應當在此點論及的：這些費用不能直接用貨幣計算，可是在長時期內它們對於勞動者的掙錢能力卻顯出一些間接影響。此種費用乃是社會的，宗教的或業務的關係，這些關係往往使勞動者不願從此地遷到彼地。

其他妨害勞力流動的障礙則是愚盲與政治的限制。在文明較差的國度中，前者是遏制勞力流動的有力障礙，而後者則是現代世界大多數的國家所多少不免的。其阻礙的方式或直接制定移殖法，禁止或種勞動階級入境，限制或管理與減縮其他勞動階級之內移；抑或間接由國家對於移居人民施以不同的待遇。愚盲亦可阻止勞動者從一地或從一業移到效率工資較高的地方，這樣便遏絕了不同地區與不同職業間勞力最上可能的短期分配。又是愚盲又可使勞動者不培養教育他們的小孩子以從事將來實際工資大有提高希望的各職業。所以，愚盲阻止了興起時代最可提高勞動階級經濟幸福的金錢與勞力的投殖方法。(附註)此種愚盲，或由於交通工具不完備與文盲，或由於現代大多數實業所流行的表明工資的欺騙方法或工資的複雜制度。

若將這一切障礙去掉，則勞力的運動，橫線的與縱線的，將爲有效的增加速率。除此以外，冒險性，野心以及生活的高標準，亦爲增加勞力流動的額外勢力。

(附註)關於勞力流動諸原因的精詳討論，可參看皮古(Pigou)的幸福經濟學(Economics of Welfare)。

(附註)愚盲又可阻止不同職業間勞働力最上可能的長期分配。

勞力流動性的圖解表明

橫線的流動——現在我們研究兩區域間的勞力流動。在圖 23 與 24 的曲線代表兩區域依據勞力的邊際生產力所有的勞力需要曲線。此兩曲線可以完全相同，亦可因生產制度不同或其他原因而各異。我們現在討論的是在兩個區域的同樣實業，並假定沒有縱線

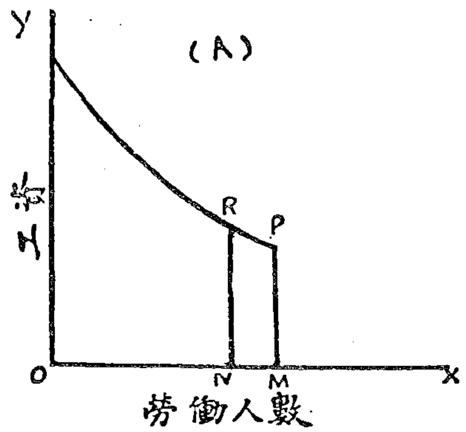


圖23

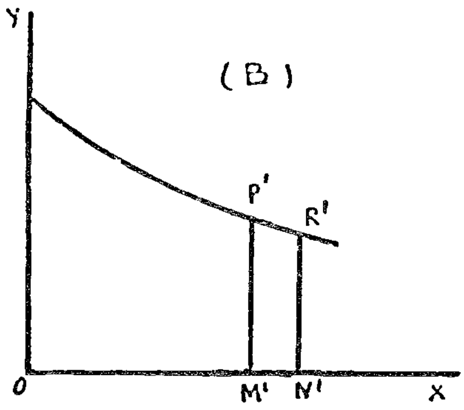


圖24

的流動。因此，在短期內每一區域用於此種實業的勞動量是固定的。玆設ＯＭ與ＯＭ'表明雇用勞工的人數。因爲此兩區域間勞力沒有流動，故工資是不相等的。設若運輸工具現在發明了，與勞力的流動性亦變爲完全了，則工人將從Ａ地移到Ｂ地。工人的數量是固定的，Ｂ地增加之數等於Ａ地減少之數，當工人ＮＭ的數量由Ａ移至Ｂ時，則平衡的最終點卽已達到。於是工資便立於 RN＝R'N' 的水準之上。此時ＮＭ等於Ｍ'Ｎ'。工資之高低僅視需要多寡而定，卽是視邊際生產力之大小而定，因爲工人的數目是固定的原故。

我們可以見出由Ａ地移民的多寡視兩需要曲線的斜度而定。

斜度愈大，則移徙的數量卽愈小。平衡點的位置又可將兩曲線合併起來求得之。

流動有窒礙時的狀況

設若流動不是完全，卽是，設若運動含有費用，則運動費用卽當於兩地工資的差數（假設運動費是阻礙流動的唯一障礙物）。結果在A地的RN工資與在B地的R'N'工資之差數將等於運動費之數。設若以工資單位計，運動費為C，則 RN+C=R'N'。NM又將等於 N'M'，不過此兩數均各比以前較小。

當A與B代表雇用同級勞工的兩實業時，此種圖解與此種方法亦可適用。此時的假定是沒有橫線流動存在。

複雜流動

我們現在將考察兩地同時含有兩實業間縱線運動之勞力流動。此時勞力的供給變成一變數。在圖25與26中，DD'與 dd'是需要曲線，或生產力曲線，而SS'與ss'是供給曲線。在短時期中，因有縱

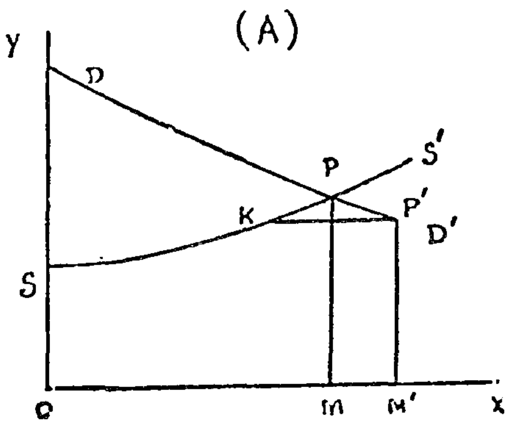


圖25

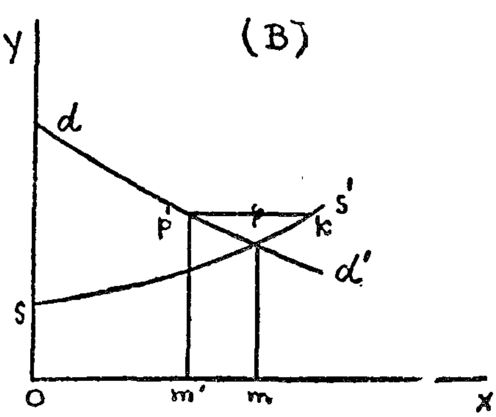


圖26

線流動之故，供給曲線是上升的。在（A）地與（B）地之間尙未有橫線流動發生前，則工資各爲PM與pm，表明它們各是兩地所有實業的公共邊際生產力。此時雇傭的勞動人數爲 OM+om。若是運輸工具發明，流動性變爲理想的完全時，勞動者便由（B）移到（A）。此種移動致使（B）地的邊際生產力或需要價格上升，（A）地的下降。最後（A）地的工資定於P'M'（=p'm'），故KP'=kp。在（B）地工資等於p'm'時，需要是om'，而供給是om'+p'k。在(A)地同樣工資時，需要是OM'，供給是OM'−P'K。因此，當 p'k 的勞力由（B）移到（A）時，（B）之剩餘勞力恰够補足（A）之缺陷。雇用勞動者的總數等於OM'+om'。移殖量爲 P'K=p'k，其或大或小視兩曲線之斜度而定。p'k 的勞動者移徙到（A）其中 m'm 數量是由此種實業移出，其餘數量則由其他諸實業吸出。同樣的，在（A）移入之數爲 KP'，形成勞動之供給總數爲OM+KP'，超過了需要之數，故有 KP'−MM' 之部分須寄身於其他實業。

現在我們假定勞力之流動一部分受了移動費的限制，則發生的移徙將不能使（A）與（B）的工資達到同一水平。（A）地的工資將比（B）地的工資爲高，其差數等於移動費以工資單位計算之數。所以，如前例一樣，結果（A）地的 P'M' 工資將等於 p'm'+c'c 代表移動費。KP'將仍等於 kp'，但是牠們比以前較小。

DD'與 dd'是表明短期需要的兩曲線，它們代表兩地勞力的邊際生產力，此生產力因所論實業中勞力所需的原料數量是多少固

定了的，故有漸減的趨勢。供給曲線仍是短期曲線，其中不含有人口之漸次增加。因為工資提高恆引致各實業間勞動力之重新分配，故工資增加，供給亦隨之而增加。

設若　DD' 以$x=F_1(y)$代表之

SS 以$x=F_2(y)$代表之

dd'以$x=f_1(y)$代表之

ss' 以$x=f_2(y)$代表之

則在流動發生以前，（A）地的工資是 $F_1(y)=F_2(y)$ 方程；（B）地工資是 $f_1(y)=f_2(y)$ 方程。在流動發生之後，兩地的工資均等於w，而w之價值則等於 $F_1(w)-F_2(w)=f_2(w)-f_1(w)$，方程式之每端卽是移徙的尺度。

設若移動費為C，則（B）地的工資將是$W-C$，而W的價值則為方程 $F_1(w)-F_2(w)=f_2(w-c)-f_1(w-c)$（附註）

勞力流動增加勞動力之量

我們在前面已見出，一國的勞動力依靠它的人口，卽人民的數量，以及人口的體力，道德與智力，卽人民的質量。雖然，此種不過是一國的潛伏勞動力。此種勞動力能否被充分的利用，乃依賴其他各種關係，勞力流動乃是其中之一——不是不重要的一種。勞力的自由流動可產生勞力邊際生產力之平均，因而勞力所生的總報酬可達到最高度。因此之故，凡可增加勞力橫線與縱線流動的所有

（附註）C始終代表從遷移而生的短期不便與其他損失，可以貨幣計算的數量。

勢力都可致使各種用途與各種地域的勞力之邊際生產力愈趨於平均，因而獲得最良利用的實際勞動力亦增加甚鉅。換言之，勞力之流動不是增加潛伏的勞動力，而是增加實際現用的勞動力（此時勞動力的度量乃依據勞力的生產量）。從圖25與26我們見出勞動者的邊際生產力在（B）是從 pm 增加爲 p'm'。在（A）是從 PM減少爲 P'M'。若（A）與（B）之間運輸方法完成，則供給曲線便顯然要變更牠們的位置，而最後在（B）與（A）各割需要曲線於 p'與 P' 定卽以此爲它們的平衡點。

移徙量之決定

第一例 —— 假定上面給出的諸方程可以表明供給與需要曲線，則勞力流動之度計可如下述：

假定在（B）地實業雇用的最後勞動人數爲 l_1，在新工資率增加後的人數爲 l_2，卽($om'=l_1$， $om'+p'k=l_2$)，又假定l_3與l_4爲（A）地的相對數字。則

$l_2-l_1=l_3-l_4$ ＝由（B）移（A）的勞動人數。

因此工資的平均如次：

$$F_1(w)=l_3, F_2(w)=l_4, f_1(w)=l_1, f_2(w)=l_2。$$

於是我們有五個方程可決定四個 l 與 w 的。

若流動遇有窒礙時，玆假設C爲流動所生一切窒礙每月以貨幣計算之數。方程仍如前，

$$l_2-l_1=l_3-l_4,\quad F_1(w)=l_3,\quad F_2(w)=l_4,$$

$$f_1(w-c)=l_1, \quad f_2(w-c)=l_2,$$

現在我們仍可從五個方程以決定四個 l 與 w。

第二例——在短期中若這些實業係雇用同級的勞工時，則縱線流動甚爲強烈。在多數生產過程中因機器之採用將有些手續變爲共同化，勞力的流動亦逐增加。若是此種流動存在時，則勞工在一區域內各種實業間之分配，將是使他們在這些實業中的邊際生產力趨於平均。設若各實業的區域不同，則勞力的縱線流動又含有橫線流動，而此時的移動亦變爲較難。首先假定流動是不受限制，我們來決定一固定勞動人數在若干實業間之分配爲何。

假設實業之數爲 n，勞動人數爲 X，所有 n 的實業都需要同級的勞工，此級卽 X 勞工所隸屬的。

假設在這些實業中需要曲線或勞力的生產力曲線爲 $f_1(x)=y$，$f_2(x)=y\cdots\cdots f_n(x)=y$，x 表明勞力量，y 表明邊際生產力。假設 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 爲諸實業各有的勞力量。

於是我們有 $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=X$，平均諸邊際生產力，則有

$$f_1(x_1)=f_2(x_2)=\cdots=f_n(x_n)。$$

我們可得出 n 數的方程以決定 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$。

玆假設流動一部分受了橫線流動或某種其他原因或諸種原因之限制，則勞力之分配將使多數實業有不同的邊際生產力。設若我們假定在 h 數的實業中勞力流動不完全，卽是勞力從其他各實業移到 h 諸實業是不自由，而在 h 實業間的流動則是自由的。假設 c

表明每月內工資或生產力所計算的任何期間內所有以貨幣度計的窒礙總額。則仍如前，

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=X,$$

與 $$f_1(x_1)=f_2(x_2)=\cdots=f_h(x_h)=f_l(x_l)+c=\cdots=f_n(x_n)+c。$$

c是已知數，n數的 x，到 x_n 可以n數的方程決定之。

茲設一簡單的數字實例，假定生產力的方程爲

$$y=20-x$$

$$y=17-3x/2$$

與 $$y=19-2x,$$

爲三種實業的生產力，又假定有30單位的勞工。於是，

$$x_1+x_2+x_3=30 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

與 $$20-x_1=17-3x_2/2$$

$$=19-2x_3 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \quad x_1-3x_2/2=3$$

與 $$3x_2/2-2x_3=-2 \cdots\cdots\cdots(3)$$

消(1)式，則得

$$\frac{5}{2}x_2+x_3=27,$$

再與(3)式消之，則得

$$13x_2/2=52$$

或 $$x_2=8,$$

由此 $$x_3=7$$

與 $$x_1=15,$$

邊際生產力為5。

第三例——現在我們研究在區域不同的一種實業中勞力流動的情形。茲假設有n數的區域，其勞力的諸生產力曲線為 $f_1(x)=y$, $f_2(x)=y, \cdots\cdots f_n(x)=y$。

假設在流動以後勞動人數之增加各為 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$，又假設在平均工資時，從以前的供給曲線計算而來的新與勞力供給為 $x'_1, x'_2, \cdots\cdots x'_n$。則總需要或總雇傭等於新與的總供給，由此

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=x'_1+x'_2+x'_3+\cdots\cdots+x'_n,$$

而工資是平均的，故

$$F_1(x_1)=F_2(x_2)=\cdots=F_n(x_n)$$
$$=f_1(x'_1)=f_2(x'_2)=\cdots\cdots=f_n(x'_n)。$$

我們現在一共有2n的方程，從這些方程可確定2n數的 $x_1, x_2, \cdots x_n, x'_1, x_2' \cdots x'_n$。在圖解上欲確定平衡工資，可求出一種y之價值，此價值能使需要與供給曲線上相對的x諸價值間之差異互相沖消。

抑或假定各組曲線之x軸是在同一的橫線上。然後作一與x軸平行的線橫割所有諸曲線。設若此線所表明的平衡工資為正確時，則該線為需要與供給曲線所間隔的部分與位置於此等交點上面之部分相加將適等於位置於交點下面各部分之和。

第十五章　生產論—資本

定義

資本是經濟學中一解釋繁多的名詞。卽至今日，經濟學者之間對於資本的意義尙沒有完全一致的意見。有些學者給此名詞以一十分狹義的解釋，而其他學者又將一般廣泛的財貨包括於資本之內。如費雪博士 (Dr. Fisher) 則謂一切財貨均爲資本而不考慮其發生的來源。可是從各學者的著述中我們頗可搜集充分的材料以建立我們自己對資本一詞的定義。我們可以說資本包含凡有助於生產的財富之一切形式，而其本身之存在則原於過去包含它們體內的人類勞力。此定義的唯一難點在於不易正確了解「有助於生產」這仂語的意義。可以稱爲資本的財富，必該財富在性質上應能有助於生產呢，抑或須實際用爲生產的工具呢？若採取後一義，則在某時間或對某人可以成爲資本的財富不一定在任何時或對任何人均爲資本，這是顯然的。因了此種原因，故有些人對每一例在他們未確定財富使用人的意旨之先寧願保留他們的判斷。「有助於生產」之此種解釋，有許多贊成的理由，可是關於生產一詞的正確意義又有困難發生了，而且財富應當直接的抑間接的幫助生產，又是一難解答的問題。爲避免此種困難起見，資本可解釋爲財富之此

類形式，其來源是人類勞力過去應用在它們上面之結果，其利用在於滿足將來的慾望，抑或間接滿足現在的慾望，這個定義頗能伸縮，不僅包含普通公認的生產工具，並包含儲蓄以備將來利用之各種財富。

上面的一切討論可揭出一重要事實，卽資本不能從其他財富形式嚴整的分別出來。此類困難無論在何處均有。「資本」愈被仔細的研究，潛伏的困難便愈是顯露。可是，只要有一良好適用的區別來劃分那些財富種類是資本，那些不是資本，則支配生產或分配的諸原則亦可被吾人研究而不致陷於混淆。又是，現代最重要與使用最廣的資本形式乃是機器，工廠，原料，貨幣與信用，對於這些東西是不會有什麼混淆或誤解發生的。

貨幣

現在另有一點尙須討論的。貨幣一般人稱爲「流 動 資 本」(floating capital)或「流通資本」(circulating capital)。它是資本，因其爲生產所需的財富庫藏故。可是我們須注意貨幣資本與其他資本形式的區別。貨幣是交易媒介，並僅賴它的交換作用它纔有用於生產。它不能代表一種實在的生產工具，但只能代表取得或支配某量資本或工具（或消費商品）的權利。它在一種解釋上是潛在資本，握有貨幣便可預計或甚至保證其他形式資本之供給。我們所有貨幣愈多，其他事項不變，則我們取得資本的權力亦愈大，可是一般貨幣的數量若增多，其價值則必變少，因此較大數量的貨幣

不一定卽是幫助生產的工具之較大供給。而且貨幣不能直接滿足慾望，卽此事實亦可使它列於其他資本形式之林。但是因爲它是另外一種資本，所以頗可正當的稱以不同名稱，謂爲「活動資本」(working capital) 或「流動資本」。

儲蓄原因之分析研究

不管資本所具的形態爲何，它主要是儲蓄之結果；卽是消費少於我們的生產，或生產超過目前消費的需要之結果。當此種行爲一經完成，資本卽隨之而創造。若消費少於生產，則過程中便包含有一些節制在，因爲所用的努力較大於從消費獲得的效用所報酬之數。初民時代資本增加之所以如此遲緩，與乎現代有些文化較低的種族資本之不發達，此乃原因之一。因此我們開宗明義卽認定資本之發生或創造是儲蓄之直接結果。

我們現在將研究儲蓄發生的場合。吾人作分析的推論，可假設沒有貨幣存在，凡所儲蓄者俱從一個人所有的或生產的商品儲蓄而來。於此有五種不同的場合。第一，在此種情形之下，設若商品是容易腐敗的，則將無儲蓄可能。第二，縱使商品是不易腐敗的，卽是能够保持它的效用一部或全部經一合理的或必需的時間，但若該商品的將來產量是按期可靠的，抑或該種商品之保持不能給出間接快樂與除了直接消費外不能給出另外的效用時，亦不能有儲蓄發生。第三，設若商品因使所有主能表異於人而給出快樂時，抑或它被可被利用以滿足他人的慾望時，則儲蓄便產生了。第四，設

若此商品之將來供給是可靠的，其一部分亦可被儲蓄，祇要吾人在將來有用此商品以得較大效用之機會。第五，設若商品將來的供給是不一定，而又不是容易腐敗時，則縱然上述的條件不存在，其一部分亦可被儲蓄。

至於貨幣，其爲物通常不易腐敗，並因營業組織完善之故，其儲蓄亦頗安全。當貨幣或其他商品不僅是被儲蓄而且被貸於他人時，則另一重要關係發生了。直接消費此時與間接使用相偕並進。貸出的資本可收入利息，故於儲蓄利益之外，又有收取利息的利益。因此儲蓄的數額比尋常爲尤大。此商品一部分的現在消費效用將小於將來消費的折閱效用與利息將來消費的折閱效用之和。

從貸方的觀點看來，利息是期待的代價，卽是延緩消費所生滿足的損失之報酬。因此，利息可度量此種場合對將來享受的折價率，在此種場合行爲須包含兩個人以及供直接消費的可以儲藏的商品。在近代資本市場所表現的複雜情形之下，是不能作此種確定的論斷的。

儲蓄的度量

若將來的收入可靠，以及上述第二例的諸條件亦已滿足時，將無儲蓄可能，蓋按平均邊際效用原則不僅攪亂消費之分配，且因將來滿足是不可靠的或是折價的，亦將減低效用到此率度。

（1）效用無折價時的情形

若將來毫無發生收入的希望，折價率等於零，且並無其他條件參入時，則商品在所論時期的各單位間將是平均的分配。此時商品對於一切時期將有同樣的效用曲線。假定時期為兩年，商品為OM，一年的效用曲線為 UU，則兩年效用曲線之合併必將為UU'，其在 UU' 上之橫距在同等高度時洽為 UU 上之橫距兩倍。假設從M點的垂直線割 UU' 於S，從S點的平行線割 UU 於C。則NC將是第一年內消費的數，適等於為第二年所儲蓄之CS數。

假設將來的供給是不確定，則不能有一定的解決法。可是若將來的供給是一已知數時，則儲蓄的數量是可度計的。例如，將來的供給若為一半時（一切其他條件均如前所假定），則 UU' 曲線將從 UU 曲線上之C點開始，因為所儲蓄的最初效用在將來將為NO故。

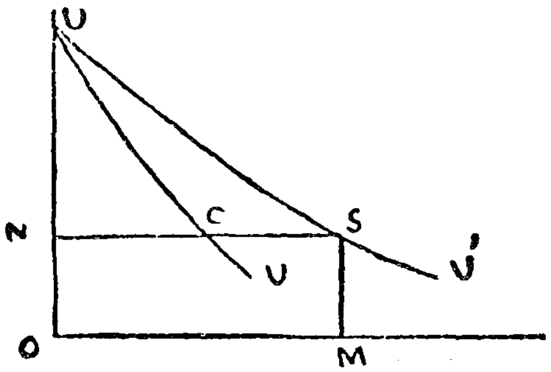


圖27

設若時期不止於二，並設若在諸相等時期內所得的收入是多寡不同時，可將諸數加在一起，然後平均分配於各時期，因為諸效用曲線是相同，並不因展緩消費而假設有效用的折價故。茲設

$M_1, M_2, \cdots M_n$ 爲 n 時期所有之各收入，設收入的效用曲線爲 $y=f(x)$，此處 y 是邊際效用，x 是消費的數量，每一時期消費的數量爲

$$\frac{M_1+M_2+M_3+\cdots+M_n}{n},$$

消費的邊際效用爲

$$y=f\left(\frac{M_1+M_2+M_3+\cdots+M_n}{n}\right),$$

第一期內儲蓄的數量將爲 $M-\frac{\Sigma M}{n}$，假設M較大於 $\frac{\Sigma M}{n}$。

（2）效用有折價時的情形

若要考察效用的折價，即是加入一種折扣率，則問題之解決便愈臻複雜。因爲將來的享樂，其滿足慾望不如現在同等享樂之大，又因爲此種差數係隨所隔時間之長度而增加，所以我們可認定效用之損失或折價是爲現在效用之一固定百分率，並稱此率爲「折扣率」(rate of discount)。

我們試考察兩年的時期，假定 OM 爲第一年之收入，並假定第二年沒有收入，其折扣率爲百分之 20。設若 UU 是第一年的收入效用曲線，則 UU' 將是第二年之合併效用曲線，兩曲線間之橫距表明在 x 軸上各相對高度所指的邊際效用之各消費額。作 MS 線與 OY 平行，NS 線與 OX 平行如前，則我們可見出第一年度消費之數將爲 NC，爲第二年度儲蓄下來的數將爲 CS。邊際效用等於 ON。

設有 n 數的此種時期，而收入僅在第一期，其數爲 x，並設每期之折價率爲百分之D，收入的效用曲線爲 $y=f(x)$，若是一個人

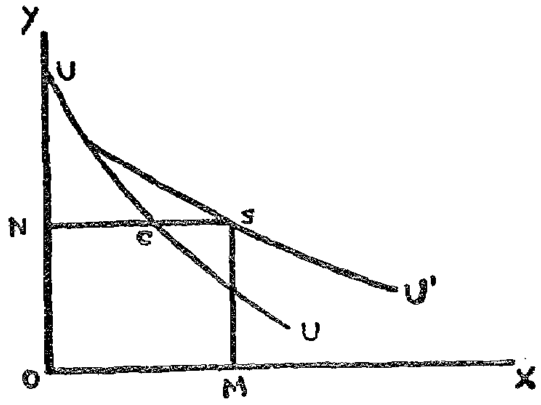


圖28

對於所有的同等時期開始卽有一收入的詳細分配計畫，他將是逐年劃出他收入之一部分。第一部分的效用曲線爲$y=f(x)$，第二部分爲 $y=\frac{100-D}{100}\cdot f(x)$，第三部分爲 $y=\left(\frac{100-D}{100}\right)^2 f(x)$，其餘諸部分可照此類推。假設 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n$ 爲每年劃出之各部分；則 $x_1+x_2+\cdots+x_n=X$，平均諸邊際效用則得

$$f(x)=\frac{100-D}{100}f(x_2)=\cdots=\left(\frac{100-D}{100}\right)^{n-1} f(x_n)。$$

我們一共有 n 數的方程，故 n 數的 x 可藉此確定。

現在更普通的，設若我們假定在一期內收入的邊際效用隨 x (收入)沿着 $y=f(x)$ 而變，收入的同等增加額之效用隨 z (時期)沿着 $y=F(z)$ 而變，則在任何特定時間收入之任何特定部分，其效用的方程將爲 $y=\phi(x,z)$。設若 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是收入劃於 n 時期的各部分，則 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=X$，而平均諸邊際效用的各方程將爲 $\phi(x_1,1)=\phi(x_2,2)=\cdots=\phi(x_n,n)$。

從這些方程我們可確定 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 各部分。

(3)各期均有收入時的情形

我們若研究各期均有不同數額的收入時之情形，則問題的解決便不如是之簡單。可是我們只假定爲兩期。設第一期之收入爲OM，第二期之收入爲 OM'(OM—OM'假定爲正數)；設 $y=f(x)$ 爲收入的邊際效用曲線，並設效用的折價率爲百分之20。

凡從 OM 儲蓄下來的（見圖 29 與 30）均加到 OM'去，它的效用將沿着圖 30 中的虛曲線，其方程式顯然爲 $5y=4f(x)$。因此從 OM 儲蓄下來的爲 NM，將其加於 OM'，其和將等於 ON'，而 NM＝N'M' 在N點所有的邊際效用等於在 N' 所有的邊際效用。若求出一與X軸平行之 KK'直線，使此線在一圖中爲 NR 與 MS 間所間隔之部分等於該線在另一圖中爲 N'R'與 M'S' 所間隔之部分，則問題便解決了。

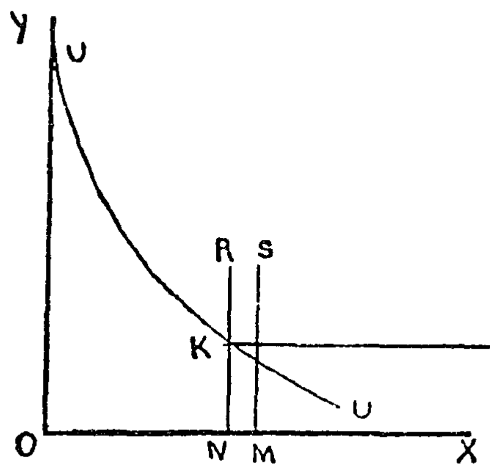


圖29

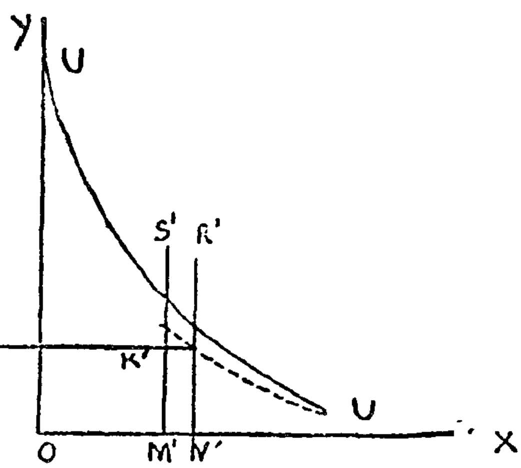


圖30

(4)有利息時的情形

前所論列均限於消費商品，可是我們要知道現代的儲蓄都是取貨幣形式的，所以我們必須研究儲蓄的貨幣通常所獲利息的情形。因是，被儲蓄的數額不僅從其本身之消費可以給出效用，並可從其利息之消費以給出效用。假定每期的利息率爲百分之5，則在第一期之末所儲蓄 x_2 之數額遂變爲 $\frac{21}{20}x_2$。若所考察者僅爲兩期，則在圖30的虛曲線將完全是一樣，不過 M'N' 將等於 $\frac{21}{20}$MN。

（5）儲蓄之公式

設 X_1 是第一期所獲或所有之數，X_2 爲第二期所獲或所有之數。貨幣的效用曲線爲 $y=f(x)$；每期的折扣率爲百分之D，與每期的利率爲百分之R。則 x_1 若爲第一期的消費數額時，X_1-x_1 即爲儲蓄的數額。

貨幣的邊際效用爲 $y=f(x_1)$，第二期的消費數額爲

$$X_2+\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(X_1-x_1\right)。$$

欲解決此問題，我們須將從儲蓄而來的效用之利得變爲最大。當 X_1-x_1 被儲蓄時，效用的損失爲 $\int_{x_1}^{X_1} f(x)dx$，而在 X_2 與

$$X_2+\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(X_1-x_1\right)(設=x_2)$$

兩界限間的效用之利得等於 $\int\frac{100-D}{100}f(x)dx$。因此，故效用之利得等於

$$\int_{x_2}^{x_2}\frac{100-D}{100}f(x)dx-\int_{x_1}^{X_1}f(x)dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

當它的微分數是最大時，此數卽爲最大。

設若 $f(x)$ 之積分數以 $F(x)$ 表明之，則(1)式變爲

$$\frac{100-D}{100}\Big[F(x)\Big]_{X_2}^{x_2}-\Big[F(x)\Big]_{x_1}^{X_1}$$

$$=\frac{100-D}{100}\Big[F(x_2)-F(X_2)\Big]-F(X_1)+F(x_1)$$

在 $F(x_2)$ 內，以 $X_2+(1+R/100)(X_1-x_1)$ 代替 x_2，則我們得到 x_1 之新函數，卽 $F\{\psi(x_1)\}$。因此公式變爲

$$=\frac{100-D}{100}\Big[F\{\psi(x_1)\}-F(X_2)\Big]-F(X_1)+F(x_1)$$

這個是最大數，當

$$\frac{100-D}{100}\Big[\frac{d}{dx}F\{\psi(x_1)\}\Big]+F'(x_1)=0,$$

X_2 與 X_1 爲常數時。或

$$\frac{100-D}{100}F'\{\psi(x_1)\}\psi'(x_1)+f(x_1)=0,$$

或　$$-\Big[\frac{100-D}{100}f\{\psi(x_1)\}\Big]\left(1+\frac{R}{100}\right)+f(x_1)=0,$$

或　$$f(x_1)=\frac{(100-D)(100+R)}{(100)^2}f\Big[X_2+\left(1+\frac{R}{100}\right)(X_1-x_1)\Big]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

此式所給 x_1 之價値將不止一種，其中最適宜者將使儲蓄的利得變爲最大。玆舉一簡單數字實例，以明上述諸式之應用：

設此年之收入爲 8 單位，次年之收入爲 5 單位。設每年的利息率爲百分之 10，每年的折扣率爲百分之 5。設貨幣的效用爲 $50-x$ 函數。我們應用公式則有

$$50-x=\frac{95\times110}{100\times100}\left[50-\{5+11/10(8-x)\}\right]$$

$$=\frac{209}{200}\left[\frac{181}{5}+\frac{11}{10}x\right]$$

$$=\frac{209\times181}{1000}+\frac{2299}{2000}x。$$

因此，$x=5.7$ 之近似值。

於是爲第二年度儲蓄的貨幣單位爲 2.3。從 13 單位之總收入中，第一年內所消費的爲 5.7 單位，第二年內所消費的爲 7.3 單位，利息除外。

推論

方程（2）可以下式表之：

$$f(x)=\frac{(100-D)(100+R)}{100^2}f(M-Kx),$$

其中$K=1+\frac{R}{100}$；$M=X_2+KX_1$。

若利息率與效用的折價率兩者均等於零時，則 $K=1$，方程爲

$$f(x)=f(M-x)=f(X_2+X_1-x)。$$

若$x=\frac{X_2+X_1}{2}$時，則此方程爲滿足，因此結果與上述第一節的相同。

設若D爲 100，而R爲有限時，則我們知道人將不樂於儲蓄。此時方程變爲

$$(f)x=0\times f(M-Kx)$$

或

$$\frac{f(x)}{f(M-Kx)}=0,$$

此式表明 $f(x)$等於零，或 $f(M-Kx)$ 爲無窮數。若 $x=\infty$，則此等條件卽可滿足，但是因爲x不能使之爲無窮大，所以將使之爲盡量大；卽是無儲蓄之可言。

同樣的，若利息率變爲 -100，卽是，爲安全保存所付的最高率，則亦無儲蓄可言。

若D增加，則 $f(x)/f(M-Kx)$減少，或第一年內消費邊際效用增加，則第二年內消費邊際效用，此時亦無儲蓄可能。同樣的，若R增加，則儲蓄亦將增加。

當R爲零時，$f(x)=\frac{100-D}{100}f\ (X_2+X_1-x)$。

因此，D爲大於零點之正數，現在的邊際效用較小於次年的邊際效用，此事表明在第一年內消費之數大於全收入之半數。因此，若每年的收入爲常數時，儲蓄將不可能。卽使第一年之收入約略較大，儲蓄亦不能發生，惟有兩年收入之相差超出對於D之比例時，始有一部收入可被儲蓄。

（６）爲較大効用目的用所得於將來之情形

我們剛纔見出，若每年收入，或在任何諸相等時期的收入是相

等或僅微有不同時，儲蓄將不可能。此說在實際的事實上是不合的，因爲一個人有許多其他方面，若將收入或財富在將來向這些方面用去，將可得到較大的效用。這些方面如：將來不能預料的需要，如疾病，孩子或其他人的教育，救濟他人的困難，以及此類其他目的，在在都可用錢以獲較大效用。又是，錢可以儲蓄起來以備一個人老年或收入降低或間斷時之用，又可儲蓄起來以彌補暫時失業的缺乏。可是後數種情形可屬於前面已討論各節範圍之內，因爲牠們不過是各時期中收入不平均的狀態。

於是，我們以前的假設，除開時期遼遠所生的效用折價不計，各效用曲線將是一樣，至是不能不予以改變了。卽使一個人可確定他將來有經常收入，他也決難期必這些收入能適當應付他將來或許發生的一切可能或大致的需要。因此之故，一個人通常寧願儲蓄他收入之一部以解救他將來或許發生一些未預料或倉卒與非常需要時所感之困難，而不願將其全部收入在現時通通用去。其他情形相同，一個人若具有較優先見，亦將比其他人更能判斷此種儲蓄的需要。因此，此處的折扣率亦將因人而不同；有些人對於將來不可預料的需要之降臨，其焦慮的程度無異對於現在所感之同樣需要，而其他的人則不願以遼遠時期所不可預料的事變煩擾其胸臆。因此，有些人對於將來的準備比其他的人爲優，卽使他們的其他情形是十分相像的。

又是，此種目的的儲蓄量將視個人收入的數額與性質而定。收入較小的人，其儲蓄亦較微。但是一個能確定他將來有經常鉅大收

入的人有時其儲蓄可比其他人們較小。因此，生活的狀況，身體的健康，以及他家庭的情形，又能有力的影響他對於儲蓄的態度。原因是一個人通常都能大致不差的預計他須應付的非常需要的機會，所以處境不同，此等機會亦不同，而認為必需儲蓄的數額亦因以各異。因此，上面所述的每一因素都有影響貨幣儲蓄數額的效力。

若有一預料的需要發生，則所有貨幣的效用將通體增高，邊際效用亦將增加，而貨幣在比較上則變為稀少。因此，設若將來的此種需要已被預見，一個人即將對將來之此種時期謀圖相當準備，以應付新需要，如普通人所說的，或如我們此處所說的，以平均各時期的邊際效用。在他方面設若需要未被明白的預見，不過是個人恐怕此種需要或許發生時，則效用即受影響，邊際效用曲線將不如前述之高，雖是它較高於現在貨幣的效用曲線。因此，設現在貨幣的效用曲線為 UU 若無新需要預料時，其曲線在將來仍將為UU。但是，若有一些新需要被明白的預見時，則曲線將比以前較高，設為 U_1U_1，而其現在評價則以虛曲線表明之（見圖30A）。若將來之新需要預見欠明，而為處疑狀態時，則效用曲線將不如是之高——可說為 U_2U_2——而其效用之現在評價亦以虛曲線表明之。

同樣的，收入之不確定，其他事項相等，將使效用曲線從同一點開始；換言之，曲線的方程將是相同，但若收入不確定時，它將被視為較小數量，故其邊際效用是較高。因此，若將來的收入不確定，其他事項相等，則儲蓄的數額必較大。

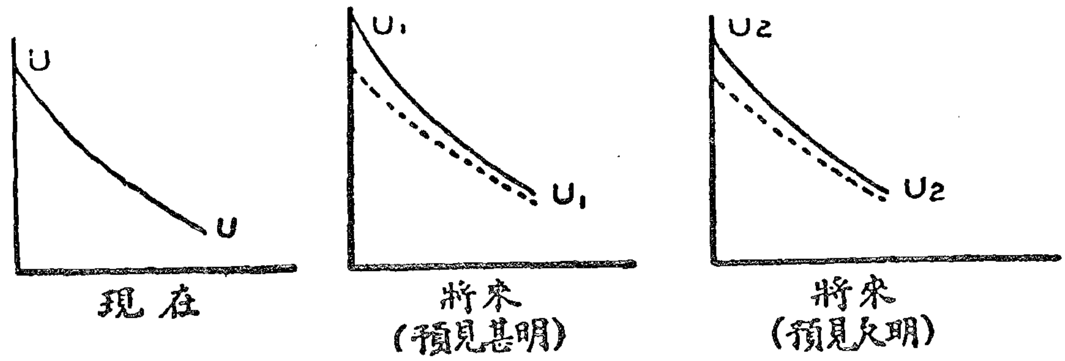


圖30A

若財富積聚的安全性不完全，則儲蓄之數必較小，因爲現在未用的數額在將來能否利用尙未確定，故在長時間內，儲蓄的數額當其享用時候來時反見出減少。因是，現在犧牲的效用大於將來享受的效用。一切其他事項不變，若儲蓄的安全性可疑時，則儲蓄之數必較減，各邊際效用仍不相等。

上面所述各因素都能影響儲蓄的數額，其程度有大小之不同，并在每一場合重視現在效用過於將來效用的心理影響儲蓄爲尤甚。

儲蓄之不安全

我們現在討論剛纔提及的情形，即缺乏安全減少儲蓄數額的狀況。我們試考察兩個時期，每期所有收入爲 x_1 與 x_2，并設效用曲線爲 $y=f(x)$。我們又假定 D 爲零及利息率 R 亦爲零。

玆先假定安全是完全的，則在第一期的消費額將是 $(x_1+x_2)/2$，而儲蓄數將是 $\frac{x_1-x_2}{2}$。

若安全是不完全，設平均估計，安全程度僅爲百分之 60。於是可在將來享用的僅爲儲蓄百分之 60。若儲蓄數爲 M，則由儲蓄所

生的效用損失將是 $F(x_1)-F(x_1-M)$，此 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的積分數。將來獲得的效用爲 $F(x_2+\frac{3}{5}M)-F(x_2)$。從儲蓄而來的利益爲 $F(x_2+\frac{3}{5}M)-F(x_2)-F(x_1)+F(x_1-M)$，此乃最高數，當它對於M的微分數等於零時，或當 $\frac{3}{5}f(x_2+\frac{3}{5}M)-f(x_1-M)=0$，或當 $\frac{3}{5}f(x_2+\frac{3}{5}M)=f(x_1-M)$ 時，又或當第一期的邊際效用在儲蓄後等於第二期的邊際效用在儲蓄的 3/5 時。因此，在第二期的邊際效用較大於第一期的，此事表明第二期中消費之量較少，或爲將來儲蓄之數較小於 $\frac{x_1-x_2}{2}$。

最普通的情形

我們現在將考察最普通的情形，卽是考察不相等的諸收入，利息率，因享受時期遼遠而生的效用折價率，因有用錢於較大效用機會而來的效用增價，以及儲蓄之不安全。

設 R 爲每期的利息百分率，

D 爲每期的折價百分率，

A 爲每期的增價百分率，

與 S 爲每期的不安全百分率。

設兩期中的收入爲 x_1 與 x_2。次設 c 爲第一期內消費的數額，則第二期所有數額將是 x_1+x_2-c，其中尙應加入利息。設 $y=f(x)$ 是貨幣的效用曲線。

第二期的效用曲線將是

$$\left(\frac{100+A}{100}\right)\left(\frac{100-D}{100}\right)f(x)。$$

第二期可用的數額 x_1+x_2-c 因有利息加入之故，將變爲 $x_2+\frac{100+R}{100}\cdot(x_1-c)$。因儲蓄不安全，故其價值又變爲

$$x_2+\left(\frac{100-S}{100}\right)\left(\frac{100+R}{100}\right)(x_1-c)$$

儲蓄 x_1-c 數所犧牲的效用等於

$$F(x_1)-F(c)。$$

從儲蓄獲得的利益等於

$$\left(\frac{100+A}{100}\cdot\frac{100-D}{100}\right)\cdot F\left[x_2+\frac{100-S}{100}\cdot\frac{100+R}{100}(x_1-c)\right]-F(x_2)。$$

效用之純利得爲

$$\left(\frac{100+A}{100}\right)\left(\frac{100-D}{100}\right)\times F\left[x_2+\frac{100-S}{100}\times\frac{100+R}{100}(x_1-c)\right]$$

$$-F(x_2)-F(x_1)+F(c)。$$

將此化爲最大數，故

$$-\left(\frac{100+A}{100}\times\frac{100-D}{100}\right)\left[f\left\{x_2+\frac{100-S}{100}\times\frac{100+R}{100}(x_1-c)\right\}\right.$$

$$\left.\left\{\frac{100-S}{100}\times\frac{100+R}{100}\right\}\right]+f(c)=0$$

或 $$f(c)=\frac{(100+A)(100+R)(100-D)(100-S)}{100^4}$$

$$\left[f\left\{x_2+\frac{100-S}{100}\times\frac{100+R}{100}(x_1-c)\right\}\right]$$

此方程可求出 c 之價值，故儲蓄之數 x_1-c 亦可確定。

我們試設一簡單實例，假定 x_1 等於一〇〇盧比，x_2 等於五〇盧比，R 等於一〇盧比，A 等於三〇盧比，D 等於二〇盧比，S 等於二〇盧比，以及效用曲線爲 $y=50-x/2$，則我們的方程變爲

$$f(c)=\frac{130\times110\times80\times80}{100000000}.\ f\left\{50+\frac{80\times110}{10000}(100-c)\right.$$

$$=.9152.\,f\,(138-.88\,c\,)$$

$$=.9152(50-69+.44\,c\,)$$

$$=-17.6888+.402668\,c$$

$$50-c/2\ =-17.6888+.402668\,c.$$

或 $$c=\frac{67.6888}{.902688}$$

$$=74.9.$$

因此，儲蓄之數約爲二五盧比，或其儲蓄之數差不多等於沒有 R, A, D與 S 存在一樣。R, A, D與 S 差不多完全相消。這個表明此處的關係人是一個平均的人。

資本之生產

我們前面所論乃關於由商品或貨幣的儲蓄所生之資本積聚。此種過程引領到流通或流動資本之直接生產，以及固定或工具資本之間接生產。可是固定資本亦可從勞力之直接消耗而產生。這即

是說，資本可以不是通常意義所謂消費財之儲蓄所致，而可是將腕力或腦力直接用於固定資本生產上之直接結果。所以一個人或許生產 x 單位的商品，消費了 x_1 單位，而儲蓄其餘單位以供將來消費或用以交換任何資本形式，抑或他只生產 x_1 單位的商品，而用他其餘勞動力以生產他自己需用或供他人需用的一些資本形式。此時的行爲主要與以前各頁所考察的行爲相同。在兩種場合，最後原因都是緣於所用勞力之量較大於滿足直接慾望所需之量，而在兩場合的最後效果同是資本的適當形式之生產。

在此種資本積聚中，一個人引導行爲的考慮，恰與在貨幣或消費商品形態的財富積聚中支配他行爲所有的考慮相同。可是此處的考慮或許更爲複雜，不是對於積聚資本的人，而是對於企圖分析牠們的學理家。

設若一個人只能生產一種商品，則在一時期中他所生產商品之數量，將以使該商品對他的邊際效用等於他工作的邊際痛苦爲限。此理至明，無待證辯。可是或許有人反駁，以爲一商品的效用不能直接與工作的反效用比較。這是實在的。但是人所企圖作到的是在平均閒暇效用與商品效用，因爲閒暇效用繫於工作的反效用，所以可說工人工作，至生產的效用等於工作的反效用爲止。

此理而眞，則一個人生產的數額將繫於閒暇效用與生產效用對他的大小。其中任一種有變遷即將影響生產的數額。是故在健康不良的狀況下，閒暇的效用增加，則生產的數額減少。又若生產的商品因消費者嗜好變遷之故而變爲更能滿足慾望，抑或變爲能與

其他商品交換時；此種變遷增加了商品的效用，故生產的數額亦可增加。

此種原則可以解明如次：在圖 31 中設UU_1爲閒暇效用曲線，UU_2爲勞力效用曲線，此曲線實際卽是所生產的商品或生產的效用曲線。設所考察的時間爲廿四小時。則此廿四小時在閒暇與工作間之分配將以使它們的邊際效用相等爲準。再作一合併曲線UU_3，使 UU_1 與 UU_3 間之横距等於 UU_2線上相對各點之横距。設 OM 等於廿四小時。作 MB 線與 y 軸平行，與 UU_3遇於 B。作 BCD 線與 x 軸平行，割UU_1於 C，割 OY 於 D。於是用於閒暇的時間將爲 DC，或約爲$10\frac{3}{4}$小時，用於商品之生產的將爲 CB，或約爲$13\frac{1}{4}$小時，因爲在此種分配之下它們的邊際效用均等於 OD 故也。

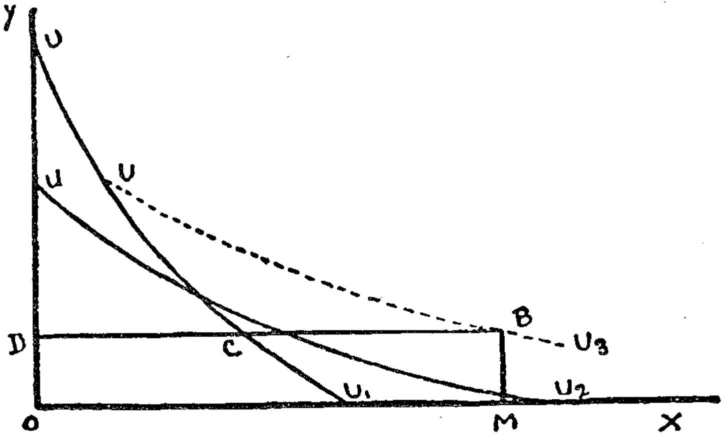


圖31

玆假設一人又能生產其他商品——一種固定資本的商品——譬如可以幫助將來生產商品的一種簡單工具，則他將分配他的時間於閒暇，消費商品的生產與資本商品的生產之間。設若我們能夠確定此種資本商品的效用曲線，則我們亦可如前一樣，將此效用曲

線與其他的曲線合併，並平均它們的邊際效用，以求出此種資本所生產的數額。設若一個人用工具時一小時能生產 $2x$ 商品，無工具時只能生產 x 商品，則工具的效用在該小時內等於 x 商品。因此一種資本商品的效用等於生產商品數額可屬於該資本之折扣效用。

我們試考察兩時期，並假定一小時內一個人沒有任何工具時能生產 x 單位的商品，有一種工具時能生產 $2x$ 單位。設 x 單位商品的效用為 U，而 $2x$ 單位的效用為 $\frac{7}{4}U$。於是屬於該工具的效用將是 $\frac{3}{4}U$。設若此工具需要 2 小時的勞力，則兩小時勞力在資本生產上的效用將是 $\frac{3}{4}U$。設若有兩工具之助，一小時內能生產 $3x$ 商品，此商品的效用為 $\frac{9}{4}U$，則兩小時勞力在資本生產上之第二時勞力，其效用將是 $U/2$。因此，我們折算 $\frac{3U}{4}$，$\frac{U}{2}$ 以及此等數量，卽可求出用於製造資本的勞力之效用曲線。

因為資本在若干單位時間內可給出許多次數的功用，故確定用於製造資本的勞力之效用曲線乃是一很長的計算。假設一種工具可使用十年（不計算折舊），則用以製造該工具最初兩小時勞力的效用將是十年度所有折扣效用之總和；在上述設例中，若每年的折扣率為百分之10。則最初兩小時勞力的效用將等於 $\frac{9}{10}\cdot\frac{3}{4}U+\left(\frac{9}{10}\right)^2\frac{3}{4}U+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\cdot\frac{3}{4}U$。此處假定每期效用的折扣是依同一率度，卽是效用函數的公式為 $y=\left(\frac{9}{10}\right)^x M$，y 是折扣的效用，x 是時期。

資本的効用

我們在上面已經研究了個人創造或積聚資本的方式，以及在一定時期內支配製造資本的數額之諸條件。在本節我們將看一看資本如何幫助生產。僅在研究這名詞的定義時候，我們會見出資本是一種幫助生產將來財富之財富形式。現在我們將澈底的探討資本在任何生產行爲中如何幫助所用之各生產要素。

因爲生產是聯合勞力或所有生產要素，物質的或非物質的，協力工作進行的一種過程，故幫助生產之物，其作用必須經由此等生產要素之任一種或多種，始克達到目的。譬如資本之幫助一種商品生產，或由於它增加勞力，土地，或組織，抑或現有資本諸形式之效率，或由於增加所有此等要素的效率。可是所有此種效率的不同增益可大體區分爲兩類：勞力效率之增加與土地效率之增加。

勞力的效率或土地的效率，其旨趣殊不易給予相當界說。可是意義至爲顯明；卽一要素的效率，我們係指它所貢獻於它與其他要素聯和從事的生產上的力量。因此，效率的度量可求之於一要素在一單位時間內所給勞役之實際價值。於是，一個工人若在一單位時間內所生產物質的或非物質的商品，其價值與他生產每單位所耗的開支相比較大於以前時，則此工人卽變爲更有效率。設若一個工人變成更強健，他的效率亦將變爲較大，因他通常能够生產比以前較大的數額故。若得一適當工具之助，一個工人將變爲更有效率，因他能够生產比以前較大的數額故。

雖然，在某種情形之下，縱然一要素的效率，照普通解釋起來，沒有變更，而該要素所供勞役的價值卻是增加。譬如，當需要與供給的關係發生變動時，一商品之交換價值可或升或降，因而生產此商品的要素所供的勞力在價值上亦將或增或減。然而效率一詞的普通意義卻是明瞭的。

資本在勞力上的效力

資本影響勞力效率有二方式。它可直接影響一個工人以增加其效率，抑或間接影響一個工人以增加其效率。一個工人因消費或享用資本之故。其體力，智力與道德可變爲比從前較強；抑或他因使用一些他種資本可變爲比從前更有效率。依據此種區別，資本可分爲兩類。第一類包括的資本形式，有時稱爲「消費者的資本」(consumer's capital)。此類資本不一定可立刻消耗，而可繼續給出滿足以經過一長久時間。此類資本形式的特質在於直接影響工人并經由工人以幫助生產。

第二類所包括的資本形式，有時稱爲「生產者的資本」(producer's capital)。此類資本不一定能給出反復勞役以經過一長久時期，而其形式狀態或獨立的存在的變化，往往不能在一長久時期內給出同樣的勞役。此類資本形式所有的特質是直接推動生產而不直接影響工人的本身。

消費者的資本與生產者的資本之比較

第一類資本包含此類商品，如食物，藥品，書籍，房舍，衣服，等等。第二類資本包含工具或器械，機器，以及某種原料。雖是此兩類資本同能增加或影響勞力的效率，而它們的效力在某些方面是不同的。

作業資本(trade capital)（第二類資本可以如此稱呼）之效果通常比消費者資本更容易表現與更快的見出，它們常常能增高勞力效率至許多倍而生產奇異的結果。一種實業之成功大半繫於此類資本。

在他方面，消費者的資本之效力常時匿而不見，或須經一長時間之後始可見出。譬如教育，衛生，適宜住宅以及此類因素之效力，其表現往往須經許多年，有時甚至許多代。可是，若有時間讓牠們充分發展，牠們亦常能產出重要的變革，而植立將來時代更有效率的生產基礎。但是因爲它們的效力表現甚緩，并因它們不常能與其他勢力的效果分別出來，故其重要性往往被人輕視，而對於此種資本的運用或積聚沒有充分的儲備。

因此，一個製造家自然的并情願的投殖鉅大的財富於作業資本，以謀此種資本之積聚，而鮮有相當注意到消費者的資本之問題，爲他的工人們設備教育，良好住宅，以及此類等等。雖然，這是很可欣幸的，在這方面一種樂觀的變革是快快的來到，而對於此類資本之供給人們亦正給予增加的注意了。

資本在土地上的効力

資本增加勞力的效率有兩方式，其增加土地的效率亦同樣的有兩方式。有些資本可直接影響於土地，其他資本則間接影響於土地。當肥料施於一塊土地時，土地的效率是增加了，當機器採用時，土地的效率亦是增加了。我們將分論此兩種情形。

資本形式，如肥料，水，農具，等等，改變了土地的形態，即是改變了土地的構成或化學組織，幷用普通的話來說，使之更爲肥沃。土地，當它在地上或地下生產任何東西時，實際是連合數種因素，幷同它們協力工作，而產生完成的產物，如穀物水菓等等之類。當土地有肥料或水的滋養，或其他資本形式的經營或工作時，其產生的完成產物將有較優的品質或較大數量抑或質優而量多。這樣，土地所做的工作在價值上是增加了，而我們可說土地的效率是增加了。

在他方面，又有他種的資本財，其對於土地幷沒有前述的直接作用；例如機器，工具，等等。這些資本不直接影響於土地，卻能增加土地所給勞役的效用，故亦增加土地的效率。

一種機器普通說來，可經濟土地的使用；因爲它能使較小量的土地產生較大的出產。例如，有二十人用簡單工具每日可生產某量的出產。在同樣條件之下，若欲兩倍其出產，則必需有四十人工作，與兩倍的土地來耕種。現在設用機器來工作，或許可生產十倍於原有的產額而不須用任何格外的土地。

土地在工業上所給的主要勞役是供給生產進行所需的地面或面積，而此種地面的使用亦可以資本撙節之。換言之，資本可使地

面實質的增加，因而增加了土地的效率。

於是我們見出，兩種不同的資本增加土地的效率，有兩種不同的方式。一類資本主要增加農業土地的效率，另一類資本主要增加用於生產目的上的土地之效率。

在目前所論的兩類資本中，前一類大部在增加土地的肥沃，雖是它不能增高土地效率如另一類所增高的效率之鉅，然而它卻是人類用以戰勝「自然的慳吝性」之一極有力的武器。至土地肥沃可被增加的極限為何，恐是此後二十年尚不易預料的事。

第十六章　生產論—組織

漸增與漸減報酬

組織於營業或企業的發達有一與日俱增的作用。組織能在一極大限度內增加生產諸要素——土地勞力與資本——之效率，而不致任何直接影響牠們的性質。它可幫助這些要素的合作，而使牠們的努力所生效果變爲最大。一國的生產力大部依靠它的實業農業以及工業是否在漸增或漸減報酬定律之下活動。生產過程中之每一改良都足改易漸減報酬開始活動之點，幷因這樣改變一商品之生產故，它可增加犧牲一定數量的資料所能生產的供給額。因此，一民族的經濟福利大半視影響漸增或漸減報酬的活動之條件而定。組織是最重要的條件，若是正確的解釋時，它或許是唯一引致商品生產中此種變革的條件。

定律的說明

漸減報酬之定律可解釋如次：當每份開支連續用於一種實業（農業或工業）而在該實業的產額上只能產生小於正比例的增量時，則此實業便謂爲在漸減報酬的定律下進行。

同樣的，漸增報酬定律可解釋如下：當每份開支連續用於一種

實業而在該實業的產額上能產生大於正比例的增量時，則此實業便謂為依照漸增報酬定律。

於此，我們應注意的是，開支是以購買力的單位，卽貨幣，度量，而產額是以生產的商品度量。此處所說的增加開支是指按企業的需要分配於一種，兩種或多種生產要素上的貨幣開支。普泛說來，開支是指資本與勞力之增加，可是此說似可非難的，因為，第一，此說認為凡開支之增加一定產生此兩種要素之增加，第二，此說認為漸增與漸減報酬是土地與組織所產生，而不認為漸增與漸減報酬是整個實業所產生。

學者間意見之紛歧

漸增與漸減報酬之定律，外表看來似很簡單而容易了解，其實各學者的解釋極不一致。如上面說過的，我們所注意的是產額增加的率度與開支增加的率度之間的關係，以決定一實業是產生漸增抑漸減的報酬。此種見解已為許多學者所採，然而有些學者有時卻只注意於邊際報酬的大小。如卡蒲曼(Chapman)則謂：『所謂漸增，漸減與固定報酬云者，係指報酬或產額加於一生產要素或一組生產要素之增加。按此種邊際報酬之或升，或降，或固定不變，而謂為是漸增的，漸減的或固定的報酬。』在另一地方，卡氏又以一些殊欠通俗的術語給出此律的正確解釋如次：『設若一實業的產物價格隨該業的擴充而降低，則此實業為依漸增報酬，設若價格上升，則為依漸減報酬，又若價格不變，則為依固定報酬。』卡氏此處

係指「全體實業」，可是若我們只考察一種企業，而以價格指生產費時，此種論斷亦屬正確。

尼哥爾孫(Nicholson)之論漸減報酬律說：『用此於一塊土地（假定一畝）時，則謂在達到某點之後，其他事項不變，連續應用的或各份的勞力與資本（或生產力之單位）之報酬將繼續的減少。』尼哥爾孫所說的漸減報酬是指漸減的邊際報酬而不是如他在其他地方所指的漸減平均報酬，這是顯明的。故論漸增報酬律時他說：『漸增報酬律的正式說明是與漸減報酬律確切類似；在某種情形之下，生產力的每一增加單位給出大於比例的報酬。』因此，尼氏此處是正當指的平均報酬。

馬謝爾所給的說法是明晰而確切，他說『應用於土地耕種上的資本與勞力增加通常在生產額中只能得到小於比例的增加，除非此增加是與農業技術的改良相偕。』

皮古(Pigou)論漸減報酬亦是指邊際報酬而非平均報酬，因為他說：『當漸減報酬……統治時，用於生產一些商品上的資料數量一單位之增加所獲產物的增量愈小，則這樣應用的資料數量即愈大。』

漸增與漸減報酬之確定

從上面這些引語，這個是顯明的，雖是有些學者常有誤認為邊際效用的錯誤，他們卻是一致主張注意須集於報酬增加是否大於或小於開支增加的比例這事實。當邊際報酬開始遞減時，漸減報酬

律不一定卽開始活動。因是在下列的表內，邊際報酬遞增到第五份開支，而從第六份卽開始漸減。可是在第一項與第二項內我們見出總報酬之漸增率大於開支進至第六份時之漸增率。因此，漸減報酬是從第七份開始，而非從第六份開始，這是從第三項一瞥眼可見出的。找出報酬開始以較小於開支增加率而增加的地點，最容易的方法是考察平均報酬。在下表內我們可以見出平均報酬是從第七份開始漸減的。

開支份數	總報酬	邊際報酬	平均報酬
1 …………………	100 單位	100	100
2 …………………	220	120	110
3 …………………	355	135	118$\frac{1}{3}$
4 …………………	500	145	125
5 …………………	650	150	130
6 …………………	790	140	133$\frac{1}{3}$
7 …………………	920	130	131$\frac{3}{7}$
8 …………………	1030	110	128$\frac{3}{4}$

資本與勞力份數之度量

資本與勞力的份數可以數量計算，亦可以價値計算，後一計算法是更爲適宜，而爲一般所採用。在他方面，當資本與勞力是以數量的單位度量時，例如以五十個工人的勞力爲一份，以五十鎊的資

本爲一份，在農業與實業中漸減報酬將仍可見其活動，可是致使漸減報酬的原因之一則已被排除。在此種計算方法而獲之漸減報酬，在農業則是土地限制的直接結果，而在實業（工業）則主要是組織缺乏伸縮性之直接結果。可是資本與勞力的價格是決難永久固定的，牠們的需要之每一變動，若其供給不能相應的變動時，則其價格必致變動。而此種價格變動構成工業在短期內發生漸減報酬之一最重要原因。當資本與勞力因牠們的需要增加而價格上升時，則生產行爲中此種要素所供的總勞役之增加率必較小於牠們所需開支的增加率。因是，設若此兩要素合併爲一份時等於 £100，則份數增加，假定由 5 到 6，開支增加將由 £500 到 £600，但是此等要素所供之勞役，其增加率將大於 5:6；或許是由 5 到 $5\frac{1}{2}$。因此，實業的總產額並未增加五分之一。

由此看來，資本與勞力的份數應以它們的價值卽是貨幣，來度量，乃是緊要的事了。設若所研究的爲一長久時期，供給有充裕時間以自行與需要適應，漸減報酬之此一原因可被部分的排去，這是實在的。但是在動的狀態之下來研究實業生產要素的價格不應假定爲固定，所以此種要素必須認爲是漸減報酬原因之一。

不應單獨考察資本與勞力增加的理由

在解說漸減報酬律於農業上之適用時，有人謂漸減報酬律云者，卽資本與勞力之份數增加，而產額不以同一比例增加。此種解釋殊不正確，蓋第三種變動要素，組織，完全被略去故也。自然，這

是實在的，當組織愈進爲有效率時，漸減報酬之活動即被展緩，而惟有於改良不存在之時，此律才實際在某特定時間活動起來。可是，即使我們不研究組織內此種突然的變革，抑或假定組織差不多完全不變，即是生產方法上沒有劇烈的變革發生，而此種組織之第三要素卻恆依然存在，當資本與勞力增加時，組織亦隨同增加（自然在已達到某限度之後）。所以我們最好說當生產費用增加，產額不以同一比例增加，而不說勞力與資本之份數增加，產額不以同一比例增加。(附註)雖然，因爲組織在農業上的作用是比較的不重要，所以我們即專注意資本與勞力之增加，亦不是完全不對的。而且，若勞力係廣義的解釋，包含較高級的勞動時，此種研究的缺點亦可大大的減少。

在工業中生產依靠組織至重，故須同時計及此種要素之增加，乃最要之事。若謂資本與勞力增加而產生漸減報酬，其意乃僅指當組織固定時此實業係依照漸減報酬律。自然，這是實在的，一實業在擴張上感受組織的有限性或許是構成漸減報酬的最重要單獨原因，可是事實上一實業之擴張而不隨附以任何程度之組織增加，此乃最罕有的事。不管組織的增加如何（有時因爲它是未適當的增加），一實業在已達到某擴充點之後卻恆產生漸減的報酬。

雖然，這是最常有的事，一實業之範圍增加，其所用土地恆固定不變，即是沒有增加的開支用於其上。可是，因爲一實業之擴張，

(附註)卡蒲曼 (S. J. Chapman) 在他的政治經濟學大綱 (Outlines of Political Economy) 中正確的採用「實業的費用」一語，而不用「資本與勞力之增加」。

有時須利用較大的土地面積，所以置土地於範圍之外也是不對的。於是，我們最好的方法是用「實業之擴張」一語，而不用「資本與勞力之應用增加」。

當一實業須生產較大產額時，其規模必須增加——即此業所用的總開支加大，與生產之一種，二種，或多種要素增加。有些時候，生產單位之此種擴張是更有利益的，因每單位產額之生產費被減少故。於是我們謂此實業爲產生漸增報酬。在有些時間以後，此實業的開支之更進增加便見出較不利益，因生產費增加了故。生產費之此種增加，或由於有些生產要素的價值增高，以致用同樣開支在它們上面只能得比以前較小的效率，抑或由於不能增加一種或多種生產要素在適當的比例內所致。所以，謂組織的有限性爲致使漸減報酬的唯一原因，這是不實在的。

漸增與漸減報酬之曲線

我們在前面已見出，決定漸減報酬開始之點是平均報酬而非邊際報酬，意思是當平均報酬開始降低時，吾人即謂此實業開始產生漸減報酬。因是，邊際報酬開始遞減，此實業不一定即開始依照漸減報酬定律。設作一邊際報酬曲線，我們將不能僅憑觀察以決定實業開始產生漸減報酬之點在何處。我們此時應作的是平均報酬曲線，而此曲線之轉關點即是漸減報酬開始之點。因是，在下面的圖解上，M曲線是邊際報酬曲線，而A曲線是平均報酬曲線。邊際報酬曲線之最高點爲M'，是在開支爲四單位之時。所以我們不能說

上升至四單位開支以前，此實業係產生漸增報酬，在四單位以後則得着漸減報酬。平均報酬曲線上之最高點爲 A'，故此實業開始漸減報酬卽在此點，或在開支約爲$5\frac{1}{3}$單位之後。

在經濟原則的解明上與在經濟問題的解決上，凡應用生產曲線的地方，上升曲線通常是用以表明漸增報酬，其轉關點則用以指出漸減報酬開始的階段。不過此時須注意的是，此種曲線應視爲平均報酬曲線，而不是邊際報酬曲線，這是爲人往往忽略的。

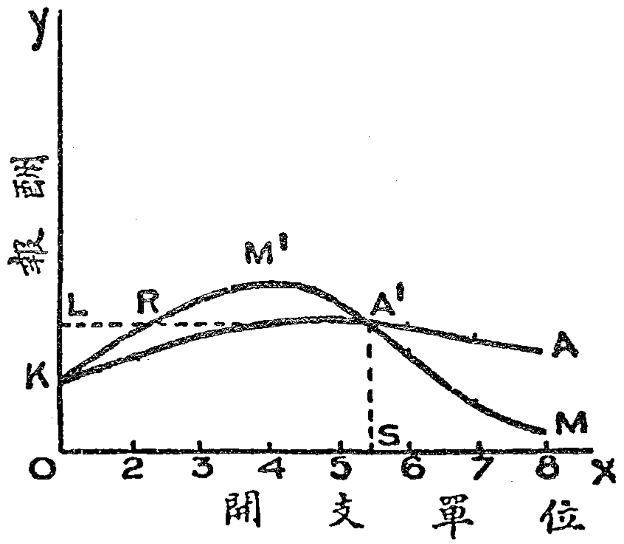


圖32

若是爲特別理由須用邊際報酬曲線時，我們應稱爲邊際漸減與邊際漸增報酬，在這種情形，K M' 部分相當於漸增邊際報酬，而 M'M 部分相當於漸減邊際報酬。

總和平均與邊際報酬諸曲線之關係

從上圖我們可見出，當所用開支爲 OS 單位時，總數報酬等於 OSA'L 面積，因平均報酬爲 A'S故。從邊際報酬曲線我們可見出在同樣開支時，總數報酬則等於 OSA'M'K 面積。是故，KRL 面積等於 RA'M' 面積。

設以 x 表明一實業的產額，以 y 表明生產費。設平均生產費曲線之方程爲 $y_1=f(x)$，y_1 是平均生產費。則總生產費曲線之方程將爲 $y_2=xf(x)$，y_2 是總生產費。

因 $xf(x)$ 是總生產費，則邊際生產費等於 $\frac{d}{dx}\{xf(x)\}$ 或 $xf'(x)+f(x)$，邊際生產費曲線之方程將爲 $y_3=xf'(x)+f(x)$，y_3 是邊際生產費。

y_1，y_2 與 y_3 之關係有如下之各方程：

$y_1x=y_2$ 與 $y_3=\frac{y_2}{y_1}f'(x)+y_1$，或 $\frac{y_1}{y_2}(y_3-y_1)=f'(x)$。

平均生產費通常在最初是遞減，在較後是遞增。可是，若組織上有一些重要變革發生時，平均生產費又可下降，但是在沒有此種變革發生的時期中，我們可說平均生產費曲線有一最低之點爲該線的轉關點，或謂此線給出 y_1 之最低價值。

是故，漸減報酬之點係定於 $f'(x)=0$ 的時候。設 x 從此方程所得之相當價值爲 k。因此，在此點的平均生產費將爲 $f(k)$。

於是，於在邊際生產費曲線上，$x=k$ 是漸減報酬之開始點，在此點的邊際生產費爲 $y_3=kf'(k)+f(k)$。

但是 k 之爲值，使 $f'(k)=0$，因此

$$y_3=f(k)。$$

於是，在漸減報酬之開始點時，平均生產費等於邊際生產費。換言之，在平均生產費曲線上之最低點係位置於邊際生產費曲線上。(見圖 33)。

同樣的，$x=k$ 將給總生產費曲線上漸減報酬之開始點。

在該點時之總生產費爲 $y_2=k.f(k)$。又是，在該點時，y_2 之增加率應等於 x 之增加率，或

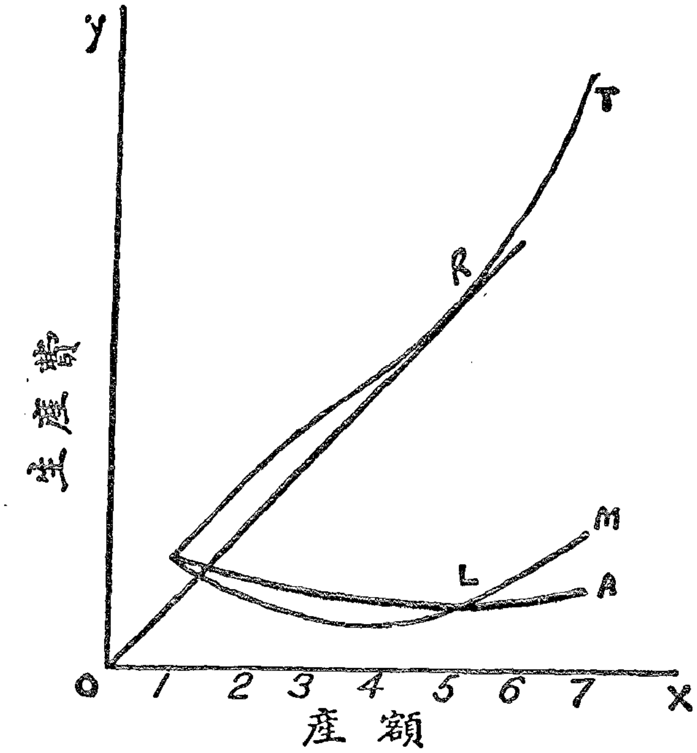


圖33

$$\frac{dy_2}{y_2}=\frac{dx}{x}\text{或}\frac{dy_2}{dx}=\frac{y_2}{x}$$

或 $$xf'(x)+f(x)=\frac{y_2}{x}=f(x)$$

或 $$f'(x)=0$$

或 $$x=k$$

因此，在 $x=k$ 時，總生產費曲線表出漸減報酬。

因爲在總生產費曲線上 $dy_2/dx=y_2/x$，並因爲 dy_2/dx 是一角度的正切，此角度係曲線 $y_2=xf(x)$ 在 $x=k$ 點時的幾何切線與 x 軸所構成，故此切線顯然的將經過發軔點。

在圖 33 中，A是平均生產費曲線，M是邊際生產費曲線，而T是總生產費曲線。L是A曲線上之最低點，位置於M曲線上。R是在L上方垂直界內之一點，在R點之切線必經過發軔點。

代用原則

代用原則係說明生產者繼續以此要素代替彼要素，或以同一要素之此種代替他種，直至此種代用見出不利益時爲止，所依據的原則。卽是，生產者將以一些資本形式來代替少數工人，或以一種勞動，如熟練的，代替另一種勞動，如不熟練的，抑或在生產諸要素作類似的變換，以企圖增加他的利潤。他減少某一要素，增加另一要素，因而得到每單位開支的增加產額，這事可表明此時被增加的要素，與此時被減少的要素在數量比較上，從前所用的數量是不充分的。可是被增加的要素之邊際效用此時反低於從前，而另一被減少的要素之邊際效用卻比以前較大。因此，在原有各邊際效用不相等時，總效用才有增大之可能。

於是，代用原則之目的，在於使生產諸要素中不同類與不同級的各數量之分配能使它們的邊際效用或生產力盡量相等，藉以增加生產的純利。

此原則的兩面——擴大原則

此種代用原則可從不同的兩角度來觀察。第一，我們可於開支總和額近於固定時來考察此原則的作用，其次我們可假定生產的

開支總額有一大量的增加。在此兩種場合，原則是一樣的，卽一部一部的以某要素或該要素之某級代替另一要素或另一級，直至諸邊際效用平均爲止。可是其眞正的差別卽存於此，在前一種分配的調換主要限於土地，勞力與資本諸要素，而在後一種則組織本身亦須經鉅大的變革。

第一面

雖然，馬謝爾及其從者用「代用原則」一語時，卻係指前一種意義。因是，代用原則頗與在前面消費章內所論的平均邊際效用原則相彷彿。此原則僅謂在一固定時期內實業所用的一定開支額中，生產各要素以及牠們的各種類之分配有某種確定的比例，依此比例始能得到最大產額。此比例之得求，在於使生產行爲中各要素的數額可有同樣的或近於同樣的邊際生產力。此原則的證驗完全與平均邊際效用原則的證驗相似，此處無重述之必要。

第二面

與此原則密切相連的則有另一原則，我稱之爲同一原則之第二面。此原則可述之如次：在一商品之生產中，生產諸要素，它們的種類與它們的品級，所選擇的數額，以能使每單位開支的產量以生產的商品計算時爲最大爲準。此原則與第一原則的區別是，在前者綜合的貨幣開支是固定，而在後者此開支亦不固定。因是，在第一原則，目的是使產額變爲最大，在第二原則，目的是使平均產額變爲最大。在兩原則中，所有的變革根本是一樣的——運用的諸要素

有改變，它們的數量關係亦有變動。

但是，在第一種，所採變革之結果，總生產費仍在一同樣水平上，而在第二種，變革通常須增加總生產費。以更簡單的話來說，在第一原則一般組織在大體上沒有變更。但在第二原則全部組織則均已變更。爲便利起見，我們可稱此第二原則爲「擴大原則」(principle of enlargement)

兩原則之同時施用

此兩種原則，代用原則與擴大原則，常常被各生產者連續的施用。因時間關係，大致首先出現的是第一原則，繼後或早或遲，則另一原則的作用遂變爲顯著。一個生產者，若他所支配的資源有限，或企業的知識有限，通常開始只有一小額的固定資本，與一相當小額的活動資本。因是，此企業乃依小規模進行，其生產組織，比較說來，是效率甚微的。可是該生產者對生產諸要素的數額作各種變易的試驗，而不變更其綜合生產費。他決定了並最後將諸生產要素固定於一確定比例，而使它們的邊際生產力相等。是時的產額達到它的最高度。代用原則便是這樣施用的。

可是當生產者的知識愈增而其財力亦同時增加時，則企業的規模便擴大起來。所用的原料大致仍無增減，但其固定資本，勞力與生產方法則經了變革——簡言之，生產組織改變了。生產的總開支是增加，可是生產額的增加比例爲尤大，即是平均產量增加了。平均產量的此種增加，或平均生產費的減少，其原因由於所用

生產諸要素之效率增加。此種增加的效率又主要由於各要素在一更有效率的組織之下工作。

此種進程繼續不已，即是企業的規模日增不已，直至再有變革卽產生漸減的平均產量，或直至因生產者所具的財力有限，致資本之再進增加變爲不可能時，此種增加才會停止。自然，因爲最後原因，以及因爲需要比較缺乏伸縮性的原因，一種企業在擴張上的最高點或許實際不能達到，然而這趨勢卻是存在的。

在此種擴大原則正活動之際，代用原則亦被不斷的施用。組織中之每一變更，必與諸生產要素間的比例變動相偕，並且每變更一次，新比例卽成立一次。

代用原則之數學解釋

設 x 爲生產商品的數額，$y_1, y_2, \cdots y_k$ 爲所用的各生產要素。設此等要素之價格分別爲 $p_1, p_2, \cdots p_k$。則代用原則說明如次：因爲 $y_1 p_1 + y_2 p_2 + \cdots + y_k \cdot p_k$，$p_1$，$p_2$，$\cdots p_k$ 之價值爲固定，則所用諸 y 的數量必在於使 x 爲最大，而 x 最大價值之得到，乃在諸 y 的邊際生產力比例於它們的價格時。可解明如下；

設　$f(Y) = x = f(y_1, y_2, \cdots y_k)$，

並設總生產費爲

$$C = y_1 p_1 + y_2 p_2 + \cdots y_k p_k$$

從方程式

$$f'_{y_1}(Y) dy_1 + f'_{y_2}(Y) dy_2 + \cdots + f'_{y_k}(Y) dy_k = 0$$

可得出 x 之最高值。

C 亦爲常數。

$$p_1dy_1+p_2dy_2+\cdots+p_kdy_k=0,$$

或

$$dy_1=-\frac{p_2}{p_1}dy_2-\frac{p_3}{p_1}dy_3\cdots-\frac{p_k}{p_1}dy_k。$$

將 dy_1 之此值代替於上述最高值方程式內則得

$$f'y_1\left\{-\frac{p_2}{p_1}dy_2-\frac{p_3}{p_1}dy_2-\cdots-\frac{p_k}{p_1}dy_k\right\}+f'y_2dy_2+\cdots$$
$$+f'y_kdy_k=0。$$(附註)

或

$$dy_2\left\{f'y_2-\frac{p_2}{p_1}f'y_1\right\}+\cdots+dy_k\left\{f'y_k-\frac{p_k}{p_1}f'y_1\right\}=0。$$

因此，每括弧內之代數式必等於零，或

$$f'y_2=p_2/p_1\cdot f'y_1\cdots\cdots\cdots\cdots f'y_k=p_k/p_1\cdot f'y_1。$$

$f'y_1,f'y_2,\cdots f'y_k$ 是 $y_1,y_2,\cdots y_k$ 諸要素之邊際生產力，此可證明各生產要素之邊際生產力比例於它們的價格。

供給之伸縮性（平均生產費曲線）

適當改訂生產諸要素之分配，而不變動生產之總開支，可達到增加產額。同樣的，生產一般開支增加亦可達到漸增報酬，至少可歷一些時間。在後一情形，開支增加一定謂，設若沒有新要素或要素之新種類加入，僅有一些要素或全體要素之開支以不同比例增加。此兩種情形包含的過程根本是相同的。兩者的目的都是爲求增加比較不充分的要素，而使所有要素的邊際效用相等起見，變更

（附註）$f'y_k$ 代替 $f'y_k(y_1,y_2,\cdots y_k)$。

生產中所用各要素的比較數額。此目的在第一場合，卽所謂代用原則，係以變更各要素數量，而不變動生產的總費完成之。在第二場合，則生產的規模是增加。

於第二場合，我們見出開支之此種增加結果可在有些時內獲得漸增的平均產額。此種過程被稱爲漸增報酬過程。當企業的規模增加而平均報酬不變時，我們謂爲固定報酬過程。此種階段在生產過程中，比較說來是不重要，因爲此類固定報酬在任何實業中都不能持久故。所用要素的數額一有變動，則平均報酬一定隨之而變，儘管是所變甚微。惟有所有要素都以同一比例而同時增加，平均報酬始可保持其原來的水準。

因爲報酬或爲漸增，或爲固定，或爲漸減，所以研究它們的變動率，將是有趣味的事。爲了此種目的，故有供給之伸縮性一語的採用。此語與在消費章中所說的需要之伸縮性一語是相類似的。

供給伸縮性之定義

供給的伸縮性是以產額的相對增加對價格的相對減少之比率來度量。因是，設若 $y=f(x)$ 是供給曲線，則供給之伸縮性是

$$
\begin{aligned}
e &= dx/x \div (-dy/y) \\
&= -y/x \cdot dx/dy \\
&= -y/x \Big/ f'(x) \\
&= f(x)/-xf'(x)
\end{aligned}
$$

此處 y 是平均生產費，x 是生產的總額。

設若報酬是漸增，e 即爲正數，因爲它表明產量愈多，平均生產費愈減。又是，在漸增報酬時，曲線 $y=f(x)$ 是一下降曲線，故 $f'(x)$ 是負數，因此 e 爲正數（見圖34）。

e 之價值愈大，平均生產費遞減即愈緩，即是，曲線的斜度亦愈平和。從 $f'(x)$ 爲數較小（其他事項不變），即是曲線較平，則 e 即較大這事實看來，此理是很顯著的。

在固定報酬時，e 是無窮數，因爲 $f'(x)$ 是等於零，而 $y=f(x)$ 曲線是與 OX 平行之一直線故（見圖35）。

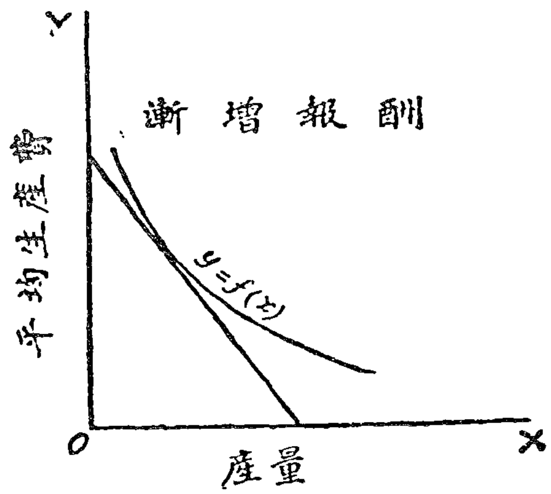


圖34

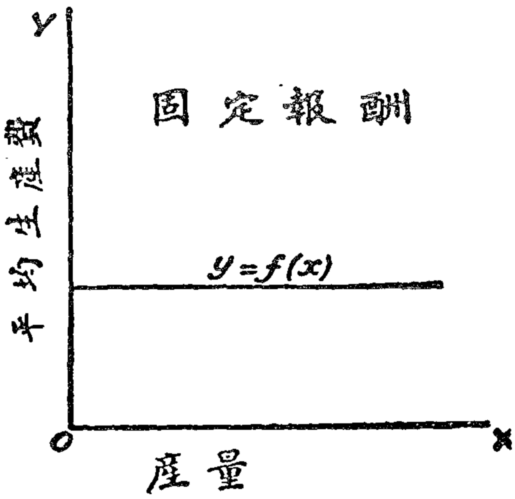


圖35

在漸減報酬時，e 爲負數，因爲它表明所生產的愈多，則平均生產費愈增。又是，在漸減報酬時，曲線 $y=f(x)$ 是一上升曲線，故 $f'(x)$ 爲正數，因此 e 爲負數（見圖36）。

e 之價值愈大，平均生產費之增加愈微，即是曲線的斜度愈平。此理從 e 愈大則 $f'(x)$ 爲數愈小一事可以見出。

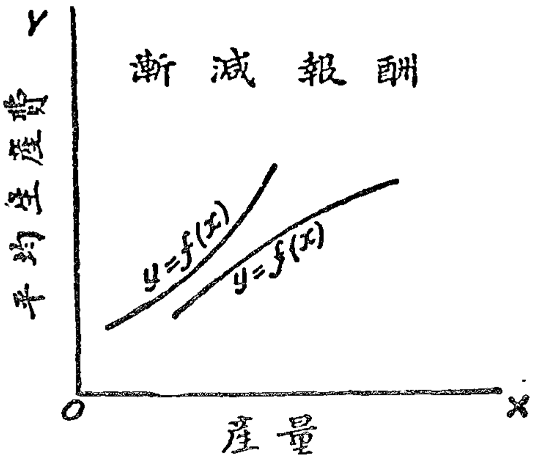


圖36

總生產費曲線

設若我們以Y表明生產總費，則 Y=F(x)之方程式代表總生產費曲線，或積分供給曲線，如有些學者所稱的。

又設E代表Y與X間之關係，即是，設E度量產額x增加率對於總生產費Y增加率之比率。於是，

$$E=dx/x\div dY/Y$$
$$=Y/x\times dx/dY$$
$$=F(x)/xF'(x)。$$

因為在漸增報酬時，總生產費之增加率低於產量之增加率，故E在漸增報酬之下必大於1。同樣的，在固定報酬之下E必等於1，而在漸減報酬之下E必小於1。

因為　　$Y=yx, F(x)=xf(x)$。

因此，　$E=xf(x)/xF'(x)$

$$=f(x)/\{f(x)+xf'(x)\}$$

當 $E>1$, $f(x)>f(x)+xf'(x)$ 或 $xf'(x)$是負數。

因此我們來到同樣的情形,即是在漸增報酬之下,$f'(x)$ 是負數。

同樣的,當E等於1時 ,$f(x)=f(x)+xf'(x)$,

或 $$f'(x)=0$$ (固定報酬)。

又當E小於1時,$f(x)<f(x)+xf'(x)$,或 $f'(x)$ 爲正數(漸減報酬)。

從方程 $$e=f(x)/-xf'(x),$$

與 $$E=f(x)/\{f(x)+xf'(x)\}$$

我們能消去x而得到e與E間之關係。如是,

$$xf'(x)=-f(x)/e,$$

從此 $$E=f(x)\Big/\left\{f(x)-\frac{f(x)}{e}\right\}$$

$$=1\Big/\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$$=\frac{e}{e-1}$$

或 $$e=\frac{E}{E-1}$$

從方程 $E=\frac{e}{e-1}$ 我又可得出漸增,固定與漸減報酬的條件,

(附註)

(附註)參看包勒(Bowley)的經濟學之數理基礎(The Mathematical Groundwork of Economics)。

在漸增報酬之下 e 爲正數，因此$\frac{e}{e-1}$是大於 1，故 E 大於 1 是漸增報酬之條件。

在固定報酬之下 e 是無窮數，因此$\frac{e}{e-1}=E=1$，而在漸減報酬之下 e 是負數，故 E 是小於 1。

第十七章　交易論

緒論

「物物交易」(barter) 係謂諸商品之交換而無任何交換媒介參列其中。當商品經這樣交換後，它們便增加，即是在新所有主手中的商品，其效用較大於它在原有主手中之時。因此，在交換完成之後，關係的諸方各有比以前較大的效用儲藏於商品之內。總效用之此種增加是一切物物交易的最終目的，因而若再往前交換將減低任何關係一方所有之總效用時，物物交易即在此點停止。

物物交易——邊際效用不平均之結果

吾人試僅研究兩個人與兩種商品的交換情形。假設某甲僅有此種商品，某乙僅有彼種商品，在其他便利情形之下，若各所有商品之邊際效用，在某交換率時，是較低於所無的商品之邊際效用，則物物交易即將發生。於是，若此商品之一單位洽與彼商品之一單位交換，則甲與乙各所有商品之最後一單位的效用必較低於另一商品第一單位之效用。因此，我們可說物物交換是關係諸商品在某交換率時所有諸邊際效用不平均之結果。交換率對於物物交易停止之點有重大關係，若此率有些微變動，即可使平衡點移動，即是

物物交換停止之點移動。我們只須一觀察交換率的變遷即是商品每交換單位邊際效用的變遷這事實，此理自然明白。簡言之，我們應研究的不是商品每絕對與固定單位的邊際效用，而是商品每交換單位的邊際效用。

物物交易的平衡點之決定

設A與B分別有X與Y兩商品，並設它們的數量爲P與Q。假設交換率是以一單位之X交換一單位之Y，而A對於X與Y兩商品之邊際效用曲線爲 ${}_aU={}_af_1(x)$與 ${}_aU={}_af_2(y)$。設B之相類曲線爲 ${}_bU={}_bf_1(x)$與 ${}_bU={}_bf_2(y)$。

茲設物物交易在A已將X之S單位與Y之S單位交換後即行停止，則A與B所有之數量將如下述：

A有（P－S）單位之X與S單位之Y，與

B有S單位之X與（Q－S）單位之Y。

設若X與Y之單位是充分的小時，則交換將繼續進行，直至X與Y至少對於一個人的邊際效用互等爲止。

假設兩邊際效用在某交換率時對A爲均等，A因而即停止於是點。則平均兩邊際效用，我們得

$$ {}_aU={}_af_1(P-S)={}_af_2(S), $$

與

$$ {}_bU={}_bf_1(S) \qquad ={}_bf_2(Q-S)+K, $$

式中K是代表X與Y對B所有邊際效用的差之任何常數。

從方程 ${}_af_1(P-S)={}_af_2(S)$可得出S之值，並將S之值代於B

之方程內，則可得出K之值。這樣，平衡點，即被求出。

用幾何的道理此問題可以解決如下述。

在圖 37 內X是商品X對A之邊際效用曲線，Y是商品Y對他的邊際效用曲線，發軔點爲P，以P至O度量Y。

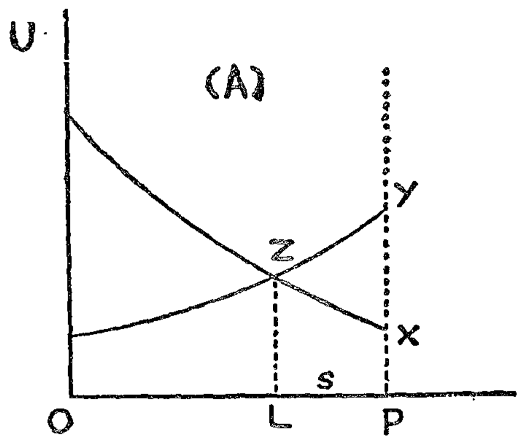


圖37

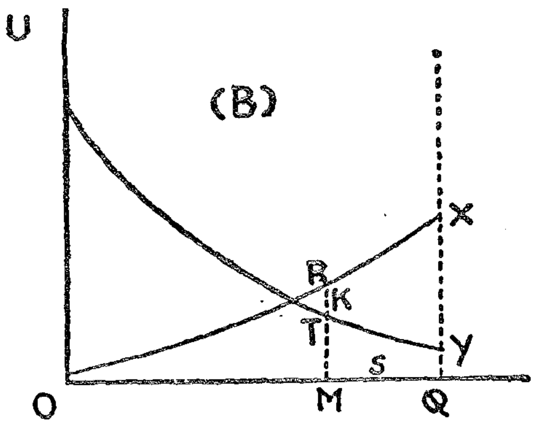


圖38

在圖 38 內，Y是商品Y對B之邊際效用曲線，X是商品X對他的邊際效用曲線，發軔點爲Q，以Q至O度量X。

設被交換的爲 PL(=S)單位，則X與Y對A之邊際效用等於ZL，故停止於是點。對於B則邊際效用不是均等——X之效用爲RM，Y之效用爲 TM。

此時 LP=MQ=S 與 RT=K=X與Y對B的邊際效用之差數。

在此交換率之上物物交易不能再往前進。此時B或許對A減低其交換率，因爲他仍然有利益故。移動交換率，最後將達到一點，過此點任何一方將不願再行交換。

交換之模稜曲線(indifference curves of Exchange)

我們現在將研究A與B兩人與X與Y兩商品。X商品係以X軸度量，而Y商品係以Y軸度量。我們假定A以Y交換X，B以X交換Y。此處不必一定假設各人只有一種商品，可是在他們的慾望關係上，各人所有一商品之數量必較多於另一商品，這是顯然的。

經過發軔點作OR曲線，使此線上任一點的橫距等於A給出同點的縱距表明的Y商品數量時所願意換入X商品之最低數量。於是，A將願意給出Y之OM量以換入X之MR量。換言之，A去掉Y之OM量所損失的總效用恰等於他占有X之MR單位所獲得的總效用。因是，他對於以Y之OM交換X之MR，或以OR曲線上之各點所給類似的數量來交換，實處於模稜兩可地位。是故OR曲線可稱爲「A之模稜曲線」（見圖39）。

同樣的，經過發軔點作OS曲線以代表B願意給出X的諸數量而換入Y之諸數量。則此曲線可稱爲「B之模稜曲線」。

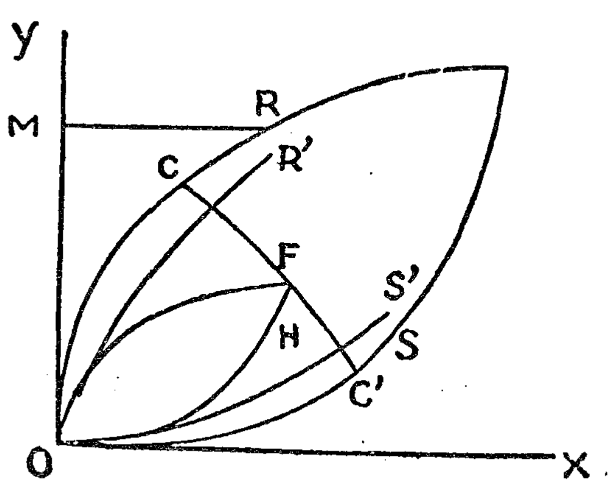


圖39

設若交換之作成，係按圖中之任一曲線，則一人獲得效用之最低量，另一人獲得效用之最高量。例如，交換是

依 OR 曲線作成時，A得的爲最低數，B得的爲最高數。B之利得以在 OR 曲線與 OS 曲線間之橫距度量之，此橫距代表B從應當給出的數量中所留存的X之量。兩曲線的交點給出A與B從交換上兩無利益（或幾於無利得）時之點。

橫稜曲線給出定量的效用

當交換依 OR 曲線作成時，A之利得幾等於零，而同樣的，當交換依 OS 曲線作成時，B之利得幾等於零。

設若我們作一曲線R'使其恆位置於 OR 之下，則此曲線表明A在交易上所持出Y之各量均比以前較小，而換入X商品之各量仍如前不變。所以顯然的A在R'曲線上所作之交換賺了一些效用。

我們又可作R'曲線使A得到同一定額的效用，不管其所交換的數額爲何。在此種曲線時，OR 與R'兩曲線在相對各點之縱距將逐漸遞減。原因是此種差數係代表A在物物交換中，與沿 OR 的交換比較時，所節省下來的Y商品量。設若所節省的效用爲一常數時則Y商品之此量按漸減邊際效用原則將是繼續的遞減。

對B我們可同樣的作一S'曲線，若交換係沿此曲線作成時，B將得一固定量的效用。

若賺得的效用爲一定量u時，則依R'所作之交換將給A以u效用，依S'所作之交換將給B以u效用。可照樣作許多曲線爲R''，R'''等等，與爲 S''，S''' 等等，它們都各表明對於A與B之利得爲常數。

我們須記着的要點是此類曲線是不能互相平行的。R'曲線將不會經過發軔點，因爲若是這樣，則一極微量之Y與X交換將不能產生所說的效用量。因此，若A欲從交換賺得一定量的效用，則交換之開始必從兩軸間之某定點。同樣的，S'曲線亦不能經過發軔點。

交換率或一物之價値以他物表明

設若Y之OM單位與X之MR單位交換，則交換率爲OM:MR，或一單位之Y等於MR/MO單位之X。因此，Y之價格或價値以X表明時爲MR/OM。

設若O與R以一直線連綴之，其斜度卽爲交換率。稱ROX角爲θ，$OM/MR=\tan\theta$。

因此X之價格以Y表明之時爲$\tan\theta$。設$y=f_1(x)$爲OR曲線之方程，則此曲線上任一點之交換率將爲$f'_1(x)$；或X之價格爲$f'_1(x)$。

設$y=f_2(x)$是OS曲線之方程，則在該線上任一點之交換率將爲$f'_2(x)$，或X之價格爲$f'_2(x)$。

設若以OM單位之Y與MR單位之X交換，抑或交換之發生是在OR曲線上，而以x_1單位之X與$f_1(x_1)$單位之Y交換，則X之價格爲$f'_1(x_1)$，此價格是A與B依以交換商品之價格。

因此A爲換入x_1單位之X商品，一共付出$x_1f'_1(x_1)$價格於B，B將在$f'_2(x_1)$價格售出（設若交換作成是在OS曲線上）X

商品，或他將售出 x_1 單位之X，以換入 $x_1f'_2(x_1)$ 之Y。

是故 $x_1f'_1(x_1)-x_1f'_2(x_1)$ 之餘數爲B之利得。或B賺得 $x_1\{f'_1(x_1)-f_2(x_1)\}$ 單位之Y。

設若交換之作成在OR曲線，B將企圖在他利得爲最高時之點停止，或在Y的 $x_1\{f'_1(x_1)-f'_2(x_1)\}$ 單位之效用爲最高時停止。

議價力不平等之交換

設將表明A無利可獲之OR曲線以方程 ${}_af(x,y)=0$ 代表之，與同樣的，OS曲線以方程 ${}_bf(x,y)=0$ 表明之。又設同類的諸曲線如R' 以z各值的同類諸方程 ${}_af(x,y)=z$ 代表之，并同樣的，設 ${}_bf(x,y)=z$ 代表B的相對諸曲線。z此時表明從交換而生的固定效用利得。

設若交易發生於OR曲線上，A將在交易上毫無利得，B所出售X商品的數量以能使他獲到最大利得爲準。我們試假設此數量爲 x_1。則

$${}_af(x_1,y)=0$$

與
$${}_bf(x_1,y)=\text{最大數量},$$

或
$$\frac{d}{dx_1}{}_bf(x_1,y)=0。$$

從此等方程可決定 x_1 之值。

變動價格之最大效用曲線即還價曲線

設若交換之作成係在一固定交換率時，則A與B雙方願意停

止之點，或願意交換的數量必以能使他們的效用利得變爲最大爲準。

試以A論，若固定之交換率爲 $y=px$ 的斜度，或 y/x 交換比例爲p，A所交換的數量將等於 $y=px$ 線與OR曲線的相交點所給之數，但是他沒有賺得效用。設若他持Y與X交換的數量決於 $y=px$ 與R'之相交點，他便賺得一些效用。但是他的最高利得，是他持Y與X交換的數量決於 $y=px$ 與屬於模稜曲線如OR與R'一類的曲線之接觸點時，因爲此一曲線與OR'相去最遠，故能給出效用之最大利得。

於是我們設 y_1 是與 x_1 交換。$y=px$ 之正切給出 $y_1=px_1$ 的條件。曲線 ${}_af(x,y)=z$ 在 (x_1,y_1) 點之正切，其方程爲 $(x-x_1)\ {}_af_{x_1}+(y-y_1)\ {}_af_{y_1}=0$，式中 ${}_af_{x_1}$ 代表關於x時 ${}_af\ (x,y)$ 之第一引伸函數中以 x_1 代x所得之値，而 ${}_af_{y_1}$ 乃代表求關於y之微分時所得同類之値。

從此兩方程我們得出一種關係

$$p=\frac{{}_af_{x_1}}{-{}_af_{y_1}}$$

故若p變動時，A將選擇另一點，藉使他的效用利得仍爲最大。因是，此種最高效用點之位置可從 $y=px$ 與 $p=-{}_af_x/{}_af_y$ 兩方程將p消去以求得之。所以該位置的方程是，

$$\frac{y}{x}=\frac{-{}_af_x}{{}_af_y}$$

或 $x\cdot{}_af_x+y\cdot{}_af_y=0$（卽圖中之OF曲線）。此曲線稱爲A之「還

價曲線」(offer curve)。同樣的，B之還價曲線爲 $x\cdot{}_bf_x+y\cdot{}_bf_y=0$（卽圖中之OH曲線）。

訂約曲線

設若A與B是同等有力的講價人，則交換率與交換量將決於兩還價曲線之相交點。可是，若他們的講價力不相同，則交換率將離開上述之點，而交換量亦將與前不同。設使A是兩造中之較弱者，則X之價格將比其他較高，卽是價格線將與X軸形成較大角度。若此時交易固定於某價格或交換比率，則兩造將盡力在此比率以謀增大他們的利得。換言之，平衡在價格線上之確定點將是A的模稜曲線之一與B的模稜曲線之一的相遇點。於是，若交換率是固定，卽是 $y/x=p$，平衡點之確定將在於A與B的模稜曲線之斜度相等之時，或在平衡點

$$(-p)={}_af_x/{}_af_y={}_bf_x/{}_bf_y$$

之時。當P爲變數時此種平衡點之位置決於下述方程

$${}_af_x\cdot{}_bf_y-{}_bf_x\cdot{}_af_y=0。$$

此曲線稱爲「訂約曲線」(contract curve)。在圖 39 中CC′是訂約曲線。此線經過兩講價曲線之交點，幷終止於與OR及OS兩曲線相接之點，以表明有效交換。它不能超過OR，因A屆時將因交換而損失效用故，它不能超過下面的OS，因B屆時將因交換而損失效用故。

我們沿CC′線從C向C′移，則A從交換獲得的效用逐漸增加，

因交換率漸變爲有利於他故。當我們從C'而向C移時，情形正與此相反。

交易在CC'線上究竟定於何點，則視兩造講價的比較能力而定，而講價能力又視每造測量他造的需要之精確程度而定。當沒有一造能佔他造的便宜時，則交易固定於兩還價曲線之相交點。此點不一定能給A與B兩造以均等利得，因爲此種點之位置依靠他們原有X與Y之數量，幷依靠此兩種商品對A與B兩者之效用曲線。

經由媒介之交易

引論——當物物交換讓位於媒介交易時，各商品的價值係以此種媒介表明之。若此種媒介爲許多人們所握有時，則商品之交換變成更爲容易。爲立論便利起見，我們卽假定貨幣爲交易媒介，故一商品之價值以此種媒介表明時，則稱爲該商品之價格。

當一商品是這樣與貨幣交換，則謂該商品爲賣。買賣作成所依的原則與物物交換作成所依的原則類似。一商品之買賣結果有利於關係之兩方，或至限度不能使一方蒙損失，若是買賣之作成是自由的，與關係的兩方行爲是合理的。於是，設若一人以某數量的貨幣而買入一種商品，此商品在彼時對於他的效用必大於他付出貨幣所損失的效用。

貨幣的效用決定於貨幣所能交換的其他諸商品之效用。故其他事項不變，若其他諸商品在某時間的效用增高，則貨幣的效用亦必增高。同樣的，若在某時期內貨幣能買其他有用商品之種數愈

多，則貨幣效用的漸減率將亦愈緩。因是，設若一個人只有一種商品而貨幣爲另一人所有時，除非貨幣本身在其他方面有用，交換將不能發生。

是故，當商品被買與賣時，此種交易行爲繫於其他諸商品的效用與此特定商品的效用之比較。貨幣不過是用來度量諸效用的一種量尺。

一商品之買與賣

我們假定A有一商品，B有貨幣，并以X的單位表明該商品於OX，以該商品之價格表明於OY。我們試首先考察此兩人沒有其他可得此種商品的來源之情形，并又假定此商品的數量不能在充分的長時間內用再生產來增加。

設A有此商品的OM量，并設他的曲線，可稱爲商品之供給曲

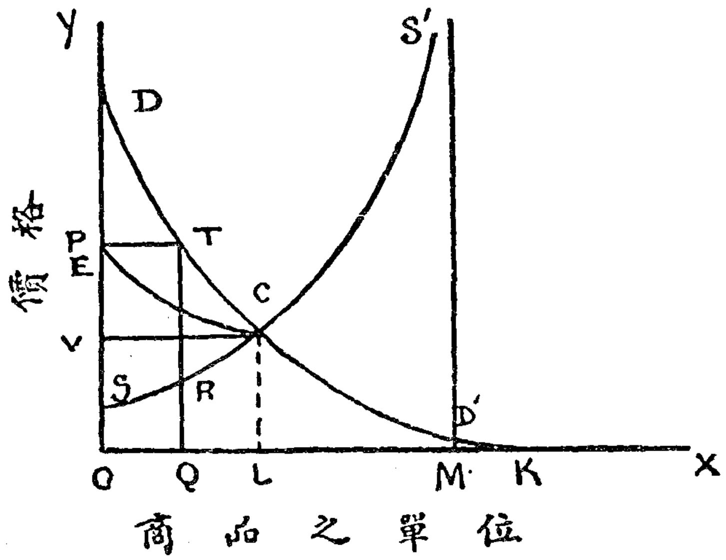


圖40

線，為 SS'。設 DD'為 B 的曲線。可稱為商品之需要曲線(見圖40)。設若此商品為 A 所需要，他將不願將 OM 全量賣掉，可是若價格愈增高，他願意出賣的數量將愈大。因是 SS' 是一上升曲線，并是對經 M 所作縱距線之漸近線，表明若價格是無限高時，A 亦將願意出賣他的全部商品。

設若 A 願作成交易的最低價格以 p_1 表明之，則 SS' 之方程將為 $y={}_af(x)$，故當 $x=0$，則 $y=p_1$ 當 $x=OM$，則 $y=\infty$。因此，曲線之方程式為

$$y=K+p_1+\frac{K\cdot OM}{x-OM}$$

在 $x=0$ 與 $x=OM$ 兩界限之間，而 K 是一適當的常數。K 可稱為曲線上升率之指數。

設若 B 有 OD 單位之貨幣，(註一)并設他不能賒買或從其他地方借錢，他將願意付 OD 價格以買一小量之商品，假使這商品在那時是十分需要的。因是，曲線將經過 OY 上之 D 點。(註二)價格愈低，B 願買的數量愈大，故 DD'曲線是一下降曲線。

此曲線的下降究能若干遠，則視商品效用的性質而定。設若 DD' 曲線遇 OX 於 K，它便表明 OK 單位之商品將被買入，當價格等於零時，因而 OK 單位便足够使商品的邊際效用化為烏有。

供給與需要曲線及平均效用利得曲線

(註一) 為更精確計，B 所有之貨幣額可以圖中 OD×1 單位商品代表之。

(註二) 為便利起見，假定第一單位記於發軔點上。

設供給與需要曲線SS'及DD'相遇於C點。設若交易作成之價格爲 OP 則賣出的商品數量必是 OQ。A收入之貨幣數額爲 OP×OQ 但是OQ的商品量於A只能值 SOQR 之貨幣。

是故A賺得的效用可以 PSRT 數量之貨幣度量之。設若此種價格能索得，OQ 數量已賣出，賣主，卽A，將力求多賣以博剩餘效用。可是此時他欲使B再買，便不能不減低價格。此種買賣過程繼續前進，直至價格最後降至 OV 水平線爲止，因爲價格若再降低將致減縮A既得的利益故。

設若最初所索的價格爲OD，并設若價格逐漸低落以至於OV，則A收入的貨幣總額可以 DOLC 面積代表之。A去掉 OL 量所損失的效用可以 SOLC 之貨幣數額代表之。所以他賺得的效用可以 DSC 量之貨幣度量之。

這個是以貨幣表明時A所能獲之最高效用利得。B 在此種交換則無利可獲，意思是他認爲以此等價值買入 OL 數量不過是不吃虧而已。

設若A是一個極明幹的講價者，他將能這樣以使他的貨幣利益達最高度。可是假若情形相反，而B能在每階段得到最優講價時，則A的利益歸於消滅，B能得到由貨幣 DOLC－SOLC＝DSC 數額所度量的最高利得。

設若他們兩者都是同樣成功的講價者，則此種最高利得將爲他們所幾於平均的分享，故每一極小單位商品之出售，其價格必是位置於DD'與SS'相對縱距之中間地位。

在圖中 EC 是給A與B同等效用利得之曲線。（附註）我們可稱此一曲線爲「平均效用利得曲線」(equiutility-gain curve)。

每一造從買賣能獲之最高效用利得是

$$DSC = -\int_{x=0}^{x=OL} {}_{a}f(x)dx + \int_{x=0}^{x=OL} {}_{b}f(x)dx$$

或 $$\int \{{}_{b}f(x)dx - {}_{a}f(x)dx\}$$

在 OL 所給的界限之間，x 之值爲方程 ${}_{a}f(x) = {}_{b}f(x)$。

若全數量是依一個價格買入時，則賺得的效用是較小。例如，當 OQ 數量(謂爲 q)是在 OP 價格買入時，A所賺得的效用等於

$$\text{面積}PSRT = q \cdot {}_{b}f(q) - \int_{x=0}^{x=q} {}_{a}f(x)dx \text{ 以貨幣計。}$$

此種利得稱爲「賣者贏餘」(seller's surplus)，若商品是認爲可再生產或觀察的時期甚長時，它便稱爲「生產者贏餘」(producer's surplus)。

同樣的，B所賺得的效用等於

$$\text{面積 } DPT = \int_{x=0}^{x=q} {}_{b}f(x)dx - q \cdot {}_{b}f(q) \text{ 以貨幣計。}$$

此種利得稱爲「消費者贏餘」(consumer's surplus)。此種贏餘之總和是等於當賣量爲 OQ (或 q)而價格不固定時每方所能得之最高利得。

商品之買賣亦可依位置於 DC 與 SC 兩曲線間之其他曲線，如

（附註）兩者的效用利得之貨幣度量必相等，這是須記着的。

EC 之類，作成。一切在 EC 上面的曲線，將代表較低利得屬於 B，較高利得屬於 A，而在 EC 下面之一切曲線則將代表較高利得屬於 B，較低利得屬於 A。

市場中之買與賣

我們前面所論是限於一商品之一買者與一賣者。我們現在將進而論市場中之買與賣。

前面所論諸場合與一商品在市場上的買與賣當中的差別是：在後者同一商品有無數的買者與無數的賣者，在買者與賣者之間有或多或少的自由競爭，并全體看來諸買者與諸賣者之講價力都大致是平均的。因是，價格將確定於需要與供給兩曲線之相交點，如圖40所示。

曲線之解明

此時 DD'與 SS' 係代表所論商品之市場需要與市場供給，卽是代表一切買者之總和需要與一切賣者之總和供給。

在圖 41 中，需要曲線上之 P' 點表明若價格爲 P'M' 時，市場的總和需要將爲 OM'。若價格爲 C'M'時，則供給曲線表明市場出現之總和供給將爲 OM'。設若價格爲 PM，則市場之總和需要與總和供給兩者均將等於 OM。P 點可稱爲平衡點。在經常狀況之下，價格將固定於 PM，售賣量爲 OM。

設若賣者索一較高的價格，則總和需要將小於總和供給，因是

賣者當中的競爭又將使價格向下低落。同樣的，若價格落於 PM之下時，買者當中的競爭又將使其恢復到以前水平線。

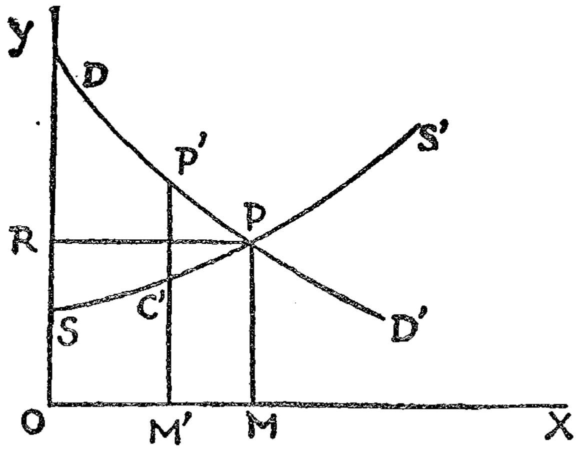


圖41

邊際買者在價格爲 PM 時從買入商品所獲的效用是甚微，但在邊際以上的諸買者則賺得一些效用贏餘或消費者贏餘。總和消費者贏餘以面積 DRP 表明之，總和生產者贏餘以面積 RSP 表明之。

因爲在經常狀況之下，價格將停止於 PM 水平線上，售賣量將停止於 OM（在所擇定的時間單位內），故交換曲線退縮到P'點。（附註）

曲線之短期與長期解釋

需要與供給曲線兩者，特別是後者，若所關的時期長短不同時，其解釋亦微有不同。短期供給曲線表明短期中在各種價格時所出現之供給，而長期曲線則指明長期中在各種價格時所出現之總供給。

因是，若 SS' 爲短期曲線，則它將表明當價格爲 C'M' 時，在短

（附註）若價格是擺動時，交換曲線將居於 DP 與 SP 兩曲線之間。

期內的供給將上升爲 OM'。若它是一長期曲線，則將表出若價格爲 C'M' 時，供給在該長期內將增加至OM'。

若時期甚短，則供給將限於所論市場業已儲存的商品。但若時期甚長，則供給之總額將是從其他如市場輸入與在同樣的或進步的生產方式之下該商品有新生產後所有之總和。

所謂短期與長期云者殊不含數學的確切長短，即是它們乃相對名詞。短期可爲一天，一星期，一月，或一較長的時期。同樣的，長期可爲一星期，一月，一年，十年，或一更長的時期。一期適當的長度視商品之性質與所指市場的範圍而定。例如一種商品，如菜蔬，冰，或魚之類，則兩星期即可視爲充分的長期，而其他商品，如羊毛，絲，或棉布之類，則以一年爲充分長期。又是，在非物質的商品，如世界的總和勞動力，即三十年或四十年亦不算太長的時期。

使用商品的交換與買賣商品的交換之重要差別

若A所有之某商品，其用在於供他的直接消費，而非主要在於出賣時，則供給曲線 SS' 即變爲該商品對A之邊際效用曲線。於是，OS 將是該商品對A的邊際效用之貨幣度量，故每單位之價格爲 OS 時，他將只願意賣出一單位之商品以換入貨幣。生產費的觀念幷未在此加入，雖是間接的此觀念包含於邊際效用之衡量中，因爲生產費具有平均邊際效用之趨勢故。可是，這是顯明的，SS' 曲線不能表明生產不同數額時該商品所有之生產費，而是表明賣出不同數額時該商品所有之各邊際效用。因是，諸價格，即是 SS' 曲

線在各點的諸縱距，表明該商品以貨幣計算的諸邊際效用，或該商品的諸邊際效用對其他一般商品的邊際效用之諸比率。

可是，若該商品之某量目的在於出賣，而非主要在供直接消費時，則情形便與前異。此時，該商品雖有甚高的交換價值而其邊際（使用）效用則甚低。供給價格此時依靠交換價值，卽該商品之生產費，（附註）而不依靠對邊際效用之衡量。雖是生產費與該商品之邊際效用有關係，而此例與前例之主要區別則是：前者之曲線是依據賣掉該商品各量時所有失去效用之總和，而後者之供給曲線則依據生產該商品各量時所有犧牲效用之總和。

個人之短期曲線與供給曲線之形態

一短期供給曲線表明生產變動量之商品，當生產諸要素僅有一短的期限可改動以適應需要變遷時，所有之生產費。所以這是顯然的，一短期供給曲線係假定在此短期內生產中祇能發生這些變動。是故在每一實例中「短期」二字之適當解釋，則可謂短期曲線者，其所依據的假設是：企業或實業的一般組織幾是仍舊不變，生產的其他諸要素則以適當方式而或增或減，抑或增加的供給，若需要時，可以較高買價從外國輸入——常常包含甚高的運費。例如，在短期內增加供給之生產只能由於業已存在的組織之盡量利用，或由於採用可以馬上見效的小小改良，或由於運用同額資本於較長時期，而超過資本最有利的運用線；或由運用舊的已廢棄的資

（附註）上述的供給曲線係表明包含生產者報酬的成本，不僅是生產的開支。

本；或由使同樣工人工作較長的時間，這將是勞力不利益的使用，或由以較高工資雇用新的與部分熟練的工人或完全熟練的工人；或由在生產中採行類似此等的改良。從以上的研究這個是顯然的，當生產一較大數額而沒有充分時間以讓供給方面的諸經濟力量適合它們自己於需要變遷時，其生產費必然增加。

於是我們此時所謂供給曲線，將不是表明在不同諸價格時提供售賣的不同諸數量之曲線，而是表明在不同諸產額時商品所有生產費之曲線。此點將幫助吾人維持經濟學者們在教科書本內所給的供給曲線之同樣解釋，蓋經濟學者們認定供給曲線之縱距代表生產費故也。上面各段的論辯亦適用於此曲線。

因此，這是顯明的，短期供給曲線必是一上升曲線。可是當生產業已降低而固定於某水平線以適應該產品之需要時，需要的輕微低減之足以變革實業的組織，正與需要的輕微增加之足以發生變革一樣。若需要低減，則產額之一部通常必須以利潤較低的交換比率而輸出外國，同額的資本與勞力將仍須繼續雇用，因為專門化的資本不能充分流動，與勞工之忽然解僱常招致組織家的麻煩，而工資亦不容易降低，更因為實業的一般組織不能迅速變革以適應變動情形。此類原因，與上述的各原因相彷彿，當需要減少時，均足增加商品的生產費（每單位的）。

於是，一短期曲線應正當的是一表明產額增加以及減少時增加生產費之曲線。換言之，生產費曲線最初必是下降，而稍後必為上升。

在圖 42 中，SS' 是一此種個人的供給曲線。生產固定於 OM，因爲此時每單位之生產費是最低故。

設若產額尙不敷用而需多生產時，則平均生產費增高，因此較好的辦法是改變組織，固定於一較低的短期曲線上。當生產規模業已增加過於某限度時，組織的再進改革便將見出沒有較優效果，此時生產或卽不得不固定於短期供給曲線上最低點上面之一點。

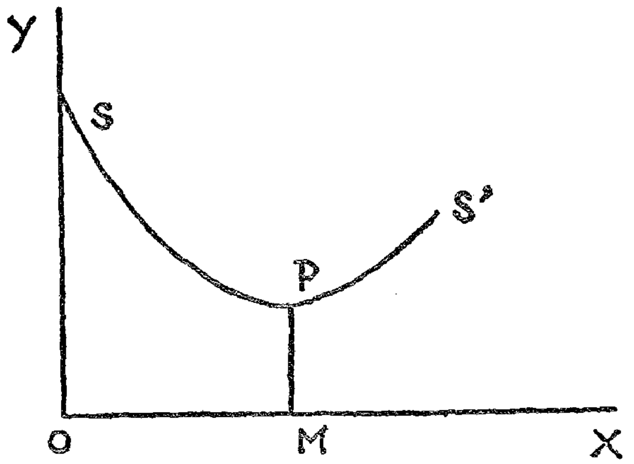


圖42

因爲一個生產者僅貢獻總生產的一甚小百分數於供給，故我們可以說他的產量之或增或減初無影響於價格。因此在短期內價格可認爲是固定，所以對他的需要曲線是一與 x 軸平行之線。

一個人能增加其營業規模的範圍是有限的。一個生產者能增加其生產的程度繫於他個人的能力，他對於資本的支配，以及他不能控制或控制有限的其他諸原因。

個人之長期曲線與供給曲線之形態

我們業已說過，一長期曲線代表供給價格或生產商品的不同數額所有之生產費，假設有充分時間以讓供給方面發生適宜的變

革時。因是，研究長期曲線必需包含衡量時間的長度。一長期曲線必容許實業的規模上與一般組織上能作必需的變革，所以它可表明關係商品當實業是相當大規模組織時所有生產費中大致發生的諸變動。

大規模的生產，若時間容許組織上採行必需的變革，可以減低生產費（每單位的）。大規模生產的利益與經濟主要依賴當生產以大規模進行時所能維持的更有效率的組織。是故，在長期內，設其他事項不變，即是在經常狀況之下，每商品之生產費，若生產額增多，通常是低減的。可是組織的有些成素，如集中的管理，是不能充分伸縮的，故此等成素於一實業的擴張表出限制的勢力，結果產額超過某限度後之每次增加，生產費亦將隨而增加。

是故，在某點之後即長期供給曲線亦不免於上升。此曲線的確切形態，以及該線上最低生產費點之位置，將依靠生產者的營業能力，他對資本的支配力，以及部分或完全超出他的控制外面對生產有限制力量的其他諸原因。

因此我們可以說長期供給曲線最終是下降的，過後是上升的。此曲線表明當生產已固定於最好的水平線上時，生產之增加（縱然在長期內）必致生產費之增加，與生產之減少在長期內亦必致生產費之減少。所以致此的原因，蓋因生產減少，組織的潛伏能力（廣義的解釋）將不能充分利用使然。

個人的短期與長期供給曲線之關係

由此看來，短期與長期曲線間之區別是：前者認定一般組織是固定而其他諸要素可變動（在某種組織下可能的變動爲限），而後者則並認實業的規模與組織亦有改變。

當實業具有固定組織或通常的規模時，短期供給曲線所表出的形態將如圖 42 曲線 SS' 所示。若組織（係廣義的組織）一有變遷，則曲線的位置卽將變動，因是我們可以圖 43 內所有同類的諸曲線如 S_1S_1'，$S_2S'_2$，$S_3S'_3$ 等等來表明各種組織的諸短期供給曲線。設曲線 SS' 經過此等曲線之諸最低點。則 SS' 便是長期曲線。在開始，生產固定於曲線 S_1S_1' 上的最低點。當組織變更與實業的規模擴大後，生產便固定於曲線 S_2S_2' 上的最低點。簡單的說，當實業的規模愈增，生產所固定的曲線亦愈從較高之點開始。當生產是固定於曲線 $S_1S'_1$ 上時，生產額爲 OM；若因其他原故，在短期內須生產更多產額，譬如 OM_2，則供給價格或生產費將上升至 P_1M_2，而在長期內生產此同樣產額，其生產費則爲 P_2M_2，生產固定於曲

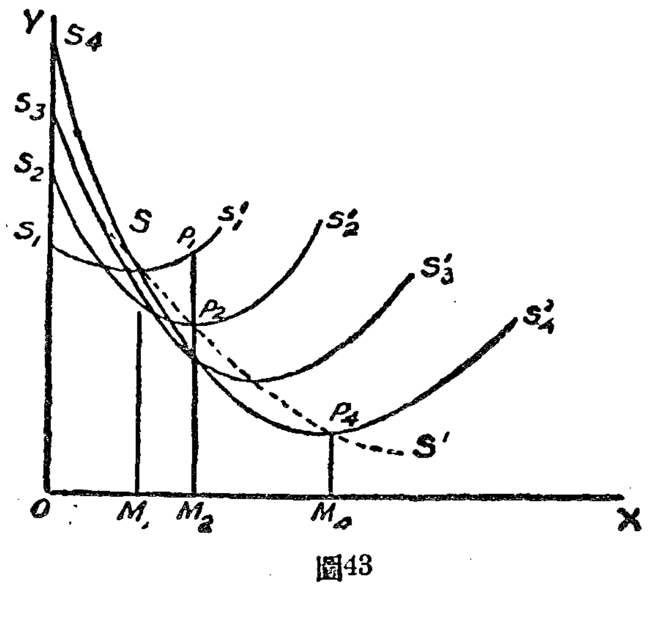


圖43

線 $S_2S'_2$ 上。

設若諸短期供給曲線爲 $y=f_1(x), y=f_2(x), y=f_3(x)$ 等等，則長期曲線所經過之諸點將是 $f'_1(x)=0, f'_2(x)=0, f'_3(x)=0$ 等等。

在任一時間，各生產者均力求只達到各曲線之最低點。當生產是更進的增加，他將變動其組織並選擇一較低的短期供給曲線，直至變動組織無利可獲爲止。

從長期曲線的運動變遷到短期曲線的運動

一生產者在開始他的生產時所採的組織大都是多少任意選定的，所以他的出發點是在長期供給曲線上之某點。嗣後憑他自己的能力見出擴大其規模的利益，並因爲知道其他人們是怎樣在做，他遂沿着長期曲線前進，直至達到了最低點。在此時他便比較沿着短期曲線上移與沿着長期曲線上移的利害，並在衡量結果上決定他的選擇。若沿長期曲線進行所增加之生產費大於沿短期曲線相對進行所增加之生產費，他便停止沿長期曲線前進。所以當長期平均生產費之增加率等於短期平均生產費之增加率時，沿長期曲線的運動卽將停止。（註一）

長期供給曲線是從諸短期供給曲線之諸最低點作成。設若沿長期曲線的運動停止於一點，則曲線在該點之斜度必較大於短期曲線在同一點之斜度，此乃至顯明的事。

在此點既已達到之後，生產遂沿着短期曲線前進，此種運動的

極限決定於生產一增加單位之邊際生產費或生產費恰等於售賣價格之時。故增加的需要在此期中係以沿短期曲線的增加生產應付之。可是需要之鉅增又可使生產再沿着長期曲線進行。

於是，在圖 43A 內，SS' 是長期供給曲線，而 $S_nS'_n$ 是諸短期供給曲線之一。在 OM 單位已生產之後，生產卽沿 $S_nS'_n$ 進行，直至 ON 單位生產爲止。自此之後生產又再沿 SS' 進行。（註二）在事實上此種情形是不十分容易發生的。

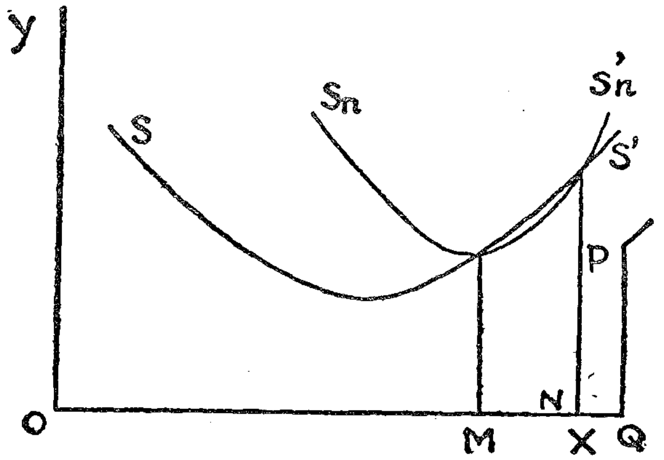


圖43A

（註一）在理論上，當短期曲線上之最低點已達到後，沿長期曲線進行比沿短期曲線進行應當更有利益；但是在實行上情形卻是兩樣。設若組織之或增或減能爲數極微以適合需要之每一細微變動時，我們將常見出短期曲線附近最低點之斜度是較大於長期曲線在同點之斜度。可是組織的變更須在需要產額之鉅大增加時始能實現，或更確切的說，組織的變更須在需要大增時始有利益。因此長期曲線大概有一短段可位於短期曲線上面。可是，當有許多生產者在市場時，一般需要之增加在比較上常大於一個生產者的需要之增加（除非他個人是生產總供給額之大部分），因此當需要增加時，他可充分增大他的生產額，而使他立於長期曲線上，並此種增加之達到往往由於縮減其他效率較低生產者之產額。我們可說他可增加他的產額從 OM 到 OQ。

（註二）商品之生產有固定於短期曲線上的最低點之勢，因爲增加的需要往往不能使此生產者再行擴大他的生產，卻能引起新的生產者。但是資本與企業是不完全可流動的，而生產往往不得不超過短期曲線上之最低點。

短期市場供給曲線

一短期市場供給曲線表明所有市場內一切生產者之短期生產狀況。在圖44內有兩生產者的兩圖解。在每一圖 $S_nS'_n$ 是短期平均生產費曲線。在穩定情形之下，兩生產者均將選擇最適宜的短期曲線。$S_nS'_n$ 假定爲此種最適宜的曲線，我們在第一圖設生產額爲OM單位，在第二圖爲ON單位。因此總和產量將爲 $OM+ON=OM'$，圖一內所劃之MM'等於ON。設若祇有兩生產者時，則圖二內之生產者是邊際生產者，因他的產額低於圖一內的生產者之產額故。此生產者，或任何在邊際的生產者所獲的利潤僅足使他成爲或繼續作一生產者。

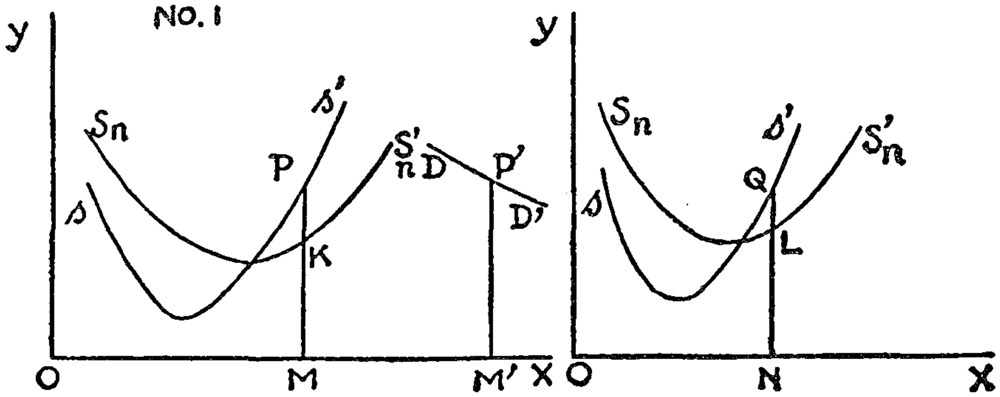


圖44

設若價格P'M'大於此兩生產者的邊際生產費，則他們卽將增加其生產，直至價格等於邊際生產費爲止。因此邊際生產費必等於價格。從此可論斷所有諸生產者之邊際生產費是相等。於是我們可定出下列諸點。在經常狀況之下，所有生產者供給之總和必等於

該商品在售賣價格時所有市場的需要。每生產者選擇最適宜於他的短期供給曲線，並在短期內每人均沿所選的曲線進行，直至生產一增加單位恰等於或恰在價格之上爲止。在長期中每人所選長期曲線上之點，其邊際（長期的）生產費必恰等於需要價格。所有生產者的邊際生產費是相等，並等於售賣價格。末了，最劣生產者之平均生產費是幾等於需要價格。（註一）

價格繫於邊際生產者所滿足的利潤

一商品之價格雖繫於邊際生產費，此生產費卻又繫於需要曲線與邊際生產者所願接受的利潤。若邊際生產者認爲他所獲的總利潤不是他所做工作之公道報酬時，他將放棄關係商品之生產。於是該商品之供給便低於在前所定價格時之需要，因是現有之諸生產者便趁勢增加他們的生產，直至邊際生產費再等於需要價格時爲止。新邊際生產費是較高於舊邊際生產費，因而價格亦較高於以前。是故，邊際生產費雖仍等於需要價格，而邊際生產費本身則繫於邊際生產者之找錢能力。一生活程度較低的邊際生產者將減低所有生產者之邊際生產費，因而又減低售賣價格。（註二）於是，價格最後乃繫於邊際生產者所認爲滿足的利潤。

可是設邊際生產者之所得低於他在一些其他實業或職業所能

（註一）在理論上邊際生產者之平均生產費必等於需要價格（本人勞力的報酬與利潤包括於生產費內），因爲邊際生產者當其只生產一單位時沒有生產者的剩餘故。然而在事實上，因生產諸要素的流動性不完全，邊際生產者亦有一些剩餘可獲。是故他的平均生產費是在需要價格之上。在上述圖中，圖二不是理想的邊際生產者。

得之利潤時，他將一定或遲或早離開此實業，設若生產者之流動性在充分限度內是未受窒礙的。

流動性或許受一些屬於工作原因的限制，或其資本的流動性是不充分，以致他不能改變他的工作。但是，假設流動性是未受限制的，則邊際生產者將在所有諸實業中以同級的工作獲到同率的報酬。

因此，在長時期內，一切邊際利潤在上述的解釋上是趨於相等，因而一實業內的價格繫於該業中的邊際生產費，此邊際生產費又繫於其他諸實業的情形。

需要增加對短期價格與生產者及消費者的剩餘之影響

在圖45中，設 ss'是某市場中的短期邊際生產費曲線，設 DD' 是相對的需要曲線。價格將恰在最後一單位生產費之上，或與之相等，如上面所說的。因此，假設生產量為 OM，售賣價格

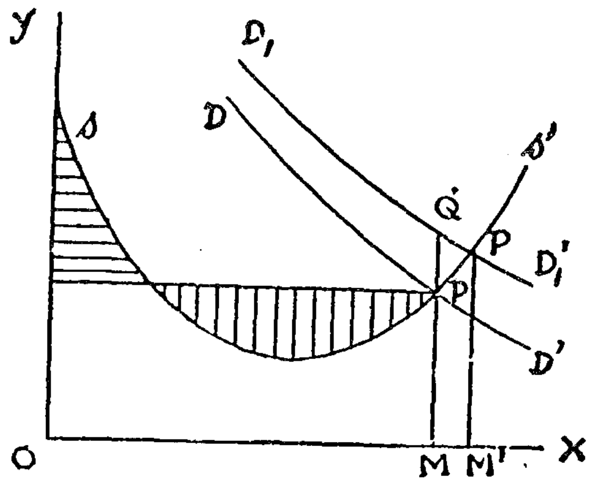


圖45

（註二）當一生活程度較低的生產者闖入實業中，他將變動平衡點，減少各生產者的生產額，降低邊際生產費與價格，並減縮所有生產者的贏利。但是此種變動或遲或早又將反應到其他實業——直接是與該實業間生產者有甚大流動性的諸實業，而間接與或不完全的則是生產者與資本不能自由加入的諸實業。

爲 PM,則 PM 卽是邊際單位之生產費。生產者之總利得或剩餘將是兩虛線面積之差數。

玆再假設需要增加，新需要曲線所佔位置爲 $D_1D'_1$，割 ss'曲線於較高點。在所指短期內價格將固定於 P'M',生產的總量將爲 OM'。可是在供給增加之前,供給曲線將是垂直的經過 M，而價格將固定於 OM。

從圖可以見出,生產者的利潤與剩餘是增加,因爲此時生產的每單位是以較高價格售出,而 OM 諸單位之生產費仍同於前故。

消費者的剩餘亦大致可增加;可是不一定常能增加。若 $D_1D'_1$ 與 DD' 平行,則消費者之剩餘將常增。理由是價格之增加不如商品對消費者的效用增加之劇。如是,從購買的增加數量中亦可獲得些剩餘。

設若供給曲線是絕對無伸縮性，而新需要曲線與舊需要曲線平行時,則消費者的剩餘卽毫無增加可言。但是在任何固定時間,供給曲線是決難完全不伸縮的，故消費者的剩餘恆有可以增加之勢。

供給的伸縮性愈大,其他事項不變,則消費者的剩餘增加亦愈大，因爲此時生產增加產量所含的例外勞力與犧牲，以貨幣表明時,將較小於從消費該商品所獲之增加滿足以貨幣表明時之數。

需要曲線的伸縮性愈大,則消費者的剩餘之增加將愈小,而在相反方面，需要曲線的伸縮性愈低，則消費者的剩餘之增加將愈大。

長期市場供給曲線

我們業已見出，長期供給曲線是一下降曲線，可是若實業規模之擴大超過某點時，該曲線則又開始上升。我們又已見出，長期供給曲線是短期供給曲線當生產規模變動時所有最低點之位置。因是，一生產者若有充分時間與對資本的充分支配，將選擇最有利益的組織，並在此組織下面生產最有利益的數額。換言之，他將固定於最低的短期曲線上，並卽固定他的生產於該線上之最低點。當需要變遷，他在短期內將沿着短期供給曲線移動。在長期內他將沿着長期供給曲線移動，卽是，他將改變生產的規模，採取新組織，並選擇一不同的短期供給曲線。可是欲求此種變革實現，則需要須表出一持久的信號，否則供給將祇能沿着短期供給曲線進行。

因是，在經常狀況之下，各生產者固定其產量於短期供給曲線上之最低點，其效率最大的生產者則最低限前進至長期供給曲線上之最低點。（註一）當各產量是這樣的爲所有生產者固定時，若生產總和低於該商品在售賣價格時所有的需要，則生產將繼續增加，此時便不固定於長期曲線上之最低點，蓋需要若大，則營業的規模便不得不再事增加，雖然平均生產費亦因此而增。設若生產者爲若干人，競爭是無限制時，則每生產者生產之量將以邊際生產費等於需要價格爲止。是故有些時候，（註二）短期曲線上之最低點卻不

（註一）設若尚有其他生產者，他將前進超過此最低點，否則，他將停止於此點。

（註二）參看前數頁之附註。

能不放棄，而在短期內需要之每次增加可推進生產超過此平衡點——當需要降低，則向左推進，當需要增加，則向右推進。

長期生產曲線

我們現在將研究第二種長期曲線，此曲線我們可稱為「長期生產曲線」(long-period production curves)，而不謂為長期供給曲線。此類曲線將表明生產在長時期內所有之趨勢，而非供給因需要變動所有之趨勢（增或減）。供給二字是與需要二字相關連，而長期生產所表現的趨勢卻不直接依靠需要。

每一商品之生產費在長期內繼續低減，有許多原因在。雖是生產費之此種低減是實業組織改良之最後結果，但它們卻不直接為需要變遷所使然。

在實業進步之一固定階段中，其長期供給曲線在最初是下降，過後是上升。當總需要是鉅大時，一生產者將前進至長期供給曲線上之最低點，若需要增加，則生產將繼續沿此曲線上升。因是，縱在長期內生產費是增加的。可是尚有其他原因，如支配資本力增加，補助實業的組織改良，機器的發明，以及實業整個之一般組織進步，均可逐漸影響每商品之生產費，而使之漸次落於較低水平。此類原因不直接與需要相關——它們的變化是或多或少與需要的變化獨立。例如，一種機器發明可見採於生產之某類，雖然對該產物之需要仍然未變。因此之故，供給曲線的一般趨勢是一下降曲線，雖然供給曲線時時表出一暫時的上升，而其趨勢卻恆為下降。

在長期中生產的此種一般趨勢可稱爲長期生產曲線。

長期生產曲線的確切形態繫於該關係實業的性質，以及與該業有關的其他諸實業之性質，并繫於其他種種原因。可是我們可斷言此類曲線將決不永遠以凹圓向 x 軸，因爲若是如此，該線將被一最終點割斷，而表出實業達到某規模時其生產費等於零，此乃最不合理之事，這個是此類曲線的通則。但是此曲線可以凹圓經過一些距離，而以凸圓經過其餘距離。可是若所考察者是一極長期內最普通的趨勢時，則此曲線大致將表出通體是一平緩的凸圓，因爲此曲線的斜度與形態係依靠長期活動極緩的諸根本原因故。

設若我們假設一種實業能無限的擴張，在產額之每次增加即縮減一些生產費，則生產曲線將永遠是一向 X 軸之凸圓曲線，以 X 軸爲其漸近線。可是此種假設是難徵信的。生產費，以貨幣計算時，不能縮減到零點，除非貨幣變爲非常的稀貴。但是因爲交易媒介是日增不已的，其他商品之產量也是日增不已的，故供給曲線不能漸近於 X 軸，而在任何時期內，將表出一漸近於 $y=c$ 線之趨勢，c 是代表時期的一適宜常數。因爲此曲線必然隨交易媒介相對數量之每一變遷與其他商品相對數量之每一變動而變易其形態，故供給曲線可表明一種漸近於各時期的所有各線之趨勢。

長期需要曲線

我們前面所論的需要曲線實在通應稱爲短期需要曲線，即是此需要曲線代表在一定時間與在諸不同價格時所需要商品的諸

量。當此種需要曲線與相對短期供給曲線合併使用時，我們可決定短期價格。可是需要鮮有在一長時期內而不變動的。它時時依一常數以爲起伏。人們的嗜好，人們的所得，商品的用途，其他諸商品的諸價格與諸用途，以及其他此類諸因素，等等之變動均足改易需要曲線的位置。它或居於舊曲線之上，或降於其下，更或可與之平行或不平行。故在任何時候利用需要曲線以決定一商品之價格，此曲線恆假定是一短期需要曲線。

在一長期內許多商品的需要表出一增加趨勢，因爲在同一價格時需要是逐漸較前增多的。因是，若採用一長期供給曲線以決定價格時，其需要曲線亦應是一長期曲線，即是它不應表明當價格變動時需要在短期內所經的變化，而應表明需要在長期內所經的變化。

設若我們採用圖 43 中的長期供給曲線，並設時期爲T，即是當有T時間以讓組織發生必需變化時，若以該曲線表明此時期內各產量之生產費，則相對的長期需要曲線將是代表T時期內之時間單位。

可是若所用之長期生產曲線包含諸不同產量之諸不同時期，則需要曲線之形成似乎爲不同諸時期的諸曲線之合併線。換言之，對於逐漸較低的價格，我們應給以逐漸較長的時期。

供給的變化——漸增報酬是過渡時期的特點

我們業已見出一生產者最低度須前進至長期供給曲線上之最

低點。設若沒有任何生產者超過此點時，則市場上將只有一個成功的生產者——此生產者即能供給市場全部需要的人。設若需要上升微在此點之上時，此生產者便將增加產量，在短期內他將沿短期曲線前進，而在長期內他將變更他的短期曲線，沿着長期供給曲線進行。若其他事項不變，他的生產費將上升，而其他效率較低的諸生產者至是將開始生產同樣的商品。

因此，在經常狀況之下，每一實業都在漸減報酬定律之下活動，因爲常有一個或數個生產者前進至長期供給曲線上之最低點故。此理對於長期與短期都是同樣眞實的。當需要增高，而需生產較多產量時，則生產費增加，幷隨之而價格增加。惟有當實業受新發明或新組織形式的惠賜時，我們纔能得着漸增報酬。可是此種變革通常與需要無關，它們在一切實業中降臨是無規律的，卻是漸進的，幷且不構成某特種實業的特質。

一種發明一經見採於一種實業，幷不久變爲一切實業之公共財產時，至少有一生產者之生產又將再固定於新短期供給曲線上之最低點。設若最大生產者能够這樣固定他的生產以供應全部需要時，他將仍是市場中之唯一生產者。可是若需要增大，他卽不得不超過此最低點，而其他生產者又將開始進入此生產範圍。

於是，我們可說惟有在過渡時期內實業始能在漸增報酬定律之下活動，當供給在此律之下增加，此增加通常與需要無關，其致使增加的原因通常爲需要變遷以外之其他諸因素。(附註)

可是在有些場合，漸增報酬亦可不由於此種發明的。例如，若

有一效率的生產者從前因資本缺乏，或其他生產要素缺乏之故未能達到長期供給曲線上之最低點，當他一旦能增加此種不足的要素時，他的生產費卽將降低，而此實業便開始生產漸增報酬。不過此種場合甚爲稀少，在現代實業世界中資本市場之組織極爲完備，故資本已變成十分流動，生產者對資本的支配已有鉅大的增加。

雖然，長期生產曲線，可在漸增報酬律之下活動，如我們在上面所見的，可是我們此時不能說因產量增加，故生產費減少；而在相反方面，我們應當說因生產費減少，故產量增加。

生產者在自由競爭制度下之自由

在市場競爭無限制之下，總和供給繫於所有生產者的行爲，而價格之決定卻不由於一個生產者的行爲。因是，一個生產者沒有如獨占者能增加利潤至最高度之機會。可是在有限的意義上他亦能增加其利潤至最高度。獨占者之增高其純所得，不僅由於控制他的產量，而且由於控制市場價格。自然，這是實在的，價格將隨產量變動而變，他不能永久影響價格而不顧及他的產量。但事實仍是這樣：他的行爲不僅可操縱供給與因而生產費，且可影響價格。

在無限制競爭之下，一生產者的地位則異於是。除非他佔有一部分獨占者的地位，能使其產量占市場總產量之最大部分，他將不能在短期內影響市場價格至任何顯著程度。因此他的出發點是假

（附註）我們在此不是謂一實業中的一切工廠或一切生產單位通是在漸減報酬律之下活動。我們的意思只在指出設資本是充分的流動並能以相當數額增加時，則除當所指市場的總和需要是比較甚小外，一切工廠將在此律之下活動。

設價格爲固定的，而他增加其利潤所有的唯一自由是操縱他自己產額。

在同樣的大體組織下，他將或增或減他的產量，以求得最高利潤爲止。換言之，他將繼續增加他的產量，直至生產一增加單位之費等於價格爲止。卽是在短期內，他將沿短期供給曲線前進，迄至邊際生產費等於價格時始行停止。設若他見出組織的些微變更可使他減低生產費時，他將在相當時候變更他的短期供給曲線，因爲這樣做去，他能增加他的利潤故。短期供給曲線一有變動，則邊際生產費亦隨之而變動，故邊際生產費等於價格時的產量亦將變動。

設他在一定組織時所有的短期供給曲線爲 $y=f(x)$（平均生產費曲線），價格爲P，他將繼續增加產量直至他的利潤達最高時爲止。設若這樣生產的數額爲x，則利潤將是 $x\{p-f(x)\}$，此爲最大數當

$$-xf'(x)+p-f(x)=0,$$

卽是當 $$p=f(x)+xf'(x)。$$

但是 $f(x)+xf'(x)$ 是 $xf(x)$ 之微分，換言之，卽是邊際生產費。因此條件是價格應等於邊際生產費。

從此方程求出的x值卽爲生產的數額。

若有n數的生產者，其短期供給曲線是：$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，……$y=f_n(x)$，需要曲線是 $y=\phi(x)$，而他們生產的數額分別爲 $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$，則

$$p=\phi(m_1+m_2+\cdots+m_n)=f_1(m_1)+m_1f'_1(m_1)$$

$$=f_2(m_2)+m_2f'_2(m_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=f_n(m_n)+m_nf'_n(m_n)$$

這些是 $n+1$ 的諸獨立方程，從此等方程可決定價格 p 與 $m_1,m_2,\cdots m_n$ 之諸量。

價格不恆等於邊際生產費

我們已經見出當需要是充分大時，各生產者將達到長期供給曲線上之最低點。設若需要與各生產者的生產力比較是十分大，則每一生產者均將見出有超過此最低點之必要。可是，若需要是比較的低，則超過此最低點的將只有一個生產者或至少是最有效率的生產者。

若總需要不十分大，則效率較差的諸生產者將見出在尚未達到此最低點之前即有時不得不停止。因爲若他們果前進至於該點，則總和生產便將大大超出總需要。因是，縱然生產較少則平均生產費增大，他們亦不能不生產較少數額。（附註）所以在此種需要狀況之下，有些工廠是在漸增報酬律之下活動。此時它們的邊際生產費是較低於它們的平均生產費。因是產物所售之價格是在邊際生產費之上。

於是，惟有當工廠在漸減報酬律之下活動時，邊際生產費始等於價格。可是，若可獲得漸增報酬時，則價格或產量之決定乃繫於

（附註）參看本章末之附註。

此一產量在以通行價格售賣時須能給生產者的充分報酬以爲衡。此種事實可以數理解釋之如次。

最大利潤的條件前已指出爲 $p=f(x)+xf'(x)$。當一工廠在漸增報酬律之下活動時，$f'(x)$是一負數，故從上述方程 p 變爲較小於 $f(x)$，卽是較低於平均生產費。因此，此條件不能給出 $x\{p-f(x)\}$ 之最高値，只給出它的最低値。又是，當諸工廠在漸增報酬律之下活動時，價格（或 p ）不能視爲與產量（或 x ）獨立。因是，ϕ 是 x 之一函數，故最大利潤的條件不能這樣決定。

但是此種場合是最少的，惟有當總需要是比較的低，與各生產者效率的相差或他們供給曲線的相差是甚大時，此種場合始能發生。（附註）在此時效率較低諸生產者將力求操縱其供給，期於最低度能按平均生產費以售出他們的產量——此處所說的平均生產費係包含生產者本人應得的所有報酬。

若需要增加，效率較低諸生產者亦將越過他們供給曲線上之最低點，或換言之，他們亦將踏進漸減報酬的領域。繼他們而起的其他生產者加進了此生產範圍，初先開始在漸增報酬律之下生產較小數量，繼後因需要增加，則又進入漸減報酬領域。因是，在任何特定時間，在漸增報酬律之下活動的只是一有限數的生產者，在他

（附註）設若生產效率差別的程度甚微，如理論上所假定的，則將沒有一生產者（當支配資本的力甚大時）能在漸增報酬律之下進行他們的工廠。因是在理論上邊際生產費必等於價格。因是在理論上設有一生產者的工廠是在漸減報酬律之下進行，則將沒有其他工廠能在漸增報酬律之下進行。當有許多生產者相互競爭時，此理誠然是眞實的。

們的場合，價格不等於邊際生產費，而等於平均生產費。設若一生產者的贏利缺乏，他卽將放棄生產此商品，而跨進其他商品之生產，以希望他的勢力獲較高報酬。於是他便這樣平均了一切實業中的效率報酬。

第十八章　交易論—獨占(Monopoly)

緒論

獨占之精義在於控制全部供給。凡個人或一羣人所占天然的或其他的地位，能使他們供給市場的全部需要或其最大部分的需要，因而使他們能以其行爲影響價格時，此等人們卽稱爲有獨占權。若全部產量是這樣操於一羣人之手時，則是完全獨占，若全供給之一部是這樣被控制時，則稱爲部分獨占。

當供給是這樣被控制時，產量所達的程度將不如在自由競爭下所達的程度那樣遠，因此價格是較高於競爭價格。

若獨占者的權力是完全，他將固定其產量於他的純所得爲最大時之點，除非有其他關係阻止他這樣做。恐怕潛伏競爭之興起，恐怕法律來縮減他的權利，恐怕消費者之合作，以及其他此類因素，在在均足以限制他的自由。在此種狀況之下，一遠見的與機警的獨占者將設法使在繼續爲或希望繼續爲一具有獨占權的生產者所有諸年度中他的總和純利潤變爲最高。或更嚴格的說，他將使一切年度的總和純利潤之現值變爲最高。

可是，若獨占是完全而無他因素可牽掣它之時，則一獨占化的商品生產者將在每單位時間內使其純利潤變爲最高。

最高獨占收入及其與需要伸縮性之關係

由操縱產量而獲得的最高純利潤，馬謝爾稱為（最高）獨占收入。若短期供給曲線是固定時，獨占者在短期內將沿短期曲線前進，而固定其產量於獨占收入為最高時之點。

設 $y=f(x)$ 是短期供給曲線，而 $y=\phi(x)$ 是相對的需要曲線，則獨占者將生產m的數額，即是

$$\{\phi(m)-f(m)\}\times m \text{是最大，}$$

或

$$m\times\{\phi'(m)-f'(m)\}+\phi(m)-f(m)=0$$

或

$$\phi(m)+m\phi'(m)=f(m)+m\cdot f'(m)\text{。}$$

若以文字表明之時，則意思是邊際生產費將等於我們可稱為的邊際需要價格。換言之，生產將繼續增進，直至總生產費之增加率等於總所得之增加率為止。

一獨占者與一非獨占商品的生產者當中的區別是；後者所有的價格是固定的，而前者則能以生產之多寡致價格之減增。獨占者能以減少產量來提高需要價格。

當有競爭之時，則價格是固定，或 $y=\phi(x)$ 是一平行於X軸之線；因此在上述方程中 $\phi'(m)$ 將等於零，而價格 $\phi(m)$ 此時將等於邊際生產費。

獨占利潤是 $m\times\{\phi(m)-f(m)\}$

此時

$$m=\frac{\phi(m)-f(m)}{f'(m)-\phi'(m)}$$

或獨占利潤是

$$\frac{\{\phi(m)-f(m)\}^2}{f'(m)-\phi'(m)}$$

$\phi'(m)$ 是負數，$\phi'(m)$ 之值愈大，則獨占收入愈小，即是當需

要曲線的斜度在售賣價格點的附近愈平緩，則獨占收入愈小。

又是，從方程 $\phi(m)=f(m)-m.\phi'(m)+m.f'(m)$ 我們可見出需要曲線的斜度愈平緩，則 $\phi'(m)$ 愈小，因此價格 $\phi(m)$ 亦愈小。因是我們可論斷當需要曲線的斜度是較緩時，價格亦較低。

長期與短期供給曲線決定獨占產量

我們業已見出獨占產量與價格在短期內之決定方式。當組織一經固定時，產量將沿短期供給曲線進行以增大其獨占收入。凡暫時的需要之每一突然變動，抑或甚至預見的需要變動，均將使產量沿短期供給曲線左右移動，以期使獨占收入達到最高點。

可是已經選定的組織與這樣固定的實業規模或因此而需變遷。當需要曲線被獨占者正確的判斷并被見出是充分穩定時，他將在許多可能的短期供給曲線中選出那可產較大獨占收入的曲線。卽使需要是擺動不定，他亦將依據他的計算於各需要曲線中占一中間地位的需要曲線——卽將選擇一平均曲線。短期曲線之選擇是以下述方式行之。

在圖 46 中，假設 DD' 是一已知需要曲線，而 $S_1S'_1$ 是任意選擇的短期供給曲線。產量此時將固定於 OM，因OM給出最大收入 PC×OM 故。

但是我們從圖解可見出 $S_1S'_1$ 不是OM產量的最上曲線，因爲我們已超過了最低點故。因是若需要更大生產規模時，則此短期曲線必變動，而固定於新曲線 $S_2S'_2$ 上。此時同樣的產量可給較

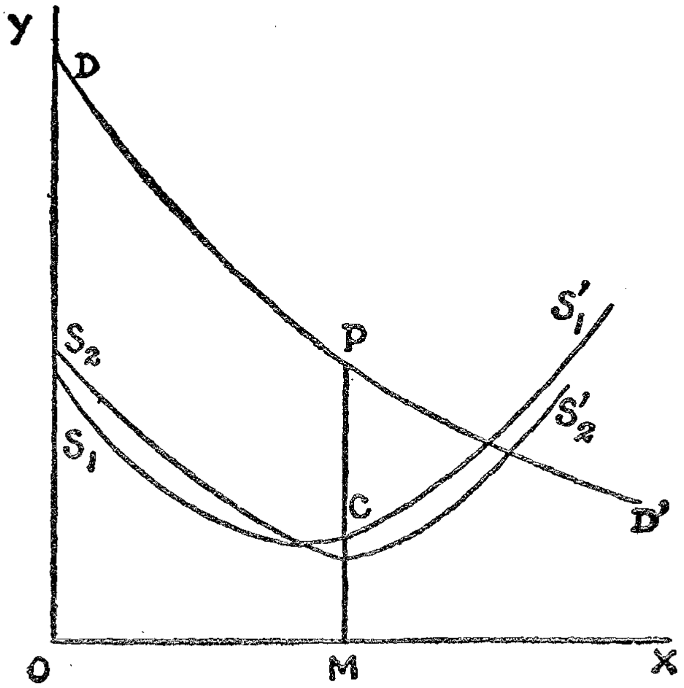


圖 46

高的收入。

又是若在 $S_2S'_2$ 上，增加產量而超過最低點，可得更大的收入時，則此事可指明我們有再行變更短期供給曲線之需要。因此，若短期供給曲線上之最低點能給最大收入於獨占者時，則變革卽將停止。

於是，對於獨占的場合，生產是固定於短期供給曲線上之最低點。因是，若長期供給曲線爲已知，我們便能決定獨占產量。

在圖 47 中，設ＳＳ'爲長期供給曲線，ＤＤ'爲已知的平均需要曲線。產量將固定於ＯＭ，因它給最大收入 PC×OM 故。在長期供給曲線上選擇之點爲Ｃ；它是相對短期供給曲線上之最低點。此時若需要有一突然的或暫時的變遷，將使供給沿短期供給曲線

前進，其最低點為C。可是若有充分時間，需要的永久變動將強迫產量沿長期供給曲線進行，直至它仍然固定於短期供給曲線之最低點為止。因是，若是長期供給曲線與相對需要曲線為已知時，獨占產量即能決定。

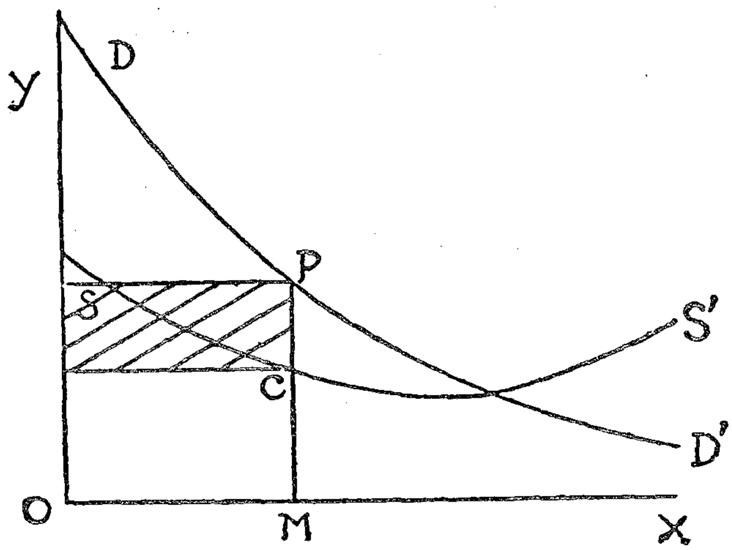


圖 47

可是，當需要與供給相比是十分大，致生產須超過長期供給曲線上之最低點時，此種求出獨占產量與獨占價格的方法或不可靠。蓋，如前面已指出的，在此等場合，有時更有利益的辦法是使生產沿短期曲線而不沿長期曲線進行。

於是我們可說當需要與獨占供給相比是十分大時，若只有長期供給曲線是已知，我們將不常能決定產量或價格；而需要再知道諸短期供給曲線。（附註）

（附註）在某方面我們更好是稱長期曲線為諸短期供給曲線之封套(envelope)而不視為短期曲線上的最低點之位置。此同樣方法又可適用於決定獨占產量之短期與長期曲線。可是我所給長期曲線的解釋頗可幫助對交易理論的一切問題之了解與分析。

企業聯合

現在我們將研究的不是獨占一種商品生產的單獨個人，也不是聯合行使獨占權的一羣人，而是自行組成此種或彼種聯合會的諸不同生產者（各生產者在獨立的工廠下進行他的生產）。合同的條款拘束此聯合會的，或祇在固定賣價，或分配各生產者的產額，抑或規定各生產者的市場。我們將認定所有關係生產者是合同之各造或聯和會的會員。

此種場合的根本宗旨是限制同樣商品的諸生產者間之競爭。此種限制或許是部分的，例如當市場是共通的時候，抑或它是完全的，例如諸生產者劃有不同的市場時。因是，諸買者之還價是互相競爭的，而諸生產者則不如是，所以諸買者與諸賣者的講價力呈現一極大差異。生產者的利潤是上升的，而消費者則不得不付出較高價格，而在消費者的剩餘中蒙受一同時的低落。我們將分論聯和或合同的諸形式。

價格之簡單規定

若祇固定價格則問題卽或多或少變爲買方與賣方在自由競爭下之問題。可是若生產者的人數不加限制，則生產總額增加往往有超過在該價格時所有需要之可能，而結果致使價格須再行低減。因此之故，此種固定價格辦法往往結果爲合同的破壞。若價格的固定是十分謹愼而在得需要與供給之平衡時，則商品實際亦將以競爭價格售賣，合同的目的將無法履行。因是，商品的供給亦須有一

種限制，因爲若此種生產者爲若干人，則價格即不能離開供給而固定故。

當價格是固定時，各生產者將增加產量如前，直至短期邊際生產費等於價格爲止。他不能不選擇最適宜的短期曲線，其選擇方法是逐步變更其短期曲線，直至更進變更的利益見出較小於生產沿原有短期曲線進行的利益爲止。抑或藉助於諸短期供給曲線之封套，則此適宜曲線便可容易的求出。

產額之分配

爲救濟上述辦法的缺點起見，對於聯合的會員固定其產額的分攤，而價格則讓需要影響供給的勢力來決定。此種辦法的目的在於提高價格，故注意於使總產量在適當限度以內。每生產者產額分攤的大小是依據衡量每生產工廠的大小，與其從前產量以及此類諸因素之結果。價格繫於供給總量，而利潤總和則繫於所採的分配計畫，各工廠的生產效率可以不一樣。

各生產者盡力以增大其利潤。此處的價格不如上述情形的固定，亦不如自由競爭時之固定。可是應生產的數額是固定的，因而經由此數額的價格亦是固定的。此時生產者的自由在於選擇最適宜的組織以生產一定產量，即是他須選用最有利的短期供給曲線。當平均生產費是最低時，他的利潤即是最高——產量與價格是固定的。因此他將固定他的生產於短期供給曲線上之最低點。設若他所選擇的曲線不能履行此條件時，他將改選其他的曲線。簡單的

說，此點決定於長期供給曲線。(附註)

設若分攤額爲產物之m單位，長期供給曲線爲 $y=f(x)$，平均生產費是 $f(m)$，與所選的短期供給曲線，其最低點是$\{m,f(m)\}$。設價格爲P，利潤爲$\{p-f(m)\}\cdot m$.

若有n數之生產者組成聯和會，他們的分攤額爲$m_1,m_2,\cdots m_n$，并設他們的長期曲線爲 $y=f_1(x),y=f_2(x),\cdots\cdots y=f_n(x)$，而需要曲線爲$y=\phi(x)$，於是價格爲$p=\phi(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n)$，諸生產者之利潤爲$\{\phi(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n)-f_1(m_1)\}m_1$，等等。總利潤爲

$$(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots m_n)\{\phi(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots m_n)\}$$
$$-m_1f_1(m_1)-\cdots\cdots-m_n\cdot f_n(m_n)。$$

市場之規定

有些時候，又以劃分各生產者的市場來免除競爭。此種辦法無異同時化爲若干獨占者，各有一行使獨占權的有限面積。在此種場合，諸生產者在他們自己的市場內享有完全獨占，此種情形與單一獨占者的唯一區別是在前者的需要較小於在後者。此時的價格，生

(附註)假設每生產者所有之分攤額是不甚大，尙不足超過長期供給曲線上之最低點。這是永遠實在的，長期供給曲線此處應指諸短期供給曲線之封套。若短期供給曲線是彼此緊密的蟬聯，則短期供給曲線上之最低點與此諸曲線的封套當中的差異是被減少。可是在許多實業中，或許在一般組織上不能作極小的變革，或點滴的增加生產規模，是故諸短期供給曲線上之諸最低點不是密切相聯的。因此最低點之位置不是一連續曲線。在此種場合，若諸最低點相距太遠，一獨占者將見出最有利的是固定其產量於短期供給曲線上的最低點上面之一點，縱然在長期供給曲線上的最低點尙未經過之前。

產的數量與所採的組織，均由生產者自己決定，自然須顧慮到他的市場需要之性質。在此種場合價格與產量之決定方式，可與它們在單一獨占者時所決定的情形一樣。

從消費者的觀察點看來，有此種若干的獨占者好些呢，抑僅有單一獨占者好些呢，則視諸多情形而定。此事將依靠需要的性質與力量，各市場間總需要之分配，諸生產者之組織或他們長期供給的曲線，運輸的費用，以及最優生產者之地位。

設若總需要與最優生產者的產量相比是十分大時，若其他事項不變，則我們有多數獨占者居於一個地方或散佈於所指面積，比僅有一個獨占者要好些。設若需要在各市場間的分配是甚不平均，致若干市場僅有一極小的需要時，則多數獨占者便覺不好。若運輸費是十分高，假定其他事項相等，則有多數獨占者乃是社會的利益，除非其他不良趨勢的合幷力量超過此利益時。

我們試假設各市場間需要是平均分配的，它們的需要曲線是具同樣的力量與伸縮。其次，假設所有生產者是有同等生產效率，即他們的營業與技術能力，他們對資本的支配與他們對於勞力的地位，都是同等的。再設 n 市場中的諸需要曲線各爲$y=\phi(x)$的形態，幷設 n 相對生產者的諸長期供給曲線各爲$y=f(x)$。則每一生產者所選擇的組織或生產單位的大小將決於利潤$\{\phi(x)-f(x)\}\times x$是最大數時，或 $x\{\phi'(x)-f'(x)\}+\phi(x)-f(x)=0$時。

若需要不十分高，倘不能顯著超過長期供給曲線上之最低點時，此方程將不僅能給出所選的組織，且能表明實際的生產量幷因

而價格。（附註） 可是若需要甚大而十分超過長期供給曲線上之最低點時，此方程則僅能幫助決定所選之組織，而供給量的實際水準將決於沿長期供給曲線再進將比沿短期供給曲線前進爲較不利益的衡量。

在此同一方程中將 x 之值代於 $\phi(x)$ 內則可求出價格。這個於所有市場是一樣的。

雖然，設若所有諸市場僅有一個獨占者時，供給曲線雖仍爲 $y=f(x)$，而需要曲線則變爲 $y=\phi\left(\frac{x}{n}\right)$。因是價格與產量的方程則爲

$$x\left\{\phi'\left(\frac{x}{n}\right)-f'(x)\right\}+\phi\left(\frac{x}{n}\right)-f(x)=0$$

單一與多數獨占者之比較利益

從上面的研究我們可論斷，若最優生產者的長期供給曲線與總需要曲線相比是充分的延長時，則單一獨占者於消費者爲較有利。在他方面，若供給曲線是比較的短，或需要是比較的大時，設諸生產者間的效率沒有大差別，則有多數獨占者是較好些。

設若需要與供給相比是很低，而諸生產者的生產效率又不相同時，則最多的趨勢是全部需要將被分配於若干獨占者之間，因爲最優生產者能增加其產量並因而減低生產費與售賣價格以驅逐較弱生產者於市場外故。可是卽在此處，若資本是充分流動的，則在

（附註）因爲生產此時固定於位在長期供給曲線上的短期供給曲線之最低點。

獨占者索取獨占價格之頃，資本又將被吸入此種商品之生產。屆時諸生產者又將發生衝突，結果組成聯合而採取以上各頁所說的任何限制競爭的方法。可是，若需要是比較的高，致需要曲線所割最優生產者的長期供給曲線之點在最低點以上時，則情形最適於多數生產者之同時存在，他們以相互的同意而將市場分配於他們之間。

於是我們可作一普泛的結論，在大多數的新實業中，若該實業仍可藉發明與生產單位之增大而獲得各種經濟時，則讓全需要由一個生產者供應，因而使他能減低該商品的生產費，這將是社會大衆的一種利益。可是若實業的歷時甚久，從變更生產方法或其他改良所獲更進經濟的希望極少時，則社會通常更有利益的是有多數生產者，各人在他自己市場內獨占其生產。但是我們若再考察商品的運輸費時，此結論的硬性又將被修正。運輸費愈高，則贊成許多獨占者同時存在的主張亦愈有力。

第十九章

交易論—互倚商品的價格之決定

連合需要的商品

多數商品的需要不是與其他商品的需要截然獨立的，即是此商品的需要變遷能影響彼商品的需要變遷。此同樣意義，以另外的話來說明，是：有些商品的效用依靠其他商品的效用，與貨幣的邊際效用依靠其他商品的效用。一商品需要的數量決定於該商品的邊際效用與貨幣的邊際效用所成之平衡，所以任何商品需要之變遷結果必是該商品的效用之變遷，或貨幣的邊際效用之變遷，這是顯然的。在大多數的商品，此兩種變遷均依靠其他商品。

因爲貨幣的邊際效用繫於一般商品，故我們可說每一商品的需要繫於其他一般商品之需要。可是，此種相倚不是兩種或多種特定商品間之相倚，所以商品間之相倚若由於其邊際效用對一般商品之相倚者，可略而不論，吾人無在本節討論之必要。

可是我們應當研究兩種或多種商品從其彼此效用相倚而生出的需要相倚。例如汽油的需要一部分依靠汽車（摩托車）的需要，一部分依靠與使用汽油有關的其他商品的需要。若其他事項同等，

則汽車的價格下降，汽油的價格卽將上升。同樣的，若使用膠管與膠胎的車輛之價格下降，則膠管與膠胎之價格卽將上升。爲簡單起見，我們假設只有A與B兩種商品，它們的需要是在上述的解釋中相互倚賴的，並設它們的相倚是需要爲直接的與比例的變動。

設因一些原因，A之價格下降，則A之需要增加，結果B之需要亦增加。因此，B之價格將上升，除非已使A價格下降的原因同時又影響B之供給價格。

設A之需要與供給曲線分別爲 $y=\phi_a(x)$ 與 $y=f_a(x)$；B之需要與供給曲線分別爲 $y=\phi_b(x)$ 與 $y=f_b(x)$。（附註）

玆假設A的供給曲線此時降於一較低水平，例如 $y=f_a(x)$，並設此時的增加產量爲 K_m。於是我們可假設B之需要增加爲 K_n。設A與B之新價格爲 $\phi_a(K_m)$ 與 $f_b(K_n)$。（附註）

B的價格之上升爲 $f_b(K_n)-\phi_b(n)$。未知數K與n可從下列諸方程求出。

$$\phi_b(n)=f_b(n),$$

$$f_a(K_m)=\phi_a(K_m)$$

與

$$\phi_a(m)=f_a(m).$$

此時B的新需要曲線經過了B的供給曲線上縱距爲 $f_b(K_n)$ 之

（附註）此處所用的供給曲線是短期邊際供給曲線，它們是正面的偏趨於x軸，意思是在平衡點附近的偏差爲正數，如在自由競爭下的普泛情形。設A生產的爲m量，B生產的爲n量，而在一單位時間內售出，故

$$\phi_a(m)=f_a(m) \text{ 與 } \phi_b(n)=f_b(n).$$

（附註）若必需購買之量爲 K_n 時，則價格爲供給價格所決定。

一點。若兩商品的需要不是比例的變動，則問題變爲更複雜，其複雜性質不因用數學解釋而稍減。

競爭商品的價格

又有一些商品，其作用是或多或少彼此代替的。一商品因欲增加其需要而降低價格，往往致其他商品的需要縮減，設其他事項不變。事實上，任一商品價格之降低均足使其他一切商品的消費減少，初無分於代用品，或非代用品，設需要的伸縮性是大的話。

但是，事實上一商品之價格微降，則其代用品之需要通常可因此而低減，設其他事項不變。其理由是當一商品有需要時，該商品所滿足的慾望亦可以其代用品滿足之。因此，在任一時間或任一短時期內，我們可說貨幣可用於此特種商品上，亦可用於它的代用品上。所以當該商品的價格降低，則通常消費該商品之數較增，消費代用品之數較減，其目的在於平均每單位開支的諸邊際效用。

代用品與非代用品間之區別是，代用品係滿足同樣慾望。自然，非代用品亦能給出效用，並若一商品的效用與價格相比是較大於另一商品時，此商品亦可驅逐彼商品。可是應注意的事實是：在任何特定時期內必有一種慾望是超越其餘慾望的，故滿足此慾望所獲的效用必較大於滿足其他慾望所獲的效用。因此特種商品在某時間內變爲最需要的。在此時間，代用品的功用在於增加諸競爭品當中的競爭成分。若是沒有代用品，一個人在某種狀況之下，將不得不付某商品以甚高的價格，設該商品所滿足的慾望是非常強

烈的。因為有代用品，則消費者的剩餘，為第一例中的市場競爭所增加的，代用品可使他有更進的增加。若沒有代用品，則在任何時候，急切需用品之效用與其他商品的效用之間必有一甚大差異存在。

設有A與B兩種商品是可互相代用的商品。設 UU_1 與 UU_2 是在每單位開支上它們的邊際效用曲線（圖48）。在任何一定的價格水平與從任何一定的所得額，設以OM的錢用於A，而以ON的錢用於B，使每單位開支的邊際效用均相等(QM=RN)。（附註）為簡單起見，我們假設 OM+ON 的固定金額須用於A與B上。設此時B之價格下落，卽是每單位開支此時可換入比以前較大的商品數額。因此 UU_2 曲線從一較高之點開始。我們祇須一回想卽

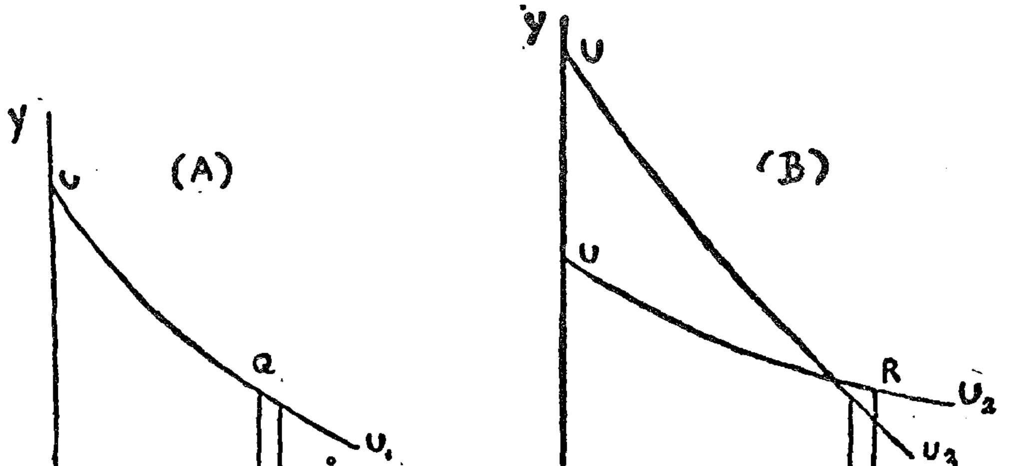


圖48

（附註）事實上所得之分配將不是這樣決定的，蓋當第一單位貨幣已用於A時，則用於B的第二單位將給出較小於 OU 的效用故。但是為求簡單計，此種關係可暫時略去。

可見出新曲線 UU_3 將最終與 UU_2 曲線相割；不過它們的交點將依靠價格下降的程度與 UU_2 曲線的斜度。價格之下降愈大，UU_3 曲線所從開始之點亦愈高，而結果 UU_3 曲線代表邊際效用的伸縮性則愈小。

設若 UU_3 曲線經過 R 點，則所得的分配無變動（需要的伸縮性可稱為一致）。可是若此曲線割 UU_2 於一較遠之點，則在 B 上的開支將增多，而在 A 上的開支將減少。可是，設若 UU_3 割 UU_2 於 R 之前一點，則情形便相反。圖 48 即表明此種情形。此時開支總數仍為 $OM+ON$，若 OM_1 之數用於 A，ON_1 之數用於 B，則兩邊際效用相等。此處 $MM_1=NN_1$。

因此我們可歸結的說，當一商品之價格降低，其代用品之需要亦可大致降低，可是不一定降低。其是否降低則視該商品的需要伸縮性而定。

連合供給之價格

某種商品之生產同時可包含他種商品之生產，即是用以生產一種商品之生產過程同時幫助了一種或多種其他商品之生產。當一些力量被指揮或控制以生產某商品為目的，而不需任何相當修正這些力量，他種商品即自然的生產，此種情形是不常有的。換言之，連帶生產的其他一種或多種商品之生產通常須花增加的費用。若對於此等商品的生產不另外增加開支，則它們的產量必致大減或完全停止。設若經費與能力專用以生產商品 A，則其他附帶產物

B與C或許可生產甚小的數量。可是,若有額外經費與能力專用於增加B與C之生產,則它們的產量將大增。

因是,我們可說,總和生產費不能視為完全屬於商品A之生產——所有連帶產生的一切產物亦有它們的生產費。可是從此說法,我們不要遂以為各商品的生產費常可以分離的決定。各個商品若是連合生產的,即有一些共同的生產費成分在,其生產費通常是不能個別的決定。

連合生產的各商品,其數量的比例不是不能變更的。若我們將特別用於某商品生產上的經費予以改變,則它們當中的比例亦將被改變。可是在短期內連合生產的諸商品之比較數量通常不能變更到任何顯著的程度,這是實在的。

設有A與B兩商品是連合的生產,並假定它們的供給沒有獨立的來源。設 $D_1D'_1$ 是B的需要曲線,DD' 是A與B合併的需要曲線(圖49)。A與B的單位表明於X軸上,OX 上之一單位長度代表A之一單位與B之一單位。設 KN 是從 OX 上任一點N所作的垂直線,割 $D_1D'_1$ 於L,則A的 ON 單位之需要價格為 KL,B的 ON 單位之需要價格為 LN,至 KN 則代表總需要價格。

設 SS' 是A與B的連合生產之供給曲線。自然,A與B的單位之選擇是使A在現有組織體系之下一單位的生產與B一單位的生產相偕。

圖中 SS' 是數生產者從事連合生產A與B諸邊際生產費曲線之合併線。各生產者連合生產A的 OM 單位與B的 OM 單位,其

邊際生產費均爲 PM。(附註) 每生產者已固定其生產於邊際生產費等於需要價格之點，而每生產者所選的均爲最適宜的短期供給曲線。

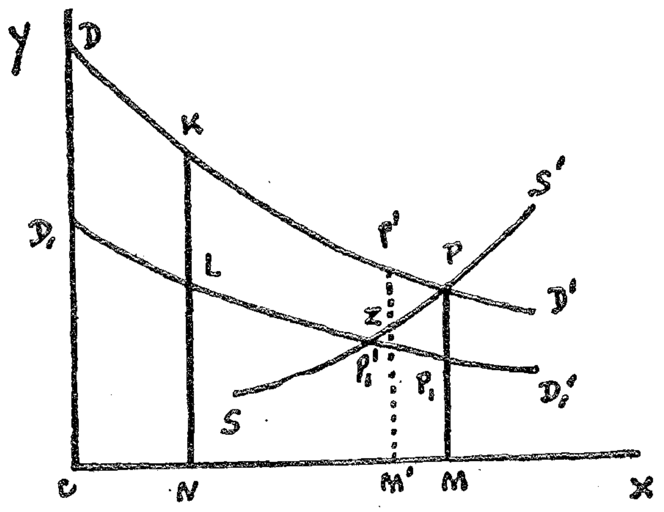


圖49

DD' 與 SS' 是 A 與 B 以一定比例合併所有之市場需要與市場供給曲線。此時 A 之 OM 單位與 B 之 OM 單位將分別在 PP_1 與 P_1M 價格售出。

連合生產商品中一商品與其他商品比例之變化

在連合生產中 A 的數量與 B 的數量之比例，可因兩商品生產上所用經費的變動，或生產方法之變動，而發生變更。假設生產方法或經費計劃變更以後，SS' 變爲新的供給曲線，依邊際價格 PM 而生產 A 之 k.OM 單位，與 B 之 c.OM 單位。若需要曲線是 DD'，供給曲線固定於 SS'，則是假定所選 A 與 B 的比例是最有利的。因

(附註) PM 是 A 一單位與 B 一單位之價格。

是，若在邊際價格 PM 而生產A之 k.OM 單位與B之 c.OM 單位，則所有生產者之利潤將較減於前。

假設有一生產者在舊計劃之下生產m單位之A，與m單位之B。設他的供給曲線是 $y=f(x)$，并設A之價格為 p_1 (PP_1)，B之價格為 $p_2(P_1M)$。則他的利潤是

$$p_1m+p_2m-\Big[\ F(x)\ \Big]_{x=o}^{x=m}$$

式中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 之積分數。若經費計劃是改變，則他的利潤變為

$$p_1km+p_2c.\ m-\Big[\ F(x)\ \Big]_{x=o}^{x=m}$$

因此兩利潤之差數等於

$$p_1m(k-1)+p_2m(c-1)$$

或 $$m\{p_1(k-1)+p_2(c-1)\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

為求增加其前一利潤至最大數，他將增加產量，直至 $p_1+p_2-f(m)=0$ 為止，或直至邊際生產費（一單位之A加一單位之B）等於A與B的合併價格為止。

在第二例，當 $p_1k+p_2c-f(m)=0$ 時，或當邊際生產費（k單位之A加c單位之B）等於A與B（此種單位的）價格總和時，他的利潤是最大。

設若A與B比例可變更至任何限度，而不變動總生產費，并設若 $k+c$ 常等於 2，則價格較高的商品將被用以代替另一商品，直至所有生產者的協調行動變更了A與B的價格使它們相等為止。

設若 $k+c$ 不等於 2，則 p_1 與 p_2 價格將不能相等。在此場合，

設 $k-1=Z.(1-c)$。則在(1)式所給的利潤差數變爲

$$m\left\{p_1\cdot(k-1)-p_2\cdot\left(\frac{k-1}{Z}\right)\right\}$$

此爲最大數，當其微分數等於零時或當

$$p_1-p_2/Z=0$$

或

$$p_1/p_2=1/Z=(1-c)/(k-1)$$

之時。換言之，一種商品將被多生產，另一種將被少生產，直至上述的關係被實現爲止。

綜合供給

設若B商品與A商品獨立亦能生產，則A與B在一單位時間內的產量將各不同。設SS'是A與B連合生產的供給曲線，我們幷假定A與B的比例不能變動。A與B的單位之選擇，使生產一單位之A亦生產一單位之B（圖49）。

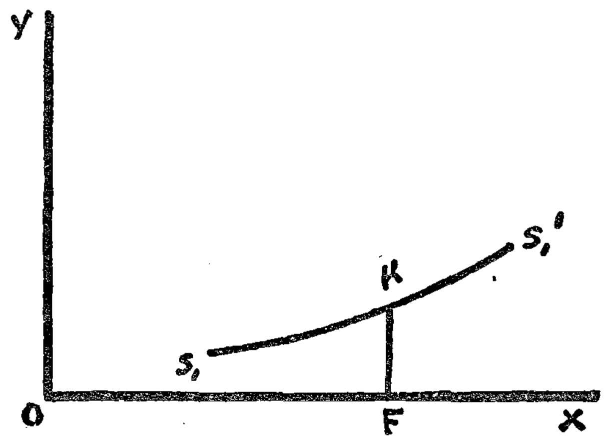


圖 50—KF=PM（圖 49）

設B又有一獨立的供給來源，幷設它的生產以 $S_1S'_1$ 曲線表明之，B之單位仍不變（圖50）。

設 OM 單位之 A 與 OM 單位之 B 現在是連合生產的，B 之價格為 P_1M，如圖 49 所決定的，可是在此價格時，將有 OF 單位之 B 從一獨立來源生產。因此，B 之價格將低落，而其生產將被減縮。此時在連合生產之下生產的將少於 OM 單位，在獨立來源之下生產的將少於 OF 單位。設此時連合生產的祇有 OM' 單位，則因有獨立來源競爭之故，B 之價格將不是 $P_1'M'$。此時 B 所有之價格將是 $ZM'-P'P'_1$。設若在此價格時，需要等於 OM' 加在此價格時從獨立來源所生產之數，則平衡點卽被達到。

$ZM'-P'P_1'$ 給吾人以一點（B 之最低價格），依此點的位置可求出諸不同生產額。此位置被稱為 B 的諸生產額之演繹供給價格曲線。

在圖51中設 ss' 卽為此一曲線，其他諸曲線作如前二圖。ss' 上各點之縱距代表相對諸橫距所表各數額的演繹供給價格。

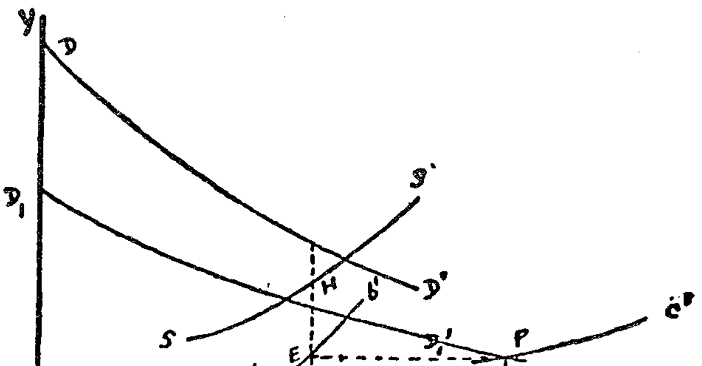


圖51

茲將 50 圖中的 $S_1S'_1$ 曲線與 ss' 曲線合併，設總生產的結果曲線為 CC'。設 CC' 割 $D_1D'_1$ 於 P。則PG 為 B 之平衡價格，其總

生產額爲 OG，其中 OV 是與 OV 單位之 A 連合生產的。OV 量之 A 是在價格 HE 售出。

於是，因 B 之生產有獨立來源故，A 之產量較減於前，B 之產量，將兩來源合併計算，是較多於前。連合生產者的利潤（生產者的剩餘）亦因之縮減。

設 D_1D_1' 的方程爲 $y=\phi_b(x)$，

DD' 的方程爲 $y=\phi(x)$，

SS' 的方程爲 $y=f(x)$，

S_1S_1' 的方程爲 $y=f_1(x)$（圖50中的）。

則　ss' 的方程爲 $y=f(x)-\phi(x)+\phi_b(x)$。

設 $PG=p$

$OG=m$

$VG=m_1$

則我們得

$$
\begin{aligned}
p&=f_1(m_1)\\
&=f(m-m_1)-\phi(m-m_1)+\phi_b(m-m_1)\\
&=\phi_b(m)。
\end{aligned}
$$

從上述諸方程，未知數 m 與 m_1 可以求出，故 p 亦可求出。若沒有獨立來源時，所生產的數量可從 $f(x)=\phi(x)$ 方程求之。

解明此例，我們可假設諸曲線通爲直線。設

D_1D_1' 爲 $y=7-x/4$

DD'　$y=10-x/3$

SS'　$y=1+x/2$（註一）

$S_1S'_1 \quad y = 3x/2-2$（註二）

則給諸未知數值的諸方程爲:

$$3/2\cdot m_1-2=7-m/4=1+(m-m_1)/2-10+(m-m_1)/3$$
$$+7-(m-m_1)/4。$$

從第一組與第二組方程於代數以後，我們得

$m = 13.44$（$=OG=$ B之總生產）

從此 $m_1=3.77$（$=VG=$獨立供給）

與 $p=3.64$（$=PG=$ B之價格）

與 $m-m_1=9.67$（$=OV=$ A之總生產）

在連合供給之下，若沒有獨立來源時，A與B之產量各爲10.8單位（從方程 $10-\frac{x}{3}=1+\frac{x}{2}$ 求出）。

因是，獨立來源存在時，A之產量減少1.13單位，B之產量增加2.64單位。

一單位之A與一單位之B在第一例價格爲6.4單位貨幣，而在第二例則爲5.84。

（註一）僅在x某值之後始眞。

（註二）僅在x某值之後始眞。

第二十章　交易論——價格差別

價格差別

我們前面所論的，都假定獨占者在同一時間內對於市場之各部或對不同的諸市場（運輸費不計外）係定一個價格，并藉以獲到最大純所得。可是有時爲求增大其純所得起見，一獨立者又可盡量施用差別價格的辦法，對於同一市場內流品不同的人或對不同市場的不同人羣，定出不同的價格。

達到此目的的途徑可有多種。獨占者或生產同一商品的不同品質，而對不同品質定以不同價格——價格之差異大於品質之差異——故購買較高品質的人們付了比他人較高的價格。又或，當市場不同時，他對於需要轉移性或商品流動性甚低的地方，可公開定出不同的價格。在勞役被獨占的地方，需要的轉移性是幾等於零，則價格差別可以多少公開的施用。

價格差別如何增加純所得

在一定時期內對一切消費者定以同一價格，則此價格顯然的是該時期內一定供給量之邊際價格。卽是，此價格以貨幣的單位計，等於邊際購買者之邊際效用。因是，一切在此邊際購買者上面的購

買人所付之價格是低於他們的需要價格。此種定價法使購買者能收穫消費者的效用剩餘，而阻止獨占者向所有購買人索取他們願意付的價格。因是，獨占者的純所得在絕對解釋上是未臻於極度——只是為統一價格之最高收入。設若他用一些方法能對不同的人們或不同的人羣索以不同價格，他將更能增大他的純所得。他的增加所得將是從購買人的消費者剩餘之縮減而來。一獨占者剝削消費者的剩餘愈透澈，他愈能增加他的純所得。

為價格差別而形成的市場

獨占者的鵠的在於加每購買者羣以其力所能擔的價格。欲達到此鵠的或欲差別的實施有最大成功，他不得不選擇購買者最適當的分羣。目的在侵佔消費者的剩餘，故最良的分羣 法是有若干購買人即分為若干羣，或將需要價格相同的購買人分為同一羣。

若此辦法做不到時，則其次的良好分羣法是使一羣之最低需要價格恰在下一羣的最高需要價格之上。若羣數是小而多時，則其間縫隙是最小——未被剝削的消費者之剩餘亦最小。

但是需要價格，其他事項相等時，係隨消費者的財富或所得而變，故獨占者的目的在依據購買人的經濟地位而分羣。達此目的的一良好辦法是將所售諸商品的品質稍加區別，而附以它們價格的較大差別。又或若品質是不易區別時，所售商品可用不同的仿單并標以不同的價格。

若此種辦法亦不可能時，則獨占者便不得不依賴對不同市場

定不同價格的辦法，而此法的成功與否則繫於需要是否能從此市場轉移到彼市場。若不同市場的購買人大都爲具同一普通需要曲線的消費者所構成時，則差別價格卽不可能，因爲一市場之最有利價格亦爲其餘市場的最有利價格故。惟有於各市場的需要尺度不同時，諸市場間始能實施價格差別。因是，對於有較大外延或較大內充需要的市場，獨占者纔可定以較高價格。

價格在差別獨占下之決定

第一方法——爲立論簡單起見，我們假設一獨占者對於需要曲線已知的兩市場實行價格差別。下面所給的程序可適用於兩個以上的市場。

獨占者對兩市場所定的價格是可使他獲最大純所得的價格。當他在一定時期內，對於在兩市場銷售的商品固定於最適宜的總產量時，他分配其產量於兩市場，將以兩市場中供給的些微變遷或分配不致大影響他的純所得爲準。因此，在兩市場間產量之最適宜分配時，從賣貨所獲的邊際所得在兩市場內將是一樣的（生產費不變，因生產量已確定故）。

玆設兩市場的需要曲線爲 $y=\phi_1(x)$ 與 $y=\phi_2(x)$ 從兩曲線演繹而來的邊際所得曲線爲 $y=x\phi'_1(x)+\phi_1(x)$ 與 $y=x\phi'_2(x)+\phi_2(x)$。設供給曲線爲 $y=f(x)$。設生產總額爲m，生產費每單位爲 $f(m)$。

若以 m_1 售於第一市場，以 $m-m_1$ 售於第二市場，則總所得

有如下式

$$\{\phi_1(m_1)-f(m)\}.m_1+\{\phi_2(m-m_1)-f(m)\}.(m-m_1) \quad \cdots\cdots(1)$$

從兩市場所獲的邊際所得是一樣，我們有

$$m_1.\phi'_1(m_1)+\phi_1(m_1)=(m-m_1).\phi'_2(m-m_1)+\phi_2(m-m_1) \cdots\cdots(2)$$

從此方程，m_1 的値可以m的數決定之。將此値代於(1)式內，并使其對於m之部分微分等於零，則我們得一方程可決定m之値，以所選產量單位表明之。

玆舉一簡單的例，設兩需要曲線爲 $y=15-x$ 與 $y=9-x/2$，并設供給曲線爲 $y=\frac{2}{3}x+2$。

於是應用(2)方程我們得 $m_1=\frac{m}{3}+2$，而(1)式變爲

$$\left(13-\frac{m}{3}-\frac{2}{3}m-2\right)\left(\frac{m}{3}+2\right)+\left(9-\frac{m}{3}+1-\frac{2}{3}m-2\right)\left(\frac{2}{3}m-2\right)$$

或　$9m-m^2+6$

化分并使其等於零，我們得 $9-2m=0$，$m=4\frac{1}{2}$ 及 $m_1=3\frac{1}{2}$

因是，生產量爲 $4\frac{1}{2}$ 單位，其中 $3\frac{1}{2}$ 單位售於第一市場，一單位售於第二市場。

第一市場的價格將爲 $11\frac{1}{2}$ 單位之貨幣，第二市場的價格爲 $8\frac{1}{2}$ 單位。生產費每單位產量爲5單位。獨占純利潤爲

$$11\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}-5\times4\frac{1}{2}=26\frac{1}{4}$$單位之貨幣。

第二方法——此種決定價格的方法可稍以不同的方式用之。假設須生產最適宜的數額，而產額在各市場間的分配，其各邊際所得是相等的。則總產量之決定將以邊際生產費等於售賣的邊際所得爲準。於是需要曲線是 $y=\phi_1(x)$ 與 $y=\phi_2(x)$，而供給曲線是 $y=f(x)$，則構成下列關係：

$$x\phi'_1(x)+\phi_1(x)=x\phi'_2(x)+\phi_2(x)=xf'(x)+f(x)。$$

設若m_1與m_2是售於兩市場的數額，則 m_1將代替第一式內之x，m_2代替第二式內之x，(m_1+m_2)代替第三式內之x。

從這樣構成的兩獨立方程，我們可決m_1與m_2兩未知數。

設 $D_1D'_1$與 $D_2D'_2$ 是兩市場的兩需要曲線，幷設 D_1d_1與 D_2d_2 兩曲線是相對的邊際所得曲線（圖 52 與 53）。

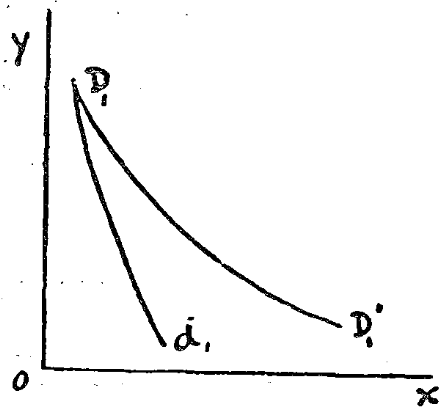


圖52

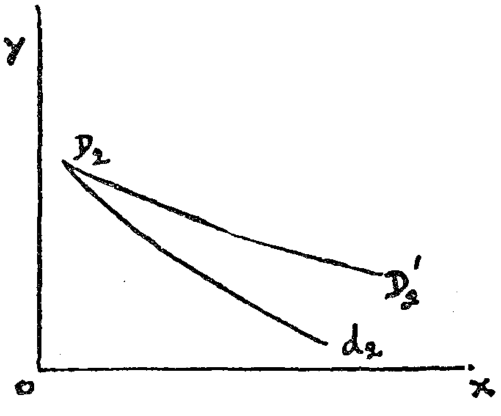


圖53

設此兩曲線在圖 54 內合併起來，其結果爲 DD'曲線。設 SS' 是邊際生產費曲線，幷設它與 DD' 曲線相遇於 P。於是 PM 是兩市場的邊際所得，在第一市場售出 OM_1 單位，在第二市場售出

M_1M 單位。

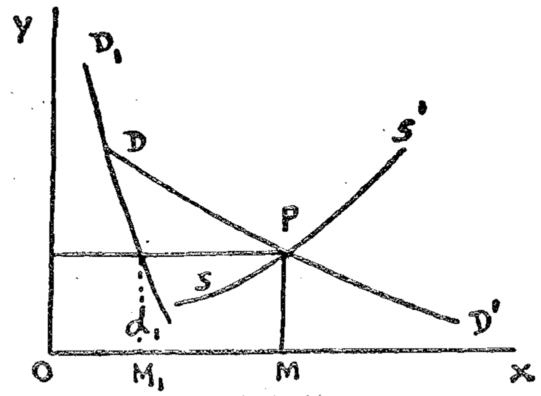


圖54

市場之構成

上述的兩市場有 $D_1D'_1$ 與 $D_2D'_2$兩需要曲線。第一市場顯然有一較高的需要曲線，但其伸縮性不十分如第二市場的曲線之大。市場之形成或許由於所在地區的緣故。可是若市場之構成能使一市場所定之價格不致影響第二市場的任何買賣時，則獨占者的利潤便爲最大。或更嚴密的說，市場之選擇，應以一市場的最低需要價格恰在第二市場的最高需要價格之上爲準。

當各市場是這樣構成時，消費者的剩餘卽被更澈底的剝削，各市場之間沒有需要的含蓋地帶存在。構成市場依據需要而不依據地域，或依據人們的富力而不依據他們的住地，將更能達到此目的與此條件。可是，此種市場區分在採用上有甚大困難，而依據地域的區分則比較容易辦到。

在理論上，利潤的大小隨合法構成的市場之範圍而反變。市

場愈小，則消費者剩餘之剝削愈完全，各市場需要的含蓋地帶愈減小。當各市場各有它的購買者，或每市場是以同一需要價格的購買者構成時，則利潤（在學理上）將是在最高水平線上，而等於諸需要價格之總和減去生產費之總和。此時消費者的剩餘是被完全剝削。

因是，若總和需要爲 $y=\phi(x)$ 曲線表明之，短期供給曲線以 $y=f(x)$ 方程表明之，生產額之決定以邊際價格等於邊際生產費爲準，或依於下列方程

$$\phi(x)=x\cdot f'(x)+f(x).$$

設從此方程決定的 x 值爲 m。則在一單位時間內生產總額是 m，價格之變換是由 $\phi(1)$ 到 $\phi(m)$，而總利潤等於

$$\int_{x=0}^{x=m}\phi(x).dx-m.f(x).$$

傾銷(Dumping)

暫時傾銷——獨占者對總產量之一部所定之售賣價格，若全產量依此價格出售將致得不償失時，此一部分售賣即稱爲傾銷。傾銷商品之目的或在減削競爭者的力量而排之於生產領域之外，或僅在售脫產品之一部藉以適合供給於需要。當一獨占者若發現從前預算需要有錯或需要發生突變之故，致供給在任何時都超過需要時，他將傾銷此剩餘產量於外國市場。又或因欲奪取已爲一競爭者雄霸的市場，獨占者將以該競爭者所不能忍受的低價傾銷其商品，企圖打倒他的敵人。當這個是傾銷的目的時，則價格之差別乃

是暫時的，不久價格的水平又將變更。

永久傾銷——可是在某種狀況之下，獨占者亦可實行永久傾銷性質的價格差別。這個不過是價格差別之一極端例子，在此例中所定的最低價格是在生產費之下。

當獨占者的權力是無限，而能隨他自己的意志以造成市場之羣和規定價格時，則在任何市場的價格決不致低於邊際生產費，因爲價格在此水平以下將減少他的純利潤總和故。可是在有些市場內價格之規定可在平均生產費以下。其等於邊際生產費之最低價格普通是在平均生產費以下。可是若需要曲線割供給曲線之點超過平均生產費曲線上之最低點時，則所定之最低價格將等於邊際生產費，此時邊際生產費將超過平均生產費。

318
55
1590
1590
1749.00

中華民國二十四年四月初版

（35123稿）

大學叢書（教本）數理經濟學大綱一册

The Elements of Economics Mathematically Interpreted

每册定價大洋貳元

外埠酌加運費匯費

原著者　J. K. Mehta

譯述者　胡　澤

發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

（本書校對者陳忠杰）

*C六三六