教育部審

中學校 師範學校 適用

新制 平面三角法教本

中華書局印行

改訂納氏英文法

第二冊

布面洋裝一冊

實價二角五分

納氏英文法。即(Nesfield's English Grammar)原本。銷行吾國甚廣。惜其內容專爲印度學生設想。不適吾國之用。茲加改訂。列其要點如下。(一)原書援引印度歷史經典等處。均加修改。使合吾國之國家主義。(二)原書間有於吾國學生覺欠明瞭者。均加修改。(三)原書章節。一概照舊。其中主要之實質。亦均照舊。俾教員仍可參考原有之教案。

原文 溫德華士史密司最新代數學

布面一厚冊

實價一元八角

英文溫德華士史密司最新代數學。即(Academic Algebra by George Wentworth & David Eugene Smith)吾國學子之習英文代數者多用之。內容無待贅述。此爲溫史二氏最新編訂之本。惟原書定價較昂。本局特將原本照相攝印。內容與原書一律。而定價較廉。

袖珍英華雙解字典

布面一冊

本書特點

一 通用之字縮寫之文無不采入

二 詳列各國語文習見於英文者

三 漢文雙釋明白易解

四 發音無音均加記號

五 袖珍精本極便攜用

定價一元

新制三角法教本

編輯大意

一本書按照部頒課程標準編輯。爲中學校及其他同等各學校用書。

一中學科目較多。取材過豐。難期熟習。故本書理論。務以簡明爲主。

一本書首論三角函數。並列以線表示之法。反覆研究。不厭求詳。期厚植首基。俾初學者易於領悟。

一本書論基本範式。附有 Jonson 氏之記臆法。以便記臆。

一本書對於恆等式之證明。多設誘導之法。以爲解題標準。

一本書於直三角解法之前。另授三角函數表用法。以便實地計算。

一本書於直三角解法。多設應用題。俾知實用。且以引起興味。

一本書論函數變化時。附列圖示之法。使學者易於領悟。

一本書多附對數表用法及對數計算題。爲三角

形解法之預備。

一本書爲檢表便利起見。卷末附以數之對數表，函數對數表及函數眞數表三種。

一本書因弧度法，逆三角函數，半角之正弦表示法等。不適於中學程度。特列入附錄中。幷加總複習題。以備餘暇時間研究之用。

一本書附有希臘字母表，中西名詞對照表及公式一覽表。皆便學者檢用。

一本書怱促告成。難期完善。海內博學君子。幸勿吝教。

目　　錄

新制三角法教本

緒論

1. 三角法 三角法者。論後章所述三角函數之關係性質及其應用者也。

古之三角法。只論三角形之解法。重在實用。其範圍隘。今則推廣之。并研究角之代數性質。應用於高深數學。

2. 角之測法 角之測法與長短之單位無涉。必須另定單位測之。定單位之法。亦有種種不同。幾何學中係以直角為測角之單位。然以直角為單位。究嫌過大。於是另定**六十分法**。※一直角以九十等分分之曰**度**。度以六十等分分之曰**分**。分以六十等分分之曰**秒**。秒之角已甚小。秒以下不必再立名目。

此度,分,秒又以符號°, ′, ″記於數之右肩以表之。例如$40°\,32'\,51''$即表40度32分51秒是也。

※此法本三百六十日為一年之意。古代巴比倫天文家早已用之。當時以正三角形之一角為基本而六十等分之。

此外尙有弧度法,百分法。弧度法高等數學皆用之。詳於補習編。百分法實際上多不用。故從略。

3. 角之單位改算法 (第一)直角單位改爲度分秒單位。則將原數以九十乘之。所得之整數卽度之數。其小數再以六十乘之。所得整數卽分之數。所餘小數再以六十乘之。卽秒之數。

例 1. 將0.5208直角以六十分法表之。

$$\begin{array}{r l} 0.5208 & 直角 \\ 90 & \\ \hline 46.872 & 度 \\ 60 & \\ \hline 52.32 & 分 \\ 60 & \\ \hline 19.2 & 秒 \end{array}$$

答 46° 52′ 19.″2

(第二)度分秒單位改爲直角單位。則將秒之數六十除之。加入分之數。再六十除之。加入度之數。九十除之卽得直角所表之數。

例 2. 31° 23′ 15″ 改以直角單位表之。

$$\begin{array}{r l} 60\underline{)15} & 秒 \\ 60\underline{)23.25} & 分 \\ 90\underline{)31.3875} & 度 \\ 0.34875 & 直角 \end{array}$$

答 0.34875直角

例題

1. 直角二分之一,三分之一,四分之一,五分之一,各合幾度之角。

2. 67° 23′ 40″ 改爲秒之數。

3. 57398″改爲度分秒之數。

4. 49°, 97° 5′ 15″, 73° 21′ 各角。試改爲直角單位。

5. 1.42 直角,0.2875 直角,1.704535 直角,改爲度分秒。

6. 自 4 點鐘至 5 點 30 分。其長短針之廻轉度數幾何。

7. 五等邊形之一角合幾度。

8. 設有正多邊形一內角。等於 144°。問其邊數幾何。

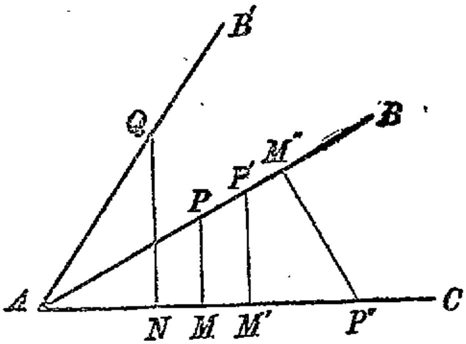
第一編　銳角之三角函數

4. 三角函數　設於BAC角之二邊上。任取數點P,P′,P″。向對邊引垂線。由幾何學定理。知

$$\frac{PM}{AP}=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{P''M''}{AP''}.$$

$$\frac{AM}{AP}=\frac{AM'}{AP'}=\frac{AM''}{AP''}.$$

$$\frac{PM}{AM}=\frac{P'M'}{AM'}=\frac{P''M''}{AM''}.$$



故A角不變時。不論邊之長短如何。此等之比常不變。

若BAC變為B′AC。則$\frac{QN}{AQ}$，$\frac{AN}{AQ}$，$\frac{QN}{AN}$，必不能等於$\frac{PM}{AP}$，$\frac{AM}{AP}$，$\frac{PM}{AM}$。是角變時。此等之比亦隨之而變。可知此各邊長短比較。與角之大小，大有關係。於是特定名曰。

(1)　如$\frac{PM}{AP}$者。乃A角對邊與斜邊之比。名為A角之正弦。以$\sin A$記之。

(2)　如$\frac{AM}{AP}$者。乃A角鄰邊與斜邊之比。名為A

角之餘弦。以 $\cos A$ 記之。

(3) 如 $\frac{PM}{AM}$ 者。乃A角對邊與隣邊之比。名爲A角之正切。以 $\tan A$ 記之。

(4) 如 $\frac{AM}{PM}$ 者。乃A角隣邊與對邊之比。名爲A角之餘切。以 $\cot A$ 記之。

(5) 如 $\frac{AP}{AM}$ 者。乃A角斜邊與隣邊之比。名爲A角之正割。以 $\sec A$ 記之。

(6) 如 $\frac{AP}{PM}$ 者。乃A角斜邊與對邊之比。名爲A角之餘割。以 $\operatorname{cosec} A$ 記之。

此正弦,餘弦等。※ 總名曰角之三角函數。※或曰圓函數。

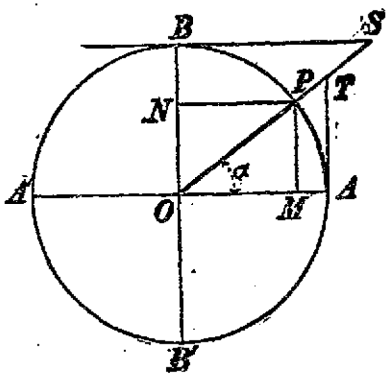
由上所述。知餘割,正割,餘切乃各爲正弦,餘弦,正切之逆數。

※上所列六個比之外。尚有名正矢 $(1-\cos A)$ 餘矢 $(1-\sin A)$ 者。亦爲A角之三角函數。但無甚緊要。今已不用。

※函數之定義。乃言甲乙二量。乙變時。甲亦隨之而變。乙不變時。甲亦不變。表此甲乙相互關係者。特名甲爲乙之函數。

5. 用直線表示三角函數法 上列三角函數均爲比之式。如欲以直線表之。可作種種直三角形。使其比之分母常等於單位。其最便利之法如下。

以一點O爲圓心,以單位長爲半徑畫圓周。此圓周名曰單位圓。今於此圓上作AA′,BB′互相垂直爲兩直徑。又設AOP爲一銳角。以α表之。此銳角乃半徑自OA迴轉至OP所成。作$PM\perp OA$,$PN\perp OB$



就 △OMP內其斜邊$OP=1$

故 $\sin\alpha=\dfrac{MP}{OP}=MP.$

$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}=OM.$

又過A及B作圓之切線。與OP延長線,相交於T及S。因△OAT及△OBS內

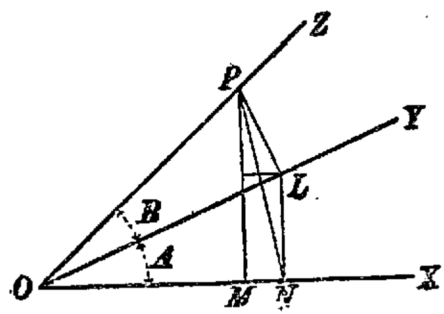
$OA=1,\ OB=1,\ \angle OSB=\alpha.$

故 $\tan\alpha=\dfrac{AT}{OA}=AT.$ $\cot\alpha=\dfrac{BS}{OB}=BS.$

$$sec\alpha=\frac{OT}{OA}=OT. \qquad cosec\alpha=\frac{OS}{OB}=OS.$$

在單位圓內無論角度如何變動。此六個直線之值。皆與此角之三角函數之值相等。※ 所以研究角之變動與三角函數之變化時。即用直線之值以代其比。則較便。

6. 關於記號之注意 (第一) $sin A$, $cos A$ 等之 sin, cos 乃表示一種符號。不可視爲因子而分括之。例如 $sin A+sin B$ 乃言 A 角正弦加 B 角正弦。不等於 $A+B$ 之正弦也。



今設 $X\hat{O}Y$ 爲 A, $Y\hat{O}Z$ 爲 B. 由 OZ 上取一點 P 向 OX, OY 引二垂線,與之相交於 M, L. 再自 L 向 OX 引垂線,與之相交於 N. 聯 PN. 則

$$sin A=\frac{NL}{OL}>\frac{NL}{OP} \qquad sin B=\frac{PL}{OP}$$

※我國八綫命名。即由此六綫加以 MA 正矢及 BN 餘矢而得。

$\therefore \sin A + \sin B > \frac{NL+PL}{OP} > \frac{PN}{OP} > \frac{PM}{OP}$

卽　$\sin A + \sin B > \sin(A+B)$

(第二)　$\sin A$ 等之乘方通例爲 $\sin^2 A$, $\sin^3 A$ 卽 $(\sin A)^2$, $(\sin A)^3$ 等之簡略記號。不可視爲 $\sin^2$, $\sin^3$ 乘 A。

例　　題

1.　設有直三角形 B 爲直角。$AB=15$, $BC=8$ 問各銳角之正弦,餘弦,正切之值若干。

2.　設有直三角形。C 爲直角 $AC=12$　$AB=13$。求 A 角之各三角函數。

3.　設有直三角形。三邊之比如 $25:24:7$。問最小角之三角函數。

4.　角之正弦等於其倍角之弦之半。試證之。

5.　試證　$2\sin A > \sin 2A$.

7. 三角函數之相互關係

由第 4 節知

$$\sin A = \frac{PM}{AP},\quad \cos A = \frac{AM}{AP},\quad \tan A = \frac{PM}{AM}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AP}{PM},\quad \sec A = \frac{AP}{AM},\quad \cot A = \frac{AM}{PM}$$

故 $\sin A < \tan A < \sec A$, $\cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A$ ……………[1]

又 $$\left.\begin{aligned} \sin A \cdot \operatorname{cosec} A &= \frac{PM}{AP}\cdot\frac{AP}{PM}=1 \\ \cos A \cdot \sec A &= \frac{AM}{AP}\cdot\frac{AP}{AM}=1 \\ \tan A \cdot \cot A &= \frac{PM}{AM}\cdot\frac{AM}{PM}=1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots[2]$$

又 $$\left.\begin{aligned} \tan A &= \frac{PM}{AM}=\frac{PM}{AP}\div\frac{AM}{AP}=\frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{AM}{PM}=\frac{AM}{AP}\div\frac{PM}{AP}=\frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots[3]$$ 。

由幾何學知 $\overline{PM}^2+\overline{AM}^2=\overline{AP}^2\cdots\cdots\cdots(A)$

故 $$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{AP}^2}+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AP}^2}=1$$

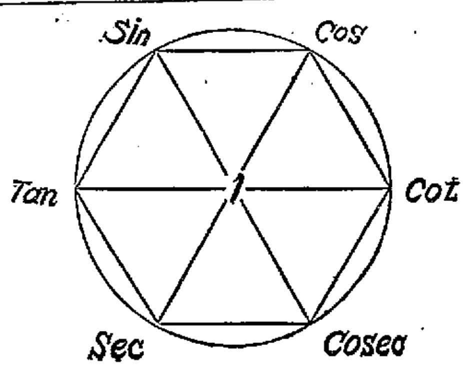
即 $\sin^2 A+\cos^2 A=1\cdots\cdots\cdots[4]$

又由(A)式得 $$1+\left(\frac{PM}{AM}\right)^2=\left(\frac{AP}{AM}\right)^2$$

及 $$1+\left(\frac{AM}{PM}\right)^2=\left(\frac{AP}{PM}\right)^2$$

即 $$\left.\begin{aligned} 1+\tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1+\cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots[5]$$

※以上五種關係。用Jonson氏三角比六角形記之。最便記臆。法將Sin, Cos, Tan, Cot, Sec, Cosec兩兩列在水平線上。作為六角形之頂。於中心書1字。



8. 用7節[2]至[5]式。可使式中所含三角函數彼此變換。用以證明恆等二式。※

例 1. $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 以 $\cos\theta$ 之項表之。

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(1-\cos^2\theta)^2+\cos^4\theta$$
$$=(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)+\cos^4\theta$$
$$=1-2\cos^2\theta+2\cos^4\theta$$

例 2. 試證 $(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2=2\sec^2 A$

$$(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2=(1+2\tan A+\tan^2 A)+(1-2\tan A+\tan^2 A)$$
$$=2+2\tan^2 A$$
$$=2(1+\tan^2 A)$$
$$=2\sec^2 A$$

例 3. 試證 $\dfrac{\tan A-\cot B}{\tan B-\cot A}=\tan A.\cot B$

※[1]左右兩側所列函數。在下者之值。較在上者大。[2]各對角線兩端之積。等於中心所示之數1。[3]任取連續三函數。其居一端之函數。等於中間函數。以他端函數除之。[4]在水平線上相連二數平方之和。等於其下中間之數之平方。[2],[3],[4],[5]各式。係三角法基本公式。務須切記。但此八式。亦非各自獨立。可由[4][5]內取一式。與他之任意四式解之。便可求得其餘三式。

$$左邊=\frac{\tan A-\cot B}{\frac{1}{\cot B}-\frac{1}{\tan A}}=\frac{\tan A-\cot B}{\frac{\tan A-\cot B}{\tan A.\cot B}}$$

$$=\tan A.\cot B$$

例 4.　試證 $\sin^2 A-\cos^2 A=\sin^4 A-\cos^4 A$

$$\sin^4 A-\cos^4 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^2 A-\cos^2 A)$$

$$=\sin^2 A-\cos^2 A$$

例 5.　試證 $(\sin A-\cos B)(\sin A+\cos B)=$

$$(\sin B-\cos A)(\sin B+\cos A)$$

$$(\sin A-\cos B)(\sin A+\cos B)=\sin^2 A-\cos^2 B$$

又 $(\sin B-\cos A)(\sin B+\cos A)=\sin^2 B-\cos^2 A$

$$=(1-\cos^2 B)-(1-\sin^2 A)$$

$$=\sin^2 A-\cos^2 B$$

是左右相等。故上式可以成立。

例 6.　試證 $\frac{\sec A-1}{\tan A}=\frac{\tan A}{\sec A+1}$

※恆等式之證明。常如例 2 例 3 之法。由左邊變之。使等於右邊。然亦有如例 4 由右邊變至左邊者。亦有如例 5 將兩邊變爲同形者。亦有如例 6 由已知二公式導出者。惟視其左右情形如何。臨時酌定。大概多由繁式之邊變之使等於簡式。變之之時。多就項數之多少考究之。利用【4】【5】公式。即可使其項數變遷者也。

由公式[5]　$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

故　$\sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

即　$(\sec A - 1)(\sec A + 1) = \tan^2 A$

故　$\dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = \dfrac{\tan A}{\sec A + 1}$

例題

試證下列各等式。

6. $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \cdot \sin^2 A$

7. $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cdot \cos^2 A$

8. $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \cdot \operatorname{cosec}^2 A$

9. $\operatorname{cosec} A - \sin A = \cot A \cdot \cos A$

10. $\sec A - \cos A = \tan A \cdot \sin A$

11. $\cot A + \tan A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A$

12. $(1 - \sin^2 A)\sec^2 A = 1$

13. $(1 - \cos^2 A)(1 + \tan^2 A) = \tan^2 A$

14. $\sin A\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1} = \cos A$

15. $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

16. $\dfrac{\sin A \cot^2 A}{\cos A} = \dfrac{1}{\tan A}$

17. $\tan^2 A - \cot^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A$

18. $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A.\cos^2 A$

19. $\dfrac{1}{1+\sin A}+\dfrac{1}{1-\sin A}=2\sec^2 A$

20. $\dfrac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}\times\dfrac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}=\sin^2 A.\sec^2 A$

21. $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$

22. $\tan^4 A=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A-\sec^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A-\operatorname{cosec}^2 A}$

23. $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2$

24. $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$

25. $\cot^2\theta\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}=0$

9. 知某角之一個三角函數。可用公式[2]至[5]求其他三角函數。

例 1. $\tan A=\sqrt{3}$ 則

$$\sec^2 A=1+\tan^2 A=1+3=4$$

$$\sec A=2$$

而
$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{2}$$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

【注意】六個函數中。有三個函數爲他三個函數之逆數。故只須求出三個非互爲逆數者。其他可以從略。不必再求。

例 2.　已知 $\sin A=s$.則由公式【4】

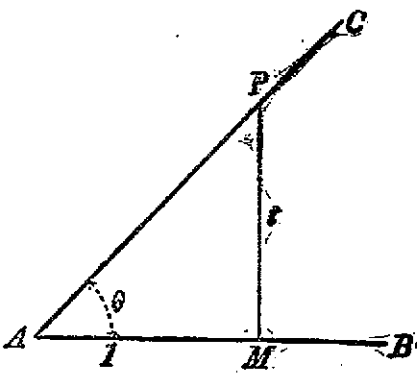
$$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-s^2$$

$$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-s^2}$$

又由公式【3】$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$

上法乃由公式求出。然亦可由圖解直接求之。

例 3.　已知 $\tan\theta=t$。則設 BAC $=\theta$。於 AB 上取一點 M,令 AM $=1$。過 M 作 AB 之垂線與 AC 交於 P。則



$$\tan\theta=\frac{PM}{AM}=\frac{PM}{1}=t$$

然 $\overline{AP}^2=\overline{AM}^2+\overline{PM}^2$

$$=1+t^2$$

而 $\sin\theta=\frac{PM}{AP}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\cos\theta=\frac{AM}{AP}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

例題

26. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\tan A$ 及 $\operatorname{cosec} A$。

27. 已知 $\cos B=\frac{1}{3}$，求 $\sin B$ 及 $\cot B$。

28. 已知 $\sec\theta=4$，求 $\cot\theta$ 及 $\sin\theta$。

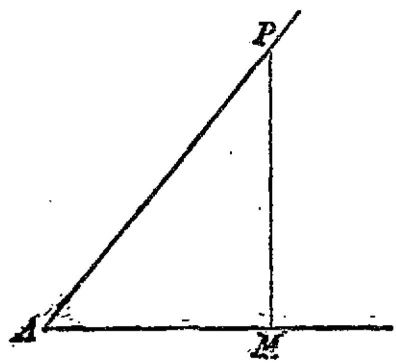
29. 已知 $\sec A=\frac{m^2+1}{2m}$，求他之三角函數。

30. 已知 $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$，求 $\sin A$ 之值。

31. 若 $\sin A-\cos A=0$，求 $\operatorname{cosec} A$ 之值。

32. 若 $\sin\theta=a, \tan\theta=b$。試證 $(1-a^2)(1-b^2)=1$。

10. 餘角 自直角減去任意之銳角。則所剩者即其餘角。例如 $30°$ 之餘角。即為 $60°$。θ 之餘角。即為 $90°-\theta$。由 4 節知



$$\cos A=\frac{AM}{AP}=\sin APM=\sin(90°-A)$$

$$\cot A=\frac{AM}{PM}=\tan APM=\tan(90°-A)$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{AP}{PM}=\sec APM=\sec(90°-A)$$ 故

某角之餘弦。等於其餘角之正弦。

某角之餘切。等於其餘角之正切。

某角之餘割。等於其餘角之正割。

或反言之。

某角之正弦。等於其餘角之餘弦。

某角之正切。等於其餘角之餘切。

某角之正割。等於其餘角之餘割。

要之

某角之三角函數。等於其餘角之餘函數。※

11. 45°角之三角函數　設ABC爲二等邊直三角形。C爲直角。則由幾何學知

$$AB=\sqrt{\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(2\overline{AC}^2\right)}=\sqrt{\left(2\overline{BC}^2\right)}$$

$$=\sqrt{2}\,AC=\sqrt{2}\,BC$$

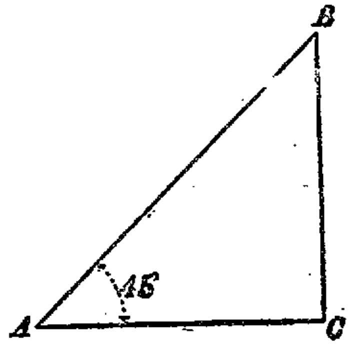
※正弦餘弦，正切餘切，正割餘割。互爲餘函數。蓋餘角之正弦。即爲餘弦。餘角之餘弦。即爲正弦。餘可類推。

凡求45°至90°間各角之任何三角函數。皆可由其餘角在0°至45°間者之餘函數求之。

故 $\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = \frac{BC}{AC} = 1$



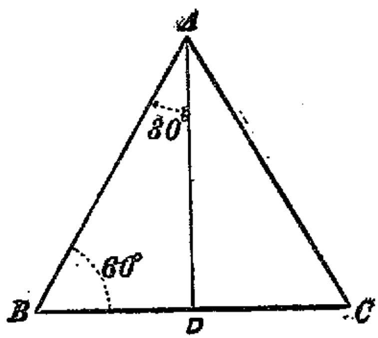
由其逆數知

$\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$

$\sec 45° = \sqrt{2}$

$\cot 45° = 1$

12. 60°及30°角之三角函數　取正三角形ABC。自A點向BC引垂線AD。則由幾何學知



$BD = \frac{1}{2}AB,$

$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

所以 $\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cos 30°$

$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} = \sin 30°$

$\tan 60° = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3} = \cot 30°$

故　$\operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30°$

$sec\,60° = 2 = cosec 30°$

$cot\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = tan 30°$

角度	30°	45°	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=0.5$
正弦	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.70711$
餘弦	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.86603$

例 1.　$sin A = cos A$，求 A 之值。

$$sin A = cos A$$

則　$$tan A = 1$$

$$A = 45°$$

例 2.　$cos 2A = sin 7A$，求 A 之值。

$$cos 2A = sin 7A$$

是　$$sin(90° - 2A) = sin 7A$$

$$\therefore\quad 90° - 2A = 7A$$

$$\therefore\quad A = 10°$$

例　題

求適合於下列各方程式之角(33—37)。

33. $2cos\theta = sec\theta$　　**34.** $3tan\theta = cot\theta$

35. $sec 5A = cosec A$　　**36.** $sin 2A = cos 4A$

37. $2\sin A=\operatorname{cosec} A$

求下列各式之數值(38—40)。

38. $\tan^2 60^\circ+2\tan^2 45^\circ$

39. $\cot 60^\circ.\tan 60^\circ+\sec^2 45^\circ$

40. $3\tan^2 30^\circ+\frac{4}{3}\cos^2 30^\circ-\frac{1}{2}\sec^2 45^\circ-\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ$

試證明下列各等式(41—45)。

41. $\frac{\cos 60^\circ+\cos 30^\circ}{\sec 30^\circ+\operatorname{cosec} 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

42. $\sin 60^\circ+\cos 60^\circ+\tan 60^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ+\cot 30^\circ$

43. $\frac{\cos 45^\circ-\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ+\sin 30^\circ}=(\operatorname{cosec} 45^\circ-\cot 45^\circ)^2$

44. $\sin(90^\circ-A)\cot(90-A)=\sin A$

45. $\frac{\operatorname{cosec}^2 A\tan^2 A}{\cot(90^\circ-A)}\cdot\frac{\cot A}{\sec^2 A}=\sec^2(90^\circ-A)-1$

第二編 三角函數表用法

13. 求任意銳角三角函數之值。係用高深數學。運算煩難。本書不論。然前人已經求得之數列爲表者。本書則載之以便應用。玆舉其用法如次。

本書所載。均係相差10′之角。若非表中所有之角。欲求其三角函數。或由題設三角函數之值。而不適合於10′之整數倍者。則當用比例法求之。卽

角之變化甚小時。與其角之三角函數變化。成比例。

例 1. 求 $\sin 32°\ 16'.4$

檢表 $\sin 32°\ 20'=0.5348$

$\sin 32°\ 10'=0.5324$

卽知角度多10′。其正弦多0.0024。

今 $32°16'.4$ 比 $32°10'$ 多 $6'.4$。其正弦應多之數。設爲 x。

$$10:6.4=0.0024:x$$

$$x=0.0015$$

故 $\sin 32°16'.4=0.5324+0.0015$

$$=0.5339$$

例 2. 設 $\tan A=1.5680$,求 A。

檢表 $$1.5697 = \tan 57°30'$$

$$1.5597 = \tan 57°20'$$

卽正切多0.0100。其角度多10′。今正切1.5680比1.5597多0.0083.其角度應多之數設爲x。則

$$0.01 : 0.0083 = 10 : x$$

$$x = 8.3$$

卽 $$A - 57°20' = 8'.3$$

$$\therefore \quad A = 57°28'.3$$

例 3. 求 $\cos 63°\ 33'.8$

檢表 $$\cos 63°\ 30' = 0.4462$$

$$\cos 63°\ 40' = 0.4436$$

角多10′。餘弦少0.0026。※

$$\frac{3.8}{10} \times 0.0026 = 0.0010$$

$$\therefore \quad \cos 63°\ 33'8 = 0.4462 - 0.0010$$

$$= 0.4452$$

例 4. 設 $\cot A = 1.7562$,求 A。

檢表 $$1.767\overline{5} = \cot 20°30' ※$$

$$1.7556 = \cot 20°40'$$

卽餘切少0.0129。角度多10′。

$$\frac{1.7675-1.7562}{0.0129}\times 10=8.8$$

$$A=20°\,30'+8'.8$$

$$=20°\,38'.8$$

例　　題

1.　求 $\cot 64°\,33'.3$

2.　求 $\cos 63°\,37'.3$

3.　$\sin A=0.9479$, 求 A。

4.　$\tan A=0.1723$, 求 A。

※凡正弦,正切,正割三種函數。角度大時。函數亦大。餘弦,餘切,餘割三種函數。角度大時。函數之值反小。

※※ $\frac{※}{5}$ 者。係在 5 與 45 間之數。

第三編　直三角形之解法

14. 三角形係由三邊三角之六部分而成。此六部分中已知其三。則所餘三者。便可算出。但此已知之三部分中。至少須含有一邊。

直三角形有一角爲直角。故除直角之外。更知二部分之數値。則所餘之三部分便可算出。但已知之兩部中。至少須有一部分爲邊。故三角形之解法。可大別之爲次列四種。今順次言之。

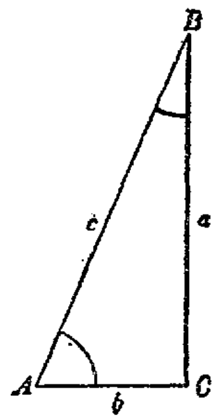
I. 已知斜邊及一銳角。

II. 已知夾直角之一邊及一銳角。

III. 已知夾直角之一邊及一斜邊。

IV. 已知夾直角之二邊。

15. 設ABC爲直三角形。C爲直角。對於A, B, C各角之邊各爲a, b, c。(如圖)



I. 已知斜邊c及一銳角A則

$$B=90^\circ-A$$

$$a=c.\sin A$$

$$b=c.\cos A$$

例 $c=8$, $A=60^\circ$ 求B, a, b

由上式　$\angle B=90°-60°=30°$

又　$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\cos 60°=\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad a=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

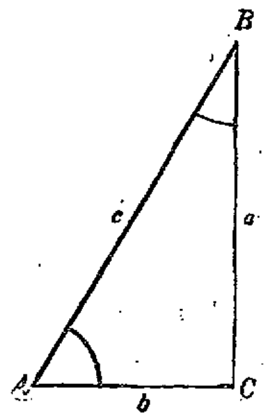
$$b=8\times\frac{1}{2}=4$$

II. 已知一銳角 B 及夾直角之一邊 a。則

$\angle A=90°-B$

$b=a.\tan B$

$c=\frac{a}{\cos B}$



例　$B=23°30'$，$a=575$，求 b, c, A。

由上式　$\angle A=90°-23°30'=66°30'$

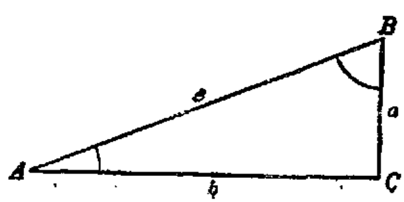
檢表知　$\tan 23°30'=0.4348$

$\cos 23°30'=0.9171$

$b=575\times0.4348\doteqdot250$

$c=\frac{575}{0.9171}\doteqdot627$

III. 已知斜邊 c 及夾直角之一邊 b。則



$\sin B=\frac{b}{c}$

$\angle A=90°-B$

又 $a=c.\sin A$

例 $b=15$, $c=27$, 求 $\angle B$, $\angle A$, a。

由上式 $\sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{15}{27}=0.5556$

由表計算知 $B=33°45'$

$$A=90°-33°45'=56°15'$$

$$\sin A=\frac{a}{c}$$

又 $\sin 56°15'=0.8315$

$$a=27\times0.8315=22.45$$

【注意】 此種問題。求 a 時亦可用

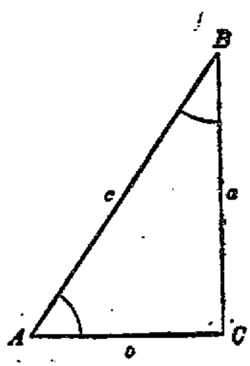
$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$ 公式。

IV. 已知夾直角之二邊。則

$$\tan A=\frac{a}{b}$$

$$B=90°-A$$

$$c=\frac{a}{\sin A}$$



【注意】 c 之值亦可用 $\sqrt{a^2+b^2}$ 求之。

例 $a=24$, $b=56$, 求 $\angle A$, $\angle B$, c。

由上式 $\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{24}{56}=0.4286$

由表計算知 $\angle A=23°12'$

$$B=90^\circ-23^\circ12'$$

$$=66^\circ48'$$

又　$\sin 23^\circ12'=0.3939$

$$c=\frac{24}{0.3939}=60.93$$

例　　題

試用C爲直三角形之直角。已知下列各件。求出其餘各件。

1.　$b=12,\ A=42^\circ10'$　　2.　$b=37,\ a=50$

3.　$a=16,\ B=38^\circ20'$　　4.　$c=2000,\ b=287$

5.　有ABC三角形。$BC=50,\ B=30^\circ,\ C=120^\circ$。自頂點A向對邊作垂線。其長若干。

6.　前題三角形之面積若干。

16. 高及距離之簡易測量　高及距離測量之簡易者。可用直三角形之解法求之。測之之時。所用器械。測鏈,經緯儀,及六分儀等。卽其主要者也。測鏈用以測距離。經緯儀六分儀用以測角度。

今將測量問題中常用名詞。示之如次。

鉛垂向　　卽吊重錘。自然垂下線之方向。

垂直線　　卽云鉛垂線方向之直線。

垂直面　　卽云含垂直線之平面。

水平面　卽云與垂直線直交之平面。

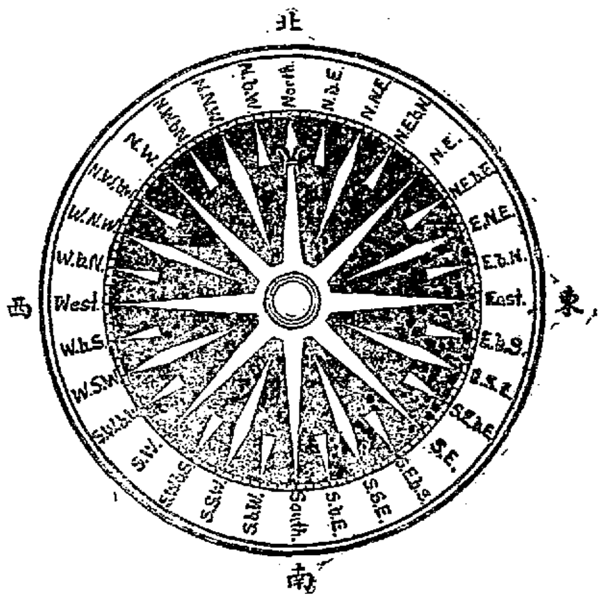
水平線　卽云在水平面上之直線。

水平角　謂角之二邊在水平面內者。

垂直角　謂角之二邊在垂直面內者。

垂直角之一邊在水平方向時。其他一邊向上者特稱曰仰角。向下者特稱曰俯角。仰角有時亦稱爲高度。

航海羅盤　係用圓盤。中裝磁針。於全面分爲三十二方位。按鐘表長短針旋轉之方向時。其各方位可順次記之如下。



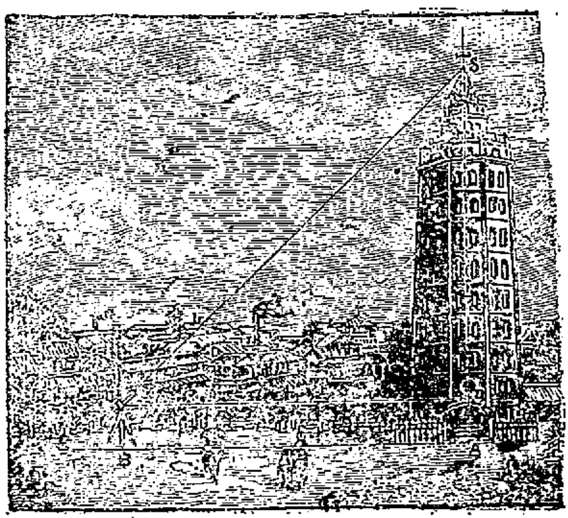
北　北微東，北北東，北東微北，北東，北東微東，東北東，東微北，東　東微南，

東南東，南東微東，南東，南東微南，南南東，南微東，南，南微西，南南西，南西微南，南西，南西微西，西南西，西微南，西，西微北，西北西，北西微西，北西，北西微北，北北西，北微西．

測地羅盤　亦係圓盤內裝羅針。記東西南北四方位。將全面360°等分之。自南北兩點起。向左右各記至90°之數字。

17. 應用問題

例1.　有物直立於水平面上。且測者可至其基。求物之高。



設有塔AS。直立地平面上。則於塔基相距適宜之處。（距離與AS(即塔高)不

甚相差者)取 B 點。以測鏈測得 AB 之長。然後以經緯儀之中心置於 B 點。測 $S\hat{C}D$ 角。就 SCD 直三角形內 $CD=AB$。而 $DA=CB$。又已知其 $S\hat{C}D$ 角。故將 $SD=CD\tan S\hat{C}D$。再加入經緯儀之高 CB。便得塔之高 h。

$$h=CD\tan S\hat{C}D+CB$$

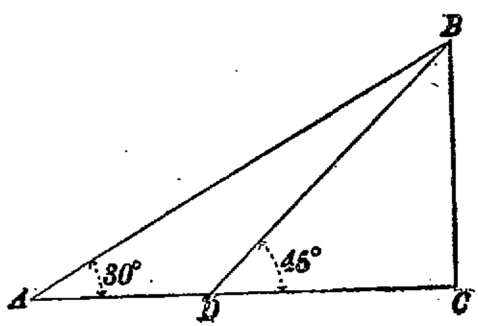
如上圖設 $AB=240$ 尺。經緯儀之高 4 尺。且測得 $S\hat{C}D=42^\circ$。由表知

$$\tan 42^\circ=0.9004$$

$$\therefore \quad h=240\times 0.9004+4\fallingdotseq 220\text{尺}$$

【注意】 如上例用器械觀測者。其結果恆須加入器械之高。以下各例則只舉其觀測之結果。略去測器之高。

例 2. 有一塔自正東之兩處測之。得仰角 45°及 30°今二測點之距離為 40 尺。問此塔高幾何。



塔之高為 BC。

二測點為A,D。則

$$AD=40$$

$$B\hat{A}C=30^\circ$$

$$B\hat{D}C=45^\circ$$

若設BC=x。則

$$DC=\frac{x}{tan45^\circ}=x$$

$$\therefore\quad AC\,tan\,BAC=BC$$

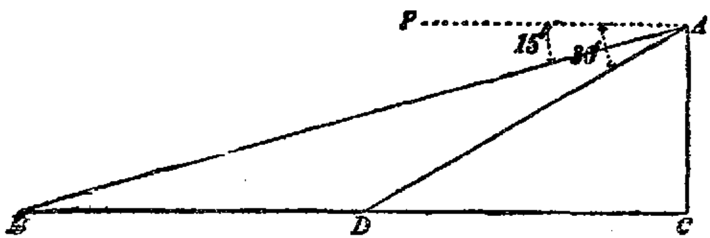
即　$$(x+40)\,tan\,30^\circ=x$$

即　$$(x+40)\frac{1}{\sqrt{3}}=x$$

$$x=20(\sqrt{3}+1)$$

例3. 自高300尺之懸崖上。測其正北處之二船。得俯角15°及30°問二船相距若干尺。

但 $tan75^\circ=2+\sqrt{3}$



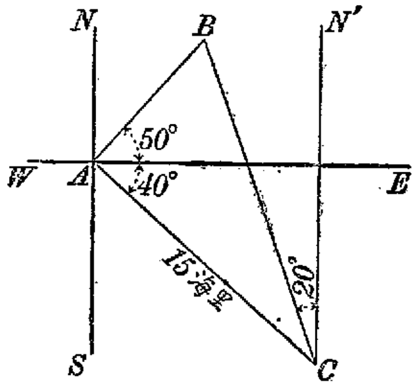
設AC為300尺之懸崖。B,D為二船之位置。又PAB=15°,PAD=30°則

$CD=AC\tan DAC=300\tan 60^\circ=300\sqrt{3}$

$BC=AC\tan BAC=300\tan 75^\circ=300(2+\sqrt{3})$

$\therefore\quad BD=BC-CD=300\times 2=600$尺

例 4. 有船以 $\frac{1}{}$ 之速度。向東偏南40°之方向航行。此船當上午九點鐘時。所見一港在東偏北50°之處。至11點鐘時。則見此港在北偏西20°之處。問此港與船前後兩位置之距離。



設B為港之位置,AC為船前後兩位置。則AC=15。過A點作東西南北兩線,則

$E\hat{A}C=40^\circ,\quad E\hat{A}B=50^\circ$

$\therefore\quad B\hat{A}C=90^\circ$

過C點亦引CN′。則 $B\hat{C}N'=20^\circ$

又 $A\hat{C}N'=C\hat{A}S=90^\circ-40^\circ=50^\circ$

$\therefore\quad A\hat{C}B=ACN'-BCN'=50^\circ-20^\circ=30^\circ$

故就BAC直三角形。

※船之速度言若干節者。即每點鐘行若干海里之謂。

$$AB = AC\,tan\,ACB = 15\,tan\,30° = 15 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= 5\sqrt{3}\text{海里}$$

而 $$BC = AC\,sec\,ACB = 15 sec 30°$$
$$= 15 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}\text{海里}$$

例　　題

7. 有一直立之樹。自其基相距36尺之處。測得仰角60°問樹木高幾何。

8. 長6尺之棒。若直立之。其日影之長為$2\sqrt{3}$尺。問太陽高度幾何。

9. 有燈臺距海面200尺。自其頂上測得二船俯角為45°及30°。而二船之方向。一在正北。一在正南。問二船之距若干。

10. 設太陽之高度為30°問4尺之棒直立時。所生之影長若干。

11. 有懸崖距海面326尺。自其頂上望見一船。其俯角為24°。問此崖與船之距若干。

12. 有一樓及一塔。同在一垂直面內。設樓之高30尺。自樓基處測得塔頂之仰角為45°。又自其頂上測得塔之仰角為30°。問塔之高若干。塔與樓之距若干。

13. 自小山頂測得兩個聯接記里標石※之俯角爲45°及22°。問小山高若干。但 $\cot 22° = 2.475$

14. 自高117尺之塔上。測得高37尺屋頂之俯角爲30°。問塔與屋之距離若干。

15. 測得某塔之影長100尺。同時測高9尺電柱之影長爲$3\sqrt{3}$尺。問太陽之高度及塔之高幾何。

16. 設於直線形河岸之一旁。有測者立在AB上之一點A。測對岸C點之視角BAC爲30°。今測者沿岸行400尺至B點。測得ABC角爲60°。問河寬若干。

17. 有一塔高200尺。自水平面上某點測之。其仰角爲3° 30′。問測點與塔之距離若干。

18. 自某處望見一塔。其仰角爲7° 10′。今向塔前進100尺。則仰角爲30°20′。問塔之高幾何。

19. 有人立於橋上。見前面有一船。得俯角7° 30′。設人眼與水面之距爲5尺。船之速度爲324尺。問此船須經過幾時可抵橋下。

20. 有一輕氣球在空中。自正南甲地望之。仰角

※記里標石。乃相隔一里所立標石。

為60°。同時自甲地正東相距一里之乙地望之。其仰角為45°。問輕氣球高幾何。

21. 設於海岸旁之懸崖上。建一高100尺之燈臺。今自懸崖之麓。測燈臺頂上及懸崖頂上之仰角。各為75°,.60°。問懸崖之高幾何。

22. 有直立之棒。其所生之影長對於棒長之比。為$\sqrt{3}:1$。今將此棒迴轉於含光源之垂直面。而不移動其下端。又使所生之影長。等於最初之影長。問棒與水平面所成之角度若干。

23. 有船向正南航行。初時見正西處有二燈臺。然航行10海里後。則見前之二燈臺。一在北西。一在西北西之方位。問初觀測處與二燈臺之距離若干。

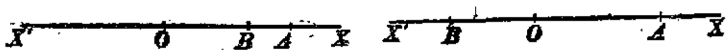
24. 有木製二等邊三角形之板。垂直立於地上。其頂向上。其面正向太陽。今設此三角形底為$2a$尺。高為h尺。太陽之高度為30°。問此三角形影之頂角一半之正切幾何。

25. 設有船每時速度為12海里,向北而行。今若有東流之水。每時速度為4里。問船當向何方進行。其速度若干。

第四編　任意角之三角函數

18. 應用(+),(−)符號表示方向

設X′OAX為一直線。O為其上之任一點。而A點在O之右。命OA=a. 自A點向O之方向取B點。



命　BA=b 則 OB=$a \sim b$

(I)　若$a>b$。則B點在O之右。

(II)　若$a<b$。則B點在O之左。

今設名O為原點。命$x=a-b$。因$a \gtrless b$。則x為正或負。而B點之位置在於原點之右或左。故以某方向所測之距離為正。則與之反對方向所測之距離不能不為負。今為便利起見。特定規則如次。

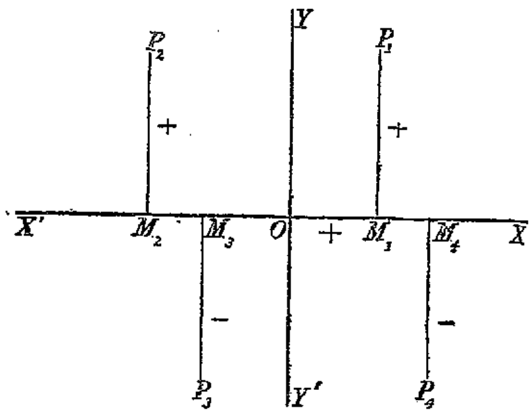
原點向右所測之距離為正。

原點向左所測之距離為負。

19.　如圖過O點作YOY′為XOX′之垂線。則將全平面分為四部分。XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX名為第一分面，第二分面，第三分面，第四分面。今設P為平面上一點。向XOX′引垂線PM.

因P點所在分面之數。附1,2,3,4於右脚下以區別之。則OM之正負。

由前節之規則所定。知OM_1,OM_4為正。OM_2,OM_3為負。至於PM之方向亦有正負。又設規約如下。



在X'OX上之點所作垂線為正。

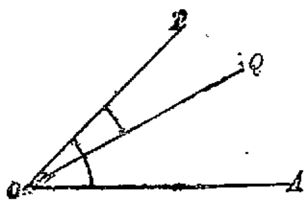
在X'OX下之點所作垂線為負。

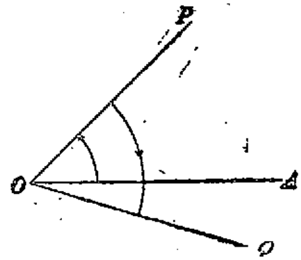
如P_1M_1, P_2M_2為正。P_3M_3,P_4M_4為負。

20. 正角及負角　有直線由OA起。以O為樞。迴轉A角度至於OP。成AOP角。今此直線反前之方向迴轉B角度。至於OQ。則

$$A\hat{O}Q=A\sim B$$

若A>B即A−B為正。則如下一圖OQ在OA之上方。若A<B即A−B為負。則如下二圖OQ在OA之下方。





設B爲零。則OQ合於OP,AOQ角卽由OA起迴轉。與鐘表針方向相反。設A爲零。則OP合於OA。AOQ角卽由OA起迴轉。與鐘表針方向相同。今欲區別此二角。亦用正負兩號。且名OA爲首線。移動之直線如OP,OQ。名爲動徑。則得下之規則。

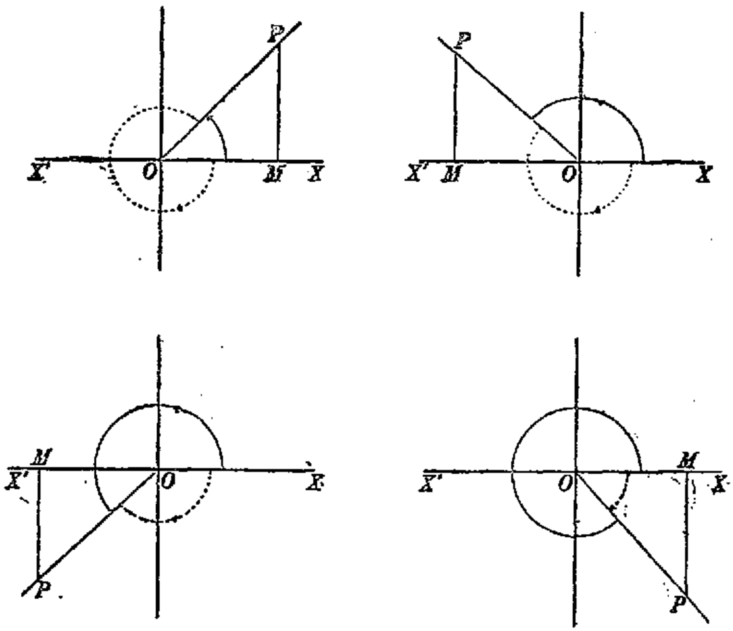
動徑由首線起廻轉與鐘表針之方向反對者.其所成角度爲正.反之而順鐘表長短針之方向廻轉者.其所成角度爲負。

21. 三角函數定義之擴張

從角之一邊上。任取一點。向他邊或其延長線作垂線。則成直三角形。可適用第4節定義。說明角之三角函數。惟夾直角之二邊。當照18,19二節分別正負。而斜邊則恆定爲正數者也。

玆將各分面三角函數之正負分列於下。

。設OP動徑。向正方向或負方向迴轉所成之角。自P點向OX或XO之延長線引垂線PM。則如圖所示。分別正負。知



第一分面內各三角函數爲正。

第二分面內OM爲負,OP爲正。故正弦爲正.餘弦,正切爲負。

第三分面內OM,PM爲負.OP爲正.故正弦,餘弦爲負。正切爲正。

第四分面內OM,OP爲正。PM爲負。故正弦及正切爲負。餘弦爲正。

今列表如次。

分　　面	I	II	III	IV
正弦　餘割	+	+	−	−
餘弦　正割	+	−	−	+
正切　餘切	+	−	+	−

【注意】三角函數雖有正負。然7節之公式仍能成立。

例　　題

1. 與XOX′相距5寸。且與YOY′相距3寸之點。於四分面內。有何區別。

2. 問下列各角。其動徑在何分面內。試列舉之。

(1) 280° (2) 150° (3) 235° (4) −100° (5) 530°

(6) −440° (7) −1020° (8) 2795° (9) −870° (10) 760°

3. 餘弦,正弦均爲負數之角。其動徑在何分面。又問有無各三角函數均爲負數之角。

22. 大於360°角之三角函數　凡360°+A角之動徑與A角之動徑。其位置方向全同。故其各

三角函數絕對值及符號。亦全然相同。今若設 n 為任意整數。則

$(n\times 360^\circ+A)$之三角函數＝

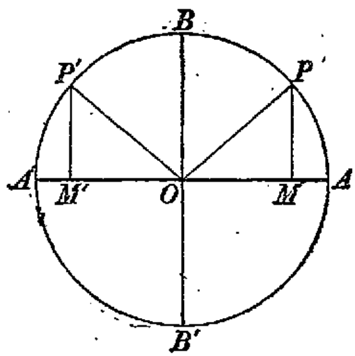
A之三角函數。……………………………… [6]

例如 $\sin 2200^\circ=\sin(6\times 360^\circ+40^\circ)=\sin 40^\circ$ 是也。故360°以上角之三角函數。可導至360°以下之角之三角函數。

23. 餘角定義之擴張 凡二角之和。等於90°者。二角互為餘角。例如−30°與120°互為餘角。−150°與240°互為餘角是也。

24. 補角定義之擴張 凡二角之和。等於180°者。二角互為補角。例如145°與35°互為補角。−100°與280°亦為補角。

25. 補角之三角函數 O為中心。OA為半徑。作一圓。周內引AOA′，BOB′為直交二直徑。



動徑自OA起。迴轉A角後之位置為OP。又動

徑自 OA' 起。反前之方向迴轉 A 角後之位置為 OP'。

$$\therefore \quad A\hat{O}P'=180^\circ-A$$

自 P, P′ 引 PM, $P'M'$ 垂直於 AOA'。則 POM 及 $P'OM'$ 兩三角形全相等。又因 $A'\hat{O}P'=A\hat{O}P$。故 P, P′ 在 AOA' 之同側。在 BOB' 之異側。所以 PM 與 $P'M'$ 同符號。OM 與 OM' 異符號。

$$\therefore \quad P'M'=PM,\ OM'=-OM,\ OP'=OP$$

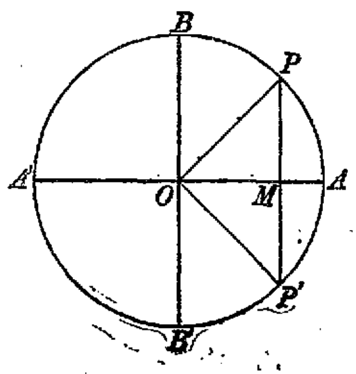
依 21 節卽得

$$\sin(180^\circ-A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{PM}{OP}=\sin A \cdots\cdots\cdots\cdots [7]$$

$$\cos(180^\circ-A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP'}=-\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots [8]$$

$$\tan(180^\circ-A)=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{PM}{-OM}=-\tan A \cdots\cdots\cdots\cdots [9]$$

26. $-A$ 之三角函數



如前法畫圓周。惟 OP' 係自 OA 起。反對 OP 方向迴轉 A 角後動徑之位置。故 $A\hat{O}P'=-A$。將 P, P′ 相聯。與 OA 或 AO 之延長線相交於 M。則 $OP=OP'$。且 M 處之角為直角。故 PO

M與P′OM兩三角形全等。而P與P′在AOA′之異側。

$\therefore\quad P'M=-PM\quad OP'=OP$

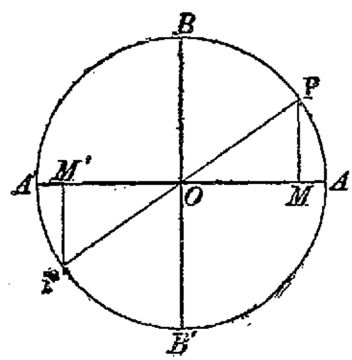
$$\therefore\quad sin(-A)=\frac{P'M}{OP'}=\frac{-PM}{OP}=-sinA \cdots\cdots\cdots [10]$$

$$cos(-A)=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{OP}=cosA \cdots\cdots\cdots [11]$$

$$tan(-A)=\frac{P'M}{OM}=\frac{-PM}{OM}=-tanA \cdots\cdots\cdots [12]$$

27. 180°+A之三角函數

與前節同法畫圓周。惟OP′係自OA′起。順OP之方向迴轉A角後動徑之位置。故POP′成一直線。$A\hat{O}P'=180°+A$。



如前知P′OM′與POM兩三角形全等。但P與P′係在AOA′及BOB′之異側。故

$P'M'=-PM,\ OM'=-OM,\ OP=OP'$

$$\therefore\quad sin(180°+A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{-PM}{OP}=-sinA \cdots\cdots [13]$$

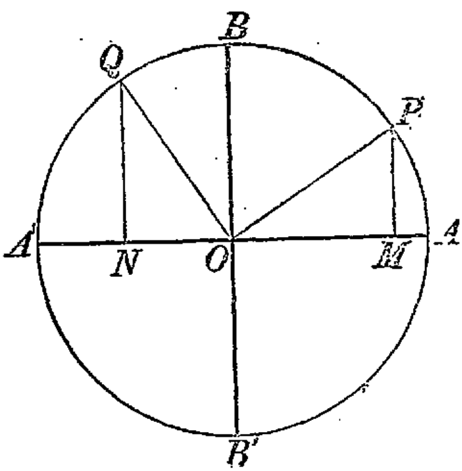
$$cos(180^\circ+A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-cosA \cdots\cdots\cdots\cdots [14]$$

$$tan(180^\circ+A)=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{-PM}{-OM}=tanA \cdots\cdots\cdots\cdots [15]$$

〔注意 i〕 22至27節所證明者。P點在圓周上任意一位置均能成立。故AOP之角亦可爲任意之角。

【注意 ii】 不同二銳角。不能有同值之同三角函數。卽知一分面內所含不同二角之同三角函數。亦不同值。故A，180°−A，180°+A，−A及角之加減360°任意整數倍者。其三角函數皆係絕對值相等。(其間有符號相反者)所以凡任意角之三角函數。均可導爲第一分面以內角之三角函數。更用餘角之理可改爲45°以內角之三角函數。

【注意 iii】 22節及25—27節之公式。用單位圓證之亦可。



28. 90°+A之三角函數

仍如前法畫圓周。設$A\hat{O}P=A$。而OQ

係自 OB 起。迴轉 A 角後動徑之位置。於是自 P,Q 向 AOA′ 引垂線 PM, QN。則

$A\hat{O}Q=90°+A$,

又　$N\hat{Q}O=Q\hat{O}B=P\hat{O}M$

$OP=OQ$,

且於 MN 處之角又為直角。

故 QON 與 OPM 兩三角形全等。由幾何學知

$PM=ON, \ OM=QN$

若論及符號。因 P 在 AOA′ 之上或在其下。則 Q 在 BOB′ 之左。或在其右。故 ON 為負。則 PM 為正。ON 為正。則 PM 為負。所以 PM 與 ON 皆為異號。而 OM 與 QN 則為同號。

$$\therefore \frac{QN}{OQ}=\frac{OM}{OP} \text{ 卽 } \sin(90°+A)=\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{[16]}$$

$$\frac{ON}{OQ}=-\frac{PM}{OP} \text{ 卽 } \cos(90°+A)=\sin A \cdots\cdots\cdots \textbf{[17]}$$

$$\frac{QN}{ON}=-\frac{OM}{PM} \text{ 卽 } \tan(90°+A)=-\cot A \cdots\cdots \textbf{[18]}$$

例　題

4.　求 (1) 135°, (2) 150°, (3) 240°, (4) 300°, 之三角函數。

5.　求 −240°, 405°, −45°, 750°, 810°, 4005° 之正弦。

6. 試求 $510°$, $-30°$, $3540°$, $225°$, $315°$ 之餘弦。及 $120°$, $225°$, $-585°$, $750°$, $7320°$ 之正切。

7. 求 $\sin 480°$, $\cos 4080°$, $\tan 840°$ 之數。

8. $\sin 7321°$, $\cos(-8146°)$, $\tan 7389°$ $\cot 375°$, $\sec(-8325°)$, 各三角函數。改爲45°以內之角之三角函數。

9. 用A之三角函數。表 $270°+A$ 及 $270°-A$ 之三角函數。

10. 不論A爲如何之數。下列二式。均能成立。試證之。

$\cos(90°-A)=\sin A$ $\cot(90°-A)=\tan A$

11. 若 $\sin B=\sin A$, $\cos B=\cos A$ 則 $A-B$ 之値必爲0°或180°之倍數。

12. 求 $A-90°$ 及 $A-180°$ 之三角函數。

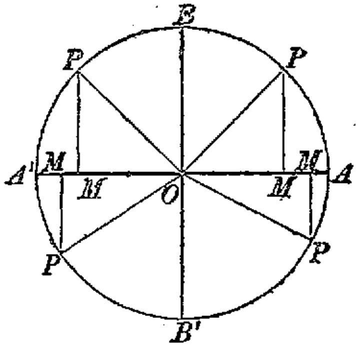
13. 已知 $\cot x=-\sqrt{3}$, 又 x 在第二分面內。問 x 之値。

14. $\cos^2 A+\cos^2(90°+A)+\cos^2(180°+A)+\cos^2(270+A)=2$ 試證之。

15. $\cot(-\alpha)\operatorname{cosec}(-\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\cos(-\alpha)$ 試證之。

29. 0°至360°間各角之三角函數之變化

O爲中心，OA爲半徑畫圓周。又作直交二直徑AOA′，BOB′。設OP動徑自OA起迴轉其所成角漸次增大至360°。又於P點向AOA′引垂線PM。若命OA=γ。則OP恆爲正。且恆等於γ。



(1) OP自OA起向OB迴轉。則AOP角(命爲A)自0°漸變至90°。而PM漸由0變爲γ。且皆爲正數。而OM則由γ減少至0。故在第一分面內。

$sinA=\left(\frac{PM}{OP}\right)$爲正自0增大至1

$cosA=\left(\frac{OM}{OP}\right)$爲正自1減小至0

$tanA=\left(\frac{PM}{OM}\right)$爲正自0增大至$\infty$

(2) OP自OB起向OA′迴轉。則A自90°增至180°。PM自γ變爲0。而OM則由0變爲−γ。且其中皆係負數。故在第二分面。

$\sin A=\left(\frac{PM}{OP}\right)$ 為正自 1 變至 0

$\cos A=\left(\frac{OM}{OP}\right)$ 為負自 0 變至 -1

$\tan A=\left(\frac{PM}{OM}\right)$ 為負自 $-\infty$ 變至 0

(3) OP 自 OA′ 起向 OB′ 迴轉。則 A 角自 180° 變至 270°。PM 自 0 變為 $-\gamma$。且其中皆係負數。而 OM 則由 $-\gamma$ 變為 0。且其中皆為負數。故在第三分面。

$\sin A=\left(\frac{PM}{OP}\right)$ 為負由 0 變至 -1。

$\cos A=\left(\frac{OM}{OP}\right)$ 為負由 -1 變至 0。

$\tan A=\left(\frac{PM}{OM}\right)$ 為正由 0 變至 ∞。

(4) OP 自 OB′ 起向 OA 迴轉。則 A 由 270° 變至 360°。PM 自 $-\gamma$ 變為 0。其中皆係負數。而 OM 則由 0 變為 γ。其中皆係正數。故在第四分面。

$\sin A=\left(\frac{PM}{OP}\right)$ 為負自 -1 變至 0

$\cos A=\left(\frac{OM}{OP}\right)$ 為正自 0 變至 1

$\tan A=\left(\frac{PM}{OM}\right)$ 為負自 $-\infty$ 變至 0

【注意】 若角度超過360°漸次增大。則其三角函數之變化。復與前同。

例 題

16. 求 $\cos 405°$, $\tan 210°$, $\cot(-315°)$ 之值。

17. 問 $130°$, $290°$, $-340°$ 各三角函數之符號。

18. A 爲三角形之內角。且已知 $\cos A=-\frac{4}{5}$。試求 $\sin A$ 及 $\tan A$ 之值。

19. 已知 $A=-25°19'$ 及 $\sin A=-\frac{3}{7}$ 求 $\cos A$ 及 $\cot A$ 之值。

試求下列各式之值。

20. $2\cos 120°\sin 225°-3\sin 120°\tan 135°$

21. $\tan 150°\cos 0°+3\cos 180°\cos 150°$

22. $a^2\cos 0°-b^2\sin 270°-2ab\tan 135°\cot 225°$

23. $\cos 180°\tan(-45°)+\sin 150°\sec 210°$

※I 圖,II 圖係表自 0°至 360°間正弦餘弦之變化。

III圖係表自 0°至 360°間正切之變化。

此圖示法。乃於 0 點取直交縱橫二直線。沿橫線以適宜長爲單位所取之數表示自 0°至 360°之角。沿縱線以適宜長爲單位所取之數。表其相當三角函數之值。此表示此三角函數值之縱線。其一端各點順次連結之。可畫成一曲線。

試證下列各式。

24. $\dfrac{\sin^4 A-\cos^4 A}{1-2\sin A\cos A}\times\dfrac{1-\cot A}{\sin A+\cos A}=\operatorname{cosec} A$

25. $\cos\theta(\tan\theta+2)(2\tan\theta+1)=2\sec\theta+5\sin\theta$

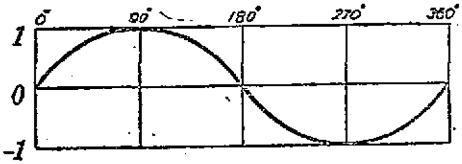
26. $\{\sin(90^\circ+A)+\cos(90^\circ+A)\}\{\sec(90^\circ-A)-\sec A\}$

$$=\sec A\sec(90^\circ-A)-2$$

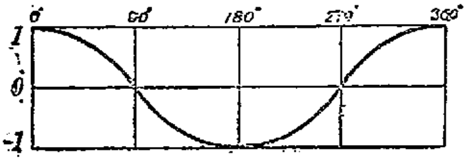
27. $\dfrac{\sin^3(90^\circ+A)+\cos^3(90^\circ+A)}{\sin(180^\circ+A)+\cos(360^\circ-A)}=1+\sin(90^\circ+A)\times$

$$\cos(270^\circ+A)$$

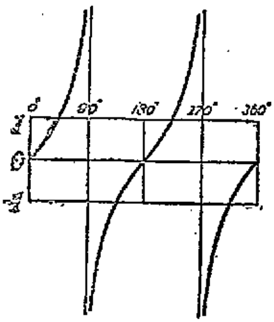
(I)



(II)



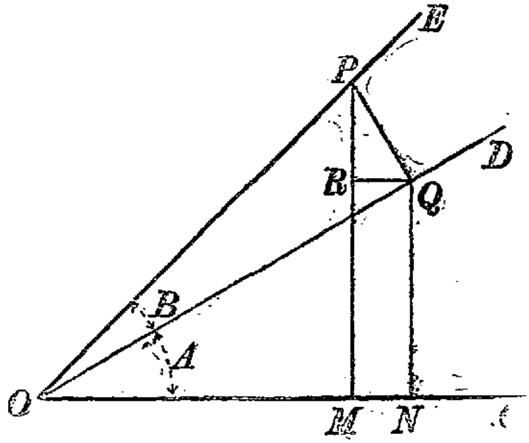
(III)



第五編　和差角之三角函數

30. $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A+B)$ 之公式。

設 $C\hat{O}D=A$, $D\hat{O}E=B$ 則 $C\hat{O}E=A+B$



今於OE上取任意一點P。向OC,OD各引垂線PM,PQ。又自Q點向PM,OC亦引垂線QR,QN。則 $P\hat{M}O$, $P\hat{Q}O$ 均為直角。由幾何學定理知O,P,Q,M在一圓周上。

$$\therefore Q\hat{P}M=Q\hat{O}M=A。$$

由定義　$\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}$

$$=\frac{QN}{OP}+\frac{PR}{OP}=\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{PR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

即　$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$……………………**[19]**

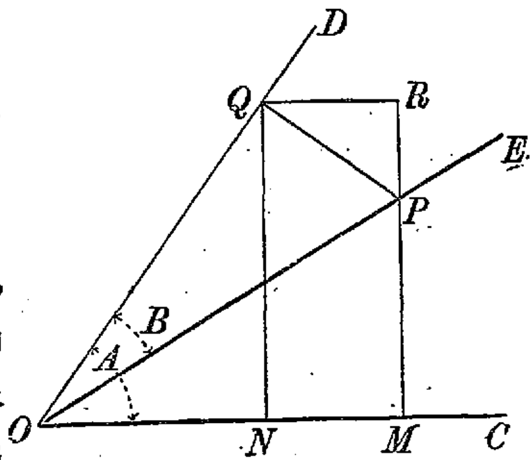
又　$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-NM}{OP}=\frac{ON}{OP}-\frac{QR}{OP}$

$$=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

即　$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$……………………**[20]**

31. $\sin(A-B)$及$\cos(A-B)$之公式。

設　$C\hat{O}D=A$, $D\hat{O}E=B$ 則 $C\hat{O}E=A-B$ 先於OE上任取P點。向OC, OD各引垂線PM, PQ。又自Q點向PM之延長線及OC邊引垂線QR, QN。準前同理知O, M, P, Q在一圓周上。



$$\therefore Q\hat{O}M+Q\hat{P}M=2R$$

$$\therefore Q\hat{O}N+Q\hat{P}M=R\hat{P}Q+Q\hat{P}M$$

$$\therefore R\hat{P}Q=A$$

由定義　$\sin(A-B)=\frac{PM}{OP}=\frac{RM-PR}{OP}=\frac{QN}{OP}-\frac{PR}{OP}$

$$=\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{PR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

卽 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ ……………………【21】

又 $\cos(A-B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON+NM}{OP}=\frac{ON}{OP}+\frac{QR}{OP}$

$$=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

卽 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ ……………………【22】※

例 題

證明下列各等式(1—4)。

1. $2\sin(30°-A)=\cos A-\sqrt{3}\sin A$

2. $\sin(45°+A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A+\sin A)$

3. $\cos(A+45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

4. $\sin 15°=\cos 75°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\sin 75°=\cos 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

5. 設已知 $\sin A=\frac{4}{5}$, $\sin B=\frac{3}{5}$, 求 $\sin(A-B)$ 及 $\cos(A-B)$ 之值。

6. 設已知 $\sin A=0.6$, $\sin B=\frac{5}{13}$。求 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A+B)$。

※【19】至【22】各公式。不論 A, B 值如何。均爲眞確。可就種種圖形分別證之。茲不贅。

7. 設已知 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin B=\frac{1}{\sqrt{10}}$。則 $A+B$ 最小之值為45°。試證之。

試證下列各式(8至15)

8. $\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}=\tan A$

9. $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

10. $\cot\alpha-\tan\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

11. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

12. $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

13. $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

14. $\tan^2\alpha-\tan^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$

15. $\sin(nA)\cos A+\cos(nA)\sin A=\sin[(n+1)A]$

32. $\tan(A+B)$ 及 $\tan(A-B)$ 之公式。

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

此分子分母同以 $\cos A\cos B$ 除之。且變為正切函數。則得

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots[23]$$

同理 $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots[24]$$

33. $\cot(A+B)$ 及 $\cot(A-B)$ 之公式。

準前節類似方法。得下列二式。

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}\cdots\cdots\cdots[25]$$

$$\cot(A-B)=-\frac{\cot A\cot B+1}{\cot A-\cot B}\cdots\cdots\cdots[26]$$

例　　題

16. 設 $\tan A=1$, $\tan B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 則 $\tan(A+B)=2+\sqrt{3}$ 試證之。

17. $\tan A=\frac{5}{6}$, $\tan B=\frac{1}{11}$。則 $\tan(A+B)=1$。試證之。

18. 試求前題 $A+B$ 之值在 $360°$ 以下者。

19. $\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan B=\frac{1}{3}$。求 $\tan(A+B)$ 之值。

20. $\cot A=\frac{5}{7}$, $\cot B=\frac{5}{7}$。求 $\cot(A+B)$ 及 $\tan(A+B)$ 之值。

21. $\cot A=\frac{11}{2}$, $\tan B=\frac{7}{24}$。求 $\cot(A-B)$ 及 $\tan(A+B)$ 之值。

試證下列各等式。

22. $\tan 75°=\cot 15°=2+\sqrt{3}$

23. $\cot 75°=\tan 15°=2-\sqrt{3}$

24. $\tan(45°+\theta)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$,　$\tan(45°-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$。

25. $\cot(45°+\theta)=\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$, $\cot(45°-\theta)=\dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$。

26. $\tan(\theta-45°)+\cot(\theta+45°)=0$。

27. 若 $\alpha+\beta+\gamma=90°$, 則

$$\tan\gamma=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}。$$

28. $\dfrac{\tan(n+1)A-\tan nA}{1+\tan(n+1)A\tan nA}=\tan A$。

34. 倍角正弦餘弦之公式

[19],[20] 兩公式中,設 $B=A$ 則

$$\sin 2A=2\sin A\cos A \cdots\cdots [27]$$

$$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A \cdots\cdots [28]$$

$$=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A \cdots\cdots [29]$$

又 $\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$

$$=2\sin A\cos^2A+(1-2\sin^2A)\sin A$$

$$=3\sin A-4\sin^3A \cdots\cdots [30]$$

同法得 $\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A \cdots\cdots [31]$

35. 倍角正切餘切之公式

[23],[24]二式中。設 $B=A$ 則

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A} \cdots\cdots [32]$$

$$\cot 2A=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A} \cdots\cdots [33]$$

例　　題

29. $\cos A=\frac{1}{5}$，求 $\cos 2A$ 之值。

30. $\sin A=\frac{1}{4}$，求 $\cos 2A$ 之值。

31. $\sin A=\frac{1}{2}$，且 A 爲 90°以內之角。求 $\sin 2A$ 之值。

32. $\cos\theta=\frac{1}{3}$，且 $270<\theta<360°$。求 $\sin 2\theta$ 之值。

33. $\tan A=\frac{1}{3}$，求 $\tan 2A$ 之值。

34. $\tan\theta=\frac{1}{7}$，求 $\sin 2\theta$ 及 $\cos 2\theta$ 之值。

35. $\cos A=\frac{1}{2}$，求 $\cos 3A$ 之值。

36. $\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\sin 3A$ 之值。

37. $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$。試證之。又

設 $\tan A=3$。則 $\tan 3A$ 之值如何。

38. 試證 $\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}$

39. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$，$\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\tan^2\theta$ 試證之。

40. $\frac{3\sin A-\sin 3A}{\cos 3A+3\cos A}=\tan 3A$ 試證之。

36. 分角三角函數之公式

於[29]公式內之A。以$\frac{1}{2}$A代之。且左右略爲變更，卽得

$$\sin^2\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(1-\cos A)\cdots\cdots\cdots[34]$$

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(1+\cos A)\cdots\cdots\cdots[35]$$

故 $$\tan^2\frac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\cdots\cdots\cdots[36]$$

37. $\sin 18^\circ=\cos 72^\circ$之值。

設 $A=18^\circ$。 則 $5A=90^\circ$

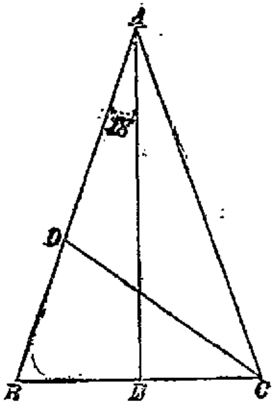
故　$\sin 2A=\sin(90^\circ-3A)=\cos 3A$

卽　$2\sin A\cos A=4\cos^3A-3\cos A$　以$\cos A$除之則得

$$2\sin A=4\cos^2A-3=1-4\sin^2A$$

爲$\sin A$之二次方程式。解之而只取其正根。則得

$$\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=\cos 72^\circ$$



【注意】 $\sin 18^\circ$之值。更可由幾何圖形求之。

設ABC爲二等邊三角形。其底角B，爲頂角A之2倍。則

$$A+2A+2A=180^\circ$$

$$\therefore A=36^\circ$$

引AE平分A角線至BC。則

平分BC。

故　$B\hat{A}E=18°$

又引C角之平分線CD。則由幾何學定理。

$$AB \cdot BD = AD^2。$$

但　$AD=CD=BC=2BE$。

命$BE=x$，$AB=a$。

則　$a(a-2x)=(2x)^2$

解之得　$x=\frac{a}{4}(-1\pm\sqrt{5})$。

然　$\sin 18°=\frac{BE}{AB}=\frac{x}{a}$。

故於上之x二根中只取其正根代入。卽得

$$\sin 18°=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)。$$

例　題

證明下列各等式。

41. $\cos 18°=\sin 72°=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$。

42. $\sin 54°=\cos 36°=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$。

43. $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\frac{A}{2}$。

44. $\frac{\sec\theta-1}{\sec\theta}=2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。

45. $\sin 8A=8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A$。

46. $(\cos\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}A)^2=1+\sin A$。

47. $(\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A)^2=1-\sin A$。

48. $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\sin 54^\circ$。

49. $\cos 36^\circ-\sin 18^\circ=\frac{1}{2}$。

50. $\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ=\frac{3}{4}$。

51. $4\sin 18^\circ\cos 36^\circ=1$。

52. $\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=2$。

53. $\frac{1}{\tan 3A-\tan A}+\frac{1}{\cot A-\cot 3A}=\cot 2A$,

54. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\cdot\frac{\cos A}{1+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$。

55. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cot\frac{\theta}{2}+1}{\cot\frac{\theta}{2}-1}$。

38. 基本公式之變形

由【19】至【22】之公式。每取兩式加減之。則得

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \cdots\cdots [37]$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \cdots\cdots [38]$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \cdots\cdots [39]$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B \cdots\cdots [40]$$

若於此各公式中再命 $A+B=C$, $A-B=D$, 則

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \cdots\cdots [41]$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \cdots\cdots [42]$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \cdots\cdots [43]$$

$$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \cdots\cdots [44]$$

例 1. $\sin 14\theta+\sin 6\theta=2\sin\frac{14\theta+6\theta}{2}\cos\frac{14\theta-6\theta}{2}$

$$=2\sin 10\theta\cos 4\theta$$

例 2. $\cos 70^\circ-\cos 10^\circ=-2\sin 40^\circ\sin 30^\circ$

$$=-\sin 40^\circ$$

例 3. $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{3A}{2}+\frac{5A}{2}\right)+\cos\left(\frac{3A}{2}-\frac{5A}{2}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos 4A+\cos(-A)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 4A+\cos A)$$

例4. $2\sin 75°\sin 15°=\cos(75°-15°)-\cos(75°+15°)$

$$=\cos 60°-\cos 90°$$

$$=\frac{1}{2}-0$$

$$=\frac{1}{2}$$

例題

試將下列各式變爲和較之形。其可以簡單者更簡單之。(56乃至61)

56. $2\sin\alpha\cos\beta$。 **57.** $\cos\gamma\cos\delta$。

58. $2\sin 2\alpha\cos 3\beta$。 **59.** $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$。

60. $\sin 4\theta\sin\theta$。 **61.** $\sin 45°\sin 15°$。

試將下列各式變爲相乘積之形。其可以簡單者更簡單之。(62乃至67)

62. $\sin 10\theta+\sin 4\theta$。 **63.** $\sin 60°+\sin 20°$。

64. $\sin 40°-\sin 10°$。 **65.** $\cos 8\theta+\cos 2\theta$。

66. $\cos 6\theta-\cos 4\theta$。 **67.** $\cos 5A-\cos 4A$。

試證明下列各等式。

68. $\sin 7A-\sin 5A=2\cos 6A\sin A$。

69. $\cos A-\cos 2A=2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{A}{2}$。

70. $\dfrac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\dfrac{3\theta}{2}$。

71. $\dfrac{\sin 2\theta-\sin\theta}{\cos\theta-\cos 2\theta}=\cot\dfrac{3\theta}{2}$。

72. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin B-\sin A}$。

73. $\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)=\sqrt{2}\sin A$。

74. $\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 5\theta=\sin 3\theta(1-2\cos 2\theta)$。

75. $\dfrac{\cos 7\theta+\cos 3\theta-\cos 5\theta-\cos\theta}{\sin 7\theta-\sin 3\theta-\sin 5\theta+\sin\theta}=\cot 2\theta$。

第六編　對　數

39. 對數之定義及記法　設有一數之若干乘方。適等於其他之某數。則此乘方指數。名爲以第一數爲底第二數之對數。

如　$a^x=y$。則 x 爲 y 之 a 底對數。以 $x=log_a y$ 表之。或記作 $y=log_a^{-1}x$。

【注意】由此定義。可得次之關係。

1.　$a^0=1$　　$\therefore\ log_a 1=0$

2.　$a^1=a$　　$log_a a=1$

3.　$a^m=a^m$　　$log_a a^m=m$

40. 對數之重要性質

I.　積之對數。等於其因數對數之和。

設　$log_a x=p$　　$log_a y=q$

則　$x=a^q$　　$y=a^p$

$\therefore\ xy=a^p\times a^q=a^{p+q}$

$\therefore\ log_a(xy)=p+q=log_a x+log_a y$

同理證得　$log_a(xyz\cdots)=log_a x+log_a y+log_a z+\cdots\cdots$

II.　商之對數。等於被除數之對數減除數之對數。

設 $\log_a x=p$ $\log_a y=q$

則 $x=a^p$ $y=a^q$

$\therefore$ $x\div y=a^p\div a^q=a^{p-q}$

$\therefore$ $\log_a(x\div y)=p-q=\log_a x-\log_a y$

III. 某數任意乘方之對數。等於此數對數與其乘方指數之積。

設 $\log_a x=p$ 則 $x=a^p$

$\therefore$ $x^m=a^{pm}$

$\therefore$ $\log_a x^m=p\times m=\log_a x\times m$

IV. 某數之 b 底對數。等於此數之 a 底對數。與 a 之 b 底對數之相乘積。

設 $\log_a x=p$ $\log_b x=q$

則 $x=a^p$ $x=b^q$

$$\therefore a^p=b^q \quad 卽 \quad a=b^{\frac{q}{p}}$$

$$\therefore \log_b a=\frac{q}{p}=\frac{\log_b x}{\log_a x}$$

故 $\log_b x=\log_a x\times\log_b a$

例 題

試求下列各對數之值。(1至6)

1. $log_2 1024$　　2. $log_{\frac{1}{2}} 0.125$

3. $log_{\sqrt{3}} 81$　　4. $log_{0.1} 10$

5. $log_4 \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$　　6. $log_2 sin 45°$

7. 試證 $7log_a \frac{15}{16} - 6log_a \frac{3}{8} + 5log_a \frac{2}{5} - log_a \frac{25}{32} = log_a 3$,

又問(1)至(7)各題之10底對數幾何。

8. 已知 $log_{10} 3 = .47712$, $log_{10} 5 = .69897$.

求 $log_{10} 3.75$, $log_{10} 1.28$ 及 $log_{10} \frac{3^3 \times 5^3}{27}$.

9. 已知 $log_{10} 5 = .69897$, $log_{10} 7 = .84510$.

求 $log_{10} 1.25$, $log_{10} 1.28$ 及 $log_{10} \frac{2^3 \times 7^4}{5^5}$。

10. 已知 $log_8 9 = a$, $log_2 5 = b$, $log_5 7 = c$.

求 a, b, c。

41. 常用對數 凡高等數理所用之對數。皆爲自然對數。(又稱納白爾對數)。係以2.71828……$\left(=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)$爲底之對數。然於實用上。不如以10爲底之對數。較爲便利。此種對數。名爲常用對數。

本書以後所論者皆爲常用對數。故常用對數。無容

再記其底。如 $\log_{10}a$ 直以 $\log a$ 表之。

又數之對數。多爲不盡之數。若取其近似數時。必有整數部分及小數部分。整數部分之數。謂之指標。小數部分之數。謂之假數。

42. 由對數之定義及其性質。可得下列各定理。

(I) n 位整數之對數。其指標爲 n-1。小數點下至有效數字有 n 個零之小數。其對數之指標爲 -(n+1)。

證　$10^n>n$ 位之數 $>10^{n-1}$

$\therefore \log 10^n>n$ 位整數之對數 $>\log 10^{n-1}$

$\therefore n>n$ 位整數之對數 $>n-1$

故 n 位整數之對數。其指標爲 $n-1$。

又 $\frac{1}{10^n}>$ 零點下 n 圈之小數 $>\frac{1}{10^{n+1}}$

$\log 10^{-n}>$ 零點下 n 圈小數之對數 $>\log 10^{-(n+1)}$。

$-n>$ 零點下 n 圈小數之對數 $>-(n+1)$

但對數之假數。皆使之爲正。故小數點下有 n 圈之小數。其指標爲 $-(n+1)$

此指標之負號。常記於指標之上。以免與全體相

混。

例如 $\log 584=2.76641$

$\log 0.00031=\bar{4}.49136$

所以對數表中所列者。均不記其指標。因其指標可由上列定理。卽時決定之也。

(II) 設有各數。其數字及順序均相同。而大小各異。則其對數之假數不變。

證 $\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$

$\log(a\div 10^n)=\log a-\log 10^n=-n+\log a$

例如 $584=5.84\times 10^2$

$\therefore \log 5.84=\log 5.84+\log 10^2=0.76641+2$

又 $0.000584=5.84\times 10^{-4}$

$\therefore \log 0.000584=\log 5.84+\log 10^{-4}=0.76641-4$。

故 0.000584, 5.84, 584 等數字及順序相同之數。其假數不變。

(III) 某數逆數之對數。等於原數之對數變符號。

證 $\log\frac{1}{a}=\log 1-\log a=-\log a$。

但實際上計算。對數全體。不能均爲負數。必須將

假數改為正號。今命 $\log a$ 之指標及假數為 p, q。則

$$-\log a = -(p+q)。$$

因 q 之數小於 1 故 $1-q$ 必為正數。

$$\therefore -(p+q) = -p-q = -(p+1)+(1-q)。$$

故欲求某數逆數之對數。則由 1 減去原對數之假數為假數。又將原對數之指標加 1 變符號為指標。即得。

例如
$$\log\frac{1}{584} = -\log 584 = -2.76641。$$
$$= \bar{3}.23359。$$
$$\log\frac{1}{0.0584} = -\log 0.0584 = \bar{2}.76641。$$
$$= 1.23359。$$

【注意】某數之對數。若變其符號。則名為原數之餘對數。故減去某數之對數。可云加入此數之餘對數。通例餘對數以 colog 記之。

43. 對數之四則

對數中常有正負兩項。故其加減乘除時。可作為代數式之加減乘除。

例 1.

$$\begin{array}{r} \bar{2}.93247 \\ +)\ \bar{1}.67852 \\ \hline \bar{2}.61099. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.56348 \\ +)\ \bar{5}.74586 \\ \hline \bar{1}.30934. \end{array}$$

例 2. $(2.63849+\bar{3}.54654)-(\bar{2}.57403+2.21219)$

$=2.63849+\bar{3}.54654+(-\bar{2}.57403)+(-2.21219)$

算　　式

$$\begin{array}{r}
2.63849\\
\bar{3}.54654\\
-\bar{2}.57403=1.42597\\
-2.21219=\bar{3}.78781\\
\hline
\bar{1}.39881.
\end{array}$$

例 3.

$$\begin{array}{r}
\bar{1}.91116\\
3\\
\hline
\bar{1}.73348.
\end{array}$$

例 4.

$$\begin{array}{l}
\bar{4}.63043\underline{)3}\\
\hline
\bar{2}.87681.
\end{array}$$

44. 對數表用法

本書第一表中。僅列 2000 以內各整數對數之五位假數。其用法可分別言之如次。

I. 由眞數求對數法

(1)　求 2000 以內各整數之對數。可由表直接檢出。

例如求1374之對數。則可於表之左端N字之行內。先檢出 137 三字之數。再於此頁最上列中。檢

出最後之數字4。然後求其與4字同行。與137同列處。所記之數爲799。乃所求對數假數後三位之數。於是更於左端空白處。求其向上最近之數爲13。卽爲所求假數首二位之數。幷之得13799。卽爲所求1374之對數假數。今此對數之指標爲3。故

$$\log 1374 = 3.13799。$$

又如求186.5之對數。亦與前同法。求其與5字同行與186同列處。所記之數爲068。惟其左端下記有星點※。凡附有此點者。其假數之首二位。在左端之下方。故求其假數首二位之數時。當於左端空白處向下求其最近所記之數27。幷入068。得所求假數爲27068。今其指標爲2。

$$\therefore \log 186.5 = 2.27068。$$

(2) 求大於2000各數之對數。

例如求17968之對數。則先照上法。求1796之對數假數爲25431。更取其隣數1797之對數假數爲25455。故知此時眞數差1。其對數之差爲24。(25455—25431)眞數之差與對數之差。雖不成比例。但計算其近似値時。卽視爲成比例。亦無大誤。故求1796.8與1796對數之差。得適用比例式。

$$1:0.8=24:x \quad [0.8=1796.8-1796]$$

$$x=19.2$$

故17968之對數爲25431+19=25450。然如是所差之數。一一由比例計算。頗覺煩雜。今於表中左邊P. P.欄內。記其比例所應得之數。則求法較簡。茲再述之於次。

先求1796之對數假數爲25431。再求其隣數1797之對數假數爲25455。二者之差爲24。遂於P. P.欄內粗字24表內。求得8之同列者爲19.2加入25431中。則爲25450。卽所求對數之假數。

$$\log 17960=4.25431$$

數加8……對數加19

$$\therefore \log 17968=4.25450。$$

(II) 由對數求眞數法

(1) 若題設之對數假數。恰爲表中所載者。則由表可直查得其眞數。

例如求 $\log^{-1} 1.87157$※

先於表中檢出與87157相當之眞數爲744。因指標爲1。故小數點前只應有二位。

※ $\log^{-1} 1.87157$ 者卽由1.87157對數求其相當眞數之意。

$\therefore log^{-1} 1.87157=74.4$。

(2) 若題設之對數。非恰爲表中所載者。則於表中取其最近且較小之假數。而求其相當之眞數。再從P.P.表準 I (2) 之理。逆用之。卽得所求之眞數。

例如求 $log^{-1} 2.08756$

因就表中查之。無此假數。故取其不足之近似數08743。知其相當眞數爲1223。又取1224之假數爲08778。與1223之假數差35。是知假數差35。眞數差1。今08756與08743之差爲13。眞數之差當爲幾何。可於P.P.欄內35表內。求13所相當之眞數。但此處無記13者。於是只取其隣近14之數。而求其所相當之眞數爲4。

$\therefore log^{-1} 2.08743=122.3$。

13相當眞數爲4。

$\therefore log^{-1} 2.08756=122.34$。

45. 三角函數之對數表用法

此表中因避去負數指標。故對數爲負者。均以10加之。如 *sin*, *cos*。及45°以下之 *tan*。45°以上之 *cot* 等。表中所記之對數。均係原對數加10〔用L.表之〕。故計算

時。必須將表中之數減10後計之。是最宜注意。切不可忘却者也。又由餘函數之理。求45°以上各角之三角函數。可自下向上。由右邊所記之數查之。

I. 由角度求三角函數之對數法

若題設之角爲10′之整倍者。可直由表中求之。若非爲10′之整倍。則須用比例法求之。

例1. 求 $\log\sin 23°34'.6$

解 $\log\sin 23°30' = \bar{1}.60070$。

由表中D行所記。知23°40′之正弦對數。與23°30′之正弦對數。其差爲289。

$$\log\sin 23°30' = \bar{1}.60070$$

$$\frac{4.6}{10}\times 0.00289 \fallingdotseq 0.00133(+$$

$$\therefore \log\sin 23°34'.6 = \bar{1}.60203。$$

例2. 求 $\log\tan 72°53'.3$

解 $\log\tan 72°50' = 0.51016$

$$\frac{3.3}{10}\times 0.00450 = 0.00149(+$$

$$\therefore \log\tan 72°53'.3 = 0.51165。$$

例3. 求 $\log\cos 35°42'.7$

解 $\log\cos 35°40'=\bar{1}.90978$

$$-\frac{2.7}{10}\times 0.00091=-0.00014(+$$ ※

$\therefore \log\cos 35°42'.7=\bar{1}.90964$。

例 4. 求 $\log\sec 21°37'.4$

解 因 $\sec 21°37'.4=\dfrac{1}{\cos 27°37'.4}$

$\therefore \log\sec 21°37'.4=\mathrm{colog}\cos 21°37'.4$。

由表知 $\log\cos 21°37'.4=\bar{1}.96831$。

$\therefore \log\sec 21°37'.4=0.03169$。

II. 由三角函數之對數求角度法。

例 1. $\log\sin A=\bar{1}.30352$。求 A。

解 $\log\sin 11°30'=\bar{1}.29966$

卽知角度差 A—11°30′時。其函數之對數。差0.00386。此時之 D 爲 0.00616。

$\therefore \bar{1}.29966=\log\sin 11°30'$

對數 0.00386 之相當角度爲 $\dfrac{386}{616}\times 10=6'.3$(+

故 $\bar{1}.30352=\log\sin 11°36'.3$。

※凡餘弦餘切餘割。其角度變大。函數反小。故對數亦減小。如上例。卽角度多2′.7。而函數之對數。當減小0.00014。

$A=11°36'.3$

例 2.　$\log\cos A=\bar{1}.93488$。求 A。

解　$\bar{1}.93457=\log\cos 30°40'$

對數 0.00031 之相當角度差 $\frac{31}{75}\times 10=-4.1$ ※(+

故 $\bar{1}.93488=\log\cos 30°35'.9$

$A=30°35'.9$

例 3.　$\log\cot A=\bar{1}.82531$。求 A。

解　$\bar{1}.82352=\log\cot 56°20'$

對數 0.00181 之相當角度差 $\frac{181}{274}\times 10=-6.6$(+

$\bar{1}.82531=\log\cot 56°13'.4$

$A=56°13'.4$

例 4.　$\log\operatorname{cosec} A=0.26685$。求 A。

解　$\log\operatorname{cosec} A=-\log\sin A$

$\therefore \log\sin A=\bar{1}.73315$

求得 $A=32°44'.8$

【注意】以上求法。皆視各角度之差。與其相當函數之差。成為比例者也。

46. 表中略算之規則及符號之注意

(I) 終止之位(如第五位)以下所記數值。若大於

※凡餘弦,餘切,餘割。其對數變大。角度反因之減少。

原位0.5倍。則加1於終止之位。而棄其下數。如0.243867可寫為0.24387。若此終止之位為4。因加1而變為5。則記為$\bar{5}$。如0.243847可寫為0.2438$\bar{5}$。蓋$\bar{5}$乃表示小於5大於4.5之數也。

(II) 若終止之位以下數值。小於此位之0.5倍。則可棄去不論。如0.134624可寫為0.13462。若棄去後。其終止之位恰為5。則以$\dot{5}$記之。如0.134654可書作0.1346$\dot{5}$。蓋$\dot{5}$乃表示此數大於5。而小於5.5也。

(III) 若終止之位以下數值。適為0.5。可視所止之末位若為奇數。則將末位加1。若為偶數。則只將0.5棄去。不加入末位。

第七編　三角形之性質

47. 任意ABC三角形內。以A,B,C三字。代表各角。而其所對之邊。各以a, b, c代表之。則由幾何定理。知$A+B+C=180°$。故$A+B=180°-C$。$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$。遂得次之關係。

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(A+B)=\sin C, & \sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2} \\ \cos(A+B)=-\cos C, & \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2} \\ \tan(A+B)=-\tan C, & \tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2} \end{array}\right\}\cdots\cdots[45]$$

例　　題

設A,B,C為三角形之三角。試證下列各等式。

1. $\sin(A+B+C)=0$　　**2.** $\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=0$

3. $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$。則$\cos C=-\frac{16}{65}$。

4. $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C$。

5. $\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$。

6. $\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$。

7. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$。

8. $\sin(B+C-A)-\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$

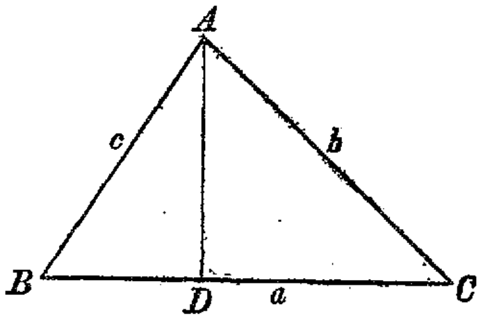
$$=4\cos A\sin B\cos C$$。

48. 正弦比例式

就ABC三角形。

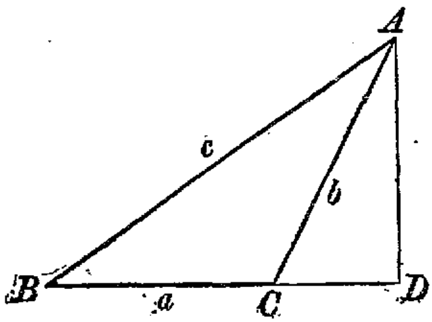
設B為銳角之一。

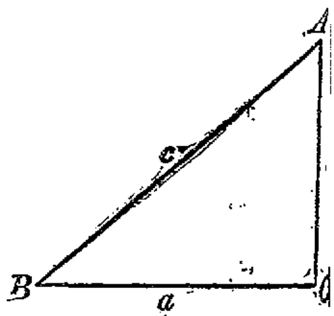
自A點向BC或BC之延長線引垂線AD。則



$$\sin B=\frac{AD}{AB}$$

$\therefore$ $AD=AB\sin B=c\sin B$





又C無論為銳角為鈍角。恒得 $\sin C=\sin A\hat{C}D=\frac{AD}{AC}$

$\therefore$ $AD=b\sin C$ 故 $b\sin C=c\sin B$ 即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

若自C或B向對邊引垂線。則此等式等於$\frac{a}{\sin A}$。亦可證得。

若$C=90°$。則D與C合。$\sin C=1$。

$$\therefore\ \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin B}{1}=\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$$

故各角無論如何變動。下式總能成立。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots[46]$$

49. 一角餘弦與邊之關係

用前節圖。由幾何學定理。知C為銳角時。

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,BC.CD$$

C為鈍角時。

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2\,BC.CD$$

但C為銳角時。$CD=b\cos C$。C為鈍角時。$CD=-b\cos C$。C為直角時。$CD=0$。故無論CD如何變化。下式總能成立。

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

故 $$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdots\cdots\cdots\cdots[47]$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdots\cdots\cdots\cdots[48]$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdots\cdots\cdots\cdots [49]$$

例題

就ABC三角形。證明下列各等式。

9. $\dfrac{\sin A+2\sin B}{a+2b}=\dfrac{\sin C}{c}$。

10. $\dfrac{\sin^2 A-m\sin^2 B}{a^2-mb^2}=\dfrac{\sin^2 C}{c^2}$。

11. $a=b\cos C+c\cos B,\ b=c\cos A+a\cos C,$

$c=a\cos B+b\cos A$。

12. $b^2\sin 2C+C^2\sin 2B=2bc\sin A$。

13. $a\cos A+b\cos B-c\cos C=2c\cos A\cos B$。

14. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$。

15. $(a+b)\sin\dfrac{C}{2}=c\cos\dfrac{A-B}{2}$。

16. $(b-c)\cos\dfrac{A}{2}=a\sin\dfrac{B-C}{2}$。

17. $\dfrac{\cos B}{\cos C}=\dfrac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$。

18. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$。

50. 半角之正切與三邊之關係

設 $a+b+c=2s$。由【49】公式。

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$$

同法知 $1+\cos A=\dfrac{2s(s-a)}{bc}$

又由【36】公式。得

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\text{......}[50]$$

同理 $\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$......【51】

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\text{......}[52]$$

51. 兩角相差一半之三角函數

由【46】公式

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}。$$

$$\left[\because \sin\frac{1}{2}(B+C)=\cos\frac{1}{2}A\right]$$

$$\therefore\ \cos\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}A\text{......}[53]$$

$\cos\frac{1}{2}(C-A)$, $\cos\frac{1}{2}(A-B)$ 亦有同形之式。

又 $$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

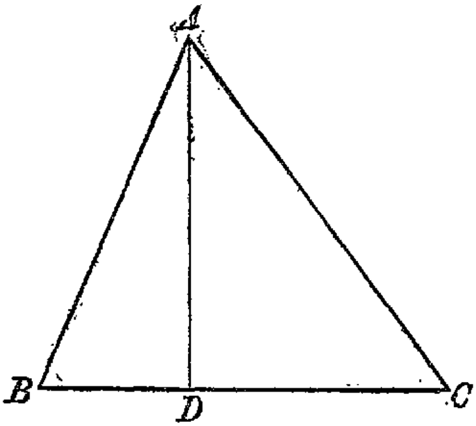
$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\cot\frac{1}{2}A}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A \cdots\cdots\cdots\cdots[54]$$

$\tan\frac{1}{2}(C-A)$, $\tan\frac{1}{2}(A-B)$。亦有同形之式。

52. 三角形之面積

就ABC三角形。自A點向BC引垂線AD。而ABC之面積設為△。則



$$\triangle=\frac{1}{2}AD.BC。$$

但 $AD=AB\sin B$

$=c.\sin B$。

$$\therefore\quad \triangle=\frac{1}{2}ac.\sin B\cdots\cdots\cdots\cdots[55]$$

$$=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-\cos^2 B}$$

$$=\frac{1}{2}ac\sqrt{(1+\cos B)(1-\cos B)}$$

由【49】節知

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[56]$$

例　　題

就ABC三角形。試證下列各式

19. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$。

20. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$。

21. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$。

22. $\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$。

23. $(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(c+a-b)\tan\frac{B}{2}$

$$=(a+b-c)\tan\frac{C}{2}。$$

24. $(a-b)\cot\frac{C}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}=0$。

25. 設a, b, c成等差級數。則

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}。$$

26. 若 $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$。則 $A=90°$。

27. $a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=s$。

28. $\Delta=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$。

29. 三角形外接圓直徑為 $2R$。則

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

30. 設三角形之內切圓半徑為 γ。傍切圓半徑為 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$。外接圓半徑為 R。則

$$\gamma=\frac{\Delta}{s},\quad \gamma_1=\frac{\Delta}{s-a},\quad \gamma_2=\frac{\Delta}{s-b},\quad \gamma_3=\frac{\Delta}{s-c},$$

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

第八編　三角形之解法

53. 任意三角形之解法。可分下列四種。

I. 已知二角及一邊。

II. 已知三邊。

III. 已知二邊及其夾角。

IV. 已知二邊及其一邊所對之角。

54. 已知B, C及a。求A, b, c。

先由$A=180^\circ-(B+C)$。求出A。次因$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$

故　$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$。

又因　$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$。

故　$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$。

今若改爲對數式。

$$\log b=\log a+\log\sin B+\text{colog}\sin A$$

$$\log c=\log a+\log\sin C+\text{colog}\sin A$$

【注意】由上所得結果。可用【53】公式

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}.$$

驗其誤否。

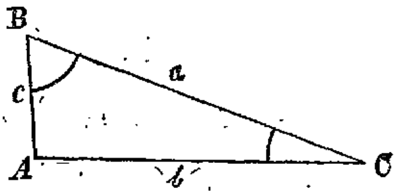
例 $c=176.4$, $C=18°27'$, $B=66°39'$。求 a, b 及 A。

算式

$A=180°-(B+C)$

$\log b=\log c+\log\sin B$
$\qquad+\text{colog}\sin C$

$\log a=\log c+\log\sin A$
$\qquad+\text{colog}\sin C$



A之計算

$$\begin{array}{rr}
B= & 66°39' \\
C= & 18°27' \\
\hline
B+C= & 85°\ \ 6' \\
A+B+C= & 179°60' \\
\hline
A= & 94°54'
\end{array}$$

b之計算

$$\begin{array}{rl}
\log c= & 2.24650 \\
\log\sin B= & \bar{1}.96289 \\
-\log\sin C= & 0.49966 \\
\hline
\log b= & 2.70905 \\
b= & 511.74
\end{array}$$

a之計算

$$\begin{array}{rl}
\log c= & 2.24650 \\
\log\sin A= & \bar{1}.99841 \\
-\log\sin C= & 0.49966 \\
\hline
\log a= & 2.74457 \\
a= & 555.35
\end{array}$$

驗算

$$\log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{1}{2}C-\log\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\begin{array}{r|l}
a=\ 555.35 & A=94°54' \\
b=\ 511.74 & B=66°39' \\
\hline
a+b=1067.09 & A-B=28°15' \\
 & \frac{A-B}{2}=14°\ 7'30''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
C=18°27' \\
\frac{C}{2}=\ 9°13'30''
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\log(a+b)&=3.02820\\
\log\sin\frac{C}{2}&=\bar{1}.20496\\
-\log\cos\frac{A-B}{2}&=0.01334\\
\hline
\log c&=2.24650\\
c&=176.4
\end{aligned}$$

例　　題

試解下列各三角形。

1. $A=45°41'$, $C=62°5'$, $b=100$。

2. $a=123$, $B=29°14'$, $c=124°$。

3. $a=1652$, $B=26°30'$, $c=47°15'$。

55. 已知 a, b, c。求 A, B, C。

由【50】,【51】,【52】各公式得

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}。$$

可求得 A, B, C 各角。

今將上式改為對數式。

$$\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\log(s-b)+\log(s-c)+\operatorname{colog}s+\operatorname{colog}(s-a)\right\}$$

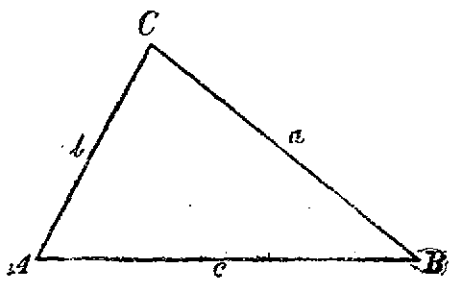
其餘 $\log\tan\frac{B}{2}$, $\log\tan\frac{C}{2}$。亦可改為對數式。

例 1.　$a=275.3$

$b=189.2$

$c=301.5$。

求 A, B, C。



算式

$$\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\log(s-b)+\log(s-c)+\operatorname{colog}s+\operatorname{colog}(s-a)\right\}$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left\{\log(s-c)+\log(s-a)+\operatorname{colog}s+\operatorname{colog}(s-b)\right\}$$

$$\log\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left\{\log(s-a)+\log(s-b)+\operatorname{colog}s+\operatorname{colog}(s-c)\right\}$$

豫備計算

$a=275.3$	$s=383$
$b=189.2$	$s-a=107.7$
$c=301.5$	$s-b=193.8$
$2s=766$	$s-c=81.5$

A之計算	B之計算
$\log(s-b)=2.28735$	$\log(s-c)=1.91116$
$\log(s-c)=1.91116$	$\log(s-a)=2.03222$
$-\log s=\bar{3}.41680$	$-\log s=\bar{3}.41680$
$-\log(s-a)=\bar{3}.96778$	$-\log(s-b)=\bar{3}.71265$
$2\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.58309$	$2\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.07283$
$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.79154$	$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.53642$
$\frac{A}{2}=31°44'.93$	$\frac{B}{2}=18°58'.66$
$A=63°29'52''$	$B=37°57'19''$

C之計算	驗算
$\log(s-a)=2.03222$	
$\log(s-b)=2.28735$	
$-\log s=\bar{3}.41680$	
$-\log(s-c)=\bar{2}.08884$	$A=63°29'52''$
$2\log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}.82521$	$B=37°57'19''$
$\log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}.91260$	$C=78°32'46''$
$\frac{C}{2}=39°16'.38$	$A+B+C=179°59'57''$
$C=78°32'46''$	

例 2. 於前例。求此三角形之面積。

由【56】公式改爲對數式。

$$\log\Delta=\frac{1}{2}\left\{\log s+\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)\right\}$$

$$\begin{array}{rl}
\log s= & 2.58320\\
\log(s-a)= & 2.03222\\
\log(s-b)= & 2.28735\\
\log(s-c)= & 1.91116\\
\hline
2\log\Delta= & 8.81393\\
\log\Delta= & 4.40696\\
\Delta= & 25525
\end{array}$$

例　　題

4.　$a=15$, $b=7$, $c=13$。求 A, B, C。

5.　$a=283$, $b=317$, $c=428$。求 A, B, C。

6.　$a=654$, $b=784$, $c=598$。求Δ。

56. 已知 b, c 及 A。求 a, B, C。

由【54】公式

$$\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A$$

即　$$\log\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)+\log\cot\frac{1}{2}A+\operatorname{colog}(b+c)$$

及　$B+C=180°-A$。

可求得 B, C。

既求得 B, C。則

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}$$

亦可求得。

【注意1】既得$\frac{1}{2}(B-C)$。可由公式【53】

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}A$$

求得a。

【注意2】又可由【51】,【52】兩公式。求得

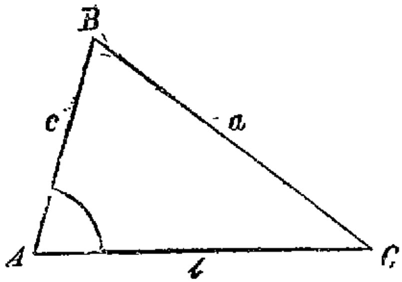
$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}$$

改為對數式為彼此驗算之用。

例　$b=456.12$

$c=296.86$

$A=74°20'$。求B, C及a。



算式

$$\log\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)+\log\cot\frac{A}{2}+\operatorname{colog}(b+c)$$

$$B+C=180°-A$$

$$\log a=\log b+\log\sin A+\operatorname{colog}\sin B$$

B及C之計算

$$
\begin{aligned}
b&=456.12\\
c&=296.86\\
\hline
b-c&=159.26\\
b+c&=752.98\\
A&=74°20'\\
\frac{A}{2}&=37°10'\\
\frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}&=89°60'\\
\hline
\frac{B+C}{2}&=52°50'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log(b-c)&=2.20211\\
-\log(b+c)&=\bar{3}.12322\\
\log\cot\frac{A}{2}&=0.12626\\
\hline
\log\tan\frac{B-C}{2}&=\bar{1}.44559\\
\frac{B-C}{2}&=15°35'19''\\
\frac{B+C}{2}&=52°50'\\
\hline
B&=68°25'19''\\
C&=37°14'41''
\end{aligned}
$$

a之計算

$$
\begin{aligned}
\log b&=2.65908\\
\log\sin A&=\bar{1}.98356\\
-\log\sin B&=0.03155\\
\hline
\log a&=2.67419\\
a&=472.27
\end{aligned}
$$

驗　算

$$\log\tan\frac{B}{2}+\log\tan\frac{C}{2}=\log(s-a)-\log s$$

$$
\begin{aligned}
\frac{B}{2}&=34°12'39''.5\\
\frac{C}{2}&=18°37'20''.5\\
a&=472.27\\
b+c&=752.98\\
\hline
2s&=1225.25\\
s&=612.625\\
s-a&=140.355
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log\tan\frac{B}{2}&=\bar{1}.83243\\
\log\tan\frac{C}{2}&=\bar{1}.52759\\
\hline
\log\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}&=\bar{1}.36002\\
-\log s&=\bar{3}.21280\\
\log(s-a)&=2.14723\\
\hline
\log\frac{s-a}{s}&=\bar{1}.36003
\end{aligned}
$$

例題

求解下列各題。

7. $a=9$, $b=6$, $C=60°$。

8. $b=27$, $c=23$, $A=44°30'$。

9. $c=210$, $a=110$, $B=34°42'$。

57. 已知 a, b, A。求 c, B, C。

由正弦比例式

$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A$$

又 $C=180°-(A+B)$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

此等公式。均可改爲對數。惟此問題。有時不能成立。因 B 乃由其正弦求得。必須 $\sin B<1$。即 $a>b\sin A$ 本題始能成立。今分別討論之如次。

(甲) $a>b\sin A$。則 B 之值有二。設爲 B', B''。則 $B'+B''=180°$。以此等值代入求 C 之式。則 C 亦有二值 C', C''。故所求三角形有二。然二者未必常能成立。又須再行討論。

I. 若 A 爲銳角。且 $a<b$。則

由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 知 $\sin A<\sin B$。

即 $A<B'$。且 $A<B''$。[B'爲銳角則B''爲鈍角。]

然 $C'=180°-(A+B')$

$C''=180°-(A+B'')=180°-(A+180°-B')=B'-A$。

故C之二值均爲正號。

若 $a>b$。則 $\sin A>\sin B$。

故 $B'<A<B''$。

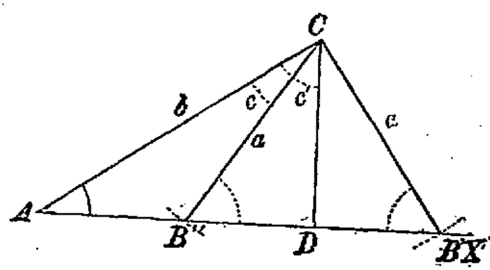
因之C''爲負數。$\triangle AB''C''$不能成立。

若 $a=b$。則 $\sin A=\sin B$。

$B'=A,\ B''=180°-A$。

因之C''爲零。$\triangle AB''C''$亦不能成立。

※欲了解此等討論。亦可由幾何學說明之。設A爲銳角。作一角等於A。於其一邊上取AC等於b之長。又以C爲中心。以a爲半徑。畫圓弧。與A角之二邊交於B', B"。則AB'C及AB"C必爲補角。若a比b大。則作圓弧時。截AX於B', B"。惟此二點在A之左右。故兩三角形中。必有一不等於A角。而等於A之補角者。是不



II. 若 A 為鈍角。且 $a \leqq b$。則不合理。問題不能成立。

若 $a > b$。則 C'' 為負。$\triangle AB''C''$ 不能成立。

III. 若 A 為直角。且 $a \leqq 0$。則不合理。問題不能成立。

若 $a > b$ 則 C'' 又為負。$\triangle AB''C''$ 不能成立。

(乙) $a = b \sin A$。則 $\sin B = 1$。$B = 90°$。此時只有一直三角形。

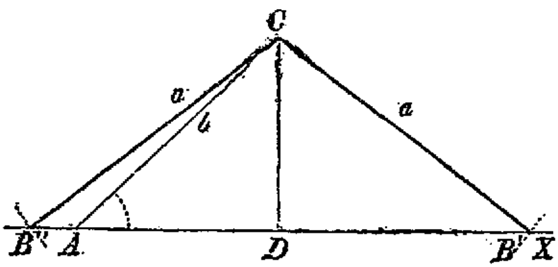
$$C = 90° - A, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = a \cot A$$

(丙) $a < b \sin A$。則問題不能成立。

今將所討論者摘記於次※

適題意。

然圓弧能與 AX 相交。必須 $a > CD$。即 $a > b \sin A$。若 $a = CD$。則圓弧與 A 相切。故只有一直三角形。若 $a < CD$。則圓弧不與 AX 相交。故本題不能解。



不論 A 為直角，銳角。均以同法討論之。

$$a>b\sin A\begin{cases}A<90^\circ\begin{cases}a<b & \text{有二解。}\\ a\geqq b & \text{有一解。}\end{cases}\\ A\geqq 90^\circ\begin{cases}a\leqq b & \text{無　解。}\\ a>b & \text{有一解。}\end{cases}\end{cases}$$

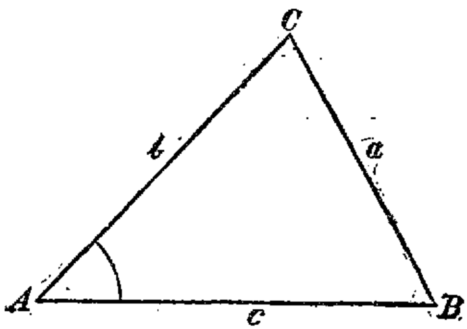
$$a=b\sin A\begin{cases}A<90^\circ & \text{有一解。〔直三角形〕}\\ A\leqq 90^\circ & \text{無　解。}\end{cases}$$

$$a<b\sin A \qquad \text{不　能。}$$

【注意】上法計算之結果。可如54節。用公式

$$c=(a+b)\sin\frac{1}{2}C/\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

驗之。



例　$a=4945.2$,

$b=5876.2$,

$A=47^\circ 26'$。

求 B, C, c。

算　式

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A+\operatorname{colog} a$$

$$C=180^\circ-(A+B)$$

$$\log c=\log a+\log\sin C+\operatorname{colog}\sin A$$

B及C之計算

$\log b=3.76910$		
$\log\sin A=\bar{1}.86717$		
$\operatorname{colog} a=\bar{4}.30581$		
$\log\sin B=\bar{1}.94208$		
$B=61°3'43''$	或	$118°56'17''$
$A=47°26'$		$47°26'$
$A+B=108°29'43''$		$166°22'17''$
$A+B+C=179°59'60''$		$179°59'60''$
$C=71°30'17''$		$13°37'43''$

c之計算

$\log a=3.69419$	或	3.69419
$\log\sin C=\bar{1}.97697$		$\bar{1}.37222$
$-\log\sin A=0.13283$		0.13283
$\log c=3.80399$		3.19924
$c=6367.9$		1582.1

驗算

$$\log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{1}{2}C-\log\cos\frac{1}{2}(B-A)$$

$a=4945.2$		
$b=5876.2$		
$a+b=10821.4$		
$\frac{C}{2}=35°45'8''.5$	或	$6°48'51''.5$
$A=47°26'$		$47°26'$
$B=61°3'43''$		$118°56'17''$
$B-A=13°37'43''$		$71°30'17''$
$\frac{B-A}{2}=6°48'51''.5$		$35°45'8''.5$
$\log(a+b)=4.03429$		4.03429
$\log\sin\frac{C}{2}=\bar{1}.76662$		$\bar{1}.07427$
$-\log\cos\frac{B-A}{2}=0.00308$		0.09068
$\log c=3.80399$		3.19924
$c=6367.9$		1582.1

例題

10. 已知 $b=379.4$, $c=483.7$, $B=34°11'$,求 A, C, a。

11. 已知 $B=40°$, $b=140.5$, $a=170.6$, 求 A, C, c。

12. 下列三題,何者可得兩解。

(α) $A=30°$, $a=125$, $c=250$

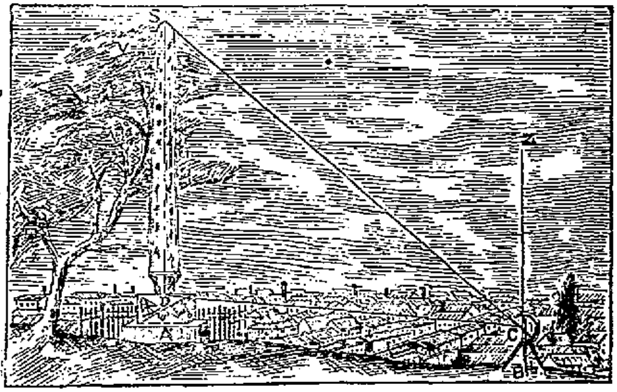
(β) $A=30°$, $a=200$, $c=250$

(γ) $A=30°$, $a=200$, $c=125$

第九編　三角形解法之應用

58. 可近物體之高之測法

設 A S 爲所欲測之高。A D 爲測器之高。測器置於 B 處。A B 之距離。以測鏈測之。於是覘望 D, S。求得 D C S。及 D C Z 之角。就 △ C S D 已知 C D(= A B)。及 $D\hat{C}S$, $D\hat{S}C$(= $S\hat{C}Z$)。故

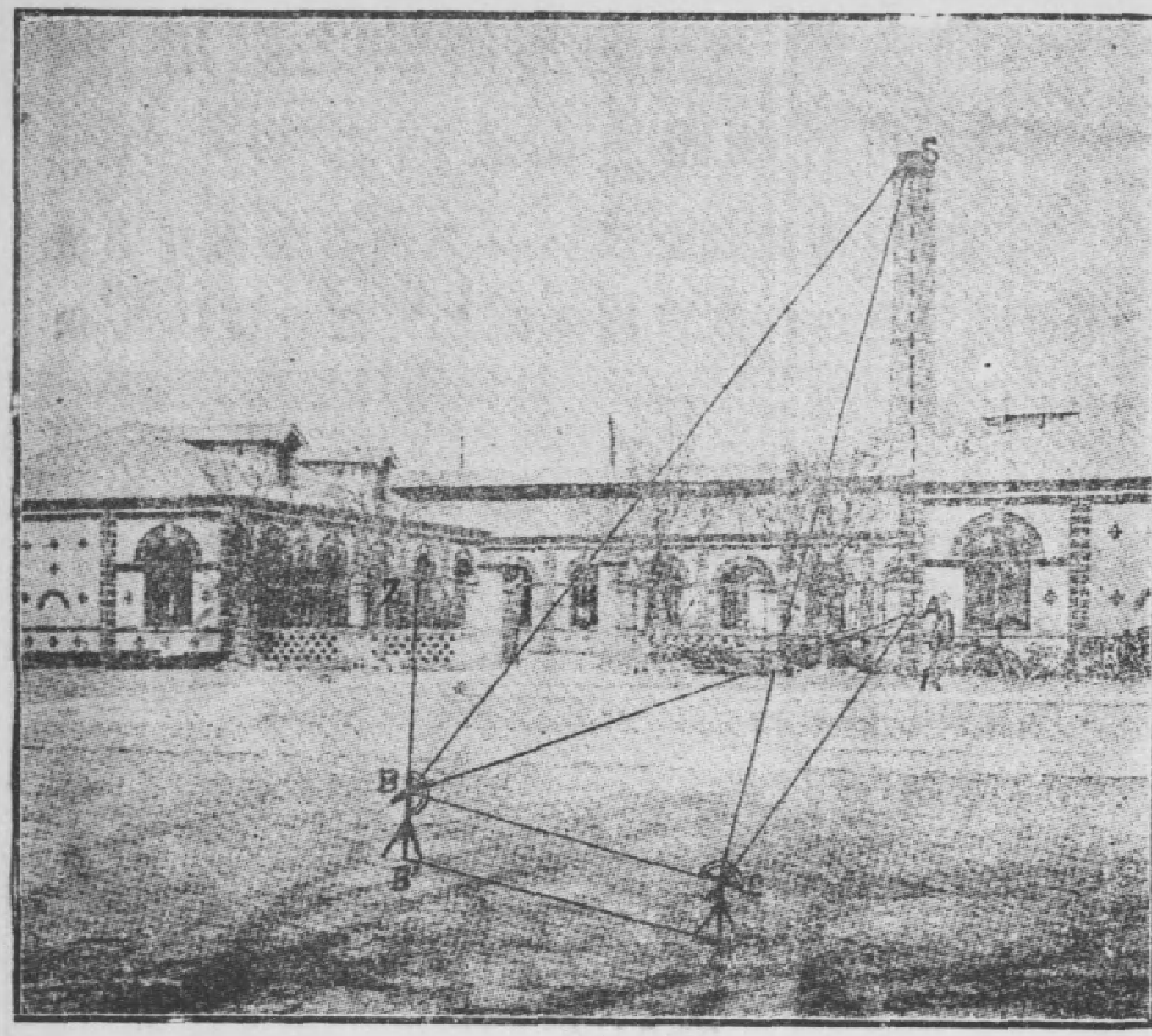


$$SD = \frac{AB \sin D\hat{C}S}{\sin S\hat{C}Z}$$

$$故實高 = \frac{AB \sin D\hat{C}S}{\sin S\hat{C}Z} + CB .$$

59. 可見不可近之物之高之測法

今於平地上選 B′ C′ 爲基線。其兩端各置測器。測 $S\hat{B}A$, $S\hat{B}Z$ 角。次於 A, B, C 三點所成平面內。測 $A\hat{B}C$ 及 $A\hat{C}B$ 角。則就 △ A B C 內。B C = B′C′。且其相



隣二角又已知之。所以

$$\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BC}\sin \mathrm{A\hat{C}B}}{\sin(\mathrm{A\hat{C}B}+\mathrm{A\hat{B}C})}$$

又由 $\triangle \mathrm{ABS}$。已知 AB，及 $\mathrm{A\hat{B}S}$，$\mathrm{A\hat{S}B}(=\mathrm{S\hat{B}Z})$

故

$$h=\mathrm{A'S}=\frac{\mathrm{AB}\sin \mathrm{A - S}}{\sin \mathrm{S\hat{B}Z}}+\mathrm{BB'}$$

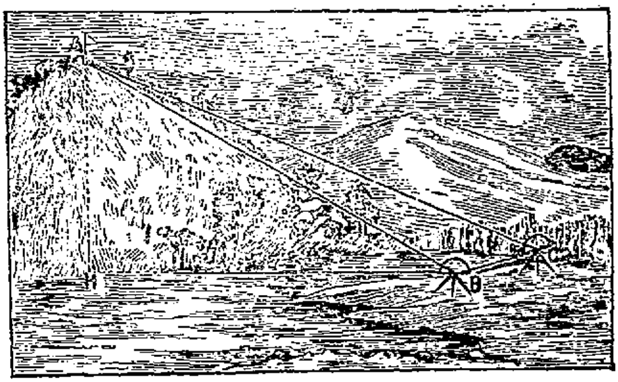
將 AB 之式代入

$$h=\frac{BC\sin A\hat{C}B\sin A\hat{B}S}{\sin(A\hat{C}B+A\hat{B}C)\sin S\hat{B}Z}+BB'$$

〔注意〕測器之高。常須加入。以下略言之。但此題若可見其基底A'。則直接由A'測起亦可。

60. 山高之測法

B爲觀測者之位置。A爲山頂。先測基線BC。置測器於B點。測$A\hat{B}H$仰角。次於A，B，C之平面內。測ABC角。又於C點測ACB角。就△ABC。已知一邊及二角。遂得計算BA。



$$BA=\frac{BC\sin A\hat{C}B}{\sin(A\hat{C}B+A\hat{B}C)}$$

更就直三角形ABH。已知斜邊及其一角。故所求之高

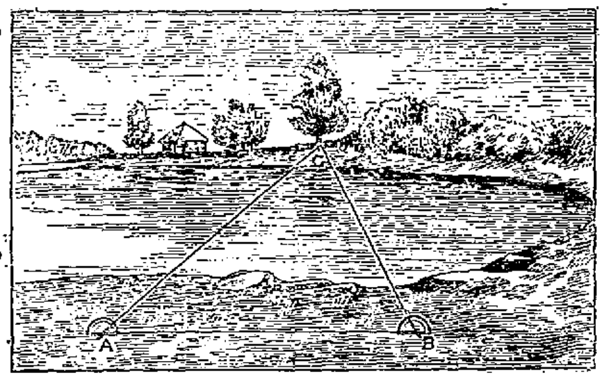
$$h'=AH=BA\sin A\hat{B}H$$

以BA之值代入。得

$$h=\frac{BC\,sin\,A\hat{C}B\,sin\,A\hat{B}H}{sin(A\hat{C}B+A\hat{B}C)}$$

61. 有可見不可近之點求測定其距離之法

AC爲所欲測之距離。於適宜之方向。取AB。※且測定其長。於是置測器於A, B二處。測$B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$。就三角形ABC。已知一邊及其相隣之二角。解之



卽得　$AC=\frac{AB\,sin\,B}{sin(A+B)}$

62. 有可見不可近之二點求測定其距離

CD爲所欲測之距離。A爲測者之位置。自A點於適宜之方向。取AB某線。且測定其長後。置測器於

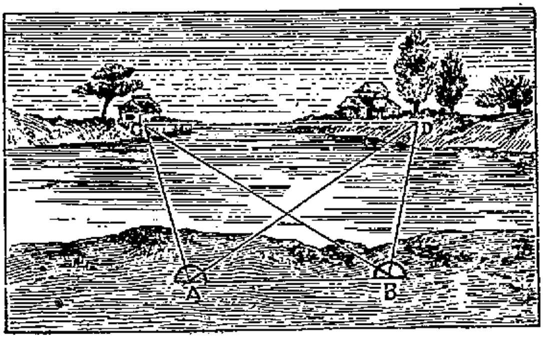
※AB之方向。固可任意取之。然仍須選擇適宜位置。不令所成三角形之角過小。或太近於180°。

A點。測得CAB及DAB角。次置測器於B點。測得DBC, DBA及CBA角。就△CAB。已知一邊及其相隣二角。故

$$BC=\frac{AB\sin C\hat{A}B}{\sin(C\hat{A}B+C\hat{B}A)}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同理就△DAB。

$$BD=\frac{AB\sin D\hat{A}B}{\sin(D\hat{A}B+D\hat{B}A)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



由(1)(2)。既知BC,BD二邊。又測得DBC角。故就△DBC。已知二邊及一夾角。因此亦可求得CD。

【注意】若A, B, C, D四點。同在一平面上。則$D\hat{B}C$角。即等於$D\hat{B}A$與$C\hat{B}A$二角之差。可不必直接測之。

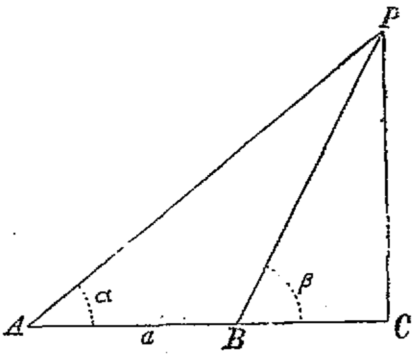
例　題

1. 設水平線ABC上。有物高PC。自A, B二處。

測得P點之仰角為α, β。又測得AB之長為a。則

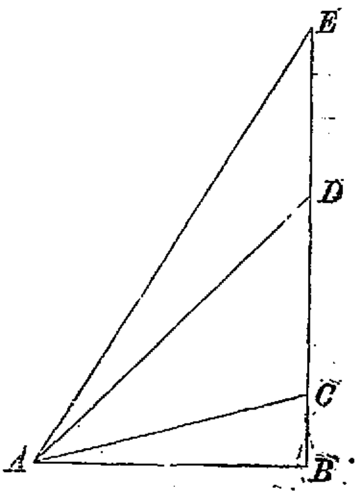
$$PC = a\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)。$$

試證之。



2.　設有人欲測一山之高。自某處望之。仰角為15°。更在水平線上。向山前進一公里。又測得山之仰角為75°。問山之高幾何。

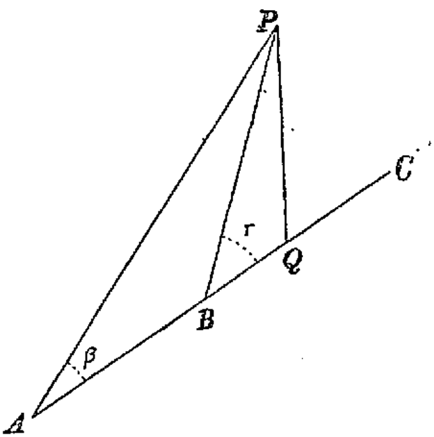
3.　設於高10丈之城壁上。立一高20丈之旗竿。今於地上某點。測得旗竿所含角之正切為0.5。則同點與壁所含角之正切。當為$\frac{1}{3}$或1. 試證之。



4.　設水平面上。有直立之物E,D,C,B。自水平線上一點A。測得$C\hat{A}B = F\hat{A}D$。$BC = 9$尺, $CD = 72$尺, $DE = 36$尺.

問BA之長幾何。

5. 設於塔基同水平面上一點測得塔之仰角為α。又自此點高a尺之處測得其仰角為β。則塔之高。等於$a\cos\beta\sin\alpha\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$。試證之。



6. 有斜面ABC。與垂直之方向成α角。其上有垂直之塔PQ。今於A, B二點測得塔之仰角為β, γ。AB$=a$。求塔之高。

7. 設有一巖。自地上某點測之。其仰角為47°。更向巖在斜坡上行1000公尺。測得巖之仰角為77°。問巖之高幾何。但斜坡之傾斜為32°。

8. 在$1/12$阪路(卽傾斜角正弦$\frac{1}{12}$)行至某距離時。所登之高。與行$1/5$阪路至21.6公里時之高相等問所行距離之長若干。

9. 有一塔直立水平面上。距此塔48尺及上高

14尺處。測得塔窗以上。及窗以下所含之角度相等。且窗之高為30尺，問塔高幾何。

10. 水平面上有ABC三角形。已知AB$=c$, BC$=a$, AC$=b$。今C處有一塔CD$=h$。測得A$\hat{D}$E$=\alpha$。問h之高幾何。

11. 設於AB塔上。直立BC旗竿。今於塔基同水平面上一點E與BC成最大之角。且E與塔之距C尺。則塔高為

$$C\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)。$$

試證之。

12. 有輕氣球。其半徑為γ。自某處觀之。其所含角為α。而其中心之仰角為β。則輕氣球中心之高為

$$\gamma\sin\beta\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha。$$

試證之。

13. 有一工廠。寬為A,B。自C,D二點測之。知A,B所含之角相等。則

$$AB\sin C\hat{B}D=CD\sin A\hat{D}B。$$

試證之。

14. 水平面上。有ABC直三角形。C為直角。今自

B 及 C 處。測 A 處直立塔之仰角爲15°及45°。則

$$\tan B=\frac{1}{\sqrt{\cot^2 15^\circ-1}}=\frac{1}{2}\left\{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\right\}.$$

試證之。

15. 有二點 P, Q。設於 P 南之一地 L 望之。知 $P\hat{L}Q=A$。次由 L 向西走 a 距離。到 M。測 $P\hat{M}Q=A$。更由同方向進 b 距離。達於 Q 南之一地 N。則 P Q 之距離必爲

$$\sqrt{(a^2+b^2)+b^2\tan^2 A}.$$

試證之。

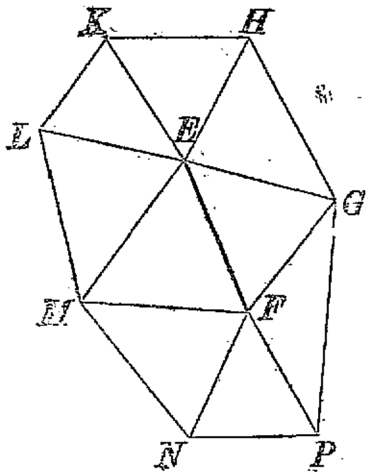
63. 三角測量 用三角形解法之公式。由測角測長兩器械。可以測定各點位置之關係及面積者。稱爲三角測量。

如首頁之圖。卽三角測量之圖。先測東西兩端點之距離。次測角度。由已知一邊及二角。遂可推測各點之距離。惟測基線之時。若所測範圍甚小。固可用鏈測之。若以之測量全國。則基線之測定。須用極精密之鋼杆。數回測之。幷檢其溫度改正之。

測角度時。常用經緯儀或六分儀。

64. 測量地面之時。通例用多數三角形。彼此連絡。是爲三角網。

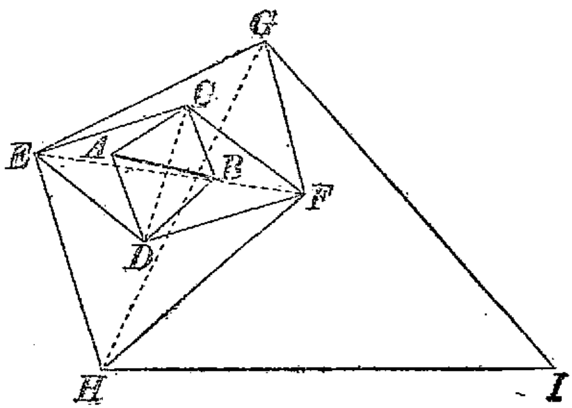
如圖EF爲基線精測之。於其周圍作三角網。幷精測各角。以最小自乘法。求其平均值。再用此結果。求各三角形之邊及其面積。



基線乃計算三角網時長度起首之線。若稍有錯誤。則錯差必漸次加廣。所以測量全國時。必須多設基線。

65. 三角測量。通例分一等(*Primary*)二等(*Secondary*)三等(*Tertiary*)

大概一等三角形。其一邊之平均數約60公里。二等三角形。一邊之平均數約12



公里。三等三角形一邊之平均數約4公里。仿照日本規定之數。(英國一等為40至60英里。二等為10至12英里。三等為1至3英里。)

先測定AB基線之長後。選取他二點C,D。(選取C,D之時。須使ACB,ADB二角。約在34°以上60°以下。)算出CD之長。基線AB增大為CD。由CD取為一等三角網之基線。

(終)

附錄一

(I) 1—2000之五位對數表.

(II) 每隔十分之三角函數對數表.

(III) 每隔十分之三角函數表.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 564
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 259	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	8 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 677	98 722	98 767	98 811	98 856	98 900	98 945	98 989	99 034	99 078
98	99 123	99 167	99 211	99 255	99 300	99 344	99 388	99 432	99 476	99 520
99	99 564	99 607	99 651	99 695	99 739	99 782	99 826	99 870	99 913	99 957
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.			
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389		44	43	42
101		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	1	4.4	4.3	4.2
102		860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	2	8.8	8.6	8.4
103	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	3	13.2	12.9	12.6
104		703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	4	17.6	17.2	16.8
105	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	5	22.0	21.5	21.0
106		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	6	26.4	25.8	25.2
107		938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	7	30.8	30.1	29.4
108	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	8	35.2	34.4	33.6
109		743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	9	39.6	38.7	37.8
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493		41	40	39
111		532	671	610	650	689	727	766	805	844	883	1	4.1	4.0	3.9
112		922	961	999	*038	*077	*115	*154	192	*231	*269	2	8.2	8.0	7.8
113	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	3	12.3	12.0	11.7
114		690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	4	16.4	16.0	15.6
115	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	5	20.5	20.0	19.5
116		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	6	24.6	24.0	23.4
117		819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	7	28.7	28.0	27.3
118	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	8	32.8	32.0	31.2
119		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	9	36.9	36.0	35.1
120		918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243		38	37	36
121	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	1	3.8	3.7	3.6
122		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	2	7.6	7.4	7.2
123		991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	3	11.4	11.1	10.8
124	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	4	15.2	14.8	14.4
125		691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003	5	19.0	18.5	18.0
126	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	6	22.8	22.2	21.6
127		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	7	26.6	25.9	25.2
128		721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	8	30.4	29.6	28.8
129	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	9	34.2	33.3	32.4
130		394	428	461	494	628	561	594	628	661	694		35	34	33
131		727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	1	3.5	3.4	3.3
132	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	2	7.0	6.8	6.6
133		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	3	10.5	10.2	9.9
134		710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	4	14.0	13.6	13.2
135	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	5	17.5	17.0	16.5
136		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	6	21.0	20.4	19.8
137		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	7	24.5	23.8	23.1
138		988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	8	28.0	27.2	26.4
139	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	9	31.5	30.6	29.7
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891		32	31	30
141		922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	1	3.2	3.1	3.0
142	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	2	6.4	6.2	6.0
143		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	3	9.6	9.3	9.0
144		836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	4	12.8	12.4	12.0
145	16	137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	5	16.0	15.5	15.0
146		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	6	19.2	18.6	18.0
147		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	7	22.4	21.7	21.0
148	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	8	25.6	24.8	24.0
149		319	348	377	406	436	464	493	522	551	580	9	28.8	27.9	27.0
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869				

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.		
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869		29	28
151		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	1	2.9	2.8
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2	5.8	5.6
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3	8.7	8.4
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	4	11.6	11.2
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5	14.5	14.0
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6	17.4	16.8
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	7	20.3	19.6
158		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	8	23.2	22.4
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9	26.1	25.2
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656		27	26
161		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1	2.7	2.6
162		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	2	5.4	5.2
163	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3	8.1	7.8
164		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	4	10.8	10.4
165		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5	13.5	13.0
166	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	6	16.2	15.6
167		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7	18.9	18.2
168		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8	21.6	20.8
169		789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	9	24.3	23.4
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274		25	
171		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1	2.5	
172		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2	5.0	
173		805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	3	7.5	
174	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4	10.0	
175		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5	12.5	
176		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6	15.0	
177		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	7	17.5	
178	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8	20.0	
179		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9	22.5	
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744		24	23
181		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1	2.4	2.3
182	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2	4.8	4.6
183		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3	7.2	6.9
184		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4	9.6	9.2
185		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	5	12.0	11.5
186		951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	6	14.4	13.8
187	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	7	16.8	16.1
188		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	8	19.2	18.4
189		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	9	21.6	20.7
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081		22	21
191	28	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	1	2.2	2.1
192		330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	2	4.4	4.2
193		556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	3	6.6	6.3
194		780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	4	8.8	8.4
195	29	003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	5	11.0	10.5
196		226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	6	13.2	12.6
197		447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	7	15.4	14.7
198		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	8	17.6	16.8
199		885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081	9	19.8	18.9
200	30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298			

°	′	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	′	°
0	0	——		——		——	10.00000	0	0	90
	10	7.46373	30102	7.46373	30103	2.53627	10.00000	1	50	
	20	7.76476	17609	7.76476	17610	2.23524	9.99999	1	40	
	30	7.94084	12494	7.94086	12495	2.05914	9.99998	1	30	
	40	8.06578	9690	8.06581	9692	1.93419	9.99997	2	20	
	50	8.16268	7918	8.16273	7919	1.83727	9.99995	2	10	
1	0	8.24186	6693	8.24192	6696	1.75808	9.99993	2	0	89
	10	8.30879	5799	8.30888	5801	1.69112	9.99991	3	50	
	20	8.36678	5114	8.36689	5118	1.63311	9.99988	3	40	
	30	8.41792	4574	8.41807	4578	1.58193	9.99985	3	30	
	40	8.46366	4138	8.46385	4142	1.53615	9.99982	4	20	
	50	8.50504	3778	8.50527	3781	1.49473	9.99978	4	10	
2	0	8.54282	3475	8.54308	3480	1.45692	9.99974	5	0	88
	10	8.57757	3216	8.57788	3221	1.42212	9.99969	5	50	
	20	8.60973	2995	8.61009	3000	1.38991	9.99964	5	40	
	30	8.63968	2801	8.64009	2807	1.35991	9.99959	6	30	
	40	8.66769	2631	8.66816	2637	1.33184	9.99953	6	20	
	50	8.69400	2480	8.69453	2487	1.30547	9.99947	7	10	
3	0	8.71880	2346	8.71940	2352	1.28060	9.99940	6	0	87
	10	8.74226	2225	8.74292	2233	1.25708	9.99934	8	50	
	20	8.76451	2117	8.76525	2124	1.23475	9.99926	7	40	
	30	8.78568	2017	8.78649	2025	1.21351	9.99919	8	30	
	40	8.80585	1928	8.80674	1936	1.19326	9.99911	8	20	
	50	8.82513	1845	8.82610	1854	1.17390	9.99903	9	10	
4	0	8.84358	1770	8.84464	1779	1.15536	9.99894	9	0	86
	10	8.86128	1701	8.86213	1710	1.13757	9.99885	9	50	
	20	8.87829	1635	8.87953	1645	1.12047	9.99876	10	40	
	30	8.89464	1576	8.89598	1587	1.10402	9.99866	10	30	
	40	8.91040	1521	8.91185	1531	1.08815	9.99856	11	20	
	50	8.92561	1469	8.92716	1479	1.07284	9.99845	11	10	
5	0	8.94030	1420	8.94195	1432	1.05805	9.99834	11	0	85
	10	8.95450	1375	8.95627	1386	1.04373	9.99823	11	50	
	20	8.96825	1332	8.97013	1345	1.02987	9.99812	12	40	
	30	8.98157	1293	8.98358	1304	1.01642	9.99800	13	30	
	40	8.99450	1254	8.99662	1268	1.00338	9.99787	12	20	
	50	9.00704	1219	9.00930	1232	0.99070	9.99775	14	10	
6	0	9.01923	1186	9.02162	1199	0.97838	9.99761	13	0	84
	10	9.03109	1153	9.03361	1167	0.96639	9.99748	14	50	
	20	9.04262	1124	9.04528	1138	0.95472	9.99734	14	40	
	30	9.05386	1095	9.05666	1109	0.94334	9.99720	15	30	
	40	9.06481	1067	9.06775	1083	0.93225	9.99705	15	20	
	50	9.07548	1041	9.07858	1056	0.92142	9.99690	15	10	
7	0	9.08589	1017	9.08914	1033	0.91086	9.99675	16	0	83
	10	9.09606	993	9.09947	1009	0.90053	9.99659	16	50	
	20	9.10599	971	9.10956	987	0.89044	9.99643	16	40	
	30	9.11570	919	9.11943	967	0.88057	9.99627	17	30	
	40	9.12519	928	9.12909	945	0.87091	9.99610	17	20	
	50	9.13447	909	9.13854	926	0.86146	9.99593	18	10	
8	0	9.14356		9.14780		0.85220	9.99575		0	82
°	′	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	′	°

° ′	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	′ °
8 0	9. 14 356	889	9. 14 780	908	0. 85 220	9. 99 575	18	0 82
10	9. 15 245	871	9. 15 688	889	0. 84 312	9. 99 557	18	50
20	9. 16 116	854	9. 16 577	873	0. 83 423	9. 99 539	19	40
30	9. 16 970	837	9. 17 450	856	0. 82 550	9. 99 520	19	30
40	9. 17 807	821	9. 18 306	840	0. 81 694	9. 99 501	19	20
50	9. 18 628	805	9. 19 146	825	0. 80 854	9. 99 482	20	10
9 0	9. 19 433	790	9. 19 971	811	0. 80 029	9. 99 462	20	0 81
10	9. 20 223	776	9. 20 782	796	0. 79 218	9. 99 442	21	50
20	9. 20 999	762	9. 21 578	783	0. 78 422	9. 99 421	21	40
30	9. 21 761	748	9. 22 361	769	0. 77 639	9. 99 400	21	30
40	9. 22 509	735	9. 23 130	757	0. 76 870	9. 99 379	22	20
50	9. 23 244	723	9. 23 887	745	0. 76 113	9. 99 357	22	10
10 0	9. 23 967	710	9. 24 632	733	0. 75 368	9. 99 335	22	0 80
10	9. 24 677	699	9. 25 365	721	0. 74 635	9. 99 313	23	50
20	9. 25 376	687	9. 26 086	711	0. 73 914	9. 99 290	23	40
30	9. 26 063	676	9. 26 797	699	0. 73 203	9. 99 267	24	30
40	9. 26 739	666	9. 27 496	690	0. 72 504	9. 99 243	24	20
50	9. 27 405	655	9. 28 186	679	0. 71 814	9. 99 219	24	10
11 0	9. 28 060	645	9. 28 865	670	0. 71 135	9. 99 195	25	0 79
10	9. 28 705	635	9. 29 535	660	0. 70 465	9. 99 170	25	50
20	9. 29 340	626	9. 30 195	651	0. 69 805	9. 99 145	26	40
30	9. 29 966	616	9. 30 846	643	0. 69 154	9. 99 119	26	30
40	9. 30 582	607	9. 31 489	633	0. 68 511	9. 99 093	26	20
50	9. 31 189	599	9. 32 122	625	0. 67 878	9. 99 067	27	10
12 0	9. 31 788	590	9. 32 747	618	0. 67 253	9. 99 040	27	0 78
10	9. 32 378	582	9. 33 365	609	0. 66 635	9. 99 013	27	50
20	9. 32 960	574	9. 33 974	602	0. 66 026	9. 98 986	28	40
30	9. 33 534	566	9. 34 576	594	0. 65 424	9. 98 958	28	30
40	9. 34 100	558	9. 35 170	587	0. 64 830	9. 98 930	29	20
50	9. 34 658	551	9. 35 757	579	0. 64 243	9. 98 901	29	10
13 0	9. 35 209	543	9. 36 336	573	0. 63 664	9. 98 872	29	0 77
10	9. 35 752	537	9. 36 909	567	0. 63 091	9. 98 843	30	50
20	9. 36 289	530	9. 37 476	559	0. 62 524	9. 98 813	30	40
30	9. 36 819	522	9. 38 035	554	0. 61 965	9. 98 783	30	30
40	9. 37 341	517	9. 38 589	547	0. 61 411	9. 98 753	31	20
50	9. 37 858	510	9. 39 136	541	0. 60 864	9. 98 722	32	10
14 0	9. 38 368	503	9. 39 677	535	0. 60 323	9. 98 690	31	0 76
10	9. 38 871	498	9. 40 212	530	0. 59 788	9. 98 659	32	50
20	9. 39 369	491	9. 40 742	524	0. 59 258	9. 98 627	33	40
30	9. 39 860	486	9. 41 266	518	0. 58 734	9. 98 594	33	30
40	9. 40 346	479	9. 41 784	513	0. 58 216	9. 98 561	33	20
50	9. 40 825	475	9. 42 297	508	0. 57 703	9. 98 528	34	10
15 0	9. 41 300	468	9. 42 805	503	0. 57 195	9. 98 494	34	0 75
10	9. 41 768	464	9. 43 308	498	0. 56 692	9. 98 460	34	50
20	9. 42 232	458	9. 43 806	493	0. 56 194	9. 98 426	35	40
30	9. 42 690	453	9. 44 299	488	0. 55 701	9. 98 391	35	30
40	9. 43 143	448	9. 44 787	484	0. 55 213	9. 98 356	36	20
50	9. 43 591	443	9. 45 271	479	0. 54 729	9. 98 320	36	10
16 0	9. 44 034		9. 45 760		0. 54 250	9. 98 284		0 74
° ′	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	′ °

° ′	L. sin.	D.	L. tan.	D.	l. cot.	L. cos.	D.	′ °
16 0	9. 44 034	438	9. 45 750	474	0. 54 250	9. 98 284	36	0 74
10	9. 44 472	433	9. 46 224	470	0. 53 776	9. 98 248	37	50
20	9. 44 905	429	9. 46 694	466	0. 53 306	9. 98 211	37	40
30	9. 45 334	424	9. 47 160	462	0. 52 840	9. 98 174	38	30
40	9. 45 758	420	9. 47 622	458	0. 52 378	9. 98 136	38	20
50	9. 46 178	416	9. 48 080	454	0. 51 920	9. 98 098	38	10
17 0	9. 46 594	411	9. 48 534	450	0. 51 466	9. 98 060	39	0 73
10	9. 47 005	406	9. 48 984	446	0. 51 016	9. 98 021	39	50
20	9. 47 411	403	9. 49 430	442	0. 5[illegible] 570	9. 97 982	40	40
30	9. 47 814	399	9. 49 872	439	0. 50 128	9. 97 942	40	30
40	9. 48 213	394	9. 50 311	435	0. 49 689	9. 97 902	41	20
50	9. 48 607	391	9. 50 746	432	0. 49 254	9. 97 861	40	10
18 0	9. 48 998	387	9. 51 178	428	0. 48 822	9. 97 821	42	0 72
10	9. 49 385	383	9. 51 606	425	0. 48 394	9. 97 779	41	50
20	9. 49 768	380	9. 52 031	421	0. 47 969	9. 97 738	42	40
30	9. 50 148	376	9. 52 452	418	0. 47 548	9. 97 696	43	30
40	9. 50 523	373	9. 52 870	415	0. 47 130	9. 97 653	43	20
50	9. 50 896	368	9. 53 285	412	0. 46 715	9. 97 610	43	10
19 0	9. 51 264	365	9. 53 697	409	0. 46 303	9. 97 567	44	0 71
10	9. 51 629	362	9. 54 106	406	0. 45 894	9. 97 523	44	50
20	9. 51 991	359	9. 54 512	403	0. 45 488	9. 97 479	44	40
30	9. 52 350	356	9. 54 915	400	0. 45 085	9. 97 435	45	30
40	9. 52 705	351	9. 55 315	397	0. 44 685	9. 97 390	46	20
50	9. 53 056	349	9. 55 712	395	0. 44 288	9. 97 344	45	10
20 0	9. 53 40[illegible]	346	9. 56 107	391	0. 43 893	9. 97 2[illegible]9	47	0 70
10	9. 53 751	342	9. 56 498	389	0. 43 502	9. 97 252	46	50
20	9. 54 093	340	9. 56 887	387	0. 43 113	8. 97 206	47	40
30	9. 54 433	336	9. 57 274	384	0. 42 726	9. 97 159	48	30
40	9. 54 769	333	9. 57 658	381	0. 42 342	9. 97 111	48	20
50	9. 55 102	331	9. 58 039	379	0. 41 961	9. 27 063	48	10
21 0	9. 55 433	328	9. 58 418	376	0. 41 582	9. 97 015	49	0 69
10	9. 55 761	324	9. 58 794	374	0. 41 206	9. 96 963	49	50
20	9. 56 085	323	9. 59 168	372	0. 40 832	9. 96 917	49	40
30	9. 56 408	319	9. 59 540	369	0. 40 460	9. 96 868	50	30
40	9. 56 727	317	9. 59 909	367	0. 40 091	9. 96 818	51	20
50	9. 57 044	314	9. 60 276	365	0. 39 724	9. 96 767	50	10
22 0	9. 57 3[illegible]8	311	9. 60 641	363	0. 39 359	9. 96 717	52	0 63
10	9. 57 669	309	9. 61 004	360	0. 38 996	9. 96 665	51	50
20	9. 57 978	306	9. 61 364	358	0. 38 636	9. 96 614	52	40
30	9. 58 284	304	9. 61 722	357	0. 38 278	9. 96 5[illegible]2	53	30
40	9. 58 588	301	9. 62 079	354	0. 37 921	9. 96 509	53	20
50	9. 58 889	299	9. 62 433	352	0. 37 567	9. 96 456	53	10
23 0	9. 59 188	296	9. 62 785	350	0. 37 215	9. 96 403	54	0 67
10	9. 59 484	294	9. 63 135	349	0. 36 865	9. 96 349	55	50
20	9. 59 778	292	9. 63 484	346	0. 36 516	9. 96 2[illegible]4	54	40
30	9. 60 070	289	9. 63 830	345	0. 36 170	9. 96 240	55	30
40	9. 60 359	287	9. 64 175	342	0. 35 825	9. 96 185	56	20
50	9. 60 646	285	9. 64 517	341	0. 35 483	9. 96 129	56	10
24 0	9. 60 931		9. 64 858		0. 35 142	9. 96 07[illegible]		0 66
° ′	L. cos.	D.	L. cot.	D.	l. tan.	L. sin.	D.	′ °

° ′	L. sin.	D.	L. tan.	D.	l. cot.	L. cos.	D.	′ °
24 0	9. 60 931	283	9. 64 858	339	0. 35 142	9. 96 073	56	0 66
10	9. 61 214	280	9. 65 197	338	0. 34 803	9. 96 017	57	50
20	9. 61 494	279	9. 65 535	335	0. 34 465	9. 95 960	58	40
30	9. 61 773	276	9. 65 870	334	0. 34 130	9. 95 902	58	30
40	9. 62 049	274	9. 66 204	333	0. 33 796	9. 95 844	58	20
50	9. 62 323	272	9. 66 537	330	0. 33 463	9. 95 786	58	10
25 0	9. 62 595	270	9. 66 867	329	0. 33 133	9. 95 728	60	0 65
10	9. 62 865	268	9. 67 196	328	0. 32 804	9. 95 668	59	50
20	9. 63 133	265	9. 67 524	326	0. 32 476	9. 95 609	60	40
30	9. 63 398	264	9. 67 850	324	0. 32 150	9. 95 549	61	30
40	9. 63 662	262	9. 68 174	323	0. 31 826	9. 95 488	61	20
50	9. 63 924	260	9. 68 497	321	0. 31 503	9. 95 427	61	10
26 0	9. 64 184	258	9. 68 818	320	0. 31 182	9. 95 366	62	0 64
10	9. 64 442	256	9. 69 138	319	0. 30 862	9. 95 304	62	50
20	9. 64 698	255	9. 69 457	317	0. 30 543	9. 95 242	63	40
30	9. 64 953	252	9. 69 774	315	0. 30 226	9. 95 179	63	30
40	9. 65 205	251	9. 70 089	315	0. 29 911	9. 95 116	64	20
50	9. 65 456	249	9. 70 404	313	0. 29 596	9. 95 052	64	10
27 0	9. 65 705	247	9. 70 717	311	0. 29 283	9. 94 988	65	0 63
10	9. 65 952	245	9. 71 028	311	0. 28 972	9. 94 923	65	50
20	9. 66 197	244	9. 71 339	309	0. 28 661	9. 94 858	65	40
30	9. 66 441	241	9. 71 648	307	0. 28 352	9. 94 793	66	30
40	9. 66 682	240	9. 71 955	307	0. 28 045	9. 94 727	67	20
50	9. 66 922	239	9. 72 262	305	0. 27 738	9. 94 660	67	10
23 0	9. 67 161	237	9. 72 567	305	0. 27 433	9. 94 593	67	0 62
10	9. 67 398	235	9. 72 872	303	0. 27 128	9. 94 526	68	50
20	9. 67 633	233	9. 73 175	301	0. 26 825	9. 94 458	68	40
30	9. 67 866	232	9. 73 476	301	0. 26 524	9. 94 390	69	30
40	9. 68 098	230	9. 73 777	300	0. 26 223	9. 94 321	69	20
50	9. 68 328	229	9. 74 077	298	0. 25 923	9. 94 252	70	10
29 0	9. 68 557	227	9. 74 375	298	0. 25 625	9. 94 182	70	0 61
10	9. 68 784	226	9. 74 673	296	0. 25 327	9. 94 112	71	50
20	9. 69 010	224	9. 74 969	295	0. 25 031	9. 94 041	71	40
30	9. 69 234	222	9. 75 264	294	0. 24 736	9. 93 970	72	30
40	9. 69 456	221	9. 75 558	294	0. 24 442	9. 93 898	72	20
50	9. 69 677	220	9. 75 852	292	0. 24 148	9. 93 826	73	10
30 0	9. 69 897	218	9. 76 144	291	0. 23 856	9. 93 753	73	0 60
10	9. 70 115	217	9. 76 435	290	0. 23 565	9. 93 680	74	50
20	9. 70 332	215	9. 76 725	290	0. 23 275	9. 93 606	74	40
30	9. 70 547	214	9. 77 015	288	0. 22 985	9. 93 532	75	30
40	9. 70 761	212	9. 77 303	288	0. 22 697	9. 93 457	75	20
50	9. 70 973	211	9. 77 591	286	0. 22 409	9. 93 382	75	10
31 0	9. 71 184	209	9. 77 877	286	0. 22 123	9. 93 307	77	0 59
10	9. 71 393	209	9. 78 163	285	0. 21 837	9. 93 230	76	50
20	9. 71 602	207	9. 78 448	284	0. 21 552	9. 93 154	77	40
30	9. 71 809	205	9. 78 732	283	0. 21 268	9. 93 077	78	30
40	9. 72 014	204	9. 79 015	282	0. 20 985	9. 92 999	78	20
50	9. 72 218	203	9. 79 297	282	0. 20 703	9. 92 921	79	10
32 0	9. 72 421		9. 79 579		0. 20 421	9. 92 842		0 58
° ′	L. cos.	D.	L. cot.	D.	l. tan.	L. sin.	D.	′ °

° ′	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	′ °
32 0	9. 72 421	201	9. 79 579	281	0. 20 421	9. 92 842	79	0 58
10	9. 72 622	201	9. 79 860	280	0. 20 140	9. 92 763	80	50
20	9. 72 823	199	9. 80 140	279	0. 19 860	9. 92 683	80	40
30	9. 73 022	197	9. 80 419	278	0. 19 581	9. 92 603	81	30
40	9. 73 219	197	9. 80 697	278	0. 19 303	9. 92 522	81	20
50	9. 73 416	195	9. 80 975	277	0. 19 025	9. 92 441	82	10
33 0	9. 73 611	194	9. 81 252	276	0. 18 748	9. 92 359	82	0 57
10	9. 73 805	192	9. 81 528	275	0. 18 472	9. 92 277	83	50
20	9. 73 997	192	9. 81 803	275	0. 18 197	9. 92 194	83	40
30	9. 74 189	190	9. 82 078	274	0. 17 922	9. 92 111	84	30
40	9. 74 379	189	9. 82 352	274	0. 17 648	9. 92 027	85	20
50	9. 74 568	188	9. 82 626	273	0. 17 374	9. 91 942	85	10
34 0	9. 74 756	187	9. 32 899	272	0. 17 101	9. 91 857	85	0 56
10	9. 74 943	185	9. 83 171	271	0. 16 829	9. 91 772	86	50
20	9. 75 128	185	9. 83 442	271	0. 16 558	9. 91 686	87	40
30	9. 75 313	183	9. 83 713	271	0. 16 287	9. 91 599	87	30
40	9. 75 496	182	9. 83 984	270	0. 16 016	9. 91 512	87	20
50	9. 75 678	181	9. 84 254	269	0. 15 746	9. 91 425	89	10
35 0	9. 75 859	180	9. 84 523	268	0. 15 477	9. 91 336	88	0 55
10	9. 76 039	179	9. 84 791	268	0. 15 209	9. 91 248	90	50
20	9. 76 218	177	9. 85 059	268	0. 14 941	9. 91 158	89	40
30	9. 76 395	177	9. 85 327	267	0. 14 673	9. 91 069	91	30
40	9. 76 572	175	9. 85 594	266	0. 14 406	9. 90 978	91	20
50	9. 76 747	175	9. 85 860	266	0. 14 140	9. 90 887	91	10
36 0	9. 76 922	173	9. 86 126	266	0. 13 874	9. 90 796	92	0 54
10	9. 77 095	173	9. 86 392	264	0. 13 608	9. 90 704	93	50
20	9. 77 268	171	9. 86 656	265	0. 13 344	9. 90 611	93	40
30	9. 77 439	170	9. 86 921	264	0. 13 079	9. 90 518	94	30
40	9. 77 609	169	9. 87 185	263	0. 12 815	9. 90 424	94	20
50	9. 77 778	168	9. 87 448	263	0. 12 552	9. 90 330	95	10
37 0	9. 77 946	167	9. 87 711	263	0. 12 289	9. 90 235	96	0 53
10	9. 78 113	167	9. 87 974	262	0. 12 026	9. 90 139	96	50
20	9. 78 280	165	9. 88 236	262	0. 11 764	9. 90 043	96	40
30	9. 78 445	164	9. 88 498	261	0. 11 502	9. 89 947	98	30
40	9. 78 609	163	9. 88 759	261	0. 11 241	9. 89 949	97	20
50	9. 78 772	162	9. 89 020	261	0. 10 980	9. 89 752	99	10
38 0	9. 78 934	161	9. 89 281	260	0. 10 719	9. 89 653	99	0 52
10	9. 79 095	161	9. 89 541	260	0. 10 459	9. 89 554	99	50
20	9. 79 256	159	9. 89 801	260	0. 10 199	9. 89 455	101	40
30	9. 79 415	158	9. 90 061	259	0. 09 939	9. 89 354	100	30
40	9. 79 573	158	9. 90 320	258	0. 09 680	9. 89 254	102	20
50	9. 79 731	156	9. 90 578	259	0. 09 422	9. 89 152	102	10
39 0	9. 79 887	156	9. 90 837	258	0. 09 163	9. 89 050	102	0 51
10	9. 80 043	154	9. 91 095	258	0. 08 905	9. 88 948	104	50
20	9. 80 197	154	9. 91 353	257	0. 08 647	9. 88 844	103	40
30	9. 80 351	153	9. 91 610	258	0. 08 390	9. 88 741	105	30
40	9. 80 504	152	9. 91 868	257	0. 08 132	9. 88 636	105	20
50	9. 80 656	151	9. 92 125	256	0. 07 875	9. 88 531	106	10
40 0	9. 80 807		9. 92 381		0. 07 619	9. 88 425		0 50
° ′	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	′ °

° ′	L. sin.	D.	L. tan.	D.	l. cot.	L. cos.	D.	′ °
40 0	9. 80 807	150	9. 92 381	257	0. 07 619	9. 88 425	106	0 50
10	9. 80 957	149	9. 92 638	256	0. 07 362	9. 88 319	107	50
20	9. 81 106	148	9. 92 894	256	0. 07 106	9. 88 212	107	40
30	9. 81 254	148	9. 93 150	256	0. 06 850	9. 88 105	109	30
40	9. 81 402	147	9. 93 406	255	0. 06 594	9. 87 996	109	20
50	9. 81 549	145	9. 93 661	255	0. 06 339	9. 87 887	109	10
41 0	9. 81 694	145	9. 93 916	255	0. 06 084	9. 87 778	110	0 49
10	9. 81 839	144	9. 94 171	255	0. 05 829	9. 87 668	111	50
20	9. 81 983	143	9. 94 426	256	0. 05 574	9. 87 557	111	40
30	9. 82 126	143	9. 94 681	254	0. 05 319	9. 87 446	112	30
40	9. 82 269	141	9. 94 935	255	0. 05 065	9. 87 334	113	20
50	9. 82 410	141	9. 95 190	254	0. 04 810	9. 87 221	114	10
42 0	9. 82 551	140	9. 95 444	254	0. 04 556	9. 87 107	114	0 48
10	9. 82 691	139	9. 95 698	254	0. 04 302	9. 86 993	114	50
20	9. 82 830	138	9. 95 952	253	0. 04 048	9. 86 879	116	40
30	9. 82 968	138	9. 96 205	254	0. 03 795	9. 86 763	116	30
40	9. 83 106	136	9. 96 459	253	0. 03 541	9. 86 647	117	20
50	9. 83 242	136	9. 96 712	254	0. 03 288	9. 86 530	117	10
43 0	9. 83 378	135	9. 96 966	253	0. 03 034	9. 86 413	118	0 47
10	9. 83 513	135	9. 97 219	253	0. 02 781	9. 86 295	119	50
20	9. 83 648	133	9. 97 472	253	0. 02 528	9. 86 176	120	40
30	9. 83 781	133	9. 97 725	253	0. 02 275	9. 86 056	120	30
40	9. 83 914	132	9. 97 978	253	0. 02 022	9. 85 936	121	20
50	9. 84 046	131	9. 98 231	253	0. 01 769	9. 85 815	122	10
44 0	9. 84 177	131	9. 98 484	253	0. 01 516	9. 85 693	122	0 46
10	9. 84 308	129	9. 98 737	252	0. 01 263	9. 85 571	123	50
20	9. 84 437	129	9. 98 989	253	0. 01 011	9. 85 448	124	40
30	9. 84 566	128	9. 99 242	253	0. 00 758	9. 85 324	124	30
40	9. 84 694	128	9. 99 495	252	0. 00 505	9. 85 200	126	20
50	9. 84 822	127	9. 99 747	253	0. 00 253	9. 85 074	125	10
45 0	9. 84 949		10. 00 000		0. 00 000	9. 84 949		0 45
° ′	L. cos.	D.	L. cot.	D.	l. tan.	L. sin.	D.	′ °

注意

L. sin., L. tan 各爲sin., tan.之對數加以10者。l. cot., l. tan. 則爲 cot., tan. 之對數。

0°–12°

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
0 0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0 90
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20
50	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20
50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10
2 0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0 88
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10
3 0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0 87
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10
4 0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0 86
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10
5 0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0 85
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50
20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10
6 0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0 84
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30
40	0.1161	0.1169	8.5556	0.9932	20
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50
20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40
30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30
40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20
50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10
8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 82
10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50
20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40
30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30
40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20
50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10
9 0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0 81
10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50
20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40
30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30
40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20
50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10
10 0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0 80
10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50
20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40
30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30
40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20
50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10
11 0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0 79
10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50
20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40
30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30
40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20
50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10
12 0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0 78
10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50
20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40
30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30
40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20
50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

77°–89°

13°–28°

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50
20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40
30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30
40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20
50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10
14 0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0 76
10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50
20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40
30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30
40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20
50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10
15 0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0 75
10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50
20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40
30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30
40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20
50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10
16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0 74
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10
17 0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0 73
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10
18 0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0 72
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10
19 0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0 71
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10
20 0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0 70
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40
30	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30
40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20
50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69
10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50
20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40
30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30
40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20
50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10
22 0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0 68
10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50
20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40
30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30
40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20
50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10
23 0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0 67
10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50
20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40
30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30
40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20
50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10
24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0 66
10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
25 0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0 65
10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20
50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
26 0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0 64
10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
27 0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0 63
10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
28 0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0 62
10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30
40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20
50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10
29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

61°–76°

°	′	sin.	tan.	cot.	cos.	′	°
29	0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0	61
	10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50	
	20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40	
	30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30	
	40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20	
	50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10	
30	0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0	60
	10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50	
	20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40	
	30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30	
	40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20	
	50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10	
31	0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0	59
	10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50	
	20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40	
	30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30	
	40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20	
	50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10	
32	0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0	58
	10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50	
	20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40	
	30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30	
	40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20	
	50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10	
33	0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0	57
	10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50	
	20	0.9495	0.6577	1.5204	0.8355	40	
	30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30	
	40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20	
	50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10	
34	0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0	56
	10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50	
	20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40	
	30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30	
	40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20	
	50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10	
35	0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0	55
	10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50	
	20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40	
	30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30	
	40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20	
	50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10	
36	0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0	51
	10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50	
	20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40	
	30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30	
	40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20	
	50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10	
37	0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0	53
°	′	cos.	cot.	tan.	sin.	′	°

°	′	sin.	tan.	cot.	cos.	′	°
37	0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0	53
	10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50	
	20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40	
	30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30	
	40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20	
	50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10	
38	0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0	52
	10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50	
	20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40	
	30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30	
	40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20	
	50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10	
39	0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0	51
	10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50	
	20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40	
	30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30	
	40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20	
	50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10	
40	0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0	50
	10	0.6450	0.8441	1.1847	0.764	50	
	20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40	
	30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30	
	40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20	
	50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10	
41	0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0	49
	10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50	
	20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40	
	30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30	
	40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20	
	50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10	
42	0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0	43
	10	0.6713	0.9057	1.1041	0.741	50	
	20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40	
	30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30	
	40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20	
	50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10	
43	0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0	47
	10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50	
	20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40	
	30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30	
	40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20	
	50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10	
44	0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0	46
	10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50	
	20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40	
	30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30	
	40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20	
	50	0.7060	0.9942	1.0058	0.7092	10	
45	0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0	45
°	′	cos.	cot.	tan.	sin.	′	°

附錄二

總復習題

緒論

1. 若以正三角形內角爲單位。問正方形之外接圓周上一點。對於一邊所成之角度若干。

2. 圓內接四邊形 ABCD。已知 A 角 $44°35'$。B 角 $72°48'12''$。求 C, D 二角。

3. 問正八角形外接圓上任一點。對於一邊所成之角度幾何。

4. 若以正十五角形一邊與其鄰邊延線所成角度爲單位。則直角之角度幾何。

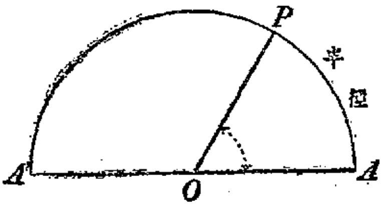
5. 正四十八邊形之內角與二直角之差若干。求至分之數止。

6. 問鐘之兩針。自 5 點至 7 點 40 分。各迴轉幾度之角。

7. 正多角形之一角爲 $170°$。問其邊數若干。

8. 有多角形。其各內角順次成等差級數。設其最小之角爲 $120°$。公差爲 5 度。求本形之邊數幾何。

弧度法



設於中心O之圓周上。取AP弧。令其長等於半徑。又連結PO，AO。由幾何學定理。知圓心角相比。等於所立之弧相比。

$$\frac{A\hat{O}P}{2\text{直角}}=\frac{\text{半徑}}{\text{半圓周}}=\frac{1}{\pi}$$

今直角以R字表之。

$$A\hat{O}P=2R\times\frac{1}{\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}(=\text{定數})$$

取此角為測角之單位。是為弧度法。$A\hat{O}P$之角。名為1弧度。

以弧度角為單位。原因於次之二理由。

I. 各弧度角均相等。

II. 取弧度角為單位。則解析的三角法公式。多可變為簡單。

$$1\text{弧度}=180^\circ\times\frac{1}{\pi}=57^\circ2957$$

又某角之常度數為D。其弧度之數為α。則

$$\frac{D}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$$

由此式可將六十法及弧度法。彼此互換。

1. 試將90°, 180°, 360°各角。改爲弧度。

2. 試將$\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$。改爲常度。

3. n邊正多角形內角之弧度必爲$\frac{n-2}{n}\pi$。試證明之。

4. 三角形各角之比爲3:5:7。問各角之弧度幾何。

5. 半徑1尺5寸之圓周上。取5寸長之弧。問其所立之中心角之度數若干。

6. 多角形各角之和爲10π。求其邊數幾何。

7. 正多角形一外角爲一內角六分之一。試求各角之弧度及其邊數。

8. 地球半徑爲4000英里。問赤道上一分弧之長若干。

9. 有二角。其和爲84°。差爲0.1直角。問各角之度數若干。

10. 圓之半徑25尺。弧長$37\frac{1}{2}$尺。問此弧上所立中心角之弧度幾何。

11. 設於半徑4尺之圓內。有80°之中心角。問其

所含之弧長幾何。

12. 設於半徑5尺之圓內。有中心角爲$\frac{2}{3}$直角。問其所含之弧長若干。

銳角之三角函數

1. 已知 $\sec A=\frac{41}{9}$。求 $\sin A$ 及 $\cot A$。

2. 設 $\sin A=\frac{m}{n}$ 則 $\sqrt{n^2-m^2}\ \tan A=m$。試證之。

3. 設 $\cos\theta=h$, $\tan\theta=k$。求以 h, k 之連絡方程式。

4. 設 $\cot A=\frac{p}{q}$。試求 $\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ 之值。

5. $A<90°$。則 $\sin A+\cos A>1$。試證之。

6. $\tan^2 A+\cot^2 A$ 試以 $\sin A$ 之項表之。

試證下列各恆等式[7 至 20]。

7. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$。

8. $(1+\cos A)^2+(1+\sin A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$。

9. $(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+2$。

10. $\frac{(\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta)^2}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}=1+2\sin\theta\cos\theta$。

11. $\sin^3 A+\cos^3 A=(1-\sin A\cos A)(\sin A+\cos A)$。

12. $(\sin\theta+\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$。

13. $(1+\tan A+\tan^2 A)(1-\cot A+\cot^2 A)=$
$\tan^2 A+\cot^2 A+1$。

14. $\tan A(1-\cot^2 A)+\cot A(1-\tan^2 A)=0$。

15. $\frac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\frac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$。

16. $(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2=(1+\tan\theta)^2+(1+\cot\theta)^2$。

17. $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}$。

18. $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$。

19. $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$。

20. $(1+\cos A-\sin^2 A)^2(1-\cos A)^2+(1+\sin A-\cos^2 A)^2$

$\times(1-\sin A)^2=\sin^2 A\cos^2 A$。

21. $\tan A+\sin A=m, \tan A-\sin A=n$。則 $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$。

試證之。

22. 試解下列各方程式。

(1) $4\sin\theta-3\operatorname{cosec}\theta=0$。

(2) $\sin 5A=\cos 4A$。

(3) $4\cos\theta-3\sec\theta=0$。

(4) $\tan 3\theta=\cot 2\theta$。

(5) $2\sin^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2$。

(6) $\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta+\dfrac{3}{4}=0$。

試證下列各式。

23. $\sin^2 60°-\sin^2 30°=\dfrac{1}{6}\sin 60°\cot 30°$。

24. $\dfrac{\sin(90°-A)}{\sec(90°-A)}\cdot\dfrac{\tan(90°-A)}{\cos A}=\cos A$。

25. $\dfrac{\cot^2 A \sin^2(90°-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90°-A)-\cos A$

26. $(1+\sin45°+\sin30°)(1-\cos45°+\cos60°)=\dfrac{7}{4}$。

27. $\sin^2 30°$, $\sin^2 45°$, $\sin^2 60°$, $\sin^2 90°$ 成等差級數。試證之。

28. 設 $\tan^2 45°-\cos^2 60°=x\sin45°\cos45°\tan60°$。求 x 之值。

29. $\tan(90°-A)+\cot(90°-A)$ 與 $\operatorname{cosec}A\times\operatorname{cosec}(90°-A)$ 是否相等。

30. 設 $\sec A\operatorname{cosec}(90°-A)-x\cot(90°-A)=1$。求 x 之值。

直三角形

1. 試證C爲直角之ABC三角形。求證

$$tanA+tanB=\frac{c^2}{ab}。$$

2. 任意三角形底邊以高所截之二部分相比。等於其鄰角之餘切相比。

3. 任意三角形之頂角。以高所分之二部分餘弦之比。等於鄰邊之反比。

4. 塔上立一竿。今於距塔基 a 尺之處。測得塔及竿所含之角均相等。若塔之高爲 h。則竿之長爲 $\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$。試證之。

5. 就△ABC。設A=30°, B=135°, AB=100尺。問C點至AB之延長線上所引垂線之長若干。

6. 就△ABC。設AD爲BC之垂線。AD=5, A$\hat{B}$D=60°, A$\hat{C}$D=45°。試求各邊之長。

7. 就PQR直三角形。設QR=8, Q$\hat{R}$P=60°, Q$\hat{P}$R=30°。求自Q點向斜邊引垂線所分斜邊爲二部分之長。

8. 就△PRS。設PQ爲RS之垂線。已知PQ=20, P$\hat{R}$S=135°, P$\hat{S}$R=30°。求RS。

9. 就$\triangle CAB$。設CD為AB之垂線。已知$AB=59$，$C\hat{B}D=45°$，$C\hat{A}B=32°50'$。求DC及BD。

10. 塔之正東有二處相距200尺。今自此二處測得塔頂之仰角各為45°，30°。問塔之高若干。

11. 設於海面上高80尺之燈臺上。測得正西兩巖之俯角為75°及15°。問此兩巖相距幾何。但

$$\cot 75°=0.268$$

$$\cot 15°=3.732$$

12. 船向正東航行。適見正南有二巖。及行過3海里後。見此二巖在於西偏南60°及30°。問測者與二巖之距離幾何。

13. 某日午前十時自燈臺見北東相距9海里處。有小汽船向南東行。至午後1時。則見此小汽船在東偏南15°之處。問此船每時之速度。及此船前後兩位置及後位置與測者之距離。

14. 有同高之旗竿。相距x尺。今於其間一處望近者之竿為α度。望遠者之竿為β度。若此處與近者之竿相距b尺。則

$$x=b(\tan\alpha\cot\beta-1)$$

試證之。

15. 有尖劈形之溪谷。自兩岸架一水平之橋。與兩斜面所成角度爲 α, β。橋長爲 l。則此橋至溪谷之深。當爲 $\frac{l}{\cot\alpha+\cot\beta}$。試證之。

16. 設於塔上立一旗竿。今於塔底相距 a 尺之處。測得旗竿所含之角爲 α。又距塔底 b 尺之處。測得旗竿所含之角亦爲 α。問旗竿之長若干。

17. 有鐵道在西南西方向。今火車自 A 至 B 需時二分。又在 A 之北北西方向處。有二塔相距1.5英里。若自 B 處望之。則一在北偏東 $7°\frac{1}{2}$。一在北偏東 $37°\frac{1}{2}$。問火車之速度幾何。

任意角之三角函數

1. 求下列各三角函數之值。

(1) $\sin 495^\circ$ $\cos 495^\circ$ $\cot 495^\circ$

(2) $\sec 120^\circ$ $\tan 120^\circ$ $\operatorname{cosec} 120^\circ$

(3) $\operatorname{cosec} 315^\circ$ $\sec 315^\circ$ $\cot 315^\circ$

(4) $\tan(-300^\circ)$ $\cot(-300^\circ)$ $\sec(-300^\circ)$

2. 下列各三角函數。試以90°以下之三角函數表示之。

$\sin(-300^\circ)$ $\tan 1345^\circ$ $\cot(-1000^\circ)$

3. 求A—270°之各三角函數。

4. 試將下列三式簡單之。

(1) $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)\sec(90^\circ-A)$。

(2) $\sec(180^\circ+A)\sec(180^\circ-A)+\cot(90^\circ+A)\tan(180^\circ+A)$。

(3) $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\dfrac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\dfrac{\cos A}{\sin(90^\circ+A)}$。

5. 若A角小於90°。下列三式。試以幾何理證明之。

(1) $\sec(A-180^\circ)=-\sec A$。

(2) $\tan(270^\circ+A)=-\cot A$。

(3) $\cos(A-90^\circ)=\sin A$。

6. 試解下列各方程式。求其在360°以內之角。

(1) $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$。 (2) $\tan\theta=-\sqrt{3}$。

(3) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$。 (4) $\tan\theta=-1$。

7. 問60°及−120°之角。有無同值之同三角函數。

8. 試證下列三等式。

(1) $\cos\theta(\tan\theta+2)(2\tan\theta+1)=2\sec\theta+5\sin\theta$。

(2) $(\sec A-\operatorname{cosec}A)(1+\cot A+\tan A)=\frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}A}-\frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A}$。

(3) $\operatorname{cosec}(90°+A)\sec(360°-A)+\sin(180°+A)\times$

$\sec A\tan(180°+A)=\tan(45°+A)\tan(45°-A)$。

9. 若 $\cos B=\cos A$。$\tan B=-\tan A$。則 $A+B$ 或為0°或為360°之倍數。

10. $\sin(90-A)+\sin(180-A)=0$。求 A 之一值。

和角之三角函數

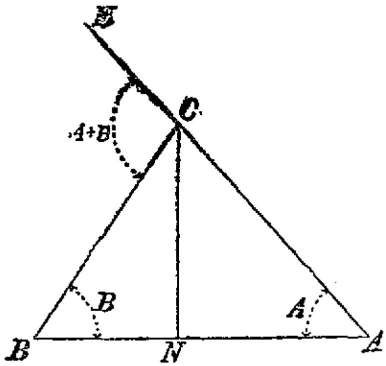
(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

之別證。



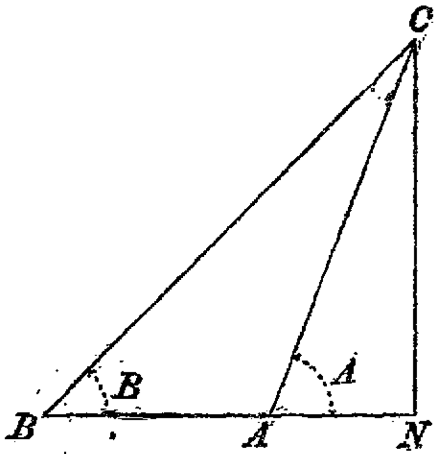
任作三角形 ABC. $C\hat{A}B=A$, $C\hat{B}A=B$, CN 為 BA 之垂線。則

$$\sin(A+B)=\frac{2\triangle ABC}{AC\cdot BC}$$

$$=\frac{NC\cdot BA}{AC\cdot BC}=\frac{NC(BN+NA)}{AC\cdot BC}$$

$$=\frac{NC}{AC}\cdot\frac{BN}{BC}+\frac{NA}{AC}\cdot\frac{NC}{BC}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$



又作ABC三角形。使A之外角爲A。CBA角爲B。設CN爲AB之垂線。則

$$\sin(A-B)=\frac{2\triangle ABC}{AC\cdot BC}$$

$$=\frac{NC\cdot BA}{AC\cdot BC}$$

$$=\frac{NC(BN-AN)}{AC\cdot BC}$$

$$=\frac{NC\cdot BN}{AC\cdot BC}-\frac{AN}{AC}\cdot\frac{NC}{BC}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

其餘$\cos(A+B)$,$\cos(A-B)$之公式。可用【46】公式以類似之法證之。

(2) $$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

之別證。

由30節之圖

$$\tan(A+B)=\frac{PM}{OM}=\frac{QN+PR}{ON-RQ}$$

$$=\frac{\frac{QN}{ON}+\frac{PR}{ON}}{1-\frac{PQ}{ON}}=\frac{\frac{QN}{ON}+\frac{PR}{ON}}{1-\frac{RQ}{PR}\frac{PR}{ON}}$$

但　$\frac{QN}{ON}=tan A,\ \frac{RQ}{PR}=tan A$

$\frac{PR}{ON}=\frac{PQ}{OQ}=tan B$

以之代入前式

$$tan(A+B)=\frac{tan A+tan B}{1-tan A\,tan B}$$

其餘 $tan(A-B)$ 之公式。亦得仿同法證之。

(3) $sin 2A=2 sin A\,cos A$

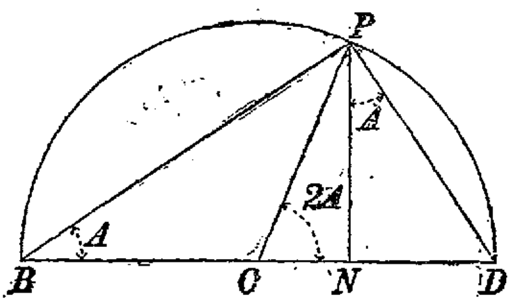
$cos 2A=cos^2A-sin^2A$

$=2cos^2A-1$

$=1-2sin^2A$

之別證。

設於C為中心。BD為徑之半圓周上。任取一點P。連結PB, PC, PD。又引PN為DD之垂線。設$P\hat{B}D$為A。則



$P\hat{C}D=2A$

$N\hat{P}D=90^\circ-P\hat{D}N=P\hat{B}D=A$

$$\sin 2A=\frac{PN}{CP}=\frac{2PN}{2CP}=\frac{2PN}{BD}$$

$$=2\frac{PN}{BP}\cdot\frac{BP}{BD}=2\sin A\cos A$$

$\cos 2A$之三公式。亦可仿同法證之。

---

1. 已知$\sin A=\frac{11}{61}$, $\sin B=\frac{9}{41}$。求$\cos(A-B)$之值。

2. 已知$\sec A=\frac{17}{15}$, $\operatorname{cosec} B=\frac{61}{11}$。求$\sin(A+B)$之值。

3. 已知$\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan B=\frac{1}{3}$。求$\sec(A+B)$之值。

4. 設$\tan A=a$, $\tan B=b$。試證

$$\sin(A+B)=\frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}。$$

試證下列各等式。

5. $\frac{1-\cos A}{\sin A}=\tan\frac{1}{2}A$。

6. $\frac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\frac{1}{2}A$。

7. $\tan\alpha+\cot\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$。

8. $\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$。

9. $\dfrac{\cot^2 A+1}{\cot^2 A-1}=\sec 2A$。

10. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$。

11. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$。

12. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

13. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

14. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

15. $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

16. $\dfrac{\tan A\cot B+1}{\tan A\cot B-1}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$.

17. $\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-B)=2\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\dfrac{\pi}{2}+\beta)$。

18. $\cos(n-1)A\cos A-\sin(n-1)A\sin A=\cos nA$。

19. $\cos(n-1)A\cos(n+1)A-\sin(n-1)A\sin(n+1)A=\cos 2nA$。

20. 若 $\tan\alpha=\dfrac{m}{m+1}$, $\tan\beta=\dfrac{n}{1+n}$。則 $\tan(\alpha+\beta)=1$。

21. 若 $\tan\alpha=a+1$, $\tan\beta=a-1$。則 $2\cot(\alpha-\beta)=a^2$。

22. $\dfrac{\tan(n+1)A+\tan(1-n)A}{1-\tan(n+1)A\tan(1-n)A}=\tan 2A$。

23. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$.

24. $\dfrac{1+\cos\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}=\cot\dfrac{\theta}{2}$。

25. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan\frac{1}{2}\theta}$。

26. $\dfrac{\cos(\theta-3\phi)-\cos(3\theta+\phi)}{\sin(3\theta+\phi)+\sin(\theta-3\phi)}=\tan(\theta+2\phi)$。

27. $\cos 20°+\cos 100°+\cos 140°=0$。

28. $\tan A\pm\tan B=\sin(A\pm B)\sec A\sec B$。

29. $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos A\cos C$
$+\sin C\cos A\cos B+\sin A\sin B\sin C$。

30. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\cos B\sin A\sin C-\cos C\sin A\sin B$。

31. $\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C}=\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C$。

32. $\dfrac{\cos(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}=\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C$。

33. $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$。

34. $\cot(A+B+C)=\dfrac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1}$。

35. $\cos^2 A+\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)=\dfrac{3}{2}$。※

36. $\sin^2 A+\sin^2(120°+A)+\sin^2(120°-A)=\dfrac{3}{2}$。

※宜用 $2\cos^2 A=1+\cos 2A$

37. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$。

38. $A+B+C=180^\circ$時。

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$。

(2) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$。

39. $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ 改為四項正弦之和。

40. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 改為四項餘弦之和。

分角之三角函數

(1)　以 $\cos A$ 之項。表 $\frac{A}{2}$ 之各三角函數。

由【34】,【35】公式。

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}\\ \cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots[A]$$

若已知 A 之值。則 $\frac{A}{2}$ 在何分面。卽可決定其正弦餘弦。亦不得有兩解。若祇知 A 角所對應之餘弦。則適合此餘弦之 A 角者。有銳角,鈍角。卽係 A 及 $360°-A$, 或 $n\times360°\pm A$。故其半角有 $\frac{A}{2}$ 及 $180°\pm\frac{A}{2}$ 或 $n\times180°\pm\frac{A}{2}$。但此等角之各三角函數。其絕對值皆相等。所不同者符號而已。所以得數有正負二等根。

又　$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$$

$1+\cos A$ 係正數。故 $\tan\frac{A}{2}$ 與 $\sin A$ 同符號。故 $\frac{A}{2}$ 之正切。不得有二解。若 $A<180°$。則 $\sin A$ 及 $\tan\frac{A}{2}$。皆爲正。但 $\sin A$ 每於 $180°$ 之任意倍數處。變其符號。故 $\tan\frac{A}{2}$ 亦於 $90°$ 之任意倍數處。變其符號。

【注意】 $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

故 $$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

(2) 以 $\sin A$ 之項。表 $\frac{A}{2}$ 之正弦餘弦

因 $$\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = 1$$

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin A$$

故 $$\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \sin A$$

$$\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2 = 1 - \sin A$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{1+\sin A} \\ \cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{1-\sin A} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\text{【B】}$$

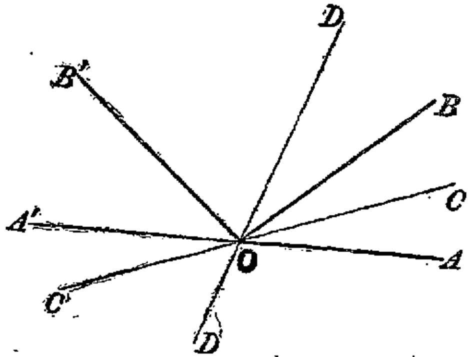
若加減之。即得

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A} \\ 2\sin\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{1+\sin A} \mp \sqrt{1-\sin A} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{【C】}$$

【C】式之符號。可視 A 角之值。適當取捨之。

【註】 已知 $\sin A$ 時。$\frac{A}{2}$ 之正弦餘弦。得有四解之理。可由幾何學說明之。 今設已知某角之正弦爲正。今取 $A\hat{O}B = A$ 銳角。適合此正弦。將 AO 引長。取 $A'\hat{O}B'$

$=A\hat{O}B$。則 $A'\hat{O}B'$ 之正弦與 $A\hat{O}B$ 之正弦同。故適於此正弦之角爲 $n\times360^\circ+A$ 及 $n\times360^\circ+180^\circ-A$。此卽 A 角之數。其動徑皆止於



OB 或 OB'。若作 OC 平分 $A\hat{O}B$。引長之爲 OC'。又以 OD 平分 $A\hat{O}B'$。引長之爲 OD'。則 $\frac{A}{2}$ 之動徑。皆止於 OC, OC', OD, OD'。而 $\frac{A}{2}$ 於 360° 內。有 $A\hat{O}C, A\hat{O}D, A\hat{O}D', A\hat{O}C'$ 四角。$A\hat{O}C$ 及 $A\hat{O}C'$, $A\hat{O}D$ 及 $A\hat{O}D'$ 有同值異號之三角函數。而 $A\hat{O}C$ 及 $A\hat{O}D$ 之三角函數則非同值。所以已知 $\sin A$ 時。其 $\frac{A}{2}$ 之三角函數有四解。每二者同值而異號。

例求 105° 及 165° 之正弦及餘弦。可用前之二法。

(I)　是等之角。大於 90°。小於 180°。故

$$\sin105^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos210^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\text{〔取正號〕}$$

$$\left(\because \cos210^\circ=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\cos 105^\circ = -\sqrt{\frac{1+\cos 210^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{〔取負號〕}$$

$$\sin 165^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 330^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 165^\circ = -\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(II)　$135^\circ > 105^\circ > 45^\circ$。其正弦之絕對值。大於餘弦。故　$\sin 105^\circ + \cos 105^\circ$ 及 $\sin 105^\circ - \cos 105^\circ$ 必爲正。

$$\therefore \quad \sin 105^\circ + \cos 105^\circ = +\sqrt{1+\sin 210^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 105^\circ - \cos 105^\circ = +\sqrt{1-\sin 210^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

故
$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 105^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

又　$225^\circ > 165^\circ > 135^\circ$。故其餘弦之絕對值。比正弦大。且爲負數。

$$\therefore \quad \cos 165^\circ + \sin 165^\circ = -\sqrt{1+\sin 330^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 165^\circ - \sin 165^\circ = -\sqrt{1-\sin 330^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \sin 165^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ 及 } \cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

1.　A角若等於80°, 100°, 390°, 1000°。則【A】式之符號。當如何決定之。

2.　A角若等於100°, 260°, 450°, 1890°。則【C】式之符號。當如何決定之。

3.　試證 $\tan^2\frac{A}{2}\tan A+2\tan\frac{A}{2}-\tan A=0$。并由此式。證明

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}=(-1\pm\sec A)\cot A.$$

又由本式。設 $A=60°$ 或 $300°$。求 $\tan\frac{A}{2}$ 之值。

4.　$2\cos 11°15'=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$。試證之。

5.　設 $\sin A+\cos A=+\sqrt{1+\sin 2A}$。則 $A<135°$。或 $A>315°$。試證之。

6.　設 $\sin A+\cos A=-\sqrt{1+\sin 2A}$。則A在於135°與315°之間。試證之。

三角形之性質

$A+B+C=180°$時。試證下列各式[1至10]。

1. $\cos(A+B-C)=-\cos 2C$。

2. $\cot\frac{1}{2}(B-C)=\tan\frac{1}{2}A$。

3. $\frac{\sin 3B-\sin 3C}{\cos 3C-\cos 3B}=\tan\frac{3}{2}A$。

4. $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}$。

5. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$。

6. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$。

7. $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$。

8. $\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin A\cos B\sin C$。

9. $\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B)-\cos(A+B-C)+1$

$=4\sin A\sin B\cos C$。

10. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$。

就C為直角之直三角形。試證下列各式[11至18]。

11. $\tan B=\cot A+\cos C$。

12. $\cos 2A+\cos 2B=0$。

13. $\sin 2A=\dfrac{2ab}{c^2}$。

14. $\operatorname{cosec} 2B=\dfrac{a}{2b}+\dfrac{b}{2a}$。

15. $\cos 2B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A+\sin B}$。

16. $\left(\cos\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\right)^2=\dfrac{a+c}{c}$。

17. $\sin(A-B)+\sin(2A+C)=0$。

18. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}$。

就△ABC。試證下列各式。

19. $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{\cos B+\cos C}{1-\cos A}$。

20. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$。

21. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$。

22. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=c\left(\dfrac{\cos B}{b}-\dfrac{\cos A}{a}\right)$。

23. 若 $2\cos B\sin C=\sin A$。則 $B=C$。

24. $c^2=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$。

25. $\sqrt{bc\sin B\sin C}=\dfrac{b^2\sin C+c^2\sin B}{b+c}$。

26. $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$。

27. $b+c-a=(b+c)\cos A-(c-a)\cos B+(a-b)\cos C$。

28. 若 $\sqrt{bc\sin B\sin C}=\dfrac{b^2\sin B+c^2\sin C}{b+c}$。則 $B=C$。試證之。

29. 若 $a=2b$, $A=3B$。則 $C=60°$。

30. $abc(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=8\Delta^2$。

31. $$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0。$$

32. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$。

33. $$\Delta=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$
$$=\frac{2s^2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}。$$

設R爲外接圓半徑。γ 爲內切圓半徑。γ_1, γ_2, γ_3 各爲傍切圓半徑。Δ 爲三角形之面積。則試證下列各式。

34. $R=\dfrac{abc}{4\Delta}$。

35. $\gamma=a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\Big/\cos\dfrac{A}{2}$。

36. $\gamma_1=a\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\Big/\cos\dfrac{A}{2}$。

37. $\gamma=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$。

38. $\gamma_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$。

39. $\frac{\gamma_1-\gamma}{a}+\frac{\gamma_2-\gamma}{b}=\frac{c}{\gamma_3}$。

40. 若$\gamma_1=\gamma_2+\gamma_3+\gamma$。則三角形爲直三角形。

41.
$$\gamma=(s-a)\tan\frac{A}{2}$$
$$=(s-b)\tan\frac{B}{2}$$
$$=(s-c)\tan\frac{C}{2}$$。

又 $\gamma_1=s\tan\frac{A}{2}$, $\gamma_2=s\tan\frac{B}{2}$, $\gamma_3=s\tan\frac{C}{2}$。

42. 設三角形之二邊爲300尺及120尺。其夾角爲150°。求此三角形之面積。

43. 設三角形之三邊各爲39, 40, 25。問自各角頂向對邊所引三垂線之長。

44. 已知$a=13$, $b=14$, $c=15$。求γ及R。

45. 已知$a=17$, $b=10$, $c=21$。求γ_1, γ_2, γ_3。

46. 已知$\Delta=96$, $\gamma_1=8$, $\gamma_2=12$, $\gamma_3=24$。求a, b, c。

就ABC三角形。求證下列各式。

47. $\sqrt{\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3}=\Delta$。　　48. $s(s-a)\tan\frac{A}{2}=\Delta$。

49. $\gamma\gamma_1\cot\frac{A}{2}=\Delta$。　　50. $4R\gamma s=abc$。

51. $\gamma_1\gamma_2+\gamma\gamma_3=ab$。

52. $\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\gamma s^2$。

53. $R\gamma(\sin A+\sin B+\sin C)=\Delta$。

54. $\gamma_1+\gamma_2=c\cot\frac{C}{2}$

55. $\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_3}=\frac{1}{\gamma}$。

56. $\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1+\gamma_1\gamma_2=s^2$。

57. $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-\gamma=4R$。

58. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$。

59. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+\gamma)$。

60. $\gamma(\sin A+\sin B+\sin C)=2R\sin A\sin B\sin C$。

三角形之解法

1. 已知三角形之三邊為35, 49, 63。求其最大角度。

2. 已知$b=4c$, $A=65°$。求B及C。

3. 已知三角形之二邊為9與3。其對角之差為90°。求各角。

4. $c^2=a^2+b^2$之式。設$\frac{b}{a}=\tan\theta$。試改為便於對數計算之式。

5. 設$\tan\theta=\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\frac{C}{2}$則$c=(a-b)\sec\theta$。試證之。

6. $\tan\phi=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{C}{2}$。則$c=(a-b)\cos\frac{C}{2}\sec\phi$。

設$a=27.3$, $b=16.8$, $c=45°,12'$。求ϕ後求C。

7. 兩底角之差為17°48′。其所對二邊。各為105.25, 76.75。問此二邊之夾角。

8. 若三角形有兩解。且$C'=2C''$。則

$$3b=a\sqrt{1+8\sin^2 B}.$$

試證之。

9. 若三角形有兩解。則

$$\sin\frac{C'-C''}{2}=\frac{c'-c''}{2b}.$$

試證之。

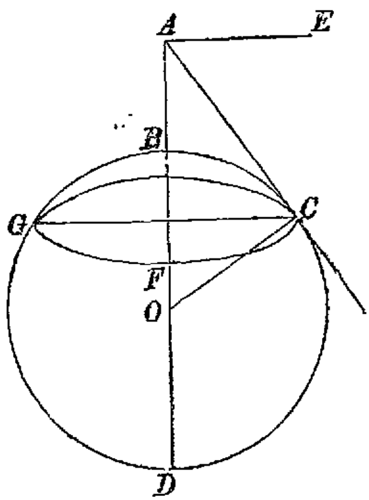
10. 設 a, b, A 爲已知。則

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin C'}{c'},\ \frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin C'}{\sin B'}=2\cos A.$$

試證之。

三角形解法之應用

視界之俯角　設CD爲過地球中心之一平面。與外圓之截線。A爲地球上方之一點。AC爲A點向地球所引之切線。若BCD圓以BD爲軸迴轉一周。則C點畫成CFG圓。此CFG圓周名爲A之視界。由A點引AE垂直於AD。則EAC角名爲視界之俯角。



關於此種問題。特舉三例於次。

(1) 求視界之遠。

設 $AB=h$ 英尺。

$BD=2\gamma=7926$ 英里。

$\overline{AC}^2=AB.AD\fallingdotseq AB.BD$

$$=\frac{h}{5280}.2\gamma=\frac{7926h}{5280}\fallingdotseq\frac{3}{2}h。$$

此式中之h。乃表英尺之數。而AC又係以英里爲單位。故知視界之遠AC英里數之平方。等於測者之高AB英尺數之二分之三。

若AB以h公尺表之。AC以公里表之。則

$$AC^2 \doteqdot \frac{h}{1000} \cdot 12800$$〔直徑≑12800公里〕

$$\doteqdot 13h。$$

AC公里數之平方。等於測者之高公尺數之13倍。

(2)　用 h 之項。求視界之俯角。

$E\hat{A}C = A\hat{O}C = \theta$。$h$ 比較 γ 爲甚小之數。故 θ 角亦甚小。而AC切線。約等於 $\widehat{BC}$。然 $\theta = \frac{\widehat{BC}}{\gamma}$。

$$\theta \doteqdot \frac{AC}{\gamma} = \sqrt{(2h/\gamma)}。$$

若 γ 用英尺表之。θ 用秒表之。則

$$\theta = \frac{206265 \times \sqrt{h}}{\sqrt{(3963 \times 2640)}}$$ 卽 $63.65\sqrt{h}$ 秒。卽 $7.06\sqrt{h}$ 分。

〔此式中之206265。係一弧度角。改爲秒數之數。〕

(3)　求視界內面積。

地面上所見地球表面部分。等於AC爲半徑之圓面積。卽 $\pi\,\overline{AC}^2$。但 $\overline{AC}^2 = \frac{3}{2}h$。故 h 英尺高之處所能見之地面爲 $\frac{3\pi h}{2}$。若 h 爲公尺之高。則所視地面當爲 $13\pi h$。

(4)　A處所見部分與全地面之比。等於A之高

與地球直徑之比。

$$\pi\,\overline{AC}^2=\pi\,AB.BD$$

$$\pi\,AC^2:\pi\,BD^2=AB.BD:BD^2$$

$$=AB:BD。$$

(5) 二點之高不同。則二點所見地面。譔等於此點之高之比。

$$\pi\,\overline{AC}^2\doteqdot 13\,h$$

$$\pi\,\overline{A'C'}^2\doteqdot 13\,h'$$

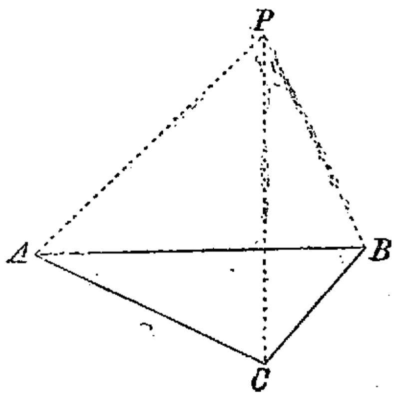
$$\therefore\ \pi\,\overline{AC}^2:\pi\,\overline{A'C'}^2\doteqdot h:h'。$$

三點問題 ABC三點。兩兩聯結之。所成直線之長。均係已知。則於同一平面上任意之點P。觀測APC, BPC角。便可求得P與ABC三點之距離。

設 $A\hat{P}C=\alpha$, $B\hat{P}C=\beta$。

$P\hat{A}C=x$, $P\hat{B}C=y$。

因α, β已知。便可求x, y。再用正弦比例。便可求得PA, PB, PC。



兩三角形APC, BPC各角之和。等於4直角。

故 $x+y=360°-\alpha-\beta-C$。

故　　x,y 之和一定。

由 $\triangle ACP$ 得

$$PC=\frac{AC\sin PAC}{\sin APC}=\frac{b\sin x}{\sin\alpha}。$$

又由 $\triangle BCP$ 得

$$PC=\frac{BC\sin PBC}{\sin BPC}=\frac{a\sin y}{\sin\beta}。$$

故
$$\frac{b\sin x}{\sin\alpha}=\frac{a\sin y}{\sin\beta}。$$

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta}。$$

$$\tan\phi=\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta}。$$

此 ϕ 之值得由函數表求之。

但　$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\tan\phi-1}{\tan\phi+1}=\tan\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)。$$

故　$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}=\tan\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)。$$

由此式可求 $x-y$。併已知之 $x+y$，便得 x,y。*

1.　有一 BC 直線。對於 A 點。含成直角。今於 A,B 處。測 C 處直立之塔。其仰角爲 30° 及 60°。則塔之高爲

$$\frac{AB}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}。$$

試證之。

*三點問題。在測港灣碇泊之船之位置時用之。

2. 三角形三角之比爲1:2:3。若自最大角向對邊引垂線爲30尺。問各邊長若干。

3. 有斜路自北而南。今有人自某點起向北登時。行斜路5尺。升高1尺。則向東北登時行斜路7尺。必升高1尺。試證之。

4. 有兩地相距1英里。自兩端及中央觀測輕氣球之仰角60°,30°及45°。則輕氣球高$440\sqrt{6}$碼。試證之。

5. 有長$2a$之基線兩端。測某山之仰角爲θ。自此基線中點測其仰角爲ϕ。則山之高爲

$$a \sin\theta \sin\phi \sqrt{\frac{1}{\sin^2\phi - \sin^2\theta}}$$

或 $$a \sin\theta \sin\phi \sqrt{\operatorname{cosec}(\phi+\theta)\operatorname{cosec}(\phi-\theta)}。$$

試證之。

6. 設於湖面上高h尺之處。測停雲之仰角爲α。又測湖裏之雲影得俯角爲β。則雲高爲

$$\frac{h\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}。$$

試證之。

7. 設於高b尺之塔上。直樹a尺長之旗竿。若在塔基底同水平面上相距d尺處。高h尺之一點。

測得塔及旗竿所含之角均相等。則

$$(a-b)d^2=(a+b)b^2-2b^2h-(a-b)h^2。$$

試證之。

8. 有車站 A 在火車 B 之正西。今火車向北西之方向行 6 英里後。則 A 在於火車之南南西方向。問 AB 之距離幾何。

9. 城壁上直立一旗竿。今於城基同水平上一點。測得城壁含 α 角。旗竿含 β 角。問城壁及旗竿之高幾何。

10. 設山之高爲2.5英里。問山頂之視界俯角爲幾度。但地球半徑爲3963英里。

11. 已知直三角形之斜邊及直角之平分線。求各角及各邊。

12. 已知直三角形內切圓半徑及直角平分線。求各角及各邊。

13. 已知三角形一角 A。及此角頂向對邊所引之垂線 h。并所引之中線 m。求各角及各邊。

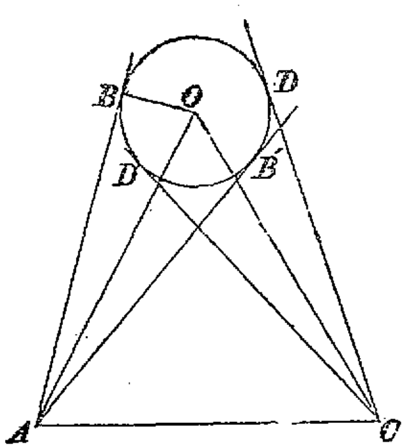
14. 自某山上測得水平直道上三個連續標石(每相隔一公里)之俯角爲 α, β, γ。則此山之高爲

$$1000\sqrt{2}/\sqrt{\cot^2\alpha-2\cot^2\beta+\cot^2\gamma}\text{尺}。$$

15. 設太陽之高度爲47°。問棒與水平當成如何角度。則棒影之長乃爲極大。

16. 今欲測不可近之圓塔之半徑 O B。則可設基線 A C=d。幷引切線AB, AB′, CD, CD′。且測BAC, B′AC, ACD, ACD′各角。爲 $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$。則所求之半徑。等於

$$\frac{d\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'+\gamma+\gamma')}。$$



試證之。

反三角函數

$\sin\alpha=x$。則 α 乃正弦等於 x 時之角。可用 $\sin^{-1}x$ 記之。故如 $\tan^{-1}x$。乃表正切爲 x 時之角。

如是之式。均稱爲反三角函數。

(1) 已知 $\sin\alpha=x$。求 $\tan\alpha$。

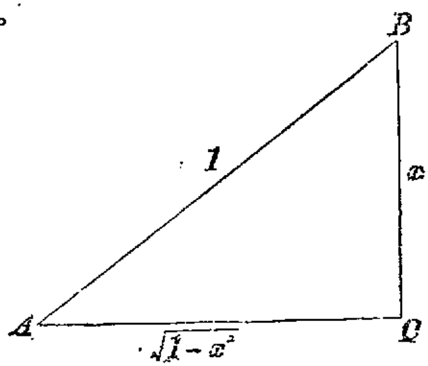
就 ABC 直三角形。設

$AB=1$, $BC=x$。則

$B\hat{A}C=\alpha$, $AC=\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



(2) 已知 x, y。求 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y$。

設 $\tan^{-1}x=\alpha$, $\tan^{-1}y=\beta$。則 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\alpha+\beta$。

由公式【23】

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+y}{1-xy}。$$

$$\therefore\quad \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}。$$

同理知 $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$。

【注意】 $\tan^{-1}1=45°$。

1. 求$\cos^{-1}\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tan^{-1}(-1)$之值。

試證下列各等式。

2. $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$。

3. $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cot^{-1}\frac{5}{12}$。

4. $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{17}{8}=\tan^{-1}\frac{8}{15}$。

5. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$。

6. $\sec(\tan^{-1}x)=\sqrt{1+x^2}$。

7. $\tan^{-1}\frac{4}{3}-\tan^{-1}1=\tan^{-1}\frac{1}{7}$。

8. $2\cot^{-1}\frac{5}{4}=\tan^{-1}\frac{40}{9}$。

9. $2\tan^{-1}\frac{8}{15}=\sin^{-1}\frac{240}{289}$。

10. $\tan^{-1}5-\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{7}{9}=n\pi+\frac{\pi}{4}$。

11. $\tan(2\tan^{-1}x)=2\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3)$。

12. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=180^\circ$時。試證

$$x+y+z=xyz。$$

三角方程式

(1)設合於已知正弦之最小角爲 α 度。則合於此正弦所有各角之公式爲

$$n.180^\circ+(-1)^n\alpha。$$

[但 n 爲零或正負之任意整數]

(2)設合於已知餘弦之最小角爲 α 度。則合於此餘弦所有各角之公式爲

$$n.360^\circ\pm\alpha^\circ。$$

[但 n 爲零或正負之任意整數]

(3)設合於已知正切之最小角爲 α 度。則合於此正切所有各角之公式爲

$$n.180^\circ+\alpha^\circ。$$

[但 n 爲零或正負之任意整數]

求合於下列各方程式所有各角之解答。

1. $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$。　　2. $\sin^2\theta=\sin^2\alpha$。

3. $\cos\theta=\frac{1}{2}$。　　4. $\cot 4\theta=\cot\theta$。

5. $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$。　　6. $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$。

7. $\cos 3\theta=\cos 2\theta$。　　8. $\sin 5\theta+\sin\theta=\sin 3\theta$。

9. $\cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$。 10. $\cot\theta - \tan\theta = 2$。

附錄三

希臘字母

代表數之字母。除通常所用之羅馬字外。兼用希臘字。茲將其字形及其音讀。列舉如下。

A α Alpha.	I ι Iota.	P ρ Rho.
B β Beta.	K κ Kappa.	Σ σ Sigma.
Γ γ Gamma.	Λ λ Lambda.	T τ Tau.
Δ δ Delta.	M μ Mu.	Υ υ Upsilon.
E ε Epsilon.	N ν Nu.	Φ ϕ Phi.
Z ζ Zeta.	Ξ ξ Xi.	X χ Chi.
H η Eta.	O o Omicron.	Ψ ψ Psi.
Θ θ Theta.	Π π Pi.	Ω ω Omega.

附錄四

中西名詞對照表

緒論

三角法	Trigonometry
六十分法	Sexagesimal System
度	Degree
分	Minute
秒	Secand
弧度法	Circular System
百分法	Centesimal System

第一編

正弦	Sine
餘弦	Cosine
正切	Tangent
餘切	Cotangent
正割	Secant
餘割	Cosecant
三角函數	Trigonometric function

圓函數	Circular function
正矢	Versed sine
餘矢	Coversed sine
恆等式	Identity
餘角	Complementary angles
餘函數	Co-function

第 三 編

解法	Solution
測鏈	Surveyor's chain
經緯儀	Theodolite
六分儀	Sextant
鉛垂線	Plumb line
垂直線	Vertical line
垂直面	Vertical plane
水平面	Horizontal plane
水平線	Horizontal line
水平角	Horizontal angle
垂直角	Vertical angle
仰角	Angle of elevation

俯角	Angle of depression
高度	Altitude
航海羅盤	Mariner's compass
測地羅盤	Surveyor's compass
海里	Nautical mile

第四編

分面	Quadrant
原點	Origin
首線	Initial line
動徑	Vector

第六編

對數	Logarithms
底	Base
常用對數	Common logarithm
自然對數或訥白爾對數	Natural logarithm or Napierian logarithm
指標	Characteristic
假數	Mantissa
餘對數	Cologarithm

比例部分	Proportional parts (P.P.)

總複習題

三角測量	Triangulatian, Triangular surveying
弧度	Radian
視界	Visible Horizon
反三角函數	Anti-Trigonometric function, Inverse trigonometric function

附 錄 五

問 題 答 數

緒論

1. 45°, 30°, 22° 30′, 18° **2.** 242620″

3. 15° 56′, 38″ **4.** 0.54, 1.07875, 0.815

5. 127°48′, 25° 52′ 30″, 153° 24′ 29″. 34

6. 長針 540°, 短針 45°

7. 108° **8.** 10

第一編

1. $\sin A=\cos C=\frac{8}{17}$

$\cos A=\sin C=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{8}{15}$, $\tan C=\frac{15}{8}$.

2. $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=\frac{12}{13}$, $\tan A=\frac{5}{12}$ 等

3. $\sin A=\frac{7}{25}$, $\cos A=\frac{24}{25}$, $\tan A=\frac{7}{24}$ 等

26. $\tan A=\frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}$

27. $\sin B=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cot B=\frac{1}{4}\sqrt{2}$

28. $\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{15}}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

29. $\sin A=\frac{m^2-1}{m^2+1}$, $\cos A=\frac{2m}{m^2+1}$, $\tan A=\frac{m^2-1}{2m}$

$\cot A=\frac{2m}{m^2-1}$, $\operatorname{cosec} A=\frac{m^2+1}{m^2-1}$

30. $\frac{p}{q}$　　31. $\sqrt{2}$

33. 45°　　34. 30°

35. 15°　　36. 15°

37. 45°　　38. 5

39. 3　　40. $\frac{3}{4}$

第二編

1. 0.4758　　2. 0.4443

3. 71°25′.6　　4. 9°46′.7

第三編

1. B=47°50′,　a=10.87,　c=16.19

2. A=53°30′,　B=36°30′,　c=62.20

3. A=51°40′,　a=12.55,　b=9.92

4. a=1979.3,　A=81°45′,　B=8°15′

5. $25\sqrt{3}=43.301$　　6. $625\sqrt{3}=1082.5625$

7. 62.354 尺　　8. 60°

9. $200(1+\sqrt{3})$尺$=546.412$尺

10. $4\sqrt{3}$尺$=6.928$尺 **11.** 732.2尺

12. 高＝距離$=15(3+\sqrt{3})$尺$=70.98$尺

13. 1220尺 **14.** $80\sqrt{3}$尺$=138.56$尺

15. $60°100\sqrt{3}$尺$=173.21$尺 **16.** $100\sqrt{3}$尺$=173.21$尺

17. 3270尺 **18.** 16.015尺

19. 約42秒 **20.** $\frac{1}{2}\sqrt{6}$里$=1.22474$里

21. $50\sqrt{3}$尺$=86.60$尺 **22.** $30°$

23. 10海里, 142海里

24. $\frac{a}{\sqrt{3}h}$

25. 船變成東偏北$71°34'$,速度每時$4\sqrt{10}$里

第四編

2. 1.第四, 2.第二, 3.第三, 4.第三,
5.第二, 6.第四, 7.第一, 8.第四,
9.第三, 10.第一各象限

4. (1)$\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-1$ 等, (2)$\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 等,

(3)$-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}$等, (4)$-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},-\sqrt{3}$ 等

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$

6. $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{3}, 1, -1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}$

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$

8. $\cos 31°, -\sin 44°, \tan 9°, \cot 15°, \sec 45°, -\sec 22°$

9. $-\cos A, \sin A, -\cot A$ 等　$-\cos A, -\sin A, \cot A$等

16. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1$

17. 正,負,負 等　負,正,負 等　正,正,正 等

18. $\frac{3}{5}, -\frac{3}{4},$

19. $\frac{2\sqrt{10}}{7}, -\frac{2\sqrt{10}}{3}$

20. $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}$

21. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

22. $(a+b)^2$

23. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

第五編

5. $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}$(平方根有正負二值。故本題共有四答數。今略其二。)

6. $\frac{29}{52}, \frac{22}{39}$

18. $45°, 225°$

19. 1

20. $-\frac{5}{14}, \frac{35}{12}$

21. $-\frac{278}{29}, \frac{1}{2}$

29. $-\frac{23}{25}$

30. $\frac{7}{8}$

31. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

32. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

33. $\frac{3}{4}$

34. $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}$

35. -1

36. $\frac{117}{125}$

37. $\frac{9}{13}$

56. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

57. $\cos(\gamma+s)+\cos(\gamma-s)$

58. $\sin(2\alpha+3\beta)+\sin(2\alpha-3\beta)$

59. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$

60. $-\frac{1}{2}(\cos 5\theta-\cos 3\theta)$ 或 $\frac{1}{2}(\cos 3\theta-\cos 5\theta)$

61. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

62. $2\sin 7\theta\cos 3\theta$

63. $2\sin 40^\circ\cos 20^\circ$

64. $2\sin 15^\circ\cos 25^\circ$

65. $2\cos 5\theta\cos 3\theta$

66. $-2\sin 5\theta\sin\theta$

67. $-2\sin\frac{9}{2}A\sin\frac{1}{2}A$

第六編

1. 10 2. —1.5

3. 9.23 4. —1

5. —.5 6. —.5

自(1)至(7)各題之10底對數

1. 3.0103 2. .09691—1

3. 1.90849 4. 1

5. .139194—1 6. 9.84948—10

7. .47712

8. .57403, .10721, 3.09691

9. .09691, .10721

10. $a=1.056$, $b=2.32$, $c=1.21$

第八編

1. B$=72°$ $14'$, $a=75.13$, $c=92.79$

2. A$=26°$ $46'$, $b=133.38$, $c=226.4$

3. A$=106°$ $15'$, $b=767.8$, $c=1263.5$

4. A$=92°12'14''$, B$=27°47'44''$, C$=60°$

5. A$=41°23'16''$, B$=47°46'50''$, C$=90°49'56''$

6. 190830

7. A$=79°6'24''$, B$=40°53'36''$, C$=7.937$

8. $B=78°48'53''$, $C=56°41'7''$, $a=19.291$

9. $A=27°38'34''$, $C=117°39'26''$, $b=134.97$

10. $A=100°4'2''$, $C=45°44'58''$, $a=664.9$

$A'=11°33'58''$, $C'=134°15'2''$, $a'=135.39$

11. $A=51°18'20''$, $C=88°41'40''$, $c=218.51$

$A'=128°41'40''$, $C'=11°18'20''$, $c'=42.85$

12. (α)一解, (β)二解, (γ)一解

第九編

2. 288.67 公尺　　4. 56.2尺

6. $\dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}$　　7. 1034 公尺

8. 51840 公尺　　9. 78 尺

10. 由 $c^2=a^2+b^2+2h^2-2\sqrt{(a^2+h^2)(b^2+h^2)}\cos\alpha$ 之式求 h

複習雜題　緒論

1. $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{9}{4}$

2. $C=135°25'$, $D=107°11'48''$

3. $22°30'$, $157°30'$　　4. 3.75

5. $450'$　　6. $80°$, $960°$

7. 36 **8.** 9

弧度法

4. $0.2\pi, 0.3\pi, 0.46\pi$

5. $23°.873$ **6.** 12

7. $\frac{1}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi$, 邊數 14

8. 7.1635 英里 **9.** $46°30', 37°30', \frac{31}{60}$直角, $\frac{5}{12}$直角

10. 1.5 弧度角 **11.** 5.585 尺

12. 5.236 尺

銳角之三角函數

1. $\sin A=\frac{40}{41}, \cot A=\frac{9}{40}$

3. $h^2(1+k^2)=1$ **4.** $\frac{P^2-q^2}{P^2+q^2}$

6. $\frac{2\sin^4 A-2\sin^2 A+1}{\sin^2 A(1-\sin A)}$

22. (1) 60°, (2) 10°, (3) 30°, (4) 18°, (5) 90°,45° (6) 30°

28. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **29.** 相等 **30.** $\tan A$

直三角形

5. 136.6尺

6. $A=75^\circ$, $B=60^\circ$, $C=45^\circ$, $AB=5.7735$,
$BC=7.88675$, $AC=7.07106$,
或 $A=15^\circ$, $B=120^\circ$, $C=45^\circ$, $AB=5.7735$,
$BC=2.11324$, $AC=7.07106$

7. 4, 12

8. 14.64

9. $BD=CD=107.33$

10. 273.21尺

11. 277.14尺

12. 3.464 海里, 6 海里

13. 每小時船行 5.19618 海里。前後兩位置之距離 $=15.58854$ 海里。後位置與測者相距 $=18$ 海里。

16. $(a+b)\tan\alpha$

17. 每小時38.97英里

任意角之三角函數

1. (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1$ (2) $-2, -\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1$ (4) $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2$

2. $\sin 60^\circ$, $\tan 85^\circ$, $\cos 80^\circ$

3. $\sin(A-270^\circ)=\cos A$, $\cos(A-270^\circ)=-\sin A$,

$tan(A-270°)=-cot A$…………

4. (1) 1　(2) 1　(3) 3

6. (1) 45°, 135°　(2) 120°, 300°　(3) 60°, 120°

(4) 135°, 315°

7. 正切與餘切　10. 135°

和角之三角函數

1. $\frac{2499}{2501}$($cos A\ cos B$ 若取負數。尚有三答數。茲從略。下準此。)

2. $\frac{645}{1037}$　3. $\sqrt{2}$

39. $sin(-\alpha+\beta+\gamma)+sin(\alpha-\beta+\gamma)+sin(\alpha+\beta-\gamma)$

$+sin(-\alpha-\beta-\gamma)$

40. $cos(\alpha+\beta+\gamma)+cos(-\alpha+\beta+\gamma)+cos(\alpha-\beta+\gamma)$

$+cos(\alpha+\beta-\gamma)$

分角之三角函數

1. (1) $sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-cos A}{2}}$, $cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+cos A}{2}}$

(2) $sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-cos A}{2}}$, $cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+cos A}{2}}$

(3) $sin\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1-cos A}{2}}$, $cos\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+cos A}{2}}$

(4) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

2. (1) $2\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$

$2\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$

(2) $2\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$

$2\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$

(3) $2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}$

$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}$

(4) 與 (3) 題同

3. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\frac{A}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

三角形之性質

42. 9000 平方尺　　**43.** 24, $\frac{117}{5}$, $\frac{936}{25}$

44. 4, $\frac{25}{8}$　　**45.** 12, 6, 28

46. 12, 16, 20

三角形之解法

1. $95°\ 44'\ 22''$ **2.** $B=100°47'$, $C=14°13'$

3. $108°\ 26'\ 5''$, $53°\ 7'\ 50''$, $18°\ 26'\ 5''$

4. $c^2=a^2\sec^2\theta$ **6.** 19.524.

7. $90°\ 0'\ 4''$

三角形解法之應用

2. $20\sqrt{3}$尺, 60尺, $40\sqrt{3}$尺

8. 6 英里

9. $\dfrac{c\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$, $\dfrac{c\sin\beta}{\cos(2\alpha+\beta)}$

10. $2°\ 2'$ **15.** 棒與水平面成43°之角

反三角函數

1. 60°, —30°, 135°, —45°

三角方程式

1. $n.180°+(-1)^n 60°$ **2.** $n.180°\pm\alpha$

3. $n.360°\pm120°$ **4.** $n.60°$

5. $n.180°\pm45°$ **6.** $n.180°\pm30°$

7. $2n.180°$ 或 $\frac{2}{5}n.180°$

8. $n.60°$ 或 $n.180°\pm30°$

9. $n.45°$ 或 $n.60°+(-1)^n 10°$

10. $n.90°+23°30'$

附錄六 公式表

I 銳角之三角函數

I 三角函數之相互關係

$$\left.\begin{array}{l}\sin A<\tan A<\sec A\\ \cos A<\cot A<\operatorname{cosec} A\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin A.\operatorname{cosec} A=1\\ \cos A.\sec A \quad =1\\ \tan A.\cot A \quad =1\end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\end{array}\right\}\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2 A+\cos^2 A=1\\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A\end{array}\right\}\cdots\cdots(4)$$

II 餘角之三角函數

$\sin(90°-A)=\cos A$

$\cos(90°-A)=\sin A$

$\tan(90°-A)=\cot A$

$\cot(90°-A)=\tan A$

$\sin(90°-A)=\operatorname{cosec} A$

$\operatorname{cosec}(90°-A)=\sec A$

III 定角之三角函數

$$\left.\begin{aligned} \sin 45° = \cos 45° &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45° = \cot 45° &= 1 \\ \sec 45° = \operatorname{cosec} 45° &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin 60° = \cos 30° &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60° = \sin 30° &= \frac{1}{2} \\ \tan 60° = \cot 30° &= \sqrt{3} \\ \sec 60° = \operatorname{cosec} 30° &= 2 \\ \cot 60° = \tan 30° &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{cosec} 60° = \sec 30° &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin 0° = \cos 90° &= 0 \\ \cos 0° = \sin 90° &= 1 \\ \tan 0° = \cot 90° &= 0 \\ \sec 0° = \operatorname{cosec} 90° &= 1 \\ \cot 0° = \tan 90° &= \infty \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\operatorname{cosec} 0° = \sec 90° = \infty$$

II 任意角之三角函數

I 大於360°角之三角函數

$(n\times 360°+A)$之三角函數＝A之三角函數

II 補角之三角函數

$\sin(180°-A)=\sin A$

$\cos(180°-A)=-\cos A$

$\tan(180°-A)=-\tan A$

III 負角之三角函數

$\sin(-A)=-\sin A$

$\cos(-A)=\cos A$

$\tan(-A)=-\tan A$

IV $(180°+A)$之三角函數

$\sin(180°+A)=-\sin A$

$\cos(180°+A)=-\cos A$

$\tan(180°+A)=\tan A$

V $(90°+A)$之三角函數

$\sin(90°+A)=\cos A$

$\cos(90°+A)=\sin A$

$\tan(90°+A)=-\cot A$

III 和差角之三角函數

I 和角與差角之三角函數

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B\\
&\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B\\
&\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}\\
&\cot(A\pm B)=\frac{\cot A\cot B\mp1}{\cot B\pm\cot A}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B\\
&\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\\
&\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B\\
&\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\
&\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\\
&\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\
&\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

II 倍角之三角函數

$$\left.\begin{aligned}
\sin 2A &= 2\sin A\cos A\\
\cos 2A &= \cos^2 A-\sin^2 A\\
&= 2\cos^2 A-1\\
&= 1-2\sin^2 A\\
\tan 2A &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\\
\cot 2A &= \frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin 3A &= 3\sin A-4\sin^3 A\\
\cos 3A &= 4\cos^3 A-3\cos A
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

III 半角之三角函數

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

IV 三角形之性質

I 三角形角之關係

$$\left.\begin{array}{l}\sin(A+B)=\sin C\\ \cos(A+B)=-\cos C\\ \tan(A+B)=-\tan C\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\\ \tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

II 三角形邊與角之關係

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\\ \quad =2R\ (\text{R 爲外接圓半徑})\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}(A-B)&=\frac{a+b}{c}\sin\frac{1}{2}C\\ \cos\frac{1}{2}(B-C)&=\frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}A\\ \cos\frac{1}{2}(C-A)&=\frac{c+a}{b}\sin\frac{1}{2}B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{1}{2}(A-B)&=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C\\ \tan\frac{1}{2}(B-C)&=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A\\ \tan\frac{1}{2}(C-A)&=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{1}{2}B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

III 三角形之面積

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B\\ &=\frac{1}{2}ab\sin C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\cdots(2)$$

IV 內切圓半徑

$$\left.\begin{aligned}r&=(s-a)\tan\frac{1}{2}A=(s-b)\tan\frac{1}{2}B\\ &=(s-c)\tan\frac{1}{2}C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r=\frac{\Delta}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\cdots\cdots\cdots(2)$$

V 傍切圓半徑

$$\gamma_1=\frac{\Delta}{s-a}\qquad\gamma_2=\frac{\Delta}{s-b}\qquad\gamma_3=\frac{\Delta}{s-c}$$

（終）

民國七年四月印刷
民國七年四月發行
民國八年一月三版

有著作權
不准翻印

（新制）平面三角法教本）全一冊

定價銀一元二角五折實售六角

（外埠酌加郵滙費）

編輯者　閩侯王永炅　泰和胡樹楷

校閱者　義烏陳榥　丹徒王祖訓

發行者　中華書局

印刷者　中華書局

印刷所　上海靜安寺路一九二號　中華書局

總發行所　上海福州路河南路轉角　中華書局

分發行所　北京　天津　奉天　廣州　長沙　開封　溫州　長春　漢口　南昌　南京　杭州　濟南　保定　武昌　太原　常德　福州　成都　重慶　雲南　徐州　西安　汕頭　香港　蘭州　衡州　貴陽　吉林　湖州　安慶　桂林　東昌　廈門　蘭谿　邢台　綏化　煙台　鄭州　梧州　石家莊　黑龍江　張家口　哈爾濱　新加坡　中華書局