新課程標準適用

初級中學

幾何學

下冊

編者 萬頤祥

校訂者 任誠

正中書局印行

目　次

第四章　軌跡和作圖

作　圖

§193. **定義.** 用幾何學上的方法,求作一種圖,使適合於所設的條件的,叫做作圖題.

§194. **幾何學上作圖所用的器具.** 初等平面幾何學上所有作圖題的作圖,其應用的器具,祇許兩種,就是圓規和直尺.

§195. **定義.** 大家公認可以作成而無須證明的作圖法則,叫做作圖公法.

作圖公法

I. 過兩定點必能作一直線.

II. 凡直線必能任意延長.

III. 以一點為圓心,一直線為半徑,可以作一圓.

簡易作圖

I. 在一已知直線上,可作一垂直二等分線.

II. 在一個已知角內,可作一個角二等分線.

III. 在一已知直線上的一已知點,或直線外的一已知點,可作一此直線的垂線.

IV. 過一已知直線上的一已知點,可作一直線,使與已知直線成一已知角.

V. 過一已知點,可作一直線與一已知直線平行.

VI. 一已知直線,可分成任意幾等分.

【註】以上各作圖題證明見第二章.

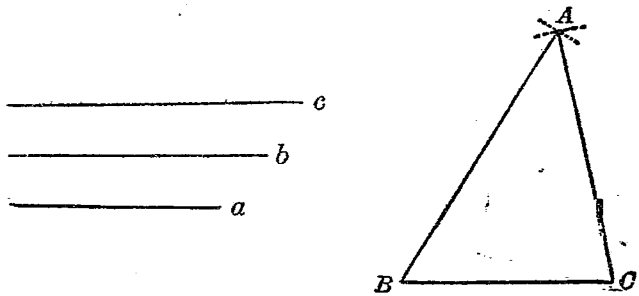
§196. 在下面的例題內,對於三角形的已知各部分,我們用一律的記號來表明,即:邊用 a, b, c;對角用 A, B, C;高用 h_a, h_b, h_c;中線用 m_a, m_b, m_c;角的二等分線用 t_a, t_b, t_c.

命題一 作圖題

§197. 已知三角形的三邊,求作這三角形.

設 a, b, c 是一個△的三邊.

求作一三角形.



作圖. 作 $BC=a$.

以 C 做圓心,用等於 b 的半徑作一弧.

以 B 做圓心,用等於 c 的半徑作一弧.

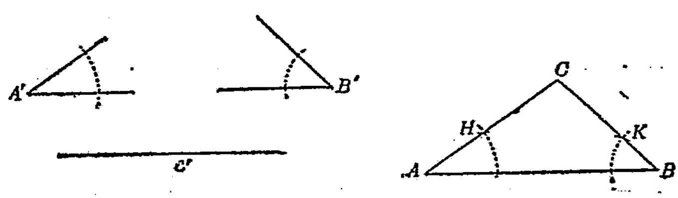
兩弧交於 A. 聯 AB 和 AC, 則 ABC 是所求的三角形

證. $BC=a,\quad AB=c,\quad AC=b.$

討論 若一邊大於或等於其他兩邊的和,則此圖爲不可能.

命題二 作圖題

§198. 已知三角形的兩角及夾邊,求作這三角形.



設 c' 是已知邊, A' 及 B' 是兩已知角.

求作一個三角形.

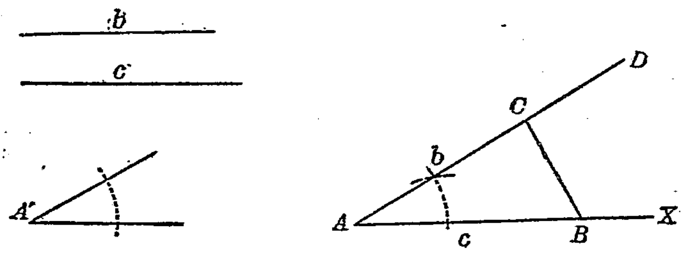
作圖. 截取 AB 等於 c', 從 A 作 $\angle HAB$ 等於 $\angle A'$, 從 B 作 $\angle KBA$ 等於 $\angle B'$, 引長 AH 及 BK 相交於 C, 則 $\triangle CAB$ 是所求的三角形.

證 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $AB=c'$.

討論. 設兩已知角的和,等於兩直角或大於兩直角,則此題不可能.

命題三 作圖題

§199. 已知三角形的兩邊和夾角,求作這三角形.



設 b 和 c 是三角形的兩個邊, A' 是兩邊所夾的角.

求作一個三角形.

作圖. 在 AX 線上截取 AB 等於 c, 從點 A 作 $\angle BAD$

等於 $\angle A'$, 在 AD 上, 截取 AC 等於 b, 作 BC, 則 $\triangle ABC$ 是所作的三角形.

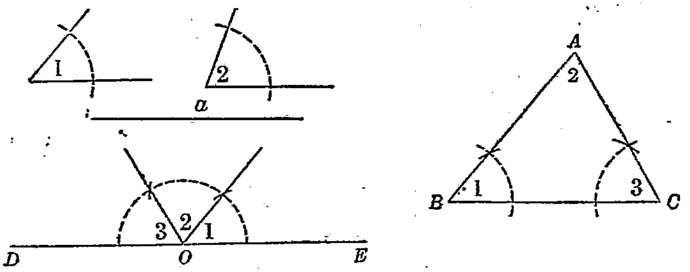
(學者試自證之)

習題三十七

1. 已知一邊,求作一等邊三角形.
2. 已知等邊三角形的周界,求作一等邊三角形.
3. 在一已知直角邊上,求作一個等腰直角三角形.
4. 已知底邊和一個底角,求作一個等腰三角形.
5. 已知一腰和頂角,求作一個等腰三角形.
6. 已知兩直角邊,求作一個直角三角形.
7. 已知四邊及一對角線,求作一個四邊形.
8. 已知四邊和一角,求作一個四邊形.
9. 已知周圍和一角,求作一個菱形.
10. 已知相隣的兩邊和夾角,求作一平行四邊形.

命題四　作圖題

§200. 已知三角形的一邊,一隣角,和一對角,求作這三角形.



設已知一邊 a, $\angle 1$, 和對邊 a 的 $\angle 2$.

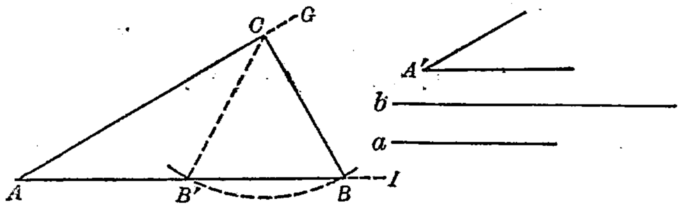
求作這個三角形.

作圖. 在平角 DOE 的點 O, 先作 $\measuredangle 1, 2$ 像上邊的圖; 所餘下的 $\angle 3$ 就是等於 $\triangle$ 的第三角. 所以 $\triangle ABC$ 就是所求的三角形,他的作法可以參用命題三.

討論. 同命題二.

命題五 作圖題

§ **201.** 已知三角形的兩邊及其中一邊的對角,求作這三角形.



設 a 和 b 是一個△的兩邊.又 $\angle A'$ 是邊 a 的對角.

求作這個三角形.

作圖. 作 $\angle GAI=\angle A'$,在 AG 上截取 $AC=b$.

以 C 做圓心,用等於 a 的半徑作弧,交 AI 於 B 和 B'.

△ABC 和 $AB'C$ 都是所求的三角形.

討論. 若所作的弧,在點 A 的一側與底邊相交兩次,則此題有兩個解答.若與底邊遇一次,則有一個解答;若不與底邊相遇,則無解答.

【註】 像上節命題中 $a<b$ 而 $\angle A$ 爲銳角時,可以作兩種圖合於一種條件的,叫做兩可情形.

§ 202. 若已知下列各部份,則一個三角形就可以作成.

(1) 三邊.

(2) 兩邊和夾角.

(3) 兩角和夾邊.

(4) 兩角和一非夾邊.

(5) 兩邊和其中一邊的對角.

作一個三角形,須已知三部份,並且其中有一部份是邊.

習題三十八

1. 若已知三個角,能否作一三角形?

2. 在命題五中,若A是鈍角,有幾個解答?若A是直角呢?若A是銳角呢?

3. 已知斜邊和一銳角,求作一直角三角形.

4. 已知一直角邊及其對角,求作一直角三角形.

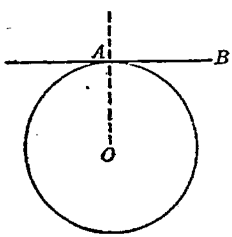
5. 已知等邊三角形的高,求作此形.

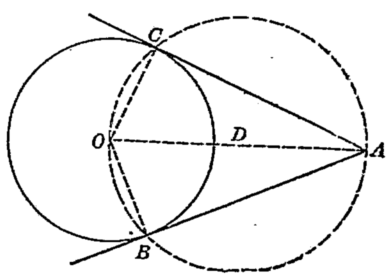
6. 已知等邊三角形內切圓的半徑或外接圓的半徑,求作此形.

7. 已知斜邊和一個直角邊,求作一個直角三角形.

命題六 作圖題

§203. 由一已知點,作一已知圓的切線.





I. 設已知點A在圓上.

【示意】 半徑和半徑一端所作的切線成什麼角?

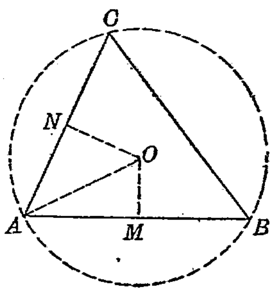
II. 設已知點A在圓外.

作圖. 聯結圓心O和A,用OA的中點D做圓心,用DA做半徑,作一圓和已知圓相交在B, C兩點.則AC, AB就是所求的切線.

【示意】 證明$\angle ACO$, OBA是直角.

命題七 作圖題

§204. 求作三角形的外接圓.



設 $\triangle ABC$.

求作 $\triangle ABC$ 的外接圓.

作圖. 作邊AB和邊AC的垂直二等分線OM, ON.

兩個垂線將相交於一點O.

以點O做圓心,OA做半徑作圓.

則圓ABC是所求的圓.

證. 點O到點A和到點B等距離,到點A和到點C也是等距離.

∴ 點 O 到 A, B, C 三點都是等距離.

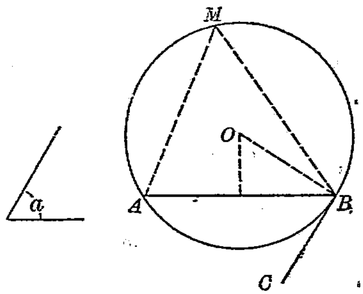
∴ 以點 O 做圓心, OA 做半徑,必經過 A, B, 和 C 三點.

§205. **推論一.** 求作一個圓,經過不在一直線上的三點.

§206. **推論二.** 求圓的圓心或圓周上一部份弧的圓心.

命題八 作圖題

§207. 以已知直線做弦,求作弓形,使他所含的弓形角等於一已知角.



設 AB 為已知直線, $\angle a$ 為已知角.

求作以 AB 為弦在 AB 上作一個弓形 AMB, 使他所含的角等於 $\angle a$.

作圖. 從 AB 一端 B 作 BC, 使 $\angle ABC = \angle a$

從 B 作 BC 的垂線,再作 AB 的垂直二等分線,這二線交於 O.

以 O 做圓心, OB 做半徑,作弓形 AMB, 則 AMB 是所求的弓形.

證. 點O到點A和到點B的距離相等.

$\therefore$ 此圓經過點A和點B. (何故?)

但 $BC \perp OB$

$\therefore$ BC切於此圓.

任何角如$\angle M$內接於弓形AMB.

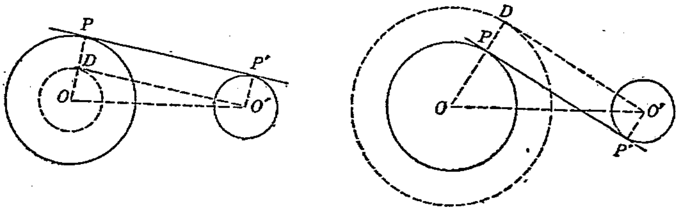
則 $\angle M = \angle ABC$ (何故?)

但 $\angle ABC = \angle a$

$\therefore$ $\angle M = \angle a$

命題九 作圖題

§208. 已知兩圓,求作他們的公切線.



設兩圓O, O', 半徑r, r', 並且r大於r'.

求作這兩圓的公切線.

作圖. 用O做圓心, $r-r'$ (左圖)或$r+r'$ (右圖)做半徑作一圓.

從O'引所作圓的切線$O'D$, 從D引半徑OD延長之,

得交點 P, 作 $O'P' \parallel DP$, 得交點 P', 聯結 P, P', 則 PP' 是所求的切線.

證. $\because$ $DP \perp\!\!\!\!\!= O'P'$, 又 $O'D \perp OP$,

$\therefore$ $PDO'P'$ 是矩形. (何故?)

$$\therefore PP' \perp OP, O'P'$$

$\therefore$ PP' 是所求的切線.

討論. 1. 一圓在他圓外面不相切,可以作兩外公切線和兩內公切線.

2. 兩圓外切,可以作兩外公切線及一內公切線.

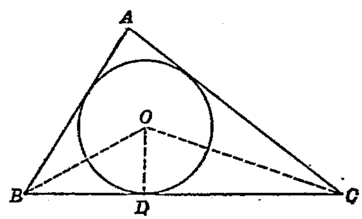
3. 兩圓相交,只能作兩外公切線.

4. 兩圓內切,只能作一外公切線.

5. 一圓在他圓裏面不相切,就沒有公切線.

命題十 作圖題

§209. 求作一圓內切於一已知三角形.



設 ABC 是一個已知三角形.

求作一圓內接三角形

ABC.

作圖. 作 $\angle B$, $\angle C$ 的二等分線,這二等分線相遇在點 O.

由點 O 作 $OD \perp BC$.

以 O 做圓心,以 OD 做半徑,作一圓.

這圓就是所求的圓

(學者試自證之).

§210. 定義. 一圓若切三角形的一邊和他二邊的延長線,這圓叫做傍切圓.

習題三十九

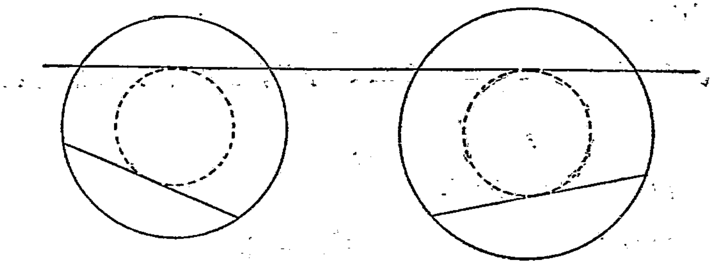
1. 在已知的圓上作一切線,和一已知線平行.

2. 在一已知的圓上作一切線,和一已知線垂直.

3. 作一三角形的三傍切圓.

4. 過一已知點作一已知圓的割線,使其在圓內的部份,等於定長.

5. 過不相交的二圓周作一公共割線,使其在二圓內的部份,各等於定長.



(5)

6. 用直線2″長做弦，作一弓形，使弓形內所含的角等於30°.

7. 求以已知三角形之各頂做圓心作三圓彼此相切.

【示意】 先作三角形的內切圓.

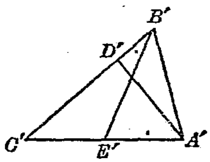
作圖題的分析法

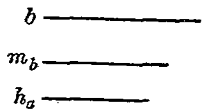
§211. 作圖題有時很曲折，不易直接作出，可先作一草圖，假定他就是所作的圖，再用分析法來研究他和已知部份的關係.

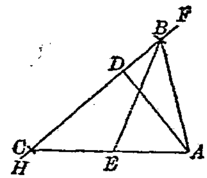
例一. 已知一邊，相當的中線，和另一邊上的高，求作一個三角形.

設 b 是三角形的一邊，m_b 是相當的中線，又 h_a 是另一邊上的高.

求作三角形.







分析. 設 $A'B'C'$ 是所求的三角形,則

$$C'A'=b,\quad C'E' \text{ 和 } E'A'=\frac{b}{2},$$

$$A'D'=h_a,\qquad B'E'=m_b,$$

$$\angle s\, A'D'C' \text{ 和 } A'D'B'=rt.\angle s.$$

細察這圖中那一三角形可以作成,則知這 $rt\triangle A'D'C'$ 可以作成,因為已經知道他的兩邊.

先作這三角形做作圖的基礎.

作圖. 作 $AD=h_a$.

在點 D 作 $FH\perp AD$; 用 A 做圓心, b 做半徑作弧交 DH 在點 C. 作 AC.

二等分 AC 於點 E.

用 E 做圓心, m_b 做半徑,作一弧遇 FH 於點 B, 則 AB 就是所求的三角形.

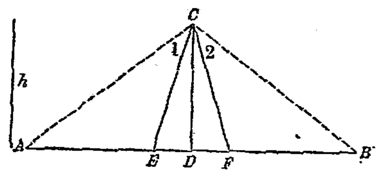
證. $AD=h_a,\quad BE=m_b,\quad AC=b.$

$\because\ \angle ADC = rt.\angle,\quad \therefore\ AD$ 是高,

$\because\ CE = EA,\quad \therefore\ BE$ 是中線.

【註】 用分析法有時可以略去證明,因為分析法常含有證明,只是步驟相反.

例二. 已知三角形三邊的和及高,求作等腰三角形.



設 AB 是三邊的和, h 是高.

求作等腰三角形.

分析. 作 AB 的垂直二等分線 CD, 使等於定高 h, 假定 $\triangle CEF$ 是所求的等腰三角形, 則 $CE = AE$, $CF = BF$ 作 AC, BC, 則 $\triangle AEC$, $\triangle BFC$ 是等腰三角形.

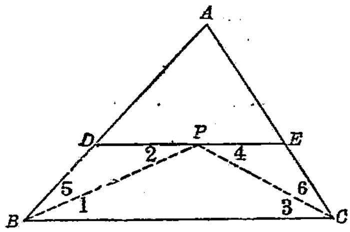
$$\therefore\ \angle A = \angle 1,\quad \angle B = \angle 2.$$

這樣一來, $\triangle ABC$ 便可作成.

作圖. 作 AB 的垂直二等分線 CD, 使等於定高 h, 作 AC, BC; 從點 C 作 $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$, 即得所求的等腰三角形 CEF.

例三. 在三角形內作一線,與底邊平行,把腰分做兩段,且使所作的線等於該線與底邊間兩線段的和.

設 ABC 是已知的三角形.



求作 $DE \parallel BC$, 使 $DE = DB + EC$.

分析. 假令右圖是所作的圖.

旣然 $DE = DB + EC$

則可分 DE 做兩段,使一段等於 DB, 一段等於 EC.

假使分點是 P, 聯 PB, PC.

則 $\angle 5 = \angle 2, \quad \angle 6 = \angle 4.$

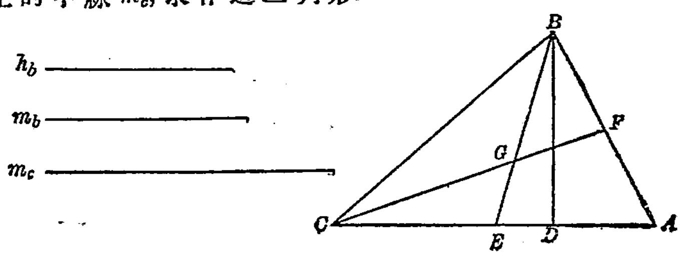
但 $\angle 2 = \angle 1, \quad \angle 4 = \angle 3.$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 5, \quad \angle 3 = \angle 6.$

這樣就找到作圖的方法.

作圖. 作 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的二等分線,得交點 P, 過點 P 作 $DE \parallel AB$, 則 DE 就是所求的線.

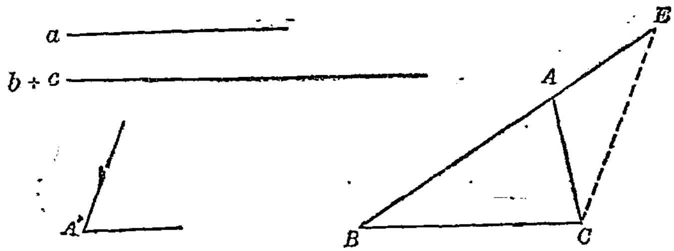
例四. 已知一邊上的高 h_b 及中線 m_b, 又知另一邊上的中線 m_c, 求作這三角形.



分析. 設$\triangle ABC$是所求的三角形,BE等於m_b; BD等於h_b; CF等於m_c.則直角$\triangle BED$可先作成.又G是$\triangle ABC$的重心,故$CG=\frac{2}{3}m_c$, $GB=\frac{2}{3}m_b$,這樣一來,$\triangle ABC$就可以作成.

作圖. 用m_b做斜邊,h_b做直角邊,先作直角$\triangle BED$在BE上取一點G,使$BG=\frac{2}{3}m_b$.再用G做圓心,$\frac{2}{3}m_c$做半徑,作圓弧,交底邊於C.取$EA=EC$,作AB, BC,則$\triangle ABC$是所求的三角形.

例五. 已知底邊和其他兩邊的和,及兩邊的夾角,求作一個三角形.



分析. 假定ABC是所求的三角形,僅知一角及一邊.

延長BA到E,使$AE=AC$,作EC.則知$CB=a$, $BE=b+c$, $\angle BAC=\angle A'$, $\angle E=\frac{\angle A'}{2}$.

細察各三角形,只有$\triangle BCE$能作,就用這個三角形做作圖的基礎.

(此題未完部份,學者試完成之).

§212. 下面的法則說明分析法普通的步驟.

(1) 先作一草圖相似於所求的圖,但大小不一定絕對相同.

(2) 細察並標出直接已知的線和角,和由已知部份所易於求得的部份.

(3) 考查圖裏所有的三角形,而尋出一個可以作成的三角形.

(4) 用這個三角形做全部作圖的基礎,然後再作其餘的部份.

(5) 假使尋不到這基礎三角形,可以作補助線以求得這三角形.

習題四十

求作三角形,已知:

1. $a, \quad b, \quad h_b.$
2. $\angle A, \quad b, \quad h_b.$
3. $\angle A, \quad b, \quad t_c.$
4. $\angle B, \quad a, \quad h_b.$
5. $a, \quad b, \quad h_c.$
6. $a, \quad m_a, \quad \angle B.$
7. $\angle A, \quad \angle B, \quad h_a.$
8. $a, \quad h_a, \quad m_a.$
9. $b, \quad h_a, \quad t_a.$
10. $a, \quad m_b, \quad m_c.$

11. a, m_a, m_b. 12. a, h_b, h_c.

13. $\angle B$, $\angle C$, h_a. 14. $\angle B$, $b+c$, a.

15. 已知等腰三角形的底及一腰的和,和一底角,求作此形.

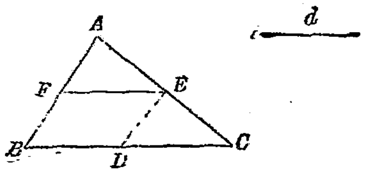
16. 已知三角形的一角,與這角的一隣邊,並其餘二邊的差,求作此形.

17. 已知直角三角形的斜邊和二直角邊的差,求作此形.

18. 已知直角三角形的斜邊和二直角邊的和,求作此形.

19. 已知等腰三角形的周界和底角,求作此形.

20. 求過三角形的兩邊作一線,和第三邊平行,使他在兩邊間的線分等於定長.



軌 跡

§213. **定義.** 一動點依照一定的幾何條件而移動,他所經的路,叫做動點的軌跡.

例如:在角的二等分線上,任何點與角的兩邊的距

離,常常相等;又與角的兩邊等距的各點,都在角的二等分線上,故與角的兩邊成等距離的點的軌跡,必是這角的二等分線.同樣,在圓周上任何點與圓心的距離都相等;又與圓心等距離的各點,都在一圓周上,故與定點成等距離的點的軌跡,就是用定點做圓心,定距離做半徑,所作的圓周.

從上面的例,可知在線上的各點,都適合於已知的條件;合於已知條件的各點,都在這線上,且在這線外,更無其他各點,足以適合這種條件,這種線才可稱爲動點的軌跡.

習題四十一

無須證明,試說出下列平面上的軌跡:

1. 鐘面上分針尖端軌跡是怎樣?

2. 平路上一車,直向前進,輪軸移動的軌跡怎樣?

3. 直街中行車,要和兩旁的距離一樣,他的軌跡是怎樣?

4. 上下二輪在平面上相切進行,輪心的軌跡是怎樣?

無須證明,作下列各軌跡的圖.

5. 求一動點距直線 AB 半公寸的軌跡.

6. 兩平行線相距一寸,求一動點距每線半寸的軌跡.

7. 用 $1\frac{1}{2}$ 寸做半徑,點 O 做圓心作圓,求在此圓外離圓周 $\frac{1}{2}$ 寸一動點的軌跡.

8. 用 $1\frac{1}{2}$ 寸做半徑,點 O 做圓心作圓,求在圓內距圓周 $\frac{1}{2}$ 寸處一動點的軌跡.

9. 用 $1\frac{1}{2}$ 寸做半徑,O 做圓心作圓,求距圓周 $\frac{1}{2}$ 寸處一動點的軌跡.

10. 甲圓密切乙圓而轉動,求甲圓圓心的軌跡.

§ **214.** **證軌跡法.** 依前面的定義,要證明一個圖形,是否適合某種條件的點的軌跡,應證明下列 (1) 及 (2) 或 (1) 及 (2′).

(1) 在線上的各點,都適合於所設的條件;

(2) 合於所設條件的各點,都在這線上,

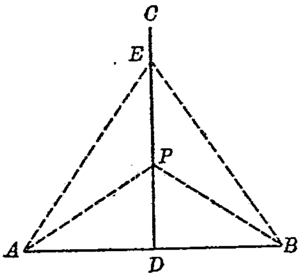
(2′) 不在線上的各點,都不適合於所設的條件.

假如與定點 O 距離一寸的點的軌跡,必是用 O 做圓心,一寸的距離做半徑的圓周.所以證的時候,不但要證明 (1),即在這圓周上的各點,能適合'與定點距離等於一寸'的條件,而且還要證明 (2),即凡能適合'與定點

距離等於一寸'的條件的各點,都在這圓周上;或(2'),卽不在這圓周的各點,不能適合'與定點距離等於一寸'的條件.

命題十一 定理

§215. 與定直線兩端等距離的點的軌跡,就是這線的垂直二等分線.



設AB是定直線,CD是他的垂直二等分線.

求證CD是與A,B二點等距離的點的軌跡.

證. 設在CD上任取一點P,作PA, PB,則$PA=PB$ (何故?)

卽在垂直二等分線上的各點,都適合於'與直線兩端等距'的條件(1).

又任取一點E,聯EA, EB,若$EA=EB$,

則E必在CD上. (何故?)

卽適合於'與直線兩端等距'的各點,必在垂直二等分線上(2).

故垂直二等分線CD,是所求的軌跡.

命題十二 定理

§216. 與相交二直線等距離的點的軌跡,是這二直線所成的角的二等分線.

因(1)在角二等分線上的各點'與角的兩邊等距';而且(2)與'角的兩邊等距'的各點,必在角二等分線上.

(學者試繪圖證明之).

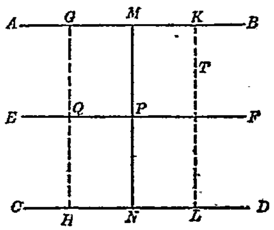
命題十三 定理

§217. 與已知點的距離等於已知距離的點的軌跡,是以已知點做圓心,已知距離做半徑的一個圓.

(學者試自證之).

命題十四 定理

§218. 與平行二直線等距離的點的軌跡,是公垂線的垂直二等分線.



設 AB, CD 是已知二平行線, MN 是他們的公垂線, EF 是 MN 的垂直二等分線.

求證 EF 是與 AB, CD 等距離

的點的軌跡.

證. 設點Q在EF上,通過點Q作AB,CD的公垂線GH.

則 $$GQ=HQ \quad (何故?)$$

即在EF上的各點必與AB,CD等距離(1).

又設點T在EF外,通過點T作AB,CD的公垂線KL

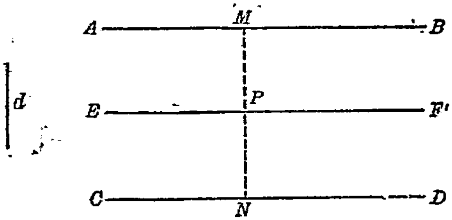
則 $$KT\neq LT \quad (何故?)$$

即不在EF上的各點,必不與AB,CD等距離(2).

故EF是與AB,CD等距離的點的軌跡.

命題十五 定理

§219. 與一已知直線的距離等於一定距離的點的軌跡,是和已知直線平行的上下二直線,其距離等於一定距離.



設EF是已知直線,d是定距離,AB,CD是平行於EF的二直線,其距離等於d.

求證AB, CD是和EF的距離等於定距離d的點的軌跡.

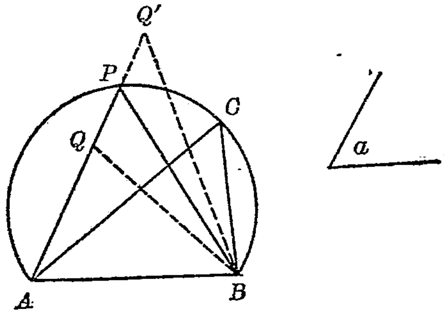
證. 因在AB, CD上的任一點,和EF的距離都等於d. (1)

又在AB, CD線外的任一點,和EF的距離都不等於d (2)

故AB, CD是所求的軌跡.

命題十六 定理

§220. 對於定直線兩端成定角的角頂軌跡,是用此線做弦,弓形角等於定角的弓形弧.



設AB是定線,$\angle ACB$等於定角$\angle a$.

求證動點C的軌跡是弓形$\overset{\frown}{ACB}$.

證. 在弧ACB上,任取一點P.

聯 PA, PB.

則 $\angle APB=\angle ACB=\angle a$. (何故?)

卽在弓形弧 ACB 上任一點,都合於所設條件. (1)

又在弧內取一點 Q, 在弧外取一點 Q'.

聯 QA, QB, $Q'A$, $Q'B$.

則 $\angle AQB>\angle P$; $\angle AQ'B<\angle P$.

因 $\angle P=\angle a$.

故 $\angle AQB$ 及 $\angle AQ'B$ 都不等於 $\angle a$.

卽不在弓形弧上任一點,都不合於所設條件.

故弓形弧 ACB 是動點 C 的軌跡.

命題十七 定理

§221. 已知直角三角形的斜邊是定長,則其直角頂點的軌跡是用斜邊做直徑所作的圓周.

(學者試自證之).

習題四十二

1. 一動圓切於二已知平行直線,則其圓心的軌跡,是平行於二已知平行直線中間的一直線.

2. 已知三角形底的位置是固定的,又高等於定

長，則此三角形頂點的軌跡，是平行於底的上下二直線.

3. 已知三角形底的位置及大小是固定的，底的中線等於定長，則此三角形頂點的軌跡是一圓周.

4. 在已知圓內，有定長的動弦，則此弦中點的軌跡，是一同心圓.

5. 從圓周上一定點，任作許多弦，這些弦中點的軌跡，是內切已知圓的一圓.

6. 在一圓內，有許多平行的弦，這些弦中點的軌跡，是此圓的直徑.

7. 一矩形的底邊的位置及大小是固定的，則其對角線交點的軌跡，是此矩形底邊的垂直二等分線

8. 一動圓，切於一已知直線上的一定點，則其圓心的軌跡，是過此定點而垂直於此已知直線的一直線.

9. 一動圓，切於一已知圓上的一定點. 則其圓心的軌跡，是過此定點及已知圓心的一直線.

§222. 上面的軌跡例子，已經說明了軌跡的圖形，只要證明一下就得. 現在要由軌跡的條件，求出這個軌跡來. 所謂軌跡，在初等幾何學裏，只限於直線和圓

兩種,所以可就這兩方面去著想.假如軌跡是直線,那末,是線的全長,還是一線段?假如軌跡是圓,則圓心的位置在那裏?半徑有多長?或是這圓應當經過那幾點?是全圓周,還是一部份圓弧?關於這類的軌跡問題,要按下列的程序解答:

第一步　把已知的軌跡條件寫出.

第二步　要求的軌跡是那一種圖形?

第三步　已知軌跡圖形後,把圖畫出,叫做作圖.

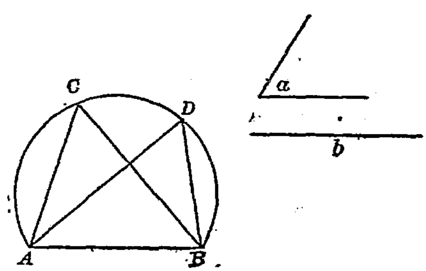
第四步　證明這軌跡是適合的,證明時,要注意:

1. 這軌跡上的任一點,都適合已知條件麼?

2. 適合需要的軌跡,祇限於這圖形麼?

例一. 已知三角形的底邊,頂角,求其頂點的軌跡.

設三角形的底邊等於 b,頂角等於 a.求此三角形頂點的軌跡.

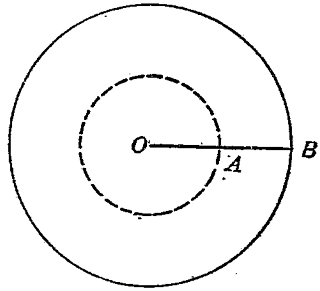


作圖. 作$AB=b$.

在 AB 上作弓形,使弓形角等於已知角 a.　(作法?)

則弓形弧 ACB 是所求的軌跡.

證. 同命題十六.



例二. 求一已知圓的半徑中點的軌跡.

設圓 O 是已知圓,點 A 是動半徑 OB 的中點.

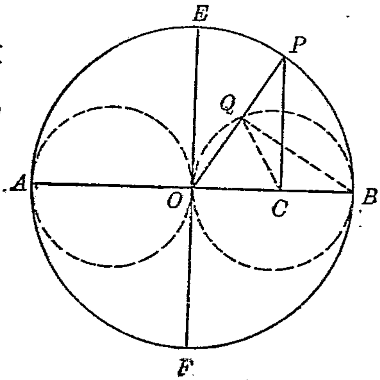
求動點 A 的軌跡.

作圖. 用 O 做圓心,OA 做半徑,作一同心圓.

則此同心圓是動點 A 的軌跡.

證. O 是定點,$OA=\frac{1}{2}OB=$定距離,故動點 A 的軌跡是用 O 做圓心,OA 做半徑所作的同心圓. (命題十三)

例三. 已知 O 是定圓,P 是圓周上一動點,從 P 到定直徑 AOB 引垂線 PC,在半徑 OP 上取點 Q,令 $OQ=OC$,求點 Q 的軌跡.



設 AOB 是定圓 O 的直徑,P 是圓周上的動點,$PC\perp AOB$, $OQ=OC$.

求動點 Q 的軌跡.

作圖. 用 OB 及 OA 做直徑作兩圓,則此兩圓都是動點 Q 的軌跡.

證. 聯 QB, QC.

因 $OP=OB,\quad CC=CQ,\quad \angle POC=\angle QOB$

$\therefore\quad \angle OQB=\angle OCP=rt\angle.$ (何故?)

因 OB 是定長, (半徑)

而 $\angle OQB=rt\angle.$

$\therefore$ 用OB做直徑所作的圓是動點Q的軌跡(命題十七)

若點P在半圓EAF上,則用OA做直徑作的圓,是動點Q的軌跡.

習題四十三

1. 若一圓切於一已知直線,且已知其半徑,求此圓圓心的軌跡.

2. 若一圓過一已知點,且已知其半徑,求此圓圓心的軌跡.

3. 若一圓過二定點,求此圓圓心的軌跡.

4. 若一圓切於二相交已知直線,求此圓圓心的軌跡.

5. 若一動圓,已知其半徑,且切於一定圓,求此動圓圓心的軌跡.

6. 過圓內一定點,任作許多弦,求這些弦中點的軌跡.

7. 從一點到一直線，任作許多斜線，求諸斜線中點的軌跡.

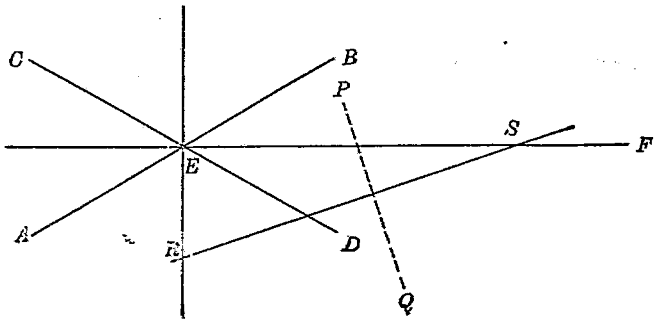
8. 已知一圓的切線，等於定長，求其端點的軌跡.

9. 一定長線段，其兩端在正交二直線上移動，求其中點的軌跡.

軌跡交截法

§223. 有許多題目,是要求一點或幾點同時適合兩個條件的,按照每個條件，求出各軌跡，這兩軌跡的相交點，就是需要的點，這交點叫做軌跡交點；求軌跡交點的方法,叫做軌跡交截法.

例一. 求一點與相交二直線等距離，且與二定點等距離.



設 AB, CD 二直線,相交於 E. P, Q 是二定點.

求一點與 AB, CD 等距離,且與 P, Q 等距離.

作圖 作 AB, CD 交角的二等分線 ER, ES. 又作 PQ 的垂直二等分線 RS.

則 RS 和 ER, ES 的交點 R, S 都是所要求的點.

證. R 與 AB, CD 等距離,

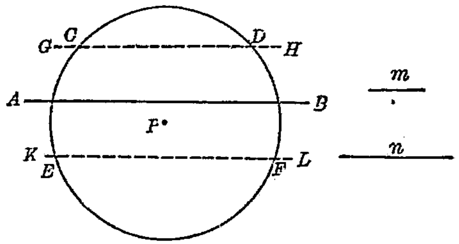
又與 P, Q 二定點等距離. (何故?)

故 R 是所求的一點.

同理, S 也是所求的一點.

討論. 若 PQ 垂直 EF 或 ER, 則所求的點,僅有一點.

例二. 求一點, 與一已知直線的距離等於定長 m 且與一已知點的距離等於定長 n.



設 P 是定點, AB 是定直線, m 和 n 是定距離.

求一點與 AB 的距離等於 m, 與 P 的距離等於 n.

作圖. 作平行於 AB 的上下二直線 GH, KL, 且使其

與 AB 的距離,都等於 m.

又用 P 做圓心, n 做半徑,作一圓,與 GH 交於 C, D; 又與 KL 交於 E, F.

則 C, D, E, F 都是所求的點.

證. $\because$ 點 C 與 AB 的距離等於 m, 與 P 點的距離等於 n. (何故?)

$\therefore$ C 是所求的一點.

同理, D, E, F 都是所求的點.

討論. 1. 若圓與二平行線相交,則可得四點.

2. 若圓與一平行線相交,一平行線相切,則可得三點.

3. 若圓與二平行線相切,則可得二點.

4. 若圓與一平行線相切,一平行線不相遇,則只可得一點.

5. 若圓與二平行線都不相遇,則無交點.

習題四十四

1. 在一已知直線 AB 上,求一點與一已知直線 CD 的距離等於定距離 d.

2. 在一已知直線 AB 上求一點與兩定點 P 和 Q 等距離.

3. 在一已知圓上,求一點與一定點C的距離等於定距離.

4. 在一已知圓上,求一點與已知二平行線CD和EF等距離.

5. 求一點與二已知相交直線AB和CD等距離,且與另一已知直線EF的距離等於定距離.

6. 求一點,與二定點等距離,且與一定點E的距離等於已知距離.

7. 求一點,與二定點等距離,且與二已知平行直線EF和GH等距離.

8. 求一點,與二已知平行直線等距離,且與二已知相交直線EF和GH等距離.

9. 求一點,與一已知直線AB的距離等於定距離d,且與二定點E和F等距離.

10. 求一點,與一已知直線AB的距離等於定距離d,且與二已知平行直線EF和GH等距離.

11. 已知半徑,求作一圓,過一定點,且切於一已知直線.

12. 已知半徑,求作一圓,過一定點,且切於一已知圓.

13. 已知半徑,求作一圓,切於二已知相交直線.

14. 已知半徑,求作一圓,切於二已知圓.

15. 已知半徑,求作一圓,切於一已知圓和一已知直線.

16. 求作一圓,過一已知直線外的一點,且切於這已知直線上的一定點.

17. 求作一圓,切於一已知圓上的一定點,且過圓外的另一定點.

18. 求作一圓,切於一已知直線及一已知圓上的一定點.

【示意】 從圓上的一定點作一切線.

19. 求作一圓,使過一定點,且切於二已知平行線.

20. 已知 $a, h_a, \angle A$, 求作一三角形.

21. 已知 $a, m_a, \angle A$, 求作一三角形.

雜題

1. 已知頂角,底邊及一腰的和,求作一等腰三角形.

2. 已知一銳角及斜邊上的高,求作一直角三角形.

3. 已知一銳角及兩直角邊的和,求作一直角三角形.

4. 從圓上一點 P, 作與圓心距離等於已知距離的弦.

5. 在一已知圓內,作一直徑,與一定點的距離等於已知距離.

6. 從一已知圓上的二定點,作相等且平行的二弦.

7. 三等分一直角.

8. 從所設二平行直線間的一定點,作一直線,止於此二平行線,且等於定長.

9. 過一定點,作一直線,使與所設二直線成等角.

10. 作已知二直線所成的二等分線,但此二直線,不得延長使其相交.

作一三角形,已知(11–19):

11. $a, \angle B, h_a$

12. $\angle A, \angle B, t_c$

13. $\angle A, h_a, t_a$

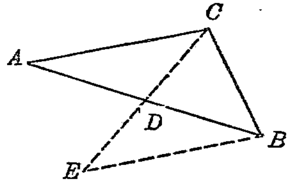
14 $a+b+c, \angle B, \angle C$

15. $h_a, h_b, \angle B$

16. a, h_a, R (R=外接圓的半徑)

17. a, b, m_c

【示意】 延長 m_c 使等於原長.



(17)

18. $a, m_c, \angle C$

19. m_a, m_b, m_c

20. 已知一邊與對角線的差,求作一正方形.

21. 已知一邊與對角線的和,求作一正方形.

22. 已知一邊及二對角線所成的角,求作一矩形.

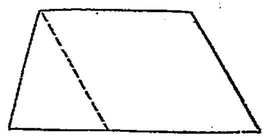
23. 已知周圍和一對角線,求作一菱形.

24 已知一角和一對角線,求作一菱形.

25. 已知相隣二邊和一高,求作一平行四邊形.

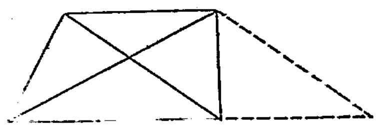
26. 已知四邊,求作一梯形.

27. 已知二底邊及二下底角,求作一梯形.


(26)—(28)

28. 已知二底邊,一腰,及一底角,求作一梯形.

29. 已知二底邊及二對角線,求作一梯形.


(29) (30)

30. 已知一底邊,二對角線,和二對角線所成的角,

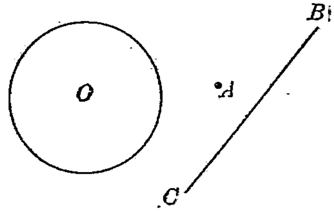
求作一梯形.

31. 已知三個角,作一三角形,使外切於一已知圓.

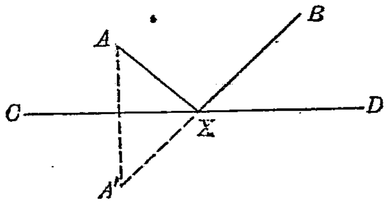
32. 已知三個角,作一三角形,使內接於一已知圓.

33. 從圓上一定點作一弦,被一已知弦二等分.

34. A是一圓和一線間的一點,求過點A作一線被圓周和直線所截,他們中間的線分被點A二等分.



35. A和B是直線CD同側的兩點,求在CD上找一點X,使 $\angle AXC = \angle BXD$.



37. 求從一已知圓外一定點所作割線中點的軌跡.

36. 一個平行四邊形的底邊的長和位置是固定的,其鄰邊等於定長.求兩對角線交點的軌跡.

38. 一三角形頂角的大小一定,底的位置及大小都一定,求其垂心的軌跡.

39. 求前題中三角形內心的軌跡

40. AB是圓的一直徑,從其一端A,引任意弦AC,延長至M,使$CM=BC$,求點M的軌跡.

第四章提要

作圖題

I. 三角形.

1. 已知三邊作三角形.

2 已知兩邊和夾角作三角形.

3 已知兩角和夾邊作三角形.

4 已知兩角和一非夾邊作三角形.

5 已知兩邊和其中一邊的對角作三角形.

II. 切線.

1. 由一已知點作一已知圓的切線.

2. 作已知兩圓的內公切線.

3. 作已知兩圓的外公切線.

III. 圓或圓弧.

1. 作三角形的外接圓.

2. 作三角形的內切圓.

3. 在已知直線上作弓形弧,使他所含的角等於一已知角.

軌 跡

I. 直線.

1. 與定直線的兩端等距離的點的軌跡是這線的垂直二等分線.

2. 與相交二直線等距離的點的軌跡是這二直線所成的角的二等分線.

3. 與平行二直線等距離的點的軌跡是公垂線的垂直二等分線.

4. 與一已知直線的距離等於一定距離的點的軌跡是和已知直線平行的上下二直線.

II. 圓或圓弧.

1. 與一定點的距離等於已知距離的點的軌跡是以定點做圓心已知距離做半徑所作的一個圓周.

2. 對於定直線兩端成定角的角頂的軌跡是用此線做弦,弓形角等於定角的弓形弧.

3. 斜邊等於定長的直角三角形的直角頂的軌跡,是用斜邊做直徑所作的圓周.

第五章 比例

比例

§224. **定義.** 比例是表示二比相等的等式,如

$$a:b=c:d,\text{ 或 }\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

§225. **定義.** 比例的第一和第四兩項叫做外項;第二和第三兩項叫做內項.

第一和第三兩項是前項,第二和第四兩項是後項.

如在 $a:b=c:d$ 比例中,a 和 d 是外項,b 和 c 是內項,a 和 c 是前項,b 和 d 是後項.

§226. **定義.** 比例的末項是前三項的第四比例項.

如在 $a:b=c:d$ 比例中,d 是 $a, b,$ 和 c 的第四比例項.

§227. **定義.** 若 $a:b=b:c=c:d=d:e$,則 a, b, c, d, e 成連比例.

若三量成連比例,則第二量是首,末二量的比例中項,第三量是前二量的第三比例項.

如在 $a:b=b:c$ 比例中,b 是 a 和 c 的比例中項,c 是 a

和 b 的第三比例項.

基礎定理

§228 定理一. 在任何比例式中,兩外項的積,等於兩內項的積.

(學者試用代數法證之).

§229. 定理二. 若有兩數的積,等於他兩數的積,則以任兩數做內項,其他兩數做外項,必成比例.

設 $ad=bc$

求證 $a:b=c:d$

證. $ad=bc$

兩邊同用 bd 來除則,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

§230. 定理三. 二量的比例中項,等於這二量相乘積的平方根.

如 $a:b=b:c$, 則 $b=\sqrt{ac}$.

§231. 定理四. 若 $a:b=c:d$, 則 $a:c=b:d$.

證. $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$ad=bc$$

$$\therefore\quad a:c=b:d.$$

§232. **定理五.** 若 $a:b=c:d$, 則 $b:a=d:c$.

(學者可自證之)

§233 **定理六.** 若 $a:b=c:d$, 則

(1) $(a+b):b=(c+d):d$;

(2) $(a-b):b=(c-d):d$;

(3) $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

證. (1) $\because\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

則 $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

(2) 同上理, $\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{c}{d}-1$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

(3) 由 (1)÷(2), 即得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

§234. **定理七.** 若 $a:b=c:d=e:f$, 則

$$(a+c+\ ):(b+d+f)=a:b.$$

證. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=r$

則　　$a=br,\ c=dr,\ e=fr$

相加,得　　$a+c+e=(b+d+f)r$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e}{b+d+f}=r=\frac{a}{b}.$$

§235. **定理八.** 若 $a:b=c:d$, 則

(1)　$ma:mb=nc:nd$;

(2)　$a^n:b^n=c^n:d^n$;

(3)　$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

(學者可自證之)

習題四十五

1. 求 $3b^2$ 和 $9a^2$ 的比例中項.

2. 求 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{10}{3}$ 的第三比例項.

3. 改變比例式 $m:x=p:q$, 使 x 做第四項;第一項;第三項.

4. 若 $(x+y):y=7:3$, 求 x 與 y 的比.

5. 若 $(x-y):y=2:3$, 求 x 與 y 的比.

6. 若 $(x+y):(x-y)=a:b$, 求 x 與 y 的比.

7. 若 $\frac{x-a-c}{y-b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 求 $x:y$.

8. 若 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, 求 $x+y+z$ 與 z 的比.

9. 若 $\sqrt[3]{x}:1=\sqrt[3]{y}:2$, 求 $\frac{x}{y}$.

10. 若 $(x+y):(x-y)=3:1$, 求 $\frac{x^2}{y^2}$.

11. 若 $x^2:4a^2=y^2:b^2$, 求 x^3 與 y^3 的比.

12. 設 $a:b=c:d$ 和 $m:n=p:q$,
試證 $am:bn=cp:dq$.

13. 設 $a:b=c:d$, 試證 $a:b=bc:d^2$.

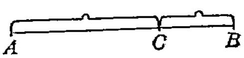
14. 設 $a:b=c:d$, 試證 $ma:nb=mc:nd$.

15. 設 $a:b=b:c$, 試證 $a:c=b^2:c^2$.

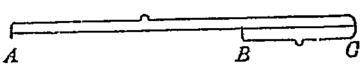
16. 設 $a:b=b:c$, 試證 $(b+\sqrt{ac})(b-\sqrt{ac})=0$.

比例線段

§236. **定義.** 在 AB 線內,或在 AB 的引長線上,取一點 C, 則 AC 和 BC 叫做 AB 被點 C 分成兩線段.



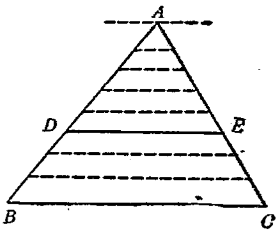
若點 C 在 AB 線內,就叫做內分;若點 C 在 AB 的引長線上,就叫做外分.



命題一 定理

§237. 平行於三角形一邊的直線,必分他二邊成

比例線分.



設在 $\triangle ABC$ 內, $DE \parallel BC$.

求證　$AD:DB=AE:EC$

證. 設 $AD:DB=m:n$, m 與 n 是正整數,就將 AD 分做 m 等分, DB 分做 n 等分

經過每一分點,作 BC 的平行線,這些直線,必定將 AE 分做 m 等分, EC 分做 n 等分,各等分互相等. (何故?)

故　$$AE:EC=m:n$$

$$\therefore\quad AD:DB=AE:EC.$$

【注意】 若這平行截線與三角形的兩邊相交,這二邊被內分成等比;若與二邊延長線相遇,這兩邊被外分成等比.

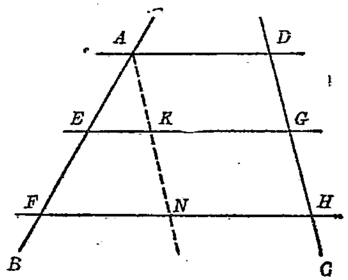
§238. 推論一. 一直線平行於三角形的一邊,則他一邊比其一線段,等於第三邊比其相當線段.

因　$$AB:DB=AE:EC$$

$$\therefore\quad (AD+DB):DB=(AE+EC):EC$$

或　$$AB:DB=AC:EC$$

§239. 推論二. 兩線被平行諸線所截,他的相當諸線分成比例.



設 AB, CD 兩線被 AD, EG 等諸平行線所截,

求證 AB, CD 上相當各線段成比例.

證. 作 $$AN \parallel CD,$$

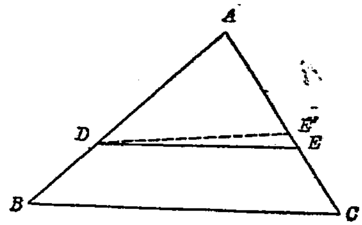
則 $$AK=DG, KN=GH. \qquad \text{(何故?)}$$

但 AN 上各線段與 AB 上各相當線段都成比例.

故 CD 上各線段也與 AB 上各相當線段成比例.

命題二 定理

§240. 一線分三角形的兩邊成比例,必與第三邊平行.



設 DE 是分三角形 $\triangle ABC$ 中 AB, AC 兩邊的線,且

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

求證 $DE \parallel BC$

證. 從 D 作 DE' 平行於 BC,

則 $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE'},$$ (何故?)

今 $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE},$$

$$\therefore \frac{AC}{AE'}=\frac{AC}{AE};$$

$$\therefore AE'=AE,$$

故 AE', AE 合成一線.

今 $DE' \parallel BC$

$$\therefore DE \parallel BC.$$

§241. 推論. 若一直線,分一三角形的二邊,使一邊與其一線分的比等於第二邊與其相當線分的比,則此直線平行於第三邊.

習題四十六

1. 把18寸的直線,外分成3:2之比.

2. 一18寸長的直線,分成三線分,成連比2:3:4,求各線分的長.

3. 在命題一的圖中,若 $AE=2DB$, $AD=10$, $EC=20$,求 AE.

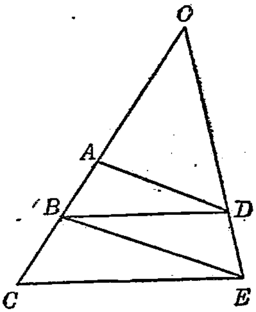
4. 在同圖中,若 $AB=a, AD=b, AC=c$, 求 EC.

5. 在同圖中,若 $AD=2AE$, 又 $DB=6$, 求 EC.

6. 在同圖中,若 $AD=8, DB=AE$, 又 $AC=6$, 求 DB 和 EC.

7. 在同圖中,若 $AD=8, AE=\frac{DB}{2}, EC=1$, 求 DB 和 AE.

8. 在同圖中, $AD=12, DB=16, AE=15, EC=20$, 問 DE 和 BC 是否平行?



9. 在右圖中,若 $BD \parallel CE$, 又 $AD \parallel BE$, 則

$$OA : OB = OB : OC.$$

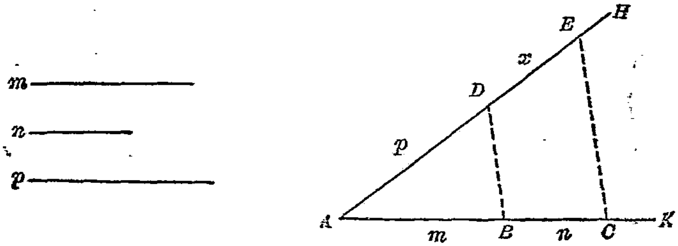
10. 在四邊形 $ABCD$ 的四邊 AB, BC, CD, DA 上,順次各取一點 M, N, P, Q, 使 $AM : MB = AQ : QD$, 及 $BN : NC = DP : PC$. 試證 $MQ \parallel NP$.

命題三　作圖題

§242. 求已知三線段的第四比例項

設三線段 m, n, 和 p.

求作 m, n 和 p 的第四比例項.



作圖. 作任意角 KAH.

在 AK 上, 取 $AB=m$, $BC=n$; 在 AH 上, 取 $AD=p$,

作 BD.

過點 C, 作一直線平行於 BD, 遇 AH 於 E.

DE 卽所求的第四比例項.

證. $m:n=p:x$ (何故?)

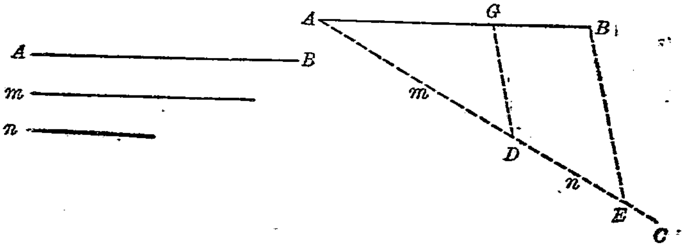
命題四 作圖題

§243. 求二線段的第三比例項.

(學者試自解之)

命題五 作圖題

§244. 分一已知線段成二線分, 與已知二線段成比例.



設 AB 是已知線段, m 和 n 是已知二線段.

求 分 AB 成二線分, 使其比等於 m 和 n 之比.

作圖. 作 AC 與 AB 成一任意角 A.

在 AC 上, 截取 $AD=m$, $DE=n$, 聯 BE.

過點 D, 作一直線平行於 BE, 與 AB 交於 G.

AB 卽被分成所設的比.

(學者試自解之)

習題四十七

1. 設已知線段 a 和 b, 作一線段 $x=\frac{b^2}{a}$.

2. 作 $x=a(a+b)\div b$.

3. 分一已知線段成三線分, 其比等於三已知線段的連比.

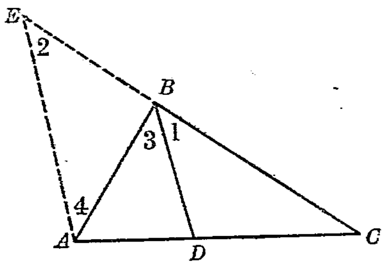
4. 作二線段, 已知這二線的和, 及其比.

5. 作二線段, 已知這二線的差, 及其比.

6. 在一已知線段 AB 上,求一點 C,使

$$AB:AC=m:n$$

命題六 定理



§245. 三角形一角的二等分線,把對邊分成兩線段的比,等於此角二鄰邊的比.

設 BD 二等分 $\angle B$

求證 $AD:DC=AB:BC.$

證. 作 $AE \parallel DB$, 交 CB 的引長線於 E.

則 $\angle 1=\angle 2$ (何故?)

$\angle 3=\angle 4$ (何故?)

今 $\angle 1=\angle 3$

$\therefore\ \angle 2=\angle 4$

$\therefore\ AB=BE$ (何故?)

但 $AD:DC=BE:CB$ (何故?)

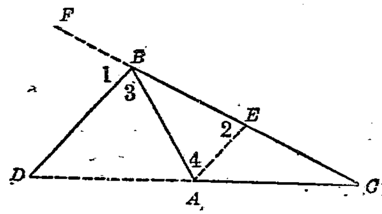
$\therefore\ AD:DC=AB:CB.$

命題七 定理

§246. 三角形一外角的二等分線,外分對邊成兩線

段,與其二鄰邊成比例.

設在$\triangle ABC$中,BD二等分外角ABF.



求證

$AB:BC=AD:DC$

證. 作$AE \parallel BD$,遇BC於E.

則 $$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4$$ (何故?)

今 $$\angle 1=\angle 3$$

$$\therefore\ \angle 2=\angle 4$$

$$\therefore\ AB=BE$$

但 $$BE:BC=AD:DC,$$

$$\therefore\ AB:BC=AD:DC.$$

習題四十八

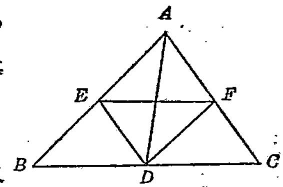
1. 在命題六圖中,若$AB=DC$, $AD=4$, $BC=6$, 求AB.
2. 在同圖中,若$AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, 求AD及DC.
3. 在命題七圖中,若$AB=3$, $BC=4$, $AC=5$, 求AD.
4. 在同圖中,若$DA=BC$, $BA=4$, $DC=9$, 求DA.
5. 在同圖中,若$BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, 求DC和DA.
6. 求分三角形的一邊成兩線段,與他二邊成比例

7. 試外分三角形的一邊成兩線段,與他二鄰邊成比例.

8 試述命題六的逆定理,並證明之.

9. 試述命題七的逆定理,並證明之.

10. D是$\triangle ABC$底BC的中點,DE, DF是$\angle ADB$, $\angle ADC$的二等分線,求證$EF \parallel BC$.

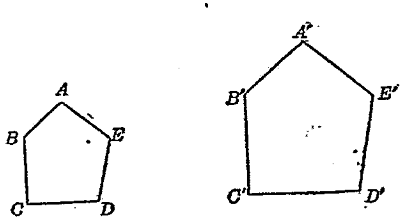


11. 三角形頂角的內角的二等分線,內分對邊的兩分,與外角的二等分線外分對邊的兩分成比例.

【註】 設將一已知線,內外分之,其兩線分的比相等,則此線叫做調和分割.

相似多邊形

§ 247. **定義.** 諸多邊形的相當角相等,相當邊成比例,這諸多邊形叫做相似形.

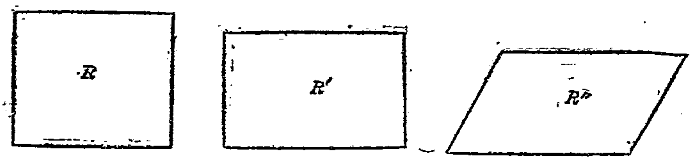


設$ABCDE$, $A'B'C'D'E'$兩個多邊形,若$\measuredangle A, B, C, D, E$,順次等於$\measuredangle A', B', C', D', E'$,且

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots.$$

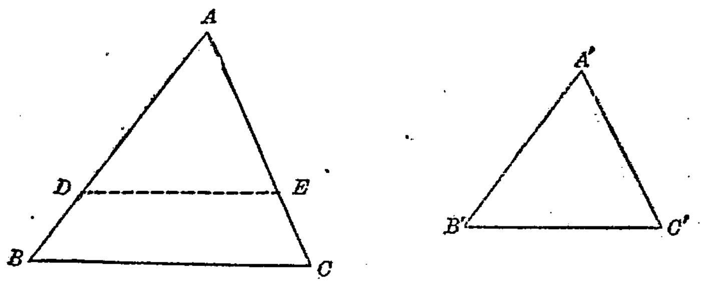
則這兩多邊形叫做相似多邊形.

【注意】 相似即形狀相像的意思,必須具有本定義所設的條件,否則不成立.例如相當角相等相當邊不成比例,如R和R';或相當邊成比例相當角不等,如R'和R'',都不是相似形;但三角形是例外.



命題八 定理

§248. 兩三角形若有三角彼此各各相等,則此兩三角形相似.



設在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'$$

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

證. 用疊合法使 $\triangle A'B'C'$ 落在 ADE 位置.

$$\because\ \angle ADE=\angle B \quad \therefore\ DE \parallel BC$$

$$\therefore\ AD:AB=AE:AC$$

即 $A'B':AB=A'C':AC.$

同樣,可證 $A'C':AC=B'C':BC$

$$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

§249. 推論一. 兩三角形若有兩角彼此各各相等,則兩三角形相似.

§250. 推論二. 兩直角三角形,若有一銳角彼此各相等,則兩三角形相似.

§251. 推論三. 平行於三角形一邊的直線截成一三角形,與原三角形相似.

習題四十八

1. 若圓內二弦 AB, CD 相交於 E, 則

$$\triangle AEC \backsim \triangle BED$$

2. 若從圓外一點 A 作二割線交圓周於 B 及 C, D 及 E, 則 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$

3. 若$\triangle ABC$的二高AD和BE相交於F,則

$$\triangle AFE \backsim \triangle BFD$$

4. 若內接三角形ABC的角A的二等分線AD,交外接圓周於E,則 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$

5. 兩等腰三角形,若有一角彼此相等,則兩形相似.

【注意】 證明四線段成比例,常常先證出一對三角形相似.

6. 梯形的二對角線互相分成比例線段.

7. 在$\triangle ABC$中,作高AD和BE;

求證 $AE : AD = FE : DC$

8. 從圓內接$\triangle ABC$的頂點A作高AD及外接圓直徑AF,則 $AB : AD = AF : AC$

9. 在直角三角形ABC內,作斜邊上的高AD,則

$$AD : AB = AC : BC$$

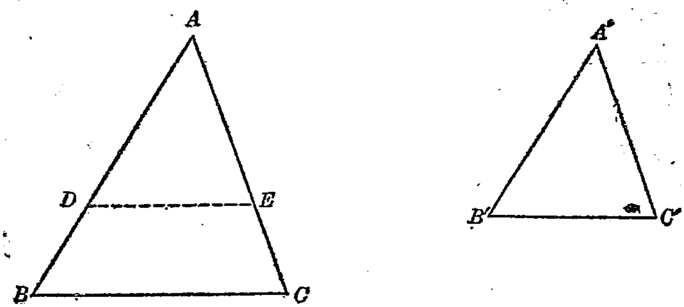
10. 將$\triangle ABC$內角C的二等分線CD延長遇外接圓周於E,則 $EB : EC = DB : CB$

11. 在上圖中,試證 $AD : EB = AC : CE$.

12. 相似三角形相當角的二等分線,與其相當邊成比例.

命題九 定理

§252. 兩三角形若有一角互相等,夾角的兩邊成比例,則此兩三角形相似.



設在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A=\angle A'$

又 $AB:A'B'=AC:A'C'$

求證 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

證. 用疊合法將 $\triangle A'B'C'$ 落於 $\triangle ADE$ 位置.

$\because \quad AB:AD=AC:AE$

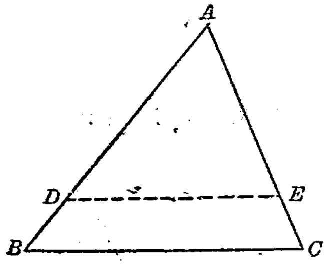
$\therefore \quad DE\parallel BC$

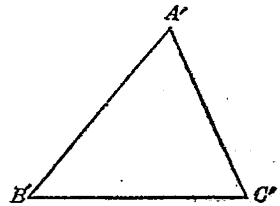
$\therefore \quad \triangle ABC\backsim\triangle ADE$

即 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

命題十 定理

§253. 若兩三角形的三邊對應成比例,則此兩三角





形相似.

設在 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$ 中,

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

證. 在 AB, AC 上順次取 $AD=A'B'$, $AE=A'C'$;聯結 DE.

則 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ (何故?)

$\therefore\ AD:AB=DE:BC$

但 $A'B':AB=B'C':BC$

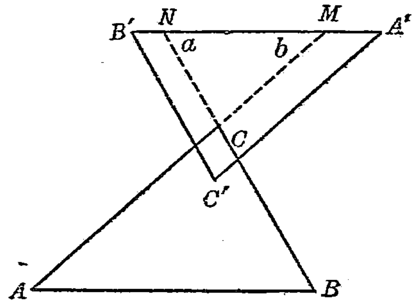
因 $AD=A'B'$ $\therefore\ DE=B'C'$

故 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ADE$

$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

命題十一 定理

§254. 若兩三角形的三邊兩兩平行,則此兩三角



形相似.

設在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中,

$$AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ CA \parallel C'A'$$

求證 $$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

證. 引長 BC 到 N, AC 到 M.

則 $$\angle B = \angle a,\quad \angle A = \angle b$$

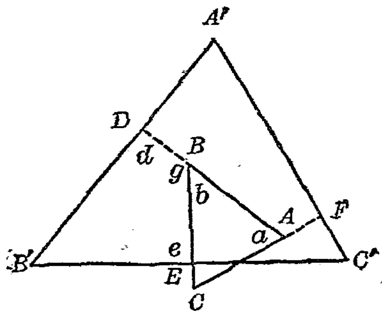
但 $$\angle a = \angle B',\ \angle b = \angle A'$$

$$\therefore\quad \angle B = \angle B',\ \angle A = \angle A'$$

$$\therefore\quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

命題十二 定理

§255. 若兩三角形的三邊兩兩垂直,則此兩三角形相似.



設在$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$中,

$$AB \perp A'B',\ BC \perp B'C',\ CA \perp C'A'$$

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

證. 引長AB到D, CA到F.

則在四邊形$B'EBD$中,

$$\angle e = \angle d = rt\angle$$

故$\angle g$與$\angle B'$互為補角.

但$\angle g$與$\angle b$互為補角,

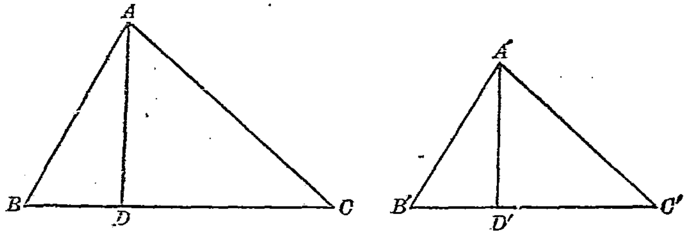
$$\therefore \quad \angle B' = \angle b$$

同樣,可證 $\angle A' = \angle a$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

命題十三　定理

§256. 若二三角形相似,則相當高的比等於任意二



相當邊的比.

設 ABC 和 $A'B'C'$ 是二相似三角形, AD 和 $A'D'$ 是二相當的高.

求證　$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

證.　$\because\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

$\therefore\ \angle B=\angle B'$

又　$\angle BDA=\angle B'D'A'=rt\angle$

$\therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$

$\therefore\ \dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$

但　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

$\therefore\ \dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

習題四十九

1.　在二相似三角形內,二相當中線的比等於任

意二相當邊的比.

2. 若高AD：高$A'D'=BC:B'C'$,又$\angle B=\angle B'$,則

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

3. 若一三角形的二邊及二邊中一邊的中線,與其他三角形的相當部分成比例,則此二三角形相似.

4. 若一直角三角形的斜邊與一直角邊的比,等於其他直角三角形的斜邊與一直角邊的比,則此二直角三角形相似.

5. 在二相似三角形內二外接圓半徑的比,等於任意二相當邊的比.

【注意】 要證明此兩線段的相乘積等於他兩線段的相乘積,可將他們寫成兩個內項同外項成一比例,再找出一對適合的相似三角形.

6. 在弦AB上任取一點E,作EC垂直於直徑AD,則

$$AC\times AD=AB\times AE$$

7. 直角三角形二直角邊的積等於斜邊與其高的相乘積.

8. 三角形一邊與其高的相乘積等於他一邊與其高的相乘積.

9. $\triangle ABC$內的兩高AD, BE相交於F,則

$$BF \times BE = BC \times BD$$

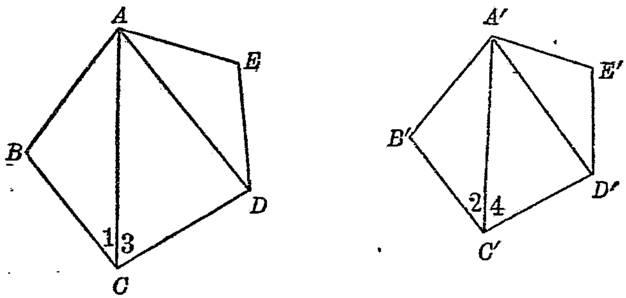
10. 同上圖，再證 $BD \times DC = DF \times AD$

11. 若 AB 是直徑, BD 是切於 B 的切線, DA 遇圓周於 E, 則　$AB^2 = AE \times AD$

12. 若在 $\triangle ABC$ 內,作二高 AD 及 BE,又 $BE=6$, $EC=3$, $DC=2$, 求 AD.

命題十四　定理

§ 257. 二相似多邊形可分成同數的相似三角形,各各相似,且地位亦相似.



設　多邊形 $ABCDE \backsim$ 多邊形 $A'B'C'D'E'$.

求證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$

……………………………

證　$AB : A'B' = BC : B'C'$, 及 $\angle B = \angle B'$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (何故?)

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4,$

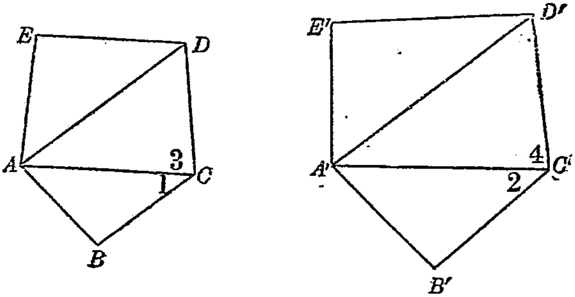
又 $AC : A'C' = CB : C'B' = CD : C'D'.$ (何故?)

$\therefore \quad \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ (何故?)

同法,可證 $\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'.$

命題十五　定理

§258. 若二多邊形由同數的三角形組成,各各相似,且地位亦相似,則二多邊形相似.



設在多邊形$ABCDE$及$A'B'C'D'E'$內,$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$,$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$等等,且地位亦相似.

求證　多邊形$ABCDE \backsim$多邊形$A'B'C'D'E'$.

證.　$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

$$\therefore \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'},\ \angle 1 = \angle 2$$

$\because \quad \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$

$\therefore \quad \frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}, \angle 3=\angle 4$

$\therefore \quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$

$\therefore \quad \angle C=\angle C'$ (何故?)

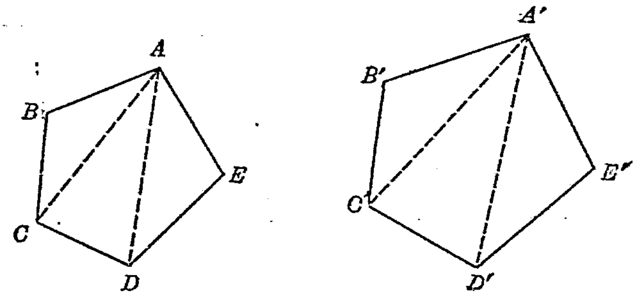
同理可證 $\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\cdots\cdots$

又 $\angle D=\angle D', \angle E=E'$

$\therefore$ 多邊形 $ABCDE \backsim$ 多邊形 $A'B'C'D'E'$.

命題十六 作圖題

§ 259. 在已知多邊形一邊的相當線上,作一多邊形與已知多邊形相似.



設多邊形 $ABCDE$, $A'B'$ 是 AB 的相當邊.

求作一多邊形與 $ABCDE$ 相似.

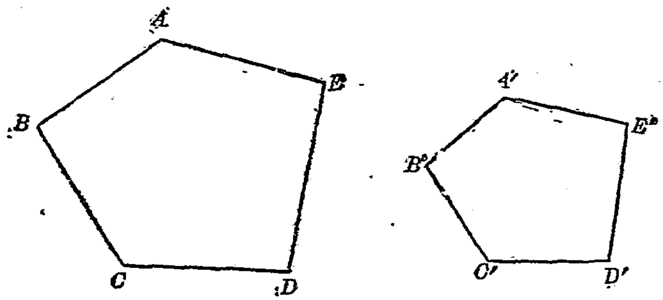
作圖. 從已知多邊形一頂點如 A, 作所有的對角線. 在 A' 及 B', 作角使 $\angle B'A'C'=\angle BAC$, $\angle B'=\angle B$. 引長二邊使遇於 C'. 在 A' 及 C' 作角,使 $\angle C'A'D'=\angle CAD$, $\angle A'C'D'=\angle ACD$ 等等, 即能作成所求的多邊形 $A'B'C'D'E'$.

證. $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$, $\triangle C'A'D'\backsim\triangle CAD$ 等等. (何故?)

$\therefore$ 多邊形 $A'B'C'D'E'\backsim$ 多邊形 $ABCDE$.

命題十七　定理

§260. 二相似多邊形的周圍的比,等於任意二相當邊的比.



設 P 及 P' 是二相似多邊形 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 的周圍

求證 $P:P'=AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D',=\cdots\cdots$

證. $\because \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$

$$\therefore \quad \frac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{A'B'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots\cdots$$

即 $\quad \frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots\cdots$

習 題 五 十

1. 已知一平行四邊形,在已知底邊 AB 上作一相似平行四邊形.

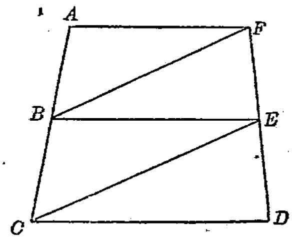
2. 二相似多邊形的周圍的比等於任意二相當對角線的比.

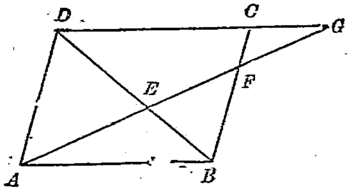
3. 二相似三角形的周圍的比等於任意二相當高的比.

4. 二相似多邊形的周圍是 20 及 25 寸,若一多邊形的一邊是 4 寸,求他一多邊形相當邊的長.

5. 在命題十七的圖中,求 $ABCDE$ 的周圍,若 $A'B'C'D'E'$ 的周圍是 20 寸, $A'B'=4$ 寸, $B'C'=3$ 寸, $AC=10$ 寸, $B'C':A'B'=A'B':A'C'$, 及 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$.

6. 設 $AF \parallel BE \parallel CD$, $BF \parallel CE$, 試證 $ABEF$ 與 $BCDE$ 相似.





【注意】 要證明四線段成比例,假如找不着一對相似三角形,就找第三個比值,同每個比值相等.

7. 在二相似三角形內,其內切圓半徑的比等於任意一對相當邊的比.

8. 若$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$是二相似三角形,AD及$A'D'$是角二等分線,AF及$A'F'$是高,求證

$$AD : A'D' = AF : A'F'$$

9. 在二相似三角形ABC和$A'B'C'$的BC及$B'C'$邊上,各取一點D及D',使$\angle BAD = \angle B'A'D'$,求證

$$BD : B'D' = BC : B'C'.$$

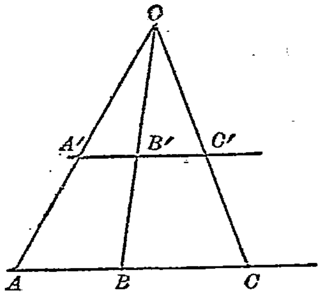
10. 設在平行四邊形$ABCD$內,作AG遇對角線BD於E,遇邊BC於F,引長邊DC與AG交於G,試證

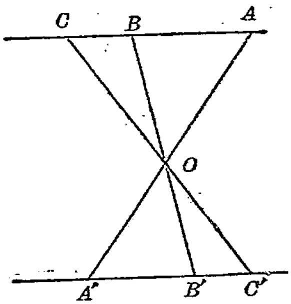
$$\overline{EA}^2 = EF \times EG.$$

【示意】 證明 $\frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG}$.

命題十八 定理

§261. 設兩平行線被經過同一點的數直線所截,則截取的對應線段成比例.





設截線 OA, OB, OC 截平行線 AC 及 $A'C'$ 於 A, B, C, 及 A', B', C'.

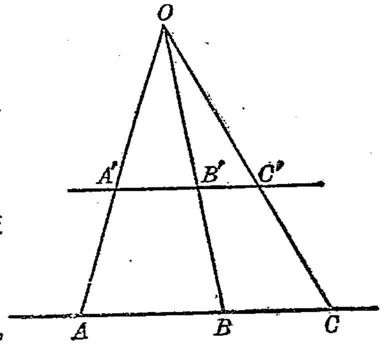
求證 $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

證. $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{O'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$ (何故?)

命題十九 定理

§262 設兩平行線被數橫截線所截,若截取的相當線段成比例,則此數截線必經過同一點.

設 AA', BB', CC' 三截線,截二平行線 AC, $A'C'$ 於 $A, B,$



C, 及 A', B', C', 而

$AB : A'B' = BC : B'C'$

求證 AA', BB', 及 CC' 交於同一點.

證 設 AA' 與 BB' 的交點是 O.

作 OC' 引長交 AC 於 D,

則 $AB : A'B' = BD : B'C'$ (何故?)

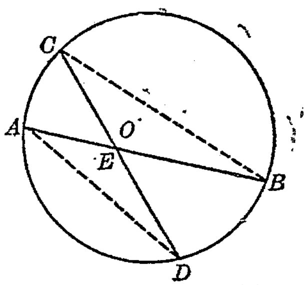
但 $AB : A'B' = BC : B'C'$

$\therefore \quad BD = BC$

故點 D 與點 C 重合.

卽 C, C' 所決定的一直線必過點 O.

命題二十 定理



§263. 若二弦相交於圓內,則一弦的二線分的積等於他一弦的二線分的積.

設在⊙O 內,弦 AB 和 CD 相交於 E.

求證 $AE \times EB = CE \times ED$

證. 作 CB 和 AD

$$\because \quad \angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D \qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore \quad \triangle CEB \backsim \triangle AED$$

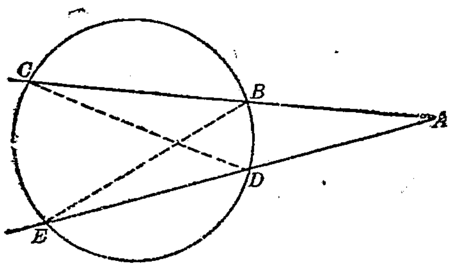
$$AE:CE=ED:EB$$

$$\therefore \quad AE\times EB=CE\times ED.$$

§264. 推論. 過圓內一定點的弦的二線分的積常相等.

命題二十一 定理

§265. 若從圓外一定點作二割線,則一割線與其圓外線分的積等於他一割線與其圓外線分的積.



設二割線 AC 及 AE 遇圓於 $B, C, D,$ 及 $E.$

求證 $$AC\times AB=AE\times AD$$

證. 作 CD 及 $EB.$

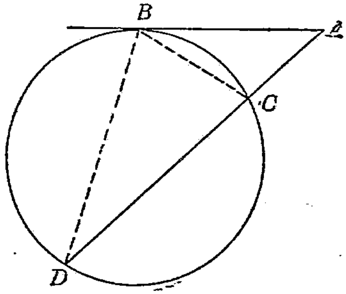
$$\because \quad \angle C=\angle E,\ \angle A=\angle A$$

$$\therefore\quad \triangle CDA \backsim \triangle EBA$$

$$\therefore\quad AC : AE = AD : AB$$

$$\therefore\quad AC \times AB = AE \times AD.$$

命題二十二 定理



§266. 若從圓外一點,作一切線及一割線,則切線是割線和他圓外線分的比例中項.

設切線 AB 切 $\odot BDC$ 於 B, 又割線 AD 與圓相交於 C 和 D.

求證 $AD : AB = AB : AC$

證. 作 BD 和 BC, 則

$\angle D = \angle CBA$ (何故?)

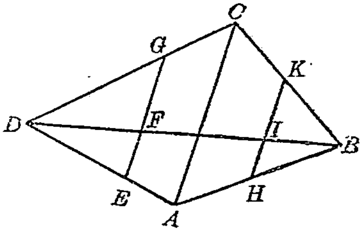
$\angle A = \angle A$

$$\therefore\quad \triangle DBA \backsim \triangle BCA$$

$$\therefore\quad AD : AB = AB : AC.$$

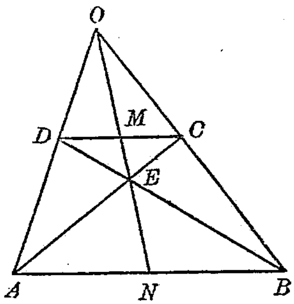
§267. 推論. 若從圓外一點作任意一割線,則割線全部與其圓外線分的積是常數.

習題五十一



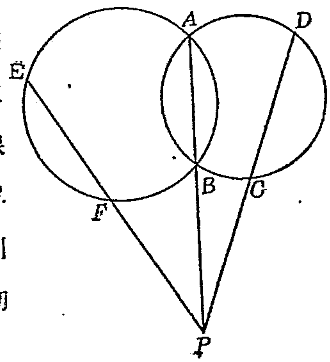
1. 如圖,四邊形$ABCD$中,若$EG\parallel AC\parallel HK$,試證

$$\frac{EF}{FG}=\frac{HI}{IK}$$



2. 如圖,設引長梯形的兩腰,相交於O,聯點O與二對角線交點E的直線,必交兩底邊於其中點.

3. 設AB, CD二直線相交於E,若$AE\times EB=CE\times ED$,則A,B,C,D四點必同在一圓周上.



4. 如圖,設兩圓相交,在其公共弦的引長線上,任取一點P.各作一圓的割線PCD, PFE,則$PC\times PD=PF\times PE$.

5. 自兩圓公共弦的引長線上任一點,作兩圓的切線必相等.

6. 設兩圓外切,自其內公切線上任一點,各作一圓的割線,則割線全長,及其圓外線段的相乘積必相等.

7. 試用命題二十二的方法,作二線段的比例中項.

8. 求作一圓,經過二定點,切於一定直線.

9. 在命題二十一的圖中,若$CB=a$, $BA=b$, $AE=c$,求DA.

10. 在同圖中,若$AB=AD$,則$BCED$是一等腰梯形.

11. 在命題二十二的圖中,若$AB=8$寸,從A到圓心的距離是17寸,求圓的半徑.

12. 三角形一邊的中線,平分平行於這一邊而止於其他二邊的任何直線.

13. 求平行於三角形的底邊而止於其他兩邊的直線中點的軌跡.

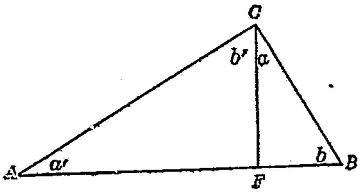
命題二十三　定理

§268. 若從直角三角形的直角頂到斜邊作垂線,則:

(1) 所成的兩三角形,與原三角形相似,且彼此相似.

(2) 垂線是斜邊上兩線分的比例中項.

(3) 直角三角形的直角邊是斜邊及其鄰線分的比例中項.



設 CF 是從直角三角形 ABC 的頂 C 到 AB 的垂線.

(1) 求證 $\triangle ABC, CFA, BFC$ 相似.

證. rt. $\triangle CFA$ 及 ABC 有一公共角 a', 故相似.(何故?)

rt. $\triangle BFC$ 及 ABC 有一公共角 b, 故亦相似.

$\triangle CFA$ 及 BFC 既各與 $\triangle ABC$ 相似,故彼此相似.

(2) 求證 $AF : CF = CF : FB$.

證. 在兩相似 $\triangle CFA$ 及 BFC 中.

$$AF : CF = CF : FB.$$

(3) 求證 $AB : AC = AC : AF$

$$AB : BC = BC : BF$$

證. 在兩相似 $\triangle ABC$ 及 CFA 中,

$$AB : AC = AC : AF.$$

在兩相似 $\triangle ABC$ 及 BFC 中,

$$AB : BC = BC : BF.$$

§269. 推論一 直角三角形的各直角邊的平方,與

其斜邊上兩鄰線分成比例.

$$\overline{AC}^2=AB\times AF,\ \overline{BC}^2=AB\times BF.$$

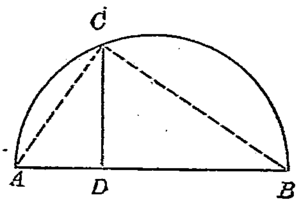
故 $$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{AB\times AF}{AB\times BF}=\frac{AF}{BF}.$$

§270. 推論二. 直角三角形的斜邊及各直角邊的平方,與斜邊及其鄰線分成比例.

因 $$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{AB\times AB}{AB\times AF}=\frac{AB}{AF}.$$

§271. 推論三. 從圓周上一點到直徑的垂線,是直徑上兩線分的比例中項.

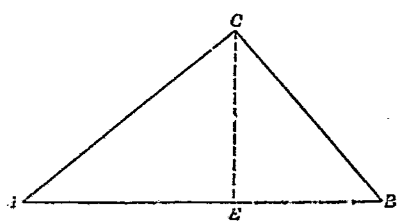
從圓周上一點到直徑各端的弦,是直徑及其鄰線分的比例中項.



因 $\angle ACB$ 是 $rt.\angle$.

命題二十四 定理

§272. 直角三角形兩直角邊的平方和,等於斜邊的平方.



設在 $rt.\triangle ABC$ 內,$\angle C$ 是直角.

求證　$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2$

證. 作 $CE\perp AB$.

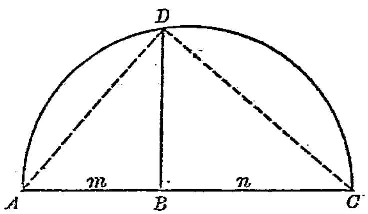
則　$\overline{AC}^2=AB\times AE$, $\overline{CB}^2=AB\times BE$.

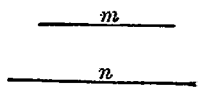
相加,得　$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=AB(AE+BE)=\overline{AB}^2$.

§273. **推論.** 直角三角形一直角邊的平方,等於斜邊及他一直角邊的平方的差.

命題二十五　作圖題

§274. 求已知二線段的比例中項.





設 m 和 n 是已知二線段.

求作　m 和 n 的比例中項.

作圖. 作 $AB=m$

引長 AB 到 C, 使 $BC=n$; 以 AC 做直徑作半圓.

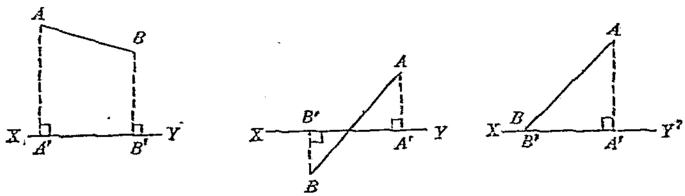
從 B, 作 $BD\perp AC$, 交圓周於 D.

BD 就是所求的比例中項.

(學者試自證之)

§275. **定義.** 一點在一直線上的射影,是從這點到直線垂線的足.

一直線在他一直線上的射影,是一直線的二端在他一直線上的射影間的線分.



若 $AA'\perp XY$, $BB'\perp XY$, 則 A' 是 A 在 XY 上的射影, $A'B'$ 是 AB 在 XY 上的射影.

習題五十二

1. 用命題二十三 (3) 的方法,求作兩線段的比例中項.

2. 若 a 是已知直線,作一直線使等於 $a\sqrt{2}$.

【示意】 $a\sqrt{2}=\sqrt{(2a)a}$.

3. 求等邊三角形的高,其一邊等於 b, $\left(h=\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$

4. 若等腰直角三角形的斜邊等於8寸,求腰的長.

5. 兩圓的半徑是6寸和21寸,又二圓心的距離是25寸,求外公切線的長.

6. 等邊三角形的高等於10,求其一邊的長.

7. 若AD是$\triangle ABC$的高,則

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2.$$

8. 若四邊形的二對角線互相垂直,則二對邊平方的和,等於他二對邊平方的和.

9. 若三角形一邊的平方,等於其他二邊平方的和,則此三角形是直角三角形.

【示意】 作一直角三角形,使二直角邊各等於已知的二直角邊,而後證明二三角形全同.

10. 若三角形一邊的平方,大於他二邊平方的和,則此三角形是鈍角三角形.

【示意】 把這$\triangle$和$rt\ \triangle$比較,$rt.\ \triangle$的二直角邊和已知$\triangle$的二邊相等.

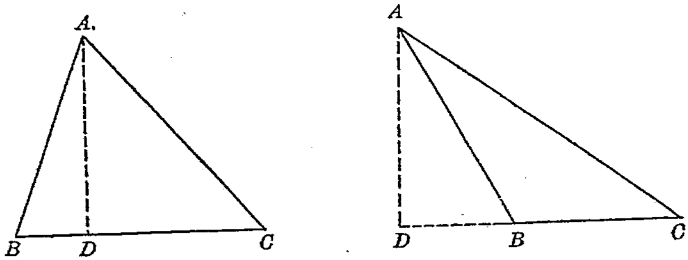
11. 若直線AB和XY的夾角是$60°$,則AB在XY上的射影$A'B'$等於AB之半.

12. 若直線AB和XY的夾角是$30°$,又$AB=m$,求證AB在XY上的射影等於$\frac{m}{3}\sqrt{3}$.

13. 若直線AB和XY的夾角是$45°$,又$AB=m$,求證AB在XY上的射影等於$\frac{m}{2}\sqrt{2}$.

命題二十六　定理

§276. 三角形銳角對邊的平方,等於他二邊平方的和,減去一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍.



設 C 是三角形 ABC 的一銳角, DC 是 AC 在 BC 上的射影.

求證　$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times DC.$

證.　(1) 設點 D 在其底內,

則　$$DB=BC-DC.$$

(2) 設點 D 在其底外,

則　$$DB=DC-BC.$$

平方之都得 $\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2-2BC\times DC.$

在等式的兩邊加 $\overline{AD}^2$, 則得

$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2-2BC\times DC.$$

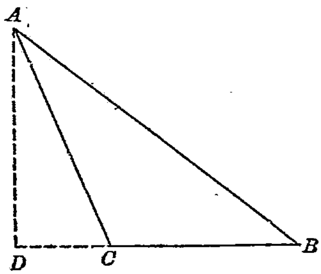
但　$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$$

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times DC.$$

命題二十七 定理

§277. 鈍角三角形對鈍角邊的平方,等於他二邊平方的和,加一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍.



設 C 是三角形 ABC 的鈍角,DC 是 AC 在 BC 引長線上的射影.

求證 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times DC.$

證. $DB=BC+DC.$

平方之得 $\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2+2BC\times DC.$

在兩邊各加 $\overline{AD}^2$,則得

$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+2BC\times DC$$

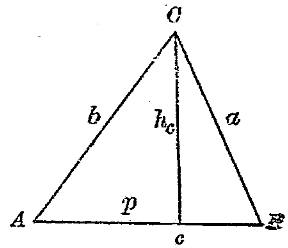
但 $$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2,$$

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times DC.$$

§278. 高的公式. 令 h_a, h_b, h_c 表三邊上的高,p 表邊

b 在邊 c 上的射影，則



$$a^2=b^2+c^2-2cp$$

$$p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c},$$

$$h_c{}^2=b^2-p^2=(b+p)(b-p)$$

$$=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}$$

令 $a+b+c=2s$，則

$$b+c-a=2(s-a),$$

$$a-b+c=2(s-b),$$

$$a+b-c=2(s-c).$$

$$\therefore\quad h_c{}^2=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

$$\therefore\quad h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

同理，

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

習題五十二

1. 三角形的三邊是4, 13, 15, 求邊長4上的高.
2. 三角形的三邊是25, 30, 11, 求邊長11上的高.
3. $b=15, c=25$, b在c上的p是9, 求a.
4. $a=20, b=15, c=7$, 求b在c上的p.
5. 三角形的三邊是4, 13, 15, 求13在4上的射影.
6. P是等腰三角形ABC底AB上的一點, 則

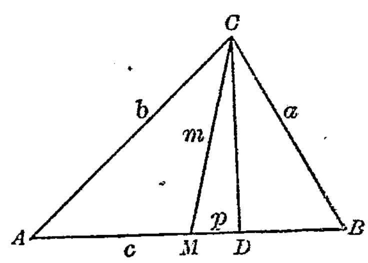
$$\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=AP\cdot BP.$$

7. D是等腰直角三角形ABC斜邊BC上的任意一點, 則

$$2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2.$$

命題二十八　定理

§279. 三角形兩邊的平方和, 等於第三邊上中線平方的二倍, 加第三邊一半平方的二倍.



設$\triangle ABC$中, m是邊c上的中線.

求證　$a^2+b^2=2m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)^2$.

證. 作$CD\perp AB$, 令p表MD.

則
$$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)p,$$

$$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)p,$$

相加,得
$$a^2+b^2=2m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

§280. **中線的公式.** 令 m_a, m_b, m_c, 表 $\triangle ABC$ 三邊上的中線,則由前命題得:

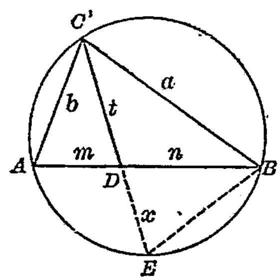
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

同理,
$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

命題二十九　定理

§281. 三角形兩邊的相乘積,等於其夾角二等分線的平方,加第三邊上分成兩線段的相乘積.



設在 $\triangle ABC$ 內,角 C 的平分線 t 把邊 c 分做 m, n.

求證　$ab=t^2+mn$.

證. 作外接圓,交 t 的引長線

於E,聯BE.

令 $DE=x$, 則 $\triangle ACD \backsim \triangle EBC$. (何故?)

$$\therefore \quad b:(t+x)=t:a.$$

$$\therefore \quad ab=t(t+x)=t^2+tx.$$

但 $tx=mn$, (何故?)

$$\therefore \quad ab=t^2+mn.$$

§ 232. 角二等分線的公式. 令 t_a, t_b, t_c, 表$\triangle ABC$三個角的二等分線,則由前命題,得

$$t_c^2=ab-mn$$

$$\because \quad \frac{m}{b}=\frac{n}{a}=\frac{m+n}{a+b}=\frac{c}{a+b}.$$

$$\therefore \quad m=\frac{bc}{a+b}, \quad n=\frac{ac}{a+b}.$$

$$\therefore \quad t_c^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

$$=ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right]$$

$$=\frac{ab\{(a+b)^2-c^2\}}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab\times 2s\times 2(s-c)}{(a+b)^2}$$

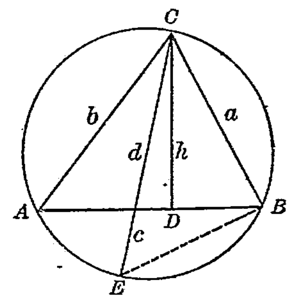
故 $$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

同理, $$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}$$

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$$

命題三十　定理

§283. 三角形兩邊的相乘積,等於第三邊上的高與外接圓直徑的相乘積.



設 $\triangle ABC$ 中, d 是外接圓的直徑, h 是邊 c 上的高.

求證　$ab=hd$.

證. $\triangle ACD \backsim \triangle ECB$.(何故?)

$\therefore\quad b:d=h:a$

$\therefore\quad ab=hd.$

§284. 推論. 三角形外接圓的直徑,等於二邊的積以第三邊的高除之.

$$\left(d=\frac{ab}{h},\quad \text{或 } d=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\right)$$

習題五十三

1. 三角形的三邊是22,20和18,求邊18的中線的長

2. 在$\triangle ABC$內，$a=8$，$b=11$．又$m_c=8\frac{1}{2}$，求c.

3. 三角形的三邊是22，11，及21，求邊21對角的二等分線的長.

4. 三角形的三邊是6，3，及7，求邊7對角的二等分線的長.

5. $\triangle ABC$是內接於5寸半徑的圓，若$AB=4$，$AC=5$，求邊BC上的高.

6. 求外接於$\triangle ABC$的圓的直徑，若$a=17$，$b=8$，$c=15$.

7. 在$\triangle ABC$內，$a=20$，$b=15$，b在c上的射影等於9，求外接圓的半徑.

8. 平行四邊形四邊的平方的和，等於二對角線的平方的和.

證 明 題

1. 若一弦被他一弦二等分，則一弦的任一線分是他一弦的二線分的比例中項.

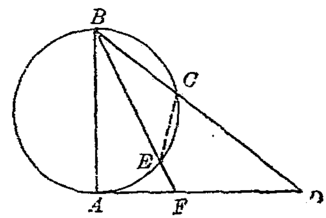
2. 若在$\triangle ABC$內，高BD和AE在點F相遇，且$AB=BC$，則$BC:AF=BD:CD$.

3. 若在二平行的切線間，作第三切線，則圓的半

徑是第三切線的二線分的比例中項.

4. 若兩圓相外切,過切點作一公割線,則公割線所成的兩弦和兩圓的半徑成比例.

5. 若C是弧AB的中點,又弦CD和AB相交於一點E,則$CE:CA=CA:CD$.



6. 若AB是直徑,AD是切線,又FB和DB是割線,求證$BE\times BF=BC\times BD$.

7. 若兩圓相交,引長他們的公弦必平分他們的公切線.

8. 若二平行四邊形有一角相等,且其夾邊成比例,則此二平行四邊形相似.

9. 三角形三邊平方和的三倍,必等於三中線平方和的四倍,

10. 設兩圓交於A, B,作BC, BD二弦,各切於一圓,試證AB是AC及AD的比例中項.

作圖題

1. 已知a, b,及$b:c=4:5$,求作一三角形.

2. 作一線,平行矩形的一邊,截一矩形和原矩形

相似.

3. 在已知圓內，作一與已知三角形相似的內接三角形.

4. 在已知圓外，作一與已知三角形相似的外切三角形.

5. 作一三角形與一已知三角形相似，且其高等於已知直線.

6. 在已知三角形內，作一內接正方形.

7. 設以任意長做單位，作直線，使等於：

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $1+\sqrt{5}$.

8. 求作一直線與一已知直線的比等於 $1:\sqrt{2}$.

9. 求作一直線與一已知直線的比等於 $\sqrt{3}:1$.

10. 在一已知直線 AB 上，求一點 C，使

$$AC:BC=1:\sqrt{2}$$

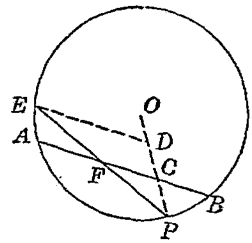
11. 作一三角形與一已知三角形相似，且其周圍等於定長.

12. 若 a 和 b 是二已知直線，求作一直線使等於 $\frac{2a^3}{b}$.

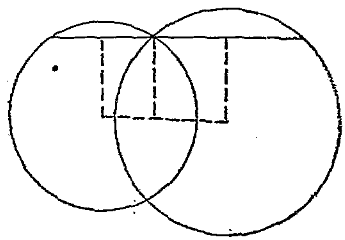
13. 從圓外一點作一割線，使圓外的線分等於割

線的一半.

14. 在一已知圓內,作一內接矩形,且使他二邊的比等於$m:n$.



15. 經過弦AB所對弧上的點P,求作一個弦被弦AB二等分.



16. 經過兩個相交圓的一個交點作一條割線,令所成的兩弦的比等於$m:n$.

計算題

1. 在$\triangle ABC$內,$a=4$, $b=8$, 邊c所對的角是$60°$,求c

2. 一圓的半徑是10寸,過圓心8寸的一點,作一弦,求這弦二線分的積.又過該點所作最短弦的長若干?

3. 平行四邊形的二邊及一對角線是7, 9,和8,求他一對角線的長.

4. 菱形對角線是10和24寸,求周圍及積.

5. 在$\triangle ABC$內,$AB=BC=25$, $AC=30$,又在AB上取

$AD=8$,求CD的長.

6. 三角形的三邊是14,16和6,求邊14所對的角.

7. 二圓的半徑是5和3,二圓心的距離是17,求內公切線的長.

8. 二圓半徑是12寸和9寸,又圓心的距離是28寸,外公切線與聯心線的延線相交於一點,則此點距二圓心各若干寸?

9. 梯形的高是h,底邊是a和b,延長不平行的二邊使相遇成兩個三角形,求他們的高.

10. 梯形的二底是8″和12″,又高是3″,若離下底2寸作一直線,平行於底而止於不平行的二邊,求這直線的長.

第五章提要

定 理

I. 比例線段.

1. 平行於三角形一邊的直線,必分他二邊成比例.

2. 兩線被平行諸線所截,他的相當線分成比例.

3. 設兩平行線被經過同一點的數直線所截,則截取的對應線段成比例.

4. 三角形一角的二等分線分對邊做兩分與其他兩邊成比例.

5. 三角形一外角的二等分線外分對邊做兩分與其他兩邊成比例.

II. 兩三角形相似的條件.

1. 兩角相等.

2. 兩雙對應邊成比例,夾角相等.

3. 各雙對應邊的比相等.

4. 各雙對應邊互相平行,或互相垂直.

III. 相似三角形的性質.

1. 各雙相當邊的比相等.

2. 周界的比等於相當邊的比.

3. 相當高的比等於相當邊的比.

4. 相當中線的比等於相當邊的比.

5. 相當角二等分線的比等於相當邊的比.

6. 內切圓或外接圓半徑的比等於相當邊的比

7. 一切對應線段的比相等.

IV. 相似多邊形的性質.

1. 各雙相當邊的比相等.

2. 周界的比等於相當邊的比.

3. 相當對角線的比等於相當邊的比.

4. 內切圓或外接圓半徑的比等於相當邊的比.

5. 一切對應線段的比相等.

V. 直角三角形的特性.

1. 直角三角的高將原形分成兩個相似三角形且都和原形相似.

2. 直角三角形的高是斜邊上兩線分的比例中項.

3. 直角邊是他在斜邊上射影和斜邊的比例中項.

4. 直角邊平方的比等於斜邊上兩鄰線分的比.

5. 斜邊和直角邊平方的比等於斜邊及其鄰線分的比.

VI. 三角形三邊的關係.

1. 直角三角形斜邊的平方等於兩直角邊平方的和.

2. 直角三角形直角邊的平方等於斜邊及他一直角邊平方的差.

3. 三角形銳角對邊的平方等於他二邊平方的和減去一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍.

4. 鈍角三角形對鈍角邊的平方等於他二邊平方的和加一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍.

5. 三角形兩邊的平方和等於第三邊上中線平方的二倍加上第三邊一半平方的二倍.

6. 三角形兩邊的相乘積等於其夾角二等分線的平方加第三邊上分成兩線段的相乘積.

7. 三角形兩邊的相乘積,等於第三邊上的高與外接圓直徑的相乘積.

VII. 圓的比例線段.

1. 二弦相交於圓內,一弦二線分的積等於他一弦二線分的積.

2. 從圓外一點作二割線,一割線與其圓外線分的積等於他一割線與其圓外線分的積.

3. 從圓外一點作一割線一切線,切線是割線和他圓外線分的比例中項.

比例作圖題

1. 求三線段的第四比例頭.

2. 求二線段的第三比例項.

3. 求二線段的比例中項.

4. 分一已知線段成二線分,其比等於定比.

計算公式

1. 高的公式.

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2. 中線的公式.

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{(2b^2+2c^2)-a^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{(2a^2+2c^2)-b^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{(2a^2+2b^2)-c^2}$$

3. 角二等分線的公式.

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$$

$$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

4. 外接圓直徑的公式.

$$d=\frac{ab}{h}=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

第六章　多邊形的面積

§285.　定義.　每邊等於單位長的正方形叫做單位面積.

例如每邊一尺的正方形,就是一平方尺.每邊一寸的正方形就是一平方寸.

一個多邊形所含單位面積的個數,就是多邊形的面積.

§286.　定義.　凡面積相等的圖形,叫做等積形.

例如$\triangle ABC$的面積是16平方寸,又$\square MNOP$的面積也是16平方寸,就是$\triangle ABC$與$\square MNOP$等積.常寫做

$\triangle ABC = \square MNOP$.

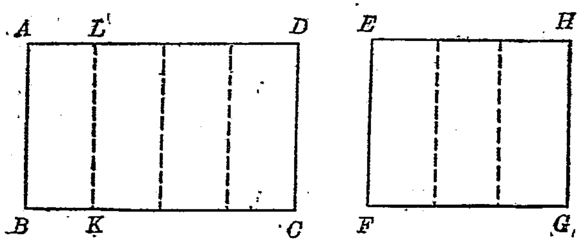
這個等號就是表示他們的面積相等.

命題一　定理

§287.　等高距形的比等於其底的比.

設矩形$ABCD$及$EFGH$的底邊是BC及FG.

求證　　$ABCD : EFGH = BC : FG$.



證. 以BK爲二底度量的單位.

若　$$BC=m(BK),\ FG=n(BK)$$

則　$$\frac{BC}{FG}=\frac{m}{n}$$

從BC及FG上的分點作垂線,二矩形分成m及n個相等的小距形.

$$\therefore\ \frac{ABCD}{EFGH}=\frac{m}{n}$$

即　$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{BC}{FG}$$

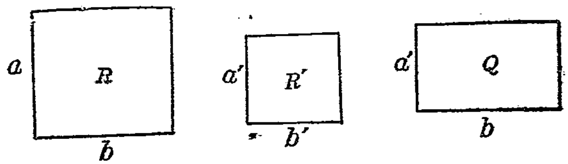
288. 推論. 等底矩形的比等於其高的比.

命題二　定理

§ 289. 二矩形面積的比等於底和高相乘積的比.

設矩形R和R'的底是b和b',又高是a和a'.

求證,　$$\frac{R}{R'}=\frac{ab}{a'b'}$$



證. 作矩形Q使其底等於b,高等於a'.

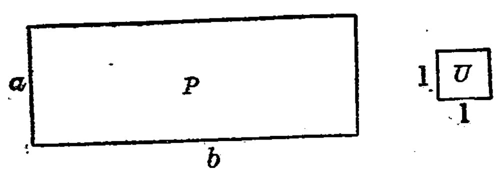
$$\because \quad \frac{R}{Q}=\frac{a}{a'}$$

$$\frac{Q}{R'}=\frac{b}{b'}$$

$$\therefore \quad \frac{R}{R'}=\frac{ab}{a'b'}$$

命題三 定理

§290. 矩形面積等於底和高的相乘積.



設矩形P的底是b,高是a.

求證 P的面積$=ab$.

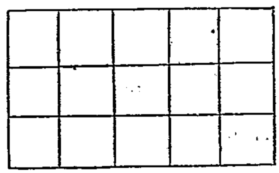
證. 作單位面積U.

則 $$\frac{P}{U}=\frac{a\times b}{1\times 1}$$ (何故?)

但$\dfrac{P}{U}$就是P的面積.　　(何故?)

$\therefore$　P的面積$=ab$.

【注意】 矩形面積可將圖分做許多小正方形證明之.



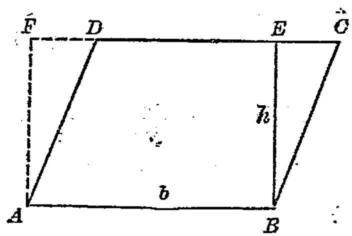
若底含有5個,高含有3個線分單位,則這圖形可分做15個正方形,各等於單位面積.

§291. 推論. 正方形的面積等於一邊的平方.

命題四　定理

§292. 平行四邊形的面積等於其底和高的相乘積.

設$\square ABCD$的底$AB=b$,高$BE=h$.



求證　$\square ABCD=bh$.

證. 作$AF\perp AB$遇CD的延長線於F.

則　　$AF \parallel BE$.

$ABEF$是矩形,其底是b,其高是h.

$\because$　$AF=BE$,　$AD \parallel BC$.

$\therefore$　$\triangle AFD \cong \triangle BEC$.

又　$ABED=ABED.$

$\therefore\ \square ABCD=$矩形$ABEF.$

但　矩形$ABEF=bh.$

$\therefore\ \square ABCD=bh.$

§293. 推論一. 等底等高的平行四邊形必等積.

§294. 推論二. 二平行四邊形的比等於底和高相乘積的比.

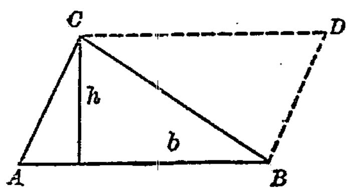
§295. 推論三. 等底平行四邊形的比等於其高的比.

§296. 推論四. 等高平行四邊形的比等於其底的比.

命題五　定理

§297. 三角形的面積等於其底和高相乘積的一半.

設$\triangle ABC$的底是b,高是h.



求證　$\triangle ABC=\frac{1}{2}bh.$

證. 作$BD\parallel AC$,

$CD\parallel AB.$

則$ABCD$是平行四邊形.

$$\because \quad \square ABCD = bh.$$

但 $$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\square ABCD.$$

$$\therefore \quad \triangle ABC = \tfrac{1}{2}bh.$$

§298. 推論一. 等底等高的三角形必等積.

§299. 推論二. 二三角形的比等於其底和高相乘積的比.

§300. 推論三. 等底三角形的比等於其高的比.

§301. 推論四. 等高三角形的比等於其底的比.

§302. 推論五. 若 a, b, c 表三角形的三邊, $2s$ 表三角形的周界,則三角形的面積等於 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

習題五十四

1. 三角形的二邊是6和18, 又其所夾的角是30°, 求此形的面積.

2. 等邊三角形的高是 $4\sqrt{3}$, 求他的面積.

3. 三角形的三邊是13, 14, 15, 求他的面積.

4. 設一直線的位置及大小是固定的, 求在此直線上所作諸等積三角形頂點的軌跡.

5. 在已知三角形的底邊上, 作一直角三角形, 與已知三角形等積.

6. 在已知三角形的底邊上,作一等腰三角形,與已知三角形等積.

7. 在已知平行四邊形的底邊上,作一矩形與已知平行四邊形等積.

8. 自三角形的一頂點作二直線,將此形分做三等分.

9. 平行於底邊作一直線,將一平行四邊形分做二等分.

10. 垂直於底邊作一直線,將一平行四邊形分做二等分.

【示意】 過對角線的中點作直線.

11. 作一三角形等於一已知三角形的三倍.

12. 平行四邊形的對角線分全形成四個等積三角形.

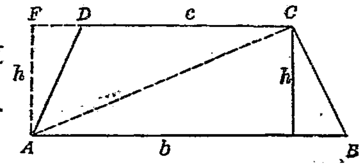
13. 聯四邊形一對角線的中點與其他兩頂點必將原形分成兩個等積形.

命題六　定理

§303. 梯形面積等於高與二底和相乘積的一半.

設梯形$ABCD$的二底是b和c,又高是h.

求證　$ABCD=\frac{1}{2}h(b+c)$



證．作 AC;又作 AF 垂直於 CD 的延長線,則 $AF=h$.

$\because\quad \triangle ADC=\frac{1}{2}h\cdot c.$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}h\cdot b$

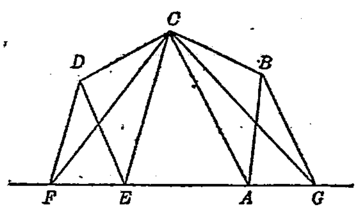
$\therefore$　梯形 $ABCD=\frac{1}{2}h(b+c)$　(何故?)

命題七　作圖題

§ **304**. 變多邊形成一等積的三角形.

設多邊形 $ABCDE$.

求作一三角形等於 $ABCDE$.



作圖. 作 CA, CE.

從 D, 及 B 作 $DF\parallel CE$, $BG\parallel CA$, 交 AE 的延長線於 F 及 G.

聯 CF, CG.

則 CFG 就是所求的三角形.

證.　$\because\quad \triangle CED=\triangle CEF$

$\triangle CAB=\triangle CAG$

$\triangle CAE=\triangle CAE.$

$\therefore\quad \triangle CED+\triangle CAE+\triangle CAB=\triangle CEF+\triangle CAE+\triangle CAG.$

卽多邊形 $\qquad ABCDE=\triangle AFG$

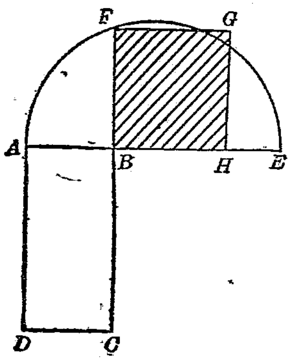
【註】 一圖形變成他一圖形,卽作一個相等圖形的意思.

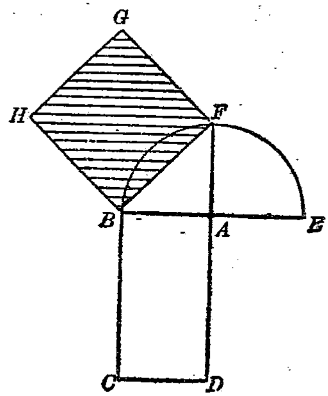
習題五十五

1. 梯形面積等於其中線和高的相乘積.
2. 梯形二底中點的聯線分原形成二個相等的梯形.
3. 設梯形的兩底是12和8,又高是5,求面積.
4. 設梯形的面積是120,中線是10,求高.
5. 設梯形的面積是60,高是8,上底是5,求下底.
6. 將一個已知四邊形變做等積的三角形.
7. 將一個已知平行四邊形變做等積的直角三角形.
8. 將一個已知等腰三角形變做等積的矩形.
9. 將一個已知的四邊形分做三等分.

命題八 作圖題

§305. 求作正方形與一已知矩形等積.





設矩形 $ABCD$.

求作一正方形等於矩形 $ABCD$.

作圖. 作 AB, AD 的比例中項 BF.

在 BF 上作正方形 $BFGH$.

則　　　$BFGH = ABCD$　　　(何故?)

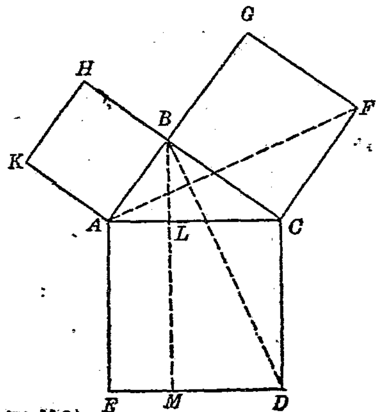
§306. **推論**. 求作正方形與已知三角形等積.

命題九　定理

§306. 直角三角形斜邊上的正方形, 等於兩直角邊上的正方形的和.

設 AH, CG 是直角三角形 ABC 兩直角邊上的正方形, AD 是斜邊上的正方形.

求證 $AD=AH+CG$.



證. 作 $BL\perp AC$, 延長交 ED 於 M, 聯 BD, AF.

$\because$ $CB=CF$,

$CA=CD$.

$\angle ACF=90^\circ+\angle BCA$

$=\angle BCD$,

$\therefore$ $\triangle BCD\cong\triangle ACF$.

正方形 $CG=2\triangle ACF$. (何故?)

同理, 長方形 $CM=2\triangle BCD$.

$\therefore$ 正方形 $CG=$ 長方形 CM.

同理, 正方形 $AH=$ 長方形 AM. (何故?)

$\therefore$ $AD=AH+CG$.

【注意】 此定理是畢達哥拉氏所發明,叫做畢氏定理.

§307. 推論. 三角形直角邊上的正方形,等於斜邊上正方形與他一直角邊上正方形的差.

命題十 作圖題

§308. 求作正方形,等於已知二正方形的和.

命題十一　作圖題

§ 309.　求作正方形,等於已知二正方形的差.

§ 310.　幾何圖形的變化常應用代數方程式,今將重要的命題用代數方程式表示在下面,a, b, c, d 等表已知直線,x, y, z, 等表所求的直線.

(1)　作　$x=a+b$.

(2)　作　$x=a-b$.

(3)　若 m 是已知的有理數,

作　$x=m\cdot a$.

(4)　作　$x=\frac{a}{m}$.

(5)　作　$x=\frac{ab}{c}$.

【示意】　x 是 c, a, 和 b 的第四比例項.

(6)　作　$x=\frac{a^2}{b}$. 〔應用5〕

(7)　作　$x=\sqrt{ab}$.

【示意】　x 是 a 和 b 的比例中項.

(8)　作　$x=\sqrt{a^2+b^2}$.

【示意】　x 是 $rt.\triangle$ 的斜邊,他的直角邊是 a 和 b.

(9) 作 $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

【示意】 x是$rt.\triangle$的直角邊,a是斜邊,b是他一角直邊.

(10) 作 $x=a\sqrt{2}$.

【示意】 x是正方形的對角線,他的一邊是a.

(11) 若m是一已知數,

作 $x=a\sqrt{m}$.

【示意】 $x=\sqrt{a(am)}$.

習題五十六

1. 求作等於已知四邊形的正方形.
2. 求作等於已知梯形的正方形.
3. 求作二倍於三角形的正方形.
4. 求作等於梯形之半的正方形.
5. 求作等於二三角形之和的正方形.
6. 求作等於矩形與三角形之差的正方形.
7. 作一正方形三倍於一已知正方形.
8. 已知三角形的底邊和一底角,求作等於已知梯形的三角形.
9. 求作等於已知矩形的矩形,他的底邊等於已

知矩形周界的一半.

10. 作$x=a\sqrt{5}$; $x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$;

$$x=\sqrt{a^2-ad};\ x=\frac{a^2-b^2}{c}.$$

11. 已知一邊,求作三角形,與一已知三角形等積.

12. 已知底邊與頂角,求作三角形,與一已知三角形等積.

13. 已知二邊m,n,求作三角形,與一已知三角形等積.

14. 已知斜邊,求作直角三角形,與一已知三角形等積.

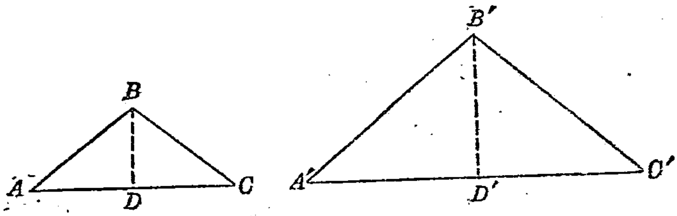
15. 已知底邊,求作平行四邊形,與一已知平行四邊形等積.

16. 已知兩邊,求作平行四邊形,與一已知平行四邊形等積.

17. 已知一腰,求作一等腰三角形,與一已知三角形等積.

命題十二 定理

§311. 有一等角的兩三角形,面積的比等於夾此角兩邊相乘積的比.



設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$, 有 $\angle A=\angle A'$.

求證 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AC\times AB}{A'C'\times A'B'}.$$

證. 作高 BD 與 $B'D'$,

則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BD}{B'D'}.$$

但 $rt.\triangle ABD$, 與 $rt.\triangle A'B'D'$ 相似, (何故?)

$$\therefore\ \frac{BD}{B'D'}=\frac{AB}{A'B'},$$

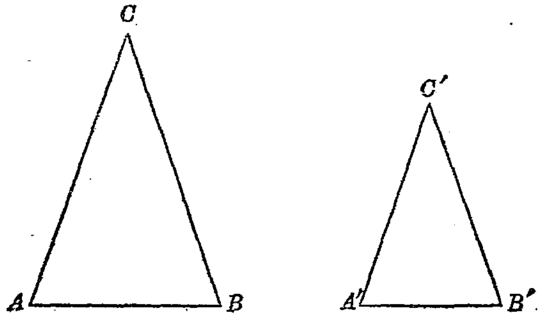
$$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AC\times AB}{A'C'\times A'B'}$$

命題十三 定理

§312. 相似三角形面積的比,等於相當邊的平方比

設 $$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

求證 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}.$$



證.
$$\angle A=\angle A',$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'}$$

但
$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}.$$

§ 313. 推論. 相似三角形面積的比, 等於相當高的平方比.

習題五十七

1. 相似三角形面積的比等於相當 (a) 中線的平

方的比; (b) 角二等分線的平方的比.

2. 在等邊三角形的底和高上作正方形,求他們的面積的比.

3. 相似三角形面積的比等於周界平方的比.

4. 三角形的三邊是4,7,及8,求其相似三角形的各邊,他的面積四倍於這個三角形.

5. 若二相似三角形的一對相當邊是2和3,求面積的比.

6. 二相似三角形面積的比如9:25,若前者的周圍是36,求後者的周圍.

7. 一等邊三角形的面積是100平方寸,求他一等邊三角形的面積,若其底邊二倍於前者.

8. 延長梯形的不平行的二邊使交於一點,若梯形的底是20和12,求圖形內兩三角形的面積的比.

9. 梯形的二底是12和8,延長不平行的二邊使遇於一點,若梯形的面積是90,求較小三角形的面積.

10. 二相似三角形的面積是81和225,第一三角形的高是6,求第二三角形的相當高.

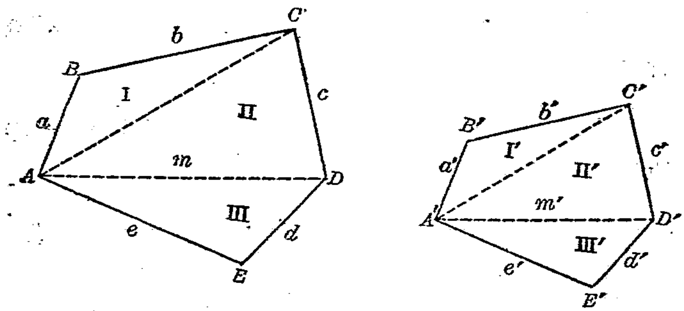
11. 在已知正方形內,用一角做角,作一正方形,等於原形的三分之一.

12. 求作三角形,等於已知三角形面積的四倍,且與原形相似.

13. 求作一等邊三角形,等於已知正方形.

命題十四　定理

§314. 相似多邊形的比等於相當邊平方的比.



設a和a'是二相似多邊形的相當邊 他們的面積是S和S'.

求證 $$\frac{S}{S'}=\frac{a^2}{a'^2}$$

證. 從相當頂點作所有的對角線,則

$$\triangle I \backsim \triangle I', \triangle II \backsim \triangle II', \triangle III \backsim \triangle III'$$

$$\frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

$$\frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{\triangle III}{\triangle III'}.$$

$$\frac{\triangle I+\triangle II+\triangle III}{\triangle I'+\triangle II'+\triangle III'}=\frac{\triangle I}{\triangle I'}.$$

$$\therefore\quad \frac{S}{S'}=\frac{\triangle I}{\triangle I'}.$$

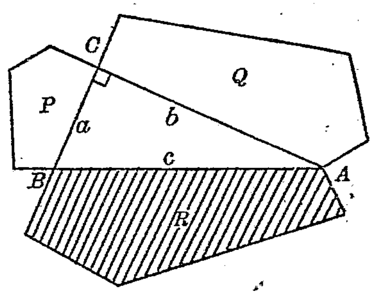
即 $$\frac{S}{S'}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

§315. 推論一. 相似多邊形的比,等於相當對角線的平方的比.

§316. 推論二. 相似多邊形的比,等於其周界平方的比.

命題十五 定理

§317. 在直角三角形的三邊上作相似多邊形,則在二直角邊上多邊形的和等於斜邊上的多邊形.



設在 $rt\ \triangle ABC$ 的二直角邊及斜邊上作相似多邊形 P, Q 及 R.

求證 $$P+Q=R.$$

證. $$\frac{P}{R}=\frac{a^2}{c^2},\ \frac{Q}{R}=\frac{b^2}{c^2}$$

$$\therefore\ \frac{P+Q}{R}=\frac{a^2+b^2}{c^2}.$$

但 $$a^2+b^2=c^2$$

$$\therefore\ P+Q=R.$$

習題五十八

1. 一多邊形的面積二倍於相似多邊形的面積，求相當邊的比.

2. 二相似多邊形對應邊的比如 5：9，又面積的和是212平方尺，求各多邊形的面積.

3. 二相似平行四邊形的比等於二對角線相乘積的比.

4. 二相似多邊形的相當邊是12尺和5尺，求等於二已知相似多邊形的相似多邊形的相當邊.

5. 作一等腰直角三角形，他的面積等於二已知等腰直角三角形的和.

6. 作一等邊三角形，他的面積等於二已知等邊三角形的差.

7. 作一等邊三角形，他的面積等於三個已知等

邊三角形的和.

8. 作一三角形,與二已知相似三角形相似,且面積等於他們的和.

9. 作一多邊形,與二已知相似多邊形相似,且面積等於他們的差.

10. 作一直線平行於三角形的一邊,且二等分他的面積.

11. 作二直線平行於三角形的一邊,且三等分他的面積.

12. 作一多邊形與一已知多邊形相似,且面積等於他的三分之二.

13. 作一三角形與一已知三角形相似,且他的面積三倍於已知三角形.

證明題

1. 若E是平行四邊形$ABCD$的對角線AC上任一點,求證$\triangle AEB=\triangle ADE$.

2. 若過平行四邊形的對角線上的任一點作二直線平行於二邊,成四個平行四邊形,其中不含對角線的二個平行四邊形相等

3. 若從平行四邊形內任一點與四頂點相聯，則相對的任一對三角形面積的和等於平行四邊形的一半.

4. 順次聯四邊形四邊的中點成一平行四邊形，他的面積等於原形的一半.

5. 若在聯三角形二邊中點的直線上作一平行四邊形，有二頂點在三角形的底邊上，則這平行四邊形等於三角形的一半.

6. 梯形的不平行的二邊與二對角線成二相等的三角形.

7. 若從三角形的中線的交點至三頂點作三直線，則這三直線與三邊成三個相等的三角形.

8. 若在$\triangle ABC$內，D及F是邊AB和AC的中點，則$\triangle ADC=\triangle ABF$.

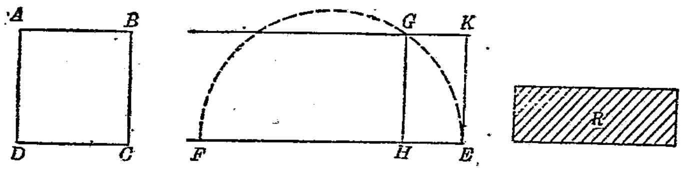
9. 一邊等於a的等邊三角形的面積等於$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

10. 菱形的面積等於二對角線相乘積的一半.

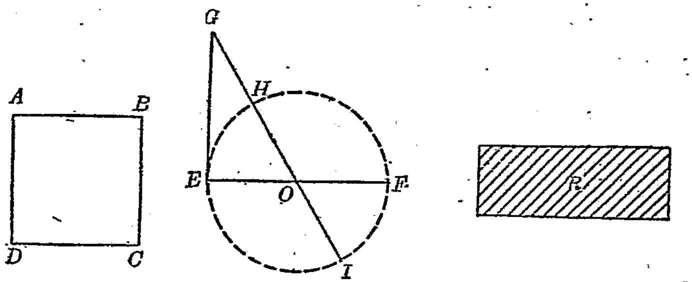
作圖題

1. 作一矩形，使等於已知正方形，且底與高的和等於一已知直線.

【示意】 若FE是已知直線,又$ABCD$是已知正方形,使$EK=AB$.



2. 作一矩形,使等於已知正方形,且底與高的差等於已知直線.



3. 變矩形成另一矩形,使一邊等於已知直線.

4. 變正方形成等腰三角形,已知其底邊.

5. 變矩形成平行四邊形,已知其一對角線.

6. 平行於中線作二直線三等分一三角形.

7. 過平行四邊形的一頂點,作二直線三等分一平行四邊形.

8. 過一頂點,作一直線二等分一梯形.

9. 過一頂點,作二直線三等分一五邊形.

10. 在三角形內求一點,使此點與三頂點的連線,分原形成三等分.

11. 在三角形內求一點,使此點與三頂點的連線,分原形成三個三角形,其比如 $3:4:5$.

計算題

1. 求四邊形 $ABCD$ 的面積,若 $AB=10$, $BC=24$, $CD=30$, $AD=28$, 對角線 $AC=26$.

2. 等邊 $\triangle ABC$ 的一邊是 8, 求三倍於 $\triangle ABC$ 的等邊三角形的邊.

3. 矩形的周界是 20 寸,一邊是 6 寸,求面積.

4. 一農夫要計算一五邊形的田的面積,他量得直線 $AB=4$ 丈, $BC=13$ 丈, $CD=14$ 丈, $DE=5$ 丈, $EA=12$ 丈, $AC=15$ 丈, 及 $AD=13$ 丈, 這田有多少方丈?

5. 一弧所對的弦長是 42 寸,這弧一半所對的弦長是 29 寸,求圓的直徑.

6. 三角形的三邊如 $8:15:17$, 若面積等於 960 方寸,求各邊的長.

7. 三角形的三邊是8, 15, 17, 求內切圓的半徑.

【示意】 三角形的面積等於以內心做頂點三邊做底邊的三個三角形面積的和.

8. 求圓內接等邊十二邊形的面積,其外接圓的半徑等於4寸.

9. 求等邊三角形的面積,其高等於h.

10. 若菱形二對角線的和是24尺,其比如3:5,求面積.

第六章提要

I. 等積形.

1. 等底等高的矩形或平行四邊形等積.

2. 等底等高的三角形等積.

3. 矩形和平行四邊形若等底等高,他的面積相等.

4. 三角形面積等於等底等高矩形或平行四邊形面積的一半.

5. 直角三角形斜邊上正方形等於兩直角邊上正方形的和.

6. 在直角三角形的三邊上作相似多邊形,則斜邊上的多邊形等於兩直角邊上多邊形的和.

II. 面積的比.

1. 等底矩形或平行四邊形面積的比等於高的比.

2. 等高矩形或平行四邊形面積的比等於底的比.

3. 等底三角形面積的比等於高的比.

4. 等高三角形面積的比等於底的比.

5. 矩形或平行四邊形面積的比等於底高相乘積的比.

6. 三角形面積的比等於底高相乘積的比.

7. 三角形或平行四邊形一角相等,這兩形面積的比等於夾這角的兩邊相乘積的比.

8. 兩相似形面積的比等於任何對應線上正方形的比.

9. 兩相似形面積的比等於周界平方的比.

III. 特別面積的計算公式.

1. 矩形或平行四邊形的面積等於底高相乘的積.

2. 三角形的面積等於底高相乘積的一半.

3. 三角形的面積等於$\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)}$.

(s等於三角形三邊的半和)

4. 等邊三角形的面積等於$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

(a等於每邊的長)

5. 菱形的面積等於兩對角線相乘積的一半.

6. 梯形的面積等於上下底的半和與高的相乘積.

IV. 面積作圖題.

1. 作一三角形與已知多邊形等積.

2. 作一正方形與已知矩形等積.

3. 作一正方形與已知三角形等積.

4. 作一正方形與兩已知正方形的和等積.

5. 作一正方形與兩已知正方形的差等積.

第七章　正多邊形及圓

§318.　定義.　等邊且等角的多邊形,叫做正多邊形.

§319.　定義.　正多邊形的內切圓和外接圓的公共圓心,就是正多邊形的中心.

§320.　定義.　正多邊形的邊心距,是他的內切圓的半徑.

§321.　定義.　正多邊形的頂心距,是他的外接圓的半徑.

§322.　定義.　正多邊形的中心角,是相鄰二角頂與中心的聯線所成的夾角.

命題一　定理

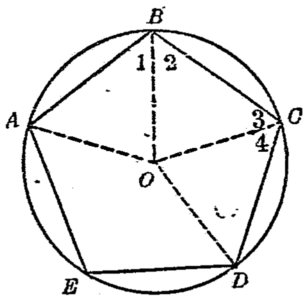
§323.　任何正多邊形可作一外接圓及一內切圓.

設 $ABCDE$ 是 n 邊的正多邊形.

求證此多邊形可作一外接圓,及一內切圓.

證.　過 $A, B, C,$ 三點,先作一圓,令 O 表圓心.

聯 OA, OB, OC, OD.



∵ $\angle B=\angle C$

$\angle 2=\angle 3$ (何故?)

∴ $\angle 1=\angle 4$ (何故?)

又 $OB=OC$, $BA=CD$,

∴ $\triangle OBA\cong\triangle OCD$. (S.A.S)

∴ $OA=OD$.

故圓O過點D,同理可證圓O也過其他各頂點,故能作一圓,外接於此多邊形

又諸邊都與圓心O等距離, (何故?)

故可作一圓,內切於此多邊形.

§ 324. 推論一. 正多邊形的外接圓同內切圓是同心圓.

§ 325. 推論二. n邊正多邊形的中心角等於$\frac{4}{n}$直角.

命題二 定理

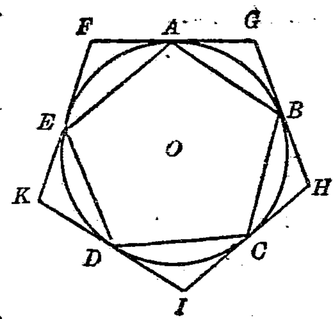
§ 326. 若將一圓周分成任意若干相等的部分,則

(1) 依次聯結分點所成的弦,成一內接正多邊形.

(2) 從分點所作的切線成一外切正多邊形.

設 將圓周分成若干相等的弧 $AB, BC, CD,$ ······ 聯結 $AB, BC, CD,$ ······ 又過分點作切線 $FG, GH, HI,$ ······

(1) 求證 $ABCDE$ 是一正多邊形.



證. $\because$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}\cdots\cdots$

$\therefore$ $AB=BC=CD\cdots\cdots$ (何故?)

$\angle A=\angle B=\angle C\cdots\cdots$ (何故?)

$\therefore$ $ABCDE$是一正多邊形.

(2) 求證 $FGHIK$是一正多邊形.

證. $\because$ $\angle GAB=\angle GBA=\angle CBH=\angle HCB\cdots\cdots$ (何故?)

$AB=BC=CD\cdots\cdots$;

$\therefore$ $\triangle ABG, CBH\cdots\cdots$是等腰且全相等 (何故?)

$\therefore$ $\angle G=\angle H=\angle I\cdots\cdots$ (何故?)

又 $AG=GB=BH=HC\cdots\cdots$ (何故?)

$\therefore$ $GH=HI=IK\cdots\cdots$

$\therefore$ $FGHIK$是一正多邊形.

§ 327. 推論一. 圓內接正多邊形的周界,必小於二倍邊數的內接正多邊形的周界.

§ 328. 推論二. 圓外切正多邊形的周界,必大於

二倍邊數的外切正多邊形的周界.

習題五十九

1. 圓內接等邊多邊形,必是正多邊形.

2. 圓外切等角多邊形,必是正多邊形.

3. 若多邊形的內切圓和外接圓是同心圓,則多邊形為正多邊形.

4. 任一正多邊形的中心角,是這多邊形頂角的補角.

5. 求一邊為6寸的正六邊形的邊心距

6. 正三角形的中心角幾度?正八邊形的?正六邊形的?

7. 設正多邊形的任意兩對角線相交於形內,則每一對角線上分成兩線段的相乘積必相等.

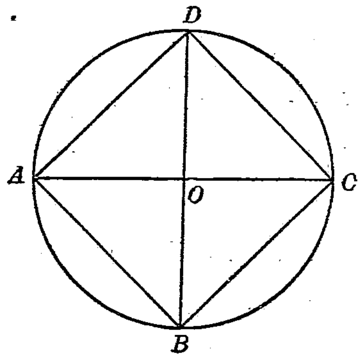
命題三 作圖題

§329. 求作圓內接正方形.

作正交二直徑,依次聯接四端點,即得圓內接正方形. (何故?)

§330 推論一. 二等分內接正方形的各中心角,則

AB, BC, 等弧都被分做二等分, 如是可作成圓內接正八邊形.



如此類推, 可作成圓內接16, 32, ……邊的正多邊形.

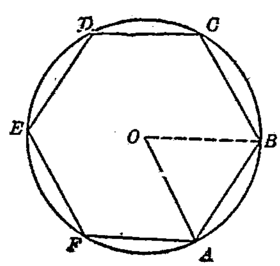
§ 331. **推論二.** 過A, B, C, D, 作切線, 可作成一圓外切正方形.

§ 332. **推論三.** 若一圓的半徑是R, 則內接正方形的一邊, 等於$R\sqrt{2}$.

命題四　作圖題

§ 333. 求作圓內接正六邊形.

在已知圓內, 作半徑OA, 再從A作一弦$AB=OA$.

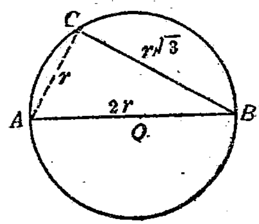


則AB即是內接正六邊形的一邊.　(何故?)

已有一邊, 內接正六邊形就可以作成.

§334. 推論一 聯內接正六邊形相間的頂點,就成一內接正三角形.

§335. 推論二 可在圓內和圓外,作內接和外切正多邊形,其邊數爲3, 6, 12, 24,等等.



§336. 推論三 若圓的半徑是r,則內接等邊三角形的一邊等於$r\sqrt{3}$.

【示意】 若AB是直徑, $AC=r$,則BC是所求的邊.

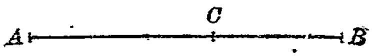
習題六十

1. 求作圓外切正八邊形.
2. 已知一邊,求作正八邊形.
3. 若半徑是R,求內接正方形的面積.
4. 求作圓的外切正六邊形.
5. 已知一邊,作求正十二邊形.
6. 正三角形的邊心距,等於其外接圓半徑的二分之一.
7. 已知半徑R,求內接正六邊形的面積.
8. 一圓直徑的平方,等於同圓內接正方形的二倍.

9. 圓外切正三角形的一邊,等於同圓內接正三角形一邊的二倍.

§ 337. **定義.** 若一直線分成二線段,長的線段是短線段和全線的比例中項.則這直線叫做分成外內比.

如 AB 是被分成外內比,則



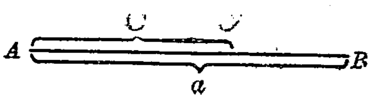
$$AB : AC = AC : CB.$$

命題五　作圖題

§ 338. 求分一直線成外內

設直線 $AB=a$.

求分 a 成外內比.



分析　設 F 是所求的分點.

令 $\qquad AF=x$

則 $\qquad FB=a-x$

所以 $\qquad a : x = x : (a-x)$

$$\therefore \quad x^2=a^2-ax$$

移項 $\qquad x^2+ax=a^2$

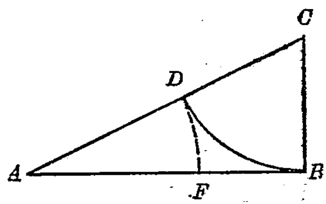
配成完全平方 $\qquad x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$

兩邊開方,得 $\qquad x+\frac{a}{2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$\therefore\quad x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

但是 $\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 是直角三角形的斜邊,他的兩直角邊是 a 和 $\frac{a}{2}$,故 x 就容易求得.

作圖. 從點 B 作 $CB=\frac{a}{2}$ 且垂直於 AB;聯 AC.



則 $AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

在 CA 上取 $CD=CB$

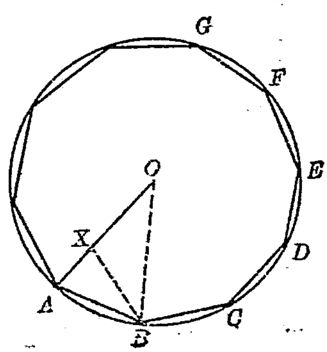
則 $AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}=x.$

在 AB 上取 $AF=AD.$

則 AB 被分成外內比.

命題六 作圖題

§ 339. 求作圓內接正十邊形.



設圓 O, 求作內接正十邊形.

作圖. 分半徑 OA 於 X 成外內比.

作弦 AB 等於 OA 上的較

長線段OX,

則AB是內接正十邊形的一邊.

證. 作BO, BX.

$$OA : OX = OX : XA,$$

$\because$ $$OX = AB,$$

$\therefore$ $$OA : AB = AB : XA,$$

$\therefore$ $$\triangle AOB \backsim \triangle ABX,$$

$\therefore$ $$\angle O = \angle ABX, \qquad \text{(何故?)}$$

又 $$AB = BX = OX, \qquad \text{(何故?)}$$

$\therefore$ $$\angle ABO = \angle BAO = \angle BAX = 2\angle O, \qquad \text{(何故?)}$$

$$\angle ABO + \angle BAO + \angle O = 2rt\angle s,$$

$\therefore$ $$\angle O = \frac{1}{5}2rt\angle s = \frac{1}{10}4rt\angle s.$$

故AB是內接正十邊形的一邊.

§ 340. 推論一. 聯內接正十邊形相間的頂點,可成一內接正五邊形.

§ 341. 推論二. 在圓內和圓外可作內接和外切正多邊形,其數爲5, 10, 20, 40等等.

習題六十一

1. 求作一角等於36°.

2. 已知一邊,求作正十邊形.

3. 試將一直角分作五等分.

4. 正五邊形的對角線相等.

5. 內接正六邊形的面積,是內接同外切正三角形面積的比例中項.

6. 正多邊形外接圓的半徑,必二等分其頂角.

7. 已知一邊,求作正五邊形.

8. 正五邊形的對角線互分成外內比.

9. 求作圓內接正十五邊形.

10. 在內接正三角形內,

$$a=R\sqrt{3},\ r=\frac{1}{2}R,\ c=120^\circ.$$

11. 在內接正方形內,$a=R\sqrt{2},\ r=\frac{R}{\sqrt{2}},\ c=90^\circ.$

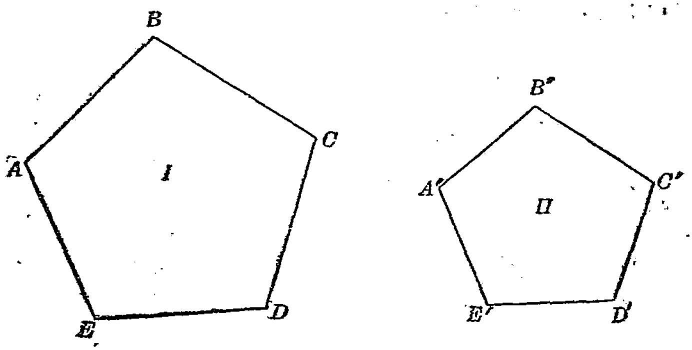
12. 在內接正六邊形內,$a=R,\ r=\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{3},\ c=60^\circ.$

13. 在內接正十邊形內,

$$a=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1),\ r=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ c=36^\circ.$$

命題七 定理

§342. 邊數相同的正多邊形必相似.



設　I和II兩正多邊形，各有n邊.

求證　　$I \backsim II$

證.　$\because$　I的各角$=\frac{n-2}{n}rt.\angle$

II的各角$=\frac{n-2}{n}rt.\angle$

$\therefore$　I的各角$=II$的各角

$\because$　$AB=BC=CD=DE=EA$

$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'A'$

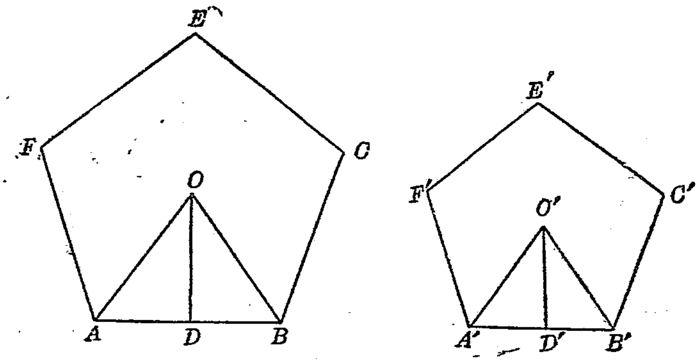
$\therefore$　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$.　(何故?)

$\therefore$　$I \backsim II$.

命題八　定理

§343.　邊數相同的正多邊形的周界的比，等於他

們的頂心距的比,或邊心距的比.



設邊數相同的正多邊形的周圍是P和P',頂心距是OA和$O'A'$,又邊心距是OD, $O'D'$.

求證 $P:P'=OA:O'A'=OD:O'D'$

證. $\because$ $\angle AOB=\angle A'O'B'$

$OA=OB,\ O'A'=O'B'$

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{OB}{O'B'}$$

$\therefore$ $\triangle AOB \backsim \triangle A'O'B'$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OD}{O'D'}$$

但 $P:P'=AB:A'B'$

$\therefore$ $P:P'=OA:O'A'=OD:O'D'$

§344. 推論. 邊數相同的正多邊形的面積的比,等於頂心距平方的比,或邊心距平方的比.

§345. 定義. 一個確定不變的量,叫做常數,如2, 3, 4等都是常數.

§346. 定義. 在同一個問題內,價值改變的量,叫做變量,通常用x, y,等代表.

§347. 定義. 若一變數x同一常數a無限接近,二者的差,比任何小的正數還要小,這常數a就叫做變數x的極限.

如圓內接正多邊形的邊數,無限增加時,其周界的極限是圓周,面積的極限是圓面積.

邊心距的極限是半徑.

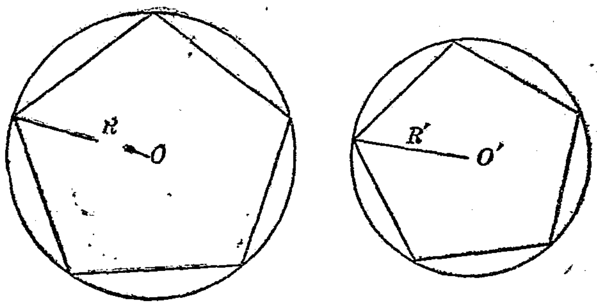
§348. 定理 若兩變數x, y常常相等,如x趨近於極限a,則y也趨近於極限a

§349. 推論. 若兩變數常常相等,各有一極限,則其極限必相等.

命題九　定理

§350. 兩圓周的比,等於其半徑的比.

設O, O'兩圓的半徑順次是R, R',圓周是C, C'.



求證 $C:C'=R:R'$.

證. 各作n邊的內接正多邊形,令其周界爲P,P',則

$$P:P'=R:R' \qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}.$$

若邊數n無限增加時,P及P'順次用C及C'做極限.

因 $\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}$常常相等故他們的極限應相等.

$$\therefore \quad \frac{C}{R}=\frac{C'}{R'} \qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore \quad C:C'=R:R'.$$

§351. 推論一. 兩圓周的比,等於其直徑的比,即

$$C:C'=2R:2R'$$

§352. 推論二. 圓周與其直徑的比是常數.

這個常數$\frac{C}{2R}$是不盡小數,通常用希臘字母π來表

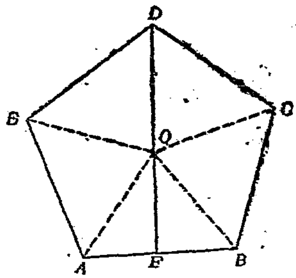
示. π 的近似值是 $3\frac{1}{7}$, 3.14, 3.1416

$$\because \quad \frac{C}{2R}=\pi \qquad \therefore \quad C=2\pi R.$$

§ 353. 推論三. 在直徑是 d 的圓上, n 度的弧長等於 $\frac{n}{360}\pi d$.

命題十　定理

§ 354. 正多邊形的面積,等於其周界與邊心距相乘積的一半.



設 n 邊正多邊形中, S 表面積. P 表周界, r 表邊心距.

求證　$S=\frac{1}{2}Pr$

證. 作 OA, OB, …分此正多邊形成 n 個相等的三角形.

則　$$\Delta OAB=\frac{1}{2}AB\times r$$

$$\therefore \quad S=n\Delta OAB=\frac{1}{2}n\times AB\times r$$

但　$$n\times AB=P$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}Pr$$

習題六十二

1. 求下列正多邊形的半徑,邊心距,及面積:

(a) 一正方形每邊是4.

(b) 一正六邊形每邊是2.

(c) 一正三角形每邊是6.

2. 內接正六邊形的面積,等於同圓外切正六邊形面積的四分之三.

3. 圓內接正三角形的面積,等於同圓內接正六角形面積的一半.

4. 求作圓周,等於已知圓周的一半.

5. 求作圓周,等於二已知圓周的和.

6. 求作圓周,等於二已知圓周的差.

7. 在直線AC上取一點B,用AB, CB及AC做直徑,順次作半圓,試證最大的半圓,等於他二半圓周的和.

§355. **定義.** 扇形是兩半徑及所截圓弧所包圍的一部分.

§356. **定義.** 凡扇形,弓形,及圓弧所對的中心角相等,就依次叫做相似扇形,相似弓形,及相似弧.

§357. **定義.** 圓內接正多邊形的邊數無限增加時,

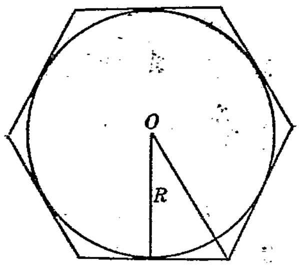
其面積的極限是外接圓的面積.

又外切正多邊形的邊數無限增加時,其面積的極限是內切圓的面積.

命題十一　定理

§ 358. 圓面積等於圓周與半徑相乘積的一半.

設　圓O中,C是圓周,R是半徑,S是面積.



求證　$S=\frac{1}{2}C\times R.$

證. 作外切正多邊形,P表其周界,A表其面積.

則　$A=\frac{1}{2}PR$　(何故?)

若外切多邊形的邊數無限增加時,則

A趨近於極限S,　(何故?)

P趨近於極限C.　(何故?)

$\therefore\quad S=\frac{1}{2}CR.$　(何故?)

§ 359. 推論一. 圓面積等於π與半徑平方的相乘積

$\because\quad C=2\pi R,\qquad \therefore\quad S=\frac{1}{2}CR=\pi R^2.$

§ 360. 推論二. 兩圓面積的比,等於半徑平方的比,或直徑平方的比.

§ 361. 推論三. n度圓心角的面積等於$\frac{n}{360}\pi R^2$.

§ 362. 推論四. 相似扇形面積的比,等於其半徑平方的比.

習題六十五

1. 求作一圓,等於已知圓的$\frac{3}{4}$.

【示意】 $\pi x^2=\frac{3}{4}\pi R^2$, 即$x^2=\frac{3}{4}R^2=\frac{3R}{4}\cdot R$.

2. 求作一圓,等於已知圓的三倍.

3. 求作一圓,等於已知圓的$\frac{3}{2}$.

4. 求作一圓,等於已知二圓的和.

5. 求作一圓,等於已知二圓的差.

6. 求作一圓,等於已知二個同心圓周中所夾的面積.

7. 已知扇形角是40°,圓半徑是5,求這扇形的面積.

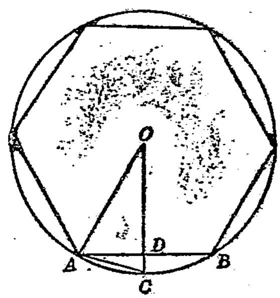
8. 已知圓半徑是10,求內接正方形一邊所對弓形的面積.

9. 已知圓半徑是10,求$60°$圓弧所包弓形的面積

10. 設圓面積是60方尺,求$60°$圓弧的長.

命題十二 計算題

§363. 已知圓半徑及內接正多邊形的一邊,求同圓內二倍邊數內接正多邊形的一邊.



設 $AB=S$ 是內接正多邊形的一邊,圓半徑 $OA=R$, AC 是同圓內二倍邊數的內接正多邊形的一邊. 求 AC.

解. 聯OC,則OC垂直二等分AB. (何故?)

$$\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2OC\cdot OD.$$

即 $$\overline{AC}^2=2R^2-2R\cdot OD$$

但 $$\overline{OD}^2=R^2-\left(\frac{S}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad OD=\sqrt{R^2-\frac{S^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-S^2}$$

$$\therefore\quad \overline{AC}^2=2R^2-R\sqrt{4R^2-S^2}$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S^2}}$$

§364. 推論. 若$R=1$,內接n邊正多邊形是S_n,

則 $$S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}.$$

習題 設內接正方形的一邊是$\sqrt{2}$,試證內接正八邊形的一邊是$\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

命題十三 計算題

§365. 求圓周與直徑的比.

解 設$R=1$,則內接正六邊形的一邊$S_6=1$

由上節得

	(一邊的長)	(周界的長)
$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	$=0.51764$	6.21166
$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51754)^2}}$	$=0.26105$	6.26526
$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	$=0.13081$	6.27870
$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13081)^2}}$	$=0.06534$	6.28206
$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06534)^2}}$	$=0.03272$	6.28291
$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	$=0.01636$	6.28312
$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01636)^2}}$	$=0.00818$	6.28317

用最後一周界當做圓周的近似值,則

$$\pi=\frac{C}{2R}=\frac{6.28317}{2}=3.14159.$$

習題六十四

1. 半徑是10,求圓面積.

2. 直徑是10,求$60°$的圓弧的長.

3. 圓面積是100π,求半徑和圓周.

4. 圓周是m尺,求半徑和圓面積.

5. 已知圓周是10,求二倍面積的圓周.

6. 求作半圓,等於每邊是5的正三角形的面積.

7. 設A是弧BC的圓心,B是弧AC的圓心,C是弧AB的圓心,若$AB=6$寸,求此形的面積.

8. 設扇形面積是18π,中心角是$60°$,求半徑.

9. 設正三角形的一邊是6尺,求內接圓和外切圓的面積.

10. 設正三角形的高是8尺,求內接圓和外切圓的面積.

11. 設兩圓面積的比是$9:4$,大圓的半徑是6寸,求小圓的圓周.

12. 已知正方形的面積是36方尺,求內切圓和外接圓的面積.

13. 設正六邊形的邊心距是8寸,求內切圓和外接圓的面積.

14. 引長正六邊形的各邊,所成星形的面積,等於原六邊形的二倍.

15. 在每邊4尺的正方形的四邊上,向外各作一半圓,求全形的面積.

16. 設六邊形每邊2尺,用每邊做直徑向外各作一半圓,求此形的面積.

17. 設一圓周的數值等於其面積,求其半徑.

18. 設扇形的面積,等於其半徑的平方,求中心角.

第七章提要

I. 圓和正多邊形的關係.

1. 凡是正多邊形,總可作一外接圓,及一內切圓.

2. 圓內接等邊多邊形,必是正多邊形.

3. 圓外切等角多邊形,必是正多邊形.

II 正多邊形的性質.

1. 正多邊形的外接和內切圓,必是同心圓.

2. 正多邊形一邊所對的中心角,必與其內角互爲補角.

3. 正多邊形的中心,與各邊的距離相等,與各角頂的距離相等.

4. 正多邊形的頂心距必二等分其內角.

5. 同邊數的正多邊形必相似.

III. 線段與面積的比.

1. 同邊數的正多邊形周界的比,等於邊的比,邊心距的比,或頂心距的比.

2. 圓周的比等於半徑或直徑的比.

3. 同邊數的正多邊形面積的比,等於邊的平方比,邊心距的平方比,或外接圓半徑的平方比.

4. 圓面積的比等於半徑或直徑的平方比.

IV. 正多邊形每邊與外接圓半徑的關係.

1. 正三角形的每邊等於$R\sqrt{3}$.

2. 正方形的每邊等於$R\sqrt{2}$.

3. 正六邊形的每邊等於R.

4. 正十邊形的每邊等於$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$.

V. 計算公式.

1. $C=\pi d$ 或 $2\pi r$ (C 為圓周, d 為直徑, r 為半徑).

2. n 度的弧長 $=\frac{n}{360}\pi d$.

3. 正多邊形的面積 $=\frac{1}{2}Pr$ (r 為內切圓半徑).

4. 圓面積 $=\frac{1}{2}Cr=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$.

5. n度扇的形面積等於$\frac{n}{360}\pi r^2$(r爲扇形的半徑).

6. 設S_n爲圓內接正n邊形的一邊, S_{2n}爲在同圓內接正2_n邊形的一邊,則

$$S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n}}.\quad (R\text{爲圓的半徑})$$

VI. 圓內接和外切正多邊形的作圖.

1. 正方形,正八邊形,正十六邊形,……

2. 正三角形,正六邊形,正十二邊形,……

3. 正五邊形,正十邊形,正二十邊形,……

4. 正十五邊形,正三十邊形,正六十邊形,……

總習題

1. 三角形二條角二等分線所夾的角等於第三外角的一半.

2. O爲$\triangle ABC$內的一點,則OA, OB, OC的和比三角形的周小,而比半周大.

3. O爲$\triangle ABC$內的一點,則$\angle BOC>\angle BAC$.

4. 在$\triangle ABC$中,$\angle A-\angle B=\angle B-\angle C=\frac{1}{2}rt\measuredangle$.求$\measuredangle A, B, C$,的大小.

5. 三角形三中線的和比三邊的和小而比此和之半大.

6.　一正多角形，其內角的和等於 $16\,rt.\measuredangle s$；求此形的邊數.

7.　四邊形 $ABCD$ 中，AD 爲最大邊，BC 爲最小邊，

則　　$\angle ABC > \angle ADC$，　$\angle BCD < \angle BAD$.

8.　二點 A, B 在直線 MN 的同旁，若點 C 在 MN 上，而 $\angle ACM = \angle BCN$，則 $AC + BC$ 爲最小（即 D 爲 MN 上他一點時，$AC + BC < AD + BD$）.

9.　二個三角形 ABC, ADE 共有頂角 A，且 $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$，則 $\triangle ADE$ 的底 DE 二等分 $\triangle ABC$ 的底 BC.

10.　三角形的三中線相等，則此形爲正三角形.

11.　$\triangle ABC$ 中，$A = rt\angle$，$\angle B = 2\angle C$，A' 爲 BC 的中點，D 爲從 A 至 BC 所引垂線之足，則 $A'D = \frac{1}{2}AB$.

12.　$\triangle ABC$ 中，$\angle A = rt\angle$，$\angle B$ 的二等分線交 AC 於 D，又從 A 到 BC 所引垂線交 BD 於 E，則 $AD = AE$.

13.　三等分一弦的二半徑，決不三等分此弦所張的弧.

14.　三等分一弧的二半徑決不三等分此弧的弦.

15.　A 爲 $\odot O$ 上任意一點，過 A 的切線與任意半徑 OB 的延長線交於 C，從 A 至 OB 引垂線 AD，則 AB 二等

分$\angle DAC$.

16. 圓內接六角形中,間隔三角的和等於四直角.

17. H為$\triangle ABC$之垂心,則$\triangle HBC$, HCA, HAB的外接圓等於$\triangle ABC$的外接圓.

18. 從圓周上一點C作切線,從任意直徑AB的一端A到此切線引垂線AD,則AC二等分$\angle BAD$.

19. 延長三角形的一垂線至與外接圓相交,則此垂線在邊上的足,為交點及垂心的中點.

20. 有一定角XOY及一定點P;從P作等長二線分,令其端各在角的一邊上而互相垂直.

21. 三角形的二個旁心及二個角頂共圓.

22. 三角形內心及一個旁心的距離,等分於外接圓周.

23. 作一圓,令切一定直線於其上的一定點,且切一定圓.

24. 設二個同心圓,作外圓的一弦,令其為內圓分作三等分.

25. 過相交二圓周的一交點作割線,令其在二圓周間的部分等於定長.

26. AB是圓的直徑,從其一端A引任意弦與圓周

會於C,從C引圓的切線,從B到此切線引垂線,延長,交AC的延線於P.求點P的軌跡.

27. $\triangle ABC$是所設三角形,一動點P恆令$\triangle PAB=\triangle PAC$.求點$P$的軌跡.

28. 梯形二對角線的交點是過此交點而與二底平行的線分的中點.

29. 四邊形$ABCD$的二對角線正交,則

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$$

30. 從任意一點到矩形各角頂引線分,則在二雙對角頂線分上正方形的和相等.

31. 一動點到二定點距離上正方形的和爲定積,則此動點的軌跡爲一圓.

32. 一動點到二定點距離上正方形的差爲定積,則此動點的軌跡爲一直線.

33. 過三角形一邊上一定點,作一直線二等分此三角形的面積.

34. 二個三角形ABC, ABD立於同底AB上,聯其頂點線分CD的中點是E,則$\triangle ABE$等於二個三角形ABC, ABD的半和或半差.

35. 一圓內二弦正交,則由交點所分四部分上正方

形的和等於直徑上的正方形.

36. 一圓的二弦正交,則此二弦上正方形的和等於從8倍半徑上正方形中減去從中心到二弦交點距離上正方形的4倍所得的差.

37. 在$\triangle ABC$內,求一點P,令$\triangle BPC=2\triangle APB$,及$\triangle CPA=3\triangle APB$.

38. 過定角內一點引線分,令其兩端止於二邊上而為此點所分二部分的比等於一定比.

39. 在$\triangle ABC$二邊AB,AC上各取一點D,E.

令
$$AD:AB=AE:AC=1:2,$$
則BE,CD互分成$1:2$之比.

40. 一動點與二定直線距離的比等於$m:n$,求此動點的軌跡.

41. 在三角形內求一點,令其與三邊距離的比等於定比$l:m:n$.

42. 從圓周上一點到弦所引垂線上的正方形,等於從其弦的兩端到此點的切線所引二垂線的相乘積.

43. 從圓外一點P引二切線PA,PB,過弦AB的中點C,引任意弦DE,則PC二等分$\angle DPE$.

44. 作一正方形,令與一定正方形的比等於二巳

知線分的比.

45. 圓內接四邊形二雙對邊所包矩形的和等於二對角線所包的矩形.

46. 過相交二圓的一交點作一直線,令其為二圓所截弦的比等於1:2

47. P為$\triangle ABC$底BC上的一點,從P引AC, AB的平行線PX, PY各交AB, AC於X, Y則$\triangle AXY$是$\triangle BPX$及$\triangle CPY$的比例中項.

48. $\triangle ABC$中A為直角.從AO到BC引垂線AD, $\angle B$的二等分線交對邊AC於E,而AD, BE交於O,則

$$DO:OA=AE:EC.$$

49. 圓內接三角形ABC頂點A的切線與底BC的延長線交於D,則　$BD:CD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

50. 在$\triangle ABC$三邊BC, CA, AB上各取一點D, E, F,令$BD:CD=CE:EA=AF:FB=2:3$.求$\triangle AEF$, $\triangle DEF$各對於$\triangle ABC$的比值.

51. 正十二邊形面積等於其半徑上正方形的三倍.

52. 圓內接正六角形的面積等於其外接正六角形面積的$\frac{3}{4}$.

53. 一圓中30°弧的長是1尺,則其半徑的長是多少?

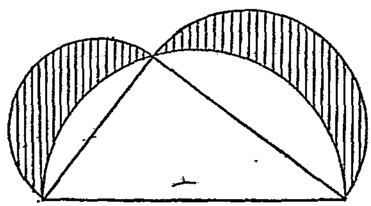
54. 二個同心圓中大圓的弦切於小圓,則以此弦做直徑的圓等於原二圓所成的環.

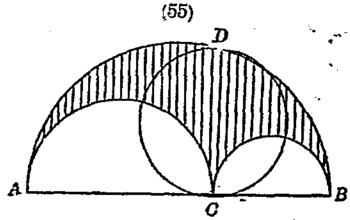
55. 以一直角三角形的三邊做直徑作半圓於斜邊的同旁,則在大半圓外所成二個新月形的和等於三角形的面積.

56. 從半圓直徑AB上取一點C,從C引AB的垂線遇半圓周於D,以AC,CB各做直徑再畫二半圓,以CD爲直徑畫全圓,則三個半圓周所圍的面積等於一全圓的面積.

57. 直角三角形中對於斜邊的高分原形成兩三角形,此兩形內接圓面積的比等於斜邊上二線分的比.

58. 兩兩相切三等圓半徑各長2尺,求此三圓間空隙部分的面積.


(55)



(56)

59. 一扇形,角爲22°30′,半徑25寸,求面積

60. 作定圓的二個同心圓,三等分此定圓的面積.

61. 求作一直線與三已知點的距離相等.

62. 求作一等邊三角形與一已知三角形等積.

63. 從三角形一邊上一定點,作二直線,三等分此三角形.

64. AD是$\triangle ABC$頂角A的二等分線,O是內心,則底BC與他二邊和的比等於$DO:OA$.

中華民國二十四年十二月初版

初中幾何學

下冊　定價大洋七角
(外埠酌加寄費)

編著者　萬頤祥
校訂者　任誠
發行人　吳秉常
南京河北路本局
印刷所　正中書局
南京河北路童家巷口
發行所　正中書局
上海福州路
南京太平路

(206)