Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 50

Übungsaufgaben

Aufgabe 50.1. Bestimme die Symmetriegruppe und die eigentliche Symmetriegruppe der Standardvektoren $\{e_1, e_2, e_3\}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 50.2. Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Konfiguration T aus n Punkten im $\mathbb{R}^3$ derart gibt, dass die eigentliche Symmetriegruppe von T unendlich ist.

Aufgabe 50.3. Es sei T eine Konfiguration aus endlich vielen Punkten im $\mathbb{R}^3$, die nicht alle kollinear sind. Zeige, dass die eigentliche Symmetriegruppe von T endlich ist.

Aufgabe 50.4. Man gebe ein Beispiel für eine zweielementige Menge $T \subseteq \mathbb{R}^3$, deren eigentliche Symmetriegruppe trivial ist.

Aufgabe 50.5. Bestimme die Symmetriegruppe und die eigentliche Symmetriegruppe zu einer Geraden $G \subset \mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt.

Aufgabe 50.6. Bestimme die Symmetriegruppe und die eigentliche Symmetriegruppe zu einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt.

Aufgabe 50.7.*

Es seien

$$S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^3$$

Teilmengen mit den zugehörigen eigentlichen Symmetriegruppen H und G. Zeige, dass es im Allgemeinen keine Inklusionsbeziehung zwischen diesen Gruppen gibt.

Aufgabe 50.8. Sei A_n eine alternierende Gruppe mit $n \geq 4$. Zeige, dass A_n nicht kommutativ ist.

Aufgabe 50.9. Es sei E ein regelmäßiges n-Eck im $\mathbb{R}^2$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit $(1, 0)$ als einem Eckpunkt. Bestimme die Matrizen, die die uneigentlichen Symmetrien von E bezüglich der Standardbasis beschreiben.

Aufgabe 50.10. Es sei $G \subseteq \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ eine endliche Gruppe und $H = G \cap \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ Zeige, dass $H = G$ oder aber die Anzahl von H die Hälfte der Anzahl von G ist.

Aufgabe 50.11.*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Definiere einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$$

von der Gruppe der Isometrien auf dem $\mathbb{R}^n$ in die Gruppe der eigentlichen Isometrien auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$.

Die nächsten Aufgaben verwenden die sogenannte *Kleinsche Vierergruppe*. Dies ist einfach die Produktgruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

Aufgabe 50.12. Zeige, dass die Kleinsche Vierergruppe zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe S_4 isomorph ist. Wie sieht eine Realisierung als Untergruppe der Würfelgruppe aus?

Aufgabe 50.13. Zeige, dass die Diedergruppe D_2 isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist.

Aufgabe 50.14. Zeige, dass die Diedergruppe D_3 isomorph zur Permutationsgruppe S_3 ist.

Aufgabe 50.15.*

Betrachte die Doppelpyramide der Höhe 5 über dem Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$. Wie nennt man die eigentliche Symmetriegruppe dieses Objektes? Bestimme die Matrizen bezüglich der Standardbasis, die die eigentlichen Symmetrien der Doppelpyramide beschreiben.

Aufgabe 50.16.*

Zeige, dass die Diedergruppen D_n, $n \geq 3$, nicht kommutativ sind.

Aufgabe 50.17. Sei W die Gruppe der eigentlichen Bewegungen an einem Würfel. Man gebe eine möglichst lange Kette von sukzessiven Untergruppen

$$\{\mathrm{id}\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = W$$

an derart, dass zwischen G_i und G_{i+1} keine weitere Untergruppe liegen kann.

Aufgabe 50.18. Bestimme die eigentliche Symmetriegruppe des Achsenkreuzes im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 50.19. Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe. Zeige, dass die Isotropiegruppe zu einer Halbachse aus dem Halbachsensystem zu G zyklisch ist.

AUFGABE 50.20. Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ die eigentliche Symmetriegruppe des achsenparallelen Würfels. Man gebe explizite (in Matrixbeschreibung) innere Automorphismen der Würfelgruppe an, die die folgenden Isotropiegruppen zu Achsen ineinander überführen. Welche Matrizen entsprechen dabei welchen Matrizen?

(1) Die Isotropiegruppe zur x-Achse und zur z-Achse.

(2) Die Isotropiegruppe zur Raumdiagonalen $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zur Raumdiagonalen $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) Die Isotropiegruppe zur Kantenmittelpunktsachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zur Kantenmittelpunktsachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 50.21.*

Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper (mit q Elementen). Bestimme die Anzahl der Elemente in

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)\ .$$

Die folgende Aufgabe verwendet das Zentrum einer Gruppe.

Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* $Z = Z(G)$ von G ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}\,.$$

AUFGABE 50.22. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum $Z \subseteq G$ ein Normalteiler in G ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(G),\ g \longmapsto \kappa_g.$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

AUFGABE 50.23. Führe folgendes Gedankenexperiment durch: Gegeben sei eine Kugeloberfläche aus Metall und n gleiche Teilchen mit der gleichen positiven Ladung. Die Teilchen stoßen sich also ab. Diese Teilchen werden auf die Kugeloberfläche gebracht, wobei sie sich nach wie vor gegenseitig abstoßen, aber auf der Kugel bleiben. Welche Konfiguration nehmen die Teilchen ein? Müsste sich nicht „aus physikalischen Gründen“ eine „gleichverteilte“ Konfiguration ergeben, in der alle Teilchen gleichberechtigt sind? Müsste es nicht zu je zwei Teilchen P, Q eine Kugelbewegung geben, die eine Symmetrie der Konfiguration ist und die P in Q überführt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.24. (2 Punkte)

Betrachte die Wirkung der Tetraedergruppe auf den vier Eckpunkten eines Tetraeders. Zeige, dass dies eine Isomorphie zwischen der Tetraedergruppe und der alternierenden Gruppe A_4 ergibt.

Aufgabe 50.25. (3 Punkte)

Betrachte ein regelmäßiges n-Eck und die zugehörige Gruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Symmetrien, also die Diedergruppe D_n. Beschreibe D_n als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n. Durch welche Permutationen wird sie erzeugt? Für welche n handelt es sich um eine Untergruppe der alternierenden Gruppe?

Aufgabe 50.26. (2 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathrm{O}_2$ eine endliche Untergruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Bewegungsgruppe der reellen Ebene, und sei $G \not\subseteq \mathrm{SO}_2$. Zeige, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathbb{Z}/(2)$$

gibt, dessen Kern eine zyklische Gruppe ist. Schließe, dass die Ordnung von G gerade ist.

Aufgabe 50.27. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Zeige:

(1) G ist genau dann abelsch, wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist.
(2) Der Index von $Z(G)$ in G ist keine Primzahl.
(3) Ist G von der Ordnung pq für zwei Primzahlen p und q, so ist G abelsch oder $Z(G)$ trivial.

Aufgabe zum Hochladen

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Sie gilt so lange, bis eine befriedigende Lösung auf Commons hochgeladen wurde.

Aufgabe 50.28. (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die zeigt, wie sich fünf auf einer Kugeloberfläche platzierte Teilchen mit der gleichen positiven Ladung aufgrund ihrer gegenseitigen Abstoßung bewegen (wobei sie aber auf der Kugeloberfläche bleiben), und welche Endposition (?) sie einnehmen.