統計學

王光漢著

遼東關東州政府委員會
合作社工作指導委員會

目 次

表次

次第	頁數	次第	頁數	次第	頁數
1	1	31	52	61	95
2	2	32	53	62	100
3	4	33	55	63	101
4	4	34	56	64	102
5	5	35	57	65	102
6	5	36	57	66	103
7	9	37	60	67	104
8	10	38	61	68	104
9	11	39	65		
10	11	40	65		
11	17	41	56		
12	19	42	67		
13	2	43	70		
14	21	44	73		
15	22	45	75		
16	25	46	77		
17	26	47	79		
18	29	48	80		
19	34	49	81		
20	40	50	81		
21	41	51	81		
22	42	52	83		
23	44	53	84		
24	44	54	84		
25	45	55	87		
26	46	56	89		
27	49	57	90		
28	49	58	90		
29	50	59	91		
30	51	60	91		

附表

次第	頁數
1	1
2	2
3	3
4	4

刊誤

頁 107

公式

次第	頁數	次第	頁數
1	18	31	78
2	20	32	78
3	22	33	78
4	22	34	78
5	26	35	78
6	27	36	83
7	30	37	85
8	31	38	85
9	33	39	85
10	34	40	86
11	35	41	85
12	38	42	86
13	39	43	86
14	39	44	86
15	41	45	86
16	42	46	92
17	43	47	94
18	46	48	95
19	47	49	99
20	48	50	99
21	49	51	99
22	52	52	103
23	52	53	103
24	55	54	106
25	56		
26	59		
27	60		
28	78		
29	78		
30	78		

圖次

次第	頁數
1	3
2	3
3	12
4	12
5	15
6	15
7	30
8	30
9	47
10	47
11	50
12	64
13	64
14	80
15	96
16	105

補白

頁 16

第一章　表和圖

自從有了火車，輪船，飛機，把空間縮小了。人和物都向許多地方集中。集中後就複雜起來。想從複雜中找出點頭緒來，就用得着統計。

譬如學校裏集聚着許多學生，祇看他們的成績，不下分類或統計的功夫，便不容易看出頭緒來。怎樣分類，怎樣統計呢？開始要製表和圖。

第一節　表

表一　甲班學生成績登記表

學號	成績	學號	成績	學號	成績	學號	成績
1	50	5	81	9	87	13	68
2	70	6	70	10	80	14	76
3	60	7	59.9	11	65	15	89.9
4	85	8	80	12	70	16	75

表一是甲班學生的成績，級任教師爲使我們一看就可以看出某生屬於某等級，某等級共有多少人，便製出表二（在第二頁），是下了分類的功夫。

製這種表（表二），將得五十分的學生（如學號一）列入丁等，使他降級，製表的人不爲他難過；將得五十九點九分的學生（如學號七）列入丁等，使他降級，製表的人常是十二分的不忍

表二 甲班學生成績等級次數(人數)分配表

等級	學					號	次數
甲	4	5	8	9	10	15	6
乙	2	6	12	14	16		5
丙	3	11	13				3
丁	1	7					2

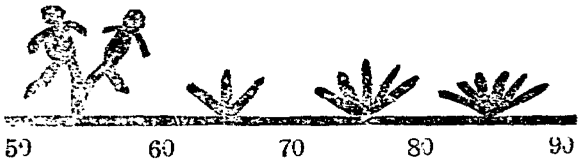
。但有什麼辦法呢？分等級就不能客氣。即使他得「59.94」分，也不能列入丙等。

像學號三的成績是六十分，被列入丙等，不降級；學號二的成績是七十分，得列入乙等，等級名義上比較好聽一點；又如學號八因成績是八十分，得了獎金。此三人一定異常快樂。實在想來：他三人是多危險呀！如每位少得半分，便有一位降級，一位頭上戴上可恥的等級——丙等，一位得不到獎金了！由此可知：在有些情形下，一分或半分，是很要緊的。成功和失敗，有時便由此一分或半分來決定！

甲班學號一的成績是五十分，學號七的成績是五十九點九分，都列入丁等。我們想用一個數來代表此二人的分數，最公平的辦法是用此等級的最中間的分數——丁等是由五十分至五十九點九九九……分，中間的分數可說是五十五分——爲代表。說他二人的分數是五十五分，學號七當然不高興。但這是沒有辦法的。既列入某等級，某等級的最中間數或謂中點，便可以代表全等級中每人的分數。假學號七的人向旁人說：「他列入丁等，怕是丁等中最壞的一個，其分數想僅足五十分！」受

學號一的人說：「他的功課並不十分壞，及格本不成問題；這次被列入丁等，恐祗差一點點沒有到六十分！」人是可以隨自己的恨與愛來亂說列入某等級中學生的分數；但他說的數字出不了此等級的範圍。統計人員誰都不恨，也不愛，以一最公平的數代表一等級中各人的分數，不能不以其中間數爲代表數。如此是假定某一等級的人們都站在中間了，茲繪圖如下：

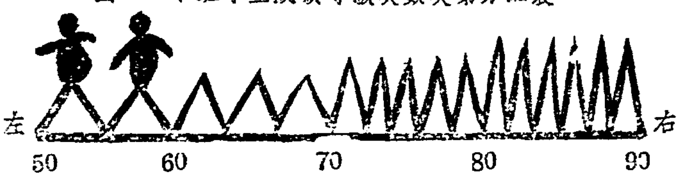
圖一　甲班學生成績等級次數集中分配圖



看圖一，我們可謂：甲班中，丁等二人，每人是五十五分；丙等三人，每人是六十五分；乙等五人，每人是七十五分；甲等六人，每人是八十五分。

如學號一及學號七二人列入丁等，我們想依二人原來分數的大小排列二人的次序，使此二人叉開腿，腳靠腳站在等級上。如圖二。

圖二　甲班學生成績等級次數次第分配表



丁等是由50至59.99……，二數之間的距離是不足十，但是近於十了，所以我們常說是十。丁等中二人站着十分，第一人站前五分，第二人站後五分。按此二人的右脚說，第一人是踏在五十五分上，第二人是踏在六十分上了。丙等有三人，三

表三　在圖二上每人右脚所踏之分數

次第	求法	分數
1	50+1×(10÷2)	55
2	50+2×(10÷2)	60
3	60+1×(10÷3)	63.33
4	60+2×(10÷3)	66.66
5	60+3×(10÷3)	70
6	70+1×(10÷5)	72
7	70+2×(10÷5)	74
8	70+3×(10÷5)	76
9	70+4×(10÷5)	78
10	70+5×(10÷5)	80
11	80+1×(10÷6)	81.66
12	80+2×(10÷6)	83.33
13	80+3×(10÷6)	84.99
14	80+4×(10÷6)	86.66
15	80+5×(10÷6)	88.33
16	80+6×(10÷6)	90

表四　在圖二上每人左脚所踏之分數

次第	求法	分數
1	90−1×(10÷6)	88.33
2	90−2×(10÷6)	86.66
3	90−3×(10÷6)	84.99
4	90−4×(10÷6)	83.33
5	90−5×(10÷6)	81.66
6	90−6×(10÷6)	80
7	80−1×(10÷5)	78
8	80−2×(10÷5)	76
9	80−3×(10÷5)	74
10	80−4×(10÷5)	72
11	80−5×(10÷5)	70
12	70−1×(10÷3)	66.66
13	70−2×(10÷3)	63.33
14	70−3×(10÷3)	60
15	60−1×(10÷2)	55
16	60−2×(10÷2)	50

人站着十分，每人站三點三三……分，其中第一人的右脚踏在六十三點三三……上，第二人踏在六十六點六六……上，第三人踏在七十分上。乙等中有五人，五人站着十分，每人站着二分，其中第一人的右脚踏在七十二分上，第二人踏在七十四分上，第三人踏在七十六分上，第四人踏在七十八分上，第五人踏在八十分上。甲等中有六人，六人站着十分，每人站一點六六……分，其中第一人的右脚踏在八十一點六六……分上，第二人踏在八十三點三三……分上，第三人踏在八十四點九九……分上，第四人踏在八十六點六六……分上，第五人踏在八十八點三三……分上，第六人踏在九十分上。

如在圖二上，從左向右數，論右脚所踏者，則每人之分數如表三(在第四頁)所求者。

如在圖二上，從右向左數，論左脚所踏者，則每人之分數如表四(在第四頁)上所求者。

由圖一可以製出第五表來，由圖二也可以製出第六表來。

表五　甲班學生成績分組次數分配表(一)

組距	組距中點	次數
50——60(以下)	55	2
60——70	65	3
70——80	75	5
80——90	85	6
	總次數	16

表六　甲班學生成績分組次數分配表(二)

組距	次數
50——60	2
60——70	3
70——80	5
80——90	6
總次數	16

由第一圖製出第五表，則第五表上每組中次數(人數)之分數是相同的。如第一組中之二人皆爲五十五分，第二組之三人皆爲六十五分，………。

由第二圖製出第六表，則第六表上每組中次數之分數是一個比一個大的(如由上向下數)：如第一組中之二人，一爲五十五分，一爲六十分；第二組中之三人，一爲六十三點三三……，一爲六十六點六六……，一爲七十分，……。如由下向上數，是一個比一個小：如第四組之六人，第一人爲八十八點三三……，第二人爲八十六點六六……，第三人爲八十四點九九……，………。

表五和表六都是將第一表上十六位學生的成績分爲四組。凡是分數在五十分以上，六十分以下的學生都列入第一組；六十分以上，七十分以下的學生列入第二組，……。每組之後一數之後，本來有「以下」二字，在習慣上是省去了。因爲省去了，又因爲每組前後兩數之差，或謂前後兩數之相距與十相近，故謂表五和表六每組之「組距」是「10」。每組有大小二數，如第一組之五十和六十。此小數謂之「下限」，大數謂之「上限」。

分組次數分配表是很有用的一種表，我們明白了第五表是由圖一變來的時候，又明白了第五表可以表示第二表的意義時，就可以由第一表直接產生第五表了。產生的方法如下：

一，求兩極差(全距)　表一上的最小分數五十和最大分數八十九點九分是兩極，兩極之差是三十九點九分。此差是由最小數至最大數之距離，故亦謂之全距。

二，決定組距之大小　凡是除全距所得之商在九以上，二十五以下的數，皆可作組距。在此例可作組距及不可作組距之數如下：　　　　(代表組距之符號爲 i)

39.9÷1=39.9	大於25	所以不可用 1 爲 i
39.9÷2=19.95	小於25	所以　可用 2 爲 i
39.9÷3=13.3	小於25	所以　可用 3 爲 i
39.9÷4= 9.975	小於25	所以　可用 4 爲 i
39.9÷5= 7.98	小於 9	所以不可用 5 爲 i

爲什麼凡是除全距所得之商在九以上，二十五以下之數皆可爲組距呢？是因用這些數作了組距，才可有十組至二十五組的組數。爲什麼分組次數分配表一定要有十組以上，二十五組以下呢？這是因爲一個表如此畫在一張紙上才好看，才可以表示出全體分配的情況。如少於十，每組中之量數常相差太大；如多於二十五，組距常太小，不便於處理，又常不能顯示全體分配的情況。

在此例中，2，3，4，皆可作組距，四以上即不可作組距。編者所以在表五及表六用十作組距，其因有二：(一)爲與表二之等級符合。(二)爲說明方便。

三，決定組數　如在此例中，2，3，4，皆可爲組距，是組數可有三數，茲求之如下：

(一)以二爲 i　　組數=19.95 +1=20.95　(20)

(二)以三爲 i　　組數=13.3　+1=14.3　(14)

(三)以四爲 i　　組數= 9.975+1=10.975 (10)

如以十爲組距，則　組數＝39.9÷10＋1＝3.99＋1＝4.99（4）。

是以二爲組距，組數有二十；三爲組距，組數有十四；四爲組距，組數有十；十爲組距，組數有四。由此我們有一求組數之公式如右：　　組數＝全距÷組距＋1

依常理，組數可有二十，十四及十，三數。究應用那一數呢？依常理說應選用近於十至二十五之中間數（17.5）。如依此，則應選用二十。如組數爲二十，則組距必爲二矣。現因另一種原因，決定組數爲四。因組數爲四，所以組距必爲十。

四，寫表中組距行　寫第一組，有兩個原則：(一)如兩極中之小極，即量數中之最小數，可以用組距除盡而不得小數，則以此小極開始第一組之第一數(下限)。(二)如小極不能用組距除盡或除得之商有小數時，則用較小極數爲小而能用組距除盡，又不得小數之數爲第一組之開始數(下限)。但此下限與同組之上限一定包容此小極。寫最後一組也有兩個原則：(一)此組一定包容大極。(二)此組之上限一定大於大極。茲運用此四原則寫出在此例中用二，三，四，及十爲組距時，各首組之開始數及首末兩組之全形。

(一)首組之開始數

50(小極)÷ 2＝25	根據第一原則	以「0」開始
50(小極)÷ 3＝16.66	根據第二原則	以「48」開始
50(小極)÷ 4＝12.5	根據第二原則	以「48」開始
50(小極)÷10＝5	根據第一原則	以「50」開始

(二)首組及末組

	二爲組距	三爲組距	四爲組距	十爲組距
首組	50——52	48——51	48——52	50——60
末組	88——90	87——90	88——92	80——90

組距的寫法有六種，如五爲組距，其寫法如下：

a	b	c	d	e	f
0—較小於 5	0— 4.99	0— 4	0—	2.5	0— 5
5—較小於10	5— 9.99	5— 9	5—	7.5	5—10
10—較小於15	10—14.99	10—14	10—	12.5	10—15

此六種之關係如右：　　$a=b=c=d=e=f$

通用者爲第六種(f)。

五，寫表中第二行組距中點　求組距中點之公式如下：

$$組距中點=下限+\frac{上限-下限}{2}$$

表七　甲班成績分組次數

分配表(三)

組　距	組距中點	劃記	次數
50——60	55	‖	2
60——70	65	‖‖	3
70——80	75	卌	5
80——90	85	卌 |	6
		總次數	16

六，劃記（完成第三行）　如表一第一分數是五十，就在表七第三行(劃記行)對着第一組及組距中點五十五的地方劃一「|」號。劃後立刻將表一上此數（五十分）劃去；看表一第二數是七十，就在表七第三行，對着第

三組及組距中點七十五的地方劃一「|」號。劃後立刻將表一上此一數劃去。如此依次序可將表一上十六位學生的分數劃入表七第三行。

在劃入時，千萬不要在表一上去找五十以上，六十以下有幾人，然後總記在表七上；找六十以上，七十以下有幾人，然後總記在表七上；……。因表一上的分數如多至五十個以上時，如此去找，就感到困難了。

劃記，在某一行，已劃了四劃「||||」，如再添一劃時，一定要做成「卌」形。

七，改劃記為數字　劃記完畢後，改劃記為數字，如表七第四行，再將數字加起來就完成此表。

作分組次數分配表是在作分類的工作。在分某村青年時，可以依年別，性別，婚否，窮富……去分類。可作出許多分組次數分配表。如依年別分後，又依性別分此已依年別所分之類，又依婚否去分此已依年別與性別所分之類，又依窮富去分此已依年別，性別及婚否所分之類，則可有如下之分類表：

表八　某村青年年別性別婚否及窮富分類表

某村青年															
滿二十歲								未滿二十歲							
男				女				男				女			
結婚		未結婚		結婚		未結婚		結婚		未結婚		結婚		未結婚	
窮	富	窮	富	窮	富	窮	富	窮	富	窮	富	窮	富	窮	富

爲分類更分明起見，還可以先依窮富分，再依婚否，再依性別，再依年別分，又可有如下之分類表：

表九　某村青年窮富婚否性別及年別分類表

某村青年															
窮								富							
婚				未婚				婚				未婚			
男		女		男		女		男		女		男		女	
滿	未滿	滿	未滿	滿	未滿	滿	未滿	滿	未滿	滿	未滿	滿	未滿	滿	未滿

以上兩個分類表中，每一條線之下可作一個分組次數分配表。是此二表合計共可作三十個。

對於一個村莊的青年作分類工作，作出三十個小分組次數分配表。分貼起來，所站地方太大；再者亦表示不出彼此間之關係。統計學家想出一個辦法——製四項表。茲繪之如下：

表十　四項表

性別與窮富 / 年別與婚別	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	全村			窮			富		
	合計	男	女	合計	男	女	合計	男	女
1. 總數									
2. 滿二十歲									
3. 未滿二十歲									
4. 已婚									
5. 滿二十歲									
6. 未滿二十歲						5			
7. 未婚									
8. 滿二十歲									
9. 未滿二十歲									

假如每方孔內有了眞的數字，我們便可對調查此村之人說出第九及第十兩表中任何一項之分類數字。譬如表中有個 5 字，是說明此村有五位未滿二十歲之窮女青年已結婚了。如此村未滿二十歲，家中富有之男青年結婚者多，則此村有早婚之風氣

。如已滿二十歲之窮男青年全未結婚，則是個可注意的問題。

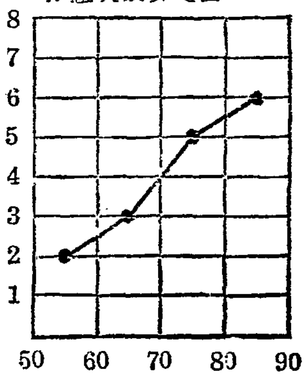
在製表十時，僅製出「1,2,3及A」所形成之方表時，謂之「一項表」，祇說明年別一項；在僅製出「1,2,3,A,B,C」所形成之方表時，謂之「三項表」，祇說明年別，性別及婚否三項；在製出「1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F,G,H,I,」所形成之方表時，始謂之「四項表」。

假如我們還想依「有工作否」來分此村之青年，則可製出五項者。

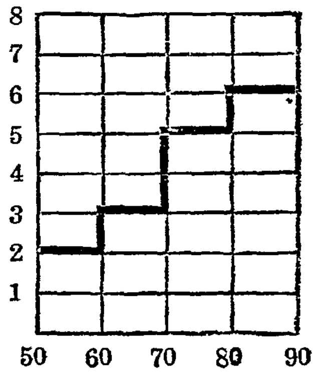
第二節 圖

我們看五六兩表，要詳閱其中數字，一一比較之，才知道甲班的學生成績壞的少，好的多。但我們看圖三，一看便可看出甲班的學生成績壞的少，好的多，此因有一線由低而高之故。

圖三 甲班學生成績
分組次數多邊圖



圖四 甲班學生成績
分組次數直方圖



由表五畫圖三，其步驟有四：

一，由表五次數行中最多之次數(6)決定圖三之高。圖三之高本爲六格，現多二格者，爲製出之圖美觀之故。

二，由表五組距行之組數(四)決定圖三之寬。因表五組距行有四組，所以圖三之寬有四段。此四段是由表五組距行之四組(50—60，60—70，70—80，80—90)相連而成。

三，高線分八格。寬線分四格。由高線之每格向右畫八條橫線，其長與寬線同；由寬線之四格分格處向上畫四條縱線，其長與高線同。如此可製成圖三。

四，假定表五代表圖一，則表五第一組(50—60)中之二人皆爲五十五分。如在圖三上，是站在橫線第一格(50—60)上之中間圓點上；同理，表五第二組中之三人站在第二格(60—70)上之中間圓點上；第三組中之五人站在第三格(70—80)上之中間圓點上；第四組中之六人站在第四格(80—90)上之中間圓點上。

假如表六是代表圖二，表六上每一組之人數之分數都是由小而大或由大而小的，想畫一分組次數圖，就要畫分組次數直方圖，如第四圖。

圖二上第一段(50—60)中有二人，是叉開腿排立在一段上。論右脚，第一人是五十五分，第二人是六十分。表六是由圖二產生的，圖四是由表六產生的，是圖四亦由圖二而來。圖二上第一段中二人叉開腿排立着，所以也在圖四的橫線第一格(50—60)上之粗線上排立着。第一人站此粗線之前一半，第二

人站後一半，所以畫時不能用點，要用線。表六第二組中有三人，用第二格上之粗線來表示。第三組中有五人，用第三格上之粗線來表示；……。用直粗線將此四粗線連起，就作成直方圖。看此圖，也可以看出甲班學生成績壞的少，好的多。

多邊圖和直方圖是為得表示次數分配之眞情；但有時不能表示眞情，使我們有錯的認識。我舉一例。譬如有兩個小學都辦了三年，其歷年之學生數如下：

	第一年	第二年	第三年
甲校	10	20	30
乙校	100	200	300

如依上法畫次數多邊圖，則如第五圖。(頁15)看第五圖，我們以為乙校學生數增加的快，甲校增加慢。在這方面甲校不如乙校，好像是甲校不如乙校辦得好。但依實看來：二校學生數之增加率是一樣的。如第二年甲校增加一倍，乙校亦然；第三年甲校增加第二年人數之半倍，乙校亦然，不分好壞。所以圖五所表示者易使我們有錯誤之認識。假如將此二校的情形畫在對數圖上(第六圖)，就使我們有正確的認識了。

我們知道以下的事實：

$$10^1=10$$

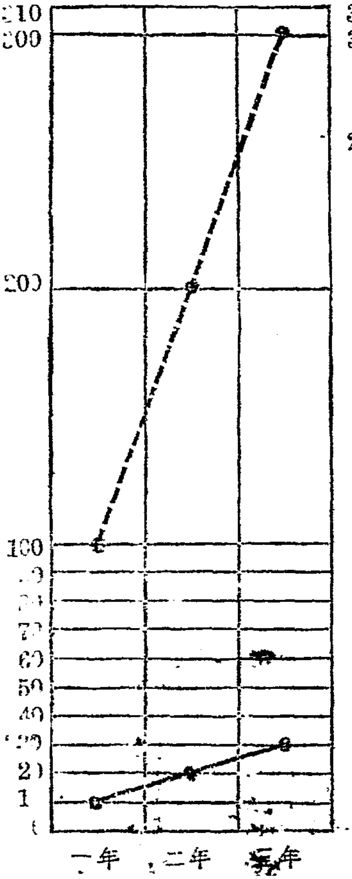
10的對數是1.0000　40的對數是1.6021　70的對數是1.8451
20的對數是1.3010　50的對數是1.6990　80的對數是1.9031
30的對數是1.4771　60的對數是1.7780　90的對數是1.9542

$$10^2=100$$

100的對數是2.0000　200的對數是2.3010　300的對數是2.4771

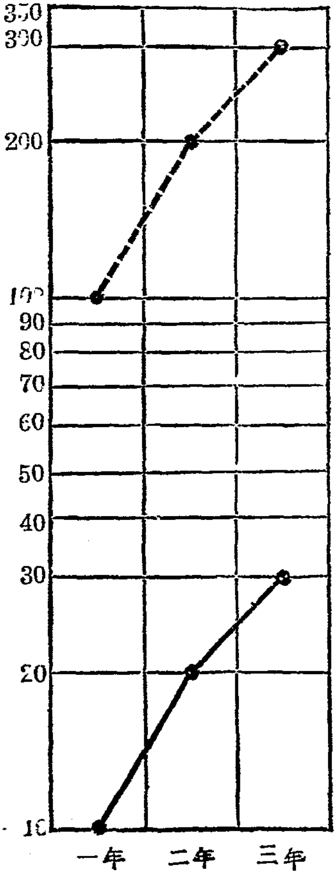
圖五　多邊圖

甲校　　乙校----



圖六　對數圖

甲校──→　乙校-----



在對數圖上第一横線是1，第二横線是1.3010，第一與第二之相距為「.3010」；第三横線為1.4771，二與三之相距為「.1761」。所以第一與第二相距大，第二與第三之相距小；同理第三與第四之相距又比第二與第三小；…………。

因100之對數為2，200之對數為2.3010，其相差亦為「.3010」。所以在對數圖上，由100至200之相距與由10至20之相距同。同理200至300之相距與20至30之相距同。

在第六圖上畫出甲乙兩校歷年之學生數，就可以看出兩校學生數之增進率是相同的——因二線向上之偏度相同。

因為十至二十與一百至二百所佔的空間相同，所以製出之圖所佔面積不過大，而對於百以下之數亦好表示，這是對數圖之另一優點。

關於「對數」的話

張鴻基吳吉臨兩位先生說：「對數非獨習自然科學者所必需之工具，習社會科學者亦絕不可少，尤其統計學需用特多。」語見四川省立教育科學館主編之科學教學季刊第二卷第三期，二位先生所作統計學所應用之中等數學一文，希望學統計的同志切記。譬如開平方，開立方，開四次，五次，六次，………方，我們常感困難；惟用對數法去求，則甚簡易，實例見以下各章。

第二章　求點

表十一　第二章所用符號一覽表(一)

m	Measure	量數
f	Frequency	次數
i	Class interval	組距
N	Total number	總次數
ll	Lower limit	下限
ul	Upper limit	上限
mid	Mid point	組距中點
M	Mean	平均數
AM	Assumed mean	假設平均數
GM	Geometric mean	幾何平均數
HM	Harmonic mean	倒數平均數
Mdn	Median	中數
Q_1	First Quartile	第一四分點
Q_3	Third Quartile	第三四分點
TP	Ten percentile	十分點
TP_1	First TP	第一十分點
Mo	Mode	衆數
d	deviation	離中差

第一節　算術平均數

本節所用主要符號

d＝M－AM　　　de＝mid－AM　　　Σ＝相加

一　舊法

一，舊法(一)　　求表一之平均數

M＝(50＋70＋60＋85＋81＋70＋59.9＋80＋87＋80＋65＋70＋68＋76＋89.9＋70)÷16＝1161.8÷16＝72.6125

二，舊法(二)　　求表五(頁5)之平均數

i	mid	f	fmid
50—60	55	2	110
60—70	65	3	195
70—80	75	5	375
80—90	85	6	510
		16	1190

$$M=\frac{1190}{16}=74.375$$

$$M=\frac{\Sigma fmid}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(公式一)$$

用舊法(一)求平均數是用的原量數，用舊法(二)求平均數是用中點，所以得數不同。

二　新法

一，新法所根據之五原則：

(一)從某些量數(2.4.6.)求得平均數(如4)，則此平均數便代表這些量數的任何一數。此因2＋4＋6＝4＋4＋4。

(二)以各量數(2.4.6.)減平均數(4)之差數(2—4＝—2，4—4＝0，6—4＝2。)之和(—2＋0＋2)必爲零。

(三)如從量數(2.4.6.)中，任意挑出一數(4)爲假定平均數。如各量數減此假定平均數之差數(2—4=—2, 4—4=0, 6—4=2.)之和爲零，則此假定平均數爲眞平均數。

(四)如從量數(2.4.6.)中，任意挑出一量數(2)爲假定平均數。各量數減假定平均數之差數(2—2=0, 4—2=2, 6—2=4)之和(0+2+4)不爲零。如爲正數(現在是「6」)，則以總次數(因有2.4.6.三數，所以總次數是「3」)除之，以所得之商(6÷3=2)加在假定平均數上，所得之和(2+2=4)便是眞平均數。

(五)如從量數(2.4.6.)中，任意挑出一量數(6)爲假定平均數。各量數減假平均數之差數(2—6=—4, 4—6=—2, 6—6=0.)之和(—4+—2+0)不爲零。如爲負數(現在是「—6」)，則以總次數(3)除之，以所得之商(—6÷3=—2)加在假定平均數上，所得之和(6+—2=4)便是眞平均數。

二，新法練習

(一)第四單則之應用

A，統計資料　有五顆樹，其高爲「8.7.6.9.11.」(以丈計)

B，求M　一，决定AM　現以「7」爲AM。　二，求d　如表十二所求者。三，求「d相加(Σ)之和」(Σd)　是6。四，求 $\Sigma d\div N$之商　6÷5=1.2　五，將此商加在AM上　如7+1.2=8.2　卽M。　六，列式：

表十二　求d

m—AM	d
8—7	1
7—7	0
6—7	—1
9—7	2
11—7	4
N=5	Σd=6

$$M=7+\frac{6}{5}=8.2 \qquad M=AM+\frac{\Sigma d}{N}\cdots\cdots(\text{公式二})$$

C，解釋　假定七丈高的一顆爲平均數，爲代表，是對八丈高的少說了一丈；對於六丈高的多說了一丈；對於七丈高的沒有多說，也沒有少說；對於九丈高的是少說了二丈，對於十一丈高的是少說了四丈。總計：少說了七丈，多說了一丈。兩相抵消，則共少說了六丈。假定七丈爲平均數：對於五樹共少說了六丈，對每一樹是少說了一丈二尺。所以知道此五樹之平均高爲(7+1.2=8.2)八丈二尺了。

(二)第五原則之應用

A，統計資料　同上

B，求平均數　一，決定AM　以「9」爲AM。二，求d　如表十三所求者。三，求Σd　是「−4」。四，求Σd÷N　−4÷5=−.8。五，將商數加在AM上 9+(−.8)=8.2　即M。六，列式如下：

$$M=9+\frac{-4}{5}=8.2$$

表十三　求d

m−AM	d
8−9	−1
7−9	−2
6−9	−3
9−9	0
11−9	2
	Σd=−4

C，解釋　假定一顆九丈高的爲平均數，爲此五樹之代表。是對於八丈高的多說了一丈；對七丈高的多說了二丈；對六丈高的多說了三丈；對十一丈高的少說了二丈；對九丈高的沒有多說，也沒有少說。總計：多說了六丈，少說了二丈。兩相抵消，是共多說了四丈。假定九丈爲平均高，對五顆樹共多說

了四丈；對每顆樹是多說了八尺。所以說：少說八尺就對了。九丈，少說八尺，便是八丈二尺，是眞平均數。

(三)求表一中之平均數

A，決定假定平均數　現以「70」爲假定平均數。

B，求各量數減假定平均數之差數　玆求之如下：

m	50	70	60	85	81	70	59.9	80	87	80	65	70	68	76	89.9	70
−AM	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
−d	20		10				10.1				5		2			
+d				15	11			10	17	10				6	19.9	

C，來Σd　因$\Sigma(-d)=-47.1$　$\Sigma(+d)=88.9$　所以$\Sigma d=88.9+(-47.1)=41.8$

D，代入公式(2)　$M=70+\frac{41.8}{16}=70+2.6125=72.6125$(與用舊法一所求者相同)

(四)求表五(頁5)中之平均數(一)

A，決定AM　因組距中點是各組量數之代表數，所以可任意挑一組距中點爲AM。挑的時候，以挑中間

表十四　求甲班平均數(一)

i	中點	f	mid−AM	de	f.de
50—60	55	2	55—75	−20	−40
60—70	65	3	65—75	−10	−30
70—80	75	5	75—75	0	
80—90	85	6	85—75	10	60
	N=16			Σf.de=−10	

幾組中之一組者爲佳；但挑其他組者，也無關係，因所得之M相同。現以第三組之中點「75」爲假定平均數。

B，求表五中之f.de，如表十四所求者。

C，求平均數　因已知：AM=75，N=16，Σf.de=−10，代入公式(2)即求得M如下：

$$M=75+\frac{-10}{16}=74.375$$ （與用舊法二，所求者同）

$$M=AM+\frac{\Sigma fde}{N}$$ ……………………（公式三）

(五)求表五中之平均數(二)

A，決定AM　以第二組之中點「65」爲AM

表十五　求甲班平均數(二)

i	mid	f	de÷i		f(de÷i)
50—60	55	2	−10÷10=	−1	−2
60—70	65	3	0÷10=	0	0
70—80	75	5	10÷10=	1	5
80—90	85	6	20÷10=	2	12
	N=16		Σf(de÷i)=15		

B，求de÷i及f(de÷i)如表十五中所求者。

C，求平均數　因已知　AM=65　N=16　Σf(de÷i)=15　i=10，可列式求之如下：

$$M=65+\left(\frac{15}{16}\right)10=74.375$$

$$M=AM+\left(\frac{\Sigma f(de\div i)}{N}\right)i$$ ………（公式四）

三　功用

求出算術平均數，我們有三種用處。玆分述如下：

(一)使我們看出一般的情形　譬如甲班的平均數是「74.375」，我們知道甲班乙等以上的學生多。

(二)可作比較之用　如甲班的平均成績小於乙班，就表示甲班不如乙班好。

(三)可以看出各量數在全體中之地位　甲班的 M 是「74.375」，我們就知道表一上學號一在班中的地位很低，學號二離平均數很近，學號十四在平均數之上，是此班中等以上的學生。

一個學生得七十分，如在平均數是六十分的班上，是很好的學生；如在平均數是八十分的班上，就是壞的學生。所以我們不求出平均數，是不知道每位學生的地位。

第二節　幾何平均數

一　復習幾何級數

文摘戰時旬刊第一〇〇號上，第一篇文章是「蘇聯已立於不敗地位」。文中有一段說：「自一九三三年，希特勒執政之年起，蘇聯軍費便依幾何級數而增加，年年增加一倍。」我們想：假如一九三三年蘇聯的軍費是一萬萬，則自一九三三年至一九三七年，其每年之軍費數應如下：

一九三三	一九三四	一九三五	一九三六	一九三七
1	2	4	8	16

「1,2,4,8,16,」是一個比一個大，所以是級數。因為每二

量數之比是相同的——如二爲一之兩倍；四又爲二之兩倍；八又爲四之兩倍；………，所以是等比級數，又名幾何級數。

二　乘，開方和對數的關係

一，乘法與對數　查對數表，「10」之假數爲「0.0000」；指標爲「1」；所以對數爲「1.0000」。

查對數表，「100」之假數爲「0.0000」；因指標爲「2」；所以對數爲「2.0000」。

「1.0000+2.0000=3.0000」。因「3」爲指標，「.0000」爲假數，查對數表，知其眞數爲1000。

所以「10×100」=log10+log 100

同理「20×200」=log20+log200=1.3010+2.3010=3.6020

=4000（因antilog3.6020=4000）

二，開方與對數　$\sqrt{64}=\frac{1}{2}\log 64=\frac{1}{2}\times 1.8062=0.9031$

$=8$　（因antilog.9031=8）

$$\sqrt[3]{27}=\frac{1}{3}\log 27=\frac{1}{3}\times 1.4314=0.4771=3$$

（因antilog0.4771=3）

$$\sqrt[6]{64}=\frac{1}{6}\log 64=\frac{1}{6}\times 1.8062=0.3010=2$$

（因antilog0.3010=2）

三　求幾何平均數

一，求物價之平均每年增加之倍數　假定民國二十六年的米價眞是每老斗二元（開始時之物價），現在是三百二十元。平

均每年增加多少倍呢？茲求之如下：

$$平均增加倍數=\sqrt[6]{\frac{320}{2}}-1=\sqrt[6]{160}-1=\frac{1}{6}\log160-1$$

$$=\frac{1}{6}\times2.2041-1=0.36735-1=2.33-1$$

$$=1.33\qquad（因\ \mathrm{antilog}\,0.36735=2.33）$$

由二元經過六年，每年增加1.33倍，是不是到今年要漲到三百二十元呢？茲證之如表十六：

表十六　二元之物價年增1.33倍表

年	求法	價格
26		2.000
27	2.00+ 2.00×1.33	4.660
28	4.66+ 4.66×1.33	10.860
29	10.86+ 10.86×1.33	25.300
30	25.30+ 25.30×1.33	58.900
31	58.90+ 58.90×1.33	137.200
32	137.20+137.20×1.33	319.676

二，求幾何級數行列中之中數（亦謂之幾何平均數）

（一）由首末二數求　譬如從二十六年至三十二年米價有七個不同的價格。當中一年是二十九年，米價是25.3元（中數）。假如我們祇知首末二年的價格，能不能求出二十九的價格呢？能。茲求之如下：

$$GM=\sqrt{2\times320}=\sqrt[2]{640}=\frac{1}{2}\log640=\frac{1}{2}\times2.8062=1.4031$$

$$=25.3\qquad（因\ \mathrm{antilog}\,1.4031=25.3）$$

調查人口，很費事，常是十年調查一次。譬如某地民國二十年有一百人，民國三十年有一千六百人，我們想知道民國二十五年此地之人口數便用此求中數法，茲求之如下：

$$GM=\sqrt[2]{100\times1600}=\sqrt{160000}=\frac{1}{2}\log160000=\frac{1}{2}\times5.2041$$

$$=2.60205=400 \qquad (\text{antilog}2.60205=400)$$

（二）由全體量數求GM　如已知七年來每年之米價，求GM法依下列公式：

$$GM=\sqrt[n]{m_1\times m_2\times m_3\cdots\cdots m_n}\cdots\cdots(\text{公式五})$$

$$GM=\sqrt[7]{2\times4.66\times10.86\times25.3\times58.9\times137.2\times319.67}=25.3$$

$\log\ 2.00=0.3010$
$\log\ 4.66=0.6684$
$\log\ 10.86=1.0359$
$\log\ 25.30=1.4031$
$\log\ 58.90=1.7701$
$\log137.20=2.1373$
$\log319.67=2.5048$

$7\ |\ 9.8206$

antilog　1.4029=25.3

（三）爲增加較小量數在全體中之影響求無幾何級數性質之數列之GM　有一個表示物價漲落之方法——求價比。茲舉例如第十七表。

表十七　求價比法

物	去年	今年	求　　法	價比
甲	50	50	50÷50×100	100
乙	100	200	200÷100×100	200
丙	200	100	100÷200×100	50

價比100表示無漲落，200表示漲了一倍，50表示落了一半。三數由小而大排列，則如右：　50　100　200

依求算術平均數法求M，三物之平均價比(物價指數)较去年漲了，因此三價比之M如右：

$$M=\frac{50+\ 00+200}{3}=117$$

如依求幾何平均數法求GM，三物之平均價比(物價指數)無漲落，因此三價比之GM如右：

$$GM=\sqrt[3]{50\times100\times200}=100$$

如此是增強了較小價比在全體中之影響，

第三節　倒數平均數

一，例一　昨天一元錢買三個橘子，今天一元錢買兩個，我們想知道今昨兩日平均一元能買幾個，求法應如下：

$$\frac{1}{HM}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2+3}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{12}\quad HM=\frac{12}{5}$$

$=2.4$　　　　答可買2.4個

一元買「2.4」個，是每個1÷2.4=0.4166元。實在算來昨天每個是(1÷3)0.333元，今天一個(1÷2)是0.5元，平均(0.333+0.5)÷2是「0.4166」元。所以一元能買2.4個，

如此所求出之平均數，名之為「倒數平均數」。

假如用求算術平均數法去求，則今昨兩日平均一元能買(3+2)÷2=2.5個。果如此，則每個值「0.4」元·是非二日每個之平均價，所以求此類之平均數，一定要用求倒數平均數法。其公式如右：

$$\frac{1}{HM}=\frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{m}\cdots\cdots\cdots\text{(公式六)}$$

二，例二　甲每小時解答六算題，乙解答四算題，丙解答二，問三人平均每小時解答幾題？

$$\frac{1}{HM}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2+3+6}{12}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{12}\right)=\frac{11}{36}$$

$$HM=\frac{36}{11}=3.2727$$

一小時答「3.2727」題，是平均每題需60÷3.2727=18.333分。實在算來：甲答一題用「10」分「60÷6)，乙答一題用「15」分(60÷4)，丙答一題用「30」分，三人平均(10+15+30)÷3=18.33分。所以三人平均每小時解答3.2727題。

如用求算術平均數法求之，則平均每小時作四題，因(6+4+2)÷3=4。每小時作四題，是每題用15分鐘，則與事實不合。所以遇此類題，一定要用求倒數平均數法。

三，例三　有一個人走路，走了四里。走第一里的速率是每小時八里、走第二里的速率，每小時六里，走第三里的速率，每小時五里，走第四里時速率降至三里。問此人走路之平均速率——即每小時走幾里？

$$\frac{1}{HM}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{30+40+48+80}{240}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{198}{240}\right)=\frac{198}{960}\qquad HM=\frac{960}{198}=4.84848$$

每小時走「4.84848」里，則每里平均用60÷4.84848=12.38分。實在算來：甲走第一里是用了「7.5」分，第二里用了「10」分，第三里用了「12」分，第四里用了「20」分，合計共用了「49.5」分，平均每里用120375分(與12.38分相近)。因60÷12.375=4.84、所以每小時能走4.84848里。

如用求算術平均數法去求，則平均速率爲每小時走「5.5」里，因(8+6+5+3)÷4=5.5。是每行一里用「10.9090」分，行四里共用「43.6360」分，則與「49.5」分不合，所以是錯的。

表十八　第二章所用符號一覽表(二)

f_{mdn}=中數組之次數	ul_{Q_3}=Q_3組之上限
f_{Q_1}=Q_1組之次數	ul_{TP_1}=TP_1組之上限
f_{Q_3}=Q_3組之次數	Σfl_{mdn}=小於中數組各組次數之和
f_{TP_1}=TP_1組之次數	Σfl_{Q_1}=小於Q_1組各組次數之和
ll_{mdn}=中數組之下限	Σfl_{Q_3}=小於Q_3組各組次數之和
ll_{Q_1}=Q_1組之下限	Σfl_{TP_1}=小於TP_1組各組次數之和
ll_{Q_3}=Q_3組之下限	Σfu_{mdn}=大於中數組各組 f 之和
ll_{TP_1}=TP_1組之下限	Σfu_{Q_1}=大於Q_1組各組 f 之和
ul_{mdn}=中數組之上限	Σfu_{Q_3}=大於Q_3組各組 f 之和
ul_{Q_1}=Q_1組之上限	Σfu_{TP_1}=大於TP_1組各組 f 之和

第四節　二分點(中數)

一　數頭

乙班有十五位學生，使他們按照分數大小的次第，由小而

大排起隊來。假如以圖代表他們的頭，則如第七圖：

圖七　乙班學生成績次第圖

				A				B				C				
	○	○	○	●	○	○	○	●	○	○	○	●	○	○	○	
左	59	60	65	68	69	70	75	76	78	80	82	85	86	88	89	右

我們一看圖七，便知B 頭是二分點。因此點之左右均有七頭。此頭之下是「76」分，所以說二分點是「76」分或謂中數是「76」分。是依此法求中數有二步：

一，求中數之位置　求Mdn位置之公式如下：

$$\text{Mdn位置(上例)}=\frac{15+1}{2}=8 \qquad \text{Mdn位置}=\frac{N+1}{2}\cdots(\text{公式七})$$

中數位置是八，是使我們在圖七上，從左向右數八人，或從右向左數八人。

二，求中數　從左向右數八人，數在B頭上；從右向左數八人，也數在 B頭上。此頭下之分數——76——便是中數。

甲班有十六位，也如乙班十五位之排隊法，則如圖八：

圖八　甲班學生成績次第圖

				D● E					F● G					H● I							
	○	○	○	◕	A	◐	○	○	◑	B	◐	○	○	◔	C	◕	○	○	○		
左	50	59.9	60	65		68	70	70	70		75	76	80	80		81	85	87	89.9	右	
	1	2	3	4		5	6	7	8		9	10	11	12		13	14	15	16		
	16	15	14	13		12	11	10	9		8	7	6	5		4	3	2	1		

$$A=65\times\frac{3}{4}+68\times\frac{1}{4} \quad B=\frac{70}{2}+\frac{75}{2} \quad C=80\times\frac{1}{4}+81\times\frac{3}{4}$$

一，求中數位置　中數位置$=\frac{16+1}{2}=8.5$　中數位置得八點五，是使我們在圖八上，由左向右或由右向左數八個半頭——即八個半人。此八個半人是理論人，實際上並無此種人。

從左向右數八個半頭，就數在G頭上。但是數了一半，如此兒頭中半塊黑的部分。從右向左數八個半頭，數在F頭上，也是數了一半，如頭中半塊黑的部分所指者。此兩半黑頭合成一B頭，就是圖八上的二分點。因此頭之左與右均有八頭。此頭也就是中數位置之所在。

二，求中數　兩個半黑頭所合成之B頭，其下無分數。即以G頭之半(75÷2)「37.5」加F頭之半(70÷2)「35」，合爲B頭下之分數「72.5」，此即中數。

B頭是理論上的頭，本無此頭。惟此理論上的人也可分十大人爲兩部分，所以說也有用。以後幾章要常求此類之理論人——如1.5人，2.7人，……。

二　數脚

一，求第二圖上之中數　甲班學生十六人，脚靠着脚，叉開腿站在第二圖上，每人站一小段。組中人數少，每人站的小段長一點；組中人數多、每人站得小段就短一點。求第二圖上的中數，也有兩個步驟：

(一)求中數位置　求中數位置的公式如下：

中數位置$=\frac{N}{2}$……(公式八)　中數位置$=\frac{16}{2}=8$

中數位置得八，是使我們做兩件事：

A，在圖二上，從左向右，數學生的右脚，數八隻。實際數一下，就數在第八位的右脚上。脚尖在76分上。

B，在圖二上，從右向左，數學生的左脚，數八隻。實際數一下，就數在第八位的左脚上。脚尖在76分上。

此點(76分)之左右均有八人，故此點是二分點，也是中數位置之所在。

(二)求中數　有了中數位置，便容易求出中數。復習第一章，第一節，關於第二圖上每人應有分數之說明(表三及表四)，便可知此76是中數。

二，求第六表上之中數　如第六表是代表第二圖時，求第六表中之中數，有以下兩大步驟：

(一)求中數位置　中數位置$=\frac{16}{2}=8$

(二)求中數

A，由上向下數　由上向下數八人，與在第二圖上由左向右數八隻右脚一樣。此八人每人之分數亦如第一章，第一節中算及圖二上由左向右每人之分數時所求出者(看表三)。明此關係後，則可深明以下之各步驟：

(A)由上向下數各組之次數，數至中數所在組之前一組爲止　我們知道中數是在第六表上之第三組中，此因中數之位置(8)是在此組中。由上向下數各組之次數，數至中數所在組之前一組爲止，是「2+3=5」。

(B)依第二圖上由左向右計，第五人之右脚所踏者爲

70」分、

(C) 8−5=3　即再向下數三人即爲得中數之人。

(D) 求此三人在第二圖上應站之分數，在第六表上應有之分數　此三人在第三組中，第三組中有五人，共站十分，每人應站二分，則三人應站六分。

(E) 將此六分加在七十分上，即得第八人應有之分數，亦即中數。

(F) 列式　中數 $=70+\left[\frac{16}{2}-(2+3)\right]\frac{10}{5}$

$$=70+\frac{\frac{16}{2}-(2+3)}{5}\times 10=76$$

$$Mdn=ll_{mdn}+\frac{\frac{N}{2}-\Sigma fl_{mdn}}{f_{mdn}}\times i \cdots\cdots(\text{公式九})$$

B，由下向上數　由下向上數八人，和在第二圖上由右向左數八隻左脚一樣。此八人每人之分數亦如第一章，第一節中算及圖二上由右向左每人之分數時所求者。明此關係後，即可深明以下各步驟：

(A) 由下向上數各組之次數，數至中數所在組之前一組爲止　此例由下向上數，祇可數一組，再數即爲中數所在組了。此一組之次數爲「6」。

(B) 在第二圖上由右向左數，第六人之左脚所踏者爲「80」分，在第六表上是「中數所在組之上限」。

(C)8－6＝2，即再向上數二人，即爲得中數者

(D)求此二人在第二圖上應站之分數，在第六表上應有之分數　此二人在第三組中。第三組中有五人，共站十分，每人應站二分，則二人應站四分。

(E)將此四分由「80」分上減去，即得第八人應有之分數——76。此即中數。

(F)列式中數＝$80-\left(\frac{16}{2}-6\right)\frac{10}{5}=76$

$$Mdn=ul_{mdn}-\frac{\frac{N}{2}-\Sigma fu_{mdn}}{f_{mdn}}i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式十})$$

C，中數之决定　因由上向下與由下向上數八人，第八人之分數皆爲七十六分，所以七十六爲中數。

三，求第十九表中之中數

表十九　乙班學生成績分組次數分配表

組距	f
50—60	1
60—70	4
70—80	4
80—90	6
N	15

A，由上向下求

$$Mdn=70+\frac{\frac{15}{2}-(1+4)}{4}\times10=70+6.25$$

$$=76.25$$

B，由下向上求

$$Mdn=80-\frac{\frac{15}{2}-6}{4}\times10=80-3.75$$

$$=76.25$$

C，中數之决定 因由上向下與由下向上求

第七點五人的分數皆是76.25分，所以此76.25分是中數。

三　中數的用處

第一，可比較兩班之優劣。如甲班之中數(72.5)小於乙班之中數(76)，便知乙班的成績比甲班好。（看第七第八兩圖）

第二，可知學生在班中的地位。如二生同是得75分。在甲班者，是中數以上的學生；在乙班者，是中數以下的學生。

第五節　四分點

一　數頭

一，求乙班中之第一四分點及第三四分點

看第七圖，中數(76)所在的位置——B頭，左右各七項，所以我們謂此頭爲二分點。假如再分左七頭爲兩部分，可找出A頭。此頭可以說是此七頭之二分點，此因左右皆爲三頭。如再分右七頭爲兩部分，可找出C頭。此頭可說是此七頭之二分點，因此點之左右皆爲三頭。

A點之左有三頭，AB之間有三頭，BC之間有三頭，C點之右有三頭、是ABC三點分全部爲四部分了。所以我們謂此三點爲四分點。A爲第一個四分點，B爲第二個四分點，C是第三個四分點。

因B點是二分點，我們已會求了。現在我介紹求第一及第三四分點$\left(Q_1 \text{ 及 } Q_3\right)$的方法。求四分點的位置，有一個公式，茲介紹於下：

$$四分點位置=\frac{N+1}{4}\cdots\cdots(公式十一)$$

$$四分點位置＝\frac{15+1}{4}＝4$$

(一)由左向右求 Q_1位置＝4　　Q_1＝68(是第四人之分數)

Q_3位置＝4×3　　Q_3＝85(是第12人之分數)

(二)由右向左求 Q_1位置＝4×3　　Q_1＝68(是第12人之分數)

Q_3位置＝4　　Q_3＝85(是第四人之分數)

由此可知，求第一四分點有兩種求法：(一)由左向右，(二)由右向左。如由左向右數四分之一的人數(第一四分點)，則由右向左數四分之三的人數；如由左向右數四分之三的人數(求第三四分點)，則由右向左求四分之一的人數。

二·求甲班之第一四分點及第三四分點(圖八)

(一)求四分點之位置　因甲班有十六人，其位置如下：

$$四分點位置＝\frac{16+1}{2}＝4.25$$

(二)求各四分點之位置及其分數

A，求 Q_1

(A)由左向右求　Q_1位置＝4.25。要數去E頭(第五頭)下分數(68)四分之一$\left(68\times\frac{1}{4}=17\right)$。此因數4.25人，即數四人之後，再數「0.25」人之故、

(B)由右向左求　Q_1 位置＝4.25×3＝12.75　要數去

D 頭(第十三頭)下分數(65)四分之三$\left(65\times\frac{3}{4}=48.75\right)$。此因數 12.75人，即數十二人之後，再數「0.75」人之故。

(C) 合計　17+48.75=65.75　是第一四分點，是第四頭與第五頭(由左向右數)之間生出一A頭(看第八圖)

(D) 列式　$Q_1=68\times\frac{1}{4}+65\times\frac{3}{4}=65.75$

B,求Q_3

(A) 由左向右求　Q_3位置=4.25×4=12.75。要數去I頭(第十三頭)下分數(81)四分之三$\left(81\times\frac{3}{4}=60.75\right)$。此因數12.75人之故。

(B) 由右向左求　Q_3位置=4.25。是要數H頭(第五頭)下分數(80)四分之一$\left(80\times\frac{1}{4}=20\right)$。此因數4.25人之故。

(C) 合計　60.75+20=80.75是第三四分點，是在第十二頭與第十三頭(由左向右數)之間生出一C頭(看第八圖)。

(四)解釋　第八圖上有　A，B，C，三頭，此三頭之左右皆爲四頭，不多不少。是將全部四分了。惟求此班之四分點必有「合計」一步，此應切記。

二　數脚

一，求第二圖中之四分點　　如果甲班的十六位，都叉開腿，脚靠着脚的站着，像第二圖，就容易求四分點了。求的方法是根據求中數的原則，有二步：

(一)求四分點之位置

四分點位置$=\frac{N}{4}$……(公式十二) 四分點位置$=\frac{16}{4}=4$

(二)求 Q_1及 Q_3 A,求Q_1

(A)由左向右求 Q_1位置=4 $Q_1=60+2\times\frac{10}{3}=63.66$

(B)由右向左求 Q_1位置=12 $Q_1=70-1\times\frac{10}{3}=66.66$

B,求Q_3

(A)由左向右求 Q_3位置=12 $Q_3=80+2\times\frac{10}{6}=83.33$

(B)由右向左求 Q_3位置=4 $Q_3=90-4\times\frac{10}{6}=83.33$

二,求第六表中之四分點 其原則與求圖二中者完全相同,亦有如下之二步:

(一)求四分點之位置 四分點位置$=\frac{N}{4}=\frac{16}{4}=4$

(二)求 Q_1及 Q_3 A,求Q_1

(A)由上向下求 Q_1位置=4 $Q_1=60+(4-2)\frac{10}{3}=66.66$

(B)由下向上求 Q_1位置=12 $Q_1=70-\left[12-(6+5)\right]\frac{10}{3}$
$=66.66$

B,求Q_3

(A)由上向下求　Q_3位置$=12$

$$Q_3=80+\left[12-(2+3+5)\right]\frac{10}{6}=83.33$$

(B)由下向上求　Q_3位置$=4$

$$Q_3=90-(4-0)\frac{10}{6}=83.33$$

三，求四分點之公式　僅舉A中之(B)及B中之(B)二者。

$$Q_1=60+\left(\frac{16}{4}-2\right)\frac{10}{3}$$

$$Q_1=ll_{Q_1}+\left(\frac{N}{4}-\Sigma fl_{Q_1}\right)\frac{i}{f_{Q_1}} \quad \cdots\cdots\cdots(\text{公式十三})$$

$$Q_3=90-\left(\frac{16}{4}-0\right)\frac{10}{6}$$

$$Q_3=ul_{Q_3}-\left(\frac{N}{4}-\Sigma fu_{Q_3}\right)\frac{i}{f_{Q_3}} \quad \cdots\cdots\cdots(\text{公式十四})$$

三　四分點的用處

我們看第八圖，是將此十六人分為四部份，每部份有四人。Q_1(A頭)之左有一份，Q_1(A頭)與Q_2(B頭)間有一份，Q_2(B頭)與Q_3(C頭)間有一份，Q_3(C頭)之左有一份。

我們從各四分點向左看：第一四分點之左有25%人，第二四分點之左有50%人，第三四分點之左有75%人。

如從各點向右看：則第一四分點之右有75%人，第二四分

點之右有50%人，第三四分點之右有25%人。

知道了三點之後，就更可以知道甲班學生中每一學生的地位了，茲舉例如下：

學號一得五十分，在第一四分點(65.75)之下，向右看，班中至少有75%人$\left(\text{即}16\times\frac{75}{100}=12\text{人}\right)$比他好。

學號二得七十分，在Q_1與Q_2(73.5)間。向左看，有25%人(即四人)比他壞；向右看，有50%人(即八人)比他好。

學號四得八十五分，在Q_3 80.75之上。向左看，有75%人(即十二人)比他壞。

第六節 十分點

一 數脚

表二十 圖二上各十分點之位置

※第一十分點

TP次第	由左向右	由右向左
1※	1.6× 1= 1.6	1.6×9=14.4
2	1.6× 2= 3.2	1.6×8=12.8
3	1.6× 3= 4.8	1.6×7=11.2
4	1.6× 4= 6.4	1.6×6= 9.6
5	1.6× 5= 8.0	1.6×5= 8.0
6	1.6× 6= 9.6	1.6×4= 6.4
7	1.6× 7=11.2	1.6×3= 4.3
8	1.6× 8=12.8	1.6×2= 3.2
9	1.6× 9=14.4	1.6×1= 1.6
10	1.6×10=16.0	1.6×0= 0.0

表二十一　由左向右求圖二之各十分點

次第	求法	分數
1	$50+1.6\times\frac{10}{2}$	58.00
2	$60+(3.2-2)\frac{10}{3}$	64.00
3	$60+(4.8-2)\frac{10}{3}$	69.33
4	$70+\left[6.4-(2+3)\right]\frac{10}{5}$	72.80
5	$70+\left[8-(2+3)\right]\frac{10}{5}$	76.00
6	$70+\left[9.6-(2+3)\right]\frac{10}{5}$	79.20
7	$80+\left[11.2-(2+3+5)\right]\frac{10}{6}$	82.00
8	$80+\left[12.8-(2+3+5)\right]\frac{10}{6}$	84.66
9	$80+\left[14.4-(2+3+5)\right]\frac{10}{6}$	87.33

一，求第二圖之十分點　求二分點是分全體爲二，求四分點是分全體爲四，求十分點是分全體爲十。其步驟如下。

(一)求十分點之位置

$$TP位置=\frac{N}{10}$$

(公式十五)

$$TP位置=\frac{16}{10}=1.6$$

(二)求各十分點之位置　玆求之如表二十(頁四十)。

(三)求各十分點　玆求之如表二十一及二十二。

二，求第六表之十分點　其求法如求第二圖之十分點者。

(一)由上向下求　與在第二圖上由左向右同。

表二十二　由右向左求圖二之各十分點

次第	求法	分數
1	$60-\left[14.4-(6+5+3)\right]\frac{10}{2}$	58.00
2	$70-\left[12.8-(6+5)\right]\frac{10}{3}$	64.00
3	$70-\left[11.2-(6+5)\right]\frac{10}{3}$	69.33
4	$80-(9.6-6)\frac{10}{5}$	72.80
5	$80-(8-6)\frac{10}{5}$	76.00
6	$80-(6.4-6)\frac{10}{5}$	79.20
7	$90-(4.8-0)\frac{10}{6}$	82.00
8	$90-(3.2-0)\frac{10}{6}$	84.66
9	$90-(1.6-0)\frac{10}{6}$	87.33

$$TP_n = ll_{TP_n} + \left(\frac{N}{10}\times n - \Sigma fl_{TP_n}\right)\frac{i}{f_{TP_n}} \quad \text{………(公式十六)}$$

$$TP_3 = 60 + \left(\frac{16}{10}\times 3 - 2\right)\frac{10}{3} = 69.33 \text{ (第三十分點)}$$

（二）由下向上求　與在第二圖上由右向左求者同，其公式如四十三頁所列者。

$$TP_n = ul_{TP_n} - \left(\frac{N}{10}(10-n) - \Sigma fu_{TP_n}\right)\frac{i}{f_{TP_n}} \cdots\cdots(公式十七)$$

$$TP_3 = 70 - \left(\frac{16}{10}(10-3) - (6+5)\right)\frac{10}{3} = 69.83(第三十分點)$$

二　十分點的用處

我們在第二圖上向右看，再向左看，可謂各十分點之左右各有以下之百分人數：

TP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分　數	58	64	69.33	72.8	76	79.2	82	84.66	87.33	90
向右看	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
向左看	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

如表一上第五號得81分，在第六十分點與第七十分點之間。從第七十分點向右看，有30%人超過他。從第六十分點向左看，有60%人不及他。

由此可知：有了十分點，更可以看出甲班中每位在班中的地位。

第七節　衆數

一，求表一中之衆數　如有人問我們：「甲班十六人得那種分數的人數最多呢？」我們看表一可以告他說：「得70分的人數最多，共有三人」。此70分，我們名之爲「衆數」。

二，求表五中之衆數　假如我們求第五表中之衆數，我們所得之衆數是85分。因在第五表中，第四組中之次數最多；又

此六人都是85分。所以說85分是衆數。

三，求圖三中之衆數　由折線之最高峯畫一垂直線，其下之分數——85——便是衆數。

四，求丙班學生成績分組次數分配表中之衆數　因爲各組之次數有相同者，如表二十三中第二及第四兩組，其次數都是「4」。我們有兩個方法，求衆數。茲介紹如下：

表二十三　丙班成績次數分配及其修勻表

組距	f	修勻	得數
50—60	2(A)	(2+2+4)÷3	2.666
60—70	4(B)	(2+4+3)÷3	3
70—80	3(C)	(4+3+4)÷3	3.666
80—90	4(D)	(3+4+2)÷3	3
90—100	2(E)	(4+2+2)÷3	2.666

（一）修勻法　各組次數之修勻公式如下：

A=(A+A+B)÷3

B=(A+B+C)÷3

C=(B+C+D)÷3

D=(C+D+E)÷3

E=(D+E+E)÷3

丙班各組次數之修勻如表二十三。修勻後，我們看出三個事實：（一）次數大者變小，如「4」變爲「3」；（二）次數小者變大，如「2」變爲「2.666」，「3」變爲「3.666」；（三）得出一個最大的次數，如「3.666」。因有此最大之次數，我們卽以其組之中點—75—爲衆數。

表二十四　併組法求MO

組距	f	兩組合併
50—60	2	2+4=6
60—70	4	
70—80	3	3+4=7
80—90	4	
90—100	2	

（二）併組法　如組數少，則

使兩組合併；組數多則使三組合併。現用兩組合併法如表二十四。因合併求出最大之次數—7，即以其上下兩組中點平均數80[(75+85)÷2]為衆數。

五，衆數的用處　第一，可作比較用。如甲班之衆數為85分，丙班之衆數為75分。是丙班不如甲班成績好。第二，也可知各量數在全體中的地位。如甲班衆數是85分，假如一個學生得了「81」分，便很喜歡。他父親可以向他說：「不要太喜歡吧！你看，你班上得85分的人是很多呀！」

表二十五　第三章所用符號一覽表

HD	Half deviation……………………………半差
Q	Quartile deviation…………………四分差
AD	Average deviation…………………平均差
SD或σ	Standard deviation…………………均方差
V	Coefficient of variation…………差異係數
dv	m—Mdn或Mdn—m
dv	mid—Mdn或Mdn—mid
mid_{mdn}	中數所在組之中點

第三章 求線

第一節 半差

在第二圖上，自左向右數四人(數右脚)得Q_1(66.66)；自右向左數四人得Q_3(83.33)。Q_1與Q_3之間尚有八人，是尚有一半人。此一半人，由左向右數，第八人得「83.33分」；由右向左數，第八人得「66.66分」。是此八人——全數之一半——得分最多者是「83.33」，得分最小者是「66.66」。其相差是16.66——此卽半差。是求半差之公式如下：

$$HD=Q_3-Q_1 \cdots\cdots\cdots \text{(公式十八)}$$

此半差之數愈小，表示此一半人相差愈小，也可以表示全體人之分數相差愈小。如此半差之數大，則表示此一半人相差大，或可謂全體人之分數相差大。

表二十六　丙班成績分組次數分配表

組　距	次數
60—70	5
70—80	10
80—90	1
	N=16

今有丙班，亦有十六位學生，其成績分配如表二十六：

四分點位置$=16\div4=4$

$$Q_1=60+4\times\frac{10}{5}=68$$

$$Q_3=80-(4-1)\frac{10}{10}=77$$

$$HD=77-68=9$$

甲班半差是「16.66」，丙班半差是「9」，我們就知道丙班較甲班整齊，彼此相差小。

第二節　四分差

半差是 Q_3 減 Q_1 之差。這種差的大小表示 Q_1 與 Q_3 間之量數相差之多少，也可以表示全體相差之多少。

現在為使得數小一點，又將半差二分之。茲舉例如下：

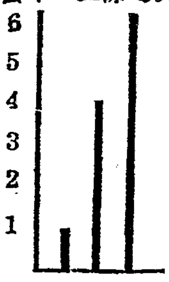
甲班 $\frac{16.66}{2}=8.33$　　丙班 $\frac{9}{2}=4.5$

「16.66」是甲班中間一半最小分數與最大分數之差，以二除之，則為此一半之一半，可名之為四分差。此差之數大，表示 Q_1 與 Q_3 間之成績彼此相差大，也可表示全體相差大。如此差數小，則表示 Q_1 與 Q_3 間之成績彼此相差小，或可謂全體相差小。求Q之公式如右：

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}\cdots(\text{公式十九})$$

圖九　三線之長

圖十　三線之長



第三節　平均差

一　以眞中數為主

一，求左列二圖中三線之平均差　第九圖上，B線是中數(4)，A與B之差為一，C與B之差為二，一加二得三，以三除之得「1」，是謂平均差。

第十圖上，E線是中數(4)，D與E之差爲三，F與E之差爲二，三加二得五，以三除之得「1.666」，是謂平均差。

二，求下列各組兵年齡之平均差 dv代表「中數－m或m－中數」之差數，求AD之公式如右：$AD=\frac{\Sigma dv}{N}$……(公式廿)

甲組		乙組		丙組	
年齡	dv	年齡	dv	年齡	dv
25	5	18	12	12	18
28	2	25	5	15	15
30	(中數)	30	(中數)	30	(中數)
35	5	40	10	38	8
37	7	42	12	60	30
5	19	5	39	5	71
N	Σdv	N	Σdv	N	Σdv

$AD=\frac{19}{5}=3.8$　　$AD=\frac{39}{5}=7.8$　　$AD=\frac{71}{5}=14.2$

看此三組兵年齡的分配，可以知道：甲組最好，都是壯年，乙組次之，丙組最不好，年齡相差太大。所以甲組平均差最小，乙組次之，丙組最大。如依年齡看戰鬥力，可以說：甲最好，乙次之，丙最弱。

三，求表五中之平均差

(一)求中數　已知爲「76」。在求中數前，使各組學生叉開腿排立如圖二。在求中數後，使各組之學生向本組之中點集

中，知圖一。

表二十七 求甲班之平均差

組 距	mid	f	dv	fdv
50—60	55	2	21	42
60—70	65	3	11	33
70—80	75	5	1	5
80—90	85	6	9	54
	N=16			134

表二十八 求丙班之平均差

組 距	中數	f	dv	fdv
60—70	65	5	8	40
70—80	75	10	2	20
80—90	85	1	12	12
		16		72

(二)求各組中點與76之差數之和（Σfdv） 如表二十七：

(三)代入公式

$$AD=\frac{\Sigma fdv}{N}\cdots(\text{公式廿一})$$

$$AD=\frac{134}{16}=8.375$$

四，求丙班之平均差

(一)求中數 中數=73

(二)求 Σfdv 如表二十八。

(三)代入公式

$$AD=\frac{72}{16}=4.5$$

甲班的AD是8.375，丙班的AD是4.5。亦可知甲班不整齊，丙班整齊。做教師的常願教丙班。

二 以假中數爲主

一，求第五表中之平均差 以眞中數爲主求第五表中之平均差，其各組中點與中數之差，第一，常無規律性，如「21，11，1，9」；第二，如中數有小數時，則此差數亦常爲有小數者，在計算時更感困難。假如用中數(76)所在組(70—80)之中點（

75)爲假中數,爲主,去求平均差,則各組中點與假中數之差,第一有規律性,如表二十九中之「20,10,0,10」;第二常無小數,即有小數,差數亦有規律性。

表二十九　求甲班之平均差

組　距	中數	f	di	fdi
50—60	55	2	20	40
60—70	65	3	10	30
70—80	75	5	0	
80—90	85	6	10	60
		16		130

旣以中數所在組之中點(75)爲主,則中數(76)與此主之差亦應求出。爲求此差,就有了一個問題:卽得中數之人,在理論上究有幾人?還是沒有人?玆解答於下:

(一)求圖一上中數有幾人

A,在求中數時,是使各組學生叉開腿排立如圖二。所以中數之左右各八人。

B,在求中數後,使各組學生向本組中點集中如圖一。則中數之右爲六人,左爲十人(5+3+2=10)。

C,依中數之意義,中數之左右人數須相等。現右爲六人,左亦應爲六人,而非十人。所以我們說:中數左方之十人中有四人集中在中數上,如圖十一,才合於中數之意義。

圖十一　求甲班之中數有幾人

(二)求表五上中數有幾人

A,先認淸中數之上下人數必相等。即中數之下有六人,中數之上亦必有六人。

B,看表五,中數是「76」。其下有六人得「85」分,其上有五人得「75」分,有三人得「65」分,有二人得「55」分。是其下有六人,其上有10人,是違犯了中數的意義。

C,我們要使下有六人,上亦有六人。

爲使上亦有六人,則不能使得「75」分者有五人,應使爲一人。如使爲一人,則與得65及55者合計適爲六人。茲將表五改爲表三十: (di—假中數—中點或中點—假中數)

表三十 求甲班之平均差

組 距	mid	f	f	di	fdi
50—60	55	2	2	20	40
60—70	65	3	3	10	30
70					
	75	5	1	0	
	76		4	1	4
80					
80—90	85	6	6	10	60
		16	16		134

D,使得75者爲一人,餘四人,我們假定是得75(中數)分者。因爲76——80有五人,我們可以在其範圍內任意說他們得幾分。所以,現在說一人得75分,四人得76分,亦非不合理。

得中數者之人數求出,則中數與主之差數,可求之如右: (76——75)4—4 等號左之「4」亦可由「10(比眞中數小的人數)—6(比眞中數大的人數)」求之。

求出中數與主之差後,卽可用公式二十二求平均差:

$$AD=\frac{\Sigma fdi+(Mdn-Mid_{mdn})(\Sigma fl_{mdn}-\Sigma fu_{mdn})}{N}$$

（公式二十二）

$$AD=\frac{130-(76-75)(10-6)}{16}=\frac{134}{16}=8.735$$

二，求丙班之平均差

表三十一　求丙班之平均差

組距	mid	f	di÷i	f(di÷i)
60—70	65	5	1	5
70—80	75	10		
80—90	85	1	1	1
		16		6

（一）求中數　已知為「73」。

（二）求中數有幾人

A，求Σfl_{mdn}　是5。

B，求Σfu_{mdn}　是11。

C，得中數之人數　11—5=6

（三）求$\Sigma f(di\div i)$　如表三十一，是6。

（四）代入公式：

$$AD=\left(\frac{\Sigma f(di\div i)+(mid_{mdn}-mdn)\div i\times(\Sigma fu_{mdn}-\Sigma fl_{mdn})}{N}\right)i$$

（公式二十三）

$$AD=\left(\frac{6+(75-73)\div 10\times(11-5)}{16}\right)10=\left(\frac{7.2}{16}\right)10=4.5$$

中數這個數，因次數分配情況之不同，有時在其所在組之中點上，如己班(第五章，第二節中之圖十二。)之中數為65，所在組之中點亦為65，中點上有六人，所以得中數者也有六人；有時在中點以上，如丙班；有時在中點以下，如甲班；有時在兩組上下限相接之處，如丁班，其中數為70，在二三兩組上

表三十二　丁班成績次數分配表

組距	f
50—60	3
60—70	5
70—80	5
80—90	3
	16

下限處，如各組人數向本組中點集中，則得中數者無一人。因爲得中數者常爲理論人，所以在實際上有無沒有多大關係。

第四節　均方差

一　平均數爲主之平均差

以中數爲主，求各量數與中數之差數之和，用總人數除之得平均差。如以平均數爲主，也可以求平均差。茲以平均數爲主求丁，戊，己三組兵各組年齡之平均差。

丁組		戊組		己組	
年齡	dv	年齡	dv	年齡	dv
25	5	19	11	10	20
29	1	26	4	20	10
30		30		30	
32	2	35	5	45	15
34	4	40	10	45	15
	12		30	5	60
$AD_M=\frac{12}{5}$		$AD_M=\frac{30}{5}$		$AD_M=\frac{60}{5}$	
$=2.4$		$=6$		$=12$	

此三組兵，平均年齡皆爲三十歲，而平均差不同：丁組相差最小，戊組稍大，己組最大。是以年齡論，己組戰鬥力最小。

二　求d^2或de^2之理由

四分差是段線。兩個四分差上面有百分之五十的人數。

平均差是段線，在同一次數分配圖上，這段線常較四分差爲大。因爲線長一點，所以上面的人數常超過百分之五十。是兩個四分差表示全體中一半人數之相差，兩個平均差就可表示全體中一半以上人數之相差。所以在表示全體之相差上，平均差常較四分差爲好。

後來又有人研究出一種方法:是以(一)平均數爲主求差，如d·(二)求出後，方起來，如d^2，(三)方後再加起來，如Σd^2，

甲組			乙組			丙組		
年齡	d	d^2	年齡	d	d^2	年齡	d	d^2
25	−6	36	18	−13	169	12	−19	361
28	−3	9	25	−6	36	15	−16	256
30	−1	1	30	−1	1	30	−1	1
35	4	16	40	9	81	38	7	49
37	6	36	42	11	121	60	29	841
31		98	31		408	31		1508
M		Σd^2	M		Σd^2	M		Σd^2

$SD=\sqrt{\frac{98}{5}}$ $=\sqrt{19.6}$ $=4.43$

$SD=\sqrt{\frac{408}{5}}$ $=\sqrt{81.6}$ $=9.03$

$SD=\sqrt{\frac{1508}{5}}$ $=\sqrt{301.6}$ $=17.37$

(四)加後再平均，如$\frac{98}{5}$(頁54甲組)，(五)平均後再開方，如$\sqrt{19.60}$。此所得之數,如「4.43」名之爲均方差。此均方差,也是一段線。惟在同一次數分配圖上，常較平均差這段線長一點。

因爲長一點，其上之人數更多，所以更能表示全體人數相差的程度。因此我們要學求均方差的方法。

一，求未分組量數之均方差　甲乙丙三組兵之年齡平均差原爲「3.8，7.8，14.2」(頁48)。其均方差爲「4.43，9.03，17.37」(頁54)，比平均差爲大。所以說均方差這段線常較平均差爲長。看此三組兵年齡分配之均方差，也可知甲好，乙次之，丙最壞。求均方差之公式可整理之如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式二十四)}$$

二，求表五中之均方差

(一)普通方法

表三十三　求甲班之均方差

組距	mid	f	d	d^2	fd^2
50—60	55	2	—19.375	375.3906.5	750.181250
60—70	65	3	9.375	87.890625	263.671875
70—80	75	5	0.625	0.390625	1.953125
80—90	85	6	10.625	112.890625	677.343750
M—74.375		16			1693.750000

$$\sigma=\sqrt{\frac{1693.75}{16}}=\sqrt{105.859375}=\frac{1}{2}\log 105.86(\text{五入})$$

$$=\frac{1}{2}\times 2.0235(105.8\text{之對數})=1.01175=10.28(\text{近})$$

$$\text{Antilog}1.01175=10.28(\text{近})$$

（二）簡易的方法　簡易的方法是以假定平均數爲主，去求均方差。第五表上有四組，任何組之中點，皆可作假定平均數。玆介紹如下：

A，求第五表之均方差　其步驟有八：（一）决定AM，（二）求de，（三）求de^2，（四）求fde，（五）求fde^2，（六）求Σfde，（七）求Σfde^2，（八）代入公式二十五。

表三十四　求甲班之σ

組　距	mid	f	de	fde	de^2	fde^2
50—60	55	2	−20	−40	400	800
60—70	65	3	−10	−30	100	300
70—80	75	5				
80—90	85	6	10	60	100	600
	75	16		−10		1700
	AM	N		Σfde		Σfde^2

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fde^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fde}{N}\right)^2}$$

（公式二十五）

$$\sigma=\sqrt{\frac{1700}{16}-\left(\frac{-10}{16}\right)^2}$$

$$=\sqrt{106.25-.390625}$$

$$=\sqrt{105.859375}$$

$$=10.28(\text{近})$$

B，求表二十四（丙班）之均方差　其步驟同上。

(A)以第二組之中點爲AM所求者。

表三十五　求丙班均方差

組　距	mid	f	de	fde	de^2	fde^2
60－70	65	5	－10	－50	100	500
70－80	75	10				
80－90	85	1	10	10	100	100
AM＝75		16		－40		600

$$\sigma=\sqrt{\frac{600}{16}-\left(\frac{-40}{16}\right)^2}=\sqrt{37.5-(-.25)^2}=\sqrt{37.5-6.25}=\sqrt{31.25}=5.59$$

(B)以第三組之中點為AM所求者

表三十六　求丙班均方差

組　距	mid	f	de	fde	de^2	fde^2
60－70	65	5	－20	－100	400	2000
70－80	75	10	－10	－100	100	1000
80－90	85	1				
AM＝85		16		－200		3000

$$\sigma=\sqrt{\frac{3000}{16}-\left(\frac{-200}{16}\right)^2}=\sqrt{18.75-(-12.5)^2}$$

$$=\sqrt{31.25}=5.59$$

C，解釋　甲丙兩班中之Q，AD及σ之比較如下：

這三種數都表示全體的相差度，三種數都表示甲班比丙班差別大。

	σ	AD	σ
甲	8.33	8.375	10.28
丙	4.5	4.5	5.59

三　均方差與差異係數的關係

均方差有時不能真實的表示出一列量數中的相差度，茲舉例如下：　　（下面是四組人之收入量數表）

甲	組		乙	組		丙	組		丁	組	
m	d	d^2	m	d	d^2	m	d	d^2	m	d	d^2
30	−20	400	480	−20	400	4980	−20	400	49980	−20	400
40	−10	100	490	−10	100	4990	−10	100	49990	−10	100
50	0		500			5000			50000		
60	10	100	510	10	100	5010	10	100	50010	10	100
70	20	400	520	20	400	5020	20	400	50020	20	400
50		1000	500		1000	5000		1000	50000		1000
M			M			M			M		

$\sigma=\sqrt{\frac{1000}{5}}=14.14$　　$\sigma=\sqrt{\frac{1000}{5}}=14.14$　　$\sigma=\sqrt{\frac{1000}{5}}=14.14$　　$\sigma=\sqrt{\frac{1000}{5}}=14.14$

$$\sqrt{200}=\frac{1}{2}\log 200=\frac{1}{2}\times 2.3010=1.1505=14.14$$

因antilog $1.1504=14.14$

此四組人收入之均方差是相同的。如祇看均方差，我們以為此四組人每組之相差度相同，但實際上不是如此。甲組彼此相差大，乙組次之，丙組小，丁組彼此相差更小。此因人愈富愈看不起這十幾元相差之故。我們怎樣表示這實際上的不同呢

?統計學家想出一個公式，茲介紹於下：

$$差異係數=\frac{\sigma}{M}\times100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式二十六)}$$

這公式是根據以下兩個原則：

一，均方差相同，平均數愈小則眞實的差度愈大；平均數愈大則眞實的差度愈小。

二，平均數相同，均方差愈大，則眞實的差度愈大；均方差愈小，則眞實的差度愈小。

因爲避免小數，所以乘以「100」。

現依此公式求以上四組人收入之眞實差度或謂差異係數如下：

$$V(甲)=\frac{14.14}{50}\times100=28.28 \quad V(乙)=\frac{14.14}{500}\times100=2.828$$

$$V(丙)=\frac{14.14}{5000}\times100=.2828 \quad V(丁)=\frac{14.14}{50000}\times100=.02828$$

由此差異係數可知甲的差度大，乙次之，丙又次之，丁最小。由此亦可知，我們在求二列量數之均方差後，還要求差異係數，才能互相比較。

第五節　偏態度(Skewness)

表37上之三班，每班都是十六位。而甲班成績好的學生多，戊班壞的多，己班中等的多。是甲班偏於好，戊班偏於壞，己班不偏。近年來，各方面科學化。即論及「偏」的現象，如有的偏得多，有的偏得少，也應用數字來表示。統計學家告訴我們一種方法，茲介紹於下：

我們知道Q_1至Mdn是全人數之四分之一；Mdn至Q_3也是全人數之四分之一。

表三十七　甲戊己三班成績次數分配表

組距	甲班	戊班	己班
40—50			1
50—60	2	6	4
60—70	3	5	6
70—80	5	4	4
80—90	6	1	1

如$Mdn-Q_1=Q_3-Mdn$無偏態

$Mdn-Q_1$大於Q_3-Mdn正偏態

$Mdn-Q_1$小於Q_3-Mdn負偏態

求偏態之公式如下：

$$SK=\frac{(Mdn-Q_1)-(Q_3-Mdn)}{Q}$$

（公式二十七）

$$甲班之SK=\frac{(76-66.66)-(83.33-76)}{9.26}=\frac{9.34-7.33}{9.26}$$

$$=\frac{2.01}{9.26}=0.22(正)$$

$$戊班之SK=\frac{(64-56.66)-(72.5-64)}{7.62}=\frac{7.34-8.5}{7.62}$$

$$=\frac{-1.16}{7.62}=-0.15(負)$$

$$己班之SK=\frac{(65-57.5)-(72.5-65)}{7.5}=\frac{7.5-7.5}{7.5}$$

$$=\frac{0}{7.5}=0(零)$$

甲班之2.01即可表示正偏態，表示好學生多。如再用甲班之Q除此2.01，得0.22，就可以說甲班正偏0.22四分差了。

第四章 常態分配

表三十八 第五章所用符號一覽表

T	Total ability	總能數(T)
Ti	Total ability in intelligonce	智力之總能數(T智力)
Te	Total ability in efucation	教育之總能數(T教育)
Tr	Total ability in reading	讀法之總能數(T讀法)
B	Brightness	聰明數(B)
Bi	Brightness in intelligence	智力之聰明數(B智力)
G	Grade	年級
C	Classification	年級數
F	Effort	努力數
Fe	Effovt in education	教育之努力數
C.A.	Chronological age	實足年齡
M.A.	Mental age	智力年論
E.A.	Educational age	教育年齡
R.A.	Reading age	讀法年齡
I.Q.	Intelligence quotient	智力商數
E.Q.	Educational quotient	教育商數
R.Q.	Reading quotient	讀法商數
A.Q.	Accomplishment quotient	成業商數
R A.Q.	Reading A.Q.	讀法成業商數

σ_m	Standard deviation of mean	平均數之機誤(σ)
σ_{mdn}	Standard deviation of median	中數之機誤(σ)
PE_m	Probable error of mean	平均數之機誤(Q)
PE_{mdn}	Probable error of median	中數之機誤(Q)

第一節 算卦

卜者爱使求他算卦的人搖擲銅錢。銅錢有面，有背。擲一個銅錢，祇能有兩種結果——背(○)出現或面(×)出現。

如擲兩個銅錢，可有如下之四種結果：

× ×　× ○　○ ×　○ ○

如擲三個銅錢，可有如下之八種結果：

×××	××○	×○○	○○○
	×○×	○×○	
	○××	○○×	

如擲四個銅錢，可有如下之十六種結果：

××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○○×	○×○○	
	×○××	○○××	○○×○	
	○×××	×○×○	○○○×	
		○×○×		
		○××○		

是擲二銅錢，二面同時出現之機會有四分之一，一面一背

或一背一面出現之機會有四分之二，二背同時出現之機會亦爲四分之一；……。以上三種情形可用算式表之如下：

擲二錢 $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$

擲三錢 $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3$

擲四錢 $\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4$

從前有聰明人，知道擲四銅錢可有之情形。他就以面代表好運氣，以背代表壞運氣。事前編好十六組有韻的話或詩。其中有一組最好，是要向擲出四個面的人說的；有一組話最壞，是要向擲出四個背的人說的；有四組好話，是要向擲出三個面，一個背的人說的；有四組壞話是要向擲出三背，一面的人說的；有六組不好不壞的話是要向擲出二面，二背的人說的。

這聰明人是假定人的命運：最好和最壞的少，次好和次壞的多，不好不壞的更多。是假定了衆人的命運是一種常態分配。

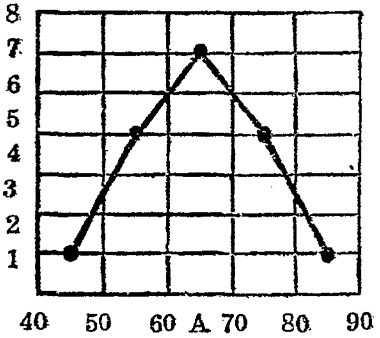
人的運氣是常態分配，人的身高，智慧，脾氣，美醜……也常是常態分配。

第二節　常態曲線

一　常態曲線之形成

譬如己班之學生十六人，其成績如第十二圖。第十二圖便是一個近似常態分配之次數多邊圖。其因有二：(一)合於擲四個銅元理論的結果。(二)M，Mdn，Mo都在一點(A)上，或說

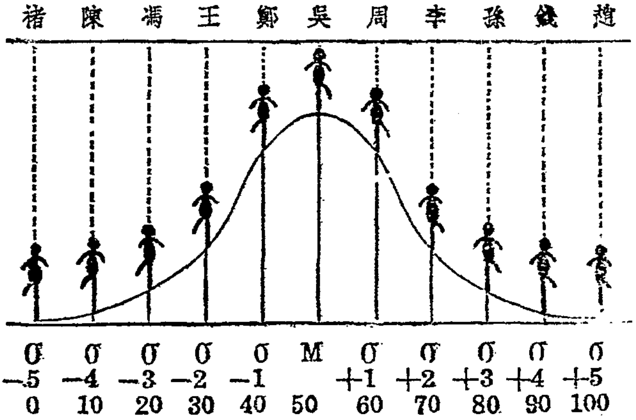
圖十二　己班學生成績次數多邊圖



是相同。

在圖十二上，橫線分為五段，其接連各點之直線有四，折處三；橫線分為四段(如圖三)，有直線三，折處二。是圖上之橫線分段愈少，則折處愈少，惟其相差常為「2」。因此我們可以想像到：如橫線分百段，則折處必為九十八。如分為一千段則折處有「998」，此折線必形成曲線。茲製第十三圖表明此意。

圖十三　常態曲線圖



二　常態曲線下之面積

我們設法增多十三圖上之長方形，將其面積加起來，便可得一近似此常態曲線下之面積。何以說是近似呢？因為還有許多很小很小之類似三角形處之面積尚未加入之故。想連此類似三角形之面積亦算入，就用得著積分的算法。所幸，會積分的數學家，為我們算出來了。茲述之如下：

如此曲線下有一萬萬兒童，則M之左右各為五千萬人。

表三十九　從M起每σ上之人數

一個σ	人　數	符號
M至1(σ)	34.130000	a
1至2	13.590000	b
2至3	2.145000	c
3至4	0.131000	d
4至5	0.003171	e
5至端	0.000029	f
	50.000000	

表四十　從M起，每多一σ時，其上之人數

從M數起	人　數	求法	符號
M至1(σ)	34.130000	a	A
M至2	47.720000	A+b	B
M至3	49.865000	B+c	C
M至4	49.996800	C+d	D
M至5	49.999971	D+e	E
M至端	50.000000	E+f	F

此一萬萬兒童之成績，當然有個均方差。數學家告訴我們說：從平均數一點起，在第十三圖上向右或向左數一個一個的均方差（是一段線）時可有以下三種情形。茲以39，40，41，三表說明之。

我們詳閱第十三圖便可深明此三表之事實。

由於表四十一最後兩

表四十一　每一σ至右端其上之人數

開始之σ	開始之σ至Mf%	+	M至右端人數%	−	開始之σ至Mf%	總人數	均方差値
−5	E	+	50			99.999971	0
−4	D	+	50			99.996800	10
−3	C	+	50			99.865000	20
−2	B	+	50			97.720000	30
−1	A	+	50			84.130000	40
M			50			50.000000	50
1			50	−	A	15.870000	60
2			50	−	B	2.280000	70
3			50	−	C	0.135000	80
4			50	−	D	0.003200	90
5			50	−	E	0.000029	100

行——百分數與均方差値，統計學家又製出附表三。此表用處很大，希學統計的同志注意。

三　常態曲線下之縱線

譬如在第十二圖上，有十六位，分站在五點上，我們可有五根縱線，其高如右：「1,4,6,4,1」。6在M點上。

在第十三圖上，如有一萬位。分站在十一點上，統計學家告訴我們說：如依十個σ，一個M說，可有十一條縱線。其實數則如表四十二中所示者。

表四十二 十一條縱線之高

-5	−4	−3	−2	−1	M	1	2	3	4	5
0	1	44	540	2420	3989	2420	540	44	1	0
.0	.0003	.0111	.1353	.6065	1	.6065	.1353	.0111	.0003	.0

(表四十二第二行合計爲10000、首末之0是因不到一人，所以寫成零。第三行首末之0，因不到0.00005，所以寫成零。)

3989：2420＝1：x　　x＝2420÷3989＝0.6065

3989： 540＝1：x　　x＝ 540÷3989＝0.1353

統計學家爲我們製出附表二，使我們知道M點上之縱線爲「1」時，「1σ」上之縱線爲「0.6065」，………。

我們由此附表二，因知道「1」之實際爲3989，則可知0.6065之實數爲2420(近)，其求法如下：

1：0.6065＝3989：x　x＝(0.6065×3989)÷1＝2420(近)

由於以上之事實，我們想出一個，「由在常態分配曲線下面積所在之位置求面積左右縱線之方法」。

譬如有6.25%人在極右端，其右縱線必爲零，看圖十三可知，現求其左縱線。求之方法如下：

一，求此線至M間之面積　50－6.25＝43.75

二，求此面積由M向右所佔之σ　查附表一，知43.75%人所佔之σ爲1.53(近)。

三，求由M向右數1.53σ時，其右端上(1.53σ上)之縱線比數　查附表二，知其縱線之比數爲0.31023。

四，求0.31023之實數 已知附表二上，「1」之實數為39.89%，可用比例法求得0.31023之實數為12.375。求法如下：

1 : 0.31023=39.89 : x x=(0.31023×39.89)÷1=12.375

第三節 常態曲線原理之應用

一 T分數和B分數

如有一萬萬七歲小兒，其中一位姓趙，實在聰明，一萬萬中秪有29人比他聰明或說超過他，給他「σ值100」不算多(請看圖十三及附表三)。其中有一位姓吳，一萬萬中有五千萬比他聰明或謂有百分之五十超過他。我們給他「σ值50」正好(請看附表三)，因σ值50表示他在全體之正中。如有一位姓褚，實在笨，一萬萬中有99999971人超過他，我們給他「σ值0」，不算少(請看附表三)。

由以上的情形，可知：秪要查出某生在全體中的地位——有幾人比他好或說超過他；然後算出「此超過人數在全體中的百分數」；便可由附表三求σ值了。

如用七測驗題，測驗某村二百五十位由七歲至十六歲兒童之智力。每一年齡應有二十五位受測驗。

因測驗在小學校舉行，二十五位七歲兒童中，有二十五位因智力低尚未入小學，沒有來。八，九，十，十一各年齡中皆有幾位亦因此而未來。

二十五位十三歲兒童中，有兩位因聰明，早畢業了，沒有來，十四，十五，十六各年齡中皆有幾位因此沒有來。

秪有二十五位十二歲的兒童全到了，

測驗結果如表四十三。

七歲中二十二位因比較上笨一點，沒有來。受測驗的三位中，二位對了三題，一位對了二題。我們要求此對三題者及對二題者之σ值。

(一)求對三題者之σ值

A，決定理論上的代表人所在之位置　對三題者有二人，我們說二人之代表人，在二人之間，此代表人是位理論上的人，不在此二人內。

B，求超過代表人之人數　代表人在二人之間，所以超過代表人者有一人。

C，求超過代表人之人數對於全體人數的百分數　全人數是二十五，超過代表人的人數是一，則此一對二十五的百分數是四，求法如右：　$25:1=100:x$　$x=\frac{1\times100}{25}=4$

D，求超過之百分數為4時之σ值　查附表三，我們知道百分數4之σ值爲67.5。因係七歲之σ值，故謂之B分數。

(二)求對二題者之σ值

A，決定理論上的代表人所在之位置　對二題只一人，可分爲兩個半人，則代表人在兩半人之間。

B，求超過代表人之人數　代表人在二半人之間，彼亦對二題，所以對三題之二人超過他；又因代表人在二半人之間，所以還有半人超過他；是超過他的人，合計爲2.5(2+0.5)人。

表四十三　T分數和B分數※

		A		B		C		D		E		F	
a	年齡			7		8		9		10		11	
b				f	B	f	B	f	B	f	B	f	B
c	未到(笨)			22		17		9		5		4	
d	做對題數	0											
e		1				1	55	1	47	1	42	1	41.5
f		2		1	63	3	57.5	4	49.5	4	45	4	44
g		3		2	67.5	3	63	6	54.5	6	50.5	4	48.5
h		4				1	70.5	4	61.5	6	57	8	54.5
i		5						1	70.5	2	64	2	61.5
j		6								1	70.5	1	65.5
k		7										1	70.5
l		8											
m	未到(聰)												
n	N			25		25		25		25		25	
o	實到人數			3		8		16		20		21	
p	$\frac{\text{實到}}{2}$之B				67.5		60.25		54.5		50.5		54.5
q	$\frac{\text{實到}}{2}$之T				47		44.25		47		47		53.5
r	B改正數				20.5	16			7.5		3.5		1
s	$\frac{N}{2}$之T				29.5	34			42.5		46.5		49

C，求超過代表人之人數對全體人數之百分數　其求法如右：

$$25 : 2.5 = 100 : x \qquad x = \frac{2.5 \times 100}{25} = 10$$

D，求超過之百分數為10時之σ值　查附表三，知百分數10之σ值為63(近似)。

G		H		I		J		K	
12		13		14		15		16	
f	T	f	B	f	B	f	B	f	B
0									
1	29.5								
1	34.5								
5	41.5	1	29.5						
5	47	4	38	1	29.5				
8	53.5	5	45	4	38	1	29.5		
2	60	8	51.5	5	45	2	36		
1	63	3	58	4	49.5	2	40		
1	65.5	1	61	1	52	1	42.5	2	32.5
1	70.5	1	63						
		2		10		19		23	
25		25		25		25		25	
25		23		15		6		2	
	53.5		51.5		45		38		32.5
	53.5		60		60		61.5		65.5
	0		−8.5		−15		−23.5		−33
	50		58.5		65		73.5		83

*七至十一，十三至十六，各年齡之σ值是B分數；

十二歲之σ值是T分數(也是B分數)

有一個求σ值的格式，茲介紹於下：

(一)以七歲爲例(總人數二十五人，二十二人因笨未到)

做對題數	人數	(超過人數)	+	(一半達到數)之和	百分數	σ值
2	1	2	+	1÷2=2.5	10	63
3	2	0	+	2÷2=1	4	67.5

(二)以十四歲爲例(總人數二十五人，十人因聰明未到)

做對題數	人數	(超過人數)十(一半達到數)之和	百分數	C值
3	1	24+1÷2=24.5	98.0	29.5
4	4	20+4÷2=22	88	38
5	5	15+5÷2=17.5	70.0	45
6	4	11+4÷2=13	52	49.5
7	1	(未到)10+1÷2=10.5	42.0	52

依此格式，求八至十三歲，十五歲和十六歲各年齡之C值如表四十三。

看表四十三，我們知道了以下四種事實：

(一)同是對一題，年歲小的所得B分數大；年歲大的所得B分數小。請看表四十三e橫行。

(二)對三題的七歲兒童的理論代表人，在二十五位七歲兒童中，只有一人超過他：得C值67.5；他到二十五位十二歲兒童中，便有「15.5」人超過他，所以只能得C值「47」。此二種C值，前一種是他和同年齡相比時所得者；後一種是他和十二歲的兒童相比時所得者。爲分別起見，我們稱前者爲B分數，後者爲T分數。

(三)年歲小的，所得B分數大，T分數小；年歲大的，所得B數小，T分數大。請看表四十三，d,e,f,g,h,i,j,k,l,各行。如對三題之八歲者，B分數爲63，T分數爲17；對三題之十四歲者，B分數爲29.5，T分數爲47。

對三題之八歲者，得B分數 63，表示在百位八歲兒童中，只有十位(約數)超過他；得T分數47，表示在百位十二歲兒童中，有六十一位(約數)超過他。(請查附表三，由 0 値查百分數)。

(四)各年齡B分數，減十二歲之B分數(T分數)，其差有相同之趨勢。茲求之如表四十四：

表 四 十 四

做對題數	各年齡兒童做對題數之B分數減T分數之差數									
	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六
1		20.5	12.5	7.5	7	0				
2	21.5	16	8	3.5	2.5	0	-12			
3	20.5	16	7.5	3.5	1.5	0	-9	-17.5		
4		17	8	3.5	1	0	-8.5	-15.5	-24	
5			10.5	4	1.5	0	-8.5	-15	-24	
6				7.5	2.5	0	-5	-13.5	-23	
7					5	0	-4.5	-13.5	-23.5	-33
8						0	-7.5			

各年齡兒童不論做對題數多少，其 B 分數與T分數之差有相等之趨勢。如七歲者，二差數(21.5，20.5)幾相等；八歲者有三個差數極相近；九歲者亦然；其他各年齡的差數，皆有幾個差數幾相等之事實。

教育統計學家即設法使之相等——即在每一年齡之許多差

數中找一代表。找的方法如下：

(一)求實到人數(表四十三O行)之中間人　如七歲者實到人數為三，其中間人為1.5人。

(二)求中間人之B分數減T分數之差數　因中間人(1.5)在對三題之二人中(表四十三g行)，所以得B分數67.5，T分數47，其差為20.5。即以此差數為代表的差數。

求出代表的差數20.5，我們便以為七歲兒童在此次測驗中(七個測驗題)無論對幾題，其BT二分數之差數，總是205。

因此，有了這代表差數後，我們只有表四十三A行之做對題數，G行之T分。便可求七歲之B分數了。

如某七歲兒對四題，得T分數53.5(查表四十三h行)，其B分數則為53.5+20.5得74分。

又如某七歲兒對五題，得T分數60(查表四十三i行)其B分數應為60+20.5得80.5分。

因有此代表之差數後，即可直接由T分數求B分數，所以名此代表之差數為「B改正數」。

茲依上法求各年齡之B改正數如表四十三r行。

我們假定在表四十三上的B改正數，是各年齡之中間年齡——如七歲者是七歲半(7：6)，八歲者是八歲半(8：6)——的B改正數。現既知七歲六月之B改正數是21(去20.5之小數)，八歲六月B改正數是16，則可由此二數推出七歲八月，七歲十月，八歲，八歲二月，八歲四月之B改正數。其法如下：

分7：6至8：6為六期，是分5(21—16)為六，得0.8666——是由21至16，每期應減之數。由此可製表如左。依此理又可製實足年齡與B改正數對照表，如表四十五：

年齡	求　　法	B改正數	四捨五入
7：6		21.000	21
7：8	21—0.866	20.134	20
7：10	21—0.866×2	19.268	19
8：0	21—0.866×3	18.402	18
8：2	21—0.866×4	17.536	18
8：4	21—0.866×5	16.670	17
8：6	21—0.866×6	16.000	16

表四十五

實足年齡	改正數	實足年齡	改正數	實足年齡	改正數	實足年齡	改正數	實足年齡	改正數
7:6	21	9:4	9	11:2	2	13:0	-5	14:10	-18
7:8	20	9:6	8	11:4	2	13:2	-6	15:0	-19
7:10	19	9:8	7	11:6	1	13:4	-8	15:2	-20
8:0	18	9:10	7	11:8	1	13:6	-9	15:4	-22
8:2	18	10:0	6	11:10	1	13:8	-10	15:6	-23
8:4	17	10:2	5	12:0	1	13:10	-11	15:8	-25
8:6	16	10:4	5	12:2	0	14:0	-12	15:10	-26
8:8	15	10:6	4	12:4	0	14:2	-13	16:0	-28
8:10	13	10:8	4	12:6	0	14:4	-14	16:2	-30
9:0	12	10:10	3	12:8	-2	14:6	-15	16:4	-31
9:2	11	11:0	3	12:10	-3	14:8	-16	16:6	-33

有了表四十五，如有實足年齡七歲十月的兒童對四題得T分數53•5，則其B分數爲53•5+19=72•5。此因七歲十月之B改正數爲19之故。

二 C分數

學生的年齡愈大，T分愈高。看表43可以深悉。依此情，可想到：年級愈高者，T分也愈高。惟同是六年級中者，其T分數決不相同。一定有的低，有的高。我們常求其「T平均數」。求得此平均數——假定是T51分——後，便以此「T51分」爲六年級T分之代表數。以後在此測驗上，有學生得了T51分，我們便說：此生有了六年級中的程度或說他已讀書五年又五月——六上完了。用分數形式表示，便是「G5.5分」。

T51分是六年級中的平均數。如是秋季始業的學校，便是寒假(一月終)測驗所得之T平均數。

假如有一生，在十月終受測驗得T51分。如此生到寒假(一月終)因多讀三月，受此測驗時，所得T分必較51分爲多。所以對於在十月終受此測驗之學生，當在G分上爲他加三月，即(G5.5+0.3)G5.8分。

一般學校二月初開學，如某生讀書二月，在三月終受此測驗，亦得T51分。是他多讀兩月書才得T51分；假如在寒假(一月終)受測驗必得不到T51分。所以在G分上爲他減去二月，即(G5.5—.2)G5.3分。

這種減幾月，加幾月後的G分數，名之爲C分數。加減多少有一個通用的表，茲錄於下：

表四十六　C校正數與測驗月對照表

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
C	2	3	4	5	6	9	10	11	12	1
D	+.4	+.3	+.2	+.1	0	−.1	−.2	−.3	−.4	−.5

A—距學年開始時之月數　B—秋季始業之陽歷月終

C—春季始業之陽歷月終　D—C校正數

三　智力年齡，智商及其他

各年齡BT兩種分數相差的數——B改正數——是一定的。各年齡之中間人(N÷2)——代表人，其B分數都是50。以此50減各年齡應有之B改正數，所得之差，便是各年齡代表人應有之T分數。如50−20.5（七歲之B改正數）=29.5，此卽七歲代表人應有之T分數；50−16(八歲之B改正數)=34，此卽八歲代表人應有之T分數；……。茲求各年齡代表人之T分數如表四十三s行。

七歲之代表人得T29.5分（假定是T智力），如甲生十四歲在此次智力測驗上未對一題，查表四十三，得T29.5分，我們說他的智力年齡是七歲。

由表四十三s行，可以看出：小於50之T分，愈近50，其應得之智力年齡愈近十二歲；大於50之T分，離50愈遠，其應得之智力年齡愈大於十二歲。看表四十三a及s兩行，卽可深明。由此，可有一求智力年齡之方法如下：

一，50－T智力＝B改正數…………（公式二十八）

二，在表四十五上，由B改正數找出所對照之年齡——即智力年齡。

如乙生年七歲得T29.5分，求其M.A.如右：(一)50－29.5＝20.5(二)查表四十五，知20.5(21)所對照之年齡爲7：6——是乙生之M.A.。

又如丙生年七歲得T65分，求M.A.如右：(一)50－65＝－15。(二)查表四十五，知「-15」所對照之年齡14：6——是丙生之M.A.。

甲乙丙三生之智商(I.Q.)可求之如下：

$IQ=\frac{M.A.}{C.A.}$……（公式廿九）　　$IQ(甲)=\frac{7}{14}\times100=50$（笨）

$IQ(乙)=\frac{7}{7}\times100=100$（普通）　$IQ(丙)=\frac{14}{7}\times100=200$（聰）

表四十三上所用之八題，是測驗智力的，所以求出Ti和M.A.；如是測驗讀法的，可求出Tr和R.A.；如是測驗教育程度的，可求出Te和E.A.；………因此，則可有以下之各公式：(仔細玩味，皆可深明)

$R.Q.=\frac{R.A.}{C.A.}$（公式三十）　　$EQ=\frac{E.A.}{C.A.}$（公式三十一）

$A.Q.=\frac{E.A.}{M.A.}$（公式三十二）　　$R.A.Q=\frac{R.A.}{M.A.}$（公式卅三）

$F=Te-Ti+50$（公式三十四）　　$Fr=Tr-Ti+50$（公式卅五）

三　化等級爲量數的方法

表四十七 三位教師評判之等級表

等級	趙	錢	孫
A	1	6	
B	4	5	3
C	6	3	2
D	4	2	5
E	1		6
總數	16	16	16

一，第一種方法　甲班有十六人，請三位先生評定他們品行的等級，結果如表四十七：趙是依常態分配的原則來評定；錢評定得寬；孫評定得嚴。

化等級爲量數的方法有四步。茲先化趙所評定者如下：

（一）求各等級所有人數在全體中之百分數。

甲，求A及E者　$16:1=100:x$

$x=(1\times100)\div16=6.25$

乙，求B及D者　$16:4=100:x$　　$x=(4\times100)\div16=25$

丙，求C者　$16:6=100:x$　　$x=(6\times100)\div16=37.5$

（二）求兩極　假定五等之人數是分配在常態分配曲線下。則如圖十四：（在80頁）

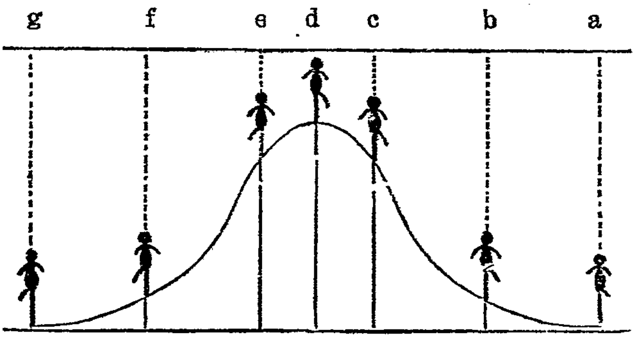
最高縱線之右有50%人，如從最高縱線數此五十人，則在最高線點上爲零，在最右端爲正五十。所以甲等之人數在50與43.75(50—6.25)之間。此50與43.75名之爲A等人數之兩極。B等人數在43.75與18.75(43.75—25)之間。

從最高縱線向左數五十人爲負數。因此，C等之人數在「+18.75」與「—18.75」(18.75+18.75=37.5)之間；D等之人數在「—18.75」與「—43.75」之間；E等之人數在「—43.75」與「—50」之間。

（三）求兩極的均數（代表人），超過各等均數之百分數及σ

值，如表四十八之末三行。

圖十四　常態分配圖



等第	E		D		C		B		A	等第
百分數	6.25		25		37.5		25		6.25	百分數
兩極	-50	-43.75		-18.75		18.75		43.75	50	兩極

表四十八　化趙先生所評等級為量數表

等(右極＋左極)÷2＝均數	超過均數之百分數	σ值
A (50 ＋ 43.75)÷2＝46.875	50－46.875＝3.125	68.5
B (43.75＋ 18.75)÷2＝31.25	50－31.25＝18.75	59
C (18.75＋-18.75)÷2＝0	50－0＝50	50
D (-18.75＋-43.75)÷2＝-31.25	50＋31.25＝81.25	41
E (-43.75＋-50.00)÷2＝-46.875	50＋46.875＝96.875	31.5

依同樣方法，可化錢孫二位所給與之等第為量數，如表49及表五十：

表四十九 化錢先生所評定之等第爲量數表

等第	f	百分數	右極	左極	均數	超過均數之百分數	σ值
A	6	37.50	50.00	12.50	31.250	18.75	59
B	5	31.25	12.50	−18.75	−3.125	53.125	49
C	3	18.75	−18.75	−37.50	−28.125	78.125	42
D	2	12.50	−37.50	−50	−43.750	93.75	34.5

表五十 化孫先生所評定之等第爲量數表

等第	f	百分數	右極	左極	均數	超過均數的百分數	σ值
B	2	12.50	50.00	37.50	43.750	6.25	65.5
C	3	18.75	37.50	18.75	28.125	21.875	58
D	5	31.25	18.75	-12.75	3.125	46.875	51
E	6	37.50	-12.5	-50.00	-31.250	81.25	41

已化三位先生所評定等第爲量數可製表五十一。

表五十一 三位所給等第σ值之平均表

等第	趙	錢	孫	平均	超過百分數
A	68.5	59		63.75	8.83(近)
B	59	49	65.5	57.83	22.66
C	50	42	58	50	50
D	41	34.5	51	47.66	77.33
E	31.5		41	36.25	91.92

看表五十一，可知：在趙錢手中之A等，意義不同。在錢手中，地位不高，因得A等者人多。其代表人(均數)站在離最高樅線祇有31.25%

人處（表49均數行）。超過此代表人之人便有18.75%人。在趙手中之A等，地位便高一點。因得A等者少，祗有一人或說祗有6.25%人。其代表人站在離最高縱線有46.875%人處（表四十八均數行）。超過此代表人之人，祗有3.125%人。同理在三位手中之B等，意義也不同。在孫先生手中的B等，地位很高，全體中祗有6.25%人能超過B等之代表人；在趙手中的B等，全體中有18.75%人能超過；在錢手中的B等地位低，因全體中有53.125%人能超過。由此可知：在給等第寬的先生手中得到A等，不必太高興，因化等第爲量數後，便可看出地位並不高；在給等第嚴的先生手中得到B等，也可快樂，因化等第爲量數後，便知自己的地位並不低。

平均每等級中之三種σ值，得表五十一「平均」行。有了這一行，我們便說：得A等的學生，在全體有8.83%人超過他，得B等的學生有22.66%人超過他……。

二，第二種方法　第二種方法所根據之原則有二：（一）在常態分配圖上，平均數之左或右，兩條縱線所夾之面積——人數——不變，其相差愈大，其下所夾之橫坐標之線愈長，如以σ表示，是σ愈大。是「兩縱線之差與σ成正比例。」（二）在常態分配圖上，在平均數之左或右，兩條縱線之相差不變，如所夾之面積——人數——大，則二線所夾之橫坐標之線小，如以σ表示，是σ小。是「面積與σ成反比例」。由於以上二原則，產生了以下之公式：

$$\sigma=\frac{\text{縱線（左）}-\text{縱線（右）}}{\text{面　積}}$$（公式三十六）

在常態曲線圖上，兩縱線夾一面積。如左短右長，表示此面積在M之左邊；左長右短表示此面積在M之右邊。左短右長則差數爲負，所得均方差爲負，表示是橫坐標上M左邊之均方差。左長右短則差數爲正，所得均方差爲正，表示是橫坐標上M右邊之均方差。

第二種方法之步驟有三：（以化趙先生所評定之等級爲量數爲例）(一)將各等人數化爲百分數　如表五十二第3行。(二)求各等在圖十四上左右縱線之高(運用第四章，第二節，第二段中「由常態分配曲線下面積所在位置求面積左右縱線實數之方法」，見本書第六十七頁)如表五十二第4,5,6,三行。(三)依公式三十六求各等之均方差及σ值　如表五十二7,8,9,三行。

表五十二　化趙先生所評定之等級爲量數表

1	2	3	4	5	6	7	8	9
等第	人數	百分數	右縱線之高	左縱線至M其上之人數	左縱線之高	左減右	σ	σ值
A	1	6.25	0　(a)	43.75	12.375	12.375	1.98	70
B	4	25	12.375(b)	18.75	35.38	23.005	0.92	59
C	6	37.5	35.38 (c)	18.75	35.38	0	0	50
D	4	25	35.38 (e)	47.35	12.375	-23.005	-0.92	41
E	1	6.25	12.375(f)	50	0(g)	-12.375	-1.98	30

依上法化錢孫二位所評者爲量數，連同趙先生者製成表五十三。此表之意義與表五十一所表示者幾全同。

表五十三　三位所給等第σ值之平均表

等第	趙	錢	孫	平均	超過平均百分數
A	70	60		65	6.63
B	59	49.5	80	62.833	9.68
C	50	42.5	58	50.166	50.00
D	41	33.5	51	41.833	78.81
E	30		40	35	93.32

三　機誤

一，機誤的發生　某地有一萬位五年級的小學生，其成績之人數分配恰定是表五十四D行。現因時間和人力不能測驗此一萬位；祇能挑一百人爲代表，應當在D行人數中成比例的挑，如B行所列者。果如此，此百人亦可以代表此一萬人。

表五十四　常態分配表

		a	b	c	d	e
	總人數	50分	60分	70分	80分	90分
A	16	1	4	6	4	1
B	100	6.25	25	37.5	25	6.25
C	1000	62.50	250	375.0	250	62.50
D	10000	625.00	2500	3750.0	2500	625.00
E	16	6	1	4	1	4

惟實際上，難有如此之百人。所以在依隨機取樣法挑出之百人求出M　Mdn，……時，即以此爲此萬人之M，Mdn……，必有錯——是名之爲「機誤」。

二，減少機誤之原則及求機誤之公式

(一)減少機誤之原則

A,增多挑出之人數(N) 如以100人代表10000人，不如以1000人代表10000人。是「機誤」和「人數」成反比。

B,減小所挑出之人數彼此之相差，如以σ表示相差，即是減小此σ。如表五十四之A行十六人之M為75分，σ為10；E行之M為63.75，σ為16.01。是所挑出之人數(如E行)不適於作代表時，則其均方差大。依此均方差大之人數求出之M，Mdn……，其機誤必大。是機誤與均方差成正比例。

(二)求機誤之公式 由以上二原則得出一個求M，Mdn，……機誤原則上共同之公式如右：

$$機誤=\frac{\sigma}{N}\text{(公式三十七)}$$

實際上M有M的機誤公式，Mdn有Mdn的機誤公式，……，茲一一介紹於下：

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\text{(公式三十八)}$$

$$\sigma_{mdn}=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\text{(公式三十九)}$$

如有甲乙二校，各有千人。今自每校中挑出五十人作代表，求出此代表人成績之M，Mdn……來比較。此甲校五十人之M，Mdn，……，在代表甲校全體說，已有錯誤——機誤。此乙校五十人之M，Mdn，……，在代表乙校全體說，亦有錯誤——機誤。今甲校與乙校M和Mdn之差，必不能很準確的代表甲乙兩校全體學生M和Mdn之差，必有錯誤——機誤。求此機誤之公式如下：

$$\sigma_{diff\,(m甲-m乙)}=\sqrt{\sigma^2_{m甲}+\sigma^2_{m乙}}$$ (公式四十)

$$\sigma_{diff}=\sqrt{\sigma^2_{mdn甲}+\sigma^2_{mdn乙}}$$ (公式四十一)

以上各公式是以均方差求機誤，有時以Q代之，則求機誤之公式如下：

$$PE_m=\frac{0.6745\,\sigma}{\sqrt{N}}$$ (公式四十二)

$$PE_{mdn}=\frac{5}{4}\cdot\frac{0.6745\,\sigma}{\sqrt{N}}$$ (公式四十三)

$$PE_{diff}=\sqrt{PE^2_{m甲}+PE^2_{m乙}}$$ (公式四十四)

$$PE_{diff}=\sqrt{PE^2_{mdn甲}+PE^2_{mdn乙}}$$ (公式四十五)

三，機誤實際之運用舉例　美人Verne, Ralph,Ross用Seashore音樂才能測驗，測驗兩個高級學校(似我國之高中)的十一及十二年級(從小學算起)的學生。全體近三百，其中有八十幾人選習音樂。

這一個測驗，包括六部分。為比較全體和選習音樂者，曾求出全體及選音樂者在各部分測驗上所得分數之M如表五十五。此表係譯自Verne所著「智力，學業成就和音樂才能間之關係」(Relationships Between Intelligence, Scholastic Achievement and Musical Talent)一書之第六頁。

表五十五 十一及十二年級全體及選音樂者在Seashore測驗上所得平均分數相差之比較

		M	σ	N	σ_M	σ_{diff}	diff ÷ σ_{diff}
音高	選音樂者	81.25	8.87*	87	.95		
	全體	76.90	11.89	289	.70		
	diff	4.35				1.18	3.69
音強	選音樂者	85.15	7.19	87	.77		
	全體	85.40	8.40	302	.48		
	diff	−.25				.91	−.27
拍子	選音樂者	76.95	7.85	87	.84		
	全體	74.45	9.10	300	.52		
	diff	2.50				.99	2.52
協和	選音樂者	74.00	7.41	87	.79		
	全體	70.75	8.76	299	.51		
	diff	3.25				.94	3.45
記憶	選音樂者	80.10	11.24	86	1.21		
	全體	71.70	16.64	300	.93		
	diff	8.40				1.53	5.49
節奏	選音樂者	72.45	10.35	84	1.12		
	全體	74.25	8.74	297	.51		
	diff	−1.8				1.23	−1.46

論音高，選音樂者之M是 81.25。假如我們說：凡是十一及十二年級選音樂之學生在此種測驗上之音高平均分數總是81.25，當有錯誤——機誤。最多錯多少呢？茲依公式三十八求此平均數之機誤如下：

$$\sigma_{M(音)}=\frac{8.87*}{\sqrt{87}}=\frac{8.87}{9.327}=0.95$$

81.25之機誤是「0.95」。意思是說：其他學校此年級選音樂之學生，在這種測驗上，音高分數之平均最少是 1.25－.95＝80.30，最多是81.25＋0.95＝82.200。

$$\sigma_{M(全)}=\frac{11.89}{\sqrt{289}}=\frac{11.89}{17}=0.70$$

選音樂者音高之M(81.25)減全體音高之M(76.90)之差(difference)爲4.35。如謂其他同級學校，同年級，此兩種學生此種M之相差，總是4.35，亦有錯誤。至多錯多少——機誤——呢？茲依公式四十求之如下：

$$\sigma_{diff}=\sqrt{(.95)^2+(.70)^2}=\sqrt{.9025+.49}=\sqrt{.3925}=1.18$$

是最多錯1.18。

我們可以說：兩個M眞實差別情形，是與diff成正比，與σ_{diff}成反比。所以求眞實相差情形之公式如下：

$$眞實相差情形=\frac{diff}{\sigma_{diff}}=\frac{4.35}{1.18}=3.69$$

是說diff中有3.69個σ_{diff}，此diff中之σ_{diff}愈少，則

眞實之相差情形愈小。如音強一項之眞實相差情形小，因diff(-.25)中祇有.27個σ_{diff}(.91)。

看全表(五十五)最後一行，可知：選音樂者與全體在音樂記憶上相差最大，在音之強弱上相差最小。

六　問題難度(σ值)之求法

表五十六　五個問題之難度

1	2	3	4	5	6
題之次第	N	未對人數	超過3行%人數	(σ值)難度	難度次第
1	16	2	87.5	38.5	4.5
2	16	4	75	43.5	3
3	16	2	87.5	38.5	4.5
4	16	12	25	56.5	2
5	16	15	6.25	65.5	1

我們常根據未做對的人數在全體中之百分數，來決定題目之難度。如第一題有二人未做對，二人佔全體(十六人)12.5%。超過12.5%之百分數爲87.5%（是答對之十四人在全體中之百分數）查附表三，知此二人最高之σ值爲38.5。卽以此σ值爲第一題之難度。說一個題的難度是38.5，是說：祇有12.5%人未做對，是容易做對的題。

依上法可求出第二，三，四，五，四題之難度如表五十六第五行　求五題難度之次第如第六行。看此行，此五題應有之排列如右：1,3,2,4,5，才是一個比一個難。惟難度之增加是「0,5,13,10」，有忽然增難之處，所以不好；應當將原題修改一下，使其增加爲「5,5,5,5」，才是良好的試題。

七　美度(σ值)的求法

表五十七　美度求法表

1 被評者	2 評者N	3 給評甲者等N	4 未等給者甲N	5 4百行分之數	6 美σ度值	7 次第
甲	25	10	15	60	47.5	4.5
乙	25	10	15	60	47.5	4.5
丙	25	20	5	20	58.5	2
丁	25	22	3	12	61.5	1
戊	25	0	21	84	40	6
己	25	4	25	100	0	7
庚	25	15	10	40	52.5	3

如有七張圖畫，二十五位評判先生論其美之次第。我們常依未給甲等之評者在全體中之百分數，來決定被評者之美度。如未給甲圖甲等之評者有15人，佔全體60%，由附表三，得σ值——美度——47.5，是說百人中有60人不說它美——甲等。乙圖之美度與甲同。未給丙圖甲等之評者有五人，佔全體20%人，其美度為58.5，是說百人中只有20人，不說它美——甲等。依同理可求其餘四張之美度如表五十七第六行。

其美之次第如第七行。因甲乙同美，而共佔第四第五兩級，故平均之為4.5。由此行可知：丁最美，己最醜。

今以己為起點，求其他六張美度之相差如表五十八。

增加的σ值大，表示美增加的多；增加的σ值小，表示美增加的少。

表五十八　七張圖畫美度之相差

圖畫	己	戊	甲	乙	庚	丙	丁
美度	0	40	47.5	47.5	52.5	58.5	61.5
相差		40	7.5	0	5	6	3

第五章　相關

表五十九　第五章所用符號一覽表

r	Coefficient of Correlation	相關係數
P	Probability	機率
C	Coefficient of Mean Square Contingency	均方相依係數
η	Correlation Ratio	相關比

$P_{\%}$＝百分中之機率　　P_N＝N中之機率

$P_{N}P$＝N中機率中之機率　　fP＝次數之機率

第一節　量量相關

一　五個假定的事實（表六十）

表六十　五個假定的事實

學生	測驗分數					
	子	丑	寅	卯	辰	巳
A	55	35	65	25	45	45
B	55	35	65	35	55	35
C	65	45	55	35	45	55
D	75	55	45	45	35	55
E	85	65	35	55	35	35
F	85	65	35	45	25	45
M	70	50	50	40	40	40

子列由55起，增加數為「0,10,10,10,0」；丑列由35起，增加數亦為「0,10,10,10,0」。是兩列之相關為完全正相關。

子列由55起，其增加數為「0,10,10,10,0」；寅列由65起，其減少亦為「0,10,10,10,0」。兩列之相關是完全負相關。

依上表：子與卯為不完全之正相關；子與辰為不完全之負相關；子與己為不相關或謂零相關——因子列由小而大，己列忽小忽大，二列既不成正比，又不成負比之故。

二　用M求相關係數(r)

$$r=\frac{c}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d^2_x}\sqrt{\Sigma d^2_y}} \text{…………（公式四十六）}$$

（請溫習求σ時求Σd^2之方法）

一，求子與丑之r　（子—x，　丑—y）　（一）求a,b,c

求 a			求 b			求 c
m_x	d_x	d^2_x	m_y	d_y	d^2_y	$d_x \times d_y = d_x d_y$
55	−15	225	35	−15	225	−15×−15=225
55	−15	225	35	−15	225	−15×−15=225
65	−5	25	45	−5	25	−5× −5= 25
75	5	25	55	5	25	5× 5= 25
85	15	225	65	15	225	15× 15=225
85	15	225	65	15	225	15× 15=225
70(M)		950(a)	50(M)		950(b)	950(c)

（二）代入公式　$r=\frac{950}{\sqrt{950 \times 950}}=1$

二，求子與寅之r　（子—x　寅—y）

(一)求a,b及c如右表

m_x	m_y	d_x	d^2_x	d_y	d^2_y	$d_x \times d_y$
55	65	−15	225	15	225	−225
55	65	−15	225	15	225	−225
65	55	−5	25	5	25	−25
75	45	5	25	−5	25	−25
85	35	15	225	−15	225	−225
85	35	15	225	−15	225	−225
70	50		950		950	−950
M	M		a		b	c

(二)代入公式四十六

$$r=\frac{-950}{\sqrt{950}\sqrt{950}}=-1$$

三，求子與卯之r

(子—x　卯—y)

(一)求a,b及c如下表

(二)代入公式46

$$r=\frac{650}{\sqrt{950}\sqrt{550}}=\frac{650}{\sqrt{522500}}=\frac{650}{723}=0.89$$

m_x	m_y	d_x	d^2_x	d_y	d^2_y	$d_x d_y$
55	25	−15	225	−15	225	225
55	35	−15	225	−5	25	75
65	35	−5	25	−5	25	25
75	45	5	25	5	25	25
85	55	15	225	15	225	225
85	45	15	225	5	25	75
70	40		950		550	650
M	M		a		b	c

四，求子與辰之r

依上法求之，a=950，b=550，c=−650，代入公式，r=−0•89•

五，求子與巳之r

依上法求之，a=950，b=550，c=0，代入公式，r=0

六，幾個原則

(一)$c=a=b$ c為正 $r=+1$ 如子丑之r
(二)$c=a=b$ c為負 $r=-1$ 如子寅之r
(三)c不等a不等b c為正 r=小於「+1」 如子卯之r
(四)c不等a不等b c為負 r=小於「−1」 如子辰之r
(五)c不等a不等b c為零 $r=0$ 如子己之r

三 用AM求r(以求子與卯之r為例)

$$r=\frac{c}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{\dfrac{\Sigma(de_x de_y)}{N}-\left(\dfrac{\Sigma de_x}{N}\times\dfrac{\Sigma de_y}{N}\right)}{\sqrt{\dfrac{\Sigma de_x^2}{N}-\left(\dfrac{\Sigma de_x}{N}\right)^2}\sqrt{\dfrac{\Sigma de_y^2}{N}-\left(\dfrac{\Sigma de_y}{N}\right)^2}}$$

(公式四十七)

一、求a,b及c 子=x 卯=y

求 a			求 b			求 c
m_x	de_x	de_x^2	m_y	de_y	de_y^2	$de_x \times de_y = de_x de_y$
55	−20	400	25	−20	400	$-20\times-20=400$
55	−20	400	35	−10	100	$-20\times-10=200$
65	−10	100	35	−10	100	$-10\times-10=100$
75			45	0		$0\times 0=0$
85	10	100	55	10	100	$10\times10=100$
85	10	100	45	0		$10\times 0=0$
75	−30	1100	45	−30	700	800
AM	Σde_x	Σde_x^2	AM	Σde_y	Σde_y^2	$\Sigma(de_x de_y)$

$$a=1100-\left(\frac{-30}{6}\right)^2 6=1100-150=950$$

$$b=700-\left(\frac{-30}{6}\right)^2 6=700-150=550$$

$$c=800-\left(\frac{-30}{6}+\frac{-30}{6}\right)6=800-150=650$$

二，代入公式四十七　$r=0.89$（與用M求者同）

四　用分佈圖求r（以求子與卯之r為例）

$$r=\frac{\Sigma\left(de_x de_y\right)-\left(\frac{\Sigma fde_x}{N}\times\frac{\Sigma fde_y}{N}\right)N}{\sqrt{\Sigma fde^2_x-\left(\frac{\Sigma fde_x}{N}\right)^2 N}\sqrt{\Sigma fde^2_y-\left(\frac{\Sigma fde_y}{N}\right)^2 N}}$$

$$=\frac{c}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\text{………………（公式四十八）}$$

表六十一　學生之兩種成績

組距	子	卯
20—30		A
30—40		BC
40—50		DF
50—60	AB	E
60—70	C	
70—80	D	
80—90	EF	
	6	6

一，畫圖　(一)復習分組次數分配表　茲依表六十，六位學生在子與卯兩種測驗上所得之分數，製出表六十一。

(二)將表六十一中的事實畫入分佈圖中之方法：

A，畫子列(x)之組距行　因為子列之最小數為55，以10為組距，則第一組為50—60；因最大數為85，則末一組為80

—90。由左向右橫寫之，如圖十五之甲，乙，丙，丁四縱行（組距）。

B,畫卯列(y)之組距行　因爲卯列最小數爲25，以10爲組距，則第一組爲20—30；因最大數是55，故末組爲50—60。由下向上寫之，則如圖十五之一，二，三，四，四橫行(組距)。

C.依六人中每人在子卯兩列所得之分數，畫每人於應在之方格內　如A生在子列是55分，在卯列是25分，應畫入縱行甲與橫行四相交之方格內，圖十五中有米之處。B生在子列是55

圖十五　用分佈圖求子與卯之r

組距		甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬
		50—60	60—70	70—80	80—90	f_y	de_y	fde_y	de^2_y	fde^2_y
一	50—60				E	1	20	20	400	400
二	40—50			D	F	2	10	20	100	200
三	30—40	B	C			2	0	0		
四	20—30	A米				1	—10	—10	100	100
五	f_x	2	1	1	2	6		30		700
六	de_x	—10	0	10	20			Σfde_y		Σde^2_y
七	fde_x	—20	0	10	40	30	Σfde_x			
八	de^2_x	100		100	400					
九	fde^2_x	200		100	800	1100	Σfde^2_x			

分，卯列是35，應畫入縱行甲與橫行三相交之方格內。依此理，可將共他四人畫入圖中。

D：寫出各列之次數　如子列（x列）之次數是「2，1，1，2」，寫於橫行五；卯列（y列）之次數是「1，2，2，1」，寫於縱行戊。其N皆爲6。

二，求a，b及c　（一）求a　假設30—70之中點——55——爲AM，可有六，七，八，九，四橫行之數字。由於已知N爲6，Σfde_x是30，Σfde^2_x是1100，所以a之值如下：

$$a=1100-\left(\frac{30}{6}\right)^2 6=1100-150=950$$

（二）求b　假設30—40之中點——35——爲AM，可有己，庚，辛，壬，四縱行之數字。由於已知：N=6，$\Sigma fde_y=30$，$\Sigma fde^2_y=700$，所以b之值如下：

$$b=700-\left(\frac{30}{6}\right)^2 6=700-150=550$$

學生	$de_x \times de_y = de_x\, de_y$	所在之象限
A	$-10\times10=-100$	三
B	$-10\times0=0$	
C	$0\times0=0$	
D	$10\times10=100$	一
F	$20\times10=200$	一
E	$20\times20=400$	一
	800	

（三）求c　茲先求$\Sigma(de_x de_y)$如左表。因已知N=6，$\Sigma fde_x=30$，$\Sigma fde_y=30$，又知$\Sigma(de_x de_y)=800$，求c如下：

$$C=800-\left(\frac{30}{6}\times\frac{30}{6}\right)6=800-150=650$$

三，代入公式四十八　$r=0.89$

四，一點認識　在圖十五上，縱行乙與橫行三做成一個十字，製出四個象限。畫入第一象限的學生(D,E,F,)，其de_x(十)及de_y(十)之相乘爲正(十×十＝十)；畫入第三象限之學生(A)，其de_x(一)及de_y(一)之相乘亦爲正(一×一＝十)。$de_x\times de_y$多爲正者，則C爲正數，其相關必爲正相關。畫入第二象限之學生，其de_x(十)及de_y(一)之相乘爲負(十×一＝一)；畫入第四象限之學生，其de_x(一)及de_y(十)之相乘爲負(一×十＝一)。$de_x\times de_y$多爲負者，則C爲負數，其相關必爲負。由此觀，我們當由觀察分佈各象限之人數，便可看出x與y之相關爲正爲負；亦因此，所以在畫分佈圖時，必使x行之組距由左(小)而右(大)，y行之組距由下(小)而上(大)。因此始可產生理論上的四象限。

五　r之機誤

美人Verne爲求IQ和音樂才能之相關，在北加利佛尼亞州測驗了1541兒童，其中有144位是五年級，此一年級IQ和音商之相關爲「0.40」。假如我們說：美國或世界各地同級學生IQ和音商之相關都是「0.40」，一定有錯——機誤。要錯多少呢？茲依公式四十九求之如下：

$$PE_r=\frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（公式四十九）}$$

$$PE_{r(IQ與音高)}=\frac{.6745(1-.40^2)}{\sqrt{144}}=\frac{.6745\times.84}{12}$$

$$=.047(.05)$$

是至多錯0.05，原數(r)有0.4+.05或0.4−0.05之可能。

六　迴歸方程

假如兩種測驗分數是完全正相關或完全負相關，可用以下的公式，由學生此一種成績(x)很準確的推出此生他一種成績(y)。茲證之如下：

一，公式

(一)由x求y　$y=M_y+r\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-M_x)$…(公式五十)

(二)由y求x　$x=M_x+r\times\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-M_y)$(公式五十一)

二，舉例

(一)由子列求丑列者　如子列(x)者爲65分，求丑列(y)者。

$$y=50+1\times\frac{\sqrt{\frac{950}{6}}}{\sqrt{\frac{950}{6}}}(65-70)=50+1\times(65-70)=50+(-5)$$

$$=45$$

(二)由丑列求子列者　如丑列(y)者爲55，求子列者(x)。

$$x=70+1\times\frac{\sqrt{\frac{950}{6}}}{\sqrt{\frac{950}{6}}}(55-50)=70+1\times(55-50)=70+5=75$$

如兩種學科成績不是完全正相關或負相關，則由學生此一科之成績，不能十分準確的推出彼一科的成績。其準確度與相關係數大小成正比例。即r近於正一或負一者，其準確度大。

第二節　質質相關

今有三男：一(趙)聰明，一(錢)中才，一(孫)愚笨；又有三女：一(李)聰明，一(周)中才，一(吳)愚笨。如用拈鬮法使結爲伴侶，李有與三男之一結爲伴侶之可能，周與吳亦然，是有九個可能，如表六十二中所列者。

每一個可能——假定是美滿的結合，雙方皆聰明，其機率(P)是：九對中有一對可能(P_9)；百對中有11.11對之可能(P%)；三對中有.333對之可能(P_N，N=3)，即三對中有十分之3.33的機會；如有一對，使我們猜猜是不是美滿的結合——雙方聰明，「是」的機率祇有「十分之一點一一」，或謂「0.1111」

表六十二　三男三女全類機遇之組合表

女＼男	愚笨	中才	聰明	合計
聰明	李孫	李錢	李趙	1✱
中才	周孫	周錢	周趙	1◐
愚笨	吳孫	吳錢	吳趙	1
合計	1×	1●	1	3

（P_NP），都很少可能。以上所述，如詳閱表六十三，可以深明。

表六十三　$\Sigma P_N = N$，$\Sigma P_NP = 1$，證明表

（三男，三女，全額機遇之組合）

男	女	P_9	$P_\%$	$P_{N(3)}$	P_NP
愚	聰	$\frac{1\times}{3}\times\frac{1*}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1\times}\times\frac{.333}{1*}=.1111$
愚	中	$\frac{1●}{3}\times\frac{1◐}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1●}\times\frac{.333}{1◐}=.1111$
愚	愚	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$
中	聰	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$
中	中	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$
中	愚	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$
聰	聰	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$
聰	中	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$
聰	愚	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	11.11	.333	$\frac{.333}{1}\times\frac{.333}{1}=.1111$

假如完全靠機遇組合，則$\Sigma P_N = N$，$\Sigma P_N P = 1$.，是必然的。

說九對中有一對——如美滿之結合——之可能，如眞有九男，九女，皆三聰，三中才，三愚，如全靠機遇，其理論上的九對結合，應如表六十四或表六十五中九個(　　)中之數字(P_N)。

表六十四　九男九女全賴機遇之組合表(一)

性別	聰明	中才	愚笨	合計
男	ABC	DEF	GHI	9
女	abc	def	ghi	9

男 女	愚笨	中才	聰明	合計
聰明	a A	b D	c G	3
中才	d B	e E	f H	3
愚笨	g C	h F	i I	3
合計	3	3	3	9

表六十五　九男九女全賴機遇之組合表(二)

男 女	愚笨	中才	聰明	合計
聰明	1 f (1)P_N	1 (1)	1 (1)	3
中才	1 (1)	1 (1)	1 (1)	3
愚笨	1 (1)	1 (1)	1 (1)	3
合計	3	3	3	9(N)

如實際上之數目(表六十五中之f)也是如此，則此九對之結合完全是依機遇，與從裝有六白球，六黑球，六紅球之袋中，閉上眼取出九對球一樣，球與球間因無吸引力，其一對對之出袋，完全是依機遇。如九男九女眞是如此結爲伴侶(如表六十四中所列者)，則有二事實出現：

一，$f=P_N$，$f^2\div P_N=P_N$，因$\Sigma P_N=N=9$，所以$\Sigma(f^2\div P_N)=N=9$。

二，$fP=P_NP$，因$\Sigma P_NP=1$，所以$\Sigma fP=1$。

因有此二事實，所以其相關為「0」。玆用以下二法證之如下：

一，相依法

$$C=\sqrt{\frac{\Sigma(f^2\div P_N)-\Sigma P_N}{\Sigma(f^2\div P_N)}}\text{（公式五十二）}\quad C=\sqrt{\frac{9-9}{9}}=0$$

二，相依簡法

$$C=\sqrt{\frac{\Sigma fP-\Sigma P_NP}{\Sigma fP}}\text{（公式五十三）}\quad C=\sqrt{\frac{1-1}{1}}=0$$

表六十六　非機遇組合表

女＼男	愚笨	中才	聰明	Σf
聰明	(1)	(1)	3 f (1)	3
中才	1 (1)	2 (1)	(1)	3
愚笨	2 (1)	1 (1)	(1)	3
Σf	3	3	3	9

實際上，男女之結為伴侶，決不是有人從男女羣中瞎着眼拉出一男，一女使結為夫妻。而是有介紹人或是自願。此種介紹或自願，其根據是智力，德性，容貌等之相似。祇就智力說：此九男九女之結合常如表六十六：多是智力相同，不同者極少。是如此結合，則 f 不等於 P_N。因此，有二事實出現：（一）

$\Sigma(f^2 \div P_N)$大於ΣP_N，大於N，大於9。(二)ΣfP大於$\Sigma P_N P$，大於「1」。茲用以上二法求C，並證明以上二事實如下：

表六十七

$f^2 \div P_N$
$3^2 \div 1 = 9$
$1^2 \div 1 = 1$
$2^2 \div 1 = 4$
$2^2 \div 1 = 4$
$1^2 \div 1 = 1$
$\Sigma(f^2 \div P_N) = 19$

一，相依法　求$\Sigma(f^2 \div P_N)$如表六十七，是「19」。因$\Sigma P_N = N = 9$，代入公式五十二，求C如下：

$$C = \sqrt{\frac{19-9}{19}} = \sqrt{.5263} = .7255$$

二，相依簡法　求ΣfP如表六十八，是2.5554。因$\Sigma P_N P = 1$，代入公式五十三，求C如下：

表六十八

fP	
$\frac{3}{3} \times \frac{3}{3}$	$= 1.0000$
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$= 0.1111$
$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$= 0.6666$
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$= 0.1111$
$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	0.6666
ΣfP	2.5554

$$C = \sqrt{\frac{2.5554-1}{2.5554}} = \sqrt{.608} = .78$$

C不爲零，即爲正數，永不爲負。故欲知C之數是表示正相關，抑爲負相關，惟有詳閱組合表。以表六十六爲例，如男聰明，女亦聰明；男中才，女亦中才；………則爲正相關。如男聰明，女愚笨；男愚笨，女聰明，……則爲負相關。

表六十六之C是正相關，其數一爲0.7255，一爲0.78，似

非完全正相關。實際上，即使表六十六眞有完全正相關之事實，所得之C亦僅至0.816。因用相依法求相關事實上是如此。惟在品質之分等愈多時，所製成之組合表，其中之C增大，如分爲十，則C可大至0.949。

圖十六　非直線相關圖

	y \ x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
A	組　距	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80	80—90	90—100	f_y	de_y	fde_y	de^2_y	fde^2_y
B	90—100					5					5	20	100	400	2000
C	80—90				5		5				10	10	100	100	1000
D	70—80			5				5			10	0	0		
E	60—70		5						5		10	-10	-100	100	1000
F	50—60	5*								5	10	-20	-200	400	4000
G	f_x	5	5	5	5	5	5	5	5	5	45		-100		8000
H	M_{yx}	55	65	75	85	95	85	75	65	55					
I	de	-20	-10	0	10	20	10	0	-10	-20	-20				
J	de^2	400	100	0	100	400	100	0	100	400	1600				

第三節　非直線相關之初步介紹

有時x行之量數與y行之量數，前半是正相關，後半是負相

關。如依求r之公式(公式四十八)去求，則r=0；但其實情是非直線的正相關，如圖十六所示者。求此種相關（η）之步驟如下：

一，製分佈圖　如圖十六。

二，求y行之σ　先求k,l,m,n四行，由l行之「−100」及n行之8000，代入公式二十五(頁56)得y行之σ如下：

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{8000}{45}-\left(\frac{-100}{45}\right)^2}=\sqrt{\frac{1600}{9}-\left(\frac{-20}{9}\right)^2}=\sqrt{17.28}=13.153$$

三，求x行各行中y之平均數之σ

(一)求x行各行中y之平均數　xa行中之y次數為5(米)，行分數為55(50−60之中點)，55×5÷5=55是a行中y之M；b行中y之次數亦為5，分數為65(60−70之中點)，其和為65×5=325，其平均為325÷5=65。依上法求x其他各行y之平均數如圖十六中之H行。

(二)求x行各行中y之平均數之σ　以75為AM，先求I及J兩行，得「−20及1600」兩數，又知平均數有九個(N)，代入公式二十五，得σ如右：　$\sigma_{M(yx)}=\sqrt{\frac{1600}{9}-\left(\frac{-20}{9}\right)^2}=13.153$

四，代入公式五十四，求相關比如下：

$$\eta_{yx:y}=\frac{\sigma_{M(yx)}}{\sigma_y}=\frac{13.153}{13.153}=1 \text{………(公式五十四)}$$

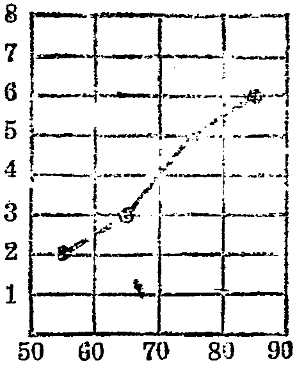
因η之來是由兩個σ之相比，故謂之「相關比」。

想知道分佈圖上之相關是不是非直線相關，有一個分別的

標準：卽$N(\eta^2-r^2)$大於11.37時，則是非直線相關。如上例：$45(1^2-0^2)$大於11.37，所以是非直線相關。

假如x列量數是依數學級數增加——1,2,3,4,5；y列量數依幾何級數增加——1,2,4,8,16；如用分佈圖求相關，也可看出：是非直線的相關或謂曲線相關，其r之數小於「+1」，其η之數則爲「+1」。請 讀者自證之。

刊　　誤

頁數	行數	誤	正
12		圖三　甲班學生成績分組次數多邊圖（本書共印二千冊，內有三百冊將圖三之次數——8,7,6,5,4,3,2,1,——排下半字，圖四之錯同，望讀者注意，特此更正）	圖三　甲班學生成績分組次數多邊圖 
78	20	三 化等級爲量數的方法	四 化等級爲量數的方法
84	7	三 機誤	五 機誤

附　表

一　距離(σ)與面積對照表

σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0635	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1626	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1409	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1730	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2763	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	2531	2554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4134	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4264	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4294	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4683	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4832	4738	4744	4750	4758	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	7965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4075	4976	4977	4977	4978	4979	4930	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4934	4984	4985	4935	4986	4986

σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99375	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98883	98728	99565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94355	93723	93382	93024	92677
0.4	91312	31399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80409	79896	79359	77817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	72193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66669	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61250
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55819	55209
1.1	54697	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48665	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42390	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34443	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29613	29158	23702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	16129	09914	09702	99495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03143	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	04343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	06174	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00450
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

百分數	σ	σ値	百分數	σ	σ値	百分數	σ	σ値
99.999971	-5	0	99.18	-2.4	26	77.34	-.75	42.5
99.9968	-4	10	99.06	-2.35	26.5	75.80	-.7	43
99.9961	-3.95	10.5	98.93	-2.3	27	74.22	-.65	43.5
99.9954	-3.9	11	98.78	-2.25	27.5	72.57	-.6	44
99.9921	-3.85	11.5	98.61	-2.2	28	70.88	-.55	44.5
99.9928	-3.8	12	98.42	-2.15	28.5	69.15	-.5	45
99.9912	-3.75	12.5	98.21	-2.1	29	67.36	-.45	45.5
99.989	-3.7	13	97.98	-2.05	29.5	65.54	-.4	46
99.987	-3.65	13.5	97.72	-2	30	63.68	-.35	46.5
99.984	-3.6	14	97.44	-1.95	30.5	61.79	-.3	47
99.981	-3.55	14.5	97.13	-1.9	31	59.87	-.25	47.5
99.977	-3.5	15	96.78	-1.85	31.5	57.93	-.2	48
99.972	-3.45	15.5	96.41	-1.8	32	55.96	-.15	48.5
99.966	-3.4	16	95.99	-1.75	32.5	53.98	-.1	49
99.960	-3.35	16.5	95.54	-1.7	33	51.99	-.05	49.5
99.952	-3.3	17	95.05	-1.65	33.5	50	.0	50
99.942	-3.25	17.5	94.52	-1.6	34	48.01	.05	50.5
99.931	-3.2	18	93.94	-1.55	34.5	46.02	.1	51
99.918	-3.15	18.5	93.32	-1.5	35	44.04	.15	51.5
99.903	-3.1	19	92.65	-1.45	35.5	42.07	.2	52
99.886	-3.05	19.5	91.92	-1.4	36	40.13	.25	52.5
99.855	-3	20	91.15	-1.35	36.5	38.21	.3	53
99.84	-2.95	20.5	90.32	-1.3	37	36.32	.35	53.5
99.81	-2.9	21	89.44	-1.25	37.5	34.46	.4	54
99.78	-2.85	21.5	88.49	-1.2	38	32.64	.45	54.5
99.74	-2.8	22	87.44	-1.15	38.5	30.85	.5	55
99.70	-2.75	22.5	86.43	-1.1	39	29.12	.55	55.5
99.65	-2.7	23	85.31	-1.05	39.5	27.43	.6	56
99.60	-2.65	23.5	84.13	-1	40	25.78	.65	56.5
99.53	-2.6	24	82.89	-.95	40.5	24.2	.7	57
99.46	-2.55	24.5	81.59	-.9	41	22.66	.75	57.5
99.38	-2.5	25	80.23	-.85	41.5	21.19	.8	58
99.29	-2.45	25.5	78.81	-.8	42	19.77	.85	58.5

百分數	σ	σ値	數分百	σ	σ値
18.41	.9	59	0.54	2.55	75.5
17.11	.95	59.5	0.47	2.6	76
15.87	1.00	60	0.4	2.65	76.5
14.69	1.05	60.5	0.35	2.7	77
13.57	1.1	61	0.3	2.75	77.5
12.51	1.15	61.5	0.26	2.8	78
11.51	1.2	62	0.22	2.85	78.5
10.56	1.25	62.5	0.19	2.9	79
9.63	1.3	63	0.16	2.95	79.5
8.83	1.35	63.5	0.135	3.	80
8.08	1.4	64	0.11	3.05	80.5
7.35	1.45	64.5	0.097	3.1	81
6.68	1.5	65	0.082	3.15	81.5
6.06	1.55	65.5	0.069	3.2	82
5.48	1.6	66	0.058	3.25	82.5
4.95	1.65	66.5	0.048	3.3	83
4.46	1.7	67	0.040	3.35	83.5
4.01	1.75	67.5	0.034	3.4	84
3.59	1.8	68	0.028	3.45	84.5
3.22	1.85	68.5	0.023	3.5	85
2.87	1.9	69	0.019	3.55	85.5
2.56	1.95	69.5	0.016	3.6	86
2.28	2.	70	0.013	3.65	86.5
2.02	2.05	70.5	0.011	3.7	87
1.79	2.1	71	0.009	3.75	87.5
1.58	2.15	71.5	0.007	3.8	88
1.39	2.2	72	0.0059	3.85	88.5
1.22	2.25	72.5	0.0048	3.9	89
1.07	2.3	73	0.0039	3.95	89.5
0.94	2.35	73.5	0.0032	4	90
0.82	2.4	74	0.000029	5	100
0.71	2.45	74.5			
0.61	2.5	75			

四 對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9

42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	9519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

思想方法論
王光漢著
（早已售罄）
即再版

中華民國三十二年八月初版

不准翻印

統計學

定價國幣肆拾圓

著者　王光漢

所　時代青年出版社
白沙中興路

處　青年文化服務部
白沙中興路

文心鉛石印刷社
三號

中央圖書雜誌審查委員會免審證免字第一〇一號